N° d'ordre 714

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES

par

Claude DELAUTRE

Sur la normalité forte des extensions différentielles linéaires

THÉORIE DE LIE-GALOIS

Membres du Jury : D. LEHMANN, Président
R. BKOUCHE, Rapporteur
L. GRUSON, Examinateur

Soutenance : Septembre 1978

Cet exposé réunit les travaux de

C. DELAUTRE

sur les $\mathcal{D}$-modules (ch. I)
et les extensions Lie-Galoisiennes (ch. III)
et de

D. LOSFELD

sur les extensions de PV et PV-normales (ch. II) et leurs liens avec les fibrés plats (ch. IV).

Le chapitre 0 (Préliminaires) a été rédigé en commun.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur LEHMANN d'avoir bien voulu présider notre jury de thèse.

Nous sommes très reconnaissants à Monsieur le Professeur GRUSON d'avoir accepté d'y participer.

A Monsieur le Professeur BKOUCHE, nous exprimons notre profonde gratitude : sans ses conseils, ses encouragements, ce long travail n'aurait jamais été mené à son terme.

Nous adressons également nos remerciements à Madame BERAT et Madame LENGAIGNE pour le soin et la diligence dont elles ont fait preuve quant à la réalisation matérielle de cet ouvrage.

Nous remercions enfin tous ceux qui, à l'UER de Mathématiques de LILLE I comme ailleurs, nous ont aidés de leurs remarques et entourés de leur sympathie.

C. D.

D. L.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Cet exposé a pour but de faire le point sur les différentes notions de normalité forte des extensions différentielles, dans le cas linéaire.

Introduite par E.R. KOLCHIN dans [KL], puis, avec une définition nouvelle dans le cas régulier, par A. BIALYNICKI-BIRULA dans [BB], la normaté forte conduit à une bonne théorie de Galois des extensions différentielles, ce qui n'était pas le cas de la normalité simple [Ko] ; en particulier, si L est une extension fortement normale de K, le groupe de Galois différentiel de L sur K est un groupe algébrique de dimension le degré de transcendance de L sur K.

Le Chapitre I de l'exposé est consacré à la construction d'un outil : la théorie des $\mathcal{D}$-modules. T étant un espace de dérivations sur un corps K, stable par le crochet, on considère l'algèbre $\mathcal{D}$ engendrée par K et T ; un $\mathcal{D}$-module est alors un T-module [Ma] dont la loi de dérivation est à courbure nulle ; on s'intéresse en particulier, au cas où T est engendré par les dérivations de structure d'un corps différentiel K. Un $\mathcal{D}$-module est trivial s'il est engendré sur K par ses constantes, et la catégorie des $\mathcal{D}$-modules triviaux est équivalente à celle des espaces vectoriels sur le corps k des constantes de K ; un sous $\mathcal{D}$-module d'un module trivial est trivial, et en dimension finie, un $\mathcal{D}$-module est trivial si et seulement si sa dimension sur K est égale à celle de l'espace de ses constantes sur k (en général, cette dernière lui est seulement inférieure).

Le Chapitre II introduit la notion d'extensions PV-normales d'un corps différentiel, par analogie avec la définition de N. BOURBAKI des extensions algébriques normales [AV]. Un $\mathcal{D}$-module est de PV si tous ses éléments sont de Picard-Vessiot sur K [BB] ; un idéal I de $\mathcal{D}_K$ est de P V si $\mathcal{D}/I$ est un $\mathcal{D}$-module de Picard-Vessiot i.e. si $\mathcal{D}/I$ est de dimension finie sur K. Un idéal de PV I est complètement résoluble dans une extension différentielle L de K si la dimension sur K de $\mathcal{D}/I$ est égale à la dimension sur le corps des constantes de L de l'ensemble Sol(I,L) des éléments de L annulés par I (en général cette dernière lui est seulement inférieure) ; si de plus, L et K ont même corps des constantes et L est engendré comme corps différentiel sur

K par Sol(I,L), L est une extension de PV de K associée à I. Dans le cas ordinaire, la notion d'extension de PV associée à I coïncide avec celle d'une extension de Picard-Vessiot associée à l'équation différentielle D = 0, où D est un générateur de I. Une extension de PV régulière est fortement normale, et le groupe algébrique Gal(L/K) est affine.

On définit alors : L est une extension PV-normale de K si L est de type fini sur K, de même corps des constantes que K, si L est le corps des fractions de l'anneau A des éléments de PV de L sur K, et si, pour tout f dans A, l'idéal de PV $I_f = \{\delta \in \mathcal{D}_K | \delta(f) = 0\}$ est complètement résoluble dans L. Une extension PV-normale est une extension de PV, une extension fortement normale telle que Gal(L/K) soit affine est PV-normale, et une extension algébrique PV-normale, de corps des constantes algébriquement clos, est galoisienne.

Le Chapitre III développe une théorie infinitésimale de la normalité forte. L'algèbre de Lie-Galois d'une extension différentielle L de K est l'algèbre de Lie des constantes du $\mathcal{D}$-module des K-dérivations de L ; sa dimension est donc inférieure ou égale au degré de transcendance de L sur K. L'application qui à un sous-corps différentiel M de L contenant K fait correspondre l'algèbre de Lie-Galois de L sur M, et celle qui à une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie-Galois de L sur K associe le sous-corps de ses invariants (i.e des éléments qu'elle annulle) conduisent à une correspondance de Galois analogue à celle étudiée par E.R. KOLCHIN dans [Ko] . On définit alors : L est une extension Lie-galoisienne de K si L est de type fini sur K, de même corps des constantes que K, K est algébriquement fermé dans L, et si l'algèbre de Lie-Galois de L sur K a pour dimension le degré de transcendance de L sur K, i.e. si le $\mathcal{D}$-module des K-dérivations de L est trivial. Dans ces conditions, L est une extension Lie-Galoisienne de tout sous-corps différentiel M contenant K, et algébriquement fermé dans L ; de plus, M est une extension Lie-Galoisienne de K si et seulement si l'algèbre de Lie-Galois de L sur M est un idéal de celle de L sur K, et l'algèbre de Lie-Galois de M sur K est alors canoniquement isomorphe à leur quotient.

Si L est une extension Lie-Galoisienne de K, la K-algèbre des opérateurs différentiels sur L au sens de [HS] est isomorphe au smash-produit [HS] de L et de la bigèbre enveloppante de l'algèbre de Lie-Galois de L sur K, et, par suite, est un $\mathcal{D}$-module trivial. On en déduit qu'une extension Lie-Galoisienne L de K , telle que L soit le corps des fractions de l'anneau des éléments de PV est une extension PV-normale de K.

D'autre part, si L est une extension de PV de K, on construit une injection de l'algèbre de Lie du groupe algébrique affine Gal(L/K) dans l'algèbre de Lie-Galois de L sur K, et on en déduit que L est une extension Lie-galoisienne de K.

Dans le cas linéaire (L corps des fractions de l'anneau des éléments de PV sur K), on peut donc conclure à l'équivalence entre :

* L extension fortement normale de K de groupe de Galois affine ;
* L extension PV-normale régulière de K ;
* L extension de PV régulière de K ;
* L extension Lie-Galoisienne de K.

Le chapitre IV, enfin, fait le lien entre la théorie algébrique des extensions différentielles et des $\mathcal{D}$-modules développée dans les chapitres précédents, et la théorie géométrique des fibrés principaux et des connexions plates : la donnée d'une extension de PV de groupe de Galois G correspond, sous de bonnes hypothèses, à celle d'un fibré plat de groupe structural G.

Même si la rédaction en reste essentiellement algébrique, ce dernier chapitre, par son point de vue, peut permettre de replacer l'algèbre différentielle, telle qu'elle a évolué depuis E.R. KOLCHIN, dans le contexte géométrico-analytique des groupes de Lie où l'avaient développée à l'origine E. PICARD et E. VESSIOT.

On trouvera, à ce propos, en conclusion de cet exposé, une bibliographie présentant dans un ordre chronologique des articles et ouvrages qui ont jalonné, depuis près d'un siècle, l'histoire de l'algèbre différentielle, liste qui ne saurait être, cela va de soi, ni exhaustive, ni exempte de parti pris.

CHAPITRE 0

PRELIMINAIRES

0.0. - *Notations.*

0.01. - Dans cet exposé, les anneaux considérés sont unitaires, d'élément unité 1, contenant $\mathbb{Z}$, et, sauf mention contraire, associatifs ; les modules sont des modules à gauche (unitaires), les sous-anneaux contiennent 1, et les homomorphismes d'anneaux transforment 1 en 1.

Les notations et définitions sont, en général, conformes à celles des "Eléments de Mathématiques" de N. BOURBAKI pour l'algèbre, de "Introduction aux catégories et aux problèmes universels" de POITOU-JAFFARD pour le langage des catégories, et de "Introduction to algebraic geometry" de S. LANG pour la géométrie algébrique.

En particulier, pour tout ensemble E, 1_E est l'application identique de E ; pour toute application f définie sur E, et tout $F \subset E$, $f|_E$ est la restriction de f à F ; pour tout $(a,b) \in E^2$, δ_a^b est le symbole de Kronecker ; et pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ (coefficient binomial).

0.02. - Soient E et Λ deux ensembles quelconques.

$\underline{E^\Lambda}$ est l'ensemble des applications de Λ dans E ; si $f \in E^\Lambda$ et $\lambda \in \Lambda$, on pose $\underline{f_\lambda} = f(\lambda)$ et $f = \underline{(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}}$; $\underline{E^{(\Lambda)}}$ est l'ensemble des $f \in E^\Lambda$ tels que $\{\lambda \in \Lambda | f_\lambda \neq 0\}$ soit fini ; $f \in E^{(\Lambda)}$ est noté $\underline{\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda . \lambda}$.

Si E est un monoïde (resp. un module), il en est de même de E^Λ et $E^{(\Lambda)}$ est un sous-monoïde (resp. sous-module) de E^Λ.

<u>*Remarque*</u> : Si Λ est fini de cardinal n, $E^{(\Lambda)} = E^{\Lambda}$ est canoniquement isomorphe à E^n.

Si $E = \mathbb{N}$, tout $\mu \in \Lambda$ est identifié à l'application $\lambda \longmapsto \delta_\mu^\lambda$ de Λ dans $\mathbb{N}$; pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$, on a donc $\underline{\alpha + \mu} = \sum_{\lambda \neq \mu} \alpha_\lambda . \lambda + (\alpha_\mu + 1)\mu$. Si $\alpha \leqslant \beta$ (i.e. $\forall \lambda \in \Lambda \quad \alpha_\lambda \leqslant \beta_\lambda$), $\underline{\beta - \alpha} = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\beta_\lambda - \alpha_\lambda)\lambda$.

Enfin, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$, on pose $|\underline{\alpha}| = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda$, $\underline{\alpha!} = \prod_{\lambda\in\Lambda} (\alpha!)_\lambda$, et pour tout $\gamma \leqslant \alpha$, $\underline{\binom{\alpha}{\gamma}} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \binom{\alpha_\lambda}{\gamma_\lambda} = \dfrac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}$. Soient, d'autre part, un monoïde A (de loi interne notée multiplicativement et d'unité 1), et $x \in A^{\Lambda}$. On suppose, de plus, que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

* x est commutatif (i.e $x_\lambda x_\mu = x_\mu x_\lambda$ pour tout λ et $\mu \in \Lambda$)
* Λ est totalement ordonné ;

alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$, $\alpha \neq 0$, on pose $\underline{x^\alpha} = \prod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda^{\alpha_\lambda}$, et $x^0 = 1$. Si x est commutatif, on a donc $x^\alpha x^\beta = x^\beta x^\alpha = x^{\alpha+\beta}$, $\forall \alpha$ et $\beta \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$.

0.1. - <u>*Bigèbres*</u>.

0.11. - Soit k un anneau commutatif et A un ensemble.

A est une <u>k-algèbre</u> (associative et unifère) s'il vérifie l'une des conditions suivantes équivalentes :

i) A est un anneau et il existe un homomorphisme d'anneaux $\varphi : k \to A$ tel que $\varphi(k)$ soit inclus dans le centre de A ;

ii) A est un k-module et il existe deux <u>k-morphismes</u> (i.e. applications k-linéaires) $\underline{m_A} : A \otimes_k A \to A$ et $\underline{\eta_A} : k \to A$ tels qu'on ait les d.c. (diagrammes commutatifs) :

* associativité

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k A \otimes_k A \arrow[r, "m_A \otimes 1_A"] \arrow[d, "1_A \otimes m_A"'] & A \otimes_k A \arrow[d, "m_A"] \\ A \otimes_k A \arrow[r, "m_A"'] & A \end{tikzcd}$$

* unité

$$\begin{tikzcd} k \otimes_k A \arrow[r, "\eta_A \otimes 1_A"] \arrow[dr, "i_1"'] & A \otimes_k A \arrow[d, "m_A"] \\ & A \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} A \otimes_k k \arrow[r, "1_A \otimes \eta_A"] \arrow[dr, "i_2"'] & A \otimes_k A \arrow[d, "m_A"] \\ & A \end{tikzcd}$$

où i_1 (resp. i_2) est le k-morphisme canonique $\lambda \otimes a \mapsto \lambda a$ (resp. $a \otimes \lambda \mapsto \lambda a$).

m_A est alors appelé <u>multiplication</u> de A, et η_A <u>unité</u> de A.

A est commutative si on a le d.c. suivant :

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "m_A"'] & & A \otimes_k A \arrow[dl, "m_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

où σ est le k-morphisme canonique $a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

$A \otimes_k A$ est alors une k-algèbre de multiplication $[m_A \otimes m_A] \circ [1_A \otimes \sigma \otimes 1_A]$ et d'unité $\eta_A \otimes \eta_A \circ i$ (i désignant le k-morphisme canonique de k dans $k \otimes_k k : 1 \mapsto 1 \otimes 1$).

Enfin, étant donnés une k-algèbre $(A', m_{A'}, \eta_{A'})$ et un k-morphisme $f : A \to A'$, f est un <u>homomorphisme de k-algèbres</u> si l'on a les d.c.

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & A' \otimes_k A' \arrow[d, "m_{A'}"] \\ A \arrow[r, "f"] & A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & A \\ & k \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_{A'}"'] & \end{tikzcd}$$

Plus généralement, étant donnée une k-algèbre commutative K, on appelle <u>(k-K)-algèbre</u>, une k-algèbre A telle qu'il existe un homomorphisme de k-algèbres $f : K \to A$; A est alors muni d'une structure de K-module à gauche (resp. à droite) par $(\lambda, a) \mapsto f(\lambda)a$ (resp. $af(\lambda)$) ; comme convenu, seule la structure à gauche sera considérée.

0.12. - Soit k un anneau commutatif et A une k-agèbre.

La k-algèbre A est <u>graduée</u> (de type $\mathbb{N}$) s'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-k-modules de A tels que :

* $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$

* pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $A_p A_q \subset A_{p+q}$.

Si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme de k-algèbres graduées (i.e., pour tout $n \in N$, $\varphi(A_n) \subset B_n$), $\varphi|_{A_n}$ est un k-morphisme de A_n dans B_n et φ est injectif (resp. surjectif) si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi|_{A_n}$ est injectif (resp. surjectif).

Enfin, un A-module M est <u>gradué</u>, s'il existe une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-groupes additifs de M tels que :

* $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$

* pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ $A_p M_q \subset M_{p+q}$.

La k-algèbre A est <u>filtrée</u> s'il existe une suite, croissante ou décroissante, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous k-modules de A tels que :

* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
* pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $A_p A_q \subset A_{p+q}$
* $1 \in A_o$.

Remarque : Si la filtration est décroissante, la première condition équivaut à $A = A_o$ et entraîne alors la troisième.

Exemple : Soit B un anneau et M un idéal bilatère de B ; si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = M^n$, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (décroissante) est une filtration de la $\mathbb{Z}$-algèbre B, appelée <u>filtration M-adique</u>.

Soit A une k-algèbre filtrée par la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\underline{gr_n(A)} = A_n/A_{n-1}$, si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (par convention $A_{-1} = \{0\}$) ou $\underline{gr_n(A)} = A_n/A_{n+1}$, si la suite est décroissante, et on note $\underline{f_n}$ la surjection canonique de A_n sur $gr_n A$. Le k-module $\underline{gr(A)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} gr_n A$, muni de la multiplication définie par $\mathbb{Z}$-bilinéarité, à partir de la formule $f_p(a) \times f_q(b) = f_{p+q}(ab)$, est une <u>k-algèbre graduée associée à la filtration</u> $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple : Soit B un anneau et M un idéal bilatère de B ; la $\mathbb{Z}$-algèbre graduée associée à la filtration M-adique de B est notée $\underline{gr_n B}$.

Si $h : A \to B$ est un homomorphisme de k-algèbres filtrées (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(A_n) \subset B_n$) et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\underline{f'_n}$ la surjection canonique de B_n sur $gr_n B$, il existe un k-morphisme $\underline{h_n} : gr_n A \to gr_n B$ tel que l'on ait le d.c. :

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{h|A_n} & B_n \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'_n} \\ gr_n A & \xrightarrow{h_n} & gr_n B \end{array}$$

<u>$gr(h)$</u> $= \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} h_n$ est alors un homomorphisme de k-algèbres graduées de $gr\ A$ dans $gr\ B$.

<u>*Lemme*</u> *1*.- Soit $h : A \to B$ un homomorphisme de k-algèbres filtrées par des suites croissantes de k-modules.

a) Si $gr(h)$ est injectif, alors h est injectif ;

b) Si $gr(h)$ est surjectif, alors h est surjectif.

<u>*Démonstration*</u> :

a) Si $a \neq 0$ est tel que $h(a) = 0$, en choisissant $p = \inf\{q\in\mathbb{N} | a\in A_q\}$ on a : $0 = f'_p(h(a)) = h_p(f_p(a))$.

$gr(h)$ est injectif, donc aussi $h_p = gr(h)|_{gr_p(A)}$, d'où $f_p(a) = 0$ et $a \in A_{p-1}$; absurde.

b) Pour tout $b_n \in B_n$, il existe $a_n \in A_n$ tel que $f'_n(b_n) = h_n(f_n(a_n)) = f'_n(h(a_n))$ i.e. $b_n - h(a_n) \in B_{n-1}$; on en déduit par récurrence sur n que $h|_{A_n} : A_n \to B_n$ est surjectif, donc, comme $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, que h est surjectif. ∎

0.13. - Soit k un anneau commutatif.

On appelle k-<u>cogèbre</u> (coassociative et counitaire) un k-module C muni de deux k-morphismes $c : C \to C \otimes_k C$ (appelé <u>comultiplication</u>) et $\gamma : C \to k$ (appelé <u>counité</u>) tels que l'on ait les d.c. :

* coassociativité

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c"'] & C \otimes_k C \arrow[d, "c \otimes 1_C"] \\ C \otimes_k C \arrow[r, "1_C \otimes c"'] & C \otimes_k C \otimes_k C \end{tikzcd}$$

* counité

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "h'"'] & C \otimes_k C \arrow[d, "\gamma\otimes 1_C"] \\ & k \otimes_k C \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "h''"'] & C \otimes_k C \arrow[d, "1_C\otimes\gamma"] \\ & C \otimes_k k \end{tikzcd}$$

où h' (resp. h'') est le k-morphisme canonique : $a \mapsto 1 \otimes a$ (resp. $a \longmapsto a \otimes 1$).

On dit que C est <u>cocommutative</u> si on a le d.c. :

$$\begin{tikzcd} C \otimes_k C \arrow[rr, "\sigma"] & & C \otimes_k C \\ & C \arrow[ul, "c"] \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd}$$

où σ désigne le k-morphisme canonique : $a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

$C \otimes_k C$ est alors une k-cogèbre de comultiplication $c \otimes c$ et de counité : $a \otimes b \mapsto \gamma(a)\gamma(b)$.

Etant donnés une k-cogèbre (C',c',γ') et un k-morphisme $f : C \to C'$, f est un <u>homomorphisme de k-cogèbres</u> si on a les d.c.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c"'] & C' \arrow[d, "c'"] \\ C \otimes_k C \arrow[r, "f\otimes f"'] & C' \otimes_k C' \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & C' \arrow[dl, "\gamma'"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

<u>*Remarque*</u> : On note la dualité entre les définitions de k-algèbre et k-cogèbre.

On appelle k-<u>bigèbre</u> un k-module H muni à la fois d'une structure de k-algèbre et d'une structure de k-cogèbre telles que :

* la comultiplication c de H soit un homomorphisme de k-algèbres,
* la counité γ de H soit un homomorphisme de k-algèbres vérifiant $\gamma \circ \eta = 1_k$.

Pour tout $h \in H$, on notera $c(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}$.

Si V et W sont des H-modules, le $H \otimes_k$ H-module $V \otimes_k W$ est muni d'une structure de H-module induite par c, i.e. de loi externe $(h,v\otimes w) \mapsto \sum_{(h)} h_{(1)}.v \otimes h_{(2)}.w$. D'autre part, k est muni d'une structure de H-module induite par γ, i.e. de loi externe $(h,\lambda) \mapsto \gamma(h)\lambda$.

Soient (H,m_H,η_H,c,γ) une k-bigèbre et (B,m_B,η_B) une k-algèbre.

On suppose que B est muni d'une structure de H-module, de loi externe $(h,b) \mapsto h.b$, telle que la structure de k-module de B induite par η_H coïncide avec la structure initiale, i.e., pour tout $\lambda \in k$ et $b \in B$ $\eta_H(\lambda).b = \eta_B(\lambda)b$.

B est un <u>H-module-algèbre</u> si les k-morphismes m_B et η_B sont des H-morphismes, i.e., pour tout $h \in H$, b et $b' \in B$

$$\sum_{(h)} (h_{(1)}.b)(h_{(2)}.b') = h.(bb') \quad \text{et} \quad \eta_B(\gamma(h)1) = h.1.$$

Lemme 2. - Si B est un H-module algèbre, le k-module $B \otimes_k H$ est une k-algèbre de multiplication $m^{\#} : (b \otimes h) \otimes (b' \otimes h') \mapsto \sum_{(h)} b(h_{(1)}.b') \otimes h_{(2)}h'$ et d'unité $\eta^{\#} : 1 \mapsto 1 \otimes 1$.

Démonstration : Si ξ est le k-morphisme $h \otimes b \mapsto h.b$ de $H \otimes_k B$ dans B on a

$$m^{\#} = (m_B \otimes 1_H) \circ (1_B \otimes \xi \otimes m_H) \circ (1_{B\otimes H} \otimes \sigma \otimes 1_H) \circ (1_B \otimes c \otimes 1_{B\otimes H}),$$

d'où $m^{\#}$ est un k-morphisme ; $\eta^{\#}$ est manifestement un k-morphisme.

Pour tout $b \otimes h,\ b' \otimes h',\ b'' \otimes h'' \in B \otimes_k H$, on a

$$Z = m^{\#}(b \otimes h \otimes m^{\#}(b' \otimes h' \otimes b'' \otimes h''))$$

$$= \sum_{(h)} \sum_{(h')} \sum_{(h_{(1)})} b(h_{(1)(1)}.b')(h_{(1)(2)}h'_{(1)}.b'') \otimes h_{(2)}h'_{(2)}h'' \quad ;$$

en utilisant $(c \otimes 1_H) \circ c(h) = \sum_{(h)} \sum_{h_{(1)}} h_{(1)(1)} \otimes h_{(1)(2)} \otimes h_{(2)}$ et

$$\tau : b \otimes h_{(1)(1)} \otimes h_{(1)(2)} \otimes h_{(2)} \otimes b' \otimes h'_{(1)} \otimes h'_{(2)} \otimes b'' \otimes h'' \longmapsto$$

$$b(h_{(1)(1)}.b')(h_{(1)(2)}h'_{(1)}b'') \otimes h_{(2)}h'_{(2)}h''$$

on a $Z = \tau \circ \{1_B \otimes [(c\otimes 1_H)\circ c] \otimes 1_B \otimes c \otimes 1_{B\otimes H}\}(b \otimes h \otimes b' \otimes h' \otimes b'' \otimes h'')$;

Or $(c \otimes 1_H) \circ c(h) = (1_H \otimes c) \circ c(h) = \sum_{(h)} \sum_{(h_{(2)})} h_{(1)} \otimes h_{(2)(1)} \otimes h_{(2)(2)}$ et

$$c(h_{(2)}h') = \sum_{(h_{(2)})} \sum_{(h')} h_{(2)(1)}h'_{(1)} \otimes h_{(2)(2)}h'_{(2)} \quad \text{d'où}$$

$$Z = \sum_{(h)} \sum_{(h')} \sum_{(h_{(2)})} b(h_{(1)}.b')(h_{(2)(1)}h'_{(1)}.b'') \otimes h_{(2)(2)}h'_{(2)}h''$$

$$= \sum_{(h)} \sum_{(h_{(2)}h')} b(h_{(1)}.b')([h_{(2)}h']_{(1)}.b'') \otimes [h_{(2)}h']_{(2)}h''$$

$$= m^{\#}\{m^{\#}(b \otimes h \otimes b' \otimes h') \otimes b'' \otimes h''\} \quad ; \text{ d'où l'associativité}$$

par k-linéarité.

Pour tout $b \otimes h \in B \otimes_k H$, $m^{\#}((1 \otimes 1) \otimes (b \otimes h)) = b \otimes h$; et

$$m^{\#}((b \otimes h) \otimes (1 \otimes 1)) = \sum_{(h)} b(h_{(1)}.1) \otimes h_{(2)}1 = \sum_{(h)} \gamma(h_{(1)})b \otimes h_{(2)}$$

$$= b \otimes m_H \circ (\gamma \otimes 1_H)(\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}) = b \otimes h \ ;$$

d'où, par k-linéarité, $\eta^{\#}$ est l'unité. ■

La k-algèbre $(B \otimes_k H, m^{\#}, \eta^{\#})$ est appelée <u>smash-produit</u> de B et H et notée <u>$B \# H$</u>. (Définition de HEYNEMAN-SWEEDLER dans [HS] 1.8).

0.14. - Soit k un anneau commutatif.

On considère $\mathfrak{g}$ une k-<u>algèbre de Lie</u>, i.e un k-module muni d'une multiplication k-bilinéaire notée $(x,y) \mapsto [x,y]$ telle que

* $[x,x] = 0$
* $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ (identité de Jacobi).

Sur toute k-algèbre L, le crochet $[x,y] = xy-yx$ induit une structure de k-algèbre de Lie dite <u>associée</u> ; un k-morphisme $\sigma : \mathfrak{g} \to L$ est alors une α-application si $\sigma([x,y]) = \sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x) = [\sigma(x),\sigma(y)]$, $\forall (x,y) \in \mathfrak{g}^2$.

Soit T l'algèbre tensorielle du k-module $\mathfrak{g}$, et J l'idéal bilatère de T engendré par $\{x \otimes y - y \otimes x - [x,y] / x,y \in \mathfrak{g}\}$; la k-algèbre quotient <u>$U_k(\mathfrak{g})$</u> $= T/J$, est appelée <u>algèbre enveloppante de</u> $\mathfrak{g}$; le composé σ_o de l'injection canonique de $\mathfrak{g}$ dans T et de la surjection canonique π_o de T sur $U_k(\mathfrak{g})$, est une α-application de $\mathfrak{g}$ dans $U_k(\mathfrak{g})$; de plus, $(U_k(\mathfrak{g}), \sigma_o)$ est solution du problème universel suivant :

pour toute k-algèbre L et toute α-application $\sigma : \mathfrak{g} \to L$, il existe un unique homomorphisme de k-algèbres $\tau : U_k(\mathfrak{g}) \to L$ tel que $\sigma = \tau \circ \sigma_o$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si T^n est le sous k-module de T engendré par les tenseurs homogènes d'ordre n (i.e $T^n = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{g}$, n fois), et $T_n = \bigoplus_{i=0}^{n} T^i$, la k-algèbre $U_k(\mathfrak{g})$ est filtrée par la suite croissante $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $U_n = \pi_o(T_n)$, et est engendrée, en tant que k-algèbre, par $\sigma_o(\mathfrak{g})$ et 1.

Soit $gr(U)$ la k-algèbre graduée associée à la filtration $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n la surjection canonique de U_n sur $gr_n(U)$. On a $U_1 = U_o \oplus \sigma_o(\mathfrak{g})$, donc $f_1|\sigma_o(\mathfrak{g})$ est un k-isomorphisme de $\sigma_o(\mathfrak{g})$ sur $gr_1(U)$. Si $u_o = f_1 \circ \sigma_o$, on a $u_o(x)u_o(y)-u_o(y)u_o(x) = f_2(\sigma_o[x,y]) = 0$, pour tout x et y dans $\mathfrak{g}$; il existe donc un unique homomorphisme de k-algèbres $\omega : Sym_k(\mathfrak{g}) \to gr(U)$ tel que $u_o = \omega \circ \varphi'$ (où φ' est l'injection canonique de $\mathfrak{g}$ dans $Sym_k(\mathfrak{g})$) ; de plus, ω est surjectif et gradué. On montre alors que, si $\mathfrak{g}$ est un k-module libre, ω est un isomorphisme (théorème de POINCARE-BIRKHOFF-WITT, [LIE I] § 2 th. 1), d'où en particulier, σ_o est injectif.

Lemme 3.- Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie libre, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base totalement ordonnée de $\mathfrak{g}$ sur k. On pose $z_\alpha = \dfrac{\sigma_o(x)^\alpha}{\alpha!}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$. Alors la famille $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$ est une base du k-module $U_k(\mathfrak{g})$.

Démonstration : $Sym_k(\mathfrak{g})$ a pour base $(\varphi'(x)^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$, donc $gr(U)$ a pour base $(\omega(\varphi'(x)^\alpha) = (f_1 \circ \sigma_o(x))^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$, soit $(f_{|\alpha|}(\sigma_o(x))^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$.

Or $((\sigma_o(x))^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$ engendre le k-module $U_k(\mathfrak{g})$, et donc aussi $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$.

De plus, pour toute partie finie J de $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ et $(\mu_\alpha)_{\alpha\in J} \in k^J$ telle que $\sum_{\alpha\in J} \mu_\alpha z_\alpha = 0$, on a, si $p = \sup_{\alpha\in J}(|\alpha|)$, $\sum_{\alpha\in J} \mu_\alpha z_\alpha \in U_p$ et

$0 = f_p(\sum_{\alpha\in J} \mu_\alpha z_\alpha) = \sum_{|\alpha|=p} \dfrac{\mu_\alpha}{\alpha!} f_{|\alpha|}[(\sigma_o(x))^\alpha]$, d'où $\mu_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in J$,

$|\alpha| = p$; si $J' = \{\alpha \in J \mid |\alpha| < p\}$, $\sum_{\alpha\in J'} \mu_\alpha z_\alpha = 0$ et on réitère le raisonnement. ■

On dit que $(z_\alpha)_{\alpha\in \mathbb{N}^{(\Lambda)}}$ est la base de $U_k(\mathfrak{g})$ <u>canoniquement associée</u> à la base $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de $\mathfrak{g}$.

On munit $U_k(\mathfrak{g})$ d'une structure de k-bigèbre de la façon suivante : pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on pose $c_o(\mathfrak{g}) = \sigma_o(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_o(x)$; c_o est une α-application, donc il existe un homomorphisme de k-algèbres $c : U_k(\mathfrak{g}) \to U_k(\mathfrak{g}) \otimes_k U_k(\mathfrak{g})$ telle que $c \circ \sigma_o = c_o$; d'autre part, si $T_+ = \sum_{n\geq 1} T^i$, on a $U_k(\mathfrak{g}) = k.1 \oplus \pi_o(T_+)$ et pour tout $x \in U_k(\mathfrak{g})$, soit $\varepsilon(x) \in k$ tel que $\varepsilon(x).1$ soit la projection de x sur $k.1$ ([LIE II] § 1 n° 4). $(U_k(\mathfrak{g}),c,\varepsilon)$ est alors une k-bigèbre, appelée <u>k-bigèbre enveloppante</u> de $\mathfrak{g}$.

Lemme 4.- Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie libre, $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$ la base de $U_k(\mathfrak{g})$ canoniquement associée a une base totalement ordonnée $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de $\mathfrak{g}$ sur k.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$, on a $c(z_\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} z_\beta \otimes z_\gamma$.

Démonstration : récurrence sur $p = |\alpha|$. Pour $p = 0$: trivial ; pour tout $\alpha' \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$, $|\alpha'| = p-1$, supposons que $c(z_{\alpha'}) = \sum_{\beta'+\gamma'=\alpha'} z_{\beta'} \otimes z_{\gamma'}$, et soit $\mu = \sup\{\lambda\in\Lambda \mid \alpha_\lambda \neq 0\}$; on a $z_\alpha = z_{\alpha'} \cdot \dfrac{\sigma_o(x_\mu)}{\alpha_\mu}$, avec $\alpha' = \alpha-\mu$.

$$\text{Donc } c(z_\alpha) = \frac{1}{\alpha_\mu}\Big(\sum_{\beta'+\gamma'=\alpha'} z_{\beta'} \otimes z_{\gamma'}\Big)(\sigma_o(x_\mu) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_o(x_\mu))$$

$$= \sum_{\beta'+\gamma'=\alpha'} (z_{\beta'+\mu} \otimes z_{\gamma'} + z_{\beta'} \otimes z_{\gamma'+\mu})$$

$$= \sum_{\beta+\gamma=\alpha} z_\beta \otimes z_\gamma, \text{ puisque } \alpha = (\beta'+\mu) + \gamma' = \beta' + (\gamma'+\mu). \blacksquare$$

0.2. - *Extensions régulières.*

0.21. - Soient K et L deux corps commutatifs.

L est une extension de K s'il existe un homomorphisme de corps $u : K \to L$; on identifie alors K et le sous-corps $u(K)$ de L.

Un élément $x \in L$ est algébrique sur K si l'homomorphisme d'anneaux $v_x : K[X] \to L$ n'est pas injectif, et le polynome unitaire qui engendre l'idéal principal $\mathrm{Ker}\, v_x$ est appelé polynôme minimal de x sur K. L'ensemble des éléments de L algèbriques sur K est un sous-corps de L, noté $\bar{K}$, et appelé fermeture algébrique de K. L est algébrique sur K si $\bar{K} = L$. Par contre, K est algébriquement fermé dans L si $\bar{K} = K$; dans ce cas K est algébriquement fermé dans tout sous-corps de L contenant K.

Soit L une extension de K.

Le groupe de Galois de L sur K est le groupe $G = \mathrm{Aut}(L/K)$ des K-automorphismes de corps de L ; L est une extension galoisienne de K si L est algébrique sur K et si K est le corps des invariants de G (i.e $K = \{x \in L \mid \sigma(x) = x, \forall \sigma \in G\}$) ; il faut et il suffit pour cela que, pour tout $x \in L$, les racines du polynome minimal de x sur K (appelées conjugués de x sur K) soient simples et dans L.

Il y a alors correspondance biunivoque entre les sous-corps de L contenant K et les sous-groupes de G : à un sous-groupe H on associe le corps des invariants de H, et à un sous-corps M, le sous-groupe $\mathrm{Aut}(L/M)$; de plus, M est une extension galoisienne de K si et seulement si $H = \mathrm{Aut}(L/M)$ est un sous-groupe distingué de G, et $\mathrm{Aut}(M/K)$ est alors isomorphe à G/H.

Si $\bar{K} \neq L$, L est une extension transcendante de K ; il existe alors une partie B de L algébriquement libre sur K (i.e telle que $K(B)$ soit isomorphe à un corps de fractions rationnelles sur K) telle que L soit algébrique sur $K(B)$; B est appelée <u>base de transcendance</u> de L sur K, et si B est fini, on note <u>$d.tr(L/K)$</u> $= \text{card}\, B$.

0.22. - Soit C une algèbre sur un corps commutatif K. Deux sous-K-algèbres A et B de C sont <u>linéairement disjointes</u> sur K si tout élément de A commute à tout élément de B et si l'homomorphisme canonique $\varepsilon : a \otimes b \mapsto ab$ de $A \otimes_K B$ dans C est injectif ; il faut et il suffit pour cela qu'il existe une base de A sur K qui soit une famille libre de C sur B. Dans ce cas, ε est un isomorphisme de K-algèbres de $A \otimes_K B$ sur la sous-algèbre $A[B]$ (ou $B[A]$) de C engendrée par $A \cup B$. On a $A \cap B = K$, et toute famille de A (resp. B) libre sur K, est une famille de C libre sur B (resp. A).

<u>Exemples</u> :

a) Soient L et K' deux extensions de K, <u>$L \otimes 1$</u> (resp. <u>$1 \otimes K'$</u>) l'image de L dans $L \otimes_K K'$ par $\eta_1 : x \mapsto x \otimes 1$ (resp. de K' dans $L \otimes_K K'$ par $\eta_2 : x \to 1 \otimes x$). Alors les sous K-algèbres $1 \otimes K'$ et $L \otimes 1$ de $L \otimes_K K'$ sont linéairement disjointes sur K et $L \otimes_K K' = L \otimes 1\,[1 \otimes K']$: en effet, si $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une base de L sur K (resp. $(y_\mu)_\mu$ une base de K' sur K), ε transforme une base $((x_\lambda \otimes 1) \otimes (1 \otimes y_\mu))$ de $(L \otimes 1) \otimes_K (1 \otimes K')$ sur K en la base $(x_\lambda \otimes y_\mu)$ de $L \otimes_K K'$ sur K ; en particulier, $(1 \otimes K') \cap (L \otimes 1) = K$.

b) Soit L une extension algébrique de K et $K_1 = K(y_1,\ldots,y_n)$ une <u>extension transcendante pure</u> (i.e de base de transcendance $(y_1,\ldots,y_n)$) de K. Alors les sous K-algèbres L et K_1 de $L(y_1,\ldots,y_n)$ sont linéairement disjointes sur K.

Soit L une extension de K.

L est de <u>type fini sur</u> K s'il existe $x_1,\dots,x_p$ dans L tels que $L = K(x_1,\dots,x_p)$. Si M est un sous-corps de L contenant K, L est alors de type fini sur M, et M de type fini sur K : en effet, $L = M(x_1,\dots,x_p)$, et si $(z_1,\dots,z_s)$ est une base de transcendance de M sur K, L est de type fini sur $K_o = K(z_1,\dots,z_s)$; si $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ est une base de transcendance de L sur K_o, L est algébrique de type fini sur $K_1 = K_o(y_1,\dots,y_n)$, donc est un K_1-espace vectoriel de dimension finie et donc aussi $M(y_1,\dots,y_n)$; M et K_1 étant linéairement disjoints sur K_o, toute base de M sur K_o est une famille libre de $M(y_1,\dots,y_n)$ sur K_1, donc est finie, et M est de type fini sur K_o, et donc aussi sur K.

Soient L et K' deux extensions de K telles que $L \otimes_K K'$ soit intègre. Le corps des fractions F de $L \otimes_K K'$ est supposé muni de la structure de L-algèbre induite par $\eta_1 : L \to L \otimes_K K'$.

$$x \mapsto x \otimes 1$$

Lemme 1.- Si K' est de type fini sur K, si $(z_i)_{1\leq i\leq t}$ est une base de transcendance de K' sur K, alors il existe $y \in K'$, algébrique sur $K_o = K(z_i)$ tel que $F = (L[1 \otimes z_i])[1 \otimes y]$. En particulier, F est de type fini sur L et $d.tr(F/L) = d.tr(K'/K)$.

Démonstration : K' est une extension algébrique de type fini de K_o, donc il existe (théorème de l'élément primitif) $y \in K'$, algébrique sur K_o, tel que $K' = K_o[y]$. L'élément $1 \otimes y$ est entier sur $L \otimes_K K_o$ et $L \otimes_K K' = (L \otimes_K K_o)[1 \otimes y]$; la famille $(1 \otimes z_i)$ de $1 \otimes K'$ est algébriquement libre sur $L \otimes 1$, et on a $L \otimes_K K[z_i] = L[1 \otimes z_i]$. Soit $S = K[z_i] - \{0\}$; $T = \{1 \otimes s / s \in S\}$ est une partie multiplicative de $L \otimes_K K[z_i]$ et on a $L \otimes_K K_o = (L[1 \otimes z_i])[T^{-1}]$; par suite $L \otimes_K K' = (L[1 \otimes z_i])[T^{-1}][1 \otimes y] \subset L(1 \otimes z_i)[1 \otimes y]$, avec $1 \otimes y$ algébrique sur $L(1 \otimes z_i)$; $F = L(1 \otimes z_i)[1 \otimes y]$, est donc de type fini sur L et $\mathrm{dtr}(F/L) = t = \mathrm{dtr}(K'/K)$. ■

0.23. - Soient L et M deux extensions de K.

L et M sont <u>linéairement disjoints sur K</u> s'il existe une extension Ω de K et deux K-homomorphismes de corps $u : L \to \Omega$ et $v : M \to \Omega$ tels que les sous K-algèbres $u(L)$ et $v(M)$ soient linéairement disjointes sur K.

<u>Exemple</u> : $L = M = K(X)$; L et M sont linéairement disjoints sur K car les sous-K-algèbres $u(L) = K(X)$ et $v(M) = K(Y)$ de $\Omega = K(X,Y)$ sont linéairement disjointes sur K. On notera que les sous-K-algèbres L et M de $\Omega' = K(X)$ ne sont pas linéairement disjointes sur K.

L et M sont linéairement disjoints sur K si et seulement si la K-algèbre $L \otimes_K M$ est intègre : en effet, si les sous-K-algèbres $u(L)$ et $v(M)$ sont linéairement disjointes sur K, $L \otimes_K M$ est isomorphe à $u(L)[v(M)] \subset \Omega$ donc est intègre ; et si $L \otimes_K M$ est intègre de corps des fractions F, alors les sous K-algèbres $\eta_1(L) = L \otimes 1$ et $\eta_2(M) = 1 \otimes M$ de F sont linéairement disjointes sur K.

<u>Lemme</u> 2.- Si K est algébriquement fermé dans L, et M algébrique sur K, alors L et M sont linéairement disjoints sur K.

<u>Démonstration</u> : il suffit que, pour tout sous-corps M_1 de M, de type fini sur K, $L \otimes_K M_1$ soit intègre. M_1 étant algébrique de type fini sur K, il existe $x \in M_1$ algébrique sur K, tel que $M_1 = K[x]$; si g est le polynome minimal de x sur K, $M_1 = K[x]$; si g est le polynome minimal de x sur K, M_1 est isomorphe à $K[X]/g(X)K[X]$, d'où $L \otimes_K M_1$ isomorphe à $(L \otimes_K M_1)/L \otimes_K g(X)K[X] = L \otimes_K K[X]/g(1 \otimes X)L[1 \otimes X]$.

Pour que $L \otimes_K M_1$ soit intègre, il suffit que $g(1 \otimes X)$ soit irréductible dans $L[1 \otimes X]$.

On considère une clôture algébrique $\hat{L}$ de L et la fermeture algébrique $\hat{K}$ de K dans $\hat{L}$, qui est alors une clôture algébrique de K ; $g(X)$ a n racines dans $\hat{K}$. Supposons que $g_1(1 \otimes X) \in L[1 \otimes X]$ divise $g(1 \otimes X)$; si g_1 est de degré p $(1 \leq p \leq n)$, les p racines de g_1 dans $\hat{L}$ sont racines de g dans $\hat{K}$, sinon g aurait plus de n racines dans $\hat{L}$; il existe donc $z_1, \ldots, z_p \in \hat{K}$ tels que $g_1(1 \otimes X) = \prod_{i=1}^{p} (1 \otimes X - z_i)$. Les coefficients de g_1 appartiennent donc à $\hat{K} \cap L = K$ (K algébriquement fermé dans L) et g étant irréductible dans $K[X]$, alors $g_1 = g$. ∎

0.24. - Soit L une extension de K.

L est une <u>extension régulière</u> de K, si pour toute K-algèbre intègre A, la K-algèbre $L \otimes_K A$ est intègre.

<u>*Lemme*</u> *3*.- Soit $\hat{K}$ une clôture algébrique de K. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) K est algébriquement fermé dans L ;

ii) L est une extension régulière de K ;

iii) la K-algèbre $L \otimes_K \hat{K}$ est intègre ;

iv) L et $\hat{K}$ sont linéairement disjoints sur K.

<u>*Démonstration*</u> : i) => ii).

A étant intègre, $L \otimes_K A$ est intègre si, pour tout sous-corps K' du corps des fractions de A, de type fini sur K, $L \otimes_K K'$ est intègre. Si $(z_i)_{1 \leq i \leq t}$ est une base de transcendance de K' sur K et $K_o = K(z_i)$, K' est algébrique sur K_o. Si $(Y_i)_{1 \leq i \leq t}$ est une famille d'indéterminées, $K(Y_i)$ est isomorphe à $K(z_i)$; de plus K étant algébriquement fermé dans L, $K(Y_i)$

est algébriquement fermé dans $L(Y_i)$: en effet, si $\alpha \in L(Y_1)$ est algébrique sur $K(Y_1)$, il existe $\gamma \in K[Y_1]$ tel que $\alpha\gamma$ soit entier sur $L[Y_1]$; $L[Y_1]$ étant intégralement fermé dans $L(Y_1)$, et $K[Y_1]$ dans $L[Y_1]$ ([AC V] § 1, prop. 13), on en déduit que $\alpha \in K(Y_1)$, d'où le résultat, par récurrence sur t. Ainsi K' étant algébrique sur $K_o \xrightarrow{\alpha} K(Y_i)$, K' et $L(Y_i)$ sont linéairement disjoints sur K_o, donc la K_o-algèbre $L(Y_i) \otimes_{K_o} K'$ est intègre.

Soit $S = K[z_i] - \{0\}$; la K-algèbre $L \otimes_K K_o$ est canoniquement isomorphe à $L \otimes_K K[z_i] \otimes_{K[z_i]} \{K[z_i][S^{-1}]\}$ qui est isomorphe à $L[Y_i] \otimes_{K[z_i]} \{K[z_i][S^{-1}]\}$ ($K[z_i][S^{-1}]$ est un module plat). Par suite, si $T = K[Y_i] - \{0\}$, on en déduit que $L \otimes_K K_o$ est isomorphe à $L[Y_i][T^{-1}]$ qui s'injecte dans $L(Y_i)$. On en déduit une injection de $L \otimes_K K_o$ dans $L(Y_i)$ et donc une injection de $L \otimes_K K' \xrightarrow{\sim} L \otimes_K K_o \otimes_{K_o} K'$ dans $L(Y_i) \otimes_{K_o} K'$, d'où le résultat.

ii) $\Longrightarrow$ iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) : trivial.

iii) $\Longrightarrow$ i).

$\bar{K}$ étant algébrique sur K, il existe un homomorphisme injectif de $\bar{K}$ dans $\hat{K}$ donc aussi de $L \otimes_K \bar{K}$ dans $L \otimes_K \hat{K}$, d'où $L \otimes_K \bar{K}$ est intègre.

Soit $x \in \bar{K}$ et $p = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ le polynome minimal de x sur K ; on a dans $L \otimes_K \bar{K}$, $0 = 1 \otimes p(x) - p(x) \otimes 1 = (1\otimes x - x\otimes 1)\{\sum_{i=1}^{n} a_i(\sum_{k=0}^{i-1} x^k \otimes x^{i-1-k})\}$.

Or, la famille $(x^k)_{0\leq k\leq n-1}$ est libre sur K, donc aussi $(x^k \otimes x^j)$, et $\sum_{i=1}^{n} a_i(\sum_{k=0}^{i-1} x^k \otimes x^{i-1-k}) \neq 0$; d'où $x \in (L \otimes 1) \cap (1 \otimes \bar{K}) = K$. ■

0.3. - *Opérateurs différentiels*.

0.31. - Soient k un anneau commutatif et A une k-algèbre commutative.

Pour tout $a \in A$, on note $\underline{a_\ell}$, l'homothétie $y \mapsto ay$ d'un A-module dans lui-même. Pour tout k-module M et tout A-module E, l'ensemble $\underline{\mathrm{Hom}_k(M,E)}$ des applications k-linéaires de M dans E est alors un A-module de loi externe $(a,u) \mapsto a_\ell \circ u$.

Soient E, F et G des A-modules quelconques.

Pour tout $u \in \mathrm{Hom}_k(E,F)$ et $a \in A$, on pose $\underline{[u,a]} = u \circ a_\ell - a_\ell \circ u$; on a donc $[u,a]$ élément de $\mathrm{Hom}_k(E,F)$; et si $v \in \mathrm{Hom}_k(F,G)$

$$[v \circ u,a] = v \circ [u,a] + [v,a] \circ u.$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a_\ell"'] & F \arrow[d, "a_\ell"] \\ E \arrow[r, "u"] & F \end{tikzcd}$$

On définit une suite croissante de sous A-modules de $\mathrm{Hom}_k(E,F)$ par la récurrence :

$$\mathrm{Diff}^o_{A/k}(E,F) = \mathrm{Hom}_A(E,F) = \{u \in \mathrm{Hom}_k(E,F) \mid \forall a \in A, [u,a] = 0\}$$

et pour tout $n \geq 1$

$$\underline{\mathrm{Diff}^n_{A/k}(E,F)} = \{u \in \mathrm{Hom}_k(E,F) \mid [u,a] \in \mathrm{Diff}^{n-1}_{A/k}(E,F), \forall a \in A\}$$

(Définition de HEYNEMAN-SWEEDLER dans [HS] 2.1.).

Un élément u de $\mathrm{Diff}^n_{A/k}(E,F)$ est appelé k-<u>opérateur différentiel</u> de E dans F, et, si $u \neq 0$, $\underline{\omega(u)} = \inf_{n \in \mathbb{N}}\{u \in \mathrm{Diff}^n_{A/k}(E,F)\}$ est appelé <u>ordre</u> de u ; par convention $\omega(0) = -\infty$.

Pour tout $u \in \mathrm{Diff}^r_{A/k}(E,F), v \in \mathrm{Diff}^s_{A/k}(F,G)$, on a $v \circ u \in \mathrm{Diff}^{r+s}_{A/k}(E,G)$ et en particulier $\omega(vou) \leq \omega(v) + \omega(u)$: en effet, si la propriété est vérifiée pour $r+s-1$, pour tout $a \in A$, $[vou,a] = v \circ [u,a] + [v,a] \circ u \in \mathrm{Diff}^{r+s-1}_{A/k}(E,G)$.

On en déduit que le A-module $\underline{\mathrm{Diff}_{A/k}(E,E)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Diff}^n_{A/k}(E,E)$ est une sous-k-algèbre de $\mathrm{End}_k E$, filtrée par $(\mathrm{Diff}^n_{A/k}(E,E))_{n \in \mathbb{N}}$.

0.32. - On note $\underline{\eta_1}$ (resp. $\underline{\eta_2}$) l'homomorphisme canonique $a \mapsto a \otimes 1$ (resp. $a \mapsto 1 \otimes a$) de A dans $A \otimes_k A$, et on suppose $A \otimes_k A$ muni de la structure de A-algèbre induite par η_1.

L'application $\underline{\natural}$, qui à $u \in \mathrm{Hom}_k(A,E)$ associe $\underline{u^\natural}$ élément de $\mathrm{Hom}_A(A \otimes_k A, E)$ tel que $u^\natural(x \otimes y) = xu(y)$, est un A-isomorphisme de bijection réciproque $v \mapsto v \circ \eta_2$. D'autre part, la multiplication $\underline{m}$ de la k-algèbre A est un homomorphisme d'anneaux et une application A-linéaire de $A \otimes_k A$ dans A ; $\underline{I} = \mathrm{Ker}\, m$ est donc à la fois un idéal et un sous A-module de $A \otimes_k A$, et comme η_1 est un A-morphisme tel que $m \circ \eta_1 = 1_A$, on a $A \otimes_k A = I \oplus \eta_1(A)$; $\underline{q} = 1_{A \otimes_k A} - \eta_1 \circ m$ est alors la projection de $A \otimes_k A$ sur I, et si on pose $\underline{\delta} = q \circ \eta_2 : A \to I$ on a donc, pour tout a de A, $\delta a = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Comme $\sum_i a_i b_i = 0$ est équivalent à $\sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i a_i \delta(b_i)$, I est le sous A-module de $A \otimes_k A$ engendré par $\{\delta(a) \mid a \in A\}$, et I^p est engendré sur A par $\{\prod_{j=1}^{p} \delta(a_j) \mid a_1, \ldots, a_p \in A\}$.

Pour tout $u \in \mathrm{Hom}_k(A,E), a \in A$, on a $[u,a]^\natural = u^\natural \circ (\delta(a))_\ell$; on en déduit que $u \in \mathrm{Diff}^p_{A/k}(A,E)$ si et seulement si $u^\natural|_{I^{p+1}} = 0$: en effet $u^\natural|_{I^{p+1}} = 0$ équivaut à $[u,a]^\natural|_{I^p} = 0$, $\forall\, a \in A$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle <u>partie principale</u> d'ordre n sur A, la A-algèbre quotient $\underline{P_n(A)} = (A \otimes_k A)/I^{n+1}$ et on note $\underline{p_n}$ le composé de η_2 et de la surjection canonique $\underline{\Pi_n}$ de $A \otimes_k A$ sur $P_n(A)$.

L'application $\underline{\delta_n} : v \mapsto v \circ p_n$ est un A-isomorphisme de $\mathrm{Hom}_A(P_n(A),E)$ sur $\mathrm{Diff}^n_{A/k}(A,E)$, et si $u \in \mathrm{Diff}^n_{A/k}(A,E)$, $I^{n+1} \subset \mathrm{Ker}(u^\natural)$, donc il existe un A-morphisme $\underline{u_{(n)}} : P_n(A) \to E$ tel que $u^\natural = u_{(n)} \circ \Pi_n$, d'où $u = u_{(n)} \circ p_n$.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_k A \arrow[r, "\Pi_n"] \arrow[dr, "u^\natural" near end] & P_n(A) \arrow[d, "u_{(n)}"] \\
A \arrow[u, "\eta_2"] \arrow[ur, dashed, "p_n" near start] \arrow[r, "u"'] & E
\end{tikzcd}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur covariant $\mathrm{Diff}^n_{A/k}(A,.)$ est ainsi représentable, de représentant $(P_n(A), p_n)$; en particulier, $p_n \in \mathrm{Diff}^n_{A/k}(A, P_n(A))$.

Pour tout $n \geq 1$, on note $\underline{f^I_n}$ la surjection canonique de I^n sur I^n/I^{n+1}, $\underline{f'_n}$ la surjection canonique de $\mathrm{Diff}^n_{A/k}(A,E)$ sur $\mathrm{Diff}^n_{A/k}(A,E)/\mathrm{Diff}^{n-1}_{A/k}(A,E)$, et on considère le A-morphisme injectif $i_n : I^n/I^{n+1} \to P_n(A)$ tel que $i_n \circ f^I_n = \Pi_n\big|_{I^n}$, ainsi que le A-morphisme surjectif $s_n : P_n(A) \to P_{n-1}(A)$ tel que $s_n \circ \Pi_n = \Pi_{n-1}$. Alors la suite de A-modules :

$$0 \longrightarrow I^n/I^{n+1} \xrightarrow{i_n} P_n(A) \xrightarrow{s_n} P_{n-1}(A) \longrightarrow 0$$

est exacte ; et, si cette suite est scindée, il existe un unique A-isomorphisme $\underline{\delta_{[n]}} : \mathrm{Hom}_A(I^n/I^{n+1},E)$ dans $\mathrm{Diff}^n_{A/k}(A,E)/\mathrm{Diff}^{n-1}_{A/k}(A,E)$ tel que $\delta_{[n]} \circ \mathrm{Hom}(i_n,E) = f'_n \circ \delta_n$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(P_n(A),E) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(i_n,E)"'] & \mathrm{Diff}^n_{A/k}(A,E) \arrow[d, "f'_n"] \\
\mathrm{Hom}_A(I^n/I^{n+1},E) \arrow[r, "\delta_{[n]}"] & \mathrm{Diff}^n_{A/k}(A,E)/\mathrm{Diff}^{n-1}_{A/k}(A,E)
\end{tikzcd}$$

0.33. - Soient k un anneau commutatif et A une k-algèbre.

Un k-morphisme d de A dans un A-module (à gauche) M est une k-<u>dérivation</u> si, pour tout $a, b \in A$, $d(ab) = bd(a) + ad(b)$.

Ker d est alors une sous k-algèbre de A (en particulier $k.1 \subset \mathrm{Ker}\, d$), et si $a \in \mathrm{Ker}\, d$ est inversible dans A, $a^{-1} \in \mathrm{Ker}\, d$.

Plus généralement, si M est muni de structures de A-module à droite et à gauche, un k-morphisme d de A dans M est une k-dérivation si, pour tout $a,b \in A$, $d(ab) = d(a)b + ad(b)$.

Une $\mathbb{Z}$-dérivation est appelée <u>dérivation</u> ; et une k-<u>dérivation</u> de A est une k-dérivation de A dans A (éventuellement muni de ses structures de A-module à droite et à gauche).

Soient A une k-algèbre commutative et E un A-module.

On note <u>$\mathrm{Der}_k(A,E)$</u> l'ensemble des k-dérivations de A dans E ; si pour $x \in E$, on note <u>x_r</u> le A-morphisme $a \mapsto ax$ de A dans E, tout $d \in \mathrm{Der}_k(A,E)$ est un k-morphisme tel que $[d,a] = d(a)_r$ soit un élément de $\mathrm{Diff}^o_{A/k}(A,E)$; donc $\mathrm{Der}_k(A,E) \subset \mathrm{Diff}^1_{A/k}(A,E)$.

<u>Lemme</u> 1.- $\mathrm{Der}_k(A,E)$ est le noyau du A-morphisme $\varepsilon_o : u \to u(1)$ de $\mathrm{Diff}^1_{A/k}(A,E)$ dans E (donc en particulier, est un sous A-module de $\mathrm{Diff}^1_{A/k}(A,E)$), et la restriction de la surjection canonique f'_1 à $\mathrm{Der}_k(A,E)$ est un A-isomorphisme de $\mathrm{Der}_k(A,E)$ sur $\mathrm{Diff}^1_{A/k}(A,E)/\mathrm{Diff}^o_{A/k}(A,E)$ d'isomorphisme réciproque $\vartheta_1 : f'_1(u) \mapsto u - u(1)_r$.

<u>Démonstration</u> : Pour tout $d \in \mathrm{Der}_k(A,E)$, on a $d(1.1) = 1.d(1) + 1.d(1)$ d'où $\varepsilon_o(d) = 0$; d'autre part, si $u \in \mathrm{Diff}^1_{A/k}(A,E)$ $u - u(1)_r \in \mathrm{Der}_k(A,E)$: en effet, $\forall\, a \in A$, $[u,a] \in \mathrm{Hom}_A(A,E)$ donc $\forall\, b \in A$ $u(ab) - ab\, u(1) = [u,a](b) + a\, u(b) - ab\, u(1) = b[u(a) - a\, u(1)] + a[u(b) - b\, u(1)]$. Donc si $\varepsilon_o(u) = 0$, $u = u - u(1)_r \in \mathrm{Der}_k(A,E)$. De plus, si $u\text{-}v \in \mathrm{Diff}^o_{A/k}(A,E)$, $u\text{-}v = u(1)_r - v(1)_r$, donc ϑ_1 est bien définie. D'autre part, $\forall\, d \in \mathrm{Der}_k(A,E)$, $\vartheta_1(f'_1(d)) = d - d(1)_r = d$, et $\forall\, u \in \mathrm{Diff}^1_{A/k}(A,E)$, $f'_1(\vartheta_1(f'_1(u))) = f'_1(u)$, car $u(1)_r \in \mathrm{Diff}^o_{A/k}(A,E)$ d'où le résultat. ■

Soit ∂ une k-dérivation de A. Un k-endomorphisme d de E est un ∂-dérivation gauche de E si pour tout $a \in A$, $x \in E$ $d(ax) = \partial(a)x + ad(x)$ (Remarque : cette relation appliquée à $a \in k$ entraîne la k-linéarité de d puisque $k \subset \operatorname{Ker} \partial$) ; en particulier, $[d,a] = \partial(a)_{\ell} \in \operatorname{End}_A E$, d'où $d \in \operatorname{Diff}^1_{A/k}(E,E)$.

Lemme 2.- Soient ∂ une k-dérivation de A, d (resp. D) une ∂-dérivation gauche d'un A-module E (resp. F), $u \in \operatorname{Diff}^p_{A/k}(E,F)$. Alors

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ d\downarrow & & \downarrow D \\ E & \xrightarrow{u} & F \end{array}$$

$D \circ u - u \circ d \in \operatorname{Diff}^p_{A/k}(E,F)$.

Démonstration : $D \circ u - u \circ d \in \operatorname{Hom}_k(E,F)$, et, $\forall a \in A$, $[D \circ u - u \circ d, a] = D \circ [u,a] + [D,a] \circ u - u \circ [d,a] - [u,a] \circ d =$ $[u, \partial(a)] + D \circ [u,a] - [u,a] \circ d$; si $p = 0$, $[u,\partial(a)] = [u,a] = 0$ et $D \circ u - u \circ d \in \operatorname{Diff}^0_{A/k}(A,E)$; si la propriété est vraie à l'ordre $p-1$, comme $[u,\partial(a)]$ et $[u,a]$ appartiennent à $\operatorname{Diff}^{p-1}_{A/k}(E,F)$, $D \circ u - u \circ d \in \operatorname{Diff}^p_{A/k}(E,F)$. ∎

Conséquences :

a) Soient d une k-dérivation de A, D une ∂-dérivation gauche de F et $u \in \operatorname{Der}_k(A,F)$; alors $D \circ u - u \circ d \in \operatorname{Der}_k(A,F)$.

b) $\underline{\operatorname{Der}_k A} = \operatorname{Der}_k(A,A)$ est une sous k-algèbre de Lie de la k-algèbre de Lie associée à $\underline{\operatorname{Diff}_{A/k}} = \operatorname{Diff}_{A/k}(A)$.

0.34. - Soient k un anneau commutatif et A une k-algèbre commutative.

On pose $\underline{\Omega_{A/k}} = I/I^2$; soient $\underline{f^I_1}$ la surjection canonique de I sur $\Omega_{A/k}$ et $\underline{d_{A/k}} = f^I_1 \circ \delta = f^I_1 \circ q \circ \eta_2$ (voir [0.32]). $\Omega_{A/k}$ est alors un A-module engendré par $\{d_{A/k}(a) \mid a \in A\}$, appelé <u>module des différentielles</u> (de Kähler) de A sur k.

Le A-morphisme $q_1 : P_1(A) \to I/I^2$ tel que $q_1 \circ \pi_1 = f_1^I \circ q$ est une rétraction de i_1, donc, pour tout A-module E, il existe un A-isomorphisme $\delta_{[1]} : \mathrm{Hom}_A(I/I^2,E) \to \mathrm{Diff}^1_{A/k}(A,E)/\mathrm{Diff}^o_{A/k}(A,E)$ tel que $\delta_{[1]} \circ \mathrm{Hom}(i_1,E) = f_1' \circ \delta_1$.

Soit ϑ_1 le A-isomorphisme du lemme 1 ; pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(I/I^2,E)$ $f = \mathrm{Hom}(i_1,E)\ (f \circ q_1)$, donc $\vartheta_1 \circ \delta_{[1]}(f) = \vartheta_1 \circ f_1' \circ \delta_1(f \circ q_1) = f \circ q_1 \circ \pi_1 \circ \eta_2 = f \circ f_1^I \circ q \circ \eta_2 = f \circ d_{A/k}$. L'application $\underline{\vartheta^E_{A/k}} : f \to f \circ d_{A/k}$ est donc un A-isomorphisme de $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k},E)$ sur $\mathrm{Der}_k(A,E)$. Le foncteur covariant $\mathrm{Der}_k(A,.)$ est ainsi représentable de représentant $(\Omega_{A/k},d_{A/k})$; en particulier, $d_{A/k} \in \mathrm{Der}_k(A,\Omega_{A/k})$.

Soient L une extension de K, et E un L-espace vectoriel.

Si $p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$, $x \in L$ et d est une application de L dans E, on pose $\underline{p^d(x)} = \sum_{i=0}^{n} x^i d(a_i)$; d'autre part, on note $\underline{p'(X)} = \sum_{i=0}^{n} i a_i X^{i-1}$ le polynome dérivé de p. Alors, pour tout $x \in \bar{K}$, de polynome minimal p sur K, et pour toute dérivation d de L dans E, on a $0 = d(p(x)) = p'(x)d(x) + p^d(x)$, d'où $d(x) = -\dfrac{1}{p'(x)}\, p^d(x)$.

En particulier, pour toute K-dérivation d de L, $K.1 \subset \mathrm{Ker}\, d$ donc $p^d(x) = 0$, $d(x) = 0$, et $[d,x] = (d(x))_r = 0$; d est donc $\bar{K}$-linéaire, et $\mathrm{Der}_K L = \mathrm{Der}_{\bar{K}} L$.

Si L est une extension de type fini de K, $t = \mathrm{d.tr}(L/K)$ est fini, et on montre que $\dim_L \mathrm{Der}_K L = t$ ([AV] § 9 th. 2). Du L-isomorphisme $\vartheta^L_{L/K} : \mathrm{Hom}_K(\Omega_{L/K},K) \to \mathrm{Der}_K L$, on déduit alors un L-isomorphisme de $\Omega_{L/K}$ sur $(\mathrm{Der}_K L)^*$, et $\dim_L \Omega_{L/K} = t$.

0.35. - Soit L une extension de K.

Soit $gr(Diff_{L/K})$ la K-algèbre graduée associée à la filtration de $Diff_{L/K}$ par la suite croissante $(Diff^n_{L/K}(L,L))_{n\in\mathbb{N}}$, et pour tout $n \in N$ la surjection canonique $\underline{f'_n}$ de $Diff^n_{L/K}(L,L)$ sur $gr_n(Diff_{L/K})$.

La K-algèbre $gr(Diff_{L/K})$ est commutative : en effet, par récurrence sur $n = r+s$, si $u \in Diff^r_{L/K}(L,L)$, $v \in Diff^s_{L/K}(L,L)$, alors $[u,v] \in Diff^{r+s-1}_{L/K}(L,L)$; car si la propriété est vérifiée pour $n-1$, pour tout $a \in L$, $[[u,v],a] = [u,[v,a]] + [[u,a],v] \in Diff^{r+s-2}_{L/K}(L,L)$; alors $f'_r(u) \times f'_s(v) = f'_{r+s}([u,v] + v \circ u) = f'_s(u) \times f'_r(v)$, d'où le résultat par bilinéarité.

De plus, $gr(Diff_{L/K})$ est muni d'une structure de L-algèbre par l'homomorphisme canonique $a \mapsto f'_o(a_\ell)$. Du L-isomorphisme $f'_1|_{Der_K L}$ de $Der_K L$ dans $gr_1(Diff_{L/K})$ (Lemme 1) on déduit un homomorphisme de L-algèbres graduées $\underline{g} : Sym_L(Der_K L) \to gr(Diff_{L/K})$ tel que $f'_1|_{Der_K L} = g \circ \varphi_D$ (φ_D étant l'injection canonique de $Der_K L$ dans $Sym_L(Der_K L)$).

On se propose de démontrer que g *est un isomorphisme.*

Soit $gr_I(L \otimes_K L)$ la L-algèbre associée à la filtration I-adique de $L \otimes_K L$ (structure induite par η_1, avec $I = Ker(m_L)$), et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^I_n la surjection canonique I^n sur I^n/I^{n+1}. De l'injection canonique i de $\Omega_{L/K}$ dans $gr_I(L \otimes_K L)$ commutatif, on déduit un homomorphisme de L-algèbres graduées

$\underline{\gamma} : Sym_L(\Omega_{L/K}) \to gr_I(L \otimes_K L)$ tel que $i = \gamma \circ \varphi_\Omega$; $gr_I(L \otimes_k L)$ étant engendrée, en tant que L-algèbre par $i(\Omega_{L/K})$, γ est surjectif.
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe le L-isomorphisme $\delta_{[n]} : (I^n/I^{n+1})^* \to gr_n(Diff_{L/K})$ tel que $\delta_{[n]} \circ {}^t i_n = f'_n \circ \delta_n$. (voir [0.32]).

On suppose désormais L de type fini sur K. Soit $t = d.tr(L/K)$.

Il existe donc une famille $\underline{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq t}$ d'éléments de K telle que $(d_{L/K}(x_i))$ soit une base de $\Omega_{L/K}$ sur L ; si on note (ω_i^*) la base duale de $(d_{L/K}(x_i))$ dans $(\Omega_{L/K})^*$ et $d_i = \not{\vartheta}^L_{L/K}(\omega_i^*) = \omega_i^* \circ d_{L/K}$, la famille (d_i) est une base de $\mathrm{Der}_K L$ sur L, et pour tout i,j $d_i(x_j) = \delta_i^j$.

Remarque : La famille (x_i) est nécessairement une base de transcendance de L sur K.

Pour tout α et $\beta \in \mathbb{N}^t$, on vérifie alors, par récurrence sur $p = |\beta|$, que $d^\alpha(x^\beta) = \alpha!\delta_\alpha^\beta$: en effet, si la propriété est vraie pour $p-1$ et si $\beta_j \neq 0$, on a

$$d^\alpha(x^\beta) = \sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} d^\gamma(x^{\beta-j}) d^{\alpha-\gamma}(x_j) \quad \text{(formule de Leibnitz [1.11] Lemme 1)}$$

$$= \binom{\alpha}{\beta-j}(\beta-j)!\,d^{\alpha-\beta+j}(x_j) \;;\; d^{\alpha-\beta+j}(x_j) \text{ n'est non nul que}$$

si $d^{\alpha-\beta+j} = d_j$, i.e $\alpha = \beta$, auquel cas $d^\alpha(x^\beta) = \binom{\alpha}{\alpha-j}(\alpha-j)! = \alpha!$.

On en déduit que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^t$ tels que $|\alpha| = |\beta|$, $(d^\alpha)^\natural(\delta x)^\beta = \alpha!\delta_\alpha^\beta$: en effet, $(\delta x)^\beta = \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} (-1)^{|\gamma|}\binom{\beta}{\gamma} x^\gamma \otimes x^{\beta-\gamma}$

donc $(d^\alpha)^\natural(\delta x)^\beta = \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} (-1)^{|\gamma|}\binom{\beta}{\gamma} x\; d^\alpha(x^{\beta-\gamma})$

$$= \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} (-1)^{|\gamma|}\binom{\beta}{\gamma} x^\gamma(\beta-\gamma)!\,\delta_\alpha^{\beta-\gamma} \quad ; \text{ cette somme est non nulle}$$

s'il existe γ tel que $\alpha = \beta-\gamma$, donc, si $\alpha-\beta \geq 0$, i.e. comme $|\alpha| = |\beta|$, si $\alpha = \beta$; et dans ce cas

$$(d^\alpha)^\natural(\delta x)^\beta = (-1)^{|\beta-\alpha|}\binom{\beta}{\beta-\alpha} x^{\beta-\alpha}\alpha! = \alpha! \;.$$

D'autre part, $\underline{d} = (d_i)_{1 \leq i \leq t}$ étant une base de $\mathrm{Der}_K L$ sur L $((\not{\vartheta}_D(d))^\alpha)_{\alpha \in N^t}$ est une base de $\mathrm{Sym}_L(\mathrm{Der}_K L)$ sur L ; en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\not{\vartheta}_D(d)^\alpha)_{|\alpha|=n}$ est une base de $\mathrm{Sym}^n_L(\mathrm{Der}_K L)$ sur L. De même $\underline{d_{L/K}(x)} = (d_{L/K}(x_i))_{1 \leq i \leq t}$ étant une base de $\Omega_{L/K}$ sur L, $(\not{\vartheta}_\Omega(d_{L/K}(x))^\alpha)_{|\alpha|=n}$

est une base de $\mathrm{Sym}^n_L(\Omega_{L/K})$, qui est donc de dimension finie $\binom{t+n-1}{t}$.
Si on note $((\vartheta_\Omega(d_{L/K}(x))^\alpha)^*)_{|\alpha|=n}$ la base duale de $(\vartheta_\Omega(d_{L/K}(x))^\alpha)_{|\alpha|=n}$ dans $[\mathrm{Sym}_L(\Omega_{L/K})]^*$, et si on pose $s^*_\alpha = \alpha!(\vartheta_\Omega(d_{L/K}(x))^\alpha)^*$, $(s^*_\alpha)_{|\alpha|=n}$ est une base de $[\mathrm{Sym}^n_L(\Omega_{L/K})]^*$ sur L.

On considère alors le L-isomorphisme canonique Φ_n de $\mathrm{Sym}^n_L(\mathrm{Der}_K L)$ sur $[\mathrm{Sym}^n_L(\Omega_{L/K})]^*$ défini par $\Phi_n(\vartheta_D(d)^\alpha) = s^*_\alpha$.

Lemme 3.- Soit L une extension de type fini de K.

Alors g est un isomorphisme de L-algèbres graduées de $\mathrm{Sym}_L(\mathrm{Der}_K L)$ sur $\mathrm{gr}(\mathrm{Diff}_{L/K})$.

Démonstration :

Il suffit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = g\big|_{\mathrm{Sym}^n_L(\mathrm{Der}_K(L))}$ soit un isomorphisme de $\mathrm{Sym}^n_L(\mathrm{Der}_K L)$ sur $\mathrm{gr}_n(\mathrm{Diff}_{L/K})$; or, si on pose

$\gamma_n = \gamma\big|_{\mathrm{Sym}^n_L(\Omega_{L/K})}$, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^t$, $|\alpha| = n$,

$$
\begin{aligned}
{}^t\gamma_n \circ \delta^{-1}_{[n]} \circ g_n(\vartheta_D(d)^\alpha) &= {}^t\gamma_n \circ \delta^{-1}_{[n]}\,[f'_1(d)]^\alpha \\
&= {}^t\gamma_n \circ \delta^{-1}_{[n]} \circ f'_n(d^\alpha) = (d^\alpha)_{[n]} \circ i_n \circ \gamma_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sym}^n_L(\mathrm{Der}_K L) & \xrightarrow{\quad g_n \quad} & \mathrm{gr}_n(\mathrm{Diff}_{L/K}) \\
\Big\downarrow \Phi_n & & \Big\uparrow \delta_{[n]} \\
[\mathrm{Sym}^n_L(\Omega_{L/K})]^* & \xrightarrow{\quad {}^t\gamma_n \quad} & [\mathrm{gr}_{I_n}(L \otimes_K L)]^* = (I^n/I^{n+1})^*
\end{array}
$$

or pour tout $\beta \in \mathbb{N}^t$, $|\beta| = n$, on a :

$$(d^{\alpha})_{(n)} \circ i_n \circ \gamma_n (\psi_{\Omega}(d_{L/K}(x))^{\beta}) = (d^{\alpha})_{(n)} \circ i_n(d_{L/K}(x))^{\beta}$$

$$= (d^{\alpha})_{(n)} \circ i_n \circ f_n^I((\delta x)^{\beta})$$

$$= (d^{\alpha}) \lrcorner (\delta x)^{\beta}$$

$$= \alpha! \delta_{\alpha}^{\beta}$$

d'où ${}^t\gamma_n \circ \delta_{[n]}^{-1} \circ g_n(\psi_D(d)^{\alpha}) = s_{\alpha}^* = \Phi_n(\psi_D(d)^{\alpha})$, et par L-linéarité

${}^t\gamma_n \circ \delta_{[n]}^{-1} \circ g_n = \Phi_n$; en particulier, ${}^t\gamma_n$ est surjectif, et comme il est injectif (γ_n surjectif), c'est un isomorphisme et, par suite, aussi $g_n = \delta_{[n]} \circ ({}^t\gamma_n)^{-1} \circ \Phi_n$. ■

Conséquences :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ${}^t\gamma_n$ est un isomorphisme de $(I^n/I^{n+1})^*$ sur $[\mathrm{Sym}_L^n(\Omega_{L/K})]^*$, de dimension finie sur L ; γ_n est donc un isomorphisme, et par suite γ est un isomorphisme de L-algèbres graduées de $\mathrm{Sym}_L(\Omega_{L/K})$ sur $\mathrm{gr}_I(L \otimes_K L)$.

b) $\mathrm{Diff}_{L/K}$ est un anneau noethérien (à gauche), et sans diviseurs de zéro : en effet, $\mathrm{gr}(\mathrm{Diff}_{L/K})$ étant isomorphe à $\mathrm{Sym}_L(\mathrm{Der}_K L)$, donc à un anneau de polynômes à t indéterminées sur L, est un anneau noethérien intègre ; d'après ([Re] 1 § 5, prop. 1), $\mathrm{Diff}_{L/K}$ est donc noethérien (à gauche) ; de plus, pour tout $(u,v) \in (\mathrm{Diff}_{L/K})^2$, si $\omega(u) = p$, $\omega(v) = q$, on a : $f_p(u) \neq 0$, $f_q(v) \neq 0$, d'où $f_{p+q}(u \circ v) = f_p(u) \times f_q(v) \neq 0$, $u \circ v \in \mathrm{Diff}_{L/K}^{p+q-1}(L,L)$, et en particulier $u \circ v \neq 0$.

c) $\mathrm{Diff}_{L/K}$, étant un anneau noéthérien et sans diviseurs de zéro, admet un corps des fractions (à gauche) (voir [Re] IV, § 2, prop. 1, cor. 4) dont les éléments sont appelés <u>K-opérateurs pseudo-différentiels</u> sur L.

0.4. - *Extensions fortement normales.*

0.41. - On appelle <u>anneau différentiel</u> un anneau commutatif A muni de m dérivations $\partial_1,\dots,\partial_m$ $(m \geq 1)$ telles que pour tout i et j, $[\partial_i,\partial_j] = 0$; $(A,\partial_1,\dots,\partial_m)$ est un anneau différentiel

<u>ordinaire</u> si $m = 1$

<u>partiel</u> si $m > 1$.

$\underline{A_c} = \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} \partial_i$ est alors un sous-anneau appelé <u>anneau des constantes</u> de A ; $\partial_1,\dots,\partial_m$ sont donc des A_c-dérivations de A, appelées <u>dérivations de structure</u> de A.

Si de plus, A est un corps, $(A,\partial_1,\dots,\partial_m)$ est un <u>corps différentiel</u> et $k = A_c$ est un sous-corps appelé <u>corps des constantes</u> de A ; k est alors algébriquement fermé dans A, car ∂_i est $\bar{k}$-linéaire, d'où $\bar{k} \subset \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} \partial_i$.

<u>Exemple</u> : Soit k un corps, $A = k(X_1,\dots,X_m)$ le corps des fractions rationnelles à m indéterminées sur k ; $(A, \frac{\partial}{\partial X_1},\dots,\frac{\partial}{\partial X_m})$ est un corps différentiel de corps des constantes k.

Soient $(A,\partial'_1,\dots,\partial'_m)$ et $(B,\partial_1,\dots,\partial_m)$ deux anneaux différentiels.

Une application $u : A \to B$ est <u>différentielle</u> si, pour tout i, $u \circ \partial'_i = \partial_i \circ u$; la composée de deux applications différentielles, et la réciproque d'une application différentielle bijective, sont différentielles.

Une partie B_1 de B est <u>différentielle</u> si pour tout i $\partial_i(B_1) \subset B_1$; et si B_1 est un sous-anneau de B, $(B_1,\partial_1|_{B_1},\dots,\partial_m|_{B_1})$ est alors un sous-anneau différentiel ; de plus l'inclusion de B_1 dans B est différentielle. Plus généralement, si $u : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux injectif et différentiel, alors $u(A)$ est un sous-anneau différentiel de B, d'anneau des constantes $u(A_c) \subset B_c$. On dit alors que $(B, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ est une <u>extension d'anneaux différentiels</u> de A, en convenant d'identifier A et $u(A)$, ∂'_i et $\partial_i|_{u(A)}$.

En particulier, une extension de corps différentiels est dite <u>extension différentielle</u>.

Exemples :

a) Soit $(L, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ une extension différentielle de K ; alors $(\bar{K}, \partial_1|_{\bar{K}}, \ldots, \partial_m|_{\bar{K}})$ est une extension différentielle de K : en effet, pour tout $x \in \bar{K}$, de polynôme minimal p sur K,

$$\partial_i(x) = (-\frac{1}{p'(x)})(p^{\partial_i}(x)) \in \bar{K} \quad \text{car} \quad p^{\partial_i} \quad \text{et} \quad p' \quad \text{sont dans} \quad K[X].$$

Inversement, si L est une extension algébrique d'un corps K, toute dérivation d de K se prolonge de manière unique en une dérivation $\bar{d}$ de L, définie par :

$$\bar{d}(x) = -\frac{1}{p'(x)} p^d(x), \quad \text{où } p \text{ est le polynôme minimal de } x \in L$$

sur K.

En particulier, si $(K, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ est un corps différentiel, ∂_i se prolonge en une dérivation $\overline{\partial_i}$ de L, et comme $[\bar{\partial}_i, \bar{\partial}_j]|_K = [\partial_i, \partial_j] = 0$, on a $[\bar{\partial}_i, \bar{\partial}_j] = 0$ et $(L, \bar{\partial}_1, \ldots, \bar{\partial}_m)$ est une extension différentielle de K.

b) Etant donnés un anneau commutatif A et une partie multiplicative S de A, toute dérivation d de A se prolonge de manière unique en une dérivation $\bar{d}$ de $A[S^{-1}]$ définie par, $\bar{d}(\frac{a}{s}) = \frac{d(a)s - ad(s)}{s^2}$, $\forall \ \frac{a}{s} \in A[S^{-1}]$.

(cf. [A IV] § 4 prop. 11) ; si d et ∂ sont des dérivations de A, on a alors $[\bar{d}, \bar{\partial}] (\frac{a}{s}) = \frac{s^3[d,\partial](a) - s^2 a[d,\partial](s)}{s^4} = \overline{[d,\partial]}(\frac{a}{s})$; si $(A, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ est une extension d'anneaux différentiels de B, $(A[S^{-1}], \bar{\partial}_1, \ldots, \bar{\partial}_m)$ est donc une extension d'anneaux différentiels de B : en effet, on a $\overline{\partial_i}(B) = \partial_i(B) \subset B$ et $[\bar{\partial}_i, \bar{\partial}_j] = \overline{[\partial_i, \partial_j]} = 0$; en particulier si A est intègre de corps des fractions F, $(F, \bar{\partial}_1, \ldots, \bar{\partial}_m)$ est une extension d'anneaux différentiels de B.

c) Soit $(L, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ une extension différentielle de K et $(A, \partial_1^A, \ldots, \partial_m^A)$ une extension d'anneaux différentiels de K ; pour tout i, $\partial_i^{\otimes} : a \otimes \alpha \mapsto \partial_i(a) \otimes \alpha + a \otimes \partial_i^A(\alpha)$ est une dérivation de $L \otimes_K A$, $[\partial_i^{\otimes}, \partial_j^{\otimes}] = 0$ et l'homomorphisme canonique $\eta_1 : a \mapsto a \otimes 1$ est différentiel ; $(L \otimes_K A, \partial_1^{\otimes}, \ldots, \partial_m^{\otimes})$ est donc une extension d'anneaux différentiels de L ; si de plus $L \otimes_K A$ est intègre, de corps des fractions F, et si $\hat{\partial}_i = \overline{\partial_i^{\otimes}}$, alors $(F, \hat{\partial}_1, \ldots, \hat{\partial}_m)$ est une extension différentielle de L.

Soit $(L, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ une extension différentielle de K.

L'ensemble <u>Gal(L/K)</u> des K-automorphismes différentiels de corps de L est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(L/K)$, appelé <u>groupe de Galois différentiel</u> de L sur K ; L est une extension <u>normale</u> de K si tout sous-corps différentiel M de L, contenant K, est le corps des invariants de $\mathrm{Gal}(L/M)$.

Il y a alors une correspondance biunivoque entre les sous-corps différentiels de L contenant K, et les sous-groupes de $\mathrm{Gal}(L/K)$: à un sous-groupe H de $\mathrm{Gal}(L/K)$ on associe le corps des invariants de H, et a un sous-corps M, le sous-groupe $\mathrm{Gal}(L/M)$.

<u>*Remarques*</u> :

a) Si L est une extension normale de K, et M un sous-corps différentiel de L contenant K tel que $\mathrm{Gal}(L/M)$ soit un sous-groupe distingué de $\mathrm{Gal}(L/K)$, alors M est une extension normale de K ([DL] III § 3), mais $\mathrm{Gal}(L/K)/\mathrm{Gal}(L/M)$ est isomorphe à un sous-groupe, en général propre, de $\mathrm{Gal}(M/K)$; ceci a conduit R. KOLCHIN à introduire les extensions fortement normales, pour lesquelles on ait, cette fois, une "bonne" théorie de Galois (voir [0.43]).

b) Soit L une extension algébrique d'un corps différentiel $(K,\partial_1,\ldots,\partial_m)$; tout sous-corps M de L contenant K est algébrique sur K, donc est un sous-corps différentiel de $(L,\bar{\partial}_1,\ldots,\bar{\partial}_m)$ ([0.41] ex.(a)), et tout M-automorphisme σ de L est différentiel : en effet, pour tout $x \in L$, de polynôme minimal p sur M, $\sigma(\bar{\partial}_i(x)) = -\dfrac{1}{p'(\sigma(x))}(p^{\partial_i}(\sigma(x))) = \bar{\partial}_i(\sigma(x))$ [0.34] car $\sigma(x)$ a aussi pour polynôme minimal p ; ainsi $\mathrm{Aut}(L/M) = \mathrm{Gal}(L/M)$, et L est une extension normale de K si et seulement si L est une extension galoisienne de K [0.21].

0.42. - Soit $(K,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ un corps différentiel, $k = K_c$.

<u>*Lemme 1*</u>.- Soit $(y_j)_{1\leq j\leq n}$ une famille d'éléments de K.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) la famille $(y_j)_{1\leq j\leq n}$ est liée sur k ;

ii) pour tout $(\alpha^1,\ldots,\alpha^n) \in (\mathbb{N}^m)^n$ tel que $|\alpha^i| \leq n-1$ pour tout i, on a

$$\det\left[\partial^{\alpha^i}(y_j)\right]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} = 0 \quad \left(\partial^{\alpha^i} = \partial_1^{\alpha_1^i} \circ \partial_2^{\alpha_2^i} \circ \ldots \circ \partial_m^{\alpha_m^i}\right).$$

<u>*Démonstration*</u> : i) $\Rightarrow$ ii).

Si $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j = 0$, où $\lambda_j \in k$, pour tout $(\alpha^1,\ldots,\alpha^n) \in (\mathbb{N}^m)^n$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \partial^{\alpha^i}(y_j) = 0$ et par suite $\det\left[\partial^{\alpha^i}(y_j)\right]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) récurrence sur n : pour $n = 1$, le résultat est trivial ; si la propriété est vérifiée pour $n-1$ et si $(y_j)_{1\leq j\leq n-1}$ est libre sur k, il existe $(\alpha^1,\ldots,\alpha^{n-1}) \in (\mathbb{N}^m)^{n-1}$ tel que $|\alpha^i| \leq n-2$ et $\det\left[\partial^{\alpha^i}(y_j)\right]_{\substack{1\leq i\leq n-1\\ 1\leq j\leq n-1}} \neq 0$; pour tout $\alpha^n \in \mathbb{N}^m$ tel que $|\alpha^n| \leq n-1$, la famille $(\partial^{\alpha^i}(y_j))_{1\leq j\leq n-1}$ de K^n

est donc libre sur K, alors que par hypothèse la famille $(\partial^{\alpha^i}(y_j))_{1\leq j\leq n}$ de K^n est liée sur K ; il existe donc un unique $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}) \in K^{n-1}$ tel que : (1) $\partial^{\alpha^i}(y_n) = \sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s(\partial^{\alpha^i}(y_s))$. Pour tout $p = 1,\ldots,m$ et $i = 1,\ldots,n-1$ on a donc $\partial_p \circ \partial^{\alpha^i}(y_n) = \sum_{s=1}^{n-1} \partial_p(\lambda_s)(\partial^{\alpha^i}(y_s)) + \sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s \partial_p \circ [\partial^{\alpha^i}(y_s)]$;

or en appliquant (1) à $\alpha^n = \alpha^i + p$, on en déduit que $\sum_{s=1}^{n-1} \partial_p(\lambda_s)(\partial^{\alpha^i}(y_s)) = 0$, et par suite $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}) \in k^{n-1}$; d'où le résultat en appliquant (1) à $\alpha^n = 0$. ∎

Conséquences :

a) Soient $(L,\partial_1,\ldots,\partial_n)$ une extension différentielle de K, $\ell = L_c$ et $k = K_c$; alors les sous k-algèbres K et ℓ sont linéairement disjointes sur k : en effet, il suffit que toute famille $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de ℓ liée sur K soit liée sur k ; or si $(x_{\lambda_j})_{1\leq j\leq n}$ est liée sur K, $\det[x_{\lambda_j}] = 0$, d'où le résultat, puisque pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m - \{0\}$, $\partial^\alpha(x_{\lambda_j}) = 0$; en particulier, on a donc $K \cap \ell = k$.

b) Si K est algébriquement fermé dans L, alors k est algébriquement fermé dans ℓ : en effet $\bar{k} \subset \bar{K} \cap \ell = K \cap \ell = k$.

Lemme 2.- Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, $\ell = L_c$ et $k = K_c$.

Si L est de type fini sur K, alors ℓ est de type fini sur k et $d.tr(\ell/k) = d.tr(K(\ell)/K) \leq d.tr(L/K)$.

Démonstration : $K(\ell)$, sous-corps de L, est de type fini sur K, donc il existe $z_1,\ldots,z_p \in \ell$ tels que $K(\ell) = K(z_i)$; on montre que $\ell = k(z_i)$: en effet, une base $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de K sur k engendre $K(z_i) = K(\ell)$ sur $k(z_i)$, donc tout $a \in \ell$ s'écrit $a = \sum_\lambda g_\lambda x_\lambda / \sum_\lambda b_\lambda x_\lambda$ avec $g_\lambda, b_\lambda \in k(z_i)$; ainsi $\sum_\lambda (g_\lambda - ab_\lambda)x_\lambda = 0$, avec $g_\lambda - ab_\lambda \in \ell$. K et ℓ étant linéairement disjoints sur k, la famille $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est libre sur ℓ, donc $g_\lambda - ab_\lambda = 0$; il existe $\lambda_o \in \Lambda$ tel que $b_{\lambda_o} \neq 0$ et $a = \frac{g_{\lambda_o}}{b_{\lambda_o}} \in k(z_i)$.

$\ell = k(z_i)$ est donc de type fini sur k, et en utilisant la disjonction linéaire de K et ℓ, on en déduit que $d.tr(K(\ell)/K) = d\ tr(\ell/k)$ ([A V] § 5, prop. 10). ∎

0.43. - Soit $(U,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, $C = U_c$ et $k = K_c$.

On suppose que U est <u>universelle</u>, au sens que pour tout sous-corps différentiel L de U, de type fini sur K, et pour toute extension différentielle de type fini $(F,\partial_1',\ldots,\partial_m')$ de L, il existe un L-homomorphisme différentiel de corps $\alpha : F \to U$.

Soit $\sigma : K \to U$ un k-homomorphisme différentiel de corps et $\underline{K_\sigma} = \sigma(K)$; $K[K_\sigma]$ est un sous-anneau différentiel de U et par suite $(K(K_\sigma),\partial_1|_{K(K_\sigma)},\ldots,\partial_m|_{K(K_\sigma)})$ est un sous-corps différentiel de U de corps des constantes noté $\underline{\Lambda_\sigma}$.

Si $K(K_\sigma) = K(\Lambda_\sigma)$ (resp. $K(K_\sigma) = K_\sigma(\Lambda_\sigma)$) alors $K_\sigma \subset K(C)$ (resp. $K \subset K_\sigma(C)$) ; réciproquement, si $K_\sigma \subset K(C)$, alors $K(K_\sigma) \subset K(C)$: en effet, K et C étant linéairement disjoints sur k, une base $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de K sur k est une base de $K[C]$ sur C ; si $v \in K(K_\sigma)$, v s'écrit $v = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda / \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda x_\lambda$ $(a_\lambda, b_\lambda \in C)$ et la famille $(vx_\lambda, x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est liée sur C, donc sur Λ_σ ($K(K_\sigma)$ et C sont linéairement disjoints sur Λ_σ) et par suite $v \in K(\Lambda_\sigma)$ et $K(K_\sigma) = K(\Lambda_\sigma)$. De même si $K \subset K_\sigma(C)$, alors $K(K_\sigma) = K_\sigma(\Lambda_\sigma)$.

Le k-homomorphisme différentiel de corps σ est <u>fort</u> si $K(K_\sigma) = K(\Lambda_\sigma) = K_\sigma(\Lambda_\sigma)$ ($\Longleftrightarrow$ $K_\sigma \subset K(C)$ et $K \subset K_\sigma(C)$) ; en particulier si $K_\sigma = K$, σ est fort.

Un homomorphisme différentiel de corps $\sigma' : K \to U$ est une spécialisation de σ s'il existe un homomorphisme différentiel d'anneaux $\tau : K[K_\sigma] \to U$ tel que τ soit un K-morphisme et $\tau|_{K_\sigma} = \sigma' \circ \sigma^{-1}$; alors, en particulier, $\sigma' = \tau|_{K_\sigma} \circ \sigma$ est un k-morphisme. De plus, si $K_\sigma \subset K(C)$, alors $\sigma'(K) = K_{\sigma'} \subset K(C)$: en effet, si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base de transcendance de K sur k et $\alpha \in K$, $\sigma(\alpha) \in K(C)$, donc il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_{p+q}$ dans Λ, avec $p \geq 1$, tels que la famille $(\sigma(\alpha)x_{\lambda_s}, x_{\lambda_{p+t}})_{\substack{1\leq s\leq p\\ 1\leq t\leq q}}$ de $K[K_\sigma] \subset U$ soit liée sur C, d'où pour tout $(\alpha^1,\dots,\alpha^{p+q}) \in (\mathbb{N}^m)^p$ avec $|\alpha^i| \leq p+q-1$, $\det[\partial^{\alpha^s}(\sigma(\alpha)x_{\lambda_s}), \partial^{\alpha^{p+t}}(x_{\lambda_{p+t}})] = 0$ (lemme 1). En appliquant τ à ce déterminant, on en déduit que la famille $(\sigma'(\alpha)x_{\lambda_s}, x_{\lambda_{p+t}})_{\substack{1\leq s\leq p\\ 1\leq t\leq q}}$ est liée sur C ; $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ étant libre sur C, il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_q,\beta_1,\dots,\beta_p \in C$ (β_i non tous nuls) tels que $\sum_{s=1}^{p} \beta_s\sigma'(\alpha)x_{\lambda_s} - \sum_{t=1}^{q} \alpha_t x_{\lambda_{p+t}} = 0$, et par suite $\sigma'(\alpha) \in K(C)$; de là même manière, si $K \subset K_\sigma(C)$ alors $K \subset K_{\sigma'}(C)$. On conclut ainsi : toute spécialisation d'un k-homomorphisme différentiel fort est un k-homomorphisme fort.

Soit $(L, \partial_1|_L, \dots, \partial_m|_L)$ un sous-corps différentiel de U contenant K, de corps des constantes ℓ.

L est une extension fortement normale (KL) de K (définition de E.R. KOLCHIN dans [KL] § 2) si :

* L est une extension de type fini de K

* tout K-homomorphisme différentiel de corps de L dans U est fort (donc est en particulier un ℓ-morphisme).

Il suffit pour cela que L soit une extension de type fini de K telle que $\ell = k$ et que pour tout K-homomorphisme différentiel de corps $s : L \to U$, on ait $L_s = s(L) \subset L(C)$: en effet, si i est l'injection canonique de L_s dans $L(L_s)$, $L(L_s)$ est, par $i \circ s$, une extension différentielle de type fini de L ; il existe donc un L-homomorphisme différentiel de corps $\vartheta : L(L_s) \to U$ et $\vartheta(L_s) = L$; si $t = \vartheta|_L$ alors $L_t = t(L) \subset L(C)$ donc si $\Lambda_t = [L(L_t)]_c$, on a $L_t \subset L(L_t) = L(\Lambda_t)$; $\vartheta(L(L_s)) = L(L_t)$, donc si $\Lambda_s = [L(L_s)]_c$, on a $\vartheta^{-1}(\Lambda_t) = \Lambda_s$ d'où $L = \vartheta^{-1}(L_t) \subset \vartheta^{-1}(L(\Lambda_t)) = L_s(\Lambda_s)) \subset L_s(C)$, et s est donc un $\mathcal{L}$-homomorphisme fort.

0.44. - Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K.

L est une extension <u>fortement normale</u> (BB) de K (définition de BIALYNICKI-BIRULA dans [BB] § 3) si :

* L est une extension de type fini de K
* L et K ont même corps des constantes k
* L est une extension régulière de K (donc, en particulier, $L \otimes_K L$ est intègre et K est algébriquement fermé dans L)
* si F est le corps des fractions de $L \otimes_K L$ et $\mathcal{L}$ le corps des constantes de $(F,\hat{\partial}_1,\ldots,\hat{\partial}_m)$, alors $F = L(\mathcal{L})$.

$\mathcal{L}$ est alors de type fini sur k et $d.tr(\mathcal{L}/k) = d.tr(L/K)$: en effet, $F = Fr(L \otimes_K L)$ est de type fini sur L et $d.tr(F/L) = d.tr(L/K)$ ([0.22] - Lemme 1), donc $\mathcal{L}$ est de type fini sur k et $d.tr(\mathcal{L}/k) = d.tr(L(\mathcal{L})/L)$ ([0.42] - Lemme 2).

D'autre part, F est une extension régulière de L : en effet, si A est une L-algèbre intègre et $S = (L \otimes_K L) - \{0\}$, l'anneau $F \otimes_L A$ est canoniquement isomorphe à $(L \otimes_K L[S^{-1}] \otimes_{L\otimes_K L}(L \otimes_K A)$, donc à $(L \otimes_K A)[T^{-1}]$, où $T = 1_L \otimes \eta_A(S)$, qui est intègre puisque $L \otimes_K A$ l'est.

On déduit donc de ([0.42] - Lemme 1 cons. b) que k est algébriquement fermé dans $\mathcal{L}$.

Proposition 3.- Soient $(L,\partial_1,\ldots,\partial_n)$ une extension différentielle de K contenue dans une extension universelle U de K, $C = U_c$, $\ell = L_c$ et $k = K_c$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) L est une extension fortement normale (BB) de K.

ii) K est algébriquement fermé dans L et L est une extension fortement normale (KL) de K.

Démonstration :

Dans les deux cas L est une extension régulière de K, et si F est le corps des fractions de $L \otimes_K L$, $(F,\hat{\partial}_1,\ldots,\hat{\partial}_m)$ est une extension différentielle de type fini de L. Il existe donc un L-homomorphisme différentiel de corps $\alpha : F \to U$; en particulier, $\forall x \in L$, $\alpha(x \otimes 1) = x$ (F L-algèbre par η_1). Soit alors le K-homomorphisme différentiel de corps $\beta = \alpha \circ \eta_2 : L \to U$, et $L_\beta = \beta(L)$.

i) => ii)

Le composé de l'isomorphisme canonique $\Psi : (L \otimes 1) \otimes_K (1 \otimes L) \to (L \otimes 1)[1 \otimes L]$ et de la restriction de α à $(L \otimes 1)[1 \otimes L]$ est un K-isomorphisme différentiel d'anneaux de $(L \otimes 1) \otimes_K (1 \otimes L)$ sur $\alpha((L \otimes 1)[1 \otimes L]) = L[L_\beta]$. Notons $\sigma : L[L_\beta] \to (L \otimes 1) \otimes_K (1 \otimes L)$ le K-isomorphisme réciproque. Pour tout K-homomorphisme différentiel de corps $s : L \to U$, on considère le composé τ de σ, de $\eta_1^{-1} \otimes (s \circ \eta_2^{-1})$ et de l'homomorphisme canonique $\Psi_s : L \otimes_K L_s \to U$ ($L_s = s(L)$) ; τ est un L-homomorphisme différentiel d'anneaux de $L[L_\beta]$ dans U et $\tau|_{L_\beta} = s \circ \beta^{-1}$, donc s est une spécialisation de β ; or, α étant un K-isomorphisme différentiel de corps de $F = (L \otimes 1)(1 \otimes L)$ sur $L(L_\beta)$, si $\Lambda_\beta = [L(L_\beta)]_c$, $\alpha(\mathcal{L}) = \Lambda_\beta$ et $L(L_\beta) = \alpha(L(\mathcal{L}))$, donc $L(L_\beta) = L(\Lambda_\beta)$, d'où $L_\beta \subset L(C)$. Ainsi β est fort, donc aussi s.

ii) => i).

β est fort, donc ℓ-linéaire, i.e, $\forall \lambda \in \ell \quad \alpha(1 \otimes \lambda) = \lambda$ $= \alpha(\lambda \otimes 1)$, d'où $1 \otimes \lambda = \lambda \otimes 1$ et $\lambda \in K \cap \ell = k$, soit $k = \ell$; de plus $F = \alpha^{-1}(L(L_\beta)) = \alpha^{-1}(L(\Lambda_\beta)) = L(L)$. ∎

0.45. - Soit k un corps commutatif.

Si V est une variété abstraite définie sur k ([La] IV § 6), V est un <u>modèle</u> d'une extension K de k, si K est k-isomorphe au corps des fonctions <u>k(V)</u> de V sur k, i.e à l'ensemble des applications rationnelles définies sur k, de V dans la droite affine Δ ; réciproquement, étant donnée une extension régulière de type fini K de k, il existe (au moins) un modèle de K sur k ([La] II § 3).

La <u>dimension de V</u> sur k est le degré de transcendance de k(V) sur k.

Une variété abstraite G, définie sur k, est un <u>groupe algébrique</u> défini sur k, si G est muni d'une structure de groupe telle que la loi de composition interne $(x,y) \mapsto xy$ (resp. l'inversion $x \to x^{-1}$) soit une application rationnelle, définie sur k, et partout définie ([La] IV § 3) de $G \times G$ dans G (resp. de G dans G).

Si K est une extension de k, et G un groupe algébrique défini sur k, l'ensemble $\underline{G_K}$ des points de G rationnels sur K (i.e dont les coordonnées appartiennent à K) est un groupe algébrique défini sur K.

Un groupe algébrique G est <u>affine</u> (ou linéaire) si G est une variété affine.

Etant donné un groupe algébrique G, défini sur k, une variété abstraite V, définie sur k, est un <u>G-espace homogène principal</u> s'il existe une application rationnelle, définie sur k, partout définie, $T : G \times V \to V$, telle que G opère sur V, et, $\forall\, v,w \in V$, il existe un unique $g \in G$ tel que $T(g,r) = w$ (v est donc un G-ensemble principal homogène au sens de [AI] § 5 n°6). Etant donné $g \in G$, l'application $\underline{g}^T : v \to T(g,v)$ est alors une application rationnelle, définie sur k, et partout définie de V dans V ; on en déduit un k-automorphisme $\underline{\bar{g}} : f \mapsto f \circ g^T$ de $k(V)$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & S^1 \\ V \arrow[u, "g^T"] \arrow[ur, "fog^T"'] & \end{tikzcd}$$

Théorème 4. (KOLCHIN - LANG - BIALYNICKI - BIRULA)

Soit $(L,\partial_1,\dots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, de même corps des constantes algébriquement clos k que K.

a) Une condition nécessaire pour que L soit une extension fortement normale (KL) de K est qu'il existe un groupe algébrique G défini sur k, et un G_K-espace homogène principal V, défini sur K, tels que :

* V soit un modèle de L sur K ;

* $\{\bar{g}/g \in G_K\} \subset \mathrm{Gal}(L/K)$.

b) Si, de plus, G est connexe, cette condition est suffisante pour que L soit une extension fortement normale (BB) de K, et G est alors un modèle de $\mathcal{L}$ sur k.

Et dans les deux cas, on a $\mathrm{Gal}(L/K) = \{\bar{g}/g \in G_K\}$, qui est ainsi un groupe algébrique défini sur k, de dimension $d.tr(L/K)$.

Démonstration : [KL] théorème et [BB] théorème 1. ■

Remarque : Les démonstrations de ce théorème dans [KL] et [BB] reposent sur l'utilisation du théorème de WEIL : étant donné une variété abstraite V, définie sur k, munie d'une loi normale ([La] IX), il existe un unique groupe algébrique, défini sur k, birationnellement équivalent à V, et dont la loi est déduite de celle de V.

Conséquence : Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension fortement normale (BB) de K, de corps des constantes algébriquement clos k ; alors l'application qui à tout sous-groupe algébrique (connexe) H de G_K associe le corps des invariants de $\{\bar{g} | g \in H\}$ et l'application qui à tout sous-corps différentiel M de L, contenant K et algébriquement fermé dans L, associe le sous-groupe $\{g \in G_K | \bar{g}(x) = x, \forall x \in M\}$ sont des bijections réciproques, qui définissent donc une correspondance de Galois entre l'ensemble des sous-groupes algébriques (connexes) de G_K et l'ensemble des sous-corps différentiels de L, contenant K, et algébriquement fermés dans L ([BB] th. 3) ; en particulier $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ est une extension fortement normale (BB) de chacun de ces derniers ([BB] th. 2).

CHAPITRE I

D - MODULES

I.1. - *Opérateurs différentiels linéaires.*

I.11. - Soient A un anneau et E un A-module.

Pour toute application f de E dans E, on pose $f^{o} = 1_E$.

Lemme 1.- Soient n couples $(d_1, d_1^E), \ldots, (d_n, d_n^E)$ où pour tout i, d_i est une dérivation de A et d_i^E une d_i-dérivation gauche de E.
Alors $\forall\, a \in A,\ x \in E$

$$d_1^E \circ \ldots \circ d_n^E(ax) = \sum_{0 \leq i_1, \ldots, i_n \leq 1} (d_1^{i_1} \circ \ldots \circ d_n^{i_n}(a))(d_1^E)^{1-i_1} \circ \ldots \circ (d_n^E)^{1-i_n}(x) .$$

Démonstration : On a :

$d_1^E \circ \ldots \circ d_n^E(ax) = (d_1^E \circ \ldots \circ d_{n-1}^E)(d_n(a)x + a\, d_n^E(x))$; si on suppose la propriété vérifiée à l'ordre $n-1$, on a :

$$(d_1^E \circ \ldots d_{n-1}^E)(d_n(a)x) = \sum_{0 \leq i_1, \ldots, i_{n-1} \leq 1} (d_1^{i_1} \circ \ldots d_{n-1}^{i_{n-1}})(d_n(a))(d_1^E)^{s_1 - i_1} \circ \ldots \circ (d_{n-1}^E)^{1-i_{n-1}}(x),$$

et

$$(d_1^E \circ \ldots d_{n-1}^E)(a\, d_n^E(x)) = \sum_{0 \leq i_1, \ldots, i_{n-1} \leq 1} d_1^{i_1} \circ \ldots d_{n-1}^{i_{n-1}}(a)(d_1^E)^{1-i_1} \circ \ldots \circ (d_{n-1}^E)^{1-i_{n-1}}(d_n^E)^1(x) \quad ;$$

comme $d_n^{o}(a) = a$ et $(d_n^E)^{o}(x) = x$, la propriété est vérifiée au rang n. ∎

Conséquences :

a) Soient m couples $(\partial_1, \partial_1^E), \ldots, (\partial_m, \partial_m^E)$, où pour tout i, ∂_i est une dérivation de A et ∂_i^E une d_i-dérivation de E ; alors pour tout

$\alpha \in N^m$, $a \in A$, $x \in E$, on a :

formule de Leibnitz : $(\partial^E)^\alpha (ax) = \sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma(\alpha)(\partial^E)^{\alpha-\gamma}(x)$

(appliquer le lemme au cas $n = |\alpha|$, $d_1 = \ldots = d_{\alpha_1} = \partial_1, d_1^E = \ldots = d_{\alpha_1}^E = \partial_1^E$ etc...)

b) Soient K une extension d'un corps commutatif k, et $(d_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille de k-dérivations de K, libre sur K, et telle que $\sum_{i=1}^m k\, d_i$ soit une sous k-algèbre de Lie de $\mathrm{Der}_k K$; alors la famille $(d^\alpha)_{\alpha \in N^m}$ est libre sur K, et le sous K-espace vectoriel de $\mathrm{Diff}_{K/k}$ engendré par (d^α) est une sous k-algèbre de $\mathrm{Diff}_{K/k}$, appelée <u>algèbre d'opérateurs différentiels engendrée par</u> $(d_i)_{1 \leq i \leq m}$ (la démonstration de ce résultat fait l'objet de l'annexe en fin de chapitre).

Soit $(K, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ un corps différentiel, de corps des constantes k.

On suppose désormais que la famille $(\partial_i)_{1 \leq i \leq m}$ est libre sur K.

Comme, $\forall i, j$, $[\partial_i, \partial_j] = 0$, $\sum_{i=1}^m k\, \partial_i$ est un sous k-algèbre de Lie de $\mathrm{Der}_k K$; la k-algèbre d'opérateurs différentiels engendrés par les dérivations structurales $(d_i)_{1 \leq i \leq m}$ est notée $\underline{\mathcal{D}_K}$; un élément δ de $\mathcal{D}_K$ est appelé <u>opérateur différentiel</u> (linéaire) sur K (définition de J. JOHNSON dans [Jo]) ; $(\partial^\alpha)_{\alpha \in N^m}$ étant libre sur K, on a alors $\omega(\delta) = p$ si et seulement si $\delta = \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha \partial^\alpha$ et s'il existe $\alpha_o \in N^m$ tel que $|\alpha_o| = p$ et $a_{\alpha_o} \neq 0$. En particulier, un opérateur différentiel (linéaire) d'ordre 0 est de la forme a_{ℓ}, avec $a \in K - \{0\}$.

Exemple : Si K est un corps commutatif et $K = k(X,Y,Z)$, $(K, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z})$ est un corps différentiel et $\delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$ est un opérateur différentiel (linéaire) d'ordre 2 sur K.

Lemme 2.- Soient $\delta_1 = \sum\limits_{|\alpha|\leq p} a_\alpha \partial^\alpha$, $\delta_2 = \sum\limits_{|\beta|\leq q} b_\beta \partial^\beta$ non nuls dans $\mathcal{D}_K$ tels que $\omega(\delta_1) = p$ et $\omega(\delta_2) = q$. Alors :

a) $\delta_1 + \delta_2 \in \mathcal{D}_K$ et $\omega(\delta_1+\delta_2) \begin{cases} = \max(p,q) & \text{si } p \neq q. \\ \leq \max(p,q) & \text{sinon} \end{cases}$

b) $\delta_1 \circ \delta_2 \in \mathcal{D}_K$, $\omega(\delta_1 \circ \delta_2) = p+q$ et

$$\delta_1 \circ \delta_2 = \sum_{\substack{|\alpha|\leq p \\ |\beta|\leq q}} a_\alpha \{ \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\alpha (b_\beta) \partial^{\alpha+\beta-\gamma} \}.$$

Démonstration :

a) $\delta_1 + \delta_2 = \sum\limits_{0\leq|\gamma|\leq\max(p,q)} (a_\gamma + b_\gamma)\partial^\gamma$.

b) $$\delta_1 \circ \delta_2 = \sum_{\substack{|\alpha|\leq p \\ |\beta|\leq q}} a_\alpha \partial^\alpha (b_\beta \partial^\beta)$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha|\leq p \\ |\beta|\leq q}} a_\alpha \left[\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma (b_\beta) \partial^{\alpha-\gamma} \circ \partial^\beta \right]$$

d'où le résultat puisque $\partial^{\alpha+\beta-\gamma} = \partial^{\alpha-\gamma} \circ \partial^\beta$; de plus $\omega(\delta_1 \circ \delta_2) \leq p + q$ et il existe $\alpha_o, \beta_o \in \mathbb{N}^m$ tels que $|\alpha_o| = p$, $a_{\alpha_o} \neq 0$, $|\beta_o| = q$, $b_{\beta_o} \neq 0$, donc $|\alpha_o + \beta_o| = p+q$ et $a_{\alpha_o} b_{\beta_o} \neq 0$; d'où $\omega(\delta_1 \circ \delta_2) = p+q$. ■

Conséquence : $\mathcal{D}_K$ est une sous k-algèbre de $\mathrm{Diff}_{K/k}$ sans diviseurs de zéro : en effet, si δ_1 et δ_2 sont non nuls, $\omega(\delta_1 \circ \delta_2) = \omega(\delta_1) + (\delta_2) \neq -\infty$, soit $\delta_1 \circ \delta_2 \neq 0$.

1.12. - Soit (K,∂) un corps différentiel ordinaire.

Lemme 3.- *"Division euclidienne"*.

Soient $D = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \partial^i$ et $\delta = \sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j \partial^j$ dans $\mathcal{D}_K$ tels que

$0 \leqslant m = \omega(\delta) \leqslant n = \omega(D)$. Alors il existe un unique couple (B,β) d'éléments de $\mathcal{D}_K$ tels que $D = B \circ \delta + \beta$ et $\omega(\beta) < m$.

Démonstration : EXISTENCE : récurrence sur n : si $n = 0$, alors $m = 0$, $D = (a_o)_\ell$, $\delta = (\alpha_o)_\ell$ et $D = (\frac{a_o}{\alpha_o})_\ell \circ \delta$. Supposons que pour tout couple d'opérateurs différentiels d'ordres respectifs $p \leqslant n-1$ et m, $0 \leqslant m \leqslant p$, la propriété soit vérifiée ; alors, si $m = n$, on a trivialement $D = (\frac{a_n}{\alpha_n})_\ell \circ \delta + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - \frac{a_n}{\alpha_n} \alpha_i)\partial^i$; si $m \leqslant n-1$, on a $\frac{a_n}{\alpha_m} \partial^{n-m} \circ \delta$ $= \frac{a_n}{\alpha_m} \sum_{j=0}^{m} \{\sum_{i=0}^{n-m} \binom{n-m}{i} \partial^i(\alpha_j)\partial^{n-m+j-i}\} = a_n\partial^n + D_1$, avec $\omega(D_1) \leqslant n-1$. D'où

$$D = \frac{a_n}{\alpha_m} \partial^{n-m} \circ \delta - D_1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\partial^i$$

$$= \frac{a_n}{\alpha_m} \partial^{n-m} \circ \delta + D_2, \quad \text{avec} \quad \omega(D_2) \leqslant n-1 \quad ;$$

alors, ou bien $\omega(D_2) < m$ et la propriété est vérifiée, ou bien $p = \omega(D_2) \geqslant m$ et, par hypothèse de récurrence, il existe (B_1,β_1) tel que $D_2 = B_1 \circ \delta + \beta_1$ avec $\omega(\beta_1) < m$. Il reste alors à poser

$$B = \frac{a_n}{\alpha_m} \partial^{n-m} + B_1 .$$

UNICITE : S'il existe un deuxième couple (B',β') tel que $D = B' \circ \delta + \beta'$ et $\omega(\beta') < m$, alors $(B-B') \circ \delta = \beta' - \beta$. Si $B - B' \neq 0$, on aurait $\omega(\beta' - \beta) \leqslant \max(\omega(\beta'),\omega(\beta)) < m = \omega(\delta) \leqslant \omega((B-B') \circ \delta)$: impossible ; donc $B = B'$ et $\beta = \beta'$. ■

Conséquence : Tout idéal I de $\mathcal{D}_K$ est principal ; en particulier, il existe un unique opérateur différentiel $\underline{D_I}$ qui engendre I et qui soit unitaire.

I.13.- Soit $(K,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ un corps différentiel de corps des constantes k.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\underline{\mathcal{D}_K^n} = \mathcal{D}_K \cap \mathrm{Diff}^n_{K/k}(K,K) = \{\delta \in \mathcal{D}_K \mid \omega(\delta) \leq n\}$; pour tout p,q, on a $\mathcal{D}_K^p \circ \mathcal{D}_K^q \subset \mathcal{D}_K^{p+q}$, donc $\mathcal{D}_K$ est une k-algèbre filtrée par la suite croissante $(\mathcal{D}_K^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : En fait, avec les notations de l'annexe en fin de ce chapitre, on sait directement que $\mathcal{D}_K = \Omega(K \# U)$ est une k-algèbre filtrée par la suite des $\mathcal{D}_K^n = \Omega(K \otimes_k U_n)$.

Soit $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_K)$ la k-algèbre graduée associée à la filtration $(\mathcal{D}_K^n)_{n\in\mathbb{N}}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\underline{f_n}$ la surjection canonique de $\mathcal{D}_K^n$ sur $\mathrm{gr}_n(\mathcal{D}_K)$. Pour tout $\delta_1 = \sum\limits_{|\alpha|\leq p} a_\alpha \partial^\alpha$, $\delta_2 = \sum\limits_{|\beta|\leq q} b_\beta \partial^\beta$ dans $\mathcal{D}_K$ tels que $\omega(\delta_1) = p$, $\omega(\delta_2) = q$, on a

$$f_p(\delta_1) \times f_q(\delta_2) = f_{p+q}(\delta_1 \circ \delta_2) = f_{p+q}\Big(\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}} a_\alpha b_\beta \partial^{\alpha+\beta}\Big) = f_q(\delta_2) \times f_p(\delta_1),$$

car pour $|\alpha| < p$, $|\beta| < q$ ou $\gamma > 0$,

$\partial^{\alpha+\beta-\gamma} \in \mathcal{D}_K^{p+q-1} = \mathrm{Ker}\, f_{p+q}$; on en déduit que $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_K)$ est commutatif.
De plus les quotients $\mathrm{gr}_n(\mathcal{D}_K)$ et $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_K) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{gr}_n(\mathcal{D}_K)$ sont des K-espaces vectoriels de loi externe : $(a,f_p(\delta)) \mapsto f_p(a_\ell \circ \delta) = f_o(a_\ell) \times f_p(\delta)$.

$\mathrm{gr}(\mathcal{D}_K)$ étant commutatif, l'homomorphisme d'anneaux $a \mapsto f_o(a_\ell)$ munit alors $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_K)$ d'une structure de K-algèbre.

Soit $\underline{T_K}$ le sous K-espace vectoriel de $\mathcal{D}_K^1$ de base $(\partial_i)_{1\leq i\leq m}$; de la restriction de f_1 à T_K, on déduit un homomorphisme de

K-algèbres graduées $\underline{g} : \mathrm{Sym}_K(T_K) \to \mathrm{gr}(\mathcal{D}_K)$ tel que $g \circ \vartheta' = f_1|_{T_K}$. ($\vartheta'$ étant l'injection canonique de T_K dans $\mathrm{Sym}_K(T_K)$).

<u>*Lemme*</u> *4*.- g est un isomorphisme de K-algèbres de $\mathrm{Sym}_K(T_K)$ sur $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_K)$.

<u>*Démonstration*</u> :

Tout élément de $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_K)$ est une somme de $f_p(\delta)$, avec

$\delta = \sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha \partial^\alpha \in \mathcal{D}_K^p$; or $f_p(\delta) = f_p(\sum_{|\alpha|=p} a_\alpha \partial^\alpha) = \sum_{|\alpha|=p} f_o[(a_\alpha)_\ell] \times [f_1(\partial)]^\alpha$

$= g(\sum_{|\alpha|=p} a_\alpha [\vartheta'(\partial)]^\alpha)$, d'où g est surjectif. D'autre part, la famille $(f_1(\partial_i))_{1\leq i\leq m}$ est algébriquement libre sur K : en effet, si

$\sum_{|\alpha|\leq p} f_o\ [(a_\alpha)_\ell] \times [f_1(\partial)]^\alpha = 0$ ($a_\alpha \in K$), pour tout $q \leq p$, on a

$0 = \sum_{|\alpha|=0} f_o[(a_\alpha)_\ell] \times [f_1(\partial)]^\alpha = f_q(\sum_{|\alpha|=q} a_\alpha \partial^\alpha)$, i.e. $\sum_{|\alpha|=q} a_\alpha \partial^\alpha \in \mathcal{D}_K^{q-1}$;

d'où $a_\alpha = 0$ pour tout α, car sinon $\omega(\sum_{|\alpha|=q} a_\alpha \partial^\alpha) = q$.

$\mathrm{Sym}_K(T_K)$ étant engendrée, en tant que K-algèbre, par la famille $(\vartheta'(\partial_i))_{1\leq i\leq m}$, on en déduit que g est injectif. ■

<u>*Conséquence*</u> : $\mathcal{D}_K$ est un anneau noéthérien (à gauche), sans diviseur de zéro, donc admet un corps des fractions (à gauche), dont les élements sont appelés <u>opérateurs pseudo-différentiels</u> sur K (cf. [0.35] lemme 3 cons. b).

I.2. - <u>$\mathcal{D}$-modules</u>.

I.21. - Soient K une extension d'un corps commutatif k, $(d_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille de k-dérivations de K, libre sur K, telle que $\sum_{i=1}^{m} k.d_i$ soit une sous k-algèbre de Lie de $\mathrm{Der}_k K$.

On note $\mathcal{D}$ la k-algèbre d'opérateurs différentiels engendrée par $(d_i)_{1<i<m}$ i.e. la sous (k-K)-algèbre de $\mathrm{Diff}_{K/k}$ de base $(d^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^m}$ ([I.11], lemme 1, conséquence b).

Théorème 1.- Soit E un K-espace vectoriel.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) E est muni d'une structure de $\mathcal{D}$-module prolongeant sa structure de K-espace vectoriel ;

ii) Il existe une application K-linéaire $d \mapsto d^E$ qui à tout $d \in \sum_{i=1}^{m} K\, d_i$ associe une d-dérivation gauche d^E de E, telle que, $\forall i, \forall j \quad [d_i^E, d_j^E] = [d_i, d_j]^E$.

Et dans ces conditions, le $\mathcal{D}$-module E a pour loi externe :

$$\Big(\sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha d^\alpha, x\Big) \longmapsto \sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha (d^E)^\alpha (x).$$

Démonstration : i) => ii) :

Soit $(\delta, x) \mapsto \delta.x$ l'opération externe de $\mathcal{D}$ sur E ; alors, $\forall\, d \in \sum_{i=1}^{m} K\, d_i$, l'application $d^E : x \mapsto d.x$ est une d-dérivation gauche de E, car, $\forall\, a \in K$, $x \in E$, on a
$$d^E(ax) = d.(a_\ell . x) = ([d,a] + a_\ell \circ d).x = d(a)x + a\, d^E(x) \quad ;$$
le reste est immédiat.

ii) => i) :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ on pose $(d^\alpha)^E = (d^E)^\alpha$; on va montrer, par récurrence sur n, que, étant donné $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \{1,\dots,m\}^n$, on a $(d_{\lambda_1} \circ \dots \circ d_{\lambda_n})^E = d^E_{\lambda_1} \circ \dots \circ d^E_{\lambda_n}$; on suppose que cette propriété est vraie pour n-1, et qu'elle est vérifiée pour la suite $(\lambda_1,\dots,\lambda_{i+1},\lambda_i,\dots,\lambda_n)$: il existe $(u_j) \in k^m$ tel que $[d_{\lambda_i}, d_{\lambda_{i+1}}] = \sum_{j=1}^{m} u_j d_j$, donc

$$d_{\lambda_1} \circ\dots\circ d_{\lambda_i} \circ d_{\lambda_{i+1}} \circ\dots\circ d_{\lambda_n} = d_{\lambda_1} \circ\dots\circ (d_{\lambda_{i+1}} \circ d_{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{m} u_j d_j) \circ\dots\circ d_{\lambda_n}$$

$$= d_{\lambda_1} \circ \ldots \circ d_{\lambda_{i+1}} \circ d_{\lambda_i} \circ \ldots \circ d_{\lambda_n} + \sum_{j=1}^{m} u_j d_{\lambda_1} \circ \ldots \circ d_{\lambda_{i-1}} \circ d_j \circ d_{\lambda_{i+2}} \circ \ldots \circ d_{\lambda_n} ,$$

et par suite,

$$(d_{\lambda_1} \circ \ldots \circ d_{\lambda_n})^E = d^E_{\lambda_1} \circ \ldots \circ (d^E_{\lambda_{i+1}} \circ d^E_{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{m} u_j d^E_j) \circ \ldots \circ d^E_{\lambda_n}$$

$$= d^E_{\lambda_1} \circ \ldots \circ d^E_{\lambda_i} \circ d^E_{\lambda_{i+1}} \circ \ldots \circ d^E_{\lambda_n} \quad \text{car} \quad [d^E_{\lambda_i}, d^E_{\lambda_{i+1}}] = (\sum_{j=1}^{m} u_j d_j)^E \quad ;$$

comme, par définition, la propriété est vérifiée par la suite obtenue en rangeant $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ dans l'ordre croissant, on en déduit qu'elle est vraie pour $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$; on définit alors l'opération externe

$(\delta = \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha d^\alpha, x) \mapsto \delta.x = \sum_{|\alpha| \leq p} a\, (d^E)^\alpha(x)$; on a en particulier, $\forall\, a \in K$, $a_\ell.x = a(d^E)^o(x) = ax$; de plus, pour tout $\delta_1 = \sum_{|\alpha| \leq p} a\, d^\alpha$, $\delta_2 = \sum_{|\beta| \leq q} b_\beta d^\beta$, on a

$$(\delta_1 \circ \delta_2).x = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha \Big(\sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} d^\gamma(b_\beta)(d^{\alpha-\gamma} \circ d^\beta)^E \Big)(x)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha \Big(\sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} d^\gamma(b_\beta)(d^E)^{\alpha-\gamma} \circ (d^E)^\beta \Big)(x).$$

$$= \delta_1.(\delta_2.x) \quad ; \quad \text{le reste est immédiat.} \ \blacksquare$$

Remarque : Etant donné un sous K-espace vectoriel T de $\mathrm{Der}_k K$, un K-espace vectoriel E est un T-module (Définition de J. MANIN dans [Ma] § 1) si T opère sur E de façon que, $\forall\, d \in T$, l'application $d^E : x \mapsto d.x$ soit une d-dérivation gauche de E, et que l'application $d \mapsto d^E$ soit K-linéaire ; cette application est appelée loi de dérivation sur E (cette définition généralise celle de H. OSEKI dans [Os] § 5 ; voir aussi [Kz] 1.2).

Si de plus, $(d_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une base de T sur K, et si $\sum_{i=1}^{m} k\, d_i$

est une sous k-algèbre de Lie de $\mathrm{Der}_k K$, une connexion $d \mapsto d^E$ sur E est dite à <u>courbure nulle</u> si $[d_i^E, d_j^E] = [d_i, d_j]^E$, $\forall i,j$; le théorème 1 peut alors s'énoncer : un $\mathcal{D}$-module est un T-module dont la loi de dérivation est à courbure nulle $(T = \sum_{i=1}^{m} K\, d_i)$.

<u>*Conséquences*</u> :

a) Soit E un $\mathcal{D}$-module. Une partie E' de E est un sous $\mathcal{D}$-module de E si et seulement si E' est un sous K-espace vectoriel de E tel que $d_i^E(E') \subset E'$, $\forall\, i$: en effet, dans ce dernier cas, $d_i^E|_{E'}$ est une d_i-dérivation gauche de E'.

b) Soient E et E' deux $\mathcal{D}$-modules. Une application $\varphi : E \to F$ est $\mathcal{D}$-linéaire si et seulement si φ est K-linéaire et si, $\forall\, i$, on a $\varphi \circ d_i^E = d_i^F \circ \varphi$: en effet, dans ce dernier cas, on vérifie que $\varphi \circ (d^E)^\alpha = (d^F)^\alpha \circ \varphi$, par récurrence sur $|\alpha|$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "d_i^E"] \arrow[d, "\varphi"'] & E \arrow[d, "\varphi"] \\ F \arrow[r, "d_i^F"] & F \end{tikzcd}$$

1.22. - <u>*Note*</u> : On limite désormais l'étude des $\mathcal{D}$-modules, au cas suivant : $(K, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ est un corps différentiel de corps des constantes k, et $\mathcal{D} = \mathcal{D}_K$ [1.12] ; cependant, le lecteur pourra vérifier que les définitions et propriétés de ce chapitre s'étendent sans difficulté aux $\mathcal{D}$-modules en général.

Soit $(K, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ un corps différentiel de corps des constantes k.

<u>*Théorème*</u> *1 bis*.- Soit E un K-espace vectoriel.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) E est muni d'une structure de $\mathcal{D}_K$-module prolongeant sa structure de K-espace vectoriel.

ii) pour tout i, il existe une ∂_i-dérivation gauche $\underline{\partial_i^E}$ de E telle que $[\partial_i^E, \partial_j^E] = 0 \quad \forall i, \forall j$.

Dans ces conditions, le $\mathcal{D}_K$-module E a pour loi externe :

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha \partial^\alpha, x\right) \longmapsto \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha (\partial^E)^\alpha (x). \quad \blacksquare$$

Exemples :

a) K est un $\mathcal{D}_K$-module de dérivations gauches ∂_i ;

b) Pour tout ensemble Λ, K^Λ est un $\mathcal{D}_K$-module de dérivations gauches de structure : $(f_\lambda)_{\lambda \in \lambda} \longrightarrow (\partial_i(f_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$; en particulier, $K^{(\Lambda)}$ est un sous $\mathcal{D}_K$-module de K^Λ.

c) Pour tout k-espace vectoriel V, $K \otimes_k V$ est un $\mathcal{D}_K$-module de dérivations gauches de structure : $a \otimes x \mapsto \partial_i(a) \otimes x$, et si $(v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une base de V sur k, le K-isomorphisme canonique :

$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \otimes v_\lambda \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda . \lambda$ de $K \otimes_k V$ sur $K^{(\Lambda)}$ est $\mathcal{D}_K$-linéaire.

Proposition 2.-

a) Soient E et F deux $\mathcal{D}_K$-modules ; alors $E \otimes_K F$ est un $\mathcal{D}_K$-module de dérivations gauches de structure $\underline{\partial_i^\otimes} = \partial_i^E \otimes 1_F + 1_E \otimes \partial_i^F$.

b) Soient $u : E \to E'$, $v : F \to F'$ deux applications $\mathcal{D}_K$-linéaires, alors $u \otimes v$ est une application $\mathcal{D}_K$-linéaire de $E \otimes_K F$ dans $E' \otimes_K F'$.

Démonstration :

a) Pour tout $a \in K$, $x \otimes y \in E \otimes_K F$, on a
$\forall i$, $\partial_i^\otimes(a(x \otimes y)) = \partial_i^E(ax) \otimes y + ax \otimes \partial_i^F(y) = a\, \partial_i^\otimes(x \otimes y) + \partial_i(a)(x \otimes y)$, d'où, par linéarité, $\partial_i^\otimes$ ∂_i-dérivation gauche de $E \otimes_K F$; de plus :
$\forall i, \forall j$, $[\partial_i^\otimes, \partial_j^\otimes] = [\partial_i^E, \partial_j^E] \otimes 1_F + 1_E \otimes [\partial_i^F, \partial_j^F] = 0$.

b) on a, $\forall i$, $(u\otimes v) \circ \partial_i^{\otimes} = \partial_i^E \circ u \otimes v + u \otimes \partial_i^F \circ v = \partial_i^{\otimes} \circ (u\otimes v)$. ■

Conséquence : Soient $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, et E un $\mathcal{D}_K$-module ; alors $L \otimes_K E$ est un $\mathcal{D}_L$-module de dérivations gauches de structure $\partial_i^{\otimes} = \partial_i \otimes 1_E + 1_L \otimes \partial_i^E$: en effet, L étant un $\mathcal{D}_K$-module de dérivations gauches de structure ∂_i, le L-espace vectoriel $L \otimes_K E$ satisfait à la condition ii) du théorème 1 bis.

Etant donnée une application $\mathcal{D}_K$-linéaire $u : E \to F$, $1_L \otimes u$ est alors une application $\mathcal{D}_L$-linéaire de $L \otimes_K E$ dans $L \otimes_K F$.

I.23. -

Proposition 3.- Soient k_o un sous-corps différentiel de K et E,F deux $\mathcal{D}_K$-modules.

a) $\mathrm{Hom}_{k_o}(E,F)$ est un $\mathcal{D}_K$-module de dérivations gauches de structure ∂_i^H où $\partial_i^H(f) = \partial_i^F \circ f - f \circ \partial_i^E$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{k_o}(E,F)$;

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Diff}^n_{K/k_o}(E,F)$ est un sous $\mathcal{D}_K$-module de $\mathrm{Hom}_{k_o}(E,F)$;

c) $\mathrm{Der}_{k_o}(K,E)$ est un sous $\mathcal{D}_K$-module de $\mathrm{Diff}^1_{K/k_o}(K,E)$.

Démonstration :

a) pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{k_o}(E,F)$, $x \in E$, $\alpha \in k_o$, on a :

$\forall i$, $\partial_i^H(f)(\alpha x) = \partial_i(\alpha)f(x) + \alpha\, \partial_i^F \circ f(x) - f(\partial_i(\alpha)x + \alpha\partial_i^E(x)) = \alpha\partial_i^H(f)(x)$

car $\partial_i(\alpha) \in k_o$; donc ∂_i^H est bien k_o-linéaire ; de plus, $\forall a \in K$, on a

$\partial_i^H(af)(x) = \partial_i(a)f(x) + a\, \partial_i^F \circ f(x) - (af) \circ \partial_i^E(x) = (\partial_i(a)f + a\partial_i^H(f))(x)$

d'où ∂_i^H est une ∂_i-dérivation gauche de $\mathrm{Hom}_{k_o}(E,F)$. Enfin, $\forall i$, $\forall j$

$$[\partial_i^H,\partial_j^H](f) = [\partial_i^F,\partial_j^F] \circ f - f \circ [\partial_i^E,\partial_j^E] = 0.$$

b) $\forall i$, ∂_i est une dérivation de K et ∂_i^E (resp. ∂_i^F) une ∂_i-dérivation gauche de E (resp. de F), donc d'après ([0.33] lemme 2), pour tout

$u \in \mathrm{Diff}^n_{K/k_o}(E,F)$, $\partial^H_i(u) = \partial^F_i \circ u - u \circ \partial^E_i \in \mathrm{Diff}^n_{K/k_o}(E,F)$.

c) d'après la conséquence a) du lemme 2 de [0.33], si $u \in \mathrm{Der}_{k_o}(K,E)$ alors $\partial^H_i(u) \in \mathrm{Der}_{k_o}(K,E)$. ■

Conséquences :

a) $\psi : E \to F$ est $\mathcal{D}_K$-linéaire si et seulement si, on a, dans $\mathrm{Hom}_K(E,F)$, $\partial^H_i(\psi) = 0, \forall i$.

b) le dual $\underline{E^*} = \mathrm{Hom}_K(E,K)$ de E est un $\mathcal{D}_K$-module de dérivations gauches $\underline{\partial^*_i}$ où $\partial^*_i(f) = \partial_i \circ f - f \circ \partial^E_i$, $\forall f \in E^*$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & K \\ {\scriptstyle \partial^E_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial_i} \\ E & \xrightarrow[f]{} & K \end{array}$$

Proposition 4.-

Soient E et F deux $\mathcal{D}_K$-modules.

a) si $\psi : E \to F$ est $\mathcal{D}_K$-linéaire, alors sa transposée ${}^t\psi : F^* \to E^*$ est $\mathcal{D}_K$-linéaire.

b) le K-homomorphisme canonique $\theta : E \to E^{**}$ est $\mathcal{D}_K$-linéaire.

Démonstration :

a) pour tout $f \in F^*$, on a, $\forall i$,

$${}^t\psi[\partial^*_i(f)] = (\partial_i of - fo\partial^F_i) \circ \psi = \partial_i \circ (fo\psi) - (fo\psi) \circ \partial^E_i = \partial^*_i\{{}^t\psi(f)\} \quad ;$$

b) pour tout $f \in E^*$, $x \in E$, $\langle f,\theta(x)\rangle = f(x)$, et si on note ∂^{**}_i les dérivations gauches de structure de E^{**}, on a, $\forall i$,

$$\langle f,\partial^{**}_i(\theta(x))\rangle = \langle f,\partial_i \circ \theta(x) - \theta(x)o\partial^*_i\rangle = \partial_i(f(x)) - (\partial_i of - fo\partial^E_i)(x) = \langle f,\theta(\partial^E_i(x))\rangle,$$

soit $\partial^{**}_i \circ \theta = \theta \circ \partial^E_i$. ■

Soit k_o un sous-corps différentiel de K.

Une (k_o,K)-algèbre A, muni d'une structure de $\mathcal{D}_K$-module telle que les dérivations gauches de structure ∂_i^A soient des dérivations de A, est appelée <u>(k_o,K)-algèbre différentielle</u>. Si $k_o = K$, on dit simplement <u>K-algèbre différentielle</u>.

Exemples :

a) Diff_{K/k_o} est une (k_o,K)-algèbre différentielle de dérivations de structure $\underline{\tilde{\partial}_i}$ où $\tilde{\partial}_i(u) = [\partial_i,u]$, $\forall\, u \in \mathrm{Diff}_{K/k_o}$: en effet, d'après la proposition 3, la k_o-algèbre Diff_{K/k_o} est un $\mathcal{D}_K$-module de dérivations gauches de structure $\tilde{\partial}_i$; et $\forall u,v \in \mathrm{Diff}_{K/k_o}$, on a $[\partial_i, u\circ v] = [\partial_i,u] \circ v + u \circ [\partial_i,v]$, i.e. $\tilde{\partial}_i$ est une dérivation de Diff_{K/k_o}.

b) Une extension d'anneaux différentiels $(A,\partial_1^A,\ldots,\partial_m^A)$ de K est une K-algèbre différentielle, car, $\forall i$, ∂_i^A est trivialement une ∂_i-dérivation gauche de A et $[\partial_i^A,\partial_j^A] = 0$; la réciproque est évidente.

c) Si A est une (k_o,K)-algèbre différentielle, de dérivations de structure ∂_i^A, alors $A[S^{-1}]$ est une (k_o,K)-algèbre différentielle de dérivations de structure $\overline{\partial_i^A}$ ([0.41] exemple b) : en effet, $\overline{\partial_i^A}$ est une dérivation de la (k_o,K)-algèbre $A[S^{-1}]$, telle que, $\forall\, \alpha \in K$, $\frac{a}{s} \in A[S^{-1}]$

$\overline{\partial_i^A}(\alpha \frac{a}{s}) = \dfrac{s\partial_i^A(\alpha a) - \alpha a \partial_i^A(s)}{s^2} = \partial_i(\alpha)\frac{a}{s} + \alpha\, \overline{\partial_i^A}(\frac{a}{s})$, i.e. $\overline{\partial_i^A}$ est une ∂_i-dérivation gauche de $A[S^{-1}]$, et $\forall i, \forall j$ $[\overline{\partial_i^A},\overline{\partial_j^A}] = \overline{[\partial_i^A,\partial_j^A]} = 0$.

I.24. - Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, $\ell = L_c$, $k = K_c$.

$L \otimes_K L$ est une L-algèbre différentielle de dérivations de structure $\partial_i^\otimes$: en effet, $(L \otimes_K L,\partial_1^\otimes,\ldots,\partial_m^\otimes)$ est une extension d'anneaux différentiels de L ([0.41] exemple c)).

Proposition 5.- $\Omega_{L/K}$ est un $\mathcal{D}_L$-module de dérivations gauches de structure $\underline{\partial_i^\Omega}$ où $\partial_i^\Omega(\sum_\lambda a_\lambda d_{L/K}(x_\lambda)) = \sum_\lambda\{\partial_i(a_\lambda)d_{L/K}(x_\lambda) + a_\lambda d_{L/K}(\partial_i(x_\lambda))\}$ pour tout $\sum_\lambda a_\lambda d_{L/K}(x_\lambda) \in \Omega_{L/K}$ [0.34].

Démonstration :

Pour tout i, $a \otimes b \in L \otimes_K L$, $\partial_i \circ m(a\otimes b) = m \circ \partial_i^\otimes(a\otimes b)$, d'où $\forall z \in I = \operatorname{Ker} m$, $m\{\partial_i^\otimes(z)\} = 0$, et I est un sous $\mathcal{D}_L$-module de $L \otimes_K L$; $\partial_i^\otimes$ étant une dérivation de $L \otimes_K L$, on a $\partial_i^\otimes(I^2) \subset I^2$, i.e. I^2 est un sous $\mathcal{D}_L$-module de I. Si pour tout $z \in I$, on note $\bar{z}$ la classe de z modulo I^2, $\Omega_{L/K} = I/I^2$ est donc un $\mathcal{D}_L$-module quotient de loi-externe $(\delta,\bar{z}) \mapsto \overline{\delta.z}$; les dérivations gauches de structure de $\Omega_{L/K}$ sont alors telles que $\partial_i^\Omega(\bar{z}) = \overline{\partial_i^\otimes(z)}$; or $\sum_\lambda a_\lambda d_{L/K}(x_\lambda) = \sum_\lambda \overline{(a_\lambda \otimes x_\lambda - a_\lambda x_\lambda \otimes 1)}$, et $\partial_i^\otimes(\sum_\lambda(a_\lambda\otimes x_\lambda - a_\lambda x_\lambda\otimes 1)) = \sum_\lambda\{\partial_i(a_\lambda)[1\otimes x_\lambda - x_\lambda\otimes 1] + a_\lambda[1\otimes\partial_i(x_\lambda) - \partial_i(x_\lambda)\otimes 1]\}$; on en déduit que :

$$\partial_i^\Omega[\sum_\lambda a_\lambda d_{L/K}(x_\lambda)] = \sum_\lambda \{\partial_i(a_\lambda)d_{L/K}(x_\lambda) + a_\lambda d_{L/K}(\partial_i(x_\lambda))\}. \blacksquare$$

Conséquences :

a) Pour tout $\mathcal{D}_L$-module E, le L-isomorphisme $\vartheta^E_{L/K} : f \mapsto f \circ d_{L/K}$ de $\operatorname{Hom}_L(\Omega_{L/K},E)$ sur $\operatorname{Der}_K(L,E)$ est alors $\mathcal{D}_L$-linéaire : en effet, pour tout i, $f \in \operatorname{Hom}_L(\Omega_{L/K},E)$ on a $\vartheta^E_{L/K}(\partial_i^H(f)) = \partial_i^E \circ f \circ d_{L/K} - f \circ \partial_i^\Omega \circ d_{L/K} = \partial_i^H(f \circ d_{L/K})$ car $\partial_i^\Omega \circ d_{L/K} = d_{L/K} \circ \partial_i$.

b) Si L est de type fini sur K, $\Omega_{L/K}$ est canoniquement $\mathcal{D}_L$-isomorphe au dual de $\operatorname{Der}_K L$: en effet, le composé du $\mathcal{D}_L$-isomorphisme canonique de $\Omega_{L/K}$ sur son bidual et du $\mathcal{D}_L$-isomorphisme de la transposée de $\vartheta^L_{L/K}$ (proposition 4) est un $\mathcal{D}_L$-isomorphisme de $\Omega_{L/K}$ sur $(\operatorname{Der}_K L)^*$.

1.3. - Constantes.

1.31. - Soient $(K,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ un corps différentiel de corps des constantes k et E,F deux $\mathcal{D}_K$-modules.

Pour tout i, ∂_i^E est un k-endomorphisme de E ; $\underline{c(E)} = \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} \partial_i^E$ est donc un sous k-espace vectoriel de E.

Exemples :

a) K étant un $\mathcal{D}_K$-module de dérivations de structure $\partial_1,\ldots,\partial_m$, on a $c(K) = \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} \partial_i = k$; plus généralement pour toute K-algèbre différentielle A, $c(A) = A_c$ est une k-algèbre, appelée <u>algèbre des constantes</u> de A.

b) $\vartheta \in \operatorname{Hom}_K(E,F)$ est $\mathcal{D}_K$-linéaire si et seulement si $\partial_i^H(\vartheta) = 0$, $\forall i$, donc $c(\operatorname{Hom}_K(E,F)) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_K}(E,F)$.

Pour toute application $\mathcal{D}_K$-linéaire $f : E \to F$, la restriction $\underline{c(f)}$ de f à $c(E)$ est une application k-linéaire à valeurs dans $c(F)$: en effet, $\forall x \in c(E)$, $\partial_i^F \circ f(x) = f \circ \partial_i^E(x) = 0$.

La double correspondance $E \mapsto c(E)$, $f \mapsto c(f)$ définit un foncteur covariant additif de la catégorie des $\mathcal{D}_K$-modules dans celle des k-espaces vectoriels, appelé <u>foncteur constante</u>, et noté $\underline{c(.)}$.

Proposition 1.-

Le morphisme fonctoriel $\vartheta : c(.) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,.)$ défini, pour tout $\mathcal{D}_K$-module E, par $\vartheta_E : c(E) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,E)$, et $\vartheta_E(x).a = ax$, $\forall x \in c(E)$, $a \in K$, est un isomorphisme, d'isomorphisme réciproque, le morphisme fonctoriel

$$\Psi : \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,.) \to c(.) \text{ défini par } \Psi_E(u) = u(1),\ \forall u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,E).$$

Démonstration :

Pour tout $\mathcal{D}_K$-module E, le K-isomorphisme $\sigma_E : E \to \operatorname{Hom}_K(K,E)$

tel que $\sigma_E(x).a = ax$, $\forall\, x \in c(E)$ et $a \in K$, est $\mathcal{D}_K$-linéaire : en effet, pour tout i, on a $\partial_i^H \circ \sigma_E(x).a = \partial_i^E(ax) - \partial_i(a)x = a\partial_i^E(x)$.

$\varphi_E = c(\sigma_E) : c(E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,E)$ est donc un k-isomorphisme et $\Psi_E = c(\sigma_E^{-1})$ est donc le k-isomorphisme réciproque de φ_E.

De plus, pour toute application $\mathcal{D}_K$-linéaire $f : E \to F$ on a le d.c. :

$$\begin{array}{ccc} c(E) & \xrightarrow{\varphi_E} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,E) \\ {\scriptstyle c(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,f)} \\ c(F) & \xrightarrow{\varphi_F} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,F) \end{array}$$

en effet, $\forall\, x \in c(E)$, $a \in K$,

$\varphi_F \circ c(f).x = af(x) = f\circ\varphi_E(x).a = f(ax)$;

On a de même le d.c. :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,E) & \xrightarrow{\Psi_E} & c(E) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c(f)} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,F) & \xrightarrow{\Psi_F} & c(F) \end{array}$$

en effet, $\forall u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,E)$,

$c(f) \circ \Psi_E(u) = f \circ u(1) = \Psi_F[f \circ u]$;

φ et Ψ sont donc deux isomorphismes fonctoriels réciproques. ■

Conséquence : Le foncteur $c(.)$ est exact à gauche, commute aux limites projectives, et en particulier, aux produits directs, et aux sommes directes finies.

I.32. - On note $\underline{\Sigma V}$ le $\mathcal{D}_K$-module $K \otimes_k V$ de loi externe $(\delta, a\otimes x) \mapsto \delta(a)\otimes x$ ([1.22] exemple c) ; si f est une application k-linéaire de V dans V', le K-homomorphisme canonique $\underline{\Sigma f} = 1_K \otimes f : \Sigma V \to \Sigma V'$ est $\mathcal{D}_K$-linéaire.

La double correspondance $V \mapsto \Sigma V$ et $f \mapsto \Sigma f$ définit un foncteur covariant additif de la catégorie des k-espaces vectoriels dans celle des $\mathcal{D}_K$-modules, appelé <u>foncteur sigma</u>, et noté $\underline{\Sigma}$.

Proposition 2.- Le morphisme vectoriel $\underline{\Theta} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma,.) \to \mathrm{Hom}_k(.,c(.))$, défini, pour tout k-espace V et $\mathcal{D}_K$-module E, par $\Theta_E^V : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma V,E) \to \mathrm{Hom}_k(V,c(E))$ et, pour tout $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma V,E)$, $x \in V$, $\Theta_E^V(u).x = u(1\otimes x)$ est un isomorphisme, i.e. le foncteur Σ est adjoint à gauche au foncteur $c(.)$.

Démonstration :

Pour tout k-espace vectoriel V et $\mathcal{D}_K$-module E, l'application $\beta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K \otimes_k V,E) \to \mathrm{Hom}_k(V,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,E))$ telle que $(\beta(u)x)(a) = u(a\otimes x)$ $\forall u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K \otimes_k V,E)$, $x \in V$, $a \in K$, est bijective. Ψ_E étant un k-isomorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,E)$ sur $c(E)$ (proposition 1), l'application $\mathrm{Hom}_k(V,\Psi_E)$: $\mathrm{Hom}_k(V,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,E)) \to \mathrm{Hom}_k(V,c(E))$ est aussi bijective.

Comme $\Psi_E \circ \beta(u).x = (\beta(u)x)(1) = \Theta_E^V(u)(x)$, $\Theta_E^V = \mathrm{Hom}_k(V,\Psi_E) \circ \beta$ est un k-isomorphisme ; de plus, pour toute application linéaire $f : V \to V'$ on a le d.c.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma V',E) \arrow[r, "\Theta_E^{V'}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma f,E)"] & \mathrm{Hom}_k(V',c(E)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_k(f,c(E))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma V,E) \arrow[r, "\Theta_E^V"] & \mathrm{Hom}_k(V,c(E))
\end{tikzcd}$$

en effet, $\forall u' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma V',E)$, $x \in V$, $\Theta_E^V(u' \circ \Sigma f).x = u'(1\otimes f(x)) = (\Theta_E^{V'}(u') \circ f).x$;

de même, pour toute application $\mathcal{D}_K$-linéaire $g : E \to F$, on a le d.c. :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma V,E) \arrow[r, "\Theta_E^V"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma V,g)"] & \mathrm{Hom}_k(V,c(E)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_k(V,c(g))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma V,F) \arrow[r, "\Theta_F^V"] & \mathrm{Hom}_k(V,c(F))
\end{tikzcd}$$

car $\Theta_F^V(gou).x = gou(1\otimes x) = c(g) \circ \Theta_E^V(u).x$; Θ est donc un isomorphisme fonctoriel. ■

Conséquences :

a) le foncteur Σ est exact à droite, commute aux limites inductives, et en particulier aux sommes directes.

b) Pour tout k-espace vectoriel V, l'application $\underline{\Phi} : V \to c(\Sigma V)$ définie par $\Phi(x) = 1\otimes x$, pour tout $x \in V$, est un k-isomorphisme : en effet, $\Phi = \Theta_{\Sigma V}^V(1_{\Sigma V})$ est une application k-linéaire, trivialement injective; de plus si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base de V sur k, pour tout $x = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \otimes x_\lambda \in c(\Sigma V)$ $(a_\lambda \in K)$, on a, $\forall i$, $0 = \partial_i^\otimes(x) = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \partial_i(a_\lambda)(1\otimes x_\lambda)$, d'où $\forall \lambda \in \Lambda$, $\partial_i(a_\lambda) = 0$, et $a_\lambda \in k$; par suite $x = \Phi(\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda)$, et Φ est surjectif.

c) le foncteur Σ est <u>pleinement fidèle</u>, i.e. pour tous k-espaces vectoriels V et V', l'application canonique $\tau : g \mapsto \Sigma g$ est une bijection de $\mathrm{Hom}_k(V,V')$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma V,\Sigma V')$: en effet, du k-isomorphisme $\Phi : V' \to c(\Sigma V')$ on déduit la bijection $\mathrm{Hom}_k(V,\Phi) : \mathrm{Hom}_k(V,V') \to \mathrm{Hom}_k(V,c(\Sigma V'))$. D'autre part, la bijection $(\Theta_{\Sigma V'}^V)^{-1} : \mathrm{Hom}_k(V, c(\Sigma V')) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\Sigma V,\Sigma V')$ est telle que $(\Theta_{\Sigma V'}^V)^{-1}(v).(a\otimes x) = av(x), \forall\, a \otimes x \in \Sigma V$; comme, pour tout $u \in \mathrm{Hom}_k(V,V')$, $(\Theta_{\Sigma V'}^V)^{-1}(\Phi o u).(a\otimes x) = a\, \Phi o u(x) = a\otimes u(x) = \tau(u).(a\otimes x)$, $\tau = (\Theta_{\Sigma V'}^V)^{-1} \circ \mathrm{Hom}_k(V,\Phi)$ est une bijection.

1.33. - Soit E un $\mathcal{D}_K$-module.

Soit $x \in c(E)$; pour tout $a \in K$, on a, $\forall i$, $\partial_i^E(ax) = \partial_i(a)x$, puisque $\partial_i^E(x) = 0$. Ainsi $K.x$ est un sous $\mathcal{D}_K$-module de E.

Lemme 3.- Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille libre sur k d'éléments de $c(E)$, alors elle est libre sur K.

Démonstration : Supposons $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ liée sur K, et soit $(x_{\lambda_1},\ldots,x_{\lambda_p})$

une famille minimale telle qu'il existe $a_2,\dots,a_p \in K$ tels que $x_{\lambda_1} + a_2x_{\lambda_2} + \dots + a_px_{x_p} = 0$; alors, $\forall i$, $\partial_i(a_2)x_{\lambda_2} + \dots + \partial_i(a_p)x_{\lambda_p} = 0$, donc, nécessairement, $\forall j$, $\partial_i(a_j) = 0$ et $a_j \in k$. ■

Conséquences :

a) Le K-homomorphisme canonique $\Psi : K \otimes_k c(E) \to E$ défini par $\Psi(a\otimes x) = ax$ est un $\mathcal{D}_K$-morphisme injectif : en effet, $\forall i$, $a\otimes x \in K \otimes_k c(E)$ $\Psi \circ \partial_i^{\otimes}(a\otimes x) = \partial_i(a)x = \partial_i \circ \Psi(a\otimes x)$; et si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base de $c(E)$ sur k, la famille $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (\Psi(1\otimes x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ est libre sur K, donc Ψ est injectif.

Pour $E = L$, on retrouve, en particulier, que le K-homomorphisme canonique de $K \otimes_k \ell$ dans L est injectif, i.e les sous k-algèbres K et ℓ de L sont linéairement disjointes (voir [0.42] lemme 1 cons. a) ;

b) $\underline{E^t} = \Psi(K \otimes_k c(E))$ est donc un sous $\mathcal{D}_K$-module de E, et toute base de $c(E)$ sur k est une base de E^t sur K ;

c) En particulier, si E est de dimension finie sur K, alors $c(E)$ est de dimension finie sur k et $\dim_k c(E) = \dim_K E^t \leq \dim_K E$ (formule des dimensions).

1.4. - Trivialité.

1.41. - Soit $(K,\partial_1,\dots,\partial_m)$ un corps différentiel de corps des constantes k.

Un $\mathcal{D}_K$-module E est dit <u>trivial</u> s'il existe un k-espace vectoriel V tel que E soit $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $\Sigma V = K \otimes_k V$.

Exemples :

a) pour tout ensemble Λ, le $\mathcal{D}_K$-module $K^{(\Lambda)}$ est trivial :

en effet, d'après ([1.22] exemples b et c) $K^{(\Lambda)}$ est $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $K \otimes_k k^{(\Lambda)}$;

b) Si $E_i (i \in I)$ sont des $\mathcal{D}_K$-modules triviaux, alors $\bigoplus_{i \in I} E_i$ est un $\mathcal{D}_K$-module trivial : en effet, si E_i est $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $K \otimes_k V_i$, $\bigoplus_{i\in I} E_i$ est $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $K \otimes_k (\bigoplus_{i \in I} V_i)$.

Proposition 1.- Soit E un $\mathcal{D}_K$-module.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) E est un $\mathcal{D}_K$-module trivial ;

ii) L'homomorphisme canonique $\Psi : K \otimes_k c(E) \to E$ est un $\mathcal{D}_K$-isomorphisme ;

iii) $E = E^t$;

iv) Toute base de $c(E)$ sur k est une base de E sur K ;

v) Il existe un ensemble Λ tel que E soit $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $K^{(\Lambda)}$.

Démonstration :

i) => ii) : Ψ est un $\mathcal{D}_K$-homomorphisme injectif ; de plus, il existe un k-espace vectoriel V et un $\mathcal{D}_K$-isomorphisme $u : K \otimes_k V \to E$; si $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base de V sur k, et si on pose $x_\lambda = u(1 \otimes x_\lambda)$, on a, $\forall i$, $\partial_i^E (x_\lambda) = u(\partial_i(1) \otimes x_\lambda) = 0$, donc (x_λ) est une base de E sur K telle que $x_\lambda \in c(E)$, $\forall \lambda \in \Lambda$; tout $\sum_\lambda a_\lambda x_\lambda \in E$ est donc égal à $\Psi(\sum_\lambda a_\lambda \otimes x_\lambda)$, et Ψ est surjectif ;

ii) => iii) évident.

iii) => iv) toute base de $c(E)$ sur k est une base de $E^t = E$ sur K ([1.33] conséquence b) ;

iv) => ii) évident.

v) => i) $K^{(\Lambda)}$ est trivial et donc aussi E. ■

Conséquences :

a) pour tout $\mathcal{D}_K$-module E, E^t est un $\mathcal{D}_K$-module trivial, puisque $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $\Sigma c(E)$;

b) le foncteur Σ est un foncteur d'équivalence entre la catégorie des k-espaces vectoriels et la catégorie $\underline{\mathcal{D}_K\text{-triv}}$ des $\mathcal{D}_K$-modules triviaux : en effet, le foncteur Σ est pleinement fidèle, et essentiellement surjectif, puisque tout $\mathcal{D}_K$-module trivial est $\mathcal{D}_K$-isomorphe à l'image par Σ du k-espace c(E) ; de plus la restriction du foncteur c(.) à $\mathcal{D}_K$-triv est un quasi-inverse de Σ : en effet, pour tout k-espace vectoriel V, on a un k-isomorphisme $\Phi : V \to c(\Sigma V)$ et pour toute application k-linéaire $f : V \to V'$ le d.c.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Phi} & c(\Sigma V) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c(\Sigma f)} \\ V' & \xrightarrow{\Phi} & c(\Sigma V') \end{array}$$

car, $\forall\, x \in V$, $c(\Sigma f) \circ \Phi(x) = 1 \otimes f(x) = \Phi \circ f(x)$; le foncteur $c(.)\Sigma$ est donc isomorphe au foncteur identité de la catégorie des k-espaces vectoriels ; de même, pour tout $\mathcal{D}_K$-module trivial E, on a un $\mathcal{D}_K$-isomorphisme Ψ : $\Sigma c(E) \to E$ et pour toute application $\mathcal{D}_K$-linéaire $g : E \to F$ le d.c. :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\, c(E) & \xrightarrow{\Psi} & E \\ {\scriptstyle \Sigma c(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \Sigma\, c(F) & \xrightarrow{\Psi} & F \end{array}$$

car, pour tout $a \otimes x \in \Sigma c(E)$, $g \circ \Psi(a\otimes x) = g(ax) = ag(x) = \Psi \circ \Sigma c(g)(a\otimes x)$; le foncteur $\Sigma\, c(.)$ est donc isomorphe au foncteur identité de la catégorie $\mathcal{D}_K$-triv.

c) La restriction du foncteur c(.) à $\mathcal{D}_K$-triv, étant quasi-inversible, est un épifoncteur ([PJ] III, prop. 1) exact à gauche, donc un foncteur exact ([PJ] IX th. 5).

1.42. - Un module F est <u>simple</u> si $F \neq \{0\}$ et si les seuls sous-modules de F sont $\{0\}$ et F.

Un module E est <u>semi-simple</u> si E est une somme de modules simples ; E est alors une somme directe de modules simples, et tout sous-module de E est facteur direct.

Soit E un $\mathcal{D}_K$-module.

Pour tout $x \in c(E)$, Kx est un sous-$\mathcal{D}_K$-module de E, évidemment simple ; si E est un $\mathcal{D}_K$-module trivial, E est alors un $\mathcal{D}_K$-module semi-simple : en effet, si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base de c(E) sur k, c'est une base de E sur K (proposition 1) et $E = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Kx_\lambda$.

<u>*Théorème*</u> *2*.- Soit E un $\mathcal{D}_K$-module trivial.

Pour tout sous $\mathcal{D}_K$-module F de E, F et E/F sont des $\mathcal{D}_K$-modules triviaux.

<u>*Démonstration*</u> : Soit $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de c(E) sur k ; on a $E = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Kx_\lambda$, avec Kx_λ $\mathcal{D}_K$-module simple ; d'après ([A VIII] § 3, prop. 8) il existe alors une partie J de Λ telle que F soit $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $\bigoplus_{\lambda\in J} Kx_\lambda$; comme pour tout $\lambda\in\Lambda$, Kx_λ est trivial, il en est de même de $\bigoplus_{\lambda\in J} Kx_\lambda$, et par suite, de F. D'autre part, F étant facteur direct de E, E/F, $\mathcal{D}_K$-isomorphe à tout supplémentaire de F, est $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda-J} Kx_\lambda$; on en déduit, comme précédemment, que E/F est un $\mathcal{D}_K$-module trivial. ∎

<u>*Conséquences*</u> :

a) pour toute suite exacte de $\mathcal{D}_K$-modules

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \longrightarrow 0$$

si E est trivial, alors E', $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $\mathrm{Im}\, u \subset E$, et E'', $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $E/\mathrm{Im}\, u$, sont triviaux, et d'après la conséquence d) de la proposition 1, la suite de k-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow c(E') \xrightarrow{c(u)} c(E) \xrightarrow{c(v)} c(E'') \longrightarrow 0$$

est exacte ;

b) pour tout $\mathcal{D}_K$-module E et tout sous $\mathcal{D}_K$-module F de E, F est trivial si et seulement si $F \subset E^t$.

1.43. - Soit E un $\mathcal{D}_K$-module, de dimension finie sur K.

D'après la proposition 1, E est un $\mathcal{D}_K$-module trivial si et seulement si il existe un ensemble Λ tel que E soit $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $K^{(\Lambda)}$, donc si et seulement si E est $\mathcal{D}_K$-isomorphe à K^n, où $n = \dim_K E$.

D'autre part, on a $\dim_k c(E) = \dim_K E^t \leq \dim_K E$; E est un $\mathcal{D}_K$-module trivial si et seulement si $E = E^t$, donc si et seulement si $\dim_k \; c(E) = \dim_K E$.

Si E est un $\mathcal{D}_K$-module de dimension finie sur K, comme toute suite de composition du $\mathcal{D}_K$-module E est formée de sous-K-espaces vectoriels de E, la <u>longueur</u> du $\mathcal{D}_K$-module E est finie et $\mathrm{long}_{\mathcal{D}_K}(E) \leq \dim_K E$.

Si, de plus, E est trivial, et si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $c(E)$ sur k, alors, comme $E = \bigoplus_{i=1}^{n} Kx_i$ et, $\forall i$, Kx_i est un $\mathcal{D}_K$-module simple, les sous $\mathcal{D}_K$-modules $E_j = \bigoplus_{i=1}^{j} Kx_i$ $(1 \leq j \leq n)$ forment une <u>suite de Jordan-Hölder</u> de E, et $\mathrm{long}_{\mathcal{D}_K}(E) = \dim_K E$.

Soit A un anneau ; un A-module E est <u>indécomposable</u> si $E = F \oplus G$ entraîne $F = E$ ou $G = E$; une <u>décomposition de Remak</u> de E est la donnée de sous-A-modules indécomposables et non nuls $E_1, \ldots, E_n$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. On montre (théorème de KRULL-REMAK-SCHMIDT - [A VIII] § 2 th. 1-) que tout A-module E de longueur finie admet une décomposition de

Remak, et que, si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ et $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E'_i$ sont deux telles décompositions, alors $n = m$, et quitte à réordonner les indices, E_i est isomorphe à E'_i, $\forall i$.

Un $\mathcal{D}_K$-module E, de dimension finie sur K, étant de longueur finie, admet donc une décomposition de Remak, unique à isomorphisme près ; en particulier, si E est trivial, et si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $c(E)$ sur k, $E = \bigoplus_{i=1}^{n} Kx_i$ est une décomposition de Remak de E.

Proposition 3.- Soit E un $\mathcal{D}_K$-module de dimension finie sur K. Les conditions suivantes sont équivalentes

i) E est un $\mathcal{D}_K$-module trivial ;

ii) E^* est un $\mathcal{D}_K$ module trivial.

Dans ces conditions, l'application $\sigma : u \to u|_{c(E)}$ est un k-isomorphisme de $c(E^*)$ sur $(c(E))^*$.

Démonstration :

i) => ii) : il existe un $\mathcal{D}_K$-isomorphisme $\varphi : E \to K^n$, où $n = \dim_K E$; ${}^t\varphi$ est donc un $\mathcal{D}_K$-isomorphisme de $(K^n)^*$ sur E^* ([1.2], prop. 4) ; or si (e_i^*) est la base duale de (e_i), base canonique de K^n, on a, pour tout $a = \Sigma a_i e_i \in K^n$, $\forall i, \forall j$, $\langle a, \partial_i^*(e_j^*)\rangle = \langle a, \partial_i o e_j^* - e_j^* o \partial_i^{K^n}\rangle = \partial_i(a_j) - \partial_i(a_j) = 0$ d'où $e_j^* \in c((K^n)^*)$ i.e. $(K^n)^*$ trivial, donc aussi E^*.

ii) => i) : E^* étant trivial, il en est de même de $(E^*)^*$, et donc aussi de E qui lui est $\mathcal{D}_K$-isomorphe ([1.2] prop. 4).

Si $u \in c(E^*)$, $x \in c(E)$, on a, $\forall i$, $\partial_i \circ u(x) = (\partial_i^* o u + u o \partial_i^E)(x) = 0$ car $\partial_i^* o u = 0$ et $\partial_i^E(x) = 0$, donc $u|_{c(E^*)} \in (c(E))^*$; σ est k-linéaire et comme, E et E^* étant triviaux, on a $\dim_k c(E^*) = \dim_K E^* = \dim_K E = \dim_k c(E) = \dim_k (c(E))^*$, il reste à montrer que σ est injectif ; or si $u \in c(E^*)$ est tel que $u|_{c(E)} = 0$, pour toute base (x_j) de $c(E)$ sur k, $u(x_j) = 0$, $\forall j$, et (x_j) étant aussi une base de E sur K, $u = 0$. ■

Remarque : Si E est un $\mathcal{D}_K$-module trivial de dimension infinie sur K, E^* n'est pas forcément trivial ; ainsi, si Λ est un ensemble infini, et K de dimension infinie sur k, $K^{(\Lambda)}$ est un $\mathcal{D}_K$-module trivial mais le $\mathcal{D}_K$-module $\left(K^{(\Lambda)}\right)^*$ n'est pas trivial : en effet, K^Λ n'est pas trivial, car $c(K^\Lambda) = k^\Lambda$ ($c(.)$ commutant aux produits directs), et, d'après ([AII] § 7), l'image de $K \otimes_k k^\Lambda$ dans K^Λ par l'homomorphisme canonique Ψ (prop. 1) est le sous-espace des applications $\lambda \mapsto y_\lambda$ de rang fini sur k, donc toute famille infinie d'éléments de K libre sur k n'a pas d'antécédent par Ψ ; d'autre part, le K-isomorphisme canonique $j_{K,\Lambda}$ de K^Λ sur $(K^{(\Lambda)})^*$ défini par $\langle \sum_\lambda a_\lambda \lambda, j_{K,\Lambda}(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\rangle = \sum_\lambda a_\lambda x_\lambda$ est $\mathcal{D}_K$-linéaire; d'où $(K^{(\Lambda)})^*$ est $\mathcal{D}_K$-isomorphe à K^Λ, et n'est donc pas trivial.

1.44. - Proposition 4.- Soient E et F deux $\mathcal{D}_K$-modules.

a) $E^t \otimes_K F^t \subset (E \otimes_K F)^t$

b) Si E et F sont triviaux, alors le $\mathcal{D}_K$-module $E \otimes_K F$ est trivial.

Démonstration :

a) Soient $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (resp. $(y_\mu)_{\mu\in M}$) une base de $c(E)$ (resp. $c(F)$) sur k, donc de E^t (resp. F^t) sur K ; $(x_\lambda \otimes y_\lambda)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ est donc une base de $E^t \otimes_K F^t$ sur K, et, pour tout (λ,μ), on a, $\forall i$, $\partial_i^\otimes(x_\lambda \otimes y_\mu) = \partial_i^E(x_\lambda)\otimes y_\mu + x_\lambda \otimes \partial_i^F(y_\mu) = 0$; $(x_\lambda \otimes y_\mu)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ est donc une famille de $c(E \otimes_K F)$, libre sur k, donc de $(E \otimes_K F)^t$ libre sur K ; on déduit que $E^t \otimes_K F^t \subset (E \otimes_K F)^t$.

b) de $E = E^t$ et $F = F^t$, on déduit que $E \otimes_K F = E^t \otimes_K F^t \subset (E \otimes_K F)^t$; donc $E \otimes_K F$ est trivial (prop. 1, iii) => i)). ■

Conséquence : Soient $(L, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ une extension différentielle de K, et E un $\mathcal{D}_K$-module ; alors $L \otimes_K (E^t) \subset (L \otimes_K E)^t$; si de plus, E

est trivial, alors le $\mathcal{D}_L$-module $L \otimes_K E$ est trivial (mêmes démonstrations que la proposition 4).

Proposition 5.- Soient E et F deux $\mathcal{D}_K$-modules triviaux, E étant de dimension finie sur K. Alors le $\mathcal{D}_K$-module $\mathrm{Hom}_K(E,F)$ est trivial.

Démonstration : d'après ([A, II] § 7, prop. 16, cor. 1), l'application $\theta : E^* \otimes_K F \to \mathrm{Hom}_K(E,F)$, définie par $\theta(u \otimes y) : x \mapsto u(x)y$, est un K-isomorphisme ; de plus, θ est $\mathcal{D}_K$-linéaire, car on a $\forall i$,

$$\begin{aligned}
[\theta \circ \partial_i^{\otimes}(u \otimes y)](x) &= (\partial_i \circ u - u \circ \partial_i^E)(x).y + u(x).\partial_i^F(y) \\
&= \partial_i^F\{u(x).y\} - u \circ \partial_i^E(x).y \\
&= [\partial_i^H \circ \theta(u \otimes y)](x)
\end{aligned}$$

; E^* étant trivial (prop. 3) ainsi que F, $E^* \otimes_K F$ est trivial (prop. 4), et, par suite, $\mathrm{Hom}_K(E,F)$ l'est aussi. ■

ANNEXE : ALGEBRE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS

Soient K une extension d'un corps commutatif k, et $(d_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille de k-dérivations de K, libre sur K, et telle que $\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{m} k\, d_i$ soit une sous k-algèbre de Lie de $\mathrm{Der}_k K$.

On considère la k-bigèbre enveloppante $\underline{U} = (U_k(\mathfrak{G}), c, \varepsilon)$ de $\mathfrak{G}$ [0.14], et σ_o l'injection canonique de $\mathfrak{G}$ dans U ; on désigne par $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$ la base de U canoniquement associée à $(d_i)_{1 \leq i \leq m}$ (i.e $z_\alpha = \dfrac{\sigma_o(d)^\alpha}{\alpha!}$).

L'injection canonique i de $\mathfrak{G}$ dans $\mathrm{Diff}_{K/k}$ étant une α-application, il existe un unique homomorphisme de k-algèbres $\tau : U \to \mathrm{Diff}_{K/k}$ tel que $\tau \circ \sigma_o = i$ (propriété universelle de (U, σ_o)) ; en particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $\tau(z_\alpha) = \tau\left(\dfrac{\sigma_o(d)^\alpha}{\alpha!}\right) = \dfrac{d^\alpha}{\alpha!} \in \mathrm{Diff}_{K/k}(K,K)$, puisque $d_i \in \mathrm{Diff}^1_{K/k}(K,K)$

Si l'on considère la filtration $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la k-algèbre U, où $\forall n$, U_n est le sous k-espace de U engendré par les produits d'au plus n éléments de $\sigma_o(\mathfrak{G})$ (voir [0.14]), i.e de base $(z_\alpha)_{|\alpha| \leq n}$, on a donc $\tau(U_n) \subset \mathrm{Diff}^n_{K/k}(K,K)$ et τ est un homomorphisme de k-algèbres filtrées.

D'autre part, pour tout $z \in U$, $\tau(z)$ est un k-endomorphisme de K, et $\tau(1) = 1_K$; on en déduit que la loi externe $(z,a) \mapsto \tau(z)(a)$ munit K d'une structure de U-module ; de plus, $\forall \lambda \in k$, $a \in K$, on $\tau(\lambda 1)(a) = \lambda 1_K(a) = \lambda a$, donc la structure de k-espace de K induite par l'injection de k dans U coïncide avec sa structure initiale.

Lemme 1.- La k-algèbre K est munie d'une structure de U-module-algèbre [0.13] par la loi externe $(z,a) \mapsto \tau(z)(a)$.

Démonstration : pour tout $\alpha \in N^m$, a, b $\in$ K, on a d'après [1.11] lemme 1 cons. a)

$$\tau(z_\alpha)(ab) = \frac{d^\alpha}{\alpha!}(ab) = \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} d^\gamma(a) d^\beta(b)$$

$$= \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \tau(z_\alpha)(a)\tau(z_\beta)(b) = \sum_{(z_\alpha)} (z_{\alpha(1)}.a)(z_{\alpha(2)}.b), \text{ puisque}$$

$c(z_\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} z_\beta \otimes z_\gamma$. On en déduit par k-linéarité de τ et c, que la multiplication de K est U-linéaire ; d'autre part, la counité ε de U étant définie par $\varepsilon(1) = 1$, et $\forall \alpha \neq 0$, $\varepsilon(z_\alpha) = 0$, puisque $z_\alpha \notin k.1$, on a, $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^m$, $\varepsilon(z_\alpha) = \frac{d^\alpha}{\alpha!}(1) = \tau(z_\alpha)(1)$; par k-linéarité de τ et ε, on en conclut que l'unité de K est U-linéaire. ■

D'après ([0.13] lemme 2), on peut donc considérer le smash-produit $K \# U$, i.e $K \otimes_k U_k(\mathfrak{D})$ muni d'une structure de k-algèbre par la multiplication définie par $m^{\#}((b\otimes z_\alpha)(b'\otimes z')) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} b\tau(z_\beta)b'\otimes z_\gamma z'$, $b,b' \in K, \alpha \in \mathbb{N}^m, z' \in U$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on convient d'identifier $K \otimes_k U_n$ et son image dans $K \# U$, $K \# U$ est alors une k-algèbre filtrée par la suite $(K\otimes_k U_n)_{n\in\mathbb{N}}$: en effet, $\forall b,b' \in K, \alpha,\alpha' \in \mathbb{N}^m$ tels que $|\alpha| \leq p$, $|\alpha'| \leq q$, on a
$m^{\#}((b\otimes z_\alpha) \otimes (b'\otimes z_{\alpha'})) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} b\tau(z_\beta)(b')\otimes z_\gamma z_{\alpha'} \in K \otimes_k U_{p+q}$.

Théorème 2.- Le K-homomorphisme $\underline{\Omega} : K \# U \to \mathrm{Diff}_{K/k}$ défini par : $\Omega(b\otimes z) = b\tau(z)$ est un homomorphisme injectif de k-algèbres graduées.

Démonstration : pour tout $b,b' \in K$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$ et $z' \in U$, on a, d'après la démonstration du lemme 1,

$$\tau(z_\alpha) \circ (b'\tau(z')) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} (\tau(z_\beta)b')\tau(z_\gamma) \circ \tau(z'), \text{ d'où}$$

$$\Omega \circ m^{\#}((b\otimes z_\alpha)\otimes(b'\otimes z')) = b\{ \sum_{\beta+\gamma=\alpha} [\tau(z_\beta)(b')]\tau(z_\gamma z')\}$$

$$= b[\tau(z_\alpha)\circ(b'\tau(z'))] = \Omega(b\otimes z_\alpha)\circ\Omega(b'\otimes z') ;$$

on en déduit par k-linéarité que Ω est un homomorphisme de k-algèbres ; de plus, $\forall p \in \mathbb{N}$, $b \otimes z_p \in L \otimes_k U_p$, on a $\Omega(b \otimes z_p) = b\tau(z_p) \in \mathrm{Diff}^p_{K/k}(K,K)$; pour que Ω soit injectif, il suffit donc que $gr(\Omega) : gr(K \# U) \to gr(\mathrm{Diff}_{K/k})$ soit injectif ([0.12] Lemme 1). On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{\otimes}_n$ (resp. f'_n) la surjection canonique de $K \otimes_k U_n$ sur $gr_n(K \# U)$ (resp. de $\mathrm{Diff}^n_{K/k}(K,K)$ sur $gr_n(\mathrm{Diff}_{K/k})$) ; et on considère l'isomorphisme de K-algèbres $g : \mathrm{Sym}_K(\mathrm{Der}_k K) \to gr(\mathrm{Diff}_{K/k})$ tel que $g \circ \vartheta_D = f'_1|_{\mathrm{Der}_k K}$ (ϑ_D : injection canonique de $\mathrm{Der}_k K$ dans $\mathrm{Sym}_K(\mathrm{Der}_k K)$) ([0.35] lemme 3) ; $(d_i)_{1 \leq i \leq m}$ étant libre sur K, peut être complétée en une base de $\mathrm{Der}_k K$ sur K ; $(\vartheta_D(d)^\beta)_{\beta \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}}$ est alors une base de $\mathrm{Sym}_K(\mathrm{Der}_k K)$ sur K, et comme, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^m$,

$\alpha = \alpha + \sum_{\lambda \in \Lambda - \mathbb{N}^m} o.\lambda \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$, $(\vartheta_D(d)^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$ en est une sous-famille, donc est libre sur K ; comme, $\forall \alpha$, $g[\vartheta_D(d)^\alpha] = [f'_1(d)]^\alpha = f'_{|\alpha|}(d^\alpha)$,

la famille $(f'_{|\alpha|}(d^\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$ est alors libre sur K. D'autre part, $(1 \otimes z_\alpha)_{|\alpha| \leq n}$ est une base de $K \otimes_k U_n$ sur K, et $f^{\otimes}_n(1 \otimes z_\alpha) = 0$, si $|\alpha| < n$; $(f^{\otimes}_{|\alpha|}(1 \otimes z_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$ est donc une famille génératrice de $gr(K \# U)$ sur K ;

et comme
$$gr(\Omega)(\sum_\alpha a_\alpha f^{\otimes}_{|\alpha|}(1 \otimes z_\alpha)) = \sum_\alpha a_\alpha f'_{|\alpha|} \circ \Omega(1 \otimes z_\alpha) = \sum_\alpha \frac{a_\alpha}{\alpha!} f'_{|\alpha|}(d^\alpha),$$

on en conclut que $gr(\Omega)$ est injectif. ■

Conséquence : $(1 \otimes z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$ est une base de $K \# U$ sur K, et on a $\Omega(1 \otimes z_\alpha) = \frac{d^\alpha}{\alpha!}$, donc la famille $(\frac{d^\alpha}{\alpha!})_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$ est libre sur K, et, par suite, aussi la famille $(d^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$. La k-algèbre filtrée $\Omega(K \# U)$ est alors le K-espace vectoriel de base $(d^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$.

Remarque : Si G est un groupe algébrique irréductible, défini sur k, de corps des fonctions K (voir [0.45]), et si $\mathfrak{I} = \sum_{i=1}^m k\, d_i$ est l'image (canonique) de l'algèbre de Lie de G dans $\mathrm{Der}_k K$, le résultat précédent n'est autre que celui obtenu par C. CHEVALLEY dans "Théorie des Groupes de Lie" Ch. V, § 6, n° 2 (Hermann).

CHAPITRE I *bis*

ALGEBRE DE LIE

I bis.1. - Soit $(K,\partial_1,\dots,\partial_m)$ un corps différentiel de corps des constantes k.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n : v \mapsto v \circ p_n$ est un K-isomorphisme de $\mathrm{Hom}_K(P_n(K),K)$ sur $\mathrm{Diff}^n_{K,k}(K,K)$ [0.32] ; la restriction α_n de δ_n^{-1} à $\mathcal{D}^n_K = \mathcal{D}_K \cap \mathrm{Diff}^n_{K/k}(K,K)$ est donc un K-morphisme injectif de $\mathcal{D}^n_K$ dans $(P_n(K))^*$, et $\mathcal{D}^n_K$, engendré sur K par $\{\partial^\alpha \mid |\alpha| \leqslant n\}$, étant un K-espace vectoriel de dimension finie $\binom{n+m}{n}$, $\mathrm{Im}(\alpha_n)$ est un sous K-espace de dimension finie de $(P_n(K))^*$; on considère l'orthogonal $\underline{V_n}$ de $\mathrm{Im}(\alpha_n)$ dans $P_n(K)$, i.e $V_n = \{\xi \in P_n(K) / \forall d \in \mathrm{Im}(\alpha_n), \langle\xi,d\rangle = 0\}$ et ψ le K-morphisme surjectif canonique de $P_n(K)$ sur $P_n(K)/V_n$.

Lemme 1.- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\underline{\beta_n} : (P_n(K)/V_n)^* \to \mathcal{D}^n_K$

$$u \longmapsto u \circ \psi \circ p_n$$

est un K-isomorphisme, et V_n est un idéal de la K-algèbre-quotient $P_n(K)$.

Démonstration :

$\mathrm{Im}(\alpha_n)$ est l'orthogonal de V_n dans $(P_n(K))^*$, d'où ${}^t\psi$ est un K-isomorphisme de $(P_n(K)/V_n)^*$ sur $\mathrm{Im}(\alpha_n)$; $\beta = \alpha_n^{-1} \circ {}^t\psi$ est donc un K-isomorphisme de $(P_n(K)/V_n)^*$ sur $\mathcal{D}^n_K$; d'autre part,

$V_n = \{\xi \in P_n(K) / \forall\alpha, |\alpha| \leqslant n, \langle\xi,\alpha_n(\partial^\alpha)\rangle = 0\}$; or, pour tout $\alpha, |\alpha| \leqslant n$ et $\xi = \Pi_n(\sum_i a_i \otimes b_i) \in P_n(K)$, comme $\alpha_n(\partial^\alpha) \circ \Pi_n = (\partial^\alpha)^\natural$ [0.32], on a $\alpha_n(\partial^\alpha)(\xi) = \sum_i a_i \partial^\alpha(b_i)$; alors si $\xi_1 = \Pi_n(\sum_i a_i \otimes b_i) \in V_n$ et $\xi_2 = \Pi_n(\sum_j c_j \otimes d_j) \in P_n(K)$, on a :

$$\alpha_n(\partial^\alpha)(\xi_1.\xi_2) = \sum_{i,j} a_i c_j \partial^\alpha(b_i d_j) = \sum_{i,j} a_i c_j (\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma}\partial^\gamma(b_i)\partial^{\alpha-\gamma}(d_j))$$

$$= \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma}(\sum_j c_j\partial^\gamma(b_i)\partial^{\alpha-\gamma}(d_j))$$

$= 0$ puisque pour tout γ, $0 \leq \gamma \leq \alpha$, $\partial^\gamma \in \mathcal{D}^n_K$ donc $\sum_i a_i\partial^\gamma(b_i) = \alpha_n(\partial^\gamma)(\xi_1) = 0$, d'où $\xi_1.\xi_2 \in V_n$. ■

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la K-algèbre quotient $\underline{J_n(K)} = P_n(K)/V_n$ est appelée <u>algèbre des jets d'ordre n</u> de K sur k, et on pose $j_n = \psi o p_n$; j_n est donc une application k-linéaire de K dans $J_n(K)$ et l'application $u \mapsto uoj_n$ est un K-isomorphisme de $\mathrm{Hom}_K(J_n(K),K)$ sur $\mathcal{D}^n_K$.

1 bis.2. - La K-algèbre $K[[T_i]]_{1\leq i\leq m}$ des séries formelles en $T_1,\dots,T_m$ sur K est un $\mathcal{D}_K$-module de dérivations gauches de structure $\underline{\partial^s_i}$, où $\partial^s_i(\sum a_\alpha T^\alpha) = \sum_\alpha (\partial_i(a_\alpha) - a_{\alpha+i})T^\alpha$: en effet, $\forall i$, ∂^s_i est une ∂_i-dérivation gauche de $K[[T_i]]$, et $[\partial^s_i,\partial^s_j](\sum_\alpha a_\alpha T^\alpha) = \sum_\alpha [\partial_i,\partial_j](a_\alpha)T^\alpha = 0$.

L'application $\underline{e} : K \to K[[T_i]]$ définie par $e(a) = \sum_\alpha \partial(a)\dfrac{T^\alpha}{\alpha!}$ $\forall a \in K$, est un homomorphisme de k-algèbres : en effet, ∂^α est k-linéaire, $\forall\alpha$, et, $\forall a,b \in K$, $e(ab) = \sum_\alpha (\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\gamma}\partial^\gamma(a)\partial^\beta(b))\dfrac{T^\alpha}{\alpha!}$

$$= (\sum_\gamma \partial^\gamma(a)\frac{T^\gamma}{\gamma!})(\sum_\beta \partial^\beta(b)\frac{T^\beta}{\beta!})$$; et on a

$e(K) = c(K[[T_i]])$: en effet, $\forall a \in K$, $\partial^s_i(\sum_\alpha \partial^\alpha(a)T^\alpha) = 0$; et $\partial_i(a_\alpha) = a_{\alpha+i}$, $\forall\alpha$ et i, implique $\partial_i(a_o) = a_i$, et par récurrence sur $|\alpha|$, $\partial^\alpha(a_o) = a_\alpha$.

On considère le composé $\underline{e^\natural}$ de $1_K \otimes e$ et de l'homomorphisme canonique Ψ de $K \otimes_k c(K[[T_i]])$ dans $K[[T_i]]$, injectif d'après ([1.33] lemme 3 cons. a) ; $e^\natural$ est donc un homomorphisme injectif de K-algèbres de $K \otimes_k K$ dans $K[[T_i]]$ tel que $e^\natural(a \otimes b) = \sum_\alpha a\,\partial^\alpha(b)\dfrac{T^\alpha}{\alpha!} = \sum_\alpha (\partial^\alpha)^\natural(a\otimes b)\dfrac{T^\alpha}{\alpha!}$.

D'autre part, $K[[T_i]]$ est un anneau local d'idéal maximal $\underline{J} = \sum_{j=1}^{m} K[[T_1,\dots,T_m]]T_j$ (J : idéal des séries non inversibles i.e dont le terme constant est non nul) ; par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $J^{n+1} = \{ \sum_{|\alpha| \geq n+1} a_\alpha T^\alpha \}$.

Proposition 2.- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\gamma_n : J_n(K) \to K[[T_i]]/J^{n+1}$ qui, à $\psi o \Pi_n(z) \in J_n(K)$ associe la classe de $e^{\natural}(z)$ modulo J^{n+1} est un isomorphisme de K-algèbres.

Démonstration :

D'après la démonstration du lemme 1, $\Pi_n(\sum_i a_i \otimes b_i) \in V_n$ est équivalent à $\forall\, \alpha$, $|\alpha| \leq n$, $\sum_i a_i \partial^\alpha(b_i) = 0$ i.e. $e^{\natural}(\sum_i a_i \otimes b_i) = \sum_\alpha (\sum_i a_i \partial^\alpha(b_i)) \frac{T^\alpha}{\alpha!} \in J^{n+1}$; γ_n est donc un homomorphisme injectif de K-algèbres ; de plus, $\mathcal{D}^n_K$ étant K-isomorphe à $(J_n(K))^*$ (lemme 1), on a $\dim_K J_n(K) = \dim_K \mathcal{D}^n_K = \binom{n+m}{n} = \dim_K K[[T_i]]/J^{n+1}$. ■

Conséquence : Si on note t_j la classe de T_j modulo J^{n+1}, alors $(\frac{t^\alpha}{\alpha!})_{|\alpha| \leq n}$ est une base de $K[[T_i]]/J^{n+1}$ sur K, et pour tout $f \in K$, $\gamma_n \circ j_n(f) =$ classe de $e^{\natural}(1 \otimes f)$ modulo $J^{n+1} = \sum_{|\alpha| \leq n} \partial^\alpha(f) \frac{t^\alpha}{\alpha!}$.

1 bis.3. - On considère la puissance extérieure n-ième $\underline{\Lambda^n_K(J_{n-1}(K))}$ du K-espace vectoriel $J_{n-1}(K)$, et on appelle <u>Wronskien</u> d'une famille $(f_1,\dots,f_n)$ d'éléments de K, l'élément $\underline{W(f_1,\dots,f_n)} = j_{n-1}(f_1) \wedge \dots \wedge j_{n-1}(f_n)$ de $\Lambda^n_K(J_{n-1}(K))$ (voir [A III] § 7).

Proposition 3.- Soit $(f_1,\dots,f_n)$ une famille d'éléments de K. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est liée sur k ;

ii) $W(f_1,\dots,f_n) = 0$.

Démonstration :

i) => ii) : j_{n-1} étant K-linéaire, la famille $(j_{n-1}(f_i))_{1\leq i\leq n}$ est liée sur k, donc $j_{n-1}(f_1) \wedge \ldots \wedge j_{n-1}(f_n) = 0$.

ii) => i) : $(j_{n-1}(f_i))_{1\leq i\leq n}$ est une famille d'éléments de $J_{n-1}(K)$ liée sur K, donc il existe $a_1,\ldots,a_n \in K$ tels que $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \not\!\!\!\;\text{op}_{n-1}(f_i)$ i.e tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i p_{n-1}(f_i) = \Pi_{n-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes f_i)$ appartient à V_{n-1} ; on a donc, $\forall\, \alpha,\ |\alpha| \leq n-1,\ \sum_{i=1}^{n} a_i \partial^\alpha(f_i) = 0$, d'où pour tout $(\alpha^1,\ldots,\alpha^n) \in (\mathbb{N}^m)^n$ tels que $|\alpha_i| \leq n-1$, $\det[\partial^{\alpha^i}(f_j)] = 0$; $(f_1,\ldots,f_n)$ est alors liée sur k, d'après ([0.41] lemme 1). ■

Remarque : Pour toute famille $(f_1,\ldots,f_n)$ d'éléments de K, on a

$$\Lambda^n(\gamma_{n-1})(W(f_1,\ldots,f_n)) = \gamma_{n-1}\circ j_{n-1}(f_1) \wedge \ldots \wedge \gamma_{n-1} \circ j_{n-1}(f_n)$$

$$= \Big(\sum_{|\alpha|\leq n-1} \partial^\alpha(f_1)\frac{t^\alpha}{\alpha!}\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{|\alpha|\leq n-1} \partial^\alpha(f_n)\frac{t^\alpha}{\alpha!}\Big) \;;$$

en particulier si m = 1, $\Lambda^n(\gamma_{n-1})(W(f_1,\ldots,f_n)) =$

$$= \Big(\sum_{j=0}^{n-1} \partial^j(f_1)\frac{t^j}{j!}\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\sum_{j=1}^{n-1} \partial^j(f_n)\frac{t^j}{j!}\Big) =$$

$$= \det[\partial^j(f_i)]\left[\frac{t^o}{o!} \wedge \frac{t^1}{1!} \wedge \ldots \wedge \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$, et l'on retrouve le wronskien "ordinaire" : $W(f_1,\ldots,f_n) = \det[\partial^j(f_i)]$; la proposition 3 généralise alors un résultat classique d'analyse.

CHAPITRE II

EXTENSIONS P.V. NORMALES

II.1.- $\mathcal{D}$-modules de PICARD-VESSIOT.

II.11. - Soit $(K,\partial_1,\dots,\partial_m)$ un corps différentiel de corps des constantes k.

Soit E un $\mathcal{D}_K$-module ; pour tout $f \in E$, l'application $\vartheta_f : \mathcal{D}_K \to E$ définie par $\vartheta_f(\delta) = \delta.f$ est $\mathcal{D}_K$-linéaire, et on pose $\underline{\mathcal{D}_K(f)} = \operatorname{Im} \vartheta_f$; $\mathcal{D}_K(f)$ est alors un sous $\mathcal{D}_K$-module de E engendré sur K par $\{\partial^\alpha.f\}_{\alpha\in\mathbb{N}^m}$.

$f \in E$ est un <u>élément de Picard-Vessiot</u> de E sur K (définition de BIALYNICKI-BIRULA dans [BB] § 5) si le $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{D}_K(f)$ est de dimension finie sur K.

Proposition 1.- Soit E un $\mathcal{D}_K$-module.

L'ensemble $\underline{E}^V$ des éléments de Picard-Vessiot de E sur K est un sous $\mathcal{D}_K$-module de E.

Démonstration : Pour tout $f, g \in K$, on a $\delta.(f+g) = \delta.f + \delta.g$ $\forall\, \delta \in \mathcal{D}_K$, d'où $\mathcal{D}_K(f+g) \subset \mathcal{D}_K(f) + \mathcal{D}_K(g)$; et $\forall\, \delta = \sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha \partial^\alpha$, on a, $\forall i$, $\delta.(\partial_i.f) = \sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha \partial^{\alpha+i}.f$, donc $\mathcal{D}_K(\partial_i.f) \subset \mathcal{D}_K(f)$, on en déduit que si, $f, g \in E^V$, alors $f+g$ et $\partial_i.f \in E^V$. ∎

Conséquences : a) Soient E et F deux $\mathcal{D}_K$-modules et $u : E \to F$ une application $\mathcal{D}_K$-linéaire ; alors $u(E^V)$ est un sous $\mathcal{D}_K$-module de F^V : en effet, $\forall\, f \in E^V$, $\mathcal{D}_K(u(f)) = u(\mathcal{D}_K(f))$;

b) pour tout $\mathcal{D}_K$-module E, E^t est un sous $\mathcal{D}_K$-module de E^V : en effet, si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base de $C(E)$ sur k, donc de E^t sur K, comme $\delta.x_\lambda = 0$, $\forall\, \delta \in \mathcal{D}_K$ tel que $\omega(\delta) \geq 1$, on a $\mathcal{D}_K(x_\lambda) = K\, x_\lambda$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$ et par suite $x_\lambda \in E^V$.

II.12. - Un $\mathcal{D}_K$-module E est de <u>Picard-Vessiot</u> (ou de <u>P V</u>) si $E = E^V$, i.e. si tout $f \in E$ est un élément de Picard-Vessiot de E sur K.

<u>*Exemples*</u>.- a) soit E un $\mathcal{D}_K$-module de P V ; alors tout sous-$\mathcal{D}_K$-module F de E est de P.V. : en effet, $F = E \cap F = E^V \cap F = F^V$;

b) soit E un $\mathcal{D}_K$-module de P V et U une application $\mathcal{D}_K$-linéaire définie sur E ; alors $u(E)$ est un $\mathcal{D}_K$-module de P.V. : en effet, $u(E) = u(E^V) \subset (u(E))^V$;

c) si E est un $\mathcal{D}_K$-module trivial, alors E est de P V : en effet, $E = E^t \subset E^V$.

On considère la catégorie <u>$\mathcal{D}_K$-P V</u> des $\mathcal{D}_K$-modules de Picard-Vessiot.

<u>*Proposition*</u> *2.*- $\mathcal{D}_K$-P V est une sous-catégorie <u>épaisse</u> de la catégorie des $\mathcal{D}_K$-modules , i.e. pour toute suite exacte de $\mathcal{D}_K$-modules

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \longrightarrow 0$$

E est de P V si et seulement si E' et E'' sont de P.V.

<u>*Démonstration*</u> : Si E est de P V , $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, v$ et $E/\mathrm{Im}\, u$ sont de P V , donc aussi E' et E'' qui leur sont respectivement $\mathcal{D}_K$-isomorphes ;

réciproquement, supposons E' et E'' de P V , et soit $f \in E$; $\mathcal{D}_K(f) = \mathrm{Im}\, \vartheta_f$, quotient de $\mathcal{D}_K$ noethérien, est un $\mathcal{D}_K$-module noethérien ; le noyau N de la restriction de v à $\mathcal{D}_K(f)$ est donc un $\mathcal{D}_K$-module de type fini, i.e. il existe $f_1,\dots,f_n \in N$ tels que $N = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{D}_K(f_j)$; or Im u étant de P V , il en est de même de N, donc $\forall\, j$, $\mathcal{D}_K(f_j)$ est de dimension finie sur K, et par suite également N; comme $v(\mathcal{D}_K(f)) = \mathcal{D}_K(v(f))$ est de dimension finie sur K, on en déduit que $\dim_K \mathcal{D}_K(f) = \dim_K N + \dim_K v(\mathcal{D}_K(f))$ est finie, et $f \in E^V$. ∎

Conséquence : Soit E un $\mathcal{D}_K$-module, alors E est de dimension finie sur K si et seulement si E est de type fini sur $\mathcal{D}_K$ et de P V : en effet, on vient de voir qu'un $\mathcal{D}_K$-module de type fini et de P V est de dimension finie sur K ; la réciproque est immédiate.

II.13. - Soit $(L,\partial_1,\dots,\partial_m)$ une extension différentielle de K.

L est donc un $\mathcal{D}_K$-module [I.22] et on pose $\underline{A_{L|K}} = L^V$.

Remarque : Soit $f \in A_{L|K}$; si $(\partial^\alpha(f) ,\dots, \partial^\mu(f))$ est une base de $\mathcal{D}_K(f)$ sur K , et $\gamma \in \mathbb{N}^m - \{\alpha,\dots,\mu\}$, il existe $a_\alpha,\dots, a_\mu, a_\gamma$ dans K tels que $a_\alpha\, \partial^\alpha(f) + \dots + a_\mu\, \partial^\gamma(f) - a_\gamma\, \partial^\gamma(f) = 0$, i.e. il existe $\delta \in \mathcal{D}_K - \{0\}$ tel que $\delta(f) = 0$.

Si $m = 1$ ((L,∂) corps différentiel ordinaire) la réciproque est vraie : en effet, si $\sum_{i=1}^{n} a_i\, \partial^i(f) = 0$ avec $a_n \neq 0$, $\partial^n(f)$ (et par suite, $\partial^{n+p}(f)$) est combinaison linéaire de f, $\partial(f) ,\dots, \partial^{n-1}(f)$, d'où $\dim_K \mathcal{D}_K(f) \leqslant n$ et $f \in A_{L|K}$. Par contre si $m > 1$, cette réciproque est fausse en général : ainsi dans l'extension différentielle $(\mathbb{R}(X,Y) , \frac{\partial}{\partial X} , \frac{\partial}{\partial Y})$ de $\mathbb{Q}(X,Y)$, on a $\frac{\partial}{\partial Y} (\frac{1}{X+\pi}) = 0$, mais $\frac{1}{X+\pi}$ n'est pas un élément de Picard-Vessiot, car la famille infinie $(\frac{\partial^n}{\partial X^n} (\frac{1}{X+\pi}))_{n\in\mathbb{N}}$ est libre sur $\mathbb{Q}(X,Y)$.

Proposition 3.- $A_{L|K}$ est une K-algèbre différentielle de dérivations de structure $\partial_{i|A_{L|K}}$.

Démonstration : $A_{L|K}$ est un sous $\mathcal{D}_K$-module de L (proposition 1), donc un sous-groupe de L tel que $\forall i\ \ \partial_i(A_{L|K}) \subset A_{L\ K}$; de plus, $\forall$ f, g $\in A_{L|K}$, on a, $\forall \alpha$, $\partial^\alpha(fg) = \sum\limits_{0\leq\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma(f)\partial^{\alpha-\gamma}(g)$; si $(\partial^\alpha(f))_{\alpha\in I}$ (resp. : $(\partial^\alpha(g))_{\alpha\in J}$) est une base de $\mathcal{D}_K(f)$ (resp. : de $\mathcal{D}_K(g)$) sur K), (I et J parties finies de $\mathbb{N}^m$), $\mathcal{D}_K(fg)$ est engendré sur K par $(\partial^\alpha(f)\ .\ \partial^\beta(g))_{\alpha,\beta\in I\times J}$ donc est de dimension finie, et fg $\in A_{L|K}$. ■

Remarques : a) $A_{L|K}$ n'est pas un corps, en général : ainsi, si l'on considère $L = \mathbb{C}(x, e^x)$, muni de la dérivation $\frac{d}{dx}$ et $K = \mathbb{C}(x)$, shx $\in A_{L|K}$ car $\frac{d^2}{dx^2}$ shx - shx = 0, mais $\frac{1}{\text{shx}}$ n'est solution d'aucune équation linéaire différentielle linéaire, donc n'appartient pas à $A_{L|K}$.

b) Si $L_c = K_c$, $A_{L|K}$ est un anneau intégralement clos (voir [Bk]).

II.14. - Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K.

Proposition 4.- Soit E un $\mathcal{D}_K$-module.

a) $L \otimes_K (E^V) \subset (L \otimes_K E)^V$

b) si E est de P V, alors le $\mathcal{D}_L$-module $L \otimes_K E$ est de P V.

Démonstration : a) si $a \otimes x \in L \otimes_K (E^V)$, d'après le lemme 1 de [I.21] conséquence a, on a

$$\forall \alpha,\ (\partial^\otimes)^\alpha (a \otimes x) = \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma(a)\ (\partial^\otimes)^{\alpha-\gamma}\ (1 \otimes x)$$
$$= \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma(a) \otimes \partial^{\alpha-\gamma}(x),\ \text{d'où}$$

$$\mathcal{D}_L(a \otimes x) \subset L \otimes_K \mathcal{D}_K(x),\ \text{et}\ a \otimes x \in (L \otimes_K E)^V .$$

b) $L \otimes_K E = L \otimes_K E^V \subset (L \otimes_K E)^V$. ■

L est une <u>extension trivialisante</u> pour un $\mathcal{D}_K$-module de P.V. de E, si le $\mathcal{D}_L$-module $L \otimes_K E$ est trivial.

Exemple : Si (K,∂) est un corps différentiel ordinaire, l'intégration d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 ,

$$S : \partial\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = [a_{ij}]$$

est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K, consiste précisément à rechercher une extension trivialisante pour le $\mathcal{D}_K$-module E suivant (de P V puisque de dimension finie sur K) : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} K_{y_i}$, où $y_1,\dots,y_n$ sont des indéterminées quelconques, la dérivation gauche de structure de E étant définie par $\partial^E(y_i) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, y_j$, pour tout i. En effet, pour toute extension différentielle L de K ,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i \in c(L \otimes_K E) \iff 0 = \partial^{\otimes}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\partial(b_i) \otimes y_i - b_i \otimes (\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, y_j))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\partial(b_i) \otimes y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_j) \otimes y_i \iff \partial(b_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_j \; , \; \forall\, i \, .$$

$\iff (b_1,\dots,b_n)$ est une solution dans L du système S. L est donc une extension trivialisante pour E $\iff \dim_{\ell} e(L \otimes_K E) = \dim_L (L \otimes_K E) = \dim_K E$ $\iff$ il existe n solutions de S dans L qui soient linéairement indépendantes sur ℓ (ℓ désignant le corps des constantes de L).

II.2. - <u>*Idéaux de PICARD-VESSIOT*</u>.

II.21. - Soit $(K,\partial_1,\dots,\partial_m)$ un corps différentiel, de corps des constantes k.

Soit I un idéal (à gauche) de $\mathcal{D}_K$; I est donc un sous

$\mathcal{D}_K$-module de $\mathcal{D}_K$, et $\mathcal{D}_K/_I$ un $\mathcal{D}_K$-module quotient de dérivations gauches de structures $\bar{\delta} \mapsto \overline{\partial_i \circ \delta}$ ($\bar{\delta}$ désignant la classe de δ modulo I).

I est un <u>idéal de Picard-Vessiot</u> (ou de <u>P V</u>) de $\mathcal{D}_K$ si le $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{D}_K/_I$ est de P V ; $\mathcal{D}_K/_I$ étant de type fini sur $\mathcal{D}_K$, I est donc un idéal de P V si et seulement si $\dim_K(\mathcal{D}_K/_I)$ est finie ([II, 12] prop. 2 conséquence).

Exemples : a) Soit E un $\mathcal{D}_K$-module ; pour tout $f \in E$, on pose $\underline{I_f} = \operatorname{Ker} \vartheta_f = \{\delta \in \mathcal{D}_K \mid \delta . f = 0\}$; alors, f est un élément de Picard-Vessiot de E si $\dim_K \mathcal{D}_K(f) = \dim_K \mathcal{D}_K/_{I_f}$ est finie, i.e. si et seulement si l'idéal I_f est de P V.

b) Soit (K,∂) un corps différentiel ordinaire et I un idéal quelconque de $\mathcal{D}_K$; alors I est un idéal de P V : en effet, si $D_I = \partial^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \partial^i$ engendre I sur $\mathcal{D}_K$ ([I.12] lemme 3 cons.), $\mathcal{D}_K/_I$ est engendré sur K par les classes modulo I de $1_K, \partial, \ldots, \partial^{n-1}$; par minimalité de $n = \omega(D_I)$, la famille $\{\bar{1}_K, \bar{\partial}, \ldots, \overline{\partial^{n-1}}\}$ est nécessairement libre sur K, et $\dim_K \mathcal{D}_K/_I = n$.

Lemme 1.- Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des idéaux de P V de $\mathcal{D}_K$.

a) si $I \in \mathcal{I}$ et $I \subset J$, alors $J \in \mathcal{I}$

b) si $I, J \in \mathcal{I}$, alors $I \cap J \in \mathcal{I}$.

Démonstration : a) Comme $I \subset J$, de la surjection canonique de $\mathcal{D}_K$ sur $\mathcal{D}_K/_J$ on déduit une surjection K-linéaire $s : \mathcal{D}_K/_I \longrightarrow \mathcal{D}_K/_J$; $\dim_K(\mathcal{D}_K/_I)$ étant finie, $\dim_K \mathcal{D}_K/_J = \dim_K \mathcal{D}_K/_I - \dim \operatorname{Ker} s$ est finie, et $J \in \mathcal{I}$.

b) de la suite exacte de K-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_K/_{I \cap J} \longrightarrow \mathcal{D}_K/_I \oplus \mathcal{D}_K/_J \longrightarrow \mathcal{D}_K/_{I+J} \longrightarrow 0 ,$$

on déduit que $\dim_K(\mathcal{D}_K/_{I \cap J}) \leqslant \dim_K \mathcal{D}_K/_I + \dim_K \mathcal{D}_K/_J$, et $I \cap J \in \mathcal{I}$. ■

<u>*Conséquence*</u> : Si I ou J est un idéal de P V de $\mathcal{D}_K$, il en est de même de I + J , puisque I + J contient I et J.

II.23. - Soit $(L, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ une extension différentielle de K , $k = K_c$, $\ell = L_c$.

$L \otimes_K \mathcal{D}_K$ est un $\mathcal{D}_L$-module ([I.22] prop. 2. cons.) et l'homomorphisme canonique $\underline{\lambda}$: $a \otimes \delta \to a\,\delta$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_L$-modules de $L \otimes_K \mathcal{D}_K$ sur $\mathcal{D}_L$: en effet, λ transforme une base $(1 \otimes \partial^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$ de $L \otimes_K \mathcal{D}_K$ sur L , en la base $(\partial^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$ de $\mathcal{D}_L$, et , $\forall\, i$, $\lambda \circ \partial_i^\otimes = \partial_i \circ \lambda$.

Soit I un idéal de $\mathcal{D}_K$; I est un sous $\mathcal{D}_K$-module de $\mathcal{D}_K$, et si j désigne l'injection canonique de I dans $\mathcal{D}_K$, $1_L \otimes j$ est une injection $\mathcal{D}_L$-linéaire de $L \otimes_K I$ dans $L \otimes_K \mathcal{D}_K$ permettant d'identifier le $\mathcal{D}_L$-module $L \otimes_K I$ à son image par $1_L \otimes j$ dans $L \otimes_K \mathcal{D}_K$; on pose $\underline{I_L} = \lambda(L \otimes_K I)$; I_L est donc un sous $\mathcal{D}_L$-module, i.e. un idéal de $\mathcal{D}_L$. $\mathcal{D}_K$ étant noethérien , il existe $d_1, \ldots, d_p \in I$ tels que $I = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D}_K \cdot d_i$; d'où $I_L = \lambda(L \otimes_K \sum_i \mathcal{D}_K \cdot d_i) = \lambda(\sum_{i=1}^{p} (L \otimes_K \mathcal{D}_K)(1 \otimes d_i)) = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D}_L \cdot d_i$, soit $I_L = \mathcal{D}_L \cdot I$.

<u>*Lemme*</u> *2*.- Soit I un idéal de $\mathcal{D}_K$.

L'application $\underline{\mu}$: $L \otimes_K \mathcal{D}_K/_I \longrightarrow \mathcal{D}_L/_{I_L}$ définie par $\mu(a \otimes \bar{\delta}) = \widetilde{\lambda(a \otimes \delta)}$, est un isomorphisme de $\mathcal{D}_L$-modules. ($\bar{\delta}$ désignant la classe de δ modulo I , $\widetilde{\lambda(a \otimes \delta)}$ la classe de $\lambda(a \otimes \delta)$ modulo I_L).

<u>*Démonstration*</u> : π : $L \otimes_K \mathcal{D}_K/_I \to (L \otimes_K \mathcal{D}_K)/_{(L \otimes_K I)}$, définie par $(a \otimes \bar{\delta}) = a \,\dot{\otimes}\, \delta$, où $a \,\dot{\otimes}\, \delta$ désigne la classe de $a \otimes \delta \in L \otimes_K \mathcal{D}_L$ modulo $L \otimes_K I$, est un L-isomorphisme ([A II] § 3 prop. 6 cor. 1). Comme $I_L = \lambda(L \otimes_K I)$; il existe un L-isomorphisme $\bar{\lambda}$: $(L \otimes_K \mathcal{D}_K)/_{(L \otimes_K I)} \longrightarrow \mathcal{D}_L/_{I_L}$ tel que ,

$\bar{\lambda}(a \dot{\otimes} \delta) = \widetilde{\lambda(a \otimes \delta)}$; $\mu = \bar{\lambda} \circ \pi$ est donc un L-isomorphisme ; de plus, on a, $\forall i$, $\mu \circ \partial_i^{\otimes}(a \otimes \bar{\delta}) = \widetilde{\lambda \circ \partial_i^{\otimes}(a \otimes \delta)} = \partial_i . (\mu(a \otimes \bar{\delta}))$, par définition de la structure quotient de $\mathcal{D}_L/I_L$, et μ est $\mathcal{D}_L$-linéaire. ■

Conséquence : I est un idéal de P V de $\mathcal{D}_K$ si et seulement si I_L est un idéal de P V de $\mathcal{D}_L$, et on a $\dim_L \mathcal{D}_L/I_L = \dim_K \mathcal{D}_K/I$: en effet,

$$\dim_K \mathcal{D}_K/I = \dim_L(L \otimes \mathcal{D}_K/I) = \dim_L \mathcal{D}_L/I_L .$$

II.23. - Soit E un $\mathcal{D}_K$-module.

Pour tout $\delta \in \mathcal{D}_K$, on note $\underline{\delta^E}$ le k-endomorphisme $x \mapsto \delta .x$ de E ; pour tout idéal I de $\mathcal{D}_K$, on pose $\underline{\mathrm{Sol}(I,E)} = \bigcap_{\delta \in I} \mathrm{Ker}\, \delta^E$ (i.e. l'ensemble des x de E tels que, pour tout $\delta \in I$, $\delta(x) = 0$) ; Sol(I,E) est donc un sous k-espace vectoriel de E.

Remarque : Si $I = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D}_K d_i$, on a donc $\mathrm{Sol}(I,E) = \{x \in E \mid \forall i , d_i . x = 0\}$; en particulier, si $I = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_K \partial_i$, alors $\mathrm{Sol}(I,E) = c(E)$.

Soient I et J deux idéaux de $\mathcal{D}_K$; on a $\mathrm{Sol}(I \cap J, E) \supset \mathrm{Sol}(I,E) + \mathrm{Sol}(J,E)$: en effet, $\bigcap_{\delta \in I \cap J} \mathrm{Ker}\, \delta^E \supset \bigcap_{\delta \in I} \mathrm{Ker}\, \delta^E$.
On a, de même, $\mathrm{Sol}(I + J, E) = \mathrm{Sol}(I,E) \cap \mathrm{Sol}(J,E)$: en effet :
$\bigcap_{\delta \in I+J} \mathrm{Ker}\, \delta^E \subset \bigcap_{\delta \in I} \mathrm{Ker}\, \delta^E \subset \mathrm{Sol}(I,E) \cap \mathrm{Sol}(J,E)$, et si $x \in \mathrm{Sol}(I,E) \cap \mathrm{Sol}(J,E)$, pour tout $\delta_1 + \delta_2 \in I + J$, $(\delta_1 + \delta_2) . x = \delta_1 . x + \delta_2 . x = 0$, donc $x \in \mathrm{Sol}(I + J, E)$.

Proposition 3.- Soient E un $\mathcal{D}_K$-module et I un idéal de $\mathcal{D}_K$.
L'application $\underline{\Lambda_E} : \mathrm{Sol}(I,E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\mathcal{D}_K/I , E)$ définie, pour tout $x \in \mathrm{Sol}(I,E)$ et $\bar{\delta} \in \mathcal{D}_K/I$, par $(\Lambda_E(x))(\bar{\delta}) = \delta . x$, est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

Démonstration : Soit $x \in \mathrm{Sol}(I,E)$; si $\delta - \delta_1 \in I$, $x \in \mathrm{Ker}(\delta-\delta_1)^E$ alors $\delta . x = \delta_1 . x$, et $\Lambda_E(x)$ est donc bien définie ; $\Lambda_E(x)$ est K-linéaire et comme, on a, $\forall i$, $(\Lambda_E(x))(\partial_i . \bar{\delta}) = (\partial_i \circ \delta) . x = \partial_i . (\delta . x)$, $\Lambda_E(x)$ est $\mathcal{D}_K$-linéaire, et Λ_E bien définie ; comme, $\forall \bar{\delta}$, δ_E est k-linéaire, il en est de même de Λ_E. Par définition de la structure quotient de $\mathcal{D}_K/_I$, on a $\bar{\delta} = \overline{\delta \circ 1_K} = \delta . \overline{1_K}$, d'où pour tout $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\mathcal{D}_K/_I , E)$, $u(\bar{\delta}) = \delta . u(\overline{1_K})$; comme, $\forall \delta \in I$, $\delta . u(\overline{1_K}) = u(0) = 0$, on a $x = u(\overline{1_K}) \in \mathrm{Sol}(I,E)$ et $u = \Lambda_E(x)$, donc Λ_E est surjectif ; enfin, pour tout $x \in \mathrm{Sol}(I,E)$ tel que $\Lambda_E(x) = 0$, on a $0 = (\Lambda_E(x))(1_K) = x$, donc Λ_E est injectif. ■

Remarques : a) pour $I = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{D}_K \partial_i$, Λ_E n'est autre que l'isomorphisme $\vartheta_E : c(E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(K,E)$ de ([I. 31] prop. 1) ;

b) Soit (K,∂) un corps différentiel ordinaire et I un idéal de $\mathcal{D}_K$ engendré par $D_I = \partial^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \partial^i$; d'après ([I. 31] ex. b), $(\overline{1_K}, \bar{\partial}, \ldots, \overline{\partial^{n-1}})$ est une base de $\mathcal{D}_K/_I$ sur K ; d'autre part, si on note ∂^Q la dérivation de structure de $\mathcal{D}_K/_I$, on a, pour tout $\xi \in (\mathcal{D}_K/_I)^*$, $\partial^*(\xi) = \partial \circ \xi - \xi \circ \partial^Q$; d'où $\xi \in c((\mathcal{D}_K/_I)^*) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\mathcal{D}_K/_I , K)$ $\Longleftrightarrow$ $\partial \circ \xi = \xi \circ \partial^Q$ i.e. $\forall j$, $0 \leq j \leq n-1$, $\partial < \overline{\partial^j}, \xi > = <\partial^{j+1}, \xi>$. Si l'on pose $f_j = <\partial_j , \xi>$ $(0 \leq j \leq n-1)$ on a donc $\xi \in (\mathcal{D}_K/_I)^*$ $\Longleftrightarrow$ $(f_o, f_1, \ldots, f_{n-1})$ est une solution dans K du système différentiel d'ordre 1

$$\begin{cases} \partial(f_o) = f_1 \\ \quad\vdots \\ \partial(f_{n-1}) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i f_i \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow 0 = \partial^n(f_o) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \partial^i(f_o) = D_I(f_o) \Longleftrightarrow f_o \in \mathrm{Sol}(I,K)$; l'isomorphisme $\Lambda_K : f_o \mapsto \xi$ exprime donc, dans ce cas, l'équivalence classique entre une équation différentielle linéaire et un système différentiel du premier ordre.

II.24. - Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, de corps des constantes ℓ.

Soit I un idéal de $\mathcal{D}_K$; si $I = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D}_K d_i$, alors $I_L = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D}_L d_i$ [II.22] et $Sol(I,L) = \{x \in L \ / \ \forall i\ ,\ d_i(x) = 0\} = Sol(I_L,L)$ ([II.23] remarque) ; en particulier, $Sol(I,L)$ est donc un sous ℓ-espace de L.

Théorème 4.- Soient $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, de corps des constantes ℓ et I un idéal de P V de $\mathcal{D}_K$.

a) $\dim_\ell Sol(I,L) \leq \dim_K(\mathcal{D}_K/I)$;

b) $\dim_\ell Sol(I,L) = \dim_K(\mathcal{D}_K/I)$ si et seulement si L est une extension trivialisante pour le $\mathcal{D}_K$-module de P V $\mathcal{D}_K/I$, i.e. si le $\mathcal{D}_L$-module $L \otimes_K \mathcal{D}_K/I$ est trivial.

Démonstration : a) $Sol(I_L,L)$ est ℓ-isomorphe à $Hom_{\mathcal{D}_L}(\mathcal{D}_L/I_L\ ,\ L)$ (prop. 3), donc

$$\dim_\ell Sol(I,L) = \dim_\ell c((\mathcal{D}_L/I_L)^*) \leq \dim_L(\mathcal{D}_L/I_L)^* = \dim_L \mathcal{D}_L/I_L = \dim_K \mathcal{D}_K/I$$

(lemme 2 cons.) ;

b) $\dim_\ell Sol(I,L) = \dim_K(\mathcal{D}_K/I) \Longleftrightarrow \dim_\ell c((\mathcal{D}_L/I_L)^*) = \dim_L(\mathcal{D}_L/I_L)^* \Longleftrightarrow (\mathcal{D}_L/I_L)^*$ est trivial [I.43] $\Longleftrightarrow \mathcal{D}_L/I_L$ est trivial ([I.43] prop. 3) $\Longleftrightarrow L \otimes_K \mathcal{D}_K/I$ est trivial (lemme 2). ■

Un idéal de P V I de $\mathcal{D}_K$ est <u>complétement résoluble</u> dans L si $\dim_\ell Sol(I,L) = \dim_K(\mathcal{D}_K/I)$, i.e. si L est une extension trivialisante pour le $\mathcal{D}_K$-module de P V $\mathcal{D}_K/I$.

Remarque : Soit L_1 une extension différentielle de L, de corps des constantes ℓ_1 , les sous-algèbres L et ℓ_1 de L_1 étant linéairement disjointes sur ℓ [0.42], le composé de l'injection canonique de $\ell_1 \otimes_\ell Sol(I,L)$

dans $\ell_1 \otimes_\ell L$ et de l'homomorphisme canonique de $\ell_1 \otimes_\ell L$ dans L_1 est une injection ℓ_1-linéaire et à valeurs dans $\mathrm{Sol}(I,L_1)$; on a donc $\dim_\ell \mathrm{Sol}(I,L) = \dim_{\ell_1} (\ell_1 \otimes_\ell \mathrm{Sol}(I,L)) \leq \dim_{\ell_1} \mathrm{Sol}(I,L_1)$; l'application $L \mapsto \dim_\ell \mathrm{Sol}(I,L)$ est donc croissante.

Ainsi si I est complément résoluble dans L, il l'est encore dans toute extension différentielle de L.

Si I est un idéal de P V de $\mathcal{D}_K$ complétement résoluble dans L, et J un idéal de $\mathcal{D}_K$ tel que $I \subset J$, alors J est complétement résoluble dans L : en effet, J est un idéal de P V de $\mathcal{D}_K$ (lemme 1), et de la surjection canonique de $\mathcal{D}_K$ sur $\mathcal{D}_K/I$, on déduit une surjection $\mathcal{D}_K$-linéaire $s : \mathcal{D}_K/I \to \mathcal{D}_K/J$; $1_L \otimes s$ est alors une surjection $\mathcal{D}_L$-linéaire de $L \otimes_K \mathcal{D}_K/I$ sur $L \otimes_K \mathcal{D}_K/J$ ([I.22] prop. 2. b), et $L \otimes_K \mathcal{D}_K/I$ étant trivial, $L \otimes \mathcal{D}_K/J$ l'est aussi ([I.42] th. 2 cons. a).

Proposition 5.- Soit $\underline{\mathcal{I}_L}$ l'ensemble des idéaux de P V de $\mathcal{D}_K$ complétement résolubles dans L.

a) si $I \in \mathcal{I}_L$ et J est un idéal de $\mathcal{D}_K$, alors $I + J \in \mathcal{I}_L$ et $\mathrm{Sol}(I + J, L) = \mathrm{Sol}(I,L) \cap \mathrm{Sol}(J,L)$;

b) si $I, J \in \mathcal{I}_L$, alors $I \cap J \in \mathcal{I}_L$ et $\mathrm{Sol}(I \cap J, L) = \mathrm{Sol}(I,L) + \mathrm{Sol}(J,L)$.

Démonstration : a) $I \subset I + J$ donc $I + J \in \mathcal{I}_L$, le reste a été démontré en [II.23] ;

b) $I \cap J$ est un idéal de P V de $\mathcal{D}_K$ (lemme 1) et $\mathrm{Sol}(I \cap J, L) \supset \mathrm{Sol}(I,L) + \mathrm{Sol}(J,L)$ [II.23] ; on a donc $\dim_K \mathcal{D}_K/I \cap J \geq \dim_\ell \mathrm{Sol}(I \cap J, L) \geq \dim_\ell (\mathrm{Sol}(I,L) + \mathrm{Sol}(J,L)) =$ $\dim_\ell \mathrm{Sol}(I,L) + \dim_\ell \mathrm{Sol}(J,L) - \dim_\ell \mathrm{Sol}(I + J, L) = \dim_K \mathcal{D}_K/I + \dim_K \mathcal{D}_K/J -$ $\dim \mathcal{D}_K/I+J = \dim_K \mathcal{D}_K/I \cap J$, puisque l'on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_K/_{I \cap J} \longrightarrow \mathcal{D}_K/_I \oplus \mathcal{D}_K/_J \longrightarrow \mathcal{D}_K/_{I+J} \longrightarrow 0$$

d'où le résultat. ■

II.25. - On considère l'ensemble $\underline{S}$ des sous k-espaces de dimension finie de K, et l'ensemble $\underline{\mathcal{I}_K}$ des idéaux de P V de $\mathcal{D}_K$ complétement résolubles dans K.

<u>*Théorème 6.*</u>- L'application $S \mapsto I_S = \{\delta \in \mathcal{D}_K \mid \delta(f) = 0 \, , \forall f \in S\}$ est une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{I}_K$, de bijection réciproque l'application $I \to \mathrm{Sol}(I,K)$, et pour tout $S \in \mathcal{S}$ on a $\dim_K \mathcal{D}_K/_{I_S} = \dim_k S$.

<u>*Démonstration*</u> : En composant l'injection de $\mathcal{D}_K$ dans $\mathrm{Hom}_K(K,K)$ avec le K-isomorphisme $\natural : \mathrm{Hom}_k(K,K) \to \mathrm{Hom}_K(K \otimes_k K, K)$ (voir [0.32]), on obtient une injection K-linéaire $\alpha : \mathcal{D}_K \to \mathrm{Hom}_K(K \otimes_k K, K)$; soit $S \in \mathcal{S}$ et i l'injection canonique de $K \otimes_k S$ dans $K \otimes_k K$ ([A II] § 7 prop. 19 cor.) alors $I_S = \{\delta \in \mathcal{D}_K \mid \forall\, a \otimes f \in K \otimes_k S \, , \langle a \otimes f, \alpha(\delta)\rangle = a\, \delta(f) = 0\}$

$= \mathrm{Ker}({}^t i \circ \alpha)$; d'où $\dim_K \mathcal{D}_K/_{I_S} = \dim_K \mathrm{Im}({}^t i \circ \alpha) \leqslant \dim_K(\mathrm{Hom}_K(K \otimes_k S,K)) = \dim_K(K \otimes_k S) = \dim_k S$; or, par définition, $\forall f \in S$, on a $\delta(f) = 0 \, , \forall \delta \in S$, i.e. $f \in \mathrm{Sol}(I_S,K)$; donc $S \subset \mathrm{Sol}(I_S,K)$, et $\dim_k S \leqslant \dim_k \mathrm{Sol}(I_S,K) \leqslant \dim_K(\mathcal{D}_K/_{I_S})$ (théorème 4). On en conclut que $\dim_k S = \dim_k \mathrm{Sol}(I_S,K) = \dim_K(\mathcal{D}_K/_{I_S})$, et, par suite, $I_S \in \mathcal{I}_K$ et $S = \mathrm{Sol}(I_{S,K})$. Soit alors $I \in \mathcal{I}_K$ et $S = \mathrm{Sol}(I,K)$; comme $S \in \mathcal{S}$, $\dim_K \mathcal{D}_K/_{I_S} = \dim_k S$, et comme $I \in \mathcal{I}_K$, $\dim_k \mathrm{Sol}(I,K) = \dim_K(\mathcal{D}_K/_I)$; or $\forall f \in \mathrm{Sol}(I,K)$, on a $\delta(f) = 0 \, , \forall \delta \in I$, donc $I \subset I_S$; on en déduit que le noyau $I_S/_I$ de la surjection canonique de $\mathcal{D}_K/_I$ sur $\mathcal{D}_K/_{I_S}$ est nul, i.e. $I = I_S$. ■

Conséquence : Soit $S \in \mathcal{S}$ et $f_1,\dots,f_n$ une base de S sur k ; d'après ([0.42] lemme 1), $g \in S \Longleftrightarrow$ la famille $(g, f_1,\dots, f_n)$ est liée sur $k \Longleftrightarrow$ pour tout $(\alpha^o,\alpha^1,\dots,\alpha^n) \in (\mathbb{N}^m)^{n+1}$ tel que $|\alpha^i| \leqslant n$, on a $\det[\partial^{\alpha^i}(g)\ ,\ \partial^{\alpha^i}(f_j)] = 0$; il existe $(\beta^o,\dots,\beta^n) \in (\mathbb{N}^m)^{n+1}$ tel que $|\beta^i| \leqslant n$ et $\det[\partial^{\beta^i}(f_j)] \neq 0$;

$$\delta_{(\alpha^i)} : g \longmapsto \frac{\det[\partial^{\alpha^i}(g)\ ,\ \partial^{\alpha^i}(f_j)]}{\det[\partial^{\beta^i}(f_j)]}$$ est alors un opérateur différentiel (structural) d'ordre $\leqslant n$ sur K, et comme $S = \mathrm{Sol}(\sum_{(\alpha^i)} \mathcal{D}_K\, \delta_{(\alpha^i)}, K)$, I_S est engendré sur $\mathcal{D}_K$ par les $\delta_{(\alpha^i)}$.

II.3. - Extensions de PICARD-VESSIOT.

II.31. - Soit $(L,\partial_1,\dots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, $\ell = L_c$ et $k = K_c$.

Pour toute partie S de L, on désigne par $K\langle S\rangle$ le plus petit sous corps différentiel de L contenant K et S ; on vérifie que $K\langle S\rangle$ est le corps des fractions de la K-algèbre engendrée sur K par $\sum_{s\in S} \mathcal{D}_K(s)$ (voir [II.11]).

Lemme 1.- Soit I un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_K$.

a) $\mathrm{Sol}(I,L) \subset A_{L|K}$

b) Si $\ell = k$, alors $K\langle \mathrm{Sol}(I,L)\rangle$ est de type fini sur K et $d\,\mathrm{tr}(K\langle \mathrm{Sol}(I,L)\rangle /K) \leqslant n^2$, où $n = \dim_K(\mathcal{D}_K/_I)$.

Démonstration : a) Soient $d_1,\dots d_n \in \mathcal{D}_K$ tels que $(\bar{d}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit une base de $\mathcal{D}_{K/I}$ sur K ; pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$, il existe donc $a_1,\dots,a_n \in K$ et $\delta \in I$ tels que $\partial^\alpha = \sum_{j=1}^n a_j\, d_j + \delta$, et ,

$\forall\, s \in Sol(I,L) \quad \partial^{\alpha}.s = \sum_{j=1}^{n} a_j\, d_j(s)$; le K-espace vectoriel $\mathcal{D}_K(s)$ est donc engendré sur K par $(d_j(s))_{1 \leqslant j \leqslant n}$, et, en particulier, $\dim_K \mathcal{D}_K(s) \leqslant n$, ainsi $s \in A_{L|K}$;

b) d'après ([II.24] théorème 4), $t = \dim_k Sol(I,L) \leqslant n$, et si $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant t}$ est une base de $Sol(I,L)$ sur k , on a, $\forall\, s \in Sol(I,L)$, $\mathcal{D}_K(s) \subset \sum_{i=1}^{t} \mathcal{D}_K(s_i) \subset \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=1}^{n} K(d_j(s_i))\right)$; on en déduit que $K\langle Sol(I,L)\rangle = K(d_j(s_i))$; d'où le résultat puisque $t \leqslant n$. ■

II.32. - Soit I un idéal de P V de $\mathcal{D}_K$.

Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K ; L est une <u>extension de Picard-Vessiot (ou de P V) de K associé à I</u> si :

* L et K ont même corps des constantes k
* $L = K\langle Sol(I,L)\rangle$ (donc L est de type fini sur K : lemme 1)
* I est complétement résoluble dans L

(i.e. $\dim_k Sol(I,L) = \dim_K \mathcal{D}_K/I$ [II.24] th. 4).

<u>*Remarque*</u> : d'après la remarque en [II.24], si I est complétement résoluble dans L, il l'est dans toute extension différentielle de L ; une extension de P V de K associée à I est donc "minimale", au sens qu'elle ne contient pas de nouvelles constantes et est engendrée comme corps différentiel sur K par les solutions de I (et pas plus, car, en général $K\langle Sol(I,L)\rangle \subsetneq L$).

<u>*Exemples*</u> : a) Soit (K,∂) un corps différentiel ordinaire ; d'après ([II.22] ex. b), tout idéal I de $\mathcal{D}_K$ est de P V , et si $D_I = \partial^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, \partial^i$ est le générateur de I sur $\mathcal{D}_K$, $\dim_K(\mathcal{D}_K/I) = n$.

Pour toute extension différentielle L de K , on a alors

$Sol(I,L) = \{s \in L \mid D_I \,.\, s = 0\}$, et si $\ell = L_c$, $\dim_\ell Sol(I,L) \leq n$.

L est donc une extension de P V de K associée à I si et seulement si

L est une extension de Picard-Vessiot de K associé à D_I au sens classique

du terme, i.e. * L et K ont même corps des constantes k

* si $V = \{s \in L \mid D_I \,.\, s = 0\}$ alors

$$\dim_k V = \omega(D_I) \quad \text{et} \quad L = K\langle V\rangle \,.$$

b) Ainsi $L = \mathbb{C}(x) < \frac{1}{shx} >$, muni de la dérivation $\frac{d}{dx}$,

est une extension de P V de $K = \mathbb{C}(x)$ associée à $D = \frac{d}{dx} - 1_K$: en effet,

$L_c = K_c = \mathbb{C}$, $V = \{s \in L \,/\, D(s) = 0\} = \mathbb{C}\, e^x$, et $L = K(e^x)$; on remarque

que, pourtant, $\frac{1}{shx} \notin A_{L|K}$ (cf. [II. 13] remarque a).

Théorème 2.- Soit L une extension de P V de K associée à un idéal de P V I de $\mathcal{D}_K$.

a) $L = Frac\,(A_{L|K})$ (corps des fractions de $A_{L|K}$ [II.13]),

b) Si, de plus, L est une extension régulière de K [0.24], alors L est une extension fortement normale (BB) de K [0.44].

Démonstration : a) d'après la démonstration du lemme 1, si

$(s_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $Sol(I,L)$ sur k et $(\bar{d}_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de

$\mathcal{D}_K/I$ sur K (où $n = \dim_K \mathcal{D}_K/I = \dim_k Sol(I,L)$) alors

$L = K\langle Sol(I,L)\rangle = K(d_j(s_i))$; de plus, $s_i \in Sol(I,L) \subset A_{L|K}$, donc

$\forall\, j$, $d_j(s_i) \in A_{L|K}$ d'où le résultat puisque $Frac(A_{L|K}) \subset L$.

b) il reste à montrer que $F = L(L)$ (voir [0.44]).

De $L = K(d_j(s_i))$ (cfa)) , on déduit en utilisant ([0.22] lemme 1) que

$F = L(1 \otimes d_j(s_i))$. $(F, \hat{\partial}_1, \ldots, \hat{\partial}_n)$ est une extension différentielle de L, donc de K, et, $\forall x \in L$, on a, $\forall i$, $\hat{\partial}_i(x \otimes 1) = \partial_i(x) \otimes 1$. La famille $\{s_i \otimes 1, 1 \otimes s_i\}$ est dans $\mathrm{Sol}(I,F)$: en effet, pour tout $\delta \in \mathcal{D}_K$, si l'on note $\hat{\delta}$ l'image de $1 \otimes \delta$ dans $\mathcal{D}_F$ par l'isomorphisme canonique de $F \otimes_K \mathcal{D}_K$ sur $\mathcal{D}_F$ [II.22], on a $\hat{\delta}(x \otimes 1) = \delta(x) \otimes 1$, et $\hat{\delta}(1 \otimes x) = 1 \otimes \delta(x)$; donc, $\forall i$, si $\delta \in I$, $\hat{\delta}(s_i \otimes 1) = 0 = \hat{\delta}(1 \otimes s_i)$. D'autre part de $\dim_L \mathrm{Sol}(I,F) \leq \dim_K \mathcal{D}_K/I = n$ ([II.24] th. 4) on en déduit que la famille $\{(s_i \otimes 1)_i, (1 \otimes s_i)_i\}$ est liée sur L, i.e. $\forall p$, il existe $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_n^p \in L$ tels que $1 \otimes s_p = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p (s_j \otimes 1)$; pour tout q, $\hat{d}_q$ étant L-linéaire,

$1 \otimes d_q(s_p) = \hat{d}_q\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p (s_j \otimes 1)\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p (d_q(s_j) \otimes 1)$ est un élément de $L(L)$ (F étant une L-algèbre par $x \mapsto x \otimes 1$) ; d'où $F = L(1 \otimes d_j(s_i)) \subset L(L)$. ■

<u>*Conséquences*</u> : a) une extension différentielle $(L, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ de K est une <u>P V -extension</u> de K (définition de E.R. KOLCHIN dans "Differential Algebra and Algebraic Groups" VI.6) si $L_c = K_c$ et s'il existe une matrice $(s_{ij}) \in G\ell(n,L)$ telle que, pour tout p, $(\partial_p(s_{ij}))(s_{ij})^{-1} \in M_n(K)$ (i.e. (s_{ij}) solutions du système différentiel de m équations : $\partial_p(s_{ij}) = A_p(s_{ij})$ avec $A_p \in M_n(K)$), et $L = K\langle s_{ij}\rangle$; si L est une extension de P V de K, associée à un idéal I, alors L est une P V -extension de K : en effet, avec les notations du théorème 2, si on pose $s_{ij} = d_i(s_j)$, $\forall i, j$, on a bien α) $L = K(s_{ij}) = K\langle s_{ij}\rangle$;

β) $\det[d_i(s_j)] \neq 0$: en effet,

$(\bar{d}_i)$ est une base de $\mathcal{D}_K/I$ sur K, donc $\widetilde{(d_i)}$ est une base de $\mathcal{D}_L/I_L$ (isomorphe à $L \otimes_K \mathcal{D}_K/I$ ([II.22] lemme 2)) sur L ; s'il existe $(a_i) \in L^n$ tel que, $\forall j$, $\sum_{i=1}^{n} a_i d_i(s_j) = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} a_i d_i$, nul sur $S = \mathrm{Sol}(I,L)$, appartient à $I_S = \{\delta \in \mathcal{D}_L \mid \delta(s) = 0, \forall s \in S\} = I_L$ ([II.25] th. 6), et par suite $a_i = 0$, $\forall i$;

γ) étant donné p, $(\partial_p \circ d_i(s_j))\ (d_i(s_j))^{-1}$ appartient à $M_n(K)$: en effet, pour tout i, $\partial_p \circ d_i \in \mathcal{D}_K$, donc il existe $(a_{iq})_q \in K^n$ tel que $\partial_p \circ d_i - \sum_{q=1}^{n} a_{iq}\, d_q \in I$, i.e. tel que , $\forall j$, $\partial_p \circ d_i(s_j) = \sum_{q=1}^{n} a_{iq}\, d_q(s_j)$; d'où, $(\partial_p \circ d_i(s_j)) = (a_{ij})\ (d_i(s_j))$.

b) Une P V extension L de K étant une extension fortement normale (KL) de K (voir E.R. KOLCHIN, op. cit. VI.6), il en est de même d'une extension de P V de L, associée à un idéal I.

c) Une extension de P V régulière L de K étant une extension fortement normale (BB) de K, telle que $L = \mathrm{Frac}(A_{L/K})$ (th. 2), alors, d'après ([B B] th. 6), $\mathrm{Gal}(L/K)$ est un groupe algébrique affine.

Les résultats précédents généralisent ceux démontrés par E.R. KOLCHIN dans [Ko] pour une extension de Picard-Vessiot ordinaire (L,∂) de K , associée à un opérateur différentiel D, à savoir :

* $\mathrm{Gal}(L/K)$ est un groupe algébrique de matrices (i.e. un sous-groupe algébrique de $\mathrm{Gl}(n,k)$, et par suite, affine - [Hu] 7.1. -) (voir [III. 42]).

* Si de plus $L_c = K_c$ est algébriquement clos, L est une extension normale de K ([D L] IV. 5).

Remarque : Soit (L,∂) une extension de Picard-Vessiot (ordinaire) de K associée à $D \in \mathcal{D}_K$, et $(s_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $\{s \in L \ /\ D(s) = 0\}$ sur K_c ; on a donc $L = K\langle s_1,\ldots,s_n\rangle$, et le plus petit anneau différentiel $K\{s_1,\ldots,s_n\}$ contenant K et $\{s_1,\ldots,s_n\}$ est inclus dans $A_{L/K}$ (voir [DL] VII. 2) ; en fait, d'après ([BB] § 5), on a $A_{L/K} = K\{s_1,\ldots,s_n\ ,\ W(s_1,\ldots,s_n)^{-1}\}$, $(W(s_1,\ldots,s_n)$ désignant le Wronskien "ordinaire" : $\det[\partial^j(s_i)]$).

Théorème 3.- Soient $(K,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ un corps différentiel de corps des constantes algébriquement clos, et un idéal de PV I de $\mathcal{D}_K$. Alors il existe une extension de PV de K associée à I.

Démonstration : Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = I \cap \mathcal{D}_k^n$, le K-espace $\mathcal{D}_K^n/I_n$ s'injecte dans $\mathcal{D}_K^{n+1}/I_{n+1}$, qui s'injecte lui-même dans $\mathcal{D}_K/I$ $(= \varinjlim \mathcal{D}_K^n/I_n)$ et comme $\dim_K \mathcal{D}_K/I$ est finie, $\mathcal{D}_K^n/I_n$ est nécessairement égal à $\mathcal{D}_K/I$ à partir d'un certain rang n_o ; si $p = \dim_K \mathcal{D}_K/I$, il existe donc $\delta_1,\ldots,\delta_p \in \mathcal{D}_K^{n_o}$ tels que $(\bar{\delta}_1,\ldots,\bar{\delta}_p)$ soit une base de $\mathcal{D}_K/I$ sur K ; mais $n_o \leqslant p-1$, car si on note p_j la codimension de $\mathcal{D}_K^{j-1}/I_{j-1}$ dans $\mathcal{D}_K^j/I_j$, on a $p_j \geqslant 1$, pour tout $j \leqslant n_o$, et $p = \dim_K \mathcal{D}_K^{n_o}/I_{n_o} = \sum_{j=0}^{n_o} p_j$; d'où $\omega(\delta_i) \leqslant p-1$, pour tout $i = 1,\ldots,p$;

Soient $y_1,\ldots,y_p$ p indéterminées différentielles (voir [III. 42]) ; pour tout $j = 1,\ldots,p$, on pose $I^{(j)} = \{\delta y_j / \delta \in I\}$ et on considère l'idéal J de $K\{y_1,\ldots,y_p\}$ engendré par $\sum_{j=1}^{p} I^{(j)}$; on va montrer qu'il existe un déterminant w de la forme $\det[\partial^{\alpha^i}(y_j)]_{1\leqslant i,j\leqslant p}$, avec $|\alpha^i| \leqslant p-1$, tel que $w \notin J$:

si, pour tout j, on pose $\mathcal{D}_K(y_j) = \{\delta y_j/\delta \in \mathcal{D}_K\}$, $I^{(j)}$ étant l'image de I par le K-isomorphisme canonique de $\mathcal{D}_K$ sur $\mathcal{D}_K(y_j)$, $\mathcal{D}_K(y_j)/I^{(j)}$ est K-isomorphe à $\mathcal{D}_K/I$, et par suite $(\widetilde{\delta_1(y_j)},\ldots,\widetilde{\delta_p(y_j)})$ est une base de $\mathcal{D}_K(y_j)/I^{(j)}$ sur K ; si on note $[I^{(j)}]$ l'idéal de $K\{y_j\}$ engendré par $I^{(j)}$, $K\{y_j\}$ étant la K-algèbre symétrique de $\mathcal{D}_K(y_j)$, $K\{y_j\}/[I^{(j)}]$ est la K-algèbre de polynômes en p indéterminées $\widetilde{\delta_1(y_j)},\ldots,\widetilde{\delta_p(y_j)}$, et $B = K\{y_1,\ldots,y_p\}/J$, qui est canoniquement isomorphe à $\bigotimes_{j=1}^{p} K\{y_j\}/[I^{(j)}]$, est la K-algèbre de polynômes en p^p indéterminées $\widehat{\delta_i(y_j)}$ $(i,j = 1,\ldots,p)$; d'où, en particulier, $\det[\delta_i(y_j)] \notin J$; et, comme $\det[\delta_i(y_j)]$ est une combinaison linéaire sur K de déterminants de la forme $\det[\partial^{\alpha^i}(y_j)]$ avec $|\alpha^i| \leqslant p-1$ (puisque $\omega(\delta_i) \leqslant p-1$), il en existe nécessairement un, que l'on note w, tel que $w \notin J$.

Le reste de la démonstration est alors identique à celle faite dans le cas ordinaire ([DL] prop. VI. 6). ■

Conséquence : Soit $(K,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ un corps différentiel de corps des constantes algébriquement clos, et E un $\mathcal{D}_K$-module, somme directe de $\mathcal{D}_K$-modules monogènes E_j (i.e $E_j = \mathcal{D}_K(f_j)$, avec $f_j \in E_j$), de dimension finie sur K ; alors il existe une extension L de K, trivialisante pour E : en effet, pour tout j, il existe un idéal I_j de $\mathcal{D}_K$, tel que $\mathcal{D}_K/I_j$ soit $\mathcal{D}_K$-isomorphe à E_j ; en particulier, $\mathcal{D}_K/I_j$ est de dimension finie sur K, donc I_j est de PV et il existe une extension de PV L_j de K associée à I_j (th. 3). Soit alors $L = K < \bigcup_j L_j >$; pour tout j, L étant une extension de L_j, I_j, complètement résoluble dans L_j, l'est aussi dans L ([II.24] rem.) ; ainsi $L \otimes_K \mathcal{D}_K/I_j$ est un $\mathcal{D}_L$-module trivial, donc aussi $L \otimes_K E_j$, et par suite également $L \otimes_K E$, qui est $\mathcal{D}_L$-isomorphe à $\bigoplus_j L \otimes_K E_j$ ([I.41] ex. b).

II.33. - Soit (K,∂) un corps différentiel ordinaire, de corps des constantes k.

Soient $\delta \in \mathcal{D}_K$ et L une extension différentielle de K, de corps des constantes ℓ ; si on pose <u>$\mathrm{Sol}(\delta,L)$</u> $= \{x \in L \ / \ \delta(x) = 0\} = \mathrm{Sol}(\mathcal{D}_K\delta, L)$ on a $\dim_\ell \mathrm{Sol}(\delta,L) \leqslant \dim_K(\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K\delta) = \omega(\delta)$ ([II. 24] th. 4), et on dit que δ est <u>complétement résoluble</u> dans L si l'idéal $\mathcal{D}_K\delta$ (de P V d'après [II.21] ex.b) est complétement résoluble dans L , i.e. si $\dim_\ell \mathrm{Sol}(\delta,L) = \dim_K(\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K\delta) = \omega(\delta)$.

Si δ est complétement résoluble dans L et $\mathrm{Sol}(\delta,L) \subset \mathrm{Sol}(D,L)$, alors δ divise D : en effet, $\omega(\delta) = \dim_\ell \mathrm{Sol}(\delta,L) \leqslant \dim_\ell \mathrm{Sol}(D,L) \leqslant \omega(D)$, donc, d'après ([I.12] lemme 3) il existe B et β dans $\mathcal{D}_K$ tels que $D = B \circ \delta + \beta$ et $\omega(\beta) < \omega(\delta)$; on a alors $\mathrm{Sol}(\delta,L) \subset \mathrm{Sol}(\beta,L)$, puisque $\beta = D-B \circ \delta$, d'où nécessairement $\beta = 0$, car sinon on aurait $\omega(\delta) \leqslant \omega(\beta)$.

Dans certaines conditions, la réciproque de cette propriété est vraie :

Proposition 4.- Soit (L,∂) une extension différentielle de K, de corps des constantes ℓ, et contenant une extension de Picard-Vessiot N de K associée à $D \in \mathcal{D}_K$. On suppose que $D = \delta_1 \circ \delta_2$ et que $k = K_c$ soit algébriquement clos.

Alors δ_1 et δ_2 sont complètement résolubles dans L et la suite de ℓ-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sol}(\delta_2,L) \hookrightarrow \mathrm{Sol}(D,L) \xrightarrow{\delta_2} L \xrightarrow{\delta_1} L \qquad \text{est exacte.}$$

Démonstration : D'après ([D L] VI.4), il existe une extension de Picard-Vessiot M de L associée à δ_2, et en particulier, $\dim_\ell \mathrm{Sol}(\delta_2,M) = \omega(\delta_2)$; D étant complètement résoluble dans N, l'est aussi dans les extensions différentielles L et M de N ([II.24] remarque), i.e. $\dim_\ell \mathrm{Sol}(D,L) = \omega(D) = \dim_\ell \mathrm{Sol}(D,M)$, d'où $\mathrm{Sol}(D,L) = \mathrm{Sol}(D,M)$; comme $\mathrm{Sol}(\delta_2,M)$ est inclus dans $\mathrm{Sol}(D,M)$, on en déduit que $\mathrm{Sol}(\delta_2,M) = \mathrm{Sol}(\delta_2,L)$, et δ_2 est complètement résoluble dans L. On a $\delta_2(\mathrm{Sol}(D,L)) \subset \mathrm{Sol}(\delta_1,L)$, et $\dim_\ell \delta_2(\mathrm{Sol}(D,L)) = \dim_\ell \mathrm{Sol}(D,L) - \dim_\ell \mathrm{Sol}(\delta_2,L) = \omega(D) - \omega(\delta_2) = \omega(\delta_1)$ ([I.11] lemme 2), d'où $\delta_2(\mathrm{Sol}(D,L)) = \mathrm{Sol}(\delta_1,L)$ et $\dim_\ell \mathrm{Sol}(\delta_1,L) = \omega(\delta_1)$. ■

Pour toute extension différentielle L de K et tout $D \in \mathcal{D}_K$, $\mathrm{Sol}(D,L)$ est stable par $\mathrm{Gal}(L/K)$ car, $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ on a $\sigma \circ D = D \circ \sigma$.

Lemme 5.- Soient (L,∂) une extension normale de K de corps des constantes ℓ, $D \in \mathcal{D}_K$ et T un sous ℓ-espace vectoriel de $\mathrm{Sol}(D,L)$ stable par $\mathrm{Gal}(L/K)$. Alors il existe un opérateur différentiel unitaire $\delta_o \in \mathcal{D}_K$, complètement résoluble dans L, tel que δ_o divise D et $T = \mathrm{Sol}(\delta_o,L)$.

Démonstration : T est un sous ℓ-espace vectoriel, de dimension finie $t \leq \omega(D)$, de L ; d'après ([II. 25] th. 6), l'idéal

$I_T = \{\delta \in \mathcal{D}_L \mid \delta(f) = 0 \ , \forall\, f \in T\}$ est donc complétement résoluble dans L et $T = \mathrm{Sol}(I_T, L)$. De plus, si $(f_j)_{1 \leq j \leq t}$ est une base de T sur ℓ, d'après ([II. 25] th. 6 conséquence). I_T est engendré sur $\mathcal{D}_L$ par l'opérateur différentiel unitaire d'ordre t

$\delta_o : g \longmapsto \dfrac{W(g,f_1,\ldots,f_t)}{W(f_1,\ldots,f_t)}$ (voir [I, bis. 3] remarque) ; en développant le déterminant $W(g,f_1,\ldots,f_t)$ suivant la première colonne, on obtient $\delta_o = \partial^t + a_1\, \partial^{t-1} + \ldots + a_t\, 1_L$, où, $\forall\, i$, $a_i = \dfrac{\det(X_{i1},\ldots,X_{it})}{W(f_1,\ldots,f_t)}$, X_{ij} désignant le vecteur colonne $(f_j, \ldots, \widehat{\partial^{t-i}(f_j)}, \ldots, \partial^t(f_j))$; or, T étant stable par Gal(L/K) , tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ induit un ℓ-automorphisme $\tilde{\sigma}$ de T^t , d'où

$$\sigma(a_i) = \frac{\det(\tilde{\sigma}(X_{i1}), \ldots, \tilde{\sigma}(X_{it}))}{W(\sigma(f_1), \ldots, \sigma(f_t))} = \frac{\det \tilde{\sigma}}{\det \tilde{\sigma}} \cdot \frac{\det(X_{i1},\ldots,X_{it})}{W(f_1,\ldots,f_t)} = a_i \ ;$$

K étant l'ensemble des invariants de Gal(L/K), on en déduit que $\delta_o \in \mathcal{D}_K$; comme $I_T = \mathcal{D}_L\, \delta_o$ est complétement résoluble dans L , il en est de même de δ_o ; et comme $\mathrm{Sol}(\delta_o, L) = T \subset \mathrm{Sol}(D,L)$, δ_o divise D. ∎

<u>*Théorème*</u> 6.- Soit (L,∂) une extension de Picard-Vessiot de K associée à $D \in \mathcal{D}_K$, de corps des constantes k algébriquement clos.

Pour tout $f \in A_{L|K}$, l'idéal $I_f = \{\delta \in \mathcal{D}_K \mid \delta(f) = 0\}$ est complétement résoluble dans L.

<u>*Démonstration*</u> : Soient D_f le générateur unitaire de I_f , et M une extension de Picard-Vessiot de L associée à $D_f \circ D \in \mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}_L$; comme $M = L \langle \mathrm{Sol}(D_f \circ D, M)\rangle = K \langle \mathrm{Sol}(D,L), \mathrm{Sol}(D_f \circ D, M)\rangle = K\langle \mathrm{Sol}(D_f \circ D, M)\rangle$, puisque $\mathrm{Sol}(D,L) \subset \mathrm{Sol}(D_f \circ D, M)$, M est une extension de Picard-Vessiot de K associée à $D_f \circ D$, donc, en particulier, une extension normale de K ([DL] IV.5) ; $\mathrm{Sol}(D,L) = \mathrm{Sol}(D,M)$ est stable par Gal(M/K) , donc

aussi $L = K\langle Sol(D,L)\rangle$ et $Sol(D_f,L) = Sol(D_f,M) \cap L$; $Sol(D_f,L)$ étant un sous k-espace de $Sol(D_f,M)$, stable par $Gal(M/K)$, il existe, d'après le lemme 5, un opérateur différentiel unitaire $\delta_o \in \mathcal{D}_K$, complètement résoluble dans L, tel que δ_o divise D_f et $Sol(D_f,L) = Sol(\delta_o,M)$; donc, en particulier, $f \in Sol(\delta_o,M)$, i.e. $\delta_o(f) = 0$, d'où $\delta_o \in I_f$ et D_f divise δ_o ; D_f et δ_o étant unitaires, on en conclut que $D_f = \delta_o$. ■

II.4. - Extensions P V-NORMALES.

II.41. - Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K.

Soit $f \in L$; d'après ([II.21] ex. a)), f est un élément de Picard-Vessiot de L sur K, i.e. $f \in A_{L|K}$, si et seulement si l'idéal $I_f = \{\delta \in \mathcal{D}_K \ / \ \delta(f) = 0\}$ est de P V.

L est une extension P V -normale de K si :

* L est une extension de type fini de K
* L et K ont même corps des constantes
* $L = Frac(A_{L|K})$
* pour tout $f \in A_{L|K}$, l'idéal de P V I_f de $\mathcal{D}_K$ est complètement résoluble dans L.

Remarque : Si L est une extension P V -normale de K et $f \in A_{L|K}$, alors I_f, dont f est une solution, a un "maximum" de solutions dans L ; on notera l'analogie avec la définition de N. Bourbaki des extensions algébriques normales ([A V] § 6 déf. 2) : dès que $p \in K[X]$ a une racine dans L, il les y a toutes.

Exemple : Une extension de Picard-Vessiot ordinaire (L,∂) de K, de corps des constantes algébriquement clos, est une extension P V -normale de K : ceci résulte des théorèmes 2 et 6 de [II.3].

Théorème 1.- Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension P V -normale de K, de corps des constantes k.

Alors il existe un idéal de P V I de $\mathcal{D}_K$ tel que L soit une extension de P V de K associée à I.

Démonstration : L est de type fini sur K et $L = \mathrm{Frac}(A_{L|K})$, donc il existe $f_1,\ldots,f_s \in A_{L|K}$ tels que $L = K(f_1,\ldots,f_s)$; pour tout j, I_{f_j} est un idéal de P V de $\mathcal{D}_K$ complétement résoluble dans L, donc, d'après ([II.24] prop. 5 b), il en est de même de $I = \bigcap_{j=1}^{s} I_{f_j}$; et comme $f_j \in \mathrm{Sol}(I_{f_j},L) \subset \mathrm{Sol}(I,L)$, on a $L \subset K(\mathrm{Sol}(I,L)) \subset K\langle\mathrm{Sol}(I,L)\rangle$. ∎

Conséquence : Soit (L,∂) une extension différentielle ordinaire de K, de corps des constantes algébriquement clos ; alors, d'après ([II.33], th. 5), L est une extension PV-normale de K si et seulement si L est une extension de Picard-Vessiot de K ; en particulier, L est une extension normale de K.

Proposition 2.- Soient $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, et $k = K_c$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) L est une extension PV-normale régulière de K ;

ii) L est une extension fortement normale (BB) de K et Gal(L/K) est un groupe algébrique affine (sur k).

Démonstration : i) ⟹ ii) : d'après le th. 1, L est une extension de PV de K, d'où le résultat d'après [II.32] th. 2 et cons. c ;

ii) ⟹ i) : d'après [BB] th. 6, on a $L = \mathrm{Frac}(A_{L/K})$; il reste à montrer que si $f \in A_{L/K}$, l'idéal I_f est complètement résoluble dans L : on considère le sous k-espace vectoriel $\mathcal{E}_k(f)$ de L engendré par $\{\sigma(f)/\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)\}$; comme, pour tout $\delta \in I_f$ et $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, $\delta(\sigma(f)) = \sigma(\delta(f)) = 0$, on a $\mathcal{E}_k(f) \subset \mathrm{Sol}(I_f,L)$, d'où $\dim_k \mathcal{E}_k(f) \leq \dim_k \mathrm{Sol}(I_f,L) \leq \dim_K \mathcal{D}_K/I_f$ ([II.24] th. 4) ;

or $\dim_k E_k(f) \geq \dim_K \mathcal{D}_K/I_f$: en effet, soit $(f = \sigma_1(f), \sigma_2(f), \ldots, \sigma_r(f))$ une base de $E_k(f)$ sur k ; si, pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^m)^r$, la famille $(\partial^{\alpha_i}(f))_{1 \leq i \leq r}$ est liée sur K, le résultat est trivial ; supposons que $(\partial^{\alpha_i}(f))_{1 \leq i \leq r}$ soit libre sur K, et, par conséquent, que $\det[\sigma_i \circ \partial^{\alpha_j}(f)]_{1 \leq i,j \leq r} \neq 0$; soit $\alpha_o \in \mathbb{N}^m$; pour tout $\sigma_o \in \mathrm{Gal}(L/K)$, il existe $(\lambda_i)_i \in k^r$ tel que $\sigma_o(f) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sigma_i(f)$, donc pour tout $j = 0, \ldots, r$, $\sigma_o \circ \partial^{\alpha_j}(f) = \partial^{\alpha_j} \circ \sigma_o(f) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sigma_i \circ \partial^{\alpha_j}(f)$, et, par suite, $\det[\sigma_i \circ \partial^{\alpha_j}(f)]_{0 \leq i,j \leq r} = 0$; on en déduit qu'il existe un unique $(c_1, \ldots, c_r) \in L^r$ tel que, pour tout $\sigma_o \in \mathrm{Gal}(L/K)$:

① $\sigma_o \circ \partial^{\alpha_o}(f) = \sum_{s=1}^{r} c_s \sigma_o \circ \partial^{\alpha_s}(f)$;

pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$, on a donc $\tau \circ \sigma_o \circ \partial^{\alpha_o}(f) = \sum_{s=1}^{r} \tau(c_s)\tau \circ \sigma_o \partial^{\alpha_s}(f)$; d'où en appliquant ① à $\tau \circ \sigma_o$, $\sum_{\sigma=1}^{r} (\tau(c_s) - c_s)\tau \circ \sigma_o \circ \partial^{\alpha_s}(f) = 0$; et, par suite, comme $(\tau \circ \sigma_o \circ \partial^{\alpha_s}(f))_{1 \leq s \leq r}$ est libre sur K, $\tau(c_s) = c_s$, i.e. $c_s \in K$ (une extension fortement normale (BB) étant, en particulier, normale -[BB] th. 3 -), soit $(\partial^{\alpha_s}(f))_{0 \leq s \leq r}$ liée sur K. ■

Proposition 3.- Soit $(L, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ une extension PV-normale de K, $k = K_c$. Alors l'anneau différentiel $A_{L|K}$ est simple, i.e. les seuls idéaux différentiels de $A_{L|K}$ sont $\{0\}$ et $A_{L|K}$.

Démonstration : Soit $J \neq \{0\}$ un idéal différentiel de $A_{L|K}$, et $f \neq 0$ dans J ; I_f est complétement résoluble dans L, et si $(f = f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathrm{Sol}(I_f, L)$ sur k, et $(\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_n)$ une base de $\mathcal{D}_K/I_f$ sur K, on a $\det[d_j(f_i)] \neq 0$ ([II.32] th. 2 conséquence a(β)) ;

or $\det[d_j(f_i)] = \sum_{j=1}^{n} a_j\, d_j(f)$ où $a_j = (-1)^{i+q} \det[d_q(f_i)]_{\substack{i\neq 1\\ q\neq j}}$; J étant différentiel, $d_j(f) \in J$, $\forall j$; de plus, $\forall i \neq 1$, $q \neq j$, $d_q(f_i) \in A_{L|K}$ (cf. démonstration [II.32] th. 2 a.) ; donc $a_j \in A_{L|K}$ et par suite $w = \det[d_j(f_i)] \in J$; on va montrer que $w^{-1} \in A_{L|K}$, i.e. $\dim_K \mathcal{D}_K(w^{-1})$ est finie : étant donné r, $1 \leq r \leq m$, pour tout $p = 1,\dots,m$, il existe $(a_{jp})_j \in K^n$ tel que $\partial_r \circ d_p - \sum_{j=1}^{n} a_{jp}\, d_j \in I_f$, donc tel que, $\forall i$, $\partial_r \circ d_p(f_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{jp}\, d_j(f_i)$; on a donc

$$\partial_r(w) = \sum_{p=1}^{n} \det[d_j(f_i),\ \partial_r \circ d_p(f_i)]_{j\neq p}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{pp} \det[d_j(f_i),\ d_p(f_i)]_{j\neq p}$$

$= a_r w$, avec $a_r = \sum_{p=1}^{n} a_{pp} \in K$, d'où $\partial_r(w^{-1}) = \dfrac{-\partial_r(w)}{w^2} = -a_r(w^{-1}) \in K\,w^{-1}$; par récurrence, on en déduit que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^m - \{0\}$, $\partial^\alpha(w^{-1}) \in K\,w^{-1}$, et par suite $\mathcal{D}_K(w^{-1}) = K\,w^{-1}$. ■

II.42.- Soit $(L,\partial_1,\dots,\partial_m)$ une extension différentielle de K.

Soit $f \in L$, algébrique sur K , et g un conjugué de f, i.e. une racine du polynôme minimal de f sur K ; alors il existe une clôture algébrique $\hat{K}$ de K contenant f et g et un K-automorphisme u de $\hat{K}$ tel que $u(f) = g$. $\hat{K}$ étant une extension différentielle de K ([0,41] rem. b), u est différentiel, donc pour tout $\delta \in \mathcal{D}_K$, $\delta(g) = \delta \circ u(f) = u \circ \delta(f)$, et par suite, $I_g = \{\delta \in \mathcal{D}_K \mid \delta(g) = 0\} = I_f$.

D'autre part, comme $K(f)$ est une extension différentielle de K , $\mathcal{D}_K(f) \subset K(f)$, d'où, $K(f)$ étant de dimension finie sur K, $f \in A_{L/K}$.

Proposition 4.- Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension P.V.-normale de K, de corps des constantes algébriquement clos k.

Si $f \in L$ est algébrique sur K, alors tous les conjugués de f sont dans L.

Démonstration : Soit g un conjugué de f ; g étant algébrique sur L, $L(g)$ est une extension différentielle de L, et d'après ([0.42] lemme 2), on a $d.tr(L(g)_c/k) \leqslant d\ tr(L(g)/L) = 0$, d'où $L(g)_c = k$; $I_g = I_f$ étant complétement résoluble dans L, l'est aussi dans $L(g)$, donc $\dim_k Sol(I_g,L) = \dim_k Sol(I_g, L(g))$ et par suite $g \in Sol(I_g, L(g)) = Sol(I_g,L)$. ∎

Conséquence : Soit $L(,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension P V -normale de K, de corps des constantes algébriquement clos ; si L est algébrique sur K, alors $L = A_{L|K}$ est une extension galoisienne [0.21], et, par suite, normale de K.

Proposition 5.- Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension P V -normale de K, de corps des constantes algébriquement clos k.

Si $f \in L$ est algébrique sur K, de conjugués $f_1 = f$, $f_2,\ldots, f_r$, alors $Sol(I_f,L) = \sum_{i=1}^{r} k\,.\,f_i$.

Démonstration : Pour tout i, $I_{f_i} = I_f$ et $f_i \in L$ (prop. 4) d'où $\sum_{i=1}^{r} k\, f_i \subset Sol(I_f,L)$.

$S = \sum_{i=1}^{r} k\,.\,f_i$ est un sous k-espace vectoriel de dimension finie de L ; si $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de S sur k, il existe $(\beta^1,\ldots,\beta^n) \in (\mathbb{N}^m)^n$ tel que $\det[\partial^{\beta^i}(u_j)] \neq 0$ et $I_S = \{\delta \in \mathcal{D}_L \mid \delta(s) = 0\ ,\ \forall\, s \in S\}$ est engendré sur $\mathcal{D}_L$ par les opérateurs différentiels

$$\delta_{(\alpha^i)} : g \longmapsto \frac{\det[\partial^{\alpha^i}(g)\ ,\ \partial^{\alpha^i}(u_j)]}{\det\,[\partial^{\beta^i}(u_j)]}\ ,\quad \text{où } (\alpha^1,\ldots,\alpha^n) \in (\mathbb{N}^m)^{n+1}$$

et $|\alpha^i| \leqslant n$ (voir [II.25] th. 6 conséquence) ; or $K(f_1,\dots,f_r)$ est une extension galoisienne, donc normale, de K, de groupe de Galois le groupe des permutations de $\{f_1,\dots,f_r\}$ ([A V] § 10 n° 3) ; S est donc stable par $Aut(K(f_i)/K) = Gal(K(f_i)/K)$, et, par suite, les coefficients de $\delta_{(\alpha^i)}$ sont invariants par tout $\sigma \in Gal(K(f_i)/K)$; comme $\delta_{(\alpha^i)}(f) = 0$, on a $\delta_{(\alpha^i)} \in I_f$, donc $I_S \subset \mathcal{D}_L\, I_f$ et $Sol(I_f,L) \subset Sol(\mathcal{D}_L\, I_f, L) = Sol(I_S,L) = S$ ([II.25] th. 6). ■

Exemple : Soit (L,∂) une extension P V.-normale (ordinaire) de K, de corps des constantes algébriquement clos k ; soit $a \in K - \{0\}$ et $f \in L$ tel que $f^n = a$; on a donc $\partial(a) = n\, f^{n-1}\, \partial(f)$ d'où $(\partial - \frac{\partial(a)}{na} 1_K)(f) = 0$; $\delta_o = \partial - \frac{\partial(a)}{na} 1_K$, étant d'ordre 1 , est nécessairement le générateur unitaire de I_f sur $\mathcal{D}_K$, d'où $\dim_k Sol(I_f,L) = \omega(\delta_o) = 1$, et par suite $Sol(I_f,L) = k\, f$; or, si ω_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont les racines n-èmes de l'unité dans k, les conjugués de f sur K sont $f_i = \omega_i\, f$, et ainsi $Sol(I_f,L) = \sum_{i=1}^{r} k\, f_i$.

II.43. - Soit $(L,\partial_1,\dots,\partial_m)$ une extension différentielle de K.

Remarques : a) Si L est une extension P V -normale de K , alors $A_{L|K}$ est une K-algèbre de type fini ; en particulier le résultat de [B B] , rappelé en ([II.32] remarque) se généralise au cas partiel, à savoir que si $L = K\langle s_1,\dots,s_n\rangle$ ((s_j) base de $Sol(I,L)$ - th. 1 -) et w un déterminant non nul de la forme $\det[\partial^{\alpha^i}(s_j)]$ (voir [0.42] lemme 1) alors $A_{L|K} = K\{s_1,\dots,s_n, w^{-1}\}$ (voir [Bk]).

Cependant les démonstrations de [B B] et [Bk] reposant sur l'utilisation du théorème de WEIL (voir [0.45] th. 4 rem.) , on peut se demander si ce résultat ne pourrait être obtenu directement.

b) Une autre question se pose à propos des extensions P V -normales, qui vise à une construction plus simple de la structure de groupe affine de Gal(L/K) (voir [III.42]) : la k-algèbre des constantes de $(A_{L|K}) \otimes_K (A_{L/K})$ est-elle l'<u>anneau des coordonnées</u> (ou <u>l'algèbre affine</u>) ([La] II § 3 et [Hu] 1.5) du groupe algébrique affine Gal(L/K) ? En particulier, est-ce une k-bigèbre (pour la liaison bigèbre-groupe algébrique affine, voir [Hu] 7.6.) ?

c) Soit $(K,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ un corps différentiel de corps des constantes algébriquement clos, et E un $\mathcal{D}_K$-module de dimension finie sur K ; on peut conjecturer l'existence d'une extension L de K , trivialisante pour E : en effet, d'après ([II.32] th. 3 cons.), il suffit pour cela que E soit une somme directe de $\mathcal{D}_K$-modules momogènes, et comme, d'après [I.43], E admet une décomposition de Remak : $E = \bigoplus_{j=1}^{p} E_j$, que tout $\mathcal{D}_K$-module indécomposable soit monogène ; or, dans le cas ordinaire, tout $\mathcal{D}_K$-module de dimension finie sur K est monogène (P. DELIGNE : "Equations différentielles à points singuliers réguliers" Lemme 1.3. - Lectures notes 163, Springer-Verlag-), et cette propriété doit pouvoir se généraliser au cas partiel, au moins pour un $\mathcal{D}_K$-module indécomposable.

d) Dans ce chapitre, on a étudié la complète résolubilité des idéaux de PV, et par suite, la trivialisation des $\mathcal{D}_K$-modules de dimension finie sur K (rem. c) ; pour étendre cette théorie au cas d'un idéal I tel que $\mathcal{D}_K/I$ soit de dimension infinie, il semble qu'aux $\mathcal{D}$-modules doit être substitué l'outil des algèbres de jets $J_n(K)$ opérant sur $I \cap \mathcal{D}_K^n$ (voir [I bis] et B. MALGRANGE : "Cohomologie de Spencer" Orsay - 1966).

CHAPITRE III

EXTENSIONS LIE-GALOISIENNES.

III.1. - Algèbre de Lie-Galois.

III.11. - Soit $(L,\partial_1,\dots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, $k = K_c$.

$\mathrm{Der}_K L$ est un $\mathcal{D}_L$-module de dérivations gauches de structure $\tilde{\partial}_i$ définies par $\tilde{\partial}_i(d) = [\partial_i,d]$, $\forall d \in \mathrm{Der}_K L$ [I.23].

On pose $\mathcal{G}_{L/K} = c(\mathrm{Der}_K L) = \{d \in \mathrm{Der}_K L \mid \forall i,\ \tilde{\partial}_i(d) = 0\}$

$= \{d \in \mathrm{Der}_K L \mid \forall i,\ \partial_i \circ d = d\circ\partial_i\}$;

$\mathcal{G}_{L/K}$ est donc un sous ℓ-espace vectoriel de $\mathrm{Der}_K L$; de plus, $\mathrm{Der}_K L$ est une K-algèbre de Lie ([0.33], lemme 2 cons. b), et, $\forall\ \xi,\eta \in \mathcal{G}_{L/K}$, on a, $\forall i$, (identité de Jacobi) $[\partial_i,[\xi,\eta]] = -\ [\xi,[\eta,\partial_i]] - [\eta,[\partial_i,\xi]] = 0$; comme $k = K \cap \ell$, $\mathcal{G}_{L/K}$ est une sous k-algèbre de Lie de $\mathrm{Der}_K L$, appelée <u>algèbre de Lie-Galois de</u> L <u>sur</u> K.

Remarques :

a) On a $\mathcal{G}_{L/K} = \mathcal{G}_{L/\bar{K}}$ (car $\mathrm{Der}_{\bar{K}} L = \mathrm{Der}_K L$ [0.34]) ; en particulier, si L est algébrique sur K, $\mathcal{G}_{L/K} = 0$.

b) Soit $(A,\partial_1,\dots,\partial_m)$ une extension d'anneaux différentiels de K, A étant intègre de corps des fractions F ; alors, pour tout $d \in \mathrm{Der}_K A$, le prolongement $\bar{d}$ de d à F ([0,41] ex. b) appartient à $\mathcal{G}_{F/K}$ si et seulement si $[\partial_i,d] = 0$, $\forall i$: en effet, $[\partial_i,\bar{d}] = \overline{[\partial_i,d]}$ est l'unique prolongement à F de $[\partial_i,d]$.

Théorème 1.-

Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de type fini de K, $\ell = L_c$ et $k = K_c$.

a) $\dim_\ell \mathcal{G}_{L/K} = d.tr(L/K)$;

b) les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\dim \mathcal{G}_{L/K} = d.tr(L/K)$;

(ii) le $\mathcal{D}_L$-homomorphisme canonique $\Psi : L \otimes \mathcal{G}_{L/K} \to \mathrm{Der}_K L$ est un isomorphisme ;

(iii) $\mathrm{Der}_K L$ est un $\mathcal{D}_L$-module trivial ;

(iv) $\Omega_{L/K}$ est un $\mathcal{D}_L$-module trivial.

Démonstration :

a) d'après ([I.33] cons. c)) $\dim_\ell \mathcal{G}_{L/K} = \dim_\ell c(\mathrm{Der}_K L) \leqslant \dim_L \mathrm{Der}_K L = d.tr(L/K)$

b) (i) $\iff$ (iii) : ([I.41] prop. 1)

(iii) $\iff$ (ii) : ([I.41] prop. 1)

(iii) $\iff$ (iv) : $\mathrm{Der}_K L$ est trivial si et seulement si $(\mathrm{Der}_K L)^*$ est trivial ; or $\Omega_{L/K}$ est $\mathcal{D}_L$-isomorphe à $(\mathrm{Der}_K L)^*$ ([I.24] cons. b). ■

III.12. - Pour tout sous-corps différentiel M de L contenant K, on a $\mathcal{G}_{L/M} = \mathrm{Der}_M L \cap \mathcal{G}_{L/K}$; $\underline{M'} = \mathcal{G}_{L/M}$ est donc un sous ℓ-espace vectoriel et une sous k-algèbre de Lie de $\mathcal{G}_{L/K}$.

Pour toute partie G de $\mathcal{G}_{L/K}$, $x \in L$ est un <u>invariant</u> de G si $d(x) = 0$, $\forall\, d \in G$. Pour toute sous k-algèbre de Lie H de $\mathcal{G}_{L/K}$, l'ensemble $\underline{H'}$ des invariants de H est un sous-corps différentiel de L contenant K : en effet, $\forall\, d \in H$, Ker d est un sous-corps différentiel de L contenant K, donc aussi $H' = \bigcap_{d\in H} \mathrm{Ker}\, d$; de plus, $\forall d \in H$, $x \in H'$, on a, $\forall i$, $0 = [\partial_i, d](x) = -d \circ \partial_i(x)$, d'où $\partial_i(x) \in H'$. H' est appelé <u>corps des inva-</u>

riants de H. On pose alors $M'' = (M')'$, $H'' = (H')'$, etc...

Proposition 2.- Pour tous sous-corps différentiels M, M_1 de L contenant K, et toutes sous k-algèbres de Lie H, H_1 de $\mathcal{D}_{L/K}$, on a :

a) $M \subset \bar{M} \subset M''$ et $H \subset H''$; en particulier $L = L''$ et $\mathcal{D}_{L/K} = (\mathcal{D}_{L/K})''$;

b) Si $M \subset M_1$, alors $M_1' \subset M'$; et si $H \subset H_1$, $H_1' \subset H'$;

c) $\mathcal{D}_{L/M} = \mathcal{D}_{L/M''}$ et $H' = H'''$.

Démonstration :

a) si $x \in \bar{M}$, pour tout $d \in M' \subset \mathrm{Der}_M L = \mathrm{Der}_{\bar{M}} L$, on a $d(x) = 0$, d'où $x \in M''$; et, si $d \in H$, on a $d(x) = 0$, $\forall x \in H'$, donc $d \in H''$;

b) si $M \subset M_1$, alors $\mathrm{Der}_{M_1} L \subset \mathrm{Der}_M L$ donc $c(\mathrm{Der}_{M_1}(L) \subset c(\mathrm{Der}_M L)$; et, si $H \subset H_1$, alors $\bigcap_{d \in H_1} \mathrm{Ker}\, d \subset \bigcap_{d \in H} \mathrm{Ker}\, d$;

c) on a $M' \subset (M')'' = M'''$ (a), et comme $M \subset M''$, on a $(M'')' \subset M'$ (b), donc $\mathcal{D}_{L/M} = \mathcal{D}_{L/M''}$; de même pour $H' = H'''$. ■

III.13. - Un sous k-espace H de $\mathcal{D}_{L/K}$ est un idéal de $\mathcal{D}_{L/K}$ si $[H, \mathcal{D}_{L/K}] \subset H$; c'est donc en particulier une sous k-algèbre de Lie de $\mathcal{D}_{L/K}$.

Proposition 3.-

a) si H est un idéal de $\mathcal{D}_{L/K}$, alors $d(H') \subset H'$, $\forall\, d \in \mathcal{D}_{L/K}$;

b) soit M un sous-corps différentiel de L contenant K ; si $d(M) \subset M$, $\forall\, d \in \mathcal{D}_{L/K}$, alors $M' = \mathcal{D}_{L/M}$ est un idéal de $\mathcal{D}_{L/K}$;

c) si de plus, $M_c = \ell$, alors

$$0 \to \mathcal{D}_{L/M} \hookrightarrow \mathcal{D}_{L/K} \xrightarrow{\theta} \mathcal{D}_{M/K}, \quad \text{où } \theta(d) = d|_M ,$$

est une suite exacte de ℓ-espaces vectoriels et de k-algèbres de Lie.

Démonstration :

a) si $d \in \mathcal{G}_{L/K}$, $x \in H'$, on a, $\forall d_1 \in H$, $0 = [d_1,d](x) = d_1 \circ d(x)$, d'où $d(x) \in H'$;

b) pour tout $d_1 \in M'$, $d \in \mathcal{G}_{L/K}$, $[d_1,d] \in \mathcal{G}_{L/K}$, et comme $d(M) \subset M \subset \mathrm{Ker}\, d_1$, on a $M \subset \mathrm{Ker}[d_1,d]$, donc $[d_1,d] \in \mathrm{Der}_M L$; ainsi $[d_1,d] \in \mathcal{G}_{L/K} \cap \mathrm{Der}_M L = \mathcal{G}_{L/M}$;

c) $\forall\, d \in \mathcal{G}_{L/K}$, $d(M) \subset M$, d'où $d|_M \in \mathrm{Der}_K M$; et comme $[\partial_i, d|_M] = 0$ $\forall i$, $d|_M \in \mathcal{G}_{M/K}$; de plus $d|_M = 0$ si et seulement si $d \in \mathrm{Der}_M L \cap \mathcal{G}_{L/K} = \mathcal{G}_{L/M}$. ∎

Une sous k-algèbre de Lie H de $\mathcal{G}_{L/K}$ (resp : un sous corps différentiel M de L contenant K) est dit(e) <u>fermé(e)</u> si $H = H''$ (resp. $M = M''$), les applications $H \mapsto H'$ et $M \mapsto M'$ sont donc des bijections réciproques entre l'ensemble des sous k-algèbres de Lie fermées de $\mathcal{G}_{L/K}$ et l'ensemble des sous-corps différentiels fermés de L contenant K, ce qui définit une <u>correspondance de Galois</u> entre ces deux ensembles.

Proposition 4.-

a) Pour toute sous k-algèbre de Lie fermée H de $\mathcal{G}_{L/K}$, H est un idéal de $\mathcal{G}_{L/K}$ si et seulement si $d(H') \subset H'$, $\forall\, d \in \mathcal{G}_{L/K}$;

b) Pour tout sous-corps différentiel fermé M de L contenant K, $\mathcal{G}_{L/M}$ est un idéal de $\mathcal{G}_{L/K}$ si et seulement si $d(M) \subset M$, $\forall\, d \in \mathcal{G}_{L/K}$;

c) tout sous-corps différentiel fermé M de L contenant K est algébriquement fermé dans L.

Démonstration :

a) voir prop. 3 a) et b) ;

b) si M est fermé, alors $\mathcal{G}_{L/M}$ est un idéal (prop. 3 b) ; réciproquement si $\mathcal{G}_{L/M}$ est un idéal, alors $d(\mathcal{G}_{L/M}) \subset \mathcal{G}_{L/M}$ (prop. 3 a), i.e. $d(M'') \subset M''$; comme $M'' = M$, on a $d(M) \subset M$;

c) on a $M \subset \bar{M} \subset M''$ (prop. 2 a)), donc $M = M''$ entraîne $M = \bar{M}$. ■

III.2. - *Bigèbre de Lie-Galois.*

Soient $(L, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ une extension différentielle de type fini de K, de même corps des constantes k de K, $t = d.tr(L/K)$ et $(d_i)_{1 \leq i \leq s}$ une base sur k de l'algèbre de Lie-Galois de L sur K.

$\mathcal{G}_{L/K}$ étant une sous k-algèbre de Lie de $Der_K L$, on appelle <u>bigèbre de Lie-Galois</u> de L sur K, la k-bigèbre enveloppante $\underline{U_{L/K}} = (U_k(\mathcal{G}_{L/K}), c, \varepsilon)$ de $\mathcal{G}_{L/K}$ (voir [0.14]). On note i l'injection canonique de $\mathcal{G}_{L/K}$ dans $Diff_{L/K}$, et on désigne par $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^s}$ la base de $U_{L/K}$ canoniquement associée à (d_i). Il existe alors un homomorphisme de k-algèbres filtrées $\underline{\tau} : U_{L/K} \to Diff_{L/K}$ tel que $i = \tau \circ \sigma_o$, où σ_o est l'injection de $\mathcal{G}_{L/K}$ dans $U_{L/K}$ (cf. [I] Annexe), et on a $\tau(U_{L/K}) \subset c(Diff_{L/K})$: en effet, $Diff_{L/K}$ étant une (K,L)-algèbre différentielle [I.23], $c(Diff_{L/K})$ est une sous k-algèbre de $Diff_{L/K}$; comme on a, $\forall i$, $0 = [\partial_i, 1_L] = [\partial_i, \tau(1)]$ et, pour tout $d \in \mathcal{G}_{L/K}$, $0 = [\partial_i, d] = [\partial_i, \tau o \sigma_o(\alpha)]$, et que $U_{L/K}$ est engendré, en tant que k-algèbre par 1 et $\sigma_o(\mathcal{G}_{L/K})$, on en conclut que $\tau(U_{L/K})$ est inclus dans $c(Diff_{L/K})$.

D'autre part, d'après ([I] annexe, lemme 1) la k-algèbre L est munie d'une structure de $U_{L/K}$-module algèbre par la loi externe $(z,a) \mapsto \tau(z)(a)$, et on peut donc considérer le smash-produit $L \# U_{L/K}$.

<u>*Lemme*</u> *1.-* $L \# U_{L/K}$ est muni d'une structure de K-algèbre par l'homomorphisme d'anneaux $\vartheta : \lambda \longmapsto \lambda \otimes 1$ de K dans $L \# U_{L/K}$.

<u>*Démonstration*</u> : pour tout $b \otimes z_\alpha \in L \otimes U_{L/K}$ et $\lambda \in K$, comme $c(1) = 1 \otimes 1$, on a $m^{\#}((\lambda \otimes 1) \otimes (b \otimes z_\alpha)) = \lambda b \otimes z_\alpha$; en particulier, $\forall \lambda' \in K$, on a $\vartheta(\lambda\lambda') = \lambda\lambda' \otimes 1 = m^{\#}((\lambda \otimes 1) \otimes (\lambda' \otimes 1))$, donc ϑ est un homomorphisme d'anneaux ; de plus, comme $c(z_\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} z_\beta \otimes z_\gamma$, on a

$$m^{\#}((b\otimes z_\alpha) \otimes (\lambda\otimes 1)) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} b\tau(z_\beta)(\lambda) \otimes z_\gamma$$

$$= b\lambda \otimes z_\alpha, \text{ car, pour tout } \beta \neq 0,\ \tau(z_\beta)(\lambda) = \frac{d^\beta}{\beta!}(\lambda) = 0 \ ;$$

on en déduit, par k-linéarité, que $\vartheta(K)$ est inclus dans le centre de $L \# U_{L/K}$. ■

D'après ([I] annexe, théorème 2), on a alors :

Théorème 2.- Le L-homomorphisme $\underline{\Omega} : L \# U_{L/K} \to \mathrm{Diff}_{L/K}$ défini par $\Omega(b\otimes z) = b\tau(z)$, est un homomorphisme injectif de K-algèbres filtrées. ■

III.3. - Extensions Lie-Galoisiennes.

III.31 - Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K.

L est une extension Lie-Galoisienne de K si :

* L est une extension de type fini de K ;
* K est algébriquement fermé dans L ;
* L et K ont même corps des constantes k ;
* l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

  - $\dim_k \mathfrak{L}_{L/K} = \mathrm{d.tr}(L/K)$;
  - le $\mathcal{D}_L$-homomorphisme canonique $\Psi : L \otimes_k \mathfrak{L}_{L/K} \to \mathrm{Der}_K L$ est un isomorphisme ;
  - $\mathrm{Der}_K L$ est un $\mathcal{D}_L$-module trivial ;
  - $\Omega_{L/K}$ est un $\mathcal{D}_L$-module trivial.

Exemples : a) voir annexe.

b) Si L est une extension de PV (resp. PV-normale) régulière de K, alors L est une extension Lie-Galoisienne de K (voir [III. 43] th. 6).

Proposition 1.- Soient $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension Lie-Galoisienne de K, $k = L_c$, et M un sous-corps différentiel de L contenant K.

a) $\dim_k \mathcal{G}_{L/M} = \text{d.tr}(L/M)$;

b) $M'' = \bar{M}$;

c) M est fermé (i.e $M = M''$) si et seulement si M est algébriquement fermé dans L ; et dans ces conditions, L est une extension Lie-Galoisienne de M.

Démonstration :

a) $\text{Der}_M L$ est un sous $\mathcal{D}_L$-module du $\mathcal{D}_L$-module trivial $\text{Der}_K L$, donc est trivial ([I.42] th. 2), et $\dim_k \mathcal{G}_{L/M} = \text{d.tr}(L/M)$.

b) on a $\mathcal{G}_{L/M} = \mathcal{G}_{L/M''}$ ([III.12] prop. 2 c)), donc $\dim_k \mathcal{G}_{L/M} \leq \text{d.tr}(L/M'') = \text{d.tr}(L/M) - \text{d.tr}(M''/M)$; comme $\dim_k \mathcal{G}_{L/M} = \text{d.tr}(L/M)$, on a donc $\text{d.tr}(M''/M) = 0$ et $M'' \subset \bar{M}$; d'où le résultat puisque $\bar{M} \subset M''$ ([III.12] prop. 2 a)) ;

c) on a ainsi $M \subset \bar{M} = M''$; de plus, L est une extension de type fini de K, donc aussi de M, $M_c = k$, et $\dim_k \mathcal{G}_{L/M} = \text{d.tr}(L/M)$, d'où le résultat. ■

Théorème 2.- Soient $(L, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ une extension Lie-Galoisienne de K, $k = L_c$, et M un sous-corps différentiel de L contenant K, et algébriquement fermé dans L.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) pour tout $d \in \mathcal{G}_{L/K}$, $d(M) \subset M$;

ii) $\mathcal{G}_{L/M}$ est un idéal de $\mathcal{G}_{L/K}$.

Dans ces conditions, M est une extension Lie-Galoisienne de K, et la suite de k-algèbres de Lie :

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_{L/M} \hookrightarrow \mathcal{G}_{L/K} \xrightarrow{\theta} \mathcal{G}_{M/K} \longrightarrow 0,$$

où $\theta(d) = d|_M$, est exacte.

Démonstration :

M, étant algébriquement fermé dans L, est fermé (prop. 1 c)), donc i) $\Leftrightarrow$ ii) d'après ([III.13] prop. 4b)) ; de plus, d'après ([III.13] prop. 3c)), $0 \longrightarrow \mathcal{L}_{L/M} \hookrightarrow \mathcal{L}_{L/K} \xrightarrow{\theta} \mathcal{L}_{M/K}$ est une suite exacte de k-algèbre, de Lie, donc $\dim_k \mathcal{L}_{M/K} = \dim_k \mathcal{L}_{L/K} - \dim_k \mathcal{L}_{L/M} + \dim_k \mathrm{Coker}\ \theta$

$= \mathrm{d.tr}(M/K) + \dim_k \mathrm{Coker}\ \theta$; comme $\dim_k \mathcal{L}_{M/K} \leq \mathrm{d.tr}(M/K)$, on en conclut que $\mathrm{coker}\ \theta = 0$, i.e. θ surjectif, et $\dim_k \mathcal{L}_{M/K} = \mathrm{d.tr}(M/K)$; L étant de type fini sur K, M l'est aussi [0.22] ; K étant algébriquement fermé dans L, l'est aussi dans M ; ainsi M est une extension Lie-Galoisienne de K, et la suite considérée est exacte. ■

Remarques :

a) ce théorème est l'analogue du théorème fondamental des extensions galoisiennes : soit N une extension galoisienne d'un corps K, Γ son groupe de Galois, et E un sous-corps de N contenant K ; alors E est une extension galoisienne de K si et seulement si le groupe de Galois Δ de N sur E est un sous-groupe distingué de Γ, et, dans ce cas, le groupe de Galois de E sur K est isomorphe à Γ/Δ ([AV] § 10, prop. 4).

b) sous les hypothèses du théorème 2, si M est une extension Lie-Galoisienne de K, alors les conditions (i) et (ii) sont satisfaites : en effet, $0 \longrightarrow \mathrm{Der}_M L \hookrightarrow \mathrm{Der}_K L \xrightarrow{\theta} \mathrm{Der}_K(M,L) \rightarrow 0$ où $\theta(d) = d|_M$, est une suite exacte de $\mathcal{D}_L$-modules, car θ est $\mathcal{D}_L$-linéaire ; $\mathrm{Der}_K L$ étant trivial, on en déduit, d'après ([I.42] th. 2 cons. a)), que

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{L/M} \hookrightarrow \mathcal{L}_{L/K} \xrightarrow{\theta} c(\mathrm{Der}_K(M,L)) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de k-espaces vectoriels, d'où $\dim_k c(\mathrm{Ker}_K(M,L)) = \dim_k \mathcal{L}_{L/K} - \dim_k \mathcal{L}_{L/M} = \mathrm{d.tr}(L/K) - \mathrm{d.tr}(L/M) = \mathrm{d.tr}(M/K) = \dim_k \mathcal{L}_{M/K}$; l'injection canonique de $\mathcal{L}_{M/K}$ dans $c(\mathrm{Der}_K(M,L))$ est donc un k-isomorphisme, et, $\forall d \in \mathcal{L}_{L/K}$, comme $d|_M \in c(\mathrm{Der}_K(M,L))$, il existe $d' \in \mathcal{L}_{M/K}$ tel que $d|_M = d'$, d'où $d(M) = d'(M) \subset M$.

III.32. - *Proposition* 3.- Soit L une extension Lie-Galoisienne de K, de corps des constantes de k.

Le L-homomorphisme $\Omega : L \# U_{L/K} \to \mathrm{Diff}_{L/K}$ défini par $\Omega(b\otimes z) = b\tau(z)$ ([III.22] th. 4) est un isomorphisme de K-algèbres filtrées.

Démonstration :

D'après ([III.2] th. 2) et ([0.12] lemme 1), il suffit de vérifier que $gr(\Omega) : gr(L \# U_{L/K}) \to gr(\mathrm{Diff}_{L/K})$ soit surjectif, donc que $\Omega_n = gr(\Omega)|_{gr_n(L \# U_{L/K})} : gr_n(L \# U_{L/K}) \to gr_n(\mathrm{Diff}_{L/K})$ soit surjectif, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n^{\otimes}$ (resp. f_n') la surjection canonique de $L \otimes_k U_{L/K}$ sur $gr_n(L \# U_{L/K})$ (resp. de $\mathrm{Diff}^n_{L/K}(L,L)$ sur $gr_n(\mathrm{Diff}_{L/K})$) ; et soient $(d_i)_{1\leq i\leq t}$ une base de $\mathcal{G}_{L/K}$ sur k et $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^t}$ la base de $U_{L/K}$ canoniquement associée à (d_i) ;

soit $n \in \mathbb{N}$; $(z_\alpha)_{|\alpha|\leq n}$ est une base de U_n sur k, donc $(1\otimes z_\alpha)_{|\alpha|\leq n}$ est une base de $L \otimes_k U_n$ sur L ; $f_n^{\otimes}$ étant surjectif, et comme $f_n^{\otimes}(1\otimes z_\alpha) = 0$, pour tout α tel que $|\alpha| \leq n-1$, $(f_n^{\otimes}(1\otimes z_\alpha))_{|\alpha|=n}$ est une famille génératrice de $gr_n(L \# U_{L/K})$ sur L ; d'autre part, $\mathrm{Der}_K L$ étant trivial, $(d_i)_{1\leq i\leq t}$ est une base de $\mathrm{Der}_K L$ sur L ([1.41] prop. 1) ; $(\psi_D(d)^\alpha)_{|\alpha|=n}$ est donc une base de $\mathrm{Sym}^n_L(\mathrm{Der}_K L)$ sur L (ψ_D : injection canonique de $\mathrm{Der}_K L$ dans $\mathrm{Sym}_L(\mathrm{Der}_K L)$) ; or l'homomorphisme de L-algèbres graduées $g : \mathrm{Sym}_L(\mathrm{Der}_K L) \to gr(\mathrm{Diff}_{L/K})$ tel que $g\circ\psi_D = f_1'|_{\mathrm{Der}_K L}$ est un isomorphisme ([0.35] lemme 3), donc $g_n = g|_{\mathrm{Sym}^n_L(\mathrm{Der}_K L)}$ est un isomorphisme de L-espaces vectoriels ; comme, $\forall\alpha$, $|\alpha| = n$, on a $g_n(\psi_D(d)^\alpha) = [f_1'(d)]^\alpha = f_n'(d^\alpha)$, $(f_n'(d^\alpha))_{|\alpha|=n}$ est une base de $gr_n(\mathrm{Diff}_{L/K})$ sur L, et par suite aussi $\left(\frac{f_n'(d^\alpha)}{\alpha!}\right)_{|\alpha|=n}$, d'où le résultat, puisque $\Omega_n(f_n^{\otimes}(1\otimes z_\alpha)) = f_n'(\Omega(1\otimes z_\alpha)) = f_n'\left(\frac{d^\alpha}{\alpha!}\right)$. ■

Conséquence : Si $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^t}$ est la base de $U_{L/K}$ canoniquement associée à une base $(d_i)_{1\leq i\leq t}$ de $\mathcal{G}_{L/K}$ sur k, comme $\Omega(1\otimes z_\alpha) = \tau(z_\alpha).1 = \frac{d^\alpha}{\alpha!}$, $\left(\frac{d^\alpha}{\alpha!}\right)_{\alpha\in\mathbb{N}^t}$ est une base de $\mathrm{Diff}_{L/K}$, et par suite aussi $(d^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^t}$.

Proposition 4.- Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de type fini de K, de même corps des constantes k que K, et telle que K soit algébriquement fermé dans L.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) L est une extension Lie-Galoisienne de K :

ii) $\mathrm{Diff}_{L/K}$ est un $\mathcal{D}_L$-module trivial.

Et dans ces conditions, τ est un isomorphisme de k-algèbres filtrées de $U_{L/K}$ sur $c(\mathrm{Diff}_{L/K})$.

Démonstration :

i) => ii) $\Omega = \Psi \circ (1_L \otimes \tau)$, où Ψ est le $\mathcal{D}_L$-morphisme canonique injectif de $L \otimes_k c(\mathrm{Diff}_{L/K})$ dans $\mathrm{Diff}_{L/K}$, est un isomorphisme ; Ψ est donc un isomorphisme et $\mathrm{Diff}_{L/K}$ est trivial ([1.41] prop. 1) ;

ii) => i) $\mathrm{Der}_K L$, étant un sous $\mathcal{D}_L$-module de $\mathrm{Diff}_{L/K}$, est trivial ([1.42] th. 2) ; les autres conditions étant satisfaites par hypothèse, L est une extension Lie-Galoisienne de K ;

. Dans ces conditions, $\Omega = \Psi \circ (1_L \otimes \tau)$ et Ψ étant des L-isomorphismes, $1_L \otimes \tau$ est un L-isomorphisme de $L \otimes_k U_{L/K}$ sur $L \otimes_k c(\mathrm{Diff}_{L/K})$, donc τ est un k-isomorphisme de $U_{L/K}$ sur $c(\mathrm{Diff}_{L/K})$. ■

III.4. - Normalité des Extensions Lie-Galoisiennes.

III.41. - Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de type fini de K, de même corps des constantes k que K, et $(d_i)_{1\leq i\leq s}$ une base de $\mathcal{G}_{L/K}$ sur k.

Pour tout $\delta = \sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha \partial^\alpha \in \mathcal{D}_L$, on a, $\forall i$,

$[d_i,\delta] = \sum_{|\alpha|\leq p} (d_i(a_\alpha)\partial^\alpha + a_\alpha [d_i,\partial^\alpha]) = \sum_{|\alpha|\leq p} d_i(a_\alpha)\partial^\alpha$, car, par récurrence sur $|\alpha|$, $[d_i,\partial^\alpha] = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^m$; de plus, $\forall a \in L$,

$[d_i, a\delta] = \sum_{|\alpha|\leq p} d_i(aa_\alpha)\partial^\alpha = d_i(a)\delta + a[d_i,\delta]$; $\underline{\tilde{d}_i} : \delta \mapsto [d_i,\delta]$ est donc une d_i-dérivation gauche de $\mathcal{D}_L$.

Lemme 1.- Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension Lie-Galoisienne de K, de corps des constantes k, et $(d_i)_{1\leq i\leq t}$ une base de $\mathcal{G}_{L/K}$ sur k.

$\mathcal{D}_L$ est un $\mathrm{Diff}_{L/K}$-module de loi externe :

$$\left(\sum_{|\beta|\leq q} b_\beta d^\beta, \delta\right) \longrightarrow \sum_{|\beta|\leq q} b_\beta (\tilde{d})^\beta(\delta), \quad \text{où } \tilde{d}_i(\delta) = [\partial_i,\delta], \quad \forall i.$$

Démonstration :

$\mathrm{Diff}_{L/K}$ est le L-espace de base $(d^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^t}$ [III.32] prop. 3 cons.), donc est la k-algèbre d'opérateurs différentiels engendrée par $(d_i)_{1\leq i\leq t}$ [1.11] ; pour tout i, $\tilde{d}_i$ est une d_i-dérivation gauche de $\mathcal{D}_L$, et $\forall\, \delta \in \mathcal{D}_L$, $\widetilde{[d_i,d_j]}(\delta) = [[d_i,d_j],\delta] = [d_i,[d_j,\delta]] - [d_j,[d_i,\delta]] = [\tilde{d}_i,\tilde{d}_j](\delta)$; d'où le résultat, d'après ([1.21] théorème 1). ■

Pour tout $\mathrm{Diff}_{L/K}$-module E de dérivations gauches de structures d_i^E, on note $\underline{c_D(E)} = \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{Ker}\, d_i^E$; E est donc un $\underline{\mathrm{Diff}_{L/K}\text{-module trivial}}$ si et seulement si le L-homomorphisme canonique $\Psi_D : L \otimes_K c_D(E) \to E$ est bijectif.

Lemme 2.- Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension Lie-Galoisienne de K, de corps des constantes k, et $(d_i)_{1\leq i\leq t}$ une base de $\mathcal{G}_{L/K}$ sur k.

Si J est un idéal (à gauche) de $\mathcal{D}_L$ tel que $\tilde{d}_i(J) \subset J$, $\forall i$, alors $J = (J\cap \mathcal{D}_K)_L$ (voir [II.22]).

Démonstration :

$\mathcal{D}_L$ est un $\mathrm{Diff}_{L/K}$-module (lemme 1) et $\delta = \sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha\partial^\alpha \in c_D(\mathcal{D}_L)$ si et seulement si $0 = \tilde{d}_i(\delta) = \sum_{|\alpha|\leq p} d_i(a_\alpha)\partial^\alpha$, $\forall i$, c'est-à-dire, $\forall \alpha$, $a_\alpha \in \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{Ker} d_i = (\mathcal{G}_{L/K})' = K'' = K$ (voir [III.12] et [III.31] prop. 1), donc $c_D(\mathcal{D}_L) = \mathcal{D}_K$; comme le L-homomorphisme canonique $\lambda : L \otimes_K \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}_L$ est bijectif [II.22], $\mathcal{D}_L$ est donc un $\mathrm{Diff}_{L/K}$-module trivial ;

J étant un sous $\mathrm{Diff}_{L/K}$-module de $\mathcal{D}_L$, J est trivial, et comme $c_D(J) = J \cap c_D(\mathcal{D}_L) = J \cap \mathcal{D}_K$, on a $J = \lambda(L \otimes_K (J \cap \mathcal{D}_K)) = (J \cap \mathcal{D}_K)_L$. ■

Conséquence : Soit L une extension Lie-Galoisienne de K et $k = L_c$; on considère l'ensemble $\underline{S_{\mathcal{Q}}}$ des sous k-espaces de dimension finie de L, stables par $\mathcal{Q}_{L/K}$, et l'ensemble $\underline{\mathcal{I}_{K,L}}$ des idéaux de P V de $\mathcal{D}_K$ complètement résolubles dans L ; alors, l'application $S \longmapsto J_S = \{\delta \in \mathcal{D}_K | \delta(s) = 0, \forall s \in S\}$ est une bijection de $S_{\mathcal{Q}}$ sur $\mathcal{I}_{K,L}$, de bijection réciproque l'application $I \mapsto \mathrm{Sol}(I,L)$, et pour tout $S \in S_{\mathcal{Q}}$, on a $\dim_k S = \dim_K \mathcal{D}_K/J_S$: en effet, si l'on considère $I_S = \{\delta \in \mathcal{D}_L | \delta(s) = 0, \forall x \in S\}$, S étant stable par $\mathcal{Q}_{L/K}$, $\forall d \in \mathcal{Q}_{L/K}$, $\tilde{d}(I_S) \subset I_S$, donc $I_S = (I_S \cap \mathcal{D}_K)_L = (J_S)_L$, et par suite $\mathrm{Sol}(J_S,L) = \mathrm{Sol}(I_S,L) = S$ ([II.25] th.6), et $\dim_k S = \dim_L \mathcal{D}_L/I_S = \dim_K \mathcal{D}_K/J_S$ ([II.22] lemme 2 cons.) ; comme tout $I \in \mathcal{I}_{K,L}$ est en particulier un idéal de $\mathcal{D}_L$ complètement résoluble dans L, on a de même, si $S = \mathrm{Sol}(I,L)$, $I = I_S = I_S \cap \mathcal{D}_K = J_S$.

Théorème 3.- Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension Lie-Galoisienne de K, telle que $L = \mathrm{Frac}(A_{L/K})$.

Alors L est une extension PV-normale de K.

Démonstration :

Soit $f \in A_{L/K}$; il reste à montrer que l'idéal de P V I_f de $\mathcal{D}_K$ est complètement résoluble dans L ;

Soient $S = \mathrm{Sol}(I_f,L)$ et $I_S = \{\delta \in \mathcal{D}_L | \delta(s) = 0, \forall s \in S\}$; si $(d_i)_{1\leq i\leq t}$ est une base de $\mathcal{Q}_{L/K}$ sur $k = L_c$, pour tout $s \in S$, $\delta \in I_f$, on a, $\forall i$, $\delta \circ d_i(s) = d_i \circ \delta(s) = 0$, donc $d_i(s) \in S$; ainsi, pour tout $\delta' \in I_S$, on a, $\forall i$, $\tilde{d}_i(\delta')(s) = d_i \circ \delta'(s) - \delta' \circ d_i(s) = 0$, i.e. $\tilde{d}_i(\delta') \in I_S$; d'après le lemme 2, on a donc $I_S = (I_S \cap \mathcal{D}_K)_L$; I_S étant un idéal de P V de $\mathcal{D}_L$ complètement résoluble dans L ([II.25] th. 6), $I_S \cap D_K$ est un idéal de P V de $\mathcal{D}_K$ ([II.22] lemme 2 cons.) complètement résoluble dans L ; or

$f \in S$, donc $I_S \cap \mathcal{D}_K \subset I_f$ et I_f est complètement résoluble dans L [II.24] ∎

III.42. - Soit $(K,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ un corps différentiel.

Etant donné un entier n, on note $K\{y_1,\ldots,y_n\}$ la K-algèbre des polynomes à une infinité d'indeterminées $K[y_{j,\alpha}]_{\substack{1\leq j\leq n,\\ \alpha\in\mathbb{N}^m}}$ muni de la structure de K-algèbre différentielle $\partial_i(y_{j,\alpha}) = y_{j,\alpha+i}$, $\forall i$; $y_1 = y_{1,0}, y_2,\ldots,y_n$ sont alors appelées <u>indéterminées différentielles</u> sur K.

Etant donnés une extension différentielle L de K, et $s_1,s_2,\ldots,s_n \in L$, il existe alors un unique K-homomorphisme d'anneaux différentiels $u : K\{y_1,\ldots,y_n\} \to L$ tel que $u(y_i) = s_i$; u, étant différentiel, vérifie en effet $u(y_{j,\alpha}) = u(\partial^\alpha(y_j)) = \partial^\alpha(s_j)$, $\forall j$, $\forall\alpha$.

On rappelle d'autre part, que l'on note $K\{s_1,\ldots,s_n\}$ la plus petite sous K-algèbre différentielle de L contenant K et $s_1,\ldots,s_n$; $K\{s_1,\ldots,s_n\}$ est la K-algèbre engendrée par $\sum_{i=1}^n \mathcal{D}_K(s_i)$, et son corps des fractions est $K<s_1,\ldots,s_n>$ (voir [II.31]).

Soient $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension de PV de K (associée à I), et $k = L_c = K_c$.

On a $L = K<\mathrm{Sol}(I,L)>$; si $n = \dim_k \mathrm{Sol}(I,L)$, il existe donc $s_1,s_2,\ldots,s_n \in \mathrm{Sol}(I,L)$, linéairement indépendants sur k, tels que $L = K<s_1,\ldots,s_n>$; d'autre part, $\mathrm{Sol}(I,L)$ est stable par $\mathrm{Gal}(L/K)$: en effet, $\forall\, s \in \mathrm{Sol}(I,L)$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, $d \in I, d(\sigma(s)) = \sigma(d(s)) = 0$.

On va rappeler comment E.R. KOLCHIN dans ([Ko], IV.17) munit alors $\mathrm{Gal}(L/K)$ d'une structure de groupe algébrique affine, l'idée étant la suivante : une matrice inversible (t_{ij}) est la matrice d'un K-automorphisme différentiel de L si et seulement si elle laisse stable l'idéal des relations différentielles entre $s_1,\ldots,s_n$.

Soient $y_1,\dots,y_n$ des indéterminées différentielles sur K, et $\underline{\Gamma}$ l'idéal premier différentiel, noyau du K-homomorphisme différentiel d'anneaux $u : K\{y_1,\dots,y_n\} \to K\{s_1,\dots,s_n\}$ définie par $u(y_i) = s_i$.

Soient, d'autre part, des indéterminées t_o, t_{ij} $(1 \leq i,j \leq n)$, et $L[t_o,t_{ij}]$ muni de la structure de L-algèbre différentielle donnée par $\partial_p(t_o) = \partial_p(t_{ij}) = 0$, $\forall p$; on définit un K-homomorphisme différentiel d'anneaux $\alpha : K\{y_1,\dots,y_n\} \to L[t_o,t_{ij}]$ par $\alpha(y_i) = \sum_{j=1}^{n} s_j t_{ij}$, et $\underline{\Delta} = \alpha(\Gamma)$ est un idéal de $L[t_o,t_{ij}]$.

Remarque : On peut montrer alors, par un argument de disjonction linéaire, que Δ est engendrée dans $L[t_o,t_{ij}]$ par un idéal J de $k[t_o,t_{ij}]$; I. KAPLANSKY donne dans ([Ka] V - Lemme 5.4) une définition moins naturelle de J, utilisée ici par commodité.

Si $(w_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base de L sur k, tout $f \in \Delta$ s'écrit $f = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda w_\lambda$, avec $f_\lambda \in k[t_o,t_{ij}]$. On considère alors l'idéal $\underline{J} = \sqrt{J_o}$, où J_o est l'idéal de $k[t_o,t_{ij}]$ engendré par $\{f_\lambda \mid f \in \Delta, \lambda \in \Lambda\}$ et $1-t_o \det(t_{ij})$, et on montre ([Ka] ou [DL]) IV prop. 6) que $\mathrm{Gal}(L/K)$ est la sous-variété affine de k^{n^2+1} associée à J ([La] II § 2) ; ainsi $\underline{R} = k[t_o,t_{ij}]/J$ est l'anneau des coordonnées de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Note : Ces résultats, démontrés dans [Ka] et [Ko] dans le cas d'une extension de PV ordinaire L de K, reposent sur le fait que $L = K<s_1,\dots,s_n>$ avec $\sum_{i=1}^{n} k\, s_i$ stable par $\mathrm{Gal}(L/K)$, donc restent valables dans le cas partiel étudié ici.

On se propose de montrer que L *est une extension Lie-Galoisienne de* K.

Pour cela, on va mettre en oeuvre l'argument géométrique suivant : $\mathrm{Gal}(L/K)$ étant un groupe algébrique opérant sur L, son algèbre de Lie opère comme ensemble de dérivations sur L, et par suite, s'injecte dans $\mathcal{G}_{L/K}$; sa dimension étant égale à $d.tr(L/K)$, on en conclut alors que $d.tr(L/K) \leq \dim_k \mathcal{G}_{L/K}$.

Etant donné $\underline{e} = (1, \delta_{ij})$ l'élément neutre de $Gal(L/K)$, on note $\underline{\mathcal{O}_e}$ le localisé de R en e, i.e $\mathcal{O}_e = \{\frac{f}{g} / f, g \in R$ et $g(e) \neq 0\}$, et $\underline{M_e} = \{\frac{f}{g} \in \mathcal{O}_e | f(e) = 0\}$, l'idéal maximal de $\mathcal{O}_e$; on a alors $\dim_k Hom_k(M_e/M_e^2, k) = \dim_k Gal(L/K)$, car le point e est simple ([Hu], 7.1).

D'autre part, d'après ([Ko], 20), $\dim_k Gal(L/K) = d.tr(L/K)$.

Remarque : l'espace tangent en e : $Hom_k(M_e/M_e^2, k)$ ([Hu], 5.1) est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe affine $Gal(L/K)$ ([Hu], 9.1).

On considère les homomorphismes d'anneaux

$\eta_o : R \to \mathcal{O}_e$ défini par $\eta_o(f) = \frac{f}{1}$, et $\underline{\omega} : \mathcal{O}_e \to M_e/M_e^2$ qui à $\vartheta \in \mathcal{O}_e$ associe la classe de $\vartheta - \vartheta(e)$ modulo M_e^2 ; l'application $\xi \mapsto \xi \circ \omega$ est alors un k-isomorphisme de $Hom_k(M_e/M_e^2, k)$ sur $Der_k(\mathcal{O}_e, k)$ ([Hu], 5.1).

Soient, enfin, l'isomorphisme canonique

$\underline{j_o} : k \otimes_k K\{y_1, \ldots, y_n\} \to K\{y_1, \ldots, y_n\}$, $\underline{\sigma}$ la surjection canonique de $k[t_o, t_{ij}]$ sur R, et le K-homomorphisme différentiel d'anneaux $\underline{\beta} : K\{y_1, \ldots, y_n\} \to \mathcal{O}_e \otimes K\{y_1, \ldots, y_n\}$ défini par $\beta(y_i) = \sum_{j=1}^{n} \eta_o \circ \sigma(t_{ij}) \otimes y_j$.

Lemme 4.- Avec les notations précédentes, pour tout $\xi \in Hom_k(M_e/M_e^2, k)$:

a) $\underline{d_\xi} = j_o \circ (\xi \otimes 1) \circ (\omega \otimes 1) \circ \beta$ est une K-dérivation de $K\{y_1, \ldots, y_n\}$;

b) $d_\xi(\Gamma) \subset \Gamma$.

Démonstration :

$$d_\xi : K\{y_i\} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_e \otimes_k K\{y_i\} \xrightarrow{\omega\otimes 1} M_e/M_e^2 \otimes_k K\{y_i\} \xrightarrow{\xi\otimes 1} k \otimes_k K\{y_i\} \xrightarrow{j_o} K\{y_i\}$$

a) $\xi \circ \omega$ étant une k-dérivation de $\mathcal{O}_e$ dans k, $j_o \circ (\xi\otimes 1) \circ (\omega\otimes 1)$ est une K-dérivation de $\mathcal{O}_e \otimes K\{y_1, \ldots, y_n\}$ dans $K\{y_1, \ldots, y_n\}$; β étant un K-homomorphisme d'anneaux, on en déduit que d_ξ est une K-dérivation de $K\{y_1, \ldots, y_n\}$;

b) pour tout $p = p(y_1,\dots,y_n) \in \Gamma$, $\alpha(p) = p(\dots,\sum_{j=1}^{n} t_{ij}s_j,\dots) \in \Delta$, donc $p(\dots,\sum_{j=1}^{n} t_{ij}s_j,\dots) = \sum_{\lambda} p_\lambda w_\lambda$, avec $p_\lambda \in J$; $\forall \lambda \in \Lambda$, $\sigma(p_\lambda) = 0$,

d'où $0 = \sum_{\lambda} \eta_o \circ \sigma(p_\lambda) \otimes w_\lambda = p(\dots,\sum_{j=1}^{n} \eta_o \circ \sigma(t_{ij}) \otimes s_j,\dots)$;

comme $\beta(p) = p(\dots,\sum_{j=1}^{n} \eta_o \circ \sigma(t_{ij}) \otimes y_j,\dots)$, on en déduit que

$u \circ d_\xi(p) = j_o \circ (\xi\otimes 1) \circ (\omega\otimes 1)\left[p(\dots,\sum_{j=1}^{n} \eta_o \circ \sigma(t_{ij}) \otimes s_j,\dots)\right] = 0$,

donc $d_\xi(p) \in \Gamma$. ■

Conséquence : d_ξ induit une K-dérivation $\tilde{d}_\xi$ de $K\{s_1,\dots,s_n\} \xrightarrow{\sim} K\{y_1,\dots,y_n\}/\Gamma$ définie par $\tilde{d}_\xi \circ u = u \circ d_\xi$; d'après ([0.41], ex. b), $\tilde{d}_\xi$ se prolonge de manière unique en une K-dérivation $\hat{d}_\xi$ de $K\langle s_1,\dots,s_n\rangle = L$.

Théorème 5.- Avec les notations précédentes, l'application $\xi \to \hat{d}_\xi$ est un k-morphisme injectif de $\mathrm{Hom}_k(M_e/M_e^2,k)$ dans $\mathcal{L}_{L/K}$.

Démonstration : Soit $\xi \in \mathrm{Hom}_k(M_e/M_e^2,k)$; d'après ([III.11] rem. b), $\hat{d}_\xi \in \mathcal{L}_{L/K}$ si, $\forall i$, $[\partial_i,\hat{d}_\xi] = 0$ soit, u étant surjectif et différentiel, si $0 = [\partial_i,\hat{d}_\xi] \circ u = u \circ [\partial_i \circ d_\xi]$; or β est différentiel, ainsi, trivialement, que $\omega \otimes 1$, $\xi \otimes 1$ et j, donc $[\partial_i \circ d_\xi] = 0$ et $\hat{d}_\xi \in \mathcal{L}_{L/K}$; j_o étant k-linéaire, il en est de même de l'application $\xi \mapsto d_\xi$, et par suite de $\xi \mapsto \hat{d}_\xi$; enfin, si $\hat{d}_\xi = 0$, on a $\tilde{d}_\xi = 0$, donc $\forall i$,

$0 = \tilde{d}_\xi \circ u(y_i) = u \circ d_\xi(y_i) = \sum_{j=1}^{n} \xi \circ \omega \circ \eta_o \circ \sigma(t_{ij})s_j$; comme $(s_j)_{1\leq j\leq n}$ est libre sur k, on en déduit que, $\forall i$, $\forall j$ $\sigma(t_{ij}) \in \mathrm{Ker}(\xi\circ\omega\circ\eta_o)$;

$\xi\circ\omega\circ\eta_o$ est une k-dérivation de R dans k, nulle sur les générateurs $\sigma(t_{ij})$ et $\sigma(t_o)$ de R sur k, (car $\xi\circ\omega\circ\eta_o(\det \sigma(t_{ij})) =$

$\sum_{p=1}^{n} \det\left[\sigma(t_{ij}),\xi\circ\omega\circ\eta_o \circ \sigma(t_{pj})\right]_{i\neq p} = 0$ implique $\sigma(t_o) = \dfrac{1}{\det(\sigma(t_{ij}))} \in \mathrm{Ker}(\xi\circ\omega\circ\eta_o)$

[0.33]), donc nulle sur R ; son unique prolongement à $\mathcal{O}_e = R[S^{-1}]$ où $S = \{g \in R/g(e) \neq 0\}$, étant $\xi \circ \omega$ (cf. [0.41] ex. b), on a donc $\xi \circ \omega = 0$, et par suite $\xi = 0$. ■

Conséquence : Soient L une extension de PV de K telle que L/K soit régulière, et $k = L_c$; alors L est une extension Lie-Galoisienne de K : en effet, on a $\mathrm{d.tr}(L/K) = \dim_k \mathrm{Gal}(L/K) = \dim_k \mathrm{Hom}_k(\mathcal{M}_e/\mathcal{M}_e^2, k) \leq \dim_k \mathcal{L}_{L/K} \leq \mathrm{d.tr}\, L/K)$; de plus, $\mathrm{Hom}_k(\mathcal{M}_e/\mathcal{M}_e^2, k)$ est alors isomorphe à $\mathcal{L}_{L/K}$.

III.43. - En appliquant ([II.41] prop. 2 et th. 1), ([III.42] th. 5 cons.) et ([III.41] th. 3), on conclut que :

Théorème 6.-

Soit $(L, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ une extension différentielle de K. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L est une extension fortement normale (BB) de K et $\mathrm{Gal}(L/K)$ est un groupe algébrique affine ;

(ii) L est une extension PV-normale régulière de K ;

(iii) L est une extension de PV, régulière de K ;

(iv) L est une extension Lie-Galoisienne de K, telle que $L = \mathrm{Frac}(A_{LK})$.

Et dans ces conditions, l'algèbre de Lie de $\mathrm{Gal}(L/K)$ est isomorphe à $\mathcal{L}_{L/K}$ (qui est ainsi une algèbre de Lie <u>algébrique</u> - [Hu] 13.1 -). ■

Remarque : En généralisant la démonstration du théorème 5 au cas d'une extension fortement normale (BB) quelconque L de K, i.e en construisant un k-morphisme injectif de l'algèbre de Lie du groupe algébrique $\mathrm{Gal}(L/K)$ dans $\mathcal{L}_{L/K}$, on obtiendrait de même : si L est une extension fortement normale (BB) de K, alors L est une extension Lie-Galoisienne de K.

On est amené à se demander si l'implication : L extension Lie-Galoisienne de K ==> L extension fortement normale (BB) de K, démontrée ici dans le cas linéaire (i.e $L = \mathrm{Frac}(A_{L/K})$), est encore vraie dans le cas général.

Cette question conduit à envisager les conjectures suivantes :

<u>*Conjecture*</u> *1*.- Si L est une extension Lie-Galoisienne de K, $k = L_c$ et $\mathcal{L} = (\mathrm{Frac}(L \otimes_K L))_c$, alors $\mathrm{d.tr}(\mathcal{L}/k) = \mathrm{d.tr}(L/K)$.

<u>*Conjecture*</u> *2*.- Si L est une extension Lie-Galoisienne de K, alors $L(\mathcal{L})$ est algébriquement fermé dans $F = \mathrm{Frac}(L \otimes_K L)$.

<u>*Conjecture 1 bis*</u>.- Etant donnée une extension différentielle L de K, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\dim_k \mathcal{G}_{L/K} = \mathrm{d.tr}(L/K)$;

ii) $\mathrm{d.tr}(\mathcal{L}/k) = \mathrm{d.tr}(L/K)$.

Si elles se révèlaient exactes, les conjectures 1 et 2 permettraient de donner une réponse affirmative à la question posée : en effet, si L est une extension Lie-Galoisienne de K, on aurait alors

$\mathrm{d.tr}(L(\mathcal{L})/L) = \mathrm{d.tr}(\mathcal{L}/k) = \mathrm{d(tr}(L/K) = \mathrm{d.tr}(F/L)$, d'oũ $F = L(\mathcal{L})$.

La conjecture 1 bis, plus forte que la conjecture 1, permettrait en outre, sans utiliser le théorème de KOLCHIN ([0.45] th. 4), de démontrer l'implication : L extension fortement normale régulière de K $\Longrightarrow$ L extension Lie-Galoisienne de K (car, d'après [0.44], si L est une extension fortement normale (BB) de K, alors $\mathrm{d.tr}(\mathcal{L}/k) = \mathrm{d.tr}(L/K)$).

Il n'empèche que, dans le cas non linéaire, ce théorème (démontré à l'aide du théorème de WEIL) semble nécessaire à la construction d'une théorie de Galois, et que cet écueil ne puisse être évité.

ANNEXE :

EXEMPLES D'EXTENSIONS LIE-GALOISIENNES

III A 1 - Soit L une extension <u>monogène pure</u> de K, i.e telle qu'il existe $u \in L$, transcendant sur K, tel que $L = K(u)$. D'après ([AV], § 9), pour tout $v \in L$, il existe une K-dérivation unique $\underline{d_v}$ de L telle que $d_v(u) = v$. Si, de plus, $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ est une extension différentielle de K, alors, pour tout $v \in L$, $d_v \in \mathcal{L}_{L/K}$ si et seulement si $d_v \circ \partial_i(u) = \partial_i(v)$, $\forall i$: en effet, dans ce dernier cas, pour tout $s = \sum_{j=0}^{p} a_j u^j \in K[u]$, on a

$$d_v \circ \partial_i(s) = d_v\Big[\sum_{j=0}^{p} \partial_i(a_j)u^j + ja_j\partial_i(u)u^{j-1}\Big] = \sum_{j=0}^{p} \{\partial_i(a_jv)ju^{j-1} + a_jv\partial_i(ju^{j-1})\} =$$

$\partial_i \circ d_v(s)$, donc $[\partial_i, d_v|_{K[u]}] = 0$; d'où $d_v \in \mathcal{L}_{L/K}$ ([III.11] rem. b).

III A 2 - Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, $\ell = L_c$ et $k = K_c$.

Une famille $(f_1,\ldots,f_m) \in K^m$ est une <u>famille de dérivées</u> dans K s'il existe $f \in K$ tel que $f_i = \partial_i(f)$, $\forall i$.

Etant donné une famille $(f_1,\ldots,f_m) \in K^m$, un élément u de L est l'<u>intégrale</u> de $(f_1,\ldots,f_m)$ si $\partial_i(u) = f_i$, $\forall i$; on a alors, nécessairement, $\forall i$, $\forall j$, $\partial_i(f_j) = \partial_i \circ \partial_j(u) = \partial_j(f_i)$.

On dit que L est obtenu par <u>adjonction à</u> K <u>d'une intégrale</u> s'il existe $u \in L$ tel que $L = K(u)$ et u soit l'intégrale d'une famille $(f_1,\ldots,f_m) \in K^m$.

Si L est obtenu par adjonction à K de l'intégrale u d'une famille de dérivées $(f_1,\ldots,f_m)$, et si $k = \ell$, alors $L = K$: en effet, si $f_i = \partial_i(f)$, $\forall i$, alors $\partial_i(u) = \partial_i(f)$, d'où $u-f \in k \subset K$, et comme $f \in K$, on a $u \in K$.

Lemme 1.- Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K obtenue par adjonction de l'intégrale u de $(f_1,\ldots,f_m) \in K^m$, telle que $(f_1,\ldots,f_m)$ ne soit pas une famille de dérivées dans K.

a) u est transcendant sur K ;

b) L et K ont même corps des constantes (i.e : $k = \ell$).

Démonstration :

a) Supposons u algébrique sur K, de polynôme minimal sur K $p(y) = y^n + by^{n-1} + \ldots$; en appliquant ∂_i à $p(u) = 0$, on obtient $0 = n\, f_i u^{n-1} + \partial_i(b)u^{n-1} + \ldots$, d'où par minimalité de n, $nf_i + \partial_i(b) = 0$; on en déduit que $f_i = -\dfrac{\partial_i(b)}{n} = \partial_i(-\dfrac{b}{n})$, avec $-\dfrac{b}{n} \in K$, impossible ;

b) si $s = \sum_{j=0}^{p} a_j u^j \in K[u] \cap \ell$, on a

$\partial_i(s) = \sum_{j=0}^{p} (\partial_i(a_j)u^j + ja_j f_i u^{j-1}) = 0$; u étant transcendant sur K, on a donc $0 = \partial_i(a_p) = \partial_i(a_{p-1}) + pa_p f_i$; si on avait $p \neq 0$, on aurait alors $\partial_i(-\dfrac{a_{p-1}}{pa_p}) = -\dfrac{\partial_i(a_{p-1})}{pa_p} = f_i$ impossible, donc $p = 0$, et $s \in K \cap \ell = k$; alors si $\dfrac{s}{t} \in \ell$, $\dfrac{s}{t}$ étant une fraction rationnelle en u, mise sous forme irréductible avec t unitaire de degré q, et si on suppose qu'il existe i tel que $\partial_i(t) \neq 0$, comme $0 = \partial_i(\dfrac{s}{t}) = \dfrac{\partial_i(s)t - \partial_i(t)\, s}{t^2}$, on aurait $\dfrac{s}{t} = \dfrac{\partial_i(s)}{\partial_i(t)}$, avec $\partial_i(t)$ de degré $\leq q-1$; contradiction ; donc $\forall\, i$, $\partial_i(t) = 0$, $\partial_i(s) = 0$, et par suite $\dfrac{s}{t} \in k$. ■

Proposition 2.- Sous les hypothèses du lemme 1, L est une extension Lie-Galoisienne de K.

Démonstration : $L = K(u)$ étant une extension pure de K (Lemme 1), K est donc algébriquement fermé dans L ; de plus L et K ont même corps des constantes (Lemme 1) et L est de type fini sur K ; il reste à vérifier que $\dim_k \mathcal{C}_{L/K} = d.tr_K L = 1$, i.e qu'il existe $d \in \mathcal{C}_{L/K}$, $d \neq 0$. (Puisque $\dim_k \mathcal{C}_{L/K} \leq d.tr_K L$ ([III.1] th. 1) ; un tel d doit vérifier $\partial_i \circ d(u) = d(f_i) = 0$, $\forall i$; il suffit de considérer la K-dérivation d_1 de L, telle que $d_1(u) = 1$ (voir [III A 1]). ■

D'après ([III.4] th. 6), on en déduit que L est une extension de PV de K, et par suite une extension fortement normale de K, et que $Gal(L/K)$ est un groupe algébrique affine.

En fait, on peut obtenir ces résultats directement :

Proposition 3.- Sous les hypothèses du lemme 1, et si, de plus, L est contenu dans une extension universelle U de K, de corps des constantes C, alors :

L est une extension fortement normale (KL) de K.

Démonstration : on a $k = \ell$ (Lemme 1) ; de plus, pour tout K-homomorphisme différentiel $s : L \to U$, $\partial_i(s(u)-u) = s(f_i) - f_i = 0$, $\forall i$, donc $s(u)-u \in C$, et par suite $s(u) \in L(C)$, d'où $L_s = s(L) \subset L(C)$; donc L est une extension fortement normale (KL) de K, d'après [0.43]. ■

Proposition 4.- Sous les hypothèses du lemme 1,

a) L est une extension de PV de K, associée à $I_u = \{\delta \in \mathcal{D}_K \mid \delta(u)=0\}$

b) $Gal(L/K)$ est isomorphe au groupe additif k.

Démonstration :

a) $\forall i, \partial_i(u) = f_i \in K$, donc $\mathcal{D}_K(u) = K \oplus Ku$; comme $\dim_K \mathcal{D}_K/I_u = \dim_K \mathcal{D}_K(u)$ [II.21], on a d'après ([II.24] th. 4), $\dim_k Sol(I_u, L) \leq \dim_K \mathcal{D}_K/I_u = 2$; or, $\forall \delta \in I_u$, $\delta \notin K\, 1_K$, donc $\delta(1) = 0$, et par suite,

$(1,u)$ est une base de $\mathrm{Sol}(I_u,L)$ sur k (u étant transcendant sur K), et $\dim_k \mathrm{Sol}(I_u,L) = \dim_K(\mathcal{D}_K/I_u)$, d'où le résultat puisque $L = K(u) = K\langle \mathrm{Sol}(I_u,L)\rangle$;

b) pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, on a, $\forall i$, $\partial_i(\sigma(u)-u) = 0$, donc $\sigma(u)-u \in k$; si l'on pose $\lambda_\sigma = \sigma(u)-u$, on a alors, pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$, $\lambda_{\sigma o \tau} = \sigma(\lambda_\tau + u) - u = \lambda_\tau + \lambda_\sigma$, et $\lambda_\sigma = 0 \iff \sigma(u) = 0 \iff \sigma = 1_L$; enfin, étant donné $\lambda \in k$, le K-automorphisme h de L défini par $h(u) = u + \lambda$ est tel que, si $s = \sum_{j=0}^{p} a_j u^j \in K[u]$, on ait $\partial_i \circ h(s) =$

$\sum_{j=0}^{p} \{ j a_j (u+\lambda)^{j-1} f_i + \partial_i(a_j)(u+\lambda)^j \} = h \circ \partial_i(s)$; d'où pour tout $\frac{s}{t} \in L$,

$$\partial_i \circ h(\frac{s}{t}) = \frac{\partial_i o h(s)h(t) - \partial_i o h(t)h(s)}{(h(t))^2} = h \circ \partial_i(\frac{s}{t}),$$ et ainsi $h \in \mathrm{Gal}(L/K)$ et $\lambda = h(u) - u = \lambda_h$; l'application $\sigma \mapsto \lambda_\sigma$ est donc un isomorphisme de groupes de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur k. ■

Remarques :

a) L étant une extension de PV régulière de K, L est donc une extension fortement normale (BB) de K ;

b) si $m = 1$ (L et K corps différentiels ordinaires), I_u est engendré sur $\mathcal{D}_K$ par $\delta_o = \partial^2 - \frac{\partial(f)}{f}\partial$ (où $f = \partial(u)$) : en effet $\mathrm{Sol}(\delta_o,L) = k \oplus ku = \mathrm{Sol}(I_u,L)$ d'où, δ_o et I_u étant complètement résolubles dans L, $I_u = \mathcal{D}_K\delta_o$, d'après ([II.25] th. 6).

III A 3 - Soit $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ une extension différentielle de K, de même corps des constantes k que K.

Une famille $(f_1,\ldots,f_m)$ de K^m est une <u>famille de dérivées logarithmiques</u> dans K, s'il existe $f \in K$, $f \neq 0$, tel que $f_i = \frac{\partial_i(f)}{f}$, $\forall i$.

Etant donnée une famille $(f_1,\dots,f_m) \in K^m$, un élément $u \in L$ est <u>l'exponentielle de l'intégrale</u> de $(f_1,\dots,f_m)$, si $u \neq 0$ et $\dfrac{\partial_i(u)}{u} = f_i$, $\forall i$;

on a alors nécessairement, $\forall i$ et j, $\partial_i(f_j) = \dfrac{\partial_i \circ \partial_j(u)u - \partial_j(u)\partial_i(u)}{u^2} = \partial_j(f_i)$.

On dit que L est obtenu par <u>adjonction à</u> K <u>de l'exponentielle d'une intégrale</u> s'il existe $u \in L$ tel que $L = K(u)$, et u est l'exponentielle de l'intégrale d'une famille $(f_1,\dots,f_m) \in K^m$; comme alors, $\forall_i$ $\partial_i(u) = f_i u \in K(u)$, on a $K\langle u\rangle = K(u) = L$.

Si L est obtenu par adjonction à K de l'exponentielle de l'intégrale u d'une famille de dérivées logarithmiques $(f_1,\dots,f_m)$, alors $L = K$: en effet, si $\forall i$, $\dfrac{\partial_i(u)}{u} = f_i = \dfrac{\partial_i(f)}{f}$, alors $\partial_i(\frac{u}{f}) = \dfrac{\partial_i(u)f - f\partial_i(u)}{f^2} = 0$, donc $\dfrac{u}{f} \in k \subset K$, et comme $f \in K$, on a $u \in K$.

Proposition 5.- Soit $(L,\partial_1,\dots,\partial_m)$ une extension différentielle de K obtenue par adjonction de l'exponentielle d'une intégrale u de $(f_1,\dots,f_m) \in K^m$ telle que $(f_1,\dots,f_m)$ ne soit pas une famille de dérivées logarithmiques dans K.

a) Si L est contenu dans une extension universelle U de K, alors L est une extension fortement normale (KL) de K ;

b) L est une extension de PV de K associée à I_u.

Démonstration :

a) pour tout K-homomorphisme différentiel $s : L \to U$ on a $\partial_i(\dfrac{s(u)}{u}) = \dfrac{s(f_i.u)u - f_i.u.s(u)}{u^2} = 0$, $\forall i$, donc $\dfrac{s(u)}{u} \in C = U_c$, et par suite $s(u) \in L(C)$, et $L_s = s(L) \subset L(C)$;

b) $\forall i$, $\partial_i(u) = f_i u \in K_u$, d'où $\mathcal{D}_K(u) = Ku$ et $\dim_k \mathrm{Sol}(I_u,L) \leq \dim_K \mathcal{D}_K(u) = 1$; (u) étant une base de $\mathrm{Sol}(I_u,L)$ sur k, on a donc $\dim_k \mathrm{Sol}(I_u, L) = 1$, d'où le résultat. ■

Remarque : si $m = 1$, alors I_u est engendré sur $\mathcal{D}_K$ par $\delta_o = \partial - f.1_K$: en effet, $\mathrm{Sol}(\delta_o, L) = ku = \mathrm{Sol}(I_u, L)$ d'où $I_u = \mathcal{D}_K \delta_o$.

L étant une extension de PV de K, on déduit de ([III.4] th. 6) que, si, de plus, K est algébriquement fermé dans L, L est une extension Lie-Galoisienne de K ; d'autre part, Gal(L/K) est un groupe algébrique affine.

En fait, on peut obtenir ces résultats directement :

Proposition 6.- Sous les hypothèses de la proposition 5, et si de plus, K est algébriquement fermé dans L ;

a) u est transcendant sur K ;

b) Gal(L/K) est isomorphe au groupe multiplicatif $k - \{0\}$;

c) L est une extension Lie-Galoisienne de K.

Démonstration :

a) si on avait $u \in \bar{K} = K$, comme $f_i = \dfrac{\partial_i(u)}{u}$, $\forall i$, $(f_1, \ldots, f_m)$ serait une famille de dérivées logarithmiques dans K, impossible ;

b) pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, on a $\partial_i\left(\dfrac{\sigma(u)}{u}\right) = 0$, $\forall i$, donc $\dfrac{\sigma(u)}{u} \in k$; si on pose $\mu_\sigma = \dfrac{\sigma(u)}{u}$, on a alors, pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$, $\mu_{\sigma\circ\tau} = \dfrac{\sigma(\mu_\tau u)}{u} = \mu_\tau \mu_\sigma$, et $\mu_\sigma = 1 \iff \sigma(u) = 0 \iff \sigma = 1_L$; enfin, étant donné $\mu \in k - \{0\}$, le K-automorphisme h de L défini par $h(u) = \mu u$ est tel que pour tout $s = \sum_{j=0}^{p} a_j u^j \in K[u]$, $\partial_i \circ h(s) = \sum_{j=0}^{p} \{j a_j (\mu u)^{j-1} \mu f_i u + \partial_i(a_j)(\mu u)^j\} = h \circ \partial_i(s)$; par suite $h \in \mathrm{Gal}(L/K)$, et $\mu = \dfrac{h(u)}{u} = \mu_h$; l'application $\sigma \mapsto \mu_\sigma$ est donc un isomorphisme de groupes de Gal(L/K) sur $k - \{0\}$;

c) il reste à montrer qu'il existe $d \in \mathcal{L}_{L/K}$, $d \neq 0$; un tel d doit vérifier $\partial_i \circ d(u) = d(f_i u) = f_i d(u)$; il suffit de considérer la K-dérivation d_u de L telle que $d_u(u) = u$. ■

CHAPITRE IV

FIBRES PLATS.

IV.1. - *Fibrés et connexions.*

IV.11.- Soient $\underline{C}_{alg}$ la catégorie des variétés algébriques irréductibles complexes (voir [La]) et $\underline{C}_{an}$ celle des variétés analytiques complexes (voir [VDA]).

Par variété, on convient, d'entendre, dans ce chapitre, variété algébrique (abstraite) irréductible définie sur $\mathbb{C}$, i.e. un objet de C_{alg} ; une variété est donc munie de la topologie de Zariski ([La] III.5) et un C_{alg}-morphisme est une application régulière (i.e. rationnelle partout définie).

De plus, tout point d'une variété admettant un voisinage affine, donc inclus dans $\mathbb{C}^n$, pour n assez grand, une variété est ainsi munie de la topoloqie "naturelle" induite par celle de $\mathbb{C}^n$, qui est plus fine que la topologie de Zariski ; une application régulière étant analytique, une variété est donc canoniquement munie d'une structure de variété analytique, et un C_{an}-morphisme entre variétés est une application analytique entre ces variétés, considérées comme objets de C_{an}.

Note : Dans ce paragraphe, $\underline{C}$ désigne indifféremment la catégorie C_{alg} ou C_{an} , et les définitions et propriétés énoncées s'appliquent aux variétés considérées (sauf mention contraire) comme objets de l'une ou de l'autre. Au besoin un indice "alg" ou "an" rétablira la différence.

Soit X une variété.

Etant donné un ouvert U de X , une C-fonction sur U est un C-morphisme de U dans la droite Δ ; l'ensemble $\mathcal{O}_X(U)$ des C-fonctions sur U est une $\mathbb{C}$-algèbre , et $\mathcal{O}_X$: $\underline{\text{Ouv } X} \longrightarrow \underline{\text{Ann}}$ un faisceau

$$U \longmapsto \mathcal{O}_X(U)$$

d'anneaux sur U, appelé faisceau structural sur X, de fibre en $x \in X$ l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ de X en x ([Bo] AG 4.1). Dans C_{alg} , étant donné un ouvert dense U de X, $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre et son corps des fractions (indépendant du choix de U) est appelé corps des fonctions de X, et noté $\mathbb{C}(X)$; un élément de $\mathbb{C}(X)$ est donc une fonction rationnelle de X dans $\mathbb{C}$ ([Bo] AG 8.1). Si X est une variété affine, $\mathcal{O}_X^{alg}(X)$ est noté $\mathbb{C}[X]$, et $\mathbb{C}(X)$ est alors son corps des fractions.

Soit $x \in X$; un vecteur tangent u en x à X est une $\mathbb{C}$-dérivation de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans $\mathbb{C}$ i.e. pour tout $f,g \in \mathcal{O}_{X,x}$, $u(fg) = u(f)g(x) + f(x)u(g)$. Le $\mathbb{C}$-espace $T_{X,x} = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,x},\mathbb{C})$, des vecteurs tangents en x à X est appelé espace tangent en x à X ; et on pose $T_X = \coprod_{x \in X} T_{X,x}$.

Remarque : Si on désigne par M_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, on montre que $M_{x,an} = \mathcal{O}^{an}_{X,x} M_{x,alg}$ (J.P. SERRE "Géométrie algébrique et géométrie analytique" Ann. Inst. Fourier T. 8 (1955) pp. 1-42) ; comme $T_{X,x}$ est canoniquement isomorphe au dual de M_x/M_x^2 ([Bo] AG 17.1), on en déduit que $T^{an}_{X,x}$ est canoniquement isomorphe à $T^{alg}_{X,x}$.

Soient E une variété et $p : E \to X$ un C-morphisme ; pour tout $z \in E$, p induit un $\mathbb{C}$-homomorphisme d'anneaux locaux $f \to f \circ p$ de $\mathcal{O}_{X,x}$

dans $\mathcal{O}_{E,z}$ où $x = p(z)$, et par suite un $\mathbb{C}$-morphisme $(dp)_z : T_{E,z} \longrightarrow T_{X,x}$, défini par $(dp)_z\,(u)(f) = u(f \circ p)$, et appelé différentielle de p en z.

On note $\mathcal{C}_{alg/X}$ la catégorie des objets au-dessus de X dans $\mathcal{C}_{alg}$ ([PJ] I.6).

On appelle fibré au-dessus de X, un objet de $\mathcal{C}_{alg/X}$, i.e. un $\mathcal{C}_{alg}$-morphisme $p : E \to X$, noté (E,p,X), tel que p soit surjectif ; pour tout $x \in X$, $p^{-1}(x)$ est appelé fibre au-dessus de x.

Exemple : Soit $\Pi : T_X \to X$ la projection canonique (qui envoie $T_{X,x}$ sur x) ; T_X peut être muni d'une structure de variété de façon que Π soit un $\mathcal{C}_{alg}$-morphisme ([Bo] AG 16.2) ; (T_X,Π, X) est ainsi un fibré au-dessus de X, appelé fibré tangent de X.

Etant donné un fibré (E,p,X) et un ouvert U de X, on appelle section (locale) de (E,p,X) au-dessus de U, tout $\mathcal{C}$-morphisme $s : U \to E$ tel que $p \circ s = 1_U$. Une section $s : X \to E$ au-dessus de X est appelée section globale.

IV.12.- Soit F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Un fibré (E,p,X) au-dessus de X est un fibré vectoriel de fibre type F si : (condition de trivialité locale)

pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert (pour la topologie "naturelle"), U de x (appelé ouvert trivialisant) et un $\mathcal{C}_{an}$-isomorphisme τ de $U \times F$ sur $p^{-1}(U)$ tel que $p \circ \tau = pr_1$.

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Pour tout $y \in U$, la restriction de τ à $\{y\} \times F$ est donc une bijection sur $p^{-1}(y)$, qui est ainsi muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Si $\dim_{\mathbb{C}} F = n$, le fibré vectoriel (E,p,X) est dit <u>de rang</u> n.

Un fibré vectoriel est <u>trivial</u> s'il est $C_{an/X}$-isomorphe à $(X \times F, pr_1, X)$, i.e. si X est lui-même un ouvert trivialisant.

<u>*Remarque*</u> : la condition de trivialité locale est ici analytique et non algébrique, car en pratique, la topologie de Zariski ne fournit pas suffisamment d'ouverts susceptibles d'être trivialisants.

Etant donné un fibré vectoriel (E,p,X), U un ouvert de X, l'ensemble $\underline{\Gamma_E(U)}$ des sections au-dessus de U est un $\mathcal{O}_X(U)$-module, et ainsi le faisceau $\Gamma_E : \underline{\text{Ouv}}\ X \longrightarrow \underline{\text{Mod}}$ est un $\underline{\mathcal{O}_X\text{-Module}}$.

$$U \longmapsto \Gamma_E(U)$$

<u>*Exemple*</u> : Le fibré tangent (T_X,Π,X) est un fibré vectoriel , qui est de rang n si X est régulière de dimension n ([Bo] AG 17.1).

Etant donné un ouvert U de X, on appelle alors <u>champ de vecteurs</u> sur U, une section au-dessus de U, $\xi : U \longrightarrow T_X$, du fibré tangent

$$x \longmapsto \xi_x$$

(T_X,Π,X) ; à un tel champ de vecteurs ξ est associée une $\mathbb{C}$-dérivation $\underline{D_\xi}$ de $\mathcal{O}_X(U)$ définie par $D_\xi(f)(x) = \xi_x(f)$; l'ensemble $\underline{\mathcal{T}_X(U)}$ des champs de vecteurs sur U est ainsi un $\mathcal{O}_X(U)$-module isomorphe à $\text{Der}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{O}_X(U)$, et le faisceau $\mathcal{T}_X : \underline{\text{Ouv}}\ X \longrightarrow \underline{\text{Mod}}$ un $\mathcal{O}_X$-Module. De plus,

$$U \longmapsto \mathcal{T}_X(U)$$

en notant $[\xi,\eta]$ le champ de vecteurs associé à la $\mathbb{C}$-dérivation $[D_\xi,D_\eta]$, on munit $\mathcal{T}_X(U)$ d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre de Lie.

Soit G un groupe algébrique complexe.

Un fibré (E,p,X) au-dessus de X est un <u>fibré principal de groupe</u> (structural) G si G opère (à droite) simplement transitivement sur chaque fibre et si : (condition de trivialité locale)

il existe un voisinage ouvert (pour la topologie "naturelle") U de x (appelé ouvert trivialisant) et un C_{an}-isomorphisme τ de $U \times G$ sur $p^{-1}(U)$ tel que $\tau \circ p = pr_1$, et dont la restriction à $\{y\} \times G$ commute à l'action de G, i.e. $\tau(y, gg') = \tau(y,g) \cdot g'$.

L'application $\tau_y : G \longrightarrow p^{-1}(y)$ est alors une bijection.

$$g \longmapsto \tau(y,g)$$

Un fibré principal (E,p,X) est <u>trivial</u> s'il est $C_{an/X}$-isomorphe à $(X \times G, pr_1, X)$ (qui est trivialement un fibré principal de groupe G) ; il suffit pour cela qu'il existe une section globale $s : X \to E$.

<u>*Exemple*</u> : Soit (V,p,X) un fibré vectoriel de rang n ; pour tout $x \in X$, on note $\mathcal{B}(V)_x$ l'ensemble des bases de $p^{-1}(x)$ sur $\mathbb{C}$, et $\underline{\mathcal{B}(V)} = \coprod_{x \in X} \mathcal{B}(V)_x$; $\mathcal{B}(V)$ peut être muni d'une structure de variété de façon que la projection canonique Π, qui envoie $\mathcal{B}(V)_x$ sur x, soit un C_{alg}-morphisme (voir [Kz] 5.1) ; $(\mathcal{B}(V),\Pi,X)$ est alors un fibré principal de groupe $Gl(n,\mathbb{C})$, l'action de $Gl(n,\mathbb{C})$ sur la fibre $\mathcal{B}(V)_x$ étant l'opération de changement de base dans $p^{-1}(x)$. $(\mathcal{B}(V),\Pi,X)$ est appelé fibré principal canoniquement associé au fibré vectoriel (V,p,X). Plus généralement, un fibré principal (E,Π,X) est dit <u>associé</u> à (V,p,X) s'il existe un $C_{alg|X}$-morphisme de (E,Π,X) dans $(\mathcal{B}(V),\Pi,X)$.

Réciproquement, étant donné un fibré principal (E,p,X) de groupe G, et une représentation linéaire $\rho : G \to Gl(n,\mathbb{C})$, si pour tout $x \in X$ on note V_x le quotient de $\mathbb{C}^n \times p^{-1}(x)$ par la relation d'équivalence $(\alpha,z) \sim (\rho(g^{-1})\,\alpha,\ zg)$, et $V = \coprod_{x\in X} V_x$, muni de la structure de variété qui fait de Π (projection canonique qui envoie V_x sur x) un C_{alg}-morphisme, alors (V,Π,X) est un fibré vectoriel de rang n de fibré principal associé (E,p,X) (cf. [VDA] 6.5).

Proposition.- Soit G un groupe algébrique complexe. Alors $(G \times X, pr_2, X)$ est un groupe dans la catégorie $C_{alg|X}$.

De plus, pour tout fibré (E,p,X), les conditions suivantes sont équivalentes :

i) G opère simplement transitivement sur les fibres de (E,p,X) ;

ii) (E,p,X) est un $(G \times X, pr_2, X)$ - espace homogène principal dans $C_{alg|X}$.

Démonstration : Le produit de $(G \times X, pr_2, X)$ par lui-même dans $C_{alg|X}$ n'est autre que le produit fibré $(G \times X) \times_X (G \times X)$ du couple (pr_2, pr_2) dans C_{alg} (voir [PJ] II.4) ; l'application qui à un élément $((g,x), (h,x))$ de ce produit associe (gh,x) munit alors $(G \times X, pr_2, X)$ d'une structure de groupe.

i) $\Longrightarrow$ ii) : on définit une action à droite de $(G \times X, pr_2, X)$ sur (E,p,X) par $(z, (g,x)) \longmapsto zg$; l'application $(z,(g,x)) \mapsto (z,gz)$ est ainsi un $C_{alg|X}$-isomorphisme de $E \times_X (G \times X)$ sur $E \times_X E$, puisque pour tout $(z,z') \in E \times_X E$, il existe un unique $g \in G$ tel que $z' = zg$.

ii) $\Longrightarrow$ i) : pour tout $x \in X$, $z \in p^{-1}(x)$ et $g \in G$, on pose $zg = z\,.\,(g,x)$. ∎

Si (E,p,X) est un $(G \times X, pr_2, X)$ - espace homogène principal dans $\mathcal{C}_{alg|X}$, et si la condition de trivialité locale est satisfaite, (E,p,X) est donc un fibré principal de groupe G.

Exemple : Si (E,p,X) est un fibré principal de groupe G, et $f : Y \to X$ un $\mathcal{C}_{alg}$-morphisme, le fibré $(E \times_X Y, pr_2, Y)$ est un fibré principal de groupe G, appelé image réciproque de (E,p,X) par f.
En particulier, si (E,p,X) est un fibré principal de groupe G, alors $(E \times_X E, pr_2, E)$ est un fibré principal de groupe G, qui est trivial puisque le $\mathcal{C}_{alg}$-morphisme s qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[drr, "1_E"] \arrow[dr, "s"] \arrow[ddr, "1_E"'] & & \\
& E \times_X E \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"] & E \arrow[d, "p"] \\
& E \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

est une section globale.

IV.13.- Soit (E,p,X) un fibré principal de groupe G.

Pour tout $g \in G$, on note $\underline{g_r}$ le $\mathcal{C}$-automorphisme de E $z \mapsto zg$; pour tout ouvert Ω de E, on en déduit un $\mathbb{C}$-automorphisme $\tilde{g} : f \mapsto f \circ g_r$ de $\mathcal{O}_E(\Omega)$, et un $\mathbb{C}$-automorphisme $\bar{g}$ de $\mathbb{C}(E)$ (cf. [0.45]).

Un champ de vecteurs ζ sur un ouvert Ω de E est <u>invariant</u> si, pour tout $z \in \Omega$, $g \in G$: $\zeta_{zg} = (dg_r)_z\ (\zeta_z)$; si $\Omega = p^{-1}(U)$ (U ouvert de X), l'ensemble $\underline{\mathcal{T}^G_E(\Omega)}$ des champs de vecteurs invariants sur Ω est un $\mathcal{O}_X(U)$-module de loi externe $(\varphi,\zeta) \mapsto (\varphi \circ p) \cdot \zeta$.

A un champ de vecteurs ζ sur un ouvert Ω de E correspond une $\mathbb{C}$-dérivation D_ζ de $\mathcal{O}_E(\Omega)$ [IV.12] ; ζ est alors invariant sur

Ω si et seulement si, pour tout $\psi \in \mathcal{O}_E(\Omega)$, $z \in \Omega$ et $g \in G$,
$(D_\zeta(\psi) \circ g_r)(z) = \zeta_{zg}(\psi) = (dg_r)_z\ (\zeta_z)(\psi) = \zeta_z(\psi \circ g_r) = D_\zeta(p \circ g_r)(z)$
i.e. si $\tilde{g} \circ D_\zeta = D_\zeta \circ \tilde{g}$; en particulier, ζ est invariant sur un ouvert Zariski - dense de E si et seulement si $\bar{g} \circ \bar{D}_\zeta = \bar{D}_\zeta \circ \bar{g}$, pour tout $g \in G$.

Pour tout $z \in E$, le $\mathbb{C}$-morphisme $(dp)_z$; $T_{E,z} \longrightarrow T_{X,x}$, où $x = p(z)$ est surjectif : en effet, il existe un voisinage ouvert (pour la topologie "naturelle") U de x et un $\mathcal{C}_{an}$-isomorphisme $\tau : U \times G \longrightarrow p^{-1}(U)$, et par suite une section locale analytique $\tau_e : U \longrightarrow p^{-1}(U)$ de (E,p,X) au-dessus de U ; on déduit un $\mathbb{C}$-morphisme
$y \longmapsto \tau(y,e)$
$(d\tau_e)_x : T^{an}_{U,x} \longrightarrow T^{an}_{p^{-1}(U),z}$ tel que $(dp)_z \circ (d\tau_e)_x = 1_{T^{an}_{U,x}}$; comme $T^{alg}_{U,x}$ est canoniquement isomorphe à $T^{an}_{U,x}$ ([IV. 11] rem.) , $(dp)_z : T^{alg}_{E,z} \longrightarrow T^{alg}_{X,x}$ est également surjectif.

On appelle <u>connexion</u> (invariante) sur (E,p,X) la donnée, pour tout $z \in E$, d'une section γ_z de $(dp)_z$, telle que, pour tout champ de vecteurs ξ sur un ouvert U de X, l'application $\gamma(\xi) : z \mapsto \gamma_z(\xi_x)$ soit un champ de vecteurs invariant sur $p^{-1}(U)$; le vecteur tangent ξ_x en x à X se relève donc, en chaque point de $p^{-1}(x)$, en un vecteur tangent à E, et si x varie dans un ouvert U de X, ces relèvements définissent un champ de vecteurs invariant sur $p^{-1}(U)$.
Une connexion est dite <u>algébrique</u> si pour tout champ de vecteurs algébrique ξ, le champ $\gamma(\xi)$ est algébrique.

On peut traduire cette définition en termes de faisceaux : on considère le $\mathcal{O}_X$-Module $\underline{\mathcal{T}'_X}$ tel que $\mathcal{T}'_X(U) = \mathcal{T}^G_E(p^{-1}(U))$, pour tout ouvert U de X, et le morphisme de $\mathcal{O}_X$-Modules $\underline{dp} : \mathcal{T}'_X \longrightarrow \mathcal{T}_X$ défini par

$(dp_U(\zeta))_x = (dp)_z\ (\zeta_z)$, pour tout $\zeta \in \mathcal{T}'_X(U)$, $x \in U$ et $z \in p^{-1}(x)$ (comme pour tout $g \in G$, $p \circ g_r = p$, on vérifie que $(dp)_z\ (\zeta_z) = (dp)_{zg}\ (\zeta_{zg})$) ; $(dp)_z$ étant surjectif, pour tout $z \in E$, dp est un épimorphisme de $\mathcal{O}_X$-Modules, et une connexion sur (E,p,X) est alors une section γ de dp.

Si pour tout ouvert U de X, on convient de noter $\underline{\mathcal{N}_X(U)}$ le noyau de $dp_U : \mathcal{T}'_X(U) \longrightarrow \mathcal{T}_X(U)$, et $\underline{\mathcal{N}_X} : \underline{\text{Ouv}}\ X \longrightarrow \underline{\text{Mod}}$, une
$U \longmapsto \mathcal{N}_X(U)$
connexion est donc une scission de la suite exacte de $\mathcal{O}_X$-Modules (suite d'Atiyah) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_X \hookrightarrow \mathcal{T}'_X \xrightarrow{dp} \mathcal{T}_X \longrightarrow 0 .$$

Un champ de vecteurs invariant ζ sur $p^{-1}(U)$ et appartenant à $\mathcal{N}_X(U)$, i.e. tel que $\forall\, z \in p^{-1}(U)$, $(dp)_z\ (\zeta_z) = 0$, est appelé champ de <u>vecteurs verticaux</u> (invariant) ; étant donnée une connexion γ sur (E,p,X), et un ouvert U de X, l'image par γ_U d'un champ de vecteurs ξ sur U est appelée champ de <u>vecteurs horizontaux</u> (invariant) sur $p^{-1}(U)$; le $\mathcal{O}_X(U)$-module des champs de vecteurs invariants sur $p^{-1}(U)$ est ainsi la somme directe du module des champs de vecteurs verticaux et de celui des champs de vecteurs horizontaux (relativement à γ).

Pour tout ouvert U de X, $\mathcal{T}'_X(U)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie : en effet si ζ et η sont deux champs de vecteurs invariants sur $p^{-1}(U)$, pour tout $\psi \in \mathcal{O}_E(p^{-1}(U))$ et $g \in G$, comme $D_\zeta(D_\eta(\psi \circ g_r)) = D_\zeta(D_\eta(\psi) \circ g_r)$, on a $[D_\zeta, D_\eta]\ (\psi \circ g_r) = [D_\zeta, D_\eta]\ (\psi) \circ g_r$, i.e. pour tout $z \in p^{-1}(U)$, $(dg_r)_z\ ([\zeta,\eta]_z) = [\zeta,\eta]_{zg}$; $dp_U : \mathcal{T}'_X(U) \longrightarrow \mathcal{T}_X(U)$ est alors un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de Lie, car, avec les notations précédentes, si $x = p(z)$, $D_\eta(\psi \circ p)\ (z) = D_{dp(\eta)}\ (\psi)\ (x)$ d'où ,

$$\begin{aligned}(dp[\zeta,\eta])_x\ (\psi) &= [D_\zeta, D_\eta]\ (\psi \circ p)\ (z) = [D_{dp(\zeta)}\ , D_{dp(\eta)}]\ (\psi)\ (x)\\ &= [dp(\zeta),\ dp(\eta)]_x\ (\psi) .\end{aligned}$$

Remarque : Le noyau $\mathcal{N}_X(U)$ de dp_U est donc un idéal (en particulier une sous $\mathbb{C}$-algèbre de Lie) de $\mathcal{T}'_X(U)$.

Une connexion γ de (E,p,X) est plate (ou de courbure nulle) si, pour tout ouvert U de X, $\gamma_U : \mathcal{T}_X(U) \longrightarrow \mathcal{T}'_X(U)$ est un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de Lie, i.e. si $\gamma[\xi, \xi'] = [\gamma(\xi), \gamma(\xi')]$.

On appelle fibré plat la donnée d'un fibré principal (E,p,X) et d'une connexion algébrique plate γ sur (E,p,X).

IV.2. - *Extension de PV associée à un fibré plat.*

Note : Une variété est désormais considérée uniquement comme un objet de $\mathcal{C}_{alg}$.

IV.21.- Soient G un groupe algébrique affine complexe, (E,p,X) un fibré principal de groupe G, muni d'une connexion algébrique plate γ, tel que X soit irréductible et E affine.

Soit $\underline{U}$ un ouvert affine de X, nécessairement dense puisque X est irréductible.

On pose $\underline{K} = \mathbb{C}(X)$ (resp : $\underline{L} = \mathbb{C}(E)$) et $\underline{A} = \mathcal{O}_X(U)$ (resp. $B = \mathcal{O}_E(E)$) ; on a donc $K = \mathrm{Frac}(A)$ et $L = \mathrm{Frac}(B)$ [IV.11], et du $\mathbb{C}$-morphisme surjectif $p : E \to U$, on déduit un $\mathbb{C}$-homomorphisme injectif d'anneaux $\tilde{p} : f \mapsto f \circ p$ de A dans B, et par suite un $\mathbb{C}$-homomorphisme de corps $\underline{\bar{p}} : K \to L$.

D'autre part, la connexion γ induit un A-morphisme injectif $\gamma_U : \mathcal{T}_X(U) \longrightarrow \mathcal{T}^G_E(U)$ $((dp)_U \circ \gamma_U = 1_{\mathcal{T}_X(U)})$, donc un A-morphisme injectif $\underline{\tilde{\gamma}} : \mathrm{Der}_{\mathbb{C}} A \longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbb{C}} B$ $(\tilde{\gamma}(D_\xi) = D_{\gamma_U}(\xi))$, et par suite un K-morphisme $\underline{\bar{\gamma}} : \mathrm{Der}_{\mathbb{C}} K \longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbb{C}} L$; de plus, γ étant plate, γ_U est un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de Lie, et donc aussi $\tilde{\gamma}$ et $\bar{\gamma}$ (voir [0.41] ex. b).

Proposition 1.- Avec les notations précédentes,

a) pour tout $d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}K$, on a $\bar{\gamma}(d) \circ \bar{p} = \bar{p} \circ d$;

b) si $\dim X = m$, il existe une base $(d_1,\dots,d_m)$ de $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}K$, telle que $[d_i, d_j] = 0 \quad \forall i, \forall j$;

c) si l'on pose $\partial_i = \bar{\gamma}(d_i)$ alors $(L,\partial_1,\dots,\partial_m)$ est une extension différentielle de K.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\bar{p}} & L \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\gamma}(d)} \\ K & \xrightarrow{\bar{p}} & L \end{array}$$

Démonstration : a) par définition de $\bar{p}$ et $\bar{\gamma}$, il suffit de montrer que, pour tout $\xi \in T_X(U)$, $D_{\gamma_U(\xi)} \circ \tilde{p} = \tilde{p} \circ D_\xi$: or, pour tout $f \in A$, $z \in E$, comme $dp \circ \gamma = 1_{T_X}$, on a

$$[D_{\gamma_U(\xi)} \circ \tilde{p}]\ (f)\ (z) = \gamma_U(\xi)_z\ (f \circ p) = (dp)_z\ (\gamma_U(\xi))_z\ (f) = \xi_{p(z)}(f) = D_\xi(f)(p(z))$$
$$= [\tilde{p} \circ D_\xi]\ (f)\ (z) \ ;$$

b) comme $m = \dim X = \mathrm{dtr}(K/\mathbb{C})$, si $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ est une base de transcendance de K sur $\mathbb{C}$, K est algébrique sur $\mathbb{C}(x_i)_i$, donc tout $\partial \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\,(x_i)_i)$ se prolonge de manière unique en $\bar{\partial} \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}K$ ([0.41] ex. a) ; il suffit alors de poser $d_i = \dfrac{\bar{\partial}}{\partial x_i}$;

c) $\bar{\gamma}$ étant un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de Lie, $[\partial_i, \partial_j] = 0$, $\forall i$, $\forall j$; et d'après a), $\bar{p}$ est un homomorphisme de corps différentiels de $(K,d_1,\dots,d_m)$ dans $(L,\partial_1,\dots,\partial_m)$. ∎

On convient donc d'identifier désormais K et $\bar{p}(K)$, d_i et $\partial_i \circ \bar{p} = \partial_{i|K}$.

Remarque : La famille $(\partial_{i|K})_{1\leq i\leq m}$ est libre sur L : en effet, si $\sum_{i=1}^{m} a_i\, \partial_{i|K} = 0$ avec $a_i \in L - \{0\}$, on peut extraire de $(a_i)_{1\leq i\leq m}$ une sous-famille maximale libre sur K, et (quitte à réordonner les indices) la noter $(a_1,\dots,a_p)$ avec $1 \leq p \leq m$; pour tout $p+1 \leq j \leq m$, on a donc

$$a_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij}\, a_i \quad , \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} \in K \text{ , d'où } 0 = \sum_{i=1}^{p} a_i(\partial_{i|K} + \sum_{j=p+1}^{m} \alpha_{ij}\, \partial_{j|K}) \text{ ;}$$

la famille $(a_i)_{1\leq i\leq p}$ étant libre sur K, on a nécessairement, pour tout $i = 1,\dots,p$, $\partial_{i|K} + \sum_{j=p+1}^{m} \alpha_{ij}\, \partial_{j|K} = 0$, ce qui est impossible puisque $(\partial_{i|K})_{1\leq i\leq m}$ est libre sur K.

Par suite, si l'on identifie $L \otimes_K \bar{\gamma}(\mathrm{Der}_{\mathbb{C}} K)$ et son image canonique dans $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}} L$, on a $(L \otimes_K \bar{\gamma}(\mathrm{Der}_C K)) \cap \mathrm{Der}_K L = \{0\}$, et comme

$\dim_K \mathrm{Der}_{\mathbb{C}} K + \dim_L \mathrm{Der}_K L = \mathrm{dtr}(K/\mathbb{C}) + \mathrm{dtr}(L/K) = \dim_L \mathrm{Der}_{\mathbb{C}} L$, on a une décomposition canonique $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}} L = \mathrm{Der}_K L \oplus (L \otimes_K \bar{\gamma}(\mathrm{Der}_{\mathbb{C}} K))$.

IV.22.- On suppose désormais que $L_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$.

Remarque : Géométriquement, il suffit pour cela que le groupe d'holonomie Γ du fibré plat (E,p,X) soit Zariski-dense dans G : en effet dans ce cas, une fonction rationnelle f annulée par les champs algébriques horizontaux, donc constante sur chaque feuille du revêtement défini par Γ, est, de plus, constante sur les fibres, et, par suite, est constante.

Pour tout $g \in G$, $\bar{g}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}(E) = L$; et $\bar{g}(f) = f$, $\forall g \in G$, si et seulement si $f \in K$: en effet, si $b \in B$ est tel que $\tilde{g}(b) = b$, pour tout $g \in G$, comme pour tout $x \in X$, $z, z' \in p^{-1}(x)$, il existe $g_o \in G$ tel que $z' = g_o\, z$, on a $b(z) = b(z')$, i.e. $b = \psi \circ p$ où $\psi \in A$ est le C-morphisme $x \longmapsto b(z)$;

la réciproque est immédiate. De plus, pour tout $d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}} A$, le champ de vecteurs correspondant à $\tilde{\gamma}(d)$ étant invariant sur E, on a, d'après [IV. 13], $\bar{g} \circ \overline{\tilde{\gamma}(d)} = \overline{\tilde{\gamma}(d)} \circ \tilde{g}$, pour tout $g \in G$; d'où, en particulier $\bar{g} \circ \partial_i = \partial_i \circ \bar{g}$, pour tout i. Par suite, $\{\bar{g} \mid g \in G\} \subset \mathrm{Gal}(L/K)$.

D'autre part, de l'action de G sur E ($\hat{\mu} : G \times E \to E$), on déduit, par anti-équivalence entre la catégorie des variétés affines sur $\mathbb{C}$ et celle des $\mathbb{C}$-algèbres de type fini ([Bo] AG 5.4), un $\mathbb{C}$-homomorphisme d'algèbres $\mu : B \to B \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]$; d'où pour tout $g \in G$, $b \in B$, $\bar{g}(b) = b \circ g_r$ étant le composé
$$\begin{array}{ccccccc} E & \longrightarrow & G \times E & \xrightarrow{\hat{\mu}} & E & \xrightarrow{b} & C \\ z & \longmapsto & (g,b) & & & & \end{array}$$
est l'image de b par le composé
$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\mu} & B \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] & \longrightarrow & B \\ & & b' \otimes \rho & \longmapsto & \rho(g)\, b' \end{array}$$
i.e., si $\mu(b) = \sum_{i=1}^{p} b_i \otimes \rho_i$, $\bar{g}(b) = \sum_{i=1}^{p} \rho_i(g)\, b_i$. Par suite, pour tout $b \in B$, le sous-espace vectoriel $\underline{E_{\mathbb{C}}(b)}$ de L engendré par $\{\bar{g}(b) \mid g \in G\}$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Lemme 2.- Avec les notations et hypothèses précédentes, si $b \in B$ et $I_b = \{\delta \in \mathcal{D}_K \mid \delta . b = 0\}$, alors I_b est un idéal de PV de $\mathcal{D}_K$ complètement résoluble dans L [II.24].

Démonstration : Comme pour tout $\delta \in \mathcal{D}_K$, $g \in G$, $\bar{g} \circ \delta = \delta \circ \bar{g}$, on a $I_b = \{\delta \in \mathcal{D}_K \mid \forall x \in E_{\mathbb{C}}(b)\ ,\ \delta.x = 0\}$; si on note $J_b = \{\delta \in \mathcal{D}_L \mid \forall x \in E_{\mathbb{C}}(b)\ ,\ \delta.x = 0\}$, on a donc $I_b = J_b \cap \mathcal{D}_K$; d'autre part, pour tout $g \in G$, $\delta \in J_b$ $x \in E_C(b)$, on a $\bar{g}^{-1}(x) \in E_{\mathbb{C}}(b)$, donc $\bar{g} \circ \delta \circ \bar{g}^{-1}(x) = 0$, i.e. $\bar{g} \circ \delta \circ \bar{g}^{-1} \in J_b$; J_b est donc muni d'une structure de G-module par $(g,\delta) \longmapsto \bar{g} \circ \delta \circ \bar{g}^{-1}$; or, étant donné $\delta \in \mathcal{D}_L$, on a $\bar{g} \circ \delta\, \bar{g}^{-1} = \delta$, pour tout $g \in G$, si et seulement si $\delta \in \mathcal{D}_K$: en effet,

$$\sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha \partial^\alpha = \bar{g} \circ \left(\sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha \partial^\alpha\right) \circ \bar{g}^{-1} = \sum_{|\alpha|\leq p} \bar{g}(a_\alpha) \partial^\alpha \Longleftrightarrow \forall\alpha,\ \bar{g}(a_\alpha) = a_\alpha \ ;$$

l'isomorphisme canonique $\lambda : L \otimes_K \mathcal{D}_K \longrightarrow \mathcal{D}_L$ étant un G-morphisme

$$a \otimes \delta \longrightarrow a\delta$$

$(\lambda(\bar{g}(a) \otimes \delta) = \bar{g}(a)\,\delta = \bar{g} \circ a\,\delta \circ \bar{g}^{-1})$, le G-module $\mathcal{D}_L$ est donc trivial, et, par suite J_b , qui en est un sous G-module, également (cf. [I.3,4 et A]), i.e. $J_b = \lambda(L \otimes_K (J \cap \mathcal{D}_K)) = \lambda(L \otimes_K I_b)$; comme, d'après ([II. 25] th. 6), J_b est complètement résoluble dans L, le $\mathcal{D}_L$-module $\mathcal{D}_L/J_b$ est trivial et donc aussi $L\otimes_K \mathcal{D}_K/I_b \overset{\sim}{\to} \mathcal{D}_L/\lambda(L\otimes_K I_b)$ ([II. 23] Lemme 2). ■

Théorème 3.- Avec les notations et hypothèses précédentes, $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ est une extension de PV de K.

Démonstration : E étant affine, on a $L = \mathrm{Frac}(B)$, avec B $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, donc il existe $b_1 ,\ldots, b_s \in B$ tels que $L = \mathbb{C}(b_1,\ldots,b_s)$; comme (d'après le lemme 2), pour tout $i = 1,\ldots,n$, I_{b_i} est complètement résoluble dans L, L est une extension de PV de K associée à $I = \bigcap_{i=1}^{s} I_{b_i}$ (voir dem. [II 41] th. 1). ■

Remarque : Si l'on note $\underline{\mathrm{Der}^G_{\mathbb{C}} L}$ le sous K-espace de $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}L$ formé des $\mathbb{C}$-dérivations invariantes de L (i.e. commutant avec $\bar{g}$, $\forall\, g \in G$), qui prolongent donc les dérivations associées aux champs de vecteurs invariants sur U, et si l'on identifie $K \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{L/K}$ et son image dans $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}L$, on a $$\mathrm{Der}^G_{\mathbb{C}}L = (K \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{L/K}) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{m} K\,\partial_i\right)$$: en effet, d'après ([IV. 21] rem.) on a $\mathrm{Der}^L_{\mathbb{C}} = \mathrm{Der}_K L \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{m} K\,\partial_i\right)$, et L étant une extension de PV de K, $\mathcal{L}_{L/K}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de Gal(L/K) et $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{L/K} = \mathrm{dtr}(L/K)$ ([III.42] th. 5), d'où $L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{L/K} \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathrm{Der}_K L$ ([III.11] th. 1) ; or, pour tout $i = 1,\ldots,m$, $g \in G$, on a $\bar{g} \circ \partial_i = \partial_i \circ \bar{g}$; d'autre part, tout $d \in \mathcal{L}_{L/K}$ est invariant par $\mathrm{Gal}(L/K) \supset \{\bar{g} \mid g \in G\}$; d'où le résultat.

On en déduit, en particulier, que $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}} L$ est engendré sur L par $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}^{G} L$, i.e. $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}} L \xrightarrow{\sim} L \otimes_K \mathrm{Der}_K^G L$.

IV.23.- Soit x un point générique de X ([La] IV.4). On suppose que l'ouvert affine U contient x.

$\{x\}$ est un sous-variété affine de U telle que $\mathbb{C}(\{x\}) \xrightarrow{\sim} K$; $V = p^{-1}(x)$ étant canoniquement isomorphe au produit fibré de E et $\{x\}$ au-dessus U, on en déduit, par anti-équivalence de catégories, que $\mathbb{C}[V]$ est canoniquement isomorphe à la somme amalgamée de B et K sur A, i.e. $K \otimes_A B$; V est donc un modèle de L sur K [0.45] : en effet, si $S = B - \{0\}$, L est canoniquement à $K \otimes_A B[S^{-1}]$, donc à $(K \otimes_A B)\,[T^{-1}]$, où $T = \{1 \otimes s / s \in S\}$, i.e. à $\mathrm{Frac}\,(K \otimes_A B) = K(V)$.

D'autre part, G opère simplement transitivement sur $p^{-1}(x)$ donc V est un $G \times \{x\}$ - espace homogène principal dans $C_{|\{x\}}$ ([IV.12] prop) i.e. , comme $\mathbb{C}(x) \xrightarrow{\sim} K$, un G_K-espace homogène principal dans la catégorie des variétés sur K (voir [0.45]). En utilisant le théorème de BIALYNICKI-BIRULA ([0.45] th. 4), et donc indirectement le théorème de WEIL, on peut retrouver, dans le cas régulier, les résultats du théorème 3 :

Proposition 4.- Avec les notations et hypothèses précédentes, et en supposant de plus que G est connexe, $(L,\partial_1,\dots,\partial_m)$ est une extension de PV régulière de K, G est un modèle de $\mathcal{L} = (\mathrm{Frac}(L \otimes_K L))_c$ sur $\mathbb{C}$, et $\mathrm{Gal}(L/K) = \{\bar{g} \mid g \in G\}$.

Démonstration : Il existe un modèle V de L sur K, qui est un G_K-espace homogène principal, et $\{\bar{g} \,/\, g \in G\} \subset \mathrm{Gal}(L/K)$; donc d'après ([0.45] th. 4), L est une extension fortement normale (BB) de K, G est un modèle $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{C}$, et $\mathrm{Gal}(L/K) = \{\bar{g} \,/\, g \in G\}$; par suite $\mathrm{Gal}(L/K)$, isomorphe à G, est un groupe algébrique affine, et L est une extension de PV régulière de K ([III. 43] th. 6).

Conséquences :

a) par anti-équivalence de catégories, puis par passage aux corps des fractions, on a (canoniquement) $K(V \times_{\{x\}} V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(L \otimes_K L)$; mais, dans la catégorie des variétés définies sur K, $(V, p_{|V}, \{x\})$ est un fibré principal de groupe G_K, donc $(V \times_{\{x\}} V, pr_1, V)$ est un fibré trivial de groupe G_K [IV. 12], i.e. $V \times_{\{x\}} V$ est isomorphe à $V \times G_K$, et par suite $K(V \times_{\{x\}} V) \xrightarrow{\sim} K(V \times G_K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(L \otimes_K K(\mathcal{L})) \xrightarrow{\sim} L(\mathcal{L})$ (puisque $K[G_K] \xrightarrow{\sim} K \otimes_k k(G) \xrightarrow{\sim} K \otimes_k \mathcal{L}$) ; la trivialité du fibré $(V \times_{\{x\}} V, pr_1, V)$ correspond donc à la condition $\mathrm{Frac}(L \otimes_K L) = L(\mathcal{L})$ de normalité forte (BB).

b) avec les notations précédentes, on a, d'après ([BB] th. 5), $A_{L|K} \xrightarrow{\sim} A(V) \xrightarrow{\sim} K \otimes_A B$.

IV.3. - Fibré plat associé à une extension de PV.

IV.31.- Soit K une extension de type fini de $\mathbb{C}$.

Si $m = \mathrm{dtr}(K/\mathbb{C})$ et $\underline{t} = (t_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de transcendance de K sur $\mathbb{C}$, il existe $y \in K$, algébrique sur $\mathbb{C}(t)$, i.e. vérifiant $F(t,y) = 0$ avec $F \in \mathbb{C}[T,Y]$, tel que $K = \mathbb{C}(t)[y]$.

Pour tout $i = 1,\dots,m$, on considère la $\mathbb{C}$-dérivation canonique $\frac{\partial}{\partial t_i}$ de $\mathbb{C}(t)$ et son unique prolongement $\underline{\partial_i}$ à K ([0.41] ex. a) ; $(K,\partial_1,\dots,\partial_m)$ est ainsi un corps différentiel de corps des constantes $\mathbb{C}$, et $A = \mathbb{C}[t,y]$ un sous-anneau différentiel de K ; de plus, $(\partial_1,\dots,\partial_m)$ est une base de $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}K$ sur K. D'autre part, la $\mathbb{C}$-variété affine $\underline{X}$ associée à l'idéal engendré par F dans $\mathbb{C}[T,Y]$ est un modèle de K sur $\mathbb{C}$ [0.45] : en effet, on a

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[T,Y]/(F) \xrightarrow{\sim} A \text{ , d'où } \mathbb{C}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Frac}(A) = K.$$

Soit $(f_1,\ldots,f_m) \in A^m$. On considère l'extension $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ obtenue en adjoignant à K l'exponentielle u de l'intégrale de $(f_1,\ldots,f_m)$ [III.A3]. On suppose de plus, que K est algébriquement fermé dans L et que $L_c = \mathbb{C}$.

On peut justifier géométriquement ce choix a priori d'un modèle affine X de K sur $\mathbb{C}$ et de $(f_1,\ldots,f_m)$ dans A^m (et non dans K^m) : étant donnée une variété Y de corps des fonctions K et $\omega = \sum_i f_i\, dt_i$ une 1-forme différentielle sur Y, un ouvert affine dense X de Y-{singularités de ω} est un modèle affine de K et les fonctions f_i sont partout définies sur X.

Exemple : $K = \mathbb{C}(z)$ est le corps des fonctions de la droite projective complexe $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$; si ω est une 1-forme différentielle sur $\mathbb{P}_1(C)$, une solution u de l'équation $dy = \omega y$ est définie sur un revêtement $\tilde{X}$ de l'ouvert affine dense $X = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ - {singularités de ω} par la donnée de $P \in \tilde{X}$ et $\lambda \in C$: pour tout $Q \in \tilde{X}$, on a alors $u(Q) = \lambda \exp \int_P^Q \omega$, indépendamment du choix d'un chemin de P à Q dans $\tilde{X}$.

D'après ([III A.3] prop. 5 et 6), $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ est une extension de PV de K associée à I_u , et $\underline{G} = \text{Gal}(L/K)$ est canoniquement isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{C} - \{0\}$; G est donc trivialement un groupe algébrique affine de $\mathbb{C}$-algèbre affine $\mathbb{C}[G] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\underline{S},S^{-1}]$. On considère $\underline{B} = A[\underline{u},u^{-1}]$; comme, pour tout $i = 1,\ldots,m$,
$\partial_i(u) = f_i u$ et $\partial_i(u^{-1}) = \dfrac{-\partial_i(u)}{u^2} = -f_i\, u^{-1}$, avec $f_i \in A$ et A différentiel, B est un sous-anneau différentiel de L.

D'autre part, B, étant canoniquement isomorphe au quotient de $\mathbb{C}[T,Y,U,V]$ par l'idéal engendré par F et $UV - 1$, est la $\mathbb{C}$-algèbre affine d'une variété affine $\underline{E}$, qui est un modèle de L sur $\mathbb{C}$ $(\mathbb{C}(E) = \mathrm{Frac}(B) = K(u) = L)$; à l'injection canonique de A dans B correspond alors, par anti-équivalence de catégories, un morphisme surjectif (de $\mathbb{C}$-variétés affines) $p : E \to X$ $(p(\tau,a,b,b') = (\tau,a))$; (E,p,X) est donc un fibré.

Proposition 1.- Avec les notations et hypothèses précédentes, (E,p,X) est un fibré principal trivial de groupe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

Démonstration : d'après ([III. A3] prop. 6), u est transcendant sur K ; la famille $(u^j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est donc libre sur K $(0 = \sum_{j\geq p} a_j\, u^j = u^{-p} (\sum_{i\geq 0} a_{i+p}\, u^i)$ implique $a_{i+p} = 0$, $\forall$ i), et par suite, est une base de $B = A[u,u^{-1}]$ sur A ; on considère l'homomorphisme de A-algèbres $\mu : B \longrightarrow B \otimes_A K[G_K]$ défini par $\mu(u^j) = u^j \otimes 1 \otimes s^j$ et l'injection canonique $\eta_1 : B \longrightarrow B \otimes_A K[G_K]$; $\mu \otimes \eta_1$ est un isomorphisme de A-algèbres de $B \otimes_A B$ sur $B \otimes_A K[G_K]$, car pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, on a $(\mu \otimes \eta_1)(u^i \otimes u^j) = u^{i+j} \otimes 1 \otimes s^i$, i.e. $\mu \otimes \eta_1$ transforme une base $(u^i \otimes u^j)_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ de $B \otimes_A B$ sur A en la base $(u^{i+j} \otimes 1 \otimes s^i)_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ de $B \otimes_A K[G_K]$ sur A ; du d.c. de $\mathbb{C}$-algèbres de type fini :

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_A K[G_K] & & \\
& B \otimes_A B \arrow[ul, "\mu\otimes\eta_1"'] & B \arrow[l, "i_1"'] \arrow[ull, "\eta_1"'] \\
& B \arrow[uul, "\mu"] \arrow[u, "i_2"'] & A \arrow[l] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

on déduit alors, par anti-équivalence de catégories, le d.c. de $\mathbb{C}$-variétés affines :

$$\begin{tikzcd}
E \times_X (G \times X) \arrow[dr, "(\hat{\mu}, pr_1)"] \arrow[drr, "pr_1"] \arrow[ddr, "\hat{\mu}"'] & & \\
& E \times_X E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
& E \arrow[r, "p"'] & X
\end{tikzcd}$$

où $(\hat{\mu}, pr_1)$ est un isomorphisme de $E \times_X (G \times X)$ sur $E \times_X E$; (E,p,X) est ainsi un $(G \times X, pr_2, X)$ - espace homogène principal dans la catégorie des $\mathbb{C}$-variétés affines au-dessus de X ; d'après ([IV.12] prop.), G opère donc simplement transitivement sur les fibres de (E,p,X) ; d'autre part, $B \xrightarrow{\sim} A \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[u,u^{-1}]$ étant canoniquement isomorphe à $A \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] \xrightarrow{\sim} A \otimes_k \mathbb{C}[s,s^{-1}]$ (en tant que A-algèbre), $X \times G$ est isomorphe à E (au-dessus de X), i.e. X est trivialisant. ∎

Remarque : Soit $\sigma \in Gal(L/K) = G$; pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $s^j(\sigma) = \mu_\sigma^j$ (où $\sigma \longmapsto \mu_\sigma = \dfrac{\sigma(u)}{u}$ est l'isomorphisme canonique de G sur $\mathbb{C} - \{0\}$ - [III. A3] prop. 6-) ; par suite, $u^j \circ \sigma_r$ étant le composé

$$\begin{array}{ccccccc} E \times_X X & \longrightarrow & E \times_X (G \times X) & \xrightarrow{\hat{\mu}} & E & \xrightarrow{u^j} & k \\ (z,x) & \longmapsto & (z,\sigma, x) & & & & \end{array}$$

est l'image de u^j par le composé

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\mu} & B \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s,s^{-1}] & \longrightarrow & B \\ & & 1 \otimes s^j & \longmapsto & \mu_\sigma^j \end{array}$$

i.e. $u^j \circ \sigma_r = \mu_\sigma^j \cdot u^j = \sigma(u^j)$; l'action de G sur E correspond donc bien à son action sur B (et sur L).

Pour tout ouvert U de X, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est le localisé de A par rapport à l'idéal premier $\{f \in A \mid f_{|U} = 0\}$. ([Bo] AG 5.2), donc est encore un sous-anneau différentiel de K ([0.41] ex. b) ; de plus, $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\, A$ étant un A-module libre de base $(\partial_{i|A})_{1\leq i\leq m}$, $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{O}_X(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$-module libre de base $(\partial_{i|\mathcal{O}_X(U)})_{1\leq i\leq m}$, que l'on convient de noter $(\underline{\partial_i^U})_{1\leq i\leq m}$; d'autre part, la restriction à B de la K-dérivation d_u (définie par $d_u(u) = u$ [III. A3]) est une A-dérivation de B, et comme $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}} B = \mathrm{Der}_A\, B \oplus (B \otimes_A \mathrm{Der}_{\mathbb{C}} A)$ (cf. [IV.31] rem.), $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}} B$ est un B-module libre de base $(d_{u|B}, \partial_{i|B})_{1\leq i\leq m}$; par suite, pour tout ouvert U de X, et $\Omega = p^{-1}(U)$, $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\, (\mathcal{O}_E(\Omega))$ est un $\mathcal{O}_E(\Omega)$-module libre de base $(d_{u|\mathcal{O}_E(\Omega)}, \partial_{i|\mathcal{O}_E(\Omega)})_{1\leq i\leq m}$, que l'on convient de noter $(\underline{d_u^\Omega}, \underline{\partial_i^\Omega})_{1\leq i\leq m}$. De plus, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, on a $\sigma \circ d_i = \partial_i \circ \sigma$ et $\sigma \circ d_u = d_u \circ \sigma$ (puisque σ et d_u sont K-linéaires et que $\sigma \circ d_u(u) = \mu_\sigma \, . \, u = d_u \circ \sigma(u)$) ; comme, d'après la remarque précédente, $\sigma = \tilde{\sigma}$ $(f \longmapsto f \circ \sigma_r)$, les champs de vecteurs associés aux dérivations d_u et ∂_i sont invariants [IV.13], donc $\mathcal{T}'_X(U)$ est canoniquement isomorphe au $\mathcal{O}_X(U)$-module libre de base $(d_u^\Omega, \partial_i^\Omega)_{1\leq i\leq m}$. Or, $\mathcal{T}_X(U)$ étant canoniquement isomorphe à $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{O}_X(U)$, et p correspond à l'injection de K dans L, $d_p : \mathcal{T}'_X(U) \longrightarrow \mathcal{T}_X(U)$ est tel que $dp(d) = d_{|\mathcal{O}_X(U)}$ pour tout $d \in \mathcal{O}_X(U)$ (en convenant d'identifier champs de vecteurs et dérivations associées), i.e. $d_p(d_u^\Omega) = 0$, et $d_p(\partial_i^\Omega) = \partial_i^U$.

Par suite, $\mathcal{N}_X(U)$ est le $\mathcal{O}_X(U)$-module libre de base (d_u^Ω), et il existe une connexion γ de (E,p,X) définie par $\gamma_U(\partial_i^U) = \partial_i^\Omega$, pour tout i; comme γ est clairement plate, on conclut :

Théorème 2.- Avec les notations et hypothèses précédentes, le fibré principal (E,p,X) associé à l'extension de PV $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$ de K est un fibré plat trivial de groupe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. ∎

Remarque : Si x est un point générique de X, alors $V = p^{-1}(x)$ est une K-variété affine d'algèbre affine $K[V] \xrightarrow{\sim} K \otimes_A B = K[u,u^{-1}]$, et, d'après ([IV. 23], prop. 4 - cons. b), on a $A_{L/K} = K[u,u^{-1}]$; mais, comme $\mathrm{Sol}(I_u,L) = k\,u$, et $K[u,u^{-1}]$ n'est autre que l'anneau différentiel $K\{u, W(u)^{-1}\}$, on retrouve que $A_{L/K} = K\{u, W(u)^{-1}\}$ ([III. 43] rem. a), faisant ainsi le lien entre deux résultats de ([BB] § 5).

IV.32.- Soient Y une variété de corps des fonctions K, $(t_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de transcendance de K sur $\mathbb{C}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$ pour tout $i = 1,\dots,m$, (Σ) un système d'équations différentielles (linéaires homogènes) à coefficients dans K, et L une extension de PV de K associée à l'idéal I de $\mathcal{D}_K$ défini par (Σ).

On cherche à généraliser les résultats du paragraphe précédent, i.e. démontrer (sous des hypothèses supplémentaires éventuelles à préciser) la

Conjecture (FP) : Il existe un ouvert affine dense X de Y , d'algèbre affine A telle que $\partial_i(A) \subset A$ pour tout i, et un fibré principal (E,p,X) de groupe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, muni d'une connexion plate γ, tel que E soit affine et l'extension de PV associée à ce fibré plat par ([IV.22] th. 3) soit canoniquement isomorphe à $(L,\partial_1,\dots,\partial_m)$.

En fait, il devrait suffire de démontrer la

Conjecture (FP) bis : Il existe un ouvert affine dense X de Y, tel que les champs de vecteurs associés aux $\mathbb{C}$-dérivations ∂_i soient holomorphes sur X (i.e. $\partial_i(\mathbb{C}[X]) \subset \mathbb{C}[X]$) , et un modèle affine E de L sur $\mathbb{C}$, tels que E soit au-dessus de X (i.e. $A = \mathbb{C}[X]$ s'injecte dans $B = \mathbb{C}[E]$) , les champs de vecteurs associés aux ∂_i soient holomorphes sur E , et G opère sur B de façon que $B^G = \{b \in B \;/\; \forall \sigma \in G , \sigma(b) = b\} = A$.

Pour démontrer cette conjecture (FP) bis, une première étape consisterait à déterminer un ouvert dense U de Y suffisamment petit pour que les champs de vecteurs associés aux ∂_i soient holomorphes sur U, et à prendre pour X un ouvert affine dense de U - {singularités des coefficients de $(\sum)$} . D'autre part, si $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $Sol(I,L)$ sur $\mathbb{C}$, on peut penser que $B = A\{u_1,\ldots,u_n,w^{-1}\}$, où w est un déterminant de la forme $\det[\partial^{\alpha^i}(u_j)]$, convienne.

On suppose avoir déterminé X et E satisfaisant aux conditions de la conjecture (FP) bis.

Soit $p : E \to X$ le morphisme surjectif correspondant à l'injection de A dans B.

Pour tout $y \in X$, $\overset{-1}{p}(y)$ est une variété affine d'algèbre affine $\mathbb{C}_y \otimes_A B$, où $\mathbb{C}_y$ est le corps résiduel de $\mathcal{O}_{X,y}$; étant donné $\sigma \in G$, l'action de G sur B induit un automorphisme de $\mathbb{C}$-algèbre $\tilde{\sigma}$ de $\mathbb{C}_y \otimes_A B$ $(\tilde{\sigma}(\lambda \otimes b) = \lambda \otimes \sigma b)$, d'où l'on déduit (par anti-équivalence de catégories) un automorphisme $\hat{\sigma}$ de $\overset{-1}{p}(y)$; G opère ainsi sur $\overset{-1}{p}(y)$ par $(z,\sigma) \longmapsto \hat{\sigma}(z)$, et il resterait à vérifier que G opère alors simplement transitivement sur chaque fibre, et que la condition de trivialité locale est satisfaite.

On suppose que (E,p,X) est ainsi un fibré principal de groupe G.

Avec les notations de [IV. 31] , pour tout ouvert U de X , $Der_{\mathbb{C}}\ \mathcal{O}_X(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$-module libre de base $(\partial_i^U)_{1\leq i\leq m}$, et si $\Omega = \overset{-1}{p}(U)$, $(\partial_i^\Omega)_{1\leq i\leq m}$ est une famille libre de $Der_{\mathbb{C}}^G(\mathcal{O}_E(\Omega))$; en posant $\gamma_U(\partial_i^U) = \partial_i^\Omega$, pour tout i, on munit donc le fibré (E,p,X) d'une connexion plate, et l'extension de PV associée à ce fibré est isomorphe à $(L,\partial_1,\ldots,\partial_m)$, i.e. X et E satisfont aux conditions de la conjecture (FP).

Un deuxième problème peut alors se poser : déterminer un fibré vectoriel (V,Π,X), de fibré principal associé (E,p,X) [IV.12], tel que le K-espace des sections (globales) méromorphes de (V,Π,X), muni de la structure de $\mathcal{D}_K$-module définie par la loi de dérivation [I.21] induite par γ (voir [Kz] 5.6), soit $\mathcal{D}_K$-isomorphe à $(\mathcal{D}_K/_I)^*$. Ainsi, la recherche d'une extension L de K, trivialisant de $\mathcal{D}_K$-module $(\mathcal{D}_K/_I)^*$ (i.e. d'une extension de PV de K associée à I [II.24] th. 4) correspondrait à celle d'un fibré plat (E,p,X) associé à (V,Π,X), et par suite, tel que le fibré vectoriel $(p^*(V), pr_2, E)$, image réciproque de (V,Π,X) par p (cf. [IV. 12] ex.), soit trivial.

Des conjectures du même type peuvent être envisagées dans le cas plus général d'une extension fortement normale (ou Lie-Galoisienne), mais leurs démonstrations feraient sans doute appel au théorème de WEIL, dont on a déjà souligné le rôle inévitable dans toute construction géométrique d'algèbre différentielle non linéaire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

* N. BOURBAKI : *Eléments de Mathématique* (Hermann)

[A x] : Algèbre, chapitre x.

[AC.] : Algèbre commutative.

[LIE.] : Groupes et algèbres de Lie.

[VDA] : Variétés différentielles et analytiques (fascicule de résultats).

* [BB] : A. BIALYNICKI-BIRULA : *On Galois theory of fields with operators* (Amer. J. Math. 84 (1962) pp. 89-109).

* [Bk] : R. BKOUCHE : articles à paraître.

* [Bo] : A. BOREL : *Linear algebraic groups* (Benjamin)

* [DL] : DELAUTRE-LOSFELD : Séminaire d'algèbre différentielle (74-75) (Publ. int. UER Math. Lille n° 55).

* [HS] : HEYNEMAN-SWEEDLER : *Affine Hopf algebras I* (J. of alg. 13 (1969) pp. 192-241).

* [Hu] : J.E. HUMPHREYS : *Linear algebraic groups* (Springer-Verlag).

* [Jo] : J. JOHNSON : *Differential dimension polynomials and a fundamental theorem of differential modules* (Amer. J. Math. 91 (1969) pp. 239-248).

* [Ka] : I. KAPLANSKI : *Introduction to differential algebra* (Hermann).

* [KL] : KOLCHIN-LANG : *Algebraic groups and the Galois theory of differential fields* (Amer. J. Math. 80 (1958) pp. 103-110).

* [Ko] : E.R. KOLCHIN : *Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations* (Ann. of Math. 49 (1948) pp. 1-42).

* [Kz] : J.L. KOSZUL : *Lecture on fibre bundles and differential geometry* (Tata. Inst. 1960).

* [La] : S. LANG : *Introduction to algebraic geometry* (Addison Wesley).

* [Ma] : J. MANIN : *Moduli fuschiani* (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa III, 19 (1965), pp. 113-126).

* [Os] : H. OSEKI : *Chern classes of projective modules* (Nagoya Math. J. 23 (1963) pp. 121-152).

* [PJ] : POITOU-JAFFARD : *Introduction aux catégories et aux problèmes universels* (Ediscience).

* [Re] : G. RENAULT : *Algèbre non commutative* (Gauthier-Villars).

BIBLIOGRAPHIE HISTORIQUE
(tentative de)

Sans remonter aux traités classiques sur les équations différentielles (par exemple : J.L. LANGRANGE, P. LAPLACE ou S. POISSON), on peut considérer que l'algèbre différentielle prend naissance à la fin du siècle dernier avec les travaux de E. PICARD et E. VESSIOT, visant à étendre aux équations différentiels les idées introduites par E. GALOIS dans la théorie des équations algébriques.

Les méthodes restent cependant essentiellement analytiques, et il faut attendre les années 40, et les travaux de J.F. RITT, qui était pourtant un analyste de formation, pour que soit mis en lumière le caractère essentiellement algébrique de la théorie, et qu'en soient tracées les lignes directrices.

Viennent alors les articles de E.R. KOLCHIN, et principalement "Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of the ordinary differential equations" (1948), qui posent les bases d'une théorie de Galois différentielle.

Depuis lors, et dans la voie tracée par RITT et KOLCHIN, se sont poursuivis des travaux visant à améliorer et généraliser cette théorie, avec l'apport, de plus en plus important, de la géométrie algébrique.

Ainsi, à ce jour, les progrès de l'algèbre différentielle semblent liés à la mise en oeuvre d'une meilleure théorie des groupes algébriques.

[1881] . M.P. APPELL - *Sur les équations différentielles linéaires,*
(Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 10 (1881) pp. 391-424.

[1883] . E. PICARD - *Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires,*
(C.R. Acad. Sc. Paris 96 (1883) pp. 1131-1134).

[1887] . E. PICARD - *Sur les équations différentielles et les groupes algébriques de transformations,*
(Ann. Fac. Sc. Toulouse 1 (1887) pp. A1 - A15).

[1891] . E. VESSIOT - *Sur les équations différentielles linéaires,*
(C.R. Acad. Sc. Paris 112 (1891) pp. 778-780.

[1892] . E. VESSIOT - *Sur les intégrations des équations différentielles linéaires,*
(Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 9 (1892) pp. 192-280.

[1894] . E. BEKE - *Die irreducibilitätt der homogenen linearen differentialgleichungen,*

et
Die symmetrischen funktionen bei der linearen homogenen differentialgleichungen,
(Math. Annalen 45 (1894) pp. 278-294 et pp. 295-300).

. E. PICARD - *Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires,*
(C.R. Acad. Sc. Paris 119 (1894) pp. 584-589).

[1895] . E. PICARD - *Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles,*
(C.R. Acad. Sc. Paris 121 (1895) pp. 789-792).

[1897] . L. SCHLESINGER - *Handbuch der theorie der linear differentialgleichungen* (vol. II Teubner, Leipzig).

[1898] . J. DRACH - *Essai sur la théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes,*
(Ann. Ec. Norm. Sup. 15 (1898) pp. 245-384).

. F. MAROTTE - *Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes,*
(Ann. Fac. Sc. Toulouse 12 (1898) pp. H1-H92).

. E. PICARD - Traité d'Analyse vol. 3 chap. 17 (Paris)
(repris sous le titre : Analogies entre la théorie des équations différentielles linéaires et la théorie des équations algébriques, Paris 1936).

[1900] . G. FANO - *Über lineare homogene differentialgleichungen mit algebraischen relationen zwischen den fundamentollösungen,*
(Math. Annalen 53 (1900) pp. 493-590).

[1902] . A. LOEWY - *Über die irreducible factoren eines linearen homogenen differentialausdrückes,*
(Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig Math. Ph. Kl, 54 (1902) pp. 1-13)
et
Über reduzible lineare homogene differentialgleichungen,
(Math. Annalen 56 (1902) pp. 549-584).

[1904] . E. VESSIOT - *Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations,* (Ann. Ec. Norm. Sup. 21 (1904) pp. 9-85).

[1908] . A. LOEWY - *Die rationalitatsgruppe einer linearen homogemen differentialgleichungen*
(Math. Annalen 69 (1908) pp. 129-160).

[1910] . E. VESSIOT - *Méthodes d'intégration élémentaires,*
(Encyclopédie Sc. Math. pures et appl. tome II, vol. 3, fasc. 1 (1910) pp. 58-170 - en particulier, pp. 152-165).

[1930] . C.L. SIEGEL - *Über einige anwendungen diophantischer approximationen,*
(Abh. Preussischen Ak. Wissenschaften Ph. Math. 1 (1930) pp. 1-70).

[1931] . H. FREUDENTHAL - *Zur "Galoisschen" theorie der linearen diffential-gleichungen,*
(K. Akad. Van Wetensch. Amsterdam Sect. Sc. 34 (1931) pp. 1124-1126).

[1932] . J.F. RITT - *Differential equations from the algebraic standpoint,*
(Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. 14, New-York).

[1933] . R. BAER - *Gegenwärtig stand der Picard-Vessiotschen theorie,*
(J. Springer, Berlin).

. H.W. RAUDENBUSH Jr. - *Differential fields and ideals of differential forms,*
(Ann. of Math. 34 (1933) pp. 509-517).

[1934] . H.W. RAUDENBUSH Jr - *Ideal theory and algebraic differential equations,*
(Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934) pp. 361-368).

[1938] . E. CARTAN - *La théorie de Galois et ses généralisations,*
(Comm. Math. Helv. 11 (1938) pp. 9-25 ; repris dans : Oeuvres complètes, III 1, pp. 123-139, Gauthier-Villars).

. J.F. RITT - *Algebraic aspects of the theory of differential equations,*
(Amer. Math. Soc. Semicentennial Publ. 2 (1938) pp. 35-55).

[1939] . W.C. STODT - *Irreducible systems of algebraic differential equations,*
(Trans. Amer. Math. Soc. 45 (1939) pp. 276-297).

[1940] . J.F. RITT - *On a type of algebraic differential manifold,*
(Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940) pp. 542-552).

[1942] . E.R. KOLCHIN - *Extensions of differential fields I*
(Ann. of Math. 43 (1942) pp. 724-729).

. H. LEVI - *On the structure of differential polynomials and their theory of ideals,*
(Trans. Amer. Math. Soc. 51 1942) pp. 532-568).

[1945] . J.F. RITT - *Analytic theory of singular solutions of partial differentials equations of the first order,*
(Ann. of Math. 46 (1945) pp. 120-143).

[1946] . A. OSTROWSKI - *Sur les relations algébriques entre les intégrales indéfinies,*
(Acta Math. 78 (1946) pp. 315-318).

. J.F. RITT - *On the singular solutions of certain differential equations of second order,*
(Proc. Nat. Ac. of Sc. USA 32 (1946) pp. 225-258).

[1947] . E.R. KOLCHIN - *Extensions of differential fields III,*
(Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) pp. 397-401).

[1948] . E.R. KOLCHIN - *Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of linear ordinary differential equations,*
(Ann. of Math. 49 (1948) pp. 1-42).

et

Existence theorems connected with the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations,
(Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) pp. 927-932).

. J.F. RITT - *Integration in finite terms,*
(Columbia Univ. Press, New-York).

[1950] . J.F. RITT - *Differential algebra,*
(Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 33, New-York ; réédité par Dover, 1966).

[1952] . A. JAEGER - *Eine algebraische theorie vertauschaver differentiationen für körper belieger charakteristik,*
(J. Reine Angew. Math. 190 (1952) pp. 1-21).

. A. SEIDENSERG - *Some basic theorems in differential algebra (characteristic* p, *arbitrary),*
(Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952) pp. 174-190).

. E.R. KOLCHIN - *Picard-Vessiot theory of partial differential fields*, (Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952) pp. 596-603).

[1953] . E.R. KOLCHIN - *Galois theory of differential fields*, (Amer. J. Math. 75 (1953) pp. 753-824).

. K. OKUGAWA - *On differential algebra of arbitrary characteristic*, (Mem. Coll. Sc. Kyoto Ser. A 28 (1953) pp. 57-107).

[1954] . H. MATSUMURA - *Automorphism groups of differential fields and group varieties*, (Mem. Coll. Sc. Kyoto Ser. A 28 (1954) pp. 283-292).

[1955] . M.P. EPSTEIN - *An existence theorem in the algebraic study of homogeneous linear ordinary differential equations*, (Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955) pp. 33-41).

et

On the theory of Picard-Vessiot extensions, (Ann. of Math. 62 (1955) pp. 528-547).

. E.R. KOLCHIN - *On the Galois theory of differential fields*, (Amer. J. Math. 77 (1955) pp. 868-894).

[1956] . A. SEIDENBERG - *Contribution to the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear differential equations*, (Amer. J. Math. 78 (1956) pp. 808-817).

[1957] . I. KAPLANSKY - *Introduction to differential algebra*, (Hermann, Paris).

. L. GOLDMAN - *Specializations and Picard-Vessiot theory*, (Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957) pp. 327-356).

[1958] . E.R. KOLCHIN-S. LANG - *Algebraic groups and the Galois theory of differential fields*, (Amer. J. Math. 80 (1958) pp. 103-110).

. A. SEIDENGERG - *Abstract differential algebra and the analytic case*, (Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958) pp. 159-164).

et

Some basic theorems in partial differential algebra, (Mem. Coll. Sc. Kyoto. Ser. 1 31 (1958) pp. 1-8).

[1960] . E.R. KOLCHIN - *Abelian extensions of differential fields*, (Amer. J. Math. 82 (1960) pp. 779-790).

. E.C. POSNER - *Differential simple rings,*
(Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960) pp. 337-343).

[1961] . Y.NAKAI - *On the theory of differentials in commutative rings,*
(J. Math. Soc. Japan 13 (1961) pp; 63-84).

[1962] . A. BIALYNICKI-BIRULA - *On Galois theory of fields with operators,*
(Amer. J. Math. 84 (1962) pp. 89-109).

[1963] . A. BIALYNICKI-BIRULA - *On the inverse problem of Galois theory in differential fields,*
(Bull. Amer. Math. Soc. 16 (1963) pp. 960-964).

[1965] . J. MANIN - *Moduli fuschiani,*
(Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa III, 19 (1965) pp.113-126).

[1966] . B. MALGRANGE - *Cohomologie de Spencer (d'après QUILLEN),*
(Secr. Math. d'Orsay).

. E. KREINDLER - *Le module des combinaisons différentielles linéaires à coefficients variables,* (Rev. roum. Maths pures et appl. XI n° 7 (1966) pp. 847-864).

. A. SEIDENBERG - *Derivations and integral closure,*
(Pac. J. Math. 16 (1966) pp. 167-173).

[1967] . B. MALGRANGE - *Théorie analytique des équations différentielles,*
(Sem. Bourbaki 66/67 n° 329).

. H. OSBORN - *Module of differentials I,*
(Math. Annalen 170 (1967) pp. 221-244).

. A. SEIDENBERG - *Differentials ideals in ring of finitely generated type,*
(Amer. J. Math. 89 (1967) pp. 22-42).

[1968] . E.R. KOLCHIN - *Algebraic groups and algebraic dependance,*
(Amer. J. Math. 90 (1968) pp. 1151-1164).

[1969] . P. BLUM - *Complete models of differential fields,*
(Trans. Amer. Math. Soc. 137 (1969) pp. 309-325).

. R.G. HEYNEMAN - M.E. SWEEDLER - *Affine Hopf algebras I,*
(J. of Alg. 13 (1969) pp. 192-241).

. J. JOHNSON - *Kähler differentials and differential algebra,*
(Ann. of Math. 89 (1969) pp. 92-98).

et

Differential dimension polynomials and a fundamental theorem of differential modules,

(Amer. J. Math. 91 (1969) pp. 239-248.

. J. KOVACIC - *The inverse problem in the Galois theory of differential fields,*

(Ann. of Math. 89 (1969) pp. 583-608).

. W.V. VASCONCELOS - *Dérivations of commutative noetherian rings,*

(Math. Zeits. 112 (1969) pp. 229-233).

[1970] . Y. NAKAI - *High order derivations I,*

(Osaka J. Math. 7 (1970) pp. 1-27).

[1971] . J. AX - *On Schanuel's conjectures,*

(Ann. of Math. 93 (1971) pp. 252-268).

. J. KOVACIC - *On the inverse problem in the Galois fields,*

(Ann. of Math. 93 (1971) pp. 269-284).

. Y. LEQUAIN - *Differential simplicity and complete integral closure,*

(Pac. J. Math. 36 (1971) pp. 741-751).

[1972] . P.J. CASSIDY - *Differential algebraic groups,*

(Amer. J. Math. 94 (1972) pp. 891-954).

. E.R. KOLCHIN - T. SOUNDARARAJAN - *Differential polynomials and strongly normal extensions,*

(Amer. J. Math. 94 (1972) pp. 467-472).

. G.E. SACKS - *The differential closure of a differential field,*

(Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972) pp. 629-634).

[1973] . W.C. BROWN - *The algebra of differentials of infinite rank,*

(Can. J. Math. 25 (1973) pp. 141-155).

. E.R. KOLCHIN - *Differential algebra and algebraic groups,*

(Academic Press, New-York).

. J.C. KOVACIC - *Pro-algebraic groups and the Galois theory of differential fields,*

(Amer. J. Math. 95 (1973) pp. 507-535).

[1975] . M. ROSENLICHT - *Differential extension fields of exponential type,*

(Pac. J. Math. 57 (1975) pp. 289-300).

. W. YU SIT - *Differential algebraic subgroups of* SL(2) *and strong normality in simple extensions,*

(Amer. J. Math. 97 (1975) pp. 627-698).

INDEX DES NOTATIONS

INDEX DES DEFINITIONS

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

W