N° d'ordre : 703

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

(Spécialité ELECTRONIQUE)

par

John Bosco STEPHEN
Master of Science
MADRAS UNIVERSITY
(INDE)

ETUDE THEORIQUE DE FAISABILITE DE LA DETECTION DE CHAMBRES MAGMATIQUES ENTERREES DANS UN MILIEU DISSIPATIF STRATIFIE UTILISANT UN MODELE NUMERIQUE BIDIMENSIONNEL

Soutenue le 29 juin 1978, devant la COMMISSION D'EXAMEN

Membre du Jury :	MM.	R. GABILLARD	Président
		M. CAUTERMAN	Rapporteur
		P. DEGAUQUE	Examinateur
		G. SALMER	Examinateur

A mes Parents,

A tous mes Frères et Soeurs.

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Radiopropagation et Electronique de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE, dirigé par Monsieur le Professeur GABILLARD. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma profonde reconnaissance pour ses conseils nombreux et judicieux ainsi que pour son intérêt personnel qu'il m'a accordés pour mener à bien ce travail.

Je remercie également Monsieur CAUTERMAN qui m'a guidé tout au long de ce travail par ses avis pertinents puisés de son expérience du travail numérique.

Cette thèse a été réalisée avec la collaboration de l'Institut National d'Astronomie et de Géophysique. Je désire remercier cet organisme pour l'aide qu'il m'a apportée.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur le Professeur SALMER, pour le grand honneur qu'il m'a fait en acceptant de participer à mon Jury. Monsieur DEGAUQUE a également bien voulu examiner ce travail et participer à mon Jury de thèse. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à Monsieur Jean-Paul DUBUS avec qui j'ai eu plusieurs discussions scientifiques surtout à propos des interprétations des résultats numériques.

Je remercie également Messieurs LOUAGE, BAUDET et DEMOULIN pour l'aide amicale qu'ils m'ont généreusement apportée tout au long de ce travail.

Messieurs DEON et Jean-François DHALLUIN ont eu la patience et la bonté de corriger le texte de cette thèse. Je leur en suis très reconnaissant et les en remercie.

Qu'il me soit ici permis de remercier très vivement mes amis qui m'ont accueilli dans leur foyer et qui m'ont débarrassé de tout souci matériel pendant la préparation de cette thèse.

Je remercie enfin tous les membres de l'équipe de Monsieur GABILLARD, du personnel administratif, Technique et de service qui ont participé à ce travail. En particulier mes remerciements vont à Madame PAIN qui a assuré une belle dactylographie de ce mémoire et aux Messieurs PLUQUET et DEHORTER pour son tirage soigneux. Qu'ils en soient profondément remerciés.

Enfin, je suis très reconnaissant à tous ceux qui m'ont aidé par leur sympathie et amitié tout au long de mon séjour en France. C'est surtout ces "amitiés" qui me restent très chères et j'en garderai un très bon souvenir pour toujours.

-o-o-o-o-

SOMMAIRE

S O M M A I R E

ANNEXES

INTRODUCTION

I N T R O D U C T I O N

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Le renchérissement des combustibles fossiles donne un regain d'intérêt aux sources géothermiques comme réserves d'énergie. A notre époque, marquée par la volonté d'économiser les énergies primaires, ces valeurs paraissent séduisantes. Mais il faut tout d'abord recenser les diverses sources géothermiques et pour cela il est nécessaire avant tout de connaître leur présence, c'est-à-dire de les détecter. C'est pourquoi il est apparu intéressant de tenter d'utiliser les méthodes de prospection électromagnétique de surface |1| |2| parmi l'ensemble des procédés géophysiques pour recenser ces réserves considérables d'énergie.

Les méthodes d'interprétation des mesures effectués sur le terrain ont été développées à partir d'études théoriques ou expérimentales sur cuve rhéographique. Cependant, dans ces dernières années, les méthodes d'interprétation ont été sensiblement améliorées par l'exploitations des modèles numériques |3||4||5| où les équations de MAXWELL sont résolues numériquement sur ordinateur.

De fait une étude numérique précédente |6| a déjà montré que l'écart relatif entre le champ électromagnétique créé par une "*ligne source*" électrique en présence et en absence d'une poche magmatique, située dans un demi-milieu homogène pouvait dépasser 50 %. Dans cette étude, la poche magmatique a été assimilée à un cylindre infini, de section quelconque dont la génératrice est parallèle à la ligne source électrique d'excitation.

Par ailleurs, les effets de terrains sédimentaires de surface, généralement plus conducteurs que le substratum renfermant la poche magmatique à détecter, ont été négligés. Ces stratifications conductrices provoquent un affaiblissement supplémentaire du signal reçu par le récepteur à la surface du sol.

Il en résulte qu'un modèle plus proche de la réalité consiste à tenir compte à la fois d'une hétérogénéité de dimension finie et de l'effet de masque provoqué par les couches conductrices superficielles. Pour cela il faudrait résoudre le problème de rayonnement d'une antenne en présence d'un modèle géologique à trois dimensions. Mais cela nécessitait dans l'état actuel, un temps de calcul et une capacité de mémoire très importants.

Le travail que nous avons réalisé dans cette thèse a consisté essentiellement à étudier un modèle qui tient compte de l'effet des couches conductrices superficielles et limité à deux dimensions, avec pour objectif d'optimiser les méthodes informatiques nécessaires pour aborder l'étude d'un modèle à trois dimensions, ne nécessitant qu'un ordinateur moyen et un temps de calcul raisonnable. Ceci nous permet de mener notre étude de détectabilité sur un modèle nécessitant à la fois peu de temps de calcul numérique et peu d'encombrement mémoire à l'égard de la complexité d'un modèle tri-dimensionnel.

Le premier chapitre est consacré à un rappel de la théorie de la propagation des ondes électromagnétiques en milieu stratifié contenant des hétérogénéités quelconques utilisant un modèle bi-dimensionnel.

Dans le deuxième chapitre nous explicitons le traitement numérique du modèle utilisé. Nous mettons en évidence les techniques adoptées pour optimiser les algorithmes utilisés dans le calcul du champ électromagnétique à la surface du sol.

Dans le troisième chapitre nous présentons les résultats les plus marquants de notre étude de faisabilité de la détection de poches magmatiques situées dans un milieu stratifié. Nous y distinguerons les effets de la couche conductrice superficielle des effets cumulés de celle-ci et de la poche magmatique. Ceci nous permet de repérer les meilleures conditions de détectabilité à partir des grandeurs mesurées à la surface du sol. En particulier nous mettons en évidence *certains paramètres qui peuvent servir "d'indice de présence" de la poche magmatique.*

Enfin, dans la conclusion nous donnons les limitations de la portée des résultats obtenus avec notre modèle bidimensionnel. Ces limitations nous conduisent à proposer la nécessité de passer à un modèle tridimensionnel. *Mais* les méthodes numériques que nous avons optimisées dans notre thèse en vue de réduire le coût d'exploitation de notre modèle et la méthode d'interprétation que nous avons dégagée sont suffisamment générales pour être mises à profit lors de l'élaboration et de l'exploitation du modèle à trois dimensions.

-o-o-o-o-o-

P R E A M B U L E

-:-:-:-:-:-:-

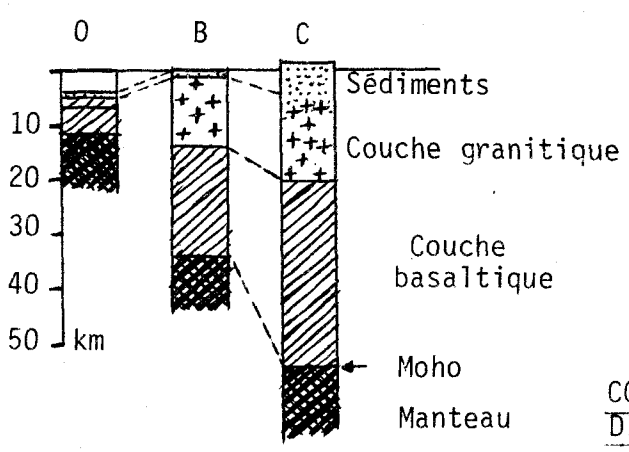
L'objet du travail qui nous a été confié est de mettre en évidence la possibilité de détection d'une poche magmatique située dans le substratum d'un terrain dissipatif stratifié par un procédé électromagnétique de surface.

Nous avons cru nécessaire de rappeler brièvement dans ce préambule ce qu'est une CHAMBRE MAGMATIQUE. Nous décrivons d'abord les caractéristiques géophysiques de celle-ci, ce qui nous permet de poser ensuite le problème de sa détectabilité.

QU'EST-CE QU'UNE CHAMBRE MAGMATIQUE ?

Les phénomènes séismiques révèlent que l'écorce ou croûte terrestre est d'épaisseur et de constitution très différentes sous les océans et sous les continents. Constituée par des roches, l'écorce qui semble épaisse de 5 à 70 kilomètres, pénètre jusqu'à la surface de discontinuité de Mohorovicic : (la discontinuité entre le manteau et l'écorce - appelée le MOHO).|7||8| Plus épaisse sous les montagnes, elle est beaucoup plus mince sous le fond des océans. Les principaux constituants de l'écorce terrestre sont en fait des silicates et, à eux seuls, ces corps forment 99 % de la croûte.

Nous représentons en Figure 1, une coupe schématique des différents types d'écorce.|9|



O - Ocean

B - Bouclier

C - Chaîne

COUPE SCHEMATIQUE DES DIFFERENTS TYPES D'ECORCE

Figure - 1 -

Que l'on soit sous un océan ou dans un continent, on remarque que la couche sédimentaire est couramment traversée par des intrusions issues des couches plus profondes (montées de granite, cheminées volcaniques).

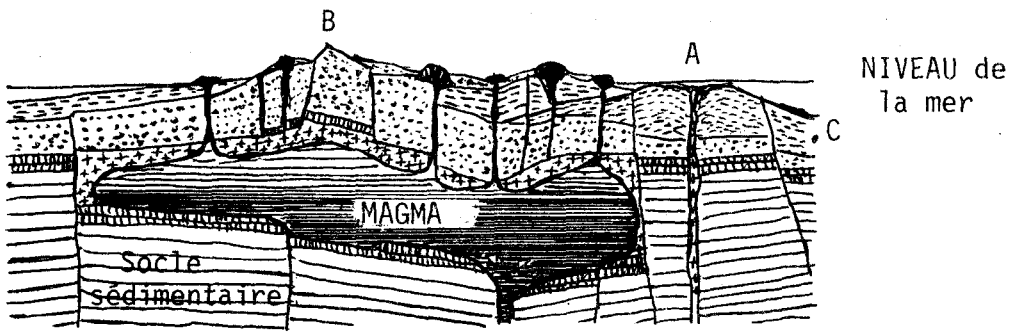
De la théorie du volcanisme, retenons que bien des roches éruptives passent par un état fondu ou magmatique. Le "MAGMA" |10|, est un bain de silicates naturels; il peut être considéré comme étant un mélange de gaz, de liquide et de cristaux tôt formés, plus ou moins visqueux et susceptible d'être déplacé. Le magma peut s'arrêter et cristalliser en une zone plus ou moins profonde de l'écorce terrestre. A l'inverse, les magmas évolués témoignent de la présence de *chambres magmatiques* à l'intérieur desquelles se fait la différenciation : (la "différenciation" est un processus par lequel un magma se fragmente en portions chimiquement et minéralogiquement différentes).

A la surface du globe deux grands types de roches éruptives affleurent qui correspondent à deux types de magmas fondamentalement différents, dont les caractéristiques sont résumés dans le tableau ci-dessous |10| (tableau 1)

	MAGMA BASALTIQUE	MAGMA GRANITIQUE
Chimisme	basique, traces d'eau dissoute	acide, quelques p.cent d'eau : saturation fréquente.
Lieux d'origine	50 à 200 Km	<20 Km, en liaison génétique avec le métamorphisme
Températures	1200 à 1500°C	550 à 800°C, rarement plus
Changement de température du solidus au cours de l'ascension	abaissement	augmentation
surface atteinte ?	toujours	rarement
Expressions	*basalte* très fréquent gabbro très rare	rhyolite très rare *granite* très fréquent

Tableau - 1 -

Pour concrétiser tout ce que nous venons de dire, nous présentons en Figure 2 le profil du horst volcanotectonique d'Ischia[7] (l'île volcanique d'Italie), bien qu'il existe d'autres exemples de chambres magmatiques situées dans des milieux plus complexes et ayant elles-mêmes des formes plus torturées. La différenciation du magma du foyer dans le horst est indiquée par l'épaisseur des hachures. Les croix indiquent les parties du magma déjà consolidées dans le réservoir.



A - Secca d'Ischia
B - Monte Epomeo, le bloc le plus élevé du horst
C - Volcan trachytique de la Secca d'Ischia

Profil du horst volcano-tectonique d'Ischia

Figure - 2 -

Si l'on entend par réservoirs magmatiques non seulement les poches relativement petites, plus ou moins indépendantes, qui alimentent ou ont alimenté des volcans, mais aussi les grandes intrusions intracrustales dont la liaison directe avec la surface de la terre n'est que soupçonnée sans jamais avoir été démontrée toutefois, on peut affirmer qu'il existe des foyers de magma dont le volume peut atteindre plusieurs centaines de milliers de kilomètres cubes[7].

Dans la croûte supérieure, cependant, les foyers apophyses qui alimentent à coup sûr des volcans ont des dimensions beaucoup plus modestes. De toute manière les évaluations de volume des poches magmatiques sont fort approximatives.

EN RESUME : un magma se caractérise par :

sa composition essentiellement silicatée

sa température élevée

sa mobilité qui lui permet de couler.

Compte tenu de tout ce que nous venons de dire, on peut caractériser une poche magmatique comme un volume de matière hétérogène d'une conductivité élevée par rapport au milieu encaissant quasi-isolant et qui est localisé à une profondeur variable entre 5 et 70 Km.

I - PREMIER CHAPITRE

RAPPEL THEORIQUE DE LA PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES EN MILIEU STRATIFIE CONTENANT DES HETEROGENEITES QUELCONQUES - APPLICATION AU CAS D'UN MODELE BI-DIMENSIONNEL

I. 1 - POSITION DU PROBLEME

Dans les études de détectabilité des poches magmatiques par un procédé électromagnétique de surface, qui ont été faites jusqu'à présent, le sol était considéré comme un demi-milieu homogène tout en assimilant la poche magmatique à un cylindre infini. Des résultats très encourageants ont ainsi été obtenus (cf. annexe de |6|) qui montrent que l'écart relatif entre le champ électromagnétique créé par une ligne source électrique en présence et en absence d'une telle poche magmatique située dans un demi-milieu homogène pouvait dépasser 50 %.

Ces résultats, certes fort satisfaisants, nous ont amenés à formuler de nouvelles hypothèses de travail qui doivent nous conduire à une modélisation plus proche de la réalité géologique. En effet, ces résultats ont été obtenus dans le cas d'une hypothèse simplificatrice qui consiste à considérer une ligne d'excitation infinie et parallèle à une anomalie qui a elle-même une dimension latérale infinie. Ceci peut majorer très sensiblement l'importance de la contribution de l'hétérogénéité au champ électromagnétique total mesuré en surface du sol.

Or, dans la réalité l'hétérogénéité a des dimensions finies, ce qui peut réduire l'effet dû à sa présence. D'autre part, les terrains sédimentaires de surface généralement plus conducteurs que le substratum renfermant la poche magmatique à détecter, provoquent un affaiblissement supplémentaire du signal reçu par le récepteur à la surface du sol. Cet effet est d'autant plus important que le rapport de conductivité entre ces terrains et le substratum est élevé. En particulier, si ce rapport devient important, par exemple supérieur à 150, l'hypothèse du demi-milieu homogène n'est plus suffisante pour une interprétation correcte des mesures et peut même donner des informations erronées sur la répartition réelle du champ électromagnétique |6|

Dans cette thèse nous étudions l'influence des terrains superficiels pouvant atténuer la contribution de la poche magmatique, celle-ci étant toujours assimilée à un cylindre infini dont la génératrice est parallèle à la "ligne source" électrique d'excitation. Il est donc clair que nous allons utiliser un modèle bi-dimensionnel.

I. 2 - DESCRIPTION DU MODELE UTILISE

Le modèle théorique que nous allons utiliser est représenté en Figure 3. On considère un milieu d'épaisseur infinie - milieu 2 ou substratum - et de faible conductivité σ_2, contenant à une profondeur h par rapport à la surface du sol une anomalie cylindrique infinie de section S', ayant une conductivité σ_s, élevée par rapport à σ_2.

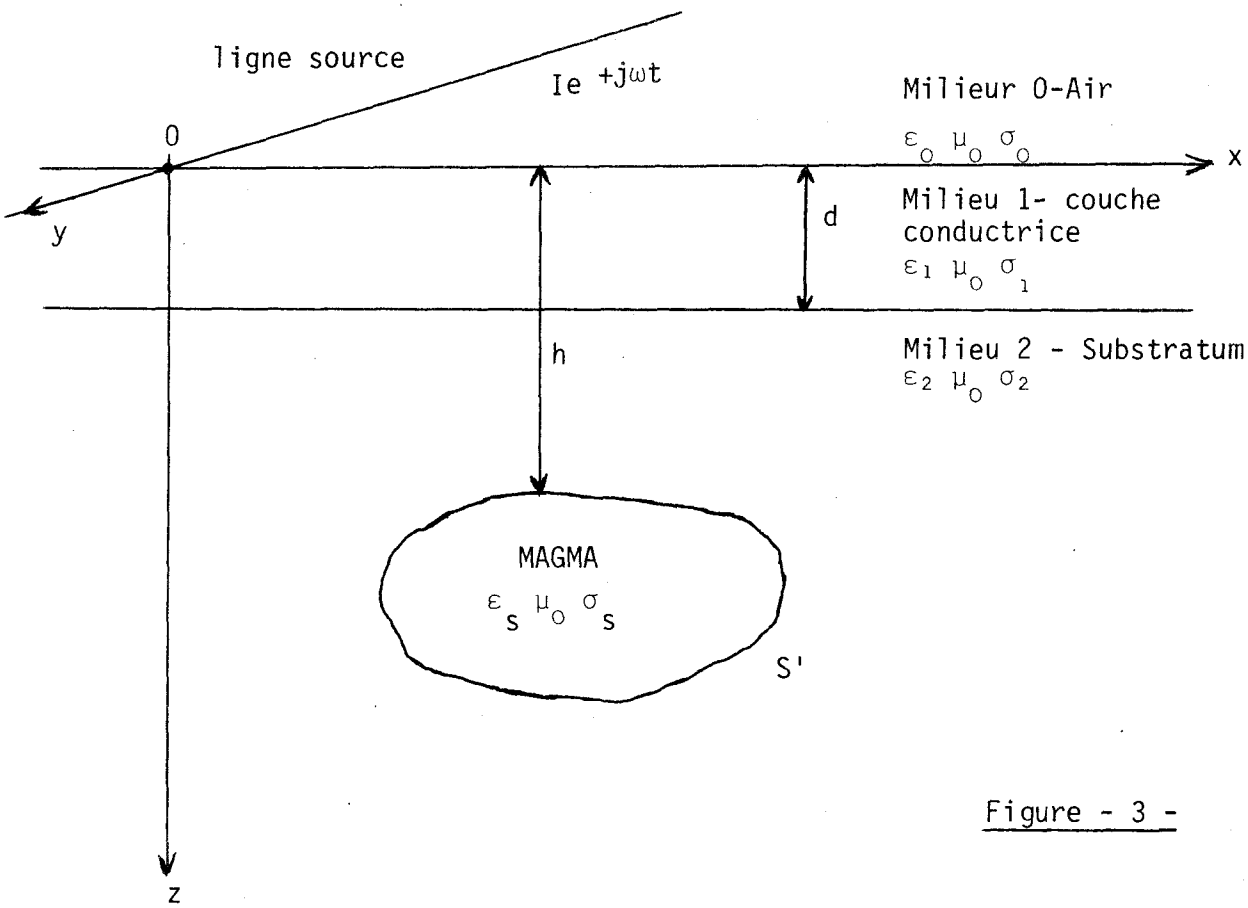


Figure - 3 -

Les couches superficielles du terrain sont assimilées à une seule couche conductrice - milieu 1 - dont la conductivité est σ_1 et l'épaisseur est d. Les terrains superficiels et le substratum sont surmontés de l'atmosphère - milieu 0 ou Air. On suppose que les trois milieux ainsi que l'anomalie

possèdent la même perméabilité magnétique μ_o égale à celle de l'air. Chacune de ces trois couches géologiques est isotrope, homogène et linéaire.

Le champ électromagnétique est créé par une ligne source électrique parcourue par un courant sinusoïdal, $Ie^{+j\omega t}$, placée à la surface du sol le long de l'axe $\vec{O}y$. L'hétérogénéité s'étend aussi à l'infini suivant cet axe.

Puisque la source et l'anomalie sont toutes les deux allignées selon $\vec{O}y$, le champ électrique $\vec{E}$, créé par la source ou diffracté par l'anomalie, ne possède qu'une seule composante E_y. Il est donc clair que dans le modèle utilisé, les composantes du champ électromagnétique sont indépendantes de la coordonnée y, et du coup le système est rendu bi-dimensionnel.

L'émetteur et le récepteur sont placés à la surface du sol. Pour chacune des stations de réception, on calcule des composantes horizontales et verticales du champ magnétique H_x et H_z et le champ électrique E_y.

I. 3 - FORMULATION DU PROBLEME

Nous supposons que les variations dans le temps de tous les vecteurs électromagnétiques se font sinusoïdalement et à la même fréquence que le courant I et sont représentées par la fonction du temps $e^{+j\omega t}$. Les équations de Maxwell (utilisant le système d'unités MKS rationalisé) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$-\vec{\nabla} \times \vec{E} = \hat{z}(\omega) \cdot \vec{H} \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \hat{y}(\omega) \cdot \vec{E} \qquad (2)$$

avec

$$\hat{z}(\omega) = j\omega\mu \qquad (3)$$

$$\hat{y}(\omega) = \sigma + j\omega\varepsilon \qquad (4)$$

où ε, μ, σ sont respectivement la constante diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductivité du milieu.

Le paramètre $\hat{z}$ ayant les dimensions de l'impédance linéique sera appelé l'impédivité du milieu ; tandis que $\hat{y}$ ayant les dimensions de l'admittance linéique sera l'admittivité du milieu [11]. Evidemment $\hat{z}(\omega) \cdot \vec{H}$ et $\hat{y}(\omega) \cdot \vec{E}$ de (1) et (2) sont respectivement des courants magnétiques et électriques induits dans le milieu par les champs électromagnétiques.

Il est clair que $\hat{z}(\omega)$ et $\hat{y}(\omega)$ définissent complètement les caractéristiques électromagnétiques du milieu. Un milieu est dit linéaire si $\hat{z}$ et $\hat{y}$ sont indépendants de $|\vec{E}|$ et $|\vec{H}|$; il est homogène si $\hat{z}$ et $\hat{y}$ sont indépendants de la position ; et il sera isotrope si $\hat{z}$ et $\hat{y}$ sont des scalaires.

Incorporons finalement dans les équations de Maxwell les sources qui produisent les champs électromagnétiques. Nous sommes ramenés à ajouter aux courants induits, les courants d'excitation magnétiques et électriques $\vec{M}_i$ et $\vec{J}_i$.

Les équations (1) et (2) pourront donc s'écrire :

$$-\vec{\nabla} \times \vec{E} = \hat{z}(\omega)\ \vec{H} + \vec{M}_i \tag{5}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \hat{y}(\omega)\ \vec{E} + \vec{J}_i \tag{6}$$

Les relations (5) et (6) sont donc les deux équations qui nous permettent de déterminer les champs complexes $\vec{E}$ et $\vec{H}$ en un point quelconque de l'espace.

Considérons le cas où les régions sont quasi-homogènes, c'est-à-dire ne contenant que quelques anomalies de résistivité localisées. HARRINGTON |11| a démontré qu'il était possible d'obtenir la solution générale des équations de Maxwell relatives à la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu quasi-homogène sous forme d'équations intégrales. Il a montré en particulier qu'on pouvait remplacer les hétérogénéités considérées par une distribution équivalente de courant.

En effet, écrivons les équations (5) et (6) sous la forme suivante :

$$-\vec{\nabla} \times \vec{E} = \hat{z}_{mil}\ \vec{H} + \vec{M} \tag{7}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \hat{y}_{mil}\ \vec{E} + \vec{J} \tag{8}$$

où les courants "effectifs" seront :

$$\vec{M} = (\hat{z} - \hat{z}_{mil})\ \vec{H} + \vec{M}_i \tag{9}$$

$$\vec{J} = (\hat{y} - \hat{y}_{mil})\ \vec{E} + \vec{J}_i \tag{10}$$

$\hat{z}_{mil}$ et $\hat{y}_{mil}$ sont les constantes du milieu considéré. Les courants "effectifs" sont donc composés de deux parties :

* les courants d'excitation $\vec{M}_i$ et $\vec{J}_i$

** les courants de diffraction magnétiques et électriques $\vec{M}_d$ et $\vec{J}_d$ donnés par les relations suivantes :

$$\vec{M}_d = (\hat{z} - \hat{z}_{mil})\ \vec{H} \tag{11}$$

$$\vec{J}_d = (\hat{y} - \hat{y}_{mil})\ \vec{E} \tag{12}$$

Il est clair que $\vec{M}_d$ et $\vec{J}_d$ n'existent qu'aux endroits où $\hat{z}$ et $\hat{y}$ sont différents de $\hat{z}_{mil}$ et $\hat{y}_{mil}$, c'est-à-dire, qu'à l'intérieur des hétérogénéités.

Nous sommes donc ramenés à *remplacer les hétérogénéités* par des courants de diffractions et ensuite à *traiter les courants effectifs* $\vec{M}$ et $\vec{J}$ comme des courants d'excitation *dans un milieu homogène.*

Les courants de diffraction $\vec{M}_d$ et $\vec{J}_d$, donnés par les équations (11) et (12), sont eux-mêmes des fonctions des champs $\vec{H}$ et $\vec{E}$.

Il en résulte qu'en tout point de l'espace le champ électromagnétique est fonction de ce même champ à l'intérieur de l'anomalie. Cette formulation du problème restant vrai quel que soit le point de l'espace où l'on se trouve, nous montrerons que le champ électromagnétique inconnu dans l'anomalie est solution d'un système d'équations intégrales vectorielles.

Le système d'équations (7) et (8) est très général, d'autant plus qu'il résulte directement des équations de Maxwell. Etant donné que les équations de Maxwell sont ponctuelles, ce système (7) et (8) est utilisable en n'importe quel modèle théorique, contenant n'importe quel type de source et d'anomalie.

I. 4 - APPLICATION DE LA FORMULATION A NOTRE MODELE

Le procédé qui consiste à remplacer comme nous venons de le voir, une hétérogénéité par une distribution d'éléments de courants de même volume est bien connu et a déjà fait l'objet de nombreux travaux soit dans le cas d'une hétérogénéité noyée dans un demi-milieu homogène (par exemple HOHMANN[3], CAUTERMAN[4]), soit dans le cas où l'on tient compte de l'effet d'une couche conductrice superficielle (DEY et MORRISON[5]).

Néanmoins, nous rappelons brièvement la méthode ci-dessous.

I. 4-1 - Expression du champ électrique reçu sous la forme de la solution d'une équation de FREDHOLM

Le système d'équations (7) et (8) peut s'écrire :

$$- \vec{\nabla} \times \vec{E} = \hat{z}_{mil} \vec{H} + \vec{M}_d + \vec{M}_i \qquad (13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \hat{y}_{mil} \vec{E} + \vec{J}_d + \vec{J}_i \qquad (14)$$

où $\vec{M}_d$ et $\vec{J}_d$ sont donnés par les relations (11) et (12) que nous rappelons :

$$\vec{M}_d = (\hat{z} - \hat{z}_{mil}) \vec{H} \qquad (11)$$

$$\vec{J}_d = (\hat{y} - \hat{y}_{mil}) \vec{E} \qquad (12)$$

Dans ces expressions $\hat{z}$ et $\hat{y}$ sont des fonctions de position et $\hat{z}_{mil}$ et $\hat{y}_{mil}$ sont des constantes des milieux.

Dans notre cas il y a trois milieux, soit $n = 0, 1, 2$ ayant la même perméabilité magnétique μ_o que celle de l'air.

Nous aurons donc :

$$\hat{z}_n(\omega) = j\omega \mu_o \qquad (15)$$

$$\hat{y}_n(\omega) = \sigma_n + j\omega\varepsilon_n \qquad (16)$$

L'anomalie se trouve dans le milieu -2- Substratum. Et enfin

$\hat{z}$ et $\hat{y}$ à l'intérieur de l'anomalie seront donnés par :

$$\hat{z}_s(\omega) = j\omega\,\mu_o \tag{17}$$

$$\hat{y}_s(\omega) = \sigma_s + j\omega\varepsilon_s \tag{18}$$

Remarquons que ceci nous donne la possibilité de garder $\hat{z}_s$ et $\hat{y}_s$ comme des fonctions de position à l'intérieur de l'anomalie. Les courants de diffraction seront donc :

$$\vec{M}_d = (\hat{z}_s - \hat{z}_2)\,\vec{H} \tag{19}$$

$$\vec{J}_d = (\hat{y}_s - \hat{y}_2)\,\vec{E} \tag{20}$$

Compte tenu de toutes nos hypothèses, nous obtenons en combinant (13) et (14), la relation suivante :

$$[\nabla^2 + k^2]\,E_y = j\omega\,\mu_o\,[J_i\,\delta_1 + J_d\,\delta_2] \tag{21}$$

où δ_1 et δ_2 sont des fonctions de distribution qui valent respectivement 1 pour tout point situé sur la ligne source d'excitation et à l'intérieur de l'anomalie et qui sont nulles ailleurs ;

et où : $$k^2 = -\,\hat{z}_{mil}\,\hat{y}_{mil} \tag{21 a}$$

soit encore :

$$k_n^2 = (\omega^2\,\varepsilon_n\mu_o - j\omega\mu\sigma_n) \tag{22}$$

avec n = 0, 1, 2. Evidemment pour l'air nous prenons $\sigma_o = 0$.

Posons

$$E_y = E_y^i + E_y^d \tag{23}$$

où E_y^i est le champ électrique incident, dû à la densité de courant J_i de la source d'excitation

et E_y^d est le champ électrique diffracté, dû à la densité de courant J_d de la source de diffraction (anomalie).

Ces champs E_y^i et E_y^d satisfont donc d'après (21), les deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$[\nabla^2 + k^2] \quad E_y^i = j\omega\mu_o J_i \, \delta_1 \tag{24}$$

$$[\nabla^2 + k^2] \quad E_y^d = j\omega\mu_o J_d \, \delta_2 \tag{25}$$

D'une manière générale, le champ électrique total à n'importe quel point de l'espace est donné par une combinaison linéaire des solutions de (24) et (25), satisfaisant aux "conditions aux limites", à la surface du sol et sur l'interface séparant les terrains superficiels du Substratum.

Le champ incident E_y^i de l'équation (24) est tout simplement celui dû à la ligne source placée au-dessus d'un terrain stratifié.

Examinons l'équation (25). Le courant de diffraction J_d, donné par l'équation (20) n'existe qu'à l'intérieur de l'anomalie. La solution s'obtient donc d'une manière classique comme suit :

$$E_y^d(x, z) = \iint_{\substack{\text{section } S' \\ \text{de l'anomalie}}} J_d(x', z') . G(x, z \; ; x', z') . dx' \, dz' \tag{26}$$

où G est la fonction de GREEN associée au champ électrique créé par une distribution de lignes sources de courant, placées dans le substratum.

Ainsi donc le champ électrique total en *n'importe quel point de l'espace* (même à l'intérieur de l'anomalie) est obtenu en utilisant (23) comme suit :

$$E_y(x, z) = E_y^i(x, z) + \iint_{S'} (\hat{y}_s - \hat{y}_2) \, E_y(x', z') . G(x, z \; ; x' z') . dx' \, dz' \tag{27}$$

L'équation (27) nous permet d'exprimer le champ total en un point quelconque de l'espace *en fonction du champ électrique total à l'intérieur de l'anomalie et du champ primaire.*

Cette relation est valable quelque soit le milieu considéré. En particulier au sein de l'hétérogénéité, la relation (27) se transforme en une équation intégrale de FREDHOLM de deuxième espèce avec le champ électrique total E_y comme inconnue.

Dans ces conditions, nous utiliserons d'abord la relation (27) pour connaître la fonction E_y à l'intérieur de l'anomalie ; ce qui nous permettra ensuite de réutiliser la relation (27) pour calculer le champ total en un point quelconque dans les milieux extérieurs à l'anomalie.

EN RESUME :

Le calcul des champs électromagnétiques en surface du sol se fait en deux étapes :

* la première sera de calculer le champ électrique total E_y à l'intérieur de l'anomalie

** ensuite, connaissant ce champ électrique total, $E_y(x', z')$ à l'intérieur de l'anomalie, on utilise (27) ou des formules analogues pour obtenir les grandeurs désirées en surface.

Les solutions ainsi obtenues sont tout à fait générales. Il n'y a encore eu aucune restriction(*) ni sur la fréquence du courant utilisé, ni sur les paramètres géométriques ou électromagnétiques de l'anomalie (bi-dimensionnelle). En fait, on peut même incorporer plusieurs anomalies bi-dimensionnelles sous la section S' de l'équation (27) d'autant plus que $\hat{y}_s$ est une fonction de position.

I. 4-2 - *Cas particulier du rayonnement de la ligne source électrique dans un milieu stratifié*

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'expliciter les expressions mathématiques des champs incidents E_y^i et les fonctions de GREEN G dont nous aurons besoin plus tard dans l'utilisation de l'équation (27).

La théorie de la propagation des ondes électromagnétiques dûes à une ligne source électrique est bien connue |12||13|. L'équation de HELMHOLTZ (24) pourra s'écrire de la manière suivante :

$$[\nabla^2 + k_n^2] \; E_{ny}^i = j\omega \, \mu_o \, J_i \, \delta_1 \qquad (28)$$

(*) Mis à part le fait que l'équation de Helmholtz (21) n'est valable que si $\nabla . E_y = 0$.

où δ_1 vaut 1 au niveau de la ligne source et zéro partout ailleurs ; "n" est l'indice de couche du milieu stratifié considéré et donc E^i_{ny} sera le champ électrique créé par la ligne source dans le milieu d'indice "n".

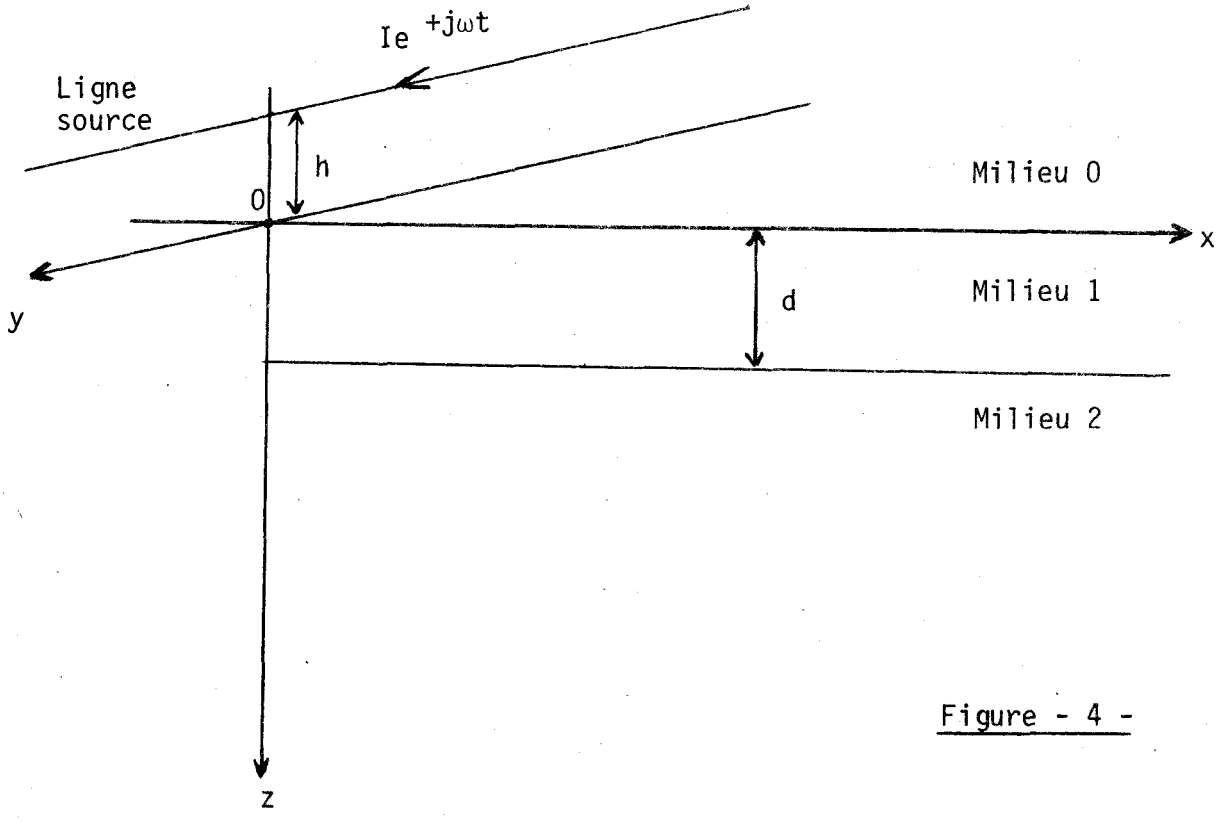


Figure - 4 -

Supposons que la ligne source soit placée à une hauteur h au-dessus de l'origine (Figure -4-). D'une manière générale la solution de l'équation (28) pour le champ électrique dans le milieu "n" s'écrit :

$$E^i_{ny} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[a_n \, e^{-u_n z} + b_n \, e^{+u_n z} \right] e^{-j\lambda x} \, d\lambda \qquad (29)$$

avec :

$$u_n^2 = \lambda^2 - k_n^2 \qquad (30)$$

$$\mathcal{R}e(u_n) > 0 \qquad (31)$$

Dans l'expression (29) a_n est l'amplitude de l'onde descendante et b_n celle de l'onde ascendante dans la couche "n".

Pour la région de l'espace située "au-dessus" de la ligne source où $-h > z > -\infty$ ceci se particularise comme suit :

$$E^i_{oy} = \left(\frac{-j\omega\mu_0 I}{2\pi}\right) \int_0^\infty \frac{1}{u_o} \left[e^{+u_o(z+h)} + r(\lambda)\, e^{+u_o(z-h)} \right] \cos\lambda x \, d\lambda \qquad (32)$$

où $r(\lambda)$ est le coefficient de réflexion.

Dans le milieu -2- le champ dû à la ligne source placée dans le milieu 0 s'écrit :

$$E^i_{2y} = \left(\frac{-j\omega\mu_0 I}{2\pi}\right) \int_0^\infty \frac{e^{-hu_o}}{u_o} \left[r_t(\lambda)\, e^{-u_2 z} \right] \cos\lambda x \, d\lambda \qquad (33)$$

où $r_t(\lambda)$ est le coefficient de transmission.

Les coefficients $r(\lambda)$ et $r_t(\lambda)$ font intervenir les effets de la stratification du terrain. Utilisons le formalisme matriciel de M. GABILLARD |14| (Annexe 1) pour calculer les expressions mathématiques de ces divers coefficients.

Considérons un espace fonctionnel à deux dimensions dans lequel des vecteurs $\vec{A}_n(z)$ sont définis sous forme matricielle par :

$$\vec{A}_n(z) = \begin{bmatrix} a_n\, e^{-u_n z} \\ b_n\, e^{+u_n z} \end{bmatrix} \qquad (34)$$

on aura :

$$\vec{A}_o(z_o) = M_{o2}\, \vec{A}_2(z_1) \qquad (35)$$

avec :

$$M_{o2} = (U_o^{-1}\, U_1\, D_1)\, (U_1^{-1}\, U_2) \qquad (36)$$

où les matrices U_n et D_n sont données par les relations suivantes (37) et (38) :

$$U_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -u_n & +u_n \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$D_n = \begin{bmatrix} e^{+u_n d_n} & 0 \\ 0 & e^{-u_n d_n} \end{bmatrix} \tag{38}$$

d_n étant l'épaisseur de la couche "n".

Nous avons donc pour $r(\lambda)$ et $r_t(\lambda)$ les expressions suivantes :

$$r(\lambda) = \frac{(u_o-u_1)(u_1+u_2)\ e^{+u_1 d} + (u_o+u_1)(u_1-u_2)\ e^{-u_1 d}}{(u_o+u_1)(u_1+u_2)\ e^{+u_1 d} + (u_o-u_1)(u_1-u_2)\ e^{-u_1 d}} \tag{39}$$

$$r_t(\lambda) = \frac{4\ u_o u_1\ e^{+u_2 d}}{(u_o+u_1)(u_1+u_2)\ e^{+u_1 d} + (u_o-u_1)(u_1-u_2)\ e^{-u_1 d}} \tag{40}$$

Les deux composantes du champ magnétique s'obtiennent facilement à l'aide des équations de Maxwell comme suit :

$$\vec{H}_n = -\frac{1}{j\omega\mu_o}\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_n \tag{41}$$

$$H_{nx} = +\frac{1}{j\omega\mu_o}\ \frac{\partial E_{ny}}{\partial z} \tag{42}$$

$$H_{nz} = -\frac{1}{j\omega\mu_o}\ \frac{\partial E_{ny}}{\partial x} \tag{43}$$

Dans le paragraphe précédent nous avons vu que le champ diffracté obéit à l'équation (25) qui est tout à fait identique à celle d'une ligne source. Récrivons cette équation d'onde :

$$\left[\nabla^2 + k_n^2 \right] E_{ny}^d = j\omega \mu_o J_d \delta_2 \qquad (44)$$

où δ_2 vaut 1 à tout point de l'intérieur de l'anomalie et zéro partout ailleurs.

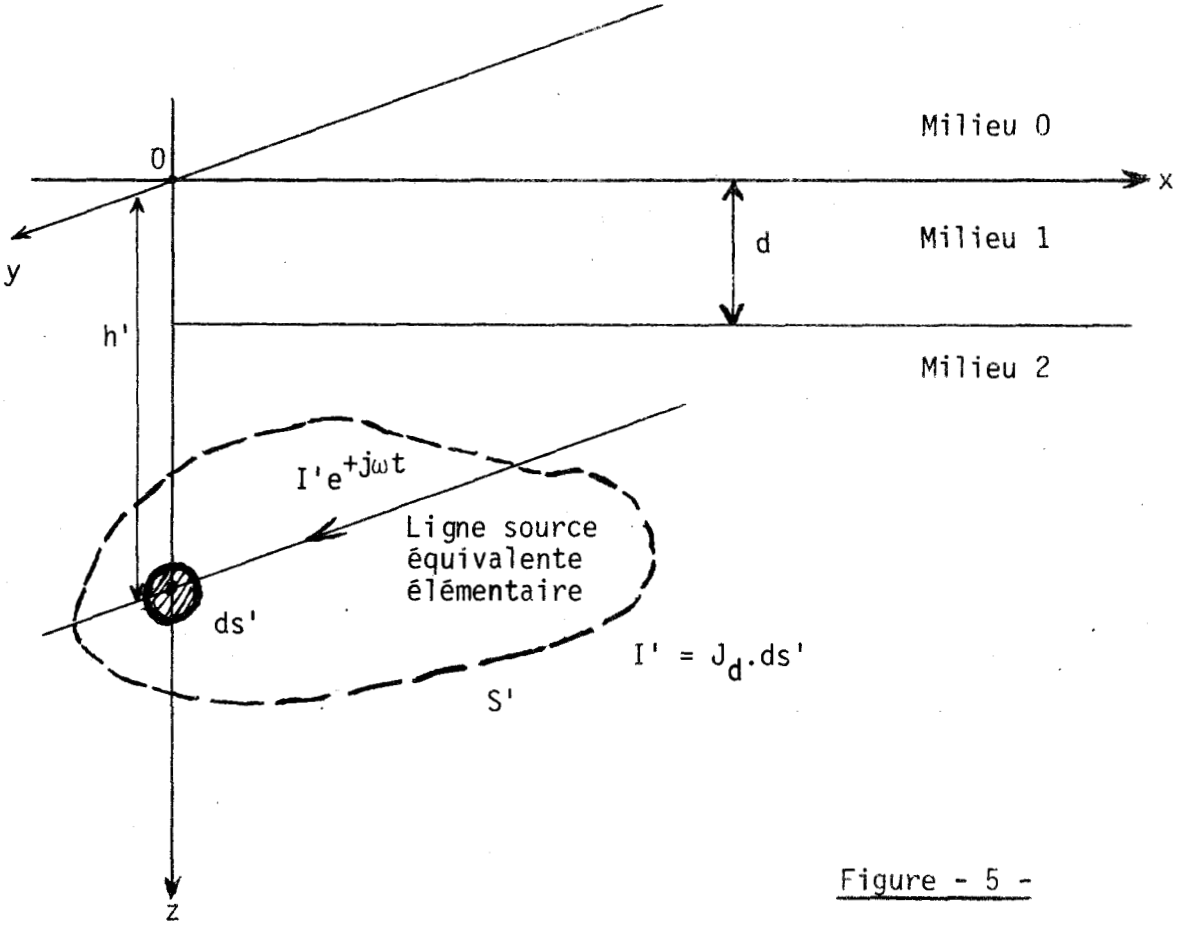


Figure - 5 -

On peut donc considérer que l'anomalie est équivalente à un grand nombre de lignes sources élémentaires situées dans le substratum (milieu 2) et parcourues chacune par un courant I' de densité $J_d(x, z)$.

La Figure 5 représente l'une de ces lignes sources.

Les expressions des champs électriques diffractés dans le milieu -2- et dans le milieu -0- s'écrivent :

$$E^d_{2y} = \left(\frac{-j\omega\mu_o\ I'}{2\pi}\right)\int_0^\infty \frac{1}{u_2}\left[\ e^{\pm u_2(z-h')} + r'(\lambda)\ e^{-u_2(z+h)}\right] \cos\lambda x\ d\lambda \qquad (45)$$

$$E^d_{oy} = \left(\frac{-j\omega\mu_o\ I'}{2\pi}\right)\int_0^\infty \frac{e^{-h'u_2}}{u_2}\ .\ r'_t(\lambda)\ e^{+u_o z}\ .\ \cos\lambda x\ d\lambda \qquad (46)$$

où I' est le courant d'une ligne source placée à une hauteur h' de l'origine dans le milieu -2- (Figure 5). Les nouveaux coefficients de réflexion $r'(\lambda)$ et de transmission $r'_t(\lambda)$ s'obtiennent d'une manière analogue :

$$A_2(\vec{z}_1) = M^{-1}_{o2}\ A_o(\vec{z}_o) \qquad (47)$$

avec

$$M^{-1}_{o2} = (U_2^{-1}\ U_1\ D_1^{-1})(U_1^{-1}\ U_o) \qquad (48)$$

on aura :

$$r'(\lambda) = \left[\frac{(u_1-u_o)(u_2+u_1)\ e^{-u_1 d} + (u_1+u_o)(u_2-u_1)\ e^{+u_1 d}}{(u_1-u_o)(u_2-u_1)\ e^{-u_1 d} + (u_1+u_o)(u_2+u_1)\ e^{+u_1 d}}\right] e^{+2u_2 d} \qquad (49)$$

$$r'_t(\lambda) = \left[\frac{4u_1\ u_2\ e^{+u_2 d}}{(u_1-u_o)(u_2-u_1)\ e^{-u_1 d} + (u_1+u_o)(u_2+u_1)\ e^{+u_1 d}}\right] \qquad (50)$$

Les deux composantes magnétiques s'obtiennent comme précédemment à partir de (42) et (43).

I. 5 - CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons établi un formalisme permettant de traiter les problèmes de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu stratifié horizontal contenant une anomalie de résistivité dans le substratum.

Le travail que nous venons de présenter permet de montrer que le calcul du champ électromagnétique à la surface du sol se ramène au calcul d'intégrales du type donné par l'expression (32) ou (33).

Dans le chapitre suivant nous allons développer ces calculs en mettant en évidence les techniques que nous avons mises au point pour réduire la taille mémoire occupée et optimiser le temps de calcul sur l'ordinateur. Ce travail est rendu nécessaire si l'on veut pouvoir traiter un modèle à trois dimensions sans dépasser la taille mémoire d'un ordinateur moyen et sans devoir utiliser un temps de calcul trop long.

o

o o

II - DEUXIEME CHAPITRE

TRAITEMENT NUMERIQUE DU MODELE UTILISE

II. I - INTRODUCTION du CHAPITRE II

La valorisation d'une recherche théorique depuis l'élaboration de ses bases et en sa mise en équation, doit se concrétiser par une application NUMERIQUE.

Notre but, comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction de cette thèse, est d'optimiser les algorithmes utilisés dans le traitement numérique de nos problèmes. Nous avons mené cette étude dans le souci de minimiser à la fois le temps de calcul et l'encombrement mémoire, tout en conservant une précision élevée, nécessaire à nos besoins. On peut résumer en disant que, d'une façon générale, les algorithmes recherchés doivent réaliser un compromis permettant d'aboutir à un résultat convenable aux moindres frais.

Nous définirons donc nos travaux comme la mise en forme des calculs ou équations en vue d'un traitement optimum par la machine. Comme dans la majorité des cas |15|, il faut linéariser l'équation pour en faire un modèle qui se prête à la récurrence, facilement assimilable par l'ordinateur.

II. 2 - FORMULATION DU MODELE NUMERIQUE

En vue donc d'une telle exploitation numérique de notre modèle (Chapitre I, paragraphe 1) - Figure 6 - nous nous contenterons de travailler à une fréquence suffisamment basse pour se placer dans l'approximation quasi-statique.

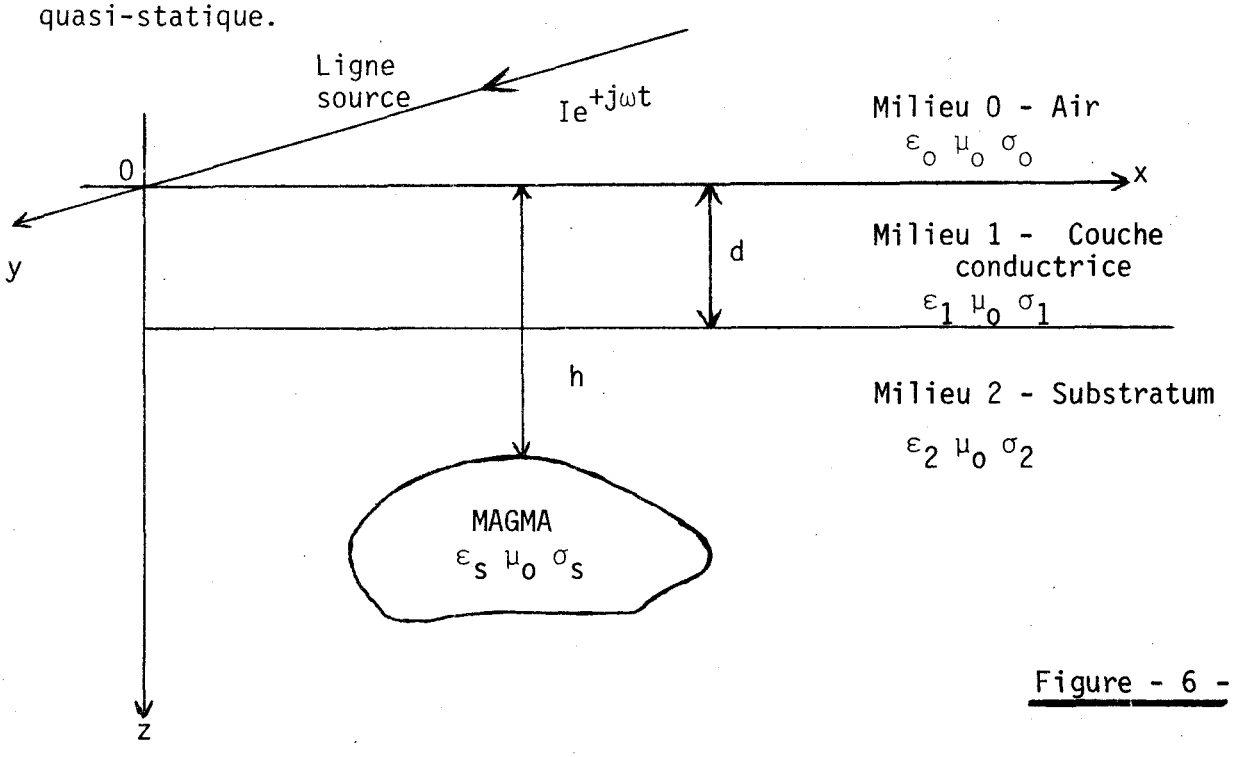


Figure - 6 -

Cette approximation revient à supposer que la distance horizontale r séparant l'émetteur et le récepteur est faible vis-à-vis de la longueur d'onde dans l'air. Il en résulte que :

$$|k_o r| \ll 1 \tag{51}$$

Dans notre problème, et compte tenu des fréquences du travail, ceci revient à poser pour le calcul des champs :

$$k_o = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_o \mu_o} = 0 \tag{52}$$

Dans ces conditions de l'approximation quasi-statique, il est clair que

$$\sigma \gg \omega\varepsilon \tag{53}$$

et le courant de diffraction J_d de l'équation (20) devient tout simplement :

$$J_d = (\sigma_s - \sigma_2)\ E_y \tag{54}$$

Une meilleure présentation des résultats numériques sera obtenue si l'on mesure toutes distances en unités de profondeur de pénétration δ_2 dans le milieu -2-, comme suit :

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_o\sigma_2}} \tag{55}$$

$$X = \frac{x}{\delta_2} \quad ; \quad Z = \frac{z}{\delta_2} \quad ; \text{ etc. etc...} \tag{56}$$

Nous allons donc représenter toutes les coordonnées naturelles x,z etc. normalisées en unités de profondeur de pénétration δ_2, par des nombres sans dimensions X, Z etc. en utilisant des majuscules et en les appelant des "grandeurs réduites" ou des "paramètres réduits".

Cette démarche aura pour avantage le fait que tous nos résultats numériques seront les mêmes pour une infinité de couples de valeurs de ω et σ_2 reliées entre eux selon l'expression (55).

Considérons la relation fondamentale (30) rappelée ci-dessous, de notre étude de propagation dans un milieu stratifié :

$$u_n^2 = \lambda^2 - k_n^2 \tag{30}$$

Compte tenu de (53) nous aurons $k_n^2 = -\ j\omega\ \mu_o\ \sigma_n$
donc en posant :

$$g = \lambda\ \delta_2 \tag{57}$$

on obtient :

$$u_n = \frac{1}{\delta_2}\ p_n \tag{58}$$

avec :

$$p_n^2 = (g^2 + 2\ j\ \frac{\sigma_n}{\sigma_2}) \tag{59}$$

Notons que la convention de la relation (31) se traduit maintenant comme suit :

$$\mathcal{R}e(p_n) > 0 \tag{60}$$

Et enfin, une nouvelle simplification sera obtenue si nous représentons la section supposée quelconque de la chambre magmatique par un polygone formé de rectangles (voir Figure 7); la surface totale de ce polygone devant être égale à celle de la section réelle.

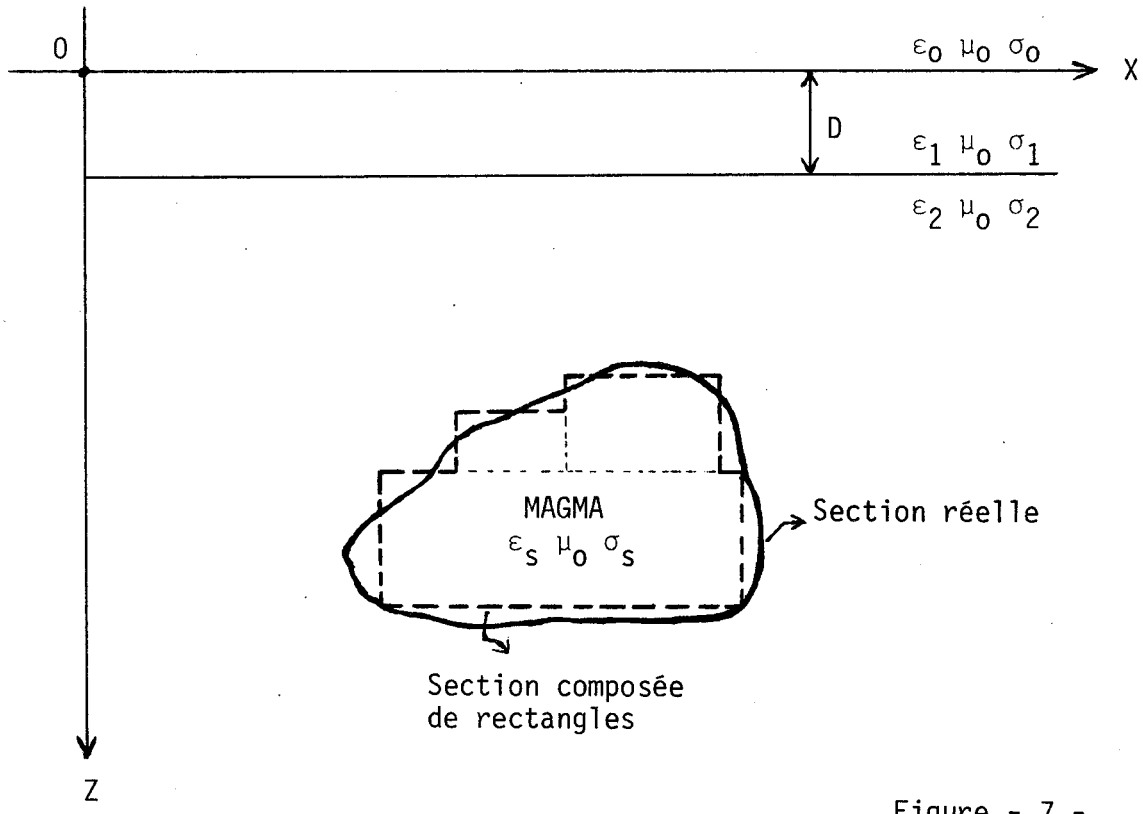


Figure - 7 -

Dans la suite de notre travail nous n'avons envisagé qu'une chambre rectangulaire mais nous aurions pu calculer avec les mêmes algorithmes le champ diffracté par une anomalie ayant la forme représentée en Figure 7. D'autre part, nous supposons que la conductivité de

l'hétérogénéité considérée est constante (voir Figure 8)

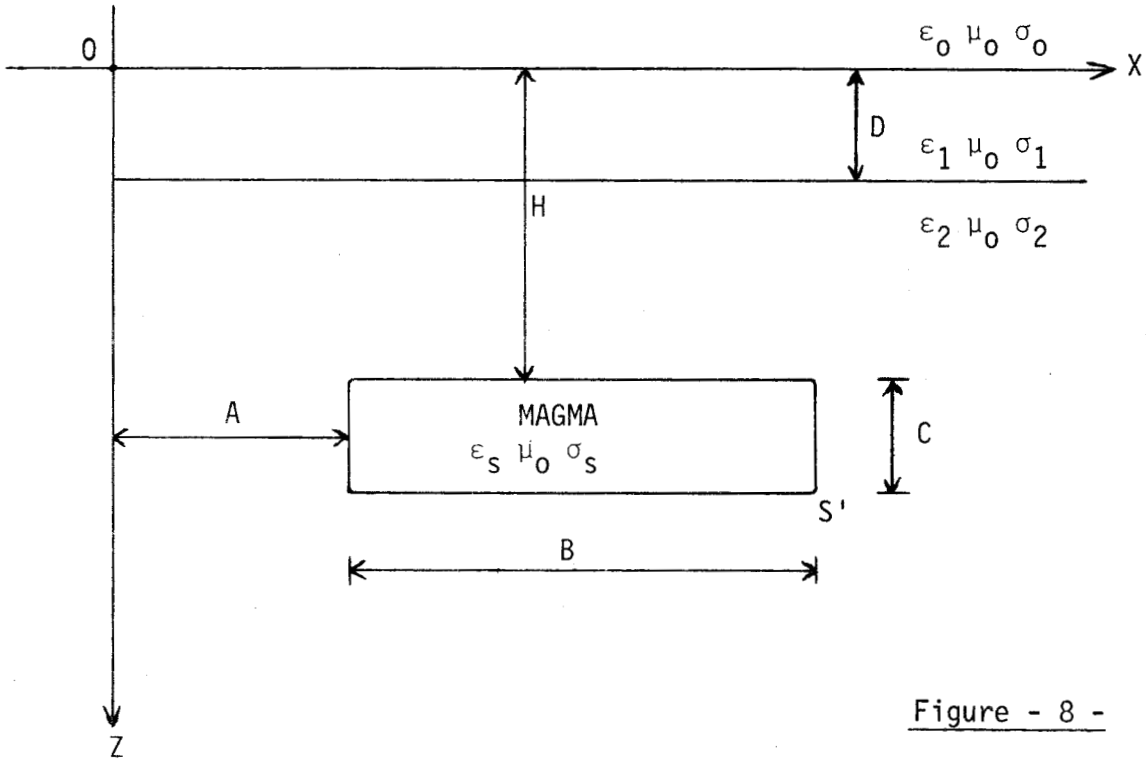


Figure - 8 -

Compte tenu de toutes nos hypothèses du modèle numérique, l'équation (27) que nous rappelons ci-dessous :

$$E_y(x,\ z) = E_y^i(x,\ z) + \int\int_{S'} (\hat{y}_s - \hat{y}_2)\ E_y(x',\ z').\ G(x,z\ ;\ x',z').\ dx'\ dz' \quad (27)$$

s'écrit comme suit :

$$E_y(X,\ Z) = E_y^i(X,Z) + \frac{2}{\omega\mu}(K-1)\int_A^{(A+B)}\int_H^{(H+C)} E_y(X',Z').G(X,Z\ ;\ X'Z').\ dX'\ dZ' \quad (61)$$

avec :

$$K = \frac{\sigma_s}{\sigma_2} \quad (62)$$

Dans la relation (61), G est la fonction de GREEN appropriée, qui dépend du point de l'espace où l'on veut appliquer cette équation.

II. 3 - CALCUL NUMERIQUE DU CHAMP ELECTRIQUE TOTAL A L'INTERIEUR DE L'HETEROGENEITE

Le calcul du champ électrique total à l'intérieur de l'anomalie se fait en utilisant la relation (61). Nous avons déjà remarqué qu'à l'intérieur de l'anomalie cette relation se transforme en une équation intégrale de FREDHOLM de deuxième espèce.

La fonction de GREEN, que nous utilisons dans ce cas, est G_1, c'est celle qui est associée au rayonnement du champ électrique, créé dans le substratum par une "ligne source" se trouvant également dans ce milieu. L'expression de cette fonction se déduit donc des relations (45) et (49) du Chapitre précédent. Le champ électrique incident $E_y^i(X, Z)$ dû à la ligne source, placée à l'origine, est donné par (33) et (40).

La relation (61) devient :

$$E_y(X, Z) = E_{2y}^i(X, Z) + \lambda \iint_{\text{anomalie}} E_y(X', Z').G_1(X,Z\ ;\ X',Z').\ dX'\ dZ' \tag{63}$$

où

$$\lambda = j\,\frac{(1-K)}{\pi} \tag{64}$$

avec :

$$E_{2y}^i = \left(\frac{-2j\omega\,\mu_o\,I}{\pi}\right) \int_o^\infty \frac{p_1\,e^{-p_2(Z-D)}\cos(gX).dg}{(p_o+p_1)(p_1+p_2)\,e^{+p_1D} + (p_o-p_1)(p_1-p_2)\,e^{-p_1D}} \tag{65}$$

et

$$G_1 = \int_o^\infty \left[e^{-p_2|Z-Z'|} + R.e^{-p_2(Z+Z'-2D)}\right] \frac{\cos g(X-X')}{p_2}\,dg \tag{66}$$

où

$$R = \frac{(p_2-p_1)(p_1+p_o) + (p_2+p_1)(p_1-p_o)\,e^{-2p_1D}}{(p_2+p_1)(p_1+p_o) + (p_2-p_1)(p_1-p_o)\,e^{-2p_1D}} \tag{67}$$

et $Z = \frac{z}{\delta_2}$, $Z' = \frac{z'}{\delta_2}$, $D = \frac{d}{\delta_2}$ etc...

L'équation (63) est une équation intégrale de FREDHOLM de deuxième espèce avec le champ électrique total E_y comme inconnue. Puisque le noyau G_1 de (63) est singulier au point où $X = X'$ et $Z = Z'$, nous l'écrivons en séparant sa partie singulière G_s du reste G_r comme suit :

$$G_1 = G_s + G_r \tag{68}$$

où

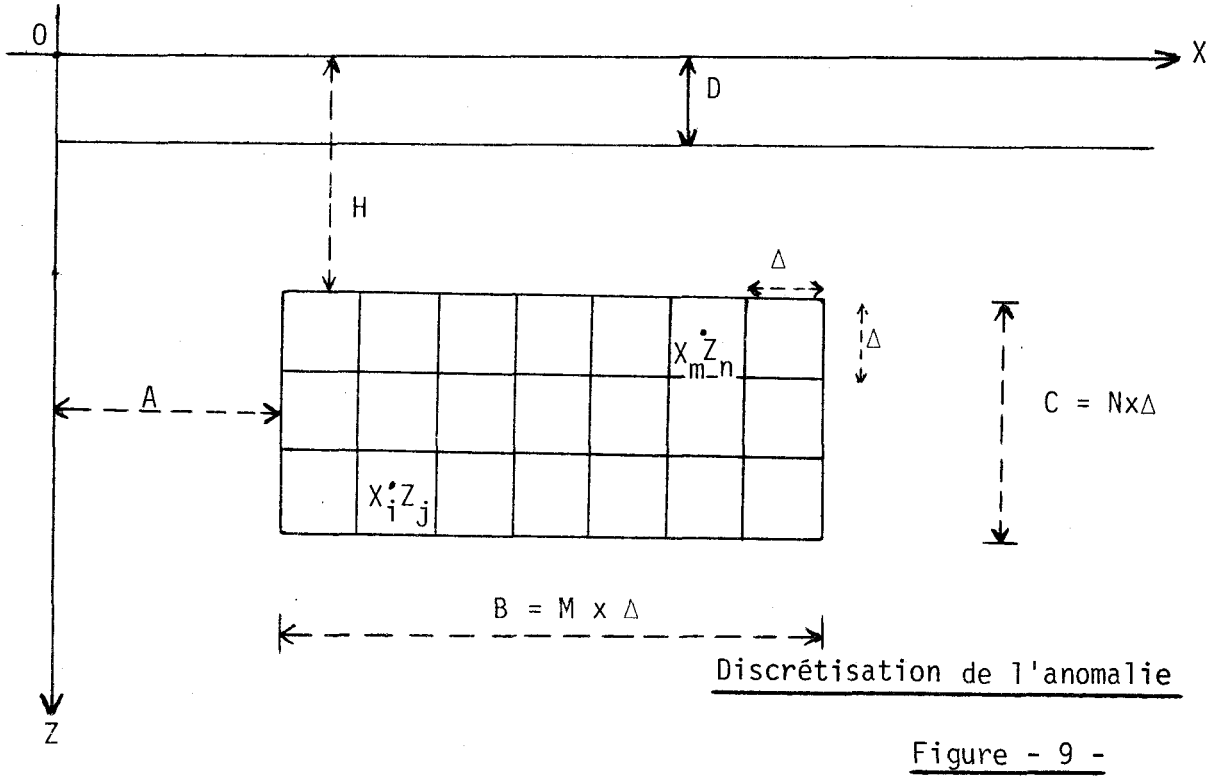
$$G_r = \int_0^\infty R. \frac{e^{-p_2(Z+Z' -2D)}}{p_2} \cos g(X-X') \, dg \tag{69}$$

et

$$G_s = \int_0^\infty \frac{e^{-p_2 |Z-Z'|}}{p_2} \cos g(X-X') \, dg \tag{70}$$

Ceci se simplifie[16] en une fonction de BESSEL modifiée de seconde espèce :

$$G_s = K_o \left[(1 + j) \sqrt{(X-X')^2 + (Z-Z')^2} \right] \tag{71}$$



Discrétisation de l'anomalie

Figure - 9 -

Il existe plusieurs techniques permettant la résolution numérique des équations intégrales[17][18]. Nous nous proposons d'adopter la méthode proposée par RICHMOND[19][20] et reprise par HOHMANN[3], CAUTERMAN[4] sous le nom de "*Point Matching Method with Pulse Functions as Subsectional Bases*"[18]. Cette méthode revient à discrétiser la surface S' de l'anomalie en (M x N) mailles carrées de côté Δ, comme illustré en Figure 9.

Nous supposons de plus que la taille de chacune de ces mailles est suffisamment petite pour que le champ électrique total (inconnu) $E_y(X_m,Z_n)$ dans la maille centrée à (X_m,Z_n) reste sensiblement constant dans tout son volume. Dans ces conditions nous nous proposons d'écrire l'équation (63) au centre de chacune des (M x N) mailles. Ainsi donc nous aurons au centre de la maille (X_i, Z_j) la relation suivante :

$$E_y(X_i, Z_j) = E^i_{2y}(X_i, Z_j) + \lambda \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} E_y(X_m,Z_n) \Big[\Delta^2 . G_r(X_i - X_m \; ; \; Z_j + Z_n) + \iint_{\substack{\text{maille} \\ m,\, n}} G_s(X_i - X' \; ; \; Z_j - Z') \, dX' \, dZ' \Big] \tag{72}$$

Dans cette expression nous avons supposé G_r constant sur chacune des mailles d'indices (m, n) et égal à sa valeur au centre de celle-ci. Nous pouvons le faire car la distance $\sqrt{(X_i-X')^2 + (Z_j+Z')^2}$ est grande et varie peu en fonction des points courants de coordonnées (X', Z') à l'intérieur de la maille d'indices (m, n).

Par contre dans l'expression G_s de la partie singulière de la fonction de GREEN, la distance à prendre en compte est $\sqrt{(X_i-X')^2+(Z_j-Z')^2}$ où (X', Z') sont encore les coordonnées du point courant à l'intérieur de la maille d'indices (m, n). Cette distance peut devenir suffisamment petite pour qu'il soit nécessaire d'intégrer G_s sur toute la surface de la maille d'indices (m, n) ; par exemple quand les mailles d'indices (i, j) et (m, n) sont assez voisines. Pour la simplicité du calcul numérique on effectue cette intégration G_s pour toutes les mailles d'indices (m, n) de l'anomalie.

L'intégration de G_s sur chaque maille doit s'effectuer numériquement car il n'existe aucune expression analytique permettant son évaluation directe tant que les mailles sont rectangulaires. Néanmoins, si la maille rectangulaire est remplacée par une maille circulaire de même surface, nous pouvons profiter d' expressions analytiques simples et réduire considérablement le coût du calcul |19||20| d'autant plus que l'intégration numérique est délicate à mener.

On aura :

✳ lorsque i = m, j = n :

$$\iint_{\text{maille}} G_s dX' \, dZ' = \frac{2\pi}{1+j} \left[\frac{1}{1+j} - a \, K_1 \left[(1+j)a\right] \right] \tag{73}$$

** et lorsque $i \neq m$, $j \neq n$:

$$\iint_{\text{maille}} G_s dX' \, dZ' = \frac{2\pi a}{1+j} K_o \left[(1+j)r\right] . I_1 \left[(1+j)a\right] \tag{74}$$

où "a" est le rayon de la mailler circulaire de même surface :

$$a = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \tag{75}$$

et I_1, K_o et K_1 sont des fonctions de BESSEL modifiées avec :

$$r^2 = (X_i - X_m)^2 + (Z_j - Z_n)^2 \tag{76}$$

En écrivant l'équation (72) pour chacune des (M x N) mailles, il est clair que l'on aboutit à un système de (M x N) équations linéaires,

où les champs totaux $E_y(X_i, Z_j)$ sont les (M x N) inconnues. En notation matricielle cela peut s'écrire :

$$[K] . E_y = - E^i_{2y} \tag{77}$$

où les éléments $K^{i,j}_{m,n}$ de la matrice $[K]$ sont donnés par les relations suivantes :

$$K^{i,j}_{m,n} = \lambda \, G^{i,j}_{m,n} - \delta^{i,j}_{m,n} \tag{78}$$

avec :

$$\delta^{i,j}_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq m, \quad j \neq n \\ 1 & \text{si } i = m, \quad j = n \end{cases} \tag{79}$$

et

$$G^{i,j}_{m,n} = \Delta^2 . G_r(X_i - X_m \; ; \; Z_j + Z_n) + \iint_{\substack{\text{maille} \\ m,n}} G_s(X_i - X' \; ; \; Z_j - Z') \, dX' \, dZ' \tag{80}$$

D'où on a :

$$E_y = - [K]^{-1} . E^i_{2y} \tag{81}$$

$[K]^{-1}$ est l'inverse de la matrice $[K]$.

Nous faisons remarquer ici que le *noyau* G_1 *de l'équation intégrale* (63) explicité dans la relation (66) est *symétrique*.

Le système discrétisé est alors symétrique. Autrement dit, la matrice $[K]$ de la relation (77) est une matrice symétrique comportant des coefficients complexes. Nous utiliserons cette propriété essentielle pour minimiser l'occupation mémoire et le temps de calcul.

La relation (81) nous donne le champ total à l'intérieur de l'anomalie.

Nous allons utiliser ce résultat pour calculer le champ créé à la surface du sol.

II. 4 - CALCUL NUMERIQUE DES COMPOSANTES DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE A LA SURFACE DU SOL

La résolution du système linéaire (77) nous a permis de connaître le champ électrique total à l'intérieur de l'anomalie. Nous allons réutiliser la relation (61) pour calculer les champs électriques et magnétiques à la surface du sol.

Le champ électrique incident $E_y^i(X,Z)$ est donné par les expressions (32) et (39). Dans le cas qui nous intéresse la fonction de GREEN à utiliser est G_2, c'est celle associée à l'une des lignes sources, placée dans le substratum, de la distribution par laquelle nous avons remplacé l'effet de l'anomalie.

Elle est donnée par les formules (46) et (50). Compte tenu des hypothèses du modèle numérique (chapitre II, paragraphe 2), dans le cas d'un point d'observation situé "au-dessus" ($Z \leqslant 0$) de la ligne source primaire (émetteur), elle-même placée à l'origine, la relation (61) pourra s'écrire-(on se rappelle l'équation (64) où $\lambda = j(1-K)/\pi$):

$$E_{oy}(X,Z) = E_{oy}^i(X,Z) + 4\lambda \iint_{\text{anomalie}} E_y(X',Z').G_2(X,Z\ ;X',Z').dX'\ dZ' \tag{82}$$

avec

$$E_{oy}^i(X,Z) = \frac{-j\omega\mu_o\ I}{\pi} \int_0^\infty \frac{[(p_1+p_2)\ e^{+p_1D} + (p_1-p_2)\ e^{-p_1D}]e^{+p_oZ}}{(p_o+p_1)(p_1+p_2)\ e^{+p_1D} + (p_o-p_1)(p_1-p_2)e^{-p_1D}} \cos gX\ dg \tag{83}$$

et

$$G_2(X,Z\ ;X',Z') = \int_0^\infty \frac{p_1.\ e^{-p_2(Z'-D)}\ e^{+p_oZ}\ .\ \cos g(X-X')\ dg}{(p_o+p_1)(p_1+p_2)\ e^{+p_1D} + (p_o-p_1)(p_1-p_2)\ e^{-p_1D}} \tag{84}$$

En tenant compte de la "discrétisation" de l'anomalie (voir Figure 9 - page 30), on obtient la relation suivante :

$$E_{oy}(X,Z) = E_{oy}^i(X,Z) + 4\ \lambda\ \Delta^2 \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} (E_y(X_m,Z_n).G_2(X,Z\ ;\ X_m,Z_n) \tag{85}$$

Dans cette expression, on utilise les valeurs des champs $E_y(X_m,Z_n)$ au centre de chaque maille calculées précédemment selon la relation (81). De plus, nous avons supposé G_2 constant sur chaque maille, ce qui est tout à fait justifié par la faible taille des mailles considérées.

Le calcul de (85) ne présente aucune difficulté et s'effectue assez facilement.

Les deux composantes du champ magnétique s'obtiennent à partir des équations de MAXWELL (voir l'équation (41) - page 20) :

$$H_{ox} = \frac{1}{j\omega\,\mu_o\,\delta_2} \cdot \frac{\partial\, E_{oy}}{\partial\, Z} \tag{86}$$

$$H_{oz} = \frac{-\,1}{j\omega\,\mu_o\,\delta_2}\;\frac{\partial\, E_{oy}}{\partial\, X} \tag{87}$$

Par ailleurs nous normalisons les composantes des champs électrique et magnétique par les facteurs respectifs suivants :

$$E_y^p = \frac{\omega\,\mu_o\,I}{\pi} \tag{88}$$

$$|\,H_z^p\,| = \frac{I}{2\,\pi\,x} \tag{89}$$

où x est la distance en mètres séparant la ligne source du récepteur. $|H_z^p|$ est la valeur absolue de la composante verticale du champ magnétique dans l'air. (cf. annexe 4).

Nous résumons donc ci-dessous toutes les expressions analytiques utilisées dans les calculs des champs normalisés à la surface du sol (Z=0) :

$$\frac{E_{oy}}{E_y^p} = \frac{E_{oy}^i}{E_y^p} + 4\,\lambda\,\Delta^2 \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \frac{E_y(X_m,Z_n)}{E_y^p} \cdot G_2(X\ ;\ X_m,Z_n) \tag{90}$$

$$\frac{H_{ox}}{|H_z^p|} = \frac{H_{ox}^i}{|H_z^p|} - j.\ 8X.\ \lambda\ \Delta^2 \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \frac{E_y(X_m,Z_n)}{E_y^p}\ .\ G_3\ (X\ ;\ X_m,Z_n) \tag{91}$$

$$\frac{H_{oz}}{|H_z^p|} = \frac{H_{oz}^i}{|H_z^p|} - j.\ 8X.\ \lambda\ \Delta^2 \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \frac{E_y(X_m,Z_n)}{E_y^p}\ .\ G_4\ (X\ ;\ X_m,Z_n) \tag{92}$$

où

$$\frac{H_{ox}^i}{|H_z^p|} = (-2X) \int_0^\infty \frac{p_o\ \left[(p_1+p_2).\ e^{+p_1D} + (p_1-p_2)\ e^{-p_1D}\right] \cos gX.dg}{(p_o+p_1)(p_1+p_2)\ e^{+p_1D} + (p_o-p_1)(p_1-p_2)\ e^{-p_1D}} \tag{93}$$

$$G_3 = \int_0^\infty \frac{p_o\ p_1\ e^{-p_2(Z_n-D)}\ .\ \cos g\ (X-X_m).\ dg}{(p_o + p_1)(p_1+p_2)\ e^{+p_1D} + (p_o-p_1)(p_1-p_2)e^{-p_1D}} \tag{94}$$

$$\frac{H_{oz}^i}{|H_z^p|} = (-2X) \int_0^\infty \frac{g\ \left[(p_1+p_2)\ e^{+p_1D} + (p_1-p_2)\ e^{-p_1D}\right] \sin gX.\ dg}{(p_o+p_1)(p_1+p_2)\ e^{+p_1D} + (p_o-p_1)(p_1-p_2)\ e^{-p_1D}} \tag{95}$$

$$G_4 = \int_0^\infty \frac{g\ p_1\ e^{-p_2(Z_n-D)}\ .\ \sin g\ (X-X_m).\ dg}{(p_o+p_1)(p_1+p_2)\ e^{+p_1D} + (p_o-p_1)(p_1-p_2)\ e^{-p_1D}} \tag{96}$$

Dans le paragraphe suivant nous allons expliciter les méthodes et les techniques adoptées pour optimiser les algorithmes utilisés dans le calcul des champs à la surface du sol.

II. 5 - *LES ALGORITHMES UTILISES ET LEUR OPTIMISATION*

Nous nous proposons d'abord de présenter en résumé quelques principes que nous avons constamment considérés comme la "clef de voûte" de notre travail d'informatique

- Réduire autant que possible le nombre de calculs à effectuer : en recherchant des décompositions, des partionnements ou des symétries conduisant à une économie.
- Se suffire de la mémoire centrale donc utiliser un encombrement optimalement réduit.

Ceci dit, nous voulons faire remarquer que ces principes se concrétisent dans les diverses étapes du calcul des champs électromagnétiques en surface du sol comme suit :

- Exploiter toutes les symétries intrinsèques du problème en recherchant ou même en provoquant les symétries là où il n'y en a pas
- Réutiliser systématiquement les mêmes tableaux réservés en mémoire centrale de l'ordinateur.

Une telle exploitation de l'ordinateur nécessite que nous réalisions des procédures d'intégration suffisamment générales pour effectuer les calculs dans n'importe quel cas de figure, mais aussi, capables d'être spécialisées pour nous permettre de gagner du temps. D'autre part, dans le même souci d'optimisation nous avons conçu des sous-programmes communs au calcul de toutes les composantes du champ électromagnétique à la surface du sol.

Enfin pour atteindre les objectifs que nous nous sommes fixés, nous avons repensé entièrement la programmation indépendamment de la disponibilité de sous-programmes existants.

II. 5-1 - Les procédures d'intégration

Nous avons remarqué dans la conlcusion du premier chapitre, (paragraphe I.5) que le calcul du champ électromagnétique se ramène au calcul d'intégrales du type donné par l'expression (32) ou (33). L'intégration doit s'effectuer numériquement. Nous reprenons la méthode proposée par FRISCKNECHT[21] et développée par HOHMANN[3].

L'intégrale peut s'écrire sous la forme d'une série alternée et décroissante :

$$I \neq y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + \ldots\ldots \qquad (97)$$

où chaque terme correspond à la valeur de l'intégrale évaluée entre deux zéros consécutifs de cosinus ou de sinus. Par exemple, dans le cas de cosinus on a :

$$y_2 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(g,Z,D, \ldots) \cos (gX)\, dg \qquad (98)$$

Nous nous sommes servis de la technique d'accélération de convergence en utilisant la transformation d'EULER modifiée[22], dans les cas où la série (97) n'a pas convergé avant le 10e terme. L'application de l'algorithme d'accélération de convergence dès le 10e terme a le double but suivant :

- Réduction du nombre total de termes à calculer et par conséquent une diminution d'erreur d'arrondi.

Nous avons constaté de plus qu'à partir du 10e terme la série se stabilise et se prête facilement à l'algorithme cité ci-dessus.

En général, chaque terme de la série (97) s'intègre assez aisément au moyen de l'algorithme de LEGENDRE-GAUSS[23] avec une quadrature d'ordre 8 pour une précision relative de l'ordre de 10^{-5}.

Il a tout de même été nécessaire de surveiller l'évolution des fonctions en cours d'intégration pour repérer d'éventuelles formes "anormales" : (par exemple des parties à faible rayon de courbure qui sont généralement difficiles à intégrer). C'est le cas en particulier pour le premier terme y_1 de la série (97).

Par ailleurs, lorsque X est nul, il n'est pas possible de décrire l'intégrale du champ électromagnétique sous la forme d'une série alternée.

Dans ces cas nous avons remplacé notre méthode générale d'intégration par l'algorithme de Simpson |22| (cf. annexe 2) dont nous donnons ci-dessous les principales expressions :

$$\int_p^q f(x)\, dx = \frac{h}{3} (f_o + 4 f_1 + 2 f_2 + \ldots + 2 f_{m-2} + 4 f_{m-1} + f_m) + E \qquad (99)$$

avec $h = \frac{q-p}{m}$, où l'intervalle (p, q) est divisé en $\frac{m}{2}$ sous-intervalles de longueur 2h , m étant un entier pair, E est le reste donné par :

$$E = - \frac{(q - p)^5}{180\ m^4} f^{(4)}(\eta) \qquad (100)$$

où η se trouve dans l'intervalle (p, q).

Nous avons préféré l'algorithme de Simpson à celui du Trapèze pour intégrer les parties "anormales" des fonctions ; le premier contenant dans l'expression de son reste le facteur $\frac{1}{m^4}$ - équation (100) - converge plus rapidement que l'algorithme du Trapèze dont le reste ne converge qu'en $\frac{1}{m^2}$ |23| (cf. annexe 2).

OPTIMISATION DE L'ALGORITHME DE SIMPSON

L'algorithme de Simpson occupe donc une place très importante dans notre traitement du modèle numérique. Nous avons alors essayé d'optimiser cet algorithme utilisant les principes explicités au début de ce paragraphe :

1°) L'algorithme de Simpson a l'avantage de converger très rapidement ($\frac{m}{2} < 10$) lorsque l'intervalle d'intégration est choisi d'une manière convenable.

De plus lorsque m augmente indéfiniment, les erreurs d'arrondis empêchent d'atteindre une bonne précision.

Nous avons donc tenu à effectuer l'intégration de l'intervalle (p, q) par petits intervalles partiels (a, b) de longueurs variables (Figure 10)

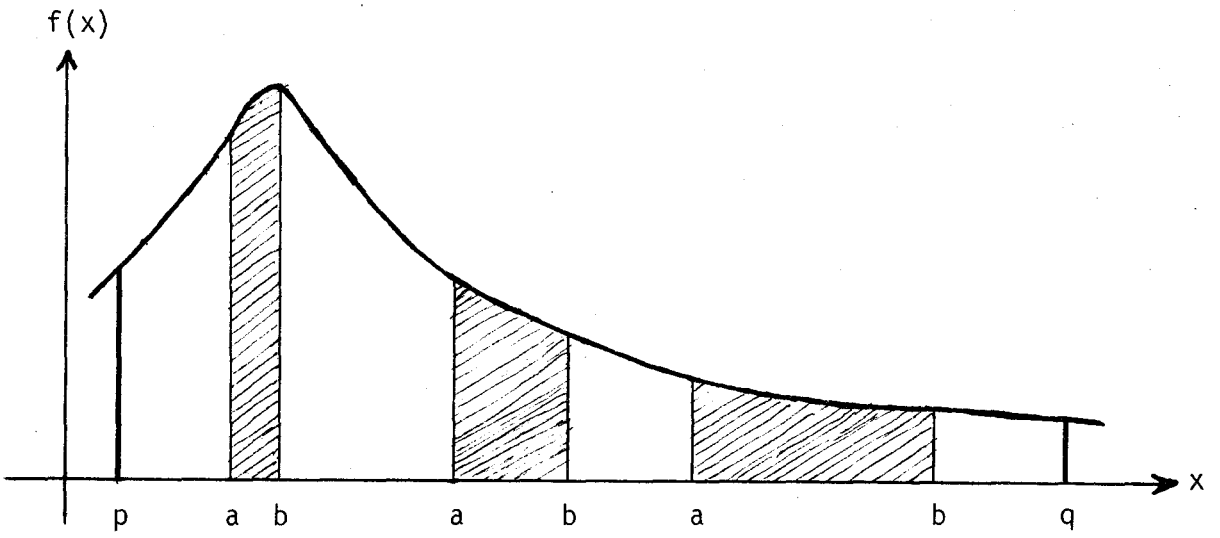


Figure - 10 -

Une fois initialisé, l'intervalle partiel (a, b) du calcul suivant est raccourci (ou élargi) en fonction de la difficulté (ou l'aisance) éprouvée au cours de l'intégration du calcul précédent.

Nous caractérisons ceci comme le "*principe de borne dynamique*" ; celui-ci a été incorporé dans notre programme. Les choix optimaux des divers intervalles partiels (a, b) s'effectuent alors automatiquement.

2°) Il a fallu repérer et intégrer par fractions d'intervalle les parties "anormales" de l'intégrant. Pour cela nous avons profité du fait que dans les cas "difficiles", pour atteindre la précision désirée la valeur de m augmente assez rapidement. Donc lorsque m augmente au-delà d'une certaine valeur, que nous choisissons comme consigne, on provoque par programme, une décomposition automatique de l'intervalle (a, b) lui-même en sous-intervalles, et on fait réappliquer la règle de SIMPSON (99) dans chacun de ces sous-intervalles.

Dans notre algorithme optimisé ce "*découpage dynamique*" s'effectue en réutilisant toutes les valeurs de la fonction déjà calculées sur l'intervalle initial (a, b).

3°) A l'intérieur même d'un intervalle partiel (a, b) si, pour atteindre la précision désirée, l'*augmentation* de la valeur de m se fait par un facteur de 3, nous avons constaté que toutes les valeurs du produit de la fonction $f(x_i)$ par son poids correspondant $g(x_i)$ calculées précédemment peuvent se réutiliser telles quelles. La Figure 11 illustre cette remarque en partant de m = 4 ($m_1 = \frac{m}{2} = 2$). Dans ce cas, on trouve des valeurs successives de m égales à m = 12, m = 36 ... ; ou encore $m_2 = 6$, $m_3 = 18$; ...

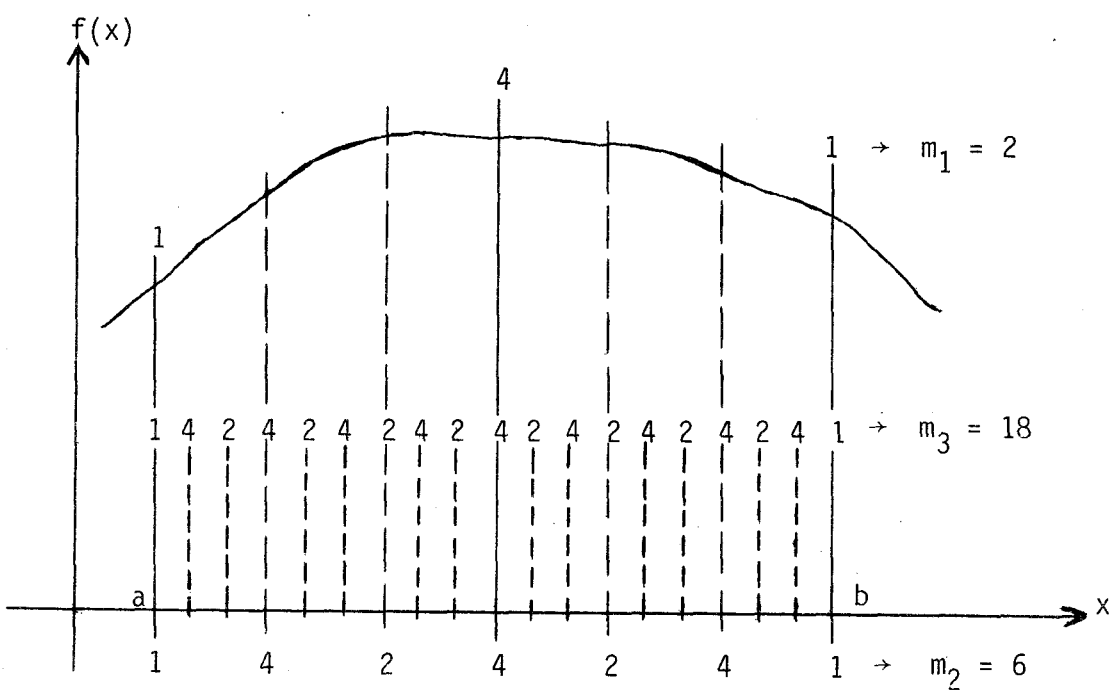


Figure - 11 -

On remarque alors que pour les valeurs successives de m on retombe sur *les mêmes échantillons de* la fonction f(x) à intégrer portant *les mêmes poids* correspondants. Il n'y a plus qu'à réutiliser les produits $g(x_i).f(x_i)$ déjà calculés et donc *réutiliser tout simplement* la valeur de l'intégrale calculée précédemment.

Par ailleurs l'accroissement de la valeur de m sous forme d'une série géométrique de raison 3, possède l'avantage supplémentaire d'améliorer le terme correctif dans l'extrapolation de RICHARDSON|22| (cf. annexe 2) où la valeur exacte I de l'intégrale est donnée par :

$$I \neq I_2 + \frac{1}{80} (I_2 - I_1) \qquad (101)$$

avec I_1 et I_2 les intégrales calculées respectivement avec m_1 et m_2.

Nous n'avons évoqué que trois points importants dans nos efforts d'optimisation. Puisque la majeure partie du temps est utilisée dans le calcul des valeurs de la fonction à différents points de l'abscisse, ceci nous conduit à un procédé à la fois *élégant et économique*.

II. 5-2 - *Remarques générales à propos du programme de calcul*

En vue d'une organisation optimale du calcul du champ à la surface du sol, nous avons divisé l'ensemble du travail en 4 parties :

1) - Chargement et Inversion de la Matrice [K] des fonctions de GREEN de l'équation (77) :

La matrice [K] est symétrique, on peut donc la décomposer d'une manière unique en un produit de deux matrices triangulaires, dont l'une est transposée de l'autre|24|. Il en résulte que l'inverse de la matrice [K] se réduit à la recherche de l'inverse de l'une de ces deux matrices triangularisées. L'algorithme utilisé réalise toutes ces opérations en n'ayant besoin que d'un tableau de la taille de la matrice [K] dont les parties supérieure et inférieur contiennent respectivement [K] et $[K]^{-1}$. La Figure 12 schématise les tableaux que le calcul complet de E_y nécessite de réserver dans la mémoire centrale de l'ordinateur.

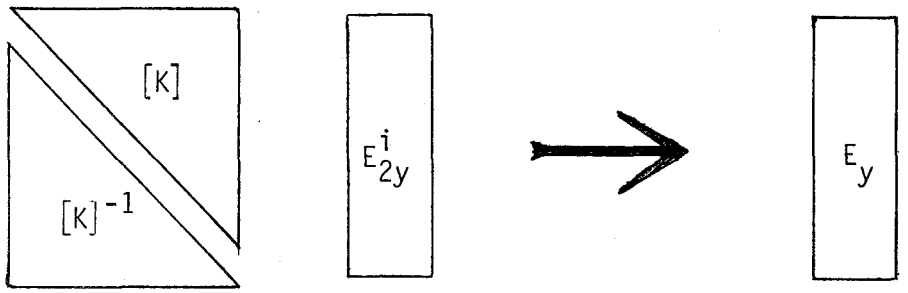


Figure - 12 -

La matrice [K] étant symétrique, pleine et bien conditionnée, l'utilisation de la méthode de CHOLESKI est idéale |23| |25|.

2) Calcul de champ électrique total à l'intérieur de l'anomalie - l'équation (81) -

Notre choix d'inverser la matrice [K] se justifie car une fois effectuée, cet inverse $[K]^{-1}$ nous permet d'étudier, moyennant quelques multiplications et additions simples, l'effet de la variation de la distance A (Figure 13) entre la source et l'anomalie (tous les autres paramètres restant identiques, bien entendu) sur l'évolution des champs à la surface du sol. Dans ces cas il n'y a que les champs incidents E^i_{2y} (Figure 12) aux centres des mailles qui changent.

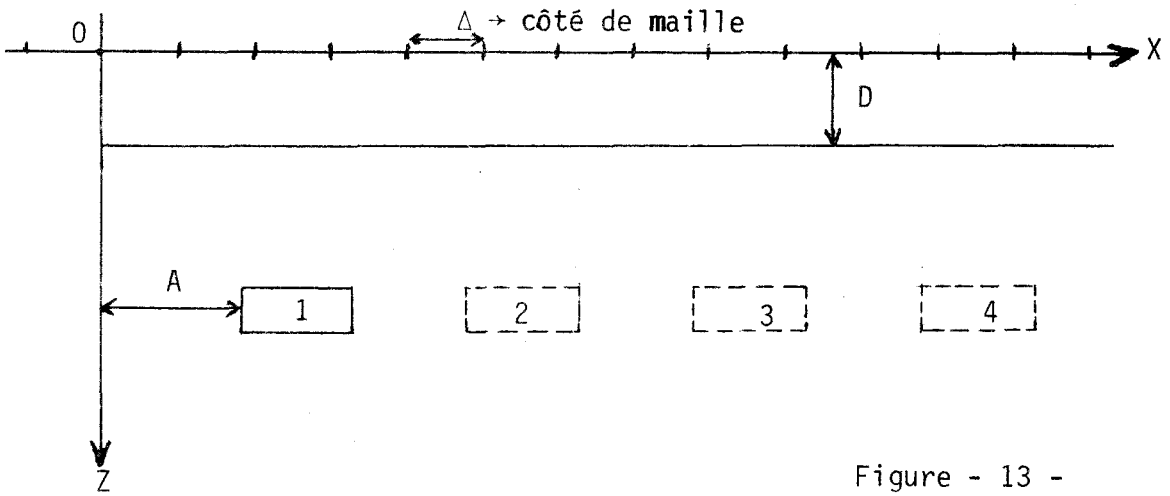


Figure - 13 -

La recherche de l'inverse d'une matrice est équivalente à la résolution de 3 systèmes d'équations [26]. Puisque nous nous sommes proposé d'étudier plus de 3 positions de l'anomalie, la recherche de l'inverse était rentable.

L'économie est encore plus importante si l'on remarque que chaque système résolu peut être utilisé dans les calculs de chacune des 3 composantes du champ électromagnétique en surface : équations (90), (91) et (92).

3) Calcul des champs diffractés à la surface du sol - équations (90), (91) et (92) :

Une *discrétisation des points de mesures du champ à la surface du sol* (Figure 13) en segments de longueur Δ égale au côté des mailles (cf. page 30) nous permet de réaliser *une très grande économie* de calcul des fonctions de GREEN des champs diffractés donnés par (84), (94) et (96).

En effet, une fois calculées, ces valeurs sont réutilisables pour chacune des positions de l'anomalie plus ou moins éloignées de la source (les autres paramètres restant identiques, bien entendu).

De plus, la similarité entre les diverses expressions des champs (90), (91) et (92) nous a permis de réaliser des sous-programmes communs qui facilitent les calculs des grandeurs cherchées en surface dès que la position de l'anomalie est précisée.

4) Calculs des champs totaux à la surface du sol :

Du fait du partage en unités Δ de maille des longueurs à la surface du sol, on pourrait, pour gagner du temps, choisir des dispositions d'anomalies qui correspondraient en ces points à des valeurs déjà calculées du champ incident à la surface. Mais compte tenu du faible temps de calcul des champs incidents à la surface du sol - équations (83) (93) et (95) - nous avons préféré les calculer en chaque point où l'on en a besoin. Ceci nous laisse *parfaitement libre* pour choisir d'une manière quelconque la position de l'anomalie.

La division de l'ensemble du calcul en ces 4 parties n'est pas arbitraire. Chaque groupe représente un certain tronc commun de calculs qui sont ou non modifiés suivant l'évolution des caractéristiques des milieux ou de l'anomalie. Par exemple, lorsqu'on change seulement la distance de l'anomalie à la source, il n'y a que les étapes 2 et 4 qui sont à refaire.

L'organigramme général se trouve dans l'annexe 3.

II. 6 - CONCLUSION

Les techniques et les méthodes que nous avons utilisées dans notre travail d'informatique, nous ont permis d'aboutir à un temps de calcul que nous estimons *proche de l'optimum* dans la détermination du champ électromagnétique rayonné par une antenne électrique longue, posée à la surface d'un terrain stratifié à deux couches contenant une anomalie de forme quelconque. Nous avons effectivement démontré qu'il était possible d'exploiter sur l'ordinateur le modèle numérique que nous avons mis au point, en utilisant un temps-calcul tout à fait raisonnable.

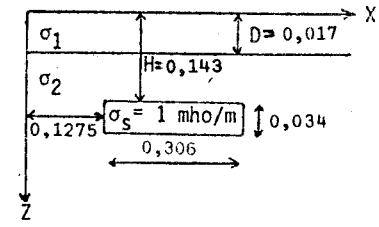
En effet, au Centre Interuniversitaire de Traitement de l'Information des Universités de Lille avec un ordinateur(*) CII 10070 les essais effectués en utilisant nos algorithmes optimisés montrent qu'en *moins de 12 minutes* d'utilisation de l'unité centrale et en ne réservant que *20 K-mots de mémoire* (un quart de la capacité disponible) nous arrivons à étudier assez complètement *6 positions différentes* de l'anomalie enterrée à une profondeur donnée.

Nous avons pu montrer, dans notre étude de la faisabilité de détection des poches magmatiques, qu'une division de l'anomalie en 36 mailles était largement suffisante lorsqu'on se limitait à une précision relative de 10^{-4} des résultats finaux. Nous illustrons cette remarque sur les Figures 14, 15, 16 et 17 qui sont relatives à une poche magmatique de conductivité σ_s égale à 1 mho par mètre, enterrée à une profondeur de 5,1 Km de la surface du sol.

(*) Pour IRIS 80, disponible depuis mai 1978 au Centre Interuniversitaire de Traitement de l'Information, les temps de calcul doivent être divisés par 1,5.

CHAMP MAGNETIQUE
HORIZONTAL

MODULE NORMALISE $\frac{|H_{ox}|}{|H_z^p|}$



σ_1 = 0,01 mho/m
σ_2 = 0,0002 mho/m
Fréquence 1 Hz

0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
X

Division de l'anomalie en 36 mailles
Division de l'anomalie en 9 mailles

Figure - 14 -

PHASE ϕ_x

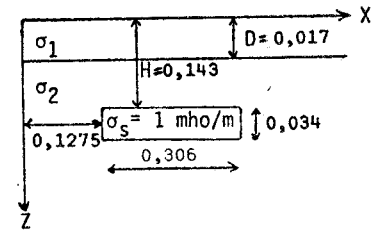
40°
20°
0°
- 20°
-40°
0,2
0,4
0,6
X

Division de l'anomalie en 36 mailles
Division de l'anomalie en 9 mailles

Figure - 15 -

CHAMP MAGNETIQUE
VERTICAL

MODULE NORMALISE $\frac{|H_{oz}|}{|H_z^p|}$



σ_1 = 0,01 mho/m
σ_2 = 0,0002 mho/m
Fréquence 1 Hz

1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
X

Division de l'anomalie en 36 mailles
Division de l'anomalie en 9 mailles

Figure - 16 -

PHASE ϕ_z

-150°
-160°
-170°
180°
170°
160°
150°
0,2
0,4
0,6
X

Division de l'anomalie en 36 mailles
Division de l'anomalie en 9 mailles

Figure - 17 -

De nos jours où les études d'optimisations d'algorithmes sont devenues une science, personne ne peut prétendre être parvenu au degré d'optimisation maximale. Dans cet esprit, où la plupart des algorithmes peuvent être améliorés, nous ne proposons nos techniques et nos méthodes exposées que comme un "petit" pas accompli vers une meilleure utilisation des outils mis à notre disposition.

o

o o

III - TROISIEME CHAPITRE

RESULTATS OBTENUS SUR LA DETECTABILITE DE POCHES MAGMATIQUES

III. 1 - INTRODUCTION du CHAPITRE III

Les essais effectués en utilisant le programme que nous avons mis au point ont donné les preuves de sa fiabilité. Cette caractéristique étant acquise l'intérêt de notre programme réside en la rapidité des calculs et dans le faible encombrement de la mémoire centrale en dépit de la précision demandée. Par ailleurs, cet outil nous a permis de faire une étude assez complète de faisabilité de la détection de poches magmatiques.

Dans ce chapitre nous présentons les résultats les plus marquants de notre étude.

Nous nous intéressons à la détection d'une poche magmatique

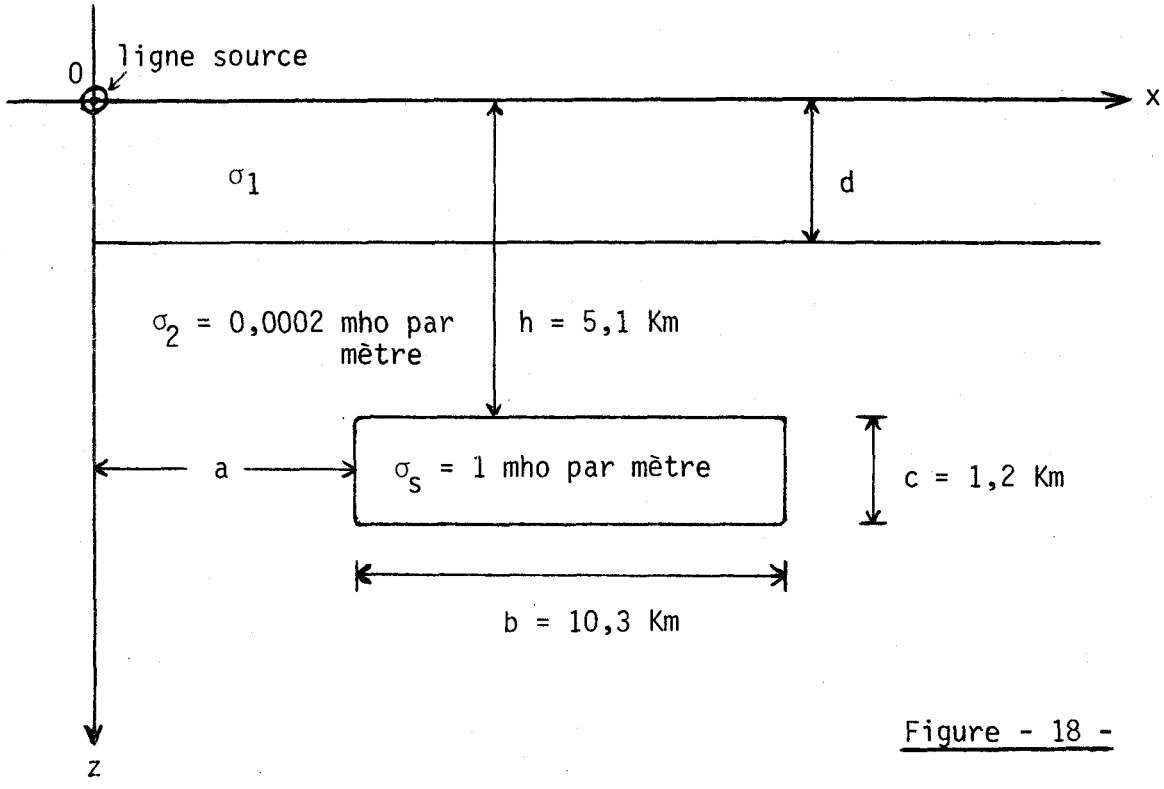


Figure - 18 -

dont les caractéristiques géométriques, illustrées par la Figure 18, sont les suivantes :

largeur	:	b = 10,3 Km
épaisseur	:	c = 1,2 Km
hauteur du toit par rapport au sol	:	h = 5,1 Km

Par convention nous utiliserons des majuscules pour des grandeurs réduites et des minuscules pour des vraies grandeurs. (cf. paragraphe II-2 - page 26).

Cette poche magmatique a une conductivité σ_s de 1 mho par mètre et se trouve dans un substratum résistant de conductivité σ_2 égale à 2×10^{-4} mho par mètre ; ce qui nous donne pour le rapport K la valeur suivante :

$$K = \frac{\sigma_s}{\sigma_2} = 5000$$

L'expression du champ électromagnétique total reçu à la surface du sol est composé de deux termes : celui dû à la source d'excitation et celui dû à la diffraction par l'anomalie selon l'équation (23) qui peut se réécrire comme suit :

$$E_{oy} = E^{i}_{oy} + E^{d}_{oy} \tag{102}$$

$$H_{ox} = H^{i}_{ox} + H^{d}_{ox} \tag{103}$$

$$H_{oz} = H^{i}_{oz} + H^{d}_{oz} \tag{104}$$

Dans notre étude nous pouvons en effet caractériser les premiers termes (E^{i}_{oy} par exemple) comme l'effet du terrain stratifié.

La présentation des résultats se fait donc en deux temps : dans un premier temps nous étudions uniquement l'effet de la couche conductrice simulant les terrains superficiels ; et, ensuite nous présentons les effets cumulés de la couche conductrice et de la poche magmatique. Cette présentation met en évidence les meilleurs conditions de détectabilité de l'anomalie. Une telle distinction des deux effets est à la fois utile et indispensable si l'on veut déceler la contribution de la poche magmatique à partir des mesures effectuées à la surface du sol.

III. 2 - EFFETS DE LA COUCHE CONDUCTRICE SIMULANT LES TERRAINS SUPERFICIELS

Nous nous intéressons d'abord à l'effet "régional". Autrement dit à ce que l'on observe lorsque les structures étudiées ne contiennent pas d'anomalie.

D'une manière générale, il est clair qu'une variation d'épaisseur d'une couche superficielle de conductivité donnée a le même effet sur le champ électromagnétique reçu, qu'une variation de conductivité d'une couche superficielle dont on a fixé l'épaisseur.

Toute variation de σ_1 et/ou de D provoque une variation des composantes du champ électromagnétique.

Cependant, cette variation a un effet différent sur chaque composante du champ électromagnétique à la surface du sol. Ceci nous permet de déterminer la structure du terrain stratifié à prospecter.

Examinons donc les effets sur chacune des composantes du champ électromagnétique à la surface de ce terrain à deux couches.

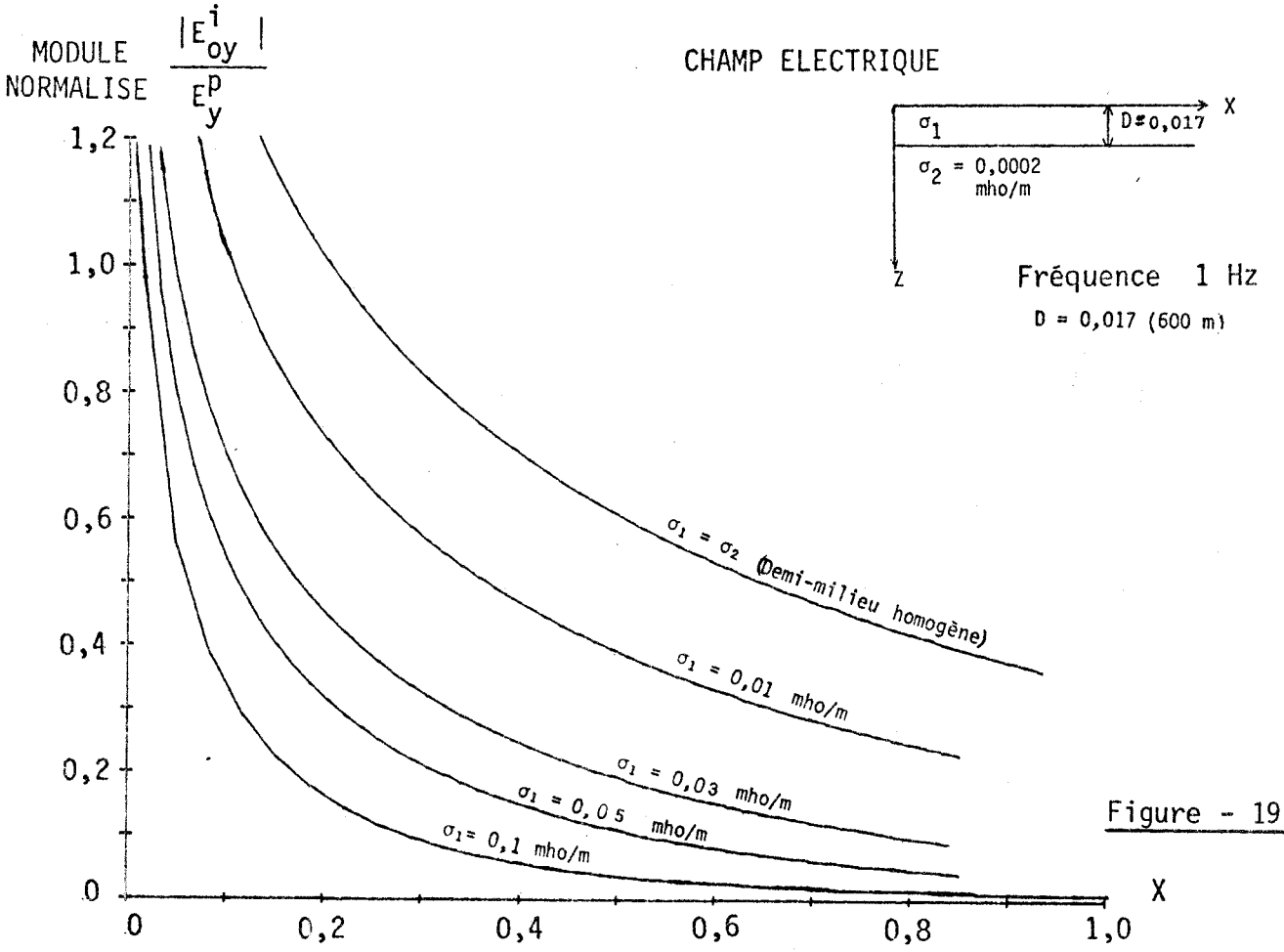


Figure - 19 -

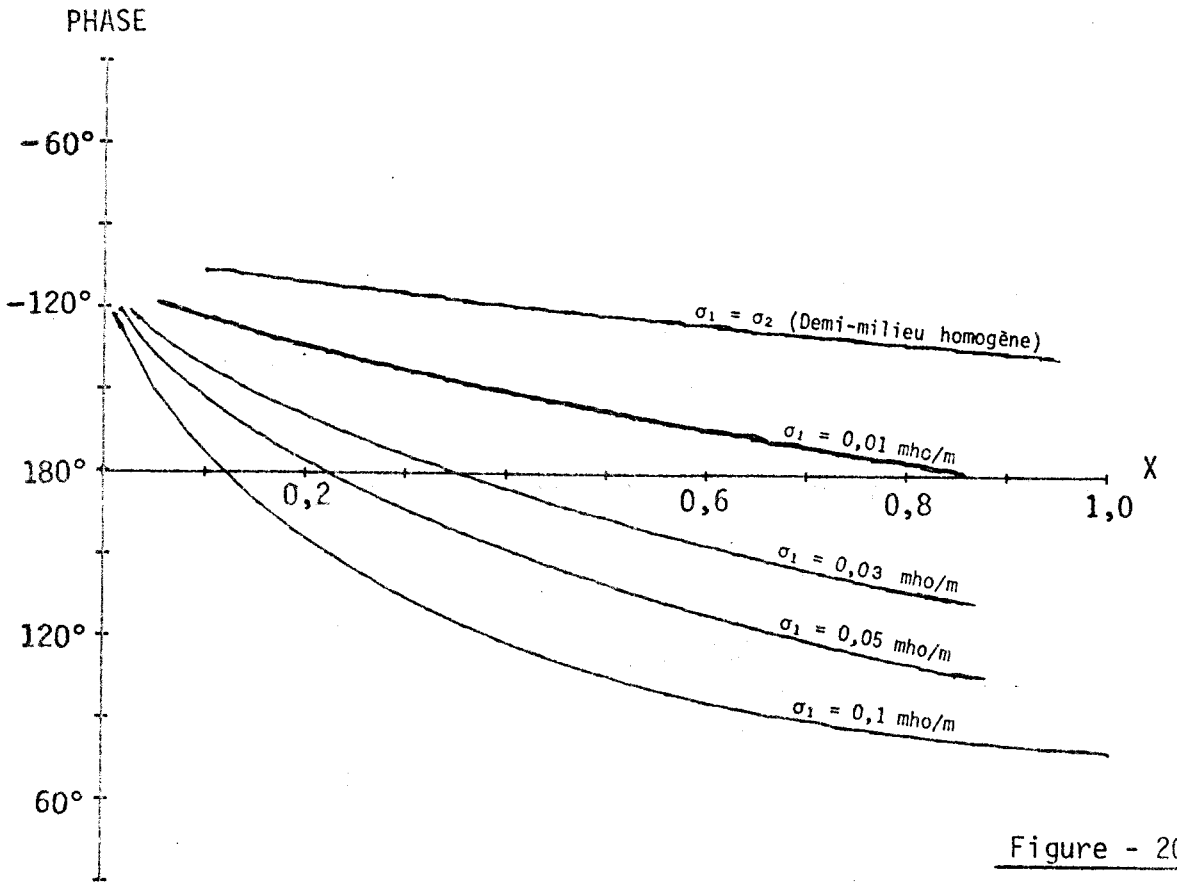


Figure - 20 -

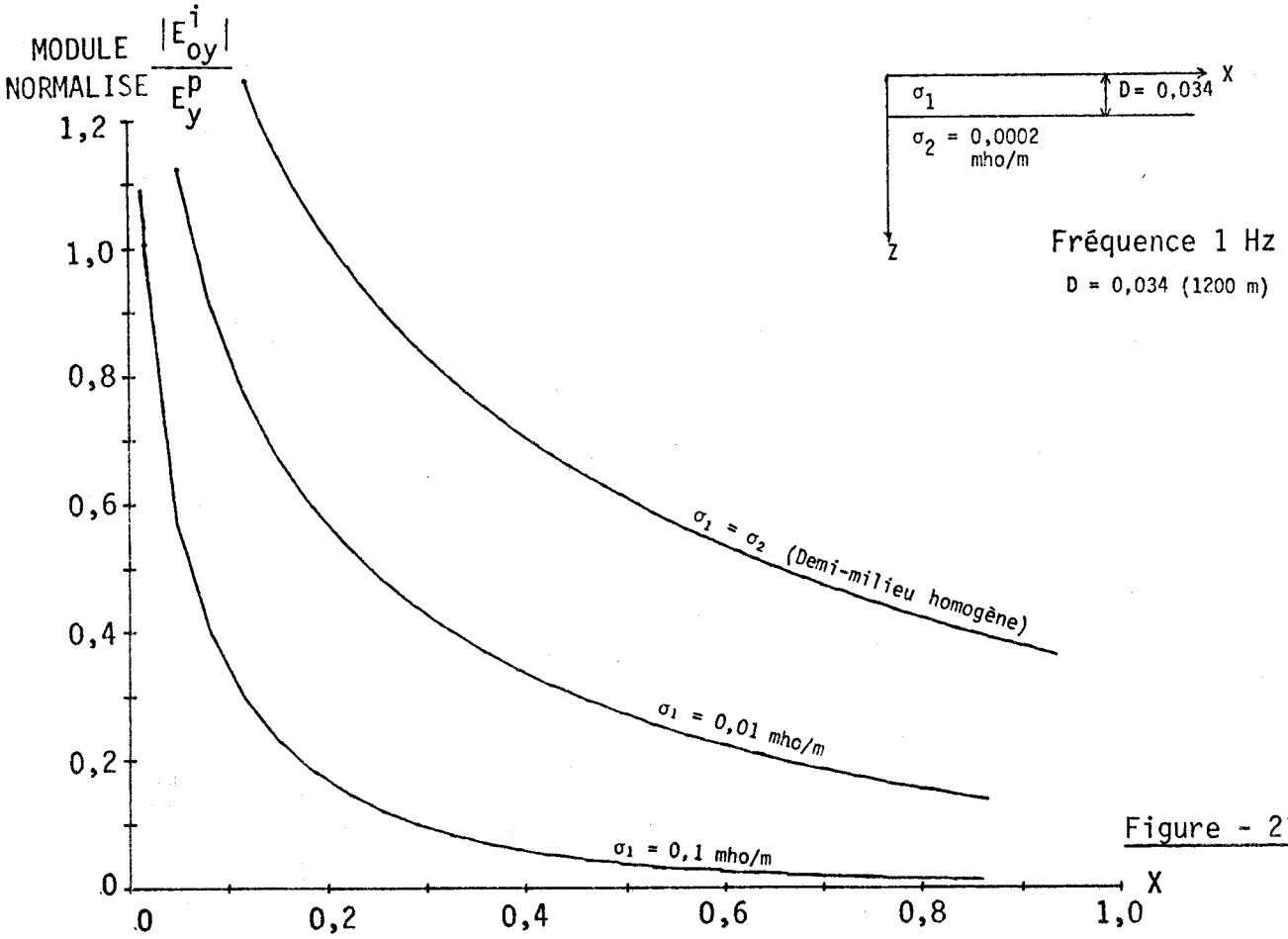


Figure - 21 -

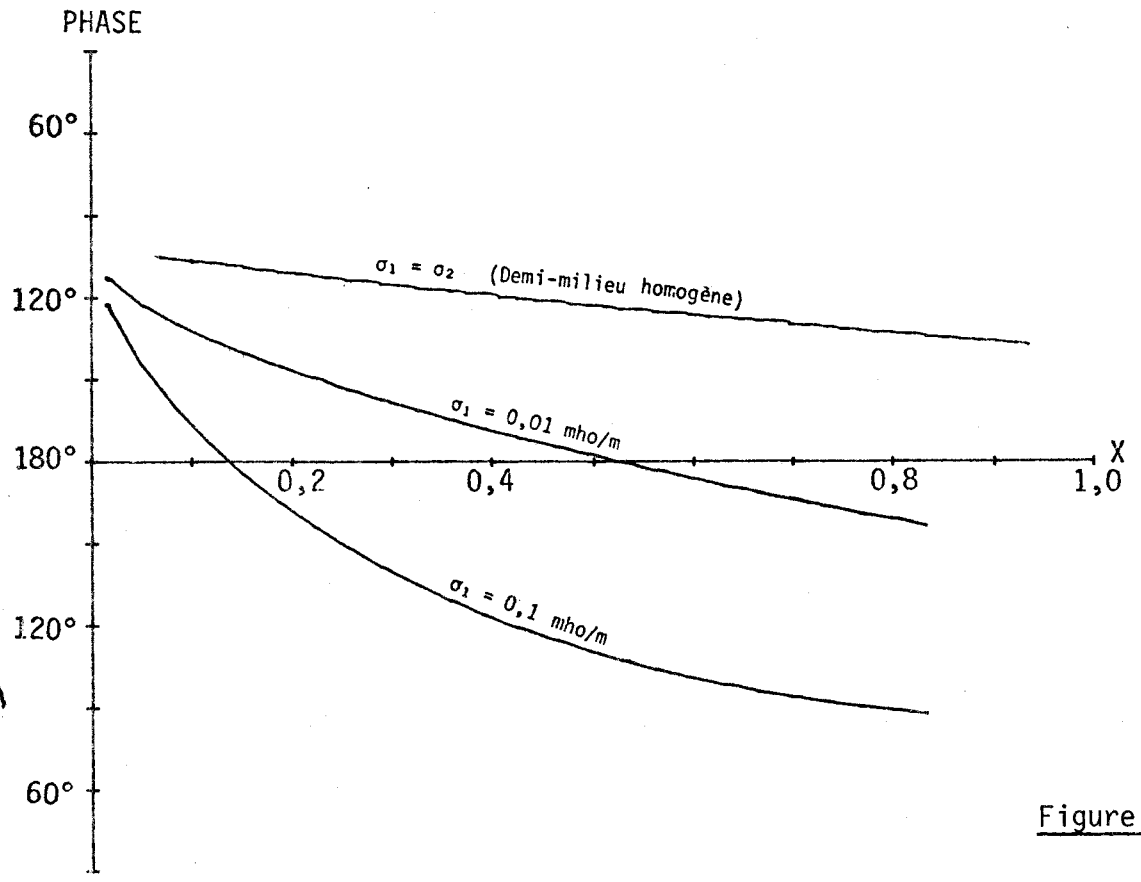


Figure - 22 -

III. 2 - 1 - *La composante du champ électrique* : E^{i}_{oy}

La *forme* des courbes représentant la variation du module de la composante du champ électrique est relativement peu sensible à la présence d'une couche conductrice superficielle.

Lorsque la conductivité σ_1 ou l'épaisseur D de la couche superficielle augmente la courbe représentant la variation du module de E^{i}_{oy} en fonction de X se transforme seulement par contraction des ordonnées tout en gardant la même "forme" d'allure hyperbolique. On peut raisonner de manière similaire pour la variation de la phase.

Evidemment cette diminution est d'autant plus importante que le contraste entre les terrains superficiels et le substratum est important, ou que l'épaisseur de la couche est plus grande. C'est un effet de blindage electrostatique.

Les Figures 19 et 20 sont relatives à une épaisseur de 600 mètres de la couche superficielle dont la conductivité est variable. La fréquence utilisée est égale à 1 Hertz. Les Figures 21 et 22 sont relatives à une épaisseur double (1200 mètres).

Par ailleurs, nous avons normalisé le module du champ électrique $|E^{i}_{oy}|$ par le facteur suivant :

$$E^{p}_{y} = \frac{\omega\mu_o \, I}{\pi}$$

Il est donc clair que l'allure de la composante électrique du champ à la surface du sol est peu révélatrice de la structure du terrrain à prospecter.

Considérons maintenant les composantes du champ magnétique.

III. 2-2 - *La composante horizontale du champ magnétique* : H^i_{ox}

Le rayonnement d'une ligne source dans un milieu homogène infini quelconque (cf. Annexe 4) est tel que la composante horizontale du champ magnétique H^p_x s'annule en tous points sur le plan horizontal contenant la ligne source (Figure 23).

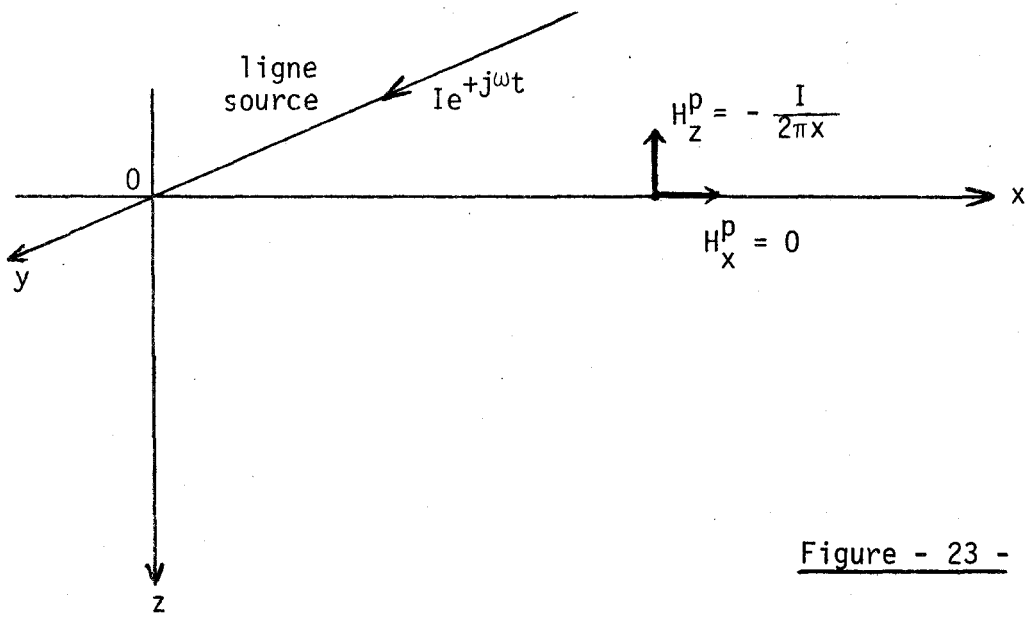


Figure - 23 -

Il est donc clair que dans notre cas la composante horizontale H^i_{ox} du champ magnétique à la surface du sol *n'existe que du fait de la présence du sol.*

Il en résulte que le module ainsi que la phase de la composante horizontale H^i_{ox} du champ magnétique sont fortement sensibles à une variation de la conductivité ou de l'épaisseur des terrains superficiels.

Les Figures 24, 25, 26 et 27 représentent les comportements des modules $|H^i_{ox}|$ et des phases ϕ^i_x de la composante horizontale H^i_{ox} du champ magnétique en fonction de la conductivité σ_1 et l'épaisseur D de la couche superficielle.

CHAMP MAGNETIQUE
HORIZONTAL

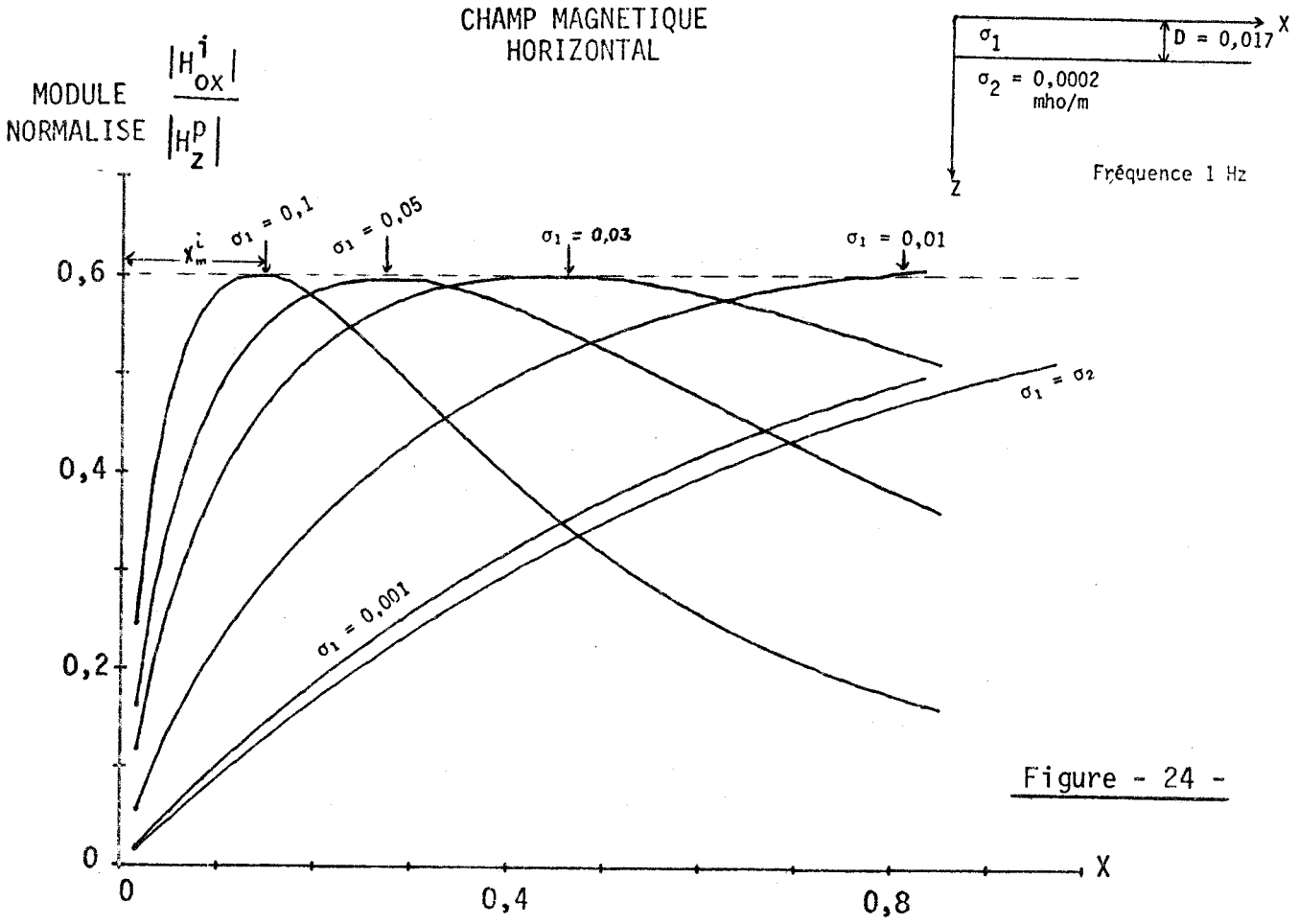


Figure - 24 -

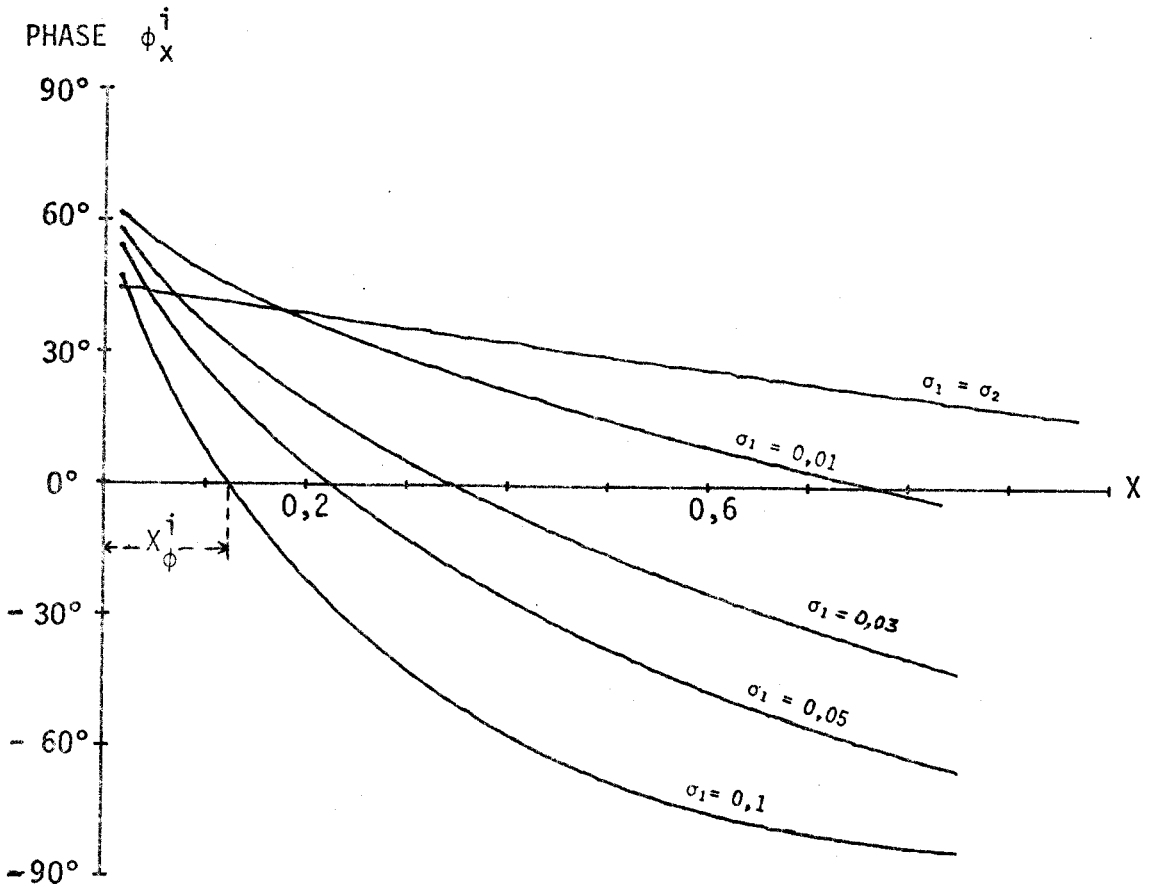


Figure - 25 -

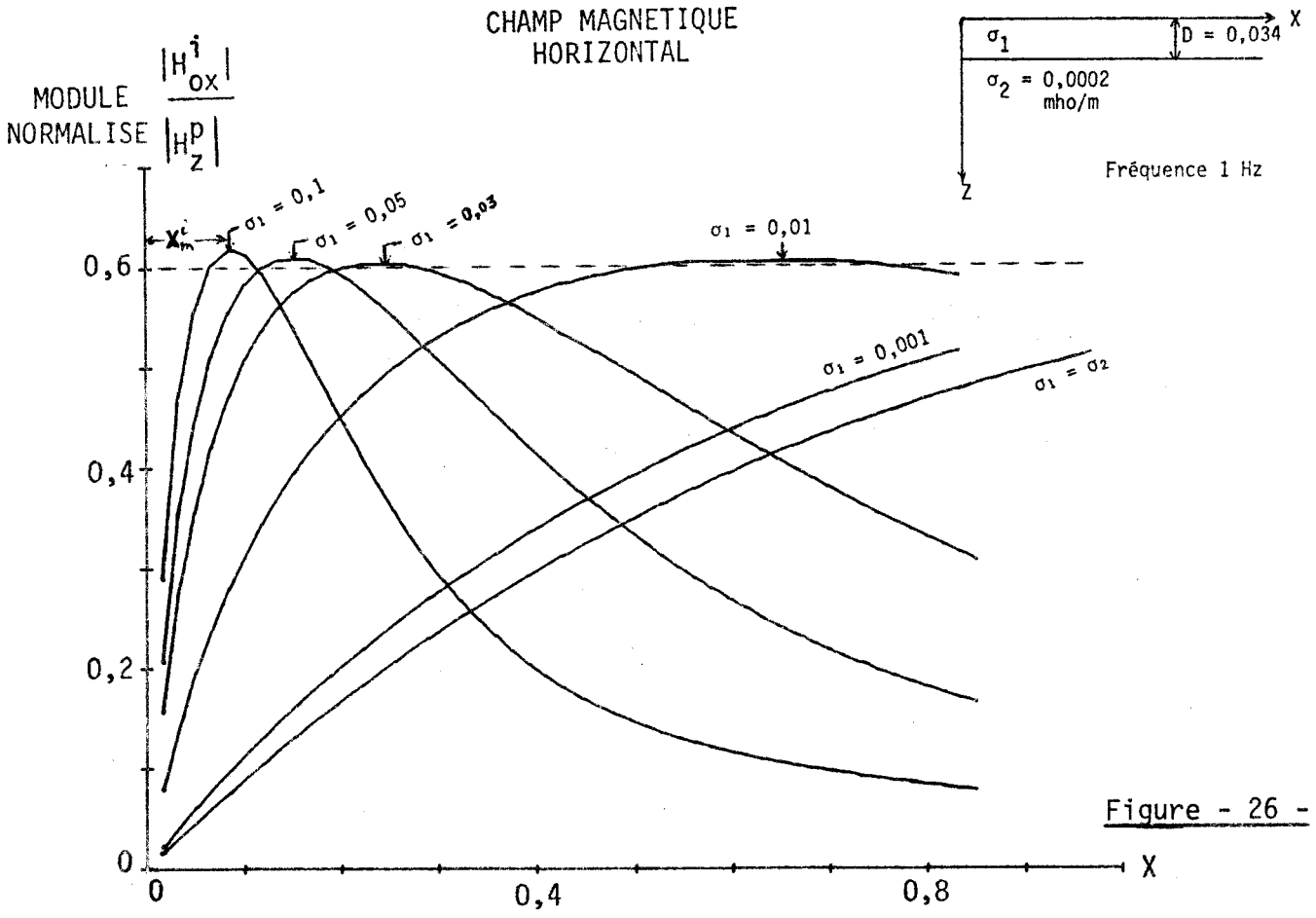


Figure - 26 -

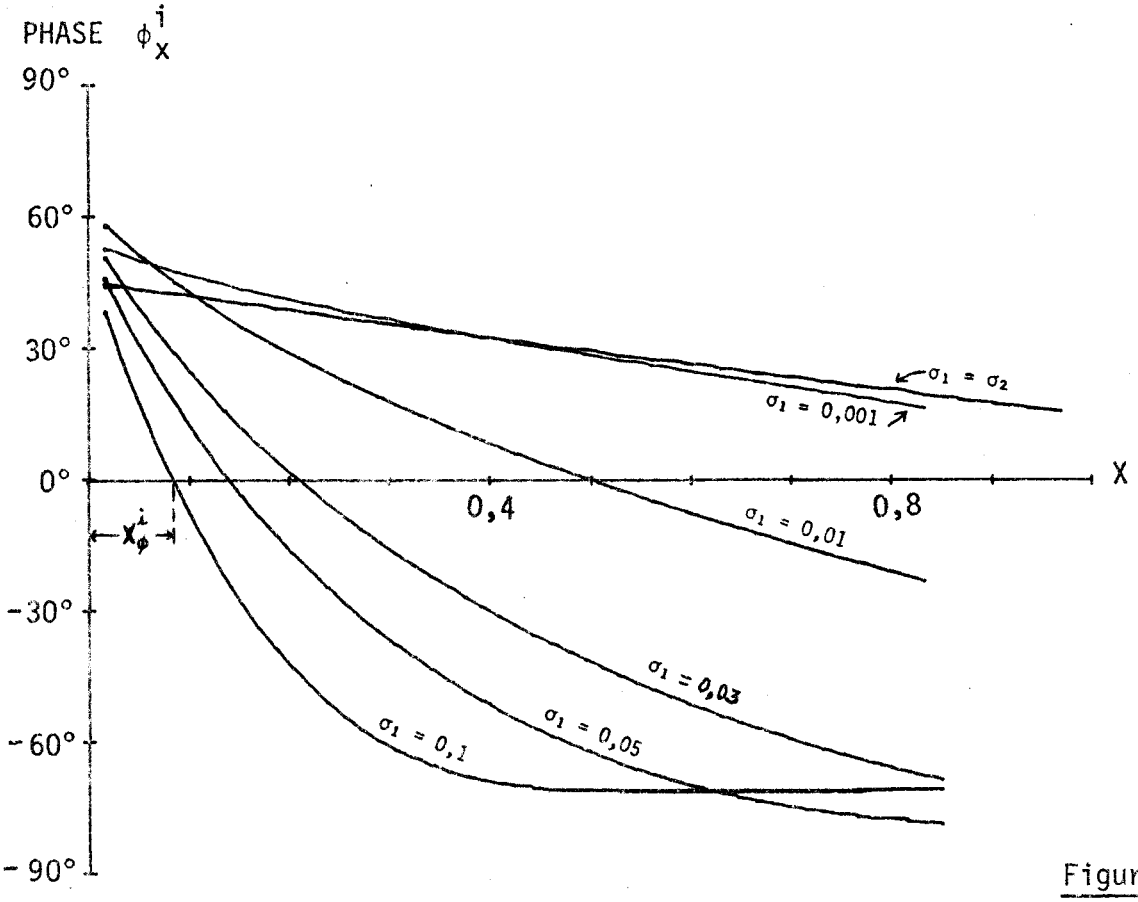


Figure - 27 -

Nous avons normalisé les courbes du module $|H^i_{ox}|$ du champ magnétique en présence d'une couche superficielle par le module $|H^p_z|$ de la composante verticale du champ magnétique qui serait créée en absence du sol à chaque point (cf. Annexe 4). Nous avons en fait :

$$|H^p_z| = \frac{I}{2\pi x} \tag{105}$$

où x est la distance en mètres du récepteur à la ligne source, parcourue par le courant de I ampères.

$\frac{|H^i_{ox}|}{|H^p_z|}$

Ainsi les Figures 24 et 26 sont les abaques des modules normalisés des composantes horizontales du champ magnétique à la surface du terrain à deux couches. Nous avons également représenté sur les Figures 25 et 27 les phases correspondantes Φ^i_x.

Par ailleurs, l'évolution de ces grandeurs est représentée en fonction de la distance réduite X mesurée en unités de profondeur de pénétration δ_2 dans le substratum de conductivité σ_2 pour diverses valeurs de la conductivité σ_1 de la couche superficielle.

Les Figures 24 et 25 sont relatives à une épaisseur réduite de la couche superficielle (D = 0,017) égale au rapport entre son épaisseur réelle en mètres et la profondeur de pénétration δ_2. Les Figures 26 et 27 sont relatives à une épaisseur réduite (D = 0,034).

Cette représentation offre l'avantage de pouvoir observer le champ en fonction de variables sans dimensions. D'autre part, pour un terrain donné, chaque courbe peut être considérée comme celle tracée à une fréquence fixe. Ainsi dans le cas de la Figure 26, par exemple D = 0,034 correspond à une épaisseur de 1200 mètres si la fréquence utilisée est égale à 1 Hertz.

Nous pourrions tracer un grand nombre d'abaques du même type pour diverses valeurs de D et de σ_1. Cependant, nous avons préféré résumer tous ces cas en faisant les remarques suivantes :

a) Pour une fréquence donnée quelconque, et quelles que soient l'épaisseur et la conductivité du terrain superficiel, chacune des courbes du module normalisé $\left\{\frac{|H^i_{ox}|}{|H^p_z|}\right\}$ *passe par une valeur maximum voisine de 0,6.* (cf. Figures 24 et 26)

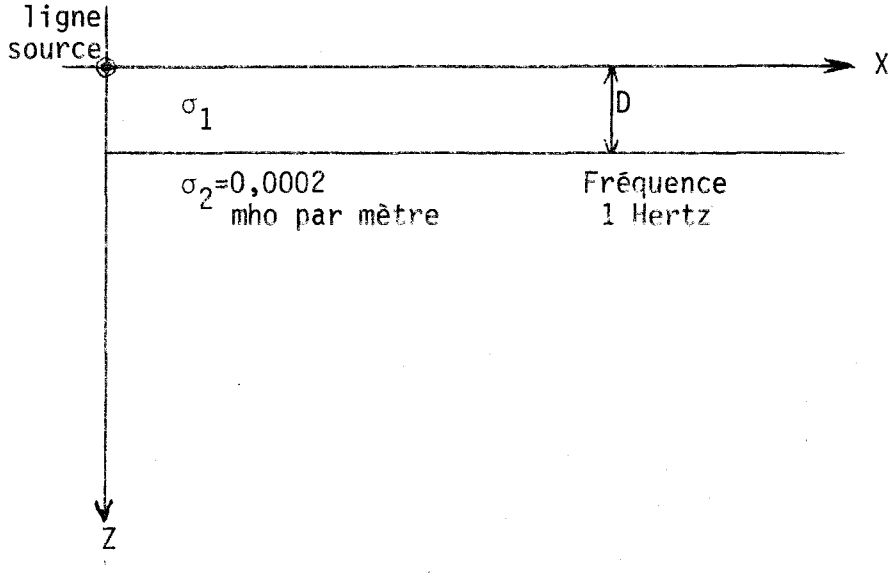
Toutefois *les valeurs des maxima fluctuent légèrement* autour de cette valeur moyenne en fonction de la conductivité et de l'épaisseur de la couche superficielle. Mais la variation ne dépasse pas 5 % (cf. Tableau 2 sur page 56).

b) A une distance X^i_ϕ de l'émetteur, inférieure à celle où le module normalisé $\frac{|H^i_{ox}|}{|H^p_z|}$ de la composante horizontale du champ magnétique atteint la valeur maximum voisine de 0,6, nous avons constaté *que la phase* ϕ^i_x *de cette même composante passe par une valeur nulle.*

Nous pouvons vérifier ce résultat en examinant comparativement soit les Figures 24 et 25 ou encore les Figures 26 et 27, soit le relevé des diverses valeurs du Tableau 2.

c) Par contre, dans ces conditions, la *position* X^i_m *de ces maxima* du module $|H^i_{ox}|$ normalisé et *celle* X^i_ϕ *des zéros* de sa phase ϕ^i_x sont *très sensibles* aux variations des paramètres de cette couche superficielle comme le montre encore le Tableau 2.

Les Figures 24, 25, 26 et 27 sont relatives à deux épaisseurs différentes de la couche superficielle. Au fur et à mesure que la conductivité σ_1 et que l'épaisseur D augmentent, les distances X^i_m et X^i_ϕ à



D	σ_1 mho par mètre	Valeurs des maxima des modules normalisés $\lvert H^i_{oX}\rvert / \lvert H^p_z\rvert$	Position X^i_m des maxima	Position X^i_ϕ où $\phi^i_X \neq 0$
0 (demi-milieu)	0,0002	0,5874	1,70	1,564
0,0085 (300 m)	0,1	0,5936	0,272	0,212
	0,05	0,6019	0,510	0,390
	0,03	0,6104	0,748	0,570
0,017 (600 m)	0,1	0,6006	0,136	0,120
	0,05	0,5976	0,272	0,220
	0,03	0,6010	0,440	0,345
	0,01	0,6146	0,969	0,750
	0,001	0,5942	1,615	1,445
0,0255 (900 m)	0,1	0,6117	0,102	0,090
	0,05	0,6033	0,187	0,165
	0,03	0,6010	0,306	0,250
	0,01	0,6113	0,765	0,595
0,034 (1200 m)	0,1	0,6177	0,085	0,080
	0,05	0,6105	0,153	0,145
	0,03	0,6051	0,238	0,212
	0,01	0,6085	0,612	0,495
	0,001	0,5993	1,547	1,36

Tableau - 2 -

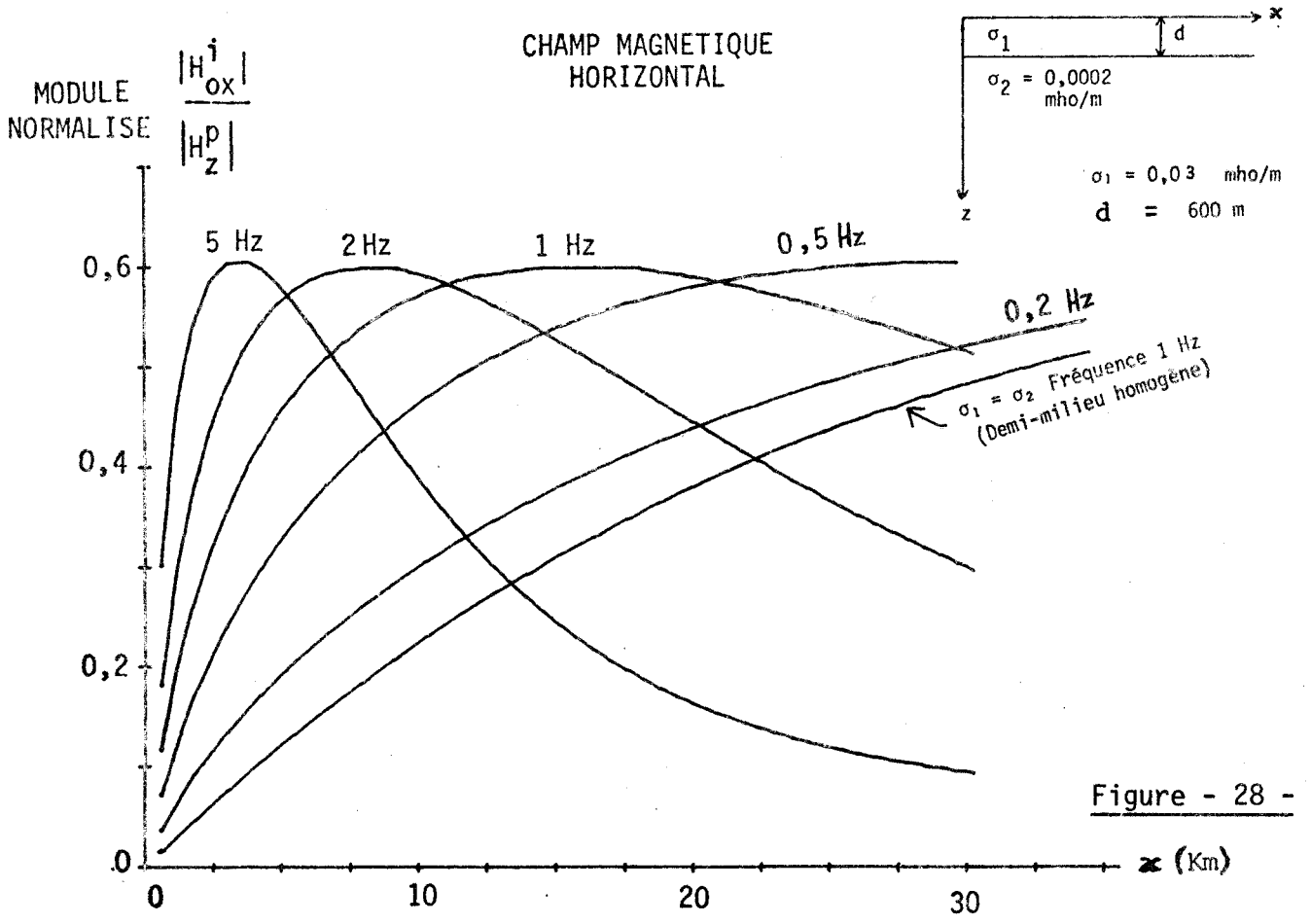


Figure - 28 -

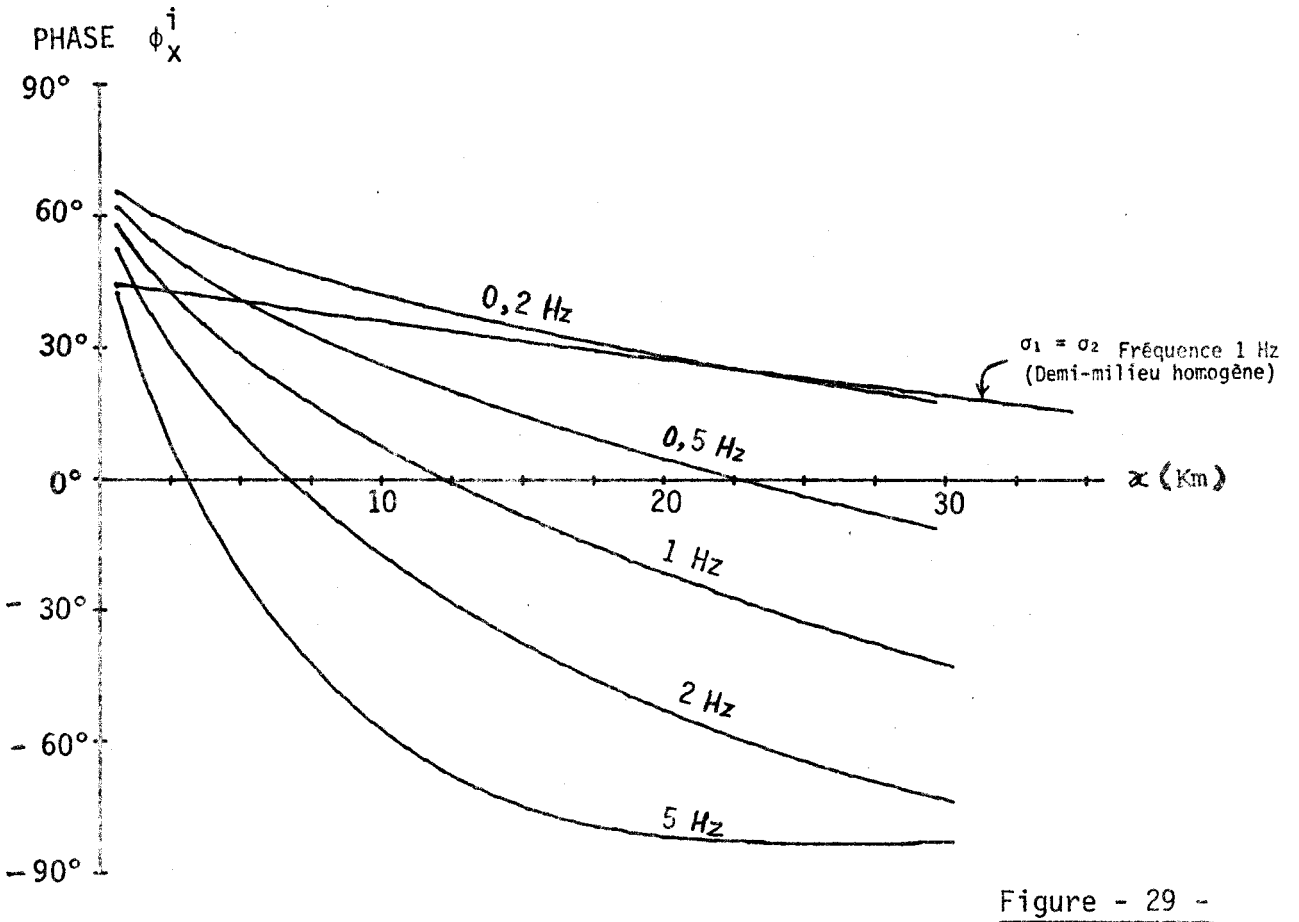


Figure - 29 -

l'émetteur des positions de zéro de phase et de module maximum ainsi que le rayon de courbure au voisinage de ces maxima diminuent.

d) Il est toujours possible d'éliminer ou au contraire de renforcer la contribution des couches superficielles à la composante horizontale H^i_{ox} du champ magnétique par un choix judicieux de la fréquence dans la gamme de 0,1 à 20 Hertz environ (Figures 28 et 29).

Une augmentation de fréquence met en relief la contribution à la composante horizontale de la couche superficielle tandis qu'une diminution de fréquence *amortit* son effet et par conséquent la rend transparente. Ce résultat est bien connu et il a notamment servi de point de départ à l'élaboration d'une méthode de prospection à faible profondeur |1| |27|.

On peut donc augmenter suffisamment la fréquence pour mettre en évidence les maxima "pointus". Connaissant la conductivité σ_1 par une mesure préalable, on peut déterminer l'épaisseur de cette première couche en fonction de la position de chaque maximum "pointu" du module $|H^i_{ox}|$ et de celle du zéro de phase correspondant ϕ^i_x.

Dans le paragraphe suivant nous allons examiner les effets de la couche superficielle sur la composante verticale H^i_{oz} du champ magnétique.

III. 2-3 - *La composante verticale du champ magnétique* H^i_{oz}

La composante verticale H^i_{oz} du champ magnétique à la surface du sol est la composante naturelle (annexe 4) créée par la source d'excitation (Figure 23). Nous pouvons donc *penser* que H^i_{oz} doit être relativement peu sensible à la présence du sol, et du coup à la présence d'une couche superficielle.

Ceci n'est évidemment pas vrai si la conductivité moyenne σ_1 et l'épaisseur d de la couche superficielle sont trop grandes ; soit par exemple, à une fréquence de 1 Hertz, et pour une épaisseur de 300 mètres, une valeur de σ_1 supérieure à 0,03 mho par mètre (ce qui correspond à un rapport de $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ supérieur à 150).

Les Figures 30 et 31 sont relatives aux modules normalisés $\frac{|H^i_{oz}|}{|H^p_z|}$ et aux phases ϕ^i_z de la composante verticale H^i_{oz} du champ magnétique à la surface du terrain avec une conductivité variable de la couche superficielle d'épaisseur 600 mètres. La fréquence utilisée est égale à 1 Hertz.

Nous faisons remarquer en particulier que le module $|H^i_{oz}|$ de la composante verticale du champ magnétique est toujours inférieur à celui $|H^p_z|$ créé en absence du sol. *Son module normalisé est donc toujours plus petit que 1* comme l'on peut l'observer sur la Figure 30.

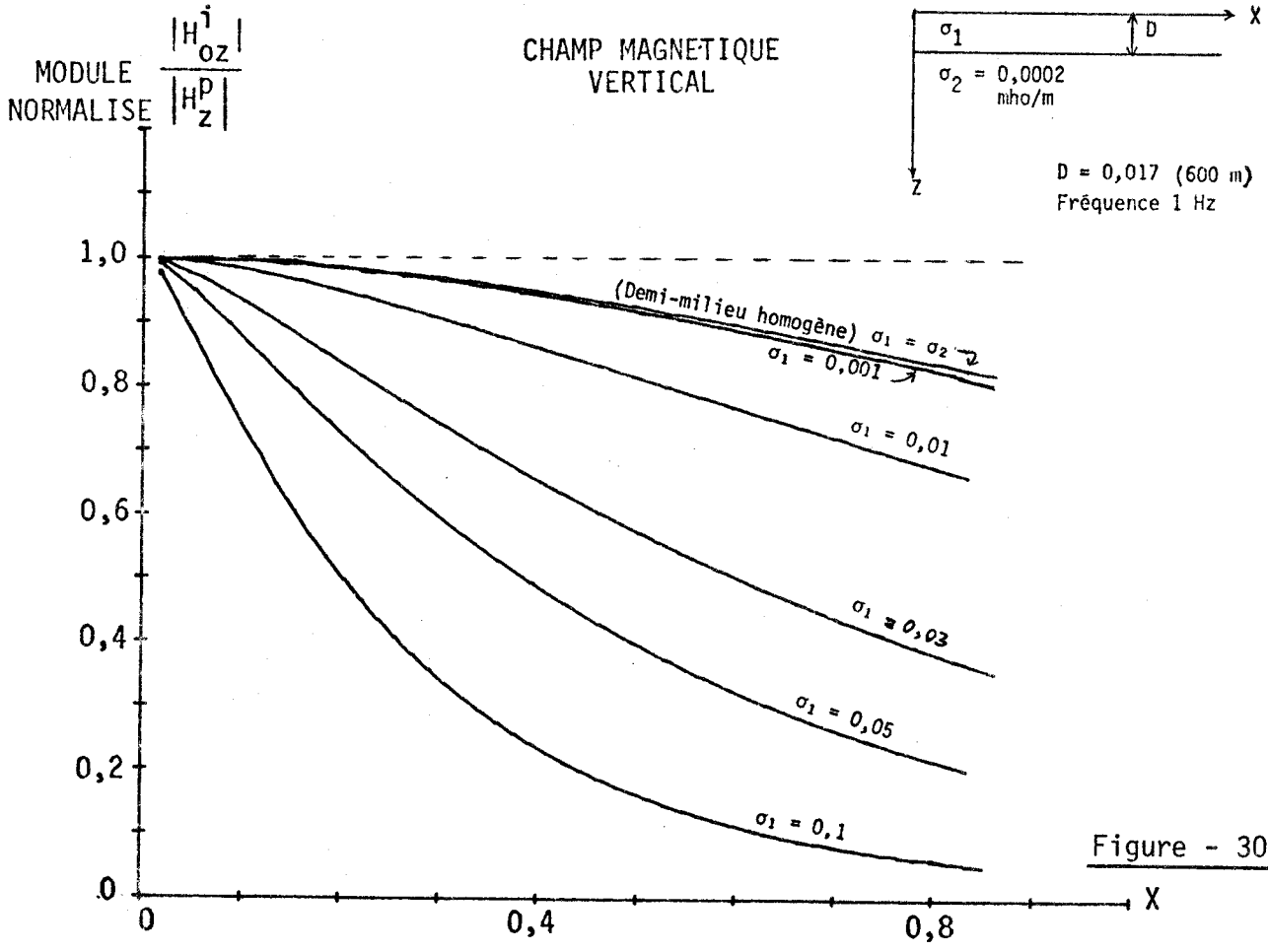


Figure - 30 -

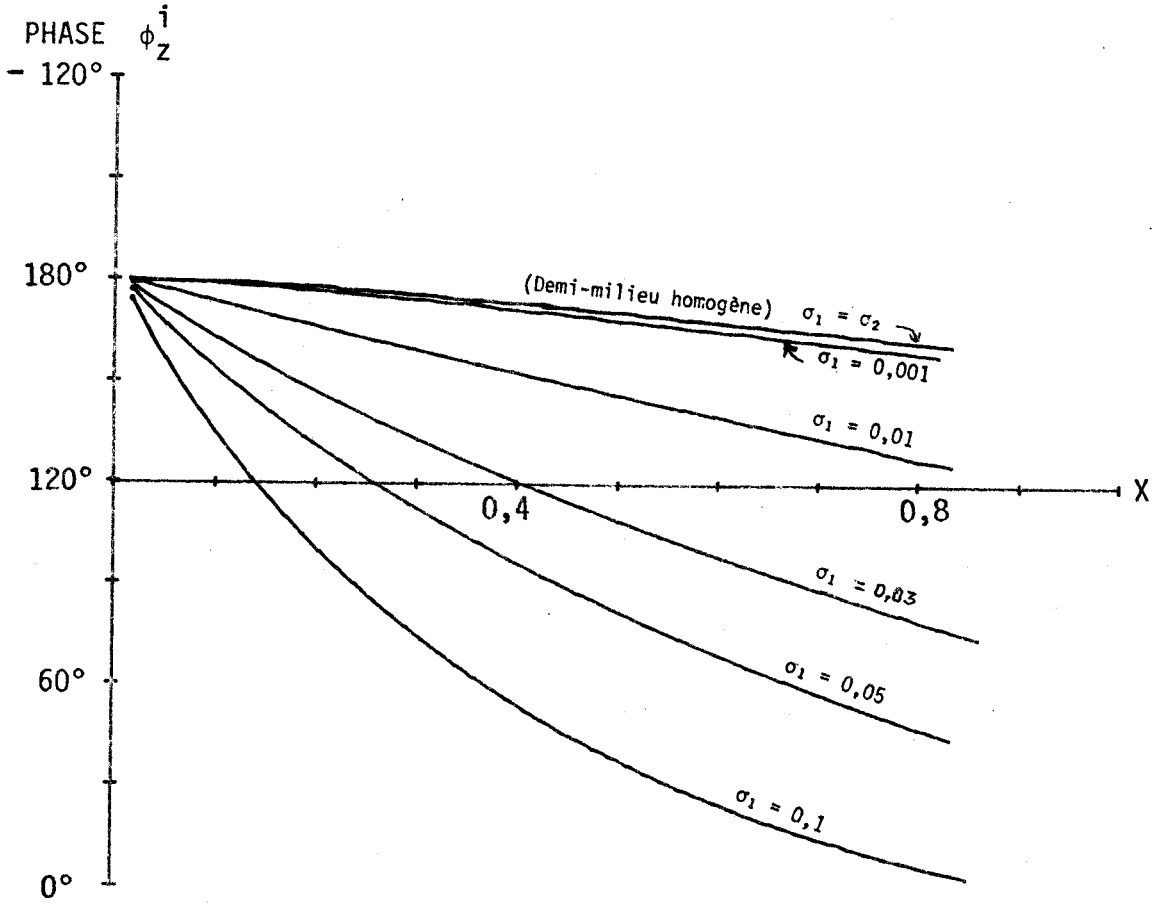


Figure - 31 -

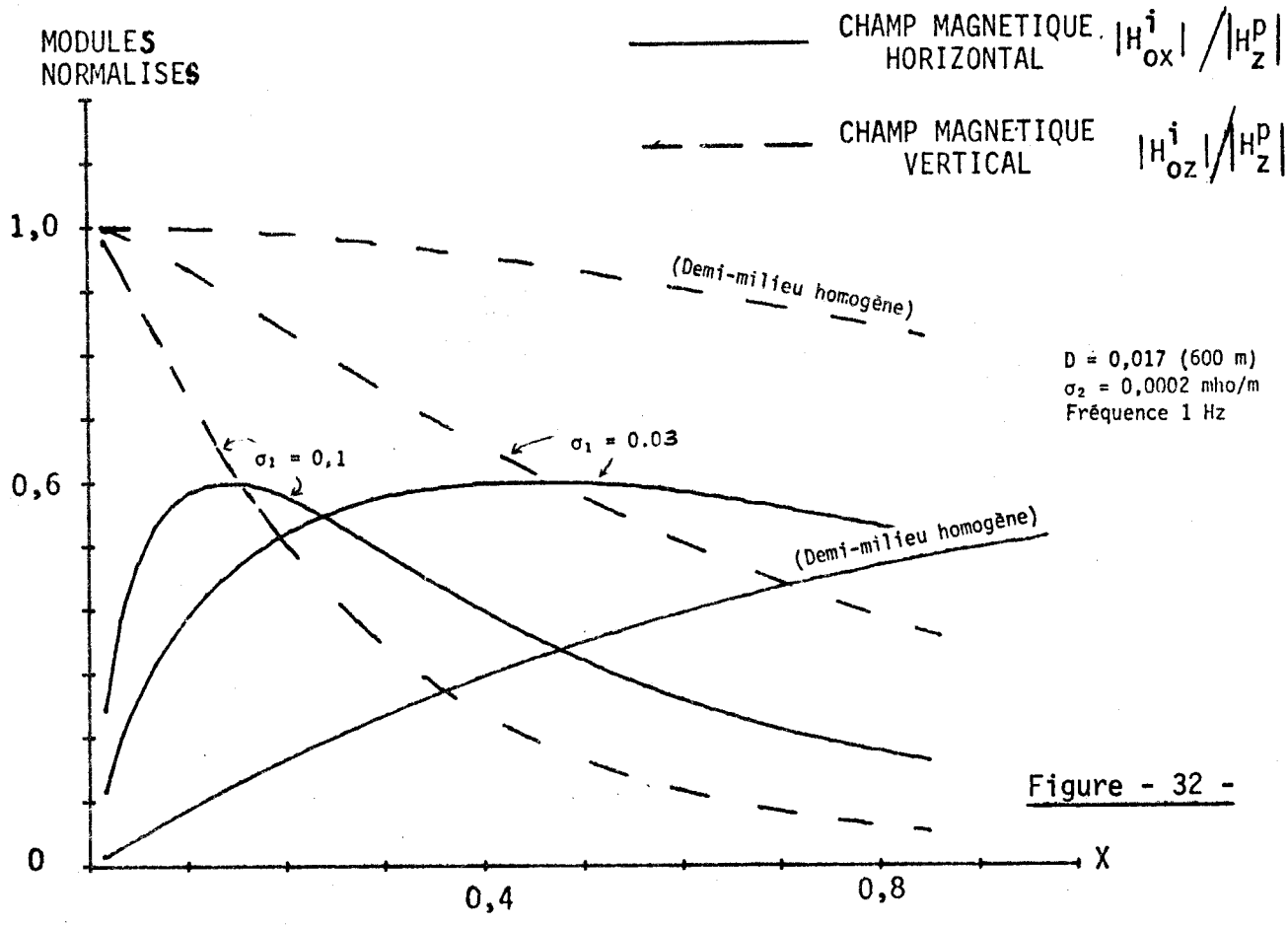


Figure - 32 -

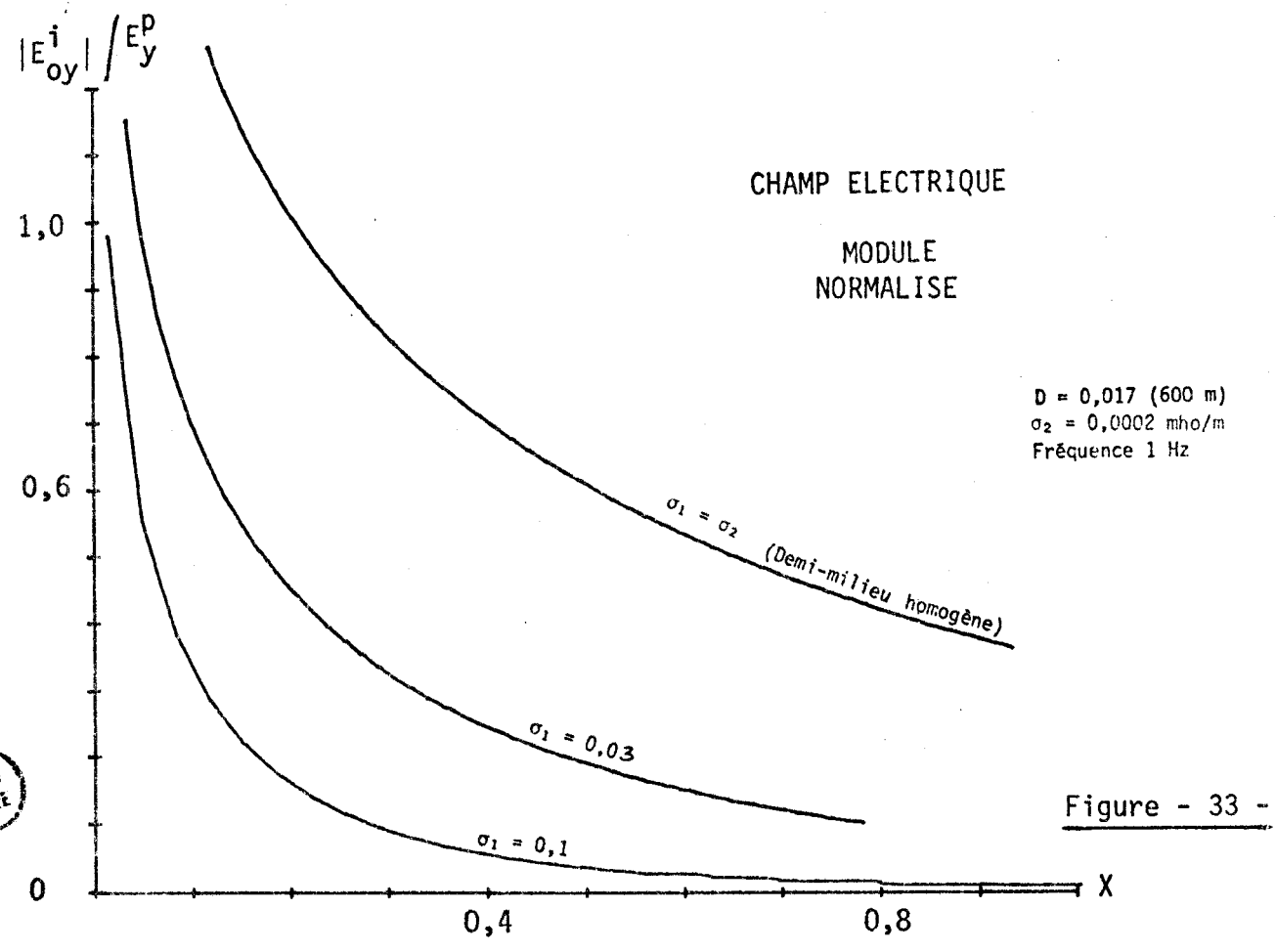


Figure - 33 -

Par ailleurs en examinant comparativement les modules $|H^i_{ox}|$ de la composante horizontale (Figure 24) et ceux $|H^i_{oz}|$ de la composante verticale (Figure 30), on constate qu'il y a des "déformations" de la courbe de la composante verticale lorsque celle de la composante horizontale présente des maxima "pointus". Ceci est illustré sur la Figure 32.

En fait les lignes de force du champ magnétique sont d'autant plus inclinées sur l'horizontale que le sol est plus conducteur.

Ceci ne *renforce pas* l'idée que la composante verticale H^i_{oz} du champ magnétique est peu sensible à la présence du sol.

III. 2-4 - *Résumé des effets de la couche conductrice superficielle*

Nous avons représenté en Figures 32 et 33 les effets de la couche superficielle sur les modules de chacune des trois composantes du champ électromagnétique. Ceci nous permet de faire un résumé simple.

La composante horizontale H^i_{ox} du champ magnétique est très sensible à la variation des paramètres de la couche superficielle tels que sa conductivité et son épaisseur. Toutefois, il est toujours possible d'éliminer ou de renforcer la contribution de la couche superficielle à cette composante H^i_{ox} par un choix judicieux de la fréquence utilisée.

A une fréquence donnée, si la courbe du module normalisé de la composante horizontale $|H^i_{ox}|/|H^p_z|$ du champ magnétique prend une allure de pic, celles des modules normalisés de sa composante verticale $|H^i_{oz}|/|H^p_z|$ et de la composante électrique $|E^i_{oy}|/ E^p_y$ révèlent des atténuations importantes (Figures 32 et 33).

Nous sommes amenés à conclure qu'il y a des régions sur le terrain où le module normalisé de la composante horizontale du champ magnétique possède une valeur maximum et ceci encore à des distances X^i_m (Figure 32) de l'origine bien précises qui dépendent des caractéristiques de la couche superficielle.

Par ailleurs, ces distances X^i_m sont caractérisées par les valeurs nulles des phases ϕ^i_x de cette même composante horizontale H^i_{ox}.

Cependant, la position exacte X^i_ϕ où la phase est nulle, est légèrement inférieure à celle X^i_m, où le module normalisé est maximum. Cette valeur maximum du module $|H^i_{ox}|$ est environ 0,6 fois celle du module $|H^p_z|$ du champ créé en absence du sol (cf. Tableau 2 - page 56).

En examinant comparativement les comportements des composantes horizontale et verticale (Figure 34) nous avons constaté que lorsque le module normalisé de la composante horizontale atteint sa valeur 0,6 celui de la composante verticale en fait autant.

MODULES NORMALISES

CHAMP MAGNETIQUE HORIZONTAL $|H^i_{ox}| / |H^p_z|$

CHAMP MAGNETIQUE VERTICAL $|H^i_{oz}| / |H^p_z|$

D = 0,017 (600 m)
σ_2 = 0,0002 mho/m
Fréquence 1 Hz

X^i_m $\sigma_1 = 0,05$

X^i_ϕ

1,0

0,6

0

0,4

0,8

X

$\sigma_1 = \sigma_2$

$\sigma_1 = 0,01$

$\sigma_1 = 0,03$

$\sigma_1 = 0,05$

$\sigma_1 = 0,1$

Figure - 34 -

PHASES

180°

120°

90°

0°

-90°

0,2

0,6

X

ϕ^i_x

ϕ^i_z

$\sigma_1 = \sigma_2$

$\sigma_1 = 0,01$

$\sigma_1 = 0,03$

$\sigma_1 = 0,05$

$\sigma_1 = 0,1$

X^i_ϕ $\sigma_1 = 0,05$

Figure - 35 -

Nous voyons donc que le voisinage des distances X_m^i est caractérisé par :

a) $|H_{ox}^i| \# |H_{oz}^i| \# 0{,}6 \times |H_z^p|$

b) $\phi_x^i \# 0$

c) En général le déphasage entre ces deux composantes $(\phi_z^i - \phi_x^i)$ est voisin de 120°

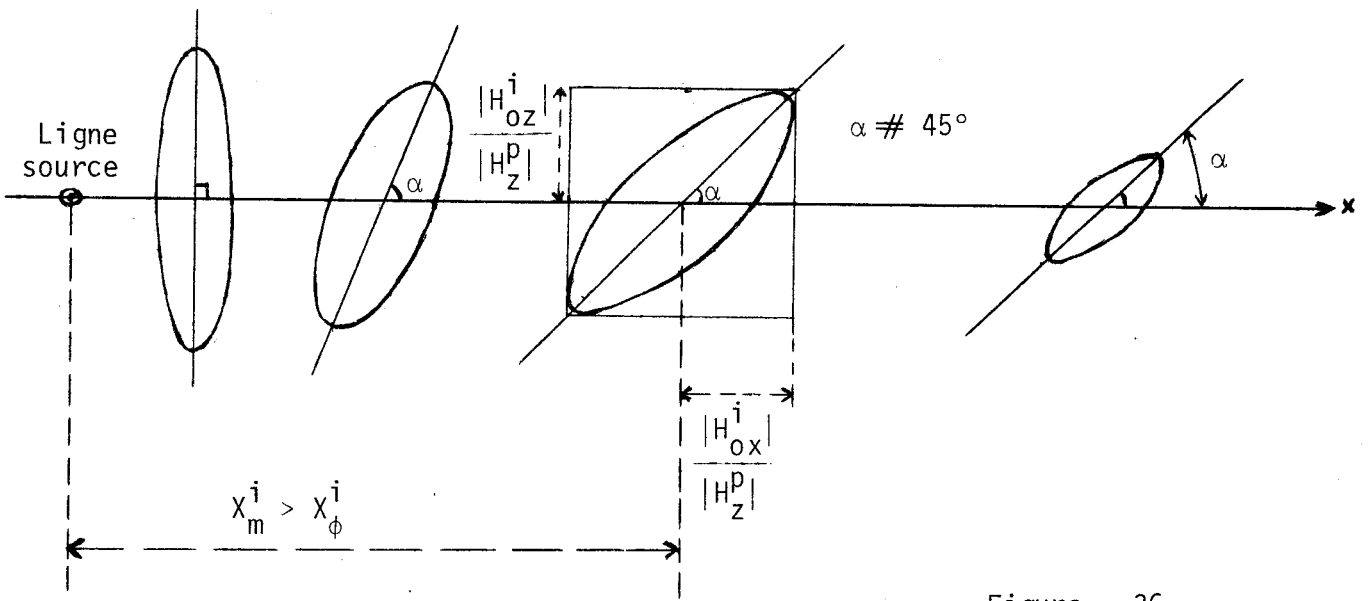


Figure - 36 -

En réalité, les composantes H_{ox}^i et H_{oz}^i sont déphasées l'une par rapport à l'autre. Il en résulte que l'extrémité du vecteur champ magnétique décrit une éllipse, comme le montre la Figure 36.

Près de l'émetteur le déphasage entre les deux composantes du champ magnétique est voisin de $\pi/2$ et l'ellipse a son grand axe presque vertical. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'émetteur le grand axe de l'ellipse s'incline, l'éllipse s'aplatit, son excentricité augmente tandis que les modules des composantes diminuent. De même à une distance fixe quelconque de l'émetteur, l'angle α diminue au fur et à mesure que la conductivité moyenne du sol augmente.

Il est alors possible de choisir l'excentricité ou l'angle que forme le grand axe avec la surface du sol, comme paramètre de prospection[1].

Cette conclusion se simplifie particulièrement dans notre cas à des distances X_m^i où l'angle α vaut environ 45°, puisque $|H_{ox}^i| \neq |H_{oz}^i|$.

Le travail que nous venons de résumer donne une justification théorique à l'emploi d'une ligne source pour étudier la structure des terrains superficiels. On aboutit à des conclusions analogues aux études qui ont pu être faites dans le cas de l'utilisation d'autres types d'antennes d'émission.

-o-o-o-o-o-

III. 3 - EFFETS CUMULES DE LA COUCHE CONDUCTRICE ET DE LA POCHE MAGMATIQUE

L'étude des effets dûs à la présence d'un sol stratifié nous a permis de conclure que l'on pouvait éliminer la contribution de la couche superficielle aux composantes (E^i_{oy}, H^i_{ox} et H^i_{oz}) du champ électromagnétique à la surface du sol par un choix judicieux de la fréquence.

Par ailleurs nous avons indiqué un moyen de connaître l'épaisseur de la couche superficielle à partir des mesures effectuées en surface de ce même terrain. A partir de ce moment nous supposons donc que *les caractéristiques de la couche superficielle sont connues.*

Dans ce paragraphe nous étudions tout d'abord les effets cumulés de la couche conductrice et d'une poche magmatique sur l'évolution du champ électromagnétique à la surface du sol. Et ensuite nous présentons une méthodologie pour mettre en évidence la contribution au champ total à la surface, de cette poche magmatique.

Puisque nous avons supposé que les caractéristiques de la couche superficielle étaient connues et puisque nous nous intéressons à la détection d'une poche magmatique dont les paramètres géométriques sont donnés (Figure 18 - page 49), il est préférable de tracer les courbes de cette partie de l'étude en distances réelles plutôt qu'en distances réduites. Ceci implique l'emploi d'une seule fréquence de travail par cas de Figure. Dans ces conditions chaque Figure aura l'avantage de nous montrer directement les vraies grandeurs.

Nous sommes donc amené à étudier l'évolution des champs à la surface du sol en fonction des caractéristiques de la couche

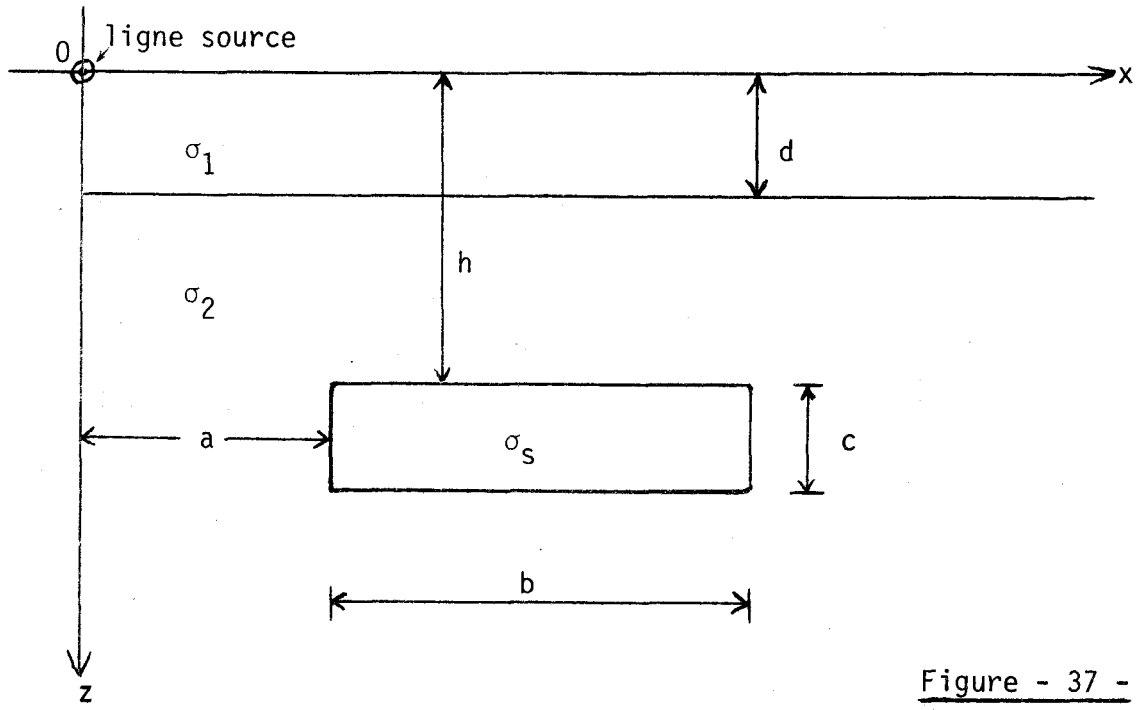


Figure - 37 -

superficielle en faisant varier la profondeur "h" et la distance horizontale "a" de la poche magmatique à la ligne source (Figure 37). Ceci est fait dans le but de mettre en évidence la détectabilité de la poche magmatique sous l'effet de masque de la couche conductrice superficielle.

Nous définissons donc de nouveau notre problème de détectabilité de la poche magmatique comme celui de "démasquage" de l'effet d'écran préalablement produit par la couche superficielle, dont on connait maintenant les caractéristiques.

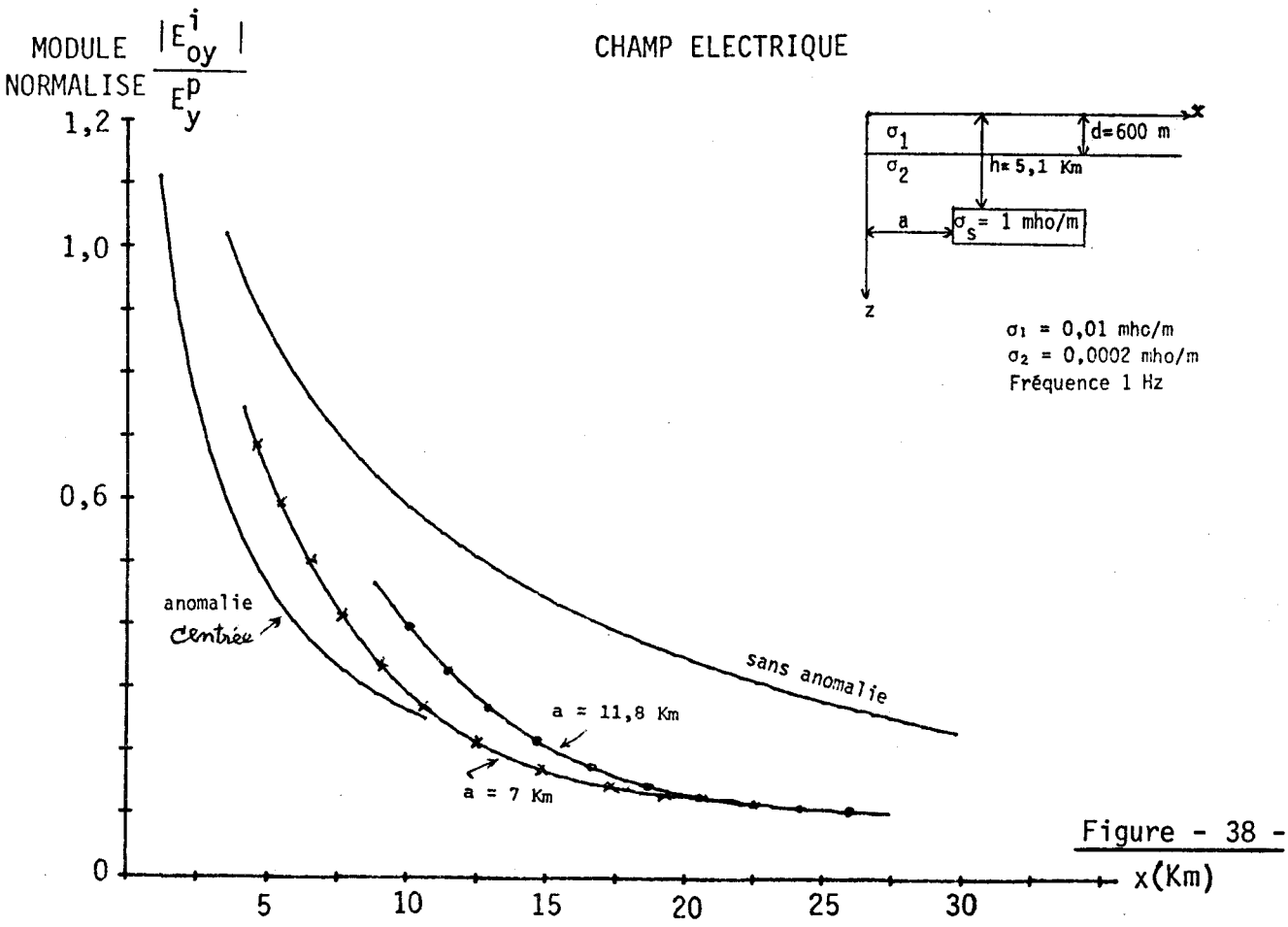


Figure - 38 -

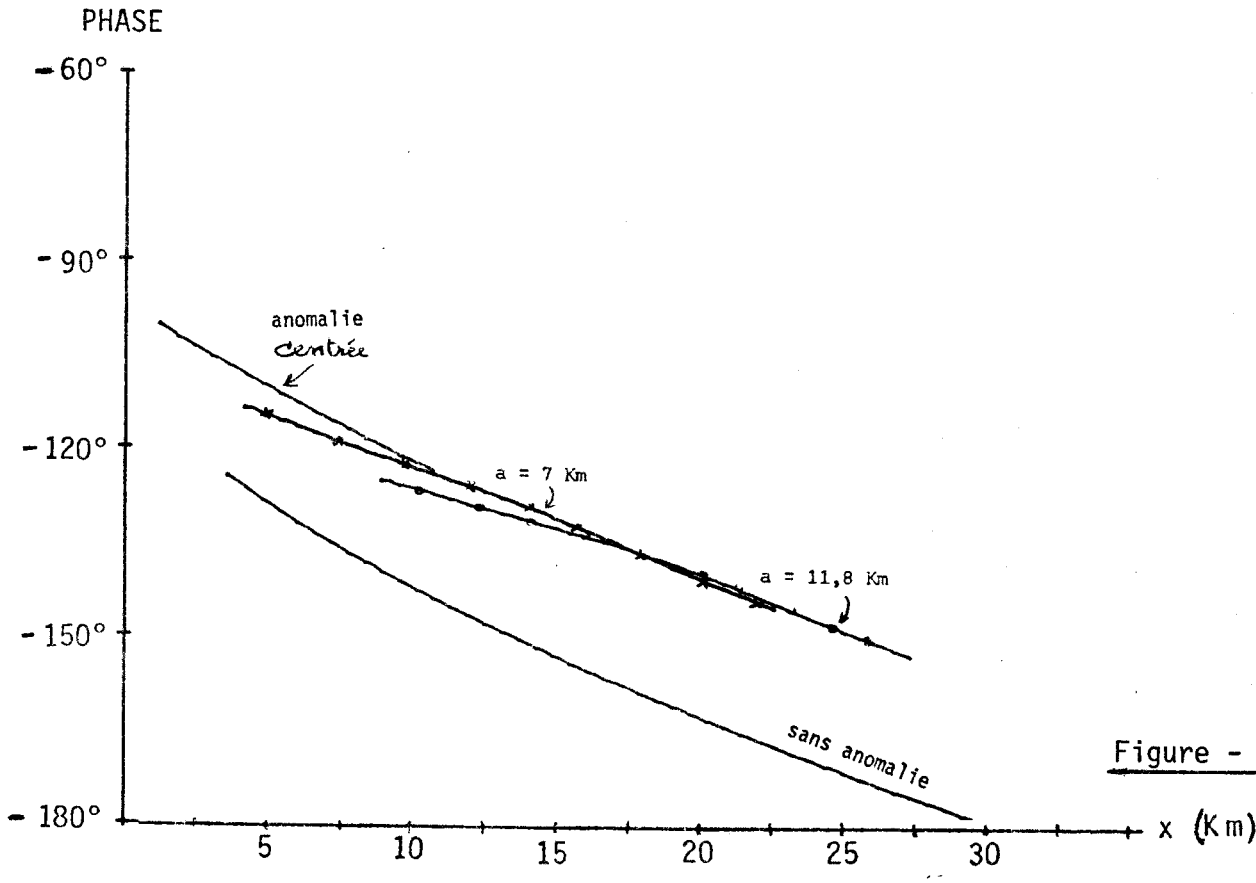


Figure - 39 -

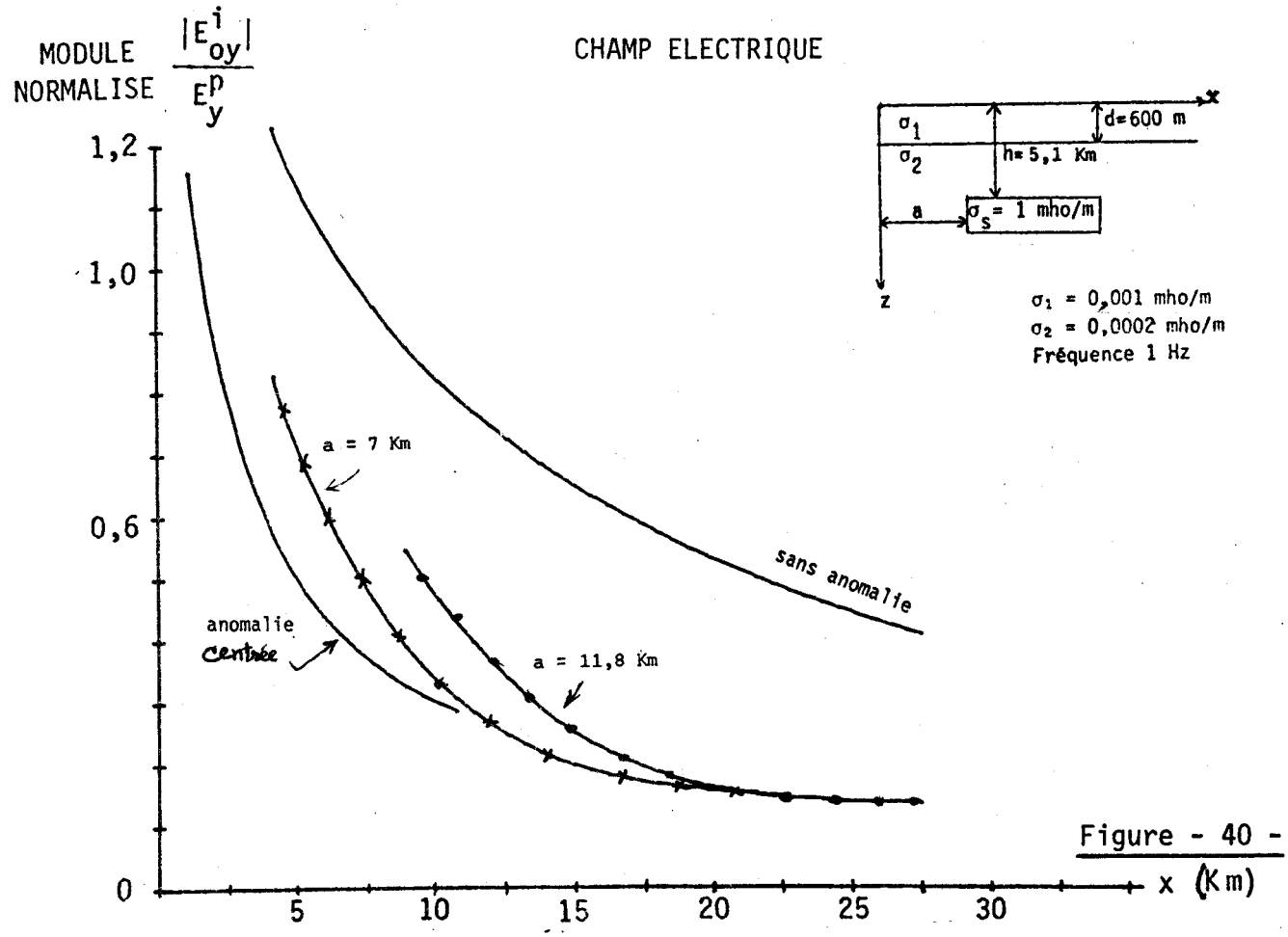


Figure - 40 -

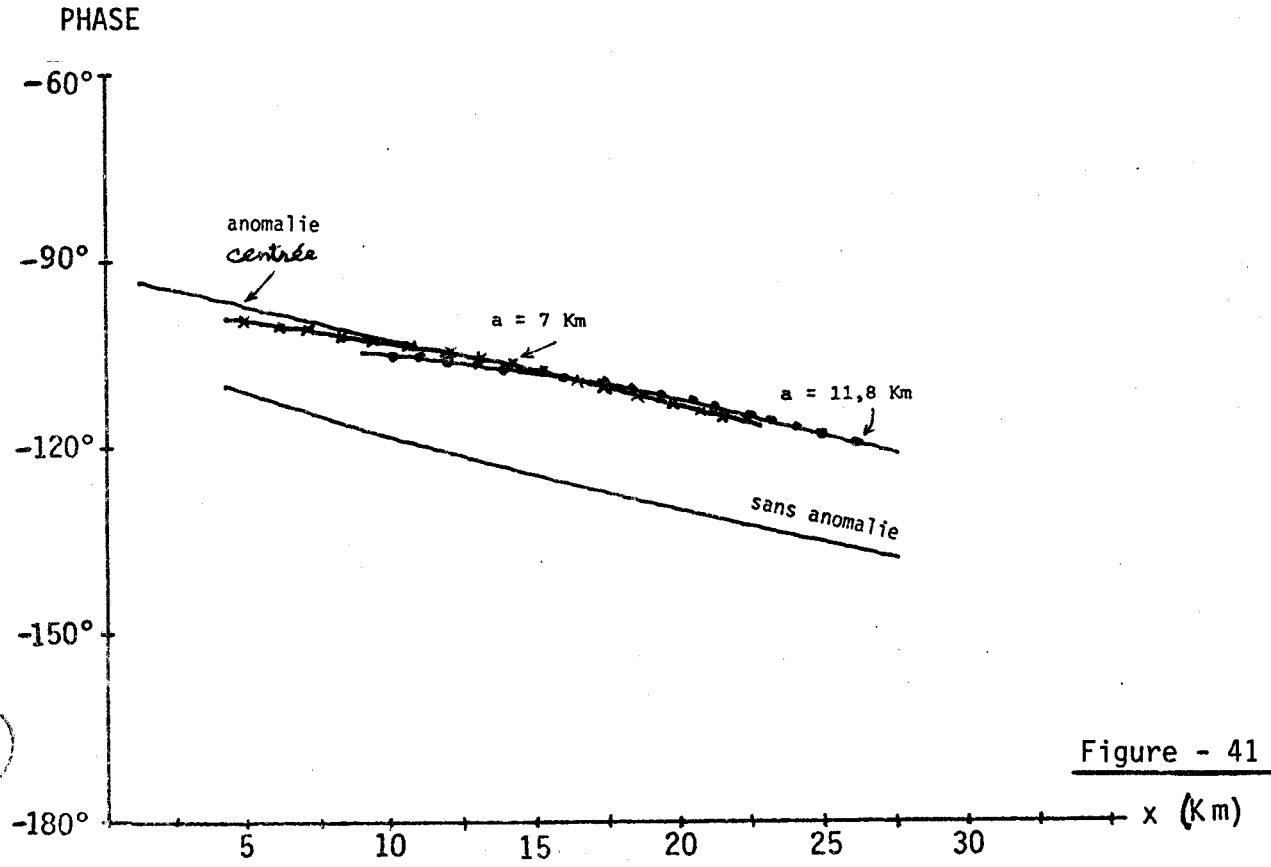


Figure - 41 -

III. 3-1 - La composante du champ électrique total : $E_{oy} = (E^{i}_{oy} + E^{d}_{oy})$

Dans un paragraphe précédent (III. 2.1) nous avons vu que l'allure des courbes représentant les variations du module et de la phase du champ électrique E^{i}_{oy} à la surface d'un terrain à deux couches ne contenant pas d'anomalie était peu sensible à la présence d'une couche conductrice superficielle (cf. Figures 19 et 20).

A partir de nos résultats numériques nous avons constaté que l'allure des courbes de la composante du champ électrique *total* E_{oy} est également peu sensible à la présence d'une anomalie conductrice, telle qu'une chambre magmatique, enterrée dans le substratum.

Les Figures 38 et 39 illustrent cette remarque pour le cas où la couche superficielle a une épaisseur de 600 mètres et une conductivité σ_1 égale à 0,01 mho par mètre. La fréquence utilisée est égale à 1 Hertz.

Les Figures 40 et 41 sont relatives à une couche superficielle de même épaisseur (600 mètres), ayant une conductivité σ_1 égale à 0,001 mho par mètre.

Dans chacune de ces Figures nous avons tracé l'évolution du champ électrique à la surface du sol en faisant varier la distance "a" de l'anomalie à la ligne source.

Nous avons normalisé les module E_{oy} de la composante du champ électrique total (Figures 38 et 40) par le facteur suivant :

$$E^{p}_{y} = \frac{\omega\mu_o I}{\pi}$$

Il nous semble donc qu'il est judicieux de chercher à localiser une anomalie en nous intéressant exclusivement aux composantes magnétiques du champ rayonné.

Nous examinons donc tout d'abord ses effets sur la composante horizontale H_{ox} du champ magnétique total.

-o-o-o-o-o-

III. 3-2 - *La composante horizontale du champ magnétique total* : $H_{ox} = (H^{i}_{ox} + H^{d}_{ox})$

Nous examinons dans ce paragraphe le comportement de la composante horizontale H_{ox} du champ magnétique *total* en présence d'un milieu contenant la poche magmatique, surmonté d'une couche superficielle conductrice.

Les Figures 42 et 43 présentent respectivement les variations du module $|H_{ox}|$ et de la phase ϕ_x de la composante H_{ox}, provoquées par l'ensemble du milieu contenant l'anomalie.

A nouveau, nous avons normalisé les modules de H_{ox} (Figure 42) par le module du champ magnétique vertical $|H^{p}_{z}|$ créé en absence du sol et de l'anomalie.

Sur les Figures 42 et 43 la couche superficielle a une épaisseur de 600 mètres et une conductivité σ_1 variable. La fréquence utilisée est égale à 1 Hertz.

Définissons un indice d'anomalie HX_{ϕ} par la relation suivante :

$$HX_{\phi} = \frac{|H_{ox}| - |H^{i}_{ox}|}{|H^{i}_{ox}|} \qquad (106)$$

$|H_{ox}|$ est le module de la composante horizontale du champ calculé en présence de la poche magmatique ;

$|H^{i}_{ox}|$ est le module de la même composante calculé dans un milieu identique, mais ne contenant pas d'anomalie.

Examinons la Figure 42. On fait varier la conductivité σ_1 de la couche superficielle. Nous constatons que le maximum de cet indice d'anomalie $(HX_{\phi})_{max}$ est toujours plus faible (cf. Tableau 3) que celui calculé dans un demi-milieu homogène ($\sigma_1 = \sigma_2$).

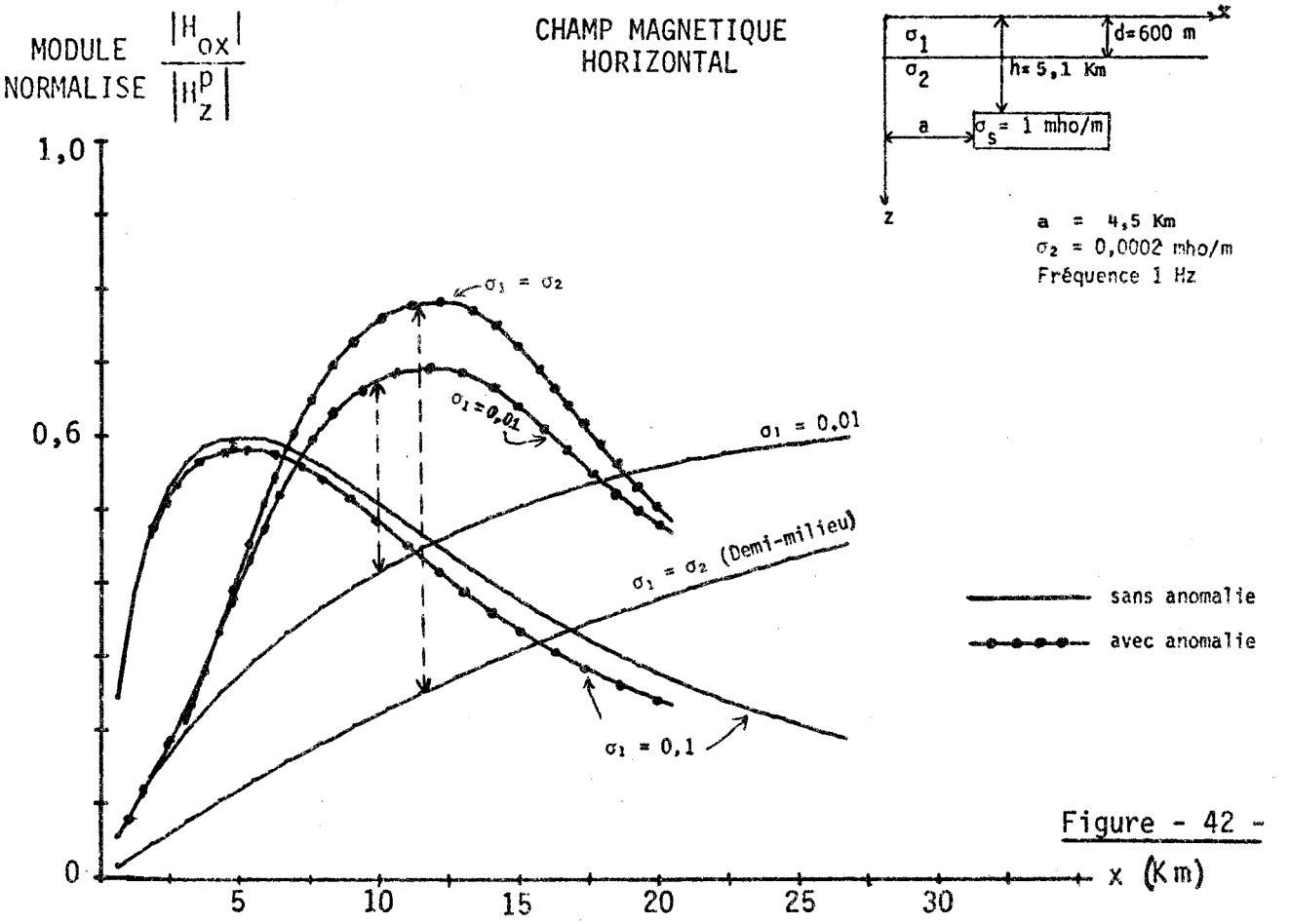


Figure - 42 -

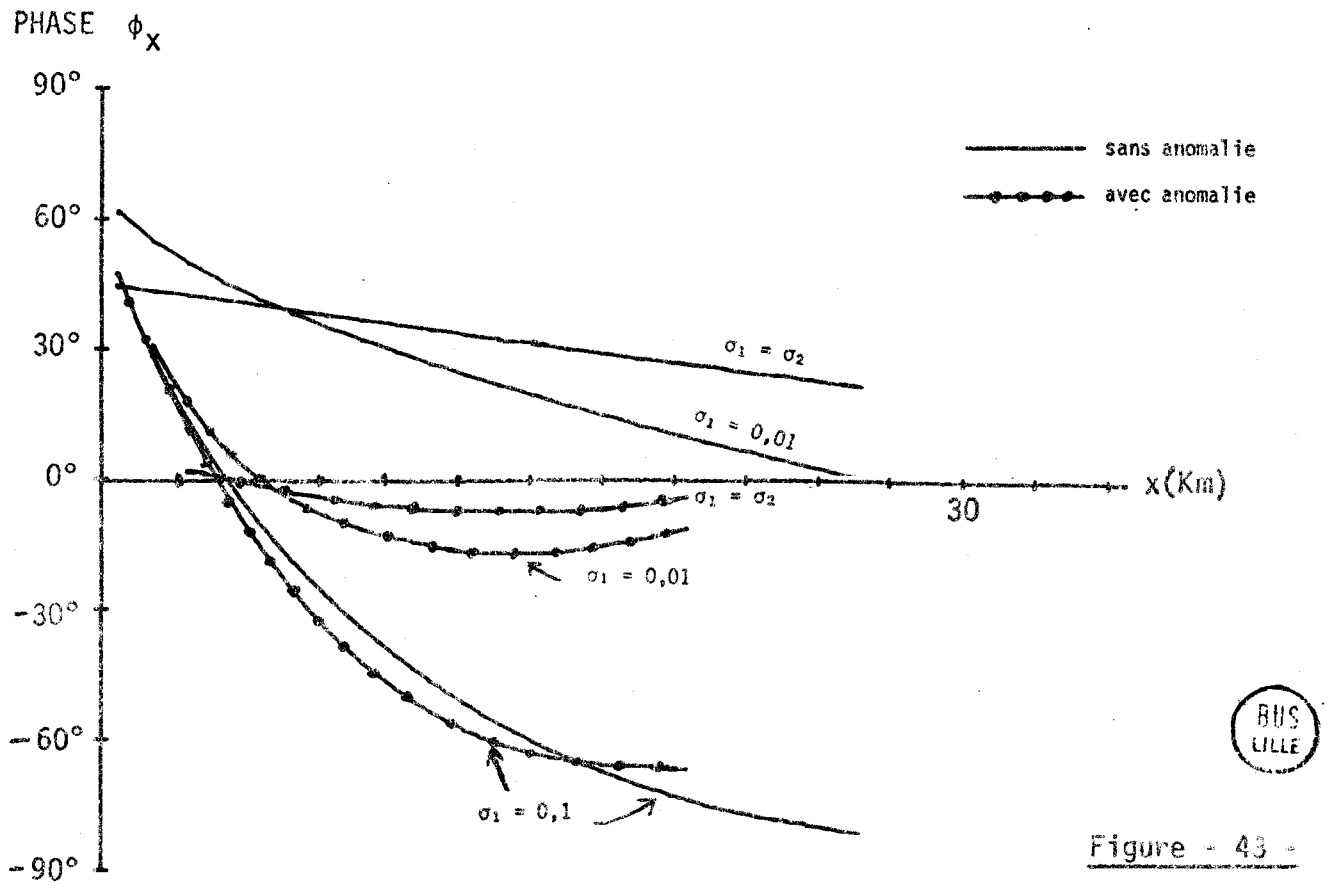


Figure - 43 -

"a"	"d"	σ_1 mho/m	Max. d'Indice $(HX_\phi)_{max.}$
4,5 Km	600 m	0,0002 (demi-milieu)	+ 268,5 %
		0,001	+ 225,9 %
		0,01	+ 66,8 %
		0,03	+ 7,8 %
		0,05	- 1,25%
		0,10	- 2,7 %

σ_2 = 0,0002 mho/m - Fréq. = 1 Hertz

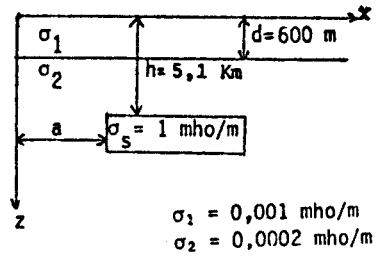
Tableau - 3 -

Par ailleurs, cette variation relative est très sensible aux variations des caractéristiques de la couche superficielle. On peut même trouver une valeur du couple σ_1 et l'épaisseur "d" telle que l'effet de la couche superficielle masque totalement la contribution de l'anomalie à la composante horizontale H_{ox} du champ magnétique total à la surface du sol. (Figure 42)

Nous avons également étudié l'évolution de H_{ox} en fonction de la distance "a" de l'anomalie à la ligne source. Pour cela nous avons fixé l'épaisseur de la couche superficielle à 600 mètres et la fréquence utilisée à 1 Hertz.

Ainsi les Figures 44 à 51 représentent l'évolution de la composante horizontale H_{ox} du champ magnétique total à la surface du sol, en fonction de la position de la ligne source à l'anomalie et de la conductivité σ_1 de la couche superficielle.

CHAMP MAGNETIQUE HORIZONTAL



σ_1 = 0,001 mho/m
σ_2 = 0,0002 mho/m
Fréquence 1 Hz

MODULE NORMALISE $\frac{|H_{ox}|}{|H_z^p|}$

1,0
0,6
0

a = 11,8 Km
a = 7 Km
anomalie centrée
sans anomalie

5 10 15 20 25 30 x (Km)

Figure - 44 -

PHASE ϕ_x

90°
0°
-90°

sans anomalie
anomalie centrée
15 25 x(Km)
a = 7 Km
a = 11,8 Km
x Position du centre de l'anomalie

Figure - 45 -

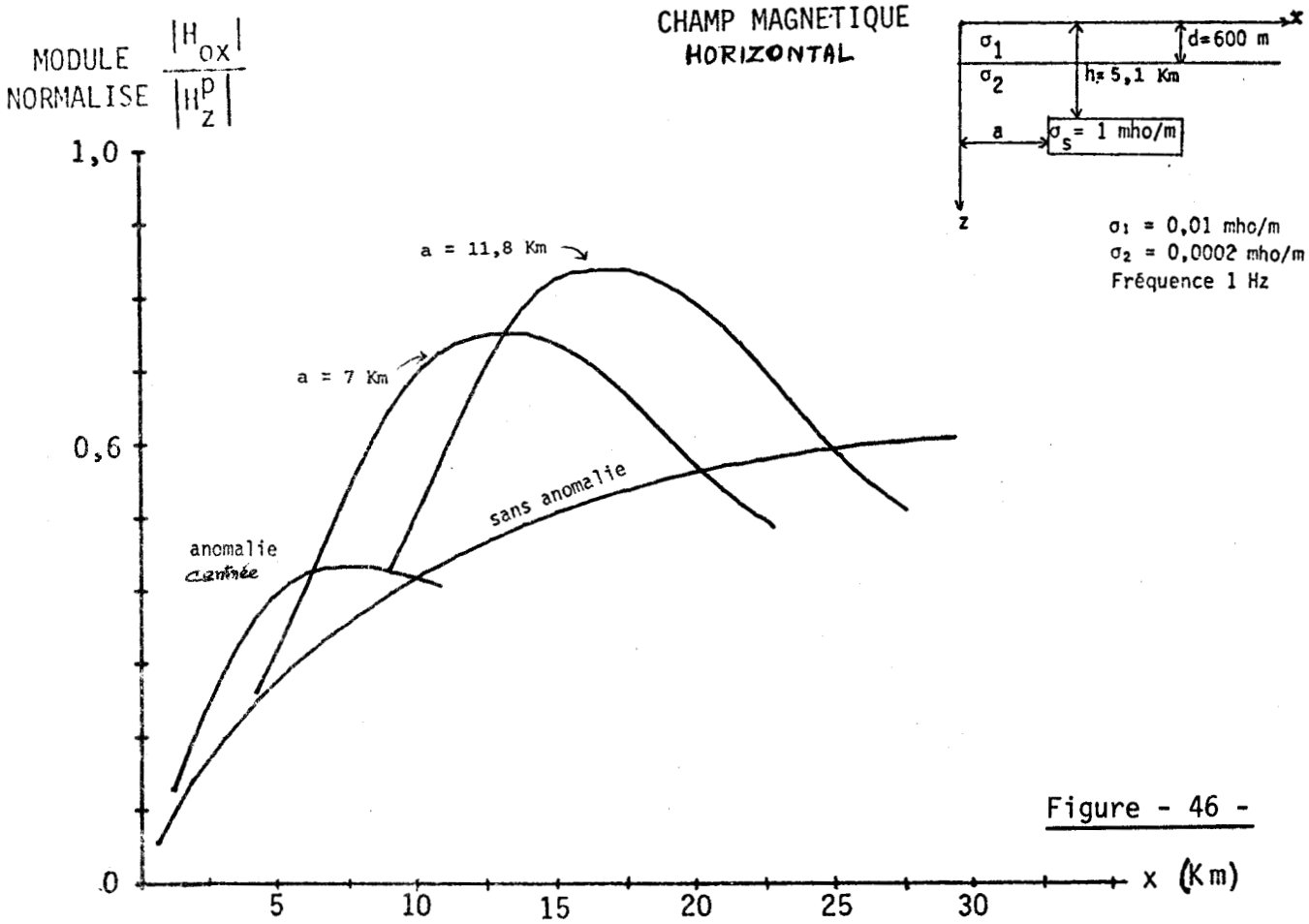


Figure - 46 -

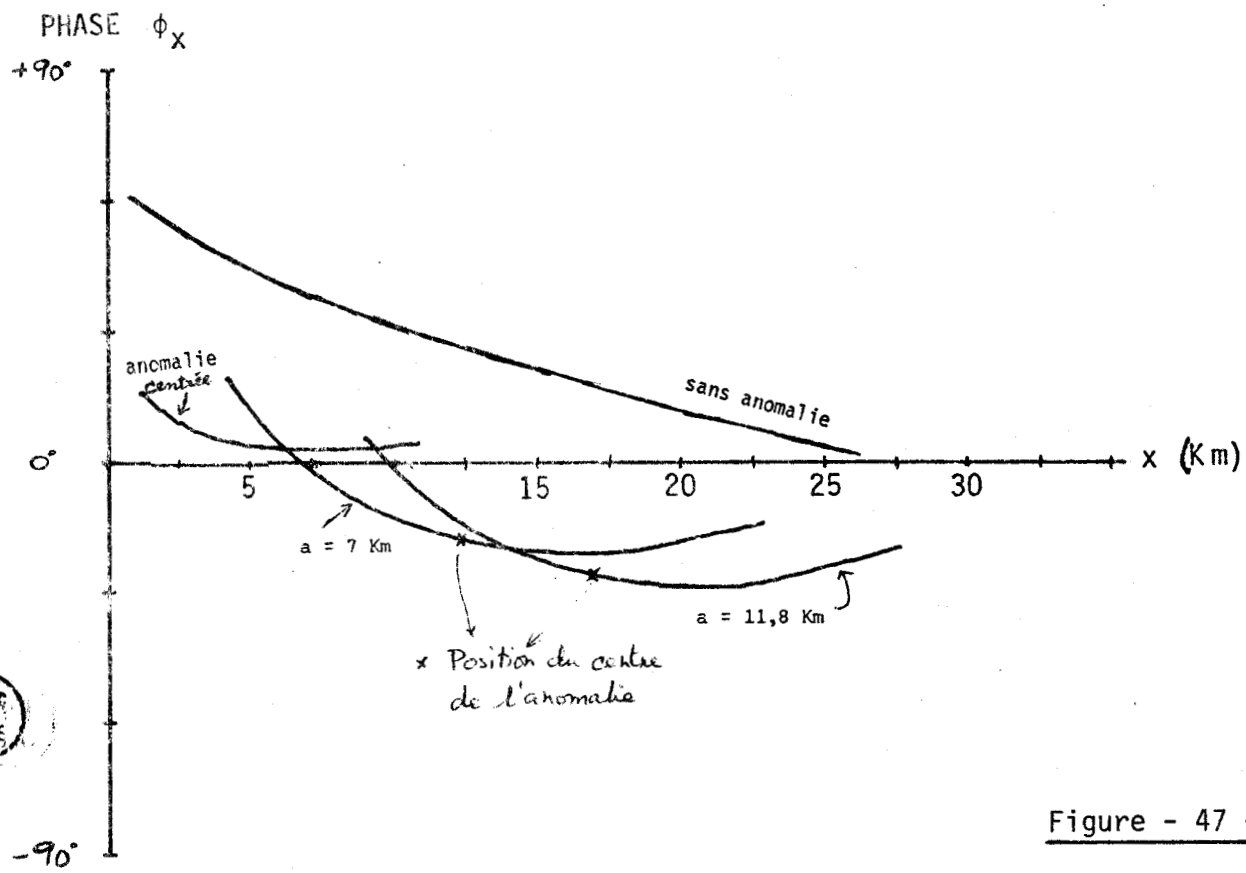
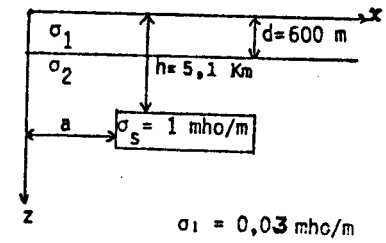


Figure - 47 -

CHAMP MAGNETIQUE
HORIZONTAL



σ_1 = 0,03 mho/m
σ_2 = 0,0002 mho/m
Fréquence 1 Hz

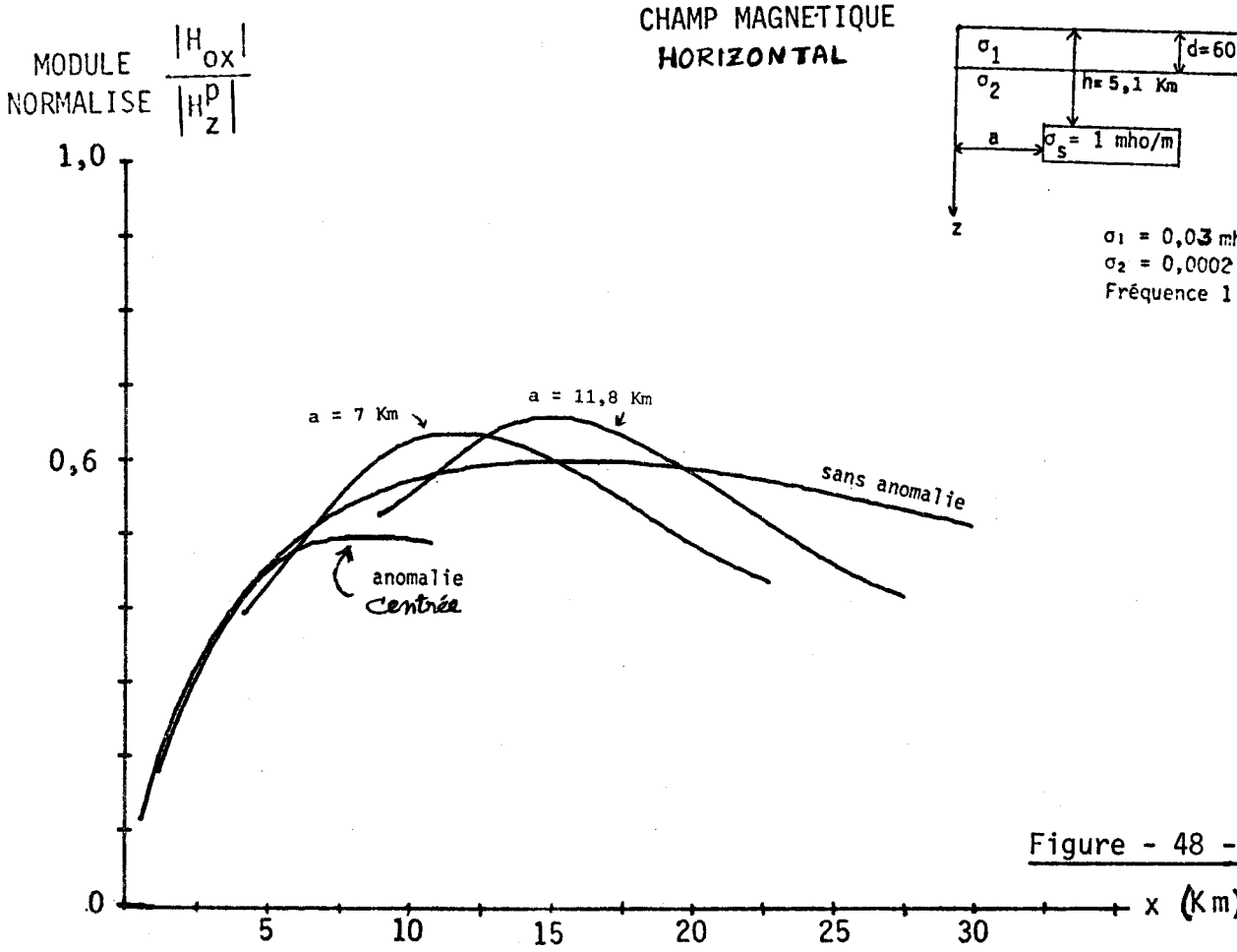


Figure - 48 -

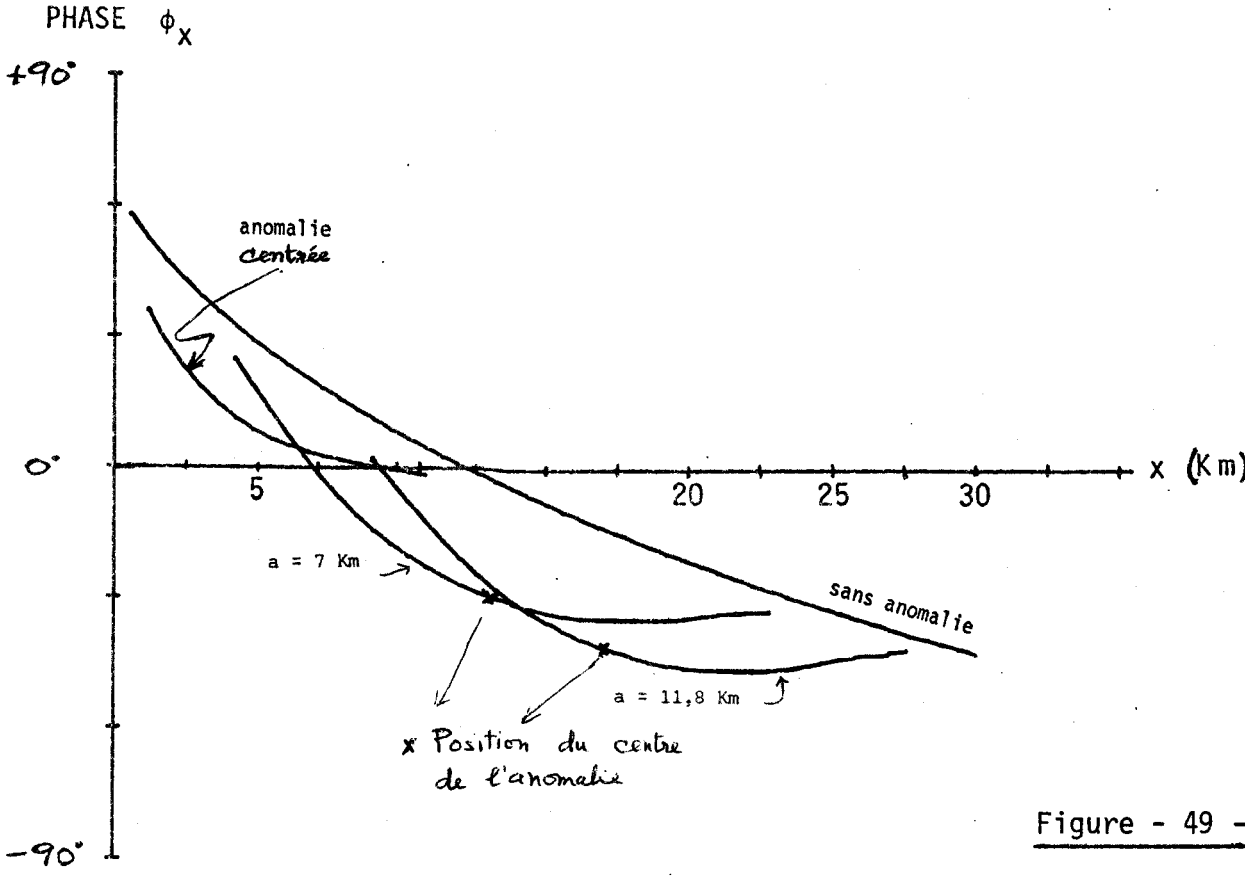


Figure - 49 -

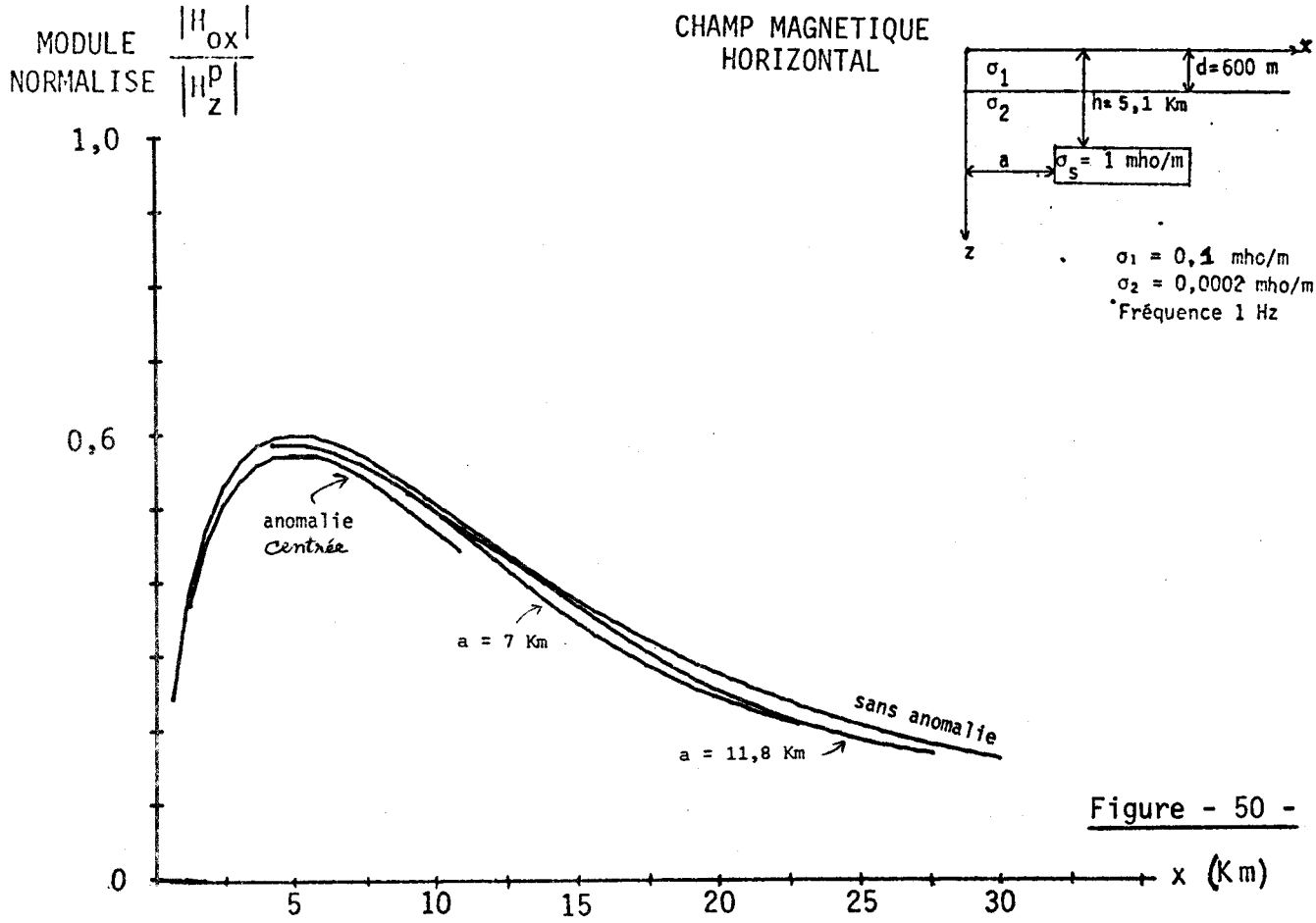


Figure - 50 -

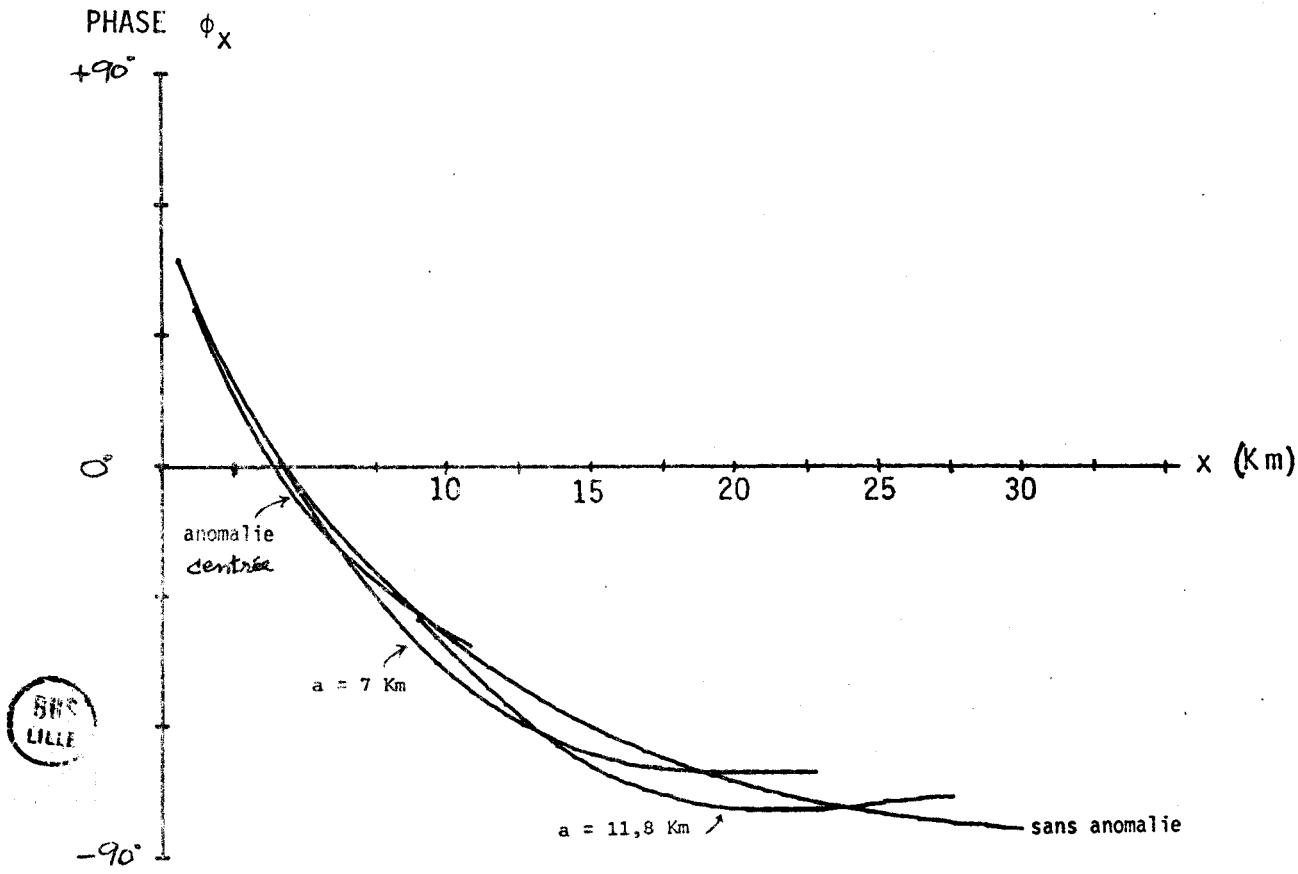
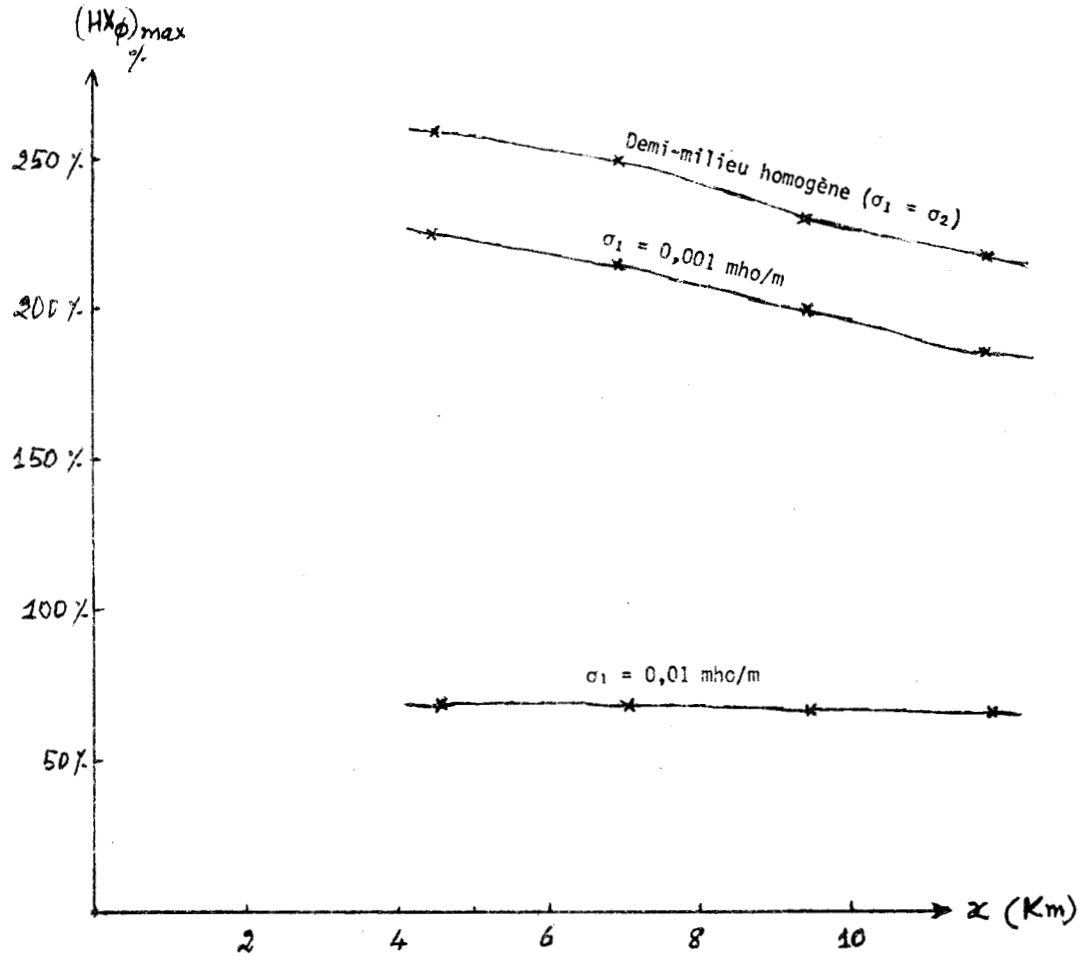


Figure - 51 -



d	σ_1 (mho par mètre)	Distance "a" de l'anomalie à la ligne source				
		(anomalie centrée)	4,5 Km	6,96 Km	9,4 Km	11,8 Km
0 (Demi-milieu)	0,0002	?	268,5 %	248,2%	230,2%	214,5%
600 mètres	0,001 0,01 0,03 0,05 0,10	? 46 %	225,9 % 66,8 % + 7,87% - 1,52% - 2,7 %	216,2% 66,1%	202,1% 64 %	189,3% 62,4%

Variation de $(HX_\phi)_{max}$ divers "a"

Fréquence 1 Hertz
σ_2 = 0,0002 mho par mètre

Tableau - 4 -

Nous résumons l'évolution du module normalisé $|H_{ox}|/|H_z^p|$ par les trois remarques suivantes :

a) En présence d'une chambre magmatique, le module normalisé de H_{ox} présente un maximum *au-dessus* de l'anomalie

b) On constate qu'en général le maximum de l'indice d'anomalie $(HX_\phi)_{max.}$ diminue très peu lorsque la distance "a" augmente.

On peut vérifier également cette conclusion sur le tableau 4.

c) Lorsque l'épaisseur et la conductivité de la couche superficielle sont suffisamment importantes pour une fréquence quelconque, l'effet de "masque" de la couche est total.

Ceci est particulièrement bien illustré sur les Figures 50 et 51, où à une fréquence de 1 Hertz, la couche d'une conductivité σ_1 égale à 0,1 mho par mètre et d'une épaisseur de 600 mètres devient un "écran parfait".

En ce qui concerne l'évolution de la phase ϕ_x de la composante horizontale du champ magnétique nous observons que ϕ_x passe par son minimum *au-delà* du centre de l'anomalie.

Les Figures 45, 47 et 49 illustrent cette remarque. Les positions du centre de l'anomalie sont indiquées par une croix sur chaque courbe. Sur la Figure 51 nous considérons l'anomalie masquée par la couche.

Nous faisons donc remarquer qu'en présence d'une telle chambre magmatique le module normalisé et la phase de la composante horizontale H_{ox} du champ magnétique total présentent respectivement un maximum et un minimum au-dessus de l'anomalie, enterrée dans le substratum.

Nous avons vu dans un paragraphe précédent (III. 2-2) que le maximum du module $|H^i_{ox}|$ dû à la couche superficielle (en absence de l'anomalie) ne pouvait jamais dépasser une valeur limite égale à 0,6 fois environ la valeur de $|H^p_z|$, quelles que soient les caractéristiques de la couche superficielle et la fréquence utilisée.

Or dans le cas de l'effet cumulé de la couche superficielle et de l'anomalie, on constate que les maxima peuvent largement dépasser cette valeur limite de 0,6 (voir Figures 44 et 46).

Nous sommes donc amené à conclure dans notre étude numérique que les maxima des courbes du module normalisé $|H_{ox}|/|H^p_z|$ ayant des valeurs plus grandes que 0,6 accompagnées par des minima de sa phase ϕ_x donnent une première indication de la présence d'une anomalie conductrice telle qu'une chambre magmatique.

Lorsque l'effet de masque est prédominant (cf. par exemple Figure 48) il est clair qu'il faut diminuer la fréquence utilisée pour rendre l'anomalie détectable.

Une baisse de la fréquence de travail aura pour conséquence : tout d'abord une diminution importante de l'effet de la couche superficielle ; et ensuite un accroissement de l'effet de l'anomalie.

Cette remarque est illustrée sur la Figure - 52 -, relative au module normalisé $|H_{ox}|/|H^p_z|$ (pour le cas où σ_1 est égale à 0,03 mho par mètre et "d" égal à 600 mètres) en faisant baisser la fréquence progressivement.

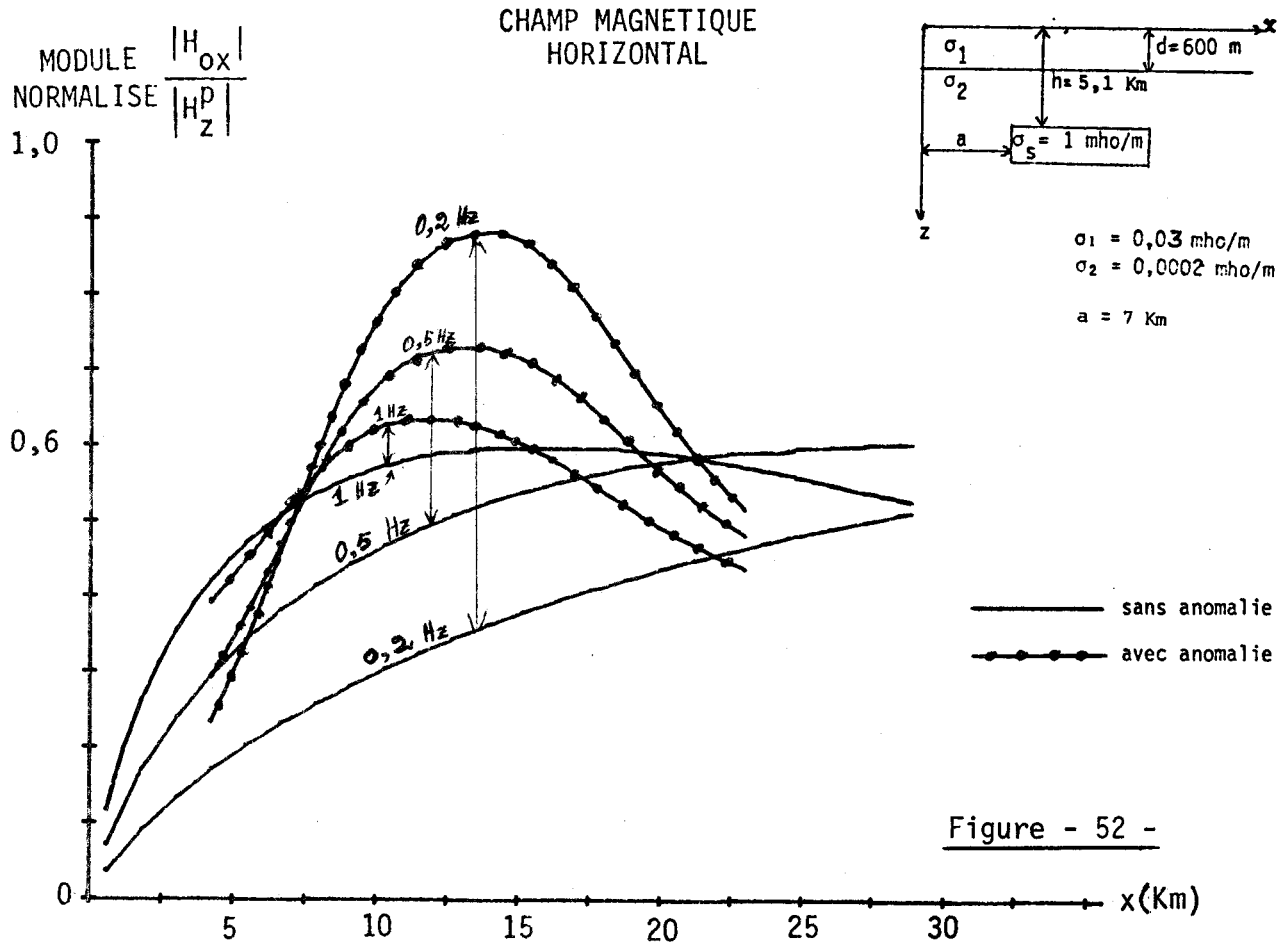


Figure - 52 -

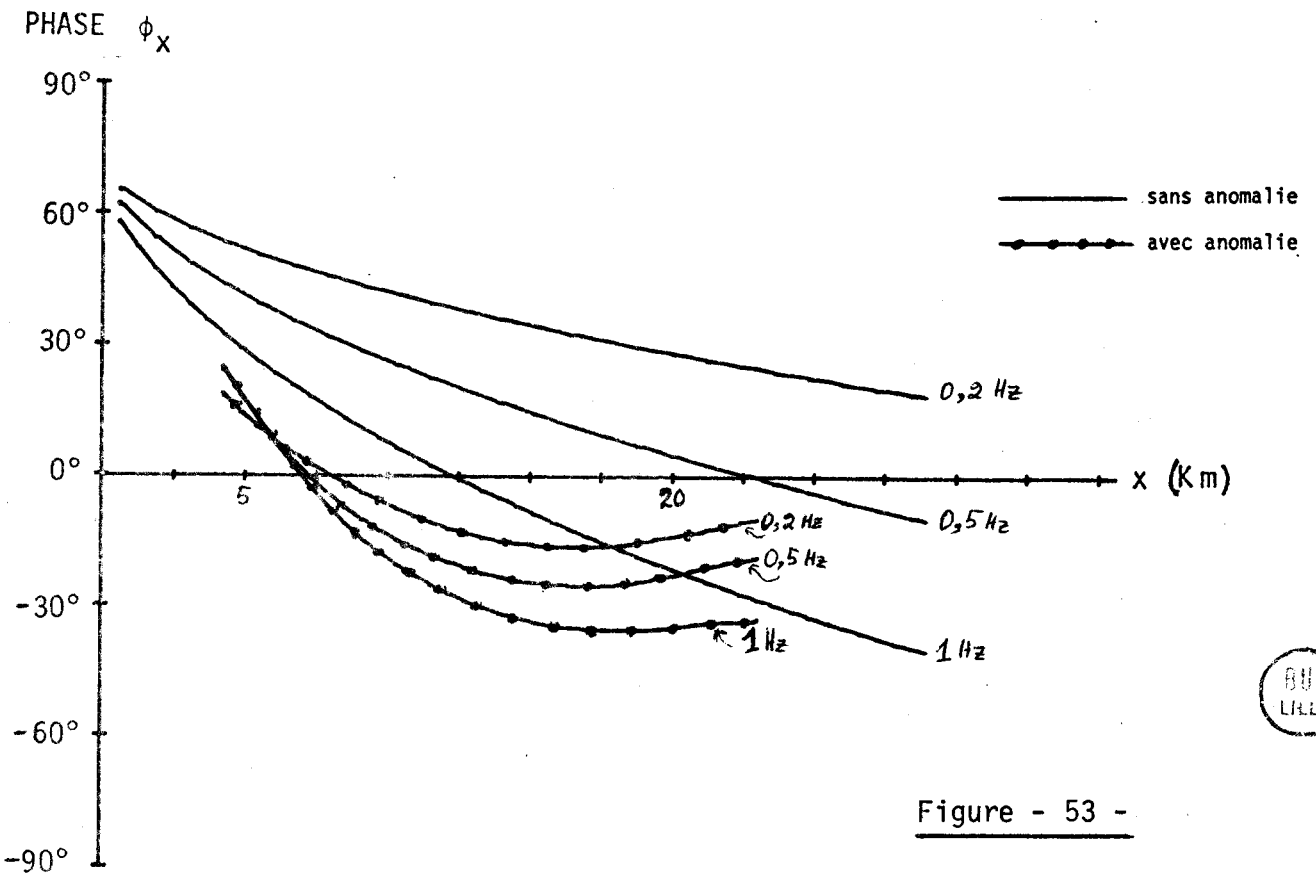


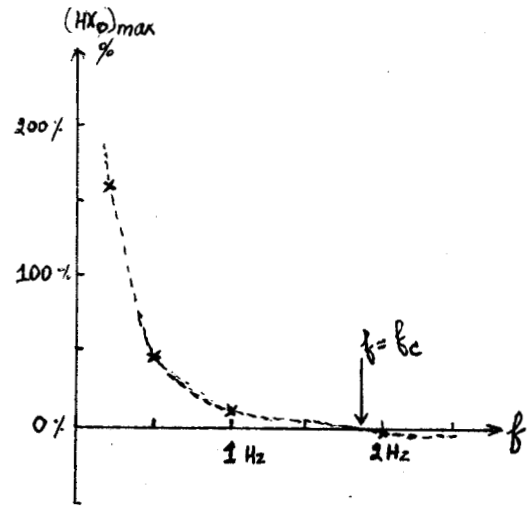
Figure - 53 -

Variation du maximum d'indice d'anomalie $(HX_\phi)_{max}$ *en fonction de la fréquence "f"*

σ_1 = 0,03 mho/m σ_2 = 0,0002 mho/m
d = 600 m

"a"	"h"	Fréquence "f" (Hertz)	Max. d'indice $(HX_\phi)_{max}$
6,96 Km	5,1 Km	2 Hz	- 0,03 %
		1 Hz	+ 9,24 %
		0,5 Hz	+ 47,28 %
		0,2 Hz	+158,1 %

Tableau - 5 -



Variation du maximum d'indice d'anomalie $(HX_\phi)_{max}$ *en fonction de la profondeur "h" de la poche magmatique*

σ_1 = 0,01 mho/m σ_2 = 0,0002 mho/m
d = 600 m

"a"	"h"	Max. d'indice $(HX_\phi)_{max}$
6,96 Km	5,1 Km	66,35 %
	7,7 Km	29,23 %
	10,2 Km	10,25 %

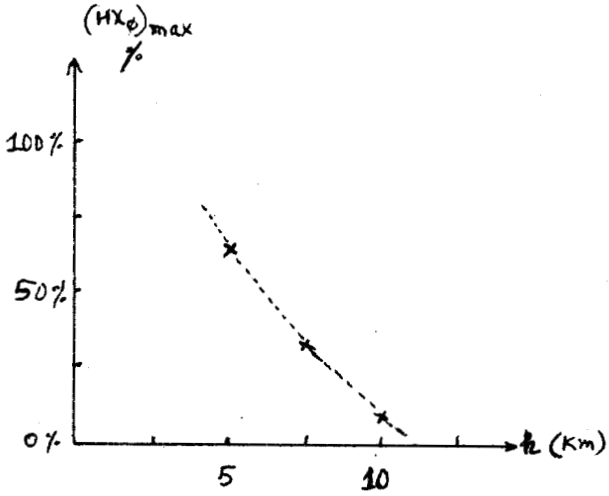


Tableau - 6 -

Le Tableau 5 montre le même résultat en présentant un relevé des maxima d'indice d'anomalie $(HX_\phi)_{max}$ pour diverses fréquences.

Ces résultats sont fort encourageants. Nous remarquons qu'il est possible d'atteindre un indice d'anomalie (HX_ϕ) de 150 % malgré l'effet de masque total à une fréquence f_c (voir Tableau 5), en diminuant suffisamment la fréquence utilisée.

Il ne nous reste qu'à étudier l'effet de la variation de la profondeur 'h' du toit de la poche magmatique sous la surface du sol. Comme prévu, lorsque 'h' augmente, l'indice $(HX_\phi)_{max}$ diminue. Cependant, nous constatons à nouveau que l'on peut augmenter la profondeur de détectabilité en diminuant suffisamment la fréquence.

Le Tableau 6 donne des exemples typiques en fonction de diverses profondeurs.

De même lorsque le contraste de conductivité $K = \frac{\sigma_s}{\sigma_2}$ diminue, le maximum de l'indice d'anomalie $(HX_\phi)_{max}$ devient plus faible. Mais cette dernière remarque n'intervient pas tellement dans notre discussion de la détectabilité d'une poche magmatique. Car nous avons supposé que la conductivité de la poche magmatique était très élevée par rapport à celle du milieu encaissant.

Ainsi donc notre étude numérique montre que l'évolution de la composante horizontale H_{ox} du champ magnétique total est très sensible à la présence d'une anomalie telle qu'une chambre magmatique. Une série de mesures effectuées à la surface du sol à plusieurs fréquences nous permet de localiser la position de l'anomalie. Elle est repérée alors par un indice d'anomalie élevé. Cet indice d'anomalie pour un terrain donné dépend de la fréquence utilisée et dans une certaine mesure de la distance "a" de la ligne source à l'anomalie.

Lorsque la fréquence est suffisamment basse et l'anomalie est légèrement éloignée de la ligne source, nous nous trouvons dans des meilleures conditions de détectabilité. Le choix de la fréquence et de la distance entre la source et l'anomalie est alors *optimal*.

-o-o-o-o-o-

III. 3-3 - *La composante verticale du champ magnétique total* : $H_{oz} = (H^{i}_{oz} + H^{d}_{oz})$

Dans un paragraphe précédent (III. 2-4) nous avons vu que l'angle que fait le grand axe de l'ellipse, lieu de l'extrémité du vecteur Champ Magnétique, *diminuait* (voir Figure 36 - page 61) au fur et à mesure que la conductivité moyenne du sol augmentait.

Nous avons également fait remarquer que le module normalisé $|H^{i}_{oz}|/|H^{p}_{z}|$ de la composante verticale était *toujours* inférieur à 1 (cf. Figure 30). Et enfin, nous avons conclu que la composante verticale H^{i}_{oz} du champ magnétique était *assez sensible* à la présence d'une couche conductrice.

Ceci dit, il est intéressant de voir comment vont réagir le module $|H_{oz}|$ et la phase ϕ_z de la composante verticale H_{oz} du champ magnétique *total* devant un demi-milieu contenant une anomalie et surmonté d'une couche conductrice.

Nous avons encore une fois normalisé les modules $|H_{oz}|$ de cette composante (Figures 54 et 56) par le module $|H^{p}_{z}|$ du champ magnétique vertical créé *en absence du sol et de l'anomalie.*

Nous avons étudié l'évolution de H_{oz} en fonction de la distance "a" de l'anomalie à la ligne source. Pour cela nous avons fixé à nouveau l'épaisseur de la couche superficielle à 600 mètres et la fréquence à 1 Hertz ; la conductivité σ_1 est égale à 0,01 mho par mètre sur les Figures 54 et 55, et à 0,1 mho par mètre sur les Figures 56 et 57.

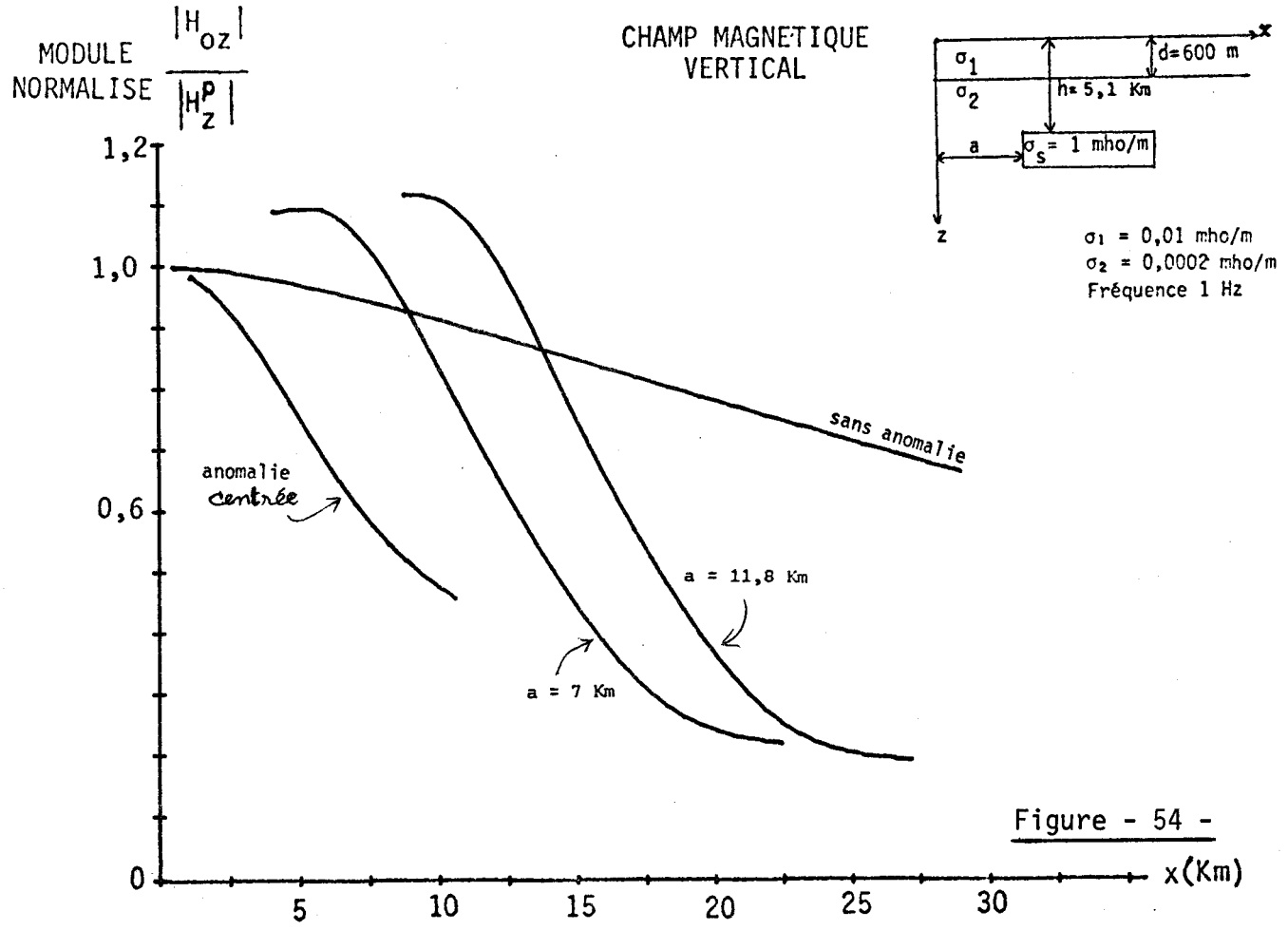


Figure - 54 -

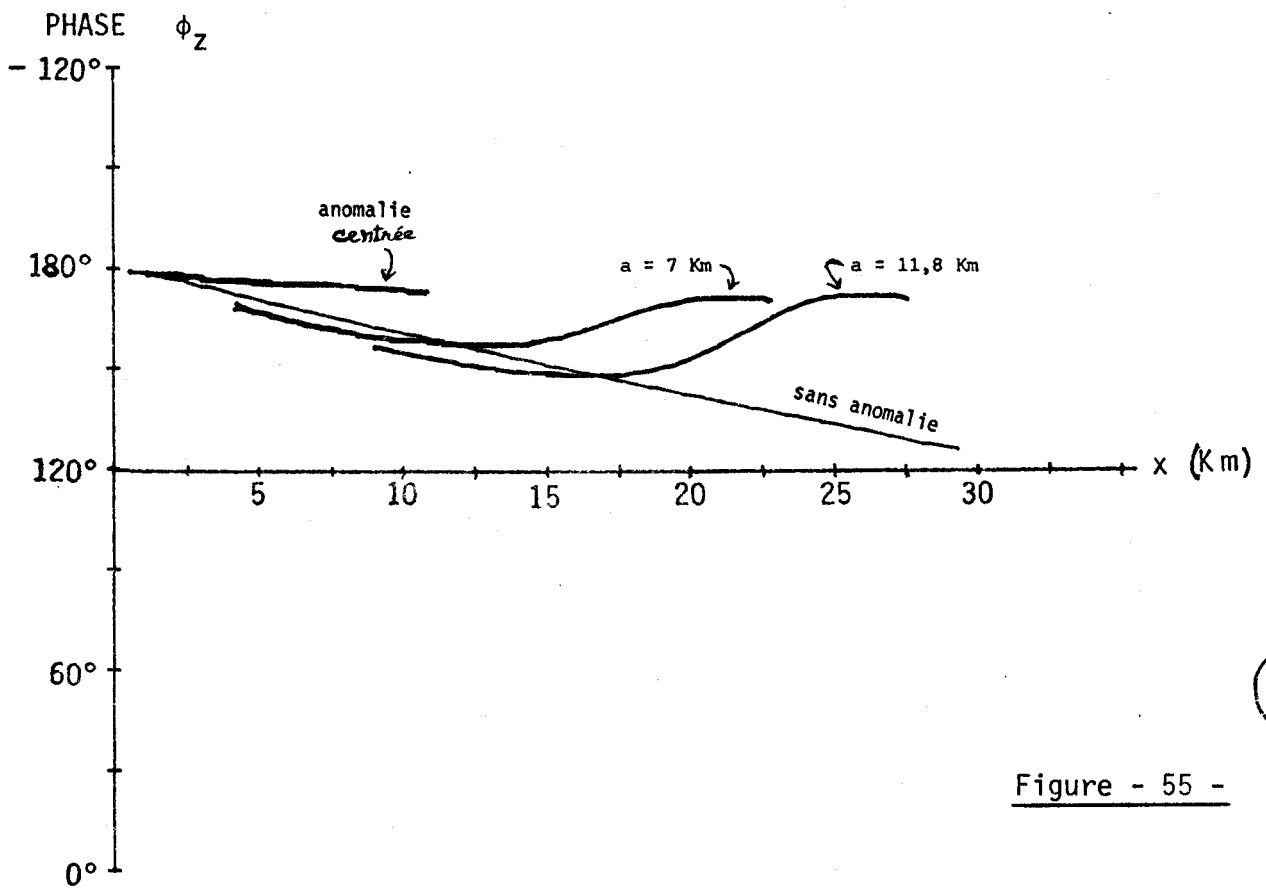


Figure - 55 -

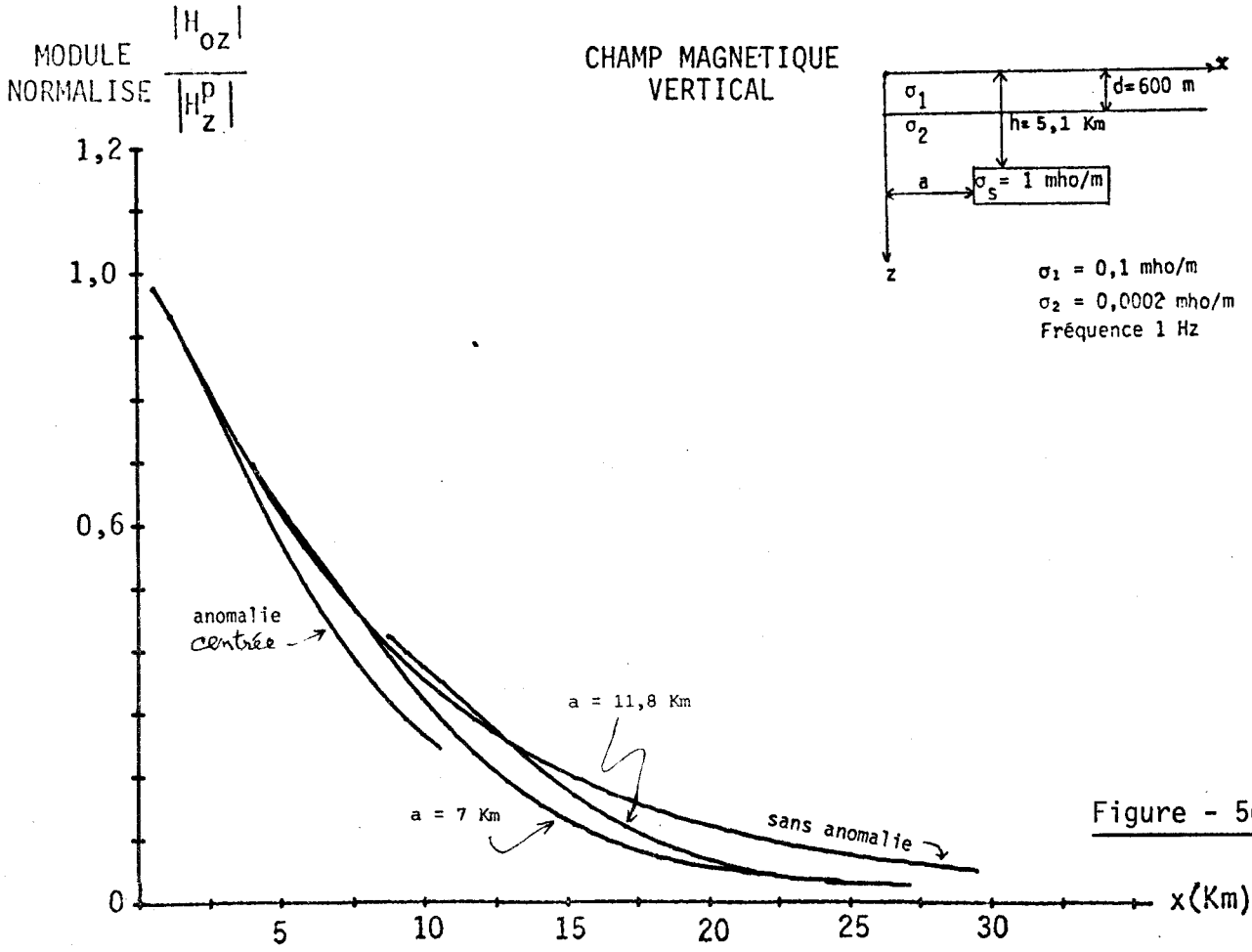


Figure - 56 -

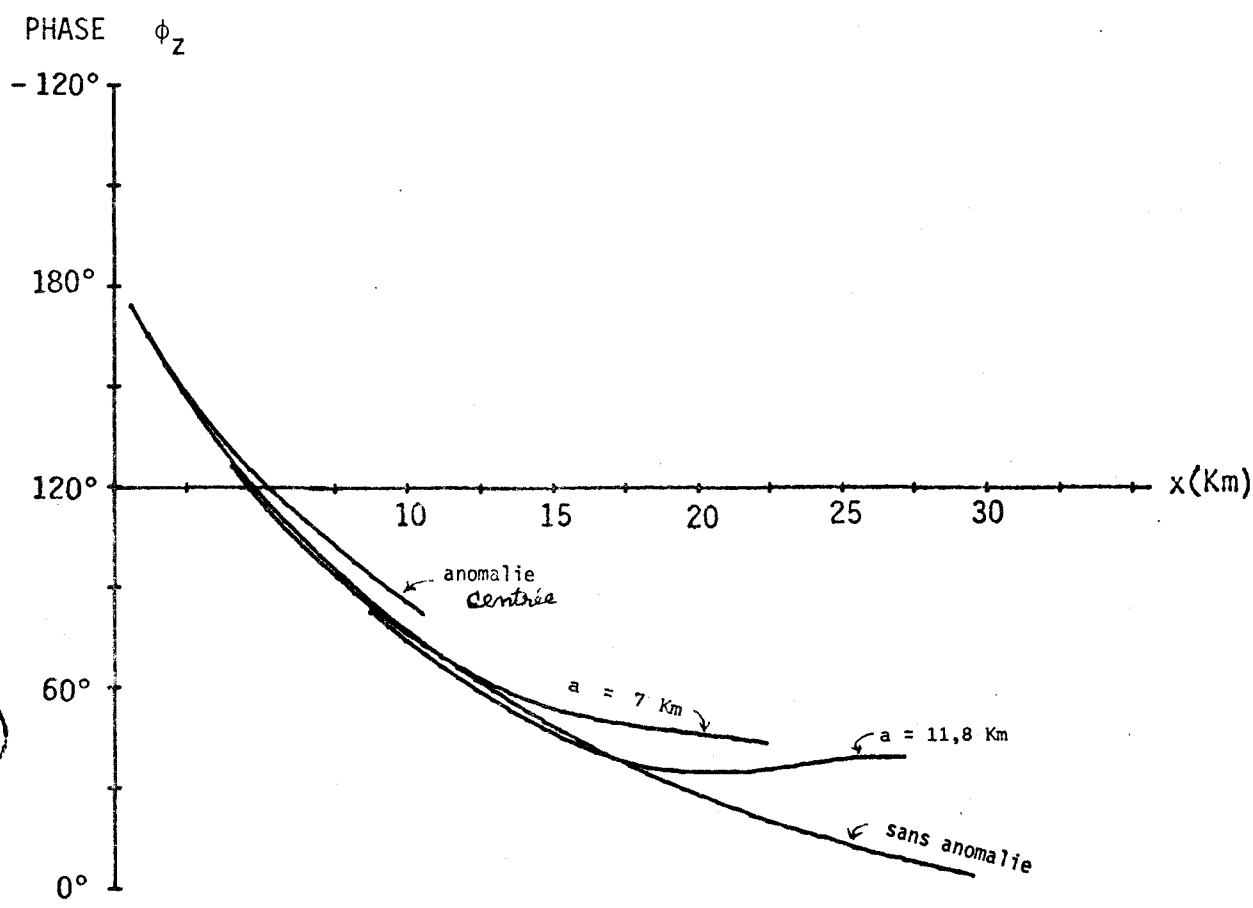


Figure - 57 -

Examinons comparativement les comportements des composantes horizontale et verticale du champ magnétique total : les Figures 46 et 54 représentent leurs modules $|H_{ox}|$ et $|H_{oz}|$ alors que les Figures 47 et 55 représentent leurs phases ϕ_x et ϕ_z pour des cas de figures identiques. De même les Figures 50 et 56 font un ensemble.

On constate que lorsque l'effet de l'anomalie n'est pas apparant sur la courbe d'évolution de la composante horizontale H_{ox}, il ne l'est pas d'avantage sur celle de la composante verticale H_{oz}.

Les Figures 50 et 56 illustrent cette remarque pour le cas où la conductivité σ_1 de la couche superficielle est égale à 0,1 mho par mètre et son épaisseur égale à 600 mètres. La fréquence utilisée est 1 Hertz.

Nous allons donc concentrer tout ce qui suit sur des cas où l'anomalie n'est pas masquée par la couche superficielle dans l'évolution de la composante horizontale du champ magnétique. Dans ces cas nous supposons que le choix de la fréquence et celui de la distance "a" de l'anomalie à la ligne source sont tous deux optimaux (voir paragraphe III. 3-2).

Ceci dit, nous résumons notre étude numérique de la composante verticale H_{oz} du champ magnétique par les remarques suivantes :

1°) Dans le cas où le milieu ne contient pas d'anomalie (voir paragraphe III. 2-2) nous avons constaté que le module normalisé $|H^i_{oz}|/|H^p_z|$ de la composante verticale du champ magnétique était toujours plus petit que 1 (voir Figure 30). Or lorsque le milieu contient une anomalie telle qu'une chambre magmatique, nous observons que le module normalisé $|H_{oz}|/|H^p_z|$ de la composante verticale du champ magnétique *total* peut dépasser cette valeur limite de 1 (voir Figure 58).

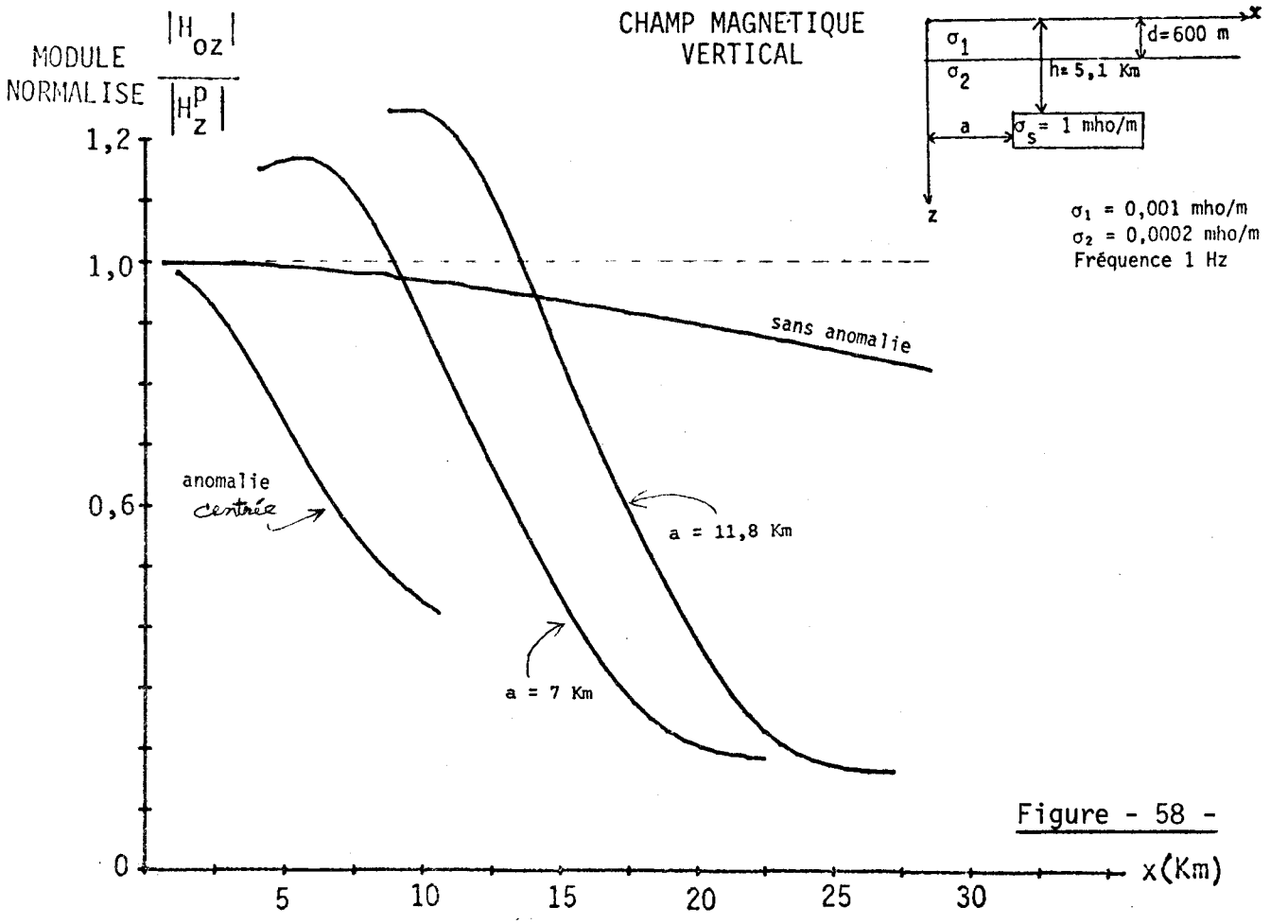


Figure - 58 -

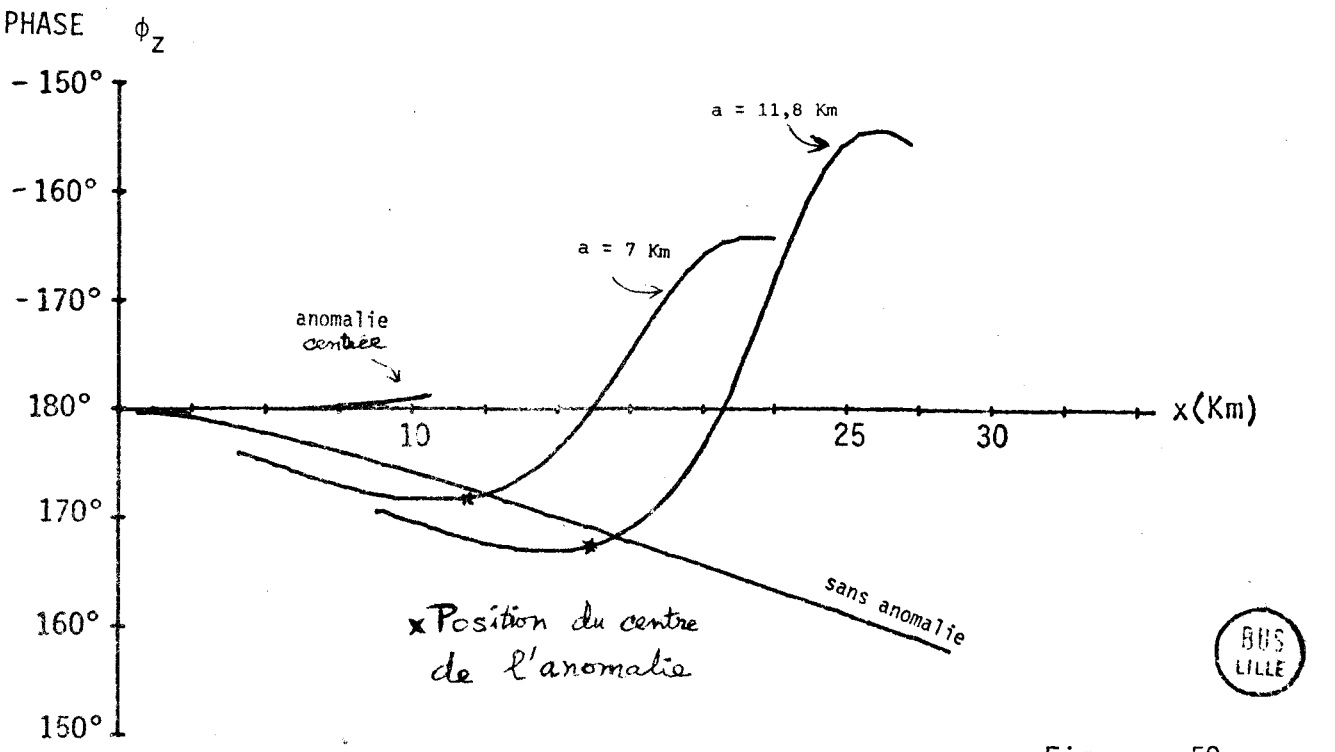


Figure - 59 -

Donc une valeur supérieure à 1 du module normalisé de la composante verticale du champ magnétique à la surface du sol nous donne une forte indication de la présence d'une anomalie enterrée telle qu'une chambre magmatique.

2°) Dans ces conditions le maximum du module normalisé $|H_{oz}|/|H_z^p|$ de la composante verticale est situé dans la région au-dessus de l'extrémité de l'anomalie la plus proche de l'émetteur.

La Figure 58 illustre cette remarque en faisant varier la distance "a" de l'anomalie à la ligne source dans le cas où la couche superficielle a une conductivité σ_1 de 0,001 mho par mètre et une épaisseur de 600 mètres. La fréquence utilisée est égale à 1 Hertz.

On constate effectivement que lorsque l'effet de masque est éliminé par un choix optimal de fréquence, on peut considérer la position du maximum du module normalisé $|H_{oz}|/|H_z^p|$ comme celle du "début" d'une anomalie conductrice.

Par ailleurs, on constate que le module normalisé $|H_{oz}|/|H_z^p|$ de la composante verticale est très fortement atténué au-delà de la position de son maximum.

3°) Examinons le comportement de la phase ϕ_z de la composante verticale du champ magnétique total. Sur la Figure 59 nous présentons l'évolution de ϕ_z en fonction de la distance "a" de la ligne source à l'anomalie dans le cas où la couche superficielle d'épaisseur 600 mètres a une conductivité σ_1 = 0,001 mho par mètre. La fréquence utilisée est égale à 1 Hertz.

On constate que le minimum de la phase ϕ_z est situé au-dessus de l'anomalie. La position du centre de l'anomalie est indiquée par une croix sur chaque courbe.

(d) Après ce que nous venons de dire, nous constatons que lorsque l'anomalie se trouve juste en-dessous de la ligne source, aucune de ces trois remarques ne s'applique rigoureusement.

On remarque alors que le cas, où la ligne source est placée juste au-dessus du centre de l'anomalie, n'est pas envisagé comme faisant partie de meilleures conditions de détectabilité.

- o -

Ces quatre remarques résument en fait tous les effets typiques de l'anomalie sur la composante verticale H_{oz} du champ magnétique à la surface du sol.

Il est donc clair que cette composante H_{oz} est très sensible à la position et aux dimensions d'une anomalie conductrice telle qu'une chambre magmatique, enterrée dans le substratum. La mesure de la composante H_{oz} doit de toutes les façons enlever l'ambiguïté dûe au fait qu'une couche superficielle et conductrice peut escamoter la réponse de l'anomalie.

-o-o-o-o-o-o-

III. 4 - CONCLUSION

Elaboration d'une méthodologie de prospection applicable sur le terrain pour la détection d'une chambre magmatique en utilisant une ligne source électrique comme émetteur

Nous avons étudié précédemment dans ce chapitre l'évolution des diverses composantes du champ électromagnétique à la surface d'un terrain, contenant une anomalie telle qu'une chambre magmatique et surmonté d'une couche conductrice.

Les résultats numériques que nous avons obtenus sont fort encourageants et nous amènent à formuler en guise de conclusion une méthodologie de prospection applicable sur le terrain pour la détection d'une chambre magmatique utilisant une ligne source électrique comme émetteur.

Mais en fait l'étude que nous avons effectuée contient encore trop d'approximations pour qu'il soit possible d'en déduire des conclusions directement applicables à la complexité géologique d'un terrain réel. (En outre, nous ne tenons pas compte des bruits naturels perturbant les appareils).

La méthodologie que nous proposons n'est donc faite que pour dégager quelques conclusions permettant d'évaluer l'intérêt d'une poursuite de l'étude d'un modèle numérique bidimensionnel.

Nous nous trouvons donc sur un terrain à deux couches, où l'on suppose les stratifications, situées jusqu'à quelques centaines de mètres de la surface, plus conductrices que le substratum. Nous supposons aussi que les mesures réalisées sur le terrain nous ont permis d'enregistrer les variations des deux composantes - horizontale et verticale - du champ magnétique à la surface du sol en fonction de diverses fréquences choisies dans la gamme de 0,1 à 20 Hertz.

A chaque point de la surface du sol, nous normalisons les modules $|H_{ox}|$ et $|H_{oz}|$ par le module $|H_z^p|$ du champ magnétique créé en absence du sol :

$$|H_z^p| = \frac{I}{2\pi x}$$

où I est le courant de la ligne source électrique en ampères et x la distance du point d'observation à la source en mètres. Pour un courant de 1 ampère, ceci correspondrait à une valeur de $|H_z^p|$ égale à 16 micro-ampères par mètres pour une distance x égale à 10 kilomètres.

La méthodologie consiste à effectuer des tests et des vérifications qui nous permettent de tirer des conclusions par éliminations successives :

1°) On examine tout d'abord toutes les courbes du module normalisé $|H_{ox}| / |H_z^p|$ de la composante horizontale du champ magnétique et celles de sa phase ϕ_x.

Si les valeurs du module normalisé ne dépassent jamais une valeur limite de 0,6 environ, quelque soit la fréquence, on recherche sur les courbes de la phase ϕ_x les positions de ses zéros.

Dans ces conditions, si, à une fréquence quelconque, les positions du maximum du module normalisé $|H_{ox}|/|H_z^p|$ et des zéros de la phase ϕ_x tombent à peu près aux mêmes endroits et ceci à toutes les fréquences utilisées, on peut en déduire que le milieu ne contient pas d'anomalie.

Cette première conclusion se confirme par les *deux vérifications* suivantes :

a) Si l'on diminue la fréquence, on doit observer que les positions pour lesquelles on constate le maximum du module normalisé $|H_{ox}|/|H_z^p|$ et le zéro de ϕ_x, tout en restant voisines, s'éloignent de la ligne source.

b) Les valeurs du module normalisé $|H_{oz}|/|H_z^p|$ de la composante verticale du champ magnétique doivent être toujours inférieures à 1.

Si l'une ou l'autre de ces deux vérifications n'est pas satisfaite, l'hypothèse d'absence d'une anomalie dans le sol doit être abandonnée.

Par ailleurs, il est possible de calculer l'épaisseur de la première tranche conductrice du sol à partir des positions des maxima du module normalisé $|H_{ox}|/|H_z^p|$ et les zéros de phase ϕ_x.

2°) On suppose ensuite que l'hypothèse de l'absence d'anomalie a été abandonnée.

On cherche maintenant à localiser une hétérogénéité du type "Chambre magmatique" à partir des positions des maxima des modules et de celles des minima des phases de H_{ox} et H_{oz}

ON VERIFIE

a) Que les valeurs des modules normalisés des deux composantes $|H_{ox}|/|H_z^p|$ et $|H_{oz}|/|H_z^p|$ dépassent respectivement les valeurs limites de 0,6 et 1 lorsque les fréquences sont suffisamment basses

b) que leurs maximums d'indice augmentent quand la fréquence

diminue et ceci à peu près aux mêmes endroits pour toutes les fréquences utilisées.

Ce type d'évolution des champs à la surface du sol constitue une forte présomption de la présence d'une anomalie du type "chambre magmatique" dans le substratum.

3°) Dans une troisième étape on cherche à la fois à localiser l'anomalie et à obtenir des renseignements utiles concernant ses dimensions.

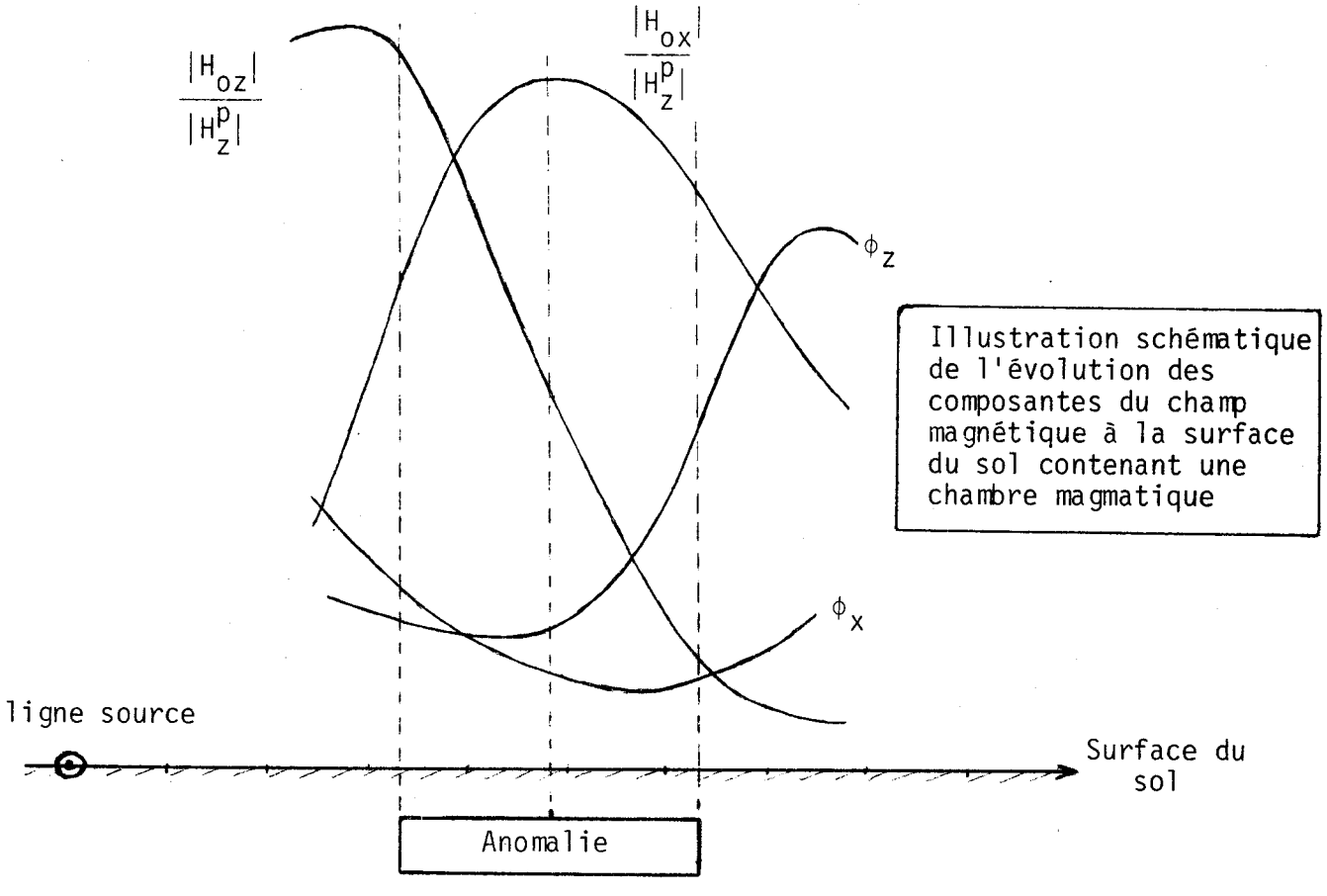


Illustration schématique de l'évolution des composantes du champ magnétique à la surface du sol contenant une chambre magmatique

Figure - 60 -

D'après notre étude numérique la région du maximum du module de H_{ox} se situe vers le centre de l'anomalie alors que celle du maximum

du module de H_{oz} est plutôt situé vers l'extrémité de l'anomalie la plus proche de la ligne source (voir Figure 60).

En ce qui concerne les évolutions des phases ϕ_x et ϕ_z de ces deux composantes magnétiques, nous avons vu que leurs minima se situaient respectivement à peu près au-delà et au-dessus du centre de l'anomalie (Figure 60).

Ceci nous permet donc d'évaluer approximativement les dimensions de l'anomalie et sa distance à la ligne source.

Enfin connaissant les caractéristiques du milieu, il est possible de donner une valeur limite pour la profondeur du toit d'une chambre magmatique en étudiant l'évolution des maxima d'indices d'anomalie en fonction de fréquence.

Nous avons proposé cette méthodologie dans le souci de montrer la faisabilité des mesures et interprétations sur le terrain. Cependant, nous voulons insister sur le fait que tous nos résultats ne sont que numériques et que nous n'avons pas encore eu l'occasion d'expérimenter la méthode sur le terrain.

o

o o

CONCLUSION GENERALE

Au terme de cette étude théorique et numérique nous pensons avoir contribué à l'amélioration des méthodes géophysiques de prospection de ces sources d'énergie que constituent les chambres magmatiques.

L'ensemble des calculs numériques des composantes du champ électromagnétique à la surface d'un terrain à deux couches, utilisant une ligne source électrique comme émetteur, a donné lieu à des résultats positifs et indique que cette méthode de prospection électromagnétique de surface est probablement valable.

Toutefois, il ne faut pas oublier les limitations des approximations que nous avons faites.

Notre modèle est bidimensionnel. Mais dans la réalité une poche magmatique ne possède jamais une dimension infinie dans une direction privilégiée. Il n'est pas non plus possible d'installer sur le terrain une ligne source de longueur infinie.

Même dans le cas où une poche magmatique posséderait un rapport largeur/longueur suffisamment petit pour que l'approximation bidimensionnelle devienne acceptable on ne saurait pas dans quelle direction est orientée sa longueur !

Il serait donc nécessaire avant de proposer à l'industrie le risque financier d'une expérimentation sur le terrain, d'affiner l'étude théorique en particulier en passant à un modèle de simulation numérique tridimensionnel. Il faudrait aussi simuler la diminution de sensibilité de la méthode résultant des dimensions nécessairement finies de la ligne source.

Toutefois, les méthodes numériques que nous avons optimisées en vue de réduire les temps calcul nécessaires nous semblent pouvoir être transposées à des modèles numériques plus complexes. C'est surtout dans ce sens et par le fait que nous avons montré *l'existence de certains paramètres pouvant servir "d'indice de présence"* que nous pensons avoir, pour une modeste part, fait progresser les méthodes de recherches de nouvelles sources d'énergie dont se préoccupe le Laboratoire au sein duquel nous avons effectué notre travail de thèse.

o

o o

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

|1 | DUBUS J.P.

Théorie et mise en application d'une méthode de sondage électromagnétique utilisable en prospection géophysique à faible profondeur, Thèse de Doctorat d'Etat, 1974 - LILLE

|2 | KELLER, G.V., FRISCHKNECHT, F.C. - 1967

Electrical methods in geophysical prospecting : New York, Pergamon.

|3 | HOHMANN, G.W., 1971

Electromagnetic scattering by conductors in the earth near a line source of current : Geophysics, v. 36, p. 101-131

|4 | CAUTERMAN, M.,

Etude théorique de l'influence d'une anomalie de résistivité de forme quelconque sur le champ électromagnétique créé par un dipôle en milieu absorbant, Thèse de Doctorat d'Etat, 1975, LILLE

|5 | DEY, A. and MORRISON, H.F., 1973

Electromagnetic response of two-dimensional inhomogeneities in a dissipative half-space for TURAM Interpretation : Geophysical Prospecting, v. 21, p. 340-365

|6 | BOSCO STEPHEN, CAUTERMAN, M., GABILLARD, R.

Rapport d'avancement de l'ATP n° 33 22 concernant l'étude de faisabilité de la détection de poches magmatiques, E.R.A. n° 658 Décembre 1977

|7 | RITTMANN A., 1963

Les volcans et leur activité : Paris, Masson et Cie.

|8 | AUBOUIN, J., BROUSSE, R., LEHMAN, J.P., 1975

Précis de géologie, Tome 1 - Pétrologie : Paris, Dunod.

|9 | MATTAUER, M., 1973

Les déformations des matériaux de l'écorce terrestre : Paris, Hermann.

|10| DERCOURT, J., PAQUET, J., 1974

Géologie - Objets et méthodes, Paris, Dunod

|11| HARRINGTON, R.F., 1961

Time-Harmonic electromagnetic fields : New York, Mc. Graw-Hill.

|12| WAIT, J.R., 1970

Electromagnetic waves in stratified media : Oxford, Pergamon.

|13| WARD, S.H., 1967

Electromagnetic theory for geophysical applications : Tulsa, SEG, Mining Volume II

|14| GABILLARD, R.,

Théorie matricielle de la propagation dans un terrain stratifié d'une onde électromagnétique émise par un dipôle électrique vertical Rapport IREL n° 004-68

|15| MITTRA, R., (Ed.) 1973

Computer techniques for electromagnetics : Braunschweig, Pergamon.

|16| ERDELYI, A., et al, 1954

Tables of integral transforms : New York, Mc. Graw-Hill

|17| JOHN TODD, 1962,

Survey of numerical analysis : New York, Mc. Graw-Hill

|18| HARRINGTON, R.F. 1968

Field computation by moment methods, New York, Mc. Graw-Hill

|19| RICHMOND, J.H., 1965

Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross-section shape : IEEE - Trans. V. AP 13, p. 334-341

|20| RICHMOND, J.H., 1966,

TE wave scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross-section shape : IEEE-Trans, V. AP 14, p. 460-464

|21| FRISCHKNECHT, F.C., 1967

Fields about an oscillating magnetic dipole over a two-layer earth : Colorado School of Mines Quart, v. 62, n° 1.

|22| HILDEBRAND, F.B., 1956

Introduction to numerical analysis : New York, Mc. Graw-Hill

|23| RALSTON, A., 1965

A first course in numerical analysis : New York, Mc. Graw-Hill

|24| DURAND, E., 1961,

Solutions numériques des équations algébriques (tome II) : Paris, Masson et Cie

|25| BODEWIG, E., 1959,

Matrix calculus : Amsterdam, North-Holland.

|26| SCHEID, F., 1968
Theory and problems of numerical analysis : New-York, Mc. Graw-Hill

|27| CLICQUE D.
Etude théorique et expérimentale d'un dispositif à focalisation de champ pour la détection de carrières souterraines et d'une technique d'analyse de données de prospection géophysique,
Thèse de Docteur Ingénieur, 1976, LILLE

|28| WATSON, G.N, 1944
Theory of Bessel functions : Cambridge University Press.

o

o o

ANNEXES

A N N E X E 1

-=-=-=-=-=-

RAPPEL DES FONDEMENTS DE LA THEORIE MATRICIELLE

APPLICATION AU CAS PARTICULIER DU RAYONNEMENT D'UNE LIGNE SOURCE ELECTRIQUE DANS UN MILIEU STRATIFIE

I. *Expression des conditions aux limites et formules de récurrence entre les vecteurs* $\vec{A}_n(z)$:

Le terrain dans lequel nous allons étudier le phénomène de propagation est représenté par la Figure 1.1

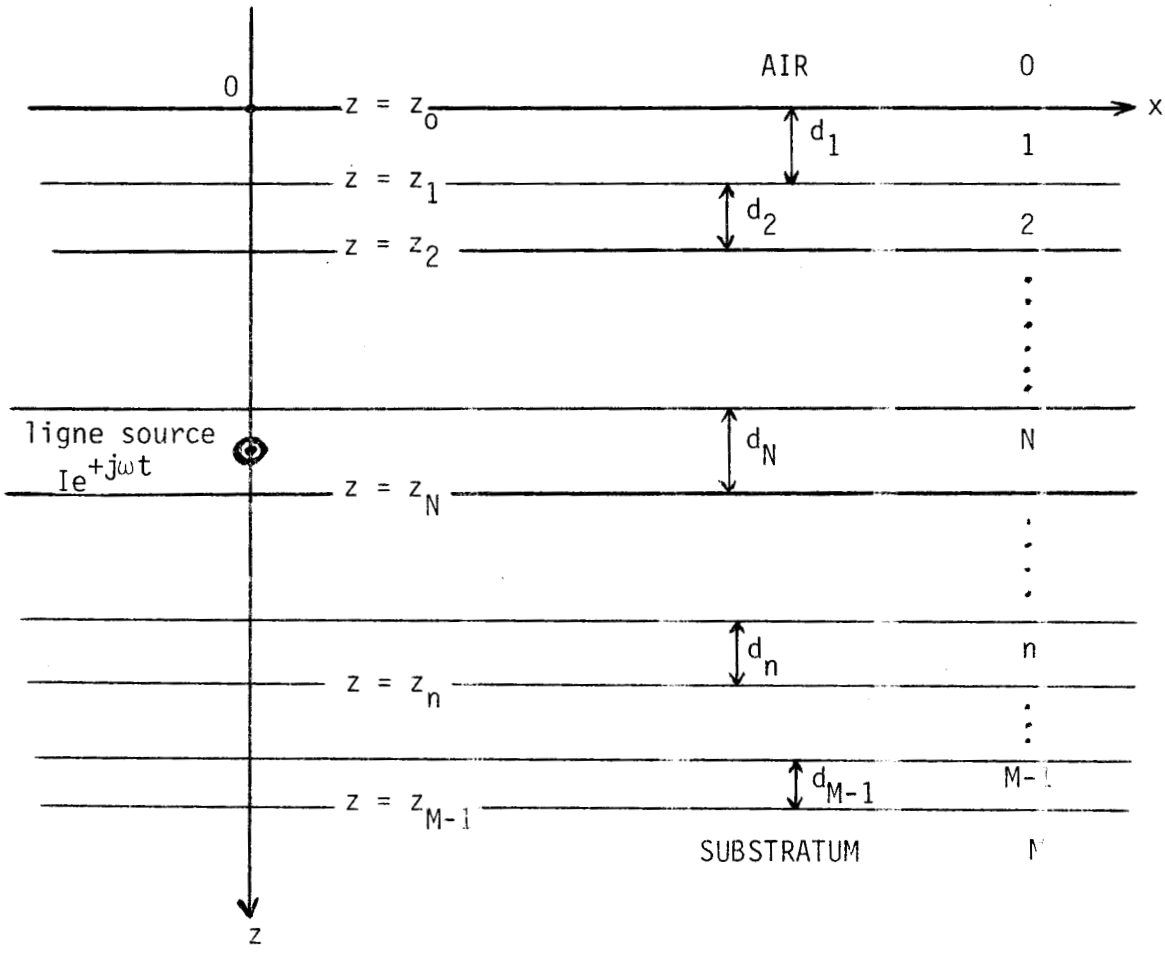


Figure -1.1-

Il est constitué par un empilement de (M + 1) couches géologiques horizontales, numérotées de 0 à M. Chaque couche d'indice "n" est supposée isotrope, homogène et linéaire et est caractérisée par la position de son interface inférieur z_n et par sa propre constante diélectrique ε_n et conductivité σ_n.

La perméabilité magnétique est supposée la même pour toutes les couches et égale à μ_o, celle de l'air. L'épaisseur de la couche "n" est d_n. Les couches extrêmes 0 et M sont des demi-milieux infinis vers le haut ($d_o \to \infty$) et vers le bas ($d_M \to \infty$).

On suppose que le dispositif émetteur (ligne source électrique parcourue par un courant $Ie^{+j\omega t}$) se trouve dans la couche quelconque d'indice "N". D'une manière générale le champ électrique (n'ayant qu'une seule composante E_y) créé par la ligne source dans le milieu "n" s'écrit |12||13|

$$E_{ny} = \int_{\infty}^{\infty} \left[a_n e^{-u_n z} + b_n e^{+u_n z}\right] e^{-j\lambda x} \, d\lambda \qquad \text{(A. 1-1)}$$

avec :

$$u_n^2 = \lambda^2 - k_n^2 \qquad \text{(A. 1-2)}$$

$$Re(u_n) > 0 \qquad \text{(A. 1-3)}$$

où

$$k_n^2 = (\omega^2 \varepsilon_n \mu_o - j\omega\mu_o \sigma_n) \qquad \text{(A. 1-4)}$$

Dans l'expression (A. 1-1) a_n est l'amplitude de l'onde descendante et b_n celle de l'onde ascendante dans la couche "n". Pour que les formules de récurrence établies ci-dessous soient assez générales nous n'éliminons aucun des coefficients a_n et b_n.

De part et d'autre de chaque interface $z = z_n$ limitant la couche d'indice "n", les composantes tangentielles du champ électromagnétique doivent être égales. Cette proposition résulte directement des équations de MAXWELL ; ces relations sont appelées "*les conditions aux limites*".

Ainsi donc ces conditions aux limites s'écrivent :

$$\left[E_{ny}\right]_{z=z_n} = \left[E_{n+1,y}\right]_{z=z_n} \qquad \text{(A. 1-5)}$$

$$\left[H_{nx}\right]_{z=z_n} = \left[H_{n+1,x}\right]_{z=z_n} \qquad \text{(A 1-6)}$$

L'équation de MAXWELL nous donne :

$$\vec{H}_n = -\frac{1}{j\omega\mu_o} \vec{\nabla} \times \vec{E}_n \qquad \text{(A. 1-7)}$$

d'où on a :

$$H_{nx} = +\frac{1}{j\omega\mu_o} \frac{\partial E_{ny}}{\partial z} \qquad \text{(A. 1-8)}$$

Utilisant (A. 1-1) et (A. 1-8), les relations (A. 1-5) et (A. 1-6) se transforment comme suit :

$$a_n e^{-u_n z_n} + b_n e^{+u_n z_n} = a_{n+1} e^{-u_{n+1} z_n} + b_{n+1} e^{+u_{n+1} z_n} \qquad \text{(A. 1-9)}$$

$$-u_n a_n e^{-u_n z_n} + u_n b_n e^{+u_n z_n} = -u_{n+1} a_{n+1} e^{-u_{n+1} z_n} + u_{n+1} b_{n+1} e^{+u_{n+1} z_n} \qquad \text{(A. 1-10)}$$

Les conditions (A. 1-5) et (A. 1-6) écrites pour toutes les valeurs de l'indice "n" fournissent un système de 2 M équations entre les coefficients a_n et b_n. En supposant connus deux quelconque d'entre tous ces coefficients, ceux-ci seront parfaitement déterminés, et le problème que nous nous proposons de résoudre est d'exprimer chacun d'eux en fonction de ces deux coefficients connus. Dans le but d'alléger l'écriture, utilisons les notations matricielles qui nous permettent

d'écrire rapidement sous une forme condensée un tel système d'équations.

Nous allons introduire un espace fonctionnel à deux dimensions dans lequel nous considérons les vecteurs $\vec{A_n}(z)$ définis sous forme matricielle par :

$$\vec{A_n}(z) = \begin{bmatrix} a_n e^{-u_n z} \\ b_n e^{+u_n z} \end{bmatrix} \qquad \text{(A. 1-11)}$$

Si l'on désigne maintenant par U_n la matrice suivante :

$$U_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -u_n & +u_n \end{bmatrix} \qquad \text{(A. 1-12)}$$

le système provenant des "conditions aux limites" pourra s'écrire de la manière suivante :

$$U_n \vec{A_n}(z_n) = U_{n+1} \vec{A_{n+1}}(z_n) \qquad \text{(A. 1-13)}$$

D'où on tire :

$$\vec{A_n}(z_n) = U_n^{-1} U_{n+1} \vec{A_{n+1}}(z_n) \qquad \text{(A. 1-14)}$$

et inversement :

$$\vec{A_{n+1}}(z_n) = U_{n+1}^{-1} U_n \vec{A_n}(z_n) \qquad \text{(A. 1-15)}$$

Il est facile de transformer la condition (A. 1-14) ou (A. 1-15) en une formule de récurrence. En effet on vérifie sur la Figure 1.1 que :

$$z_n = z_{n+1} - d_{n+1} \qquad \text{(A. 1-16)}$$

et par suite :

$$\vec{A}_{n+1}(z_n) = \begin{bmatrix} a_{n+1} e^{-u_{n+1}(z_{n+1} - d_{n+1})} \\ b_{n+1} e^{+u_{n+1}(z_{n+1} - d_{n+1})} \end{bmatrix} \qquad \text{(A. 1-17)}$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\vec{A}_{n+1}(z_n) = D_{n+1} \quad \vec{A}_{n+1}(z_{n+1}) \qquad \text{(A. 1-18)}$$

avec :

$$D_{n+1} = \begin{bmatrix} e^{+u_{n+1} d_{n+1}} & 0 \\ 0 & e^{-u_{n+1} d_{n+1}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A. 1-19)}$$

De l'équation (A. 1-18) on a :

$$\vec{A}_{n+1}(z_{n+1}) = D_{n+1}^{-1} \quad \vec{A}_{n+1}(z_n) \qquad \text{(A. 1-20)}$$

L'équation (A. 1-14) peut donc s'écrire :

$$\vec{A}_n(z_n) = (U_n^{-1} \; U_{n+1} \; D_{n+1}) \; \vec{A}_{n+1}(z_{n+1}) \qquad \text{(A. 1-21)}$$

et d'une manière identique nous aurons à partir de l'équation (A. 1-15) en utilisant (A. 1-20) :

$$\vec{A}_{n+1}(z_n) = (U_{n+1}^{-1} \; U_n \; D_n^{-1}) \quad \vec{A}_n(z_{n-1}) \qquad \text{(A. 1-22)}$$

Nous avons supposé que la source d'excitation se trouvait dans la couche d'indice "N". Nous allons donc établir les relations entre les vecteurs $A_N(z)$ de la couche "N" et les vecteurs correspondant *des couches extrêmes 0 et M.*

D'après (A. 1-21) nous obtenons la relation suivante :

$$\vec{A}_N(z_n) = (U_N^{-1}\, U_{N+1}\, D_{N+1})\, \vec{A}_{N+1}(z_{N+1}) \qquad \text{(A. 1-23)}$$

Ce qui se généralise de la manière suivante :

$$\vec{A}_N(z_N) = (U_N^{-1} U_{N+1} D_{N+1})(U_{N+1}^{-1} U_{N+2} D_{N+2}) \cdots (U_{M-2}^{-1} U_{M-1} D_{M-1})(U_{M-1}^{-1} U_M) \vec{A}_M(z_{M-1})$$

(A. 1-24)

Il est évident que le produit de toutes les matrices de l'équation (A. 1-24) sera une matrice, dite "matrice de transformation". Définissons donc une matrice de transformation M_{pq}, "p" et "q" étant deux indices tels que q > p. Nous poserons :

$$M_{pq} = (U_p^{-1} U_{p+1} D_{p+1})(U_{p+1}^{-1} U_{p+2} D_{p+2}) \cdots (U_{q-2}^{-1} U_{q-1} D_{q-1})(U_{q-1}^{-1} U_q) \qquad \text{(A. 1-25)}$$

D'où l'équation (A. 1-24) pourra s'écrire :

$$\vec{A}_N(z_N) = M_{NM}\, \vec{A}_M(z_{M-1}) \qquad \text{(A. 1-26)}$$

On remarque que :

$$M_{pq}^{-1} = (U_q^{-1} U_{q-1} D_{q-1}^{-1})(U_{q-1}^{-1} U_{q-2} D_{q-2}^{-1}) \cdots (U_{p+2}^{-1} U_{p+1} D_{p+1}^{-1})(U_{p+1}^{-1} U_p) \qquad \text{(A. 1-27)}$$

Nous considérons ensuite les conditions aux limites satisfaites sur l'interface supérieure ($z = z_{N-1}$) de la couche "N". Ceci nous donne

la relation suivante entre deux vecteurs $\vec{A}$ adjacents :

$$A_N(\vec{z}_{N-1}) = U_N^{-1}\, U_{N-1}\, A_{N-1}(\vec{z}_{N-1}) \qquad \text{(A. 1-28)}$$

On se sert de l'équation (A. 1-20) pour écrire (A. 1-28) comme suit :

$$A_N(\vec{z}_{N-1}) = (U_N^{-1}\, U_{N-1}\, D_{N-1}^{-1})\, A_{N-1}(\vec{z}_{N-2}) \qquad \text{(A. 1-29)}$$

et par application récurrente de (A. 1-20) et en tenant compte de (A 1-28) nous aurons :

$$A_N(\vec{z}_{N-1}) = (U_N^{-1}\, U_{N-1} D_{N-1}^{-1})(U_{N-1}^{-1} U_{N-2} D_{N-2}^{-1}) \ldots (U_2^{-1} U_1 D_1^{-1})(U_1^{-1} U_o) A_o(\vec{z}_o) \qquad \text{(A. 1-30)}$$

ou bien encore en utilisant la relation (A. 1-27) l'équation (A. 1-30) devient :

$$A_N(\vec{z}_{N-1}) = M_{ON}^{-1}\, A_O(\vec{z}_O) \qquad \text{(A. 1-31)}$$

II - Calcul des coefficients de réflexion et de transmission

Nous avons supposé que la source d'excitation se trouvait dans la couche d'indice "N" (voir Figure 1.1 - page A. *1-1*). Dans ce paragraphe nous nous proposons de calculer les fractions d'onde réfléchie et transmise vers les deux couches extrêmes O et M à partir de la couche d'indice "N".

Considérons d'abord le substratum - la couche d'indice "M". Dans ce cas le *coefficient de réflexion* peut se définir comme suit :

$$r(\lambda) = \frac{b_N}{a_N} \qquad \text{(A. 1-32)}$$

et le *coefficient de transmission* comme :

$$r_t(\lambda) = \frac{a_M}{a_N} \qquad \text{(A. 1-33)}$$

Ecrivons explicitement la relation (A. 1-26) en utilisant (A. 1-11) :

$$\begin{bmatrix} a_N e^{-u_N z_N} \\ b_N e^{+u_N z_N} \end{bmatrix} = M_{NM} \begin{bmatrix} a_M e^{-u_M z_{M-1}} \\ b_M e^{+u_M z_{M-1}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A. 1-34)}$$

ceci nous donne la relation entre les diverses amplitudes d'onde dans les couches d'indices "N" et "M".

Dans le substratum nous avons $b_M = 0$. Et en supposant connue l'amplitude a_N de l'onde primaire, nous pouvons expliciter les coefficients $r(\lambda)$ et $r_t(\lambda)$ selon (A. 1-32) et (A. 1-33) pour chaque cas de milieu stratifié.

Considérons ensuite la couche extrême supérieure d'indice "O". Dans ce cas nous aurons $a_o = 0$ et le *coefficient de réflexion* peut se définir comme suit :

$$r'(\lambda) = \frac{a_N}{b_N} \qquad \text{(A. 1-35)}$$

et le *coefficient de transmission* comme :

$$r'_t(\lambda) = \frac{b_o}{b_N} \qquad \text{(A. 1-36)}$$

Ecrivons explicitement la relation (A. 1-31) liant les amplitudes des couches "N" et "O" en utilisant (A. 1-11) :

$$\begin{bmatrix} a_N e^{-u_N z_{N-1}} \\ b_N e^{+u_N z_{N-1}} \end{bmatrix} = M_{ON}^{-1} \begin{bmatrix} a_o e^{-u_o z_o} \\ b_o e^{+u_o z_o} \end{bmatrix} \qquad \text{(A. 1-37)}$$

Evidemment nous prenons dans ce cas b_N comme l'amplitude de l'onde primaire dans la couche d'indice "N".

Les matrices M_{NM} et M_{ON}^{-1} peuvent s'obtenir à partir des relations (A. 1-25) et (A. 1-27).

o

o o

A N N E X E 2

CALCUL NUMERIQUE DE L'INTEGRALE D'UNE FONCTION
METHODE DE NEWTON-COTES

APPLICATION AUX CAS PARTICULIERS DE FORMULES DES TRAPEZES ET DE SIMPSON

Soit à calculer la valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_p^q w(x)\ f(x)\ dx \qquad \text{(A. 2-1)}$$

où w(x) est une fonction de poids.

La formule de NEWTON-COTES de type fermé a la forme suivante |23| :

$$\int_p^q w(x)\ f(x)\ dx = \sum_{j=o}^{n} H_j\ f(p + hj) + E \qquad \text{(A. 2-2)}$$

où

$$h = \frac{q - p}{n} \qquad \text{(A. 2-3)}$$

et E est le reste, H_j sont des Nombres de Cotes.

Nous prenons $w(x) = 1$.

I - *Formule des Trapèzes*

Supposons que l'intervalle (p, q) soit partagé en un certain nombre m de sous-intervalles de longueur h. Appliquons la formule de NEWTON-COTES (A. 2-2) avec n = 1 sur chaque sous-intervalle.

Nous aurons :

$$\int_p^q f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2} f_o + f_1 + f_2 + \dots + f_{m-1} + \frac{1}{2} f_m\right] + E_t \qquad \text{(A. 2-4)}$$

La relation (A. 2-4) est la *Formule des Trapèzes*, où

$$f_j = f(p + hj) \qquad \text{(A. 2-5)}$$

$$h = \frac{q - p}{m} \qquad \text{(A. 2-6)}$$

et E_t est son reste donné par :

$$E_t = -\frac{(q - p)^3}{12\,m^2}\, f^{(2)}(\eta) \qquad \text{(A. 2-7)}$$

où $f^{(2)}(\eta)$ est la dérivée seconde et η se trouve dans l'intervalle (p, q).

Il est donc clair que, si la dérivée seconde existe sur l'intervalle (p, q), le reste E_t de (A. 2-7) tend vers zéro en $\frac{1}{m^2}$ lorsque $m \to \infty$

II - *Formule de Simpson*

Supposons que l'intervalle (p, q) soit divisé en $\frac{m}{2}$ sous-intervalles de longueur 2 h, m étant un entier pair ; appliquons la formule de NEWTON-COTES (A. 2-2) avec n = 2 sur chaque sous-intervalle.

On trouve :

$$\int_p^q f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_o + 4 f_1 + 2 f_2 + \dots + 2 f_{m-2} + 4 f_{m-1} + f_m\right] + E_s \qquad \text{(A. 2-8)}$$

C'est la *Formule de Simpson*, où

$$f_j = f(p + hj) \qquad \text{(A. 2-9)}$$

$$h = \frac{q - p}{m} \qquad \text{(A. 2-10)}$$

et E_s est son reste donné par :

$$E_s = - \frac{(q - p)^5}{180\ m^4} \ f^{(4)}\ (\eta) \qquad \text{(A. 2-11)}$$

où η se trouve dans l'intervalle (p, q).

Il en résulte que si $f^{(4)}(x)$ existe sur l'intervalle (p, q), le reste E_s de (A. 2-11) dans la Formule de Simpson tend vers zéro en $\frac{1}{m^4}$ lorsque $m \to \infty$

III - *Remarques générales à propos des Formules des Trapèzes et de Simpson*

Dans l'utilisation de la Formule des Trapèzes (A. 2-4) et de celle de Simpson (A. 2-8), le moyen le plus sûr d'atteindre une très grande précision est le suivant : augmenter le nombre m de sous-intervalles jusqu'à ce que les valeurs approchées de l'intégrale soient stabilisées (c'est-à-dire, restent les mêmes) pour deux valeurs successives de m|23|.

Soient I_1 et I_2 les deux valeurs approchées de l'intégrale, calculées respectivement avec m égal à m_1 et m_2. La valeur exacte de l'intégrale est I.

Utilisons la formule des Trapèzes (A. 2-4). Nous aurons :

$$I = I_1 - \frac{(p - q)^3}{12\ m_1^2}\ f^{(2)}\ (\eta_1) \qquad \text{(A. 2-12)}$$

et

$$I = I_2 - \frac{(p - q)^3}{12\ m_2^2}\ f^{(2)}\ (\eta_2) \qquad \text{(A. 2-13)}$$

où η_1 et η_2 se trouvent dans (p, q). Supposons que :

$$f^{(2)}(\eta_1) \# f^{(2)}(\eta_2) \qquad \text{(A. 2-14)}$$

Dans ce cas nous pouvons combiner (A. 2-12) et (A. 2-13) pour obtenir la formule suivante :

$$I \# I_2 + \frac{m_1^2}{m_2^2 - m_1^2}\ (I_2 - I_1) \qquad \text{(A. 2-15)}$$

En raisonnant d'une manière analogue pour le cas de Simpson (A. 2-8) nous aurons :

$$I \# I_2 + \frac{m_1^4}{m_2^4 - m_1^4}\ (I_2 - I_1) \qquad \text{(A. 2-16)}$$

Les approximations (A. 2-15) et (A. 2-16) reviennent à utiliser deux valeurs approchées pour calculer une troisième qui est plus proche de la valeur exacte. Cette méthode est bien connue |22||23| et s'appelle *l'extrapolation de RICHARDSON.*

Dans la relation (A. 2-16) si nous mettons $m_2 = 2\ m_1$ nous aurons :

$$I \# I_2 + \frac{1}{15}\ (I_2 - I_1) \qquad \text{(A. 2-17)}$$

pour $m_2 = 3\ m_1$,

$$I \# I_2 + \frac{1}{80}\ (I_2 - I_1) \qquad \text{(A. 2-18)}$$

Cette approximation est valable si $f^4(\eta)$ ne varie pas rapidement et ne change pas de signe sur l'intervalle (p, q). En général on peut s'en servir dans tous les cas si le terme correctif à ajouter à I_2 est petit par rapport à I_2 lui-même.

- o -

A N N E X E 3

-=-=-=-=-=-=-

ORGANIGRAMME GENERAL DU PROGRAMME DE CALCUL DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE TOTAL A LA SURFACE DU SOL

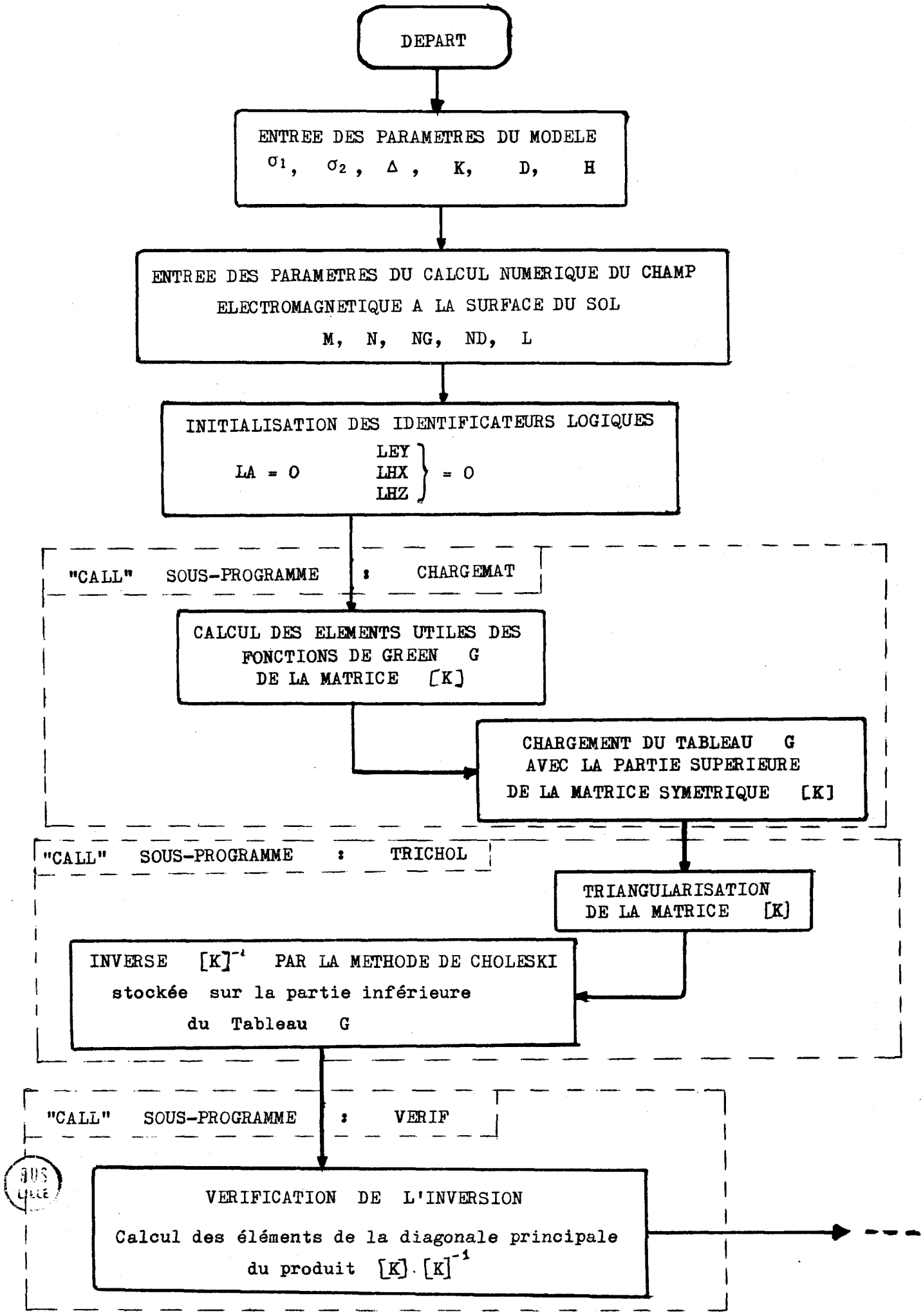
Nous donnons ci-dessous la légende des paramètres utiles.

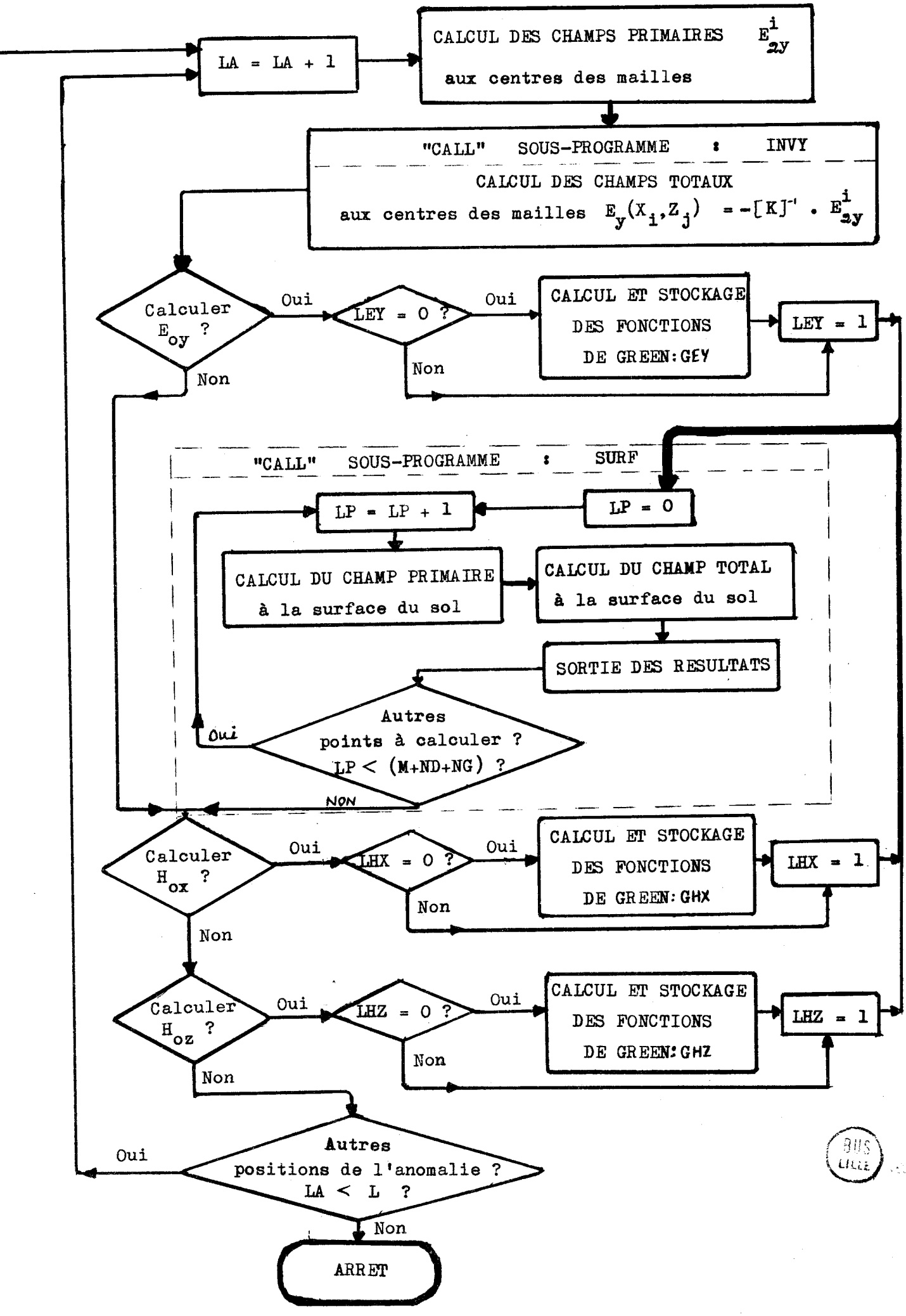
On peut constater que lorsque l'on passe d'une position de l'anomalie à une autre par l'incrémentation du paramètre LA, on réutilise des résultats acquis par les Subroutines : CHARGEMAT, TRICHOL et SURF. En particulier, on remarque que les fonctions de GREEN des tableaux GEY GHX et GHZ ne sont calculés qu'une seule fois, quelque soit le nombre total de positions de l'anomalie, enterrée à une profondeur donnée (voir page 42 : paragraphe II.5-2 - "*Remarques générales à propos du programme de calcul*").

Cette façon de procéder contribue pour une grande partie à l'économie du temps-calcul obtenue.

LEGENDE

σ_1	Conductivité de la couche superficielle
σ_2	Conductivité du substratum
K	Contraste de conductivité σ_s/σ_2
D	Epaisseur de la couche superficielle
H	Profondeur du toit de la poche magmatique
Δ	Côté de maille
M	Nombre de mailles suivant l'axe $\vec{Ox}$
N	Nombre de mailles suivant l'axe $\vec{Oy}$
ND	Nombre de points à la surface du sol à droite de l'anomalie où l'on calcule le champ total
NG	Nombre de points à la surface du sol à gauche de l'anomalie où l'on calcule le champ total
L	Nombre de positions de l'anomalie (voir Figure 13 - page 43)
G	Tableau formé par les matrices $[K]$ et $[K]^{-1}$ (voir Figure 12 - page 43)
GEY	Tableau comportant les éléments des fonctions de GREEN G_2 du champ électrique diffracté par l'anomalie (voir page 34)
GHX	Tableau comportant les éléments des fonctions de GREEN G_3 du champ magnétique horizontal, diffracté par l'anomalie (voir page 36)
GHZ	Tableau comportant les éléments des fonctions de GREEN G_4 du champ magnétique vertical, diffracté par l'anomalie (voir page 36)


DEPART
ENTREE DES PARAMETRES DU MODELE
σ1, σ2, Δ, K, D, H
ENTREE DES PARAMETRES DU CALCUL NUMERIQUE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE A LA SURFACE DU SOL
M, N, NG, ND, L
INITIALISATION DES IDENTIFICATEURS LOGIQUES
LA = 0
LEY
LHX
LHZ
= 0
"CALL" SOUS-PROGRAMME : CHARGEMAT
CALCUL DES ELEMENTS UTILES DES FONCTIONS DE GREEN G DE LA MATRICE [K]
CHARGEMENT DU TABLEAU G AVEC LA PARTIE SUPERIEURE DE LA MATRICE SYMETRIQUE [K]
"CALL" SOUS-PROGRAMME : TRICHOL
TRIANGULARISATION DE LA MATRICE [K]
INVERSE [K]-1 PAR LA METHODE DE CHOLESKI stockée sur la partie inférieure du Tableau G
"CALL" SOUS-PROGRAMME : VERIF
VERIFICATION DE L'INVERSION
Calcul des éléments de la diagonale principale du produit [K].[K]-1


LA = LA + 1
CALCUL DES CHAMPS PRIMAIRES E^i_{2y}
aux centres des mailles
"CALL" SOUS-PROGRAMME : INVY
CALCUL DES CHAMPS TOTAUX
aux centres des mailles $E_y(X_i,Z_j) = -[K]^{-1} \cdot E^i_{2y}$
Calculer E_{oy} ?
Oui
Non
LEY = 0 ?
Oui
Non
CALCUL ET STOCKAGE DES FONCTIONS DE GREEN: GEY
LEY = 1
"CALL" SOUS-PROGRAMME : SURF
LP = 0
LP = LP + 1
CALCUL DU CHAMP PRIMAIRE à la surface du sol
CALCUL DU CHAMP TOTAL à la surface du sol
SORTIE DES RESULTATS
Autres points à calculer ? LP < (M+ND+NG) ?
Oui
NON
Calculer H_{ox} ?
Oui
Non
LHX = 0 ?
Oui
Non
CALCUL ET STOCKAGE DES FONCTIONS DE GREEN: GHX
LHX = 1
Calculer H_{oz} ?
Oui
Non
LHZ = 0 ?
Oui
Non
CALCUL ET STOCKAGE DES FONCTIONS DE GREEN: GHZ
LHZ = 1
Autres positions de l'anomalie ? LA < L ?
Oui
Non
ARRET

ANNEXE 4

LE RAYONNEMENT D'UNE LIGNE SOURCE DANS UN MILIEU HOMOGENE INFINI QUELCONQUE

Considérons une ligne source électrique placée dans un milieu homogène et infini suivant l'axe $\vec{Oy}$ (voir Figure 4.1.). Cette ligne source est parcourue par un courant sinusoïdal $Ie^{+j\omega t}$.

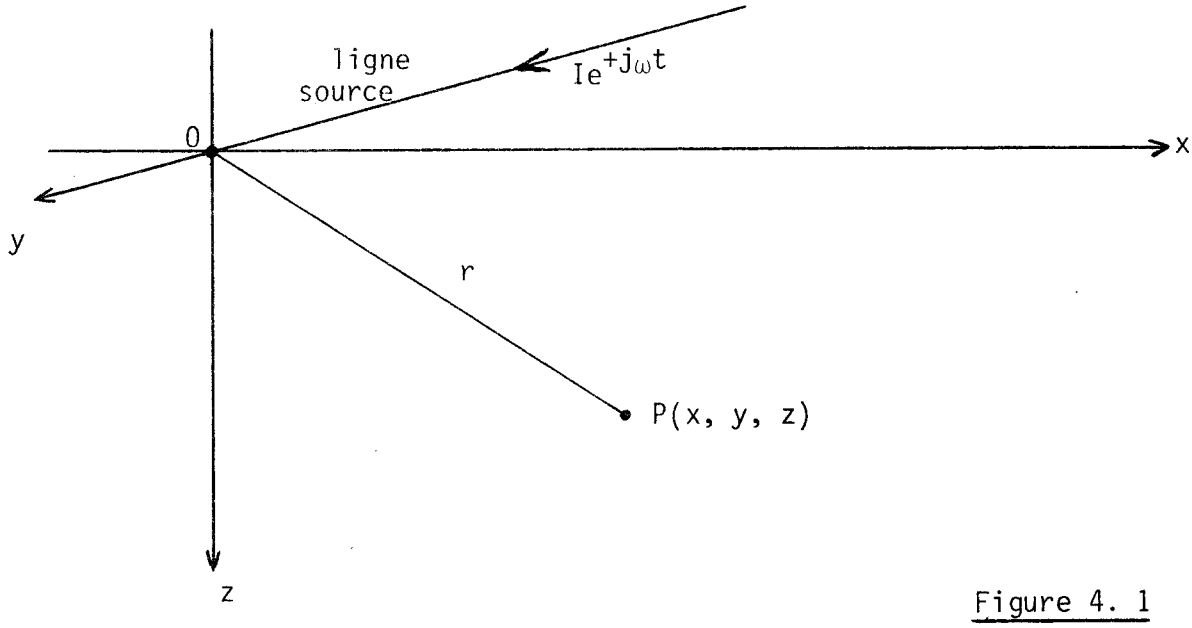


Figure 4. 1

Le champ électrique $\vec{E}$ créé en un point quelconque de l'espace n'aura qu'une seule composante E_y, qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$[\nabla^2 + k^2] \; E_y = j\omega\mu \; J_i \; \delta \qquad \text{(A. 4-1)}$$

où

J_i est la densité de courant de la source d'excitation

δ est la fonction de distribution qui vaut 1 pour tout point situé sur la ligne source d'excitation et qui est nulle ailleurs.

et

$$k^2 = (\omega^2 \varepsilon\mu \quad - j\omega\mu\sigma) \qquad \text{(A. 4-2)}$$

ε, μ, σ étant respectivement la constante diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductivité du milieu.

D'une manière classique la solution de (A. 4-1) s'obtient en intégrant sur le volume d'antenne (la ligne source) la fonction formée par le produit de J_i avec la fonction de GREEN appropriée. D'où

$$E_y = \left(\frac{-1}{4\pi}\right) \int_{\substack{\text{volume de} \\ \text{la ligne source}}} j\omega\mu \; J_i \; \frac{e^{-jkr}}{r} \; dv \qquad \text{(A. 4-3)}$$

où r est la distance entre un point courant de la ligne source et le point courant d'observation P.

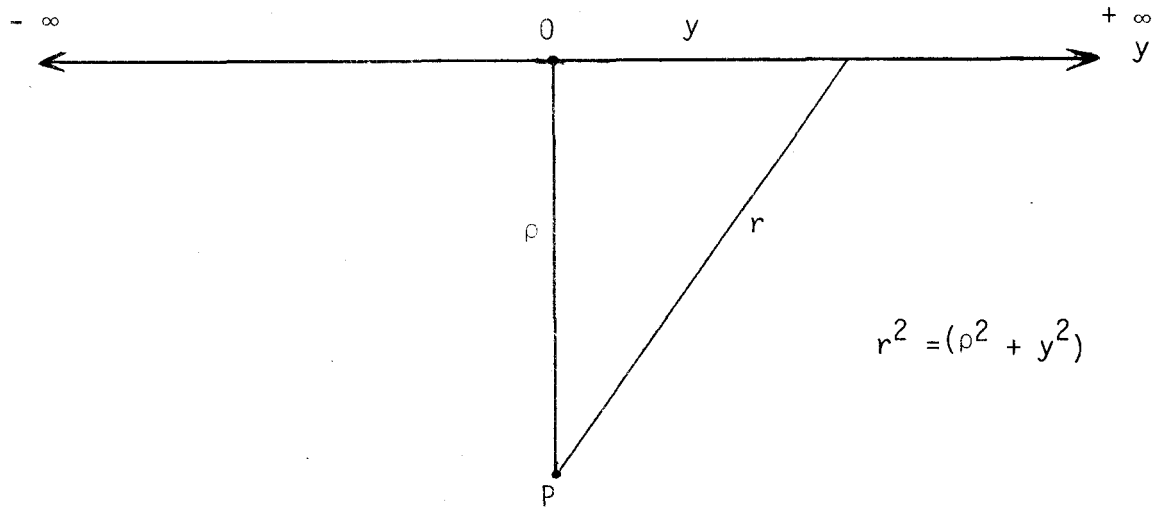


Figure 4. 2

Remplaçons cette intégrale de volume par une intégrale curviligne :

$$E_y = \left(\frac{-j\omega\mu}{4\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} I. \frac{e^{-jkr}}{r} \; dy \qquad \text{(A. 4-4)}$$

où

$$r^2 = \rho^2 + y^2$$

ρ étant la distance entre le point d'observation P et sa projection 0 sur la ligne source (voir Figure 4. 2).

Nous supposons que l'amplitude I du courant est constante en tout point de la ligne source. Evidemment, ceci n'est vrai qu'à une fréquence nulle. Néanmoins, cette supposition se justifie aux basses fréquences où les longueurs d'onde sont très grandes.

Posons :

$$t = \frac{r}{\rho}$$

L'expression (A. 4-4) devient :

$$E_y = \left(\frac{-j\omega\mu\ I}{2\pi}\right) \int_1^{\infty} \frac{e^{-jk\rho t}}{\sqrt{t^2-1}}\ dt \qquad \text{(A. 4-5)}$$

L'intégrale figurant dans (A. 4-5) a été évaluée par WATSON |28|, à la condition suivante :

$$Re\ (jk\rho) > 0 \qquad \text{(A. 4-6)}$$

on a donc :

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-jk\rho t}}{\sqrt{t^2-1}}\ dt = K_o\ (jk\rho) \qquad \text{(A. 4-7)}$$

où K_o est la fonction de BESSEL modifiée de seconde espèce.

Il en résulte que :

$$E_y = \left(\frac{-j\omega\mu\ I}{2\pi}\right)\ K_o\ (jk\rho) \qquad \text{(A. 4-8)}$$

L'équation (A. 4-8) nous donne la valeur du champ électrique en un point quelconque de l'espace. Nous pouvons en déduire les expressions du champ magnétique.

Les composantes du champ magnétique s'obtiennent à l'aide des équations de Maxwell comme suit :

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \qquad \text{(A. 4-9)}$$

D'où

$$H_x = + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z} \qquad \text{(A. 4-10)}$$

$$H_z = - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \qquad \text{(A. 4-11)}$$

Les trois composantes du champ électromagnétique rayonné par une ligne source placée dans un milieu infini s'écrivent donc :

$$E_y = \left(\frac{-j\omega\mu\ I}{2\pi}\right) . K_o \left(jk \sqrt{x^2 + z^2}\right) \qquad \text{(A. 4-12)}$$

$$H_x = \left(\frac{+\ I}{2\pi}\right) . jk . \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} . K_1\left(jk\sqrt{x^2 + z^2}\right) \qquad \text{(A. 4-13)}$$

$$H_z = \left(\frac{-\ I}{2\pi}\right) . jk . \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} . K_1 \left(jk\sqrt{x^2 + z^2}\right) \qquad \text{(A. 4-14)}$$

Il est donc clair que le champ, créé par une ligne source dans un milieu infini est tel que la composante horizontale H_x du champ magnétique s'annule en tous points sur le plan xOy et que sa composante verticale H_z est égale à zéro en tous points du plan yOz (voir Figure 4.3 - *page A 4.5*).

En tout autre point de l'espace les deux composantes H_x et H_z subsisteront.

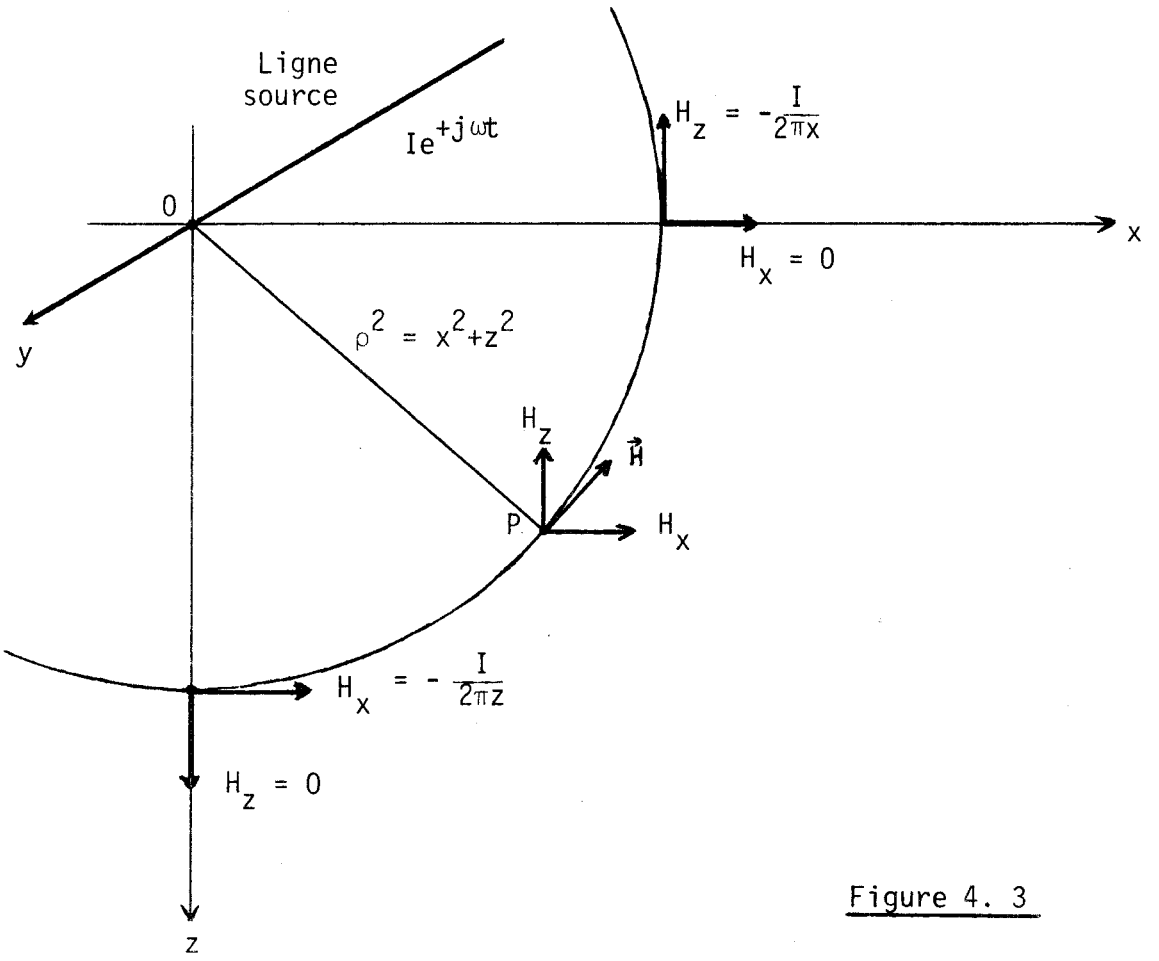


Figure 4. 3

Supposons que nous travaillons à des fréquences suffisamment basses pour se placer dans l'approximation quasi-statique. Cette approximation revient à supposer que la distance ρ séparant l'émetteur et le récepteur est faible vis-à-vis de la longueur d'onde dans le milieu.

Il en résulte que

$$|k\rho| \ll 1 \qquad \text{(A. 4-15)}$$

Dans ces conditions, l'expression de la composante verticale H_z du champ magnétique (A. 4-14) sur l'axe Ox se réduit en une forme particulièrement simple : [12] [13]

$$H_z = -\frac{I}{2\pi x} \qquad \text{(A. 4-16)}$$

Nous utiliserons cette valeur (A. 4-16) de H_z pour normaliser toutes les expressions du champ magnétique à la surface d'un terrain à deux couches, au cours de notre étude de faisabilité de la détection des poches magmatiques.