

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le diplôme de

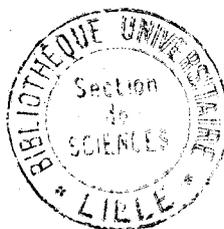
DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Dominique MEIZEL

Ingénieur I D N

**SUR L'ÉTUDE ET LA SYNTHÈSE
DE SYSTÈMES ELECTROMÉCANIQUES
A CHARGE VARIABLE.**



Soutenue le 19 Juin 1979 devant le Jury d'examen.

Président

M. Le Professeur R. GABILLARD

Rapporteur

M. J.C. GENTINA, Docteur ès Sciences

Examineurs

M. P. BORNE, Docteur ès Sciences

M. I.D. LANDAU, Maître de Recherche au C.N.R.S.

M. F. LAURENT, Maître de Conférences

M. Le Professeur C. MAIZIERES

Invités

M. A. LEMAIRE, Ingénieur E.D.F.-G.D.F.

M. Le Professeur M. MORIAMEZ, Directeur de l'I.D.N.

" La science considérée comme un ensemble accompli de connaissances est la production humaine la plus impersonnelle ; mais considérée comme un projet qui se réalise progressivement, elle est tout aussi subjective et psychologiquement conditionnée que n'importe quelle entreprise humaine."

A. Einstein

(.../...) Mais le rapport des mathématiques aux sciences de la nature n'est pas à sens unique (.../...). Sous l'application des mathématiques aux sciences de la nature se dissimule un autre rapport, inverse : celui par lequel les mathématiques sont obligées de poser, pour répondre à la demande des sciences, des problèmes qui peuvent être soit de "mathématique appliquée" , soit de mathématique pure.

Tout se passe comme si les mathématiques rendaient aux sciences, sous une forme élaborée, ce qu'elles ont reçu d'elle.

Dans cet échange organique, a-t-on encore de droit de parler d'*application* ?

Ne doit-on pas dire qu'il existe entre les mathématiques et les sciences de la nature un autre rapport, un rapport de *constitution*.

AVANT-PROPOS

Le travail que nous présentons a été effectué au sein de l'équipe du laboratoire de Systématique de l'Université de Lille I.

Tout d'abord, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à Monsieur Le Professeur GABILLARD pour l'honneur qu'il nous a fait en présidant notre jury de thèse. Qu'il trouve ici l'expression de notre vive reconnaissance.

Nous sommes très redevables à Monsieur Jean Claude GENTINA, Maître-Assistant à l'Institut Industriel du Nord qui, par ses conseils éminents et son amitié a su nous initier à la recherche et guider notre travail. Très conscients de ce qu'il nous a apporté, nous le remercions bien sincèrement.

Nous avons été très sensibles à l'honneur que nous a fait Monsieur Le Professeur LANDAU, Maître de recherches au CNRS, pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail et pour les conseils et les remarques qu'il nous a prodigués.

Nous tenons aussi à exprimer notre reconnaissance à Monsieur François LAURENT, Maître de conférence à l'Université de Lille I et Directeur du laboratoire de systématique qui nous a accueilli et a su nous intégrer au sein de son équipe. Sa grande expérience de la recherche nous a été infiniment profitable.

Que Monsieur Le Professeur MAIZIERES soit remercié ici pour ses conseils qui nous ont permis de mener à bien ce travail à vocation pluridisciplinaire, et pour tout l'intérêt qu'il y a porté.

Nous voulons également exprimer notre profonde sympathie à Monsieur Pierre BORNE, Maître-Assistant à l'Université de Lille I, pour l'impulsion que son esprit vif et ouvert a su donner à ce travail.

Nous tenons à remercier Monsieur Le Professeur MORIAMEZ, Directeur de l'I.D.N. qui a bien voulu juger notre travail et faire partie de notre jury de thèse.

Enfin, que Monsieur André LEMAIRE, Ingénieur à EDF-GDF trouve ici l'expression de notre sympathie pour sa participation à notre jury de thèse et les remarques qu'il a formulées sur notre travail.

Une mention particulière est due à Messieurs Jean Marc CHARTRES et Jacques MAYET, techniciens à l'Institut Industriel du Nord pour l'aide et les avis compétents qu'ils nous ont apportés dans la réalisation de l'appareillage électronique qui nous a été indispensable.

Pour terminer, nous sommes reconnaissants à Madame DEVAUX d'avoir su dactylographier dans des délais parfois tenus les versions préliminaires de ce texte ainsi que ce dernier.

TABLE DES MATIERES

| | |
|--|----|
| <u>Introduction générale</u> | 1 |
| <u>CHAPITRE 1</u> | 4 |
| 1. Introduction | 5 |
| 2. Représentation mathématique du processus : choix d'un modèle | 5 |
| 2.1. Cas linéaire | 6 |
| 2.2. Cas général | 7 |
| 3. Fonctionnement du moteur en asservissement de vitesse | 8 |
| 3.1. Position du problème | |
| - Choix d'une structure de réseau correcteur adaptable | 8 |
| 3.2. Formulation du problème | 9 |
| 3.3. Critère \mathcal{C} | 11 |
| 3.4. Représentation particulière | 12 |
| 4.1. Cas d'une charge variable autour d'une valeur nominale constante | 12 |
| 4.1.1. Etude de stabilité asymptotique | 12 |
| 4.1.2. Etude de stabilité dynamique | 13 |
| 4.2. Charge nominale variant comme une fonction en escalier du temps | 16 |
| 4.2.1. Etude de stabilité asymptotique | 17 |
| 4.2.2. Etude de stabilité dynamique | 21 |
| 4.2.3. Interprétation | 22 |
| 4.3. La charge nominale varie continuellement en fonction du temps | 23 |
| 4.3.1. Etude de stabilité asymptotique | 23 |
| 4.3.2. Etude de stabilité dynamique | 26 |

| | |
|--|----|
| 3.6. Systèmes non linéaires dont un fonctionnement nominal est défini par un système de la classe précédente | 65 |
| 3.6.1. Etude de stabilité dynamique | 65 |
| Systèmes décrits sous forme C : Critère \mathcal{E}_9 | 67 |
| Systèmes décrits sous forme L : Critère \mathcal{E}_{10} | 68 |
| Cas particulier d'un point de fonctionnement à racines multiples : Critère \mathcal{E}_{11} | 69 |
| Critère \mathcal{E}_{12} | 70 |
| Conclusion | 71 |
| Rappel des principales notations | 72 |
| | |
| <u>CHAPITRE III</u> | 73 |
| Introduction | 74 |
| 1. Description du dispositif | 74 |
| 1.1. Le groupe Ward-Léonard | 74 |
| 1.2. La charge mécanique | 75 |
| 1.3. Choix d'un modèle mathématique du système | 76 |
| 1.3.1. Approche d'un modèle linéaire | 76 |
| 1.3.2. Adaptation de la commande | 76 |
| 1.3.3. Caractère non linéaire de l'asservissement | 77 |
| 2. Synthèse d'un réseau correcteur proportionnel adaptable à la charge | 80 |
| 2.1. Dynamique de la variation de charge | 82 |
| 2.2. Réalisation pratique | 83 |
| 3. Synthèse d'un réseau correcteur à action proportionnelle et intégrale indépendante de la charge | 87 |
| 3.1. Mise en équation du problème | 87 |
| 3.2. Etude de stabilité | 88 |
| Conclusion | 92 |

| | |
|--|----|
| <u>CHAPITRE II</u> | 27 |
| 1. Introduction | 28 |
| 2. Représentation des systèmes étudiés | 29 |
| 2.1. Systèmes linéaires décrits sous la forme canonique d'observabilité | 30 |
| 2.1.1. Définition de la représentation équivalente | 31 |
| 2.1.2. Etude de stabilité | 35 |
| 2.1.3. Etude de commandabilité | 36 |
| 2.1.4. Etude d'observabilité | 36 |
| 2.2. Systèmes linéaires décrits sous la forme canonique de commandabilité | 37 |
| 2.2.1. Etude de la stabilité | 39 |
| 2.2.2. Propriété d'observabilité | 39 |
| 2.2.3. Propriété de commandabilité | 39 |
| 3. Représentation et étude d'une classe de systèmes non-linéaires | 40 |
| 3.1. Remarque relative aux notions de commandabilité et d'observabilité appliquées aux systèmes non linéaires | 41 |
| 3.2. Technique d'agrégation, les normes vectorielles | 42 |
| 3.3. Adaptation de la méthode | 44 |
| 3.4. Systèmes non linéaires centrés sur un système linéaire à coefficients constants | 45 |
| 3.4.1. Etude des systèmes décrits sous la forme C | 45 |
| Critère \mathcal{C}_1 | 49 |
| 3.4.2. Etude des systèmes décrits sous la forme L | 50 |
| Critère \mathcal{C}_2 | 52 |
| 3.4.3. Cas d'un point de fonctionnement à racines multiples | 53 |
| Critère \mathcal{C}_3 | 54 |
| Critère \mathcal{C}_4 | 54 |
| 3.5. Systèmes linéaires non stationnaires | 55 |
| 3.5.1. Etude de stabilité dynamique asymptotique | 55 |
| 3.5.1.1. Systèmes décrits sous la forme C | 56 |
| Critère \mathcal{C}_5 | 58 |
| 3.5.1.2. Systèmes décrits sous la forme L | 61 |
| Critère \mathcal{C}_6 | 62 |
| 3.5.1.3. Cas particulier | 63 |
| Critère \mathcal{C}_7 | 63 |
| Critère \mathcal{C}_8 | 64 |

| | |
|--|-----|
| <u>Conclusion générale</u> | 93 |
| <u>Références bibliographiques</u> | 94 |
| <u>Annexes :</u> | 97 |
| Annexe 1 | 97 |
| Annexe 2 | 101 |
| Annexe 3 | 103 |
| Annexe 4 | 105 |
| Annexe 5 | 108 |

Dans ce sens, pour un processus dont les paramètres sont mal définis, la commande $u(t)$ est élaborée à la fois à partir de l'écart entrée/sortie $\varepsilon(t)$ et de signaux $d(t)$ représentant l'écart entre le comportement du processus et celui d'un modèle de référence connu, ce dernier définissant le comportement asymptotique souhaité du système ainsi réglé.

En général, ces études supposent a priori l'invariance des paramètres du processus durant la phase d'adaptation, la durée de celle-ci n'étant généralement pas précisée de manière théorique.

Par ailleurs, dans les travaux du professeur Lj. T. Grujić ([G7], [G8]) on ne suppose connue qu'une majoration des intervalles d'évolution des paramètres.

Dans ce cas, à condition de disposer du vecteur d'état, il est possible de donner un majorant du temps d'adaptation (settling time).

La méthode que nous proposons d'utiliser nécessite la connaissance à tout instant d'une valeur nominale des coefficients caractéristiques des processus étudiés ainsi que des bornes qui limitent les variations de la charge réelle.

Ces valeurs estimées permettent de définir une loi de commande du système réel [L5].

Ce type d'adaptation, désigné par le terme d' "adaptation en boucle ouverte" pose plusieurs problèmes :

* D'une part, la valeur estimée de la charge est variable, la trajectoire nominale du système est alors solution d'un modèle de référence généralement non-stationnaire dont les propriétés de stabilité restent à vérifier ([G6]).

* D'autre part, le caractère généralement très aléatoire des variations de charges rend l'identification de ce paramètre peu précise.

Il est donc particulièrement délicat d'adapter la loi de commande en fonction de cette estimation. En conséquence, on doit étudier dans quelles conditions ce système possède des performances convenables.

La méthode que nous proposons d'utiliser fait appel à la notion de stabilité dynamique introduite par MM. MAIZIERES, LAURENT et BORNE. L'étude consiste alors à limiter la dispersion des trajectoires possibles du système étudié en les maintenant dans le voisinage d'une trajectoire nominale. Dans ce sens, l'utilisation de critères de stabilité des systèmes non-linéaires dus respectivement à M. GENTINA et à M. BORNE permet de mener à bien cette étude.

En particulier la mise en oeuvre d'une nouvelle représentation dans l'espace d'état d'une classe de systèmes monovariables permet d'optimiser

d'une certaine manière les résultats découlant de l'utilisation de ces critères de stabilité. De plus, les calculs correspondants sont sensiblement simplifiés.

Le plan que nous proposons d'adopter pour cette présentation comporte trois parties.

Un premier chapitre permet d'introduire toutes les phases de l'étude sur l'exemple d'une régulation de vitesse par un moteur à courant continu commandé par l'induit. Dans toute cette partie, le comportement non linéaire du système résulte de la variation de sa charge mécanique.

A partir de cette hypothèse, nous posons le problème d'une régulation de vitesse par retour unitaire et action proportionnelle.

La synthèse de l'asservissement pour deux charges nominales distinctes conduit ainsi naturellement à adapter les paramètres du réseau correcteur à la charge nominale du système.

Tout d'abord, nous envisageons le cas de fluctuations de la charge autour d'une valeur nominale constante et connue, permettant ainsi l'adaptation du réseau correcteur.

Dans ce cas, il est possible de définir, en fonction des performances désirées pour l'asservissement, les domaines de variations admissibles de la charge autour de sa valeur nominale.

Nous envisageons ensuite l'effet d'une variation de la charge nominale, tout d'abord en échelon puis en continu. Dans ce dernier cas, nous abordons l'étude du comportement du système soumis à une charge variable, puis l'étude du cas plus réel où la charge est soumise à des fluctuations au voisinage de la charge nominale. Ce point de vue permet de définir les contraintes de dispersion maximale de la charge autour de sa valeur nominale ainsi que les conditions limites d'évolution en régime dynamique de la charge nominale.

Un deuxième chapitre permet la généralisation des résultats présentés précédemment à une classe importante de systèmes monovariables.

Cette étude repose essentiellement sur la mise en oeuvre systématique d'un nouveau mode de représentation des systèmes monovariables.

En effet, le modèle mathématique que nous proposons d'utiliser, conduit à une optimisation des résultats des critères de stabilité déjà utilisés dans le premier chapitre.

Enfin, un troisième chapitre permet d'illustrer l'étude théorique précédente. Il s'agit d'une régulation de vitesse à charge mécanique variable réalisée à partir d'un groupe Ward-léonard.

L'adaptation est envisagée sur la base de deux réseaux correcteurs classiques : tout d'abord un réseau à action proportionnelle, ensuite un réseau à action proportionnelle et intégrale.

CHAPITRE I

I) Introduction

Nous envisageons dans ce chapitre l'analyse et la synthèse d'une régulation de vitesse dont l'élément de puissance est un moteur à courant continu commandé par l'induit et à flux inducteur constant. Cet organe entraîne une charge mécanique variable.

Cette propriété se manifeste essentiellement sous deux formes :

- la charge nominale, quantité supposée connue et susceptible de variations contrôlables nous permet d'adapter les paramètres du réseau correcteur définissant la commande du système asservi.

- la charge réelle du dispositif est soumise à des fluctuations imprévisibles à l'intérieur d'un domaine de variations admissibles centré sur la charge nominale.

Cette étude, menée dans l'hypothèse déterministe limite l'étendue des hypothèses de départ.

Le fonctionnement du dispositif est abordé dans le cadre non-linéaire, nous précisons donc tout d'abord un modèle d'évolution valable dans ces conditions. [M3]

2) Représentation mathématiques du processus : choix d'un modèle

Considérons un moteur à courant continu à excitation séparée commandé par l'induit (figure 1.1).

Le flux inducteur ϕ_0 est supposé constant (l'enroulement inducteur est alimenté par un courant constant).

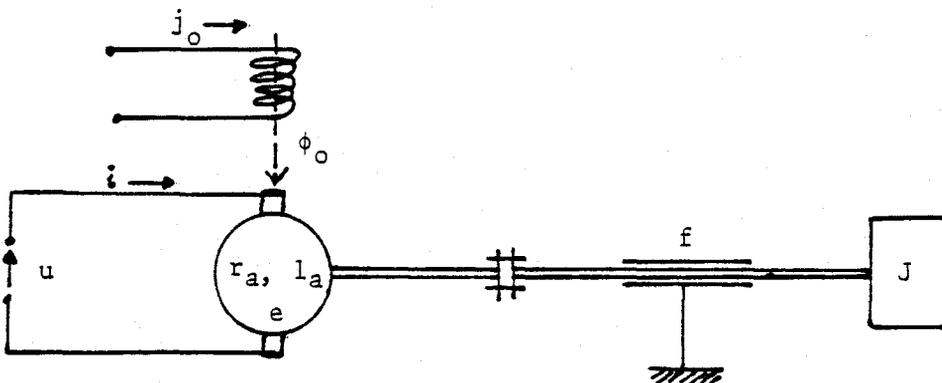


Figure 1.1.

L'induit, soumis à une tension u est parcouru par un courant i .

Le circuit d'induit, composé de n spires a une résistance r .

La force-contre-électromotrice e est liée à la vitesse angulaire ω du rotor par la relation suivante :

$$e = k' \omega \phi_0$$

où k' est une constante positive caractéristique du moteur.

La réaction transversale d'induit ϕ_t est, par hypothèse, caractérisée par une relation linéaire en fonction du courant i :

$$n_s \phi_t = l \cdot i \quad (2.1)$$

Supposant, en outre, que la chute de tension Δu aux contacts balais/collecteurs est négligeable devant u , il vient :

$$u = e + ri + l \frac{di}{dt} \quad (2.2)$$

Γ désigne les couples des forces d'origine électromagnétique, il est caractérisé par l'expression :

$$\Gamma = k' \phi_0 \cdot i \quad (2.3)$$

L'équation fondamentale de la dynamique établit la relation entre Γ et ω lorsque la charge mécanique du moteur est constitué d'une inertie J et d'un frottement fluide f .

$$\Gamma = J \frac{d}{dt} (\omega) + f\omega \quad (2.4)$$

avec :

$$J = J_0 + J_c$$

$$f = f_0 + f_c$$

(J_0, f_0) et (J_c, f_c) désignent respectivement l'inertie et le coefficient de frottement du moteur à vide et de la charge.

2.1. Cas linéaire

Lorsque J et f sont constants, la fonction de transfert $\frac{\omega(p)}{u(p)}$ s'obtient en éliminant i des équations précédentes :

$$(J \frac{d}{dt} + f) \omega = k' \phi_0 \cdot i \quad (21,1)$$

$$(r + l \frac{d}{dt}) i = u - k' \phi_0 \omega \quad (21,2)$$

Dérivant (21,1), il vient :

$$\dot{\omega} + a_1 \dot{\omega} + a_2 \omega = b_2 u \quad (21,3)$$

avec $a_1 = (\frac{r}{l} + \frac{f}{J})$

$$a_2 = \frac{r}{l} \cdot \frac{f}{J} + \frac{k'^2 \phi_0^2}{lJ} \quad (21,4)$$

$$b_2 = \frac{k' \phi_0}{lJ}$$

2.2. Cas général

Dans l'hypothèse où J et f varient très rapidement autour de valeurs constantes \bar{J} et \bar{f} avec une amplitude infiniment petite, les termes qui caractérisent ces fluctuations interviennent de manière prépondérante en raison de la dérivation apparaissant dans l'élaboration d'un modèle de la forme précédente :

$$\dot{\omega} = f(\dot{\omega}, \omega, u)$$

Toutefois, l'influence de leur variations rapides sur la sortie du processus est en fait négligeable. En effet, on peut toujours représenter l'évolution du système précédent par l'expression :

$$\dot{\omega} + (\frac{r}{l} + \frac{f}{J}) \omega + \int_{t_0}^t (\frac{r}{l} \cdot \frac{f}{J} + \frac{k'^2 \phi_0^2}{lJ}) \omega(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{k' \phi_0}{lJ} \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

ou les quantités l et J n'interviennent plus par leurs dérivées.

Ces considérations nous permettent d'adopter un modèle formel du type proposé en (21,3) pour caractériser l'évolution du système lorsque f et J varient.

Ce modèle correspond à celui déduit de l'application des méthodes classiques d'identification appliquées au processus pour différentes valeurs du paramètre charge $[C1, L2]$.

3) Fonctionnement du moteur en asservissement de vitesse

3.1) Position du problème - Choix d'une structure de réseau correcteur adaptable.

Dans le cas où la charge est constante et égale à sa valeur nominale, la synthèse de l'asservissement d'un processus de fonction de transfert $\hat{b}_2/(p^2 + \hat{a}_1 p + \hat{a}_2)$ se ramène, dans le cadre continu linéaire au calcul d'un réseau correcteur $RC(p)$ (voir figure 1.2) assurant pour le système bouclé les performances imposées par le cahier des charges.

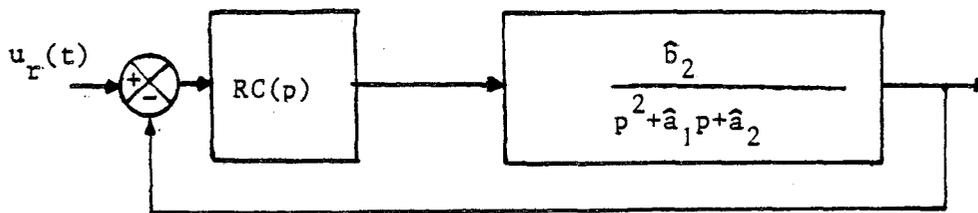


Figure 1.2.

Les paramètres du réseau correcteur sont naturellement dépendants du but à atteindre et des caractéristiques du processus. En conséquence, lorsque celui-ci évolue, il faut adapter à chaque instant les coefficients du réseau correcteur à partir des valeurs estimées $(\hat{b}_2, \hat{a}_1, \hat{a}_2)$ de (b_2, a_1, a_2)

Il vient ainsi la structure suivante :

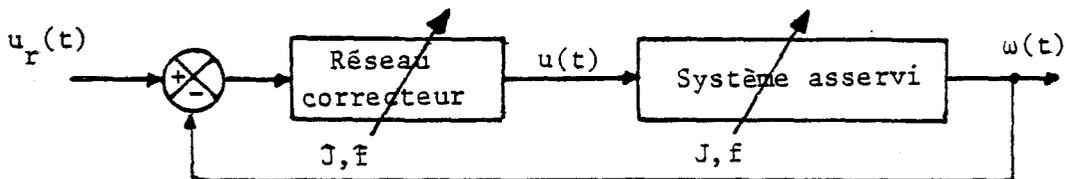


Figure 1.3.

pour laquelle le fonctionnement nominal est décrit par le modèle de référence implicite : (cf figure 1.4)

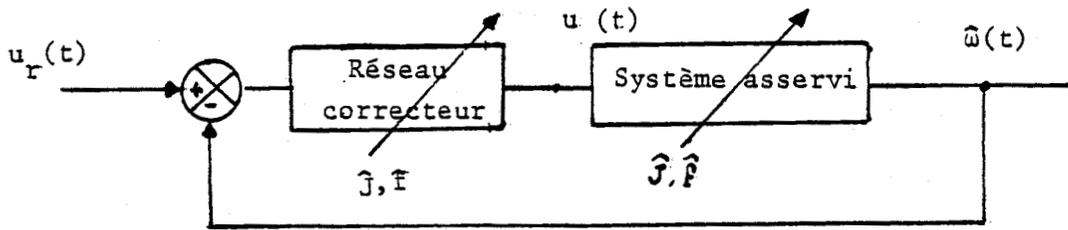


Figure 1.4. : Modèle de référence implicite

Nous sommes alors amené à comparer les évolutions du système réel et celles du système nominal afin de montrer que l'écart $\omega(t) - \hat{\omega}(t)$ entre les sorties des deux modèles reste borné et converge à l'intérieur d'un domaine borné centré sur l'origine. En effet, la notion de convergence asymptotique de $\omega(t)$ vers $\hat{\omega}(t)$ n'a guère de sens dans ce cas.

3.2) Formulation du problème

Nous noterons dans la suite :

$$g = \begin{bmatrix} f \\ J \end{bmatrix} ; g \in \mathcal{P}$$

$$\hat{g} = \begin{bmatrix} \hat{f} \\ \hat{J} \end{bmatrix} ; \hat{g} \in \mathcal{P}$$

désignant l'ensemble des valeurs admissibles du couple $[f, J]$.

$t \in \mathcal{C} : \{ t_0 \in \mathcal{R}, \mathcal{C} = [t_0, +\infty[\}$ désigne le temps.

$x(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}^2$, $\hat{x}(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}^2$ représentent respectivement les vecteurs-état du système et du modèle de référence.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\omega}}(t) \\ \hat{\omega}(t) \end{bmatrix} \quad (32,1)$$

Les évolutions de ces vecteurs sont régies par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -a_1(g) & -a_2(g) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} b_2(g) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (32,2)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -a_1(\hat{g}) & -a_2(\hat{g}) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} b_2(\hat{g}) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (32,3)$$

Envisageons dans cet exemple un réseau correcteur à action proportionnelle.

$$u(t) = k(\hat{g}) (u_r(t) - \omega(t))$$

La loi d'adaptation ($\hat{g} \rightarrow k(\hat{g})$) est caractérisée par l'invariance du "gain statique" :

$$k_s = \frac{b_2(\hat{g}) \cdot k(\hat{g})}{a_2(\hat{g}) + k(\hat{g}) \cdot b_2(\hat{g})}$$

Dans ces conditions, en posant :

$$\begin{cases} \delta_1(g, \hat{g}) = a_1(g) - a_1(\hat{g}) \\ \delta_3(g, \hat{g}) = k(\hat{g}) \cdot (b_2(g) - b_2(\hat{g})) \\ \delta_2(g, \hat{g}) = a_2(g) - a_2(\hat{g}) + \delta_3(g, \hat{g}) \\ \alpha_1(\hat{g}) = a_1(\hat{g}) \\ \alpha_2(\hat{g}) = a_2(\hat{g}) + k(\hat{g}) \cdot b_2(\hat{g}) \\ \beta_2(\hat{g}) = k(\hat{g}) \cdot b_2(\hat{g}) \end{cases}$$

Le modèle du système bouclé est précisé par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -[\alpha_1(\hat{g}) + \delta_1(g, \hat{g})] & -[\alpha_2(\hat{g}) + \delta_2(g, \hat{g})] \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} \beta_2(\hat{g}) + \delta_3(g, \hat{g}) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_r(t)$$

et la trajectoire nominale est solution de :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1(\hat{g}) & -\alpha_2(\hat{g}) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} \beta_2(\hat{g}) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_r(t)$$

Pour une entrée $u_r(t)$ l'écart $d(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est alors régi par :

$$\dot{d}(t) = \begin{bmatrix} -(\alpha_1(\hat{g}) + \delta_1(g, \hat{g})) & -(\alpha_2(\hat{g}) + \delta_2(g, \hat{g})) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} d(t) + \begin{bmatrix} \chi(t, u_r(t), \hat{x}(t), g, \hat{g}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32,4)$$

$$\chi(\cdot) = -(\delta_1(g, \hat{g}) \hat{x}_1(t) + \delta_2(g, \hat{g}) \cdot \hat{x}_2(t)) + \delta_3(g, \hat{g}) \cdot u_r(t)$$

Nous sommes ainsi amenés à caractériser les propriétés des solutions du système précédent et du modèle de référence implicite.

Nous utiliserons à cette fin un critère $\mathcal{C}[G2]$ déduit de l'utilisation des normes vectorielles que nous proposons d'abord de rappeler

* Remarque : La différence d'ordre de grandeur entre les quantités r/l et f/J conduit à supposer la réalité des valeurs propres $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ de la matrice $\begin{bmatrix} -\alpha_1(\hat{g}) & -\alpha_2(\hat{g}) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Des racines complexes conjuguées nécessiteraient dans ce cas un gain $k(\hat{g})$ très important.

3.3) Critère \mathcal{C} [G2]

Soit un processus décrit par l'équation d'état d'ordre $n (n \in \mathbb{N})$:

$$\dot{x}(t) = A(t, x, g) \cdot x(t) \quad (C1)$$

$$t \in \mathcal{E}; \mathcal{E}: t_0 \in \mathcal{R}, \mathcal{E} = [t_0, +\infty[$$

$x \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur état

$g \in \mathcal{P}$ représente les perturbations s'exerçant sur les éléments de $A(\cdot)$

$A(t, x, g) : \mathcal{E} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}$ est une matrice à coefficients non constants

S'il existe une norme vectorielle q de \mathcal{R}^n dans \mathcal{R}_+^k telle que la matrice pseudo-majorante $M(t, x, g) = M_{qq}(A(t, x, g))$ de la matrice du régime libre vérifie les hypothèses suivantes :

H1) Les éléments non constants de $M(t, x, g)$ sont isolés dans une seule ligne ou une seule colonne

H2) $\exists \epsilon < 0, (M(t, x, g) - \epsilon I_k)$ est l'opposée d'une matrice quelque soit $(t, x, g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P}$

H3) $M(t, x, g)$ est irréductible sur la frontière de $\mathcal{E} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P}$

alors le point d'équilibre ($x = 0$) du système (C, 1) est globalement exponentiellement stable et

* si les éléments non constants sont isolés dans une seule ligne soit $u(\epsilon) \in \mathcal{R}_+^k$ le vecteur vérifiant

$$M(t, x, g) \cdot u(\epsilon) = \epsilon \cdot u(\epsilon) \quad (C, 2)$$

alors la fonction définie positive $v(x)$:

$$v(x) = \text{Max}_{i=1 \dots k} (q_i(x) / u_i(\epsilon))$$

vérifie : $D^+(v(x)) \leq \epsilon \cdot v(x)$ * (C, 3)

* si les éléments non constants sont isolés dans une seule colonne, définissant $u(\epsilon) \in \mathcal{R}_+^k$ par :

$$M^t(t, x, g) \cdot u(\epsilon) = \epsilon \cdot u(\epsilon) \quad (C, 4)$$

alors la fonction définie positive v :

$$v(x) = u^t(\epsilon) \cdot q(x) \quad (C, 5)$$

satisfait $D^+(v(x)) \leq \epsilon \cdot v(x)$

L'application de ce critère au régime libre de l'équation de l'erreur (32,4) nécessite le choix d'une norme vectorielle convenable ou de manière équivalente, d'une représentation particulière bien adaptée à une norme vectorielle d'un type donné [B3], [M2]

* D^+ note l'opérateur de dérivée à droite par rapport au temps.

3.4. Représentation particulière

Dans le cas où \hat{g} est constant, la stabilité asymptotique du modèle de référence (32,3) est assurée par la condition nécessaire et suffisante :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha_1(\hat{g}) = -\hat{\alpha}_1 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \alpha_2(\hat{g}) = \hat{\alpha}_2 \\ \exists \varepsilon < 0, \Re(\lambda_1) \leq \varepsilon; \Re(\lambda_2) \leq \varepsilon \end{cases} \quad (34,1)$$

La transformation de l'équation d'état (32,3) :
par le changement de base :

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\lambda}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \quad (34,2)$$

amène :

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 & 0 \\ 1 & \hat{\lambda}_2 \end{bmatrix} \hat{y}(t) + \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_r(t) \quad (34,3)$$

Le choix d'une norme vectorielle $q(x)$:

$$q^t(x) = (|y_1|, |y_2|)$$

implique une condition suffisante de stabilité asymptotique du régime libre de (34,3) identique à la condition nécessaire et suffisante (34,1).

En ce sens, la transformation (34,2) définie plus haut optimise l'utilisation du critère \mathcal{C} , du moins ponctuellement.

La stabilité du système nominal dans le cas précédent étant évidente, nous allons aborder le problème en posant l'hypothèse de l'invariance de \hat{g} .

4.1. Cas d'une charge variable autour d'une valeur nominale constante

La charge nominale est constante et les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ varient dans un voisinage de valeurs $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ et $\hat{\beta}_2$

4.1.1. Etude de stabilité asymptotique

Considérons le régime autonome de l'équation d'erreur (32,4) :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -[\alpha_1(\hat{g}) + \delta_1(g, \hat{g})] & -[\alpha_2(\hat{g}) + \delta_2(g, \hat{g})] \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (411,1)$$

$$x(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}^2 \quad : \quad x^t(t) = [x_1(t), x_2(t)]$$

Notons \hat{f} un vecteur spectral de $\begin{bmatrix} -\alpha_1(\hat{g}) & -\alpha_2(\hat{g}) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ précisé par :

$$\hat{f} \in \mathcal{P}^2 \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}^t = [\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2] \\ \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 = -\alpha_1(\hat{g}) \\ \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 = \alpha_2(\hat{g}) \end{array} \right.$$

et posons :

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 - \hat{\lambda}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Alors :

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 - \delta_1(g, \hat{g}) & -[\hat{\lambda}_2 \delta_1(g, \hat{g}) + \delta_2(g, \hat{g})] \\ 1 & \hat{\lambda}_2 \end{bmatrix} \cdot y(t) \quad (411,2)$$

L'application du critère \mathcal{P} au processus décrit sous cette forme implique, lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

$$\exists \varepsilon < 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \hat{\lambda}_2 < \varepsilon \\ \text{ii) } \forall g \in \mathcal{P}, (\varepsilon - \hat{\lambda}_2)(\varepsilon - \hat{\lambda}_1) + (\varepsilon - \hat{\lambda}_2) \delta_1(g, \hat{g}) \\ \quad - |\hat{\lambda}_2 \cdot \delta_1(g, \hat{g}) + \delta_2(g, \hat{g})| > 0 \end{array} \right. \quad (411,3)$$

que la fonction $v(x(t))$ (411,4) est définie positive

$$v(x(t)) = \text{Max} \left(\frac{|y_1(t)|}{\varepsilon - \hat{\lambda}_2}, |y_2(t)| \right) \quad (411,4)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 - \hat{\lambda}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

et satisfait à l'inégalité :

$$D^+ (v(x(t))) \leq \varepsilon \cdot (v(x(t)))$$

Le point d'équilibre ($x=0$) du processus (411,1) est alors globalement exponentiellement stable.

4.1.2. Etude de stabilité dynamique [M,1]

Considérons la trajectoire nominale du système soumis à une entrée bornée u_r . Elle est définie par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1(\hat{g}) & ; & -\alpha_2(\hat{g}) \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} \beta_2(\hat{g}) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_r(t) \\ \hat{x}(t_0) = 0 \end{cases} \quad (412,1)$$

D'après les résultats précédents la fonction définie positive $v(x,t)$ (411,4) satisfait à la contrainte :

$$D^+(v(\hat{x}(t))) \leq \varepsilon \cdot v(\hat{x}(t)) + \psi(u_r(t)) / (\varepsilon - \hat{\lambda}_2) \quad (412,2)$$

$$\text{avec : } \psi(u_r(t)) = \text{Max}_{t \in \mathcal{C}} (\beta_2(\hat{g}) \cdot u_r(t))$$

En conséquence, pour une entrée $u_r(t)$ bornée, la trajectoire nominale (412,1) reste bornée au cours de son évolution. Les variations de $\delta_1(g, \hat{g})$, $\delta_2(g, \hat{g})$ et $\delta_3(g, \hat{g})$ étant par hypothèse bornées, on peut définir :

$$\varphi(t, u_r(t)) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}^+ ; \varphi(t, u_r(t)) = \text{Max}_{\substack{\tau \in [t, +\infty[\\ g \in \mathcal{P}}} (\chi(\tau, u_r(\tau), \hat{x}(\tau), g, \hat{g})) / (\varepsilon - \hat{\lambda}_2)$$

$$\text{avec : } \chi(t, u_r(t), \hat{x}(t), g, \hat{g}) = \delta_3(g, \hat{g}) \cdot u_r(t) - (\delta_1(g, \hat{g}) \cdot \hat{x}_1(t) + \delta_2(g, \hat{g}) \cdot \hat{x}_2(t))$$

$$\text{et } \varphi(u_r) \in \mathcal{R}^+ ; \varphi(u_r) = \text{Max}_{\substack{t \in \mathcal{C} \\ g \in \mathcal{P}}} \varphi(t, u_r(t))$$

et par application du résultat précédent à l'équation d'erreur :

$$e(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\lambda}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (x(t) - \hat{x}(t))$$

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 + (\alpha_1(\hat{g}) - \alpha_1(g)) & ; & \hat{\lambda}_2(\alpha_1(\hat{g}) - \alpha_1(g)) + (\alpha_2(\hat{g}) - \alpha_2(g)) \\ & & \hat{\lambda}_2 \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} \chi(\cdot) \\ 0 \end{bmatrix}$$

il vient la condition (411,3)

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon < 0 \quad \text{i) } \hat{\lambda}_2 < \varepsilon \\ \text{ii) } \forall g \in \mathcal{P} ; (\varepsilon - \hat{\lambda}_2)(\varepsilon - \hat{\lambda}_1) + \delta_1(g, \hat{g}) \cdot (\varepsilon - \hat{\lambda}_2) - |\hat{\lambda}_2 \cdot \delta_1(g, \hat{g}) + \delta_2(g, \hat{g})| > 0 \end{aligned}$$

Lorsque la condition précédente est vérifiée, la fonction définie positive :

$$v(e(t)) = \text{Max} \left(\frac{|e_1(t)|}{(\varepsilon - \lambda_2)}, |e_2(t)| \right)$$

satisfait à la contrainte (412,3)

$$D^+ v(e(t)) \leq \varepsilon v(e(t)) + \varphi(t, u_r(t)) \quad (412,3)$$

Cette dernière inégalité implique qu'en réponse à une entrée $u_r(t)$ bornée :

1) l'écart $(x(t) - \hat{x}(t))$ entre une trajectoire et la trajectoire nominale reste bornée.

2) dans ce cas $e(t)$ converge à l'intérieur d'un domaine défini par :

$$v(e(t)) \leq \frac{1}{|\varepsilon|} \varphi(u_r)$$

Le modèle étudié et la forme de ce résultat permet une interprétation dans le plan de phase (d_1, d_2) : (voir figure 1.5)

$$\begin{cases} d_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t) = \hat{w}(t) - \hat{w}(t) \\ d_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t) = w(t) - \hat{w}(t) \end{cases}$$

Le polygone A B C D représente le contour du domaine $v(e(t)) = \gamma$
A' B' C' D' et A'' B'' C'' D'' sont respectivement les domaines

$$\left\{ v(e(t)) = \frac{1}{|\varepsilon|} \varphi(u_r(t)) \right\} \text{ et } \left\{ v(e(t)) = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} (|\varphi(t, u_r(t))|)}{|\varepsilon|} \right\}$$

L'évolution du point représentatif de $d(t)$ est limitée au domaine :

$$\left\{ v(e(t)) \leq \text{Max} (v(e(t_0)), \frac{1}{|\varepsilon|} \varphi(u_r(t))) \right\}$$

et converge à l'intérieur de A'' B'' C'' D''.

Le résultat essentiel de cette étude ainsi que son interprétation dans l'espace d'état nous permet d'envisager le cas d'une variation en escalier de la charge.

Dans ce cas, le modèle de référence est "linéaire par morceaux" en fonction du temps.

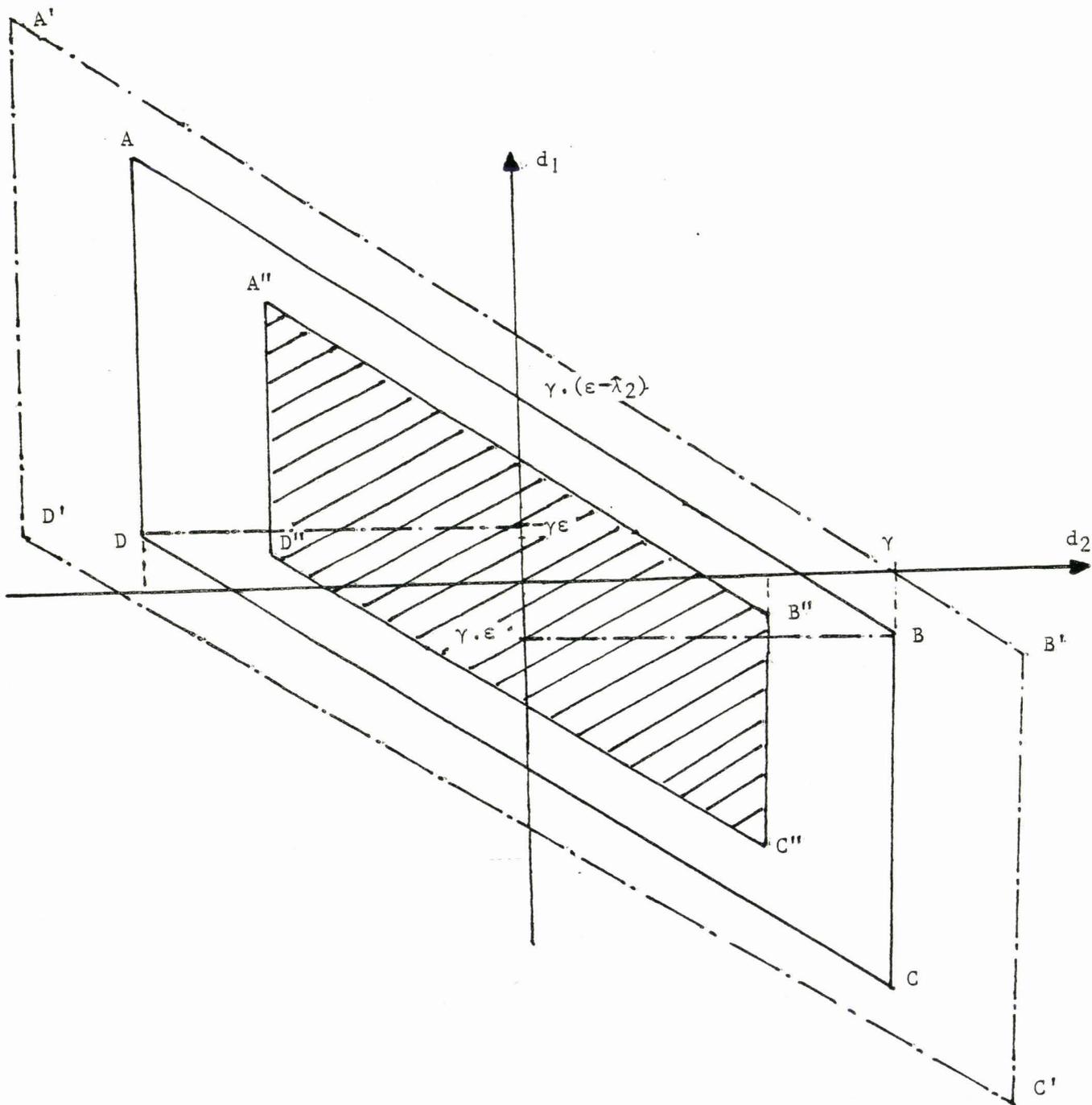


Figure 1.5.

4.2. Charge nominale variant comme une fonction en escalier du temps :

Notons t_i le terme général d'une suite croissante et non bornée à valeurs dans \mathcal{C} (t_0 est la borne inférieure de \mathcal{C}).

Les variations de la valeur nominale de la charge en fonction du temps sont alors représentées par :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathcal{N} \\ \forall t \in [t_i, t_{i+1}[; \hat{g}(t) = \hat{g}(i) \end{cases}$$

$\hat{g}(i)$: application de \mathcal{N} dans \mathcal{P} .



Dans le même esprit que l'étude du cas précédent, nous allons tout d'abord étudier le régime libre de l'équation d'erreur.

4.2.1. Etude de la stabilité asymptotique

L'équation qui caractérise l'évolution de l'écart entre le système et son modèle de référence implicite (32,4) s'exprime en régime autonome sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -(\alpha_1(\hat{g}(i)) + \delta_1(g, \hat{g}(i))) & ; & -(\alpha_2(\hat{g}(i)) + \delta_2(g, \hat{g}(i))) \\ & 1 & ; & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (421,1)$$

Désignons par $\hat{r}(i) : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{R}^2$ le vecteur spectral instantané de

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1(\hat{g}(i)) & ; & -\alpha_2(\hat{g}(i)) \\ & 1 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{r}^t(i) = [\hat{\lambda}_1(i), \hat{\lambda}_2(i)]$$

$$\text{Notons : } y(t,i) = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\lambda}_2(i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

Dans ce cas, les variations de $y(t,i)$ sont régies par :

$$D^+(y(t,i)) = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1(i) - \delta_1(g, \hat{g}(i)) & ; & -[\hat{\lambda}_2(i)(\delta_1(g, \hat{g}(i))) + \delta_2(g, \hat{g}(i))] \\ & 1 & ; & \hat{\lambda}_2(i) \end{bmatrix} y(t,i) \quad (421,2)$$

L'application du critère \mathcal{C} à ce modèle sur l'horizon $t \in [t_i, t_{i+1}[$ montre que :

lorsque sont vérifiées les contraintes :

$$\exists \varepsilon < 0, \exists \alpha > 1, \exists \lambda_2 < 0$$

$$\forall i \in \mathcal{N}, \forall g \in \mathcal{P}$$

$$1) \lambda_2 < \hat{\lambda}_2(i) < \alpha \cdot \varepsilon$$

$$2) (\varepsilon - \hat{\lambda}_1(i))(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(i)) + (\varepsilon - \hat{\lambda}_2(i))\delta_1(g, \hat{g}(i)) - |\hat{\lambda}_2(i)(\delta_1(g, \hat{g}(i))) + \delta_2(g, \hat{g}(i))| \geq 0 \quad (421,3)$$

alors quelsoit $i \in \mathcal{N}$, la fonction définie positive

$$v(x(t), i) = \text{Max} \left(\frac{|y_1(t, i)|}{\varepsilon - \hat{\lambda}_2(i)}, |y_2(t, i)| \right)$$

$$y(t, i) = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\lambda}_2(i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

possède la propriété suivante :

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}[, D^+(v(x(t), i)) \leq \varepsilon \cdot v(x(t), i) \quad (421,4)$$

A l'inverse du cas précédent, on ne peut en déduire immédiatement la convergence asymptotique des trajectoires du système (421,1) en raison du caractère multiforme de la fonction $v(x(t), i)$.

En effet, avec les hypothèses précédentes (421,4), l'évolution de la valeur de $v(x(t), i)$ peut s'opérer comme il est indiqué ci-dessous (voir figure 1.6)

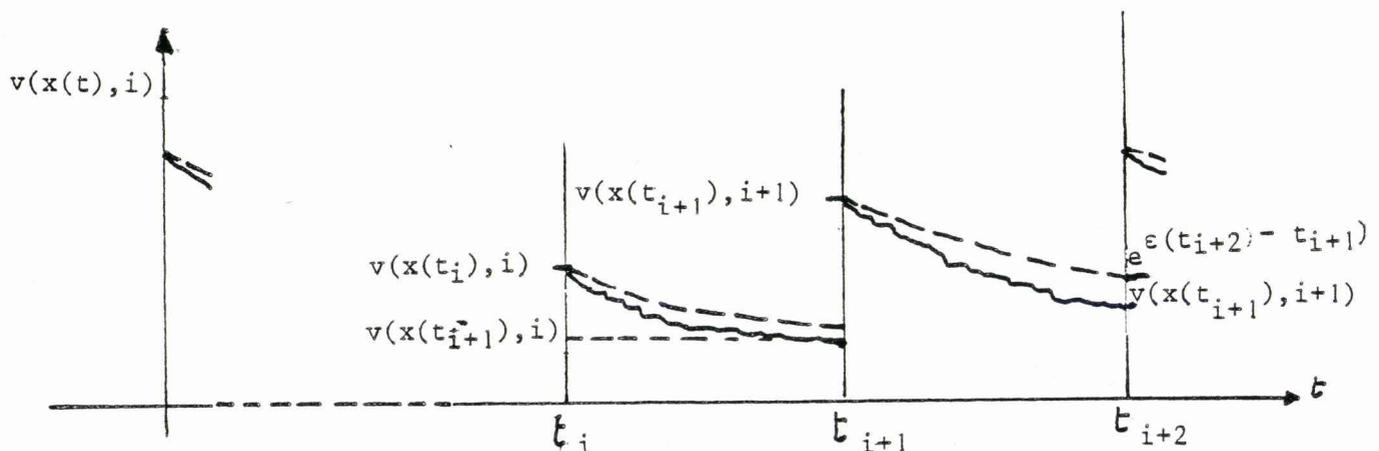


Figure 1.6.

Une condition suffisante de stabilité asymptotique globale peut alors s'exprimer par :

$$\begin{cases} \exists n < 0, \forall i \in \mathcal{N}, \forall (x(t_i)) \in \mathbb{R}^2 \\ v(x(t_{i+1}), i+1) \leq e^{n(t_{i+1}-t_i)} \cdot v(x(t_i), i) \end{cases} \quad (421,5)$$

si le système (421,2) satisfait les hypothèses d'application du critère \mathcal{C} (421,3) quelquesoit $i \in \mathcal{N}$.

Compte tenu de la propriété (421,4) cette dernière contrainte est équivalente à :

$$\forall c \in \mathcal{R}^+, \{v(x,i) \leq c \cdot e^{-\varepsilon(t_{i+1} - t_i)}\} \Rightarrow \{v(x,i+1) \leq c \cdot e^{-\eta(t_{i+1} - t_i)}\}$$

Dans le plan de phase (x_1, x_2) , cette contrainte est satisfaite si le domaine MNPQ est inclus dans M'N'P'Q' (figure 1.7)

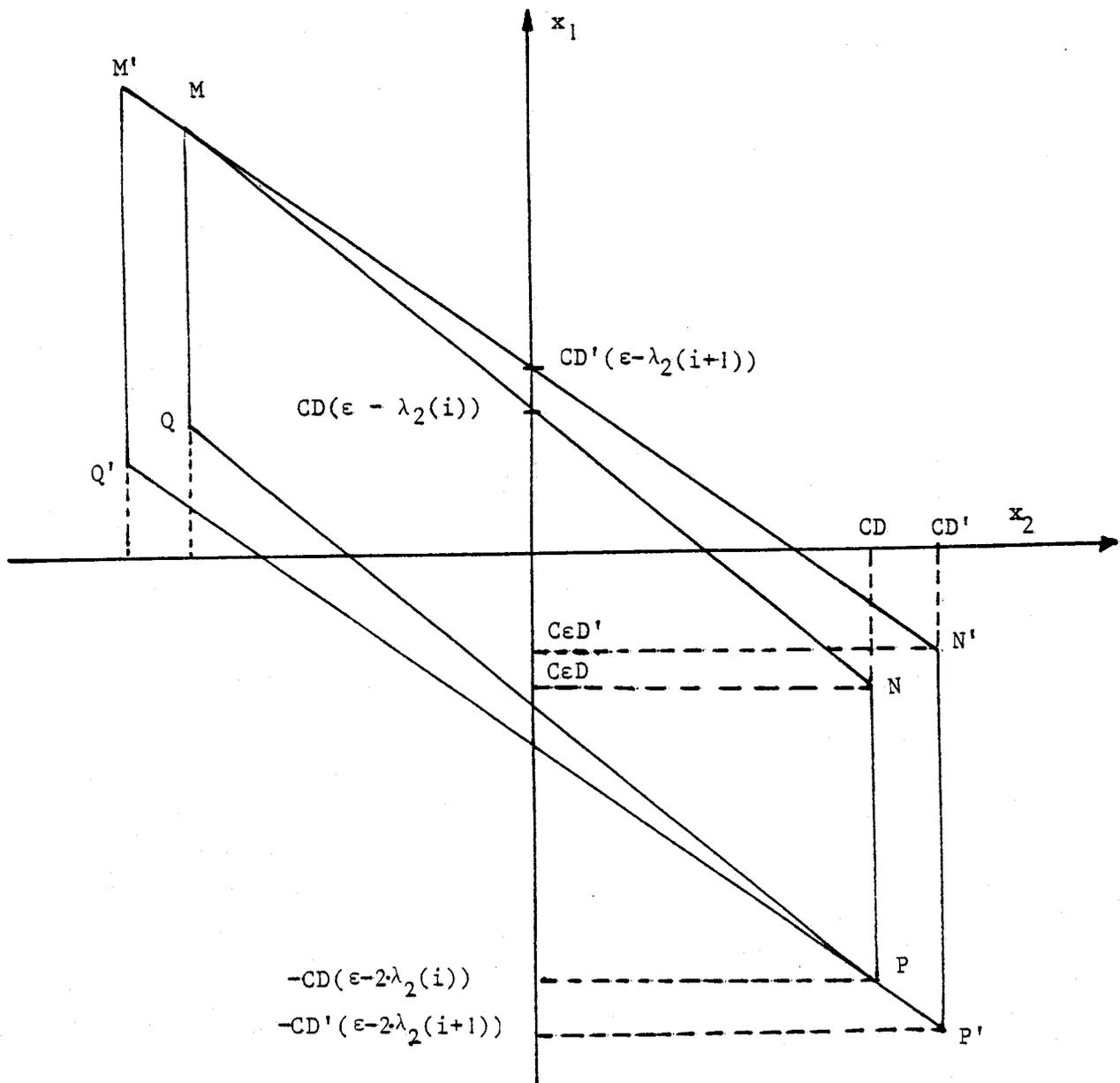


figure 1.7

MNPQ: lieu des points tels que $v(e(t_{i+1}^-), i) = c.D$

M'N'P'Q': lieu des points tels que $v(e(t_{i+1}), i+1) = c.D'$

avec
$$D = e^{\varepsilon(t_{i+1}-t_i)}$$

$$D' = e^{\eta(t_{i+1}-t_i)}$$

Cette relation d'inclusion s'exprime sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon < \eta < 0 \\ t_{i+1} - t_i > \frac{1}{(\eta - \varepsilon)} \cdot \text{Lg} \left(1 + \frac{2(\hat{\lambda}_2(i+1) - \hat{\lambda}_2(i))}{(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(i+1))} \right) \end{cases} \quad (421,6)$$

Cette contrainte permet de gérer les changements de la charge nominale pour obtenir des performances de stabilité asymptotique souhaitées.

Le lemme 1 résume les résultats de cette étude

Remarque :

Si $\hat{\lambda}_2(i+1) \leq \hat{\lambda}_2(i)$, aucune contrainte n'apparaît sur $t_{i+1} - t_i$

Lemme 1

Soit t_i le terme général d'une suite croissante et non bornée à valeur dans $\mathcal{C} = [t_0, +\infty[$ et $\hat{g}(t)$ la valeur nominale de la charge définie par une fonction en escalier :

$$\forall i \in \mathcal{N} \\ \forall t \in [t_i, t_{i+1}[\quad , \quad \hat{g}(t) = \hat{g}_i$$

Soit le processus d'équation :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -(\alpha_1(\hat{g}_i) + \delta_1(g, \hat{g}_i)) & ; & -(\alpha_2(\hat{g}_i) + \delta_2(g, \hat{g}_i)) \\ 1 & ; & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) \quad (L1,1)$$

$\hat{\lambda}_1(i)$ et

$\hat{\lambda}_2(i)$ désignant les valeurs propres de $\begin{bmatrix} -\alpha_1(\hat{g}_i) & ; & -\alpha_2(\hat{g}_i) \\ 1 & ; & 0 \end{bmatrix}$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

i) $\exists \varepsilon < 0, \exists \alpha > 1, \exists \underline{\lambda}_2 < 0, \exists n \in]\varepsilon, 0[$

$\forall i \in \mathcal{N}, \forall g \in \mathcal{P}$

1) $\underline{\lambda}_2 < \hat{\lambda}_2(i) < \varepsilon$

2) $(\varepsilon - \hat{\lambda}_1(i))(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(i)) + (\varepsilon - \hat{\lambda}_2(i)) \delta_1(g, \hat{g}_1)$

$-|\hat{\lambda}_2(i) \delta_1(g, \hat{g}_1) + \delta_2(g, \hat{g}_1)| \geq 0$

$$ii) t_{i+1} - t_i \geq \frac{1}{\eta - \epsilon} \operatorname{Lg} \left(1 + \frac{2(\lambda_2(i+1) - \lambda_2(i))}{\epsilon - \lambda_2(i+1)} \right),$$

Alors la fonction définie positive $v(x(t), i)$

$$v(x(t), i) = \operatorname{Max} \left(\frac{|x_1(t) - \lambda_2(i) x_2(t)|}{(\epsilon - \lambda_2(i))}, |x_2(t)| \right)$$

satisfait aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \mathcal{N} \\ \forall t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad D^+ v(x(t), i) \leq \epsilon \cdot v(x(t), i) \\ v(x(t_{i+1}), i+1) \leq e^{\eta(t_{i+1} - t_i)} \cdot v(x(t_i), i) \end{array} \right.$$

et le point d'équilibre ($x=0$) du système (L1,1) est globalement asymptotiquement stable.

4.2.2. Etude de stabilité dynamique (cf annexe 5)

Le comportement nominal du processus soumis à une entrée $u_r(t)$ est décrit par la relation :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1(\hat{g}(i)), & -\alpha_2(\hat{g}(i)) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} +\beta_2(\hat{g}(i)) \\ 0 \end{bmatrix} u_r(t) \quad (422,1)$$

$$\hat{x}(t_0) = 0$$

Un raisonnement semblable à celui mis en oeuvre dans le cas précédent, montre que,

$\lambda_2(\hat{g}(i))$ et $\beta_2(\hat{g}(i))$ étant par hypothèse bornés, la trajectoire $\hat{x}(t)$ du processus (422,1) soumis à une entrée bornée $u_r(t)$ est bornée au cours de son évolution si le régime libre du système (422,1) satisfait les hypothèses du lemme 1,

Dans ces conditions, on peut toujours définir :

$$\varphi(u_r(t), i) : \mathcal{C} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{R}_+$$

$$\varphi(u_r(t), i) = \operatorname{Max}_{\substack{k \in [i, i+1[\dots + \infty[, g \in \mathcal{P} \\ t \in [t_i, t_{i+1}[}} |\chi(t, u_r, \hat{x}(t), \hat{g}(i), g(i)) / (\epsilon - \lambda_2(i))| \quad (422,2)$$

$$\varphi(u_r(t)) \in \mathcal{R}_+ : \varphi(u_r(t)) = \operatorname{Max}_{i \in \mathcal{N}} \varphi(u_r(t), i)$$

Le régime libre de l'équation d'erreur (32,4) s'exprime sous la forme :

$$d(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$e(t,i) = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\lambda}_2(i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (x(t) - \hat{x}(t))$$

$$\forall i \in \mathcal{N}, \forall t \in [t_i, t_{i+1}[$$

$$D^+ (e(t,i)) = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1(i) - \delta_1(g, \hat{g}(i)) & ; & -(\hat{\lambda}_2(i) \cdot \delta_1(g, \hat{g}(i)) + \delta_2(g, \hat{g}(i))) \\ 1 & ; & \hat{\lambda}_2(i) \end{bmatrix} (e(t,i)) + \begin{bmatrix} x(t, u_r, \hat{x}(t), \hat{g}(i), g(i)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (422,3)$$

Si les hypothèses du lemme 1 sont satisfaites, l'écart $(x(t) - \hat{x}(t))$ reste borné au cours de son évolution et converge à l'intérieur d'un domaine \mathcal{D} précisé par :

$$\forall i \in \mathcal{N}, e \in \mathcal{R}^2, v(d, i) = \text{Max} \left(\frac{|e_1|}{(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(i))}, |e_2| \right)$$

$$\forall i \in \mathcal{N}, \mathcal{D}_i \subset \mathcal{R}^2 : \{d \in \mathcal{D}_i \Leftrightarrow e = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\lambda}_2(i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot d ; v(d(t), i) \leq \frac{1}{|n|} \lim_{i \rightarrow \infty} (\varphi(u_r(\cdot), i))\}$$

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{D}_i$$

4.2.3. Interprétation

$$\text{Notons } -\varphi^* = \frac{1}{n} \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(u_r, i)$$

$$-\hat{\lambda}_2 = \text{Min}_{i \in \mathcal{N}} (\hat{\lambda}_2(i)); \hat{\lambda}_2 \in \mathcal{R}$$

Le domaine \mathcal{D} peut être représenté dans le plan (d_1, d_2) figure 1.8

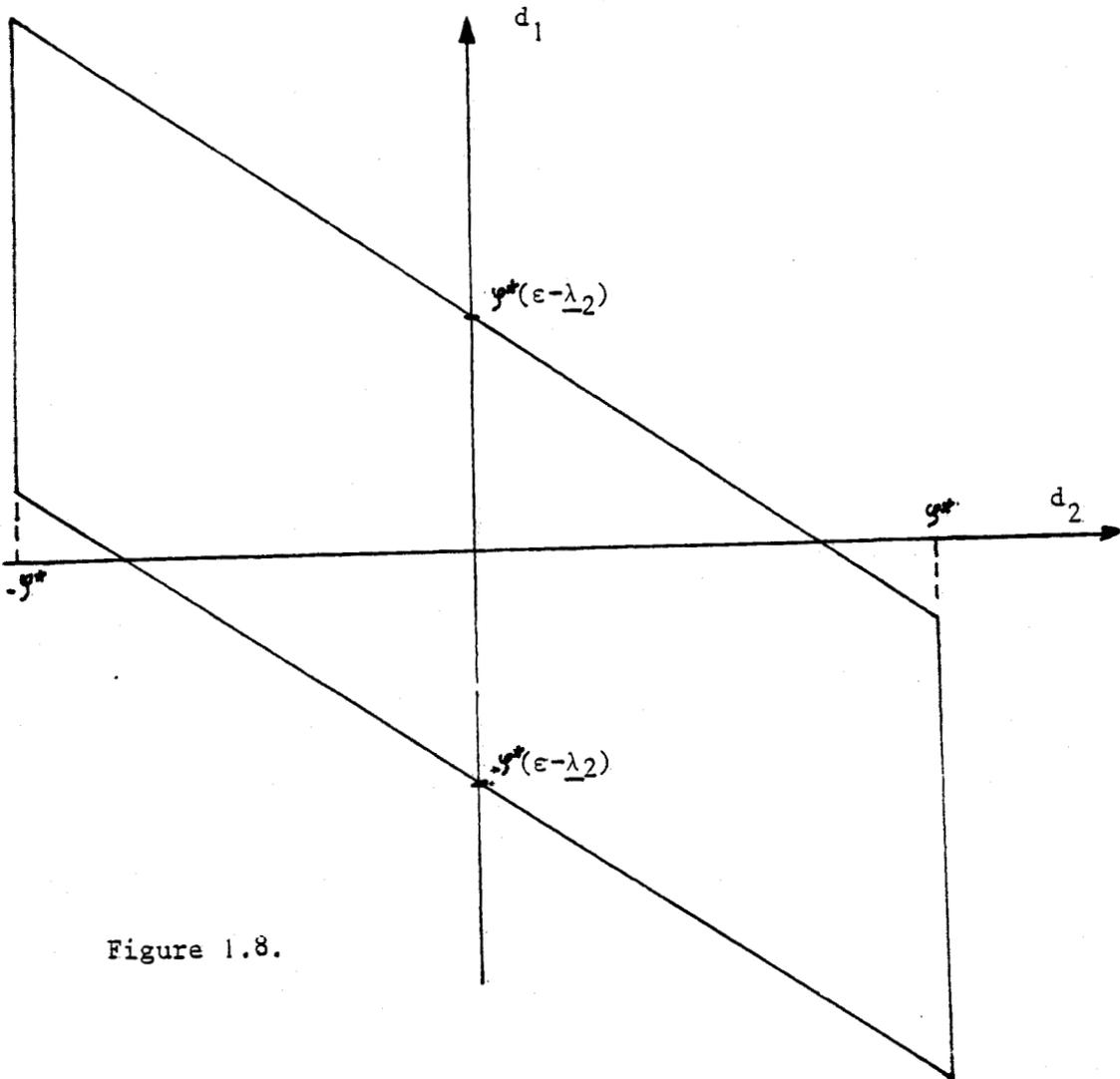


Figure 1.8.

4.3 La charge nominale varie continuellement en fonction du temps

Après avoir caractérisé le fonctionnement du dispositif en présence de variations discontinues de ses paramètres, nous envisageons maintenant des évolutions continues de ceux-ci.

4.3.1. Etude de stabilité asymptotique



Considérons, dans ce cas le régime autonome de l'équation d'erreur (32,4)

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1(\hat{g}(t)) - \delta_1(\hat{g}(t), g) & -\alpha_2(\hat{g}(t)) - \delta_2(\hat{g}(t), g) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) \quad (431,1)$$

où $\alpha_1(\hat{g}(t))$ et $\alpha_2(\hat{g}(t))$ sont des fonctions continues et bornées du temps t .

$$\text{On note } \hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t) : \begin{cases} \hat{\lambda}_1(t) + \hat{\lambda}_2(t) = -\alpha_1(\hat{g}(t)) \\ \hat{\lambda}_1(t) \cdot \hat{\lambda}_2(t) = \alpha_2(\hat{g}(t)) \end{cases}$$

$$\text{et } y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\lambda}_2(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

Supposant $\hat{\lambda}_2(t)$ dérivable, il vient

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} +\hat{\lambda}_1(t) - \delta_1(\hat{g}(t), g) & ; & -[\hat{\lambda}_2(t) \cdot \delta_1(\hat{g}(t), g) + \delta_2(\hat{g}(t), g)] \\ & 1 & ; & \hat{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} \cdot y(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & ; & -\dot{\hat{\lambda}}_2(t) \\ 0 & ; & 0 \end{bmatrix} y(t)$$

L'application directe du critère \mathcal{C} à ce modèle n'étant pas possible, il convient d'en mener l'étude selon les principaux points de la démonstration de ce dernier [G2] :

Soit $\varepsilon \in \mathcal{R}$

$$\text{On note } : z(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}^2 \quad : z^t(t) \triangleq \left[\frac{y_1(t)}{\varepsilon - \hat{\lambda}_2(t)}, y_2(t) \right]$$

alors

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1(t) - \delta_1(\hat{g}(t), g) + \frac{\dot{\hat{\lambda}}_2(t)}{(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(t))(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(t))} & ; & -\frac{\dot{\hat{\lambda}}_2(t)}{(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(t))} - \frac{\hat{\lambda}_2(t) \cdot \delta_1(\hat{g}(t), g) + \delta_2(\hat{g}(t), g)}{(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(t))} \\ (\varepsilon - \hat{\lambda}_2(t)) & ; & \hat{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} \cdot \dot{z}(t)$$

Considérons la norme de z précisée par :

$$q(z) = \text{Max} (|z_1|, |z_2|)$$

Par un résultat connu des techniques d'agrégation par les normes vectorielles [G5], on peut montrer que si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\exists \varepsilon < 0, \exists \alpha > 1, \exists \eta, \quad \varepsilon < \eta < 0, \quad \exists \lambda_2 \in \mathcal{R}.$$

$$1) \quad \forall t \in \mathcal{C}, \quad \lambda_2 < \hat{\lambda}_2(t) < \varepsilon \alpha \quad (431, 2)$$

$$2) \forall t \in \mathcal{T}, (\varepsilon - \hat{\lambda}_1(t))(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(t)) + \delta_1(\hat{g}(t), g)(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(t)) - \gamma_g \in \mathcal{O}$$

$$|\hat{\lambda}_2(t)\delta_1(\hat{g}(t), g) + \delta_2(\hat{g}(t), g)| \geq 0 \quad (431,3)$$

$$3) + \frac{|\hat{\lambda}_2(t)| + \hat{\lambda}_2(t)}{(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(t))} \leq \eta - \varepsilon \quad (431,4)$$

Alors la fonction définie positive $v(x(t), t)$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\lambda}_2(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

$$v(x(t), t) \triangleq \text{Max} \left(\frac{|y_1(t)|}{\varepsilon - \hat{\lambda}_2(t)}, |y_2(t)| \right)$$

satisfait à l'inégalité

$$D^+v(x(t), t) \leq \eta \cdot v(x(t), t)$$

Remarque :

★ Les conditions d'application du résultat précédent se décomposent en :

- une contrainte sur la dispersion des paramètres $\delta_1(t, g)$ et $\delta_2(t, g)$ (condition 2)
- une contrainte sur la dynamique d'évolution de la charge nominale (3)

★★ Par intégration de la relation (431,4) on obtient un minorant du temps de passage $t_{i+1} - t_i$ d'un état initial $\hat{\lambda}_2(i)$ à un état final $\hat{\lambda}_2(i+1)$ lorsque la variation de $\hat{\lambda}_2$ est continue.

$$t_{i+1} - t_i \geq \frac{2}{(\eta - \varepsilon)} \text{Lg} \left(1 + \frac{\hat{\lambda}_2(i+1) - \hat{\lambda}_2(i)}{(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(i+1))} \right) \quad (431,5)$$

Comparant cette minorante à celle obtenue pour une variation brusque de la charge:

$$t_{i+1} - t_i \geq \frac{1}{\eta - \varepsilon} \text{Lg} \left(1 + 2 \frac{\hat{\lambda}_2(i+1) - \hat{\lambda}_2(i)}{(\varepsilon - \hat{\lambda}_2(i))} \right) \quad (421,6)$$

1) $\hat{\lambda}_2(i+1) \leq \hat{\lambda}_2(i)$, les deux majorations se résument à la condition triviale $\{t_{i+1} \geq t_i\}$

2) $\hat{\lambda}_2(i+1) > \hat{\lambda}_2(i)$

La minorante du temps de passage d'un point de fonctionnement initial à un point de fonctionnement final est minimale dans le cas d'une variation en escalier de la charge.

En conséquence pour passer d'un point de fonctionnement caractérisé par $\lambda_2(i)$ à un autre pour lequel la valeur du paramètre est $\lambda_2(i+1)$ en temps minimal, eu égard aux contraintes $v(x(t_{i+1}), t_{i+1}) \leq e^{\eta(t_{i+1}-t_i)} \cdot v(x(t_i), t_i)$ la variation de charge doit s'opérer en échelon (ce dernier résultat est similaire à ceux relatifs à la commande en temps minimal des systèmes linéaires).

4.3.2. Etude de stabilité dynamique

Dans les mêmes conditions que dans les cas étudiés dans les volets précédents, on peut montrer que sous réserve des conditions de stabilité asymptotique établies antérieurement, toute solution de l'équation d'erreur :

$$\dot{d}(t) = \begin{bmatrix} -[\alpha_1(\hat{g}(t)) + \delta_1(g, \hat{g}(t))] & ; & -[\alpha_2(\hat{g}(t)) + \delta_2(g, \hat{g}(t))] \\ 1 & ; & 0 \end{bmatrix} d(t) + \begin{bmatrix} \chi(t, u_r, \hat{x}(t), \hat{g}(t), g) \\ 0 \end{bmatrix}$$

est bornée si la quantité $\chi(t, u_r, \hat{x}(t), \hat{g}(t), g)$ est uniformément bornée.

Dans ces conditions, pour une entrée $u_r(t)$ bornée quelconque, on peut définir :

$$\varphi(u_r, t) :$$

$$\varphi(u_r, t) = \text{Max}_{\substack{t \in \mathcal{E} \\ g \in \mathcal{P}}} |\chi(t, u_r, \hat{x}(t), \hat{g}(t), g)|$$

$$\varphi(u_r) \in \mathcal{R}^+ : \varphi(u_r) = \text{Max}_{t \in \mathcal{E}} (\varphi(u_r, t))$$

et l'écart $d(t)$ possède les propriétés suivantes :

- $d(t)$ reste borné au cours de son évolution
- $d(t)$ converge à l'intérieur d'un domaine précisé par :

$$\forall t \in \mathcal{E}, v(d(t), t) = \text{Max} \left(\frac{|d_1(t) - \lambda_2(t) d_2(t)|}{\epsilon - \lambda_2(t)} ; |d_2(t)| \right)$$

$$\mathcal{D} = \left\{ d \in \mathcal{R}^2 ; \left\{ \{d \in \mathcal{D}\} \iff \left\{ v(d, t) \leq \frac{1}{|\eta|} \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(u_r, t) \right\} \right\} \right\}$$

Conclusion

Le modèle étudié dans ce chapitre nous a permis d'introduire une méthode d'étude des systèmes pour lesquels les coefficients définissant la dynamique sont variables. Nous avons ainsi pu définir des conditions admissibles de fonctionnement pour l'adaptation en boucle ouverte envisagée.

Nous nous proposons maintenant d'étendre cette méthode à des processus d'ordre quelconque.

CHAPITRE II

1 - Introduction

Le cas étudié dans le chapitre précédent montre que l'essentiel de la méthode proposée réside dans l'utilisation du critère de stabilité que nous avons rappelé (I.3.3.3).

Le but de ce chapitre est de déduire de ce dernier, des outils simples et pratiques pour l'étude de la stabilité dynamique des systèmes continus non linéaires.

A cette fin, nous proposons de décomposer notre exposé en cinq parties.

Dans la première sont définies des représentations de type modal ([M2]) d'une classe importante de systèmes continus monovariables. Ces modèles mathématiques, d'un caractère original permettent une mise en forme des systèmes envisagés bien adaptée à l'utilisation du critère de stabilité que nous nous proposons d'utiliser.

Le seconde partie est consacrée à des rappels concernant l'application des techniques de majoration déduites de l'utilisation des normes vectorielles dans l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires ([G1], [B4]).

Nous utilisons également la définition de la notion de stabilité dynamique [M1]. Ce concept introduit une mesure de la dispersion des trajectoires d'un système soumis à des perturbations.

Nous abordons dans cet esprit l'étude des systèmes dynamiques soumis à des variations de charge lorsque la relation entre celle-ci et les paramètres définissant le processus est imparfaitement connue.

Le troisième volet de notre étude envisage le cas où le fonctionnement nominal du système étudié peut-être défini par un modèle linéaire stationnaire.

L'étude des propriétés de stabilité dynamique des systèmes linéaires non stationnaires fait l'objet de la quatrième partie.

Enfin, nous envisageons le cas où le comportement nominal du processus étudié peut être défini par un système appartenant à la classe précédente.

Dans chacune de ces études est précisé le cas particulier des systèmes de référence présentant une seule valeur caractéristique à l'ordre maximal $[G3]$.

Enfin, par souci de clarté, nous rappelons les résultats obtenus dans ce chapitre sous forme de critères pratiques.

2 - Représentation des systèmes étudiés

Dans ce chapitre, nous proposons l'étude des processus mono-variables non-linéaires dont l'évolution peut être caractérisée par une équation d'état appartenant à l'une des classes définies par les équations (2.1) et (2.2) :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{x}(t) = \left[-a(t,x,g) \cdot v_1^t + H \right] x(t) + b(t,x,g) \cdot u(t) \\ s(t) = v_1^t x(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \overset{\circ}{x}(t) = \left[-v_1^t \cdot a(t,x,g) + H^t \right] x(t) + v_1 \cdot u(t) \\ s(t) = b^t(t,x,g) \cdot x(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

avec les notations suivantes :

- $n \in \mathcal{N}$ définit l'ordre du système
- $t \in \mathcal{T} : \{t_0 \in \mathcal{R}; \mathcal{T} = [t_0, +\infty[$
- $u(t)$ et $s(t)$ applications de \mathcal{T} dans \mathcal{R} désignent respectivement l'entrée et la sortie du processus.

Par hypothèse $u(t) \in \mathcal{U}$ (ensemble d'applications continues par morceaux et uniformément bornées).

- $x(t) : \mathcal{C} \subset \mathcal{R}^n$ est le vecteur état :
- $H \in \mathcal{R}^{n \times n}$: $(H)_{ij} = \delta_{i+1, j}$ prend la forme :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & & \bigcirc \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \bigcirc \\ \bigcirc & & & \vdots \\ & & & & 1 & \bigcirc \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

- $v_1 \in \mathcal{R}^n$, $v_1^t = [1, 0 \dots \dots \dots 0]$
- $a(.)$ et $b(.)$ vecteurs fonctionnels uniformément bornés à image dans \mathcal{R}^n qui définissent la relation liant la dynamique des systèmes étudiés avec les variations de structure.
- $g \in \mathcal{P} \subset \mathcal{R}^e$ représente les perturbations s'exerçant sur les vecteurs $a(.)$ et $b(.)$

Le critère que nous utilisons implique des représentations relatives aux systèmes (2,1 ; 2,2) bien adaptées à sa mise en oeuvre.

Cette transformation est obtenue par un changement de base, introduite à partir des modèles linéaires stationnaires qui appartiennent aux classes de processus envisagés.

Dans cette hypothèse, nous envisageons successivement les formes canoniques relatives à l'observabilité et à la commandabilité.

2.1. Systèmes linéaires décrits sous la forme canonique d'observabilité

Les systèmes linéaires envisagés peuvent être caractérisés par une fonction de transfert :

$$\frac{s(p)}{u(p)} = \frac{n(p)}{d(p)} \quad (21,1)$$

Dans cette définition p étant la variable symbolique de Laplace, $d(p)$ et $n(p)$ sont des polynômes en p de degrés respectivement égal à n et strictement inférieur à n .

La mise en équation de ce système sous la forme canonique d'observabilité est alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = (-a.v_1 + H) \cdot x + b \cdot u \\ s = v_1^t \cdot x \end{cases} \quad (21,2)$$

La relation entre ces deux représentations s'exprime de manière très simple par les équations de passage (21,3) [B2] :

$$\begin{cases} \lambda \in \mathcal{C} \\ d(\lambda) = \lambda^n + a^t \cdot v(\lambda) \\ n(\lambda) = b^t \cdot v(\lambda) \\ v^t(\lambda) = [\lambda^{n-1}, \dots, \lambda^{n-i}, \dots, 1] \end{cases} \quad (21,3)$$

2.1.1. Définition de la représentation équivalente

$r \in \mathcal{C}^n$ étant un vecteur de paramètres, le choix particulier d'une matrice triangulaire inférieure de changement de base $P^{-1}(r)$ permet la description du système original (21,1) sous la forme (cf annexe 1) :

$$\begin{cases} y(t) = P^{-1}(r) \cdot x(t) \\ \dot{y}(t) = [-p(r) \cdot v_1^t + J(r)] y(t) + b'(r) \cdot u(t) \\ s(t) = v_1^t \cdot y(t) \end{cases} \quad (211,1)$$

avec $r \in \mathcal{C}^n$: $r^t = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$

$$p(r) \in \mathcal{C}^n ; (p(r))_i = \prod_{k=i}^n d(\lambda_k) \cdot \left\{ \prod_{\substack{e=i \\ e \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right\} \quad (211,2)$$

$$b'(r) \in \mathcal{C}^n ; (b'(r))_i = \prod_{k=i}^n n(\lambda_k) \cdot \left\{ \prod_{\substack{e=i \\ e \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right\}$$

$$J(r) = \text{diag}(r) + H = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \lambda_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (211,3)$$

Remarques :

- lorsque certaines composantes de r sont identiques, ces quantités sont définies par passage à la limite.
- afin d'unifier les notations, on emploie la convention usuelle

$$\prod_{\substack{e=n \\ e \neq n}}^n (\lambda_n - \lambda_e) = 1$$

Les matrices de changement de base $P^{-1}(r)$ et $P(r)$ sont précisées par :

$$P^{-1}(r) \in \mathcal{L}^{n \times n} ; (P^{-1}(r))_{i,j} = \sum_{k=i}^n \lambda_k^{n-j} \prod_{\substack{e=i \\ e \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \quad (211,4)$$

$$P(r) \in \mathcal{L}^{n \times n} \quad \left\{ \begin{array}{l} i < j \quad (P(r))_{i,j} = 0 \\ i = j \quad (P(r))_{i,i} = 1 \\ i \geq j \quad (P(r))_{i,j} = (-1)^{i-j} \sigma_{i-j, n-j} \end{array} \right. \quad (211,5)$$

$\sigma_{i-j, n-j}$: fonction symétrique des racines du polynôme en x d'ordre $n - j$:

$$d_{n-j}(x, r) = \prod_{k=j+1}^n (x - \lambda_k) = \sum_{i=j}^n (-1)^{i-j} \sigma_{i-j, n-j} \cdot x^{n-i}$$

Exemple :

Considérons un processus de fonction de transfert :

$$\frac{s(p)}{u(p)} = \frac{b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} \quad (211,6)$$

la représentation dans l'espace d'état sous la forme canonique d'observabilité est alors :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \cdot u \quad (211,7)$$

$$s = [1, 0, 0] \cdot x$$

Soit $r \in \mathcal{L}^3$: $r^t = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ posons :

$$P^{-1}(r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & 1 & 0 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (211,8)$$

il vient :

$$P(r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(\lambda_2 + \lambda_3) & 1 & 0 \\ \lambda_2 \cdot \lambda_3 & -\lambda_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (211,9)$$

Le changement de base ainsi défini transforme l'équation de départ (211,7) en :

$$\begin{cases} y = P^{-1}(r) \cdot x \\ \hat{y} = \begin{bmatrix} -p_1(r) + \lambda_1 & 1 & 0 \\ -p_2(r) & \lambda_2 & 1 \\ -p_2(r) & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} b'_1(r) \\ b'_2(r) \\ b'_3(r) \end{bmatrix} \cdot u \\ s = [1, 0, 0] \cdot y \end{cases} \quad (211,10)$$

avec :

$$\begin{cases} p_3(r) = d(\lambda_3) = \lambda_3^3 + a_1 \lambda_3^2 + a_2 \lambda_3 + a_3 \\ p_2(r) = \frac{d(\lambda_3) - d(\lambda_2)}{\lambda_3 - \lambda_2} = (\lambda_3^2 + \lambda_3 \lambda_2 + \lambda_2^2) + a_1 (\lambda_3 + \lambda_2) + a_2 \\ p_1(r) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\frac{d(\lambda_2) - d(\lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{d(\lambda_1) - d(\lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3} \right] = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + a_1 \end{cases} \quad (211,11)$$

$$\begin{cases} b'_3(r) = n(\lambda_3) = b_1 \lambda_3^2 + b_2 \lambda_3 + b_3 \\ b'_2(r) = \frac{n(\lambda_3) - n(\lambda_2)}{\lambda_3 - \lambda_2} = b_1 (\lambda_3 + \lambda_2) + b_2 \\ b'_1(r) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{n(\lambda_2) - n(\lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{n(\lambda_1) - n(\lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3} \right] = b_1 \end{cases}$$

En particulier, le choix de \hat{r} ($\hat{r} \in \mathcal{E}^3$; $\hat{r}^t = [\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3]$; $\{i = 1, 2, 3; d(\hat{\lambda}_i) = 0\}$) comme paramètre du changement de base permet la représentation du système original sous la forme remarquable :

$$\begin{cases} y(t) = P^{-1}(\hat{r}) \cdot x(t) \\ \hat{y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 & 1 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_2 & 1 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_3 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} b'_1(\hat{r}) \\ b'_2(\hat{r}) \\ b'_3(\hat{r}) \end{bmatrix} u(t) \\ s(t) = y_1(t) \end{cases} \quad (211,12)$$

Cette dernière équation nous amène naturellement à établir un parallèle entre cette description du système original et la forme modale classique [P,1].

Il y a en effet identité des deux représentations lorsque le spectre de la matrice de régime libre $(-a.v_1^t + H)$ est réduit à une valeur propre multiple (à un point triple).

On peut néanmoins remarquer que, par opposition au modèle obtenu par l'utilisation du changement de base transformant la matrice $(-a.v_1^t + H)$ en sa réduite de Jordan, le système différentiel (211,12) est structurellement invariant [G,4] par rapport à la configuration du spectre de la matrice de régime libre de ce système.

Ce dernier résultat, établi de manière naturelle à l'ordre 3 étant donnée la simplicité des notations, peut aisément être étendu à n'importe quel ordre.

Nous proposons donc son énoncé sous la forme des deux propriétés suivantes :

- Propriété n° 1

$P(r)$ et $P^{-1}(r)$ étant des matrices triangulaires inférieures, la matrice du régime libre de l'équation transformée à la forme spéciale :

$[J(r) - p(r) \cdot v_1^t]$. Par conséquent pour un paramètre $r \in \mathcal{E}^n$ donné, un changement dans le vecteur a n'affecte que les éléments de la première colonne de la matrice obtenue.

- Propriété n° 2

En désignant vecteur spectral d'une matrice carrée un vecteur dont les composantes sont les valeurs propres de cette matrice, le choix d'un vecteur spectral \hat{f} de $(-a.v_1^t + H)$ comme paramètre du changement de base conduit à représenter le système sous une forme originale indépendante de \hat{f} par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 y(t) = P^{-1}(\hat{f}) \cdot x(t) \\
 \hat{y}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \bigcirc & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} b'_1(\hat{f}) \\ \vdots \\ b'_n(\hat{f}) \end{bmatrix} u(t) \\
 s(t) = v_1^t \cdot y(t)
 \end{array} \right. \quad (211,13)$$

Le schéma bloc déduit de cette mise en équation dans l'espace d'état est proposé (figure 2,1). Le système est ainsi modélisé par une chaîne de cellules du premier ordre, chacune réagissant en fonction de l'entrée et de la cellule précédente.

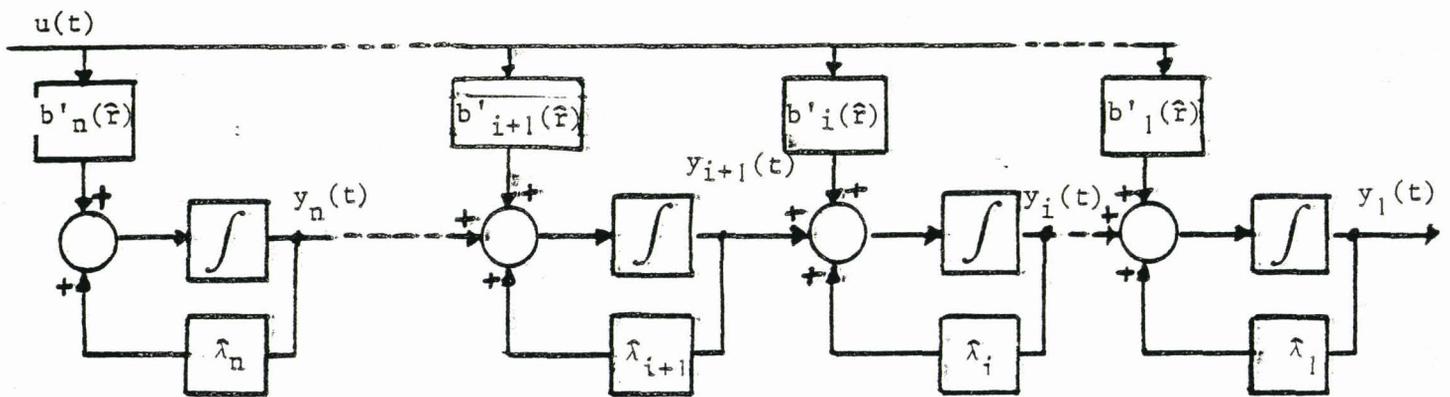


Figure 2.1.

Dans ce diagramme, les intégrateurs sont des opérateurs de \mathcal{L} dans \mathcal{L} . On peut néanmoins en déduire de manière aisée une représentation ne comportant que des intégrateurs opérant sur \mathcal{R} en regroupant par paires les cellules comportant des $\hat{\lambda}_i$ complexes conjugués (cf annexe 2).

A partir de la forme canonique ainsi définie, nous proposons une étude simple des propriétés des systèmes linéaires décrits sous la forme initial

2.1.2. Etude de stabilité

Le schéma-bloc (figure 2.1) fait apparaître le processus comme une chaîne de sous-systèmes du 1er ordre.

Le système est donc asymptotiquement stable si et seulement si chaque sous-système est asymptotiquement stable.

{ Le système est globalement
exponentiellement stable } \Leftrightarrow { $\exists \varepsilon < 0, \forall i = 1, \dots, n, \mathcal{R}(\lambda_i) \leq \varepsilon$ }

2.1.3. Etude de commandabilité

Il apparait de manière immédiate sur la figure 21 que toutes les composantes du vecteur état sont commandables si on ne peut trouver une racine λ_n du polynôme $d(\cdot)$ qui annule la composante $b'_n(\hat{r})$ du vecteur de commande.

Cette condition est identique à celle établie par Kalman $[K, 1]$

2.1.4. Etude d'observabilité

L'équation d'état (21,7) est toujours observable.

Cette propriété est déduite par dualité de la propriété de commandabilité du système déduit de la forme canonique de commandabilité (22)

La représentation définie dans cette partie nous permet une interprétation simple et globale des propriétés des systèmes linéaires décrits sous la forme canonique d'observabilité.

Nous proposons maintenant la poursuite d'une démarche en tout point parallèle dans l'étude de leur représentation d'état sous forme canonique de commandabilité.

2.2. Systèmes linéaires décrits sous la forme canonique de commandabilité

La mise en équation sous forme canonique de commandabilité des systèmes linéaires étudiés est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (-v_1 \cdot a^t + H^t) x + v_1 \cdot u \\ s = b^t \cdot x \end{cases} \quad (22,1)$$

Cette représentation est la forme duale $[B, 5]$ du modèle étudié dans la partie précédente (21,1) ; en conséquence, en transposant l'étude menée antérieurement nous nous limiterons à l'énoncé des résultats obtenus.

Représentation équivalente

Par changement de base, l'équation d'état initiale (22,1) se transforme en :

$$\begin{cases} y(t) = P^t(r) \cdot x(t) \\ \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} -v_1^t \cdot p(r) + J^t(r) \end{bmatrix} \cdot y(t) + v_1 \cdot u(t) \\ s(t) = (b'(r))^t \cdot y(t) \end{cases} \quad (22,2)$$

$r \in \mathcal{C}^n$ est un vecteur de paramètres.

Exemple;

Envisageons de nouveau le système de fonction de transfert :

$$\frac{s(p)}{u(p)} = \frac{b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} \quad (22,3)$$

On déduit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ s = [b_1, b_2, b_3] x \end{cases} \quad (22,4)$$

Le changement de base défini par $r \in \mathcal{C}^3$ ($r^t = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$) (211,8 ; 211,9) conduit à :

$$\begin{cases} y = P^t(r) \cdot x \\ \dot{y} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - p_1(r) & p_2(r) & p_3(r) \\ 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ s = [b'_1(r), b'_2(r), b'_3(r)] \cdot y \end{cases} \quad (22,5)$$

Le choix de \hat{r} , vecteur spectral de $(-v_1 \cdot a^t + H^t)$ comme paramètre du changement de base conduit à la forme remarquable :

$$\begin{cases} y(t) = P^t(\hat{r}) \cdot x(t) \\ \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 1 & \hat{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 1 & \hat{\lambda}_3 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ s(t) = [b'_1(\hat{r}), b'_2(\hat{r}), b'_3(\hat{r})] \cdot y(t) \end{cases} \quad (22,6)$$

Ce résultat se généralise à un ordre quelconque.

La forme particulière des équations d'état (22,5) et (22,6) nous amène à reformuler dans le cas présent les deux propriétés remarquables du changement de base.

- Propriété n°1

$P^t(r)$ et $(P^{-1}(r))^t$ étant des matrices triangulaires supérieures; le paramètre r étant constant, un changement dans le vecteur a n'affecte que les éléments de la 1ere ligne de la matrice du régime libre de l'équation (22,2).

- Propriété n°2

\hat{r} étant un vecteur spectral de $(-v_1 \cdot a^t + H^t)$, le choix de \hat{r} comme paramètre du changement de base transforme l'équation d'état initiale (22,1) sous la forme duale de la représentation définie dans le cas précédent (21,1,13)

$$\begin{cases}
 y(t) = P^t(\hat{r}) \cdot x(t) \\
 \hat{y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \hat{\lambda}_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \hat{\lambda}_n \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
 s(t) = [b'(\hat{r})]^t \cdot y(t)
 \end{cases} \quad (22,7)$$

Cette dernière équation peut être représentée par le schéma-bloc figure(2.2)

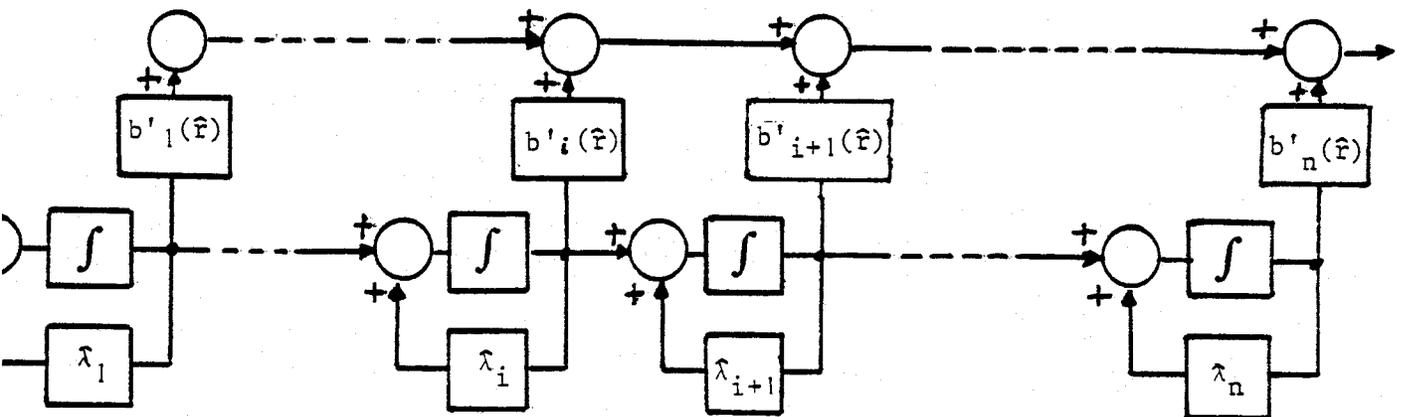


Figure 2.2.

- De même que dans la partie précédente, la réalisation du schéma de la figure 2.2 avec des intégrateurs opérant sur \mathcal{R} s'obtient en transposant les résultats de l'annexe 2.

- la figure 2.2 nous permet de conclure simplement quant aux propriétés des systèmes linéaires décrits sous la forme canonique de commandabilité

2.2.1. Etude de la stabilité

Le schéma-bloc (figure 2.2.) fait apparaitre le système comme une chaîne de sous-systèmes du premier ordre.

Le système est asymptotiquement stable si et seulement si chaque sous système est asymptotiquement stable.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Le système est globalement} \\ \text{exponentiellement stable} \end{array} \right\} \iff \left\{ \exists \epsilon < 0, \forall i = 1, \dots, n, \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i) \leq \epsilon \right\}$$

2.2.2. Propriété d'observabilité

Il apparait de manière évidente sur la figure 2.2. que les composantes $y_{n-k}(t)$ jusqu'à $y_n(t)$ ne sont pas observables si la relation :

$$b'_n(\hat{r}) = \dots = b'_{n-k}(\hat{r}) = 0$$

est vérifiée. Cette dernière égalité revient à exprimer que le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert envisagée ont $k+1$ zéros

$$\text{communs : } n(\hat{\lambda}_n) = \dots = n(\hat{\lambda}_{n-k}) = 0$$

Cette dernière égalité nous permet de retrouver la condition usuelle $[P, 1]$ relative aux pôles et aux zéros.

2.2.3. Propriété de commandabilité

En considérant la figure 2.2. il apparait immédiatement que le système est toujours commandable.

Conclusion

La représentation définie dans ce chapitre nous a conduit à préciser une forme modale des systèmes monovariabiles linéaires qui permet d'établir et d'interpréter de manière simple certaines de leurs propriétés usuelles.

Dans la transformation proposée, seules la première ligne ou la première colonne de la matrice du régime libre sont affectées par une variation des paramètres caractéristiques de la dynamique du système.

Ce résultat nous permet dans le même esprit d'aborder l'étude des systèmes non linéaires (2,1 ; 2,2).

3. Représentation et étude d'une classe de systèmes non linéaires

Le précédent volet de l'étude nous a permis de préciser une transformation originale des modèles mathématiques des systèmes monovariabiles linéaires stationnaires. Cette transformation s'applique aisément aux systèmes non linéaires.

Ainsi un changement de base défini par une matrice $P^{-1}(r)$ à coefficients constants (211,4 ; 211,5) amène :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-a(t,x,g) \cdot v_1^t + H) \cdot x(t) + b(t,x,g) \cdot u(t) \\ s(t) = v_1^t \cdot x(t) \end{cases} \quad (2,1)$$

sous la forme :

$$\begin{cases} y(t) = P^{-1}(r) \cdot x(t) \\ \dot{y}(t) = [-p(r,(t,x,g)) \cdot v_1^t + J(r)] \cdot y(t) + b'(r,(t,x,g)) \cdot u(t) \\ s(t) = v_1^t \cdot y(t) \end{cases} \quad (3,1)$$

de même l'équation :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-v_1 \cdot a^t(t,x,g) + H^t) \cdot x(t) + v_1 \cdot u(t) \\ s(t) = b^t(t,x,g) \cdot x(t) \end{cases} \quad (2,2)$$

devient :

$$\begin{cases} y(t) = P^t(r) \cdot x(t) \\ \dot{y}(t) = [-v_1 \cdot p^t(r, (t, x, g)) + J^t(r)] \cdot y(t) + v_1 \cdot u(t) \\ s(t) = b'^t(r, (t, x, g)) \cdot y(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Les vecteurs fonctionnels $p(r(t, x, g))$ et $b'(r(t, x, g))$ sont définis comme précédemment (211,2) :

Notons $n(\lambda, (t, x, g))$ et $d(\lambda, (t, x, g))$ ($\lambda \in \mathcal{C}$) des polynômes dont les coefficients, fonctions de (t, x, g) sont précisés par :

$$\begin{cases} n(\lambda, (t, x, g)) = v^t(\lambda) \cdot b(t, x, g) \\ d(\lambda, (t, x, g)) = \lambda^n + v^t(\lambda) \cdot a(t, x, g) \end{cases} \quad (3.3.)$$

alors :

$$\begin{cases} r^t = [\lambda_1, \dots, \lambda_n] \\ (p(r, (t, x, g)))_i = \sum_{k=i}^n d(\lambda_k, (t, x, g)) \cdot \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \\ (b'(r, (t, x, g)))_i = \sum_{k=i}^n n(\lambda_k, (t, x, g)) \cdot \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \end{cases} \quad (3,4)$$

3.1) Remarque relative aux notions de commandabilité et d'observabilité appliquées aux systèmes non-linéaires

A partir des représentations des systèmes non linéaires que nous avons introduites, on peut être tenté de mener leur étude dans le même esprit que dans le cas linéaire stationnaire.

Toutefois, on ne peut affirmer que les processus décrits par l'équation (2,1) (respectivement (2,2)) sont non commandables (respectivement non observables) qu'à la condition que, quelque soit $(t, x, g) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P})$ $n(\lambda, (t, x, g))$ et $d(\lambda, (t, x, g))$ aient des racines communes.

En conséquence, l'extension de l'application des concepts d'observabilité et de commandabilité aux systèmes dont le modèle est non linéaire est difficilement envisageable directement [L1].

Le mode de représentation des systèmes non linéaires auquel est associé la forme canonique d'observabilité dans le cas linéaire est donc noté C, le second (2,2) étant désigné par la forme L.

L'analyse de la classe des systèmes non linéaires que nous étudions est abordée par les techniques d'agrégation déduites de l'utilisation des normes vectorielles $[B,1]; [G,1]$ ainsi qu'à partir du concept de stabilité dynamique $[M,1]$.

3.2. Techniques d'agrégation, les normes vectorielles

La stabilité des systèmes non linéaires est souvent abordée par la seconde méthode de Lyapunov. Celle ci conduit généralement à reporter cette étude sur celle d'un système de comparaison du 1° ordre.

D'un point de vue distinct, la définition de modèles de comparaison d'ordre supérieur élargit la classe des processus concernés.

L'utilisation des normes vectorielles permet d'associer systématiquement à un processus décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A(t,x,g)x \quad (32,1) \\ x(t) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^n \\ A(t,x,g) : \mathcal{E} \times \mathcal{E}^n \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}^{n \times n} \end{array} \right.$$

un système de comparaison d'ordre inférieur ou égal $[B,6]$

En effet l'utilisation d'une norme vectorielle $[R,1]_q$, de taille k ($q(x) : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{R}^k$) nous permet de déduire de l'équation précédente l'inégalité

$$D^+ (q(x)) \leq M_{qq} (A(t,x,g)) \cdot q(x) \quad (32,2)$$

où $D^+ (\cdot)$ définit l'opérateur dérivée à droite par rapport au temps.

La matrice pseudo-majorante $M_{qq} (A(t,x,g))$ est une application à image dans $\mathcal{R}^{k \times k}$ construite à partir de la norme q et de $A(t,x,g)$ $[B,1]; [G,1]$.

Celle ci étant choisie de sorte que ses éléments hors diagonaux soient non négatifs, le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}(t) = M_{qq} (A(t,x,g)) \cdot z(t) \\ z(t_0) = q(x(t_0)) \end{array} \right. \quad (32,3)$$

est de comparaison d'ordre k du processus initial d'après l'inégalité:

$$\forall t \in \mathcal{E}, q(x(t)) \leq z(t) .$$

Les propriétés de la matrice pseudo-majorante $M_{qq}(A(t,x,g))$ permettent ainsi de conclure relativement à la stabilité du système initial.

L'utilisation dans cette optique du Lemme \mathcal{L} est à la base de la démonstration du critère.

LEMME \mathcal{L} [G,2]

S'il existe une norme vectorielle q , application de \mathcal{E}^n dans \mathbb{R}_+^q telle que la matrice pseudo-majorante $M(t,x,g) = M_{qq}(A(t,x,g))$ vérifie les hypothèses suivantes :

H1) *Les éléments non constants sont isolés dans une seule ligne*

H2) $\exists \epsilon \in]-\infty, 0[$, $((M(t,x,g)) - \epsilon I)$ est l'opposée d'une M -matrice sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}^n \times \mathcal{P}$

(l'hypothèse H2 peut s'exprimer de manière équivalente par les conditions de Kotelyanskii : [G,4])

$M \begin{pmatrix} k, k+1, \dots, n \\ k, k+1, \dots, n \end{pmatrix}$ étant un mineur principal d'ordre $n-k+1$ de $(M(t,x,g) - \epsilon I)$;

$$\exists \epsilon < 0, (-1)^{n-k+1} \cdot M \begin{pmatrix} k, k+1, \dots, n \\ k, k+1, \dots, n \end{pmatrix} > 0$$

H3) $M(t,x,g)$ est irréductible sur la frontière de $(\mathcal{E} \times \mathcal{E}^n \times \mathcal{P})$.

Alors :

1°) ϵ est un majorant de la partie réelle du spectre de $M(t,x,g)$

2°) $u(\epsilon)$ étant défini comme le vecteur propre de $M(t,x,g)$ associé à ϵ considéré comme valeur propre limite, $u(\epsilon)$ est de direction fixe et ses composantes sont strictement positives (si cette propriété est établie par ailleurs, l'hypothèse H3 est inutile).

3°) La matrice $M'(t,x,g)$ définie par :

$$\begin{aligned} M'(t,x,g) &= (\text{Diag}(u(\epsilon)))^{-1} M(t,x,g) \cdot \text{Diag}(u(\epsilon)) \\ &= u'_{ij}(t,x,g) \end{aligned} \quad (32,4)$$

vérifie :

$$\forall i = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n u'_{ij}(t,x,g) \leq \epsilon \quad (32,5)$$

Remarques :

$M(r(t, x, g))$ est la matrice pseudo-majorante de $(-v_1 \cdot a^t(t, x, g) + H^t)$ relativement à la norme vectorielle $q'(x(t), r) = |P^t(r) \cdot x(t)|$.

Les conditions d'application du lemme \mathcal{L} à cette matrice sont dans ce cas réduites à la vérification des inégalités de Kotelyanskii.

Dans le cas particulier des systèmes linéaires stationnaires, le choix du vecteur spectral \hat{r} comme paramètre du changement de base ramène celles-ci aux conditions linéaires de stabilité :

$$\{ \exists \varepsilon < 0, \forall i = 1, \dots, n, \Re(\lambda_i) \leq \varepsilon \} \quad (33,4)$$

En ce sens, l'utilisation conjointe du mode de représentation et de la norme vectorielle choisie minimise les contraintes imposées par l'utilisation du critère, du moins pour certains éléments de la classe de systèmes envisagés.

3.4. Systèmes non-linéaires centrés sur un système linéaire à coefficients constants

L'application du critère \mathcal{C} aux systèmes linéaires stationnaires représentés sur une base appropriée n'entraîne aucune restriction dans l'expression des conditions de stabilité.

Nous proposons ainsi de montrer la validité de la conjecture linéaire dans le cas où les paramètres de structure des processus non linéaires évoluent à l'intérieur de domaines centrés sur des valeurs fixes.

3.4.1) Etude des systèmes décrits sous la forme C

Les paramètres de structure $a(t, x, g)$ du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-a(t, x, g) \cdot v_1^t + H) \cdot x(t) + b(t, x, g) \cdot u(t) \\ s(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (2,1)$$

varient dans un voisinage d'une valeur constante \hat{a} . Cette valeur nominale des paramètres de la matrice du régime libre nous permet de définir une matrice de changement de base $P^{-1}(\hat{r})$, (\hat{r} étant un vecteur spectral de $(-\hat{a} \cdot v_1^t + H)$). Notons que, dans ce cas, \hat{r} peut être considéré comme un point de centrage du spectre de $(-a(t, x, g) \cdot v_1^t + H)$.

Etude de stabilité

L'application du critère \mathcal{C} à l'étude de la stabilité du point d'équilibre ($x=0$) de :

$$\dot{y}(t) = \left[-p(\hat{r}, (t, x, g)) \cdot v_1^t + J(\hat{r}) \right] \cdot y(t) \quad (341,1)$$

se ramène à la vérification de l'existence de $\epsilon < 0$ tel que $(M(\hat{r}, (t, x, g)) - \epsilon I)$ vérifie les inégalités de Kotelyanskii.

Etant donnée la forme particulière de $M(\hat{r}, (t, x, g))$ (32,5), celles ci se réduisent aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \epsilon < 0 \\ \forall k = 2, \dots, n ; \quad \mathcal{R}(\lambda_k) < \epsilon \\ \forall (t, x, g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P} \quad , \quad \prod_{i=1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_i)) + \mathcal{R}(p_1(\hat{r}, (t, x, g))) \cdot \prod_{i=2}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_i)) \\ - \sum_{k=2}^{n-1} |p_k(\hat{r}, (t, x, g))| \cdot \prod_{i=k+1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_i)) - |p_n(\hat{r}, (t, x, g))| \geq 0 \end{array} \right. \quad (341,2)$$

avec $\hat{r}^t = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$

$$\forall_i = 1, \dots, n \quad , \quad p_i(\hat{r}, (t, x, g)) = \sum_{k=i}^n d(\lambda_k, (t, x, g)) \prod_{\substack{e=i \\ e \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_e}$$

$$d(\lambda, (t, x, g)) = \lambda^n + a^t(t, x, g) \cdot v(\lambda).$$

Dans ce cas, le critère \mathcal{C} se ramène à la mise en oeuvre du lemme $\mathcal{L}1$ d'application simple.

LEMME $\mathcal{L}1$:

Si le vecteur $a(t, x, g) : \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R}^n$ définissant les paramètres de structure du processus

$$\dot{x}(t) = (-a(t, x, g) \cdot v_1^t + H) x(t) \quad (L1,1)$$

évolue dans un domaine centré sur un vecteur constant \hat{a} ,

\hat{r} étant un vecteur spectral de $(-\hat{a} \cdot v_1^t + H)$, si $a(t, x, g)$ et \hat{a} satisfont les contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \epsilon < 0, \quad i) \forall k = 2, \dots, n, \quad \mathcal{R}(\lambda_k) < \epsilon \\ ii) \forall (t, x, g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P} \quad , \quad \prod_{i=1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_i)) + \mathcal{R}(p_1(\hat{r}, (t, x, g))) \\ \cdot \prod_{i=2}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_i)) - \sum_{k=2}^{n-1} |p_k(\hat{r}, (t, x, g))| \cdot \prod_{i=k+1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_i)) - |p_n(\hat{r}, (t, x, g))| \geq 0 \end{array} \right.$$

Alors, le point d'équilibre ($x = 0$) du système (L1,1) est globalement exponentiellement stable et la fonction définie positive

$$\begin{cases} v(x(t)) = |y_n(t)| + \sum_{i=1}^{n-1} |y_i(t)| \cdot \prod_{k=i+1}^n (\bar{\lambda}_k) \\ y(t) = P^{-1}(\hat{r}) \cdot x(t) \end{cases}$$

vérifie :

$$D^+(v(x)) \leq \varepsilon \cdot v(x)$$

Etude de stabilité dynamique [M,1]

Le Lemme précédemment établi permet de caractériser l'évolution en régime libre d'un processus de la classe envisagée.

Nous proposons maintenant de préciser les propriétés de stabilité dynamique de ces systèmes soumis à une commande $u(t)$.

Dans ce cas, les trajectoires nominales $\hat{x}(t)$ du processus sont précisées par un modèle linéaire :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (-\hat{a} \cdot v_1^t + H) \cdot \hat{x}(t) + \hat{b} \cdot u(t) \\ \hat{x}(t_0) = 0 \in \mathcal{Y} \end{cases} \quad (341,3)$$

Les trajectoires du système étant solutions de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-a(t,x,g) \cdot v_1^t + H)x(t) + b(t,x,g) \cdot u(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathcal{Y} \end{cases}$$

L'écart entre les trajectoires est alors :

$$d(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (341,4)$$

et son évolution est caractérisée par :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = P^{-1}(\hat{r}) \cdot d(t) \\ \dot{\hat{e}}(t) = [-p(\hat{r},(t,x,g)) \cdot v_1^t + J(\hat{r})] \cdot e(t) + p(\hat{r},(t,x,g)) \cdot \hat{x}_1(t) + \\ [b'(\hat{r},(t,x,g)) - b'(\hat{r})] u(t) \end{cases} \quad (341,5)$$

Pour une entrée $u(t)$ donnée, $\hat{x}(t)$ est parfaitement connu .

Dans un cadre plus général, si le modèle qui définit la trajectoire nominale est asymptotiquement stable en régime autonome, pour une entrée $u(t) \in \mathcal{U}$ quelconque, $\hat{x}(t)$ reste borné au cours de son évolution.

La trajectoire nominale étant décrite par :

$$\begin{cases} \hat{y}(t) = P^{-1}(\hat{r}) \cdot \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t_0) = 0 \in \mathcal{Y} \\ \dot{\hat{y}}(t) = J(\hat{r}) \cdot \hat{y}(t) + b'(\hat{r}) \cdot u(t) \end{cases}$$

$u(t)$ étant borné par hypothèse, on peut définir $\bar{h} \in \mathcal{R}_+^n$, $\bar{h} = \text{Max}_{\substack{u(t) \in \mathcal{U} \\ t \in \mathcal{C}}} |b'(\hat{r}) \cdot u(t)|$

On en déduit l'inégalité majorante :

$$D^+ (|\hat{y}(t)|) \leq J(\mathcal{R}(\hat{r})) \cdot |\hat{y}(t)| + \bar{h}$$

Si la condition suivante :

$$\exists \alpha > 1, \exists \varepsilon < 0, \forall i = 1, \dots, n, \mathcal{R}(\lambda_i) \leq \varepsilon \cdot \alpha$$

est vérifié alors $J^t(\mathcal{R}(\hat{r}))$ satisfait les hypothèses du Lemme 2

et la fonction définie positive :

$$v(\hat{y}(t)) = u^t(\varepsilon) \cdot |\hat{y}(t)|$$

satisfait à l'inégalité :

$$D^+ (v(\hat{y}(t))) \leq \varepsilon \cdot v(\hat{y}(t)) + u^t(\varepsilon) \cdot \bar{h}$$

ce qui démontre la propriété.

Dans ces conditions, $a(t, x, g)$ et $b(t, x, g)$ étant par hypothèse uniformément bornés par rapport à $(t, x, g) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P})$, pour toute entrée $u(t) \in \mathcal{U}$ bornée, on peut alors définir les vecteurs $h(u, t)$, $h(u)$, et \bar{h}

$$h(u, t) : \mathcal{U} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}_+^n : h(u, t) = \text{Max}_{\substack{x \in \mathcal{R}^n \\ g \in \mathcal{P} \\ x_0 \in \mathcal{Y} \\ \tau \in [t, +\infty[}} (|p(\hat{r}, (\tau, x, g)) \cdot \hat{x}_1(\tau) + b'(\hat{r}, (\tau, x, g)) \cdot u(\tau)|)$$

$$h(u) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}_+^n : h(u) = \text{Max}_{t \in \mathcal{C}} (h(u, t))$$

$$\bar{h} \in \mathcal{R}_+^n : \bar{h} = \text{Max}_{u \in \mathcal{U}} (h(u))$$

On obtient ainsi l'inégalité majorante caractérisant l'évolution de $e(t)$

$$D^+ (|e(t)|) \leq M^t(\hat{r}, (t, x, g)) \cdot |e(t)| + h(u, t)$$

Comme précédemment, si $M(\hat{r}(t, x, g))$ vérifie les conditions d'application du Lemme 1, la fonction définie positive :

$$v(e(t)) = u^t(\epsilon) \cdot |e(t)|$$

satisfait à l'inégalité :

$$D^+ (v(e(t))) \leq \epsilon \cdot v(e(t)) + u^t(\epsilon) \cdot h(u, t)$$

Cette dernière contrainte montre que l'écart $e(t)$ reste borné au cours de son évolution et converge vers l'intérieur d'un domaine précisé par :

$$v(e(t)) \leq \frac{1}{\epsilon} u^t(\epsilon) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} (h(u, t)) \quad (341,6)$$

Nous proposons de résumer ces résultats dans le critère \mathcal{C}_1

Critère \mathcal{C}_1

Soit le processus monovariante défini par l'équation d'état (C1,1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-a(t, x, g) \cdot v_1^t + H)x + b(t, x, g) \cdot u(t) \\ s(t) &= v_1^t \cdot x(t) \end{aligned} \quad (C1,1)$$

S'il existe une valeur nominale constante \hat{a} de $a(t, x, g)$, telle que, $\hat{r}(\hat{r}^t = [\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n])$ étant un vecteur spectral de $(-\hat{a} \cdot v_1^t + H)$, \hat{a} et $a(t, x, g)$ satisfont à :

$$\exists \epsilon < 0$$

$$\forall k = 1, \dots, n; \mathcal{R}(\hat{\lambda}_k) < \epsilon$$

$$\forall (t, x, g) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P}), \prod_{i=1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i)) + \mathcal{R}(p_1(\hat{r}, (t, x, g))) \prod_{i=2}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i))$$

$$- \sum_{k=2}^{n-1} |p_k(\hat{r}, (t, x, g))| \cdot \prod_{i=k+1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i)) - |p_n(\hat{r}, (t, x, g))| \geq 0$$

alors :

- la dispersion des trajectoires du système (C1,1) soumis à une commande $u(t)$ bornée est bornée et converge vers l'intérieur d'un domaine précisé par :

$$\left\{ \begin{aligned} v(e) &\leq \frac{1}{\epsilon} (u^t(\epsilon) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} (h(u, t))) \\ e(t) &= P^{-1}(\hat{r}) \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) \\ u^t(\epsilon) &= \left[\prod_{k=2}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_k)) \dots \dots \dots ; (\epsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_n)); 1 \right] \\ h(u, t) : \mathcal{U} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{R}_+^n : h(u, t) = \text{Max} |p(\hat{r}, (\tau, x, g)) \cdot \hat{x}_1(\tau) + b'(\hat{r}, (\tau, x, g)) \cdot u(\tau)| \end{aligned} \right.$$

$$\tau \in [t, +\infty[$$

$$(x, g, x_0) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{P}_x \times \mathcal{Y}$$

- Remarques sur le résultat proposé :

* La dispersion des trajectoires est d'autant plus petite que l'amplitude des variations de $a(t, x, g)$ autour de $a(t, \hat{x}, \hat{g})$ et de $b(t, x, g)$ autour de $b(t, \hat{x}, \hat{g})$ est petite.

* D'après (341, 6) plus les valeurs propres de la matrice de régime libre $(-a(t, x, g) \cdot v_1^t + H)((t, x, g) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P}))$ se situent à gauche de l'axe imaginaire, plus la majoration déterminée par la méthode et relative à la dispersion des trajectoires est petite.

3.4.2 Etude des systèmes décrits sous la forme L

De façon analogue, nous proposons de caractériser l'écart entre les trajectoires d'un processus d'équation :

$$\dot{x}(t) = (-v_1 \cdot a^t(t, x, g) + H^t)x(t) + v_1 \cdot u(t) \quad (342, 1)$$

et une trajectoire nominale solution d'un modèle linéaire :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (-v_1 \cdot \hat{a}^t + H^t)x(t) + v_1 \cdot u(t) \quad (342, 2)$$

$$x(t_0) = 0 \in \mathcal{Y}$$

Les démonstrations des propriétés établies dans cette section étant similaires à celles développées dans le volet précédent, nous nous limiterons à l'énoncé des résultats.

Dans cet esprit, la mise en oeuvre du lemme L2 permet d'établir la stabilité du régime libre des systèmes envisagés.

Lemme L2

Si le vecteur $a(t, x, g)$

définissant les paramètres de structure du processus :

$$\dot{x}(t) = (-v_1 \cdot a^t(t, x, g) + H^t) \cdot x(t) \quad (L2, 1)$$

évolue dans un domaine centré sur un vecteur constant \hat{a} ; $\hat{r} \in \mathcal{C}^n$, $(\hat{r}^t = [\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n])$ étant un vecteur spectral de $(-v_1 \cdot \hat{a}^t + H^t)$, si les contraintes suivantes sont satisfaites :

$$\exists \varepsilon < 0 \quad i) \quad \forall k=2, \dots, n, \quad \mathcal{R}(\hat{\lambda}_k) < \varepsilon$$

$$ii) \quad \forall (t, x, g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P}, \quad \prod_{i=1}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i)) + \mathcal{R}(p_1(\hat{r}, (t, x, g))) \prod_{i=2}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i)) -$$

$$\prod_{k=2}^{n-1} |p_k(\hat{r}, (t, x, g))| \cdot \prod_{i=k+1}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i)) - |p_n(\hat{r}, (t, x, g))| > 0$$

alors la fonction définie positive

$$\begin{cases} v(x(t)) = \text{Max} \left\{ |y_n(t)|, \text{Max}_{i=1 \dots n-1} \left\{ |y_i(t)| / \prod_{k=i+1}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_k)) \right\} \right\} \\ y(t) = P^t(\hat{r}) \cdot x(t) \end{cases}$$

satisfait à l'inégalité :

$$D^+(v(x(t))) < \varepsilon \cdot v(x(t))$$

et le point d'équilibre ($x = 0$) du système (L2,1) est globalement exponentiellement stable.

- Etude de la stabilité dynamique

L'écart entre les trajectoires du système soumis à des perturbations et la trajectoire nominale est précisé par :

$$d(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Un changement de base (211,4) de paramètres \hat{r} , vecteur spectral de $(-v_1 \cdot \hat{a}^t + H^t)$ permet de représenter son évolution par :

$$\begin{cases} e(t) = P^t(\hat{r}) \cdot d(t) \\ \dot{e}(t) = (-v_1 \cdot p^t(\hat{r}, (t, x, g)) + J^t(\hat{r})) e(t) \\ \quad + (v_1 \cdot p^t(\hat{r}, (t, x, g)) \cdot \hat{x}(t)) \end{cases} \quad (342,3)$$

Comme dans le cas précédent si le système linéaire (342,2) définissant la trajectoire nominale est asymptotiquement stable, on peut définir les quantités $\varphi(u, t)$, $\varphi(u)$, $\bar{\varphi}$

$$\begin{aligned} \varphi(u, t) : \mathcal{U} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}_+; \varphi(u, t) = \text{Max} (|p^t(\hat{r}, (\tau, x, g)) \cdot \hat{x}(\tau)|) \\ \begin{aligned} &x \in \mathcal{R}^n \\ &g \in \mathcal{P} \\ &x_0 \in \mathcal{Y} \\ &\tau \in [t, +\infty[\end{aligned} \end{aligned}$$

$$\varphi(u) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}_+; \varphi(u) = \text{Max}_{t \in \mathcal{C}} (\varphi(u, t))$$

$$\bar{\varphi} \in \mathcal{R}_+ \quad ; \quad \bar{\varphi} = \text{Max}_{u \in \mathcal{U}} (\varphi(u))$$

L'utilisation de la norme vectorielle q , nous permet de déduire une inégalité majorante caractérisant les évolutions de $e(t)$:

$$D^+(|e(t)|) \leq M(\hat{r}, (t, x, g)) \cdot |e(t)| + v_1 \cdot \varphi(u, t)$$

Alors, si $M(\hat{r}, (t, x, g))$ satisfait les hypothèses du Lemme \mathcal{L} , la fonction définie positive:

$$v(e) = \text{Max} \{ |e_n(t)|, \text{Max}_{i=1, \dots, n-1} |e_i(t)| \} \cdot \prod_{k=i+1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_k))$$

avec $\epsilon < 0$

$$\forall k = 2, \dots, n; \mathcal{R}(\lambda_k) < \epsilon$$

satisfait

$$D^+ v(e(t)) \leq \epsilon v(e(t)) + \varphi(u, t) / \prod_{k=2}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_k))$$

En conséquence, $e(t)$ reste borné au cours de son évolution et converge vers un domaine précisé par :

$$v(e(t)) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(u, t) / (\epsilon \cdot \prod_{k=2}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_k)))$$

Nous proposons de résumer ces résultats sous la forme du critère \mathcal{C}_2

Critère \mathcal{C}_2

Soit le processus monovariante défini par l'équation d'état (C2,1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-v_1 \cdot a^t(t, x, g) + H^t) \cdot x(t) + v_1 \cdot u(t) \\ s(t) = b^t(t, x, g) \cdot x(t) \end{cases} \quad (C2, 1)$$

S'il existe une valeur nominale constante \hat{a} de $a(t, x, g)$, \hat{r} étant un vecteur spectral de $(-v_1 \cdot \hat{a}^t + H^t)$ ($\hat{r}^t = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$), telle que \hat{a} et $a(t, x, g)$ satisfont aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \exists \epsilon < 0, \forall k \in [1, \dots, n] \quad \mathcal{R}(\lambda_k) < \epsilon \\ \forall (t, x, g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P} \quad : \prod_{i=1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_i)) + \mathcal{R}(p_1(\hat{r}, (t, x, g))) \cdot \prod_{i=2}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_i)) \\ - \sum_{k=2}^{n-1} |p_k(\hat{r}, (t, x, g))| \cdot \prod_{i=k+1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_i)) - |p_n(\hat{r}, (t, x, g))| \geq 0 \end{cases}$$

alors l'écart entre les trajectoires du système (C2,1) et la trajectoire nominale $\hat{x}(t)$ précisée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (-v_1 \cdot \hat{a}^t + H^t) \cdot \hat{x}(t) + v_1 \cdot u(t) \\ \hat{x}(t_0) = 0 \end{cases}$$

reste borné et converge vers un domaine défini par :

$$\begin{cases} e(t) = P^t(\hat{r}) \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) \\ \varphi(u, t) : \mathcal{U} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}^+; \quad \varphi(u, t) = \text{Max}_{\substack{(x, g, x_0) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{J} \\ \tau \in [t, +\infty[}} |p^t(\hat{r}, (\tau, x, g)) \cdot \hat{x}(\tau)| \\ v(e(t)) = \text{Max} \left\{ |e_n(t)|, \text{Max}_{i=1, \dots, n-1} \left\{ |e_i(t)| \prod_{k=i+1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_k)) \right\} \right\} \\ v(e(t)) < \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(u, t) / (\epsilon \cdot \prod_{k=2}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_k))) \end{cases}$$

3.4.3) Cas d'un point de fonctionnement à racines multiples

Dans le cadre des systèmes linéaires stationnaires la synthèse d'un asservissement se ramène généralement au calcul d'un réseau correcteur destiné à localiser les valeurs propres de la matrice du régime libre en boucle fermée le plus à gauche possible de l'axe imaginaire tout en limitant le module de leurs parties imaginaires. Le cas où toutes ces valeurs caractéristiques sont égales satisfait donc cet objectif.

Nous sommes ainsi amenés à particulariser les systèmes non-linéaires dont le fonctionnement nominal peut être caractérisé par un processus linéaire stationnaire à valeur propre multiple, ce qui, de plus, nous permet de simplifier la mise en oeuvre des critères précédemment établis.

Dans ce cas, la trajectoire $\hat{x}(t)$ d'un système décrit sous la forme C est définie par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (-\hat{a} \cdot v_1^t + H) \hat{x}(t) + \hat{b} \cdot u(t) \\ \hat{x}(t_0) &= 0 \end{aligned} \quad (343,1)$$

et les composantes du vecteur spectral \hat{r} de $(-\hat{a} \cdot v_1^t + H)$ sont toutes égales à une valeur constante $\hat{\lambda}$

La transformation de l'équation d'état :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (-a(t,x,g) \cdot v_1^t + H) \cdot x(t) + b(t,x,g) \cdot u(t) \quad (343,2)$$

par un changement de base de paramètre \hat{r} amène :

$$\begin{aligned} y(t) &= P^{-1}(\hat{r}) \cdot x(t) \\ \dot{y}(t) &= [-p(\hat{r},(t,x,g)) \cdot v_1^t + J(\hat{r})] \cdot y(t) + b'(\hat{r},(t,x,g)) \cdot u(t) \end{aligned}$$

Les vecteurs $p(\hat{r},(t,x,g)) \in \mathcal{R}^n$ et $b'(\hat{r},(t,x,g)) \in \mathcal{R}^n$ sont alors définis par [G, 3]:

$$\left\{ \begin{aligned} (p(r,(t,x,g)))_i &= \frac{1}{(n-i)!} : \frac{\partial^{n-i}}{\partial \lambda^{n-i}} (d(\lambda,(t,x,g))) \\ (b'(r,(t,x,g)))_i &= \frac{1}{(n-i)!} \frac{\partial^{n-i}}{\partial \lambda^{n-i}} (n(\lambda,(t,x,g))) \end{aligned} \right. \quad (343,3)$$

La transformation des équations d'état sous forme L s'opère d'une manière analogue.

Ces systèmes constituant un cas particulièrement intéressant de la classe de ceux que nous avons étudié précédemment, les résultats obtenus sont précisés dans les critères $\mathcal{C}3$ et $\mathcal{C}4$:

Critère $\mathcal{C}3$

Soit un processus monovariante décrit par une équation d'état du type (C3,1) ou (C3,2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-a(t,x,g) \cdot v_1^t + H) \cdot x(t) + b(t,x,g) \cdot u(t) \\ s(t) = v_1^t \cdot x(t) \end{cases} \quad (C3,1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-v_1 \cdot a^t(t,x,g) + H^t) x(t) + v_1 \cdot u(t) \\ s(t) = b^t(t,x,g) \cdot x(t) \end{cases} \quad (C3,2)$$

- s'il existe une valeur nominale constante \hat{a} de $a(t,x,g)$ telle que les composantes du vecteur spectral \hat{r} de $(-\hat{a} \cdot v_1^t + H)$ soient toutes égales à une valeur $\lambda \in \mathcal{R}$

- Si $a(t,x,g)$ et \hat{a} satisfont les conditions suivantes :

$\exists \epsilon < 0$ i) $\lambda < \epsilon$

ii) $\forall (t,x,g) \in \mathcal{C}_x \mathcal{R}^n \times \mathcal{P}$.

$$(\epsilon - \lambda)^n + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{\partial^{n-1} (d(\hat{r}, (t,x,g)))}{(\partial \lambda)^{n-1}} \cdot (\epsilon - \lambda)^{n-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{(n-k)!} \left| \frac{\partial^{n-k}}{(\partial \lambda)^{n-k}} (d(\hat{r}, (t,x,g))) \right| \cdot (\epsilon - \lambda)^{n-k} \geq 0$$

Alors le processus (C3,1), (C3,2) a les caractéristiques suivantes :

- le régime libre de ce système est globalement exponentiellement stable
- ce système possède la propriété de stabilité dynamique uniforme.

Dans ce cas très particulier où au cours des variations de $a(t,x,g)$ les valeurs propres de la matrice du régime libre restent confondues et varient autour d'une valeur nominale constante égale à λ , les conditions d'application de ce dernier critère prennent une forme simple :

Critère $\mathcal{C}4$

Soit un processus monovariante d'aquation d'état (C4,1) ou (C4,2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-a(t,x,g) \cdot v_1^t + H) \cdot x(t) + b(t,x,g) \cdot u(t) \\ s(t) = v_1^t \cdot x(t) \end{cases} \quad (C4,1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-v_1 \cdot a^t(t,x,g) + H^t) \cdot x(t) + v_1 \cdot u(t) \\ s(t) = b^t(t,x,g) \cdot x(t) \end{cases} \quad (C4,2)$$

- Si pour toute valeur de (t,x,g) dans $(\mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P})$, les valeurs propres de $(-a(t,x,g) \cdot v_1^t + H)$ sont toutes égales à une valeur $\lambda(t,x,g)$

- Si il existe une valeur nominale constante $\hat{\lambda}$ de $\lambda(t,x,g)$

- Si $\lambda(t,x,g)$ et $\hat{\lambda}$ satisfont aux conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon < 0, \quad \hat{\lambda} < \varepsilon \\ \forall (t,x,g) \in (\mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}), \quad 1 - \sqrt[n]{2} < \frac{\lambda(t,x,g) - \hat{\lambda}}{(\varepsilon - \hat{\lambda})} < x_n^+ \\ x_n^+ \text{ étant la racine de } 2(1 + n \cdot x) = (1 + x)^n \end{array} \right.$$

Alors le système défini par l'équation d'état (C4,1) ou (C4,2) a les propriétés suivantes :

- le régime libre de ce système est globalement exponentiellement stable
- ce système possède la propriété de stabilité dynamique uniforme.

3.5. Systèmes linéaires non stationnaires

La méthode d'étude des systèmes non linéaires que nous avons suivie conduit à une trajectoire nominale précisée par un modèle de référence. Le choix de ce dernier est essentiel dans la mise en oeuvre pratique des critères établis.

En conséquence, lorsque les variations de charge appliquées à un processus entraînent des changements importants des paramètres de structure, la comparaison de la dynamique de celui-ci avec celle d'un système linéaire à coefficients constants peut s'avérer trop contraignante.

Nous sommes ainsi amenés à envisager l'étude des modèles de référence non-stationnaires. Les conditions de stabilité de ces derniers étant moins connues, nous nous proposons tout d'abord de les rappeler.

3.5.1. Etude de stabilité dynamique asymptotique [M,1]

La classe des systèmes que nous étudions est caractérisée par :

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t) \cdot u(t) \quad (351,1)$$

avec - dans le cas de la forme C

$$A(t) = (-a(t) \cdot v_1^t + H)$$

$$a(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$b(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- et pour la forme L :

$$* A(t) = (-v_1 \cdot a^t(t) + H^t)$$

$$* b(t) = v_1$$

Etant donnée une entrée $u(t) \in \mathcal{U}$, l'évolution de l'écart entre deux trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ ($x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$) solutions de l'équation d'état (351,1) est régie par le système :

$$\begin{cases} \dot{d}(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{d}(t) = A(t) \cdot d(t) \end{cases} \quad (351,2)$$

Cette dernière égalité ramène l'étude de stabilité dynamique asymptotique des processus étudiés à celle de leur stabilité asymptotique en régime libre.

3.5.1.1. Systèmes décrits sous la forme C

Le régime libre du processus est caractérisé par :

$$\dot{x}(t) = (-a(t) \cdot v_1^t + H) \cdot x(t) \quad (3511,1)$$

On note $r(t)$ (e^{-at}) un vecteur spectral instantané de $(-a(t) \cdot v_1^t + H)$ ($r^t(t) = [\lambda_1(t) \dots \lambda_n(t)]$)

On supposera dans la suite $r(t)$ dérivable.

Le changement de variable (211,4) :

$$y(t) = P^{-1}(r(t)) \cdot x(t)$$

conduit à la relation :

$$\dot{y}(t) = \left[J(r(t)) + \frac{d}{dt} (P^{-1}(r(t))) \cdot P(r(t)) \right] \cdot y(t) \quad (3511,2)$$

où l'expression de

$$\frac{d}{dt} (P^{-1}(r(t))) \cdot P(r(t)) = \{\Pi_{ij}\}$$

est précisée par (cf annexe 3)

$$\Pi_{ij} : \begin{cases} i \leq j & \Pi_{ij} = 0 \\ i = j+1 & \Pi_{i+1,i} = \sum_{k=i+1}^n \lambda_k \\ i > j+1 & \Pi_{i,j} = \sum_{k=i}^n \lambda_k \prod_{e=j+1}^{i-1} (\lambda_k - \lambda_e) \end{cases} \quad (3511,3)$$

L'utilisation de la norme vectorielle q permet d'établir l'inégalité :

$$\begin{cases} D+(|y(t)|) \leq (J(\mathcal{R}(r(t))) + \left| \frac{d}{dt} \{ P^{-1}(r(t)) \} \cdot P(r(t)) \right|) \cdot |y(t)| \\ \mathcal{R}(r(t)) \in \mathcal{R}^n, \mathcal{R}^t(r(t)) = [\mathcal{R}(\lambda_1(t)), \dots, \mathcal{R}(\lambda_n(t))] \end{cases} \quad (3511,4)$$

L'application du Lemme 2 à la matrice $J^t(\mathcal{R}(r(t)))$ a pour corollaire la propriété suivante :

S'il existe $\epsilon < 0$ et $\alpha > 1$, $\forall t \in \mathcal{C}$, $\forall i \in [1, \dots, n]$, $\mathcal{R}(\lambda_i(t)) < \epsilon \cdot \alpha$ alors le vecteur $u(\epsilon, r(t))$:

$$u^t(\epsilon, r(t)) = \left[\prod_{k=2}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_k(t))) ; \dots ; \prod_{k=i+1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_k(t))) ; \dots ; 1 \right] \quad (3511,5)$$

à ses composantes toutes strictement positives

Considérons la fonction définie positive $v(x, t)$:

$$\begin{cases} v(x, t) = u^t(\epsilon, r(t)) \cdot |y(t)| \\ y(t) = P^{-1}(r(t)) \cdot x(t) \end{cases} \quad (3511,6)$$

Alors, par définition de $u(\epsilon, r(t))$ et de $J(\mathcal{R}(r(t)))$, il vient :

$$D^+(v(x, t)) \leq u^t(\epsilon, r(t)) (\epsilon I + |P^{-1}(r(t)) \cdot P(r(t))|) \cdot |y(t)| + \hat{u}^t(\epsilon, r(t)) \cdot |y(t)| \quad (3511;7)$$

or $\hat{u}(\epsilon, r(t))$ s'exprime simplement en fonction de $u(\epsilon, r(t))$ par

$$\hat{u}^t(\epsilon, r(t)) = u^t(\epsilon, r(t)) \cdot D(\epsilon, r(t), \hat{r}(t))$$

$$\text{avec } D(\epsilon, r(t), \hat{r}(t)) = \text{Diag} \left\{ \prod_{k=i+1}^n \frac{d/dt(\mathcal{R}(\lambda_k))}{(\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_k))} \right\} \quad (3511,8)$$

en conséquence, il vient

$$D^+ v(x, t) \leq u^t(\epsilon, r(t)) \cdot \left[\epsilon I + |P^{-1}(r(t)) \cdot P(r(t))| + D(\epsilon, r(t), \hat{r}(t)) \right] \cdot |y(t)|$$

Alors si, quelque soit $t \in \mathcal{C}$, la somme des éléments de toute colonne de $\left[\epsilon I + \text{Diag}(u(\epsilon, r(t))) \cdot \left| \frac{d}{dt}(P^{-1}(r(t))) \cdot P(r(t)) \right| + \text{Diag}(u(\epsilon, r(t))) + D(\epsilon, r(t), \hat{r}(t)) \right]$ est inférieure à un nombre η négatif, la stabilité asymptotique du système initial (3511,1) est assurée et la fonction $v(x, t)$ satisfait à l'inégalité :

$$D^+(v(x, t)) \leq \eta \cdot v(x, t)$$

Les formules précédentes (3511,8) et (3511,3) nous permettent d'exprimer cette dernière contrainte sous forme littérale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \epsilon < 0, \exists \alpha > 1, \forall i = 1, \dots, n, \exists \lambda_i \in \mathcal{C} \\ \text{i) } \forall k=1, \dots, n, \mathcal{R}(\lambda_k) \leq \mathcal{R}(\lambda_k(t)) \leq \epsilon \cdot \alpha \\ \text{ii) } K_{n-1}(\epsilon, r(t), \hat{r}(t)) \triangleq \frac{-d/dt(\mathcal{R}(\lambda_n)) + |\lambda_n|}{(\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_n))} \end{array} \right.$$

$i = 1 \dots \dots n-2 :$

$$K_i(\epsilon, r(t), \hat{p}(t)) \triangleq - \sum_{j=i+1}^n \frac{d/dt(\mathcal{R}(\lambda_j))}{\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_j)} + \frac{\left| \sum_{k=i+1}^n \lambda_k \right|}{(\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_{i+1}))} +$$

$$\sum_{j=i+2}^n \left(\frac{1}{j} \prod_{e=i+1}^j (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_e)) \times \left| \sum_{k=j}^n \lambda_k \prod_{e=i+1}^{j-1} (\lambda_k - \lambda_e) \right| \right)$$

$\forall i=1 \dots \dots n-1, K_{n-i}(\epsilon, r(t), \hat{p}(t)) < \eta - \epsilon \quad (3511,9)$

Remarques :

* Cette dernière condition définit une limite supérieure sur la vitesse d'évolution du spectre de $(-a(t) \cdot v_1^t + H)$, c'est à dire sur les variations de $a(t)$.

* On peut remarquer que la contrainte (i) : $\forall i=1, \dots, n, \exists \epsilon' < 0, \mathcal{R}(\lambda_i(t)) < \epsilon'$ peut s'exprimer par la condition : $\forall t_1 \in \mathcal{C}$, le système d'équation $\{\dot{x} = (-a(t_1) \cdot v_1^t + H)x\}$ est exponentiellement stable.

Nous proposons le rappel de ces résultats sous la forme du critère d'application pratique :

Critère \mathcal{C}_5

Soit le processus défini par une équation d'état (C5,1) :

$$\dot{x}(t) = (-a(t) \cdot v_1^t + H) \cdot x(t) + b(t) \cdot u(t), \quad (C5,1)$$

$r(t)$ étant à chaque instant un vecteur spectral de $(-a(t) \cdot v_1^t + H)$

$$r^t(t) = [\lambda_1(t) \dots \dots \dots \lambda_n(t)]$$

Si $a(t)$ et $\hat{a}(t)$ satisfont aux conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \epsilon < 0 ; \exists \alpha > 1 ; \quad \exists \underline{r} \in \mathcal{C}^n ; \underline{r} = [\underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_n] \\ i) \forall k=1 \dots n, \mathcal{R}(\underline{\lambda}_k) \leq \mathcal{R}(\lambda_k(t)) \leq \epsilon \cdot \alpha \\ ii) K_{n-1}(\epsilon, r(t), \hat{p}(t)) \triangleq \frac{-d/dt(\mathcal{R}(\lambda_n)) + |\underline{r}_n|}{(\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_n))} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned}
 & i = 1, \dots, n-2 \\
 & k_i(\varepsilon, r(t), \beta(t)) = - \sum_{j=i+1}^n \frac{d/dt(\mathcal{R}(\lambda_j))}{(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_j))} + \frac{\left| \sum_{k=i+1}^n \rho_k \right|}{(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_{i+1}))} \\
 & \quad + \sum_{j=i+2}^n \frac{1}{\prod_{e=i+1}^j (\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_e))} \cdot \left| \sum_{k=j}^n \rho_k \prod_{e=i+1}^{j-1} (\lambda_k - \lambda_e) \right| \\
 & \forall i = 1, \dots, n-1, K_{n-i}(\varepsilon, r(t), \beta(t)) < n - \varepsilon
 \end{aligned} \right\}$$

Alors la fonction $v(x, t)$ définie par :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & v(x, t) = u^t(\varepsilon, r(t)) \cdot |y(t)| \\
 & y(t) = P^{-1}(r(t)) \cdot x(t) \\
 & u^t(\varepsilon, r(t)) = \left[\prod_{i=2}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_i(t))) ; \dots ; \varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_n(t)) ; 1 \right]
 \end{aligned} \right.$$

vérifie l'inégalité différentielle :

$$D^+ v(x, t) \leq \eta v(x, t)$$

et le système (C5, 1) est asymptotiquement stable au sens de la stabilité dynamique.

Exemple :

Considérons le système d'ordre 4 défini par :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1(t) & 1 & 0 & 0 \\ -a_2(t) & 0 & 1 & 0 \\ -a_3(t) & 0 & 0 & 1 \\ -a_4(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) \quad (3511, 11)$$

Soit $r(t)$; $r^t(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t)]$ un vecteur spectral de $(-a(t) \cdot v_1^t + H)$

$P^{-1}(r(t))$ et $P(r(t))$ étant précisés (211, 4 ; 211, 5), l'expression de

$\frac{d}{dt} \{ P^{-1}(r(t)) \} \cdot P(r(t))$ est dans ce cas :

$$\frac{d}{dt} \{ P^{-1}(r(t)) \} \cdot P(r(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_3 + \dot{\lambda}_4 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{\lambda}_3(\lambda_3 - \lambda_2) + \dot{\lambda}_4(\lambda_4 - \lambda_2) & \dot{\lambda}_3 + \dot{\lambda}_4 & 0 & 0 \\ \dot{\lambda}_4(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2) & \dot{\lambda}_4(\lambda_4 - \lambda_3) & \dot{\lambda}_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3511, 12)$$

De même :

$$u(\varepsilon, r(t)) = \begin{bmatrix} (\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_2))(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_3))(-\mathcal{R}(\lambda_4)) \\ (\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_3))(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_4)) \\ (\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_4)) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3511, 13)$$

Le critère \mathcal{C}_5 conduit aux conditions :

$$\exists \varepsilon < 0, \exists \alpha > 1, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathcal{C}^4$$

$$i) \forall t \in \mathcal{C}, \forall i = 1, 2, 3, 4, \mathcal{R}(\lambda_i) \leq \mathcal{R}(\lambda_i(t)) \leq \varepsilon \cdot \alpha$$

$$ii) \exists \eta, \varepsilon < \eta < 0$$

$$\star \frac{-d/dt(\mathcal{R}(\lambda_4)) + |\dot{\lambda}_4|}{(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_4))} < \eta - \varepsilon$$

$$\star - \frac{d/dt(\mathcal{R}(\lambda_3))}{\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_3)} - \frac{d/dt(\mathcal{R}(\lambda_4))}{\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_4)} + \frac{|\dot{\lambda}_4 + \dot{\lambda}_3|}{\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_3)} + \frac{|\dot{\lambda}_4(\lambda_4 - \lambda_3)|}{(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_3))(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_4))} < \eta - \varepsilon$$

$$\star - \frac{d/dt(\mathcal{R}(\lambda_2))}{\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_2)} - \frac{d/dt(\mathcal{R}(\lambda_3))}{\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_3)} - \frac{d/dt(\mathcal{R}(\lambda_4))}{\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_4)} + \frac{|\dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_3 + \dot{\lambda}_4|}{(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_2))}$$

$$+ \frac{|\dot{\lambda}_3(\lambda_3 - \lambda_2) + \dot{\lambda}_4(\lambda_4 - \lambda_2)|}{(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_2))(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_3))} + \frac{|\dot{\lambda}_4(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)|}{(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_2))(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_3))(\varepsilon - \mathcal{R}(\lambda_4))} < \eta - \varepsilon$$

Si ces contraintes sont vérifiées, le processus non stationnaire (3511, 11) est asymptotiquement stable.

3.5.1.2. Systèmes linéaires non stationnaires sous forme L

Le régime autonome des processus envisagés est maintenant décrit par :

$$\dot{x}(t) = (-v_1 \cdot a^t(t) + H^t) \cdot x(t) \quad (3512,1)$$

ou de manière équivalente après changement de variable par :

$$\begin{aligned} y(t) &= P^t(r(t)) \cdot x(t) \\ \dot{y}(t) &= [J^t(r(t)) - \left[\frac{d}{dt} (P^{-1}(r(t))) \cdot P(r(t)) \right]^t] \cdot y(t) \end{aligned} \quad (3512,2)$$

L'étude de la stabilité de ces systèmes est abordée de la même manière que celle de la forme duale (3511,1), aussi nous n'explicitons que les points de démonstrations distincts de ceux du volet précédent .

Si $r(t)$ satisfait la condition :

$$\exists \epsilon < 0, \exists \alpha > 1, \forall i=1, \dots, n, \forall t \in \mathcal{T}, \exists \lambda_i \in \mathcal{E}, \mathcal{R}(\lambda_i) < \mathcal{R}(\lambda_i(t)) \leq \epsilon \alpha$$

alors les composantes du vecteur $u(\epsilon, r(t))$ (3511,5) sont toutes strictement positives et bornées.

Dans ce cas, $z(t) = (\text{Diag}(u(\epsilon, r(t))))^{-1} \cdot |P^t(r(t)) \cdot x(t)|$ est une norme vectorielle de taille n de $x(t)$ qui satisfait l'inégalité :

$$D^+(z(t)) \leq \left[\epsilon I + \text{Diag}^{-1}(u(\epsilon, r(t))) \cdot |P^{-1}(r(t)) \cdot \dot{P}(r(t))|^t \cdot \text{Diag}(u(\epsilon, r(t))) - D(\epsilon, r(t), \dot{r}(t)) \right] z(t) \quad (3512,3)$$

Dans ces conditions, s'il existe une valeur $\eta < 0$, telle que, quelque soit t , la somme des éléments de toute ligne de la matrice pseudo-majorante définie précédemment (3512,3) soit inférieure à η , alors la fonction définie positive :

$$v(x, t) = \text{Max} \left[|y_n(t)|, \text{Max}_{i=1, \dots, n-1} \left\{ |y_i(t)| / \prod_{k=i+1}^n (\epsilon - \mathcal{R}(\lambda_k)) \right\} \right]$$

vérifie l'inégalité :

$$D^+ v(x, t) \leq \eta \cdot v(x, t)$$

Nous proposons maintenant de particulariser l'étude précédente aux systèmes pour lesquels les composantes de $r(t)$ sont égales.

3.5.1.3. Cas particulier

Lorsqu'à chaque instant, le spectre de la matrice $(-a(t).v_1 + H)$ est réduit à un point, $r(t)$ prend la forme :

$$r^t(t) = \left[\lambda(t), \lambda(t) \dots \dots \dots \lambda(t) \right]$$

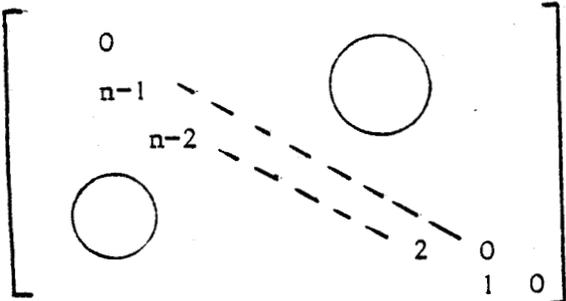
Il en résulte une simplification des notations utilisées dans la partie précédente.

En effet :

$$u^t(\epsilon, r(t)) = \left[(\epsilon - \lambda(t))^{n-1}, \dots, (\epsilon - \lambda(t))^{n-i}, \dots, (\epsilon - \lambda(t)), 1 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \{ P^{-1}(r(t)) \} \cdot P(r(t)) = \dot{\lambda}(t) \cdot S_n$$

$$\frac{d}{dt} (u^t(\epsilon, r(t))) = - \dot{\lambda}(t) \cdot u^t(\epsilon, r(t)) \cdot S_n$$

avec $S_n =$ 

Les énoncés des critères \mathcal{L}_5 et \mathcal{L}_6 sont alors simplifiés. On obtient ainsi respectivement \mathcal{L}_7 et \mathcal{L}_8 .

Critère \mathcal{L}_7

Etant donné un processus dont l'équation d'état (C7,1) est telle qu'à chaque instant les composantes du vecteur spectral $r(t)$ de $(-a(t).v_1^t + H)$ sont toutes égales à $\lambda(t)$,

$$\dot{x}(t) = (-a(t) \cdot v_1^t + H) \cdot x(t) \tag{C7,1}$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \exists \varepsilon < 0, \exists \alpha > 1, \exists \underline{\lambda} \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathcal{C}, \underline{\lambda} \leq \lambda(t) < \varepsilon \alpha \\ ii) \exists \eta, \varepsilon < \eta < 0, \forall t \in \mathcal{C}, |\mathcal{R}(t)| - \mathcal{R}(t) \leq \frac{(\eta - \varepsilon) (\varepsilon - \lambda(t))}{(n-1)} \end{array} \right.$$

alors le point d'équilibre ($x = 0$) de (C5,1) est globalement asymptotiquement stable et la fonction $v(x, t)$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x, t) = \sum_{k=1}^n (\varepsilon - \lambda(t))^{n-i} \cdot |y_i(t)| \\ y(t) = P^{-1}(r(t)) \cdot x(t) \end{array} \right.$$

satisfait à l'inégalité :

$$D^+(v(x, t)) \leq \eta \cdot v(x, t).$$

Critère C 8

Etant donné un processus dont l'équation d'état (C8,1) est telle qu'à chaque instant les composantes du vecteur spectral $r(t)$ de $(-v_1 \cdot a^t(t) + H^t)$ sont toutes égales à $\lambda(t)$

$$\mathcal{E}(t) = (-v_1 \cdot a^t(t) + H^t) \cdot x(t) \quad (C8,1)$$

Lorsque sont vérifiées les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \exists \varepsilon < 0, \exists \alpha < 1, \exists \underline{\lambda} \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathcal{C}, \underline{\lambda} \leq \lambda(t) < \varepsilon \cdot \alpha \\ ii) \exists \eta, \varepsilon < \eta < 0, \forall t \in \mathcal{C}, |\mathcal{R}(t)| + \mathcal{R}(t) \leq \frac{(\eta - \varepsilon) (\varepsilon - \lambda(t))}{(n-1)} \end{array} \right.$$

Le point d'équilibre ($x=0$) de (C8,1) est globalement asymptotiquement stable et la fonction $v(x, t)$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x, t) = \text{Max}_{i=1 \dots n} |y_i(t)| / (\varepsilon - \lambda(t))^{n-i} \\ y(t) = P^t(r(t)) \cdot x(t) \end{array} \right.$$

satisfait à :

$$D^+(v(x, t)) \leq \eta \cdot v(x, t)$$

Ces résultats sont applicables aux processus pour lesquels aussi bien la charge que la relation entre cette dernière et les paramètres de structure sont parfaitement déterminées.

Les critères établis permettent de gérer les variations de charge de manière à conserver des propriétés de stabilités désirées.

3.6. Systèmes non-linéaires dont un fonctionnement nominal est défini par un système de la classe précédente.

D'une manière générale, la relation entre les paramètres de structure d'un processus et sa charge est imparfaitement connue ; de même, la mesure de cette dernière est souvent entachée d'erreur. L'étude précédente permet néanmoins de préciser le comportement nominal de ces systèmes.

Ainsi, la trajectoire nominale des systèmes (36,1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}(t) = (-a(t,x,g) \cdot v_1^t + H) \cdot \hat{x}(t) + b(t,x,g) \cdot u(t) \\ s(t) = v_1^t \cdot \hat{x}(t) \\ \hat{x}(t_0) = x_0 \in \mathcal{Y} \end{array} \right. \quad (36,1)$$

peut-être approchée par celle du processus : (36,2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}(t) = (-\hat{a}(t) \cdot v_1^t + H) \cdot \hat{x}(t) + \hat{b}(t) \cdot u(t) \\ \hat{s}(t) = v_1^t \cdot \hat{x}(t) \\ \hat{x}(t_0) = 0 \in \mathcal{Y} \end{array} \right. \quad (36,2)$$

Par une démarche analogue à celle suivie dans le cas où $\hat{a}(t)$ est constant, on peut montrer que si le régime libre du processus (36,2) satisfait les conditions d'application du critère 5, pour une entrée bornée $u(t) \in \mathcal{U}$, $\hat{x}(t)$ reste bornée au cours de son évolution.

3.6.1. Etude de stabilité dynamique

L'écart entre $x(t)$ et la trajectoire nominale $\hat{x}(t)$ peut être caractérisé après un changement de variable défini par $\hat{f}(t)$

($\hat{f}(t)$: vecteur spectral de $(-\hat{a}(t) \cdot v_1^t + H)$)

Il vient :

$$e(t) = P^{-1}(\hat{f}(t)) \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) \quad (361,1)$$

$e(t)$ satisfaisant l'égalité différentielle :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \left[\frac{d}{dt} (P^{-1}(\hat{f}(t))) \cdot P(\hat{f}(t)) \right] e(t) \\ & + \left[-p(\hat{f}(t), (t,x,g)) \cdot v_1^t + J(\hat{f}(t)) \right] e(t) \\ & + \left[p(\hat{f}(t), (t,x,g)) \right] \cdot \hat{x}_1(t) \\ & + \left[-b'(\hat{f}(t)) + b'(\hat{f}(t), (t,x,g)) \right] \cdot u(t) \end{aligned} \quad (361,2)$$

Par un raisonnement similaire à celui du critère \mathcal{C}_5 , pour une entrée $u(t) \in \mathcal{U}$ bornée, $\hat{x}_1(t)$ est borné au cours de son évolution.

Nous pouvons ainsi définir $h(u, t)$ et $h(u)$ par

$$h(u, t) : (\mathcal{U} \times \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{R}^+$$

$$h(u, t) = \text{Max} \left\{ p(\hat{f}(\tau), (\tau, x, g)) \cdot \hat{x}_1(\tau) + (b'(\hat{f}(\tau), (\tau, x, g)) - b'(\hat{f}(\tau))) \cdot u(\tau) \right.$$

$$(x, g, x_0) \in (\mathcal{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Y})$$

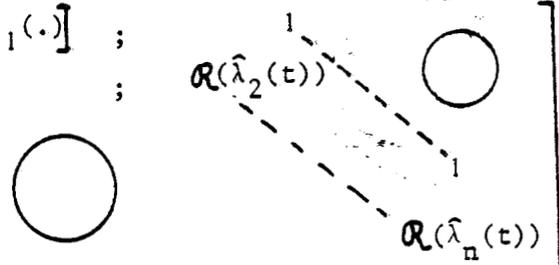
$$\tau \in [t, +\infty[$$

$$h(u) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}^+, h(u) = \text{Max}_{t \in \mathcal{E}} h(u, t)$$

L'utilisation de la norme vectorielle $|\cdot|$ nous conduit à l'inégalité majorante :

$$D^+(|e(t)|) \leq (M(\hat{f}(t), (t, x, g)) + \left| \frac{d}{dt} \right\{ P^{-1}(\hat{f}(t)) \} \cdot P(\hat{f}(t)) | \cdot |e(t)| + h(u, t) \quad (361, 4)$$

avec :

$$M(\hat{f}(t), (t, x, g)) = \left[\begin{array}{l} \mathcal{R}(\hat{\lambda}_1(t)) - p_1(\cdot) \\ |p_2(\cdot)| \\ \vdots \\ |p_n(\cdot)| \end{array} \right] ; \quad \left[\begin{array}{l} \mathcal{R}(\hat{\lambda}_2(t)) \\ \vdots \\ \mathcal{R}(\hat{\lambda}_n(t)) \end{array} \right] \quad (361, 5)$$


Comme on l'a vu précédemment (34) $M^E(\hat{f}(t), (t, x, g))$ satisfait à chaque instant les hypothèses du Lemme \mathcal{L} , lorsqu'on vérifie la condition :

$$\forall t \in \mathcal{E}$$

$$\exists \alpha > 1$$

$$i) \exists \varepsilon < 0, \forall i = 2, \dots, n, \exists \underline{\lambda}_i \in \mathcal{E}, \mathcal{R}(\underline{\lambda}_i) < \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i(t)) < \varepsilon \alpha$$

$$ii) \forall (t, x, g) \in (\mathcal{E} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P})$$

$$\prod_{i=1}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i(t))) + \mathcal{R}(p_1(\hat{f}(t), (t, x, g))) \cdot \prod_{i=2}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i(t)))$$

$$- \sum_{k=2}^{n-1} |p_k(\hat{f}(t), (t, x, g))| \cdot \prod_{i=k+1}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i(t))) - |p_n(\hat{f}(t), (t, x, g))| > 0 \quad (361, 6)$$

La fonction définie positive $v(x, t)$ précisée par :

$$\begin{cases} v(x,t) = u^t(\varepsilon, \hat{r}(t)) \cdot |y(t)| \\ y(t) = P^{-1}(r(t)) \cdot x(t) \\ u(\varepsilon, \hat{r}(t)) : u_i(\varepsilon, \hat{r}(t)) = \prod_{k=i+1}^n (\varepsilon - \hat{\lambda}_k(t)) \end{cases} \quad (361,7)$$

satisfait à :

$$D^+(v(x,t)) \leq u^t(\varepsilon, \hat{r}(t)) \cdot (\varepsilon I + |P^{-1}(\hat{r}(t)) \cdot P(r(t))|) \cdot |y(t)| + \hat{u}^t(\varepsilon, \hat{r}(t)) \cdot |y(t)| + u^t(\varepsilon, r(t)) \cdot h(u) \quad (361,8)$$

L'équation (361,6) est identique à la relation (3511,8) lorsque $h(u)$ est nul.

On peut en conclure :

- si la condition (3611,5) est vérifiée
- et si le système (36,2) définissant le comportement nominal satisfait aux hypothèses du critère \mathcal{C}_5

que :

$$\exists \eta < 0, \quad D^+v(x,t) \leq \eta \cdot v(x,t) + u^t(\varepsilon, \hat{r}(t)) \cdot h(u,t) \quad (361,6)$$

Le système (36,1) possède la propriété de stabilité dynamique uniforme.

Nous proposons de résumer ce dernier résultat par le critère \mathcal{C}_9 .

Critère \mathcal{C}_9

Soit un processus monovariante défini par l'équation d'état (C9,1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-a(t,x,g) \cdot v_1^t + H) \cdot x(t) + b(t,x,g) \cdot u(t) \\ s(t) = v_1^t \cdot x(t) \end{cases} \quad (C9,1)$$

- S'il existe pour tout $t \in \mathcal{C}$, une valeur nominale $\hat{a}(t)$ de $a(t,x,g)$ et une valeur nominale $\hat{b}(t)$ de $b(t,x,g)$

- $\hat{r}(t) = [\hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t), \dots, \hat{\lambda}_n(t)]^t$ étant un vecteur spectral de $[-\hat{a}(t) \cdot v_1^t + H]$

Si $\hat{a}(t)$ et $a(t,x,g)$ satisfont les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} i) \exists \alpha > 1, \exists \varepsilon < 0, \forall i = 1, \dots, n, \forall t \in \mathcal{C}, \exists \hat{\lambda}_i \in \mathcal{C}; \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i) < \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i(t)) < \varepsilon \alpha \\ ii) \quad \forall (t,x,g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P} \end{cases}$$

$$\left\{ \prod_{i=1}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i(t))) + \mathcal{R}(p_1(\hat{r}(t), (t, x, g))) \cdot \prod_{i=2}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i(t))) - \frac{n-1}{k=2} |p_k(\hat{r}(t), (t, x, g))| \cdot \prod_{i=k+1}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i(t))) - |p_n(\hat{r}(t), (t, x, g))| > 0 \right.$$

iii) Le système nominal d'équation d'état (C9, 2)

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (-\hat{a}(t) \cdot v_1^t + H) \cdot \hat{x}(t) + \hat{b}(t) \cdot u(t) \\ \hat{x}(t_0) = 0 \end{cases} \quad (C9, 2)$$

satisfait les hypothèses du critère C5.

Alors quelque soit $u(t) \in \mathcal{U}$, on peut définir $h(u, t) \in \mathcal{R}_+$

$$h(u, t) = \text{Max} |p(\hat{r}(\tau), (\tau, x, g)) \cdot \hat{x}_1(\tau) + (b'(\hat{r}(\tau), (\tau, x, g)) - b'(\hat{r}(\tau))) \cdot u(\tau)|$$

$(x, g, x_0) \in (\mathcal{R}^n \times \mathcal{R} \times \mathcal{R})$
 $\tau \in [t, +\infty[$

et la fonction définie positive $v(x, t)$

$$v(x, t) = u^t(\varepsilon, \hat{r}(t)) \cdot |P^{-1}(\hat{r}(t)) \cdot x(t)|$$

satisfait

$$D^+(v(x, t)) < \eta \cdot v(x, t) + u^t(\varepsilon, \hat{r}(t)) \cdot h(u, t)$$

et la système (C9, 1) possède la propriété de stabilité dynamique uniforme.

L'étude des systèmes auxquels on associe un modèle de type L peut être conduite de la même manière que précédemment.

Nous proposons donc de n'en donner que le résultat en énonçant le critère pratique C10. De même dans le cas où on peut définir pour les processus précédents un modèle nominal d'évolution présentant la particularité d'avoir ses valeurs caractéristiques toutes égales, une simplification des notations permet de déduire des résultats précédents les critères d'application simple C11 et C12.

Critère C10

Soit un processus monovariante défini par l'équation d'état (C10, 1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [-v_1 \cdot a^t(t, x, g) + H^t] \cdot x(t) + v_1 \cdot u(t) \\ s(t) = b^t(t, x, g) \cdot x(t) \end{cases} \quad (C10, 1)$$

S'il existe une valeur nominale $\hat{a}(t)$ de $a(t, x, g)$ quel que soit $t \in \mathcal{C}$;

$\hat{r}(t) = [\hat{\lambda}_1(t), \dots, \hat{\lambda}_n(t)]^t$ étant un vecteur spectral de $[-v_1 \cdot \hat{a}^t(t) + H^t]$, si $\hat{a}(t)$ et $a(t, x, g)$ satisfont les hypothèses suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 & \exists \varepsilon < 0 \\
 & \exists \alpha > 1 \\
 & i) \forall i=1, \dots, n, \forall t \in \mathcal{C}, \exists \underline{\lambda}_i \in \mathcal{C}, \mathcal{R}(\underline{\lambda}_i) \leq \mathcal{R}(\underline{\lambda}_i(t)) < \varepsilon \alpha \\
 & ii) \forall (t, x, g) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{G}) \\
 & \prod_{i=1}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\underline{\lambda}_i(t))) + \mathcal{R}(p_1(\hat{p}(t), (t, x, g))) \cdot \prod_{i=2}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\underline{\lambda}_i(t))) \\
 & - \sum_{k=2}^{n-1} |p_k(\hat{p}(t), (t, x, g))| \cdot \prod_{i=k+1}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\underline{\lambda}_i(t))) - |p_n(\hat{p}(t), (t, x, g))| > 0 \\
 & iii) \text{ Le système nominal défini par l'équation d'état (C10, 2) :} \\
 & \dot{\hat{x}}(t) = (-v_1 \cdot \hat{a}^t(t) + H^t) \cdot \hat{x}(t) + v_1 \cdot u(t) \quad \text{(C10, 2)} \\
 & \text{satisfait aux hypothèses du critère } \mathcal{C} 6
 \end{aligned} \right\}$$

Alors quelque soit $u(t) \in \mathcal{U}$, on peut définir :

$$\begin{aligned}
 \varphi(u, t) &: (\mathcal{U} \times \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{R}_+ \\
 \varphi(u, t) &= \text{Max}_{\substack{(x, g, x_0) \in (\mathcal{R}^n \times \mathcal{G} \times \mathcal{X}) \\ \tau \in [t, +\infty[}} |p^t(\hat{p}(\tau), (\tau, x, g)) \cdot \hat{x}(\tau)|
 \end{aligned}$$

et la fonction définie positive $v(x, t)$

$$\begin{cases}
 v(x, t) = \text{Max}(|y_n(t)|, \text{Max}_{i=1, \dots, n-1} (|y_i(t)| / \prod_{i=k+1}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\underline{\lambda}_i)))) \\
 y(t) = P^t(r(t)) \cdot x(t)
 \end{cases}$$

satisfait :

$$D^+(v(x, t)) < \eta \cdot v(x, t) + \varphi(u, t) / \left(\prod_{e=2}^n (\varepsilon - \mathcal{R}(\underline{\lambda}_e)) \right)$$

et la système (C10, 1) possède la propriété de stabilité dynamique uniforme.

Critère C11

Soit un processus monovariante décrit par une équation d'état du type (C11, 1) (respectivement (C11, 2))

$$\begin{cases}
 \dot{\hat{x}}(t) = (-a(t, x, g) \cdot v_1^t + H) \cdot \hat{x}(t) + b(t, x, g) \cdot u(t) \\
 s(t) = v_1^t \cdot \hat{x}(t)
 \end{cases} \quad \text{(C11, 1)}$$

$$\begin{cases}
 \dot{\hat{x}}(t) = (-v_1 \cdot a^t(t, x, g) + H^t) \hat{x}(t) + v_1 \cdot u(t) \\
 s(t) = b^t(t, x, g) \cdot \hat{x}(t)
 \end{cases} \quad \text{(C11, 2)}$$

S'il existe à chaque instant une valeur constante nominale $\hat{a}(t)$ de $a(t, x, g)$ telle que les composantes du vecteur spectral $\hat{r}(t)$ de $(-\hat{a}(t) \cdot v_1^t + H)$ soient toutes égales à une valeur $\hat{\lambda}(t) \in \mathbb{R}$

Si $a(t, x, g)$ et $\hat{a}(t)$ satisfont les conditions suivantes

$$\exists \varepsilon < 0 \quad i) \exists \alpha > 1, \exists \underline{\lambda} \in \mathbb{R}, \quad \underline{\lambda} < \lambda(t) < \alpha \varepsilon$$

$$ii) \forall (t, x, g) \in (\mathcal{L} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{G})$$

$$(\varepsilon - \hat{\lambda}(t))^n + \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{(\partial \hat{\lambda}(t))^{n-1}} (d(\hat{r}(t), (t, x, g))) \cdot (\varepsilon - \hat{\lambda}(t))^{n-1} \\ - \sum_{k=2}^n \frac{1}{(n-k)!} \frac{\partial^{n-k}}{(\partial \hat{\lambda}(t))^{n-k}} (d(\hat{r}(t), (t, x, g))) \cdot (\varepsilon - \hat{\lambda}(t))^{n-k} > 0$$

Si de plus $\hat{\lambda}(t)$ satisfait la condition (C11,4) (respectivement C11,5)

$$\exists \eta, \varepsilon < \eta < 0; \quad |\hat{\lambda}(t)| - \hat{\lambda}(t) < \frac{(\eta - \varepsilon) (\varepsilon - \hat{\lambda}(t))}{(n-1)} \quad (C11,4)$$

$$\exists \eta, \varepsilon < \eta < 0; \quad |\hat{\lambda}(t)| + \hat{\lambda}(t) < \frac{(\eta - \varepsilon) (\varepsilon - \hat{\lambda}(t))}{(n-1)} \quad (C11,5)$$

Alors - Le régime libre du système (C11,1) (respectivement (C11,2)) est globalement asymptotiquement stable.

- Le système (C11,1) (respectivement (C11,2)) possède la propriété de stabilité dynamique uniforme.

Critère C12

Soit un processus monovariante défini par une équation d'état du type (C12,1) ou (C12,2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-a(t, x, g) \cdot v_1^t + H) \cdot x(t) + b(t, x, g) \cdot u(t) \\ s(t) = v_1^t \cdot x(t) \end{cases} \quad (C12,1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-v_1 \cdot a^t(t, x, g) + H^t) \cdot x(t) + v_1 \cdot u(t) \\ s(t) = b^t(t, x, g) \cdot x(t) \end{cases} \quad (C12,2)$$

Si pour toute valeur (t, x, g) de $(\mathcal{L} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{G})$ les valeurs propres de $(-a(t, x, g) \cdot v_1^t + H)$ sont toutes égales à une valeur $\lambda(t, x, g)$

Si on peut définir à chaque instant une valeur nominale $\hat{\lambda}(t)$ de $\lambda(t, x, g)$

Si $\lambda(t)$ et $\lambda(t, x, g)$ satisfont les conditions suivantes :

$$\exists \varepsilon < 0, \exists \underline{\lambda} \in \mathbb{R}, \forall (t, x, g) \in (\mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P})$$

$$i) \underline{\lambda} < \lambda(t) < \varepsilon$$

$$ii) 1 - \sqrt[n]{2} < \lambda(t, x, g) - \lambda(t) < x_n^+$$

$$x_n^+ \text{ étant la racine de } 2(1+nx) = (1+x)^n$$

alors - la régime libre de (C12,1) est globalement asymptotiquement stable si $\lambda(t)$ satisfait (C12,3)

$$\exists \eta; \varepsilon < \eta < 0, \forall t \in \mathcal{C}, |\dot{\lambda}(t)| - \lambda(t) < (\eta - \varepsilon)(\varepsilon - \lambda(t))/(n-1) \quad (C12,3)$$

- le système (C12,1) possède la propriété de stabilité dynamique uniforme si $\lambda(t)$ satisfait (C12,3)

- le régime libre de (C12,2) est globalement asymptotiquement stable si $\lambda(t)$ satisfait (C12,4)

$$\exists \eta; \varepsilon < \eta < 0, \forall t \in \mathcal{C}: |\dot{\lambda}(t)| + \lambda(t) < (\eta - \varepsilon)(\varepsilon - \lambda(t))/(n-1) \quad (C12,4)$$

- le système (C12,2) possède la propriété de stabilité dynamique uniforme si $\lambda(t)$ satisfait (C12,4)

Conclusion

L'utilisation conjointe des techniques de majoration et d'une forme originale de représentation des systèmes monovariabiles d'ordre quelconque nous a permis d'obtenir des résultats d'application simple, utilisables dans l'étude de la stabilité dynamique des systèmes étudiés.

Les critères permettent de connaître les conditions de fonctionnement admissibles d'un système adapté en boucle ouverte au regard des variations de la charge autour de leur valeur nominale ainsi que des changements opérés sur cette dernière.

Rappel des principales notations

| Notation | Numéro de l'expression à partir de laquelle elle apparaît | Signification (éventuellement) |
|------------------------------------|---|---|
| a | (21,2) | $a \in \mathbb{R}^n$ |
| $a(t,x,g)$ | (2,1) | $a(t,x,g) : (\mathcal{E} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ |
| b | (21,2) | $b \in \mathbb{R}^n$ |
| $b(t,x,g)$ | (2,1) | $b(t,x,g) : (\mathcal{E} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ |
| $b'(r(t,x,g))$ | (211,1) | $b'(r(t,x,g)) = P^{-1}(r) \cdot b(t,x,g)$ |
| $d(\lambda)$ | (21,3) | $d(\lambda) \in \mathcal{E}[\lambda]$; $d(\lambda) = \lambda^n + a^t \cdot v(\lambda)$ |
| $d(\lambda(t,x,g))$ | (3,3) | $\mathcal{E} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}[\lambda]$: $d(\lambda, (t,x,g)) = \lambda^n + a^t(t,x,g) \cdot v(\lambda)$ |
| $D(\varepsilon, r(t), \hat{f}(t))$ | (3511,8) | |
| g | (2,1) | $g \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^e$ définit les perturbations de structure. |
| H | (2,1) | $H \in \mathbb{R}^{n \times n} = \{h_{ij} = \delta_{i+1,j}\}$ |
| $J(r)$ | (211,3) | $\mathcal{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$: $J(r) = \text{Diag}(r) + H$ |
| $n(\lambda)$ | (21,3) | $n(\lambda) \in \mathcal{E}[\lambda]$; $n(\lambda) = b^t \cdot v(\lambda)$ |
| $n(\lambda(t,x,g))$ | (3,3) | $\mathcal{E} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}[\lambda]$; $n(\lambda(t,x,g)) = b^t(t,x,g) \cdot v(\lambda)$ |
| p(r) | (211,1) | $\mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ |
| $p(r(t,x,g))$ | (3,1) | $\mathcal{E}^n \times \mathcal{E} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}^n$ |
| $P^{-1}(r)$ | (211,4) | $\mathcal{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ |
| P(r) | (211,5) | $\mathcal{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ |
| \mathcal{P} | (2,2) | $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^e$: domaine admissible des perturbations de structure ($g \in \mathcal{P}$) |
| $\mathcal{R}(r)$ | (3511,4) | $\mathcal{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\mathcal{R}(r))_i = \mathcal{R}((r)_i)$ |
| \mathcal{I} | | Domaine admissible de conditions initiales |
| \mathcal{E} | (2,2) | $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$: $\{t_0 \in \mathbb{R}, \mathcal{E} = [t_0, +\infty[\}$ |
| \mathcal{U} | | Domaine admissible des commandes $u(t)$ |
| $u(\varepsilon)$ | (32,5) | |
| $u(\varepsilon, r(t))$ | (3511,5) | |
| v_1 | (2,2) | $v_1 \in \mathbb{R}^n$, $v_1^t = [1, 0, \dots, 0]$ |
| $v(\lambda)$ | (21,3) | $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^n$: $v^t(\lambda) = [\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \dots, \lambda, 1]$ |
| vecteur spectral | (211,12) | Les composantes d'un vecteur spectral d'une matrice carrée sont les valeurs propres de celle-ci, chacune avec son ordre de multiplicité. |

CHAPITRE III

Introduction

L'application des résultats mis en évidence dans les chapitres précédents sur un système réel est abordée dans cette partie de notre étude.

Nous envisageons, à titre d'illustration concrète, la régulation en vitesse d'un groupe Ward-Léonard de moyenne puissance en présence de variations de charge. Celle-ci est constituée par une génératrice à excitation séparée débitant sur un réseau de résistances commutables.

Nous proposons la mise en oeuvre de deux types distincts de modes de commande :

- tout d'abord, en supposant les variations de charges connues et contrôlables, nous envisageons la synthèse d'un réseau correcteur adapté en boucle ouverte. Cette étude nous amènera à définir les conditions admissibles de fonctionnement d'un asservissement de ce type

- dans une seconde application, nous serons amenés à faire la synthèse d'un réseau correcteur fixé assurant un fonctionnement correct de l'asservissement quel que soit la manière dont s'opèrent les variations de charges.

1) Description du système étudié

1.1. Le groupe Ward-Léonard

Ce dispositif est constitué d'une chaîne de trois éléments électromécaniques (figure 3.1)

- un moteur asynchrone triphasé (AS1) qui constitue la source d'énergie
- une génératrice à courant continu (G1) à excitation indépendante dont l'induit est entraîné par le moteur (AS1)

La tension appliquée à l'enroulement inducteur (EI) constitue la commande du processus. Par ailleurs un enroulement inducteur auxiliaire (EAR) permet de corriger l'effet d'hystérésis dû à la rémanence du flux dans les parties ferro-magnétiques.

- un moteur à courant continu dont l'inducteur est soumis à une tension d'excitation constante et dont l'induit est en série avec le générateur précédent (G1). La vitesse angulaire de l'arbre de ce moteur constitue

la grandeur à asservir.

Le capteur de vitesse est constitué d'une dynamo tachymétrique (G_T) solidaire de l'arbre et débitant sur un circuit haute impédance.

1.2. La charge mécanique (figure 3.1.)

Elle est constituée par une génératrice G_2 identique à G_1 entraînée par le moteur M_1 . Son inducteur est soumis à une tension d'excitation constant

L'induit débite sur un réseau de résistances commutables pouvant prendre les valeurs suivantes :

| I | R (I) | $[\Omega]$ |
|---|----------|------------|
| 0 | ∞ | |
| 1 | 30 | |
| 2 | 15 | |
| 3 | 10 | |

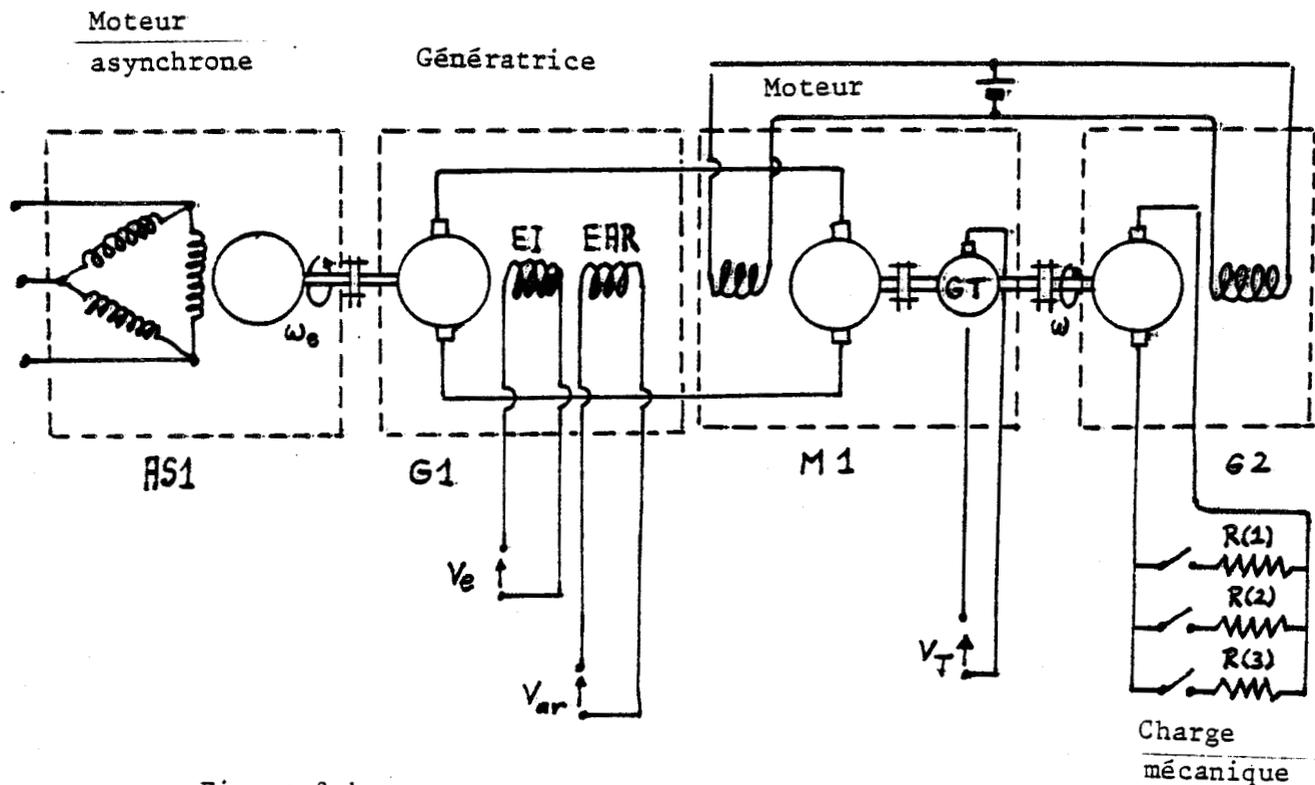


Figure 3.1.

1.3. Choix d'un modèle mathématique du système

Le processus étant étudié dans le cadre d'une hypothèse de linéarité . il peut être représenté selon une forme mathématique simple.

1.3.1. Approche d'un modèle linéaire

Définissons tout d'abord les notations qui sont utilisées dans la description des paramètres du groupe Ward-Léonard.

R et L désignent la résistance et l'inductance de l'inducteur de la génératrice

G_1

r_4 : la résistance du circuit formé des induits de G_1 et M_1 en série

ω_e : la vitesse d'entraînement de G_1 (supposée constante)

k'_1 : la facteur de proportionnalité caractéristique de la force électromotrice e_1 de G_1 relativement à l'intensité d'inducteur i_e et à la vitesse ω_e d'entraînement.

$$e_1 = k'_1 \cdot \omega_e \cdot i_e$$

k_2 et k_3 dénotent respectivement la constante de proportionnalité relative à la force contre-électromotrice e_2 de M_2 et à la force électromotrice e_3 de G_2 à tension d'induction constante

$$e_2 = k_1 \omega$$

$$e_3 = k_3 \omega$$

J et f représentent le moment d'inertie et le coefficient de frottement fluide de l'ensemble des rotors de G_2 , M_2 et G_1 .

En négligeant les effets des non linéarités en première approximation il vient [M3]:

$$\frac{\omega(p)}{V_e(p)} = \frac{k'_1 \cdot k_2 \cdot \omega_e}{(R + Lp) \left(k_2^2 + r_4 \left(Jp + f + \frac{k_3^2}{R(I)} \right) \right)} \quad (131,1)$$

- Ce processus peut donc être représenté par un modèle du second-ordre dont les paramètres sont des fonctions de $R(I)$. (charge commutable).

1.3.2. Adaptation de la commande

La commande du groupe est envisagée à partir, d'un élément de faible puissance utilisant un processeur analogique et numérique.

De tels éléments ne peuvent fournir de courants d'intensité supérieure à quelques milliampères, ce qui est notoirement insuffisant pour alimenter l'enroulement inducteur de la génératrice G1 (l'intensité nominale de l'inducteur étant de 1A.

La réalisation d'un étage amplificateur a de ce fait nécessité une étude particulière ainsi que la réalisation d'un prototype que nous avons décrit dans l'annexe 4.

Objet de l'Etude

Il s'agit essentiellement d'asservir la vitesse du groupe Ward-Léonard, le dispositif devant fonctionner en régulateur quelquesoient les perturbations de charge . L'amplificateur de puissance étant parfaitement identifié nous nous intéresserons à l'ensemble "Amplificateur + groupe Ward-Léonard" pour lequel la variable d'entrée est la tension U_e appliquée à l'entrée de l'amplificateur et la sortie est la tension V_T mesurée aux bornes de la génératrice tachymétrique.

1.3.3. Caractère non linéaire de l'asservissement

Le relevé de la caractéristique statique entrée-sortie du processus pour chaque valeur de $R(I)$ ($I = 0,1,2,3$) (figure 3.2) met en évidence un comportement non linéaire.

On peut affecter ce caractère d'une part à l'amplificateur (essentiellement non linéaire) et d'autre part à la caractéristique d'alimentation des parties ferromagnétiques de la génératrice.

Dans ces conditions, pour une charge donnée, le système à asservir peut-être assimilée à un processus linéaire précédé d'une caractéristique non linéaire selon le schéma de la figure 3.3.

De manière à simplifier l'étude, nous supposerons un fonctionnement en régime dynamique pour une consigne d'amplitude suffisamment significative.

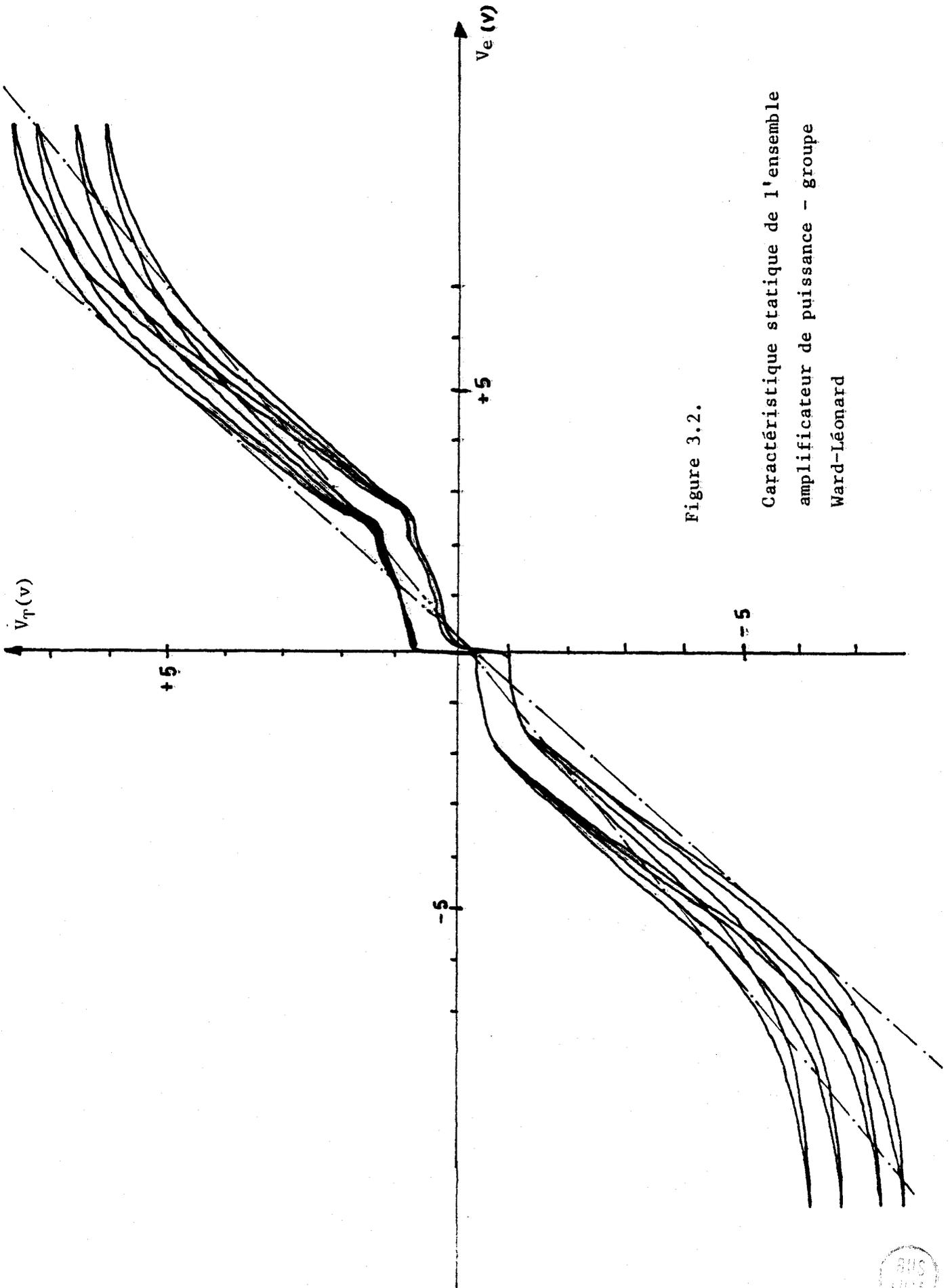


Figure 3.2.

Caractéristique statique de l'ensemble
amplificateur de puissance - groupe
Ward-Léonard

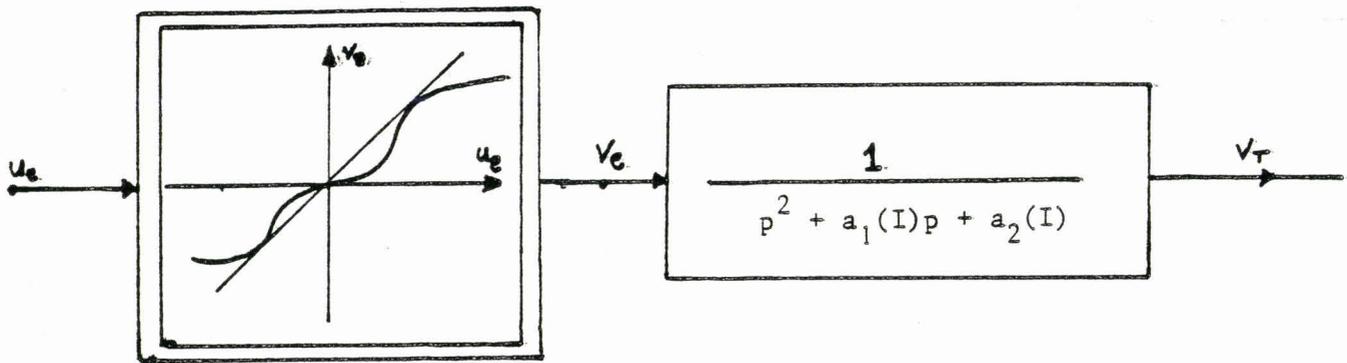


Figure 3.3

Dans ce contexte pour toute valeur de la charge la non-linéarité est du type secteur :

$$\left\{ \forall i = 0, 1, 2, 3, \exists \bar{b}(I) \in \mathcal{R}_+, 0 < \frac{v_e}{u_e} \leq \bar{b}(I) \right\}$$

La borne inférieure 0 du gain équivalent tient compte du phénomène de saturation de la caractéristique.

Partie dynamique

Une identification (effectuée pour des valeurs de l'entrée U_e telles que, la caractéristique non linéaire puisse être assimilée à une droite confirme le choix d'un modèle du second-ordre dans la description du comportement dynamique du processus.

Celui-ci peut ainsi être décrit selon le modèle d'une équation d'état du second ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} x^t = \left[\frac{d}{dt}(v_T), v_T \right] \\ \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1(I) & -a_2(I) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_2^*(I) \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \\ 0 < b_2^*(I) < \bar{b}_2(I) \end{array} \right.$$

avec :

| I | $a_1(I)$ | $a_2(I)$ | $\bar{b}_2(I)$ |
|---|----------|----------|----------------|
| 0 | 9.0 | 17.1 | 17.1 |
| 1 | 11.1 | 23.1 | 21.95 |
| 2 | 13.3 | 29.0 | 25.23 |
| 3 | 13.3 | 29.5 | 23.60 |

2) Synthèse d'un réseau correcteur proportionnel adaptable à la charge

Dans cette partie, nous considérons la structure d'asservissement suivante :

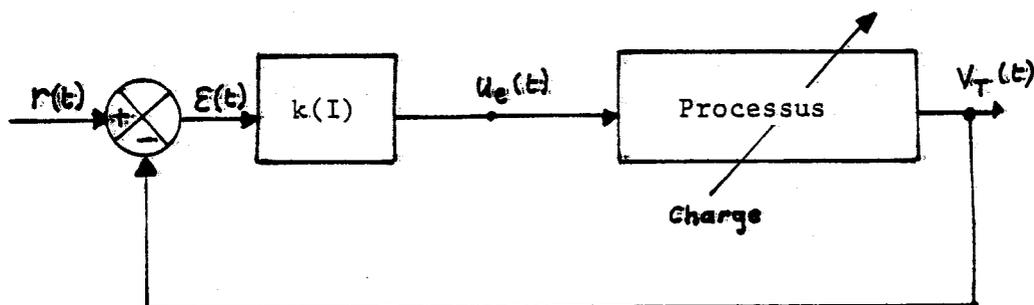


Figure 3.4.

L'action du réseau correcteur proportionnel est adaptée en fonction de la charge connectée au processus afin d'assurer au système asservi des performances dynamiques données indépendantes de la charge.

Dans cet exemple, nous supposons que l'adaptation du gain ajustable $k(I)$ permette d'assurer un fonctionnement en régulateur pour lequel les caractéristiques seraient proches de celles d'un système linéaire à gain constant imposé.

L'étude de cet asservissement doit donc vérifier la validité des deux propriétés essentielles suivantes :

- en premier lieu, il est nécessaire que pour toute charge supposée constante ($I = 0, 1, 2, 3$) le système soit globalement asymptotiquement stable.
- en second lieu, il convient de préciser les contraintes à imposer à la dynamique des variations de charge afin d'assurer la stabilité asymptotique globale du processus en régime autonome et sa stabilité dynamique uniforme en régime forcé.

Considérons le régime autonome de l'asservissement :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1(I) & ; & -(a_2(I) + b_2^*(I) k(I)) \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (2.1)$$

Il est nécessaire d'assurer la stabilité asymptotique globale du système pour $b_2^*(I) = \bar{b}_2(I)$.

Dans ce cas, il faut et il suffit que les racines du polynôme $\bar{d}(\lambda, I)$:

$$\lambda \in \mathcal{C}; \quad \bar{d}(\lambda, I) = \lambda^2 + a_1(I) \cdot \lambda + (a_2(I) + \bar{b}_2(I) k(I))$$

soient localisées dans le demi-plan gauche.

Nous choisirons la valeur fixée du gain statique en imposant à la matrice du régime libre (21) des valeurs propres $\lambda_1(I)$ et $\lambda_2(I)$ réelles quelque soit I et localisées le plus à gauche possible de l'axe imaginaire.

Il vient :

| I | $\lambda_1(I)$ | $\lambda_2(I)$ | k(I) | gain statique |
|---|----------------|----------------|-------|---------------|
| 0 | - 4.5 | - 4.5 | 0.184 | 0.15 |
| 1 | - 3.67 | - 7.43 | 0.190 | 0.15 |
| 2 | -3.50 | - 9.80 | 0.21 | 0.15 |
| 3 | - 3.48 | - 9.82 | 0.22 | 0.15 |

La valeur faible du gain statique n'est pas gênante car elle est relative à une entrée $u_T(t)$ qu'on peut modifier par un gain constant situé en amont de l'asservissement. (L'objectif à atteindre est de réguler la sortie $v_T(\mathbf{t})$ autour d'une valeur désirée \hat{v}_T proportionnelle à une entrée \hat{r} affichée)

Notons $t(j) (j \in \mathcal{N})$ les instants de commutation de la charge avec :

$$\begin{aligned} t(j+1) &\geq t(j) \\ t(0) &= t_0 \end{aligned}$$

La charge connectée durant l'intervalle $[t(j), t(j+1)[$ est notée I(j)

Par transformation de l'équation (21) par le changement de base :

$$y(t, j) = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2(I(j)) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

$$\text{Il vient : } \left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \mathcal{N} \\ \forall t \in [t(j), t(j+1)[\\ \dot{y}(t, j) = \begin{bmatrix} -\lambda_2(I(j)) - a_1(I(j)); & -d(\lambda_2(I(j)), j) \\ 1 & ; \lambda_2(I(j)) \end{bmatrix} \cdot y(t, j) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

avec :

$$\forall I=0, 1, 2, 3; \forall \lambda \in \mathcal{C} ; d(\lambda, I) = \lambda^2 + a_1(I) \cdot \lambda + (a_2(I) + b_2^*(I) \cdot k(I))$$

Considérant l'égalité $\bar{d}(\lambda_2(I, j), j) = 0$

il vient $d(\lambda_2(I(j)), j) = k(I(j)) \cdot [-\bar{b}_2(I(j)) + b_2^*(I(j))]$

et; compte tenu du choix effectué sur $k(I)$

$$\forall I = 0, 1, 2, 3 : k(I) > 0$$

Il vient : $\forall j \in \mathcal{N} : -d(\lambda_2(I(j)), j) > 0$

Dans ces conditions, la matrice du régime libre de l'équation (21) est confondue avec sa propre pseudo-majorante.

Etant donnée la propriété $\{\forall I, \lambda_2(I) < \lambda_1(I) < \varepsilon < 0\}$ l'application du Critère \mathcal{C} prouve donc la stabilité asymptotique globale du régime autonome de cet asservissement pour I fixé.

2.1. Dynamique de la variation de charge

Pour chaque valeur de la charge ($I=0, 1, 2, 3$) nous avons constaté la stabilité asymptotique globale (critère \mathcal{C} 2) du système en assurant l'existence d'une fonction définie positive :

$$v(x(t), I) = \text{Max} \left\{ \frac{|x_1(t) - \lambda_2(I) \cdot x_2(t)|}{\varepsilon - \lambda_2(I)} , |x_2(t)| \right\}$$

$$\lambda_2 < \lambda_2(I) < \varepsilon < 0$$

qui satisfait la condition suivante :

$$\forall j ; \forall t \in [t(j), t(j+1)[, D^+v(x(t), t) \leq \varepsilon \cdot v(x(t), I)$$

Par application des résultats obtenus dans le premier chapitre (I, 421)

il suffit donc de respecter la contrainte ci dessous :

$$t_{j+1} - t_j \geq \underline{\Delta t} = \text{Max} \left\{ 0, \frac{1}{\eta - \varepsilon} \text{Lg} \left(1 + 2 \cdot \frac{\lambda_2(I(j+1)) - \lambda_2(I(j))}{\varepsilon - \lambda_2(I(j+1))} \right) \right\}$$

$$\varepsilon < \eta < 0$$

pour assurer la stabilité dynamique uniforme du processus et la stabilité asymptotique globale de son régime autonome.

Résultats numériques :

$$\varepsilon = - 4$$

$$\eta = - 3$$

| I(j) | I(j+1) | $\lambda_2(I(j))(s^{-1})$ | $\lambda_2(I(j+1))(s^{-1})$ | $\underline{\Delta t}$ (s) |
|------|--------|---------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 0 | 1 | -4.5 | - 7.43 | 0 |
| 0 | 2 | -4.5 | - 9.80 | 0 |
| 0 | 3 | -4.5 | - 9.82 | 0 |
| 1 | 0 | -7.43 | - 4.5 | 1.54 |
| 1 | 2 | -7.43 | - 9.80 | 0 |
| 1 | 3 | -7.43 | - 9.82 | 0 |
| 2 | 0 | -9.80 | - 4.5 | 3.10 |
| 2 | 1 | -9.80 | - 7.43 | 0.87 |
| 2 | 3 | -9.80 | - 9.82 | 0 |
| 3 | 0 | -9.82 | - 4.5 | 3.10 |
| 3 | 1 | -9.82 | - 7.43 | 0.87 |
| 3 | 2 | -9.82 | - 9.80 | 0.007 |

2.2. Réalisation pratique (voir figure 3.5)

La commande du groupe amplificateur de puissance - groupe Ward.Léonard est assurée par un calculateur temps réel T1000 couplé à une calculatrice analogique qui assure le rôle d'interface numérique/analogique.

Le principe mis en oeuvre dans cette commande consiste à faire une requête de variation de charge qui est prise en compte par le calculateur. Ce dernier n'autorise la transition demandée que lorsque l'intervalle de temps $\underline{\Delta t}$ correspondant s'est écoulé (principe de sécurité).

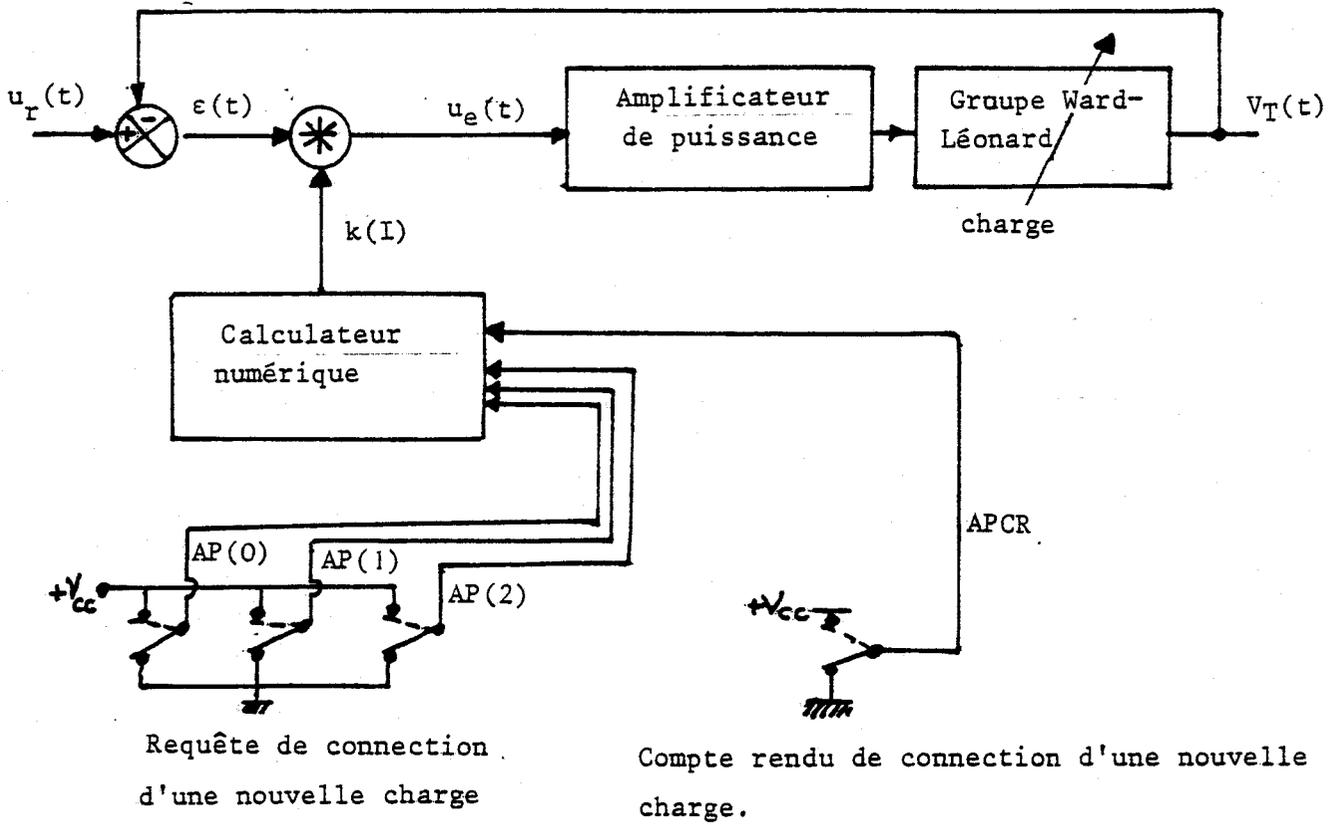
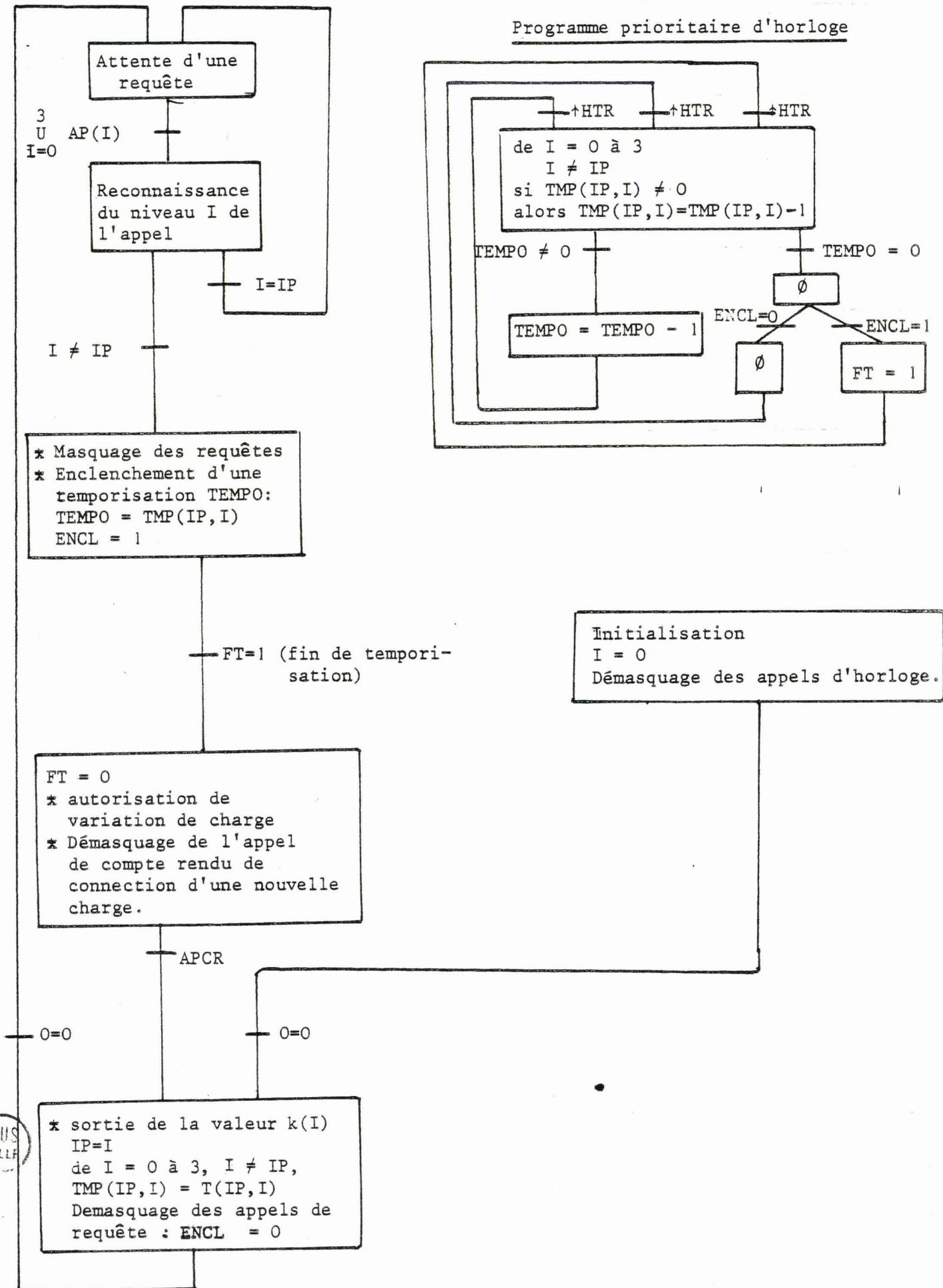


Figure 3.5.

STRUCTURE DU PROGRAMME DE
CONTROLE DE VARIATION DE CHARGE



Les requêtes de connections d'une nouvelle valeur de la charge sont matérialisées par des boutons poussoirs à contact travail connectés sur le système prioritaire du calculateur.

Un tableau contient les valeurs des temporisations pour chaque transition de charge possible, un autre contient les valeurs du gain $k(I)$ du réseau correcteur pour les différentes charges.

Lorsqu'on autorise la connection d'une nouvelle charge, on charge dans trois registres les valeurs des temporisations correspondantes à tous les états successeurs de l'état qui vient d'être initialisé. Ces registres sont alors décrémentés jusqu'à zéro par un programme prioritaire d'horloge qui matérialise le temps de gel des requêtes de changement de régime.

Lorsqu'une requête $AP(I)$ de connection de la charge I est reçue, on commence par comparer l'indice I de la charge demandée et l'indice IP de la charge actuelle. S'ils sont égaux cette requête est bien entendu rejetée.

Dans le cas contraire, on commence par interdire toute nouvelle requête, on charge ensuite un registre TEMPO avec l'état du registre de temporisation $TMP(IP, I)$ correspondant à la transition demandée. TEMPO est alors décrémenté jusqu'à la valeur 0 par le programme d'horloge et lorsqu'il atteint la valeur 0, la transition est autorisée.

Dans le dispositif expérimental mis en oeuvre, l'autorisation est matérialisée par un message à un opérateur humain qui effectue la variation de charge et en donne compte rendu au calculateur par un appel prioritaire APCR. Les requêtes ultérieures de variation de charge sont alors validées.

REMARQUES

* La simplicité du programme de contrôle de variation de charge (il ne s'agit que d'un séquenceur) permet d'envisager très simplement son implantation sur un microprocesseur muni d'une structure prioritaire suffisamment riche (INTEL 8085 par exemple) ce dernier commandant un multiplieur analogique numérique.

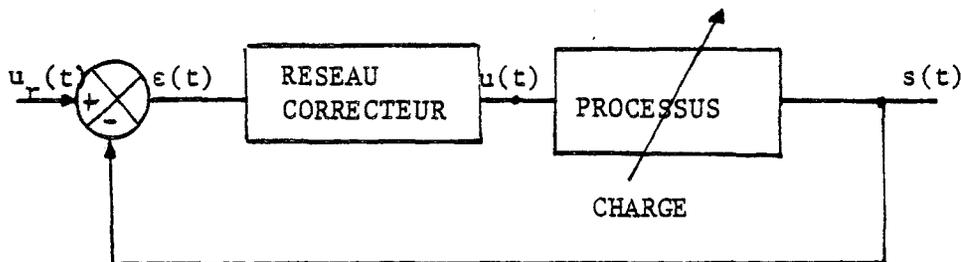
** La phase d'autorisation de variation de charge du début de la place suivant la transition $FT = 1$ jusqu'à la transition APCR peut être supprimée en même temps que l'intervention d'un opérateur humain si on commande les variations de charge directement à partir du calculateur (par exemple en mettant en série avec les résistances matérialisant la charge des transistors de puissance fonctionnant en interrupteurs statiques, le calculateur assurant la commande de leur courant de base.

3. Synthèse d'un réseau correcteur à action proportionnelle et intégrale indépendante de la charge.

La problématique envisagée dans cette dernière partie de notre étude diffère sensiblement de celle qui a été présentée dans l'exemple précédent. On suppose en effet que l'on ne dispose d'aucune information sur la manière dont s'opèrent les variations de charge et que, de plus, elles ne sont pas contrôlables. Toutefois comme précédemment nous supposons connues les plages de variation des paramètres définissant la dynamique du processus.

3.1. Mise en équation du problème

La structure du système asservi est représenté par le schéma suivant :



Il vient comme précédemment :

$$x_1^T(t) = [\dot{s}(t), s(t)]$$

$$\dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} -a_1(I) & -a_2(I) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} b_2^*(I) \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

avec : $u(t) = k_I \cdot \int_{t_0}^t \epsilon(\tau) \cdot d\tau + k_p \cdot \epsilon(t)$

Si on envisage le fonctionnement de ce dispositif en régulateur, l'étude de stabilité dynamique se ramène à l'étude de stabilité asymptotique globale du régime libre défini par l'équation suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -a_1(I) & ; & -(a_2(I) + b_2^*(I) \cdot k_p) & ; & -(k_I \cdot b_2^*(I)) \\ 1 & ; & 0 & ; & 0 \\ 0 & ; & 1 & ; & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (31)$$

$$x^t(t) = [\overset{\circ}{s}(t), \hat{s}(t), s(t)]$$

3.2. Etude de stabilité

D'après l'énoncé du critère \mathcal{C}_2 le problème revient à préciser un couple de valeurs (k_p, k_I) et un paramètre $r \in \mathcal{E}^3 (r^T = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3])$ tels que $\forall i = 0, 1, 2, 3, \forall b_2^*(i) \in [0, \bar{b}_2(I)]$ les conditions d'application du critère soient satisfaites.

Pour effectuer cette synthèse, on peut considérer la matrice du régime libre après un changement de base de paramètre r et étudier dans quelles conditions cette dernière est identique à sa pseudo-majorante dans le but de ramener les conditions d'applications du critère \mathcal{C}_2 à une expression très simple.

La méthode revient alors à chercher un paramètre de changement de base compatible avec la première condition puis de déterminer les valeurs de k_I et k_p assurant la stabilité asymptotique globale du processus.

On note :

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -(\lambda_2 + \lambda_3) \lambda_2 \lambda_3 \\ 0 & 1 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Il vient :

$$\dot{\hat{y}}(t) = \begin{bmatrix} -p_1(I) & ; & -p_2^*(I) & ; & -p_3^*(I) \\ 1 & & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & & 1 & & \lambda_3 \end{bmatrix} y(t) \quad (32)$$

avec :

$$\begin{cases} p_1(I) = + a_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ p_2^*(I) = (\lambda_3^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2 \lambda_3) + a_1(I) \cdot (\lambda_3 + \lambda_2) + (a_2(I) + k_p \cdot b_2^*(I)) \\ p_3^*(I) = \lambda_3^3 + a_1(I) \cdot \lambda_3^2 + (a_2(I) + k_p \cdot b_2^*(I)) \lambda_3 + k_I b_2^*(I) \end{cases}$$

Pour assurer la vérification des conditions de stabilité sur la pseudo-majorante de cette matrice les paramètres λ_2 et λ_3 doivent satisfaire à la condition suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{R}(\lambda_2) < 0 \\ \mathcal{R}(\lambda_3) < 0 \end{cases}$$

L'égalité entre la matrice du régime libre de (31) et sa pseudo-majorante entraîne :

$$\begin{cases} \forall i = 0, 1, 2, 3 \\ \forall b_2^*(I) \in [0, \bar{b}_2(I)] \\ p_3^*(I) \in \mathcal{R}, p_3^*(I) \leq 0 \\ p_2^*(I) \in \mathcal{R}, p_2^*(I) \leq 0 \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &\in \mathcal{R} - \\ \lambda_3 &\in \mathcal{R} - \end{aligned}$$

On cherche une valeur de k_p à priori positive.

Dans ce cas :

$$p_2^*(I) < p_2(I) = + (\lambda_3^2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2^2) + a_1(I) \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) + a_2(I) + k_p \bar{b}_2(I)$$

$$p_3^*(I) < p_3(I) = \lambda_3^3 + a_1(I) \lambda_3^2 + (a_2(I)) \cdot \lambda_3 + k_I \cdot \bar{b}_2(I)$$

On est ramené ainsi à trouver $(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{R}_-^2$ tels que

$$\forall i = 0, 1, 2, 3, \quad \begin{cases} p_2(I) \leq 0 \\ p_3(I) \leq 0 \end{cases}$$

sous réserve de la condition nécessaire de stabilité suivante :

$$\{ k_I > 0 \}$$

On est alors amené à vérifier :

$$\forall I, \quad \lambda_3^3 + a_1(I) \cdot \lambda_3^2 + a_2(I) \cdot \lambda_3 < 0 \quad (33)$$

$$\lambda_2^2 + \lambda_2(\lambda_3 + a_1(I)) + (\lambda_3^2 + a_1(I) \lambda_3 + a_2(I)) < 0 \quad (34)$$

Cette dernière inégalité (34) ne peut être satisfaite que si le discriminant de l'équation du second degré en λ_2 est positif.

$$\exists \lambda_3, \forall i=0,1,2,3 ; \quad 3\lambda_3^2 + 2a_1(I) \cdot \lambda_3 + (4 \cdot a_2(I) - a_1^2(I)) < 0 \quad (35)$$

Ce dernier système d'inégalités suppose satisfaite la condition (36) :

$$\forall I = 0,1,2,3, \quad \begin{cases} 4(a_1^2(I) - 3a_2(I)) = \Delta'(I) > 0 \\ \lambda_3 \in] - \frac{a_1(I) + \Delta'(I)}{3}, - \frac{a_1(I) - \Delta'(I)}{3} [\end{cases} \quad (36)$$

Il vient ainsi l'ensemble des résultats présentés dans le tableau ci-joint

| I | $\Delta'(I)$ | $-\frac{a_1(I) - \Delta'(I)}{3} ; -\frac{a_1(I) + \Delta'(I)}{3}$ |
|---|--------------|---|
| 0 | 10.90 | - 6.63 < λ_3 < 0.63 |
| 1 | 14.68 | - 8.56 < λ_3 < 1.19 |
| 2 | 18.96 | -10.75 < λ_3 < 1.89 |
| 3 | 18.88 | -10.70 < λ_3 < 1.83 |

$$\forall I = 0, 1, 2, 3 \quad ; \quad \lambda_3 \in [- 6.63, 0[$$

A l'intérieur du domaine de variation admissible du paramètre λ_3 , on cherche une valeur qui minimise la quantité :

$$\text{Max}_{i=0,1,2,3} ((\lambda_3^3 + a_1(I) \lambda_3^2 + a_2(I) \lambda_3)) \quad (37)$$

Il vient $\lambda_3 = -1.20$

Le choix de k_i se fait alors conformément à l'inégalité :

$$\{ \forall I, p_3(I) \leq 0 \}$$

et il vient $k_i \in]0, 9.29/\text{Max}_{I=0,1,2,3} (\bar{b}_2(I)) [$

i.e : $k_i \in]0, 0.39 [$

De même, on conduit la recherche de λ_2 en cherchant la valeur qui minimise la quantité :

$$\text{Max}_{I=0,1,2,3} (\lambda_3^2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3^2) + (\lambda_2 + \lambda_3) a_1(I) + a_2(I)$$

Il vient alors $\lambda_2 = - 3.90$

Dans ces conditions, la matrice de fonctionnement (38)

$$M^*(\lambda_2, \lambda_3, I) = \begin{bmatrix} -p_1^*(I) & ; & -p_2^*(I) & ; & -p_3^*(I) \\ 1 & ; & \lambda_2 & ; & 0 \\ 0 & ; & 1 & ; & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

étant confondue avec sa pseudo-majorante, les conditions de Kotelyanskii appliquées à $M^*(\lambda_2, \lambda_3, I) - \varepsilon I$ ($\varepsilon < 0$) se résument au système d'inégalité (39)

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon \leq 0, \quad \lambda_2 < \varepsilon \\ \quad \quad \quad \lambda_3 < \varepsilon \\ \forall I=0,1,2,3, \quad \varepsilon^3 + a_1(I)\varepsilon^2 + a_2(I)\varepsilon + b_2^*(I)(k_p \varepsilon + k_I) \geq 0 \end{array} \right. \quad (39)$$

Cette dernière condition est satisfaite de manière évidente pour :

| |
|-------------------|
| $\varepsilon = 0$ |
| $-k_I = 0.39$ |
| $k_p = 0.32$ |

Si on suppose les conditions de fonctionnement telles que l'effet de la saturation se traduise par l'inégalité: $\bar{b}_2(I)/2 < b_2^*(I) < \bar{b}_2^*(I)$ on obtient pour le réglage :

| |
|--------------|
| $k_I = 0.39$ |
| $k_p = 0.20$ |

pour un coefficient ε de décroissance exponentielle

$$\underline{\varepsilon \leq - 0.1}$$

Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en évidence sur un exemple concret la facilité de mise en oeuvre de la méthode de synthèse proposée. Les critères établis dans le chapitre II permettent en effet très rapidement d'aboutir à une synthèse de régulateurs assurant une très bonne sécurité de fonctionnement du dispositif de contrôle. En effet, de très fortes perturbations de structure peuvent être acceptées au cours du fonctionnement.

La recherche d'un réglage des paramètres revient ainsi à satisfaire les conditions d'application du critère approprié en tenant compte des incertitudes relatives à la connaissance imprécise du modèle.

Conclusion générale

La notion d'agrégation déduite de l'utilisation des normes vectorielles nous a permis de mettre en évidence une méthode de synthèse par régulateur adaptable de systèmes monovariabiles non linéaires. Dans ce sens, nous avons été amenés à présenter un mode de représentation original des systèmes monovariabiles linéaires au non-linéaires. Ce type de description a en effet permis d'optimiser et d'étendre les conditions d'application de critères de stabilité établis en [G1], [G2]. Nous avons ainsi été amené à reformuler ces critères en termes de synthèse.

A partie de méthodes d'analyse, nous avons ainsi pu établir de nouvelles conditions de fonctionnement de processus fortement perturbés au niveau structurel lors de leur évolution en régime dynamique.

Une mise en oeuvre concrète a permis d'insister sur la facilité d'utilisation de cette méthode qui nous a conduit à préciser les caractéristiques de performances d'un asservissement non linéaire et non stationnaire.

Les résultats présentés dans ce mémoire devraient nous permettre d'aborder l'étude des systèmes multivariabiles non linéaires et ainsi de résoudre le problème fondamental de la sécurité de fonctionnement d'un processus en présence de perturbations structurelles importantes.

R E F E R E N C E S

--:--:--:--:--:--:--:--:--

- [A1] ASTRÖM K.J. WITTENMARK B. - "On self tuning regulators" - Automatica 9 - 185.
- [B1] BORNE P., GENTINA J.C. - "On the stability of large non-linear systems" - 1974 - J.A.C.C. - Austin, Texas.
- [B2] BORNE P., CARLIER A., VASSEUR C. - "Commandabilité et observabilité des systèmes continus dans l'espace d'état" - A.F.A.S., Revue Sciences - T2 - N° 4 - 1971.
- [B3] BORNE P. - "Contribution à l'étude des systèmes discrets non-linéaires de grande dimension - Application aux systèmes interconnectés" - Thèse ès-Sciences Physiques - Lille - 1976.
- [B4] BORNE P., GENTINA J.C. - "Absolute stability of non-linear, non-stationary, large scale systems" - 1978 - J.A.C.C. - Philadelphia.
- [B5] BOUDAREL R., GUICHET P., DELMAS J. - "Commande optimale des processus" - 1967 - Dunod - Paris.
- [B6] BEN-REJEB M. - "Synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé" - Thèse de Doctorat d'Ingénieur - 1976 - Lille.
- [C1] CUENOD - FATIO - "Cours d'introduction aux méthodes d'identification" - Albin-Michel.
- [G1] GENTINA J.C. - "Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non-linéaires de grande dimension" - 1976 - Thèse ès-Sciences Physiques - Lille.
- [G2] GRUJIC L., GENTINA J.C., BORNE P. - "General aggregation of large scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms" - 1976 - I.J.C. - Vol. 6.
- [G3] GENTINA J.C., MEIZEL D. - "Sur une méthode de synthèse adaptative d'une classe de systèmes continus non-linéaires" - 1977 - MECO - Zürich.
- [G4] GANTMACHER F.R. - "Théorie des matrices" - T.2 - 1966 - Dunod - Paris.

- [G5] GENTINA J.C., BORNE P., LAURENT F. - "Stabilité des systèmes continus non-linéaires de grande dimension" - R.A.I.R.O. - Août 1973.
- [G6] GILLES - DECAULNE - PELLEGRIN - "Introduction aux systèmes asservis extrémaux et adaptatifs - Dunod - Paris.
- [G7] GRUJIC Lj. T. - "Finite-time adaptive control" - J.A.C.C. - 1976 - Lafayette - Indiana.
- [G8] GRUJIC Lj. T. - "Finite-time non-inertial adaptive control" - 1977 - A.I.A.A. Journal - Vol. 15 - N° 3.
- [K1] KALMAN R.E. - "On the general theory of control systems procedure" - 1961 - 1st Int. Conf. on Aut. Control.
- [L1] LAURENT F., JANICOT J.P., TOULOTTE J.M. - "Commande numérique directe par impulsions - Application à un système échantillonné modulé en largeur" - Congrès I.F.A.C. - Juin 1972 - Paris.
- [L2] LJUNG L. - Support de cours de l'école d'été d'analyse numérique C.E.A. - I.R.I.A. - E.D.F. - Juin/Juillet 1978.
- [L3] LANDAU I.D. - "A survey of model reference adaptive techniques - Theory and applications" - Automatica - Vol. 10 - Pergamon Press - 1974.
- [L4] LANDAU I.D. - "Unbiased recursive identification using model reference adaptive techniques" - I.E.E.E. Transactions on A.C. - Vol. A.C. 71 - N° 2 - April 1976.
- [L5] LOZIACK M. - "Conduite par ordinateur numérique d'un four de recuit continu" - Mémoire C.N.A.M. - Centre associé de Lille - 1979.
- [L6] LASALLE J. LEFSCHETZ S. - "stability by lyapunov's direct method with applications" Acad.press, New York
- [M1] MAIZIERES C., BORNE P., LAURENT F. - "Sur la stabilité dynamique des processus monovariabiles non-linéaires" - 1977 - MECO - Zürich.
- [M2] MEIZEL D., GENTINA J.C. - "On a method of study of parallel and non-linear adaptative control" - 1978 - MECO - Athens.

- [M3] MANESSE G. - "Organes d'asservissement" - Publication du C.N.A.M.
Centre associé de Lille.
- [M4] MONOPOLI R.V. - "Model reference adaptive control with an argmented error
signal". I.E.E.E. on A.C. - Vol. A. C. I9 - n°5 - 1974
- [P1] PORTER B., CROSSLEY R. - "Modal control" - 1972 - Taylor and Francis -
London.
- [R1] ROBERT F. - "Etude et utilisation des normes vectorielles en analyse
numérique linéaire" - 1968 - Thèse de Doctorat ès-Sciences - Grenoble.

ANNEXE 1

$r \in \mathcal{E}^n$, $r^t = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$
 1) $P^{-1}(r)$ est défini quelque soit $r \in \mathcal{E}^n$

L'expression de $P^{-1}(r)$ comporte des termes en $1 / \prod_{\substack{n \\ e \neq i \\ e \neq k}} (\lambda_k - \lambda_e)$, aussi il est d'abord nécessaire d'assurer que cette expression est définie si certaines composantes de r sont égales.

Soit l'exemple tel que : $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \lambda_{n-2}$

$$(P^{-1}(r))_{ij} = \sum_{k=i}^n \lambda_k^{n-j} \cdot \prod_{\substack{n \\ e=i \\ e \neq k}} \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right)$$

$i < n-2$

$$(P^{-1}(r))_{ij} = \sum_{k=i}^{n-3} \lambda_k^{n-j} \cdot \prod_{\substack{n \\ e=i \\ e \neq k}} \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right)$$

$$+ \left[\lambda_{n-2}^{n-j} \cdot \frac{1}{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})(\lambda_{n-2} - \lambda_n)} + \lambda_{n-1}^{n-j} \cdot \frac{1}{(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})(\lambda_{n-1} - \lambda_n)} + \lambda_n^{n-j} \cdot \frac{1}{(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\lambda_n - \lambda_{n-2})} \right] \cdot \prod_{e=i}^{n-3} \left(\frac{1}{\lambda_n - \lambda_e} \right)$$

$$(P^{-1}(r))_{i,j} = \sum_{k=i}^{n-3} \lambda_k^{n-j} \cdot \prod_{\substack{n \\ e=i \\ e \neq k}} \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) + \prod_{e=i}^{n-3} \left(\frac{1}{\lambda_n - \lambda_e} \right) \cdot \left[\frac{1}{\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1}} \cdot \frac{\lambda_{n-2}^{n-j} - \lambda_n^{n-j}}{(\lambda_{n-2} - \lambda_n)} - \frac{\lambda_{n-1}^{n-j} - \lambda_n^{n-j}}{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)} \right]$$

Cette dernière expression est définie par passage à la limite :

$j \leq n-1$

$$(P^{-1}(r))_{i,j} = \sum_{k=i}^{n-3} \lambda_k^{n-j} \cdot \prod_{\substack{n \\ e=i \\ e \neq k}} \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) + (n-j)(n-j-1) \cdot \lambda_n^{n-j-2} \cdot \prod_{e=i}^{n-3} \left(\frac{1}{\lambda_n - \lambda_e} \right)$$

2) la matrice $P^{-1}(r)$ (211,4) est l'inverse de $P(r)$ (211,5)

Soient les expressions (211,4) et (211,5)

$$P^{-1}(r) \in \mathcal{E}^{n \times n} : (P^{-1}(r))_{ij} = \sum_{k=i}^n \lambda_k^{n-j} \cdot \prod_{\substack{n \\ e=i \\ e \neq k}} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \quad (211,4)$$

$$P(r) \in \mathcal{C}^{n \times n} : \begin{cases} i < j & (P(r))_{i,j} = 0 \\ i = j & (P(r))_{i,i} = 1 \\ i > j & (P(r))_{i,j} = (-1)^{i,j} \sigma_{i-j, n-j} \end{cases} \quad (211,5)$$

avec $\forall j < n, d_{n-j}(x, r) = \prod_{k=j+1}^n (x - \lambda_k) = \prod_{i=j}^n (-1)^{i-j} \sigma_{i-j, n-j} \cdot x^{n-i}$

alors $P^{-1}i, (.)$ et $P(.,)j$ désignant respectivement la ième ligne de P^{-1} et la jème colonne de $P(r)$ il vient :

$$P^{-1}i, (.) = \sum_{k=i}^n v^t(\lambda_k) \cdot \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) \quad (A1,1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j=1, \dots, n-1, v^t(\lambda_k) \cdot P(.,)j = d_{n-j}(\lambda_k, r) = \prod_{e=j+1}^n (\lambda_k - \lambda_e) \\ v^t(\lambda_k) \cdot P(.,)n = 1 \end{array} \right. \quad (A1,2)$$

alors : $\forall i=1, \dots, n, \forall j=1, \dots, n$

$$(P^{-1}(r) \cdot P(r))_{i,j} = \sum_{k=i}^n d_{n-j}(\lambda_k, r) \cdot \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) \quad (A1,3)$$

2.1.) $i > j$

Pour $k \geq j+1, d_{n-j}(\lambda_k, r) = 0$ (A1,4)

alors $(P^{-1}(r) \cdot P(r))_{i,j} = 0$ pour $i > j$

2.2.) $i = j$

On déduit des expressions précédentes (A1,3 ; A1,4) :

$$i \leq j, (P^{-1}(r) \cdot P(r))_{i,j} = \sum_{k=i}^j \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^j \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) \quad (A1,5)$$

Etant donnée la convention utilisée :

$$\prod_{\substack{e=1 \\ e \neq j}}^i \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) = 1$$

$$\forall i = 1, \dots, n, (P^{-1}(r) \cdot P(r))_{i,i} = 1$$

2.3.) $i < j$

$$(P^{-1}(r) \cdot P(r))_{i,j} = \sum_{k=i}^j \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^i \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right)$$

Soit \mathcal{J} un ensemble d'indices : $(\mu, \nu) \in \mathcal{J}^2$ et soit $\mathcal{J}_{\mu, \nu} = \mathcal{J} - \{\mu, \nu\}$

$$\sum_{k \in \mathcal{J}} \left(\prod_{\substack{e \in \mathcal{J} \\ e \neq k}} \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) \right) = \frac{1}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} \left(\prod_{e \in \mathcal{J}_{\mu, \nu}} \left(\frac{1}{\lambda_\mu - \lambda_e} \right) - \prod_{e \in \mathcal{J}_{\mu, \nu}} \left(\frac{1}{\lambda_\nu - \lambda_e} \right) \right) + \sum_{k \in \mathcal{J}_{\mu, \nu}} \left(\prod_{\substack{e \in \mathcal{J}_{\mu, \nu} \\ e \neq k}} \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) \right)$$

or $\text{Card}(\mathcal{J}_{\mu, \nu}) < \text{Card}(\mathcal{J})$

$$\forall (\mu, \nu) \in \mathcal{J}^2, \frac{1}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} + \frac{1}{\lambda_\nu - \lambda_\mu} = 0$$

Il vient donc par récurrence :

$$i < j ; (P^{-1}(r) \cdot P(r))_{i, j} = 0$$

3) Expression littérale de $P^{-1}(r) \cdot (-a \cdot v_1^t + H) \cdot P(r)$

Les polynômes $n(\cdot)$ et $d(\cdot)$ étant précisées par :

$$n(\lambda) = b^t \cdot v(\lambda)$$

$$d(\lambda) = \lambda^n + a^t \cdot v(\lambda) \quad (A1,5)$$

alors on déduit de l'expression (A1,1)

$$(P^{-1}(r))_{i, (\cdot)} \cdot a = \sum_{k=1}^n (\lambda_k^n - d(\lambda_k)) \cdot \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n (\lambda_k^n) \cdot \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) - p_i(r) \quad (A1,6)$$

$$\text{avec } \forall i=1, \dots, n: p_i(r) = \sum_{k=1}^n d(\lambda_k) \cdot \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right)$$

$$\text{or, } \left\{ \begin{array}{l} \forall i=1, \dots, n-1 : (P^{-1}(r))_{(\cdot), j+1} \cdot H = P^{-1}(r)_{(\cdot), j} \\ P^{-1}(r)_{(\cdot), 1} \cdot H = 0 \end{array} \right.$$

Alors considérant (A1,6), il vient :

$$P^{-1}(r) (-a \cdot v_1^t + H) = \tilde{P}(r) - p(r) \cdot v_1^t$$

avec :

$$(\tilde{P}(r))_{i, (\cdot)} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v^t(\lambda_k) \cdot \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right)$$



Or $(\tilde{P}(r) \cdot P(r))_{i,j} = k_{\sum_{k=i}^n} (\lambda_k \cdot d_{n-j}(\lambda_k)) \cdot \prod_{\substack{e=i \\ e \neq k}}^n \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right)$

alors $(\tilde{P}(r) \cdot P(r))_{i,j} = 0$ pour $i > j$

$$(\tilde{P}(r) \cdot P(r))_{i,j} = k_{\sum_{k=i}^j} \lambda_k \left(\prod_{\substack{e=i \\ e \neq k}}^j \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) \right) \text{ pour } i \leq j$$

On en déduit :

$$\forall i = 1, \dots, n, (\tilde{P}(r) \cdot P(r))_{i,i} = \lambda_i$$

$$\forall i = 1, \dots, n-1; (\tilde{P}(r) \cdot P(r))_{i,i+1} = 1$$

$$\forall i = 2, \dots, n, \forall j = 2, \dots, n, j > i+1, (\tilde{P}(r) \cdot P(r))_{i,j} = 0$$

Alors $\tilde{P}(r) \cdot P(r) = J(r) = \text{Diag}(r) + H$

Compte tenu de l'égalité : $v_1^t \cdot P(r) = v_1^t$

il vient :

$$P^{-1}(r) (-a \cdot v_1^t + H) \cdot P(r) = J(r) - p(r) \cdot v_1^t$$

$$p(r) \in \mathcal{C}^n, (p_i(r)) = k_{\sum_{k=i}^n} d(\lambda_k) \cdot \left(\prod_{\substack{e=i \\ e \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right)$$

De même :

$$\begin{cases} P^{-1}(r) \cdot b = b'(r) \\ b'(r) \in \mathcal{C}^n, (b'_i(r)) = k_{\sum_{k=i}^n} n(\lambda_k) \left(\prod_{\substack{e=i \\ e \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) \end{cases}$$

ANNEXE II

Le schéma bloc de la figure (2,1) peut être défini quelque soit $\hat{r} \in \mathcal{C}^n$

Il convient cependant de remarquer que l'intégration ne peut pas en général être restreinte à une opération de \mathcal{R} dans \mathcal{R}

Une représentation d'un système d'ordre n ne nécessitant que n intégrateurs opérant sur \mathcal{R} peut être trouvée en remplaçant les blocs $\begin{bmatrix} \hat{\lambda}_i & 1 \\ 0 & \bar{\lambda}_i \end{bmatrix}$ par un bloc équivalent :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i) & 1 \\ -\mathcal{J}_m^2(\hat{\lambda}_i) & \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i) \end{bmatrix}$$

avec
$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i) & 1 \\ -\mathcal{J}_m^2(\hat{\lambda}_i) & \mathcal{R}(\hat{\lambda}_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j \cdot \mathcal{J}_m(\hat{\lambda}_i) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_i & 1 \\ 0 & \bar{\lambda}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -j \mathcal{J}_m(\hat{\lambda}_i) & 1 \end{bmatrix}$$

Dans ce but, les composantes complexes conjuguées de \hat{r} sont groupées deux par deux.

On définit ainsi un ensemble $\mathcal{N}(\hat{r}) \subset [1, \dots, n]$ et un vecteur de paramètres $w(\hat{r})$ par :

$$\mathcal{N}(\hat{r}) \left\{ \begin{array}{l} i \in \mathcal{N}(\hat{r}) \Rightarrow \{ \hat{\lambda}_{i+1} = \bar{\lambda}_i \} \\ \forall (i,j) \in \mathcal{N}^2(\hat{r}), j \neq i, |i-j| \geq 2 \end{array} \right.$$

$$w(\hat{r}) \in \mathcal{R}^n : \left\{ \begin{array}{l} i \in \mathcal{N}(\hat{r}), (w(\hat{r}))_{i+1} = \mathcal{J}_m(\hat{\lambda}_i) \\ i \notin \mathcal{N}(\hat{r}), (w(\hat{r}))_{i+1} = 0 \end{array} \right.$$

Alors définissant les matrices de changement de base :

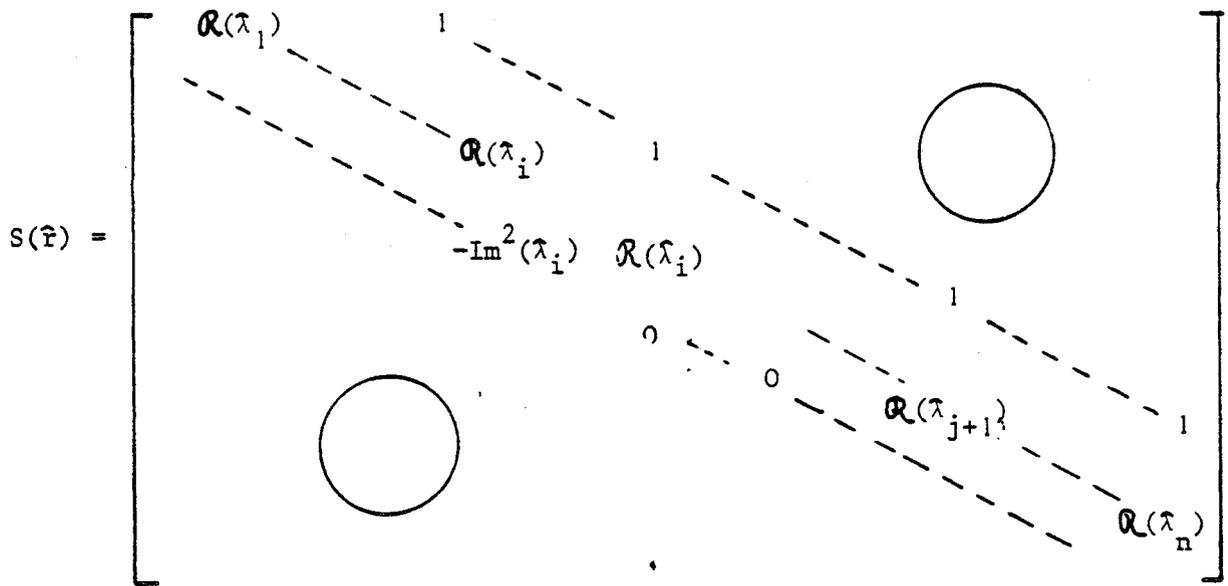
$$D^{-1}(\hat{r}) = I + j \cdot \text{Diag}(w(\hat{r})) \cdot H^t$$

$$D(\hat{r}) = I - j \cdot \text{Diag}(w(\hat{r})) \cdot H^t$$

Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t) = D^{-1}(\hat{r}) \cdot P^{-1}(\hat{r}) \cdot x(t) \\ \dot{z}(t) = S(\hat{r}) \cdot z(t) + b''(\hat{r}) \cdot u(t) \\ s(t) = v_1^t \cdot z(t) \\ b''(\hat{r}) = D^{-1}(\hat{r}) \cdot P^{-1}(\hat{r}) \cdot b(t) \end{array} \right. \quad (A2,1)$$

avec $S(\hat{r}) = J(\mathcal{R}(\hat{r}) - (\text{Diag}(w(\hat{r})))^2 \cdot H^t$



On peut voir, à partir des définitions respectives de $P(\hat{r})$ et $D(\hat{r})$ que le vecteur état $z(t) = (P(\hat{r}) \cdot D(\hat{r}))^{-1} \cdot x(t)$ et le vecteur de commande $b''(r) = (P(\hat{r}) \cdot D(\hat{r}))^{-1} \cdot b$ sont des éléments de \mathcal{R}^n .

Alors, on peut représenter l'équation d'état (A2,1) par le schéma-bloc de la figure A.2. ce schéma-bloc ne comportant que des éléments réels.

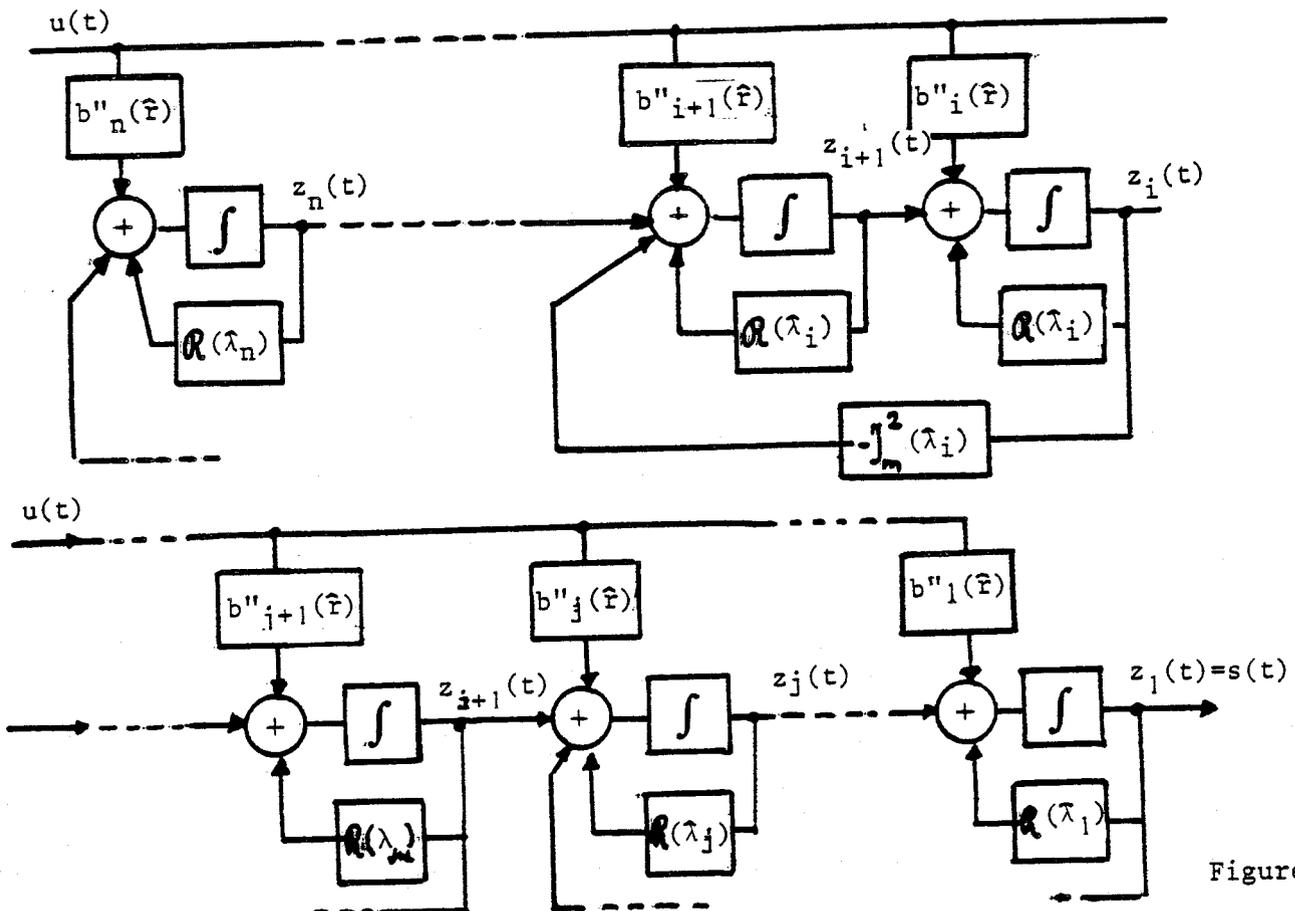


Figure A.2.

ANNEXE 3

On se propose d'établir :

$$\frac{d}{dt} (P^{-1}(r(t))) \cdot P(r(t)) = \{ \pi_{ij} \}$$

avec π_{ij} :

$$\left\{ \begin{array}{l} i \leq j : \pi_{ij} = 0 \\ i > j+1 ; \pi_{ij} = \sum_{k=i}^n \lambda_k \cdot e_{j+1}^{i-1} (\lambda_k - \lambda_e) \\ j = i-1 ; \pi_{i,i-1} = \sum_{k=i}^n \lambda_k \end{array} \right. \quad (A3,1)$$

Soient $(P^{-1}(r(t)))_{i,(\cdot)}$ et $(P(r(t)))_{(\cdot),j}$ respectivement la ième ligne de $P^{-1}(r(t))$ et la jème colonne de $P(r(t))$

$$(P^{-1}(r(t)))_{i,(\cdot)} = \sum_{k=i}^n v^t(\lambda_k) \cdot \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right)$$

$$j=1, \dots, n-1 ; v^t(\lambda_k) \cdot (P(r(t)))_{(\cdot),j} = d_{n-j}(\lambda_k, r(t)) \quad (A3,2)$$

$$= \prod_{e=j+1}^n (\lambda_k - \lambda_e)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (P^{-1}(r(t))) \cdot P(r(t))_{i,j} &= \sum_{k=i}^n \lambda_k \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_m} \left\{ (P^{-1}(r(t)))_{i,(\cdot)} \right\} \cdot (P(r(t)))_{(\cdot),j} \\ &= \pi_{ij} \end{aligned}$$

Les matrices $P^{-1}(r(t))$ et $P(r(t))$ sont triangulaires inférieures et leurs diagonales sont constituées d'éléments constants, on en déduit de toute évidence :

$$i \leq j ; \pi_{ij} = 0$$

Etant données les formes particulières de $P^{-1}(r(t))$ et $P(r(t))$, il suffit d'établir l'expression littérale des éléments de la première colonne de

$\frac{d}{dt} (P^{-1}(r(t))) \cdot P(r(t))$, les autres s'en déduisant aisément.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_m} (P^{-1}(r(t)))_{i,(\cdot)} &= \sum_{k=i}^n v^t(\lambda_k) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_m} \left(\prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \lambda_m} (v^t(\lambda_m)) \cdot \left(\prod_{\substack{e=1 \\ e \neq m}}^n \frac{1}{\lambda_m - \lambda_e} \right) \end{aligned}$$

$$\forall j = 1, \dots, n-1 ; v^t(\lambda_k) \cdot (P(r(t)))_{(\cdot),j} = d_{n-j}(\lambda_k, r(t)) = \prod_{e=j+1}^n (\lambda_k - \lambda_e)$$

$$\sum_{k=i}^n v^t(\lambda_k) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_m} \left(\prod_{\substack{e=2 \\ e \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_e} \right) \cdot (P(r(t)))_{(\cdot),1} = 0$$

$$\text{Or : } \frac{\partial}{\partial \lambda_m} (v^t(\lambda_m)) \cdot (P(r(t)))_{(\cdot),1} = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\prod_{e=2}^n (\alpha - \lambda_e) \right) \right]_{\alpha = \lambda_m}$$

$$= \prod_{\substack{e=2 \\ e \neq m}}^n (\lambda_m - \lambda_e)$$

$$\text{Alors } \frac{\partial}{\partial \lambda_m} \left\{ (P^{-1}(r(t)))_{i,(\cdot)} \right\} \cdot (P(r(t)))_{(\cdot),j} = \prod_{\substack{e=2 \\ e \neq m}}^n (\lambda_m - \lambda_e) / \prod_{\substack{e=2 \\ e \neq m}}^n (\lambda_m - \lambda_e)$$

Il vient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 2, \quad \Pi_{2,1} = \prod_{k=2}^n \lambda_k \\ i > 2, \quad \Pi_{i,1} = \prod_{k=i}^n \lambda_k \cdot \prod_{e=2}^{i-1} (\lambda_k - \lambda_e) \end{array} \right.$$

C Q F D

ANNEXE 4

L'amplificateur de puissance

Dans ce dispositif, l'enroulement inducteur EI de la génératrice G1 est soumis à une tension redressée double alternance de valeur efficace $|U_e|$.

Le principe de cet amplificateur consiste à découper la tension alternative d'alimentation à l'aide d'un triac dont la gachette est soumise à des impulsions de courant dont l'angle d'amorçage ψ est modulé par le module de la tension d'entrée V_e .

Le signe de U_e est défini par commutation d'un relais commandé par un comparateur (bloc B4). Ce relais inverse simultanément la tension à laquelle est soumis un deuxième enroulement (EAR) de la génératrice G1. Ce dispositif est destiné à corriger le phénomène d'hystérésis de la caractéristique de la génératrice.

Le circuit TCA 780 (Bloc B3) délivre les impulsions de courant de gachette. Son fonctionnement est représenté sur la figure A.42.

Les passages par 0 de la tension alternative alimentant le circuit de puissance sont déterminés par la tension appliquée sur la borne 5. Cette tension détermine l'origine des angles de conduction.

L'angle ψ de décalage entre l'impulsion et le passage par 0 est déterminé par la relation : $\psi = \arcsin\left(\frac{V_2}{3}\right)$; $V_2 \in [0, 3V]$ (A.4.1)

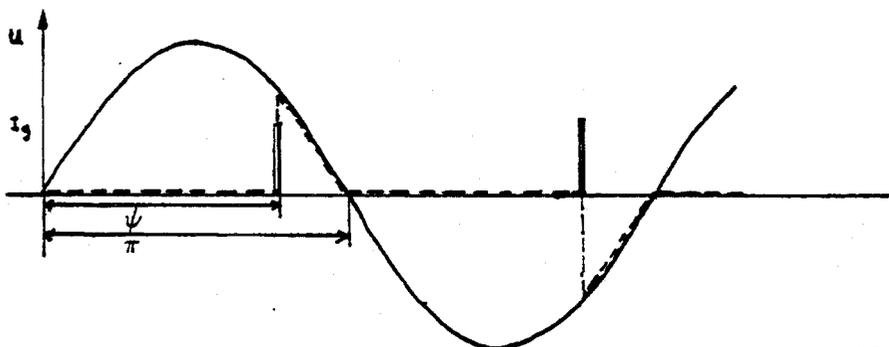


FIGURE A.42

La tension de commande v_e est comprise dans l'intervalle $[-10V, +10V]$
le bloc B1 constitue un redresseur à faible seuil qui élabore $V_1 = |v_e|$

Le montage différentiel du bloc B2 délivre une tension

$$V_2 = 3 \left(1 - \frac{|v_e|}{|v_{e_{\max}}|} \right)$$

En conséquence la relation entre l'angle d'amorçage et l'entrée e est déterminée par :

$$\psi = \pi \cdot \left(1 - \left| \frac{v_e}{v_{e_{\max}}} \right| \right)$$

La tension efficace aux bornes du pont de diodes est donc :

$$U_{\text{eff}} = 2 \sqrt{2} \times \left(\left| \frac{v_e}{v_{e_{\max}}} \right| - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \left| \frac{v_e}{v_{e_{\max}}} \right| \right) \right)$$

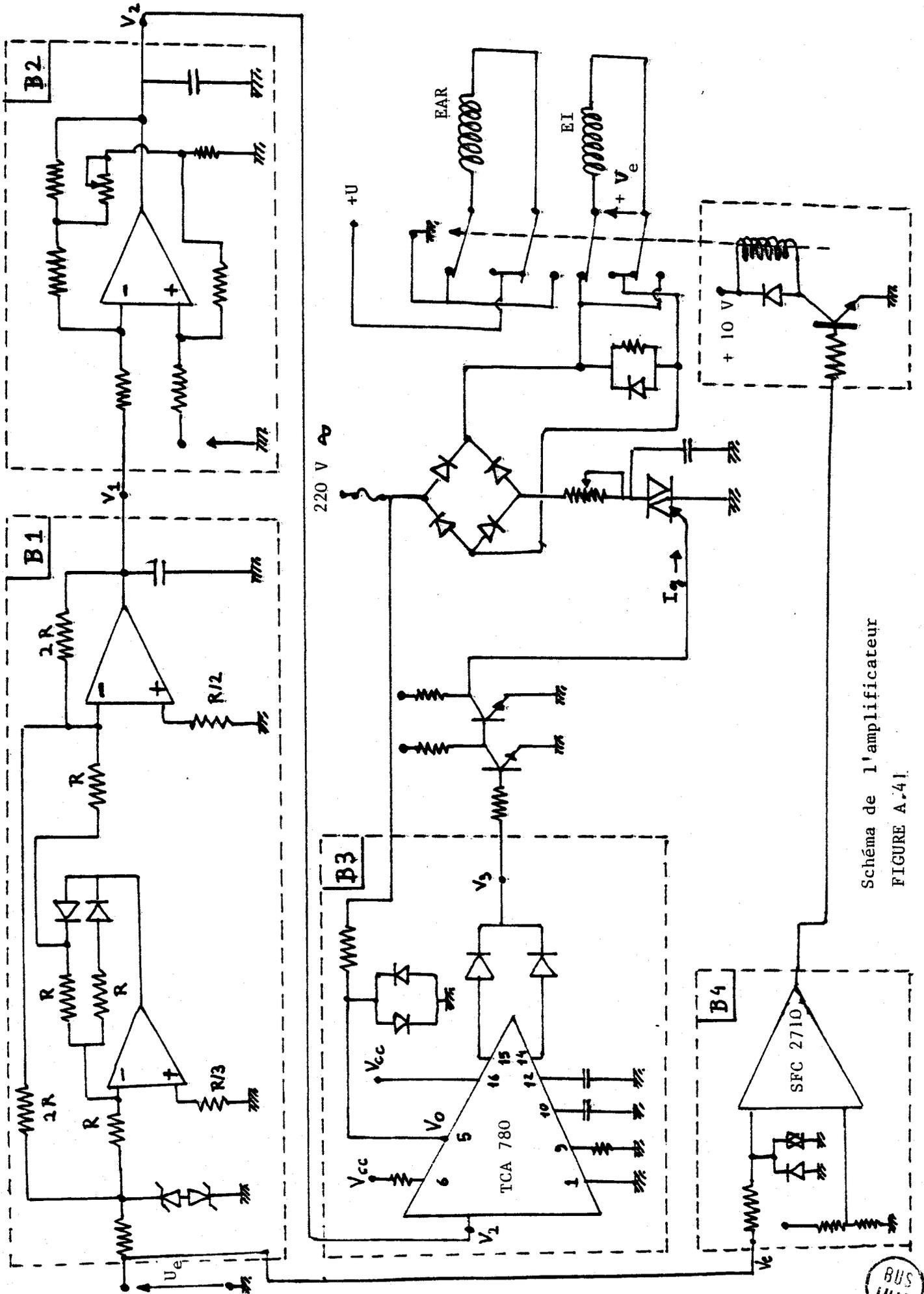


Schéma de l'amplificateur
FIGURE A.41.



ANNEXE 5

Rappels sur la notion de stabilité dynamique [M1]

La notion de stabilité d'un système dynamique la plus couramment envisagée est relative à son fonctionnement en régime libre.

D'un point de vue distinct, lorsque ce dernier est soumis à une commande on doit préciser la dispersion de ses trajectoires en présence de perturbations sur la structure et sur l'état.

Ce problème, réductible au précédent dans le cas linéaire (en cas de perturbations sur l'état) requiert une plus grande attention dans le cas non-linéaire qui nous préoccupe ici.

La notion de stabilité d'une trajectoire a d'abord été évoquée par Lyapunov, sous le vocable de stabilité de mouvement mais aucun moyen pratique d'étude de cette propriété n'était proposé.

On a ainsi été amené à introduire le terme de stabilité dynamique permettant par adjonction de qualificatifs (uniforme, asymptotique, exponentielle) une souplesse d'étude identique aux études de stabilité en régime libre.

Nous proposons d'abord de rappeler les définitions relatives à ces concepts puis de préciser la méthode d'étude que nous adoptons pour caractériser cette propriété.

Définitions

Les trajectoires des processus étudiés sont caractérisées dans l'espace d'état \mathcal{E} de dimension finie par le vecteur :

$$x(t, t_0, x_0, g, u(t))$$

- * $t_0 \in \mathcal{R}$
- * $\mathcal{C} = [t_0, +\infty[$
- * $x \in \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$
- * $u(t)$ appartenant à un ensemble admissible \mathcal{U} d'applications de \mathcal{C} dans \mathbb{R}^m définit la commande à laquelle le système est soumis.
- * $g \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^e$ désigne les perturbations structurales intervenant sur le processus pendant la phase de commande.
- * $x_0 = x(t_0) \in \mathcal{J}$

Notons : $\hat{x}(t, t_0, x_0, 0, u(t))$, la trajectoire nominale du processus, considérée en l'absence de toute perturbation, pour une entrée et des conditions initiales données et :

$x(t, t_1, \hat{x}(t_1) + \delta x_1, g, u(t))$ la trajectoire du système en présence de perturbations structurales et après une perturbation sur l'état $\delta x_1 \in \mathcal{J} \subset \mathcal{E}$ intervenant entre les instants $t_1 - \delta t_1 \geq t_0$ et t_1 .

Définition 1

Le système dont l'état est défini par le vecteur $x \in \mathcal{E}$ possède la propriété de stabilité dynamique uniforme si :

$$\exists \delta \in \mathcal{R}^+, \forall (t, t_1) \in \mathcal{C}^2, \forall (x_0, \delta x_1, g, u(t)) \in \mathcal{J} \times \mathcal{P} \times \mathcal{U}, \lim_{t \rightarrow \infty} | \hat{x}(t; t_0, x_0, 0, u(t)) - x(t, t_1, \hat{x}(t_1) + \delta x_1, g, u(t)) | < \delta$$

Définition 2

Le système dont l'état est défini par le vecteur $x \in \mathcal{E}$ possède la propriété de stabilité dynamique asymptotique s'il existe des fonctions ϕ et σ de classes respectives K et L au sens de Hahn, telles que :

$$\forall (t, t_1) \in \mathcal{C}^2, \forall (x_0, \delta x_1, g, u(t)) \in \mathcal{J} \times \mathcal{P} \times \mathcal{U}, | \hat{x}(t, t_0, x_0, 0, u(t)) - x(t, t_1, \hat{x}(t_1) + \delta x_1, g, u(t)) | \leq \sigma(t - t_1) \cdot \phi (\| \delta x_1 \|)$$

Méthode d'étude

Nous envisageons de caractériser les trajectoires $x(t)$ du système d'équation d'état :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(t, x(t), g, u(t))$$

en les composant aux trajectoires non perturbées précisées par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(t, \hat{x}(t), 0, u(t)) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

En notant $d(t)$ le vecteur écart

$$d(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

dont l'évolution est régie par :

$$\dot{d}(t) = f(t, \hat{x}(t) + d(t), g, u(t)) - f(t, \hat{x}(t), 0, u(t))$$

on se propose de montrer dans quelles conditions l'évolution de $d(t)$ est bornée à la limite (ultimately bounded $[L, \delta]$), c'est à dire définie quelque soit $t \in \mathcal{C}$ et bornée indépendamment de $x(t_0) \in \mathcal{Y}$ et de $u(t) \in \mathcal{U}$ lorsque t tend vers l'infini.

