UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur ès Sciences

en Mathématiques

par

Mongi EL MABROUK

PROBLÈMES DE DIFFUSION EN THERMO-ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

Membres du Jury : R. FAURE, Professeur Lille I, *Président*
J.C. GUILLOT, Professeur Paris XIII, *Rapporteur*
E. SANCHEZ PALENCIA, Maître de Recherche au CNRS, *Rapporteur*
F. PARSY, Professeur Lille I, *Rapporteur*
R.K. ZEYTOUNIAN, Professeur Lille I, *Examinateur*
M. ROSEAU, Professeur Paris VI, *Invité*
J.C. DE PARIS, Professeur Lille I, *Invité*

Soutenue le 19 décembre 1979

A ma femme,

à mes enfants,

à tous les miens,

je dédie cette thèse.

« سَنُرِيهِمْ آيَاتِنَا فِي الآفَاقِ وَفِي أَنْفُسِهِمْ
حَتَّى يَتَبَيَّنَ لَهُمْ أَنَّهُ الحَقُّ مِنْ رَبِّهِمْ »
(قرآن كريم).

" Nous leur montrerons nos signes dans l'univers
et en eux-mêmes, afin qu'ils sachent que c'est
la Vérité.

(<u>Coran</u>)

TABLE DES MATIERES

Monsieur le Professeur J.C. DE PARIS m'accueille depuis 3 ans dans son séminaire d'Equations aux Dérivées Partielles, et m'a permis d'exposer plusieurs parties de ce travail. Il a accepté mon invitation de figurer dans le Jury de cette thèse; qu'il trouve ici mes remerciements amicaux.

Madame F. GOUTHIER me permettra, j'en suis sûr, de lui exprimer mon admiration pour avoir mené à bien le travail de frappe de ces quelques 250 pages hiéroglyphes.

Je réunis dans une même pensée, tous ceux, collègues, maîtres et amis qui ont contribué de près ou de loin à ce que cette thèse voie le jour.

INTRODUCTION

Ce travail trouve son origine dans un article de L. JENTSCH (1) publié dans les "Mathematische Nachrichten" en 1975. L'auteur y aborde divers problèmes stationnaires en théorie de la thermo-élasticité. Ces problèmes aux limites elliptiques sont résolus par la méthode des équations intégrales.
En particulier il étudie le problème extérieur (même dans le cas multiplement connexe) et donne certaines conditions de radiation suffisantes pour avoir des théorèmes d'unicité. Il était dès lors très tentant de reprendre le problème de diffraction par un obstacle borné simplement connexe par des méthodes "time-dépendent" dans l'esprit de la théorie du Scattering.
On considère donc en fait le problème comme une "perturbation" du problème d'évolution dans l'espace libre.

Plusieurs difficultés se font alors jour, dont voici les principales :

1) Le modèle mathématique du problème étudié est un système "hybride" (aussi bien dans le cas perturbé que non perturbé) : un système d'équations hyperbolique (système de l'élastodynamique) couplé au moyen de deux "petits" paramètres η et m à une équation parabolique (équation de la chaleur). Formellement on a :

$$\Delta^* \vec{u}(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u}(x,t) - m \vec{\nabla} \cdot \theta(x,t) = \vec{0}$$

$$(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}) \quad \theta\ (x,t) - \eta \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u}(x,t) = 0 \ .$$

en l'absence des forces volumiques et de sources de chaleur; s'y ajoutent des conditions initiales pour le déplacement $\vec{u}$ et la température θ , ainsi que des conditions aux limites dans le cas du problème perturbé.

2) En adoptant le point de vue (assez naturel dans un problème d'évolution comme ici) de la théorie des semi-groupes, les opérateurs A_o (problème non perturbé) et A (problème perturbé) sont non auto-adjoints et générateurs tous deux de semi-groupes de contraction.

REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur Robert FAURE a accepté de sursoir un moment à ses nombreuses occupations et travaux de recherches pour présider le Jury de cette thèse. J'ai plaisir à le remercier sincèrement.

Monsieur le Professeur J.C. GUILLOT m'a gentiment accueilli dans son séminaire d'Analyse Appliquée, s'est intéressé à mon travail pendant deux années consécutives; sans ses suggestions et ses critiques, ce travail n'aurait probablement jamais vu le jour. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Monsieur E. SANCHEZ PALENCIA a examiné mon travail avec diligence et rigueur. Il a accepté d'être mon rapporteur, malgré d'écrasantes charges au C.N.R.S. Je le remercie vivement pour sa bienveillance et son extrême amabilité.

Monsieur F. PARSY a été pour moi plus qu'un Directeur de travail. Son dévouement et sa présence combattive m'ont permis de rester en poste à l'Université de Lille I pour achever dans les meilleures conditions ma thèse d'Etat. Ma dette envers lui est considérable, et je ne peux que lui réitérer mes profonds remerciements.

Monsieur le Professeur R. ZEYTOUNIAN m'a fourni la matière d'un second sujet et m'a permis de renouer avec la mécanique des fluides. Sa disponibilité et sa gentillesse m'ont profondément touché.

Monsieur le Professeur M. ROSEAU a gentiment accepté l'invitation de se joindre au Jury de cette thèse; je l'en remercie de tout coeur.

Or la théorie des opérateurs non auto-adjoints non bornés n'a pas encore le même degré de finesse que celle des opérateurs auto-adjoints. Les seuls opérateurs qui ont été étudiés assez extensivement (voir N. DINFORD et T. SCHWARTZ T. III) sont des opérateurs différentiels et en fait uniquement dans le cadre de la théorie des opérateurs spectraux. Signalons ici, que nous n'avons même pas réussi à prouvert que A_o ou A étant des opérateurs spectraux, et ceci pour des raisons purement techniques, la difficulté étant d'obtenir des formules simples à manipuler pour le spectre (voir par exemple les tentatives de simplification du chapitre III, toute la partie consacrée à la description détaillée du spectre de A_o).

3) Les problèmes de perturbation d'opérateurs non auto-adjoints n'on pratiquement été abordés nulle part à notre connaissance. Signalons toutefois l'article de N. LEVAN "On the Unitary subspace of a dissipative perturbation of a contraction semi-group"paru dans le "Indiana University Journal of Mathematics", de Juin 1979, où l'auteur se pose le problème, mais uniquement dans le cas de perturbation additive d'un opérateur borné; le papier contient cependant quelques erreurs (ex. : prop. 2.1).

4) Dans leur papier : "Scattering Theory for dissipative hyperbolic systems" LAX et PHILLIPS développent une théorie de Scattering pour des systèmes hyperboliques dissipatifs, mais où le système non perturbé sous-jacent est lui par contre conservatif et décrit par un groupe d'opérateurs unitaires. bien que les auteurs (cf. appendice de leur article) montrent qu'en réalité le système non perturbé est dans un certain sens "inutile" et qu'on peut développer leur théorie en n'explicitant pas le système non perturbé (dans son aspect physique concret) leur théorie ne recouvre pas notre problème. En effet, leur hypothèse fondamentale et qui fait le gros du travail dans leur théorie, à savoir :

(H) $\lim_{t\to+\infty} \|P_+^\rho T(t) f\| = 0 = \lim_{t\to+\infty} \|P_-^\rho T^*(t) f \quad \forall f \in H$, où H est l'espace de Hilbert dans lequel opèrent $T(t)$ et $T^*(t)$ du problème perturbé, est en défaut dans notre cas. En effet, dans notre problème, nous n'avons ce résultat de décroissance globale que pour f dans un certain sous-espace fermé de H.

A partir de ces quelques points, il a semblé utile de développer une théorie de Scattering raisonnable pour le cas de deux systèmes $(H_o, T_o(t))$ et $(H, T(t))$ tous deux dissipatifs. En fait on montre (et c'est l'objet du chapitre I) qu'on peut affaiblir l'hypothèse (H), ajouter en contre partie une autre hypothèse, très facile à vérifier ($D_\pm^f \subset H^1$, H^1 étant la partie unitaire de H) et développer une théorie en tous points analogue à celle de LAX-PHILLIPS. D'ailleurs, dans ce 1er chapitre, on a repris le même plan, la même numérotation des paragraphes que dans le papier de LAX-PHILLIPS. Le moyen technique indispensable a été le recours à la théorie de la dilatation des opérateurs de contraction dans un espace de Hilbert développée par Nagy-Foias dans les années soixante. Il s'avère que leur décomposition d'une contraction T en une partie unitaire et une partie complètement non unitaire (c.n.u.) est très fructueuse et en tout cas pour nous indispensable aux Chapitres I et V. En gros, le résultat auquel on aboutit est que, grâce aux hypothèses faites, on réussit à éviter la partie c.n.u. (qui concentre à elle seule la partie dissipative du phénomène physique) des deux semi-groupes.

Ce résultat a des incidences importantes sur les propriétés analytiques de la matrice de Scattering S(z) et permet même de lever une certaine ambiguité qui subsistait dans le travail de LAX-PHILLIPS quant à la caractérisation des zéros et des pôles de S(z) (voir remarque 3 p. 31 du chap. I).

Le présent travail se développe alors en résumé comme suit :
Les Chapitres II, III et IV sont consacrés au problème non perturbé.

* Au chapitre II, on commence par chercher le cadre fonctionnel qui réduit le problème aux données initiales à une équation d'évolution dans un bon espace de Hilbert H_o :
$(\frac{d}{dt} + A_o)\,\vec{u} = 0$, $\vec{u}(0)$ donné dans H_o. Pour cela on a posé $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, u_7)$ avec $\vec{u}_1 = \vec{u}(x,t)$, $\vec{u}_2 = \partial_t\, u(x,t)$ $u_7 = \theta\,(x,t)$ et avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \frac{\Delta^*}{\rho} & 0 & -\frac{\gamma}{\rho}\vec{\nabla} \\ 0 & -k\eta\,\mathrm{div} & k \end{bmatrix} \qquad A_o = \left\{ \begin{array}{l} A_o = \{ A_o\,\vec{u} = A\,\vec{u} \,, \\ D(A_o) = \{ \vec{u} \in H_o : \quad \vec{u} \in H_o \} \end{array} \right\}$$

Ici $H_o = EL(R^3;C^3) \times L_2(R^3;C^3) \times L_2(R^3;C)$.

L'opérateur A_o est alors dissipatif maximal, donc générateur d'un Co-semi-groupe de contractions $T_o(t)$ et la solution (unique) du problème de Cauchy est donnée par l'application :

$$H_o \ni u(0) \longrightarrow (T_o(t)u)\,(x) \in H_o.$$

Dans un second temps, on détermine explicitement la décomposition de $T_o(t)$ en sa partie unitaire $T_o^1(t)$ opérant dans le sous-espace H_o^1 (on des transversales mécaniques pures) et en sa partie complètement non unitaire (c.n.u.) $T_o^o(t)$ dans $H_o^o = H_o \ominus H_o^1$ (ondes longitudinales couplées avec la dissipation thermique).

* Le chapitre III est consacré à la partie complètement unitaire. On construit explicitement $T_o^o(t)$ au moyen de la transformée de Fourier, on étudie le comportement asymptotique $(t \to +\infty)$ et on détermine les propriétés spectrales du générateur infinitésimal A_o^o. En particulier, on démontre que le spectre de A_o^o est purement continu et qu'il consiste

en la réunion $K_\varepsilon = R_- \cup C_\varepsilon$ où C_ε est une courbe contenue dans le demi plan gauche.

* Au chapitre IV, on aborde le problème des conditions de radiation. Pour cela, on étend les techniques de LAX-PHILLIPS pour l'opérateur des ondes. On construit des solutions fondamentales et on donne des conditions de radiation sortante et entrante pour l'opérateur A_o. Il s'avère très utile dans ce contexte d'introduire les concepts de distribution éventuellement -t- sortante, de solution éventuellement bi-sortante de l'équation

$$(A_o - \mu)\,\vec{f} = \vec{g} \quad \text{où } \vec{g} \text{ est à support compact,}$$

de solution μ-bi-sortante de l'équation $b_\mu \ \vec{f} = \vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3; C^4)$ où b_μ est l'opérateur :

$$b_\mu \quad \begin{pmatrix} \nabla \mathrm{div} - c^2 \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} - \mu^2 I_3 & -m\vec{\nabla} \\ -\mu\ \eta\ \mathrm{div} & \Delta - \mu \end{pmatrix}$$

Ces concepts étendent les notions de distribution éventuellement sortante et de solution μ - sortante de l'équation $(\Delta - \mu^2)\ u = g \in \mathcal{E}'$ introduites par LAX-PHILLIPS dans (1) et permettent une formulation correcte des conditions de radiation et permettent de définir deux classes d'unicité pour les solutions fondamentale de l'opérateur A_o. Ces résultats étendent ceux de L. JEUTSCH (1) pour le cas $\mu = -i\omega$, $\omega \in R$.

On termine le Chapitre par une démonstration originale de certains théorèmes d'existence et d'unicité de l'équation

$$(A_o - \mu)\ \vec{f} = \vec{g} \in \mathcal{E}'$$

La même démonstration permet de démontrer des résultats analogues pour les opérateurs de l'élasticité et de Maxwell. Cette méthode permet entre autre d'avoir, sans aucun calcul, des solutions fondamentales (uniques) de ces opérateurs, connaissent uniquement celle du Laplacien.

* Le Chapitre I présente l'extension de la théorie de LAX-PHILLIPS exposée dans (3) au cas où le système non perturbé est lui-même dissipatif. On a cherché surtout à trouver des hypothèses simples à vérifier qui permettent de se ramener à peu près au plan d'attaque de LAX-PHILLIPS. Ce faisant, il appert que c'est la partie dissipative à elle seule (représentée par les parties c.n.u. de $T_o(t)$ et $T(t)$) qui est à l'origine des difficultés. En particulier, même dans le cas étudié par LAX-PHILLIPS dans (3), c'est la partie c.n.u. du semi-groupe perturbé $T(t)$ qui concentre les ambiguités et les "nouveautés" en ce qui concerne les propriétés analytiques de la matrice de scattering $\mathcal{S}(z)$ dans le demi-plan supérieur (problème des "zéro" de $\mathcal{S}(z)$ qui ne se pose pas dans le cas conservatif classique exposé dans leur monographie (1)).

* Le chapitre V présente l'application de la théorie abstraite développée au chapitre I à un problème de diffraction d'ondes thermo-élastiques par un obstacle borné. On s'est borné au cas le plus simple où on impose des conditions de Dirichlet homogènes à la frontière : $\vec{u}\big|_{\partial G} = 0$ et $\theta\big|_{\partial G} = 0$ (en fait on traite d'une façon tout à fait analogue le cas d'un obstacle isolé thermiquement : $\frac{d\theta}{dn}\Big|_{\partial G} = 0$, $\vec{u}\Big|_{\partial G} = 0$). On s'est surtout appliqué à vérifier l'applicabilité de la théorie générale à ce cas. En particulier on ne s'est pas tropétendu sur la construction de la "matrice" $\mathcal{S}(z)$; ceci représente un travail technique élémentaire et sans grande nouveauté par rapport aux constructions de LAX-PHILLIPS dans (1 et 3) et de PYZH' anov (1 et 2). Quoiqu'il en soit la méthode pour construire $\mathcal{S}(z)$ est donnée dans le chapitre I, partie D, paragraphes 3, 4 et 5. On termine le chapitre avec un théorème d'amplitude limite, qui justifie donc a priori l'étude des solutions stationnaires ramenant le problème de diffraction à un problème aux limites pour le système elliptique $b_\mu \vec{u}$; c'est ce que fait L. JENTSCH (1), dont le travail nous a servi de point de départ.

Tout au long de ce travail, on a essayé d'exposer les choses avec le plus de concision possible pour ne pas alourdir le texte et accumuler les pages; les calculs, souvent pénibles, ont néanmoins été exposés avec assez de détails pour en permettre une vérification facile : ceci a donné au texte un aspect technique, par moments assez désagréable (ex.: chap. III).

J'espère que ceci ne nuira pas exagérément à la bonne compréhension de l'ensemble. Mon souhait est que ce travail puisse susciter un intérêt accru pour une aussi belle théorie que celle du Scattering, à laquelle cet effort tente d'apporter une contribution intéressante.

Qu'il me soit permis, en conclusion, de remercier tous mes maîtres et collègues pour l'aide précieuse et multiforme qu'ils m'ont apportée, et en particulier à Monsieur le Professeur J.C. GUILLOT, dont les critiques sans complaisance ont été décisives dans l'avancement de ce travail.

CHAPITRE I

THEORIE ABSTRAITE DU SCATTERING POUR DES PHENOMES DISSIPATIFS.

A - THEORIE DE LAX-PHILLIPS POUR DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES DISSIPATIFS.

Nous donnons ici une présentation résumée des hypothèses et des résultats, sous ces hypothèses, de la théorie développée par LAX-PHILLIPS dans (LP).

1. *HYPOTHESES*

a) Il existe un système non perturbé, dont le modèle mathématique est un groupe à un paramètre d'opérateurs initaires $U_o(t)$ opérant dans un espace de Hilbert H_o.

* Il existe deux sous espaces fermés distincts (qu'on supposera souvent orthogonaux) D_+ et D_- tels que :

(i) $U_o(t)\, D_+ \subset D_+ \quad t \geq 0$

$U_o(t)\, D_- \subset D_- \quad t \leq 0$

(ii) $\bigcap_{t\geq 0} U_o(t)\, D_+ = \{0\}$ et $\bigcap_{t\leq 0} U_o(t) D_- = \{0\}$

(iii) $\overline{\bigcup_{t\leq 0} U_o(t)\, D_+} = H_o$ et $\overline{\bigcup_{t\geq 0} U_o(t)\, D_-} = H_o$

(iv) $D_+ \perp D_-$ éventuellement

(i)–(iii) : $\underline{\underline{(LP_1)}}$

* On démontre alors (d'une façon tout à fait canonique, en supposant H_o séparable) qu'il existe deux représentations $\mathcal{J}_\pm$ de H_o dans $L_2(R;N)$: $\mathcal{J}_\pm : H_o \longrightarrow L_2(R;N)$

telles que $\mathcal{J}_+ : D_+ \longrightarrow L_2(R_+;N)$

$\mathcal{J}_- : D_- \longrightarrow L_2(R_-;N)$

N est un espace de Hilbert auxiliaire donné par $N = D_+ \ominus V D_+$, ou V est le cogénérateur de $U_o(t)$. [En réalité on a $D_+ \ominus V D_+ = N$ et $D_- \ominus V^{-1} D_- = N'$, mais on identifie N et N' car unitairement isomorphes].

. De plus $\mathcal{J}_\pm U_o(t) = \tau_{\pm t} \mathcal{J}_\pm$ où $\tau_{\pm t}$ est le semi-groupe de translation à droite de $\pm t$ unités dans $L_2(R;N)$, c'est-à-dire : $\tau_{\mp t} f(s) = f(s \pm t)$ pour $f(s) \in L_2(R;N)$.

D_+ sera dit <u>sous-espace sortant</u>, D_- entrant.

J_+ : représentation de translation sortante, J_- : représentation de translation entrante. Soit F_s la transformation de Laplace-Fourier en une variable :

$$(Fk)(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} k(s)\, e^{i\sigma s}\, ds \ , \quad \sigma \in C$$

Alors D_+ devient $H_2(C^+;N)$, ensemble des fonctions analytiques dans $C^+ = \{z \in C : \text{Im } z > 0\}$, D_- devient $H_2(C^-;N)$ et $U_o(t)$ la multiplication par $e^{i\sigma t}$. Nous appellerons $F_s\, J_+$: représentation spectrale sortante et $F_s\, J_-$: représentation spectrale entrante. Notons que pour $D_+ \perp D_-$ les deux représentations (entrante et sortante) coïncident; on a alors $J = J_+ = J_-$ et $H_o = D_+ \oplus D_-$, puisque $H_o \xrightarrow{J} L_2(R;N)$.

b) <u>Il existe un système "perturbé"</u>, décrit par un Co-semi-groupe d'opérateurs de contraction dépendant d'un paramètre t, opérant dans un espace de Hilbert H, et tel que :

$$\begin{aligned} T(t)\, g &= U_o(t)\, g\ , \quad \forall\, g \in D_+^\rho \\ T^*(t) f &= U_o^*(t)\, f = U_o(-t)\, f\ , \quad \forall\, f \in D_-^\rho \end{aligned} \qquad \text{(L P 2)}$$

où $D_+^a = U_o(a)\, D_+$ et $D_-^a = U_o(-a)\, D_-$ avec $a \geq 0$.

et

$$\left\{ \begin{aligned} &\underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\ P_+^\rho\, T(t) = 0 \\ &\underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\ P_-^\rho\, T^*(t) = 0 \end{aligned} \right. \quad \text{sur tout } H \qquad \text{(L P 3)}$$

où P_+^ρ (resp. P_-^ρ) désigne la projection sur le complément orthogonal de D_+^ρ (resp. D_-^ρ). On supposera désormais que $D_+ \perp D_-$ et on posera $D^a = D_+^a \oplus D_-^a$, $a \geq 0$. <u>On notera que D^ρ appartient à $H_o \cap H$</u> .

c) <u>Il existe deux opérateurs j_o et j tels que :</u>

$$\boxed{ j_o \left\{ \begin{aligned} &1)\ H_o \to H \\ &2)\ \text{linéaire continu} \\ &3)\ j_o = I \text{ sur } D^\rho \end{aligned} \right. \quad \text{et} \quad j = \left\{ \begin{aligned} &1)\ H \to H_o \\ &2)\ \text{linéaire continu} \\ &3)\ j = I \text{ sur } D^\rho \end{aligned} \right. } \qquad \text{(L P 4)}$$

Remarque : Notons qu'alors les opérateurs $j' = \frac{j}{\|j\|}$ et $j_o' = \frac{j_o}{\|j_o\|}$ sont des contractions. Ce sont en réalité j_o' et j' qui seront utilisés par la suite, en gardant J_o et j sur D^ρ, et en prenant $J_o = J_o'$ et $j = j'$ sur les complémentaires.

En particulier, on pourra toujours prendre pour j_o(resp. j) la projection orthogonale de H_o (resp. H) sur D^ρ qui est commun à H_o et H ... Dans ce cas, on a d'ailleurs en plus $j_o = j^*$ et $j = j_o^*$) . Notons de suite que tous les résultats de la théorie sont indépendants de la réalisation concrète de j_o et j satisfaisant (L P 4).

2. *RESULTATS SOUS LES HYPOTHESES* L P 1, 2, 3, 4.

On définit alors (sur leur domaine d'existence) les opérateurs suivants :

$W_1(t) = T(t) j_o U_o(-t) : H_o \longrightarrow H$ $\qquad$ $W_1^*(t) = U_o(t)\, j_o^*\, T^*(t) : H \longrightarrow H_o$

$W_1 = \underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\, W_1(t) : H_o \longrightarrow H$ $\qquad$ $W_1^* = \underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\, W_1^*(t) : H \longrightarrow H_o$

$W_2(t) = U_o(-t)\, j T(t) : H \longrightarrow H_o$ $\qquad$ $W_2^*(t) = T^*(t)\, j^*\, U_o(t) : H_o \longrightarrow H$

$W_2 = \underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\, W_2(t) : H \longrightarrow H_o$ $\qquad$ $W_2^* = \underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\, W_2^*(t) : H_o \longrightarrow H$

Les opérateurs W seront dits opérateurs d'ondes.

$\Sigma = W_2 W_1 = \underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\, U_o(-t) j\, T(2t)\, j_o\, U_o(-t) : H_o \longrightarrow H_o$ et $\Sigma^* = W_1^*\ W_2^* : H_o \longrightarrow H_o$

Σ sera dit opérateur de Scattering, Σ^* est son adjoint. On s'intéressera surtout à Σ.

1) Sous les hypothèses (LP1-4), on démontre alors que W_1 et W_2 existent sur tout H_o et H respectivement, qu'on a en particulier :

$$W_1\, U_o(s) = T(s)\, W_1,\ W_2\, T(s) = U_o(s)\, W_2,\ W_1 = I \text{ sur } D_-^\rho \text{ et } W_2 = I \text{ sur } D_+^\rho .$$

2) On démontre que Σ existe pour tout $x \in H_o$, qu'il commute avec U_o, donc avec τ_t dans la représentation de translation; donc, dans cette représentation Σ opère comme la convolution par une distribution à valeurs opérateurs $S(s)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{J}\,\Sigma = \mathcal{S} * \mathcal{J} \text{ ,c'est-à-dire } (\mathcal{J}\,\Sigma f)(s) = (S * \mathcal{J} f)(s)$$

Dans la représentation spectrale correspondante, Σ opère comme la "multiplication" par la fonction à valeurs opérateurs :

$$\mathcal{S}(z) = \int S(s)\, e^{izs}\, ds$$ $\mathcal{S}$ (z) est appelée <u>matrice de Scattering</u>.

c'est-à-dire $(\mathcal{S}f)(z) = \mathcal{S}(z)f(z)$ $\quad f(z) \in \mathcal{A}(.;N)$

3) On construit alors S (z) pour Im z < 0 par l'intermédiaire de valeurs propres "généralisées". (dans un sens convenable) de l'opérateur A, et S (z) est un opérateur continu, analytique pour tout $z \in C_-$. ($\mathcal{A}(\mathbb{C}_-;\mathcal{L}(N))$).

4) Pour $z \in C^+$, on introduit le semi-groupe $Z(t) = P_+^\rho\, T(t)\, P_-^\rho$ opérant de $K_-^\rho = H \ominus D^\rho$ dans lui-même. Soit B son générateur infinitésimal. Alors, si $R(\lambda,B) = (\lambda I-B)^{-1}$ est méromorphe, on a :

$$\{\text{ensemble des pôles de } S(z)\} = -\, i\sigma\, (B)$$

5) En fait, il s'avère que les pôles de S (z) correspondent à des fonctions propres généralisées sortantes ($\perp D_-^\rho$) de A, que les zéros de $S(z)$ dans $\mathbb{C}^+$ correspondent à des fonctions propres ordinaires de A, en fait des fonctions propres entrantes ($\perp D_+^\rho$) de A.

6) $\sigma_c(A)$ contient toujours l'axe imaginaire, σ_p (A) est dans $\{Re\ \sigma < 0\}$ et peut aussi bien être dénombrable, que recouvrir entièrement le demi-plan $\{Re\ \sigma < 0\}$.

B - RELAXATION DE L'HYPOTHESE (L P 3).

Pour le lecteur familiarisé avec la théorie du scattering, les hypothèses (LP1) et (LP2) sont souvent très faciles à vérifier. L'hypothèse (LP4) dépend de H_o et H et le bon choix de j_o et j dépend de la réalisation concrète de ces deux espaces. En fin de compte, l'hypothèse la plus dure à satisfaire, et dont la vérification représente un gros travail technique est (LP3). Aussi allons-nous exiger un peu moins, soit :

$$(H3) = \{\text{s-lim } P_+^\rho\, T(t) = 0 \quad , \quad \text{uniquement sur} \quad \in R(W_1)\ \}$$

$$\text{et} \quad (H3)^* = \{\text{s-lim } P_-\, T^*(t) = 0 \quad , \quad \text{------------} \quad R(W_2^*)\ \}$$

où R (x) est l'image (Range) de l'opérateur x.

Bien sûr, cette hypothèse affaiblie n'est intéressante que si les sous-espaces images de W_1 et W_2^* sont accessibles et possèdent de "bonnes propriétés". Nous traiterons plus loin entièrement un exemple très intéressant qui a le mérite de s'appliquer à la théorie de la thermo-élasticité linéaire.

Rappelons alors le :

Lemme : Soit W un opérateur d'un espace de Hilbert H_o dans un autre H et tel que :

a) $||W|| \leqslant 1$.

b) $W = I$ sur un sous-espace D commun à H_o et à H .

alors :

c) W envoie $(D)^{\perp}_{H_o}$ dans $(D_H)^{\perp}$

d) $W^* = I$ sur D .

Ce lemme sera démontré à la fin du chapitre.

Conséquences du lemme

Appliqué à $W_2(t)$ et $W_1^*(t)$, le lemme donne :

$W_2(t) : (D^{\rho}_+)^{\perp}_H \longrightarrow (D^{\rho}_+)^{\perp}_{H_o}$, $W_2^*(t) = I$ sur D^{ρ}_+ , c'est-à-dire $T^*(t)\, j_o\, U_o(t) = I$ sur D^{ρ}_+

$W_1^*(t) : (D^{\rho}_-)_H \longrightarrow (D^{\rho}_-)^{\perp}_{H_o}$, $W_1(t) = I$ sur D^{ρ}_- , c'est-à-dire $T(t)\, j_o\, U_o(-t) = I$ sur D^{ρ}_-

résultats qui restent valables pour W_1, W_1^*, W_2 et W_2^* .

Théorème :

1) (LP1, LP2, LP4) entraînent que W_1 et W_2^* existent, indépendemment du choix de j, j_o. $\forall$ $h \in H_o$.

2) R (W_1) est invariant par $T(t)$; $R(W_2^*)$ est invariant par $T^*(t)$.

3) (LP1, LP2, LP4) et (H3) entraînent que W_2 existe sur $R(W_1) = W_1\, H_o$, indépendemment du choix de j, j_o; et W_1^* sur $R(W_2^*)$.

Preuve :

1) Soit f de la forme $f = U_o(s)\, k$, $k \in D^{\rho}_-$. Alors :

$W_1(t)\, f = T(t)\, j_o\, U_o(-t)\, f = T(t)\, j_o\, U_o\, (s-t)\, k$.

Pour t assez grand $(t > s)$, on a donc :

$W_1(t)\, f = T(s)\, T(t-s)\, j_o\, U_o(-(t-s))k = T(s)\, W_1(t-s)\, k = T(s)k$ indépendant de t.

Pour de tels f, on a donc $W_1\, f = T(s)\, k$. L'ensemble $\{U_o(s)\, k,\ s \in R,\ k \in D^{\rho}_-\}$ étant dense dans H_o, et étant donnée la forme explicite de $W_1\, f$ (indépendance de j_o,j) l'assertion est démontrée pour W_1... De même $f = U_o(-s)k$, $k \in D^{\rho}_+$ entraîne :

$W_2^*\, f = T^*(s)k$, d'où découle l'assertion pour W_2^* :

2) D'après ce qui précède, on a aisément : $W_2^* H_o = \overline{\bigcup_{s\geq 0} T^*(s)\, D_+^\rho}$

$W_1 H_o = \overline{\bigcup_{s\geq 0} T(s)\, D_-^\rho}$. On a alors :

$T(s)\, R(W_1) = T(s)\, W_1\, H_o = \overline{\bigcup_{S\geq 0} T(2s)\, D_-^\rho} = \overline{\bigcup_{S\geq 0} T(s)\, D_-^\rho} = R(W_1)$ et $T^*(s) R(W_2^*) = R(W_2^*)$.

3) Soit donc $f \in R(W_1)$. On décompose $T(t)\, f$ en

$T(t)\, f = d(t) + e(t)$, où $d(t) \in D_+^\rho$ et $e(t) = P_+^\rho\, T(t)\, f \perp D_+^\rho$. Alors :

$W_2(t)\, f = U_o(-t) j\, T(t)\, f = U_o(-t)\, d(t) + U_o(-t)\, j\, e(t).$

$W_2(t+s)\, f = U_o(-t-s)\, j\, T(t+s)\, f = U_o(-t-s)\, j\, T(s)\, d(t) + U_o(-t-s)\, j\, T(s)\, e(t)$

$= U_o(-t)\, W_2(s)\, d(t) + U_o(-t-s)\, j\, T(s)\, e(t)$

$= U_o(-t)\, d(t) + U_o(-t)\, W_2(s)\, e(t)$

soit $W_2(t+s)\, f - W_2(t)\, f = U_o(-t)\, [W_2(s) - Ij]\, P_+^\rho\, T(t)\, f$, donc :

$||W_2(t+s)f - W_2(t)f|| = ||(W_2(s)-Ij)\, P_+^\rho\, T(t)\, f|| \leq ||P_+^\rho\, T(t)\, f|| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

par hypothèse (H3), d'où découle l'assertion pour W_2; on opère de même pour W_1^* .

<u>*Théorème 1.3.*</u> : sous les hypothèses LP1, LP2, LP3, LP4 et (H3)

a) $W_1\, U_o(s) = T(s)\, W_1$ et $W_1 = I$ sur D_-^ρ comme $W_1(t)$.

b) $W_2\, T(s) = U_o(s)\, W_2$ sur $R(W_1)$ et $W_2 = I$ sur $D_+^\rho \cap R(W_1)$

c) $\forall\, a \geq \rho, W_1 : (D_-^a)_{H_o}^\perp \longrightarrow (D_-^a)_H^\perp$ et

$W_2 : (D_+^a)_H^\perp \cap R(W_1) \longrightarrow (D_+^a)_{H_o}^\perp$

d) Supposons $D_+ \perp D_-$ et $a \geq 0$. Alors :

$W_1 : (U_o(a)\, D_-^\rho)_{H_o}^{\perp\rho} \longrightarrow (D_+^{a+\rho})_H^\perp$ et

$W_2 : (j_o\, U_o(-a)\, D_-^\rho\,)_H^\perp \longrightarrow (U_o(-a)\, D_+^\rho\,)_{H_o}^\perp$

On a des résultats analogues avec les hypothèses LP1 234 **et** (H3)*, pour W_1^* et W_2^*

<u>*Preuve*</u> :

Pour W_1, toutes ces propriétés sont démontrées dans (LP). Pour W_2, on a :

b) Il suffit de remarquer que $R(W_1)$ est invariant par $T(t)$. On écrit alors

$\forall f \in R(W_1)$: $W_2(t)\ T\ (s)\ f = U_o(s)\ W_2(t+s)\ f$, d'où quand $t \to +\infty$:

$W_2\ T(s)\ f = U_o(s)\ W_2\ f$ c.q.f.d.

$W_2 = I$ sur $D_+^\rho \cap R(W_1)$ est immédiat.

c) Conséquence immédiate de ce qui précède et de c) du Lemme.

d) $R(W_1)$ contient D_-^ρ (en effet $f \in D_-^\rho \Rightarrow W_1(t)f = f$), d'où :

$U_o(-a)\ D_-^\rho \subset D_-^\rho \subset R(W_1)$. Donc W_2 est bien défini sur $D_-^{a+\rho}$. On a alors

$(W_2\ U_o(-a)\ D_-^\rho,\ U_o(-a)D_+^\rho)_{H_o} \overset{(b)}{=} (W_2\ T(a)\ u_o(-a)\ D_-^\rho,\ D_+^\rho)$ $(D_-^\rho,\ W_2^*\ D_+^\rho)=(D_-^\rho,\ D_+^\rho) = 0$.

Conclusion :

(LP1,2,4)$\cup$ H3 $\Rightarrow$ $\Sigma = W_2\ W_1$ existe sur tout H_o et est une contraction de H_o .

(LP1,2,4)$\cup$ $(H3)^*$ $\Rightarrow$ $\Sigma^* = W_1^*\ W_2^*$ " " " " " " " " " .

(LP1,2,4)$\cup$ H3 U $(H3)^*$ $\Rightarrow \Sigma$ et Σ^* existent. On peut alors développer le reste de la théorie (en ayant à l'esprit que $D(W_2) = R(W_1)$ et $D(W_1^*) = R(W_2^*)$).

C - THEORIE DU SCATTERING POUR CERTAINES PAIRES DE SEMI-GROUPES DE CONTRACTION.

Nous voulons comparer la comportement asymptotique ($t \to +\infty$) de deux systèmes physiques, dont le premier est décrit par un Co-semi-groupe d'opérateurs de contraction opérant dans un espace de Hilbert H_o. Ce 1er système sera dit non perturbé. Le deuxième système est lui aussi décrit par un Co-semi-groupe $T(t)$ de contractions, opérant dans un Hilbert H, et sera considéré en fait comme une "perturbation" de $T_o(t)$. Nous allons essayer de décrire une théorie de Scattering <u>raisonnable</u> pour une telle paire :

1. *Hypothèses générales.*

Soit $T_o(t) = T_o^o(t) \oplus T_o^1(t)$ la décomposition canonique de $T_o(t)$ en :

$$\left.\begin{array}{l} T_o^o(t) = \text{semi-groupe c.n.u. opérant dans le sous-espace } H_o^o \\ T_o^1(t) = \text{semi groupe unitaire opérant dans le sous-espace } H_o^1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{et } T_o^*(t)=T_o^{o*}(t) \oplus T_o^{1*}(t) \\ \text{analoguement sur } H_o^o \text{ et } H_o^1.\end{array}$$

Sur $T_o^o(t)$, nous ne supposons rien pour le moment. Sur $T_o^1(t)$, nous supposerons ce qui suit : Soit $V_o(t)$ le groupe unitaire opérant dans H_o^1 obtenu en posant :

$$V_o(t) = \begin{cases} T_o^1(t) & \text{pour} \quad t \geq 0 \\ T_o^{1*}(-t) & \text{pour} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Hypothèse H_1 : Il existe pour $(V_o(t), H_o^1)$ deux sous espaces fermés D_+ et D_- , le 1er entrant et le deuxième sortant, c'est-à-dire en termes de $T_o^1(t)$ et $T_o^{1*}(t)$:

$$\underline{\underline{(H1)}} \begin{cases} (i) & T_o^1(t)\, D_+ \subset D_+ & & T_o^{1*}(t)\, D_- \subset D_- \\ (ii) & \bigcap T_o^1(t)\, D_+ = \{0\} & \text{et} & \bigcap T_o^{1*}(t)\, D_- = \{0\} \\ (iii) & \overline{\bigcup T_o^{1*}(+t) D_+} = H_o^1 & & \overline{\bigcup T_o^1(t)\, D_-} = H_o^1 \end{cases}$$

en se rappelant que $T_o^1(t) T_o^{1*}(t) = I = T_o^{1*}(t) T_o^1(t)$

Remarque : t est ici toujours positif.

Hypothèse H2 : soit $\rho > 0$. Définissons les sous-espaces D_+^ρ et D_-^ρ par :

$$D_+^\rho = V_o(\rho)\, D_+ \qquad\qquad \begin{cases} D_+^\rho = T_o^1(\rho)\, D_+ \subset D_+ \end{cases}$$

$$D_-^\rho = V_o(-\rho) D_- \quad \text{c'est-à-dire} \quad D_-^\rho = T_o^{1*}(\rho)\, D_- \subset D_-$$

On fait alors l'hypothèse :

$$\underline{\underline{(H2)}} \begin{cases} D_+^\rho \text{ et } D_-^\rho \text{ sont communs à } H_o \text{ et } H, \text{ et on a de plus :} \\ T(t) f = V_o(t) f = T_o^1(t) f, \ \forall f \in D_+^\rho \quad \text{et} \quad T^*(t) f = V_o(-t) f = T_o^{1*}(t) f \ \forall f \in D_-^\rho \end{cases}$$

Cette hypothèse permet donc tout de suite d'affirmer que :

$$\begin{cases} T(t)\, D_+^\rho \subset D_+^\rho \quad \text{et} \quad T^*(t)\, D_-^\rho \subset D_-^\rho \\ \bigcap_t T(t)\, D_+^\rho = \{0\} \quad \text{et} \quad \bigcap_t T^*(t)\, D_-^\rho = \{0\} \end{cases}$$

$\underline{\underline{(H4)}}$: il existe j_o et j opérateurs linéaires ayant les mêmes propriétés que précédemment .

Nous définissons alors, en analogie avec ce qui se fait pour les groupes les opérateurs suivants sur leur domaine d'existence (qui reste bien sûr à définir) :

Opérateur d'onde W_1 :

Soit $W_1(t) = T(t)\, j_o\, T_o^*(t) : H_o \longrightarrow H$ et P_o^o, P_o^1, les projections de H_o sur H_o^o et H_o^1 resp. $h \in H_o \Rightarrow W_1(t)\, h = T(t)\, j_o\, T_o^*(t)\ [P_o^o\, h + P_o^1\, h\ ]$

$$= T(t)\, j_o\, T_o^{o*}(t)\, P_o^o\, h + T(t)\, j_o\, T_o^{1*}(t) P_o^1\, h$$

On pose alors $\begin{cases} W_1^o(t) = T(t)\ j_o\ T_o^{o*}(t)\ P_o^o & : H_o \longrightarrow H \\ W_1^1(t) = T(t)\ j_o\ T_o^{1*}(t)\ P_o^1 & : H_o \longrightarrow H \end{cases}$

et $\left.\begin{cases} \tilde{W}_1^o(t) = T(t)\ j_o\ T_o^{o*} & : H_o^o \longrightarrow H \\ \tilde{W}_1^1(t) = T(t)\ j_o\ T_o^{1*} & ; H_o^1 \longrightarrow H \end{cases}\right\}$ alors : $\begin{cases} W_1^o(t) = \tilde{W}_1^o(t)\ P_o^o \\ W_1^1(t) = \tilde{W}_1^1(t)\ P_o^1 \end{cases}$

On définit alors (quand ils existent) les opérateurs $W = \underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\ W(t)$, soit :

$$W_1 = \underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\ W_1(t) = \text{s-lim}\ W_1^o(t) + \text{s-lim}\ W_1^1(t) = W_1^o + W_1^1$$

$$W_1^o = \underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\ \tilde{W}_1^o(t)\ P_o^o = \tilde{W}_1^o\ P_o^o \quad \text{et} \quad W_1^1 = \text{s-lim}\ \tilde{W}_1^1(t)\ P_o^1 = \tilde{W}_1^1\ P_o^1$$

Donc, on a :

$$\boxed{W_1 = \tilde{W}_1^o\ P_o^o + \tilde{W}_1^1\ P_o^1} \quad \text{ou } W_1 = \tilde{W}_1^o \oplus \tilde{W}_1^1\text{, avec } \begin{cases} \tilde{W}_1^o : H_o^o \longrightarrow H \\ \tilde{W}_1^1 : H_o^1 \longrightarrow H \end{cases}$$

<u>Opérateur d'onde W_2</u> :

$$\text{Soit } W_2(t) = T_o^*(t)\ j\ T(t) : H \longrightarrow H_o$$

$$W_2(t) = T_o^{o*}(t)\ P_o^o\ j\ T(t) + T_o^{1*}(t)\ P_o^1\ j\ T(t)$$

$$= W_2^o(t) + W_2^1(t)$$

avec $W_2^o(t) : H \longrightarrow H_o^o$ et $W_2^1(t) : H \longrightarrow H_o^1$. Et on a alors avec $W_2 = \text{s-lim}\ W_2(t)$:

$$W_2 = W_2^o + W_2^1 \text{ avec } \begin{cases} W_2^o = \text{s-lim}\ T^{o*}(t)\ P_o^o\ j\ T(t) : H \longrightarrow H_o^o \\ W_2^1 = \text{s-lim}\ T_o^{1*}(t)\ P_o^1\ j\ T(t) : H \longrightarrow H_o^1 \end{cases}$$

<u>Opérateur de Scattering Σ</u> :

$$\text{On pose } \Sigma = W_2\ W_1 = (W_2^o + W_2^1)\ (\tilde{W}_1^o\ P_o^o + \tilde{W}_1^1\ P_o^1) : H_o \longrightarrow H_o$$

$$= \Sigma_o \oplus \Sigma_1 \iff \Sigma h = \Sigma_o h_o + \Sigma_1\ h_1 \text{ où } h = h_o \oplus h_1 .$$

$\Sigma_o : H_o^o \longrightarrow H_o$ et $\Sigma_1 : H_o^1 \longrightarrow H_o$, $\Sigma_o = W_2\ \tilde{W}_1^o$, $\Sigma_1 = W_2\ \tilde{W}_1^1$

On définit alors :

$\Sigma_o^o = W_2^o\ \tilde{W}_1^o : H_o^o \longrightarrow H \longrightarrow H_o^o$ $\qquad \Sigma_o^1 = W_2^1\ \tilde{W}_1^o : H_o^o \longrightarrow H \longrightarrow H_o^1$

$\Sigma_1^o = W_2^o\ \tilde{W}_1^1 : H_o^1 \longrightarrow H \longrightarrow H_o^o$ $\qquad \Sigma_1^1 = W_2^1\ \tilde{W}_1^1 : H_o^1 \longrightarrow H \longrightarrow H_o^1$

Opérateur d'onde W_1^*

$$W_1^* = \text{s-lim } W_1^*(t) = \text{s-lim } T_o(t)\ j_o^*\ T^*(t) = W_1^{*o} + W_2^{*1} \ : H \longrightarrow H_o$$

$$W_1^{*o} = \text{s-lim } T_o(t)\ P_o^o\ j_o^*\ T^*(t) = \text{s-lim } T_o^o(t)\ P_o^o\ j_o^*\ T^*(t)$$

$$= \text{s-lim } (T(t)\ j_o\ P_o^o\ T_o^o(t))^* = \text{s-lim}(T(t)\ j_o\ T_o^o(t))^*$$

$$= \text{s-lim } [\tilde{W}_1^o(t)]^* = (\tilde{W}_1^o)^+ \ : H \longrightarrow H_o^o$$

$$W_2^{*1} = \text{s-lim } T_o(t)\ P_o^1\ j_o^*\ T^+(t) = \text{s-lim } T_o^1(t)\ P_o^1\ j_o^*\ T^*(t) = (\tilde{W}_1^1)^* \ : H \longrightarrow H_o^1$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{W_1^* = W_1^{*o} + W_2^{*1} = (W_1^o)^* + (W_1^1)^*}$$

Opérateur d'onde W_2^*

$$W_2^* = \text{s-lim } W_2^*(t) = \text{s-lim } T^*(t)\ j^*\ T_o(t) = W_2^{*o} + W_2^{*1} \quad : H_o \longrightarrow H \text{ avec :}$$

$$W_2^{*o} = \text{s-lim } T^*(t)\ j^*\ T_o^o(t)\ P_o^o = W_2^{*o}\ P^o \quad : H_o \longrightarrow H$$

$$W_2^{*o} = \text{s-lim } T^*(t)\ j^*\ T_o^o(t) = (W_2^o)^* \ : H_o^o \longrightarrow H$$

$$W_2^{*1} = \text{s-lim } T^*(t)\ j^*\ T_o^1(t)\ P_o^1 = W_2^{*1}\ P_o^1 \quad : H_o \longrightarrow H$$

$$W_2^{*1} = \text{s-lim } T^*(t)\ j^*\ T_o^1(t) = \text{s-lim } T^*(t)\ j^*\ P_o^1\ T_o^1(t) = \text{s-lim}(T_o^{1*}(t) P_o^1\ j\ T(t))^*$$

$$= (W_2^1)^* \ : H_o^1 \longrightarrow H$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{W_2^* = W_2^{*o} + W_2^{*1} = W_2^{*o}\ P_o^o + W_2^{*1}\ P_o^1 = (W_2^o)^* + (W_2^1)^*}$$

Opérateur de Scattering : Σ^*

$$\Sigma^* = W_1^*\ W_2^* = (\Sigma^*)_o + (\Sigma^*)_1 \ : H_o \longrightarrow H_o$$

$$(\Sigma^*)_o = W_1^{*o}\ W_2^* = (\tilde{W}_1^o)^*\ W_2^* = (W_2\ W_1^o)^* = (\Sigma_o)^* \quad : H_o \longrightarrow H_o^o$$

$$(\Sigma^*)_1 = W_1^{*1}\ W_2^* = (W_1^1)^*\ W_2^* = (W_2\ W_1^1)^* = (\Sigma_1)^* \quad : H_o \longrightarrow H_o^1$$

De même, on aura :

$$(\Sigma^*)_o^1 = W_1^{*o}\ \tilde{W}_2^{*1} = (\tilde{W}_1^o)^*\ (W_2^1)^* = (W_2^1\ \tilde{W}_1^o)^* = (\Sigma_o^1)^* \ : H_o^1 \longrightarrow H \longrightarrow H_o^o$$

$$(\Sigma^*)_o^o = W_1^{*o}\ \tilde{W}_2^{*o} = (W_1^o)^*\ (W_2^o)^* = (W_2^o\ W_1^o)^* = (\Sigma_o^o)^* \ : H_o^o \longrightarrow H \longrightarrow H_o^o$$

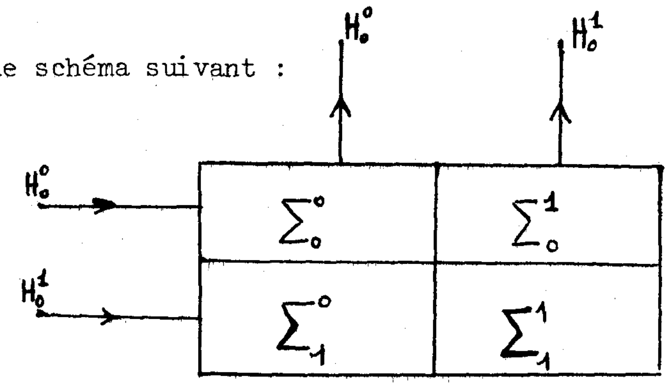
$$(\Sigma^*)_1^o = W_1^{*1}\ W_2^{*o} = (\tilde{W}_1^1)^*\ (W_2^1)^* = (W_2^1\ \tilde{W}_1^1)^* = (\Sigma_1^o)^* \ : H_o^o \longrightarrow H \longrightarrow H_o^1$$

$$(\Sigma^*)_1^1 = W_1^{*1}\ \tilde{W}_2^{*1} = (\tilde{W}_1^1)^*\ (W_2^1)^* = (W_2^1\ \tilde{W}_1^1)^* = (\Sigma_1^1)^* \quad : H_o^1 \longrightarrow H \longrightarrow\!\!> H_o^1$$

on a aussi :

$$\Sigma^* = \left[(\Sigma^*)_o^o + (\Sigma^*)_o^1\right] \oplus \left[(\Sigma^*)_1^o + (\Sigma^*)_1^1\right] = (\Sigma_o)^* \oplus (\Sigma_1)^*$$

On peut résumer dans le schéma suivant :



La théorie de Scattering (en gros existence et propriétés des opérateurs W_1 W_2, Σ et des adjoints) qu'on voudrait ainsi développer est extrêmement générale, mais nous renonçons pour le moment à le faire. Nous allons plutôt voir des cas concrets où on peut conclure assez rapidement en se ramenant à la théorie développée par LAX-PHILIPS dans (LP).

Pour cela nous faisons d'abord l'hypothèse suivante :

$$\underline{\underline{(H5)}}\quad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{u}\text{-}\lim T_o^o(t) = 0 \\ \mathbf{u}\text{-}\lim T_o^{o*}(t) = 0 \end{array}\right]^{(*)},$$

Nous avons alors la proposition :

Proposition : Sous l'hypothèse supplémentaire (H5), la théorie du Scattering ci-dessus se ramène à faire la théorie de LAX-PHILLIPS pour le couple $\{V_o(t), T(t)\}$.

Preuve : En effet :

$||\tilde{W}_1^o(t)h\,|| = ||T(t)\; j_o\; T_o^{o*}(t)h|| \leq ||T_o^{o*}(t)h\,||$, d'où $||\tilde{W}_1^o(t)h|| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc $\boxed{\tilde{W}_1^o = 0}$

et alors $\Sigma_o^o = \Sigma_o^1 = 0$.

D'autre part $||W_2^o(t)h|| = ||T_o^{o*}(t)\; P_o^o\; j\; T(t)|| = ||T_o^{o*}(t)k(t)|| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$,

car $k(t) \in H_o^o\ \forall\ t$, d'où $W_2^o = 0$ et donc $\Sigma_1^o = 0$.

On a donc en définitive :

$$\Sigma = 0 \oplus \Sigma_1^1 \quad \text{où} \quad \Sigma_1^1 = W_2^1\,\tilde{W}_1^1 : H_o^1 \longrightarrow H \longrightarrow H_o^1$$

On a donc à déterminer uniquement Σ_1^1 . Nous voyons en fait que $\tilde{W}_1^1$, W_2^1 et

---

(*): Limite uniforme.

Σ_1^1 sont respectivement les opérateurs d'onde et de Scattering pour le couple $[(V_o(t), H_o^1); (T(t),H)]$. cqfd

⟶ Soit alors $T(t) = T^o(t) \oplus T^1(t)$ la décomposition canonique de $T(t)$, et $T^*(t) = T^{o*}(t) \oplus T^{1*}(t)$ celle de $T^*(t)$.

$T^o(t) = T(t)|_{H^o}$ = **contraction c.n.u.** et de même **pour** $T^{o*}(t) = T^*(t)|_{H^o}$

$T^1(t) = T(t)|_{H^1}$ = semi-groupe d'opérateurs unitaires et de même pour

$$T^{1*}(t) = T^*(t)|_{H^1} .$$

$$H = H^o \oplus H^1$$

<u>Nous allons maintenant faire les hypothèses suivantes</u> :

(H1) déjà vu
(H2) " " $\qquad$ ($\mathcal{H}$)
(H4) " "
(H5)
(H6) $R(\tilde{W}_1^1) = \tilde{W}_1^1 H_o^1 \subset H^1$ $\qquad$ (H6)* $R(\tilde{W}_2^{1*}) = W_2^{1*} H_o^1 \subset H^1$
(H7) $\underset{t\to+\infty}{\text{-lim}} P_+^\rho T(t)f = 0 \ \forall f \in R(\tilde{W}_1^1)$ seulement
(H7)* $\underset{t\to+\infty}{\text{-lim}} P_-^\rho T^*(t) f = 0 \ \forall f \in R(W_2^{1*})$seulement.

En somme, à part l'hypothèse (H5) qui permet de se ramener au cas (LP), on affaiblit l'hypothèse (LP4) en remplaçant par (H7), mais on renforce par l'hypothèse supplémentaire (H6).

A propos de l'hypothèse (H6), nous pouvons tout de suite énoncer le :

Lemme : 1) (H6) $\Leftrightarrow$ $j_o D_-^\rho = D_-^\rho \subset H^1$

2) $j_o H_o^1 \subset H^1 \Rightarrow$ (H6).

et

1)* (H6)* $\Leftrightarrow j_o^* D_+ = D_+^\rho = D_+^\rho \subset H^1$

2)* $j_o H_o^1 \subset H^1 \Rightarrow$ (H6)*

Preuve :

1) (H6) $\Rightarrow D_-^\rho \subset H^1$: oui car $R(\tilde{W}_1^1) = \overline{\underset{s\geq 0}{\cup} T(s) D_-^\rho}$. En fait pour $k \in D_-^\rho$ on a carrément $\tilde{W}_1^1 k = k$.

$D_-^\rho \subset H^1 \Rightarrow$ (H6) : oui car alors $R(\tilde{W}_1^1) = \overline{\underset{S\geq 0}{\cup} T^1(s) D_-^\rho} \subset H^1$

2) $j_o H_o^1 \subset H^1 \Rightarrow$ (H6) :

$j_o H_o^1 \subset H^1$ <u>entraîne</u> en particulier que D_-^ρ et D_+^ρ sont dans H^1; alors $D_-^\rho \subset H^1 \Rightarrow$ (H6)

1)* $R(\tilde{W}_2^{1*}) = \cup T^*(s) D_+^\rho$ $\qquad$ 2)* $j_o H_o^1 \subset H^1 \Rightarrow D_+^\rho \subset H^1$ $\qquad$ cqfd

Remarque 1

L'hypothèse (H5) nécessite souvent une majoration du type $||T_o^o(t)h|| \leq f(t)||h|| \; \forall \; h \in H_o^o$, où $f(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Ce qui exige souvent que le spectre de A_o^o soit dans un demi-plan $\mathrm{Re}\, z \leq k < 0$. Nous allons en fait, en utilisant maintenant en plus H6 et H7, affaiblir considérablement (H5) et la remplacer par :

$$\boxed{(\bar{H5}) \; : \; S\text{-}\lim T_o^o = S\text{-}\lim T_o^{o*}(t) = 0}$$

Proposition bis : Sous les hypothèses H $123\bar{4}\bar{5}$ 6 6^* 7 7^* on a :

1) L'opérateur d'onde $\tilde{W}_1^o$ existe pour tout $h \in H_o^o$ et en fait $\tilde{W}_1^o \, h = 0$; d'où $\Sigma_o^o = \Sigma_o^1 = 0$.

2) L'opérateur d'onde W_2^o existe pour tout $g \in H^1$ et on a :

$$W_2^o \, g = 0 \quad \forall \; y \in H^1 \; ; \text{d'où} \quad \Sigma_1^o = 0 .$$

3) La théorie du Scattering pour le couple $\{T_o(t), T(t)\}$ se ramène à la théorie de LAX-PHILLIPS pour le couple $\{V_o(t), T(t)\}$.

Preuve

1) On a exactement la même démonstration que pour la proposition précédente où la u-convergence n'avait pas servi. En effet :

$$||\tilde{W}_1^o(t)h|| = ||T(t)p_o \; T_o^{o*}(t)h|| \leq ||T_o^{o*}(t)h|| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ , puisque } S\text{-}\lim T_o^{o*}(t) = 0 ,$$

d'où $\tilde{W}_1^o = 0$.

2) Soit $g \in H^1$; alors :

$T(t) \, g = T^1(t) \, g = P_+^\rho \, T^1(t) \, g + (1-P_+^\rho)T^1(t) \, g$ où $(1-P_+^\rho) \, T^1(t) \, g \in D_+^\rho$

et $W_2^o(t) \, g = T_o^{o*}(t) \, P_o^o \, j \, P_+^\rho \, T^1(t) \, g + T_o^{o*}(t) \, P_o^o \, j \, (1-P_+) \, T_1(t) \, g$

mais $j = I$ sur $D_\pm^\rho$ et $P_o^o = 0$ sur D_+^ρ , d'où $T_o^{o*}(t) \, P_o^o \, j(1-P_+^\rho) \, T^1(t) \, g \equiv 0$.

On a donc seulement :

$$||W_2^o(t) \, g|| = ||T_o^{o*}(t) \, P_o^o \, j \, P_+^\rho \, T^1(t) \, g|| \leq ||P_+^\rho \, T^1(t) \, g|| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ par (H7).}$$

D'où $W_2^o \, g = 0 \quad \forall \; g \in H^1$.

En particulier : $\Sigma_1^o = W_2^o \, \tilde{W}_1^1 \equiv 0$ puisque $R(\tilde{W}_1^1) \subset H^1$ par (H6).

Remarques 2 :

1)La réciproque de 2) est en général fausse; notons en passant que la condition $j_o H_o^1 \subset H^1$ est beaucoup plus forte que $D_-^\rho \subset H^1$ (il y a en plus $D_+^\rho \subset H^1$). Elle permet beaucoup de simplifications dans la théorie, mais est trop restrictive. Dans ce qui suit nous développons complètement la théorie sous les hypothèses $(H_1 \ldots 7)^{1)}$. Nous mentionnons d'abord que les hypothèses sur $V_o(t)$ entraînent [d'une façon canonique, comme dans LAX-PHILLIPS (1)] l'existence de deux transformations unitaires $J_\pm$ de H_o^1 dans $L_2(R;N^1)$, N^1 étant un espace de Hilbert déterminé à une transformation unitaire près.

2) On a en fait : $\tilde{W}_1^1 = \operatorname{S-Lim}_{t\to+\infty} T^1(t)P^1 \not{j}_o\, T_o^{1*}(t)$, où P^1 est la projection de H sur H^1.

D - THEORIE ABSTRAITE SOUS LES HYPOTHESES (H)

1. *OPERATEURS D'ONDES-OPERATEUR DE SCATTERING.*

Théorème 1.1.

Sous les hypothèses (H), on a :

a) $\tilde{W}_1^1$ existe sur tout H_o^1, est un opérateur de H_o^1 dans H^1, et $R(\tilde{W}_1^1) = \overline{\bigcup_{s\geq 0} T^1(s)D_-^\rho}$

b) W_2^1 existe sur $R(\tilde{W}_1^1) \subset H^1$. En général, il n'existe pas sur $H \ominus R(\tilde{W}_1^1) \supset H^o$.

c) $T_o^1(t)$ et $T^1(t)$ sont commutés par $\tilde{W}_1^1$ et W_2^1 , c'est-à-dire :

$$\tilde{W}_1^1\, T_o^1(s) = T^1(s)\, \tilde{W}_1^1 \quad \text{et} \quad W_2^1\, T^1(s) = T_o^1(s)\, W_2^1$$

d) $\tilde{W}_1^1 = I$ sur D_-^ρ et $W_2^1 = I$ sur $D_+^\rho \cap R(\tilde{W}_1^1) \subset D_+^\rho \cap H^1 = D_+^\rho$

e) Soit $a > \rho$. $\tilde{W}_1^1$ envoie $(D_-^a)^\perp_{H_o^1}$ dans $(D_-^a)^\perp_{H^1}$

$$\text{et } W_2^1 : (D_+^a)^\perp_{H^1} \cap R(\tilde{W}_1^1) \longrightarrow (D_+^a)^\perp_{H_o^1}$$

f) Si $D_-^\rho \perp D_+^\rho$, alors $\forall\, a \geq 0$:

$$\tilde{W}_1^1 : T_o^1(a)\, D_-^\rho \longrightarrow (D_+^{a+\rho})^\perp_{H^1} \quad \text{et} \quad W_2^1 : D^{a+\rho} \longrightarrow (T_o^{1*}(a)\, D_+^\rho)^\perp_{H_o}$$

Preuve : Tous ces résultats sont une simple "réécriture" du Th.1.3 du paragraphe B; il suffit de remarquer que $D_\pm^\rho$ est dans H^1, que $T(s)|_{H^1} = T^1(s)$ etc.

(1) $H_1 \ldots 7$ veut dire (H 1 2 4 567) U(H6)* U(H7)*, c'est-à-dire (H).

Théorème 1.2.

a) $\Sigma = W_2 \tilde{W}_1^1$ existe et commute avec T_o^1 : $T_o^1(s)\ \Sigma = \Sigma\ T_o^1(s)$

b) $\Sigma - I : D_-^\rho \longrightarrow (D_+^\rho)^\perp_{H_o^1}$

c) Si on a $D_-^\rho \perp D_+^\rho$, alors $\Sigma : D_-^\rho \longrightarrow (D_+^\rho)^\perp_{H_o^1}$

Preuve :

a) Conséquence immédiate des relations de commutation du th. 1.1.

b) Soit $f \in D_-^\rho$, alors $\tilde{W}_1^1\ f = f = d + e$ où $d \in D_+^\rho$ et $e \perp D_+^\rho$, d'où

$Sf-f = (W_2^1-I)(d+e) = (W_2^1-I)e$, et ceci, d'après e) du th. 11., est orthogonal à D_+^ρ dans H_o^1 .

c) Corollaire de b, puisque $D_-^\rho \subset (D_+^\rho)^{-}_{H_o^1}$

Nous supposons dorénavant que $D_+^\rho \perp D_-^\rho$ ($\Rightarrow \mathcal{J}_+ = \mathcal{J}$).

2. EXTENSIONS DES ESPACES H_o ET H .

Les fonctions de la forme $e^{-izs}\ n$, $n \in N^1$ s'avèrent (voir paragraphe 3 et suite) jouer un rôle primordial dans la définition et la construction de $S(z)$; malheureusement on voit qu'ils n'appartiennent pas à H_o (ils y sont localement). Aussi va-t-on étendre H_o et H afin de les y inclure et pouvoir en faire usage.

2.1. $\bar{H}_o = H_o^o \oplus \overline{H_o^1}$

On définit $\bar{H}_o^1 = L_{2,Loc}(R;N^1)$ qui est donc une extension de $L_2(R;N^1)$. $\mathcal{J}$ étant unitaire, nous identifions H_o avec $L_2(R;N^1)$, et disons que $\bar{H}_o = H_o^o \oplus \bar{H}_o^1$ est une extension de H_o .

$\bar{T}_o^1(t)$: opérateur de translation à droite dans $\bar{H}_o^1$, donc $\bar{T}_o^1(t) \supset T_o^1(t)$, ce qui fait de $\bar{T}_o(t) = T_o^o(t) \oplus \bar{T}_o^1(t)$ une extension de $T_o(t)$; le $\oplus$ ici signifie somme directe d'espaces vectoriels, sans notions d'orthogonalité...

$\bar{A}_o^1 : -\partial_s$ et $D(\bar{A}_o^1) = \{f(s) \in \bar{H}_o^1 : \partial_s\ f \in L_{2,Loc}(R;N^1)\}$. Donc $\bar{A}_o^1 \supset A_o^1$ et

$\bar{A}_o = A_o^o \oplus \bar{A}_o^1 \supset A_o$.

P_+^a , P_-^a : respectivement multiplication par la fonction caractéristique de $R_- + a$ et $R_+ - a$.

* En fait, on se contentera d'une extension unilatérale de H_o^1. On pose :

$\bar{H}_o^{1'} = L_2[(a, +\infty);N^1]$, a réel arbitraire $\quad (\Rightarrow \bar{H}_o' = H_o^o \oplus \bar{H}_o^{1'} \supset H_o)$

$\bar{H}_o^{1'}$ est un espace de Fréchet avec comme semi-normes $s_a(f) = \int_a^{+\infty} ||f(s)||^2_{N^1} ds$;

c'est-à-dire que $\{f_n\} \to f \iff f_n \longrightarrow f$ dans chaque $L_2\ [(a,+\infty);\ N^1]$ (pour tout a)

On gardera les mêmes notations pour les restrictions de $\bar{T}_o^1(t)$, $\bar{A}_o$ et on a $H_o' = H_o^o \oplus \bar{H}_o^{1'}$

2.2. $\bar{H} = H^o \oplus \bar{H}^1$

On écrit d'abord $H^1 = D_-^a \oplus D_+^a$, $a > \rho$, puisqu'on sait que $D_{\pm}^a \subset H^1$.

On pose : $\bar{D}_+^a = L_{2,Loc}(R_+ + a;N^1)$, $\bar{D}_-^a = L_{2,Loc}(R_- -a;N^1)$ et on définit alors :

$$\left.\begin{array}{l} \bar{H}^1 = \bar{D}_-^a \oplus K_a^1 \oplus \bar{D}_+^a \\ \bar{H}^{1'} = \bar{D}_-^a \oplus K_a^1 \oplus D_+^a \end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} \bar{H} = H^o \oplus \bar{H}^1 \\ \bar{H}' = H^o \oplus \bar{H}^{1'} \end{array}\right.$$

On voit facilement que ces extensions sont indépendantes de a.

* P_+^a : annule la composante dans $\bar{D}_+^a$ et égale l'identité dans $K^a \oplus \bar{D}_-^a$; analogue pour P_-^a

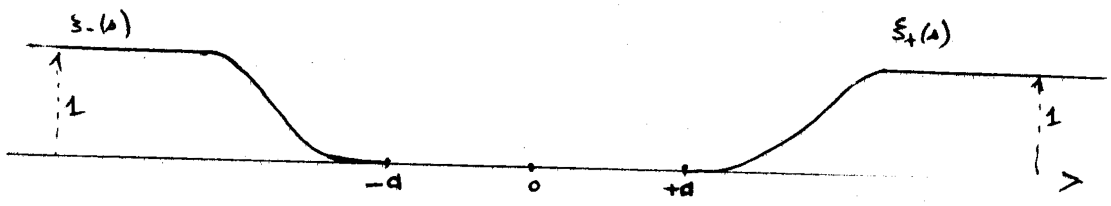
* $\bar{T}^1(t)$: . sur $\bar{D}_+^a$ sera la translation à droite.

  . sur $\bar{D}_-^a$ " " " " si $a \geq \rho+t$, toujours réalisable vu que a est arbitraire.

  .. sur K_a : pareil qu'avant, c'est-à-dire $T^1(t) : K_a^1 \longrightarrow K_a^1 \oplus (D_+^a \ominus D_t^{a+t})$

* $\bar{T}^{1*}(t)$: analogue.

* $\bar{A}_1$: soit $f \in \bar{H}^1$. Alors $f = f_- + k + f_+$ suivant la décomposition de $\bar{H}^1$. Soient alors $\xi_-(s)$ et $\xi_+(s)$ deux fonctions C^∞ définies sur $(-\infty,-a)$ et $(a,+\infty)$ respectivement, s'annulant au voisinage de a et -a respectivement et égale à 1 au voisinage de $\pm\infty$ respectivement.



On a alors :

$$f = \xi_- \, f_- + \left[(1-\xi_-) \, f_- + k + (1 - \xi_+) \, f_+ \right] + \xi_+ \, f_+$$

Le crochet appartient à H^1, donc $A[.]$ est bien déterminé. Sur les composantes extrêmes $\bar{A}^1$ agit comme $\bar{A}^1_o$, donc sera $-\partial_s$. On dira que $f \in \bar{H}^1$ est dans $D(\bar{A}^1)$ si $k \in D(A^1)$ et f_- et f_+ sont localement L_2 et ceci définit donc une extension $\bar{A} = A^o \oplus \bar{A}^1$ de A.

* $\bar{\tilde{W}}^1_1$: $\tilde{W}^1_1 = I$ sur D^a_-, on étendra donc par $\bar{\tilde{W}}^1_1 = I$ sur $\bar{D}^a_-$, $\tilde{W}^1_1$ restant le même sur K^a_1. On étend ainsi $\bar{\tilde{W}}^1_1$ comme opérateur $\bar{\tilde{W}}_1 : \bar{H}^1_o \longrightarrow \bar{H}^1$.

* $\bar{W}^1_2$:

  . Sur $\bar{D}^a_+$, on gardera encore $\bar{W}^1_2 = I$

  . Sur $\bar{D}^a_-$: soit $f \in \bar{D}^a_-$; on décompose en $f = \sum_j f_j$ où $f_j \in L_2$ et $\operatorname{supp} f_j \subset [-j-1, -j+1]$.

  On pose $\bar{W}^1_2 \, f = \sum_j W^1_2 \, f_j$. Comme supp. $W^1_2 \, f_j \subset \{s \leqslant -j + 1 + 2\rho\}$, la somme définissant $\bar{W}^1_2$ est localement finie, et définit donc sans ambiguité une fonction localement L_2.

  Ainsi on définit bien $\bar{W}^1_2 : \bar{H}^1 \longrightarrow \bar{H}^1_o$.

* $\bar{\Sigma} = \bar{W}^1_2 \; \bar{\tilde{W}}^1_1$, donc $\bar{\Sigma} : \bar{H}^{1\prime}_o \longrightarrow \bar{H}^{1\prime}_o$.

Toutes ces extensions gardent les propriétés déjà citées pour les opérateurs de départ. En particulier : $\bar{\Sigma}$ commute avec $\bar{T}^1_o(t)$, $\bar{\Sigma}$ est causal, c'est-à-dire : les valeurs de f à $s \leqslant a$ n'influencent pas les valeurs de $\bar{\Sigma} f$ à $s > a + 2\rho$ (par exemple $\bar{\Sigma}(P^{2\rho}_- \; f) = P^o_- \; \bar{\Sigma} f$)

3. *CONSTRUCTION DE* $S(z)$ *POUR* $\operatorname{Im} z < 0$ $(\operatorname{Re} iz > 0)$

Soit e_o l'élément de $\bar{H}_o^{1\prime}$ défini par :

$J\, e_o = e^{-izs}\, n$, $\operatorname{Im} z < 0$, n élément de N^1; $e_o \in \bar{H}_o^{1\prime}$, donc $e_1 = \bar{\Sigma}\, e_o$ est bien défini et appartient à $\bar{H}_o^{1\prime}$.

e_o est une fonction propre de $\bar{T}_o^1(t)$: $\bar{T}_o^1(t)\, e_o = \tau_t\, Je_o = e^{-iz(s-t)}\, n = e^{izt}\, e_o$.
De plus : $\bar{T}_o^1(t)\, e_1 = \bar{T}_o^1(t)\, \bar{\Sigma}\, e_o = \bar{\Sigma}\, \bar{T}_o^1(t)\, e_o = e^{izt}\, \bar{\Sigma}\, e_o = e^{izt}\, e_1$, donc, étant ainsi fonction propre de $\bar{T}_o^1(t)$ $\quad J\, e_1 = J\, \Sigma\, e_o = e^{Jizs}\, m$ où $m = m(z,n) \in N^1$
m dépend linéairement de n, on peut donc poser :

$m = S\,(z)\, n$ où $S\,(z)$ est une fonction à valeur opérateurs de N^1 dans N^1.
$S\,(z)$ est appelée matrice de Scattering. On a alors le théorème.:

<u>*Théorème 3.1.*</u>

a) Pour tout $z \in C^- = (\operatorname{Im} z < 0)$, $S\,(z)$ est un opérateur borné dans $N^1((S(z) \in B(N^1))$
$||S(z)|| \leq e^{2\rho|\operatorname{Im} z|}$

b) $S\,(z)$ est analytique dans C^-.

c) Pour tout $f \in H_o^1$ et qui est représenté par une fonction à support dans R_- , $\Sigma\, f = g$ est représenté par une fonction à support dans $R_- + 2\rho$. Cependant f et g ont tous les deux des représentants spectraux qui possèdent des prolongements analytiques dans C^-; ces prolongements $\tilde{f}(z)$ et $\tilde{g}(z)$ sont encore liés par $S(z)\, \tilde{f}(z) = \tilde{g}(z)$.

<u>*Preuve*</u> :

a) $\bar{\Sigma}\,(P_-^{2\rho}\, f) = P_-^o\, \bar{\Sigma}\, f$ par causalité, d'où $\Sigma\,(P_-^{2\rho} e_o) = P_-^o\, \bar{\Sigma}\, e_o = P_-^o\, e_1$.
$||P_-^o\, e_1|| = ||m||/(2\, |\operatorname{Im} z|)^{1/2} \leq ||P_-^{2\rho} e_o|| = \left[||n||/(2\operatorname{Im} z)\right]^{1/2} \quad e^{2\rho|\operatorname{Im} z|}$ cqfd

(remarquer que $||P^o\, e_1|| \leq ||\, \Sigma\, P_-^{2\rho}\, e_o|| \leq ||P_-^{2\rho}\, e_o||$, puisque Σ est une contraction dans H_o^1 et que $P_-^o\, e_1$, $P_-^{2\rho}\, e_o$ appartiennent à H_o^1, d'où légitimité de l'utilisation des normes et de Σ à la place de $\bar{\Sigma}$).

b) soit $h = p(s)k$, $k \in N^1$ et $p(s)$ continue, réelle, supp $p(s) \subset R_+$ et compact, donc $h \in H_o^1$. On a :

$$(\Sigma P_-^{2\rho} e_o, h)_{H_o^1} \overset{(1)}{=} (e_1, h)_{H_o^1} = (e^{-izs} S(z)n, p(s)k)_{H_o^1} = \int_0^{+\infty} (S(z)n,k)_{N^1} p(s)\, e^{-izs}\, ds =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (S(z)n,k)_{N^1} p(s)\, e^{-izs}\, ds$$

$= (S(z)n,k)_{N^1} \tilde{p}(-z)$, où $p(z)$ est la transformée de Fourier de $p(s)$.

$= (P_-^{2\rho} e_o, \Sigma^* h)$ qui dépend analytiquement de z, donc $S(z)$ est faiblement d'où fortement analytique.

c) Σ commute avec $T_o^1(t)$. Dans la représentation de translation, il commute avec la translation à droite τ_t, donc il est réalisé dans cette représentation comme la convolution par une distribution à valeurs opérateurs $S(s)$, c'est-à-dire :

$J \Sigma f = S * J f$. avec supp $S(s) \subset \{\text{supp } J f\} + 2\rho$ vue la causalité.

On a alors $J \Sigma T_o^1(r) f = J T_o^1(r) g$ (f et $g \in H_o^1$). Multiplions par e^{-izr} et intégrons de $-R$ à $+R$. On a

$$\int_{-R}^{+R} g(s-r)\, e^{-izr}\, dr = e^{-izs} \ldots\times\ldots \int_{s-R}^{s+R} g(t)\, e^{izt}\, dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} e^{-izs}\, \tilde{g}(z)$$

puisque supp $g(r) \subset R_-$.

$$\int_{-R}^{+R} J \Sigma T_o^1(r) f = \int_{-R}^{+R} S\, f(s-r)\, e^{-izr}\, dr = S * \int_{-R}^{+R} f(s-r)\, e^{-izr}\, dr = S * e^{-izs} \int_{s-R}^{s+R} f(t)\, e^{izt}\, dt$$

Quand $R \longrightarrow +\infty$:

$e^{-izs} \int_{s-R}^{s+R} f(t)\, e^{izt}\, dt$ tend vers $e^{-izs} f(z)$ sur tout intervalle en s de la forme $(a, +\infty($ la convergence ayant lieu dans le sens L_2 . Vue la continuité de $\bar{\Sigma}$ dans $\bar{H}_o^{1\prime}$, le 1er membre tend vers $\bar{\Sigma}\, (e^{-izs} \tilde{f}(s))$ dans $L_2 [(a,+\infty);N]$. Or cette expression n'est par <u>définition</u> autre que $e^{-izs} S(z) \tilde{f}(z)$, d'où $\tilde{g}(z) = S(z)\tilde{f}(z)$.

---

(1) oui car $(\Sigma P_-^{2\rho} e_o,h) = (P_-^o\, \Sigma\, e_o\, h,h)$ par causalité .

Théorème 3.2.

Soit $e = \bar{\tilde{W}}_1^1 e_o$. Alors :

a) $e \in \bar{H}^{1\prime} = \bar{D}_-^a \oplus K_a^1 \oplus D_+^a$

b) e est une fonction propre de $\bar{T}^1(t)$: $\bar{T}^1(t) = e^{izt}\, e$

c) on a $\mathcal{J}\, e_- = e^{-izs}\, n$, composante de e dans $\bar{D}_-^\rho$

$\mathcal{J}\, e_+ = e^{-izs}\, \mathcal{S}(z)\, n$ ——————— D_+^ρ

Preuve :

a) Evident d'après la définition de $\bar{\tilde{W}}_1^1$ et des hypothèses sur $R(\tilde{W}_1^1)$.

b) $\bar{T}^1(t)\, e = \bar{T}^1(t)\, \bar{\tilde{W}}_1^1\, e_o = \bar{\tilde{W}}_1^1\, \bar{T}_o^1(t)\, e_o = e^{izt}\, \bar{\tilde{W}}_1^1\, e_o = e^{izt}\, e$.

c) $\bar{T}^1(t)$ opère comme la translation à droite sur $\bar{D}_-^a$ et $\bar{D}_+^a$, donc :

$\mathcal{J}\, e_-(s) = e^{-izs}\, n_-$ et $\mathcal{J} e_+(s) = e^{-izs}\, n_+$

Or $\bar{\tilde{W}}_1 = I$ sur D_-^a , d'où $e_-(s) = e_o(s)$ pour $s < -a$ d'où $n_- = n$

De même $\bar{W}_2^1 = I$ sur D_+^a , d'où $\mathcal{J}\, e_+(s) = \mathcal{J}\, e_1(s)$ $\Longrightarrow$ pour $s > a$ on a

$n_+ = \mathcal{S}(z) n$. cqfd.

Construction de $\mathcal{S}(z)$:

En utilisant la décomposition explicite de $e = e_- + e_k + e_+$, et le fait que e est une fonction propre de $\bar{T}^1(t)$ (donc e_k l'est de $T^1(t)$), on voit que e est aussi fonction propre de $\bar{A}^1$ pour la valeur propre iz, c'est-à-dire $\bar{A}^1\, e = i\, z\, e$. (En fait on a aussi $\bar{A}\, e = i\, z\, e$, puisque $A^o\, e = 0$). Considérons alors le vecteur $v = e - P^1\, \bar{j}_o\, e_o$, où $\bar{j}_o\, e_o$, où $\bar{j}_o$ est l'extension de j_o en posant $\bar{j}_o = I$ sur $\bar{D}^\rho$ (alors $\bar{j}_o$ envoie $\bar{H}_o$ dans $\bar{H}$); v est appelée <u>onde diffractée</u>. P^1 est la projection de $\bar{H}$ dans $\bar{H}^1$. Alors :

$$(*)\quad v_- = e_- - (e_o)_- = e^{-izs}\, n - e^{-izs}\, n = 0 = e_- - (j_o\, e_o)_- = e_- - (P^1\, \bar{j}_o\, e_-)$$

$$v_+ = e^{-izs}\, \mathcal{S}(z) n - e^{-izs}\, n = [\mathcal{S}(z) n - n]\, e^{-izs} = e_+ - (\bar{j}_o e_{o+}) = e_+ - (P^1 \bar{j}_o e_+)$$

(*) On a : $e_o = (e_o)_- + f + (e_o)_+$, $f \in (k^\rho)$; d'où j_o étant une contraction $j_o f\ (D^\rho)_H^\perp$ et $p^1\, j_o f \in (D^\rho)_H^\perp$. Alors $(p^1\, \bar{j}_o\, e_o)_- = [p^1 (e_o)_- + j_o f + (e_o)_+]_- = [(e_o)_- + p^1 j_o f + (e_o)_+]_-$ $= (e_o)_-$ et $(p^1\, \bar{j}_o\, e_o)_+ = (e_o)_+$

$v_- = 0$ et $\operatorname{Im} z < 0$ entraînent que $v \in H^1$. Appliquons $(\bar{A}^1 - iz)$ à v,*) on aura :

$(\bar{A}^1 - iz)\ v = (\bar{A}^1 - iz)(e - p^1 \bar{J}_o\, e_o) = (iz - \bar{A}^1)\ P^1\ \bar{J}_o\ e_o$, d'où puisque $v \in H^1$:

$$(A^1 - iz)\ v = (iz - \bar{A}^1)\ P^1\ \bar{J}_o\ e_\rho \quad \in H^1 \ .$$

Plus, on a même, connaissant la forme explicite de e_o :
$(iz - \bar{A}^1)\ P^1\ \bar{J}_o\ e_o \quad \in K^1_\rho$; on a alors en particulier pour $s > \rho$:
$J(A^1 - iz)\ v = 0 \implies 0 = -(\partial_s + iz)\ J\ v_+$, d'où $J\ v_+ = e^{-izs}\ m$, m étant une fonction de e_o, c'est-à-dire en fin de compte de z et n. On pourra donc poser :
$m = K'(z)\ n$, où K' est une fonction à valeur opérateur et on aura :

$$\boxed{S(z) = I + K'(z)}$$

4. *PROLONGEMENT DE* $S(z)$ *à* $\operatorname{Im} z > 0$ *ET SEMI-GROUPE* $Z(t)$.

On considère les opérateurs $Z(t) = P^a_+\ T(t)\ P^a_-$ avec $a > \rho$
Comme $T(t) = T^o(t) \oplus T^1(t)$, on a aussi $Z(t) = Z^o(t) \oplus Z^1(t)$ où :
$Z^o(t) = P^a_+\ T^o(t)\ P^a_- = T^o(t)$ et $Z^1(t) = P^a_+\ T^1(t)\ P^a_-$

<u>*Théorème 4.1*</u>

a) $Z(t)$ forment un Co-semi-groupe de contractions opérant dans le sous espace $K_a = H \ominus (D^a_- \oplus D^a_+)$; $Z(t)$ annihile $D^a_- \oplus D^a_+$.

b) $K_a = H^o \oplus K^1_a \quad K^1_a = H^1 \ominus (D^a_- \oplus D^a_+)$.
$Z^1(t)$ est un co-semi-groupe de contractions opérant dans K^1_a , $Z^1(t)$ annihile $D^a_- \oplus D^a_+$ et s-lim $Z^1(t) = 0$.

<u>*Preuve*</u>

a) Est démontré dans (LP).

b) La même démonstration (où on remplace $T(t)$ par $T^1(t)$)fournit les deux premières propriétés de $Z^1(t)$. Pour $f \in K^1_a$ on a $Z^1(t) = P^a_+\ T^1(t)\ f$; ceci plus l'hypothèse (H7) :
$\blacksquare$-Lim $P^\rho_+\ T(t)\ f = 0 \quad \forall\ f \in R(W_1) \subset H^1$ entraînent que s-lim $Z^1(t) = 0$.

---

*) Ceci est légitime puisque $v = P^1(e - \bar{J}_o e_o)$ et $e - \bar{J}_o e_o \in D(\bar{A}) \implies v \in D(\bar{A}^1)$

* Il est à remarquer qu'on n'a plus s-lim $Z(t) = 0$ <u>vu qu'on n'a rien supposé sur le comportement asymptotique de $T^o(t) = Z^o(t)$ pour $t \to +\infty$</u>.

* Soit B le générateur infinitésimal de $Z(t)$; on a alors la décomposition de B en : $B = B^o \oplus B^1$ où $B^o = A^o$ et B^1 est le générateur de $Z^1(t)$, $B^1 = B|_{K_a^1}$.
On déduit donc de b) que $\mathrm{Re}\ \sigma_p(B^1) < 0$, alors que $\mathrm{Re}\,\sigma(B^o) \leq 0$ et même $\mathrm{Re}\,\sigma_p(B^o) \leq 0$ a priori (Nous verrons en fait que $\mathrm{Re}\ \sigma_p(B) < 0$).

* Soit $f \in \bar{H}^1 \cap D(\bar{A}^1)$: on a :

$$\begin{cases} J(\bar{A}^1 f)_+ = -\partial_s J f_+ & \text{pour } s > \rho . \\ J(\bar{A}^1 f)_- = -\partial_s J f_- & \text{pour } s < -\rho . \end{cases}$$

Si $f \in \bar{H} \cap D(\bar{A})$, on aura encore :

$J(\bar{A} f)_+ = J(\bar{A}^1 f)_+ = -\partial_s J f_+$ pour $s > \rho$ et $J(\bar{A} f)_- = J(\bar{A}^1) f_- = -\partial_s J f_-$ pour $s < -\rho$.

* Soit $f \in K_a^1 \cap D(A^1)$. Alors $Z^1(t) f = P_+^a T^1(t) f$, $Z^o(t) f = 0$, d'où en dérivant à $t = 0$:

$B^1 f = P_+^a A^1 f$, d'où

$$J(B^1 f)_+ = \begin{cases} -\partial_s J f_+ & \text{pour } \rho < s < a \\ 0 & \text{pour } s > a \end{cases}$$

Si $g \in D(A^1)$ et $g \perp D_-^a$, alors $P_+^a g \in D(A^1) \cap K_a^1 \in D(B^1)$ et

$$\boxed{B^1 P_+^a g = P_+^a A^1 g} \quad \forall \ g \text{ sortant}$$

Soit $f \in K_a \perp D(A)$, on aura alors $(JB f)_+ = J(B^1 f)_+$ et $B P_+^a g = P_+ A g$ si $g \in D(A)$ et $g \perp D_-^a$.

<u>*Théorème 4.2*</u>

a) Soit $\rho_o(B)$ la composante principale de $\rho(B)$. Alors $S(z)$ admet un prolongement analytique à partir du demi-plan inférieur dans $-i\,\rho_o(B)$.

b) En fait, on a plus : a) est vrai pour $\rho_o(B_1)$ qui contient $\rho_o(B)$.

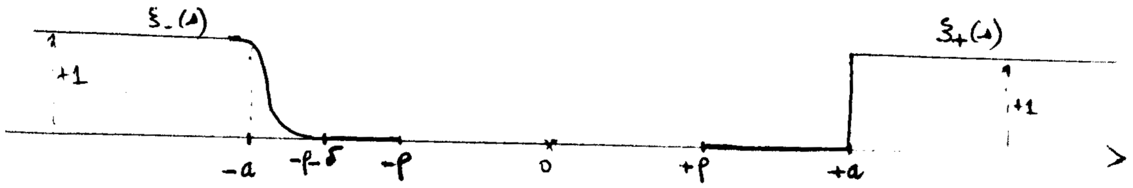
Preuve :

a) est démontré dans (LP), démonstration qui reste valable car ne faisant pas appel à l'hypothèse (LP3).

b) Soit z tel que Im z < 0, et $n \in N^1$. Soit e l'élément de $\bar{H}^{1'}$: $e = \tilde{\bar{W}}_1^1 e_o$.

On sait que e est fonction propre de $\bar{A}^1$.

Soient $\xi_-(s)$ et $\xi_+(s)$ les deux fonctions plateaux suivantes :



$0 < \delta < a - \rho$

Soit $f = e - J^{-1}\, \xi_-\, J e_- - J^{-1}\, \xi_+\, J\, e_+$, qu'on écrira plus simplement :

$f = e - \xi_-\, e_- - \xi_+\, e_+$. Alors $f \in K_a^1$ et donc $(\bar{A}f)_+ = (\bar{A}^1\, f)_+$ d'où :

$\bar{A}\, \xi_-\, e_- = \bar{A}^1\, \xi_-\, e_- = - \xi'_-\, e_- + iz\, \xi_-\, e_-$ et $\bar{A}\, \xi_+\, e_+ = iz\, \xi_+\, e_+ = \bar{A}^1\, \xi_+\, e_+$, en se rappelant les formes explicites de e_-, e_+.

$f \in K_a^1 \implies B^1\, f = P_+^a\, A^1\, f$, c'est-à-dire :

$B^1 f = P_+^a\, A^1(e - \xi_-\, e_- - \xi_+\, e_+) = P_+^a\, (\bar{A}^1\, e - \bar{A}^1\, \xi_-\, e_- - \bar{A}^1\, \xi_+\, e_+) = P_+^a(ize - iz\xi_- e_- + \xi'_-\, e_-\, iz\xi_+ e_+)$

$= P_+^a(izf + \xi'_-\, e_-) = i\, z\, f + \xi'_-\, e_-$ puisque supp ξ'_- $[-a, -\rho-\delta] \implies \xi'_-\, e_- \in K_a^1$.

Re i z > 0 $\implies$ $i\, z \in \rho_o(B^1)$ et on a donc une <u>solution unique</u> :

$f = - (i\, z - B^1)^{-1}\, (\xi'_-\, e_-)$ qui montre que f(z) peut être prolongée analytiquement pour les points du demi-plan C^+ appartenant à $-i\, \rho_o\, (B^1)$

e_+ étant de la forme $e^{-izs}\, S\, (z)\, n$ et $f_+ = (1 - \xi_+)\, e_+ = e_+$ pour $s < \rho < a$, on a donc : $f_+\, (s,z) = e^{-izs}\, S(z)\, n$ pour $\rho < s < a$; on conclut alors que $S\, (z)$ lui-même admet un prolongement analytique pour $z \in -i\rho_o\, (B^1)$.

Théorème 4.3

Pour tout $z \in -i\ \rho_o(B^1)$ et tout $n \in N^1$, il existe un vecteur propre de $\bar{A}^1$ dans $\bar{H}^1$ tel que $\bar{A}^1\ e = i\ z\ e$, $e_- = e^{-izs}\ n$ et $e_+ = e^{-izs}\ S\ (z)n$.

Preuve :

Prenons $e_- = e^{-izs}\ n$ pour $s < -\rho$ et $\xi\pm$ comme au théorème précédent, $Z \in -i\ \rho_o(B^1)$

Soit $f = -(iz - B^1)^{-1}\ (\xi'_-\ e_-)$, f est unique et $f \in K^1_a$ $(\xi'_-\ e_- \in K^1_a)$.

Définissons e_+ par $e_+ = e^{-izs}\ S(z)\ n$ et e par $e = f + \xi_-\ e_- + \xi_+\ e_+$. On a alors : $\left[(\bar{A}^1 - iz)e\right]_+ = \left[(\bar{A}^1 - iz)e\right]_- = 0$, d'où :

$$(\bar{A}^1 - iz)e = P^a_+(\bar{A}^1 - iz)\ e = P^a_+\left[\bar{A}^1(f+\xi_-\ e_- + \xi_+\ e_+) - iz(f + \xi_-\ e_- + \xi_+\ e_+)\right] .$$

$$= P^a_+\left[A^1\ f - \xi'_-\ e_- + i\ z\ \xi_-\ e_- + i\ z\ \xi_+\ e_+\right] - i\ z\ (f + \xi_-\ e_-)$$

$$= P^a_+\ A^1\ f - \xi'_-\ e_- - i\ z\ f = (B^1 - iz)\ f - \xi'_-\ e_- = 0\ .$$

Remarque :

Le vecteur propre e obtenu est en fait le prolongement analytique de $e = \bar{\tilde{W}}_1\ e_o$ défini pour $\mathrm{Im}\ z < 0$. Lax et Phillips définissent e à partir de $f = -(iz - B)^{-1}\ (\xi'_-(s).e_-)$, ce qui entraîne certes que pour $\mathrm{Im}\ z < 0$ e est vecteur propre de $\bar{A}$, mais e n'est pas a priori égal à $\bar{\tilde{W}}_1\ e_o \in \bar{H}^1$, car l'équation $Ax = i\ z\ x$ équivaut à $A^o\ x^o = i\ z\ x^o$ et $A^1\ x^1 = i\ z\ x^1$ et c'est la partie dans $\bar{H}^1$ qui représente $\bar{\tilde{W}}^1_1\ e_o$; mais comme $\mathrm{Im}\ z < 0 \iff \mathrm{Re}\ iz > 0$, $i\ z$ n'est pas valeur propre de A^o, d'où $x^o = 0$. On aurait donc pu partir de e défini par $f = -(i\ z - B)^{-1}\ (\xi'_-(s)\ e_-)$ comme LAX-PHILLIPS.

Théorème 4.4

Pour tout $g \in K^1$ et tout $z \in -\ i\ \rho\ (B^1)$, il existe dans $\bar{H}^1$ une solution à l'équation $(iz - \bar{A}^1)\ h = g$, qui est sortante dans le sens où sa composante dans $\bar{D}^a_-$ est nulle.

Preuve

Soit f, solution unique de $(i\ z - B^1)\ f = g$. Alors $f \in K^1_a \Rightarrow$ la composante de f sur $\bar{D}^a_-$ est nulle.

$g_+ = 0$ ($g \in K^1$) entraîne : $(i\ z + \partial\ s)\ f_+ = 0$ pour $\rho < s < a$ ($\Leftrightarrow ((iz - B^1)f)_+ = 0$)

Donc f_+ est de la forme :

$$f_+ = \begin{cases} e^{-izs}\ m & \text{pour} \quad \rho < s < a \\ 0 & \text{pour} \quad s > a \end{cases}$$

On définit alors $h_+ = e^{-izs}$ m pour $s > \rho$, prolongeant f_+ à $\geq \rho$

$h = f - f_+ + h_+$ répond alors à la question. On a

. $h \in D(\bar{A}^1)$.

. h est un prolongement de f. En effet $P^a_+\ h = f$

. Composante de h dans $\bar{D}^a_- = 0$ et composante de h dans $\bar{D}^a_+ = e^{-izs}$ m, d'où :

pour $s > a$ on a $(iz - \bar{A}^1)\ h = iz\ e^{-izs}\ m - iz\ e^{-izs}\ m = 0$, donc $(iz - \bar{A}^1)h \in K^1_a$

et donc : $P^a_+\ (iz - \bar{A}^1)h = (iz - \bar{A}^1)\ h$.

. Soit ξ_+ la fonction ayant servi pour définir l'opérateur $\bar{A}^1$

Alors $h = (1 - \xi_+)h + \xi_+\ h$

et $(1-\xi_+)\ h \in D(A^1)$ et "orthogonal" à $\bar{D}^a_-$, d'où : $B^1\ P^a_+(1-\xi_+)\ h = P^a_+\ A^1(1-\xi_+)\ h$.

On a donc :

$$(iz-\bar{A}^1)\ h = P^a_+(iz-\bar{A}^1)h = P^a_+\ [iz\ h\_\ \bar{A}^1(1- {}_+)h - \bar{A}^1(\ {}_+\ h)] = P^a_+\ (iz\ h - A^1(1-\xi_+)\ h|$$

$$= i\ z\ f - B^1\ P^a_+(1 - \xi_+)h = iz\ f - B^1\ P^a_+\ h = (iz - B^1)\ f \quad \text{cqfd}$$

Remarques

1) En réalité on voit que $h \in K^1_\rho$, et $(iz - \bar{A}^1)\ h \in K^1_\rho$, car $f \perp D^\rho_-$.

2) La même démonstration, extrêmement simple, s'applique au cas général de LAX-PHILLIPS et en donne donc une autre preuve concise.

3) L'équation $Bx = i z x + \xi_-' e_-$ est équivalente à $B^1 x^1 = i z x^1 + \xi_-' e_-$ et $B^o x^o = i z x^o + 0$ car support $(\xi_-' e_-) \subset [-a, -\rho-\delta]$. Pour $z \in \rho(B) \subset \rho(B^o)$, on a donc $x^o = 0$. Donc la valeur $f = -(iz-B)^{-1} \xi_-' e_-$, qu'on aurait utilisé si on avait appliqué la théorie (LP) telle quelle, coïncide avec celle qu'on a utilisée $f = -(iz - B^1)(\xi_-' e_-)$.

5. PÔLES ET ZEROS DE $S(z)$. VECTEURS PROPRES ENTRANTS ET SORTANTS.

Nous faisons dorénavant l'hypothèse suivante :

(H8) : la résolvante $R(\lambda, B^1)$ de B^1 est méromorphe dans C.

Alors le spectre de B^1 sera purement ponctuel, donc $\sigma(B^1) = \sigma_p(B^1)$ par (H8), et aussi $\rho(B^1) = \rho_o(B^1)$.

$S(z)$ a été définie à partir de $f_+(s,z)$, où $f = (iz-B^1)^{-1} \xi_-' e_-$. Quand z tend vers un point $z_o \in \sigma_p(B^1)$, $||f(z)||$ croit comme une certaine puissance négative de la distance $|z-z_o|$. On voit que $S(z)$ admet un prolongement analytique dans $-i\rho(B^1)$ et qu'en fait ses singularités sont des pôles.

Lemme 5.1

Soit b, vecteur propre de B^1; alors b_-, composante de b dans D_-^ρ est nulle.

Preuve : $Z^1(t) b = e^{izt} b \Rightarrow e^{izt}(b,b_-) = (Z^1(t)b, b_-) = (T^1(t)b, b_-) = (b, T^{1*}(t)b_-)$.

Comme $b \in K_a^1$, $T^{1*}(t) b_- \in D_-^{\rho+t} \oplus K_a^1$ pour $t > a-\rho$; les produits scalaires ci-haut sont donc tous nuls pour $t > a-\rho$ d'où :

Lemme 5.2

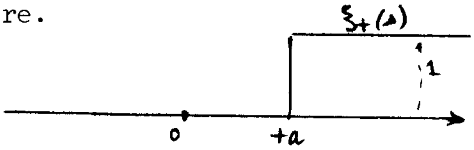
Soit iz_o une valeur propre de B^1, alors $\bar{A}^1$ a un vecteur propre sortant pour la même valeur propre iz_o, et réciproquement.

Preuve : Soit b vecteur propre de B^1; on a donc $b_+ = \begin{cases} e^{-izs} \text{ o m} & \rho < s < a \\ 0 & s > a \end{cases}$

Définissons h_+ par : $h_+ = \begin{cases} 0 & \rho < s < a \\ e^{-izs} \text{ o m} & s > a \end{cases}$

Alors $a = b_+ + h_+$ est un vecteur propre de $\bar{A}^1$; comme $a_- = b_- = 0$ a est sortant. Réciproquement, on posera $b = a - \xi_+ a_+ = P_+^a a$; alors b est un vecteur propre de B^1 pour la même valeur propre.

Ici ξ_+ est la fonction



qui a déjà servi au théorème 4.2. Ce théorème est à rapprocher du théorème 4.4 relatif à $\rho(B)$.

Proposition 5.3

Soit e un vecteur propre de $\bar{A}^1$, à la fois entrant et sortant; alors $e \equiv 0$

Preuve :

* e est sortant; il est associé à une valeur propre iz_o. D'après le lemme précédent $P_+^a e$ est un vecteur propre de B^1, donc $\underline{\mathrm{Im}\, z_o > 0}$
* e est entrant et $\mathrm{Im}\, z_o > 0$ entraînent : e appartient à H, donc e est un (vrai) vecteur propre de A^1. Or A^1 est anti-auto-adjoint, d'où la contradiction.

Corollaire 1 : On a le même résultat pour A^{1*}.

Corollaire 2 : Si e est vecteur propre entrant et sortant pour $\bar{A}$, alors $e \in H^o$ et en fait e est un vecteur propre de A^o; il peut bien sûr aussi être nul.

Comme conséquence de Prop. 5.3 et du corollaire 1, on a le :

Lemme 5.3

Aucun vecteur propre b de B^1 ne possède une composante b_+ nulle; aucun b^* de B^{*1} une b_-^* nulle.

Lemme 5.4

Si iz_o est une valeur propre de B^1, alors z_o est un pôle de $S(z)$ $(z_o \in C^+)$.

Preuve :

Soit iz_o pôle de $R(\lambda, B^1)$ donc $-i\bar{z}_o$ pôle de $R(\lambda, B^{1*})$ c'est-à-dire $-i\bar{z}_o$ est une valeur propre de B^{1*}. Alors (Lemme 5.3) b^* est une exponentielle non nulle pour $-a < s < \rho$; il existe alors une fonction $\xi_-(s)$ et un vecteur n tels que :

$$(\xi_-'(s)\, e^{-iz_o s}\, n,\, b_-^*) \neq 0$$

Soit z voisin de z_o et $z \neq z_o$, $e(z)$ le vecteur propre de $\bar{A}^1$ décrit dans le théorème 4.3 (qui est en fait un prolongement analytique de $W_1\, e_o$ à $\mathrm{Im}\, z > 0$).
On définit $f = f(z)$ par : $f = e - \xi_-\, e_- - \xi_+\, e_+$.
On démontre, comme au théorème 4.2, que $(iz-B^1)\, f = -\, \xi_-'\, e_-\, (s,z)$, d'où :
$((iz-B^1)f,\, b^*) = i(z-z_o)\, (f,b^*) = (\xi_-'\, e_-(s,z),\, b^*) = (\xi_-'\, e^{-izs}\, n,\, b^*) \neq 0$.
Donc quand $z \longrightarrow z_o$, $||f(z)|| \longrightarrow +\infty$ comme $\frac{1}{(z-z_o)^{k_o}}$, $k_o > 0$ entier.
Supposons que $S(z)n$ soit holomorphe en z_o. Définissons les coefficients de Laurent : $f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(z_o)} f(z)(z-z_o)^{k-1}\, dz$ $k > 0$, $\gamma\, (z_o)$ est un cercle de centre n séparant z_o.
Alors $B^1\, f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(z_o)} B^1\, f\, (z-z_o)^{k-1}\, dz = i\, z_o\, f_k + i\, f_{k+1}$ $|izf = i(z-z_o)f+iz_o f|$
Puisque z_o est un pôle d'ordre k_o, on a $f_{k_o+1} = 0$, donc f_{k_o} est un vecteur propre de B^1. Or on sait que $f_+(s,z) = e^{-izs}\, S(z)n$ pour $\rho < s < a$ et donc si $S(z)\, n$ était holomorphe en z_o, on aurait $(f_{ko})_+ = 0$ contredisant ainsi le Lemme 5.3 cqfd.

Lemme 5.5 . Avec l'hypothèse supplémentaire:

(H8) : $R(\lambda, B^1)$ est méromorphe dans C, les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $S(z)$ a un pôle en z_o .

(2) iz_o appartient à $\sigma\,(B^1) = \sigma\,(B^1)$

(3) $\bar{A}^1$ possède un vecteur propre sortant (donc surtout généralisé pour $\mathbf{A}^1$), avec iz_o comme valeur propre.

Preuve : Ce n'est qu'un résumé de Lemme 5.2, Théorème 4.2 et Lemme 5.4.

. Soit alors z_o tel que $iz_o \notin \sigma_p(B^1)$, donc $iz_o \in \rho(B^1)$. D'après le théorème 4.3, il existe une classe de vecteurs propres $e(z)$ de $\bar{A}^1$ associés à la valeur iz_o. En fait il n'en existe pas d'autre. Soit en effet g un autre vecteur propre associé à iz_o, alors g_- est de la forme $e^{-iz_o s}\, n$, n étant un élément de N^1. Le théorème 4.3 affirme qu'il existe un vecteur propre e tel que $e_- = e^{-izs}\, n$, donc $(g-e)_- = 0$, c'est-à-dire $(g-e)$ est un vecteur propre sortant de $\bar{A}^1$ associé à iz_o. Ceci est impossible vu que $iz_o \notin \sigma_p\,(B^1)$ (Lemme 5.2).

. Soit z_o, $\mathrm{Im}\, z_o < 0$, valeur propre de $\bar{A}^1$. On avait obtenu (cf. paragraphe 3).

$$e_+(z_o) = e^{-iz_o s}\, S(z)n\ .$$

Donc $e(z_o)$ est entrant si et seulement si $S(z)n = 0$. On obtient donc la caractérisation suivante des zéros de $S(z)$ dans C^-.

Proposition 5.5

Les zéros de $S\,(z)$ dans le 1/2 plan inférieur C^- correspondent à des vecteurs propres entrants de $\bar{A}^1$ pour la valeur propre iz; ce sont des vecteurs propres généralisés de A^1, dans le sens où ils n'appartiennent à H^1 que localement. En plus ce sont des valeurs propres de $\bar{A}$, car iz n'est pas valeur propre (vraie) de A^o ($\mathrm{Re}\, iz > 0$).

. Soit maintenant $\mathrm{Im}\, z > 0$ ($\Leftrightarrow \mathrm{Re}\, iz < 0$) et soit $e(z)$ un vecteur propre entrant de $\bar{A}$ pour la valeur propre iz. Alors :

$\bar{A}e = ize \Leftrightarrow \bar{A}^1 e^1 = iz\, e^1$ et $A^o e^o = i\, z\, e^o$ où $e = e^1 \oplus e^o$; ceci étant d'autant plus vrai que pour $\mathrm{Im}\, z > 0$, $e \in H$ donc en fait $Ae = ize$, d'où $A^1 e1 = i\, z\, e^1$ et $A^o e^o = i\, z\, e^o$. Or A^1 est anti-auto-adjoint dans H^1, donc $A^1 e^1 = i\, z\, e^1 \Rightarrow e^1 = 0$. D'où :

Théorème 5.6

Pour Im z > 0, il n'y a aucun vecteur propre entrant pour A^1, donc S (z) ne s'annule en aucun point du plan supérieur. Les vecteurs propres entrants de A sont en réalité des vecteurs propres de A^o et n'entrent aucunement dans la description des propriétés analytiques de S (z). En particulier, les pôles de S (z) dans C^+ sont exactement les valeurs propres de B^1; ce sont d'ailleurs les seules singularités de S (z).

6. SUR LE SPECTRE DE A.

Dans le paragraphe précédent, nous avons caractérisé complètement le spectre ponctuel de A. Il est contenu dans le demi-plan Re $\lambda < 0$ et y coïncide avec le spectre ponctuel de A^o. Nous avons montré que ce spectre ponctuel n'avait aucune influence sur S (z) et que seuls les vecteurs propres sortants généralisés de A^1 entrent dans la description de S (z). Quant au spectre continu on peut dire ce qui suit.

Théorème 6.1

L'axe imaginaire appartient à $\sigma_c(A^1)$

Preuve

La restriction de $T^1(t)$ à D_+^ρ correspond dans la représentation de translation à l'opérateur de translation sur une demi-droite. Le générateur de ce dernier semi-groupe a un spectre qui recouvre entièrement le demi-plan Re $\lambda \leq 0$. Toute extension de ce générateur, en particulier A^1 contient dans son spectre la frontière de cet ensemble (Re $\lambda = 0$). Or ni A^1 ni A^{1*} n'ont de valeurs propres imaginaires, sinon les vecteurs propres corresponds seraient à la fois entrant et sortant contrairement à la proposition 5.3 et son corollaire 1.

En effet soit $i\sigma$, $\sigma \in R$ la valeur propre correspondante pour A^1. Dans la représentation de translation, on a alors, si $e(\sigma)$ désigne le vecteur propre correspondant :

$$\mathcal{J}\ e_-\ (\sigma) = e^{-i\sigma s}\ n_1(\omega)$$

$$\mathcal{J}\ e_+(\sigma) = e^{-i\sigma s}\ n_2(\omega)$$

e étant dans H $\Rightarrow$ $\mathcal{J}\ e \in L_2(R;\ N^1)$, d'où nécessairement $n_1 = n_2 = 0$, donc $e(\sigma)$ est à la fois entrant et sortant.

Mêmes arguments pour A^{1*} .

Remarques et variantes

1 - *VARIANTES POUR LES PREUVES DES THEOREMES : 4.1, 4.3 et 4.4 DANS LE CAS GENERAL (cas de LP).*

$$g = (1-\xi_+)\ g + \xi_+\ g = P_+^a\ g + (1-P_+^a)\ g$$

donc $(1-\xi_+)\ g$ est sortant et $\in D(A)$.

d'où $B\ P_+^a\ (1-\xi_+)\ g = P_+^a\ A(1-\xi_+)\ g$, c'est-à-dire

$$B\ P_+^a\ g = B\ P_+^a(1-\xi_+)\ g = P_+^a\ \bar{A}(1-\xi_+)g = P_+^a(\bar{A}\ g - \bar{A}(\xi_+ g)$$

$$= P_+^a\ \bar{A}\ g$$

On en déduit le lemme :

Lemme

Soit $f \in D(\bar{A})$. Alors :

1) $B\ P_+^a\ (f-\xi_-\ f_-) = P_+^a\ \bar{A}(f-\xi_-\ f_-)$

2) $P_+^a\ \bar{A}\ f = B\ P_+^a\ (f-\xi_-\cdot f_-) + \bar{A}(\xi_- f_-) = B\ P_+^a(f-\xi_- f_-)-\xi_-'\ \bar{A}\ f_- + \xi_-\ \bar{A}\ f_-$

Preuve :

1) $f-\xi_- f_-$ est sortant, on applique la formule ci-haut à $g = f-\xi_-\ f_-$

2) Conséquence de 1), vue la linéarité de f.

Alors :

Preuve du Théorème 4.2

$B\,P_+^a\,(e-\xi_-\,e_-) = P_+^a\,\bar{A}(e-\xi_-\,e_-) = i\,z\,P_+^a\,e-(-\xi_-'\,e_- + i\,z\,\xi_-\,e_-) = iz\,P_+^a(e-\xi_-e_-)+\xi_-'\,e_-$

d'où $P_+^a(e-\xi_-e_-) = -(iz-B)^{-1}\,\xi_-'\,e_-$

Or $\left[P_+^a(e-\xi_-e_-)\right]_+ = \left[P_+^a\,e\right]_+ = e_+$ pour $\rho < s < a$. On a donc :

pour $\rho < s < a$: $e^{-izs}\,S(z)\,n = -\,(iz-B)^{-1}\,\xi_-'\,e_-$, d'où la conclusion.

Preuve du Théorème 4.3

On prend $e_+ = e^{-izs}\,S(z)n$, d'où $e = P_+^a\,e + {}_+\,e_+$; et $e_- = e^{-izs}\,n$

$P_+^a\,e = -(iz-B)^{-1}\,\xi_-'\,e_- + \xi_-\,e_- \implies P_+^a\,(e-\xi_-\,e_-) = -\,(iz-B)^{-1}\,\xi_-'\,e_-$

$P_+^a\,(\bar{A}-iz)e = P_+^a\,\bar{A}\,e-iz\,P_+^a\,e = B\,P_+^a\,(e-\xi_-e_-)-\partial_s(\xi_-\,e_-)-iz\,P_+^a\,e$

$= (B-iz)\,P_+^a\,(e-\xi_-\,e_-) - \xi_-'\,(s)\,e_- -\xi_-\,\partial_s\,e_- + i\,z\,\xi_-\,e_- = 0$

Finalement $\left[(\bar{A} - iz)\right]e_- = 0 = \left[(\bar{A}-iz)\,e\right]_+$, d'où :

$(\bar{A} - iz)\,e = P_+^a\,(\bar{A} -iz)\,e = 0$ cqfd.

Preuve du théorème 4.4

h est sortant et $\in D(\bar{A}) \implies P_+^a\,\bar{A}\,h = B\,P_+^a\,h$ ... En plus $f = P_+^a\,h$

$P_+^a(\bar{A}-iz)\,h = B\,P_+^a\,h - iz\,P_+^a\,h$

$= (B-iz)\,P_+^a\,h$

$= (B-iz)\,f = g$

et $(\bar{A}-iz)\,h = P_+^a\,(\bar{A} - iz)\,h = g$.

2 - PREUVE DU LEMME DU § B.

Soit $x \in D$ et $y \in (D)^{\perp}_{H_0}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{C}$ pour le moment non fixé on a alors :

$W(x+\varepsilon y) = x + \varepsilon W y$, d'où :

$\Rightarrow \|W(x+\varepsilon y)\|^2_H \leqslant M^2 \|x+\varepsilon y\|^2$, où on a posé $M = \|W\| \leqslant 1$ puisque W est une contraction.

C'est-à-dire

$$\|x\|^2_H + 2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon\,(x, Wy)_H + |\varepsilon|^2\,\|Wy\|^2 \leqslant M^2(\|x\|^2_H + 2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon(x,y) + |\varepsilon|^2\|y\|^2$$

$$\Rightarrow 2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon(x,Wy)_H \leqslant (M^2-1)\,\|x\|^2_H + |\varepsilon|^2\,(M^2\,\|y\|^2 - \|Wy\|^2)$$

$$= (M^2-1)\|x\|^2_H + |\varepsilon|^2\,(\,(M^2-1)\,\|y\|^2 + \|y\|^2 - \|Wy\|^2)$$

$M \leqslant 1 \Rightarrow 2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon\,(x, Wy)_H \leqslant 2\,|\varepsilon|^2\,\|y\|^2$

on pose $\varepsilon = |\varepsilon|\,e^{i\eta}$, alors $\mathrm{Re}\,e^{i\eta}(x,Wy)_H \leqslant |\varepsilon|\,\|y\|^2\ \forall\,\varepsilon$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Re}\,e^{i\eta}(x,Wy) \leqslant 0 \iff \cos\eta\,\mathrm{Re}(x,Wy) - \sin\eta\,\mathrm{Im}\,(x,Wy) \leqslant 0\,.$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{ll}\eta = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\,(x,Wy) \leqslant 0 & \\ \eta = \pi \Rightarrow \mathrm{Re}\,(x,Wy) \geqslant 0 & \end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{Re}(x,Wy) = 0 \\[2ex] \left\{\begin{array}{ll}\eta = \pi/2 \Rightarrow \mathrm{Im}\,(x,Wy) \geqslant 0 & \\ \eta = 3\pi/2 \quad \mathrm{Im}\,(x,Wy) \leqslant 0 & \end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{Im}\,(x,Wy) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow (x,Wy)_H = 0$$

3 - REMARQUE SUR LES ZEROS DE $S(z)$ DANS LE DEMI PLAN SUPERIEUR

Dans le travail de LAX-PHILLIPS, il subsiste une indétermination : il se peut qu'un point $z \in C^+$ soit en même temps pôle et zéro de $S\,(z)$. D'après ce qui précède, la décomposition de Nagy-Foias permet de voir que les zéros proviennent exclusivement de la partie c.n.u.; ils correspondent à des valeurs propres de A^o. C'est ce qui explique que dans notre cas, on n'a pas de zéros de $S(z)$ (cf. Th. 5-6), puisqu'on a réussi à"éviter" la partie c.n.u. ...

Cette remarque permettrait probablement de lever une partie de l'ambiguité en question.

CHAPITRE II

PROBLEME AUX DONNEES INITIALES : EXISTENCE, UNICITE.

I. *PRELIMINAIRES. PROBLEMES ENVISAGES.*

1. *EQUATIONS DE LA THERMO-ELASTICITE LINEAIRE, HOMOGENE ET ISOTROPE.*

1.1. *Equation de la chaleur dans un milieu solide.*

Dans le cas où nous allons nous placer, où on ne tient compte que des phénomènes de thermo-conduction (pas de convection : cas des liquides par exemple), l'équation thermodynamique du milieu s'écrit :

$T\dfrac{\partial S}{\partial t} = Q$, S et Q étant l'entropie et la quantité de chaleur mises en jeu, t le temps, T la température absolue.

Si $\vec{q}$ désigne le vecteur densité de flux de chaleur, on a :

$$Q = -\operatorname{div}\vec{q} \quad , \text{ d'où } \quad T\frac{\partial S}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{q}$$

La loi de Fourier donne $\vec{q} = -\chi\,\vec{\nabla}\,T \Rightarrow T\dfrac{\partial S}{\partial t} = \chi\,\Delta\,T$

Or $S = S_o(T) + K\,\alpha\,\operatorname{div}\vec{u}$, $K = \lambda + \dfrac{2}{3}$, $\vec{u}$ = vecteur déplacement; d'où :

$$T\frac{\partial S_o}{\partial T} + \beta\,K\,T\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u} = \chi\,\Delta\,T$$

D'autre part : $Cp - Cv = K\,\beta^2\,T \Rightarrow K\,\beta\,T_o = \dfrac{C_p - C_v}{\alpha}$

et $\left(\dfrac{\partial S_o}{\partial t}\right)_v = \dfrac{\partial S_o}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{C_v}{T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow C_v\dfrac{\partial T}{\partial t} + \dfrac{C_p - C_v}{\alpha}\;\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u} = \chi\,\Delta\,T$

On pose $\theta = T - T_o$. On supposera toujours que $\theta << T_o$. Alors :

$$\Delta\,\theta - \frac{C_v}{\chi}\;\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{C_p - C_v}{\beta}\;\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u} = a$$

soient $k = \chi/C_v$, $\eta = (C_p - C_v)/\chi\beta$. On obtient donc, en l'absence de sources de chaleur :

$$\boxed{\Delta\,\theta - \frac{1}{k}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \eta\,\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u} = 0}$$

* En présence d'une source de chaleur q(x,t), on aurait :

$$\Delta\theta - \frac{1}{k}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \eta\,\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u} = -\,q\,(x,t).$$

1.2. Equation de l'impulsion.

On adopte les définitions et notations suivantes, en supposant toutes les conditions de dérivabilité satisfaites; $\vec{x}$ désigne un point de R^3, G un ouvert de R^3, ∂G sa frontière topologique (quand elle est $\neq \phi$), suffisamment régulière.

* $\vec{u}(x) : G \longrightarrow C^3$ vecteur déplacement au point x

  $\varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ désigne le tenseur des déformations

  $\sigma^e_{ij}(\vec{u}) = \lambda\delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}(\vec{u})$: tenseur des contraintes élastiques,

  λ et μ constantes de LAME.

* $\vec{U}(x) = (\vec{u}_1(x), \vec{u}_2(x), u_7(x)) : G \longrightarrow C^3 \times C^3 \times C$: vecteur thermo-élastique

  avec $u_7(x) = \theta(x)$, $\vec{u}_2(x) = \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}(x)$.

  $\varepsilon_{ij}(\vec{U}) = \varepsilon_{ij}(\vec{u}_1)$ et $\sigma^e_{ij}(\vec{U}) = \sigma^e_{ij}(\vec{u}_1)$

  $\sigma_{ij}(\vec{U}) = \sigma^e_{ij}(\vec{u}_1) - \gamma\, \delta_{ij}\, u_7 = \sigma^e_{ij}(\vec{U}) - \gamma\,\delta_{ij}\, u_7$: contraintes thermo-élastiques

  avec $\gamma = \lambda + \frac{2}{3}\mu\,\alpha$, α : coefficient de dilation <u>linéaire</u>.

* $\vec{u} : G \longrightarrow C^3$: $\vec{t}(\vec{n},\vec{u}) = [\sigma^e_{ij}(\vec{u})].\vec{n} \Longleftrightarrow t_i(\vec{n},\vec{u}) = \sigma^e_{ij}(\vec{u})\, n_j$

  représente le vecteur tension élastique au point de ∂G, où la normale est $\vec{n}$.

  Si $\vec{u}, \vec{v} : G \to C^3$, on pose :

  $\vec{q}(\vec{u},\vec{v}) = \vec{e}_i\, q_i$ avec $q_j = \sigma^e_{ij}(\vec{u})\, v_i$; donc <u>l'ordre</u> $(\vec{u},\vec{v})$ est important.

  Alors :

  $\operatorname{div} \vec{q}(\vec{u},\vec{v}) = (\sigma^e_{ij}(\vec{u})v_i)_{,j} \Rightarrow \vec{n}.\vec{q}(\vec{u},\vec{v}) = \vec{v}.\vec{t}(\vec{n},\vec{u})$

* $\vec{U} : G \to C^3 \times C^3 \times C$: $\vec{T}(\vec{n},\vec{u}) = \sigma_{ij}(\vec{U})\, n_j = \sigma^e_{ij}(\vec{u}_1)n_j - \gamma\,\delta_{ij}n_j\, u_7 = \vec{t}(\vec{n}_1\vec{u}_1) - \gamma\,\vec{n}\, u_7$.

$\longrightarrow$ En l'absence de forces de volumes, l'équation de l'impulsion s'écrit alors :

$$\boxed{\sigma_{ij}(\vec{u})_{,j} = \rho\, e_i \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} = \rho\, \vec{e}_i . \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2}} \qquad \vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, u_7)$$

C'est-à-dire en fonction de $\vec{u} = \vec{u}_1$, $\theta = u_7$

$$\boxed{\Delta^{*} \vec{u} - \gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, \theta = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}}$$

avec $\Delta^{*} = (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}}\, \text{div} + \mu \vec{\Delta} = (\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}}\, \text{div} - \mu \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}$

En posant $c_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, $m_o = \frac{\gamma}{\lambda+2\mu}$, on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\Delta^{*}}{\lambda+2\mu} \vec{u} - m_o \overrightarrow{\text{grad}}\, \theta - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0 = - \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}\, \text{div}\, \vec{u}$$

$$- m_o \overrightarrow{\text{grad}}\, \theta - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} .$$

En résumé, le système complet d'équations de la thermo-élasticité linéaire, homogène et isotrope s'écrit :

$$\begin{cases} (\Delta^{*} - \rho \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{u} - \gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, \theta = - \vec{f}(x,t) . \\ (\Delta - \dfrac{1}{k} \partial/_{\partial t}) \theta - \eta \dfrac{\partial}{\partial t} \text{div}\, \vec{u} = -q(x,t) . \end{cases}$$

$\vec{f}(x,t)$ = forces de volume, $q(x,t)$ = sources de chaleurs.

1.3. *Une autre forme des Equations.*

Faisons les changements de variables :

$$x_i^{*} \longrightarrow \frac{c_1}{k} x_i \qquad \text{et} \qquad t^{*} = \frac{c_1^2}{k} t$$

Alors :

$$D_{xi} \longrightarrow \frac{c_1}{k} D_{x_i^{*}} \qquad D_t \longrightarrow \frac{c_1^2}{k} D_{t^{*}}$$

$$D^2_{x_i x_j} \longrightarrow \frac{c_1^2}{k^2} D^2_{x_i^{*} x_j^{*}} \qquad D_t^2 \longrightarrow \frac{c_1^4}{k^2} D^2_{t^{*2}}$$

En revenant aux notations initiales, on obtient alors :

$$- \frac{c_1^2}{k^2} \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u} + \frac{c_1^2}{k^2} \overrightarrow{\text{grad}}\, \text{div}\, \vec{u} - m_o \frac{c_1}{k} \overrightarrow{\text{grad}}\, \theta = \frac{1}{c_1^2} \cdot \frac{c_1^4}{k^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

c'est-à-dire : $-\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{u} - m\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta = \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$, $m = m_o \frac{k}{c_1}$

L'équation de la chaleur devient : $\frac{c_1^2}{k}\Delta\theta - \frac{1}{k}\cdot\frac{c_1^2}{k}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \eta\frac{c_1^2}{k}\frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\,\vec{u} = 0$, soit :

$$\begin{cases} -\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{u} - m\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta = \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} - \vec{f}(x,t) \\ (\Delta - \frac{\partial}{\partial t})\,\theta - \eta\,\frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\,\vec{u} = -\,q\,(x,t) \end{cases}$$

Nous utiliserons l'une ou l'autre des deux formulations, suivant le contexte.

2. PROBLEMES ENVISAGES ET PROBLEMES DE CAUCHY ABSTRAITS (P.C.A.) ASSOCIES.

2.1. Problèmes réels.

$t \in R_+$ représentant le temps, soit Ω un ouvert de R^3, de frontière (quand elle est $\neq \phi$), variété régulière de dimension 2, située d'un même côté du plan tangent en tout point $M \in \partial\,\Omega$.

On cherche $\vec{u}(x,t)$ et $\theta(x,t)$ solutions du système (1), (2), satisfaisant en plus à des conditions initiales et à des conditions aux limites.

* Les conditions initiales sont :

  (I) : à $t = 0$, on se donne $u(x,0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$, $\theta(x,0)$ en tout point $x \in \Omega$.

* Les conditions aux limites peuvent être : On se donne sur $\partial\Omega$:

L1 :	$\theta(\xi,t)$ et $\vec{u}(\xi,t)$	$(\xi,t) \in \partial\,\Omega \times\,]0, +\infty[$.
L2 :	$\theta(\ \ ,t)$ et $\vec{t}(\vec{n}_\xi,\vec{u})$	" "
L3 :	$\frac{\partial\theta}{\partial u}(\xi,t)$ et $\vec{u}(\xi,t)$	" "
L3 :	$\frac{\partial\theta}{\partial u}\,(\xi,t)$ et $\vec{t}(n_\xi,\vec{u})$	" "

* De plus Ω peut être :

  $\Omega = R^3$

  Ω = ouvert relativement compact de R^3.

  Ω = " dont le complémentaire est un compact de R^3.

Nous avons ainsi les problèmes suivants :

1. $(\Omega = R^3) \cap (I)$ = problème aux valeurs initiales (Cauchy).

1_i : ($\bar{\Omega}$ compact) $(I) \cap L1$: problème intérieur $D(\theta) \cap D(\vec{u})$: Dirichlet θ et en $\vec{u}$.

2_i : " " $\cap$ L2 : " " $D(\theta) \cap t(\vec{u})$: " et tension en $\vec{u}$

3_i : " " $\cap$ L3 : " " $N(\theta) \cap D(\vec{u})$: Newmann en θ, Dirichlet en $\vec{u}$.

4_i : " " $\cap$ L4 : " " $N(\theta) \cap t(\vec{u})$: Newmann en θ, tension $\vec{u}$.

et les problèmes extérieurs correspondants 1e, 2e, 3e et 4e.

Dans le présent travail, on s'intéresse surtout aux problèmes 1, 1e, 3e, et en particulier au comportement asymptotique ($t \to +\infty$) des solutions.

2.2. *Problèmes réels voisins et P.C.A.*

Supposons que le vecteur $\vec{u}(x,t)$ cherché soit suffisamment régulier pour vérifier le théorème de Schwarz : $\dfrac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_i \partial t} = \dfrac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t\, \partial x_i}$. L'équation de la chaleur devient alors :

$$\frac{\partial \theta\ (x,t)}{\partial t} = -\, k\, \eta\, \mathrm{div}\, \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\,(x,t) + k\, \Delta\, \theta(x,t)$$

On pose alors : $\vec{u}_1(x,t) = \vec{u}(x,t)$, $\vec{u}_2(x,t) = \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}$, $u_7(x,t) = \theta(x,t)$.

Avec $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, u_7) \in C^3 \times C^3 \times C$, on a alors pour le système (1) (2) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\vec{u}_1\\ \vec{u}_2\\ \vec{u}_7\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0\\ \dfrac{\Delta^*}{\rho} & 0 & -\dfrac{\gamma}{\rho}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\\ 0 & -\,k\,\eta\,\mathrm{div} & k\,\Delta\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\vec{u}_1\\ \vec{u}_2\\ u_7\end{bmatrix}$$

En appelant A l'opérateur matriciel de dérivation, on a donc :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = A\ \vec{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(EV)}$$

Et le système (1)) (2) se réduit à une équation d'évolution (qui, bien sûr, ne lui est pas équivalente). On obtient donc en remplaçant (1) (2) par l'équation (EV) une série de nouveaux problèmes que nous appelerons "problèmes réels voisins". Ce sont ces problèmes voisins que nous allons nous attacher à résoudre.

Pour ce faire, nous suivons la technique, devenue courante aujourd'hui, qui consiste à regarder ces problèmes comme des équations d'évolution dans des espaces fonctionnels (ici il s'agira de Hilbert) = .

Soient X_j n espaces de Hilbert séparables, chacun correspondant à une condition frontière. En fait on a donc $X_j(\Omega;\ C^7)$.

* $\forall t \in R_+^*$ (t est considéré comme un paramètre) on a :

$$\vec{u}(x,t) = (\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_7) \in x_j(\Omega;\ C^7)$$

* $t = 0$, on donne $\vec{u}(x,0) \in x_j(\Omega;C^7)$

* x_j est un espace de distributions.(C'est-à-dire $x_j \subset \mathcal{D}'(\Omega;C^7)$ alg. et topologiquement)

* $D(A) \subset x_j$ et non vide et A est un opérateur dans x_j .

Nous obtenons alors les problèmes de Cauchy abstraits :

Trouver $\vec{u}$ solution de :

$$\boxed{\text{P.C.A. (j)} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = A\ \vec{u},\ \vec{u}(x,0) \in D(A) \\ \text{dans } x_j(\Omega;C^7) \end{array} \right\}}$$

Nous allons donc :

1 - Résoudre le P.C.A. (j) :

2 - En étudiant la régularité des solutions de ce problème voir dans quelle mesure on obtient des solutions des "problèmes voisins" et éventuellement des problèmes initiaux donnés. (Solution est ici prise bien sûr au sens "classique").

Nous allons commencer par le problème de Cauchy dans R^3.

* Remarques : *1) Autre écriture de A .*

On peut écrire $A\vec{v}$, $\vec{v} = (\vec{v}_1,\vec{v}_2,v_7)$ sous la forme :

$A\vec{v} = (A_{ij}\ \vec{v}_{ij})_{,i} + B_i\ \vec{v}_{,i} + C\ \vec{v}$, où les opérateurs de dérivations matriciels sont respectivement du second, 1er et d'ordre zéro. On a effectivement :

$\longrightarrow (A_{ij}\ \vec{v}_{ij})_{,i} = \left(0, \ \dfrac{\Delta^{*}\vec{k}_1}{\rho}, \ k\ \Delta\ v_7\right)$, c'est-à-dire :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \dfrac{E_{ij}}{\rho} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

où

$E_{11} = \mathrm{Diag}\,(\lambda+2\mu, \mu, \mu)$: $E_{22} = \mathrm{Diag}\,(\lambda, \lambda+2\mu, \mu)$; $E_{33} = \mathrm{Diag}\,(\mu, \mu, \lambda+2\mu)$

$$E_{12} = {}^{t}E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ E_{23} = {}^{t}E_{32} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}; \ E_{31} = {}^{t}E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow B_i\ \vec{v}_{,i} = \left(0_1 - \frac{\gamma}{\rho}\ \vec{\nabla}\ v_7, \ -k\ \eta\ \mathrm{div}\ \vec{v}_2\right)$, c'est-à-dire :

$B_1 = \{ b_{ij} = 0$ sauf $b_{47} = -\frac{\gamma}{\rho}$ et $b_{74} = -k\ \eta\}$.

$B_2 = \{$ " " $b_{57} = -\frac{\gamma}{\rho}$ et $b_{75} = -k\ \eta\}$.

$B_3 = \{$ " " $b_{67} = -\frac{\gamma}{\rho}$ et $b_{76} = -k\ \eta\}$.

$\longrightarrow C\ \vec{v} = (\vec{v}_2, \ 0, \ 0)$, d'où

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix}$$

On voit que les matrices A_{ij}, B_i et C ne sont pas symétriques $\Rightarrow$ l'opérateur A ne sera qu'exceptionnellement symétrique. (Il faudra sans doute des conditions très fortes à la frontière).

2) *Autres problèmes* :

On peut, au lieu de se donner $\vec{t}(n,\vec{u})$ à la frontière, se donner $\vec{T}(\vec{n},\vec{u}) = \vec{t}-\gamma\ \vec{n}\ u_7$ ce qui permettrait de poser en plus les problèmes suivants :

Si : ($\vec{\Omega}$ compact) $\cap$ I $\cap$ L_5 : problème intérieur $D(\theta) \cap T(\vec{u})$ } 5e
et
Si : (———) " $\cap$ L_6 : problème intérieur $N(\theta) \cap T(\vec{u})$ } 6e

avec

L_5 : $\theta(\xi,t)$ et $\vec{T}(\xi,t)$ $\forall$ (ξ,t) $\partial\ \Omega \times]0, +\infty[$.

L_6 : $\frac{\partial\theta}{\partial}$ (ξ,t) et $\vec{T}(\xi,t)$ " " " .

Ces problèmes ont été envisagés dans le cas stationnaire (Dépendance harmonique par rapport au temps par Jeutsch ( ).

3. QUELQUES RESULTATS PRELIMINAIRES.

3.1. *Relations intégrales*.

Soit Ω, ouvert relativement compact de R^3, de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1 par morceaux. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$\vec{u}(x) \in C^2(\Omega;C^3) \cap C^1(\overline{\Omega};C^3)$
et $\vec{v}(x) \in C^2(\Omega;C^3) \cap C^1(\overline{\Omega};C^3)$

On a alors :

$$\int_\Omega \vec{u}.\Delta^* \vec{v}\ dx = -\int_\Omega E(\vec{u},\vec{v})dx + \int_{\partial\Omega} \vec{u}.\vec{t}(n,\vec{v})dS \quad \text{et}$$

$$\int_\Omega (\vec{u}.\vec{\Delta}^{*}\vec{v}-\vec{v}.\vec{\Delta}^{*}\ u)\ dx = \int_{\partial\Omega} [\vec{u}.\vec{t}(\vec{n},\vec{v})-\vec{v}.\vec{t}(n,\vec{u})]\ dS\ .$$

où $E(\vec{u},\vec{v}) = \lambda \operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}(\vec{u})\ \varepsilon_{ij}(\vec{v})$ (sommation sur les indices).

$$\vec{t}(\vec{n},\vec{v}) = 2\mu \frac{\partial\vec{v}}{\partial n} + \lambda\ \vec{n} \operatorname{div} \vec{v} + \mu\ \vec{n} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{v}\ .$$

* Si $u(x)$ et $v(x) \in C^2(\Omega;C) \cap C^1(\overline{\Omega};C)$, on a :

$$\int_\Omega u\ \Delta\ v\ dx = -\int_\Omega \vec{\nabla}\ u.\vec{\nabla}\ v\ dx + \int_{\partial\Omega} u.\frac{\partial v}{\partial n}\ dS\ ;$$

et $\displaystyle\int_\Omega (u \,\Delta\, v - v \,\Delta\, u)\, dx = \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n})\, dS$

<u>2ème relation</u> :

Même Ω . Soient $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(\Omega;\mathbb{C}^7) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega};\mathbb{C}^7)$. On a :

$$\int_\Omega \vec{u}.A\,\vec{v}\, dx = \int_\Omega \left[\vec{u}_1.\vec{v}_2 + \vec{u}_2.\frac{1}{\rho}(\Delta^* \vec{v}_1 - \gamma\, \vec{v}_7) + k\, u_7 - k\eta\;\; u_7 \,\mathrm{div}\, \vec{v}_2\right] dx$$

$$= \int_\Omega \vec{v}_2.\vec{u}_1\, dx + \frac{1}{\rho}\left[\int_\Omega \vec{v}_1.\Delta^*\vec{u}_2 + \int_{\partial\Omega}\left[\vec{u}_2.\vec{t}(\vec{n},\vec{v}_1) - \vec{v}_1.\vec{t}(n,u_2)\right] dS\right.$$

$$+ k\left[\int_\Omega v_7\,\Delta\, u_7 + \int_{\partial\Omega} (u_7 \frac{\partial u_7}{\partial u} - v_7 \frac{\partial u_7}{\partial u})\, dS\right]$$

$$- \frac{\gamma}{\rho}\left[-\int_\Omega v_7 \,\mathrm{div}\, \vec{u}_2\, dx + \int_{\partial\Omega} v_7\, \vec{u}_2.\vec{n}\, dS\right] - k\eta$$

$$\left[-\int_\Omega \vec{v}_2.\vec{\nabla} u_7 + \int_{\partial\Omega} u_7\, \vec{v}_2.\vec{n}\, dS\right].$$

$$= \int_\Omega\left[\vec{v}_1.\, \frac{\Delta^*}{\rho}\vec{u}_2 + \vec{v}_2.(\vec{u}_1 + k\,\eta\,\vec{\nabla} u_7) + v_7.(\frac{\gamma}{\rho}\,\mathrm{div}\, \vec{u}_2 + k\,\Delta\, u_7)\right] dx$$

$$+ \frac{1}{\rho}\int_{\partial\Omega}\left[\vec{u}_2.\vec{t}(\vec{n},\vec{v}_1) - \vec{v}_1.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}_2)\right] dS - \frac{\gamma}{\rho}\int_{\partial\Omega} v_7.\vec{u}_2.\vec{n}\, dS - k\eta\int_{\partial\Omega} u_7\, \vec{v}_2.\vec{n}\, dS$$

$$+ \int_{\partial\Omega} (u_7 \frac{\partial u_7}{\partial \mathbf{n}} - v_7.\, \frac{\partial u_7}{\partial n})\, dS$$

$$= \int_\Omega \vec{v}.B\,\vec{u}\, dx + \frac{1}{\rho}\int_{\partial\Omega}\left[\vec{u}_2.\vec{t}(\vec{n}.\vec{v}_1) - \vec{v}_1.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}_2)\right] dS - \frac{\gamma}{\rho}\int_{\partial\Omega} v_7.\vec{u}_2.\vec{n}\, dS$$

$$- k\eta\int_{\partial\Omega} u_7\, \vec{v}_2.\vec{n}\, dS + \int_{\partial\Omega} (u_7 \frac{\partial v_7}{\partial n} - v_7 \frac{\partial u_7}{\partial n})\, dS$$

avec

$$B\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho}\Delta^* & 0 \\ I & 0 & k\eta\vec{\nabla} \\ 0 & \frac{\gamma}{\rho}\,\mathrm{div} & k\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{\rho}\Delta^*\vec{u}_2 \\ \vec{u}_1 + k\,\eta\,\vec{\nabla} u_7 \\ \frac{\gamma}{\rho}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_2 + k\,\Delta\,u_7 \end{cases}$$

On en déduit en particulier :

$$\int_\Omega (\vec{u}.A\,\overline{\vec{v}} - \overline{\vec{v}}.B\,\vec{u})\,dx = \frac{1}{\rho}\int_{\partial\Omega}\left[\vec{u}_2.\vec{t}(\vec{n},\overline{\vec{v}}_1) - \overline{\vec{v}}_1.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}_2)\right] dS$$

$$-\frac{\gamma}{\rho}\int_{\partial\Omega} \overline{v}_7.\vec{u}_2.\vec{n}\,dS - k\eta\int_{\partial\Omega} u_7\,\overline{\vec{v}}_2.\vec{n}\,dS.$$

$$+\int_{\partial\Omega}\left(u_7\frac{\partial\overline{v}_7}{\partial n} - \overline{v_7}\,\frac{\partial u_7}{\partial n}\right) dS\ .$$

$$\text{et} \int_\Omega \overline{\vec{u}}.A\,\vec{u}\,dx = \int_\Omega \overline{\vec{u}}_1\,\vec{u}_2 - \frac{1}{\rho}E(\overline{\vec{u}}_2,\vec{u}_1) - k\,|\vec{\nabla}u_7|^2 + \frac{\gamma}{\rho}u_7\,\mathrm{div}\,\overline{\vec{u}}_2 - k\,\eta\,\overline{u_7}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_2\,dx$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_{\partial\Omega}\overline{\vec{u}}_2.\vec{t}\,(\vec{n},\vec{u}_1)\,dS - \frac{\gamma}{\rho}\int_{\partial\Omega} u_7.\overline{\vec{u}}_2.\vec{n}\,dS + k\int_{\partial\Omega}\overline{u_7}\,\frac{\partial u_7}{\partial u} \quad \text{ou bien}$$

$$\int_\Omega \overline{\vec{u}}.A\,\vec{u}\,dx = \int_\Omega\left[\overline{\vec{u}}_1.\vec{u}_2 - \frac{1}{\rho}E(\overline{\vec{u}}_2,\vec{u}_1) - k|\vec{\nabla}u_7|^2 - \frac{\gamma}{\rho}\overline{\vec{u}}_2.\vec{\nabla}u_7 + k\,\eta\,\vec{u}_2.\overline{\vec{\nabla}u_7}\right]dx$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_{\partial\Omega}\overline{\vec{u}}_2.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}_1)\,dS - k\,\eta\int_{\partial\Omega}\overline{u}_7.\vec{u}_2.\vec{n}\,dS + k\int_{\partial\Omega}\overline{u}_7.\frac{\partial u_7}{\partial u}\ .$$

3.2. *Le cas de* $L^2(R^3;C^7)$

Ce paragraphe esquisse très sommairement le problème de Cauchy dans $L_2(R^3;C^7)$. Les résultats sont essentiellement "négatifs" et justifient le recours à un espace plus "adéquat" dans lequel nous nous plaçons à partir du paragraphe suivant.

Opérateurs Adjoints dans $L_2(R^3;C^7)$.

Soit $\tilde{A}$ l'opérateur $\tilde{A}\vec{\vec{u}} = A\,\vec{u}$ $D(\tilde{A}) = C_o^\infty (R^3;C^7)$; $D(A)$ étant dense dans $L_2(R^3;C^7)$, on peut définir $\tilde{A}^*$.

⟶ Soit $\vec{\vartheta} = (\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \vartheta_7) \in \mathcal{D}(R^3;C^7) = D(\tilde{A})$ et $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, u_7) \in D(\tilde{A}^*)$.

On a alors au sens des distributions, et en se servant des relations établies plus haut :

$$\tilde{A}^*\,\vec{u}(\vec{\vartheta}) = (\tilde{A}^*\,\vec{u},\overline{\vec{\vartheta}})_{L_2} = (\vec{u}, A\,\overline{\vec{\vartheta}})_{L_2} \;.$$

$$= (\frac{1}{\rho}\,\Delta^*\,\vec{u}_2,\vec{\vartheta}_1)_{L_2(R^3;C^3} + (\vec{u}_1 + k\,\eta\,\vec{\nabla}\vec{u}_7,\overline{\vec{u}_2})_{L_2(R^3;C^3)} + (k\,\Delta\,u_7 + \frac{\Upsilon}{\rho}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_2,\vec{\vartheta}_7)_{L_2(R^3;C)}$$

$= u^*(\vec{\vartheta})$, où $\vec{\vec{u}}^*$ est la distribution $\vec{\vec{u}}^* = (-\frac{1}{\rho}\,\Delta^*\,\vec{u}_2,\vec{u}_1 + k\,\eta\,\vec{u}_7,\; k\,\Delta\,u_7 + \frac{\Upsilon}{\rho}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_2)$.

⟶ Réciproquement, si $\vec{u} \in L_2(R^3;C^7)$ et $\vec{\vec{u}}^* \in L_2(R^3;C^7)$, on a, en remontant les calculs :

$$\vec{\vec{u}}^*(\vec{\vartheta}) = (\vec{\vec{u}}^*,\vec{\vartheta})_{L_2(R^3;C^7)} = (\vec{u}, \tilde{A}\,\vec{\vartheta})_{L_2(R^3;C^3)} \qquad \forall\,\vartheta \in \mathcal{D}(R^3;C^7) = D(\tilde{A})$$

On a donc :

$$\tilde{A}^* = \begin{cases} \tilde{A}^*\,\vec{u} = \vec{\vec{u}}^* = B\,\vec{u} \text{ au sens des distributions.} \\ D(\tilde{A}^*) = \{\vec{u} \in L_2(R^3;C^7) \cap \vec{\vec{u}}^* \in L_2(R^3;C^7)\} \;. \end{cases}$$

c'est-à-dire plus précisément :

* $\vec{u}_1 \in L_2(R^3;C^3)$.
* $\vec{u}_2 \in L_2(R^3;C^3) \cap \Delta^*\,\vec{u}_2 \in L_2(R^3;C^3) :\Rightarrow \vec{u}_2 \in H_2(R^3;C^3)$, ($\Delta^*$ est élliptique).

  En particulier $\mathrm{div}\,\vec{u}_2 \in L_2(R^3;C)$
* De même on obtient $u_7 \in H_2(R^3;C)$.

soit

$$\boxed{D(\tilde{A}^*) = L_2(R^3;C^3) \times H_2(R^3;C^3) \times H_2(R^3;C)} \;.$$

⟶ On élargit alors le domaine de $\tilde{A}$ par fermeture au sens de la norme du graphe, c'est-à-dire qu'on considère désormais le plus petit prolongement fermé de $\tilde{A}$, que nous noterons A.

Et on a donc obtenu deux opérateurs, dont chacun est l'adjoint de l'autre :

$$A = (\tilde{A}^*)^* = A^{**} \quad \text{et} \quad A^* = \tilde{A}^* \quad .$$

On a alors :

$D(A) = \{\vec{u} \in L_2(R^3;C^7) : \tilde{A}\, u \text{ distr.} \in L_2(R^3;C^7)\}$ donc :

$$\vec{u} \in L_2(R^3;C^7) \cap \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_2 \in L_2\,(R^3;C^3) \\ \Delta^* \vec{u}_1 - \vec{\nabla} u_7 \in L_2(R^3;C^3) \\ -k\,\eta \operatorname{div} \vec{u}_2 + k\,\Delta\, u_7 \in L_2(R^3;C) \end{array} \right.$$

On remarque qu'on ne peut pas séparer les conditions sur $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et u_7, même localement. D'où des "comportements" différents de A et A^*, en particulier dans les problèmes d'évolution qui leur sont liés.

* Notons qu'on a tout de même :

$D(A) \cap D(A^*) = H_2(R^3;C^3) \times H_2(R^3;C^3) \times H_2(R^3;C)$, qui est dense dans $L_2(R^3;C^7)$ et ceci permet éventuellement de construire des opérateurs raisonnablement définis tels :

$$\lambda A + \mu A^* \qquad \lambda, \mu \in C \text{ ; en particulier } \operatorname{Re} A = \frac{A+A^*}{2} \text{ et } \operatorname{Im} A = \frac{A-A^*}{2i}$$

Décroissance de l'Energie et Conséquences

⟶ Soit $\vec{u} \in D(A)$ et suffisamment régulier, par exemple $\vec{u} \in D(A) \cap \mathcal{S}\,(R^3;C^7)$ ($\mathcal{S}$: fonctions C^∞ à décroissance rapide). On alors

$$(Au,u)_{L_2(R^3;C^3)} = \lim_{N\to+\infty} \int_{B(0,N)} A\vec{u}.\bar{\vec{u}}\, dx$$

où B(0,N) est la boule de centre 0 et de rayon N. $|x| < N$. $S_N = \partial B(0,N)$.

Donc

$$(A\vec{u},\ \vec{u})_{L_2(R^3;C^3} = \mathrm{Lim}\iint_{|x|<N}\left[\vec{u}_1.\overline{\vec{u}_2} - \frac{1}{\rho}E\ (\overline{\vec{u}_2},\vec{u}_1) - k|\vec{\nabla}\ u_7|^2 + \frac{\gamma}{\rho}u_7\ \mathrm{div}\ \overline{\vec{u}_2} - k\,\eta\,\overline{u}_7\ \mathrm{div}\ \vec{u}_2\right]dx$$

$$+\int_{|x|=N}\left(\frac{1}{\rho}\ \overline{\vec{u}_2}.\vec{t}(\vec{n}_1,\vec{u}_1) - \frac{\gamma}{\rho}\ u_7.\overline{\vec{u}_2}.\vec{n} + k\ \overline{u}_7.\ \frac{\partial u_7}{\partial n}\right)dS$$

$$= \int_{R^3}\left[\vec{u}_1.\overline{\vec{u}_2} - \frac{1}{\rho}\ E(\overline{\vec{u}_2},\vec{u}_1) - k\ |\vec{\nabla}u_7|^2 + \frac{\gamma}{\rho}\ u_7\ \mathrm{div}\ \overline{\vec{u}_2} - k\ \eta\ \overline{u}_7\ \mathrm{div}\ \vec{u}_2\right]dx$$

puisque $\vec{u}\in S(R^3;C^7)$

$$= \int_{R^3}\left[\vec{u}_1.\overline{\vec{u}_2} - \frac{1}{\rho}\ E(\overline{\vec{u}_2};\vec{u}_1) - k|\vec{\nabla}\ u_7|^2 - \frac{\gamma}{\rho}\ \overline{\vec{u}_2}.\vec{\nabla}u_7 + k\ \eta\ \vec{u}_2.\overline{\vec{\nabla}\ u_7}\right]dx$$

<u>Cette formule se prolonge en fait pour $\vec{u}\in D(A)$</u> $\cap\{\vec{\nabla}u_7\in L_2(R^3;C^3)\}\cap\{\mathrm{div}\ \vec{u}_2\in L_2(R^3;C)\}$. qui est égal à $X \triangleq H_2\ (R^3;C^3)\times H_1(R^3;C^3)\times H_2(R^3;C)\supset D(A)\cap D(A^*)$ et est dense dans $L_2(R^3;C^7)$.

⟶ <u>Soit alors $\vec{u}(x,t)\in X$</u> et solution de l'équation d'évolution :

$$\frac{du}{dt} = A\vec{u} \qquad \vec{u}(x,0) = f(x)\in D(A)$$

(Nous supposons qu'une telle solution existe pour un ensemble non vide de données initiales). Alors $(\frac{d\vec{u}}{dt},\ \vec{u})_{L_2(R^3;C^7)} = (A\vec{u},\ \vec{u})_{L_2(R^3;C^7)}$ d'où :

$\frac{d}{dt}\ ||\vec{u}(x,t)||_o^2 = \mathrm{Re}\ (A\vec{u},\ \vec{u})$, $(.,.)_o$ étant le produit scalaire dans $L_2(R^3;C^j)$, j étant clair d'après le contexte.

$$= -2k||\vec{\nabla}\ u_7(x,t)||_o^2 + 2\ \mathrm{Re}\int_{R^3}\left[\vec{u}_1.\overline{\vec{u}_2} - \frac{1}{\rho}\ E(\overline{\vec{u}_1},\vec{u}_2) + (\frac{\gamma}{\rho} - k\eta)\overline{u_7}\ \mathrm{div}\,\vec{u}_2\right]\mathbf{dx}.$$

Or

$\gamma(u_7,\ \mathrm{div}\ \vec{u}_2)_o = \int_\Omega E(\overline{\vec{u}_1},\vec{u}_2)dx + \rho(\vec{u}_2,\ \frac{d\vec{u}_2}{dt})_o$ d'après l'équation; donc :

$$\frac{d}{dt}\ ||\vec{u}(x,t)||_o^2 = -\ 2k||\vec{\nabla}\theta(x,t)||_o^2 + 2\ \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\left[||\vec{u}_1||_o^2 + ||\vec{u}_2||_o^2 - \rho k\frac{\eta}{\gamma}\ ||\vec{u}_2||_o^2\right.\right.$$

$$\left.- k\ \frac{\eta}{\gamma}\int_{R^3}|E(\vec{u}_1,\vec{u}_1)|^2\ dx\ \right]$$ soit en fin de compte :

$$\frac{d}{dt}\int_{R^3}\left[\lambda|\operatorname{div}\vec{u}_1(x,t)|^2 + 2\mu\sum_{i,j=1}^{3}|\varepsilon_{ij}(u_1)|^2 + \frac{\gamma}{\eta k}\; u_7(x,t)|^2 + \rho|\vec{u}_2(x,t)|^2\right]dx =$$

$$- 2\,\frac{\eta}{\gamma}\int_{R^3}|\vec{\nabla}\;\theta(x,t)\;|^2\;dx\;.$$

Appelons "énergie de la solution "l'expression sous intégrale, on a alors (en la notant $E\;(\vec{u}(t)\;)$.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\,E\left[\vec{u}(x,t)\right] = -\,2\,\frac{\eta}{\gamma}\;||\nabla u_7(x,t)||^2_{L_2}\;(R^3;C^3)}$$

$$\Longrightarrow\qquad E\;(\vec{u},(x,t) - E\;(\vec{u}(x,0)\;) = -\,2\,\frac{\eta}{\gamma}\int_0^t||\vec{\nabla}\;u_7(x,t)||^2_{o}\;\;dt$$

Conclusions :

1) <u>Théorème d'unicité</u> : Il ne peut exister plus d'une solution $\vec{u}(x,t)\in X$.

<u>Preuve</u> :

On a $E\;(\vec{u}(x,t) \leqslant E\;(\vec{u}(x,0)\;)$.

Or $\vec{u}(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; E\;(\vec{u}(x,0)\;) = 0 \;\Rightarrow\; E\;(\vec{u}(x,t)) = 0$, c'est-à-dire :
$\vec{u}_2(x,t) = 0$, $u_7(x,t) = 0$ et $E(\vec{u}_1(x,t),\;\vec{u}_1(x,t)) = 0$, entraînant $\vec{u}_1(x,t) = S(t)\;\vec{x} + \vec{b}(t)$ où $S(t)$ est une matrice antisymétrique (a priori dépendant du temps) et $\vec{b}(t)$ un vecteur constant (a priori dépendant du temps aussi). Mais alors l'équation $\frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u}$ nous donne en plus :
$\vec{u}_2(x,t) = \frac{d}{dt}\;\vec{u}_1(x,t) = 0 \;\Rightarrow\;$ S et $\vec{b}$ indépendants du temps. Comme $\vec{u}_1(x,t)\in L_2(R^3;C^3)$ par hypothèse on a $\vec{u}_1(x,t) = 0$. Donc $\vec{u}(x,t) = 0$.

<u>Remarque</u> : La relation de dissipativité ci-haut donne pour $t = 0$
$E\;\;(\vec{u}(x,t) = E\;(\vec{f}(x)\;)$ et permet donc d'introduire une notion de "solution faible", où la donnée initiale est prise dans le sens $E\;(\vec{u}(t) \xrightarrow{t\to 0} E(\vec{f})$, pour laquelle le théorème d'unicité continue à être vrai. (En fait donc on aura globalement une solution forte en $\vec{u}_2$ et u_7 et <u>localement</u> seulement en $\vec{u}_1$).

2) Quant à l'existence, nous démontrerons dans le paragraphe suivant, qu'il existe une solution à énergie finie par toute donnée à énergie finie...

Soit alors $R(t)$ l'opérateur :

$$\vec{f}(x)\ [\text{à énergie finie}] \longrightarrow R(t)\,\vec{f} = \vec{u}(x,t)$$

L'ensemble $\{\vec{f} \in L_2(R^3;C^7) : \vec{f}$ à énergie finie$\}$ est dense dans $L_2(R^3;C^7)$, puisque contenant $C_0^\infty(R^3;C^7)$, mais l'opérateur $R(t)$ n'est pas continu dans la topologie de $L_2(R^3;C^7)$. On ne peut donc l'étendre d'une façon univoque à $L_2(R^3;C^7)$ tout entier.

De plus $R(t)\big|_{t=0} \neq I$ (on a $E\,(\vec{u}(t)\big|_{t=0} = E\,(\vec{f}(x))$ mais non pas

$\|\vec{u}(x,t) - \vec{f}(x)\|_{L_2} \longrightarrow 0$); donc $R(t)$ n'est pas un semi-groupe.

3) $\frac{d}{dt}\,\|\vec{u}(x,t)\|^{\circ}_{L_2}$ ne garde pas un signe constant, en particulier il n'est pas $\leqslant 0$. Il n'y a donc pas de "stabilité" du phénomène.

4) Toutes ces considérations nous amènent donc à voir que l'espace "naturel" du problème (il aura aussi bien d'autres vertus) est l'espace des fonctions à énergie finie dans lequel nous nous plaçons désormais.

4. *ETUDE DE* (E_o) *DANS* H_o .

4.1. *Introduction.*

Les calculs qui précèdent nous suggèrent de prendre nos données initiales dans l'espace suivant, que nous appelons H_o :

H_o : sera le complété de $\mathcal{D}\,(R^3;C^7)$ pour la norme :

$$\|\vec{\varphi}\|_{H_o} = \lambda\|\operatorname{div}\vec{\varphi}_1\|^2_{L^2(R^3;C)} + 2\mu\sum_{i,j}\|\varepsilon_{ij}\,(\vec{\varphi}_1)\|^2_{L^2(R^3;C)} + \rho\|\vec{\varphi}_2\|^2_{L^2(R^3;C^3)}$$

$$+\frac{\gamma}{\eta k}\,\|\varphi_7\|^2_{L^2(R^3;C)}$$

$\vec{\varphi} = (\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \varphi_7) \in \mathcal{D}\,(R^3;C^7)$; $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2 \in \mathcal{D}\,(R^3;C^3)$.

Le produit scalaire correspondant étant noté :

$$(\vec{u},\vec{v})_{H_o} = \int_{R^3} \left[\lambda \operatorname{div} \vec{u}_1 . \overline{\operatorname{div} \vec{v}_1} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}(v_1).\overline{\varepsilon_{ij}(\vec{v}_1)} + \frac{\gamma}{\eta k} u_7 \overline{v_7} + \rho\, \vec{u}_2 . \overline{\vec{v}_2}\right] dx$$

$$= \int_{R^3} \{E(\vec{u}_1,\overline{\vec{v}_1}) + \rho\, \vec{u}_2 . \overline{\vec{v}_2} + \frac{\gamma}{\eta k} u_7 \overline{v_7}\} dx$$

On rappelle que $EL(R^n;C^n)$ désigne le complété de $\mathcal{D}(R^n;C^n)$ dans la norme :

$$||\vec{u}||^2_{EL} = \sum_{i,j} ||\varepsilon_{ij}(\vec{u})||^2_{L^2(R^n;C)} \qquad i,j = 1, 2, \ldots, n$$

Cette norme étant alors équivalente à $E(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$.

λ et μ étant des constantes finies, on peut donc identifier H_o, à l'espace produit :

$$H_o = EL(R^3;\, C^3) \times L_2(R^3;C^3) \times L_2(R^3;\, C)$$

muni de la topologie produit habituelle, la moins fine rendant continues les projections π_i . H_o est alors séparable, car produit de trois espaces séparables.

⊙ Soit alors $\tilde{A}$ l'opérateur : $\tilde{A}\,\vec{u} = A\,\vec{u}$ et $D(\tilde{A}) = \mathcal{D}(R^3;C^7)$. $\tilde{A}$ est alors préfermé.

Pour $\vec{u}, \vec{v} \in C_o^\infty(R^3;C^3)$, on sait que l'on a :

$\vec{u}.\Delta^* \vec{v} = \operatorname{div} \vec{q}\,(\vec{u},\vec{v}) - E(\vec{u},\vec{v})$, d'où :

$(\vec{u},\Delta^* \vec{v})_{L_2(R^3;C^3)} = -\int_{R^3} E(\vec{u},\overline{\vec{v}})$. On a alors :

$$(\vec{u},\vec{v})_{H_o} = (\vec{u}_1, -\Delta^* \vec{v}_1) + \rho\, (\vec{u}_2,\vec{v}_2)_{L_2} + \frac{\gamma}{\eta k} (u_7, v_7)_{L_2}$$

Alors :

$$(\tilde{A}\,\vec{u},\vec{u})_{H_o} = (\tilde{A}_1\, \vec{u}_1, -\Delta^* \vec{u}_1)_{L_2} + \rho\, (\tilde{A}_2\, \vec{u},\vec{u}_2)_{L_2} + \frac{\gamma}{\eta k} (\tilde{A}_7\, \vec{u},u_7)_{L_2}$$

$$= (\vec{u}_2,-\Delta^* \vec{u}_1)_{L_2} + \rho . \frac{1}{\rho} (\Delta^* \vec{u}_1 - \gamma \vec{\nabla} u_7, \vec{u}_2)_{L_2} + \frac{\gamma}{\eta k} (-k\,\eta \operatorname{div} \vec{u}_2 + k\,\Delta\, u_7, u_7)_{L_2}$$

$$= (\vec{u}_2,-\Delta^* \vec{u}_1)_{L_2} + (\Delta^* \vec{v}_1,\vec{u}_2)_o - \gamma(\vec{\nabla}\, \vec{u}_7, \vec{u}_2)_o - \gamma(\operatorname{div} \vec{u}_2, u_7)_o + \frac{\gamma}{\eta} (\Delta\, u_7, u_7)_o$$

$$= -\frac{\gamma}{\eta}\,||\nabla\,\vec{u}_7||^2_{L_2} + (\Delta^*\,\vec{u}_1,\vec{u}_2)_o - \overline{(\Delta^*\,\vec{v}_1,\vec{u}_2)_o} + \gamma(u_7,\mathrm{div}\,\vec{u}_2)_o - \overline{\gamma(u_7,\mathrm{div}\,\vec{u}_2)_o}$$

$$= -\frac{\gamma}{\eta}\,||\nabla\,\vec{u}_7||^2_{L_2} + (2\,i\,\mathrm{Im}\left[(\Delta^*\,\vec{u}_1,\vec{u}_2)_{L_2} + \gamma(u_7,\,\mathrm{div}\,\vec{u}_2)_{L_2}\right]$$

On a donc :

$$\boxed{\mathrm{Re}(\tilde{A}\,\vec{u},\vec{u})_{H_o} = -\frac{\gamma}{\eta}\int_{R^3}\|\vec{\nabla}\,u_7\|^2\,dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Im}(\tilde{A}\,\vec{u},\vec{u})_{H_o} = 2\,\mathrm{Im}\int[E(\vec{u}_2,\vec{\bar{u}}_1) - \gamma\,\bar{u}_7\,\mathrm{div}\,\vec{u}_2]\,dx}$$

4.2. *L'opérateur adjoint.*

$\mathcal{D}(R^3;C^7) = D(\tilde{A})$ étant dense dans H_o, on peut alors définir l'opérateur adjoint $\tilde{A}^*$. Par définition on a :

$D(\tilde{A}^*) = \{y \in H_o |\ x \in D(\tilde{A}),\ \exists y^* \in H_o$ t.q. $(\tilde{A}\,x,y)_{H_o} = (x,y^*)_{H_o}\}$ et $\tilde{A}^*\,y = y^*$

1 Soit $\vec{g} \in D(\tilde{A}^*)$. Par définition, on a :

$$(\vec{f},\ \tilde{A}^*\,\vec{g})_{H_o} = (\tilde{A}\,\vec{f},\,\vec{g})_{H_o} \quad \forall\,\vec{f} \in D(\tilde{A})$$

$$= (\tilde{A}_1\,\vec{f},\,\vec{g}_1)_{EL} + \rho\,(\tilde{A}_2\,\vec{f},\,\vec{g}_2)_{L_2} + \frac{\gamma}{\eta k}\,(\tilde{A}_7\,\vec{f},\,g_7)_{L_2}$$

$$= (\vec{f}_2,\,\vec{g}_1)_{EL} + \rho\frac{1}{\rho}\,(\Delta^*\,\vec{f}_1 - \gamma\,\vec{\nabla} f_7,\,\vec{g}_2)_{L_2} + \frac{\gamma}{\eta k}\,(k\,\Delta f_7 - k\,\eta\,\mathrm{div}\,\vec{f}_2,\,y_7)_{L_2}$$

$$= (\vec{f}_2,-\vec{\Delta}^*\,\vec{g}_1)_{L_2} + (\vec{f}_1,\Delta^*\,\vec{g}_2) + \gamma(f_7,\,\mathrm{div}\,\vec{g}_2) + \frac{\gamma}{\eta}\,(+f_7,\Delta g_7) + \gamma(\vec{f}_2,\vec{\nabla}\,g_7)$$

$$= \rho(\vec{f}_2,\,-\frac{\Delta^*}{\rho}\,\vec{g}_1 + \gamma\,\frac{\vec{\nabla}}{\rho}\,g_7)_{L_2} + (\vec{f}_1,-\,\vec{g}_2)_{EL} + \frac{\gamma}{\eta k}\,(f_7,\,\eta\,k\,\mathrm{div}\,\vec{g}_2 + k\,\Delta\,g_7)_{L_2}$$

$$= (\vec{f},\,\vec{g}^*)_{H_o}$$

avec

$$\vec{g}^* = (-\,\vec{g}_2\ ,\ -\frac{\Delta^*}{\rho}\,\vec{g}_1 + \frac{\gamma}{\rho}\,\vec{\nabla}\,g_7,\ \eta\,k\,\mathrm{div}\,\vec{g}_2 + k\,\Delta\,g_7)$$

Toutes les dérivations sont prises au sens des distributions (ceci est permis, puisque H_o est un espace de distributions). Au sens des distributions, on a alors :

$\tilde{A}^* \vec{g}(\vec{\psi}) = \vec{g}^*(\psi) = \vec{g}_1^*(\vec{\psi}_1) + \vec{g}_2^*(\vec{\psi}_2) + g_7^*(\psi_7)$, avec $\vec{g}_1^* = -\vec{g}_2$, $\vec{g}_2^* = -\frac{\Delta^*}{\rho}\vec{g}_1 + \frac{\gamma}{\rho}\vec{\nabla} g_7$

et $g_7^* = \eta\, k\, \mathrm{div}\, \vec{g}_2 + k\,\Delta\, g_7$

c'est-à-dire

$$= \vec{g}_2(-\vec{\psi}_1) + \vec{g}_1(-\frac{\Delta^*}{\rho}\vec{\psi}_2) + g_7(-\frac{\gamma}{\rho}\mathrm{div}\,\vec{\psi}_2) + \vec{g}_2(-\eta\, k\,\vec{\nabla}\psi_7) + g_7(k\,\Delta\,\psi_7)$$

$$= \vec{g}_1(-\frac{\Delta^*}{\rho}\vec{\psi}_1) + \vec{g}_2(-\vec{\psi}_1 - \eta\, k\,\vec{\nabla}\psi_7) + g_7(-\frac{\gamma}{\rho}\mathrm{div}\,\vec{\psi}_2 + k\,\Delta\,\psi_7)$$

$$= \vec{g}\,({}^t\tilde{A}^*\vec{\psi})$$

où ${}^t\tilde{A}^*$ désigne l'adjoint formel de $\tilde{A}^*$ (dans $L_2(R^3;C^7)$. On a en fait

$${}^t\tilde{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Delta^*}{\rho} & 0 \\ -I & 0 & -\eta k\vec{\nabla} \\ 0 & -\frac{\gamma}{\rho}\mathrm{div} & k\Delta \end{pmatrix}$$

⊙ On définit de même un opérateur A au sens des distributions par :

$\tilde{A}\,\vec{f}\,(\vec{\psi}) = \vec{f}\,({}^t\tilde{A}\,\vec{\psi})$, où ${}^t\tilde{A}$ est l'adjoint formel de $\tilde{A}$ déjà déterminé dans le paragraphe précédent (B du paragraphe 3).

(2) <u>Réciproquement</u>, soit :

$\vec{g} \in H_o$ tel que $\tilde{A}^*\vec{g}$ distr. $\in H_o$, $\tilde{A}^*\vec{g} = \vec{g}^*$, où les dérivations sont au sens de $\mathcal{D}'$.

Soit $\vec{f} \in D(\tilde{A})$, quelconque. $\vec{g}^* \in H_o$, on a :

$$(\vec{f}, \vec{g}^*)_{H_o} = (\vec{f}_1, \vec{g}_1^*)_{EL} + \rho\,(\vec{f}_2, \vec{g}_2^*)_{L_2} + \frac{\gamma}{\eta k}(f_7, g_7^*)_{L_2}$$

$$= (\vec{f}_1, -\Delta^*\vec{g}_1^*)_{L_2} + \rho\,(\vec{f}_2, \vec{g}_2^*)_{L_2} + \frac{\gamma}{\eta k}(f_7, g_7^*)_{L_2}$$

$$= (-\Delta^*\vec{f}_1, \vec{g}_1^*)_{L_2} + \rho\,(\vec{f}_2, \vec{g}_2^*)_{L_2} + \frac{\gamma}{\eta k}(f_7, g_7^*)_{L_2}$$

$$= (-\Delta^*\vec{f}_1, -\vec{g}_2)_{L_2} + \rho\,(\vec{f}_2, -\frac{\Delta^*}{\rho}\vec{g}_1 + \frac{\gamma}{\rho}\vec{\nabla} g_7)_{L_2} + \frac{\gamma}{\eta k}(f_7, \eta k\,\mathrm{div}\,\vec{g}_2 + k\,\Delta\, g_7)_{L_2}$$

$$= (\Delta^*\vec{f}_1 - \gamma\vec{\nabla} f_7, \vec{g}_2)_{L_2} + (-\Delta^*\vec{f}_2, \vec{g}_1)_{L_2} + (-\gamma\,\mathrm{div}\,\vec{f}_2 + \frac{\gamma}{\eta}\Delta f_7, g_7)_{L_2}$$

$$= (\vec{f}_2, \vec{g}_1)_{EL} + \rho\,(\frac{\Delta^*}{\rho}\vec{f}_1 - \frac{\gamma}{\rho}\vec{\nabla} f_7, \vec{g}_2) + \frac{\gamma}{\eta k}(-\eta k\,\mathrm{div}\,\vec{f}_2 + k\,\Delta\, f_7, g_7)_{L_2}$$

$$= (\tilde{A}\,\vec{f}, \vec{g})_{H_o}$$

3. $\underline{\tilde{A}^*}$ est dissipatif.

$\mathcal{D}\ (R^3;C^7)$ étant dense dans $D(\tilde{A}^*)$, il suffit de le vérifier pour $\vec{v} \in D(\tilde{A})$.

Soit alors $\vec{v} \in \mathcal{D}(R^3;C^7)$, on a :

$$(\tilde{A}^* \vec{v}, \vec{v}) = (\vec{v}, \tilde{A}\vec{v}), \text{ car } \vec{v} \in D(\tilde{A}), \text{ d'où}$$

$$\mathrm{Re}\ (\tilde{A}^* \vec{v}, \vec{v}) = \mathrm{Re}\ (\vec{v}, \tilde{A}\vec{v}) = \mathrm{Re}\ (\tilde{A}\vec{v},\vec{v}) = -\frac{\gamma}{\eta}\int_{R^3} |\vec{\nabla} v_7|^2\, dx \leq 0 .$$

4. Nous allons caractériser en détail $D(\tilde{A}^*)$. On a :

$$D(\tilde{A}^*) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_2 \in EL(R^3;C^3) \\ -\Delta^* \vec{u}_1 + \gamma \vec{\nabla} u_7 \in L_2(R^3;C^3) \\ k\ \eta\ \mathrm{div}\ \vec{u}_2 + k\ \Delta\ u_7 \in L_2(R^3;C) \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_2 \in L_2(R^3;C^3) \\ \vec{u}_1 \in EL(R^3;C^3) \\ \vec{u}_7 \in L_2(R^3;C) \end{array} \right\}$$

Plus précisément :

⊙ Pour $\vec{u}_2$:

$\vec{u}_2 \in EL(R^3;C^3) \Rightarrow \mathrm{div}\ \vec{u}_2 \in L_2(R^3;C)$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_2 \in L_2(R^3;C^3)$, ce qui implique que toutes les dérivées premières sont dans $L_2(R^3;C^3)$; on a donc en fait :

$$\vec{u}_2 \in \overset{\circ}{H}{}^1(R^3;C^3) \text{ , avec les notations de LIONS } (H^s) \text{ et } \overset{\circ}{H}{}^s\ )$$

⊙ Pour u_7 :

$u_7 \in L_2(R^3;C)$; comme $\mathrm{div}\ \vec{u}_2 \in L_2(R^3;C)$, on a $\Delta\ u_7 \in L_2(R^3;C)$; donc, après les résultats classiques pour les opérateurs elliptiques, toutes les dérivées (distributions) d'ordre 1 sont L_2 intégrables; on a donc en particulier $\vec{\nabla}\ u_7 \in L_2(R^3;C^3)$: d'où $u_7 \in H_2(R^3;C)$. En fait on a plus : $\vec{\nabla}\ u_7 \in L_2(R^3;C^3)$, $\mathrm{div}\ \vec{\nabla}\ u_7 = \Delta\ u_7 \in L_2(R^3;C)$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\nabla}\ u_7 = 0$ entraînent $\vec{\nabla}\ u_7 \in EL(R^3;C^3)$, ce qui veut dire en particulier que $\vec{\nabla}\ u_7 \in L_{2,Loc}(R^3;C^3)$.

⊙ Pour u_1 :

$\vec{u}_1 \in EL(R^3;C^3) \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1 \in L_{2,Loc}\ (R^3;C^3)$

$\vec{\nabla}\ u_7 \in L_2(R^3;C^3) \quad \Rightarrow \Delta^*\ \vec{u}_1 \in L_2(R^3;C^3)$, d'où par l'ellipticité de Δ^*,

$\vec{u}_1 \in H_{2,Loc}(R^3;C^3)$

On peut donc résumer :

$$D(\tilde{A}^*) = H_o \cap \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_2 \in EL(R^3;C^3) \\ \Delta^* \vec{u}_1 \in L_2(R^3;C^3) \\ \Delta u_7 \in L_2(R^3;C) \end{array} \right\} = D_1(\tilde{A}^*) \times D_2(\tilde{A}^*) \times D_3(\tilde{A}^*), \text{ avec :}$$

$$D_1(\tilde{A}^*) = \{EL(R^3;C^3) \cap \Delta^* \; \vec{u}_1 \in L_2 \; (R^3;C^3)\} \subset H_{2,Loc}(R^3;C^3)$$

$$D_2(\tilde{A}^*) = \{L_2(R^3;C^3) \cap H_1(R^3;C^3)\} = H_1(R^3;C^3)$$

$$D_3(\tilde{A}^*) = \{L_2(R^3;C) \cap H_2(R^3;C)\} = H_2(R^3;C^3)$$

4.3. Semi-groupe Solution

4.3.1. Rappels :

On rappelle les 3 résultats classiques suivants :

→ Proposition 1 : Soit A un opérateur dans un espace de Hibert X, de domaine X-dense, A^* son adjoint. Quel que soit l'opérateur A' prolongement A, on a : $(A')^* = A^*$, et A^* est un opérateur fermé.

→ Proposition 2 : Soit A un opérateur fermé, dissipatif, à dcmaine dense dans un espace de Banach X muni d'un produit semi-intérieur (donc en particulier un Hilbert), avec A^* dissipatif aussi. Alors A et A^* sont générateurs de deux Co-semi-groupes d'opérateurs de contraction, adjoints l'un de l'autre. Cette proposition est en fait le corollaire du théorème 3.1. de LUMER-PHILLIPS (1).

→ Proposition 3 : Soit A un opérateur dans un espace de Banach X, à domaine dense. Alors le problème de Cauchy abstrait (P.C.A.).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = f \in D(A) \end{array} \right.$$

est uniformément bien posé si A est prégénérateur d'un semi-groupe laissant invariant D(A). Si A est fermé, la condition devient : "A est générateur d'un..."

Cette proposition est un résultat dû à PHILLIPS.

Pour le vocabulaire on a :

* solution $\underset{=}{\Delta}$ c'est une application $t \longrightarrow u(t)$ définie pour $t \in [0, +\infty[$ (ou $t \geq 0$), $u(t) \in D(A)$ et $\frac{du}{dt}$ existe au sens fort, $\frac{du(t)}{dt} = Au(t) \; \forall \; t \geq 0$ et $u(0) = f$.

* Bien posé $\underset{=}{\Delta}$ $f \in D(A)$, $\exists$! une solution (unique $u(t,f)$ et si $fn \to 0$ (en norme), alors $u(t, fn) \xrightarrow{x} 0$, <u>et ceci pour chaque t</u>.

* Uniformément bien posé $\underset{=}{\Delta}$ Si en plus $u(t, fn) \longrightarrow 0$ <u>uniformément sur les compacts de $[0, +\infty[$</u> .

4.3.2. *Semi-groupe solution* :

La relation Re $(\tilde{A} \vec{u}, \vec{u})_{H_0} = - \frac{\gamma}{\eta} ||\vec{\nabla}\theta||_0^2 \leq 0$ exprime que $\tilde{A}$ est dissipatif. De plus, $D(\tilde{A})$ étant dense dans H_0, il est préfermé. Soit alors A son plus petit prolongement fermé (en fait $(\tilde{A}^*)^*$). On a alors $\tilde{A}^* = A_0^*$. On définit ainsi deux opérateurs A_0 et A_0^*, adjoints l'un de l'autre, fermés, dissipatifs (ceci sera prouvé bientôt)... D'après la proposition 2, ils sont donc générateurs de deux Co-semi-groupes de contraction... Ceci implique d'ailleurs qu'alors A_0 et A_0^* sont dissipatifs maximaux, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de prolongements fermés dissipatifs. (cf. PHILLIPS (1)).

Les problèmes de CAUCHY abstraits dans H_0, relatifs à A_0 et A_0^*, sont alors uniformément bien posés. On a existence, unicité et dépendance continue par rapport à des données initiales dans $D(A_0)$ ou $D(A_0^*)$.

Pour $\vec{u}(0,x)=\vec{f} \in D(A)$ on pose $\vec{u}(t,x) = e^{tA_0}\vec{f}$, et pour $\vec{g} \in D(A^*)$, on a $\vec{v}(x,t) = e^{tA_0^*}\vec{g}$. Les opérateurs e^{tA_0} et $e^{tA_0^*}$ étant continus, $D(A_0)$ et $D(A_0^*)$ étant denses dans H_0, ils se prolongent donc (par le théorème de HAHN-BANACH) continûment d'une façon unique à tout H_0. On définit ainsi une solution du problème de CAUCHY initial pour toute donnée initiale appartenant à H_0 .

⟶ <u>Domaine de A_o</u>:

Par construction (fermeture dans la norme du graphe), on a :

$D(A_o) = \{ \vec{u} \in H_o : A\,\vec{u} \text{ distr. } \in H_o \}$, soit :

$$D(A_o) = H_o \cap \begin{cases} \vec{u}_2 \in EL(R^3;C^3) \\ \Delta^* \vec{u}_1 - \gamma \vec{\nabla} u_7 \in L_2(R^3;C^3) \\ -k\,\eta \operatorname{div} \vec{u}_2 + k\,\Delta\, u_7 \in L_2(R^3;C) \end{cases}$$

Or $\vec{u}_2 \in EL(R^3;C^3) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{u}_2 \in L_2(R^3;C)$, d'où $\Delta\, u_7 \in L_2(R^3;C)$, donc :

$$D(A_o) = H_o \cap \begin{cases} \vec{u}_2 \in EL(R^3;C^3) \\ \Delta^* \vec{u}_1 \in L_2(R^3;C^3) \text{; on voit alors facilement que } \boxed{D(A_o)=D(A_o^*)} \; . \\ \Delta u_7 \in L_2(R^3;C) \end{cases}$$

Toutes les remarques faites à propos de A_o^* s'appliquent intégralement ici. Ceci permet de définir des opérateurs de la forme $\lambda A_o + \mu\, A_o^*$, de domaine $D(A_o) = D(A_o^*)$, on a donc en particulier :

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \frac{\Delta^*}{\rho} & 0 & -\frac{\gamma}{\rho}\vec{\nabla} \\ 0 & -k\eta \operatorname{div} & k\Delta \end{pmatrix} \quad , \quad A_o^* = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ -\frac{\Delta^*}{\rho} & 0 & \frac{\gamma}{\rho}\vec{\nabla} \\ 0 & k\eta \operatorname{div} & k\,\Delta \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{A_o + A_o^*}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k\Delta \end{pmatrix} \quad ; \quad iF = \frac{A_o + A_o^*}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ \frac{\Delta^*}{\rho} & 0 & \frac{\gamma}{\rho}\vec{\nabla} \\ 0 & -k\eta \operatorname{div} & 0 \end{pmatrix}$$

avec $A_o = R + iF$, $A_o^* = R - iF$, R et F <u>auto-adjoints</u> et $D(A_o) = D(A_o^*) = D(R) = D(F)$.

⟶ <u>Dissipativité</u> : $\vec{u} \in D(A_o) = D(A_o^*)$, on a :

$$2\mathrm{Re}(A_o\vec{u},\vec{u})_{H_o} = (A_o\vec{u},\vec{u})_{H_o} + (\vec{u},A_o\vec{u})_{H_o} = (A_o + A_o^*)\vec{u},\vec{u})_{H_o} = 2(R\vec{u},\vec{u}) = \frac{2\gamma}{\eta k}.(k\Delta u_7, u_7)_{L_2} = -2\frac{\gamma}{\eta}\|\vec{\nabla}\theta\|_0^2$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\,(A_o^* \vec{u},\vec{u}) \leq 0 \; .$$

4.4. *<u>Propriétés de régularité. Classes de solutions.</u>*

La solution semi-groupe du problème de CAUCHY relatif à A est évidemment une solution "faible". En fait, elle est fortement continu en t et le "faible" se rapporte plutôt aux variables d'espace. Nous dégageons principalement 3 classes de solutions, de régularité croissante : faible, partiellement forte et forte... Auparavant on a les :

4.4.1. 2 Lemmes sur les distributions dépendant d'un paramètre.

Soit $T_\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \Lambda$,espace topologique donné (R ou C en général), Ω ouvert de R_x^n .

Définitions

1) T_λ est dite différentiable en $\lambda = \lambda_o$ si la fonction $\lambda \longrightarrow < T_\lambda , \psi(x) >$ est différentiable pour tout $\psi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on a :

$$< \partial_\lambda T_\lambda |_{\lambda=\lambda_o} , \psi> \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_\lambda < T_\lambda, \psi > \Big|_{\lambda=\lambda_o}$$

2) même chose pour la continuité en $\lambda = \lambda_o$.

Lemmes

1) Supposons T_λ différentiable pour tout $\lambda \in \Lambda$. Alors, il en est de même de $P(D)T_\lambda$, quel que soit le polynôme de dérivation $P(D)$ et en plus on a :

$$\partial_\lambda \, P(D)T_\lambda = P(D) \, \partial_\lambda \, T_\lambda \quad .$$

2) Supposons T_λ continue pour $\lambda \in \Lambda$. Alors, il en est de même de $P(D)T_\lambda$, quel que soit le polynôme $P(D)$.

Preuve :

1) On a $< P(D)T_\lambda(x); \; \psi(x) > = < T_\lambda(x), P^*(D) \, \psi(x) >$

Or $\psi(x) \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow P^*(D) \, \psi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc $< T_\lambda(x), P^*(D)\psi(x) >$ est différentiable en λ , d'où :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda < T_\lambda(x), P^*(D) \, \psi(x)> &= \; < \partial_\lambda \, T_\lambda(x), P^*(D) \, \psi(x) > \\ &= \; < P(D) \, \partial_\lambda \, T_\lambda(x), \psi(x)> \end{aligned}$$

et $\partial_\lambda < T(x), P^*(D) \, \psi(x) > = \partial_\lambda < P(D) \, T_\lambda(x), \psi(x) >$, soit finalement :

$\partial_\lambda < P(D) \, T(x), \psi(x) > = < P(D)\partial_\lambda \, T_\lambda(x), \psi(x)$, ce qui veut dire que $P(D) \, T_\lambda(x)$ est une distribution différentiable en λ et on a :

$$\boxed{\partial_\lambda P(D) \, T_\lambda(x) = P(D)\partial_\lambda \, T_\lambda(x)}$$

Notons en particulier que : $\partial_\lambda \partial x_k\, T_\lambda(x) = \partial x_k\, \partial_\lambda\, T_\lambda(x) \quad \forall\, k = 1,\dots,n$.

2) Mêmes arguments.

T_λ continue $\Rightarrow < T_\lambda, P^*(D)\, \vartheta\,(x) >$ continue, donc $< P(D)\, T_\lambda(x), \vartheta(x)>$,

c'est-à-dire $P(D)\, T_\lambda(x)$ continue en λ .

. Plus généralement, si $Q(D_\lambda)$ est un polynôme de dérivation en λ , l'existence de $Q(D_\lambda)\, T_\lambda(x)$ implique celle de $Q(D_\lambda)\, P(D_x)\, T_\lambda(x)$ et on a même :

$$\boxed{Q(D_\lambda)\, P(D_x)\, T_\lambda(x) = P(D_x)\, Q(D_\lambda)\, T_\lambda(x)} \; .$$

4.4.2. *Solution faible* $\overset{\text{déf}}{=}$ $\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x) \in H_o$:

L'application $D(A_o) \longrightarrow D(A_o)$: $\vec{u}(x,0) \longrightarrow \vec{u}(x,t) = e^{tA_o}\vec{u}(x,0)$ s'étend par continuité à H_o tout entier d'une façon unique, et on a donc :

$H_o \ni \vec{u}(x,0) \xrightarrow{T(t)} \vec{u}(x,t) \in H_o$ et $||\vec{u}(x,t)||_{H_o} \leq ||\vec{u}(x,0)||_{H_o}$, l'application étant fortement continue.

On a donc :

$\vec{u}_1(x,t) \in C(R^+;\ EL(R^3;\ C^3) \cap C^1(R^{*+};\ L_2(R^3;C^3)\ )$

$u_7(x,t) \in C(R^+;\ L_2(R^3;C)\ )$

C'est une solution très généralisée car, hormis la continuité en t :

- $\vec{u}(x,t)$ n'est pas solution de l'équation d'évolution (12), c'est une limite de solutions de cette équations, solutions attachées à la suite $\{\vec{u}_n(x,0)\} \in D(A)$ convergeant vers $\vec{u}(x,0)$ dans H_o.
- Elle n'est pas du tout solution du problème voisin, ni a fortiori du problème initial.

4.4.3. *Solution partiellement forte* : $\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x) \in D(A_o)$

On sait déjà que le semi-groupe T(t) laisse $D(A_o)$ invariant, c'est-à-dire $\vec{u}(x,t) \in D(A_o)$. On a donc :

* Par la continuité forte en t :

$\vec{u}_1(x,t) \in C(R^+;D_1(A) \cap\ C^1(R^+;D_2(A)\ )$

$u_7(x,t) \in C(R^+;D_3(A))$

où les $D_i(A)$ sont considérés comme espaces de Hilbert (sous-espaces fermés de H_o).

* Par les lemmes du paragraphe 4.4.1, tous les polynômes de dérivation de $\vec{u}(x,t)$ en les variables d'espace sont aussi continument différentiables en t $P(D)\ \vec{u}_1(x,t) \in C^1(R^+;\mathcal{D}'(R^3))$.

En particulier div $\vec{u}_1(x,t) \in C^1(R^+, \mathcal{D}'(R^3))$, et on a

$$\operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u}_1(x,t).$$

Comme $\vec{u}_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1(x,t) \in EL(R^3;C^3)$, on a $\operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} u_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u}_1(x,t)$ en tant que distributions $\in L_2(R^3;C)$.

* Par l'équation $\frac{dT(t)\vec{f}}{dt} = AT(t)\ \vec{f}$, on a :

$$\vec{u}_2 = \frac{d\vec{u}_1}{dt} \in EL(R^3;C^3) \text{ et } \frac{d^2\vec{u}_1}{dt^2} \in L_2(R^3;C^3) \Rightarrow \vec{u}_2(x,t) \in H^1(R^3;C^3)$$

* Soit alors Ω, ouvert relativement compact de R^3, on a alors :

$\vec{u}_1(x,t) \in C(\bar{\Omega},D_3)$, (on utilise le lemme de Sobolev).

$u_7(x,t) \in C(\bar{\Omega})$.

Donc finalement :

$$\vec{u}_1(x,t) \in C[R_t^+;\ C(\bar{\Omega};C^3)] \quad \text{et} \quad u_7(x,t) \in C[R_t^+;\ C(\bar{\Omega};C)] .$$

En conclusion :

* $\vec{u}_o(x)$ vérifie l'équation d'évolution dans H_o, mais est solution faible dans les variables d'espace (forte en la variable temps) du problème voisin et même du problème initial vu que $\operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u}_1$.

4.4.4. *Solution forte :* $\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x) \in D(A_o^2) = \{\vec{y} \in H_o : A_o^2\ \vec{y} \text{ distr. } \in H_o\}$.

$\vec{f}(x) \in D(A_o^2) \Rightarrow A_o^2\ \vec{f}(x) \in H_o$, donc $T_o(t)\ A_o^2\ f(x)$ existe et appartient à H_o .

De plus $D(A_o^2)\quad D(A_o) \Rightarrow T_o(t)\ \vec{f} \in D(A_o)$ et $T_o(t)\ A\vec{f} \in D(A_o)$

Sur $D(A_o)$, A_o et $T(t)$ commutent, d'où :

$$T_o(t)\ A_o^2\ \vec{f} = A_oT_o(t)\ A_of = A_o^2\ T_o(t)\ \vec{f} = A_oA_oT_o(t)\ \vec{f} = A_o\frac{d}{dt}\ T_o(t)\ \vec{f} = \frac{d}{dt}\ T_o(t)A_o\ \vec{f}.$$

Donc : . $\vec{u}(x,t) \in D(A_o^2)$

. En posant $\frac{d\vec{u}}{dt}(x,0) = \vec{f}_1(x)$, on voit que $\frac{d\vec{u}}{dt}$ est solution de l'équation d'évolution:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = A_o\vec{v}\ ,\ \vec{v}(x,0) = \vec{f}_1(x) = A_o\vec{f} \in D(A_o)$$

avec $\vec{v}(x,t) = \frac{d\vec{u}}{dt}(x,t) = T_o(t)\ A_o\,\vec{f}$.

On en déduit donc, comme au paragraphe précédent :

* Par la continuité forte en t :

$$\frac{d\vec{u}_1}{dt} \in C(R_t^+\ ;\ D_1(A)\ ) \cap C^1\ |R_t^+;\ D_2(A)|$$

$$\frac{dxu_7}{dt^x} \in C(R_t^+;D_3(A)\ )$$

$\vec{u}_1(x,t) \in D_1(A^2)$

$\vec{u}_2(x,t) \in D_2(A^2)$

$u_7(x,t) \in D_3(A^2)$

Donc finalement :

$$\vec{u}_1(x,t)\ \ C[R_t^+;D_1(A^2)] \cap C^1[R_t^+;D_1(A) \cap D_2(A^2)] \cap C^2\ [R_t^+;\ D_2(A) \cap D_2(A^2)]\ .$$

et $u_7(x,t) \in C[R_t^+;D_3(A^2)] \cap C^1\ [R_t^+;D_3(A)]$.

c'est-à-dire :

$$\vec{u}_1(x,t) \in C[R_t^+;D_1(A^2)] \cap C^1[R_t^+;D_2(A^2)] \cap C^2\ [R_t^+;D_2(A^2)]\ .$$

$$u_7(x,t) \in C[R_t^+;D_3(A^2)] \cap C^1|R_t^+;D_3(A)|\ .$$

Or $\vec{u} \in D(A^2)$, entraîne en particulier :

$\vec{u}_1 \in (H^3(R^3;C^3)$, $\vec{u}_2 \in H^2(R^3;C^3)$ et $u_7 \in H^4(R^3;C)$; localement, on a donc

$\vec{u}_1(x,t) \in C^2(\overline{\Omega};C^3)$;$\vec{u}_2(x,t) \in C(\overline{\Omega};C^3)$ et $u_7(x,t) \in C^2(\overline{\Omega};C)$, Ω relativement compact.

* Par $\frac{d\vec{v}}{dt} = A\ \vec{v}$, on a en plus :

$$\frac{d^2\vec{u}_1}{dt^2}(x,t) \in EL(R^3;C^3)$$

$$\frac{d^3u_1}{dt^3} \in L_2(R^3;C^3)$$

$$\frac{d^2u_7}{dt^2}(x,t) \in L_2(R^3;C^3)$$

* Parmi d'autres résultats de régularité, nous remarquons donc surtout que : $\operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u}_1(x,t)$ et appartenant à $C\,(R_t^+;D_1(A)\,)$, c'est-à-dire donc à $C\,(\,R_t^+;\ C(\overline{\Omega};C))\ \forall\,\Omega$ relativement compact.

* <u>En conclusion</u>

a) $\vec{u}(x,t)$ vérifie l'équation d'évolution d'une façon continue en x et t.

b) $\vec{u}(x,t)$ vérifie le système initial, d'une façon continue en x et en t.

C'est bien une solution "forte", la fois du problème voisin et du problème initial.

4.4.5. <u>*Plus généralement*</u>, on peut envisager des données initiales appartenant à $D(A^k)$, et avoir des propriétés de régularité croissantes avec k. On sait qu'alors $\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\,u(x,t)$ sera solution de l'équation d'évolution (Problème de Cauchy abstrait).:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = A_o\vec{v} \qquad \vec{v}(x,0) = A_o^{k-1}\,\vec{f} \;\in\; \vec{f} \in D(A_o)$$

On en déduit alors que $\vec{u}(x,t) = T_o(t)\;\vec{u}(x,0) \;\in\; D(A_o^k)$.

Donc, on aura <u>au moins</u> :

$$\vec{u}(x,t) \;\in\; [H^k\,(R^3;C^3)]^2 \times H^k(R^3;C)$$

* Si $\vec{f}(x) \in D(A^\infty)$, on aura donc $\vec{u}(x,t) \in D(A^\infty)$ c'est-à-dire $\vec{u}(x,t) \in [H^\infty(R^3;C^3)]^2 \times H^\infty(R^3;C) = [\mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^3)]^2 \times \mathcal{D}_{L_2}(R^3;C)$.

Comme cas particulier important, on a le théorème :

<u>*Théorème*</u> :

Le P. C. avec des données initiales $\vec{f}(x) \in [\mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^3)]^2 \times \mathcal{D}_{L_2}(R^3;C)$ admet une solution unique $T_o(t)\,\vec{f}$ appartenant aussi à $[\mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^3)]^2 \times \mathcal{D}_{L_2}(R^3;C)$.

<u>*Démonstration*</u> : immédiate puisque $\vec{f} \in D(A_o^\infty)$.

* Si $\vec{f}(x) \in \mathcal{D}(R^3;C^7)$, on a vu que $\mathcal{D}(R^3;C^7) \subset \mathcal{D}(A^\infty)$, et en utilisant le lemme de Sobolev, **on** a les résultats suivants :

Remarque 1 : En fait pour des données $\in D(A_o^\infty)$, donc en particulier pour des données dans H_∞ ou C^∞ à support compact, les dérivées $\frac{d^k u}{dt^k}(x,t)$ sont fortement continues $\forall$ k, on a donc en plus

$$\vec{f}(x) \in D(A_o^\infty) \Rightarrow T(t)\, f(x) \in C^\infty(R_+, C^\infty(R^3)) \cong C\,(R_+ \times R^3)$$

Remarque 2 : $\forall$ $h \in H_o$, on a la décroissance de l'énergie sous la forme :

$$||T(t)h||_{H_o} - ||h||_{H_o} = -2\frac{\gamma}{\eta}\int_0^t\int_{R^3} |\vec{\nabla}[T_o(t)\, h]_7|^2\, dx\, dt,\ t > 0$$

Théorème

Le problème de Cauchy $\frac{d\vec{u}}{dt} = A_o\vec{u}$ avec données initiales dans $\mathcal{D}\ (R^3;C^7)$ admet une solution unique qui est $C^\infty(R^+;D(A_o^\infty))$; pour tout ouvert Ω relativement compact, on a : $\vec{u}(x,t) \in C^\infty\ (R_+;\ C^\infty(\overline{\Omega}))$; l'énergie de la solution est décroissante en fonction du temps.

Remarque

1) Pour des données initiales appartenant à H_o, même très irrégulières, la relation de décroissance de l'énergie implique alors que

$\vec{\nabla}\, u_7(x,t) \in L_2(Q_t)$ ou Q_t est le cylindre $Q_t = R_x^3 \times [0,t]\ \forall\, t > 0$.

Donc on a surtout $\vec{\nabla}\, u_7(x,t) = L_2(R_t^+)$ en tant que fonction de t.

2) On a bien sûr des résultats tout à fait analogues pour l'opérateur A_o^*.

4.4. *Sur les Co semi-groupes à un paramètre de contraction dans un espace de HILBERT H* .

Nous rappelons que le générateur infinitésimal (soit A) est défini par :

$$Ah = \lim_{s \to 0^+} s^{-1}[T(s)-I]\, h$$

pour les $h \in H$ tels que cette limite existe. C'est un opérateur fermé, D(A) est dense dans H et $(A-I)^{-I}$ existe partou dans $H(\in B(H))$.

$|T(s)|| \leq 1 \Rightarrow Re(Ah,h)_H \leq 0 \Rightarrow ||(A+I)h||_H^2 - ||(A-I)h||_H^2 = 4\, Re(Ah,h)_H \leq 0\ \forall \in D(A)$.

Donc l'opérateur $T = (A + I)\ (A - I)^{-1}$ est bien défini dans tout H : en effet $D(A-I)^{-1} = H$ et $R(A-I)^{-I} = D(A)$.

T, transformée de CAYLEY de A s'appelle cogénérateur de T(s). T détermine A, donc T(s) d'une façon univoque et réciproquement. On a en fait :

$T-I = (A+I)\ (A-I)^{-1} - 1 = 2(A-I)^{-1} \Rightarrow (T-I)^{-1} = \frac{1}{2}(A-I)$ et $A=(T+I)(T-I)^{-1}$

On a alors le théorème classique suivant :

Théorème

Pour que le Co-semi-groupe $\{T(s)\}$, $s \geq 0$ soit composé d'opérateurs normaux, auto-adjoints ou unitaires, il faut et il suffit que son co-générateur soit normal, auto-adjoint ou unitaire.

4.5. *Réduction du semi-groupe* $T_o(t)$ *- Sous espaces invariants*

On voit donc que l'étude du semi-groupe petu être remplacée par celle de son cogénérateur (un seul opérateur, qui de plus est borné). En particulier, il résulte de la décomposition canonique d'une contraction en un opérateur unitaire et un opérateur complètement non unitaire (c.n.u.) sur des sous-espaces fermés orthogonaux (éventuellement l'un se réduit à $\{0\}$), une décomposition similaire du semi-groupe lui-même.

4.5.1. *Partie unitaire* $T_o^1(t)$, H_o^1 :

Si H_o^1 désigne le sous-espace d'unitarité de $T_o(t)$, on a par définition :

$$H_o^1 = \{ \vec{u} \in H_o : \|T_o^*(t)\vec{u}\|_{H_o} = \|\vec{u}\|_{H_o} = \|T_o(t)\ \vec{u}\|_{H_o} , \forall t \in R^+ \} .$$

La décomposition de $T_o(t)$ engendre aussi une décomposition de $D(A_o)$en $D(A_o) = D(A_o^1) \oplus D(A_o^o)$, où A_o^1 sera le générateur de $T_o^1(t)$ et A_o^o celui de $T_o^o(t)$, et on a en fait $D(A_o^1) = D(A_o) \cap H_o^1$ et $D(A_o^o) = D(A_o) \cap H_o^o$.

Nous commençons d'abord par établir certains résultats intéressants en eux-mêmes.

Théorème

Soit $\vec{h} \in D(A_o)$ et $\vec{u}(x,t) = (T_o(t)\vec{h})(x)$. Alors si $u_7(x,t) = 0$ pour $0 < t \leqslant \tau$ fixé, on a :

1) $\operatorname{div} \vec{u}_1(x,t) = \operatorname{div} \vec{u}_2(x,t) = u_7(x,t)=0 \quad \forall\, t \leqslant \tau$

2) $\operatorname{div} \vec{h}_1 = \operatorname{div} \vec{h}_2(x) = h_7(x) = 0$.

Preuve :

1) Preuve de 1) : $\vec{h} \in D(A_o)$ entraîne que $(T_o(t)h)(x)$ est solution de l'équation d'évolution $\frac{d}{dt}\vec{u}(x,t) = A_o\,\vec{u}(x,t) \quad \vec{u}(x,0) = \vec{h}(x) \in D(A_o)$ $t \geqslant 0$, $t \leqslant \tau$.

c'est-à-dire :

$$
(S)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\vec{u}_1(x,t) = \vec{u}_2(x,t)\\
&\frac{d}{dt}\vec{u}_2(x,t) = \frac{\Delta^*}{\rho}\vec{u}_1(x,t) - \frac{\gamma}{\rho}\vec{\nabla}\, u_7(x,t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau\\
&\frac{d}{dt}u_7(x,t) = k\,\Delta\, u_7(x,t) - k\,\eta \operatorname{div}\vec{u}_2(x,t).
\end{aligned}\right.
$$

Or $\vec{h} \in D(A_o)$ entraîne $\vec{u}(x,t) \in D(A_o)$, en particulier $A_o\,\vec{u}(x,t) \in H_o$; donc $\frac{d}{dt}u(x,t)$ existe au sens fort, en particulier $\frac{d}{dt}u_7(x,t)$ existe dans $L_2(R^3;C)$ et définit donc une distribution unique. On a donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}(R^3;C)$, ϕ étant indépendant de t :

$0 = \langle u_7(x,t), \phi\rangle$, d'où $0 = \frac{d}{dt}\langle u_7(x,t), \phi(x)\rangle = \langle\frac{d}{dt}h_7(x,t), \phi\rangle$, soit : $\frac{d}{dt}u_7(x,t) = 0$. La 3ème équation de (S) donne alors $\boxed{\operatorname{div}\vec{u}_2(x,t) = 0}$ pour $0 < t < \tau$.

De même $\frac{d}{dt}\vec{u}_2(x,t)$ existe au sens fort et définit donc une distribution unique, d'où pour toute fonction t est $\phi(x)$:

$\langle \operatorname{div}\frac{d}{dt}\vec{u}_2(x,t),\phi\rangle = -\langle\frac{d}{dt}\vec{u}_2(x,t),\vec{\nabla}\phi(x)\rangle = -\frac{d}{dt}\langle\operatorname{div}\vec{u}_2(x,t)\ \phi(x)\rangle = 0$

donc $\operatorname{div}\frac{d}{dt}\vec{u}_2(x,t) = 0$ en tant que distribution.

En prenant la divergence dans la 2ème équation de (S), on a :

$0 = \Delta \operatorname{div}\vec{u}_1(x,t)$, ce qui implique, vu $\operatorname{div}\vec{u}_1(x,t) \in L_2(R^3;C)$,

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{u}_1(x,t) = 0,\ 0 < t \leqslant \tau}$$

2) Preuve de 2)

$T_o(t)$ étant un semi-groupe, l'application $\begin{cases} R_+ \longrightarrow H_o \\ t \longmapsto T_o(t)\,h \end{cases}$

est par définition fortement continue; en particulier on a :

$\underset{t \to 0^+}{\text{s-lim}}\ T_o(t) = I$ c'est-à-dire

$$||\text{div}\ \vec{u}_1(x,t) - \text{div}\ \vec{h}_1||_{L_2(R^3;C)} \longrightarrow 0$$

$$||\vec{u}_2(x,t) - \vec{h}_2(x)\ ||_{L_2(R^3;C^3)} \longrightarrow 0$$

$$||u_7(x,t) - h_7||_{L_2(R^3;C)} \longrightarrow 0$$

On trouve donc tout de suite $\text{div}\ h_1(x) = h_7(x) = 0$.

+ Pour $\text{div}\ \vec{h}_2(x)$, on fait appel aux résultats de régularité du paragraphe 4.4.2, en particulier $\vec{h} \in D(A_o) \Rightarrow \vec{u}_1(x,t) \in C(R^+;D_1(A)) \cap C^1(R^+;D_2(A))$, soit : $\vec{u}_2(x,t) = \dfrac{d\vec{u}_1(x,t)}{dt} \in C(R^+;D_2(A))$ où $D(A)$ est considéré comme espace de Hilbert muni de la norme du graphe. On a donc :

$$\lim_{t \to 0^+} ||\text{div}\ \vec{u}_2(x,t) - \text{div}\ \vec{h}_2(x)||_{L_2(R^3;C)} = 0$$

donc $\boxed{\text{div}\ \vec{h}_2(x) = 0}$.

Corollaire

$\vec{h} \in D(A_o)$ et $[T_o(t)\vec{h}]_7(x) = 0 \quad \forall\ t > 0$ entraînent :

$\text{div}\ [T_o(t)\ h]_1 = \text{div}\ [T_o(t)h]_2 = [T_o(t)h]_7 = \forall\ t \geq 0$

On peut alors démontrer le résultat essentiel :

Théorème

Le sous-espace H_o^1 est défini par : $H_o^1 = \{h \in H_o : \text{div}\ \vec{h}_1 = \text{div}\ \vec{h}_2 = h_7 = 0\}$, c'est-à-dire en fait : $H_o^1 = EL^1(R^3;C^3) \times L_2^1(R^3;C^3) \times \{0\}$.

Preuve :

a - Désignons par X le sous-ensemble :

$$X = \{\vec{h} \in H_o : \text{div}\ \vec{h}_1 = \text{div}\ \vec{h}_2 = h_7 = 0\} .$$

H_o étant un espace de distributions, et les dérivations étant au sens des distributions, X est un sous-espace fermé de H_o. C'est un espace de Hilbert si on le munit de la topologie induite.

. Soit A_o^1 la restriction de A_o à X, c'est-à-dire :

$$D(A_o^1) = D(A_o) \cap X \text{ et } A_o^1 = A_o \vec{u} \quad \text{pour tout } \vec{u} \in D(A_o^1)$$

Or $\vec{u} \in D(A_o) \cap X$ entraine $A_o \vec{u} = (\vec{u}_2, \frac{\mu}{\rho} \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{rot}\, \vec{u}_1, 0)$ et donc $A_o \vec{u} \in X$ ...

En conséquence A_o^1 est un opérateur de X dans X.

D'après les décompositions de $EL(R^3;C^3)$ et $L_2(R^3;C^3)$, on a :

$$X = EL^1(R^3;C^3) \times L_2^1(R^3;C^3) \times \{0\}$$

On voit dès lors que $D(A_o^1)$ est dense dans X et que formellement on a :

$$A_o^1 \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\frac{\mu}{\rho} \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{rot} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ u_7 \end{pmatrix} \forall \vec{u} \in D(A_o^1)$$

Soit de même A_o^{*1} la restriction de A_o^* à X. On aura de même :

$\vec{u} \in D(A_o^{*1}) \Rightarrow A_o^{*1} \vec{u} \in X$, donc A_o^{*1} définit un opérateur de X dans X.

Formellement :

$$A_o^{*1} = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ \frac{\mu}{\rho} \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{rot} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - A_o^1 \text{ formel.}$$

$$D(A_o^{*1}) = D(A_o^*) \cap X = \{ \vec{h} \in H_o : \vec{h}_2 \in EL^1 (R^3;C^3), \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{rot}\, h_1 \in L_2^1(R^3;C^3), h_7 = 0 \} .$$

$$\equiv \{\vec{h} \in X : A_o^1 \vec{h} \in X\} = D(A_o^1)$$

. L'opérateur A_o^1 ainsi défini et un opérateur anti-auto adjoint dans X et on a :

$$(A_o^1)^* = A_o^{*1}$$

On a donc $A_o^1 = - A_o^{*1}$

D'après le théorème de Stone, il est générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires opérant dans X.

⊙ En conclusion, on a donc démontré que :

$$\begin{cases} 1.\ X \text{ et } X' = H_o \ominus X \text{ réduisent } T_o(t) \\ 2.\ \boxed{X \subset H_o^1} \end{cases}$$

b - Réciproquement

Soit $\vec{h} \in D(A_o) \cap H_o^1$. Alors :

. $\vec{h} \in D(A_o) \Rightarrow$ ① $\frac{d}{dt} T_o(t)\, h = A_o\, T_o(t)\, h \qquad T_o(t)\, h|_{t=0} = h$

et ①* $\frac{d}{dt} T_o^*(t)h = A_o^*\, T_o^*(t)h \qquad T_o^*(t)\, h|_{t=0} = h$

car $D(A_o) = D(A_o^*)$

. $\vec{h} \in H_o^1 \iff$ ② $||T_o(t)\, h||_{H_o} = ||h||_{H_o} = ||T_o^*(t)\, h||_{H_o} \ \forall\, t > 0$

① entraîne alors $\frac{d}{dt}\, ||T_o(t)\, h||^2_{H_o} = 2\mathrm{Re}(A_o\, T_o(t)h,\, T_o(t)h)_{H_o}$

et $\frac{d}{dt}\, ||T_o^*(t)h||^2_{H_o} = 2\ \mathrm{Re}\ (A_o^*\, T_o^*(t)h,\, T_o^*(t)\, h)$ d'où

② équivaut à : $\mathrm{Re}\ (A_o\, T_o(t)h,\, T_o(t)\, h) = 0 = \mathrm{Re}\ (A_o^*\, T_o^*(t)\, h\, ,\, T_o^*(t)h)$,

c'est-à-dire :

$$||\, \vec{\nabla}\, u_7(x,t)||^2_{L_2(R^3;C^3)} = 0 = ||\vec{\nabla}\, u_7^*(x,t)||^2_{L_2(R^3;C^3)}$$, où on a posé :

$$T_o^*(t)\, h = (\vec{u}_1^*(x,t),\, \vec{u}_2^*(x,t),\, u_7^*(x,t)\ )$$

Donc $u_7(x,t) = 0 = u_7^*(x,t) \quad \forall\, t > 0$ .... D'où d'après le théorème précédent :

$\mathrm{div}\, \vec{h}_1(x) = \mathrm{div}\, \vec{h}_2(x) = h_7(x) = 0$

Finalement, on a obtenu :

$\vec{h} \in H_o^1 \cap D(A_o) \Rightarrow \mathrm{div}\, \vec{h}_1 = \mathrm{div}\, \vec{h}_2 = h_7 = 0 \iff \boxed{\vec{h} \in X \cap D(A_o),}$

soit en définitive :

$H_o^1 \cap D(A_o) \subset X$, c'est-à-dire X contient un sous-ensemble dense dans H_o^1 et est fermé. Alors $\boxed{X \supset H_o^1}$

Donc $\boxed{H^1_o = X = EL^1\ (R^3;C^3) \times L^1_2(R^3;C^3) \times \{0\}}$

Remarque : On peut donner une démonstration différente de b), qui dispense d'invoquer le théorème précédent. On argue comme suit :

$u_7(x,t) = 0$ entraîne par la continuité forte du semi-groupe que $h_7(x) = 0$ ... $D(A_o) \cap H^1_o$ étant dense dans H^1_o, les éléments de H^1_o doivent être de la forme : $\vec{h} = (\vec{h}_1,\vec{h}_2,0)$. Soit $Y = \{ \vec{h} \in H_o : \vec{h} = (\vec{h}_1, \vec{h}_2, 0)$ justement. On a donc $H^1_o \subset Y$.

Puisque A_o doit induire par restriction à $D(A_o) \cap H^1_o$ un opérateur de H^1_o dans lui-même, on a nécessairement, au moins

$$A_o(D(A^1_o)) \subset H^1_o \subset Y \text{ , d'où } \operatorname{div} \vec{h}_2 = (A_o\ \vec{h})_7 = 0 \quad .$$

Donc nécessairement $\vec{h} \in D(A_o) \cap H^1_o \Rightarrow \operatorname{div} \vec{h}_2 = 0$. Par densité, les éléments de H^1_o sont nécessairement du type $\vec{h} = (\vec{h}_1, \vec{h}_2, 0)$ avec $\operatorname{div} \vec{h}_2 = 0$.

Pour que $A_o(D(A_o) \cap H^1_o) \subset H^1_o$, il est alors nécessaire que :
$\operatorname{div} (A_o\ \vec{h})_2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\ \Delta \operatorname{div} \vec{h}_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{h}_1 = 0$ car de carré intégrable.
On a donc obtenu que nécessairement $H^1_o \subset X$. c.q.f.d.

De ce qui précède, on déduit le résultat suivant :

Théorème : Soit $h \in D(A_o)$

1) Supposons que pour $t = \tau > 0$ fixé on ait $||T_o(\tau)\ h|| = ||h||$, alors on a :
$||T_o(t)\ h|| = ||h||\ \forall\ t \geq 0$ et même plus : $T_o(t)\ h \in H^1_o \quad \forall\ t \geq 0$

2) De même $||T^*_o(\tau)\ h|| = ||h|| \Rightarrow ||T^*_o(t)\ h|| = ||h||\ \forall t \geq 0$
et $T^*_o(t)\ h \in H^1_o\ \forall\ t \geq 0$.

3) Si $T_o(\tau)\ h \in H^1_o$ pour un $\tau > 0$ fixé, alors $T_o(t)\ h \in H^1_o \quad \forall\ t \geq 0$.

Preuve :

1) Soit $h \in D(A_o)$. Alors $\frac{d}{dt} \quad ||T_o(t)h||^2_{H_o} = -||\vec{\nabla}[T_o(t)h]_7||^2_{L_2(R^3;C^7)}$, d'où :

$$||T_o(t)h||^2_{H_o} = ||h||^2_{H_o} - \int_0^t ||\vec{\nabla}[T_o(t)h]_7||^2_{L_2(R^3;C^3)} \, dt \quad .$$

Alors $||T_o(t)h||^2_{H_o} = ||h||_{H_o}$ entraîne :

$$\int_0^\tau ||\vec{\nabla}[T_o(t)h]_7||^2_{L_2(R^3;C^3)} \, dt = 0 \text{ , d'où } [T_o(t)h]_7(x)=0 \text{ pour } 0 \leq t \leq \tau$$

Vu le théorème, on a en particulier div $\vec{h}_1$ = div $\vec{h}_2 = h_7(x) = 0$, c'est-à-dire $\vec{h} \in D(A^1_o)$.

D'après le théorème de décomposition, on a alors :

$T_o(t)h \quad \in D(A^1_o) \subset H^1_o$, d'où en particulier les assertions de 1).

2) Mêmes arguments que 1); on obtient $T^*_o(t)\ h \in D(A^{*1}_o) \ \subset H^1_o$

3) Conséquence évidente de 1) et 2), ou bien par l'invariance de H^1_o par $T_o(t)$.

Corollaire : Soit $h \in H_o$. Alors :

1) $||T_o(\tau)\ h|| = ||h||$ pour un $\tau > 0$ fixé entraîne aussi $||T_o(t)h|| = ||h||$ pour $0 \leq t \leq \tau$.

2) Même résultat pour $T^*_o(\ )\ h$.

Preuve :

Pour $h \in H_o$, on n'a plus $\frac{d}{dt} ||T_o(t)h||^2 = -\frac{\gamma}{\eta k} ||\vec{\nabla}[T_o(t)h]_7||^2_{L_2(R^3;C^3)}$;

en effet si on prend une suite $\{h_n\} \in D(A_o)$, $h_n \longrightarrow h$ dans H_o, rien n'oblige $\frac{d}{dt}||.||^2$ à tendre dans $L_2(R^3;C\ )$ vers une limite.

En fait on n'a plus que $||T_o(t)\ h|| - ||h|| = \frac{\gamma}{\eta k} (\int_0^{+t} ||\vec{\nabla}[T_o(t)h]_7||^2_{L_2} dt$

Il suffit alors de remarquer que la fonction : $\begin{cases} R \longrightarrow R^{+*} \\ t \longrightarrow ||T(t)h|| \end{cases}$ est non croissante et continue.

Elle est donc constante sur $[0,\tau]$

Même démonstration pour 2) .

4.5.2. *Partie c.n.u. Conclusions.*

Soit alors $H_o^o = H_o \ominus H_o^1$. On a en fait donc :

$$\boxed{H_o^o = EL^o(R^3;C^3) \times L_2^o(R^3;C^3) \times L_2(R^3;C)}$$

D'après l'unicité de la décomposition, H_o^o sera donc la partie c.n.u. de H_o. Si $\vec{u} \in H_o$, on a donc, d'une façon unique $\vec{u} = \vec{u}^o + \vec{u}^1$, $\vec{u}^o \in H_o^o$ et $\vec{u}' \in H_o^1$ et $A_o\ \vec{u} = A_o^o\ \vec{u}^o \oplus A_o^1\ \vec{u}^1$, symboliquement $A_o = A_o^o \oplus A_o^1$.

$T_o(t) = T_o^o(t) \oplus T_o^1(t) \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} T_o(t)\vec{u} = (T_o^o(t) \oplus T_o^1(t)(\vec{u}^o \oplus \vec{u}^1) = T_o^o\ \vec{u}_o \oplus T_o^1\ \vec{u}^1$,

avec $T_o^o(t) = T_o(t)\Big|_{H_o^o}$ et $T_o^1(t) = T_o(t)\Big|_{H_o^1}$

Formellement, on a alors

$$A_o^o = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\vec{\nabla}\operatorname{div} & 0 & -\frac{\gamma}{\rho}\vec{\nabla} \\ 0 & -k\eta\operatorname{div} & k\Delta \end{pmatrix} \text{ et } A_o^{o*} = A_o^*\Big|_{H_o^o} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\vec{\nabla}\operatorname{div} & 0 & \frac{\gamma}{\rho}\vec{\nabla} \\ 0 & k\eta\operatorname{div} & k\Delta \end{pmatrix}$$

On peut alors préciser la caractérisation de H_o^o et H_o^1 .

Lemme

Soit $h \in D(A_o^o)$. Supposons que $||T_o^o(\tau)h|| = ||h||$ pour un $\tau > 0$. Alors $h = 0$. On a donc pour tout $h \in D(A_o^o) : ||T_o^o(t)h|| < ||h||$.

Preuve

Soit $\tilde{h} = h \oplus 0$. Alors $\tilde{h} \in D(A_o)$. On invoque le théorème, d'où $h \in H_o^1$, contradiction, d'où $h = 0$.

Conclusion

On a ainsi "décomposé" le problème de Cauchy en deux problèmes disjoints; alors la solution du problème $\frac{d\vec{u}(x,t)}{dt} = A_o\ \vec{u}(x,t)$, $\vec{u}(x,0) = \vec{u}^o \oplus \vec{u}^1 \in D(A_o)$ sera donnée par :

$$\vec{u}(x,t) = T_o^o(t)\ \vec{u}^o + T_o^1(t)\ \vec{u}^1 .$$

Remarque

Tout ce qui a été fait est dit pour A_o, l'est aussi pour A_o^*, et les problèmes adjoints correspondants.

Appendice au chapitre I

Effet du changement de variable de la page (3) sur les principales formules.

⟶ L'équation d'évolution devient :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{u}_1\\ \vec{u}_2\\ u_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I & 0\\ \frac{\Delta^*}{\lambda+2\mu} & 0 & -u\,\vec{\nabla}\\ 0 & -\eta\,\mathrm{div} & \Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}_1\\ \vec{u}_2\\ u_7\end{pmatrix}$$

⟶

$$\int_\Omega \vec{u}.A\vec{v}\,dx=\int_\Omega\left[\vec{u}_1.\vec{v}_2+\vec{u}_2.\left(\frac{\Delta^*\vec{v}_1}{\lambda+2\mu}-m\vec{\nabla}v_7\right)+u_7(-\eta\,\mathrm{div}\,\vec{v}_2+\Delta\,v_7)\right]dx,\ \Omega \text{ ouvert de bord } C^1.$$

$$=\int_\Omega\left[\vec{v}_1.\frac{\Delta^*\vec{u}_2}{\lambda'+2\mu'}+\vec{v}_2.(\overline{u}_1+\eta\vec{\nabla}u_7)+v_7(m\,\mathrm{div}\,\vec{u}_2+\Delta\,u_7)\right]dx$$

$$+\frac{1}{\lambda+2\mu}.\int_{\partial\Omega}(\vec{u}_2.\vec{t}(\vec{n},\vec{v}_1)-\vec{v}_1.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}_2))\,dS+\int_{\partial\Omega}\left(u_7\frac{\partial u_7}{\partial n}-v_7\frac{\partial u_7}{\partial n}\right)dS$$

$$+\int_{\partial\Omega}(-m\,v_7.\vec{u}_2.\vec{n}-\eta\,u_7.\vec{v}_2.\vec{n})\,dS$$

d'où

$$B=\begin{pmatrix}0 & \frac{\Delta^*}{\lambda+2\mu} & 0\\ I & 0 & \eta\vec{\nabla}\\ 0 & m\,\mathrm{div} & \Delta\end{pmatrix}$$

⟶

$$\int_\Omega \vec{u}_o.\overline{A\,\vec{u}}\,dx=\int_\Omega\{\vec{u}_1.\overline{\vec{u}}_2-\frac{1}{\lambda'+2\mu'}E(\overline{\vec{u}}_2,\vec{u}_1)+m\,u_7\,\mathrm{div}\,\overline{\vec{u}}_2-\eta\,\overline{u}_7\,\mathrm{div}\,\vec{u}_2$$

$$-|\vec{\nabla}u_7|^2\,dx+\frac{1}{\lambda+2\mu}\int_{\partial\Omega}\overline{\vec{u}}_2.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}_1)\,dS+\int_{\partial\Omega}-m\,u_7\,\overline{\vec{u}}_2.\vec{n}\,dS+\int_{\partial\Omega}\overline{u}_7.\frac{\partial u_7}{\partial n}\,dS$$

$$= \int_\Omega \{\vec{u}_1.\overline{\vec{u}_2} - \frac{1}{\lambda+2\mu} E(\overline{\vec{u}_2},\vec{u}_1) - m\,\overline{\vec{u}_2}.\,\vec{\nabla}\, u_7 + \eta\, \vec{u}_2.\,\vec{\nabla}\,\overline{u_7} - |\vec{\nabla}\, u_7|^2 \quad dx$$

$$+ \frac{1}{\lambda+2\mu}\int_{\partial\Omega} \overline{\vec{u}_2}.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}_1)\; dS + \int_{\partial\Omega} -\,\eta\,\overline{u_7}.\vec{u}_2.\vec{n}\; dS + \int_{\partial\Omega} \overline{u_7}.\,\frac{\partial u_7}{\partial n}\; dS\ .$$

$\longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\,||\vec{u}(t)||_o^2 = -\,2||\vec{\nabla}\,u_7(t)||_o^2 + 2\ \mathrm{Re}\left[\int\{\vec{u}_1.\overline{\vec{u}_2} + \frac{\Delta^*\vec{u}_1}{\lambda+2\mu}.\vec{u}_2 - (1-\frac{\eta}{m})\vec{u}_2.(\frac{\Delta^*\vec{u}_1}{\lambda+2\mu} - \frac{d\vec{u}_2}{dt})\}dx.\right]$$

or,

$$m\,\vec{u}_2.\vec{\nabla}\,\overline{u_7} = \vec{u}_2.\left[\frac{\Delta^*\overline{\vec{u}_1}}{\lambda+2\mu} - \frac{\partial\overline{\vec{u}_2}}{\partial t}\right]$$

d'où $\displaystyle \frac{d}{dt}\,||\vec{u}(t)||_o^2 = -\,2||\vec{\nabla}\,u_7(t)||_o^2 + 2\ \mathrm{Re}\left[\int_\Omega \vec{u}_1.\overline{\vec{u}_2} + \frac{n}{m}\vec{u}_2.\frac{\Delta^*u_1}{\lambda+2\mu} + (1-\frac{n}{m})\vec{u}_2.\,\frac{d\overline{\vec{u}_2}}{dt}\right]$

$$= -2||\vec{\nabla}u_7(t)||_o^2 + \frac{d}{dt}||\vec{u}_1(t)||_o^2 + (1-\frac{n}{m})\,\frac{d}{dt}||\vec{u}_2(t)||_o^2 - \frac{}{m}\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{|E(\vec{u}_1,\vec{u}_1)|}{\lambda+2\mu}\quad dx$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{n}{m}\ \frac{E(\vec{u}_1)_o}{\lambda+2\mu} + \frac{n}{m}\,||\vec{u}_2(t)||_o^2 + ||u_7(t)||_o^2\right] = -2\ ||\vec{\nabla}u_7(t)||_o^2$$

$$\text{ou}\ \frac{d}{dt}\left|\ \frac{||E(\vec{u}_1)_o}{\lambda+2\mu} + ||\vec{u}_2(t)||_o^2 + \frac{m}{\eta}\,||u_7(t)||_o^2\right. = -2\,\frac{m}{\eta}||\vec{\nabla}\,u_7(t)||_o^2$$

(décroissance de l'énergie).

On posera donc $\displaystyle \mathcal{E}\,(\vec{u}(t)\,) = \frac{E(\vec{u}_1(t)\,)_o}{\lambda+2\mu} + ||\vec{u}_2(t)||_o^2 + \frac{m}{\eta}||u_7(t)||_o^2$

$$= ||\mathrm{div}\ \vec{u}_1||_o^2 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\,||\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_1||_o^2 + ||\vec{u}_2(t)||_o^2$$

$$+ \frac{m}{\eta}\,||u_7(t)||_o^2$$

soit $E(\vec{u}(t)) = E_s(\vec{u}(t) + E_p(\vec{u}(t)$ avec $E_s(u) = \frac{c_2^2}{c_1^2} \|\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_1\|_o^2 + \|\vec{u}_{2s}\|_o^2$

$$E_p(\vec{u}) = \|\mathrm{div}\ u_1\|_o^2 + \|\vec{u}_{2p}\|_o^2 + \frac{m}{\eta}\|u_7\|_o^2$$

où $\vec{u}_2 = \vec{u}_{2s} + \vec{u}_{2p}$ $\quad \vec{u}_{2s} \in H_o^1\ \vec{u}_{2p} \in H_o^o$.

$\longrightarrow$ Pour H_o, on a donc :

$$\|\vec{\vartheta}\|_{H_o}^2 = \frac{1}{\lambda+2\mu} \|E(\vec{\vartheta}_1)\|_o^2 + \|\vec{\vartheta}_2\|_o^2 + \frac{m}{\eta}\|u_7\|_o^2$$

$$(\vec{u},\vec{v})_{H_o} = \frac{1}{\lambda+2\mu} (\vec{u}_1, -\Delta^* \vec{v}_1) + (\vec{u}_2,\vec{v}_2) + \frac{m}{\eta}(u_7, v_7)$$

$$= \frac{c_2^2}{c_1^2} (\vec{u}_1, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{v}_1) - (\vec{u}_1, \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \vec{v}_1) + (\vec{u}_2,\vec{v}_2) + \frac{m}{\eta}(u_7,v_7)$$

$\longrightarrow$ $\vec{u} \in D(A)$, on a

$$(A\vec{u}, \vec{u})_{H_o} = -\frac{m}{\eta}\|\nabla u_7\|_o^2 + 2i\ \mathrm{Im}\left[\frac{(\vec{u}_2, \Delta^* \vec{u}_1)}{\lambda+2\mu} + m(\vec{u}_2, \nabla \vec{u}_7)\right].$$

$\longrightarrow$ L'opérateur adjoint devient :

$$(\vec{f}, \tilde{A}^* \vec{g})_{H_o} = (\tilde{A}\vec{f},\vec{g})_{H_o} = (\vec{f}_2, -\Delta^* \vec{g}_1)\frac{1}{\lambda+2\mu} + \left(\frac{\Delta^* \vec{f}_1}{\lambda+2\mu} - m\vec{\nabla} f_7, \vec{g}_2\right)$$

$$+ \frac{m}{\eta}(-\eta\ \mathrm{div}\ \vec{u}_2 + \Delta u_7, g_7).$$

$$= \frac{1}{\lambda+2\mu} (\vec{f}_1, -\Delta^*(-\vec{g}_2)) + \left(\vec{f}_2, -\frac{\Delta^*}{\lambda+2\mu}\vec{g}_1 + m\vec{\nabla} g_7\right)$$

$$+ \frac{m}{\eta}(f_7, \eta\ \mathrm{div}\ \vec{g}_2 + \Delta g_7).$$

On a donc, formellement (le domaine ne va pas changer bien sûr !).

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ -\frac{\Delta^*}{\lambda+2\mu} & 0 & m\vec{\nabla} \\ 0 & \eta\mathrm{div} & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ \frac{c_2^2}{c_1^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{\mathrm{rot}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ -\vec{\nabla}\mathrm{div} & 0 & m\vec{\nabla} \\ 0 & \eta\mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}$$

CHAPITRE III

SUR LES SEMI-GROUPES $T_o^o(t)$ et $T_o^{o*}(t)$, $t \geq 0$.

II.A. *CONSTRUCTION DE* $T_o^o(t)$, $T_o^{o*}(t)$

1. *PROBLEME EQUIVALENT*

Puisque $T_o^o(t)$ et $T_o^{o*}(t)$ appartiennent à $L(H_o^o, H_o^o)$, il suffit de les connaître sur un sous-ensemble dense dans H_o^o. Nous allons donc construire $T_o^o(t)$ sur $D(A_o^o)$ qui est dense dans H_o^o. Il suffira après de prolonger par continuité à tout H_o^o (on sait que le prolongement est alors unique).

Soit donc $\vec{f}(x) \in D(A_o^o)$. On a alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} T_o^o(t)\, \vec{f}(x) = A_o^o\, T_o^o(t)\, \vec{f}(x) \\ T_o^o(t)\, \vec{f}(x)\Big|_{t=0} = \vec{f}(x) \quad \text{(limite forte en 0)} \end{cases}$$

Posons $\vec{u}(x,t) = T_o^o(t)\, \vec{f}(x)$. On a donc :

$$\begin{cases} \dfrac{d\, \vec{u}_1(x,t)}{dt} = \vec{u}_2(x,t) \\[2ex] \dfrac{d\, \vec{u}_2(x,t)}{dt} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\ \vec{\nabla}\, \mathrm{div}\, \vec{u}_1(x,t) - \dfrac{\gamma}{\rho}\, \vec{\nabla}\, u_7(x,t) \\[2ex] \dfrac{d\, u_7(x,t)}{dt} = -\, k\, \eta\, \mathrm{div}\, \vec{u}_2(x,t) + k\ \Delta\, u_7(x,t) \end{cases}$$

D'après les lemmes du chap. I.4.4.1, on a $\mathrm{div}\, \dfrac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\, \mathrm{div}\, \vec{u}_1(x,t)$ et de même pour $\vec{u}_2(x,t)$, et ceci en tant qu'éléments de $\mathcal{D}'(R^3)$. Comme on a en plus $\vec{u}\,(x,t) \in D(A_o^o)$, on a :

$$\mathrm{div}\, \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\, \mathrm{div}\, \vec{u}_1(x,t) \text{ en tant qu'éléments de } L_2(R^3;C)$$

et $$\mathrm{div}\, \frac{\partial \vec{u}_2(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\, \mathrm{div}\, u_2(x,t) \quad \text{" \ " \ " \ " \ " \ "} \ .$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u}_1(x,t) = \operatorname{div}\vec{u}_2(x,t) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u}_2\,(x,t) = \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\ \Delta\operatorname{div}\vec{u}_1(x,t) - \dfrac{\gamma}{\rho}\ \Delta\, u_7(x,t) \\[2ex] \dfrac{\partial u_7(x,t)}{\partial t} = -\,k\,\eta\ \operatorname{div}\vec{u}_2(x,t) + k\,\Delta\ u_7(x,t) \end{cases}$$

En posant $\vartheta\,(x,t) = \operatorname{div}\vec{u}_1(x,t)$, $\psi(x,t) = \operatorname{div}\vec{u}_2(x,t)$ et $\theta(x,t) = u_7(x,t)$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial t} = \psi(x,t) \\[2ex] \dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\ \Delta\,\vartheta(x,t) - \dfrac{\gamma}{\rho}\,\Delta\,\theta(x,t) \\[2ex] \dfrac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} = -\,k\,\eta\,\psi(x,t) + k\,\Delta\,u_7(x,t) \end{cases}$$

Dans le problème de Cauchy de départ on donne $\vec{f}(x) = \vec{u}(x,0)$, donc on donne en fait $\operatorname{div}\vec{u}_1(x,0) = \vartheta(x,0)$, $\operatorname{div}\vec{u}_2(x,0) = \psi\,(x,0)$ et $\theta\,(x,0) = u_7(x,0)$... L'équation $\operatorname{div}\vec{u} = (\operatorname{div}\vec{u}_1, \operatorname{div}\vec{u}_2) = (0,0)$ dans H_o^o n'ayant que la solution triviale $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{0}$, <u>le problème de Cauchy initial est équivalent au problème de Cauchy relatif à ϑ , ψ , θ</u> . C'est ce problème plus simple que nous allons résoudre, sachant que ϑ , ψ , déterminent $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ univoquement.

. $\vec{u}(x,t)$, $t \geqslant 0 \in D(A_o^o)$ entraîne que $\vartheta\,(x,t)$, $\psi\,(x,t)$ et $\theta\,(x,t)$ sont dans $L_2(R^3;\,C)$, pour $t \geqslant 0$. Le vecteur $(\vartheta\,,\,\psi,\,\theta)$ appartient donc à $L_2(R^3;C^3)$, ce qui autorise la transformation de Fourier.

En faisant les changements de variable indiqués en page (2), on obtient, en gardant les même notations pour ϑ, ψ, θ le système :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{u}_1 - m\ \ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\theta = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\[2ex] \Delta v - \eta\,\dfrac{\partial}{\partial t}\ \operatorname{div}\vec{u}_1 = \dfrac{\partial\theta}{\partial t} \end{cases} \qquad \text{soit,}\begin{cases} \Delta\,\vartheta - m\ \ \Delta\,\theta = \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} \\[2ex] \Delta\,\theta - \eta\,\psi = \dfrac{\partial\theta}{\partial t} \end{cases}$$

soit finalement :

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \Delta & 0 & -m\,\Delta\\ 0 & -\eta & \Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ \theta\end{pmatrix}$$

En posant $h = \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ \theta\end{pmatrix}$, on se ramène à une équation d'évolution dans l'espace de Hilbert $X_o = L_2(R^3;C^3)$, avec donnée initiale $h \in X_o$.

En posant $\hat{u}(\xi,t) = \int_{R^3} e^{i\vec{x}.\vec{\xi}}\, u(x,t)\, dx \qquad (\vec{x},\vec{\xi}) \in R^3 \times R^3$, on obtient le problème :

$\hat{P}_{mn}$: $\frac{d\hat{h}(\xi,t)}{dt} = \hat{A}(\xi)\ \hat{h}(\xi,t),\ \hat{h}_o = \hat{h}(\xi,0) = (\hat{\varphi}_o, \hat{\psi}_o, \hat{\theta}_o)$ avec :

$$\hat{A}(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -|\xi|^2 & 0 & m|\xi|^2\\ 0 & -\eta & -|\xi|^2\end{pmatrix} \quad \text{on pose } p = |\xi|^2 \Rightarrow \hat{A}(p) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -p & 0 & mp\\ 0 & -\eta & -p\end{pmatrix}$$

A côté du problème principal $\hat{P}_{mn}$, nous considérons aussi, brièvement les problèmes :

* $\hat{P}_{oo}$: cas où $\eta = m = 0$. Les équations sont entièrement découplées. On résoud parallèlement deux problèmes, l'un purement élastique, l'autre purement thermique (Equation de la chaleur tout simplement).

* $\hat{P}_{mo}$: C'est l'approximation de la thermique (cf. Landau-Lifschitz). On résoud d'abord l'équation de la chaleur et on reporte les valeurs $\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta$ dans l'équation de l'élastodynamique.

* $\hat{P}_{on}$: serait le problème obtenu en tenant compte uniquement de η . Ceci est peu réaliste en thermoélasticité. Par contre, dans la "théorie de la consolidation des milieux poreux" (théorie de la déformation d'un milieu poreux élastique saturé par un fluide), on fait souvent une telle approximation.

Nous montrons comment la solution du problème $\hat{P}_{mn}$ permet de retrouver les 3 autres et dans quelle mesure, ces approximations du problème $\hat{P}_{mn}$ sont valables (ayant en vue les applications numériques).

2. RESOLUTION DE $\hat{P}_{mn}$; $e^{t\hat{A}}$.

2.1. *Equation caractéristique.*

$$\text{dét}\,(\hat{A}-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -p & -\lambda & mp \\ 0 & -n & -p-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(\lambda^2 + p\lambda + m\,p) - p(p+\lambda) = -\lambda^3 - p\lambda^2 - p(1+\varepsilon)\lambda - p^2 = 0$$

soit

$$\boxed{E_o \equiv \Phi\,(\lambda,p,\varepsilon) = 0 = \lambda^3 + \lambda^2\,p + \lambda\,p(1+\varepsilon) + p^2}$$

Posons $t = \lambda + \frac{p}{3}$, $(\lambda = t - \frac{p}{3})$. On a alors :

$$(t - \frac{p}{3})^3 + p(t - \frac{p}{3})^2 + p\,(1+\varepsilon)\,(t - \frac{p}{3}) + p^2 = \boxed{0 = t^3 + tp(1+\varepsilon - \frac{p}{3}) + p^2(\frac{2-\varepsilon}{3} + \frac{2p}{27})} \quad (E'_o)$$

. 1er cas : $p < 3(1+\varepsilon)$:

Le discriminant Δ $(4\,p^3 + 27\,q^2)$ de (E'_o) est alors positif. On a donc une racine réelle et 2 racines imaginaires conjuguées.

. 2ème cas : $p > 3(1+\varepsilon)$:

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 4\,p^3\,[(1+\varepsilon) - \frac{p}{3}]^3 + 27\,p^4\,[\frac{2-\varepsilon}{3} + \frac{2p}{27}]^2$$

$$= \frac{4}{3}\,p^3\,\Big[3(1+\varepsilon)^3 - 3p(1+\varepsilon)^2 + p^2(1+\varepsilon) - \frac{p^3}{9} + \frac{3}{4}\,p\Big[\frac{(2-\varepsilon)^2}{32}.27 + \frac{4.27}{3.27}\,p(2-\varepsilon) + \frac{4p^2}{27^2}.27\Big]\Big]$$

$$= \frac{4}{3}\,p^3\,[3(1+\varepsilon)^3 - 3p(1+\varepsilon)^2 + p^2(1+\varepsilon) - \frac{p^3}{9} + \frac{9}{4}\,p\,(2-\varepsilon)^2 + p^2(2-\varepsilon) + \frac{p^3}{9}]$$

$$= \frac{4}{3}\,p^3\,[3p^2 - 3p(1+2\varepsilon+\varepsilon^2 - \frac{(2-\varepsilon)^2}{4}.3 + 3(1+\varepsilon)^3] = 4p^3\,[p^2 - p\,\frac{\varepsilon^2-8+2\varepsilon}{4} + (1+\varepsilon)^3]$$

$$= 4\,p^3\,[p^2 + 2p\,(1 - \frac{5}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\,\varepsilon^2) + (1+\varepsilon)^3]$$

Soit $\delta\ (\varepsilon)$ le discriminant de ce trinôme du second degré en p. On a :

$$\delta(\varepsilon) = [1 - \frac{\varepsilon}{2}(5 + \frac{\varepsilon}{4})]^2 - (1+\varepsilon)^3 = \frac{\varepsilon}{8^2}(\varepsilon^3 - 24\ \varepsilon^2 + 3.8^2\,\varepsilon - 5.8^2)$$

avec $x = \varepsilon - 8$, on a : $\frac{x+8}{8^2}(x^3 + 3.8^2)$

donc $\delta\ (\varepsilon) = 0$ pour $\boxed{\varepsilon_c = 8 - 4\ \sqrt[3]{3} = 4\ (2 - \sqrt[3]{3}) > 2}$

d'où :

* $\boxed{\varepsilon < \varepsilon_c}$: $\delta(\varepsilon) < 0 \Rightarrow \Delta > 0$. E_o possède encore une racine réelle et 2 imaginaires conjuguées. Et ceci $\forall\ p \in\ )\ 0, +\infty\ ($.

* $\boxed{\varepsilon > \varepsilon_c}$ $\delta(\varepsilon) > 0$. Le trinôme $p^2 + 2p(1 - \frac{5\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8}) + (1+\varepsilon)^3$ admet 2 racines $p_1(\varepsilon)$ et $p_2(\varepsilon)$, avec

$p_1(\varepsilon).p_2(\varepsilon) = (1+\varepsilon)^3$ et $p_1(\varepsilon) + p_2(\varepsilon) = 2\ (\frac{5\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} - 1) > 0$. Donc $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$. Mais comme on est dans la zone $p > 3(1+\varepsilon)$, on doit avoir

$$(1+\varepsilon)^3 > 9(1+\varepsilon)^2 \Rightarrow \boxed{\varepsilon > 8}$$

$$\frac{5\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} - 1 > 3(1+\varepsilon) \Rightarrow \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon}{2} - 4 = \frac{1}{8}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon - 32) > 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon > 8}$$

* Donc encore une racine réelle et 2 complexes conjuguées pour $\varepsilon < 8\ \forall\ p$.

* $\boxed{\varepsilon > 8}$ Δ sera négatif entre les 2 racines p_1 et p_2 : $0 \ + \ p_1 \ - \ p_2 \ +$

Les expressions de $p_1(\varepsilon)$ et $p_2(\varepsilon)$ n'étant pas d'un emploi commode, nous allons plutôt essayer de "coincer" au maximum le domaine dans lequel $\Delta < 0$.

Supposons $p_1(\varepsilon) > p_2(\varepsilon)$. Alors $p_1(\varepsilon) > (1+\varepsilon)^{3/2} > p_2(\varepsilon)$. Mais $p_2(\varepsilon) > 3(1+\varepsilon)$, d'où $p_1(\varepsilon) < \frac{(1+\varepsilon)^2}{3}$.

D'autre part $\frac{dp(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{p(5 + \frac{\varepsilon}{2}) - 3(1+\varepsilon)^2}{p + 1 - \frac{\varepsilon}{2}(5 + \frac{\varepsilon}{4})} = 0 \Rightarrow p_m = \frac{6(1+\varepsilon)^2}{10+\varepsilon}$;

c'est un extremum en réalité un minimum, puisque $p_m < (1+\varepsilon)^{3/2}$. On a donc :

$$\boxed{\frac{(1+\varepsilon)^2}{3} \geqslant p_1 \geqslant (1+\varepsilon)^{3/2} \geqslant p_2 \geqslant \frac{6(1+\varepsilon)^2}{10+\varepsilon}}$$

Le plan (p,ε) peut donc être partagé en 2 régions complémentaires, comme indiqué sur la figure 1 (v. p. 60-61).

→ La région non hachurée: (T) on a alors 1 racine réelle et 2 complexes conjuguées.

→ La région hachurée : $(\bar{T})$ contient une sous région (entre $p_1(\varepsilon)$ et $p_2(\varepsilon)$) dans laquelle on a 3 racines réelles.

Remarques.

Pour la thermoélasticité, où ε est petit (< 8) et souvent <<1, on est donc toujours dans la région non hachurée. Nous étudierons cependant les cas où $0 < \varepsilon < \infty$, qui mettent en évidence des comportements intéressants, en particulier un phénomène de non-propagation caractéristique.

2.2. *Etude dans le cas d'une seule racine réelle (région (T))*

Soient $\mu(p,\varepsilon)$, $\lambda(p,\varepsilon)$ et $\bar{\lambda}(p,\varepsilon)$ les racines de E_o, μ réelle, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. On a alors

$$\begin{cases} \mu^3 + \mu^2 p + \mu p(1+\varepsilon) + p^2 = 0 \quad \equiv \Phi\ \mu, p, \varepsilon) = 0 \\ \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + p(\alpha^2 - \beta^2) + \alpha p(1+\varepsilon) + p^2 = 0 \quad \equiv \\ 3\alpha^2\beta - \beta^3 + 2\alpha\beta p + p\beta(1+\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

$\beta \neq 0$, on obtient alors par élimination, à la place des 2 dernières équations :

$$\begin{cases} \beta^2 = 3\,\alpha^2 + 2\,p\,\alpha + p(1+\varepsilon) \\ 8\,\alpha^3 + 8\,p\,\alpha^2 + 2p\,(p+1+\varepsilon)\,\alpha + \varepsilon\,p^2 = 0 \;\equiv\; G(\alpha,p,\varepsilon) = 0 \,. \end{cases}$$

On a en plus, les relations suivantes entre les racines :

$$\begin{cases} \mu.\lambda\bar{\lambda} = \mu|\lambda|^2 = -\,p^2 \\ \mu + 2\,\alpha = -p \\ \lambda\bar{\lambda} + 2\alpha\,\mu = p(1+\varepsilon) \end{cases}$$

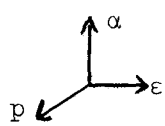
On voit tout de suite que l'on a $\alpha < 0$ et $\mu < 0$. On prendra $\beta = +\sqrt{3\alpha^2 + 2p\alpha + p(1+\varepsilon)}$

2.2.1. Etude de λ, $\bar{\lambda}$.

⊙ $\varepsilon = 0$. Alors $0 = \lambda^3 + p\,\lambda^2 + p\,\lambda + p^2 = (\lambda + p)\,(\lambda^2 + p)$ d'où :

$\mu_o = \mu\;(p,0) = -p$; $\lambda_o = \lambda\,(p,0) = i\,\sqrt{p} = i\,|\xi|$, $\bar{\lambda}_o = \bar{\lambda}(p,0) = -\,i\,\sqrt{p}$ ($\mu_o = \lambda_o^2$).

⊙ $\varepsilon \neq 0$

En prenant un système de coordonnées (p,ε,α) 

, l'équation $G(\alpha,p,\varepsilon) = 0$ définit une surface algébrique, qu'on peut visualiser. Il est en particulier intéressant de construire les courbes $\alpha = f_p(\varepsilon)$ et $\alpha = g_\varepsilon(p)$ qui en résultent, lignes de niveau de la surface G.

2.2.1.a. $\alpha = f_p(\varepsilon)$

On étudie α pour p fixé en fonction de ε, $(p,\varepsilon) \in (T)$. On a :

$dG = 0 = [24\,\alpha^2 + 16\,p\,\alpha + 2p\,(p+1+\varepsilon)]\;d\alpha + (p^2 + 2p\alpha)\;d\varepsilon + (8\,\alpha^2 + 2\alpha(1+\varepsilon) + (2\alpha+\varepsilon)_p)dp$.

$G(0,p,\varepsilon) = \varepsilon\,p^2 > 0$ et $G\,(-\frac{p}{2}\,,p,\varepsilon) = -1 \leqslant 0 \;\Rightarrow\; -\frac{p}{2} < \alpha\;(p,\varepsilon) < 0$.

Donc $p^2 + 2p\alpha > 0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{\text{grad}}\;G(p,\alpha,\varepsilon) \neq \vec{0}$ partout (sauf $p = 0$).

On a donc :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon} = - \frac{p^2 + 2p\,\alpha}{2[12\alpha^2 + 8\,p\,\alpha + p(p+1+\varepsilon)]}$$

Or $12\,\alpha^2 + 8\,p\,\alpha + p(p+1+\varepsilon) = 3\,\alpha^2 + 2\,p\,\alpha + p(1+\varepsilon) + 9\,\alpha^2 + 6\,p\,\alpha + p^2 =$

$$3\,\alpha^2 + 2\,p\,\alpha + p(1+\varepsilon) + (3\,\alpha + p)^2$$

et comme $3\,\alpha^2 + 2\,p\,\alpha + p(1+\varepsilon) = \beta^2 > 0$, on a donc :

$$\boxed{12\,\alpha^2 + 8\,p\,\alpha + p(p+1+\varepsilon) > 0} \quad , \text{ d'où } \quad \boxed{\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon} < 0}$$

* On peut raisonner autrement : supposons $\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon} = 0$. Ceci entraine $\alpha = -\frac{p}{2}$.
En reportant dans $G = 0$, on a : $-(1+\varepsilon) + \varepsilon = 0$, ce qui n'est possible que si $\varepsilon = +\infty$. Donc $\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}$ ne s'annule pas dans $[0, +\infty[$ et comme $\left.\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -\frac{p}{2(p+1)} \leq 0$ elle garde ce signe $\forall\,\varepsilon$.

* En calculant les dérivées successives de λ, en fonction de ε au point $\varepsilon = 0$, on a les développements suivant de α et β en fonction de ε , convergeant $\forall\,p > 0$:

$$\alpha(p,\varepsilon) = -\frac{1}{2}\,\frac{p}{1+p}\,\varepsilon + \frac{1}{2}\,\frac{p(1-p)}{(1+p)^3}\,\varepsilon^2 - \frac{p}{2} \cdot \frac{1-5p + 2p^2}{(1+p)^5}\,\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$$

$$\beta(p,\varepsilon) = \sqrt{p}\,\Big[1 + \frac{\varepsilon}{2(1+p)} - \varepsilon^2\,\frac{1-6p+p^2}{8(1+p)^3} + \varepsilon^3\,\frac{1-25\,p + 35\,p^2-3p^3}{16(1+p)^5} + O(\varepsilon^4)$$

* On a $\alpha''\,[24\alpha^2 + 16\,p\,\alpha + 2p(p+1+\varepsilon)] + \alpha'\,[48\,\alpha\alpha' + 16\,p\,\alpha' + 2p\,] + 2p\alpha' = 0$

$\alpha'' = 0 \implies 4\alpha\alpha' + 16\,p\,\alpha' + 2p = -2p \implies -4p(2\alpha+p)(3\alpha+p) = -p[24\alpha^2 + 16p\alpha + 2p(p+1+\varepsilon)]$

soit finalement : $\boxed{2\alpha + p = 1 + \varepsilon}$

En éliminant p entre cette équation et $G(p,\alpha,\varepsilon) = 0$, on obtient la courbe :

$$\alpha = (1+\varepsilon)\,\frac{1-\sqrt{1+\varepsilon}}{2} \text{ ; lieu des points d'inflexion.}$$

* Nous ne construirons pas les courbes $\alpha = \alpha_p(\varepsilon)$; nous verrons plus loin comment on déduit ces courbes, ainsi que les courbes $\alpha = \alpha_\varepsilon(p)$ de celles correspondantes de μ.

* Pour $\beta\,(p,\varepsilon)$, nous avons déjà vu que β pouvait être nul pour (p,ε) appartenant à $(\bar{T})$. De plus, on a $\beta^2 - p = 3\,\alpha^2 + 2p\alpha + p\varepsilon$

$$\Longrightarrow \quad p < 3\,\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \beta > \sqrt{p}$$

$$p > 3\,\varepsilon \quad \Longrightarrow \exists \text{ des valeurs de } p \text{ et } \varepsilon \text{ telles que } \beta < \sqrt{p}$$

* En réalité, les relations entre coefficients et racines de E_o, nous permettent de nous contenter d'étudier $\mu(p,\varepsilon)$ et d'en déduire les résultats correspondants pour β et α.

2.2.1.b $\alpha = f_\varepsilon(p)$. sera étudié après $\mu_\varepsilon(p)$.

2.2.2. <u>*Etude de* $\mu(p,\varepsilon)$</u>.

* $\mu\,|\lambda|^2 = -\,p^2 \Longrightarrow \mu < 0$ et $\mu = 0$ uniquement pour $p = 0$

* On a : $\Phi(\mu,p,\varepsilon) = \mu^3 + p\mu^2 + \mu\,p(1+\varepsilon) + p^2 = 0$

d'où $0 = d\Phi = [3\,\lambda^2 + 2\,p\mu + p(1+\varepsilon)]\,d\mu + [\mu^2 + \mu(1+\varepsilon) + 2p]\,dp + \mu\,p\,d\varepsilon$.

On voit que $p \neq 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi \neq \vec{0}$.

2.2.2.a. <u>*Courbes* $\mu_p\,(\varepsilon)$</u>.

De la relation $\mu + 2\alpha = -p$, on a $\dfrac{d\mu_p(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \mu' = -\,2\,\dfrac{d\alpha_p}{d\varepsilon}$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial\mu}{\partial\varepsilon} > 0}$

Comme $\mu < 0$, on en déduit que $3\,\mu^2 + 2\,p\,\mu + p(1+\varepsilon) > 0$.

On peut aussi raisonner directement comme pour α.

* $\mu'' = 0 \iff 6\,\mu\mu' + 2\mu'\,p + p = -\,p \iff 3\mu^2 + 2p\,\mu + p(1+\varepsilon) = (3\,\mu+p)\mu$

soit $p\,\mu + p(1+\varepsilon) = 0 \Longrightarrow \boxed{\mu = -(1+\varepsilon)}$, lieu des points à tangente d'inflexion.

En reportant dans $\Phi\,(\mu,p,\mu) = 0$, on obtient $p^2 = (1+\varepsilon)^3$, d'où $\boxed{p = (1+\varepsilon)^{3/2}}$

* $\mu''(p,0) = \dfrac{p(1-p)}{(1+p)^3}$

Donc les courbes changent de concavité <u>initiale</u> à partir de $p = +\,1$ (correspondant à $\lambda = -\,p = -\,1$).

* $\mu'(p,0) = \frac{p}{1+p}$ donc fonction croissante > 0 de p et $0 < \mu'(p,0) < 1/2$.

* On a le développement suivant, convergeant $\forall$ p > 0 :

$$\mu(p,\varepsilon) = -p \left[1 - \frac{\varepsilon}{1+p} + \varepsilon^2 \frac{1-p}{(1+p)^3} - \varepsilon^3 \cdot \frac{1-5p+2p^2}{(1+p)^5} + O(\varepsilon^4)\right] .$$

* <u>Comportement quand $\varepsilon \to +\infty$</u>: on a alors $E_o \sim \mu^3 + p\,\mu^2 + p\,\varepsilon\,\mu + p^2 = 0$, d'où :

* $\mu \to$ limite finie $\neq 0$: impossible.

* $\mu \to -\infty$, alors $E_o \sim \mu^3 + p\,\varepsilon\,\mu = 0$, impossible.

* $\mu \to 0$ alors $\mu \gg \mu^2 \gg \mu^3 \implies E_o \sim p\,\mu\,\varepsilon + p^2 = 0$, donc $\boxed{\mu \underset{\infty}{\sim} -\frac{p}{\varepsilon} \to 0}$

* Pente aux points d'inflexion :

$$\left.\frac{d\mu}{d\varepsilon}\right|_{\mu=-(1+\varepsilon)} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{3-\sqrt{1+\varepsilon}} > 0 \text{ tant que } \varepsilon < 8, \text{ c'est-à-dire } p < 27.$$

Pour p > 27, les points d'inflexion étant sur la courbe $p = (1+\varepsilon)^{3/2}$ qui est alors dans la zone d'existence de 3 racines μ_1, μ_2, μ_3 réelles, on étudiera ce cas envisageant $(p,\varepsilon) \in (\bar{T})$.

2.2.2.b. <u>*Courbes* $\mu_\varepsilon(p)$</u>

On a $$\frac{d\mu(p)}{dp} = -\frac{\mu^2+\mu(1+\varepsilon)+2p}{3\mu^2+2p\mu+p(1+\varepsilon)}$$

On a encore $3\mu^2 + 2p\mu + p(1+\varepsilon) = \beta^2 > 0$.

Donc signe $\frac{d\mu(p)}{dp}$ = - signe $(\mu^2 + \mu(1+\varepsilon)+2p)$. Supposons $\mu^2+\mu(1+\varepsilon)+2p = 0$ pour une valeur p. On doit alors avoir simultanément :

$$\begin{cases} \mu^2 + p(1+\varepsilon) + 2p = 0 \quad \text{et} \\ \mu^3 + p\,\mu^2 + p\mu\,(1+\varepsilon) + p^2 = 0 \end{cases}$$

En éliminant p, on a :

$$\frac{\mu^2}{4}(\mu+1+\varepsilon)^2 - \frac{\mu^2}{2}(\mu+1+\varepsilon)^2 + \mu^3 = 0 = \mu^2 + 2\mu(\varepsilon-1)+(1+\varepsilon)^2$$

$$= \mu^2 + 2\mu\varepsilon + \varepsilon^2 + 1 + 2\varepsilon - 2\mu > (\mu+\varepsilon)^2 \geqslant 0 \ .$$

donc $\boxed{\mu^2 + \mu(1+\varepsilon) + 2\,p \neq 0}$, d'où $\frac{d\mu(p)}{dp}$ garde un signe constant, celui qu'elle avait pour $p \simeq 0$ par exemple.

Or $p \longrightarrow 0 \implies \mu \longrightarrow 0$. Posons $\mu = k\,p^{\alpha}$; alors $k^3\,p^{3\alpha} + p\,k^2 p^{2\alpha} + (1+\varepsilon)k\,p p^{\alpha} + p^2 = 0$.

d'où $\alpha = 1$ et donc $E_0 \sim p\mu(1+\varepsilon) + p^2 = 0 \implies \boxed{\mu(p) \underset{p=0}{\sim} -\frac{p}{1+\varepsilon}}$

Dès lors : $\frac{d\mu(p)}{dp} \underset{p=0}{\sim} -\frac{1}{1+\varepsilon}$

La pente à l'origine croit donc de -1 à 0 quand ε croit de 0 à $+\infty$.

* <u>Comportement quand $p \longrightarrow +\infty$</u> .

On voit d'après E_0 que μ doit tendre vers $-\infty$. Posant $\mu \underset{\infty}{\sim} k\,p^{\alpha}$, on trouve avec des calculs analogues à ci-dessous que $\alpha = 1$ et $k = -1$. Donc $\mu \underset{\infty}{\sim} -p$. Pour plus de précision, on pose $\mu \sim -p + \gamma = -p\,(1-\frac{\gamma}{p})$. En remplaçant dans $\mathbf{E}_0$, on obtient

$$0 = -p^3(1-\frac{\gamma}{p})^3 + p^3(1-\frac{\gamma}{p})^2 - p^2(1-\frac{\gamma}{p})(1+\varepsilon) + p^2 \implies -\,p(1-\frac{3\alpha}{p}) + p(1-\frac{2\alpha}{p}) - (1-\frac{\alpha}{p})(1+\varepsilon) + 1 \sim 0$$

soit finalement

$0 = +\gamma - \varepsilon + \frac{\alpha}{p}(1+\varepsilon) \implies \gamma = \varepsilon$ donc en définitive : $\boxed{\mu(p) \underset{p=\infty}{\sim} -p + \varepsilon}$

(voir figure 3.a).

2.2.3. *Remarques sur* $\alpha_{\varepsilon}(p)$ et $\beta_{\varepsilon}(p)$, $\varepsilon \neq 0$.

1. Relation $2\alpha + \mu = -p$ donne $2\alpha = -p-\mu$ ce qui nous permet de construire graphiquement α en fonction de p, connaissant $\mu_{\varepsilon}(p)$. En particulier, on voit que

$$-\,p \leqslant 2\,\alpha \leqslant 0 \quad .$$

En outre, on obtient :

$2\alpha_\varepsilon(p) \underset{p=0}{\sim} -p + \frac{p}{1+\varepsilon} = -p\frac{\varepsilon}{+\varepsilon}$ et $2\frac{d\alpha}{dp}(p) \underset{p=0}{\sim} -1 + \frac{1}{1+\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$

$2\alpha_\varepsilon(p) \underset{p=\infty}{\sim} -p + p - \varepsilon = -\varepsilon$.

2. <u>Pour β</u> , on a $\beta^2 = 3\alpha^2 + 2p\alpha + p(1+\varepsilon)$, d'où :

* $p \to 0 \Rightarrow \beta^2 \underset{p=0}{\sim} p(1+\varepsilon)$ c'est-à-dire $\beta \sim \pm\sqrt{p}.\sqrt{1+\varepsilon}$

* $p \to +\infty \Rightarrow \beta^2 \underset{p=+\infty}{\sim} 3\frac{\varepsilon^2}{4} - p\varepsilon + p + p\varepsilon = p + 3\frac{\varepsilon^2}{4}$

On a eu donc $\frac{\beta^2}{p} \xrightarrow[p\to 0]{} 1+\varepsilon$ et $\frac{\beta^2}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$.

* $\frac{\beta^2}{p} = \frac{3}{p}\alpha^2 + 2\alpha + 1 + \varepsilon$. Or $\frac{3\alpha^2}{p} + 2\alpha = \alpha\left(2 + \frac{3\alpha}{p}\right) < 0$, donc : $\frac{\beta^2}{p} < 1 + \varepsilon$.

* Sachant que p représente la fréquence, $\frac{\beta}{\sqrt{p}}$ la vitesse, on voit que la vitesse des ondes longitudinales est inférieure à $\sqrt{1+\varepsilon}$ et que pour les très grandes fréquences ($p \to +\infty$) cette vitesse tend vers 1, c'est-à-dire la vitesse des ondes <u>élastiques</u> longitudinales (pures, sans température)... Mais dans la réalité, on ne peut pas augmenter la fréquence indéfiniment. On ne peut dépasser la fréquence de coupure de Debye (voir à ce propos la discussion intéressante dans P. Chadwick (   ) à propos des ondes thermo-élastiques planes)... En réalité donc, il faut se placer dans le domaine des petites fréquences, où on a alors $v \simeq \sqrt{1+\varepsilon}$.

2.2.4. <u>*Cas de la thermo-élasticité* ($\varepsilon \ll 1$) *réelle*</u> :

Soient $\phi(\mu,p,\varepsilon) = \mu^3 + p\mu^2 + p\mu(1+\varepsilon) + p^2$ et

$\psi(\alpha,p,\varepsilon) = 8\alpha^3 + 8pa^2 + 2p(p+1+\varepsilon)\alpha + \varepsilon p^2$

On a alors :

* $\phi(-p,p,\varepsilon) = -p^2\varepsilon \leq 0$, $\phi(-(p-\varepsilon),p,\varepsilon) = \varepsilon\left[\varepsilon^2 + p(1-\varepsilon)\right] > 0$, <u>donc la racine</u> $\mu(p,\varepsilon)$ est t. q. :

$-p < \mu < 0$ pour $p \leq \varepsilon$ et $-p < \mu < -p + \varepsilon$ pour $p > \varepsilon$, c'est-à-dire :

$$\boxed{-p < \mu(p,\varepsilon) < \inf(0,-p+\varepsilon)} \qquad p \neq 0 .$$

* $\psi(0,p,\varepsilon) = \varepsilon\, p^2 > 0$ pour $p \neq 0$, $\psi(-\frac{\varepsilon}{2},p,\varepsilon)=-\varepsilon\left[\varepsilon^2+p(1-\varepsilon)\right]< 0$, et aussi

$\psi(-\frac{p}{2},p,\varepsilon) < 0$

d'où $\boxed{-\frac{\varepsilon}{2} < \alpha(p,\varepsilon)<0}$, ou bien mieux, vu $\boxed{\sup(-\frac{p}{2}, -\frac{\varepsilon}{2})< \alpha(p,\varepsilon) < 0}$

* $\beta^2 = 3\,\alpha^2 + p\,(2\alpha+\varepsilon) + p > p + 3\,\alpha^2 \implies$ $\boxed{1 < v_L= \frac{\beta}{\sqrt{p}} < \sqrt{1+\varepsilon}}$

2.3. *Cas où on a 3 racines réelles (région $\subset \bar{T}$)*

Dans ce cas les 3 branches solutions de l'équation E_o deviennent réelles. Nous appellerons μ_1, μ_2, μ_3 les prolongements respectifs de μ, λ et $\bar{\lambda}$ quand $\beta \to 0$. Donc μ_2 et μ_3 seront les solutions de l'équation :

$$0 = 3\,\alpha^2 + 2\,p\,\alpha + p(1+\varepsilon)$$

c'est-à-dire que pour p donné et $p > 3(1+\varepsilon)$, on aura :

$$\mu_2 = \frac{-p+\sqrt{p^2-3p(1+\varepsilon)}}{3} \qquad \text{et} \qquad \mu_3 = \frac{-p-\sqrt{p^2-3p(1+\varepsilon)}}{3}$$

On a ainsi les expressions explicites μ_2 et μ_3 : et il est possible de les étudier convenablement.

Ici, nous allons donc surtout nous intéresser à μ_1 .

2.3.1. $\mu_1 = \mu_1(\varepsilon)$

L'équation E_o donne toujours $\dfrac{\partial\mu_1}{\partial\varepsilon} = -\,p\,\dfrac{\mu_1}{3\mu_1^2 + 2p\mu_1 + p(1+\varepsilon)}$

Or $3\mu_1^2 + 2p\,\mu_1 + p(1+\varepsilon)$ est toujours différente de zéro, sauf si $\mu_1 = \mu_2$ ou $\mu_1 = \mu_3$, c'est-à-dire dans le cas où E_o admet une racine double ou triple.

⊙ Cas de la racine double

Les deux racines doubles possibles seront les solutions communes des 2 équations :

$$\begin{cases} \lambda^3 + p\lambda^2 + p\lambda(1+\varepsilon) + p^2 = 0 \\ \text{et}\quad 3\,\lambda^2 + 2\,p\,\lambda + p(1+\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

soient $\lambda_1(\varepsilon)$ et $\lambda_2(\varepsilon)$. En éliminant $p = \frac{3\lambda^2}{2\lambda+1+\varepsilon}$, on a :

$$0 = \lambda^3 - \frac{3\lambda^4}{2\lambda+1+\varepsilon} - \frac{3\lambda^3(1+\varepsilon)}{2\lambda+1+\varepsilon} + \frac{3\lambda^4}{(2\lambda+1+\varepsilon)^2} \text{ , c'est-à-dire}$$

$$\boxed{2\lambda^2 + \lambda(-4+5\varepsilon) + 2(1+\varepsilon)^2 = 0}$$

dont le discriminant est $\delta^*(\varepsilon) = (-4+5\varepsilon)^2 - 16(1+\varepsilon)^2 = 9\varepsilon(\varepsilon-8) \geq 0$ si $\boxed{\varepsilon \geq 8}$

On a donc :

$$\lambda_1(\varepsilon) = \frac{-(5\varepsilon-4)+3\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-8)}}{3} \quad \text{et} \quad \lambda_2(\varepsilon) = \frac{-(5\varepsilon-4)-3\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-8)}}{3}$$

On peut faire les précisions suivantes :

1) $\lambda_1(\varepsilon)$ et $\lambda_2(\varepsilon)$ sont situées de part et d'autre de $\lambda = -(1+\varepsilon)$. On peut le vérifier par calcul direct.

Pour $\varepsilon = 8$, on a $\lambda_1(8) = \lambda_2(8) = -9 = -(1+8) \iff (8,\lambda_1(8) \in \{\lambda = -(1+\varepsilon)\}$, lieu des points d'inflexion. On a alors :

$[4\lambda - (4-5\varepsilon)]d\lambda + [5\lambda + 4(1+\varepsilon)]\,d\varepsilon = 0$, donc $\frac{d\lambda}{d\varepsilon} \to \infty$ si $4\lambda \to 4-5\varepsilon$, c'est-à-dire si $\lambda \to \frac{4-5\varepsilon}{4}$, soit $\lambda = -9$ et $\varepsilon = 8$, point commun d'intersection des courbes $\lambda_1(\varepsilon)$ et $\lambda_2(\varepsilon)$ avec $\{\lambda = -(1+\varepsilon)\}$.

2) $\frac{d\lambda}{d\varepsilon} = 0 \Rightarrow 5\lambda + 4(1+\varepsilon) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{5}(1+\varepsilon)$. En reportant ci-dessous on a :

$$0 = 2.\frac{16}{25}(1+\varepsilon)^2 + 4(4-5\varepsilon).\frac{4}{5}(1+\varepsilon) + 2(1+\varepsilon)^2 = -\varepsilon^2 + 81 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = +9} \quad \text{et} \quad \boxed{\mu = 8}$$

⊙ <u>Racine triple</u> :

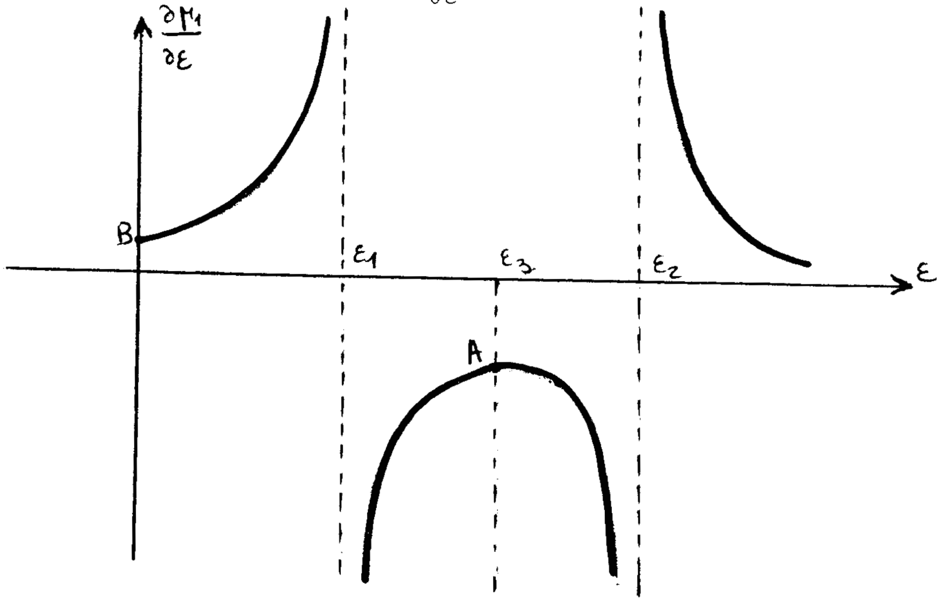
. C'est la racine commune aux 3 équations

$$\begin{cases} \lambda^3 + p\lambda^2 + p\lambda(1+\varepsilon) + p^2 = 0 & 1 \\ 3\lambda^2 + 2p\lambda + p(1+\varepsilon) = 0 & 2 \\ 6\lambda + 2pp = 0 & 3 \end{cases}$$

En éliminant p, il vient $\lambda_3 = -(1+\varepsilon)$

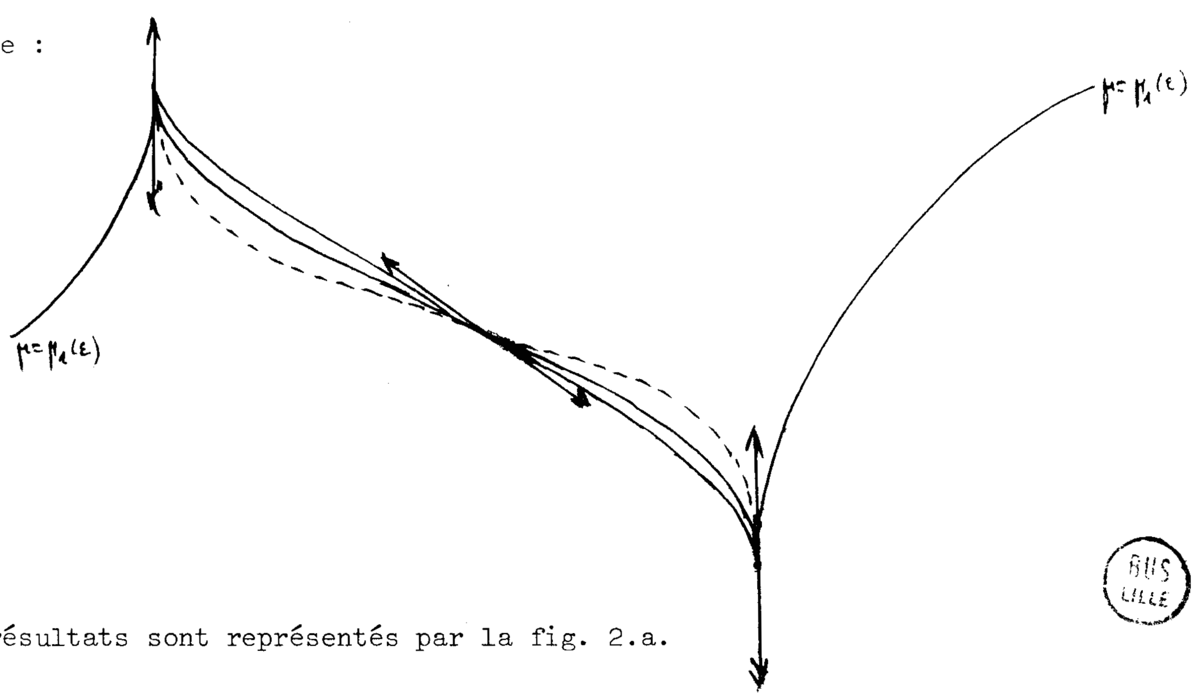
Donc les 3 racines μ_1 μ_2 μ_3 coïncident pour $\mu_1 = -(1+\varepsilon)$.

⊙ On a alors l'allure suivante pour $\dfrac{\partial \mu_1}{\partial \varepsilon}$ en fonction de ε :



avec $\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 = \inf \left[\varepsilon^{-1}(\lambda_1(\varepsilon)),\ \varepsilon^{-1}(\lambda_2(\varepsilon))\right] \\ \varepsilon_2 = \sup \left[\qquad \text{———} \qquad \right] \\ \varepsilon_3 = \varepsilon^{-1}\left[\lambda_3(\varepsilon)\right]\Big|_{\lambda_3=\mu_1} = -\mu_1+1 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{l} A = (\varepsilon_3, \dfrac{-p}{3\mu_1+p}),\ 3\mu_1+p>0 . \\ \\ B = \{0, \dfrac{p}{p+1}\} . \end{array}\right.$

⊙ On a donc le cas de figure ci-bas, dans la zone de "détriplement" de la racine réelle :



Les résultats sont représentés par la fig. 2.a.

2.3.2. $\mu_1 = \mu_1(p)$

On a encore $\dfrac{d\mu_1(p)}{dp} = - \dfrac{\mu_1^2 + \mu_1(1+\varepsilon)+2p}{3\mu_1^2 + 2p\ \mu_1+p(1+\varepsilon)}$, et encore $\mu_1^2 + \mu_1(1+\varepsilon)+ 2p > 0$

Le dénominateur est encore différent de zéro, sauf si $\mu_1 = \mu_2$ ou $\mu_1 = \mu_3$ ou $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. D'où :

. Cas de racine double

On élimine ε entre les deux équations $\begin{cases} \lambda^3 + p\ \lambda^2 + p\lambda\ (1+\varepsilon) + p^2 = 0 \\ 3\ \lambda^2 + 2p\lambda + p(1+\varepsilon) = 0 \end{cases}$

ce qui donne $\boxed{p^2 - p\ \lambda^2 - 2\ \lambda^3 = 0}$.

dont le discriminant $\lambda^4 + 8\ \lambda^3 = \lambda^3(\lambda+8)$ est positif, puisqu'on est dans la zone $\{\varepsilon \geqslant 8\ ,\ p \geqslant 27,\ p \leqslant -8\}$. L'équation admet donc toujours 2 racines, dont une seule positive. On a donc deux valeurs remarquables :

$$p_1(\varepsilon) = p\ (\lambda_1(\varepsilon)\ ) = \frac{\lambda_1^2(\varepsilon) + \sqrt{\lambda_1^3(\varepsilon)(\lambda_1(4)+8)}}{2} \quad ; \quad p_2(\varepsilon) = p(\lambda_2(\varepsilon)\ )$$

Aux points (p_i, λ_i), on a une tangente verticale. p racine double pour $\varepsilon = -8$ (c'est-à-dire $\varepsilon = +9$) et alors $p = \frac{\lambda^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$.

Courbe $p^2 - p\ \lambda^2 - 2\ \lambda^3 = 0$

On coupe avec $\lambda = t\ p$ $t \leqslant 0$. On obtient la représentation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \dfrac{1}{t^2(2t+1)} \\ \\ \lambda = \dfrac{1}{t(2t+1)} \end{array} \quad , \ 0 \geqslant t \geqslant -1/2 \right\}$$

d'où les variations :

t	$-1/2$		$-1/3$		$-1/4$		0
$\frac{d\lambda}{dt}$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\lambda(t)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	-9	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty$
$\frac{dp}{dt}$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$p(t)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	27	$\nearrow$	32	$\nearrow$	$+\infty$

$\lambda \longrightarrow -\frac{1}{2}^{+} \Longrightarrow p \sim -2\lambda$

$\lambda \longrightarrow 0^{-} \Longrightarrow p \sim \lambda^2$

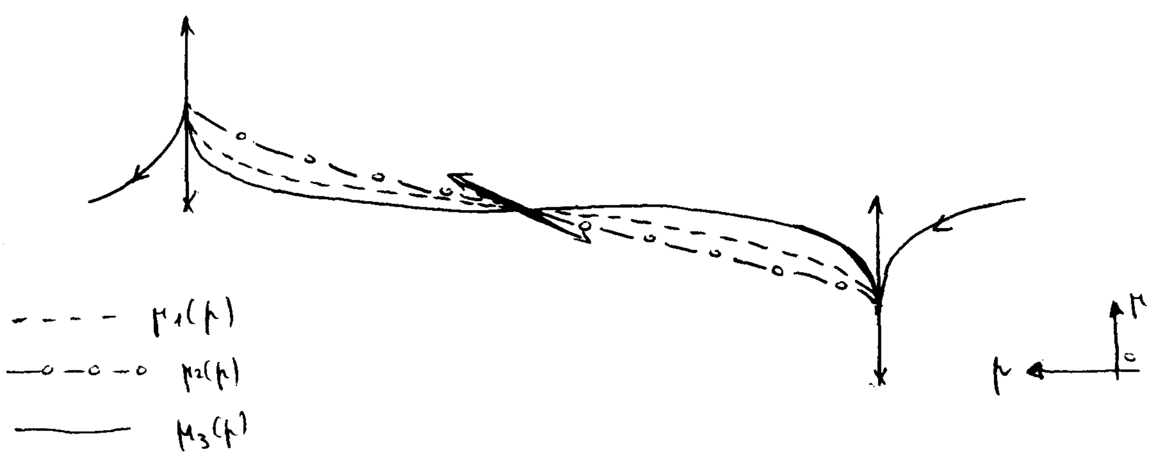
⊙ Cas de racine triple

$$\mu_1(p) = \mu_2(p) = \mu_3(p)$$

Il faut alors avoir en plus $6\lambda + 2p = 0 \Longrightarrow p = -3\lambda$, lieu des points où les 3 solutions réelles coïncident.

⊙ Pour p tendant vers l'infini, on a bien sûr toujours $\lambda \sim -p + \varepsilon$

⊙ On a en conclusion l'allure suivante dans la zone de "détriplement" de la racine réelle :



Les résultats sont rassemblés dans la fig. 4.a.

2.4. *Solution exacte de* $\hat{P}_{mn}$. *Comportement pour* $t \longrightarrow +\infty$.

En faisant appel aux résultats connus pour le cas de valeurs propres distinctes, on a la solution sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \hat{\vartheta} \\ \hat{\psi} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = q(\hat{A}) \begin{pmatrix} \hat{\vartheta}_o \\ \hat{\psi}_o \\ \hat{\theta}_o \end{pmatrix}$$

, $q(\hat{A})$ étant la matrice :

$$q(\hat{A}) = \frac{(\hat{A}-\bar{\lambda}I)(\hat{A}-\mu I)}{(\lambda-\bar{\lambda})(\lambda-\mu)}\, e^{\lambda t} + \frac{(\hat{A}-\ I)(\hat{A}-\mu I)}{(\bar{\lambda}-\lambda)(\bar{\lambda}-\mu)}\, e^{\bar{\lambda} t} + \frac{(\hat{A}-\lambda I)(\hat{A}-\bar{\lambda} I)}{(\mu-\lambda)(\mu-\bar{\lambda})}\, e^{\mu t}$$

donc :

$$\begin{cases} \hat{\vartheta}\ (\xi,t) = e^{\alpha t}\ (A \cos\beta t + B \sin\beta t) + C\, e^{\mu t} \\ \hat{\psi}\ (\xi,t) = e^{\alpha t}\ (A' \cos\beta t + B' \sin\beta t) + C'\, e^{\mu t} \\ \hat{\theta}\ (\xi,t) = e^{\alpha t}\ (D \cos\beta t + E \sin\beta t) + F\, e^{\mu t} \end{cases}$$

où les coefficients A, B, C, A', B', C', D, E, F (non nécessairement indépendants) sont des fonctions de α, β , μ (donc en fait de $|\xi|^2$), de m, η et des données initiales $\hat{\vartheta}_o$, $\hat{\psi}_o$, $\hat{\theta}_o$

CONCLUSIONS

Soit $L_k = \dfrac{(\hat{A}-\lambda_i\ I)(\hat{A}-\lambda_j\ I)}{(\lambda_k-\lambda_i)(\lambda_k-\lambda_j)}$ $\qquad i \neq j \neq k$.

. Pour p fini, on voit facilement d'après les relations entre coefficients et racines (p. 7) que $\sup\limits_{\substack{0<p<+\infty \\ \vec{u}\in L_2(R^3;C^3)}} \dfrac{||L_k\,\vec{u}||}{||\vec{u}||} < +\infty$.

. Pour $p \to 0$ ou $p \to +\infty$, les comportements assymptotiques de μ, α, β déterminés p. 11 et 12 donnent $L_k \sim C_k(\varepsilon)\,\dfrac{p^2}{p^2} = C_k(\varepsilon)$, où C_k est une constante dépendant uniquement de k et ε . On obtient donc finalement $\sup\limits_{p\in R_+} \dfrac{||L_k\,\vec{u}||}{||\vec{u}||} < +\infty$ c'est-à-dire $\sup\limits_{\vec{\xi}\in R^3_\xi} \dfrac{||L_k(\xi)\vec{u}||}{||\vec{u}||} < +\infty$.

On a donc :

$$||T^o_o(t)\vec{h}||_{H^o_o} = ||\hat{\psi}||_{L^2(R^3;C)} + ||\frac{\vec{\xi}.\hat{\psi}(\xi,t)}{|\xi|^2}||_{L^2(R^3;C)} + ||\hat{\theta}(\xi,t)||_{L^2(R^3;C)}$$

$$\leqslant \sum_1^3 K_k(\varepsilon)\ ||e^{\gamma t}(\hat{\psi}_o(\ ),\frac{\vec{\xi}.\psi_o(\xi)}{|\xi|^2},\hat{\theta}_o)||_{L^2(R^3;C^5)} = \sum_1^3 K_k(\varepsilon)\ ||e^{\lambda_k t}\ \vec{h}\ ||_{H^o_o}$$

avec $R_e\ \lambda_k(p,\varepsilon) < 0$, $K_k(\varepsilon) > 0$. D'où :

$$\boxed{||T^o_o(t)\ \vec{h}||_{H_o} \xrightarrow{t\to+\infty} 0\ \forall\ \vec{h} \in H^o_o}$$

2. Supposons en plus que $\vec{u} \in D(A_o^{ok})$

On sait qu'alors $\dfrac{d^{k-1}\ \vec{T}^o_o(t)\vec{u}}{dt^{k-1}}$ est solution de l'équation d'évolution :

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = A^o_o\ \vec{v} \\ \vec{v}(0) = \vec{u} \end{cases}$$

En posant $\vec{u}(x,t) = T^o_o(t)\ \vec{u}$, on a donc :

$$\frac{d^{k-1}\ u(x,t)}{dt^{k-1}} \xrightarrow[t\to+\infty]{H_o} 0$$

En particulier si $f \in D(A_o^{o\infty})$, alors $T^o_o(t)\ f \in S(R_+,\ H^\infty(R^3)\ )$.

3. Nous démontrerons un peu plus avant que le semi-groupe adjoint $T_o^{o*}(t)$ donne lieu exactement aux mêmes modes de décroissance vers zéro quand $t \to +\infty$.

4. La solution exacte ci-haut (dans l'espace dual) est difficilement exploitable pour des calculs, surtout quand m et η sont positifs arbitraires.

Dans le cas de la thermo-élasticité, où ε est très petit (<<1) (chacun des m et η l'étant séparément d'ailleurs), il est intéressant de rechercher des solutions approchées, pour :

* Pouvoir faire des calculs effectifs.
* Avoir une idée plus précise des phénomènes physiques en jeu.

2.5. *Remarques sur la solution exacte*

Nous voyons que $q(\hat{A})$ peut s'écrire sous la forme condensée :

$$q(\hat{A}) = \sum_{i\neq j\neq k=1}^{3} \frac{(\hat{A}-\lambda_i I)(\hat{A}-\lambda_j\ I)}{(\lambda_k-\lambda_i)(\lambda_k-\lambda_j)}\ e^{\lambda_k t}$$

avec

$$(\hat{A}-\lambda_i I)(\hat{A}-\lambda_j I)=\begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 \\ -p & -\lambda_i & mp \\ 0 & -\eta & -p-\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda_j & 1 & 0 \\ -p & -\lambda_j & mp \\ 0 & -\eta & -p-\lambda_j \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_i\lambda_j-p & -(\lambda_i-\lambda_j) & mp \\ p(\lambda_i+\lambda_j) & -p+\lambda_i\lambda_j-\varepsilon_p & -m\ p\ (p+\lambda_i+\lambda_j) \\ \eta p & \eta(p+\lambda_i+\lambda_j) & -\varepsilon p+(p+\lambda_i)(p+\lambda_j) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \\ \cancel{\theta}_0 \end{pmatrix}$$

Posons :

$$e_k=(\lambda_k-\lambda_i)(\lambda_k-\lambda_j) \qquad k\neq i\neq j \quad (i,\ j,\ k\ \in(1,2,3))$$

$$\hat{B}_k=\frac{1}{e_k}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_i\ \lambda_j-p & -(\lambda_i+\lambda_j) & 0 \\ p(\lambda_i+\lambda_j) & -p+\lambda_i\lambda_j-\varepsilon p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \hat{S}_M=\sum_1^3\ \hat{B}_k\ e^{t\lambda_k}$$

$$\hat{C}_k=\frac{1}{e_k}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon p+(p+\lambda_i)(p+\lambda_j) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \hat{S}_T=\sum_1^3\ \hat{C}_k\ e^{t\ \ k}$$

$$\hat{D}_k=\frac{1}{e_k}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p+\lambda_i+\lambda_j & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \hat{S}_{MT}=\sum_1^3\ \hat{D}_k\ e^{t\lambda_k}$$

$$\hat{E}_k=\frac{1}{e_k}\begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & -\ p(p+\lambda_i+\lambda_j) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \hat{S}_{TM}=\sum_1^3\ \hat{E}_k\ e^{t\lambda_k}$$

On remarquera que $p+\lambda_i + \lambda_j = -\lambda_k$, d'où $-\varepsilon p + (p+\lambda_i)(p+\lambda_j) = -p(\varepsilon+\lambda_k) + \lambda_i\lambda_j$

Nous pouvons alors faire les définitions et remarques suivantes, à propos de :

$\boxed{\hat{S}_m}$:

Sera appelé "opérateur de conversion mécanique —> mécanique". En effet, il agit uniquement sur la partie mécanique $(\hat{\varphi}_o, \hat{\psi}_o)$ du signal d'entrée pour la transformer en une partie purement mécanique $(\hat{\varphi}(\xi,t), \hat{\psi}(\xi,t), 0)$. $\hat{S}_M$ est la somme de 3 opérateurs :

$\hat{B}_1 \, e^{\lambda_1 t}$: contient à la fois de la diffusion et de la propagation. Donne des ondes élastiques propagées et atténuées.

$\hat{B}_2 \, e^{\lambda_2 t}$: mêmes propriétés.

$\hat{B}_3 \, e^{\lambda_3 t}$: Pas de propagation. On a des ondes élastiques stationnaires, purement amorties.

$\boxed{\hat{S}_T}$:

Sera appelé "opérateur de conversion thermique → thermique"; agit uniquement sur la partie thermique $(\hat{\theta}_o)$ du signal d'entrée, pour la transformer en partie purement thermique.

$\hat{C}_1 \, e^{\lambda_1 t}$: Diffusion + propagation. De même pour $\hat{C}_2 \, e^{\lambda_2 t}$

$\hat{C}_3 \, e^{\lambda_3 t}$: Diffusion pure.

$\boxed{\hat{S}_{MT}}$:

Sera appelé "opérateur de conversion mécanique-thermique"; agit uniquement sur la partie mécanique de l'entrée pour la transformer en température à la sortie. Contient aussi visiblement de la diffusion et de la propagation.

$\boxed{\hat{S}_{TM}}$:

Sera appelé "opérateur de conversion thermique —> mécanique"; agit uniquement sur la partie thermique du signal d'entrée pour la transformer en changement de volume.

Il faut noter bien sûr aussi, que, les vitesses de propagation étant fonction de ξ , il y a en plus du phénomène d'atténuation, un phénomène de dispersion.

Si on appelle $\hat{S}(m,n,t)$ l'application de $L_2(R^3;C^3)$ dans lui-même définie par : $\vec{\hat{u}}_o(\xi) = (\hat{\vartheta}_o(\xi), \hat{\psi}_o(\xi), \hat{\theta}_o(\xi)) \longrightarrow \vec{\hat{u}}(\xi,t) = S(t)\ \vec{\hat{u}}_o$, on a alors :

$$\boxed{\vec{\hat{u}}(\xi,t) = \hat{S}(t)\ \vec{\hat{u}}_o = (\hat{S}_M(t) + \hat{S}_T(t) + n\ \hat{S}_{MT}(t) + m\ \hat{S}_{TM}(t)).\ \vec{\hat{u}}_o(\xi)}$$

Deux cas particuliers importants :

1 *Problème du choc thermique*

Les données initiales sont $\vartheta_o(x) = \psi_o(x) = 0$ et $\theta_o(x) = \delta(x)$, d'où $\hat{\vartheta}_o(\xi) = \hat{\psi}_o(\xi) = 0$ et $\hat{\theta}_o(\xi) = 1$. On obtient alors très simplement :

$$\begin{matrix} (\hat{\vartheta},t) \\ (\hat{\psi},t) \\ (\hat{\theta},t) \end{matrix} = \left[\hat{S}_T + m\ \hat{S}_{TM}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$, c'est-à-dire, après calculs :

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\vartheta}(\xi,t) = m\ p \displaystyle\sum_1^3 \frac{e^{t\lambda_k}}{e_k} \\ \hat{\psi}(\xi,t) = m\ p \displaystyle\sum_1^3 \frac{\lambda_k\ e^{t\lambda_k}}{e_k} \\ \hat{\theta}(\xi,t) = \displaystyle\sum_{\substack{p=1 \\ i\neq j\neq k}}^3 (-p(\varepsilon+\lambda_k) + \lambda_i\ \ \lambda_j)\ \frac{e^{t\lambda_k}}{e_k} \end{array}\right.$$

Plus généralement, on peut envisager le problème avec donnée mécanique pure $\theta_o(x) = f(x)$ et $\vartheta_o(x) = \psi_o(x) = 0$.

2 *Problème avec données mécaniques pures*

Les données initiales sont $\hat{\vartheta}_o(\xi) = f(\xi)$, $\hat{\psi}_o(\xi) = g(\xi)$ $\hat{\theta}_o(\xi) = 0$.

La solution sera cherchée donc sous la forme :

$\hat{\vec{u}}(\xi,t) = [\hat{S}_M + n\ \hat{S}_{MT}]\ \hat{u}_o(\xi)$, qu'on peut calculer explicitement comme ci-avant.

2.6. *Solutions approchées*

Nous avons vu que les racines λ_k étaient développables en séries de puissance de ε , séries rapidement convergentes. Désignons par λ_k^N la somme partielle des N premiers termes. D'autre part, nous voyons que les termes non nuls des matrices B, C, D et E sont fonction de ε seul (ici on fait bien sûr un certain abus en prenant η, m et ε comme variables indépendantes; nous sommes en réalité que $\varepsilon = m\eta$)... En fait ce sont des fonctions simples des λ_k et sont aussi développables en séries par rapport à ε . Nous pouvons dès lors écrire les approximations suivantes.

$\hat{B}_k = \sum_{p=0}^{N} \hat{B}_k^{(p)}\ \varepsilon^p$ et des expressions analogues pour $\hat{C}_p$, $\hat{D}_k$ et $\hat{E}_k$.

$\hat{S}_M = \sum_{1}^{3} \left(\sum_{p=0}^{N} \hat{B}_k^{(p)}\ \varepsilon^p \right)\ e^{t\lambda_k^N}$ et de même pour $\hat{S}_T$, $\hat{S}_{TM}$ et $\hat{S}_{MT}$.

On peut donc écrire :

$\hat{S}_M = \sum_{p=0}^{N} \hat{S}_M^{(j)}\ \varepsilon^j$ avec $\hat{S}_M^{(j)} = \sum_{1}^{3} \hat{B}_k^{(j)}\ e^{t\lambda_k^N}$

d'où

$$\boxed{\hat{S} = \sum_{p=0}^{N} (\hat{S}_M^{(p)} + \hat{S}_T^{(p)} + \eta\ \hat{S}_{MT}^{(p)} + m\ \hat{S}_{TM}^{(p)})^{\varepsilon^p}}$$

On a ainsi obtenu une solution approchée du problème $\hat{P}_{mn}$,<u>valable $\forall$ t</u>

<u>Problèmes $\hat{P}_{oo}$, $\hat{P}_{on}$ et $\hat{P}_{mo}$</u> :

$\boxed{\hat{P}_{oo}}$: n = m = 0 . Alors N = 0

La formule ci-haut donnant $\hat{S}(m,n;t)$ donne alors :

$\hat{S}(0,0;t) = \hat{S}_M^{(o)} + \hat{S}^{(o)} = \sum_1^3 \hat{B}_k^{(o)} e^{t\lambda_k^{(o)}} + \sum_1^3 \hat{C}_k^{(o)} e^{t\lambda_k^{(o)}}$, c'est-à-dire ($\lambda_1^{(o)} = i|\xi|$

$\lambda_2^{(o)} = -i|\xi|$ et $\lambda_3^{(o)} = -|\xi|^2$

$$\hat{S}(0,0;t) = \begin{pmatrix} \cos|\xi|t & \dfrac{\sin|\xi|t}{} & 0 \\ -|\xi|\sin|\xi|t & \cos|\xi|t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-|\xi|^2 t} \end{pmatrix}$$

Donc, si $\hat{\vec{u}}_o(\xi) = (\hat{\vartheta}_o(\xi), \hat{\psi}_o(\xi), \hat{\theta}_o(\xi))$, on aura

$$\hat{\vartheta}(\xi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\hat{\vartheta}_o\right) + \frac{\sin|\xi|}{|\xi|}\hat{\psi}_o \qquad \hat{\psi}(\xi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{\vartheta}(\xi,t)$$

$$\hat{\theta}(\xi,t) = e^{-t|\xi|^2}\hat{\theta}_o(\xi)$$

Par invertion de Fourier ($F^{-1}\left(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\hat{u}(\varepsilon)\right) = t\,[M_t\, u]$), on obtient :

$\phi(x,t) = t[M_t\, \psi(x,0)] + \frac{\partial}{\partial t}(t\,[M_t\, \vartheta(x,0)])$, où $M_t\, \vartheta$ = moyenne de ϑ sur la sphère de rayon t. On tombe donc sur la formule de Poisson, solution bien connue du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. On obtient par ailleurs :

$\theta(x,t) = \dfrac{H(t)}{2^2\,\pi^{3/2}\,t^{3/2}} \displaystyle\int_{R^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,\theta_o(x)\,dy$, solution bien connue du problème de Cauchy pour l'équation de chaleur $\left(\begin{array}{l} H(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ \quad\;\;\; = 1 \text{ si } t > 0 \end{array}\right)$

$\hat{S}(0,0;t) = \hat{S}_M^{(o)} + \hat{S}_T^{(o)}$ représente donc le phénomène découplé. Il y a lieu de souligner ici qu'on n'obtient pas S = S découplé + termes de perturbation en m,n... Au contraire, on voit que même dans les premiers termes (p = 0) on a des multiplications par $e^{t\lambda_k^N}$ (ce qui fait que tous les termes tendent vers zéro quand $t \longrightarrow +\infty$). <u>Ainsi le problème thermoélastique ne peut être regardé comme une perturbation "gentille" du problème purement découplé.</u>

$\boxed{\hat{P}_{on}}$ $m = 0,\ \eta \neq 0$. Encore $N = 0$

On a donc : $S(0,n;t) = \hat{S}_M^{(o)} + S_T^{(o)} + \eta\, S_{MT}^{(o)} = \sum_1^3 (B_k^{(o)} + C_k^{(o)} + D_k^{(o)})\, e^{t\lambda_k^o}$

$$= \hat{S}(0,0;t) + \eta\, \hat{S}_{MT}^{(o)}$$

On a

$$e_1^{(o)} = (\lambda_o - \bar{\lambda}_o)(\lambda_o - \mu) = 2i|\xi|(i|\xi|+p) = 2ip|\xi| - 2|\xi|^2$$

$$e_2^{(o)} = \bar{e}_1 = -2p - 2ip|\xi|$$

$$e_3^{(o)} = (\mu_o - \lambda)(\mu_o - \bar{\lambda}) = \mu_o^2 + |\xi|^2 = p^2 + p$$

d'où

$$p\sum_{k=1}^{3} \frac{e^{t\lambda_k}}{e_k^{(o)}} = p\left[\frac{(-2ip|\xi|-2p)\, e^{it|\xi|} + (2i\, p|\xi|-2p)\, e^{-it|\xi|}}{4\, p^2(p+1)} + \frac{e^{-t|\xi|^2}}{p(p+1)}\right]$$

$$= \frac{(i+|\xi|)\sin t|\xi|}{p(p+1)} + \frac{e^{-t|\xi|^2}}{p(p+1)}$$

et $$\sum_{k=1}^{3} \frac{-\lambda_k\, e^{t\lambda_k}}{e_k^{(o)}} = \frac{-|\xi|(i+|\xi|)\cos t|\xi|}{p^2(p+1)} + \frac{e^{-t|\xi|^2}}{p(p+1)} \quad , \ p = |\xi|^2$$

On a finalement :

$$\hat{S}(0,n;t) = \begin{pmatrix} \cos t|\xi| & \dfrac{\sin t|\xi|}{|\xi|} & 0 \\ -|\xi|\sin t|\xi| & \cos t|\xi| & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t|\xi|^2} \end{pmatrix} + \eta \cdot \frac{1}{p(p+1)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (i+|\xi|)\sin t|\xi| + e^{-t|\xi|^2} & -\dfrac{|\xi|}{p}(i+|\xi|)\cos t|\xi| + e^{-t|\xi|^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\bar{P}_{mo}}$: $n = 0$, $m \neq 0$ $\Rightarrow \varepsilon = 0$ et $N = 0$

On a alors $\hat{S}(m,0;t) = \hat{S}(0,0;t) + m\, \hat{S}^{(o)}_{TM}$

On trouve :

$$\hat{S}(m,0;t) = \hat{S}(0,0;t) + \frac{m}{p(p+1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & (i+|\xi|)\sin t + e^{-t|\xi|^2} \\ 0 & 0 & -|\xi|(i+|\xi|\cos t|\xi|+|\xi|^2\, e^{-t|\xi|^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux expressions de $\hat{P}_{mo}$ et $\hat{P}_{on}$ coïncident avec ceux obtenus par calcul direct (on résoud l'une des équations et on reporte dans l'autre...).

2.7. *Conclusions*

2.7.1. *Solution du problème initial.*

On a ainsi obtenu la solution dans l'espace image. Le retour au problème initial par transformation de Fourier inverse est très incommode. Aussi allons-nous obtenir directement une solution approchée. La solution dans l'espace image nous sert ici uniquement pour donner la forme de la solution.

On a donc pour $\vec{u}(x,t)$ et $\theta(x,t)$

$$\boxed{\vec{u}(x,t) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \eta^n\, m^q\, \vec{U}^{(p,q)}(x,t) \quad \text{et} \quad \theta\,(x,t) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \eta^p\, m^q\, \theta^{(p,q)}(x,t)}$$

En reportant dans le système de départ, on détermine (par identification des puissances de η et m) des relations de récurrence qui permettent de calculer $\vec{u}(p,q)$ et $\theta\ (p,q)$ (au fond, c'est une méthode de relaxation). C'est ce que font Soler et Brull, en postulant a priori la solution sous cette forme.

En réalité, beaucoup de coefficients de la série double s'annulent identiquement, quelque soit le problème posé. Finalement, la solution doit être recherchée sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{u}(x,t) &= \sum^{\infty} \left[\vec{u}^{(\eta,n)}(x,t) + m\, \vec{u}^{(n+1,n)}(x,t)\right] \varepsilon^n \\ \theta(x,t) &= \sum^{\infty} \left[\theta^{(n;n)}(x,t) + \eta\, \theta^{(n,n+1)}(x,t)\right] \varepsilon^n\end{aligned}}$$

on voit que ces résultats recoupent directement les notres, obtenus directement.

Remarque : Nous n'avions obtenu auparavant que $\hat{\varphi}(\xi,t)$, $\hat{\psi}(\xi,t)$ et $\hat{\theta}(\xi,t)$. Pour avoir $\hat{\vec{u}}_1(\xi,t)$ et $\hat{\vec{u}}_2(\xi,t)$, il suffirait de prendre $\hat{\vec{u}}_1(\xi,t) = -\frac{\vec{\xi}}{|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi,t)$ et $\hat{\vec{u}}_2(\xi,t) = -\frac{\vec{\xi}}{|\xi|^2}\hat{\psi}(x,t)$.

2.7.2. *Solution sur un intervalle de temps fini.*

Dans ce cas, on peut développer la solution suivant les puissances de t, et avoir les approximations que l'on veut.

On peut aussi opérer directement. On a en effet :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \Delta & 0 & -m\Delta\\ 0 & -\eta & \Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ \theta\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ \theta\end{pmatrix}_{t=0} = h_o .$$ On peut écrire, en posant $h = \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ \theta\end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt} h = (B_o + B_1)\, h \text{ avec } B_o = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \Delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m\Delta\\ 0 & \eta & 0\end{pmatrix}$$

soit $u_o(t) = e^{tB_o}$ (en fait l'opérateur donnant la solution du problème découplé).

On sait alors que le problème de Cauchy est équivalent à l'équation intégrale de Volterra :

$$\boxed{h(t) = u_o(t)\, h_o + \int_0^t u_o(t-s)\, B_1\, h(s)\, dS}$$

Sachant qu'on a déjà l'existence et l'unicité (qu'on ne peut affirmer sans démonstration sur l'équation intégrale, vue la présence de l'opérateur non borné B_1) on calculera la solution par les méthodes d'itération habituelles; notons en plus qu'on est dans le cas où le noyau dépend uniquement de (t-s), qui permet beaucoup de simplifications.

2.8. *Sur les problèmes adjoints*

Les cas adjoints se ramènent à l'équation d'évolution dans H_o^o :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = A_o^{*o}\ \vec{v}\ ,\ \vec{v}(x,o)\ \text{donné}\ \in H_o^o\ .$$

En posant $\varphi_* = \operatorname{div} \vec{v}_1$, $\psi_* = \operatorname{div} \vec{v}_2$ et $\theta_* = v_7$, on a :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \varphi_* \\ \psi_* \\ \theta_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\Delta & 0 & m\Delta \\ 0 & \eta & \Delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_* \\ \psi_* \\ \theta_* \end{pmatrix}$$

Par transformation de Fourier, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_* \\ \hat{\psi}_* \\ \hat{\theta}_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ p & 0 & -mp \\ 0 & n & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_* \\ \hat{\psi}_* \\ \hat{\theta}_* \end{pmatrix} \quad , \ p = |\xi|^2$$

L'équation caractéristique est alors :

$$E_o^* = \text{dét}\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ p & -\lambda & -mp \\ 0 & \eta & -\lambda-p \end{vmatrix} = 0 = -\lambda\left[\lambda(\lambda+p)+\varepsilon p\right] -p(\lambda+p) = -(\lambda^3+p\lambda^2+\varepsilon p\lambda+p\lambda+p^2) \equiv E_o\ .$$

On retrouve donc l'équation E_o. On peut alors reprendre tous les calculs faits pour $T_o^o(t)$ et construire explicitement $T_o^{o*}(t)$; en particulier, on trouvera donc le même mode de décroissance vers zéro quand $t \longrightarrow +\infty$.

II.B. PROPRIETES SPECTRALES DE A_o^o, A_o^{o*}

1. RAPPELS - DEFINITIONS

Nous rappelons les définitions et résultats de base suivants, relatifs à un opérateur quelconque T (non obligatoirement auto-adjoint) dans un espace de Banach complexe B, nous désignons par D(T), R(T) respectivement le domaine et l'image de T. On pose $T_\lambda = T-\lambda I$, $\lambda \in C$ quelconque.

Définitions 1.

—> Les valeurs de λ pour lesquels T_λ admet un inverse borné $R(\lambda;T)$ à domaine dense dans B. forment l'ensemble résolvant ρ (T); $R(\lambda,T)$ est appelée la résolvante de T.

—> Les valeurs de λ pour lesquels T_λ admet un inverse non borné à domaine dense dans β forment le spectre continu $\sigma_c(T)$.

—> Les valeurs de λ pour lesquels T_λ admet un inverse à domaine non dense forment le spectre résiduel $\sigma_R(T)$.

—> Les valeurs de λ pour lesquels il n'y a pas d'inverse forment le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$.

On appelle la réunion de σ_c, σ_R et σ_ρ le spectre de T : $\sigma(T) = \sigma_c(T) \cup \sigma_R(T) \cup \sigma_{p'}(T)$.

Théorème : Les 4 ensemble ρ (T), $\sigma_c(T)$, $\sigma_R(T)$, σ_p (T) sont disjoints, et leur réunion est l'ensemble du plan complexe.

Définitions 2 : On dit que l'opérateur T possède la propriété :

. P_1 : si $\exists$ x_o, $x_o \neq 0$ et $T(x_o) = 0$

. P_2 : si R(T) est non dense dans B.

. P_3 : si $\exists$ $\{x_n\}$ $\in$ D(T) et telle que : (i) $||x_n|| = 1$ et (ii) $||T(x_n)|| \longrightarrow 0$.

On a alors les caractérisations suivantes du spectre :

. $\lambda \in \sigma(T)$ si T_λ possède au moins une des propriétés P_i $(i = 1,2,3)$

. $\lambda \in \sigma_p(T)$ si T_λ possède P_1

. $\lambda \in \sigma_R(T)$ si " " P_2 mais pas P_1

. $\lambda \in \sigma_C(T)$ si " " P_3 mais ni P_1 ni P_2 .

En plus on a l'ordre de "prédominance" suivant : $P_1 > P_2 > P_3$ dans le sens que :

. P_1 force λ à être dans σ_p , même si on a P_2 et P_3 .

. P_2 force λ à être dans σ_R , en l'absence de P_1, mais même en présence de P_3

. P_3 n'est décisif qu'en l'absence de P_1 et P_2 ; auquel cas $\lambda \in \sigma_c(T)$

On est ainsi amené à étudier l'équation $(A_o^o-\lambda)\, u = f$, $u \in D(A_o^o)$, $f \in H_o \ldots$, qui se ramène par transformation de Fourier à $(\hat{A}_o^o(\xi)- I)\, \hat{u} = \hat{f}$ dans l'espace $\hat{H}_o(R^n) = F\, H_o$, donc en fin de compte à l'existence de l'opérateur inverse de la multiplication $[\hat{A}_o^o(\xi)-\lambda I]$ ... Et on aura :

. $\lambda \in \rho(A_o^o)$ ssi $[\hat{A}_o^o(\xi)-\lambda I]^{-1}$ existe et est borné.

. $\lambda \in \sigma(A_o^o)$ autrement.

D'où la nécessité d'étudier l'équation caractéristique $\text{dét}(\hat{A}_o^o(\xi)-\lambda I)=0$.

Tous calculs faits, on trouve :

$$\text{dét}\,(\hat{A}_o^o(\xi)-\lambda I)=\lambda^4\left[|\xi|^4 + |\xi|^2\, \lambda(\lambda+1+\varepsilon)+\lambda^3\right] .$$

A part $\lambda = 0$, qu'on étudiera à part, nous voyons que tout revient à étudier l'équation : $Z^2 + Z\lambda(\lambda+1+\varepsilon) + \lambda^3 = 0$. Comme nous savons déjà (A_o^o est générateur d'un semi-groupe de contraction) que l'ensemble $\{\lambda : \text{Re}\, \lambda > 0\}$ appartient à $\rho\,(A_o^o)$, nous ne ferons l'étude que pour $\text{Re}\, \lambda \leq 0$.

2. ETUDE DE L'EQUATION $Z^2 + Z\lambda\ (\lambda+1+\varepsilon) + \lambda^3 = 0$; $\mathrm{Re}\ \lambda \leq 0$, $\varepsilon \geq 0$

2.1. *Racines quelconques*

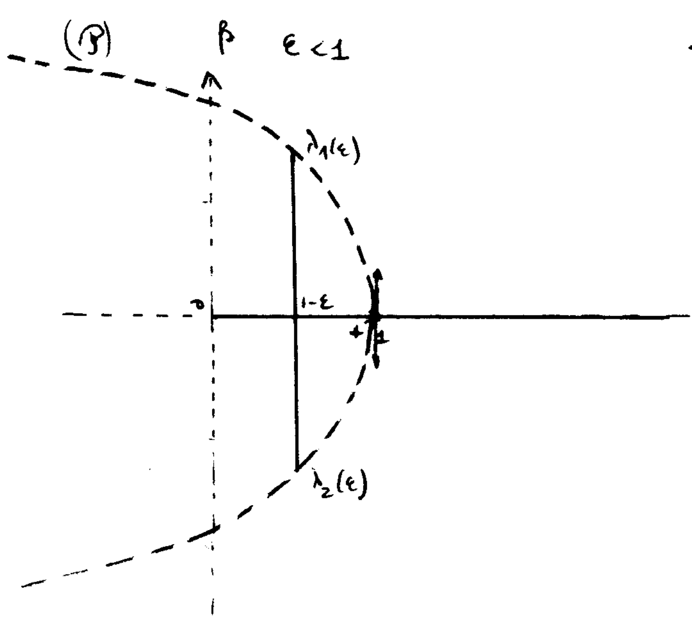
Le discriminant est $\Delta\ (\lambda,\varepsilon) = \lambda^2(\lambda+1+\varepsilon)^2-4\lambda^3 = \lambda^2[(\lambda+1+\varepsilon)^2-4\ \lambda] =$

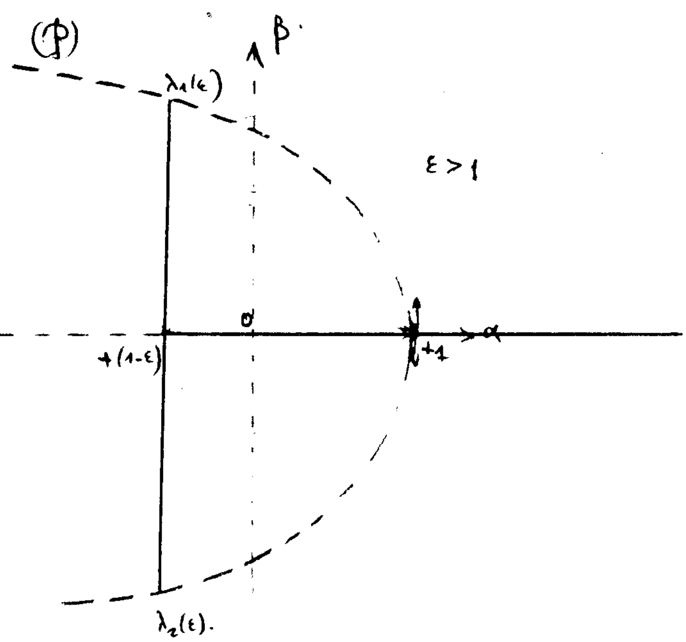
$$\lambda^2\left[\lambda^2-2\lambda(\varepsilon-1) + (1+\varepsilon)^2\right]$$

$$= \lambda^2\ [\lambda-\ \lambda_1(\varepsilon)] \times [\lambda-\bar{\lambda}_1(\varepsilon)]$$

avec $\lambda_1(\varepsilon) = -\ (\varepsilon-1) + 2\ i\sqrt{\varepsilon}$ et $\bar{\lambda}_1(\varepsilon) = -\ (\varepsilon-1) - 2\ i\sqrt{\varepsilon}$.

On a alors les 2 points de branchement $\lambda_1(\varepsilon)$ et $\bar{\lambda}_1(\varepsilon)$. Pour avoir deux branches uniformes $Z_1(\lambda)$ et $Z_2(\lambda)$, on opère par exemple les coupures ci-dessous :





Pour définir $Z_1^{1/2}(\lambda)$ et $Z_2^{1/2}(\lambda)$, nous choisissons les déterminations telles que $\mathrm{Im}\ Z_1^{1/2}$ et $\mathrm{Im}\ Z_2^{1/2}$ soient positives, de telles sorte qu'elles coïncident avec leurs **valeurs** réelles prises pour λ réel < 0 . (Pour réel, on a 2 racines réelles).

Les points de branchement λ_1 et $\bar{\lambda}_1$ sont situés sur la parabole $P \equiv x = -\frac{y^2}{4} +1$

$\lambda = \lambda_1 \Rightarrow$ on a la racine double $Z(\lambda_1) = -\dfrac{\lambda\ (\lambda_1+1+\varepsilon)}{2}$

$\lambda = \bar{\lambda}_1 \Rightarrow$ on a la racine double $Z(\bar{\lambda}_1) = -\dfrac{\lambda_1(\lambda_1+1+\varepsilon)}{2}$

2.2. *Racines réelles*

Posons $\lambda = \alpha + i\,\beta$, $\alpha < 0$.

⊙ Le cas $\beta = 0$ (λ réel) s'étudie facilement. Le discriminant vaut alors :

$$\Delta(\alpha,\varepsilon) = \alpha^2 \left[(\alpha+1+\varepsilon)^2 - u\,\alpha\right] > 0 .$$

On a donc toujours 2 racines réelles z_1 et z_2 avec $z_1\, z_2 = \alpha^3 < 0$. Une seule des racines est positive. De plus $z_1 + z_2 = -a\,(\alpha+1+\varepsilon)$, du signe de $\alpha+1+\varepsilon$, ce qui veut dire que ce sera l'une ou l'autre suivant que l'on a $\alpha+1+\varepsilon > 0$ ou < 0 .

* $\alpha = -(1+\varepsilon) \implies z_1 = -z_2 = 2(1+\varepsilon)^{3/2} > 0 \implies z_1^{1/2} = \sqrt{2}(1+\varepsilon)^{3/4}$

* $\alpha \neq -(1+\varepsilon)$; nous prendrons $z_1 > 0 \implies z_1^{1/2} > 0$ pour $\alpha > -(1+\varepsilon)$.

$z_2 > 0 \implies z_2^{1/2} > 0$ pour $\alpha < -(1+\varepsilon)$.

Dans tout ce qui suit nous supposerons $\beta \neq 0$.

Pour avoir des racines réelles, il faut avoir simultanément :

$$\begin{cases} (Z) : \lambda^3+\lambda^2 Z+\lambda Z(1+\varepsilon) + Z^2 = 0 \\ (\bar{Z}) : \bar\lambda^3 + \bar\lambda^2 Z+ \bar\lambda Z(1+\varepsilon)+ Z^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Z^2+Z\,\left|\alpha^2-\beta^2 + \alpha(1+\varepsilon)+\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\right| = 0 \\ Z(2\alpha+1+\varepsilon)-(\beta^2-3\alpha^2) = 0 \end{cases}$$

En éliminant Z , on obtient l'équation du lieu de λ :

$$\boxed{(\beta^2-3\alpha^2)^2+[\alpha^2-\beta^2+\alpha(1+\varepsilon)\,]\,(\beta^2-3\alpha^2)(2\alpha+1+\varepsilon) + \alpha\,(\alpha^2-3\beta^2)(2\alpha+1+\varepsilon)^2 = 0,\ \alpha \neq -\frac{1+\varepsilon}{2}}$$

⊙ $2\alpha+1+\varepsilon = 0$

Alors $\beta^2=3\alpha^2$ d'où $Z^2-4\,\alpha^2\,Z-8\,\alpha^3 = 0$, dont le discriminant $4\alpha^3(\alpha+2)$ n'est positif que pour $\alpha \leqslant -2$ c'est-à-dire $\boxed{\varepsilon \geqslant 3}$, auquel cas on a deux racines Z_1 et Z_2 positives ($8\,a^3 < 0$, $4\alpha^2 > 0$); pour $\varepsilon = 3$, on a $Z_1 = Z_2 = 8$ - Soit λ_D le point $(-\frac{1+\varepsilon}{2}, -\sqrt{3}\,\frac{1+\varepsilon}{2})$ et $\bar\lambda_D$ son conjugé.

⊙ Cas général

On pose $Y = \beta^2$. On a alors :

$$0 = (Y-3\alpha)^2 + \left[Y(3\alpha^2+\alpha(1+\varepsilon)+\alpha^2)-Y^2-3\alpha^2(\alpha^2+\alpha(1+\varepsilon))\right](2\alpha+1+\varepsilon)+\alpha^3(2\alpha+1+\varepsilon)^2-3\alpha Y(2a+1+\varepsilon)^2$$

$$= -Y^2(\varepsilon+2\alpha)+ Y\left[-6\alpha^2+(2\alpha+1+\varepsilon)(4\alpha^2+\alpha(1+\varepsilon)-3\alpha(2\alpha+1+\varepsilon))\right]-\alpha^3\left[2\alpha^2+(5\varepsilon-4)\alpha+2(1+\varepsilon)^2\right]$$, soit :

$$\boxed{C_\varepsilon \equiv (2\alpha+\varepsilon)\, Y^2+2\alpha Y\, f(\alpha,\varepsilon)+\alpha^3\, g(\alpha,\varepsilon) = 0} \quad \text{avec} \begin{cases} f(\alpha,\varepsilon)= 2\alpha^2+3\alpha(2+\varepsilon)+(1+\varepsilon)^2 \\ g(\alpha,\varepsilon)= 2\alpha^2+(5\varepsilon-4)\alpha+2(1+\varepsilon)^2 \end{cases}$$

qu'on va regarder comme équation du second degré en Y. Le discriminant $\Delta\ (\alpha,\varepsilon)$ vaut :

$$\Delta(\alpha,\varepsilon) = \alpha^2\left[2\alpha^2+3\alpha(2+\varepsilon)+(1+\varepsilon)^2\right]^2 - (2\alpha+\varepsilon)\,\alpha^3\left[2\alpha^3+(5\varepsilon-4)\alpha+2(1+\varepsilon)^2\right] .$$

$$= \alpha^2\left[32\alpha^3+\alpha^2(4\varepsilon^2+40\varepsilon+36)+4\alpha(\varepsilon+3)(1+\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)^4\right] .$$

et s'arrange très bien si on remarque que $\alpha = -\frac{1+\varepsilon}{2}$ est une racine double.

On obtient alors :

$$\boxed{\Delta(\alpha,\varepsilon) = \alpha^2(2\alpha+1+\varepsilon)^2\,(8\alpha+(1+\varepsilon)^2)}$$

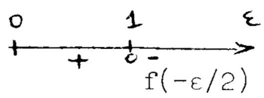
d'où

- $\alpha = -\frac{1+\varepsilon}{2}$. racine double. Cas déjà envisagé.
- $\alpha < -\frac{(1+\varepsilon)^2}{8}$: pas de racines.
- $\alpha = -\frac{(1+\varepsilon)^2}{8}$: racines double.
- $\alpha > -\frac{(1+\varepsilon)^2}{8}$: 2 racines Y_1 et Y_2 dont le signe nécessite l'étude des trinômes $f(\alpha,\varepsilon)$ et $g(\alpha,\varepsilon)$.

Etude de $f(\alpha,\varepsilon)$

* $\delta\ (\varepsilon) = 9(2+\varepsilon)^2-8(1+\varepsilon)^2 = \varepsilon^2+20\varepsilon+28 > 0 \Rightarrow$ toujours 2 racines $r_1(\varepsilon)$ et $r_2(\varepsilon)$, toutes deux négatives $(r_1(\varepsilon) \leq r_2(\varepsilon))$.

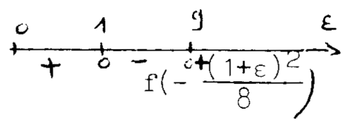
* $f(-\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon) = 2.\frac{\varepsilon^2}{4} - 3.\frac{\varepsilon}{2}(2+\varepsilon) + (1+\varepsilon)^2 = -\varepsilon+1$



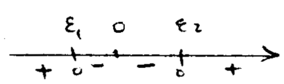
$\varepsilon = 1 \Rightarrow r_2(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2}$

* $\frac{r_1+r_2}{2} = -\frac{3}{4}(2+\varepsilon) < -\frac{\varepsilon}{2}$

* $-\frac{(1+\varepsilon)^2}{8} < -\frac{\varepsilon}{2}\quad \varepsilon > 0$ et $f\left(-\frac{(1+\varepsilon)^2}{8}\right) = (\varepsilon-1)(\varepsilon-9)$



* $\frac{r_1+r_2}{2} - \left(-\frac{(1+\varepsilon)^2}{8}\right) = \frac{1}{8}(\varepsilon^2-4\varepsilon-11) \Rightarrow$



avec $\varepsilon_2 = 2+\sqrt{15} \simeq 2+4(1+\frac{1}{32}) = 6+\frac{1}{8}$

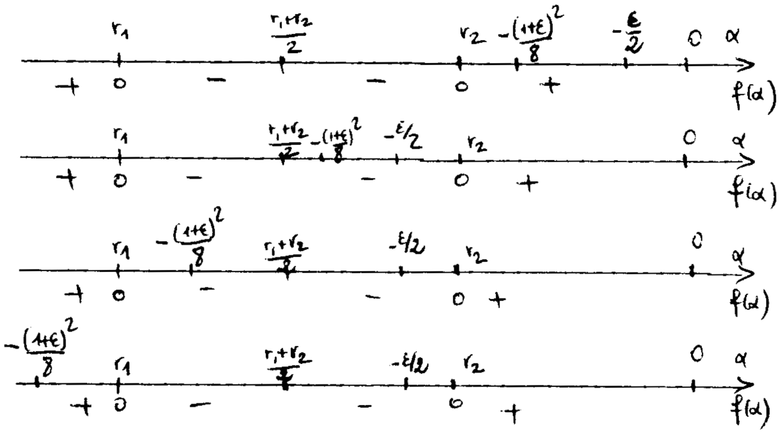
On a donc :

$0 < \varepsilon < 1$:

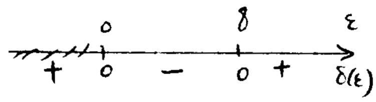
$1 < \varepsilon < \varepsilon_2$:

$\varepsilon_2 < \varepsilon < 9$:

$9 < \varepsilon < \infty$:

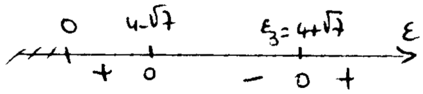


Etude de $g(\alpha,\varepsilon)$

* $\delta(\varepsilon) = (5\varepsilon-4)^2 - 16(1+\varepsilon)^2 = 9\varepsilon(\varepsilon-8)$  racines $s_1(\varepsilon)$ et $s_2(\varepsilon)$

* $g(-\frac{\varepsilon}{2}) = 2(3\varepsilon+1) > 0$

→ * $(s_1+s_2)/2 = -\frac{5\varepsilon-4}{4} > -\frac{\varepsilon}{2} \iff \varepsilon < \frac{4}{3}$

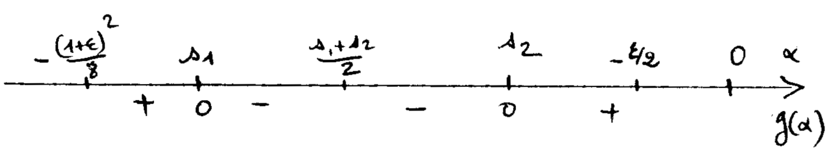
* $\frac{s_1+s_2}{2} - (-\frac{(1+\varepsilon)^2}{8}) = \frac{1}{8}(\varepsilon^2 - 8\varepsilon+9) \Rightarrow$  $, \varepsilon_3 < 8$.

* $g(-\frac{(1+\varepsilon)^2}{8}) = (\varepsilon-9)^2 \times \frac{(1+\varepsilon)^2}{32} > 0$

On a donc :

$0 < \varepsilon < 8$: $g(\alpha,\varepsilon) > 0$.

$8 < \varepsilon < +\infty$ 2 racines $s_1(\varepsilon)$ et $s_2(\varepsilon)$, toutes deux négatives, et on a :



Conclusions

$\boxed{-\frac{\varepsilon}{2} < \alpha < 0}$ $g(\alpha) > 0$, d'où $Y_1 Y_2 = \frac{\alpha^3 g(\alpha)}{2\alpha+\varepsilon} < 0$. Une seule racine positive donc;

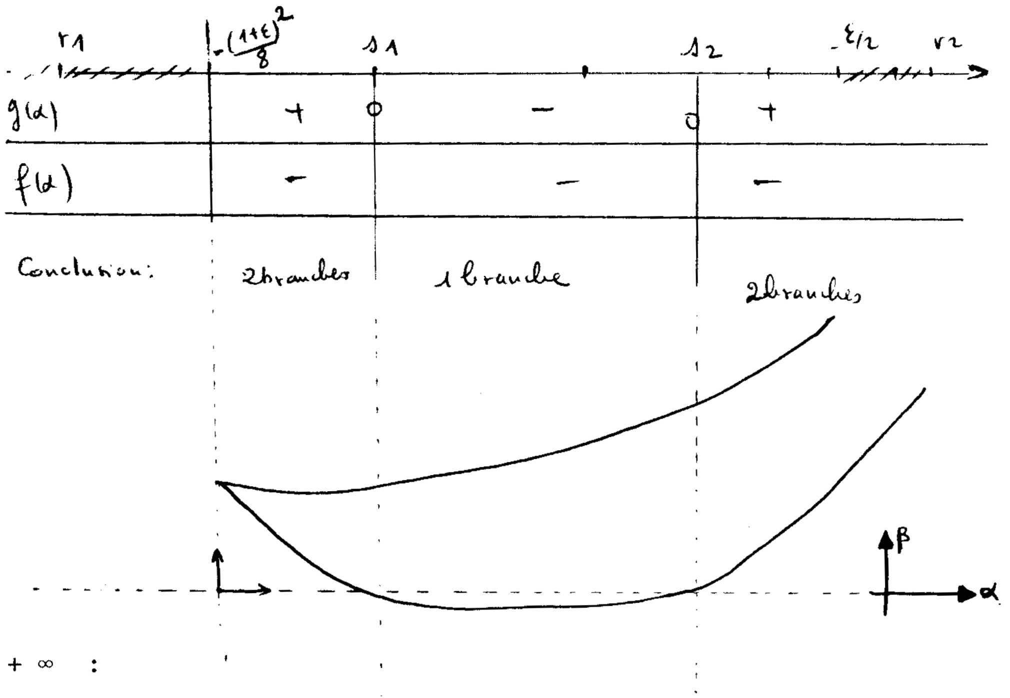
d'où une seule branche $\beta = \beta(\alpha)$.

$$\boxed{-\frac{(1+\varepsilon)^2}{8} < \alpha < -\frac{\varepsilon}{2}}$$

$0 < \varepsilon < 1$ $\quad g(\alpha) > 0$, $f(\alpha) > 0 \implies$ 2 racines Y_1 et Y_2 négatives, d'où aucune branche $\beta = \beta(\alpha)$.

$1 < \varepsilon < 8$ $\quad g(\alpha) > 0$, $f(\alpha) < 0 \implies$ 2 racines Y_1 et Y_2 toutes deux positives, d'où 2 branches $\beta = \beta(\alpha)$.

$8 < \varepsilon < 9$



$9 < \varepsilon < +\infty$:

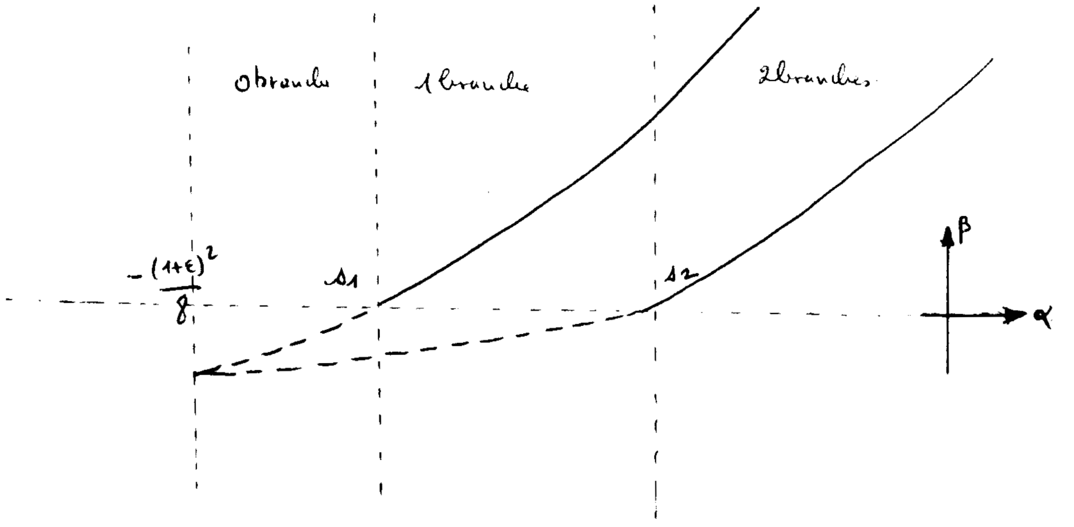
$g(r_1) = 2r_1^2 + (5\varepsilon-4)r_1 + 2(1+\varepsilon)^3 = 2r_1(\varepsilon-3)+(1+\varepsilon)^2 < 2.(-\frac{3}{2}(2+\varepsilon)(\varepsilon-3))+(1+\varepsilon)^2 < 0.$

donc $s_1 < r_1 < s_2$.

On a donc :

α	$-\frac{(1+\varepsilon)^2}{8}$		s_1		r_1		s_2		$-\varepsilon/2$
$g(\alpha)$		+	0	−		−	0	+	
$f(\alpha)$		+		+	0	−		−	
conclusion:		0 branche		1branche		1branche		2branches	

On a le cas de figure :



<u>Représentation paramétrique des courbes</u> C_ε .

Pour pouvoir préciser un peu plus les courbes C_ε, nous allons couper par la droite $\beta = t\alpha$. Sachant que C_ε est symétrique par rapport à $O\alpha$, on se contentera de $t \in (0, +\infty$ (ou $t \in) -\infty, 0)$. En remplaçant Y par $t^2 \alpha^2$, on a :

$$(2\alpha+\varepsilon)\, t^4 \alpha^4 + 2\alpha\, t^2 .\alpha^2\, f(\alpha,\varepsilon) + \alpha^3 g(\alpha,\varepsilon) = 0$$, c'est-à-dire :

$$\boxed{P(t,\alpha,\varepsilon) = 2\alpha^2 (t^2+1)^2 + \alpha(\varepsilon t^4+6(2+\varepsilon)t^2+5\varepsilon-4)+2(1+t^2)(1+\varepsilon)^2 = 0}$$

dont le discriminant est :

$$\Delta(t,\varepsilon) = [\varepsilon t^4 + 6(2+\varepsilon)t^2 + 5\varepsilon-4]^2 - 16(1+\varepsilon)^2 (1+t^2)^3$$

$$= \varepsilon^2 t^8 - 4 t^6(\varepsilon^2+2\varepsilon+4)-2t^4(\varepsilon^2-20\varepsilon-48)+ 12 t^2(\varepsilon^2-2\varepsilon-12)+ 9\varepsilon^2- 72\varepsilon .$$

On remarque (!) que $t^2 = 3$ est racine double de $\Delta(t,\varepsilon)$ et on obtient, après des calculs faciles et en posant $t^2 = u$.

$$\Delta(u,\varepsilon) = (u-3)^2 [\varepsilon^2 u^2+2(\varepsilon^2-4\varepsilon-8) u+ \varepsilon^2-8\varepsilon] = (u-3)^2 h(u,\varepsilon).$$

<u>Etude de $h(u,\varepsilon)$</u>

$\delta'(\varepsilon) = (\varepsilon^2 - u - 8)^2 - \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 8\varepsilon) = 64(1+\varepsilon) > 0 \implies$ 2 racines u_1 et u_2 avec :

$u_1 + u_2 = -\dfrac{\varepsilon^2 - u\varepsilon - 8}{\varepsilon^2}$ et $u_1\, u_2 = \varepsilon\,(\varepsilon - 8)$.

d'où :

$u_1 + u_2$:

ε		ε_1		0		ε_2	
	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

$u_1 u_2$:

ε		0		8	
	//////////	0	$-$	0	$+$

$\varepsilon_2 = 2(1+\sqrt{3})$ (>4)

$\varepsilon_1 < 0$

On en conclut :

$0 < \varepsilon < 8$: 2 racines u_1 et u_2 de signes opposés, donc une seule, la positive est acceptable, soit u_o :

$$u_o = t_o^2 = \frac{8\sqrt{1+\varepsilon} - (\varepsilon^2 - 4\varepsilon - 8)}{\varepsilon^2}$$

$\varepsilon > 8$: 2 racines négatives $\implies$ inacceptables.

Pour $h(t^2,\varepsilon)$, on a donc :

$0 < \varepsilon < 8$

t^2		0		t_o^2	
$h(t^2,\varepsilon)$			$-$	0	$+$

$\varepsilon > 8$: $h(t^2,\varepsilon) > 0$

<u>Remarques supplémentaires</u>

. $\boxed{< \varepsilon < 8}$

$\Delta(t,\varepsilon)$ est positif pour $t^2 \geq t_o^2$. Donc 2 branches $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ pour $t^2 \geq t_o^2$, dont l'expression est :

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \dfrac{-(\varepsilon t^4 + 5(2+\varepsilon)t^2 + 5\varepsilon - 4) + |t^2-3|\sqrt{\varepsilon^2\, t^4 + 2(\varepsilon^2 - 4\varepsilon - 8)t^2 + \varepsilon^2 - 8\varepsilon}}{4(1+t^2)^2} \\ \alpha_2(t) = \dfrac{-(\quad \text{idem.} \quad) - |t^2-3|\,\sqrt{\ \text{idem}}}{4(1+t^2)^2} \end{cases} ,t^2 \geq t_o^2$$

On voit qu'il est bon de savoir le signe de $t_o^2 - 3$. Or :

$$t_o^2-3 = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[-\varepsilon^2+4\varepsilon+8+8\sqrt{1+\varepsilon}-3\varepsilon^2\right] \Rightarrow \text{signe } t_o^2-3) = \text{signe } (8\sqrt{1+\varepsilon}-4(\varepsilon^2-\varepsilon-2)) = \text{signe } (2\sqrt{1+\varepsilon}-(1+\varepsilon)(\varepsilon-2)$$

$= \text{signe } \varepsilon^2(3-\varepsilon)$, c'est-à-dire

$\varepsilon < 3 \Rightarrow t_o^2 > 3$

$\varepsilon = 3 \Rightarrow t_o^2 = 3$

$8 > \varepsilon > 3 \Rightarrow t_o^2 < 3$

⊙ Pour $t^2 = t_o^2$, on a un point double, soit β_c son ordonnée et α_c son abscisse; α_c annule donc $\Delta(\alpha,\varepsilon)$, d'où $\alpha_c = -\frac{(1+\varepsilon)^2}{8}$; β_c est la racine double de (C_ε), donc :

$$\beta_c^2 = -\alpha_c \frac{f(\alpha_c,\varepsilon)}{2\alpha_c+\varepsilon} = -\alpha_c . \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-9)}{\varepsilon - \frac{(1+\varepsilon)^2}{4}} = +\alpha_c . 4 \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-9)}{(\varepsilon-1)^2} = 4\alpha_c . \frac{\varepsilon-9}{\varepsilon-1} = -4\alpha_c \frac{\varepsilon-9}{1-\varepsilon} .$$

Donc β_c n'existe que si $1 < \varepsilon < 9$ et vaut alors $\beta_c = \frac{(1+\varepsilon)}{\sqrt{2}} . \sqrt{\frac{\varepsilon-9}{1-\varepsilon}}$.
c'est-à-dire qu'on a :

. Pour $0 < \varepsilon < 1$: la droite $\beta = \pm t_o$ est tangente à la courbe C_ε

. Pour $1 < \varepsilon < 9$: le point (α_c,β_c) est un point double de la courbe C_ε, en plus du point $\begin{cases} \alpha = -\frac{1+\varepsilon}{2} \\ \beta = \pm \frac{1+\varepsilon}{2} \end{cases}$

. Pour $\varepsilon \geqslant 9$: Il n'y a que le point double $\alpha = -\frac{1+\varepsilon}{2}$, $\beta = \pm 3\frac{1+\varepsilon}{2}$ . .

⊙ $\alpha = -\frac{\varepsilon}{2}$.

L'équation (P) devient du 1er degré en t^2 ; $(1-\varepsilon)\, t^2 + 3\varepsilon + 1 = 0$.
Il y a donc un point d'intersection et un seul (et non symétrique par rapport à 0α), et ceci pour $\boxed{\varepsilon > 1}$. Pour $\varepsilon < 1$, il n'y a aucun point d'intersection : C_ε est donc confiné dans la bande $-\frac{\varepsilon}{2} < \alpha < 0$.
L'ordonnée du point d'intersection s'évalue en reportant dans C_ε, d'où :

$$\beta^2\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{4}\cdot\left[-\frac{g(-\varepsilon/2,\varepsilon)}{2f(-\varepsilon/_2\ \varepsilon)}\right] = \frac{\varepsilon^2}{4}\cdot\frac{-2.(3\varepsilon+1)}{2.(1-\varepsilon)} = \frac{\varepsilon^2}{4}\times\frac{3\varepsilon+1}{\varepsilon-1}$$

(ou bien $\beta^2 = t^2\,\alpha^2$)

On voit que quand $\varepsilon \longrightarrow 1-0 \quad \beta^2(-\frac{\varepsilon}{2}) \longrightarrow +\infty$.

. $t = 0 \iff g(\alpha)=0$; on retrouve les deux points d'intersection avec $O\alpha$: $s_1(\alpha)$ et $s_2(\alpha)$.

⊙ $t^2 \longrightarrow +\infty$: $\alpha_1(t) \longrightarrow 0$, $\alpha_2(t) \longrightarrow -\frac{\varepsilon}{2}$

Donc $\alpha = -\frac{\varepsilon}{2}$ est asymptote pour la branche $\alpha_2(t)$.

⊙ $\varepsilon = 8 \Rightarrow g(\alpha) = 0$ avec $s_1 = s_2$ donc branche tangente à $O\alpha$

⊙ $\varepsilon = 9 \Rightarrow \beta_c = 0$.

⊙ Disposition relative des branches $\alpha_2(t)$ en fonction de ε ; t fixe :

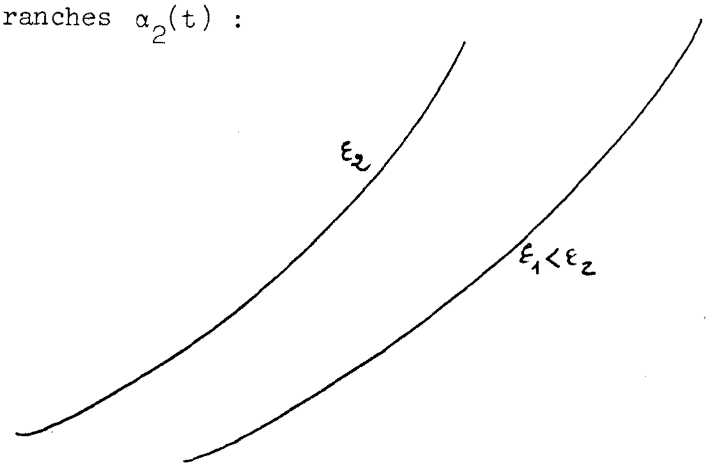
$\varepsilon t^4 + 6(2+\varepsilon)\,t^2 + 5\varepsilon-4$ est une fonction croissante de ε . Soit alors :

$e(\varepsilon) = \varepsilon^2\,t^4 + 2(\varepsilon^2-u-8)\,t^2 + \varepsilon^2-8\varepsilon = \varepsilon^2(t^4+2t^2+1)-8\varepsilon(1+t^2) - 16\,t^2$

$\frac{d}{d\varepsilon}(e(\varepsilon)) = 2(1+t^2)\,[\varepsilon(1+t^2)-4]$. Or $\frac{4}{1+t_o^2} = \frac{4^{\ 2}}{4(1+\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon})} < \frac{4\varepsilon^2}{4\varepsilon} = \varepsilon$. Comme

$t^2 > t_o^2$, on a donc $\frac{d}{d\varepsilon}(e(\varepsilon)) > 0$.

Donc $\alpha_2(t)$ est une fonction décroissante de ε . On a donc la disposition suivante pour les branches $\alpha_2(t)$:



Tous les résultats relatifs aux équations (C_ε) et (P) sont figurés dans les fig. b. 1, ..., 6.

2.3. *Conclusions*

Pour l'équation (Z) : $Z^2 + Z\lambda\,(\lambda+1+\varepsilon) + \lambda^3 = 0$, nous pouvons donc affirmer :

1. $\lambda \in C \setminus \{C_\varepsilon \cup \{\mathrm{Im} = 0\} \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0\}$

   Il existe alors deux racines Z_1 et Z_2 non réelles toutes les deux.

2. $\lambda \in \{\mathrm{Im}\,\lambda = 0\}$

   On a deux racines réelles de signes opposés :

$$Z_1(\lambda,\varepsilon) = \frac{-\alpha(\alpha+1+\varepsilon)-\alpha\sqrt{(\alpha+1+\varepsilon)^2-4\alpha}}{2}, \qquad \alpha = \mathrm{Re}\,\lambda = \lambda$$

$$Z_2(\lambda,\varepsilon) = \frac{-\alpha(\alpha+1+\varepsilon)+\alpha\sqrt{(\alpha+1+\varepsilon)^2-4\alpha}}{2}$$

alors :

$0 > \alpha \geq -(1+\varepsilon) \implies Z_1(\lambda,\varepsilon) > 0\,,\ Z_2(\lambda,\varepsilon) < 0$

$-\infty < \alpha < -(1+\varepsilon) \implies Z_2(\lambda,\varepsilon) > 0\,,\ Z_1(\lambda,\varepsilon) < 0$

3. $\lambda \in C_\varepsilon \setminus \{\lambda_D \cup \bar{\lambda}_D\} \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$

   On a toujours au moins une racine réelle, si $2\alpha+1+\varepsilon \neq 0$:

$$Z_1(\lambda,\varepsilon) = \frac{\beta^2-3\alpha^2}{2\alpha+1+\varepsilon}$$, dont nous allons étudier le signe :

⊙ D'abord $P(t, -\frac{1+\varepsilon}{2}, \varepsilon) = (t^2-3)^2 \geq 0$.

⊙ $\dfrac{\alpha_1(t)+\alpha_2(t)}{2} - \left(-\dfrac{1+\varepsilon}{2}\right) = (t^2-3)\left[(2+\varepsilon)\,t^2 - (2-\varepsilon)\right] \cdot \dfrac{1}{4(1+t^2)^2}$, d'où

$\longrightarrow$ $t^2 < 3$ (on sait qu'alors $\varepsilon > 3$) $\implies \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} - \left(-\dfrac{1+\varepsilon}{2}\right) < 0$

$\longrightarrow$ $t^2 > 3$, alors $\dfrac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon} \leq 1 \implies \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} - \left(-\dfrac{1+\varepsilon}{2}\right) < 0$.

c'est-à-dire qu'on a : $t^2 < 3 \;:\; \alpha_1 < \alpha_2 < -\dfrac{1+\varepsilon}{2} < 0$

$t^2 > 3 \;:\; -\dfrac{1+\varepsilon}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < 0$

On a donc dans tous les cas : $Z_1(\lambda,\varepsilon) > 0$.

Des relations :

$$Z_1 \, Z_2 = \alpha\,(\alpha^2-3\beta^2) + i\beta(3\alpha^2-\beta^2)$$

$$Z_1 + Z_2 = \beta^2-\alpha^2-\alpha(1+\varepsilon)-i\beta(2\alpha+1+\varepsilon)$$

on déduit : $Z_2(\lambda,\varepsilon) = \dfrac{\alpha(\alpha^2-3\beta^2)}{\beta^2=3\,\alpha^2}\,(2\alpha+1+\varepsilon)-i\;\beta(\beta^2-3\alpha^2)\,\dfrac{2\alpha+1+\varepsilon}{\beta^2-3\alpha^2}$

et donc $\operatorname{Im} Z_2(\lambda,\varepsilon) \neq 0$ si $\lambda \neq \lambda_D$ ou $\lambda \neq \overline{\lambda}_D$, points doubles de C_ε, quand ils existent.

4. $\underline{\lambda = \lambda_D \text{ ou } \lambda = \overline{\lambda}_D}$

Ce cas se présente uniquement quand $\varepsilon \geqslant 3$. On a alors deux racines réelles positives : $Z_{1D} = \dfrac{(1+\varepsilon)^2}{2}\left(1 + \sqrt{(\varepsilon-3)/(\varepsilon+1)}\right)$

$$Z_{2D} = \frac{(1+\varepsilon)^2}{2}\left(1 - \sqrt{(\varepsilon-3)/(\varepsilon+1)}\right)$$

Il est clair qu'on a alors $\sigma\,(A_o^o) \subset C_\varepsilon \cup \{\operatorname{Im}\lambda = 0\} \cap \{\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0\}$
et $(A_o^{o*}) \subset (\mathrm{id})$.

3. $\boxed{\textit{SPECTRES DE } A_o^o \textit{ ET } A_o^{o*}}$

3.1. $\lambda = 0$

- $0 \notin \sigma_p(A_o^o)$: sinon, il existerait $\vec{u} \in D(A_o^o)$ et tq$\|\vec{u}\|_{H_o} = 1$ et $A_o^o\, u = 0$, c'est-à-dire

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_2 = 0 \\ \vec{\nabla}\ \operatorname{div} \vec{u}_1 - m\,\vec{\nabla}\, u_7 = 0 \\ \Delta\, u_7 - \eta\, \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{u}_2 = 0 \\ \vec{\nabla}\operatorname{div} u_1 - m\,\nabla u_7 = 0 \\ \Delta\, u_7 = 0\ . \end{array}\right.$$

Comme $\vec{x} = \vec{0} \iff \operatorname{div} \vec{x} = 0$ dans $L_2^o(R^3;\, C^3)$, on a :

$\vec{u}_2 = 0$, $\Delta \operatorname{div} \vec{u}_1 - m\,\Delta\, u_7 = 0$, $\Delta\, u_7 = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 = \vec{0}$, $\Delta\, u_7 = 0$, $\Delta \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0$

ce qui implique (u_7 et $\operatorname{div} \vec{v}_1$ $L_2(R^3;C)$): $\vec{u}_2 = \vec{0}$, $u_7 = 0$, $\operatorname{div} \vec{u}_1 = 0$.

Or $\operatorname{div} \vec{u}_1 = 0$ implique que $\vec{u}_1 = 0$, puisque $\vec{u}_1 \in EL^o(R^3;C^3)$. On obtient donc

$||\vec{u}||= 0$, contradiction.

On démontre de même que $0 \notin \sigma_p(A_o^{o*})$.

⊙ $\lambda = 0 \notin \sigma_R(A_o^o)$ et $\notin \sigma_R(A_o^{o*})$

Puisque $\lambda = 0$ n'appartient ni à $\sigma_p(A_o^o)$, ni à $\sigma_p(A_o^{o*})$, il n'appartient pas à $\sigma_p(A_o^{o*})- \sigma_p(A_o^o)$ qui est égal à $\sigma_R(A_o^o)$ par définition.

⊙ $\lambda = 0 \in \sigma_c(A_o^o)$ et à $\sigma_c(A_o^{o*})$:

$0 \in \sigma_c(A_o^o)$: il suffit d'exhiber une suite $\vec{v}_n \in \mathcal{D}(A_o^o)$, <u>non précompacte</u>, et telle que $||A_o^o \vec{v}_n|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Choisissons $\vec{v}_n$ telle que $\vec{v}_{2n} \xrightarrow{L_2} 0$ et div $\vec{v}_{2n} \xrightarrow{L_2} 0$ (ce qui est possible, car $\vec{v}_n \in D(A_o^o)$) . On sait qu'il est alors possible de choisir $v_{7n} \in w_2^2(R^3;C)$ tel que $||\Delta\, u_{7n}|| \longrightarrow 0$, avec u_{7n} non précompacte [ceci est dû au fait que $0 \in$ spectre continu de l'opérateur $B = -\Delta$, $D(B) = w_2^2(R^3;C)$].

Il suffit alors de choisir $\vec{v}_{1n}$ telle que div $\vec{v}_{1n} = m\, v_{7n}$.

Les mêmes arguments s'appliquent à A_o^{o*}.

Nous allons envisager le cas $\lambda \neq 0$.

3.2. *Spectres ponctuels*.

Soit $0 \neq \lambda_o \in \sigma_p(A_o^o)$. Il existe alors une distribution régulière $E(x;\lambda_o) \in D(A_o^o)$, avec $||E(x;\lambda_o)||_{H_o} = 1$ et $(A_o^o-\lambda_o)\, E(x;\lambda_o)= 0$. Par Fourier, on obtient :

$$[\, \hat{A}_o^o(\xi) - \lambda_o].\ \hat{E}(\xi;\lambda_o) = 0$$

On en déduit que le support de $\hat{E}(\xi;\lambda_o)$ est concentré sur une sphère $|\xi|$ = cste, la constante étant fixée par λ_o ... Ce support est de mesure nulle dans R_ξ^3 d'où la contradiction. Le même argument vaut pour A_o^{o*} . On a donc :

$$\boxed{\sigma_p(A_o^o) = \sigma_p(A_o^{o*}) = \phi}$$

3.3.- *Ensembles Résolvants*

Théorème

Si $\mathrm{Im}\, d^2_{1,2}(\lambda) \neq 0$, alors $\lambda \in \rho(A^o_o)$ et $\lambda \in \rho(A^{o*}_o)$

Preuve :

Soit $\vec{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, f_7) \in H^o_o$.

Considérons l'équation (E) : $(A^o_o - I)\vec{u} = \vec{F}$ au sens des distributions tempérées. On a alors :

$$(A^o_o - \lambda I)\vec{u} = \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_2 = \lambda\, \vec{u}_1 + \vec{f}_1 \\ \vec{\nabla}\mathrm{div}\, \vec{u}_1 - m\vec{\nabla} u_7 = \lambda\, \vec{u}_2 + \vec{f}_2 \\ \Delta u_7 - \eta\, \mathrm{div}\, \vec{u}_2 = \lambda\, u_7 + f_7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_2 = \lambda\, \vec{u}_1 + \vec{f}_1 \\ (\Delta - \lambda^2)\, \mathrm{div}\, \vec{u}_1 - m\,\Delta\, u_7 = \lambda\, \mathrm{div}\, \vec{f}_1 + \mathrm{div}\, \vec{f}_2 \\ (\Delta - \lambda) u_7 - \eta\, \lambda\, \mathrm{div}\, \vec{u}_1 = f_7 + \eta\, \mathrm{div}\, \vec{f}_1 \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire}(E) \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} (\Delta - \lambda^2) & -m\Delta \\ -\eta\lambda & \Delta - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{div}\, \vec{u}_1 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{div} & 0 \\ \eta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{div}\, \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \hat{f}_7 \end{pmatrix} \right.$$

Par transformation de Fourier, on obtient :

$$\begin{pmatrix} |\xi|^2 - \lambda^2 & m|\xi| \\ -\eta\, \lambda & -|\xi| - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathrm{div}\, \vec{u}_1} \\ \hat{u}_7 \end{pmatrix} = D(\vec{\xi}).\vec{G}(\xi)$$

où $D(\vec{\xi})$ est le 2×5 opérateur matriciel $\begin{pmatrix} \lambda & i\vec{\xi}. & 0 \\ \eta & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\vec{G}(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \widehat{\mathrm{div}\, \vec{f}_1} \\ \hat{\vec{f}}_2 \\ \hat{f}_7 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire $\|\vec{G}(\vec{\xi})\|_{L^2(R^3_\xi; C^5)} = \|\vec{F}\|_{H_o}$ Par Plancherel.

On obtient : $\begin{pmatrix} \widehat{\mathrm{div}\, \vec{u}_1} \\ \hat{u}_7 \end{pmatrix} = L_\lambda(|\xi|) \circ D(\vec{\xi})\vec{G}(\xi) = H_\lambda(\xi)\vec{G}(\xi)$ où $H_\lambda(\xi) \in L(C^5; C^2)$

$$H_\lambda(\xi) = \frac{1}{(-|\xi| + d_1^2)(-|\xi|^2 + d_2^2)} \begin{pmatrix} -|\xi| - \lambda & -m|\xi| \\ \eta\lambda & -|\xi|^2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & i\vec{\xi}. & 0 \\ \eta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-|\xi|^2 + d_1^2)(-|\xi|^2 + d_2^2)} \begin{pmatrix} -\lambda(\lambda + |\xi| - \varepsilon|\xi|) & -i(\lambda + |\xi|)\, \vec{\xi}\,. & -m|\xi| \\ \eta\, \lambda^2 - \eta(\lambda + |\xi|^2) & i\lambda\eta\, \vec{\xi}. & -\lambda - |\xi|^2 \end{pmatrix}$$

Soit alors $|.|_m$ une norme dans C^m, et $||.||_{m,n}$ la norme dans $L(C^m,C^n)$, c'est-à-dire :

$$||T||_{m,n} = \sup_{|u|_m \leq 1} \frac{|Tu|_m}{|u|_m} \quad \text{pour } T \in L\,(C^m;C^n)$$

Le dénominateur de $H_\lambda(\xi)$ est un polynôme du quatrième degré en $|\xi|$. Il existe donc une constante $c_1(\lambda)>0$ telle que :

$$|(-|\xi|+ d_1^2)(-|\xi|^2+d_2^2)| \geq c_1(\lambda)\ (1+|\xi|^2)^2 .$$

De même pour le numérateur, qui est un polynome de 3e degré en $|\xi|$, $\exists$ une constante $c_2(\lambda)$ telle que : $|\text{numérateur}| \leq c_2(\lambda)|\xi|^3 \leq c_2(\lambda)(1+|\xi|^2)^{3/2}$.

Donc

$$||H_\lambda(\xi)||_{5,2} \leq c(\lambda)\ \frac{1}{(1+|\xi|)^{1/2}}$$

Alors $|e^{i\vec{x}.\vec{\xi}}\ H_\lambda(\xi)\ \vec{G}(\xi)|_2 \leq c(\lambda)\ |\vec{G}(\xi)|_5$. On obtient alors par Plancherel :

$$||(\mathrm{div}\ \vec{v}_1,\ u_7)||_{L^2(R^3;C^2)} \leq c'(\lambda)\ ||\vec{F}||_{H_o}$$

De même $|i\vec{\xi}(\widehat{\mathrm{div}\ \vec{u}_1},\ \hat{u}_7)|_2 = |\vec{\xi}|\ (\widehat{\mathrm{div}\ \vec{u}_1},\ \hat{u}_7)|_2 \leq c(\lambda)\ |\vec{G}(\xi)|_5$, d'où :

$$||(\vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \vec{v}_1,\ \vec{\nabla}\ u_7||_{L^2(R^3;C^6)} \leq c(\lambda)||\vec{F}||_{H_o}$$

On a alors $\lambda\vec{u}_2 = \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \vec{u}_1 - m\ \vec{\nabla}\ u_7 - \vec{f}_2 \Rightarrow \vec{u}_2 \in L_2(R^3;C^3)$ et $||\vec{u}_2|| \leq c_4(\lambda)||\vec{F}||_{H_o}$.

En définitive $\vec{u} \in H_o^o$ on a $A_o^o\ \vec{u} = \lambda\vec{u}+\vec{F}$ au sens des distributions tempérées.
Comme $\vec{u}$ et $\vec{F}$ sont dans H_o^o on a $A_o^o\ \vec{u} \in H_o^o$, c'est-à-dire que $\vec{u} \in D(A_o^o)$.
On obtient donc :

1) Il existe une solution unique dans S' de l'équation $(A_o^o - I)\vec{u} = \vec{F}$, $\vec{F} \in H_o^o$.
2) Cette solution appartient à $D(A_o^o)$.
3) L'opérateur $\left\{\begin{array}{lcl} H_o^o & \longrightarrow & H_o^o \\ \vec{F} & \longrightarrow & \vec{u} = (A_o^o - \lambda I)^{-1}\ \vec{F} \end{array}\right\}$ est dans $L(H_o^o,H_o^o)$.
4) $A_o^o\ \vec{u} = \lambda\ \vec{u} + \vec{F}$ entraîne que :

   L'opérateur $\left\{\begin{array}{lcl} H_o^o & \longrightarrow & D(A_o^o) \\ \vec{F} & \longmapsto & \vec{u} = (A_o^o - I)^{-1}\ \vec{F} \end{array}\right\}$ est dans $L(H_o^o, D(A_o^o)\ )$, où

   $D(A_o^o)$ est muni de la norme du graphe, qui en fait un Hilbert.
5) On a un résultat analogue pour $\rho\,(A_o^{o*})$.

3.4. *Spectres résiduels.*

$$\sigma_p(A_o^o) = \sigma_p(A_o^{o*}) \implies \boxed{\sigma_R(A_o^o) = \sigma_R(A_o^{o*}) = \phi}$$

3.5. *Spectres continus*

Ce qui précède nous autorise à conclure que $\sigma_c(A_o^o)$ est contenu dans la réunion de C_ε et de $\{\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0\} \cap \{\,m\,\lambda = 0\,\}$ ... Nous allons démontrer réciproquement que cette réunion appartient à $\sigma_c(A_o^o)$. Commençons par le résultat fondamental suivant :

Théorème

Soit B l'opérateur : $B\,f = -\Delta\, f$, $D(B) = H_2^2(R^n)$. Alors :

1°) B est auto-adjoint positif dans $L_2(R^n)$

2°) L'opérateur $\overset{o}{B}$: $\overset{o}{B}\, f = -\Delta f$, $D(\overset{o}{B}) = C_o^\infty(R^n)$ est essentiellement auto-adjoint et on a $\overline{\overset{o}{B}} = B$.

3°) $\sigma(B) = [0,\infty[\; = \sigma_c(B)$.

Preuve

Les affirmations 1°) et 2°) sont très classiques maintenant et nous ne les démontrerons pas. Pour prouver 3°) il suffit d'exhiber, pour chaque λ réel positif, une suite $\{x_n\}$, $x_n \in D(B)$, non précompacte, et telle que

$$\|(B-\lambda)\, x_n\|_{L_2(R_n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Soit alors : $\{\varepsilon_j\}$ une suite de nombres positifs, $\varepsilon_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$

$\{x_j\}$ une suite de points $x_j \in R_n$, avec $|x_j| \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty$

$\psi(x) \in C_o^\infty\,(R_n)$, non identiquement nulle.

Nous allons choisir $\{\varepsilon_j\}$ et $\{x_j\}$, de telle façon que les supports des fonctions $\vartheta_j(x) = \psi(\varepsilon_j(x-x_j))$ aient une intersection vide. Ceci est toujours possible (on peut prendre par exemple : $\varepsilon_j = \frac{1}{j}$ et $|x_j| = j(j+1)$; $\mathrm{supp.}\,\psi\,(x) = \{|x| < \;\})$.

On considère alors la suite $f_j = \varepsilon_j^{\frac{n}{2}} \psi(\varepsilon_j(x-x_j))\ e^{i\sqrt{\lambda}\vec{x}.\vec{\omega}} \quad |\vec{\omega}| = 1$.

On a :

$\rightarrow\ ||f_j(x)||^2_{L_2(R^n)} = \varepsilon_j^n \int_{R^n} |\psi\ (\varepsilon_j(x-x_j)|^2\ dx = \int_{R^n} |\psi(y)|^2\ dy > 0$, et finie $\rightarrow$ d'où

$f_j \in L_2(R^n)$

$\rightarrow\ f_j$ à support compact C^∞.

$\rightarrow ||f_j(x) - f_k(x)||^2_{L_2(R^n)} = ||f_j(x)||^2_{L_2} + ||f_k(x)||^2_{L_2} > c > 0$, car les supports ont une intersection vide.

Donc f_j n'est pas précompacte; elle est bornée.

$\rightarrow\ B\ f_j - \lambda\ f_j = \varepsilon_j^{n/2} \left[-\Delta\ \psi\ (\varepsilon_j(x-x_j)) - 2 \sum_1^n \frac{\partial\psi}{\partial x_\ell} (\varepsilon_j(x-x_j))i\ \omega_\ell\sqrt{\lambda}\right] e^{i\sqrt{\lambda}\ \vec{x}.\vec{\omega}}$

d'où

$$||(B-\lambda)\ f_j||^2_{L^2} \leqslant \varepsilon_j^n \left[\int_{R^n} |\Delta\ \psi\ (\varepsilon_j(x-x_j))|^2\ dx + 4\lambda \int_{R^n} \sum_1^n |\frac{\partial\psi}{\partial x_\ell}(\varepsilon_j(x-x_j))|^2\ dx\right]$$

$$= \varepsilon_j^4 \int_{R^n} |\Delta\ \psi(y)\ ^2\ dy + 4\ \lambda\ \varepsilon_j^2 \sum_1^n \int_{R^n} |\frac{\partial\psi}{\partial y_\ell}(y)|^2\ dy \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$$

On voit par là qu'il est toujours possible, étant donné $\lambda \geqslant 0$, de construire une suite de fonctions C^∞ à supports compacts, non pré-compacte et telle que $||(\Delta+\lambda)f_n||_{L_2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Donc $\sigma_c(B) = [0, +\infty[$

. <u>En particulier</u>, $\forall\ \lambda$ tel que Re $\lambda < 0$, $\lambda^2 \notin \sigma\ (-B)$; l'opérateur $\Delta - \lambda^2$ est alors un isomorphisme de $H^2_2\ (R^n)$ sur $L_2(R^n)$: $(\Delta-\lambda^2)^{-1}$ existe et $\in \mathcal{B}\ (L_2(R^n);\ H^2_2(R^n)\ )$; étant donnée une suite $\{u_n\}$, $u_n \in L_2$, on a :

$$\{u_n\} \longrightarrow 0 \implies ||(\Delta-\lambda^2)^{-1}|u_n||_{L_2} \rightarrow 0$$

Théorème : $\sigma_c(A_o^o) = C_\varepsilon \cup \{\mathrm{Im}\,\lambda = 0\} \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0\}$

Preuve : Soit λ fixé, appartenant à l'ensemble du théorème. Soit $\{\vec{u}_j\}$ une suite d'éléments de $D(A_o^o)$. On a :

$$||(A_o^o-\lambda I)\,\vec{u}_j||^2_{H_o} = ||\mathrm{div}(\vec{u}_{2j}-\lambda\vec{u}_{1j})||^2_{L_2(R^3;C)} + ||\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_{1j} - m\,\vec{\nabla}\,\vec{u}_{7j} - \lambda\vec{u}_{2j}||^2_{L_2(R^3;C^3)}$$

$$+||(\Delta-\lambda)u_{7j} - \eta\,\mathrm{div}\,\vec{u}_{2j}||^2_{L_2(R^3;C)}$$

D'autre part, pour λ choisi comme indiqué, l'équation $Z^2+\lambda(\lambda+1+\varepsilon)Z + \lambda^3 = 0$ admet au moins une racine réelle positive; appelons-là d^2 et soit Z_1 l'autre racine (on gardera la même racine si λ est l'un des deux points doubles λ_D ou $\overline{\lambda}_D$).

On a alors :

$Z^2 + \lambda(\lambda+1+\varepsilon)\,Z + \lambda^3 = (Z-d^2)\,(Z-Z_1)$ avec $\mathrm{Im}\ Z_1 \neq 0$, sauf si $\lambda = \lambda_D$ ou $\overline{\lambda}_D$.

Nous allons maintenant "fabriquer" une "bonne" suite $\vec{u}_j$:

1°) Pour u_{7j} nous prenons :

$$u_{7j} = \varepsilon_j^{3/2}\ \psi(\varepsilon_j(x-x_j))\ e^{id\vec{x}.\vec{\omega}} \qquad |\vec{\omega}| = 1$$

c'est-à-dire les f_j du théorème précédent avec $d = \sqrt{\lambda}$.

On a donc : $\{u_{7j}\}$ est une suite non précompacte, C^∞ à support compact et

$$||(\Delta+d^2)\ u_{7j}||_{L_2} \xrightarrow{j\to+\infty} 0$$

2°) Pour $\vec{u}_{2j}$ et $\vec{u}_{1j}$, nous les cherchons tels que :

$$\begin{cases} \vec{u}_{2j} = \lambda\ \vec{u}_{1j} \\ \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \vec{u}_{1j} - \lambda\ \vec{u}_{2j} = m\ \vec{\nabla}\ u_{7j} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{u}_{2j} = \lambda\ \vec{u}_{1j} \\ (\vec{\nabla}\mathrm{div} - \lambda^2)\ \vec{u}_{1j} = m\ \vec{\nabla}\ u_{7j} \end{cases} \qquad (2)$$

L'opérateur $C\,\vec{f} = \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{f}$, $D(C) = \{\vec{f} \in EL_2^o\,(R^3;C^3) : \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{f}\ \text{dist.} \in EL_2^o(R^3;C^3)\}$ est un opérateur auto-adjoint négatif dans $L_2^o(R^3;C^3)$ (cf. Lemme ci-après). Donc $\lambda^2 \notin \sigma\ (C)$; . L'opérateur $(C-\lambda^2)$ réalise donc un isomorphisme de $L_2^o(R^3;C^3)$ sur $D(C)$.

L'équation (2) détermine donc une solution unique $\vec{u}_{1j} \in D(C)$. <u>En particulier</u> $\vec{u}_{1j} \in D_1(A_o^o)$. Et alors $\vec{u}_{2j} = \lambda\ \vec{v}_{1j}$ appartient manifestement à $D_2(A_o^o)$.

u_{7j} étant C_o^∞ , on voit d'après (2) que $\Delta \operatorname{div} \vec{u}_{1j} = \lambda^2 \operatorname{div} \vec{u}_{1j} + m\Delta u_{7j} \in L_2(R^3;C)$

On a donc : $[(\Delta-\lambda)\, u_{7j} - \eta\,\lambda \operatorname{div} \vec{u}_{1j}] \in H_2^2(R^3;C)$ et donc appartient à D(B).

3°) On considère alors l'expression :

$(B-\lambda^2)\ [(\Delta-\lambda)u_{7j} - \eta\,\lambda \operatorname{div} \vec{u}_{1j}] = (\Delta+Z_1)\ (\Delta+d^2)\ u_{7j}$ d'après 2, 1 et l'équation en Z.

On a donc :

$$(\Delta-\lambda^2)\ [(\Delta-\lambda)u_{7j}-\eta\lambda \operatorname{div} \vec{u}_{1j}] = [(\Delta-\lambda^2) + (\lambda^2 + Z_1)]\ (\Delta+ d^2)\ u_{7j}$$

Le second membre appartient à $L_2(R^3;C)$ et on obtient donc :

$$(\Delta-\lambda)\ u_{7j} -\eta\ \lambda \operatorname{div}\ \vec{v}_{1j} = [I + (\lambda^2+ Z_1)\ (\Delta-\lambda^2)^{-1}]\ (\Delta+ d^2)\ u_{7j}$$

$(\Delta-\lambda^2)^{-1}$ étant borné, on a donc :

$$||(\Delta-\lambda)u_{7j} - \eta\,\lambda \operatorname{div} \vec{v}_{1j}||_{L_2} \leqslant K\ ||(\Delta+d^2)\ u_{7j}||_{L_2} \xrightarrow[j\ +\infty]{} 0$$

4°) Avec le choix qu'on fait de la suite $\{\vec{u}_j\}$ on a :

$$||(A_o^o-\lambda I)\vec{u}_j||^2_{H_o} = ||\operatorname{div}(\vec{u}_{2j}-\lambda\vec{u}_{1j}||_{L_2} +||(\nabla\operatorname{div}-\lambda^2)\vec{v}_{1j}-\vec{\nabla}\ u_{7j}||^2_{L2} +||(\Delta-\lambda)u_{7j}-\eta\lambda\operatorname{div} \vec{v}_{1j}||^2_{L_2}$$

$$= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + ||(\Delta-\lambda)\ u_{7j}- \eta\,\lambda\operatorname{div} \vec{v}_{1j}||^2_{L_2}$$

Donc, d'après 3°):

$$||(A_o^o- \lambda I)\ \vec{u}_j||_{H_o} \xrightarrow[j \to\infty]{} 0$$

Conclusion

On a donc exhibé, pour λ donné comme dans l'énoncé, une suite $\{u_n\}$: $u_n \in D(A_o^o)$, $\{u_n\}$ est non précompacte, puisque $\{u_{7n}\}$ ne l'est pas dans L_2 (on ne s'est pas donc occupé plus de savoir si les autres composantes étaient de Cauchy).

$||(A_o^o-\lambda I)u_n||_{H_o} \longrightarrow 0$. Le cas $\lambda = 0$ ayant déjà été élucidé, on a donc bien :

$$\boxed{\sigma_c(A_o^o) = \sigma(A_o^o) = C_\varepsilon \cup \{\operatorname{Im}\lambda = 0\} \cap \{\operatorname{Re} \lambda \leqslant 0\}}$$

Lemme

L'opérateur $\{C\ \vec{f} = \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{f}\ ;\ D(C) = \{\vec{f} \in L_2^o(R^3;C^3)\ :\ \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{f}$ distr. $\in L_2^o(R^2;C^3)\}$ est opérateur auto-adjoint négatif.

Preuve

Il est évident que C est symétrique, négatif à domaine dense ($\supset S^1(R^3;C^3)$)

Il reste donc à démontrer que $(C-\lambda)\ D(C) = L_2^o\ (R^3;C^3)$ pour $\lambda > 0$.

Soit $g(x) \in L_2^o(R^3;C^3) \Rightarrow \hat{\vec{g}}(\xi) = F(g(x)) \in L_2^o(R^3;C^3)$ $\quad [\ \vec{\xi} \wedge \vec{g}(\xi) = 0\ ]$ et

$\vec{f}(x) = F^{-1}\left[\dfrac{1}{-|\xi||^2-\lambda}\ \hat{\vec{g}}(\xi)\right]$. Alors $\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{f} = \Delta\,\vec{f}$ (car $\vec{f} \in L_2^o(R^3;C^3)$ et

$\nabla\,\vec{f} = F^{-1}\left[\dfrac{|\xi|}{-|\xi|^2-\lambda}\ \hat{g}(\xi)\right]$ $L_2^o(R^3;C^3)$. Donc $|\ \vec{f}(x) \in D(C)|$ cqfd

Conclusion : $(C-\lambda^2)$, $\lambda > 0$, réalise un isomorphisme entre $D(C)$ et $L_2^o(R^3;C^3)$.

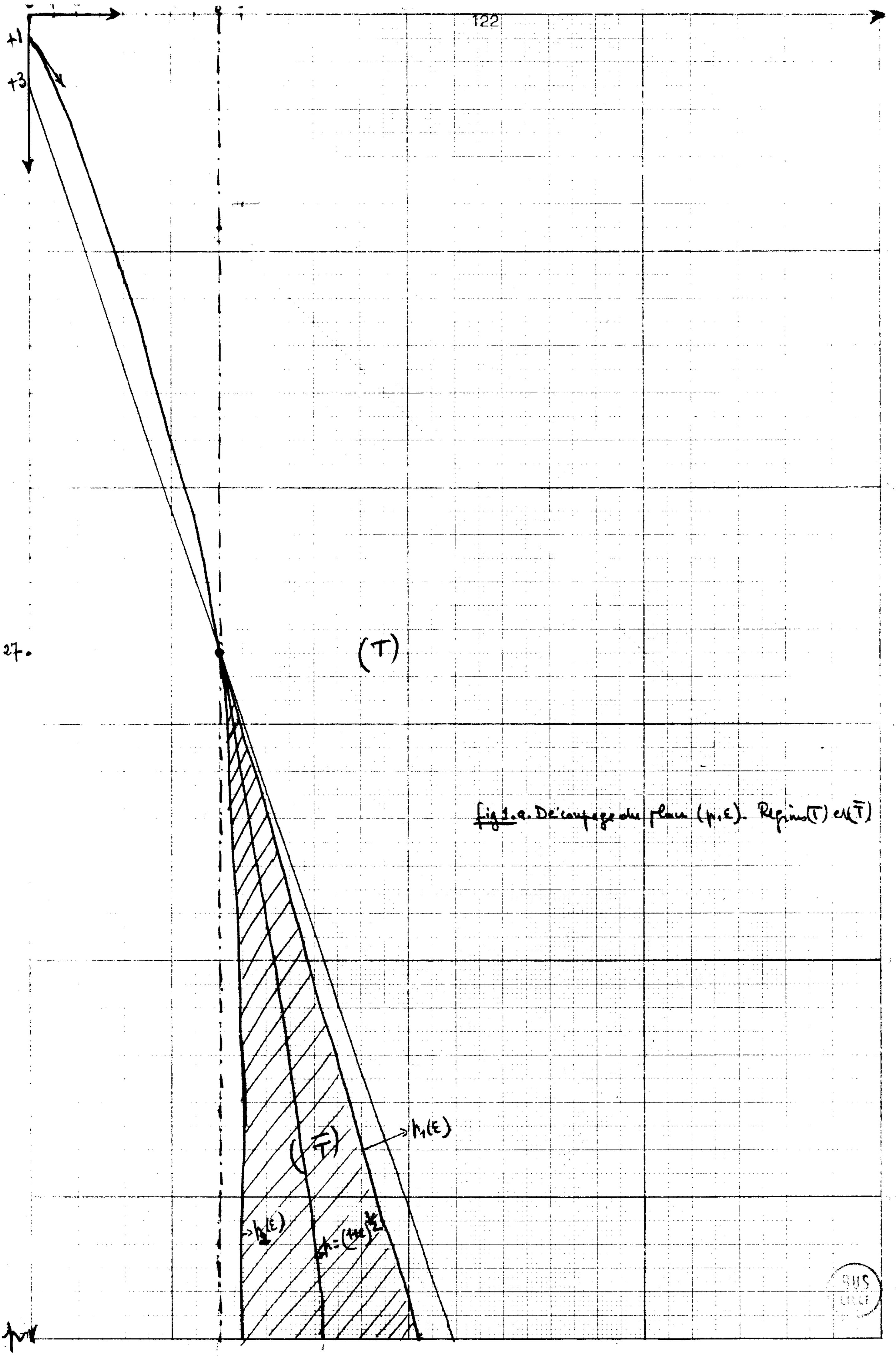
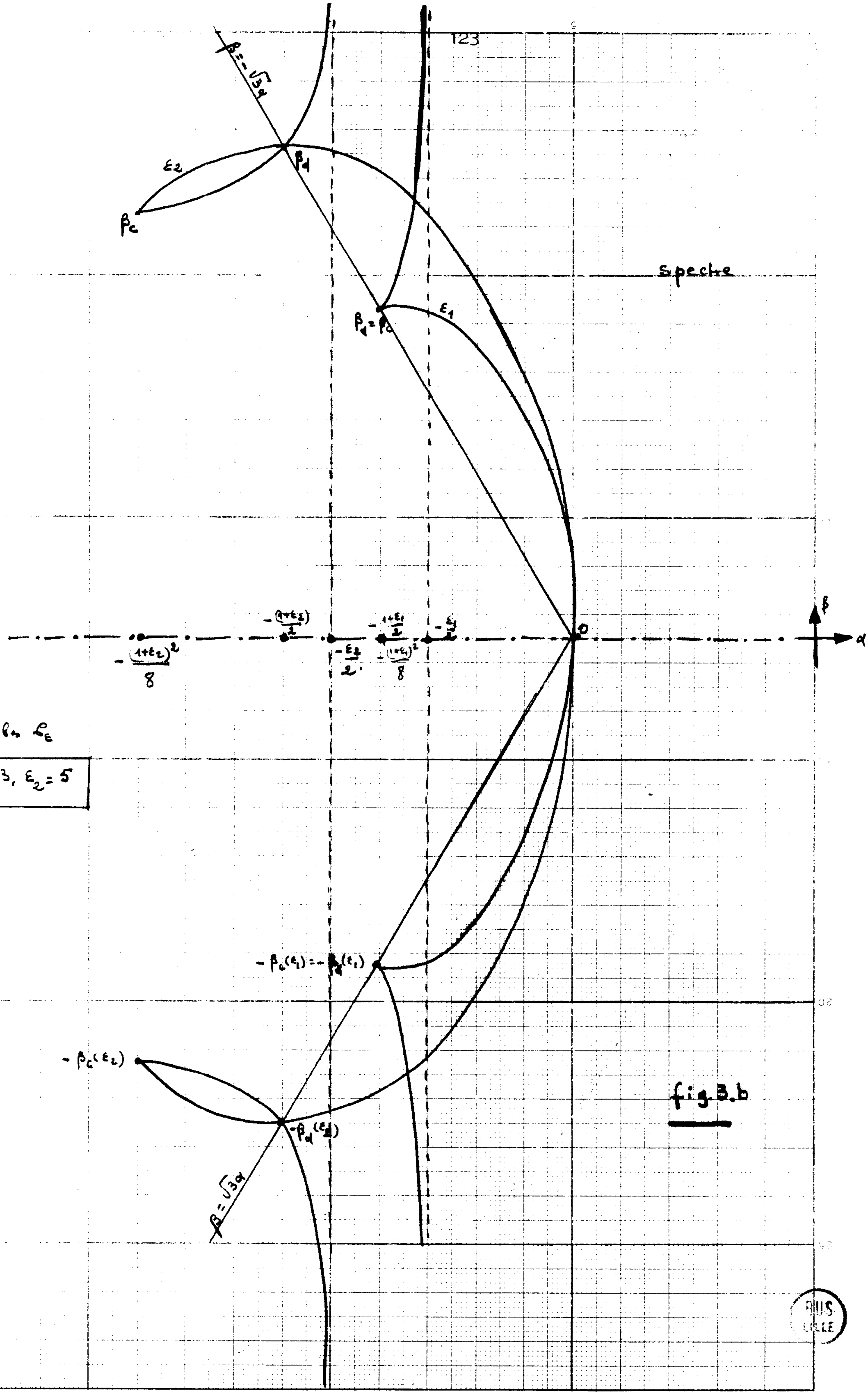


fig 1.a. Découpage du plan (p,ε). Régions (T) et $(\bar{T})$



Courbes C_ε

$\boxed{\varepsilon_1 = 3,\ \varepsilon_2 = 5}$

fig.3.b

Spectre.

Courbes $\mathcal{C}_\varepsilon$ pour $0<\varepsilon<1$:

$$\boxed{0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3<\varepsilon_4<\varepsilon_5<\varepsilon_6<1}$$

Cas de la thermo-élasticité réelle.

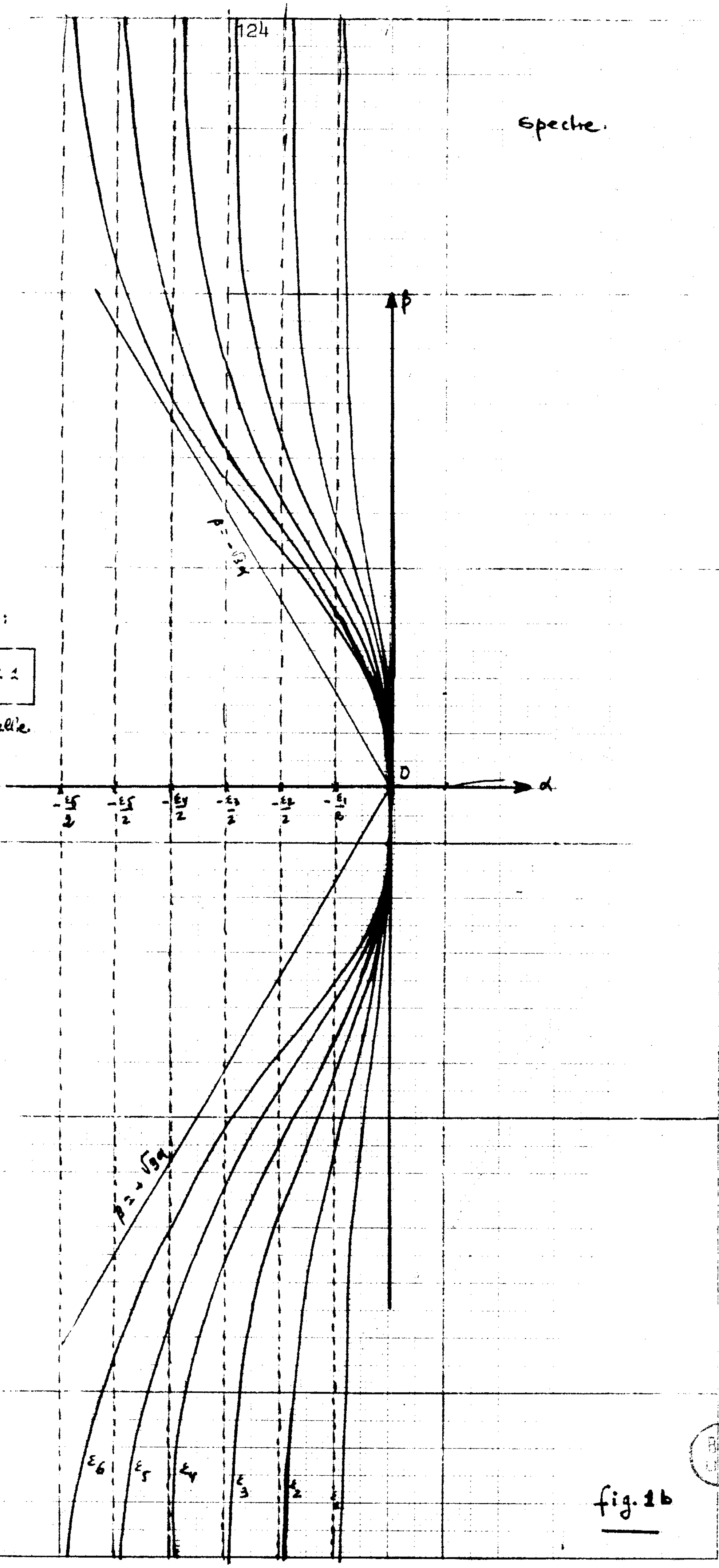


fig. 1b

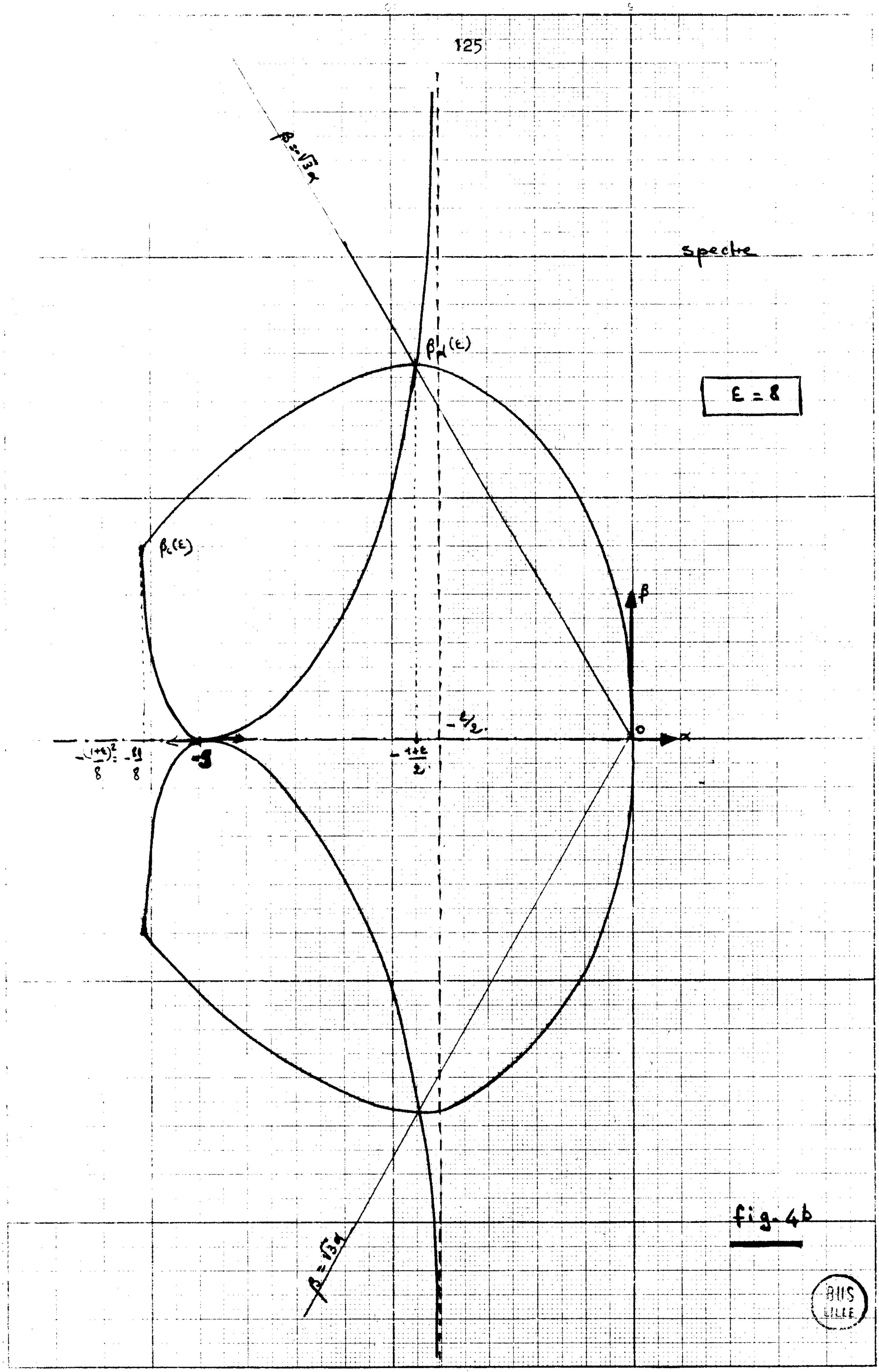


fig. 4b

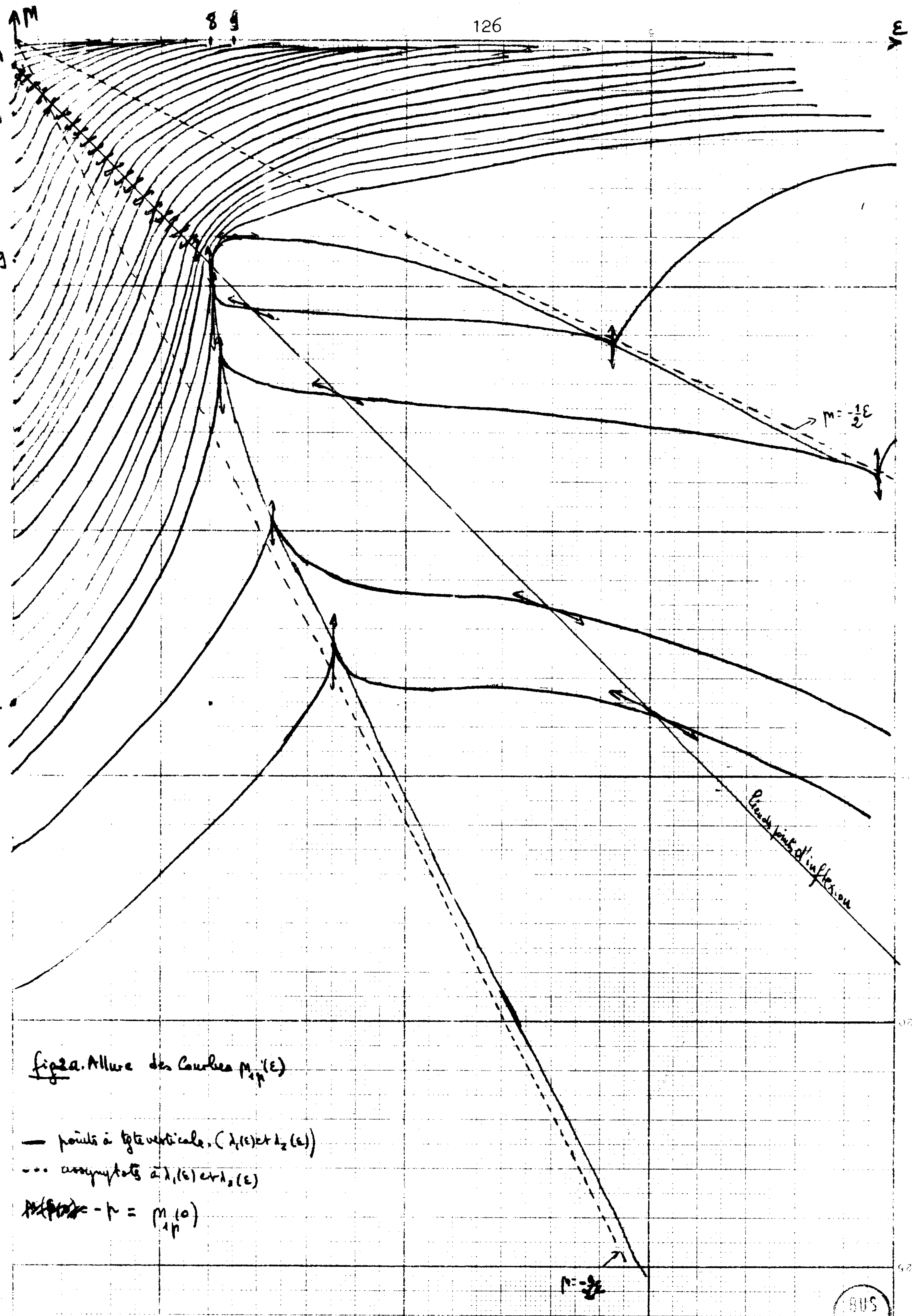


fig 2a. Allure des Courbes $\mu_{1p}(\varepsilon)$

— points à tgte verticale. ($\lambda_1(\varepsilon)$ et $\lambda_2(\varepsilon)$)

--- asymptotes à $\lambda_1(\varepsilon)$ et $\lambda_2(\varepsilon)$

$-p = \mu_{1p}(0)$

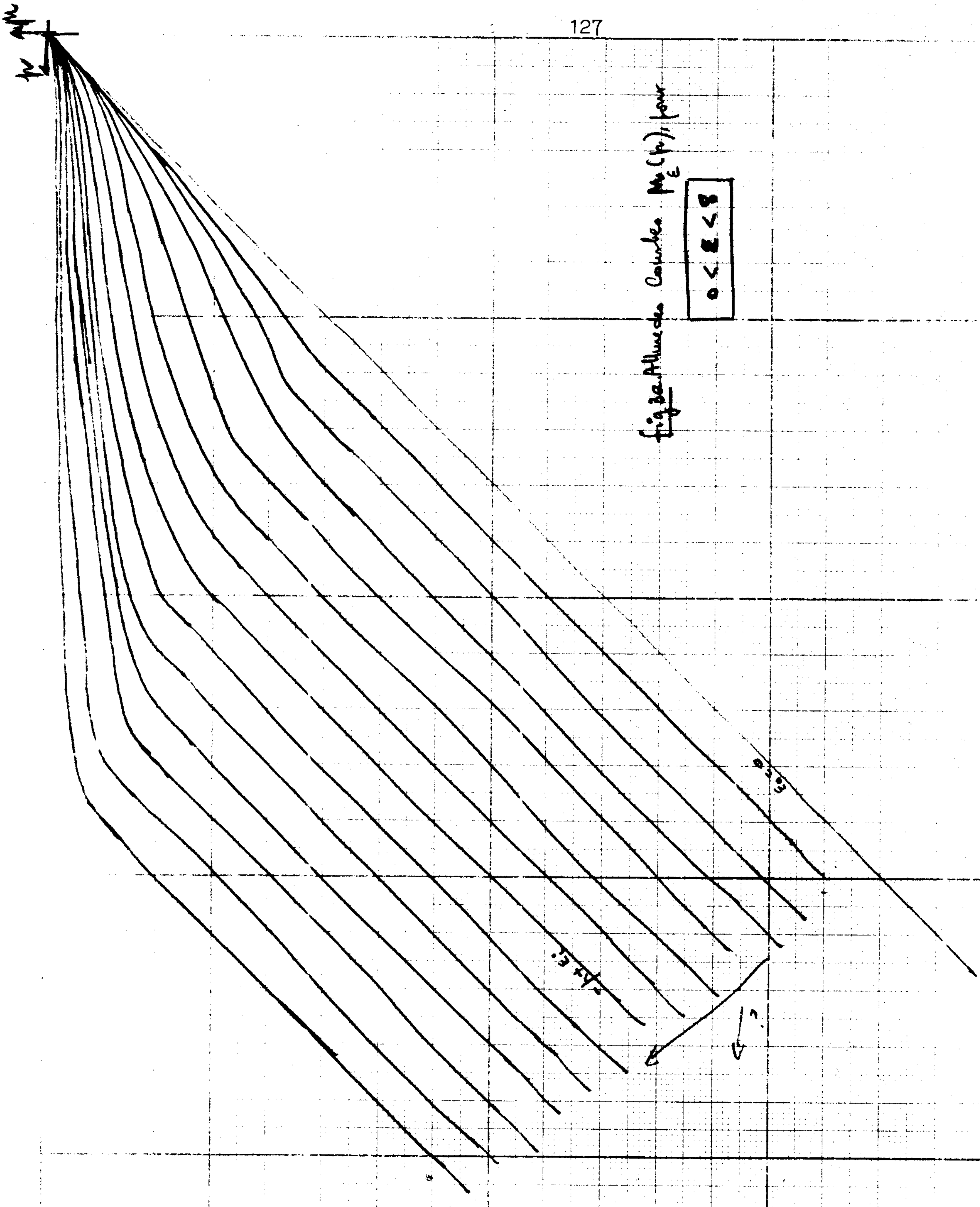
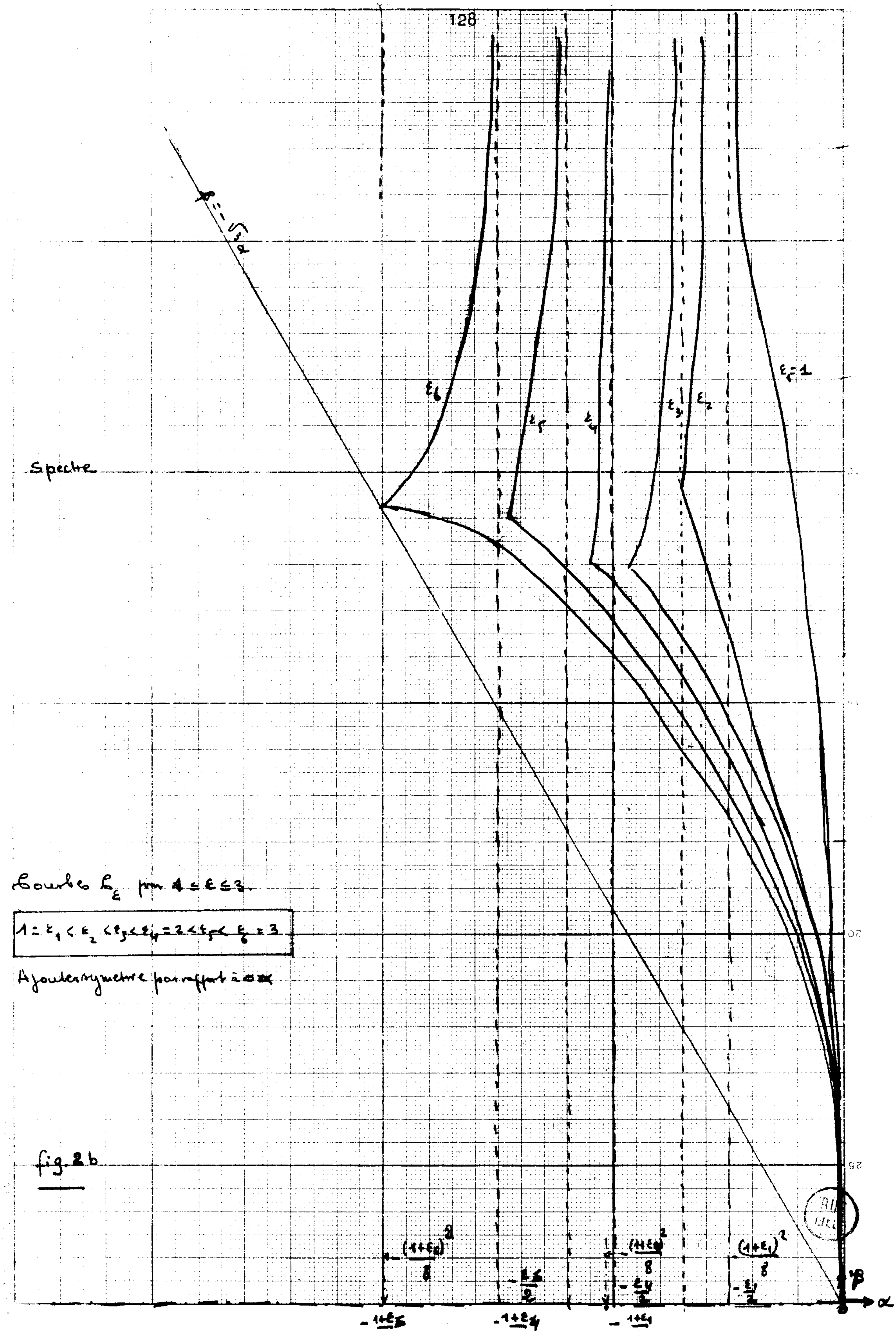


fig 3e. Allure des Courbes $M_\varepsilon(h)$, pour $0<\varepsilon<8$



Courbes L_ε pour $1 \le \varepsilon \le 3$.

$\boxed{1 = \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 = 2 < \varepsilon_5 < \varepsilon_6 = 3}$

Ajouter symetrie par rapport à $O\alpha$

fig. 2b

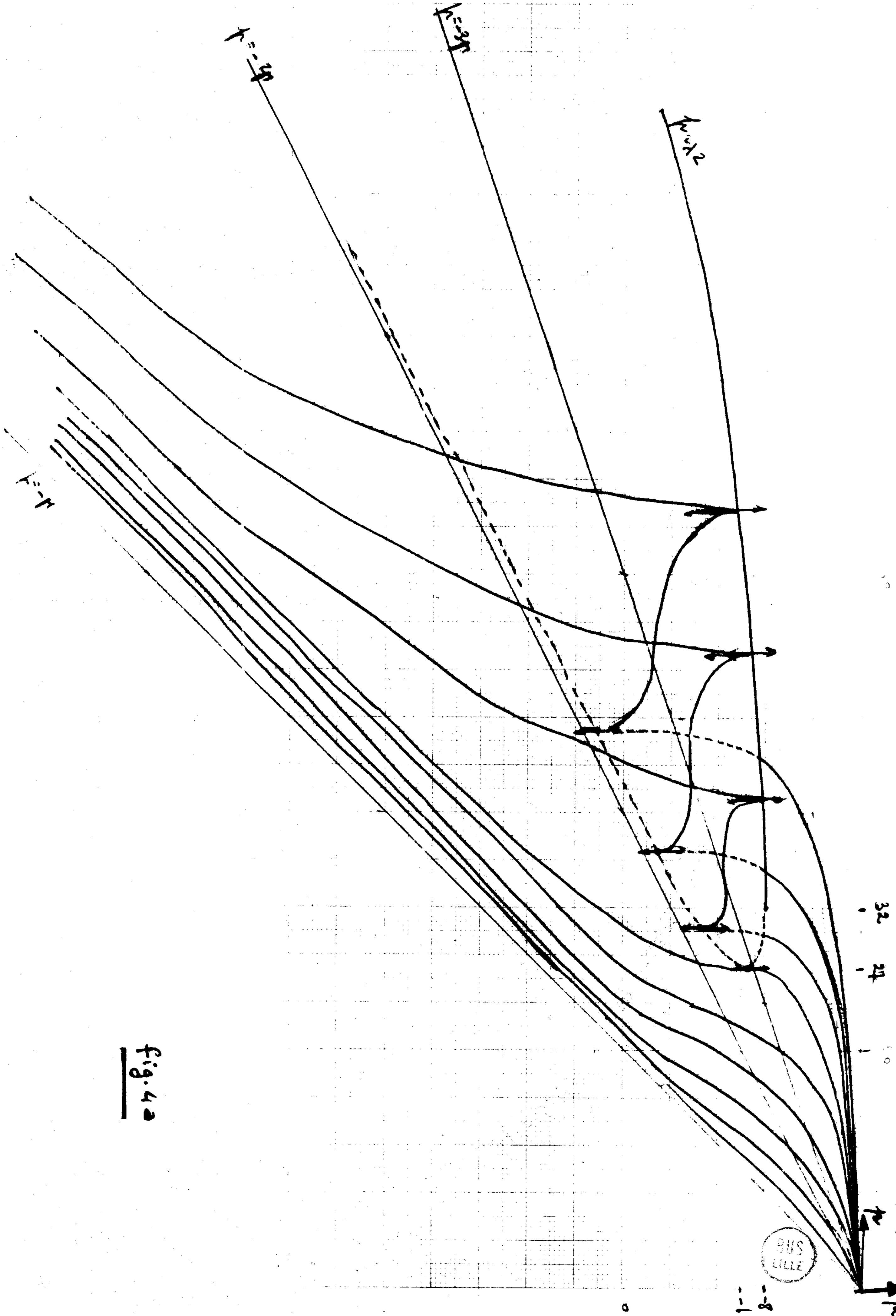


fig.4a

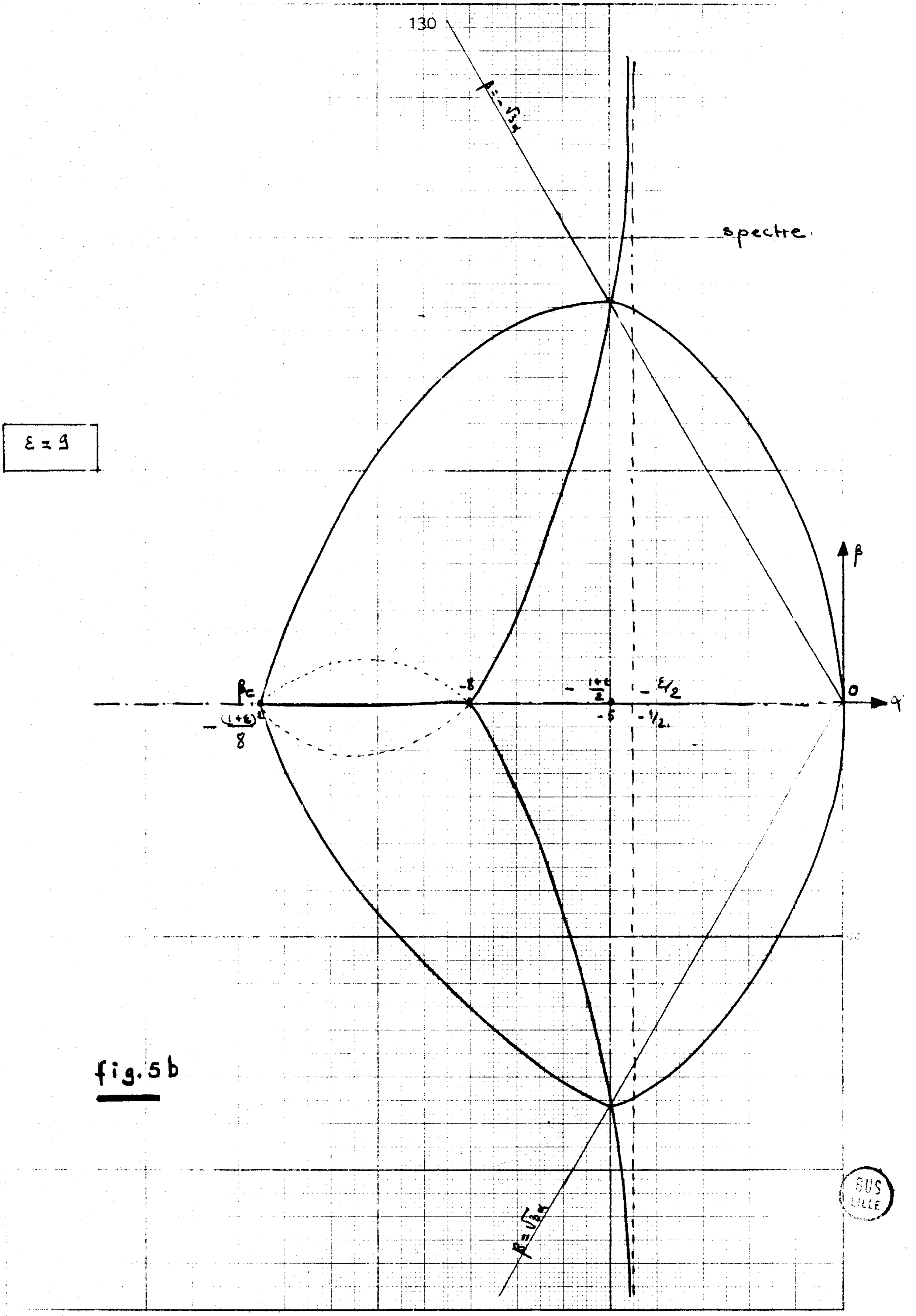


fig. 5b

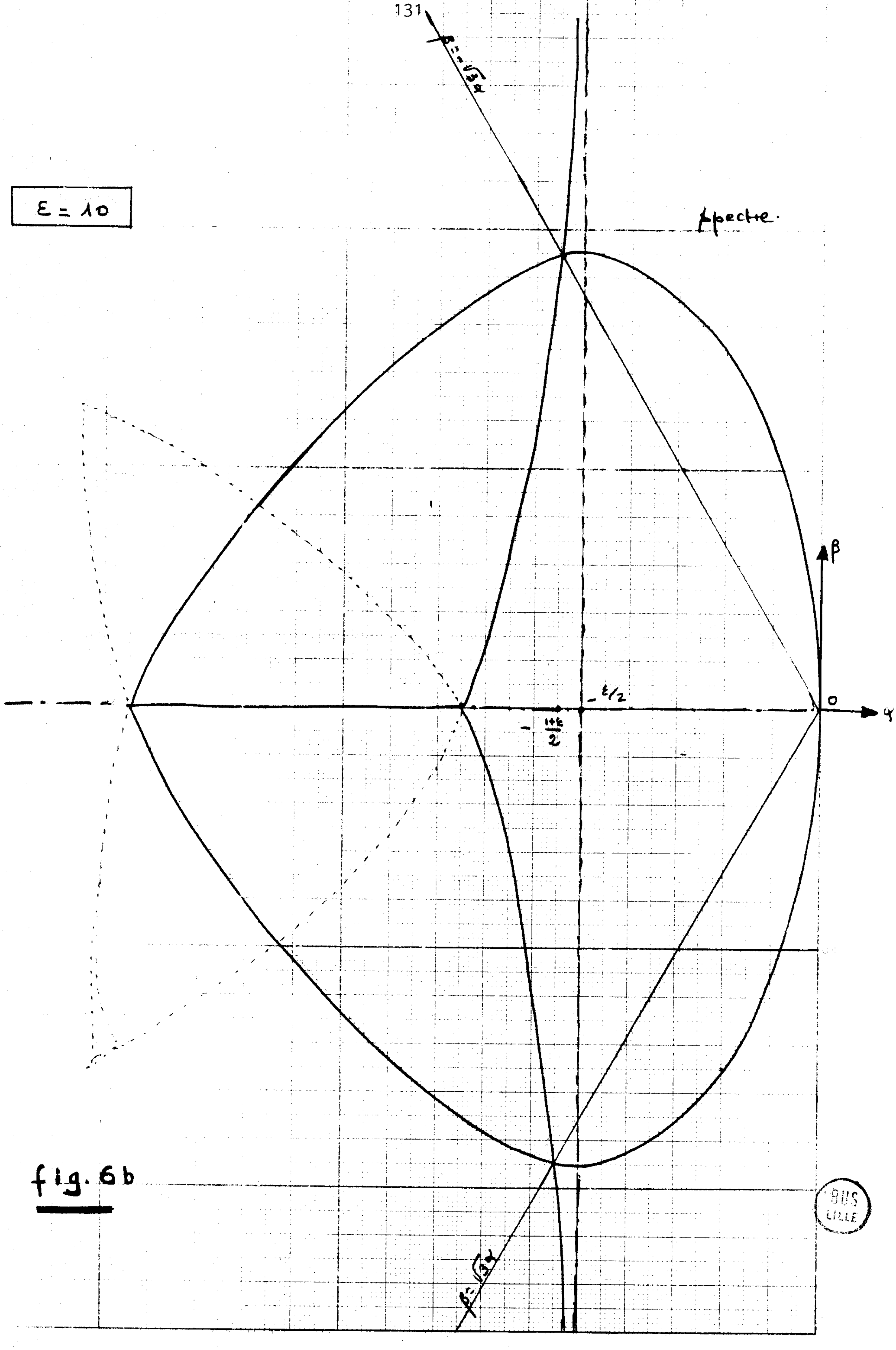


fig. 6b

CHAPITRE IV

REPRESENTATIONS DE TRANSLATION ET SPECTRALE. SOLUTIONS FONDAMENTALES. CONDITIONS DE RADIATION.

1. *SEMI-GROUPES* $T_o^1(t)$ *ET* $T_o^{1*}(t)$. *PROPRIETES ELEMENTAIRES.*

Les résultats de ce chapitre, concernant le semi-groupe $T_o^1(t)$, sont souvent une reformulation de résultats implicites ou explicites de LAX-PHILLIPS et G. SCHMIDT respectivement pour l'équation scalaire des ondes et le système d'équations de MAXWELL, sans en être cependant une simple synthèse.

Pour construire le semi-groupe $T_o^1(t)$, nous savons qu'il suffit de résoudre l'équation d'évolution :

$\{ \frac{d\vec{u}}{dt} = A_o^1 \vec{u} \} \quad \vec{u}(0) = f(x) \in D(A_o^1) \}$ dans H_o^1, puis de prolonger par continuité à tout H_o^1. Or, pour $\vec{u} \in H_o^1$, on a div $\vec{u} = 0$, donc l'opérateur A_o^1 au sens des distributions s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & I \\ \frac{\mu'}{\lambda'+2\mu'}\vec{\Delta} & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Il y a alors équivalence entre le problème de Cauchy C_o^1 et le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\mu'}{\lambda'+2\mu'} \Delta \vec{u} \\ \\ \vec{u}(x,0),\ \vec{u}_t(x,0) \text{ donnés} \end{array} \right\} \text{dans l'espace } H_o^1 .$$

1.1. *Sur une équation des ondes vectorielle dans* R^3

On introduit l'espace $W_o = BL(R^3;C^3) \times L_2(R^3;C^3)$, espace de Hilbert obtenu en complétant $[\mathcal{D}(R^3;C^3)]^2$ dans la norme :

$$||\vec{W}||_{W_o} = [1/2 \int_{R^3} (||\nabla \vec{W}_1|^2 + |\vec{W}_2|^2) \, dx]^{1/2} \quad , \vec{W} = (\vec{W}_1,\vec{W}_2)$$

On considère le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{W}_{tt} = C^2 \,\Delta\, \vec{W}(x,t) & (x,t) \in R^3 \times R^1_*, \Delta \vec{W} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ W + \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{W} \\ \vec{W}(x,0) = \vec{W}_1(x) \text{ et } \vec{W}_t(x,0) = \vec{W}_2(x), C^2 = \frac{\mu'}{\lambda'+2\mu'} = \frac{C_2^2}{C_1^2} & \end{array}\right\}$$

qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \vec{W}(x,t) \\ \vec{W}_t(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C^2\vec{\Delta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{W} \\ \vec{W}_t \end{pmatrix}$$

, d'où la définition d'un opérateur :

$$B_o = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C^2\vec{\Delta} & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } D(B_o) = \left\{ \vec{W} \in W_o : \begin{pmatrix} 0 & I \\ C^2\vec{\Delta} & 0 \end{pmatrix} \vec{W} \in W_o \right\}.$$

B_o est alors un opérateur anti-auto-adjoint ($B_o = -B_o^*$) et générateur du semi-groupe (en fait groupe) solution $V_o(t) = e^{tB_o}$ <u>d'opérateurs unitaires</u>.

Soit le sous-espace :

$$W_o^1 = \{ \vec{W} \in W_o : \vec{\nabla}.\vec{W} \triangleq (\vec{\nabla}.\vec{W}_1, \vec{\nabla}.\vec{W}_2) = (0,0) \} = BL^1(R^3;C^3) \times L_2^1(R^3;C^3)$$

$$= EL^1(R^3;C^3) \times L_2^1(R^3;C^3)$$

On a alors le théorème :

<u>*Théorème*</u> : (Schmidt, Th. 1.2.7) :

Le sous-espace W_o^1 réduit le groupe $V_o(t)$; c'est-à-dire que si on définit $V_o^1(t)$ et B_o^1 comme les restrictions de $V_o(t)$ et B_o à W_o^1, alors $V_o^1(t)$ est un groupe d'opérateurs unitaires sur W_o^1 dont B_o^1 est le générateur.

1.2. <u>Conséquences pour $T_o^1(t)$ et $T_o^{1*}(t)$</u>

Les semi-groupes $T_o^1(t)$ et $T_o^{1+}(t)$, quoiqu'unitaires, ne sont définis que pour $t \geqslant 0$. On posera alors

$$S^1(t) = \left\{\begin{array}{ll} T_o^1(t) & \text{pour } t \geqslant 0 \\ T_o^{1*}(-t), & t \leqslant 0 \end{array}\right\}$$

$$\text{d'où } S^{1*}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} T_o^{1*}(t) & t \geqslant 0 \\ T_o^{1}(-t) & t \leqslant 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow S^{1*}(t) = S^{1}(-t)$$

<u>et $S^1(t)$ est alors un groupe d'opérateurs</u> unitaires.

Les théorèmes suivants, vrais pour V_o^1 s'étendent donc sans problème à $S^1(t)$:

<u>Théorème 1</u> : Si $m \in H_o^1$ et supp $m(x)$ $\{|x-x_o| \geqslant r\}$, alors, pour $|t| < r$, on a aussi : supp $[S^1(t)\ m] \in \{|x-x_o| > r-c|t|\}$

<u>Théorème 2</u> : $m \in H_o^1$ et supp $m\ (x) \subset \{|x-x_o| \geqslant r\}$ donnent pour $|t| > r$: supp $[S^1(t)\ m\ ](x)$ $\{|x-x_o| \geqslant c\ |t| - r\}$

<u>Théorème 3</u> : Si m et $\bar{m}$ sont dans H_o^1 avec $[S^1(t)m]\ (x) \equiv 0$ pour $|x| < ct$ $(\forall t > 0)$, alors que $[S^1(t)\ \bar{m}]\ (x) \equiv 0$ pour $|x| < -ct$ $(t < 0)$, alors m et $\bar{m}$ sont orthogonaux $((m,\bar{m})_{H_o^1} = 0)$.

<u>Théorème 4</u> : Soit $m \in D(A_o^1)$. Si pour une valeur $\mu \in R^*$: $(A_o^1 - i\mu)m = 0$ pour $|x| > r$, alors m aussi s'annule pour $|x| > r$.

Les théorèmes 1 et 2 sont fort connus et dépendent étroitement du fait que la vitesse de propagation et finie (ici = c), (th. d'Huygens et Domaine de dépendance).

Pour le théorème 3, il suffit de remarquer que :

$$(m,\bar{m})_{H_o^1} = (S(t)m\ ,\ S(t)\bar{m}\ )_{H_o^1}$$

Pour le théorème 4, on a pour $|x| > R$: $(c^2\Delta + \mu^2)\vec{m}_1 = \vec{0}$, d'où par le théorème de Rellich $\vec{m}_1 = 0$ pour $|x| > R$, donc $\vec{m}_2 = i\ \mu\ \vec{m}_1 = 0$ pour $|x| > R$ aussi.

2. EXTENSION A CERTAINES DONNEES DISTRIBUTIONS.

Nous allons étendre les semi-groupes $T_o^1(t)$ et $T_o^o(t)$ à certaines classes de distributions comme données initiales. Il s'avère qu'on n'a pas les mêmes possibilités pour $T_o^1(t)$ que pour $T_o^o(t)$.

On part des relations :

(i) $(T_o(t)\ \vec{f},\ \vec{g})_{H_o} = (\vec{f},\ T_o^*(t)\ g$ valable $\forall \vec{f},\vec{g} \in H_o$

(ii) $A^*\ T^*(t)\ \vec{u} = T^*(t)\ A^*\ \vec{u}$ valable $\forall \vec{u} \in D(A^*)$

c'est-à-dire :

(i)bis $([T_o(t)\vec{f}]_1\ ,\ -\Delta^*\ \vec{g}_1)_o + \rho([T_o(t)\ \vec{f}]_2,\ \vec{g}_2)_o + \frac{\gamma}{\eta k}([T_o(t)\vec{f}]_7, g_7)_o =$

$$= (\vec{f}_1, -\Delta^*[T_o^*(t)\vec{g}]_1)_o + \rho(\vec{f}_2, [T_\theta^*(t)\ \vec{g}]_2)_o + \frac{\gamma}{\eta k}(f_7, [T_o^*(t)\vec{g}]_7)_o$$

(ii)bis: $T_o^*(t)\ \{-\vec{g}_2, -\frac{1}{\rho}(\Delta^*\ \vec{g}_1 - \gamma\vec{\nabla}\ g_7), k\eta\ \mathrm{div}\ \vec{g}_2 + k\ \Delta\ g_7\ \} =$

$$= \{-\ T_o^*(t)\vec{g}\ _2, -\frac{1}{\rho}(\Delta^*[T_o^*(t)\vec{g}]_1 - \gamma\vec{\nabla}\ [T_o^*(t)\vec{g}\ _7), k\eta\ \mathrm{div}\ T_o^*(t)\vec{g}]_2$$

$$+ k\eta\ \ T_o^*(t)\ \vec{g}]_7\ \}$$

— Faisant successivement $\vec{g} = (\vec{g}_1, \vec{0}, 0)$, $\vec{g} = (\vec{0}, \vec{g}_2, 0)$, $\vec{g} = (\vec{0}, \vec{0}, g_7)$, on obtient :

$$([T_o(t)\vec{f}]_1, -\Delta^*\ \vec{g}_1)_o = (\vec{f}_1, -\Delta^*[T_o^*(t)\{\vec{g}_1, \vec{0}, 0\}]_1)_o + \rho(\vec{f}_2, [T_o^*(t)\{\vec{g}_1, \vec{0}, 0\}]\ _2)_o$$

$$+ \frac{\gamma}{\eta k}(f_7,\ [T_o^*(t)\ \{\boldsymbol{g}, \vec{0}, 0\}]_7\ )$$

$$\rho([T_o(t)\ \vec{f}]_2, \vec{g}_2) = (\vec{f}_1, -\Delta^*\ [T_o^*(t)\{\vec{0}, \vec{g}_2, 0\}\ ]_1) + \rho(\vec{f}_2, [T_o^*\ (t)\{\vec{0}, \vec{g}_2, 0\}]_2$$

$$+\ \frac{\gamma}{\eta k}\ (f_7,\ [T_o^*\ (t)\ \{\vec{0}, \vec{g}_2, 0\}]_7)$$

$$\frac{\gamma}{\eta k}([T_o(t)\ \vec{f}]_7, g_7) = (\vec{f}_1, -\Delta^*[T_o^*(t)\{\vec{0}, \vec{0}, g_7\}]_7) + \rho(\vec{f}_2, [T_o^*(t)\{\vec{0}, \vec{0}, g_7\}]_2)$$

$$+\ \frac{\gamma}{\eta k}(f_7,\ [T_o^*(t)\ \{\vec{0}, \vec{0},\ g_7\}]_7).$$

$\longrightarrow$ Soit alors $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)$. L'équation $\Delta^* \vec{u} = \vec{\varphi}$ admet une solution unique $\vec{u}$ telle que $\vec{g} = (\vec{u}_1, \vec{0}, \vec{0}) \in D(A_o)$. En effet $\Delta^* \vec{u} = \vec{0}$ entraîne $(\Delta^* \vec{u},\vec{u})_o = 0$ $\Rightarrow ||\vec{u}||_{EL} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ dans $EL(R^3;C^3)$, et $\vec{u} = \gamma * \vec{\psi}$ où γ est une matrice 3×3, solution fondamentale tempérée de l'opérateur Δ^* est solution de $\Delta^* \vec{u} = \vec{\psi}$...

Donc :

$\forall \vec{\psi} \in C_o(R^3;C^3)$, on peut l'écrire sous la forme $\vec{\varphi} = - \Delta^* \vec{u}$ avec $(\vec{u},\vec{0},0) \in D(A_o)$.

De plus, on a alors : $\vec{\varphi} = + \mu \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{rot}\, \vec{u} - (\lambda + 2\mu)\vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u}$ ... soit $\vec{u} = \vec{u}_o + \vec{u}_1$ la décomposition canonique de $\vec{u}$ ($\operatorname{div} \vec{u}_1 = 0$, $\overrightarrow{rot}\, \vec{u}_o = \vec{0}$). On peut donc poser : $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_o$ où $\vec{\varphi}_1 = + \mu' \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{rot}\, \vec{u}_1$ et $\vec{\varphi}_o = -(\lambda+2\mu)\vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u}_o$, qui nous donne la décomposition de $\vec{\varphi}$ suivant $EL_1(R^3;C^3)$ et $EL_o^2(R^3;C^3)$ ($\vec{\varphi} \in EL(R^3;C^3)$).

Donc : $\forall \vec{\varphi}_1 \in C_o^\infty(R^3;C^3) \cap \{\operatorname{div} \vec{\varphi}_1 = 0\}$, on peut l'écrire $\vec{\varphi}_1 = +\mu \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{rot}\, \vec{u}_1$ avec $(\vec{u}_1,\vec{0},0) \in D(A_o^1)$ et $\forall \vec{\varphi}_o \in C_o^\infty(R^3;C^3) \cap \{\overrightarrow{rot}\, \vec{\varphi}_o = \vec{0}\}$, on peut l'écrire $\vec{\varphi}_o = -(\lambda+2\mu)\vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u}_o$ avec $(\vec{u}_o,\vec{0},0) \in D(A_o^o)$.

$\longrightarrow$ $\forall \vec{\varphi}, \vec{\psi}, \eta$, C^∞ à supports compacts, on peut écrire :

$$([T_o(t)\, \vec{f}]_1,\vec{\varphi})_o = (\vec{f}_1,-\Delta^*[T_o^*(t)\, \{\vec{u},\vec{0},0\}]_1)_o + \rho\, (\vec{f}_2,\ [T_o^*(t)\, \{\vec{u},\vec{0},0,\}]_2)_o$$
$$+ \frac{\gamma}{\eta k}(f_7,\ [T_o^*(t)\, \{\vec{u},\vec{0},0\}]_7)_o \ ,\quad \vec{u} = -\Delta^{*-1}\vec{\varphi}$$

$$\rho\,([T_o(t)\, \vec{f}]_2,\vec{\psi})_o = (\vec{f}_1,-\Delta^*[T_o^*(t)\, \{\vec{0},\vec{\psi},0\}]_1)_o + \rho(\vec{f}_2,[T_o^*(t)\, \{\vec{0},\vec{\psi},0\}]_2)_o$$
$$+ \frac{\gamma}{\eta k}(f_7,\ [T_o^*(t)\ \vec{0},\vec{\psi},0\}]_7)_o$$

$$\frac{\gamma}{\eta k}([T_o(t)\, \vec{f}]_7,\eta)_o = (\vec{f}_1,-\Delta^*\, T_o^*(t)\{\vec{0},\vec{0},\eta\}]_1)_o + \rho(\vec{f}_2,\ T_o^*(t)\{\vec{0},\vec{0},\eta\}]_2) +$$
$$+ \frac{\gamma}{\eta k}(f_7,\ [T_o^*(t)\, \{\vec{0},\vec{0},\eta\}]_7)_o\ .$$

Pour étendre $T_o(t)$ à des données distributions, il suffit de pouvoir donner un sens aux seconds membres, d'une façon continue.

2.1. *Extension de* $S^1(t)$ *aux distributions* $\vec{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, 0)$, $\mathrm{div}\,\vec{f}_1 = \mathrm{div}\,\vec{f}_2 = 0$.

$\vec{u} = \vec{u}_o + \vec{u}_1$ entraîne :

$$([T_o(t)\vec{f}]_1, \vec{\psi})_o = (\vec{f}_1, -\Delta^*[T_o^{1*}(t)\{\vec{u}_1, \vec{0}, 0\}]_1)_o + \rho(\vec{f}_2, [T_o^{1*}(t)\ \{\vec{u}_1, \vec{0}, 0\}]_2)_o$$

$$+ (\vec{f}_1, -\Delta^*[T_o^{o*}(t)\{\vec{u}_o, \vec{0}, 0\}]_1)_o + \rho(\vec{f}_2, [T_o^{o*}(t)\{\vec{u}_o, \vec{0}, 0\}]_2) + \frac{\gamma}{\eta k}(f_7, [T_o^{o*}(t)\{\vec{u}_o, \vec{0}, 0\}]_7)_o$$

$$= (\vec{f}_1, \mu\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ [T_o^{1*}(t)\ \{\vec{u}_1, \vec{0}, 0\}]_1)_o + \rho\ (\vec{f}_2, [T_o^{1*}(t)\ \{\vec{u}_1, \vec{0}, 0\}]_2)_o$$

$$+ (\vec{f}_1, -(\lambda+2\mu)\ \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ [\ T_o^{o*}(t)\ \{\vec{u}_o, \vec{0}, 0\}]_1)_o + \rho\ (\ ---\ ) + \frac{\gamma}{\eta k}(f_7, --)$$

⟶ Soit alors $\vec{f} \in H_o^1$; on a :

$$([T_o^1(t)\ \vec{f}]_1, \vec{\psi})_o = (\vec{f}_1, \mu\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ [T_o^{1*}(t)\ \{\vec{u}_1, \vec{0}, 0\}]_1)_o + \rho(\vec{f}_2, [T^{1*}(t)\{\vec{u}_1, \vec{0}, 0\ ]_2)_o$$

La relation (ii)bis donne alors :

$$T_o^{1*}(t)\ \{\vec{0}, \vec{\psi}_1, 0\} = \{-\ \rho[T_o^{1*}(t)\{\vec{u}_1, \vec{0}, 0\}]_2,\ \mu\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ [T_o^{1*}(t)\ \{\vec{u}_1, \vec{0}, 0\}]_1, 0\}$$, soit :

$$([T_o^1(t)\ \vec{f}]_1, \vec{\psi}) = (\vec{f}_1, [T_o^{1*}(t)\ \{\vec{0}, \vec{\psi}_1, 0\}]_2)_o + (\vec{f}_2, [T_o^{1*}(t)\ \{\vec{0}, -\vec{\psi}_1, 0\}]_1)_o =$$

$$([T_o^1(t)\ \vec{f}]_1, \vec{\psi}_1)_o \quad .$$

⟶ Comme $\vec{h}$, C^∞ et à support compact n'implique pas que $T_o^{1*}(t)\ h^1$ soit, C^∞ et à support compact, on ne peut dès lors étendre le second membre (donc $[T_o^1(t).]_1$) à des données distributions, sans condition sur leur support On ne peut donc étendre "directement" $T_o^1(t)$ à des distributions quelconques.

⟶ Nous allons opérer indirectement, en remarquant que $S^1(t)$ coïncide avec $V_o^1(t)$, c'est-à-dire avec $V_o(t)$ pour des données à divergence nulle dans H_o . Or $V_o(t)$ s'étend facilement à des données distributions quelconque.

Pour $\vec{f} \in \mathcal{D}'(R^3;C^7)$, $\vec{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, 0)$ telle que div $\vec{f} = 0$, on définira don $S^1(t)\ \vec{f}$ par :

$$\boxed{\begin{array}{l}
[S^1(t)\,\vec f]_1(\vec\psi) = [V_o(t)\vec f]_1(\vec\psi) = \vec f_1([V_o(-t)\{\vec 0,\vec\psi\}]_2)-\vec f_2([V_o(-t)\{\vec 0,\vec\psi\}]_1) \\[2ex]
[S^1(t)\vec f]_2(\vec\psi) = [V_o(t)\,\vec f]_2\,(\vec\psi) = -\,\vec f_1(\,[V_o(-t)\,\{\vec\psi,\vec 0\}\,]_2) + \vec f_2([V_o(-t)\{\,\vec\psi.\vec 0\}\,]_1) \\[2ex]
[S^1(t)\,\vec f]_7(\psi) = 0
\end{array}}$$

Il est trivial que ces formules définissent une extension de $S^1(t)$ précédemment défini dans H^1_o.

2.2. *Extension de $T^o_o(t)$ et $T^{o*}_o(t)$ à certaines distributions à support compact.*

Pour $S^1(t)$ l'extension diverse à des données distributions de support quelconque a été rendue impossible par le fait que $S^1(t)\,\vec\psi^1$ n'était pas à support compact et C^∞, quand $\vec\psi$ l'était. Ceci est plus encore le cas pour $T^o_o(t)$ et $T^{o*}_o(t)$ parce qu'il y intervient un phénomène de diffusion. $T^{o*}_o(t)\,\vec\psi$ est certe encore C^∞ pour $\vec\psi \in \mathcal{D}(R^3;C^7)$, mais n'est **plus** à support compact. On pourra donc étendre $T^o_o(t)$ et T^{o*}_o "naturellement" à des données distributions à support compact :

$\longrightarrow$ Soit $\vec f \in H^o_o$, on obtient alors facilement :

$$\left\{\begin{array}{l}
([T^o_o(t)\,\vec f]_1,\vec\psi)_o = (\vec f_1,-(\lambda+2\mu)\vec\nabla \mathrm{div}\,[T^{o*}_o(t)\{\vec u_o,\vec 0,0\}]_2)_o + \rho(f_2,[T^{o*}_o(t)\{\vec u_o,\vec 0,0\}]_2)_o \\[2ex]
+\,\dfrac{\gamma}{\eta k}\,(f_7,[T^{o*}_o(t)\;\{\vec u_o,\vec 0,0\}]_7) \\[2ex]
([T^{o*}_o(t)\;\vec f]_2,\vec\psi)_o = \dfrac{1}{\rho}\,(\vec f_1,-(\lambda+2\mu)\vec\nabla\;\mathrm{div}\;[T^{o*}_o(t)\{\vec\psi_o,0,0\}]_1)_o\;+ \\[2ex]
+\,(\vec f_2,[T^{o*}_o(t)\;\{\vec\psi_o,\vec 0,0\}]_2)_o + \dfrac{\gamma}{\rho\eta k}\,(f_7,[T^{o*}_o(t)\;[\vec\psi_o,\vec 0,0\}]_7) \\[2ex]
([T^o_o(t)\vec f]_7,\theta)_o = \dfrac{\eta k}{\gamma}\,(\vec f_1,-(\lambda+2\mu)\vec\nabla\;\mathrm{div}[T^{o*}_o(t)\{\vec 0,\vec 0,\theta\}]_1)_o + \rho\dfrac{\eta k}{\gamma}\,(\vec f_2,[T^{o*}_o(t)\{\vec 0,\vec 0,\theta\}_2)_o \\[2ex]
+\,(f_7,\;[T^{o*}_o(t)\{\vec 0,\vec 0,\theta\}]_7)_o
\end{array}\right.$$

où $(\vec{\vartheta},\vec{\psi},\theta) \in \mathcal{D}(R^3;C^3) \times \mathcal{D}(R^3;C^3) \times \mathcal{D}(R^3;C^3)$

et $\vec{u} = \vec{u}_o + \vec{u}_1$ est la décomposition canonique de $\vec{u} \in D(A_o)$ et $\vec{u} = -\Delta^* \vec{\vartheta}$.

$\vec{\psi} = \vec{\psi}_o + \vec{\psi}_1$ " " " " de $\vec{\psi}$ en $\vec{\psi}_o \in L_2^o$ et $\vec{\psi}_1 \in L_2^1$.

⟶ Il est clair que les formules valables pour $f \in H_o^o$ s'étendent telles quelles à des distributions $\vec{f} = (\vec{f}_1,\vec{f}_2,f_7)$ à support compact et telles que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f}_1 = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f}_2 = \vec{0}$. Et on remarquera encore que $([T^o(t)f]_1,\vec{\vartheta})_o = ([T_o^o(t)f]_1,\vec{\vartheta}_o)_o$ et $([T_o^o(t)\ \vec{f}]_2,\vec{\psi})_o = ([\ T_o^o(t)\ \vec{f}]_2,\vec{\psi}_o)_o$.

2.3. *Définition*

Une distribution h est dite "éventuellement -sortante" ("initialement entrante") s'il existe un $r > 0$ t.q. $S^1(t)\ h$ s'annule dans le cône $|x| < t-r$ pour $t > r$ ($|x| < t-r$ pour $t < -r$). Implicitement donc $\text{div}\ \vec{h}_1 = \text{div}\ \vec{h}_2 = h_7 = 0$.

Il est équivalent de dire qu'$\exists\ r > 0$ t.q. $T_o^1(t)\ h = 0$ pour $|x| < t-r$, $t > r$ (resp. $T_o^{1*}(t)\ h = 0$ pour $|x| < -t-r$ pour $t < -r$).

Nous avons en plus la proposition.

Proposition

Soit $\vec{f} = (\vec{f}_1,\vec{f}_2,0)$ une distribution t.q. $\text{div}\ \vec{f}_1 = \text{div}\ \vec{f}_2 = 0$; on a alors $\forall t$: $\text{div}\ [S^1(t)\vec{f}]_1 = \text{div}\ [S^1(t)\ \vec{f}]_2 = [S^1(t)f]_7 = 0$.

Preuve

Soit b_o l'analogue pour l'équation des ondes scalaires de l'opérateur B_o

$b_o \equiv \{$ $b_o\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \vec{u}$; $D(b_o) = \{\vec{u} = (u_1,u_2) \in \omega_o$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \vec{u} \in \omega_o \}$

avec $\omega_o = BL(R^3;C) \times L^2(R^3;C)$... b_o est alors générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires $v_o(t)$ dans ω_o... soit $\psi \in \mathcal{D}(R^3;C) \Rightarrow (0,\psi) \in D(b_o^k)\ \forall\ k \geq 1$; on a alors :

$\frac{d}{dt}\ v_o(t)\ \{0,\psi\} = b_o\ v_o(t)\ \{0,\psi\}\quad ,\ v_o(t)\ \{0,\psi\}|_{t=0} = \{0,\psi\}$ comme limite forte dans ω_o. De plus $\{0,\psi\} \in D(b_o) \Rightarrow v_o(t)\ \{0,\psi\} \in D(b_o)$, c'est-à-dire en particulier $[v_o(t)\ \{0,\psi\}]_1$ et $[v_o(t)\ \{0,\psi\}]_2$ sont dans $BL(R^3;C)$. Comme $v_o(t)$ est continu de $D(b_o)$ dans $D(b_o)$ considéré comme espace de Hilbert muni de la norme du graphe, on a :

$$\vec{\nabla}\ v_o(t)\ \{0,\psi\} = (\vec{\nabla}[v_o(t)\ \{0,\psi\}]_1,\ \vec{\nabla}\ [v_o(t)\ \{0,\psi\}]_2)\ \xrightarrow[t\to 0]{L_2}\ (0,\vec{\nabla}\psi)\ .$$

D'autre part $\{0,\psi\} \in [C_o^\infty(R^3;C)]^2$ entraîne que $v_o(t)\ \{0,\psi\} \in [C_o^\infty(R^3;C)]^2$, et C^∞ en x et t. On déduit alors facilement que :

$$\frac{d}{dt}\ \vec{\nabla}\ v_o(t)\ \{0,\psi\} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c^2\,\vec{\nabla}\,\mathrm{div} & 0 \end{pmatrix} \vec{\nabla}\ v_o(t)\{0,\psi\} = B_o^o\ \vec{\nabla}\ v_i(t)\ \{0,\psi\}\ .$$

$$\vec{\nabla}\ v_o(t)\ \{0,\psi\}\Big|_{t=0} = (\vec{0},\vec{\nabla}\psi),\ \text{comme limite forte}$$

dans $BL(R^3;C^3) \times L^2(R^3;C^3)$.

Or le problème de Cauchy $\begin{cases} \frac{d}{dt}\ \vec{u}\ (x,t) = B_o^o\ \vec{u}(x,t) \\ \vec{u}(x,0) = (\vec{0},\vec{\nabla}\psi) \in D(B_o^o). \end{cases}$

possède une solution unique donnée par $\vec{u}(x,t) = V_o^o(t)\ \{\vec{0},\vec{\nabla}\psi\} = V_o(t)\{\vec{0},\vec{\nabla}\psi\}$

On obtient donc :

$$\forall\ \psi \in \mathcal{D}\ (R^3;C)\ \text{on a}\quad \boxed{V_o(t)\ \{\vec{0},\vec{\nabla}\psi\} = \vec{\nabla}\ v_o(t)\{0,\psi\}}\ .$$

on a donc :

$$\begin{aligned} <\mathrm{div}\ [S^1(t)\ \vec{f}]_1,\ \psi> &= <[S^1(t)\ f\ _1,\ \vec{\nabla}\ \psi>\ \forall\ \psi \in \mathcal{D}\ (R^3;C). \\ &= \vec{f}_1\ ([V_o(-t)\{0,\vec{\nabla}\psi\}]_2) - \vec{f}_2([V_o(-t)\{\vec{0},\vec{\nabla}\psi\}]_1) \\ &= \vec{f}_1(\vec{\nabla}\ [v_o(t)\{0,\psi\}]_2) - \vec{f}_2(\ [v_o(-t)\{0,\psi\}]) \\ &= 0\ \text{puisque}\ \mathrm{div}\ \vec{f}_1 = \mathrm{div}\ \vec{f}_2 = 0\ .\ \underline{\text{cqfd}}. \end{aligned}$$

2.4. *Extension de* $T_o(t)$ *à des données distributions* $\in \mathcal{D}'_{L_2}(R^3;C^7)$.

Nous allons donner ici une extension de tout $T_o(t)$ aux distributions appartenant à : $\mathcal{D}'_{L_2}(R^3;C^3) \times \mathcal{D}'_{L_2}(R^3;C^3) \times \mathcal{D}'_{L_2}(R^3;C)$ qui est identique à $[H^{-\infty}(R^3;C^3)]^2 \times H^{-\infty}(R^3;C)$, dual de l'espace de Sobolev $[H^{\infty}(R^3;C^3)]^2 \times H^{\infty}(R3;C)$, lui même identique à $[\mathcal{D}_{L_2}(R3;C3)]^2 \times \mathcal{D}_{L_2}(R^3;C) \simeq \mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^7)$.

Le théorème de régularité (Th. Chap. I) affirme que $\forall \vec{f} \in \mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^7)$, $T_o(t)\ \vec{f}$ appartient aussi à $\mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^7)$. Il en est de même aussi trivialement pour $T_o^*(t)\ \vec{f}$.

On a donc :

$$(T_o(t)\ \vec{f}, \vec{\psi})_{H_o} = (\vec{f}, T_o^*(t)\ \vec{\psi})_{H_o} \quad \text{pour } \vec{f} = (\vec{f}_1,\vec{f}_2,f_7) \in \mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^7)$$

$$\vec{\psi} = (\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_2,\psi_7) \in \mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^7)$$

—> D'autre part, l'équation

$\Delta^*\ \vec{u} = \vec{\psi}$ où $\vec{\psi} \in H^{\infty}(R^3;C^3)$ admet une solution unique, qui appartient (th. de Friedrichs) à $H^{\infty}(R^3;C^3)$ aussi... De plus, d'après le théorème de décomposition de $\mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^3)$, on aura $\vec{u} = \vec{u}_o^* + \vec{u}_1^*$ avec $\operatorname{div} \vec{u}_1 = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_o = \vec{0}$.

—> On conclut alors comme auparavant que :

$$\forall\ (\vec{\psi},\vec{\psi},\eta) \in [\mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^3)]^2 \times \mathcal{D}_{L_2}(R^3;C)$$

$$([T_o(t)\ \vec{f}]_1,\psi)_o = (\vec{f}_1,-\Delta^*[T_o^*(t)\{\vec{u},\vec{0},0\}]_1) + \rho\ (\vec{f}_2,[T_o^*(t)\{\vec{u},\vec{0},0]_2\})_o$$

$$+ \frac{\gamma}{\eta k}\ (f_7,\ [T_o^*(t)\{\vec{u},\vec{0},0\}]_7)_o$$

et les deux formules analogues pour $[T_o(t)\ \vec{f}]_2$ et $[T_o(t)\ \vec{f}]_7$.

<u>Ceci définit entièrement l'extension de $T_o(t)$ aux distributions $\vec{f} \in D'_{L_2}(R^3;C^7)$</u>, puisque les seconds membres continuent à avoir un sens, d'une façon continue en $\vec{\psi}$, $\vec{\psi}$, η .

$\longrightarrow$ En plus, les décompositions respectives de $\mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^3)$ et $\mathcal{D}'_{L_2}(R^3;C^3)$ en éléments à divergence nulle et à rotationnel nul, nous donne, après des calculs tout à fait analogues à ceux des paragraphes 2.1 et 2.2 les résultats suivants :

* $\vec{f} = (\vec{f}_1,\vec{f}_2,0)$ avec $\vec{f}_1,\vec{f}_2 \in [\mathcal{D}'^{\,1}_{2}(R^3;C^3)]^2$, et $\forall\ \vec{\vartheta} \in [\mathcal{D}^1_{L_2}(R^3;C^3)]$,

$\psi \in \mathcal{D}^{1}_{L_2}(R^3;C)$.

$$< [S^1(t)\ \vec{f}]_1,\ \vec{\vartheta}> = <\vec{f}_1, [S^1(-t)\ \{\vec{0},\vec{\vartheta}_1,0\}]_2> - <\vec{f}_2,[S^1(-t)\{\vec{0},\vec{\vartheta}_1,0\}]_1>$$

$$< [S^1(t)\ \vec{f}]_2,\ \vec{\vartheta}> = -<\vec{f}_1,\ [S^1(-t)\{\vec{\vartheta}_1,\vec{0},0\}]_2> + < \vec{f}_2,\ [S^1(-t)\{\vec{\vartheta}_1,\ \vec{0},0\}]_1 >$$

$$< [S^1(t)\ \vec{f}]_7,\ \psi> = 0\ .$$

$<.,.>$ étant la dualité entre $\mathcal{D}_{L_2}$ et $\mathcal{D}'_{L_2}$

* $\vec{f} = (\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_7)$ avec $\vec{f} \in [\mathcal{D}'^{\,o}_{L_2}(R^3;C^3)]^2 \times \mathcal{D}'_{L_2}(R^3;C)$

On obtient alors les mêmes formules qu'au paragraphe 2.2, avec $\vec{\vartheta}$ et $\vec{\psi}$ appartenant à $\mathcal{D}^o_{L_2}(R^3;C^3)$ et $\theta \in \mathcal{D}_{L_2}(R^3;C)$, $\vec{u}_o$ étant comme ci-haut, $\vec{\psi}_o$ étant la partie de $\vec{\psi}$ dans $\mathcal{D}^o_{L_2}(R^3;C^3)$, le crochet de dualité étant entre $\mathcal{D}'_{L^2}$ et $\mathcal{D}_{L^2}$.

* La question de l'optimalité de ces extensions requiert une étude plus poussée. Pour $T_o(t)$ seul, on doit s'attendre à une réponse négative. Par contre si on recherche une extension de $T_o(t)$ qui induit des extensions pour $T^1_o(t)$ et $T^o_o(t)$ respectivement, il est très probable que l'extension de 2.4 soit optimale.

3. <u>REPRESENTATION DE TRANSLATION DE L'EQUATION DES ONDES VECTORIELLES.</u>

Nous partons du problème de Cauchy pour l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_t^2\ \vec{u}(x,t) - c^2\Delta\ \vec{u}(x,t) = 0 \\ (\vec{u}(x,0),\ \vec{u}_t(x,0)) = \vec{f}(x) = (\vec{f}_1,\vec{f}_2) \end{cases}$$

dans l'espace $[S(R^3;C^3)]^2$ noté S. On sait alors que $f(x) \in S$ entraîne $(\vec{u},\vec{u}_t)(x,t)$ appartient à S aussi.

Par transformation de Radon, le problème devient :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u}(s,\omega;t) - c^2 \partial_s^2 \tilde{u}(s,\omega;t) = 0 . \\ \tilde{f} = (\tilde{u}(s,\omega;0), \tilde{u}_t(s,\omega;0) = (\tilde{f}_1(s,\omega), \tilde{f}_2(s,\omega)). \end{cases}$$

dans l'espace $S(R \times S_2)^2$ où S_2 est la sphère unité de R^3.

L'équation des ondes **peut se factoriser** de deux façons :

(σ_1) : $\quad (\partial_t + c\partial_s)(\partial_t - c\,\partial_s)\,\tilde{u}\,(s,\omega;t) = 0$

(σ_2) : $\quad (\partial_t - c\,\partial_s)(\partial_t + c\partial_s)\,\tilde{u}\,(s,\omega;t) = 0$

c'est-à-dire $(\sigma_1):(\partial_t + c\,\partial_s)\,\vec{m}_1(s,\omega;t) = 0$

$(\sigma_2):(\partial_t - c\partial_s)\,\vec{m}_2(s,\omega;t) = 0$

où on a posé $\vec{m}_1(s,\omega;t) = (-\partial_t + c\,\partial_s)\,\tilde{u}(s,\omega;t)$

$\vec{m}_2(s,\omega;t) = (\partial_t + c\,\partial_s)\,\tilde{u}(s,\omega;t)$

Pour $t = 0$, on posera donc naturellement :

$$\vec{m}_1^{\,o}(s,\omega) = \vec{m}_1(s,\omega;0) = -\tilde{\vec{f}}_2 + c\,\partial_s\,\tilde{\vec{f}}_1$$

$$\vec{m}_2^{\,o}(s,\omega) = \vec{m}_2(s,\omega;0) = \tilde{\vec{f}}_2 + c\,\partial_s\,\tilde{\vec{f}}_1$$

D'après (σ_1) et (σ_2), on a tout de suite :

$$m_1(s,\omega;t) = m_1^o(s-ct;\omega) \text{ et } m_2(s,\omega;t) = m_2^o(s+ct;\omega)$$

On a donc :

$$\partial_s\,\tilde{u}(s,\omega;t) = \frac{1}{2c}\,[\vec{m}_1(s,\omega;t) + \vec{m}_2(s,\omega;t)]$$

La transformation de Radon inverse donne alors :

$$\vec{u}(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \partial_s^2\,\tilde{u}(s,\omega;t)\,d\omega = -\frac{1}{8\pi c}\int_{|\omega|=1} \partial_s\,[\vec{m}_2(s,\omega;t) + \vec{m}_1(s,\omega;t)\,]\,d\omega.$$

Or, on sait que l'intégrale ci-dessus ne dépend que de la partie paire de l'intégrand; on peut donc lui ajouter une fonction impaire (en (s,ω)) quelconque; en particulier on peut ajouter ou retrancher la fonction $\partial_s(\vec{m}_1-\vec{m}_2) = 2\,\partial_s\,\tilde{u}_t(s,\omega;t)$ qui est impaire, et on obtient alors

$$\vec{u}(x,t) = -\frac{1}{8\pi c}\int_{|\omega|=1} 2\partial_s\,\vec{m}_2(s,\omega;t)\,d\omega = +\frac{1}{8\pi c}\int_{|\omega|} 2\partial_s\,\vec{m}_1(s,\omega;t)\,d\omega$$

Nous obtenons donc la solution du problème de Cauchy, <u>sous l'une ou l'autre des formes</u> :

$$\vec{u}(xt) = -\frac{1}{4\pi c}\int_{|\omega|=1} \partial_s \vec{m}_2^o(s+ct;\omega)\,d\omega\ ,\quad \vec{u}_t(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \partial_s^2 \vec{m}_2^o(s+ct;\omega)\,d\omega$$

$$\vec{u}(x,t) = +\frac{1}{4\pi c}\int_{|\omega|=1} \partial_s \vec{m}_1^o(s-ct;\omega)\,d\omega\ ,\quad \vec{u}_t(x,t) = +\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \partial_s^2 \vec{m}_1^o(s-ct;\omega)\,d\omega$$

De plus, nous avons :

Soit $d = (f_1,f_2) \in S \cap W_o$: on a alors par PARSEVAL :

$$||d||^2_{W_o} = \frac{1}{2}\int_{R^3}(c^2|\partial x_i\ \vec{f}_1|^2+|\vec{f}_2|^2)\,dx = \frac{1}{2}\iint_{R\times S_2}(|c\ \partial_s^2\ \tilde{\vec{f}}_1(s,\omega)|^2+|\partial_s\ \tilde{\vec{f}}_2(s,\omega)|^2)\,ds\,d\omega$$

Vu que $\partial_s^2\ \tilde{\vec{f}}_1(s,\omega)$ et $\partial_s\ \tilde{\vec{f}}_2(s,\omega)$ sont de parité contraires et que ces classes sont orthogonales dans $L_2(R\times S_2)$, on a encore :

$$||d||^2_{W_o} = \iint_{R\times S_2}|\partial_s\ \vec{m}_1^o\ (s,\omega)|^2\,ds\,d\omega = \iint_{R\times S_2}|\partial_s\ \vec{m}_2(s,\omega)|^2\,ds\,d\omega$$

Considérons alors les deux applications :

$$S \ni d \longmapsto \begin{cases} R_1\ d = \partial_s(c\ \partial_s\ \tilde{f}_1-\tilde{f}_2) = \partial_s\ \vec{m}_1^o(s,\omega) \\ R_2\ d = \partial_s(c\ \partial_s\ \tilde{f}_1+\tilde{f}_2) = \partial_s\ \vec{m}_2^o(s,\omega) = R_1\ d^\dagger \text{ où } d^\dagger = (f_1,-f_2)\end{cases}$$

On a donc $R_2 = R_1\ J$ où J est l'opérateur de multiplication par $J = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; J est une involution ($J^2 = I$). On a :

$$R_1\ B_o\ d = -c\ \partial_s\ R_1\ d \text{ et } R_2\ B_o\ d = +c\ \partial_s\ R_2\ d$$

et R_1 , R_2 sont isométrique d'après (   )

Ces deux applications se prolongent facilement alors par densité à deux applications <u>unitaires</u> de W_o dans $L_2\ (R\times S_2) \simeq L_2(R;L_2(S_2))$

Mêmes raisonnements que dans LAX-PHILLIPS (1) p, 103-105). On voit que

R_1 transforme le groupe $V_o(t)$ en le groupe τ_{ct} de translation à droite de ct unités.

R_2 " " " " τ^*_{ct} " à gauche de ct unités.

$\tau_{ct}\ f(s) = f(s-ct)$ et $\tau^*_{ct}\ f(s) = f(s+ct)$.

<u>Nous allons dorénavant choisir l'une de ces deux représentations</u>, <u>soit R_1</u>; <u>nous l'appelerons R_o et remarquons que ce choix donne la même représentation que dans LAX-PHILIPS pour l'équation des ondes</u>.

Finalement, de R_o nous obtenons une vraie représentation de translation $\mathcal{R}$ du groupe $V_o(t)$ dans W_o ($\mathcal{R}\, V_o(t)$ devient $\tau_t\, \mathcal{R}$) en posant simplement :

$$\mathcal{R}d = k(s,\omega) = \sqrt{c}\ R_o\ d(cs) = \sqrt{c}\ \partial_s\ \vec{m}_1^{o}(cs,\omega)$$

La solution de l'équation des ondes est alors donnée élégamment par :

$$u(x,t) = \frac{1}{u\pi}\int_{|\omega|} \vec{k}(x.\omega - t,\omega)\,d\omega = (\mathcal{R}^{-1}\vec{k})_1 ; \vec{u}_t(x,t) = -\frac{1}{u\pi}\int_{|\omega|} \partial_s\ \vec{k}(x.\omega,\omega)\,d\omega = (\mathcal{R}^{-1}k)_2(x,t)$$

On résume dans le théorème suivant :

Théorème

L'application : $W_o \xrightarrow{\mathcal{R}} L_2\ (R;L_2(S_2)\ )$

$$(\vec{f}_1,\vec{f}_2) = d \longmapsto \mathcal{R}d = \sqrt{c}\ \partial_s(-\tilde{\vec{f}}_2 + c\partial_s\ \tilde{\vec{f}}_1)(cs,\omega)$$

est une représentation de translation (unitaire) du groupe $V_o(t)$ opérant dans W_o . On a $R\ V_o(t) = \tau_t\ R$.

⊙ *Restriction à* W_o^1 :

Lemme : supposons que f et ∂_j f appartiennent à $L_2(R^3)$ (resp. $BL(R^3)$). Il existe alors une suite $\{\vartheta_n\} \subset C_o^\infty(R^3)$ t.q. $\{\vartheta_n\}$ et $\{\partial_j\ \vartheta_n\}$ convergent vers f et ∂_j f respectivement dans L_2 (resp. BL).

Preuve :

1) f et ∂_j f $\in L_2(R^3) \Rightarrow f \in H^1(R^3)$. Or $C_o^\infty(R^3)$ est dense dans $H^1(R^3)$.
   Il existe donc une suite $\{\vartheta_j\} \subset \overset{\infty}{C}_o\ (R^3)$ t.q. $\vartheta_j \longrightarrow f$ dans $H^1(R^3)$

   c'est-à-dire
$$\begin{cases} \vartheta_k \xrightarrow{L_2} f \\ \partial_j \vartheta_k \xrightarrow{L_2} \partial_j f \end{cases} \quad \text{cqfd}$$

2) f et ∂_j f $\in BL(R^3) \Rightarrow \partial_j\ f \in H^1(R^3)$. Il existe donc $\{\psi_k\} \subset C_o^\infty(R^3)$
   et telle que
$$\left.\begin{aligned} \psi_k &\xrightarrow{L_2} \partial_j\ f \\ \partial_j\ \psi_k &\xrightarrow{L_2} \partial_j^2\ f \end{aligned}\right\}$$
   soit alors $\{y_k\}$ telle que $\psi_k = \partial_j\ y_k$ pour tout $k, y_k\ \ C_o^\infty(R^3)$

   Une telle suite $\{y_k\}$ existe toujours.

La suite y_k répond à la question, puisqu'on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_j \{y_k\} \xrightarrow{L_2} \partial_j f \\ \partial_j \{\partial_j y_k\} \xrightarrow{L_2} \partial_j(\partial_j f) \end{array}\right. \iff \left| \begin{array}{l} \{y_k\} \xrightarrow{BL} f \\ \{\partial_j y_k\} \longrightarrow \partial_j f \end{array}\right.$$

Lemme

Soit $\vec{W}$ dans W_o et $\vec{k}(s,\omega) = \mathbf{R}\,\vec{W}$. Alors $\partial_j \vec{W} \in W_o$ si et seulement si $\omega_j\ \partial_s\ \vec{k}\ (s,\omega) \in L_2\ (R;N)$, $N = L_2(S_2)$. On a alors : $R\,\partial_j\ \vec{W} = \omega_j.\vec{k}(s,\omega)$.

Preuve

Les assertions sont vraies pour des données C^∞ à support compact. D'après le lemme précédent, il existe une suite $\{\vec{W}_n\} \subset C^\infty_o$ telle que, $\vec{W} \in W_o$: $\vec{W}_n \xrightarrow{W_o} \vec{W}$ et $\partial_j\ \vec{W}_n \xrightarrow{W_o} \partial_j\ \vec{W}$. Soit $\vec{k}_n = R\ \vec{W}_n$. Alors : $\omega_j.\vec{k}'_n = R\,\partial_j\ \vec{W}_n \in \mathcal{D}(R;N)$. $\vec{\mathbf{k}}_n \longrightarrow R\,W = \vec{k}$ dans $L_2(R;N)$; et $\{\omega_j\ \vec{k}'_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L_2(R;N)$, d'où : $\omega_j.\vec{k}'_n \longrightarrow \vec{K} = R\ \partial_j\ \vec{W} \in L^2(R;N)$.

Mais au sens des distributions $\omega_j.\vec{k}'_n$ converge vers $\omega_j\ \partial_s\ \vec{k}(s,\omega)$ donc $\omega_j.\partial_s\ \vec{k} = R\ \partial_j\ \vec{W}$ et $\omega_j\ \partial_s\ \vec{k} \in L^2(R;N)$.

Réciproquement : Supposons que $\omega_j\ \partial_s\ \vec{k}(s,\omega) \in L_2(R;N)$. Il existe alors aussi une suite $\{\vec{k}_n\}. \subset \mathcal{D}(R;N)$ telle que $\vec{k}_n \longrightarrow \vec{k}$ dans $L_2(R;N)$ et $\omega_j\ \partial_s\ \vec{k}_n \longrightarrow \omega_j\ \partial_s\ \vec{k}$. Soit $\vec{W}_n = \mathbf{R}^{-1}\ \vec{k}_n$ (qu'on sait exister et être donnée explicitement par les formules du th.); on a donc $\partial_j\ W_n = \mathbf{R}^{-1}\ \omega_j\ \partial_s\ \vec{k}_n$. Alors

$\vec{W}_n \xrightarrow{W_o} R^{-1}\vec{k} = W$

$\partial_j\ W_n \xrightarrow{W_o} \vec{F}$ tel que $R\ \vec{F} = \omega_j\ \partial_s\ \vec{k}$

Au sens de $\mathcal{D}'(R;N)$, $\partial_j\ W_n$ converge à la fois vers $\vec{F}$ et vers $\partial_j\ \vec{W}$, d'où $\vec{F} = \partial_j\ \vec{W}$ et par conséquent $\partial_j\ \vec{W} \in W_o$ et $R\ \partial_j\ \vec{W} = \omega_j\ \partial_s\ \vec{k}(s,\omega)$.

Restriction à W^1_o

Soit $\vec{f} = (\vec{f}_1,\vec{f}_2) \in W^1_o$ c'est-à-dire $\mathrm{div}\ \vec{f} = (\mathrm{div}\ \vec{f}_1,\ \mathrm{div}\ \vec{f}_2) = (0,0)$.

On a alors :

Théorème

La restriction de $\mathcal{R}$ à W_o^1 est une représentation de translation unitaire du groupe $V_o^1(t)$ opérant dans W_o^1, où W_o^1 est appliqué sur le sous-espace $L_2(R;L_2^1(S_2))$ où :

$$L_2^1(S_2) = \{\vec{f}(\omega) \in [L_2(S_2)]^3 : \vec{\omega}.\vec{f}(\omega) = 0\} \triangleq N^1$$

Preuve

D'après le lemme précédent, pour tout $\vec{f} \in W_o$, on a :

$a_i \; \partial_{x_i} \; f(x) = a_i \; \omega_i \; \tilde{f}(s,\omega)$, en particulier $\vec{\nabla}.\vec{f} = \vec{\omega}.\partial_s \; \tilde{\vec{f}}(s,\omega)$. Alors :

$\vec{\omega}.\partial_s \; \vec{m}_1^o(s,\omega) = \vec{\omega}.(c \; \partial_s^2 \; \tilde{\vec{f}}_1 - \partial_s \; \tilde{\vec{f}}_2) = c \; \partial_s \; (\vec{\omega}.\partial_s \; \tilde{\vec{f}}_1) - \vec{\omega}.\partial_s \; \tilde{\vec{f}}_2 = c \; \partial_s(\vec{\nabla}.\vec{f}_1) - (\vec{\nabla}.\vec{f}_2)$

d'où $\vec{\omega}.\vec{k}(s,\omega) = 0$ si div $\vec{f}_1 =$ div $\vec{f}_2 = 0$, et réciproquement.

4. *REPRESENTATION DE TRANSLATION $\mathcal{J}$ POUR LE GROUPE $S^1(t)$*

4.1. *Données à énergie finie ($\Longleftrightarrow \in H_o^1$)*

Nous savons que $BL^1 \; (R^3;C^3)$ est identique à $EL^1(R^3;C^3)$. On peut alors identifier H_o^1 à $W_o^1 \oplus \{0\}$. Le semi-groupe $S^1(t)$ admet alors la décomposition : $S^1(t) = V_o^1(t) \oplus 0$. (0 : opérateur nul). Soit alors $\mathcal{J} = \mathcal{R} \oplus 0$.
<u>La représentation de translation $\mathcal{R}$ pour $V_o(t)$ dans W_o^1 donne donc immédiatement une représentation $\mathcal{J}$ pour $S^1(t)$ dans H_o^1 par $\mathcal{J}\,(\vec{f}_1,\vec{f}_2,0) = \mathcal{R}\,(\vec{f}_1,\vec{f}_2)$.</u>

Définissons alors les deux sous-ensembles de $L_2(R;N^1)$:

$D_+^\rho = \{f(s) \in L_2(R;N^1) : \text{supp } f(s) \subset [\rho,+\infty[\}$;

$D_-^\rho = \{f(s) \in L_2(R;N^1) : \text{supp } f(s) \subset]-\infty, -\rho]\}$, $\rho > 0$. On a alors (cf. les propriétés de la transformation de Radon) pour les antécédents (et en identifiant par l'ipomorphisme $\mathcal{J}$ les espaces H_o^1 et $L_2(R;N^1)$) :

$f(x) \in D_+^\rho \quad \Rightarrow \quad S^1(t)\; f(x) = 0 \quad$ pour $\; |x| < t + \rho \quad \forall\, t > 0$

$f(x) \in D_-^\rho \quad \Rightarrow \quad S^1(t)\; f(x) = 0 \quad$ pour $\; |x| < -t + \rho \; , \forall\, t < 0$.

En fait on démontre (après extension de $\mathcal{J}^{-1}$ aux distributions $\mathcal{D}'(R,N1)$) que les implications inverses sont vraies et on a : $f \in D^{\rho}_{\pm} \iff S^1(t)\, f(x) = 0$ pour $|x| < |t| + \rho$.

Pour $D_{\pm}$, on a les propriétés suivantes (on les vérifie d'abord pour des données à support compacts, puis on utilise un argument de densité) :

1^{+}) (i) $T^1_o(t)\, D^{\rho}_+ \subset D^{\rho}_+$ (i) $S^1(t)\, D^{\rho}_+ \subset D^{\rho}_+$ $t > 0$

(ii) $\bigcap T^1_o(t)\, D^{\rho}_+ = \{0\}$ c'est-à-dire (ii) $\bigcap_{t \geq 0} S^1(t)\, D^{\rho}_+ = \{0\}$

(iii) $\overline{T^{1*}_o(-t)\, D^{\rho}_+} = H^1_o$ (iii) $\overline{\bigcup_{t \leq 0} S^1(t)\, D^{\rho}_+} = H^1_o$

1^{-}) (i) $T^{1*}_o(t)\, D^{\rho}_- \subset D^{\rho}_-$ (i) $S^1(t)\, D^{\rho}_- \subset D^{\rho}_-$ $t \leq 0$

(ii) $\bigcap T^{1*}_o(t)\, D^{\rho}_- = \{0\}$ (ii) $\bigcap_{t \leq 0} S^1(t)\, D_- = \{0\}$

(iii) $\overline{\bigcup T^1_o(t)\, D^{\rho}_-} = H^1_o$ (iii) $\overline{\bigcup_{t \geq 0} S^1(t)\, D^{\rho}_-} = H^1_o$

2) D^{ρ}_+ et D^{ρ}_- sont des sous-espaces fermés orthogonaux de H^1_o .

3) Soient $D_{\pm}$ les sous espaces correspondant à $\rho = 0$. On a
$D^{\rho}_{\pm} = S^1(\rho)\, D_+$ et $D^{\rho}_- = S^1(-\rho)\, D_- = T^{1*}_o(\rho)\, D_-$. Plus généralement, on notera $D^a_{\pm} = S^1(\pm a) D_{\pm}$, $\forall\, a > 0$.

Un sous-espace de H^1_o vérifiant 1^{+}) (resp. 1^{-})) sera dit <u>sortant</u> (resp. entrant). Il est démontré dans LAX-PHILLIPS (1 Chap. II) que l'existence d'un sous-espace D sortant (resp. entrant) assure l'existence d'une représentation de translation dite sortante (resp. entrante) dans $L_2(R;N)$, N étant un espace de Hilbert auxiliaire. Mais si $D_+ \perp D_-$, ce qui est le cas pour nous, ces deux représentations coïncident. Nous avons donc en résumé le :

Théorème de représentation

Pour $S^1(t)$ opérant dans H^1_o, il existe une représentation de translation à la fois sortante et entrante sur $L_2\ (R;N^1)$ où $N^1 = \{f(\omega) \in L_2(S_2;C^3):\quad \omega.f(\omega) = 0\}$ t.q,.:

1) Si $\vec{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, 0)$ est de classe S, son représentant est donné par :
$J\,\vec{f} = \vec{k}\ (s,\omega) = \sqrt{c}\ \partial_s\ \vec{m}_1^o\ (cs,\vec{\omega})$ où $\vec{m}_1^o(s,\omega) = (c\ \partial_s\ \tilde{\vec{f}}_1 - \vec{f}_2)\ (s,\omega)$

Inversement, si $\vec{k}\ (s,\omega)$ est C^∞, on définit J^{-1} par :

$$(J^{-1}\,\vec{k})_1(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \vec{k}(s,\omega)\ d\omega = \vec{f}_1(x);\quad (J^{-1}\vec{k})_2(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \partial_s\vec{k}\,(s,\omega)d\omega = \vec{f}_2(x);$$

$$(J^{-1}\,\vec{k})_7(x) = 0$$

La solution de problème de Cauchy étant donnée par $J^{-1}(\vec{k}(x.\omega-t)$.

2) Dans cette représentation :

$J\ D^\rho_+ = L_2(\rho,+\infty;N^1)$, $J\ D^\rho_- = L_2(-\infty,-\rho;N^1)$

$\vec{f} = \vec{0}$ pour $|x| > r \implies \vec{f} = 0$ pour $|s|\quad r$

$\vec{k} = \vec{0}$ pour $|s| < r \implies J^{-1}\ \vec{k} = \vec{0}$ pour $|x| < r$

$S^1(t)$ devient τ_t : $J\ S^1(t) = \tau_t\ J$.

A^1_o devient l'opérateur $-\partial_s$ avec pour domaine $= \{f \in L_2(R;N^1)$: $-\partial_s\ f \in L_2(R;N^1))$, c'est-à-dire le générateur infinitésimal de τ_t.

4.1. *Extension de J^{-1} à des données distributions $\in \mathcal{D}'(R;N^1)$*

$\vec{k}(s)$ n'étant pas forcément C^∞, il nous faut étendre J^{-1} aux distributions. On étend par dualité; en remarquant que$(J^{-1}\ \vec{k})(x)$ dépend localement de $\vec{k}$ (uniquement de $\vec{k}(s)$ pour $|s| \leq |x|$). On part de :

$(J^{-1}\ k,g)_{H^1_o} = [k,J\ g\ ]_{L_2(R;N^1)}$ c'est-à-dire :

$$(J^{-1}\,k)_1,\ \vec{\Delta}g_1)_{L_2(R^3;C^3)} + ((J^{-1}\,k)_2, g_2)_{L_2(R^3;C^3)} + 0 = [k,\ Jg\ ]$$

$\forall\ g \in C_o^\infty(x)$, $J\ g$ est $C_o^\infty(s)$, donc le second embre a un sens pour $\vec{k} \in \mathcal{D}'(R;N^1)$ et est continu par rapport à g; ceci nous définit $J^{-1}\ k$ comme distribution. Plus précisément :

$$\vec{g} = (\vec{\psi},\vec{0},0) \Rightarrow \begin{cases} (J^{-1}\,\vec{k})_1(\vec{\vartheta}) = [\,k, J\,\{\vec{\psi},0,0\}] = [k, \partial_s^{-2}\,J\{\vec{\vartheta},\vec{0},0\}\,] = [\vec{k}(s,\omega), \tilde{\vec{\vartheta}}(s,\omega)] \\ \text{où } \Delta\vec{\psi} = \vec{\vartheta}\,. \end{cases}$$

$$\vec{g} = (\vec{0},\vec{\vartheta},0) \Rightarrow \begin{cases} (J^{-1}\vec{k})_2(\vec{\vartheta}) = [k, J\{\vec{0},\vec{\vartheta},0\}] = [\vec{k}, \partial_s\,\tilde{\vec{\vartheta}}\,(s,\omega)\,] = [\vec{k}_s', \tilde{\vec{\vartheta}}\,(s,\omega)] \\ (J^{-1}\,\vec{k})_7\,(\eta) = 0 \end{cases}$$

$\forall\,\vec{\vartheta} \in C_o^\infty\,(R_x^3;C^3)$ et $\eta \in C_o(R_x^3;C)$.

Alors :

1 - Si $\vec{k} \in L_2(R;N^1)$ sans être C^∞, $J^{-1}\ k$ est une distribution; en fait elle appartient à H_o^1 et la solution du problème de Cauchy est donnée par une distribution en x, qui dépend continûment de t dans la topologie de H_o^1 .

2 - Si $\vec{k} \in \mathcal{D}'(R;N^1)$, alors la solution du Problème de Cauchy est une distribution en x et en t.

Dans les deux cas, on a les deux formes affaiblies de l'égalité $(S^1(t)J^{-1}\ k)_1 = \frac{1}{4\pi}\int \vec{k}(x\omega - t,\omega)\,d\omega$:

a) $\forall\ \vec{\vartheta} \in C_o(R_x^3;C^3)$, on a :

$(S^1(t)\ J^{-1}\ \vec{k})_1(\vec{\vartheta}) = [\vec{k}(x.\omega-t,\omega),\ \tilde{\vec{\vartheta}}(s,\omega)] = [\vec{k}(s),\ \tilde{\vec{\vartheta}}(x.\omega+t)]$; ce qui entraîne qu'on obtient un terme C^∞ en t. Il en va de même pour les autres composantes.

b) $\forall\,\psi\,(t) \in C_o^\infty(R_t;C)$, on a :

$$(S^1(t)J^{-1}\,\vec{k})_1(\psi(t)) = \iint \vec{k}(x.\omega-t,\omega).\overline{\psi}(t)\,d\omega dt = \iint_{R\times S^2} k(s,\omega)\ \overline{\psi}(x\omega-s)\ ds\ d\omega$$

$= [k(s,\omega),\ \psi(x\omega-s)]$ obtenant ainsi une fonction C^∞ en x.

. Les propriétés de J^{-1} sont conservées, en particulier $k = 0$ pour $|s| < r \Rightarrow J^{-1} k = 0$ pour $|x| < r$ qui exprime la dépendance locale. De plus, on a :

Théorème

Soit $\vec{\ell} \in \mathcal{D}'(R;N^1)$ et $\vec{\ell} = \vec{0}$ pour $|s| > r$. Supposons $J^{-1}\vec{\ell}$ à support compact. Alors on a : supp $J^{-1}\vec{\ell} \in \{|x| \leqslant r\}$.

4.3. *Extension de J à certaines données distributions (à énergie infinie).*

4.3.1. *Intégrale indéfinie d'une distribution* $T \in \mathcal{D}'(R_s)$

Soit R la distribution cherchée. On a :

$T = \partial_s R \Longleftrightarrow T(\vartheta) = \partial_s R(\vartheta) \; \forall \vartheta \in C_0^\infty(R)$. On définira R par :

$R(\vartheta) = - T(\psi_\vartheta(s))$, où $\psi_\vartheta(s)$ est une fonction C^∞ à support compact qui dépend de ϑ, telle que $\psi_{\partial s \vartheta}(s) = \vartheta(s)$.

On prendra :

$$\psi_\vartheta(s) = \int_{-\infty}^{s} \vartheta(\sigma)\, d\sigma - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(\tau) d\tau\right) \times \int_{-\infty}^{s} \theta(\sigma)\, d\sigma \quad \text{où} \quad \theta(\sigma) \in C_0^\infty(R) \text{ et } \int_R \theta(\sigma)\, d\sigma = 1$$

Pour exprimer la dépendance en θ et ϑ, nous écrivons aussi, $\psi(\theta,\vartheta;s)$. On vérifie facilement que ψ est C^∞ , à support compact, dépendant de ceux de θ et ϑ .(On aurait pu penser à prendre $\psi = \int_{-\infty}^{s} \vartheta\, d\vartheta$, mais alors $\psi(s)$ bien que C^∞ n'est plus à support compact, ce qui toutefois aurait été suffisant pour définir une certaine intégrale de $T \in \mathcal{E}'(R)$).

4.3.2. *Extension de J à des distributions à support compact et à divergence nulle.*

Soit $g \in \mathcal{E}'(R^3;C^7)$, $\vec{g} = (\vec{g}_1,\vec{g}_2,0)$ et $\operatorname{div} \vec{g} = 0$.

On utilise encore l'identité : $(g,J^{-1}\vec{k})_{H_0^1} = [Jg,k]_{L_2(R;N^1)} \quad \vec{k} \in C^\infty(R;N^1)$

On définit ainsi une distribution $Jg(s,\omega) \in \mathcal{E}'(R;N^1)$; $Jg = 0$ pour $|s| > r$ si $g = 0$ pour $|x| > r$. Jg est C^∞ en ω dans le sens où $\int J\vec{g}(s,\omega)\,\phi(s)\, ds$ est une fonction C^∞ en $\vec{\omega} \; \forall \phi(s) \in C_0^\infty(R_s;N^1)$.

4.4.3. *Extension à certaines distributions éventuellement sortantes pour* $S^1(t)$

La formule de dualité $(g, J^{-1} k)_{H^1_0} = [Jg, k]$ ne permet pas d'étendre J à des distributions quelconques g à divergence nulle, car si k est C_0^∞, il n'en est pas de même de J^{-1} k. Aussi va-t-on se contenter de certaines distributions qu'on va définir.

Définition

Soit $k(s) \in \mathcal{D}'(R;N^1)$ et supp k(s) $[-r, +\infty[, r > 0$. k est dite sortante. Nous dirons aussi que $d = J^{-1}$ k est sortante.

Nous posons alors $k = J d$, d'où une extension de J.

Toute distribution d sortante est donc éventuellement sortante comme on le voit par la formule en 4.2 b); la réciproque est inexacte; en effet ,-sortante suppose :

1) que Jd existe.

2) que $Jd = 0$ pour $s < -r$.

D'ailleurs, pour l'équation des ondes scalaires, LAX et PHILLIPS (1) dans des notes sur le chapitre IV (p. 130-131) exhibent un exemple de données "éventuellement sortantes" qui ne possèdent pas de représentants sortants.

4.3.4. *Extension de J aux distributions de* $\mathcal{D}'^{\,1}_{L_2}(R^3;C^6) \times \{0\}$ *(G. Schmidt, p.305)*

Lemme 1

Soit $\vec{\psi} \in \mathcal{D}_{L_2}(R^3;C^3)$. Il existe alors une décomposition unique et continue $\vec{\psi} = \vec{\psi}^o + \vec{\psi}^1$ telle que $\vec{\psi}^o$ et $\vec{\psi}^1$ soient dans $\mathcal{D}_{L^2}(R^3;C^3)$, div $\vec{\psi}^1 = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}^o = \vec{0}$. On écrira $\mathcal{D}_{L^2} = \mathcal{D}^o_{L^2} \oplus \mathcal{D}^1_{L^2}$.

Preuve

$$\vec{\psi} \in L_2(R^3;C^3) \implies \vec{\psi} = \vec{\psi}^o + \vec{\psi}^1 \quad \text{où } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}^o = \vec{0} \text{ et div } \vec{\psi}^1 = \vec{0} \ ,$$

$\vec{\psi}^o$ et $\vec{\psi}^1$ de carré intégrable.

$\vec{\psi} \in \mathcal{D}_{L^2} \Rightarrow D^\alpha \vec{\psi} = D^\alpha \vec{\psi}^o + D^\alpha \vec{\psi}^1$. Supposons $D^\alpha \vec{\psi}^o \in L_2$ pour $|\alpha| \leq n$. Alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{div} D^\alpha \vec{\psi}^o = \operatorname{div} D^\alpha \vec{\psi} \in L_2 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, D^\alpha \vec{\psi}^o = \vec{0} \in L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow D^\alpha \vec{\psi}^o \in L_2 \ \forall |\alpha| \leq n+1 \Rightarrow \text{la même chose pour } D^\alpha \psi^1 .$$

Donc $\vec{\psi}^o$ et $\vec{\psi}^1 \in \mathcal{D}_{L^2}$. La continuité vient de la relation :

$||\mathcal{D}^\alpha \vec{\psi}||^2_{L^2} = ||D^\alpha \vec{\psi}^o||^2_{L^2} + ||D^\alpha \psi^1||^2_{L^2}$, l'unicité de l'unicité de la décomposition $\vec{\psi} = \vec{\psi}^o + \vec{\psi}^1$ dans $L_2(R^3;C^3)$.

Lemme 2 :

1) Il existe une décomposition continue de $\mathcal{D}'_{L^2}(R^3;C^3)$ en composantes à rotationel nul et à divergence nulle :

$$\mathcal{D}'_{L^2}(R^3;C^3) = \mathcal{D}'^o_{L^2}(R^3;C^3) \oplus \mathcal{D}'^1_{L^2}(R^3;C^3)$$

2) En fait, si $T \in \mathcal{D}'_{L^2}(R^3;C^3)$, alors $T = T^o + T^1$ où $T^o(\vec{\varphi}) = T(\vec{\varphi}^o)$ et $T^1(\vec{\varphi}) = T(\vec{\varphi}^1)$ où $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}^o + \vec{\varphi}^1 \in \mathcal{D}_{L^2}(R^3;C^3)$.

3) Les restrictions de T^o et T^1 en tant qu'éléments de $\mathcal{D}'(R^3;C^3)$ sont alors : $T^o = -\frac{1}{r} * \vec{\nabla} \operatorname{div} T$ et $T^1 = +\frac{1}{r} * \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, T$.

Preuve :

1) et 2) évidents à partir du lemme 1 précédent.

3) Soit $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)$. Alors $\vec{\varphi} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} * \Delta \vec{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} * \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\varphi} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r} * \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{\varphi}$

$$= \vec{\varphi}^1 + \vec{\varphi}^o$$

On aura démontré 3) si on démontre que φ^o est L^2. Or :

$$\vec{\psi}^{o} = \frac{1}{4\pi}\int \cdot \frac{1}{|x-y|}\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{\psi}(y)\,dy = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \frac{1}{4\pi}\int_{\varepsilon<|x-y|<R} \frac{1}{|x-y|}\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{\psi}(y)\,dy$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \frac{1}{4\pi}\left[\int_{\varepsilon<|x-y|<R} \vec{\nabla}\frac{1}{|x-y|}\,.\,\mathrm{div}\,\vec{\psi}(y)\,dy + \int_{|x-y|=\varepsilon} \vec{n}_j\,.\,\frac{\mathrm{div}\,\vec{\psi}(y)}{}\,.\,\varepsilon^2\,d\omega\right.$$

$$\left. + \int_{|x-y|=R} \vec{n}_j\,\frac{\mathrm{div}\,\vec{\psi}(y)}{|x-y|}\,dS_y\right.$$

$$= \int \frac{1}{|x-y|^2}\,.\,\frac{x-y}{|x-y|}\,\mathrm{div}\,\vec{\psi}(y)\,dy,$$ qui est de carré intégrable d'après les inégalités de Sobolev sur les noyaux à singularités polaires (cf par exemple G. SCHMIDT (1)).

Donc ψ^1 est aussi L^2 et $\vec{\psi}^1 = \frac{1}{r} * \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\psi}$ cqfd

On est alors en mesure de démontrer les deux lemmes suivants.

Lemme 3 :

J est une application bijective de $\mathcal{D}^1_{L^2}(R^3;C^3)^2 \times \{0\}$ sur $\mathcal{D}_{L^2}(R;N^1)$. Son inverse coïncide avec J^{-1} précédemment définie pour $k(s)\in C^\infty$.
Si $k = J\,m$, alors $||A^1_o\,m||_{H^1_o} = ||\partial^n_s\,k||_{L^2}(R;N^1)$.

Pour $m \in [\mathcal{D}^1_{L^2}(R^3;C^3)]^2 \times \{0\}$ on définit :

$J\;m(\psi) = m\,(J^{-1}\,\psi)\;\forall\,\psi \in \mathcal{D}_{L^2}(R;N^1)$. Alors :

Lemme 4 :

J est une application bijective de $[\mathcal{D}'^1_{L^2}(R^3;C^3)]^2 \times \{0\}$ sur $\mathcal{D}'_{L^2}(R;N^1)$ et son inverse coïncide avec J^{-1} étendue aux distributions. Si m^1 est la partie à divergence nulle d'une distribution à support dans $\{|x| \leq r\}$, alors $J\,m^1$ a son support dans $\{|s| \leq r\}$. (m^1 n'est pas à support compact en général).

Preuve

Le lemme 1 entraîne par dualité que J est un isomorphisme. Soit alors $\vec{\psi} \in \mathcal{D}_{L^2}(R;N^1)$. Alors $J^{-1}\psi \in [\mathcal{D}^1_{L^2}(R^3;C^3)]^2 \times \{0\}$ et donc $(J^{-1}\psi)^1 = J^{-1}\psi$ simplement, d'où :

$J\, m^1(\psi) = m^1(J^{-1}\psi) = m\,((J^{-1}\psi)^1) = m\,(J^{-1}\psi)$

alors $\psi = 0$ pour $|s| < r \Rightarrow J^{-1}\psi = 0$ pour $|x| < r \Rightarrow m(J^{-1}\psi) = 0 = J\,m^1(\psi)$ pour $|x| < r$ (dans $J\,m^1(\psi)$ la dualité est entre $\mathcal{D}_{L^2}(R;N^1)$ et $\mathcal{D}'_{L^2}(R;N^1)$!).

5. SOLUTION FONDAMENTALES DE A^1_o .

Théorème

Soit g^1 la partie à divergence nulle d'une distribution g à support compact $\subset \{|x| \leqslant r\}$. Alors l'équation $(A^1_o-\mu)f = g^1$ où $\mu \in C$ quelconque, possède une solution éventuellement sortante unique, et dont le représentant par translation est la distribution de $\mathcal{D}'(R;N^1)$, donnée par :

$k(\psi) = [J\, g^1(e^{\mu s}\, \psi(\theta_o, e^{-\mu s}\,\psi; s)$ avec supp $\theta_o \subset]-\infty,-r]$ et $\int_R \theta_o(\sigma)d\sigma = 1$, θ_o étant C^∞.

Preuve

1) Existence

Supposons que $J\, f = k$ existe. Alors formellement $-(\partial_s+\mu)\, k = J\, g^1$ qui existe d'après le théorème précédent. Si g^1 était C^∞_o on aurait la solution.

$$k(s) = -\int_{-\infty}^{s} e^{\mu(\sigma-s)} J\, g^1(\sigma)d\sigma .$$

Mais si $g^1 \notin C^\infty_o(R;N^1)$, $k(s)$ est une intégrale indéfinie, qu'on obtient comme suit on a $\partial_s(e^{\mu s}\, k) = e^{\mu s}(\partial_s+\mu)k$, d'où : $\partial_s(e^{\mu s}\, k) = -e^{\mu s}\, J\, g_1$, donc $e^{\mu s}\, k$ est une intégrale indéfinie de la distribution $e^{\mu s}\, J\, g_1$. On a donc $\phi(s,\omega) \in \mathcal{D}(R;N^1)$

$e^{\mu s}\, k, \phi(s)) = e^{\mu s}\, J\, g_1, \psi^{\theta_o}_{\phi(s)}$. On pose alors $\phi\,(s,\omega) = e^{-\mu s}\, \psi(s,\omega)$, d'où :

$$e^{\mu s}.e^{-\mu s}\,k(\psi) = e^{\mu s}\,\mathcal{J}_{g_1}\,(\,\psi(\theta_o, e^{-\mu s})\,\psi;s)\,)$$ c'est-à-dire

$k(\phi) = \mathcal{J}g_1(e^{+\mu s}\ \psi(\theta_o,\ e^{-\mu s}\ \phi;s)$, où le choix de θ_o va nous permettre maintenant d'avoir un "bon" support pour $k(\phi)$. Nous prenons supp $\theta_o \subset]-\infty,-r]$;

alors : supp $\phi \subset \{s \leq -r\} \Rightarrow$ supp $\psi(\theta_o,\phi) \subset \{s \leq -r\}$, car pour $s > -r$

on a : $\psi(s,\omega)= \int_\infty^{-r} \phi(\sigma,\omega)d\sigma - \int_{-\infty}^{-r} \phi(\tau,\omega)d\tau \times \int_\infty^{-r} \theta_o(\sigma,\omega)d\sigma = + \int_\infty^{-r} \hat{\phi}(\sigma)\ d\sigma - \int_\infty^{-r} \phi(\sigma)\ d\sigma = 0$.

D'autre part $g^1 = 0$ pour $|x| > r \Rightarrow \mathcal{J}\,g^1 = 0$ pour $|s| > r$.

Donc pour $s \leq -r$ ($\mathcal{J}\,g^1 = 0$) on a $k(\phi) = 0$.

Conclusion :

$f = \mathcal{J}^{-1}\,k$ est sortante (donc éventuellement sortante) et en plus :

$(A_o^1-\mu) = (A_o^1-\mu)\,\mathcal{J}^{-1}\,k = -\mathcal{J}^{-1}\,(\partial_s+\mu)\,k = \mathcal{J}^{-1}\ \mathcal{J}g^1 = g^1$.

2) *Unicité*

Supposons $A_o^1\,g = \mu g$. Alors $S^1(t)\,g = e^{\mu t}\,g$. g éventuellement sortante implique : $S^1(t)\,g = 0$ pour $|x| < t-r$, donc $g = 0$ puisque t est arbitraire, d'où l'unicité. cqfd.

$\longrightarrow$ Soit alors $\vec{x}_i$ le ième vecteur de base dans C^3 et définissons la distribution $\vec{\delta}_i = -\delta(x)\,\vec{x}_i$ dans $\mathcal{D}'_{L^2}\,(R^3;C^3)$ par $\vec{\delta}_i(\vec{\phi}) = \phi_i(0)\,\vec{x}_i$. Alors :

$$\vec{\delta}_i^o(\vec{\phi}) = -\frac{1}{r} * (\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{\delta}_i)\,(\vec{\phi}) = -\vec{\delta}_i(\frac{1}{r} * \vec{\nabla}\mathrm{div}\,\vec{\phi}) = -\vec{x}_i \int \frac{1}{|x|}(\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\phi)(x)\,dx,$$

donc $\vec{\delta}_i^o$ est la distribution $-\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\frac{\vec{x}_i}{r}$ dans $\mathcal{D}'(R^3;C^3)$; de même $\vec{\delta}_i^1$ est $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\frac{\vec{x}_i}{r}$. On définit alors $\vec{\delta}^1 = \sum_i \vec{\delta}_i^1$ et $\vec{\delta}^o = \Sigma\,\vec{\delta}_i^o$. Soit alors $(\delta I_7)^1$ la 7×7 matrice dont les vecteurs colonnes sont $(\vec{\delta}^1{}_i,\vec{0},0)$, $(\vec{0},\vec{\delta}_i^1,0)$ et $(\vec{0},\vec{0},0)$; les lignes et les colonnes de $(\delta I_7)^1$ sont donc à divergence nulle. <u>De plus $(\delta I_7)^1$ n'est pas à support compact</u>. Cependant, en remarquant que $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'_{L^2}$, le théorème précédent s'applique ($(\delta I_7)^1$ est la partie à divergence nulle de la distribution δI_7) et donne :

Théorème

L'équation $(A_o^1-\mu)\ G^1(x,\mu) = (\delta I_7)^1(x)$ possède une solution unique dont chaque vecteur colonne est une distribution éventuellement sortante.

CALCUL DE $G^1(x,\mu)$

1°) Méthode directe

Soit $\vec{G}_k = (\vec{G}_k^1, \vec{G}_k^2, G_k^7)$ un vecteur colonne. L'équation $(A_o^1-\mu)\ G^1(x,\mu) = (\delta I_7)^1$ s'écrit :

$$\left.\begin{aligned}
(A_o^1-\mu)\ \vec{G}_k(x,\mu) &= (\vec{\delta}_k^1,\vec{0},0) \text{ pour } k = 1,2,3 \\
(A_o^1-\mu)\ \vec{G}_k(x,\mu) &= (\vec{0},\vec{\delta}_k^1,0) \text{ pour } k = 4,5,6 \\
\vec{G}_k(x,\mu) &= 0 \qquad \text{ pour } k = 7 .
\end{aligned}\right\} \text{ d'où } G_k^7 = 0 \quad \forall\ k .$$

k = 1,2,3 :
$$\begin{cases}
\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{G}_k^1 + \dfrac{\mu^2}{c^2}\vec{G}_k^1 = -\dfrac{\mu}{c^2}\ \vec{\delta}_k^1 \\
\vec{G}_k^2 = \mu\, G_k^1 + \vec{\delta}_k^1
\end{cases}$$

k = 4,5,6 :
$$\begin{cases}
\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{G}^1 + \dfrac{\mu^2}{c^2}\vec{G}_k^1 = -\dfrac{1}{c^2}\ \vec{\delta}_k^1 \\
\vec{G}_k^2 = \mu\ \vec{G}_k^1
\end{cases}$$

On constate donc qu'il suffit de calculer un seul $\vec{G}_k^i$ pour $k \in (1,2,3)$ ou $k \in (4,5,6)$, vue la structure des équations. En particulier il suffit de connaître un seul des deux termes $J(\vec{0},\vec{\delta}_k^1,0)$ et $J(\vec{\delta}_k^1,\vec{0},0)$... si on en a besoin...

Nous allons donc effectuer les calculs pour k = 4,5,6 par exemple. On a alors $\vec{g}^1 = (\vec{0},\vec{\delta}_k^1,0)$ et $\vec{g} = (\vec{0},\delta(x)\ \vec{x}_k,0)$. On a :

$$\vec{G}_k^2(\vec{\psi}) = (J^{-1}\ \vec{k})_2(\vec{\psi}) = \vec{k}\ ([J(\vec{0},\vec{\psi},0)]^1) = \vec{k}\ (\ [\tilde{\vec{\psi}}]^1) = \vec{k}\ (\tilde{\vec{\psi}}^1)$$

$$= J\,\vec{g}^1(e^{\mu s}\ \vec{\psi}_{\tilde{\vec{\psi}}^1}) = \vec{g}(J^{-1}\ e^{\mu s}\ \vec{\psi}_{\tilde{\vec{\psi}}^1}) = \vec{\delta}(J^{-1} e^{\bar{\mu} s}\ \vec{\psi}_{\tilde{\vec{\psi}}})_2 = (J^{-1}\ e^{\bar{\mu} s}\ \vec{\psi}_{\tilde{\vec{\psi}}})_2(0)$$

où $\tilde{\vec{\psi}}$ est la transformée de Radon de $\vec{\psi}$.

Or $\vec{\psi}\ (\theta_o,\tilde{\vec{\psi}}^1)$ est une fonction C_o^∞ de s; on a donc :

$$(J^{-1}\rho\bar{\mu}s\ \vec{\psi})_2\ (0)_2 = -\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \partial_s\ e^{\bar{\mu}s}\ \vec{\tilde{\psi}}_1\ (0,\omega)\ d\omega$$

or $\vec{\psi} = \displaystyle\int_{-\infty}^{s} e^{-\bar{\mu}\sigma}\ \vec{\tilde{\psi}}^1(\sigma,\omega)d\sigma - \left(\int_R e^{-\bar{\mu}\tau}\ \vec{\tilde{\psi}}^1(\tau,\omega)\ d\tau\right) \times \int_{-\infty}^{s} \sigma(\sigma,\omega)\ d\sigma$, d'où :

$$\partial_s\ e^{\bar{\mu}s}\ \vec{\psi}(s,\vec{\omega})\big|_{s=0} = \vec{\mu}\ \vec{\psi}(0,\omega) + \partial_s\ \vec{\psi}(0,\vec{\omega}) = \vec{\mu}\ \vec{\psi}(0,\omega) + e^{-\bar{\mu}s}\ \vec{\tilde{\psi}}^1(s,\omega) - \sigma(s,\omega)\times$$

$$\times \int_R e^{-\bar{\mu}\tau}\ \vec{\tilde{\psi}}^1(\tau,\omega)\ d\tau)\Big|_{s=0}$$

$$= \vec{\tilde{\psi}}^1(0,\vec{\omega}) + \bar{\mu}\vec{\psi}(0,\vec{\omega}) = \vec{\tilde{\psi}}^1(0,\vec{\omega}) + \bar{\mu}\int_0^{\infty} e^{-\bar{\mu}\sigma}\ \vec{\tilde{\psi}}^1(\sigma,\omega)\ d\sigma$$

Finalement :

$$\vec{G}_k^2(\vec{\psi}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} [\vec{\tilde{\psi}}^1(0,\vec{\omega}) + \bar{\mu}\int_0^{\infty} e^{-\bar{\mu}\sigma}\ \vec{\tilde{\psi}}^1(\sigma,\omega)\ d\sigma]\ d\omega = -\frac{1}{4\pi}\ [\vec{\psi}^1(0)$$

$$+ \bar{\mu}\int_0^{\infty}\int_{|\omega|} e^{-\bar{\mu}\sigma}\ \vec{\tilde{\psi}}^1(\sigma,\omega)\ d\sigma\ d\omega\Big]$$

$$= \vec{\delta}^1(\vec{\psi}) + \frac{\bar{\mu}}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_{|\omega|=1} e^{-\bar{\mu}\sigma}\ \vec{\tilde{\psi}}^1(\sigma,\omega)\ d\sigma\ d\omega$$

Pour le second terme, les calculs sont identiques à ceux effectués par G. SCHIMDT (1) et F. PARSY (1) . On trouve finalement :

$\vec{G}_k^2(x,\mu) = \dfrac{1}{4\pi\mu}\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \dfrac{e^{-\mu/cr}-1}{r}\ \vec{x}_k$ pour $k = 4,5,6$; d'où :

$$G^1(x,\mu) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{4\pi\mu}\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\left[\dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}r}-1}{r}\ I_3\right] & \dfrac{1}{4\pi\ \mu^2}\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}r}-1}{r}\ I_3 & 0 \\ \dfrac{1}{4\pi}\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}r}}{r}\ I_3 & \dfrac{1}{4\pi\mu}\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}r}-1}{r}\ I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Les opérateurs $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}$ agissent sur les colonnes des 3×3 matrices

2°) *Méthode indirecte*

En transposant au cas vectoriel les résultats de LAX-PHILLIPS sur l'équation scalaire des ondes, on a pu définir l'extension du groupe $V_o(t)$ aux distributions, extension qu'on a vu être consistante ave notre extension de $S^1(t)$ dans le sens que :

$[V_o(t)\ \vec{f}]_1\ (\vec{\psi}) = [S^1(t)(\vec{f},0)]_1\ (\vec{\psi})$ pour $\vec{f}$ distribution à divergence nulle. On définit de la même manière le concept de distribution éventuellement sortante pour $V_o(t)$ et on y étend la représentation de translation R. En plus, on peut démontrer également le :

Théorème

1) L'équation $(B_o - \mu)\ \vec{f} = \vec{g}$ où $\vec{g}$ est à support compact admet une solution éventuellement sortante unique.

2) En particulier l'équation $(B_o - \mu)\ \Gamma(x,\mu) = \delta(x)\ I_6$ admet une solution unique $\Gamma(x,\mu)$, matrice 6×6 dont les vecteurs colonnes sont ev.s.

$\Gamma(x,\mu)$ est donné par :

$$\Gamma(x,\mu) = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} \dfrac{\mu}{c^2}\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c} r}}{r}\ I_3 & \dfrac{1}{c^2}\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c} r}}{r}\ I_3 \\ \dfrac{\mu^2}{c^2}\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c} r}}{r}\ I_3 + \delta(x)\ I_3 & \dfrac{\mu}{c^2}\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c} r}}{r}\ I_3 \end{bmatrix}$$

Lemme

Toute solution de l'équation $(B_o - \mu)\ \vec{f} = \vec{g}$ se décompose en la somme $\vec{f} = \vec{f}^o + \vec{f}^1$ où $\vec{f}^1$ et $\vec{f}^o$ vérifient respectivement :

$$(B_o^1 - \mu)\ \vec{f}^1 = \vec{g}^1 \quad \text{et} \qquad (B_o^o - \mu)\ \vec{f}^o = \vec{g}^o \quad , \quad \vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^6)$$

Preuve

$$\text{En effet } (B_o - \mu)\ \vec{f} = \vec{g} \iff \begin{cases} \vec{f}_2 = \mu\ \vec{f}_1 + \vec{g}_1 & ① \\ (c^2\ \Delta - \mu^2)\ \vec{f}_1 = \vec{g}_2 + \mu\ \vec{g}_1 & ② \end{cases}$$

$\vec{g}$ étant à support compact, est dans $\mathcal{D}'_{L^2}$, d'où la décomposition $\vec{g} = \vec{g}^1 \oplus \vec{g}^o$ avec $\operatorname{div} g^1 = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{g}^o = \vec{0}$.

(2) entraîne : $\vec{f}_1 = \frac{1}{\mu^2} [c^2 \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{f}_1 - (\vec{g}_2^o + \mu\, \vec{g}_1^o)] + \frac{1}{\mu^2} [-c^2\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}_1 - (\vec{g}_2^1 + \mu g_1^1)]$

$= \vec{f}_1^o + \vec{f}_1^1$ où :

$$\vec{f}_1^1 = \frac{1}{\mu^2} \; [-c^2\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}_1 - (\vec{g}_2^1 + \mu\, \vec{g}_1^1)] \text{ et}$$

$$\text{et} \quad \vec{f}_1^o = \frac{1}{\mu^2} [c^2\, \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{f}_1 - (\vec{g}_2^o + \mu\, \vec{g}_1^o)] \; .$$

Comme on voit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}_1^o = \vec{0}$ et $\operatorname{div} f_1^1 = 0$, d'où :

$$\begin{cases} \mu^2 f_1^1 = -c^2\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, f_1^1 - (\vec{g}_2^1 + \mu\, \vec{g}_1^1) \\ \vec{f}_2^1 = \mu\, \vec{f}_1^1 + \vec{g}_1^1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mu^2\, \vec{f}_1^o = c^2\, \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{f}_1^o - (\vec{g}_2^o + \mu\, \vec{g}_1^o) \\ \vec{f}_2^o = \mu\, \vec{f}_1^o + \vec{g}_1^o \end{cases}$$

où on a utilisé la décomposition induite sur $\vec{f}_2$: $\vec{f}_2 = (\mu\vec{f}_1^1 + \vec{g}_1^1) + (\mu\vec{f}_1^o + \vec{g}_1^o) = \vec{f}_2^1 + \vec{f}_2^o$.

Posant $\vec{f}^1 = (\vec{f}_1^1, \vec{f}_2^1)$ et $\vec{f}^o = (\vec{f}_1^o, \vec{f}_2^o)$, on obtient donc : $\vec{f} = \vec{f}^1 + \vec{f}^o$ avec :

$(B_o^1 - \mu)\, \vec{f}^1 = \vec{g}^1$ et $(B_o^o - \mu)\, \vec{f}^o = \vec{g}^o$ cqfd.

—> Ce lemme appliqué à l'équation $(B_o - \mu)\, \Gamma(x,\mu) = \delta(x)\, I_6$ entraîne que $\Gamma(x,\mu) = \Gamma^1 + \Gamma^o$ où $\Gamma^1(x,\mu)$ est solution de l'équation $(B_o^1 - \mu)\, \Gamma^1 = \delta^1\, I_6$, où Γ^1 est donné par $\Gamma^1 = \frac{1}{\mu} (B_o^1\, \Gamma - \delta^1\, I_6)$. Nous voyons donc que la 7×7 matrice :

$$F = \left| \begin{array}{c|c} \Gamma^1(x,\mu) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right| \quad \text{est solution de l'équation } (A_o^1 - \mu)\; F = (\delta I_7)^1$$

De plus $\Gamma^1(x,\mu)$ est éventuellement sortante pour le groupe $V_o(t)$, donc F est éventuellement sortante par $S^1(t)$. F est donc bien la solution cherchée. Un calcul élémentaire par $\Gamma^1 = \frac{1}{\mu} (B_o^1\, \Gamma - (\delta\Gamma_o)^1)$ donne exactement $G^1(x,\mu)$. En somme, "$G^1(x,\mu)$ est la partie à divergence nulle de $\Gamma\,(x,\mu)$".

3°) *Méthode "heuristique"* :

Partons par exemple de (h) $\equiv \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{G}_k^1 + \frac{\mu^2}{c^2}\vec{G}_k^1 = -\frac{1}{c^2}\,\delta^1\,\vec{x}_{k-3}$, $k = 4,5,6$. Nous savons déjà que cette équation admet une solution unique $\vec{G}_k^1$ telle que $(\vec{G}_k^1, \mu\,\vec{G}_k^1, 0)$ soit éventuellement sortante. De plus, pour tout μ appartenant à un ouvert connexe de $\rho(A_o^1)$, nous savons (par l'isomorphisme de la transformation de Fourier entre S'_x et S'_ξ) que cette équation admet une solution unique dans S'.

De l'équation (h) on a : $\frac{\mu^2}{c^2}\vec{G}_k^1 = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\vec{x}_{k-3}}{r} - \vec{G}_k^1\right)$, c'est-à-dire que $\vec{G}_k^1$ est obligatoirement de la forme $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\psi}_k$; (h) devient alors :

(h') : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\psi}_k - \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{\psi}_k + \frac{\mu^2}{c^2}\vec{\psi}_k + \frac{1}{c^2}\frac{\vec{x}_{k-3}}{r}\right] = \vec{0}$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\Delta\vec{\psi}_k - \frac{\mu^2}{c^2}\vec{\psi}_k - \frac{1}{c^2}\frac{\vec{x}_{k-3}}{r}\right] = 0 .$$

On cherche alors une distribution tempérée solution de $\Delta\vec{\psi}_k - \frac{\mu}{c^2}\left(\vec{\psi}_k + \frac{\vec{x}_{k-3}}{\mu^2 r}\right) = \vec{0}$ c'est-à-dire $\Delta\left(\vec{\psi}_k + \frac{\vec{x}_{k-3}}{\mu^2 r}\right) - \frac{\mu^2}{c^2}\left(\vec{\psi}_k + \frac{\vec{x}_{k-3}}{\mu^2 r}\right) = \frac{1}{\mu^2}\Delta\frac{\vec{x}_{k-3}}{\mu^2} = -\frac{1}{\mu^2}\delta(x)\,\vec{x}_{k-3}$

d'où : comme $\rho\,(A_o^1)$ compte deux composantes connexes :

1) Dans la 1ère composante {Re $\mu > 0$}, on prendra (pour rester dans S') :

$$\vec{\psi}_k + \frac{\vec{x}_{k-3}}{\mu^2 r} = \frac{1}{\mu^2}\frac{e^{-\frac{\mu}{c}r}}{r}\vec{x}_{k-3} \Rightarrow \vec{\psi}_k^{+} = \frac{1}{\mu^2}\frac{e^{-\frac{\mu}{c}r}-1}{r}\vec{x}_{k-3}$$

$$\Rightarrow \vec{G}_k^{1+} = \frac{1}{\mu^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\frac{e^{-\frac{\mu}{c}r}-1}{r}\vec{x}_{k-3}$$

2) Dans la 2ème composante (Re $\mu < 0$), ce sera :

$$\vec{\psi}_k^{-} = \frac{1}{2}\frac{e^{+\frac{\mu}{c}r}-1}{r}\vec{x}_{k-3} \Rightarrow \vec{G}_k^{1-} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\frac{e^{+\frac{\mu}{c}r}-1}{r}\vec{x}_{k-3}$$

En calculant $[S^1(t)\{\vec{G}_k^{1+}, \mu\,\vec{G}_k^{1+}, 0\}]$ par la formule de Poisson étendue aux distributions (calcul assez simple puisque les moyennes sphériques de fonctions dépendant uniquement de r sont assez simples à calculer) on voit qu'elle donne une onde sphérique divergente, ce qui veut dire en fait que $(\vec{G}_k^{1+}, \mu\,\vec{G}_k^{1+}, 0)$ est ev. sortante(Voir aussi un meilleur argument en p. 2 de l'Addendum à ce chapitre).

Il est intéressant de noter que la solution fondamentale evs coïncide avec la solution fondamentale tempérée dans le demi plan Re $\mu > 0$ et la solution fondamentale entrante avec la solution tempérée pour Re $\mu < 0$. En fait donc $G^+(x,\mu)$ est la distribution de $\mathcal{D}'$ obtenue en prolongeant à tout le plan complexe la distribution tempérée obtenue pour Re $\mu > 0$.

6. *SOLUTIONS FONDAMENTALES DE* $A_o - \mu\, I_7$ *ET CONDITIONS DE RADIATION*

Lemme

Soit $\vec{g} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, g_7) \in [\mathcal{D}'_{L^2}(R^3;C^3)]^2 \times \mathcal{D}'_{L^2}(R^3;C) \simeq \mathcal{D}'_{L^2}(R^3;C^7)$. Alors toute distribution solution de l'équation $(A_o-\mu)\vec{f} = \vec{g}$ admet la décomposition $\vec{f} = \vec{f}^o + \vec{f}^1$ où $\vec{f}^o$ et $\vec{f}^1$ sont solutions de : $(A_o^o - \mu)\vec{f}^o = \vec{g}^o$ et $(A_o^1-\mu)\ \vec{f}^1 = \vec{g}^1$ où $\vec{g} = \vec{g}^o \oplus \vec{g}^1$ est la décomposition canonique de $\vec{g}$ en $\vec{g}^1 \in [\mathcal{D}'^{\,1}_{L_2}(R^3;C^3)]^2 \times \{0\}$ et $\vec{g}^o \in [\mathcal{D}'^{\,o}_{L^2}(R^3;C^3)]^2 \times \mathcal{D}'_{L^2}(R^3;C)$.

Preuve

1) L'équation $(A_o-\mu)\ \vec{f} = \vec{g}$ équivaut à :

$$\begin{cases} (\vec{\nabla}\,\mathrm{div} - c^2\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}} - \mu^2)\ \vec{f}_1 - m\ \vec{\nabla}\ f_7 = \mu\ \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \\ -\eta\ \mu^2\ \mathrm{div}\ \vec{f}_1 + (\mu\ \Delta - \mu^2)\ f_7 = \eta\,\mu\,\mathrm{div}\ \vec{g}_1 + \mu\ g_7 \\ \vec{f}_2 = \mu\ \vec{f}_1 + \vec{g}_1 \end{cases}$$

d'où :

$$\mu^2 \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}\ \mathrm{div} - c^2\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}} & -m\ \vec{\nabla} \\ -\eta\ \mu^2\ \mathrm{div} & \mu\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\ \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \\ \eta\,\mathrm{div}\ \vec{g}_1 + \mu\ g_7 \end{pmatrix}, \text{c'est-à-dire}$$

$$(a_\mu - \mu^2) \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_7 \end{pmatrix} = D_\mu\ \vec{g} \quad \text{où} \quad a_\mu = a_\mu^1 + a_\mu^o\ ,\ a_\mu^1 = \left(\begin{array}{c|c} -c^2\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$a_\mu^o = \left(\begin{array}{c|c} \vec{\nabla}\ \mathrm{div} & -m\ \vec{\nabla} \\ \hline -\eta\mu^2\ \mathrm{div} & \mu\Delta \end{array}\right)$$

$$D_\mu = \left(\begin{array}{c|c|c} \mu\, I_3 & I_3 & 0 \\ \hline \mu\,\eta\,\mathrm{div} & 0 & \mu \end{array}\right)$$ est un opérateur différentiel du 1er ordre.

On a donc <u>les 3 équivalences</u> suivantes :

⟶ Pour tout $\vec{g} \in [\mathcal{D}'^{\,1}_{L^2}(R^3;C^3)]^2 \times \{0\}$, on a :

$$(A_o^1-\mu)\,\vec{f} = \vec{g} \iff \left\{\begin{array}{l} \vec{f}_2 = \mu\,\vec{f}_1 + \vec{g}_1 \\ (a_\mu^1-\mu^2)\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix} = D_\mu\,\vec{g} \end{array}\right\} \quad (e_1)$$

⟶ Pour tout $\vec{g} \in \mathcal{D}'_{L^2}(R^3;C^7)$:

$$(A_o-\mu)\,\vec{f} = \vec{g} \iff \left\{\begin{array}{l} \vec{f}_2 = \mu\,\vec{f}_1 + \vec{g}_1 \\ (a_\mu-\mu^2)\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix} = D_\mu\,\vec{g} \end{array}\right\} \quad (e)$$

⟶ $\forall\, \vec{g} \in [\mathcal{D}'^{\,o}_{L^2}(R^3;C^3)]^2 \times \mathcal{D}'_{L^2}(R^3;C)$:

$$(A_o^o-\mu)\vec{f} = \vec{g} \iff \left\{\begin{array}{l} \vec{f}_2 = \mu\,\vec{f}_1 + \vec{g}_1 \\ (a_\mu^o - \mu^2)\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix} = D_\mu\,\vec{g} \end{array}\right\} \quad (e_o)$$

2) On a : (e) $\Rightarrow$ $\mu^2\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix} = a_\mu\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix} - D_\mu\,\vec{g} = a_\mu^1\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix} - D_\mu\,\vec{g}^1 + a_\mu^o\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix} - D_\mu\, g^o$

avec $D_\mu\,\vec{g}^1 = \begin{pmatrix}\mu\,\vec{g}_1^1 + \vec{g}_2^1 \\ 0\end{pmatrix}$, $D_\mu\,\vec{g}^o = \begin{pmatrix}\mu\,\vec{g}_1^o + \vec{g}_2^o \\ \mu\,\eta\,\mathrm{div}\,\vec{g}_1^o + \mu\, g_7\end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix}^1 + \begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix}^0$, avec :

$$\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{\mu^2}\left[a_\mu^o\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix} - D_\mu\,\vec{g}^o\right] \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix}^1 = \frac{1}{\mu^2}\left[a_\mu^1\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_7\end{pmatrix} - D_\mu\,\vec{g}^1\right]$$

On vérifie facilement que $a^1_\mu\, a^o_\mu = 0 = a^o_\mu\, a^1_\mu$ et que $a^1_\mu\, D_\mu\, \vec{g}^o = 0$ et $a^o_\mu\, D_\mu\, \vec{g}^1 = \vec{0}$, donc :

$$a^1_\mu \begin{pmatrix} f_1 \\ f_7 \end{pmatrix}^0 = 0 = a^o_\mu \begin{pmatrix} f_1 \\ f_7 \end{pmatrix}^1 \text{ , d'où } a^o_\mu \begin{pmatrix} f_1 \\ f_7 \end{pmatrix} = a^o_\mu \begin{pmatrix} f_1 \\ f_7 \end{pmatrix}^0 \text{et } a^1_\mu \begin{pmatrix} f_1 \\ f_7 \end{pmatrix} = a^1_\mu \begin{pmatrix} f_1 \\ f_7 \end{pmatrix}^1 .$$

On a alors :

$$\mu^2 \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_7 \end{pmatrix}^0 = a^o_\mu \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_7 \end{pmatrix}^0 - D_\mu\, \vec{g}^o \quad \text{et} \quad \mu^2 \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_7 \end{pmatrix}^1 = a^1_\mu \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_7 \end{pmatrix}^1 - D_\mu\, \vec{g}^1$$

On en déduit que $\begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_7 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \vec{f}^1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire qu'on a en fait $\vec{f}_1 = \vec{f}^1_1 + \vec{f}^o_1$

où $\vec{f}^1_1$ vérifie l'équation : $\mu^2\, \vec{f}^1_1 = -\, c^2\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{f}^1_1 - (\mu\, \vec{g}^1_1 + \vec{g}^1_2)$ et $\vec{f}^o_1$ l'équation $\mu^2 \begin{pmatrix} \vec{f}^o_1 \\ f_7 \end{pmatrix} = a^o \begin{pmatrix} \vec{f}^o_1 \\ f_7 \end{pmatrix} - D_\mu\, \vec{g}^o$. On a donc en fait :

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_7 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \vec{f}^1_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_7 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} \vec{f}^o_1 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

On peut dès lors poser : $\vec{f}^1_2 = \vec{g}^1_1 + \mu\, \vec{f}^1_1$ et $\vec{f}^o_2 = \mu\, \vec{f}^o_1 + \vec{g}^o_1$ et alors $\vec{f}_2 = \vec{f}^1_2 + \vec{f}^o_2$. En résumé, on a donc décomposé $\vec{f}$ en $\vec{f} = \vec{f}^1 + \vec{f}^o$ avec $\vec{f}^1 = (\vec{f}^1_1, \vec{f}^1_2, 0)$ et $\vec{f}^o = (\vec{f}^o_1, \vec{f}^o_2, f_7)$. D'après les équivalences (e1) et (e0), on a :

$$(A^o_o - \mu)\, \vec{f}^o = \vec{g}^o \text{ et } (A^1_o - \mu)\vec{f}^1 = \vec{g}^1 .$$

La réciproque est triviale.

Corollaire

Posons $\delta^1\, I_7 = \left(\begin{array}{c|c} \delta^1\, I_6 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ et $\delta^o\, I_7 = \left(\begin{array}{cc} \delta^o\, I_6 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Toute solution de l'équation matricielle $(A_o - \mu)\, E(x,\mu) = \delta(x)\, I_7 = \delta^1\, I_7 + \delta^o\, I_7$ s'écrit sous la forme $E(x,\mu) = E^o(x,\mu) + E^1(x,\mu)$ où $E^o(x,\mu)$ et $E^1(x,\mu)$ sont des distributions solutions de $(A^o_o - \mu)\, E^o(x,\mu) = \delta^o\, I_7$ et $(A^1_o - \mu)\, E^1(x,\mu) = \delta^1\, I_7$ respectivement.

Preuve

Il suffit d'appliquer le lemme à chaque vecteur colonne de $E(x,\mu)$, sachant que le second membre est à support compact, donc dans $\mathcal{D}'_{L^2}$.

Définition

Une distribution $\vec{f} \in \mathcal{D}'(R^3;C^7)$ sera dite éventuellement t-sortante ssi $\vec{f} = \vec{f}^1 + \vec{f}^o$ où $\vec{f}^1$ est éventuellement sortante par $S^1(t)$ et $\vec{f}^o$ est une distribution tempérée. On a alors le :

Théorème

$\forall\ \mu \in C/\sigma_c(A_o^o)$, $\mu \neq 0$, $\forall\ \vec{g} \in \mathcal{D}'_{L^2}(R^3;C^7)$, $\vec{g} = \vec{g}^1 + \vec{g}^o$ étant la décomposition canonique de $\vec{g}$:

1) L'équation $(A_o^o-\mu)\ \vec{h}^o = \vec{g}^o$ admet une solution tempéré unique.

2) L'équation $(A_o-\mu)\ \vec{h} = \vec{g}$ admet une solution éventuellement t-sortante unique $\vec{h} = \vec{h}^o + \vec{h}^1$ où $\vec{h}^1$ est la solution éventuellement sortante unique de l'équation $(A_o^1-\mu)\ \vec{h}^1 = \vec{g}^1$.

Preuve

1) $\vec{g} \in \mathcal{D}'_{L^2} \Rightarrow \vec{g}^o \in \mathcal{S}'(R^3;C^7)$, d'où, par transformation de Fourier :

$\vec{h}^o = \mathcal{F}^{-1}\left[(\hat{A}_o^o(\xi) - \mu\ I)^{-I}\ \hat{\vec{g}}^o(\xi)\right]$; l'unicité étant immédiate puisque

$\text{dét}(\hat{A}_o^o(\xi) - \mu\ I) \neq 0$.

2) Le lemme précédent permet d'écrire $\vec{h} = \vec{h}^o + \vec{h}^1$ où $\vec{h}^1$ et $\vec{h}^o$ sont solutions de $(A_o^1-\mu)\ \vec{h}^1 = \vec{g}^1$ et $(A_o^o-\mu)\ \vec{h}^o = \vec{g}^o$. Alors :

$\vec{h}^1$ éventuellement sortante par $S^1(t) \Rightarrow \vec{h}^1$ est unique d'après le théorème.

$\vec{h}^o$ tempérée $\Rightarrow \vec{h}^o$ unique d'après 1). <u>cqfd</u> :

Corollaire

Pour $\mu \in C\setminus\sigma_c\ (A_o^o)$:

1) L'équation $(A_o^o-\mu)\ E_o(x,\mu) = (\delta I_7)^o$ admet une solution tempérée unique.

2) L'équation $(A_o-\mu)\ E\ (x,\mu) = \delta(x)\ I_7$ admet une solution fondamentale unique dont les vecteurs colonnes sont éventuellement t-sortants.

Preuve

Il suffit de remarquer que chaque vecteur colonne de $\delta\ (x)\ I_7$ et dans $\mathcal{E}'(R^3;C^7) \subset \mathcal{D}'_{L^2}(R^3;C^7)$ et d'appliquer le théorème précédent.

6.1. Construction de $\mathbf{E}(x,\mu)$

Nous savons que $E(x,\mu) = E^1(x,\mu) + E^o(x,\mu)$. On sait déjà que $E^1(x,\mu) = G^1(x,\mu)$. Il reste donc à calculer $E^o(x,\mu)$. On peut bien sûr utiliser la transformation de Fourier; nous allons ici plutôt utiliser une méthode "heuristique" comme au paragraphe précédent qui donnera le résultat cherché avec une grande simplicité.

Construction de $E^o(x,\mu)$.

Soit $\vec{E}_k = (\vec{E}_k^1, \vec{E}_k^2, E_k^7)$ un vecteur colonne de $E^o(x,\mu)$. L'équation $(A_o^o-\mu)\ E^o(x,\mu) = (\delta I_7)^o$ est alors équivalente à :

$$\vec{E}_k^2 - \mu\ \vec{E}_k^1 \begin{cases} \vec{\delta}_k^o & k = 1,2,3 \\ 0 & k = 4,5,6 \\ 0 & k = 7 \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\mathrm{div}\ \vec{E}_k^1 - \mu\vec{E}_k^2 - m\vec{\nabla}\ E_k^7 = \begin{cases} 0 & k = 1,2,3 \\ \vec{\delta}_k^o & k = 4,5,6 \\ 0 & k = 7 \end{cases}$$

$$-\eta \operatorname{div} \vec{E}_k^2 + (\Delta-\mu)\, E_k^7 = \begin{cases} 0 & k = 1,2,3 \\ 0 & k = 4,5,6 \\ \delta(x) & k = 7 \,. \end{cases}$$

$\boxed{k = 4,5,6}$

$$\begin{cases} \vec{E}_k^2 = \mu \vec{E}_k^1 & (1) \\ \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{E}_k^1 - \mu^2 \vec{E}_k^1 - m \vec{\nabla} E_k^7 = \delta^o \vec{x}_{k-3} = -\vec{\nabla} \operatorname{div} \dfrac{\vec{x}_k}{r} - 3 & (2) \\ (\Delta-\mu)\, E_k^7 - \eta\, \mu \operatorname{div} \vec{E}_k^1 = 0 & (3) \end{cases}$$

L'équation (2) entraine que $\vec{E}_k^1$ est de la forme $\vec{E}_k^1 = \vec{\nabla}\, \vartheta_k$. Posons en outre $E_k^7 = \theta_k$. (2) et (3) deviennent :

(I')
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\left(\Delta\, \vartheta_k - \mu^2\, \vartheta_k - m\, \theta_k + \operatorname{div} \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r}\right) = 0 \\ (\Delta-\mu)\, \theta_k - \eta\, \mu\, \Delta\, \vartheta_k = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire
$$\begin{cases} (\Delta-\mu^2)\, \vartheta_k - m\, \theta_k = -\operatorname{div} \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r} + C \quad \text{où } C \text{ est une constante} \\ (\Delta-\mu)\, \theta_k - \eta\, \mu\, \Delta\, \vartheta_k = 0 \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} (\Delta-\mu)\,(\Delta-\mu^2)\, \vartheta_k - \varepsilon\, \mu\, \Delta\, \vartheta_k = -(\Delta-\mu) \operatorname{div} \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r} - \mu\, C \\ (\Delta-\mu^2)(\Delta-\mu)\, \theta_k - \varepsilon\, \mu\, \Delta\, \theta_k = -\mu\, \eta\, \Delta \operatorname{div} \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r} \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} [\Delta^2 - \Delta\, \mu\, (\mu + 1 + \varepsilon) + \mu^3]\, \vartheta_k = -(\Delta-\mu) \operatorname{div} \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r} - C \\ [\Delta^2 - \Delta\, \mu\, (\mu + 1 + \varepsilon) + \mu^3]\, \theta_k = -\mu\, \eta\, \Delta \operatorname{div} \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r} \end{cases}$$

<u>En posant $d_1^2 = -z_1$, $d_2^2 = -z_2$</u> avec les déterminations $\operatorname{Im} d_{1,2} > 0$, où z_1 et z_2 sont les racines de l'équation caractéristique $Z^2 + \mu(\mu+1+\varepsilon)\, Z + \mu^3 = 0$ déjà étudiée au chapitre II, on obtient alors :

$$\begin{cases} (\Delta+d_1^2)\,(\Delta+d_2^2)\, \vartheta_k = -(\Delta-\mu) \operatorname{div} \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r} - C & (1)' \\ (\Delta+d_1^2)\,(\Delta+d_2^2)\, \theta_k = -\mu\, \eta\, \Delta \operatorname{div} \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r} & (2)' \end{cases}$$

Or $\mu \notin \sigma(A_o^o) \Rightarrow \operatorname{Im} z_{1,2} \neq 0$. Soit alors $S_k \in \mathcal{S}'$ l'unique solution de l'équation : $(\Delta+d_1^2)\,(\Delta+d_2^2)\, S_k = \operatorname{div} \dfrac{\vec{x}_k}{r}$ et Σ_k l'unique solution $\in \mathcal{S}'$ de de $(\Delta+d_1^2)\ (\Delta+d_2^2)\ \Sigma_k = -\mu\, C$. Il est immédiat que $\Sigma_k = -\dfrac{\mu C}{d_1^2 d_2^2}$ est une solution

$\in \mathcal{S}'$; c'est la solution puiqu'elle est unique.

Calcul de S_k

Soit $\psi_k = (\Delta+d_2^2)\ S_k$; alors $(\Delta+d_1^2)\ \psi_k = \operatorname{div} \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r}$, d'où

$$\Delta\,\psi_k + d_1^2\left(\psi_k - \frac{1}{d_1^2}\operatorname{div}\frac{\vec{x}_{k-3}}{r}\right) = 0 = (\Delta+d_1^2)\left[\psi_k - \frac{1}{d_1^2}\operatorname{div}\frac{\vec{x}_{k-3}}{r} + \frac{1}{d^2}\,\Delta\operatorname{div}\frac{\vec{x}_{k-3}}{r}\right]$$

c'est-à-dire $(\Delta+d_1^2)\left[\psi_k - \dfrac{1}{d_1^2}\operatorname{div}\dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r}\right] = \dfrac{1}{d_1^2}\operatorname{div}\delta(x)\ \vec{x}_{k-3}$, dont l'unique

solution tempérée est :

$$\psi_k - \frac{1}{d_1^2}\operatorname{div}\frac{\vec{x}_{k-3}}{r} = -\frac{1}{d_1^2}\operatorname{div}\frac{e^{id_1 r}}{r}\,\vec{x}_{k-3},\ \text{d'où}\ \psi_k = \frac{1}{d_1^2}\operatorname{div}\frac{e^{id_1 r}-1}{r}\,\vec{x}_{k-3} = (\Delta+d_2^2)S_k$$

On trouvera de même :

$$(\Delta+d_1^2)\ S_k = -\frac{1}{d_1^2}\operatorname{div}\frac{e^{id_2 r}-1}{r}\,\vec{x}_{k-3}$$

c'est-à-dire
$$(d_2^2-d_1^2)\ S_k = \left(\frac{1}{d_2^2}\operatorname{div}\frac{e^{id_2 r}}{r}\,\vec{x}_{k-3} - \frac{1}{d_1^2}\operatorname{div}\frac{e^{id_1 r}}{r}\,\vec{x}_{k-3}\right) + \frac{d_2^2-d_1^2}{d_1^2 d_2^2}\operatorname{div}\frac{\vec{x}_{k-3}}{r}\ ,\ \text{soit}$$

$$S_k = \frac{1}{d_2^2-d_1^2}\left[\frac{1}{d_2^2}\operatorname{div}\frac{e^{id_2 r}}{r}\,\vec{x}_{k-3} - \frac{1}{d_1^2}\operatorname{div}\frac{e^{id_1 r}}{r}\,\vec{x}_{k-3}\right] + \frac{1}{d_1^2 d_2^2}\operatorname{div}\frac{\vec{x}_{k-3}}{r}$$

On a alors $\vartheta_k = -(\Delta-\mu)\ \delta_k + \Sigma_k$ et $\theta_k = -\mu\,\eta\,\Delta\, S_k$

Or $(\Delta-\mu)\operatorname{div}\left[\dfrac{e^{idr}}{r}\ \vec{x}_{k-3}\right] = (\Delta+d^2-d^2-\mu)\operatorname{div}[-] = \operatorname{div}(\delta(x)\vec{x}_{k-3}) - (d^2+\mu)\operatorname{div}([-]$

$$\Delta\operatorname{div}\frac{e^{idr}}{r}\,\vec{x}_{k-3} = \operatorname{div}(\delta(x)\vec{x}_{k-3}) - \operatorname{div}\frac{e^{idr}}{r}\,\vec{x}_{k-3}$$

$$(\Delta-\mu)\ \mathrm{div}\ \frac{\vec{x}_{k-3}}{r} = \mathrm{div}\ (\delta(x)\vec{x}_{k-3}) - \mu\,\mathrm{div}\ \frac{\vec{x}_k}{r}$$; on en déduit :

$$\vartheta_k = \frac{1}{d_2^2-d_1^2}\left[\frac{d_2^2+\mu}{d_2^2}\ \mathrm{div}\ \frac{e^{id2r}}{r}\ \vec{x}_{k-3} - \frac{d_1^2\ \mu}{d_1^2}\ \mathrm{div}\ \frac{e^{id_1r}}{r}\ \vec{x}_{k-3}\right] + \frac{\mu}{d_1^2d_2^2}\ \mathrm{div}\ \frac{\vec{x}_{k-3}}{r} + \Sigma_k$$

$$\theta_k = \frac{\eta\mu}{d_2^2-d_1^2}\left[\mathrm{div}\ \frac{e^{id_2r}}{r}\ \vec{x}_{k-3} - \mathrm{div}\ \frac{e^{id_1r}}{r}\ \vec{x}_{k-3}\right]$$

Comme $d_1^2d_2^2 = \mu^3$, on a $\frac{\mu}{d_1^2d_2^2}\ \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \frac{\vec{x}_{k-3}}{r} = \frac{1}{\mu^2}\ \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \frac{\vec{x}_{k-3}}{r} = -\ \frac{\vec{\delta}^o{}_{k-3}}{\mu^2}$

Finalement :

pour k = 4,5,6, on obtient :

$$\begin{cases} \vec{E}_k^1(x,\mu) = \dfrac{1}{4\pi(d_2^2-d_1^2)}\ \dfrac{\vec{\nabla}\ \mathrm{div}(1+\frac{\mu}{d^2})e^{id_2r}-(1+\mu/d_1^2)e^{id_1r}}{r}\ \vec{x}_{k-3} - \dfrac{1}{\mu^2}\ \vec{\delta}^o_{k-3} \\[2ex] \vec{E}_k^2(x,\mu) = \mu\ \vec{E}_k^1(x,\mu) \\[2ex] E_k^7(x,\mu) = +\eta\ \dfrac{\mu}{4\pi(d_2^2-d_1^2)}\ \mathrm{div}\ \dfrac{e^{id_2r}-e^{id_1r}}{r}\ \vec{x}_{k-3} \end{cases}$$

$\boxed{k=1,2,3}$

$$\begin{cases} \vec{E}_k^2 = \mu\ \vec{E}_k^1 + \vec{\delta}_k^o & 1 \\ \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \vec{E}_k^1 - \mu^2\ E_k^1 - m\ \vec{\nabla}\ E_k^7 = \mu\ \vec{\delta}_k^o & 2 \\ (\Delta-\mu)\ E_k^7 - \mu\,\eta\,\mathrm{div}\ \vec{E}_k^1 = \eta\ \mathrm{div}\ \vec{\delta}_k^o & 3 \end{cases}$$

Vu (2), on pose $E_k^1 = \vec{\nabla}\vartheta_k$ et $E_k^7 = \theta_k$, d'où :

$$\begin{cases} (\Delta-\mu^2)\vartheta_k - m\ \theta_k = -\ \mu\ \mathrm{div}\ \dfrac{\vec{x}_k}{r} + C \\ (\Delta-\mu)\ \theta_k - \mu\,\eta\,\Delta\ \vartheta_k = -\eta\ \Delta\ \mathrm{div}\ \dfrac{\vec{x}_k}{r} \end{cases}$$

on a donc :

$$\mathcal{V}_k = -\mu(\Delta-\mu)S_k - \varepsilon\,\Delta\,S_k + \Sigma_k = \mu\,\mathcal{V}_{k+3} + \frac{\varepsilon}{\eta\mu}\,\theta_{k+3} + \Sigma_{k+3} = \mu\mathcal{V}_{k+3} + \frac{m}{\mu}\,\theta_{k+3} + \Sigma_{k+3}$$

$$\theta_k = \frac{1+\mu^2}{\mu}\;\theta_{k+3} = (\mu + \frac{1}{\mu})\;\theta_{k+3}$$

c'est-à-dire

$$k = 1,2,3 \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}^1_k = \mu\,\vec{E}^1_{k+3} + \frac{m}{\mu}\,\vec{\nabla}\,E^7_{k+3} \\ \vec{E}^2_k = \mu\,\vec{E}^1_k + \delta^o(x)\,\vec{x}_k \\ E^7_k = (\mu + \frac{1}{\mu})\,E^7_{k+3} \end{cases}$$

$\boxed{k=7}$

$$\begin{cases} \vec{E}^2_7 = \mu\,\vec{E}^1_7 \\ \vec{\nabla}\mathrm{div}\,\vec{E}^1_7 - \mu^2\,\vec{E}^1_7 - m\,\vec{\nabla}\,E^7_7 = 0 \\ (\Delta-\mu)\,E^7_7 - \mu\,\eta\,\mathrm{div}\,\vec{E}^1_7 = \delta(x) \end{cases}$$

On pose $\vec{E}^1_7 = \vec{\nabla}\psi_7$ et $E^7_7 = \theta_7$, d'où :

$$\begin{cases} (\Delta-\mu^2)\mathcal{V}_7 - m\theta_7 = C^{te} \\ (\Delta-\mu)\;\theta_7 - \eta\;\theta\,\Delta\,\mathcal{V}_7 = \delta(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\Delta+d_1^2)(\Delta+d_2^2)\;\mathcal{V}_7 = m\;\delta(x) - \mu\,C \\ (\Delta+d_1^2)(\Delta+d_2^2)\;\theta_7 = (\Delta-\mu^2)\delta\;(x) \end{cases}$$

Soit σ_k la distribution tempérée solution de $(\Delta+d_1^2)(\Delta+d_2^2)\sigma_k = \delta(x)$. On a alors :

$$(\Delta+d_2^2)\sigma_k = -\frac{e^{id_1r}}{r}\quad,\ (\Delta+d_1^2)\sigma_k = -\frac{e^{id_2r}}{r}\quad,\ \text{soit :}$$

$$\sigma_k = \frac{1}{d_2^2-d^2}\;\left(\frac{e^{id_2r} - e^{id_1r}}{r}\right)$$

Et alors $\mathcal{V}_k = m\,\sigma_k + \mathrm{cte}$ et $\theta_k = (\Delta-\mu^2)\;\sigma_k$ c'est-à-dire finalement :

$$\boxed{\vec{E}^1_7 = \frac{m}{4\pi(d_2^2-d_1^2)}\;\vec{\nabla}\,\frac{e^{id_2r} - e^{id_1r}}{r}\;;\;\vec{E}^2_7 = \mu\,\vec{E}^1_7\;;\;E^7_7 = \frac{1}{4\pi(d_2^2-d_1^2)} \times \frac{(\mu^2+d_2^2)e^{id_2r} - (\mu^2+d_1^2)e^{id_1r}}{r}}$$

On remarquera qu'en réalité $E^o(x,\mu)$ est dans $\mathcal{D}'_{L^2}$.

Théorème

1) $\forall \mu \in \rho(A_o^o)$, l'équation $(A_o^o-\mu)\, E_o(x,\mu) = \delta^o\, I_7$ admet une solution tempérée unique dont les vecteurs colonnes sont donnés par les formules précédentes.

2) $\forall \mu \in \rho(A_o^o)$, l'équation $(A_o-\mu)\, E(x,\mu) = \delta(x)\, I_7$ admet une solution éventuellement t-sortante unique $E(x,\mu) = E^1(x,\mu) + E^o(x,\mu)$, et dont les vecteurs colonnes sont donnés par :

k = 4,5,6

$$\begin{cases} E_k^1(x,\mu) = \dfrac{1}{4\pi\mu^2}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\dfrac{e^{-\mu/_c r}}{r}\,\vec{x}_{k-3} + \\ \qquad + \dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{1}{d_2^2-d_1^2}\,\vec{\nabla}\,\text{div}\,\dfrac{(1+\mu/d_2^2)e^{id_2 r}-(1+\mu/d_1^2)e^{id_1 r}}{r}\,\vec{x}_{k-3} - \dfrac{1}{\mu^2}\,\delta(x)\,\vec{x}_{k-3} \\ E_k^2(x,\mu) = \mu\,\vec{E}_k^1 \\ E_k^7(x,\mu) = \eta\,\dfrac{\mu}{d_2^2-d_1^2}\,\text{div}\,\dfrac{e^{id_2 r}-e^{id_1 r}}{r}\,\vec{x}_{k-3} \end{cases}$$

k = 1,2,3

$$\begin{cases} \vec{E}_k^1(x,\mu) = \dfrac{1}{4\pi\mu}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}r}}{r}\,\vec{x}_k + \dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{\mu}{d_2^2-d_1^2}\,\vec{\nabla}\,\text{div}\,\dfrac{(1+\mu/d_2^2)e^{id_2 r}-(1+\mu/d_1^2)e^{id_1 r}}{r}\,\vec{x}_k \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon}{4\pi(d_2^2-d_1^2)}\,\vec{\nabla}\,\text{div}\,\dfrac{e^{id_2 r}-e^{id_1 r}}{r}\,\vec{x}_k - \dfrac{1}{\mu}\,\delta(x)\,\vec{x}_k \\ \vec{E}_k^2 = \mu\,\vec{E}_k^1 + \delta(x)\,\vec{x}_k \\ E_k^7 = \dfrac{\eta}{4\pi}\cdot\dfrac{\mu^2+1}{d_2^2-d_1^2}\,\text{div}\,\dfrac{e^{id_2 r}-e^{id_1 r}}{r}\,\vec{x}_k \end{cases}$$

k = 7

$$\left\{ \vec{E}_7^1 = \frac{m}{4\pi(d_2^2-d_1^2}\,\vec{\nabla}\,\frac{e^{id_2 r}-e^{id_1 r}}{r}\,;\; \vec{E}_7^2 = \mu\,\vec{E}_7^1;\; E_7^7 = \frac{1}{4\pi(d_2^2-d_1^2)}\times\frac{(\mu^2+d_2^2)e^{id_2 r}-(\mu^2+d_1^2)e^{id_1 r}}{r}\right.$$

Cas où $\mu \in P$ $(d_1^2 = d_2^2 = d^2)$

On a alors $d_1^2 = d_2^2 = d^2 = \frac{1}{2}\ \mu(\mu+1+\varepsilon)$ et $d^4 = \mu^3$, $\mathrm{Im}\ d \geq 0$.

Comme $\mu \in P$, on a $\mu \neq 0$ et $\mu \neq -(1+\varepsilon)$, donc $d^2 \neq 0$.

ψ_k et θ_k vérifient alors les équations :

k = 4,5,6 : $\left\{\begin{array}{l}(\Delta+d^2)^2\ \psi_k = -(\Delta-\mu)\ \mathrm{div}\ \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r} - \mu C \\ (\Delta+d^2)^2\ \theta_k = -\mu\eta\Delta\ \mathrm{div}\ \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r}\end{array}\right.$, k = 7 $\left\{\begin{array}{l}(\Delta+d^2)^2\ \psi_7 = m\delta(x)-\mu C \\ (\Delta+d^2)^2\ \theta_7 = \delta(x)\end{array}\right.$

k = 1,2,3 : $\left\{\begin{array}{l}(\Delta+d^2)\ \psi_k = -\mu(\Delta-\mu)\ \mathrm{div}\ \dfrac{\vec{x}_k}{r} - \varepsilon\Delta\ \mathrm{div}\ \dfrac{\vec{x}_k}{r} - \mu C \\ (\Delta+d^2)^2\theta_k = -\mu(1+\mu^2)\ \Delta\ \mathrm{div}\ \dfrac{\vec{x}_k}{r}\end{array}\right.$

Comme pour le cas $d_1^2 \neq d_2^2$, on peut en fait négliger les termes en μC, puisqu'ils n'interviendront pas en fin de compte dans les $\vec{E}_k$. On commence par :

$\boxed{k = 4,5,6}$:

Calcul de S_k : $(\Delta+d^2)^2\ S_k = \mathrm{div}\ \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r}$. On pose $\psi_k = (\Delta+d^2)\ \psi_k \Rightarrow (\Delta+d^2)\psi_k = \mathrm{div}\ \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r}$.

Alors : $\psi_k = -\dfrac{1}{d^2}\ \mathrm{div}\ \dfrac{e^{idr}-1}{r}\ \vec{x}_{k-3}$; il s'agit donc de résoudre :

$(\Delta+d^2)\ S_k = -\dfrac{1}{d^2}\ \mathrm{div}\ \dfrac{e^{idr}}{r}\ \vec{x}_{k-3} + \dfrac{1}{d^2}\ \mathrm{div}\ \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r}$, d'où $S_k = S_k^1 + S_k^2$ avec :

$(\Delta+d^2)\ S_k^1 = -\dfrac{1}{d^2}\ \mathrm{div}\ \dfrac{e^{idr}-1}{r}\ \vec{x}_{k-3}$ et $(\Delta+d^2)\ S_k^2 = \dfrac{1}{d^2}\ \mathrm{div}\ \dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r}$, donc tout de suite : $S_k^2 = -\dfrac{1}{d^4}\ \mathrm{div}\ \dfrac{e^{idr}-1}{r}\ \vec{x}_{k-3} = -\dfrac{1}{\mu^3}\ \mathrm{div}\ \dfrac{e^{idr}-1}{r}\ \vec{x}_{k-3} = \dfrac{1}{d^2}\ \psi_k$.

Pour S_k^1, on part de :

$$(\Delta+d^2)\ e^{idr} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + d^2\right)e^{idr} = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\ e^{idr} = 2id\ \frac{e^{idr}}{r}$$

$$\Rightarrow S_k^1 = -\frac{1}{d^2}\cdot\frac{1}{2id}\ \mathrm{div}\ e^{idr}\ \vec{x}_{k-3}$$

c'est-à-dire :

$$S_k = -\frac{1}{\mu^3}\ \mathrm{div}\ \frac{e^{idr}-1}{r}\ \vec{x}_{k-3} - \frac{1}{2id^3}\ \mathrm{div}\ e^{idr}\ \vec{x}_{k-3} = \frac{1}{d^2}\ \psi_k - \frac{1}{2id^3}\ \mathrm{div}\ e^{idr}\ \vec{x}_{k-3}.$$

. On a alors :

$$\vartheta_k = -(\Delta-\mu)S_k = -\ (\Delta+d^2-(d^2+\mu))S_k = -\psi_k+(d^2+\mu)\left[\frac{1}{d^2}\psi_k - \frac{1}{2id^3}\,\mathrm{div}\, e^{idr}\,\vec{x}_{k-3}\right]$$

$$= \frac{\mu}{d^2}\psi_k - \frac{d^2-\mu}{2id^3}\,\mathrm{div}\, e^{idr}\,\vec{x}_{k-3} = -\frac{1}{\mu^2}\,\mathrm{div}\,\frac{e^{idr}-1}{r}\,\vec{x}_{k-3} + 2i\,\frac{d^2+\mu}{2d^3}\,\mathrm{div}\, e^{idr}\,\vec{x}_{k-3}$$

$$\theta_k = -\ \mu\ \eta\ \Delta\ S_k = -\mu\ \eta\left[\Delta + d^2 - d^2\right]S_k = 2i\,\mu\ \eta\ \frac{1}{2d}\,\mathrm{div}\, e^{idr}\,\vec{x}_{k-3}$$

d'où finalement :

<u>$k = 4,5,6$</u>

$$\begin{cases} 4\pi\,\vec{E}^1_k(x,\mu) = -\dfrac{1}{\mu^2}\,\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\dfrac{e^{idr}}{r}\,\vec{x}_{k-3} - \dfrac{d^2+\mu}{2id^3}\,\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\, e^{idr}\,\vec{x}_{k-3} + \dfrac{1}{\mu^2}\,\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\dfrac{\vec{x}_{k-3}}{r} \\ \vec{E}^2_k(x,\mu) = \mu\,\vec{E}^1_k\,(x,\mu) \\ E^7_k = -\ \eta\,\dfrac{\mu}{2id}\ \mathrm{div}\, e^{idr}\,\vec{x}_{k-3} \end{cases}$$

$$\underline{k=1,2,3}\ \begin{cases} \vec{E}^1_k(x,\mu) = \mu\,\vec{E}^1_{k+3}(x,\mu) + \dfrac{m}{\mu}\ E^7_{k+3} \\ \vec{E}^2_k(x,\mu) = \mu\,\vec{E}^1_k + \delta^o(x)\,\vec{x}_k \\ E^7_k = (\mu + \dfrac{1}{\mu})\,E^7_{k+3}\ . \end{cases}$$

$\boxed{k = 7}$

On doit avoir : $(\Delta+d^2)^2\ \vartheta_7 = m\,\delta(x)$, d'où $(\Delta+d^2)\vartheta_7 = -m\,\dfrac{e^{idr}}{r}$, d'où $\vartheta_7 = -\dfrac{m}{2id}\,e^{idr}$ et $\theta_7 = -\dfrac{1}{2id}\ e^{idr}$

c'est-à-dire :

$$\{E^1_7 = -\frac{m}{2id}\,\vec{\nabla}\,e^{idr}\quad ;\quad \vec{E}^2_7 = \mu\,\vec{E}^1_7;\ E^7_7 = -\frac{1}{2id}\ e^{idr}\,\}\ .$$

Remarques

1) Ce calcul direct coïncide avec celui obtenu en faisant tendre "formellement" (on peut rendre plus rigoureux) d_2^2 et d_1^2 vers d^2. Montrons-le sur S_k par exemple :

$$(d_2^2-d_1^2)\, S_k = \frac{1}{d_2^2} \operatorname{div} \frac{e^{id_2 r}}{r} \vec{x}_{k-3} - \frac{1}{d_1^2} \operatorname{div} \frac{e^{id_1 r}}{r} \vec{x}_{k-3} + \frac{d_2^2-d_1^2}{d_1^2\, d_2^2} \operatorname{div} \frac{\vec{x}_{k-3}}{r}$$

on pose $d_1 = d(1+\varepsilon_1)$ $\quad d_2 = d(1+\varepsilon_2)$. Alors $\dfrac{e^{id_j r}}{r} = \dfrac{e^{idr}}{r}.e^{id_j dr} \simeq \dfrac{e^{idr}}{r}(1+idr\varepsilon_i)$

$d_2^2-d_1^2 \simeq d^2(1+2\varepsilon_2-1-2\varepsilon_1) = 2d^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$ d'où

$$2d^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)S_k = \frac{1}{d^2} \operatorname{div} \frac{e^{idr}}{r} \left(\frac{1+id\varepsilon_2 r}{1+2\varepsilon_2} - \frac{1+idr\varepsilon_1}{1+2\varepsilon_1} \right) + \frac{1}{d^4} \operatorname{div} \frac{\vec{x}_{k-3}}{r}$$

$$\simeq \operatorname{div} \frac{e^{idr}}{d^2 r} (idr-2)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\vec{x}_{k-3} + \frac{1}{d^4} \operatorname{div} \frac{\vec{x}_{k-3}}{r} \text{ , donc qd } \varepsilon_{1,2} \to 0 :$$

$$S_k \longrightarrow \frac{1}{d^4} \operatorname{div} \frac{e^{idr}}{r} (idr-2)\, \vec{x}_{k-3}\, \frac{1}{4} \operatorname{div} \frac{\vec{x}_{k-3}}{r} = -\frac{1}{3} \operatorname{div} \frac{e^{idr}-1}{r} \vec{x}_{k-3}$$

$$- \frac{1}{2id^3} \operatorname{div} e^{idr}\, \vec{x}_{k-3} \qquad \text{cqfd}$$

2) A partir de cette remarque , on s'abstiendra dorénavant de faire des calculs pour le cas $\mu \in P$. On procèdera "par passage à la limite" étant entendu qu'on ne cherche que le résultat.

6.2. Cas de découplage ($m = \eta = 0$). *Cas de l'Elasticité.*

Pour $m = \eta = 0$ ($\Rightarrow \varepsilon = 0$) on a l'équation

$Z^2 + \mu\,(\mu+1)\,Z + \mu^3 = (Z+\mu)\,(Z+\mu^2) = 0$, d'où $d_1^2 = -\mu^1$ et $d_2^2 = -\mu^2$.

Alors $d_2^2+\mu=0$, $\dfrac{\mu}{d_2^2-d_1^2}\;\dfrac{d_1^2+\mu}{d_1^2} = \dfrac{\mu}{\mu^2-\mu} \cdot \dfrac{\mu-\mu^2}{-\mu^2} = \dfrac{1}{\mu}$, $\dfrac{\mu^2+d_2^2}{d_2^2-d_1^2} = \dfrac{\mu^2-\mu}{-\mu^2+\mu} = 1$.

En notant $E(x,\mu;m,\eta)$ pour montrer la dépendance en m et η , on obtient alors :

$$E(x,\mu;0,0)=\frac{1}{4\pi}\left[\begin{array}{ccc}
-\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\frac{e^{-\mu r}-1}{r}I_3+\frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\frac{e^{-\frac{\mu}{c}r}-1}{r}I_3 & \frac{I}{\mu^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\frac{e^{-\frac{\mu}{c}r}-1}{r}I_3-\frac{1}{\mu^2}\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\frac{e^{-\mu r}-1}{r}I_3 & 0 \\
-\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\frac{e^{-\mu r}}{r}I_3+\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\frac{e^{-\mu/c\ r}}{r}I_3 & \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\frac{e^{-\frac{\mu}{c}r}-1}{r}I_3-\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\frac{e^{-\mu r}-1}{r}I_3 & \\
0 & 0 & -\frac{e^{-\sqrt{\mu}r}}{r}
\end{array}\right]$$

$$=\begin{pmatrix} Ge(x,\mu) & 0 \\ 0 & -\frac{e^{-\sqrt{\mu r}}}{4\pi r}\end{pmatrix}$$

où $Ge(x,\mu)$ est la 6×6 matrice fondamentale éventuellement sortante de l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & I \\ \frac{\Delta^*}{\lambda+2\mu} & 0\end{pmatrix}$ de l'élasticité (voir F. PARSY, R. LEIS, Kupradze).

Ce faisant d'ailleurs, on corrige les solutions fondamentales qu'on trouve dans Kupradze, Leis et F. Parsy. En effet les solutions de $(\Delta^*-\mu^2)\ \vec{u}=\delta I_3$ que donnent ces auteurs ne sont valables qu'en dehors de l'origine et ne sont pas des solutions au sens des distributions. Cependant elles coïncident avec la nôtre en dehors de l'origine (il n'y manque que les termes en distribution de Dirac)... $-\frac{e^{-\sqrt{\mu}r}}{4\pi r}$ est alors la solution tempérée de $(\Delta-\mu)e=\delta(x)$ dans l'ouvert connexe $C\setminus\{$axe réel négatif$\}$. A noter qu'alors le spectre de A_o se réduit à l'axe imaginaire (spectre de $\begin{pmatrix} 0 & I \\ \frac{\Delta^*}{\lambda+2\mu} & 0\end{pmatrix}$), union l'axe réel négatif (spectre de Δ).

Remarques

1) La forme des vecteurs colonnes de $E(x,\mu;m,\eta)$ montre qu'à l'instar du semi-groupe $T_o(t)$ (cf. Chap. II) on peut l'écrire sous la forme :

$$E=E_\mu^{(o)}+E_T^{(o)}+m\,E_m^{(o)}+\eta\,E^{(o)}+\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon^p(E^{(p)}+E_T^{(p)}+m\,E_m^{(p)}+\eta\,E^{(p)},\ \text{où}$$

les quatre termes peuvent avoir des interprétations analogues à celles des pages . Ceci est normal puisque la résolvante $R(\mu ; A_o)$ n'est autre, pour $\mathrm{Re}\,\mu > 0$, que la transformée de Laplace (qui est linéaire !) du semi-groupe $T_o(t)$

2) Les opérateurs E_M, E_T, E_m, E_η dépendent de ε et peuvent être développés en série de puissances de η, m. Nous aurons un développement de la forme :

$$E = E_M^{(o)} + E_T^{(o)} + m\, E_m^{(o)} + \eta\, E_\eta^{(o)} + \sum_1^\infty \varepsilon^p (E_M^{(p)} + E_T^{(p)} + m\, E_m^{(p)} + \eta\, E_\eta^{(p)}),$$ où

$E^{(p)}$ est le coefficient d'ordre p du développement de E.

En particulier, on a :

$$E_M^{(o)} = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} Ge(x,\mu) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_T^{(o)} = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{e^{-\sqrt{\mu} r}}{r} \end{array} \right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_m^{(o)} = \frac{1}{4\pi(\mu^2-\mu)} \begin{bmatrix} 0 & \vec{\nabla}\, \frac{e^{-\mu r} - e^{-\sqrt{\mu} r}}{r} \\ 0 & \mu\vec{\nabla}\, \frac{e^{-\mu r} - e^{-\sqrt{\mu} r}}{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_\eta^{(o)} = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu+1}{-\mu+1}\,\mathrm{div}\, \frac{e^{-\mu r} - e^{-\sqrt{\mu} r}}{r}\, \vec{x}_k & \frac{1}{1-\mu}\,\mathrm{div}\, \frac{e^{-\mu r} - e^{-\sqrt{\mu} r}}{r}\, \vec{x}_{k-3} & 0 \end{bmatrix}$$

6.3. *Conditions de Radiation*

Définition

Une solution de l'équation $c^2\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, f + \mu^2 \vec{f} = \vec{g}$ où $\mathrm{div}\, \vec{g} = 0$ et $\vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^3)$ est dite μ - sortante ssi $(\vec{f}, \mu\vec{f}, 0)$ est evs par $S^1(t)$.

Corollaire 1

L'équation $(c^2\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}} + \mu^2)\, \vec{f} = \vec{g}$ où $\vec{g}$ est à divergence nulle et à support compact possède une unique solution μ -sortante $\vec{f} = \gamma_\mu^1 * \vec{g}$ où γ_μ^1 est l'unique 3×3 matrice solution de $(c^2\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}} + \mu^2)\, \gamma_\mu^1 = (\delta I_3)^1$ aux vecteurs colonnes μ-sortants; γ_μ^1 est donnée par :

$$\gamma_\mu{}^1 = \frac{1}{4\pi\mu^2}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \frac{e^{-\mu/c\, r} - 1}{r}\, I_3$$

Définition

Une distribution $\vec{h} = (\vec{h}_1, h_4) \in \mathcal{D}'(R^3;C^4)$ est dite μ-t-sortante si la distribution $(\vec{h}_1, \mu\,\vec{h}_1, h_4) \in \mathcal{D}'(R^3;C^7)$ est éventuellement t-sortante. (p.)

On a alors le :

Corollaire 2

Pour tout $\mu \in C \setminus \sigma_c(A_o^o)$, l'équation $(a_\mu - \mu^2)\,\vec{f} = \vec{g}$ où $\vec{g} = (\vec{g}_1, g_4) \in \mathcal{E}'(R^3;C^4)$ admet une solution μ-t-sortante unique. Cette solution est la somme d'une distribution μ-sortante à divergence nulle $(\vec{f}_1, 0)$ et d'une distribution tempérée à rotationnel nul $(\vec{f}^o, f_4)$. Elle est donnée par $\vec{f} = \Gamma * \vec{g}$ où Γ est l'unique solution μ-t-sortante de l'équation $(a_\mu - \mu^2) \times \Gamma(x,\mu) = \delta(x)\, I_4$. $\Gamma(x,\mu)$ est donnée par :

$$\Gamma(x,\mu) = \frac{1}{4\pi(d_2^2 - d_1^2)} \left[\begin{array}{l} \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\dfrac{(1+\mu/d_2^2)e^{id_2 r} - (1+\mu/d_1^2)e^{id_1 r}}{r}\, I_3 + \dfrac{d_2^2 - d_2^2}{\mu^2}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}r}}{r}\, I_3 - \dfrac{d_2^2 - d_1^2}{\mu^2}\,\delta(x)\, I_3 \\ -\mu\,\eta\,\mathrm{div}\,\dfrac{e^{id_1 r} - e^{id_2 r}}{r}\, I_3 \\ -\dfrac{m}{\mu}\,\vec{\nabla}\,\dfrac{e^{id_2 r} - e^{id_1 r}}{r} \\ \dfrac{(\mu^2 + d_2^2)e^{id_2 r} - (\mu^2 + d_1^2)e^{id_1 r}}{\mu . r} \end{array}\right]$$

Preuve

Posons $\vec{f}_2 = \mu\,\vec{f}_1$. On a alors l'équivalence

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{f}_2 = \mu\,\vec{f}_1 \\ (a_\mu - \mu^2)\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ f_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{g}_1 \\ g_4\end{pmatrix}\end{array}\right\} \iff \left\{ (A_o - \mu)\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ f_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{g}_1 \\ g_4\end{pmatrix}\right.$$

d'où suivent à l'évidence tous les résultats sur $\vec{f}$.

Pour $\Gamma(x,\mu)$, il suffit de prendre successivement pour $\vec{g}$:

$i = 1,2,3 \qquad \vec{g}^{\,i} = (\delta(x)\ \vec{x}_i, 0)$ et $i = 4 \qquad \vec{g}^{\,4} = (\vec{0}, \delta(x)\ )$.

On obtient donc Γ à partir de $E(x,\mu)$ en extrayant les termes dans les colonnes 4,5,6,7 et des lignes 1,2,3,7 et en les renumérotant dans l'ordre.

Remarque

Au lieu de travailler avec l'opérateur a_μ(qui suppose d'ailleurs $\mu \neq 0$), on peut introduire l'opérateur $b_\mu = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}\mathrm{div} - c^2\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}} - \mu^2\ I_3 & -m\ \vec{\nabla} \\ -\eta\,\mu\ \mathrm{div} & \Delta - \mu \end{pmatrix}$

qui diffère de a_μ par la dernière ligne seulement (division par μ).

Alors l'équation $(A_o - \mu)\ \vec{f} = \vec{g}$ est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_2 = \mu\ \vec{f}_1 + \vec{g}_1 \\ b_\mu \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mu\,\vec{g}_1 + \vec{g}_2 \\ \eta\ \mathrm{div}\ \vec{g}_1 + g_7 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Alors le corollaire 2 peut s'énoncer d'une façn évidente en terme de b_μ ; nous obtenons ainsi une autre solution fondamentale μ-t-sortante de b_μ obtenue à partir de $\Gamma(x,\mu)$ en multipliant la dernière colonne par μ. Nous l'appellerons encore $\Gamma(x,\mu)$.

C'est la matrice $b_{-i\omega}$ qu'a étudié Jentsch dans son papier sur les ondes thermo-élastiques stationnaires (sinusoïdales en t). Pour $\mu = -i\omega$, nous trouvons la même matrice fondamentale dans Jentsch, sauf le terme $-\frac{1}{\mu^2}\ \delta(x)\ I_3$ que Jentsch (suivant Kupradze, Burchuladze)...) omet, car il ne fait pas clairement ses calculs au sens des distributions (sa solution est bonne en dehors de l'origine seulement).(cf. Jentsch (   )

Les opérateurs $A_o^\dagger$, $a^\dagger$, $b^\dagger$:

Soient $\vec{v} = (\vec{v}_1, \mu\, \vec{v}_1, v_7)$ et $\vec{u} = (\vec{0}, \vec{u}_2, u_7)$. Alors :

$$\vec{u}.(A_o-\mu)\ \vec{v} = 0 + \vec{u}_2.(\frac{\Delta^* \vec{v}_1}{\lambda+2\mu} - m\ \vec{\nabla}\ v_7 - \mu^2\ v_1) + u_7.[(\Delta-\mu)v_7 - \eta\mu\, \mathrm{div}\ \vec{v}_1] = \begin{pmatrix}\vec{u}_2\\ u_7\end{pmatrix}.b_\mu\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ v_7\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}.(B-\mu)\vec{u} = \begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \\ v_7\end{pmatrix}.\ b_\mu^+\begin{pmatrix}\vec{u}_2\\ \\ u_7\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad b_\mu^+ = \begin{pmatrix}\frac{\Delta^*}{\lambda+2\mu} - \mu^2 & \eta\mu\vec{\nabla}\\ \\ m\ \mathrm{div} & \Delta-\mu\end{pmatrix}$$, qui s'obtient

de b_μ en échangeant $-m$ en η et $-\eta\mu$ en $+m$.(pour B voir p. Chap. II, B est l'adjoint L^2 de A_o)

La relation ( ) du chapitre II devient alors :

$\forall\ \Omega$, ouvert de bord C^1, on a, pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suffisamment réguliers, par exemple $(C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}))$:

$$\int_\Omega \vec{u}.(A_o-\mu)\vec{v} = \int_\Omega \vec{v}.(B-\mu)u + \frac{1}{+2}\int_{\partial\Omega} [\vec{u}_2.\vec{t}(\vec{n},\vec{v}_1) - \vec{v}_1.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}_2)\ dS + \int_{\partial\Omega} (u_7\frac{\partial v_7}{\partial n} - v_7\frac{\partial u_7}{\partial n})dS$$

$$+ \int_{\partial\Omega} (-m\ v_7\ \vec{u}_2.\vec{n} - \eta\ \mu\ u_7\ \vec{v}_1.\vec{n})dS$$

En posant $\vec{u} = (\vec{u}_1, u_4)$ et $\vec{v} = (\vec{v}_1, v_4)$ on a donc :

$$\int_\Omega (\vec{u}.b_\mu\ \vec{v} - \vec{v}.b_\mu^\dagger\ \vec{u})dx = \int_{\partial\Omega} (\vec{u}_1.[\frac{1}{\lambda'+2\mu'}\vec{t}(\vec{n},\vec{v}_1) - m\ v_4\ \vec{n}] - \vec{v}_1.[\frac{1}{\lambda'+2\mu'}\vec{t}(\vec{n},\vec{u}_1) + \eta\,\mu u_4\,\vec{n}])dS\ .$$

$$+ \int_{\partial\Omega} (u_4\frac{\partial v_4}{\partial n} - v_4\frac{\partial u_4}{\partial n})\ dS$$

On pose alors :

$$T_\mu(\vec{n},\vec{u}) = \frac{\vec{t}(n,\vec{u}_1)}{\lambda'+2\mu'} - m\ u_4\ \vec{n}\ ;\ T_\mu^\dagger\ (\vec{n},\vec{u}) = \frac{\vec{t}(\vec{n},\vec{u}_1)}{\lambda'+2\mu'} + \mu\,\eta\ u_4\ \vec{n}$$

$$R_\mu(\vec{n},\vec{u}) = \begin{bmatrix} T\ (\vec{n},\vec{u})\\ \\ \frac{\partial}{\partial n}\ u_4\end{bmatrix} \quad ;\ R_\mu^\dagger(\vec{n},\vec{u}) = \begin{bmatrix} T_\mu^\dagger(n,\vec{u})\\ \\ \frac{\partial}{\partial n}\ u_4\end{bmatrix}$$

$$P_\mu(\vec{n},\vec{u}) = \begin{bmatrix} T_\mu(\vec{n},\vec{u}) \\ -u_4 \end{bmatrix} \; ; \; P^\dagger_\mu(\vec{n},\vec{u}) = \begin{bmatrix} T^+_\mu(\vec{n},\vec{u}) \\ -u_4 \end{bmatrix} \text{ et } Q_\mu(\vec{n}.\vec{u}) = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \frac{\partial}{\partial n}\, u_4 \end{bmatrix} .$$

On obtient alors :

$$\int_\Omega (\vec{u}.b_\mu \vec{v} - \vec{v}.b^\dagger_\mu \vec{u})dx = \int_{\partial\Omega} [\vec{u}_1 . T_\mu(\vec{n},\vec{v}) - \vec{v}_1 . T^+_\mu(\vec{n},\vec{u})]dS + \int_{\partial\Omega} (u_4 \frac{\partial v_4}{\partial n} - v_4 . \frac{\partial\ 4}{\partial n}) \, dS$$

$$= \int_{\partial\Omega} (\vec{u}.R_\mu(\vec{n},\vec{v}) - \vec{v}.R^+_\mu(\vec{n},\vec{u})) \, dS$$

$$= \int_{\partial\Omega} [Q_\mu . (\vec{n},\vec{u}).P_\mu(\vec{n},\vec{v}) - Q_T(\vec{n},\vec{v}).P^\dagger_\mu(\vec{n},\vec{u})].dS, \quad \vec{u},\vec{v} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$$

Remarque

Ces relations montrent que $b^\dagger_\mu$ est l'adjoint de $\overline{b}_\mu$ dans $L_2(R^3;\mathbb{C}^4)$

Soit $A^\dagger_o$ l'opérateur obtenu à partir de A_o en changeant $-\eta$ en $+ m$ et $- m$ en $+\eta$ $b^\dagger$ et $a^\dagger$ les sous-opérateurs correspondants. Il est facile de voir que l'on peut faire pour $A^\dagger_o$ tout ce qui a été fait jusqu'ici pour A_o. En particulier, on obtient :

1 - $A^{1\dagger}_o = A^1_o$ avec toutes les conséquences que cela entraîne.

2 - $(A^o_o)^\dagger = (A^\dagger_o)^o$

3 - $\sigma\,(A^o_o) = \sigma\,(A^{o\dagger}_o) = \sigma_c(A^{o\dagger}_o)$ et même équation caractéristique

$Z^2 + \lambda\,(\lambda+1+\varepsilon)\,Z + \lambda^3 = 0$.

4 - On peut définir une solution fondamentale t-sortante unique pour $\mu \in C \setminus \sigma(A^o_o)$, qui s'obtient à partir de $E(x,\mu)$ en changeant $-m$ en $+ \eta$ et $- \eta$ en $+ m$.

5 - On peut reformuler tous les résultats précédents, en particulier on aura le

Corollaire 2† : $\forall\ \mu \notin \sigma(A^o_o)$, l'équation $b^\dagger_\mu \vec{f} = \vec{g}$ où $\vec{g} = (\vec{g}_1, g_4) \in \mathcal{E}'(R^3;C^4)$ admet une solution μ-t-sortante unique donnée par $\vec{f} = \Gamma^\dagger(x,\mu) * \vec{g}$ où :

$$\Gamma^{\dagger}(x,\mu) = \frac{1}{4\pi(d_2^2-d_1^2)} \left[\begin{array}{c|c} \vec{\nabla}\mathrm{div}\, \dfrac{(1+\mu/d_2^2)e^{id_2r}-(1+\ /d_1^2)e^{id_1r}}{r} I_3 + \dfrac{d_2^2d_1^2}{\mu^2}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \dfrac{e^{-\mu/cr}}{r} I_3 - \dfrac{d_2^2-d_1^2}{\mu^2}\, \delta(x) I_3 & \eta\vec{\nabla}\, \dfrac{e^{id_2r}-e^{id_1r}}{r} \\ m\ \mathrm{div}\, \dfrac{e^{id_2r}\ \ e^{id_1r}}{r} I_3 & (\mu^2+d_2^2)\, \dfrac{e^{id_2r}}{r} - (\mu^2+d_1^2)\, \dfrac{e^{id_1r}}{r}\, . \end{array} \right]$$

Conditions de Radiation

Soit alors $\check{E}(x,\mu)$ le prolongement à tout C de la matrice $E(x,\mu)$ précédemment définie pour $\mu \in C\setminus\sigma_c(A_o^o)$; on a donc :

$\check{E}(x,\mu) = \check{E}_1(x,\mu) + \check{E}^o(x,\mu) = G_1(x,\mu) + \check{E}^o(x,\mu)$ où $G_1(x,\mu)$ est la solution fondamentale e.v.s.de A_o^1 et $\check{E}_o(x,\mu)$ est encore dans $\mathcal{S}'$ puisque $\mathrm{Im}\, d_{1,2} \geq 0 \quad \forall \mu \in C$).

Définitions

1) Soit $\mu \in C$. Alors la solution $\vec{f} = \check{E}(X,\mu) * \vec{g}$ de l'équation $(A_o-\mu)\, \vec{f} = \vec{g}$ où $\vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^7)$ sera dite solution éventuellement bi-sortante (evbs) pour A_o(ou $T_o(t)$). En particulier $\check{E}(x,\mu)$ est la solution fondamentale evbs de A_o .

2) Soit $\check{\Gamma}(x,\mu)$ le prolongement correspondant de $\Gamma(x,\mu)$. Alors la distribution $\vec{f} = (\vec{f}_1,f_4) = \check{\Gamma}\,(X,\mu) * \vec{g}$ où $g \in \mathcal{E}'(R^3;C^4)$ sera dite μ-bi sortante. Dans ce cas $\vec{F} = (\vec{f}_1,\ \mu\, \vec{f}_1,f_4)$ est la solution evbs de l'équation $(A_o-\mu)\vec{F} = (\vec{0},\ \vec{g}_1,g_4)$. On a alors le :

Théorème de décomposition

Soit $\vec{f} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_4 \end{pmatrix}$ la solution μ-bisortante de l'équation $(b_\mu-\mu)\vec{f} = \vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^4)$. Alors $\vec{f}$ se décompose <u>d'une façon unique</u> en :

$$\vec{f}(x) = -\frac{1}{\mu^2}\begin{pmatrix} \vec{g}_1(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{1}{\vec{f}} + \overset{2}{\vec{f}} + \overset{3}{\vec{f}}$$, où les $\overset{i}{\vec{f}}$ sont des distributions solutions

respectives des équations $L_x^i \overset{i}{\vec{f}} = \mathcal{D}^i \vec{g}$ avec :

$$L_x^1 = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}\mathrm{div} + d_1^2 & 0 \\ 0 & \Delta + d_1^2 \end{pmatrix} ; \quad L_x^2 = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}\,\mathrm{div} + d_2^2 & \\ 0 & \Delta + d_2^2 \end{pmatrix} ; \quad L_x^3 = \begin{pmatrix} \vec{\Delta} - \frac{\mu^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}^1 \vec{g} = \frac{1}{4\pi(d_2^2 - d_1^2)} \begin{bmatrix} -(1 + \mu/d_1^2)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{g}_1(x) + m\vec{\nabla}\, g_4(x) \\ \\ -\eta\,\mathrm{div}\, g_1 - (\mu^2 + d_1^2) g_4(x) \end{bmatrix} ;$$

$$\mathcal{D}^2 g = \frac{1}{4\pi(d_2^2 - d_1^2)} \begin{bmatrix} (1 + \mu/d_2^2)\,\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{g}_1(x) - m\,\vec{\nabla}\, g_4(x) \\ \\ \eta\,\mathrm{div}\, g_1(x) + (\mu^2 + d_2^2)\, g_4(x) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}^3 \vec{g} = \frac{-1}{4\pi\mu^2} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_1(x) \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Preuve

1) Existence de la décomposition

Elle provient de celle de $\breve{\Gamma}(x,\mu)$ qui peut s'écrire :

$$\breve{\Gamma}(x,\mu) = \overset{1}{\Gamma'}(x,\mu) + \overset{2}{\Gamma'}(x,\mu) + \overset{3}{\Gamma}(x,\mu) - \frac{1}{\mu^2}\,\delta(x)\, I_4'$$ avec :

$$\overset{1}{\Gamma'}(x,\mu) = \frac{1}{4\pi(d_2^2 - d_1^2)} \begin{bmatrix} -(1 + \mu/d_1^2)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\frac{e^{id_1 r}}{r}\, I_3 & -m\,\vec{\nabla}\,\frac{e^{id_1 r}}{r} \\ \\ -\eta\,\mathrm{div}\,\frac{e^{id_1 r}}{r}\, I_3 & -(\mu^2 + d_1^2)\,\frac{e^{id_1 r}}{r} \end{bmatrix}$$

$$\overset{2}{\Gamma}'(x,\mu) = \frac{1}{4\pi(d_2^2-d_1^2)} \begin{bmatrix} (1+\mu/d_2^2)\,\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\dfrac{e^{id_2r}}{r}\,I_3 & m\vec{\nabla}\,\dfrac{e^{id_1r}}{r} \\ \eta\,\mathrm{div}\,\dfrac{e^{id_2r}}{r}\,I_3 & (\mu^2+d_2^2)\,\dfrac{e^{id_2r}}{r} \end{bmatrix}$$

$$\overset{3}{\Gamma}'(x,\mu) = \frac{1}{4\pi\,\mu^2} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\dfrac{e^{-\mu/c\,r}}{r}\,I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad I_4' = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

On a alors, en posant $\vec{f} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ f_4 \end{pmatrix}$ et $\vec{g} = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ g_4 \end{pmatrix}$:

$$\vec{f}(x) = \overset{\smile}{\Gamma}(x,\mu)*\vec{g} = \int_{\mathrm{supp}\,\vec{g}} \overset{\smile}{\Gamma}(x-y;\mu)\vec{g}(y)\,dy = \sum_1^4 \vec{x}_k.\int_{\mathrm{supp}\,\vec{g}} \overset{\smile}{\Gamma}{}^*_k(x-y;\mu)\vec{g}(y)\,dy = \sum_1^4 \vec{x}_k.\overset{\smile}{\vec{\Gamma}}{}^*_k * \vec{g}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} \vec{x}_k.\vec{\Gamma}'_k * \vec{g} - \frac{1}{\mu^2}\,\delta(x) * \vec{g}_1,$$ où $\vec{\Gamma}_k$ désigne le $k^{\text{ème}}$ vecteur colonne.

$$= -\frac{1}{\mu^2}\,\vec{g}_1(x) + \overset{1}{\vec{f}}(x) + \overset{2}{\vec{f}}(x) + \overset{3}{\vec{f}}(x),$$ avec :

$$\overset{i}{\vec{f}}(x) = \sum_1^4 \vec{x}_k.\int_{\mathrm{supp}\,g} \overset{i}{\Gamma}'(x-y;\mu)\,\vec{g}(y)\,dy \quad \text{où} \quad \overset{i}{\vec{f}}(x) = \begin{pmatrix} \overset{i}{\vec{f}}_1(x) \\ \overset{i}{f}_4(x) \end{pmatrix}.$$ On a alors :

$$\vec{f}_1(x) = \sum_1^3 \vec{x}_k.(\overset{i}{\Gamma}{}'_k * \vec{g}) \quad \text{et} \quad \overset{i}{f}_4(x)\,\vec{x}_k = \vec{x}_4.\overset{i}{\Gamma}{}'_4 * \vec{g}$$

Pour i = 1 :

$$\overset{1}{\vec{f}}_1(x) = \frac{1}{4\pi(d_2^2-d_1^2)}.\sum \vec{x}_k \left[-(1+\mu/d_1^2)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\frac{e^{id_1r}}{r}\,\vec{x}_k * \vec{g}_1 - \eta\,\mathrm{div}\,\frac{e^{id_1r}}{r}\,\vec{x}_k * g_4\right]$$

$$(\vec{\nabla}\,\mathrm{div}_x + d_1^2)\,\overset{1}{\vec{f}}_1(x) = +\frac{\vec{\nabla}\mathrm{div} + d_1^2}{4\pi(d_2^2-d_1^2)} \sum \vec{x}_k \left[-(1+\mu/d_1^2) + \frac{e^{id_1r}}{r}\,\vec{x}_k * \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{g}_1 + \eta\,\frac{e^{id_1r}}{r}\,\vec{x}_k * \vec{\nabla}\,g_4\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi(d_2^2-d_1^2)} \left[+(1+\mu/d_1^2)\ \vec{\delta}(x) * \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \vec{g}_1 - \eta\ \vec{\delta}(x) * \vec{\nabla}\, g_4\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi(d_2^2-d_1^2)} \left[+(1+\mu/d_1^2)\vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \vec{g}_1(x) - \eta\ \vec{\nabla}\ g_4(x)\right]$$

$$\text{et} \quad \overset{1}{f}_4(x) = \frac{1}{4\pi(d_2^2-d_1^2)} \left[-m\ \vec{\nabla}\ \frac{e^{id_1 r}}{r} * \vec{g}_1 - (d_1^2+\mu^2)\ \frac{e^{id_1 r}}{r} * g_4\right]$$

$$\text{d'où} \quad (\Delta_x + d_1^2)\ \overset{1}{f}_4(x) = \frac{(\Delta_x + d_1^2)}{4\pi(d_2^2-d_1^2)} \left[m\ \frac{e^{id_1 r}}{r} * \mathrm{div}\ \vec{g}_1 - (d_1^2+\mu^2)\ \frac{e^{id_1 r}}{r} * g_4\right] .$$

$$= \frac{1}{4\pi(d_2^2-d_1^2)} \left[-m\ \mathrm{div}\ \vec{g}_1(x) + (d_1^2+\mu^2)\ g^4(x)\right] .$$

$\underline{\underline{i = 2}}$; Les mêmes calculs donnent :

$$\begin{pmatrix} \vec{\nabla}\ \mathrm{div}_x + d_2^2 & 0 \\ 0 & \Delta + d_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{2}{\vec{f}}_1 \\ \vec{f}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi(d_2^2-d_1^2)} \begin{bmatrix} -(1+\mu/d_2^2)\ \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\ \vec{g}_1(x) + \eta\,\vec{\nabla}\, g_4(x) \\ +m\ \mathrm{div}\ g_1(x) - (d_2^2+\mu^2)\ g_4(x) \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{i = 3}}$

$$\overset{3}{\vec{f}}(x) = \sum_1^4 \vec{x}_k .\ \overset{3}{\Gamma}{}'_k * \vec{g} = \sum_1^3 \vec{x}_k . \Gamma'_k * \vec{g} \quad \text{car} \quad \overset{3}{\Gamma}_4 = \vec{0}\ ;\ \text{alors :}$$

$$\overset{3}{\vec{f}}_4(x) = 0 \text{ et } \overset{3}{\vec{f}}_1 = \frac{1}{4\pi\mu^2} \sum \vec{x}_k . (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c} r}}{r}\ \vec{x}_k * \vec{g}_1) = \frac{1}{4\pi\mu^2} \sum \vec{x}_k$$
$$.(\frac{e^{-\frac{\mu}{c} r}}{r}\ x_k * \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{g}_1) .$$

$$\text{or} \ (\Delta - \frac{\mu^2}{c^2})\ \overset{3}{\vec{f}}_1 = (-\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}_x - \frac{p^2}{c^2})\ \overset{3}{\vec{f}}_1(x) \ , \ \text{car div}\ \overset{3}{\vec{f}}_1 = 0$$

$$\text{et} \ (\Delta - \frac{\mu^2}{c^2})\overset{3}{\vec{f}}_1 = 4\pi\mu^2 \sum \vec{x}_k \left[(\Delta - \frac{\mu^2}{c^2})\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c} r}}{r}\ \vec{x}_k * \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{g}_1\right] , \ \text{d'où :}$$

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} + \frac{\mu^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{3}{\vec{f}_1}(x) \\ \overset{3}{f_4} \end{pmatrix} = + \frac{1}{4\pi\mu^2} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) *Unicité*

Supposons qu'il existe une autre décomposition de $\vec{f}$, $\vec{f} = -\frac{1}{\mu^2}\vec{g}_1(x) + \overset{1}{\vec{f}'} + \overset{2}{\vec{f}'} + \overset{3}{\vec{f}'}$ avec les $\overset{i}{\vec{f}'}$ vérifiant les équations $L^i_x \overset{i}{\vec{f}'} = \mathcal{D}^i \vec{g}$ respectivement.

Posons $\overset{i}{\vec{h}} = \overset{i}{\vec{f}} - \overset{i}{\vec{f}'}$; on obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} = \sum^{3} \vec{h}(x) \\ \overset{i}{L}_x \overset{1}{\vec{h}}(x) = \vec{0} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{ll} \overset{3}{\vec{h}} = -(\overset{1}{\vec{h}} + \overset{2}{\vec{h}}) & (1) \\ \overset{i}{L}_x \overset{i}{\vec{h}}_x(x) = 0 & (2) \end{array} \right\}$$

Or $\mathrm{div}\, \overset{3}{\vec{h}}_1(x) = 0$, (1) entraîne $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{h}_1 = \vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{h}_1(x) = \vec{0}$; L'équation $(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} - \frac{\mu^2}{c^2})\, \overset{3}{\vec{h}}_1(x) = \vec{0}$ entraîne alors $(\mu \neq 0)$

$\boxed{\overset{3}{\vec{h}}_1(x) = 0}$. On a alors :

$$(1) \Rightarrow \quad \overset{1}{\vec{h}} + \overset{2}{\vec{h}} = 0$$

$$(2) \Rightarrow \quad \overset{1}{L}_x \overset{1}{\vec{h}} + \overset{2}{L}_x \overset{1}{\vec{h}} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} (\vec{\nabla}\,\mathrm{div} + d_1^2)\, \overset{1}{\vec{h}}_1 + (\vec{\nabla}\mathrm{div} + d_2^2)\, \overset{2}{\vec{h}}_1 = \vec{0} \\ (\Delta + d_1^2)\, \overset{1}{h}_4 + (\Delta + d_2^2)\, \overset{2}{h}_4 = 0 \end{array} \right.$$

D'après (1), on a alors :

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} (d_2^2 - d_1^2)\, \overset{2}{\vec{h}}_1 = (d_1^2 - d_2^2)\, \overset{1}{\vec{h}}_1 = \vec{0} \\ (d_2^2 - d_1^2)\, \overset{2}{h}_4 = (d_1^2 - d_2^2)\, \overset{1}{h}_4 = 0 \end{array} \right.$$

Puisque $d_1^2 \neq d_2^2$ on a alors $\overset{i}{\vec{h}} = 0 \ \forall i$. c.q.f.d.

3) $\vec{f}$ *détermine les* $\overset{i}{\vec{f}}$ *univoquement.*

Les $\overset{i}{\vec{f}}$ ne sont pas des solutions quelconques des équations $\overset{i}{L}\,\overset{i}{\vec{f}} = \mathcal{D}^{i}\,\vec{g}$. Elles doivent en effet satisfaire les relations $\overset{i}{\vec{f}} = \Gamma' * \vec{g}$ qui imposent à $\overset{1}{\vec{f}}$ et $\overset{2}{\vec{f}}$ d'être tempérées et à $\overset{3}{\vec{f}}_1$ d'être la solution éventuellement sortante unique de l'équation $(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}} + \mu^2/c^2)\quad \vec{f}_1 =$

$$= -\frac{1}{\mu^2}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{g} .$$

On aura dès lors :

$$\overset{i}{\vec{f}}(h) = \overset{i}{\ell}(x) * \mathcal{D}^{i}\,\vec{g}(y) \quad \text{avec :}$$

$$\overset{i}{\ell}(x) = \begin{pmatrix} \overset{i}{\gamma}(x) & 0 \\ 0 & \overset{i}{m}(x) \end{pmatrix} \quad \text{où } \overset{i}{\gamma}(x) \text{ est une } 3 \times 3 \text{ matrice; } \overset{i}{L}\ \overset{i}{\ell} = \delta(x)\, I_4 .$$

$$\ell_1(x) = \begin{pmatrix} -\dfrac{e^{id_1 r}}{r} + \dfrac{1}{d_1^2}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\dfrac{e^{id_1 r}}{r}\, I_3 & 0 \\ 0 & -\dfrac{e^{id_1 r}}{r} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +\dfrac{1}{d_1^2}\,\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\dfrac{e^{id_1 r}}{r}\, I_3 + \dfrac{\delta(x)}{d_1^2}\, I_3 & 0 \\ 0 & -\dfrac{e^{id_1 r}}{r} \end{pmatrix}$$

$$\ell_2(x) = \begin{pmatrix} -\dfrac{e^{id_2 r}}{r}\, I_3 + \dfrac{1}{d_2^2}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\dfrac{e^{id_2 r}}{r}\, I_3 & 0 \\ 0 & -\dfrac{e^{id_2 r}}{r} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} +\dfrac{1}{d_2^2}\,\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\dfrac{e^{id_2 r}}{r}\, I_3 + \dfrac{\delta(x)}{d_2^2}\, I_3 & 0 \\ 0 & -\dfrac{e^{id_2 r}}{r} \end{pmatrix}$$

$$\ell_3(x) = \begin{pmatrix} -\frac{c^2}{\mu^2} \text{ rot rot } \frac{e^{-\mu/cr}}{r} I_3 + \frac{c^2}{\mu^2}\,\delta(x) I_3 & 0 \\ 0 & \delta(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{-\mu/c\,r}}{r} \vec{I}_3 - \frac{c^2}{2} \vec{\nabla} \operatorname{div} \frac{e^{-\mu/c\,r}}{r} I_3 & 0 \\ 0 & \delta(x) \end{pmatrix}$$

Vérifions-le sur $\overset{1}{\vec{f}}(x)$ par exemple :

$$\overset{1}{\vec{f}}. = \overset{1}{\ell} * \mathcal{D}^1 g = \sum_1^3 \vec{x}_k . \left[\overset{1}{\gamma}_k + \mathcal{D}^1 g \right] + \vec{x}_4 . \overset{1}{\gamma}_4 * \mathcal{D}^1 g$$

$$= \sum_1^3 \vec{x}_k . \left[- \frac{e^{id_1 r}}{r} \vec{x}_k * \mathcal{D}^1 g - \frac{1}{\underset{1}{2}} \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \frac{e^{id_1 r}}{r} \vec{x}_k * \mathcal{D}_1^1 g \right] +$$

$$\vec{x}_4 . \left(- \frac{e^{id_1 r}}{r} * \mathcal{D}_4^1 g \right).$$

$$= \sum_1^3 \vec{x}_k . \left[- \frac{e^{id_1 r}}{r} \vec{x}_k + \left(\frac{+(1+\pi/d_1^2)}{4\,\pi(d_2^2-d_1^2)} \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{g}_1 - n\, \vec{\nabla}\, g_4 \right) \right]$$

$$+ \vec{x}_4 . \left(- \frac{e^{id_1 r}}{r} * \frac{1}{d^2-d^2} \left(-m \operatorname{div} \vec{g}_1 + (d_1^2+\mu^2)\, g_4 \right) \right).$$

$$= \sum_1^3 \vec{x}_4 . \left[\frac{-(1+\mu/d_1^2)}{d_2^2-d_1^2} \vec{\nabla} \operatorname{div} \frac{e^{id_1 r}}{r} x_k + g_1 - n \operatorname{div} \frac{e^{id_1 r}}{r} x_k + g_4 \right]$$

$$+ \vec{x}_4 . \frac{1}{d_2^2-d_1^2} \left(-m\, \vec{\nabla} \frac{e^{id_1 r}}{r} * \vec{g}_1 + (\mu^2 + d_1^2) \frac{e^{id_1 r}}{r} * g_4 \right)$$

$$= \overset{1}{\Gamma'} * \vec{g}.$$

On vérifie aussi facilement pour $\overset{2}{\vec{f}}$ et $\overset{3}{\vec{f}}$.

Corollaire :

Dans le complémentaire du support de $\vec{g}$, la solution μ-bisortante de l'équation $b_\mu \ \vec{f} = \vec{g}$ se décompose d'une façon unique en $\vec{f} = \overset{1}{\vec{f}} + \overset{2}{\vec{f}} + \overset{3}{\vec{f}}$ où les $\overset{i}{\vec{f}}$ sont des solutions (déterminées univoquement par $\vec{f}$) des équations $\overset{i}{L} \overset{i}{\vec{f}} = \vec{0}$ respectivement. On a alors le :

Théorème de représentation

Soit G un ouvert connexe relativement compact contenant le support de g, ∂G sa frontière. Soit x un point à l'extérieur de G, $x \notin G \cup \partial G$. On a alors :

$$\vec{f}(x) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\partial G} \left[\overset{i}{\gamma}(x-y)\ \mathrm{div}_y\ \overset{i}{\vec{f}}_1(y) - \overset{i}{\vec{f}}_1(y)\ \mathrm{div}_y\ \overset{i}{\gamma}(x-y)\right] . \vec{n}_y\ dS_y + \vec{x}_4 .$$

$$. \left(\frac{e^{id_i|x-y|}}{x-y}\ \frac{\partial}{\partial n_y} \overset{i}{f}_4 - \overset{i}{f}_4(y) \frac{\partial}{\partial n_y}\ \frac{e^{id_i|x-y|}}{|x-y|}\right) dS_y$$

$$+ \int_{\partial G} \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\ \overset{3}{\gamma}(x-y) \wedge \overset{3}{\vec{f}}_1(y) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\ \overset{3}{\vec{f}}_1(y) \wedge \overset{3}{\gamma}\ (x-y)\right] \vec{n}_y\ dS_y$$

Preuve

$$\vec{f}(x) = \sum_1^3 \overset{i}{\vec{f}}(x) = \sum_1^3 \overset{i}{\ell} * \mathcal{D}^i\ \vec{g} = \sum_1^3 \ell^i * \overset{i}{L}\ \overset{i}{\vec{f}} = \sum_1^3 \overset{i}{L}\ \overset{i}{\ell} * \overset{i}{\vec{f}} + \sum_1^3 \int_{\partial G} Ni(x,y)\ dS_y$$

$$= \int_{G\ \mathrm{Supp}\ g} \overset{i}{L}\ \overset{i}{\ell}\ (x-y)\ \overset{i}{f}(y)\ dS_y + \sum_1^3 \int_{\partial G} N_i(x,y)\ dS_y = 0 + \sum_1^3 \int_{\partial G} N_i(x,y)\ dS_y$$

car $\overset{i}{L}\ \overset{i}{\ell}\ (x-y) = \delta(x-y) = 0$ puisque $y \in G$ et $x \notin G$.

avec

<u>i = 1,2</u>

$$N_i\ (x,y) = \sum_{k=1}^{3} x_k (\overset{i}{\vec{\gamma}}_k(x-y)\ \mathrm{div}\ \overset{i}{\vec{f}}_1(y) - \overset{i}{\vec{f}}_1(y)\ \mathrm{div}\ \overset{i}{\gamma}_k(x-y))\ \vec{n} + \vec{x}_4 . \left(\frac{e^{id_i|x-y|}}{|x-y|}\ \frac{\partial}{\partial y} \overset{i}{f}_4 - \overset{i}{f}_4 \frac{\partial}{\partial n_y}\ \frac{e^{id_i|x-y|}}{|x-y|}\right)$$

$$=[\overset{i}{\gamma}(x-y)\ \mathrm{div}\ \overset{i}{\vec{f}}_1 - \overset{i}{\vec{f}}_1\ \mathrm{div}\ \overset{i}{\gamma}(x-y)]\ \vec{n} + x_4.\left(\frac{e^{id_i|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial}{\partial n_y}\overset{i}{f}_4 - \overset{i}{f}_4\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{id_i|x-y|}}{|x-y|}\right.$$

$\underline{i = 3}$

$$N_3(x,y) = \sum \vec{x}_k.\ [\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overset{3}{\vec{\gamma}}_k(x-y) \wedge \overset{3}{\vec{f}}_1(y) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\ \overset{3}{\vec{f}}_1(y) \wedge \overset{3}{\vec{\gamma}}_k(x-y)]\ \vec{n}$$

$$= [\overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\ \overset{3}{\gamma}(x-y) \wedge \overset{3}{\vec{f}}_1(y) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\ \overset{3}{\vec{f}}_1(y) \wedge \overset{3}{\gamma}(x-y)].\vec{n}$$

. *<u>Soit alors $\vec{f}(x)$ solution de l'équation $b_\mu\ \vec{f} = \vec{0}$ dans un ouvert connexe Ω</u>*

On va démonter la proposition générale suivante :

<u>Proposition</u>

Toute distribution $\vec{f}$, solution de l'équation $b_\mu\ \vec{f} = \vec{0}$ admet une décomposition unique $\vec{f} = \overset{1}{\vec{f}} + \overset{2}{\vec{f}} + \overset{3}{\vec{f}}$ où les $\overset{i}{\vec{f}}$ sont des solutions (déterminées par $\vec{f}$) des équations $\overset{i}{L}\ \overset{i}{\vec{f}} = \vec{0}$ respectivement. Nous commençons par deux lemmes :

<u>Lemme 1</u>

Toute solution régulière (de classe C^m) de l'équation $\prod_{i=1}^{n}(A + d_i^2)\ h = 0$, dans un ouvert connexe Ω, où A est un opérateur différentiel linéaire (scalaire ou matriciel) **d**'ordre **m**, $d_i^2 \neq d_j^2$ pour $i \neq j$, s'écrit, d'une façon unique, sous la forme :

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i \quad \text{où } h_i \text{ est solution régulière de } (A + d_i^2)\ h_i = 0 \text{ dans } \Omega.$$

<u>Preuve</u>

1) <u>Existence</u> : par récurrence. En effet

$(E) \equiv (A + d_1^2)\ (A + d_2^2)\dots(A + d_n^2)\ h = 0 \iff (E')\quad (A + d_2^2)\dots(A + d_n^2)h = u_1$

où u_1 est une solution de $(A + d_1^2)\ u_1 = 0$.

Or $(E') \iff u_1 = \prod_{i=2}^{n}(A+d_i^2)h = \prod_{i=2}^{n}(A+d_1^2+(d_i^2-d_1^2))h$, donc $h_1 = \dfrac{u_1}{\prod_{i=2}^{n}(d_i^2-d_1^2)}$.

est une solution. Si $(\overset{\circ}{E'})$ est l'équation homogène associée à (E'), on a donc :

solution générale de (E') = solution générale de $(\overset{\circ}{E}')$ + h_1 , et h_1 est solution de $(A+d_1^2)\, h_1 = 0$ d'où la récurrence (c'est vrai pour n = 1, etc...).

2) Unicité

Soit $\{h_i'\} = \{h_1', \dots, h_n'\}$ une autre décomposition de h; alors $w = \{h_i - h_i'\} = \{w_i\}$ est aussi solution de (E). On a donc :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i = 0 = h - h . \\ (A+d_i^2)\, w_i = 0 \qquad i \in \{1,\dots,n\} \end{cases}$$

Soit k fixe, $1 \leq k \leq n$, quelconque. Alors :

$$0 = \prod_{i\neq k} (A+d_i^2) \left(\sum_{1}^{m} w_j \right) = \prod_{i\neq k} (A+d_i^2) \left(\sum_{j\neq k} w_j \right) + \prod_{i\neq k} (A+d_i^2)\, w_k = 0 + \prod_{i\neq k} (A+d_i^2) w_k$$

$$= \prod_{i\neq k} (A+d_k^2+(d_i^2-d_k^2)\ )\, w_k = \prod_{i\neq k} (d_i^2-d_k^2) w_k \Rightarrow w_k = 0 \qquad \text{cqfd}$$

Corollaires

1) Toute solution C^2 de l'équation $\prod_{i=1}^{n} (\Delta+d_i^2)\, h = 0$ dans un ouvert connexe $\Omega \subset R^n$ où $d_i^2 \neq d_k^2$, pour $i \neq k$, admet une décomposition unique $h = \sum_{1}^{n} h_i$, où chaque h_i est une solution déterminée de $(\Delta+ d_i^2)\, h_i = 0$.

2) Même conclusion avec Δ remplacé par l'opérateur matriciel $\vec{\nabla}$ div .

Lemme 2

Toute distribution solution de $b_\mu \ \vec{f} = \vec{0}$ dans un ouvert connexe $\Omega \ \subset R^n$ est C^∞ .

Preuve

Ceci est une conséquence triviale de l'hypo-ellipticité de l'opérateur b_μ ; b_μ étant hypo-elliptique puisqu'on a exhibé une solution fondamentale C^∞ en dehors de l'origine.

Démonstration de la proposition

Posons $\vec{f} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \theta \end{pmatrix}$. Alors $b_\mu\ \vec{f} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} -c^2\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u} + \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\ \vec{u} - \mu^2\vec{u} - m\vec{\nabla}\,\theta = 0 \\ (\Delta-\mu)\ \theta - \mu\ \eta\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \end{cases}$

d'où nécessairement :

$$\begin{cases} (\Delta+ d_1^2)(\Delta+d_2^2)\ \mathrm{div}\ \vec{u} = 0 \\ (\Delta+ d_1^2)(\Delta+ d_2^2)\ \theta = 0 \end{cases}$$

θ et $\mathrm{div}\ \vec{u}$ étant régulières, on a donc $\theta = \theta_1 + \theta_2$ (*) et $\mathrm{div}\ \vec{u} = \vartheta_1 + \vartheta_2$, $(\Delta+ d_i^2)\ (\theta_i, \vartheta_i) = 0$. De même $-c^2\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u} + \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \vec{u} - \mu^2\ \vec{u} - m\vec{\nabla}\theta = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s$ avec : $\mu^2\ \vec{u}_s = -c^2\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}$ et $\mu^2\ \vec{u}_p = \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \vec{u} - m\ \vec{\nabla}\ \theta$, donc $\mathrm{div}\ \vec{u}_s = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_p = \vec{0}$, c'est-à-dire $\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \vec{u}_p$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_s$. On a donc :

$$\boxed{\mu^2\ \vec{u}_s + c^2\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_s = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mu^2\ \vec{u}_p = \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \vec{u}_p - m\ \vec{\nabla}\ \theta}.$$

Alors :

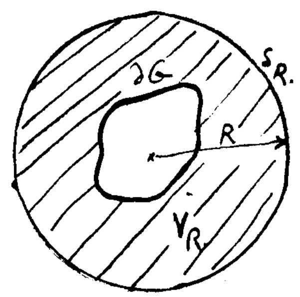
$$\begin{aligned} \mu^2(\vec{\nabla}\ \mathrm{div} + d_1^2)(\vec{\nabla}\ \mathrm{div} + d_2^2)\vec{u}_p &= (\vec{\nabla}\mathrm{div}+d_1^2)(\vec{\nabla}\mathrm{div}+d_2^2)\vec{\nabla}\mathrm{div}\ \vec{u} - m(\vec{\nabla}\mathrm{div}+d_1^2)(\vec{\nabla}\mathrm{div}+d_2^2)\vec{\nabla}\ \theta \\ &= (\vec{\nabla}\mathrm{div}+d_1^2)\vec{\nabla}(\Delta+d_2^2)\mathrm{div}\ \vec{u} - m(\vec{\nabla}\mathrm{div}+d_1^2)\vec{\nabla}\ (\Delta+d_2^2)\theta \\ &= \vec{\nabla}(\Delta+d_1^2)(\Delta+d_2^2)(\mathrm{div}\ \vec{u} - m\theta) = \vec{0} \end{aligned}$$

donc $\vec{u}_p = \vec{u}_p^{\,1} + \vec{u}_p^{\,2}$ d'une façon unique et $(\vec{\nabla}\ \mathrm{div} + d_i^2)\ \vec{u}_p^{\,i} = \vec{0}$.

On a donc bien :

$$L^1\begin{pmatrix} \vec{u}_p^{\,1} \\ \theta^1 \end{pmatrix} = \vec{0}\ ,\ L^2\begin{pmatrix} \vec{u}_p^{\,2} \\ \theta^2 \end{pmatrix} = \vec{0}\ ,\ L^3\begin{pmatrix} \vec{u}_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{cqfd}$$

. *<u>Soit alors</u>* <u>G</u> *<u>comme dans le théorème de représentation et</u>* <u>$\vec{f}$</u> une solution <u>quelconque de $b_\mu\ \vec{f} = \vec{0}$ dans l'ouvert connexe $R^3\setminus\bar{G}$</u> :



Soit V_R l'ouvert relativement compact de frontière $\partial V_R = \partial G \cup S_R$, où R est assez grand pour que la boule $B_R(\partial B_R = S_R)$ contienne G (Cas de figure).

Soit $x \in V_R$, $x \notin \partial V_R$. En appliquant les résultats ci-haut, on a :

(*) d'une façon unique !

$$\vec{f}(x) = \sum_1^3 \overset{i}{\vec{f}}(x) = \sum_1^3 \int_{V_R} \delta\,(x-y)\ \overset{i}{\vec{f}}(y)\ dy = \sum_1^3 \int_{V_R} L^i\ \overset{i}{\gamma}(x-y)\ \overset{i}{f}(y)\ dy$$

$$= \sum_1^3 \int_{V_R} \overset{i}{\gamma}(x-y)\ L_y^i\ \overset{i}{\vec{f}}(y)\ dy + \sum_1^3 \int_{\partial V_R} N_i(x,y)\ dS_y = 0 + \sum_1^3 \int_{\partial V_R} N_i(x,y)\ dS_y$$

$$= \sum_1^3 \int_{\partial G \cup S_R} N_i(x,y)\ dS_y\ .$$

Conclusion

$\vec{f}$ solution μ-bisortante de $b_\mu\ \vec{f} = \vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^4)$ équivaut à

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty} \int_{|y|=R} N_i(x,y)\ dS_y = 0 \qquad i = 1,2,3} \qquad (\text{C.R.S.G})$$

Théorème : L'équation $(b_\mu)\ \vec{f} = \vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^4)$ admet une solution unique qui satisfasse (C.R.S.G). Cette solution est la solution bisortante :

$$\vec{f} = \check{\Gamma}_p * \vec{g}$$

Nous appelons ces conditions : conditions de radiation sortante généraliséeS. En réalité donc, parmi les solutions possibles de $b_\mu\ \vec{f} = \vec{g}$, nous avons choisi celle qui satisfait C.R.S.G. et nous l'avons appelée μ-bi-sortante.

Explicitons un peu plus ces conditions

j = 1,2

$$0 = \lim_{R\to+\infty} \sum_1^3 \vec{x}_k \cdot \Big[\int_{|y|=R} \frac{1}{d_j^2}\ \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\ \frac{e^{id_j|x-y|}}{|x-y|}\ x_k \cdot \mathrm{div}_y\ \overset{j}{\vec{f}_1}(y) - f_1(y)\ \mathrm{div}_y \Big(\frac{e^{id_j|x-y|}}{|x-y|}\ \vec{x}_k\Big)\Big]\ \vec{n}_y\ dS_y$$

Or sur $|y| = R$, on a $\vec{n}_y = \frac{\vec{y}}{|y|} = \vec{\omega} = \vec{e}_r$ et $|y-x| = |y| - \vec{x}.\vec{\omega} + O(\frac{1}{|y|})$, $\omega_k = \vec{x}_k.\vec{\omega}$

$$\frac{e^{id_j|x-y|}}{|x-y|}\,\vec{x}_k = \frac{e^{id_j|y|}}{|y|}\,\vec{x}_k \cdot e^{-id_j\vec{x}.\vec{\omega}}\,\left(1+\vec{0}\left(\frac{e^{id_j|y|}}{|y|}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec{n}_y}\;\frac{e^{id_j|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{id_j|y|}}{|y|}\,id_j + 0\left(\frac{e^{id_j|y|}}{|y|^2}\right)$$

$$\vec{\nabla}\,\mathrm{div}_x\,\frac{e^{id_j|x-y|}}{x-y}\,\vec{x}_k = \frac{e^{id_j|y|}}{|y|}\left(-d_j^2\,\vec{\omega}\,\omega_k\,e^{-id_j\vec{x}.\vec{\omega}}\right) + \vec{0}\left(\frac{e^{id_j|y|}}{|y|^2}\right)$$

$$\mathrm{div}_y\,\frac{e^{id_j|x-y|}}{|x-y|}\,\vec{x}_k = -id\,\omega_k\,\frac{e^{id_j|y|}}{|y|}\,e^{-id_j\vec{x}.\vec{\omega}} + 0\left(\frac{e^{id_j|y|}}{|y|^2}\right)$$

On obtient en définitive :

$$\vec{0} = \lim_{R\to+\infty}\Bigg[\int_{|y|=R}\frac{e^{id_j|y|}}{|y|}\left(-\vec{\omega}\,\mathrm{div}\,\overset{j}{\vec{f}_1}(y) + id_j\,\overset{j}{\vec{f}_1}(y)\right)e^{-id_j\vec{x}.\vec{\omega}}\,dS_y$$

$$+\,\vec{x}_4\cdot\int_{|y|=R}\frac{e^{id_j|y|}}{|y|}\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\overset{j}{f_4} - id_j\,\overset{j}{f_4}(y)\right)e^{-id_j\,\vec{x}.\vec{\omega}}\,ds_y\Bigg]$$

$$+\lim_{R\to+\infty}\Bigg[\int_{|y|=R}\left(-\vec{\omega}\mathrm{div}\,\vec{f}_1 + id_j\,\vec{f}_1\right)0\left(\frac{e^{id_j|y|}}{|y|^2}\right)dS_y + \vec{x}_4\cdot\int_{|y|=R}\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\overset{i}{f_4} - id_j\,\overset{j}{f_4}\right)$$

$$0\left(\frac{e^{id_j|y|}}{|y|^2}\right)\,dS_y\Bigg].$$

$\underline{j = 3}$

$$\vec{0} = \lim_{R\to+\infty}\sum_1^3\;\vec{x}_k\cdot\left[\int \overrightarrow{\mathrm{rot}}_y\;\overset{3}{\vec{\gamma}_k}(x-y)\wedge\overset{3}{\vec{f}_1}(y) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\overset{3}{\vec{f}_1}\wedge\overset{3}{\vec{\gamma}_k}(x-y)\right].\vec{n}\,dS_y$$

or $\overset{3}{\vec{\gamma}}_k(x-y) = \dfrac{e^{-\mu/c|x-y|}}{|x-y|} \vec{x}_k - \dfrac{c^2}{\mu^2} \vec{\nabla}\, \mathrm{div} \dfrac{e^{-\mu/c|x-y|}}{|x-y|} \vec{x}_k \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overset{3}{\vec{\gamma}}_k(x-y) =$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}} \dfrac{e^{-\mu/c|x-y|}}{|x-y|} \vec{x}_k$ et $\overset{3}{\vec{\gamma}}_k(x-y) = -\dfrac{c^2}{\mu^2} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}} \dfrac{e^{-\mu/c|x-y|}}{|x-y|} \vec{x}_k + \dfrac{c^2}{\mu^2} \delta(x-y)\vec{x}_k$.

Comme $x \neq y \Rightarrow \delta(x-y) = 0$.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}_y \frac{e^{-\mu/c|x-y|}}{|x-y|} x_k = + \frac{\mu}{c} \frac{e^{-\mu/c|y|}}{|y|} (\vec{x}_k \wedge \omega)\, e^{\mu/c\, \vec{x}.\vec{\omega}} + \vec{0}\left(\frac{e^{-\mu/c\,|y|}}{|y|^2}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}_y \overset{3}{\vec{\gamma}}_k = + \mu^2/c^2\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}_y \dfrac{e^{-\mu/c\ r}}{r} \vec{x}_k$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}} \dfrac{e^{-\mu/c\ r}}{r} \vec{x}_k =$

$$\frac{\mu^2}{c^2} (\vec{x}_k \wedge \vec{\omega}) \wedge \frac{e^{-\mu/c|y|}}{|y|} \cdot e^{\mu/c\ \vec{x}.\vec{\omega}} + 0\left(\frac{e^{-\mu/c|y|}}{|y|^2}\right)$$

On obtient dès lors :

$$\vec{0} = \lim_{R\to+\infty} \sum_1^3 \vec{x}_k \cdot \left[\int_{|y|=R} \left[(\vec{x}_k \wedge \vec{\omega}) \wedge \left(+\frac{\mu}{c} \overset{3}{\vec{f}}_1 + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}_1 \wedge \vec{\omega}\right)\right] . \vec{\omega}\, \frac{e^{-\frac{\mu}{c}|y|}}{|y|}\, e^{\mu/c\ \vec{x}.\vec{\omega}}\, dS_y\right.$$

$$\left. + \int_{|y|=R} (-\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}_1 + \frac{\mu}{c} \vec{f}_1)\, \vec{0}\left(\frac{e^{-\frac{\mu}{c}|y|}}{|y|^2}\right) dS_y\right]$$

c'est-à-dire $\vec{0} = \lim\limits_{R\to\infty} e^{\mu/c\ \vec{x}.\vec{\omega}} . \vec{\omega} \wedge \displaystyle\int_{|y|=R} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overset{3}{\vec{f}}_1 - \frac{\mu}{c} \overset{3}{\vec{f}}_1) \frac{e^{-\mu/c|y|}}{|y|} dS_y$

$$+ \int_{|y|=R} \left[(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overset{3}{\vec{f}}_1 - \mu/c\, \overset{3}{\vec{f}}_1)\, \vec{0}\left(\frac{e^{-\frac{\mu}{c}|y|}}{|y|^2}\right)\right] dS_y \quad .$$

Comportements asymptotiques des $\overset{j}{\vec{f}}$:

Rappelons que $\overset{j}{\vec{f}}(x) = \int_{\operatorname{supp} g \subset G} \overset{j'}{\Gamma}(x-y)\, \vec{g}(y)\, dy$, d'où

j = 1,

On a $\frac{e^{id_1|x-y|}}{|x-y|}\, \vec{x}_k = \frac{e^{id_1|x|}}{|x|}\, \vec{x}_k . e^{-id_1\, \vec{y}.\vec{\theta}} + \vec{O}\, (\frac{e^{id_1|x|}}{x^2}$

Posons $\vec{\theta} = \frac{\vec{x}}{|x|}$ et $a_1 = \frac{-(1+\mu/d_1^2)}{4\pi(d_2^2-d_1^2)}$

$$\vec{\nabla}_x \frac{e^{id_1|x-y|}}{|x-y|} = \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{id_1|x-y|}}{|x-y|}\, \vec{x}_j = \sum \vec{x}_j\, \theta_j\, \frac{e^{id_1|x-y|}}{|x-y|}\left(i\, d_1 + \frac{1}{|x-y|}\right) =$$

$$id_1\, \vec{\theta}\, \frac{e^{id_1|x|}}{|x|}\, e^{-id_1\, \vec{y}.\vec{\theta}} + \vec{O}\left(\frac{e^{id_1|x|}}{|x|^2}\right)$$

$$\operatorname{div}_x \frac{e^{id_1|x-y|}}{|x-y|}\, \vec{x}_k = id_1\, \theta_k\, \frac{e^{id_1|x|}}{|x|}\, e^{-id_1\, \vec{y}.\vec{\theta}} + \quad (\frac{e^{id_1|x|}}{|x|^2}$$

$$\vec{\nabla}\ \operatorname{div} \frac{e^{id_j|x-y|}}{|x-y|}\, \vec{x}_k = -\, d_1^2\, \theta_k\, \vec{\theta}\, \frac{e^{id_1|x|}}{|x|^2}\, e^{-id_1\, \vec{y}.\vec{\theta}} + \vec{O}(\frac{e^{id_1|x|}}{|x|^2}$$

d'où :

$$\overset{1}{\vec{f}}(x) = \sum \vec{x}_k.[a_1\, \vec{\nabla}\ \operatorname{div} \frac{e^{id_1 r}}{r}\, \vec{x}_k * \vec{g}_1 - \eta\ \operatorname{div} \frac{e^{id_1 r}}{r}\, \vec{x}_k * g_4]$$

$$+\, x_4.[-m\, \vec{\nabla}\, \frac{e^{id_1 r}}{r} * \vec{g}_1 - (d_1^2 + \mu^2)\, \frac{e^{id_1 r}}{r} * g_4\ ]$$

$$= e = \frac{e^{id_1|x|}}{|x|}\vec{\theta}\left[\int e^{-id_1\vec{y}.\vec{\theta}}\left(-a_1\, d_1^2\, \vec{\theta}.\vec{g}_1(y)-i\,\eta\, d_1\, g_4(y)\right) dy\right]$$

$$+\frac{e^{id_1|x|}}{|x|}\ \vec{x}_4.\left[\int_G e^{-id_1\vec{y}.\vec{\theta}}\left(-imd_1\ \vec{\theta}.\vec{g}_1(y)-(d_1^2+\mu^2)\ g_4(y)\right)dy + \vec{0}\left(\frac{e^{id_1|x|}}{|x|^2}\right)\right.$$

$$= \frac{e^{id_1|x|}}{|x|}\left[\overset{1}{\vec{m}}_1(\vec{\theta},\vec{g}) + \overset{1}{m}_4(\vec{\theta},\vec{g})\ \vec{x}_4\right] + \vec{0}\left(\frac{e^{id_1|x|}}{|x|^2}\right) .$$

$j = 2$

Les mêmes calculs donnent :

$$\overset{2}{\vec{f}}(x) = \frac{e^{id_2|x|}}{|x|}\left[\overset{2}{\vec{m}}_1(\vec{\theta},\vec{g}) + \overset{2}{m}_4(\vec{\theta},\vec{g})\ \vec{x}_4\right] + \vec{0}\left(\frac{e^{id_2|x|}}{|x|^2}\right) \text{ avec :}$$

$$\overset{2}{m}_4(\vec{\theta},\vec{g}) = \vec{x}_4.\int_G e^{-id_2\vec{y}.\vec{\theta}}\left(+im\ d_2\ \vec{\theta}.\vec{g}_1(y) + (d_2^2+\mu^2)\ g_4(y)\right)dy$$

$$\overset{2}{\vec{m}}_1(\vec{\theta},\vec{g}) = \vec{\theta}.\int_G e^{-id_2\vec{y}.\vec{\theta}}\left(-a_2\ d_2^2\ \vec{\theta}.\vec{g}_1(y) + i\ \eta\ d_2\ g_4(y)\ dy)\right)dy,\ a_2 = \frac{1+\mu/d_2^2}{4\pi(d_2^2-d_1^2)}$$

$j = 3$

$$\overset{3}{\vec{f}}(x) = \frac{1}{4\pi\ \mu^2}\sum\ \vec{x}_k\ .\int_G\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{e^{-\mu/c|x-y|}}{|x-y|}\ \vec{x}_k.\vec{g}_1(y)\ dy$$

avec $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}_x\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}}}{r}\ \vec{x}_k = \dfrac{\mu^2}{c^2}\ (\vec{x}_k\ \Lambda\ \vec{\theta}\ )\Lambda\ \vec{\theta}.\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|^2}\ e^{\frac{\mu}{c}\vec{y}.\vec{\theta}} + \vec{0}\left(\dfrac{e^{-\mu/c|x|}}{|x|^2}\right)$

$$\overset{3}{\vec{f}}(x) = \frac{1}{4\pi c^2}\ \sum_1^3\ \vec{x}_k.\ \left[((\vec{x}_k\ \Lambda\vec{\theta})\Lambda\ \vec{\theta}\ ).\int_G \frac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|}\ .e^{\frac{\mu}{c}\vec{y}.\vec{\theta}}\ \vec{g}_1(y)\ dy\right] + \vec{0}\left(\frac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\,\pi\,c^2}\ \sum_1^3 \vec{x}_k.\left[(\theta_k\vec{\theta}-\vec{x}_k)\frac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|}\ .\int_G\ e^{\frac{\mu}{c}\vec{y}.\vec{\theta}}\ \vec{g}_1(y)dy\right] + \vec{0}\left(\frac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\,\pi c^2}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|}\ \vec{\theta}\ \Lambda\int_G\ e^{+\frac{\mu}{c}\vec{y}.\vec{\theta}}\ \vec{\theta}\ \Lambda\ \vec{g}_1(y)\ dy + \vec{0}\left(\frac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|^2}\right)$$

(on utilise $\vec{\theta} \wedge (\vec{\theta} \wedge \vec{g}) = -\vec{g} + \vec{\theta}(\vec{\theta}.\vec{g})$.

En remarquant que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|}\ \vec{\theta} = \vec{0}$ et $\vec{\nabla}\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|} = -\dfrac{\mu}{c}\vec{\theta}\ .\ \dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|} + \vec{O}\left(\dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|^2}\right)$,

on a :

$$\vec{\theta} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\ \overset{3}{f}_1 = \frac{\mu}{4\pi c^3}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{x}\ \vec{\theta} \wedge \int_G e^{-\frac{\mu}{c}\vec{y}.\vec{\theta}}.\vec{\theta} \wedge \vec{g}_1(y)dy + \vec{O}\left(\frac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|^2}\right),\ \text{d'où :}$$

$\overset{3}{\vec{f}}_1(x) = \vec{O}\left(\dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}\|x\|}}{\|x\|^2}\right)$	$\vec{\theta}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\ \overset{3}{f}_1 - \dfrac{\mu}{c}\overset{3}{\vec{f}}_1 = \vec{O}\left(\dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}\|x\|}}{\|x\|^2}\right)$	et $\dfrac{\partial}{\partial\vec{\theta}}\overset{3}{\vec{f}}_1(x) + \dfrac{\mu}{c}\overset{3}{\vec{f}}_1 = \vec{O}\left(\dfrac{e^{-\frac{\mu}{c}\|x\|}}{\|x\|^2}\right)$

Puisque $\dfrac{1}{\lambda'+2\mu'}\vec{t}(\vec{n},\vec{u}) = \dfrac{2\mu'}{\lambda'+\mu'}\ \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{n}} + \dfrac{\lambda'}{\lambda'+2\mu'}\vec{n}\ \text{div}\ \vec{u} + \dfrac{\mu'}{\lambda'+2\mu'}\vec{n}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}$, $\text{div}\ \overset{3}{\vec{f}}_1 = 0$

$$\frac{1}{\lambda'+2\mu'}\vec{t}(\vec{n},\overset{3}{\vec{f}}_1) = 2c^2\frac{\partial\overset{3}{\vec{f}}_1}{\partial\vec{n}} + c^2\,\vec{n}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\ \overset{3}{\vec{f}}_1,\ \text{d'où}$$

$$\frac{1}{\lambda'+2\mu'}\vec{t}(\vec{\theta},\overset{3}{\vec{f}}_1) = 2c^2\left(\frac{\partial\overset{3}{\vec{f}}_1}{\partial\vec{\theta}} + \frac{\mu}{c}\overset{3}{\vec{f}}_1\right) + c^2\left(\vec{\theta}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\ \overset{3}{\vec{f}}_1 - \frac{\mu}{c}\overset{3}{\vec{f}}_1\right) - c\,\mu\,\overset{3}{\vec{f}}_1\ ,\ \text{soit}$$

finalement :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda'+2\mu'}\vec{t}(\vec{\theta},\overset{3}{\vec{f}}_1) + c\,\mu\,\overset{3}{\vec{f}}_1 = \vec{O}\left(\frac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|^2}\right)}$$

. <u>Supposons alors Re $\mu \geq 0$</u>

1) Soit $\vec{f}$ une solution quelconque de l'équation $b_\mu\,\vec{f} = \vec{g} \in E'(R^3;C^4)$, supp $\vec{g} \subset G$.

On a déjà démontré que pour x extérieur à G, on a :

$$\vec{f}(x) = \sum_1^3 \int_{\partial G} N_i(x,y)\ dS_y + \sum_1^3 \int_{S_R} N_i(x,y)\ dS_y\ .$$

x étant quelconque à l'extérieur de G, on a donc en fait :

$$\vec{f}(x) = \sum_1^3 \int_{\partial G} N_i(x,y)\ dS_y + \lim_{R\to+\infty}\sum_1^3 \int_{S_R} N_i(x,y)\ dS_y\ .$$

Or Re $\mu \geq 0 \implies \operatorname{Im} d_{1,2} > 0 \implies \sum_1^2 \int_{S_R} N_i(x,y)\, dS_y \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$, d'où finalement :

$$\vec{f}(x) = \sum_1^3 \int_{\partial G} N_i(x,y)\, dS_y + \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} N_3(x,y)\, dS_y$$

En conclusion donc : $\vec{f}$ solution μ-bi-sortante de $b_\mu \vec{f} = \vec{g} \iff \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} N_3(x,y)\,dS_y = 0$

2) Soit $\vec{f}$ solution μ-bi-sortante de $b_\mu \vec{f} = \vec{g}$. On a alors le comportement :

$$\frac{\vec{x}}{|x|} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overset{3}{\vec{f}}_1(x) - \frac{\mu}{c} \overset{3}{\vec{f}}_1(x) = \vec{0}\left(\frac{e^{-\frac{\mu}{c}|x|}}{|x|^2}\right), \text{ d'où } \int_{|x|=r} \left| \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overset{3}{\vec{f}}_1(x) - \frac{\mu}{c} \overset{3}{\vec{f}}_1(x) \right| dS = o(r)$$

(C.R.S.)

Réciproquement, soit $\vec{f}$ solution de $b_\mu \vec{f} = \vec{0}$, satisfaisant la relation(C.R.S)

On a alors :

$$\left[\,\left|\int_{|y|=R} N_3(x,y)\, dS_y\right| \leq \frac{1}{R} \int_{|y|=R} \left|\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overset{3}{\vec{f}}_1 - \frac{\mu}{c} \overset{3}{\vec{f}}_1\right| dS_y + \frac{1}{R^2} \int_{|y|=R} \left|\vec{\omega} \wedge \mathrm{rot}\, \overset{3}{f}_1 - \frac{\mu}{c} \vec{f}_1\right| dS_y,\right.$$

donc $\int_{|y|=R} N_3(x,y)\, dS_y \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 \iff \vec{f}$ est μ-bisortante.

On a donc en fait démontré le théorème suivant :

Théorème

Pour Re $\mu \geq 0$, on a les propositions équivalentes :

1) $\vec{f}$ est la solution μ-bisortante de l'équation $b_\mu \vec{f} = \vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^4)$, Supp $\vec{g} \subset G$.

2) $\vec{f}$ est une solution de $b_\mu \vec{f} = \vec{g}$ qui satisfait $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} N_3(x,y)\, dS_y = 0$

3) $\forall$ x à l'extérieur de G, on a : $\vec{f}(x) = \sum_1^3 \int_{\partial G} N_i(x,y)\, dS_y$

4) $\vec{f}$ est une solution de $b_\mu \vec{f} = \vec{g}$ qui satisfait à la *condition de radiation sortante* (C.R.S.)

$$\int_{|x|=r} \left| \frac{\vec{x}}{|x|} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overset{3}{\vec{f}}_1 - \frac{\mu}{c} \overset{3}{f}_1 \right| dS_x = o(r)$$

On peut aussi alors démontrer le :

Théorème

Soit $\vec{f}$ la solution μ-bisortante de l'équation $b_\mu \vec{f} = \vec{g}$, et $\mathrm{Re}\,\mu \geq 0$.

Alors, pour $x \notin \bar{G}$:

$$\vec{f}(x) = -\int_{\partial G} (\vec{f}.R_{\mu,y}\,\Gamma^{\dagger} - \Gamma^{\dagger}\,R_{\mu,y}\,\vec{f})\,dS_y = -\sum_{1}^{4} \vec{x}_k.\left[\int_{\partial G} (\vec{f}.R\,\vec{\Gamma}_k^{\dagger} - \vec{\Gamma}_k^{\dagger}\,.\,R_\mu\,\vec{f})\,dS_y\right]$$

où $\vec{\Gamma}_k^{\dagger} = \begin{pmatrix} \vec{\gamma}_k^{\dagger} \\ \theta_k^{\dagger} \end{pmatrix}$ est le $k^{\text{ième}}$ vecteur colonne de Γ_k^{+}

Preuve

On applique la "formule de Betti" pour le domaine borné V_R, avec $\vec{v} = \vec{f}$ et $\vec{u} = \Gamma_k^{\dagger}$. Comme $b_\mu \vec{f} = 0$ dans V_R, on obtient :

$$-\vec{f}(x) = \int_{\partial G \cup S_R} (\vec{f}.R_\mu \Gamma^{\dagger} - \Gamma^{\dagger}\,R_\mu\,\vec{f})\,dS_y = \int_{\partial G} (\vec{f}.R_\mu\,\Gamma^{\dagger} - \Gamma^{\dagger}\,R_\mu\,\vec{f})\,dS_y + \int_{S_R} (\vec{f}.R_\mu \Gamma^{+} - \Gamma^{+}\,R_\mu \vec{f})\,dS_y$$

$$\text{Or} \int_{S_R} (\vec{f}.R_\mu \Gamma^{+} - \Gamma^{+}\,R_\mu\,\vec{f})\,dS_y = \sum \vec{x}_k.\int_{S_R} (\vec{f}_1.T\,\gamma_k^{\dagger} - \gamma_k^{\dagger}\,T^{\dagger}\,\vec{f}_1)\,dS_y + O(1)$$

$$= \sum_{1}^{3} \vec{x}_k.\int_{S_R} \left(\overset{3}{\vec{f}}_1.\left[\frac{\vec{t}}{\lambda'+2\mu'}\,(\vec{n}_y,\overset{3}{\vec{\gamma}}{}_k^{\dagger})\right] - \overset{3}{\vec{\gamma}}{}_k^{\dagger}\,.\,\frac{\vec{t}}{\lambda'+2\mu'}(\vec{n}_y,\overset{3}{\vec{f}}_1)\right)$$

$$= \sum_{1}^{3} \vec{x}_k.\int_{S_R} \left(\overset{3}{\vec{f}}_1.\left[\frac{\vec{t}}{\lambda'+2\mu'}\,(\vec{\gamma}_k^{\dagger}) + \mu\,c\,\overset{3}{\vec{\gamma}}{}_k^{\dagger}\right] - \overset{3}{\vec{\gamma}}{}_k^{\dagger}\,.\left[\frac{\vec{t}}{\lambda'+2\mu'}(\overset{3}{\vec{f}}_1) + \mu\,c\,\overset{3}{\vec{f}}_1\right]\right)dS_y + O(1)$$

Comme $\overset{3}{\vec{\gamma}}{}_k^{\dagger}$ a le même comportement asymptotique que $\overset{3}{\vec{f}}_1$ et vue la condition de radiation vérifiée par $\overset{3}{\vec{f}}_1$ pour $\mathrm{Re}\,\mu \geq 0$, le second membre tend vers zéro. C.q.f.d.

Remarque

La réciproque étant en général fausse, il n'y a pas équivalence.

6.3.3. *Conditions de radiation entrantes.*

En remplaçant éventuellement sortante par initialement entrante, on définit de la même manière le concept de distribution éventuellement t-entrante. A partir de quoi, nous obtenons des théorèmes analogues aux théorème n° En particulier, pour $\mu \in C/\sigma\ (A_o^o)$ on obtient la solution fondamentale t-initialement entrante en remplaçant μ par $-\mu$ dans $E^1(x,\mu)$. On appellera $E^e(x,\mu) = E^1(x;-\mu) + E^o(x,\mu)$. On en déduit alors une solution fondamentale Γ_μ^e -t-entrante de b_μ et par prolongement à tout C, la solution fondamentale μ -sortante-entrante Γ_μ^e (remplaçant la μ-bisortante) ;d'où aussi le concept de solution μ-sortante-entrante de $b_\mu\ \vec{f} = \vec{g}$, $\vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^4)$. On obtient alors des théorèmes analogues à ceux obtenus avec la solution μ-bisortante. Pour les conditions de radiation néanmoins, les choses sont assez dissymétriques. On obtient le :

Théorème

Pour Re $\mu \leqslant 0$, on a les propositions équivalentes :

1) $\vec{f}$ est la solution μ-sortante entrante de l'équation $b_\mu\ \vec{f} = \vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^4)$, supp $\vec{g}\ \subset G$.

2) $\vec{f}$ est une solution de $b_\mu\ \vec{f} = \vec{g}$ qui satisfait :

$\lim\limits_{R\to+\infty} \left(\sum\limits_1^2 \int_{S_R} N_i(x,y)\, dS_y + \int_{S_R} N_3^e(x,y)\, dS_y \right)$, où N_3^e est obtenu de N_3 en remplaçant μ par $-\mu$.

3) $\forall$ x à l'extérieur de G, on a :

$$\vec{f}(x) = \sum_1^2 \int_{\partial G} N_i(x,y)\, dS_y + \int_{\partial G} N_3^e(x,y)\, dS_y$$

4) $\vec{f}$ est une solution de $b_\mu\ \vec{f} = \vec{g}$ qui satisfait aux <u>conditions de radiation entrantes</u>.

$$C11 : \int_{|x|=r} \left| - \frac{\vec{x}}{|x|} \operatorname{div} \overset{1}{\vec{f}_1} + id_1 \overset{1}{\vec{f}_1} \right| dS_x = O'(r)$$

$$C12 : \int_{|x|=r} \left| - \frac{\vec{x}}{|x|} \operatorname{div} \overset{2}{\vec{f}_1} + id_1 \overset{2}{\vec{f}_1} \right| dS_x = O'(r)$$

$$C41 : \int_{|x|=r} \left| \frac{\partial}{n} \overset{1}{f}_4 - id_1 \overset{1}{f}_4 \right| dS_x = O'(r)$$

$$C42 : \int_{|x|=r} \left| \frac{\partial}{n_y} \overset{2}{f}_4 - id_2 \overset{2}{f}_4 \right| dS_x = O(r)$$

$$C3 : \int_{|x|=r} \left| \frac{\vec{x}}{|x|} \Lambda \overrightarrow{rot} \overset{3}{\vec{f}_1} + \frac{\mu}{c} \overset{3}{\vec{f}_1} \right| dS_x = O(r)$$

Plus précisément :

⊕ Re $\mu < 0$ et $\mu \notin \sigma(\overset{o}{A_o})$: alors C11, C41, C42 et C12 sont automatiquement réalisées, il n'y a plus que C3 à exiger; C3 est la "symétrique" de C.R.S.

⊕ $\mu \in \sigma(\overset{o}{A_o}) \setminus (\lambda_D \cup \overline{\lambda_D})$: seul un parmi Im $d_{1,2}$ est nul, soit d_1 par exemple : alors C12 et C42 sont à enlever.

⊕ $\mu = \lambda_D$ ou $\mu = \overline{\lambda_D}$. Alors toutes les conditions sont à prendre en considération.

Preuve

Il suffit de calquer sur ce qui précède ayant déjà toutes les estimations nécessaires sur les comportements de $\overset{i}{\vec{f}_1}$, $\overset{i}{\vec{f}}$, $\overset{i}{f}_4$ et leurs dérivées.

Remarque : Pour les conditions de radiation, ainsi que le développement en $\frac{1}{r}$ des solutions de $b_\mu \ \vec{u} = \vec{f}$, $\vec{f}$ à support compact, on aurait pu utiliser les techniques utilisées par C. WILCOX pour les équations de Maxwell et l'équation vectorielle des ondes (moyennes sphériques, fonctions d'ondes etc.) cf. WILCOX (2). Les calculs sont assez semblables dans chaque cas et d'un caractère très technique. Une application intéressante à l'opérateur de l'élasticité est proposée dans (F. PARSY, Thèse). Il semble en fait acquis que ces techniques s'appliquent à tous les opérateurs hypo-elliptiques à coefficients constants, et d'une manière très appropriée aux elliptiques parmi eux.

Conclusion : On a le théorème d'unicité suivant pour le problème extérieur.

Théorème : Le problème de Dirichlet pour l'équation $b_\lambda.\vec{u} = \vec{0}$ à l'extérieur G d'une surface ∂G bornée, possède, pour Re $\lambda \geqslant 0$, une solution μ-bisortante unique (u et ∂G étant assez réguliers pour pouvoir utiliser la formule de Green).

Preuve : Soit $(\vec{u},\theta)$ solution du problème homogène $\vec{u}\Big|_{\partial G} = 0$, $\theta\Big|_{\partial G} = 0$

On part de
$$\begin{cases} (\Delta^{*} - \bar{\lambda}^2)\ \vec{u} = m\ \vec{\nabla}\ \theta & 1 \\ (\Delta-\lambda)\ \theta = \lambda\ \eta\ \mathrm{div}\ \vec{u} & 2 \end{cases}$$

On multiplie 1 par $\lambda\ \eta\ \vec{u}$ et 2 par $m\bar{\theta}$, on fait la somme et on intègre sur $G_R = G \quad \{|x| \leqslant R\}$. Alors :

$$\int_{G_R} (\lambda\ \eta\ \vec{u}\ \overline{\Delta^{*}\ \vec{u}} - |\lambda|^2\ \bar{\lambda}\eta|\vec{u}|^2 - m\lambda|\theta|^2 + m\bar{\theta}\ \Delta\ \theta)\ dx = \lambda\ \varepsilon \int_{G_R} \mathrm{div}\ \vec{\theta}\ \vec{u}\ dx = \lambda\varepsilon \int_{\partial G_R} \overline{\theta}.\vec{n}.\vec{u}\ dS$$

$$\int_{G_R} (-\lambda\eta E(\vec{u},\vec{u}) - |\lambda|^2\ \bar{\lambda}\eta|\vec{u}|^2 - m\lambda|\theta|^2 - |\vec{\nabla} m\theta|^2) dx = \lambda\varepsilon \int_{\partial G_R} \vec{\theta}\ \vec{n}.\vec{u} dS - \lambda \int_{\partial G_R} \overline{\vec{u}.\vec{t}(\vec{n},\vec{u})} d\sigma + \int_{\partial G_R} \bar{\theta}\ \frac{\partial\theta}{\partial n}\ dS$$

$$= \int_{S_R} (\lambda\ \varepsilon\ \bar{\theta}\ \vec{\eta}.\vec{u} - \lambda\ \vec{u}.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}) + \bar{\theta}\ \frac{\partial\theta}{\partial n}\ )\ dS\ .$$

car les données homogènes annulent les intégrales sur ∂G ; $S_R = \{ |x| = R\}$.

D'autre part, les comportements à l'infini exhibés en pp. 63-65,

impliquent que $\displaystyle\int_{\partial S_R} (\varepsilon\, \vec{\theta}\ \ \vec{n}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}) + \frac{\partial\theta}{\partial n}\ )\, dS \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.

Donc quand $R \longrightarrow +\infty$ on a, en posant $\lambda = \alpha + i\beta$:

$$\int_G (\lambda\ \eta\, E(\vec{u},\vec{u}) + \bar{\lambda}\ |\lambda|^2\ \eta\ |\vec{u}|^2 + \lambda m|\theta|^2 + m|\vec{\nabla}\ \theta|^2)\, dx = 0,$$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha \left[\displaystyle\int_G \eta\ E(\vec{u},\vec{u}) + |\lambda|^2\eta\ |\vec{u}|^2 + m|\theta|^2\ )\ dx\right] + \displaystyle\int_G m\ |\vec{\nabla}\ \theta|^2\ dx = 0 \\ \beta \left[\displaystyle\int_G (\eta\ E(\vec{u},\vec{u}) - |\lambda|^2\eta\ |\vec{u}|^2 + m|\theta|^2)\ dx\right] = 0\ . \end{cases}$$

D'où :

1) $\alpha = \operatorname{Re}\lambda > 0$: on a tout de suite $\theta = 0$ et $\vec{u} = 0$. pp.

2) $\alpha = \operatorname{Re}\lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = i\,\beta$: alors $\overrightarrow{\nabla\theta} = \vec{0} \Rightarrow \theta =$ cte puisque G est connexe, mais on a en plus

$(\Delta+d_1^2(\lambda)\ )\ (\Delta+d_2^2(\lambda)\ )\ \theta = 0 \implies d_1^2(\lambda)\ d_2^2(\lambda)\ \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ en fait

2 donne alors : $\operatorname{div} \vec{u} = \vec{0}$; d'après le théorème de décomposition ceci donne $\vec{u}_p = \vec{0}$. Il reste donc :

$$\left|\begin{array}{l} (\Delta + \beta^2)\ \vec{u}_s = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{u}_S = 0 \\ \vec{u}_S\big|_{\partial G} = \vec{0} \\ \vec{u}_S \text{ vérifie les conditions de radiation classiques.} \end{array}\right.$$

D'où $\vec{u}_S = \vec{0}$, donc $\vec{u} = 0$, $\theta = 0$ cqfd.

<u>*Remarque*</u> : La méthode est en défaut pour $\operatorname{Re}\mu < 0$, et ne donne donc pas l'unicité pour ce cas.

Addendum au Chapitre IV

SUR UNE AUTRE DEMONSTRATION DU TH. p. 33 ET CONSEQUENCES.

Au cours d'une théorie du Scattering, on est toujours amené à démontrer l'existence et l'unicité et à construire explicitement des solutions fondamentales entrantes ou sortantes d'un opérateur dit non perturbé,... Ces calculs sont souvent très pénibles (cf. G. SCHMIDT (1) pour les équations de l'électromagnétisme et F. PARSY (1) pour les équations de LAMÉ. D'ailleurs pour $G_1(x, \mu)$ nous avons suivi, la méthode de Schmidt. Nous allons voir qu'en fait ces calculs peuvent être totalement évités si on connait les solutions fondamentales de l'opérateur $B_o = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c^2\vec{\Delta} & 0 \end{pmatrix}$ qui, lui, a été largement étudié.

Nous commençons par illustrer la méthode en détail pour notre opérateur A_o^1 nous indiquerons ensuite brièvement le plan à suivre pour les équations de Maxwell et les équations de l'élasticité.

A 1 . Sur l'équation $(A_o^1-\mu)\ (\vec{f},0) = (\vec{g}^1,\ 0)$

$\vec{g}^1$ est la partie à divergence nulle d'une distribution $\vec{g} \in E'(R^3;C^6)$.

Posons :

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_1 = \begin{pmatrix} \vec{g}_1^1 \\ \vec{g}_2^1 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}^o = \begin{pmatrix} \vec{g}_1^o \\ \vec{g}_2^o \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \vec{g}^1 + \vec{g}^2$$

Alors :

$$(A_o^1-\mu)\ \vec{f},0) = (\vec{g}^1,0) \iff (B_o^1-\mu)\ \vec{f} = \vec{g}^1 \iff \begin{cases} \vec{f}_2 - \mu\ \vec{f}_1 = \vec{g}_1^1 \\ c^2\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ f_1 - \mu\ \vec{f}_2 = \vec{g}_2^1 \end{cases}$$

soit $\vec{h} = (\vec{h}_1,\ \vec{h}_2,0) = (\vec{h},0)$ une distribution auxiliaire, pour le moment indéterminée et $(\vec{h},0) = (\vec{f},0) + (\vec{h},0)$. Alors :

$$(B_o^1-\mu)\ \vec{k} = \begin{cases} \vec{f}_2 + \vec{h}_2 - \mu\ (\vec{f}_1 + \vec{h}_1) = \vec{g}_1^1 + \vec{h}_2 - \mu\ \vec{h}_1 \\ c^2\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ (\vec{f}_1+\vec{h}_1)-\mu(\vec{f}_2+\vec{h}_2) = \vec{g}_2^1 + c^2\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{h}_1 - \mu\ \vec{h}_2 \end{cases}$$

<u>On fait alors le choix</u>

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{g}_2^{\,1}}{\mu} \quad \text{et} \quad \vec{h}_1 = \frac{\vec{g}_1^{\,1}}{\mu} + \frac{\vec{g}_2^{\,1}}{\mu^2} \quad \text{, d'où :}$$

$$(B_o^1-\mu)\ \vec{k} = \begin{cases} \vec{0} \\ \dfrac{c^2}{\mu^2}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ (\mu\ \vec{g}_1^{\,1}+\vec{g}_2^{\,2}) = \dfrac{c^2}{\mu^2}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ (\mu\ \vec{g}_1+\vec{g}_2) \end{cases} \text{, puisque } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{g}^{\,1}$$

soit en fin de compte :

$$(B_o-\mu)\ \vec{k} = \frac{c^2}{\mu^2}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ (\vec{0},\ \mu\ \vec{g}_1 + \vec{g}_2) \quad .$$

où le second membre est le $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}$ d'une distribution à <u>support compact</u>.

On a alors le théorème :

<u>*Théorème*</u> :

Soit $\vec{e}$ la solution éventuellement sortante (pour $V_o(t)$) de l'équation $(B_o-\mu)\ \vec{e} = \vec{g}$, $\vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^6)$. Alors $\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{e} = (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{e}_1,\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{e}_2)$ est une solution evs de l'équation : $(B_o^1 -\mu)\ \vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{g}$, pour le groupe $V_o^1(t)$.

<u>*Preuve*</u> :

1) $(B_o^1-\mu)\ \vec{k} = (B_o^1-\mu)\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ (B_o^1-\mu)\ \vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ (B_o-\mu)\ \vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{g}$.

2) $\vec{k}$ est evs pour $V_o^1(t)$:

Pour $V_o(t)$, on a défini l'extension aux distributions par :

$$[V_o(t)\ \vec{f}]_1(\vec{\phi}) = \vec{f}_1([V_o(-t)\{\vec{0},\vec{\phi}\}]_2) - \vec{f}_2([V_o(-t)\ \{\vec{0},\vec{\phi}\}]_1)$$

$$[V_o(t)\ \vec{f}]_2(\vec{\phi}) = -\ \vec{f}_1([V_o(-t)\ \{\vec{\phi},\ \vec{0}\}\ ]_2) + \vec{g}_2\ ([V_o(-t)\{\vec{\phi},0\}]_1)$$

Soit $V_o^1(t)$ la restriction de $V_o(t)$ aux distributions à divergence nulle. Il est clair que cette extension est la même que celle de $S^1(t)$ (à la dernière composante près). On a donc pour tout $\vec{\phi} \in \mathcal{D}\ (R^3;C^3)$.

$$(V_o^1(t)\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f})_1\ (\vec{\phi}) = (V_o(t)\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f})_1(\vec{\phi}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}[\ (V_o(t)\ \vec{f})_1(\vec{\phi})] \quad .$$

Donc si $\vec{f}$ est evs pour $V_o(t)$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f}$ l'est pour $V_o^1(t)$. <u>cqfd</u>

Corollaire

Soit $\vec{e}$ la solution evs (pour $V_o(t)$) de l'équation :
$(B_o-\mu)\ \vec{e} = \vec{g} \in E'(R^3;C^6)$. Alors $(\vec{k},0)$ est une solution éventuellement sortante (pour $S^1(t)$) de l'équation

$$(A_o^1-\mu)(\vec{k},0) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{g}\ .$$

Lemme

Soit $\vec{g} \in E'(R^3;C^6)$. Soit g^1, sa partie à divergence nulle ($\vec{g} \in \mathcal{D}'_{L^2}$!) Alors $(g^1,0)$ est evs pour $S^1(t)$.

Preuve

Dans le lemme 4, du paragraphe 4.3.4 nous avons démontré que $J(g^1,0)$ était à support compact en s ($\in E'(R_s;N^1)$), donc sortante. Alors $J^{-1}\ J(g^1,0)=(\vec{g}^1,0)$ est donc evs.

Corollaire

$(\vec{f},0) = (\vec{k},0) - (\vec{h},0)$ est evs pour le groupe $S^1(t)$.

Preuve :

évident puisque $\vec{h}$ est la partie à divergence nulle de $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\ (\vec{g}_2,\mu\vec{g}_1+\vec{g}_2)$.
On peut alors démontrer le :

Théorème

L'équation $(A_o^1-\mu)(\vec{f},0) = (\vec{g}^1,0)$ où $\vec{g}^1$ est la partie à divergence nulle d'une distribution $\vec{g} \in E'(R^3;C^6)$ possède une solution éventuellement sortante (pour $S^1(t)$) unique.

Preuve

1) Existence : Soit $\vec{e}$ la solution evs de l'équation.

$$(B_o-\mu)\ \vec{e} = (\vec{0},\ \mu\ \vec{g}_1 + \vec{g}_2),$$ dont on sait l'existence et l'unicité (voir par exemple L.P. p. 120)

Par ce qui précède, on a l'existence de $\vec{f}$ avec :

$\vec{f} = \frac{c^2}{\mu^2} \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{e} - \vec{h} = \frac{c^2}{\mu^2}\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{e} - \frac{1}{\mu^2} (\mu\ \vec{g}_1^1 + \vec{g}_2^1\ ,\ \mu\ \vec{g}_2^1)$; en particulier, si $\vec{g}_1^1 = \vec{0}$, on a :

$$\vec{f} = \frac{c^2}{\mu^2} \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{e} - \frac{1}{\mu^2}\ (\vec{g}_2^1, \mu\ \vec{g}_2^1)\ .$$

2) <u>Unicité</u> : on reprend la même démonstration que p. 24 c'est-à-dire

$\vec{f}$ evs $\Rightarrow \exists\ r > 0$ t.q. $S^1(t)\ \vec{f} = 0$ pour $|x| < t-r \Rightarrow \vec{f} = 0$ car t est arbitraire.

<u>Conséquence</u>. <u>Application</u>.

1) Soit $\vec{g} = (\vec{0},\ \delta(x)\ \vec{x}_k)0)$, alors $\vec{g}_1^1 = \vec{0}$; donc la solution éventuellement sortante de $(A_o^1 - \mu)\ (\vec{f}^k, 0) = (\vec{0},\ \vec{\delta}_k^1, 0)$ sera donnée par :

$$(\vec{f}^k, 0) = \frac{c^2}{\mu^2} \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{e}_k - \frac{1}{\mu^2}\ (\vec{\delta}_k^1, \mu\vec{\delta}_k^1) \text{ avec } \vec{e}_k = \frac{1}{c^2}\ (\frac{e^{-\mu r}}{r}\ \vec{x}_k,\ \mu\ \frac{e^{-\mu r}}{r}\ \vec{x}_k)$$

c'est-à-dire :

$$f_1^k = \frac{1}{\mu^2} \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c}r}}{r}\ \vec{x}_k \text{ et } \vec{f}_2^k = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c}r}}{r}\ \vec{x}_k \text{ et } f_7^k = 0\ ,\ k = 1,2,3\ .$$

2) Soit $\vec{g} = (\delta\ (x)\ \vec{x}_{k-3},\ \vec{0},\ \vec{0})$. Alors $\vec{h}_1 = \frac{\vec{\delta}_k^1}{\mu}\ ,\ \vec{h}_2 = \vec{0}$, d'où :

$$\vec{f}_1^k = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c}r}}{r}\ \vec{x}_{k-3} \text{ et } \vec{f}_2^k = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \frac{e^{-\mu r}}{r}\ \vec{x}_{k-3} \text{ et } f_7^k = 0,\ k = 4,5,6\ .$$

On retrouve donc exactement les vecteurs colonnes de $G^1(x,\mu)$.

<u>Cette méthode nous a donc permis de démonter l'existence et l'unicité et de construire explicitement sans aucun calcul, la solution fondamentale sortante $G_1(x,\mu)$ de l'opérateur A_o^1</u>.

A 2. <u>APPLICATION A L'OPERATEUR DE L'ELASTICITE</u>

Nous donnons brièvement le plan pour l'opérateur $A_o = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta^* = -\mu'\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot} + (\lambda'+\mu')\ \vec{\nabla}$ div.

1) Dans l'espace $H_o = EL(R^3;C^3) \times L_2(R^3;C^3)$, l'opérateur A_o, de domaine : $D(A_o) = \{\vec{u} \in H_o : A_o\ \vec{u} \in H_o\}$est générateur d'un groupe e^{tA_o} d'opérateurs unitaires, qui se décompose en deux groupes :

$e^{tA_o} = e^{tA_o^o} \oplus e^{tA_o^1}$ sur les sous-espaces $H_o^1 = EL^1(R^3;C^3)\times L_2^1(R^3;C^3)$ et $H_o^o = H_o \ominus H_o^1$.

$$A_o^o = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c_2^2\vec{\nabla}\,\mathrm{div} & 0 \end{pmatrix},\quad A_o^1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -c_1^2\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} & 0 \end{pmatrix},$$

$D(A_o^o) = \vec{u}\ \{H_o^o : A_o^o \in H_o^o\}$, $D(A_o^1) = \{\vec{u} \in H_o^1 : A_o^1 : A_o^1\,\vec{u} \in H_o^1\}$.

$c_1^2 = \mu'$, $c_2^2 = \lambda' + 2\,\mu'$

2) Soit $B_c = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c^2 & 0 \end{pmatrix}$ l'opérateur déjà envisagé dans l'espace

$W_o = BL(R^3;C^3) \times L_2(R^3;C^3)$. On a aussi : $B_c^o = B_c\big|_{W_o^o}$ et $B_c^1 = B_c\big|_{W_o^1}$

$B_c = B_c^o \oplus B_c^1$ et $e^{tB_c} = e^{tB_c} \oplus e^{tB_c^1}$, $B_c^o = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c^2\vec{\nabla}\,\mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}$, $B_c^1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -c^2\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} & 0 \end{pmatrix}$

3) On étend $T_o(t) = e^{tA_o}$ aux distributions par des formules analogues à celles pour $V_o(t)$, et on définit de la même manière la notion de distribution éventuellement sortante par $T_o(t)$:

$\vec{f} \in \mathcal{D}'(R^3;C^6)$ est evs si $\exists\, r > 0$ t.q. $U_o(t)\,\vec{f} = \vec{0}$ pour $|x| < c_m\,t-r$

$c_m = \min\,(\lambda' + 2\mu' , \mu')$.

4) On construit la solution evs de $(B_c-\mu) = \vec{g}$, $\vec{g} \in E'$ pour $c = c1$. Et on en déduit exactement comme nous l'avons fait ci-haut la solution evs (pour le groupe $U_o^1(t) = e^{tA_o^1}$) de l'équation $(A_o^1-\mu)\,\vec{f}^1 = \vec{g}^1$.

5) On considère après $c = c_2$ et on considère l'équation $(A_o^o-\mu)\,\vec{f}^o = \vec{g}^o$.

On prendra alors :

$\vec{k} = \vec{f}^o + \frac{1}{\mu^2}\,(\mu\,\vec{g}_1^o + \vec{g}_2^o,\ \mu\,\vec{g}_2^o)$, d'où

$\vec{f}^o = \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\,\vec{e}^2 - \frac{1}{\mu^2}\ (\mu\,\vec{g}_1^o + \vec{g}_2^o\ ,\ \mu\,\vec{g}_2^o)$, où $\vec{e}^2$ est la solution evs (pour $V_o^o(t)$) de $(B_{c_2} - \mu)\,\vec{e}^2 = (\vec{0},\ \mu\,\vec{g}_1 + \vec{g}_2)$.

6) soit alors $\vec{f} = \vec{f}^{o} + \vec{f}^{1}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{f}^{1} \text{ evs pour } U_o^1(t) \\ \text{et } \vec{f}^{o} \quad " \quad " \quad U_o^o(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{f} \text{ est evs pour } U_o(t).$$

7) En particulier pour $\vec{g}_k = (\delta(x)\ \vec{x}_k, \vec{0})$ $\quad k = 1,2,3$, on obtient :

$$\vec{f}_1^k = -\frac{1}{\mu}\ \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c_1}}-1}{r}\ \vec{x}_k + \frac{1}{\mu}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c_2}r}}{r}\ \vec{x}_k$$

$$\vec{f}_2^k = -\ \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c_1}r}}{r}\ x_k + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c_2}r}}{r}\ \vec{x}_k$$

Pour $h = 4, 5, 6$, $\quad \vec{g}_k = (0, \delta\ (x)\ \vec{x}_{k-3}\ )$ on obtient :

$$\vec{f}_1^k = \frac{1}{\mu^2}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c_2}}}{r}\ \vec{x}_{k-3} - \frac{1}{\mu^2}\ \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c_1}r}-1}{r}\ \vec{x}_{k-3}$$

$$\vec{f}_2^k = \frac{1}{\mu}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c_2}}-1}{r}\ \vec{x}_{k-3} - \frac{1}{\mu}\ \vec{\nabla}\ \mathrm{div}\ \frac{e^{-\frac{\mu}{c_1}r}-1}{r}\ \vec{x}_{k-3}$$

expressions qui coïncident avec celles trouvées en p. 43 (Ge (x,μ))

A 3. EQUATIONS DE MAXWELL

A) A_o est l'opérateur

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\nabla}x \\ -\vec{\nabla}x & 0 \end{pmatrix} \quad , \ D(A_o) = \{\vec{m}=(\vec{m}_1,\vec{m}_2) : (\vec{\nabla}x\ \vec{m}_2,\ -\vec{\nabla}x m_1) \in M_o\} \text{ où}$$

$M_o = \overset{o}{BL}\ (R^3;C^3) \times L_2(R^3;C^3)$.

A_o est alors générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires $U_o(t)$. La décomposition :

$A_o = A_o^o \oplus A_o^1$ $\quad$ où $A_o^o = (0) = A_o|_{M_o^o}$ $\qquad M_o^o = \overset{o}{BL}{}^o\ (R^3;C^3) \times L_2^o(R^3;C^3)$

$$A_o^1 = A_o|_{M_o^1} \quad M_o^1 = \overset{o}{BL}{}^1 \times L_2^1 .$$

engendre la décomposition de $U_o(t)$ en $\boxed{U_o(t) = I \oplus U_o^1(t)}$.

Si $V_o^1(t)$ est la restriction aux données à divergence nulle du groupe $V_o(t)$ de l'équation des ondes on a : $U_o(t) = J^{-1}\, V_o^1(t)\, J$ où J est une isométrie entre les espaces M_o^1 et W_o^1 , telle que si $J\vec{m} = \vec{W}$, alors $m_1 = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{w}_1$ et $\vec{m}_2 = \vec{w}_2$.
Nous commençons par démontrer le :

Théorème 1

1) Soit $\vec{f} \in \mathcal{D}'(R^3;C^6)$, une solution de l'équation $(A_o-\mu)\, \vec{f} = \vec{g}^1$, $\vec{g}^1$ est la partie à divergence nulle de $\vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^6)$, $\vec{g} = \vec{g}^1 + \vec{g}^o$.

Il existe alors une distribution $\vec{h}$ telle que :

$\vec{k} = (-\frac{1}{\mu}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{f}_1, \vec{f}_2) + \vec{h}$ est solution de l'équation

$$(B_o-\mu)\, \vec{k} = -\frac{1}{\mu^2}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, (\vec{0}, \vec{g}_2 - \frac{1}{\mu}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{g}_1).$$

2) Réciproquement

Si $\vec{e}$ est solution de $(B_o-\mu)\, \vec{e} = (\vec{0}, \vec{g}_2 - \frac{1}{\mu}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{g}_1)$, $\vec{g}_1$ et $\vec{g}_2 \in \mathcal{E}'(R^3;C^3)$, soient :

$$\begin{cases} \vec{f}_2 = -\frac{1}{\mu^2}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{e}_2 + \frac{1}{\mu^2}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{g}_1 - \frac{1}{\mu}\, \vec{g}_2^1 \\ \vec{f}_1 = \frac{1}{\mu}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{f}_2 - \frac{1}{\mu}\, \vec{g}_1^1 = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{e}_1 - \frac{1}{\mu}\, \vec{g}_1^1 \end{cases}$$

Alors $\vec{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ est solution de l'éqution $(A_o-\mu)\, \vec{f} = \vec{g}^1$.

Preuve

1) Partie directe :

$$(A_o=u,)\, \vec{f} = g_1 \iff \begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{f}_2 - \mu\, \vec{f}_1 = \vec{g}_1^1 \\ -\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{f}_1 - \mu\, \vec{f}_2 = \vec{g}_2^1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\mu\, \vec{f}_2 = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{f}_1 + \vec{g}_2^1 \\ -\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{f}_1) - \mu^2\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{f}_1 = \\ \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{g}_2^1 + \mu\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{g}_1^1 \end{cases}$$

Posant $\vec{m}_1 = -\frac{1}{\mu^2}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{f}_1$ et $\vec{m}_2 = \vec{f}_2$, $\vec{m} = (\vec{m}_1, \vec{m}_2)$, on a :

$$\begin{cases} \vec{m}_2 = \mu\, \vec{m}_1 - \frac{1}{\mu}\, \vec{g}_2^1 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{m}_1 + \mu^2\, \vec{m}_1 = \frac{1}{\mu^2}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{g}_{\underline{2}}^1 + \frac{1}{\mu}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{g}_1^1 \end{cases}$$

Alors : $(B_o^1-\mu)\vec{m} = \begin{cases} \vec{m}_2 - \mu\,\vec{m}_1 = -\frac{1}{\mu}\vec{g}_2^1 \\ -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{m}_1 - \mu\,\vec{m}_2 = -\frac{1}{\mu^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_2^1 - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_1^1 + \vec{g}_2^1 \end{cases}$

On pose alors $\vec{k} = \vec{m} + \vec{h}$, $\vec{h} = (\vec{h}_1, \vec{h}_2)$, alors :

$$(B_o^1-\mu)\vec{k} = \begin{cases} -\frac{1}{\mu}\vec{g}_2^1 + \vec{h}_2 - \mu\,\vec{h}_1 \\ -\frac{1}{\mu^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_2^1 - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_1^1 + \vec{g}_2^1 - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{h}_1 - \mu\,\vec{h}_2 \end{cases}$$

On prend alors : $\vec{h}_2 = -\frac{1}{\mu^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_1^1 + \frac{1}{\mu}\vec{g}_2^1$, $\vec{h}_1 = -\frac{1}{\mu^3}\mathrm{rot}\,\vec{g}_1^1$; on obtient donc :

$$(B_o^1-\mu)\vec{k} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{\mu^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_2^1 + \frac{1}{\mu^3}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_1^1), \end{cases}$$ d'où $\mathrm{div}\,\vec{k}_1 = \mathrm{div}\,\vec{k}_2 = \vec{0}$,

et donc on a finalement :

$$\boxed{(B_o-\mu)\vec{k} = -\frac{1}{\mu^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{0}, \vec{g}_2^1 - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_1^1) = -\frac{1}{\mu^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{0}, \vec{g}_2 - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_1)}$$

B) <u>Réciproquement</u> :

$$\vec{e} \text{ vérifie : } \begin{cases} \vec{e}_2 = \mu\,\vec{e}_1 \\ \Delta\,\vec{e}_1 - \mu\,\vec{e}_2 = \vec{g}_2 - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_1 \end{cases}$$

d'où $\mu\,\vec{f}_2 = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{e}_1 + \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,g_1^1 - \vec{g}_2^1 = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g}_1 - \vec{g}_2^1$

et on avait déjà $\mu\,\vec{f}_1 = \mathrm{rot}\,\vec{f}_2 - \vec{g}_1^1$ cqfd

C) On définit alors la notion de distribution éventuellement sortante par :

$\exists r \in R_+$ t.q. $U_o(t)\,\vec{m} = \vec{0}$ dans le cône $|x| < t - r$, où $U_o(t)\,\vec{m}$ est la distribution (étendant $U_o(t)$ aux distributions) :

$$[U_o(t)\,m]_1(\vec{\varphi}) = \vec{m}_1\,(\,[U_o(-t)\,(\vec{\varphi},\vec{0})]_1) + \vec{m}_2(\,[U_o(-t)\,(\vec{\varphi},\vec{0})]_2\,)$$

$$[U_o(t)\,\vec{m}]_2\,(\vec{\varphi}) = \vec{m}_1([U_o(-t)\,(\vec{0},\vec{\varphi})]_1\,) + \vec{m}_2([U_o(-t)\,(\vec{0},\vec{\varphi})]_2)$$

Nous appellerons $U_o^1(t)$ la restriction de $U_o(t)$ aux distributions à divergence nulle.

D) On définit une représentation de translation J par M_o sur $L_2\ (R;N^1)$ par :

$$J\ \vec{m} = \vec{k}\ (x,\omega) = -\ \partial_s^2 \Big[\int_{x.\omega=s} Jm_1(x)dS\Big] + \partial_s \Big[\int_{x.\omega=s} \big[Jm_2(x)dS\big]\text{, si } j\vec{m} \in \mathcal{S}\ (R^3)$$

Réciproquement :

$$\vec{m}_1(x) = (J^{-1}\ \vec{k})_1(x) = \int_{|\omega|=1} \vec{\omega} \wedge \vec{k}'(x.\omega,\omega)\ d\omega \quad \text{et } \vec{m}_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|=1} k'(x.\omega,\omega)d\omega$$

On peut alors étendre J aux distributions de $[\mathcal{D}'^{\,1}_{L^2}\ (R^3;C^3)]^2$ sur $\mathcal{D}'_{L^2}(R;N^1)$. J est alors **un** isomorphisme et on a :

⟶ Si m^1 est la partie à divergence nulle d'une distribution à support dans $\{|x| \leqslant r\}$, alors $J\ m^1$ a son support dans $\{\ |s|\ \leqslant\ r\}$.

De ceci on déduit tout de suite le Lemme :

Lemme :

Soit $\vec{f} = (\vec{f}_1,\vec{f}_2)$ une distribution à divergence nulle. Supposons que $\vec{f}$ soit à support compact ou bien la partie à divergence nulle d'une distribution à support compact. Alors $\vec{f}$ est evs par $U_o(t)$.

E) On est alors en mesure de démontrer le :

Théorème

Soit $\vec{e}$ la solution evs unique de l'équation $(B_o-\mu)\ \vec{e} = (\vec{0},\ \vec{g}_2 - \frac{1}{\mu}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{g}_1)$ où $\vec{g} = (\vec{g}_1,\vec{g}_2) \in \mathcal{E}'(R^3;C^6)$. Alors la distribution $\vec{f}$ obtenue de $\vec{e}$ comme au théorème précédent est la solution éventuellement sortante unique de $(A_o-\mu)\ \vec{f} = \vec{g}^1$ où $\vec{g}^1$ est la partie à divergence nulle de $\vec{g}$.

Preuve

$\vec{f}$ est une solution de $(A_o-\mu)\ \vec{f} = \vec{g}^1$, avec $\vec{f}_1 = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{e}_1 - \frac{1}{\mu}\ \vec{g}^1_1$ et $\vec{f}_2 = -\frac{1}{\mu}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{e}_1 + \frac{1}{\mu^2}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{g}^1_1 - \frac{1}{\mu}\ \vec{g}^1_2$. On a alors :

$$[U_o(t)\,\vec{m}]_1(\vec{\psi}) = \vec{e}_1(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ [U_o(-t)\ \{\vec{\psi},\ \vec{0}\}]_1) - \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{e}_1(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ [U_o(-t)\ \ \{\vec{\psi},\vec{0}\}]_2)$$

$$= \vec{e}_1([U_o(-t)\{\ \vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}]_2) - \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{e}_1([U_o(-t)\ \{\vec{0},\ -\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\}]_1)$$

par "$A_o\ U_o(t) = U_o(t)\ A_o$" .

$$= \vec{e}_1[([U_o^1(-t)\{\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\}]_2) - \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{e}_1([U_o^1(-t)\ \{\vec{0},\ -\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\}]_1)$$

or $j\ U_o^1(t) = V_o^1(t)\ j \iff \{[U_o^1(t)\ \vec{f}]_1 = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ [V_o^1(t)\ (j\vec{f})]_1;\ [U_o^1(t)\vec{f}]_2 = [V_o^1(t)(j\vec{f})]_2$

et $j\ \{\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\} = \{\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\ \}$, d'où :

$$[U_o(t)\,\vec{m}]_1(\vec{\psi}) = \vec{e}_1\ ([V_o^1(-t)\ \{\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\}]_2) + \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{e}_1(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ [V_o^1(-t)\{\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\psi}\}]_1)$$

$$= \vec{e}_1\ ([V_o^1(-t)\ \{\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\}]_2) + \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{e}_1([V_o^1(-t)\{\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\}]_1)$$

Or $\Delta\,\vec{e}_1 = \mu^2\,\vec{e}_1 + \vec{g}_2 - \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{g}_1 = \mu^2\,\vec{e}_1 + \vec{G}$ où $\vec{G} \in \mathcal{E}'(R^3;C^3)$ et donc $(\vec{0},\vec{G})$ est éventuellement sortante; d'autre part :

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{e}_1([V_o^1(-t)\{-\}]_1) = -\ \Delta\vec{e}_1([V_o^1(-t)\{-\}]_1)$ puisque $\mathrm{div}\ V_o^1(-t)\ \{-\} = 0$, donc :

$$[U_o(t)\,\vec{m}]_1(\vec{\psi}) = \vec{e}_1([V_o^1(-t)\ \{\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\}]_2) - \mu\ \vec{e}_1([V_o^1(-t)\{\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\}]_1) + \vec{G}(\ V_o^1(-t)\{-\}]_1)$$

$$= \vec{e}_1(\ V_o(-t)\{\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\}]_2) - \mu\,\vec{e}_1([V_o(-t)\{\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}\}]_1) + \vec{G}([V_o(-t)\{-\}]_1)$$

$$= [V_o(t)\{\vec{0},\ -\vec{G}\}]_1(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}) + [V_o(t)\{\vec{e}_1,\ \mu\ \vec{e}_1\}\ ]_1(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{\psi}).$$

Comme $(\vec{e}_1,\ \mu\ \vec{e}_1)$ est éventuellement sortante pour $V_o(t)$ et que $\{\vec{0},\ -\vec{G}\}$ l'est aussi car à support compact, $\exists\ r > 0$ t.q. $[U_o(t)\ \vec{m}]_1 = 0$ pour $|x| < t - r$, $t \geq r$.

On démontre de la même manière un résultat analogue pour $[U_o(t)\vec{m}]_2$; on a donc démontré que $\vec{f}$ était evs.

Pour l'unicité, on utilise exactement le même argument que pour les 2 paragraphes A1-A2.

F) Application :

a) On prend $\vec{g}_1 = \delta(x)\,\vec{x}_k$, $\vec{g}_2 = \vec{0}$ $\quad k = 1,2,3$:

alors : $(B_o-\mu)\,\vec{e}_k = (\vec{0}, -\frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\delta(x)\,\vec{x}_k) \Rightarrow \vec{e}_k = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_k\,,\ \mu\frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_k)$

$$\vec{k}_k = \frac{1}{\mu^3}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \Delta(\frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_k\,,\ \mu\frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_k) \qquad \vec{g}_1^{\,1} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{\vec{x}_k}{r}$$

$$= \frac{1}{\mu^3}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \mu^2\frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_k - \delta(x)\,\vec{x}_k,\ \mu^3\frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_k - \mu\,\delta(x)\,\vec{x}_k$$

$$= \frac{1}{\mu}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_k,\ \frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_k\right] - \frac{1}{\mu^3}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[-\delta(x)\,\vec{x}_k,\ -\mu\delta(x)\,\vec{x}_k\right]$$

$$\vec{m}_k = \vec{k}_k - \vec{h}_k = \vec{k}_k - (-\frac{1}{\mu^3}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\delta(x)\,\vec{x}_k,\ -\frac{1}{\mu^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\delta(x)\,\vec{x}_k) =$$

$$\frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_k\,,\ \mu\frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_k)$$

d'où

$$\vec{f}_{2,k} = \mathrm{rot}\,\frac{e^{-\mu r}}{r}x_k = \vec{m}_{k,2} \text{ et } \mu\,\vec{f}_1 = \mathrm{rot}\,\vec{f}_2 - \vec{g}_1^{\,1}\text{ , c'est-à-dire}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{f}_{1,k} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{e^{-r\mu}-1}{r}\vec{x}_k \\ \vec{f}_{2,k} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{e^{-\mu r}}{r}\ \vec{x}_k \end{array}\right\}$$

b) $\vec{g}_1 = \vec{0}$, $\vec{g}_2 = \delta(x)\,\vec{x}_{k-3}$ $\quad k = 4,5,6$.

Alors $\vec{e}_{k-3} = -(\frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_{k-3}\,,\ \mu\frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_{k-3})$, $\vec{k}_k = -\frac{1}{\mu^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{e}_{k-3}$

$$\vec{m}_k = \vec{k}_k - (\vec{0},\ \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}}\ \frac{\vec{x}_{k-3}}{r}) \Rightarrow \boxed{\vec{m}_{2,k} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{e^{-\mu r}-1}{r}\vec{x}_{k-3} = \vec{f}_{2,k}}$$

$$\boxed{\vec{f}_{1,k} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{m}_2 - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{\vec{x}_{k-3}}{r} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{e^{-\mu r}}{r}\vec{x}_{k-3}}$$

On trouve ainsi la solution fondamentale éventuellement sortante de l'opérateur $A_o^1 - \mu I_6$. Ces expressions coïncident avec celle de G. SCHMIDT (1 , p.307), $G^1(\mathbf{x},\mu)$.

APPLICATION DE LA THEORIE ABSTRAITE DU CHAPITRE I

DIFFRACTION D'ONDES THERMO-ELASTIQUES

I. LES SEMI GROUPES $T(t)$ ET $T^*(t)$ DU PROBLEME EXTERIEUR (1e)

1. PROBLEME REEL ET P.C.A. associé

1.1. Introduction

Soit G un ouvert de R^3 dont le complémentaire est un compact $\bar{\Lambda}$, d'intérieur Λ et de frontière $\partial\Lambda$. On s'intéresse au problème de la diffraction, par un obstacle rigide en Λ , dont la surface $\partial\Lambda$ est maintenue à température constante, d'ondes se propageant dans un milieu thermo-élastique remplissant G. Mathématiquement, c'est le problème (1) (voir Chapitre II, p. 4-5) avec comme :

- Données à la frontière : $\begin{cases} \vec{u}(x',t) = \vec{0} \\ \partial_t \vec{u}(x',t) = \vec{0} \qquad (t,x') \in R_+^* \times \partial\Lambda \\ \theta(x',t) = 0 \end{cases}$

- Données initiales : $\begin{cases} \vec{u}(x,0) = \vec{h}_1(x) \\ \partial_t \vec{u}(x,0) = \vec{h}_2(x) \quad \text{pour tout } x \in G \\ \theta(x,0) = h_7(x) \end{cases}$

où $\vec{u}$ et θ^∞ représentent les écarts de déplacement et de température par rapport au champ incident. Suivant la "stratégie" générale décrite au début du Chapitre II, nous allons associer à ce problème réel un "P.C.A. associé" dans un bon espace de Hilbert.

L'ESPACE H

Les données initiales seront prises dans l'espace H suivant :
H sera le complété de $\mathcal{D}(G;C^7)$ dans la norme :

$$||\vec{h}||^2_H = \lambda||\text{div}\ \vec{h}_1||^2_{L^2(G;C)} + 2\mu \sum_{i,j} ||\varepsilon_{ij}(\vec{h}_1)||^2_{L^2(G;C)} + \rho\ ||\vec{h}_2||^2_{L^2(G;C^3)}$$

$$+ \frac{\gamma}{\eta k} ||h_7||^2_{L^2(G;C)} \qquad \text{où} \quad \vec{h} = (\vec{h}_1, \vec{h}_2, h_7)$$

Pour $\vec{h} \in \mathcal{D}\ (G;\ C^7)$, cette norme est équivalente à :

$||\vec{h}||^2_H = (\lambda+2\mu)||\ \text{div}\ \vec{h}_1||^2_{L_2(G;C)} + \mu\ ||\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{h}_1||^2_{L_2(G;C^3} +$ identique, et continue

donc de l'être pour tout $\vec{h} \in H$.

Soit alors $\overrightarrow{EL}(G)$ l'espace des distributions vectorielles $\vec{T}$, telles que $\varepsilon_{ij}(\vec{T})$ soit de carré intégrable. Alors, on démontre comme dans DENY-LYONS (1) pour l'espace $BL(\Omega)$, que :

Théorème : $\overrightarrow{EL}(G) = \overset{\circ}{EL}(G;C^3) \oplus \{\vec{T} : \Delta^* \vec{T} = \vec{0}\}$, où $\overset{\circ}{EL}(G;C^3)$ est isomorphe au complété de $\mathcal{D}$ $(G;C^3)$ dans la norme $||.||_{EL}$

Nous avons donc :

$$\boxed{H = \overset{\circ}{EL}(G;C^3) \times L_2\ (G;C^3) \times L_2(G;C)} .$$

* H est évidemment séparable, puisque ces trois facteurs le sont; $\mathcal{D}$ $(G;C^7)$ y est dense par définition. De plus c'est un espace de distributions.

* Soit $\vec{h} \in C^\infty_o(G;C^7)$. Comme supp $\vec{h} \subset G$, on a $\vec{h} = \vec{0}$ dans $\bar{\Lambda}$; on peut donc prolonger $\vec{h}$ à R^n tout entier en posant $\vec{h} \equiv \vec{0}$ dans $\bar{\Lambda}$. La fonction $\tilde{\vec{h}}$ ainsi obtenue appartient à H_o. On voit par là que H admet un prolongement "naturel" dans H_o. Ceci est bien sûr vrai pour ses trois facteurs dans $EL(R^3;C^3)$, $L_2(R^3;C^3)$ et $L_2(R^3;C)$.

Si $\vec{h} \in H$, on en déduit donc que $\vec{h}_1 \in L_{2,\text{Loc}}(G;C^3)$; c'est ainsi en fait qu'on entendra "$\overset{\circ}{EL}(G;C^3)$ est le complété de $\mathcal{D}$ $(G;C^3)$".

* Nous noterons par ailleurs $E(\vec{u},t;G')$ ou $||\vec{u}||_{H(G')}$ l'énergie locale contenue dans G' où $G' \subset\subset G$. Si $G' = G_R = G \cap \{|x| < R\}$ nous noterons $||\vec{u}||_{GR}$ et $(\vec{u},\vec{v})_{G_R}$ la "forme bilinéaire" associée.

1.2. FORMULE DE GREEN - PRELIMINAIRES

Soit A l'opérateur différentiel formel déjà défini au Chapitre II, p.5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v} \in C^7$ avec $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ dans $C^2(G;C^3) \cap C^1(\bar{G};C^3)$, $\vec{u}_2$ et $\vec{v}_2$ dans $C^1(G;C^3) \cap C(\bar{G};C^3)$ et u_7 et v_7 dans $C^2(G;C) \cap C^1(\bar{G};C)$. On a :

$$(\vec{u}, A\vec{v})_{G_R} = \int_{G_R} \Big[\lambda \operatorname{div} \vec{u}_1 . \overline{\operatorname{div}(A\vec{u})_1} + 2\mu \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}(\vec{u}_1).\overline{\varepsilon_{ij}((A\vec{v})_1)}.$$

$$+ \rho\, \vec{u}_2.\overline{(A\vec{v})_2} + \frac{\gamma}{\eta k}\, u_7.\overline{(A\vec{v})_7}\Big] dx .$$

$$= \int_{G_R} \Big[\lambda \operatorname{div} \vec{u}_1 . \operatorname{div} \bar{\vec{v}}_2 + 2\mu \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}(\vec{u}_1).\varepsilon_{ij}(\bar{\vec{v}}_2) + \rho\, \vec{u}_2.\frac{1}{\rho}(\Delta^* \bar{\vec{v}}_1 - \gamma \vec{\nabla} \bar{v}_7)$$

$$+ \frac{\gamma}{\eta k}(-k\eta \operatorname{div} \bar{\vec{v}}_2 + k\Delta \bar{v}_7)\, u_7\Big] dx$$

$$= \int_{G_R} \Big[E(\vec{u}_1, \bar{\vec{v}}_2) - E(\vec{u}_2, \bar{\vec{v}}_1) - \gamma(\vec{u}_2.\vec{\nabla}\, \bar{v}_7 + u_7 \operatorname{div} \bar{\vec{v}}_2) + \frac{\gamma}{\eta}\, \bar{v}_7\, \Delta u_7 +$$

$$+ \frac{\gamma}{\eta} \operatorname{div}(u_7 \vec{\nabla} \bar{v}_7 - \bar{v}_7 \vec{\nabla} u_7) + \operatorname{div} \vec{q}(\vec{u}_2, \bar{\vec{v}}_1)\Big] dx$$

$$= \int_{G_R} \Big[E(-\vec{u}_2, \bar{\vec{v}}_1) - \bar{\vec{v}}_2.\Delta^* \vec{u}_1 + \gamma(\bar{v}_7 \operatorname{div} \vec{u}_2 + \bar{\vec{v}}_2.\vec{\nabla} u_7) + \frac{\gamma}{\eta}\, \bar{v}_7\, \Delta u_7\Big] dx$$

$$+ \int_{G_R} \operatorname{div}\Big[\frac{\gamma}{\eta}(u_7 \vec{\nabla} \bar{v}_7 - \bar{v}_7 \vec{\nabla} u_7) + \vec{q}(\vec{u}_2, \bar{\vec{v}}_1) + \vec{q}(\bar{\vec{v}}_2, \vec{u}_1) - \gamma(\bar{v}_7 \vec{u}_2 + u_7 \bar{\vec{v}}_2)\Big] dx$$

$$= (B\vec{u}, \vec{v})_{G_R} + \int_{\partial G_R = \partial G \cup \partial S_R} \Big[\frac{\gamma}{\eta}\Big(u_7 \frac{\partial \bar{v}_7}{\partial n} - \bar{v}_7 \frac{\partial u_7}{\partial n}\Big) + (\vec{u}_2.\vec{t}(\vec{n}, \bar{\vec{v}}_1) + \bar{\vec{v}}_2.\vec{t}(\vec{n}, \vec{u}_1))$$

$$- \gamma(\bar{v}_7\, \vec{n}.\vec{u}_2 + u_7\, \vec{n}.\bar{\vec{v}}_2)\Big] dS$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ -\frac{\Delta^*}{\rho} & 0 & \frac{\gamma}{\rho}\vec{\nabla} \\ 0 & k\eta\,\mathrm{div} & k\,\Delta \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} E(\vec{u},\vec{v}) = \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,\mathrm{div}\,\vec{v} + 2\,\mu \sum\limits_{i,j} \varepsilon_{ij}(\vec{u}).\varepsilon_{ij}(\vec{v}) \\ \vec{n}.\vec{q}(\vec{u},\vec{v}) = \vec{v}.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}) \end{array}$$

1.3. *Opérateurs* A_D *et* A_D^*.

Introduction : Soient A_{min} et A_{max} les opérateurs minimal et maximal associés à A, c'est-à-dire :

$$A_{min} = \begin{cases} A_{min}\,\vec{u} = A\vec{u} \text{ pour } \vec{u} \in D(A_{min}) \\ D(A_{min}) = C_o^{\infty}(G;C^7) \end{cases} \text{et } A_{max} = \begin{cases} A_{max}\,\vec{u} = A\,\vec{u} \text{ distr.} \forall \vec{u} \in D(A_{max}) \\ D(A_{max}) = \vec{u} \in H : A\,\vec{u} \text{ distr.} \in H \end{cases}$$

Caractérisation de $D(A_{max})$

$$D(A_{max}) = H \cap \begin{cases} \vec{u}_2 \in \overset{\circ}{EL}(G;C^3) \\ -\Delta^*\,\vec{u}_1 + \gamma\vec{\nabla}u_7 \in L_2(G;C^3) \\ \eta\,\mathrm{div}\,\vec{u}_2 + \Delta\,u_7 \in L_2(G;C) \end{cases} =$$

c'est-à-dire :

$$= \left[\overset{\circ}{EL}\,(G;C^3) \cap \{\Delta^*\,\vec{u}_1 \in L_2\}\right] \times \left[L_2(G;C^3) \cap \overset{\circ}{EL}(G;C^3)\right] \times H_2(G;C)$$

On démontre en effet facilement le :

Lemme : Soit $u \in L_2(G;C)$ et tel que $\Delta\,u \in L_2(G;C)$, G étant un domaine non borné de R^3. Alors $u \in H_2(G;C)$.

Preuve

Soit $\xi(x)$ une fonction $C^{\infty}(R^3)$, telle que $\xi\,(x) = 0$ dans un voisinage de ∂G et à 1 dans un voisinage de l'infini. On a alors au sens des distributions :

$\Delta(\xi u) = \xi\,\Delta\,u + u\,\Delta\,\xi + 2\,\vec{\nabla}\,\xi\,.\vec{\nabla}\,u$, d'où $\Delta\,(\xi u) \in L_2(R^n)$ puisque le support de $\vec{\nabla}\,\xi$ est compact ($\Rightarrow \int_{R^3} |\vec{\nabla}\xi|^2\,dx^2 < +\infty$), donc $\xi\,u \in H_2(R^3)$, ce qui permet de conclure à $u \in H_2(G)$.

Il est clair que la même démonstration s'adapte à un opérateur élliptique du second ordre scalaire en matriciel (en particulier $\Delta^* \vec{u}$); on aura donc en particulier que $\vec{u} \in \mathcal{D}(A_{max}) \implies \vec{u}_1 \in H_{2,Loc}(G)$. $D(A_{min})$ étant dense, il existe alors $(A_{min})^*$. Il est clair d'après la formule de Green que :

$$(A_{min})^* = \mathcal{B}_{max} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_{max}\, \vec{u} = B\, \vec{u} \text{ distr. } \forall\, \vec{u} \in D(B_{max}) \\ \\ D(B_{max}) = \{\vec{u} \in H : B\, \vec{u} \text{ distr. } \in H)\} \end{array} \right\}$$

et on s'aperçoit de suite que

$$D(\mathcal{B}_{max}) = D(A_{max}) \; .$$

Pour tout $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, u_7)$ comme dans la formule de Green, on a :

$$2 \operatorname{Re} (A\, \vec{u}, \vec{u})_{G_R} = (A\, \vec{u}, \vec{u})_{G_R} + (\vec{u}, A\vec{u}) =$$

$$= (Au,u)_{G_R} + (\mathcal{B}u,u)_{G_R} + \int_{\partial G_R} \left[\frac{\gamma}{\eta} \left(u_7 \frac{\partial \bar{v}_7}{\partial n} - \bar{v}_7 \frac{\partial u_7}{\partial n}\right) + \dots \right] dx$$

$$= \frac{\gamma}{\eta k} \; (2k\, \Delta\, u_7,\, u_7)_{G_R} + \int_{\partial G_R} \quad \text{idem}$$

$$= - 2\, \frac{\gamma}{\eta} \int_{G_R} |\vec{\nabla}\, u_7|^2\, dx + 2\, \frac{\gamma}{\eta} \int_{\partial G_R} \bar{u}_7\, \frac{u_7}{n}\, dS + \frac{\gamma}{\eta} \int_{\partial G_R} \left(u_7 \frac{\partial \bar{u}_7}{\partial n} - \bar{u}_7 \frac{\partial u_7}{\partial n}\right) dS \; +$$

$$2 \operatorname{Re} \int_{\partial G_R} \left[\vec{u}_2\, \vec{t}(\vec{n}, \vec{u}_1) - \gamma\, u_7\, \vec{n}.\vec{u}_2) \right] dS$$

$$= - 2\, \frac{\gamma}{\eta} \int |\vec{\nabla}\, u_7|^2\, dx + 2 \operatorname{Re} \int_{\partial} \quad \bar{\vec{u}}_2.\vec{t}(\vec{n},\vec{u}_1) - \gamma\, u_7\, \vec{n}.\bar{\vec{u}}_2)\, dS$$

$$+ \frac{\gamma}{\eta} \operatorname{Re} \int_{\partial G_R} u_7\, \frac{\partial \bar{u}_7}{\partial n}\, dS \; .$$

$$= -2\frac{\gamma}{\eta}\int_{G_R} |\vec{\nabla}\, u_7|^2\, dx + 2\,\mathrm{Re}\int_{\partial G_R} (\overline{\vec{u}_2}.\vec{T}(\vec{n},\vec{u}) + \frac{\gamma}{2\eta}\, u_7\, \frac{\partial \overline{u_7}}{\partial n})dS$$

Soit alors $\vec{u} \in D(A_{max})$; alors :

(i) $u_7 \in H_2(G) \Rightarrow u_7 . \frac{\partial \overline{u_7}}{\partial n} \in L_2(G)$, donc $\int_{S_R} u_7 . \frac{\partial \overline{u_7}}{\partial n}\, dS \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

$\overline{\vec{u}_2}.\vec{T}(\vec{n},\vec{u}) . \in L_2(G;C)$ donc on a $\int_{S_R} \overline{\vec{u}_2}.\vec{T}(\vec{n},\vec{u})dS \xrightarrow{R\to+\infty} 0$. En effet $\vec{T}(\vec{n},\vec{u})$ peut être prolongé en une fonction L^2 puisque $\vec{u} \in \overset{\circ}{EL} \Rightarrow \vec{u} \in \overset{\circ}{BL}(\Omega)$ par l'inégalité de Korn

D'autre part $\vec{\nabla}\, u_7 \in L_2(G;C^3)$; donc on a :

$$2\,\mathrm{Re}(A_{max}\,\vec{u},\vec{u})_H = -2\frac{\gamma}{\eta}\,||\vec{\nabla}\, u_7||_{L_2(G;C^3)} + 2\,\mathrm{Re}.\int_{\partial G} (\overline{\vec{u}_2}.\vec{T}(\vec{n},\vec{u}) + \frac{\gamma}{2\eta}\, u_7 . \frac{\partial \overline{u_7}}{\partial n})dS$$

$$= -2\frac{\gamma}{\eta}\,||\vec{\nabla}\, u_7||_{L_2(G;C^3)} + 2\,\mathrm{Re}\int_{\partial G} \frac{\gamma}{2\eta}\, u_7 . \frac{\partial \overline{u_7}}{\partial n}\, dS, \text{ puisque } \overline{\vec{u}_2}\Big|_{\partial G} = 0$$

(il suffit de prendre une suite $\vec{u}_n \in C^\infty \cap H$ et de passer à la limite).

(ii) Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tous deux dans $D(A_{max})$, la formule de Green devient :

$$(\vec{u},A_{max}\,\vec{v})_H = (B_{max}\,\vec{u},\vec{v}) + \frac{\gamma}{\eta}\int_{\partial G} (u_7\,\frac{\partial \overline{v_7}}{\partial n} - \overline{v_7}\,\frac{\partial u_7}{\partial n})\, dS\ .$$

Opérateurs A_D *et* A_D^* :

Ce qui précède nous suggère de considérer l'opérateur A_D suivant :

$$A_D = \begin{cases} A_D\,\vec{u} = A\,\vec{u} \text{ distr. pour } \vec{u} \in D(A) \\ D(A_D) = [\overset{\circ}{EL}(G;C^3) \cap \{\Delta^*\,\vec{u}_1 \text{ distr.} \in L_2\,(G;C^3)\}] \times [L_2(G;C^3) \cap \overset{\circ}{EL}(G;C^3)] \times \\ \qquad [H_2(G) \cap \overset{\circ}{H}_1(G)\}] \end{cases}$$

Ceci traduit bien le fait que s'annule aussi pour ∂G, puisque $\dot{H}_1$ est le noyau de l'homéomorphisme $H_1(G) \longrightarrow H^{1/2}(\partial G)$ pour ∂G satisfaisant à la propriété de 1 - régularité (cf. par exemple ADAMS (1) p. 216, Th. 7.55).

Alors :

(i) <u>$D(A_D)$ est dense dans H</u>, puisque contenant $\mathcal{D}(G;C^7)$.

(ii) <u>$D(A_D)$ est fermé dans H</u> :

Soit $\vec{u}_n \in D(A_D)$ une suite A_D - convergente, c'est-à-dire

$u_n \xrightarrow{H} \vec{u}$ et $A_D\, u_n \xrightarrow{H} \vec{T}$. On a :

* $\vec{u}_{2n} \xrightarrow{L_2} \vec{u}_2$ et $\varepsilon_{ij}(\vec{u}_{2n}) \longrightarrow \varepsilon_{ij}(\vec{T}_2)$.

Or $\varepsilon_{ij}(\vec{u}_{2n}) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \varepsilon_{ij}(\vec{u}_2)$

Donc $\varepsilon_{ij}(\vec{u}_2) = \varepsilon_{ij}(\vec{T}_2) \in L_2(G;C)$ et $\vec{u}_2 = \vec{T}_2$ p.p.

En définitive $\vec{u}_2 = \vec{T}_2$ et $\vec{u}_2 \in L_2 \cap \overset{\circ}{EL}$.

* $u_{7n} \xrightarrow{L_2} u_7$ et $-\eta \operatorname{div} \vec{u}_{2n} + \Delta\, u_{7n} \xrightarrow{L_2} T_7 \Rightarrow \Delta u_{7n} \xrightarrow{L_2} T_7 + \eta \operatorname{div} \vec{u}_2$

d'où $\Delta u_7 = T_7 + \eta \operatorname{div} \vec{u}_2 \in L_2$, donc $u_7 \in H_2$

D'autre part : $u_{7n} \in \overset{\circ}{H}_1(G) \Rightarrow \|u_{7n}\|_{H_1(G)} \leq k(\|u_{7n}\|_o + \|\Delta u_7\|_o)$.

Donc $u_{7n} \xrightarrow{H_1} v_7 \in \overset{\circ}{H}_1(G)$, puisque $\overset{\circ}{H}_1$ est complet.

Mais $u_{7n} \xrightarrow{H_2} u_7 \Rightarrow u_{7n} \xrightarrow{H_1} u_7$, d'où $u_7 = v_7 \in \overset{\circ}{H}_1$ c'est-à-dire

$$u_7 \in H_2(G) \cap \overset{\circ}{H}_1(G) \text{ et } T_7 = \Delta\, u_7 - \eta \operatorname{div} \vec{u}_2$$

$\star \quad \vec{u}_{1n} \xrightarrow{EL} \vec{u}_1$ et $\Delta^* \vec{u}_{1n}$ distr. $\in L_2(G;C^3)$

Or $\vec{u}_{1n} \xrightarrow{EL} \vec{u}_1 \Rightarrow \vec{u}_{1n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \vec{u}_1 \Rightarrow \Delta^* \vec{u}_{1n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \Delta^* \vec{u}_1$

Mais $A\,\vec{u}_n \xrightarrow{H} \vec{T} \Rightarrow \Delta^* \vec{u}_{1n} - m\,\vec{\nabla}\,u_{7n} \xrightarrow{L_2} \vec{T}_1 \Rightarrow \Delta^* \vec{u}_{1n} \xrightarrow{L_2} \vec{T}_1 + m\,\vec{\nabla}\,u_7$

Par l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'$ on a donc : $\Delta^* \vec{u}_1 = \vec{T}_1 + m\,\vec{\nabla}\,u_7 \in L_2$.

Donc $\vec{u}_1 \in [D(A_D)]_1$ et $\Delta^* \vec{u}_1 = \vec{T}_1 + m\,\vec{\nabla}\,u_7$

En conclusion $\vec{u} \in D(A_D)$ et $\vec{T} = A_D\,\vec{u}$ cqfd.

(iii) <u>A_D est dissipatif</u>

On avait déjà $Re(A_{max}\,\vec{u}, \vec{u}) = -\frac{\Upsilon}{\eta}||\vec{\nabla}u_7||^2_{\Upsilon_2} + Re\,\frac{\Upsilon}{\eta}\int_\gamma u_7\,\frac{\partial\bar{u}_7}{\partial n}\,dS$. Pour $\vec{u} \in D(A_D)$,

l'intégrale de surface est nulle et on a :

$$Re\,(A_D\,\vec{u}, \vec{u})_H = -\frac{\Upsilon}{\eta}\,||\vec{\nabla}\,u_7||^2_{L_2} \leq 0$$, d'où la dissipativité.

Remarquons qu'on a obtenu l'opérateur A_D en imposant une condition de Dirichlet à la frontière pour avoir la dissipativité, ce qui autorise en fait à augurer que A_D sera dissipatif maximal.

<u>*Opérateur adjoint*</u>

Par définition

$$A_D^* = \begin{cases} D(A_D^*) = \{\vec{h} \in H : \forall\ \vec{y} \in D(A_D), \exists\ \vec{h}^* \in H \text{ t.q. } (A_D\,\vec{y},\vec{u}) = \vec{y}, \vec{h}^*) \\ A_D^*\,h = \vec{h}^* \text{ pour } \vec{h} \in D(A_D^*) \end{cases}$$

Il est clair que :

$A_D^* \subset A_{min}^* \Rightarrow D(A_D^*) \subset D\,(A_{min}^*)$. (car A_D^* est une extension de A_{min})

Au sens des distributions nous aurons donc :

$$A_D^*\,\vec{h} = B\,\vec{h}$$

soit alors $\vec{u} \in D(A_D)$ et $\vec{h} \in D(A_D^*)$; $\vec{u}$ et $\vec{h}$ sont dans $D(A_{max})$ tous deux.

Or $(\vec{h}, A_{max}\, \vec{u})_H = (\mathcal{B}_{max}\, \vec{h}, \vec{u})_H + \frac{\gamma}{\eta} \int_{\partial G} \bar{h}_7 \frac{\partial u_7}{\partial n}\, dS$, puisque $\vec{h} \in D(\mathcal{B}_{max})$

d'où nécessairement $h_{7|\partial G} = 0$ au sens des traces (dans $H^{3/2})(\partial G)$)

réciproquement :

Soit $\vec{h} \in \mathcal{D}(A^*_{min}) \cap \{\text{trace } h_{7/\partial G} = 0\} = \mathcal{D}(A^*_{min}) \cap \{u_7 \in H_2 \cap \overset{\circ}{H}_1(G))\}$

Alors, $\forall\ \vec{u} \in D(A_D)$ on a :

$(\vec{h}, A_D\, \vec{u})_H = (\vec{h}, A_{max}\, \vec{u})_H = (\mathcal{B}_{max}\, \vec{h},\vec{u})_H + \frac{\gamma}{\eta}\int_{\partial G} \bar{h}_7 . \frac{u_7}{u}\, dS = (\mathcal{B}_{max}\, \vec{h},\vec{u})_H$, d'où

$\vec{h} \in D(A_D^*)$ et $A_D^*\, \vec{h} = \mathcal{B}\, \vec{h}$.

Conclusion

$$\boxed{D(A_D)=D(A_D^*)=\left[\overset{\circ}{EL}(G;C^3)\ \{\Delta^*\ \vec{u}_1 \in L_2(G;C^3)\right] \times \left[L_2(G;C^3)\quad \overset{\circ}{EL}(G;C^3)\right] \times \left[H_2(G) \cap \overset{\circ}{H}_1(G)\right]}$$

De plus :

(i) A_D^* est fermé, car $D(A_D^*)$ est fermé dans H (c'est le cas pour tout opérateur ajoint)

(ii) A_D^* est dissipatif : soit $\vec{u} \in D(A_D^*)$; alors $\vec{u} \in D(A_D)$ et on a :

$(A_D^*\, \vec{u},\vec{u})_H = (\vec{u}, A_D\, \vec{u})_H \Rightarrow \operatorname{Re}(A_D^*\, \vec{u}, \vec{u})_H = \operatorname{Re}\, (\vec{u}, A_D\, \vec{u})_H \leq 0$.

1.4. _Les semi-groupes $T(t)$ et $T^*(t)$_ :

Ainsi A_D et A_D^* sont dissipatifs et fermés. On invoque alors un corollaire du théorème de LUMER-PHILLIPS (cf. par exemple dans K. YOSHIDA p. 250) pour conclure que A_D et A_D^* sont les générateurs de deux Co-semi-groupes de contraction mutuellement adjoints. Les deux semi-groupes laissent $D(A_D)$ et $D(A_D^*)$ respectivement invariants; ils fournissent les solutions des deux problèmes d'évolution :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = A_D \, \vec{u} & \vec{u}(0) \in D(A_D) \\ \dfrac{d\vec{v}}{dt} = A_D^* \, \vec{v} & \vec{v}(0) \in D(A_D^*) \end{cases}$$

et se prolongent par continuité à H tout entier. Ceci fournit la solution du problème de Cauchy pour A_D et A_D^* .

* Soit alors $\vec{u} \in D(A_D)$; la relation de dissipativité donne alors facilement :

$$\vec{f}(x) \in \mathbf{D}(A_D) \; : \frac{d}{dt} \; ||T(t) \; \vec{f}||_H^2 = - \frac{\gamma}{\eta} \int_G \; |\vec{\nabla}[T(t) \; \vec{f}]_7|^2 \; dx \; .$$

relation qui donne le taux de décroissance de l'énergie en fonction du temps. Pour des données quelconques dans H(et pas dans D(H)), on ne peut plus écrire cette relation puisque $\frac{d}{dt} \; ||T(t)h||^2$ n'est plus défini; en effet $\frac{d}{dt}$ T(t)h n'existe plus au sens fort. Il faut alors considérer la formule intégrale :

$$\text{(d)} \qquad ||T(t)h||_H^2 - ||h||_H^2 = - \frac{\gamma}{\eta} \int_0^t \int_G |\vec{\nabla}|T(t)h|_7|^2 \, dx \, dt \;\; \forall \; h \in D(A).$$

Soit alors $\{\vec{h}_n\} \in D(A_D)$ et $\{\vec{h}_n\} \xrightarrow{H} \vec{h} \in H$; donc $T(t)\vec{h}_n \xrightarrow{H} T(t) \; \vec{h}$.

La formule (d) ci-dessus donne alors que la suite $\vec{w}_n = \vec{\nabla} \; [T(t) \; \vec{h}_n \,]_7$ est une suite de Cauchy dans $L_2(G;C^3)$. D'autre part $\vec{w}_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \vec{\nabla}[T(t)\vec{h}]_7$, d'où : $\vec{w}_n \xrightarrow{L_2} \vec{\nabla} \; [T(t)\vec{h}]_7$ et $\vec{\nabla}[T(t) \; \vec{h}]_7 \in L_2(G;C^3) \; \forall \; \vec{h} \in H$.

Le semi-groupe T(t) apparait ainsi comme "régularisant", puisque pour h quelconque dans H, on n'avait pas $\vec{\nabla} \; h_7 \in L_2$.

Ainsi la formule de décroissance de l'énergie (d) s'étend sous la même forme à tout H. En fait donc T(t) envoie H sur $EL(G;C^3) \times L_2(G;C^3) \times H_1(G;C)$; et l'ensemble des trajectoires $\{T(t)h, \; t > 0 \; , \; h \in H\}$est un sous-espace propre de H.

On a des résultats analogues pour $T^*(t)$ puisque $D(A_D) = D(A_D^*)$

1.5. *Régularité des Solutions*

Comme pour le problème de l'espace libre, nous distingons diverses classes de régularité suivant la régularité des données initiales. En répétant les mêmes arguments, on définira diverses classes de solutions :

solution faible : $\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x) \in H$

Alors $T(t)\,\vec{f} \in C\,(R_+;H)$ mais n'est pas solution de l'équation d'évolution et à fortiori du problème extérieur réel. Cependant on a :

$$\vec{\nabla}\,[T(t)\,\vec{f}]_7 \in L_2(Q_t) \text{ où } Q_t \text{ est le cylindre }]0,t[\times G$$

solution partiellement forte : $\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x) \in D(A_D)$.

Alors $T(t)\,\vec{f} \in D(A_D)$ est une solution de l'équation d'évolution, mais pas encore solution classique du problème réel. En particulier :

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u}_1(x,t) = \operatorname{div}\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_1(x,t) \text{ en tant qu'éléments de } L_2(G;C)$$

solution forte : $\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x) \in D(A^k)$, $k \geqslant 2$.

Alors $(T(t)\,\vec{f})(x)$ est solution forte du problème réel, $\vec{u}_1$ est de classe C^k en x et t, u_7 de classe C^k aussi et les valeurs initiales sont prises au sens fort. On a aussi le :

Théorème

Le problème extérieur avec des données initiales dans $D(A_D^\infty)$ admet une solution unique qui est C^∞ en x et t, et dont l'énergie décroit en fonction du temps.

2. REDUCTION DES SEMI-GROUPES $T(t)$ ET $T^*(t)$:

2.1. *Sur quelques espaces fonctionnels*

Soit H^1 le sous-espace d'unitarité de $T(t)$. On sait que H^1 est défini par $H^1 = \{\vec{u} \in H : ||T^*(t)\,\vec{u}||_H = ||\vec{u}||_H = ||T(t)\,\vec{u}||_H\ \forall\, t > 0\}$.

On voit à l'évidence que $H^1 = (H^*)^1$ si $(H^*)^1$ désigne le sous-espace unitaire de $T^*(t)$. On aura donc aussi $(H^*)^o = H^o$ pour les sous-espaces où $T(t)$ (resp. $T^*(t)$) est complètement non unitaire (c.n.u.) puisque

$H^o = H \ominus H^1$. Nous commençons par des

Définitions : Soient :

$S^1(G) = \{\vec{u} \in C_o^\infty(G;C^3) : \operatorname{div} \vec{u} = 0\}$, $S^o(G) = \{\vec{u} \in C_o^\infty(G;C^3) : \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{u} = \vec{0}\}$

$L_2^1(G;C^3)$ = complété de $S^1(G)$ dans la norme L_2 ; i = 0,1

$\overset{o}{EL}_1(G;C^3)$ = " " " " " EL ; i = 0,1 .

$L_2^s(G;C^3) = \{\vec{u} \in L_2(G;C^3) : \operatorname{div} \vec{u} = 0$

$\overset{o}{EL}_s(G;C^3) = \{\vec{u} \in \overset{o}{EL}(G;C^3) : \operatorname{div} \vec{u} = 0$

$L_2^p(G;C^3) = L_2(G;C^3) \ominus L_2^s(G;C^3)$

$\overset{o}{EL}_p(G;C^3) = \overset{o}{EL}(G;C^3) \ominus \overset{o}{EL}_s(G;C^3)$

$\overset{o}{L}_2(G;C^3) = L_2(G;C^3) \ominus L_2^1(G;C^3)$

$\overset{o}{EL}_o(G;C^3) = \overset{o}{EL}(G;C^3) \ominus \overset{o}{EL}_1(G;C^3)$

Il est clair qu'on a les inclusions :

$S^1(G) \subset \overset{o}{EL}_1(G;C^3) \subset \overset{o}{EL}^s(G;C^3)$

$S^1(G) \subset L_2^1(G;C^3) \subset L_2^s(G;C^3)$

Nous avons alors les caractérisations suivantes :

Théorème :(O. LADYZNENSKAYA (1) p. 23).

$L_2^o(G;C^3)$ consiste en vecteurs de la forme $\vec{u} = \vec{\nabla}\psi$ où $\psi \in BL(G;C)$

Preuve

Soit $S(G) = \{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{\psi},\ \vec{\psi} \in C_o^\infty(G;C^3)\} \subset L_2^1(G;C^3)$. Si $\vec{v} \in L_2^o(G;C^3)$, alors nécessairement :

$0 = (\vec{v}, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{\psi})_{L_2} \Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{v} = \vec{0}$ au sens des distributions.

Soit alors $\vec{v}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \vec{v}$ la "régularisée" de $\vec{v}$; on a donc $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{v}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{v}_\varepsilon$ est C^∞;

Comme $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v}_\varepsilon = \vec{0}$, on peut écrire $\vec{v}_\varepsilon(x) = \overrightarrow{\text{grad}}\ \psi_\varepsilon(x)$ où $\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \vec{v}_\varepsilon(s).\overrightarrow{ds}$, l'intégrale étant alors indépendante du chemin suivi, x_o un point fixé quelconque de G. Quand $\varepsilon \to 0$, sait que $\vec{v}\ (x) \xrightarrow{L_2(G')} \vec{v}$ sur tout compact $G' \subset G$, et $\psi_\varepsilon(x) \xrightarrow{H^1(G')} \psi(x)$. On a donc $\vec{v} = \vec{\nabla}\psi$ sur tout $G' \subset\subset G$. Comme G est connexe on a $\vec{v} = \vec{\nabla}\psi$ dans G et $\psi \in BL(G)$.

Réciproquement si $\vec{v} = \vec{\nabla}\ \psi$ alors $(\vec{v},\vec{u})_{L_2} = (\vec{\nabla}\psi,\vec{u}_{L_2}) = (\psi, \text{div}\ \vec{u}) = 0$ pour tout $\vec{u} \in S^1(G)$ qui est dense dans $L_2^1(G;C^3)$.

Théorème

Si $\vec{u} \in L_2^1(G;C^3)$ alors "$\vec{n}.\vec{u}\big|_{\partial G} = 0$".

Preuve

Soit $\psi \in H_1(G)$, ψ quelconque. On a pour $\vec{u} \in L_2^1(G;C^3)$ et $\vec{n}.\vec{u}\big|_{\partial G}$ existe dans L_2

$$0 = \int_G \vec{u}.\overline{\vec{\nabla}\psi}\ dx = \int_G (\vec{u}.\overline{\vec{\nabla}\psi} + \overline{\psi}\ \text{div}\ \vec{u})dx = \int_G \text{div}\ \overline{\psi}\ \vec{u}\ dx = \int_{\partial G} \overline{\psi}\big|_{\partial G}\ \vec{u}.\vec{n}\ dS$$

$$+ \lim_{R\to+\infty} \int_{\partial S_R} \overline{\psi}.\vec{u}.\vec{n}\ dS = \int_{\partial G} \overline{\psi}\ \vec{u}.\vec{n}\ dS \quad \text{puisque } \overline{\psi} \text{ et } \vec{u}.\vec{n} \text{ sont dans } L_2(G\ ).$$

Comme ψ est arbitraire dans $H_1(G)$, on a $\vec{u}.\vec{n}\big|_{\partial G} = 0$.

Cette relation continue à valoir au sens des distributions $H^{-1/2}(\partial G)$ si u est quelconque dans L_2^1, puisqu'alors $\psi\big|_{\partial G}$ parcourt $H^{1/2}(\partial G)$ et l'application trace est surjective de $H^1(G\ )$ sur $H^{1/2}(\partial G)$.

Théorème :

$\overset{\circ}{EL}_o(G;C^3) = \{\vec{u} : \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u} = \vec{\nabla}\psi\}$ où ψ est une distribution scalaire, harmonique dans G.

Preuve :

$\vec{u} \in \overset{\circ}{EL}_o \iff \vec{u} \perp S^1(G)$ dans $\overset{\circ}{EL} \iff (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}, \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\psi})_{L_2} = 0 \ \forall \ \vec{\psi} \in C_o^\infty$ avec div $\vec{\psi} = 0$. On a donc au sens des distributions :

$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u} = \vec{\nabla}\,\phi$, où ϕ est une distribution. ϕ est alors harmonique dans G et elle est donc finalement C^∞ dans G.

Corollaire

Soit $\vec{u} \in \overset{\circ}{EL}_o(G;C^3)$ tel que $\Delta^* \vec{u} \in L_2(G;C^3)$. Alors $\Delta^* \vec{u} \in L_2^o(G;C^3)$.

Preuve

$\vec{u} \in \overset{\circ}{EL}_o(G;C^3) \Longrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u} = \vec{\nabla}\,\phi$. Donc $\Delta^* \vec{u} = \vec{\nabla}\,(\,(\lambda+2\mu)\,\text{div}\,\vec{u} - \mu\phi) \in L^2$, c'est-à-dire $\Delta^* \vec{u} \in L_2^o(G;C^3)$ d'après la caractérisation de $L_2^o(G;C^3)$.

Ceci ne veut d'ailleurs pas dire que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}$(resp. $\vec{\nabla}$ div $\vec{u}$) sont dans L_2^o, puisque $\Delta^* \vec{u} \in L_2$ n'entraine nullement que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}$(resp. $\vec{\nabla}$ div $\vec{u}$) le soit. Remarquons aussi que L_2^o(resp. $\overset{\circ}{EL}_o$) contient les fonctions à rotationnel nul, qui sont dans L_2(resp. $\overset{\circ}{EL}$).

* Par ailleurs, il est tentant d'établir des inclusions inverses pour les espaces $\overset{\circ}{EL}_1$ et $\overset{\circ}{EL}_s$, L_2^1 et L_2^s. Pour $L_2^s \subset L_2^1$ ceci est malheureusement impossible : il suffit de considérer les fonctions de la forme $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$ où ϕ est harmonique; ϕ est alors solution d'un problème de Neumann :
$\Delta\phi = 0$ et $\dfrac{\partial\phi}{\partial n} = \vec{n}.\vec{u}$ sur ∂G qui possède une solution unique en général.
Pour $\overset{\circ}{EL}_s$ et $\overset{\circ}{EL}_1$, on a par contre :

Définition

Soit Ω un ouvert relativement compact de $R^n (n = 2,3)$. Nous dirons que Ω est uniformément contractile ssi : il existe une famille $\{T_\rho\}$ de transformation T_ρ de Ω dans Ω pour $\rho \in\ ]0,1[$ telles que :

(i) $T_1 = I$: transformation identique

(ii) T_ρ est injective $\forall\ \rho \in\ ]0,1]$ et $\overline{T_\rho(\Omega)} \subset \Omega \quad \forall\ \rho \in\ ]0,1[$

(iii) $T_\rho(x)$, $(\dfrac{\partial}{x_i})\ T\ (x)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} T_\rho(x)$ sont uniformément continues en $(\rho,x) \in\ ]0,1] \times \Omega$.

Théorème

Soit G ouvert de R^n dont le complémentaire est un compact $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \partial G$. Soit $G_R = G \cap \{|x| \leq R$ avec R assez grand pour que $\bar{\Lambda} \subset G_R$. Alors : G_{R+2} uniformément contractile entraîne : $\overset{o}{EL}_1(G;C^3) = \overset{o}{EL}^s(G;C^3)$, donc aussi $\overset{o}{EL}_o(G;C^3) = \overset{o}{EL}_p(G;C^3)$.

Preuve

La démonstration se trouve en fait dans G. HEYWOOD (1 p. 80-89).

On se placera désormais dans ce cas $\overset{o}{EL}_1(G;C^3) = \overset{o}{EL}_s(G;C^3)$.

2.2. *Décomposition de* T(t) *en partie unitaire et partie c.n.u.*

Théorème

Soit $\vec{h} \in D(A_D)$ et $\vec{u}(x,t) = (T\ (t)\ \vec{h})(x)$. Alors si $u_7(x,t) = 0$ pour $0 < t \leq \tau$, $\tau > 0$ arbitraire, on a :

(i) $\Delta \operatorname{div} \vec{u}_1(x,t) = \operatorname{div} \vec{u}_2(x,t) = u_7(x,t) = 0 \qquad \forall (x,t) \in G \times]0, \tau]$.

(ii) $\Delta \operatorname{div} \vec{h}_1(x) = \operatorname{div} \vec{h}_2(x) = h_7(x) = 0$ dans G .

Preuve

On argumente comme au théorème analogue du chapitre II (p. 29) c'est-à-dire en bref :

1) $\vec{h} \in D(A_D) \Longrightarrow \vec{u}(x,t) \in D(A_D)$ et $\frac{d}{dt}\vec{u}(x,t) = A_D\,\vec{u}(x,t)$, $t \geq 0$, d'où $\operatorname{div} \vec{u}_2(x,t) = 0 = u_7(x,t)$ et $\Delta_x \operatorname{div} \vec{u}_1(x,t) = 0$ pour $t > 0$.

2) La continuité forte en t entraîne :

$$||T(t)\vec{h} - \vec{h}||_H \xrightarrow{t\to 0^+} 0 \quad \text{et} \quad ||A_D\ T(t)\ \vec{h} - A_D\ \vec{h}|| = ||T(t)A_D\ \vec{h} - A_D\ \vec{h}||_H \xrightarrow{t\to 0^+} 0$$

d'où en particulier, quand $t \longrightarrow 0^+$:

$$0 = u_7(x,t) \xrightarrow[t\to 0^+]{L_2} h_7$$

$$0 = \mathrm{div}\, \vec{u}_2(x,t) \xrightarrow[t\to 0^+]{L_2} \mathrm{div}\, \vec{h}_2$$

$\mathrm{div}\, \vec{u}_1(x,t) \xrightarrow[t\to 0^+]{L_2} \mathrm{div}\, \vec{h}_1$, donc $\mathrm{div}\, \vec{u}_1(x,t) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \mathrm{div}\, \vec{h}_1$, d'où $\Delta\, \mathrm{div}\, \vec{h}_1 = 0$,

les dérivations étant au sens des distributions. c.q.f.d.

Théorème

Soit l'opérateur : $B = \left\{ \begin{array}{l} B\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\mu\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}} & 0 & 0 \\ 0\;0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{u} \text{ pour } \vec{u} \in D(B) \\ \\ D(B) = [S^1(G;C^3)]^2 \times \{0\} \quad . \end{array} \right\}$

et $\bar{B}$ sa fermeture. Alors $\bar{B}$ est anti-autoadjoint dans $\overset{\circ}{EL}_1(G;C^3)\times L_2^1(G;C^3)\times \{0\} = X_1$

Preuve

1) $\bar{B} \subset -\bar{B}^*$

$\mathcal{D}(B)$ étant dense dans X_1, $\bar{B}^*$ existe et est égal à B^*

Soit $\vec{f} \in D(B)$ et $\vec{g} \in D(B)$. On a en intégrant par parties :

$$(B\,\vec{f},\vec{g})_{X_1} = -(\vec{f},\bar{B}\,\vec{g})_{X_1}$$

relation qui continueà être vraie pour $\vec{g} \in D(\bar{B})$; il suffit de prendre une suite $\vec{g}_n$ de $D(B)$ qui tend dans la norme du graphe vers $\vec{g}$.

Par définition même de l'opérateur adjoint on a : $\bar{B} \subset -\bar{B}^*$

2) $\bar{B}^* \subset -\bar{B}$:

Soit $\vec{g} \in D(\bar{B}^*)$, $\vec{g} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, 0)$. Alors il existe $\vec{h} = \bar{B}^*\,\vec{g} \in X_1$ tel que :

$\forall\, \vec{f} \in D(\bar{B})$ on ait :

$$(\bar{B}\,\vec{f},\vec{g})_{X_1} = (\vec{f},\vec{h})_{X_1} \quad .$$

* Prenons $\vec{f} = (\vec{0},\vec{f}_2,0)$, avec $\vec{f}_2 \in S^1(G;C^3)$; alors :

$$(\vec{f}_2, \vec{g}_1)_{\overset{\circ}{EL}_1} = (\vec{f}_2, \vec{h}_2)_0$$

c'est-à-dire $\vec{h}_2 = \mu\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{g}_1$ au sens des distributions.

* Prenons $\vec{f} = (\vec{f}_1, \vec{0}, 0)$.

Alors : $-(\mu\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}_1, \vec{g}_2)_{L_2^1} = (\vec{f}_1, \vec{h}_1)_{\overset{\circ}{EL}_1}$

Nous choisissons alors $\vec{f}_1$ comme suit :

Soient $\vec{\phi}$ et $\vec{\psi} \in S^1(G;C^3)$. On a :

$|(\vec{\phi},\vec{\psi})_{L_2}| \leq \mathrm{Ste}\, ||\psi||_{EL^1}$; la fonctionnelle $\ell(\vec{\psi}) = (\vec{\phi},\vec{\psi})_{L^2}$ est donc bornée dans EL^1. D'après le théorème de Riesz, il existe $\vec{f}_1 \in EL^1$ tel que :

$$(\vec{\phi},\vec{\psi})_{L_2^1} = (\vec{f}_1,\vec{\psi})_{\overset{\circ}{EL}^1} = (+\mu\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f}_1,\vec{\psi}\ )_{L_2^1} .$$

On a donc

$$-\ \mu\ \mathrm{r\vec{o}t}\ \mathrm{r\vec{o}t}\ \vec{f}_1 = \vec{\phi}$$

d'où $(\vec{\phi},\vec{g}_2)_{L_2^1} = -(\vec{f}_1,\vec{h}_1)_{\overset{\circ}{EL}_1^1} = -\ (\vec{\phi},\vec{h}_1)_{L_2^1}$ d'où $-\vec{g}_2 = \vec{h}_1$

donc $\vec{g} = (\vec{g}_1,\vec{g}_2) \in D(\bar{B})$ et $\bar{B}^* \vec{g} = -\ \bar{B}\, \vec{g}$ c.q.f.d.

Corollaire

L'équation $\bar{B}\, \vec{u} = \vec{f}$ où $\vec{f} = (\vec{f}_1,\vec{f}_2,0) \in \overset{\circ}{EL}_1(G;C^3) \times L_2^1(G;C^3) \times \{0\}$ admet une solution unique.

Preuve

D'après la démonstration ci-haut on avait le résultat intermédiaire suivant : $\forall\, \vec{\phi} \in S^1(G)$ il existe $\vec{f}_1$ tel que $(\vec{f}_1,\vec{0},0) \in D(\bar{B})$ qui vérifie : $\mu\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f}_1 = \vec{\phi}$

Mais l'équation $\bar{B}\, \vec{u} = \vec{f}$ équivaut à $\left\{\begin{array}{rl} \vec{u}_2 & = \vec{f}_1 \\ \mu\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_1 & = \vec{f}_2 \\ 0 & = 0 \end{array}\right\}$

L'opérateur $\bar{B}$ étant fermé on a donc $R(\bar{B}) = X_1$, d'où l'existence de $\bar{B}^{-1}$ entre X_1 et $D(\bar{B})$.

<u>En particulier $\forall\ \vec{\psi} \in L_2^1(G;C^3)$, il existe $\vec{u}_1$ unique tel que $\vec{u}_1 \in \overset{\circ}{EL}_1$ et $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u}_1 \in L_2^1(G;C^3)$ et vérifiant</u> :

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u}_1 = \vec{\psi}\ .$$

On est alors en mesure de démontrer le :

Théorème de décomposition :

Soit $H = H^o \oplus H^1$ la décomposition de Nagy-Foias de H. Alors :

$$\boxed{H^1 = \overset{\circ}{EL}_1(G;C^3) \times L_2^1(G;C^3) \times \{0\} \quad \text{et} \quad H^o = \overset{\circ}{EL}_o(G;C^3) \times L_2^o(G;C^3) \times L_2(G;C^3)}\ .$$

Preuve

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

<u>1ère étape</u> :

Il est évident que $D(\bar{B}) \subset D(A_D)$ et que pour tout $\vec{u} \in D(\bar{B})$ on a $B\ \vec{u} = A_D\ \vec{u}$

On a donc, puisque $\bar{B}$ est générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires dans X_1 :

$e^{t\bar{B}}\ \vec{u} = e^{tA_D}\ \vec{u}$ dans H et $e^{-t\bar{B}}\ \vec{u} = e^{tA_D^*}\ \vec{u}$ dans H, et donc en particulier

$$||e^{t\bar{B}}\ \vec{u}||_H = ||e^{tA_D}\ \vec{u}||_H = ||\vec{u}||_H = ||e^{tA_D^*}\ \vec{u}||_H = ||e^{-tB}\ \vec{u}||_H$$

Donc :

$\forall\ \vec{u} \in D(\bar{B})$ on a $\vec{u} \in H^1$, vue la définition de H^1. Par densité, et la continuité de e^{tA_D} on a donc :

$$\boxed{X_1 \subset H^1}\ .$$

<u>2ème étape</u>

Soit $\vec{u} \in D(A_D) \cap H^1$. On a alors <u>nécessairement</u> (d'après la relation de **dissipativité**).

$$\int_o^t \int_G |\vec{\nabla}\ u_7(x,t)|^2\ dx\ dt = 0 \implies u_7(x,t) = 0 \quad \text{p.p.}$$

D'après le théorème précédent, on a :

$$\Delta\ \text{div}\ \vec{v}_1(x) = \text{div}\ \vec{u}_2(x) = u_7(x) = 0$$

Soit donc $Y = \{\vec{u} \in H : \Delta \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 = \operatorname{div} \vec{u}_2 = u_7\}$, ce sous-espace fermé de H. On a nécessairement

$$H^1 \subset Y = Y_1 \times L_2^s(G;C^3) \times \{0\} .$$

On a écrit $Y = Y_1 \times Y_2 \times Y_3$.

3ème étape

* Nous savons que $D(A) \cap H^1$ doit être dense dans H^1. Or d'après ce qui précède, on a : $D(A) \cap X_1 \subset D(A) \quad H^1 \subset D(A) \cap Y$. Soit $H^1 = H_1^1 \times H_2^1 \times \{0\}$.

$\vec{u} = (\vec{0}, \vec{u}_2, 0)$ avec $\vec{u}_2 \in L_2^o(G;C^3) \cap L_2^s(G;C^3)$, $\vec{u}_2$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $\vec{u}_2 = \vec{\nabla}\psi$ où $\psi \in BL(G;C)$ et est la solution du problème de Neumann :

$$\Delta\psi = 0 \quad , \quad \left.\frac{d\psi}{dn}\right|_{\partial G} = \left.\vec{u}_2.\vec{n}\right|_{\partial G} \quad \text{donnée.}$$

Si $\vec{v}$ désigne un élément quelconque de $D(A) \cap Y$, on a alors :

$$(\vec{v},\vec{u})_Y = (\vec{v}_2,\vec{u}_2)_{L_2(G;C^3)} = (\vec{v}_2,\vec{\nabla}\psi)_{L_2(G;C^3)} = (\operatorname{div} \vec{v}_2,\psi) = 0, \text{car } \left.\vec{v}_2\right|_{\partial G} = 0$$

Donc $\vec{u} \perp D(A) \cap Y$, d'où à fortiori $\vec{u} \perp D(A) \cap H^1$ et $\vec{u} \in Y$. Or le choix de $\vec{u}_2$ est absolument quelconque dans $L_2^o \cap L_2^s$, donc on peut le choisir dans H^1, si $H_2^1 \cap (L_2^o \cap L_2^s)$ est différent de $\{\vec{0}\}$.

Il existe donc toujours un $\vec{u} \in H^1$ tel que : $\vec{u} \perp D(A) \cap H^1$; et $\vec{u}$ est différent de $\vec{0}$ sauf si $H_2^1 \cap (L_2^o \cap L_2^s) = \{\vec{0}\}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{H_2^1 = L_2^1(G;C^3)} \implies D(A_D) \cap H^1 \subset \{\vec{u}_1 \in \overset{o}{EL} : \Delta^* \vec{u}_1 \in L_2^1\} \times L_2^1(G;C^3) \times \{0\} .$$

* Nous opérons de même avec H_1^1 :

$L_2(G;C^3) \cap \overset{o}{EL}(G;C^3)$ est dense dans $\overset{o}{EL}(G;C^3)$, puisque contenant $C_o^\infty(G;C^3)$.

D'autre part si $\vec{u} \in L_2(G;C^3) \cap \overset{o}{EL}(G;C^3)$ et si $\operatorname{div} \vec{u} \neq 0$, il existe ψ telle que $\vec{u} = \vec{\nabla}\psi$; ψ est alors la solution du problème de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \psi = \operatorname{div} \vec{u} \in L_2 \quad \{0\} \\ \left.\dfrac{d\psi}{dn}\right|_{\partial G} = \left.\vec{u}.\vec{n}\right|_{\partial G} = 0 \end{array} \right\} .$$

Donc :

$\forall\ \vec{u} \in \overset{\circ}{EL}(G;C^3)$ avec div $\vec{u} \neq 0$, il existe une suite $\vec{u}_n \in L_2 \cap \overset{\circ}{EL}$ telle que $\vec{u}_n \xrightarrow{EL} \vec{u}$; on peut donc toujours supposer que div $\vec{u}_n \neq 0$ (quitte à prendre une sous-suite), c'est-à-dire $\vec{u}_n = \vec{\nabla}\, \varphi_n$.

Or $\Delta^* \vec{x} \in L_2^1(G;C^3) \iff 0 = (\Delta^* \vec{u}, \vec{\nabla}\, \varphi)_{L_2} \qquad \forall\ \varphi \in BL(G;C)$

Si $\vec{v} \in D(A_D) \cap H^1$ on a donc nécessairement :

$$0 = (\Delta^* \vec{v}_1, \vec{\nabla}\, \varphi_n)_{L_2} = (\vec{v}_1, \vec{\nabla}\varphi_n)_{EL(G;C^3)} \longrightarrow (\vec{v}_1, \vec{u})_{EL(G;C^3)}$$

Donc tous les $\vec{u}$ de $EL(G;C^3)$ tels que div $\vec{u} \neq 0$ sont orthogonaux à $D(A_D) \cap H_1^1$. Il faut donc avoir :

$$\boxed{D(A_D) \cap H_1^1 \subset \{\vec{u} \in \overset{\circ}{EL}(G;C^3) : \text{div}\ \vec{u} = 0\} = \overset{\circ}{EL}{}_s^*(G;C^3) = \overset{\circ}{EL}_1(G;C^3)}\ .$$

Conclusion

et

$$\left\{\begin{array}{l} H^1 = \overset{\circ}{EL}_1(G;C^3) \times L_2^1(G;C^3) \times \{0\} = X_1 \\ A_D^1 = \bar{B} \end{array}\right\}$$

4ème étape : Vérification :

Le raisonnement ci-dessus est assez indirect; aussi procédons-nous à une "vérification" directe. On a :

(i) X_1 est un sous-espace invariant par A_D .

De fait : $D(A_D) \cap X_1 = \{\vec{u}_1 \in \overset{\circ}{EL}_1 : \Delta^* \vec{u}_1 \in L_2(G;C^3)\} \times \{\vec{u}_2 \in L_2^1(G;C^3) \cap \overset{\circ}{EL}(G;C^3)\} \times \{0\}$

$$= \{\vec{u}_1 \in \overset{\circ}{EL}_1 : \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u}_1 \in L_2^s(G;C^3)\} \times \{\vec{u}_2 \in L_2^1 \cap EL_s(G;C^3)\} \times \{0\}$$

$$= \{\vec{u}_1 \in \overset{\circ}{EL}_1 : \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u}_1 \in L_2^s(G;C^3)\} \times \{\mathbf{u}_2 \in L_2^1 \cap \overset{\circ}{EL}_1(G;C^3)\} \times \{0\}$$

D'après le lemme ci-après on a :

$\vec{u}_1 \in \overset{\circ}{EL}_1(G;C^3)$ et $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u}_1 \in L_2(G;C^3) \implies \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u}_1 \in L_2^1(G;C^3)$. Donc :

$$D(A_D) \cap X_1 = D(\bar{B}) \text{ et } X_1 \text{ est invariant par } A_D\ .$$

(ii) $A_D\big|_{X_1} = \bar{B}$: évident d'après (i).

On peut alors parler de la "restriction de A_D à X_1"; or $A_D\big|_{X_1} = \bar{B}$, d'où $A_D\big|_{X_1}$ anti-autoadjoint donc générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires (Théorème de Stone).

Lemme : $\vec{u} \in \overset{\circ}{EL}_1(G;C^3)$ et $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u} \in L_2(G;C^3) \Rightarrow \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u} \in L_2^1(G;R^3)$.

Preuve

$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u} \in L_2(G;C^3)$ entraîne d'après la décomposition de $L_2(G;C^3)$:

$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u} = \vec{t}_1 + \vec{\nabla}\,\phi$, $\phi \in BL(G)$ et $\vec{t}_1 \in L_2^1(G;C^3)$.

Mais on a vu (cf. corollaire p. 17) qu'il existe $\vec{s}_1$ unique, $(\vec{s}_1,0,0) \in D(\bar{B})$ tel que $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{s}_1 = \vec{t}_1$. On a donc :

$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ (\vec{u}-\vec{s}_1) = \vec{\nabla}\,\phi$

Or $\vec{u} - \vec{s}_1 \in \overset{\circ}{EL}$, donc $\vec{u}-\vec{s}_1 \in \overset{\circ}{EL}_o(G;C^3)$ d'après la caractérisation de $\overset{\circ}{EL}_o(G;C^3)$

Mais $(\vec{s}_1,\vec{0},0) \in D(\bar{B}) \Rightarrow \vec{s}_1 \in \overset{\circ}{EL}_1$, d'où $\vec{u}-\vec{s}_1 \in \overset{\circ}{EL}_1$, donc :

$\vec{u}-\vec{s}_1 \in EL_1 \cap EL_o = \{\vec{0}\}$, d'où $\vec{u} = \vec{s}_1$ et $\vec{\nabla}\phi = 0$, c'est-à-dire :

$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u} \in L_2^1(G;C^3)$.

Remarques

1) Que signifie $\vec{u} \in D(A_D^1)$? :

* Soit $\vec{u} \in D(A) \cap Y_1$, où $Y = Y_1 \times Y_2 \times \{0\}$ le sous-espace de H déjà mentionné.

On a alors pour $\vec{u}$ "suffisamment régulier" et $\psi \in H_1(G)$

$$\int_{\partial G} \phi\vec{n}.\Delta^* \vec{u}\, dS = \int_G div(\phi\, \Delta^* \vec{u})dS = \int_G \phi\, \Delta\, div\, \vec{u} + \int_G \vec{\nabla}\,\phi.\Delta^* \vec{u}\, dx = \int_G \vec{\nabla}\,\phi.\Delta^* \vec{u}\, dx .$$

Comme $\vec{\nabla}\,\phi$ et $\Delta^* \vec{u}$ sont dans L^2, que $\phi \in H^{1/2}(G)$, cette formule permet de définir pour tous les $\vec{u} \in D(A) \cap Y_1$ une "trace" $\vec{n}.\Delta^* \vec{u}\big|_{\partial G}$, d'une façon continue et de plus $\int_{\partial G} \vec{n}.\Delta^* u\, ds = 0$. Cette trace sera dans $L_2(\partial F)$ en fait.

* Si $\vec{u}$ est restreint à $D(A) \cap H^1$, on a alors $\Delta^* \vec{u}_1 \in L_2^1$ et l'intégrale
$\int_G \vec{\nabla}\psi.\Delta^* \vec{u}\, dx = 0$ donc $\vec{n}.\Delta^* \vec{u}_1\big|_{\partial G} = 0$.

D'autre part $\vec{u}_2 \in L_2^1 \cap \overset{\circ}{EL}_1$, donc on peut définir une trace $\vec{u}_2\big|_{\partial G}$ dans et cette trace est nulle (en plus de $\vec{n}.\vec{u}_2\big|_{\partial G} = 0$ qui exprime la continuité de la vitesse normale).

* La condition $\vec{n}.\Delta^* \vec{u}\big|_{\partial G} = 0$ poste sur les dérivées du vecteur tension $\vec{t}(\vec{n},\vec{u})$ puisque $\vec{x}_j.\Delta^* \vec{u} = \sigma_{ij,j}$, c'est-à-dire en fait sur la composante normale de l'accélération.

2) On peut aussi vérifier directement que la décomposition en question de H réduit A_D . En effet H^o est invariant par A car :

$\longrightarrow \vec{u}_1 \in \overset{\circ}{EL}_o(G;C^3)$ et $\Delta^* \vec{u} \in L_2(G;C^3) \Longrightarrow \Delta^* \vec{u} \in L_2^o(G;C^3)$.

$\longrightarrow \vec{u}_2 \in L_2^o(G;C^3) \cap EL(G;C^3) \Longrightarrow \overrightarrow{rot}\, \vec{u}_2 = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u}_2 \in \overset{\circ}{EL}_o(G;C^3)$.

puisqu'alors :

$$D(A) \quad H^o = \{\vec{u}_1 \in \overset{\circ}{EL}_o : \Delta^* \vec{u}_1 \in L_2\} \times \{\vec{u}_2 \in L_2^o(G;C^3) \cap EL\} \times \{H_2(G;C^3) \cap \overset{\circ}{H}_1(G;C^3)\}$$

$$= \{\vec{u}_1 \in \overset{\circ}{EL}_o : \Delta^* \vec{u}_1 \in L_2^o\} \times \{\vec{u}_2 \in L_2^o(G;C^3) \cap \overset{\circ}{EL}_o(G;C^3)\} \times \{H_2(G;C) \cap \overset{\circ}{H}_1(G;C)\}$$

Conclusion

L'opérateur A_D est réduit par la décomposition de H en $A_D = A_D^o \oplus A_D^1$ avec :

$$\begin{cases} A_D^1 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\mu\, \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{rot} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D(A_D^1)\ \{\overset{\circ}{EL}_1 \cap \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{rot}\, \vec{u}_1 \in L_2^1\} \times \{L_2^1 \cap \overset{\circ}{EL}_1\} \times \{0\} . \\ \\ A_D^o = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \Delta^* & 0 & -m\vec{\nabla} \\ 0 & -\eta\,\mathrm{div} & \Delta \end{pmatrix} \quad \text{ et } D(A_D^o) = \{\overset{\circ}{EL}_o \cap \Delta^* \vec{u}_1 \in L_2^o\} \times \{L_2^o \cap \overset{\circ}{EL}_o\} \times \{H_2(G;C) \cap \overset{\circ}{BL}(G;C)\} . \end{cases}$$

On peut aussi démontrer des résultats analogues au théorème p. 33, Chapitre II. Mais le résultat devient ici un peu différent. On a seulement le :

Théorème : soit $\vec{h} \in D(A_D)$

1) Supposons que pour $t = \tau > 0$ fixé on ait $||T_o(\tau)\vec{h}|| = ||\vec{h}||$. Alors on a :
$||T(t)\vec{h}|| = ||\vec{h}|| \forall t \leq \tau$ et même $T(t)\ \vec{h} \in Y$ pour $t \leq \tau$.

2) Même résultat pour $T^*(t)\ \vec{h}$, si on a $||T^*(\tau)\ \vec{h}|| = ||\vec{h}||$.

3) Si $T(\tau)\ \vec{h} \in H^1$ pour un $\tau > 0$ fixé, alors $T(\tau)\ \vec{h} \in H^1 \quad t \geq 0$.

Preuve :

1) et 2) sont évidentes.

3) est une reformulation de l'invariance de H^1 par $T(t)$.

On remarquera la différence de 1) et 2) avec les 1) et 2) correspondants du théorème du chapitre II (cas de l'espace libre), p. 33.

Remarque

(i) Il est clair que l'on a $||T^o(t)\vec{h}|| = ||\vec{h}||$ pour $t = 0$, puisque $T^o(0) = I$, car $T^o(t)$ est un semi-groupe.

(ii) $||T^o(t)\vec{h}|| < ||h||$ n'entraîne pas que $\mathrm{Re}(A_D^o\ \vec{h},\vec{h}) < 0$. Il suffit de considérer les $\vec{h}$ de la forme $\vec{h} = (\vec{h}_1,\vec{h}_2,0)$, div $\vec{h}_1 \neq 0 \neq$ div $\vec{h}_2$.

(iii) En parallèle au théorème précédent, on voit que si pour une valeur t_o de t, $||T^o(t_o)\ \vec{h}|| < ||\vec{h}||$, alors ceci reste vrai $\forall\ t \geq t_o$.

3. QUELQUES PROPRIETES SPECTRALES

Théorème

On a les caractérisations suivantes de $\sigma_p(A_D)$:

1) $\lambda = 0 \notin \sigma_p(A_D)$

2) $\sigma_p(A_D^1) \cap \{\mathrm{Re}\ z = 0\} = \phi$

3) $\bar{A}_D^1$ ne possède pas de vecteurs propres à la fois entrants et sortants, où $\bar{A}_D^1$ désigne l'extension de A_D^1 aux données localement dans H^1(suivant le schéma du Chapitre I).

4) $\sigma_p(A_D) \cap \{\mathrm{Re} z = 0\} = \phi$

Preuve

1) Soit $\vec{h} \neq 0$, $\vec{h} \in D(A_D)$ et $A_D\, \vec{h} = \vec{0}$. Alors

$$\begin{cases} \vec{h}_2 = \vec{0} \\ \Delta^* \vec{h}_1 - m \vec{\nabla} h_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{h}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \text{div } \vec{h}_2 = 0 \quad \Rightarrow \Delta h_7 = 0 \\ - \eta \text{ div } \vec{h}_2 + \Delta h_7 = 0 \end{cases}$$

Mais $h_7 \in \overset{\circ}{H}_1(G;C)$, donc $\Delta h_7 = 0 \Longrightarrow h_7 = 0$.

La deuxième équation donne alors $\Delta^* \vec{h}_1 = \vec{0}$. Mais $\vec{h}_1 \in \overset{\circ}{EL}(G;C^3)$, d'où $\vec{h}_1 = 0$

On a donc $\vec{h} = \vec{0}$, d'où la contradiction.

2) $\sigma_p(A_D^1) \cap i\mathbb{R} = \phi$.

Soit $\lambda = i\sigma$, $\sigma \neq 0$ réel la valeur propre présumée et $\vec{a} \neq \vec{0}$ le vecteur propre correspondant, $\vec{a} \in D(A_D^1)$. On a alors :

$$\begin{cases} \vec{a}_2 = i\ \sigma\ \vec{a}_1 \\ \Delta^* \vec{a}_1 + \sigma^2 \vec{a}_1 = \vec{0} \text{ dans } G \\ a_7 = 0 \end{cases}$$

d'où l'analycité de $\vec{a}$ dans G, à cause de l'ellipticité de l'opérateur Δ^* .

(En fait on a immédiatement que toutes les dérivées de $\vec{a}$ sont de carré intégrable et que div $\vec{a} = 0$).

Soit alors $\xi(x) \in C^\infty(R^3;[0,1])$, $\xi(x) = 1$ pour $|x| > \rho$ et $\xi(x) = 0$ dans un voisinage de ∂G. Posons $\vec{b}(x) = \xi(x)\, \vec{a}(x)$.

Alors $\vec{b}(x)$ est à énergie finie, est C^∞ et appartient à $D(A_o)$; mais elle n'est pas dans $D(A_o^1)$ car div $\vec{b}(x) \neq 0$ en général. Soit $\vec{b}(x) = \vec{b}^1(x) + \vec{b}^o(x)$ la décomposition de $\vec{b}$ en tant qu'élément de $[\mathcal{D}_{L^2}(R^3;C^3)]^2$, avec div $\vec{b}^1(x) = 0$ et $\vec{b}^o(x) \in [D_{L_2^o}(R^3;C^3)]^2$.

Comme $\vec{b}(x) = \vec{a}(x)$ pour $|x| > \rho$ et div $\vec{a}(x) = 0$, on a :

$$\vec{b}^1(x) = \vec{a}(x) \text{ pour } |x| > \rho .$$

Pour $|x| < \rho$, on a $\vec{b}^1(x) = \vec{b}(x) - \vec{b}^o(x)$ et est donc C^∞; donc $\vec{b}^1(x) \in D(A_o^1)$ et on a :

$(A_o^1 - i\sigma)\ \vec{b}^1(x) = \vec{0}$ pour $|x| > \rho$.

D'après le théorème 4 (Chapitre IV p. 3) on a $\vec{b}^1(x) = \vec{0}$ pour $|x| > \rho$ c'est-à-dire $\vec{a}(x) = \vec{0}$ pour $|x| > \rho$.

Par l'analycité de $\vec{a}$ on obtient que $\vec{a}(x) = \vec{0}$ dans G, d'où la contradiction cqfd.

3 Soit $\lambda \neq 0$ et $\vec{h}$ le vecteur propre correspondant; $\vec{h}$ étant à la fois entrant et sortant est donc à énergie finie; il revient donc en fait de faire la démonstration pour A_D^1, ce qui implique $\lambda = i\ \sigma$ où $\sigma = R$; c'est alors une conséquence de 2).

4 $\sigma_p(A_D) \cap \{iR\} = \phi$.

Méthode directe

Soit $\vec{a}$ le vecteur propre correspondant à $\lambda = i\sigma$,$\sigma \in R^*$.

Alors

$$(A_D - i\sigma)\ \vec{a} = \vec{0} \iff \begin{cases} \vec{a}_2 = i\ \sigma\ \vec{a}_1 \\ \Delta^*\ \vec{a}_1 - m\ \vec{\nabla}\ a_7 = -\ \sigma^2\ \vec{a}_1 \\ \Delta\ \ a_7 - i\ \eta\sigma \operatorname{div} \vec{a}_1 = i\ \sigma\ a_7 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \Delta^*\ \overline{\vec{a}}_1 - m\ \vec{\nabla}\ \ \overline{a}_7 = -\ \sigma^2\ \overline{\vec{a}}_1 & 1 \\ \Delta\ \ a_7 - i\ \eta\ \sigma \operatorname{div} \vec{a}_1 = i\ \sigma\ a_7 & 2 \end{cases}$$

Multipliant (1) par $i\ \eta\ \sigma\ \vec{u}$ et (2) par $m\ \overline{a}_7$ et ajoutant membre à membre, on obtient :

$$m\ \overline{a}_7\ \Delta\ a_7 + i\ \sigma\ (\eta\ \ \vec{a}_1.\Delta^*\ \overline{\vec{a}}_1 + \eta\ \sigma^2\ \ |\vec{a}_1|^2 - m\ |a_7|^2) = i\ \varepsilon \operatorname{div} \overline{\sigma}\ \vec{u}$$

Mais en plus $\vec{a} \in D(A). \Rightarrow \vec{a}_1 \in H_2(G;C^3) \cap \overset{\circ}{H}L(G;C^3)$ et $a_7 \in H_2 \cap \overset{\circ}{H}_1$.

En intégrant alors par parties (les valeurs au bord existent et annulent toutes les intégrales de surface), on obtient :

$$-m\ \|\vec{\nabla} a_7\|^2_{L^2(G;C^3)} + i\ \sigma\ (-\eta\ \ E(\vec{a}_1) + \eta\ \sigma^2\|\vec{a}_1\|^2_{L_2} - m\ \|a_7\|^2_{L_2}\ ) = 0\ .$$

D'où $a_7 = 0$, donc $\operatorname{div} \vec{a}_1 = \operatorname{div} \vec{a}_2 = 0$.

On a donc $-\ \mu\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overleftrightarrow{\text{rot}}\ \vec{a}_1 + \sigma^2\ \vec{a}_1 = 0$, ou, puisque $\operatorname{div} \vec{a}_1 = 0$

$(\Delta + \frac{\sigma^2}{\mu})\ \vec{a}_1 = \vec{0}$ et $\vec{a}_1 \in L_2(G;C^3)$. D'après le théorème de Rellich on a $\vec{a}_1 = \vec{0}$.

d'où aussi $\vec{a}_2 = i\ \sigma\ \vec{a}_1 = \vec{0}$

c'est-à-dire $\vec{a} = \vec{0}$. c.q.f.d.

Méthode Indirecte

Nous pouvons aussi utiliser un argument plus formel :

$T^o(t)$ étant c.n.u., ses valeurs propres de module 1 (de la forme e^{irt}) sont les mêmes que celles de sa dilatation unitaire minimum (cf. théorème plus bas), d'où l'absence de telles valeurs propres pour $T^o(t)$, donc absence de valeurs propres imaginaires pour A_D^o. On a donc :

$$\sigma_p(A_D) \cap i\,\mathbb{R} = \sigma_p(A_D^1) \cap i\mathbb{R} = \phi\ .$$

4. DECROISSANCE LOCALE DE L'ENERGIE.

Lemme

L'ensemble $S = \{\vec{u} \in D(A_D) : \|A_D\ \vec{u}\|_H + \|\vec{u}\|_H < 1\}$ est précompact dans la norme "énergie locale".

Preuve :

Soit $\vec{u} \in S$. On a alors :

$$\|\vec{u}_2\|_{EL(G)} + \|\vec{u}_2\|_{L_2(G)} + \|\vec{u}_7\|_{L_2(G)} + \|\vec{u}_1\|_{EL(G)} + \|\Delta^* \vec{u}_1 - m\ \vec{\nabla}\ u_7\|_{L_2(G)} +$$

$$\|\Delta\ \vec{u}_7 - \eta\ \operatorname{div} \vec{u}_2\|_{L_2(G)} < 1$$

Soit G' un ouvert relativement compact de G. On a alors de suite :

$\|\vec{u}_2\|_{L_2(G')} + \|\vec{u}_2\|_{EL(G')} < 1$, d'où $\|\vec{u}_2\|_{H^1(G';C^3)} < 1$, d'on $\{\vec{u}_2\}$ précompact dans $L_2(G';C^3)$.

De même $||\Delta u_7 - \eta \operatorname{div} \vec{u}_2||_{L_2(G\ )} < 1 \Rightarrow ||\Delta u_7||_{L_2(G\ )} < 1 + ||\eta \operatorname{div} \vec{u}_2||_{L_2} < 1+1=2$

Comme $u_7 \in H_2(G) \cap \overset{\circ}{H}_1(G)$ on a :

$$||u_7||_{H_2(G')} \leqslant k\,(||\Delta u_7||_{L_2(G')} + ||u_7||_{L_2(G')} \leqslant k_1^{\times} \text{ ; en particulier}$$

$$||\vec{\nabla} u_7||_{L_2}(G') < k$$

Donc toutes les dérivées de u_7 jusqu'à l'ordre deux inclus sont uniformément bornées dans $L_2(G')$. On en déduit par le théorème de compacité de Rellich (voir Yoshida p.) que

$\{u_7\}$ est précompact dans $L_2(G')$

$\{\partial_{xi}\, u_7\}$ est précompact dans $L_2(G')$ $\forall$ x = 1,2,3 .

En particulier $\{\vec{\nabla}\, \vec{u}_7\}$ l'est.

Pour $\vec{u}_1$ on a de même :

$$||\Delta^* \vec{u}_1 - m\, \vec{\nabla} u_7||_{L_2(G')} < 1 \Rightarrow ||\Delta^* \vec{u}_1||_{L_2(G')} < k_2 \text{ , d'où}$$

$$||\vec{u}_1||_{H_2(G';C^3)} \leqslant k_3\,(\ ||\Delta^* \vec{u}_1||_{L_2(G')} + ||\vec{u}_1||_{L_2(G')}\ )$$

or $\vec{u}_1 \in \overrightarrow{EL}(G;C^3) \Rightarrow ||\vec{u}_1||_{L_2(G')} \leqslant k\,||\vec{u}_1||_{EL(G')} < k\ \forall\ G' \subset\subset G$

On a donc bien $||\vec{u}_1||_{H_2(G';C^3)} < k_5$.

On obtient donc en particulier :

$\{\operatorname{div} \vec{u}_1\}$ et $\{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{u}_1\}$ sont précompacts dans $L_2(G')$, ou $\{\vec{u}_1\}$ précompact dans $H^1(G';C^3)$. En résumé :

$$\begin{cases} \{\operatorname{div} \vec{u}_1\} \text{ et } \{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{u}_1\} \text{ précompacts dans } L_2(G') \\ \{u_2\} \text{ précompact dans } L_2(G') \\ \{u_7\} \text{ précompact dans } L_2(G') \end{cases}$$

c'est-à-dire $\{\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, u_7)\}$ précompact dans la norme énergie locale.

On rappelle alors le :

Théorème de Wiener

Soit $\hat{m}(t)$ la transformée de Fourier d'une mesure signée à variation totale bornée. Alors :

m ne contient pas de masse ponctuelles (point masse) entraîne :

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} |\hat{m}(t)|^2 \, dt \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0 .$$

Corollaire

Il existe une suite $\{t_k\}$, $t_k \longrightarrow +\infty$ qdk $\longrightarrow +\infty$ et telle que $\hat{m}(t_k) \longrightarrow 0$ (dans les conditions du théorème de Wiener).

Preuve

Soit S_d le sous-ensemble de $[-T, +T]$ tel que $\{|\hat{m}(t)| > d > 0\}$ ...

Alors $\forall\, d > 0, \forall\, c > 0$, il existe T assez grand tel que $mes_L\, S_d < \frac{c}{d^2}\, T$.

En effet : $\forall\, c > 0$, $\exists\, T(c)$ t.q. $T > T(c) \Rightarrow \frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} |\hat{m}(t)|^2 \, dt < c \Rightarrow \frac{d^2}{T}\, mes_L\, S_d < c$

d'où $mes_L\, S_d < \frac{c}{d^2}\, T$ (mes_L désigne la mesure de Lebesgue).

Choisissons $\frac{c}{d^2} < \frac{1}{2}$. Alors $mes_L\, S_d < \frac{1}{2}\, T$. C'est-à-dire que dans tout intervalle de mesure $\frac{T}{2}$, il existe au moins un point t pour lequel on a $|\hat{m}(t)| \leq d$.

Choisissons t dans l'intervalle $(\frac{T}{2}, T)$.

On peut donc construire une suite $\{d_k = \frac{1}{k}, c_k = \frac{1}{2k^2}, T_k \geq k, \frac{T_k}{2} \leq t_k \leq T_k\}$ telle que $|\hat{m}(t_k)| \leq \frac{1}{k}$, c'est-à-dire qu'on a démontré que : il existe une suite $\{t_k\} \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$ telle que $|\hat{m}(t_k)| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$. cqfd.

Théorème principal

Soit T(t) un Co-semi-groupe d'opérateurs de contraction dans un espace de Hilbert, de générateur A. Supposons que l'on ait $\sigma_p(A) \cap \{\mathrm{Re}\ z = 0\} = \phi$. Il existe alors une suite $\{t_k\} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ et telle que $T(t_k) \xrightarrow{W} 0$ (faible).

Preuve

Soit $T^o(t) \oplus T^1(t)$ la décomposition canonique de T(t) en un opérateur unitaire $T^1(t)$ et un opérateur c.n.u. $T^o(t)$. Alors :

a) $T^o(t) \xrightarrow{W} 0$: puisqu'il n'y a aucune condition spéciale sur $T^o(t)$, il s'agit en fait de démontrer que quel que soit le co-semi-groupe Z(t), complètement non-unitaire on a $Z(t) \xrightarrow{W} 0$. Pour cela on utilise le résultat suivant de Nagy-Foias :

Lemme

Soit Z(t) un Co-semi-groupe de contractions dans un Hilbert H. Il existe alors un Co-groupe d'opérateurs unitaires U(t) dans un espace R , contenant H comme sous-espace, tel que U(t) soit une dilatation unitaire de Z(t), c'est-à-dire $Z(t) = P_H\, U(t)$; P_H : projection de R sur H. De plus le spectre de U(t) est absolument continu.

D'après le lemme on obtient :

$(Z(t)f,g)_H = (U(t)f,g)_H = \int_\lambda e^{i\lambda t}\, dm(f,g)$ où $dm(f,g) = (E_\lambda f,g)$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. D'après le théorème de Riemann-Lebesgue on a donc :

$$(Z(t)\ f,g)_H \xrightarrow{t\to+\infty} 0\ \forall\ f,g \in H \ . \qquad \text{cqfd.}$$

b) $T^1(t) \xrightarrow{W} 0$

On a : $(T^1(t)\ f,g)_H = \int_\lambda e^{i\lambda t}\, dm_1(f,g)$, $dm_1(f,g) = (E^1_\lambda\ f,g)$ où E^1_λ est la résolution spectrale de A^1, générateur de $T^1(t)$, $dm_1(f,g)$ est une mesure complexe. D'après a) on a de plus $\sigma_p(A^o) \cap \{\mathrm{Re}\ z = 0\} = \phi$, d'où

$$\sigma_p\ (A) \cap \{\mathrm{Re}\ z = 0\} = \sigma_p\ (A^1) \cap \{\mathrm{Re}\ z = 0\} .$$

Puisque par hypothèse $\sigma_p(A) \cap \{\mathrm{Re}\ z = 0\} = \phi$, la mesure m_1 est sans masses ponctuelles. D'après le théorème de Wiener et son corollaire, on a l'existence d'une suite $\{t_k\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ telle que
$(T^1(t_k)f,g)_H \xrightarrow{t_k\to\infty} 0\ \forall (f,g) \in H^1 \times H.$

Conséquences

D'après les propriétés spectrales de A_D, on a donc : $\exists \{t_k\} \longrightarrow +\infty$ t.q. $T(t_k) \xrightarrow{W} 0$.

On peut alors démontrer la décroissance de l'énergie.

Proposition

Quel que soit $g \in D(A_D)$, $\forall\, G' \subset\subset G$, on a : $\operatorname*{Lim\ inf}_{t\to+\infty} E(T(t)g;G') = 0$

Preuve

Soit C l'ensemble $C = \{T(t)g,\ t \geq 0,\ g \in D(A_D)\}$. On a alors :
$||T(t)f||_H + ||AT(t)f|| \leq ||f||_H + ||Af||_H$, donc l'ensemble C est précompact dans la norme énergie locale, c'est-à-dire :

$$\exists\ \{t_j\} \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty\ \{T(t_k)f\} \xrightarrow{E_{G'}} \ell(f).$$

Or il existe une suite $\{t_k\}$ telle que $\{T(t_k)f\} \xrightarrow{W} 0$. Il suffit de rénuméroter la suite $\{t_k\}$ pour avoir $\operatorname*{Lim\ inf}_{t\to+\infty} E(T(t)g;G') = 0\ \forall\, G' \subset\subset G$.

Puisque $D(A_D)$ est dense dans H, on a :

$$\operatorname*{Lim\ inf}_{t\to+\infty} E(T(t)f;G') = 0\ \ \forall\ f \in H \text{ et } \forall\ G' \subset\subset G.$$

Corollaire

$$\forall f \in H^1 \quad \text{on a} \quad \liminf_{t\to+\infty} E^1(T^1(t)f;G') = 0 \qquad \forall G' \subset\subset G.$$
$$\forall f \in H^o \quad \text{on a} \quad \liminf_{t\to+\infty} E^o(T^o(t)f;G') = 0$$

5. VERIFICATION DES HYPOTHESES H 1 2 4 5 6 7 8 6* 7*

Hypothèse H^1 : oui. Voir Chapitre IV, p. 16 pour l'existence et les propriétés de $D^\rho_\pm$

Hypothèse H^2 : On choisit ρ assez grand pour que l'obstacle soit contenu dans la boule $B(0,\rho/2)$. Alors les données dans $D^\rho_\pm$ sont nulles dans cette boule, d'où $D^\rho_\pm \subset H$. Pour ces données A_D et A_o coïncident.

Hypothèse H4 : Réalisation concrète de j et j_o

Soit $i(x)$ une fonction C^∞, nulle dans un voisinage de G et égale à 1 pour $|x| > \rho$, $0 \leq i(x) \leq 1$. Soit j la multiplication par la fonction $i(x)$.

* Soit $\vec{h} = (\vec{h}_1,\vec{h}_2,h_7) \in H_o$. Alors :

$$\operatorname{div}(j\vec{h})_1 = i(x)\operatorname{div}\vec{h}_1(x) + \vec{h}_1.\vec{\nabla}\, i(x)$$
$$\operatorname{rot}(j\vec{h})_1 = i(x)\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{h}_1 + \vec{\nabla}\, i(x)\wedge\vec{h}_1$$

Comme support $\vec{\nabla}\, i(x) \subset \{G_\rho = G\cap\{|x| \leq \rho\}\}$, on a :

$$||\operatorname{div}(j\vec{h})_1||^2_{L^2(G)} \leq \sup_{x\in G}|i(x)|^2\, ||\operatorname{div}\vec{h}_1||^2_{L^2(G)} + \sup_{x\in G\rho}|\vec{\nabla} i(x)|^2||\vec{h}_1||^2_{L_2(G\rho)}$$

$$\leq ||\operatorname{div} h_1||^2_{L^2(G)} + C_\rho||\vec{h}_1||^2_{L^2(G\rho)}$$ ou $0 < c_\rho$ est une constante qui dépend de ρ. De même :

$$||\overrightarrow{\operatorname{rot}}(j\vec{h})_1||^2_{L_2(G;C^3)} \leq c_1||\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{h}_1||^2_{L_2(G;C^3)} + c'_\rho\,||\vec{h}_1||_{L_2(G\ )} \qquad 0 < c_1 = \text{cte et}$$
$$0 < c'_\rho = \text{cte.}$$

Alors $||(j\vec{h})_1||^2_{EL(G)} \leq k_1||\vec{h}_1||_{EL(G)} + k_2||\vec{h}_1||_{L_2(G\rho)}$

Mais G_ρ étant borné et la dimension de l'espace étant impaire, on a :
$||\vec{h}_1||_{L_2(G_\rho;C^3)} \leqslant M_\rho ||\vec{h}_1||_{EL(G_\rho;C^3)} \leqslant M_\rho ||\vec{h}_1||_{EL(G_\rho;C^3)}$ où M_ρ est une constante positive dépendant de ρ .

En résumé $||(j\vec{h})_1||_{EL(G;C^3)} \leqslant M_j ||\vec{h}_1||_{EL(R^3;C^3)}$ où M_j est une constante positive dépendant de la fonction i(x), donc de j.
De même, on a trivialement : $||(j\vec{h})_2||_{L_2(G;C^3)} \leqslant c_2 \, ||\vec{h}_2||_{L_2(R^3;C^3)}$ $c_2 > 0$

et $||(j\vec{h})_7||_{L_2(G;C)} \leqslant c_3 ||h_7||_{L_2(R^3;C)}$ $c_3 > 0$

c'est-à-dire : $||j\vec{h}||_H \leqslant c_j ||\vec{h}||_{H_o}$ où $0 < c_j$ est une constante dépendant de la fonction i(x), donc de j.

* Dans le sens inverse on vérifie aussi facilement que
$||j\vec{h}||_{H_o} \leqslant k_j \; ||\vec{h}||_H$ pour tout $\vec{h} \in H$, $0 < kj$ étant une constante qui dépend uniquement de la fonction i(x).

Soit donc j l'opérateur de multiplication par la fonction i(x).
j sert à la fois de j et de j_o .
En effet : 1) j est un opérateur continu de H_o dans H et de H dans H_o par les majorations ci-haut.

2) Si $\vec{h} \in D_\pm^\rho$, alors $\vec{h} = 0$ pour $|x|<\rho$ et $j\vec{h} = \vec{h}$, d'où $j = I$ sur $D_\pm^\rho$.

Hypothèse H5 : Vérifié par $T_o^o(t)$ et $T_o^{o*}(t)$. Revoir Chap. III p.

Hypothèses H6 *et* (H6)* : $j_o = I$ sur $D_\pm^\rho \Rightarrow D_\pm^\rho \subset H$. De plus div $\vec{h} = 0$ pour tout $\vec{h} \subset D_\pm^\rho$, donc $D_\pm^\rho \subset H^1$

Hypothèse H8 : 1) $Z^1(2\rho)\, R_\mu(B^1)$ est un opérateur compact pour $\mu > 0$:

Ce résultat se démontre exactement comme dans LAX-PHILLIPS (1 p. 152) auquel on renvoie le lecteur. Voir aussi G-SCHMIDT.

2) Comme conséquence on a : Le générateur B^1 de $Z^1(t)$ possède un spectre purement ponctuel, et la résolvante $R(\lambda,B^1)$ est méromorphe, holomorphe dans le demi-plan $Re\lambda \geq 0$. Donc (H8) est vérifiée.

Hypothèse H7 : L'hypothèse (H7) fait l'objet du théorème suivant :

Théorème

$$\lim_{t\to+\infty} \|P_+^\rho\, T(t)f\|_H = 0 \quad \forall f \in R(\tilde{W}_1^1)$$

Preuve

Nous allons en fait démontrer le théorème pour $f \in H^1$.

1) Il suffit d'établir le résultat pour un sous-ensemble dense de H^1, par exemple $A_D^1\, D(A_D^1)$. Ce sous-ensemble est dense vu que $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre de A_D^1 ni de A_D^{1*}. De plus $\{P_+^\rho\, T^1(t)\}$ forme un semi-groupe de contractions dans K_1^ρ, donc $\|P_+\, T(t)g\|_E$ est une fonction monotone non croissante (et positive). Il suffit donc de démontrer que :

$$\lim_{t\to+\infty} \inf \|P_+^\rho\, T^1(t)g\|_H = 0 \qquad g \in A_D^1\, D(A_D^1).$$

2) Puisque la vitesse de propagation des ondes solénoïdales est finie (elle est égale à c, mais en réalité par un changement de l'échelle de temps, on se ramène à c = 1), on a :

$$E^1(T^1(t)d;G_\rho) \leq E^1(d;G_{4\rho}) \ \forall d \quad \text{et } \forall\, 0 \leq t \leq 3\rho,\ d \in H^1 ,$$

qu'on démontre de la même manière que pour l'équation des ondes en intégrant sur un tronc de cône d'onde (cf. par exemple dans LAX-PHILLIPS(1)p.135).

En prenant $d = T(\tau)\, A_D^1\, g$, $g \in D(A_D^1)$, on a :

$$E^1(A_D^1\, T^1(t)g;G_\rho) \leq E(T^1(\tau)\, A_D^1\, g;G_{4\rho}) \text{ pour } \tau \leq t \leq \tau + 3\rho$$

D'après le théorème précédent pour τ assez grand le second membre devient arbitrairement petit, d'où :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau(\varepsilon) \text{ t.q. } \quad \tau > \tau(\varepsilon) \Rightarrow \ E^1(A_D^1\, T^1(t)g;G_\rho) < \varepsilon \text{ pour } \tau \leq t \leq \tau + 3\rho .$$

3) Soit alors

$T^1(t)\ A_D^1\ g = (\vec{W}(x,t),\ \vec{W}_t(x,t),0)$ et $\xi\ (x)$ comme auparavant. On pose :

$(\vec{v},\vec{v}_t,0) = \xi\ (\vec{W},\vec{W}_{t,0})$. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\ \vec{W}(x,t) = \vec{W}_t(x,t) \\ \\ -\ \mathrm{rot\ rot}\ W(x,t) = \frac{d}{dt}\ W_t(x,t) \end{array}\right. \quad \text{dans } R_+^{*} \times G \text{ et } \left\{\begin{array}{l} \vec{W}(x,0) = \vec{g}_2 \\ \\ \vec{W}_t(x,0) = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ g_1 = \Delta \vec{g}_1 \end{array}\right.$$

en prenant $c = 1$.

soit :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{d}{dt}\ \vec{W}(x,t) = \vec{W}_t(x,t) & \vec{W}(x,0) = \vec{g}_2 \\ \Delta\ \vec{W}(x,t) = \frac{d^2}{dt^2}\ \vec{W}(x,t) & \vec{W}_t(x,0) = \Delta \vec{g}_1 \\ \mathrm{div}\ \vec{W}(x,t) = 0 & \end{array}\right.$$

On a donc pour $\vec{v}$: $\left\{\begin{array}{l} \vec{v}_{tt} - \Delta\ \vec{v}(x,t) = \vec{q}(x,t) \text{ dans } R^3 \\ \\ \vec{v}(x,0) = \xi\ \vec{g}_2 \text{ et } \vec{v}_t(x,0) = \xi\, \Delta\ g_1 \end{array}\right.$

où $\vec{q}(x,t)$ est fonction de $\vec{W}(x,t)$, des dérivées premières de $\xi\ (x)$ et $\vec{W}(x,t)$;

donc q est à support compact et en fait supp $\vec{q}(x,t) \subset \{|x| \leqslant \rho\}$.

D'autre part, <u>on n'a plus div $\vec{v}(x,t) = 0$ et donc $\vec{v} \in H_0^1$</u> .

On a :

$$T^1(t)\ A_D^1\ \vec{g} = \{\vec{v},\vec{v}_t,0\} + (1-\xi)\ \{\vec{W},\ \vec{W}_t,0\} \quad \text{, d'où}$$

$$||P_+^\rho\ T^1(t)\ A_D^1\ \vec{g}||_H \leqslant ||P_+^\rho\ \ \{\vec{v},\vec{v}_t,0\}||_{H_0} + ||P_+^\rho(1-\xi)\ \{\vec{W},\vec{W}_t,0\}||_H$$

$$= ||P_+^\rho\ \{\vec{v},\vec{v}_t,0\}||_{H_0} + (1-\xi)||\{\vec{W},\vec{W}_t,0\}||_H \text{ , puisque } P_+^\rho \text{ est}$$

égal à l'identité pour des données dans H, à support dans $\{|x| \leqslant \rho\}$.

On a donc pour $\tau \leqslant t \leqslant \tau + 3\rho$, <u>assez grand</u> : $(\tau > \tau_0(\varepsilon))$

$$||P_+^\rho\ T^1(t)\ A_D^1\ \vec{g}||_H \leqslant ||P_+^\rho\ \{\vec{v},\vec{v}_t\}||_{H_0} + O(\varepsilon^{1/2})$$

Nous devons donc avoir une :

Estimation de $||P_+^\rho\ \ \{\vec{v},\vec{v}_t,0\}||_{H_0}$ pour $\tau \leqslant t \leqslant \tau + 3\,\rho$.

$\vec{v}(x,t) = \xi(x)\, \vec{W}(x,t) \in D(A_o)$, donc $\vec{v} = \vec{v}^1 + \vec{v}^o$ d'une façon unique, avec : $v^1 \in H_o^1$ et $\vec{v}^o \in H_o^o$, div $\vec{v}^1 = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}^o = \vec{0}$ ($\vec{v}^1 \in D(A_o^1)$ et $\vec{v}^o \in D(A_o^o)$).
Or pour $|x|>\rho$, on a $\vec{v} = \vec{W}$ et div $\vec{W} = \vec{0}$ donc div $\vec{v}^o = \vec{0}$, d'où $\vec{v}^o = \vec{0}$ pour $|x|> \rho$. Alors :

$$||P_+^\rho\{\vec{v},\vec{v}_t,0\}||_{H_o} = ||P_+^\rho\, \{\vec{v}^1,\vec{v}_t^1,0\}||_{H_o} + ||P_+^\rho\{\vec{v}^o,\vec{v}_t^o,0\}||_{H_o} = ||P_+^\rho\, \{\vec{v}^1,\vec{v}_t^1,0\}||_{H_o}$$

$$+ ||\{\vec{v},\vec{v}_t^o,0\}||_{H_o} = ||P_+^\rho\, \{\vec{v}^1,\vec{v}_t^1,0\}||_{H_o} + O(\varepsilon^{1/2}) \text{ pour } t$$

assez grand d'après la décroissance locale de l'énergie; en effet

$$||\{\vec{v}^o,\vec{v}_t^o,0\}||_{H_o} = E(\{\vec{v}^o,\vec{v}_t^o,0\};G_\rho) \leqslant E(\{\vec{v},\vec{v}_t,0);G_\rho) = E(\xi\{\vec{W},\vec{W}_t,0\};G_\rho)$$

$\leqslant \sup |\xi| E(\{\vec{W},\vec{W}_t,0\};G_\rho)$ auquel on peut appliquer le théorème de décoissance de l'énergie contenue dans G_ρ .

D'autre part, $\vec{q}(x,t)$ est une distribution en x à support compact. On peut donc la décomposer en $\vec{q} = \vec{q}^1 + \vec{q}^o$ par le théorème du chapitre IV. On noteraque ni $\vec{q}^1$, ni $\vec{q}^o$ ne sont à support compact en x. Cependant, grâce au théorème chapitre IV, on a :

$J(0,\vec{q}^1,0)$ est à support compact en s, soit $\vec{\ell}\,(s,\vec{\omega}) \in \mathcal{E}'(R;N^1)$

4) Dès lors, il ne reste plus qu'à calquer le reste de la démonstration sur le travail fait par LAX-PHILLIPS dans (**3**) p. 218-219 pour l'équation des ondes.

En posant $m^1(s,t;\vec{\omega}) = J\,\{\vec{v}^1,\vec{v}_t^1,0)\}$ et $\vec{\ell}^1 = -\tilde{q}^1(s,t;\vec{\omega})$, on a :

$(\partial_t + \partial_s)\, m^1 = \ell^1$ avec supports $\vec{\ell}^1(s)$ $[-\rho_1\ +\rho]$.

Le problème est alors d'estimer $||\partial_s\, m^1||_{L^2(R;N^1)}$. On évolue alors l'intégrale I

$$I(\tau+3\rho) = \int_{S_2}\int_{-\infty}^{2\rho} |\partial_s\, m^1(s,\tau+3\rho)|^2\, ds\, d\omega = \int_{-\infty}^{-\rho}[-]ds + \int_{-\rho}^{2\rho}[-]ds = I_1+I_2 ,$$

entendons l'intégration sur S_2 .

I_1 :

$S < -\rho \Rightarrow (\partial_t + \partial_s)\, \partial_s\, m^1 = 0$, donc $\partial_s\, m^1$ est constante le long des caractéristiques $s + t = \lambda$, en particulier : $\partial_s m^1(s,\tau+3\rho) = \partial_s m^1(s-\tau-3\rho,0)$ d'où $I_1 = \int_{-\infty}^{-\tau-u\rho} |\partial_s m^1(s,0)|^2 ds$, d'où $I_1 < \varepsilon$ pour τ suffisamment grand; en effet $\partial_s m^1$ est de carré intégrable.

I_2 :

En intégrant sur les caractéristiques, on a :

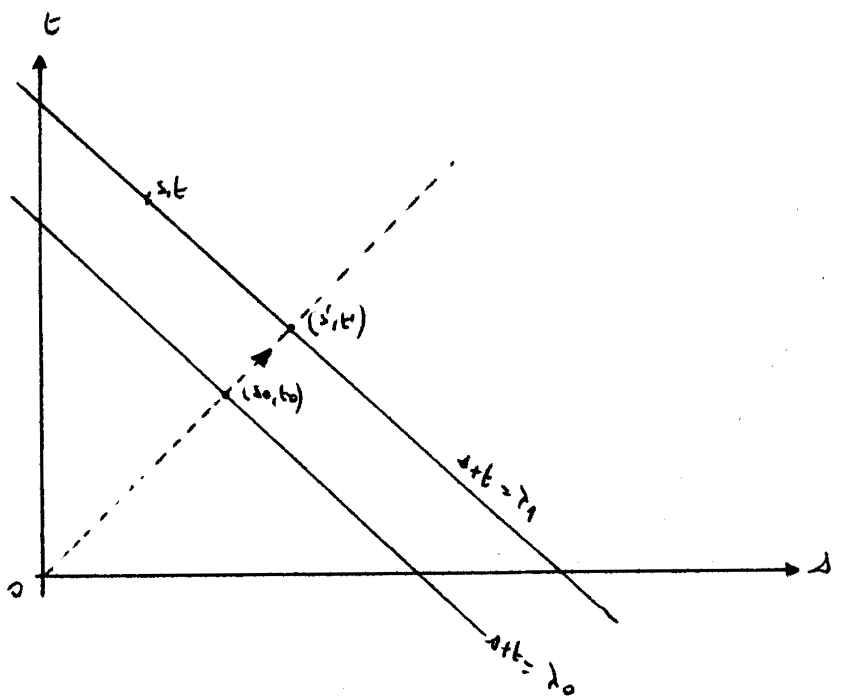
$$\partial_s m^1(s,t) = \partial_s m^1(s',t') = \partial_s m^1(s_o,(t_o) + \int_0^{\frac{s+t}{2} - \frac{s_o+t_o}{2}} \ell\ (s_o+\mu,t_o+\mu)d\mu.$$

Ici on a :

$$\partial_s m^1(s,\tau+3\rho) = \partial_s m^1(-\rho,\ \tau+2\rho-s) + \int_0^{s+\rho} \partial_s \ell(-\rho+\mu,\ \tau+2\rho-s+\mu)d\mu\ .$$

Quand $t \to +\infty$, la norme L^2 de $\partial_s \ell(s,t)$ peut être rendue arbitrairement petite (car $J^{-1} \vec{\ell}$ fait intervenir uniquement $\vec{W}(x,t)$ et ses dérivées premières dans $|x| < \rho$, d'où la conclusion en utilisant la décroissance locale de l'énergie). Pour $\partial_s m^1(-\rho\ ,\ \tau+2\ -s)$, on utilise encore la décroissance locale (on intègre entre $-\rho$ et $+ 2\rho$) de l'énergie, donc :

$$I_2 = O\ (\varepsilon) \text{ pour } \tau \text{ suffisamment grand.}$$



5. *EXTENSIONS DE* H_o *ET* H, A_o *ET* A_D

5.1. $\bar{H}_o^1$ *et* A_o^1

Par définition, les éléments d de $\bar{H}_o^1$ sont représentés dans la représentation de translation par des fonctions Jd qui sont localement dans $L_2(R;N^1)$, donc dans $\mathcal{D}'(R;N^1)$. Nous avons déjà remarqué que les formules (Chap. IV, p.17) donnant J ne dépendaient que localement de $\mathbf{k}(s)$, ce qui nous a permis d'étendre J^{-1} aux distributions. Donc, si $k(s,\omega)$ est localement dans $L_2(R;N^1)$, ces formules donnent une réalisation concrète des éléments correspondants de $\bar{H}_o^1$ comme données de Cauchy $\{\vec{u}, \vec{u}_t, 0\}$ où $\vec{u}$ est localement dans $EL^1(R^3;C^3)$ et u_t est localement dans $L_2^1(R^3;C^3)$.

Soit alors $\vec{d} \in D(\bar{A}_o^1)$ et $\vec{d}' = \bar{A}_o^1\, \vec{d}$, $\vec{d}' = (\vec{d}_1', \vec{d}_2', 0)$: Alors :

$$\overrightarrow{J\,\vec{d}'} = -\partial_s \overrightarrow{Jd} \quad \text{avec } \overrightarrow{Jd} \text{ et } -\partial_s \overrightarrow{Jd} \in L_{2,\mathrm{Loc}}(R;N^1).$$

On a encore div d = (div d_1, div d_2,0) = 0 car $\overrightarrow{J\,\vec{d}}.\vec{\omega} = 0$ puisque $\overrightarrow{Jd} \in N^1$.

De plus

$$- |\vec{\omega}|^2\, \overrightarrow{Jd} = - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Jd}) + \vec{\omega}\, (\vec{\omega}.\overrightarrow{Jd}) \text{ avec } |\vec{\omega}| = 1, \text{ d'où :}$$

$$\overrightarrow{Jd} = + \omega \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Jd})$$

D'autre part :

$$\begin{cases} \vec{d}_1 = \displaystyle\int_{|\omega|=1} \overrightarrow{Jd}(x.\omega,\omega)\, d\omega \quad , \vec{d}_2 = - \int_{|\omega|=1} \partial_s \overrightarrow{Jd}(x.\omega,\omega)\, d\omega \\ \vec{d}_1' = \displaystyle\int_{|\omega|=1} -\partial_s \overrightarrow{Jd}(x\omega,\omega)\, d\omega, \ \vec{d}_2' = - \int_{|\omega|=1} \partial_s\, [-\partial_s \overrightarrow{Jd}(x.\omega,\omega)]\, d\omega \ . \end{cases}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{d}_1 = \int_{|\omega|=1} \partial_s^2\, \omega \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Jd}(x.\omega,\omega))\, d\omega = \int_{|\omega|=1} \partial_s^2\, \overrightarrow{Jd}(x.\omega,\omega) d\omega = d_2'$$

$$\text{et } \vec{d}_2 = - \int_{|\omega|=1} \partial_s\, \overrightarrow{Jd}(x.\omega,\omega) d\omega = \vec{d}_1'$$

Ainsi on a encore :

$$\begin{pmatrix} \vec{d}'_1 \\ \vec{d}'_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(on a pris } c = 1\text{)}$$

qui donne la réalisation de $\bar{A}_o^1$ comme opérateur différentiel sur des données localement dans H_o^1.

On a en définitive : $\bar{H}_o = H_o^o \oplus \bar{H}_o^1$ et $\bar{A}_o = A_o^o + \bar{A}_o^1$.

5.2. $\bar{H}$ *et* $\bar{A}_D^1$

Comme pour $\bar{H}_o^1$, les données dans $\bar{H}^1$ sont telles que $d_1 \in EL^1_{Loc}(G;C^3)$ $d_2 \in L^1_{2,Loc}(G;C^3)$ et $d_7 = 0$, c'est-à-dire $d \in H^1_{Loc}$.

Soit $d' = \bar{A}^1 d$. Ecrivons $d = d_o + d_\infty$ où $J\, d_\infty = \xi_-\, Jd_- + \xi_+\, J\, d_+$ $J^{-1}\, \xi_-\, Jd_-$ et $J^{-1}\, \xi_+\, Jd_+$ s'annulent pour $|x| < a$ et sont donc localement dans H_o^1 et H^1 . Puisque $\bar{A}_D^1$ et $\bar{A}_o^1$ agissent de la même façon sur de telles données, on voit que d_∞ est localement dans $D(A_D^1)$ et que $J\, \bar{A}^1\, d = -\, \partial_s\, J\, d_\infty$. On obtient donc, en répétant les mêmes arguments que pour $\bar{A}_o^1$, que $d' = \bar{A}^1\, d$ veut dire :

$$\begin{pmatrix} \vec{d}'_1 \\ \vec{d}'_2 \\ d'_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ +\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d_2 où d est localement dans H^1 ."

CONCLUSIONS

1er THEOREME D'AMPLITUDE LIMITE

Nous commençons par un théorème d'unicité, du type théorème de Rellich, qui prolonge le théorème 4.4 du § 4 Chap. I (p. 22).

Théorème 1

Pour tout $\mu \notin \sigma(A_D^o) \cup \sigma_p(\hat{B}^1)$, l'équation :

$$\mu f - A_D f = h \text{ , où } h \in H^{comp} = H \cap \mathcal{E}'(G;C^{\ell})$$

admet une solution éventuellement t-sortante unique; cette solution est une fonction analytique de μ au sens de la norme "énergie locale".

Preuve :

$h \in H \Rightarrow h = h^o + h^1$ suivant la décomposition canonique de H; remarquons encore une fois que h^o et h^1 ne sont plus à support compact comme h; l'équation ci-haut équivaut alors à :

$$\begin{cases} \mu f^o - A_D^o f^o = h^o & (4) \\ \mu f^1 - \bar{A}_D^1 f^1 = h^1 & (2) \end{cases}$$

- L'équation (1) admet une solution f^o unique, puisque $\mu \in \rho(A_D^o)$; cette solution est dans H^o, donc est une distribution tempérée.
- Pour (2), on remarque, qu'en prolongeant par zéro en dehors de G, on a une inclusion naturelle de H dans H_o et H^1 dans H_o^1 ; Alors h^1 est la partie à divergence nulle d'une distribution à support compact et admet un représentant par translation $\mathcal{J}h^1$, à support compact en s ($\mathcal{J} h^1 \in \mathcal{E}'(R ;N^1)$). On fait alors appel au théorème 4.4 du Chap. I p. 22, qui affirme l'existence et l'unicité de f^1 sortante pour $\mu \notin \sigma_p(B^1)$.

On a donc une solution unique $f = f^o + f^1$, où f^o est une distribution tempérée et f^1 est sortante, c'est-à-dire par définition f éventuellement t-sortante. c.q.f.d. On est alors en mesure de démontrer le

Théorème d'amplitude limite :

Désignons par b_t l'opérateur $b_t = \begin{pmatrix} \Delta^* - \frac{\partial^2}{\partial t^2} & - m \vec{\nabla} \\ - \eta \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} & \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}$. Soit $\mu \notin \sigma(A_D^o) \cup \sigma_p(B^1)$.

Soit $\vec{u}(x,t) = (\vec{u}_1(x,t),\ u_4(x,t))$ une solution de l'équation inhomogène $a_t\ \vec{u}(x,t) = e^{\mu t}\ \vec{f}(x)$, où $\vec{f}(x) = (\vec{f}_1(x),\ f_4(x)\ )$ est de classe L^2 et à support compact, et avec des données initiales à énergie finie. Alors $\vec{u}(x,t)$ tend, dans la norme énergie locale vers $e^{\mu t}\ \vec{v}(x)$, où $\vec{v}(x) = (\vec{v}_1(x),\ v_4(x)\ )$ est la distribution μ-t-sortante unique solution de l'équation $b_\mu\ \vec{v} = -\vec{f}$.

Preuve :

Posons :

$\vec{u}(x,t) = (\vec{u}_1(x,t),\ u_4(x,t))$, $\vec{U}(x,t)=(\vec{u}_1(x,t),\partial_t\vec{u}_1(x,t),u_4(x,t))$,

$\vec{F}(x) = (0,\ \vec{f}_1(x),\ f_4(x))$, $\vec{V}(x) = (\vec{v}_1,\ \mu\ \vec{v}_1,\ v_4)$.

Alors :

$$\begin{cases} a_t\ \vec{u}(x,t) = e^{\mu t}\ \vec{f}(x) \\ \vec{u}(x,0) = \vec{g} = (\vec{g}_1,g_4) \end{cases} \iff \begin{cases} (\frac{d}{dt} - A_D)\ \vec{U}(x,t) = e^{\mu t}\ \vec{F}(x) \\ \vec{U}(x,0) = (\vec{u}_1(x,0),\ \vec{u}_t(x,0),\ u_4(x,0)) \end{cases}$$

$$b_\mu\ \vec{v}(x) = -\vec{f} \Rightarrow \begin{cases} a_t.e^{\mu t}\ \vec{v}(x) = e^{\mu t}\ \vec{f}(x) \\ e^{\mu t}\ \vec{v}(x)\Big|_{t=0} = \vec{v}(x) \end{cases} \iff \begin{cases} (\frac{d}{dt} - A_D)\ e^{\mu t}\ \vec{V}(x) = e^{\mu t}\ \vec{F}(x) \\ e^{\mu t}\ V(x)\Big|_{t=0} = \vec{V}(x) \end{cases}$$

Soit $\vec{W}(x,t) = \vec{U}(x,t) - e^{\mu t}\ \vec{V}(x)$, alors
$$\begin{cases} (\frac{d}{dt} - A_D)\ \vec{W}(x,t) = \vec{0} \\ \vec{W}(x,t)\Big|_{t=0} = \vec{U}(x,0) - \vec{V}(x) \end{cases} \qquad (S)$$

Or $b_\mu\ \vec{v} = -\vec{f} \iff A_D\ \vec{V} - \mu\ \vec{V} = \vec{F}$, donc d'après le théorème précédent on a l'existence et l'unicité de la solution locale μ-t-sortante $\vec{v}$.

D'après (S), on a :

$$\vec{W}(x,t) = \bar{T}(t)\ (\vec{U}(x,0)-\vec{V}(x)\ ) = T(t)\ \vec{U}(x,0) - \bar{T}(t)\ \vec{V}(x)$$

or $\vec{V}(x) = \vec{V}^0(x) + \vec{V}^1(x)$ où $\vec{V}^0 \in H^0$ et $\vec{V}^1(x) \in \bar{H}^1$, d'où

$$\vec{W}(x,t) = T(t)\ \vec{U}(x,0) - T^0(t)\ \vec{V}^0(x) - \bar{T}^1(t)\ \vec{V}^1(x).$$

D'après les résultats de décroissance locale de l'énergie, on a :

$T(t)\ \vec{U}(x,0) \longrightarrow 0$ dans la norme énergie locale.

$T^0(t)\ \vec{V}^0(x) \longrightarrow 0$ " " " " .

Pour $\bar{T}^1(t)\ \vec{V}^1(x)$, la démonstration est exactement la même que celle de LAX-PHILLIPS dans (1) p. 165, c'est-à-dire :

Par construction $\vec{V}^1(x)$ est éventuellement sortante; donc $\vec{V}_1(x)$ admet un représentant spectral $k(x,\omega)$ nul pour $s < -\rho$ et exponentiel pour $s > \rho$; et $\vec{k}(s,\omega)$ est localement L^2 en s. On décompose $\vec{k}$ en $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ ou $\vec{k}_1 \equiv 0$ pour $s < \rho$ et $\vec{k}_2$ à support compact. Soit $\vec{V}_1^1 = J^{-1}\ \vec{k}_1$ et $\vec{V}_1^2 = J^{-1}\ \vec{k}_2$. Alors :

$$\bar{T}^1(t)\ V_1 = \bar{T}^1(t)\ V_1^1 + T^1(t)\ \vec{V}_1^2$$

$\bar{T}^1(t)\ \vec{V}_1^1$ s'annule dans $\{|x| < t + \rho\}$ et comme $\vec{V}_1^2$ est à énergie finie $T^1(t)\vec{V}_1^2$ tend vers zéro dans la norme énergie locale... Le théorème est prouvé.

On peut en fait donner un résultat asymptotique encore plus intéressant et d'une plus grande nouveauté.

Second théorème d'amplitude limite :

Soit $\mu \notin \sigma_p(A_D^o) \cup \sigma_p(B^1)$ et $\vec{f} = (\vec{f}_{1,0})$ où $\vec{f}_1(x)$ est la partie à divergence nulle d'une distribution à support compact. Alors :

$\vec{u}(x,t)$ tend, dans la norme énergie locale, vers $e^{\mu t}\ \vec{v}(x)$, où $\vec{v}(x)$ est la solution μ- sortante unique de l'équation $b_\mu^1\ \vec{v} = -(\vec{f}_{1,0})$.

Preuve :

La démonstration est en fait la même que celle du 1er théorème en remarquant qu'on a alors $\vec{V}_o = \vec{0}$.

Corollaire

Le théorème est vrai pour Re $\mu \geqslant 0$ et en particulier pour $\mu = i\omega$, $\omega \in R$, c'est-à-dire pour des forces appliquées sinusoïdales, ce qui est le cas courant en pratique.

Remarque : 1) Ce théorème met en évidence un comportement sélectif du système, qui "filtre" les ondes de changement de volume... De plus, dans l'énoncé on n'a plus que $\mu \notin \sigma_p(A_D^o)$ et le second membre n'est plus à support compact, ni même à énergie finie.

2) Bien que ce résultat demeure "très beau", il demeure deux questions importantes à résoudre :

→ Dans la pratique, comment pourrait-on générer des forces mécaniques à divergence nulle ?

→ Mathématiquement, comment caractériser très simplement une distribution qui est partie à divergence nulle d'une distribution à support compact ?

Sur la matrice $S(z)$

Nous avons vérifié que la théorie abstraite du chap. I est applicable au problème extérieur avec données de Dirichlet. Il s'ensuit que toutes les conclusions relatives à la matrice de Scattering et surtout à ses propriétés analytiques sont vraies, en particulier son extension méromorphe au demi-plan supérieur et l'absence de zéros dans ce même demi-plan.

Pour la construction effective de la "matrice" $S(z)$, la démarche est indiquée dans le chapitre I paragraphe 3 D. En réalité, on se convainct facilement qu'il suffit presque de "paraphaser" les constructions analogues pour l'équation des ondes dans Lax-Phillips (1 ou 3), ou pour les équations de Maxwell dans G. Schmidt. On peut aussi s'en tenir de très près au travail très explicite de Pyzhyanov (1,2); les différences sont vraiment minimes et ne nécessitent très souvent qu'un effort de reécriture.

On obtiendra entre autres que $S(z)$ est de la forme

$S(z) = I + K(z)$, où $K(z)$ est un opérateur intégral

$$[K(z)\cdot m](\theta) = iz \int_{S^2} k(\vec{\theta},\vec{\omega};z)\, \vec{n}(\omega)\, d\omega$$

Le noyau $k(\vec{\theta},\vec{\omega};z)$ étant obtenu à partir des comportements asymptotiques exhibés à la fin du chapitre IV.

Sur des perspectives possibles

Pour conclure voici quelques réflexions pour des extensions possibles au présent travail. Nous les livrons en vrac, sans ordre d'importance :

1) Etudier le cas de l'espace à dimension paire (en fait $n = 2$). A première vue ceci ne représente que des "aménagements" techniques; toutefois, il ne semble pas possible par les techniques du type LAX-PHILLIPS, d'arriver à des résultats aussi complets que pour $n = 3$. On sait en effet qu'alors D_+ et D_- ne sont plus orthogonaux et dès lors $Z(t)$ n'est même plus un semi-groupe.

2) Etendre ce travail à d'autres données à la frontière :

a) $\vec{u}\big|_{\partial G} = 0$, $\frac{d}{dn}\big|_{\partial G} = 0$. Ce problème ne semble pas requérir des techniques différentes. La majorité des résultats se laissent transposer sans aucune difficulté. Il semble tout de même que ce problème soit en fait plus "réaliste".

b) $\vec{t}(n,\vec{u})\big|_{\partial G} = 0$, $\theta(x',t)\big|_{\partial G} = 0$. Ce problème est en fait le plus intéressant et le plus difficile. S'il n'est pas difficile, en utilisant les formules de Green établies au chapitre V, de construire dans ce cas aussi un opérateur A_N générateur d'un Co-semi-groupe de contractions, des difficultés sérieuses apparaissent dès qu'on veut expliciter la décomposition de A_N. De même la décroissance locale de l'énergie pose des problèmes sérieux, vu qu'il y a possibilité dans ce cas de présence d'ondes de surface sur ∂G. L'étude spectrale de A_N est aussi plus délicate, vue la présence du paramètre spectral dans les conditions aux limites mêmes et au second membre de l'équation $b_\mu \;\; \vec{u} = \vec{f}$.

3) Etendre la classe d'ouverts G.

4) $T^o(t)$ étant c.n.u. nous savons qu'on peut lui associer une fonction contractive à valeur opérateur $\theta(\lambda)$, d'une façon canonique. Il serait intéressant, non seulement de construire $\theta(\lambda)$ explicitement, la relier aux propriétés spectrales de A^o_D, mais surtout d'en donner une interprétation physique précise, un peu dans l'esprit de la "théorie de la synthèse" des"réseaux électriques".

5) Enfin, pourquoi ne songerait-on pas à étendre la théorie développée au chapitre I à des opérateurs plus abstraits de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ {}_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

où $A_{ij} : X_i \longrightarrow X_j$, X_i étant un espace de Hilbert, A_{11} "conservatif", A_{22} dissipatif et A_{12}, A_{22} des opérateurs de "conversion" ? .

6) On ne saurait terminer sans révéler la prochaine étape de ce travail à savoir l'étude du problème inverse, dont l'importance pratique est immense, et qui a constitué en fait la motivation initiale de ce travail. Il s'agit de "récupérer" les propriétés géométriques de l'obstacle (surtout s'il est convexe) par l'étude de l'opérateur de Scattering. Il faudra sans doute s'inspirer des travaux analoguqes de LAX-PHILLIPS (1947) TAYLOR-MAJDA (1977), WILCOX (1978) etc...

ANNEXE AU CHAPITRE III

Nous donnons ici une démonstration plus"élégante" du théorème caractérisant l'ensemble résolvant de A_o^o.

Théorème : $\operatorname{Im} d_{1,2}^{2}(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \rho(A_o^o)$ et $\lambda \in \rho(A_o^o)$.

Preuve : Soit λ tel que $\operatorname{Re}\lambda < 0$. On considère pour $\vec{u} \in D(A_o^o)$ l'équation :
(E) $(A_o^o - I)\,\vec{u} = \vec{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, f_7) \in S^o(R^3;C^3) \times S^o(R^3;C^3) \times C_o^\infty(G;C)$ où $S^o(R^3;C^3)$ est l'ensemble $\{\vec{u} \in C_o^\infty,\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{u} = \vec{0}\}$. On sait qu'alors $S^o(R^3;C^3)$ est dense dans $EL_o(R^3;C^3)$ (resp. $L_2^o(R^3;C^3)$; en effet l'équation $\Delta^*\,\vec{u} = 0$ (resp. $\Delta\vec{u} = 0$) n'admet dans EL_o(resp. L_2^o) que la solution nulle.

Or $\vec{F} \in C_o^\infty \Rightarrow A_o^o\,\vec{F} \in D(A_o^o)$, d'où $A_o^o\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u} + \vec{F} \in D(A_o^o)$. Par récurrence on a en fait $A_o^{ok}\,\vec{u} \in D(A_o^o)\ \forall\ k \geq 0$; en particulier donc $\vec{u} \in H^s(R^3;C^7)\ \forall\ s \geq 0$.

(E) donne alors :

$$(E')\begin{cases}(\Delta+d_1^2(\lambda))\ (\Delta+d_2^2(\lambda))\ \operatorname{div}\vec{u}_1 = m\,\Delta\,(f_7+\eta\operatorname{div}\vec{f}_1)+(\Delta-\lambda)(\lambda\operatorname{div}\vec{f}_1+\operatorname{div}\vec{f}_2)\\ (\Delta+d_1^2(\lambda))\ (\Delta+d_2^2(\lambda))\ u_7 = \eta\,\lambda^2\operatorname{div}\vec{f}_1+\eta\,\lambda\operatorname{div}\vec{f}_2+(\Delta-\lambda^2)(f_7+\eta\operatorname{div}\vec{f}_1)\end{cases}$$

Comme $\vec{f}_2 \in S^o(R^3;C^3)$, on a $\vec{f}_2 = \vec{\nabla}\,\psi_2$ où $\psi_2 \in C_o^\infty(R^3;C^3)$

Soit Z l'opérateur $\left\{\begin{array}{ll} Z\,u = & u \text{ distr.}\\ D(Z) = & \{u \in CL_2(R^3) : \Delta u \text{ distr.} \in L_2(R^3)\}\end{array}\right\}.$

et $R(\lambda,Z)$ la résolvante pour $\lambda \in \rho(Z)$. On sait que cet opérateur est auto-adjoint et donc sur $\lambda \neq 0$ $R(\lambda,Z) \in L(L^2(R^3);\ D(Z))$ et $R(\lambda,Z) \in L(L^2(R^3))$.

Posons $R_i = R(di^2(\lambda)_1\ Z)$ quand $\operatorname{Im} di^2(\lambda) \neq 0$ pour $i = 1,2$. Alors :

$$(\Delta + d_2^2(\lambda)\ )\operatorname{div}\vec{u}_1 = m(1-d_1^2\,R_1)(f_7+\eta\operatorname{div}\vec{f}_1)+\lambda\,(1-(d_1^2+\lambda))\operatorname{div}\vec{f}_1$$
$$-d_1^2(1-(d_1^2+\lambda)R_1\ \psi_2)+(\Delta+d_1^2)\psi_2-(d_1^2+\lambda)\ \psi_2$$

d'où $\operatorname{div}\vec{u}_1 = m\,R_2(1-d_1^2\,R_1)(f_7+\eta\operatorname{div}\vec{f}_1)+\lambda\,R_2(1-(d_1^2+\lambda)R_1)\operatorname{div}\vec{f}_1$
$- d_1^2\,R_2\,[1-(d_1^2+\lambda)R_1\ \psi_2]+[1-(d_1^2-d_2^2)\,R_2\ \psi_2]-(d_1^2+\lambda)\,R_2\ \psi_2$.

Donc, il existe k_1, k_2, k_3 positifs tels que :

$$||\operatorname{div} \vec{u}_1||_{L^2} \leqslant k_1 ||\operatorname{div} \vec{f}_1||_{L^2} + k_2 ||f_7||_{L^2} + k_3 ||\vartheta_2||_{L^2}$$

Mais ϑ_2 à support compact entraîne

$$||\vartheta_2||_{L^2} \leqslant k ||\vec{\nabla} \vartheta_2|| = k ||\vec{f}_2||_{L^2}$$

d'où

$$||\operatorname{div} \vec{u}_1||_{L^2} \leqslant K ||\vec{F}||_{H_o} \qquad K \geqslant 0 .$$

Les mêmes arguments donnent : $||u_7||_{L^2} \leqslant K' ||\vec{F}||_{H_o} \qquad K' \geqslant 0$.

L'équation $(\Delta-\lambda)\, u_7 - \eta\, \lambda \operatorname{div} \vec{v}_1 = f_7 + \eta \operatorname{div} \vec{f}_1$ entraîne alors :

$||\Delta u_7||_{L^2} \leqslant K ||\vec{F}||_{H_o}$, d'où $||\partial_{x_i} u_7||_{L^2} \leqslant K ||\vec{F}||_{H_o}$ $\forall i,\ i \leqslant Z$.

Puisque Re $\lambda < 0$, l'opérateur $Z^*-\lambda^2$, où Z^* est l'opérateur auto-adjoint associé à $\vec{\Delta}^*$(comme Z à Δ) appartient à $L(L^2(G;C^3))$.

L'équation $(\Delta^*-\lambda^2 . \vec{u}_1) = m \vec{\nabla} u_7 + \lambda \vec{f}_1 + \vec{f}_2$ entraîne alors :

$||\vec{u}_1||_{L^2} \leqslant K ||\vec{F}||_H + K' ||\vec{f}_1||_{L^2} \leqslant K||\vec{F}||_{H_o} + K''||\operatorname{div} \vec{f}_1||_{L^2}$ puisque $\vec{f}_1$ est à support compact et $\vec{f}_1 \in EL(R^3;C^3)$; donc :

$||\vec{u}_1||_{L^2} \leqslant K_5||\vec{F}||_{H_o} \Rightarrow ||\vec{u}_2||_{L^2} = ||\lambda \vec{u}_1 + \vec{f}_1|| \leqslant K ||\vec{F}||_{H_o}$ aussi; soit

en définitive ;

$$||\vec{u}||_{H_o} \leqslant c^{te}||\vec{F}||_{H_o} .$$

L'opérateur $(A_o^o - \lambda I)^{-1}$ existe donc sur un sous ensemble dense de H_o et est fermé continu; ceci veut dire que $\lambda \in \rho(A_o^o)$ cqfd.

ANNEXE AU CHAPITRE V

SUR "LE THEOREME DE RELLICH"

On a invoqué à plusieurs reprises dans ce chapitre "le théorème de Rellich". Il s'agit en réalité de résultats établis par F. RELLICH en 1943 dans son papier (Rellich (1)). On ne confondra pas surtout avec le théorème de Rellich sur la compacité de l'injection de $H^k(\Omega)$ dans $H^j(\Omega)$, $k > j$. Nous rappelons brièvement ces résultats, dont le premier constitue à proprement parler le "théorème de Rellich".

Théorème : Soit dans $|x| > \rho_o > 0$ une fonction $u(x)$ de classe C^2, solution de $\Delta u + \lambda u = 0$ avec $\lambda > 0$ réel. Supposons $u(x) \not\equiv 0$. Il existe alors $p > 0$ tel que pour ρ suffisamment grand et $\rho_1 > \rho_o$, on ait :

$$\int_{\rho_1 < r < \rho} |u|^2 \, d\tau \geqslant p \, \rho$$

Conséquence 1 : Si $\lim\limits_{\rho \to +\infty} \int_{r = \rho} |u|^2 \, dS = 0$, alors $u(x) \equiv 0$. Ceci est en particulier vrai pour u de classe L^2.

Conséquence 2 : (Unicité) : Le problème de Dirichlet pour l'équation $\Delta u + \lambda \cdot u = 0$, $\lambda \in R_+^*$ dans l'extérieur d'une surface S bornée possède une solution unique telle que $\lim\limits_{r \to +\infty} r^{\frac{m-1}{2}} (u_r - i \sqrt{\lambda}\, u) = 0$ uniformément dans toutes les directions; u et S sont supposées suffisamment régulières pour pouvoir utiliser la formule de Green.

Conséquence 3 : Supposons une condition de Dirichlet homogène sur S, de telle façon que l'opérateur A hilbertien associé à ce problème soit auto-adjoint. Alors A passé de un spectre purement continu, $\sigma(A) = \sigma_c(A) \subset R$.

Remarques :

1) Le théorème de Rellich a été l'objet de plusieurs études, en vue de son extension (AGMON , Wilcox, Kato (2)); en particulier on a établi des résultats analogues pour des perturbations du Laplacien de la forme $\Delta u + q(x)\, u$ où $q(x)$ vérifie des conditions très générales.

2) Le mathématicien russe I.N. VEKUA revendique aussi la paternité des résultats de Rellich (cf. son livre "New Methods for solving elliptic equations" pp. 318, note de bas de page).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ADAMYAN V.M. et AROV D.B.

1. A class of Scattering operators and of characteristic operator functions of contraction. Dokl. Akad. Nauk. SSR 160, 9-12, 1965; traduction anglaise dans : Soviet Math. Dokl. 6, 1-5, 1965.
2. Scattering operators and contraction semi-groups in Hilbert spaces. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 165, 9-12, 1965; trad. dans : Sov. Math. Dokl. 6, 1965.

ADAMS Robert A.

1. Sobolev Spaces. Academic Press 1975.

BOLEY B.A. et TOLLINS I.S. :

1. Transient coupled thermo-elastic boundary value problem in the half space. Journal of Applied Mechanics Dec. 1962, p. 637-646.

CHADWICK P.

1. Thermo-elasticity, the dynamical theory, chapitre 6 de Progress in Solid Mechanics vol. 1, North-Holland Publishing C. Amsterdam 1960.

DAFERMOS C.M.

1. On the existence and asymptotic stability of solutions of the equations of linear thermo-elasticity. Arch. for Rat. Mech. Analys., 29, pp. 241-271, 1968.
2. Contraction semi-groups and trend to equilibrium in continuum Mechanics dans : Application of Methods of functional Analysis to Problems in Mechanics Lectures Notes in Mathematics n° 503 (p. 295-306) Springer 1976.

DUNFORD N. Schwartz J.T. :

1. Linear Operators, part. III wiley-Interscience 1971.

GOLDSTEIN C.

1. Perturbation of non-self adjoint operators I Arch. Rat. Mech. Analysis 37, 1970, p. 268-296.
2. Perturbation of non-self adjoint operators II Arch. Rat. Mech. Analys. 42, 1971, p. 380-402.

GUILLOT J.C. et RALSTON J.

1. Construction d'ondes de Rayleigh asymptotiques. C.R.A.S., T. 288, série A-B, n° 6, 12 Février 1979, p. 375.

HEYWOOD G.

1. On uniqueness questions in the theory of viscous flow. Acta Mathematica, 1976.

HILLE E. et PHILLIPS R.S.

1. Functional Analysis and semi-groups. Americ. Math. Soc. Colloquium Pub. 31, 1957.

JENTSCH L.

1. Uber Stationäre thermo elastieche Schwingungen in inhomogenen Körpern Mathematische Nachrichten 1974, p. 191-231.

KAKO-YAJIMA

1. Spectral and scattering theory for a class of non selfadjoint operators Proc. of the Japon Academy p. 73-89, 1977.

KAKO T.

1. Wave operators and similarity for some non selfadjoint operators Math. Annalen 162, 1966, p. 258-279.
2. Perturbation theory for linear operators. New York Springer 1966.

KUPRADZE V.D.

1. Dynamical problems in Elasticity. Progress in solid Mechanics T. III, North. Holland Publ. C. Amsterdam 1963.

LADYZHENSKAYA O.A.

1. The mathematical Theory of viscous incompressible flow. Gordon and Breach. New-York 1969.

LAX P.D. et PHILLIPS R.S.

1. Scattering Theory. Academic Press 1967.
2. Scattering Theory for the acoustic Equation in an even number of space dimensions Indiana Univ. Math. Journal, vol. 22, n° 2, 1972.
3. Scattering Theory for dissipative Hyperbolic systems. Journal of Functional Analysis n° 14. 1973.

LEVAN N.

1. On the Unitary subspace of a dissipative Perturbation of a Contraction Semi-group. Indiana Univ. Math. Journal. Vol. 28, n° 2, 1979.

LIONS J.L. :

1. Equations differentielles operationnelles. Springer Verlag 1961.

LIONS J.L. et DENY J.

1. Sur les espaces du type de Beppo-Levi, Annales de l'Institut Fourier, 1953-54.

LIONS J.L. et DUVAUT G.

1. Les inéquations en Mécanique et en Physique. Dunod 1972, chap. VII.

LUMER G. et PHILLIPS R.S.

1. Dissipative Operators in a Banach Space.
Pacific. J. of Math. 11. 1961, p. 679-698.

MIKKLIN S.G.

1. The spectrum of a Family of Operators in the Theory of Elasticity.
Russian Math. Surveys 1966.

MOLINARI C.

1. Réponse dynamique d'un demi-espace thermo-elastique à un dépôt d'énergie. Journal de Mécanique, vol. 18, n° 3, 1979.

MULLER C.

1. Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves, springer verlag 1969.

NAGY B.S. et FOIAS C.

1. Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert, Masson et Cie. 1967.

PHILLIPS R.S.

1. Dissipative Operators and hyperbolic systems of P.D.E.
Trans. AMS 90, 1954, p. 193-254.

PARSY F.

1. Thèse de doctorat d'Etat. Déc. 1975. Université de Lille I

PYZH'YANOV A.M.

1. Meromorphic Continuation of the scattering operator for Maxwell's equations. Differential'nye Uravneniya vol. 10, n° 11, nov. 1974, p. 2029-2041. Traduction anglaise :

2. Potes of the Scattering operators and resonnance states for Maxwell's equations. Diff. Uravneniya vol. 11, n° 3, p. 541-555, Mars 1975. Traduction anglaise :

REED M. et SIMON B.

1. Methods of Modern Math. Physics I Academic Press 1973.
2. " " " " " II " " 1975
3. " " " " " III " " 1978

RELLICH F.

1. Über das asymptotische Verholten dér Lösungen von $\Delta u + ku = 0$ in unendlichen Gebieckn.
Jabresbericht der Deutschen Mathematisch. Ver. 53, 57-64, 1943.

SCHMIDT G.

1. Spectral and Scattering theory for Maxwell's Equations in an exterior domain Arch. for Rational Mechanis and Analysis, 28, n° 4, 1968, p. 284-322.

SCHWARTZ L.

1. Theorie des Distributions. Hermann (Paris) 1966, p. 199-210.

SHILOV G. et GUELFOUD

1. Les distributions. T. III. Dunod Editeur. 1969.

STANKEVIC I.V.

1. Asymptotic Behavior, for t ⟶ ∞, of the solution of Schrodinger's nonstationary Equation with a nonself adjoint Hamiltonian.

STEINBERG S.

1. Meromorphic Families of compact Operators. A.R.M.A. 31, 1968, p. 371-380.

SOLER A.I. et BRULL M.A.

1. On the solution to transient coupled thermo-elastic Problem by Perturbation techniques. Journal of Applied Mechanics, juin 1965. p. 389-329.

TREVES F.

1. Linear P.D.E. with constant coefficients. Math. and its applications, vol. 6, 1966, Gordon-Breach.

TRIEBEL H.

1. Höhere Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1972.

VAINBERG B.A.

1. Principles of Radiation, Limit Absorption and limit Amplitude in the general Theory of P.D.E. Russian Math. Surveys 21, n° 3, 1966, p. 115-184.

VON SCHWARZE Günter

1. Uber die 1., 2., und 3. äussere Raudwertamfgabe der Schweingungoglüchung $\Delta F + k^2 F = 0$, Math. Nachrichten 28, p. 337-363, 1965.

VILENKIN et AUTRES

1. Functional Analysis. Nordhoff. Publisch. Groningen 1972.

WILCOX C.H.

1. Scattering theory for the d'Alembert Equation in exterior Domains New York. Springer 1975.
2. Spherical means and Radiation Conditions. A.R.M.A. 3, p. 133-48, 1959.
3. Waves operators and asymptotic solutions of wave propagation Problems. A.R.M.A. 22, p. 37-38. 1966.

WERNER P.

1. Randwept probleme der mathematischen Akustik A.R.M.A. 10,1962.

YOSHIDA K.

1. Functional Analysis p. 250 et plus. Springer 1974.