

50376  
1979  
156

50376  
1979  
156

N° d'ordre 238

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le titre de

Docteur-Ingénieur

par

Y. MARTIN-SIEGFRIED

Ingénieur EUDIL

ETUDE D'ESSAIS D'EXPANSION DE CAVITE CYLINDRIQUE

DES SOLS ARGILEUX EN LABORATOIRE ET IN SITU PAR

LA THEORIE DE L'ECOLE DE CAMBRIDGE.



Soutenue le 23 NOV. 1979

devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : F. PARSY

Rapporteur : J.L. BASSAL

Examineurs : F. DARVE

J.M. FLAMME

J.P. HENRY

# I

## AVANT PROPOS

Je remercie très vivement Monsieur PARSY qui a bien voulu présider ce Jury et qui m'a été d'un profond soutien aussi bien sur le plan humain que scientifique.

Monsieur BASSAL a été un Directeur de recherche idéal pour moi. Me laissant m'exprimer avec une totale liberté, il m'a cependant communiqué les options essentielles de mon étude au travers d'une passion et d'un enthousiasme qu'il allie à sa très haute compétence. Je veux lui témoigner ici mon amitié très respectueuse.

Monsieur DARVE et l'équipe qu'il anime à l'Université de Grenoble m'ont apporté les bases théoriques dont je ressentais le besoin pour mon travail. Qu'ils veuillent bien accepter ma profonde reconnaissance.

Monsieur FLAMME m'a fait l'honneur de s'intéresser à cette étude et je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Monsieur HENRY m'a initié à la mécanique des milieux continus et à la mécanique des roches dans un esprit de rigueur aussi bien théorique qu'expérimentale. Je lui exprime ma gratitude et mon amitié.

Cette thèse a bénéficié d'un soutien matériel important de la part de l'Ecole des Mines de Douai qui a mis à ma disposition son laboratoire de Mécanique des sols. J'en remercie très vivement la direction et notamment Monsieur CASCIOLA. Je remercie également Monsieur DAUL qui m'a permis un accès souple et souvent prolongé au centre de calcul de l'Ecole.

## II

Monsieur ADAMIEC m'a été d'un grand soutien pour la partie expérimentale. Je le remercie amicalement.

Madame GOUTHIER a bien voulu s'occuper de la partie dactylographie de ce travail avec une compétence qui a grandement facilité l'élaboration de ce document. Qu'elle veuille bien accepter mes remerciements (et mes excuses pour mon écriture).

Je suis redevable aux personnes qui ont contribué plus ou moins directement à rendre ce travail agréable et enrichissant. Je remercie tout particulièrement Messieurs BODELE, CARON, CHARARA et FREMERY.

Enfin, je remercie les personnes du service de reproduction de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées pour leur travail efficace et leur gentillesse.

### III

#### SOMMAIRE

AVANT-PROPOS	I
SOMMAIRE	II
NOTATIONS	IV
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 - DESCRIPTION MECANIQUE D'UN SOL ARGILEUX.	
1.1 - Constitution des sols argileux.	3
1.2 - Schématisation mécanique d'un sol.	5
1.3 - Hypothèses de continuité.	6
1.4 - Lois générales de conservation.	7
1.5 - Bilan inconnues-équations.	15
CHAPITRE 2 - EXPRESSIONS GENERALES DES LOIS DE COMPORTEMENT.	
2.1 - Loi d'interaction fluide squelette.	17
2.2 - Loi d'état du fluide.	18
2.3 - Loi de comportement du squelette fictif.	19
2.4 - Formalisme de la linéarisation.	20
CHAPITRE 3 - LES EQUATIONS COMPLETES DU PROBLEME.	
3.1 - Equation de la consolidation.	27
3.2 - Equations du squelette.	30
3.3 - Conditions aux limites.	33
3.4 - Conclusion.	36

## IV

CHAPITRE 4 - ELASTO-PLASTICITE AVEC ECROUISSAGE EN DENSITE.	
4.1 - Définition du comportement élasto-plastique.	38
4.2 - Elasto-plasticité avec écoulement en densité.	43
4.3 - Expression de la loi incrémentale élasto-plastique.	46
4.4 - Régime d'arête.	51
CHAPITRE 5 - THEORIE DE L'ECOLE DE CAMBRIDGE POUR LES ARGILES	
5.1 - Chemins de sollicitations bi-axiales de révolution.	54
5.2 - Hypothèses de la théorie de Cambridge.	58
5.3 - Loi incrémentale de la théorie.	62
5.4 - Validité expérimentale de la théorie.	71
5.5 - Généralisation de la théorie à des chemins quelconques.	79
CHAPITRE 6 - ETUDE DE L'ESSAIS OEDOMETRIQUE A LONG TERME.	
6.1 - L'essai oedométrique.	84
6.2 - Application de la théorie de Cambridge.	85
6.3 - Etude expérimentale.	93
6.4 - Extension de la théorie de Cambridge en plasticité standard et non standard.	100
CHAPITRE 7 - ETUDE D'ESSAIS D'EXPANSION DE CAVITE CYLINDRIQUE EN LABORATOIRE ET IN SITU.	
7.1 - Modélisation des essais.	122
7.2 - Application de la théorie de Cambridge.	127
7.3 - Etude expérimentale de l'expansion du cylindre creux en kaolin.	131
7.4 - Etude expérimentale du pressiomètre autoforeur.	147
CONCLUSIONS	169
ANNEXE - FORMULATION DU PROBLEME EN VUE D'UNE RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.	
A 1 - Formulation variationnelle du problème en petites perturbations.	173
A 2 - Formulation approchée par la Méthode des Eléments Finis.	177
A 3 - Problème du comportement à court terme.	183
A 4 - Problème des grands déplacements à court terme.	185
BIBLIOGRAPHIE.	195
RESULTATS NUMERIQUES DES SIMULATIONS PRESSIOMETRIQUES.	198

NOTATIONS

Les indices  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{F}$  attachés aux diverses grandeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles ne sont jamais des indices de sommation; ils indiquent si ces grandeurs sont relatives respectivement au squelette fictif ou au fluide fictif.

De la même façon les indices  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{F}$  attachés aux dérivées droites indiquent, par rapport à quel milieu s'effectue cette dérivation matérielle.

Caractéristiques physiques du sol

$$n = \frac{V_{\text{interstitiel}}}{V_{\text{total}}} : \text{porosité .}$$

$$e = \frac{V_{\text{interstitiel}}}{V_{\text{solide}}} : \text{indice des vides.}$$

$\rho_w$  : masse volumique du fluide interstitiel réel.

$\rho_d$  : masse volumique du squelette réel (ou grains).

$\rho_s = (1-n) \rho_d$  : masse volumique du squelette fictif.

$\rho_f = n \rho_w$  : masse volumique du fluide fictif.

$\rho = \rho_s + \rho_f$  : masse volumique de l'ensemble des deux milieux fictifs.

Grandeurs cinématiques

$\mathcal{G}$  (respect.  $\mathcal{F}$ ) : application faisant passer de la position des particules du squelette fictif (respect. du fluide fictif) à l'instant  $t_0$  à leur position à l'instant  $t$ .

$\mathcal{S}$  (respect.  $\mathcal{F}$ ) : transformation linéaire tangente à  $\mathcal{G}$  (respectivement à  $\mathcal{F}$ ).

$\vec{v}_s$  (respect.  $\vec{v}_f$ ) : vitesse du squelette fictif (respect. du fluide fictif).

$\vec{v}$  : vitesse barycentrique de l'ensemble des deux milieux fictifs.

$D_{sij}$  (respect.  $D_{fij}$ ) : composantes du tenseur des vitesses de déformations du squelette fictif (respect. du fluide fictif).

$\epsilon_{ij}$  : composantes du tenseur des déformations infinitésimales et incrémentales du squelette fictif.

$\underline{\epsilon}$  : vecteur colonne à six composantes de  $\epsilon_{ij}$ .

$\vec{U}$  : vecteur déplacement incrémentale du squelette fictif.

$\Omega_{sij}$  (respect.  $\Omega_{fij}$ ) : composantes du tenseur taux de rotation du squelette fictif (respectivement du fluide fictif).

$\omega_{ij}$  : composantes du tenseur des rotations infinitésimales et incrémentales du squelette fictif.

$\bar{D}_{sij}$  : composantes du tenseur déviatorique de  $D_s$ .

$E_1 = D_{sij} \delta_{ij}$  premiers invariants de  $D_s$ .

$(\bar{E}_2)^2 = \bar{D}_{sij} \bar{D}_{sij}$

$(\bar{E}_3)^3 = \bar{D}_{sik} \bar{D}_{skj} \bar{D}_{sji}$

$e_s$  (respect.  $e_f$ ) : dilatation volumique infinitésimale et incrémentale

du squelette fictif (respectivement du fluide fictif).  $e_s = \epsilon_{ij} \delta_{ij}$ .

### Grandeurs dynamiques

$\tau_{ij}$  : composantes du tenseur des contraintes totales.

$\tau'_{ij}$  : composantes du tenseur des contraintes effectives agissant sur le squelette fictif.

$u$  : pression hydrostatique du fluide fictif.

## VII

$\vec{g}$  : vecteur accélération de la pesanteur.

$t_{ij}$  : composantes du tenseur de Piola-Lagrange relatif au squelette fictif.

$\pi_{ij}$  : composantes du tenseur de Piola-Kirchhoff relatif au squelette fictif.

$\bar{\nu}, \bar{\nu}', \bar{u}, \bar{E}, \bar{\pi}$  : tenseurs des grandeurs incrémentales de  $\nu, \nu', u, t, \pi$ , respectivement.

$\bar{\nu}'$  : vecteur colonne à 6 composantes de  $\nu'$

$\delta'_{ij}$  : composantes du tenseur déviatorique de  $\nu'$

$\bar{\delta}'_{ij}$  : composantes du tenseur déviatorique de  $\bar{\nu}'$

$S_1 = \nu'_{ij} \delta'_{ij}$  premier invariant de  $\nu'$

$$(\bar{S}_2)^2 = \delta'_{ij} \delta'_{ij}$$

$$(\bar{S}_3)^3 = \delta'_{ij} \delta'_{jk} \delta'_{ki}$$

$$p = -\frac{S_1}{3}$$

$$q = \bar{S}_2 \sqrt{3}$$

$\vec{\eta}_\Delta$  (respect.  $\vec{\eta}_F$ ) : force volumique d'inter-action fluide fictif un squelette fictif (respect. squelette fictif sur fluide-fictif).

$D_J(\nu'_{ij}) = \left( \frac{d\nu'_{ij}}{dt} \right)_\Delta - \Omega_{\Delta ik} \nu'_{kj} - \Omega_{\Delta jk} \nu'_{ik}$  : opérateur objectif de Jaumann.

### Grandeurs énergétiques

$E_\Delta$  (respect.  $E_F$ ) : énergie interne spécifique du squelette fictif (respectivement du fluide fictif).

### Grandeurs rhéologiques

. Loi d'inter-action

$K_{ij}$  : composantes du tenseur des perméabilités.

$$\varphi = \frac{u}{\rho \omega |\vec{g}|} - \frac{g_e x_e}{|\vec{g}|} \quad : \text{potentiel hydraulique}$$

## VIII

. Loi du fluide :

$k_w$  : constante de compressibilité du fluide interstitiel réel.

. Loi du squelette fictif.

$$D_J(r'_{ij}) = C_{ij}^{kl} D_{s_{kl}} + M_{ij}$$

## INTRODUCTION

Cette étude constitue une voie théorique approfondie pour aborder la rhéologie des sols argileux avec l'objectif de simuler l'essai pressiométrique. Préoccupation motivée par l'importance de l'interprétation de cet essai pour le calcul des fondations d'ouvrage en mécanique des sols appliquée.

Nous précisons d'abord la modélisation mécanique classique d'un sol en un milieu à deux phases continues dont l'étude s'inscrit alors dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

La détermination du comportement global du sol résulte en définitive du comportement de chaque phase et d'une loi d'inter-action. Le comportement du fluide interstitiel peut être défini de façon relativement aisée. La loi d'inter-action résulte de la loi de filtration de DARCY. Le problème rhéologique fondamental pour un sol est alors posé par la détermination de la loi de comportement de la phase solide.

Cette loi, trop complexe a priori dans son expression globale, est introduite sous forme incrémentale. Pour chaque transformation incrémentale, nous avons émis les hypothèses de petites perturbations. Le système d'équations linéarisées qui en résulte reste cependant complexe du fait du couplage de deux milieux de mobilité distincte d'une part et, d'autre part, de la linéarisation à partir d'un état actuel précontraint. Les hypothèses qu'il faut poser pour retrouver les équations classiquement admises sont difficilement justifiables sinon par le besoin de se maintenir dans un cadre opérationnel adapté à la mécanique des sols appliquées actuelle.

Le même besoin nous a délibérément conduit à adopter la théorie de l'Ecole de Cambridge comme fondement du comportement de la phase solide. La loi rhéologique de Cambridge est définie par un nombre relativement restreint de paramètres. Nous la présentons dans le cadre de l'élasto-plasticité avec une généralisation par l'adjonction d'un paramètre à la fois en plasticité standard et non standard. La partie élastique non linéaire de la loi est modifiée par l'introduction d'une relation non linéaire entre les déviateurs des contraintes et des déformations, ce qui rend compte de la partie linéaire de la courbe préssiométrique

Le paramètre supplémentaire que nous avons introduit permet de rendre compte du décalage entre l'asymptote oedométrique et l'asymptote de l'essai de compressibilité isotrope.

La théorie est ensuite appliquée à la simulation d'essais d'expansion de cylindre creux en laboratoire et d'essai d'expansion in situ au pressiomètre autoforeur.

Enfin, on trouvera en annexe un exposé de l'application de la Méthode des Eléments Finis à la résolution des systèmes d'équations développés tout au long de cette étude.

## CHAPITRE I

### I. DESCRIPTION MECANIQUE D'UN SOL ARGILEUX

La description mécanique d'un sol est essentiellement phénoménologique par opposition à la description des mécanismes microscopiques de la physico-chimie. Les échelles d'observation sont en effet différentes.

D'un point de vue mécanique, un sol est constitué d'une phase solide et d'une phase interstitielle comprenant de l'eau et des gaz dissous ou non. Il est classique d'étudier un tel milieu dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

En conséquence nous précisons dans ce chapitre une schématisation du sol en deux milieux continus auxquels il est alors possible d'appliquer les lois générales de la mécanique des milieux continus.

Cette étude reprend très largement les travaux de AURIAULT [1] et CHAMBON [2] .

#### 1.1 - Constitution des sols argileux.

Une argile pure est un système physico-chimique complexe argile-eau-gaz.

Les minéraux argileux sont des phyllosilicates (c'est-à-dire en feuillets). Leur arrangement présente très souvent une anisotropie résultant de l'histoire mécanique du massif ou de l'échantillon. La classification de ces minéraux est fondée sur l'épaisseur des feuillets qui conditionne en grande partie les possibilités d'échanges ioniques et d'absorption d'eau. On définit ainsi trois

types structuraux : la kaolinite, la montmorillonite et l'illite.

L'eau est classée selon trois catégories :

- l'eau de constitution fortement et intimement liée aux minéraux argileux. On ne peut la déplacer qu'à très haute température (800° C à 1000° C).
- l'eau fortement liée en contact direct avec les particules argileuses.
- l'eau faiblement liée est l'eau libre qui se comportent comme un fluide classique et qui constituent du point de vue de la mécanique un fluide interstitiel mobile.

La distinction entre l'eau fortement liée, l'eau faiblement liée et l'eau libre n'est pas franche. Pratiquement en mécanique des sols le fluide interstitiel mobile est constitué de la part d'eau qui s'échappe d'un échantillon désagrégé placé 24 heures dans une étuve portée à une température comprise entre 105° C et 110° C.

La présence de gaz dissous ou en bulles au sein du fluide interstitiel lui confère une compressibilité plus ou moins importante.

Du point de vue de la mécanique macroscopique le système argile-eau-gaz est considéré comme un milieu à deux phases :

- la phase solide, comprenant les particules argileuses, l'eau de constitution et l'eau fortement liée.
- la phase liquide comprenant l'eau faiblement liée, l'eau libre et les gaz dissous ou non. Cette phase est toujours considérée comme un fluide classique (milieu continu à mémoire infiniment courte).

Ces deux phases sont en fait caractérisées par leur mobilité distincte et leurs inter-actions limitées comme il le sera précisé par la suite. On

notera que ce concept phénoménologique d'un milieu à deux phases est applicable à tous types de sol. Ainsi pour un sol argileux non pur, il suffira d'inclure dans la phase solide les minéraux ou les grains non argileux. Seules les lois de comportement seront différentes d'un milieu à un autre.

### 1.2 - Schématisation mécanique d'un sol.

Considérons, dans un massif de sol, une boule  $\mathcal{D}$  centrée en  $M$  ; on y définit :

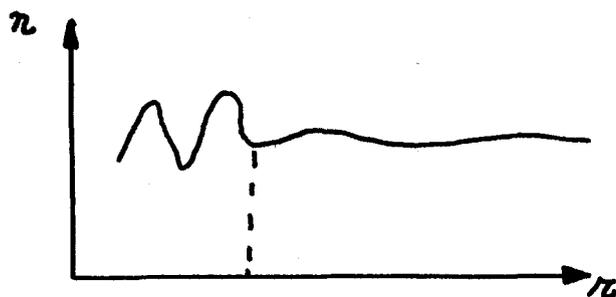
- la porosité  $n$  :

$$n = \frac{V_i}{V_T} \quad (1)$$

$V_T$  : volume total de la boule  $\mathcal{D}$  .

$V_i$  : volume interstitiel non occupé par la phase solide dans  $\mathcal{D}$  .

La dimension de  $\mathcal{D}$  est définie de façon que  $n$  soit significative. Elle apparaît clairement dans un diagramme figurant  $n$  et le rayon  $r$  de  $\mathcal{D}$  .



- les vitesses  $\vec{v}_w$  et  $\vec{v}_d$  , moyennes dans  $\mathcal{D}$  des vitesses  $\vec{v}_w$  et  $\vec{v}_d$  des particules de chaque phase réelle.
- les masses volumiques moyennes  $\rho_w$  et  $\rho_d$  définies de façon analogue.

- $\vec{\gamma}_\omega$  et  $\vec{\gamma}_d$  les forces moyennes ramenées à l'unité de volume de l'interaction phase solide sur phase liquide et inversement.

On schématise alors le sol en deux milieux fictifs continus. La continuité sera définie au paragraphe suivant.

Le squelette fictif (s) et le fluide fictif (f) sont caractérisés en chaque point  $M$  par les grandeurs suivantes :

- les vitesses  $\vec{v}_s$  et  $\vec{v}_f$  .

$$\vec{v}_s = \vec{v}_d \quad ; \quad \vec{v}_f = \vec{v}_\omega \quad (2)$$

- les masses volumiques  $\rho_s$  et  $\rho_f$  .

$$\rho_s = (1-n) \rho_d \quad ; \quad \rho_f = n \rho_\omega \quad (3)$$

- les forces volumiques d'interaction  $\vec{\gamma}_s$  et  $\vec{\gamma}_f$  .

$$\gamma_s = \gamma_d \quad ; \quad \gamma_f = \gamma_\omega \quad (4)$$

### 1.3 - Hypothèses de continuité.

Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}$  les applications qui font correspondre pour chaque milieu continu, la position  $M$  d'une particule à l'instant  $t$  par rapport à la position  $M_0$  de cette même particule à l'instant  $t_0$  .

$$M_s = \mathcal{F}(M_s^0, t_0, t) \quad ; \quad M_f = \mathcal{F}(M_f^0, t_0, t) \quad (5)$$

$M^0$  et  $t$  sont les variables de Lagrange.

Par définition on dira que les deux milieux sont continus et matériellement simples si [3] :

- $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{F}$  sont continues.
- $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{F}$  sont régulières (bijectives).
- $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{F}$  sont différentiables c'est-à-dire qu'on peut définir les transformations linéaires tangentes  $S$  et  $F$  telles que :

$$\begin{aligned} dM_s &= S dM_s^0 \\ dM_f &= F dM_f^0 \end{aligned} \quad (6)$$

- $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{F}$  admettent des dérivées régulières ce qui implique que les Jacobiens de  $S$  et de  $F$  sont non nuls.

Physiquement ces hypothèses sont équivalentes à admettre qu'il ne se produit ni faille, ni cavitation, ni pénétration.

En effet, par définition [3], une faille ou une cavitation implique  $S$  et  $F$  non continues; une pénétration implique  $S$  et  $F$  non régulières.

Cette hypothèse générale de continuité de deux milieux fictifs va permettre l'écriture des lois générales de conservation par leur équation de continuité.

#### 1.4 - Lois générales de conservation.

Il s'agit d'écrire pour l'ensemble des deux milieux continus fictifs les trois lois classiques de la mécanique :

- la conservation de la masse.
- la conservation de la quantité de mouvement.
- la conservation de l'énergie.

A partir d'hypothèses que nous formulerons, il sera possible d'écrire séparément ces trois lois pour chacun des milieux fictifs.

1) Conservation de la masse.

La masse se conserve lorsqu'on suit dans son mouvement un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ .

On peut écrire séparément cette loi pour chaque milieu à condition de poser l'hypothèse 1 :

Hypothèse 1 : il n'y a pas de transfert de masse d'un milieu à l'autre. Cela revient à dire qu'il n'y a ni colmatage, ni dissolution.

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \left[ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_s dV \right]_s = 0 \\ \left[ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_f dV \right]_f = 0 \end{cases} \quad (7)$$

L'hypothèse de continuité implique l'existence des équations de continuité associées aux équations (7) :

- en coordonnées de Lagrange.  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, t$  :

$$\begin{cases} \rho_s(t_0) - \rho_s(t) \det S = 0 \\ \rho_f(t_0) - \rho_f(t) \det F = 0 \end{cases} \quad (8)$$

- en coordonnées de Euler  $x_1, x_2, x_3, t$  :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_s v_{si}) = 0 \quad (8')$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_f v_{fi}) = 0$$

Pour l'ensemble des deux milieux on a également :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (9)$$

avec

$$\rho = \rho_s + \rho_f \quad (10)$$

$$\rho \vec{v} = \rho_s \vec{v}_s + \rho_f \vec{v}_f \quad (11)$$

## 2) Conservation de la quantité de mouvement.

C'est la loi torsielle qui traduit le principe fondamental de la dynamique.

Le bilan des efforts extérieurs et intérieurs agissant sur chacun des milieux fictifs est le suivant :

- $\rho_s \vec{g}$  ,  $\rho_f \vec{g}$  les forces de pesanteur.
- $\vec{\eta}_s$  ,  $\vec{\eta}_f$  les forces volumiques d'inter-action squelette sur fluide et fluide sur squelette.
- $\tau'$  et  $u$  les tenseurs des contraintes de Cauchy relatifs au squelette fictif et au fluide fictif respectivement. L'hypothèse de continuité implique l'existence de ces tenseurs.

Il est courant en mécanique des sols d'assimiler  $u_{ij}$  à  $-u \delta_{ij}$  où  $u$  est la pression interstitielle moyenne de la phase liquide dans  $\mathcal{D}$  et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker. Pour la suite nous poserons donc :

$$u_{ij} = -u \delta_{ij} \quad (12)$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors pour le squelette fictif :

$$\left( \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0 \vec{v}_0 dV \right)_0 = \int_{\Omega} (\rho_0 \vec{g} + \vec{\eta}_0) dV + \int_{\partial\Omega} \tau' \vec{n} dS \quad (13)$$

$$\left( \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{OM} \wedge \rho_0 \vec{v}_0 dV \right)_0 = \int_{\Omega} [\vec{OM} \wedge (\rho_0 \vec{g} + \vec{\eta}_0)] dV + \int_{\partial\Omega} (\vec{OM} \wedge \tau' \vec{n}) dS$$

O étant un point quelconque et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de la normale extérieure en chaque point de la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

Les équations pour le fluide sont analogues.

L'hypothèse de continuité conduit aux équations de continuité associées à (13) :

- en variable eulériennes :

$$\rho_0 \left( \frac{d}{dt} v_{0i} \right)_0 = \rho_0 g_i + \eta_{0i} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} ; \tau'_{ij} = \tau'_{ji}$$

$$\rho_f \left( \frac{d}{dt} v_{fi} \right)_f = \rho_f g_i + \eta_{fi} + \delta_{ij} \frac{\partial (-u)}{\partial x_j} \quad (14)$$

- en variables lagrangiennes :

Transformons chaque terme de l'équation de la résultante du système (13) sur le domaine  $\Omega^0$ , de frontière  $\partial\Omega^0$ , de la configuration de référence.

$$\int_{\Omega} \left[ P_{\alpha} (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ}, t) \vec{g} + \vec{\eta}_{\alpha} (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ}, t) \right] dV = \int_{\Omega_0} \left[ P_{\alpha} (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ}, t) \vec{g} + \vec{\eta}_{\alpha} (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ}, t) \right] \det S dV_0$$

$$\int_{\partial\Omega} \tau'_{ij} (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ}, t) n_j dS = \int_{\partial\Omega_0} \tau'_{ij} (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ}, t) (\det S) S_{\alpha j}^{-1} n_{\alpha}^{\circ} dS_0$$

On démontre en effet [2] :

$$n_j dS = (\det S) S_{\alpha j}^{-1} n_{\alpha}^{\circ} dS_0 \quad (13')$$

Enfin :

$$\left[ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} P_{\alpha} (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ}, t) v_{\alpha i} (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ}, t) dV \right]_{\lambda} = \left[ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} P_{\alpha} (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ}, t) v_{\alpha i} (x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, x_3^{\circ}, t) (\det S) dV_0 \right]_{\lambda}$$

Finalement on obtient grâce à l'hypothèse de continuité et l'équation lagrangienne de conservation de la masse :

$$P_{\alpha} (t_0) \left( \frac{dv_{\alpha i}(t)}{dt} \right)_{\alpha} = P_{\alpha} (t) g_i + \det S \eta_{\alpha i} (t) + \frac{\partial}{\partial x_2^{\circ}} \left( \tau'_{ij} (t) S_{\alpha j}^{-1} (\det S) \right) \quad (14')$$

La matrice  $t$  d'éléments  $t_{ij} = \tau'_{ik} S_{jk}^{-1} (\det S)$

est appelée matrice de Piola-Lagrange. Cette matrice n'est pas symétrique.

On a par définition et d'après (14') :

$$\tau'_{ij} n_j dS = t_{ij} n_j^{\circ} dS_0 = T_i (M, \vec{n}^{\circ}) dS \quad (15)$$

$T_i(M, \vec{n})$  étant les composantes de la contrainte en  $M$  à l'instant  $t$  selon la facette de normale  $\vec{n}$ .

Ainsi la matrice de Piola-Lagrange permet d'exprimer une contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  à partir du vecteur surface élémentaire  $\vec{n}^0 dS^0$  en  $M$  de la configuration de référence.

Par son caractère hybride (forces actuelles, éléments de surface initiaux), la matrice de Piola-Lagrange est peu pratique. En conséquence, on préfère introduire un tenseur symétrique  $\Pi$  : le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

Pour cela considérons la force élémentaire actuelle.

$$d\vec{c} = \vec{T}(M, \vec{n}) dS$$

$d\vec{c}$  est la transformée par la transformation linéaire tangente du vecteur élémentaire  $d\vec{c}_0$  dans la configuration de référence.

$$d\vec{c} = S d\vec{c}_0$$

par définition on posera :

$$d\vec{c}_0 = \Pi \vec{n}^0 dS_0$$

or :

$$d\vec{c}_0 = S^{-1} d\vec{c} = S^{-1} t \vec{n}_0 dS_0$$

d'après (15)

d'où :

$$\Pi_{ij} = (\det S') S'^{-1}_{i\alpha} \tau'_{\alpha\beta} S'^{-1}_{j\beta} \quad (16)$$

$\Pi$  est un tenseur symétrique et (14') devient :

$$P_s(t_0) \left( \frac{dv_{si}(t)}{dt} \right)_s = P_s(t_0) g_i + (\det S) \eta_{si}(t) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (S_{i\beta} \pi_{\beta\alpha}) \quad (17)$$

Le cas du fluide est analogue mais conduit à une formule plus simple du fait de l'isotropie du tenseur de Cauchy : [4]

$$P_f(t_0) \left( \frac{dv_{fi}(t)}{dt} \right)_f = P_f(t_0) g_i + (\det F) \eta_{fi}(t) - (\det F) \frac{\partial u}{\partial x_i} F_{\alpha i}^{-1}$$

On peut enfin appliquer la loi de conservation de la quantité de mouvement à l'ensemble des deux fluides. En appliquant le théorème des actions mutuelles il vient :

$$\vec{\eta}_s + \vec{\eta}_f = 0 \quad (18)$$

et la loi, sous sa forme eulérienne, s'écrit :

$$\rho \left( \frac{dv_i}{dt} \right)_{\text{eul}} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (19)$$

$\tau_{ij}$  étant les composantes du tenseur des contraintes totales.

En composant (17) avec le système (14) on obtient grâce à (18) et (8') :

$$\tau_{ij} = \tau'_{ij} - u \delta_{ij} + P_s \Delta_{si} \Delta_{sj} + P_f \Delta_{fi} \Delta_{fj} \quad (20)$$

où  $\Delta_{si} = (v_i - v_{si})$  et  $\Delta_{fi} = (v_i - v_{fi})$  sont les composantes des vecteurs de diffusion.

### 3) Conservation de l'énergie.

On suppose qu'il n'y a pas de transfert d'énergie autre que mécanique entre les deux phases; en d'autres termes :

Hypothèse 2 : Les transformations subies par le sol sont telles qu'il n'y a pas d'apport d'énergie calorifique, électrique et chimique extérieure au sein du domaine  $\Omega$  .

$$ds = 0$$

Les transformations sont donc adiabatiques. On suppose d'autre part l'existence d'une énergie interne spécifique  $E_0$  et  $E_f$  pour chacun des deux milieux fictifs.

La loi de conservation de l'énergie traduit alors le fait que la variation de la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie calorifique est égale au travail des forces intérieures et extérieures :

$$\left( \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0 \left[ \frac{v_{0i} v_{0i}}{2} + E_0 \right] d\Omega \right) = \int_{\Omega} (\rho_0 g_i + \eta_{0i}) v_{0i} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \tau'_{ij} n_j v_{0i} dS \quad (21)$$

La relation est analogue pour le fluide fictif.

Selon l'hypothèse de continuité, il vient :

- en variable de Euler : (en utilisant (14) )

$$\rho_0 \left( \frac{d E_0}{dt} \right)_0 = \tau'_{ij} D_{s ij} \quad (22)$$

$$\rho_f \left( \frac{d E_f}{dt} \right)_f = -\mu \delta_{ij} D_{f ij}$$

$D_{s ij}$  et  $D_{f ij}$  sont les composantes des tenseurs des vitesses de déformations définies par :

$$D_{\Delta} v_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{\Delta i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{\Delta j}}{\partial x_i} \right)$$

$$D_F v_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{F i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{F j}}{\partial x_i} \right) \quad (23)$$

- en écriture lagrangienne

$$P_{\Delta}(t_0) \left( \frac{d}{dt} \left[ E_{\Delta}(t) + \frac{1}{2} v_{\Delta i}(t) v_{\Delta i}(t) \right] \right)_{\Delta} = P_{\Delta}(t_0) g_i v_{\Delta i}(t) + (dct S) \eta_{\Delta} (t) v_{\Delta i}(t) + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}^2} (S_{\beta i} \pi_{\Delta \alpha} v_{\Delta i}^{\alpha}) \quad (24)$$

avec une relation analogue pour le fluide fictif.

### 1.5 - Bilan inconnues équations.

Les inconnues du problème sont, à ce stade, les suivantes :

- 2 masses volumiques :  $\rho_{\Delta}, \rho_F$
- 6 composantes de vitesses :  $\vec{v}_{\Delta}, \vec{v}_F$
- 7 composantes de contraintes :  $\tau'_{ij}, \mu$  (avec  $\tau'_{ij} = \tau'_{ji}$ )
- 2 énergie interne spécifique :  $E_{\Delta}, E_F$
- 3 composantes de l'inter-action des deux milieux :  $\vec{\eta}_{\Delta}$  ou  $\vec{\eta}_F$ .

Les lois générales ont fournies :

- 2 équations de conservation de la masse.
- 6 équations de conservation du mouvement.
- 2 équations de conservation de l'énergie.

Au total on constate qu'il y a 10 équations pour 20 inconnues.

Pour rendre le système de résolution complet, il faut définir en plus des conditions aux limites :

- la loi de comportement du squelette fictif : 6 équations.
- la loi d'état permettant de préciser  $\mathbf{u}$  : 1 équation.
- la loi d'inter-action fluide squelette : 3 équations.

Ces lois doivent être, en théorie, compatibles avec le principe d'objectivité et le deuxième principe de la thermodynamique.

## CHAPITRE II

### II. EXPRESSION GENERALE DES LOIS DE COMPORTEMENT

Cette étude des lois de comportement comprend donc trois parties.

La loi d'inter-action est la loi classique de Darcy. On pourra trouver une justification théorique de cette loi expérimentale dans le travail d'AURIAULT [ 1].

La loi d'état permettant de lever l'indétermination sur  $u$  est une loi assez générale du type  $f(u, \rho_\omega) = 0$  ; on assimile en effet la phase liquide réelle à un fluide barotrope.

Enfin, en ce qui concerne le squelette, la loi de comportement est exprimée sous forme incrémentale. Il s'avère donc nécessaire de préciser la mécanique incrémentale selon les hypothèses classiques des petites perturbations [5].

#### 2.2 - Loi d'inter-action fluide squelette.

Nous admettons la loi expérimentale de Darcy qui s'écrit :

$$n (v_{fi} - v_{si}) = - K_{ij} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{u}{\rho_\omega |g|} \right) - \frac{g_j}{|g|} \right] \quad (1)$$

$|g|$  est le module de la pesanteur  $\vec{g}$  .

$n (\vec{v}_f - \vec{v}_s)$  est la vitesse de filtration ou vitesse de Darcy.

On remarquera que cette loi est objective car elle fait intervenir une différence de vitesses relatives en un même point. Il est courant de négliger  $\vec{v}_s$  devant  $\vec{v}_f$  .

$K_{ij}$  sont les composantes du tenseur des perméabilités. ( $K_{ij} = K_{ji}$ )

## 2.2 - Loi d'état du fluide.

On suppose que la phase réelle est un fluide parfait barotrope.

$$f(\bar{u}, \bar{p}_w) = 0 \quad (2)$$

En passant aux valeurs moyennes  $u$  et  $p_w$  dans  $\mathcal{D}$  il vient formellement :

$$g(u, p_w) = 0 \quad (3)$$

En mécanique des sols il est courant d'admettre :

- pour un sol saturé :

$$p_w = c^{\text{te}} \quad (4)$$

- pour un sol non saturé :

$$u = + k_w \text{Log } p_w \quad \text{ou ce qui est équivalent :}$$

$$du = - k_w \frac{dV_w}{V_w} \quad \text{car : } \frac{dV_w}{V_w} = - \frac{dp_w}{p_w} \quad (5)$$

Les lois (4) et (5) induisent un couplage volumique entre les deux milieux fictifs comme nous le verrons au chapitre suivant.

### 2.3 - Loi de comportement du squelette fictif.

La loi de comportement globale d'un milieu solide comme le squelette fictif est extrêmement complexe. Elle fait intervenir de façon non linéaire toute l'histoire mécanique du massif ou de l'échantillon étudié.

Ne sachant pas écrire cette loi globale, on est amené à chercher à l'exprimer sous forme d'équations différentielles tangentes au système global. De façon assez générale, on supposera ([1], [6]) que cette loi peut s'écrire :

$$D_J (\nu'_{ij}) = C_{ij}^{kl} D_{\Delta} \nu_{kl} + M_{ij} \quad (6)$$

$D_{\Delta} \nu_{ij}$  sont, rappelons-le, les composantes du tenseur des vitesses de déformation. Ce tenseur représente un être objectif.

$D_J$  est un opérateur objectif; on prendra comme on le verra par la suite, la dérivée de Jaumann.

$C_{ij}^{kl}$ ,  $M_{ij}$  sont des quantités à déterminer expérimentalement. Elle ne dépendent pas de  $D_{\Delta} \nu_{ij}$  et de  $\left(\frac{d\nu'_{ij}}{dt}\right)_s$ .  $M_{ij}$  traduit les propriétés de relaxation du matériau. La température est supposée constante et n'apparaîtra donc pas dans ces quantités.

Ainsi définie, la loi (6) est bien objective.

On dit que la loi (6) est incrémentale dans le sens où, si l'état du milieu est parfaitement connu à l'instant  $t_0$ , on peut calculer  $C_{ij}^{kl}$  et  $M_{ij}$  pour déterminer l'accroissement de contrainte à  $t_0 + \delta t$  en fonction de l'accroissement des déformations.

Cette formulation induit donc l'étude de petites transformations dites incrémentales un voisinage d'une configuration actuelle. On peut en conséquence introduire le formalisme de la linéarisation classiquement rencontré en

élasticité infinitésimale par exemple.

## 2.4 - Formalisme de la linéarisation [5]

A partir d'une configuration actuelle  $(\mathcal{C}_0)$ , il s'agit d'étudier la famille des transformations linéaires tangentes dépendant d'un seul paramètre  $\eta$  supposé petit. Comme on le verra cette classe de transformation induit de petites déformations. Le formalisme de la linéarisation est complet si l'on suppose en outre les déplacements petits et développables par rapport à  $\eta$ . On pourra alors confondre les coordonnées de Lagrange et d'Euler.

### 1) Hypothèse des petites déformations :

On suppose que la transformation linéaire tangente est proche de l'identité et développable par rapport à un petit paramètre  $\eta$  :

$$S = I + \eta h^{(1)} + \eta^2 h^{(2)} + \dots \quad (7)$$

avec  $h^{(n)} = O(1) \quad \forall n$

On note [5] :

$$h_n(\eta) = \eta^n h^{(n)}$$

De façon générale la transformation linéaire tangente est le produit d'une rotation  $R$  et d'une extension à droite  $W$  ou bien encore d'une extension à gauche  $V$  et de la même rotation  $R$ .

$$S = VR = RW \quad (8)$$

$V$  et  $W$  sont des matrices symétriques définies positives et  $R$  est orthogonale ( $\det R = 1$ ).

A partir de (7) on obtient alors

$$\begin{aligned} W &= V = I + \varepsilon + O(\eta^2) \\ R &= I + \omega + O(\eta^2) \\ S &= I + \varepsilon + \omega + O(\eta^2) \end{aligned} \tag{9}$$

avec :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (h_1 + h_1^T) ; \quad \omega = \frac{1}{2} (h_1 - h_1^T)$$

En négligeant les termes d'ordre 2 l'hypothèse des petites déformations est claire.

Introduisons la fonction de déplacement  $\vec{U}(x_1, x_2, x_3, t)$  écrite en variables d'Euler :

$$x_i = x_i^0 + U_i(x_1, x_2, x_3, t) = \mathcal{F}_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t_0, t)$$

D'après l'hypothèse selon laquelle  $\mathcal{F}$  est différentiable (confer 1-3), il vient en différenciant (14) à  $t$  constant :

$$\delta_{ij} dx_j = S_{ij}^{-1} dx_j + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_j$$

d'où

$$S_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

ou encore puisque  $S_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - h_1 + O(\eta^2)$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = h_1 + O(\eta^2) \tag{10}$$

et finalement :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij} + O(\eta^2)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \omega_{ij} + O(\eta^2)$$
(11)

Remarquons que, de façon générale, on définit deux tenseurs de déformation [7]. Le tenseur des déformations en variables Lagrangiennes ou tenseur de déformation de GREEN-LAGRANGE :

$$L = \frac{1}{2} [S^T S - I]$$
(12)

et le tenseur des déformations en variables d'Euler ou tenseur des déformations d'ALMANZI-EULER.

$$E = \frac{1}{2} [I - (S^{-1})^T S^{-1}]$$
(13)

Toujours de façon générale on montre :

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial U_k}{\partial x_j^0} \right)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right)$$
(14)

d'après (10) et (11) on en déduit :

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} + O(\eta^2)$$

$$L_{ij} = \varepsilon_{ij} + O(\eta^2)$$
(15)

Ainsi à l'ordre 2 près les tenseurs des déformations se confondent avec le tenseur des déformations infinitésimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  classiquement étudié en élasticité infinitésimale.

Il est intéressant d'exprimer  $\mathcal{D}_\Delta$  en fonction de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Pour cela rappelons encore un résultat général [7] :

$$\mathcal{D}_\Delta = (\mathcal{S}^{-1})^T \left( \frac{dL}{dt} \right)_\Delta \mathcal{S}^{-1} \quad (16)$$

alors d'après (15) et (7) :

$$\mathcal{D}_\Delta = \left( \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} \right)_\Delta + O(\eta^2) \quad (17)$$

En effet :

$$\mathcal{S}^{-1} = \mathbf{I} - \eta \mathbf{h}^{(1)} + O(\eta^2)$$

et en supposant de plus : (c'est-à-dire les vitesses de déformation petites) :

$$\left( \frac{dL}{dt} \right)_\Delta = \left( \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} \right)_\Delta + O(\eta^2)$$

De la même façon pour le taux de rotation

$$\Omega_{\Delta ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{\Delta i}}{\partial x_j} - \frac{\partial v_{\Delta j}}{\partial x_i} \right) = \left( \frac{d\omega_{ij}}{dt} \right)_\Delta + O(\eta^2) \quad (18)$$

L'intérêt des équations (17) et (18) apparaît lorsqu'on écrit la loi (6) réduite au premier ordre. Reprenons cette loi :

$$D_J(\tau'_{ij}) = \left( \frac{d\tau'_{ij}}{dt} \right)_s - \Omega_{ik} \tau'_{kj} - \Omega_{jk} \tau'_{ik} = C_{ij}^{kl} D_{0kl} + M_{ij}$$

Au premier ordre elle s'écrit en supposant que  $\tau'_{ij}$ ,  $C_{ij}^{kl}$  et  $M_{ij}$  sont développables par rapport à  $\eta$  :

$$\left( \frac{d\tau'_{ij}}{dt} \right)_s - \left( \frac{d\omega_{ik}}{dt} \right)_s \tau'_{kj} - \left( \frac{d\omega_{jk}}{dt} \right)_s \tau'_{ik} = C_{ij}^{0kl} \left( \frac{dE_{kl}}{dt} \right)_s + M_{ij}^{0kl}$$

ou encore :

$$\left( \frac{d}{dt} \left( \tau'_{ij} - \omega_{ik} \tau'_{kj} - \omega_{jk} \tau'_{ik} \right) \right)_s = C_{ij}^{0kl} \left( \frac{dE_{kl}}{dt} \right)_s + M_{ij}^{0kl}$$

En intégrant cette relation entre les instants  $t_0$  et  $t = t_0 + \delta t$

il vient :

$$\tau'_{ij} - \tau'_{ij}^0 = C_{ij}^{0kl} E_{kl} + \omega_{ik} \tau'_{kj} + \omega_{jk} \tau'_{ik} + M_{ij}^0 (t - t_0)$$

$\tau'_{ij} - \tau'_{ij}^0$  est l'incrément de contrainte noté  $\overline{\tau}'_{ij}$  :

$$\overline{\tau}'_{ij} = C_{ij}^{0kl} E_{kl} + \omega_{ik} \tau'_{kj} + \omega_{jk} \tau'_{ik} + M_{ij}^0 \overline{t}$$

(19)

En contraintes de Kirchhoff on établit les relations suivantes :

$$\overline{\pi}_{ij} = \overline{\tau}'_{ij} + e_s \pi_{ij}^0 - \omega_{ik} \pi_{kj}^0 - \omega_{j\beta} \pi_{i\beta}^0 - \varepsilon_{ik} \pi_{kj}^0 - \varepsilon_{j\beta} \pi_{i\beta}^0$$

avec  $\pi_{ij}^0 = \tau'_{ij}^0$  et  $e_s = \delta_{ij} \varepsilon_{ij}$ .

La loi (19) s'écrit alors :

$$\overline{\pi}_{ij} = C_{ij}^{0kl} \varepsilon_{kl} + e_{\Delta} \pi_{ij}^0 - \varepsilon_{j\beta} \pi_{i\beta}^0 - \varepsilon_{i\alpha} \pi_{\alpha j}^0 + M_{ij}^0 \overline{F}$$

L'intérêt théorique des contraintes de Kirchhoff apparaît ici par le fait que la loi de comportement ne dépend plus des rotations propres du milieu.

2) Hypothèse des petits déplacements.

Pour l'instant seul les dérivées du déplacement étaient supposées petites. Il est intéressant d'envisager les déplacements eux-mêmes petits.

Supposons formellement toujours :

$$U_i = \eta U_i^{(1)} + \dots \quad (20)$$

Soit  $f$  une fonction de point notée  $f_E(x_1, x_2, x_3, t)$  en variables d'Euler et  $f_L(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$  en variables de Lagrange. En utilisant la formule de Taylor et en supposant les dérivées partielles de  $U_i^{(n)}$  bornées on a :

$$f_E(x_1, x_2, x_3, t) = f_E(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) + O(\eta)$$

d'où :

$$f_L(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) = f_E(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) + O(\eta) \quad (21)$$

D'après l'hypothèse des petites déformations on a également :

$$\frac{\partial f_L}{\partial x_i^0} = \frac{\partial f_E}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i^0} = \frac{\partial f_L}{\partial x_i} + O(\eta) \quad (22)$$

Si en outre on suppose les vitesses petites, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{dV_i}{dt}\right)_0 = O(\eta)$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + O(\eta) \quad (23)$$

Ainsi les hypothèses de déformations, déplacements et vitesses petites impliquent que les fonctions de point se confondent au premier ordre en variables d'Euler et à variables de Lagrange.

### 3) Conclusion

En définitive on a supposé que toutes les grandeurs connues et inconnues admettaient un développement formel par rapport à un même paramètre  $\eta$  au voisinage de la configuration initiale actuelle.

On se propose de résoudre les équations du problème réduites au premier ordre en postulant que les solutions obtenues correspondront aux premiers termes des solutions générales des équations non réduites.

Le contrôle de ces hypothèses ne peut pas se faire si ce n'est par l'étude de la cohérence des résultats de chaque problème étudié.

### CHAPITRE III

#### III. LES EQUATIONS COMPLETES DU PROBLEME

Les équations complètes du problème sont déduites des équations générales du chapitre 1 et des lois de comportement dans le cadre des hypothèses de petites perturbations. Les inconnues sont donc maintenant incrémentales.

Nous n'envisagerons dans ce chapitre que le cas où le squelette réel, c'est-à-dire chaque grain, est incompressible. Nous faisons l'hypothèse supplémentaire selon laquelle les termes d'inerties sont du deuxième ordre par rapport à  $\eta$  aussi bien pour le fluide que pour le squelette. Cela nous interdit de résoudre les problèmes tels que battage, séismes etc...

##### 3.1 - Equation de la consolidation.

Reprenons la loi de Darcy :

$$n (v_{fi} - v_{si}) = - k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$\varphi = \frac{u}{\rho_w |g|} - \frac{\partial_1 x_1}{|g|} \quad (2)$$

##### 1) Cas du milieu à deux phases incompressibles.

Il est classique en mécanique du sol de considérer de toute façon les grains du squelette incompressibles ( $\rho_d = c^{te}$ ). D'autre part dans le cas d'un sol saturé d'eau, la phase liquide réelle est également considérée

comme incompressible ( $P_\omega = C^k$ ).

A ces deux conditions, les équations de continuité s'écrivent alors :

$$-\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(1-n) v_{\partial i}] = 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [n v_{fi}] = 0$$

en additionnant ces deux équations, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [n (v_{fi} - v_{\partial i})] = - \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{\partial i}) \quad (3)$$

Compte tenu de la loi de Darcy on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{\partial i}) \quad (4)$$

en appliquant (2.17) en petites perturbations :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \left( \frac{d(\varepsilon_{ij} \delta_{ij})}{dt} \right)_0 + O(\eta^2) \quad (5)$$

(5) est l'équation générale de la consolidation pour un milieu à deux phases incompressibles dans le cadre des hypothèses de petites perturbations.

## 2) Cas du milieu à phase liquide compressible.

On a toujours  $P_d = C^k$  et l'on suppose, ce qui est à vérifier expérimentalement, que la loi de compressibilité de la phase liquide réelle est du type (confer 2.5) :

$$u = k_w \text{Log } P_w \quad \text{avec } k_w = C_{-}^{te}$$

ou bien encore :

$$du = -k_w \frac{dV_w}{V_w} = k_w \frac{dP_w}{P_w} \quad (6)$$

A partir des relations (1.8') on obtient de façon tout à fait générale :

$$\begin{aligned} n \left( \frac{\partial V_{fi}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \right) &= -n \frac{1}{P_f} \left( \frac{dP_f}{dt} \right)_f + \frac{n}{P_s} \left( \frac{dP_s}{dt} \right)_s \\ &= -\frac{n}{P_w} \left( \frac{dP_w}{dt} \right)_f - \left( \frac{dn}{dt} \right)_f - \frac{n}{(1-n)} \left( \frac{dn}{dt} \right)_s \end{aligned}$$

rappelons que les indices  $s$  et  $f$  signifient que les dérivations matérielles sont effectuées par rapport à  $(s)$  ou  $(f)$  respectivement. Or on a facilement :

$$\left( \frac{dn}{dt} \right)_f = \left( \frac{dn}{dt} \right)_s + (v_{fk} - v_{sk}) \frac{\partial n}{\partial x_k} \quad (7)$$

d'où

$$\begin{aligned} n \left( \frac{\partial V_{fi}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \right) &= -\frac{n}{P_w} \left( \frac{dP_w}{dt} \right)_f - \frac{1}{(1-n)} \left( \frac{dn}{dt} \right)_s \\ &\quad - (v_{fk} - v_{sk}) \frac{\partial n}{\partial x_k} \end{aligned}$$

$P_d$  étant constant on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} n \left( \frac{\partial V_{fi}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \right) &= -\frac{n}{P_w} \left( \frac{dP_w}{dt} \right)_f + \frac{1}{P_s} \left( \frac{dP_s}{dt} \right)_s \\ &\quad - (v_{fk} - v_{sk}) \frac{\partial n}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (8)$$

Utilisons les hypothèses de petites perturbations à la fois pour le squelette et le fluide ainsi que la loi de compressibilité du fluide réel.

$$-\frac{n}{\rho_w} \left( \frac{d\rho_w}{dt} \right)_f = -\frac{n}{k_w} \left( \frac{du}{dt} \right)_f$$

$$-\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{d\rho_s}{dt} \right)_s = \frac{\partial v_{si}}{\partial x_i} = \left( \frac{de_s}{dt} \right)_s + O(\eta^2)$$

$$(v_{fk} - v_{sk}) \frac{\partial n}{\partial x_k} = O(\eta^2)$$

car  $v_{fk}$  et  $v_{sk}$  sont supposés  $O(\eta)$  de même que  $\frac{\partial n}{\partial x_k}$  donc au deuxième ordre près l'équation de la consolidation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \left( \frac{de_s}{dt} \right)_s + \frac{n}{k_w} \left( \frac{du}{dt} \right)_f \quad (9)$$

Il est à remarquer que l'hypothèse des petites perturbations à la fois pour le fluide et le squelette (petits déplacements, petites déformations et petites vitesses) permet encore d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial e_s}{\partial t} (x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) + \frac{n}{k_w} \frac{\partial u}{\partial t} (x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \quad (9')$$

### 3.2 - Equations du squelette.

Elles résultent de l'étude en petites perturbations des équations lagrangiennes de la conservation de mouvement lorsqu'on suit le squelette

dans son mouvement. En écrivant les équations (1.14') pour le squelette au instants  $t$  et  $t_0$  et au retranchant membre à membre il vient :

$$P_0(t_0) \left[ \left( \frac{dv_{0i}}{dt}(t) \right)_0 - \left( \frac{dv_{0i}}{dt}(t_0) \right)_0 \right] = (\det S) \eta_{0i}(t) - \eta_{0i}(t_0) \quad (10)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^0} \left[ r'_{ij}(t) S_{\alpha j}^{-1} (\det S) - r'_{ij}(t_0) \right]$$

Rappelons que les variables sont écrites ici en coordonnées de Lagrange  $(M_0, t)$  et  $(M_0, t_0)$  aux points  $M_1$  et  $M_0$ .

Ecrivons les équations eulériennes pour le fluide aux points  $M_1$  et  $M_0$ ; il faut remarquer que pour le fluide ces deux points ne représentent pas la même particule fluide et que l'on ne peut déduire les fonctions de point relatives au fluide aux points  $M_1$  et  $M_0$  par la transformation  $\mathcal{F}$ .

$$\eta_{0i}(t_0) = -\eta_{fi}(t_0) = -\rho_{fi}(t_0) \left( \frac{dv_{fi}}{dt}(t_0) \right)_f + \rho_f(t_0) g_i - \frac{\partial}{\partial x_i^0} (u(t_0)) \quad (11)$$

$$\eta_{0i}(t) = -\eta_{fi}(M_1, t) = -\rho_{fi}(M_1, t) \left( \frac{dv_{fi}}{dt}(M_1, t) \right)_f + \rho_f(M_1, t) g_i - S_{\alpha i}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^0} (u(M_1, t))$$

En combinant (10) et (11) on obtient l'équation suivante :

$$P_0(t_0) \left[ \left( \frac{dv_{0i}}{dt}(t) \right)_0 - \left( \frac{dv_{0i}}{dt}(t_0) \right)_0 \right] + \rho_{fi}(M_1, t) (\det S) \left( \frac{dv_{fi}}{dt}(M_1, t) \right)_f$$

$$- \rho_{fi}(t_0) \left[ \frac{dv_{fi}}{dt}(t_0) \right]_f = \rho_f(M_1, t) \det S g_i - \rho_f(t_0) g_i$$

$$- S_{\alpha i}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^0} (u(M_1, t)) \det S + \frac{\partial}{\partial x_i^0} [u(t_0)] + \frac{\partial}{\partial x_\alpha^0} [r'_{ij}(t) S_{\alpha j}^{-1} (\det S) - r'_{ij}(t_0)] \quad (12)$$

Dans le cadre des hypothèses de petites perturbations on cherche l'équation réduite au premier ordre par rapport à  $\eta$  de (12). On suppose d'abord que les accélérations pour le squelette et le fluide ont un développement par rapport à  $\eta$  à partir du second ordre. Cela signifie :

Hypothèse 3

Les termes d'inertie sont négligeables (2ème ordre).

Ainsi le premier membre de (12) est nul au premier ordre près, il vient :

$$\begin{aligned} & \left( p_f(M'_0, t_0) [1 - e_f(M'_0, t) + e_s(M_0, t)] - p_f(M_0, t_0) \right) g_i \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i^0} \left[ u(M'_0, t_0) - u(M_0, t_0) \right] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha^0} \left[ \bar{u}(M'_0, t_0, t) \delta_{\alpha i} \right. \\ & \left. + u(M'_0, t_0) e_s \delta_{\alpha i} - u(M'_0, t_0) (\epsilon_{\alpha i} + \omega_{\alpha i}) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_\alpha^0} \left[ \bar{\Gamma}'_{i\alpha}(t) + \Gamma'_{i\alpha} e_s - \Gamma'_{ij} \omega_{\alpha j} - \Gamma'_{i\alpha} \epsilon_{\alpha j} \right] = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

On suppose alors :

$$\begin{aligned} p_f(M'_0, t_0) &= p_f(M_0, t_0) + o(\eta^2) \\ e_f(M'_0, t_0, t) &= e_s(M_0, t_0, t) + o(\eta^2) \\ u(M'_0, t_0) &= u(M_0, t_0) + o(\eta^2) \end{aligned}$$

alors en négligeant également les termes de diffusion dans l'expression de  $\Gamma'_{ij}(1-20)$ , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^0} \left( \bar{\Gamma}_{i\alpha}(t) + \Gamma_{i\alpha}(t_0) e_s - \Gamma_{ij}(t_0) \omega_{\alpha j} - \Gamma_{ij}(t_0) \epsilon_{\alpha j} \right) \quad (14)$$

= 0

Pour un état initial  $\mathcal{C}_0$  non précontraint on retrouve les équations

d'équilibre classiques rencontrées, par exemple, en élasticité infinitésimale. Il est important de se rendre compte du nombre des hypothèses purement formelles qu'il a fallu faire pour obtenir (14).

En contraintes de Kirchhoff on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\pi}_{i\alpha} (H) + \omega_{ij} \pi_{j\alpha}^0 + \epsilon_{ij} \pi_{j\alpha}^0) = 0 \quad (14')$$

### 3.3 - Les conditions aux limites

La mécanique incrémentale requiert la connaissance complète de l'état initial du massif ou de l'échantillon. Nous supposons ce problème résolu et nous nous intéressons donc à l'évolution des conditions aux frontières à partir d'un état actuel  $\mathcal{E}_0$  parfaitement connu.

D'après les hypothèses de petites perturbations nous devons distinguer a priori le cas où les conditions à la frontière sont continues par rapport au temps et formellement développables par rapport à  $\eta$  entre les instants  $t_0$  et  $t$  et le cas d'un changement brutal à  $t_0$  qui occasionne une discontinuité à déterminer entre  $t_0^-$  et  $t_0^+$ .

#### 1) Cas du chargement continu.

Nous n'envisageons que des forces réparties sur une portion  $\Gamma_2$  de la frontière  $\Gamma$  excluant les forces ponctuelles qui n'ont pas d'intérêt pratique en mécanique des sols.

A l'instant  $t_0$  en un point  $M_0$  de  $\Gamma_2$  la force élémentaire s'écrit :

$$dF_i(t_0) = \tau_{ij} n_j dS_0 \quad (15)$$

A l'instant  $t$  en suivant le squelette dans son mouvement on aura en  $M = \mathcal{G}(M_0)$

$$dF_i(t) = \tau_{ij} n_j dS \quad (16)$$

(16) peut encore s'écrire : ( confer 13' ).

$$dF_i(t) = (\det S) S^{-1}_{j\alpha} \tau_{i\alpha} n_j^\circ dS^\circ \quad (17)$$

retranchons (15) à (17) et développons par rapport à  $\eta$  au deuxième ordre près.

$$\begin{aligned} dF_i(t) - dF_i(t_0) &= (1 + \epsilon_s) (\delta_{j\alpha} - \epsilon_{j\alpha} - \omega_{j\alpha}) (\tau_{i\alpha}^\circ + \bar{\tau}_{i\alpha}) n_j^\circ dS^\circ \\ &\quad - \tau_{ij}^\circ n_j^\circ dS^\circ \\ &= (\bar{\tau}_{ij} + \epsilon_s \tau_{ij}^\circ - \epsilon_{j\alpha} \tau_{i\alpha}^\circ - \omega_{j\alpha} \tau_{i\alpha}^\circ) n_j^\circ dS^\circ \end{aligned} \quad (18)$$

Ramenée à la configuration  $\mathcal{C}_0$  la condition aux limites s'écrit au deuxième ordre près.

$$d\bar{F}_i = \bar{\tau}_{ij} n_j^\circ dS^\circ = dF_i(t) - dF_i(t_0) - [\epsilon_s \tau_{ij}^\circ - \epsilon_{j\alpha} \tau_{i\alpha}^\circ - \omega_{j\alpha} \tau_{i\alpha}^\circ] n_j^\circ dS^\circ \quad (19)$$

Plusieurs remarques s'imposent :

\* Dans le cas d'un changement constamment nul en  $M$  :

$$dF_i(t) = dF_i(t_0) = 0$$

$$d\bar{F}_i = (\epsilon_{j\alpha} \tau_{i\alpha}^\circ - \omega_{j\alpha} \tau_{i\alpha}^\circ) n_j^\circ dS^\circ \quad (20)$$

(20) représente un accroissement résultant du changement de géométrie du milieu.

\*\* Dans le cas de l'élasticité infinitésimale à partir d'une configuration non précontrainte on a :

$$d\bar{F}_i = dF_i \quad \tau_{ij}^\circ = 0 \quad \forall i, \forall j$$

car alors :

2) Cas d'un chargement instantané.

Nous supposons parfaitement connu l'état du milieu bi-phasique à l'instant  $t_0^-$ . Un chargement est alors appliqué brutalement à l'instant  $t_0$  et il s'agit de déterminer l'état du milieu à l'instant  $t_0^+$ .

Pratiquement en mécanique des sols classique, on peut considérer le chargement comme un phénomène très rapide mais continu par rapport au temps. A cette condition on peut reprendre les équations précédemment établies en y changeant l'échelle de temps. Le problème du choc est écarté ici.

Supposons maintenant :

$$t = t_0 + O(\eta^2) \quad (21)$$

La loi incrémentale du squelette s'écrit alors au deuxième ordre près :

$$\overline{\sigma}_{ij} = C_{ij}^{kl} \varepsilon_{kl} + \omega_{ik} \tau'_{kj} + \omega_{jk} \tau'_{ki} \quad (22)$$

Quant à l'équation de la consolidation, on admettra [2] qu'elle peut se réduire à :

$$\varepsilon_{ij} \delta_{ij} = \frac{n}{k\omega} \overline{u} \quad \text{pour le fluide réel compressible.}$$

$$\varepsilon_{ij} \delta_{ij} = 0 \quad \text{pour le fluide réel incompressible.}$$

Remarquons que pour déterminer expérimentalement  $M_{ij}^0$  il conviendra de bien définir les échelles de temps définissant les essais à court terme et à long terme.

### 3.4 - Conclusion

De façon théorique, cette notion figure formellement par l'ordre des premiers termes du développement de certaines quantités. Le problème doit être approfondi.

Remarquons aussi que les termes de type  $\epsilon_{\alpha} \tau_{ij}$ ,  $\epsilon_{j\alpha} \tau_{i\alpha}^{\circ}$  sont négligés ce qui ne se justifie pas par la méthode des perturbations exposée ici.

De façon tout à fait heuristique nous les négligerons par la suite en supposant pour cela que les contraintes totales restent du même ordre que leurs incréments. Les équations du problème se réduisent donc aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}^{\circ}} (\bar{\tau}_{i\alpha}) = 0 \quad ; \quad \tau_{ij} = \tau'_{ij} - u \delta_{ij} \\ \bar{\tau}'_{ij} = C_{ij}^{\circ kl} \epsilon_{kl} + M_{ij}^{\circ} \bar{F} \\ \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j^{\circ}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^{\circ}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_i^{\circ}} \left( K_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^{\circ}} \right) = \frac{d(\epsilon_{ij} \delta_{ij})}{dt} + \frac{n}{k_w} \frac{du}{dt} \\ \varphi = \frac{u}{\rho_w |\vec{g}|} - \frac{g_L x_L}{|\vec{g}|} \end{array} \right. \quad (23)$$

Enfin il faut supposer qu'au terme d'un calcul incrémental l'erreur totale reste négligeable. Cela suppose que les déformations totales restent du même ordre que leurs incréments.

## CHAPITRE IV

### IV. ELASTO-PLASTICITE AVEC ECROUISSAGE EN DENSITE.

La loi de comportement du squelette introduite au chapitre (2) par la formule (6) est une loi assez générale qu'il s'agit de préciser pour un sol argileux.

L'Ecole de Cambridge [8], [9], [10], [11] a effectué de nombreuses recherches sur les argiles. Elle propose une loi de comportement de type élasto-plastique avec écrouissage en densité tout à fait intéressante. En effet, non seulement elle rend compte du comportement en deça de la rupture, mais encore elle débouche sur la théorie classique de l'équilibre limite en mécanique des sols. De nombreux auteurs ont voulu présenter la surface d'équilibre limite comme une surface d'écoulement plastique. On sait alors qu'en définissant cette surface par le critère de Coulomb et en postulant le principe de normalité la variation de volume à l'écoulement n'est pas en accord avec l'expérience. Par contre la théorie de l'Ecole de Cambridge présente cette surface comme une surface d'état critique sur laquelle l'écoulement plastique se fait à volume constant.

Afin de définir clairement cette notion d'état critique, il s'avère utile d'introduire la plasticité d'une façon assez générale. Nous reprenons pour cela les travaux de STUTZ [12] et BOEHLER [13] en en donnant les idées essentielles.

Quant à la formulation explicite de la loi incrémentale, ZIENKIEWICZ [14] donne une expression matricielle relativement simple du type incrémental recherché.

Enfin il est intéressant, pour l'étude de l'essai oedométrique du chapitre 5, d'étudier en détail le régime d'arête au coin de la surface de plasticité qu'engendre la théorie de l'Ecole de Cambridge.

#### 4.1 - Définition du comportement élasto-plastique

##### 1) Définition de l'élasto-plasticité sans écrouissage

En chaque point du milieu et à tout instant la vitesse de déformation du squelette est la somme d'une vitesse de déformation d'origine élastique  $D_s^{(e)}$  et d'une vitesse d'origine plastique  $D_s^{(p)}$ .

On postule donc la décomposition de la loi de comportement en deux lois indépendantes.

##### 2) Loi élastique

$$D_J \nabla'_{ij} = A_{ijkl} D_s^{(e)kl} \quad (1)$$

$A_{ijkl}$  est le tenseur de l'élasticité classique (isotrope ou non).

Plus généralement la loi (1) pourra être hypo-élastique. En petites perturbations la loi (1) prendra la forme (2- (19) sans terme de viscosité.

##### 3) Loi plastique - Définition et généralités.

Nous admettons que la loi de comportement plastique d'un milieu anisotrope est définie par [13] :

- une loi explicite entre le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy et le tenseur symétrique des vitesses de déformation.

$$\nabla'_{ij} = f_{ij} ( D_s^{(p)kl}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 ) \quad (2)$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  sont trois vecteurs liés au milieu.

- la propriété d'homogénéité de degré zéro par rapport au temps de (2), ou, ce qui est équivalent, par rapport aux composantes de  $D_1^{(P)}$ .

En appliquant le théorème d'Euler il vient :

$$\frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial D_0^{(P)} k l} D_0^{(P)} k l = 0 \quad (3)$$

D'après le principe d'objectivité la fonction tensorielle  $f$  est une fonction isotrope par rapport aux variables indépendantes  $(D_0^{(P)}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

En effet on doit avoir :

$$\varphi f \varphi^T = f(\varphi D_0^{(P)} \varphi^T, \varphi \vec{v}_1, \varphi \vec{v}_2, \varphi \vec{v}_3) \quad (4)$$

pour toute transformation orthogonale  $\varphi$ .

On démontre alors [13] que la loi (2) admet une représentation irréductible :

$$\tau' = \alpha_l G_l \quad l = 1, 2, 3 \quad (5)$$

où les  $G_l$  sont 21 générateurs tensoriels construits à partir des tenseurs  $I, D_0^{(P)}, (D_0^{(P)})^2$  et des produits contractés  $\vec{v}_i \otimes \vec{v}_j$ .

Les  $\alpha_l$  sont des fonctions scalaires de 21 invariants de  $(D_0^{(P)}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ .

La prise en considération des symétries éventuelles du matériau permet une réduction de la représentation (5).

Pour un matériau orthotrope de révolution autour de l'axe  $\vec{v}_3$ , on démontre la représentation suivante :

$$\Gamma' = \alpha_0 I + \alpha_1 M + \alpha_2 D_0^{(P)} + \alpha_3 (M D_0^{(P)} + D_0^{(P)} M) + \alpha_4 [D_0^{(P)2} + \alpha_5 (M (D_0^{(P)})^2 + (D_0^{(P)})^2 M)] \quad (6)$$

avec  $\alpha_i = \alpha_i [t_1 D_0^{(P)}, t_2 (D_0^{(P)})^2, t_3 (D_0^{(P)})^3, t_4 (M D_0^{(P)}), t_5 (M (D_0^{(P)})^2)]$

$$M = \vec{v}_3 \otimes \vec{v}_3$$

Pour un matériau isotrope on a :

$$\Gamma' = \psi_0 I + \psi_2 D_0^{(P)} + \psi_3 (D_0^{(P)})^2 \quad (7)$$

avec  $\psi_i = \psi_i [t_1 D_0^{(P)}, t_2 (D_0^{(P)})^2, t_3 (D_0^{(P)})^3]$

A partir de la loi (5) on peut exprimer les relations entre les invariants mixtes de  $(D_0^{(P)}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  et les invariants mixtes de  $(\Gamma', \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ . La condition d'homogénéité de degré 0 par rapport au temps réduit alors d'une unité le nombre des invariants indépendants de  $(D_0^{(P)}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  ce qui a pour conséquence une relation entre les invariants mixtes de  $(\Gamma', \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ . C'est cette relation qui constitue la forme la plus générale du critère de plasticité.

Dans le cas de l'orthotropie de révolution autour de  $\vec{v}_3$  on obtient pour forme générale du critère :

$$g(t_1 \Gamma', t_2 (\Gamma')^2, t_3 (\Gamma')^3, t_4 (M \Gamma'), t_5 (M \Gamma')^2) = 0 \quad (8)$$

Pour un matériau isotrope :

$$g[t_1 \Gamma', t_2 (\Gamma')^2, t_3 (\Gamma')^3] = 0 \quad (9)$$

Examinons plus particulièrement le cas d'un matériau isotrope [12].

4) Plasticité d'un matériau isotrope

Introduisons les déviateurs  $\Delta'$  et  $\bar{D}_0^{(P)}$  des tenseurs  $\nabla'$  et  $D_0^{(P)}$

$$\begin{aligned} \Delta'_{ij} &= \nabla'_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla'_{kl} \delta_{kl} \\ \bar{D}_0^{(P)}_{ij} &= D_0^{(P)}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_0^{(P)}_{kl} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (10)$$

La relation (7) se décompose alors en partie isotrope et déviatorique :

$$\begin{aligned} \nabla'_{ii} &= 3 \psi_0 + \psi_1 D_0^{(P)}_{ii} + \psi_2 D_0^{(P)}_{ik} D_0^{(P)}_{ki} \\ \Delta'_{ij} &= \left( \psi_1 + \frac{2}{3} \psi_2 D_0^{(P)}_{kl} \delta_{kl} \right) \bar{D}_0^{(P)}_{ij} + \psi_2 \left( \bar{D}_0^{(P)}_{ik} \bar{D}_0^{(P)}_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_0^{(P)}_{kl} D_0^{(P)}_{kl} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Introduisons les trois invariants suivants de  $D_0^{(P)}$  et  $\bar{D}_0^{(P)}$  :

$$\begin{aligned} E_1 &= D_0^{(P)}_{ij} \delta_{ij} \\ (\bar{E}_2)^2 &= \bar{D}_0^{(P)}_{ij} D_0^{(P)}_{ij} \\ (E_3)^3 &= \bar{D}_0^{(P)}_{ik} D_0^{(P)}_{kj} D_0^{(P)}_{ji} \end{aligned} \quad (12)$$

Les relations (11) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \nabla'_{ii} &= 3 \phi_0 \\ \Delta'_{ij} &= \phi_1 D_0^{(P)}_{ij} + \phi_2 \left[ \bar{D}_0^{(P)}_{ik} \bar{D}_0^{(P)}_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\bar{E}_2)^2 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \psi_0 + \psi_1 \frac{E_1}{3} + \psi_2 \left( \frac{E_2}{3} + \frac{E_1^2}{3} \right) \\ \phi_1 &= \psi_1 + \frac{2}{3} \psi_2 E_1 \\ \phi_2 &= \psi_2 \end{aligned}$$

(14)

Introduisons enfin les déviateurs  $D^{(i)}$  semblables à ceux définis pour

$$S_1 = \nabla^i \delta_{ij} S_1^j, \quad S_2^i = \delta_{ij} S_2^j, \quad S_3^i = \delta_{ij} S_3^j \quad (15)$$

Les relations (13) conduisent à :

$$\begin{aligned} S_1 &= 3\phi_0 \\ (S_2)^2 &= \phi_1^2 (E_1)^2 + 2\phi_1 \phi_2 (E_1)^3 + \frac{1}{6} \phi_2^2 (E_1)^4 \\ (S_3)^3 &= \phi_1^3 (E_1)^3 + \frac{2}{3} \phi_1 \phi_2 (E_1)^2 [\phi_1 (E_1)^2 + \phi_2 (E_1)^3] + \frac{3}{4} \phi_2^2 (E_1)^3 - \frac{12}{5} \phi_2^3 (E_1)^5 \end{aligned}$$

(16)

La condition d'homogénéité de degré 0 par rapport au temps implique que les fonctions scalaires  $\phi_0, \phi_1$  et  $\phi_2$  soient respectivement homogènes et de degré 0, -1 et -2 par rapport aux invariants  $E_1, E_2, E_3$ .  
Grâce au théorème d'Euler on peut écrire :

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial E_1} E_1 + \frac{\partial \phi_n}{\partial E_2} E_2 + \frac{\partial \phi_n}{\partial E_3} E_3 + n \phi_n = 0 \quad n = 0, 1, 2 \quad (17)$$

En introduisant les deux variables indépendantes :

$$\Delta = \frac{\overline{E_3}}{\overline{E_2}} \quad ; \quad t = \frac{E_1}{\overline{E_2}} \quad (18)$$

les équations (17) admettent pour solution :

$$\phi_0 = A(\Delta, t) \quad ; \quad \phi_1 = B(\Delta, t) \frac{1}{\overline{E_2}} \quad ; \quad \phi_3 = C(\Delta, t) \frac{1}{(\overline{E_2})^2} \quad (19)$$

(16) et (19) conduisent à une forme paramétrique du critère de plasticité :

$$\begin{aligned} \overline{S_1} &= 3 A(\Delta, t) \\ (\overline{S_2})^2 &= [B(\Delta, t) + C(\Delta, t) \Delta^3]^2 + \frac{C^2(\Delta, t)}{6} (1 - 6\Delta^6) \\ (\overline{S_3})^3 &= \Delta^3 [B(\Delta, t) + C(\Delta, t) \Delta^3]^3 + \frac{C(\Delta, t)}{2} (1 - 6\Delta^6) \\ &\quad [B(\Delta, t) + C(\Delta, t) \Delta^3] - \frac{1}{18} C^2(\Delta, t) (1 - 6\Delta^6) \end{aligned} \quad (20)$$

En remarquant que  $E_1$  est le taux de dilatation volumique, la déformation à volume constant ne peut avoir lieu que si l'état des contraintes est représenté par un vecteur dont l'extrémité est sur la courbe limite  $t=0$  tracée sur la surface limite.

Cette courbe limite revêt une importance évidente lorsqu'on considère un écrouissage en densité. Dans ce cas en effet si un point de la courbe  $t=0$  est atteint l'écrouissage ne peut plus avoir lieu et l'écoulement se poursuit à volume constant.

#### 4.2 - Elasto-plasticité avec écrouissage en densité.

L'étude est identique à celle menée pour l'élasto-plasticité sans écrouissage. La partie plastique de la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma' = f \left( D_s^{(P)}, v_1, v_2, v_3, E \right) \quad (21)$$

La représentation réduite de (21) est identique à (5), les  $\alpha_i$  étant en plus fonction de  $E$ .

On postule l'existence d'un seul paramètre d'écroutissement qui sera la masse volumique  $\rho_\lambda$ .

Supposons le matériau isotrope. Pour  $E$  fixé, d'après (20), on peut définir la courbe limite  $t=0$ . Lorsque  $E$  varie cette courbe génère une surface appelée surface d'état critique :

$$G(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) = 0 \quad (22)$$

Cette surface critique définit tous les états de contraintes et de densité pour lesquels une déformation plastique sans changement d'état est possible.

Considérons un matériau de densité initiale  $\rho_{0i}$  soumis à des trajets de chargements dans le plan  $(s_1, \bar{s}_2)$  par commodité. Dans le plan  $(s_1, \bar{s}_2)$  sont représentées (figure 1) des surfaces d'écoulement

$$g(s_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \rho_{0k}) = 0 \quad \text{et la surface d'état critique}$$

$G(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) = 0$ . Le plan  $(E_1, \bar{E}_2)$  est superposé au plan  $(s_1, \bar{s}_2)$  de façon à représenter l'évolution de  $E_1 = \frac{dV^{(P)}}{V}$ .

Plusieurs cas peuvent se présenter :

- 1) si l'entrée en plasticité se fait en un point où  $t > 0$ , la déformation plastique entraînera une diminution de volume c'est-à-dire une augmentation de la densité.
- 2) Si la valeur de  $t$  est  $< 0$  la déformation plastique entraînera une diminution de la densité.

- Si un point où  $t=0$  est atteint, le matériau pourra s'écouler sans changement d'état.

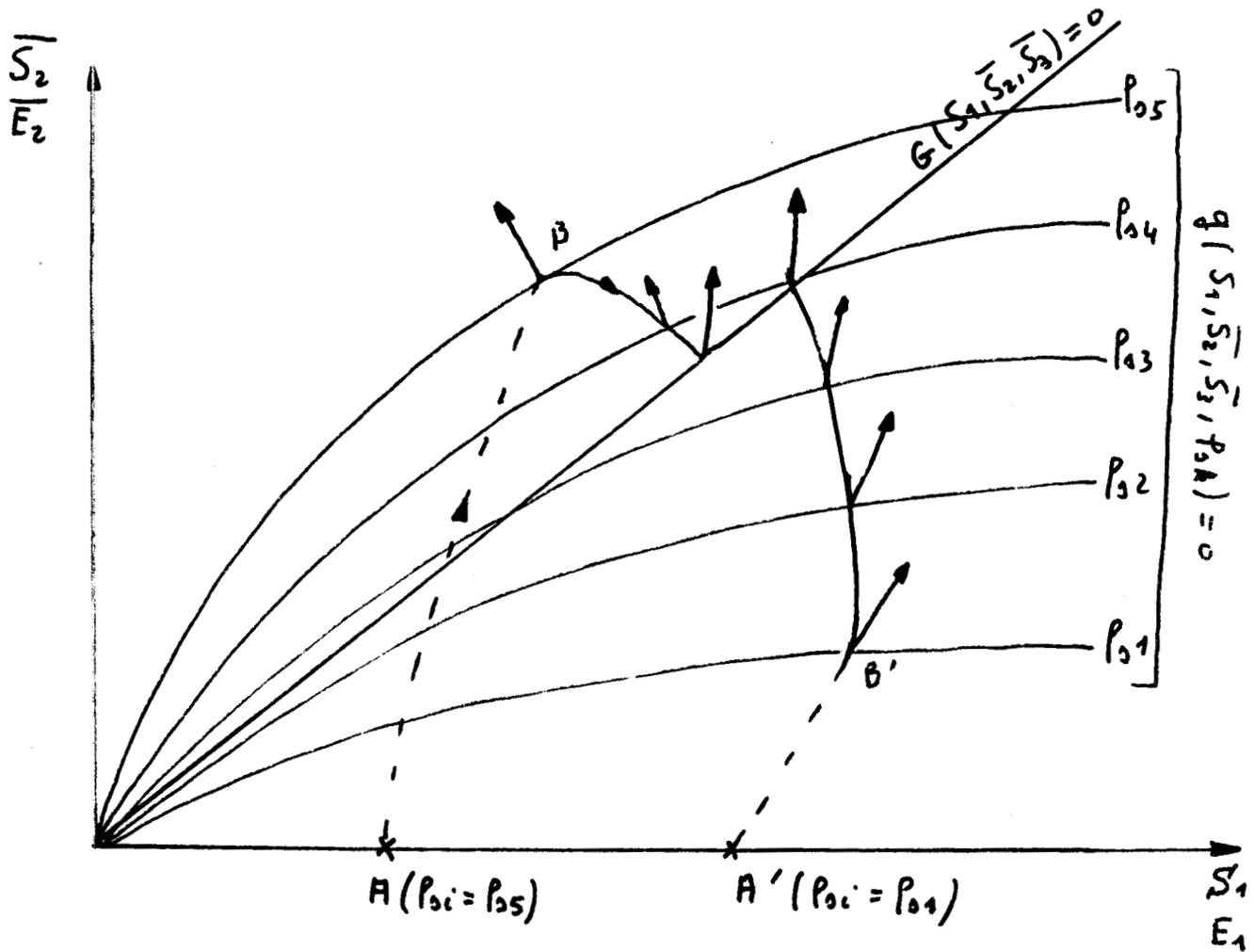


figure 1

----- comportement élastique

————— comportement plastique avec écrouissage.

La théorie de l'Ecole de Cambridge est fondée sur cette notion de surface d'état critique. Avant de présenter cette théorie, nous pouvons rester dans le cadre général de l'élasto-plasticité pour définir explicitement la loi incrémentale.

#### 4.3 - Expression de la loi incrémentale élasto-plastique avec écrouissage en densité.

Comme le montre STUTZ [ 12 ], la loi d'écoulement plastique n'est pas complètement définie par la seule connaissance du critère. Cela est bien en accord avec les définitions plus classiques de la plasticité [24].

C'est le critère de normalité qui constituera la loi complémentaire dont nous avons besoin. Il est intéressant à ce propos d'introduire les notions de fonction de dissipation, de charges et flux généralisés. Ces grandeurs permettent en effet une description assez puissante du comportement plastique.

##### 1) Fonction de dissipation.

En supposant que le comportement plastique se produit selon une évolution isotherme, le deuxième principe de la thermodynamique impose l'inégalité :

$$\tau'_{ij} \cdot D_{ij}^{(p)} \geq 0 \quad (23)$$

Le comportement est dit alors purement dissipatif. La grandeur  $\varphi = \tau'_{ij} D_{ij}^{(p)}$  représente le taux d'énergie dissipée. On l'appelle fonction de dissipation intrinsèque volumique.

On peut décomposer  $\varphi$  en sa partie sphérique  $\varphi_1$  et sa partie déviatorique  $\varphi_2$  :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (24)$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{3} \tau'_{ii} D_{ii}^{(p)} \\ \varphi_2 &= s'_{ij} \overline{D}_{ij}^{(p)} \end{aligned} \quad (25)$$

En utilisant les relations paramétriques (20) on obtient rapidement :

$$\varphi_1 = A E_1 \quad ; \quad \varphi_2 = B \bar{E}_2 + C \bar{E}_3 \quad (26)$$

2) Charges et flux généralisés.

Les quantités  $\varphi_i$  et  $\delta_i$  seront appelées respectivement charges et flux généralisés si elles vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} * \varphi_i &= \varphi_i(\nabla') \\ * \delta_i &= \delta_i(D^{(p)}) \\ * \varphi &= \varphi_i \delta_i \end{aligned} \quad (27)$$

On remarquera qu'il est possible d'écrire la surface d'écoulement dans l'espace  $\varphi_i$ . Une telle représentation sera utilisée dans le chapitre 4 à propos de l'essai biaxial de révolution.

3) Critère de normalité.

Le critère se définit de la façon suivante :

quelque soit  $\nabla'$  tel que  $g(\nabla') = 0$ ,

quelque soit  $\nabla'^*$  tel que  $g(\nabla'^*) = 0$ ,

alors :

$$(\nabla'_{ij} - \nabla'^*_{ij}) D_{ij}^{(p)} \geq 0 \quad (28)$$

D'après les relations (27) il s'ensuit une propriété analogue pour les flux et charges généralisés.

On peut montrer alors que les  $D_{ij}^{(p)}$  sont normaux à la surface de charge dans l'espace  $(\nabla'_{ij}, D_{ij}^{(p)})$  et de même  $\delta_i$  dans l'espace  $(\varphi_i, \delta_i)$ .

Autrement dit les vecteurs flux sont colinéaires aux gradients des surfaces de charge :

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(p)} &= \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma'_{ij}} \\ \delta_i &= \dot{\mu} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_i} \end{aligned} \quad (29)$$

avec  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\mu}$  positifs.

Il s'ensuit bien sûr l'égalité :

$$q_i d_E \varphi_i = 0 \quad (30)$$

$d_E \varphi_i$  étant la différentielle de  $\varphi_i$  sur la surface d'écoulement lorsqu'on maintient constant le coefficient d'écrouissage.

Or :

$$d\varphi = \delta_i d_E \varphi_i + \varphi_i d\delta_i$$

et d'après (30)

$$d\varphi = \varphi_i d\delta_i$$

On retrouve alors le principe d'ONSAGER :

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi(\delta, \varphi, E)}{\partial \delta_i} \quad (31)$$

C'est à partir de la relation (31) et de la connaissance de la fonction de dissipation que l'on peut définir complètement la loi plastique.

4) Expression de la loi incrimentale élasto-plastique.

En deçà de la surface d'écoulement plastique le comportement est élastique et s'écrit matriciellement pour de petites transformations :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11}^{(e)} \\ \epsilon_{22}^{(e)} \\ \epsilon_{33}^{(e)} \\ \epsilon_{12}^{(e)} \\ \epsilon_{23}^{(e)} \\ \epsilon_{31}^{(e)} \end{bmatrix} = [D^{-1}] \begin{bmatrix} \tau'_{11} \\ \tau'_{22} \\ \tau'_{33} \\ \tau'_{12} \\ \tau'_{23} \\ \tau'_{31} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Si l'écoulement plastique a lieu on a pour de petites transformations et d'après (29) :

$$\epsilon_{ij}^{(p)} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \tau'_{ij}} \quad (33)$$

Le critère de plasticité doit être satisfait; en différenciant on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial \tau'_{ij}} d\tau'_{ij} + \frac{\partial g}{\partial E} dE = 0 \quad (34)$$

On peut rassembler dans une même relation matricielle les équations (32), (33) et (34) :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & \frac{\partial g}{\partial r'_{11}} \\ & & & & & & \frac{\partial g}{\partial r'_{22}} \\ & & & & & & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial r'_{11}} & \frac{\partial g}{\partial r'_{22}} & \dots & \dots & \dots & \dots & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}'_{11} \\ \bar{v}'_{22} \\ \bar{v}'_{33} \\ \bar{v}'_{12} \\ \bar{v}'_{23} \\ \bar{v}'_{31} \end{bmatrix} \quad (35)$$

avec : 
$$A = - \frac{\partial g}{\partial E} dE \frac{1}{d\lambda} \quad (36)$$

On peut éliminer la constante  $d\lambda$  que  $A$  soit nul ou non et obtenir :

$$\bar{v}' = D_{ep} \underline{\epsilon}$$

$\bar{v}'$ ,  $\underline{\epsilon}$  étant les vecteurs colonnes de (35).

Avec :

$$D_{ep} = D - D \left\{ \frac{\partial g}{\partial r'_0} \right\} \left\{ \frac{\partial g}{\partial r'_0} \right\}^T D \left[ A + \left( \frac{\partial g}{\partial r'_0} \right)^T D \left\{ \frac{\partial g}{\partial r'_0} \right\} \right]^{-1} \quad (37)$$

Dans le cas de l'écroutissage en densité on peut préciser  $A$  indépendamment de  $d\lambda$  ; en effet :

$$dE = dP_\lambda^{(P)} = -P_\lambda \epsilon_{ij}^{(P)} \delta_{ij} = -P_\lambda d\lambda \frac{\partial g}{\partial r'_{ij}} \delta_{ij}$$

d'où

$$A = \frac{\partial g}{\partial p_s} p_s \frac{\partial g}{\partial r'_{ij}} \delta_{ij} \quad (38)$$

La loi incrémentale est donc explicitement définie. Il est important de noter qu'on peut déterminer des relations analogues en fonction des charges et flux généralisés.

Un problème demeure en ce qui concerne les régimes d'arête.

ZIENKIEWICZ [ 15 ] suggère d'approximer les surfaces d'écoulement par des surfaces régulières pour les résolutions numériques. Il est nécessaire cependant d'étudier la question en détail en vue de notre étude théorique sur la compressibilité oedométrique au chapitre 5.

#### 4.4 - Régime d'arête.

Une arête ou bien un coin sont des singularités de la surface d'écoulement plastique où la normale et le plan tangent sont indéterminés.

KOITER [ 16 ] donne une analyse du problème que nous utiliserons par la suite :

Considérons une arête qui sépare la surface d'écoulement en deux domaines sans discontinuité. Soient  $g_1(r')=0$  et  $g_2(r')=0$  les équations de ces deux domaines.

L'hypothèse de KOITER est de supposer que le comportement plastique sur l'arête résulte d'un comportement plastique sur chacun des deux domaines; cela se traduit par la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{\varepsilon}}^{(e)} + \underline{\underline{\varepsilon}}_1^{(p)} + \underline{\underline{\varepsilon}}_2^{(p)} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= D^{-1} \underline{\underline{\sigma}}' + d\lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial r'_o} + d\lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial r'_o} \end{aligned} \quad (39)$$

avec en outre puisque les deux critères sont satisfaits :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial r'_0} \right\}^T \tilde{\Sigma}' - A_1 d\lambda_1 &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial r'_0} \right\}^T \tilde{\Sigma}' - A_2 d\lambda_2 &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

relations dans lesquelles :

$$A_1 = - \frac{\partial g_1}{\partial E} dE \frac{1}{d\lambda_1} ; \quad A_2 = - \frac{\partial g_2}{\partial E} dE \frac{1}{d\lambda_2}$$

Comme dans le paragraphe 4.3.4 on peut inverser la relation (39) en utilisant (40) et en éliminant  $d\lambda_1$  et  $d\lambda_2$  sans division par ces grandeurs qui peuvent être nulles. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}' &= \left[ D - \frac{1}{C} \left( B_2 D \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial r'_0} \right\} \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial r'_0} \right\}^T D - D \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial r'_0} \right\} \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial r'_0} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial r'_0} \right\} \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial r'_0} \right\}^T D \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_1 D \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial r'_0} \right\} \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial r'_0} \right\}^T D - D \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial r'_0} \right\} \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial r'_0} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial r'_0} \right\} \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial r'_0} \right\}^T D \right] \underline{\underline{E}} \end{aligned} \quad (41)$$

avec :

$$C = B_1 B_2 - \left( \frac{\partial g_1}{\partial r'_0} \right)^T D \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial r'_0} \right\} \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial r'_0} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial r'_0} \right\}$$

$$B_1 = A_1 + \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial r'_0} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial r'_0} \right\}$$

$$B_2 = A_2 + \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial r'_0} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial r'_0} \right\}$$

Quant au coefficient d'écrouissage il sera précisé à l'issue de l'étude de la loi de Cambridge qui présente une telle arête.

Remarquons une nouvelle fois que les relations (41) peuvent être transposées aux charges et flux généralisés.

## CHAPITRE V

### THEORIE DE L'ECOLE DE CAMBRIDGE POUR LES ARGILES.

Il s'agit d'une loi de comportement des argiles reconstituées (remoulded) homogènes, isotropes, normalement consolidées ou faiblement surconsolidées et saturées.

Nous la présentons dans le cadre de l'élasto-plasticité avec écrouissage en densité introduite au chapitre précédent.

Fondée sur l'essai bi-axial de révolution (essai dit "triaxial"), cette théorie est d'abord analysée sur les chemins de sollicitation correspondants après un choix classique de charges et flux généralisés.

Une extension à des chemins de sollicitation quelconques est possible mais moins fondée expérimentalement. L'apparition d'appareils véritablement triaxiaux est prometteuse à cet égard.

#### 5.1 - Chemins de sollicitations bi-axiales de révolution.

##### 1) L'essai "triaxial" classique.

Un échantillon cylindrique, isolé par une membrane imperméable, est soumis à une pression hydrostatique extérieure  $p_h$ . Une charge axiale  $P$  verticale totale lui est transmise de façon rigide. Cette charge est centrée par un système à rotules.

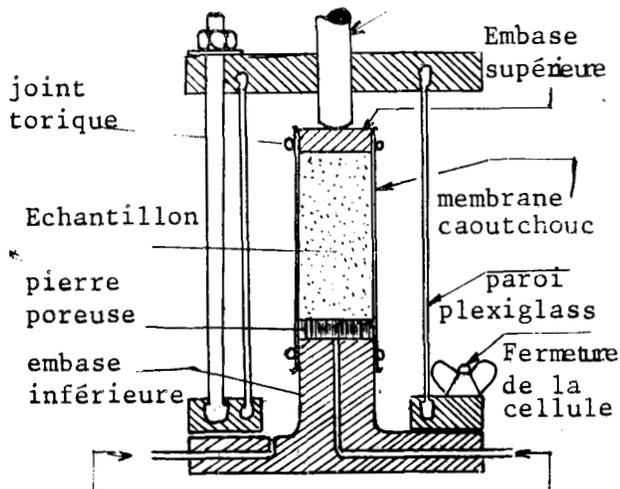


Figure 1 - Schéma de l'appareil "triaxial".

Un conduit relié à l'échantillon permet le drainage de l'eau interstitielle ou bien la mesure de la pression interstitielle pour un essai non drainé.

Le mécanicien des sols admet de façon courante un état de contraintes totales uniforme au sein de l'échantillon. Cet état est caractérisé par :

- une contrainte principale  $\sigma_1$  sur la facette horizontale :

$$\sigma_1 = - \left( p_h + \frac{P}{S} \right) \quad S \quad \text{étant la section de l'échantillon.}$$

- un état de contraintes isotropes dans le plan horizontal :

$$\sigma_2 = \sigma_3 = - p_h$$

Bien que nous gardions par la suite ce type de sollicitation bi-axiale de résolution pour les contraintes et les déformations, trois remarques s'imposent :

- l'hétérogénéité et/ou l'anisotropie du matériau étudié, les défauts géométriques dans la découpe du cylindre et le défaut éventuel du centrage de la force verticale constituent des éléments perturbateurs non négligeables.

- bien qu'il puisse être réduit, le frettage au niveau des bases de l'échantillon rompt l'uniformité des contraintes et des déformations.

- enfin comme le signale HAAR [ 17 ] l'identité de  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  c'est-à-dire en fait l'identité de  $\sigma_r$  et  $\sigma_\theta$  en coordonnées cylindriques n'est pas assurée. Elle constitue la solution exacte et unique pour le cylindre dans le cas du matériau élastique. Cette solution a donc bien sûr l'avantage de vérifier les équations d'équilibre et les relations de compatibilité.

## 2) Restriction du comportement plastique.

En supposant un champ uniforme de la pression interstitielle il vient :

$$\tau'_1 = \tau_1 + u$$

$$\tau'_2 = \tau'_3 = \tau_3 + u$$

Ecrivons les différents invariants introduits au chapitre précédent pour un tel état de sollicitation.

- pour les contraintes

$$\bar{S}_1 = \tau'_1 + 2\tau'_3 = -3p$$

$$\bar{S}_2 = \frac{2}{3} (\tau'_1 - \tau'_3)^2 = \frac{2}{3} q^2$$

$$\bar{S}_3 = \frac{6}{27} (\tau'_1 - \tau'_3)^3 = \frac{6}{27} q^3$$

en effet 
$$\bar{\mathbb{V}}' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} (\tau'_1 - \tau'_3) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} (\tau'_3 - \tau'_1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} (\tau'_3 - \tau'_1) \end{bmatrix}$$

- pour les déformations en petite perturbation :

$$E_1 = \frac{dv}{dt} = \dot{\varepsilon}$$

$$\bar{E}_2 = \frac{2}{3} \left( \frac{dE_1}{dt} - \frac{dE_3}{dt} \right)^2 = \frac{3}{2} \dot{\varepsilon}^2$$

$$\bar{E}_3 = \frac{6}{27} \left( \frac{dE_1}{dt} - \frac{dE_3}{dt} \right)^3 = \frac{3}{4} \dot{\varepsilon}^3$$

L'introduction des grandeurs  $p, q, v, E$  est intéressante (par ailleurs classique) car elles représentent des charges et flux généralisés comme nous le démontrons plus loin.

Reprenons alors les relations (20) du chapitre précédent définissant paramétriquement la surface plastique :

$$\lambda = \frac{\bar{\epsilon}_3^{(P)}}{\bar{\epsilon}_2^{(P)}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{6}} ; \quad t = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\dot{\nu}^{(P)}}{\dot{\epsilon}^{(P)}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d\nu^{(P)}}{d\epsilon^{(P)}}$$

$$A(\lambda, t, E) = \bar{A}^*(t, E)$$

$$B(\lambda, t, E) = \bar{B}^*(t, E)$$

$$C(\lambda, t, E) = \bar{C}^*(t, E)$$

$\bar{A}^*$ ,  $\bar{B}^*$ ,  $\bar{C}^*$  sont les restrictions de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  aux chemins de sollicitations bi-axiales de révolution c'est-à-dire avec  $\lambda = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{6}}$ .

On en conclut :

$$\begin{aligned} p &= -\bar{A}^* \\ q^2 &= \frac{3}{2} \left( \bar{B}^* + \frac{\bar{C}^*}{\sqrt{6}} \right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Dans le cas de l'essai bi-axial de révolution on peut donc exprimer le critère de plasticité par une relation :

$$f(p, q, E) = 0 \quad (2)$$

C'est là un théorème qui deviendra une hypothèse pour les chemins de sollicitations quelconques.

En ce qui concerne la fonction de dissipation :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \bar{A}^* E_1^{(P)} = -p \dot{\nu}^{(P)}$$

$$\varphi_2 = \bar{B}^* \bar{E}_2^{(P)} + \bar{C}^* \nu^2 \bar{E}_3^{(P)} = q \dot{\epsilon}^{(P)}$$

d'où

$$\varphi = -p \dot{\nu}^{(P)} + q \dot{\epsilon}^{(P)}$$

Ainsi les grandeurs  $\begin{Bmatrix} -p \\ q \end{Bmatrix}$  et  $\begin{Bmatrix} \dot{\nu}^{(P)} \\ \dot{\epsilon}^{(P)} \end{Bmatrix}$  représentent respectivement des charges et flux généralisés. Nous les utiliserons par la suite.

## 5.2 - Hypothèses de la théorie de l'Ecole de Cambridge.

Les données de base sont la courbe d'état critique où s'initialise la rupture, les courbes de compressibilité isotrope et l'expression de la fonction de dissipation à partir de l'hypothèse d'un comportement élasto-plastique à l'écroutissage en densité et selon le critère de normalité.

### 1) Courbe d'état critique

Selon que l'argile est susconsolidée ou normalement consolidée, on obtient à partir de l'essai triaxial deux types de droites intrinsèques dans la représentation de Mohr en contraintes effectives.

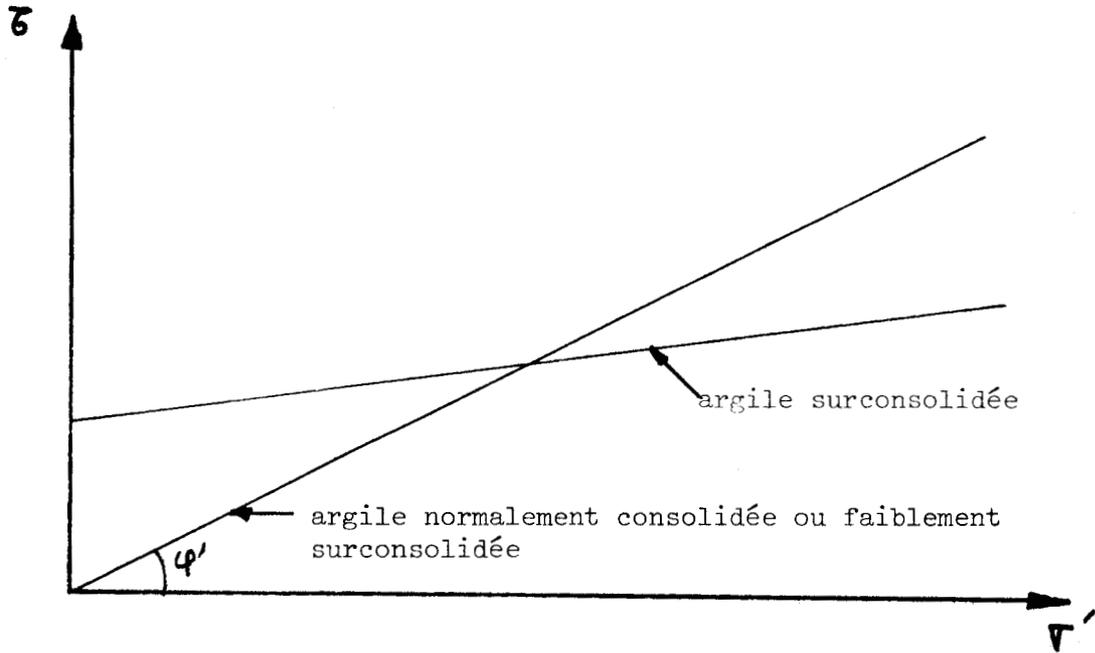


Figure 2 - Droites intrinsèques de rupture des argiles.

Pour un matériau normalement consolidé ou faiblement surconsolidé :

$$\varphi' \neq 0 ; c' = 0$$

C'est le dernier cas qui est concerné par la théorie de l'Ecole de Cambridge.

Ainsi la courbe d'état critique sur la surface de plasticité est définie par :

$$\sigma = \tau' \tan \varphi'$$

ou bien encore

$$|q| = M p$$

avec :

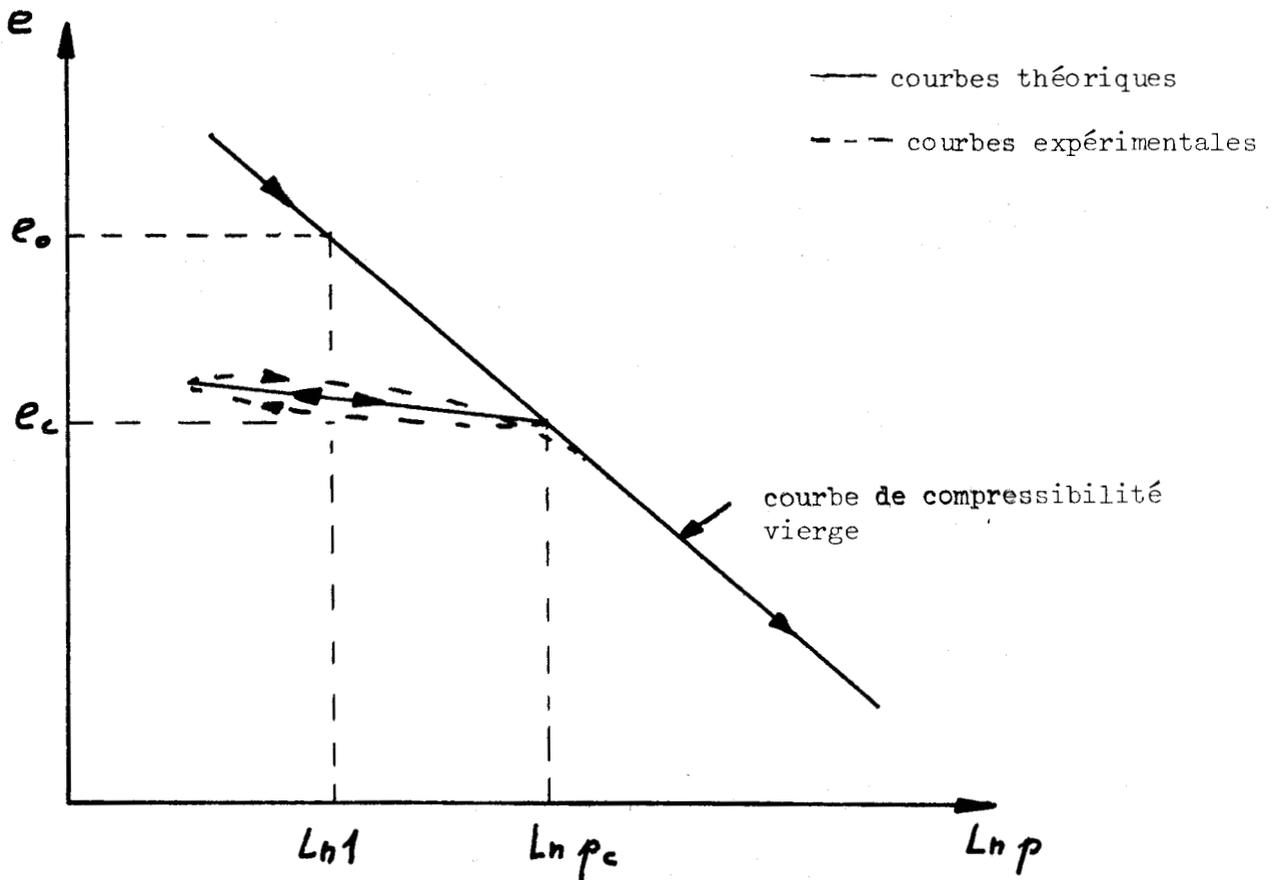
$$\begin{cases} M = \frac{6 \sin \varphi'}{3 - \sin \varphi'} & \text{en compression} \\ M = \frac{6 \sin \varphi'}{3 + \sin \varphi'} & \text{en extension} \end{cases} \quad (3)$$

Rappelons que dans l'essai de compression la rupture est obtenue à partir d'un état isotrope, par augmentation de  $|\sigma_1|$ . L'essai d'extension par contre est mené en augmentant  $|\sigma_3|$ .

## 2) Courbes de compressibilité isotrope.

Il s'agit des courbes reliant l'indice des vides  $e$  à la pression isotrope  $p$  lorsque  $q=0$  et  $u=0$ .

Figure 3 - Compressibilité isotrope des argiles.



La courbe de compressibilité vierge est la trace de la surface de plasticité représentée dans l'espace  $(p, q, e)$  sur le plan  $q=0$ . Cette courbe est définie par l'équation :

$$e = e_c = e_0 - \lambda \ln p$$

La pression de consolidation  $p_c$  est la plus grande pression atteinte par le matériau. L'indice des vides de consolidation  $e_c$  est en effet le coefficient d'écroutissement du comportement élasto-plastique.

En deçà de la courbe de compressibilité vierge, à l'intérieur de la surface plastique par conséquent, le comportement élastique isotrope du matériau est défini par l'équation :

$$e = e_c - k \ln \left( \frac{p}{p_c} \right) \quad (5)$$

Une hypothèse importante de la théorie de l'Ecole de Cambridge consiste à généraliser ce comportement élastique isotrope quelque soit le déviateur  $q$  et à supposer une rigidité déviatorique de la loi élastique.

Cette hypothèse comme nous le verrons est en désaccord avec les résultats des essais d'expansion de cylindre creux. Pour notre part, nous proposons de compléter la loi (5) par un comportement déviatorique d'équation incrémentale :

$$\epsilon^{(e)} = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{k}{3 p(1+e)} dq \quad (6)$$

quant à la loi élastique sphérique elle résulte directement de (5) :

$$\left( \nu = \frac{de}{1+e} \right)$$

$$\nu^{(e)} = - \frac{k}{p(1+e)} dp \quad (7)$$

$\nu$  est une constante qui a la signification d'un coefficient de Poisson.

La courbe de compressibilité vierge est très bien vérifiée expérimentalement. Il n'en est pas de même des courbes de décharge et recharge.

L'Ecole de Cambridge confère un caractère intrinsèque aux paramètres  $e_0$ ,  $\lambda$  et  $k$ .

HAMBLY [ 18 ] confirme l'hypothèse par des essais en déformation plane.

Il serait intéressant de confronter ces résultats à ceux d'essais véritablement triaxiaux.

Signalons enfin la difficulté de précision dans les essais de compressibilité. Même homogène, le matériau présente cependant des gradients sensibles de teneur en eau.

### 3) Fonction de dissipation.

L'Ecole de Cambridge a proposé [ 19 ] plusieurs expressions de la fonction de dissipation. Nous en retenons deux avant généralisations au chapitre 6 :

$$\text{cas 1 : } \varphi = M p \dot{\epsilon}^{(p)} \quad (8)$$

$$\text{cas 2 : } \varphi = p \left[ \dot{\nu}^{(p)2} + (M \dot{\epsilon}^{(p)})^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

Le choix (8) de la fonction de dissipation correspond de façon évidente à l'hypothèse que l'énergie dissipée est provoquée par les déformations plastiques de cisaillement.

La seconde expression prend en compte une contribution des déformations plastiques de volume.

## 5.3 - Lois incrémentales de la théorie de Cambridge.

### 1) Equations de la surface d'écoulement.

Elles sont données par l'intégration des relations (31) :

$$\begin{aligned}
 -p &= \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}^{(p)}} \\
 q &= \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}^{(p)}}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Rappelons que ceci résulte de l'application du critère de normalité et du fait que  $\begin{Bmatrix} -p \\ q \end{Bmatrix}$  et  $\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}^{(p)} \\ \dot{\varepsilon}^{(p)} \end{Bmatrix}$  sont des charges et flux généralisés.

Il vient donc : — pour le cas 1 :

$$p = M \dot{\varepsilon}^{(p)} \frac{\partial p}{\partial \dot{\varepsilon}^{(p)}}$$

d'où la solution :

$$p = C_1(\dot{\varepsilon}^{(p)}, E) e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{t}{M}} \quad \left( t = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\dot{\varepsilon}^{(p)}}{\dot{\varepsilon}^{(p)}} \right)$$

d'autre part :

$$q = Mp + M \dot{\varepsilon}^{(p)} \frac{\partial p}{\partial \dot{\varepsilon}^{(p)}} = M C_1 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{t}{M}} + M \dot{\varepsilon}^{(p)} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{t}{M}} \left( \frac{\partial C_1}{\partial \dot{\varepsilon}^{(p)}} + C_1 \frac{\dot{\varepsilon}^{(p)}}{M \dot{\varepsilon}^{(p)2}} \right)$$

La fonction  $C_1(\dot{\varepsilon}, E)$  est déduite de la connaissance de la courbe d'état critique et de la courbe de compressibilité vierge.

Sur la courbe d'état critique c'est-à-dire pour  $t=0$  on doit retrouver  $q = \eta p$  ; ceci implique :

$$\frac{\partial C_1}{\partial \dot{\varepsilon}^{(p)}} = 0$$

et ainsi :

$$C_1 = C_1(E)$$

Lorsque  $q = 0$  c'est-à-dire  $t = -M \sqrt{\frac{2}{3}}$  il faut :

$$p = \exp\left(\frac{e_0 - e_c}{\lambda}\right)$$

par conséquent :  $C_1 = \exp\left(\frac{e_0 - e_c - \lambda}{\lambda}\right)$

En définitive nous obtenons l'équation paramétrique en  $t$  de la surface d'écoulement :

$$\begin{aligned} p &= \exp\left(\frac{e_0 - e_c - \lambda}{\lambda}\right) \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{t}{M}\right) \\ q &= \exp\left(\frac{e_0 - e_c - \lambda}{\lambda}\right) \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{t}{M}\right) \left(M - t \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

L'élimination de  $t$  est facile :

$$\lambda q + M p (\lambda \ln p + e_c - e_0) = 0 \quad (12)$$

— Pour le cas 2 :

posons :  $A = \sqrt{\dot{v}^2 + (M \dot{\epsilon}^{(P)})^2}$

$$p = -A \frac{\partial p}{\partial \dot{v}^{(P)}} - p \frac{\dot{v}^{(P)}}{A}$$

L'intégration donne :

$$p = G_2(\dot{\epsilon}^{(P)}, E) \frac{M \dot{\epsilon}^{(P)}}{A (\dot{v}^{(P)} + A)}$$

En ce qui concerne  $q$  :

$$q = A \frac{\partial p}{\partial \dot{\epsilon}^{(P)}} + p \frac{M^2 \dot{\epsilon}^{(P)}}{A}$$

or

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{\epsilon}^{(P)}} = \frac{\partial C_2}{\partial \dot{\epsilon}^{(P)}} \frac{M \dot{\epsilon}^{(P)}}{A(\dot{v}^{(P)} + A)} + C_2 \frac{MA \dot{v}^{(P)} + MA^2 - M^3 \dot{\epsilon}^{(P)^2} \frac{\dot{v}^{(P)}}{A} - 2M^3 \dot{\epsilon}^{(P)^2}}{(\dot{v}^{(P)} + A)^2 A^2}$$

d'où

$$q = \frac{M \dot{\epsilon}^{(P)}}{\dot{v}^{(P)} + A} \frac{\partial C_2}{\partial \dot{\epsilon}^{(P)}} + C_2 \frac{MA^2 \dot{v}^{(P)} + MA^3 - M^3 A \dot{\epsilon}^{(P)^2}}{(\dot{v}^{(P)} + A)^2 A^2}$$

Sur la courbe d'état critique  $e^{(P)} = 0$  et  $q = Mp$ :

$$\frac{\partial C_2}{\partial \dot{\epsilon}^{(P)}} = C_2 \frac{1}{\dot{\epsilon}^{(P)}} \Rightarrow C_2(\dot{\epsilon}^{(P)}, E) = D(E) \dot{\epsilon}^{(P)}$$

Il en résulte :

$$p = D(E) \frac{M \dot{\epsilon}^{(P)^2}}{\left[ \dot{v}^{(P)} + \left( \dot{v}^{(P)^2} + (M \dot{\epsilon}^{(P)})^2 \right)^{1/2} \right] \left( \dot{v}^{(P)^2} + (M \dot{\epsilon}^{(P)})^2 \right)^{1/2}} \quad (13)$$

$$q = D(E) \frac{M \dot{\epsilon}^{(P)}}{\sqrt{\dot{v}^{(P)^2} + (M \dot{\epsilon}^{(P)})^2}}$$

Sur la courbe de compressibilité vierge  $q=0$  et  $\dot{v}^{(P)} < 0$   
car l'écroutissement est durcissant. Pour que  $p$  vérifie l'égalité :

$$p = \exp\left(\frac{e_0 - e_c}{\lambda}\right) = \alpha$$

il faut :

$$D(E) = \frac{\alpha}{M} \lim_{\substack{\dot{\epsilon}^{(P)} \rightarrow 0 \\ \dot{\nu}^{(P)} < 0}} \left( \frac{\dot{\nu}^{(P)^2} + (\eta \dot{\epsilon}^{(P)})^2 + \dot{\nu}^{(P)} \sqrt{\dot{\nu}^{(P)^2} + (\eta \dot{\epsilon}^{(P)})^2}}{\dot{\epsilon}^{(P)^2}} \right)$$

En effectuant un développement limité par rapport à  $\dot{\epsilon}^{(P)}$  on obtient pour la limite :

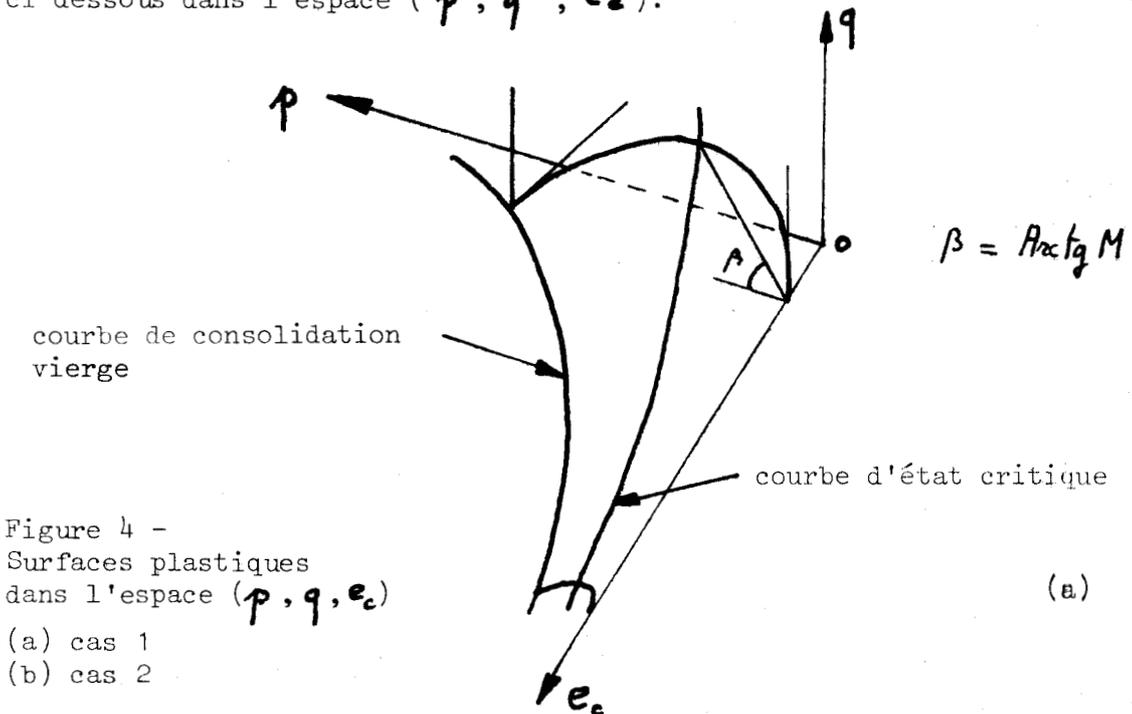
$$D(E) = \frac{M}{2} \exp\left(\frac{\epsilon_0 - \epsilon_c}{\lambda}\right) \quad (14)$$

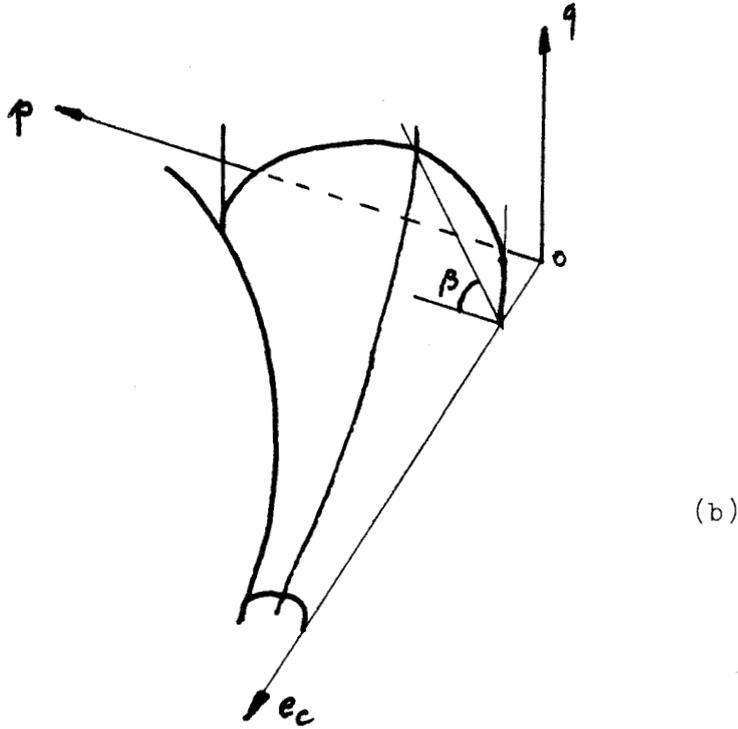
L'équation paramétrique complète de la surface d'écoulement est donc déterminée par les relations (13) et (14).

L'élimination de  $\epsilon$  conduit à l'équation :

$$q - M \sqrt{p \left[ \exp\left(\frac{\epsilon_0 - \epsilon_c}{\lambda}\right) - p \right]} \quad (15)$$

La surface d'écoulement pour chacun des cas étudiés est représentée ci-dessous dans l'espace  $(p, q, \epsilon_c)$ .





Sur la surface d'état critique  $t=0$ , ce qui implique  
 cas 1 :  $e_c = e_0 - \lambda - \lambda Lnp$  (16)

cas 2 :  $e_c = e_0 - \lambda Lnz - \lambda Lnp$  (17)

Or rappelons : 
$$\begin{cases} e = e_c - k Lnp \\ e_c = e_0 - \lambda Lnp \end{cases}$$

d'où la représentation de la courbe d'état critique dans le plan  $(e, p)$

cas 1 :  $e = e_0 - (\lambda - k) - \lambda Lnp$  (18)

cas 2 :  $e = e_0 - (\lambda - k)Lnz - \lambda Lnp$  (19)

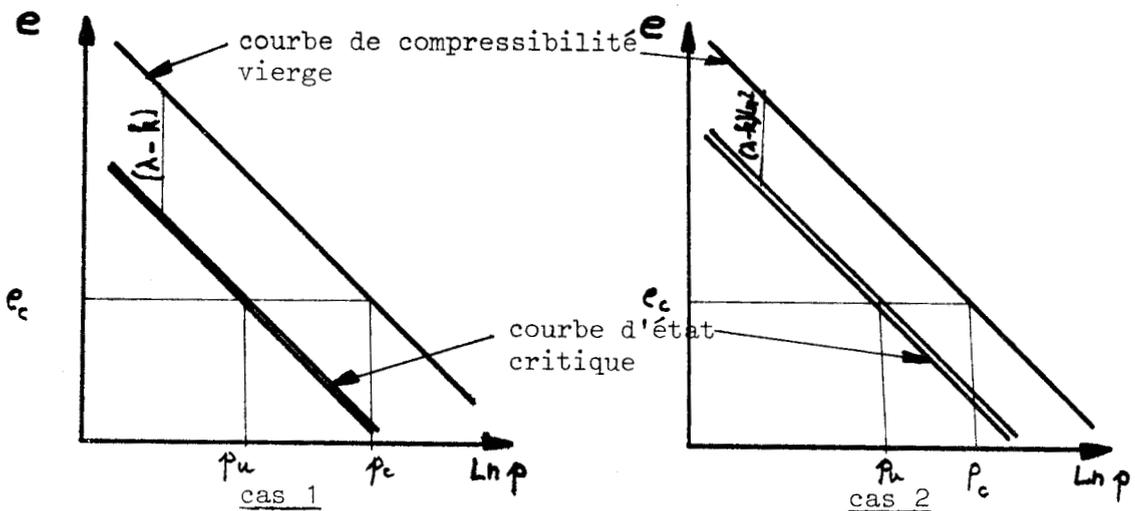


Figure 5

2) Paramètre d'écoulement .

Différencions les équations (4) et (5) :

$$de_c = -\lambda \frac{dp_c}{p_c}$$

$$de = de_c - k \frac{dp}{p} + k \frac{dp_c}{p_c}$$

Éliminons  $p_c$  :

$$de_c = \left( de + k \frac{dp}{p} \right) \frac{\lambda}{(\lambda - k)}$$

or on peut décomposer  $de$  et utiliser la relation (7) :

$$de = de^{(e)} + de^{(p)} = -k \frac{dp}{p} + de^{(p)}$$

et finalement :

$$de_c = \frac{\lambda}{\lambda - k} de^{(p)} \tag{20}$$

La relation (20) montre clairement que sur la courbe d'état critique l'écoulement se fait à écoulement constant puisqu'alors  $de^{(p)} = 0$ .

3) Loi élastique incrémentale.

Cette loi non linéaire est donnée par les relations (6) et (7)

$$\begin{bmatrix} -dp \\ dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{(e)} \\ \varepsilon^{(e)} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$\varphi \quad = \quad D \quad q$

avec 
$$D_1 = - \frac{p(1+e)}{k}$$

$$D_2 = - D_1 \frac{3(1-2\nu)}{1+\nu}$$

4) Loi élasto-plastique incrémentale.

Sur la surface d'écoulement plastique il faut reprendre les équations (37) du chapitre précédent :

$$\begin{bmatrix} -dp \\ dq \end{bmatrix} = D_{ep} \begin{bmatrix} v \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

avec

$$D_{ep} = D - D \left\{ \frac{\partial f}{\partial p} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial p} \right\}^T D \left[ A + \left\{ \frac{\partial f}{\partial p} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial f}{\partial p} \right\} \right]^{-1}$$

$$A = - \frac{\partial f}{\partial e_c} \frac{de_c}{d\mu}$$

or d'après (18) :

$$A = - \frac{\partial f}{\partial e_c} \frac{\lambda}{\lambda-k} \frac{de_c^{(p)}}{d\mu}$$

d'autre part :

$$\frac{de_c^{(p)}}{d\mu} = - \frac{\partial f}{\partial p} (1+e)$$

d'où

$$A = \frac{\lambda}{\lambda-k} \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial e_c} (1+e)$$

Ces différentes grandeurs sont données ci-dessous pour les deux cas étudiés :

cas 1 :  $f(p, q, e_c) = \lambda q + M p (\lambda L n p + e_c - e_0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \lambda \left( M - \frac{q}{p} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \lambda$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_c} = M p$$

$$A = \frac{M \lambda^2}{\lambda - k} (1 + e) p \left( M - \frac{q}{p} \right) = - \frac{M \lambda^2 k}{\lambda - k} D_1 \left( M - \frac{q}{p} \right)$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\} = - D_1 \lambda^2 \left( M - \frac{q}{p} \right)^2 + D_2 \lambda^2$$

cas 2 :  $f(p, q, e_c) = q - M \left( p \left[ \exp \left( \frac{e_0 - e_c}{\lambda} \right) - p \right] \right)^{1/2}$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{M^2}{2q} \left( 2p - \exp \left( \frac{e_0 - e_c}{\lambda} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( M^2 \frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_c} = \frac{1}{2\lambda} \left( q + \frac{M^2 p^2}{q} \right)$$

$$A = - \frac{k D_1}{4(\lambda - k)} \left( M^4 \frac{p^2}{q^2} - \frac{q^2}{p^2} \right)$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\} = - \frac{D_1}{4} \left( \pi^2 \frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right)^2 + D_2$$

#### 5.4 - Validité expérimentale de la théorie.

Il est important de donner sans plus attendre quelques fondements expérimentaux supplémentaires à cette théorie. Seules les courbes d'état critique et de compressibilité isotrope en ont constitué jusqu'ici des bases expérimentales tangibles. Il est certain que la démarche de pensée de l'École de Cambridge pour construire sa théorie contredirait cette étude synthétique.

##### 1) Essais bi-axiaux de résolution sur des argiles saturées.

La figure 6 représente le chemin d'un essai de compression non drainé sur une argile de Londres, normalement consolidée, dans la représentation  $(p, q)$  d'après Schofield et Wroth [ 11 ] p. 183.

L'essai n'étant pas drainé et l'argile étant normalement consolidée, l'indice des vides  $e$  reste constant et égal à l'indice des vides initial.

Le chemin de l'essai est donné à partir du cas 1 par l'équation :

$$q = - \frac{M}{\lambda - k} p \left( \lambda \ln p + e - e_0 \right)$$

en effet :

$$q = - \frac{M}{\lambda} p \left( \lambda \ln p + e_c - e_0 \right)$$

$$e_c = \frac{\lambda}{\lambda - k} \left( e + k \ln p - \frac{k}{\lambda} e_0 \right)$$

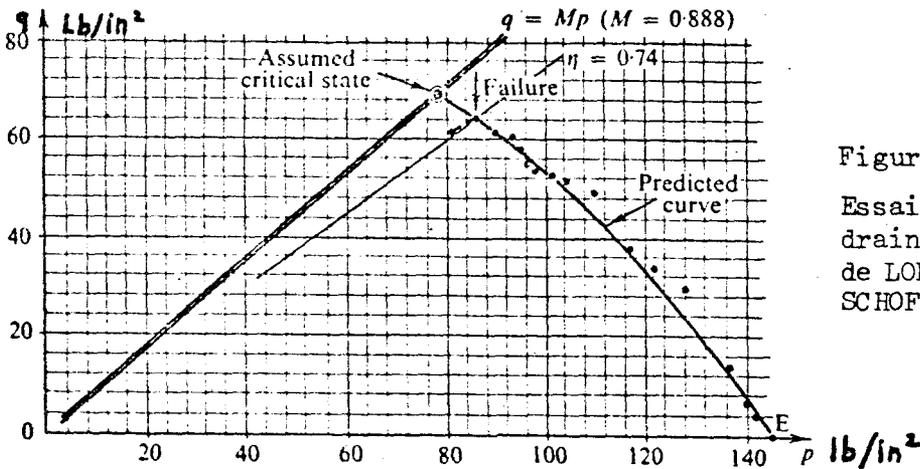


Figure 6 -

Essai triaxial non drainé sur une argile de LONDRES d'après SCHOFIELD et WROTH.

Des essais de rupture drainés et non drainé sont donnés d'après

PARRY sur la figure 7 dans une représentation adimensionnelle  $\left(\frac{p}{p_u}, \frac{q}{q_u}\right)$ .

$p_u$  est la valeur de  $p$  à la rupture (confer fig. 5).

Dans cette représentation la surface d'écoulement plastique devient indépendante de  $e_c$ . En effet  $p_u$  vérifiant les équations (16) ou (17) selon le cas étudié, on peut éliminer  $e_c$  dans les équations (12) ou (15) et obtenir :

$$\text{Cas 1 : } \frac{q}{p_u} + M \frac{p}{p_u} \left[ \frac{\lambda}{\lambda-k} \ln\left(\frac{p}{p_u}\right) - 1 \right] = 0$$

$$\text{Cas 2 : } \frac{q}{p_u} - M \frac{p}{p_u} \left[ 2 \left(\frac{p}{p_u}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-k}} - 1 \right]^{1/2} = 0$$

L'intérêt d'une telle représentation est évident car elle permet comme sur la figure 7 de rassembler de façon unique les résultats expérimentaux d'essais drainés ou non.

Ces résultats conduisent aux remarques suivantes :

- A l'exception de trois résultats d'extension plus susceptible d'erreur expérimentale, il ne se produit pas de rupture au-delà de l'état critique. En deçà, la rupture se produit avant l'état critique sur une droite de Coulomb.

- La théorie s'appliquera aux argiles normalement consolidées ou légèrement surconsolidées pour lesquelles la plasticité se produira avec  $\frac{q}{p} \leq M$ .

- Il existe enfin une zone inférieure III où on ne constate pas de rupture. Sa frontière ne correspond pas exactement à l'intersection de la droite de Coulomb et de la surface plastique.

Ces essais sont en accord avec ceux qu'a menés HVORSLEV sur une boîte de cisaillement.

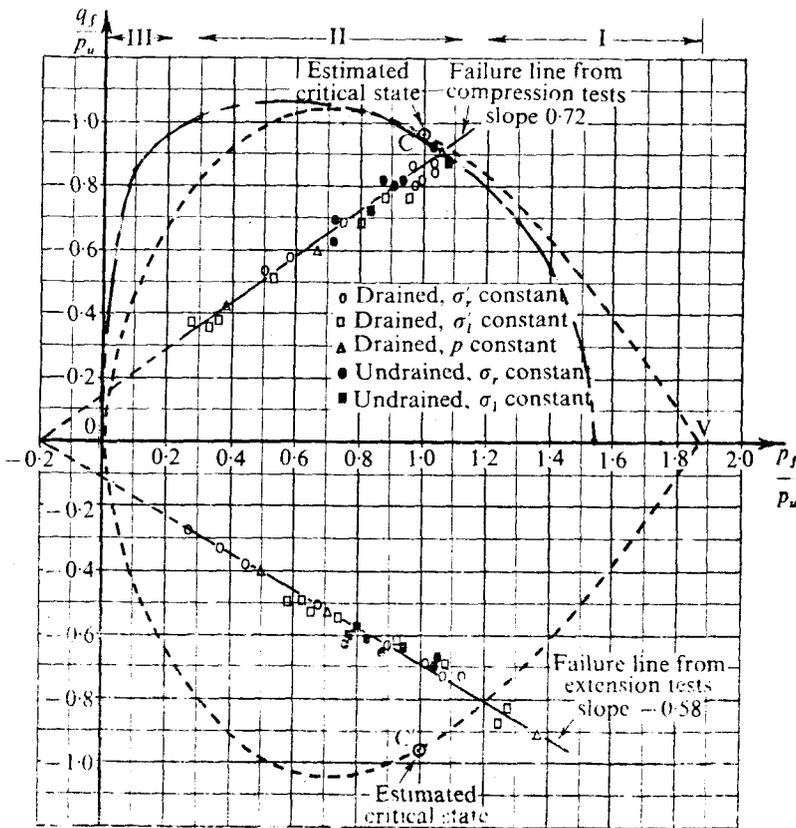


Figure 7 -

Essais de rupture en cellule "triaxiale" d'après PARRY.

$$\lambda = 0,093$$

$$k = 0,035$$

$$M_c = 0,95$$

----- Cas 1

- - - - - Cas 2

2) Limites de liquidité et de plasticité.

Sans en donner le mode opératoire, rappelons que les limites d'Atterberg sont des teneurs en eau qui marquent de façon empirique un seuil de liquidité et un seuil de fragilité à la rupture. L'indice de plasticité  $I_p$  est alors défini par :

$$I_p = W_L - W_p \quad (23)$$

avec :  $W_L$  : limite de liquidité.

$W_p$  : limite de plasticité.

Ces limites sont de toute évidence effectuées sur un matériau en état de rupture. D'où l'idée de Schofield et Wroth [ 11 ] d'en déduire une tension intergranulaire à partir de la teneur en eau sur la courbe d'état critique.

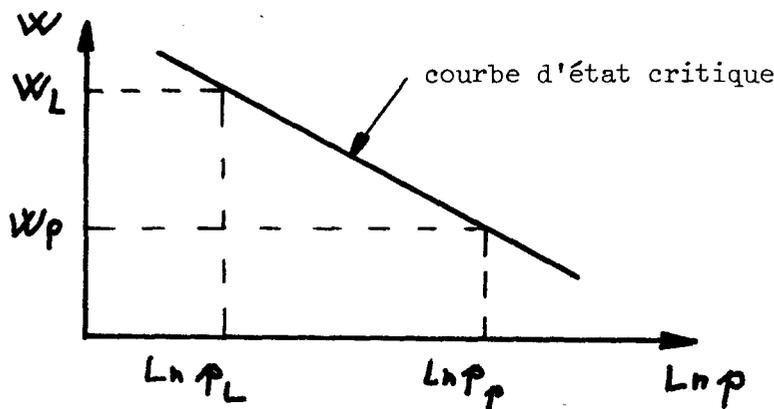


Figure 8

Ces mêmes auteurs ont constaté empiriquement que pour les argiles qui répondaient bien à leur théorie il correspondait sensiblement :

$$\frac{p_p}{p_L} = 100 \quad (24)$$

or sur la courbe d'état critique les équations (18) ou (19) sont vérifiées et en supposant le sol saturé :

cas 1 : 
$$W_L = \frac{p_w}{p_d} e_L = \frac{p_w}{p_d} (e_0 - (\lambda - k) - \lambda \ln p_L)$$

cas 2 : 
$$= \frac{p_w}{p_d} (e_0 - (\lambda - k) \ln 2 - \lambda \ln p_L)$$

avec des relations analogues pour  $W_p$ .

A partir de (24) on obtient pour les deux cas le résultat unique suivant :

$$I_p = \frac{p_d}{p_w} \lambda \ln(100)$$

avec  $p_w = 1 \text{ g/cm}^3$  et  $p_d = 2,7 \text{ g/cm}^3$  il vient :

$$\lambda = 0,585 I_p \quad (25)$$

Cette corrélation est bien vérifiée expérimentalement d'après Schofield et Wroth [ 11 ] p. 159. Nous la reproduisons figure 9, où  $\lambda$  est porté en fonction de  $v_{pL} = W_L \delta_d$ .

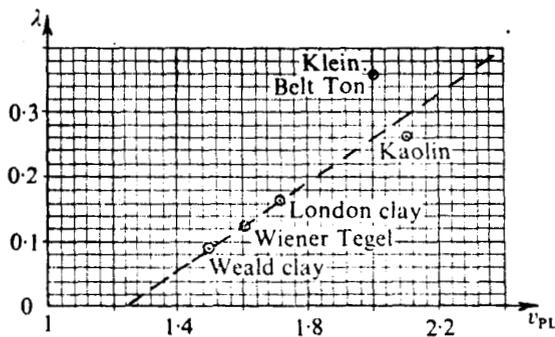


Figure 9 -  
Corrélation entre  $\lambda$  et  $v_{pL} = W_L \delta_d$  d'après Schofield et Wroth.

Schofield et Wroth ont également constaté  $p_p \# 5,5 \text{ bar}$  ce qui conduit pour le cas 1 à la conclusion suivante :

$$I_p \# 1,71 \lambda \# 0,615 (W_p - 0,09) \quad (26)$$

Cette relation (26) est à comparer à la droite de la classification

de Gasagrande (figure 10) :

(27)

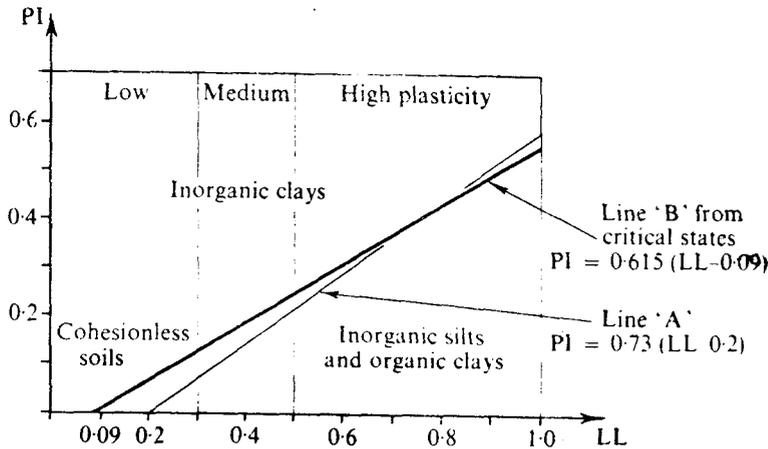


Figure 10

Ces résultats nous paraissent précieux pour cerner les sols argileux auxquels on pourra appliquer la théorie de l'Ecole de Cambridge.

### 3) Scissomètre de Laboratoire

Cet essai permet une détermination rapide de la cohésion non drainée d'un matériau purement cohérent comme une argile pure par exemple. Cette cohésion est fonction de la teneur en eau comme l'a montré HVORSLEV ce qui n'est pas a priori incompatible avec la théorie de l'Ecole de Cambridge. La courbe d'état critique est en effet paramétrée par l'indice des vides.

Le moment de rotation de la palette est supposé équilibré par un cisaillement  $\tau$  constant surtout le cylindre exinscrit (figure 11).

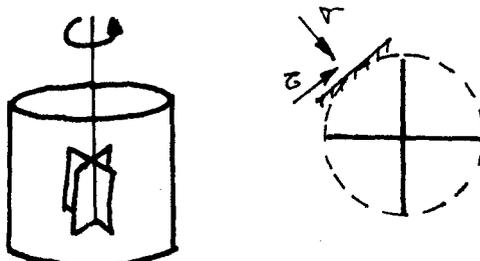


Figure 11

L'hypothèse du matériau purement cohérent conduit à la relation

$$C_u = \bar{\sigma} \quad (28)$$

Bien que nous ne connaissions pas d'autres informations sur l'état des contraintes et que celui-ci ne soit pas bi-axial de révolution supposons :

$$q = C_u \quad (29)$$

Puisque le matériau est en état de rupture, écrivons en anticipant la généralisation de la théorie :

$$q = Mp$$

avec d'après les relations (18) et (19) selon le cas étudié :

$$p = \exp\left(\frac{e_0 - \lambda + k}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{e}{\lambda}\right) \text{ cas 1}$$

$$p = \exp\left(\frac{e_0 - (\lambda - k) \ln 2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{e}{\lambda}\right) \text{ cas 2}$$

Il en résulte pour les deux cas une loi du type :

$$C_u = a \exp(-b W)$$

avec :  $a = M \exp\left(\frac{e_0 - \lambda + k}{\lambda}\right); b = \frac{\gamma_s}{\gamma_w \lambda} \text{ cas 1}$

$a = M \exp\left(\frac{e_0 - (\lambda - k) \ln 2}{\lambda}\right); b = \frac{\gamma_s}{\gamma_w \lambda} \text{ cas 2}$

Un groupe d'élèves de l'Ecole des Mines de Douai a déterminé la loi expérimentale de la kaolinite et a obtenu une loi similaire.

Les résultats sont rassemblés figure 12. Pour chaque cas on a envisagé l'application des valeurs de M en compression  $\left(M = \frac{6 \sin \varphi'}{3 - \sin \varphi'}\right)$  et en extension  $\left(M = \frac{6 \sin \varphi'}{3 + \sin \varphi'}\right)$ .

# ESSAIS AU SCISSOMETRE DE LABORATOIRE

## - KAOLIN I -

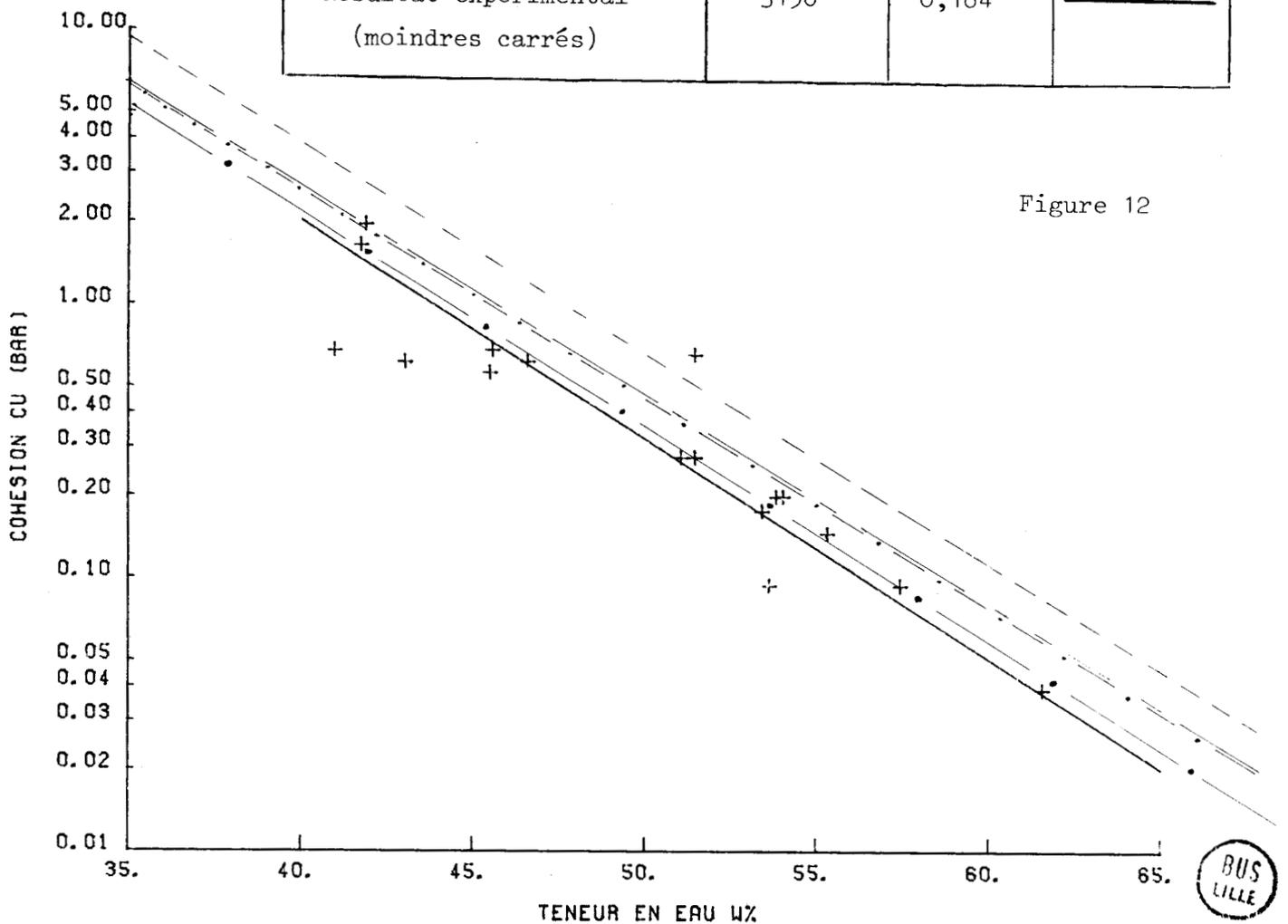
\* Caractéristiques du Kaolin :

$$\psi' = 26^\circ ; M_{\text{ext}} = 0,76 ; M_{\text{comp}} = 1,02 ; \lambda = 0,15 ; k = 0,018$$

$$e_o = 1,34 ; \gamma_s = 2,62 \text{ g/cm}^3$$

\* Courbes  $C_u = a \exp(-b W \%)$

			a	b	référence
Théorique	cas 1	compression	3207	0,175	-----
		extension	2390	0,175	-----
	cas 2	compression	4201	0,175	-----
		extension	3130	0,175	-----
Résultat expérimental (moindres carrés)			3150	0,184	-----



5.5 - Généralisation de la théorie à des chemins quelconques.

ROSCOE [ 10 ] pose comme hypothèse que la fonction d'écoulement plastique reste formellement la même :

$$f(p, q, \rho_c) = 0$$

avec

$$p = - \frac{\dot{S}_1}{3} = - \frac{1}{3} (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)$$

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{S}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2 \right)^{1/2} \quad (29)$$

D'après la théorie élasto-plastique exposée au chapitre 4 ceci est possible à la condition.:

$$A(\nu, t, E) = \overset{*}{A}(t, E)$$

$$B(\nu, t, E) = \overset{*}{B}(t, E) \quad (30)$$

$$C(\nu, t, E) = \overset{*}{C}(t, E) = 0$$

On remarquera que  $\overset{*}{C}(t, E)$  devient a fortiori identiquement nulle.

Par ailleurs la fonction de dissipation s'écrit :

$$\varphi = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = A \dot{E}_1 + B \bar{E}_2 = -p \dot{\nu} + q \dot{\epsilon}'$$

avec

$$\dot{\nu} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = \dot{E}_1$$

$$\dot{\epsilon}' = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2 \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \bar{E}_2 \quad (31)$$

1) Surface d'écoulement plastique.

Les équations (12) ou (15) selon le cas étudié peuvent être intégralement reprises et traitées avec les flux et charges généralisés donnés par les relations (31) et (29).

Ces mêmes dernières relations permettent l'écriture de la surface d'écoulement dans l'espace  $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ . Le principe de normalité est applicable comme nous l'avons vu indifféremment aux variables  $\left\{ \begin{matrix} -P \\ q \end{matrix} \right\}$ ,  $\left\{ \begin{matrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon} \end{matrix} \right\}$  d'une part ou bien  $\{\sigma\}$ ,  $\{\epsilon\}$  d'autre part.

Un problème surgit quant à la détermination de  $M$  qui peut, comme nous l'avons vu, prendre deux valeurs sur les chemins bi-axiaux de révolution en extension ou en compression.

Il est commode de représenter la section de la surface plastique dans le plan déviatorique normal à l'axe hydrostatique dans l'espace

$(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ . Pour cette raison on peut choisir un repère  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  orthonormé direct pour lequel  $\vec{e}_x$  coïncide avec l'axe hydrostatique  $\vec{\Delta}$ ,  $\vec{e}_y$  fait un angle de  $\frac{\pi}{4}$  avec  $\vec{e}_z$  et  $-\vec{e}_1$ .

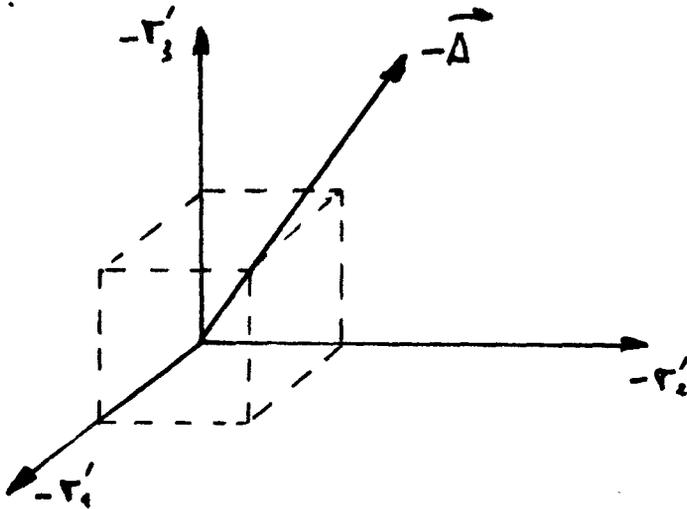


Figure 13

Les formules de changement de repère s'écrivent :

$$\sigma'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma'_x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma'_y - \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma'_z$$

$$\sigma'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma'_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma'_y - \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma'_z$$

$$\sigma'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma'_x + \frac{2}{\sqrt{6}} \sigma'_z$$

(32)

La surface de plasticité devient alors dans le repère

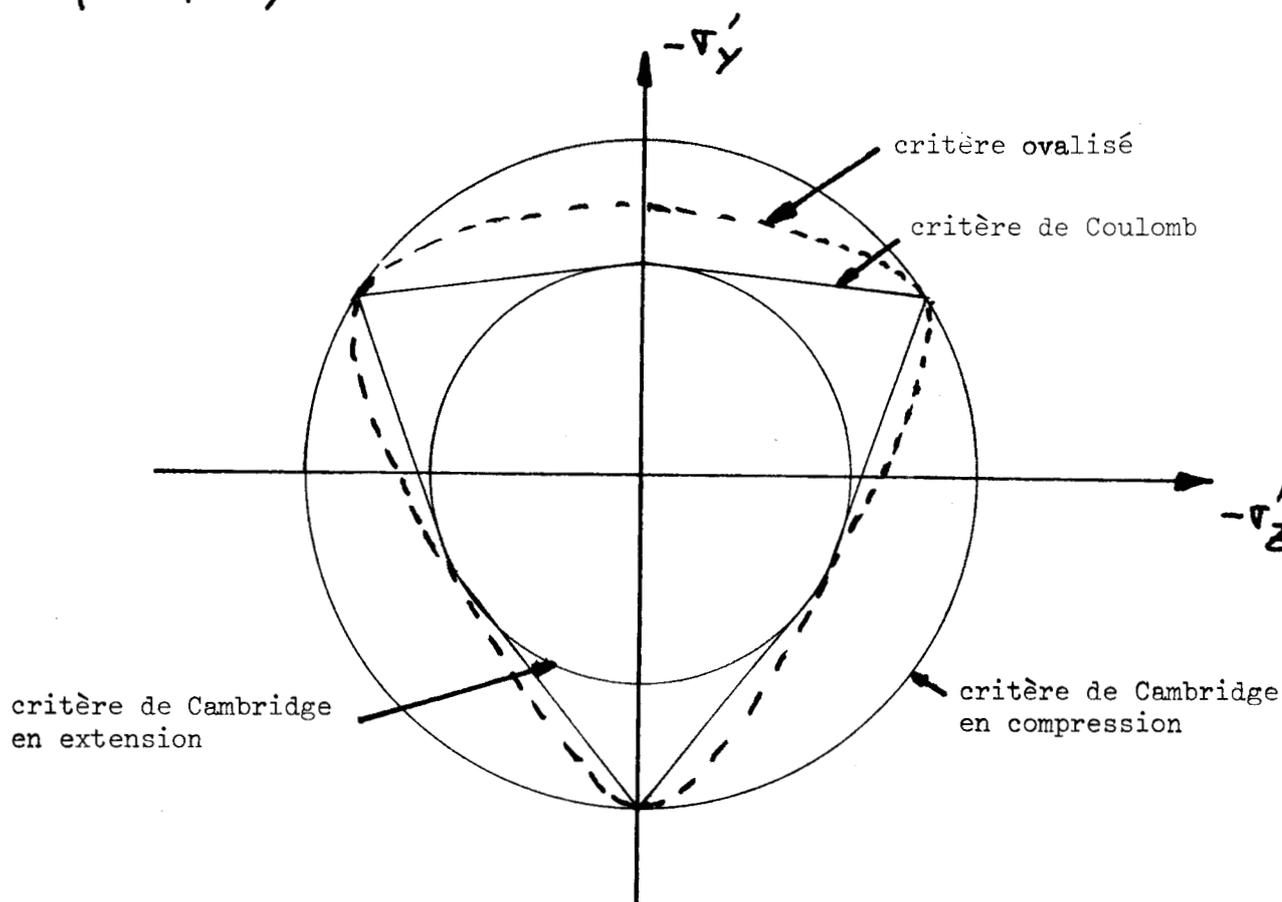
$$\begin{aligned}
 & (\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z) : \\
 \text{cas 1 : } & \sigma'^2_y + \sigma'^2_z - \frac{2}{9} \frac{M^2}{\lambda^2} \sigma'^2_x \left[ \lambda \ln \left( -\frac{\sigma'_x}{\sqrt{3}} \right) + c_c - c_o \right]^2 = 0 \\
 & \hspace{20em} (33) \\
 \text{cas 2 : } & \sigma'^2_y + \sigma'^2_z - \frac{2}{9} M^2 \sigma'^2_x \left[ \exp \left( \frac{c_o - c_c}{\lambda} \right) + \frac{\sigma'_x}{\sqrt{3}} \right]^2 = 0
 \end{aligned}$$

Il devient évident que la surface plastique coupe le plan déviatorique  $(\sigma'_y, \sigma'_z)$  selon un cercle dans les 2 cas.

La figure 13 représente la section déviatorique de la surface de plasticité au niveau de la courbe d'état critique.

Selon le choix de  $M$  il s'agit d'un cercle circonscrit ou inscrit à l'hexagone du critère de Mohr  $(\varphi', c' = 0)$ .

La coupe transversale de la surface de plasticité dans le plan  $(\sigma'_x, \sigma'_y)$  montre l'existence d'un coin pour le cas 1.



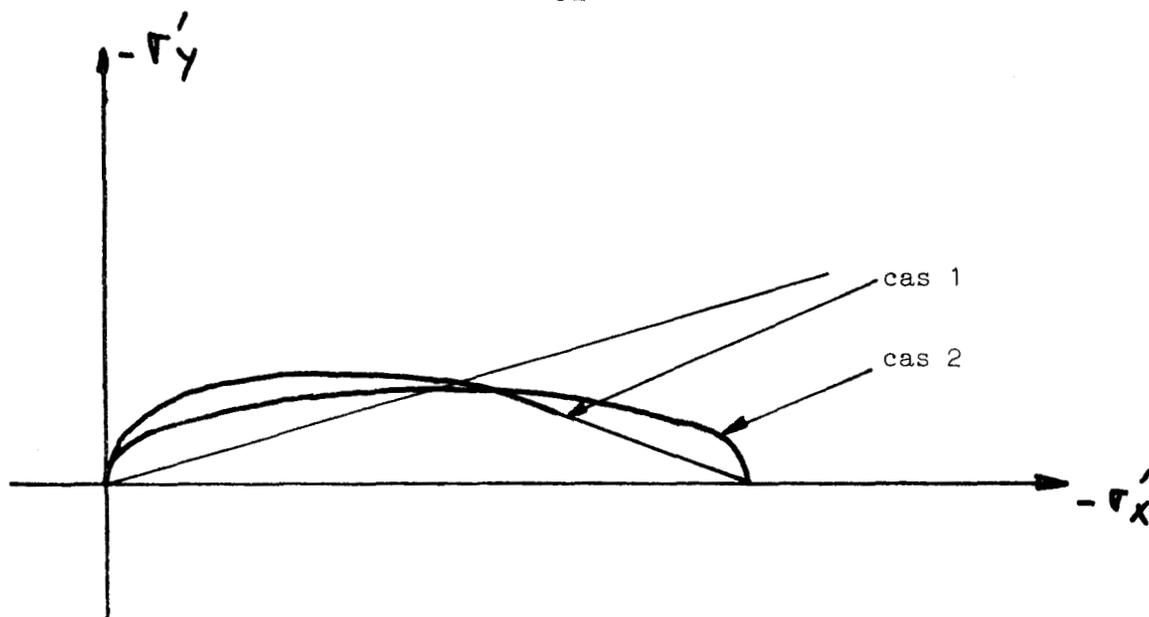


Figure 13

Enfin, bien que nous n'ayons pas résolu la question, nous suggérons sur la figure 13 une surface plastique ovalisée sans singularité qui pourrait répondre au problème posé par la détermination de  $M$ . Une fonction de dissipation satisfaisante devrait y être associée.

2) Loi élastique.

On formule l'hypothèse que la loi (21) reste la même. Elle peut s'écrire également avec les variables  $\{d\tau'\}$  et  $\{\epsilon\}$ .

$$\begin{bmatrix} d\tau'_1 \\ d\tau'_2 \\ d\tau'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2D_2 - 3D_1) & & \\ -\frac{1}{3}[D_2 + 3D_1] & \frac{1}{3}(2D_2 - 3D_1) & \\ -\frac{1}{3}[D_2 + 3D_1] & -\frac{1}{3}(D_2 + 3D_1) & \frac{1}{3}(2D_2 - 3D_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(e)} \\ \epsilon_2^{(e)} \\ \epsilon_3^{(e)} \end{bmatrix} \quad \text{sym.} \quad (34)$$

3) Loi élasto-plastique.

Le paragraphe 4) de 5.3 peut être intégralement repris. Les expressions y sont formellement les mêmes qu'il s'agisse par ailleurs des grandeurs  $\left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$ ,

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \quad \text{ou bien} \quad \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{matrix} \right\} .$$

Dans le cas 1 le coin peut être traité de la façon énoncée au chapitre 4. Précisons pour cela qu'il faut prendre :

$$\text{pour } q \geq 0 \quad f_1(p, q) = \lambda q + M_{\text{comp}} p (\lambda L_h p + e_c - e_0) = 0$$

$$\text{pour } q \leq 0 \quad f_2(p, q) = \lambda q + M_{\text{ext}} p (\lambda L_h p + e_c - e_0) = 0$$

Quant à la variation  $de_c$  du coefficient d'écroutissement sur l'arête :

$$\begin{aligned} de_c &= \frac{\lambda}{\lambda - k} \left( de_1^{(p)} + de_2^{(p)} \right) \\ &= -\frac{\lambda}{\lambda - k} \left( d\mu_1 \frac{\partial f_1}{\partial p} + d\mu_2 \frac{\partial f_2}{\partial p} \right) (1 + e) \end{aligned}$$

En définitive, pour les deux types de lois envisagées, le matériau est défini par les cinq paramètres intrinsèques  $k, \lambda, e_0, \nu, \varphi'$ .

C'est l'hypothèse d'isotropie qui conduit à ce nombre aussi réduit.

Nous envisageons plus loin (chapitre 6-4) une extension de la théorie en plasticité standard et non standard avec la définition de deux nouveaux paramètres.

## CHAPITRE 6

### ETUDE DE L'ESSAI OEDOMETRIQUE A LONG TERME

Cette étude est motivée par le besoin de situer la courbe de compressibilité oedométrique par rapport à la courbe de compressibilité isotrope. Il ne s'agit pas ici d'étudier le phénomène de la consolidation dans le temps sous charge constante.

L'analyse de l'essai oedométrique est menée selon la théorie de l'Ecole de Cambridge et comparée à des résultats expérimentaux obtenus à partir de kaolin reconstitué. Une extension de la théorie est proposée en fin de chapitre en plasticité standard et non standard.

#### 6.1 - L'essai oedométrique.

L'essai oedométrique est en fait un essai bi-axial de révolution fretté latéralement et drainé.

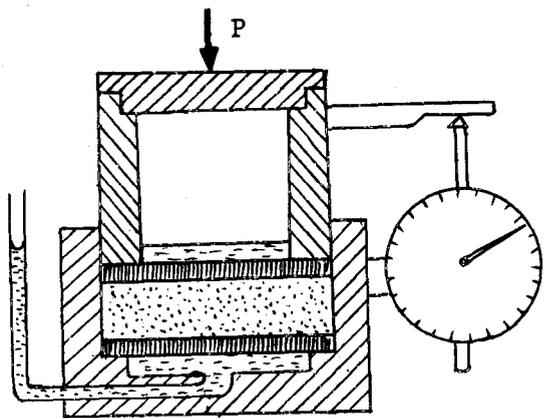


Figure 1 - Schéma de l'appareillage oedométrique.

Si l'on néglige les frottements l'état de l'échantillon est analogue à celui de l'échantillon "tri-axial" avec  $\epsilon_3 = 0$ . Il s'ensuit :

- pour les contraintes.

$$\overline{\overline{\sigma}}' = \begin{bmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

de même pour les incréments.

$$p = -\frac{1}{3} [\sigma'_1 + 2\sigma'_3] ; \quad q = -(\sigma'_1 - \sigma'_3) \quad (2)$$

- pour les déformations :

En petite perturbation :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

en effet la fonction de déplacement  $\vec{U}$  a pour composantes :

$$\vec{U} = \begin{cases} U_1(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Il en résulte :

$$\nu = \epsilon_1 ; \quad \epsilon = -\frac{2}{3} \epsilon_1 = -\frac{2}{3} \nu \quad (4)$$

## 6.2 - Application de la théorie de l'Ecole de Cambridge.

L'échantillon est caractérisé par les paramètres intrinsèques

$\lambda$ ,  $k$ ,  $e_0$ ,  $\varphi'$  et le paramètre historique  $e_c$ .

Il est placé en état relâché (sollicitations extérieures nulles) dans la cellule oedométrique. Soient  $e_i$ ,  $p_i$ ,  $q_i$  son état initial.

$p_i$ ,  $q_i$  représentent des tensions internes sur lesquelles il faudra revenir.

1) Phase élastique.

Les relations incrémentales du comportement élastique sont directement déduites des formules 5 (21) et 5 (34) :

$$\bar{p} = D_1 \epsilon_1 \quad ; \quad \bar{q} = -D_2 \epsilon_1$$

$$\bar{\sigma}'_1 = \frac{1}{3} (2D_2 - 3D_1) \epsilon_1$$

$$\bar{\sigma}'_3 = -\frac{1}{3} (D_2 + 3D_1) \epsilon_1$$

avec  $D_1 = -p \frac{1+\nu}{k}$

$$D_2 = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{3p(1+\nu)}{k}$$

et l'on obtient plus simplement :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'_1 &= 3 \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1+\nu}{k} p \epsilon_1 \\ \bar{\sigma}'_3 &= 3 \frac{\nu}{1+\nu} \frac{1+\nu}{k} p \epsilon_1 \end{aligned} \tag{5}$$

On peut remarquer :

$$\frac{\bar{\sigma}'_3}{\bar{\sigma}'_1} = \frac{\nu}{1-\nu} \tag{6}$$

L'intégration de la première des relations (5) est facile; en effet :

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} (\bar{\sigma}'_1 + 2\bar{\sigma}'_3) = -\frac{\sigma'_1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

$$p = p_i - \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} (\sigma'_1 - \sigma'_{1i})$$

d'où :

$$e = e_i - k \ln \left[ \frac{\sigma'_1 - (\sigma'_{1i} + 3p_i \frac{1-\nu}{1+\nu})}{-3p_i \frac{1-\nu}{1+\nu}} \right] \quad (6)$$

L'entrée en plasticité s'effectue lorsque  $\sigma'_1(p)$  est solution de l'équation de la surface de plasticité dans laquelle :

$$p = p_i - \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} (\sigma'_1 - \sigma'_{1i})$$

$$q = q_i - \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\sigma'_1 - \sigma'_{1i})$$

Nous suggérons de prendre  $q_i = 0$  et  $p_i$  la tension interne en limite de liquidité sur la courbe d'état critique.

cas 1 : 
$$p_i = \exp \left( \frac{e_0 - e_{LL} - \lambda + k}{\lambda} \right)$$

cas 2 : 
$$p_i = \exp \left( \frac{e_0 - e_{LL} - (\lambda - k) \ln 2}{\lambda} \right)$$

avec 
$$\sigma'_{1i} = -p_i$$

Il vient alors :

cas 1 : 
$$\sigma'_1(p) = \sigma'_{1i} - \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \exp \left( \frac{e_0 - e_c}{\lambda} - \frac{3}{M} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \right)$$

cas 2 : 
$$\sigma'_1(p) = \sigma'_{1i} - \frac{3(1-\nu^2)}{9(1-2\nu)^2 + M^2(1+\nu)^2} M^2 \exp \left( \frac{e_0 - e_c}{\lambda} \right)$$

$p_i$  étant faible devant  $p(p)$  on remarque qu'à l'entrée en plasticité :

$$\left( \frac{q}{p} \right) (p) \neq \frac{3(1-2\nu)}{1+\nu}$$

L'entrée en plasticité se fera dans le domaine  $\frac{q}{p} < M$  si

$\nu > \frac{3-M}{M+6}$  . Ce ne sera pas le cas dans la suite, mais nous

appliquerons la théorie de Cambridge. Pour les argiles usuelles (confer tableau 1) cette limite inférieure varie de 0.28 à 0.35.

2) Phase élasto-plastique.

En reprenant la loi incrémentale définie par les relations du paragraphe 4) 5.3 on obtient compte tenu de (4) :

$$\begin{aligned} dp &= \varepsilon_1 \frac{D_1}{G} \left[ G + D_1 \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)^2 + \frac{2}{3} \beta D_1 \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \right] \\ dq &= \varepsilon_1 \beta \frac{D_1}{G} \left[ \frac{2}{3} G + D_1 \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{2}{3} \beta D_1 \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

avec  $\beta = 3 \frac{1-2\nu}{1+\nu}$  et  $G = -D_1 \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)^2 - \beta D_1 \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 + \frac{\lambda}{\lambda-k} (1+\nu) \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q}$

Par conséquent :

- pour le cas 1 :

$$\begin{aligned} dp &= \varepsilon_1 D_1 \frac{\left( \frac{kM}{(\lambda-k)} - \frac{2}{3} \beta \right) \left( M - \frac{q}{p} \right) + \beta}{\left( M - \frac{q}{p} \right)^2 + \frac{kM}{(\lambda-k)} \left( M - \frac{q}{p} \right) + \beta} \\ dq &= \beta \varepsilon_1 D_1 \frac{\left( M - \frac{q}{p} \right) \left[ \frac{2}{3} \left( M - \frac{q}{p} \right) + \frac{2}{3} \frac{kM}{(\lambda-k)} - 1 \right]}{\left( M - \frac{q}{p} \right)^2 + \frac{kM}{(\lambda-k)} \left( M - \frac{q}{p} \right) + \beta} \end{aligned} \quad (8)$$

- pour le cas 2 :

$$d\rho = \varepsilon_1 D_1 \frac{\frac{k}{(\lambda-k)} \left( M^4 \frac{\rho^2}{q^2} - \frac{q^2}{\rho^2} \right) - \frac{4}{3} \beta \left( M^2 \frac{\rho}{q} - \frac{q}{\rho} \right) + 4\beta}{\left( M^2 \frac{\rho}{q} - \frac{q}{\rho} \right)^2 + \frac{k}{(\lambda-k)} \left( M^4 \frac{\rho^2}{q^2} - \frac{q^2}{\rho^2} \right) + 4\beta}$$

$$dq = \beta \varepsilon_1 D_1 \frac{2 \left( M^2 \frac{\rho}{q} - \frac{q}{\rho} \right) \left[ \frac{1}{3} \left( M^2 \frac{\rho}{q} - \frac{q}{\rho} \right) + \frac{1}{3} \left( M^2 \frac{\rho}{q} - \frac{q}{\rho} \right) \frac{k}{\lambda-k} - 1 \right]}{\left( M^2 \frac{\rho}{q} - \frac{q}{\rho} \right)^2 + \frac{k}{\lambda-k} \left( M^4 \frac{\rho^2}{q^2} - \frac{q^2}{\rho^2} \right) + 4\beta} \quad (9)$$

Expérimentalement la courbe de compression oedométrique tend vers une courbe parallèle à la courbe de compression vierge isotrope dans une représentation logarithmique.

C'est ce qui se passe lorsque  $\frac{q}{\rho}$  tend vers une valeur constante  $a$  ; en effet en reprenant l'équation de la surface plastique :

- pour le cas 1 :

$$e_c = e_0 - \lambda \frac{a}{M} - \lambda \ln \rho$$

or rappelons :

$$e = e_c - k \ln \frac{\rho}{\rho_c}$$

$$e_c = e_0 - \lambda \ln \rho_c$$

et on obtient :

$$e = e_0 - (\lambda - k) \frac{a}{M} - \lambda \ln \rho$$

$$e = e_0 - \lambda \ln(-\tau'_1) + \lambda \ln \left( 1 + \frac{2}{3} a \right) - (\lambda - k) \frac{a}{M} \quad (10)$$

- pour le cas 2 :

$$e_c = e_0 - \lambda \ln \left( 1 + \frac{a^2}{M^2} \right) - \lambda \ln \rho$$

et de la même façon que pour le cas précédent :

$$e = e_0 - (\lambda - k) \ln \left( 1 + \frac{a^2}{M^2} \right) - \lambda \ln \rho$$

$$e = e_0 - \lambda \ln(-\tau'_1) + \lambda \ln \left( 1 + \frac{2}{3} a \right) - (\lambda - k) \ln \left( 1 + \frac{a^2}{M^2} \right) \quad (11)$$

Cherchons si une telle condition peut être remplie par les relations (7) pour les deux cas. Remarquons d'abord :

$$\frac{q}{p} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dp} = a$$

- cas 1

A partir des relations (8) on peut montrer que  $a$  doit être solution de :

$$a^2 - a \left( M_c + \frac{2}{3} \beta \frac{\lambda}{k} \right) + \beta \left( \frac{1}{3} \frac{\lambda}{k} (2M_c - 3) + 1 \right) = 0 \quad (12)$$

Les valeurs usuelles de  $M_c$ ,  $\lambda$ ,  $k$  et en supposant  $\mu$  variant de -1 à 0,5 ne donnent une solution que lorsque le produit des racines du trinôme est positif; c'est-à-dire à la condition :

$$\frac{\lambda}{k} \leq \frac{3}{3 - 2M_c} \quad (13)$$

Le résultat de nos investigations est reporté dans le tableau 1 à partir d'argiles dont les caractéristiques sont données par SCHOFIELD et WROTH [11], p. 157.

	$M_c$	$\lambda$	$k$	$\frac{\lambda}{k} - \frac{3}{3-2M}$	a	
					cas 1	cas 2
Klein Belton	0,845	0,356	0,184	< 0	0,067	0,30
Wiener Tegel	1,01	0,122	0,026	> 0	0	0,33
Argile de Londres	0,888	0,161	0,062	> 0	0	0,30
Argile de Weald	0,95	0,093	0,035	< 0	0,009	0,32
Kaolin	1,02	0,26	0,05	> 0	0	0,33

Tableau 1

Les calculs de  $a$  ont été menés à partir de  $\nu = 0,3$ . De fait une variation de  $\nu$  a peu d'effet sur ces valeurs.

Si l'on reprend les relations (8), on peut montrer que pour les valeurs usuelles de  $M_c$ ,  $\lambda$ ,  $k$  et pour  $\nu$  de l'ordre de 0,3 plasticité se poursuit avec  $dp > 0$  et  $dq < 0$ . Lorsque  $a$  n'existe pas on doit donc envisager de traiter le comportement plastique au coin de la surface.

D'après ce qui a été vu à ce sujet à partir de la théorie de Koiter [ 16 ], on doit avoir sur la singularité :

$$\nu = \varepsilon_3 = \frac{-k}{p(1+\nu)} dp - d\mu_1 \frac{\partial f_1}{\partial p} - d\mu_2 \frac{\partial f_2}{\partial p}$$

$$\varepsilon = -\frac{2}{3} \varepsilon_3 = \beta \frac{k}{p(1+\nu)} dq + d\mu_1 \frac{\partial f_1}{\partial p} + d\mu_2 \frac{\partial f_2}{\partial q}$$

$$f_1 = \lambda q + M_c p (\lambda \ln p + \varepsilon_c - \varepsilon_0) = 0$$

$$f_2 = -\lambda q + M_{ext} p (\lambda \ln p + \varepsilon_c - \varepsilon_0) = 0$$

$$\frac{d\varepsilon_c}{1+\nu} - \frac{\lambda}{\lambda-k} \left( d\mu_1 \frac{\partial f_1}{\partial p} + d\mu_2 \frac{\partial f_2}{\partial p} \right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} dp + \frac{\partial f_1}{\partial q} dq + \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_c} d\varepsilon_c = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} dp + \frac{\partial f_2}{\partial q} dq + \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_c} d\varepsilon_c = 0$$

avec en outre  $q = 0$  et  $d\mu_1 \geq 0$   $d\mu_2 \geq 0$ .

La solution de ce système est simple :

$$dq = 0$$

$$dp = - \frac{p(1+e)}{\lambda} \epsilon_3$$

$$d\mu_1 = - \frac{\epsilon_3}{\lambda(M_c + M_{ext})} \left( \frac{2}{3} M_{ext} + \frac{\lambda - k}{\lambda} \right) > 0 \quad (14)$$

$$d\mu_2 = - \frac{\epsilon_3}{\lambda(M_c + M_{ext})} \left( \frac{3 - 2M_c}{3} - \frac{k}{\lambda} \right)$$

$d\mu_1$  est toujours positif; par contre pour que  $d\mu_2 \geq 0$  il faut :

$$\frac{\lambda}{k} \geq \frac{3}{3 - 2M_c} \quad (15)$$

dans le cas contraire, il a été montré par (13) qu'il existe une solution du trinôme (12).

Remarquons que nous avons pris en compte les deux valeurs de  $M$  en compression et en extension pour définir  $b_1$  et  $b_2$  respectivement.

- cas 2.

Dans le domaine de compression on obtient de la même façon un polynôme de degré 5 :

$$a^5 - \frac{2}{3} \beta \frac{\lambda}{k} a^4 - 2\beta \left[ \frac{\lambda}{k} - 1 \right] a^3 - \left[ M^4 + 2\beta M^2 \left( \frac{\lambda}{k} - 1 \right) \right] a + \frac{2}{3} \beta M^4 \frac{\lambda}{k} = 0 \quad (16)$$

L'étude numérique de ce polynôme pour les cinq argiles considérées conduit à une solution unique de l'ordre de  $a = 0,30$ .

Ces valeurs données dans le tableau 1 ont été calculées pour  $\nu = 0,3$ . Encore une fois la valeur de  $\nu$  a peu d'influence sur la solution.

Remarquons enfin que l'écart d'indice des vides maximum entre les courbes de compressibilité oedométrique et isotrope est de l'ordre de  $\Delta e = - 0,02$ . L'étude qui suit a pour objet l'étude expérimentale de cet écart et la modification de la théorie en conséquence.

### 6.3 - Etude expérimentale.

Il s'agit de comparer l'essai de compressibilité isotrope réalisé dans une cellule "triaxiale" à l'essai oedométrique.

Deux types d'argiles reconstituées ont été utilisées : un kaolin pratiquement pur (Kaolin I) et un kaolin comportant une proportion non chiffrée d'illite (Kaolin II).

#### 1) PREPARATION DE L'ECHANTILLON

Le matériau, initialement sec est broyé puis tamisé à  $80\mu$ . Malaxé en présence d'eau il est porté à un état liquide homogène (au delà de la limite de liquidité). Il est ensuite préconsolidé dans un cylindre à piston dont le dessin est donné ci-dessous.

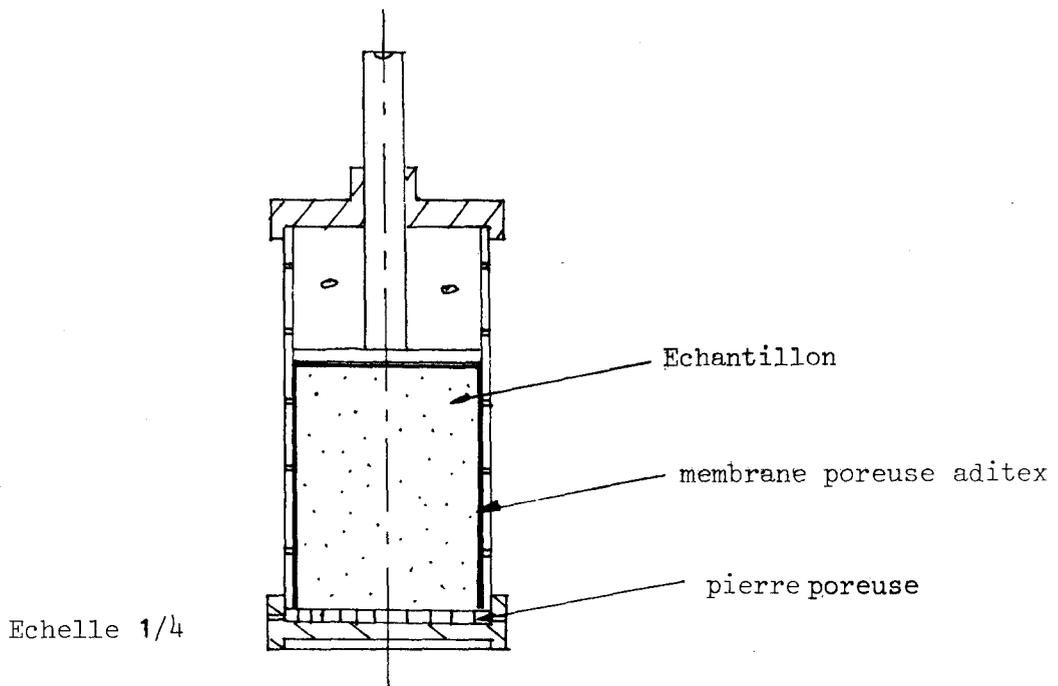


Figure 2 - Appareil de préconsolidation.

Cette préconsolidation n'est pas contrôlée quantitativement mais conduit à un matériau homogène dont la teneur en eau est de l'ordre de 50 %.

Des mesures de teneur en eau sont données ci-dessous après une préconsolidation :

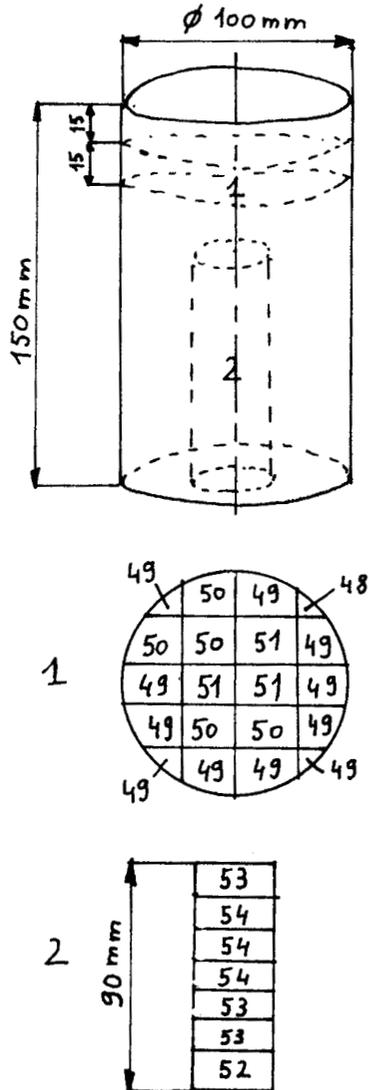


Figure 3 - Teneurs en eau locales  $W\%$   
d'un échantillon préconsolidé.

2) CARACTERISTIQUES DES DEUX MATERIAUX UTILISES

Elles sont données dans le tableau suivant :

	Kaolin I	Kaolin II	Observations
Limite de liquidité WL	65 %	50,9 %	
Limite de plasticité WP	35 %	33,3 %	
Indice de plasticité Ip	30 %	17,6 %	
Masse volumique des grains $\rho_s$	2,62g/cm <sup>3</sup>	2,63g/cm <sup>3</sup>	
Angle de frottement interne $\phi'$	26 ° *	23°	déduit d'essais consolidés non drainés en cellule "triaxiale" avec mesure de u
$M = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'}$	1,02 *	0,90	
$e_o$	1,34	1,14	
$\lambda$	0,150	0,134	$e_o, \lambda, k$ sont déduits des courbes de compressibilité isotrope.
k	0,018	0,05	
$\nu$	non mesuré	0,0717	déduit des essais d'expansion de cylindre creux

\* valeur non mesurée empruntée à la bibliographie (Schofield et Wroth [11])

TABLEAU 2



### 3) RESULTATS DES ESSAIS DE COMPRESSIBILITE

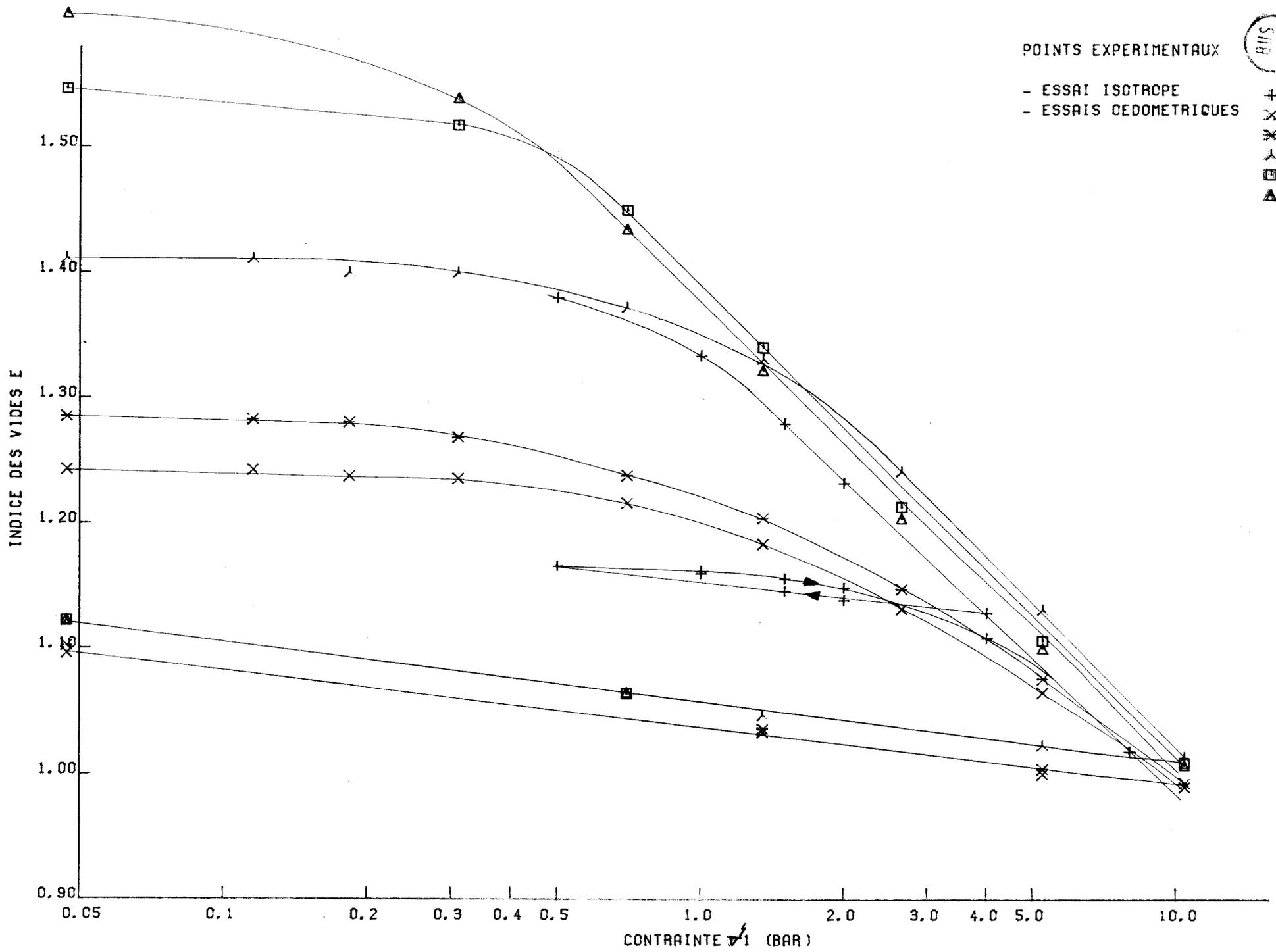
Le tableau suivant compare les résultats expérimentaux et théoriques avec la mise en évidence du peu d'influence de  $\nu$  sur les calculs théoriques.

			KAOLIN I	KAOLIN II
Ecart $\Delta$ expérimental entre les courbes de compressibilité			0,033	0,039
CAS 1	$\nu = 0,33$	$a = \frac{q}{p}$	0	0
		$\Delta$	0	0
	$\nu = 0,0717$	a	0	0
		$\Delta$	0	0
CAS 2	$\nu = 0,33$	a	0,34	0,31
		$\Delta$	0,017	0,016
	$\nu = 0,0171$	a	0,35	0,35
		$\Delta$	0,017	0,017

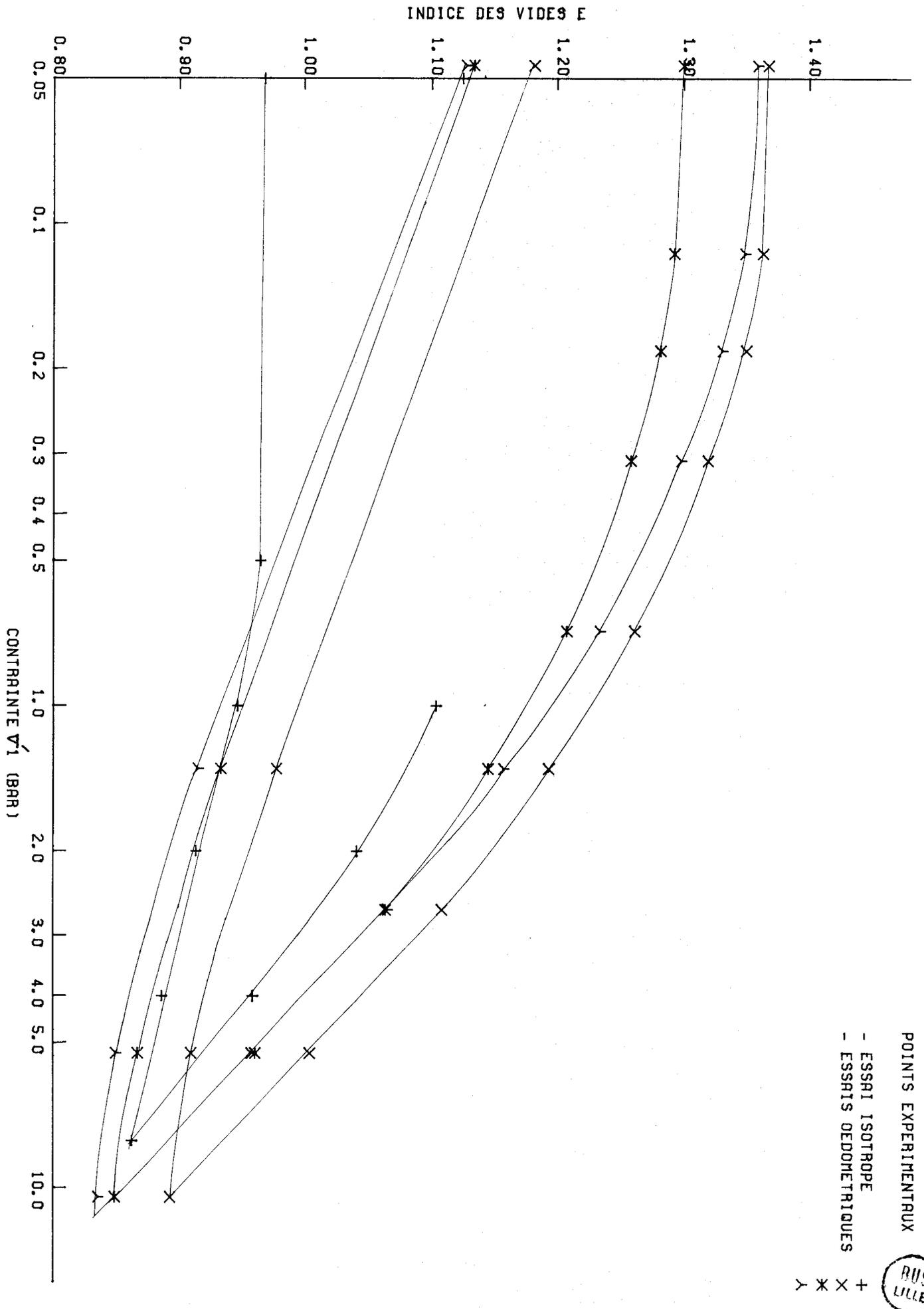
Les courbes expérimentales pages 97 et 98 révèlent combien il est difficile de déterminer  $\Delta$  avec une bonne précision. Les dispersions sont grandes par rapport à l'ordre de grandeur du décalage à déterminer.

Précisons que les paliers de mesure ont été menés jusqu'à consolidation quasi-totale. Les courbes de compressibilité ont été construites à partir de l'état final de l'échantillon, éliminant ainsi tous problèmes de non saturation totale en début d'essai.

# ESSAIS DE COMPRESSIBILITE - KAOLIN I



# ESSAIS DE COMPRESSIBILITE - KAOLIN II



#### 6.4 - Extension de la théorie de Cambridge en plasticité standard et non standard

La théorie de Cambridge classique conduit à un écart  $\Delta$  bien trop faible entre les courbes de compressibilité oedométrique et isotrope. Par ailleurs le coefficient  $K_0$  atteint à l'asymptote oedométrique est trop grand par rapport à la réalité.

En conséquence nous sommes amenés ici à modifier la théorie selon deux voies :

- extension de la théorie en restant en plasticité standard (même fonction pour la surface plastique et pour le potentiel des déformations plastiques) en y introduisant un paramètre  $\gamma$ . Cette extension est envisagée pour chacun des deux cas déjà étudiés.
- extension de la théorie en plasticité non standard. Les deux lois généralisées par les paramètres  $\gamma_m$  et  $\gamma_d$  dans la première extension sont assemblées pour servir de surface plastique et de potentiel des déformations plastiques.



##### 1) Extension de la théorie de Cambridge en plasticité standard

Les deux cas de plasticité étudiés jusqu'à présent étaient fondés principalement sur la donnée partielle de la fonction de dissipation :

cas 1 :  $\varphi = M p \dot{\epsilon}^{(p)}$

cas 2 :  $\varphi = p \sqrt{\dot{\epsilon}^{(p)2} + (M \dot{\epsilon}^{(p)})^2}$

Il aurait été équivalent de poser :

cas 1 :  $\dot{\epsilon}^{(p)} = \left( \frac{q}{p} - M \right) \dot{\epsilon}^{(p)}$

cas 2 :  $\dot{\epsilon}^{(p)} = \frac{\left( \frac{q}{p} \right)^2 - M^2}{2 \left( \frac{q}{p} \right)} \dot{\epsilon}^{(p)}$

L'idée d'extension proposée ici est de généraliser les expressions ci-dessus en y introduisant un paramètre supplémentaire  $\gamma$  :

cas 1' :  $\dot{v}^{(P)} = \gamma \left( \frac{q}{p} - M \right) \dot{\epsilon}^{(P)}$

cas 2' :  $\dot{v}^{(P)} = \gamma \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^2 - M^2}{2 \left(\frac{q}{p}\right)} \dot{\epsilon}^{(P)}$

Les expressions (17) continuent de respecter la condition d'écoulement à volume constant sur la courbe d'état critique  $M = \frac{q}{p}$ . Cela n'aurait pas été le cas si on avait directement multiplié  $\varphi$  par  $\gamma$ .

La fonction de dissipation devient en conséquence :

cas 1' :  $\varphi = p \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \dot{v}^{(P)} + M \dot{\epsilon}^{(P)} \right)$

cas 2' :  $\varphi = p \dot{v}^{(P)} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right) + p \sqrt{\left( \frac{\dot{v}^{(P)}}{\gamma} \right)^2 + \left( \dot{\epsilon}^{(P)} M \right)^2}$

On peut, de la même façon qu'au paragraphe 5-3, intégrer ces relations et on obtient :

cas 1' :  $p = \exp\left(\frac{e_0 - e_c}{\lambda}\right) (M\gamma^2)^{\frac{1}{1-\gamma}} \frac{\dot{\epsilon}^{(P) \frac{1}{1-\gamma}}}{\left[ (1-\gamma)\dot{v}^{(P)} + \gamma M \dot{\epsilon}^{(P)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}}$

(19)  $q = p \left( \frac{1}{\gamma} \frac{\dot{v}^{(P)}}{\dot{\epsilon}^{(P)}} + M \right)$

cas 2' :  $p = \exp\left(\frac{e_0 - e_c}{\lambda}\right) \left[ A - \frac{\dot{v}^{(P)}}{\gamma} \right]^{k_1} \left[ \left( A - \frac{\dot{v}^{(P)}}{\gamma} \right)^2 + \left( \frac{2-\gamma}{\gamma} \right) \dot{\epsilon}^{(P) 2} M^2 \right]^{k_2}$

$q = p \left[ \frac{\dot{v}^{(P)}}{\gamma \dot{\epsilon}^{(P)}} + \sqrt{\left( \frac{\dot{v}^{(P)}}{\gamma \dot{\epsilon}^{(P)}} \right)^2 + M^2} \right]$

avec  $A = \sqrt{\left( \frac{\dot{v}^{(P)}}{\gamma} \right)^2 + \left( \dot{\epsilon}^{(P)} M \right)^2}$  ;  $k_1 = \frac{2}{2-\gamma}$  ;  $k_2 = -\frac{1}{2-\gamma}$

Les relations (19) constituent les relations paramétriques de la surface de plasticité. L'élimination de  $t = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\dot{\epsilon}^{(p)}}{\dot{\epsilon}^{(p)}}$  permet de retrouver la forme classique  $f(p, q, e_c) = 0$  de la surface de plasticité.

$$\text{Cas 1'} : f(p, q, e_c) = q - \frac{\gamma M p}{1-\gamma} \left[ \left( \frac{p_c}{p} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \gamma \left( M - \frac{q}{p} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_c} = \frac{1}{\lambda} \left[ (1-\gamma) q + M \gamma p \right]$$

(Le cas 1 correspond bien à la limite du cas 1' lorsque  $\gamma \rightarrow 1$ )

$$\text{cas 2'} : f(p, q, e_c) = q - M p \sqrt{\frac{\gamma}{2-\gamma} \left[ \left( \frac{p_c}{p} \right)^{2-\gamma} - 1 \right]}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\gamma}{2} \left( M^2 \frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_c} = \frac{1}{2\lambda} \left[ q(2-\gamma) + \gamma M^2 \frac{p^2}{q} \right]$$

(Le cas 2 n'est pas une singularité pour le cas 2').

La limite du cas 2' lorsque  $\gamma \rightarrow 0$  s'obtient facilement :

$$f(p, q, e_c) = q - \pi p \sqrt{2 \operatorname{Ln} \left( \frac{p c}{p} \right)} = 0$$

Rappelons : 
$$p_c = \exp \left( \frac{e_0 - e_c}{\lambda} \right)$$

L'analyse de l'asymptote oedométrique se fait de la même façon que celle exposée au paragraphe 6-2.

- équation de l'asymptote oedométrique :

cas 1' : 
$$e = e_0 - \lambda \operatorname{Ln}(-r'_i) + \lambda \operatorname{Ln} \left( 1 + \frac{2a}{3} \right) - \frac{(\lambda - k)}{(1 - \gamma)} \operatorname{Ln} \left[ 1 + a \frac{(1 - \gamma)}{M \gamma} \right]$$

cas 2' : 
$$e = e_0 - \lambda \operatorname{Ln}(-r'_i) + \lambda \operatorname{Ln} \left( 1 + \frac{2a}{3} \right) - \frac{(\lambda - k)}{(2 - \gamma)} \operatorname{Ln} \left[ 1 + \frac{a^2 (2 - \gamma)}{M^2 \gamma} \right]$$

- relation entre  $a$  et  $\gamma$  sur l'asymptote oedométrique.

cas 1' : 
$$\gamma = \frac{1}{\pi - a} \frac{\beta}{\frac{k}{\lambda - k} \left( \frac{2}{3} \beta - a \right) + \frac{2}{3} \beta}$$

cas 2' : 
$$\gamma = \frac{2}{\left( \frac{M^2}{a} - a \right)} \frac{\beta}{\frac{k}{\lambda - k} \left( \frac{2}{3} \beta - a \right) + \frac{2}{3} \beta}$$

## 2) Extension de la théorie de Cambridge en plasticité non standard.

La seconde voie théorique explorée consiste à conjuguer les cas 1' et 2' en utilisant un des deux comme surface plastique  $\Phi = 0$  et l'autre comme potentiel plastique  $F$  et inversement. Ce seront les cas 3 et 4.

De façon générale la loi plastique est définie par :

- la surface plastique : 
$$\Phi(p, q, e_c) = 0$$

- le potentiel plastique des déformations :

$$F(p, q, e_r) = 0$$

$$\varepsilon_{ij}^{(p)} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma'_{ij}}$$

Comme pour la plasticité standard ( $F=\varphi$ ) on peut expliciter la loi incrémentale :

$$[d\sigma'] = [D_{ep}] [\varepsilon]$$

$$[D_{ep}] = [D] - [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right\} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma'} \right\}^T [D] / \left( A + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma'} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right\} \right)$$

$$A = - \frac{\partial \varphi}{\partial e_c} (1+e) \frac{\lambda}{\lambda-k} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma'_1} + \frac{\partial F}{\partial \sigma'_2} + \frac{\partial F}{\partial \sigma'_3} \right)$$

Deux cas peuvent ainsi être construits

cas 3 :  $\varphi$  est donné pour le cas 1' avec  $\gamma = \gamma_m$   
 $F$  est donné pour le cas 2' avec  $\gamma = \gamma_d$

cas 4  $\varphi$  est donné pour le cas 2' avec  $\gamma = \gamma_m$   
 $F$  est donné pour le cas 1' avec  $\gamma = \gamma_d$

Quant à l'asymptote oedométrique elle est définie par :

cas 3

$$e = e_0 - \lambda \ln(-\sigma'_1) + \lambda \ln\left(1 + \frac{2}{3}a\right) - \frac{(\lambda-k)}{(1-\gamma_m)} \ln\left(1 + \frac{a(1-\gamma_m)}{\pi \gamma_m}\right)$$

$$\gamma_d = \frac{2}{\left(\frac{\pi^2}{a} - a\right)} \frac{\beta}{\frac{k}{\lambda-k} \left(\frac{2}{3}\beta - a\right) + \frac{2}{3}\beta}$$

cas 4

$$e = e_0 - \lambda \ln(-\sigma'_1) + \lambda \ln\left(1 + \frac{2}{3}a\right) - \frac{(\lambda-k)}{(1-\gamma_m)} \ln\left(1 + \frac{a^2(2-\gamma_m)}{\pi^2 \gamma_m}\right)$$

$$\gamma_d = \frac{1}{\pi - a} \frac{\beta}{\frac{k}{\lambda-k} \left(\frac{2}{3}\beta - a\right) + \frac{2}{3}\beta}$$

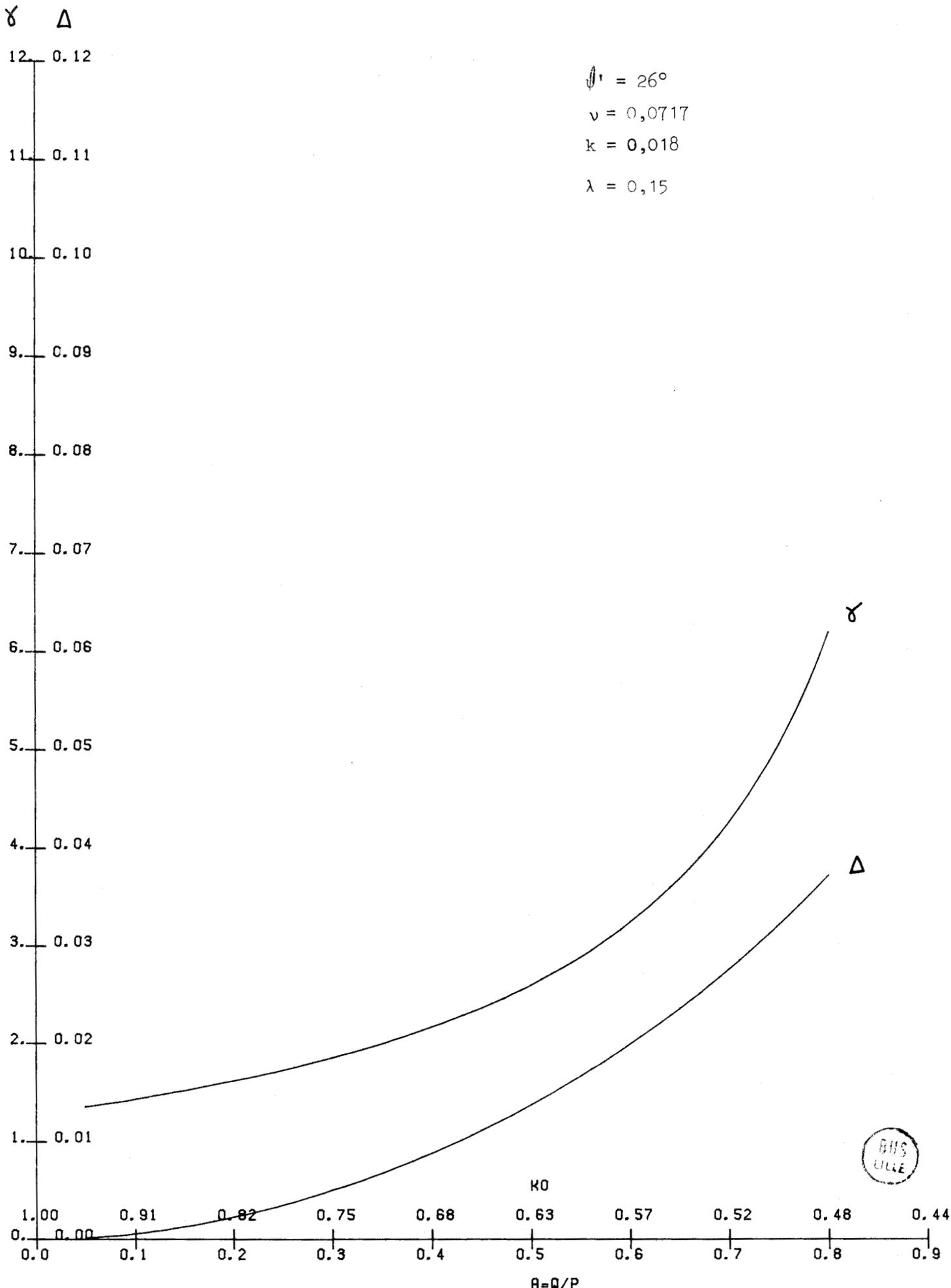
### 3) Résultats

Le tableau suivant donne les valeurs de  $\gamma$  qui permettent de simuler l'écart  $\Delta$  expérimental entre les courbes de consolidation isotrope et oedométrique pour les cas 1' et 2'.

			KAOLIN I	KAOLIN II
Ecart expérimental $\Delta$			0,033	0,039
CAS 1'	$\nu = 0,33$	$\gamma$	5,35	9,3
		a	0,73	0,69
	$\nu = 0,0717$	$\gamma$	5,4	8,2
		a	0,76	0,75
CAS 2'	$\nu = 0,33$	$\gamma$	2,70	5,85
		a	0,61	0,64
	$\nu = 0,0717$	$\gamma$	2,65	4,9
		a	0,64	0,69

On remarquera des valeurs de a satisfaisantes qui conduisent à des valeurs  $K_o = \frac{3-a}{2a+3}$  compris entre 0,57 et 0,50 en accord avec les valeurs courantes données dans la littérature. Malheureusement les valeurs de  $\gamma$  se révéleront trop grandes pour les simulations d'expansion de cylindre creux. De façon générale leur courbe de variation est forte dans le domaine de a concerné.

# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN I (CAS 1) -



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN I (CAS 1) -

$\gamma$   $\Delta$

12. 0.12

11. 0.11

10. 0.10

9. 0.09

8. 0.08

7. 0.07

6. 0.06

5. 0.05

4. 0.04

3. 0.03

2. 0.02

1. 0.01

1.00 0.00

0.1 0.01

0.2 0.02

0.3 0.03

0.4 0.04

0.5 0.05

0.6 0.06

0.7 0.07

0.8 0.08

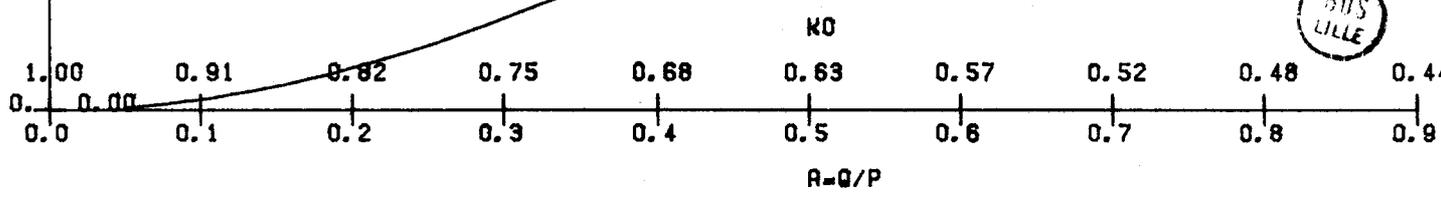
0.9 0.09

$\phi' = 26^\circ$

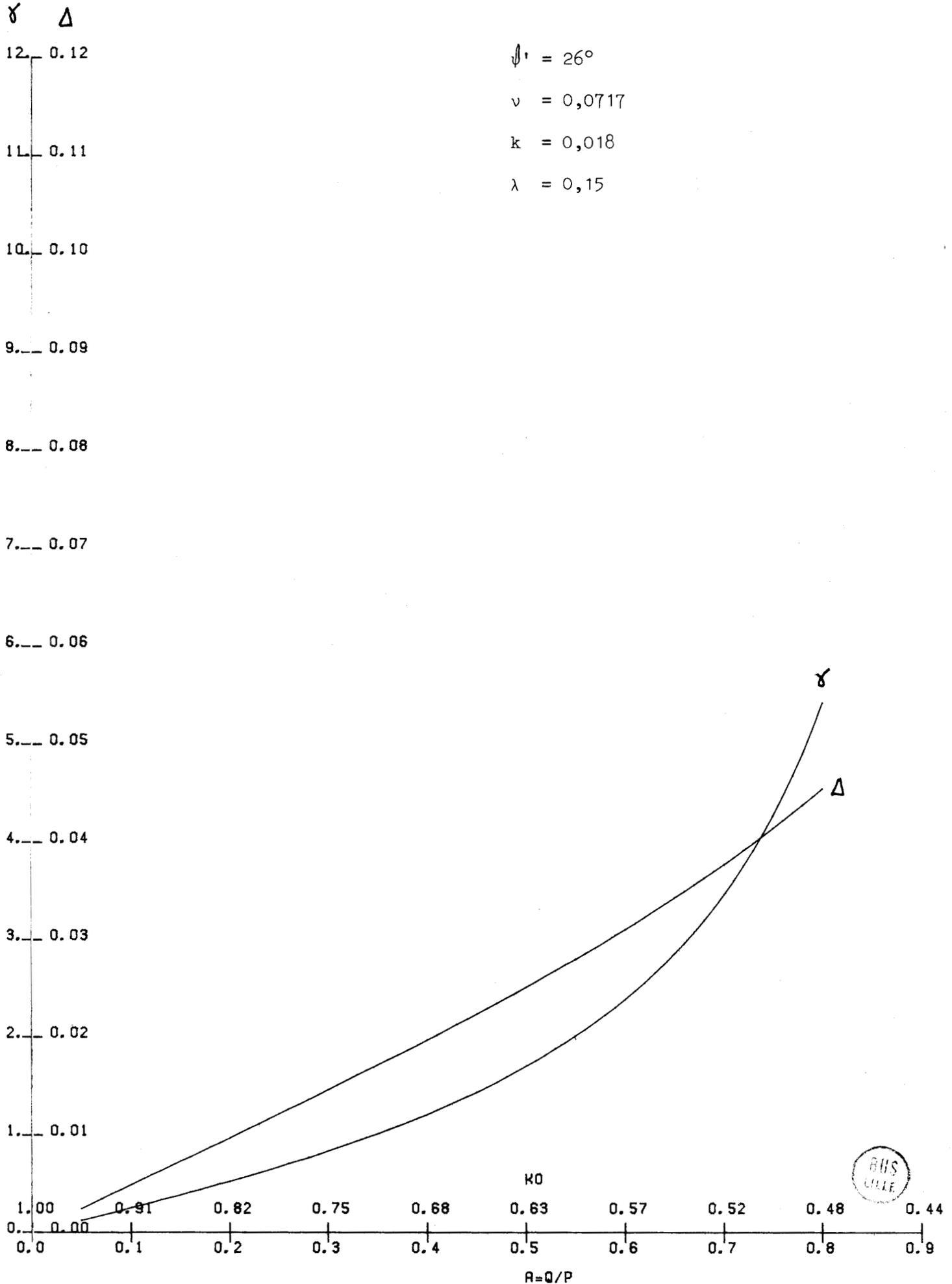
$\nu = 0,33$

$k = 0,018$

$\lambda = 0,150$



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN I (CAS 2) -



$\psi' = 26^\circ$

$\nu = 0,0717$

$k = 0,018$

$\lambda = 0,15$



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN I (CAS 2) -

$\gamma$   $\Delta$

12. 0,12

11. 0,11

10. 0,10

9. 0,09

8. 0,08

7. 0,07

6. 0,06

5. 0,05

4. 0,04

3. 0,03

2. 0,02

1. 0,01

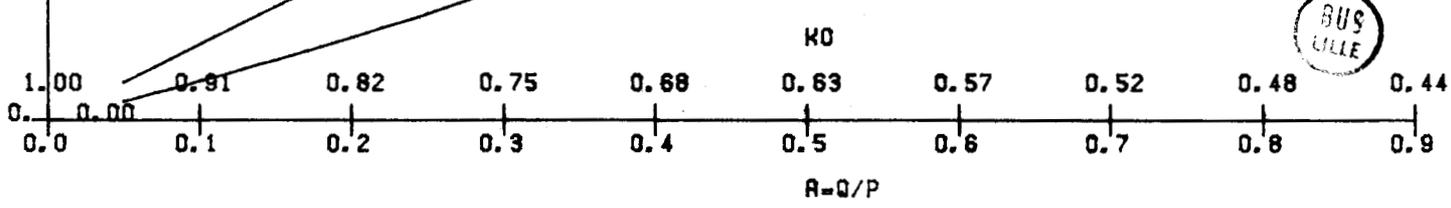
0. 0,00

$$\phi' = 26^\circ$$

$$v = 0,33$$

$$k = 0,018$$

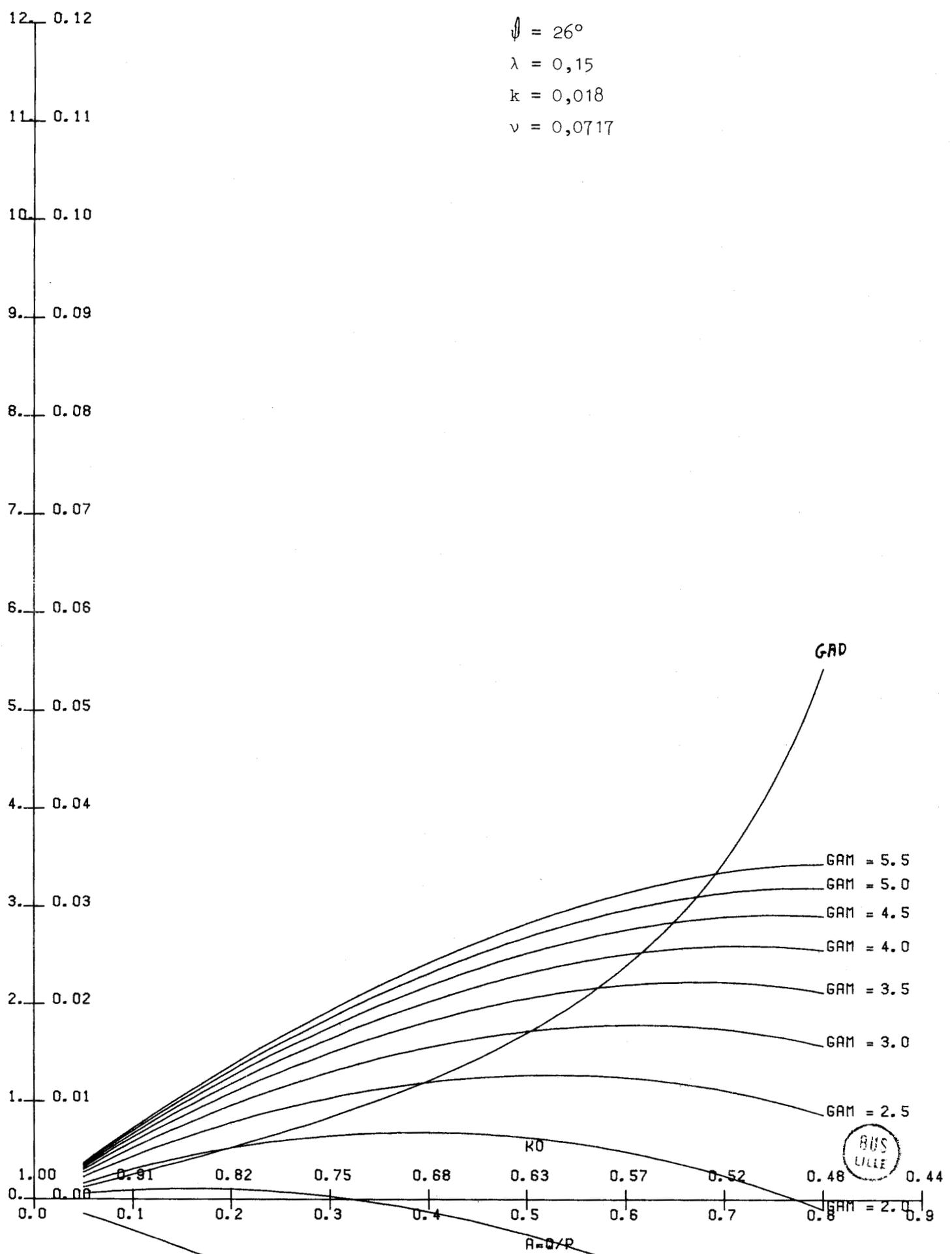
$$\lambda = 0,15$$



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN I (CAS 3) -

GAD DELTA

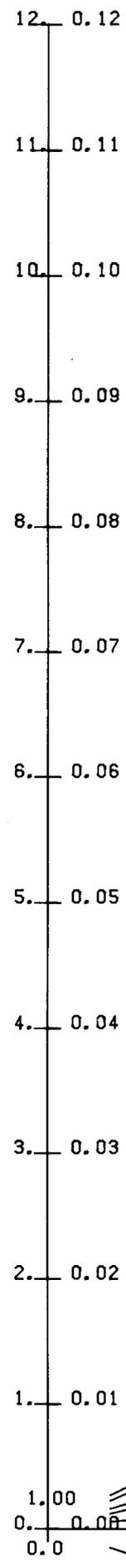
$\phi = 26^\circ$   
 $\lambda = 0,15$   
 $k = 0,018$   
 $v = 0,0717$



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN I (CAS 3) -

GAD DELTA

$\psi = 26^\circ$   
 $k = 0,018$   
 $\lambda = 0,15$   
 $\nu = 0,33$



GAD

GAM = 3.0

GAM = 2.5

GAM = 2.0

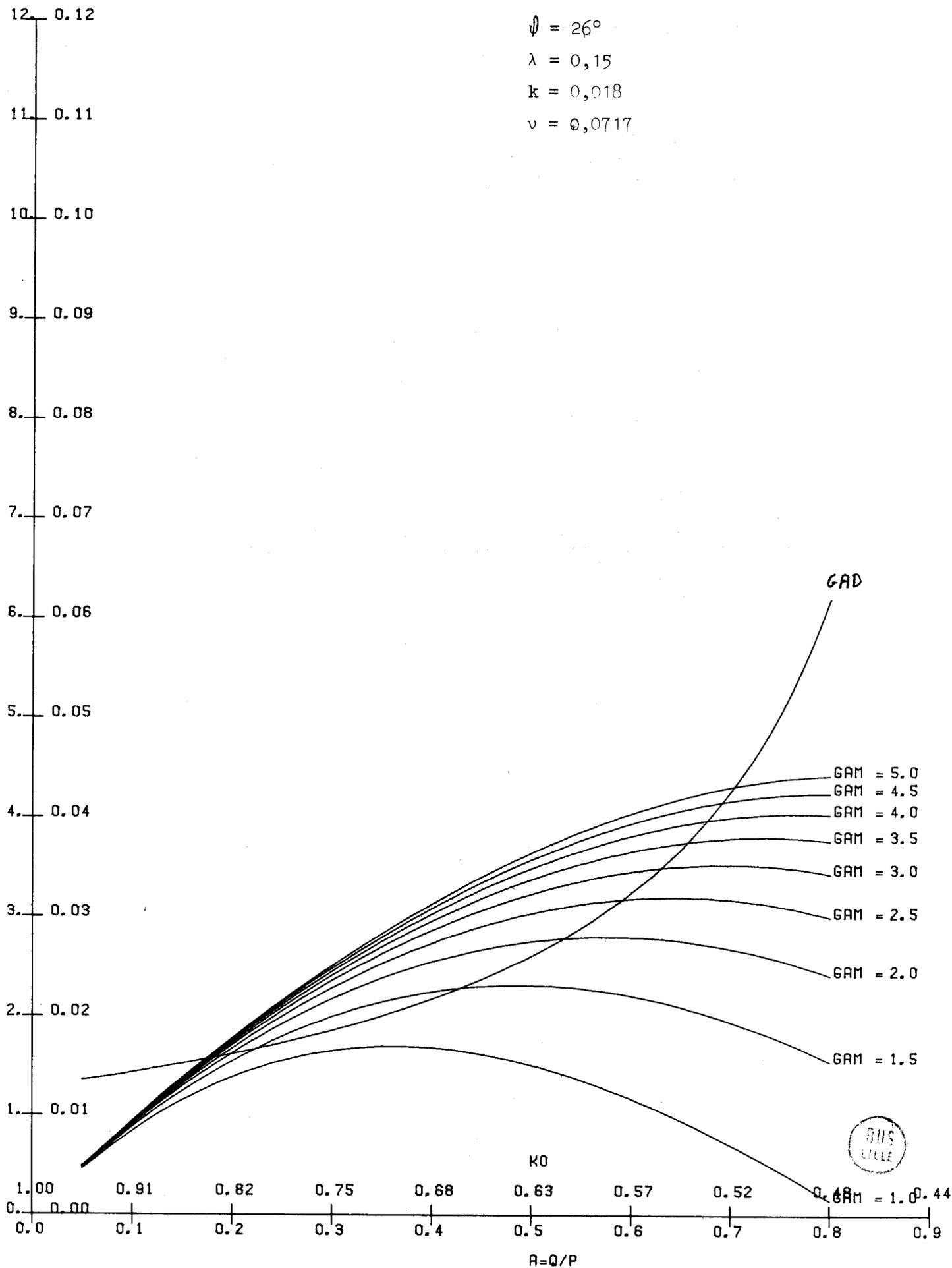
R=Q/P



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN I (CAS 4) -

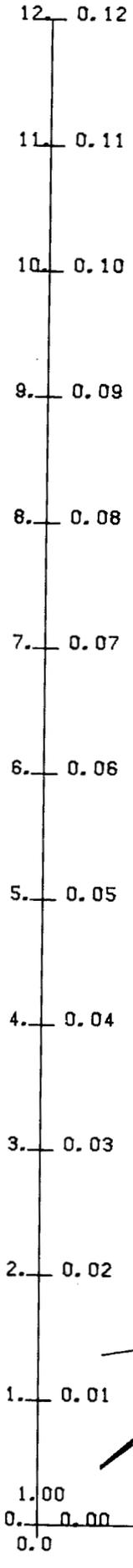
GAD DELTA

$\phi = 26^\circ$   
 $\lambda = 0,15$   
 $k = 0,018$   
 $\nu = 0,0717$

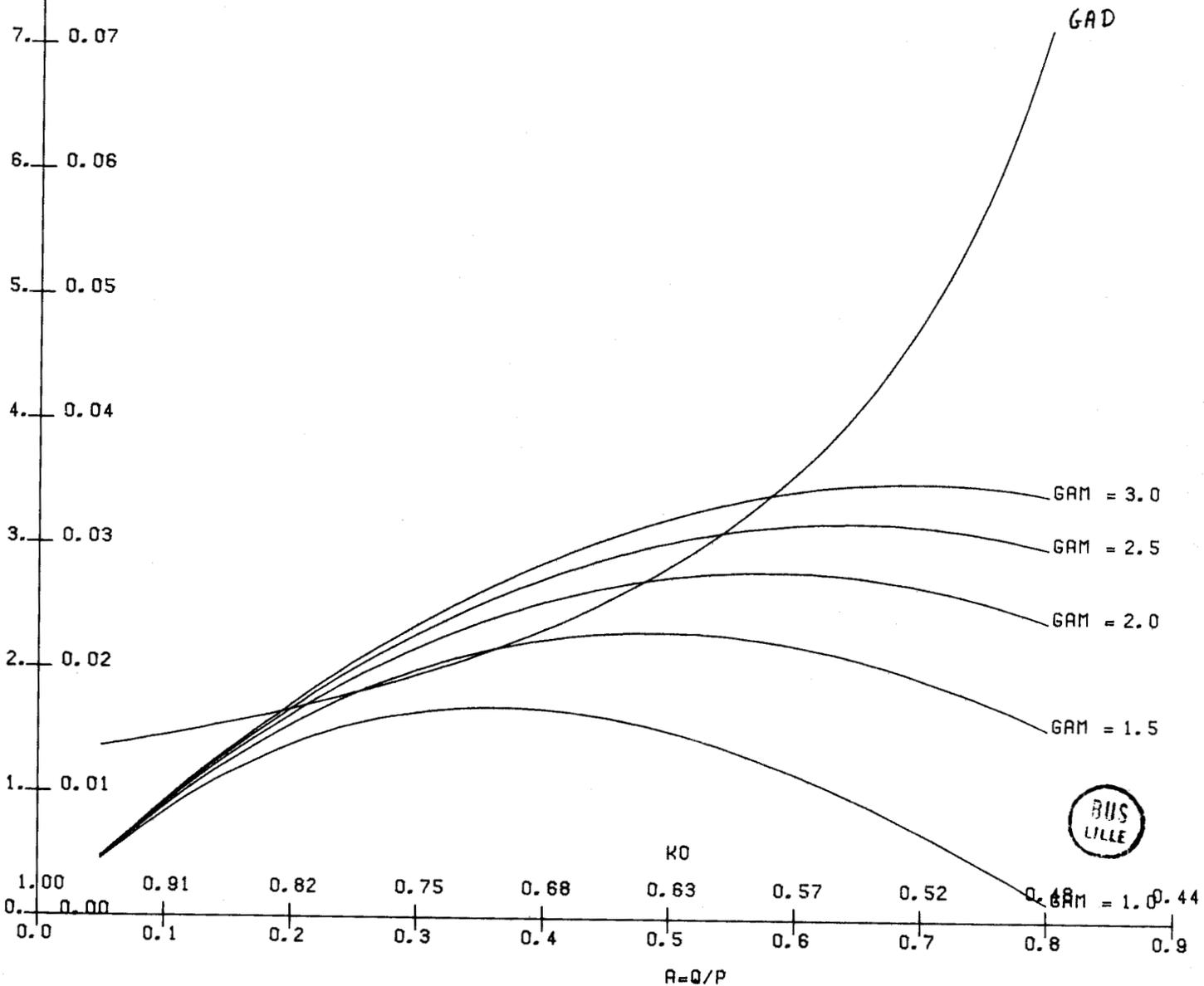


# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN I (CAS 4) -

GAD DELTA

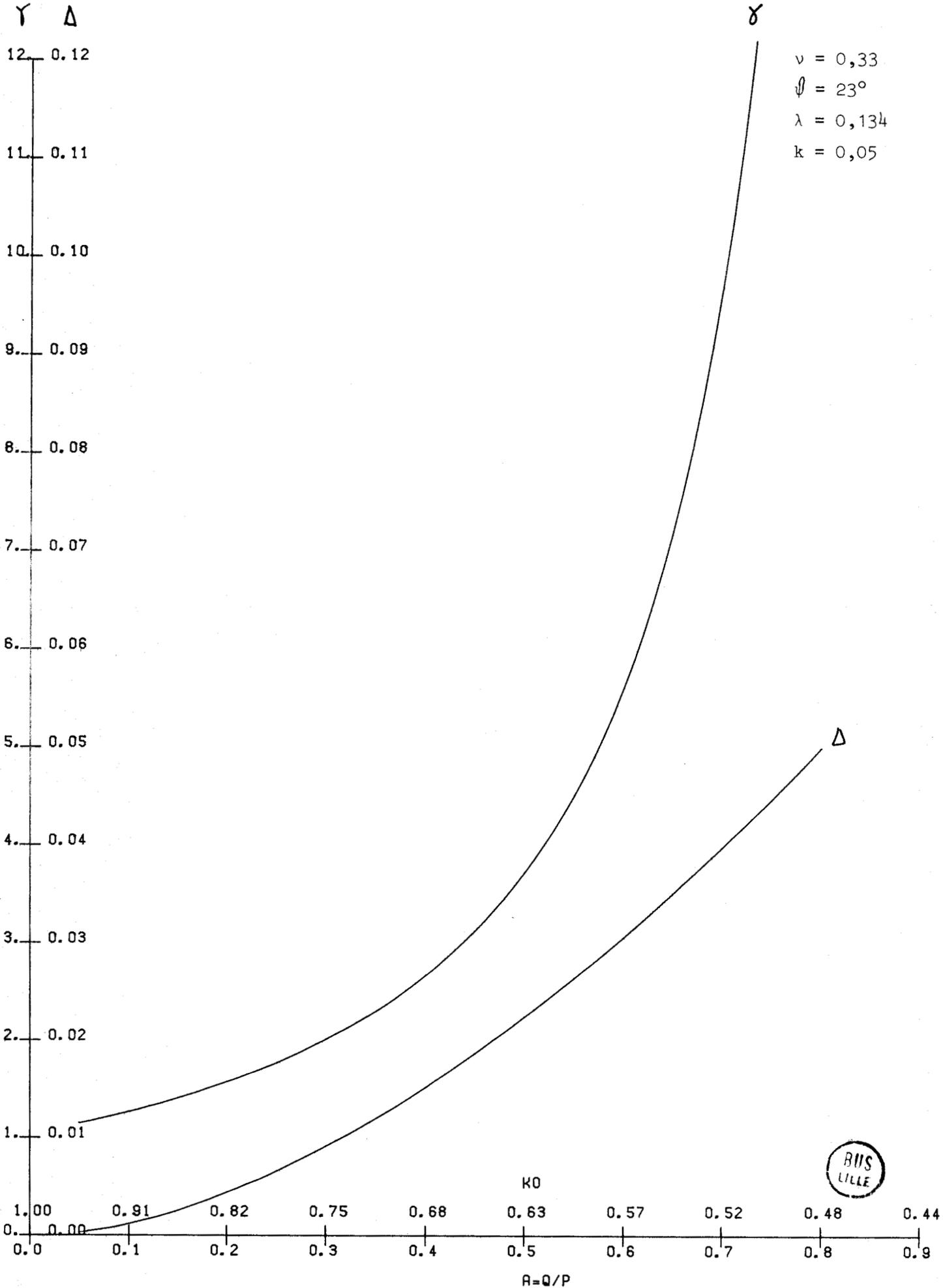


$\psi = 26^\circ$   
 $\lambda = 0,15$   
 $k = 0,018$   
 $\nu = 0,33$

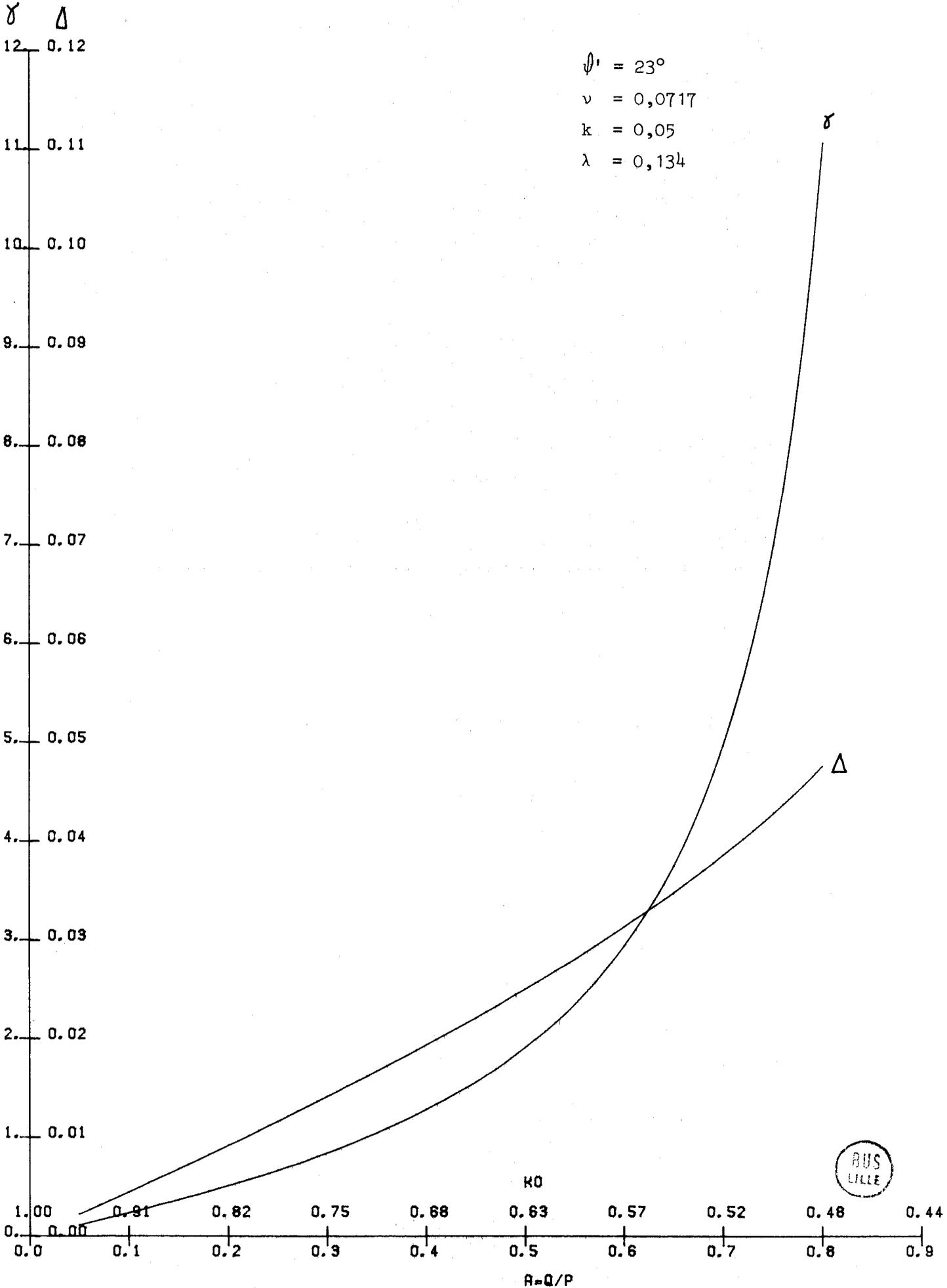




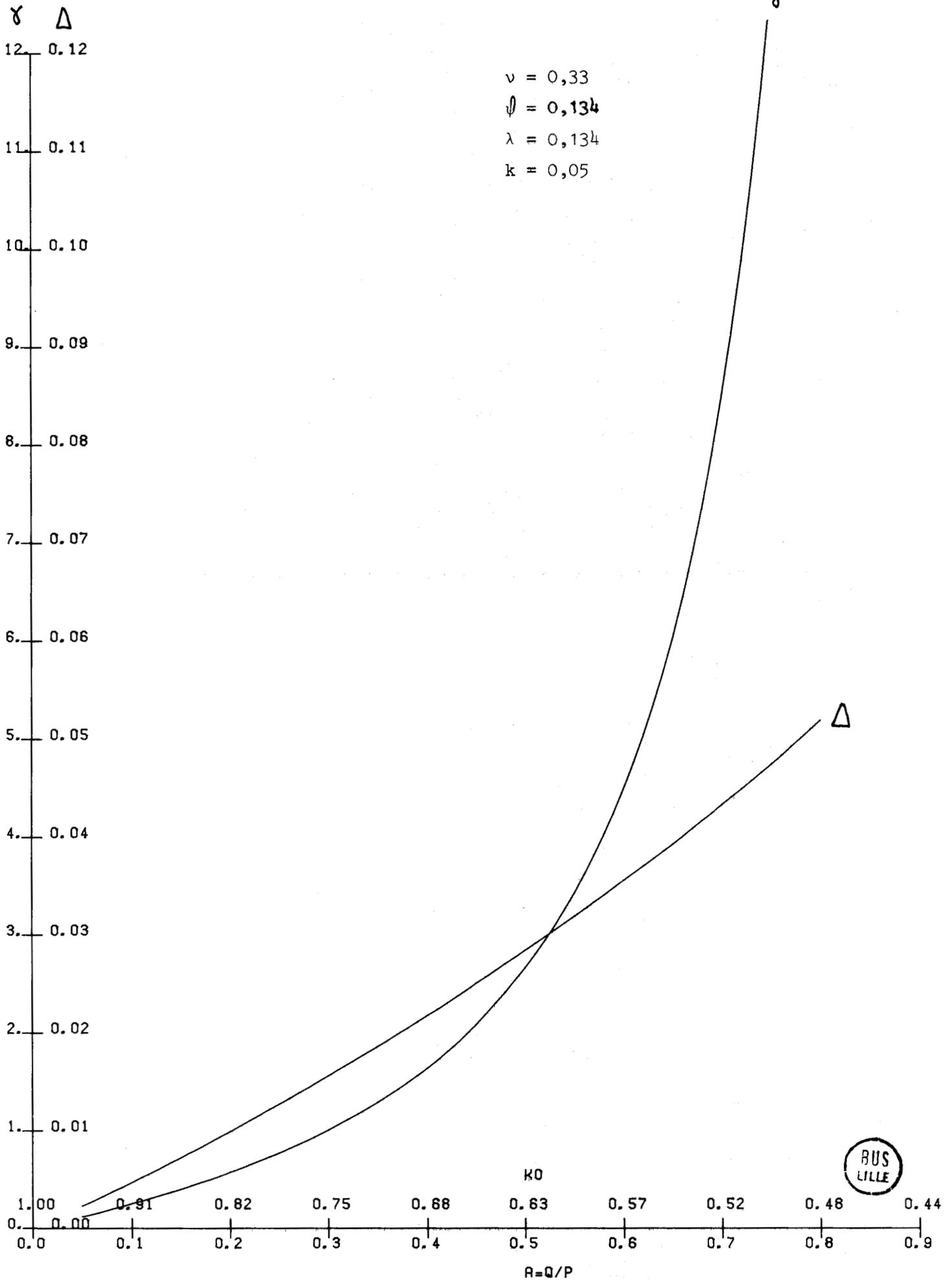
# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN II (CAS 1) -



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN II (CAS 2) -



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN II (CAS 2) -



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN II (CAS 3) -

GAD DELTA

$\psi = 23^\circ$   
 $\lambda = 0,134$   
 $k = 0,05$   
 $\nu = 0,0717$

12. 0.12  
11. 0.11  
10. 0.10  
9. 0.09  
8. 0.08  
7. 0.07  
6. 0.06  
5. 0.05  
4. 0.04  
3. 0.03  
2. 0.02  
1. 0.01  
1.00  
0.00

GAD

GAM = 5.5  
GAM = 5.0  
GAM = 4.5  
GAM = 4.0  
GAM = 3.5  
GAM = 3.0  
GAM = 2.5  
GAM = 2.0

K0



0.00 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.10 0.11 0.12  
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0  
0.81 0.82 0.75 0.68 0.63 0.57 0.52 0.48 0.44  
A=Q/P

A=Q/P

# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - KAOLIN II (CAS 4) -

GAD DELTA

12. 0.12  
11. 0.11  
10. 0.10  
9. 0.09  
8. 0.08  
7. 0.07  
6. 0.06  
5. 0.05  
4. 0.04  
3. 0.03  
2. 0.02  
1. 0.01  
1.00 0.00  
0.0 0.0

$\phi = 23^\circ$   
 $\lambda = 0,134$   
 $k = 0,05$   
 $\nu = 0,0717$

GAD

GAM = 4.5  
GAM = 4.0  
GAM = 3.5  
GAM = 3.0  
GAM = 2.5  
GAM = 2.0  
GAM = 1.5  
GAM = 1.0

K0



R=Q/P

0.91 0.82 0.75 0.68 0.63 0.57 0.52 0.48 0.44

## CHAPITRE 7

### ETUDE D'ESSAIS D'EXPANSION DE CAVITE CYLINDRIQUE EN LABORATOIRE ET IN SITU.

Cette étude théorique et expérimentale a pour objet l'interprétation de l'essai pressiométrique.

Il existe actuellement deux techniques pour réaliser cet essai d'expansion de cavité cylindrique : l'essai classique de MENARD et l'essai autoforeur de JEZEQUEL. Les résultats sont sensiblement différents. Nous n'en donnons pas l'explication.

Il s'avère que notre étude s'adapte au pressiomètre autoforeur qui donne des résultats analogues à ceux que nous avons obtenus en laboratoire par des essais d'expansion de cylindre creux en kaolin sur l'appareil "triaxial". Pour ces deux essais une modélisation de type déformation plane en condition non drainée appliquée à la théorie de l'Ecole de Cambridge est la même et semble bien adaptée à la réalité.

#### 7.1 - Modélisation des essais.

Cette modélisation se fonde sur deux types d'essai qui sont détaillés plus loin :

- essai d'expansion d'un cylindre creux en cellule "triaxiale".

Un cylindre creux et consolidé à la pression isotrope  $p_c$  puis relâché à la pression isotrope  $p_i$ .

L'essai d'expansion consiste à injecter progressivement de l'eau dans la cellule intérieure, en y mesurant la pression  $p$ , tout en maintenant la pression extérieure à sa valeur initiale  $p_i$ . Par ailleurs toute déformation verticale est empêchée par blocage du plateau de la presse

"triaxiale". Le circuit de drainage est maintenu fermé.

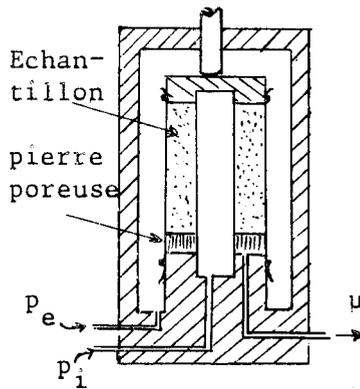


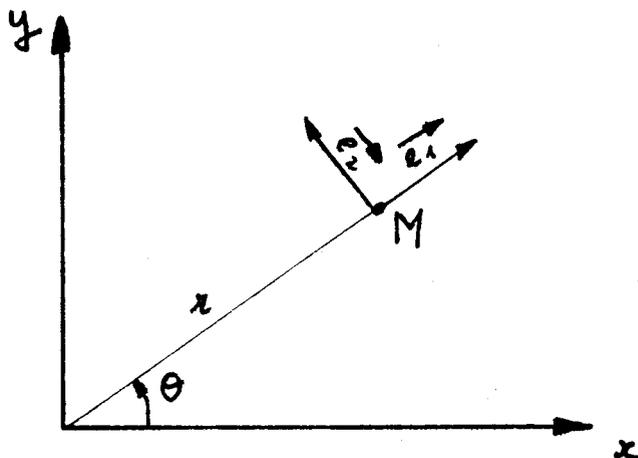
Figure 1 -  
Schéma de la cellule creuse.

- essai in situ au pressiomètre autoforeur.

Le pressiomètre autoforeur est un ensemble modulaire solidaire cylindrique. A sa base il comprend un module qui effectue le forage du sol. Le module intermédiaire est la sonde pressiométrique constituée par une cellule dilatable. Le module supérieur regroupe un système miniaturisé hydraulique.

### 1) Hypothèses.

On suppose un état plan de déformation à symétrie polaire de pole  $O$ .



Dans ces conditions l'ensemble des grandeurs du problème sont fonctions des seules variables  $r$  et  $t$  (le temps).

Les fonctions de déplacement total et incrémental s'écrivent :

$$\begin{aligned}\vec{U} &= U(r, t) \vec{e}_1 \\ \vec{\bar{U}} &= \bar{U}(r, t) \vec{e}_1\end{aligned}$$

En petites perturbations le tenseur des déformations devient :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{r, \theta, z}$$

avec :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}(r, t) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\bar{U}}{r}(r, t)\end{aligned}\tag{1}$$

La loi de comportement incrémentale de l'Ecole de Cambridge étant isotrope, les repères principaux des contraintes et déformations incrémentales sont confondus et on peut anticiper :

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon'_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_z \end{bmatrix}\tag{2}$$

Enfin, si l'essai d'expansion de cylindre creux est véritablement non drainé, nous supposons qu'il en est de même pour l'essai pressiométrique. Nous écartons donc de notre étude les essais pressiométriques lents (dits drainés).

2) Equations du problème.

En reprenant les équations d'équilibre du squelette fictif en coordonnées polaires et dans le cas présent de symétrie il vient une équation unique :

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}'_n}{\partial r} (r, t) + \frac{\bar{\Gamma}'_2 - \bar{\Gamma}'_0}{r} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

ou bien encore :

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}_2}{\partial r} (r, t) + \frac{\Gamma'_2 - \Gamma'_0}{r} = 0 \quad (4)$$

Les essais n'étant pas drainés il faut exprimer la non variation de volume :

$$\epsilon_r + \epsilon_\theta = 0$$

et d'après les relations (1) on en conclut :

$$\bar{U}(r, t) = \frac{A(t)}{r} \quad (5)$$

$$\epsilon_r = -\epsilon_\theta = -\frac{A(t)}{r^2} \quad (6)$$

3) Conditions aux limites.

L'injection d'un volume d'eau élémentaire  $dV$  dans le trou cylindrique intérieur entraîne pour le déplacement incrémental en bord de trou ( $r=a$ ) :

$$\bar{U}(a) = \frac{a}{2} \frac{dV}{V} \quad (9)$$

A cette condition commune aux deux essais il faut ajouter :

- pour le cylindre creux :

$$\bar{\Gamma}_2(b) = 0 \quad (10)$$

puisque

$$\Gamma_2(b) = -p_i$$

- pour l'essai pressiométrique :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{U}(r) = 0 \quad (11)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\Gamma}_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\Gamma}_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\Gamma}_z = 0$$

Remarquons tout de suite que les relations (5), (6) et (9) impliquent :

$$\bar{U}(r) = \frac{\bar{U}(a) a}{r} \quad (12)$$

$$\epsilon_r = -\epsilon_\theta = -\frac{\bar{U}(a) a}{r^2} \quad (13)$$

Dans le cas de l'essai drainé que nous n'étudions pas, la condition de non variation de volume est remplacée par l'équation de consolidation qui s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{d}{dt} (\epsilon_r + \epsilon_\theta)$$

Cette relation suppose une perméabilité isotrope.

#### 4) Conditions initiales.

Elles sont différentes pour l'un et l'autre essais envisagés.

- pour le cylindre creux :

L'état initial est isotrope et la pression interstitielle nulle.

$$u_i = 0$$

$$\Gamma'_{ri} = \Gamma'_{\theta i} = \Gamma'_{zi} = -p_i \quad (7)$$

- pour le pressiomètre

Le système d'autoforage par broyage et évacuation du sol est peu perturbateur. Pour cette raison nous supposons que l'état initial du sol est celui du massif semi-infini au repos. Au niveau moyen de l'essai nous admettons :

$$u_i = u_i$$

$$\bar{\tau}'_{ni} = \tau'_{oi} = K_0 \tau'_{zi} \quad \forall n \quad (8)$$

$K_0$  est appelé coefficient de transmission des terres au repos.

$$p_i = - \frac{\tau'_{zi}}{3} (1 + 2K_0) \quad (8')$$

### 7.2- Application de la théorie de l'Ecole de Cambridge

Etudions successivement la phase élastique et la phase élasto-plastique.

#### 1) Phase élastique.

Reprenons la formule (34) du chapitre (I) :

$$\begin{bmatrix} \bar{\tau}'_n \\ \bar{\tau}'_o \\ \bar{\tau}'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} (2D_2 - 3D_1) & & & \\ -\frac{1}{3} (D_2 + 3D_1) & \frac{1}{3} (2D_2 - 3D_1) & & \\ -\frac{1}{3} (D_2 + 3D_1) & -\frac{1}{3} (D_2 + 3D_1) & \frac{1}{3} (2D_2 - 3D_1) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ -\varepsilon_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le résultat est immédiat :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}'_n &= -\bar{\tau}'_o = D_2 \varepsilon_n = -D_2 \frac{\bar{U}(a) a}{r^2} \\ \bar{\tau}'_z &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

et on remarquera pour cette phase élastique :

$$\bar{p} = 0 \quad (15)$$

L'intégration des relations (14) par rapport à  $\bar{U}(a)$  conduit à :

$$\begin{aligned} \tau'_n &= \tau'_{ni} - \frac{D_2 a}{r^2} U(a) \\ \tau'_o &= \tau'_{oi} + \frac{D_2 a}{r^2} U(a) \\ \tau'_z &= \tau'_{zi} \end{aligned} \quad (16)$$

D'après (14) la relation d'équilibre (3) devient :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = 0$$

ce qui implique :

$$\bar{u}(r) = C$$

- pour le cylindre creux on doit avoir pour  $r = b$  :

$$\bar{r}_r(b) = \bar{r}'_r(b) - \bar{u}(b) = 0$$

donc

$$\bar{u}(r) = \bar{u}(b) = - D_2 \frac{U(a) a}{b^2}$$

et

$$u(r) = - D_2 \frac{U(a) a}{b^2}$$

- pour le pressiomètre il suffit de faire tendre  $b$  vers l'infini :

$$\bar{u}(r) = 0$$

et

$$u(r) = u_i$$

La loi d'expansion cherchée est donnée pour  $r = a$  :

- pour le cylindre creux :

$$\begin{aligned} r_r(a) &= - p_i \left[ 1 + \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)}{k(1+\nu)} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \frac{U(a)}{a} \right] \\ u(a) &= - \frac{3 p_i (1+\nu)(1-2\nu) a^2}{k(1+\nu) b^2} \frac{U(a)}{a} \end{aligned} \quad (17)$$

- pour le pressiomètre :

$$r_r(a) = r_{ri} - \frac{3(1+\nu)(1-2\nu) p_i}{k(1+\nu)} \frac{U(a)}{a} \quad (18)$$

$$u(a) = u_i$$

Les relations (17) et (18) représentent toutes des droites confirmées par l'expérience.

2) Phase élasto-plastique.

L'entrée en plasticité a lieu en bord de trou lorsque le critère est atteint c'est-à-dire pour :

$$q = q^{(P)} = - M p_i (\lambda L n p_i + \epsilon_c - \epsilon_0) \quad \text{cas 1} \quad (19)$$

$$q = q^{(P)} = M \sqrt{p_i \left( \exp\left(\frac{\epsilon_0 - \epsilon_c}{\lambda}\right) - p_i \right)} \quad \text{cas 2}$$

D'après la définition de  $q$  on en déduit la valeur  $\sigma_{2(P)}(a)$  qui limite la droite élastique sur la courbe pressiométrique :

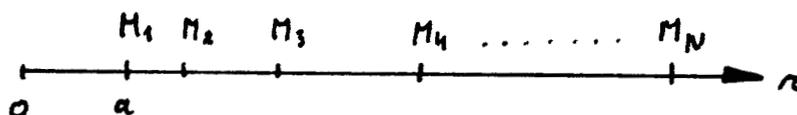
$$\sigma_{2(P)}(a) = \sigma_{2i} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left( q^{(P)2} - \sigma_{3i}'^2 (K_0 - 1)^2 \right)^{1/2} \quad (20)$$

Dans le cas du cylindre creux il suffit de poser  $K_0 = 1$  dans la relation (20).

Etant donnée la forme complexe de la loi incrémentale élasto-plastique, nous ne sommes pas arrivé à une forme analytique de la loi pressiométrique dans la phase élasto-plastique. Ce défaut grave de la théorie nous empêche de déterminer analytiquement la pression limite, asymptote de la loi pressiométrique. Une résolution numérique sur ordinateur s'est donc avérée nécessaire. Son schéma est le suivant :

a - détermination de l'état du matériau en limite d'élasticité caractérisé

par  $\bar{\sigma}'_{(P)}$ ,  $u_{(P)}$ ,  $\bar{\epsilon}^T_{(P)}$  pour un ensemble de  $N$  points sur l'axe  $r$ .



b - Calcul pour ces  $N$  points de  $\bar{\bar{\sigma}}'$  à partir de l'incrément  $\bar{\bar{\epsilon}}$  en utilisant la loi élasto-plastique. La matrice élasto-plastique est déterminée à partir de l'état actuel du matériau.

c - Intégration numérique de l'équation d'équilibre (4) par la méthode de quadrature de Gauss en 5 points.

d - Détermination de l'état actuel des  $N$  points.

L'itération se poursuit en reprenant le processus à la phase **b**.

Explicitons la méthode d'intégration numérique de l'équation d'équilibre.

Il s'agit de calculer :

$$I = \bar{\sigma}_n(a) - \bar{\sigma}_n(b) = \int_b^a \frac{\bar{\sigma}'_0 - \bar{\sigma}'_n}{r} dr$$

En choisissant le nombre de points multiple de 6 décomposons l'intégrale :

$$I = \sum_{i=1}^{N/6} I_i$$

$$I_i = - \int_{r(M_{ci})}^{r(M_{ci+6})} \frac{\bar{\sigma}'_0 - \bar{\sigma}'_n}{r} dr$$

effectuons pour chaque intégrale  $I_i$  le changement de variable défini par :

$$\xi_i = \frac{2}{r(M_{ci+6}) - r(M_{ci})} r - \frac{r(M_{ci+6}) + r(M_{ci})}{r(M_{ci+6}) - r(M_{ci})}$$

L'intégrale  $I_i$  devient :

$$I_i = - \int_{-1}^{+1} \frac{\bar{\sigma}'_0 - \bar{\sigma}'_n}{r} d\xi_i \left/ \left( \frac{2}{r(M_{ci+6}) - r(M_{ci})} \right) \right.$$

La méthode de quadrature de Gauss en cinq points consiste à approximer la fonction réelle à intégrer par un polynôme de degré 9 passant par 5 points de la fonction réelle entre les bornes d'intégration.

La précision optimale du résultat est donnée pour les cinq valeurs  $a_j$  de  $\int_{c_i}$  du tableau ci-dessous. L'intégration exacte de ce polynôme conduit au résultat suivant :

$$I_i = 1 / \left( \frac{-2}{n (M_{c_i+c_i}) - n(M_{c_i})} \right) \sum_{j=1}^5 H_j \frac{\bar{V}'_0(a_j) - \bar{V}'_n(a_j)}{n(a_j)}$$

$a_j$	$H_j$
0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189
0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
0	0.56888 88888 88889
- 0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189
- 0,53846 93101 05683	0,47862 86704 99366

Tableau - Abscisses et coefficients de pondération pour les formules de quadrature de Gauss (selon ZIENKIEWICZ [ 14 ])

### 7.3 - Etude expérimentale de l'expansion du cylindre creux en kaolin.

#### 1) Mode opératoire

Le mode opératoire de l'essai comprend les étapes suivantes :

##### a) Préconsolidation

Elle est analogue à la préparation de l'échantillon oedométrique.

Le moule de préconsolidation est cependant de dimensions plus grandes en rapport avec les dimensions du cylindre creux à obtenir. Il comporte en

outre, comme on peut le constater sur la figure ci-dessous, un cylindre intérieur drainant qui a pour but d'accélérer le temps de préconsolidation par réduction de la longueur maximale du chemin de drainage. Le dispositif permet également d'obtenir un échantillon plus homogène quant à sa teneur en eau. Enfin il facilite l'usinage du cylindre intérieur avec un remaniement minimum.

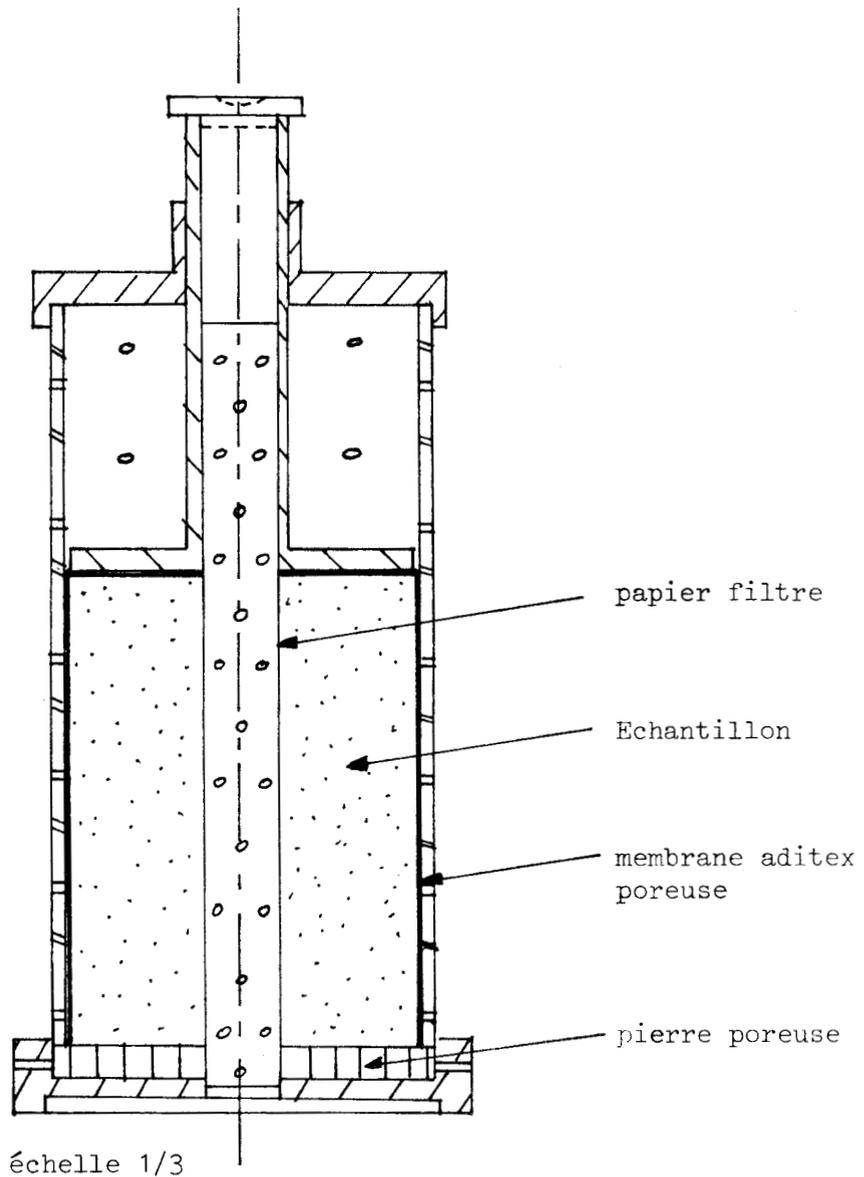


Figure 2 - Appareil de préconsolidation  
du cylindre creux

b) Usinage du cylindre creux

Le surfaçage des bases du cylindre et la surface extérieure sont obtenus selon les procédés classiques du cylindre plein.

Le cylindre creux est usiné sur un tour au moyen d'une trousse coupante en rotation (100 tours/mn).

c) Mise en place en cellule triaxiale

Cette opération est décrite par les schémas successifs de la figure 4

d) Saturation et consolidation isotrope

L'échantillon lui-même est saturé. Il s'agit en fait de saturer d'eau les tuyauteries et de faire échapper les pellicules d'air qui peuvent exister entre les membranes et l'échantillon. Pour cela l'échantillon est soumis à une pression isotrope de l'ordre de 0,2 bars et le circuit de drainage est maintenu ouvert.

Ensuite intervient la phase de consolidation isotrope à la pression totale  $p$  choisie jusqu'à annulation de la pression interstitielle.

e) Essai d'expansion du cylindre creux

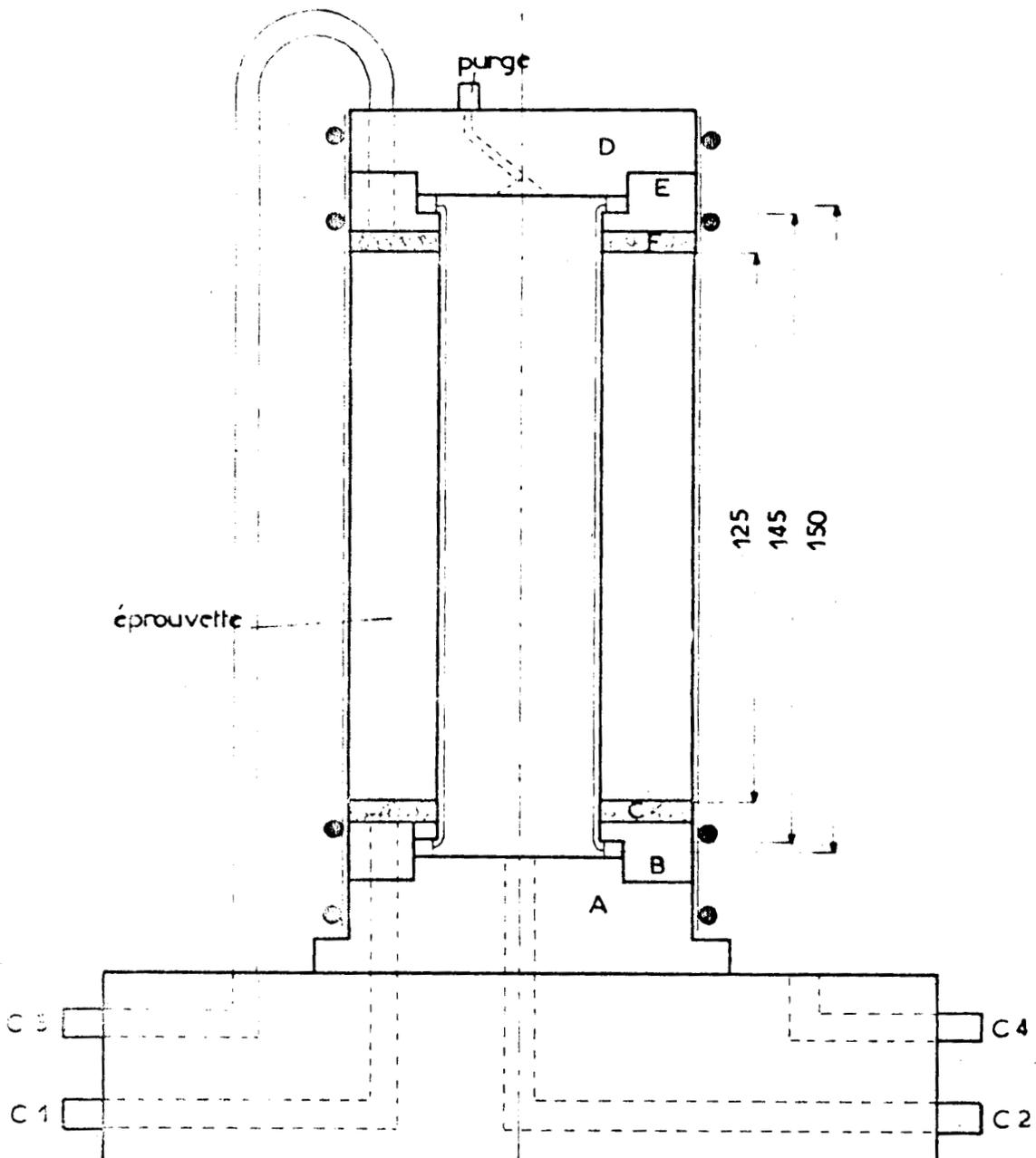
Le circuit de drainage de l'échantillon est fermé et on procède à l'injection de petits volumes d'eau dans la cellule intérieure par l'intermédiaire d'un vérin à vis étalonné.

La plage utilisée pour le vérin est invariable après rattrapage du jeu. Il y correspond une injection de  $1,1 \text{ cm}^3$  par tour avec une erreur de l'ordre de  $0,2 \text{ cm}^3$  sur 20 tours. Le circuit d'injection est celui prévu pour les essais classiques non drainés. Il comprend en conséquence une tuyauterie rigide qui élimine tout problème de variation parasite de volume par dilatation.

On peut estimer rapidement l'erreur de mesure sur  $\epsilon$  faite après 20 tours ce qui correspond au maximum atteint pour nos essais.

Fig. 3

SCHEMA DE MONTAGE DE L'EPROUVETTE



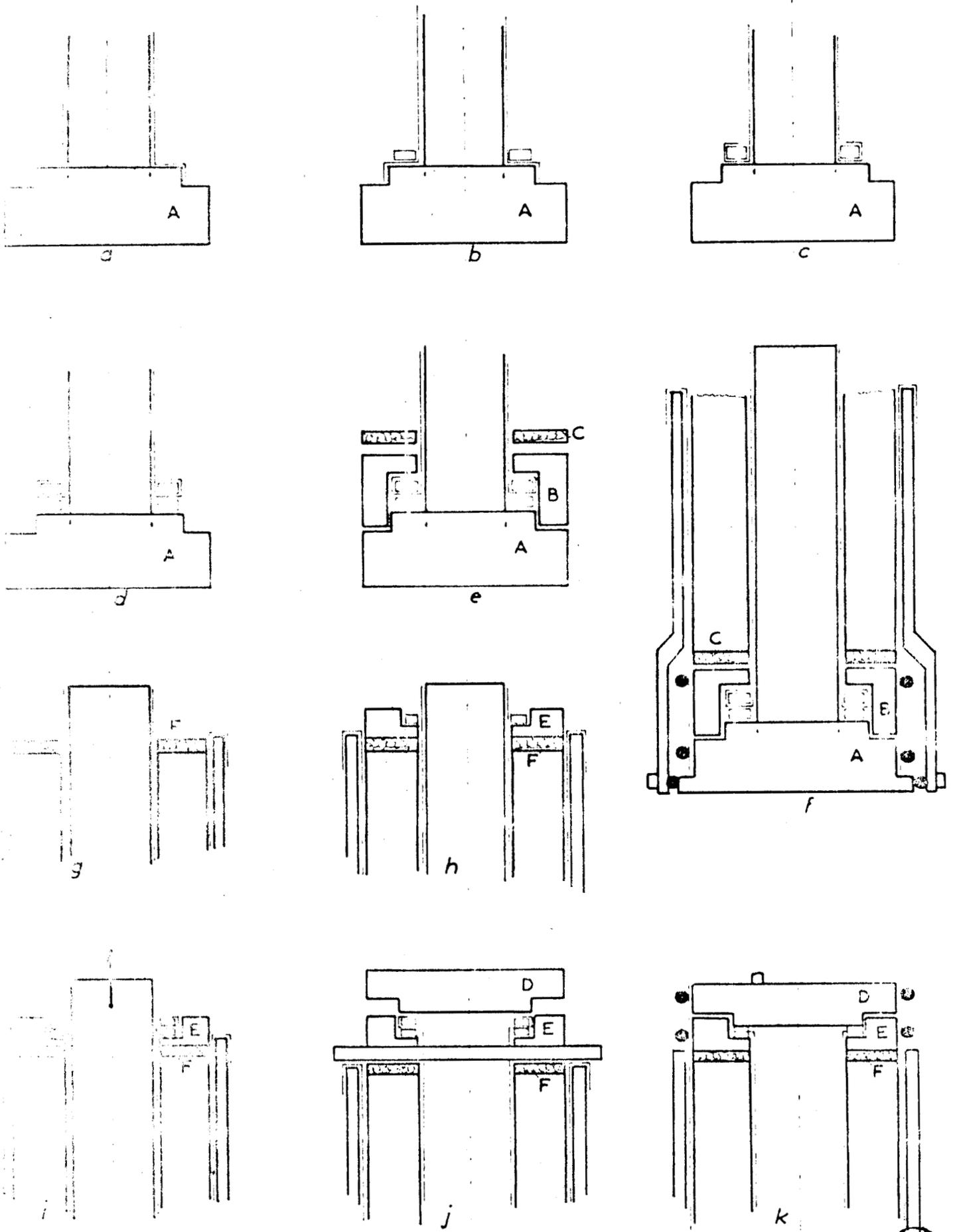


Fig. 4

MISE EN PLACE DE L'EPROUVETTE



$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\delta V}{V}$$

$$\left| \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{\Delta \delta V}{\delta V} \right| + \left| \frac{\Delta V}{V} \right| = \left| \frac{\Delta \delta V}{\delta V} \right| + \left| \frac{\Delta h}{h} \right| + 2 \left| \frac{\Delta a}{a} \right|$$

avec :  $|\delta V| = 22 \text{ cm}^3$  ;  $|\Delta \delta V| = 0,2 \text{ cm}^3$

$h = 12,5 \text{ cm}$  ;  $|\Delta h| = 0,5 \text{ mm}$

$a = 1,75 \text{ cm}$  ;  $|\Delta a| = 0,5 \text{ mm}$

d'où une erreur  $\left| \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \right|$  de l'ordre de 7 % pour la déformation totale maximale atteinte.

La mesure de la pression de la cellule intérieure est effectuée pour chaque palier d'injection de volume à 30", 60" et 90". La valeur instantanée s'est révélée trop fluctuante car dépendante de la rapidité d'injection. Or l'injection de volume se fait par rotation manuelle du vérin et dans ces conditions il est difficile de respecter une vitesse constante d'injection à chaque palier. Ces mesures ont été faites au moyen d'un capteur ne perturbant pas de façon significative la variation de volume. L'erreur totale de détermination de la pression est de l'ordre de 0,1 % à pleine échelle (pour 10 bars).

## 2) Présentation et analyse des résultats.

Sept essais d'expansion de cylindre creux (kaolin II) ont été réalisés. Leurs caractéristiques sont données dans le tableau suivant.

N° de l'essai	Pression de consolidation isotrope (bar)	pression initiale isotrope (bar)	Observations
1	4,00	3,05	Pas de palier de mesure à 90"
2	4,00	3,50	
3	3,06	3,06	Echantillon fortement érodé après une phase de saturation accélérée.
4	4,00	3,08	
5	4,00	1,05	
6	4,12	4,12	Cellule extérieure maintenue fermée par erreur jusqu'à $\epsilon = 1\%$ .
7	4,12	4,12	

La tentative d'une détermination des paramètres  $\gamma$  à partir du décalage  $\Delta$  des courbes de compressibilité oedométrique et isotrope s'avère négative pour les simulations. Les valeurs de  $\gamma$  déterminées sur les graphes des pages 113 à 118 sont en effet trop grandes. Trop divergentes, les simulations qui en résultent n'ont pas été représentées parmi les courbes qui suivent. L'essai théorique n'est cependant pas à rejeter car il se révèle satisfaisant pour les simulations pressiométriques. Le nombre réduit d'essai de compressibilité (surtout isotrope) en tâche la validité de  $\Delta$  et par conséquent des valeurs de  $\gamma$  sensibles à  $\Delta$ .

Simulation 1 : cas 1 avec  $\gamma = 1,6$

C'est la simulation la mieux adaptée globalement (à l'exception de l'essai 5 sur lequel nous reviendrons). Il en sera de même pour le pressiomètre avec  $\gamma$  du même ordre de grandeur.

Simulation 2 : cas 1 avec  $\gamma = 1$ .

C'est le résultat que donne la théorie classique de l'Ecole de Cambridge modifiée cependant par l'introduction du comportement élastique déviatorique. Cette simulation se révèle systématiquement pessimiste quant à la valeur de la pression limite (comme pour le pressiomètre).

Simulation 6 : cas 2 avec  $\gamma = 1$ .

Simulation globalement bien adaptée (ce sera encore une fois le cas pour le pressiomètre).

Autres simulations.

Elles permettent de juger de l'influence de  $\gamma$  sur le cas 2 (simulation 3) et de comparer les simulations en plasticité standard et non standard. On remarquera que la pression limite est peu influencée par le potentiel plastique des déformations à surface plastique identique (simulation 2 et 4, 3 et 5, 6 et 8). Il est intéressant de considérer tout particulièrement les essais 4 et 5.

Lors de la phase de saturation de l'essai 4, l'échantillon a été fortement érodé sur ses faces latérales (injection d'une pression trop forte dans le circuit de pression interstitielle). Une comparaison avec l'essai 1 montre qu'il s'en est suivi une forte diminution de la pression limite (4,6 bar à 4,1 bar) et une augmentation de la pente de la partie linéaire de la courbe. Les simulations ont rendu compte du phénomène de façon relativement satisfaisante. Il a suffi de corriger les rayons intérieur et extérieur de l'échantillon en appréciant par mesure grossière les zones érodées. C'est peut-être là un espoir de pouvoir expliquer les divergences entre les essais pressiométriques type Menard et type Jezequel.

L'essai 5 concerne un échantillon fortement surconsolidé ( $p_c = 4$  bar et  $p_i = 1$  bar). On constate donc combien la théorie n'est pas adaptée dans ce cas ce qui confirme les nombreux travaux déjà effectués à ce sujet. Remarquons enfin que la pression limite est cependant correctement simulée.

# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

## ESSAI 1 (CONSOLIDATION 4. BAR)

- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X

- SIMULATIONS :

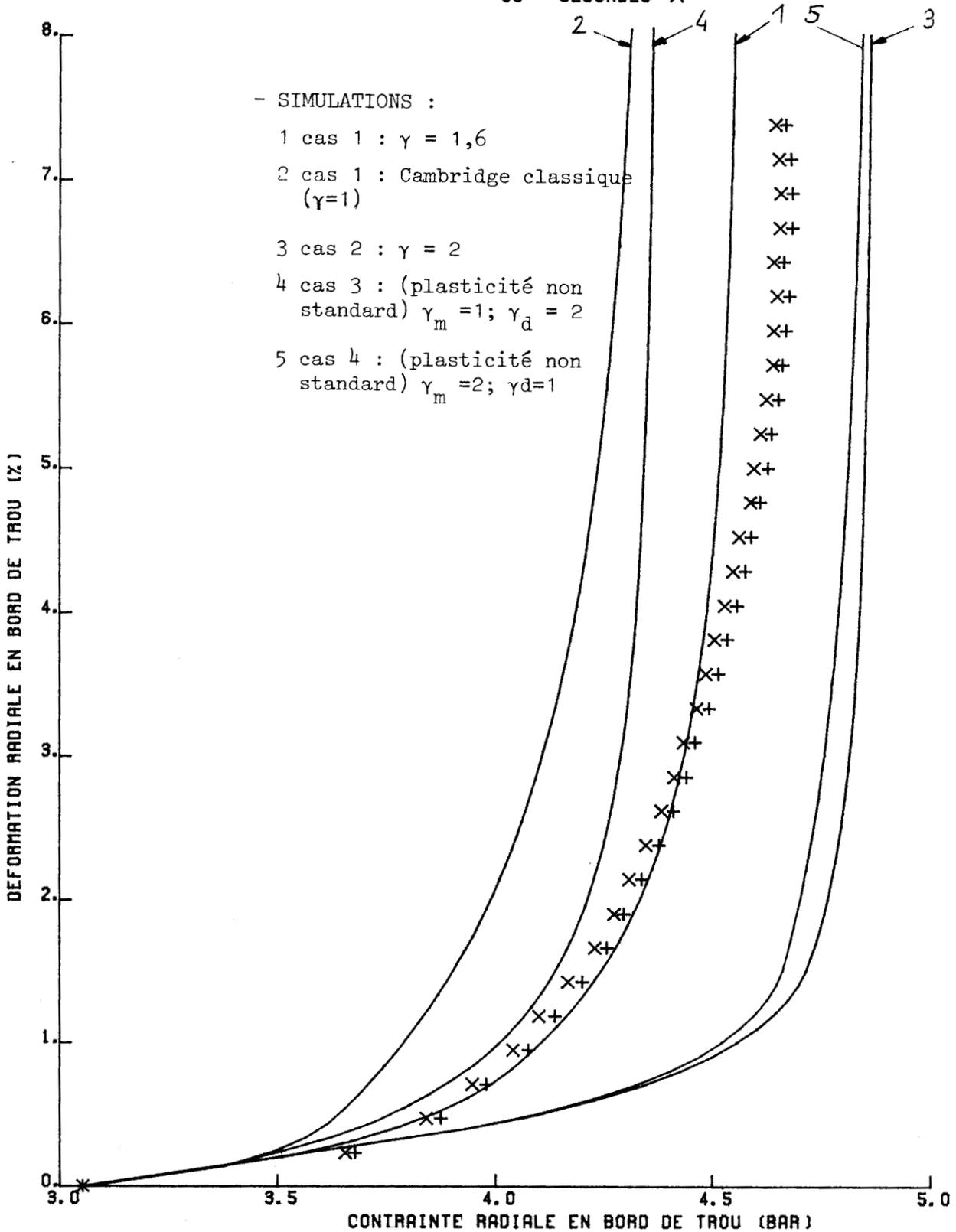
1 cas 1 :  $\gamma = 1,6$

2 cas 1 : Cambridge classique  
( $\gamma=1$ )

3 cas 2 :  $\gamma = 2$

4 cas 3 : (plasticité non  
standard)  $\gamma_m = 1; \gamma_d = 2$

5 cas 4 : (plasticité non  
standard)  $\gamma_m = 2; \gamma_d = 1$



# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

ESSAI 1 (CONSOLIDATION 4. BAR)

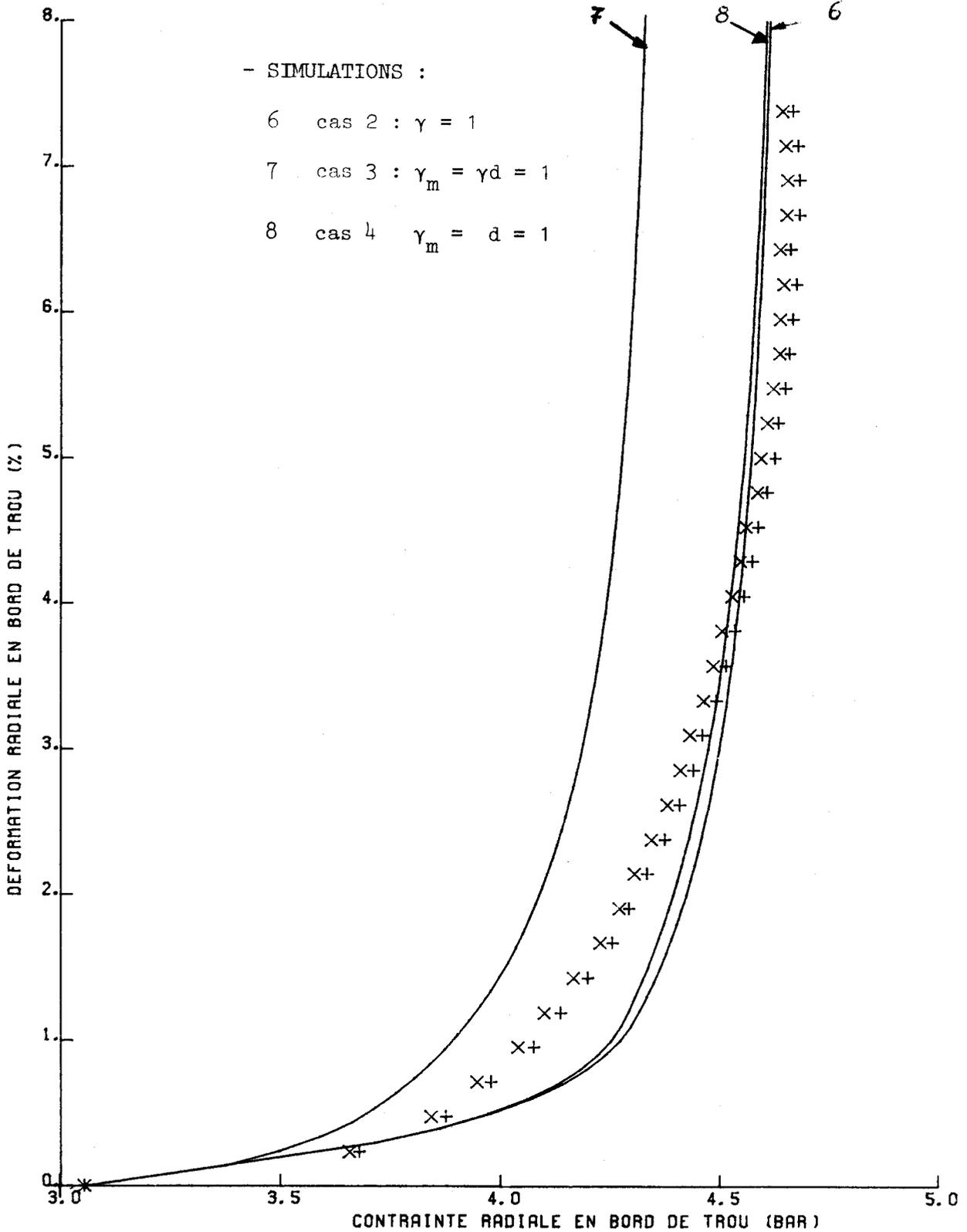
- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X

- SIMULATIONS :

6 cas 2 :  $\gamma = 1$

7 cas 3 :  $\gamma_m = \gamma_d = 1$

8 cas 4 :  $\gamma_m = d = 1$



# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

ESSAI 2 (CONSOLIDATION 4. BAR)

- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS :

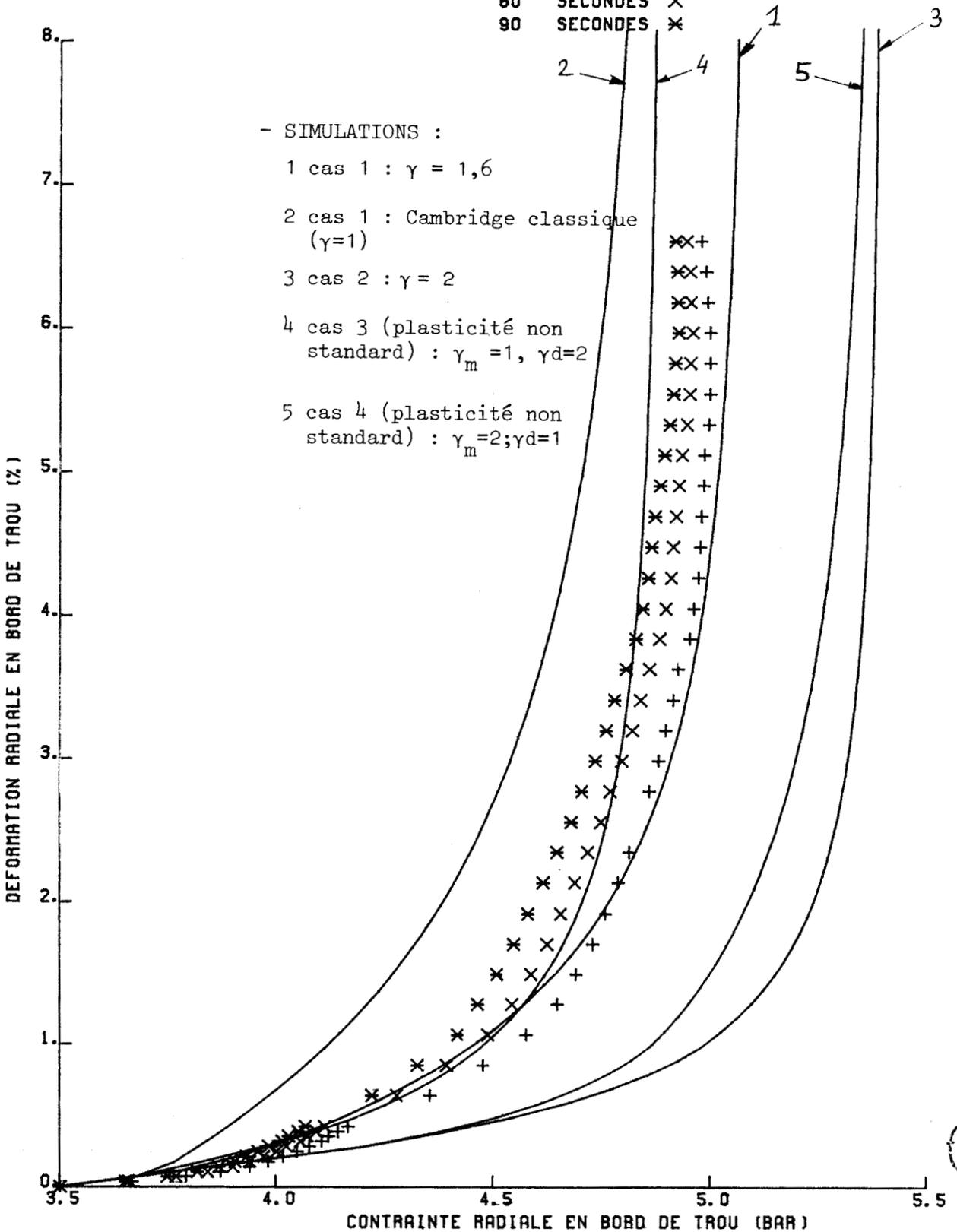
1 cas 1 :  $\gamma = 1,6$

2 cas 1 : Cambridge classique  
( $\gamma=1$ )

3 cas 2 :  $\gamma = 2$

4 cas 3 (plasticité non  
standard) :  $\gamma_m = 1, \gamma_d = 2$

5 cas 4 (plasticité non  
standard) :  $\gamma_m = 2; \gamma_d = 1$



# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

ESSAI 2 (CONSOLIDATION 4. BAR)

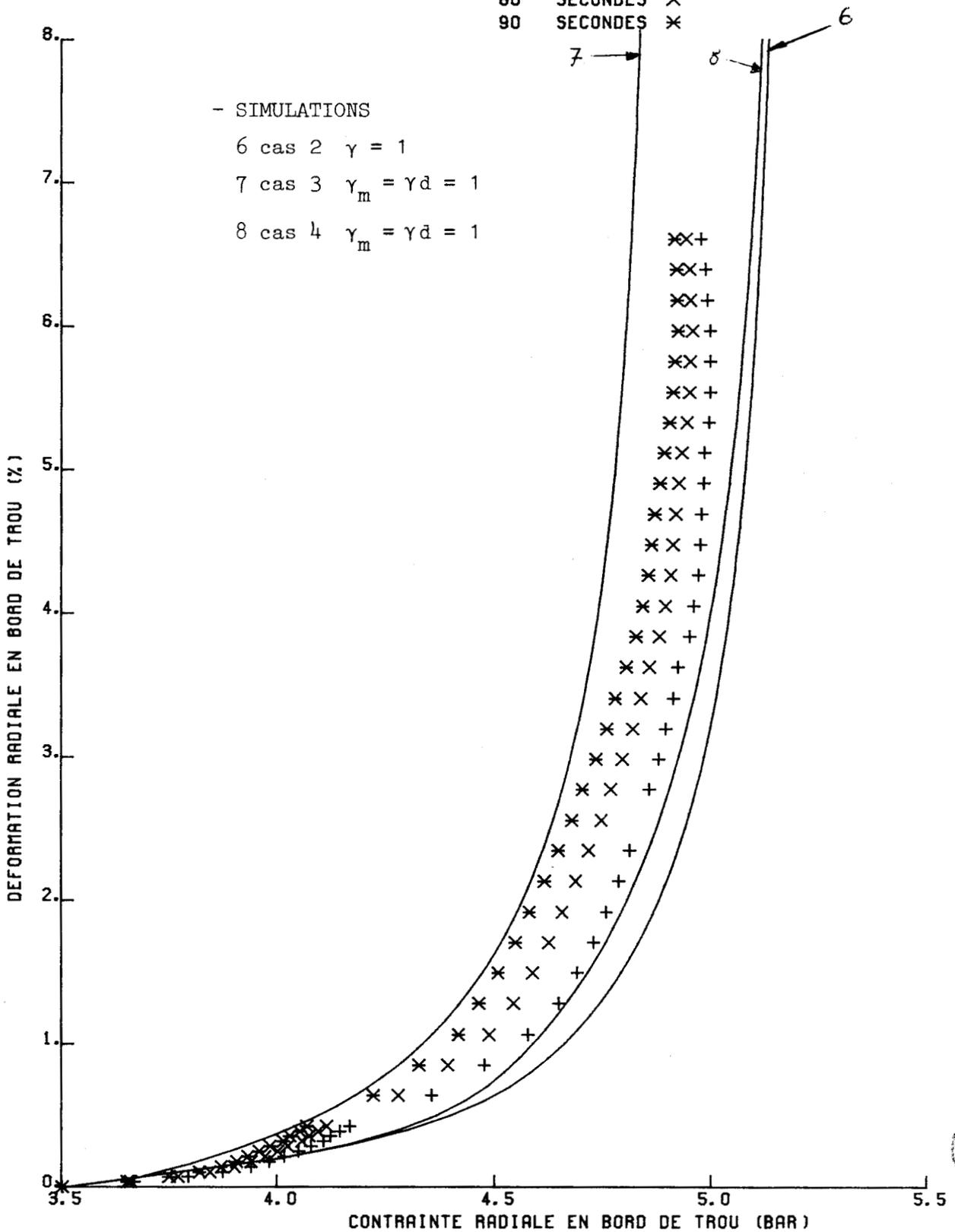
- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS

6 cas 2  $\gamma = 1$

7 cas 3  $\gamma_m = \gamma_d = 1$

8 cas 4  $\gamma_m = \gamma_d = 1$



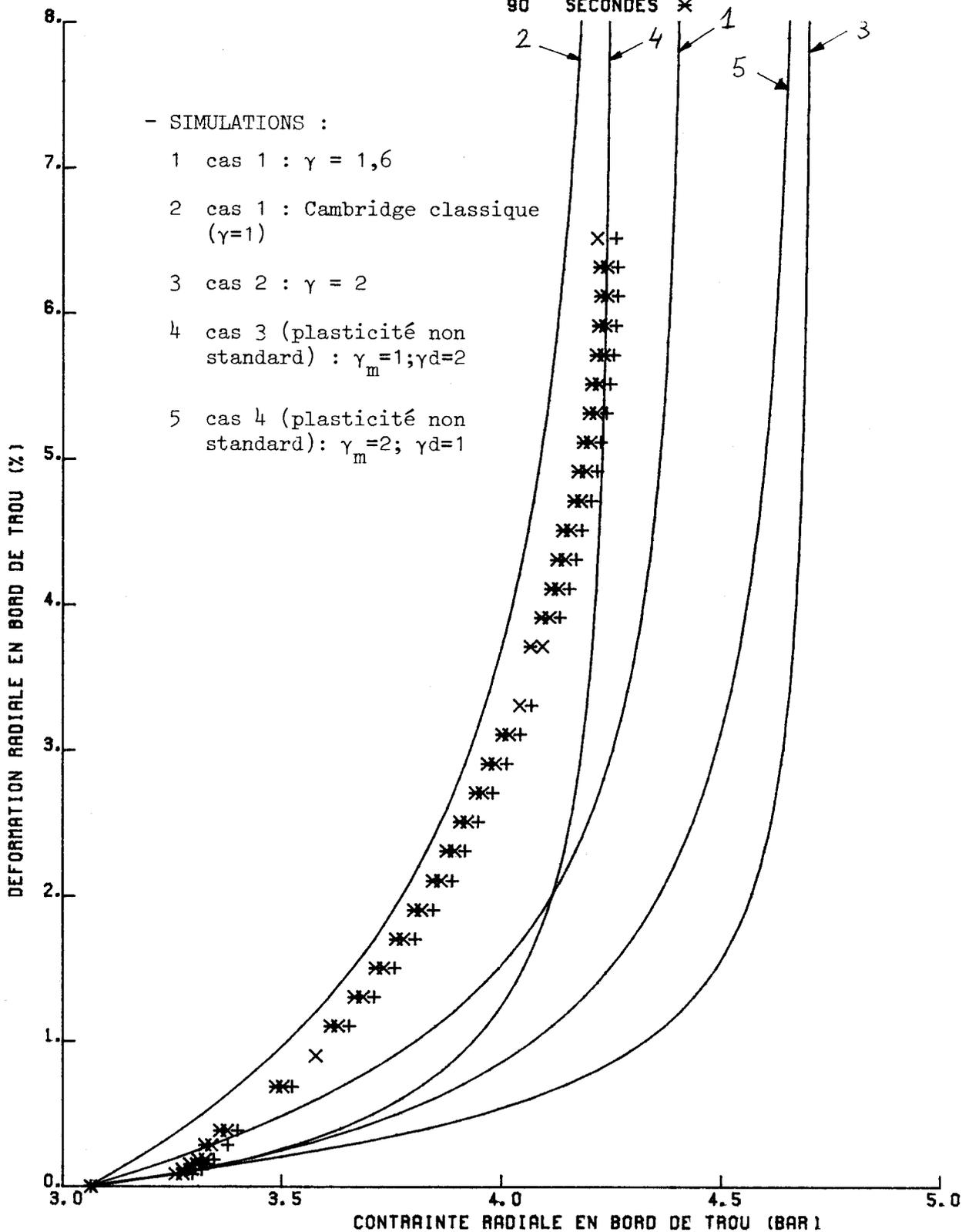
# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

ESSAI 3 (CONSOLIDATION 3. BAR)

- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS :

- 1 cas 1 :  $\gamma = 1,6$
- 2 cas 1 : Cambridge classique ( $\gamma=1$ )
- 3 cas 2 :  $\gamma = 2$
- 4 cas 3 (plasticité non standard) :  $\gamma_m=1; \gamma_d=2$
- 5 cas 4 (plasticité non standard) :  $\gamma_m=2; \gamma_d=1$



# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

ESSAI 3 (CONSOLIDATION 3. BAR)

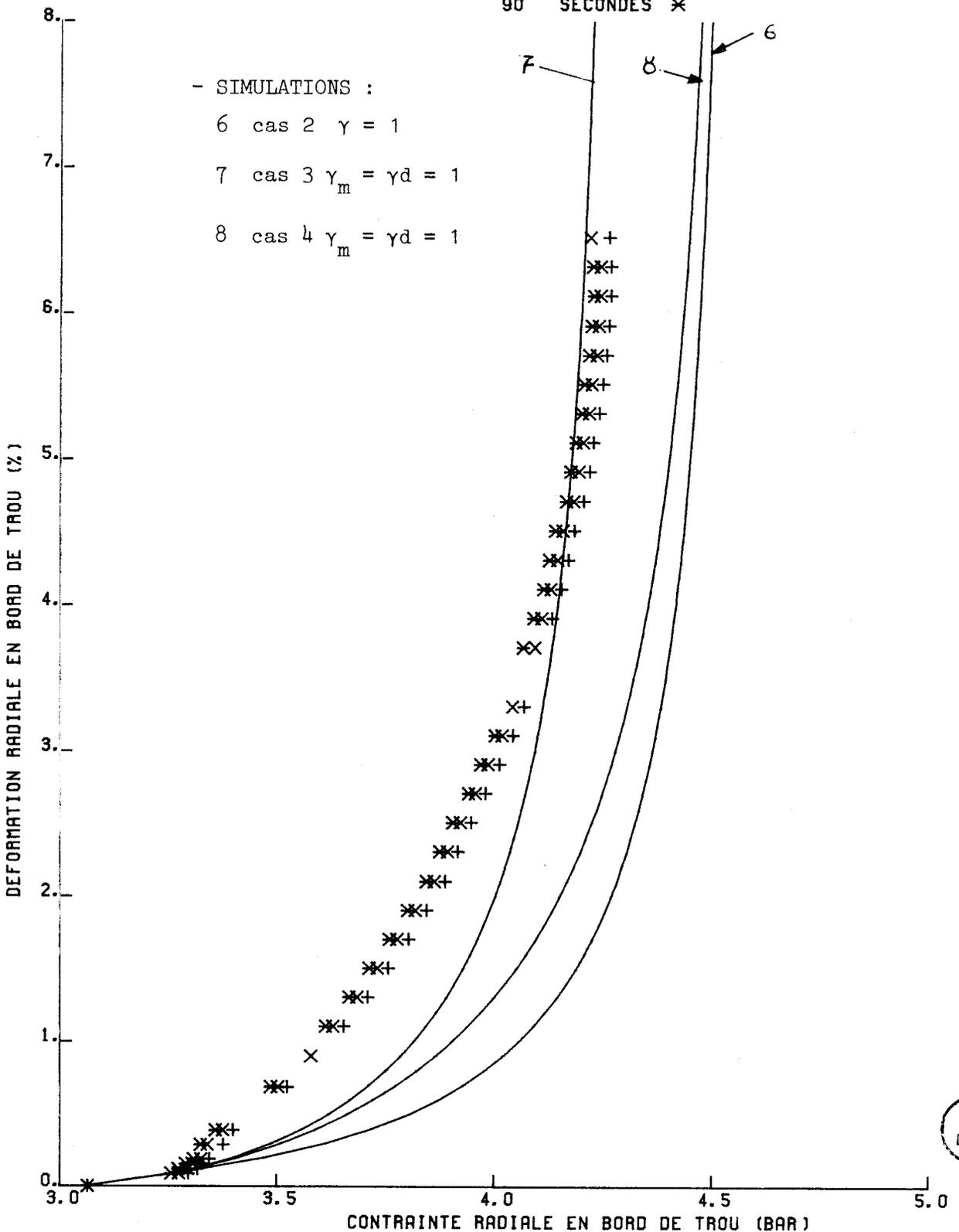
- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS :

6 cas 2  $\gamma = 1$

7 cas 3  $\gamma_m = \gamma_d = 1$

8 cas 4  $\gamma_m = \gamma_d = 1$



# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

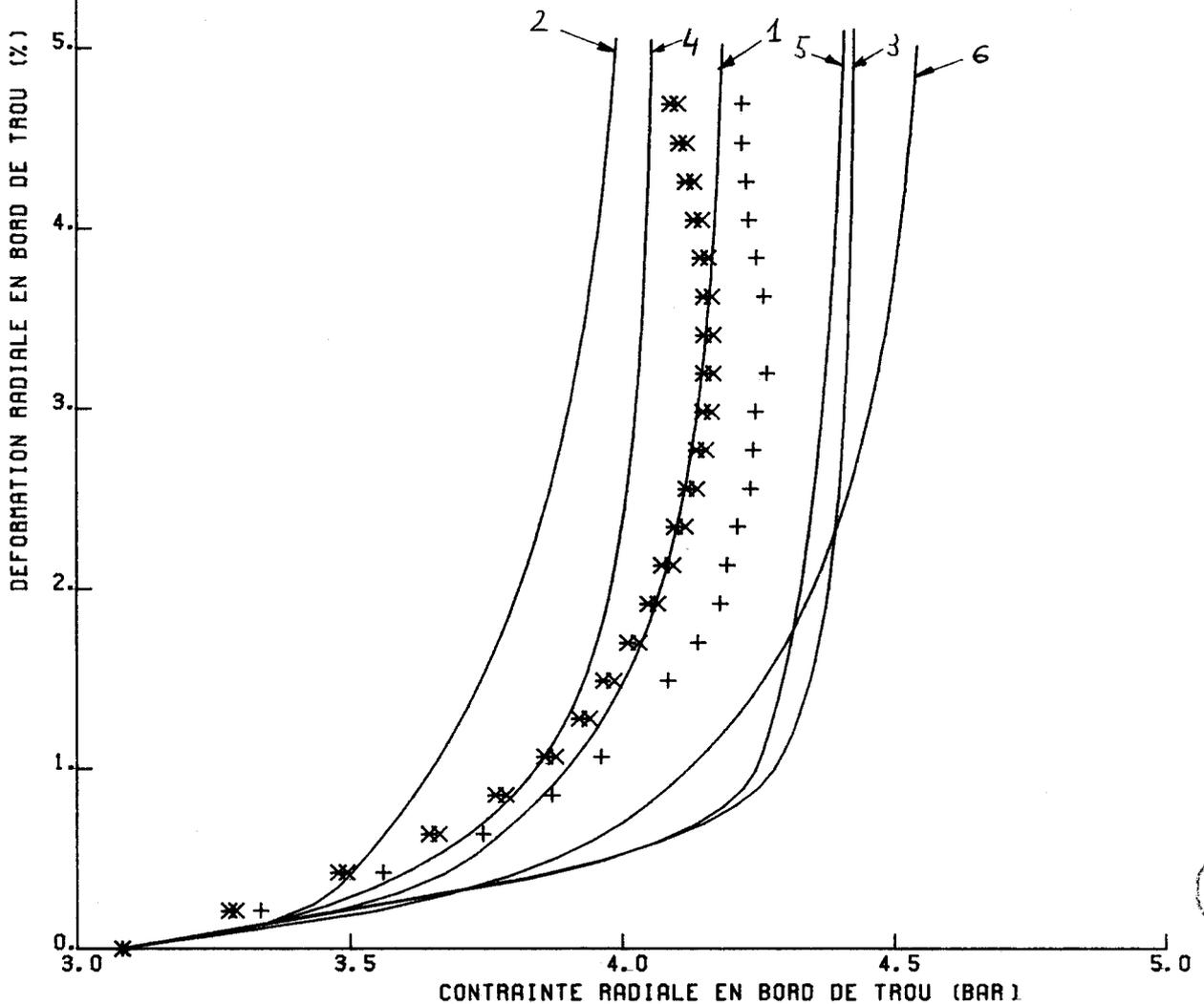
## ESSAI 4 (CONSOLIDATION 4. BAR)

- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS :

- 1 cas 1 = 1,6
- 2 cas 1 Cambridge classique = 1
- 3 cas 2 = 2
- 4 cas 3 (plasticité non standard) :  $m = 1$ ;  $d = 2$
- 5 cas 4 (plasticité non standard) :  $m = 2$ ;  $d = 1$
- 6 cas 1 = 1,6  $R_e, R_i$  non corrigés

}  $R_e, R_i$   
corrigés

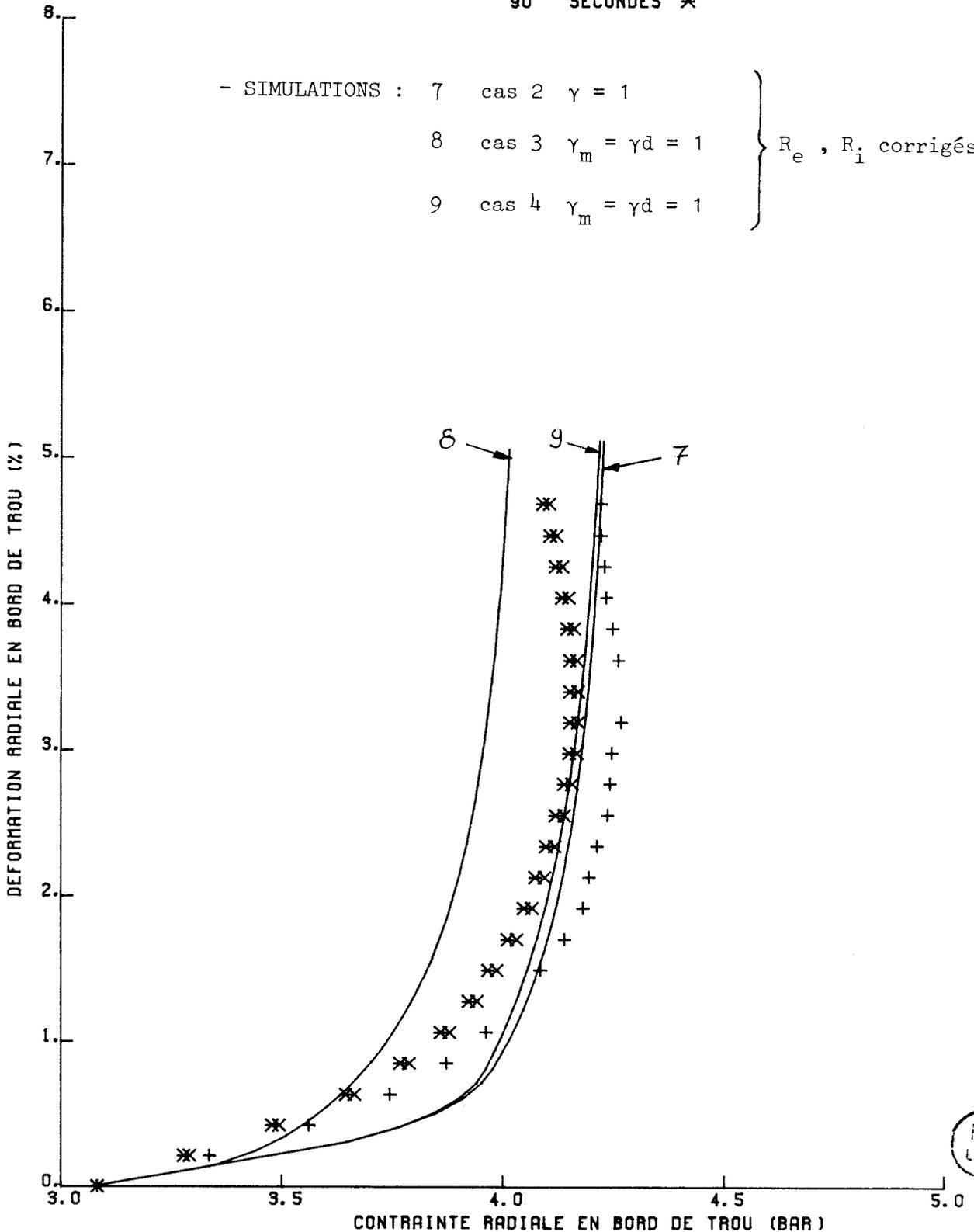


# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

## ESSAI 4 (CONSOLIDATION 4. BAR)

- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS : 7 cas 2  $\gamma = 1$   
8 cas 3  $\gamma_m = \gamma_d = 1$   
9 cas 4  $\gamma_m = \gamma_d = 1$  }  $R_e, R_i$  corrigés



# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

## ESSAI 5 (CONSOLIDATION 4. BAR)

- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS :

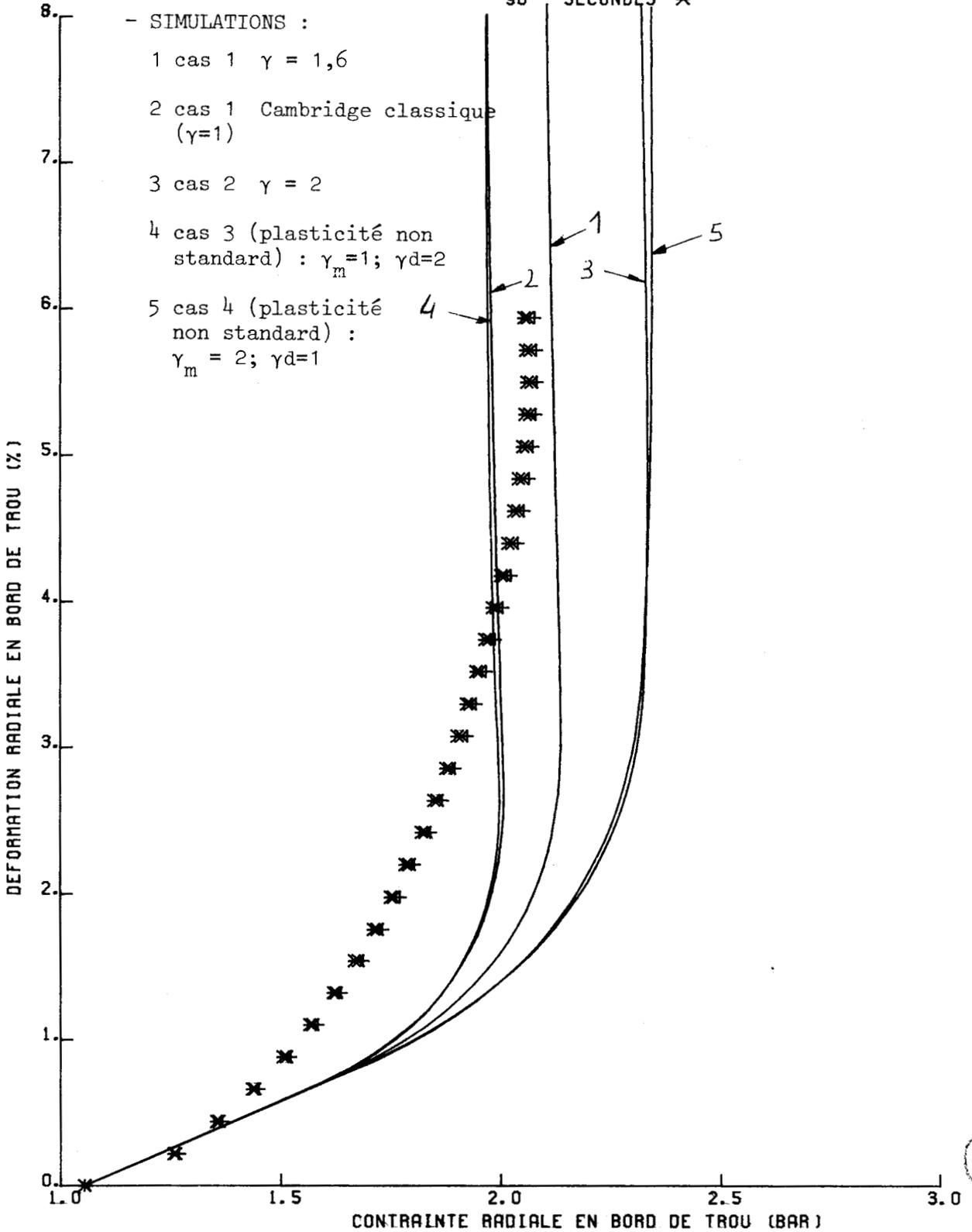
1 cas 1  $\gamma = 1,6$

2 cas 1 Cambridge classique ( $\gamma=1$ )

3 cas 2  $\gamma = 2$

4 cas 3 (plasticité non standard) :  $\gamma_m=1$ ;  $\gamma_d=2$

5 cas 4 (plasticité non standard) :  $\gamma_m = 2$ ;  $\gamma_d=1$



# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

ESSAI 5 (CONSOLIDATION 4. BAR)

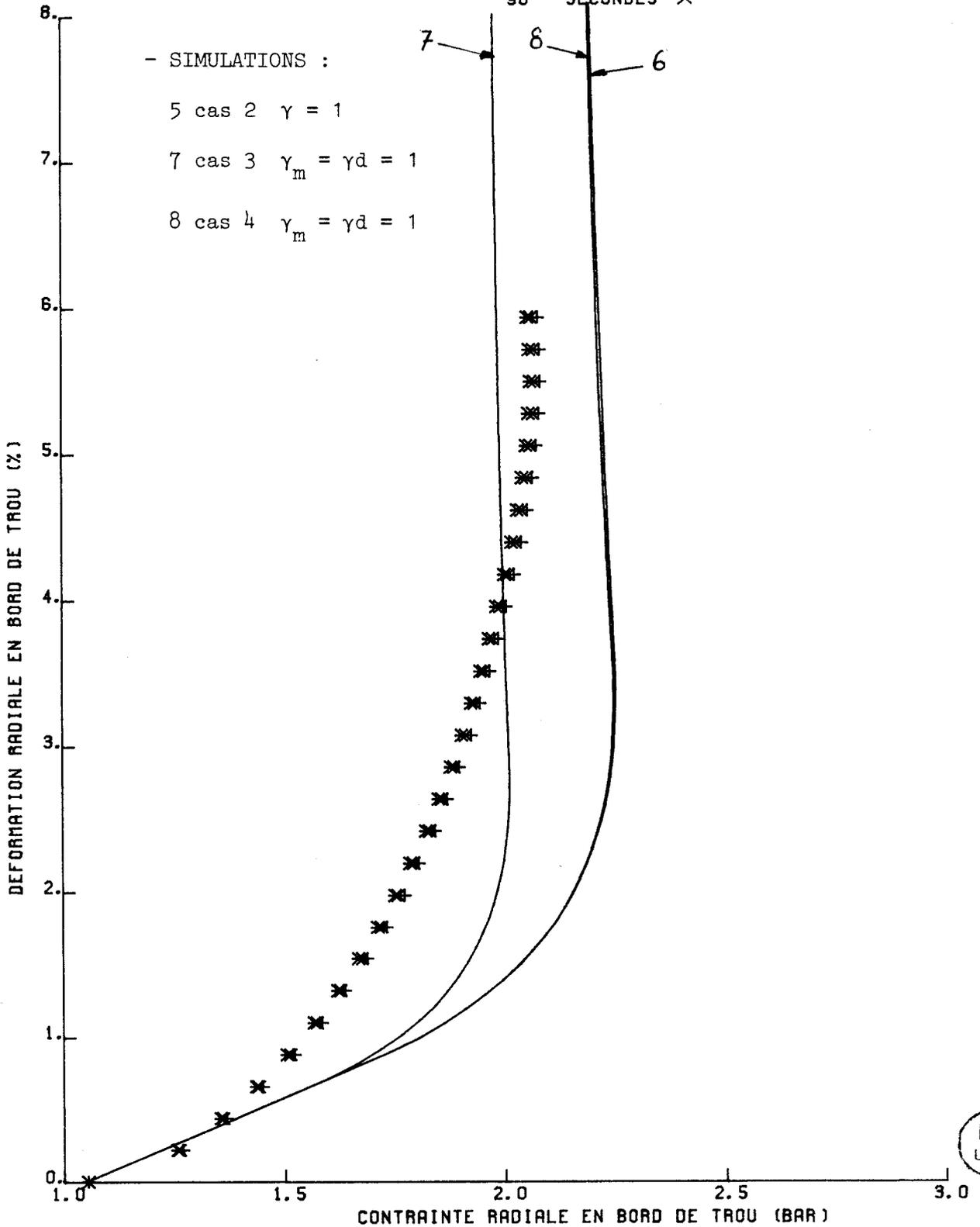
- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS :

5 cas 2  $\gamma = 1$

7 cas 3  $\gamma_m = \gamma_d = 1$

8 cas 4  $\gamma_m = \gamma_d = 1$



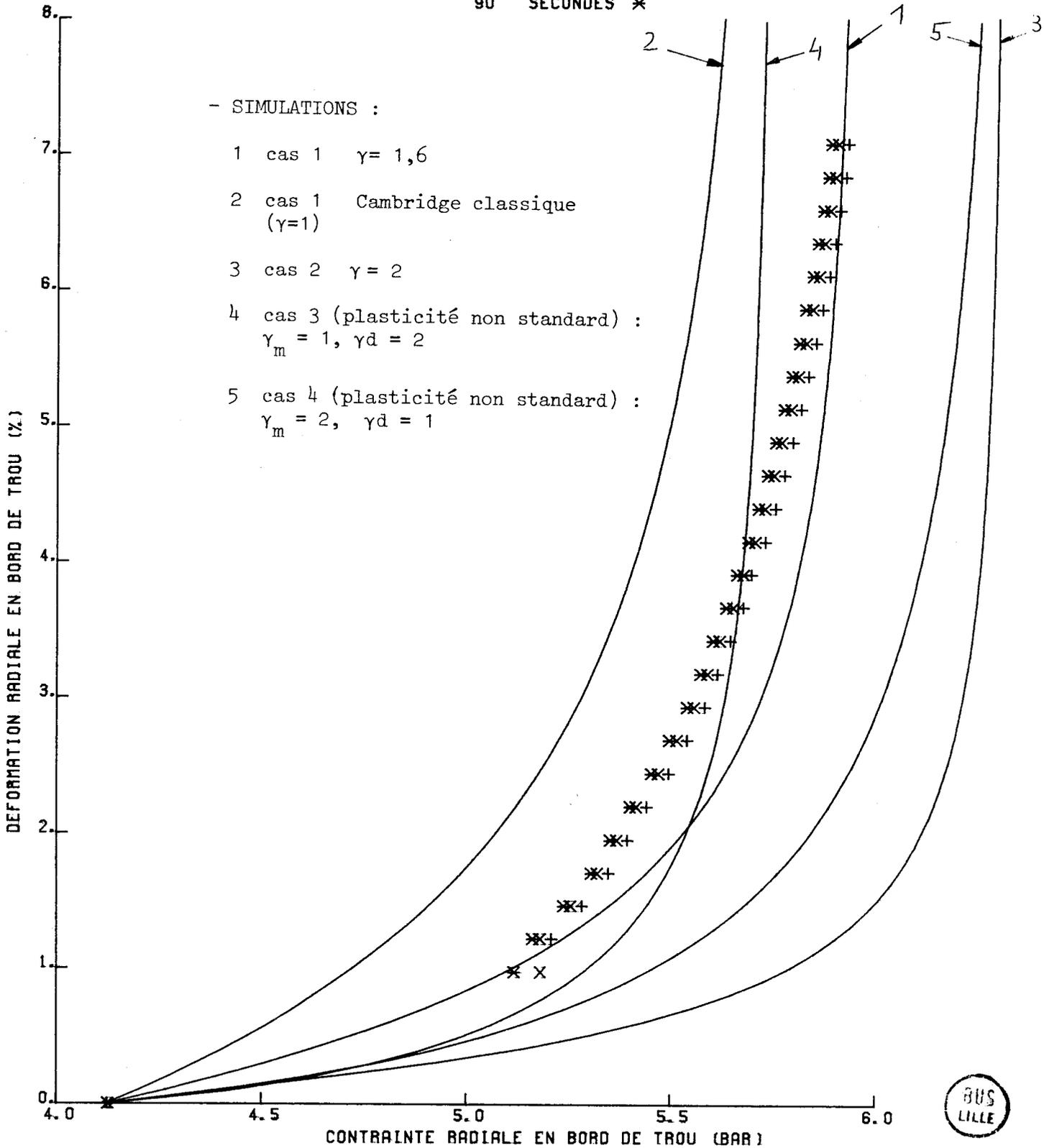
# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

ESSAI 6 (CONSOLIDATION 4. BAR)

- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS :

- 1 cas 1  $\gamma = 1,6$
- 2 cas 1 Cambridge classique ( $\gamma=1$ )
- 3 cas 2  $\gamma = 2$
- 4 cas 3 (plasticité non standard) :  
 $\gamma_m = 1, \gamma_d = 2$
- 5 cas 4 (plasticité non standard) :  
 $\gamma_m = 2, \gamma_d = 1$

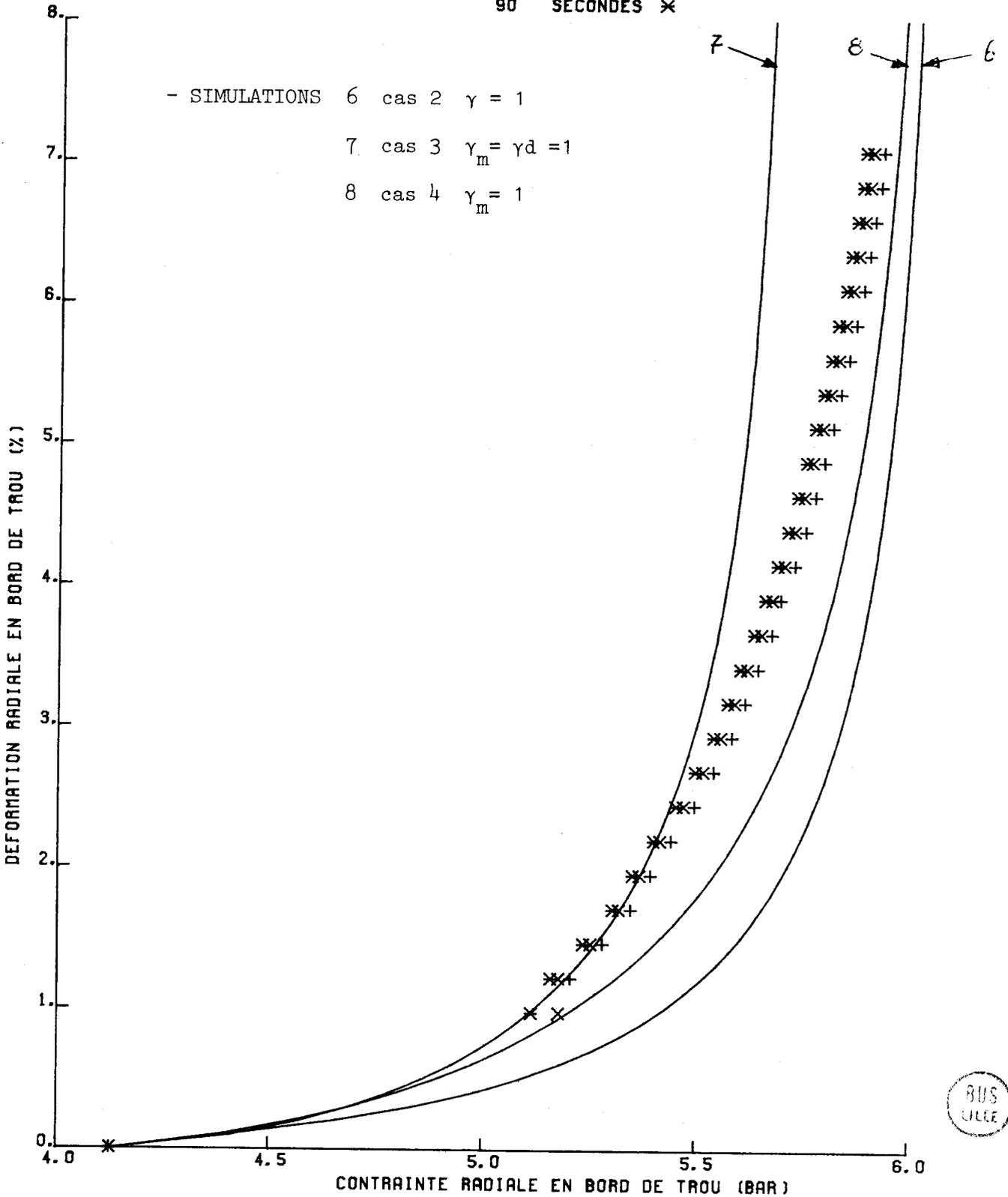


# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

ESSAI 6 (CONSOLIDATION 4. BAR)

- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS 6 cas 2  $\gamma = 1$   
7 cas 3  $\gamma_m = \gamma_d = 1$   
8 cas 4  $\gamma_m = 1$



BUS  
LILLE

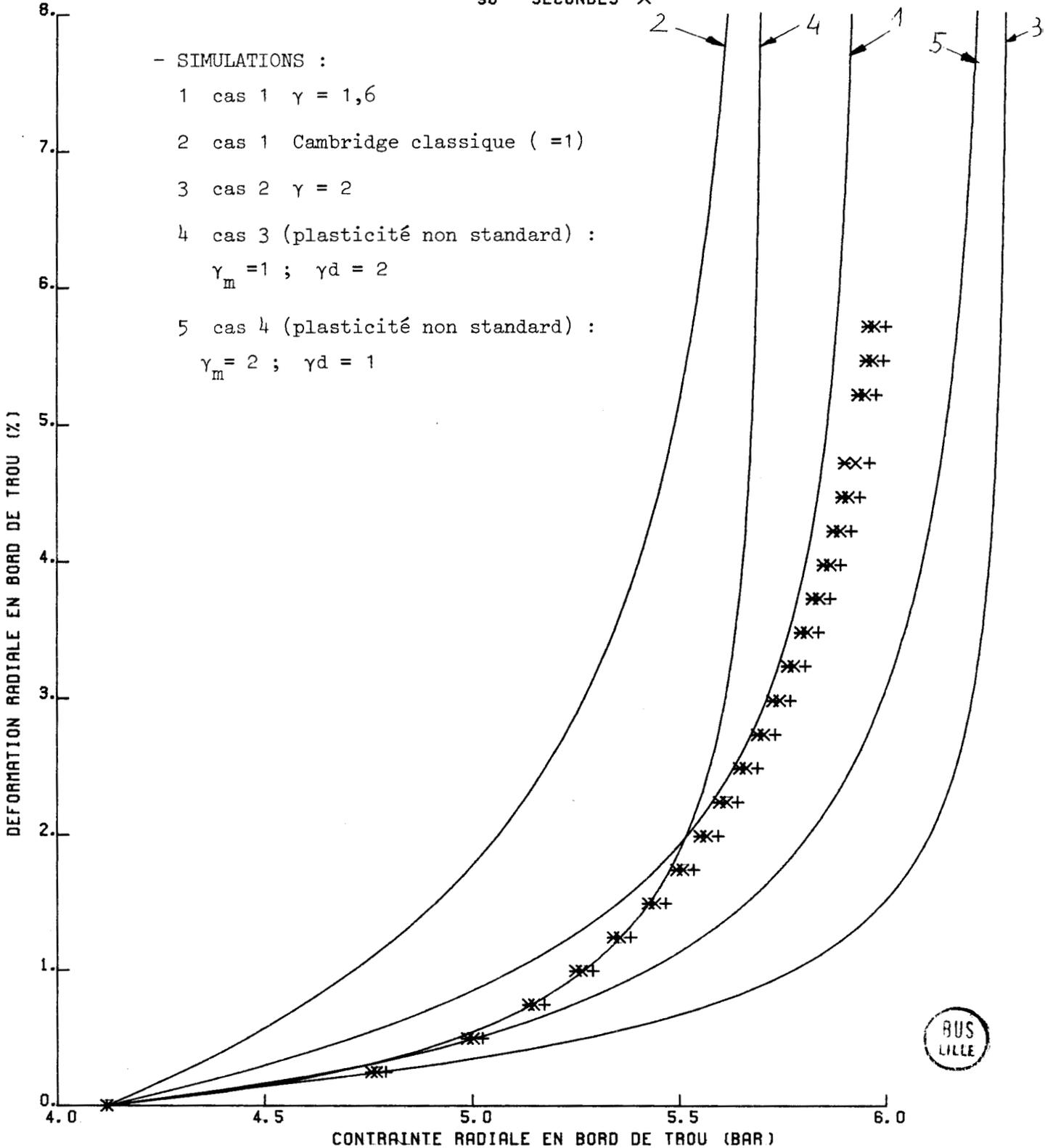
# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

ESSAI 7 (CONSOLIDATION 4. BAR)

- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS :

- 1 cas 1  $\gamma = 1,6$
- 2 cas 1 Cambridge classique ( $=1$ )
- 3 cas 2  $\gamma = 2$
- 4 cas 3 (plasticité non standard) :  
 $\gamma_m = 1 ; \gamma_d = 2$
- 5 cas 4 (plasticité non standard) :  
 $\gamma_m = 2 ; \gamma_d = 1$

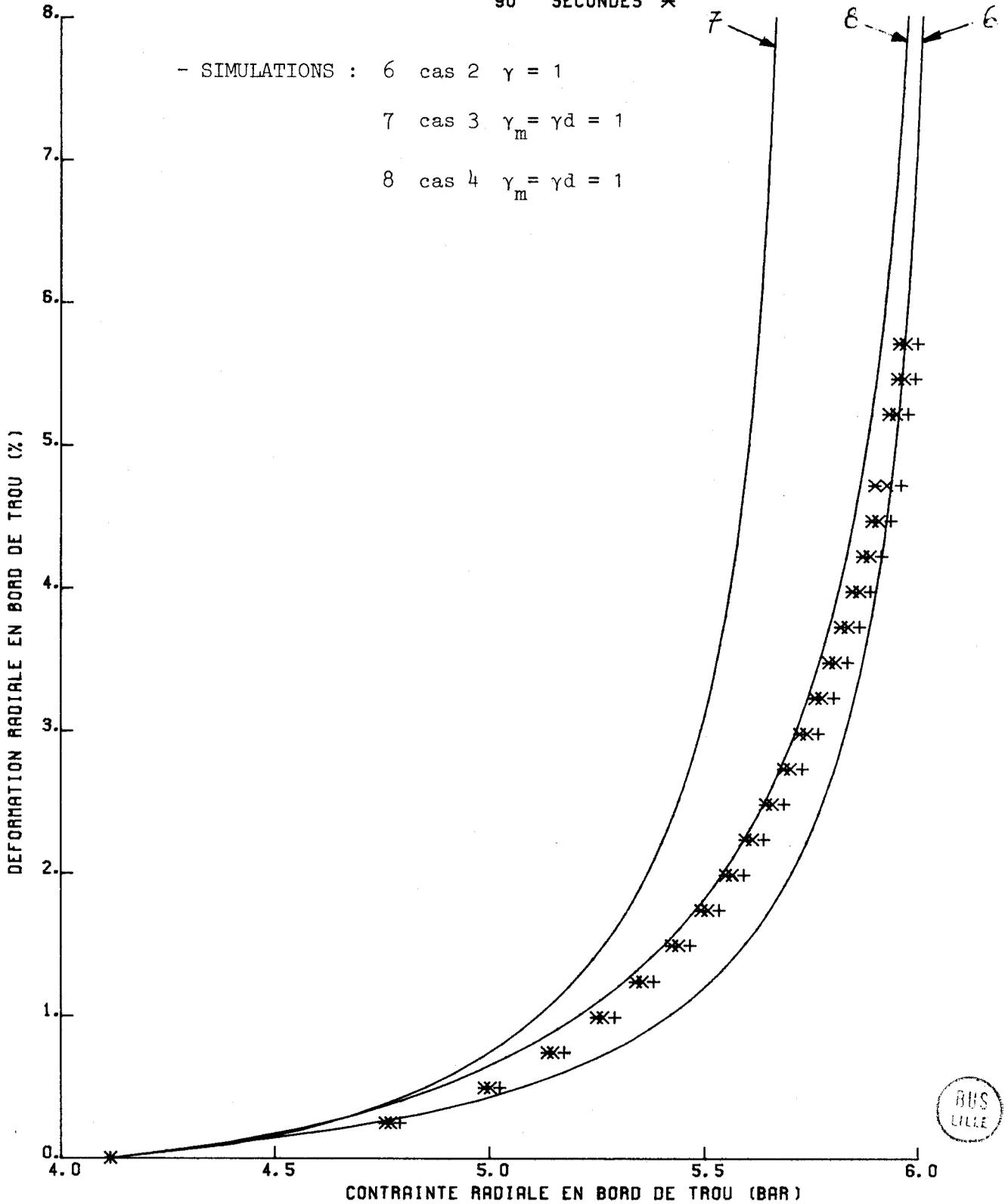


# ESSAI D'EXPANSION DE CYLINDRE CREUX - KAOLIN II -

ESSAI 7 (CONSOLIDATION 4. BAR)

- POINTS EXPERIMENTAUX 30 SECONDES +  
60 SECONDES X  
90 SECONDES \*

- SIMULATIONS : 6 cas 2  $\gamma = 1$   
7 cas 3  $\gamma_m = \gamma_d = 1$   
8 cas 4  $\gamma_m = \gamma_d = 1$



#### 7.4 - Etude expérimentale du pressiomètre autoforeur.

Le schéma du pressiomètre autoforeur est donné ci-dessous d'après la référence [25] .

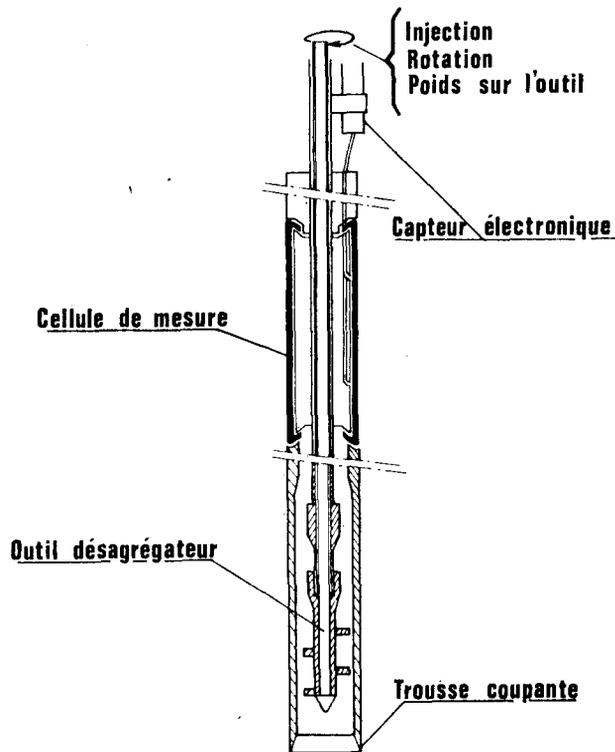


Figure 5 - Schéma du pressiomètre autoforeur.

Comme le soulignent leurs auteurs, il est important de remarquer les caractéristiques suivantes à son sujet :

- la trousse coupante est bisautée vers l'intérieur afin de limiter l'expansion latérale et donc le remaniement pendant la mise en place.
- la remontée des sédiments de forage et du fluide d'injection se fait par l'intérieur et non entre la membrane et le terrain.
- pendant la mise en place, la cellule fonctionne comme capteur de pression totale ce qui permet de suivre la qualité de la mise en place.

L'essai proprement dit s'effectue à déformation contrôlée en injection à vitesse constante et continue. La pression totale est mesurée de façon quasi-continue.

Les essais rapides, dits non drainés, se font à la vitesse d'injection de  $100 \text{ cm}^3$  par 10 minutes pour un volume utile initial de l'ordre de  $1300 \text{ cm}^3$  (longueur utile : 21 cm; diamètre : 89 mm).

1) Site étudié :

De nombreux essais ont été effectués par le laboratoire des Ponts et Chaussées de St Briec sur le site de Cran dans la vallée de la Vilaine en aval de Redon. Le sol y est constitué d'une couche de 17 m d'argile molle sur des graves compactes.

La coupe type du terrain et les caractéristiques géotechniques sont données figure 6 d'après la référence [26].

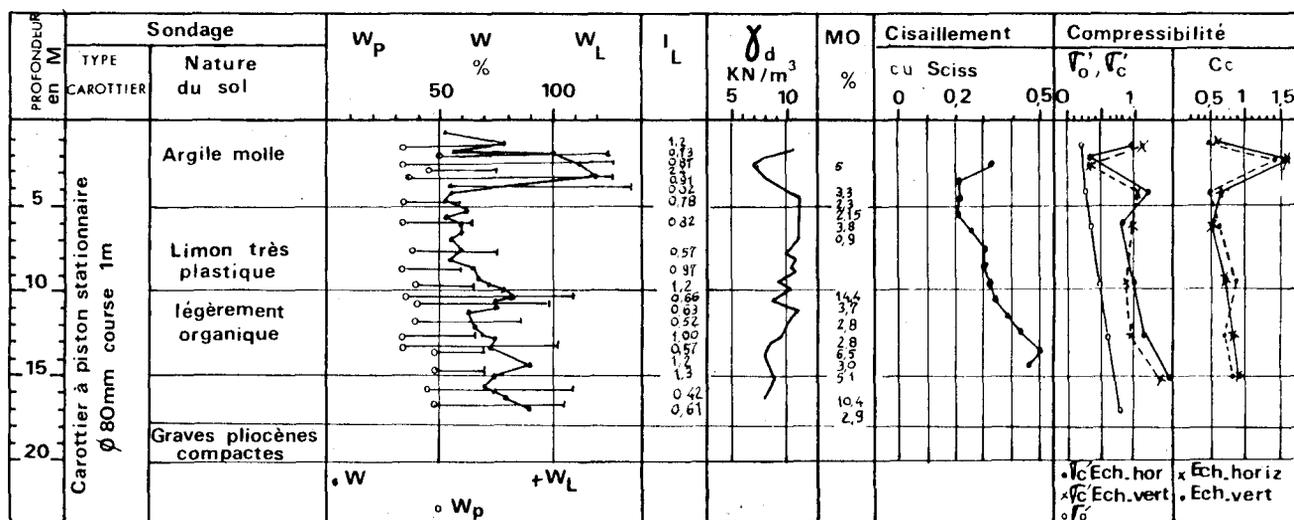


Figure 6 - Coupe de terrain du site de Cran et caractéristiques géotechniques.

Il faut ajouter, d'après la même référence, qu'entre 8 et 17 m la cohésion drainée est nulle et l'angle de frottement interne vaut en moyenne  $34^\circ$ . Pour cette même tranche des essais oedométriques donnent  $k = 0,22$  et  $\lambda = 0,347$ . Enfin on obtient également en moyenne un indice de plasticité de 47 % une limite de liquidité de 87 %.

Ces deux derniers résultats peuvent être reportés sur la classification de Casagrande déjà donnée page 76 (figure 10). On peut constater ci-après combien ces valeurs sont a priori compatibles avec une application de la théorie de Cambridge.

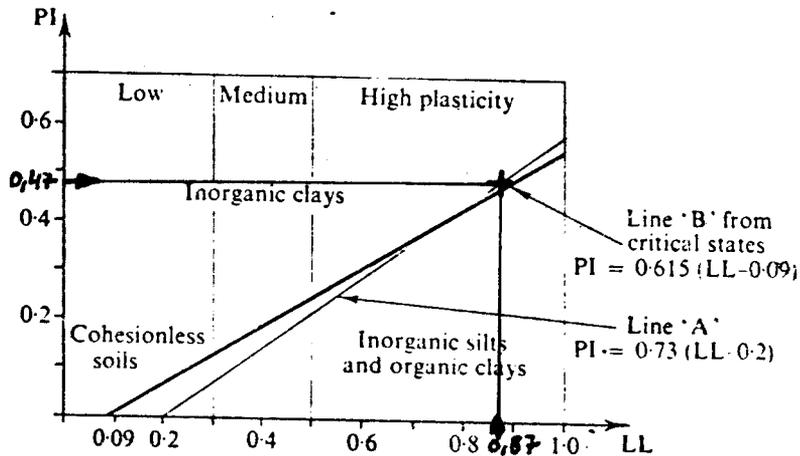


Figure 7 - Élément de compatibilité de l'argile de Cran (entre 8 et 17 m) avec la théorie de l'Ecole de Cambridge.

Un autre élément de compatibilité avec la théorie de Cambridge est donné par les valeurs moyennes suivantes (toujours par la couche située entre 8 et 17 m).

$$\begin{aligned} \text{teneur en eau : } W_m &= 73 \% \\ e_m &= 1,7 \\ Cu_m &= 0,28 \text{ bar} \end{aligned}$$

or d'après les résultats de la page 77 on a par application de la théorie de Cambridge :

$$Cu \# M \exp \left( \frac{e_0 - \lambda + k}{\lambda} \right) \exp \left( - \frac{\gamma_0}{\gamma_w \lambda} w \right)$$

on obtient effectivement  $Cu = 0,29$  bar.

## 2) Essais pressiométriques

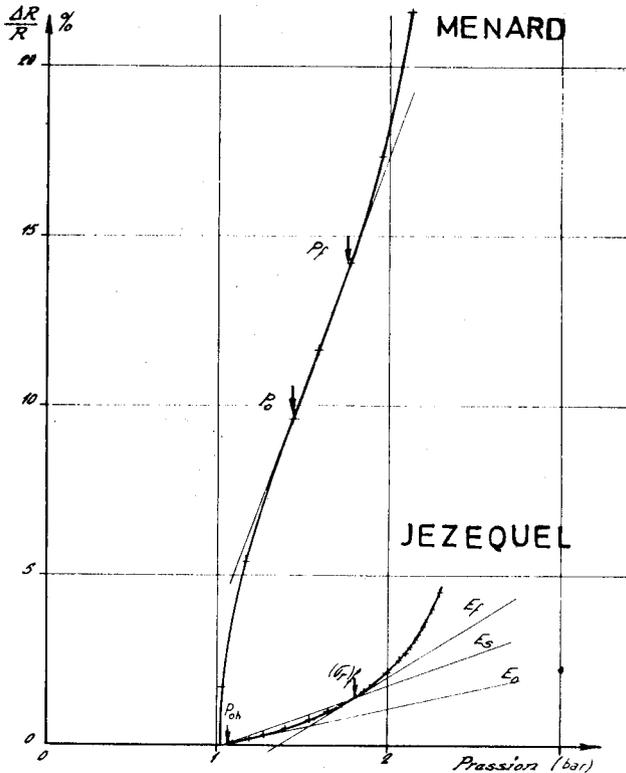
Deux essais pressiométriques effectués sur le site de Cran ont été extraits de la référence [24] pour simulations. Pour ces deux essais il a en

effet été possible de connaître toutes les données nécessaires à l'application de la théorie de l'Ecole de Cambridge.

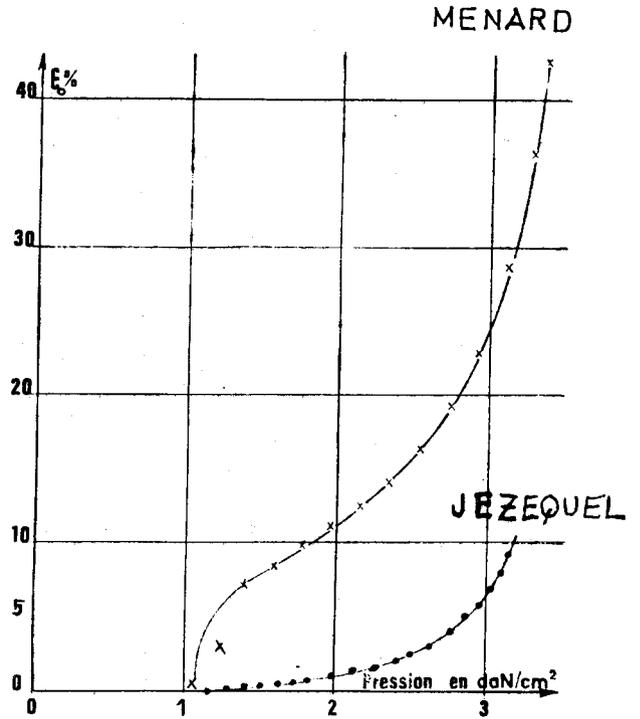
Caractéristiques	Pressiomètre 1	Pressiomètre 2
Profondeur de l'essai (m)	8,30	10,30
Niveau de la nappe (m)	0,20	0,20
Contrainte verticale initiale $\sigma'_v$ (bar)	0,42	0,54
Contrainte verticale de préconsolidation $\sigma'_c$ (bar)	0,90	0,92
Contrainte horizontale totale initiale $\sigma_{h_i}$ (bar)	1,08	1,30
Teneur en eau initiale W	60 %	80 %
$\lambda$	0,347	0,347
k	0,022	0,022
$\psi'$	34°	34°

TABLEAU 2 - Caractéristiques du sol au niveau des deux essais pressiométriques

Les deux essais considérés sont figurés ci-dessous tels qu'ils se présentent dans la référence [24] :



Pressiomètre 1 : (8 m 30)



Pressiomètre 2 : (10 m 30)

Figure 8 - Essais pressiométriques de Cran selon JEZEQUEL.  
(comparaison avec l'essai type MENARD).

La détermination de  $\nu$  se fait à partir du module initial  $E_i = \frac{\Delta \sigma_r(a)}{\Delta (U(a)/a)}$  de la couche pressiométrique à simuler. D'après la formule (18) de la page 125 :

$$\nu = \frac{1-c}{2+c} \quad \text{avec} \quad c = \frac{E_i k}{3(1+\epsilon_i) p_i}$$

L'essai 2 pose un problème car la contrainte  $\sigma_r(a)$  totale horizontale initiale de 1,12 bar est manifestement trop faible et conduit à

un module  $K_0 = 0,14$  trop faible également.

Ce résultat est d'ailleurs en désaccord avec le diagramme de la figure 9 dans lequel on peut constater  $\sigma_2(a) = 1,30 \text{ bar}$ .

Cette dernière valeur a été reprise pour la simulation de l'essai 2; c'est pourquoi les essais simulés et réels n'ont pas le même point de départ sur les courbes présentées dans la suite.

Le module initial  $E_i$  de la simulation de l'essai 2 est cependant le module donné par JEZEQUEL. Il conduit à une valeur de  $U$  (confer tableau 3) compatible avec celle relative à l'essai 1.

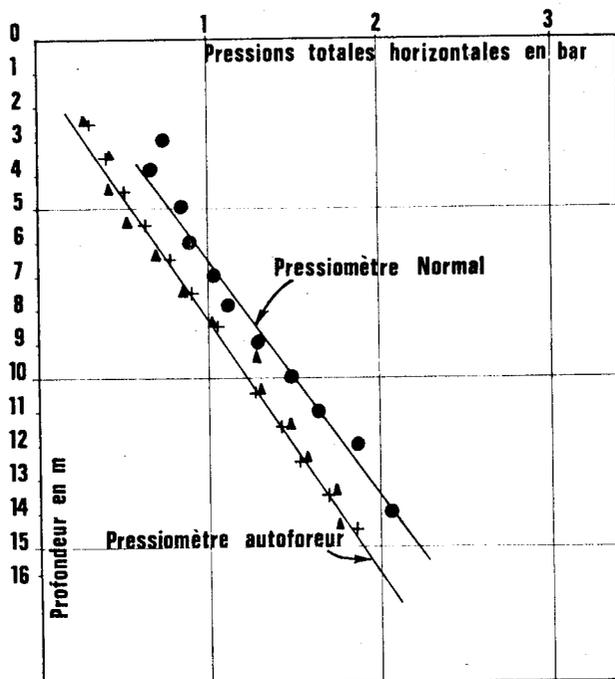


Figure 9 - Diagramme de la contrainte totale horizontale  $\sigma_r$  d'après JEZEQUEL [24].

### 3) Calculs préliminaires aux simulations :

Les calculs ont pour objet de calculer la pression de consolidation  $p_c$  et l'indice des vides  $e_0$  sur la courbe de consolidation vierge à partir

des valeurs du tableau 2 selon les cas étudiés.

a) Calcul de  $e_0$  :

La courbe oedométrique est décrite par les deux équations suivantes :

$$e_i = E_c - k \ln \left( \frac{\sigma'_{vi}}{\sigma'_c} \right)$$

$$E_c = E_0 - \lambda \ln \sigma'_c$$

d'où l'on obtient :

$$E_0 = e_i + k \ln (\sigma'_{vi}) + (\lambda - k) \ln (\sigma'_c)$$

Selon le cas étudié on peut déterminer la valeur de  $\gamma$  et la différence  $\Delta$  qui existe entre les courbes de consolidation oedométriques et isotropes. L'entrée dans les abaques  $\gamma = f(a)$  et

$$\Delta = g(a)$$

se fait à partir de la connaissance de

$$K_0 = \frac{\sigma'_{hi}}{\sigma'_{vi}}$$

pour les 2 cas relatifs à l'extension de la théorie

de Cambridge en plasticité standard (confer abaques en fin de chapitre).

En définitive on peut déduire :

$$e_0 = E_0 - \Delta$$

b) Calcul de  $p_c$

Lors de l'essai oedométrique l'entrée en plasticité s'effectue pour (confer p. 87) :

$$p_r \# \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \sigma'_c$$

$$q_r \# \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sigma'_c$$

La valeur de  $p_c$  est alors déduite par le critère de plasticité selon le cas étudié :

Cas 1 : 
$$p_c = p_r \left[ \frac{q_r (1-\gamma)}{\gamma M p_r} + 1 \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Cas 2 : 
$$p_c = p_r \left[ \left( \frac{q_r}{M p_r} \right)^2 \left( \frac{2-\gamma}{\gamma} \right) + 1 \right]^{\frac{1}{2-\gamma}}$$

D'après le tableau 2 et ces calculs préliminaires on obtient :

TABLEAU 3

		Pressiomètre 1	Pressiomètre 2
$K_0$		0,643	0,537
$\nu$		0,161	0,158
$\Delta$	cas 1	0,021	0,041
	cas 2	0,054	0,064
	Cambridge classique	0	0
$e_0$	cas 1	1,503	2,022
	cas 2	1,471	2,000
	Cambridge classique	1,525	2,063
$\gamma$	cas 1	1,6	2,1
	cas 2	0,85	1,05
	Cambridge classique	1	1
$p_c$ (bar)	cas 1	1,237	1,172
	cas 2	1,141	1,108
	Cambridge classique	1,485	1,531



#### 4) Résultats et analyse

Les courbes pressiométriques et les courbes d'évolution de la pression interstitielle en bord de trou sont figurées pages 157 à 160. Les résultats numériques complets sont rassemblés en fin d'ouvrage.

L'ensemble des simulations pressiométriques se révèle bien adapté à la réalité. Certes le nombre d'essais simulés est restreint mais compensé par des similitudes de résultats avec les essais d'expansion de cylindre creux.

Expérimentalement l'allure des courbes obtenues justifie bien la mise en parallèle de ces deux types d'essai. Les stades successifs de l'évolution de la déformation en bord de trou sont du même ordre de grandeur.

L'encadrement des courbes expérimentales par les diverses simulations est globalement identique à celui relatif aux cylindres creux :

- le cas 1 avec  $\gamma = 1$  (Cambridge classique) se révèle systématiquement pressiomètre.
- les deux meilleures simulations sont réalisées par le cas 2 avec  $\gamma = 1$  et surtout par le cas 1 avec  $\gamma$  de l'ordre de  $1,6 - 2$ .

Les courbes d'évolution de la pression intersitielle en bord de trou sont intéressantes car elles répondent assez bien aux constatations de JEZEQUEL [24] d'après des mesures effectuées :

- à la pression limite le rapport  $\frac{\Delta u}{\Delta \sigma r}$  est de l'ordre de 0,5.

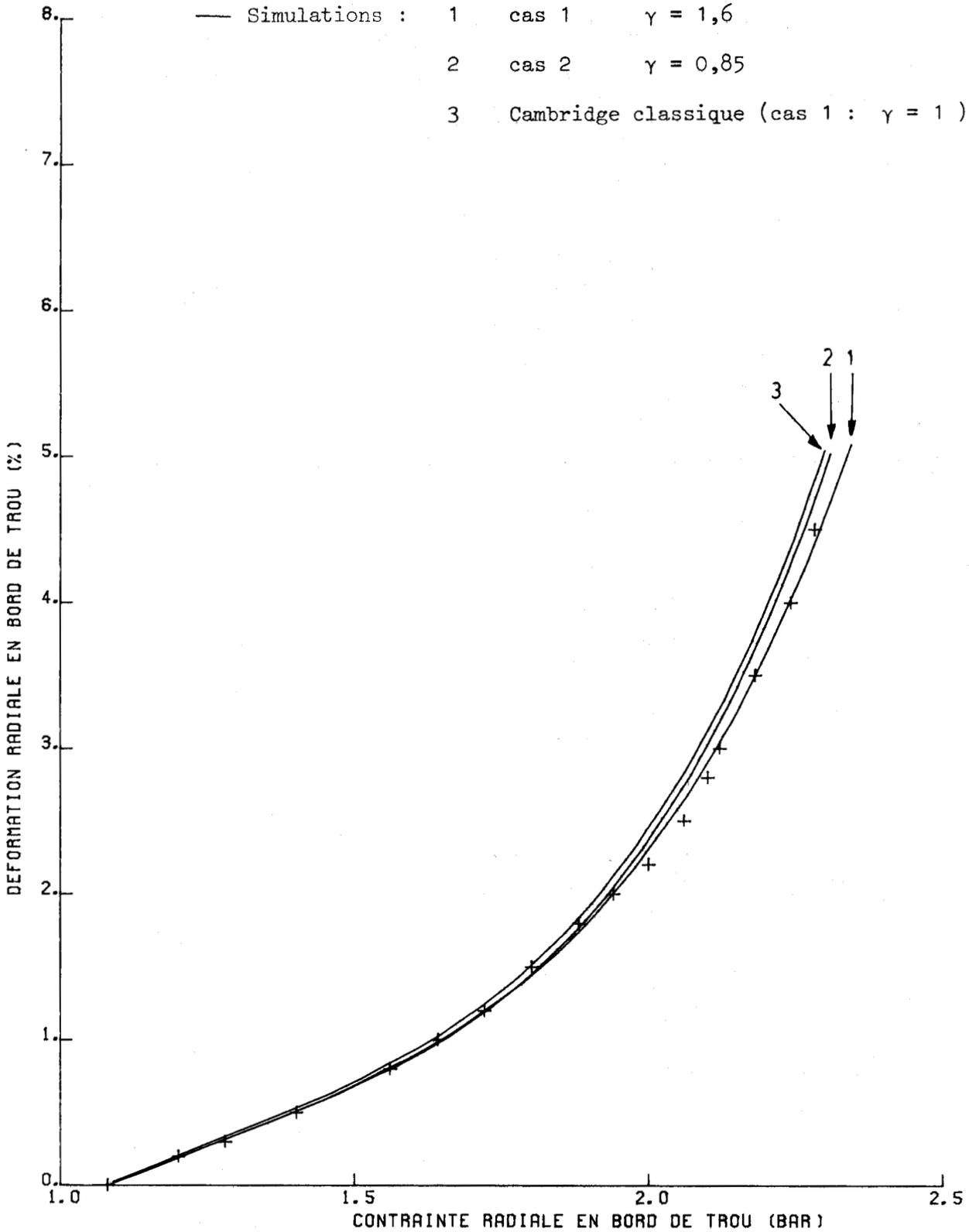
- la pression interstieielle en bord de trou diminue parfois légèrement au début de l'essai. C'est précisément le cas pour le simulation la mieux adaptée (cas 1 avec  $\gamma \sim 1,6$ ) avec, peut-être, plus d'ampleur que dans la réalité lorsque cela se produit.

Remarquons enfin que l'entrée en plasticité s'effectue (confer résultats numériques en fin d'ouvrage), pour les deux essais simulés, dans le domaine de surconsolidation ( $\frac{q}{p} > M$ ). C'était le cas pour lequel les simulations de l'essai d'expansion de cylindre creux (essai 5) s'étaient révélées les moins adaptées. Le problème soulevé reste en suspens.

# PRESSIOMETRE AUTOFOREUR (ESSAI ET SIMULATIONS) - PRESSIOMETRE 1 -

— POINTS EXPERIMENTAUX SELON JEZEQUEL : +

- Simulations :
- 1 cas 1  $\gamma = 1,6$
  - 2 cas 2  $\gamma = 0,85$
  - 3 Cambridge classique (cas 1 :  $\gamma = 1$ )



# PRESSIOMETRE AUTOFOREUR (ESSAI ET SIMULATIONS)

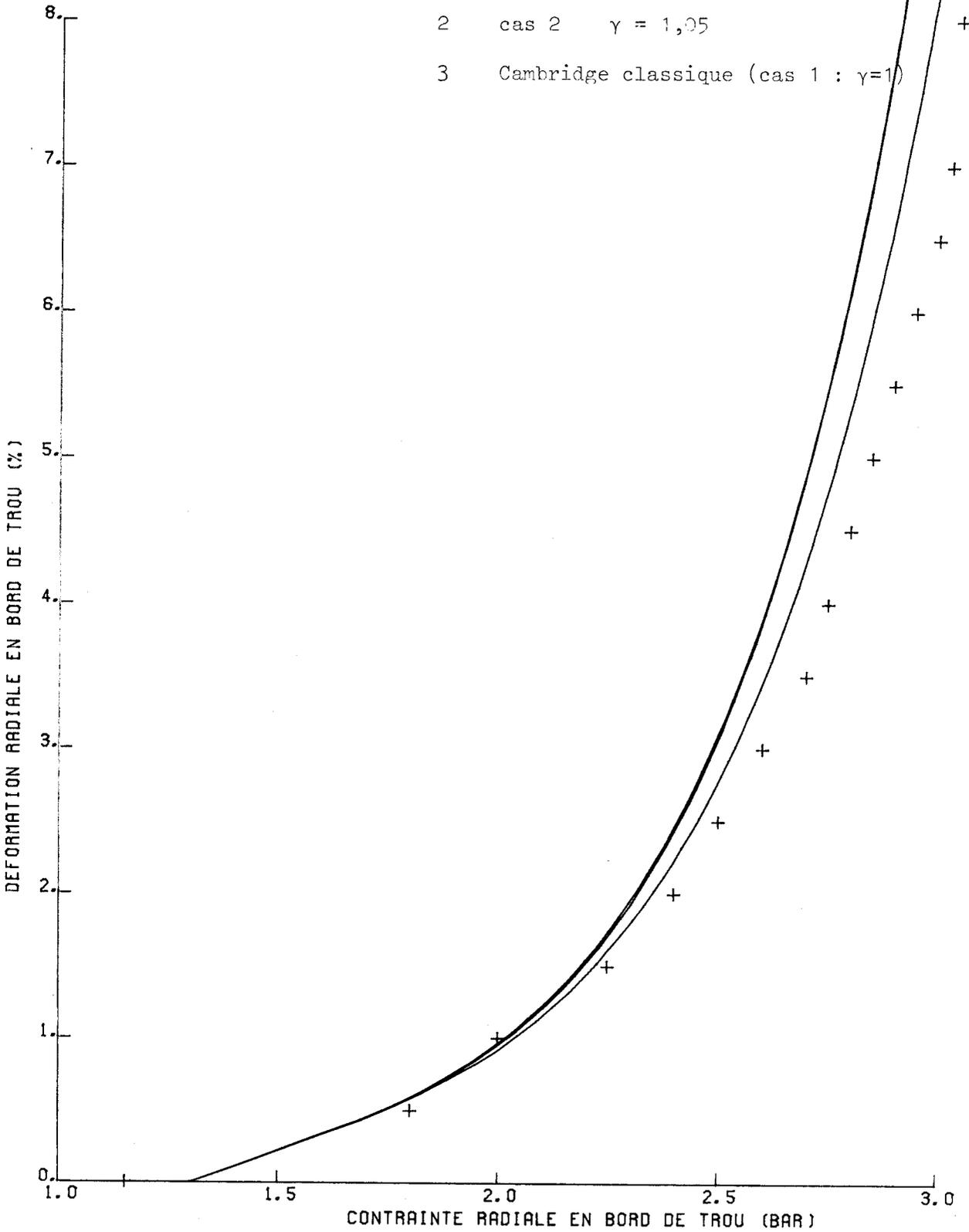
## - PRESSIOMETRE 2 -

— POINTS EXPERIMENTAUX SELON JEZEQUEL : +

— Simulations : 1 cas 1  $\gamma = 2,1$

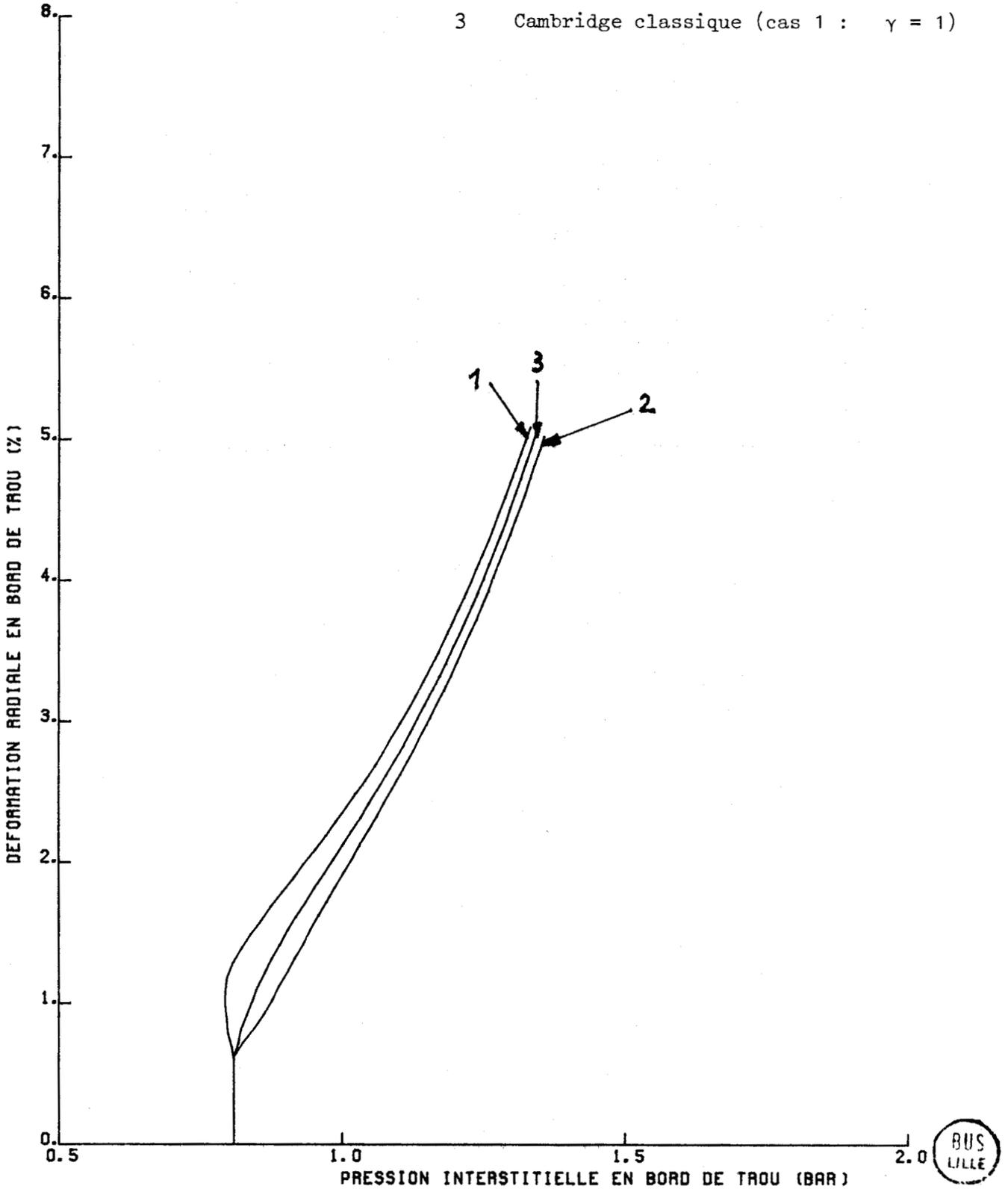
2 cas 2  $\gamma = 1,05$

3 Cambridge classique (cas 1 :  $\gamma=1$ )



# PRESSIOMETRE AUTOFOREUR (SIMULATIONS) - PRESSIOMETRE 1 -

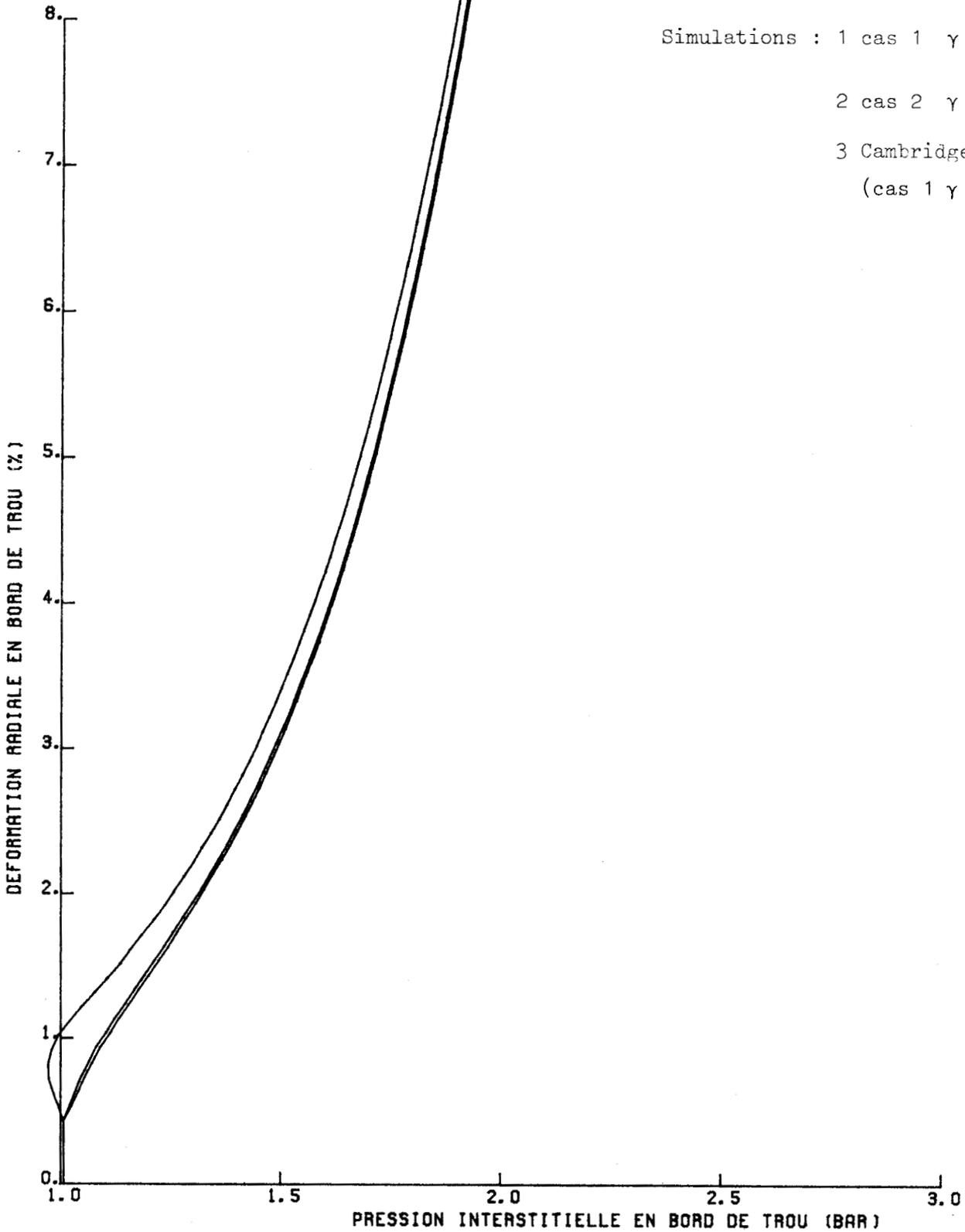
simulations	1	cas 1	$\gamma = 2,1$
	2	cas 2	$\gamma = 1,05$
	3	Cambridge classique (cas 1 :	$\gamma = 1)$



# PRESSIOMETRE AUTOFOREUR (SIMULATIONS)

## - PRESSIOMETRE 2 -

1      { 2  
          3



Simulations : 1 cas 1  $\gamma = 2,1$

2 cas 2  $\gamma = 1,05$

3 Cambridge classique  
(cas 1  $\gamma = 1$ )



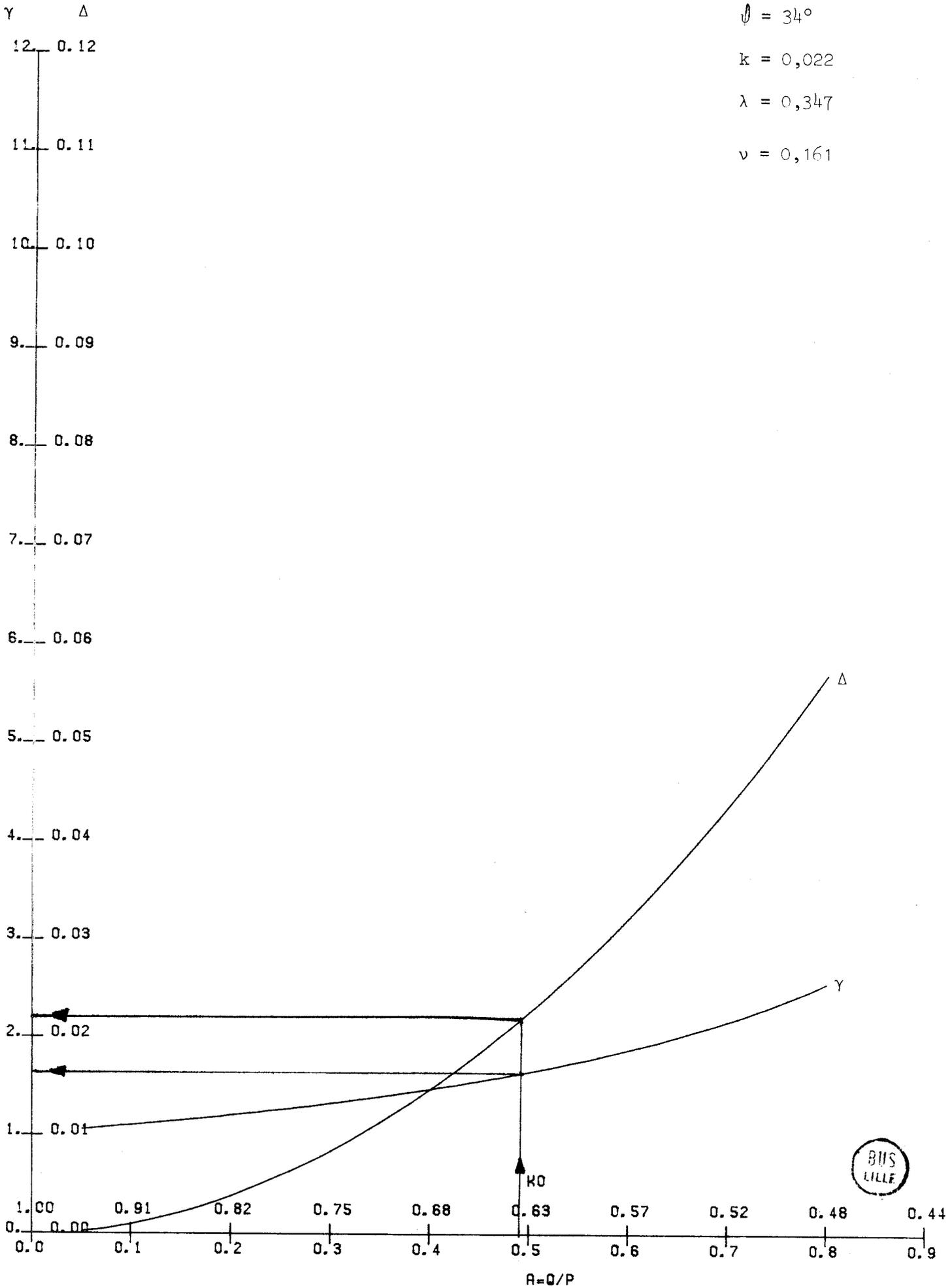
# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - PRESSIO.1 (CAS 1) -

$$\phi = 34^\circ$$

$$k = 0,022$$

$$\lambda = 0,347$$

$$\nu = 0,161$$



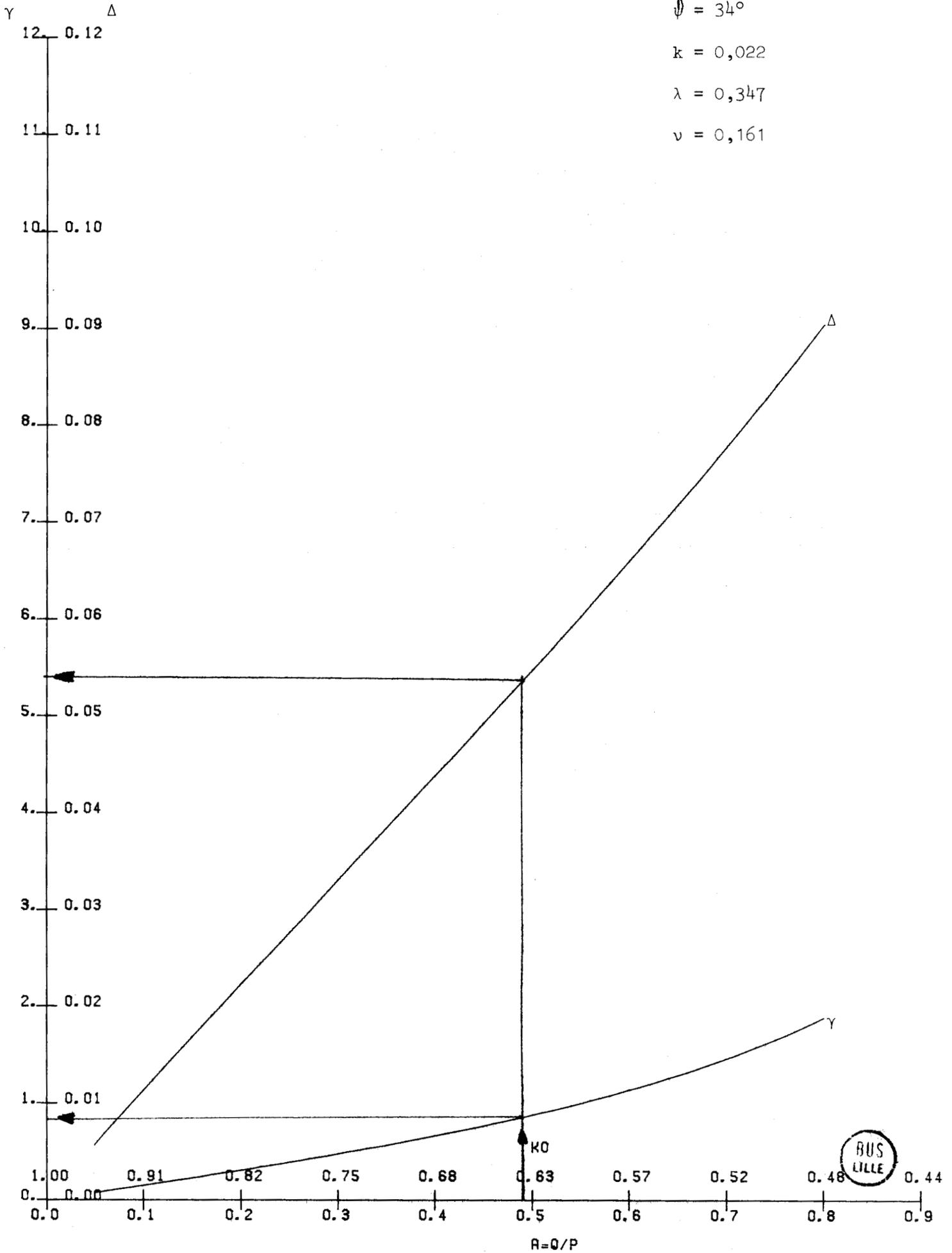
# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - PRESSIO. 1 (CAS 2) -

$$\phi = 34^\circ$$

$$k = 0,022$$

$$\lambda = 0,347$$

$$\nu = 0,161$$



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - PRESSIO.1 (CAS 3) -

GAD DELTA

12. 0.12  
11. 0.11  
10. 0.10  
9. 0.09  
8. 0.08  
7. 0.07  
6. 0.06  
5. 0.05  
4. 0.04  
3. 0.03  
2. 0.02  
1. 0.01  
1.00  
0.00

$$\varphi = 34^\circ$$

$$k = 0,022$$

$$\lambda = 0,347$$

$$\nu = 0,161$$

GAM = 6.0

GAM = 5.5

GAM = 5.0

GAM = 4.5

GAM = 4.0

GAM = 3.5

GAM = 3.0

GAM = 2.5

GAM = 2.0

GAD

GAM = 1.5

K0

A=0/P

0.91 0.82 0.75 0.68 0.63 0.57 0.52 0.48 0.4



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - PRESSIO.1 (CAS 4) -

AD DELTA

12. 0.12  
11. 0.11  
10. 0.10  
9. 0.09  
8. 0.08  
7. 0.07  
6. 0.06  
5. 0.05  
4. 0.04  
3. 0.03  
2. 0.02  
1. 0.01

$\psi = 34^\circ$   
 $k = 0,022$   
 $\lambda = 0,347$   
 $\nu = 0,161$

GAM = 4.5  
GAM = 4.0  
GAM = 3.5  
GAM = 3.0  
GAM = 2.5  
GAM = 2.0  
GAM = 1.5  
GAM = 1.0

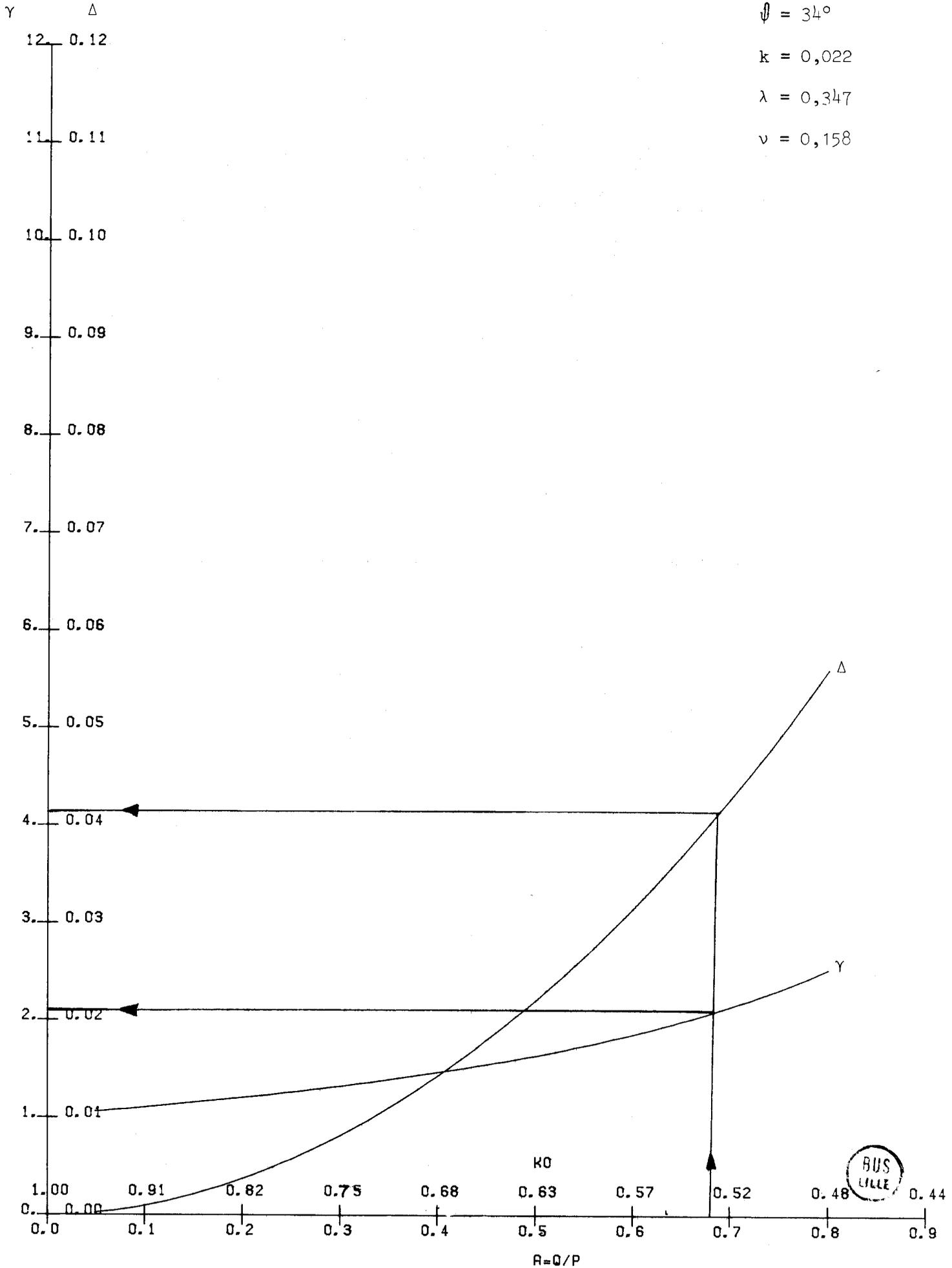
GAD

1.00 0.91 0.82 0.75 0.68 0.63 0.57 0.52 0.48 0.44  
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9  
RO  
A=Q/P



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - PRESSIO. 2 (CAS 1) -

$\phi = 34^\circ$   
 $k = 0,022$   
 $\lambda = 0,347$   
 $\nu = 0,158$



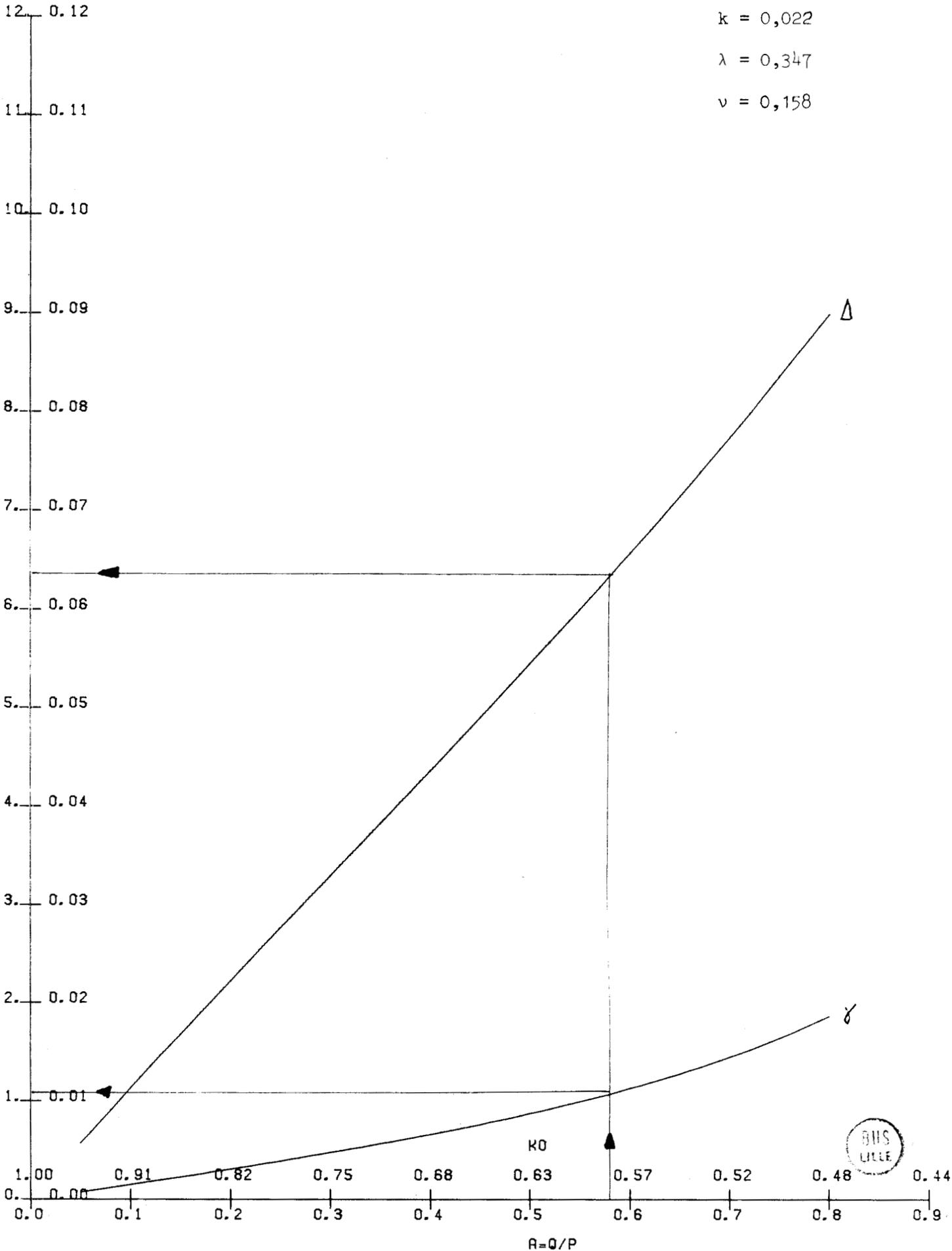
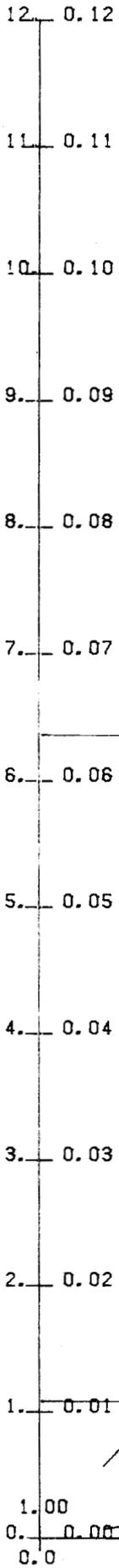
# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - PRESSIO. 2 (CAS 2) -

$$\varphi = 34^\circ$$

$$k = 0,022$$

$$\lambda = 0,347$$

$$v = 0,158$$



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - PRESSIO.2 (CAS 3) -

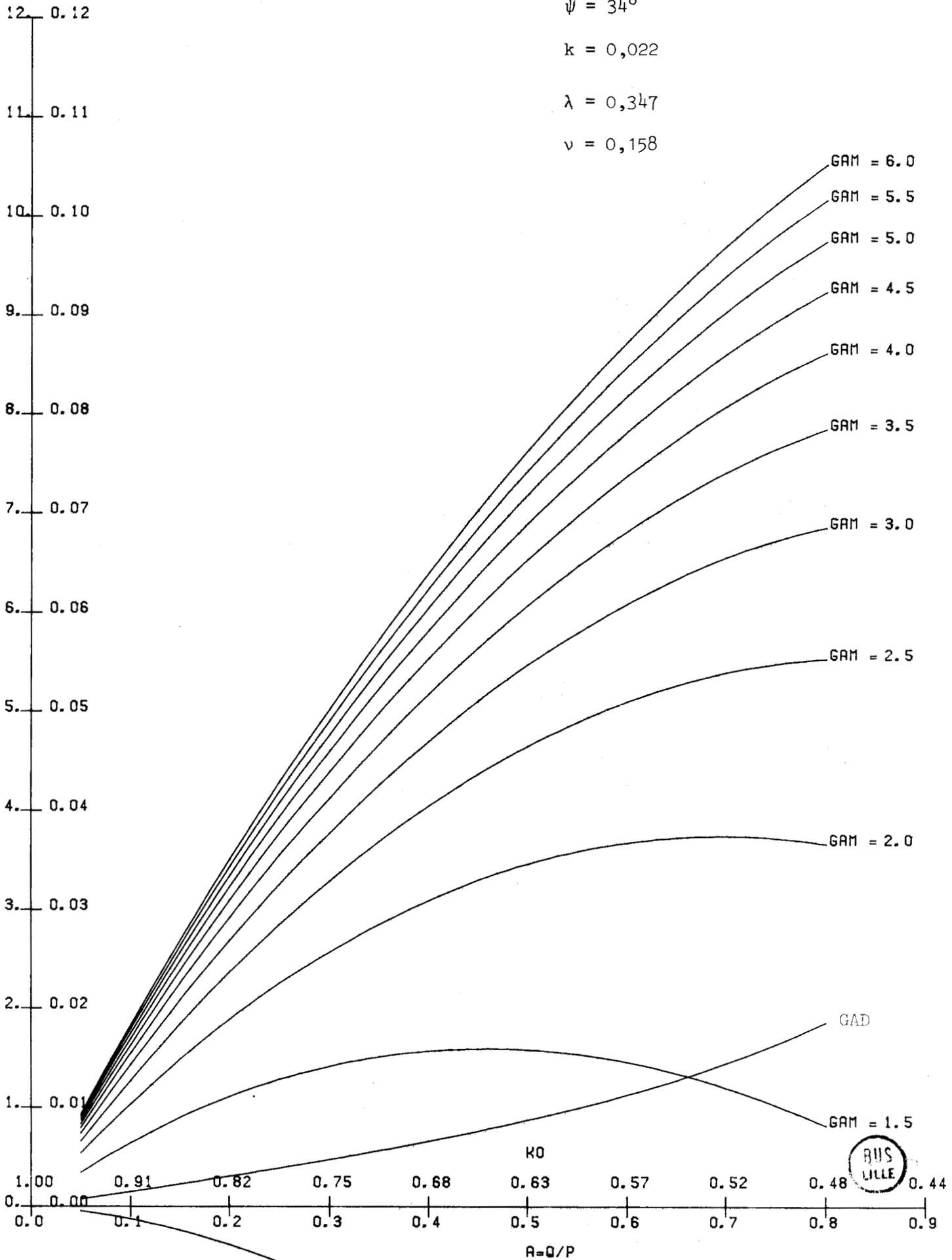
GAD DELTA

$$\phi = 34^\circ$$

$$k = 0,022$$

$$\lambda = 0,347$$

$$v = 0,158$$



# CARACTERISTIQUES DE L'ASYMPTOTE OEDOMETRIQUE - PRESSIO.2 (CAS 4) -

GAD DELTA

$$\psi = 34^\circ$$

$$k = 0,022$$

$$\lambda = 0,347$$

$$v = 0,158$$

12. 0.12

11. 0.11

10. 0.10

9. 0.09

8. 0.08

7. 0.07

6. 0.06

5. 0.05

4. 0.04

3. 0.03

2. 0.02

1. 0.01

GAM = 4.5

GAM = 4.0

GAM = 3.5

GAM = 3.0

GAM = 2.5

GAM = 2.0

GAM = 1.5

GAM = 1.0

GAD



KO

1.00

0.91

0.82

0.75

0.68

0.63

0.57

0.52

0.48

0.44

0.0 0.00

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5

0.6

0.7

0.8

0.9

A=Q/P

### CONCLUSION

Les essais d'expansion de cavité cylindrique dans les sols argileux normalement consolidés ou faiblement surconsolidés peuvent être simulés de façon satisfaisante à partir de la théorie de l'élasto-plasticité de l'Ecole de Cambridge. Pour y parvenir il a fallu introduire à partir de la théorie classique :

- un comportement déviatorique élastique non linéaire qui permet de rendre compte de la partie linéaire du début des courbes d'expansion.

- une généralisation des équations définissant les diverses surfaces plastiques à partir d'une généralisation de la fonction de dissipation (en plasticité standard ou non). La tentative de déterminer les nouveaux paramètres créés au moyen du décalage  $\Delta$  entre les courbes de compressibilité oedométrique et isotrope s'est révélée être un demi-échec (cylindre creux) ou un demi-succès (pressiomètre).

Le résultat de ce travail ne peut avoir d'intérêt sans un prolongement que nous concevons dans trois directions :

- exploitation de la théorie à partir d'essais pressiométriques pour les calculs de fondation. Cette voie est importante pour le praticien qui utilise cet essai in situ de façon assez répandue. L'intérêt est grand car la théorie à laquelle nous nous sommes délibérément attachés comporte un nombre réduit de paramètres ( $e_0, \lambda, k, \nu, \psi', \gamma$ ). C'est d'autre part un schéma élasto-plastique qui peut être (en petites perturbations) facilement intégré aux programmes d'éléments finis courants.

- Amélioration théorique de la loi de Cambridge. Nous pensons au problème de la détermination M de la surface plastique qui se limite à deux valeurs (poussée et butée). Une variation continue de M devrait pouvoir être envisagée. La même question se pose au niveau du comportement dit élastique. Cette loi du type  $d\epsilon = A d\sigma$  se fonde sur une seule détermination de A à partir de la pression moyenne. L'approfondissement de ce problème nous conduirait peut-être à l'abandon de la théorie élasto-plastique de Cambridge pour une mécanique incrémentale plus complexe du type de celle développée notamment à Grenoble [27]. En l'état actuel des choses le débouché pratique en serait d'autant plus difficile.
- Définition statistique des paramètres de la loi de Cambridge à partir d'essais pressiométriques. Cette mécanique statistique serait fondée sur les techniques d'identifications développées par les automaticiens et utilisées maintenant dans de nombreux domaines (Mécanique du vol par exemple). Le critère d'identification J représenterait l'écart moyen au sens d'une fonctionnelle quadratique entre un ensemble d'essais pressiométriques et l'ensemble des simulations correspondantes :

$$J = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P (r_j^{*(i)} - r_j^{(i)}) Q^{(i)} (r_j^{*(i)} - r_j^{(i)})$$

N : nombre d'essais; P : nombre de points par essais

$r_j^{(i)}$  : pression en bord de trou expérimentale.

$r_j^{*(i)}$  : pression en bord de trou simulée.

$Q^{(i)}$  : facteur de mise à échelle permettant une pondération de l'importance des essais entre eux.

L'identification consisterait alors à déterminer le paramètre  $\{p\}^T = \{e_0, \lambda, k, \nu, M, \gamma\}$  qui minimise  $J$  en résolvant par gradient conjugué (par exemple) le système  $\frac{\partial J}{\partial \{p\}} = 0$ .

Un filtrage de Kalman [28] peut même être mis en oeuvre préalablement à l'identification en vue d'éliminer l'incertitude des mesures et une certaine incertitude due à l'inadaptation du modèle. Il permet de donner une première estimation des paramètres pour le schéma d'identification.

Une telle méthode systématiserait l'élaboration de formules du type de celles que Menard a appliquées pour l'exploitation de son pressiomètre.

ANNEXE - FORMULATION DU PROBLEME EN VUE D'UNE  
RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

La méthode des éléments finis connaît un développement considérable dans les sciences de l'ingénieur. Elle permet en particulier une résolution complète de problèmes caractérisés par :

- une géométrie et des conditions aux limites variées et complexes.
- un couplage de plusieurs phases à comportement non linéaire.
- de grands déplacements et éventuellement de grandes déformations.

Les grands ouvrages de Génie-Civil exigent de plus en plus qu'on se pose les problèmes dans cette complexité afin de mieux satisfaire des critères de sécurité et de coût qui sont à la mesure de l'importance de ces réalisations.

La modélisation biphasique des sols argileux et la loi de comportement de l'Ecole de Cambridge pour le squelette sont suffisamment élaborées pour justifier l'emploi de cette méthode de calcul.

ZIENKIEWICZ [ 20 ] est le premier, à notre connaissance, qui a appliqué ce type de problème. Récemment d'autres chercheurs [ 21 ] ont appliqué le modèle élasto-plastique de l'Ecole de Cambridge au calcul d'un remblai expérimental.

Le problème variationnel et sa discrétisation par éléments finis sont présentés de façon complète pour le milieu biphasique à squelette non linéaire aussi bien à court terme qu'à long terme en petites perturbations.

Le même problème est envisagé dans le cadre des grands déplacements et grandes déformations à court terme seulement. Ce dernier point semble être prometteur pour les analyses de plus en plus fines du comportement pressiométrique à court terme par exemple.

Signalons enfin que les non linéarités d'ordre rhéologique et d'ordre géométrique ne sont pas fondamentalement différentes quant à leur traitement numérique par la méthode des éléments finis.

A 1 - FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME EN PETITES PERTURBATIONS

Nous reprenons ici la formulation type donnée par CHAMBON [ 2 ] sans négliger, pour notre part, le terme de compressibilité de l'équation (23) de la consolidation donnée au chapitre 3. Les conditions aux limites seront données en contraintes totales.

1) Rappel du système d'équations différentielles à résoudre (Problème I)

Ce système est constitué par le couplage de l'équation d'équilibre du squelette et de l'équation de la consolidation.

- équation d'équilibre du squelette :

On cherche la fonction vectorielle  $\vec{U}$  des déplacements incrémentaux définie sur le domaine  $\mathcal{D}_0$  telle que pour tout  $x_i^0 \in \mathcal{D}_0$  on ait :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j^0} (\bar{F}'_{ij}) - \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j^0} &= 0 \\ \bar{F}'_{ij} &= C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{kl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_l^0} + \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_k^0} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

On suppose pour l'instant que les conditions aux limites sont données en contraintes incrémentales effectives sur  $\Gamma_2^0$  et en déplacements incrémentaux sur  $\Gamma_1^0$  de façon que  $\Gamma_1^0 \cup \Gamma_2^0 = \Gamma^0$  et

$\Gamma_1^0 \cap \Gamma_2^0 = \emptyset$ .  $\Gamma^0$  est la frontière du domaine  $\mathcal{D}_0$  étudié. Ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{F}'_{ij} n_j &= \bar{\Sigma}_i' && \text{sur } \Gamma_2^0 \\ \bar{U}_i &= \bar{u}_i && \text{sur } \Gamma_1^0 \end{aligned}$$

- équation de la consolidation :

On cherche une fonction scalaire  $\varphi$  (potentiel hydraulique) telle qu'en tout point  $x_i \in \mathcal{D}_0$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \kappa_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{d(\varepsilon_{ij} \delta_{ij})}{dt} = A$$

avec des conditions aux limites qui sont les équipotentielles sur  $\Gamma_3^0$  et les lignes de courant sur  $\Gamma_4^0$  avec  $\Gamma_3^0 \cup \Gamma_4^0 = \Gamma^0$  et  $\Gamma_3^0 \cap \Gamma_4^0 = \emptyset$ .

$$\kappa_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} n_i = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_4^0)$$

$$\varphi = H \quad \text{sur } (\Gamma_3^0)$$

Avant de passer à une formulation variationnelle de ce problème il est intéressant de donner une formulation qu'on appellera intermédiaire. Elle se déduit de cette première formulation de façon assez simple. En ce qui concerne l'équilibre du squelette elle traduit directement le théorème des travaux virtuels.

## 2) Formulation intermédiaire (Problème II)

Détaillons-la pour l'équation d'équilibre :

. Soit  $\delta \vec{U}$  une variation virtuelle de déplacement admissible c'est-à-dire un champ de déplacement continu à dérivée de carré sommable [3] tel que  $\delta \vec{U} = 0$  sur  $\Gamma_1^0$ .

On peut écrire à partir de l'équation d'équilibre :

$$\int_{D_0} \left[ \delta u_i \frac{\partial \bar{v}'_{ij}}{\partial x_j^0} - \delta u_i \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j^0} \right] dV = 0$$

or

$$\frac{\partial}{\partial x_j^0} (\bar{v}'_{ij} \delta u_i) = \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_j^0} (\bar{v}'_{ij}) + \bar{v}'_{ij} \epsilon_{ij} (\delta \vec{u})$$

d'où

$$\int_{D_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j^0} (\bar{v}'_{ij} \delta u_i) - \bar{v}'_{ij} \epsilon_{ij} - \delta u_i \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j^0} \right] dV = 0$$

En transformant le premier terme de cette intégrale de volume en intégrale de surface et compte tenu du fait que  $\delta \vec{u} = 0$  sur  $\Gamma_1^0$  il vient :

$$\int_{D_0} \bar{v}'_{ij} \epsilon_{ij} (\delta \vec{u}) dV + \int_{D_0} \delta u_i \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j^0} dV - \int_{\Gamma_2^0} \bar{\Sigma}'_i \delta u_i dS = 0 \quad (2)$$

On obtient ainsi la formulation du problème qu'aurait directement donnée le théorème des déplacements virtuels.

. Pour l'équation de la consolidation la formulation est la suivante :

$$\int_{D_0} K_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^0} \frac{\partial \delta q}{\partial x_i^0} dV = - \int_{D_0} A \delta q dV \quad (3)$$

$\forall \delta q$  fonction scalaire continue, à dérivée de carré sommable, et nulle sur  $\Gamma_3^0$ .

En résumé le problème intermédiaire consiste à trouver les fonctions  $\vec{u}$  et  $\varphi$  vérifiant les conditions aux limites respectives sur  $\Gamma_1^0$  et  $\Gamma_3^0$  et telles que pour toutes fonctions  $\delta \vec{u}$  et  $\delta q$  respectivement nulles sur  $\Gamma_1^0$  et  $\Gamma_3^0$  les relations (2) et (3) soient vérifiées. Précisons bien que les problèmes (I) et (II) sont équivalents.

3) Formulation variationnelle

. Pour le squelette :

Introduisons la fonctionnelle :

$$J'(\bar{\omega}) = \frac{1}{2} \int_{D_0} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\bar{\omega}) \varepsilon_{ij}(\bar{\omega}) dV + \int_{D_0} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j^0} \omega_i dV$$

$$- \int_{\Gamma_2^0} \bar{\Sigma}' \omega_i dS \quad (4)$$

définie pour  $\bar{\omega} = \bar{U} + \lambda \delta \bar{U}$  et  $\delta \bar{U} = 0$  sur  $\Gamma_1^0$ .

Puisque  $C_{ijkl}$  est symétrique et compte tenu de (2) on obtient :

$$J'(\bar{\omega}) = J'(\bar{U}) + \frac{\lambda^2}{2} \int_{D_0} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\delta \bar{U}) \varepsilon_{ij}(\delta \bar{U}) dV$$

Si l'on se réfère à la loi de Cambridge standard,  $[D]$  et  $[D_{ep}]$  sont des matrices symétriques définies positives c'est-à-dire :

$$C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \geq 0 \quad \forall \delta \bar{U}$$

La conséquence est alors immédiate :  $\bar{U}^0$  minimise  $J'(\bar{\omega})$ .

Le problème variationnel est donc de trouver la fonction  $\bar{U}^0$  qui vérifie les conditions aux limites et qui minimise la fonctionnelle (4).

En outre [22] si :

$$\forall \delta \bar{U} \quad C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\delta \bar{U}) \varepsilon_{ij}(\delta \bar{U}) \geq \alpha \varepsilon_{mn}(\delta \bar{U}) \varepsilon_{mn}(\delta \bar{U}) ; \alpha \in \mathbb{R}^+$$

on démontre alors l'existence et l'unicité de la solution.

Il s'avère plus intéressant d'exprimer les conditions aux limites en contraintes totales :

$$\bar{\nabla}_{ij} n_j = \bar{\Sigma}_i = \bar{\Sigma}'_i - \bar{u} \delta_{ij} n_j \quad \text{sur } \Gamma_2^0.$$

La formule exprimant le théorème des déplacements virtuels s'écrit alors :

$$\int_{D_0} \bar{F}_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta \vec{u}) dV - \int_{D_0} \delta_{ij} \bar{u} \varepsilon_{ij}(\delta \vec{u}) dV - \int_{\Gamma_2^0} \bar{\Sigma}_i \delta u_i dS = 0$$

La nouvelle fonctionnelle à minimiser est la suivante :

$$J(\vec{w}) = \frac{1}{2} \int_{D_0} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{w}) \varepsilon_{kl}(\vec{w}) dV - \int_{D_0} \delta_{ij} \bar{u} \varepsilon_{ij}(\vec{w}) dV - \int_{\Gamma_1^0} \bar{\Sigma}_i w_i dS$$

. pour l'équation de la consolidation :

La fonctionnelle à minimiser est alors la suivante :

$$H(f) = \frac{1}{2} \int_{D_0} K_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i^0} \frac{\partial f}{\partial x_j^0} dV + \int_{D_0} A f dV$$

en effet en posant :  $f = \varphi + \lambda q$  il vient compte tenu de (3) :

$$H(f) = H(\varphi) + \frac{\lambda^2}{2} \int_{D_0} K_{ij} \frac{\partial q}{\partial x_i^0} \frac{\partial q}{\partial x_j^0} dV$$

or  $K$ , la matrice des perméabilités, est symétrique définie positive donc la solution  $\varphi$  cherchée minimise (5).

De la même façon que précédemment, on démontre que si :

$$\forall y_1, y_2, y_3 \quad K_{ij} y_i y_j \geq \alpha y_m y_m \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

alors la solution existe et est unique.

Le problème variationnel est donc formulé pour le couplage des deux phases et permet une résolution approchée par la méthode des éléments finis.

## A 2 - FORMULATION APPROCHÉE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Résumons le problème variationnel à résoudre. Il s'exprime de façon unique pour les deux fonctionnelles. Il s'agit de trouver  $y_1$  vérifiant les conditions aux limites sur  $\Gamma_{y_1}$  et minimisant :

$$J(y_1) = \frac{1}{2} \int_D A(y_1, y_1) dV - \int_{\Gamma_{2y_1}} B_1(y_1) dS - \int_D B_2(y_1) dV$$

avec :  $y_1 = \begin{cases} \bar{U} \\ u \\ \varphi \end{cases}$

$$A(y_1, y_1) = \begin{cases} C_{ijkl} E_{kl}(y_1) E_{ij}(y_1) \\ u \\ K_{ij} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \end{cases}$$

$$B_1(y_1) = \begin{cases} \bar{\Sigma}_i y_i \\ u \\ 0 \end{cases}$$

$$B_2(y_1) = \begin{cases} \bar{u} \delta_{ij} E_{ij}(y_1) \\ u \\ \frac{d(\delta_{ij} E_{ij}(y_1))}{dt} y_1 \end{cases}$$

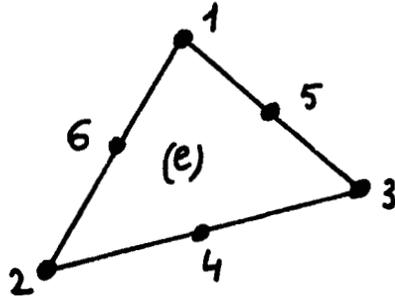
$$\Gamma_{2y_1} = \begin{cases} \Gamma_2^0 \\ u \\ \Gamma_4^0 \end{cases}$$

$$\Gamma_{1y_1} = \begin{cases} \Gamma_1^0 \\ u \\ \Gamma_3^0 \end{cases}$$

Sans entrer dans trop de détails, la méthode des éléments finis consiste à minimiser la fonctionnelle pour une classe de fonction  $y_1$  appartenant à un espace vectoriel fini. La solution exacte, si elle existe, appartient en réalité à un espace fonctionnel infini.

Dans ce sens la méthode des éléments finis donnera donc une solution approchée du problème.

En pratique le domaine étudié est découpé en éléments géométriques finis auxquels on associe un nombre fini de points appelés noeuds.



Au sein d'un élément fini (e) on écrira la fonction inconnue sous la forme :

$$y_1^{(e)} = P_\alpha^{(e)} y_{1\alpha} \quad (6)$$

$y_{1\alpha}$  est la valeur de la fonction inconnue au noeud  $\alpha$  appartenant à l'élément (e).  $P_\alpha^{(e)}$  est la fonction de pondération ou d'interpolation relative au noeud  $\alpha$  dans l'élément (e). Elle est égale à 1 au noeud  $\alpha$  et nulle sur les autres noeuds de l'élément. Elle est par ailleurs uniformément nulle sur tout autre élément que (e).

La minimisation de la fonctionnelle s'effectue alors par rapport aux fonctions de pondérations et l'on obtient :

$$(7) \quad \sum_{\alpha} y_{1\alpha} \sum_e \int_{D(e)} A (P_\alpha^{(e)}, P_\beta^{(e)}) dV - \sum_{e \in \Gamma_{\alpha(e)}} \int_{S(e)} B_1 (P_\beta^{(e)}) dS - \sum_e \int_{D(e)} B_2 (P_\beta^{(e)}) dV = 0$$

$\beta$  désigne les noeuds des éléments contenant le noeud  $\alpha$ , y compris  $\alpha$  lui-même.

Définissons l'écriture matricielle suivante :

. pour le squelette :

$$[\bar{U}_\alpha]^T = [\bar{U}_{x1}, \bar{U}_{y1}, \bar{U}_{z1}, \dots, \bar{U}_{xN}, \bar{U}_{yN}, \bar{U}_{zN}]$$

$$[\bar{U}]^T = [\bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z]$$

$$[\bar{U}] = [N] [\bar{U}_\alpha]$$

avec  $N_i = P_i^{(e)}$  lorsque le point considéré est à l'intérieur de l'élément et que le point nodal  $i$  est associé à cet élément sinon  $N_i = 0$ .

$$[\epsilon]^T = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, 2\epsilon_{xy}, 2\epsilon_{yz}, 2\epsilon_{zx}]$$

$$[\epsilon] = [B] [\bar{U}_\alpha]$$

avec  $[B] = [L] [N]$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{\Sigma}] = [\bar{\Sigma}_i]$$

. pour le fluide la discrétisation est la même :

$$[\bar{u}_\alpha]^T = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N]$$

$$[\bar{u}] = [\bar{N}] [\bar{u}_\alpha]$$

$$[\nabla \bar{N}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} [\bar{N}]$$

Enfin posons :

$$[\pi\kappa]^T = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$$

La première fonctionnelle minimisée s'écrit alors :

$$\int_{D_0} [B]^T [D_{ep}] [B] dV [\bar{u}_\alpha] - \int_{\Gamma_0} [N]^T [\Sigma] dS - \int_{D_0} [B]^T [\pi\kappa] [N] dV [\bar{u}_\alpha] = 0$$

En ce qui concerne la seconde, rappelons :

$$\varphi_\alpha = \frac{u_\alpha}{\rho_w |g|} - \frac{g e x e^\alpha}{|g|}$$

et ainsi on obtient :

$$\int_{D_0} [\nabla \bar{N}]^T [K] [\nabla \bar{N}] dV [u_\alpha] - \int_{D_0} [\bar{N}]^T [\gamma \bar{N}]^T [B] dV \frac{d}{dt} [U_\alpha]$$

$$- \int_{D_0} [\nabla \bar{N}]^T [K] [\nabla \bar{N}] dV \left[ \frac{\partial \epsilon \alpha \epsilon}{|\rho|} \right] = 0$$

On peut coupler ce deux équations matricielles :

$$\begin{bmatrix} [H] & [-L] \\ [-L]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_\alpha] \\ [\bar{u}_\alpha] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_1] \\ [F_2] \end{bmatrix} \quad (8)$$

avec :

$$[H] = \int_{D_0} [B]^T [D_{ep}] [B] dV$$

$$[L] = \int_{D_0} [B]^T [\gamma \bar{N}] [\bar{N}] dV$$

$$[F_1] = \int_{\Gamma_2} [N]^T [\bar{\Sigma}] dS ; [F_2] = \frac{dt}{|\rho|} \int_{D_0} [\nabla \bar{N}]^T [K] [\nabla \bar{N}] dV \left[ \frac{\partial \epsilon \alpha \epsilon}{|\rho|} - [\bar{u}_\alpha] \right]$$

On remarquera la symétrie de la matrice

$$\begin{bmatrix} [H] & [L] \\ [-L]^T & [0] \end{bmatrix}$$

car  $[H]$  et  $[L]$  sont symétriques.

En pratique, pour la résolution de (8), il est préférable de faire passer à droite de l'équation (8) le terme plastique inclus dans H et de procéder par une méthode itérative de type Raphson-Newton. L'équation (8) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} [H_0] & [-L] \\ [-L]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{U}_\alpha] \\ \bar{u}_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_1] - [F_P] \\ [F_2] \end{bmatrix} \quad (8')$$

car  $[H][\bar{U}_\alpha] = \int_{D_0} [B]^T [D_{ep}] [B] dV [\bar{U}_\alpha] = \int_{D_0} [B]^T [\epsilon] dV = \int_{D_0} [B]^T \{ \epsilon^{(e)} \quad \epsilon^{(p)} \} dV$

or  $\int_{D_0} [B]^T [\epsilon^{(e)}] dV = \int_{D_0} [B]^T [D_e] [B] dV [\bar{U}_\alpha]$

d'où :  $[H][\bar{U}_\alpha] = [H_0][\bar{U}_\alpha] + [F_P]$

avec :  $[F_P] = \int_{D_0} [B]^T [\epsilon^{(p)}] dV$

Le système (8') autorise alors une inversion partielle définitive de la matrice du membre de gauche ce qui représente un gain de temps très important.

### A 3 - PROBLEME DU COMPORTEMENT A COURT TERME

Ce problème que nous avons défini en introduction de cet annexe se traduit en théorie par l'incompressibilité du squelette fictif. Restant dans le cadre des petites perturbations nous donnerons deux méthodes de résolution équivalentes.

Nous écartons la méthode qui consiste à traduire la propriété d'incompressibilité par un ajustement des paramètres de la loi de comportement du squelette. L'illustration d'une telle méthode est donnée en élasticité linéaire classique lorsqu'on pose  $\nu = 0,5$  pour résoudre ce type de problème. Le comportement à court terme est un problème de perturbation vis à vis du temps et non un problème d'incompressibilité intrinsèque du milieu.

1) Méthode 1 (ZIENKIEWICZ [ 23 ] )

Si l'on reprend l'équation matricielle (8) en faisant jouer à  $dt$  le rôle d'un petit paramètre, on obtient :

$$\begin{bmatrix} [H] & [L] \\ [-L]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{u}_\alpha] \\ [\bar{u}_\alpha] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_1] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (9)$$

2) Méthode 2 (Méthode de pénalisation)

Il s'agit de trouver une fonctionnelle équivalente au système :

$$J(\vec{w}) = \frac{1}{2} \int_{D_0} C_{ijkl} \epsilon_{ij}(\vec{w}) \epsilon_{kl}(\vec{w}) dV - \int_{D_0} \bar{u} \operatorname{div}(\vec{w}) dV - \int_{\Pi_2^0} \bar{\Sigma}_i \omega_i dS$$

$$\operatorname{div}(\vec{U}) = 0$$

C'est un problème d'optimisation sous contrainte que l'on peut résoudre (entre autres méthodes) par la méthode de pénalisation. On admettra que le problème ci-dessus est équivalent au problème de minimisation par rapport à  $\vec{w}$  de la fonctionnelle :

$$J_1(\vec{\omega}) = J_1(\vec{\omega}) + \eta \int_{D_0} \text{div}^2(\vec{\omega}) dV$$

lorsqu'on fait tendre  $\eta$  vers l'infini.

La solution approchée par la méthode des éléments finis est donnée

par :

$$\left\{ \int_{D_0} [B]^T [D] [B] dV + \eta \int_{D_0} [DN]^T [DN] dV \right\} [\bar{U}_\alpha] = \int_{\Gamma_2^0} [N]^T [\bar{\Sigma}] dS$$

ou encore :  $\left\{ [H] + \eta [T]^T [T] \right\} [\bar{U}_\alpha] = [F_1]$  (10)

Dans cette expression  $\eta$  est rendu aussi grand que la précision du calculateur le permet. On constate que cette relation matricielle est indépendante de la pression interstitielle.

Le schéma de résolution est alors le suivant :

\* résolution de l'équation matricielle (10).

\* calcul des incréments de contraintes effectives par la relation :

$$[\bar{F}'] = [D] [\bar{\epsilon}] = [D] [B] [\bar{U}_\alpha]$$

\* calcul des incréments de pression interstitielle à partir de l'équation d'équilibre.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{F}'_{ij}}{\partial x_j}$$

ou en dérivant par rapport à  $x_i$  :

$$\nabla \bar{u} = \frac{\partial \bar{v}'_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$$

relation que l'on sait résoudre par la méthode des éléments finis par exemple.

N'ayant pratiqué aucune de ces méthodes nous ne pouvons pas dire laquelle est la plus performante.

#### A 4 - Problème des grands déplacements

La méthode la plus simple dans son principe consiste à garder l'analyse du milieu bi-phasique en petites perturbations en choisissant des incréments suffisamment petits. La configuration géométrique du milieu devra être réactualisée après plusieurs incréments sinon chaque incrément. Outre l'inconvénient d'avoir à ré-actualiser périodiquement le maillage en éléments finis, il subsiste comme nous l'avons déjà souligné des approximations d'ordre théorique difficilement justifiables (p. 36). Il s'agit essentiellement des hypothèses conduisant à négliger les termes  $e_s v_{ij}^{\circ}$ ,  $\varepsilon_{j\alpha} v_{i\alpha}^{\circ}$  dans l'équation d'équilibre et la loi incrémentale ainsi que l'hypothèse de mouvement du même ordre pour le fluide et le squelette fictif.

Si l'on se refuse à faire cette dernière hypothèse le problème devient inextricable et nous n'avons pas essayé de le résoudre. Par contre dans le cas du comportement à court terme l'hypothèse est valable et on peut essayer de supprimer les hypothèses concernant les termes  $e_s v_{ij}^{\circ}$  et  $\varepsilon_{j\alpha} v_{i\alpha}^{\circ}$ . Nous traitons en conséquence le problème des grands déplacements dans le comportement à court terme du milieu bi-phasique. Une description lagrangienne par rapport à une configuration  $\mathcal{E}_0$  invariable du milieu est intéressante pour les applications de la méthode des éléments finis. Dans ce cas en effet le maillage reste fixe tout au long du problème.

1) Description lagrangienne du comportement à court terme

Considérons une configuration  $\mathcal{C}_0$  quelconque de référence du milieu bi-phasique. L'hypothèse d'une étude à court terme du milieu conduit à poser :

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} \equiv \mathcal{F}$$

Le milieu se comporte cinématiquement comme un monosolide.

Reprenons les équations d'équilibre du squelette et du fluide fictifs en coordonnées lagrangiennes c'est-à-dire dans le système de coordonnées relatives à la configuration  $\mathcal{C}_0$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^0} (\mathcal{S}'_{\beta i} \Pi'_{\beta \alpha}) + \det \mathcal{S}' \eta_{\beta i} + p_s(t_0) g_i = 0 \\ -\det \mathcal{S}' \mathcal{S}'^{-1}_{\alpha i} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha^0} + \det \mathcal{S}' \eta_{f i} + p_f(t_0) g_i = 0 \end{cases}$$

En additionnant terme à terme on élimine les forces d'interaction et il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^0} (\mathcal{S}'_{\beta i} \Pi'_{\beta \alpha}) - \mathcal{S}'^{-1}_{\alpha i} \det \mathcal{S}' \frac{\partial u}{\partial x_\alpha^0} + (p_s + p_f)(t_0) g_i = 0$$

A cette équation doit s'ajouter le comportement incompressible à court terme qui se traduit par :

$$\det \mathcal{S}' = 1$$

2) Théorème des déplacements virtuels

Soit  $\vec{\delta U}$  un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible défini dans  $V_0$ .

En multipliant chaque terme de l'équation d'équilibre par  $\vec{\delta U}$  scalairement et en intégrant sur tout le volume  $V_0$  il vient le théorème

des déplacements virtuels en description lagrangienne

$$\int_{V_0} \pi'_{ij} \delta L_{ij} dV + \int_{V_0} S_{\alpha i}^{-1} \det S' \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \delta U_i dV - \int_{V_0} (P_i^0 + P_i^0) g_i \delta U_i dV - \int_{\Gamma_F^0} S'_{i\beta} \pi'_{\beta\alpha} \delta U_i dS = 0$$

avec

$$\delta L_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta U_i}{\partial x^\alpha_j} + \frac{\partial \delta U_j}{\partial x^\alpha_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x^\alpha_i} \frac{\partial \delta U_k}{\partial x^\alpha_j} + \frac{\partial \delta U_k}{\partial x^\alpha_i} \frac{\partial U_k}{\partial x^\alpha_j} \right)$$

Il est préférable d'introduire les conditions aux limites en contraintes totales. Pour cela il suffit d'intégrer par partie le terme de pression intersticielle et utiliser le théorème de Green; on obtient :

$$\forall \delta \vec{U} \quad \int_{V_0} \pi'_{ij} \delta L_{ij} dV - \int_{V_0} \det S' S'^{-1}_{i\alpha} S'^{-1}_{j\beta} \delta_{\alpha\beta} \delta L_{ij} u dV - \int_{V_0} (P_i^0 + P_i^0) g_i \delta U_i dV - \int_{\Gamma_F^0} S'_{i\beta} \pi'_{\beta\alpha} \delta U_i dS = 0$$

La contrainte de Kirchhoff correspondant à la pression intersticielle  $u$  apparait dans cette expression :

$$u_{ij} = \det S' S'^{-1}_{i\alpha} \delta_{\alpha\beta} S'^{-1}_{j\beta} u$$

### 3) Théorème des déplacements virtuels incrémentiel.

La loi de comportement du squelette n'est connu que sous sa forme différentielle :

$$d\pi_{ij} = C_{ijkl} dL_{kl}$$

En conséquence écrivons le théorème des déplacements virtuels pour deux configurations voisines  $\mathcal{C}(t)$  et  $\mathcal{C}(t+\Delta t)$ :

$$\forall \delta \vec{U} \quad \int_{V_0} \pi_{ij}^{(t)} \delta L_{ij}^{(t)} dV - \int_{V_0} u_{ij}^{(t)} \delta L_{ij}^{(t)} dV = \int_{V_0} (p_i^0 + p_i^e) g_i \delta U_i dV + \int_{P_0, P} \Sigma_i^{(t)} \delta U_i dS'$$

défini sur  $\mathcal{P}_0$

$$\forall \delta \vec{U} \quad \int_{V_0} \pi_{ij}^{(t+\Delta t)} \delta L_{ij}^{(t+\Delta t)} dV - \int_{V_0} u_{ij}^{(t+\Delta t)} \delta L_{ij}^{(t+\Delta t)} dV = \int_{V_0} (p_i^0 + p_i^e) g_i \delta U_i dV + \int_{P_0, P} \Sigma_i^{(t+\Delta t)} \delta U_i dS'$$

défini sur  $\mathcal{P}_0$

Retranchons membre à membre après avoir effectué la décomposition :

$$\delta L_{ij}^{(t+\Delta t)} = \delta \varepsilon_{ij} + \delta \eta_{ij}^{(t+\Delta t)}$$

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta U_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial \delta U_j}{\partial x_i^0} \right)$$

$$\delta \eta_{ij}^{(t+\Delta t)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_k^{(t+\Delta t)}}{\partial x_i^0} \frac{\partial \delta U_k}{\partial x_j^0} + \frac{\partial \delta U_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial U_k^{(t+\Delta t)}}{\partial x_j^0} \right)$$

On obtient :

$$\int_{V_0} \Delta \pi'_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{V_0} \pi_{ij}^{(t)} \delta \bar{\eta}_{ij} dV + \int_{V_0} \Delta \pi'_{ij} \delta \eta_{ij}^{(t+\Delta t)}$$

$$- \int_{V_0} \Delta u_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_0} \Delta u_{ij} \delta \eta_{ij}^{(t+\Delta t)} dV = \int_{\Gamma_0^F} \Delta \Sigma_i \delta U_i dS' \quad (1)$$

avec 
$$\delta \bar{\eta}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta U_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial \delta U_k}{\partial x_j^0} + \frac{\partial \Delta U_k}{\partial x_j^0} \frac{\partial \delta U_k}{\partial x_i^0} \right) \quad (2)$$

4) Condition d'incompressibilité

Elle se traduit dans la configuration actuelle par l'équation :

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} \delta_{ij} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \text{div}(\bar{U}) = 0$$

Intégrons sur  $V(H)$  en ayant introduit un champ scalaire  $\chi$  défini sur  $V(H)$  :

$$\forall \chi \int_{V(H)} \chi \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} dV = 0$$

Transformons cette intégrale sur  $\mathcal{C}_0$  en rappelant que  $\det S = 0$  :

$$\forall \chi \int_{V_0} \chi S_{\alpha j}^{-1} \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha^0} \delta_{ij} dV_0 = 0$$

posons : 
$$\chi_{\alpha\beta}^* = \chi S_{\beta i}^{-1(H)} \delta_{ij} S_{\alpha j}^{-1(H)}$$

On obtient :

$$\forall \chi \int_{V_0} \chi_{\alpha\beta}^* S_{i\beta}^{(H)} \frac{\partial U_i^{(H)}}{\partial x_\alpha^0} dV_0 = 0$$

or 
$$S_{i\beta}^{(H)} \frac{\partial U_i^{(H)}}{\partial x_\alpha^0} = L_{\alpha\beta}^{(t)}$$

d'où :

$$\forall \tilde{\chi}^* \int_{V_0} \tilde{\chi}_{ij}^* L_{ij}^{(t)} dV = 0$$

de même :

$$\forall \tilde{\chi}^* \int_{V_0} \tilde{\chi}_{ij}^* L_{ij}^{(t+\delta t)} dV = 0$$

et en retranchant cette dernière relation il vient :

$$\forall \tilde{\chi}^* \int_{V_0} \tilde{\chi}_{ij}^* \Delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{V_0} \tilde{\chi}_{ij}^* \Delta \eta_{ij} dV = 0 \quad (3)$$

#### 5) Discrétisation par éléments finis

Il s'agit de discrétiser les équations (1) et (3) par rapport aux champs inconnus  $\overrightarrow{\Delta U}$  et  $\overrightarrow{\Delta u}$ .

Considérons la discrétisation suivante :

$$\{\Delta \varepsilon\} = [B_L] [\Delta U]$$

$$\{\Delta \eta\} = [B_{NL}] [\Delta U]$$

$$\Delta U = [N] [\Delta U]$$

$$\Delta u = [\bar{N}] [\Delta u]$$



Dans ce dernier cas la formulation est analogue à (4). L'inconvénient de la description lagrangienne actualisée est le fait d'avoir à réactualiser également le maillage. Son avantage consiste, dans certains cas, à une meilleure convergence dans la méthode de résolution de (4).

Quant à l'équation (3) elle s'écrit :

$$[\chi]^T \int_{V_0} [\bar{N}]^T [B_L] dV_0 [\Delta U] + [\chi]^T \int_{V_0} [\bar{N}]^T [B_{NL}] dV_0 [\Delta U] = 0$$

d'où

$$[L_G]^T [\Delta U] + [L_H]^T [\Delta U] = 0 \quad (5)$$

Regroupons les équations (4) et (5) en y mettant à droite tous les termes non linéaires par rapport à  $\Delta U$  :

$$(6) \quad \begin{bmatrix} [H] + [K_r] & [-L_G] \\ [-L_G]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Delta U] \\ [\Delta u] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Delta F] + [L_H][\Delta u] - [K_1][K_2][\Delta U] \\ [L_H]^T [\Delta U] \end{bmatrix}$$

Il est facile de montrer qu'en petite perturbation (6) devient le système (9) de l'annexe A 3.

La partie linéaire par rapport à  $\Delta U$  est encore symétrique dans l'équation (6). Cependant le nombre de degré de liberté est très important puisque  $\Delta u$  possède 6 composantes dans le cas tridimensionnel général.

#### 6) Schéma de résolution numérique

C'est le schéma classique de Ralpson-Newton appliqué à l'équation (6) qu'on peut écrire :

$$[K_L][X] = [\Delta F] + [B_{NL}]$$

avec :

- $K_L$  : regroupe tous les termes linéaires de (6) par rapport à  $\Delta U$  (option complète  $K_T$ ) ou bien seulement la partie constante

$$\begin{bmatrix} [H] & L_G \\ [-L_G]^T & 0 \end{bmatrix}$$

en adjoignant le terme

$$\begin{bmatrix} -K_T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta u \end{bmatrix}$$

au terme non linéaire  $[B_{NL}]$ .

$$\bullet \Delta \tilde{F} = \begin{bmatrix} \Delta F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le schéma de résolution est alors le suivant pour chaque pas de calcul  $\{\Delta F\}$  :

Initialisation :

$$\Delta \tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} \Delta F \\ 0 \end{bmatrix}$$

$i=1$

$i=i+1$  Résolution :  $[K_L][X_i] = [\Delta \tilde{F}_i]$

Calcul :  $[B_{NL}_i]$

Test de convergence à

la précision requise  $|B_{NL}_i| \leq \epsilon$

$[\Delta \tilde{F}_{i+1}] = [B_{NL}_i]$

Non

oui

nouveau pas de calcul

Une grande expérience du calcul non linéaire est nécessaire pour le choix de la grandeur des pas et de l'option (avec ou sans  $K_T$ ) qui réalise le meilleur compromis entre la précision et le temps du calcul.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.L. AURIAULT - Contribution à l'étude de la consolidation des sols.  
Thèse de Doctorat ès-Sciences - Université de Grenoble - 1973.
- [2] R. CHAMBON - Application de la méthode des éléments finis et d'une loi  
rhéologique incrémentale aux calculs de mécanique des sols -  
Thèse de Docteur-Ingénieur - Université de Grenoble - 1975 .
- [3] R. VALID - La mécanique des milieux continus et le calcul des structures -  
Ecole d'été d'analyse numérique EDF, IRIA - 1976.
- [4] G. GONTIER - Mécanique des milieux déformables - Dunod 1969.
- [5] P. GERMAIN - Mécanique des milieux continus - Tome 1 - Masson et Cie - 1973.
- [6] O.C. ZIENKIEWICZ, C. HUMPHESON, R.W. LEWIS - A unified approach to soil  
méchanics problems including plasticity and viscoplasticity -  
Publication de l'Université du Pays de Galles - 1975.
- [7] M. DUBOIS - Fonctionnelles et méthodes variationnelles en mécanique des  
Solides - Publication du C.E.T.I.M.- 1974.
- [8] K.H. ROSCOE, A.N. SCHOFIELD, C.P. WROTH - On the yielding of soils -  
Geotechnique 8, n° 1 - 1958.
- [9] K.H. ROSCOE, A.N. SCHOFIELD, A. THURAIRAJAH - Yielding of clays in  
states wetter than critical - Geotechnique 13, n° 2, 1963.
- [10] K.H. ROSCOE, H.B. POOROOSHASB - A theoretical and experimental study  
of strains in triaxial compression tests on normally  
consolidated clays - Geotechnique 13, n° 1 - 1963.
- [11] SCHOFIELD-WROTH - Critical State Soil Mechanics - Mac Graw Hill - 1968.

- [12] P. STUTZ - Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents - Thèse de Doctorat ès-Sciences - Université de Grenoble - 1972.
- [13] J.P. BOEHLER - Contribution théorique et expérimentale à l'étude des milieux plastiques anisotropes. Thèse de Doctorat ès-Sciences - Université de Grenoble - 1975.
- [14] O.C. ZIENKIEWICZ - La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'Ingénieur - Ediscience - 1973.
- [15] O.C. ZIENKIEWICZ, G.N.PANDE - Some useful forms of isotropic yield surfaces for soil and rock mechanics - Publication de l'Université du Pays de Galles - 1975.
- [16] W.T. KOITER - Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface - Quarter of Applied Maths - 11 - 1953.
- [17] HARR - Foundations of theoretical soil mechanics - Mac Graw Hill - 1966.
- [18] E.C. HAMBLY - Plane strain behaviour of remoulded normally consolidated kaolin - Geotechnique 22, n° 2 - 1972.
- [19] J. ANQUETIL - Présentation de la théorie de l'Ecole de Cambridge sur les déformations des argiles soumises aux contraintes triaxiales - Annales I.T.B.P.P. - Juillet Août 1972.
- [20] O.C. ZIENKIEWICZ, C. HYPHESON, R.W. LEWIS - Associated and non associated visco-plasticity in soil mechanics - Publication de l'Université de Pays de Galles - 1975.
- [21] DANG MINH TRUONG, J.P. MAGNAN - Application des modèles élastoplastiques de l'Université de Cambridge au calcul du comportement d'un remblai expérimental sur sol mou. Rapport de Recherche LPC N° 74 - Décembre 1977.

- [22] DUVAUT, LIONS - Les inéquations en mécanique et en physique -  
DUNOD - 1972.
- [23] O.C. ZIENKIEWICZ - Visco plasticity, creep and viscoplastic flow -  
Lecture Notes in Mathematics N° 461 - Springer Verlag - 1975.
- [24] J. MANDEL - Mécanique des milieux continus - Tome 1 et 2 Gauthier Villars -  
1966.
- [25] F. BAGUELIN et J.F. JEZEQUEL - Le pressiomètre autoforeur - Annales  
de l'ITBTP - N° 97 - Juillet-Aout 1973.
- [26] J.L. PAUTE - Etude des tassements, Remblai de Cran - Rapport des Ponts  
et Chaussées de St Brieuc.
- [27] F. DARVE - Une formulation incrémentale des lois rhéologiques -  
Applications aux sols - Thèse d'Etat - Grenoble 1978.
- [28] T. COTILLON - Restitution par filtrage-lissage de Kalman des trajectoires  
et attitudes des maquettes d'avion catapultées en vol libre -  
Institut de Mécanique des Fluides de Lille - Thèse de  
Docteur-Ingénieur à paraître (1979).

RESULTATS NUMERIQUES DES SIMULATIONS PRESSIOMETRIQUES

SIMULATION DE L'ESSAI PRESSIOMETRIQUE A COURT TERME

ELEMENTS GEOMETRIQUES

RAYON DU FORAGE R= .4450000000D+01CM  
NIVEAU DE L'ESSAI = .8300000012E+01M  
NIVEAU DE LA NAPPE = .2000000002E+00M

CARACTERISTIQUES DE LA LOI DE COMPORTEMENT

INDICE CC1 DE COMPRESSION ISOTROPE .2200000000D+01  
INDICE DE COMPRESSION ISOTROPE CC2 .3470000000D+00  
COEFFICIENT DE POISSON DU SQUELETTE .1610000000D+00  
ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE A LONG TERME .3400000000E+02DEG DECI  
INDICE DES VIDES SUR LA COURBE DE CONSOLIDATION VIERGE TEL QUE P=1BAR .1503000000D+01  
M=6SIN(PHI)/(3+SIN(PHI)) : .1374609827D+01  
GAMMA = .1600000000D+01  
CRITERE D'ECOULEMENT :  $F = Q = M * P * GAM / (1 - GAM) * ((EXP((EO - EC) / CC2) / P) ** (1 - GAM) - 1)$

ETAT INITIAL

CONTRAINTE VERTICALE SPZ .4200000000D+00BAR  
COEFFICIENT DE TRANSMISSION KO .6430000000D+00  
PRESSION HYDR OSTATIQUE U .8100000000D+00BAR  
INDICE DES VIDES .1458940849D+01  
INDICE DES VIDES DE CONSOLIDATION .1429196885D+01  
PRESSION DE CONSOLIDATION : .1237000000D+01BAR



DR/R	SR	U	P	Q	Q/P
58446874D-02*	10800600D+01*	81000000D+00*	32004000D+00*	14994000D+00*	46850394D+00*
68446874D-02*	144633370D+01*	81000000D+00*	32004000D+00*	65188848D+00*	20368969D+01*
78446874D-02*	149890065D+01*	80608316D+00*	35045189D+00*	68255968D+00*	19476559D+01*
88446874D-02*	15467464D+01*	79904212D+00*	38185156D+00*	70953405D+00*	18581410D+01*
98446874D-02*	15960963D+01*	79705931D+00*	41304342D+00*	73737751D+00*	17714300D+01*
10844687D-01*	16393969D+01*	79446107D+00*	44260016D+00*	74840442D+00*	16909267D+01*
11844687D-01*	16796906D+01*	79566549D+00*	46915954D+00*	75989222D+00*	16196883D+01*
12844687D-01*	17142219D+01*	79844321D+00*	49176908D+00*	76700572D+00*	15596867D+01*
13844687D-01*	17491328D+01*	80859228D+00*	51008351D+00*	77094954D+00*	15114183D+01*
14844687D-01*	17829470D+01*	82369832D+00*	52431652D+00*	77287714D+00*	14740660D+01*
15844687D-01*	18122455D+01*	83917426D+00*	53502953D+00*	77366484D+00*	14460227D+01*
16844687D-01*	18409437D+01*	85780803D+00*	54290694D+00*	77387732D+00*	14254327D+01*
17844687D-01*	18659664D+01*	87556875D+00*	54860458D+00*	77383584D+00*	14105530D+01*
18844687D-01*	18910438D+01*	89543435D+00*	55267872D+00*	77370506D+00*	13999183D+01*
19844687D-01*	19143304D+01*	91499182D+00*	55556909D+00*	77356086D+00*	13923756D+01*
20844687D-01*	19357403D+01*	93373730D+00*	55760853D+00*	77343327D+00*	13870542D+01*
21844687D-01*	19570769D+01*	95317123D+00*	55904218D+00*	77333072D+00*	13833137D+01*
22844687D-01*	19779525D+01*	97268807D+00*	56004737D+00*	77325245D+00*	13806912D+01*
23844687D-01*	19959581D+01*	98972285D+00*	56075087D+00*	77319453D+00*	13788557D+01*
24844687D-01*	20141704D+01*	10072409D+01*	56124262D+00*	77315249D+00*	13775727D+01*
25844687D-01*	20320296D+01*	10246031D+01*	56158605D+00*	77312237D+00*	13766766D+01*
26844687D-01*	20495699D+01*	10417873D+01*	56182575D+00*	77310098D+00*	13760512D+01*
27844687D-01*	20668217D+01*	10587836D+01*	56199298D+00*	77308587D+00*	13756148D+01*
28844687D-01*	20819745D+01*	10737528D+01*	56210962D+00*	77307524D+00*	13753105D+01*
29844687D-01*	20970126D+01*	10886588D+01*	56219095D+00*	77306778D+00*	13750982D+01*
30844687D-01*	21118130D+01*	11033641D+01*	56224765D+00*	77306256D+00*	13749503D+01*
31844687D-01*	21263951D+01*	11178775D+01*	56228718D+00*	77305891D+00*	13748471D+01*
32844687D-01*	21407763D+01*	11322090D+01*	56231473D+00*	77305636D+00*	13747752D+01*
33844687D-01*	21538004D+01*	11451973D+01*	56233393D+00*	77305458D+00*	13747251D+01*
34844687D-01*	21667051D+01*	11580760D+01*	56234732D+00*	77305334D+00*	13746902D+01*
35844687D-01*	21794401D+01*	11707921D+01*	56235665D+00*	77305247D+00*	13746658D+01*
36844687D-01*	21913853D+01*	11827235D+01*	56236315D+00*	77305187D+00*	13746489D+01*
37844687D-01*	22033463D+01*	11946745D+01*	56236769D+00*	77305144D+00*	13746370D+01*
38844687D-01*	22143710D+01*	12056920D+01*	56237085D+00*	77305115D+00*	13746288D+01*
38844687D-01*	22255079D+01*	12168236D+01*	56237305D+00*	77305095D+00*	13746230D+01*



```

*****
*          DR/R          *          SR          *          U          *          P          *          Q          *          Q/P          *
*****
* 39844687D+01 *      .22365160D+01 *      .12278278D+01 *      .56237458D+00 *      .77305080D+00 *      .13746190D+01 *
* 40844687D+01 *      .22474030D+01 *      .12387119D+01 *      .56237565D+00 *      .77305070D+00 *      .13746162D+01 *
* 41844687D+01 *      .22581763D+01 *      .12494831D+01 *      .56237640D+00 *      .77305063D+00 *      .13746143D+01 *
* 42844687D+01 *      .22688426D+01 *      .12601479D+01 *      .56237691D+00 *      .77305059D+00 *      .13746129D+01 *
* 43844687D+01 *      .22784863D+01 *      .12697905D+01 *      .56237728D+00 *      .77305055D+00 *      .13746120D+01 *
* 44844687D+01 *      .22880305D+01 *      .12793338D+01 *      .56237753D+00 *      .77305053D+00 *      .13746113D+01 *
* 45844687D+01 *      .22974778D+01 *      .12887805D+01 *      .56237770D+00 *      .77305051D+00 *      .13746109D+01 *
* 46844687D+01 *      .23068333D+01 *      .12981356D+01 *      .56237783D+00 *      .77305050D+00 *      .13746106D+01 *
* 47844687D+01 *      .23161017D+01 *      .13074037D+01 *      .56237791D+00 *      .77305049D+00 *      .13746103D+01 *
* 48844687D+01 *      .23252876D+01 *      .13165893D+01 *      .56237797D+00 *      .77305049D+00 *      .13746102D+01 *
* 49844687D+01 *      .23343951D+01 *      .13256967D+01 *      .56237801D+00 *      .77305048D+00 *      .13746101D+01 *
* 50844687D+01 *      .23434284D+01 *      .13347298D+01 *      .56237804D+00 *      .77305048D+00 *      .13746100D+01 *
*****

```



SIMULATION DE L'ESSAI PRESSIOMETRIQUE A COURT TERME

ELEMENTS GEOMETRIQUES

RAYON DU FORAGE R= .4450000000D+01CM  
NIVEAU DE L'ESSAI =.8300000012E+01M  
NIVEAU DE LA NAPPE =.2000000002E+00M

CARACTERISTIQUES DE LA LOI DE COMPORTEMENT

INDICE CC1 DE COMPRESSION ISOTROPE .2200000000D+01  
INDICE DE COMPRESSION ISOTROPE CC2 .3470000000D+00  
COEFFICIENT DE POISSON DU SQUELETTE .1610000000D+00  
ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE A LONG TERME .3400000000E+02DEG DECI  
INDICE DES VIDES SUR LA COURBE DE CONSOLIDATION VIERGE TEL QUE P=1BAR .1471000000D+01  
M=6SIN(PHI)/(3\*SIN(PHI)): .1374609827D+01  
GAMMA = .8500000000D+00  
CRITERE D'ECOULEMENT : F=Q-M\*P\*SQRT(GAM/(2-GAM)\*((EXP(EU-EC)/CC2)/P)\*\*(2-GAM)-1))

ETAT INITIAL

CONTRAINTTE VERTICALE SPZ .4200000000D+00BAR  
COEFFICIENT DE TRANSMISSION KU .6430000000D+00  
PRESSION HYDR OSTATIQUE U .8100000000D+00BAR  
INDICE DES VIDES .1453195656D+01  
INDICE DES VIDES DE CONSOLIDATION .1425228940D+01  
PRESSION DE CONSOLIDATION : .1141000000D+01BAR



DR/R	SR	U	P	Q	G/P
0					
62056387D-02	10800600D+01	81000000D+00	32004000D+00	14994000D+00	46850394D+00
72056387D-02	14680486D+01	81000000D+00	32004000D+00	68854013D+00	21514190D+01
82056387D-02	15195038D+01	82659543D+00	34002408D+00	69757348D+00	20515414D+01
92056387D-02	15717778D+01	84663288D+00	35937413D+00	70513269D+00	19621131D+01
10205639D-01	16176747D+01	86311566D+00	37782912D+00	71129782D+00	18825913D+01
11205639D-01	16589035D+01	87783598D+00	39518049D+00	71619571D+00	18123256D+01
12205639D-01	16949813D+01	89029095D+00	41127815D+00	71998260D+00	17505977D+01
13205639D-01	17309597D+01	90342865D+00	42603047D+00	72282752D+00	16966569D+01
14205639D-01	17618078D+01	91805277D+00	43939969D+00	72489839D+00	16497471D+01
15205639D-01	17924387D+01	93287003D+00	45139415D+00	72635173D+00	16091297D+01
16205639D-01	18181364D+01	94493628D+00	46205892D+00	72732623D+00	15740984D+01
17205639D-01	18439509D+01	95906626D+00	47146620D+00	72793979D+00	15439915D+01
18205639D-01	18694684D+01	97461544D+00	47970631D+00	72828907D+00	15181978D+01
19205639D-01	18918303D+01	98850651D+00	48687997D+00	72845084D+00	14961610D+01
20205639D-01	19141107D+01	10036120D+01	49309200D+00	72848435D+00	14773802D+01
21205639D-01	19349523D+01	10183925D+01	49844654D+00	72843411D+00	14614087D+01
22205639D-01	19540494D+01	10323801D+01	50304362D+00	72833266D+00	14478519D+01
23205639D-01	19730992D+01	10471300D+01	50697694D+00	72820317D+00	14363635D+01
24205639D-01	19919804D+01	10623976D+01	51033249D+00	72806163D+00	14266417D+01
25205639D-01	20080512D+01	10754344D+01	51318800D+00	72791866D+00	14184249D+01
26205639D-01	20242179D+01	10890559D+01	51561282D+00	72778101D+00	14114874D+01
27205639D-01	20402505D+01	11029546D+01	51766820D+00	72765266D+00	14056352D+01
28205639D-01	20561628D+01	11170784D+01	51940775D+00	72753566D+00	14007024D+01
29205639D-01	20719669D+01	11313841D+01	52087809D+00	72743079D+00	13965471D+01
30205639D-01	20853317D+01	11434937D+01	52211951D+00	72733798D+00	13930488D+01
31205639D-01	20987526D+01	11558633D+01	52316669D+00	72725666D+00	13901050D+01
32205639D-01	21120817D+01	11683117D+01	52404933D+00	72718595D+00	13876288D+01
33205639D-01	21253268D+01	11808193D+01	52479278D+00	72712487D+00	13855466D+01
34205639D-01	21384952D+01	11933699D+01	52541866D+00	72707236D+00	13837962D+01
35205639D-01	21500108D+01	12043680D+01	52594530D+00	72702740D+00	13823251D+01
36205639D-01	21616097D+01	12155334D+01	52638827D+00	72698905D+00	13810890D+01
37205639D-01	21731425D+01	12267029D+01	52676073D+00	72695641D+00	13800505D+01
38205639D-01	21846140D+01	12378701D+01	52707382D+00	72692871D+00	13791782D+01
39205639D-01	21953758D+01	12483768D+01	52733695D+00	72690523D+00	13784455D+01
	22061330D+01	12589202D+01	52755804D+00	72688537D+00	13778301D+01



DR/R	SR	U	P	G	Q/P
402056390-01*	221603740+01*	126864540+01*	527743780+00*	726868590+00*	137731340+01*
412056390-01*	222598520+01*	127844300+01*	527899790+00*	726854420+00*	137687950+01*
422056390-01*	223588540+01*	128821730+01*	528030830+00*	726842480+00*	137651520+01*
432056390-01*	224574100+01*	129796740+01*	528140870+00*	726832420+00*	137620940+01*
442056390-01*	225555500+01*	130769280+01*	528233280+00*	726823940+00*	137595260+01*
452056390-01*	226532990+01*	131739350+01*	528310870+00*	726816810+00*	137573700+01*
462056390-01*	227383190+01*	132583320+01*	528376020+00*	726810810+00*	137555600+01*
472056390-01*	228234590+01*	133429500+01*	528430720+00*	726805760+00*	137540410+01*
482056390-01*	229082320+01*	134272850+01*	528476640+00*	726801520+00*	137527650+01*
492056390-01*	229926600+01*	135113450+01*	528515200+00*	726797950+00*	137516950+01*
502056390-01*	230767600+01*	135951370+01*	528547560+00*	726794960+00*	137507960+01*



SIMULATION DE L'ESSAI PRESSIOMETRIQUE A COURT TERME

ELEMENTS GEOMETRIQUES

RAYON DU FORAGE R= .4450000000D+01CM  
NIVEAU DE L'ESSAI .8300000012E+01M  
NIVEAU DE LA NAPPE .2000000002E+00M

CARACTERISTIQUES DE LA LOI DE COMPORTEMENT

INDICE CC1 DE COMPRESSION ISOTROPE .2200000000D+01  
INDICE DE COMPRESSION ISOTROPE CC2 .3470000000D+00  
COEFFICIENT DE POISSON DU SQUELETTE .1610000000D+00  
ANGLE DE FROITTEMENT INTERNE A LONG TERME .340000000E+02DEG DECI  
INDICE DES VIDES SUR LA COURBE DE CONSOLIDATION VIERGE TEL QUE P=1BAR .1525000000D+01  
M=6SIN(PHI)/(3+SIN(PHI)) .1374609827D+01  
GAMMA = .1000000000D+01  
CRITERE D'EGCOULEMENT : F=Q-M\*P\*GAM/(1-GAM)\*((EXP((E0-EC)/CC2)/P)\*\*(1-GAM)-1)

ETAT INITIAL

CONTRAINTTE VERTICALE SPZ .4200000000D+00BAR  
COEFFICIENT DE TRANSMISSION KO .6430000000D+00  
PRESSION HYDR OSTATIQUE U .8100000000D+00BAR  
INDICE DES VIDES .1421533119D+01  
INDICE DES VIDES DE CONSOLIDATION .1387767708D+01  
PRESSION DE CONSOLIDATION : .1485100000D+01BAR



DR/R	SR	U	P	G	G/P
0	10800600D+01*	81000000D+00*	32004000D+00*	14994000D+00*	46850394D+00*
61588595D+02*	14601540D+01*	81000000D+00*	32004000D+00*	67520098D+00*	21097393D+01*
71588595D+02*	15112479D+01*	81786029D+00*	34475631D+00*	69147836D+00*	20057018D+01*
81588595D+02*	15566672D+01*	82324001D+00*	36880624D+00*	70475243D+00*	19109016D+01*
91588595D+02*	16030357D+01*	83343568D+00*	39156925D+00*	71510729D+00*	18262601D+01*
10158860D+01*	16448637D+01*	84332646D+00*	41255889D+00*	72283779D+00*	17520839D+01*
11158860D+01*	16816454D+01*	85247350D+00*	43146450D+00*	72836595D+00*	16881249D+01*
12158860D+01*	17181929D+01*	86550947D+00*	44815242D+00*	73215326D+00*	16337148D+01*
13158860D+01*	17497648D+01*	87734718D+00*	46263723D+00*	73463370D+00*	15879260D+01*
14158860D+01*	17809225D+01*	89211507D+00*	47503952D+00*	73617601D+00*	15497153D+01*
15158860D+01*	18071655D+01*	90489443D+00*	48554398D+00*	73707132D+00*	15180321D+01*
16158860D+01*	18335117D+01*	92014092D+00*	49436519D+00*	73753713D+00*	14918873D+01*
17158860D+01*	18594008D+01*	93701112D+00*	50172338D+00*	73772894D+00*	14703898D+01*
18158860D+01*	18822152D+01*	95249406D+00*	50782910D+00*	73775401D+00*	14527604D+01*
19158860D+01*	19048569D+01*	96918902D+00*	51287481D+00*	73768397D+00*	14383315D+01*
20158860D+01*	19260495D+01*	98556551D+00*	51703114D+00*	73756518D+00*	14265392D+01*
21158860D+01*	19455067D+01*	10011263D+01*	52044621D+00*	73742662D+00*	14169123D+01*
22158860D+01*	19648652D+01*	10173346D+01*	52324662D+00*	73728561D+00*	14090595D+01*
23158860D+01*	19839775D+01*	10339008D+01*	52553936D+00*	73715191D+00*	14026578D+01*
24158860D+01*	20003787D+01*	10482447D+01*	52741411D+00*	73703043D+00*	13974416D+01*
25158860D+01*	20168628D+01*	10630665D+01*	52894552D+00*	73692312D+00*	13931929D+01*
26158860D+01*	20331517D+01*	10780121D+01*	53019547D+00*	73683017D+00*	13897331D+01*
27158860D+01*	20492657D+01*	10930404D+01*	53121502D+00*	73675080D+00*	13869163D+01*
28158860D+01*	20652227D+01*	11081198D+01*	53204623D+00*	73668373D+00*	13846235D+01*
29158860D+01*	20788969D+01*	11210844D+01*	53272358D+00*	73662750D+00*	13827574D+01*
30158860D+01*	20925796D+01*	11341932D+01*	53327539D+00*	73658067D+00*	13812388D+01*
31158860D+01*	21061282D+01*	11472776D+01*	53372479D+00*	73654184D+00*	13800031D+01*
32158860D+01*	21195545D+01*	11603282D+01*	53409070D+00*	73650977D+00*	13789976D+01*
33158860D+01*	21328690D+01*	11733386D+01*	53438859D+00*	73648336D+00*	13781794D+01*
34158860D+01*	21446148D+01*	11848382D+01*	53463107D+00*	73646167D+00*	13775138D+01*
35158860D+01*	21564250D+01*	11964490D+01*	53482841D+00*	73644588D+00*	13769722D+01*
36158860D+01*	21681385D+01*	12080009D+01*	53498901D+00*	73642931D+00*	13765317D+01*
37158860D+01*	21797624D+01*	12194940D+01*	53511970D+00*	73641740D+00*	13761732D+01*
38158860D+01*	21907106D+01*	12303361D+01*	53522603D+00*	73640768D+00*	13758816D+01*
39158860D+01*	22016229D+01*	12411624D+01*	53531255D+00*	73639974D+00*	13756444D+01*





SIMULATION DE L'ESSAI PRESSIOMETRIQUE A COURT TERME

ELEMENTS GEOMETRIQUES

RAYON DU FORAGE R= .4450000000D+01CM  
NIVEAU DE L'ESSAI = .1030000001E+02M  
NIVEAU DE LA NAPPE = .2000000002E+00M

CARACTERISTIQUES DE LA LOI DE COMPORTEMENT

INDICE CC1 DE COMPRESSION ISOTROPE .2200000000D+01  
INDICE DE COMPRESSION ISOTROPE CC2 .3470000000D+00  
COEFFICIENT DE POISSON DU SQUELETTE .1580000000D+00  
ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE A LONG TERME .3400000000E+02DEG DECI  
INDICE DES VIDES SUR LA COURBE DE CONSOLIDATION VIERGE TEL QUE P=1BAR .2022000000D+01  
 $M = \frac{6 \sin(\phi)}{3 - \sin(\phi)}$  .1374609827D+01  
GAMMA = .2100000000D+01  
CRITERE D'ECOULEMENT :  $F = Q - M * P * GAM / (1 - GAM) * ((EXP((EO - EC) / CC2) / P) ** (1 - GAM) - 1)$

ETAT INITIAL

CONTRAINTÉ VERTICALE SPZ .5400000000D+00BAR  
COEFFICIENT DE TRANSMISSION KU .5370000000D+00  
PRESSION HYDR OSTATIQUE U .1010000000D+01BAR  
INDICE DES VIDES .1991984823D+01  
INDICE DES VIDES DE CONSOLIDATION .1966808633D+01  
PRESSION DE CONSOLIDATION : .1172400000D+01BAR



DR/R	SR	U	P	Q	G/P
0					
42058630D-02*	12999800D+01*	10100000D+01*	37320000D+00*	25002000D+00*	66972035D+00*
52058630D-02*	16783719D+01*	10100000D+01*	37332000D+00*	70146375D+00*	18789879D+01*
62058630D-02*	17552349D+01*	99919727D+00*	41476228D+00*	74513225D+00*	17965285D+01*
72058630D-02*	18265602D+01*	98679190D+00*	45814409D+00*	78246194D+00*	17078949D+01*
82058630D-02*	18902771D+01*	97595343D+00*	50021489D+00*	81017615D+00*	16196562D+01*
92058630D-02*	19499521D+01*	97526008D+00*	53690697D+00*	82709896D+00*	15404884D+01*
10205863D-01*	20020031D+01*	98342101D+00*	56504328D+00*	83513436D+00*	14780007D+01*
11205863D-01*	20454949D+01*	99791660D+00*	58401781D+00*	83793424D+00*	14347751D+01*
12205863D-01*	20890735D+01*	10235159D+01*	59555771D+00*	83853572D+00*	14079840D+01*
13205863D-01*	21265982D+01*	10502125D+01*	60210833D+00*	83848828D+00*	13925871D+01*
14205863D-01*	21637074D+01*	10808328D+01*	60567862D+00*	83833954D+00*	13841326D+01*
15205863D-01*	21957981D+01*	11090015D+01*	60758121D+00*	83822370D+00*	13796077D+01*
16205863D-01*	22275631D+01*	11383597D+01*	60858280D+00*	83815208D+00*	13772195D+01*
17205863D-01*	22542942D+01*	11635872D+01*	60910661D+00*	83811154D+00*	13759685D+01*
18205863D-01*	22815931D+01*	11899297D+01*	60937956D+00*	83808949D+00*	13753160D+01*
19205863D-01*	23080514D+01*	12157695D+01*	60952149D+00*	83807773D+00*	13749765D+01*
20205863D-01*	23337792D+01*	12410912D+01*	60959520D+00*	83807153D+00*	13748001D+01*
21205863D-01*	23563025D+01*	12633445D+01*	60963345D+00*	83806828D+00*	13747085D+01*
22205863D-01*	23785508D+01*	12854116D+01*	60965328D+00*	83806658D+00*	13746610D+01*
23205863D-01*	24002599D+01*	13069978D+01*	60966357D+00*	83806569D+00*	13746363D+01*
24205863D-01*	24193132D+01*	13259674D+01*	60966890D+00*	83806523D+00*	13746236D+01*
25205863D-01*	24386383D+01*	13452351D+01*	60967166D+00*	83806499D+00*	13746169D+01*
26205863D-01*	24575521D+01*	13641094D+01*	60967309D+00*	83806486D+00*	13746135D+01*
27205863D-01*	24753267D+01*	13818568D+01*	60967383D+00*	83806480D+00*	13746117D+01*
28205863D-01*	24917478D+01*	13982590D+01*	60967421D+00*	83806476D+00*	13746108D+01*
29205863D-01*	25082828D+01*	14147810D+01*	60967441D+00*	83806474D+00*	13746103D+01*
30205863D-01*	25245178D+01*	14310069D+01*	60967451D+00*	83806474D+00*	13746101D+01*
31205863D-01*	25404777D+01*	14469605D+01*	60967456D+00*	83806473D+00*	13746100D+01*
32205863D-01*	25545044D+01*	14609829D+01*	60967459D+00*	83806473D+00*	13746099D+01*
33205863D-01*	25687564D+01*	14752318D+01*	60967461D+00*	83806473D+00*	13746099D+01*
34205863D-01*	25827773D+01*	14892506D+01*	60967461D+00*	83806473D+00*	13746098D+01*
35205863D-01*	25965838D+01*	15030557D+01*	60967462D+00*	83806473D+00*	13746098D+01*
36205863D-01*	26101912D+01*	15166620D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*
37205863D-01*	26236135D+01*	15300836D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*
	26354776D+01*	15419472D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*



DR/R	SR	A	U	P	G	Q/P
382058630-01*	26474408D+01*	1539100D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
392058630-01*	26592410D+01*	15657100D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
402058630-01*	26708890D+01*	15773579D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
412058630-01*	26823923D+01*	15888611D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
422058630-01*	26937605D+01*	16002292D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
432058630-01*	27039645D+01*	16104332D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
442058630-01*	27143406D+01*	16208091D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
452058630-01*	27245962D+01*	16310647D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
462058630-01*	27347377D+01*	16412063D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
472058630-01*	27447713D+01*	16512399D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
482058630-01*	27543458D+01*	16608143D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
492058630-01*	27638618D+01*	16703303D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
502058630-01*	27727337D+01*	16792022D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
512058630-01*	27817085D+01*	16881770D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
522058630-01*	27905943D+01*	16970628D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
532058630-01*	27993952D+01*	17058637D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
542058630-01*	28081150D+01*	17145835D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
552058630-01*	28167576D+01*	17232261D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
562058630-01*	28243752D+01*	17308437D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
572058630-01*	28322679D+01*	17387364D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
582058630-01*	28400884D+01*	17465569D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
592058630-01*	28478399D+01*	17543084D+01*	60967462D+00*	83806472D+00*	13746098D+01*	
602058630-01*	28555249D+01*	17619810D+01*	60967462D+00*	83808612D+00*	13746449D+01*	
612058630-01*	28631471D+01*	17695966D+01*	60968168D+00*	83808547D+00*	13746279D+01*	
622058630-01*	28707073D+01*	17771533D+01*	60968532D+00*	83808513D+00*	13746192D+01*	
632058630-01*	28782088D+01*	17846530D+01*	60968720D+00*	83808495D+00*	13746146D+01*	
642058630-01*	28856539D+01*	17920972D+01*	60968817D+00*	83808486D+00*	13746123D+01*	
652058630-01*	28930448D+01*	17994877D+01*	60968867D+00*	83808482D+00*	13746110D+01*	
662058630-01*	28996710D+01*	18061136D+01*	60968892D+00*	83808479D+00*	13746105D+01*	
672058630-01*	29063881D+01*	18128306D+01*	60968906D+00*	83808478D+00*	13746102D+01*	
682058630-01*	29130533D+01*	18194957D+01*	60968913D+00*	83808477D+00*	13746100D+01*	
692058630-01*	29196682D+01*	18261106D+01*	60968916D+00*	83808477D+00*	13746099D+01*	
702058630-01*	29262347D+01*	18326770D+01*	60968918D+00*	83808477D+00*	13746099D+01*	
712058630-01*	29327545D+01*	18391968D+01*	60968919D+00*	83808477D+00*	13746099D+01*	
722058630-01*	29392291D+01*	18456715D+01*	60968919D+00*	83808477D+00*	13746098D+01*	
732058630-01*	29456602D+01*	18521025D+01*	60968920D+00*	83808477D+00*	13746098D+01*	



DR/R	SR	U	P	G	Q/P
742058630-01*	295204910+01*	185849140+01*	609689200+00*	838084770+00*	137460980+01*
752058630-01*	295839730+01*	186483960+01*	609689200+00*	838084770+00*	137460980+01*
762058630-01*	296417470+01*	187061700+01*	609689200+00*	838084770+00*	137460980+01*
772058630-01*	297005900+01*	187650130+01*	609689200+00*	838084770+00*	137460980+01*
782058630-01*	297590420+01*	188234660+01*	609689200+00*	838084770+00*	137460980+01*
792058630-01*	298171310+01*	188815540+01*	609689200+00*	838084770+00*	137460980+01*
802058630-01*	298748380+01*	189391380+01*	609689200+00*	838106170+00*	137464490+01*
812058630-01*	299321900+01*	189964230+01*	609696260+00*	838105180+00*	137462790+01*
822058630-01*	299891980+01*	190533960+01*	609699900+00*	838105180+00*	137461920+01*
832058630-01*	300458800+01*	191100610+01*	609701780+00*	838105000+00*	137461460+01*
842058630-01*	301005420+01*	191647130+01*	609702750+00*	838104910+00*	137461230+01*
852058630-01*	301549070+01*	192190730+01*	609703250+00*	838104860+00*	137461110+01*
862058630-01*	302089570+01*	192731210+01*	609703510+00*	838104840+00*	137461050+01*
872058630-01*	302627020+01*	193268650+01*	609703640+00*	838104830+00*	137461020+01*
882058630-01*	303140140+01*	193781770+01*	609703710+00*	838104820+00*	137461000+01*
892058630-01*	303653470+01*	194295090+01*	609703750+00*	838104820+00*	137460990+01*
902058630-01*	304163910+01*	194805530+01*	609703770+00*	838104820+00*	137460990+01*



SIMULATION DE L'ESSAI PRESSIOMETRIQUE A COURT TERME

ELEMENTS GEOMETRIQUES

RAYON DU FORAGE R= .4450000000D+01CM  
NIVEAU DE L'ESSAI = .1030000001E+02M  
NIVEAU DE LA NAPPE = .2000000002E+00M

CARACTERISTIQUES DE LA LOI DE COMPORTEMENT

INDICE CC1 DE COMPRESSION ISOTROPE .2200000000D+01  
INDICE DE COMPRESSION ISOTROPE CC2 .3470000000D+00  
COEFFICIENT DE POISSON DU SQUELETTE .1580000000D+00  
ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE A LONG TERME .3400000000E+02DEG DECI  
INDICE DES VIDES SUR LA COURBE DE CONSOLIDATION VIERGE TEL QUE P=1BAR .2000000000D+01  
 $M = 6 \sin(\Phi) / (3 + \sin(\Phi))$  : .1374609827D+01  
GAMMA = .1050000000D+01  
CRITERE D'ECOULEMENT :  $F = Q = M * P * \sqrt{GAM / (2 - GAM) * ((EXP(EO - EC) / CC2) / P) ** (2 - GAM) - 1}$

ETAT INITIAL

CONTRAINTE VERTICALE SPZ .5400000000D+00BAR  
COEFFICIENT DE TRANSMISSION K0 .5370000000D+00  
PRESSION HYDR OSTATIQUE U .1010000000D+01BAR  
INDICE DES VIDES .1988346134D+01  
INDICE DES VIDES DE CONSOLIDATION .1964412864D+01  
PRESSION DE CONSOLIDATION : .1108000000D+01BAR



DR/R	SR	U	P	G	G/P
0	12999800D+01*	10100000D+01*	37332000D+00*	25002000D+00*	66972035D+00*
	169349310+01*	10100000D+01*	37332000D+00*	72599422D+00*	19446968D+01*
	176836690+01*	10268301D+01*	39933403D+00*	73870575D+00*	18498443D+01*
	18351662D+01*	10429438D+01*	42414410D+00*	74852439D+00*	17647879D+01*
	18928912D+01*	10576260D+01*	44697029D+00*	75564396D+00*	16905910D+01*
	19463005D+01*	10753950D+01*	46728747D+00*	76047539D+00*	16274252D+01*
	19920566D+01*	10922808D+01*	48484465D+00*	76352560D+00*	15747840D+01*
	20372647D+01*	11145276D+01*	49963276D+00*	76529303D+00*	15317111D+01*
	20757281D+01*	11349977D+01*	51182184D+00*	76620184D+00*	14970089D+01*
	21134723D+01*	11588053D+01*	52169083D+00*	76657630D+00*	14694073D+01*
	21467558D+01*	11813907D+01*	52956663D+00*	76664390D+00*	14476817D+01*
	21776928D+01*	12041707D+01*	53577976D+00*	76655284D+00*	14307238D+01*
	22060795D+01*	12263693D+01*	54063689D+00*	76639324D+00*	14175748D+01*
	22340969D+01*	12497088D+01*	54440714D+00*	76621606D+00*	14074321D+01*
	22580691D+01*	12701541D+01*	54731768D+00*	76604752D+00*	13996396D+01*
	22819863D+01*	12914167D+01*	54955506D+00*	76589921D+00*	13936715D+01*
	23055388D+01*	13129734D+01*	55126938D+00*	76577459D+00*	13891114D+01*
	23252665D+01*	13312016D+01*	55257966D+00*	76567293D+00*	13856336D+01*
	23452925D+01*	13501012D+01*	55357923D+00*	76559166D+00*	13829848D+01*
	23650462D+01*	13690090D+01*	55434066D+00*	76552759D+00*	13809696D+01*
	23845608D+01*	13878882D+01*	55492006D+00*	76547759D+00*	13794376D+01*
	24016967D+01*	14045466D+01*	55536057D+00*	76543885D+00*	13773898D+01*
	24188830D+01*	14213740D+01*	55569527D+00*	76540901D+00*	13773898D+01*
	24358828D+01*	14381040D+01*	55594946D+00*	76538611D+00*	13767189D+01*
	24518550D+01*	14538731D+01*	55614242D+00*	76536858D+00*	13762097D+01*
	24665714D+01*	14684368D+01*	55628888D+00*	76535520D+00*	13758233D+01*
	24813424D+01*	14830927D+01*	55640001D+00*	76534500D+00*	13755302D+01*
	24959748D+01*	14976385D+01*	55648432D+00*	76533724D+00*	13753078D+01*
	25104812D+01*	15120796D+01*	55654827D+00*	76533134D+00*	13751392D+01*
	25230202D+01*	15245693D+01*	55659678D+00*	76532685D+00*	13750113D+01*
	25357116D+01*	15372236D+01*	55663358D+00*	76532344D+00*	13749143D+01*
	25482937D+01*	15497777D+01*	55666148D+00*	76532085D+00*	13748407D+01*
	25607751D+01*	15622379D+01*	55668264D+00*	76531889D+00*	13747849D+01*
	25731636D+01*	15746105D+01*	55669869D+00*	76531740D+00*	13747426D+01*
	25854663D+01*	15869012D+01*	55671086D+00*	76531627D+00*	13747105D+01*



DR/R	SR	U	P	G	G/P
38379262D+01*	25959859D+01*	15974117D+01*	55672009D+00*	76531541D+00*	13746862D+01*
39379262D+01*	26066702D+01*	16080891D+01*	55672709D+00*	76531476D+00*	13746677D+01*
40379262D+01*	26172760D+01*	16186896D+01*	55673240D+00*	76531427D+00*	13746537D+01*
41379262D+01*	26278085D+01*	16292181D+01*	55673642D+00*	76531389D+00*	13746431D+01*
42379262D+01*	26382725D+01*	16396792D+01*	55673948D+00*	76531361D+00*	13746351D+01*
43379262D+01*	26486725D+01*	16500769D+01*	55674179D+00*	76531339D+00*	13746290D+01*
44379262D+01*	26590127D+01*	16604155D+01*	55674355D+00*	76531323D+00*	13746243D+01*
45379262D+01*	26682711D+01*	16696725D+01*	55674488D+00*	76531311D+00*	13746208D+01*
46379262D+01*	26775269D+01*	16789273D+01*	55674589D+00*	76531301D+00*	13746182D+01*
47379262D+01*	26867275D+01*	16881272D+01*	55674665D+00*	76531294D+00*	13746162D+01*
48379262D+01*	26958761D+01*	16972753D+01*	55674723D+00*	76531289D+00*	13746146D+01*
49379262D+01*	27044700D+01*	17058687D+01*	55674767D+00*	76531285D+00*	13746135D+01*
50379262D+01*	27131102D+01*	17145087D+01*	55674800D+00*	76531281D+00*	13746126D+01*
51379262D+01*	27217045D+01*	17231027D+01*	55674826D+00*	76531279D+00*	13746119D+01*
52379262D+01*	27297074D+01*	17311054D+01*	55674845D+00*	76531277D+00*	13746114D+01*
53379262D+01*	27377515D+01*	17391494D+01*	55674859D+00*	76531276D+00*	13746110D+01*
54379262D+01*	27457543D+01*	17471520D+01*	55674871D+00*	76531275D+00*	13746107D+01*
55379262D+01*	27537176D+01*	17551153D+01*	55674879D+00*	76531274D+00*	13746105D+01*
56379262D+01*	27616436D+01*	17630412D+01*	55674885D+00*	76531274D+00*	13746104D+01*
57379262D+01*	27695340D+01*	17709316D+01*	55674890D+00*	76531273D+00*	13746102D+01*
58379262D+01*	27773907D+01*	17787883D+01*	55674894D+00*	76531273D+00*	13746101D+01*
59379262D+01*	27844081D+01*	17858056D+01*	55674896D+00*	76531273D+00*	13746101D+01*
60379262D+01*	27914068D+01*	17928043D+01*	55674899D+00*	76531272D+00*	13746100D+01*
61379262D+01*	27983726D+01*	17997701D+01*	55674900D+00*	76531272D+00*	13746100D+01*
62379262D+01*	28053071D+01*	18067046D+01*	55674901D+00*	76531272D+00*	13746099D+01*
63379262D+01*	28122115D+01*	18136090D+01*	55674902D+00*	76531272D+00*	13746099D+01*
64379262D+01*	28190873D+01*	18204847D+01*	55674903D+00*	76531272D+00*	13746099D+01*
65379262D+01*	28259355D+01*	18273330D+01*	55674903D+00*	76531272D+00*	13746099D+01*
66379262D+01*	28327576D+01*	18341550D+01*	55674904D+00*	76531272D+00*	13746099D+01*
67379262D+01*	28395545D+01*	18409519D+01*	55674904D+00*	76531272D+00*	13746099D+01*
68379262D+01*	28464234D+01*	18468209D+01*	55674904D+00*	76531272D+00*	13746098D+01*
69379262D+01*	28514281D+01*	18528256D+01*	55674905D+00*	76531272D+00*	13746098D+01*
70379262D+01*	28574077D+01*	18588051D+01*	55674905D+00*	76531272D+00*	13746098D+01*
71379262D+01*	28633630D+01*	18647604D+01*	55674905D+00*	76531272D+00*	13746098D+01*
72379262D+01*	28692951D+01*	18706925D+01*	55674905D+00*	76531272D+00*	13746098D+01*
73379262D+01*	28752047D+01*	18766022D+01*	55674905D+00*	76531272D+00*	13746098D+01*

88  
LITTLE

```

*****
* DR/R * SR * U * P * Q * G/P *
*****
* 74379262D+01 * 28810928D+01 * 18824903D+01 * 55674905D+00 * 76531272D+00 * 13746098D+01 *
* 75379262D+01 * 28869602D+01 * 18883576D+01 * 55674905D+00 * 76531272D+00 * 13746098D+01 *
* 76379262D+01 * 28928075D+01 * 18942050D+01 * 55674905D+00 * 76531272D+00 * 13746098D+01 *
* 77379262D+01 * 28986357D+01 * 19000331D+01 * 55674905D+00 * 76531272D+00 * 13746098D+01 *
* 78379262D+01 * 29044453D+01 * 19058427D+01 * 55674905D+00 * 76531272D+00 * 13746098D+01 *
* 79379262D+01 * 29096669D+01 * 19110643D+01 * 55674905D+00 * 76531272D+00 * 13746098D+01 *
* 80379262D+01 * 29149361D+01 * 19163336D+01 * 55674905D+00 * 76531272D+00 * 13746098D+01 *
* 81379262D+01 * 29201870D+01 * 19215845D+01 * 55674905D+00 * 76531272D+00 * 13746098D+01 *
* 82379262D+01 * 29254201D+01 * 19268176D+01 * 55674905D+00 * 76531272D+00 * 13746098D+01 *
* 83379262D+01 * 29306360D+01 * 19320335D+01 * 55674905D+00 * 76531271D+00 * 13746098D+01 *
* 84379262D+01 * 29358354D+01 * 19372328D+01 * 55674905D+00 * 76531271D+00 * 13746098D+01 *
* 85379262D+01 * 29410186D+01 * 19424161D+01 * 55674905D+00 * 76531271D+00 * 13746098D+01 *
* 86379262D+01 * 29461864D+01 * 19475838D+01 * 55674905D+00 * 76531271D+00 * 13746098D+01 *
* 87379262D+01 * 29511083D+01 * 19525057D+01 * 55674905D+00 * 76531271D+00 * 13746098D+01 *
* 88379262D+01 * 29560287D+01 * 19574262D+01 * 55674905D+00 * 76531271D+00 * 13746098D+01 *
* 89379262D+01 * 29609344D+01 * 19623319D+01 * 55674905D+00 * 76531271D+00 * 13746098D+01 *
* 90379262D+01 * 29658258D+01 * 19672233D+01 * 55674905D+00 * 76531271D+00 * 13746098D+01 *
*****

```



SIMULATION DE L'ESSAI PRESSIOMETRIQUE A COURT TERME

ELEMENTS GEOMETRIQUES

RAYON DU FORAGE R= .4450000000D+01CM  
NIVEAU DE L'ESSAI .1030000001E+02M  
NIVEAU DE LA NAPPE .2000000000E+00M

CARACTERISTIQUES DE LA LOI DE COMPORTEMENT

INDICE CC1 DE COMPRESSION ISOTROPE .2200000000D+01  
INDICE DE COMPRESSION ISOTROPE CC2 .3470000000D+00  
COEFFICIENT DE POISSON DU SQUELETTE .1580000000D+00  
ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE A LONG TERME .3400000000E+02DEG DECI  
INDICE DES VIDES SUR LA COURBE DE CONSOLIDATION VIERGL TEL QUE P=1BAR .2063300000D+01  
M=6SIN(PHI)/(3\*SIN(PHI)) .1374609827D+01  
GAMMA = .1000000000D+01  
CRITERE D'ECOULEMENT : FEG-M\*P\*GAM/(1-GAM)\*((EXP((EO\*EC)/CC2)/P)\*\*(1-GAM))-1)

ETAT INITIAL

CONTRAINTE VERTICALE SPZ .5400000000D+00BAR  
COEFFICIENT DE TRANSMISSION KU .5370000000D+00  
PRESSION HYDR OSTATIQUE U .1010000000D+01BAR  
INDICE DES VIDES .1946552662D+01  
INDICE DES VIDES DE CONSOLIDATION .1915505373D+01  
PRESSION DE CONSOLIDATION : .1531000000D+01BAR



DR/R	SR	U	P	Q	Q/P
0	.129998000+01*	.101000000+01*	.373320000+00*	.250020000+00*	.669720350+00*
.442895790-02*	.169239280+01*	.101000000+01*	.373320000+00*	.724205320+00*	.193990500+01*
.542895790-02*	.176634950+01*	.102337700+01*	.401155260+00*	.739251310+00*	.184280600+01*
.642895790-02*	.183249990+01*	.103686240+01*	.427334990+00*	.750464830+00*	.175615110+01*
.742895790-02*	.188974000+01*	.104984180+01*	.450965280+00*	.758250230+00*	.168139380+01*
.842895790-02*	.194275250+01*	.106671450+01*	.471547860+00*	.763288730+00*	.161868770+01*
.942895790-02*	.198815270+01*	.108327230+01*	.488959750+00*	.766320230+00*	.156724610+01*
.104289580-01*	.203303340+01*	.110552220+01*	.503355870+00*	.767995460+00*	.152575050+01*
.114289580-01*	.207117010+01*	.112611340+01*	.515053360+00*	.768814690+00*	.149268940+01*
.124289580-01*	.210863680+01*	.115008690+01*	.524435930+00*	.769127740+00*	.146658090+01*
.134289580-01*	.214162690+01*	.117275460+01*	.531890360+00*	.769162310+00*	.144609180+01*
.144289580-01*	.217231430+01*	.119557070+01*	.537771660+00*	.769058180+00*	.143008310+01*
.154289580-01*	.220046520+01*	.121773070+01*	.542388040+00*	.768896610+00*	.141761350+01*
.164289580-01*	.222828200+01*	.124099200+01*	.545997880+00*	.768722090+00*	.140792140+01*
.174289580-01*	.225199490+01*	.126124180+01*	.548812700+00*	.768557080+00*	.140039960+01*
.184289580-01*	.227576960+01*	.128238350+01*	.551003010+00*	.768411350+00*	.139456830+01*
.194289580-01*	.229915330+01*	.130376430+01*	.552704680+00*	.768287770+00*	.139005110+01*
.204289580-01*	.232220190+01*	.132528850+01*	.554025160+00*	.768185690+00*	.138655380+01*
.214289580-01*	.234209010+01*	.134401540+01*	.555048920+00*	.768102860+00*	.138384710+01*
.224289580-01*	.236171890+01*	.136275880+01*	.555842080+00*	.768036480+00*	.138175300+01*
.234289580-01*	.238109080+01*	.138145530+01*	.556456280+00*	.767983760+00*	.138013320+01*
.244289580-01*	.239801170+01*	.139786020+01*	.556931690+00*	.767942180+00*	.137888040+01*
.254289580-01*	.241509510+01*	.141454940+01*	.557299570+00*	.767909530+00*	.137791160+01*
.264289580-01*	.243197810+01*	.143113070+01*	.557584180+00*	.767883990+00*	.137716250+01*
.274289580-01*	.244779490+01*	.144671650+01*	.557804310+00*	.767864070+00*	.137658320+01*
.284289580-01*	.246355000+01*	.146229460+01*	.557974570+00*	.767848570+00*	.137613540+01*
.294289580-01*	.247818640+01*	.147679540+01*	.558106220+00*	.767836520+00*	.137578920+01*
.304289580-01*	.249272060+01*	.149122540+01*	.558208020+00*	.767827170+00*	.137552160+01*
.314289580-01*	.250711930+01*	.150554420+01*	.558286730+00*	.767819910+00*	.137531460+01*
.324289580-01*	.252139470+01*	.151975820+01*	.558347590+00*	.767814290+00*	.137515470+01*
.334289580-01*	.253400280+01*	.153231910+01*	.558394640+00*	.767809940+00*	.137503100+01*
.344289580-01*	.254651000+01*	.154479000+01*	.558431010+00*	.767806570+00*	.137493540+01*
.354289580-01*	.255890880+01*	.155716090+01*	.558459130+00*	.767803960+00*	.137486150+01*
.364289580-01*	.257120770+01*	.156943830+01*	.558480870+00*	.767801950+00*	.137480440+01*
.374289580-01*	.258341440+01*	.158162850+01*	.558497670+00*	.767800390+00*	.137476020+01*

NO. 1111

DR/R	SK	U	P	Q	Q/P
384289580-01*	259553600+01*	159373730+01*	558510660+00*	767799180+00*	137472610+01*
394289580-01*	260612430+01*	160431580+01*	558520710+00*	767798250+00*	137469970+01*
404289580-01*	261666970+01*	161485360+01*	558528470+00*	767797530+00*	137467930+01*
414289580-01*	262713610+01*	162531420+01*	558534470+00*	767796970+00*	137466350+01*
424289580-01*	263752870+01*	163570240+01*	558539110+00*	767796540+00*	137465130+01*
434289580-01*	264785260+01*	164602270+01*	558542690+00*	767796200+00*	137464190+01*
444289580-01*	265811200+01*	165627950+01*	558545470+00*	767795940+00*	137463460+01*
454289580-01*	266720690+01*	166537230+01*	558547610+00*	767795750+00*	137462900+01*
464289580-01*	267640880+01*	167457270+01*	558549270+00*	767795590+00*	137462470+01*
474289580-01*	268555140+01*	168371400+01*	558550550+00*	767795470+00*	137462130+01*
484289580-01*	269463800+01*	169279960+01*	558551540+00*	767795380+00*	137461870+01*
494289580-01*	270367180+01*	170183270+01*	558552300+00*	767795310+00*	137461670+01*
504289580-01*	271220610+01*	171036640+01*	558552890+00*	767795250+00*	137461510+01*
514289580-01*	272074260+01*	171890250+01*	558553350+00*	767795210+00*	137461390+01*
524289580-01*	272923240+01*	172739190+01*	558553700+00*	767795180+00*	137461300+01*
534289580-01*	273719070+01*	173535000+01*	558553980+00*	767795150+00*	137461230+01*
544289580-01*	274514300+01*	174330210+01*	558554190+00*	767795130+00*	137461170+01*
554289580-01*	275305280+01*	175121170+01*	558554350+00*	767795120+00*	137461130+01*
564289580-01*	276092240+01*	175908120+01*	558554480+00*	767795110+00*	137461100+01*
574289580-01*	276875370+01*	176691240+01*	558554580+00*	767795100+00*	137461070+01*
584289580-01*	277654870+01*	177470730+01*	558554650+00*	767795090+00*	137461050+01*
594289580-01*	278341000+01*	178156860+01*	558554710+00*	767795080+00*	137461030+01*
604289580-01*	279037090+01*	178852940+01*	558554750+00*	767795080+00*	137461020+01*
614289580-01*	279729640+01*	179545490+01*	558554790+00*	767795080+00*	137461010+01*
624289580-01*	280418810+01*	180234660+01*	558554820+00*	767795070+00*	137461010+01*
634289580-01*	281104740+01*	180920590+01*	558554840+00*	767795070+00*	137461000+01*
644289580-01*	281787580+01*	181603430+01*	558554850+00*	767795070+00*	137461000+01*
654289580-01*	282467460+01*	182283310+01*	558554870+00*	767795070+00*	137460990+01*
664289580-01*	283144520+01*	182960360+01*	558554880+00*	767795070+00*	137460990+01*
674289580-01*	283818870+01*	183634710+01*	558554880+00*	767795070+00*	137460990+01*
684289580-01*	284490620+01*	184306470+01*	558554890+00*	767795070+00*	137460990+01*
694289580-01*	285075790+01*	184891630+01*	558554890+00*	767795070+00*	137460990+01*
704289580-01*	285670580+01*	185486420+01*	558554900+00*	767795070+00*	137460990+01*
714289580-01*	286262760+01*	186078600+01*	558554900+00*	767795070+00*	137460990+01*
724289580-01*	286852430+01*	186668270+01*	558554900+00*	767795070+00*	137460980+01*
734289580-01*	287439680+01*	187255520+01*	558554900+00*	767795070+00*	137460980+01*



```

*****
* DR/R *****
* 74428958D+01*
* 75428958D+01*
* 76428958D+01*
* 77428958D+01*
* 78428958D+01*
* 79428958D+01*
* 80428958D+01*
* 81428958D+01*
* 82428958D+01*
* 83428958D+01*
* 84428958D+01*
* 85428958D+01*
* 86428958D+01*
* 87428958D+01*
* 88428958D+01*
* 89428958D+01*
* 90428958D+01*
* *****
* SR *****
* 28802461D+01*
* 28860731D+01*
* 28918785D+01*
* 28976631D+01*
* 29034279D+01*
* 29091734D+01*
* 29143610D+01*
* 29195814D+01*
* 29247825D+01*
* 29299652D+01*
* 29351299D+01*
* 29402773D+01*
* 29454080D+01*
* 29505226D+01*
* 29554003D+01*
* 29602735D+01*
* 29651312D+01*
* *****
* U *****
* 18784045D+01*
* 18842315D+01*
* 18900369D+01*
* 18958215D+01*
* 19015863D+01*
* 19073318D+01*
* 19125194D+01*
* 19177398D+01*
* 19229409D+01*
* 19281236D+01*
* 19332883D+01*
* 19384357D+01*
* 19435664D+01*
* 19486809D+01*
* 19535587D+01*
* 19584319D+01*
* 19632896D+01*
* *****
* P *****
* 55855491D+00*
* *****
* Q *****
* 76779507D+00*
* *****
* G/P *****
* 13746098D+01*
* *****

```



1 - Loi élastique incrémentale : (p. 61)

La loi élastique incrémentale, étant linéaire par rapport à  $\epsilon$  et de plus isotrope, ne dépend obligatoirement que de deux paramètres. On l'écrit habituellement sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left( (1+\nu) \bar{\sigma}_{ij} - \nu (\delta_{kl} \bar{\sigma}_{kl}) \right) \text{ pour } i = j \\ \epsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \bar{\sigma}_{ij} \text{ pour } i \neq j \end{array} \right.$$

ce qui implique :

$$\nu = \frac{3(1-2\nu)}{E} d_p$$

et dans le cas de sollicitation bi-axiales de révolution on a également :

$$\epsilon = \frac{(1+\nu)}{E} dq .$$

Pour la loi de Cambridge :

$$E = E(p) = \frac{3(1-2\nu)(1+e)}{k} p$$

et la partie déviatorique de la loi devient bien, mais obligatoirement, la relation (6) de la page 61. Ne pas prendre de partie élastique déviatorique correspond à poser  $\nu = -1$ .

2 - Chemin de sollicitations oedométrique : (p. 87-88)

Il convient de rectifier la phrase "Ce ne sera pas le cas dans la suite, mais nous appliquerons la théorie de Cambridge" p. 87-88.

En effet montrons que même si l'entrée en plasticité se produit pour  $\frac{q}{p} > M$ , le chemin oedométrique peut se poursuivre dans le sens  $\frac{q}{p} \searrow$  avec passage de la courbe d'état critique. Prenons l'exemple du KAOLIN II pour lequel :  $\lambda = 0,134$ ,  $k = 0,05$ ;  $M = 0,90$ ,  $\nu = 0,0717$ .

1) Entrée en plasticité

Elle s'effectue pour :

$$\frac{q}{p} \neq \beta = 2,398 > M .$$

En ce point reprenons les formules (8) et (9) pages 88 et 89 :

$$\begin{aligned} \text{loi 2 : } & \begin{cases} dp = 1,224 & \epsilon_1 D_1 \geq 0 \\ dq = 1,975 & \epsilon_1 D_1 \geq 0 \end{cases} \\ \text{loi 1 : } & \begin{cases} dp = 1,039 & \epsilon_1 D_1 \geq 0 \\ dq = 1,536 & \epsilon_1 D_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et déterminons  $d\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{pdq - qdp}{p^2}$  .

Pour cela utilisons les formules donnant p et q à l'entrée en plasticité page 87 et on obtient :

$$\text{loi 2 } \left\{ \begin{array}{l} d\left(\frac{q}{p}\right) = - \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_i)}{p^2(1-\nu)} \times (-0,342) < 0 \end{array} \right.$$

$$\text{loi 1 } \left\{ \begin{array}{l} d\frac{q}{p} = - \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_i)}{p^2(1-\nu)} \times (-0,342) < 0 \end{array} \right.$$

l'évolution de la plasticité s'effectue donc dans le sens  $\frac{q}{p}$  vers la courbe d'état critique  $\frac{q}{p} = M$  .

2) Passage de la courbe d'état critique

$$* \frac{q}{p} = M \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \Rightarrow v^{(p)} = 0 \Rightarrow de_c = 0$$

$$\begin{aligned} * v &= v^{(e)} + v^{(p)} = v^{(e)} = \epsilon_1 \\ \epsilon &= \epsilon^{(e)} + d\mu \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{2}{3} \epsilon_1 \end{aligned}$$

$$* \quad df = \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial e_c} de_c = 0$$

$$\Rightarrow dq = 0$$

En définitive sur la courbe d'état critique on a les relations :

$$\begin{cases} dp = \varepsilon_1 D_1 \geq 0 \\ dq = 0 \end{cases}$$

$$d \left( \frac{q}{p} \right) = - \frac{pdp}{p^2} = - \frac{dp}{p} \leq 0$$

Ce résultat peut être déduit directement des formules incrémentales (9) page 89 ce qui montre qu'elles ne sont pas singulières sur la courbe d'état critique.

### 3) Asymptote oedométrique

$\left( \frac{q}{p} \right)$  décroît et tend vers  $a$  selon l'étude normale menée au chapitre 6.

