

N° d'ordre : 764

50376
1979
17

50376
1979
17

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

INFORMATIQUE THÉORIQUE

par

Bernard SUCHER

CONTRIBUTION À LA CONSTRUCTION DES TYPES D'OBJETS PAR APPROXIMATION SUCCESSIVE



0300138093

Thèse soutenue le 8 juin 1979, devant la Commission d'Examen
MEMBRES DU JURY

MM. P. BACCHUS
A. ARNOLD
G. JACOB
L. NOLIN

Président
Examineur
Examineur
Rapporteur

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M. BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CÉLET Paul	Géologie Générale
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. DECUYPER Marcel	Géométrie
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique
M. DERCOURT Michel	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOURET René	Physique du Solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M. LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M. LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M. LEBRUN André	Electronique
M. LEHMANN Daniel	Géométrie

Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M.	LOMBARD Jacques	Sociologie
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M.	MONTREUIL Jean	Biochimie
M.	PARREAU Michel	Analyse
M.	POUZET Pierre	Analyse Numérique
M.	PROUVOST Jean	Minéralogie
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M.	SEGUIER Guy	Electrotechnique
M.	TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BODARD Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des entreprises
M.	DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme	LEHMANN Josiane	Analyse
M.	LENTACKER Firmin	Géographie
M.	LOUAGE Francis	Electronique
Mlle	MARQUET Simone	Probabilités
M.	MIGEON Michel	Chimie Physique
M.	MONTTEL Marc	Physique du Solide
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	RACZY Ladislas	Electronique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	SLIWA Henri	Chimie Organique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M.	ADAM Michel	Sciences Economiques
M.	ANTOINE Philippe	Analyse
M.	BART André	Biologie Animale
M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie

M. CARREZ Christian
M. CORDONNIER Vincent
M. COQUERY Jean-Marie
Mlle DACHARRY Monique
M. DEBENEST Jean
M. DEBRABANT Pierre
M. DE PARIS Jean-Claude
M. DHAINAUT André
M. DELAUNAY Jean-Claude
M. DERIEUX Jean-Claude
M. DOUKHAN Jean-Claude
M. DUBOIS Henri
M. DYMENT Arthur
M. ESCAIG Bertrand
Mlle EVRARD Micheline
M. FONTAINE Jacques-Marie
M. FOURNET Bernard
M. FORELICH Daniel
M. GAMBLIN André
M. GOBLOT Rémi
M. GOSSELIN Gabriel
M. GRANELLE Jean-Jacques
M. GUILLAUME Henri
M. HECTOR Joseph
M. JACOB Gérard
M. JOURNEL Gérard
Mlle KOSMAN Yvette
M. KREMBEL Jean
M. LAURENT François
Mlle LEGRAND Denise
Mlle LEGRAND Solange
M. LEROY Jean-Marie
M. LEROY Yves
M. LHENAFF René
M. LOCQUENEUX Robert
M. LOUCHET Pierre
M. MACKE Bruno
M. MAHIEU Jean-Marie
Mlle N'GUYEN VAN CHI Régine
M. MAIZIERES Christian
M. MALAUSSENA Jean-Louis
M. MESSELYN Jean
M. MONTUELLE Bernard
M. NICOLE Jacques
M. PAQUET Jacques
M. PARSY Fernand
M. PECQUE Marcel
M. PERROT Pierre
M. PERTUZON Emile
M. PONSOLLE Louis
M. POVY Lucien
M. RICHARD Alain
M. ROGALSKI Marc
M. ROY Jean-Claude
M. SIMON Michel
M. SOMME Jean
Mlle SPIK Geneviève
M. STANKIEWICZ François
M. STEEN Jean-Pierre

Informatique
Informatique
Psycho-Physiologie
Géographie
Sciences Economiques
Géologie Appliquée
Mathématiques
Biologie Animale
Sciences Economiques
Microbiologie
Physique du Solide
Physique
Mécanique
Physique du Solide
Chimie Appliquée
Electronique
Biochimie
Chimie Physique
Géographie
Algèbre
Sociologie
Sciences Economiques
Sciences Economiques
Géométrie
Informatique
Physique Atomique et Moléculaire
Géométrie
Biochimie
Automatique
Algèbre
Algèbre
Chimie Appliquée
Electronique
Géographie
Physique Théorique
Sciences de l'Education
Physique
Physique Atomique et Moléculaire
Géographie
Automatique
Sciences Economiques
Physique Atomique et Moléculaire
Biologie Appliquée
Chimie Appliquée
Géologie Générale
Mécanique
Chimie Physique
Chimie Appliquée
Physiologie Animale
Chimie Physique
Automatique
Biologie
Analyse
Psycho-Physiologie
Sociologie
Géographie
Biochimie
Sciences Economiques
Informatique

M. THERY Pierre
M. TOULOTTE Jean-Marc
M. TREANTON Jean-René
M. VANDORPE Bernard
M. VILLETTE Michel
M. WALLART Francis
M. WERNIER Georges
M. WATERLOT Michel
Mme ZINN-JUSTIN Nicole

Electronique
Automatique
Sociologie
Chimie Minérale
Mécanique
Chimie
Informatique
Géologie Générale
Algèbre

Que Monsieur le Professeur Bacchus soit remercié tant pour l'honneur qu'il me fait de bien vouloir présider ce jury que pour les fructueuses discussions que j'ai eues avec lui au sujet des langages de programmation.

J'exprime ici ma reconnaissance à André Arnold. Il ne m'a ménagé ni son temps ni sa patience et a su m'insuffler la confiance qui m'a permis de mener à bien ce travail.

Je remercie Gérard Jacob qui m'a prodiguer conseils et encouragements tout au long de la réalisation de ce travail.

Je remercie Monsieur le Professeur Nolin pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail ainsi que pour sa participation à ce jury.

Que Madame Françoise Tailly qui a assuré la frappe de cette thèse,

Que Monsieur et Madame Debock qui en ont assuré l'impression, trouvent ici l'expression de mes plus sincères remerciements.

A Françoise

A mes Parents

Appliquant la théorie des treillis continus et la notion de point fixe minimal au treillis des parties d'un ensemble pour la relation d'inclusion, Scott a formulé une théorie de la sémantique des schémas de programme et une définition de la notion de type d'objet.

Dans cette approche tout sous-ensemble d'un ensemble est considéré comme une approximation de cet ensemble.

Par opposition, Nolin propose depuis plusieurs années de considérer un ensemble comme une approximation de chacun de ses sous-ensembles dans le sens que, savoir qu'un entier n est pair, c'est à dire appartient au sous-ensemble des multiples de 2, est une information sur n . Une telle notion d'approximation prend un caractère très concret dans la structure de table où un calcul d'accès à un élément de table se fait souvent par la sélection d'une suite de sous-tables.

Adoptant le point de vue de Nolin, nous considérons un recouvrement d'un ensemble comme une approximation de cet ensemble. Ainsi, par exemple, le recouvrement de $N : \{N, \text{pair}, \text{impair}\}$ est-il une approximation de N .

Dans ce travail, pour donner un sens précis à cette notion d'approximation, nous avons essayé d'utiliser la théorie des treillis complets continus ou algébriques, nous servant en particulier des résultats de L.E. Sanchis, en les appliquant à l'ensemble des familles de sous-ensembles d'un ensemble muni de la relation d'inclusion entre familles.

Nous ramenons certaines relations de pré-ordre entre familles de sous-ensembles d'un ensemble à la relation d'inclusion en considérant les familles ayant certaines propriétés de clôture finie telles que la clôture par réunion finie ou par intersection finie ou plus généralement en appliquant un nombre fini de fois une application de l'ensemble dans lui-même.

Nous avons étudié une notion d'approximation des applications d'un ensemble dans un autre, cohérente avec la précédente.

De façon plus précise, nous approchons une application h d'un ensemble E dans un ensemble F par une application $\bar{h}$ d'une famille d_E de sous-ensembles de E dans une famille d_F de sous-ensembles de F entre E et F par une famille D de sous-ensembles du produit cartésien de $E \times F$.

Les propriétés que doivent posséder $\bar{h}$ et D font apparaître deux structures d'inf-demi treillis complets pour les parties dirigées, algébriques, conditionnellement complets correspondant l'un aux approximations des applications de E dans F , l'autre aux approximations des relations binaires entre E et F .

Dans le cadre de cette dernière structure qui est un sous-ensemble du treillis complet algébrique des familles de sous-ensembles de $E \times F$, nous montrons que l'image de ce sous-ensemble par une clôture continue est encore une structure d'inf-demi treillis complet pour les parties dirigée, algébrique, conditionnellement complet.

Ce travail représente une tentative pour substituer une notion d'approximation globale à une notion d'approximation point par point et peut permettre de définir une notion de type d'objet intégrant à la fois une notion de structure algébrique et une notion d'approximation sur les ensembles support et les opérations définissant la structure algébrique. Cependant, un approfondissement théorique demeure nécessaire en particulier en ce qui concerne la relation d'ordre entre deux approximations d'une application et en ce qui concerne l'extension à la structure d'inf-demi treillis algébrique, conditionnellement complet, de certains résultats énoncés par L.E. Sanchis et par Scott pour les treillis complets algébriques.

*

* *

Le chapitre 0 est une introduction à la problématique des types d'objets.

Dans le chapitre I, nous passons en revue la notion de type d'objet dans les langages de programmation. Puis nous étudions les deux grandes approches de la notion de type d'objet :

l'approche algébrique de Goguen, Thatcher et Wagner
l'approche plus topologique de D. Scott.

Dans le chapitre II, nous étudions l'interprétation d'un ensemble de "mots-machine" par les éléments d'un ensemble et nous situons notre approche par rapport à celle de Scott et à celle de Goguen, Thatcher et Wagner.

Dans le chapitre III, nous étudions le treillis des familles de sous-ensembles d'un ensemble pour la relation d'inclusion entre famille. Nous établissons un lien entre les sous-ensembles de familles ayant certaines propriétés de clôture finie telle que la clôture par réunion ou par intersection finie et certaines relations de pré-ordre entre familles de sous-ensembles pouvant être interprétées sémantiquement comme relation d'approximation.

Dans le chapitre IV, nous étudions une notion d'approximation pour les applications d'un ensemble dans un autre et pour les relations binaires d'un ensemble dans un autre qui nous conduit à définir deux structures d'inf-demi treillis algébriques conditionnellement complet.

Dans le chapitre V, nous réexaminons l'interprétation d'un ensemble de "mots-machine" en introduisant les notions définies dans les chapitres III et IV et après les avoir mises en oeuvre sur deux exemples, nous formulons une suggestion pour la définition d'une notion de type d'objets.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE	0	INTRODUCTION	1
CHAPITRE	I	RAPPEL SUR LES TYPES D'OBJET	11
		<i>Description des types d'objet dans les langages de programmation.....</i>	13
		<i>Théorie algébrique des types d'objets.....</i>	24
		<i>Types d'objets et topologie de l'ordre.....</i>	36
CHAPITRE	II	INTERPRÉTATION D'UN ENSEMBLE DE "MOTS MACHINE"	50
CHAPITRE	III	STRUCTURE D'ORDRE SUR L'ENSEMBLE DES FAMILLES DE SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE	63
		<i>Relations d'ordre entre familles de sous-ensembles d'un ensemble.....</i>	63
		<i>Notations.....</i>	67
		<i>Treillis des familles closes par réunion finie.....</i>	68
		<i>Treillis des familles de sous-ensembles d'un ensemble pour la relation d'inclusion.....</i>	75
		<i>Application à la relation de finesse $\sqsubseteq_E$.....</i>	94
CHAPITRE	IV	STRUCTURE D'ORDRE SUR L'ENSEMBLE DES APPLICATIONS D'UNE FAMILLE DE SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE DANS UNE AUTRE : NOTION DE TABLE	101
		<i>Application d'un élément de $\mathcal{D}_E(\mathbb{U})$ dans un élément de $\mathcal{D}_F(\mathbb{U})$.....</i>	105
		<i>Interprétation d'un élément de $A(E,F)$.....</i>	136
		<i>Notion de table : structure d'ordre sur l'ensemble des tables.....</i>	140
CHAPITRE	V	EXEMPLES	165
		<i>Première construction d'un type d'objet "entier".....</i>	166
		<i>Deuxième construction d'un type d'objet "entier".....</i>	178

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Il n'est pas facile de donner une définition précise de la notion de type d'objet quoique pour un praticien de la programmation elle soit intuitivement assez claire.

Cependant les méthodologies de construction de programme ont besoin d'une telle notion et sa formalisation est indispensable à la construction de procédures automatisées de preuve, de transformation et d'optimisation de programme.

Des recherches sur la notion de type se font dans le cadre du Lambda-calcul typé d'une part et d'une théorie des "types d'objets" ou d'une théorie des "types d'objets abstraits" d'autre part. C'est dans ce dernier cadre qu'il convient de placer ce travail.

Les liens entre l'informatique et la logique, sont bien connus. Aussi une certaine notion de type est-elle indivise entre ces deux disciplines. Ainsi il est usuel, en programmation, de regrouper les objets sur lesquels se font les calculs, en *classes* à chacune desquelles on associe un *type*.

Certaines de ces classes sont *primitives*. Les autres sont formées d'objets construits à partir des objets des classes primitives.

La définition du type associé aux classes non primitives fait problème. Quel est, par exemple, le type d'un opérateur dont les opérandes données et résultat appartiennent à certaines classes ? Quel est le type d'une pile ou, en Algol 68 le type d'un ensemble de listes chaînées ?

Le Lambda-calcul typé offre un cadre pour poser et résoudre ces problèmes dont la solution conditionne la mise au point d'algorithmes de vérification de type pour les programmes écrits en langage évolué.

Il s'agit là, d'une notion de type très générale et débordant largement le cadre de la programmation puisqu'aucune hypothèse n'est formulée à propos des objets constituant les classes primitives.

En fait, les langages de programmation ont besoin de préciser la nature des caractéristiques communes aux objets d'une classe. Ce peut être un procédé de construction des objets, une représentation dans le langage, une implémentation particulière dans la mémoire d'un calculateur Or, les méthodologies de construction de programme cherchent à retarder les choix d'implémentation. Elles nécessitent de séparer la définition des propriétés logiques des objets de la définition d'une implémentation. De même pour les preuves, transformations et optimisations de programme.

Définir une telle caractérisation est le bout de la *théorie des types d'objets* que l'on qualifie parfois d'*abstrait*s pour en souligner l'indépendance vis à vis des questions d'implémentation.

De nombreux travaux ont été consacrés à la définition d'une telle caractérisation. Citons ceux de FINANCE, PAIR, REMY [18, 21] sur une *notion d'information*, ceux de MAJSTER [16] sur les *structures d'objets* et leur représentation à l'aide de graphes appropriés, ceux de GOGUEN, THATCHER et WAGNER [6] qui cherchent à caractériser un type d'objet par une *structure algébrique* et ceux de SCOTT [24, 25] qui propose une caractérisation, fondée sur une *relation d'ordre particulière* : la relation "*moins définie que*" et sur les propriétés de treillis des ensembles munis de cette relation.

De l'ensemble des recherches sur la notion de type d'objet, deux façons de poser le problème semblent émerger : l'approche plutôt topologique de Scott et celle, plutôt algébrique de Goguen, Thatcher et Wagner. Nous nous proposons, dans ce travail, de contribuer à explorer une troisième voie ouverte par les réflexions de NOLIN [18], ARNOLD et NIVAT [2] sur la notion de *point fixe maximal*. Avant de présenter cette troisième voie, résumons les approches de Scott et de Goguen, Thatcher et Wagner.

De façon très sommaire, une algèbre est une structure mathématique comportant un ensemble S d'objets : le *support de l'algèbre* et un ensemble Σ d'opérations sur S . Une telle structure correspond assez bien à l'idée intuitive qu'on peut avoir d'un type d'objet comme le type réel ou le type entier. Cependant plusieurs difficultés surgissent quand on cherche à préciser ce modèles algébriques de la notion de type d'objet.

Première difficulté : dans un langage de programmation, il existe des opérations dont les opérandes appartiennent à des ensembles différents ; soit que l'opération soit définie entre objets de types différents soit que plusieurs ensembles interviennent dans la définition du type. L'algèbre devra donc comporter non un ensemble support mais une famille d'ensembles support ce qui est réalisé dans les algèbres hétérogènes.

Seconde difficulté : les opérations ne peuvent être définies indépendamment les unes des autres. Ainsi, par exemple, les opérations "empiler" et "dépiler" sur une pile P doivent elles être définies de façon que dépiler (empiler (p, a)) = p .

Il faudra donc considérer des algèbres vérifiant un certain système de congruences sur une algèbre libre.

Troisième difficulté : comment tenir compte des différentes implémentations d'un type d'objet. A chaque procédé d'implémentation correspond une algèbre puisqu'à une implémentation correspond des ensembles support et des opérations particulières. Il est assez normal qu'entre ces algèbres

existe une relation qui peut prendre la forme d'une application respectant une structure algébrique caractéristique du type c'est à dire un *homomorphisme d'algèbre*.

On peut se demander si parmi toutes ces algèbres il n'en est pas une dont toutes les autres seraient des images homomorphes. Cette algèbre définirait un type indépendamment de toute implémentation.

Il s'agit là du soubassement intuitif de la notion de Σ -algèbre étudiée par Goguen, Thatcher et Wagner.

Plus précisément, une Σ -algèbre libre est définie par :

- S : un ensemble de "types"
- A_S : une famille d'ensembles support
chaque ensemble support est associé à un type dans S
- Σ : un ensemble de symboles d'opération .
A chaque symbole d'opération σ de Σ correspond un couple (W, s) où $W \in S^*$ et $s \in S$.
 (W, s) caractérise par W les types des opérandes-données de σ et par s le type du résultat de σ .

Les difficultés envisagées plus haut trouvent leur solution dans le cadre de cette notion de Σ -algèbre.

En particulier, il existe des Σ -algèbres solutions d'une famille finie de congruences sur une Σ -algèbre libre. De plus, dans l'ensemble de toutes les Σ -algèbres ayant même ensemble S de types et même ensemble Σ de symboles d'opération , il existe des algèbres initiales isomorphes entre elles dont toutes les autres sont des images homomorphes.

La donnée d'une de ces algèbres initiales définit un type d'objet indépendamment d'une implémentation particulière.

La relation entre la définition d'un type d'objet par une Σ -algèbre et la définition de la syntaxe d'un langage de programmation par une grammaire algébrique est assez nette. Si σ est un symbole d'opération associé au couple (w, s) nous pouvons écrire $\sigma w \rightarrow s$ au rebours de la règle de grammaire. En filigrane se trouve la possibilité de preuve de programme par un mécanisme voisin de celui de l'analyse syntaxique.

Cependant l'introduction d'opérations partiellement définies et de cas d'erreur dans une Σ -algèbre est difficile. D'autre part les langages de programmation utilisent un procédé de construction des objets par récursivité applicable par exemple à la construction des procédures mais aussi à des objets tels que les listes, mal décrit par le moyen d'une algèbre initiale. De plus, les calculs par approximation successive, fréquents en programmation particulièrement en analyse numérique, nécessitent, pour être modélisés une structure de nature topologique sur l'ensemble des objets d'un type. Une autre approche de la notion de type d'objet celle de Scott, quoique moins intuitive, peut être, tient mieux compte de cet aspect du calcul. Nous allons la résumer à présent.

L'information que l'on détient sur le résultat de l'exécution d'un programme est, de façon évidente, minimum avant l'exécution de ce programme. La valeur du résultat est indéfinie. Cette information devient maximum après l'exécution si toutefois elle se termine. Pendant l'exécution, des valeurs intermédiaires peuvent apparaître correspondant à une information partielle. Ainsi, si le résultat est un n -upple, à un moment donné du calcul, certaines composantes du n -upple peuvent être déjà calculées et d'autres pas encore. De même, si le programme calcule la table d'une fonction, par exemple $n!$ par valeurs croissantes de n , on dispose, à un instant donné du calcul, d'une table partielle finie qu'on peut considérer comme une approximation de la fonction.

Il est assez naturel d'admettre qu'un programme calcule une suite croissante d'approximations du résultat ; suite qui peut être réduite éventuellement

à deux éléments : l'indéfini et la valeur ou comme le propose Scott trois éléments, l'indéfini, la valeur cherchée et le surdéfini. Les ensembles d'objets sur lesquels calcule un programme doivent donc être muni d'une structure convenable donnant un sens précis à cette notion d'approximation.

C'est dans ce but qu'a été introduite la notion de *Domaine de calcul*.

Il existe plusieurs définitions légèrement différentes de cette structure.

Il s'agit fondamentalement d'une structure d'ordre partiel complet avec un élément minimum mais Scott utilise une structure plus restrictive : celle de treillis complet injectif avec un élément minimum et un élément maximum.

Dans un domaine toute suite croissante converge vers une limite qui est sa borne supérieure.

Parmi les applications d'un domaine D dans un autre D' celles qui préservent les limites et que nous qualifierons de "continues" possèdent des propriétés remarquables.

En effet l'ensemble des applications continues de D dans D' est lui-même un domaine pour la relation d'ordre définie par $f \sqsubseteq g$ si $f(x) \sqsubseteq g(x) \forall x \in D$

Si $D = D'$ alors une application continue de D dans lui-même possède un plus petit point fixe qui est la limite de la suite $(f^n(1))_n$ où 1 est l'élément minimum de D .

L'équation $X = f(X)$ possède ainsi une plus petite solution et l'on dispose d'un procédé pour en calculer des approximations.

Les types d'objets usuels peuvent être muni assez simplement d'une structure de domaine. Ainsi pour les listes, la relation d'ordre peut être celle des

sous-liste initiale avec comme élément minimum la liste vide.

Pour N : l'ensemble des entiers, on introduit un élément noté $\perp$: l'*indéfini* et on pose $\perp \sqsubseteq n \forall n \in N \cup \perp$ ou bien comme le propose Scott, un élément maximum noté $\top$: le *surdéfini* et l'on pose

$$\perp \sqsubseteq n \sqsubseteq T \quad \forall n \in N \cup \perp \cup T$$

Dans sa thèse "Syntaxe, sémantique et axiomatique d'un langage de programmation simple", Vuillemin a montré l'intérêt de cette démarche qui permet, par exemple, de définir des procédures par des équations fonctionnelles au point fixe.

Dans un treillis D , complet et injectif tel que les utilise Scott, certains sous-ensembles de D ont encore une structure de treillis complet injectif

De tels sous-ensembles sont constitués par les points fixes d'une application continue f de D dans lui-même vérifiant en outre $f \circ f = f$ c'est à dire un retract. Ce sont de tels sous-ensembles que Scott considère comme types d'objets.

Scott [24] a montré comment on pourrait construire un type d'objet par approximation successive, comme solution d'une équation de domaines.

Lehmann [12,13] a donné de cette approche du problème des types d'objets une version dans le cadre de la théorie des catégories.

Une application très significative de ces notions peut être trouvée dans l'article de Scott "Data-types as Lattices" [25] où elles sont appliquées à l'étude de la structure de PN : l'ensemble des parties de N .

PN a une structure de treillis complet injectif pour la relation d'inclusion entre sous-ensembles. L'ensemble vide $\emptyset$ est l'élément minimum de ce treillis. N en est l'élément maximum.

Cette structure généralise celle proposée plus haut pour N car

$$\emptyset \subseteq \{n\} \subseteq N \quad \forall n \in N$$

Scott introduit deux numérotations ν et η . ν est une numérotation des couples d'entiers et η est une numérotation des sous-ensembles finis et d'entier. Ces deux numérotations permettant d'associer à toute application continue de PN dans PN un sous-ensemble de N : son graphe.

A toute application continue f de PN dans PN $\text{Gr}(f)$ associe un sous-ensemble u de N. Inversement, à tout sous-ensemble u de N correspond une application de PN dans PN : $F_t(u)$

$$F_t(G_r(f)) = f \text{ et } u \subseteq G_r(F_t(u))$$

En fait, si u est le graphe d'une fonction continue

$$u = G_r(F_t(u))$$

Il existe donc une application $F = G_r \circ F_t$ de PN dans PN telle que $u = F(u)$ si u est le graphe d'une fonction continue.

Plus généralement, tout type d'objet sur N sera constitué par l'ensemble des points fixes d'une application de PN dans PN.

Scott, d'une certaine manière, introduit en informatique, les objets infinis, résultats de calculs eux-mêmes infinis. Les applications de N dans N , les réels calculables, les sous-ensembles de N sont de bons exemples de tels objets infinis qui ne sont manipulables par un calculateur que parce qu'ils sont la limite d'une suite croissante d'approximations finies.

Ainsi, un sous-ensemble S de N est la limite d'une suite croissante de sous-ensembles de cardinalité finie contenus dans S . De même le nombre π est la limite de la suite 3, 3.1, 3.14, 3.141, Les éléments de cette suite sont représentatifs des rationnels $\frac{3}{1}, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \dots$

Entre l'ensemble M_R des représentations de réels dans un calculateur et l'ensemble $\mathbb{R}$ existe un couple d'applications (f, g)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow M_R \quad g : M_R \rightarrow \mathbb{R}$$

f est évidemment surjective.

Si le calculateur permet de représenter des réels avec quatre chiffres significatifs, tous les réels dont le développement décimal commence par 3.141 vont avoir la même représentation. Usuellement, pour définir la fonction g , on choisit un de ces réels ; par exemple ici $\frac{3141}{1000}$. Mais il est aussi logique d'accepter que g soit une fonction multivoque. Le segment de $\mathbb{R} : [3.141, 3.142[$ est alors une approximation de π .

Plus généralement, nous considérons un sous-ensemble comme une approximation de chacun de ses éléments. Un élément d'un ensemble est alors considéré comme la limite d'une suite de sous-ensembles emboîtés ou plus généralement la limite d'une base de filtre.

L'introduction, en informatique d'une telle idée est due à Nolin [18] qui l'a utilisée dans une théorie des algorithmes. Arnold et Nivat [2] l'ont particulièrement développée dans l'étude de la sémantique de schémas de programme non-déterministes.

La fonction multivoque $g : M_R \rightarrow \mathbb{R}$, donnée en exemple ci-dessus définit une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui est en principe un recouvrement de $\mathbb{R}$. La structure algébrique induite sur M_R par les opérateurs algébriques du calculateur n'est pas homomorphe à la structure de corps usuelle de $\mathbb{R}$. mais à une structure algébrique sur le recouvrement $g(M_R)$, structure que nous pouvons considérer comme "approchant" la structure de corps des réels. A partir d'un recouvrement plus fin, cette structure pourra être mieux approchée.

Il est possible de préciser cette notion d'approximation en introduisant une relation de pré-ordre entre les familles de sous-ensembles d'un ensemble.

Soit d_1 et d_2 deux familles de sous-ensembles d'un ensemble E .

Nous poserons

$$d_1 \sqsubseteq d_2 \quad \text{si} \\ \forall s \in d_1, \exists \sigma \in d_2 \text{ tel que } \cup \sigma = s \\ \text{avec Card}(\sigma) \text{ finie}$$

Cette relation de pré-ordre se trouve être une relation d'ordre sur certains sous-ensembles de familles qui vérifient certaines propriétés de clôture ; par exemple la clôture par réunion finie. Il s'agit même alors d'un ordre partiel algébrique ce qui rend possible l'utilisation des résultats de Sanchis [22].

L'étude du problème de l'approximation d'une application d'un ensemble E dans un ensemble F et de l'approximation d'une relation binaire entre E et F conduit à définir deux structures d'inf-demi treillis, complets pour les parties dirigées, algébriques, conditionnellement complets.

Il est alors possible d'envisager la caractérisation d'un type d'objet par une double structure d'approximation, d'une part, d'algèbre d'autre part, ce que nous montrerons en conclusion sur deux exemples.

Pour un praticien, dans un langage de programmation, un type d'objet exprime une certaine information sur les propriétés des objets appartenant à une certaine classe et sur la structure d'ensemble de cette classe. Les travaux sur la notion de type d'objet s'efforcent, par différentes voies, de formaliser la description de cette information. Ces travaux doivent tenir compte des réalisations pratiques en matière de descriptions de type telles qu'on peut les trouver dans les langages de programmation opérationnels ou expérimentaux. Nous présenterons donc les types d'objet dans les langages de programmation essentiellement à partir du système des modes en Algol 68 avant de donner la définition d'un type d'objet par une algèbre initiale et par une structure de treillis complet. Ces deux définitions nécessitent, au préalable, l'exposé d'un formalisme mathématique avant de pouvoir être formulées de façon précise.

*
* *
*

LA DESCRIPTION DES TYPES D'OBJET

DANS

LES LANGAGES DE PROGRAMMATION

Les langages de programmation évolués proposent, en général, deux procédés pour créer un type d'objet :

- * la caractérisation explicite par une unité syntaxique convenable du langage
- * la description implicite par l'intermédiaire de la structure d'imbrication des constructions du langage

La combinaison des deux procédés conduit aux descriptions de types récursifs.

Le premier de ces deux procédés correspond à la définition d'un type par une *déclaration de mode* qui peut être éventuellement implicite comme en Fortran.

Les objets d'une classe sont alors caractérisés par une unité syntaxique commune : leur *mode* qui fixe :

- * comment sont construits les objets de la classe et en particulier un procédé syntaxique qui permet de décider si un objet appartient ou non à la classe
- * les règles à respecter lors de l'utilisation des objets dans un calcul, c'est à dire essentiellement un ensemble d'opérations sur les objets de la classe.

Le problème qui se pose alors est de disposer d'un nombre suffisant de modes tout en conservant une description syntaxique finie du langage.

Les langages les plus anciens : ALGOL 60, FORTRAN, n'avaient qu'un nombre restreint de modes déterminés à la conception du langage et sans possibilité d'extension. Dans les langages plus récents tels qu'ALGOL 68 ou PASCAL, il est possible de construire une infinité de modes en combinant des modes élémentaires pré-définis à l'aide de *constructeurs de mode*, suivant un procédé dont l'origine est due à Hoare [9] et Standish [27]. Nous décrivons ici ce procédé dans le cas d'Algol 68.

La définition formelle des modes en Algol 68 est une part du "Revised Report on the Algorithmique language Algol 68" [32]. On en trouvera une description moins formelle dans le "Manuel du langage algorithmique Algol 68" [17] ou dans KO [11]. Nous n'en retiendrons ici que ce qui concerne la définition des types d'objet .

Algol 68 permet de manipuler des objets qui sont :

- * des objets internes comme les repères qui ont une *valeur* mais pas de notation dans les programmes
- * des objets dont la valeur est obtenue par l'élaboration d'une notation comme les entiers ou les réels ou par l'élaboration d'une construction comme les tableaux

Le mode d'un objet est une production terminale de la méta-notion MODE. C'est un attribut syntaxique de l'objet. Ainsi un mode définit-il une classe d'objets : la classe des objets ayant ce mode pour attribut. Encore faut-il que les propriétés des objets de cette classe présentent un intérêt pour le programmeur. A cette fin, Algol 68 propose quatre modes élémentaires pré-définis : Ent, Réel, Bool, Car dont les objets appartiennent à des ensembles d'objets directement manipulables par le calculateur.

Chaque mode élémentaire m précise :

- * un langage L_m sur un alphabet A_m dont les mots sont les "notations" des objets du mode
- * un ensemble d'opérations donnant à la classe des objets du mode une certaine structure mathématique
- * une interprétation "privilégiée" des objets de mode m dans un ensemble d'objets "abstraites". Ainsi l'interprétation des objets de mode Ent se fait-elle dans l'ensemble des entiers muni de la structure usuelle d'anneau euclidien.

Cinq constructeurs de mode : $[]$, Struct, Proc, Rep, Union, permettent de construire une infinité de modes à partir des modes élémentaires.

Soit p : un entier, M_p une liste de modes : $m_1, m_2, \dots, m_p$ et m un mode.

$[]$ et Struct correspondent au produit cartésien de classes, Proc, aux applications d'un produit cartésien de classes dans une classe, Union, à la réunion d'un nombre fini de classes. Rep est associé à une classe de flèches pointant sur des objets.

$[]$ et Struct construisent des modes dont les objets sont des p -uples d'objets, de même mode pour $[]$, de modes éventuellement différents

pour Struct. Ainsi un p-uple d'objets de mode m est de mode $[]_m$ et un p-upple ordonné d'objets de modes respectivement $m_1, m_2, \dots, m_p$ est de mode Struct (M_p). Il existe une possibilité de construire les objets de mode construits par $[]$ et Struct. De tels objets se notent $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ où $n_1, n_2, \dots, n_p$ sont des constructions de modes convenablement choisis.

Des opérations sont associées à $[]$. C'est la mise en rang qui permet de construire un objet du mode et les tranchages dont le plus simple est la projection sur la $i^{\text{ème}}$ composante du produit. A Struct, sont associées $p+1$ opérations qui sont la *mise en rang* et P *selections*: les P projections sur les composantes du produit.

Proc permet de construire des modes dont les objets sont des routines.

Proc (M_p) _{m} est le mode des routines dont les paramètres sont de mode $m_1, m_2, \dots, m_p$ et le mode du résultat : m . Une opération est associée à Proc : l'*appel* qui exécute la routine en l'appliquant à ses paramètres.

Si la routine n'a pas de paramètre, on appelle cette opération le

déprocédurage

Union (M_p) est le mode de la réunion des classes de modes $m_1, m_2, \dots, m_p$. Union est associé à une opération *Unir* qui permet de construire un objet du mode. Un objet du mode Union (M_p) est : soit du mode m_1 , soit du mode m_2 ... soit du mode m_p mais il n'a qu'un seul de ces modes à la fois. L'intérêt de ce constructeur est de permettre de définir des procédures dont chaque paramètre peut être de plusieurs modes en formant ainsi des *fonctions génériques*.

Rep m est le mode d'une classe d'objets qui sont des flèches pointant sur les objets de mode m . Rep est associé à deux opérations : le *dérepérage* qui permet d'obtenir l'objet pointé par une flèche si on dispose de la flèche et l'*affectation* qui permet, si l'on dispose d'une flèche et d'un objet de mode m , de faire pointer la flèche sur l'objet.

Les modes élémentaires et les constructeurs de mode ont été choisis de façon à fournir des classes d'objets correspondant à celles les plus couramment utilisées par le programmeur et à permettre de construire les autres. Cependant il n'est pas possible de construire des modes permettant de typer toutes les classes d'objets souhaitables et d'autres voies ont été explorées.

Il est, en effet, possible de construire implicitement un type d'objet en utilisant la structure d'imbrication des constructions du langage et les mécanismes de portée qui s'y rattachent. Ce procédé a été rationalisé grâce à des notions telles que celles de *Prolator*, de *Classe*, de *Cluster*, de *Form*.

Très souvent, une construction d'un langage peut contenir des déclarations et d'autres constructions. Une procédure, par exemple, peut contenir des déclarations d'autres procédures. La construction externe constitue un environnement pour les constructions internes. Il en résulte qu'une opération sur des objets peut exister dans un environnement et non dans un autre. Il faut donc prendre en considération non seulement un type d'objet tel qu'il peut être défini par une déclaration mais les transformations qu'il peut subir du fait de son environnement. Plonger un ensemble d'objets dans un certain environnement définit implicitement un type d'objet. Cela peut permettre de séparer la donnée d'un ensemble d'objets de la donnée d'une structure mathématique pour cet ensemble, confiée à un environnement. D'où l'intérêt dans cette perspective de disposer des définitions abstraites de types. Les langages existant permettent de façon plus ou moins libérale, des opérations d'inclusion, d'intersection, de réunion sur les environnements et dans les manipulations correspondantes sur les types d'objets. Notons que la réunion évoquée ici n'a rien à voir avec le constructeur Union dont nous avons parlé précédemment.

Inversement, une construction interne peut avoir certaines propriétés qui ne seront pas accessibles à son environnement. Ainsi, la structure interne d'une procédure est cachée pour le programme appelant cette procédure. Des constructions spécifiques ont été proposées pour exploiter cette possibilité. Citons la notion de *Prolator* [30], celle de *Classe* [5] dans le langage Simula, celle de *Form* [33] dans le langage Alphard et celle de *Cluster* dans le langage CLU [14]. Nous décrivons ici la notion de cluster.

Un cluster comprend deux parties :

- * un *en-tête* dont les éléments sont accessibles à l'environnement
- * un *corps* dont la structure est cachée à l'environnement.

L'*en-tête* d'un cluster contient une liste d'identificateurs des procédures correspondant aux opérations caractéristiques d'un type d'objet.

Le corps d'un cluster décrit la manière dont sont représentés les objets du type à l'aide d'objets plus élémentaires et contient la définition des procédures opérant sur les objets.

Considérons par exemple la définition du type d'objet "*ensemble d'entiers*" caractérisé par un ensemble d'opérations :

créer	:	créer une liste vide
insérer	:	ajouter un entier à un ensemble
retirer	:	enlever un entier à un ensemble
contient	:	teste l'appartenance d'un entier à un ensemble
égal	:	teste l'identité des deux ensembles
semblable	:	teste si deux ensembles contiennent les même entiers
copie	:	recopier un ensemble

Le cluster correspondant sera :

```

en-tête      [      Intset = Cluster is créer, insérer, retirer, contient, égal,
                                     semblable, copie ;

corps         [      Resp = Array int

                                     créer =

                                     insérer =

                                     :
                                     :
                                     :

      end intset

```

Le type Intset est représenté par l'intermédiaire de tableaux d'entiers mais la structure interne d'un objet du type n'est pas accessible à l'utilisation sauf à l'intérieur du Cluster.

A l'extérieur du cluster, le type est entièrement définie par un ensemble d'opérations caractéristiques.

Une dernière façon de définir un objet est de faire appel aux déclaration de modes récursifs suivant un procédé initialement proposé par Mac Carthy [15].

La définition recursive des procédures est bien connue ; ALGOL 60 en disposait déjà ; mais en Algol 68 ou en Pascal par exemple il est possible de déclarer des modes résursifs.

Ces modes doivent permettre de manipuler des objets tels que listes, arbres et plus généralement plexes. Ces déclarations posent quelques problèmes qui sont résolus de façon empirique dans les langages de programmation.

Considérons, par exemple, la déclaration de mode Algol 68 suivante

Mode m = Struct (Ent a, Rep m b)

On peut se demander quel est le mode m ainsi déclaré et quels sont les objets ayant ce mode pour attribut.

Il s'agit évidemment de construire des objets ayant la structure de liste chaînée.

Les objets de mode m sont des couples dont la seconde composante est un repère. Or les repères sont des "valeurs" sans notation dans le langage, n'ayant d'existence qui pendant l'exécution d'un calcul et purement internes aux calculateurs. Les calculateurs et leur mémoire étant finis, les repères ne peuvent être que des objets finis dont on sait qu'ils sont assimilables à des adresses-mémoire. Il en découle que les objets de mode m sont aussi des objets finis. Il est assez facile de déterminer a priori l'encombrement mémoire d'un objet de mode m et donc de construire un opérateur qui délivre, à la demande une adresse mémoire où ranger un objet de mode m : c'est le "*générateur de repères de mode m*".

Dans ces conditions, les objets de mode m sont tous les couples dont la première composante est un entier et la seconde, un des repères, en nombre fini que peut délivrer le générateur de repères. L'analyse syntaxique et la compilation ne posent aucune difficulté mais s'il est possible de former avec des objets de mode m des listes et des listes circulaires, ces listes ne sont pas des objets de mode m.

Bien qu'on puisse construire des listes chaînées en Algol 68, ces listes n'ont pas de mode dans ce langage.

Une autre approche consiste à considérer la déclaration

Mode m = Struct (Ent a, Resp m b)

comme une équation au point fixe dans l'ensemble des modes. La résolution de cette équation, comme celle d'une équation correspondant à une déclaration de procédure récursive, pose un problème. Par contre il est possible d'envisager, d'après les travaux de Scott, la résolution de l'équation de types d'objet correspondante. Une telle équation peut être traduite en une équation de domaines. Scott et Lehmann proposent des procédés de résolution de telles équations.

Nous pouvons tirer de cette rapide revue de la notion de type d'objet dans les langages de programmation, un certain nombre de conclusions.

Remarquons d'abord qu'un cluster peut être paramétrisé de façon à en faire l'équivalent d'un constructeur de mode. Ainsi le cluster Intset peut être paramétrisé pour être transformé en le constructeur de mode anythingset. Cette transformation est liée à la notion de *type générique* étudiée par D. Bert et P. Jacquet [3].

Réciproquement comme nous l'avons dit, le type d'objet associé à un mode comporte la donnée d'ensembles d'objets et d'opérations sur ces objets.

Remarquons ensuite l'importance du rôle joué par la donnée d'une structure d'algèbre dans toutes ces définitions de type d'objet.

Enfin, des insuffisances peuvent être relevées dans les possibilités offertes par les langages de programmation et des critiques peuvent être faites à propos des mécanismes de définitions de types d'objet présentés ci-dessus.

En ce qui concerne la définition d'un type d'objet par l'intermédiaire d'un mode, le problème est celui du choix des modes élémentaires et des constructeurs de mode. Ce choix a été fait en Algol 68 ou en Pascal de manière à ouvrir le plus large éventail de possibilités mais il n'est cependant pas complètement satisfaisant.

Considérons, par exemple, en Algol 68, le mode déclaré $[1:p, 1:p]$ réel : ce mode est associé à l'ensemble des tableaux carrés de réel, de dimensions p .

Supposons que l'on veuille définir le type d'objet Matrice carrée de dimension p avec des opérations telles que somme, produit et puissance de matrices, inversion et calcul du vecteur propre.

En négligeant les problèmes d'algorithmique numérique posés par la définition de ces opérations, il est possible, en Algol 68 de construire les procédures correspondant à ces opérations et d'ajouter ces procédures à un environnement de la déclaration du mode $[1:p, 1:p]$ réel.

Cependant, ce que l'on construit ainsi n'est pas le type d'objet Matrice carrée de dimension p mais un type plus riche réunissant les propriétés des objets du type précédent avec celles des objets du type $[1:p, 1:p]$ réel car on ne peut cacher la structure interne des objets de type Matrice carrée. Cette difficulté se retrouve chaque fois qu'un type d'objet ne correspond pas exactement à un mode tel qu'il peut être déclaré dans le langage.

La notion de Cluster permet évidemment d'éliminer cette difficulté cependant deux autres problèmes apparaissent. En effet, d'une part il n'est pas possible de "paramétriser" l'implémentation des objets d'un type qui se trouve fixée définitivement dans le Cluster. Or les méthodologies de construction de programme demandent une telle paramétrisation.

D'autre part, supposons qu'on cherche à définir une procédure ayant deux paramètres ; ces paramètres étant de deux types différents définis chacun par un Cluster. Supposons, en outre que cette procédure doive faire appel à la structure interne des objets de ces deux types. On ne peut déclarer cette procédure à l'extérieur des Cluster car alors elles ne pourraient avoir

accès à la structure interne des objets. Mais alors, dans quel Cluster placer la déclaration de cette procédure. C'est un problème qui n'a pas de solution entièrement satisfaisante et qu'on retrouve de façon encore plus critique avec la notion de Classe en Simula.

Enfin, en ce qui concerne les définitions récursives nous avons déjà montré, par l'exemple de la déclaration de mode

Mode m = Struct (ent a, Rep m b)

que ce mode était associé à des couples d'objets et non aux listes chaînées qu'il est possible de construire mais qui ne sont pas décrite par un type d'objet ; situation fâcheuse qui oblige à analyser l'exécution du programme pour savoir quels objets sont construits.

De nombreux travaux sont consacrés à la résolution de ces difficultés. Nous présentons, dans la suite, deux formalisations de la notion de type d'objet, formalisations caractéristiques des démarches de recherches actuelles. Ces deux formalisations nécessitent quelques rappels mathématiques avant de déboucher sur une définition de la notion de type d'objet. Nous présentons d'abord la formalisation par l'intermédiaire de la notion d'algèbre initiale.

THÉORIE ALGÈBRIQUE DES TYPES D'OBJETS

RAPPELS SUR LES ALGÈBRES TYPÉES INITIALES DÉFINITION D'UNE ALGÈBRE TYPÉE INITIALE

Intuitivement, une algèbre typée initiale A est constituée par un ensemble S de types, par une famille A_S d'ensembles : les ensembles support de l'algèbre et par un ensemble d'opérations sur les éléments des ensembles support.

Ainsi une algèbre typée peut être constituée par :

l'ensemble S de types : $\{\underline{\text{bool}}, \underline{\text{ent}}\}$

la famille d'ensembles support $A_S = \{A_{\underline{\text{ent}}}, A_{\underline{\text{bool}}}\}$

l'ensemble d'opérations $\{\text{succ}, <, =\}$

$$\begin{aligned} \text{succ} &: A_{\underline{\text{ent}}} \rightarrow A_{\underline{\text{ent}}} \\ = &: A_{\underline{\text{ent}}} \times A_{\underline{\text{ent}}} \rightarrow A_{\underline{\text{bool}}} \\ < &: A_{\underline{\text{ent}}} \times A_{\underline{\text{ent}}} \rightarrow A_{\underline{\text{bool}}} \end{aligned}$$

Définition 1. Un domaine Σ d'opérateurs typé par S est une famille d'ensembles $\Sigma_{w,s}$ où s appartient à un ensemble S de types et w appartient à S^* .

□

Un élément F de $\Sigma_{w,s}$ est un *symbole d'opération d'arité w,s de rang w et de type s* .

Soit S un ensemble de types et Σ un domaine d'opérateurs typé par S .

Définition 2. Une Σ -algèbre A où Σ est un domaine d'opérateurs typé par S consiste en

- un ensemble S de types
- une famille $A_S = \{A_s / s \in S\}$ d'ensembles support
- un ensemble de fonctions

$$\{\sigma_A : A_{s_1} \times A_{s_2} \times \dots \times A_{s_n} \rightarrow A_s / \sigma \in \Sigma_{w,s},$$

$$w = s_1 s_2 \dots s_n \text{ et } \Sigma_{w,s} \in \Sigma\}$$

□

σ_A est l'opération de A nommée σ .

Si $W = \wedge$ (la chaîne vide) et $\sigma \in \Sigma_{\wedge,s}$ on a $\sigma_A \in A_s$.

$\Sigma_{\wedge,s}$ est l'ensemble des constantes de type s .

Définition 3. Un Σ -homomorphisme $h : A \rightarrow B$ où A et B sont deux Σ -algèbres ayant même domaine d'opérateurs Σ , est une famille de fonctions $\langle h_s : A_s \rightarrow B_s \rangle_{s \in S}$ qui préserve les opérations c'est à dire qui satisfait à :

- si $\sigma \in \Sigma_{\Lambda, S}$ alors $h_S(\sigma_A) = \sigma_B$
- si $\sigma \in \Sigma_{s_1 s_2 \dots s_n, S}$ et $\langle a_1, a_2 \dots a_n \rangle \in A_{s_1} \times A_{s_2} \dots \times A_{s_n}$
 alors $h_S(\sigma_A(a_1, a_2 \dots a_n)) = \sigma_B(h_{s_1}(a_1), h_{s_2}(a_2), \dots, h_{s_n}(a_n))$

□

Une famille $\underline{\mathcal{C}}$ de Σ -algèbre consiste en :

- une classe $|\underline{\mathcal{C}}|$ de Σ -algèbres, ayant même domaine Σ d'opérateurs
- de tous les Σ -homomorphismes entre objets de $|\underline{\mathcal{C}}|$

Définition 4. Une algèbre A est initiale dans une famille $\underline{\mathcal{C}}$ de Σ -algèbres si et seulement si pour chaque algèbre B de $\underline{\mathcal{C}}$ il existe un Σ -homomorphisme unique $h : A \rightarrow B$

□

Proposition 1. Si les algèbres A et A' sont toutes deux initiales dans une famille $\underline{\mathcal{C}}$ alors A et A' sont isomorphes.
 Si une algèbre A' est isomorphe à une algèbre A initiale dans une famille $\underline{\mathcal{C}}$ alors A' est initiale.

□

CONSTRUCTION D'UNE ALGÈBRE INITIALE DANS UNE FAMILLE DE Σ -ALGÈBRES

Σ -ALGÈBRE DE MOTS

Soit Σ un domaine d'opérateurs typé par S .

L'algèbre de mots qu'il s'agit de construire a pour ensemble-support les ensembles d'expressions "bien formées" construites avec les opérations de Σ .

Appelons, par extension, Σ l'ensemble de tous les symboles d'opérations du domaine d'opérateurs Σ c'est à dire $\bigcup_{w \in S^*, s \in S} \Sigma_{w,s}$.

Soit $\langle T_{\Sigma,s} \rangle_{s \in S}$ la plus petite famille d'ensembles de chaînes contenues dans $(\Sigma \cup \{(_,_)\})^*$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- $\Sigma_{\Lambda,s} \subseteq T_{\Sigma,s}$
- si $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ $w = s_1 s_2 \dots s_n$ et $t_i \in T_{\Sigma,s_i}$ alors

$$\sigma(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_n) \in T_{\Sigma,s}$$

Théorème 1. T_Σ est une algèbre initiale dans la famille $\underline{ALG}_\Sigma$ de toutes les Σ -algèbres de domaine d'opérateurs Σ typé par S .

□

Variables dans une Σ -algèbre.

L'introduction de variables dans une Σ -algèbre est indispensable pour pouvoir écrire des congruences sur une Σ -algèbre libre.

Soit S un ensemble de types.

Soit $X = \langle X_s \rangle_{s \in S}$ ou $X_s = \{x_{s,n} / n \in \mathbb{N}\}$

X_s est un ensemble "inexhaustible" de variables de type s .

Soit une famille Y typée par S $Y = \langle Y_s \rangle_{s \in S}$ telle que $Y_s \subseteq X_s \ \forall s \in S$.

Soit Σ un domaine d'opérateurs typé par S et $\Sigma(y)$ un domaine d'opérateurs obtenu en rajoutant les éléments de Y_s à Σ

$$\Sigma_{\Lambda, s}(Y) = (\Sigma_{\Lambda, s}) \cup Y_s$$

$$\Sigma_{w, s}(Y) = \Sigma_{w, s} \quad w \neq \Lambda$$

Soit $\Sigma(X)$ construit comme ci-dessus, en remplaçant Y par X et $T_{\Sigma(X)}$.

Soit $t \in T_{\Sigma(X)}$.

Appelons $\text{Var}(t)$ l'ensemble des symboles de variable typés par S qui ont une occurrence dans t

$$Y = \text{Var}(t) \Rightarrow t \in T_{\Sigma(Y)}$$

Définition 5. $T_{\Sigma(Y)}$ la Σ -algèbre constituée par

- la famille d'ensembles support de $T_{\Sigma(Y)}$
- le domaine d'opérateurs constitué par Σ

est la Σ -algèbre librement engendrée par Y

□

Définition 6. Pour toute Σ -algèbre A typée par S et toute famille $Y \subseteq X$ typée par S , une affectation de valeurs de type s de A aux variables de type s de Y , est une application $\theta : Y \rightarrow A$

$$\theta = \langle \theta_s : Y_s \rightarrow A_s \rangle_{s \in S}$$

Proposition 2. Soit A une Σ -algèbre et $\theta : Y \rightarrow A$ une affectation, alors il existe un Σ -homomorphisme unique $\bar{\theta} : T_{\Sigma}(Y) \rightarrow A$ qui étend θ dans le sens que $\bar{\theta}_s(x) = \theta_s(x) \quad \forall s \in S \text{ et } x \in Y_s$.

□

Σ -algèbre vérifiant un ensemble d'équation. Σ -congruences

Définition 7. Une Σ -équation e est une paire $\langle L, R \rangle$ pour laquelle $\exists s \in S$ tel que $L, R \in T_{\Sigma}(X)_s$.

□

Définition 8. Soit $\text{Var}(e) = \text{Var}(L) \cup \text{Var}(R)$

Une Σ -algèbre vérifie e si et seulement si :

$$\forall \text{ l'affectation } \theta : Y \rightarrow A \text{ où } Y = \text{Var}(e), \bar{\theta}(L) = \bar{\theta}(R)$$

Si ϵ est un ensemble de Σ -équations alors A vérifie ϵ si et seulement si A vérifie $e \forall e \in \epsilon$

ϵ est une Σ -présentation.

Toute Σ -algèbre vérifiant ϵ est une (Σ, ϵ) algèbre.

La famille des (Σ, ϵ) algèbres est notée $\underline{\text{ALG}}_{\Sigma, \epsilon}$.

□

$\underline{\text{ALG}}_{\Sigma, \epsilon}$ possède un objet initial $T_{\Sigma, \epsilon}$ vérifiant ϵ dont la construction est basée sur la notion de Σ -congruence.

Définition 9. Une Σ -congruence $\equiv$ sur une Σ -algèbre est une famille

$\langle \equiv_s \rangle_{s \in S}$ de relations d'équivalence sur A_s telles que si

$\sigma \in \Sigma_{s_1 s_2 \dots s_n, s}$, si $a_i, a'_i \in A_{s_i}$, si $a_i \equiv_{s_i} a'_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

alors $\sigma_A(a_1, \dots, a_n) \equiv \sigma_A(a'_1, \dots, a'_n)$

□

Si A est une Σ -algèbre et $\equiv$ une Σ -congruence, il est possible de construire une Σ -algèbre quotient.

Soit $(A/\equiv)_s = A_s / \equiv_s$ l'ensemble des classes d'équivalence de A_s pour $\equiv_s$.

Soit, pour $a \in A_s$ $[a]$ la classe d'équivalence contenant a .

Considérons l'ensemble d'opérations $\sigma_{A/\equiv}$ défini par :

- si $\sigma \in \Sigma_{\wedge, S}$ alors $\sigma_{A/\equiv} = [\sigma_A]$
- si $\sigma \in \Sigma_{w, S}$ et $[a_i] \in (A/\equiv)_S$ alors
 $\sigma_{A/\equiv}([a_1], \dots, [a_n]) = [\sigma_A(a_1, \dots, a_n)]$

$A/\equiv$ constituée par la famille d'ensembles support $\langle A_s/\equiv_s \rangle_{s \in S}$ et les opérations décrites ci-dessus, est une Σ -algèbre, quotient de A par $\equiv$.

Proposition 3. Soit A une Σ -algèbre et R une relation sur A alors il existe une Σ -congruence minimale sur A , contenant R c'est la Σ -congruence engendrée par R sur A .

□

Théorème 2. Soit ϵ une Σ -présentation et $\equiv_\epsilon$ la Σ -congruence sur T_Σ engendrée par $\epsilon(T_\Sigma)$ alors $T_\Sigma/\equiv_\Sigma$, le quotient de T_Σ par $\equiv_\Sigma$, noté $T_{\Sigma, \epsilon}$, est l'algèbre initiale dans la famille $\underline{\text{ALG}}_{\Sigma, \epsilon}$ de toutes les Σ -algèbres vérifiant ϵ .

□

Nous pouvons, à présent donner une définition d'un type d'objet.

Un type d'objet est la classe d'isomorphisme
des algèbres initiales d'une famille de Σ -algèbres.

Application à la définition d'un type d'objet : le type "Pile d'entiers

Soit $S = \{\underline{Pile}, \underline{Ent}, \underline{Bool}\}$ un ensemble de types dont les éléments vont servir à désigner les ensembles support de l'algèbre.

Cet ensemble de supports est $A_S = \{A_{\underline{Pile}}, A_{\underline{Ent}}, A_{\underline{Bool}}\}$.

Prenons comme domaine d'opérateur

$$\Sigma = \{\{\text{Vide}\}, \{\text{Empiler}\}, \{\text{Dépiler}\}, \{\text{Sommet}\}\}$$

où Vide par exemple est un *symbole d'opération d'arité pile, bool, de rang pile et de type bool*

$$\Sigma_{\underline{pile}, \underline{bool}} = \{\text{vide}\}$$

De même $\Sigma_{\underline{pile}, \underline{Ent}, \underline{pile}} = \{\text{Empiler}\}$

$$\Sigma_{\underline{pile}, \underline{pile}} = \{\text{dépiler}\}$$

$$\Sigma_{\underline{pile}, \underline{Ent}} = \{\text{Sommet}\}$$

Cela signifie que Empiler, par exemple, dénomme une opération définie sur $A_{\underline{pile}} \times A_{\underline{Ent}}$, a valeur dans $A_{\underline{pile}}$.

Un certain arbitraire est possible dans le choix des ensembles $A_{\underline{pile}}$, $A_{\underline{Ent}}$, $A_{\underline{bool}}$ et des opérations dénommées par Vide, Empiler, Dépiler, Sommet. Cependant toutes les algèbres résultant des différents choix doivent être homomorphes. C'est à dire que entre deux algèbres A et A' typées par S et ayant Σ pour domaine d'opérateurs doit exister trois applications :

$$\begin{aligned} h_{\underline{pile}}, h_{\underline{Ent}}, h_{\underline{Bool}} \text{ telles que } h_{\underline{pile}} : A_{\underline{pile}} &\rightarrow A'_{\underline{pile}} \\ h_{\underline{Ent}} : A_{\underline{Ent}} &\rightarrow A'_{\underline{Ent}} \\ h_{\underline{bool}} : A_{\underline{Bool}} &\rightarrow A'_{\underline{Bool}} \end{aligned}$$

$$h_{\text{bool}}(\text{Vide}(p)) = \text{Vide}'(h_{\text{pile}}(p))$$

$$h_{\text{pile}}(\text{Empiler}(p,u)) = \text{Empiler}'(h_{\text{pile}}(p), h_{\text{Ent}}(u))$$

$$h_{\text{pile}}(\text{Dépiler}(p)) = \text{Dépiler}'(h_{\text{pile}}(p))$$

$$h_{\text{Ent}}(\text{Sommet}(p)) = \text{Sommet}'(h_{\text{pile}}(p))$$

Parmi toutes ces algèbres homomorphes, une algèbre A est initiale si quelque soit l'algèbre B appartenant à cette famille d'algèbres, il existe un homomorphisme unique de A vers B . Or, d'après ce qui précède, il existe au moins une de ces algèbres initiales et elle est assez facile à définir :

Soit l'alphabet $\{\text{Vide}, \text{Empiler}, \text{Dépiler}, \text{Sommet}, (,), \text{Pile}, \text{Ent}, \text{Bool}\}$.

Soit A_S la famille d'ensembles support $\{A_{\text{pile}}, A_{\text{Ent}}, A_{\text{bool}}\}$ dont les éléments sont définis de la manière suivante :

$$\text{Pile} \in A_{\text{pile}} ; \text{Ent} \in A_{\text{Ent}} ; \text{Bool} \in A_{\text{bool}}$$

Si $t \in A_{\text{pile}}$ alors la chaine $\text{Vide}(t) \in A_{\text{bool}}$

si $t_1 \in A_{\text{pile}}$ et $t_2 \in A_{\text{Ent}}$ la chaine $\text{Empiler}(t_1, t_2) \in A_{\text{pile}}$

si $t \in A_{\text{pile}}$ la chaine $\text{Dépiler}(t) \in A_{\text{pile}}$

si $t \in A_{\text{pile}}$ la chaine $\text{Sommet}(t) \in A_{\text{Ent}}$

Définissons à présent les quatre opérations dénommées

Vides, Empiler, Dépiler, Sommet.

A la chaîne $t \in A_{\text{pile}}$, l'opération dénommée Vide fait correspondre la chaîne de A_{bool} :

$$\text{Vide}(t).$$

A la chaîne $t_1 \in A_{\text{pile}}$ et la chaîne $t_2 \in A_{\text{Ent}}$, l'opération dénommée Empiler fait correspondre la chaîne de A_{pile} :

$$\text{Empiler}(t_1, t_2)$$

et ainsi de suite.

Le type d'objet "pile d'entiers" est la classe d'isomorphisme de cette algèbre initiale.

En fait, ainsi défini, le type d'objet "pile d'entiers" ne caractérise pas bien ce qui est considéré généralement comme pile. Pour obtenir une meilleure caractérisation il faut imposer des contraintes sous forme de relations entre opérations : ce sont les Σ -équations qui définissent des Σ -congruences.

Nous poserons par exemple :

$$\begin{aligned} \text{Sommet}(\text{Empiler}(x_1, x_2)) &= x_2 \\ \text{Dépiler}(\text{Empiler}(x_1, x_2)) &= x_1 \end{aligned}$$

Dans l'ensemble des Σ -algèbres satisfaisant à ces relations il existe encore une algèbre initiale et le type "pile d'entiers" peut être défini comme la classe d'isomorphisme de cette algèbre initiale. Il s'agit de l'algèbre quotient de l'algèbre de mot définie ci-dessus par les congruences correspondant aux relations entre opérations.

Cette approche de la notion de type est intéressante et pourra sans doute s'intégrer à la conception de systèmes de programmation comportant langages, programmes de vérification Cependant quelques problèmes demeurent.

En effet, dans les langages de programmation, aux opérations intervenant dans la définition des types s'ajoutent des structures de contrôle. S'il est aisé de rendre compte de certaines structures de contrôle.

telles que la structure conditionnelle, par contre on ne peut introduire de point fixe tel qu'il s'exprime dans les boucles et particulièrement la boucle "tant que".

De plus, le résultat d'un calcul est parfois "Erreur" et non pas un élément appartenant à l'un des ensembles support d'une Σ -algèbre. Ceci est du au fait que, sur un calculateur, les structures mathématiques correspondant à un type ne sont qu'approchées. Ainsi l'ensemble des entiers "calculateur" est fini et n'a pas exactement la structure d'anneau euclidien. Goguen, Thatcher et Wagner ont montré que l'on pouvait rendre compte des erreurs [6] quoique de façon compliquée.

Par contre, les opérations partielles, les calculs par approximation, l'opérateur de point fixe jouent un rôle fondamental dans la formalisation des types d'objets en tant que treillis pour une relation d'approximation que nous allons présenter maintenant.

TYPE D'OBJET ET TOPOLOGIE DE L'ORDRE

FORMALISATION DES TYPES D'OBJETS UTILISANT UN ENSEMBLE MUNI D'UNE RELATION D'ORDRE PARTIEL COMPLET

La manipulation d'objets infinis tels que les réels sur un calculateur, dans un espace de mémoire fini et en un temps fini est possible grâce à la structure d'espace métrique complet de $\mathbb{R}$ qui permet la construction des réels comme limite d'une suite de rationnels pouvant être codés dans la mémoire d'un calculateur. Cette structure d'espace métrique complet est aussi importante pour le calcul sur machine que la structure de corps de l'ensemble des réels.

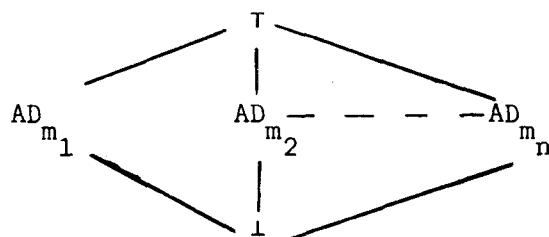
Ceci peut-il être transposé à d'autres ensembles d'objets même si l'on ne dispose pas sur ces ensembles d'une topologie métrique ? Répondant à cette question Scott introduit une structure plus simple : celle de treillis continu ou injectif pour une relation d'ordre la relation "*moins défini que*", induisant ainsi une topologie de l'ordre et permettant le calcul par approximation.

Considérons par exemple un "carnet d'adresses". La recherche d'un nom m dans le carnet a pour but de fournir une adresse AD_m mais elle ne peut aboutir que si le nom m figure dans le carnet d'adresse. Une autre situation fâcheuse peut intervenir si plusieurs homonymes figurent dans le carnet. Décider que le nom présent dans le carnet d'adresse, le plus proche dans l'ordre lexicographique, d'un nom absent, est une approximation de ce nom n'a pas beaucoup de sens car l'ensemble des adresses associées aux noms du carnet d'adresse n'a pas une structure aussi simple.

Si nous représentons par $\perp$ l'échec d'une recherche : l'adresse est *indéterminée* et par τ le résultat d'une recherche aboutissant à plusieurs adresses : le résultat est surdéterminé, la recherche de l'adresse d'un nom m ne peut avoir que trois résultats : $\perp$, AD_m , τ . AD_m nous apporte plus "d'information" que $\perp$ et τ nous apporte "trop d'informations". Nous poserons donc :

$$\perp \sqsubset AD_m \sqsubset \tau$$

De plus, les adresses sont incomparables entre elles.



Une telle structure est un exemple de la structure de treillis continu utilisée par Scott.

Soit :

- AD l'ensemble des adresses associées aux noms du carnet ;
- $(AD, \sqsubset)$ cet ensemble muni de la structure présenté ci-dessus.

Les applications *continues* de AD dans AD que nous noterons $[AD \rightarrow AD]$ sont celles qui respectent les limites.

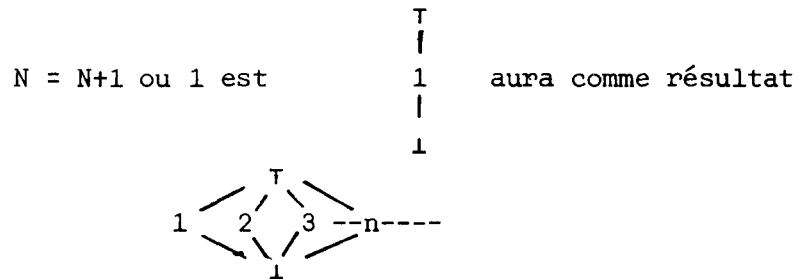
Nous donnerons dans le rappel mathématique qui suit la définition de la continuité. Ici les applications croissantes de AD dans AD sont continues.

$D_1 = [AD \rightarrow AD]$ est à son tour un treillis complet, continu $D_2 = [D_1 \rightarrow D_1]$ est également un treillis complet continu. Scott a montré que D_∞ est isomorphe à $[D_\infty \rightarrow D_\infty]$.

Des opérations sur ces ensembles structurés par $\sqsubseteq$ peuvent être introduites : par exemple $\times$: le produit cartésien, $+$, la somme disjointe, $=$, la relation d'isomorphisme.

Il est possible de définir des ensembles munis d'une structure "à la Scott" comme solution d'une équation à un isomorphisme près.

Par exemple :



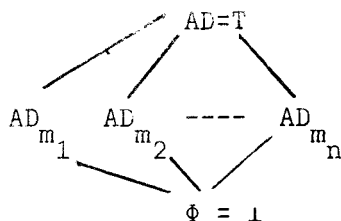
Lehmann a proposé une formalisation de tout ceci dans le cadre de la théorie des catégories Leh [12, 13].

Malheureusement, un problème se pose : celui du non-déterminisme.

La recherche de l'adresse d'un nom m dans le carnet peut aboutir à plusieurs adresses $m \rightarrow (AD_{m_{i_1}}, \dots, AD_{m_{i_p}})$. $m \rightarrow Def_m$ n'est pas univoque.

Si une partie des adresses associées à un nom m figure sur une page déchirée, l'ensemble des adresses que nous pouvons obtenir est une approximation de l'ensemble de toutes les adresses associées à un nom m .

La recherche de l'adresse d'un nom m devient ainsi une application de l'ensemble des sous-ensembles de AD structuré par la relation d'inclusion usuelle entre sous-ensembles. Dans ce cas l'indéfini est l'ensemble vide et le surdéfini AD lui-même.



Scott a étudié particulièrement PN , l'ensemble de parties de N , ensemble particulièrement intéressant en informatique à cause de ses relations avec la calculabilité et montré que, dans ce cas $(PN, \subseteq) \approx [PN \rightarrow PN]$. Nous exposerons dans la suite, la construction des types d'objet dans $(PN, \subseteq)$

RAPPEL SUR LES STRUCTURES D'ORDRE PARTIEL COMPLET

Rappelons quelques résultats classiques sur les domaines de calcul et les treillis complets. Il existe à ce sujet plusieurs définitions légèrement différentes dont la base est une structure de sup-demi-treillis. Scott utilise, lui, une structure de treillis possédant un élément minimum et un élément maximum.

Définition 10. Un ordre partiel est un ensemble D muni d'une relation $\sqsubseteq$ ayant les propriétés suivantes :

- i) *Réflexivité* : $x \sqsubseteq x$ pour tout $x \in D$
- ii) *Transivité* : si $x \sqsubseteq y$ et $y \sqsubseteq z$ alors $x \sqsubseteq z$
- iii) *Antisymétrie* : si $x \sqsubseteq y$ et $y \sqsubseteq x$ alors $x = y$

□

Nous noterons $x \sqsubset y$ si $x \sqsubseteq y$ et $x \neq y$

Définition 11. Un sous-ensemble $X \subseteq D$ d'un ordre partiel $(D, \sqsubseteq)$ est dirigé si pour tout $x_1, x_2 \in X$, il existe $x_3 \in X$ tel que

$$x_1 \sqsubseteq x_3 \text{ et } x_2 \sqsubseteq x_3$$

□

Définition 12. Un ordre partiel $(D, \sqsubseteq)$ est complet si toute partie dirigée $X \subseteq D$ admet une limite supérieure $\sup X \in D$ telle que

$$i) \quad x \sqsubseteq \sup X \text{ pour tout } x \in X$$

$$ii) \quad \text{si } x \sqsubseteq y \in D \quad \forall x \in X \text{ alors } \sup X \sqsubseteq y$$

□

Définition 13. Un élément x d'un ordre partiel $(D, \sqsubseteq)$ est fini ou compact ou algébrique relativement à y si quelque soit la partie dirigée $X \subseteq D$ telle que $y \sqsubseteq \sup X$, il existe $z \in X$ tel que $x \sqsubseteq z$.

□

Définition 14. Un élément x d'un ordre partiel $(D, \sqsubseteq)$ est fini ou compact ou algébrique s'il est fini relativement à lui-même ; c'est à dire si $\forall X \subseteq D, X$ dirigée telle que $x \sqsubseteq \sup X$ il existe $z \in X$ tel que $x \sqsubseteq z$.

□

Définition 15. Un ordre partiel complet $(D, \sqsubseteq)$ est injectif ou continu si pour tout $y \in D$, $y = \sup \{x \in D / x \text{ est fini relativement à } y\}$

□

Définition 16. Un ordre partiel complet $(D, \sqsubseteq)$ est fini ou algébrique si, pour tout $y \in D$, $y = U\{x \in D / x \sqsubseteq y \text{ et } x \text{ algébrique}\}$

□

Les structures d'ordre partiel complet rencontrées en informatique possèdent un élément minimum souvent noté $\perp$.

Scott utilise une structure de *treillis complet injectif* possédant un élément maximum et un élément minimum. La structure de *domaine de calcul* qui est un ordre partiel complet algébrique tel que l'ensemble des points algébriques soit récursif, est également utilisée.

L'ensemble des applications d'un ordre partiel complet dans un autre joue un rôle important. Rappelons à présent quelques résultats sur les ensembles fonctionnels associés aux ordres partiels complets.

Définition 17. Une application $f : D \rightarrow D'$ entre deux ordres partiels complets $(D, \sqsubseteq)$ et $(D', \sqsubseteq')$ est continue si

$$U'f(X) = f(UX) \text{ pour tout ensemble dirigé } X \subseteq D$$

□

La continuité entraîne la monotonie et la croissance.

La structure de l'ensemble $[D \rightarrow D']$ des applications continues de D dans D' dépend quelque peu des caractéristiques des relations d'ordre $\sqsubseteq$ et $\sqsubseteq'$. Nous considérerons entre deux éléments f et f' de $[D \rightarrow D']$ la relation d'ordre suivante, notée $\sqsubseteq$

$$f \sqsubseteq f' \text{ si } f(x) \sqsubseteq' f'(x) \quad \forall x \in D.$$

Théorème 3. L'ensemble $[D \rightarrow D']$ des applications d'un ordre partiel complet $(D, \sqsubseteq)$ dans un autre $[D \rightarrow D']$ est lui-même un ordre partiel complet.

Si D et D' sont algébriques alors $[D \rightarrow D']$ est également algébrique.

Si D et D' sont des domaines de calcul alors $[D \rightarrow D']$ est un domaine de calcul.

Si D et D' sont des treillis continus (respectivement algébriques) alors $[D \rightarrow D']$ est un treillis continu (respectivement algébrique).

□

Théorème 4. "du point fixe ou de Knaster Tarsky. Toute fonction continue $f \in [D \rightarrow D]$ d'un ordre partiel complet $(D, \sqsubseteq)$ dans lui-même, admet un plus petit point fixe $Y(f) \in D$ tel que

$$Y(f) = \{f^m(1) / m \geq 0\} \text{ ou } f^m = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_m$$

□

Les résultats que nous rappelons à présent sont essentiellement extraits de l'article de L. C. Sanchis : "Data type as Lattices : Retractions, closures and projections" [22]. Ils concernent les treillis complets mais certaines définitions et certains résultats pourraient sans doute s'étendre à des ordres partiels complets plus généraux que les treillis complets.

Définition 18. Une application $f \in [D \rightarrow D]$ d'un treillis complet dans lui-même est appelée

Retract si $f \circ f = f$

Cloture si $I \sqsubseteq f$ I est l'application Identité

projection si $f \sqsubseteq I$

□

Proposition 5. Si $f \in [D \rightarrow D]$ est une application continue d'un treillis complet $(D, \sqsubseteq)$ dans lui-même alors l'ensemble $\text{FIX}(f)$ des points fixes de f est un sous-treillis complet de D

□

Théorème 6. Si f est un retract, une clôture ou une projection dans D alors $f(D)$ est sous-treillis complet de D .

Théorème 7. Si f une clôture dans D telle que $f(D)$ sont un sous-treillis complet de D alors f est continue.

Théorème 8. Si D' est un sous-treillis de D alors D' est l'image de D par un retract. Si D' est clos pour l'opération d'intersection $\sqcap$ de D alors D' est l'image de D par une clôture.
Si D' est clos pour l'opération d'union $\sqcup$ de D alors D' est l'image de D par une projection.

Définition 19. Une représentation d'un treillis $(D, \sqsubseteq)$ dans un treillis $(D', \sqsubseteq')$ une paire d'applications (f, g) $f : D \rightarrow D'$, $g : D' \rightarrow D$ telles que :

f et g sont croissantes monotones

$I_D \sqsubseteq g \circ f$ I_D est l'application identité de D
 $f \circ g \sqsubseteq I_{D'}$ $I_{D'}$ est l'application identité de D'

□

Proposition 9. Une paire d'applications (f, g) , $f : D \rightarrow D'$, $g : D' \rightarrow D$ est une représentation entre D et D' si et seulement si

$$\forall x \in D, y \in D' \quad f(x) \sqsubseteq' y \text{ si et seulement si } x \sqsubseteq g(y)$$

□

Définition 20. Une représentation (f, g) entre demi-treillis $(D, \sqsubseteq)$ et $(D', \sqsubseteq')$ est continue si $g : D' \rightarrow D$ est continue.

Si g est une bijection, (f, g) est une clôture de D' dans D .

Si f est une bijection, (f, g) est une projection de D dans D' .

□

Une représentation d'un treillis dans un autre permet de relier leurs structures dans le cas où aucun des deux n'est sous-treillis de l'autre.

Théorème 10. Un treillis $(D', \sqsubseteq')$ est une clôture continue d'un treillis $(D, \sqsubseteq)$ si et seulement s'il est isomorphe à un sous-treillis complet de D , fermé pour l'intersection $\cap$ sur D

□

Proposition 6. Si un treillis complet $(D, \sqsubseteq)$ est injectif (continu) et si $(D', \sqsubseteq')$ est un retract continu de D alors D' est injectif.

□

Théorème 11. Un treillis complet $(D, \sqsubseteq)$ est injectif si et seulement si il est une retraction continue de $(PD, \subseteq)$: l'ensemble des parties de D muni de la relation $\subseteq$ usuelle entre sous-ensembles.

□

Théorème 12. Si (f, g) est une clôture continue d'un treillis $(D', \sqsubset')$ dans un treillis $(D, \sqsubset)$ et si $(D, \sqsubset)$ est algébrique alors $(D', \sqsubset')$ est aussi algébrique.

□

Théorème 13. Un treillis $(D, \sqsubset)$ est algébrique si et seulement s'il est une clôture continue de $(PD, \sqsubseteq)$.

□

Théorème 14. Si le treillis $(D, \sqsubset)$ est une projection continue du treillis $(D, \sqsubseteq)$ alors $(D, \sqsubset)$ est algébrique

□

Un exemple classique d'utilisation de ces définitions est constitué par l'étude de la sémantique des schémas de programme déterministes. Si D est un treillis continu (respectivement un domaine de calcul), $D_1 = [D \rightarrow D]$ est lui-même un treillis continu (respectivement un domaine de calcul). Il en est de même pour $D_2 = [D_1 \rightarrow D_1]$.

Il est possible d'associer aux "bons" schémas, un élément de D_2 c'est à dire une fonctionnelle continue qui permet de définir, par approximation successive, une fonction associée au schéma. Cette fonction est le "sens" du schéma de programme. On trouvera dans VUI [30] un bon exemple de mise en oeuvre de cette approche de la sémantique.

Un autre exemple est constitué par la construction des types d'objet entiers en tant que retracts de PN , l'ensemble des parties de N , que Scott effectue dans le cadre d'un modèle du Lambda-calcul [25]

PN , muni de la relation de contenance usuelle entre sous-ensembles de N , est un treillis complet continu et même algébrique, dont les éléments finis sont les sous-ensembles finis de N , l'élément minimum : l'ensemble vide $\emptyset$ et l'élément maximum: N lui-même.

Les singletons de N sont incomparables par $\subseteq$ et l'on a :

$$\emptyset \subseteq \{n\} \subseteq N \quad \forall n \in N$$

De sorte que la structure proposée sur PN apparait comme une généralisation de la structure de treillis continue sur N .

Une application $f : PN \rightarrow PN$ est continue si $\forall x \in PN$, $\forall X$, famille de sous-ensembles finis de N telle que $x = \bigcup_{y \in X} y$

$$f(x) = \bigcup_{y \in X} f(y)$$

Il est possible de donner une formulation plus topologique de cette définition.

Prenons comme base de voisinage les sous-ensembles de PN de la forme $\{X \in PN / e \subseteq X\}$ pour e donné de cardinalité finie. Un ouvert est alors une union de voisinages.

Une fonction $f : PN \rightarrow PN$ est continue si l'image réciproque d'un ouvert de PN par f est un ouvert. C'est à dire que f est continue si et seulement si :

$$\forall X \in Pn \text{ et pour tout } e \in PN, \text{ de cardinalité finie}$$

$e \subseteq f(X)$ si et seulement si $\exists e' \subseteq X$ tel que $e \subseteq f(e')$
avec $e' \in PN$ et de cardinalité finie.

En fait cette définition de la continuité est équivalente à celle qui découle de la structure de domaine.

Il est possible de faire correspondre à toute fonction continue de PN dans PN, un sous-ensemble de N de la manière suivante :

commençons par numérotter les sous-ensembles finis de N.

Soit $\{k_0, k_1, \dots, k_{m-1}\}$ un sous-ensemble de N avec $k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_{m-1}$
 Posons $\{k_0, k_1, \dots, k_{m-1}\} = e_n$ avec $n = \sum_{i=0}^{m-1} 2^i k_i$.

A une fonction continue correspond un sous-ensemble de $N \times N$

$$\{(n, m) / m \in f(e_n)\}$$

Numérotons à présent les couples d'entier en associant à (n, m)

$\mathfrak{J}(n, m) = \frac{1}{2} (n+m) \left(\frac{n}{m} + 1\right) + m$. Nous appellerons G_r une application de l'ensemble des fonctions continues dans PN définie par

$$G_r(f) = \{v(n, m) / m \in f(e_n)\}$$

Inversement, à tout sous-ensemble u de N, correspond une application continue de PN dans PN

$$f_t(u)(x) = \{m / \exists e_n \subseteq x \text{ tel que } (n, m) \in u\}$$

Remarquons que $f_t(G_r(f)) = f$ et par ailleurs $u \subseteq G_r(f_t(u))$ avec $u = G_r(f_t(u))$ s'il existe f tel que $u = G_r(f)$.

Posons $GF = G_r \circ f_t$

$$u \subseteq GF(u) \quad \forall u \in PN$$

$$u = GF(u) \text{ s'il existe } f \text{ tel que } u = G_r(f)$$

$$GF(GF(u)) = GF(u) \text{ c'est à dire } GF \circ GF = GF$$

Une application telle que GF est un retract.

Les éléments de PN qui sont associés à une application continue, sont caractérisés par le fait d'être points fixes de GF.

Soit $G = \{u \in PN / GF(u) = u\}$

L'image de PN par un retract continu est à son tour un treillis complet continu qui possède donc des éléments finis. Les éléments finis sont les éléments de G de cardinalité finie. Il est possible, à présent de donner une définition de la notion de type d'objet :

Un type d'objet est l'image de PN par un retract continu

Avant de donner un autre exemple de type d'objet, définissons les fonctions de plusieurs variables.

$f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ est une application de $\underbrace{PN \times PN \dots \times PN}_k$ dans PN

qui est continue si elle est continue pour chaque variable.

$\exists F \in PN$ tel que :

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = f_t(\underbrace{\dots \dots \dots}_{k} f_t(f_t(F)(x_0))(x_1) \dots)(x_{k-1})$$

Soit $C(x, y, z) = z \supset x, y = \{n \in x / 0 \in z\} \cup \{m \in y / \exists k \text{ tel que } k+1 \in z\}$

$$z \supset x, y = \begin{cases} \emptyset & \text{si } z = \emptyset \\ x & \text{si } z = 0 \\ y & \text{si } 0 \notin z \\ xy & \text{si } 0 \in z \neq 0 \end{cases}$$

Un couple (x,y) peut être défini par l'application

$$P_{x,y}(u) = u \supset x, (u-1) \supset y, \emptyset$$

$$P_{x,y}(u) \begin{cases} \emptyset & \text{si } u = \emptyset \text{ ou si } 0 \cup 1 \not\subseteq u \\ u & \text{si } u = 0 \\ y & \text{si } u = 1 \\ x \cup y & \text{si } 0 \cup 1 \subseteq u \end{cases}$$

Pour x et y donnés : $x = a, y = b$.

$p_{a,b}(u)$ est une application de PN dans PN pour laquelle $G_r(p_{a,b}(u))$ est un certain élément de PN.

Le type d'objet "couple" est formé par l'ensemble des éléments p de PN tels que a, b tels que $p = G_r(p_{a,b}(u))$. Les éléments p de PN sont les points fixes du retract

$$p(x,y,u) = u \supset x, u-1 \supset y,$$

Nous avons dit que l'image de PN par un retract continu était un treillis complet continu. Ceci assure que les éléments de ce treillis pourront être calculés par approximation successive. Dans le cas du type d'objet "couple" ces éléments finis sont les couples partiellement déterminés : $(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, y), (x, \emptyset)$.

La définition de types d'objet par une équation de types exige davantage. Elle exige une structure d'ordre sur l'ensemble des retracts.

La relation $\subseteq$ sur l'ensemble des images de PN par les retracts continus ne donne pas la structure souhaitée. L'ensemble des applications qui sont des retracts, est un treillis complet mais non pas continu.

Il est possible de définir un autre ordre sur ces applications.

$f \leq g$ si f est un retract de g .

Tout couple de retracts possède un plus grand minorant pour cette relation d'ordre. De plus, toute suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de retracts telle que $a_i \leq a_{i+1}$ et $a_i \subseteq a_{i+1}$ possède une limite supérieure $\cup \{a_i / i \in \mathbb{N}\}$. Cette propriété permet de définir un retract comme limite d'une suite de retracts ce qui est indispensable pour définir des types d'objets par une équation de retracts.

Une exploitation mathématique complète des propriétés de l'ensemble des retracts semble ne pouvoir se faire que dans le cadre de la théorie des catégories. Leh [11,13].

Les formalisations de la notion de type d'objet peuvent sembler abstraites et éloignées de préoccupations d'un praticien. Cependant, le travail de Vuillemin [31], de Tennent [28, 29], en ce qui concerne la sémantique dénotationnelle, les travaux de Guttach [7, 8] en ce qui concerne la théorie algébrique des types d'objets montrent que des applications expérimentales sont possibles.

CHAPITRE II

On sait que les calculateurs opèrent, calculs et transformations sur des objets, par exemple, des n-upples de bits que nous appellerons "objets machine"..

Les programmeurs leur associent des objets externes appartenant à certains ensembles : lettres de l'alphabet, numéros-matricule, entiers, réels, ... En théorie de schémas de programme, on sépare, de même, l'aspect syntaxique d'un programme : le schéma proprement dit, de son aspect sémantique lié à la donnée d'une interprétation des symboles apparaissant dans le schéma par des fonctions et des objets convenablement choisis.

Par une démarche similaire, définissons l'interprétation d'un ensemble "d'objets machine" par un ensemble S d'objets externes, comme étant le couple d'application (f, g)

$$f : M \rightarrow S$$

$$g : S \rightarrow M$$

g donne la représentation d'un objet de S par un objet de M

f donne le "sens" d'un objet de M .

Il faut avoir $f \circ g = I_M$ et $g \circ f = I_S$ où I_M est l'application identique sur M et I_S l'application identique sur S .

Le choix d'une interprétation est laissé à l'arbitraire des programmeurs et n'est pas complètement explicité, le plus souvent. Cette part d'arbitraire peut être réduite si on impose à f et g d'être des homomorphismes pour une certaine structure mathématique des ensembles M et S . C'est précisément l'un des buts d'une déclaration de type d'objet dans un programme que d'expliciter cette structure.

Pour des raisons évidentes M est un ensemble fini. Or, il est assez facile de donner des exemples d'ensembles S infinis : l'ensemble des réels, l'ensemble des entiers

g ne pourra donc pas toujours être bijective ni même simplement injective. Dès lors, la définition de f pose un problème.

Avant d'explorer une troisième voie, commençons par examiner de ce point de vue, les deux formalisations de la notion de type d'objet passées en revue au chapitre I. Dans les deux cas g est considérée comme une application partielle.

Pour Goguen, Thatcher et Wagner, un type d'objet est une algèbre initiale. f et g doivent donc être des homomorphismes pour une certaine structure d'algèbre. Ceci s'intègre très bien à la définition d'un type d'objet par une algèbre initiale.

Choisissons alors dans S un sous-ensemble σ pouvant être mis en correspondance avec M par une bijection et adjoignons à M un objet supplémentaire : "erreur"

$$g(s) = m \in M \quad \text{si } s \in \sigma$$

$$g(s) = \text{"erreur"} \quad \text{si } s \notin \sigma$$

Considérons, par exemple TD l'ensemble des mots de 32 bits et N , l'ensemble des entiers.

$$\text{Soit } N_{TD} = \{n / 0 \leq n \leq 2^{32} - 1\}$$

Il est facile de définir une application partielle de N dans TD en posant

$$g(n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_{32} \rangle \quad \text{avec } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ tels que } n = \sum_{i=1}^{32} a_i 2^{i-1}$$

$$g(n) = \text{"erreur"} \quad \text{si } n \geq 2^{32}$$

La définition de f ne pose alors aucun problème.

Cependant, f et g ne sont plus, aussi définies, des homomorphismes pour une structure algébrique sur N telle que la structure d'anneau euclidien. En pratique, on se contente d'avoir un homomorphisme approché dont les "irrégularités" sont bien connues des programmeurs expérimentés.

Mais il faut être plus exigeant pour une formalisation et introduire un élément "erreur" dans la définition de la structure algébrique. C'est ce que proposent Goguen, Thatcher et Wagner [18]. Ce n'est pas simple parce que l'objet "erreur" possède des propriétés absorbantes ce qui introduit des difficultés logiques.

Ainsi, si $\otimes$ est un opérateur binaire et u un élément de TD on aura en général

$$u \otimes \text{"erreur"} = \text{"erreur"}$$

Il faut introduire des opérations de test d'erreur qui permettent d'éviter d'utiliser "erreur" comme opérande. La description d'un type d'objet par la spécification d'une algèbre initiale n'en est pas facilitée.

Une seconde solution à la définition de f et g consiste à supposer que M et S possèdent une structure de treillis d'approximation "à la Scott". S possède un élément minimum $\perp$: l'indéfini et un élément maximum $\top$ le surdéfini.

De même M possède un élément minimum : $\perp$, l'indéfini et un élément maximum : "erreur", le surdéfini.

Il n'est pas utile de supposer que M soit fini car la définition de g : application partielle de S dans M n'utilisera qu'une partie finie de M . f et g devront être des applications croissantes et même continues c'est à dire préserver les limites.

De plus $f \circ g \sqsubseteq I_S$ et $I_M \sqsubseteq g \circ f$

Prenons, par exemple $S = N \cup \perp \cup \top$ muni de la structure d'ordre définie

par $\perp \sqsubseteq n \sqsubseteq \top \quad \forall n \in N \cup \perp \cup \top$

Prenons pour M l'ensemble des mots d'un nombre quelconque de bits et posons $\forall m \in M \quad l(m) = \text{nombre de bits de } m$.

Adjoignons à M : $\perp$ et "erreur" et posons $\perp \sqsubseteq m \sqsubseteq \text{"erreur"} \quad \forall m \in M$

"erreur" est le surdéterminé

$\perp$ représente la "valeur" d'une variable dans un programme avant toute application.

Posons $g(s) = \langle a_1, a_2, \dots, a_p \rangle$ où $a_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

avec $a_1, a_2, \dots, a_p$ tels que $n = \sum_{i=1}^p a_i 2^{p-i}$.

Ceci si $0 \leq n < 2^{32}-1$

$g(s) = \perp$ si $s = \perp$ ou si $s \geq 2^{32}$

$g(\top) = \text{"erreur"}$

f s'en déduit immédiatement

$f(\perp) = \perp$

$f(\langle a_1, \dots, a_p \rangle) = \sum_{i=1}^p a_i 2^{i-1}$ si $p \leq 32$

$$f(\langle a_1, \dots, a_k \rangle) = \tau \text{ si } k > 32$$

$$f(\text{"erreur"}) = \tau$$

Si S possède une certaine structure algébrique, les opérations qui la caractérisent ont leur version "partielle" définie pour les éléments de S pour lesquels g est aussi définie mais il faudra que ces opérations soient continues. Il s'en déduira immédiatement des opérations sur M par l'intermédiaire de f et g.

Aussi supposons que dans l'exemple ci-dessus nous introduisons la fonction successeur SUCC sur N. Il lui correspondra sur M la fonction $SUCC_M$ définie par :

$$SUCC_M(m) = g \circ SUCC \circ f(m)$$

La donnée d'une structure algébrique permet donc d'imposer des contraintes à f et g comme dans la définition purement algébrique d'un type d'objet mais, de plus, il est possible de hiérarchiser et de relier entre elles différentes implémentations d'un type d'objet; par exemple en définissant g_1 pour les entiers inférieurs à 2^{16} , ou g_2 pour les entiers inférieurs à 2^{32} .

Les deux façons de choisir f et g que nous venons de voir s'efforcent de rendre g bijective pour faciliter la définition de f.

Une troisième possibilité consiste à accepter que g soit surjective avec la conséquence immédiate d'un tel choix : f devient *multivoque*. Il s'agit là d'une idée proche de celle de Nolin [18]. Dans ces conditions f(M) sera une famille de sous-ensembles de S. Prenons par exemple S égale à N et M égal à l'ensemble des mots de 32 bits.

Adjoignons à M, "erreur".

Posons $g(n) = \langle a_1, a_1, \dots, a_{32} \rangle$ si $n \leq 2^{32}-1$

avec

$$a_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ et } a_1, a_2, \dots, a_{32} \text{ tels que } n = \sum_{i=1}^{32} a_i 2^{i-1}$$

$$g(n) = \text{"erreur"} \text{ si } n \geq 2^{32}$$

$$f(\langle a_1, a_2, \dots, a_{32} \rangle) = \sum_{i=1}^n a_i 2^{i-1}$$

A "erreur" doit correspondre $\{n / n \geq 2^{32}\}$

En effet nous ne sommes pas sans information sur le résultat d'un calcul si celui-ci se termine par "erreur". Dans ce cas, le résultat est un entier supérieur à $2^{32}-1$.

$f(M \cup \text{"erreur"})$ est un recouvrement r de N

$$r = \{\{n\} / n \leq 2^{32}-1\} \cup \{n / n \geq 2^{32}\}$$

Une interprétation de $M \cup \text{"erreur"}$ dans N est alors caractérisée par la donnée du recouvrement r et d'un couple d'application $(\hat{f}, \hat{g})$ où $\hat{f}$ est définie par

$$\hat{f}(\langle a_1, \dots, a_{32} \rangle) = \left\{ \sum_{i=1}^{32} a_i 2^{i-1} \right\}$$

$$\hat{f}(\text{"erreur"}) = \{n / n \geq 2^{32}\}$$

et $\hat{g}$ par $\hat{g}(\{n\}) = g(n)$ si $n \leq 2^{32}-1$

$$\hat{g}(\{n / n \geq 2^{32}\}) = \text{"erreur"}$$

Supposons à présent que nous disposions de M' : l'ensemble des mots de 64 bits. Nous pourrions lui associer un recouvrement r' défini par :

$$r' = \{\{n\} / n \leq 2^{64}-1\} \cup \{n / n \geq 2^{64}\}$$

et deux applications $(\hat{f}', \hat{g}')$ définies par :

$$\hat{f}'(\langle a_1, \dots, a_{64} \rangle) = \left\{ \sum_{i=1}^{64} a_i 2^{i-1} \right\}$$

$$\hat{f}'(\text{"erreur"}) = \{n / n \geq 2^{64}\}$$

$$\hat{g}(\{n\}) = \langle a_1, \dots, a_{64} \rangle \text{ si } n \leq 2^{64}-1$$

$$\hat{g}(\{n / n \geq 2^{64}\}) = \text{"erreur"}$$

Remarquons qu'il est possible de définir des structures algébriques sur r et r' . Par exemple la fonction SUCC sur

$$\text{SUCC}(\{n\}) = \{n+1\} \text{ si } n < 2^{32}-1$$

$$\text{SUCC}(\{n\}) = \{n / n \geq 2^{32}\} \text{ si } n = 2^{32}-1$$

$$\text{SUCC}(\{n / n \geq 2^{32}\}) = \{n / n \geq 2^{32}\}$$

et de même sur r' la fonction SUCC'

$$\text{SUCC}'(\{n\}) = \{n+1\} \text{ si } n < 2^{64}-1$$

$$\text{SUCC}'(\{n\}) = \{n / n \geq 2^{64}\} \text{ si } n = 2^{64}-1$$

$$\text{SUCC}'(\{n / n \geq 2^{64}\}) = \{n / n \geq 2^{64}\}$$

Les opérations correspondantes sur M doivent vérifier

$$\text{SUCC}_M = \hat{g} \circ \text{SUCC} \circ \hat{f}$$

$$\text{SUCC}'_{M'} = \hat{g}' \circ \text{SUCC} \circ \hat{f}'$$

Intuitivement r' est un meilleur recouvrement de N que r car tout sous-ensemble appartenant à r est coupé en plusieurs sous-ensembles de r' . De plus, r' contient davantage de singletons de N que r . Pour cette raison, SUCC' approche mieux que SUCC la fonction successeur sur les entiers. Dans cet ordre d'idées remarquons que

$$\text{SUCC}(\{2^{32}-1\}) = \{n / n \geq 2^{32}\}$$

alors que $\text{SUCC}'(\{2^{32}-1\}) = \{2^{32}\}$

$\{n / n \geq 2^{32}\}$ est en quelque sorte une approximation de 2^{32} .

*Nous considérons donc que tout ensemble u contenant
un ensemble v est une approximation de v*

Scott considère que, au contraire c'est v qui est une approximation de u. Il est clair, cependant que si nous savons qu'un entier n est pair, c'est à dire que $n \in \{2 \cdot k / k \in \mathbb{N}\}$, nous détenons une information sur n. Il est donc logique de considérer $\{2 \cdot k / k \in \mathbb{N}\}$ comme une approximation de n.

Donnons un autre exemple de ce type de démarche

Soit A l'alphabet ($\alpha, \beta, z, 0, E$) et M l'ensemble des formes sententiales engendrées par la grammaire :

$$\alpha \rightarrow z + \beta$$

$$\beta \rightarrow \beta + 0.z + E.\beta + 0.\beta$$

où + représente une alternative :

$$\begin{array}{l} \alpha \rightarrow z + \beta \text{ est équivalent à } \alpha \rightarrow z \\ \alpha \rightarrow \beta \end{array}$$

M est notre ensemble de "mots machine".

Il est infini mais comme cela se produit dans le cas d'une structure d'approximation "à la Scott" il ne sera pas nécessaire de disposer de tout l'ensemble M. Un sous-ensemble fini sera suffisant.

Remarquons que la relation $m_1 \xRightarrow{*} m_2 : m_2$ dérive de m_1 , est une relation d'ordre sur M.

Définissons, à présent un couple d'applications (f, g) .

f est une application de M dans PN .

g est une application que nous préciserons dans un instant, d'un recouvrement r de N dans M .

f est défini récursivement par

$$f(\alpha) = N$$

$$f(\beta) = N^+$$

$$f(z) = 0$$

$$f(E.m) = \{2*n / n \in f(m)\} \quad E.m, O.m \in M$$

$$f(O.m) = \{2*n+1/n \in f(m)\}$$

Le recouvrement r de N est défini de la manière suivante :

$\{0\}$, N , N^+ appartiennent à r

si $s \in r$ alors $\{2*n / n \in s\}$ et $\{2*n+1 / n \in s\}$ appartenant à r .

g peut être défini à présent : si s est égal à N , N^+ ou $\{0\}$ alors

$$g(s) = \begin{cases} \alpha & \text{si } s = N \\ \beta & \text{si } s = N^+ \\ z & \text{si } s = \{0\} \end{cases}$$

Si $s \neq N, N^+, \{0\}$ mais appartient à r , s est égal à $\{2n / n \in s'\}$ ou $\{2n+1 / n \in s'\}$ avec $s' \in r$

$$g(s) = \begin{cases} E.g(s') & \text{si } s = \{2n / n \in s'\} \\ O.g(s') & \text{si } s = \{2n+1 / n \in s'\} \end{cases}$$

r est un recouvrement infini mais nous pouvons utiliser un recouvrement de N plus grossier, extrait de r .

Par exemple $r_1 = \{N, N^+, \{0\}, \{2*n / n \in N^+\}, \{2*n+1 / n \in N^+\}\}$.

Le sous-ensemble de M correspondant est $M_1 = \{\alpha, \beta, z, 0.z, E.\beta, 0.\beta\}$

Deux applications f_1 et g_1 sont associées à M_1 et r_1 :

$$\text{pour } u \in M_1 \quad f_1(u) = \begin{cases} N & \text{si } u = \alpha \\ N^+ & \text{si } u = \beta \\ \{0\} & \text{si } u = z \\ \{2*n / n \in N^+\} & \text{si } u = E.\beta \\ \{2*n+1 / n \in N^+\} & \text{si } u = 0.\beta \\ \{1\} & \text{si } u = 0.z \end{cases}$$

$$\text{pour } s \in r_1 \quad g_1(s) = \begin{cases} \alpha & \text{si } s = N \\ \beta & \text{si } s = N^+ \\ z & \text{si } s = \{0\} \\ 0.z & \text{si } s = \{1\} \\ E.\beta & \text{si } s = \{2*n / n \in N^+\} \\ 0.\beta & \text{si } s = \{2*n+1 / n \in N^+\} \end{cases}$$

Nous pouvons également extraire de r le recouvrement r_2 .

Posons :

$$s_1 = \{2*n / n \in N^+\}$$

$$s_2 = \{2*n+1 / n \in N^+\}$$

$$r_2 = \{N, N^+, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2*n / n \in s_1\}, \{2*n / n \in s_2\}, \\ \{2*n+1 / n \in s_1\}, \{2*n+1 / n \in s_2\}\}$$

et $M_2 = \{\alpha, \beta, z, 0.z, 0.0.z, E.0.z, E.\beta, 0.\beta, E.0.\beta, E.E.\beta, 0.0.\beta, 0.E.\beta\}$

La définition du couple (f_2, g_2) associé est immédiate quoiqu'un peu longue, nous ne la donnerons pas.

Il est naturellement possible de définir des opérations sur r, r_1, r_2
Définissons par exemple, la fonction SUCC sur r

$$\text{SUCC}(N) = N$$

$$\text{SUCC}(N^+) = N^+$$

$$\text{SUCC}(\{0\}) = \{1\}$$

$$\text{SUCC}(s) = \{n+1 / n \in s\} = s+1$$

SUCC a sur les singletons de N la même définition que la fonction successeur sur les entiers.

De même définissons sur M la fonction SUCC_M .

$$\text{SUCC}_M(\alpha) = \alpha$$

$$\text{SUCC}_M(\beta) = \beta$$

$$\text{SUCC}_M(z) = 0.z$$

$$\text{SUCC}_M(0.m) = E.\text{SUCC}_M(m) \quad 0.m, E.m, \in M_1$$

$$\text{SUCC}_M(E.m) = 0.m$$

En fait $\text{SUCC}_M = g \circ \text{SUCC} \circ f$

$$\text{SUCC} = f \circ \text{SUCC}_M \circ g$$

La définition de SUCC et de SUCC_M induit des définitions similaires sur r_1, M_1 et sur r_2, M_2 .

Définissons SUCC_1 par exemple $\text{SUCC} : r_1 \rightarrow r_1$.

$$\text{SUCC}_1(s) = \begin{cases} N & \text{si } s = N \\ N^+ & \text{si } s = N^+ \\ \{1\} & \text{si } s = \{0\} \\ \{2*n / n \in N^+\} & \text{si } s = \{1\} \\ \{2*n+1 / n \in N^+\} & \text{si } s = \{2*n / n \in N^+\} \\ \{2*n / n \in N^+\} & \text{si } s = \{2*n+1 / n \in N^+\} \end{cases}$$

En fait $SUCC_1(s) = SUCC(s)$ pour $s \in r_1$.

Il serait possible, quoique long, de définir $SUCC_2 : r_2 \rightarrow r_2$ et nous aurions $SUCC_2(s) = SUCC(s)$ pour $s \in r_2$.

Il est possible de doter les recouvrements d'une structure algébrique par la définition d'opérations convenables et même de caractériser ces structures algébriques par une notion d'algèbre initiale.

La fonction $SUCC_1$ est donnée sous la forme d'un ensemble de couples $\{(N, N), (N^+, N^+) (\{0\}, \{1\}), (\{1\}, \{2*n / n \in N^+\}), (\{2*n+1 / n \in N^+\}, \{2*n / n \in N^+\}), (\{2*n / n \in N^+\}, \{2*n+1 / n \in N^+\})\}$. Ce sont de tels ensembles, qui constituent le graphe d'une fonction, que nous appelons *tables fonctionnelles*.

Il s'agit, en ce qui concerne $SUCC_1$, d'une famille de sous-ensembles de $N \times N$. Il lui correspond un sous-ensemble de $M \times M$.

$\{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (z, 0.z), (0.z, E.\beta), (E.\beta, 0.\beta), (0.\beta, E.\beta)\}$.

Il est possible de définir un type d'objet en tant qu'algèbre par la donnée explicite de recouvrements finis pour les ensembles supports de l'algèbre et de tables fonctionnelles finies pour les opérations de l'algèbre.

Pour que tout ce qui précède possède un intérêt, il convient de disposer d'une relation d'ordre partiel complet algébrique entre familles de sous-ensembles d'un ensemble de façon à pouvoir construire une famille comme borne supérieure d'une suite de familles finies et la table d'une fonction comme borne supérieure d'une suite de tables finies.

Nous pouvons essayer d'imaginer ce que peut être une telle relation à partir des exemples proposés dans ce chapitre.

Soit n un élément de N ,

Soit s_1 un élément de r_1 tel que $n \in s_1$.

s_1 existe car r_1 est un recouvrement de N .

Soit s_2 un élément de r_2 tel que $n \in s_2$.

s_2 existe car r_2 est un recouvrement de N et de surcroît $s_2 \subseteq s_1$ car tout élément de r_2 provient d'une fragmentation en deux d'un élément r_1 .

Il est facile de montrer que $\{n\} \in r$ et nous avons donc

$$\forall n \in N \quad \{n\} \subseteq s_2 \subseteq s_1 .$$

s_2 est une meilleure approximation de n que s_1 parce que $n \in s_2 \subseteq s_1$ et c'est parce que $\forall n \in N$ il existe $s_1(n) \in r_1$ et $s_2(n) \in r_2$ tels que $n \in s_2(n) \subseteq s_1(n)$, que nous pourrions dire que r_2 est un "meilleur" recouvrement de N que r_1 .

Nous étudierons dans le chapitre III des structures d'ordre partiel complet algébrique précisant cette notion d'approximation entre familles de sous-ensembles.

CHAPITRE III

Les réflexions quelque peu informelles que nous avons présentées dans le chapitre II, conduisent à nous intéresser aux familles de sous-ensembles d'un ensemble et à rechercher une relation d'ordre entre ces familles qui puisse exprimer une relation d'approximation au sens où nous l'entendions à la fin du chapitre II.

Dans une première partie, nous étudierons une relation de pré-ordre entre familles de sous-ensembles, définie par :

soit d_1 et d_2 , deux familles de sous-ensembles d'un ensemble, $d_1 \preceq d_2$ si $\forall s \in d_1 \exists \sigma : \text{sous-famille de cardinalité finie de } d_2 \text{ telle que } \bigcup_{s' \in \sigma} s' = s$.

Une classe d'équivalence associée à cette relation de pré-ordre ayant un représentant de classe caractérisé par une propriété de clôture, clôture par réunion finie, nous étudierons dans une deuxième partie les propriétés de clôture des familles de sous-ensembles à partir du treillis des familles de sous-ensembles d'un ensemble ordonnées par la relation d'inclusion. Enfin, dans une troisième partie, nous tirerons quelques conclusions de cette étude quand au choix d'une relation d'approximation entre familles de sous-ensembles.

La recherche d'une structure d'ordre partiel sur les recouvrements d'un ensemble, conduit à s'intéresser aux familles de sous-ensembles d'un ensemble. Certaines de ces familles de sous-ensembles sont bien connues telles que recouvrements, partitions, bases de filtre ... De nombreuses relations d'ordre ou de pré-ordre peuvent être imaginées entre familles de sous-ensembles. Donnons en trois exemples :

R_1 : LA RELATION D'INCLUSION

Une famille A est incluse dans une famille B si
 $\forall a \in A \text{ alors } a \in B$

R_1 est une relation d'ordre qui n'est pas à priori le genre de relation que nous cherchons car si une famille A est incluse dans une famille B, cela n'implique pas que la famille B fournisse de meilleures approximations que la famille A au sens où un ensemble est une approximation de chacun de ses éléments.

R_2 : LA RELATION DE FINESSE (au sens intérieur)

Une famille A est plus fine (au sens intérieur)
qu'une famille B si $\forall a \in A$, il existe $b \in B$ tel
que $a \subseteq b$

R_3 : LA RELATION DE FINESSE (au sens extérieur)

Une famille A est plus fine (au sens extérieur)
qu'une famille B si $\forall b \in B$, il existe $a \in A$ tel
que $a \subseteq b$

R_2 et R_3 sont des relations de pré-ordre. La relation R_2 et R_3 correspond au pré-ordre de Milner.

Les trois recouvrements de N : r_1 , r_2 , r décrits dans le chapitre II, sont reliés par la relation de finesse au sens de R_3 : r est plus fin que r_2 et r_2 plus fin que r_1 .

Conformément à ce que nous suggérions à la fin du chapitre II, si A et B sont deux familles telles que A soit plus fine que B au sens de R_3 , par exemple r_2 et r_1 , nous pourrions dire de deux éléments $a \in A$, $b \in B$ tel que $a \subseteq b$, que b est une approximation de a. La famille B est alors une approximation de la famille A.

Réciproquement, b étant une approximation de chacun de ses éléments, a fournit une approximation plus fine de certains éléments de b.

Cependant, la relation A plus fine que B n'implique pas que pour tout $b \in B$ et tout $u \in b$, il existe dans A une approximation de u. Il faut ajouter à R_3 une condition :

$\forall b \in B$, $\forall u \in b$, il existe $a \in A$ tel que $a \subseteq b$ et $u \subseteq a$

Nous avons alors la relation de pré-ordre R_3' :

Une famille A est plus fine qu'une famille B si
pour tout $b \in B$, il existe une famille σ d'éléments
de A telle que $b = \bigcup_{s \in \sigma} s$

Nous imposerons une condition supplémentaire en exigeant que la cardinalité de la famille σ soit finie. Nous justifierons cette restriction dans la suite de ce chapitre.

Nous définissons ainsi la relation de finesse R_3'' :

Une famille A est plus fine qu'une famille B si
pour tout $b \in B$, il existe une famille σ , de cardinalité finie, d'éléments de A telle que
 $b = \bigcup_{s \in \sigma} s$

Nous avons, par exemple, r plus fin que r_2 et r_2 plus fin que r_1 au sens de R_3'' .

L'ensemble des familles de sous-ensembles closes par réunion finie possède, s'il est muni de cette relation R_3'' une structure de treillis complet algébrique que nous allons étudier à présent.

NOTATIONS

Soit E un ensemble, nous noterons

PE	l'ensemble des sous-ensembles de E
PPE	l'ensemble des sous-ensembles de PE , c'est à dire l'ensemble des familles de sous-ensembles de E
$\cap_E, \cup_E, \subseteq_E$	respectivement l'intersection, l'union, l'inclusion entre éléments de PE , c'est à dire entre sous-ensemble de E
$\cap_{PE}, \cup_{PE}, \subseteq_{PE}$	respectivement l'intersection, l'union, l'inclusion entre éléments de PPE , c'est à dire entre familles de sous-ensembles de E
RS	la réunion d'une famille de sous-ensembles de E Pour $S \in PPE$ $RS = \bigcup_{s \in S} s = \{x \in E / \exists s \in S \text{ tel que } x \in s\}$
$\subseteq_{PPE}$	la relation d'inclusion entre sous-ensembles de PPE
$\sqsubseteq_E$	la relation de finesse entre éléments de PPE définie par $d, d' \in PPE \quad d \sqsubseteq d' \text{ si } \forall s \in d, \exists \sigma \subseteq_{PE} d' \text{ tel que la cardinalité de } \sigma \text{ soit finie et } R_\sigma = s$

TREILLIS DES FAMILLES DE SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE,
CLOSES PAR RÉUNION FINIE, POUR LA RELATION $\sqsubseteq_E$

Soit E un ensemble et $\sqsubseteq_E$ la relation entre éléments de PPE définie précédemment

Proposition 1. La relation $\subseteq_{PE}$ implique la relation $\sqsubseteq_E$.

Preuve.

Soit d_1, d_2 deux éléments de PPE tels que $d_1 \subseteq_{PE} d_2$

Soit s_1 un élément de d_1

$$d_1 \subseteq_{PE} d_2 \Rightarrow (s_1 \in d_1 \Rightarrow s_1 \in d_2)$$

$\forall s_1 \in d_1, \exists \sigma \subseteq_{PE} d_2$ tel que $R\sigma = s_1$ avec $\text{Card}(\sigma)$ fini. Il suffit de prendre σ réduite à $\{s_1\}$, d'où $d_1 \sqsubseteq_E d_2$.

Il découle immédiatement de cette proposition que $\sqsubseteq_E$ est une relation de pré-ordre.

Il est bien connu que, si nous posons $x \equiv y$ si et seulement si $x \sqsubseteq_E y$ et $y \sqsubseteq_E x$, la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence et nous pouvons définir, à partir de la relation de pré-ordre $\sqsubseteq_E$, une relation d'ordre sur les classes d'équivalences.

Proposition 2. Les classes d'équivalences associées à la relation $\sqsubseteq_E$, sont des parties dirigées pour la relation d'inclusion $\subseteq_{PE}$.

Preuve.

Soit X une classe d'équivalence associée à $\sqsubseteq_E$.

Soit A, B deux éléments de PPE appartenant à X

Soit $A \cup_{PE} B$, la réunion de A et B

Il est clair que $A \sqsubseteq_E A \cup_{PE} B$ car $A \subseteq_{PE} A \cup_{PE} B$

Soit $s \in A \cup_{PE} B$

Si $s \in A$, il existe $\sigma_A \subseteq_{PE} A$ tel que $R\sigma_A = s$ et $\text{Card}(\sigma_A)$ finie, il suffit de prendre $\sigma_A = \{s\}$.

Si $s \in B$, il existe $\sigma'_A \subseteq_{PE} A$ tel que $R'\sigma'_A = s$ et $\text{Card}(\sigma'_A)$ finie car, par hypothèse, $B \sqsubseteq_E A$.

D'où $A \cup_{PE} B \sqsubseteq_E A$. $A \cup_{PE} B \in X$.

Tout couple d'éléments $A, B \in X$ est majoré dans X .

□

Définition 1. Un élément $d \in PPE$ est clos par réunion finie si $\forall \sigma \in PPE$ tel que $\sigma \subseteq_{PE} d$ et $\text{Card}(\sigma)$ finie, $R\sigma \in d$.

Proposition 3. Dans chaque classe d'équivalence associée à $\mathbb{L}_E$, il existe un et un seul élément clos par réunion finie, l'élément maximum de la classe.

Preuve.

Soit X une classe d'équivalence associée à $\mathbb{L}_E$

Soit $x, y \in X$ et x clos par réunion finie

$x \mathbb{L}_E y$ et $y \mathbb{L}_E x$. $\forall s \in y$, $\exists \sigma_x \subseteq_{PE} x$ et $\text{Card}(\sigma_x)$ finie tel que $R\sigma_x = s$.

Mais x étant clos par réunion finie $R\sigma_x \in x$.

Nous en déduisons

$$y \subseteq_{PE} x$$

en sorte que si x est clos par réunion finie, $\forall y \in X$ $y \subseteq_{PE} x$;

Il est évidemment unique.

Soit $u_{PE} X = \{s / \exists x \in X \text{ tel que } s \in x\}$

$u_{PE} X$ est l'élément maximum de X . Montrons qu'il appartient à X .

Soit $y \in X$.

Nous avons $y \mathbb{L}_E u_{PE} X$.

Soit $s \in u_{PE} X$

Si $s \in y$ alors, il existe $\sigma_y \subseteq_{PE} y$ tel que $R\sigma_y = s$ et $\text{Card}(\sigma_y)$ fini: $\sigma_y = \{s\}$

Si $s \notin y$ $\exists y' \in X$ tel que $s \in y'$ et $y' \mathbb{L}_E y$ de sorte que $\exists \sigma_{y'} \subseteq_{PE} y'$. Par conséquent $u_{PE} X \in X$ $u_{PE} X$ est donc l'unique élément de X clos par réunion finie.

□

Nous noterons $\mathcal{D}_E(U)$ l'ensemble des éléments de PPE clos par réunion finie

Proposition 4. La relation $\mathbb{L}_E$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{D}_E(U)$.

Preuve.

La preuve en est immédiate d'après la proposition 3.

□

Proposition 5. La relation $\sqsubseteq_E$ est équivalente à la relation d'inclusion $\subseteq_{PE}$ sur $\mathcal{D}_E(U)$.

Preuve.

Soit $x, y \in \mathcal{D}_E(U)$.

Si $x \subseteq_{PE} y$ alors $x \sqsubseteq_E y$ d'après la proposition 1.

Si $x \sqsubseteq_E y$, $\forall s \in x$, $\exists \sigma_x \subseteq_{PE} y$ tel que $R\sigma_x = s$, $\text{Card}(\sigma_x)$ finie.

y étant clos par réunion finie $R\sigma_x \in y$ et $x \subseteq_{PE} y$

□

Proposition 6. $\mathcal{D}_E(U)$ est clos pour l'intersection $\cap_{PE}$.

Preuve.

Soit $x, y \in \mathcal{D}_E(U)$.

Considérons $x \cap_{PE} y$.

Soit $\sigma \subseteq_{PE} x \cap_{PE} y$ tel que $\text{Card}(\sigma)$ finie $\sigma \subseteq_{PE} x$ et $\sigma \subseteq_{PE} y$.

$x, y \in \mathcal{D}_E \Rightarrow R\sigma \in x$ et $R\sigma \in y$; d'où $R\sigma \in x \cap_{PE} y$

□

Proposition 7. $\mathcal{D}_E(U)$ est un treillis complet algébrique pour $\sqsubseteq_E$.

Preuve.

$\mathcal{D}_E(U)$ est un treillis

Soit $d_1, d_2 \in \mathcal{D}_E(U)$.

D'après la proposition 6 d_1 et d_2 possèdent un plus grand minorant $d_1 \cap_{PE} d_2$.
Nous noterons $d_1 \cap_E d_2$ ce plus grand minorant dans $\mathcal{D}_E(U)$.

Soit à présent $d_1 \cup_{PE} d_2$.

$d_1 \cup_{PE} d_2$ est le plus petit majorant de d_1 et d_2 dans PPE mais il n'est pas nécessairement clos par réunions finie. Cependant le plus petit majorant de d_1 et d_2 dans $\mathcal{D}_E(U)$ doit appartenir à la même classe d'équivalence que $d_1 \cup_{PE} d_2$. Il s'agit donc de l'élément maximum de cette classe.

Nous noterons $d_1 \cup_E d_2$ le plus petit majorant de d_1 et d_2 dans $\mathcal{D}_E(U)$.

$\mathcal{D}_E(U)$ est complet.

Soit D une partie dirigée de $\mathcal{D}_E(U)$.

Soit $\bigcup_{PE} D = \{s / \exists d \in D \text{ tel que } s \in d\}$ d'où $d \subseteq \bigcup_{PE} D \forall d \in D$.

$\bigcup_{PE} D$ est clos par union finie. En effet,

Soit σ tel que $\sigma \subseteq \bigcup_{PE} D$ et $\text{Card}(\sigma)$ finie.

$\forall s \in \sigma, \exists d(s) \in D$ tel que $s \in d(s)$, σ étant de cardinalité fini,

$\bigcup_{s \in \sigma} d(s)$ existe et appartient à D . $R\sigma \in \bigcup_{PE} D$ car les éléments de D appartiennent à $\mathcal{D}_E(U)$. D'où $R\sigma \in \bigcup_{PE} D$ car $\bigcup_{s \in \sigma} d(s) \subseteq \bigcup_{PE} D$.

Il est clair que $\bigcup_{PE} D$ est la borne supérieure de D .

Nous noterons $U_E D$ la borne supérieure d'une partie dirigée de $\mathcal{D}_E(U)$.

$\mathcal{D}_E(U)$ est algébrique

Soit $\mathcal{B}_E(U) = \{d / d \in \mathcal{D}_E(U) \text{ et } \text{Card}(d) \text{ finie}\}$

Soit $\delta \in \mathcal{B}_E(U)$ et D une partie dirigée de $\mathcal{D}_E(U)$ telle que $\delta \sqsubseteq_E \bigcup_E D$.

D'après la proposition 5 $\delta \subseteq_{PE} \bigcup_E D = \{s / \exists d \in D \text{ tel que } s \in d\}$

$\forall s \in \delta, \exists d(s) \in D \text{ tel que } s \in d(s)$

$\bigcup_E d(s)$ appartient à D et nous avons $\delta \subseteq_{PE} \bigcup_{s \in \delta} \bigcup_E d(s)$ ce qui entraîne

$\delta \sqsubseteq_E \bigcup_{s \in \delta} \bigcup_E d(s)$. S est donc fini.

Soit, à présent $d \in \mathcal{D}_E(U)$ et $\Delta(d) = \{\delta \in \mathcal{B}_E(U) / \delta \sqsubseteq_E d\}$
 $\Delta(d)$ est une partie dirigée car, soit $\delta_1, \delta_2 \in \Delta(d)$

$$\delta_1 \sqsubseteq_E d_1 \quad \delta_2 \sqsubseteq_E d \implies \delta_1 \cup_E \delta_2 \sqsubseteq_E d$$

car $\mathcal{D}_E(U)$ est un treillis.

De plus $\bigcup_E \Delta(d) \sqsubseteq_E d$.

$\forall s \in d, \exists \delta \in \Delta(d)$ tel que $s \in \delta$. Il suffit de prendre $\delta = \{s\}$, d'où

$$\bigcup_E \Delta(d) = \bigcup_{PE} \Delta(d) \sqsubseteq d$$

$\bigcup_E \Delta(d) = d$ ce qui achève la démonstration.

$\mathcal{D}_E(U)$ possède un élément minimum : la famille vide et un élément maximum constitué par PE .

II

Constatons que, en vertu de la proposition 5, $\mathcal{D}_E(U)$ est un sous-treillis complet, algébrique, pour la relation d'inclusion $\subseteq_{PE}$, du treillis formé par PPE muni de la relation d'inclusion $\subseteq_{PE}$.

De plus si nous notons $\bigcirc_U$, l'opération qui à tout élément d de PPE associe l'élément maximum de la classe d'équivalence de d pour $\mathbb{L}_E$, $\bigcirc_U$ est une clôture. Nous avons, en effet :

$$- d \subseteq_{PE} \bigcirc_U(d) \text{ et } \bigcirc_U(\bigcirc_U(d)) = \bigcirc_U(d)$$

$$- d_1 \subseteq_{PE} d_2 \Rightarrow \bigcirc_U(d_1) \subseteq_{PE} \bigcirc_U(d_2)$$

- en vertu de la proposition 6, $\mathcal{D}_E(U)$ est clos par intersection.

$\mathcal{D}_E(U)$ est l'image de PPE par une clôture. Or, nous disposons d'un certain nombre de résultats sur la structure de l'image d'un ensemble tel que PPE par des retracts, clôtures ou projections.

Ce sont ces résultats que nous allons énoncer à présent. Ils nous permettront de voir pourquoi le caractère fini de l'opération $\bigcirc_U$ est indispensable, comment étendre la définition de $\mathbb{L}_E$ par l'utilisation d'autres opérations que $\bigcirc_U$, et nous conduiront à modifier la définition de $\mathbb{L}_E$.

ENSEMBLE DES FAMILLES DE SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE

Les familles de sous-ensembles d'un ensemble E sont elles-même des sous-ensembles. Nous pouvons munir l'ensemble de ces familles d'une structure de treillis pour la relation d'inclusion $\subseteq$, analogue à la structure de treillis dont Scott a doté l'ensemble des parties de N .

Il s'agit d'une structure relativement bien connue. La plupart des résultats que nous énonçons dans la suite, sous une forme adaptée à PPE, ont été donnés par Scott dans "Data-types as Lattices" à propos de PN, sauf le résultat sur les projections et par L-E Sanchis dans "Data-types as Lattices, retracts, closures and projections" dans le cas d'ensembles plus généraux que PN mais sous une forme différente de la notre, due à l'introduction, par Sanchis de couples d'applications constituant une représentation. Nous renvoyons le lecteur aux rappels mathématiques que nous avons faits dans le chapitre I.

Théorème 1. PPE muni de la relation d'inclusion $\subseteq_{PE}$ est un treillis complet algébrique.

II

Pour tout ensemble E, nous noterons :

- $\mathcal{D}_E$, le treillis constitué par PPE muni de la relation $\subseteq_{PE}$
- $\mathcal{B}_E$, l'ensemble des éléments finis ou isolés de $\mathcal{D}_E$. Les éléments de $\mathcal{B}_E$ sont les familles de cardinalité finie.
- pour tout $d \in \mathcal{D}_E$ nous noterons :

$$\Delta(d) = \{\delta \in \mathcal{B}_E / \delta \subseteq_{PE} d\}$$

$\Delta(d)$ est de façon évidente une partie dirigée et sa limite $\cup_{PE} \Delta(d)$ égale d.

$\mathcal{D}_E$ possède un élément minimum constitué par la famille vide, que nous noterons $\perp_E$ et un élément maximum constitué par PE lui-même et que nous noterons $\top_E$. Remarquons que si E est de cardinalité dénombrable, $\mathcal{B}_E$ ne sera pas dénombrable. Il aura la puissance du continu.

Produit cartésien de deux treillis de familles de sous-ensembles

Soit E et F deux ensembles : $\mathcal{D}_E$ et $\mathcal{D}_F$ les treillis de familles de sous-ensembles correspondants. Le produit cartésien de E et F, $E \times F$, permet de constituer le treillis $\mathcal{D}_{E \times F}$ constitué par $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E \times F))$ muni de la relation d'inclusion sur les familles de sous-ensembles de $E \times F$. Mais nous pouvons aussi considérer l'ensemble des couples (d, d') où $d \in \mathcal{D}_E$ et $d' \in \mathcal{D}_F$. Il est facile de munir cet ensemble de couples d'une relation d'ordre partielle notée $\subseteq_{P(E,F)}$ définie par :

Soit $d_1, d'_1 \in \mathcal{D}_E, d_2, d'_2 \in \mathcal{D}_F$

$$(d_1, d'_1) \leq_{P(E,F)} (d_2, d'_2) \text{ si } d_1 \leq_{PE} d'_1 \text{ et } d_2 \leq_{PF} d'_2$$

l'ensemble des couples (d, d') muni de cette relation d'ordre forme un treillis complet algébrique dont l'élément minimum est le couple $(\perp_E, \perp_F)$, l'élément maximum (τ_E, τ_F) et l'ensemble des éléments finis $B_{E,F}$ est constitué par les couples (δ, δ') où $\delta \in B_E$ et $\delta' \in B_F$.
 $\mathcal{D}_E \times \mathcal{D}_F$ est un sous-treillis de $\mathcal{D}_{E \times F}$.

Ensemble des applications continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_F$.

Une application f de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_F$ est continue si et seulement si pour toute partie dirigée D de $\mathcal{D}_E$, $f(\cup_{PE} D) = \cup_{PF} f(D)$ où

$$f(D) = \{f(d) / d \in D\}$$

Cependant, $\mathcal{D}_E$ et $\mathcal{D}_F$ étant algébriques, nous pouvons donner une définition équivalente plus commode.

Proposition 8. Une application f d'un ordre partiel complet algébrique $(X, \leq_X)$ dans un autre $(Y, \leq_Y)$, est continue si et seulement si pour tout $x \in X$, le sous-ensemble de Y défini par $\{f(u) / u \leq_X x \text{ et } u \text{ fini}\}$ est une partie dirigée de Y et $\vee_Y \{f(u) / u \leq_X x \text{ et } u \text{ fini}\} = f(x)$.

Preuve.

$$\text{Soit } x \in X \text{ et } \Delta(x) = \{u / u \leq_X x, u \text{ fini}\}.$$

Nous savons que $\Delta(x)$ est une partie dirigée de X et que $\vee_X \Delta(x) = x$.

Si f est continue, il est clair que $f(x) = f(V_X \Delta(x)) = V_Y f(\Delta(x))$.

Montrons la réciproque :

f est croissante

En effet, soit $x, x' \in X$ tels que $x \leq_X x'$

$\forall u \in \Delta(x) \quad u \leq_X x \leq_X x' \text{ c'est à dire } \Delta(x) \subseteq_{PPE} \Delta(x')$.

Par hypothèse $f(x) = V_Y f(\Delta(x))$ et $f(x') = V_Y f(\Delta(x'))$

$\Delta(x) \subseteq_{PPE} \Delta(x') \Rightarrow V_Y f(\Delta(x)) \leq_Y V_Y f(\Delta(x'))$ c'est à dire $f(x) \leq_Y f(x')$

f est continue

Soit $x \in X$ et $\Delta(x) = \{u / u \leq_X x, u \text{ fini}\}$

Par hypothèse $f(\Delta(x))$ est une partie dirigée de Y dont la limite est $f(x)$.

Soit Z une partie dirigée de X telle que $V_X Z = x$.

$f(Z)$ est une partie dirigée de Y car f est croissante et $V_Y f(x) \leq_Y f(x)$.

Pour tout élément $v \in f(\Delta(x)) \quad \exists u \in \Delta(x)$ tel que $f(u) = v$, u étant fini

$u \leq_X x = V_X Z \Rightarrow \exists x'(u) \in Z$ tel que $u \leq_X x'(u)$ d'où nous tirons

$f(u) = v \leq_Y f(x'(u)) \leq_Y V_Y f(Z)$, ce qui entraîne $V_Y f(\Delta(x)) \leq_Y V_Y f(Z)$.

Comme nous avons déjà $V_Y f(Z) \leq_Y V_Y f(\Delta(x)) = f(x)$, nous pouvons conclure à l'égalité et à la continuité de f .

II

Dans la proposition 8, "l'hypothèse $\{f(u) / u \in \Delta(x)\}$ est une partie dirigée", peut être remplacée par l'hypothèse " f est croissante sur l'ensemble des éléments finis de X ". Cette hypothèse assure l'existence de $V_Y \{f(u) / u \in \Delta(x)\}$ pour $x \in X$.

Dans le cas où tout sous-ensemble de Y admet une borne supérieure, cette hypothèse peut être supprimée. C'est précisément le cas des treillis tels que $\mathcal{D}_E$ pour lesquels la proposition 8 s'énonce simplement

Proposition 8 bis. Une application d'un treillis $\mathcal{D}$ dans un autre $\mathcal{D}$ est continu si et seulement si $\forall d \in \mathcal{D}_E, f(d) = \bigvee_{PF} f(\Delta(d))$

□

Corollaire. Un élément d de $\mathcal{D}_E$ est point fixe d'une application continue f de $\mathcal{D}_E$ dans lui-même si et seulement si $d = \bigvee_{PE} f(\Delta(d))$

□

Il est bien connu que l'ensemble des applications continues d'un treillis complet algébrique dans un autre est lui-même un treillis complet algébrique (chapitre I, théorème 1).

Nous noterons $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_F]$, le treillis des applications continues de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_F$ pour une relation d'ordre notée $\leq$ définie par :

$$f, g \in [\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_F] \quad f \leq g \text{ si et seulement si } f(d) \leq g(d) \quad \forall d \in \mathcal{D}_E$$

Nous noterons $\bigvee_{E,F} H$ la borne supérieure d'une partie dirigée H de $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_F]$.

L'ensemble des éléments finis de $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_F]$ est constitué par des applications de la forme F_U où U est un ensemble fini de couples.

$$U = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)\} \quad u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathcal{B}_E, \quad v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathcal{B}_F$$

$$F_U(d) = \begin{cases} \bigwedge_F d & \text{si } \forall i \in [1, n] \quad u_i \not\leq_{PE} d \\ v_{k_1} \vee_{PF} v_{k_2} \vee_{PF} \dots \vee_{PF} v_{k_p} & \text{si } u_{k_1} \leq_{PE} d, \\ & u_{k_2} \leq_{PE} d, \dots, u_{k_p} \leq_{PF} d \end{cases}$$

Application d'un produit cartésien d'ordres partiels complets algébriques dans un ordre partiel complet algébrique

Puisqu'il est possible de doter un produit cartésien d'ordres partiels complets algébriques d'une structure d'ordre partiel complet algébrique, il est également possible de définir des applications continues d'un tel produit cartésien dans un ordre partiel complet algébrique.

Dans ce cas, la continuité se ramène à la continuité par rapport à chacune des variables prises séparément.

En particulier $\cup_{PE}$ et $\cap_{PE}$ qui sont des applications de $\mathcal{D}_E \times \mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ sont continues.

Applications fonctionnelles

Tout ce qui a été dit à propos des applications d'un ordre partiel complet algébrique dans un autre reste valable pour les applications fonctionnelles. La notion de continuité pour les fonctionnelles, se définit d'une manière similaire à celle des applications.

Proposition 9. *L'opération de composition des applications est continue.*

Preuve.

Soit $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$, $(Z, \leq_Z)$, trois ordres partiels complets algébriques ; $[X \rightarrow Y]$, $[Y \rightarrow Z]$, $[X \rightarrow Z]$, les ensembles d'applications continues associés.

Soit G , une partie dirigée de $[Y \rightarrow Z]$ et H une partie dirigée de $[X \rightarrow Y]$.

Il faut montrer que $g_o(\gamma_{X,Y} H) = \gamma_{X,Z} \{g \circ h / h \in H\}$ et que $(\gamma_{Y,Z}) \circ h = \gamma_{X,Z} \{g \circ h / g \in G\}$

Soit $d \in X$

$$\begin{aligned} g \circ (\gamma_{X,Y} H) d &= g \circ (\gamma \{h/h \in H\}) (d) = g(v_Y \{h(d) / h \in H\}) \\ &= v_Z \{g(h(d)) / h \in H\} = \gamma_{X,Z} \{g \circ h / h \in H\} (d) \end{aligned}$$

Ceci parce que $\forall g \in G$, g est continue.

$$\begin{aligned} \text{De même } (\gamma_{Y,Z} G) \circ h(d) &= ((\gamma_{Y,Z} \{g / g \in G\}) \circ h)(d) = v_Z \{g(h(d)) / g \in G\} \\ &= \gamma_{X,Z} \{g \circ g / g \in G\} (d) \end{aligned}$$

II

Points fixes et clôtures

Nous avons vu, dans le chapitre I, que les points fixes des retracts jouent un rôle fondamental dans la définition de la notion de type d'objet donnée par Scott. Pour nous, ce sont les points fixes des clôtures qui vont jouer un rôle important.

Considérons, par exemple un ensemble E et le treillis $\mathcal{D}_E$ correspondant. Nous pouvons définir, à partir de l'opération $\cup_E$ d'union entre deux sous-ensembles de E , une application partielle de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ en posant

$$\begin{aligned} \bar{u}_E(\{s\}) &= \{s\} \text{ où } \{s\} \text{ est un élément de cardinalité 1 de } \mathcal{D}_E \\ \bar{u}_E(\{s_1, s_2\}) &= \{s_1 \cup_E s_2\} \text{ où } \{s_1, s_2\} \text{ est de cardinalité 2} \\ \bar{u}_E(d) &= \perp_E \text{ si Card}(d) \neq 1 \text{ ou } 2 \end{aligned}$$

Dans la construction du treillis $\mathcal{D}_E(U)$ donnée au début de ce chapitre, nous avons fait jouer un rôle à des éléments d de PPE tels que $\forall \delta \subseteq_{PE} d$ tel que $\text{Card}(\delta) \leq 2$ $\bar{u}_E(\delta) \subseteq_{PE} d$.

Soit f une application de E dans D . Si nous remplaçons E par une approximation constituée par un élément de PPE, il pourra être intéressant que $\forall s \in PPE$, $f(s) \in PPE$.

De même si f est une application de $\overbrace{E \times E \dots \times E}^n$ dans E .

Considérons une application $g \in [\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$. Si d est un point fixe de g $\forall \delta \in \Delta(d) \quad g(\delta) \subseteq_{PE} d$ mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Nous dirons alors que d est clos pour g .

Définition 2. Un élément d de $\mathcal{D}_E$ est clos pour une application g appartenant à $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$ si $g(d) \subseteq_{PE} d$.

II

Pour tout élément $d \in \mathcal{D}_E$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}_E$ clos pour g et supérieurs à d possède une borne inférieure. Cette borne inférieure peut être obtenue par intersection de tous les éléments de $\mathcal{D}_E$ clos pour g et supérieurs à d mais il peut être aussi construit par un procédé analogue à celui de la construction du plus petit point fixe d'une application continue.

Proposition 10. Si g est une application appartenant à $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$ telle que $\forall d \in \mathcal{D}_E, \quad d \subseteq_{PE} g(d)$ alors l'application Y de $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E] \times \mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}$ définie par $Y(g, d) = \cup_{PE} \{g^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\}$ est continue en d .

Preuve.

Pour g donné, appartenant à $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$, Y est une application de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ dont il faut montrer la continuité.

D'après l'hypothèse faite sur g $d \subseteq_{PE} g(d) \Rightarrow g^n(d) \subseteq_{PE} g^{n+1}(d)$
 $\{g^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\}$ est une partie dirigée qui a une borne supérieure égale à $\cup_{PE} \{g^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\}$.

Y est croissante

g étant continue $g(d) \subseteq_{PE} g(d')$ et $\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad g^n(d) \subseteq_{PE} g^n(d')$

$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad g^n(d) \subseteq_{PE} g^n(d') \subseteq_{PE} \cup_{PE} \{g^n(d') / n \in \mathbb{N}^+\}$

d'où nous tirons $\cup_{PE} \{g^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq_{PE} \cup_{PE} \{g^n(d') / n \in \mathbb{N}^+\}$
 c'est à dire $Y(g, d) \subseteq_{PE} Y(g, d')$.

Y est continue

Il faut, pour cela, en vertu de la proposition 6 bis que

$$Y(g, u_{PE} \Delta(d)) = u_{PE} \{Y(g, \delta) / \delta \in \Delta(d)\} \quad \forall d \in \mathcal{D}_E$$

Soit $v \in \mathcal{D}_E$ tel que $v \supseteq_{PE} u_{PE} \{Y(g, \delta) / \delta \in \Delta(d)\}$.

Nous avons alors $Y(g, \delta) \subseteq_{PE} v \quad \forall \delta \in \Delta(d)$ c'est à dire que

$u_{PE} \{g^n(\delta) / n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq_{PE} v \quad \forall \delta \in \Delta(d)$ d'où nous tirons $g^n(\delta) \subseteq_{PE} \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \forall \delta \in \Delta(d)$. Nous pouvons donc permuter les limites

$$g^n(\delta) \subseteq_{PE} \forall \delta \in \Delta(d), n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow u_{PE} \{g^n(\delta) / \delta \in \Delta(d)\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

c'est à dire $u_{PE} \{u_{PE} \{g^n(\delta) / \delta \in \Delta(d) / n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq_{PE} v \quad Y(g, u_{PE} \Delta(d)) \subseteq_{PE} v$

Tout majorant de $u_{PE} Y(g, \Delta(d))$ est aussi un majorant de $Y(g, u_{PE} \Delta(d))$

$$u_{PE} Y(g, \Delta(d)) = \cap_{PE} \{v/v \supseteq_{PE} u_{PE} Y(g, \Delta(d))\} \supseteq_{PE} Y(g, u_{PE} \Delta(d))$$

Or en raison du caractère croissant de Y , $u_{PE} Y(g, \Delta(d)) \subseteq_{PE} Y(g, u_{PE} \Delta(d))$

Y est donc continu en d .

□

Si $d = \perp_E$, $Y(g, d)$ donne, $\forall g \in [\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$ le plus petit point fixe de g .

Proposition 11. Si g est une application appartenant à $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$ telle que $\forall d \in \mathcal{D}_E \quad d \subseteq_{PE} g(d)$ alors l'application Y de $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E] \times \mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ définie par $\forall d \in \mathcal{D}_E \quad Y(g, d) = u_{PE} \{g^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\}$, est une clôture continue en d .

Preuve.

D'après la proposition 10, pour g donnée, Y est une application de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$.

De plus, il est clair que $d \subseteq_{PE} Y(g,d)$ car $d \subseteq_{PE} g(d)$ et $g(d) \in \{g^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\}$

Il reste à montrer que Y est un retract.

$$d \subseteq_{PE} Y(g,d) \quad \forall d \in \mathcal{D}_E \implies Y(g,d) \subseteq_{PE} Y(g,Y(g,d)).$$

$$Y(g,Y(g,d)) = Y(g, u_{PE} \{g^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\}) = u_{PE} \{Y(g,g^n(d)) / n \in \mathbb{N}^+\}.$$

Ceci du fait de la continuité de Y en d .

$$Y(g,Y(g,d)) = u_{PE} \{u_{PE} \{g^{n \cdot k}(d) / k \in \mathbb{N}^+\} / n \in \mathbb{N}^+\} = u_{PE} \{g^{n'}(d) / n' \in \mathbb{N}^+\}$$

d'où $Y(g,Y(g,d)) = Y(g,d)$. Y est bien un retract en d .

□

Proposition 12. Si g est une application appartenant à $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$ telle que $d \subseteq_{PE} g(d)$ pour tout $d \in \mathcal{D}_E$ alors d est un point fixe de g si et seulement si $d = Y(g,d)$.

Preuve.

Si d est un point fixe de g alors $g^n(d) = d \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$ d'où $Y(g,d) = d$.

Réciproquement $g(Y(g,d)) = Y(g,d)$.

En effet, $g(Y(g,d)) = g(u_{PE} \{g^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\}) = u_{PE} \{g^{n+1}(d) / n \in \mathbb{N}^+\} = Y(g,d)$

Si $Y(g,d) = d$ nous avons alors $g(d) = g(Y(g,d)) = Y(g,d) = d$.

□

Proposition 13. Si g est une application appartenant à $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$, la borne inférieure de l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}_E$ clos pour g , supérieurs à un élément d de $\mathcal{D}_E$, est égal à $Y(I_Y g, d)$ où I est l'application identique de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$.

Preuve.

$I\gamma g$ est une application continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$. Nous avons, en effet $(I\gamma g)(d) = d \cup_{PE} g(d)$ et $\cup_{PE}$ est continue. De plus, nous avons $\forall d \in \mathcal{D}_E$ $d \cup_{PE} (I\gamma g)(d)$. Considérons, pour $d \in \mathcal{D}_E$, $Y(I\gamma g, d)$. D'après la proposition 12, $Y(I\gamma g, d)$ est un point fixe de $I\gamma g$ c'est à dire que $Y(I\gamma g, d) \cup_{PE} g(Y(I\gamma g, d)) = Y(I\gamma g, d)$ ce qui entraîne $g(Y(I\gamma g, d)) \subseteq_{PE} Y(I\gamma g, d)$ $Y(I\gamma g, d)$ est donc clos pour g .

Montrons que c'est la borne inférieure des éléments de $\mathcal{D}_E$ clos pour g , supérieurs à d .

Soit $d' \in \mathcal{D}_E$ $d \subseteq_{PE} d'$, tel que $g(d') \subseteq_{PE} d'$. Nous avons donc $d' \cup_{PE} g(d') = d' = (I\gamma g)(d')$. La proposition 11 entraîne que $Y(I\gamma g, d') = d'$. Vu la croissance de Y , $d \subseteq_{PE} d' \Rightarrow Y(g, d) \subseteq_{PE} Y(g, d') = d'$.

II

Théorème 2. L'application C de $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E] \times \mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ définie par $C(g, d)$ $C(g, d) = Y(I\gamma g, d)$ est une clôture continue en g .

Preuve.

Soit G une partie dirigée de $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$ telle que $G = g'$

C est croissante

Soit $g, g' \in [\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$ $g \leq g'$

$I\gamma g \leq I\gamma g' \Rightarrow \forall d \in \mathcal{D}_E$ $(I\gamma g)(d) \subseteq_{PE} (I\gamma g')(d)$

d'où $C(g, d) = \cup_{PE} \{(I\gamma g)^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq_{PE} \{(I\gamma g')^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\} = C(g', d)$.

C est continue

Il faut vérifier que $C(\gamma G, d) = \gamma\{C(h, d) / h \in G\}$ $\forall d \in \mathcal{D}_E$, pour toute partie dirigée $G \subseteq [\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$

$\gamma\{C(h, d) / h \in G\} = \cup_{PE} \{C(h, d) / h \in G\} = \cup_{PE} \{Y(I\gamma h, d) / h \in G\}$.

Soit $v \in \mathcal{D}_E$ tel que $u_{PE} \{Y(Ih, d) / h \in G\} \subseteq_{PE} v$. Ceci entraîne que $\forall h \in G \quad Y(Ih, d) \subseteq_{PE} v$ c'est à dire $\forall h \in G \quad u_{PE} \{(Ih)^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq_{PE} v$

$$\forall h \in G, \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad (Ih)^n(d) \subseteq_{PE} v$$

ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^+, \forall h \in G \quad (Ih)^n(d) \subseteq_{PE} v$

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad \{(I\gamma(G))^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq_{PE} v$$

d'où $Y(I\gamma(G), d) \subseteq_{PE} v$.

Nous avons $u_{PE} \{Y(Ih, d) / h \in G\} \subseteq_{PE} Y(I\gamma(G), d)$

or, d'après ce qui précède :

$$\forall d \in \mathcal{D}_E \quad C(G, d) \subseteq_{PE} \cap_{PE} v = u_{PE} \{c(h, d) / h \in G\} \cup_{PE} \{c(h, d) / h \in G\} \subseteq_{PE} v$$

D'où $C(\gamma G, d) = u_{PE} \{C(h, d) / h \in G\}$.

C est continue en g.

C est une clôture

$$\forall d \in \mathcal{D}_E \quad g(d) \subseteq_{PE} C(g, d).$$

Il reste à montrer que C est un retract.

Soit h l'application appartenant à $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$ définie par :

$$h(d) = C(g, d)$$

Nous avons $I \leq h$ d'où $I\gamma h = h$ et $C(h, d) = Y(I\gamma h, d) = Y(h, d)$

$$Y(h, d) = u_{PE} \{h^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\}.$$

$$h(d) = Y(Ig, d).$$

D'après la proposition 11, Y est un retract de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$, d'où
 $h^n(d) = h(d) \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$ et $Y(h,d) = h(d)$.

Par conséquent $C(h,d) = h(d)$. C est bien un retract.

II

En tant qu'application de $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E] \times \mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$, C est continue par rapport à chacun de ses deux paramètres. C'est aussi une clôture par rapport à chacun de ses deux paramètres. Ce résultat est attribué par Scott [25] à Peter Hancock et Per Martin Löf.

Exemple.

Nous avons introduit au début du paragraphe "points fixes et clotures" l'application de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ $\bar{u}_E$ défini par :

$$\bar{u}_E(d) = \begin{cases} 1_E & \text{si Card}(d) \neq 1 \text{ ou } \neq 2 \\ \{s\} & \text{si } d = \{s\} \\ \{s_1 \cup s_2\} & \text{si } d = \{s_1 \cup_E s_2\} \end{cases}$$

Considérons l'application partielle de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$: $\bar{u}'_E$ défini par :

$$\bar{u}'_E(d) = \begin{cases} 1_E & \text{si Card}(d) \neq 2 \\ \{s_1 \cup_E s_2\} & \text{si } d = \{s_1, s_2\} \text{ où } s_1, s_2 \subseteq_E E \end{cases}$$

Soit $\hat{u}_E$ l'application de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ défini par

$$\hat{u}_E(d) = u_{PE} \{ \bar{u}'_E(\delta) / \delta \in \Delta(d) \}$$

$\hat{U}_E$ est croissante. Montrons qu'elle est continue.

Nous avons $u_{PE} \{ \hat{U}_E(\delta) / \delta \in \Delta(d) \} \subseteq_{PE} \hat{U}_{PE}(d)$ car $\hat{U}_E$ est croissante.

Soit u tel que $u \subseteq_{PE} \hat{U}_E(d)$, u de cardinalité 1. D'après le procédé de fabrication de $\hat{U}_E(d)$. Il existe u' de cardinalité 2, tel que $u' \subseteq_{PE} d$ et $\bar{U}'_E(u') = u$. Ce qui entraîne $\exists v \in \Delta(d)$ tel que $u' \subseteq_{PE} v$ et $\bar{U}_E(u') = \bar{U}'_E(u') = u$ avec $u \subseteq_{PE} \hat{U}_E(v)$

$\forall u$ tel que $u \subseteq_{PE} \hat{U}_E(d)$ et $\text{Card}(u) = 1$, $u \subseteq_{PE} u_{PE} \{ \hat{U}_E(v) / v \in \Delta(d) \}$
 $\hat{U}_E$ est donc continue. Nous pouvons associer à $\hat{U}_E$ une application de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ définie par

$$\textcircled{U} (d) = Y(I\gamma\hat{U}_E, d) = C(\hat{U}_E, d)$$

D'après les propositions 11, 13 et le théorème 2, $\textcircled{U}$ est une clôture continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$. Il est clair que $\forall d \in \mathcal{D}_E$, $\forall \delta \in \Delta(d)$, $R\delta \in \textcircled{U} (d)$.

$\textcircled{U} (d)$ est clos par réunion finie.

$\textcircled{U}$ est la même opération que celle que nous avons fait intervenir dans la construction du treillis $\mathcal{D}_E(U)$.

Ensemble des points fixes d'une application continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$

L'ensemble des points fixes d'une application continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ constitue un sous-ensemble de $\mathcal{D}_E$ et l'on peut s'interroger sur la structure de ce sous-ensemble. Nous avons donné dans les rappels mathématiques du chapitre I quelque résultats à ce sujet.

Proposition 14. L'ensemble des points fixes d'une application continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ est un sous-treillis complet de $\mathcal{D}_E$

Proposition 15. L'ensemble de points fixes d'un retract continu de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ est un sous-treillis complet injectif de $\mathcal{D}_E$ dont les éléments injectifs sont les images des éléments finis de $\mathcal{D}_E$ par le retract.

II

Nous ne redémontrerons pas ces deux résultats très connus.
(Chapitre I, Proposition 1 et Théorème 2).

Par contre nous redémontrerons les quatres résultats suivants :

Théorème 3. L'ensemble des points fixes d'une clôture continue de $\mathcal{D}_E$ dans lui-même, est sous-treillis complet algébrique de $\mathcal{D}_E$ dont les éléments finis sont les images des éléments finis de $\mathcal{D}_E$ par la clôture.

Preuve.

Soit g une clôture continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$.

Remarquons d'abord qu'une clôture est un retract. L'ensemble des points fixes de g se confond avec l'image de $\mathcal{D}_E$ par g .

Soit $\mathcal{D}_E(g)$ cette image.

D'après la proposition 15, $\mathcal{D}_E(g)$ est un sous-treillis complet de $\mathcal{D}_E$. Il reste à démontrer l'algébricité de $\mathcal{D}_E(g)$.

Soit $\mathcal{B}_E(g) = \{g(b) / b \in \mathcal{B}_E\}$

Soit $v \in \mathcal{B}_E(g)$ et D tel que $u_{PE} D \exists_{PE} v \ D \subseteq_{PPE} \mathcal{D}_E(g) \exists u \in \mathcal{B}_E$ tel que $g(u)=v$ car $v \in \mathcal{B}_E(g)$ et $u \subseteq_{PE} v$, D étant aussi une partie dirigée de $\mathcal{D}_E$, $\exists d \in D$ tel que $u \subseteq_{PE} d$. Nous avons alors $g(u) \subseteq_{PE} g(d)$ car g est croissante. C'est à dire $v \subseteq_{PE} d$ car $v = g(u)$ et $g(d) = d$ du fait que $d \in \mathcal{D}_E(g)$. v est donc fini.

Soit à présent $d \in \mathcal{D}_E(g)$ et $\Delta'(d) = \{v \in B_E(g) / v \subseteq_{PE} d\}$
 $\Delta'(d)$ est l'image par g de $\Delta(d) = \{\delta \in B_E / \delta \subseteq_{PE} d\}$.
 g étant continue, nous avons :

$$g(u_{PE} \Delta(d)) = u_{PE} g(\Delta(d)) = u_{PE} \Delta'(d)$$

or $g(u_{PE} \Delta(d)) = g(d) = d$, d'où d est algébrique.

□

Remarquons que du fait des propriétés d'une clôture

$$d_1, d_2 \in \Delta_E(g) \Rightarrow d_1 \cap_{PE} d_2 \in \mathcal{D}_E(g)$$

$d_1 \cap_{PE} d_2$ qui est la borne inférieure de d_1 et d_2 dans $\mathcal{D}_E$ est aussi la borne supérieure de d_1 et d_2 dans $\mathcal{D}_E(g)$.

La borne supérieure de d_1 et d_2 dans $\mathcal{D}_E$ est $d_1 \cap_{PE} d_2$ et d'après les propositions 12 et 13, $Y(g, d_1 \cup_{PE} d_2) = g(d_1 \cup d_2)$ est la borne supérieure de d_1 et d_2 dans $\mathcal{D}_E(g)$.

Théorème 4. Tout sous-treillis de $\mathcal{D}_E$, complet, algébrique, clos pour l'intersection, est l'image de $\mathcal{D}_E$ par une clôture continue.

Preuve.

Soit D un sous-treillis complet, algébrique de $\mathcal{D}_E$, clos pour l'intersection.

Définissons une application g de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$, dont l'image soit D en posant :

$$\begin{aligned} g(d) &= \cap_{PE} d' \\ d' &\in \mathcal{D}_E \\ d &\subseteq_{PE} d' \end{aligned}$$

Du fait que D est fermée par intersection, $g(d) \in D$. Montrons que g est une clôture continue. Les éléments de D sont les points fixes de g .

De ce fait g est un retract. De plus $d \subseteq_{PE} g(d)$, $d_1 \subseteq_{PE} d_2 \Rightarrow d_1 \subseteq_{PE} g(d_2)$ et puisque $g(d_2) \in D$, $g(d_1) \subseteq_{PE} g(g(d_2)) = g(d_2)$: g est croissante, g est bien une clôture ; montrons qu'elle est continue.

Soit $d \in \mathcal{D}_E$ et $\Delta(d) = \{\delta / \delta \in \mathcal{B}_E \text{ et } \delta \subseteq_{PE} d\}$.

Considérons $g(\Delta(d))$. C'est une partie dirigée de D car g est croissante.

Sa limite $\cup_{PE} g(\Delta(d)) \in D$.

Soit $a \in D$ tel que $\cup_{PE} g(\Delta(d)) \subseteq_{PE} a$. Nous en tirons

$\delta \subseteq_{PE} g(\delta) \subseteq_{PE} a \quad \forall \delta \in \Delta(d)$. C'est à dire $\delta \subseteq_{PE} a \quad \forall \delta \in \Delta(d)$ d'où

$\cup_{PE} \Delta(d) \subseteq_{PE} a$ et $g(\cup_{PE} \Delta(d)) \cup_{PE} g(a) = a$ car $a \in D$. Nous avons

$g(\cup_{PE} \Delta(d)) \subseteq_{PE} \cup_{PE} \{a / a \supseteq_{PE} \cup_{PE} g(\Delta(d)), a \in D\}$ d'où

$g(\cup_{PE} \Delta(d)) \subseteq_{PE} \cup_{PE} g(\Delta(d))$.

D'après la croissance de g nous avons aussi :

$$\cup_{PE} g(\Delta(d)) \subseteq_{PE} g(\cup_{PE} \Delta(d))$$

D'où $\cup_{PE} g(\Delta(d)) = g(\cup_{PE} \Delta(d))$ g est continue.

II

Théorème 5. L'ensemble des points fixes d'une projection continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ est un sous-treillis de $\mathcal{D}_E$, complet, algébrique, fermé par réunion, dont les éléments finis sont les images des éléments finis de $\mathcal{D}_E$ par la projection.

Preuve.

Soit g une projection continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$.

De même que pour les clôtures, l'ensemble des points fixes de g se confond avec l'image de $\mathcal{D}_E$ par g .

Soit $\mathcal{D}_E(g)$ cette image.

$\mathcal{D}_E(g)$ est un treillis complet injectif car g est un retract.

Montrons qu'il est algébrique.

Soit $u \in \mathcal{B}_E$, considérons $g(u)$.

Soit D une partie dirigée de $\mathcal{D}_E(g)$ telle que $g(u) \subseteq_{PE} \cup_{PE} D$ u étant de cardinalité finie $g(u)$ l'est aussi car $g(u) \subseteq_{PE} u$, D est aussi une partie dirigée de $\mathcal{D}_E$. Il s'en suit qu'il existe $d \in D$ tel que $g(u) \subseteq_{PE} d$.

Soit, à présent $d \in \mathcal{D}_E(g)$ et $\Delta(d) = \{u \in \mathcal{B}_E / u \subseteq_{PE} d\}$

$$g(\cup_{PE} \Delta(d)) = g(d) = \cup_{PE} g(\Delta(d)) = \cup_{PE} \{g(u) / u \in \Delta(d)\}$$

Ceci du fait de la continuité de g . Or,

$$d = \cup_{PE} \{g(u) / u \in \Delta(d)\} \subseteq_{PE} \cup_{PE} \{g(u) / g(u) \subseteq_{PE} d \text{ et } u \in \mathcal{B}_E\} \subseteq_{PE} d.$$

D'où si nous posons $\mathcal{B}_E(g) = g(\mathcal{D}_E)$

$$d = \cup_{PE} \{v / v \in \mathcal{B}_E(g), v \subseteq_{PE} d\}$$

$\mathcal{D}_E(g)$ est algébrique et l'ensemble de ses éléments finis est constitué par l'image de $\mathcal{B}_E$ par g .

II

Remarquons que, du fait des propriétés des projections, $\forall d_1, d_2 \in \mathcal{D}_E(g)$ $d_1 \cup_{PE} d_2 \in \mathcal{D}_E(g)$. $\mathcal{D}_E(g)$ est fermé par union.

Théorème 6. Tout sous-treillis de $\mathcal{D}_E$, complet, algébrique, clos pour l'union, est l'image de $\mathcal{D}_E$ par une projection continue.

Preuve.

Soit $\mathcal{D}$ un sous-treillis de $\mathcal{D}_E$, complet, algébrique, clos pour l'union.

Définissons une application g de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ en posant :

$$\forall d \in \mathcal{D}_E \quad g(d) = \bigcup_{\substack{d' \in \mathcal{D} \\ d' \subseteq_{PE} d}} d'$$

$\mathcal{D}$ étant fermé par union, $g(d)$.

$g(\mathcal{D}_E) = D$. Les éléments de $\mathcal{D}$ sont les points fixes de g .

Nous avons $g(d) \subseteq_{PE} d$.

De plus si $d_1 \subseteq_{PE} d_2$ $\forall d' \in \mathcal{D}$ tel que $d' \subseteq_{PE} d_1$ alors $d' \subseteq_{PE} d_2$
d'où $g(d_1) \subseteq_{PE} g(d_2)$.

g est donc une projection. Montrons sa continuité.

Soit D une partie dirigée de $\mathcal{D}_E$.

Il faut montrer que :

$$g(\bigcup_{PE} D) = \bigcup_{PE} \{ \bigcup_{\substack{d' \subseteq_{PE} d \\ d' \in \mathcal{D}}} d' / d \in D \}$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{PE} \{ \bigcup_{PE} d' / d \in D \} &= \bigcup_{PE} \{ \bigcup_{PE} \{ d' / d' \subseteq_{PE} d, d' \in \mathcal{D} \} / d \in D \} \\ &= \bigcup_{PE} \{ \bigcup_{\substack{d' \subseteq_{PE} d \\ d' \in \mathcal{D}}} d' / d \in D \} \\ &= \bigcup_{PE} \{ d' / d' \subseteq_{PE} \bigcup_{PE} D, d' \in \mathcal{D} \} \\ &= g(\bigcup_{PE} D) \text{ d'après la définition de } g. \end{aligned}$$

g est donc continue.

II

APPLICATION

A

LA RELATION DE FINESSE $\sqsubseteq_E$

Rappelons la définition de $\sqsubseteq_E$

$d, d' \in \text{PPE}$ $d \sqsubseteq_E d'$ si $\forall s \in d, \exists \sigma \sqsubseteq_{\text{PE}} d'$ tel que $\text{Card}(\sigma)$ finie et $s = R\sigma$

Nous pouvons justifier à présent la restriction $\text{Card}(\sigma)$ finie.

Nous avons vu que, à partir de l'opération $\mathcal{D}_E$ d'union entre deux sous-ensembles de E , nous pouvons construire $\bigcirc$, clôture continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ telle que $\forall d \in \mathcal{D}_E$ et $\delta \sqsubseteq_{\text{PE}} d$ avec $\text{Card}(\delta)$ finie

$$R(\delta) \in \bigcirc(d)$$

L'image $\mathcal{D}_E(\bigcirc)$ de $\mathcal{D}_E$ par $\bigcirc$ est un sous-treillis complet algébrique de $\mathcal{D}_E$. Il s'agit précisément du treillis $\mathcal{D}_E(U)$ que nous avons introduit en début de ce chapitre.

Supposons que nous supprimions la restriction $\text{Card}(\sigma)$ finie. Considérons

$\bigcirc_U$: clôture de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ telle que $\forall d \in \mathcal{D}_E$, $\bigcirc_U(d)$ soit fermé par réunion quelconque.

$\bigcirc_U$ est de façon évidente une clôture :

$$\forall d_1, d_2 \in \mathcal{D}_E, \bigcirc_U(d_1) \subseteq_{PE} \bigcirc_U(d_2)$$

$$\forall d \in \mathcal{D}_E \quad d \subseteq_{PE} \bigcirc_U(d)$$

$$\bigcirc_U(\bigcirc_U(d)) = \bigcirc_U(d)$$

Sur les éléments finis de $\mathcal{D}_E$, $\bigcirc_U$ et $\bigcirc_U'$ coïncident

$$\forall \delta \in \mathcal{B}_E, \bigcirc_U(\delta) = \bigcirc_U'(\delta)$$

Soit $d \in \mathcal{D}_E$, nous devons avoir, si $\bigcirc_U$ est continue

$$\bigcirc_U(d) = \cup_{PE} \{ \bigcirc_U(\delta) / \delta \in \mathcal{B}_E, \delta \subseteq_{PE} d \}$$

égalité que nous pouvons réécrire $\bigcirc_U(d) = \cup_{PE} \{ \bigcirc_U(\Delta) / \delta \in \mathcal{B}_E, \delta \subseteq_{PE} d \}$ d'après la remarque faite plus haut.

Mais $\cup_{PE} \{ \bigcirc_U(\delta) / \delta \in \mathcal{D}_E, \delta \subseteq_{PE} d \} = \bigcirc_U(d)$

C'est à dire $\bigcirc_U(d) = \bigcirc_U(d)$ ce qui est impossible.

Si E est, par exemple, l'ensemble des entiers et d l'ensemble des singletons de N , $d = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \dots\}$, par réunion finie on obtient l'ensemble des parties finies de N tandis que par réunion quelconque on obtient PN .

$\bigcirc_U$ n'est pas continue et l'image de $\mathcal{D}_E$ par $\bigcirc_U$ n'est pas un treillis algébrique.

En fait $\bigcirc_U(\mathcal{D}_E)$ n'est même pas complet. En effet $\forall \delta \in \mathcal{B}_E, \bigcirc_U(\delta) = \bigcirc_U(\delta)$. Considérons une partie dirigée de $\mathcal{D}_E$. Soit Δ cette partie dirigée.

Sa borne supérieure $\cup_{PE} \Delta \in \mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ car $\cup_{PE} \Delta$ est fermé par réunion finie mais n'appartient pas à $\bigcirc_U(\mathcal{D}_E)$ bien que Δ soit aussi une partie dirigée de $\bigcirc_U(\mathcal{D}_E)$.

La méthode de construction de $\mathcal{D}_E(u)$ est générale.

Soit f une application appartenant à $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$, nous pouvons lui associer une clôture f définie par $f(d) = C(f, d)$. L'image de $\mathcal{D}_E$ par f que nous noterons $\mathcal{D}_E(f)$ est un sous-treillis complet algébrique de $\mathcal{D}_E$. Mais nous pouvons aussi définir à l'aide de f une relation de pré-ordre $\sqsubseteq_f$ entre éléments de PPE

$d_1, d_2 \in \text{PPE}$.

$d_1 \sqsubseteq_f d_2$ si $\forall s \in d_1, \exists \delta \sqsubseteq_{\text{PE}} d_2$ tel que $\text{Card}(\delta)$ finie et $\exists n \in \mathbb{N}^+$ tel que $s \in (I\gamma f)^n(\delta)$

L'ensemble des classes d'équivalences associées à $\sqsubseteq_f$ est isomorphe à $\mathcal{D}_E(f)$.

Proposition 16. Si f est une application continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$, la relation $\sqsubseteq_f$ définie par

$$\forall d_1, d_2 \in \text{PPE} \quad d_1 \sqsubseteq_f d_2 \text{ si}$$

$\forall s \in d_1, \exists \delta \sqsubseteq_{\text{PE}} d_2$ tel que $\text{Card}(\delta)$ est finie et $\exists n \in \mathbb{N}^+$ tel que $s \in (I\gamma f)^n(\delta)$, est une relation de pré-ordre sur PPE.

Preuve.

Tout d'abord, il est clair que $d \sqsubseteq_f d \quad \forall d \in \mathcal{D}_E$.

Soit $d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{D}_E$ tels que $d_1 \sqsubseteq_f d_2$ et $d_2 \sqsubseteq_f d_3$.

Remarquons d'abord que $d \sqsubseteq_f d' \iff d \sqsubseteq_{\text{PE}} C(f, d') \iff d \sqsubseteq_f d' \iff d \sqsubseteq_{\text{PE}} C(f, d)$ car $\forall s \in d$.

$\exists \delta \sqsubseteq_{\text{PE}} d'$ avec $\text{Card}(\delta)$ fini et $n \in \mathbb{N}^+$ tels que $s \in (I\gamma f)^n(\delta) \sqsubseteq_{\text{PE}} C(f, d')$.

Réciproquement si $d \sqsubseteq_{\text{PE}} C(f, d')$

$\forall s \in d, \{s\} \sqsubseteq_{\text{PE}} C(f, d') \iff \exists n \in \mathbb{N}^+$ tel que $\{s\} \sqsubseteq_{\text{PE}} (I\gamma f)^n(d')$

$(I\gamma f)^n$ étant continue, $\exists \delta$ tel que $\text{Card}(S)$ fini, $\delta \subseteq_{PE} d'$ tel que :

$$\{s\} \subseteq_{PE} (I\gamma f)^n(\delta)$$

$$d_1 \sqsubseteq_f d_2 \iff d_1 \subseteq_{PE} C(f, d_2)$$

$$d_2 \sqsubseteq_f d_3 \iff d_2 \subseteq_{PE} C(f, d_3)$$

C étant croissante $d_2 \subseteq_{PE} C(f, d_3) \implies C(f, d_2) \subseteq_{PE} C(f, C(f, d_3))$

or C est un retract $C(f, d_2) \subseteq_{PE} C(f, d_3)$.

D'où $d_1 \subseteq_{PE} C(f, d_3)$ et $d_1 \sqsubseteq_f d_3$.

□

Proposition 17. Si f est une application continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$, l'ensemble des classes d'équivalence associées à la relation de pré-ordre $\sqsubseteq_f$ est isomorphe au sous-treillis $\mathcal{D}_E(\textcircled{f})$ de $\mathcal{D}_E$.

Preuve.

Soit $d \in PPE$.

Considérons $C(f, d)$. Montrons d'abord que $C(f, d)$ est équivalent à d .

D'après le procédé de construction de $C(f, d)$, nous avons $d \sqsubseteq_f C(f, d)$.

Réciproquement, $\forall s \in C(f, d) \exists n \in \mathbb{N}^+$ tel que $s \in (I\gamma f)^n(d)$ et du fait de la continuité de $(I\gamma f)^n$, il existe $\delta \subseteq_{PE} d$ avec $\text{Card}(\delta)$ finie tel que $s \in (I\gamma f)^n(\delta)$

$$d_1 \sqsubseteq_f d_2 \implies d_1 \subseteq_{PE} C(f, d_2) \implies C(f, d_1) \subseteq_{PE} C(f, d_2)$$

Dans la classe d'équivalence d'un élément $d \in PPE$, $C(f, d)$ est l'élément maximum et de surcroît, il est le seul à être clos pour f car s'il existait d' tel que $d \sqsubseteq_f d'$ et $d' \sqsubseteq_f d$ avec d' clos pour g $d \sqsubseteq d' \implies C(f, d) \subseteq_{PE} C(f, d')$ or $C(f, d)$ est maximum.

A toute classe d'équivalence nous pouvons associer son élément maximum qui est clos pour f . C'est un élément de $\mathcal{D}_E(f)$.

De plus $d_1 \sqsubseteq_f d_2 \Rightarrow C(f, d_1) \subseteq_{PE} C(f, d_2)$ et $C(f, d_1) \subseteq_{PE} C(f, d_2) \Rightarrow d_1 \sqsubseteq_f d_2$ avec $C(f, d_1), C(f, d_2), C(f, d_2) \in \mathcal{D}_E(f)$.

Proposition 18. Toute application de PE^n dans PE^m est prolongeable en une application continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$.

Preuve.

Soit g une application de PE^n dans PE^m .

Nous pouvons définir une application partielle $\bar{g}$ de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ sur les éléments de $\mathcal{D}_E$ de cardinalité inférieure ou égale à n de la manière suivante :

Soit $\delta \in \mathcal{D}_E$ tel que $\text{Card}(\delta) \leq n$

A δ associons $K(\delta)$: l'ensemble de toutes les combinaisons avec répétition de m éléments pris parmi les n éléments de δ . Puis à tout élément $\eta \in K(\delta)$ associons l'ensemble $p(\eta)$ de ses permutations.

Soit $L(\delta) = \bigcup_{\eta \in K(\delta)} p(\eta)$

$L(\delta)$ est un ensemble de n -upples d'éléments de PE .

Posons $\bar{g}(\delta) = \bigcup_{PE} \{g(e_1, \dots, e_n) / (e_1, \dots, e_n) \in L(\delta)\}$

$\bar{g}(\perp_E) = \perp_E$. $\{g(e_1, \dots, e_n) / (e_1, \dots, e_n) \in L(\delta)\}$ n'est pas une partie dirigée de $\mathcal{D}_E$ mais dans $\mathcal{D}_E$, tout sous-ensemble possède une borne supérieure.

Soit, à présent $\hat{g}$: une application de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ définie par

$$\hat{g}(d) = \bigcup_{PE} \{\bar{g}(\delta) / \delta \subseteq_{PE} d \text{ et } \delta \in \mathcal{B}_E, \text{Card}(\delta) \leq n\}$$

$\hat{g}$ est croissante car si $d_1 \subseteq_{PE} d_2$ $\forall u \subseteq_{PE} d_1$ tel que $\text{Card}(u) \leq n$
 $u \subseteq_{PE} d_1 \Rightarrow u \subseteq_{PE} d_2 \Rightarrow \bar{g}(u) \subseteq_{PE} \hat{g}(d_2)$ d'où $\hat{g}(d_1) \subseteq_{PE} \hat{g}(d_2)$.

Demandons à présent la continuité de $\hat{g}$.

Soit $d \in \mathcal{D}_E$, et u tel que $\text{Card}(u) \leq n$

$u \subseteq_{PE} d \Rightarrow \exists \delta(u) \in \Delta(d)$ tel que $u \subseteq_{PE} \delta(u)$ car u est fini.

D'où nous tirons $\bar{g}(u) \subseteq_{PE} \hat{g}(\delta(u)) \subseteq u_{PE} \hat{g}(\Delta(d))$

or $\bar{g}(u) \subseteq_{PE} \hat{g}(d)$ d'après la définition de $\hat{g}$.

C'est à dire que $\forall u \subseteq_{PE} d$, $\text{Card}(u) \leq n$

$\bar{g}(u) \subseteq_{PE} \hat{g}(d)$ et $\bar{g}(u) \subseteq_{PE} u_{PE} \hat{g}(\Delta(d))$.

Or, g étant croissante $u_{PE} \hat{g}(\Delta(d)) \subseteq_{PE} \hat{g}(d)$ et

$u_{PE} \{\bar{g}(u) / u \subseteq_{PE} d, \text{Card}(u) \leq n\} = \hat{g}(d)$

$\hat{g}$ est donc continue.

□

A toute application g de PE^n dans PE^m nous pourons donc faire correspondre une clôture $(\hat{g})$ de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$ définie par $(\hat{g})(d) = C(\hat{g}, d)$ et un sous-treillis complet algébrique de $\mathcal{D}_E$ noté $\mathcal{D}_E(\hat{g})$ dont les éléments sont clos pour g . C'est à dire que $\forall d \in \mathcal{D}_E(\hat{g})$, $\forall (e_1, \dots, e_n)$ tel que $e_1, \dots, e_n \in d$, $g(e_1, \dots, e_n) \subseteq_{PE} d$.

Il est possible, par exemple de construire le sous-treillis de $\mathcal{D}_E$ constitué par les éléments de PPE clos par intersection finie.

De plus, il est possible de prolonger toute application de E^n dans E^m en une application de PE^n dans PE^m et donc en une application continue de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$.

Si nous nous donnons une approximation d'un ensemble E sous la forme d'une famille de sous-ensembles de cet ensemble c'est à dire d'un élément de PPE, cet élément pourra être choisi dans le sous-treillis complet algébrique des éléments de $\mathcal{D}_E$ clos par une application de E^n dans E .



Familles closes pour plusieurs applications continues de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_E$

Soit f et g deux applications appartenant à $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$.

Soit d un élément de $\mathcal{D}_E$.

Si d est clos pour f et g $f(d) \subseteq_{PE} d$, $g(d) \subseteq_{PE} d$

ce qui entraîne $f(d) \cup_{PE} g(d) \subseteq_{PE} d$ c'est à dire $(f \vee g)(d) \subseteq_{PE} d$.

Réciproquement si $(f \vee g)(d) \subseteq_{PE} d$ alors $f(d) \cup_{PE} g(d) \subseteq_{PE} d$ d'où

$$f(d) \subseteq_{PE} d \text{ et } g(d) \subseteq_{PE} d.$$

L'ensemble des familles closes pour f et g est donc identique à l'ensemble des familles closes pour $f \vee g$.

Nous noterons $\mathcal{D}_E(\bigcirc f \vee g)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}_E$ clos pour f et g en posant $\bigcirc f \vee g(d) = C(f \vee g, d)$.

$\mathcal{D}_E(\bigcirc f \vee g)$ est bien entendu un sous-treillis complet, algébrique de $\mathcal{D}_E$ et nous pouvons déduire de $f \vee g$, une relation de pré-ordre $\preceq_E f \vee g$ d'après la proposition 16.

Si nous nous donnons à présent n applications appartenant à $[\mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E]$

$f_1, f_2, \dots, f_n$ nous pouvons, de la même manière, construire le sous-treillis de $\mathcal{D}_E$, complet, algébrique, constitué par les éléments de $\mathcal{D}_E$ clos pour $f_1 \vee f_2 \vee f_3 \dots \vee f_n$.

Nous voyons ainsi qu'il n'est pas nécessaire de se restreindre dans la définition d'une relation de finesse à l'utilisation de l'opération d'union $\cup_E$ entre sous-ensembles de E . Cependant, dans la suite de ce travail, nous nous servirons, de façon préférentielle de la relation de finesse $\preceq_E$ définie en début de ce chapitre et donc du sous-treillis $\mathcal{D}_E(\bigcup)$ constitué par les familles closes par réunion finie mais il nous arrivera aussi d'utiliser un sous treillis de $\mathcal{D}_E(\bigcup)$ constitué par les familles closes par réunion finie et par intersection finie.

Remarque.

Si E est un ensemble dénombrable, $\mathcal{P}E$ à la puissance du continu. L'ensemble des familles de cardinalité finie de sous-ensembles de E , n'est donc pas dénombrable. Des problèmes de calculabilité ne manqueront donc pas de se poser que nous n'avons pas encore examiné.

- o -

CHAPITRE IV

Soit E et F , deux ensembles et f une application de E dans F .

Il est facile de prolonger f en une application f_{PE} de PE dans PF , en posant pour tout sous-ensemble e de E

$$f_{PE}(e) = \{f(x) / x \in e\}$$

Cette application f_{PE} est univoque et u -additive

$$f_{PE}(e_1 \cup_E e_2) = f_{PE}(e_1) \cup_F f_{PE}(e_2)$$

Donnons nous une approximation de E sous la forme d'un élément d appartenant à $\mathcal{D}_E(\bigcup)$, recouvrant E .

f_{PE} associe à d , un élément $f_{PE}(d)$ appartenant à $\mathcal{D}_F(\bigcup)$ car f_{PE} est u -additive

$$f_{PE}(d) = \{f_{PE}(s) / s \in d\}$$

Nous déterminons ainsi une application a_f de d dans $f(d)$.

telle que pour $s \in d$

$$a_f(s) = f_{PE}(s)$$

Cette application a_f peut être considérée comme une approximation de f . Cette notion d'approximation pour les applications de E dans F , découle naturellement de la notion d'approximation pour les ensembles, développée au chapitre III.

Nous avons introduit au chapitre II deux recouvrements de N : r_1 et r_2

$$\text{Soit } s_1 = \{2n / n \in N^+\} \quad s_2 = \{2n+1 / n \in N^+\}$$

$$r_1 = \{N, N^+, \{0\}, \{1\}, s_1, s_2\}$$

$$r_2 = \{N, N^+, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2n/n \in s_1\}, \{2n/n \in s_2\}, \{2n+1/n \in s_1\}, \{2n+1/n \in s_2\}\}$$

r_1 et r_2 sont des éléments de $\mathcal{D}_N$.

Si $\bigcirc_U(r_1)$ et $\bigcirc_U(r_2)$ sont les clôtures de r_1 et r_2 par réunion finie $\bigcirc_U(r_1) \subseteq_{PN} \bigcirc_U(r_2)$.

Nous avons également défini au chapitre II, deux fonctions Succ1 et Succ2, respectivement sur r_1 et r_2 .

Succ1 peut être défini de deux manières

-par une table	N	$\rightarrow$ N
	N^+	$\rightarrow N^+$
	{0}	$\rightarrow$ {1}
	{1}	$\rightarrow$ {2n/n $\in N^+$ }
	{2n/n $\in N^+$ }	$\rightarrow$ {2n+1/n $\in N^+$ }
	{2n+1/n $\in N^+$ }	$\rightarrow$ {2n/n $\in N^+$ }

C'est à dire par un élément de $\mathcal{D}_{N \times N}$

$$\{N \times N, N^+ \times N^+, \{0\} \times \{1\}, \{1\} \times s_1, s_1 \times s_2, s_2 \times s_1\}$$

-par une application de r_1 dans r_1

$$\text{Succ}_1(s) = n\{s' \in r_1 / s+1 \subseteq s'\}$$

Nous pourrions définir, de la même façon, Succ₂ sur r_2 .

Remarquons qu'un élément arbitraire de $\mathcal{D}_{N \times N}$ ne peut pas toujours être considéré comme la table approchée d'une application de N dans N. Ainsi, par exemple $\{N \times N, N^+ \times N^+, \{0\} \times \{1\}, \{1\} \times s_1, s_1 \times s_1, s_1 \times s_2\}$ ne peut convenir car on en peut avoir pour une application de N dans N

$$s_1 \rightarrow s_1 \text{ et } s_1 \rightarrow s_2 \quad \text{simultanément}$$

De même pour les applications d'un élément d de $\mathcal{D}_N$ dans un élément d' de $\mathcal{D}_N$.

Nous étudierons d'abord un sous-ensemble noté A(E,F), de l'ensemble des applications d'un élément d de $\mathcal{D}_E$ dans un élément d' de $\mathcal{D}_F$, correspondant aux applications de E dans F.

Nous mettrons $A(E,F)$ en correspondance avec un sous-ensemble $\bar{A}(E,F)$ de l'ensemble des applications de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_F$ et nous le munirons d'un ordre partiel complet algébrique. La relation d'ordre choisie sur $A(E,F)$ correspond à la relation d'inclusion entre sous-ensembles d'applications de E dans F associés aux éléments de $A(E,F)$.

Ensuite, nous étudierons un sous-ensemble, noté $R(E,F)$, de l'ensemble des familles de sous-ensembles de $E \times F : \mathcal{D}_{E \times F}$. Les éléments de ce sous-ensemble peuvent être mis en correspondance avec les relations binaires entre E et F . Nous munirons $R(E,F)$ d'un ordre partiel complet algébrique.

Dans cette étude apparaît une structure d'inf-demi treillis, complet pour les parties dirigées, algébrique, conditionnellement complet.

Rappelons quelques unes des notations introduites au chapitre III

$\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ est l'ensemble des familles de sous-ensembles de E, closes par réunion finie.

$\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ est munie d'une relation d'ordre notée $\sqsubseteq_E$ définie par $d, d' \in \mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$, $d \sqsubseteq_E d'$ si $\forall s \in d$, il existe $\sigma \sqsubseteq_{PE} s$, de cardinalité finie telle que $R = s$. Cette relation d'ordre $\sqsubseteq_E$ est identique sur $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$, à la relation d'inclusion $\sqsubseteq_{PE}$. Elle donne à $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ une structure de treillis complet algébrique.

$\cup_E$ et $\cap_E$ sont les opérations de treillis sur $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$.
 Nous avons $d \cup_E d' = C(\bigcirc_U, d \cup_{PE} d')$
 $d \cap_E d' = d \cap_{PE} d'$

$B_E(\bigcirc_U)$ est l'ensemble des éléments finis ou isolés de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$.
 La cardinalité des éléments de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ est finie.

Pour tout élément $d \in \mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ nous noterons

$$\Delta(d) = \{\delta / \delta \in B_E(\bigcirc_U) \text{ et } \delta \sqsubseteq_E d\}$$

$$\bar{\Delta}(d) = \{d' / d' \sqsubseteq_E d\}$$

Nous noterons $\sqsubseteq$ la relation d'ordre entre applications de $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$ définie par $f \sqsubseteq g$ si $f(d) \sqsubseteq_F g(d) \quad \forall d \in \mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$.

APPLICATION D'UN ÉLÉMENT DE $\mathcal{D}_E(\textcircled{U})$

DANS

UN ÉLÉMENT DE $\mathcal{D}_F(\textcircled{U})$

APPLICATIONS PARTIELLES DE $\mathcal{D}_E(\textcircled{U})$ DANS $\mathcal{D}_F(\textcircled{U})$

Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F .
Associions à f , l'application f_{PE} de PE dans PE définie par

$$f_{PE}(e) = \{f(x) / x \in e\} \quad \forall e \subseteq E$$

f_{PE} est U -additive et univoque.

Soit d un élément de $\mathcal{D}_E(\textcircled{U})$.

La donnée de f_{PE} et de d permet de définir une approximation a_f de f en posant

$$a_f(s) = f_{PE}(s) \quad s \in d$$

a_f est une application d'un élément d de $\mathcal{D}_E(\textcircled{U})$ dans un élément d' de $\mathcal{D}_E(\textcircled{U})$. Elle est U -additive, univoque et surjective.

Réciproquement, à une application a d'un élément d de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans un élément d' de $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$, U -additive, univoque et surjective, nous pouvons associer $I(a)$, l'ensemble des applications de E dans F qui ont a comme approximation. C'est à dire que $f \in I(a) \Rightarrow f(s) \subseteq a(s) \quad \forall s \in d$. Une relation d'approximation entre deux applications a et a' d'un élément de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans un élément de $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$ ne sera intéressante que si elle est compatible avec la relation d'inclusion entre sous-ensembles d'applications de E dans F .

Nous devons avoir a "meilleur que" $a' \Rightarrow I(a) \subseteq I(a')$.

Soit a_1 une application de d_1 dans d'_1 et a_2 une application de d_2 dans d'_2 . Pour choisir une "bonne" relation d'approximation entre a_1 et a_2 , remarquons que nous pouvons associer à a_1 une application partielle de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$ en posant

$$\bar{a}_1(\delta) = \{a_1(s) / s \in \delta\} \quad \delta \sqsubseteq_E d_1$$

a_1 étant U -additive et δ étant clos par réunion finie, $\{a_1(s) / s \in \delta\}$ est également clos par réunion finie et $\{a_1(s) / s \in \delta\} \sqsubseteq_F d'_1$.

Or, il existe une relation d'ordre $\sqsubseteq$ entre applications partielles ou non de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$. La relation $\bar{a}_1 \sqsubseteq \bar{a}_2$ induit entre a_1 et a_2 une relation d'approximation satisfaisante en ce sens que

$$a_1 \sqsubseteq a_2 \Rightarrow I(a_2) \subseteq I(a_1).$$

Soit $A(E,F)$, l'ensemble des applications U -additives, univoques et surjectives d'un élément de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans un élément de $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$ et $\bar{A}(E,F)$, l'ensemble des applications partielles de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$.

Dans un premier paragraphe, nous étudierons les relations entre l'ensemble $A(E,F)$ et l'ensemble $\bar{A}(E,F)$.

Dans un second paragraphe, nous étudierons la structure de ces ensembles pour la relation $\sqsubseteq$ définie à partir de la relation d'ordre entre application de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$.

Caractérisation des applications partielles de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_F$ associées aux applications, additives, univoques et surjectives d'un élément de $\mathcal{D}_E$ dans un élément de $\mathcal{D}_F$

Soit d_E , un élément de $\mathcal{D}_E$, d_F un élément de $\mathcal{D}_F$ et h une application additive, univoque et surjective de d_E dans d_F .

Associions à h une application partielle $\bar{h}$ de $\mathcal{D}_E$ dans $\mathcal{D}_F$ en posant

$$\bar{h}(d) = \begin{cases} u_{PF} \{ \{h(u)\} / u \in d \} & \text{si } d \subseteq_{PE} d_E \\ \perp_F & \text{sinon} \end{cases}$$

Une telle application n'est continue que sur un sous-ensemble de $\mathcal{D}_E$ constitué par les éléments de $\mathcal{D}_E$ constituée par les éléments de $\mathcal{D}_E$ inférieurs ou égaux à d_E .

Soit, en effet $d \in \mathcal{D}_E$.

Si $d \subseteq_{PE} d_E$. Soit $\Delta(d) : \{ \delta / \delta \in \mathcal{B}_E \text{ et } \delta \subseteq_{PE} d \}$

$u \in d \Rightarrow \exists \delta(u) \in \Delta(d)$ tel que $u \in \delta(u)$ ce qui entraîne

$$h(u) \in \bar{h}(\delta(u)) \text{ d'où } \bar{h}(d) \subseteq_{PF} u_{PF} \{ \bar{h}(\delta) / \delta \in \Delta(d) \}$$

Réciproquement, soit $\delta \in \Delta(d)$ $u \in \delta \Rightarrow u \in d$ et donc $\bar{h}(\delta) \subseteq_{PF} \bar{h}(d)$ d'où $u_{PF} \{ \bar{h}(\delta) / \delta \in \Delta(d) \} \subseteq_{PF} \bar{h}(d)$. h est donc continue en d .

Par contre si $d \not\subseteq_{PE} d_E$ $\bar{h}(d) = \perp_F$, mais si $d \cap_{PE} d_E \neq \perp_E$, il existe $\delta \subseteq_{PE} d \cap_{PE} d_E$ tel que $\delta \in \mathcal{B}_E$. Ce qui entraîne $\bar{h}(\delta) \neq \perp_F$ et donc $\bar{h}(d) \neq u_{PF} \{ \bar{h}(\delta) / \delta \in \Delta(d) \}$.

Les applications telles que $\bar{h}$ ont quelques propriétés caractéristiques.

h étant univoque

$$\forall \delta \subseteq_{PE} d_E \text{ tel que Card}(\delta) \text{ finie, Card}(\bar{h}(\delta)) \leq \text{Card}(\delta).$$

De plus h étant additive, pour tout $d \subseteq_{PE} d_E$ tel que d soit clos par réunion finie, $\bar{h}(d)$ est clos par réunion finie et $\forall d, d' \subseteq_{PE} d_E$, d, d'

clos par réunion finie,

$$\bar{h}(d \cup_E d') = \bar{h}(d) \cup_F \bar{h}(d')$$

C'est pourquoi, dans la suite, nous nous contenterons d'étudier les applications telles que $\bar{h}$ sur $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$.

Le domaine de définition de $\bar{h}$ étant un idéal de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$. Rappelons la définition d'un idéal dans un treillis.

Définition 1. Dans un treillis, un idéal I est un sous ensemble tel que

$$\forall i, j \in I, i \cup j \in I$$

si $i \in I$ et $j \sqsubseteq i$ alors $j \in I$

□

Définition 2. Un idéal I est principal s'il possède un élément i tel que

$$\forall j \in I, j \sqsubseteq i$$

□

Nous nous intéresserons à un sous-ensemble d'applications partielles de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$ que nous noterons $\bar{A}(E, F)$, ayant des propriétés qui les rattachent aux applications h d'un élément de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans un élément $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$.

Définition 3. $\bar{A}(E, F)$, est l'ensemble des applications partielles g de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$, de domaine de définition D , ayant les quatre propriétés suivantes :

- a) g est continue sur son domaine de définition D
- b) le domaine de définition D de g est un idéal de $\mathcal{D}_E(\bigcup)$
- c) g est finiment additive sur son domaine de définition et si $\{s_1\}$ et $\{s_2\}$ sont des éléments de cardinalité 1 appartenant au domaine de définition D de g alors

$$g(\{s_1 \cup_E s_2\}) = g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\})$$
- d) si δ est un élément de cardinalité finie de D appartenant au domaine de définition D de g alors

$$\text{Card}(g(\delta)) \leq \text{Card}(\delta)$$

□

Soit d un élément de $\mathcal{D}_E(\bigcup)$

$\Delta(d) = \{\delta / \delta \leq_E d \text{ et } \delta \in \mathcal{B}_E(\bigcup)\}$ est un idéal de $\mathcal{D}_E(\bigcup)$ mais n'est pas principal

Notons $\bar{\Delta}(d) = \{d' / d' \leq_E d \text{ et } d' \in \mathcal{D}_E(\bigcup)\}$

$\bar{\Delta}(d)$ est par contre un idéal principal.

Un idéal D de $\mathcal{D}_E(\bigcup)$ est aussi une partie dirigée de $\mathcal{D}_E(\bigcup)$ et possède donc une borne supérieure $U_E D$.

Il existe toute une famille d'idéaux possédant cette même borne supérieure $U_E D$; par exemple $\Delta(U_E D)$ et $\bar{\Delta}(U_E D)$.

Tous les idéaux qui ont même borne supérieure d , contiennent l'idéal $\Delta(d)$ et sont contenus dans l'idéal $\bar{\Delta}(d)$ qui est le seul idéal principal ayant cette borne d .

Soit g un élément de $\bar{\mathcal{A}}(E, F)$, de domaine de définition D . Associons lui la famille d'éléments de $\bar{\mathcal{A}}(E, F)$ qui sont définis sur des idéaux ayant même borne supérieure $U_E D$ que D et coïncidant avec g sur $\Delta(U_E D)$.

Soit g_1 et g_2 , deux éléments de $\bar{A}(E, F)$, de domaines de définition respectivement D_1 et D_2 , la relation $g_1 \equiv g_2$ si et seulement si $\Delta(U_E D_1) = \Delta(U_E D_2)$ et g_1 et g_2 coïncident sur $\Delta(U_E D_1)$, est une relation d'équivalence dans $\bar{A}(E, F)$.

Proposition 1. Si g est une application appartenant à $\bar{A}(E, F)$, de domaine de définition D et d un élément de D , de cardinalité 1 alors $g(d)$ est un élément de cardinalité 1 de $\mathcal{D}_F(\bigcup)$.

Preuve.

Soit $g \in \bar{A}(E, F)$, de domaine de définition D .

Soit $d \in D$, de cardinalité 1 $d \in D \Rightarrow g(d) \neq \perp_F$ et donc $\text{Card}(g(d)) > 0$.

Mais d'après la propriété d) de g $\text{Card}(g(d)) \leq \text{Card}(d) = 1$.

Il en résulte que $\text{Card}(g(d)) = 1$.

□

Proposition 2. Si g est un élément de $\bar{A}(E, F)$ de domaine de définition D , alors l'ensemble des éléments de D , de cardinalité 1, forme une famille de sous-ensembles de E , close par réunion finie.

Preuve.

Soit $\{s_1\}$ et $\{s_2\}$, de cardinalité 1, appartenant à D .

Considérons $d = \{s_1\} \cup_E \{s_2\} = \{s_1, s_2, s_1 \cup_E s_2\}$ $d \in D$ d'après la propriété c) de g . $\{s_1 \cup_E s_2\} \subseteq_E d$ d'où d'après b) $\{s_1 \cup s_2\} \in D$.

La famille de sous-ensembles de E constituée par les éléments de cardinalité 1 de D est donc close par réunion finie.

□

Proposition 3. Si g est une application appartenant à $\bar{A}(E, F)$, dont le domaine de définition D est de la forme $\Delta(d)$ où d est un élément de $\mathcal{D}_E(\bigcup)$, alors g est prolongeable de façon unique en une application $\bar{g}$ appartenant à $\bar{A}(E, F)$, dont le domaine de définition est $\bar{\Delta}(d)$ et coïncidant avec g sur $\Delta(d)$.

Preuve :

Soit $d' \in \mathcal{D}_E(\bigcup)$ tel que $d' \sqsubseteq_E d$.

Considérons $\Delta(d')$. $\forall \delta \in \Delta(d')$ nous avons $\delta \sqsubseteq_F d' \sqsubseteq_F d$. Ce qui entraîne d'après l'hypothèse $\delta \in \Delta(d)$.

$\forall \delta \in \Delta(d')$, $g(\delta)$ est définie. Il en est de même pour $\bigcup_F g(\Delta(d'))$.

$\Delta(d')$ est une partie dirigée de $D = \Delta(d)$ et g est croissante sur D .

Construisons $\bar{g}$ en posant :

- si $d' \in D$ alors $\bar{g}(d') = g(d')$

- si $d' \notin D$ mais si $d' \sqsubseteq_E d$

$$\bar{g}(d') = \bigcup_F \{g(\delta) / \delta \in \Delta(d')\} = \bigcup_F \{\bar{g}(\delta) / \delta \in \Delta(d')\} \text{ car } \delta \in D$$

- sinon $\bar{g}(d) = \perp_F$.

Le domaine de définition $\bar{D}$ de $\bar{g}$ est constitué par $\bar{\Delta}(d)$.

$\bar{g}$ appartient à $A(E, F)$ car

- $\bar{g}$ est continue sur $\bar{D}$ d'après sa définition
- D'après la définition de $\bar{D}$ qui est égal à $\bar{\Delta}(d)$, $\bar{D}$ est un idéal de $\mathcal{D}_E(\bigcup)$ qui est de plus principal
- Soit $d'_1, d'_2 \in \bar{D}$. $d'_1 \cup_E d'_2 \in \bar{D}$.

Montrons que $\bar{g}(d_1 \cup_E d_2) = \bar{g}(d'_1) \cup_F \bar{g}(d'_2)$

$$\bar{g}(d'_1 \cup_E d'_2) = \cup_F \{ \bar{g}(\delta) / \delta \in \Delta(d'_1 \cup_E d'_2) \}$$

$$= \cup_F \{ g(\delta) / \delta \in \Delta(d'_1 \cup_E d'_2) \} \text{ car } g(\delta) = \bar{g}(\delta)$$

En effet $d'_1 \cup_E d'_2 \in \bar{\Delta}(d) \Rightarrow \delta \in D$ si $\delta \in \Delta(d'_1 \cup_E d'_2)$

$\forall \delta \in \Delta(d'_1 \cup_E d'_2)$, δ peut se mettre sous la forme

$\delta_1 \cup_E \delta_2$ avec $\delta_1 \in \Delta(d'_1)$ et $\delta_2 \in \Delta(d'_2)$. Il suffit de prendre

$$\delta_1 = \delta \cap_E d'_1 \text{ et } \delta_2 = \delta \cap_E d'_2$$

$$\bar{g}(d'_1 \cup_E d'_2) = \cup_F \{ g(\delta_1 \cup_F \delta_2) / \delta_1 \in \Delta(d'_1), \delta_2 \in \Delta(d'_2) \}$$

$$\bar{g}(d'_1 \cup_E d'_2) = \cup_F \{ g(\delta_1) \cup_F g(\delta_2) / \delta_1 \in \Delta(d'_1) \text{ et } \delta_2 \in \Delta(d'_2) \}$$

$\cup_F$ étant continue, nous pouvons réécrire cette égalité

$$\begin{aligned} \bar{g}(d'_1 \cup_E d'_2) &= (\cup_F \{ g(\delta_1) / \delta_1 \in \Delta(d'_1) \}) \cup_F (\cup_F \{ g(\delta_2) / \delta_2 \in \Delta(d'_2) \}) \\ &= \bar{g}(d'_1) \cup_F \bar{g}(d'_2) \text{ d'après la définition de } \bar{g}. \end{aligned}$$

De plus, $\cup_E \Delta(d) = \cup_E \bar{\Delta}(d) = \{ s / \exists \delta \in \Delta(d) \text{ tel que } s \in \delta \}$ d'après la définition de la borne supérieure d'une partie dirigée de $\mathcal{D}_E(\bigcup)$.

Soit, $\{s_1\}, \{s_2\}$, de cardinalité 1 appartenant à $\bar{D}$.

$\{s_1\}$ et $\{s_2\}$ appartiennent à D et de ce fait

$$\begin{aligned} \bar{g}(\{s_1 \cup s_2\}) &= g(\{s_1 \cup s_2\}) = g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\}) \\ &= \bar{g}(\{s_1\}) \cup_F \bar{g}(\{s_2\}) \end{aligned}$$

car g et $\bar{g}$ coïncident sur D .

d) Les éléments de D sont les éléments de $\bar{D}$ appartenant à $\mathcal{B}_E(\bigcup)$.

Nous avons donc, $\forall \delta \in D$

$$\text{Card}(\bar{g}(\delta)) = \text{Card}(g(\delta)) \leq \text{Card}(\delta)$$

$\bar{g}$ appartient bien à $\bar{\Lambda}(E, F)$.

Soit, à présent g' appartenant à $\bar{A}(E, F)$, coïncidant avec g sur D et ayant même domaine de définition $\bar{D}$ que $\bar{g}$

$$\forall d' \in \bar{D} \quad \bar{g}(d') = \bigcup_F \{g(\delta) / \delta \in \Delta(d)\} = \bigcup_F \{g'(\delta) / \delta \in \Delta(d)\} = g'(d)$$

$\bar{g}$ et g' coïncident sur $\bar{D}$.

□

Proposition 4. Si g est une application appartenant à $\bar{A}(E, F)$, de domaine de définition D , alors pour tout élément $d \in D(d) = \bigcup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in d\}$.

Preuve.

Soit $g \in \bar{A}(E, F)$, D son domaine de définition et $d \in D$.

$\forall s \in d \quad \{s\}$ est un élément de cardinalité 1 de $\mathcal{D}_E(\bigcirc \cup)$. $\{s\} \in D$ car $\{s\} \sqsubseteq_E d$.

Examinons d'abord le cas où la cardinalité de d est finie.

Soit $d' = \bigcup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in d\}$.

$d' \sqsubseteq_{PF} g(d)$ car g étant croissante sur son domaine de définition,

$\forall s \in d, \{s\} \sqsubseteq_E d \Rightarrow g(\{s\}) \sqsubseteq_F g(d)$.

d' est clos par réunion finie.

En effet soit $s'_1, s'_2 \in d'$. Il existe $s_1, s_2 \in d$ tels que $s'_1 = g(\{s_1\})$ et $s'_2 = g(\{s_2\})$.

d étant clos par réunion finie $s_1 \cup s_2 \in d$ et g ayant par hypothèse la propriété c)

$$g(\{s_1 \cup s_2\}) = g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\})$$

$$g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\}) = s'_1 \cup_F s'_2 \in d'.$$

Nous pourrions écrire d sous la forme $\bigcup_F \{\{s\} / s \in d\}$.

La cardinalité de d étant finie et g étant finiment additive

$$g(d) = g(\bigcup_E \{\{s\} / s \in d\}) = \bigcup_F \{g(\{s\}) / s \in d\}.$$

$g(d)$ est donc la clôture par réunion finie de $\bigcup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in d\}$

mais $d' = \bigcup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in d\}$ étant clos par réunion finie

$$g(d) = \bigcup_F \{g(\{s\}) / s \in d\} = \bigcup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in d\} = d'$$

Examinons à présent le cas général.

Considérons $d \in D$ et $\Delta(d)$

$$g(d) = \bigcup_F \{g(\delta) / \delta \in \Delta(d)\} = \bigcup_{PF} \{g(\delta) / \delta \in \Delta(d)\}.$$

Ceci d'après les propriétés de la borne supérieure d'une partie dirigée de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$.

Nous pouvons écrire

$$g(d) = \{u / \exists \delta \in \Delta(d) \text{ tel que } u \in g(\delta)\} = \bigcup_{PF} \{g(\{s\}) / \exists \delta \in \Delta(d) \text{ tel que } s \in \delta\}$$

Ceci parce que $\delta \in \Delta(d) \Rightarrow g(\delta) = \bigcup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in \delta\}$

et $u \in g(\delta) \Rightarrow \exists s \in \delta \text{ tel que } \{u\} = g(\{s\})$.

C'est à dire que $g(d) = \bigcup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in d\}$

□

Proposition 5. Si g est une application partielle de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$, de domaine de définition D , telle que

$$a') \quad \forall d \in D, \text{ Card}(d) = 1$$

$$b') \quad \bigcup_{PE} D \text{ est clos par réunion finie}$$

$$c') \quad \forall d \in D, g(d) \text{ est de cardinalité } 1$$

$$d') \quad \text{si } \{s_1\} \text{ et } \{s_2\} \text{ appartiennent à } D \text{ alors}$$

$$g(\{s_1 \cup s_2\}) = g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\})$$

alors g est prolongeable de façon unique en un élément $\bar{g}$ de $\bar{A}(E, F)$ coïncidant avec g sur D et ayant comme domaine de définition $\Delta(\bigcup_{PE} D)$.

Preuve.

Posons $d_E = \bigcup_{PE} D$ $\forall d \in D$ nous avons $d \sqsubseteq_E d_E$ et $d \sqsubseteq_{PE} d_E$.

Définissons $\bar{g}$ de la manière suivante :

$$\text{pour tout } d \in \Delta(\bigcup_{PE} D) = \Delta(d_E)$$

$$\bar{g}(d) = g(d) \text{ si } d \in D$$

$$\bar{g}(d) = \cup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in d\} \text{ si } d \notin D$$

$$\bar{g}(d) = 1_F \text{ si } d \notin \Delta(\cup_{PE} D).$$

Remarquons d'abord que si d est clos par réunion finie, $\bar{g}(d)$ est clos par réunion finie.

Soit, en effet $v_1, v_2 \in \bar{g}(d)$

Il existe $\{s_1\}$ et $\{s_2\} \in d$ tels que $v_1 = g(\{s_1\})$ et $v_2 = g(\{s_2\})$

$\{s_1 \cup s_2\} \in d$ car d est clos par réunion finie.

D'après l'hypothèse d') $g(\{s_1 \cup s_2\}) = g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\})$

$$g(\{s_1 \cup s_2\}) = v_1 \cup_F v_2.$$

Or $g(\{s_1 \cup s_2\}) \in \bar{g}(d)$.

$v_1 \cup_F v_2 \in \bar{g}(d)$ et $\bar{g}(d)$ est clos par réunion finie.

a) $\bar{g}$ est continu sur $\Delta(d_E)$

Soit, en effet $d \in \Delta(d_E)$; considérons $\Delta(d)$

$$d = \cup_E \Delta(d) = \{s / \exists \delta \in \Delta(d) \text{ tel que } s \in \delta\}$$

$$\cup_F \bar{g}(\Delta(d)) = \cup_F \{\bar{g}(\delta) / \delta \in \Delta(d)\} = \cup_F \{\cup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in \delta\} / \delta \in \Delta(d)\}$$

$$= \cup_{PF} \{\cup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in \delta\} / \delta \in \Delta(d)\}$$

car $\cup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in \delta\}$ est clos par réunion finie d'après la remarque faite plus haut.

$$\cup_F \bar{g}(\Delta(d)) = \cup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in \delta\} = \bar{g}(d)$$

$\bar{g}$ est donc continue.

b) Il est clair que $\Delta(d_E)$ est un idéal de $\mathcal{D}_E(\bigoplus)$

c) Nous n'avons pas introduit dans $\Delta(d_E)$ d'autres éléments de cardinalité 1 que ceux de D , g et $\bar{g}$ coïncidant sur D , d'après la construction de $\bar{g}$, si $\{s_1\}$ et $\{s_2\}$ sont deux éléments de D

$$\bar{g}(\{s_1 \cup s_1\}) = g(\{s_1 \cup s_2\}) = g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\}).$$

$$D'où \bar{g}(\{s_1 \cup_E s_1\}) = g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\}).$$

Soit, à présent d_1 et $d_2 \in \Delta(d_E)$

$d_1 \cup_E d_2 \in \Delta(d_E)$ et $\bar{g}$ est défini sur $d_1 \cup_E d_2$

$$\bar{g}(d_1 \cup_E d_2) = \cup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in d_1 \cup_E d_2\}$$

$\bar{g}(d_1 \cup_E d_2)$ est clos par réunion finie d'après la remarque faite plus haut.

Nous pouvons donc écrire $\bar{g}(d_1 \cup_E d_2) = \cup_F \{g(\{s\}) / s \in d_1 \cup_E d_2\}$.

Nous avons $\cup_F \{g(\{s\}) / s \in d_1 \cup_{PE} d_2\} \subseteq_{PF} \cup_F \{g(\{s\}) / s \in d_1 \cup_E d_2\}$ car $d_1 \cup_{PE} d_2 \subseteq_{PE} d_1 \cup_E d_2$.

Réciproquement, tout élément de $d_1 \cup_E d_2$ pouvant être obtenue par réunion finie d'éléments de $d_1 \cup_{PE} d_2$ et g vérifiant l'hypothèse d'

$$\cup_F \{g(\{s\}) / s \in d_1 \cup_E d_2\} \subseteq_{PF} \cup_F \{g(\{s\}) / s \in d_1 \cup_{PE} d_2\}.$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} g(d_1 \cup_E d_2) &= \cup_F \{g(\{s\}) / s \in d_1 \cup_{PE} d_2\} \\ &= (\cup_F \{g(\{s\}) / s \in d_1\}) \cup_F (\cup_F \{g(\{s\}) / s \in d_2\}) \\ &= \bar{g}(d_1) \cup_F \bar{g}(d_2) \end{aligned}$$

d) D'après la définition de $\bar{g}$, il est clair que
 $\forall \delta \in \Delta(d_E) \text{ Card}(\delta) \text{ est finie}$

$$\text{Or } \bar{g}(\delta) = \cup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in \delta\}$$

$$D'où \text{Card}(\bar{g}(\delta)) \leq \text{Card}(\delta)$$

$\bar{g}$ appartient à $\bar{A}(E, F)$

Montrons à présent que $\bar{g}$ est unique. En effet, toute application g' de $\bar{A}(E, F)$, coïncidant avec $\bar{g}$ sur D et ayant $\Delta(d_E)$ comme domaine de définition, coïncide avec $\bar{g}$ car
 $\forall d \in \Delta(d_E)$

$$g'(d) = \cup_{PF} \{g'(\{s\}) / s \in d\} = \cup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in d\} = \bar{g}(d)$$

□

Corollaire 1. Si g est une application partielle de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$ vérifiant les hypothèses de la proposition 5, g est prolongeable de façon unique en une application $\bar{g}$ appartenant à $\bar{A}(E, F)$ de domaine de définition $\Delta(u_{PE} D)$ où D est le domaine de définition de g .

Preuve.

D'après la proposition 5 g est prolongeable, de façon unique en $\bar{g} \in \bar{A}(E, F)$ ayant comme domaine de définition $\Delta(u_{PE} D)$. Nous pouvons alors appliquer la proposition 3. $\bar{g}$ est prolongeable de façon unique en une application appartenant à $\bar{A}(E, F)$ $\bar{\bar{g}}$, coïncidant avec $\bar{g}$ sur $\Delta(u_{PE} D)$ et ayant $\bar{\Delta}(u_{PE} D)$ comme domaine de définition.

□

Corollaire 2. Si deux applications g_1 et g_2 appartiennent à $\bar{A}(E, F)$, de domaine de définition respectivement D_1 et D_2 . Si $D_1 \subseteq D_2$ et si g_2 coïncide avec g_1 sur les éléments de cardinalité 1 de D_1 alors g_2 coïncide avec g_1 sur tout D_1 .

Preuve.

Soit $d_1 = u_{PE} \{ \{s\} / \{s\} \in D_1 \}$

d_1 est la famille de sous-ensembles de E constituée par les éléments de cardinalité 1 de D_1 .

D'après la proposition 2, d_1 est close par réunion finie.

Soit g'_1 la restriction de g_1 aux éléments de cardinalité 1 de D_1 . g'_1 vérifie les hypothèses de la proposition 5

Soit D'' le domaine de définition de g'_1

a') $\forall d \in D'' \text{ Card}(d) = 1$

b') $u_{PE} D'' = d_1$ et d_1 est clos par réunion finie.

c') $\forall d \in D'' \quad g(d)$ est de cardinalité 1 d'après la proposition 1

d') si $\{s_1\}$ et $\{s_2\} \in D''$ $g'_1(\{s_1\} \cup_E \{s_2\}) = g'_1(\{s_1\}) \cup_F g'_1(\{s_2\})$

Nous pouvons déduire, de la proposition 5, que g'_1 est prolongeable de façon unique en une application $\bar{g}'_1$ appartenant à $\bar{A}(E, F)$ de domaine de définition $\Delta(d_1)$. g_1 et g_2 coïncident avec $\bar{g}'_1$ sur $\Delta(d_1)$.

Soit $d \in D_1$.

Considérons $\Delta(d)$ $d \in D_2$ car $D_1 \subseteq D_2$. Les éléments de $\Delta(d)$ appartiennent à $\Delta(d_1)$ et à D_2 car $\forall s \in d$ $\{s\}$ est un élément de cardinalité 1 de D_1 et $s \in d_1$

$$\begin{aligned} g_2(d) &= \cup_F \{g'_2(\delta) / \delta \in \Delta(d)\} = \cup_F \{\bar{g}'_1(\delta) / \delta \in \Delta(d)\} = \cup_F \{g_1(\delta) / \delta \in \Delta(d)\} \\ &= g_1(d) \end{aligned}$$

g_1 et g_2 coïncident sur D_1 .

□

Proposition 6. Si g est une application appartenant à $\bar{A}(E, F)$, de domaine de définition D et de co-domaine $D' = g(D)$, alors D' est un idéal de $\mathcal{D}_F(\bigcup)$.

Preuve.

Soit $d'_1, d'_2 \in D'$.

Vérifions que D' est un idéal.

Il existe $d_1, d_2 \in D$ tels que $d'_1 = g(d_1)$, $d'_2 = g(d_2)$

$$\begin{aligned} g(d_1 \cup_E d_2) &= g(d_1) \cup_F g(d_2) \text{ d'après l'additivité de } g \\ &= d'_1 \cup_F d'_2 \end{aligned}$$

Par conséquent $d'_1 \cup_F d'_2 \in D'$.

Soit, à présent $d'_1 \in D'$ et d'_2 tel que $d'_2 \sqsubset_F d'_1$.

Il existe $d_1 \in D$ tel que $d'_1 = g(d_1)$.

D'après la proposition, $d'_1 = \cup_F \{g(\{s\}) / s \in d_1\}$

$d'_2 \sqsubset_F d'_1 \Rightarrow d'_2 \sqsubseteq_{PF} \cup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in d_1\}$.

ce qui entraîne l'existence de d_2 tel que $d'_2 = \cup_{PF} \{g(\{s\}) / s \in d_2\}$.

Il faut montrer que $d_2 \in D$.

Il est clair que $d_2 \cup_{PE} d_1$. Montrons que d_2 est clos par réunion finie.

Soit $s_1, s_2 \in d_2$ $g(\{s_1\})$ et $g(\{s_2\}) \in d'_2$

d'_2 étant clos par réunion finie $g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\}) \in d'_2$.

Il doit exister $s \in d_2$ tel que $g(\{s\}) = g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\})$.

Ceci d'après la définition de d'_2 .

Si $s \neq s_1 \cup_E s_2$, nous pouvons construire d''_2 en rajoutant $\{s_1 \cup_E s_2\}$ à d_2 sans changer $g(d_2)$. c'est à dire que $g(d''_2) = g(d_2)$.

Car nous venons de voir que $g(\{s_1 \cup s_2\}) = g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\}) \in d'_2$.

Si d_2 n'appartient pas à D , la clôture de d_2 par réunion finie appartient

à D car $d_2 \sqsubseteq_{PE} d_1 \Rightarrow C(\bigcup_E, d_2) \sqsubset_E d_1$ et $g(\bigcup_E, d_2) = g(d_2) = d'_2$

Nous pouvons en conclure que $d'_2 \in D'$. $D' = g(D)$ est un idéal de $\mathcal{D}_F(\bigcup)$.

□

Proposition 7. Si g_1 et g_2 sont deux éléments de $\bar{A}(E, F)$ de domaine de définition respectivement D_1 et D_2 , la relation $g_1 \equiv g_2$ si et seulement si

$$- \cup_E D_1 = \cup_E D_2$$

$$g_1 \text{ et } g_2 \text{ coïncident en } \{s\} \forall s \in \cup_E D_1 = \cup_E D_2,$$

est une relation d'équivalence sur $A(E, F)$.

Preuve.

Vérifions les trois axiomes de la relation d'équivalence :

- Il est clair que $g_1 \equiv g_1$: réflexivité
- la relation est symétrique $g_1 \equiv g_2 \Rightarrow g_2 \equiv g_1$
- $g_1 \equiv g_2$ et $g_2 \equiv g_3 \Rightarrow g_1 \equiv g_3$: transitivité

car $\bigcup_E D_1 = \bigcup_E D_2 = \bigcup_E D_3$ ce qui entraîne

$$\Delta(\bigcup_E D_1) = \Delta(\bigcup_E D_2) = \Delta(\bigcup_E D_3)$$

Il suffit d'appliquer la proposition 5 et ses corollaires 1 et 2.

□

Intuitivement cette dernière proposition montre que deux applications g_1 et g_2 de $\bar{A}(E, F)$ sont équivalentes si elles sont associées à un même élément a de $A(E, F)$ et réciproquement, à tout élément a de $A(E, F)$, appliquant un élément d de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ sur un élément d' de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$, nous pouvons associer un ensemble d'éléments de $\bar{A}(E, F)$ qui coïncident en $\{s\} \forall s \in d$ c'est à dire que cet ensemble forme une classe d'équivalence pour $\equiv$. a possède alors deux représentants privilégiés dans cette classe d'équivalence, l'élément de la classe qui a pour domaine de définition $\bar{\Delta}(d)$ et celui qui a pour domaine de définition $\Delta(d)$.

Structures d'ordre partiel induites sur $A(E, F)$, et $\bar{A}(E, F)$ par la relation d'ordre $\sqsubseteq$ entre applications de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$.

Il existe une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des applications de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$, noter $\sqsubseteq$, définie par

$$f \sqsubseteq g \text{ si } \forall d \in \mathcal{D}_E(\bigcirc_U), f(d) \sqsubseteq_F g(d).$$

Nous savons que l'ensemble $[\mathcal{D}_E(\bigcirc_U) \rightarrow \mathcal{D}_F(\bigcirc_U)]$, des applications continues de $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ est un treillis complet algébrique pour cette relation d'ordre. Mais les applications appartenant à $\bar{A}(E,F)$ ne sont pas continues. Cependant, la relation $\sqsubseteq$ donne à $\bar{A}(E,F)$, une structure d'ordre partiel complet pour les parties dirigées et même conditionnellement complet. Cet ordre n'est pas algébrique mais l'ensemble quotient de $\bar{A}(E,F)$ par la relation d'équivalence à une structure d'ordre partiel complet algébrique pour la relation d'ordre quotient de $\sqsubseteq$ par $\equiv$. Parallèlement, $A(E,F)$ possède une structure d'ordre partiel complet algébrique pour la relation d'ordre $\sqsubseteq$ induite par la relation d'ordre cette application de $\bar{A}(E,F)$.

Nous vérifierons que cette relation d'ordre a bien la propriété souhaitée c'est à dire que si a_1 et $a_2 \in A(E,F)$

$$a_1 \sqsubseteq a_2 \Rightarrow I(a_2) \subseteq I(a_1).$$

Proposition 8. Pour tout couple g_1 et g_2 d'élément de $\bar{A}(E,F)$, de domaines de définition respectivement D_1 et D_2

$$g_1 \sqsubseteq g_2 \text{ si et seulement si } \forall d \in D_1, g_1(d) = g_2(d).$$

Preuve.

Montrons d'abord que $g_1 \sqsubseteq g_2 \Rightarrow \forall d \in D_1, g_1(d) = g_2(d)$ et pour cela, montrons que g_1 et g_2 coïncident sur les éléments de cardinalité 1 de D_1 .

Soit $\{s\}$, un élément de cardinalité 1 de D_1

$$g_1(\{s\}) \neq \perp_F \text{ car } \{s\} \in D_1$$

$$g_1 \sqsubseteq g_2 \Rightarrow g_1(\{s\}) \sqsubseteq_F g_2(\{s\}) \text{ d'où } g_2(\{s\}) \neq \perp_F.$$

D'après la proposition 1 $g_1(\{s\})$ et $g_2(\{s\})$ sont de cardinalité 1.

$$D'où g_1(\{s\}) \sqsubseteq_F g_2(\{s\}) \Rightarrow g_2(\{s\}) \subseteq_{PF} g_1(\{s\}) \text{ et } g_1(\{s\}) = g_2(\{s\}).$$

Nous pouvons appliquer le corollaire 2 de la proposition 6

$$g_1 \text{ et } g_2 \text{ coïncident sur } D_1 \text{ et } g_1(d) = g_2(d) \forall d \in D_1.$$

Réciproquement,

Soit $d \in \mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$

si $d \notin D_1$ $g_1(d) = 1_F$ et $1_F \sqsubset_F g_2(d)$

si $d \in D_1$ $g_1(d) = g_2(d)$ et $g_1(d) \sqsubset_F g_2(d)$

d'où $g_1 \sqsubset g_2$

□

$\bar{A}(E, F)$ n'est pas un treillis car il n'existe pas de majorant commun pour n'importe quel couple d'éléments de $\bar{A}(E, F)$.

Soit, en effet, deux éléments de $\bar{A}(E, F)$, g_1 et g_2 ayant même domaine de définition $\{1_E, \{s\}\}$ où $\{s\}$ est un élément de cardinalité 1 de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$.

Posons $g_1(1_E) = g_2(1_E) = 1_F$

$g_1(\{s\}) = \{s_1\}$

$g_2(\{s\}) = \{s_2\}$

où $\{s_1\}$ et $\{s_2\}$ sont deux éléments de cardinalité 1 de $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$.

Si $\{s_1\} \neq \{s_2\}$, il n'est pas possible de trouver un majorant commun à g_1 et g_2 car si un tel majorant commun, g_3 , existait, $g_1 \sqsubset g_3$ et $g_2 \sqsubset g_3$ entraînerait d'après la proposition 8 :

$$g_1(\{s\}) = \{s_1\} = g_3(\{s\}) = g_2(\{s\}) = \{s_2\}$$

Il y a contradiction car nous avons supposé $\{s_1\} \neq \{s_2\}$. Mais si g_1 et g_2 sont majorés alors ils ont un plus petit majorant commun.

Cette absence de majorants communs pour certains couples d'éléments de $\bar{A}(E, F)$, a une signification intuitive.

Les éléments de $\bar{A}(E, F)$ sont associés avec des applications de E dans F dont ils constituent des approximations. Il est normal de ne pas trouver un majorant, c'est à dire une meilleure approximations pour deux approximations données de deux applications différentes de E dans F .

Si E et F représentent N , l'ensemble des entiers, on ne peut trouver une meilleure approximation commune d'une approximation de la fonction successeur et d'une approximation de la factorielle.

Il est tout aussi normal, par contre, de trouver une meilleure approximation commune de deux approximations données de la même application de E dans F .

Proposition 9. Dans une classe d'équivalence associée à la relation d'équivalence $\equiv$ entre éléments de $\bar{A}(E, F)$, il existe un élément minimum et un élément maximum.

Preuve.

Soit A une classe d'équivalence pour la relation $\equiv$.

Tous les éléments de A ont même borne supérieure d_A pour leur domaine de définition et coïncident sur $\{fs\} / s \in d_A$.

Soit D le domaine de définition d'un élément de A .

Considérons $\Delta(d_A)$.

$\forall \delta \in \Delta(d_A), \exists d \in D$ tel que $\delta \sqsubseteq_E d$. D étant un idéal $\delta \in D$ et $\Delta(d_A) \subseteq D$.

Soit g_m l'élément de A dont le domaine de définition est $\Delta(d_A)$.

Par application du corollaire 2 de la proposition 6, $\forall g \in A$, de domaine de définition D , g coïncide avec g_m sur $\Delta(d_A)$ d'où $\forall d \in \Delta(d_A) g_m(d) = g(d)$ et $g_m \sqsubseteq g$. Il est clair, par ailleurs que $\forall g' \in A$ tel que $g' \sqsubseteq g \quad \forall g \in A$, $g_m \sqsubseteq g'$. g_m est bien minimum.

Soit, à présent g_M l'élément de A dont le domaine de définition est $\bar{\Delta}(d_A)$. Nous avons alors $D \subseteq \bar{\Delta}(d_A)$ pour tout D , domaine de définition, d'un élément g de A . Pour tout élément g de A , de domaine de définition D , $\forall d \in D, d \in \bar{\Delta}(A)$ et $g(d) = g_M(d)$ d'où $g \sqsubseteq g_M$.

Il est clair que si $g' \in A$ est tel que : $\forall g \in A, g \sqsubseteq g'$ alors $g_M \sqsubseteq g'$.
 g_M est l'élément maximum de A .

□

Proposition 10. Dans une classe d'équivalence A de $\bar{A}(E, F)$ pour la relation $\equiv$, tout couple d'éléments de A possède un plus petit majorant commun dans A .

Preuve.

Soit A une classe d'équivalence, g_1 et g_2 deux éléments de A , de domaines de définition respectivement D_1 et D_2 , de co-domaines D'_1 et D'_2 .

Posons $d_A = \bigcup_E D_1 = \bigcup_E D_2$.

Considérons $D_3 = \{d_1 \cup d_2 / d_1 \in D_1, d_2 \in D_2\}$.

Tout idéal D ayant pour borne supérieure d_A et contenant D_1 et D_2 , contient D_3 puisque $\forall d_1 \in D_1, d_2 \in D_2, d_1, d_2 \in D$ et $d_1 \cup_E d_2 \in D$.

Vérifions que D_3 est un idéal.

Soit $d, d' \in D_3$ $d = d_1 \cup_E d_2$ et $d' = d'_1 \cup_E d'_2$

avec $d_1, d'_1 \in D_1, d_2, d'_2 \in D_2$

$d \cup_E d' = (d_1 \cup_E d_2) \cup_E (d'_1 \cup_E d'_2) = (d_1 \cup_E d'_1) \cup_E (d_2 \cup_E d'_2)$

Or $d_1 \cup_E d'_1 \in D_1$ et $d_2 \cup_E d'_2 \in D_2$. De ce fait $d \cup_E d' \in D_3$.

Soit $d \in D_3$ et $d' \sqsubseteq_E d$

$d = d_1 \cup_E d_2$ avec $d_1 \in D_1$ et $d_2 \in D_2$. Nous pouvons écrire

$d' = (d' \sqcap_E d_1) \cup_E (d' \sqcap_E d_2)$ or $d' \sqcap_E d_1 \sqsubseteq_E d_1$ ce qui entraîne $d' \sqcap_E d_1 \in D_1$ et $d' \sqcap_E d_2 \sqsubseteq_E d_2 \Rightarrow d' \sqcap_E d_2 \in D_2$.

D'où $d' \in D_3$. $\bigcup_E D_3 \sqsubseteq \bigcup_E D_1 = d_A$.

Mais $\forall d \in D_3$ $d = d_1 \cup_E d_2$ avec $d_1 \in D_1, d_2 \in D_2$

$d = d_1 \cup_E d_2 \in d_A \Rightarrow \bigcup_E D_3 \in d_A$ et donc $\bigcup_E D_3 = d_A$.

Soit g_3 l'élément de A ayant D_3 comme domaine de définition.

Par application du corollaire 2 de la proposition 6, g_3 coïncide avec g_2 sur D_1 et avec g_1 sur D_2 .

$$\forall d \in D_1 \quad g_1(d) = g_3(d) ; \text{ d'où } g_1 \sqsubseteq g_3$$

$$\forall d \in D_2 \quad g_2(d) = g_3(d) ; \text{ d'où } g_2 \sqsubseteq g_3$$

De plus, g_3 est le plus petit majorant de g_1 et g_2 car pour tout élément g de $\bar{A}(E,F)$, de domaine de définition D tel que $g_1 \sqsubseteq g$, $g_2 \sqsubseteq g$

$$\forall d \in D_1 \quad g_1(d) = g(d) ; \forall d \in D_2 \quad g_2(d) = g(d).$$

D'où $D_1 \subseteq D$ et $D_2 \subseteq D$ et nous avons vu que dans ces conditions $D_3 \subseteq D$.

Ce qui entraîne $g_3(d) = g(d)$ si $d \in D_3$.

C'est à dire $g_3 \sqsubseteq g$.

□

Proposition 11. Si g_1 et g_2 sont deux éléments de $\bar{A}(E,F)$, de domaine de définition respectivement D_1 et D_2 , alors, pour tout majorant g de g_1 et g_2 , appartenant à $\bar{A}(E,F)$, g est définie en $\{s\} \forall s \in U_E(D_1) \cup_E (U_E D_2)$ et il existe un couple (s_1, s_2) indépendant de g tel que $s_1 \in U_E D_1$, $s_2 \in U_E D_2$, $s = s_1 \uplus_E s_2$ et $g(\{s\}) = g_1(\{s_1\}) \cup_F g_2(\{s_2\})$.

Preuve.

$U_E D_1$ et $U_E D_2$ sont les familles de sous-ensembles de E constituées à partir des éléments de cardinalité 1 respectivement de D_1 et D_2 .

Si g est un majorant de D_1 et D_2 , il coïncide avec g_1 en $\{s_1\} \forall s_1 \in U_E D_1$ et avec g_2 en $\{s_2\} \forall s_2 \in U_E D_2$.

g ayant les propriétés b) et c) de la définition des éléments de $\bar{A}(E,F)$, quelque soit la famille finie σ d'éléments de $U_E D_1$ et $U_E D_2$, g est définie en $U_E \{\{s\} / s \in \sigma\}$ de sorte que g est définie en $\{s\} \forall s \in (U_E D_1) \cup_E (U_E D_2)$.

Soit $s \in (U_E D_1) \cup_E (U_E D_2)$

$(U_E D_1) \cup_E (U_E D_2)$ est obtenu par clôture par réunion finie de $(U_E D_1) \cup_{PE} (U_E D_2)$.

Tout élément $s \in (U_E D_1) \cup_E (U_E D_2)$ est réunion finie d'éléments de $(U_E D_1) \cup_{PE} (U_E D_2)$

$$s = R\sigma \text{ avec } \sigma \subseteq_{PE} (U_E D_1) \cup_{PE} (U_E D_2).$$

Regroupons les éléments de σ appartenant à $U_E D_1$ et à $U_E D_2$.

$s = R\sigma_1 \cup_E R\sigma_2$ avec $\sigma_1 \subseteq_{PE} U_E D_1$ et $\sigma_2 \subseteq_{PE} U_E D_2$ et $U_E D_1$ et $U_E D_2$ étant clos par réunion finie, $R\sigma_1 \in U_E D_1$ et $R\sigma_2 \in U_E D_2$.

Posons $s_1 = R\sigma_1$, et $s_2 = R\sigma_2$.

s_1 et s_2 sont indépendants de g .

Il est possible que σ_1 ou σ_2 soient vides. Il est possible ainsi que $\sigma_1 \cap_{PE} \sigma_2 \neq \emptyset$ si $(U_E D_1) \cap_E (U_E D_2) \neq \emptyset$ mais l'existence de g entraîne que g_1 et g_2 coïncident sur les éléments communs à σ_1 et σ_2 s'il en existe. Nous pouvons donc mettre s sous la forme $s_1 \cup_E s_2$ avec $s_1 \in U_E D_1$ et $s_2 \in U_E D_2$

$$g(\{s\}) = g(\{s_1 \cup_E s_2\}) = g(\{s_1\}) \cup_F g(\{s_2\}).$$

Or g coïncide avec g_1 sur $U_E D_1$ et avec g_2 sur $U_E D_2$.

$$D'où, $g(\{s\}) = g_1(\{s_1\}) \cup_F g_2(\{s_2\}).$$$

□

Proposition 12. Tout couple d'éléments de $\bar{A}(E, F)$, majoré dans $\bar{A}(E, F)$, possède un plus petit majorant commun dans A .

Preuve.

Soit, g_1, g_2 , deux éléments de $\bar{A}(E, F)$, de domaine de définition respectivement D_1 et D_2 , de co-domaine respectivement D'_1 et D'_2 .

Soit g_3 , un élément de $\bar{A}(E, F)$, de domaine de définition D_3 , de co-domaine D'_3 tel que $g_1 \sqsubset g_3$ et $g_2 \sqsubset g_3$.

$$\text{Soit } D = \{d_1 \cup_E d_2 / d_1 \in D_1, d_2 \in D_2\}$$

D est un idéal.

Soit g un élément de $\bar{A}(E, F)$, de domaine de définition

$$D = \{d_1 \cup_E d_2 / d_1 \in D_1, d_2 \in D_2\} \text{ définie par } \forall d \in D \subseteq g(d) = g_3(d).$$

Nous avons $D_1 \subseteq D$ et $D_2 \subseteq D$ car les éléments de D_1 sont des éléments de D de la forme $d' \cup_E \perp_E$ avec $d' \in D_1$ et les éléments de D_2 sont de la forme $\perp_E \cup_E d''$ avec $d'' \in D_2$.

$$\forall d \in D_1 \quad g_1(d) = g_3(d) = g(d) \text{ d'où } g_1 \sqsubseteq g$$

$$\forall d \in D_2 \quad g_2(d) = g_3(d) = g(d) \text{ d'où } g_2 \sqsubseteq g$$

g est le plus petit majorant commun de g_1 et g_2 .

En effet, soit g' un majorant de g_1 et g_2 .

Soit D' le domaine de définition de g'

$$D_1 \subseteq D' \text{ et } D_2 \subseteq D'.$$

D' doit donc contenir $d_1 \cup_E d_2 \quad \forall d_1 \in D_1 \text{ et } d_2 \in D_2$ c'est à dire $D \subseteq D'$.

De plus $\forall s \in (U_E D_1) \cup_E (U_E D_2) \quad g(\{s\}) = g'(\{s\})$.

Ceci d'après la proposition 11 puisque il existe un couple (s_1, s_2) ,

$s_1 \in U_E D_1, s_2 \in U_E D_2$, indépendants de g et g' tels que $s = s_1 \cup_E s_2$

et $g(\{s\}) = g_1(\{s_1\}) \cup_F g_2(\{s_2\}) = g'(\{s\})$.

Nous pouvons alors appliquer le corollaire 2 de la proposition 5 qui entraîne que g' coïncide avec g sur D .

C'est à dire que $\forall d \in D, \quad g(d) = g'(d)$ et $g \sqsubseteq g'$. g est bien le plus petit majorant de g_1 et g_2 .

□

Remarquons que $\forall d \in D, d$ peut se mettre sous la forme $d_1 \cup_E d_2$ avec $d_1 \in D_1$ et $d_2 \in D_2 \quad g(d) = g(d_1 \cup_E d_2)$. g étant additive $g(d) = g(d_1) \cup_E g(d_2) = g_1(d_1) \cup_E g_2(d_2)$ car g coïncide avec g_1 sur D_1 et avec g_2 sur D_2 .

Théorème 1. $\bar{A}(E, F)$, muni de la relation d'ordre $\sqsubseteq$, a une structure d'ordre partiel complet.

Preuve.

Soit A , une partie dirigée de $\bar{A}(E, F)$.

Pour tout élément g de A notons D_g , le domaine de définition de g .

Soit $d \in \mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$.

Si $d \in D_g$ alors $d \in D_{g'}$, $\forall g' \in A$ tel que $g \sqsubseteq g'$ et $g(d) = g'(d)$.

Soit $g, g' \in A$ tels que $d \in D_g$ et $d \in D_{g'}$.

Il existe $g'' \in A$ tel que $g'' \sqsubseteq g$ et $g'' \sqsubseteq g'$. Ce qui entraîne $g''(d) = g'(d)$
 $g''(d) = g'(d) = g(d)$ et $d \in D_{g''}$. Si deux éléments g et g' de A sont définis
 en d , elles y ont même valeur.

posons UA une application de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$ définie par
 $UA(d) = U_F\{g(d) / g \in A\}$. Montrons que UA appartient à $A(E, F)$.

Notons D_A le domaine de définition de UA et D'_A son co-domaine.

a) UA est continue.

Soit $d \in D_A$. Nous devons montrer que :

$$UA(d) = U_F\{UA(\delta) / \delta \in \Delta(d)\}.$$

Si UA est définie en d alors, d'après la définition de UA , $\exists g \in A$ tel que
 $UA(d) = g(d)$ et pour tout élément $g' \in A$ tel que $d \in D_{g'}$, $g'(d) = g(d)$.
 Si $d \in D_g$, $\Delta(d) \subseteq D_g$ car D_g est un idéal. De ce fait $\forall \delta \in \Delta(d)$ $UA(\delta) = g(\delta)$
 $UA(d) = g(d) = U_F\{g(\delta) / \delta \in \Delta(d)\} = U_F\{A(\delta) / \delta \in \Delta(d)\}$
 A est continue.

b) D_A est un idéal.

Soit $d, d' \in D_A$.

Il existe g et $g' \in A$ tels que :

$$UA(d) = g(d) ; UA(d') = g'(d')$$

g et g' possèdent un majorant dans A : g'' qui est défini en d et d' .

C'est à dire que $d, d' \in D_{g''}$ et donc $d \cup_E d' \in D_{g''}$ car $D_{g''}$ est un idéal
 UA est donc défini en $d \cup_E d'$ car $U_E A(d \cup_E d') = g''(d \cup_E d')$.

Soit $d \in D_A$ et $d' \in D_E \setminus D_A$; $d' \not\leq_E d \Rightarrow \exists g \in A$ tel que $UA(d) = g(d)$.
 $d \in D_g$ et $d' \leq_E d \Rightarrow d' \in D_g$; d'où $d' \in D_A$.

c) Soit $d, d' \in D_A$. $d \leq_E d' \in D_A$ et $\exists g \in A$ tel que
 $UA(d \leq_E d') = g(d \leq_E d')$. Or $g \in A(E, F)$ et $g(d \leq_E d') = g(d) \leq_F g(d')$
 $UA(d \leq_E d') = g(d) \leq_F g(d')$ mais $UA(d) = g(d)$ et $UA(d') = g(d')$
 $UA(d \leq_E d') = UA(d) \leq_F UA(d')$.

Soit $\{s_1\}$ et $\{s_2\}$, deux éléments de cardinalité 1 de D_A .
 Il existe $g \in A$ tel que :

$$\begin{aligned} UA(\{s_1\}) &= g(\{s_1\}) \\ UA(\{s_2\}) &= g(\{s_2\}) \end{aligned}$$

g appartenant à $A(E, F)$, $g(\{s_1 \leq_E s_2\}) = g(\{s_1\}) \leq_F g(\{s_2\})$
 $UA(\{s_1 \leq_E s_2\}) = g(\{s_1 \leq_E s_2\}) = g(\{s_1\}) \leq_F g(\{s_2\}) = (UA(\{s_1\})) \leq_F (UA(\{s_2\}))$

d) Soit $\delta \in D_A$, la cardinalité de δ étant finie.

Il existe $g \in A$ tel que $UA(\delta) = g(\delta)$.

$$\text{Card}(UA(\delta)) = \text{Card}(g(\delta))$$

$A(E, F)$ est complet.

□

Théorème 2. $\bar{A}(E, F)$ est conditionnellement complet.

Preuve.

Soit A un ensemble d'éléments de $\bar{A}(E, F)$ ayant un majorant commun h .

Considérons la partie dirigée B de $\bar{A}(E, F)$ définie ainsi $A \subseteq B$ et $\forall d, d' \in B$
 $d \leq d' \in B$.

B existe car tout couple d'éléments g_1, g_2 de A , étant majoré par h , possède

un plus petit majorant commun $g_1 \cup g_2$ lui-même majoré par h .

B possède une borne supérieure $UB \sqsubset h$ et majorant $g \quad \forall g \in A$.

Soit g' un majorant commun des éléments de A .

Soit g_1, g_2 deux éléments de B ,

$$g_1 \sqsubset g' \text{ et } g_2 \sqsubset g' \Rightarrow g_1 \cup g_2 \sqsubset g'$$

or les éléments de A sont inférieure à g' d'où :

$$\forall g \in B \quad g \sqsubset g' \text{ et } UB \sqsubset g'$$

A possède dans un plus petit majorant commun et $\bar{A}(E, F)$ est conditionnellement complet.

□

Notons $\bar{A}_m(E, F)$ le sous-ensemble de $\bar{A}(E, F)$ constitué par les éléments minimum de chaque classe d'équivalence associé à la relation $\equiv$.

Théorème 3. $\bar{A}_m(E, F)$ est munie par $\sqsubset$ d'une structure d'ordre partiel complet algébrique. Les éléments isolés de $\bar{A}_m(E, F)$ sont les éléments de $\bar{A}_m(E, F)$ dont le domaine de définition est de cardinalité finie.

Preuve.

$\bar{A}_m(E, F)$ est clos par l'opérateur $\cup$.

Soit $g_1, g_2 \in \bar{A}_m(E, F)$ et g_3 un élément de $\bar{A}(E, F)$ tel que $g_1 \cup g_3$ et $g_2 \cup g_3$.
 g_1 et g_2 possèdent un plus petit majorant commun $g_1 \cup g_2$ dans $\bar{A}(E, F)$.

Soit D_1 et D_2 les domaines de définitions, de g_1 et g_2 le domaine de définition D de $g_1 \cup g_2$ est $\{d_1 \cup_E d_2 / d_1 \in D_1, d_2 \in D_2\}$
 $d_1 \cup_E d_2 \in B_E(\bigcup) \quad \forall d_1 \in D_1 \text{ et } d_2 \in D_2$.

Plus précisément $D = \{\delta / \delta \in \mathcal{B}_E(\bigcirc_U), \delta \sqsubseteq (U_E D_1) \cup_E (U_E D_2)\}$
 de sorte que $g_1 \cup g_2 \in \bar{A}_m(E, F)$.
 $\bar{A}_m(E, F)$ est complet.

Soit A une partie dirigée de $\bar{A}_m(E, F)$.
 A possède une borne supérieure UA dans $\bar{A}(E, F)$.

Soit D_A le domaine de définition de UA et D_g le domaine de définition
 d'un élément g de A .

Soit $D = \{U_E D_g / g \in A\}$.
 D est une partie dirigée de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$.
 En effet $g \sqsubseteq g' \Rightarrow D_g \subseteq D_{g'} \Rightarrow U_E D_g \sqsubseteq_E U_E D_{g'}$.

Considérons $U_E D$.

$$D_A = \{\delta / \delta \in \mathcal{B}_E(\bigcirc_U) \text{ et } \delta \sqsubseteq_E U_E D\}$$

$$D_A \subseteq \{\delta / \delta \in \mathcal{B}_E(\bigcirc_U) \text{ et } \delta \sqsubseteq_E U_E D\}$$

et
$$\forall \delta \in \{\delta / \delta \in \mathcal{B}_E(\bigcirc_U) \text{ et } \delta \sqsubseteq_E U_E D\}$$

$$\delta \sqsubseteq_E U_E D \Rightarrow \exists d \in D \text{ tel que } \delta \sqsubseteq_E d$$

$$\exists g \in A \text{ tel que } d = U_E D_g$$

et, à nouveau, $\exists d' \in D_g$ tel que $\delta \sqsubseteq_E d'$ ce qui entraîne

$$\delta \in D_g \text{ et } \delta \in D_A$$

UA appartient donc à $\bar{A}_m(E, F)$.

$\bar{A}_m(E, F)$ est algébrique.

Soit g un élément de $\bar{A}_m(E, F)$ de domaine de définition D tel que la cardinalité de D soit finie.

Soit A une partie dirigée de $\bar{A}_m(E, F)$ telle que $g \sqsubseteq UA$.
 Nous avons alors $UA(\delta) = g(\delta) \quad \forall \delta \in D$.
 D'après la construction de UA , $\exists g_\delta \in A$ tel que $\delta \in D_{g_\delta}$

Soit A_D un sous-ensemble fini de A tel que

$$\forall \delta \in D \quad \exists g_\delta \in A_D \text{ tel que } \delta \in D_{g_\delta}$$

A_D est finie car D est fini.

A_D possède, à cause de sa cardinalité finie, un majorant dans A .

Soit g_D ce majorant.

$$\forall \delta \in D \quad g_D(\delta) = g(\delta) \text{ et } g \sqsubseteq g_D.$$

Il existe dans A un majorant pour g .

Soit à présent g un élément de $\bar{A}_m(E, F)$ et A l'ensemble des éléments de $\bar{A}_m(E, F)$ dont le domaine de définition est, de cardinalité finie, et qui sont inférieurs ou égaux à g .

$$A = \{g' \in \bar{A}_m(E, F) / \text{Card}(D_{g'}) \text{ fini et } g' \sqsubseteq g\}$$

$\forall \delta \in D_g$, il existe une application g appartenant à $\bar{A}_m(E, F)$ telle que $\forall \delta' \sqsubseteq_E \delta, g_\delta(\delta') = g(\delta')$ et, puisque la cardinalité de δ est finie, $g_\delta(\delta) = g(\delta)$. C'est à dire que $\delta \in D_{g_\delta}$.

La cardinalité de D_{g_δ} est finie car celle de δ est finie, de sorte que $g \in A$ et $\delta \in D_A$, le domaine de définition de UA . Ceci entraîne que $\forall \delta \in D_g, \delta \in D_A$ et $g(\delta) = UA(\delta)$.

Nous avons, de ce fait $g \sqsubseteq UA$.

Comme $g' \sqsubseteq g \quad \forall g' \in A$ $UA \sqsubseteq g$ et donc $g = UA$.

$\bar{A}_m(E, F)$ est bien algébrique.

Les éléments isolés de $\bar{A}_m(E, F)$ sont les applications dont le domaine de définition est de cardinalité finie.

□

Notons $\bar{A}_{\equiv}(E, F)$, l'ensemble des classes d'équivalences dans $\bar{A}(E, F)$ pour la relation d'équivalence $\equiv$ et $\sqsubseteq$ la relation d'ordre quotient associée à $\sqsubset$.

Soit C_1, C_2 deux classes appartenant à $\bar{A}_{\equiv}(E, F)$
 $C_1 \sqsubseteq C_2$ s'il existe $g_1 \in C_1$ et $g_2 \in C_2$ tels que $g_1 \sqsubset g_2$.

Corollaire 1. $\bar{A}_{\equiv}(E, F)$ est muni par $\sqsubseteq$ d'une structure d'ordre partiel complet algébrique dont les éléments isolés sont les classes contenant les éléments isolés de $\bar{A}_m(E, F)$.

Preuve.

La preuve est immédiate. L'application de $\bar{A}_m(E, F)$ dans $\bar{A}_{\equiv}(E, F)$ qui fait correspondre, à un élément g de $\bar{A}_m(E, F)$, sa classe d'équivalence, est un isomorphisme.

□

Soit a un élément de $A(E, F)$ c'est à dire une application d'un élément d de $\mathcal{D}_E(\bigcirc_U)$ dans un élément d' de $\mathcal{D}_F(\bigcirc_U)$.
 a permet de définir un élément C_a de $\bar{A}_{\equiv}(E, F)$. Un élément g de $\bar{A}(E, F)$, de domaine de définition D_g , appartient à C_a si $U_E D_g = d$ et si $\forall s \in d$
 $g(\{s\}) = \{a(s)\}$. Notons $a_{\equiv}$ la classe d'équivalence associée à un élément a de $A(E, F)$ et $\bar{a}$ l'élément minimum associée à $a_{\equiv}$.

Réciproquement, soit C une classe d'équivalence appartenant à $\bar{A}_{\equiv}(E, F)$.

Soit C_m l'élément minimum de cette classe, de domaine de définition.

D_{C_m} .

Soit $d = U_E D_{C_m}$ et $d' = U_F \{(m(\delta) / \delta \in D_{C_m})\}$.

A C_m est associé un élément a de $A(E, F)$, appliquant d dans d' et défini par $a(s) = C_m(s) \quad \forall s \in d$.

Soit $a_1, a_2 \in A(E, F)$; a_1 appliquant d_1 dans d'_1 et a_2 appliquant d_2 dans d'_2 .

La relation $\sqsubseteq$ sur $A(E, F)$ induit une relation d'ordre $\sqsubset$ entre éléments de $A(E, F)$ définie par :

$$a_1 \sqsubset a_2 \text{ si et seulement si } a_1 \sqsubseteq a_2$$

Proposition 13. La relation d'ordre $\sqsubset$ sur $A(E, F)$ définie par $a_1 \sqsubset a_2$ si et seulement si $a_1 \sqsubseteq a_2$ est équivalente à la relation $a_1 \sqsubset a_2$ si et seulement si $d_1 \sqsubset d_2$ et $\forall s \in d_1 \quad a_1(s) = a_2(s)$.

Preuve.

$$a_1 \sqsubset a_2 \Rightarrow a_1 \sqsubseteq a_2 \Rightarrow \bar{a}_1 \sqsubset \bar{a}_2$$

Soit $D_{a_1}^-$ et $D_{a_2}^-$ les domaines de définitions de $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$.

Nous avons $\bigcup_E D_{a_1}^- \sqsubseteq \bigcup_E D_{a_2}^-$ car $D_{a_1}^- \subseteq D_{a_2}^-$ or $d_1 = \bigcup_E D_{a_1}^-$ et $d_2 = \bigcup_E D_{a_2}^-$.

De plus, $\forall s \in \bigcup_E D_{a_1}^-$.

$$a_1(s) = \bar{a}_1(\{s\}) = \bar{a}_2(\{s\}) = a_2(s)$$

Réciproquement, si $d_1 \sqsubset d_2$ et si $\forall s \in d_1 \quad a_1(s) = a_2(s)$.

Soit $\bar{a}_1$ l'élément minimum de la classe a_1 associé à a_1 et $\bar{a}_2$ l'élément minimum de la classe a_2 associée à a_2 .

Soit $D_{a_1}^-$ et $D_{a_2}^-$ les domaines de définition de $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$.

Nous avons $UD_{a_1}^- = d_1$ et $UD_{a_2}^- = d_2$ et plus précisément $D_{a_1}^- = \Delta(d_1)$ $D_{a_2}^- = \Delta(d_2)$
 $d_1 \sqsubseteq_E d_2 \Rightarrow \Delta(d_1) \subseteq \Delta(d_2)$.

Appliquons alors la proposition 5 et ses corollaires 1 et 2.

$\bar{a}_1 \sqsubseteq \bar{a}_2$ ce qui entraîne $a_1 \sqsubseteq_{\equiv} a_2$ et par définition $a_1 \sqsubseteq a_2$.

□

Corollaire 2. $A(E,F)$, muni de la relation d'ordre $\sqsubseteq$, est un ordre partiel complet algébrique.

Preuve.

L'application de $A(E,F)$ dans $\bar{A}_{\equiv}(E,F)$ défini par

$$a \rightarrow a_{\equiv} \text{ pour tout } a \in A(E,F)$$

est un isomorphisme et $\bar{A}_{\equiv}(E,F)$ est complet et algébrique.

□

INTERPRÉTATION D'UN ÉLÉMENT DE $A(E,F)$

Soit f une application de E dans F et a un élément de $A(E,F)$ de domaine de définition d_a et de co-domaine d_a , tel que :

$$a(s) = f(s) \quad \forall s \in d_a$$

Sauf si d_a contient les singletons de E , f n'est pas la seule application de E dans F telle que :

$$a(s) = f(s) \quad \forall s \in d_a$$

La donnée de a définit donc de façon approchée une application de E dans F .

Plus généralement, puisque nous avons admis qu'un sous-ensemble était une approximation des sous-ensembles qu'il contient, nous allons définir l'interprétation I d'un élément a de $A(E,F)$ en posant :

$$I(a) = \{f : E \rightarrow F / f(s) \subseteq a(s) \quad \forall s \in d_a\}$$

I est une application de $A(E,F)$ dans l'ensemble des sous-ensembles de

l'ensemble des applications de E dans F.

Vérifions que I a bien les propriétés voulues.

Proposition 14. Si a_1 et a_2 sont deux éléments de $A(E, F)$

$$a_1 \sqsubset a_2 \Rightarrow I(a_2) \subseteq I(a_1)$$

Preuve.

Soit a_1 une application de d_{a_1} dans d'_{a_1}

Soit a_2 une application de d_{a_2} dans d'_{a_2}

$$a_1 \sqsubset a_2 \Rightarrow \forall s \in d_{a_1} \quad a_1(s) = a_2(s)$$

$\forall f \in I(a_2), \forall s \in d_{a_1} \quad f(s) \subseteq a_2(s) = a_1(s)$ d'où $f \in I(a_1)$ et donc $I(a_2) \subseteq I(a_1)$.

□

Proposition 15. Si a_1 et a_2 sont des éléments de $A(E, F)$, majorés par a_3

$$I(a_1 \cup a_2) = I(a_1) \cap I(a_2)$$

Preuve.

Soit $s \in d_{a_1} \cup d_{a_2}$.

Nous avons

soit $s \in d_{a_1}$

soit $s \in d_{a_2}$

soit $s = s_1 \cup_E s_2$ avec $s_1 \in d_{a_1}$, $s_2 \in d_{a_2}$

Si s appartient simultanément à d_{a_1} et d_{a_2} alors $a_1(s) = a_2(s)$ à cause du majorant commun de a_1 et a_2 : a_3 .

Soit f un élément de $I(a_1 \cup a_2)$

$\forall s \in d_{a_1} \cup d_{a_2} \quad f(s) \subseteq (a_1 \cup a_2)(s)$

ce qui entraîne $f(s) \subseteq a_1(s)$ si $s \in d_{a_1}$

$f(s) \subseteq a_2(s)$ si $s \in d_{a_2}$

c'est à dire $I(a_1 \cup a_2) \subseteq I(a_1) \cap I(a_2)$.

Soit, à présent $f \in I(a_1) \cap I(a_2)$

$\forall s \in d_{a_1}, f(s) \subseteq a_1(s)$

$\forall s \in d_{a_2}, f(s) \subseteq a_2(s)$

si s est de la forme $s_1 \cup_E s_2$ avec $s_1 \in d_{a_1}$ et $s_2 \in d_{a_2}$

$f(s) = f(s_1 \cup_E s_2) = f(s_1) \cup_F f(s_2) \subseteq a_1(s_1) \cup_F a_2(s_2)$

or $(a_1 \cup a_2)(s) = a_1(s_1) \cup_F a_2(s_2)$.

D'où $f \in I(a_1 \cup a_2)$ et $I(a_1 \cup a_2) = I(a_1) \cap I(a_2)$.

□

Proposition 16. Si A est une partie dirigée de $A(E, F)$,

$$I(UA) = \bigcap_{a \in A} I(a).$$

Preuve.

UA est une application de $\bigcup_E \{d_a / a \in A\}$ dans $\bigcup_F \{d'_a / a \in A\}$.

Soit $s \in \bigcup_E \{d_a / a \in A\}$, $\exists a \in A$ tel que $s \in d_a$ et $UA(s) = a(s)$

Si $f \in I'(a) \quad \forall a \in A$

$\forall a \in A, \forall s \in d_a, f(s) \subseteq a(s) \Rightarrow f(s) \subseteq UA(s)$ et donc $f \in I(UA)$.

C'est à dire $\bigcap_{a \in A} I(a) \subseteq I(UA)$.

Réciproquement.

Soit $f \in I(UA)$.

$\forall s \in \bigcup_E \{d_a / a \in A\} \quad f(s) \subseteq UA(s)$.

Soit $a \in A \quad \forall s \in d_a \quad UA(s) = a(s)$ car $UA \sqsubseteq a$ d'où $f(s) \subseteq a(s)$
car $f(s) \subseteq UA(s)$ et $f \in I(a)$ d'où $I(UA) \subseteq \bigcap_{a \in A} (I(a))$

$$I(UA) = \bigcap_{a \in A} (I(a))$$

□

NOTION DE TABLE

STRUCTURE D'ORDRE SUR L'ENSEMBLE DES TABLES

Considérons la déclaration de procédure ALGOL 68 suivante :

Proc F = (Réel X) Réel : (F(X))

Une telle déclaration fait un usage incorrect des possibilités de déclaration de procédure récursive offerte par le langage ALGOL 68.

La procédure F est indéterminée mais nous avons cependant une information sur cette procédure : elle applique l'ensemble des réels dans [-1, +1].

Pour réduire l'indétermination sur la procédure F, il faut remplacer, dans le coup de procédure, F(X) par une règle de calcul convenable de la valeur de la procédure en fonction du paramètre. Mais nous pouvons aussi imaginer de préciser que la procédure F applique l'ensemble des réels dans [-1, +1].

F1 : Réel $\rightarrow$ $[-1, +1]$

ou encore de façon plus précise

$$F_2 : \left\{ \begin{array}{l} \text{Réel} \rightarrow [-1, +1] \\ [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, +1] \\ [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow [-1, 0] \\ [-\frac{\pi}{2}, 0] \rightarrow [0, +1] \\ [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 0] \end{array} \right.$$

Nous pouvons raffiner l'information sur F en décomposant davantage les intervalles $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$, en intervalles plus petits, par exemple, d'un diamètre 10^{-8} .

Nous détiendrons ainsi quelque chose de bien connu en programmation sous le nom de "table" ou de "table fonctionnelle".

L'analyse numérique fournit des méthodes qui permettent de mettre en oeuvre une telle table de façon plus réaliste.

Fondamentalement, une table correspond au graphe d'une relation fonctionnelle. Ce graphe peut être implémenté de différentes façons, par exemple par une abaque ou une courbe graphique sur une feuille de papier ou encore par la donnée d'un ensemble de couples comprenant un élément de l'ensemble de départ et un élément de l'ensemble d'arrivée comme dans la mémoire d'un calculateur.

Dans le chapitre III, nous avons essayé d'approximer un ensemble E par un recouvrement fermé par réunion finie de cet ensemble, c'est à dire par un élément de $\mathcal{D}_E(\bigcup)$. Dans une première partie du chapitre IV, nous avons essayé d'approximer les applications d'un ensemble E dans un ensemble F par les applications d'un élément de $\mathcal{D}_E(\bigcup)$ dans un élément de $\mathcal{D}_F(\bigcup)$, nous allons chercher à présent, à approcher une table fonctionnelle et plus généralement une relation binaire entre E et F par un sous-ensemble de $\mathcal{D}_{E \times F}$.

Relations binaires et familles de sous-ensembles de $E \times F$

Soit E et F deux ensembles,

$E \times F$ le produit cartésien de E et F .

Nous noterons :

(x,y) un élément de $E \times F$ où $x \in E$ et $y \in F$,

p_E et p_F respectivement les projections sur E et sur F .

Pour tout $V \subseteq_{E \times F} E \times F$

$$p_E(V) = \{x \in E / \exists y \in F \text{ tel que } (x,y) \in V\}$$

$$p_F(V) = \{y \in F / \exists x \in E \text{ tel que } (x,y) \in V\}$$

Il ne faut pas confondre ces projections liées au produit cartésien de deux ensembles avec la notion de projection introduite dans les rappels mathématiques du chapitre I et au chapitre III qui est définie à partir d'une relation d'ordre. Cependant, si on munit E et F d'une structure de domaine de Scott plat, il s'en déduit une structure d'ordre sur $E \times F$ pour laquelle p_E et p_F sont aussi des projections au sens du chapitre I. Une relation binaire entre E et F étant un sous-ensemble de $E \times F$, l'ensemble des relations binaires entre E et F se confond avec $\mathcal{P}(E \times F)$, l'ensemble de sous-ensembles de $E \times F$.

Il existe plusieurs façon de décrire une relation binaire, en utilisant une représentation saggitale ou différentes représentations matricielles. Nous allons utiliser une représentation "*par coupe*" dans laquelle on donne pour tout $x \in E$, l'ensemble de y appartenant à F tels que le couple (x,y) appartienne à la relation.

Définition 4. La coupe d'une relation binaire ρ entre E et F par un élément x de E est constitué par l'ensemble des éléments y de F tels que le couple (x,y) appartienne à ρ .

□

Nous noterons $\rho(x)$ la coupe de ρ par x

$$\rho(x) = \{y / y \in F \text{ et } (x,y) \in \rho\}$$

Nous pouvons étendre cette définition à la coupe d'une relation binaire par un sous-ensemble e de E et par un élément d de $\mathcal{D}_E$.

Définition 5. La coupe d'une relation binaire ρ entre E et F par un sous-ensemble e de E est constitué par la réunion des coupes de ρ par les éléments x appartenant à e :

$$\rho(e) = \cup_F \{\rho(x) / x \in e\}$$

□

Définition 6. La coupe d'une relation binaire ρ entre E et F par un élément d de $\mathcal{D}_E$, est constitué par l'ensemble des coupes de ρ par les éléments de d

$$\rho(d) = \{\rho(s) / s \in d\}$$

□

Nous pouvons également étendre les opérations de projection p_E et p_F aux familles de sous-ensembles de $E \times F$ c'est à dire aux éléments de $\mathcal{D}_{E \times F}$ en posant pour tout élément D appartenant à $\mathcal{D}_{E \times F}$

$$p_E(D) = \{p_E(s) / s \in D\}$$

$$p_F(D) = \{p_F(s) / s \in D\}$$

Soit V un sous-ensemble de $E \times F$.

Soit $V_E = p_E(V)$ et $V_F = p_F(V)$.

V n'est pas le seul sous ensemble de $E \times F$ dont les projections sur E et F soient $p_E(V)$ et $p_F(V)$ et en général :

$$V \neq V_E \times V_F$$

De même, nous n'avons pas en général, pour un élément D quelconque de $\mathcal{D}_{E \times F}$ $D = p_E(D) \times p_F(D)$, ni même, $D = \{p_E(s) \times p_F(s) / s \in D\}$.

Nous qualifierons de *projetable* un sous-ensemble V de $E \times F$ tel que :

$$V = p_E(V) \times p_F(V)$$

Définition 7. Un sous-ensemble V de $E \times F$ est *projetable* si :

$$V = p_E(V) \times p_F(V)$$

□

Si u est un sous-ensemble de E et v un sous-ensemble de F

$$u \times v = \bigcup_{E \times F} \{V / V \subseteq_{E \times F} E \times F \text{ et } p_E(V)=u, p_F(V)=v\}$$

Nous étendrons cette définition aux éléments de $\mathcal{D}_{E \times F}$.

Définition 8. Une famille D de sous-ensembles $E \times F$ est projetable si chacun des sous-ensembles qui la compose est projetable

$$D = \{p_E(s) \times p_F(s) / s \in D\}$$

□

Proposition 17. Une intersection quelconque des sous-ensembles projetables est projetable.

Preuve.

Soit σ une famille de sous-ensembles projetables.

Nous devons montrer que $p_E(\bigcap_{s \in \sigma} E \times F^s) \times p_F(\bigcap_{s \in \sigma} E \times F^s) = \bigcap_{s \in \sigma} E \times F^s$

Deux cas sont à considérer, suivant que $\bigcap_{s \in \sigma} E \times F^s$ est vide ou non.

Soit $V = \bigcap_{s \in \sigma} E \times F^s$.

Si $V = \emptyset$. Ses projections $p_E(V)$ et $p_F(V)$ sont vides et l'on a bien $V = p_E(V) \times p_F(V)$.

Si $V \neq \emptyset$. Soit (x, y) un élément de $E \times F$ appartenant à V , $(x, y) \in s \quad \forall s \in \sigma$.

Ce qui entraîne $x \in p_E(s) \quad \forall s \in \sigma$ et $y \in p_F(s) \quad \forall s \in \sigma$.

C'est-à-dire que $x \in \bigcap_{s \in \sigma} p_E(s)$ et $y \in \bigcap_{s \in \sigma} p_F(s)$.

D'où nous tirons :

$$(x, y) \in \left(\bigcap_{s \in \sigma} p_E(s) \right) \times \left(\bigcap_{s \in \sigma} p_F(s) \right).$$

Réciproquement.

Soit $(x,y) \in (\bigcap_{s \in \sigma} p_E(s)) \times (\bigcap_{s \in \sigma} p_F(s))$

Nous pouvons déduire $s \in \bigcap_{s \in \sigma} p_E(s)$ et $y \in \bigcap_{s \in \sigma} p_F(s)$.

C'est à dire $x \in p_E(s) \quad \forall s \in \sigma$ et $y \in p_F(s) \quad \forall s \in \sigma$.

Puisque, $\forall s \in \sigma$, s est projetable, $s = p_E(s) \times p_F(s)$ et $x \in p_E(s)$;
 $y \in p_F(s) \Rightarrow (x,y) \in s \quad \forall s \in \sigma$ □

Proposition 18. Si σ est une famille quelconque de sous-ensembles projetables de $E \times F$, alors si $\bigcap_{s \in \sigma} s \neq \emptyset$

$$p_E(\bigcap_{s \in \sigma} s) = \bigcap_{s \in \sigma} p_E(s)$$

$$p_F(\bigcap_{s \in \sigma} s) = \bigcap_{s \in \sigma} p_F(s)$$

Si $\bigcap_{s \in \sigma} s = \emptyset$, l'une au moins des deux intersections $\bigcap_{s \in \sigma} p_E(s)$, $\bigcap_{s \in \sigma} p_F(s)$ est vide et l'égalité correspondante est vérifiée.

Preuve.

$\bigcap_{s \in \sigma} s \neq \emptyset$. Il existe donc au moins un élément (x,y) de $E \times F$ tel que $(x,y) \in s \quad \forall s \in \sigma$.

$\forall (x,y) \in \bigcap_{s \in \sigma} s$, $x \in p_E(\bigcap_{s \in \sigma} s)$, $y \in p_F(\bigcap_{s \in \sigma} s)$.

Mais $(x,y) \in s \quad \forall s \in \sigma \Rightarrow x \in p_E(s)$, $y \in p_F(s) \quad \forall s \in \sigma$.

D'où $x \in \bigcap_{s \in \sigma} p_E(s)$ et $y \in \bigcap_{s \in \sigma} p_F(s)$ et $p_E(\bigcap_{s \in \sigma} s) \subseteq \bigcap_{s \in \sigma} p_E(s)$

$$p_F(\bigcap_{s \in \sigma} s) \subseteq \bigcap_{s \in \sigma} p_F(s).$$

Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{s \in \sigma} p_E(s)$ $x \in p_E(s) \quad \forall s \in \sigma$

$\bigcap_{s \in \sigma} p_F(s)$ n'est pas vide sinon $\bigcap_{s \in \sigma} p_{E \times F}(s) = \emptyset$. Il existe donc $y \in p_F(s) \forall s \in \sigma$.

s étant projetable, $(x, y) \in s \forall s \in \sigma$, et de ce fait $(x, y) \in \bigcap_{s \in \sigma} p_{E \times F}(s)$.

Ce qui entraîne $x \in p_E(\bigcap_{s \in \sigma} p_{E \times F}(s)) = \bigcap_{s \in \sigma} p_E(p_F(s))$.

La seconde égalité se démontre de façon identique.

Dans la démonstration ci-dessus, la condition $\bigcap_{s \in \sigma} p_{E \times F}(s)$ est nécessaire.

Si elle n'est pas vérifiée, nous avons, puisque d'après la proposition 17 $\bigcap_{s \in \sigma} p_{E \times F}(s)$ est projetable

$$\bigcap_{s \in \sigma} p_E(p_{E \times F}(s)) = \emptyset,$$

$$\bigcap_{s \in \sigma} p_F(p_{E \times F}(s)) = \emptyset.$$

On ne peut avoir simultanément $\bigcap_{s \in \sigma} p_E(p_{E \times F}(s)) \neq \emptyset$ et $\bigcap_{s \in \sigma} p_F(p_{E \times F}(s)) \neq \emptyset$. Car il

existerait alors un élément $(x, y) \in E \times F$ tel que $(x, y) \in s \forall s \in \sigma$ ce qui entraînerait $\bigcap_{s \in \sigma} p_{E \times F}(s) \neq \emptyset$.

L'une au moins des deux intersections $\bigcap_{s \in \sigma} p_E(p_{E \times F}(s))$, $\bigcap_{s \in \sigma} p_F(p_{E \times F}(s))$ doit être vide.

Il en découle que l'une au moins des deux égalités

$$\bigcap_{s \in \sigma} p_E(p_{E \times F}(s)) = \bigcap_{s \in \sigma} p_E(p_F(s))$$

$$\bigcap_{s \in \sigma} p_F(p_{E \times F}(s)) = \bigcap_{s \in \sigma} p_F(p_E(s))$$

est vérifiée.

□

La propriété 17 montre que l'ensemble des sous-ensembles projetables de $E \times F$ est une famille de parties closes pour l'intersection.

L'application qui associe à un sous-ensemble V de $E \times F$, le plus petit sous-ensemble projectable contenant V , c'est à dire $p_E(V) \times p_F(V)$, est une clôture.

En tant qu'élément de $P(E \times F)$, une relation binaire n'est pas nécessairement projectable. Mais si nous considérons la famille d_E de sous-ensembles de E , constituée par les singletons de E ,

$$d_E = \{\{\epsilon\} / \epsilon \in E\}$$

nous pouvons caractériser ρ par l'ensemble des coupes de ρ par les éléments ϵ de d_E $\{(\epsilon, \rho(\epsilon)) / \epsilon \in d_E\}$. Quelque soit $\epsilon \in d_E$, $y \in \rho(\epsilon)$. $(\epsilon, y) \in \rho$
Réciproquement, si $(x, y) \in \rho$, $y \in \rho(x)$

$$\rho = \bigcup_{E \times F} \{\epsilon \times \rho(\epsilon) / \epsilon \in d_E\}$$

$\forall \epsilon \in d_E$ $\epsilon \times \rho(\epsilon)$ est un sous-ensemble projectable de $E \times F$ et $\{\epsilon \times \rho(\epsilon) / \epsilon \in d_E\}$ est une famille projectable, d'après la définition 8.

Si d est un élément de $\mathcal{D}_E$ et ρ une relation binaire entre E et F il est possible de leur associer un élément projectable $D(\rho, d)$ appartenant à $\mathcal{D}_{E \times F}$, défini par :

$$D(\rho, d) = \{s \times \rho(s) / s \in d\}$$

De même que pour V donné, appartenant à $E \times F$, il existe une famille de sous-ensembles qui ont même projections sur E et sur F , un élément D de $\mathcal{D}_{E \times F}$, de la forme $D(\rho, d)$ est associé à une famille de relations binaires sauf si $d = d_E : \{\{\epsilon\} / \epsilon \in E\}$ car dans ce cas cette famille se réduit à un élément.

Nous allons considérer les éléments de $\mathcal{D}_{E \times F}$, de la forme $D(\rho, d)$ comme des approximations des relations binaires. Ces éléments forment un sous-ensemble des éléments projetables de $\mathcal{D}_{E \times F}$ que nous caractérisons à présent.

Ensemble des éléments de $\mathcal{D}_{E \times F}$ de la forme $D(\rho, d)$

Soit $d \in \mathcal{D}_E$ et ρ une relation binaire entre E et F .

$D(\rho, d) = \{s \times \rho(s) / s \in d\}$ est projectable mais à tout élément D projectable ne correspond pas nécessairement un couple d, ρ tel que $D = D(\rho, d)$.

En effet, les relations binaires entre E et F sont $\cup$ -additives comme les applications de E dans F

$$\forall e_1, e_2 \in E, \rho(e_1 \cup_E e_2) = \rho(e_1) \cup_F \rho(e_2)$$

Soit $s_1, s_2, s_3 \in d$ tels que $s_1 \cup_E s_2 = s_3$

$$\rho(s_3) = \rho(s_1 \cup_E s_2) = \rho(s_1) \cup_F \rho(s_2)$$

Nous avons $p_E(D(d, \rho)) = d$ et $p_F(D(d, \rho)) = \{\rho(s) / s \in d\}$ de sorte que quelque soit $s_1, s_2, s_3 \in D(d, \rho)$

$$p_E(s_1) \cup_E p_E(s_2) = p_E(s_3) \Rightarrow p_F(s_1) \cup_F p_F(s_2) = p_F(s_3)$$

De plus, $e_1 \neq e_2 \Rightarrow \rho(e_1) \neq \rho(e_2)$.

Quelque soit $s_1, s_2 \in d(\rho, d)$

$$p_F(s_1) \neq p_F(s_2) \Rightarrow p_E(s_1) \neq p_E(s_2)$$

Les éléments de $\mathcal{D}_{E \times F}$ de la forme $D(\rho, d)$ ne peuvent pas être clos par réunion finie.

Proposition 19. Si s_1 et s_2 sont deux sous-ensembles projetables de $E \times F$ alors $s_1 \cup_{E \times F} s_2$ est projetable si et seulement si

$$\text{soit } s_1 \subseteq_{E \times F} s_2$$

$$\text{soit } s_2 \subseteq_{E \times F} s_1$$

$$\text{soit } p_E(s_1) = p_E(s_2)$$

$$\text{soit } p_F(s_1) = p_F(s_2)$$

Preuve.

$$p_E(s_1 \cup_{E \times F} s_2) = p_E(s_1) \cup_E p_E(s_2)$$

$$p_F(s_1 \cup_{E \times F} s_2) = p_F(s_1) \cup_F p_F(s_2)$$

Si $s_1 \cup_{E \times F} s_2$ est projetable

$$\begin{aligned} s_1 \cup_{E \times F} s_2 &= p_E(s_1 \cup_{E \times F} s_2) \times p_F(s_1 \cup_{E \times F} s_2) \\ &= (p_E(s_1) \cup_E p_E(s_2)) \times (p_F(s_1) \cup_F p_F(s_2)) \\ &= (p_E(s_1) p_F(s_1)) \cup_{E \times F} (p_E(s_2) p_F(s_2)) \cup_{E \times F} (p_E(s_1) p_F(s_2)) \\ &\quad \cup_{E \times F} (p_E(s_2) p_F(s_1)) \\ &= (s_1 \cup_{E \times F} s_2) \cup_{E \times F} (p_E(s_1) \times p_F(s_2)) \cup_{E \times F} (p_E(s_2) \times p_F(s_1)) \end{aligned}$$

Les deux termes $p_E(s_1) \times p_F(s_2)$ et $p_E(s_2) \times p_F(s_1)$ ne peuvent disparaître si s_1 et s_2 ne sont pas vides que par absorption dans s_1 où s_2 ce qui impose $s_1 \subseteq_{E \times F} s_2$ ou $s_2 \subseteq_{E \times F} s_1$ ou $p_E(s_1) = p_E(s_2)$ ou $p_F(s_1) = p_F(s_2)$.

□

Proposition 20. Les éléments de $\mathcal{D}_{E \times F}$ de la forme $D(\rho, d)$ ne peuvent appartenir à $\mathcal{D}_{E \times F}(\bigcup)$.

Preuve.

La preuve est immédiate.

Un élément de $\mathcal{D}_{E \times F}$, de la forme $D(\rho, d)$ est projetable. C'est à dire que $\forall s \in D(\rho, d)$, s est projetable. La proposition 19 nous montre que les réunions de sous-ensembles projetables ne sont, en général, pas des sous-ensembles projetables.

□

Nous noterons $R(E, F)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}_{E \times F}$ vérifiant :

- a) $\forall D \in R(E, F) \quad D \text{ est projetable}$
- b) Si $D \in R(E, F)$, $\forall s_1, s_2, s_3 \in D$
 $p_E(s_1) \cup_E p_E(s_2) = p_E(s_3) \implies p_F(s_1) \cup_F p_F(s_2) = p_F(s_3)$
- c) Si $D \in R(E, F)$, $\forall s_1, s_2 \in D$
 $p_F(s_1) \neq p_F(s_2) \implies p_E(s_1) \neq p_E(s_2)$

Structure d'ordre partiel complet algébrique sur $R(E, F)$

$R(E, F)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{D}_{E \times F}$ et la relation d'inclusion $\subseteq_{P(E \times F)}$ sur $\mathcal{D}_{E \times F}$ est aussi une relation d'ordre sur $R(E, F)$. Elle donne à $\mathcal{D}_{E \times F}$ une structure de treillis complet algébrique. $R(E, F)$ n'est pas un treillis pour cette relation d'inclusion car en raison de la propriété c) que doivent posséder les éléments de $R(E, F)$, il n'existe pas toujours de majorant pour un couple arbitraire d'éléments de $R(E, F)$.

Soit par exemple $x_1 \in_E E$ et $y_1, y_2 \in_F F$ $y_1 \neq y_2$.

Soit $D_1 = \{x_1 \times y_1\}$ et $D_2 = \{x_1 \times y_2\}$

D_1 et D_2 appartiennent à $R(E, F)$ mais on ne peut trouver de majorant pour la relation d'inclusion commune à D_1 et D_2 , dans $R(E, F)$.

En effet $x_1 \times y_1$ et $x_1 \times y_2$ doivent appartenir à ce majorant.

Or $p_F(x_1 \times y_1) = y_1 \neq p_F(x_1 \times y_2) = y_2$ alors que $p_E(x_1 \times y_1) = p_E(x_1 \times y_2) = x_1$

Cependant, nous pouvons démontrer la propriété suivante :

Proposition 21. Tout couple d'éléments de $R(E, F)$, majoré dans $R(E, F)$ possède un plus petit majorant dans $R(E, F)$ qui est le même que le plus petit majorant de ces éléments dans $\mathcal{D}_{E \times F}$.

Preuve.

Soit D_1, D_2, D_3 , trois éléments de $R(E, F)$
tels que $D_1 \subseteq_{P(E, F)} D_3$ et $D_2 \subseteq_{P(E, F)} D_3$

Soit $D = D_1 \subseteq_{P(E, F)} D_2$

D est le plus petit majorant de D_1 et D_2 dans $\mathcal{D}_{E \times F}$.

Il suffit de montrer que D appartient à $R(E, F)$

a) D_1 et D_2 étant projetables, il est clair que D est projectable

b) soit u_1, u_2, u_3 , trois éléments de D
tels que $p_E(u_1) \cup_E p_E(u_2) = p_E(u_3)$
 u_1, u_2, u_3 appartiennent aussi à D_3 et de ce fait
 $p_F(u_1) \cup_F p_F(u_2) = p_F(u_3)$

soit $u_1, u_2 \in D$ tels que $p_F(u_1) \neq p_F(u_2)$

$u_1, u_2 \in D_3$ ce qui entraîne $p_E(u_1) \neq p_E(u_2)$

$D_1 \cup_{P(E \times F)} D_2$ est donc un élément de $R(E, F)$

□

Théorème 4. $R(E, F)$, muni de la relation d'ordre $\subseteq_{P(E \times F)}$ est un ordre partiel complet algébrique.

Preuve.

Démontrons d'abord que $R(E, F)$ est complet.

Soit Γ une partie dirigée de $R(E, F)$

Γ possède une borne supérieure dans $\mathcal{D}_{E \times F} : \cup_{P(E \times F)} \Gamma$

Montrons que $\cup_{P(E \times F)} \Gamma$ appartient à $R(E, F)$

- a) Il est clair que $\cup_{P(E \times F)} \Gamma$ est projetable car il est formé de sous-ensembles projetables de $E \times F$
- b) soit $u_1, u_2, u_3 \in \cup_{P(E \times F)} \Gamma$ tels que $p_E(u_1) \cup_E p_E(u_2) = p_E(u_3)$
 $\exists D \in \Gamma$ tel que $u_1, u_2, u_3 \in D$
 Si $p_E(u_1) \cup_E p_E(u_2) = p_E(u_3)$ alors $p_F(u_1) \cup_F p_F(u_2) = p_F(u_3)$
 car $D \in R(E, F)$
- c) soit $u_1, u_2 \in \cup_{P(E \times F)} \Gamma$ tels que $p_F(u_1) \neq p_F(u_2)$
 $\exists D \in \Gamma$ tel que $u_1, u_2 \in D$ avec $D \in R(E, F)$
 ce qui entraîne $p_E(u_1) \neq p_E(u_2)$

$\cup_{P(E \times F)} \Gamma$ appartient à $R(E, F)$ qui est donc complet.

Montrons que $R(E, F)$ est algébrique.

Les éléments isolés de $R(E, F)$ sont les éléments dont la cardinalité est finie.

Soit D une famille de sous-ensembles $E \times F$, de cardinalité finie, appartenant à $R(E, F)$ et Γ une partie dirigée de $R(E, F)$ tels que

$$D \subseteq_{P(E, F)} \cup_{P(E, F)} \Gamma$$

$\forall u \in D \exists g(u) \in \Gamma$ tels que $u \in g(u)$.

La cardinalité de D étant finie $\{g(u) / u \in D\}$ est majoré dans Γ . Il existe donc un élément g de Γ tel que : $D \subseteq_{P(E \times F)} g$.

Soit, à présent $g \in R(E, F)$.

Posons $\Gamma = \{D \in R(E, F) / D \subseteq_{P(E \times F)} g \text{ et Card}(D) \text{ fini}\}$.

$\forall u \in g \{u\}$ est un élément de $R(E, F)$

Γ est une partie dirigée de $R(E, F)$.

En effet, deux éléments quelconques de Γ sont majorés par g . Ils possèdent donc un plus petit majorant commun dans $\mathcal{D}(E, F)$. Ce majorant est lui aussi majoré par g et sa cardinalité est finie. Il appartient donc à Γ .

$$\cup_{P(E \times F)} \Gamma \cup_{P(E \times F)} g.$$

Mais $\forall u \in g, \{u\} \in R(E, F)$. La cardinalité de $\{u\}$ étant finie, $\{u\} \in \Gamma$.

Il en découle $g \subseteq_{P(E \times F)} \cup_{P(E, F)} \Gamma$. Nous avons donc l'égalité $g = \cup_{P(E \times F)} \Gamma$. $R(E, R)$ est donc algébrique.

□

Théorème 5. $R(E \times F)$ est conditionnellement complet.

Preuve.

Soit Γ un sous-ensemble de $R(E, F)$, majoré par g .

Considérons la partie dirigée Γ' de $R(E, F)$ définie par $\Gamma \subseteq \Gamma'$

$$\forall g_1, g_2 \in \Gamma' \quad g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2 \in \Gamma'$$

Γ' existe car

- Γ' n'est pas vide car il contient Γ
- tout couple d'éléments g_1, g_2 de Γ' , majorés par g , possède un plus petit majorant commun $g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2$, majoré par g et appartenant à Γ' .

Γ' possède une borne supérieure $\cup_{P(E \times F)} \Gamma'$ majorée par g
 Γ' est en effet une partie dirigée de $R(E, F)$.

$\cup_{P(E \times F)} \Gamma'$ est un majorant commun des éléments de Γ .
 Montrons que c'est le plus petit.

Soit g' un majorant commun des éléments de Γ
 g' majore les éléments de Γ' car :

$$\forall g_1, g_2 \in \Gamma' \text{ tels que } g_1 \leq_{P(E \times F)} g' \text{ et } g_2 \leq_{P(E \times F)} g'$$

$$g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2 \leq_{P(E \times F)} g'$$

Comme les éléments de Γ' sont obtenus à partir des éléments de Γ par application finie de l'opération $\cup_{P(E, F)}$. On a $g' \leq_{P(E \times F)} g', \forall g' \in \Gamma'$.

D'où $\cup_{P(E \times F)} \Gamma' \leq_{P(E \times F)} g'$.

Γ possède donc un plus petit majorant commun et $R(E, F)$ est conditionnellement complet.

□

Ensemble des éléments de $R(E, F)$ clos par réunion finie projetée

Nous avons vu que les éléments de $R(E, F)$ ne pouvaient être clos par réunion finie mais si D est un élément de $R(E, F)$ tel que $p_E(D)$ est clos par réunion finie, alors la propriété b) que possèdent les éléments de $R(E, F)$ entraîne que $p_F(D)$ est aussi clos par réunion finie.

Nous noterons $R(E, F, \bigcup)$ le sous-ensemble de $R(E, F)$ constitué par les éléments de $R(E, F)$ dont les projections appartiennent à $\mathcal{D}_E(\bigcup)$ et $\mathcal{D}_F(\bigcup)$.

Proposition 22. $R(E, F, \bigcirc_U)$ est un inf-demi treillis, complet algébrique, conditionnellement complet.

Preuve.

a) Montrons que $R(E, F, \bigcirc_U)$ est complet.

Soit Γ une partie dirigée de $R(E, F, \bigcirc_U)$

$$u_{P(E \times F)}^\Gamma \in R(E, F)$$

Soit $u_1, u_2, u_3 \in u_{P(E \times F)}$

$\exists \gamma \in \Gamma$ tel que $u_1, u_2, u_3 \in \gamma$

$\gamma \in R(E, F, \bigcirc_U)$ de sorte que

$$p_E(u_1) \cup_E p_E(u_2) = p_E(u_3) \Rightarrow p_D(u_1) \cup_E p_F(u_1) = p_F(u_3)$$

$u_{P(E \times F)}^\Gamma$ appartient à $R(E, F, \bigcirc_U)$

b) $R(E, F, \bigcirc_U)$ est conditionnellement complet.

Soit γ_1 et γ_2 sont majorés dans $R(E, F, \bigcirc_U)$, il est clair que $\gamma_1 \cup_{P(E \times F)} \gamma_2$ existe et appartient à $R(E, F, \bigcirc_U)$ $R(E, F, \bigcirc_U)$ étant complet et tout couple d'éléments de $R(E, F, \bigcirc_U)$, majorés dans $R(E, F, \bigcirc_U)$ ayant un plus petit majorant commun dans $R(E, F, \bigcirc_U)$, cet ensemble est conditionnellement complet.

c) Soit $\gamma_1, \gamma_2 \in R(E, F, \bigcirc_U)$

$$\gamma_1 \cap_{P(E \times F)} \gamma_2 \in R(E, F, \bigcirc_U)$$

d) $R(E, F, \bigcirc_U)$ est algébrique.

Soit γ un élément de $R(E, F, \bigcirc_U)$, de cardinalité finie et Γ une partie dirigée de $R(E, F, \bigcirc_U)$ telle que

$$\gamma \subseteq_{P(E \times F)} \cup_{P(E \times F)} \Gamma.$$

γ est aussi un élément isolé de $R(E, F)$.

Il existe donc $\gamma' \in \Gamma$ tel que $\gamma \subseteq_{P(E \times F)} \gamma'$.

Soit, à présent $g \in \mathcal{R}(E, F, \bigcirc U)$.

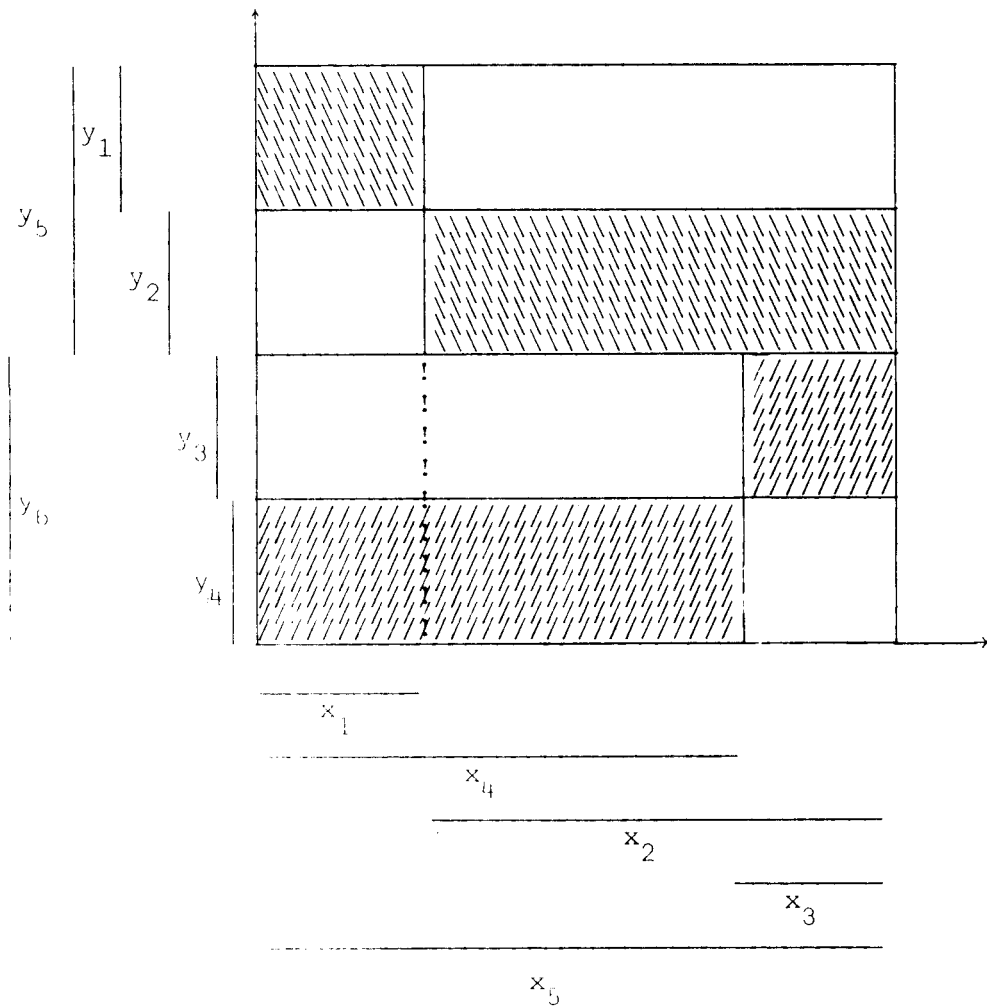
Posons $\Delta(g) = \{\gamma / \gamma \in \mathcal{R}(E, F, \bigcirc U), \text{Card}(\gamma) \text{ fini et } \gamma \subseteq_{P(E \times F)} g\}$
 $\forall u \in g, \{u\} \in \mathcal{R}(E, F, \bigcirc U)$ et $\{u\} \in \mathcal{R}(g)$ d'où $u_{P(E \times F)} \Delta(g) = g$.

$\mathcal{R}(E, F, \bigcirc U)$ est algébrique.

□

Il n'est pas possible de clore par réunion finie projetée n'importe quel élément de $\mathcal{R}(E, F)$.

Considérons dans $\mathcal{R}^2$ l'exemple suivant :



$\{x_1 \times y_1, x_2 \times y_2, x_3 \times y_3, x_4 \times y_4\}$ ne peut être clos par réunion finie projetée car $x_1 \cup x_2 = x_5$, $x_3 \cup x_4 = x_5$ mais $y_1 \cup y_2 = y_5$ et $y_3 \cup y_4 = y_6$. Il faudrait rajouter $x_5 \times y_5$ et $x_5 \times y_6$. Or $y_5 \neq y_6$ et la famille close par réunion finie projetée n'appartient pas à $R(R, R)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse clore par réunion finie projetée un élément $D \in R(E, F)$ est qu'il existe un élément D' de $R(E, F)$ clos par réunion finie projetée tel que $D \subseteq_{P(E \times F)} D'$.

L'intersection d'un ensemble de sous-ensembles projetables étant projetable, certains éléments de $R(E, F)$ peuvent être clos par intersection finie.

Proposition 23. *L'ensemble des éléments de $R(E, F)$, clos par réunion finie projetée et par intersection finie, est un inf-demi treillis complet, algébrique, conditionnellement complet.*

Preuve.

La démonstration est fort semblable à celle de la proposition 22.

Soit Γ une partie dirigée d'éléments de $R(E, F, \bigcup)$, clos par intersection finie.

$\forall \sigma \subseteq_{P(E \times F)} \bigcup_{P(E \times F)} \Gamma$ tel que la cardinalité de σ soit finie, il existe $g \in \Gamma$ tel que $\sigma \subseteq_{P(E \times F)} g$ ce qui entraîne :

$$\bigcap_{u \in \sigma} u \in g \text{ et } \bigcap_{u \in \sigma} u \in \bigcup_{P(E \times F)} \Gamma$$

$\bigcup_{P(E \times F)} \Gamma$ est clos par intersection finie.

Soit γ un élément de $R(E, F, \bigcup)$ clos par intersection finie, $\forall u \in \gamma$ $\{u\}$ est un élément de $R(E, F, \bigcup)$ clos par intersection finie. Il en découle l'algébricité.

Les éléments isolés sont les éléments clos par union finie projetée et par intersection finie, de cardinalité finie.

Soit g_1, g_2 deux éléments de $R(E, F, \bigcirc_U)$ clos par intersection finie. Il est clair que $g_1 \wedge_{P(E \times F)} g_2$ est clos par intersection finie. De plus si g_1 et g_2 sont majorés par un élément de $R(E, F, \bigcirc_U)$ clos par intersection finie, g_1 et g_2 possèdent un plus petit majorant clos par intersection finie. Il en résulte que le sous-ensemble de $R(E, F, \bigcirc_U)$ formé des éléments clos par intersection finie étant aussi complet, au sens des parties dirigées, est conditionnellement complet.

□

Les deux résultats que nous énonçons dans les propositions 22 et 23 laissent présager un résultat plus général que nous donnons à présent.

Soit h une application continue à $\mathcal{D}_{E \times F}$ dans $\mathcal{D}_{E \times F}$.

Nous pouvons, par l'intermédiaire de l'opération C , introduite au chapitre III associer à h une clôture continu $\bigcirc_h$ telle que $\forall d \in \mathcal{D}_{E \times F}$, $\bigcirc_h(d)$ est le plus petit élément de $\mathcal{D}_{E \times F}$ clos pour h supérieur à d .

$$c(h, d) = \bigcup_{P(E \times F)} \{(I_y h)^n(d) / n \in \mathbb{N}^+\}$$

où $\cup$ est l'opération d'union sur les applications et I l'application identique de $\mathcal{D}_{E \times F}$ dans lui-même. Si h est arbitraire, il se peut que :

$$\{ \bigcirc_h(d) / d \in \mathcal{D}_{E \times F} \} \cap R(E, F) = \emptyset$$

C'est ce qui se passe si $\bigcirc_h = \bigcirc_U$ où $\bigcirc_U$ est l'opération de clôture par réunion finie des éléments de $\mathcal{D}_{E \times F}$, puisque aucun élément de $R(E, F)$ ne peut être clos par réunion finie sauf les éléments de cardinalité 1.

Cependant, certaines applications continues h , de $\mathcal{D}_{E \times F}$ dans lui-même sont telles que :

$$\bigcirc_h(d) \in R(E, F) \text{ s'il existe } g \in R(E, F) \text{ tel que } \bigcirc_h(d) \sqsubseteq_{P(E \times F)} g$$

C'est le cas de la clôture par réunion finie projetée ou par intersection finie.

Soit $R(E, F, \textcircled{h})$, l'ensemble des éléments $g \in R(E, F)$ tels que
 $\textcircled{h} \quad (g) = g$.

Proposition 24. Si h est une application appartenant à $[D_{E \times F} \rightarrow D_{E \times F}]$ telle que $\forall d \in D_{E \times F}, \quad h(d) \in R(E, F)$ s'il existe $g \in R(E, F)$ tel que
 $\textcircled{h} \quad (d) \subseteq_{P(E \times F)} g$, alors $R(E, F, \textcircled{h})$ est un inf-demi treillis, complet algébrique, conditionnellement complet.

Preuve.

a) $R(E, F, \textcircled{h})$ est complet.

Soit Γ une partie dirigée de $R(E, F, \textcircled{h})$. Cette partie dirigée possède une borne supérieure $u_{P(E \times F)} \Gamma$. Montrons qu'elle appartient à $R(E, F, \textcircled{h})$.

Soit δ , de cardinalité finie tel que $\delta \subseteq_{P(E \times F)} u_{P(E \times F)} \Gamma$
 $\exists g \in \Gamma$ tel que $\delta \subseteq_{P(E \times F)} g$
 $g \in R(E, F, \textcircled{h})$ et par conséquent $\textcircled{h} \quad (\delta) \subseteq_{P(E \times F)} g$
 Ce qui entraîne $\textcircled{h} \quad (\delta) \subseteq_{P(E \times F)} u_{P(E \times F)} \Gamma$. Il en découle
 que $\forall \delta \subseteq_{P(E \times F)} u_{P(E \times F)} \Gamma \quad \textcircled{h} \quad (\delta) \subseteq_{P(E \times F)} u_{P(E \times F)} \Gamma$ est
 donc $\textcircled{h} \quad (u_{P(E \times F)} \Gamma) = u_{P(E \times F)} \Gamma$
 $u_{P(E \times F)} \Gamma \in R(E, F, \textcircled{h})$ qui est donc complet.

b) $R(E, F, \textcircled{h})$ est algébrique.

Soit Γ une partie dirigée de $R(E, F, \textcircled{h})$ et δ un élément de $D_{E \times F}$ de cardinalité finie tel que $\delta \subseteq_{P(E \times F)} u_{P(E \times F)} \Gamma$

$\textcircled{h} \quad (\delta) \subseteq_{P(E \times F)} u_{P(E \times F)} \Gamma$.

Il existe $g \in \Gamma$ tel que $\delta \subseteq_{P(E \times F)} g$ et puisque $g \in R(E, F, \textcircled{h})$

$\textcircled{h} \quad (\delta) \subseteq_{P(E \times F)} \textcircled{h} \quad (g) = g$. Les éléments de

$R(E, F, \textcircled{h})$ qui sont de la forme $\textcircled{h} \quad (\delta)$ où δ est un

les éléments de cardinalité finie de $\mathcal{D}_{E \times F}$, sont donc finis ou isolés. L'ensemble de ces éléments n'est pas vide si $R(E, F, \textcircled{h})$ n'est pas vide.

Soit $g \in R(E, F, \textcircled{h})$.

Soit $\Delta(g) = \{ \textcircled{h}(\delta) / \delta \subseteq_{P(E \times F)} g \}$

$\textcircled{h}$ étant continu

$u_{P(E \times F)} \Delta(g) = \textcircled{h}(u_{P(E \times F)} \{ \delta / \delta \subseteq_{P(E \times F)} g, \text{card}(\delta) \text{ fini} \})$

c'est à dire $u_{P(E \times F)} \Delta(g) = \textcircled{h}(g) = g$

$R(E, F, \textcircled{h})$ est algébrique.

Les éléments isolés de $R(E, F, \textcircled{h})$ sont les images par $\textcircled{h}$ des éléments finis de $\mathcal{D}_{E \times F}$ majorés par un élément de $R(E, F, \textcircled{h})$

c) Soit g_1 et $g_2 \in R(E, F, \textcircled{h})$

$g_1 \cap_{P(E \times F)} g_2 \in R(E, F, \textcircled{h})$,

C'est une propriété des parties closes.

d) Soit g_1 et $g_2 \in R(E, F, \textcircled{h})$.

Soit $g_3 \in R(E, F, \textcircled{h})$ tel que $g_1 \subseteq_{P(E \times F)} g_3$, $g_2 \subseteq_{P(E \times F)} g_3$

$g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2$ étant majoré par $g_3 \in R(E, F, \textcircled{h})$,

$\textcircled{h}(g_1 \cap_{P(E \times F)} g_2) \in R(E, F, \textcircled{h})$ et

$\textcircled{h}(g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2) \subseteq_{P(E \times F)} g_3$.

D'après le chapitre III $\textcircled{h}(d) = C(h, d)$ est le plus petit majorant de d clos pour h . Il en découle que $h(g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2)$ est le plus petit majorant de g_1 et g_2 dans $R(E, F, \textcircled{h})$

Comme $R(E, F, \textcircled{h})$ est complet au sens de parties dirigées $R(E, F, \textcircled{h})$ est conditionnellement complet.

□

- b) $I(g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2) = \{\rho / \forall s \in P_E(g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2),$
 $\rho(s) \in P_F(g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2)\}$
- $s \in P_E(g_1 \cup_{P(E \times F)} g_1) \implies s \in P_E(g_1)$ ou $s \in P_E(g_2)$
ce qui entraîne $\rho(s) \in P_F(g_1)$ si $s \in P_E(g_1)$
 $\rho(s) \in P_F(g_2)$ si $s \in P_E(g_2)$
c'est à dire $\rho \in I(g_1) \cap I(g_2)$ et
 $I(g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2) \subseteq I(g_1) \cap I(g_2)$
- Or il est clair que $I(g_2) \cap I(g_2) \subseteq I(g_2 \cup_{P(E \times F)} g_2)$
d'où $I(g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2) = I(g_1) \cap I(g_2)$
- c) $I(g_1 \cap_{P(E \times F)} g_2) = \{\rho / \forall s \in P_E(g_1) \cap P_E(g_2),$
 $\rho(s) \in P_F(g_1) \cap P_F(g_2)\}$
- Il est clair que $I(g_1) \cup I(g_2) \subseteq I(g_2 \cap_{P(E \times F)} g_2)$

□

Proposition 26. Si Γ est une partie dirigée de $R(E, F)$

$$I(u_{P(E \times F)} \Gamma) = n\{I(g) / g \in \Gamma\}$$

Preuve.

$u_{P(E \times F)}^\Gamma = \{u / \exists g \in \Gamma \text{ tel que } u \in g\}$
 $\rho \in I(u_{P(E \times F)} \Gamma) \implies \forall u \in u_{P(E \times F)} \Gamma, \rho(p_E(u)) = p_F(u)$
D'où $\forall g \in \Gamma, \forall u \in g, \rho(p_E(u)) = p_F(u) \implies \rho \in I(g) \cap \{I(g) / g \in \Gamma\} \supseteq I(u_{P(E \times F)} \Gamma)$
Réciproquement si $\rho \in n\{I(g) / g \in \Gamma\}$
 $\forall g \in \Gamma, \forall u \in g, \rho(p_E(u)) = p_F(u)$
D'où $\rho \in I(u_{P(E \times F)} \Gamma)$ et $I(u_{P(E \times F)} \Gamma) = n\{I(g) / g \in \Gamma\}$

□

Interprétation des éléments de $R(E, F)$

Si ρ est une relation binaire entre E et F et d un élément de $\mathcal{D}_E$, $D(\rho, d)$ est un élément de $R(E, F)$. Réciproquement, posons $I(g) = \{\rho / g = D(\rho, p_E(g))\}$ $I(g)$ peut être vide car une relation binaire est additive alors que les éléments de $R(E, F)$ ne sont que finiment additives (propriété b de la définition des éléments de $R(E, F)$).

Proposition 25. Si γ_1 et γ_2 sont deux éléments de $R(E, F)$

$$g_1 \subseteq_{P(E \times F)} g_2 \implies I(g_2) \subseteq I(g_1)$$

$$I(g_1 \cup_{P(E \times F)} g_2) = I(g_1) \cap I(g_2)$$

$$I(g_1) \cup I(g_2) \subseteq I(g_1 \cap_{P(E \times F)} g_2)$$

Preuve.

Soit $\rho_1 \in I(g_1)$ et $\rho_2 \in I(g_2)$.

$$I(g_1) = \{\rho / \forall s \in p_E(g_1), \rho(s) \in p_F(g_1)\}$$

$$I(g_2) = \{\rho / \forall s \in p_E(g_2), \rho(s) \in p_F(g_2)\}$$

- a) $g_1 \subseteq_{P(E \times F)} g_2 \implies p_E(g_1) \subseteq_{PE} p_E(g_2)$ et $p_F(g_1) \subseteq_{PF} p_F(g_2)$
 $\rho_2 \in I(g_2) \implies \forall s \in p_E(g_1), \rho_2(s) \in p_F(g_1)$ car, du fait que $g_1 \subseteq_{P(E \times F)} g_2$ $s \times \rho_2(s) \in g_1 \implies s \times g_2(s) \in g_2$
 $\forall \rho_2 \in I(g_2) \quad \rho_2 \in I(g_1) \quad \text{et} \quad I(g_2) \subseteq I(g_1)$

Continuité des approximations d'une application de E dans F

Une application de E dans F peut être,

- soit approchée par un élément de $A(E, F)$
- soit considéré comme une relation fonctionnelle et approchée par un élément de $R(E, F)$.

Il existe une injection canonique de $A(E, F)$ dans $R(E, F)$, qui associe à $a \in A(E, F)$, de domaine de définition d_a et de co-domaine d'_a , l'élément Γ_a appartenant à $R(E, F)$, défini par :

$$\Gamma_a = \{s \times a(s) / s \in d_a\}$$

Nous pouvons en déduire que la proposition 24 s'applique aussi à $A(E, F)$ et $\bar{A}(E, F)$.

Un élément de $A(E, F)$ peut être considéré comme une application partielle de PE dans PF. En tant que tel, nous pouvons définir deux notions de continuité pour les éléments de $A(E, F)$:

- 1) - PE et PF sont des treillis complets pour la relation d'inclusion entre sous-ensembles.

Une application f de PE dans PF est continue si

pour toute partie dirigée ϵ de PE

$$f(\cup_E \epsilon) = \cup_F f(\epsilon)$$

Un élément a de $A(E, F)$, de domaine de définition d_a et de co-domaine d'_a est continu si

pour toute partie dirigée $\epsilon_a \subseteq_{PE} d_a$

$$a(\cup_E (\epsilon_a)) = \cup_F (a(\epsilon_a))$$

Il en découle pour $\Gamma_a = \{s \times a(s) / s \in d_a\}$ une propriété similaire :

pour toute famille σ d'éléments de Γ_a
 telle que $p_E(\sigma)$ est une partie dirigée
 de $p_E(\Gamma_a)$ alors $p_F(\sigma)$ est une partie
 dirigée de $p_F(\Gamma_a)$ et
 $(\cup_E p_E(\sigma)) \times (\cup_F p_F(\sigma)) \in \sigma$

Il est donc possible de parler d'une certaine manière de continuité pour les éléments de $R(E,F)$.

- 2) La continuité des éléments de $A(E,F)$ peut être définie en utilisant les bases de filtre.

Une application f de PE dans PF sera alors continue si pour toute base de filtre ϵ de PE

$$f(\cap_E \epsilon) = \cap_F f(\epsilon)$$

$a \in A(E,F)$ sera alors continue si :

$$\text{pour toute base de filtre } \epsilon_a \text{ de } d_a \\ a(\cap_E \epsilon_a) = \cap_F a(\epsilon_a)$$

Il existe une propriété similaire pour les éléments de $R(E,F)$.

Les éléments de $A(E,F)$ sont finiment additifs et ceci entraîne que si un élément de $A(E,F)$ est isolé ou fini, il sera continu dans les deux sens présentés ci-dessus car il n'y a pas alors de partie dirigée ou de base de filtre de cardinalité infinie et dans ce cas la croissance de l'application entraîne sa continuité.

Malheureusement, la continuité n'est pas une propriété qui se conserve par limite. C'est à dire que la limite d'une partie dirigée d'éléments de $A(E,F)$ continus n'est pas nécessairement un élément continu de $A(E,F)$ et ceci pour l'une ou l'autre définition de la continuité.

La continuité d'une limite devra donc faire toujours l'objet d'une démonstration particulière.

✕

✕ ✕

CHAPITRE V

Dans ce chapitre, nous allons, pour conclure, appliquer les notions présentées dans les chapitres précédents à la définition de types d'objet approchés. Nous donnerons à titre d'exemple deux constructions d'un type d'objet "entier" non standard.

Nous utiliserons pour cela la notion de $\mathbb{E}$ -algèbre d'une part, et une notion de relation d'ordre entre algèbres construite à partir des relations d'ordre étudiées dans les chapitres III et IV.

PREMIERE CONSTRUCTION

Nous avons vu, au chapitre I, qu'un type d'objet abstrait pouvait être défini comme la classe d'isomorphisme d'une certaine algèbre de mots, initiale dans une classe de Σ -algèbres.

Considérons la classe C_1 des Σ -algèbres caractérisées par

- l'ensemble de types $\{ENT\}$
- l'ensemble support A_{ENT}
- le domaine d'opérateur constitué par :

$\alpha : \Lambda \rightarrow A_{ENT}$	opération constante
$0 : \Lambda \rightarrow A_{ENT}$	opération constante
$1 : A_{ENT} \rightarrow A_{ENT}$	opération unaire

Soit t_1 le type d'objet correspondant.

Donnons deux algèbres particulières dans cette classe C_1 .

La première est l'algèbre de mots initiales dans C_1 . Notons là A' .

L'ensemble support A_{ENT} , que nous noterons A , est constitué de tous les mots de la forme $\underbrace{111\dots1}_p \alpha$ ou $\underbrace{111\dots1}_p 0$ pour p positif ou nul.

$$A = \{1^p \alpha / p \in \mathbb{N}\} \cup \{1^p 0 / p \in \mathbb{N}\}$$

les opérations de cette algèbre sont :

- l'opération constante α qui donne la lettre α
- l'opération constante 0 qui donne la lettre 0
- l'opération unaire 1 définie par $\forall m \in A$ 1 appliqué au mot m donne le mot $1 m$.

Remarquons que dans cette algèbre l'ensemble support A est constitué par l'ensemble des formes sententiales associées à la grammaire G dont l'ensemble de règles est

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \alpha \\ \alpha &\rightarrow 0 \\ \alpha &\rightarrow 1\alpha \end{aligned}$$

que nous noterons sous la forme $\alpha \rightarrow \alpha + 1\alpha + 0$ où l'opération $+$ dénote l'union ensembliste.

La seconde algèbre particulière de C_1 , que nous noterons A'' , a pour ensemble support une famille de sous-ensembles de N que nous noterons N .

$$N = \{\{p\} / p \in N\} \cup_{PN} \{\{k / k \geq p\} / p \in N\}$$

N contient N , tous les singletons de N et tous les sous-ensembles de N de la forme $\{k / k \geq p\}$ pour $p \in N$, les opérations de cette algèbre sont

- l'opération constante N , dénommée α
- l'opération constante 0 , dénommée 0
- l'opération unaire 1 , dénommée 1 , définie par

$$1s = \{1+k / k \in s\} = 1+s$$

pour tout $s \subseteq N$.

L'opération 1 coïncide avec la fonction successeur sur les singletons de N . Il est facile de définir un homomorphisme d'algèbre J de A' sur A'' (Σ -homomorphisme).

Définissons J de façon récursive :

$$J(\alpha) = N$$

$$J(0) = 0$$

Pour tout $m \in A$ tel que m est de la forme $1m'$

$$J(m) = J(1m') = \{1+k/k \in J(m')\} = 1J(m') = 1+J(m')$$

Pour un mot m appartenant à A , de la forme $1^\omega \alpha$ ou $1^\omega 0$, $J(m)$ est vide.

En effet,

$$J(1^p 0) < J(1^{p+1} 0) \quad \forall p \in N$$

$$J(1^p) \subset_N j(1^{p+1}) \quad \forall p \in N$$

$$\cap_{p \in N} (J^p(\alpha)) = \emptyset$$

L'algèbre A' a un support de cardinalité infinie et, en pratique la mémoire des ordinateurs étant finie, l'ensemble support de toute réalisation concrète de t_1 devra être fini.

Nous allons donc définir une suite d'algèbres que nous considérons comme définissant des approximations de t_1 en ce sens qu'il leur correspondra des algèbres dont le support sera formé de sous-familles de N approchant de mieux en mieux N au sens de la relation $\sqsubset$ défini au chapitre III.

Pour formuler de façon plus précise cette notion d'approximation entre types d'objet, il faut disposer d'une relation d'ordre entre support des algèbres.

En ce qui concerne N , nous disposons de la relation de pré-ordre $\sqsubset$ entre familles de sous-ensembles d'un ensemble, définie au chapitre III. Cette relation est une relation d'ordre sur le sous-ensemble des familles closes par réunion finie. Les sous-familles de N que nous aurons à considérer ne sont pas closes par réunion finie, non plus que N mais, par chance, $\sqsubset$ est encore une relation d'ordre entre ces familles.

Nous utiliserons des sous-familles de N de la forme

$$\{N\}, \{N, 1N, 0\}, \{N, 1N, 11N, 10, 0\} \dots$$

où 1 est l'opération définie plus haut, coïncidant avec la fonction successeur sur les singletons de N .

Soit h'' une application partielle de PN dans PPN définie pour tout $s \in N$ c'est à dire de la forme $1^P 0$ ou $1^P N$ par

$$h''(s) = \text{si } s = 1^P 0 \text{ alors } \{1^P 0\} \text{ sinon } \{1^P 0, 1^{P+1} N, 1^P N\}$$

Soit H'' une application de PN dans PN définie par

$$H''(d) = \bigcup_{PN} \{h''(s) / s \in d\}$$

Posons $H''^0(N) = N$.

Nous aurons par exemple :

$$H''^1(N) = h''(N) = \{1^0 0, 1^1 N, 1^0 N\} = \{0, 1N, N\}$$

$$H''^2(N) = H''(H''(N)) = \{0, 10, 11N, 1N, N\}$$

$$H''^3(N) = H''(H''^2(N)) = \{0, 10, 110, 111N, 11N, 1N, N\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $H''^n(N)$ est clos par intersection finie. De plus, si nous posons $H''^n_c(N)$ égal à la clôture par réunion finie de $H''^n(N)$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad H''^n_c(N) \subseteq H''^{n+1}_c(N)$$

Nous aurons par exemple :

$$H''^0_c(N) = N$$

$$H''^1_c(N) = \{0, 1N, N\}$$

$$H''^2_c(N) = \{0, 10, 0U10, 0U11N, 11N, 1N, N\}$$

$\{H''^n_c(N) / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie dirigée de l'ensemble des familles de sous-ensembles de N , closes par réunion finie. Cette partie dirigée possède une borne supérieure qui n'est autre que la clôture par réunion finie de N .

Définissons à présent, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, une application $g''_{n,k}$ de $H''^{n+k}(N)$ dans $H''^n(N)$.

Pour tout $s \in H''^{n+k}(N)$

$$g''_{n,k}(s) = \cap_N \{s' \in H''^n(N) / s \subseteq s'\}$$

Ceci est possible car $H''^n(N)$ est clos par intersection finie et $\forall s \in H''^{n+k}(N) \exists S \in H''^n(N)$ tel que $s \subseteq S$ puisque $H''^n(N)$ contient N et $\forall s \in H''^{n+k}(N) s \subseteq N$.

Prenons par exemple $n=3$, $k=1$

$$H''^4(N) = \{0, 10, 110, 1110, 1111N, 11N, 11N, 1N, N\}$$

$$H''^3(N) = \{0, 10, 110, 111N, 11N, 1N, N\}$$

$g''_{3,1}(N)$ est une application de $H''^4(N)$ dans $H''^3(N)$

En fait

$$H''^4(N) = H''^3(N) \cup \{1110\} \cup 1111N$$

$$g''_{3,1}(\{1110\}) = \cap_N \{111N, 11N, 1N, N\} = 111N$$

$$g''_{3,1}(1111N) = \cap_N \{111N, 11N, 1N, N\} = 111N$$

ce qui concerne les autres éléments de $H''^4(N)$ ce sont aussi des éléments de $H''^3(N)$ et $g''_{3,1}(s) = s$ pour ces éléments. Nous avons, alors, pour définir $g''_{3,1}$ la table

$\{0\}$	$\rightarrow$	$\{0\}$
$\{10\}$	$\rightarrow$	$\{10\}$
$\{110\}$	$\rightarrow$	$\{110\}$
$\{1110\}$	$\rightarrow$	$\{111N\}$
$1111N$	$\rightarrow$	$111N$
$111N$	$\rightarrow$	$111N$
$11N$	$\rightarrow$	$11N$
$1N$	$\rightarrow$	$1N$
N	$\rightarrow$	N

De la même façon, $g''_{2,2}$ étant une application de $H''^4(N)$ dans $H''^2(N)$ la table correspondante est :

$\{0\}$	$\rightarrow$	$\{0\}$
$\{10\}$	$\rightarrow$	$\{10\}$
$\{110\}$	$\rightarrow$	$11N$
$\{1110\}$	$\rightarrow$	$11N$
$1111N$	$\rightarrow$	$11N$
$111N$	$\rightarrow$	$11N$
$11N$	$\rightarrow$	$11N$
$1N$	$\rightarrow$	$1N$
N	$\rightarrow$	N

Remarquons que $g''_{2,2}(s) = g''_{3,1}(s)$ pour $s \in H''^2(N)$

et $g''_{2,2}(d) = g''_{3,1}(d) \quad \forall d \in H''^2$.

C'est-à-dire que $g''_{2,2} \sqsubseteq g''_{3,1}$ au sens défini au chapitre IV si nous étendons la définition de $g''_{2,2}$ et $g''_{3,1}$ à $H''^2(N)$.

De façon générale, pour $n \in N$, si on clos $g''_{n,k}$ par réunion finie, en posant $g''_{n,k}(s \cup s') = g''_{n,k}(s) \cup g''_{n,k}(s')$,

$\{g''_{n,k} / k \in N\}$ est une partie dirigée de $A(N_c, N_c)$

(chapitre IV) où N_c est la clôture de N par réunion finie.

La borne supérieure de cette partie dirigée est une application que nous noterons $\hat{g}''_n$ dont nous pouvons donner une définition directe.

Pour tout $s \in N$

$$\hat{g}''_n(s) = \bigcap_N \{s' \in H''^n(N) / s \subseteq s'\}$$

$\hat{g}''_n$ coïncide avec $g''_{n,k}$ sur $H''^{n+k}(N)$.

Soit I_{d_n} l'application de $H''^n(N)$ dans N définie par

$$I_{d_n}(s) = s$$

A partir de I_{d_n} et de $\hat{g}''_n$ il est possible de définir une application 1_n de $H''^n(N)$ dans $H''^n(N)$ à partir de l'opération 1 sur N .

Nous poserons, pour cela

$$\begin{aligned} \forall s \in H''^n(N) \quad 1_n(s) &= \hat{g}''_n(1(I_{d_n}(s))) \\ &= \hat{g}''_n(1(s)) \end{aligned}$$

par exemple sur $H''^1(N)$.

1_1 se définira par

$$\begin{aligned} 1_1(\{0\}) &= 1N \\ 1_1(1N) &= 1N \\ 1_1(N) &= 1N \end{aligned}$$

sur $H''^2(N)$

$$\begin{aligned}
 1_2 \text{ se définit par } & \quad 1_2(\{0\}) = \{10\} \\
 & \quad 1_2(\{10\}) = 11N \\
 & \quad 1_2(11N) = 1N \\
 & \quad 1_2(1N) = 1N \\
 & \quad 1_2(N) = N
 \end{aligned}$$

$H''^n(N)$, muni de l'opération 1_n est, en quelque sorte une approximation de N muni de l'opération 1 .

Parallèlement, en ce qui concerne A' , nous allons doter PA d'une relation de pré-ordre notée $\sqsubset$, qui se trouve être une relation d'ordre sur le sous-ensemble de PA intervenant dans la construction d'une suite de types approchés du type t_1 .

Cette relation d'ordre va être définie de façon à ce que J , l'homomorphisme d'algèbre de A' sur A'' , soit aussi un homomorphisme pour cette relation d'ordre.

Posons tout d'abord, pour tout couple (m, m') d'éléments de A , $m \sqsubset m'$ si m' dérive de m dans la grammaire G .

Il s'agit d'une relation d'ordre car la grammaire G n'a pas de règles raccourcissantes.

Nous avons alors si m et m' sont deux éléments de A tels que

$$m \sqsubset m' \quad J(m') \subseteq_N J(m)$$

Posons, pour tout couple (M, M') de sous-ensembles de A

$$M \sqsubset M' \text{ si } \forall m' \in M' \exists m \in M \text{ tel que } m \sqsubset m'$$

$\sqsubset$ est une relation de pré-ordre mais sur les éléments de P de la forme

$$\{\alpha\}, \{\alpha + 1\alpha + 0\}, \{\alpha + 1\alpha + 11\alpha + 10 + 0\} \dots$$

c'est une relation d'ordre.

De façon plus précise, posons, pour tout $m \in A$, $h'(m)$ égal au sous-ensemble de PA obtenu en remplaçant dans m le symbole α par $0+1\alpha+\alpha$ et pour tout $M \in PA$

$$H'(M) = \{h'(m) / m \in M\}$$

Par exemple :

$$H'(\{\alpha\}) = \{\alpha + 1\alpha + 0\}$$

$$H'^2(\{\alpha\}) = H'(\{\alpha + 1\alpha + 0\}) = \{\alpha + 1\alpha + 11\alpha + 10 + 0\}$$

$$H'^3(\{\alpha\}) = \{\alpha + 1\alpha + 11\alpha + 111\alpha + 110 + 10 + 0\}$$

Soit M la plus petite famille de sous-ensembles de PA , au sens de la relation de contenance entre familles de sous-ensembles de PA , telle que

$$\{\alpha\} \in M$$

$$\text{Si } M \in M \text{ alors } H'(M) \in M$$

M est la clôture de $\{\alpha\}$ par H' .

La relation de pré-ordre $\sqsubseteq$ entre éléments de PA , défini précédemment, est une relation d'ordre entre éléments de M .

De plus $\forall M \in M \quad M \sqsubseteq H'(M)$.

M possède un élément maximum $\hat{M}$

$$\hat{M} = \{\alpha\} \cup (\cup_{n \in \mathbb{N}^+} H'^n(\{\alpha\}))$$

et cet élément $\hat{M}$ n'est autre que le support de A' .

Remarquons que si $H'^n(N)$ est clos par intersection finie, $\forall m, m' \in H'^n(\{\alpha\})$, il existe dans $H'^n(\{\alpha\})$ un plus grand élément m'' au sens de $\sqsubseteq$ tel que $m'' \sqsubseteq m$ et $m'' \sqsubseteq m'$.

Ceci permet de définir, après avoir posé $H'^0(\{\alpha\}) = \{\alpha\}$, pour $n, k \in \mathbb{N}$, une application $g'_{n,k}$ de $H'^{n+k}(\{\alpha\})$ dans $H'^n(\{\alpha\})$.

Pour $m \in H'^{n+1}(\{\alpha\})$

$$g'_{n,k}(m) = \sup \{m' \in H'^n(\{\alpha\}) / m' \sqsubseteq m\}$$

Nous définirons également :

pour $m \in M$

$$\hat{g}_m(m) = \sup \{m' \in H'^n(\{\alpha\}) / m' \sqsubseteq m\}$$

Prenons par exemple $n = 3, k = 1$

$$H'^3(\{\alpha\}) = \{\alpha + 1\alpha + 11\alpha + 111\alpha + 110 + 10 + 0\}$$

$$H'^4(\{\alpha\}) = \{\alpha + 1\alpha + 11\alpha + 111\alpha + 1111\alpha + 1110 + 110 + 10 + 0\}$$

$g'_{3,1}$ est défini par la table

0	→	0
10	→	10
110	→	110
1110	→	111α
1111α	→	111α
111α	→	111α
11α	→	11α
1α	→	1α
α	→	α

$$H'^2(\{\alpha\}) = \{\alpha + 1\alpha + 11\alpha + 10 + 0\}$$

$g'_{2,2}$ est défini par la table

0	→	0
10	→	10
110	→	11α
1110	→	11α
1111α	→	11α
111α	→	11α
11α	→	11α
1α	→	1α
α	→	α

$\hat{g}'_n$ coïncide avec $g'_{n,k}$ sur $H'^{n+k}(\{\alpha\})$ car $H'^{n+k}(\{\alpha\}) \subseteq M$

Nous pouvons alors, sur $H'^n(\{\alpha\})$, définir une algèbre dont les opérateurs 0_n , α_n et 1_n sont donnés par

$$\alpha_n = \alpha$$

$$0_n(m) = \hat{g}'_n(0(I_{d_n}(m)))$$

$$1_n(m) = \hat{g}'_n(1(I_{d_n}(m)))$$

où I_{d_n} est l'application de $H'^n(\{\alpha\})$ dans M définie par

$$I_{d_n}(m) = m \quad \text{pour } m \in H'^n(\{\alpha\}).$$

Nous avons, par exemple, si $n = 0$

$$0_0 = \alpha$$

$$\alpha_0 = \alpha$$

$$1_0 : \alpha \rightarrow \alpha$$

$$\text{si } n = 3$$

$$0_3 = 0$$

$$\alpha_3 = \alpha$$

1_3 est défini par la table

0	→	10
10	→	110
110	→	111α
111α	→	111α
11α	→	111α
1α	→	11α
α	→	1α

$H'^n(\{\alpha\})$ muni de $0_n, \alpha_n, 1_n$ n'est pas une algèbre de mots. Par contre $\hat{g}'_n$ est un homomorphisme d'algèbre de A' sur $H'^n(\{\alpha\})$. $H'^n(\{\alpha\})$ est donc le support d'une algèbre de la classe C_1 et A' on le sait est initiale dans cette classe.

Il existe, de plus un homomorphisme d'algèbre qui est d'ailleurs la restriction de J , de $H'^n(\{\alpha\})$ sur $H'^n(N)$.

On peut se demander si $H'^n(\{\alpha\})$ vérifie une condition d'initialité dans le sous-ensemble de C_1 formé des algèbres dont le support a même cardinalité que $H'^n(\{\alpha\})$. C'est du moins ce que nous conjecturons.

Les applications H' et g'_n permettent de définir les opérations $\alpha_n, 0_n$ et 1_n sur $H'^n(\{\alpha\})$ à partir des opérations $\alpha_{n+1}, 0_{n+1}$ et 1_{n+1} sur $H'^{n+1}(\{\alpha\})$. Nous considérons donc la donnée de $H'^n(\{\alpha\}), 0_r, 1_n, \alpha_n$ comme approximation de A' et comme définissant un type approché de t_1 .

DEUXIEME CONSTRUCTION

Nous allons donner un deuxième exemple de construction d'un type entier, non standard en ce qu'il ne correspond pas à l'arithmétique entière usuelle du calculateur.

Nous allons, pour définir ce type noté t_2 , utiliser une classe C_2 de Σ -algèbres caractérisées par

l'ensemble de types $\{\text{Ent}\}$

l'ensemble support A_{ENT}

le domaine d'opérateurs constitué par

les symboles d'opérations constantes : α

z

les symboles d'opération unaire : E

I

t_2 est la classe d'isomorphisme de l'algèbre initiale de cette classe C_2 de Σ -algèbres.

Comme dans l'exemple précédent, nous allons considérer deux algèbres particulières dans C_2 :

- une algèbre notée A' : l'algèbre de mots initiale dans C_2 :

son support, noté A est $\alpha + z + (E+I)^+ \alpha + (E+I)^+ z$

les opérations de cette algèbre sont :

les opérations constantes dénommées α et z qui donnent les lettres α , z

et

les opérations unaires E et I qui appliquées à un mot m de A lui concatènent respectivement la lettre E et la lettre I donnent Em et Im

- une algèbre notée A'' dont le support est une famille de sous-ensembles de N , notée N

$$N = \{\{k\} / k \in N\} \cup \{\{2k / k \in N\} / i \in N\} \cup \{\{2k+1 / k \in N\} / i \in N\}$$

les opérations de cette algèbre sont :

les opérations constantes α , z

α dénomme la constante N

z dénomme la constante 0

les opérations unaires dénommées E et I

E dénomme l'opération qui au sous-ensemble s de N associe $\{2n / n \in s\}$

I dénomme l'opération qui, au sous-ensemble s de N associe $\{2n+1 / n \in s\}$

Il existe un homomorphisme d'algèbre J de A' sur A'' .

J est défini par

$$J(\alpha) = N$$

$$J(z) = 0$$

$$J(Em) = \{2n / n \in J(m)\} = EJ(m)$$

$$J(Im) = \{2n+1 / n \in J(m)\} = IJ(m).$$

Comme dans l'exemple précédent, nous allons définir une suite d'algèbres dont les supports sont des sous-familles de N et une suite d'algèbres dont les supports sont des sous-ensembles de A .

Pour N , nous allons considérer des sous-familles telles que

$\{N\}$

$\{N, EN, IN, \{1\}, \{0\}\}$

$\{N, EN, IN, EEN, EIN, IIN, \{3\}, \{2\}, \{1\}, \{0\}\}$

$\vdots$

Pour A

$\{\alpha\}$

$\{\alpha, E, I, Iz, z\}$

$\{\alpha, E\alpha, I\alpha, EE\alpha, EI\alpha, II\alpha, IE\alpha, Ez, Iz, EEz, IIZ, IEz, EIZ, z\}$

$\vdots$

A est ici l'ensemble des formes sententiales associées à la grammaire G

$$G : \alpha \rightarrow +E\alpha + I\alpha + Iz + z$$

et nous allons utiliser sur les sous-ensembles de A la relation $\sqsubset$ définie comme dans l'exemple 1 par.

$$M \sqsubset M' \text{ si } \forall m' \in M' \exists m \in M \text{ tel que } m \sqsubset m' \\ \text{où } m \sqsubset m' \text{ signifie } m' \text{ dérive de } m.$$

Nous pouvons alors définir

- une application h' de A dans PA en posant, pour tout $m \in A$ $h'(m)$ égal au sous-ensemble de A obtenu en remplaçant dans m , α par $\alpha + E\alpha + I\alpha + Iz + z$

- une application H' de PA dans PA définie par

$$H'(M) = \{h'(m) / m \in M\}$$

- une application h'' de N dans PPN définie par

$$h''(s) = \text{si } s = m_0 \text{ alors } m_0 \text{ sinon } \{mN, EmN, ImN, m1, m_0\}$$

les éléments de N étant de la forme m_0 ou mN avec m appartenant à $(E+I)^*$

- une application H'' de PN dans PN définie par

$$H''(d) = \{h''(s) / s \in d\} \quad d \subseteq N$$

Nous considérons la suite de sous-ensemble de A

$$\{\alpha\}, H'(\{\alpha\}), \dots, H'^n(\{\alpha\}) \dots$$

et la suite de sous-familles de N :

$$N, H''(N), \dots, H''^n(N) \dots$$

Il est possible alors, comme dans le premier exemple présenté, de définir :

- une application $g'_{n,k}$ de $H'^{n+k}(\{\alpha\})$ dans $H'^n(\{\alpha\})$
- une application $\hat{g}'_n$ de A dans $H'^n(\{\alpha\})$
- une application $g''_{n,k}$ de $H''^{n+k}(N)$ dans $H''^n(N)$
- une application $\hat{g}''_n$ de N dans $H''^n(N)$.

Pour $s \in H''^{n+k}(N)$

$$g''_{n,k}(s) = \cap_N \{s' \in H''^n(N) / s \subseteq s'\}$$

Pour $s \in N$

$$\hat{g}''_n(s) = \cap_N \{s' \in H''^n(N) / s \subseteq s'\}$$

Nous pouvons également définir

- une application $g'_{n,k}$ de $H'^{n+k}(\{\alpha\})$ dans $H'^n(\{\alpha\})$
- une application $\hat{g}'_n$ de M dans $H'^n(\{\alpha\})$

Pour $m \in H'^{n+k}(\{\alpha\})$

$$g'_{n,k}(m) = \sup \{m' \in H'^n(\{\alpha\}) / m' \sqsubseteq m\}$$

Pour $m \in A$

$$\hat{g}'_n(m) = \sup \{m' \in H'^n(\{\alpha\}) / m' \sqsubseteq m\}$$

$\hat{g}''_n$ coïncide avec $g''_{n,k}$ sur $H''^{n+k}(N)$ et de même $\hat{g}'_n$ coïncide avec $g'_{n,k}$ sur $H'^{n+k}(\{\alpha\})$

Si nous prenons par exemple $n=1$, $k=1$

$$H''^1(N) = \{N, EN, IN, \{1\}, \{0\}\}$$

$$H''^2(N) = \{N, EN, IN, EEN, EIN, IIN, \{3\}, \{2\}, \{1\}, \{0\}\}$$

$$H'^1(\{\alpha\}) = \{\alpha + E\alpha + I\alpha + IZ + z\}$$

$$H'^2(\{\alpha\}) = \{\alpha + E\alpha + I\alpha + EE\alpha + EI\alpha + II\alpha + IE\alpha + Ez + Iz + EEz + IIZ + IEz + EIZ + z\}$$

$g''_{1,1}$ correspond à la table

$\{0\}$	$\rightarrow$	$\{0\}$
$\{1\}$	$\rightarrow$	$\{1\}$
$\{2\}$	$\rightarrow$	EN
$\{3\}$	$\rightarrow$	IN
IIN	$\rightarrow$	IN
EIN	$\rightarrow$	EN
EEN	$\rightarrow$	EN
IN	$\rightarrow$	IN
EN	$\rightarrow$	EN
N	$\rightarrow$	N

$g'_{1,1}$ correspond à la table

z	$\rightarrow$	z
EIZ	$\rightarrow$	E α
IEZ	$\rightarrow$	I α
IIZ	$\rightarrow$	I α
EEZ	$\rightarrow$	E α
Ez	$\rightarrow$	E α
IE α	$\rightarrow$	I α
EI α	$\rightarrow$	E α
EE α	$\rightarrow$	E α
II α	$\rightarrow$	I α
I α	$\rightarrow$	I α
E α	$\rightarrow$	E α
α	$\rightarrow$	α

Si nous appelons I''_{d_n} l'application de $H''^n(N)$ dans A définie par $I''_{d_n}(s) = s$ $\forall s \in H''^n(N)$ et I'_{d_n} l'application de $H'^n(\{\alpha\})$ dans M définie par

$$I'_{d_n}(m) = m \quad \forall m \in H'^n(\{\alpha\})$$

les opérations sur $H''^n(N)$ et $H'^n(\{\alpha\})$ se déduisent de celles sur N et M par l'intermédiaire de I''_{d_n} , $\hat{g}''_n$, I'_{d_n} , $\hat{g}'_n$.
C'est ainsi que nous aurons :

sur $H''^n(N)$

$$N_n = N$$

$$O_n = \hat{g}''_n \circ O \circ I''_{d_n}$$

$$E_n = \hat{g}''_n \circ E \circ I''_{d_n}$$

$$I_n = \hat{g}''_n \circ I \circ I''_{d_n}$$

et sur $H'^n(\{\alpha\})$

$$\alpha_n = \alpha$$

$$z_n = \hat{g}'_n \circ z \circ I'_{d_n}$$

$$E_n = \hat{g}'_n \circ E \circ I'_{d_n}$$

$$I_n = \hat{g}'_n \circ E \circ I'_{d_n}$$

Par exemple sur $H'^1(\{\alpha\})$

$$\alpha_p = \alpha$$

$$z_p = z$$

E_1 et I_1 correspondent aux tables d'opération.

Pour I_1

$$\begin{aligned} z &\rightarrow Iz \\ Iz &\rightarrow I\alpha \\ I\alpha &\rightarrow I\alpha \\ \alpha &\rightarrow I\alpha \\ E\alpha &\rightarrow I\alpha \end{aligned}$$

Pour E_1

$$\begin{aligned} z &\rightarrow E\alpha \\ Iz &\rightarrow E\alpha \\ I\alpha &\rightarrow E\alpha \\ E\alpha &\rightarrow E\alpha \\ \alpha &\rightarrow E\alpha \end{aligned}$$

La restriction de J à $H'^n(\{\alpha\})$ est un homomorphisme d'algèbre de $H'^n(\{\alpha\})$ sur $H''^n(N)$ et $\hat{g}'_n$ est un homomorphisme d'algèbre de A' sur $H'^n(\{\alpha\})$. Nous dirons ici aussi que $H'^n(\{\alpha\})$ muni des opérations α_n, z_n, E_n, I_n est un type approché de t_2 .

Nous pouvons tirer quelques enseignements de ces deux exemples.

Dans les deux cas N , est muni d'une relation d'ordre

$$s \sqsubset s' \text{ si } s' \subseteq s$$

Dans les deux cas N est la borne supérieure d'une partie dirigée de familles de sous-ensembles de N closes par intersection finie. Les résultats du chapitre III entraînent que N est aussi close par intersection finie.

N n'est pas close par intersection car l'intersection d'une famille de sous-ensemble de la forme 1^k_N , $k \in N$ ou E^k_N pour $k \in N$, est vide.

On ne peut avoir un ordre partiel complet qu'en adjoignant N

$\emptyset$: le vide. Cet ordre est complet sur toutes les sous-familles de cardinalité finie de N que nous avons introduites.

Les types d'objets t_1 et t_2 et leurs approximations comportent une double structure algébrique et topologique qui autorise les calculs par approximation. Cependant, si l'on n'a pas obtenu un singleton de N comme le résultat au bout d'un nombre fini d'étapes de calcul on n'a aucune garantie d'obtenir un singleton comme résultat même en utilisant N comme ensemble de calcul.

La deuxième remarque que nous pouvons faire est que en ce qui concerne t_1 et t_2 , N est close pour l'application 1 en ce qui concerne t_1 , pour les applications E et I en ce qui concerne t_2 . Or $1N \subset N$ et de même $EN \subset N$ $IN \subset N$. Plus précisément N est respectivement la clôture de $\{0, N\}$ par 1 et la clôture de $\{0, N\}$ par E et I . Il conviendra d'étudier ce fait de façon plus approfondie car il joue un rôle capital dans la définition de la double structure algébrique et topologique pour t_1 et t_2 . Enfin, on sait que dans les programmes, les déclarations de type permettent d'effectuer une certaine vérification de la correction sémantique des programmes. L'utilisation de types approchés dûment choisis pourrait permettre de raffiner cette vérification.

★

★ ★

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.A.N. ABDALLAH, *Ordres élémentaires*, dans "1er colloque AFCET-SMF de Mathématiques appliquées" (1978) TOME I, 115-123
- [2] A. ARNOLD et M. NIVAT, *Algebraic Semantics of non-deterministic program schemes*, Rapport LITP, 78-4, Université de Paris VII (1978)
- [3] D. BERT et P. JACQUET, *Generic abstract Data Types*, dans "Implementation and Design of Algorithmic languages", Proceeding of the 5th Annual III conference (1977), 71-82
- [4] C. CARREZ, *Extension de la notion de partition et application aux automates non-déterministes*, Thèse d'Etat, (1968) LILLE
- [5] O.J. DALH, B. MYRHAUG et K. NYGAARD, *Simula 67, Common base language*, Norwegian Computer Center, OSLO (1970)

- [6] J.A. GOGUEN, J.W. THATCHER et E.G. WAGNER, *An initial algebra approach to the specification correctness and implementation of abstract data types*, IBM Research Report, RC 64, 87 (1976)
- [7] J. GUTTAAG, *Abstract data-types and the development of data structures*, Communications of Assoc. Comput. Mach. 20 (1977)
- [8] J. GUTTAG, E. HOROWITZ et D.R. MUSSER, *"Abstract data-types and software validation"*, Research Report, ISI RR 76-48, ISI University of Southern California (1976)
- [9] C.A.R. HOARE, *Record Handling* Nato Summer School, Villard de Lans (1966)
- [10] P. JORRAND, *Contribution au developpement des langages extensibles*, Thèse d'Etat (1975)
- [11] Ch.A. KOSTER, *The mode-System in ALGOL 68*, dans "New direction in algorithmic languages", Prepared for IFIP WG 2.1, Ed. S.A Schuman (1975) 99-114
- [12] D.J. LEHMANN, M.B. SMYTH, *Data-types*, dans "18th Annual Symposium on foundations of Computer Sciences" (1977) 7.12
- [13] D.J. LEHMANN, *Categories for fixed-point semantic*, dans "17th Annual Symposium on foundations of Computer Science" (1976) 122,126
- [14] B. LISKOV, *An introduction to CLU*, dans "New directions in algorithmic languages", Prepared for IFIP WG 2.1, Ed. S.A. Schumann (1975) 139-156
- [15] J. MAC CARTHY, *Basis for a Mathematical Theory of Computation* dans "Computer Programming and formal systems" E.D. P. Braffon et D. Hirschberg, North Holland (1963) 33-70

- [16] M.E. MAJSTER, *Extended directed graph : A formalism for structured data and data-structures*, Acta Informatica 8 (1977) 38.53
- [17] *Manuel du langage algorithmique ALGOL 68*, Ed. P. Bacchus, J. André et C. Pair, Hermann (1977)
- [18] L. NOLIN, *Algorithmes universels*, RAIRO R1, (1974) 6.17
- [19] C. PAIR et J.P. FINANCE, *Formalisation des notions d'information, de structure d'information et de problème*, Université de Nancy II (1973)
- [20] G. PLOTKIN, *A power domain construction*, SIAM Journal of Computing, 5, (1976), 452.487
- [21] J.L. REMY, *Structures d'information, formalisation des notions d'accès et de modification d'une donnée*, Thèse de spécialité, Nancy (1974)
- [22] L.E. SANCHIS, *Data-types as Lattices, Retraction, closures, projections*, RAIRO Informatique Théorique, 11 (1977), 329.342
- [23] D. SCOTT, *Continuous Lattices*, dans "Lectures notes in Math" n° 274 (1972), 91.130
- [24] D. SCOTT, *Lattices theory. Data-types and semantics*, dans "Courant Computer Science Symposium", n° 2, (1972), 65.106
- [25] D. SCOTT, *Data-types as Lattices*, Siam Journal of Computing 5, (1976)
- [26] A. SHAMIR et W. WADGE, *Data-types as objects*, dans "Lectures notes in Computer Science", n° 52 (1977), 465-479

- [27] T.A. STANDISH, *A data-definition facility for programming language*, Doctoral dissertation Carnegie Mellon Institute (1967)
- [28] R.D. TENNENT, *Languages design methode based on Semantic principles*, Acta Informatica 8, 97.112
- [29] R.D. TENNENT, *The denotationnal semantic of programming languages*, Communications of Assoc. Comput. Mach. 19, 8 (1976), 437.453
- [30] L. TRILLING, *On extension of block structure and cooperating processes*, dans "New direction in algorithmic languages", Prepared for IFIP WG 2.1, ed. S.A. SCHUMAN
- [31] J. VILLEMIN, *Syntaxe, sémantique et axiomatique d'un langage de programmation simple*, Thèse d'Etat, Paris (1974)
- [32] *Revised report on the algorithmic language Algol 68*, Ed. A. Van Wijngaarden, B.J. Mailloux, J.E.L. Peck, C.H.A. Koster, M. Sintzoff, C.H. Lindsey, L.G.L.T. Meertens, R.G. Fisker. Supplément à Algol Bulletin 36, TR 74.3, Department of Computer Science University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada (1974)
- [33] Wm. A. WAGNER, R.A. LONDON, M. SHAW, *Abstraction and verification in Alphard*, dans "New direction in algorithmic language", Prepared for IFIP WG 2.1 Ed. S.A. SCHUMAN, (1975), 217-295

