

50376
1979
218

50376
1979
218

N° d'ordre 765

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE LILLE I

pour l'obtention

DU DIPLÔME DE DOCTEUR DE 3^e CYCLE

par

Gilles ABOUT



Spécialité : MÉCANIQUE

Sujet de la thèse :

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU DÉCOLLEMENT SUPERSONIQUE LAMINAIRE :
MISE EN ŒUVRE ET PERFECTIONNEMENT DES MÉTHODES DE CALCUL INTÉGRALES.

Soutenue le 26 juin 1979 devant la commission composée de :

MM. R. Kh. ZEYTOUNIAN

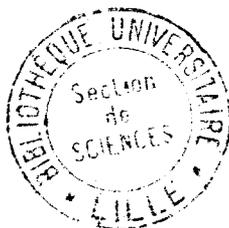
Président

L. CROCCO

A. DYMENT

Examineurs

J.C. LE BALLEUR



O.N.E.R.A.

29, Avenue de la Division Leclerc
92320 CHATILLON

1979

A mes parents,

A mon épouse.

Je tiens à remercier tout particulièrement :

- Monsieur le Professeur R. Kh. ZEYTOUNIAN qui a bien voulu me faire l'honneur d'accepter la présidence de mon jury de thèse ;*
- Monsieur le Professeur L. CROCCO qui m'a aidé de ses conseils tout au long de cette étude. Cette thèse doit beaucoup à ses travaux antérieurs et à ses suggestions ;*
- Monsieur J.C. LE BALLEUR qui m'a fait bénéficier, sans compter, de son aide précieuse et efficace ;*
- Monsieur A. DYMENT qui a accepté de faire partie du jury ;*
- Monsieur M. SIRIEIX, Directeur Adjoint de l'Aérodynamique, Monsieur O. LEUCHTER, Chef de Division, et l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales qui m'ont fourni les moyens d'effectuer ce travail.*

Qu'il me soit aussi permis de remercier tous mes collègues et amis de l'ONERA, ainsi que toutes les personnes ayant contribué à l'édition de cette thèse.

* *
*

**CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU DÉCOLLEMENT SUPERSONIQUE LAMINAIRE
MISE EN ŒUVRE ET PERFECTIONNEMENTS DES MÉTHODES DE CALCUL INTÉGRALES**

par Gilles ABOUT

RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré au calcul des phénomènes de décollement supersonique laminaire par résolutions couplées d'équations de fluide parfait et d'équations de couche limite sous forme intégrale. Trois thèmes de perfectionnements possibles pour ces méthodes intégrales de forte interaction ont été explorés :

- Définition de profils de similitude approchés par une représentation analytique simple et mise en œuvre de la formulation du second ordre pour la couche limite proposée par Crocco.
- Adaptation aux écoulements laminares de la méthode numérique de calcul de Le Balleur et application à l'étude de décollement-recolllements sur une rampe de compression ou sous une réflexion d'onde de choc.
- Détermination de profils de vitesse à trois paramètres susceptibles de rendre compte des effets de sous-couche laminaire et mise en œuvre dans une méthode intégrale à trois moments, selon l'analyse suggérée par Crocco.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Décollement – Ecoulement laminaire – Couche limite – Ecoulement visqueux – Ecoulement bidimensionnel – Méthode intégrale – Couplage – Ecoulement supersonique – Interaction forte – Méthode numérique – Interaction onde de choc-couche limite.



**CONTRIBUTION TO THE STUDY OF SUPERSONIC LAMINAR SEPARATION :
UTILIZATION AND IMPROVEMENTS IN INTEGRAL METHODS OF CALCULATION**

SUMMARY

This thesis aims to present the calculation of the supersonic laminar separation phenomenas by solving integral equations of interaction. Three topics of possible improvements for these integral methods have been developed in the case of strong interaction :

- Definition of similar profiles approximated by a simple analytic representation and utilization of a second order formulation proposed by Crocco for the boundary layer.
- Adaptation of Le Balleur's numerical method of calculation and application to the study of separated and reattaching flow on a compression ramp or under shock-wave reflexion.
- Determination of three-parameter velocity profiles able to take the laminar lower layer into account and utilization in a three moments method as it has been suggested by Crocco.

Descriptors (NASA thesaurus) : Separated flow – Boundary layer separation – Viscous flow – Boundary layer – Laminar flow – Integral methods – Matching – Supersonic flow – Strong interaction – Numerical method – Shock wave interaction.

INDEX DES NOTATIONS

notations latines

- u, v : composantes de la vitesse
 p : pression
 P : $\log p$
 x, y : coordonnées physiques
 h : enthalpie
 Pr : nombre de Prandtl
 T : température
 C_p : chaleur spécifique
 \tilde{x}, \tilde{y} : coordonnées de la transformation de Stewartson
 a : célérité du son au col
 M : nombre de Mach
 W : carré de la vitesse réduite
 f : profil de vitesse
 \mathcal{H} : enthalpie totale rapportée à sa valeur à l'extérieur de la couche limite
 a, b, c : coefficients intervenant dans la représentation des
 d, η_*, n : profils de compression et de détente pour la couche limite
 q : vecteur vitesse
 Q : $\log \bar{q}$
 \tilde{H} : paramètre de forme qui est
 \tilde{K} : paramètre de forme qui est
 \tilde{J} : paramètre de forme qui est
 \tilde{L} : paramètre de forme auxiliaire lié à la dissipation
 \tilde{S} : paramètre de forme auxiliaire lié au flux de chaleur
 \tilde{T} : paramètre de forme auxiliaire lié au frottement
 g : vaut η/\tilde{y}
 F : vaut $\int_0^{\eta} u/u_c d\eta$
 C_{ij} : $i = 1 \rightarrow 4$ coefficients du système (I-21)
 $j = 1, 2$

D_{jk} $j=1,2$ coefficients du système (I-21)

z : vaut δ_1/δ

Re : nombre de Reynolds

$k(W)$: coefficient défini en (I-46)

S_u : nombre de Sutherland qui vaut

k_{PM} : coefficient de Prandtl-Meyer défini en (I-62)

X_p : défini en (I-80)

$\left. \begin{matrix} N^*, L^*, I^* \\ G^*, H^*, K^*, J^* \end{matrix} \right\}$: paramètres de forme de second ordre

$k_1(W)$ défini en (I-81)

$k_2(W)$: défini en (I-83)

$k_3(W)$: défini en (I-84)

c_f : coefficient de frottement

B_1, B_2, C_1 : coefficients intervenant dans (II-18)

F, G : opérateurs

\tilde{B} : coefficient relié à B_2/B_1

C_2, C_3 : coefficients définis en (II-24) et (II-25)

$A(x)$: fonction de déplacement

g : profil de sous-couche

G : défini en (III-10)

λ, ρ, m : coefficients de la représentation de profil de sous-couche

$E k_i$: coefficients de l'équation (III-28) $k = 1, 2, 3$
 $i = 1, 2, 3$

$A(n)$: défini en (III-35)

\mathcal{L} : fonction d'échelle définie en (III-39)

A_{nj} : coefficients des équations (III-44) définis en (III-48)
 $n = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$

Notations grecques :

ρ : densité

σ : densité relative

β : paramètre de forme de Falkner et Skan

- η : variable de similitude
 η_* : ordonnée de référence pour
 ξ : vaut η/η_*
 α_n : intégrale double définie en (I-20)
 π : pression relative
 R : enthalpie relative
 θ : argument de la vitesse
 θ_p : angle de la paroi avec l'écoulement de référence
 μ : coefficient de viscosité
 ζ_x : débit de quantité de mouvement
 ζ_E : débit d'énergie cinétique
 ζ_H : débit d'enthalpie
 ζ_m : débit de déplacement
 ν : fonction de Prandtl-Meyer
 ψ : fonction de courant
 φ : fonction potentiel
 ϕ : fonction de dissipation
 δ : épaisseur dans les variables physiques : $\delta = Re^{-\frac{1}{2}}$
 δ_x : épaisseur de quantité de mouvement
 δ_E : épaisseur d'énergie cinétique
 δ_m : épaisseur de déplacement
 δ_H : épaisseur d'enthalpie
 Δ : id. en incompressible dans la variable de similitude
 γ : rapport de chaleur spécifique
 δ_{mi} : épaisseur de déplacement incompressible
 ω : pulsation
 θ : v/μ direction de la vitesse
 ζ : variable de similitude de sous-couche
 λ : constante définie en (III-45)

ζ_* : ordonnée de référence pour la sous-couche

τ : vaut ζ/ζ_*

Θ : fonction d'échelle entre couche et sous-couche

Δ_1 : vaut Δ_m

Δ_2 : vaut Δ_e

Δ_3 : défini page 54

Δ_4 : défini page 54

Indices :

$(\bar{\quad})$: condition d'écoulement de base

$(\tilde{\quad})$: quantité exprimée dans les variables de Stewartson

$(\quad)^*$: paramètre de forme au second ordre

$(\quad)_e$: référence à l'écoulement extérieur

$(\quad)_f$: condition à la paroi

$(\quad)_\infty$: condition à l'infini amont

$(\quad)^0$: condition génératrice.

INTRODUCTION -

Des phénomènes tels que le décollement supersonique laminaire ou l'interaction couche limite - onde de choc, demeurent des problèmes fondamentaux pour l'aérodynamique, tant sur le plan théorique que pratique. Les principales méthodes qui ont été développées pour leur analyse peuvent chronologiquement se regrouper en trois grandes catégories.

(i) Résolutions couplées d'équations de fluide parfait et de couche limite au moyen de méthodes intégrales ou de méthodes aux différences (les équations de couche limite pouvant être celles de Prandtl, ou encore des équations plus complètes), cf [1, 2, 3].

(ii) Mise en oeuvre de méthodes fondées sur les développements asymptotiques raccordés et mettant en jeu des structures à couches multiples (on peut se reporter ici au cours de M. Zeytounian) cf [4].

(iii) Résolution des équations de Navier-Stokes compressibles par des méthodes instationnaires, voir par exemple [5].

Nous nous proposons dans ce mémoire d'étudier différentes voies d'améliorations possibles pour la catégorie (i), dans le cas où l'écoulement de fluide parfait supersonique est un écoulement par onde simple, et où le calcul de la couche limite est effectué par une méthode intégrale. Rappelons que cette approche, introduite par Crocco et Lees [16], a reçu avec succès de nombreux développements et qu'elle constitue une analyse des phénomènes d'interaction visqueux moins restrictive que la théorie classique de la couche limite, même lorsque les équations résolues sont seulement celles de Prandtl.

La théorie classique de la couche limite de second ordre ne parvient en effet à rendre compte que de "l'interaction faible" qui peut exister entre un écoulement supersonique non visqueux et une couche dissipative. Rappelons qu'une solution de couche limite de premier ordre est alors calculée à pression fixée, après avoir déterminé le fluide parfait au premier ordre, indépendamment de toute influence de la couche limite. Un second calcul de fluide parfait permet ensuite de déterminer les solutions de premier et second ordre réunies, à partir de l'épaisseur de déplacement de la seule couche limite de premier ordre. Un calcul de couche limite au second ordre peut éventuellement être ajouté, mais de même qu'au premier ordre, le champ de pression y est toujours une donnée. L'une des plus grosses lacunes de cette théorie est de conduire au décollement par l'intermédiaire d'une singularité, et d'interdire par là-même toute solution en aval de ce point.

Afin de pallier cette insuffisance il est nécessaire, pour le moins, de reformuler le problème en introduisant le concept "d'interaction forte". Le calcul s'effectue dans cette théorie en couplant directement les résolutions du champ externe et de la zone dissipative. Il diffère donc essentiellement du précédent par le fait que toute hiérarchisation d'ordres de grandeur disparaît dans l'influence mutuelle qui existe entre le fluide parfait et la couche limite. Le couplage entre les deux zones s'effectue généralement à une distance δ de la paroi, qui représente l'épaisseur physique de la couche limite. Les deux zones raccordées en δ sont alors telles que le caractère hyperbolique des équations d'Euler en régime supersonique, lié au caractère habituellement parabolique des équations retenues pour la couche dissipative, permette en principe d'effectuer un calcul en progressant de l'amont vers l'aval. La résolution de ces équations couplées peut s'effectuer soit par une méthode aux différences, telle que l'ont appliquée les premiers

Reyhner et Flügge-Lotz [3], soit encore par l'approche qui a été choisie ici, c'est-à-dire par application de méthodes intégrales. Le principe même de ces méthodes est de remplacer le système d'équations aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles ordinaires, après intégration selon la direction normale des équations de la couche limite. Rappelons qu'il est possible dans une telle intégration d'obtenir une infinité d'équations intégrales distinctes, telles que les différents moments par rapport à la vitesse des équations de mouvement. On peut alors adopter pour solutions numériques approchées, celles qui vérifient les n premières équations de moment, ainsi que les conditions aux limites. Le système ainsi défini est cependant ouvert et n'a de sens qu'associé à des relations auxiliaires de fermeture, déduites de distributions de vitesse et d'enthalpie dépendant de n paramètres. Contrairement aux usages numériques communs, les méthodes intégrales de couche limite se caractérisent par un nombre n de degrés de liberté extrêmement restreint, de l'ordre de quelques unités, et généralement même $n = 1$. Il est alors aisé de se rendre compte que la qualité de la méthode réside aussi bien dans le choix des distributions de vitesse et d'enthalpie que dans le choix et le nombre des équations à résoudre. Sans pouvoir citer ici les nombreux travaux ayant traité de ces méthodes, il est nécessaire de dresser un bref tableau des principaux progrès qui ont conditionné le calcul des décollements laminaires.

Les premiers calculs furent effectués à l'aide d'une représentation polynômiale du quatrième degré des profils de vitesse [6], puis du cinquième degré [7]. Les résultats restant imparfaits dans les régions décollées, Crocco et Lees [16] utilisent une équation de l'entraînement en tant qu'équation auxiliaire. Toutefois, la difficulté de relier le coefficient ainsi introduit aux caractéristiques des profils, conduisirent Honda [8] et Tani [9] à remplacer l'équation d'entraînement par l'équation de premier moment de quantité de mouvement aussi appelée équation de l'énergie cinétique. Lees et Reeves [10] et par la suite Klineberg [11], firent une synthèse des améliorations apportées depuis lors et donnèrent aux méthodes intégrales leur formulation actuelle. A l'instar de Curle [12] et Gadd [13], les relations auxiliaires de fermeture sont issues des solutions de similitude, déduites des équations de Falkner et Skan [14] dans le cas incompressible et d'équations modifiées par Stewartson [35] dans le cas compressible. Ces solutions, calculées respectivement par Hartree et par Cohen et Reshotko [15], ne dépendent que d'un seul paramètre β , lié au gradient de vitesse extérieure. La méthode de Lees et Reeves comporte toujours une équation auxiliaire unique ($n = 1$), celle du premier moment de quantité de mouvement par rapport à la vitesse. Cette équation permet de calculer β et d'éviter son identification au paramètre de gradient de vitesse de l'écoulement réel, qui n'est nullement semblable. Un changement de variables inspiré par Stewartson autorise par ailleurs une formulation où les fonctions auxiliaires sont indépendantes du nombre de Mach. Klineberg étendit enfin la méthode aux écoulements avec flux de chaleur. Dans le cadre de cette formulation, et indépendamment des problèmes de couplage évoqués ci-dessous, les imperfections les plus significatives sont celles posées par la représentation numérique approchée des relations auxiliaires de similitude, par la prévision précise de flux de chaleur ainsi que de plateaux de pression en cas de décollements étendus.

Parallèlement au progrès des méthodes intégrales, l'élément déterminant initialement introduit par Crocco et Lees est la notion de comportements "subcritiques" ou "supercritiques" des couches limites, lorsque celles-ci sont couplées à un écoulement supersonique externe selon un concept de forte interaction. Les conséquences fondamentales de cette distinction, et son absence dans la plupart des autres approches théoriques ont fait l'objet de nombreux travaux, voir par exemple [1, 2, 11, 18, 23, 24, 25].

Rappelons que dans le cas subcritique, les couches subsoniques présentes dans le voisinage de la paroi dictent le comportement qualitatif de la couche

limite, supposée ici dénuée de gradient de pression normal. Dans ces conditions, on peut montrer que, malgré le caractère parabolique des équations de couche limite et le caractère hyperbolique de celles qui régissent le fluide parfait, la prise en compte de l'effet de couplage permet de transmettre en amont l'influence d'une perturbation qui est située plus en aval, ainsi que l'exige par exemple un processus de décollement. Dans le cas supercritique au contraire, si les hypothèses habituelles de continuité des solutions sont respectées, il est impossible de décrire au moyen des équations de Prandtl, même couplées au fluide parfait, la transmission vers l'amont de l'influence d'une perturbation imposée par l'écoulement aval. Il est donc nécessaire pour rendre compte d'une telle influence de retenir également des solutions discontinues, d'une manière assez semblable à la prise en compte de solutions avec ondes de choc pour le fluide parfait. La discontinuité de la solution, qualifiée de "saut" supercritique-subcritique, a ici pour effet de faire brusquement passer d'une couche-limite supercritique en amont, à une couche subcritique en aval, capable dès lors de rendre compte de l'influence de l'aval. A la différence des équations de choc cependant, la définition d'équations de saut est restée un problème théorique mal résolu, physiquement irréaliste. Il met en cause l'application des méthodes intégrales classiques de forte interaction aux couches limites laminaires sur paroi refroidie, ou encore aux couches limites turbulentes. Il a conduit à la recherche de méthodes prenant en compte explicitement le gradient de pression normal [19].

De telles configurations supercritiques peuvent cependant être éliminées, comme l'a montré Le Balleur [25], par simple modification de la manière dont est formulé le couplage entre les équations visqueuses et non-visqueuses. La notion de comportement subcritique ou supercritique avait en effet été définie pour des méthodes où le couplage entre la zone visqueuse et le champ externe était effectué classiquement au niveau de la frontière δ de la couche limite. En fait, Le Balleur a pu montrer que la qualité de couche supercritique doit être rattachée à ce type de couplage, qu'elle est tributaire du critère définissant δ et que, moyennant un couplage par recouvrement où le calcul de fluide parfait se trouve prolongé dans la couche visqueuse jusqu'à la paroi, aucun comportement supercritique ne peut plus se produire. On peut en conclure que la distinction des états supercritique et subcritique doit être associée, non à la seule couche dissipative, mais au calcul de forte interaction visqueuse dans son ensemble, lequel comprend la forme de couplage utilisée. Pour cette raison, le couplage à la paroi sera exclusivement utilisé dans toute la suite.

La présente étude propose trois thèmes de perfectionnement des méthodes intégrales laminares qui sont répartis respectivement dans trois chapitres.

(i) Une première tentative d'amélioration consiste essentiellement à inclure dans la couche limite des termes qui seraient de second ordre dans une analyse de faible interaction. Cette analyse a été proposée par Crocco [1]. En l'absence de ces termes, le système se réduit au problème d'interaction classique évoqué plus haut, à ceci près que l'écoulement de base est prolongé jusqu'à la paroi. La fermeture des équations intégrales est réalisée par des solutions de similitude dont on a pu définir une représentation analytique approchée. Cette représentation originale permet de calculer à la demande les fonctions auxiliaires par simple intégration numérique ; elle améliore la technique utilisée par Klineberg dans la mesure où une représentation unique est utilisée pour tous les profils de compression.

On traite de cette manière le problème du décollement libre et on analyse les conditions d'obtention de solutions avec plateau de pression dans les décollements étendus.

(ii) La seconde voie d'amélioration étudiée porte sur la méthode numérique de résolution. Dans la partie (i) l'interaction libre est traitée comme un problème de conditions initiales, dont on sait qu'il est mal posé. En cas de recollement, un tâtonnement sur les conditions initiales doit en effet être opéré de manière à traduire l'influence de l'aval sur l'amont. Pour pallier cette difficulté et pouvoir, par exemple, traiter des problèmes de décollement-recollement successifs, on a adopté dans cette partie la méthode proposée par Le Balleur [20, 25]. Elle permet de résoudre itérativement un problème aux limites bien posé et de prescrire directement une condition supplémentaire à l'aval de l'écoulement. Dans cette étude, les équations intégrales de couche limite sont exemptes de termes de second ordre, et seule l'évaluation de la pression le long de la paroi présente une correction de second ordre. Les mêmes relations de fermeture qu'au chapitre précédent sont adaptées à ces calculs.

On traite par cette méthode le problème du décollement-recollement rencontré sur une rampe de compression ou encore à la réflexion d'onde de choc dans le cas d'une paroi adiabatique.

(iii) La troisième voie d'amélioration analysée s'inspire du schéma en triple couche de Stewartson [17] et Neiland [22] pour introduire la notion de sous-couche laminaire dans une description intégrale, selon une méthode proposée par Crocco. Celle-ci consiste principalement à introduire deux nouveaux paramètres dans les distributions de vitesse afin de construire une famille de profils "composites" incluant couche et sous-couche. Pour ce faire, on a déterminé des profils de similitude approchés pour la sous-couche, après avoir sélectionné une représentation analytique simple. Par rapport à (i) ou à (ii), la méthode intégrale (iii) ajoute les équations de moment d'ordre 2 et 3 des quantités de mouvement afin de fermer le système d'équations différentielles, le nombre total d'inconnues étant maintenant porté à cinq.

On discute les problèmes posés par l'intégration du système et on indique les premiers résultats obtenus par cette méthode.

C H A P I T R E I

Ce chapitre est consacré d'une part à la détermination de solutions de similitude approchées, poursuivant en ceci le travail initié par Auffret [28], d'autre part à une formulation intégrale de 1er et 2nd ordre, du décollement laminaire supersonique cf [1] ainsi qu'à la mise en oeuvre dans le cas du décollement libre.

1 - CHOIX DE LA REPRESENTATION DES PROFILS DE VITESSE ET D'ENTHALPIE1-1) Solutions semblables

En avant-propos, il nous semble nécessaire de rappeler que les solutions semblables sont des solutions exactes des équations de Falkner et Skan, valides dans les conditions particulières où le nombre de Prandtl Pr est égal à 1, et où la viscosité μ est proportionnelle à la température.

Ces équations sont déduites des équations ordinaires de la couche-limite bidimensionnelle que nous pouvons écrire comme suit :

$$(I-1) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

équation de quantité de mouvement longitudinale

$$(I-2) \quad - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{équation de quantité de mouvement transversale}$$

$$(I-3) \quad \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad \text{équation de continuité}$$

$$\rho u \frac{\partial h^{\circ}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h^{\circ}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \cdot \frac{\partial h^{\circ}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]$$

(I-4) équation de l'énergie

où nous avons : $\frac{p}{\rho T} = cte$, équation d'état (I-5)

(I-6) $h^{\circ} = C_p T + \frac{u^2}{2}$ relation enthalpie d'arrêt - température pour un gaz parfait à chaleur spécifique constante.

avec pour conditions aux limites :

$$\begin{array}{lll} y = 0 & u = v = 0 & h^{\circ} = h_p \\ y \longrightarrow \infty & u \longrightarrow u_e(x) & h^{\circ} \longrightarrow h_e^{\circ} \end{array}$$

(l'indice e faisant référence à l'écoulement extérieur).

h_p étant l'enthalpie de paroi.

A partir de ce système d'équations, nous définissons classiquement de nouvelles variables en posant :

$$(I-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{X} = \int_0^x \left(\frac{\rho_e P}{\rho_e^0 P_e^0} \right) dx \\ \tilde{y} = \int_0^y \frac{\rho_e P}{\rho_e^0 P_e^0} dy \end{array} \right.$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u \frac{\rho_e^0}{\rho_e} \\ \tilde{v} &= v \frac{\rho_e^0}{\rho_e} \cdot \frac{h_e^0}{h} - u \frac{\rho}{\rho_e^0} \int_0^{\tilde{y}} \left(\frac{\rho_e^0 \rho_e^0}{\rho \rho_e} \right)_{\tilde{X}} d\tilde{y} \\ \tilde{h} &= h^0 \end{aligned}$$

d'où le système ainsi transformé :

$$(I-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}_{\tilde{y}} = 0 \\ \tilde{u} \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v} \tilde{u}_{\tilde{y}} = \frac{\tilde{h}}{h_e} \tilde{u}_e \tilde{u}_{e\tilde{x}} + \frac{\mu_e^0}{\rho_e^0} \left(\left(\frac{\mu}{\mu_e^0} \cdot \frac{h_e^0}{h} \right) u_{\tilde{y}} \right)_{\tilde{y}} \\ \tilde{u} \tilde{h}_{\tilde{x}} + \tilde{v} \tilde{h}_{\tilde{y}} = \frac{1}{PR} \cdot \frac{\mu_e^0}{\rho_e^0} \left(\frac{\mu}{\mu_e^0} \cdot \frac{h_e^0}{h} \tilde{h}_{\tilde{y}} \right)_{\tilde{y}} + (1 - \frac{1}{PR}) \frac{\mu_e^0}{\rho_e^0} \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_e^0} \cdot \frac{h_e^0}{h} \tilde{u} \tilde{u}_{\tilde{y}} \right)_{\tilde{y}}}{1 + (\gamma-1)/2 M_e^2} \end{array} \right.$$

où l'on a choisi comme condition de référence de la transformation la condition d'arrêt (indice supérieur 0) à la limite extérieure de la couche limite notée avec l'indice e.

Pour $PR = 1$ et $\frac{\mu}{\mu_e^0} \cdot \frac{h_e^0}{h} = 1$, les équations se réduisent à celles de Stewartson, qui admettent une famille de solutions semblables calculées par Cohen et Reshotko et obtenues en prenant $\tilde{u}_e = \tilde{X}^m$ avec :

$$(I-9) \quad \tilde{\psi} = F(\eta) \left[\frac{2 \mu_e^\circ \tilde{u}_e \tilde{X}}{(m+1) \rho_e^\circ} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta = \tilde{y} \left[\frac{(m+1) \rho_e^\circ \tilde{u}_e}{2 \mu_e^\circ \tilde{X}} \right]^{\frac{1}{2}} = g(\tilde{X}) \tilde{y}$$

où $\tilde{\psi}$ représente la fonction de courant de l'écoulement transformé :

$$F'(\eta) = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_e} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(\eta) = \frac{\tilde{h}}{\tilde{h}_e}$$

de plus, si l'on définit :

$$\beta = \frac{2m}{m+1}$$

alors les équations de quantité de mouvement et d'énergie sont ramenées à des équations différentielles ordinaires comportant des solutions semblables pour une vitesse transformée proportionnelle à une puissance constante de l'abscisse transformée. Nous aboutissons au système d'équations de Falkner et Skan généralisé par Stewartson qui s'écrit en posant $f = F'$.

$$(I-10) \quad \begin{cases} f'' + f' \int_0^\eta f \, d\eta + \beta (\mathcal{H} - f^2) = 0 \\ \mathcal{H}'' + \mathcal{H}' \int_0^\eta f \, d\eta = 0 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$(I-11) \quad \begin{array}{lll} \eta \longrightarrow 0 & f = 0 & \mathcal{H} = \mathcal{H}_p \\ \eta \longrightarrow \infty & f = 1 & \mathcal{H} = 1 \end{array}$$

Ces équations ont été intégrées numériquement dès 1937 par Hartree [21] mais dans des cas bien particuliers. Puis Stewartson [35], Li et Nagamatsu [26] et enfin Cohen et Reshotko [15] ont élargi le domaine de solutions en montrant l'existence de deux solutions pour certaines valeurs de β , l'une étant attachée, l'autre décollée.

1.2 - Choix de la représentation analytique approchant les solutions semblables -

Notre but ici est de sélectionner une représentation analytique approchée des solutions de similitude utilisables dans une méthode intégrale. Ce choix est essentiel et doit surtout permettre une représentation correcte des profils dans la "zone décollée". La construction de cette représentation analytique a été dictée par plusieurs considérations.

- La première et la plus naturelle est que les conditions aux limites soient satisfaites. Pour cela il faut respecter $f(0) = 0$ et $\mathcal{H}(0) = \mathcal{H}_r$ quand $\eta \rightarrow 0$. Il a par ailleurs été choisi que f et \mathcal{H} tendent exponentiellement vers l'unité.

- La seconde est le besoin de faire apparaître deux types de solutions pour certaines valeurs négatives de β : l'une étant valide pour les régions décollées, l'autre pour les régions attachées.

- La troisième considération est que, dans la zone de paroi, et notamment en présence de courant de retour, les profils de vitesse doivent conserver une forme à peu près parabolique en raison de la petitesse des termes convectifs.

- Enfin, il ne faut pas perdre de vue que le but de cette représentation analytique est de simplifier la méthode en exprimant de manière explicite les profils de vitesse et d'enthalpie. Il faut donc s'attacher à conserver à la représentation une expression elle-même aussi simple que possible.

Tenant compte de tous ces éléments, les profils ont été exprimés analytiquement sous la forme suivante :

$$(I-12) \quad \begin{cases} 1 - f = \left(1 + a \frac{\eta}{\eta_*} + b \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 \right) e^{-\left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^{\frac{1}{n}}} \\ 1 - \mathcal{H} = (1 - \mathcal{H}_r) \left(1 + c \cdot \frac{\eta}{\eta_*} + d \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 \right) e^{-\left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^{\frac{1}{n}}} \end{cases}$$

où les a, b, c, d, n représentent des coefficients et η_* une ordonnée de référence.

1.3 - Détermination des solutions semblables approchées -

Les fonctions f et \mathcal{H} dépendent donc de 6 paramètres a, b, c, d, n, η_* :

$$(I.13) \quad \begin{cases} f(a, b, \eta_*, n) \\ \mathcal{H}(c, d, \eta_*, n) \end{cases}$$

Ces paramètres vont être déterminés en fonction de β pour certaines valeurs de \mathcal{H}_p , le cas $\mathcal{H}_p = 1$ représentant le cas adiabatique :

soit : $a = a(\beta, \mathcal{H}_p)$, $b = b(\beta, \mathcal{H}_p)$, ...

Les profils f et \mathcal{H} des relations (I-2) doivent approcher au mieux les équations de similitude (I-10), (I-11), au moins pour leurs propriétés globales. Nous utilisons pour ce faire la forme intégrée (2 fois) des équations (I-10), ce qui donne 4 équations, ainsi que deux équations de moment d'ordre 2 et 3, par rapport à η de l'équation dynamique, ce qui ferme le système.

Ces six équations peuvent s'écrire :

$$(I-14) \quad f'(0) = - \int_0^{\infty} (1-f) d\eta + (1+\beta) \int_0^{\infty} (1-f^2) d\eta - \beta \int_0^{\infty} (1-\mathcal{H}) d\eta$$

$$(I-15) \quad \mathcal{H}'(0) = \int_0^{\infty} f(1-\mathcal{H}) d\eta$$

$$(I-16) \quad (1+\beta) \int_0^{\infty} \eta(1-f^2) d\eta - \beta \int_0^{\infty} \eta(1-\mathcal{H}) d\eta - \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} (1-f) d\eta \right)^2 = 1$$

$$(I-17) \quad \int_0^{\infty} (1-\mathcal{H}) d\eta \int_0^{\eta} f d\eta_1 + \int_0^{\infty} \eta f(1-\mathcal{H}) d\eta = 1 - \mathcal{H}_p$$

$$(I-18) \quad 2 \int_0^{\infty} (1-f) d\eta - \int_0^{\infty} \eta^2 (1-f) d\eta - (1+\beta) \int_0^{\infty} \eta^2 (1-f^2) d\eta + 2 \int_0^{\infty} \eta(1-f) d\eta \int_0^{\eta} (1-f) d\eta_1 + \beta \int_0^{\infty} (1-\mathcal{H}) d\eta = 0$$

$$(I-19) \quad 6 \int_0^{\infty} \eta(1-f) d\eta - 2 \int_0^{\infty} \eta^3 (1-f) d\eta - (1+\beta) \int_0^{\infty} \eta^3 (1-f^2) d\eta + 3 \int_0^{\infty} \eta^2 (1-f) d\eta \int_0^{\eta} (1-f) d\eta_1 + \beta \int_0^{\infty} \eta^3 (1-\mathcal{H}) d\eta = 0$$

En remplaçant f et \mathcal{H} par leurs formes analytiques nous pouvons calculer les intégrales qui interviennent dans le système. Elles font intervenir l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \xi^i e^{-j\xi^{1/n}} d\xi = \frac{[(i+1)n]!}{(i+1)j^{(i+1)n}} \quad \text{où } \xi = \eta/\eta_*$$

de plus, dans les équations (I-17), (I-18), (I-19) apparaissent des intégrales doubles qui sont intégrées numériquement en posant :

$$(I-20) \quad \alpha_n(i, j) = \int_0^{\infty} x^{in-1} e^{-x} dx \int_0^x x_1^{jn-1} e^{-x_1} dx_1$$

Les six équations peuvent maintenant s'écrire sous une forme explicite en fonction des paramètres (a, b, c, d, η_*, n). De plus, en divisant par β il est possible d'observer que quatre d'entre elles sont linéaires en $c, d, \frac{1}{\beta\eta_*^2}$ et $\frac{1}{\beta}$.

Il ne reste donc qu'un système de deux équations non linéaires en a et b pour des valeurs de n et \mathcal{H}_p fixées. Les équations peuvent ainsi s'exprimer sous cette forme :

$$(I-21) \quad \begin{cases} \frac{C_{i4}}{\beta \eta_*^2} + \frac{C_{i5}}{\beta} + (1 - \mathcal{H}_p) C_{i2} c + (1 - \mathcal{H}_p) C_{i3} d = C_{i1} \\ D_{j2} c + D_{j3} d + \frac{1}{\eta_*^2} (D_{j4} + D_{j5} c) + D_{j1} = 0 \end{cases}$$

où $i = 1, 2, 3, 4$
où $j = 1, 2$

avec $C_{ij} = C_{ij}(a, b, n, \mathcal{H}_p)$
 $D_{jk} = D_{jk}(a, b, n, \mathcal{H}_p)$

La résolution en a et b de ce système est effectuée à l'aide d'une méthode itérative de Newton-Raphson généralisée. Cette méthode itérative à convergence quadratique présente pour difficulté essentielle le besoin d'être initialisée à des valeurs suffisamment éloignées de celles qui annulent les différentielles des équations (I-21), toutes les fois que leur non-linéarité conduit à des racines multiples. De plus, parmi les racines possibles, un choix de la solution optimale doit être opéré en fonction de critères physiques. Les calculs ont été effectués pour six valeurs de \mathcal{H}_p . Le champ de gradient de pression β négatif ouvert est plus étendu que dans les calculs de Cohen et de Reshotko [15].

Le point $\beta = 0$ s'est révélé être un point singulier, et nous a placé dans l'impossibilité numérique d'obtenir des résultats corrects pour les β positifs, c'est-à-dire pour les écoulements accélérés. Nous avons donc été amenés à réduire dans ces cas le nombre des inconnues en posant $n = 1$. La forme de la distribution reste la même et le principe de résolution approchée également.

Au total, nous avons obtenu, pour des valeurs discrètes de la température de paroi, une représentation analytique approchée des solutions semblables. Cette représentation est constituée de deux familles, l'une pour les écoulements accélérés, l'autre pour les écoulements retardés ; cette dernière suffisant à elle seule pour traiter de nombreux problèmes de décollement-recollement.

Une tabulation des valeurs des constantes en fonction de n et \mathcal{H}_p se situe dans l'annexe [1].

Une comparaison des profils ainsi obtenus a été effectuée. Dans le cas adiabatique ils sont comparés à ceux de Hartree et dans le cas avec flux de chaleur avec ceux de Cohen et Reshotko.

Les résultats paraissent très satisfaisants, tant au niveau des profils que des grandeurs intégrales caractéristiques, bien que la confrontation n'ait pu être faite, dans les cas les plus décollés, faute d'éléments de comparaison.

Les planches 1, 2, et 3 fournissent des exemples de profils de vitesse et d'enthalpie.

2 - COUCHE LIMITE ET INTERACTION DE PREMIER ORDRE -

2.1 - Formulation -

Les équations de Navier-Stokes expriment l'équilibre entre les forces d'inertie celles de pression et celles de viscosité, l'intensité de ces dernières étant négligeable pour l'écoulement extérieur. Au voisinage des parois solides

par contre, les forces d'inertie sont du même ordre de grandeur que les forces de viscosité, ce qui entraîne un comportement singulier. De ce fait, la formulation des équations de la couche limite au premier et second ordres devrait en toute rigueur être issue d'une analyse asymptotique, conformément aux travaux de Kaplun, Lagerström et puis Van Dycke. Cette approche permet, en introduisant un petit paramètre ϵ inversement proportionnel à la racine carrée du nombre de Reynolds, de construire un développement en ϵ pour le fluide parfait qui vérifie, à l'ordre le plus bas, les équations d'Euler et, moyennant dilatation de l'échelle en η , un autre développement pour la couche limite qui répond aux équations de Prandtl.

La compatibilité entre les deux développements doit en principe être réalisée au moyen de conditions de raccord traduisant un couplage faible entre effets visqueux et non visqueux. Néanmoins, le problème du décollement est, comme nous l'avons dit, un problème de couplage fort, de sorte que la présente théorie doit au moins à ce niveau être distinguée de la théorie asymptotique classique.

Afin de simplifier l'introduction des termes au second ordre dans les équations de la couche limite, on peut dès à présent employer le changement de coordonnées proposé par Cole. Le potentiel des vitesses $\bar{\psi}$ et la fonction de courant $\bar{\psi}$ d'un écoulement non visqueux de base nous serviront donc désormais de variables indépendantes, convenablement adimensionnalisées.

Naturellement $\bar{\psi}$ n'existe que si l'écoulement de base est irrotationnel. Nous nous plaçons donc dans l'hypothèse restrictive d'un écoulement isoénergétique et isentropique. Selon l'analyse développée par Crocco [1], l'écoulement de base peut être prolongé jusqu'à la paroi comme le représente la figure 1.

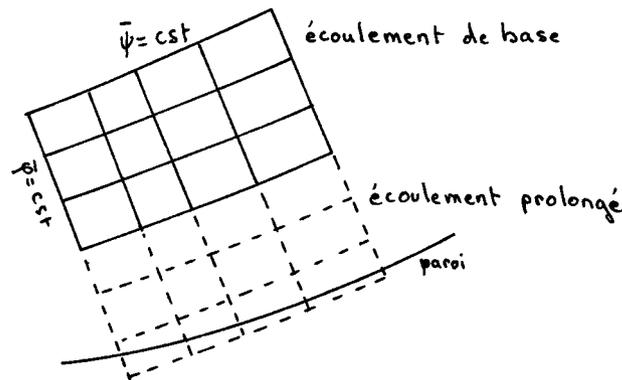


Fig: 1

Les quantités surlignées correspondent à l'écoulement non visqueux, tel qu'il existe en présence de la couche limite. Au premier ordre, celles-ci s'identifient pour une plaque plane aux quantités de référence, indicées e .

Au second ordre de fluide parfait, la paroi n'est plus une ligne de courant pour l'écoulement non visqueux de base, mais correspond à une fonction du potentiel $\bar{\psi}$ qui peut s'exprimer :

$$(I-22) \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}_p(\bar{\psi})$$

où p est l'indice de paroi. La connaissance de cette fonction $\bar{\psi}$ jointe aux conditions aux limites détermine l'écoulement extérieur.

Les équations de couche limite peuvent s'écrire dans les variables $(\bar{\psi}, \bar{\psi})$ comme suit :

$$(I-23) \quad (\sigma \mu)_{\bar{q}} + \bar{\rho}_p (\sigma v)_{\bar{q}} = 0 \quad \text{équation de continuité}$$

$$(I-24) \quad \sigma \kappa = \pi \quad \text{équation de quantité de mouvement transversale}$$

$$(I-25) \quad (\sigma \mu^2)_{\bar{q}} + \bar{\rho}_p (\sigma v \mu)_{\bar{q}} = Q_{p\bar{q}} (1 - \sigma \mu^2) + \delta^2 \bar{\rho}_p (\mu \mu_{\bar{q}})_{\bar{q}} \\ \text{équation de quantité de mouvement longitudinale}$$

$$(I-26) \quad (\sigma \mu^3)_{\bar{q}} + \bar{\rho}_p (\sigma v \mu^2)_{\bar{q}} = 2 Q_{p\bar{q}} \mu (1 - \sigma \mu^2) + 2 \delta^2 \bar{\rho}_p \mu (\mu \mu_{\bar{q}})_{\bar{q}} \\ \text{de moment d'ordre 2 par rapport à (équation de l'énergie)}$$

$$(I-27) \quad (\sigma \mu \kappa)_{\bar{q}} + \bar{\rho}_p (\sigma v \kappa)_{\bar{q}} = \delta^2 \bar{\rho}_p [(\gamma - 1) \bar{M}^2 \mu \mu_{\bar{q}}^2 + (\mu \kappa_{\bar{q}})_{\bar{q}}] \\ \text{avec pour conditions aux limites.}$$

$$(I-28) \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}_p (\bar{\psi}) \quad \mu = v = 0 \quad \kappa = \kappa_p \\ \bar{\psi} \rightarrow \infty \quad \mu = 1, v = 0 \quad \kappa = 1 \quad \pi = 1$$

et, pour plus de concision nous avons posé :

$$Q = \log \bar{q}$$

$$\mu = \frac{q_s}{\bar{q}} ; \quad \sigma = \frac{\rho}{\bar{\rho}} ; \quad \kappa = \frac{h}{\bar{h}} ; \quad M^2 = \frac{q^2}{(\gamma - 1) \bar{h}} ; \quad v = \frac{q_n}{\bar{q}}$$

toutes les quantités sont adimensionnelles.

La vitesse de l'écoulement q , sa composante q_s dans la direction de l'écoulement de base et sa composante q_n dans la direction normale à ce même écoulement sont normalisées par rapport à q_e , quantité de référence prise à l'infini amont. De même, la densité ρ , la viscosité μ , l'enthalpie h et la pression P sont normalisées respectivement par rapport à ρ_e , μ_e , q_e^2 , $\rho_e q_e^2$.

Enfin, $\bar{\psi}$ et $\bar{\psi}$ sont normalisées respectivement par rapport à $q_e l_\infty$ et $\rho_e q_e l_\infty$ où l_∞ est une longueur de référence.

Nous pouvons intégrer l'équation de continuité par rapport à la variable $\bar{\psi}$ entre $\bar{\psi}_p$ et l'infini :

$$(I-29) \quad \frac{d}{d\bar{\psi}} \int_{\bar{\psi}_p}^{\infty} (1 - \sigma \mu) d\bar{\psi} + \frac{d\bar{\psi}_p}{d\bar{q}} = 0 \quad \text{et en posant} \\ \zeta_m = \int_{\bar{\psi}_p}^{\infty} (1 - \sigma \mu) d\bar{\psi} \quad \text{alors} \quad \frac{d\zeta}{d\bar{\psi}} = - \frac{d\bar{\psi}_p}{d\bar{q}}$$

où ζ_m peut être appelé débit de déplacement, par analogie avec l'épaisseur de déplacement usuelle. Cette quantité nous permet d'écrire l'équation de couplage de la couche limite et de l'écoulement de base, qui correspond à la condition de couplage à la paroi de Le Balleur.

Pour compléter l'expression de cette relation, nous pouvons, en considérant que l'écoulement s'effectue par onde simple, utiliser la relation de Prandtl Meyer qui peut s'écrire dans nos nouvelles variables :

$$(I-30) \quad \frac{d\bar{\psi}_P}{d\bar{\psi}} = \bar{\rho}_P \operatorname{tg} \left[\bar{\theta}_P - \theta(\bar{\psi}) \right]$$

$$(I-31) \quad \text{où } \bar{\theta}_P = \nu(M_e) - \nu(M_P)$$

$$(I-32) \quad \text{avec } \nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2-1)} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{M^2-1}$$

ν étant la fonction de Prandtl-Meyer et $\theta(\bar{\psi})$ l'angle que fait la paroi avec la direction de l'écoulement de référence à l'extérieur.

2.2 - Equations intégrales -

On intègre suivant $\bar{\psi}$ les autres équations, c'est-à-dire les équations de quantité de mouvement longitudinale et d'énergie cinétique. Prenant pour définition de ζ_I , ζ_E , ζ_H

$$(I-33) \quad \begin{aligned} \zeta_I &= \int_{\bar{\psi}_P}^{\infty} \sigma \mu (1 - \mu) d\bar{\psi} && \text{débit de quantité de mouvement} \\ \zeta_E &= \int_{\bar{\psi}_P}^{\infty} \sigma \mu (1 - \mu^2) d\bar{\psi} && \text{débit d'énergie cinétique} \\ \zeta_H &= \int_{\bar{\psi}_P}^{\infty} \sigma \mu (1 - \kappa) d\bar{\psi} && \text{débit d'enthalpie} \end{aligned}$$

on aboutit au système suivant :

$$(I-34) \quad \begin{aligned} \frac{d\zeta_I}{d\bar{\psi}} &= - Q_{\bar{\psi}_P} (\zeta_m + \zeta_I) + \delta^2 \mu_P \bar{\rho}_P \frac{T}{\zeta_I} \\ \frac{d\zeta_E}{d\bar{\psi}} &= - 2 Q_{\bar{\psi}_P} (\zeta_E - \zeta_H) + 2 \delta^2 \mu_P \bar{\rho}_P \frac{L}{\zeta_I} \end{aligned}$$

après avoir posé :

$$(I-35) \quad \begin{aligned} T &= \zeta_I \left(\frac{\mu}{\bar{\mu}} u_{\bar{\psi}} \right)_P && \text{quantité liée au frottement} \\ L &= \zeta_I \int_{\bar{\psi}_P}^{\infty} \frac{\mu}{\bar{\mu}} u_{\bar{\psi}}^2 d\bar{\psi} && \text{quantité liée à la dissipation.} \end{aligned}$$

Il est commode de faire apparaître dans les équations les paramètres de forme compressible de l'écoulement effectif :

$$(I-36) \quad H = \frac{\zeta_m}{\zeta_I} \quad ; \quad K = \frac{\zeta_E}{\zeta_I} \quad \text{et} \quad J = \frac{\zeta_w}{\zeta_I}$$

Les trois équations intégrées ainsi exprimées constituent le système décrivant l'interaction entre la couche limite et l'écoulement de base.

2.3 - Forme finale du système d'équations -

Les équations sont finalement transformées en effectuant le changement de variable suivant :

$$(I-37) \quad z = \frac{\zeta_I}{\delta} = \zeta_I \sqrt{Re}$$

Ainsi qu'en remplaçant Q par W , où W représente le carré de la vitesse réduite. W , dont l'expression en fonction du nombre de Mach s'écrit :

$$(I-38) \quad W = \frac{\frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}$$

Nous savons qu'en fonction de $\bar{\psi}$ et $\bar{\psi}$ les équations qui gouvernent l'écoulement de base sont :

$$(I-39) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \log \bar{\rho} \bar{q} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \\ \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \log \bar{q} - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \end{cases}$$

Supposant que toutes les perturbations de l'écoulement de base prennent origine à la paroi, nous savons que nous avons un écoulement de Prandtl Meyer pour lequel on peut déduire en tenant compte de (I-39)

$$(I-40) \quad \begin{cases} Q_{\bar{\psi}} = \frac{\sqrt{\bar{M}^2 - 1}}{\bar{\rho}} Q_{\bar{q}} & \text{d'où,} \\ Q_{\bar{q}\bar{\psi}} = \frac{\sqrt{\bar{M}^2 - 1}}{\bar{\rho}} \left(Q_{\bar{q}\bar{q}} + \frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{\bar{M}^4}{\bar{M}^2 - 1} Q_{\bar{q}^2} \right) \end{cases}$$

De plus, il est possible d'exprimer à la paroi $Q_{\bar{q}}$ en fonction de $W_{\bar{q}}$ au premier ordre (déduit de (I-40))

$$(I-41) \quad \frac{dQ_p}{d\bar{q}} = \frac{1}{2W} \cdot \frac{dW}{d\bar{q}}$$

De (II-32) et (I-38) nous avons également :

$$(I-42) \quad \nu(W) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{W - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}{1-W}} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{W - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}{1-W}}$$

ce qui nous amène au système du premier ordre suivant :

$$(I-43) \quad z_{\bar{\varphi}} + (H+1) z \frac{W\bar{\varphi}}{2W} = k(W) \cdot \frac{T}{z}$$

$$(I-44) \quad (Kz)_{\bar{\varphi}} + (K-J) z \frac{W\bar{\varphi}}{W} = 2 k(W) \cdot \frac{L}{z}$$

avec pour équation de couplage :

$$(I-45) \quad (Hz)_{\bar{\varphi}} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1-W}{1-W_{\infty}} \right)^{1/(\gamma-1)} \operatorname{tg} (\theta_p - \theta(\bar{\varphi}))$$

$$(I-46) \quad \text{où } k(W) = \mu_p \bar{p}_p = \left(\frac{1-W}{1-W_{\infty}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2}} \frac{S_{su} + 1 - W_{\infty}}{S_{su} + 1 - W}$$

$S_{su} = T_s/T_e^{\circ}$ est ce que l'on peut appeler le nombre de Sutherland, c'est-à-dire le rapport entre la température de Sutherland et la température extérieure.

3 - RELATIONS INTEGRALES AUXILIAIRES -

3.1 - Paramètres de forme incompressible -

Conformément au principe des méthodes intégrales, le système des équations précédentes est fermé au moyen de relations auxiliaires, identifiées à celles de la famille de profils choisie en (I-2). Pour ce faire, cette famille doit être paramétrée en fonction d'un ou plusieurs paramètres de forme, ainsi que du nombre de Mach et de l'enthalpie \mathcal{H}_p .

La détermination pratique de ces relations auxiliaires est en fait le problème crucial de la méthode. En ce qui concerne la dépendance vis-à-vis du nombre de Mach, toute représentation approchée peut être évitée par l'emploi de la transformation de Stewartson, qui permet de se ramener à l'expression des seules épaisseurs incompressibles. Ce calcul peut se faire assez aisément en raison de la simplicité de la représentation analytique.

Si l'on définit au préalable les épaisseurs classiques :

$$(I-47) \quad \Delta_m = \int_0^{\infty} (\mathcal{H} - f) d\eta \quad \text{épaisseur de déplacement}$$

étant la variable de similitude définie en (I-9)

$$(I-48) \quad \Delta_I = \int_0^{\infty} f(1-f) d\eta \quad \text{épaisseur de quantité de mouvement}$$

$$\Delta_E = \int_0^{\infty} f(1-f^2) d\eta \quad \text{épaisseur d'énergie cinétique}$$

$$\Delta_H = \int_0^{\infty} f(1-\mathcal{H}) d\eta \quad \text{épaisseur d'enthalpie}$$

Les calculs font intervenir des fonctions Gamma et donnent analytiquement les résultats suivants dans le cas des profils décélérés :

$$\Delta_m = \eta_* \left\{ \left(n! + \frac{a}{2} (2n)! + \frac{b}{3} (3n)! - (1 - \mathcal{H}_p) \left(n! + \frac{c}{2} (2n)! + \frac{d}{3} (3n)! \right) \right) \right\}$$

$$\Delta_I = \eta_* \left\{ n! + \frac{a}{2} (2n)! + \frac{b}{3} (3n)! - \frac{n!}{2^n} - \frac{a (2n)!}{2^{2n}} - \frac{(2b+a^2) (3n)!}{3 \cdot 2^{3n}} \right. \\ \left. - \frac{ab (4n)!}{2^{4n+1}} - \frac{b^2 (5n)!}{5 \cdot 2^{5n}} \right\}$$

$$\Delta_E = \eta_* \left\{ 2n! + a (2n)! + \frac{2b}{3} (3n)! - \frac{3a (2n)!}{2^{2n}} - \frac{(2b+a^2) (3n)!}{2^{3n}} \right. \\ \left. - \frac{3ab (4n)!}{2^{4n+1}} - \frac{3b^2 (5n)!}{5 \cdot 2^{5n}} + \frac{n!}{3^n} + \frac{3a (2n)!}{2 \cdot 3^{2n}} + \frac{(b+a^2) (3n)!}{3^{3n}} \right. \\ \left. + \frac{(6ab+a^3) (4n)!}{4 \cdot 3^{4n}} + \frac{3(b^2+a^2b) (5n)!}{5 \cdot 3^{5n}} + \frac{ab^2 (6n)!}{2 \cdot 3^{6n}} + \frac{b^3 (7n)!}{7 \cdot 3^{7n}} \right\}$$

$$\Delta_H = \eta_* (1 - \mathcal{H}_p) \left\{ n! + \frac{c}{2} (2n)! + \frac{d}{3} (3n)! - \frac{n!}{2^n} - \frac{(c+a) (2n)!}{2^{2n+1}} \right. \\ \left. - \frac{(b+ac+d) (3n)!}{3 \cdot 2^{3n}} - \frac{(bc+ad) (4n)!}{2^{4n+2}} - \frac{db (5n)!}{5 \cdot 2^{5n}} \right\}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{H}'(0) = -c (1 - \mathcal{H}_p) \\ f'(0) = -a/\eta_* \end{cases}$$

Les équations sont plus simples dans le cas accéléré :

$$\Delta_m = \eta_* \left[(1 + a + 2b) - (1 - \mathcal{H}_p) (1 + c + 2d) \right]$$

$$\Delta_I = \frac{\eta_*}{4} \left(2 + 2a + 6b - 3ab - a^2 - 3b^2 \right)$$

$$\Delta_E = \frac{\eta_*}{6} \left(5 + 5a + \frac{49}{3}b - \frac{65}{6}ab - \frac{19}{6}a^2 - \frac{211}{18}b^2 + \frac{4}{9}a^3 \right. \\ \left. + \frac{16}{9}a^2b + \frac{80}{27}ab^2 + \frac{160}{81}b^3 \right)$$

$$\Delta_H = \eta_* (1 - \mathcal{H}_p) \left(2 + 3c + 7d - a - b - ac - 3bd - 3ad - \frac{3}{2}bc \right)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mathcal{H}'(0) = (1 - \mathcal{H}_p) (1 - c) / \eta_* \\ f'(0) = (1 - a) / \eta_* \end{cases}$$

Toutes ces épaisseurs sont calculées en fonction des grandeurs (a, b, c, d, n, η_*) intervenant dans les distributions de vitesse et d'enthalpie.

Comme dans le précédent paragraphe, nous pouvons introduire des paramètres de formes incompressibles définis par des rapports d'épaisseur.

Les quantités tildées feront référence à l'incompressibilité.

On définit donc :

$$(I-49) \quad \tilde{H} = \frac{\Delta_m}{\Delta_I} \quad ; \quad \tilde{K} = \frac{\Delta_E}{\Delta_I} \quad ; \quad \tilde{J} = \frac{\Delta_H}{\Delta_I}$$

ainsi que les grandeurs liées au frottement et à la dissipation :

$$\tilde{T} = \Delta_I f'(0) \quad \text{et} \quad \tilde{L} = \Delta_I \int_0^\infty f'^2(0) d\eta$$

Les grandeurs $\tilde{H}, \tilde{K}, \tilde{J}, \tilde{T}, \tilde{L}$ sont tabulées dans l'annexe [1]. Il reste maintenant à choisir pour une valeur \mathcal{H}_p fixée, un paramètre de forme autre que β en fonction duquel peut être exprimée la famille de profils choisie, c'est-à-dire les grandeurs a, b, c, d, n, η_* .

Il s'est avéré commode d'utiliser le paramètre \tilde{H} qui est le rapport des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement, c'est-à-dire le paramètre de forme classique. Bien qu'il tende vers l'infini pour un profil de mélange isobare, puisque l'épaisseur de quantité de mouvement tend vers zéro, il a l'avantage d'être le paramètre en fonction duquel toutes les grandeurs définies précédemment s'expriment relativement simplement.

Les planches annexes (1-12) représentent les tracés des grandeurs (a, b, c, d, η_*, n) et les planches (4-7) représentent $(\tilde{K}, \tilde{T}, \tilde{L}, \tilde{S})$ en fonction de ce paramètre et l'on a exprimé analytiquement les six premières constantes pour des \mathcal{H}_p variant de 1 à 0,2.

Ces expressions se situent dans l'annexe (2). Nous possédons désormais

des familles de profils analytiques à un paramètre, \tilde{H} . Dans le cas adiabatique, la liaison entre les fonctions auxiliaires H, K, J, L, T de l'écoulement compressible réel et les épaisseurs incompressibles issues de la transformation de Stewartson $\tilde{H}, \tilde{K}, \tilde{J}, \tilde{T}, \tilde{L}$ doit maintenant être réalisée.

3.2 - Liaison entre écoulement réel et écoulement incompressible transformé -

Les relations de liaison recherchées peuvent être déduites de l'application en sens inverse de la transformation de Stewartson. Rappelons brièvement que, partant des coordonnées physiques, nous sommes d'abord passés au plan transformé de Stewartson, puis aux variables de similitude en utilisant (I-7).

Nous pouvons définir les épaisseurs de Stewartson :

$$(I-50) \quad \tilde{\delta}_m = \int_0^{\infty} \left(\frac{\tilde{h}}{\tilde{h}_e} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_e} \right) d\tilde{y}$$

$$(I-51) \quad \tilde{\delta}_I = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_e} \left(1 - \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_e} \right) d\tilde{y}$$

$$(I-52) \quad \tilde{\delta}_E = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_e} \left(1 - \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{u}_e^2} \right) d\tilde{y}$$

$$(I-53) \quad \tilde{\delta}_H = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_e} \left(1 - \frac{\tilde{h}}{\tilde{h}_e} \right) d\tilde{y}$$

où \tilde{y} est défini par rapport à η en (I-9).

On montre que l'on a :

$$(I-54) \quad \frac{\tilde{\delta}_m}{\Delta_m} = \frac{\tilde{\delta}_I}{\Delta_I} = \frac{\tilde{\delta}_E}{\Delta_E} = \frac{\tilde{\delta}_H}{\Delta_H} = \frac{\tilde{y}}{\eta} \equiv g(\tilde{X})$$

où $g(\tilde{X})$ est défini en (I-9).

Or, au premier ordre :

$$d\bar{y} = a^\circ \bar{e}^\circ \bar{M}_p \frac{\bar{p}_p}{\bar{e}} d\tilde{y} = \bar{e}_p \bar{q}_p d\tilde{y}$$

et

$$u/u_e = \tilde{u}/\tilde{u}_e$$

On a immédiatement les relations :

$$(I-55) \quad \zeta_I = \bar{e}_p \bar{q}_p \delta_I = \bar{a}^\circ \bar{e}^\circ \bar{M}_p \tilde{\delta}_I$$

$$(I-56) \quad \zeta_E = \bar{e}_p \bar{q}_p \delta_E = \bar{a}^\circ \bar{e}^\circ \bar{M}_p \tilde{\delta}_E$$

pour ζ_m et ζ_H , les relations sont plus compliquées, pour la raison essentielle que $\kappa = 1/\sigma$ en (I.24) est différent de \mathcal{H} (I-9)

En effet, la relation entre les deux quantités peut s'exprimer de la sorte :

$$(I-57) \quad \kappa = \frac{h}{\bar{h}} = \frac{\bar{\rho}_p}{\rho} = \frac{1}{1-W} \left(\frac{\tilde{h}}{\bar{h}_e} - W \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{u}_e^2} \right)$$

où l'on fait apparaître à la place du nombre de Mach, la quantité W définie en (I-38).

On a donc, en se servant de (I-57) :

$$(I-58) \quad \zeta_m = \int_{\bar{\psi}_p}^{\infty} (1 - \sigma u) d\bar{\psi} = \bar{\rho}_p \bar{q}_p \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e} \frac{u}{u_e} \right) dy = \bar{\rho}_p \bar{q}_p \delta_m$$

$$\zeta_m = \bar{a}_0 \bar{\rho}_0 \bar{M}_p \left(\tilde{\delta}_m + \frac{W}{1-W} (\tilde{\delta}_m + \tilde{\delta}_I) \right)$$

$$(I-59) \quad \zeta_H = \int_{\bar{\psi}_p}^{\infty} \sigma u (1 - \kappa) d\bar{\psi} = \bar{\rho}_p \bar{q}_p \int_0^{\infty} \rho u \left(1 - \frac{h}{h_e} \right) dy = \bar{\rho}_p \bar{q}_p \delta_H$$

$$\zeta_H = \bar{a}_0 \bar{\rho}_0 \bar{M}_p \left(\tilde{\delta}_H + \frac{W}{1-W} (\tilde{\delta}_H - \tilde{\delta}_E) \right)$$

en tenant compte de la relation (I-54), on trouve enfin entre les paramètres de forme définis en (I-36) et en (I-47) :

$$H = \tilde{H} + \frac{W}{1-W} (\tilde{H} + 1)$$

$$(I-60) \quad K = \tilde{K}$$

$$J = \tilde{J} + \frac{W}{1-W} (\tilde{J} - \tilde{K})$$

en de même en effectuant les transformations on trouve que :

$$(I-61) \quad \begin{cases} T = \tilde{T} \\ L = \tilde{L} \end{cases}$$

Si la dépendance des quantités tildées en W est nulle par définition, il n'en est pas de même pour les quantités H et J qui en dépendent de manière importante.

Tous ces coefficients des expressions (I-60) et (I-61) sont des fonctions de \tilde{H} à \mathcal{H}_p fixé et de W .

3.3 - Système de premier ordre -

Supposant que les relations analytiques précédentes, déduites de profils semblables approchés, s'appliquent encore de façon approximative à tous les écoulements et adoptant comme inconnues \tilde{H} , W , z , le système de premier ordre s'écrit sous la forme :

$$z_{\bar{\psi}} + \frac{\tilde{H} + 1}{1 - W} z = \frac{W_{\bar{\psi}}}{2W} = k(W) \cdot \frac{\tilde{T}}{z}$$

$$\tilde{K} z_{\bar{\psi}} + \frac{\tilde{K} z}{(1-W)W} W_{\bar{\psi}} + z \tilde{K} \tilde{H} \tilde{H}_{\bar{\psi}} = 2 k(W) \cdot \frac{\tilde{L}}{z}$$

$$\frac{\tilde{H} + W}{1 - W} z_{\bar{\psi}} + \frac{z (\tilde{H} + 1)}{(1-W)^2} W_{\bar{\psi}} + \frac{z}{1-W} \tilde{H}_{\bar{\psi}} = k_{PM}(W)$$

où $k(W)$ est défini en (I-46)

$$\text{et } k_{PM}(W) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1-W}{1-W_{\infty}} \right)^{\gamma(\gamma-1)} \log(\theta_p - \theta(\bar{\psi}))$$

3.4 - Correction de pression de second ordre -

Il est possible pour la pression à la paroi de calculer une correction de second ordre, et ceci même avant l'introduction des termes de second ordre dans les équations intégrales. En effet, nous pouvons intégrer l'équation (I-24) en respectant la condition $\pi = 1$ lorsque $\psi \rightarrow \infty$, nous avons :

$$(I-63) \quad \pi = 1 + \int_{\bar{\psi}}^{\infty} \rho_{\bar{\psi}} (\pi - \sigma u^2) d\bar{\psi}$$

$$\text{où nous avons posé : } P = \log \bar{P}$$

en tenant compte de la relation pression-vitesse. $P_{\bar{\psi}} = -\gamma M^2 Q_{\bar{\psi}}$

et de (I-41) il est possible d'exprimer :

$$P_{\bar{\psi}} = +\gamma \bar{M}^2 \cdot \frac{\sqrt{\bar{M}^2 - 1}}{\bar{\rho}} Q_{\bar{\psi}}$$

et

$$(I-64) \quad P_{\bar{\psi}\bar{\psi}} = -\gamma \bar{M}^2 \left[Q_{\bar{\psi}\bar{\psi}} + 2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \bar{M}^2 \right) Q_{\bar{\psi}} Q_{\bar{\psi}} \right]$$

de plus, nous pouvons développer en série de Taylor l'écoulement de base, à la paroi.

Pour la pression, nous avons : $P_{\bar{\psi}} = P_{\bar{\psi}_P} + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_P) P_{\bar{\psi}\bar{\psi}_P} + \dots$

$$(I-65) \quad P_{\bar{\psi}} = P_{\bar{\psi}_P} + O(\delta)$$

Négligeant les termes en $O(\delta)$, nous obtenons l'expression de (I-63) à la paroi :

$$(I-66) \quad \pi_p = 1 + P_{\bar{\psi}_P} \int_{\bar{\psi}_P}^{\infty} (1 - \sigma u^2) d\bar{\psi}$$

d'où, en tenant compte de (I-33)

$$(I-67) \quad \pi_p = 1 + P_{\bar{\psi}_p} (\zeta_m + \zeta_x)$$

Les planches (8) et (9) montrent l'apport quantitatif de cette correction de second ordre sur les distributions de pression.

4 - COUCHE LIMITE ET INTERACTION DE SECOND ORDRE -

4.1 - Formulation -

Si l'on considère les équations classiques de second ordre, c'est-à-dire si l'on isole tous les termes $O(\delta)$ dans les développements, le système ainsi écrit est excessivement lourd et de résolution peu commode. Au contraire, si l'on remarque que les termes visqueux ne sont contenus que dans un nombre restreint d'expressions, il est possible, comme l'a indiqué Crocco [1], de maintenir les termes de second ordre combinés à ceux de premier ordre pour conserver une écriture compacte.

L'avantage essentiel est que l'apport des termes de second ordre n'est plus assujéti au calcul préliminaire de ceux du premier, ce qui est particulièrement adapté pour traiter le problème du second ordre comme une "interaction forte".

Le calcul de l'écoulement de base de second ordre s'effectuera donc en même temps que celui de la couche limite de second ordre, le couplage étant formulé de la même façon que dans l'analyse donnée au premier ordre. Il faut noter ici que, dans le cas d'une plaque plane, l'écoulement de base de second ordre ne s'identifie plus au loin de la paroi à l'écoulement non visqueux de référence, puisqu'il subit déjà l'effet de la couche limite. Nous justifions ainsi le fait d'avoir exprimé différemment au premier ordre l'écoulement de base et l'écoulement non visqueux de glissement sur la paroi, bien que ceux-ci soient manifestement confondus à cet ordre, en vertu de l'analyse asymptotique classique.

Le système de premier ordre a été calculé au moyen d'équations intégrales. Nous allons donc généraliser aux équations de premier et second ordre réunies le même type de résolution en empruntant le plus possible au travail précédent.

Dans les variables $\bar{\psi}$, $\bar{\psi}$ les équations simplifiées de second ordre peuvent s'écrire :

$$(I-68) \quad (\sigma \mu)_{\bar{\psi}} + (\bar{\rho} \sigma \nu)_{\bar{\psi}} = 0 \quad \text{pour l'équation de continuité}$$

$$(I-69) \quad (\sigma \mu^2)_{\bar{\psi}} + (\bar{\rho} \sigma \nu \mu)_{\bar{\psi}} = Q_{\bar{\psi}} (\pi - \sigma \mu^2) - \frac{1}{\gamma M^2} \pi_{\bar{\psi}} + \delta^2 \left(\frac{\mu \bar{\rho}}{\bar{q}^2} (\bar{q}^2 \mu)_{\bar{\psi}} \right)_{\bar{\psi}}$$

pour l'équation de quantité de mouvement longitudinale

$$(I-70) \quad Q_{\bar{\psi}} (\pi - \sigma \mu^2) - \frac{1}{\gamma M^2} \pi_{\bar{\psi}} = 0$$

pour l'équation de quantité de mouvement transversale

$$(I-71) \quad (\sigma \mu^3)_{\bar{\psi}} + (\bar{\rho} \sigma \nu \mu^2)_{\bar{\psi}} = 2 Q_{\bar{\psi}} \mu (\pi - \sigma \mu^2) - \frac{2}{\gamma M^2} \mu \pi_{\bar{\psi}} \\ + 2 \delta^2 \mu \left[\frac{\mu \bar{\rho}}{\bar{q}^2} (\bar{q}^2 \mu) \right]_{\bar{\psi}}$$

pour l'équation de l'énergie et pour la loi d'état

$$(I-72) \quad \sigma \kappa = \pi$$

4.2 - Equations intégrales de second ordre -

L'intégration des équations (I-68), (I-69) (I-70) et (I-71) fait apparaître certaines intégrales qui dépendent à la fois de l'écoulement de base et de la couche limite.

L'intégration peut être réalisée en développant au voisinage de la paroi l'écoulement de base en série de Taylor, jusqu'à l'ordre $O(\delta)$ inclus, les autres termes quant à eux restent inchangés. Nous donnerons ici l'exemple du calcul de l'équation de mouvement (I-69).

$$(I-73) \quad \int_{\bar{\psi}_r}^{\infty} (\sigma \mu^2)_{\bar{\psi}} d\bar{\psi} + \int_{\bar{\psi}_r}^{\infty} (\bar{\rho} \sigma \nu \mu)_{\bar{\psi}} d\bar{\psi} = \int_{\bar{\psi}_r}^{\infty} Q_{\bar{\psi}} (\pi - \sigma \mu^2) d\bar{\psi} \\ - \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma M^2} \pi_{\bar{\psi}} d\bar{\psi} + \delta^2 \left[\frac{\mu \bar{\rho}}{\bar{q}^2} (\bar{q}^2 \mu)_{\bar{\psi}} \right]_{\bar{\psi}_r}^{\infty}$$

Ici, l'intégrale nouvelle par rapport au système de premier ordre, est :

$$\int_{\bar{\psi}_r}^{\infty} Q_{\bar{\psi}} (\pi - \sigma \mu^2) d\bar{\psi}$$

$Q_{\bar{\psi}}$ dépend de l'écoulement de base
($\pi - \sigma \mu^2$) de la couche limite.

On développe $Q_{\bar{\psi}}$ en série de Taylor :

$$(I-74) \quad Q_{\bar{\psi}} = Q_{\bar{\psi}_r} + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_r) Q_{\bar{\psi}\bar{\psi}_r} + O(\delta^2)$$

L'intégration sous ces hypothèses peut s'écrire :

$$(I-75) \quad \int_{\bar{\psi}_r}^{\infty} Q_{\bar{\psi}} (\pi - \sigma \mu^2) d\bar{\psi} = Q_{\bar{\psi}_r} \int_{\bar{\psi}_r}^{\infty} (\pi - \sigma \mu^2) d\bar{\psi} + Q_{\bar{\psi}\bar{\psi}_r} \int_{\bar{\psi}_r}^{\infty} (\bar{\psi} - \bar{\psi}_r) (\pi - \sigma \mu^2) d\bar{\psi} + O(\delta^2)$$

en négligeant les termes en $O(\delta^2)$, l'intégration est immédiate.

On peut encore comme précédemment en conservant les définitions (I-33) et en introduisant les nouvelles définitions :

$$\zeta_z^* = \int_{\bar{\psi}_r}^{\infty} (\bar{\psi} - \bar{\psi}_r) \sigma \mu (1 - \mu) d\bar{\psi} \\ \zeta_E^* = \int_{\bar{\psi}_r}^{\infty} (\bar{\psi} - \bar{\psi}_r) \sigma \mu (1 - \mu^2) d\bar{\psi} \\ \zeta_h^* = \int_{\bar{\psi}_r}^{\infty} (\bar{\psi} - \bar{\psi}_r) \sigma \mu (1 - \kappa) d\bar{\psi} \quad (I-76)$$

ainsi que :

$$N^* = \int_{\bar{\psi}_P}^{\infty} \frac{\mu}{\bar{\mu}} u u_{\bar{\psi}} d\bar{\psi}$$

$$L^* = \int_{\bar{\psi}_P}^{\infty} (\bar{\psi} - \bar{\psi}_P) \frac{\mu}{\bar{\mu}} u_{\bar{\psi}}^2 d\bar{\psi}$$

$$I^* = \frac{1}{\zeta_I^2} \int_{\bar{\psi}_P}^{\infty} (1 - \sigma u^2) d\bar{\psi} \int_{\bar{\psi}_P}^{\bar{\psi}} u d\bar{\psi}_1 \quad (\text{I-77})$$

l'intégrale (I-75) s'exprime :

$$\int_{\bar{\psi}_P}^{\infty} Q_{\bar{\psi}} (\sigma - \sigma u^2) d\bar{\psi} = Q_{\bar{\psi}_P} (\zeta_m + \zeta_I) + Q_{\bar{\psi}_P} (\zeta_m^* + \zeta_I^*)$$

toutes les autres intégrales qui interviennent dans le système peuvent être intégrées de la même façon et donnent ainsi accès aux équations intégrales écrites plus après.

4.3 - Relations de fermeture -

Il est utile de remarquer que les solutions de similitude approchées déduites des équations de premier ordre peuvent être utilisées aussi pour le traitement de second ordre. En effet, dans une méthode intégrale à n équations de moment, le seul but des distributions de vitesse et d'enthalpie est de fournir une famille de profils de référence à n degrés de liberté. Dans le cas où n = 1, les solutions semblables constituent donc un choix optimal, quelle que soit la méthode. Introduisant les fonctions auxiliaires de second ordre :

$$H^* = \frac{\zeta_m^*}{\zeta_I^2} - \frac{H^2}{2} \quad ; \quad J^* = \frac{\zeta_H^*}{\zeta_I^2}$$

$$(I-78) \quad K^* = \frac{\zeta_{\epsilon}^*}{\zeta_I^2} \quad ; \quad G^* = \frac{\zeta_I^*}{\zeta_I^2}$$

Celles-ci peuvent être d'abord reliées, comme au premier ordre, aux paramètres de forme incompressibles définis après transformation de Stewartson :

$$H^* = \tilde{H}_0^* + \frac{W}{1-W} \tilde{H}_1^* \quad L^* = L_0^* + \frac{W}{1-W} L_1^*$$

$$K^* = \tilde{K}_0^* + \frac{W}{1-W} \tilde{K}_1^* \quad I^* = \frac{1}{1-W} \left(\tilde{I}_0^* + \frac{W}{1-W} I_1^* \right)$$

$$N^* = \tilde{N}_0^* + \frac{W}{1-W} \tilde{N}_1^* \quad J^* = J_0^* + \frac{W}{1-W} J_1^* + \left(\frac{W}{1-W} \right)^2 J_2^*$$

$$G^* = \tilde{G}_0^* + \frac{W}{1-W} \tilde{G}_1^*$$

Nous avons porté en référence dans l'annexe (3) les expressions des paramètres \tilde{H}_0^* , \tilde{H}_1^* , \tilde{K}_0^* , \tilde{K}_1^* , \tilde{J}_0^* , \tilde{J}_1^* , \tilde{J}_2^* , \tilde{G}_0^* , \tilde{G}_1^* , \tilde{L}_0^* , \tilde{L}_1^* , \tilde{I}_0^* , \tilde{I}_1^* .

4.4 - Système final de second ordre -

Finalement les équations intégrales incluant des termes de second ordre peuvent s'écrire en utilisant les mêmes variables de calcul qu'au premier ordre W , z , \tilde{H} . La première équation, c'est-à-dire celle de quantité de mouvement, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 1 - \frac{\delta X_p W_{\tilde{q}} z}{W} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{H} + W}{1 - W} \right)^2 + (\tilde{H}_0^* + \tilde{G}_0^*) + \frac{W}{1 - W} (\tilde{H}_1^* + \tilde{G}_1^*) \right] \right\} z_{\tilde{p}} \\
 & + \left\{ -\delta X_p \frac{W_{\tilde{q}} z^2}{2W} \left[\frac{\tilde{H} + W}{(1 - W)^2} + \left(\frac{\partial \tilde{H}_0^*}{\partial \tilde{H}} + \frac{\partial \tilde{G}_0^*}{\partial \tilde{H}} \right) + \frac{W}{1 - W} \left(\frac{\partial \tilde{H}_1^*}{\partial \tilde{H}} + \frac{\partial \tilde{G}_1^*}{\partial \tilde{H}} \right) \right] \right\} \tilde{H}_{\tilde{q}} \\
 \text{(I-79)} & + \left\{ -\delta X_p \frac{z^2}{W} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{H} + W}{1 - W} \right)^2 + (\tilde{H}_0^* + \tilde{G}_0^*) + \frac{W}{1 - W} (\tilde{H}_1^* + \tilde{G}_1^*) \right] \right\} W_{\tilde{q}\tilde{q}} \\
 & = \left\{ k(W) \cdot \frac{T}{z} - \delta X_p k(W) \cdot \frac{W_{\tilde{q}}}{W} - \frac{\tilde{H} + 1}{1 - W} \cdot \frac{z W_{\tilde{q}}}{2W} + \delta X_p \frac{W_{\tilde{q}}^2 z^2}{2W} \right. \\
 & \left. \left[\frac{(\tilde{H} + 1)(\tilde{H} + W)}{(1 - W)^3} + \frac{(\tilde{H}_1^* + \tilde{G}_1^*)}{(1 - W)^2} + \frac{k_2(W)}{W} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{H} + W}{1 - W} \right)^2 + \tilde{H}_0^* + \tilde{G}_0^* + \frac{W}{1 - W} (\tilde{H}_1^* + \tilde{G}_1^*) \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

(I-80) où $X_p = \left(\frac{1 - W_{\infty}}{1 - W} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \left(\frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} W - 1}{1 - W} \right)^{\frac{1}{2}}$ défini à partir de (I-41), $k(W)$ est défini en (I-46) et

$$\text{(I-81)} \quad k_2(W) = \frac{2(\gamma + 1)}{\gamma - 1} \cdot \frac{W^2}{(1 - W) [(\gamma + 1)W - \gamma + 1]} - 1 - \frac{W}{(\gamma - 1)(1 - W)}$$

De même, l'équation de l'énergie cinétique prend la forme

$$\begin{aligned}
& \left\{ \tilde{K} - \frac{\delta X_p z W_{\bar{q}}}{W} \left(2(\tilde{H}_0^* + \tilde{K}_0^*) + \frac{2W}{1-W} (\tilde{K}_1^* + \tilde{H}_1^*) + \frac{\tilde{K} W}{1-W} \cdot \frac{(\tilde{H}+W)}{(1-W)} \right) \right\} z_{\bar{q}} \\
& + \left\{ z \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{H}} - \frac{\delta X_p z^2 W_{\bar{q}}}{W} \left(\frac{\partial \tilde{H}_0^*}{\partial \tilde{H}} + \frac{\partial \tilde{K}_0^*}{\partial \tilde{H}} \right) + \frac{W}{1-W} \left(\frac{\partial \tilde{H}_1^*}{\partial \tilde{H}} + \frac{\partial \tilde{K}_1^*}{\partial \tilde{H}} \right) + \frac{\tilde{K} W}{(1-W)^2} \right\} H_{\bar{q}} \\
& + \left\{ -\delta X_p \frac{z^2}{W} \left[\tilde{K}_0^* + \frac{W}{1-W} (\tilde{K}_1^* - \tilde{J}_1^*) - \left(\frac{W}{1-W} \right)^2 \tilde{J}_2^* + \left(\tilde{I}_0^* + \frac{W}{1-W} \tilde{I}_1^* \right) \frac{1}{1-W} \right] \right\} W_{\bar{q}\bar{q}} \\
& = \left\{ 2 k(W) \frac{\tilde{L}}{z} + 2 k(W) \frac{\delta X_p W_{\bar{q}}}{W} \left(1 - \frac{3}{2} \tilde{N}_0^* + \frac{W}{1-W} \tilde{N}_1^* \right) - k_3(W) \left(\tilde{L}_0^* + \frac{W}{1-W} \tilde{L}_1^* \right) \right. \\
& - \frac{\tilde{K} z W_{\bar{q}}}{(1-W)W} + \frac{\delta X_p z^2 W_{\bar{q}}^2}{W} \left[\frac{\tilde{H}_1^* + \tilde{K}_1^*}{(1-W)^2} + \frac{\tilde{K} W (\tilde{H}+1)}{(1-W)^3} \right. \\
& + \left. \left(\tilde{K}_0^* + \frac{W}{1-W} (\tilde{K}_1^* + \tilde{J}_1^*) - \left(\frac{W}{1-W} \right)^2 \tilde{J}_2^* \right) \frac{k_1(W)}{2W} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2(1-W)z} \left(\tilde{I}_0^* + \frac{W}{1-W} \tilde{I}_1^* \right) \left(k_1(W) + \frac{3W-1}{1-W} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{où } k_1(W) = k_2(W) + 1 + \frac{W}{(\gamma-1)(1-W)} \quad (\text{I-83})$$

$$k_3(W) = 1 + \frac{W}{1-W} \left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2} + \frac{S_u}{S_u + 1 + W} \right) \quad (\text{I-84})$$

Enfin, pour l'équation de couplage, rappelons que les termes de second ordre avaient déjà été inclus dans la forme utilisée au premier ordre :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\tilde{H}+W}{1-W} \right) z_{\bar{q}} + \frac{z (\tilde{H}+1)}{(1-W)^2} W_{\bar{q}} + \frac{z}{1-W} H_{\bar{q}} \\
& = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1-W}{1-W_\infty} \right)^{1/(\gamma-1)} \text{tg } \theta_p
\end{aligned} \quad (\text{I-85})$$

5 - DISCUSSION -

5.1 - Application au décollement libre -

Les décollements peuvent être provoqués de multiples façons, en particulier par un obstacle situé à l'aval et faisant front à l'écoulement. Un exemple classique est constitué par l'écoulement au voisinage de l'angle concave d'un dièdre. La compression due à l'onde de choc oblique théorique issue de l'arête est alors remplacée par une compression dédoublée.

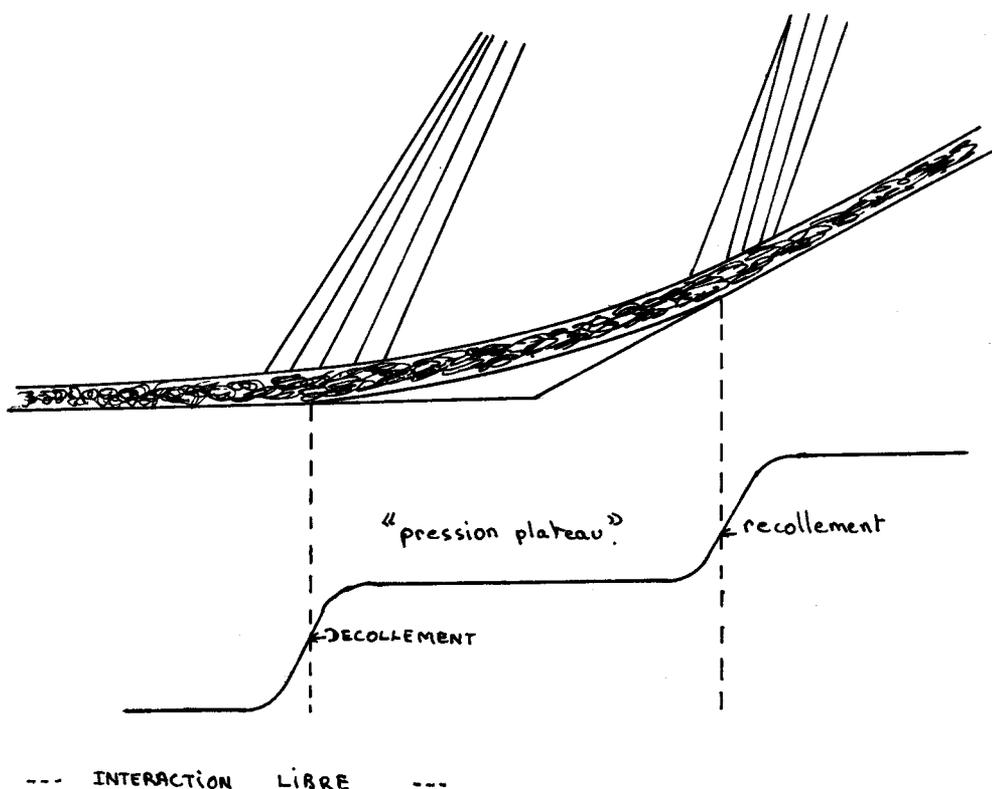


Fig:2

La première phase de la compression se produit en amont de la source qui donne naissance au décollement. La pression s'établit en aval du point de frottement nul à un niveau sensiblement constant appelé "pression plateau".

La deuxième phase de la compression a lieu lors du recollement. Une caractéristique essentielle du phénomène ainsi décrit est que la première phase est pratiquement indépendante des conditions imposées en aval, si ce n'est pour son positionnement longitudinal.

Les développements de ce premier chapitre ont été mis en oeuvre pour étudier cette première compression que Chapman appelle "l'interaction libre".

5.2 - Méthode de résolution -

Les deux systèmes différentiels (I-62) et (I-79), (I-82), (I-85) sont ici simplement intégrés de l'amont vers l'aval à l'aide d'une méthode de Runge Kutta du quatrième ordre.

- Dans le cas où sont résolues les équations du premier ordre, les conditions initiales sont choisies en perturbant légèrement dans le sens d'une compression la solution représentant le développement de la couche limite d'une plaque plane. On sait que les interactions subcritiques qui sont mises en jeu sont à même de poursuivre l'amplification de cette perturbation infinitésimale vers l'aval.

Pour le paramètre de forme, les conditions initiales en aval du bord d'attaque correspondent à la solution non perturbée de Blasius, qui peut être déterminée en résolvant les équations intégrales de couche limite à pression constante, pour une valeur initiale quelconque du paramètre de forme (planche 10).

- Dans le cas incluant les termes de second ordre, les équations contiennent les dérivées premières des trois inconnues (W , z , \tilde{H}), mais aussi en plus la dérivée seconde de W . Il est donc évident que l'on doit disposer de quatre conditions aux limites. Trois d'entre elles peuvent là encore représenter les valeurs initiales pour z , W et \tilde{H} tandis que la quatrième doit correspondre à une valeur finale fixée pour $W\bar{q}$. Pour la résolution on pose $W\bar{q} = R$ et, en remplaçant $W\bar{q}$ par R dans les termes des équations (I-79), (I-82), (I-85), on transforme le système en quatre équations différentielles du premier ordre quasi linéaires par rapport aux quatre fonctions inconnues z , W , \tilde{H} et R .

Le système étant très sensible, un tâtonnement sur la valeur initiale $R(0)$ est nécessaire pour ajuster la valeur finale, $W\bar{q} = 0$. Il faut noter que le traitement d'un décollement-recollement nécessiterait un tâtonnement sur deux paramètres, puisqu'il faudrait en outre s'occuper de positionner le phénomène longitudinalement.

5.3 - Distribution de pression (chute de pression après décollement) -

Lees et Reeves [10] en 1964 ont noté l'apport qualitatif des profils de similitude dans le traitement intégral de la couche limite pour des écoulements ayant subi une perturbation assez forte pour que celle-ci décolle. En effet ces profils permettent de mettre en évidence le plateau de pression statique déjà observé expérimentalement. Ils comparent les résultats de leur méthode avec ceux de Chapman, Kuehn et Larson [27].

La résolution des équations de premier ordre confirme les résultats de Lees et Reeves. L'amorce d'une région de pression-plateau a bien lieu dans la partie décollée. Néanmoins, si l'on poursuit les calculs vers l'aval pour atteindre des configurations très fortement décollées, comme les profils de vitesse que nous avons définis au I le permettent ; on observe (planche 11) une légère chute du plateau de pression, chute beaucoup plus lente toutefois que celle qui avait été constatée avec les profils polynômiaux de Tani.

Bien que l'amélioration primordiale que constitue l'adoption des profils semblables soit évidente (voir planche 12), une étude plus détaillée des conditions dans lesquelles les équations intégrales conduisent à un plateau de pression a été effectuée.

5.4 - Existence d'un plateau de pression -

Les équations (I-62) peuvent s'écrire :

$$\frac{d\zeta_m}{d\bar{q}} = f_1(\theta)$$

$$(I-86) \quad \frac{d\zeta_z}{d\bar{q}} = -\frac{W\bar{q}}{2W} (\zeta_m + \zeta_z) + f_2(\tau) \quad , \quad f_2(\tau) \quad \text{est lié au frottement}$$

$$\frac{d\zeta_e}{d\bar{q}} = \frac{W\bar{q}}{W} (\zeta_e - \zeta_m) + f_3(L) \quad , \quad f_3(L) \quad \text{est lié à la dissipation}$$

Nous cherchons à déterminer une condition garantissant l'existence d'un "plateau de pression" ; on se place pour cela dans le cas isobare où H tend vers l'infini et on impose un gradient de pression nul : $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ ou encore $W_{\bar{q}} = 0$.

Le système (I-86) devient pour un gradient de pression nul :

$$(I-87) \quad \begin{cases} \frac{d\zeta_m}{d\bar{q}} = f_1(\theta) \\ \frac{d\zeta_I}{d\bar{q}} = f_2(\tau) \\ \frac{d\zeta_E}{d\bar{q}} = f_3(L) \end{cases}$$

Les définitions formelles de H et K étant :

$$(I-88) \quad \zeta_E = \zeta_I K \quad \text{et} \quad \zeta_m = \zeta_I H$$

$$\text{Il vient :} \quad \frac{d\zeta_E}{d\bar{q}} = K \frac{d\zeta_I}{d\bar{q}} + \zeta_I \cdot \frac{dK}{dH} \cdot \frac{dH}{d\bar{q}}$$

$$\frac{d\zeta_m}{d\bar{q}} = H \cdot \frac{d\zeta_I}{d\bar{q}} + \zeta_I \cdot \frac{dH}{d\bar{q}}$$

d'où, en remplaçant (I-88) dans (I-87) :

$$(I-89) \quad \begin{aligned} \frac{d\zeta_I}{d\bar{q}} &= f_2(\tau) \\ H \cdot f_2(\tau) + \zeta_I \cdot \frac{dH}{d\bar{q}} &= f_1(\theta) \\ K \cdot f_2(\tau) + \frac{\partial K}{\partial H} \zeta_I \frac{dH}{d\bar{q}} &= f_3(L) \end{aligned}$$

d'où la condition de compatibilité pour l'existence d'un plateau :

$$(I-90) \quad f_1(\theta) \cdot \frac{\partial K}{\partial H} - f_2(\tau) \left[H \cdot \frac{\partial K}{\partial H} - K \right] - f_3(L) = 0$$

avec $f_1(\theta) = cte$, puisque $\theta = cte$ d'après la relation de Prandtl-Meyer.

Par ailleurs lorsque $H \rightarrow \infty$, la dissipation $f_3(L) \rightarrow cte$ et le frottement $f_2(\tau) \rightarrow 0$, de sorte que $\zeta_I \rightarrow cte$. Dans la relation de compatibilité le comportement du terme associé au frottement est cependant indéterminé car $(H \frac{\partial K}{\partial H} - K)$ peut tendre vers l'infini. L'importance du terme de frottement lorsque $H \rightarrow \infty$ paraît cependant peu probable, compte tenu des connaissances expérimentales, ainsi que de l'apparition de plateaux de pression aussi bien en régime laminaire que turbulent, c'est-à-dire pour des lois $T(H)$ très différentes. On doit alors remarquer qu'il existe une solution cohérente indépendante du frottement, c'est-à-dire avec :

$$(I-91) \quad \lim_{H \rightarrow \infty} \left\{ f_2(\tau) \left[H \frac{\partial K}{\partial H} - K \right] \right\} = 0$$

La relation de plateau de pression (I-90) donne alors en effet :

$$\frac{\partial K}{\partial H} = \frac{f_2(L)}{f_1(\theta)} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial K}{\partial H} \longrightarrow d\epsilon \quad \text{si} \quad H \longrightarrow \infty$$

soit encore $[H \cdot \frac{\partial K}{\partial H} - K] \rightarrow 0$, ce qui est compatible avec l'hypothèse (I-91) quelle que soit la loi de frottement $\tau(H)$.

Le comportement

$$\frac{dK}{dH} \longrightarrow d\epsilon$$

apparaît donc comme le plus probable. Rappelons que K est ici le paramètre de forme qui représente le rapport des défauts d'énergie cinétique et de quantité de mouvement, H étant le paramètre de forme ordinaire.

L'existence d'un plateau-pression semble donc lié à la linéarité de la loi $K(H)$ pour des grandes valeurs du paramètre de forme H . Une tabulation des solutions de similitude véritables montre effectivement qu'aux grandes valeurs de H , le paramètre K varie linéairement avec H , voir planche [13]. L'approximation réalisée par les profils analytiques tend d'ailleurs elle aussi à être linéaire, avec une certaine imprécision cependant.

C'est pourquoi une condition de linéarité rigoureuse a été imposée à $K(H)$ pour des paramètres de forme $H \geq 6$, garantissant par là-même l'apparition de plateaux de pression en cas de décollement étendu.

5.5 - Correction de pression de second ordre -

La condition de pression de second ordre apporte au niveau des configurations étudiées un léger apport qualitatif par rapport à la pression non corrigée. Cette correction est d'autant plus sensible que le nombre de Mach est grand. La planche (8) illustre ces calculs.

5.6 - Comparaison calculs de premier ordre et second ordre -

- Pour les distributions de pression, la planche (14) montre que les calculs de second ordre confirment ceux du premier ordre, en ne dévoilant qu'une très légère différence.

Il est donc tout à fait légitime d'affirmer que l'approximation du premier ordre est une bonne approximation tout au moins pour la pression.

- Pour ce qui est de la prévision du décollement, la différence est un peu plus sensible. Dans les méthodes traditionnelles le décollement théorique paraît toujours être un peu plus postérieur au décollement expérimental, bien que l'estimation de ce dernier soit très imprécise ; on peut considérer dans ces conditions que la précision de l'analyse de second ordre apporte une amélioration certaine de ce point de vue, ainsi qu'en témoigne la planche (15) sur laquelle on a tracé la variation du paramètre de forme H en fonction de X .

CHAPITRE II

Comme il a été succinctement indiqué en introduction, ce second chapitre est consacré à l'adaptation d'une méthode de résolution numérique plus élaborée, ainsi qu'à sa mise en oeuvre sur des configurations plus complexes qu'un décollement libre.

Les exemples traités seront des décollements-recollements provoqués par une rampe de compression ou encore par la réflexion d'une onde de choc oblique sur une paroi, mais le calcul pourrait être appliqué sans aucune modification à des écoulements présentant plusieurs décollements-recollements successifs.

1 - FORMULATION -

La méthode adaptée ici au régime laminaire est celle qui a été définie par Le Balleur [20, 25] dans le cas des couches turbulentes. Par rapport à l'analyse du Chapitre I, les équations utilisées pour le problème visqueux sont limitées aux termes de premier ordre, excepté pour l'évaluation de la pression à la paroi, pour laquelle une correction de second ordre est appliquée.

Le couplage visqueux-non visqueux est formulé dans l'optique d'un écoulement de fluide parfait prolongé jusqu'à la paroi, de manière à éviter les interactions supercritiques. La technique numérique est capable de résoudre un problème aux limites bien posé comportant une condition à l'extrémité aval du calcul.

Elle évite ainsi le recours usuel à une technique de tir, associée à l'intégration directe d'un problème de conditions initiales mal posé. Avant de décrire plus en détail le principe de cette méthode, il est utile de remarquer que, par rapport au chapitre précédent, les équations résolues sont exprimées non plus dans un repère $\psi - \psi$, mais directement dans les variables physiques. Intrinsèquement, au premier ordre, les équations de la couche limite sont les mêmes, mais il nous faut les exprimer différemment. Il en va de même pour les relations auxiliaires de fermeture qui doivent alors elles aussi s'exprimer différemment.

1.1 - Equations intégrales et relations auxiliaires de fermeture -

Les équations qui régissent la couche limite peuvent s'écrire sous leur forme intégrale comme suit :

$$\frac{\partial \delta_m}{\partial x} + \delta_m \left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = \theta \quad \text{équation de continuité (couplage)}$$

$$(II-1) \quad \frac{\partial \delta_I}{\partial x} + \delta_I \left[\frac{H+2}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = \frac{c_f}{2}$$

équation de mouvement longitudinal

$$\frac{\partial \delta_E}{\partial x} + \delta_E \left[\frac{3}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + 2 \frac{(\delta_m - \delta_{mI})}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = \phi$$

équation de l'énergie cinétique.

où δ_m , δ_I , δ_E , δ_{mI} représentent respectivement les épaisseurs de déplacement, de quantité de mouvement, d'énergie cinétique et de déplacement incompressible, et

$$(II-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_m = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e} \cdot \frac{u}{u_e}\right) dy \\ \delta_I = \int_0^{\infty} \frac{\rho}{\rho_e} \cdot \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \\ \delta_E = \int_0^{\infty} \frac{\rho}{\rho_e} \cdot \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dy \\ \delta_{mI} = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \end{array} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_e = \rho_e(x, 0) \\ u_e = u_e(x, 0) \end{array} \right.$$

Les trois premières épaisseurs intégrales peuvent être finalement reliées à celles décrites au premier chapitre. En introduisant la transformation de Stewartson déjà citée en (I-9) et en prenant les mêmes définitions des paramètres de forme H et K, on a tout d'abord :

$$H = \frac{\delta_m}{\delta_I} \quad \text{et} \quad K = \frac{\delta_E}{\delta_I} \quad (II-3)$$

Les trois grandeurs complémentaires entrant dans le système d'équations sont le frottement pariétal, la dissipation globale et l'épaisseur de déplacement incompressible.

1.1.a - Expression de l'épaisseur de déplacement incompressible -

$$(II-4) \quad \delta_{mI} = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \frac{\rho_e}{\rho} \frac{ae^0 \rho_e^0}{ae \rho_e} d\tilde{y} \quad \begin{array}{l} \text{en variables} \\ \text{de Stewartson} \end{array}$$

or si l'on pose $m = \frac{W}{1-W}$ il vient, d'après la relation (I-57) du premier chapitre :

$$\frac{\rho_e}{\rho} = \mathcal{H} + m (\mathcal{H} - f^2)$$

d'où, en remplaçant, avec $f = \frac{u}{u_e}$:

$$\delta_{mI} = \frac{ae^0 \rho_e^0}{ae \rho_e} \int_0^{\infty} \mathcal{H} (1-f) + m \int_0^{\infty} (\mathcal{H} - f^2) (1-f) d\tilde{y} \quad (II-5)$$

et en tenant compte de (I-9)

$$\delta_{mI} = \frac{a_e^0 \rho_e^0}{\alpha_e \rho_e} g(\tilde{x}) \left[(\Delta_m + \Delta_n) + m (\Delta_m + \Delta_n - \Delta_\varepsilon + \Delta_I) \right] \quad (\text{II-6})$$

d'où, en éliminant les facteurs échelles grâce à une division par δ_I on obtient finalement :

$$\frac{\delta_{mI}}{\delta_I} = (\tilde{H} + \tilde{J}) + m (\tilde{H} + 1 - \tilde{K} + \tilde{J}) = H + J \quad (\text{II-7})$$

1.1.b - Expression de frottement à la paroi -

La définition du frottement donne :

$$(\text{II-8}) \quad \frac{cf}{2} = \frac{\mu_p}{\rho_e \mu_e^2} \left(\frac{du}{dy} \right)_p \quad \text{or} \quad \frac{\mu_p}{\mu_e} = \frac{c}{\alpha_e} \frac{\rho_e}{\rho_p} \quad (\text{II-9})$$

$$\text{d'où} \quad \frac{cf}{2} = \frac{c}{\alpha_e} \frac{\mu_e}{\rho_e \mu_e} \left[\frac{d\left(\frac{u}{\mu_e}\right)}{\rho/\rho_e dy} \right]_p \quad (\text{II-10})$$

et en appliquant la transformation (I-7) il vient :

$$\frac{cf}{2} = \frac{\alpha_e \rho_e}{\alpha_e^0 \rho_e^0} \cdot \frac{c}{\alpha_e} \cdot \frac{\mu_e}{\rho_e \mu_e} \left[\frac{d\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{\mu}_e}\right)}{d\tilde{y}} \right]_p \quad (\text{II-11})$$

$$\frac{cf}{2} = \frac{c}{\alpha_e} \cdot \frac{\alpha_e \rho_e}{\alpha_e^0 \rho_e^0} \cdot \frac{\mu_e}{\rho_e \mu_e} \cdot \frac{1}{g(\tilde{x})} F'(0)$$

$$\text{en posant} \quad Re(\delta_I) = \frac{\rho_e \mu_e \delta_I}{\mu_e} \quad (\text{II-12})$$

$$\text{et en rappelant que} \quad g(\tilde{x}) = \frac{\tilde{\delta}_I}{\Delta_I} \quad \text{et} \quad \tilde{\delta}_I = \frac{\alpha_e \rho_e}{\alpha_e^0 \rho_e^0} \delta_I$$

alors :

$$(\text{II-13}) \quad \frac{cf}{2} = \frac{c}{\alpha_e} \cdot \frac{\Delta_I}{Re \delta_I} F'(0) = \frac{c}{\alpha_e} \cdot \frac{T}{Re \delta_I} \quad \text{on suppose ici}$$

1.1.c - Expression de la dissipation globale -

$$(\text{II-14}) \quad \phi = \frac{2}{\rho_e \mu_e^3} \int_0^\delta \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$$

en utilisant (I-9), il vient :

$$\phi = \frac{2}{\rho_e \mu_e} \int_0^\delta \frac{c}{\alpha_e} \mu_e \left[\frac{d\left(\frac{u}{\mu_e}\right)}{dy} \right] \frac{\rho_e}{\rho} dy$$

après transformation :

$$\phi = \frac{2 \mu_e}{\rho_e \mu_e} \cdot \frac{\alpha_e \rho_e}{\alpha_e^0 \rho_e^0} \int_0^{\delta} \frac{\left[d \left(\frac{\mu}{\mu_e} \right) \right]^2}{d\tilde{y}^e} d\tilde{y} \quad (\text{II-15})$$

qui, en variable de similitude, donne :

$$\phi = 2 \frac{\mu_e}{\rho_e \mu_e} \Delta_I \int_0^{\delta} \frac{c}{c_e} F'^2 d\eta \quad (\text{II-16})$$

c'est-à-dire :

$$\phi = \frac{2 L}{Re \delta_I} \quad (\text{II-17})$$

1.2. - Forme finale du système d'équations -

Les inconnues relatives au fluide parfait sont θ et $m = \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2$.
On choisit pour inconnues propres au calcul visqueux une épaisseur δ_I et un paramètre de forme \tilde{H} .

Les équations résolues pour la couche limite s'écrivent finalement :

$$\left[\tilde{H} + m (\tilde{H}+1) \right] \frac{d\delta_I}{dx} + \delta_I (m+1) \cdot \frac{d\tilde{H}}{dx} + \delta_I \left[(\tilde{H} + m (\tilde{H}+1)) \left(\frac{2m-\gamma+1}{2(\gamma-1)(1+m)m} \right) + \tilde{H} + 1 \right] \frac{dm}{dx} = \theta$$

$$\frac{d\delta_I}{dx} + \frac{\delta_I [(\tilde{H} + m(\tilde{H}+1) + 2) 2m - \gamma + 1]}{2(\gamma-1)(1+m)m} \frac{dm}{dx} = \frac{T}{Re \delta_I}$$

$$\tilde{K} \frac{d\delta_I}{dx} + \delta_I \frac{d\tilde{K}}{d\tilde{H}} \cdot \frac{d\tilde{H}}{dx} + \delta_I \tilde{K} \left[\frac{6m - \gamma + 1 + 2(\gamma-1)m\tilde{K}}{2(\gamma-1)(1+m)m} \right] \frac{dm}{dx} = \frac{2L}{Re \delta_I}$$

avec $\tilde{J} = 0$ dans le cas adiabatique.

Pour le fluide parfait, les équations se réduisent à la relation de Prandtl-Meyer :

$$\frac{d\theta}{dx} = - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{2m(1+m)} \cdot \frac{dm}{dx}$$

2 - METHODE NUMERIQUE -

Contrairement aux méthodes d'intégration directe du Chapitre I, la méthode utilisée ici dissocie les calculs de fluide parfait et de couche limite, de sorte que le couplage n'est réalisé qu'au terme d'un processus itératif où se succèdent des résolutions visqueuses et non-visqueuses découplées.

On sait que ce procédé est classique pour les configurations de faible interaction en régime subsonique ou transsonique, la technique usuelle consistant alors à demander la pression au calcul de fluide parfait, afin de réestimer ensuite l'effet de déplacement par un calcul de couche limite où la pression est une donnée.

Rappelons que dans les méthodes de ce type, qualifiées de "directes", le problème du décollement se présente comme une singularité en raison de la résolution de couche limite découplée qui y est effectuée avec une pression prédéterminée. Il est cependant possible dans un problème de couplage d'éliminer cette singularité par l'utilisation d'un mode de calcul inverse. Dans ce cas, le calcul de couche limite est effectué par une méthode dite "inverse" parce que la pression y est considérée comme un résultat. Cette loi de pression est ultérieurement prescrite au calcul de fluide parfait, lui-même résolu en mode inverse.

Ainsique l'ont suggéré Klineberg et Steger [29], il est souhaitable de procéder à des itérations selon le mode direct dans les zones de couche limite ordinaire, et selon le mode inverse dans celle où les décollements se produisent.

Ceci conduit à résoudre des problèmes de fluide parfait de type mixte. Cette complexité jointe à des difficultés majeures dans le raccordement des conditions aux limites en cas de zones successives où le mode direct alterne avec le mode inverse, ont conduit Le Balleur [20] à imaginer, pour les régions où le décollement peut se produire, un algorithme qualifié de "semi-inverse". Dans ce cas, le calcul de couche limite, effectué en mode inverse, est couplé itérativement à un calcul de fluide parfait qui demeure du type direct, exactement comme dans les régions de couche limite attachées.

La méthode complète de couplage itératif est de type mixte, direct ou semi-inverse selon les régions. Elle est totalement automatisée en ce sens que :

- (i) le choix entre le mode direct et le mode semi-inverse est effectué en chaque noeud de calcul en fonction du paramètre de forme local de la couche limite à l'itération considérée.
- (ii) l'itération de couplage directe est stabilisée au moyen d'une loi de relaxation calculée en chaque noeud.
- (iii) l'itération semi-inverse constitue elle-même un processus itératif stabilisé également en chaque noeud.

2.1 - Mode direct et sous-relaxation -

Désignant par μ et θ le module et la direction de la vitesse non visqueuse, le problème couplé consiste à imposer une relation entre μ et θ aux limites du fluide parfait. En mode direct, la direction de la vitesse à l'itération n , θ^n est alors fixée pour le fluide parfait et la relation entre μ et θ , issue du système différentiel (II-1), peut s'écrire schématiquement :

$$B_1(\theta) = B_2 \cdot \frac{du}{dx} + C_1 \quad (\text{II-18})$$

Le problème à résoudre est alors une itération de point fixe s'écrivant :

$$\theta^{n+1} = \frac{B_2}{B_1} \left(\frac{du}{dx} \right)^n + \frac{C_1}{B_1} \quad (\text{II-19})$$

On peut alors définir un opérateur F , correspondant à l'application successive d'un calcul de fluide parfait en mode direct et d'un calcul de couche limite dans le même mode, conduisant à l'écriture :

$$\theta^{n+1}(x) = F [\theta^n(x)] \quad (\text{II-20})$$

La convergence de cette itération constitue le problème crucial. On renvoie pour une analyse détaillée de ce problème à la référence [20]. Indiquons que la convergence dépend de la matrice associée numériquement à l'opérateur F au voisinage de la solution $\theta_0(x)$. Le Balleur a montré que les valeurs propres sont approximativement de la forme :

$$\mu = \frac{i\omega \tilde{B} \delta_m}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (\text{II-21})$$

\tilde{B} pouvant être relié au rapport B_2/B_1 , les vecteurs propres étant des distributions sinusoïdales de pulsation ω pour $[\theta(x) - \theta_0(x)]$

Ces coefficients μ ne sont pas tous plus petits que 1, condition nécessaire de convergence de l'itération. Un coefficient de sous-relaxation peut alors être calculé à partir de la valeur propre de plus grand module, voir [20].

On peut montrer que la forme imaginaire de cette valeur propre en supersonique autorise la propagation d'une perturbation de l'aval vers l'amont. Ceci permet la prescription directe d'une condition aux limites à l'extrémité aval du calcul, pourvu que les schémas numériques utilisés dans le calcul de couche limite pour estimer le gradient du/dx n'éliminent pas cette influence. Des schémas décentrés vers l'aval sont présentement utilisés, de même dans le cas turbulent, voir [20].

En résumé, l'itération se présente sous la forme suivante en mode direct.

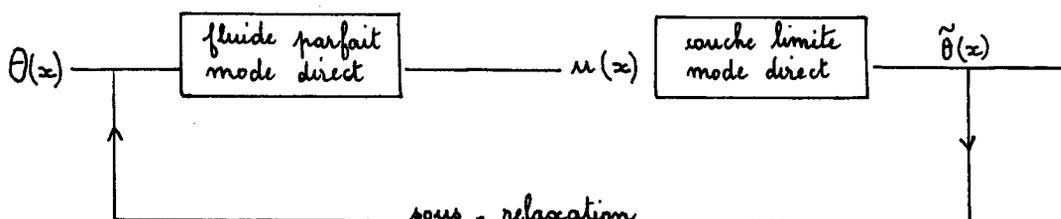


Fig. 3

2.2 - Mode semi-inverse -

En cas de décollement, le calcul de la couche limite s'effectue en mode inverse, $\theta(x)$ étant alors connu, et $u(x)$ calculé. On pourrait en principe faire une itération de point fixe sur la vitesse.

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^{n+1} = \frac{B_1}{B_2} \theta^n - \frac{C_1}{B_2} \quad (\text{II-22})$$

soit en définissant un opérateur G homologue de F

$$u^{n+1}(x) = G [u^n(x)] \quad (\text{II-23})$$

l'itération pouvant être également stabilisée par sous-relaxation, voir [20].

Néanmoins, pour les raisons indiquées plus haut, on utilise plutôt une itération semi-inverse. Un calcul de fluide parfait en mode direct est alors associé à un calcul de couche limite en mode inverse comme le montre la figure (4).

Dans ces calculs, il apparaît deux expressions du gradient de vitesse $du^n(x)/dx$ et $d\tilde{u}^{n+1}(x)/dx$, respectivement associées au fluide parfait et à la couche limite. Une correction doit être effectuée pour faire coïncider les deux valeurs. Pour ce faire, on simule un calcul de petites perturbations du fluide parfait de type inverse, chargé de déterminer la perturbation à infliger à $\theta^n(x)$ pour que le gradient non visqueux du^n/dx soit transformé en $d\tilde{u}^{n+1}/dx$. La correction finalement définie s'effectue en subsonique à partir de l'erreur sur les gradients de vitesse eux-mêmes.

$$(\text{II-24}) \quad [\theta^{n+1} - \theta^n] = C_3 (M, \delta_m, \tilde{B}, \Delta x) \left[\frac{d\tilde{u}^{n+1}}{dx} - \frac{du^n}{dx} \right]$$

et en supersonique à partir de l'erreur sur les dérivées secondes :

$$(\text{II-25}) \quad [\theta^{n+1} - \theta^n] = C_2 (M, \delta_m, \tilde{B}, \Delta x) \left[\frac{d^2 \tilde{u}^{n+1}}{dx^2} - \frac{d^2 u^n}{dx^2} \right]$$

Δx étant le pas d'espace pour la discrétisation du du^n/dx .

En résumé, l'itération semi-inverse répond au schéma :

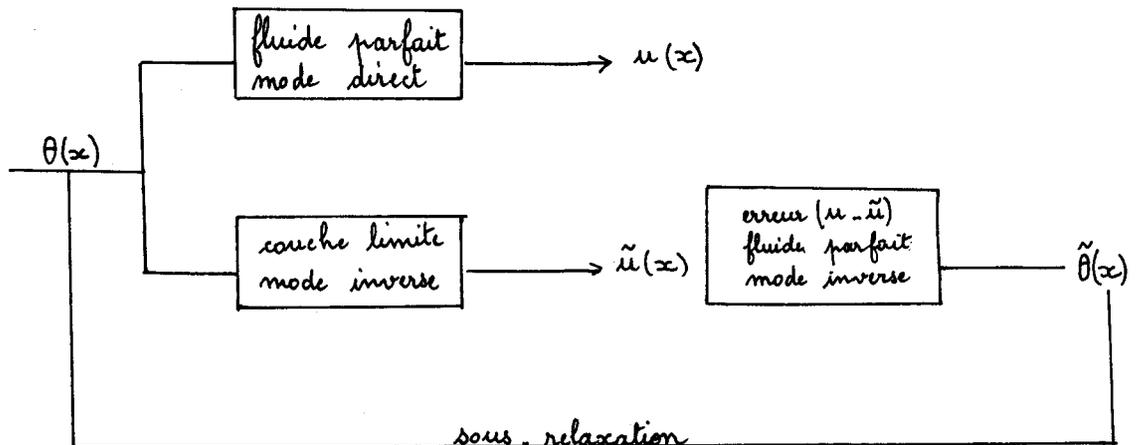


Fig. 4

3 - APPLICATIONS -

La méthode est appliquée au problème du décollement-recollement sur une rampe de compression.

Malgré la présence d'ondes de choc dans de telles configurations, on fait l'hypothèse que le fluide parfait peut être calculé par la relation de Prandtl-Meyer.

Les calculs sont tous initialisés à partir d'un état de plaque plane de façon à éviter la présence d'un gradient de pression initial infini à l'angle du dièdre. Cet angle est ensuite porté progressivement jusqu'à sa valeur finale. Ce processus d'initialisation est accompli en un très petit nombre d'itérations et ne conditionne nullement la convergence ultérieure de la méthode de calcul.

Comme il est dit précédemment, il faut de surcroît prescrire une condition à l'infini aval de l'écoulement.

Pour cela on impose ici l'annulation du gradient de pression longitudinal au dernier point de calcul. Munie de cette condition, la présente offre des possibilités semblables à celle de Werle et Vasta [30], sans toutefois être restreinte aux écoulements par ondes simples.

Deux exemples de calculs adiabatiques ont été retenus dans le but de comparer les résultats avec ceux obtenus par résolutions numériques des équations de Navier-Stokes, qu'avec les résultats expérimentaux donnés respectivement par Hakkinen, Greber, Trilling et Abarbanel [31] et par Lewis, Kubota, Lees [32].

3.1 - Réflexion d'une onde de choc -

La configuration retenue par Hakkinen et All possède les caractéristiques suivantes :

- un nombre de Mach à l'infini amont $M_{\infty} = 2$;
- un rapport de la pression finale loin derrière le choc réfléchi à la pression à l'infini amont : $\frac{p}{p_{\infty}} = 1,4$;
- un rapport de chaleur spécifique : $\gamma = 1,4$;
- un nombre de Reynolds fondé sur l'abscisse à la naissance du dièdre : $Re = 2,96.10^5$.

Dans l'approximation d'onde simple pour le fluide parfait ce problème est assimilé au problème d'une rampe dont l'angle est alors le double de la déflexion due au choc incident, c'est-à-dire ici $0,1075$ rad .

3.1.a - Distribution de pression -

La comparaison à l'expérience, ainsi qu'aux résolutions numériques des équations de Navier-Stokes obtenues par Hollanders [33], paraît très satisfaisante, les différences sur le rapport de compression ne dépassant pas quelques centièmes. La concordance est également bonne pour le plateau de pression. On doit noter ici que l'interaction forte de la région de bord d'attaque a été calculée en même temps que le décollement dû à l'onde de choc incidente, de sorte que le positionnement longitudinal

du décollement est aussi un résultat de calcul. Voir planche (16).

3.1.b - Distribution de frottement -

La courbe de frottement est en bon accord avec l'expérience jusqu'au point de décollement et semble admissible dans la région décollée. La région recollée, quant à elle, présente une différence sensible aussi bien avec l'expérience qu'avec le calcul Navier-Stokes. On peut noter cependant que, dans l'expérience de Hakkinen et All, en régime laminaire, il est surprenant que la courbe de frottement en aval du recollement tende vers une solution un peu supérieure à celle de la plaque plane. On pourrait peut être expliquer ce fait en considérant que, derrière le choc, les mesures soient déjà effectuées dans une zone de début de transition, conduisant ainsi à une augmentation du niveau moyen de frottement. La solution présentée ici tend bien vers la solution laminaire de plaque plane pour les grandes valeurs de l'abscisse.

3.2 - Rampe de compression -

La configuration retenue par Lewis et All possède les caractéristiques suivantes :

- un nombre de Mach à l'infini amont $M_\infty = 4$;
- une température à l'infini amont : $T_\infty = 131^\circ R$
- un nombre de Reynolds fondé sur l'abscisse à la naissance du dièdre :
 $Re = 6,8.10^4$.

3.2.a - Distribution de pression -

Là encore les résultats théoriques sont en très bon accord avec les expériences et autres calculs présentés, voir planche 17. Au début de l'interaction, le niveau de pression est toutefois légèrement supérieur au niveau expérimental. A coté d'un manque de finesse possible dans le maillage appliqué à la région du bord d'attaque, on doit remarquer qu'un écart du même ordre persiste entre les calculs et l'expérience à l'aval de l'interaction, et représente l'ampleur de l'incertitude expérimentale.

3.2.b - Distribution de frottement -

Une comparaison avec les calculs de Werle et Vasta prouve là encore la bonne concordance des résultats, voir planche n° 18 .

CHAPITRE III

Comme il a été succinctement indiqué dans l'introduction, ce troisième chapitre est consacré, en s'inspirant du schéma en triple couche, à la détermination de profils de vitesse dépendant de trois paramètres. On utilise au maximum les résultats déjà obtenus dans la première partie de ce mémoire. Les profils obtenus sont ensuite mis en oeuvre dans une méthode intégrale.

1 - FORMULATION -

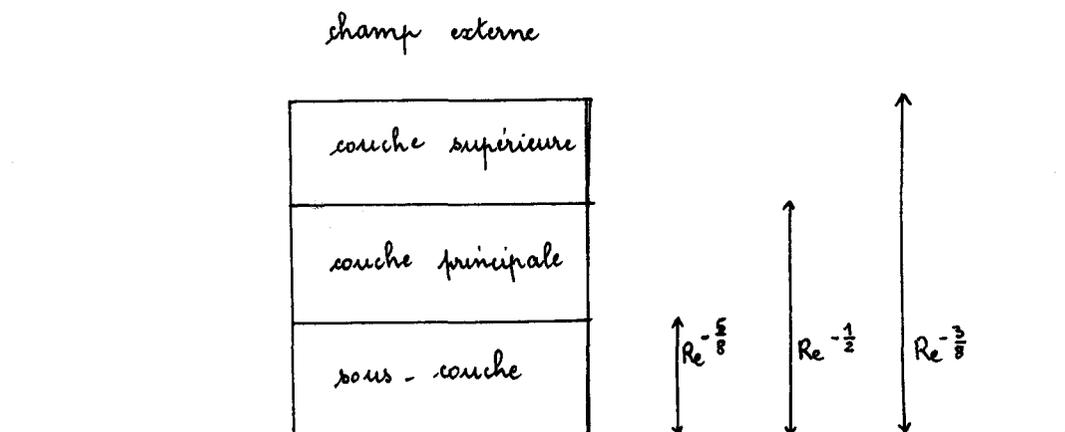
1.1 - Schéma en triple couche -

Pour pallier la singularité de décollement apparaissant dans l'étude asymptotique de la couche limite en faible interaction, Stewartson et indépendamment Neiland ont développé le concept de triple couche selon lequel la couche limite présente asymptotiquement une structure dédoublée.

(i) une couche principale, de l'ordre de $Re^{-\frac{1}{2}}$ qui pour la région d'interaction est régie par des équations de type non visqueux à l'ordre le plus bas.

(ii) une sous-couche de l'ordre de $Re^{-\frac{5}{8}}$ ($\delta \cdot Re^{-\frac{1}{8}}$) qui permet de satisfaire aux conditions d'adhérence à la paroi et qui est régie par des équations de type visqueux.

Les équations de la couche et de la sous-couche sont incluses dans celles de Prandtl. Pour raccorder la couche principale à l'écoulement extérieur non perturbé une troisième couche, de l'ordre de $Re^{-\frac{3}{8}}$ est introduite. La solution des équations de mouvement dans cette couche détermine les conditions aux limites au bord supérieur de la couche principale. La solution dans cette couche principale vérifie à l'ordre le plus bas les équations d'Euler unidimensionnelles linéarisées. Cette région transmet alors les perturbations de pression de la sous-couche visqueuse à la zone extérieure, et réciproquement, sans les modifier. La triple couche peut donc se schématiser comme indiqué ci-dessous :



1.2 - Equations fondamentales -

Dans la pratique, les équations aux dérivées partielles primordiales sont celles de la couche inférieure.

Les solutions dans les autres couches ne servent alors qu'à déterminer les conditions aux limites aux deux bords de la sous-couche. A l'ordre le plus bas, on peut traiter la sous-couche comme étant incompressible.

Les équations fondamentales qui décrivent la sous-couche s'expriment alors en effectuant un changement de variables détaillé à la référence [34].

$$(III-1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{avec}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

et les conditions aux limites suivantes :

$$(III-2) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad \text{condition d'adhérence à la paroi}$$

$$(III-3) \quad u \longrightarrow y \quad \text{pour } x \longrightarrow \infty \quad \text{traduit le raccord à l'infini amont}$$

$$(III-4) \quad u \cdot y \longrightarrow A(x) \quad \text{pour } y \longrightarrow \infty \quad \text{exprime le couplage entre sous-couche et écoulement extérieur}$$

(III-5) où $A'(x) = -p(x)$ ceci traduisant le couplage entre la sous-couche et la couche principale, $A(x)$ est alors la fonction de déplacement.

Ces équations et leurs conditions aux limites possèdent plusieurs solutions, la plus évidente étant celle de Blasius où l'on identifie u à y , les autres solutions correspondant aux problèmes de forte interaction.

1.3 - Solutions semblables -

Nous nous proposons ici de déterminer des solutions semblables de l'équation (III-1) en posant pour variables de similitude $\zeta = \frac{y}{x^{\frac{1}{3}}}$ et :

$$u = x^{\frac{1}{3}} g\left(\frac{y}{x^{\frac{1}{3}}}\right) \quad (III-6)$$

La démarche reste ici la même que pour la détermination des profils de couche principale, en supposant par la suite que les profils semblables représentent une bonne approximation des profils réels non semblables. Il faut noter que la solution donnée par Williams et Stewartson de l'équation aux dérivées partielles (III-1) munie des conditions (III-2), (III-3), (III-4) et (III-5) n'est elle aussi qu'une approximation de l'écoulement réel puisqu'elle n'est valable que pour des Re infinis. Les profils semblables obtenus analytiquement ici seront par la suite comparés aux profils de cette solution.

En utilisant (III-5) dans l'équation (III-1), il vient :

$$q'' + \frac{2}{3} q' \int_0^{\zeta} q \, d\zeta - \frac{1}{3} q^2 - x^{1/3} \frac{dp}{dx} \quad (\text{III-6})$$

d'où il vient pour la pression :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda}{3} x^{-1/3} \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante} \quad (\text{III-7})$$

et

$$q'' + \frac{2}{3} q' \int_0^{\zeta} q \, d\zeta - \frac{1}{3} (q^2 + \lambda) = 0 \quad (\text{III-8})$$

avec pour conditions aux limites :

$$q(0) = 0 \quad \text{pour condition à la paroi} \quad (\text{III-9})$$

• $q'(\infty) = 1$ comme couplage entre sous-couche et écoulement extérieur, on utilise ici une condition sur la dérivée de la vitesse qui donne contrairement à (III-4) une condition indépendante de l'abscisse (III-4).

1.4 - Choix de la représentation analytique approchant les solutions semblables de sous-couche -

Le choix de la représentation est là encore essentiel et la construction de la représentation nous est dictée par les mêmes considérations que celles évoquées pour la couche principale.

Les solutions doivent satisfaire (III-7) et (III-8). Dans l'équation (III-8) on effectue la substitution suivante :

$$(\text{III-10}) \quad q' = 1 - G \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$(\text{III-11}) \quad q = \zeta - \int_0^{\zeta} G \, d\zeta_1$$

il vient pour l'équation (III-8) :

$$(\text{III-12})$$

$$-\frac{dG}{d\zeta} + \frac{2}{3} (1+G) \int_0^{\zeta} \left(\zeta_1 - \int_0^{\zeta_1} G \, d\zeta_2 \right) d\zeta_1 - \frac{1}{3} \left(\lambda + \left[\zeta - \int_0^{\zeta} G \, d\zeta_1 \right]^2 \right) = 0$$

équation qui peut aussi, en développant, prendre la forme suivante :

$$(\text{III-13}) \quad -\frac{dG}{d\zeta} + \frac{2}{3} (1-G) \left[\frac{\zeta^2}{2} - \int_0^{\zeta} (\zeta - \zeta_1) G \, d\zeta_1 \right] - \frac{1}{3} \left[\lambda + \zeta^2 - 2\zeta \int_0^{\zeta} G \, d\zeta_1 + \left(\int_0^{\zeta} G \, d\zeta_1 \right)^2 \right] = 0$$

en supposant que, pour $\zeta \rightarrow \infty$

$$(\text{III-14}) \quad G \quad \text{et} \quad dG/d\zeta \quad \text{tendent vers zéro exponentiellement}$$

les termes en ζ et ζ^2 s'éliminent et permettent ainsi de donner une condition sur λ .

$$(III-15) \quad \lambda = 2 \int_0^{\infty} \zeta_1 G d\zeta_1 - \left(\int_0^{\infty} G d\zeta \right)^2$$

on peut ainsi écrire (III-13) en remplaçant par (III-14) il vient en éliminant λ :

$$(III-16) \quad -\frac{dG}{d\zeta} - \frac{2}{3} \int_{\zeta}^{\infty} \zeta_1 G d\zeta_1 - \frac{G}{3} \left[\zeta^2 - 2\zeta \int_0^{\zeta} G d\zeta_1 + 2 \int_0^{\zeta} \zeta_1 G d\zeta_1 \right] + \frac{1}{3} \left[\left(\int_0^{\zeta} G d\zeta \right)^2 - \left(\int_0^{\zeta} G d\zeta_1 \right)^2 \right] = 0$$

L'hypothèse (III-14) peut être vérifiée.

Pour $\lambda = 0$, il existe une solution évidente de (III-16) qui est $G = \zeta$. Il est alors possible de faire une étude au voisinage du point $\lambda = 0$ en ne considérant que les termes linéaires. Il vient alors :

$$(III-17) \quad \frac{dG}{d\zeta} + \frac{2}{3} \int_{\zeta}^{\infty} \zeta_1 G d\zeta_1 + \frac{\zeta^2}{3} G = 0 \quad \text{et}$$

$$(III-18) \quad \lambda = 2 \int_0^{\infty} \zeta_1 G d\zeta_1$$

en dérivant (III-17), on a :

$$(III-19) \quad \frac{d^2 G}{d\zeta^2} + \frac{\zeta^2}{3} \cdot \frac{dG}{d\zeta} = 0$$

La solution de cette équation différentielle soumise aux conditions $G_{\infty} = 0$ et (III-18) est de la forme :

$$(III-20) \quad G = \frac{\lambda}{3} \int_{\zeta}^{\infty} e^{-\frac{\zeta_1^3}{3}} d\zeta_1$$

Le comportement exponentiel de G pour $\zeta \rightarrow \infty$ est donc ainsi confirmé. Il est donc possible de construire une représentation analytique approchée pour G .

Il a été retenu, pour que la solution reste homogène à l'expression des profils de la couche principale, une expression analytique de la forme :

$$(III-21) \quad G = \left(\nu + \delta \frac{\zeta}{\zeta_*} \right) e^{\left(-\frac{\zeta}{\zeta_*} \right)^{\frac{1}{m}}}$$

où les ν , δ , m représentent des coefficients et ζ_* une ordonnée de référence.

1.5 - Détermination des solutions semblables approchées -

Les profils G de la relation (III-21) doivent approcher au mieux l'équation (III-16), du moins pour leurs propriétés globales. Ils dépendent de quatre paramètres ν , δ , m , ζ_* . De ces quatre paramètres, l'un peut être choisi provisoirement comme paramètre libre de la famille de profils. Le paramètre m étant retenu à ce titre, le nombre

d'inconnus est réduit à trois : λ , δ et ζ_* . Pour fermer le système d'équations on utilise deux équations de moment d'ordre 2 et 3 par rapport à ζ de l'équation (III-16).

Les trois équations peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 & - \zeta^i G - i \int_{\zeta}^{\infty} \zeta_1^{i-1} G d\zeta_1 + \frac{2}{3(i+1)} \int_{\zeta}^{\infty} (\zeta_1^{i+1} - \zeta^{i+1}) \zeta_1 G d\zeta_1 \\
 & + \frac{1}{3} \int_{\zeta}^{\infty} \zeta_1^{i+2} G d\zeta_1 - \frac{2}{3} \int_{\zeta}^{\infty} G \zeta_1^{i+1} d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} G d\zeta_2 + \frac{2}{3} \int_{\zeta_1}^{\infty} \zeta_1^i G d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} \zeta_2 G d\zeta_2 \\
 & - \frac{1}{3(i+1)} \zeta^{i+1} \left[\left(\int_0^{\infty} G d\zeta \right)^2 - \left(\int_0^{\zeta} G d\zeta_1 \right)^2 \right] - \frac{2}{3(i+1)} \int_{\zeta}^{\infty} \zeta_1^{i+1} G d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} G d\zeta_2 \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{(III-22)}
 \end{aligned}$$

où $i = 0, 1, 2$.

On applique ces équations à $\zeta = 0$ et il vient le système suivant :

$$\begin{aligned}
 & G(0) + \int_0^{\infty} \zeta^2 G d\zeta - \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \zeta G d\zeta \int_0^{\zeta} G d\zeta_1 + \frac{2}{3} \int_0^{\infty} G d\zeta \int_0^{\zeta} \zeta_1 G d\zeta_1 = 0 \\
 \text{(III-23)} \quad & \int_0^{\infty} G d\zeta + \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \zeta^3 G d\zeta - \int_0^{\infty} \zeta^2 G d\zeta \int_0^{\zeta} G d\zeta_1 + \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \zeta G d\zeta \int_0^{\zeta} \zeta G d\zeta_1 = 0 \\
 & 2 \int_0^{\infty} \zeta G d\zeta + \frac{5}{9} \int_0^{\infty} \zeta^4 G d\zeta - \frac{8}{9} \int_0^{\infty} \zeta^3 G d\zeta \int_0^{\zeta} G d\zeta_1 + \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \zeta^2 G d\zeta \int_0^{\zeta} \zeta_1 G d\zeta_1 = 0
 \end{aligned}$$

Les solutions de ce système sont données en fonction de m . Remarquons que si $G'(0)$ est fini, il faut que m soit inférieur à l'unité, en introduisant (III-21) dans (III-23) en utilisant (I-20), il vient pour les 3 équations :

$$\begin{aligned}
 \text{(III-24)} \quad & \frac{1}{\zeta_*^3} + \frac{2}{3} m^2 \left\{ \left[(2\alpha_m(2,1) - \alpha_m(1,2)) + (2\alpha_m(3,1) - \alpha_m(1,3) + \alpha_m(2,2)) \right] \frac{\delta}{\lambda} \right. \\
 & \left. + \left[2\alpha_m(3,2) - \alpha_m(2,3) \right] \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^2 \right\} = \frac{(3m)!}{3} + \frac{(4m)!}{4} \frac{\delta}{\lambda}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(III-25)} \quad & \left(m! + \frac{(2m)!}{2} \cdot \frac{\delta}{\lambda} \right) \frac{1}{\zeta_*^3} + \frac{2}{3} m^2 \left\{ \left[\frac{3}{2} \alpha_m(3,1) - \alpha_m(2,2) \right] \right. \\
 & \left. + \left[\frac{3}{2} \alpha_m(4,1) + \frac{1}{2} \alpha_m(3,2) - \alpha_m(2,3) \right] \frac{\delta}{\lambda} + \left[\frac{3}{2} \alpha_m(4,2) - \alpha_m(3,3) \right] \frac{\delta^2}{\lambda^2} \right\} \lambda \\
 & = \frac{2}{3} \left[\frac{(4m)!}{4} + \frac{(5m)!}{5} \cdot \frac{\delta}{\lambda} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \left[\frac{(2m)!}{2} + \frac{(3m)!}{3} \cdot \frac{\delta}{r} \right] \frac{1}{\zeta_*^3} + \frac{2}{3} m^2 \left\{ \left[\frac{4}{3} \alpha_m(4,1) - \alpha_m(3,2) \right] \right. \\
 \text{(III-26)} & \left. + \left[\frac{4}{3} \alpha_m(5,1) + \frac{\alpha_m(4,2)}{3} - \alpha_m(3,3) \right] \frac{\delta}{r} + \left[\frac{4}{3} \alpha_m(5,2) - \alpha_m(4,3) \right] \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right\} r \\
 & = \frac{5}{9} \left[\frac{(5m)!}{5} + \frac{(6m)!}{6} \cdot \frac{\delta}{r} \right]
 \end{aligned}$$

Ces trois équations ont la même forme et on généralise en posant

$$\begin{aligned}
 Ek_1 &= \left[(k-1)m \right]! + \frac{k-1}{k} (km)! \cdot \frac{\delta}{r} \\
 &= (k-1)m \left[\Gamma((k-1)m) + \frac{\delta}{r} \Gamma(km) \right] \quad k=1,2,3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(III-27)} \quad Ek_2 &= \frac{2}{3} m^2 \left\{ \left[\frac{k+1}{k} \alpha_m(k+1,1) - \alpha_m(k,2) \right] + \left[\frac{k+1}{k} \alpha_m(k+2,1) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{k} \alpha_m(k+1,2) - \alpha_m(k,3) \right] \frac{\delta}{r} + \left[\frac{k+1}{k} \alpha_m(k+2,2) - \alpha_m(k+1,3) \right] \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right\} \\
 Ek_3 &= \frac{k+2}{3k} \left\{ \Gamma((k+2)m) + \frac{\delta}{r} \Gamma((k+3)m) \right\}
 \end{aligned}$$

Les 3 équations peuvent donc se généraliser sous la forme :

$$Ek_1 \frac{1}{\zeta_*^3} + Ek_2 r = Ek_3 \quad \text{(III-28)}$$

où les Ek_j sont fonction de δ/r et m .

De même, une expression simple de (III-15) s'exprime sous la forme :

$$\text{(III-29)} \quad \lambda = \zeta_*^2 \left\{ 2m \Gamma(2m) r + 2m \Gamma(3m) \delta - \frac{1}{2} \left(m \Gamma(m) r + m \Gamma(2m) \delta \right)^2 \right\}$$

pour que le système (III-28) en $1/\zeta_*^3$ et r soit compatible il faut que le déterminant des coefficients soit nul. Il en résulte une équation du 4e degré en δ/r dont on calcule les racines, l'une d'elles étant la solution recherchée. Une tabulation des constantes (δ , r , m , ζ_*) est dressée en annexe (5).

Une représentation approchée de G est ainsi trouvée. Elle donne les profils de sous couche par simple intégration.

Il vient : $g(\tau) = \zeta_* \left[\tau - \int_0^\tau (r + s \tau_1) e^{-\tau_1 \frac{1}{m}} d\tau_1 \right]$

(III-30) $\tau = \frac{\zeta}{\zeta_*}$ en posant :

Des tracés de profils de sous-couche sont répertoriés sur les planches (19). Une comparaison avec les profils déterminés par Stewartson et Williams, montre que les résultats sont relativement concordants.

Le choix du paramètre en fonction duquel les grandeurs s , r , m et ζ_* doivent être exprimées dépend de la simplicité de leur représentation en fonction de ce paramètre. Il s'est avéré commode d'utiliser le paramètre ζ_* , les expressions choisies sont reportées dans l'annexe (4).

1.6 - Détermination des profils "composites" à trois paramètres -

La différence essentielle avec la théorie développée au premier chapitre consiste uniquement dans la définition des profils de vitesse puisque nous nous sommes restreints au cas adiabatique.

On suppose désormais, pour plus de clarté que les deux paramètres, caractérisant la forme des fonctions f et g des couches et sous-couches, α_1 et α_2 sont nommés α_1 et α_2 . De plus, si la notion d'ordre est exacte à Reynolds tendant vers l'infini, il n'en est plus de même à Reynolds fini. On est donc amené à introduire un nouveau paramètre Θ que l'on peut qualifier de facteur d'échelle entre couche et sous-couche et que l'on traite comme une inconnue.

On peut alors admettre que \tilde{u} soit donnée en termes d'une variable de similitude η de la façon suivante :

$$(III-31) \quad \tilde{u} = 1 - f(\xi(\eta, \alpha_1))$$

Dans le traitement du chapitre I, la variable ξ était proportionnelle à η . Ici nous allons supposer que ξ s'exprime sous la forme :

$$\xi = \frac{1}{\Theta \eta_* (\alpha_1)} g(\Theta \eta, \alpha_2) \quad (III-32)$$

dans ces conditions ξ ne devient linéaire en η que lorsque $\eta \rightarrow \infty$.

f et g sont alors respectivement définis par :

$$f = 1 - (1 + a \xi + b \xi^2) e^{-|\xi|^{\frac{1}{m}}} \quad (III-33)$$

$$g = \Theta \eta - \int_0^{\Theta \eta} (r + s \tau) e^{-\tau \frac{1}{m}} d\tau \quad (III-34)$$

Les profils ainsi définis dépendent de trois paramètres (α_1 , α_2 , Θ). On les qualifie de "composites" parce qu'ils composent les profils de couche et sous-couche en une seule représentation. L'emploi d'une telle représentation paraît souple et satisfaisante, à ceci près que ξ ne doit pas prendre de valeurs trop fortement négatives pour ne pas invalider la représentation $\tilde{u}(\xi)$. Il serait de plus souhaitable, compte tenu de l'expression des profils, que la sous-couche recolle quand la couche principale décolle afin d'obtenir des profils physiquement réalistes.

2 - EQUATIONS INTEGRALES -

2.1 - Equations requises -

Les équations supplémentaires requises pour fermer le système sont des équations de moment de l'équation de mouvement par rapport à la vitesse. En généralisant, ces moments peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d\zeta_n}{d\bar{\psi}} = \frac{\gamma-1}{\gamma} n \int_{-\zeta_m}^{\infty} \frac{\tilde{u}^{n+1} (1-w)}{w} \left[P_{\bar{\psi}} (\pi - \sigma \tilde{u}^2) + \pi_{\bar{\psi}} \right] d\bar{\psi} - n \delta^2 \left[\left(\bar{\mu} \bar{\rho} \frac{w\bar{q}}{w} \right)_p - \mathcal{A}_n \right] \quad (\text{III-35})$$

$$\text{où } \mathcal{A}_n = \left(\mu \bar{\rho} \tilde{u}_{\bar{\psi}} \right)_p$$

$$\text{et } \mathcal{A}_n = \int_{-\zeta_m}^{\infty} \tilde{u} (1 - \tilde{u}^n) \sigma d\bar{\psi}$$

$$\text{et } \bar{\rho} = \left(\frac{1-w}{1-w_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \text{et rappelons que } \zeta_n = \int_{-\zeta_m}^{\infty} \tilde{u} (1 - \tilde{u}^n) \sigma d\bar{\psi} \quad (\text{III-36})$$

$$(\text{III-37}) \quad \mu = \left(\frac{1-w \tilde{u}^2}{1-w_\infty} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{S_u + 1 - w_\infty}{S_u + 1 - w \tilde{u}^2} ; \quad \bar{\mu} = \mu (\tilde{u} = 1)$$

Ces équations doivent s'exprimer en fonction de la variable de similitude η , définie précédemment. Rappelons que des variables (\bar{u} , $\bar{\psi}$) on passe à la variable de similitude en transitant par le plan de Stewartson ($\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$). Une relation entre η et $\bar{\psi}$ peut donc être obtenue à travers $\tilde{\psi}$, on sait que :

$$(\text{III-38}) \quad \tilde{\psi} = \int_{-\zeta_m}^{\bar{\psi}} \sigma d\bar{\psi}_1 \quad \text{d'où, en posant}$$

$$(\text{III-39}) \quad \tilde{\psi} = \mathcal{L}(\bar{\psi}) \eta \quad \text{on obtient la relation souhaitée.}$$

(\mathcal{L} faisant fonction d'échelle).

Les inconnues du système sont donc portées au nombre de cinq : α_1 , α_2 , Θ , \mathcal{L} , w , c'est-à-dire deux paramètres de forme, deux échelles, et la pression par l'intermédiaire de w . Pour fermer le système, cinq équations sont donc nécessaires et les équations (III-35) sont écrites avec $n = 4$, l'équation de couplage faisant office de cinquième équation.

2.2 - Relations intégrales de fermeture -

Les relations (III-38) et (III-39) permettent de calculer les débits

ζ_n et ζ_m , ceux-ci peuvent s'exprimer en fonction des épaisseurs incompressibles Δ_1 et Δ_E , deux épaisseurs Δ_3 et Δ_4 étant :

$$\Delta_3 = \int_0^{\infty} f(1-f^3) d\eta \quad \text{et} \quad \Delta_4 = \int_0^{\infty} f(1-f^4) d\eta$$

Pour pouvoir généraliser l'écriture, nous emploierons désormais les notations suivantes $\Delta_1 = \Delta_m$ et $\Delta_2 = \Delta_E$.

Le calcul de ces débits est simple.

Par exemple celui de $\zeta_1 = \int_0^{\infty} \sigma u (1-u) d\bar{\psi}$ nous amène à

(III-40)

$$\zeta_1 = \mathcal{L} \int_0^{\infty} u(1-u) d\eta = \mathcal{L} \Delta_1$$

et il vient

$$\zeta_n = \mathcal{L} \Delta_n$$

Le calcul de ζ_m est, quant à lui, un peu plus complexe, en effet :

$$\zeta_m = \int_0^{\infty} (1 - \sigma u) d\bar{\psi} = \mathcal{L} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma} - u \right) d\eta$$

$$\text{et } \zeta_m = \mathcal{L} \Delta_m + \mathcal{L} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) d\eta \quad (\text{III-41})$$

Finalement, le calcul étant poussé jusqu'au second ordre,

$$\zeta_m = \mathcal{L} \left[\Delta_m + \frac{W}{1-W} (\Delta_m + \Delta_1) \right] + \mathcal{L}^2 \left(\frac{W}{1-W} \right) \bar{\psi}_p \left(1 - \frac{Y}{Y-1} \right)$$

(III-42)

$$\left[(\Delta_m^* + \Delta_1^*) + \frac{W}{1-W} \left(\frac{\Delta_m + \Delta_1}{2} \right)^2 \right] + O(\mathcal{L}^3)$$

2.3 - Système final d'équations -

$$\text{En posant } \frac{d\Delta_n}{d\bar{\psi}} = A_{n1} \alpha_{1\bar{\psi}} + A_{n2} \alpha_{2\bar{\psi}} + A_{n3} \Theta \bar{\psi} \quad (\text{III-43})$$

on obtient le système d'équations intégrales suivant pour les équations de moment :

$$\frac{\Delta_n}{\mathcal{L}} \mathcal{L} \bar{\psi} + A_{n1} \alpha_{1\bar{\psi}} + A_{n2} \alpha_{2\bar{\psi}} + A_{n3} \Theta \bar{\psi} + A_{n4} W \bar{\psi} = A_{n5} \quad (\text{III-44})$$

où $n = 1, 2, 3, 4$.

et l'équation de couplage :

$$\frac{1}{\mathcal{L}} \left[\Delta_m + \frac{W}{1-W} (\Delta_m + \Delta_1) \right] \mathcal{L}_{\bar{\varphi}} + B_{m1} \alpha_1 \bar{\varphi} + B_{m2} \alpha_2 \bar{\varphi} + B_{m3} \Theta \bar{\varphi} \quad (\text{III-45})$$

$$+ \frac{\Delta_m + \Delta_1}{(1-W)^2} W \bar{\varphi} = \frac{1}{\mathcal{L}} \left(\frac{1-W}{1-W_\infty} \right)^{\frac{1}{r-1}} \text{tg } \theta_p$$

Les relations de fermeture sont les mêmes qu'au chapitre I et sont calculées numériquement par simple intégration en η . Les coefficients

A_{nj} et B_{mj} du système peuvent aussi être calculés

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1, 2, 3, 4 \\ j = 1, 2, 3 \\ m, \text{ indice fixé lié} \\ \text{au déplacement.} \end{array} \right.$$

En effet,

$$\frac{df(\alpha_1, \alpha_2, \Theta)}{d\bar{\varphi}} = A_1 \alpha_1 \bar{\varphi} + A_2 \alpha_2 \bar{\varphi} + A_3 \Theta \bar{\varphi} \quad (\text{III-46})$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{df}{d\alpha_1} (\alpha_1, \alpha_2, \Theta) \\ A_2 = \frac{df}{d\alpha_2} (\alpha_1, \alpha_2, \Theta) \\ A_3 = \frac{df}{d\Theta} (\alpha_1, \alpha_2, \Theta) \end{array} \right. \quad (\text{III-47})$$

une équation pour les coefficients des équations peut s'écrire :

$$A_{nj} = \int_0^\infty A_j (1 - (n+1)u) d\eta \quad \begin{array}{l} n = 1, 2, 3, 4 \\ j = 1, 2, 3 \end{array} \quad (\text{III-48})$$

$$\frac{1}{\mathcal{L}} \left[\Delta_m + \frac{W}{1-W} (\Delta_m + \Delta_1) \right] \mathcal{L}_{\bar{\varphi}} + B_{m1} \alpha_1 \bar{\varphi} + B_{m2} \alpha_2 \bar{\varphi} + B_{m3} \Theta \bar{\varphi} \quad (\text{III-49})$$

$$+ \frac{\Delta_m + \Delta_1}{(1-W)^2} W \bar{\varphi} = \frac{1}{\mathcal{L}} \left(\frac{1-W}{1-W_\infty} \right)^{\frac{1}{r-1}} \text{tg } \theta_p$$

$$\text{où } B_{mj} = A_{mj} + \frac{W}{1-W} (A_{mj} + A_{1j}) \quad j = 1, 2, 3$$

avec

$$A_{mj} = - \int_0^\infty A_j d\eta$$

(m étant un indice fixé).

3 - DISCUSSION -

Si l'on considère la solution de Blasius comme étant la solution initiale, c'est-à-dire la valeur de α_0 pour laquelle le profil de vitesse est une droite, les coefficients $A_{n2}^{(0)}$ et $A_{n3}^{(0)}$ sont nuls.

Il advient donc que les cinq équations qui ne contiennent que $\alpha_{1\bar{q}}^{(0)}$, $\mathcal{U}_{\bar{q}}^{(0)}$, $\mathcal{W}_{\bar{q}}^{(0)}$ ne sont plus indépendantes. Mais la solution de trois quelconques d'entre elles, en incluant obligatoirement l'équation de couplage redonne bien la solution sans sous-couche. Les conditions de compatibilité sont alors respectées puisque tous les déterminants mineurs d'ordre 4 et 5 du système sont nuls.

- L'initialisation de Θ qui, rappelons le, exprime l'échelle entre la couche et la sous-couche, reste pour le moins un problème important. Si l'on se base sur le comportement successif de la solution numérique obtenue à partir du système (III-44) (III-46), voir planche (20), on remarque une divergence des paramètres Θ et α_2 . La variable Θ était d'ailleurs la variable la plus sensible et celle qui réagit la première. Une étude approfondie de ces phénomènes devrait pouvoir lever ces comportements curieux. Il semble qu'une condition de détermination de Θ soit liée à l'annulation simultanée des numérateur et dénominateur donnant l'expression de $\Theta_{\bar{q}}$ tiré du système d'équations (III-44) (III-45).

- Malgré ces problèmes, non encore élucidés, les résultats sont encourageants pour la méthode, en ce sens que la solution est réaliste et même satisfaisante tout au moins jusqu'au décollement de la couche principale. Un des points positifs et importants est lié à la prévision du décollement. En effet, les décollements théoriques sont bien souvent retardés par rapport aux décollements expérimentaux.

Si l'on se réfère à l'expérience [31] décrite page 45, ce décollement expérimental dans ce cas s'effectue pour un rapport de pression P/P_∞ de 1,09 alors que la prévision de décollement de nombreuses méthodes existantes le donne pour un rapport de l'ordre de 1,14.

Un calcul de décollement libre sur plaque plane effectué dans les conditions de Hakkinen indique que l'apport de la sous-couche n'est pas négligeable puisqu'elle décolle pour un P/P_∞ de l'ordre de 1,09. De plus, le même niveau de plateau de pression que dans les calculs de premier ordre est atteint. Ces deux résultats préliminaires sont encourageants pour la méthode et forment une base de départ satisfaisante pour de futurs travaux.

CONCLUSION -

Trois voies d'amélioration des méthodes intégrales pour l'étude des phénomènes de décollement et de recollement laminaire en régime supersonique ont été explorées.

- Des représentations analytiques de profils de vitesse et d'enthalpie approchant les solutions de similitude ont été déterminées, et les coefficients de ces représentations ont été exprimés analytiquement en fonction d'un paramètre de forme, pour diverses enthalpies de paroi. Une résolution par une méthode de tir du problème de fluide parfait couplé à des équations intégrales de couche limite incluant les termes de second ordre a été mise en oeuvre pour des configurations de décollements libres. En l'absence des termes de second ordre, la méthode se réduit à une formulation de premier ordre classique, à laquelle on a appliqué une correction de second ordre pour la pression. La comparaison des calculs de premier et second ordre laisse à penser que le traitement de premier ordre est déjà une très bonne approximation.

- Une méthode de premier ordre comportant une résolution numérique plus générale et totalement automatisée a été adaptée au régime laminaire à partir des solutions de similitude précédentes. Elle a été appliquée à l'étude de problèmes de décollement-recollement, notamment sur une rampe de compression ainsi qu'à la réflexion d'une onde de choc sur une plaque plane, en incluant les effets d'interaction forte de la région de bord d'attaque.

Les distributions de pressions obtenues montrent alors un très bon accord avec l'expérience, ainsi qu'avec les méthodes de résolution des équations de Navier-Stokes. Les bonnes aptitudes d'une méthode intégrale couplée à un calcul non-visqueux pour un tel genre de problème ont pu ainsi être vérifiées.

- Une famille de profils composites à trois paramètres a enfin été déterminée en introduisant des profils de sous-couche dans les solutions de similitude. Dans ce but, une représentation analytique approchée de profils semblables a été définie pour la sous-couche elle-même. Les profils composites ont été mis en oeuvre dans une méthode intégrale à trois équations de moment. Les problèmes liés à la résolution numérique du système ainsi défini n'ont pu être résolus en totalité faute de temps, mais les premiers résultats obtenus paraissent encourageants.

Valeurs des paramètres de couche limite et coefficients des profils * $\mathcal{H}_p = 1$											
β	\tilde{H}	a	b	n	c	d	η_*	\tilde{K}	$\tilde{\tau}$	\tilde{J}	\tilde{S}
-0,010	179,56	0,476	-0,522	0,119	-	-	11,09	7,583	-0,003	0	0
-0,013	121,33	0,521	-0,600	0,126	-	-	10,30	5,760	-0,004	0	0
-0,015	103,40	0,558	-0,661	0,132	-	-	9,80	5,277	-0,005	0	0
-0,025	60,96	0,650	-0,840	0,147	-	-	8,60	3,849	-0,010	0	0
-0,033	44,57	0,705	-0,960	0,159	-	-	7,94	3,248	-0,015	0	0
-0,050	28,06	0,768	-1,112	0,188	-	-	7,07	2,592	-0,026	0	0
-0,075	17,79	0,764	-1,061	0,243	-	-	5,92	2,158	-0,040	0	0
-0,100	12,61	0,712	-0,937	0,285	-	-	5,20	1,909	-0,052	0	0
-0,125	9,55	0,633	-0,815	0,316	-	-	4,58	1,752	-0,061	0	0
-0,150	7,43	0,522	-0,686	0,342	-	-	4,06	1,645	-0,063	0	0
-0,180	5,48	0,316	-0,504	0,371	-	-	3,52	1,560	-0,049	0	0
-0,197	4,08	0	-0,280	0,395	-	-	3,00	1,525	0	0	0
-0,180	3,37	-0,315	-0,096	0,405	-	-	2,70	1,529	0,066	0	0
-0,150	3,17	-0,538	-0,020	0,407	-	-	2,65	1,536	0,095	0	0
-0,060	2,70	-1,013	0,258	0,411	-	-	2,61	1,563	0,191	0	0
0	2,61	-1,315	0,439	0,396	-	-	2,79	1,569	0,220	0	0
▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶
0,25	2,29	0,491	-0,104	1	-	-	0,707	1,621	0,284	0	0
0,50	2,24	0,425	-0,089	1	-	-	0,628	1,627	0,320	0	0
0,75	2,21	0,384	-0,079	1	-	-	0,571	1,631	0,342	0	0
1,00	2,19	0,357	-0,072	1	-	-	0,526	1,634	0,357	0	0
1,50	2,161	0,324	-0,061	1	-	-	0,460	1,638	0,376	0	0
2,00	2,145	0,307	-0,054	1	-	-	0,412	1,641	0,387	0	0
3,00	2,125	0,2921	-0,044	1	-	-	0,347	1,645	0,401	0	0
6,00	2,101	0,2919	-0,028	1	-	-	0,248	1,649	0,417	0	0

C
O
M
P
R
E
S
S
I
O
ND
É
T
E
N
T
EBIB
LILLE



* $\sigma_{dp} = 0,8$												
	β	\tilde{H}	a	b	n	c	d	η^*	\tilde{K}	\tilde{T}	\tilde{f}	\tilde{z}
C	-0,010	168,64	0,445	-0,476	0,114	-0,061	-0,123	11,62	8,134	-0,0022	0,0086	0,0001
O	-0,013	126,41	0,484	-0,536	0,121	-0,106	-0,158	10,86	6,674	-0,0032	0,0248	0,0001
M	-0,033	44,31	0,653	-0,850	0,151	-0,224	-0,256	8,37	3,502	-0,0121	0,0371	0,008
P	-0,050	28,39	0,722	-1,014	0,171	-0,363	-0,227	7,42	2,772	-0,0206	0,0468	0,021
R	-0,075	17,74	0,749	-1,081	0,213	-0,548	-0,104	6,63	2,251	-0,0336	0,0611	0,0049
S	-0,100	12,60	0,716	-0,996	0,255	-0,643	-0,010	5,66	1,983	-0,0450	0,0695	0,0061
S	-0,125	9,55	0,653	-0,882	0,288	-0,735	0,082	5,00	1,810	-0,0541	0,0735	0,0122
E	-0,150	7,12	0,545	-0,739	0,321	-0,827	0,149	4,36	1,671	-0,0598	0,0802	0,0182
S	-0,180	5,70	0,422	-0,616	0,343	-0,880	0,179	3,87	1,596	-0,0564	0,0858	0,0209
S	-0,199	4,72	0,283	-0,497	0,361	-0,902	0,217	3,61	1,552	-0,044	0,0891	0,0282
I	-0,218	3,58	0	-0,295	0,384	-0,963	0,274	3,10	1,522	0	0,1062	0,0363
O	-0,219	3,45	-0,047	-0,263	0,387	-0,971	0,281	3,05	1,521	0,0091	0,1089	0,0374
N	-0,196	2,74	-0,407	-0,051	0,400	-1,022	0,318	2,70	1,531	0,0850	0,1335	0,0427
	-0,060	2,18	-1,054	0,279	0,412	-1,213	0,388	2,64	1,564	0,1931	0,1786	0,0449
0	2,09	-1,315	0,439	0,396	-1,312	0,439	2,79	1,569	0,2199	0,2000	0,0440	
	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶
	0,250	1,89	0,489	-0,114	1	0,620	-0,105	0,74	1,618	0,279	0,238	0,0415
F	0,50	1,70	0,428	-0,097	1	0,671	-0,074	0,67	1,624	0,313	0,275	0,0360
E	0,75	1,63	0,389	-0,085	1	0,701	-0,039	0,61	1,629	0,335	0,305	0,0328
T	1	1,57	0,363	-0,075	1	0,709	0,006	0,57	1,633	0,352	0,331	0,0320
E	1,25	1,53	0,345	-0,065	1	0,724	0,044	0,54	1,636	0,366	0,359	0,0308
N	1,50	1,48	0,333	-0,057	1	0,731	0,092	0,50	1,639	0,377	0,383	0,0303
T	1,75	1,40	0,321	-0,040	1	0,748	0,192	0,45	1,645	0,396	0,432	0,0294
F	2,50	1,32	0,324	-0,021	1	0,762	0,316	0,40	1,649	0,411	0,480	0,0290
3	1,24	0,347	-0,006	1	0,775	0,496	0,56	1,651	0,425	0,531	0,0292	

Valeurs des paramètres de couche limite et coefficients des profils * $z/p = 0,6$													
	p	H	a	b	n	c	d	η^*	K	τ	$\frac{f}{z}$	$\frac{z}{p}$	
C	-0,010	1,720	0,406	-0,420	0,107	0,057	-0,252	12,45	9,64	-0,0045	-0,195	0	
	-0,013	1,861	0,433	-0,458	0,113	0,020	-0,240	11,79	7,69	-0,0022	-0,031	0	
	-0,022	4,491	0,589	-0,722	0,142	-0,175	-0,237	9	3,92	-0,0088	0,064	0,001	
	-0,050	28,62	0,660	-0,870	0,160	-0,320	-0,205	7,87	3,04	-0,0151	0,079	0,003	
	-0,075	17,40	0,706	-1,013	0,185	-0,470	-0,150	6,93	2,36	-0,027	0,101	0,007	
	-0,100	12,37	0,699	-1,016	0,220	-0,615	-0,060	6,16	2,055	-0,038	0,119	0,013	
	-0,125	9,40	0,656	-0,941	0,253	-0,696	0,009	5,48	1,867	-0,047	0,129	0,020	
	-0,150	7,43	0,591	-0,842	0,281	-0,749	0,057	4,97	1,741	-0,053	0,137	0,027	
	-0,180	5,78	0,485	-0,714	0,309	-0,847	0,151	4,42	1,636	-0,055	0,152	0,038	
	-0,199	4,92	0,395	-0,622	0,326	-0,883	0,185	4,08	1,587	-0,052	0,162	0,046	
	-0,215	4,14	0,275	-0,516	0,343	-0,924	0,218	3,75	1,549	-0,041	0,173	0,056	
	-0,245	3,09	0	-0,305	0,370	-0,987	0,277	3,16	1,519	0	0,204	0,073	
-0,277	2,84	-0,100	-0,230	0,376	-1,002	0,290	3,10	1,518	0,019	0,214	0,077		
-0,199	2,045	-0,585	-0,035	0,395	-1,064	0,335	2,665	1,538	0,121	0,292	0,088		
-0,150	1,851	-0,786	0,142	0,399	-1,106	0,351	2,608	1,551	0,158	0,323	0,089		
-0,060	1,646	-1,112	0,310	0,416	-1,226	0,394	2,702	1,566	0,201	0,372	0,0886		
0	1,567	-1,345	0,439	0,396	-1,315	0,433	2,793	1,569	0,212	0,400	0,0880		
D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	0,25	1,893	0,507	-0,117	0,629	-0,110	0,756	1,646	1,622	0,202	0,467	0,0814	
	0,50	1,172	0,453	-0,101	0,653	-0,082	0,689	1,622	1,604	0,301	0,521	0,0764	
	0,75	1,103	0,417	-0,089	0,684	-0,056	0,639	1,627	1,623	0,323	0,570	0,070	
	1	1,031	0,392	-0,078	0,703	-0,027	0,599	1,631	0,340	0,340	0,612	0,0665	
	1,5	0,915	0,360	-0,057	0,720	0,042	0,536	1,639	0,368	0,368	0,622	0,064	
	2	0,82	0,345	-0,036	0,735	0,118	0,487	1,644	0,391	0,391	0,747	0,0632	
	3	0,621	0,370	0,023	0,767	0,360	0,398	1,651	0,427	0,427	0,869	0,0624	
	E	0,75	1,103	0,417	-0,089	0,684	-0,056	0,639	1,627	1,623	0,323	0,570	0,070
		1	1,031	0,392	-0,078	0,703	-0,027	0,599	1,631	0,340	0,340	0,612	0,0665
		1,5	0,915	0,360	-0,057	0,720	0,042	0,536	1,639	0,368	0,368	0,622	0,064
		2	0,82	0,345	-0,036	0,735	0,118	0,487	1,644	0,391	0,391	0,747	0,0632
3		0,621	0,370	0,023	0,767	0,360	0,398	1,651	0,427	0,427	0,869	0,0624	
F		0,107	0,406	-0,420	0,107	0,057	-0,252	12,45	9,64	-0,0045	-0,195	0	
		0,113	0,433	-0,458	0,113	0,020	-0,240	11,79	7,69	-0,0022	-0,031	0	
		0,142	0,589	-0,722	0,142	-0,175	-0,237	9	3,92	-0,0088	0,064	0,001	
		0,160	0,660	-0,870	0,160	-0,320	-0,205	7,87	3,04	-0,0151	0,079	0,003	
		0,185	0,706	-1,013	0,185	-0,470	-0,150	6,93	2,36	-0,027	0,101	0,007	
		0,220	0,699	-1,016	0,220	-0,615	-0,060	6,16	2,055	-0,038	0,119	0,013	
		0,253	0,656	-0,941	0,253	-0,696	0,009	5,48	1,867	-0,047	0,129	0,020	
	0,281	0,591	-0,842	0,281	-0,749	0,057	4,97	1,741	-0,053	0,137	0,027		
	0,309	0,485	-0,714	0,309	-0,847	0,151	4,42	1,636	-0,055	0,152	0,038		
	0,326	0,395	-0,622	0,326	-0,883	0,185	4,08	1,587	-0,052	0,162	0,046		
	0,343	0,275	-0,516	0,343	-0,924	0,218	3,75	1,549	-0,041	0,173	0,056		
	0,370	0,305	-0,305	0,370	-0,987	0,277	3,16	1,519	0	0,204	0,073		
0,376	-0,100	-0,230	0,376	-1,002	0,290	3,10	1,518	0,019	0,214	0,077			

Annexe [1] suite

Valeurs des paramètres de couche limite et coefficients des profils * $\beta_p = 0,4$											
ρ	\tilde{H}	a	b	n	c	d	η_*	\tilde{K}	$\tilde{\tau}$	\tilde{J}	\tilde{S}
-0,010	376,3	0,365	-0,355	0,100	0,032	-0,199	13,42	25,45	-0,0005	-1,325	0
-0,013	128,1	0,375	-0,375	0,103	0,009	-0,177	13,04	9,55	-0,0014	-0,029	0
-0,033	43,70	0,514	-0,585	0,132	-0,125	-0,219	9,85	4,490	-0,006	0,618	0,0009
-0,050	25,16	0,575	-0,702	0,150	-0,240	-0,202	8,66	3,169	-0,012	0,135	0,0030
-0,075	16,74	0,626	-0,829	0,168	-0,386	-0,177	7,48	2,527	-0,020	0,136	0,0075
-0,100	11,85	0,641	-0,905	0,189	-0,533	-0,113	6,71	2,145	-0,029	0,1549	0,0148
-0,125	9,19	0,626	-0,916	0,211	-0,639	-0,048	6,08	1,940	-0,037	0,173	0,0229
-0,150	7,34	0,588	-0,880	0,235	-0,719	0,011	5,57	1,800	-0,044	0,189	0,0321
-0,180	5,75	0,513	-0,789	0,264	-0,818	0,096	5,01	1,681	-0,049	0,205	0,0465
-0,247	3,45	0,232	-0,508	0,320	-0,943	0,204	4,06	1,538	-0,034	0,250	0,0836
-0,276	2,63	0	-0,320	0,348	-1,02	0,279	3,46	1,514	0	0,288	0,1089
-0,282	2,24	-0,161	-0,215	0,361	-1,04	0,306	3,162	1,513	0,031	0,326	0,1200
-0,247	1,625	-0,550	0,020	0,383	-1,08	0,338	2,757	1,533	0,114	0,413	0,1340
-0,199	1,420	-0,738	0,116	0,390	-1,11	0,351	2,665	1,546	0,149	0,464	0,1349
-0,150	1,276	-0,890	0,190	0,395	-1,14	0,365	2,627	1,554	0,173	0,513	0,1334
-0,060	1,147	-1,187	0,349	0,430	-1,31	0,431	2,793	1,568	0,206	0,562	0,1324
0	1,044	-1,315	0,439	0,396	-1,315	0,439	2,793	1,569	0,220	0,600	0,1320
▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶
0,25	0,813	0,527	-0,121	1	0,627	-0,115	0,770	1,615	0,260	0,684	0,1230
0,50	0,705	0,482	-0,107	1	0,651	-0,093	0,711	1,620	0,286	0,747	0,1159
0,75	0,620	0,451	-0,095	1	0,667	-0,071	0,666	1,625	0,306	0,800	0,1113
1	0,545	0,428	-0,084	1	0,685	-0,049	0,631	1,630	0,322	0,847	0,1064
1,5	0,429	0,397	-0,063	1	0,702	0,0004	0,575	1,636	0,350	0,922	0,1020
2	0,330	0,379	-0,043	1	0,721	0,053	0,532	1,641	0,372	0,986	0,1006
3	0,168	0,377	-0,004	1	0,748	0,188	0,485	1,649	0,410	1,091	0,0993

C
O
M
P
R
E
S
S
I
O
ND
É
T
E
N
T
E

Annexe [1] suite

Valeurs des paramètres de couche limite et coefficients des profils * $\mathcal{H}_p = 0,2$											
β	\tilde{H}	a	b	n	c	d	η_*	\tilde{K}	$\tilde{\tau}$	\tilde{j}	$\tilde{\zeta}$
-0,010	135,91	0,278	-0,254	0,083	-0,071	-0,158	16,46	14,21	-0,0005	-0,061	0
-0,033	40,53	0,405	-0,412	0,115	-0,077	-0,201	11,62	5,467	-0,0031	0,044	0,0003
-0,050	24,47	0,460	-0,494	0,132	-0,146	-0,199	9,95	3,764	-0,0066	0,1014	0,0017
-0,078	15,29	0,509	-0,583	0,153	-0,305	-0,159	8,37	2,761	-0,013	0,144	0,0062
-0,105	10,94	0,526	-0,636	0,171	-0,450	-0,103	7,35	2,282	-0,020	0,172	0,0137
-0,127	8,68	0,524	-0,665	0,185	-0,558	-0,051	6,71	2,040	-0,026	0,196	0,0222
-0,150	7,32	0,508	-0,677	0,198	-0,650	-0,007	6,16	1,895	-0,031	0,198	0,0315
-0,180	5,55	0,468	-0,673	0,218	-0,754	0,057	5,657	1,730	-0,037	0,242	0,0480
-0,199	4,85	0,432	-0,655	0,230	-0,813	0,095	5,291	1,666	-0,039	0,255	0,059
-0,246	3,56	0,309	-0,569	0,261	-0,929	0,178	4,583	1,566	-0,037	0,288	0,089
-0,302	2,16	0	-0,355	0,318	-1,045	0,282	3,606	1,505	0	0,377	0,141
-0,329	1,53	-0,330	-0,113	0,345	-1,101	0,332	3,162	1,510	0,065	0,450	0,173
-0,247	0,926	-0,780	0,137	0,376	-1,142	0,362	2,739	1,544	0,156	0,613	0,183
-0,199	0,807	-0,905	0,200	0,386	-1,170	0,372	2,683	1,553	0,176	0,660	0,1819
-0,150	0,712	-1,018	0,261	0,395	-1,280	0,384	2,702	1,560	0,191	0,701	0,1803
-0,100	0,665	-1,137	0,324	0,411	-1,265	0,412	2,757	1,566	0,203	0,726	0,1808
0	0,522	-1,315	0,439	0,396	-1,315	0,439	2,793	1,569	0,220	0,800	0,1759
▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶
0,25	0,343	0,548	-0,125	1	0,624	-0,119	0,784	1,613	0,249	0,888	0,1659
0,50	0,244	0,516	-0,114	1	0,645	-0,102	0,733	1,617	0,269	0,952	0,1579
0,75	0,166	0,493	-0,103	1	0,660	-0,084	0,695	1,621	0,285	1,003	0,1525
1	0,101	0,475	-0,093	1	0,673	-0,067	0,664	1,625	0,298	1,046	0,1487
1,5	-0,002	0,450	-0,075	1	0,692	-0,032	0,614	1,631	0,321	1,116	0,1440
2	-0,095	0,433	-0,054	1	0,708	0,010	0,571	1,637	0,343	1,179	0,1411
3	-0,210	0,422	-0,019	1	0,731	0,084	0,516	1,643	0,372	1,256	0,1387

C
O
M
P
R
E
S
S
I
O
ND
É
T
E
N
T
E

Annexe [1] suite

Valeurs des paramètres de couche limite et coefficients des profils = 0											C O M P R E S S I O N
β	\tilde{H}	a	b	n	c	d	η_*	\tilde{K}	$\tilde{\tau}$	$\tilde{\gamma}$	
-0,100	10,26	0,274	-0,163	0,136	-0,252	-0,109	10,05	2,734	-0,0059	0,1170	0,0054
-0,171	5,56	0,313	-0,239	0,190	-0,612	0,048	6,71	1,864	-0,0183	0,2353	0,0358
-0,297	2,50	0,109	-0,178	0,255	-0,943	0,236	4,47	1,518	-0,0149	0,3522	0,1295
-0,327	2,06	0,010	-0,138	0,270	-1,003	0,270	4,12	1,495	-0,0016	0,3857	0,1574
-0,368	1,51	-0,179	-0,064	0,292	-1,072	0,312	3,61	1,487	0,0330	0,4452	0,1978
-0,393	0,996	-0,440	0,020	0,314	-1,127	0,348	3,16	1,504	0,0890	0,552	0,228
-0,369	0,647	-0,693	0,106	0,336	-1,179	0,372	2,95	1,528	0,1400	0,664	0,238
-0,150	0,1350	-1,165	0,340	0,403	-1,277	0,417	2,828	1,565	0,2057	0,917	0,225
-0,130	0,0757	-1,226	0,371	0,424	-1,297	0,425	2,898	1,567	0,2087	0,955	0,2208
0	0	-1,315	0,439	0,396	-1,315	0,439	2,793	1,569	0,2199	1	0,2199
▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶
0,10	-0,046	0,584	-0,135	1	0,598	-0,129	0,831	1,609	0,228	1,034	0,221
0,25	-0,117	0,570	-0,129	1	0,618	-0,121	0,796	1,612	0,238	1,082	0,211
0,50	-0,195	0,554	-0,121	1	0,637	-0,108	0,756	1,615	0,249	1,136	0,203
0,75	-0,261	0,541	-0,113	1	0,652	-0,095	0,722	1,618	0,259	1,181	0,196
1	-0,310	0,533	-0,105	1	0,663	-0,082	0,696	1,620	0,267	1,216	0,192
1,50	-0,389	0,522	-0,090	1	0,682	-0,055	0,652	1,625	0,281	1,271	0,187
2	-0,449	0,516	-0,074	1	0,697	-0,029	0,618	1,628	0,293	1,316	0,183
2,50	-0,499	0,514	-0,059	1	0,709	-0,001	0,589	1,632	0,303	1,350	0,181
3	-0,540	0,515	-0,043	1	0,719	0,028	0,564	1,634	0,311	1,379	0,180
4,5	-0,636	0,530	0,008	1	0,743	0,126	0,503	1,638	0,331	1,443	0,181

D
É
T
E
N
T
E

A N N E X E [2]

Expressions analytiques utilisées pour la représentation des coefficients a, b, c, d, η_*, n dans les deux représentations de profils de compression et de détente.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \left(\frac{-9,19 + 6,536 \operatorname{Log} \tilde{H}}{\tilde{H}} \right) \left(1 - e^{-\frac{19}{\tilde{H}}} \right) \quad \text{compression} \quad \underline{\tilde{H}_p = 1} \\ a = -4,71494 + 0,777961 (\tilde{H}-1) + 3,76322 (\tilde{H}-1)^2 - 1,40707 (\tilde{H}-1)^3 \\ \quad + 0,298736 / (\tilde{H}-2) - 0,015857 / (\tilde{H}-2)^2 \quad \text{détente} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = (0,077 \tilde{H} - 1,18 \operatorname{Log} \tilde{H} + 1,11) \left(1 + e^{-\frac{40}{\tilde{H}}} \right) \left(1 + e^{\frac{-18,4(\tilde{H}-2,6456)}{\tilde{H}}} \right) \quad \text{compression} \\ b = 0,267 \tilde{H}^2 - 1,507 \tilde{H} + 1,947 \quad \text{détente} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = d = 0 \quad \text{compression} \\ c = d = 0 \quad \text{détente} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_* = \operatorname{Log} (1,337 \tilde{H}^2 - 3,644 \tilde{H} + 13,69) \quad \text{compression} \\ \eta_* = -57,2234 + 55,7994 \tilde{H} - 30,4692 \tilde{H}^2 + 19,8015 \tilde{H}^3 - 8,00832 \tilde{H}^4 + 1,15414 \tilde{H}^5 \quad \text{détente} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = \frac{e^{-(0,0789 \tilde{H} + 1,217)}}{\left(1 - e^{-(0,0789 \tilde{H} + 1,217)} \right)^{1/2}} + 0,17 \quad \text{compression} \\ n = 1 \quad \text{détente} \end{array} \right.$$

ANNEXE [2] (suite)

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \left(\frac{-1,568 - 0,502 \operatorname{Log} \tilde{H}}{\tilde{H}} + 0,906 \right) \left(1 - e^{-\frac{18}{\tilde{H}}} \right) \quad \text{compression} \\ a = -0,35893 + 1,01998 (\tilde{H} + 0,5) - 0,14152 (\tilde{H} + 0,5)^2 - 0,17584 (\tilde{H} + 0,5)^3 \\ \quad + \frac{0,24663}{\tilde{H} + 0,6} - \frac{0,02057}{(\tilde{H} + 0,6)^2} \quad \text{détente} \end{array} \right. \quad \frac{\gamma_p}{\rho} = 0,2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = (0,116 \tilde{H} - 0,772 \operatorname{Log} \tilde{H} + 0,016) \left(1 + e^{-\frac{45}{\tilde{H}}} \right) \left(1 + e^{-\frac{(\tilde{H} - 0,56)}{\tilde{H}}} \right) \\ b = 0,190 \tilde{H}^2 - 0,227 \tilde{H} - 0,072 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{compression} \\ \text{détente} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = -1,70964 + \sqrt{29191,93 - (\tilde{H} - 20,9125)^2} \quad \text{compression} \\ c = -0,191 \tilde{H} + 0,691 \quad \text{détente} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d = \frac{e^{-(1,22 \tilde{H} + 0,527)}}{\left[1 - e^{-2(0,122 \tilde{H} + 0,527)} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{compression} \\ d = \frac{e^{-[2,92 (\tilde{H} + 0,5) + 0,619]}}{\left[1 - e^{-2 [2,92 (\tilde{H} + 0,5) + 0,619]} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{détente} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_* = \operatorname{Log} (12,99 \tilde{H}^2 - 20,78 \tilde{H} + 22,7) \quad \text{compression} \\ \eta_* = -0,1096 + 1,1380 (\tilde{H} + 1) - 0,170 (\tilde{H} + 1)^2 - 0,9196 (\tilde{H} + 1)^3 \\ \quad + 0,9491 (\tilde{H} + 1)^4 - 0,27254 (\tilde{H} + 1)^5 \quad \text{détente} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = \frac{e^{-(0,177 \tilde{H} + 1,20)}}{\left[1 - e^{-2(0,177 \tilde{H} + 1,20)} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{compression} \\ n = 1 \quad \text{détente} \end{array} \right.$$

A N N E X E [3]

Expressions des paramètres de forme incompressible de second ordre :

$$\tilde{H}_0^* = \frac{1}{\Delta_I^2} \int_0^\infty f(\mathcal{H}-f') d\eta$$

$$\tilde{H}_1^* = \frac{1}{\Delta_I^2} \int_0^\infty f(\mathcal{H}-f'^2) d\eta$$

$$\tilde{K}_0^* = \frac{1}{\Delta_I^2} \int_0^\infty f'(1-f'^2) d\eta \int_0^\eta \mathcal{H} d\eta_1$$

$$\tilde{K}_1^* = \frac{1}{\Delta_I^2} \int_0^\infty f'(1-f'^2) d\eta \int_0^\eta (\mathcal{H}-f'^2) d\eta_1$$

$$\tilde{J}_0^* = \frac{1}{\Delta_I^2} \int_0^\infty f'(1-\mathcal{H}) d\eta \int_0^\eta \mathcal{H} d\eta_1$$

$$\tilde{J}_1^* = \frac{1}{\Delta_I^2} \left[\int_0^\infty f'(1-\mathcal{H}) d\eta \int_0^\eta (\mathcal{H}-f'^2) d\eta_1 - \int_0^\infty f'(\mathcal{H}-f'^2) d\eta \int_0^\eta \mathcal{H} d\eta_1 \right]$$

$$\tilde{J}_2^* = \frac{1}{\Delta_I^2} \int_0^\infty f'(1-f') d\eta \int_0^\eta \mathcal{H} d\eta_1$$

$$\tilde{G}_1^* = \frac{1}{\Delta_I^2} \int_0^\infty f'(1-f') d\eta \int_0^\eta (\mathcal{H}-f'^2) d\eta_1$$

$$\tilde{L}_0^* = \int_0^\infty f''^2 d\eta \int_0^\eta \mathcal{H} d\eta_1$$

$$\tilde{L}_1^* = \int_0^\infty f''^2 d\eta \int_0^\eta (\mathcal{H}-f'^2) d\eta_1$$

$$\tilde{I}_0^* = \frac{1}{\Delta_I^2} \int_0^\infty (\mathcal{H}-f'^2) d\eta \int_0^\eta (\mathcal{H}-f') d\eta_1$$

$$I_1^* = \frac{1}{\Delta_I^2} \int_0^\infty (\mathcal{H}-f'^2) d\eta \int_0^\eta f(\mathcal{H}-f'^2) d\eta_1$$

$$\tilde{N}_0^* = \int_0^\infty \mathcal{H} f f'' d\eta$$

$$\tilde{N}_1^* = \int_0^\infty (\mathcal{H}-f'^2) f f'' d\eta$$



ANNEXE [4]

Expressions analytiques utilisées pour la représentation des coefficients δ , ν , m dans la représentation des profils de sous-couche en fonction de α_2 .

Des représentations polynomiales du 5e degré ont été retenues
 $\nu = C_{\nu i} \alpha_2^{i-1}$; $\delta = C_{\delta i} \alpha_2^{i-1}$; $m = C_{m i} \alpha_2^{(i-1)}$ avec $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

● $\alpha_2 \leq 2,67$

$i \backslash$	1	2	3	4	5	6
$C_{\nu i}$	-44,84	83,44	-60,88	21,91	-3,850	0,2629
$C_{\delta i}$	16,48	-30,52	22,25	-8,027	1,412	-0,0965
$C_{m i}$	0,6068	0,0855	-0,0056	0,0188	-0,0017	$0,3405 \cdot 10^{-4}$

● $2,67 \leq \alpha_2 \leq 4,549$

$i \backslash$	1	2	3	4	5	6
$C_{\nu i}$	-5,958	7,941	-3,648	0,8628	-0,1041	0,0051
$C_{\delta i}$	2,107	-2,629	1,109	-0,2530	0,0292	-0,0013
$C_{m i}$	0,5634	0,1239	-0,0978	0,0191	-0,0014	$-0,9245 \cdot 10^{-5}$

● $4,549 \leq \alpha_2 \leq 6,176$

$i \backslash$	1	2	3	4	5	6
$C_{\nu i}$	19,52	-13,13	3,228	-0,2587	-0,0101	0,0017
$C_{\delta i}$	-1579	1484	-555,3	103,3	-9,568	0,3526
$C_{m i}$	3264	-323,2	127,7	-25,14	2,462	-0,0959

$$b = C_{bi} (\alpha_2 - 4)^{i-1}$$

$$r = C_{ri} (\alpha_2 - 4)^{i-1}$$

$$m = C_{mi} (\alpha_2 - 4)^{i-1}$$

$$\bullet \underline{6,176 \leq \alpha_2 \leq 14,47}$$

$i \backslash$	1	2	3	4	5
C_{ri}	1,332	-0,0807	0,0090	$-0,493 \cdot 10^{-3}$	$0,103 \cdot 10^{-4}$
C_{bi}	-1,196	0,3764	-0,0518	$0,329 \cdot 10^{-2}$	$-0,764 \cdot 10^{-4}$
C_{mi}	0,2294	-0,0267	0,0020	$-0,901 \cdot 10^{-4}$	$0,1672 \cdot 10^{-5}$

$$b = C_{bi} \cdot (\alpha_2 - 10)^{i-1}$$

$$r = C_{ri} (\alpha_2 - 10)^{i-1}$$

$$m = C_{mi} (\alpha_2 - 10)^{i-1}$$

$$\bullet \underline{14,47 \leq \alpha_2}$$

$i \backslash$	1	2	3	4	5
C_{ri}	1,076	-0,0138	$0,130 \cdot 10^{-2}$	$-0,635 \cdot 10^{-4}$	$0,126 \cdot 10^{-5}$
C_{bi}	-0,1749	0,0333	$-0,310 \cdot 10^{-2}$	$0,143 \cdot 10^{-3}$	$-2,67 \cdot 10^{-5}$
C_{mi}	0,1240	$-0,979 \cdot 10^{-2}$	$0,573 \cdot 10^{-3}$	$-0,212 \cdot 10^{-4}$	$0,351 \cdot 10^{-6}$



Annexe [5]

Tabulation des coefficients des profils de sous-couche

m	δ	ν	ζ_k	λ
0,04	-0,0230	1,0100	31,947	487,252
0,06	-0,0299	1,0151	21,878	224,812
0,08	-0,0558	1,0271	16,380	123,585
0,10	-0,1018	1,0461	12,514	75,011
0,12	-0,1706	1,0720	10,545	48,258
0,14	-0,2675	1,1054	8,729	31,952
0,16	-0,4034	1,1471	7,318	21,174
0,18	-0,5902	1,1944	6,176	13,750
0,20	-0,7970	1,2302	5,425	9,289
0,22	-0,8747	1,2376	5,175	7,843
0,24	-0,8861	1,2374	5,026	7,305
0,26	-0,8775	1,2354	4,878	6,876
0,28	-0,8599	1,2326	4,745	6,441
0,30	-0,8374	1,2291	4,549	6,115
0,32	-0,8120	1,2246	4,368	5,742
0,34	-0,7846	1,2191	4,180	5,369
0,36	-0,7556	1,2121	3,986	4,997
0,38	-0,7252	1,2029	3,789	4,627
0,40	-0,6933	1,1908	3,589	4,259
0,41	-0,6766	1,1827	3,488	4,106
0,42	-0,6598	1,1748	3,387	3,925
0,43	-0,6422	1,1647	3,286	3,714
0,44	-0,6241	1,1531	3,185	3,532
0,45	-0,6052	1,1394	3,083	3,352
0,46	-0,5854	1,1234	2,981	3,170
0,47	-0,5645	1,1046	2,878	2,988
0,48	-0,5425	1,0823	2,775	2,804
0,49	-0,5189	1,0557	2,672	2,618
0,50	-0,4934	1,0240	2,578	2,429
0,51	-0,4655	0,9856	2,463	2,235
0,52	-0,4346	0,9389	2,357	2,034
0,53	-0,3998	0,8814	2,249	1,823
0,54	-0,3598	0,8095	2,140	1,599
0,55	-0,3126	0,7178	2,028	1,353
0,56	-0,2554	0,5986	1,913	1,078
0,565	-0,2216	0,5248	1,854	0,925
0,570	-0,1834	0,4388	1,793	0,756
0,575	-0,1396	0,3375	1,732	0,569
0,580	-0,0887	0,2166	1,668	0,358
0,585	-0,0285	0,0703	1,602	0,114
0,587	-0,0012	0,0029	1,575	0,005
0,588	0,0133	-0,0331	1,552	-0,053
0,589	0,0284	-0,0706	1,548	-0,113
0,590	0,0441	-0,1039	1,534	-0,175
0,595	0,1238	-0,13370	1,463	-0,530
0,600	0,2481	-0,16312	1,387	-0,980
0,605	0,3987	-1,0245	1,307	-1,580
0,610	0,6081	-1,15783	1,220	-2,425
0,615	0,9200	-2,4117	1,123	-3,763
0,620	1,4360	-3,8013	1,012	-5,110
0,630	5,4602	-14,7344	0,634	-21,513

← DECOLLEMENT

← $\lambda = 0$



R E F E R E N C E S

- [1] CROCCO L.
Laminar separation
AGARD CP 168 (supplément) Göttingen, (1975) (ou TP ONERA 75-113)
- [2] LE BALLEUR J.C.
Calculs couplés visqueux-non visqueux incluant décollements et ondes de choc en écoulement bidimensionnel.
(1978) AGARD/VKI LS 94 Mémoire n° 3 (ou TP ONERA 1978-5)
- [3] REYHNER T.A. FLUGGE-LOTZ
The interaction of a shock-wave with a laminar boundary layer.
Standford Univ. Dir. of Eng. Mech. (1966)
- [4] ZEYTOUNIAN R.KH.
Cours d'Aérodynamique à l'Université de Lille I.
- [5] VIVIAND H.
Traitement des problèmes d'interaction fluide parfait-fluide visqueux en écoulement bidimensionnel compressible à partir des équations de Navier-Stokes (1978)
AGARD/VKI LS94 Mémoire n°2
- [6] POLHAUSEN K.
Zu näherungsweise Integration du Differential-Gleichung der laminaren Reibungsschicht (1921)
- [7] MAKOFSKI R.
A two parameter method for shock wave laminar boundary layer interaction in flow separation
(1963)
- [8] HONDA M.
A theoretical investigation of the interaction between shock-waves and boundary layers.
JAS. vol 25 n° 11 (1958)
- [9] TANI I.
On the approximate solution of the laminar boundary layer equations
JAS 21 p. 487 - 504 (1954)
- [10] LEES ET REEVES
Supersonic separated and reattaching laminar flows. Part I. General theory and application to adiabatic boundary layer shock waves interactions
AIAA vol. 2 n° 11 (1964)
- [11] KLINEBERG J.M.
Theory of laminar viscous-inviscid interactions in supersonic flow.
Cal. Inst. Tech. Ph. D. Thesis (1968)

- [12] CURLE
The effects of heat transfer on laminar boundary layer separation in supersonic flow.
Asco. Res. Counc. n° 21986 FM 2965 (1960)
- [13] GADD G.E.
Boundary layer separation in the presence of heat transfer
AGARD rep. n° 280 (1960)
- [14] FALKNER V.M. et SKAN S.W.
Some approximate solutions of the boundary layer equations
ARC-R et M 1314 (1930)
- [15] COHEN C. et RESHOTKO E.
Similar solutions of compressible boundary layer with heat transfer and pressure gradient
NACA rept. n° 1293 (1956)
- [16] CROCCO L. and LEES L.
A mixing theory for the interaction between dissipative flows and nearly isentropic streams
5. AERO. Sci. vol 19 (1952)
- [17] STEWARTSON K.
Multistructured boundary layers of flat plates and related bodies.
Advances in Appl. Mech. vol 14 pp. 145 - 239 (1974)
- [18] CARRIERE P., SIRIEIX M., DELERY J.
Méthodes de calcul des écoulements turbulents décollés en supersonique.
Progress in Aerospace SCI. vol 16. n°4, pp. 385-429 (1975)
- [19] HOLDEN M.S. et MOSELLE J.R.
Theoretical and experimental studies of the shock wave-boundary layer interaction on compression surfaces in hypersonic flow.
Cornell Aero-nautical Laboratory, ARC 70 0002 (1970)
- [20] LE BALLEUR J.C.
Couplage visqueux-non visqueux : méthode numérique et application aux écoulements transsoniques et supersoniques.
La Recherche Aérospatiale, n° 1978-2
- [21] HARTREE
On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer
Cambr. Phil. Soc. Vol. 33 (1937)
- [22] NEILAND V.
Asymptotic problems of the viscous supersonic flows
ZAGI Report n° 1529 (1971) (in Russian).
- [23] KING MON TU, WEINBAUM G.
A non-asymptotic triple deck model for supersonic boundary layer interaction.
AIAA J. vol 14, n°6 pp. 767-775 (1976)

- [24] WEINBAUM S., GARVINE R.W.
On the two dimensional viscous counterpart of the one-dimensional sonic throat
J.F.M. vol. 39 pp. 57-85 (1969)
- [25] LE BALLEUR J.C.
Calculs couplés visqueux-non visqueux :
Analyse du problème incluant décollements et ondes de choc.
LA RECHERCHE AEROSPATIALE n°6 pp. 349-358 (1977)
- [26] LI et NAGAMATSU
Similar solutions for the compressible boundary layer equations
J.A. S. vol 22 pp. 607-616 (1955)
- [27] CHAPMAN D.R. KUEHN D.M. et LARSON H.K.
Investigation on separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition
NACA TR 1356 (1958)
- [28] AUFFRET J.
Solutions de similitude approchées.
Stage de 3ème année de l'Ecole Centrale - ONERA
- [29] KLINEBERG et STEGER
Calculations of separated flows at subsonic and transsonic speeds.
Proceed of Tutem - Conf. on Numerical Methods in fluids Mechanics - Springer. Verlag vol 11 - pp. 161-168 (1973)
- [30] WERLE et VASTA
New method for supersonic boundary layer separations.
AIAA J. Vol 12 n° 11 (1974)
- [31] HAKKINEN R., GREBER I., TRILLING L., ABARBANEL S.
The interaction of an oblique shock wave with a laminar boundary layer.
NASA Memo. 2.18.59 (1959)
- [32] LEWIS, KUBOTA, LEES
Experimental investigation of supersonic laminar two-dimensional boundary layer separation in a compression corner with and without cooling.
AIAA 3.6.714 (1968)
- [33] HOLLANDERS H.
Etude de méthodes implicites pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes en fluide compressible.
Rapport technique ONERA (1978)
- [34] STEWARTSON et WILLIAMS
Self induced separation
Proc. Royal Soc. A 312 pp. 181-206 (1969)
- [35] STEWARTSON K.
Proc. Camb. Phil. Soc. 47, 445 (1951)

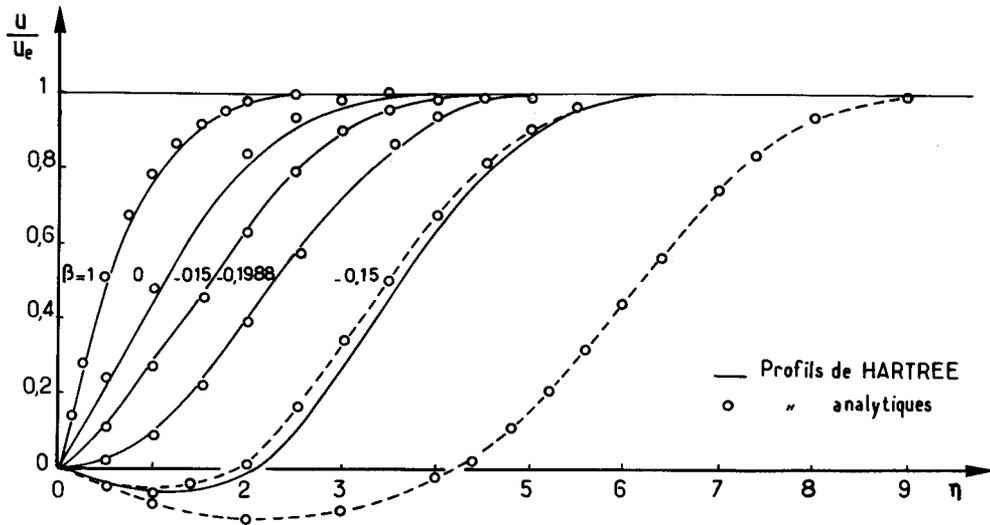


Planche 1 – Comparaison des profils de vitesse dans le cas adiabatique avec ceux de Hartree.

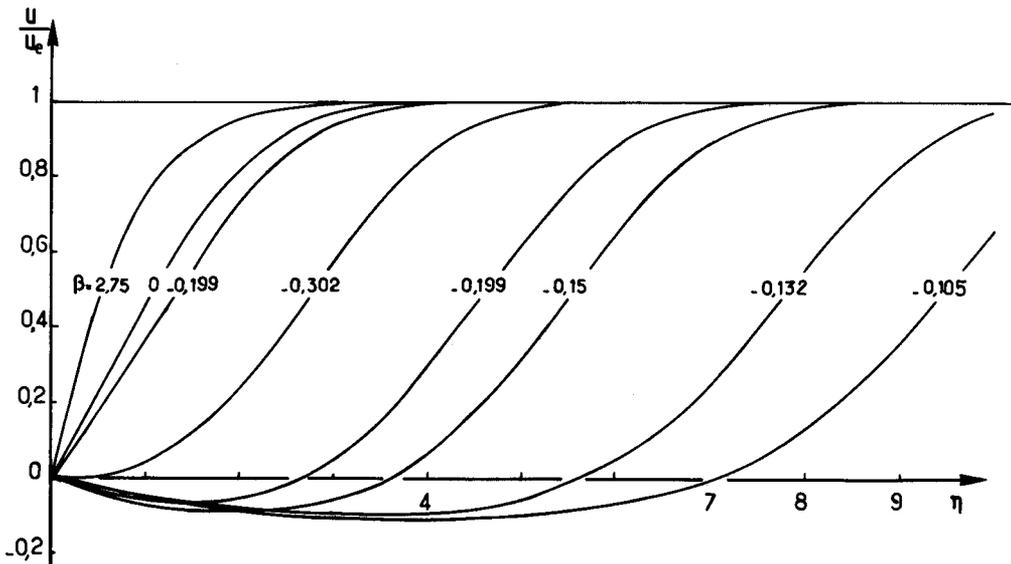


Planche 2 – Profils de vitesse pour une paroi refroidie : $H_p = 0,2$

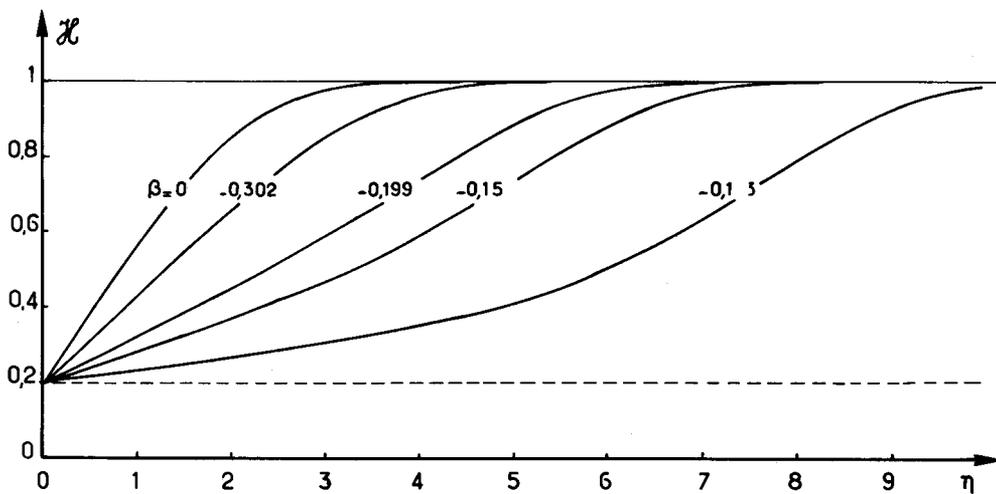


Planche 3 – Profils d'enthalpie : $H_p = 0,2$

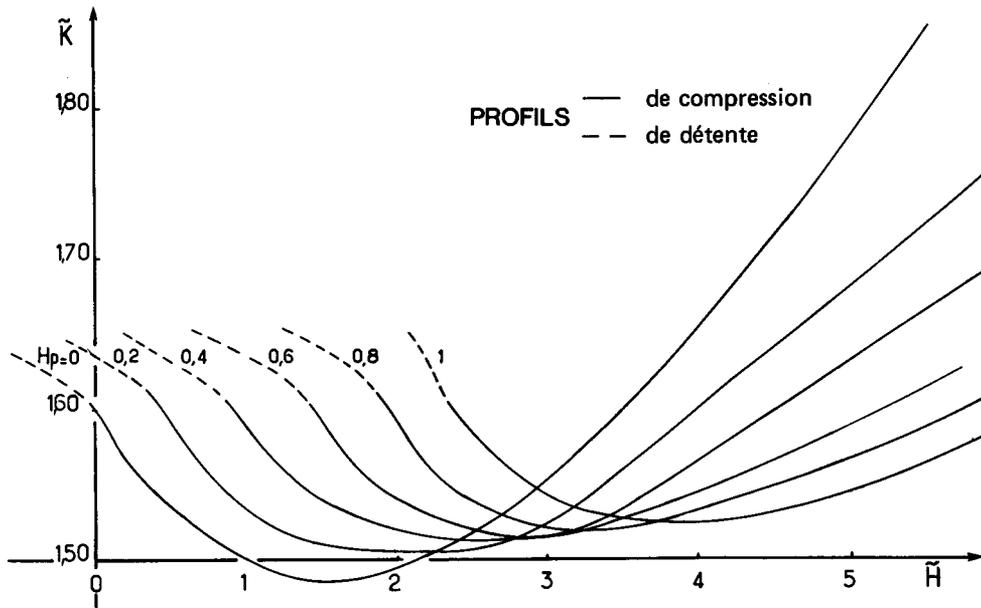


Planche 4 – Comportement de \tilde{K} en fonction de \tilde{H} .

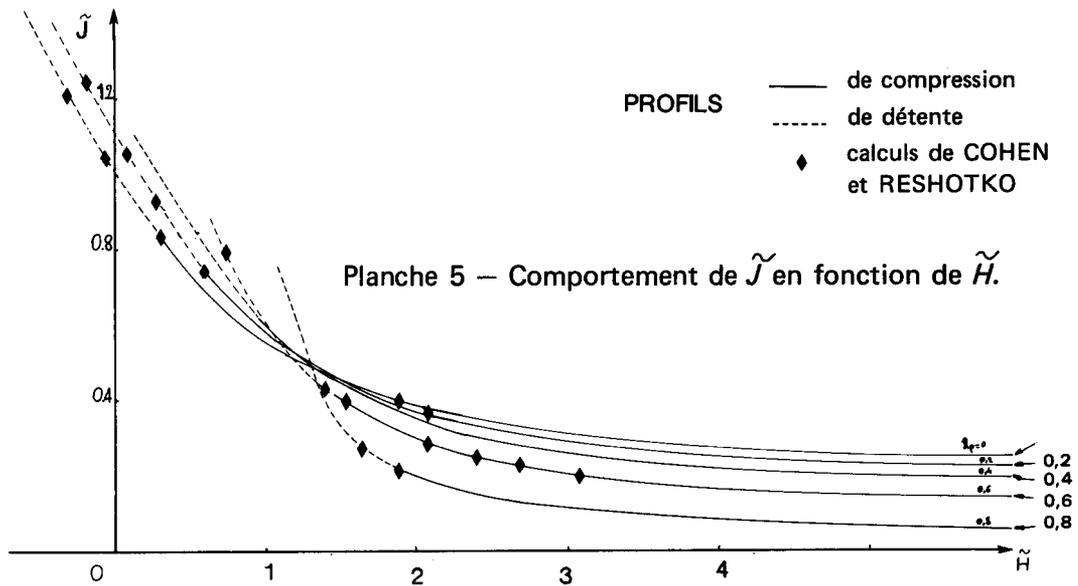


Planche 5 – Comportement de \tilde{J} en fonction de \tilde{H} .

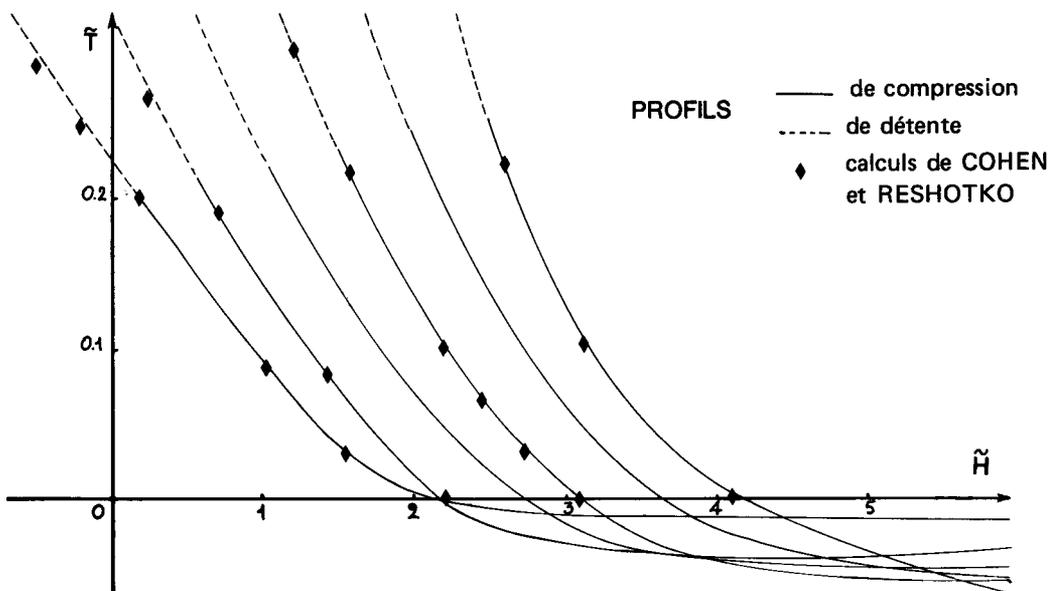


Planche 6 – Comportement de \tilde{T} en fonction de \tilde{H} .

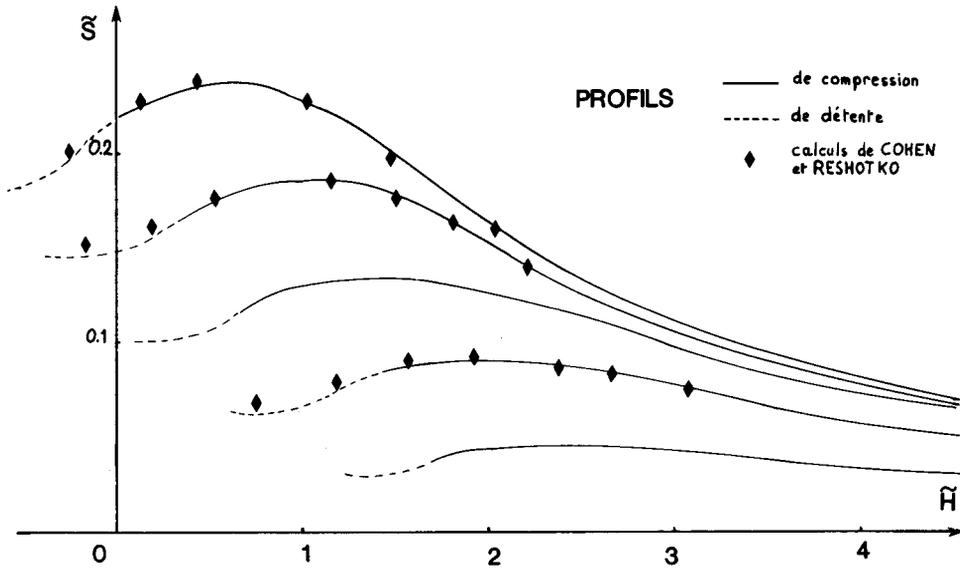


Planche 7 – Comportement de \tilde{S} en fonction de \tilde{H} .

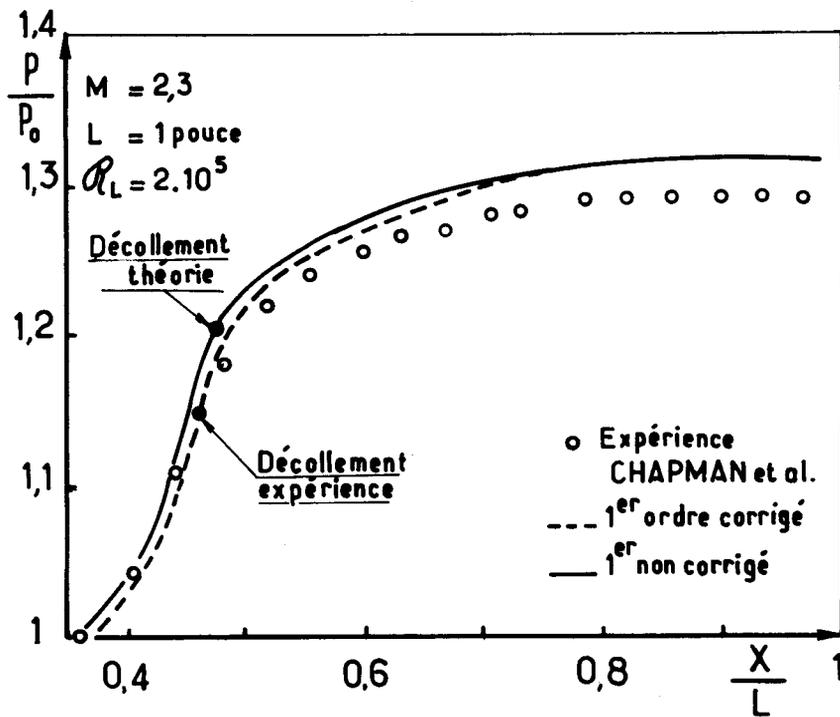


Planche 8 – Calcul de premier ordre avec et sans correction de pression de 2^e ordre.

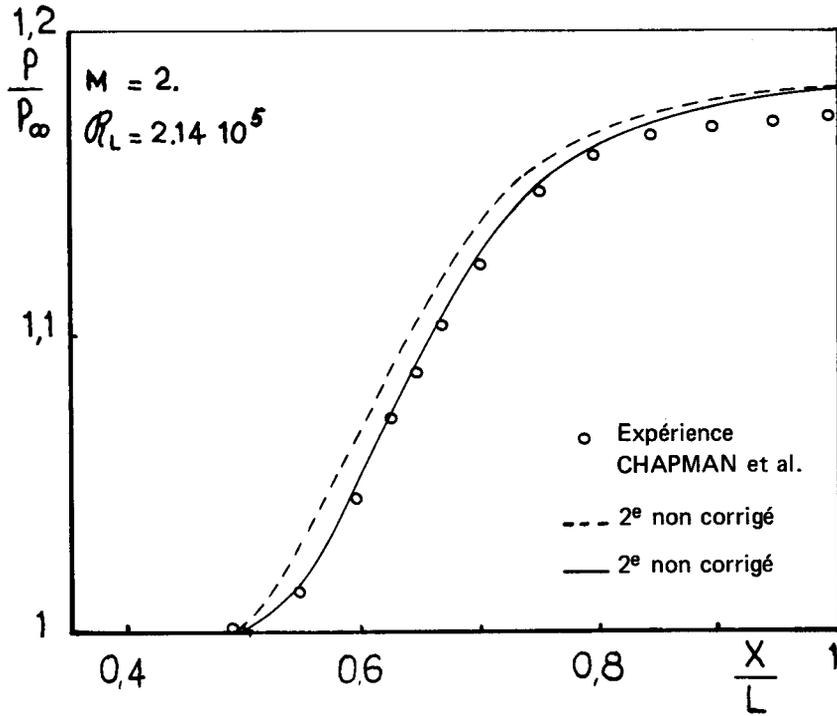


Planche 9 — Calcul de second ordre avec et sans correction de pression de 2^e ordre.

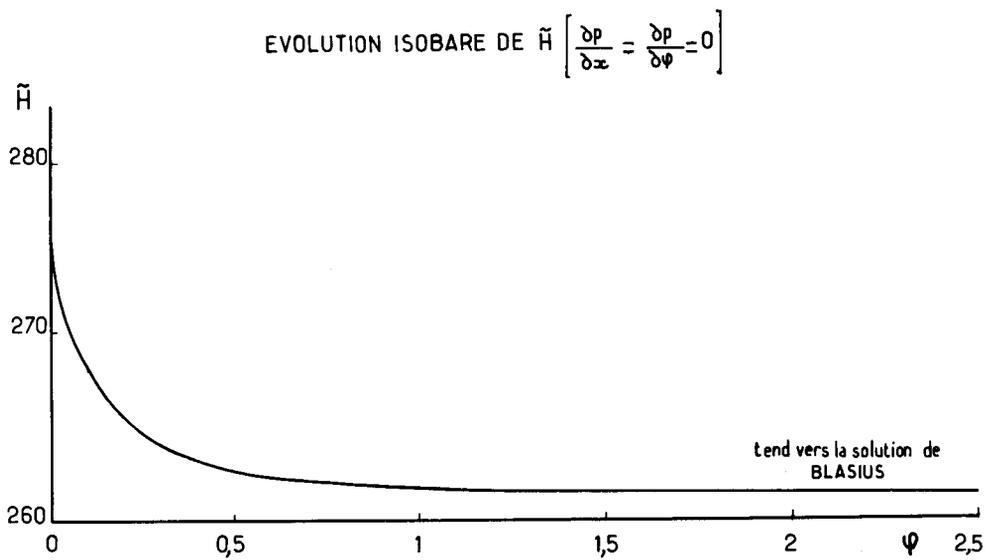


Planche 10 — Evolution isobare de $H \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \psi} = 0$

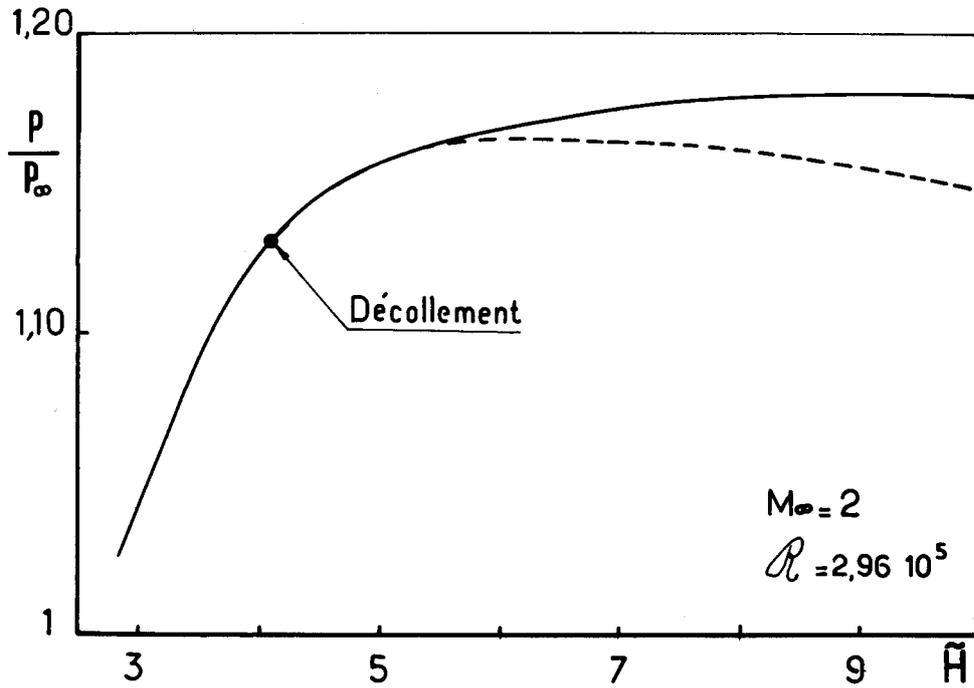


Planche 11 — Exemple de chute de pression après décollement dans le cas adiabatique.

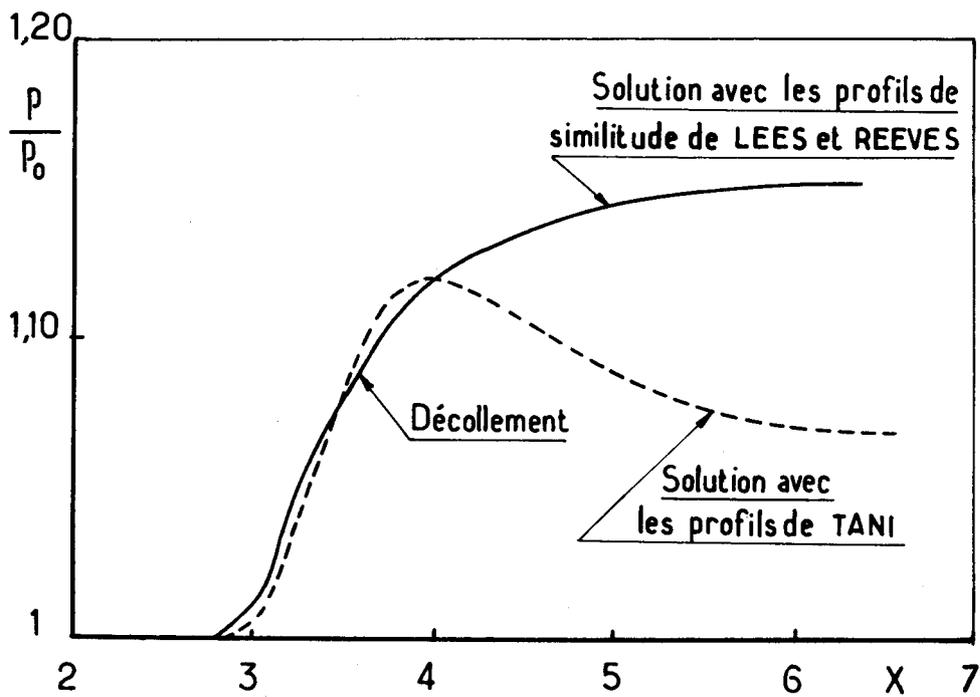


Planche 12 — Comparaison des distributions de pression.

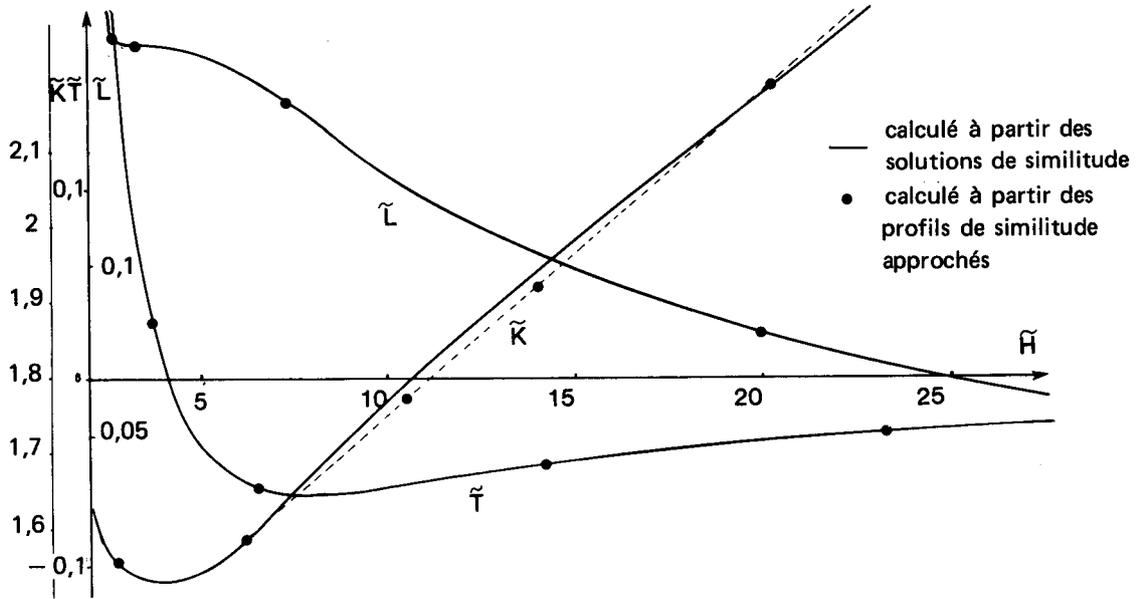


Planche 13 – Comportement de \tilde{K} , \tilde{T} , \tilde{L} pour les grands \tilde{H} .

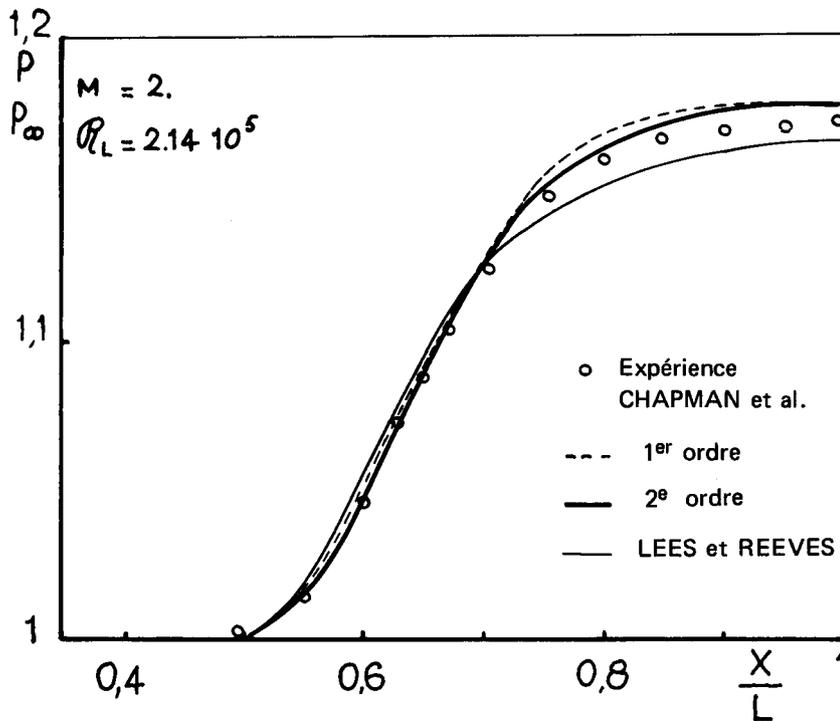


Planche 14 – Comparaison calculs de 1^{er} ordre
& de 2^e ordre.

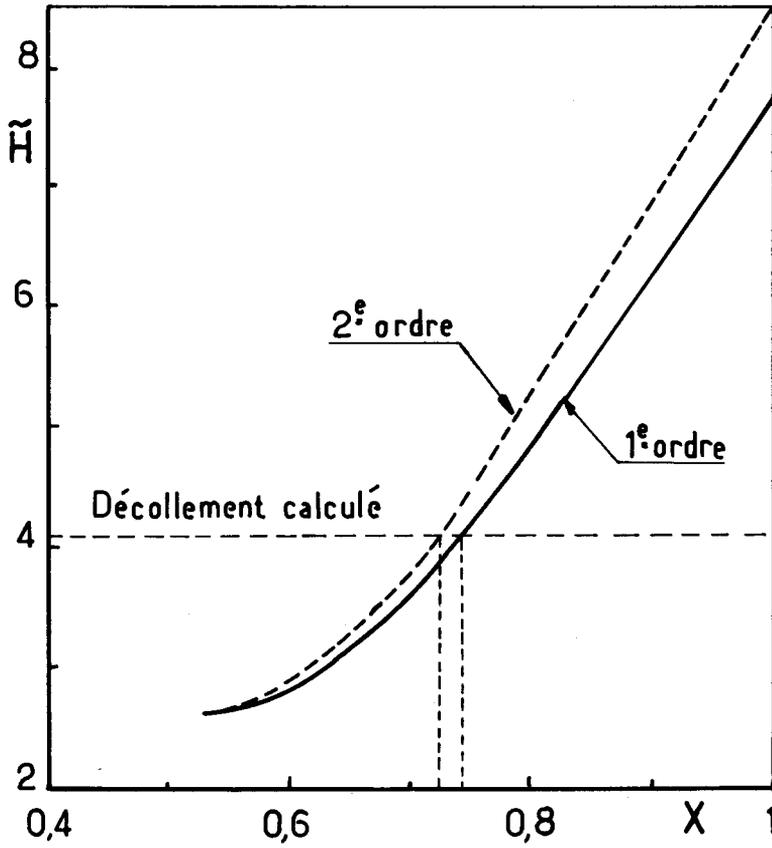


Planche 15 – Evolution de $\tilde{H}(x)$ pour un décollement libre
Prévision du point de décollement

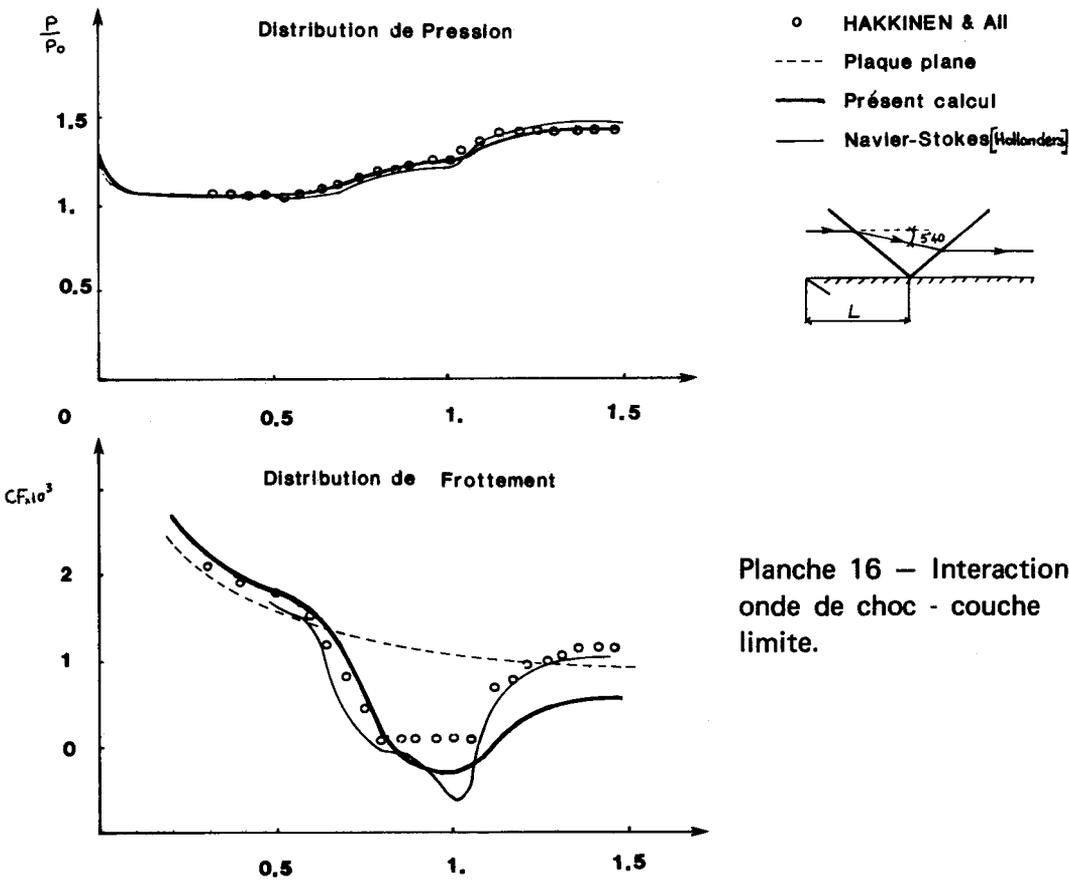


Planche 16 – Interaction
onde de choc - couche
limite.



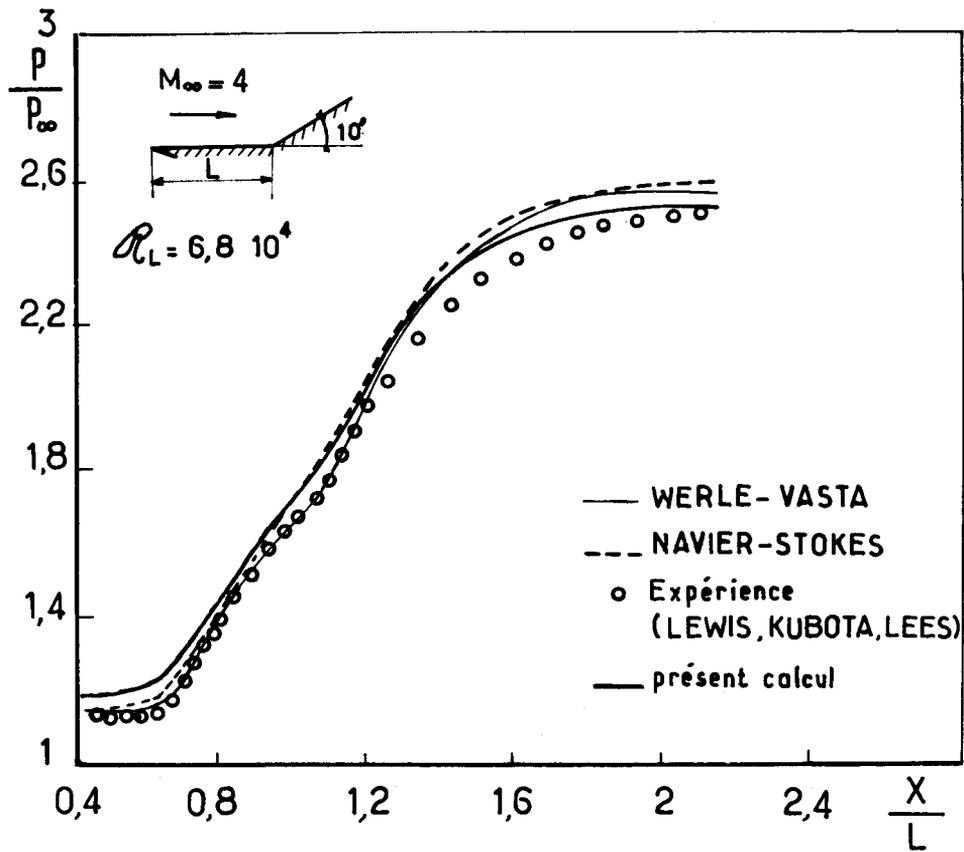


Planche 17 — Distribution de pression
Rampe supersonique

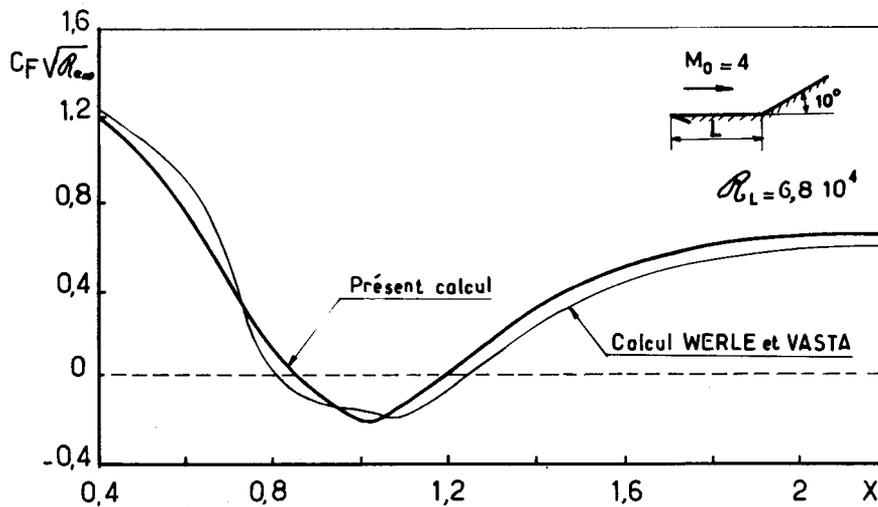


Planche 18 — Distribution de frottement.

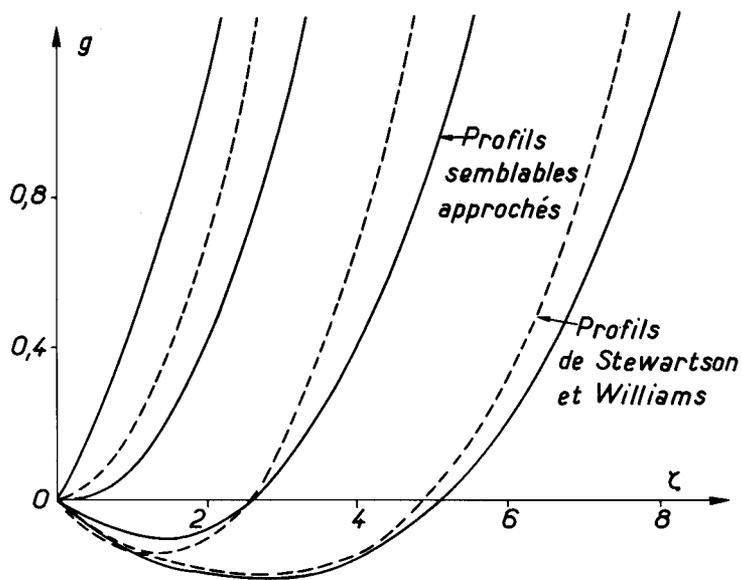


Planche 19 — Profils de sous-couche laminaire.

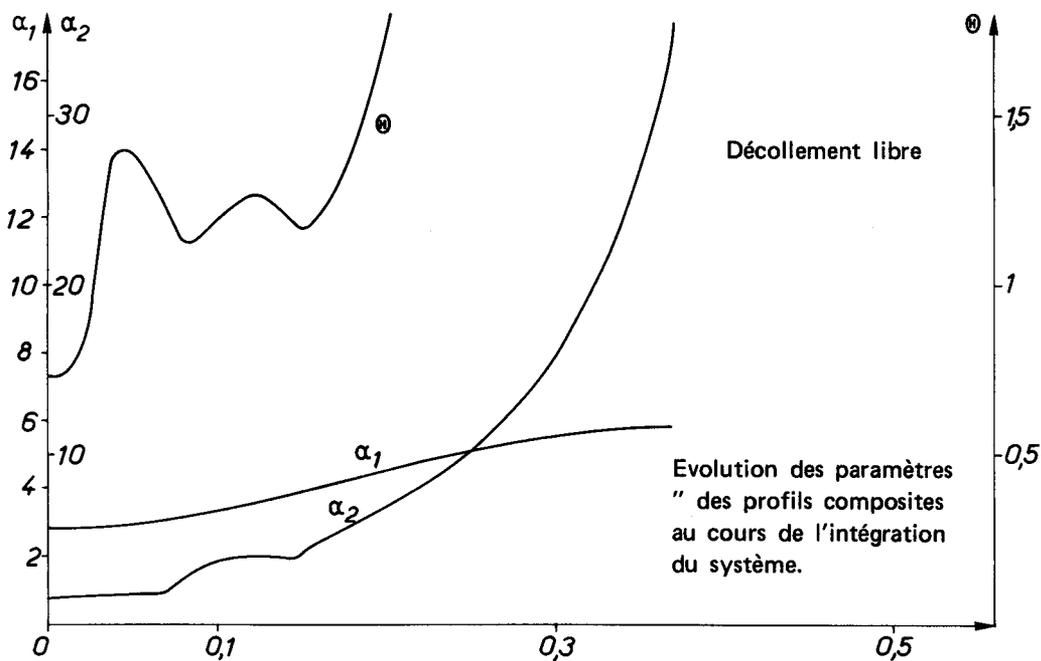


Planche 20 — Méthode intégrale avec sous-couche limite.

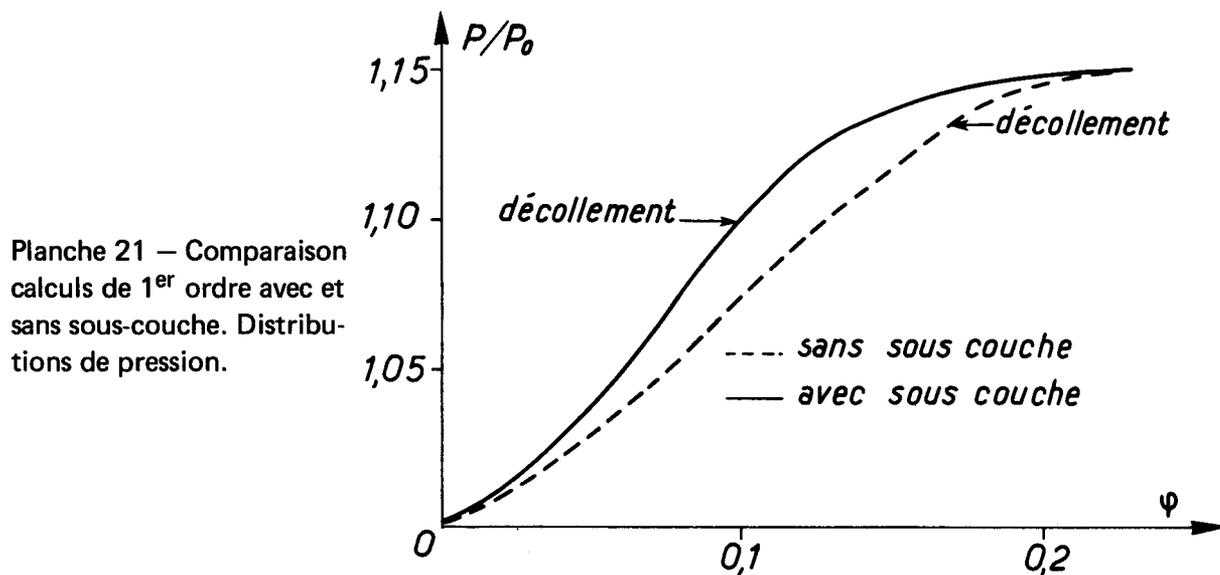
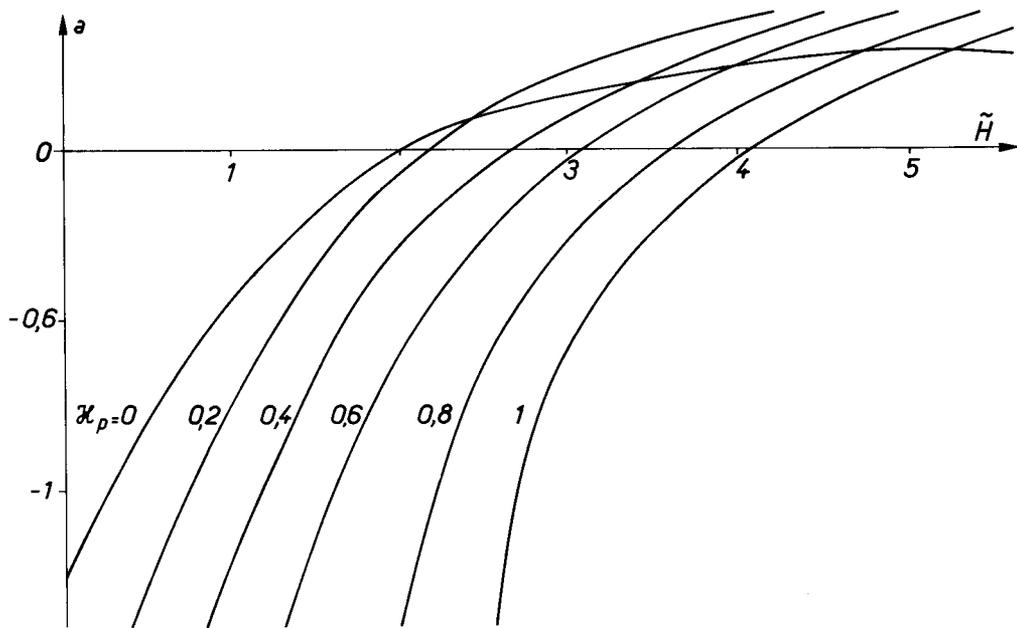
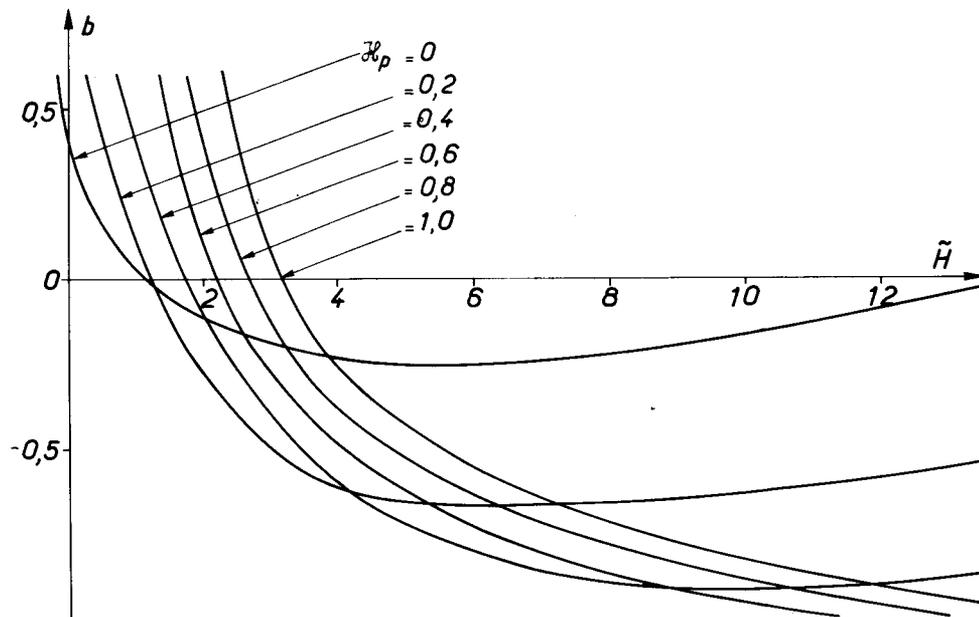


Planche 21 — Comparaison calculs de 1^{er} ordre avec et sans sous-couche. Distributions de pression.



PLANCHES ANNEXES

Planche 1 – Coefficient a de la représentation des profils de compression.Planche 2 – Coefficient b de la représentation des profils de compression.

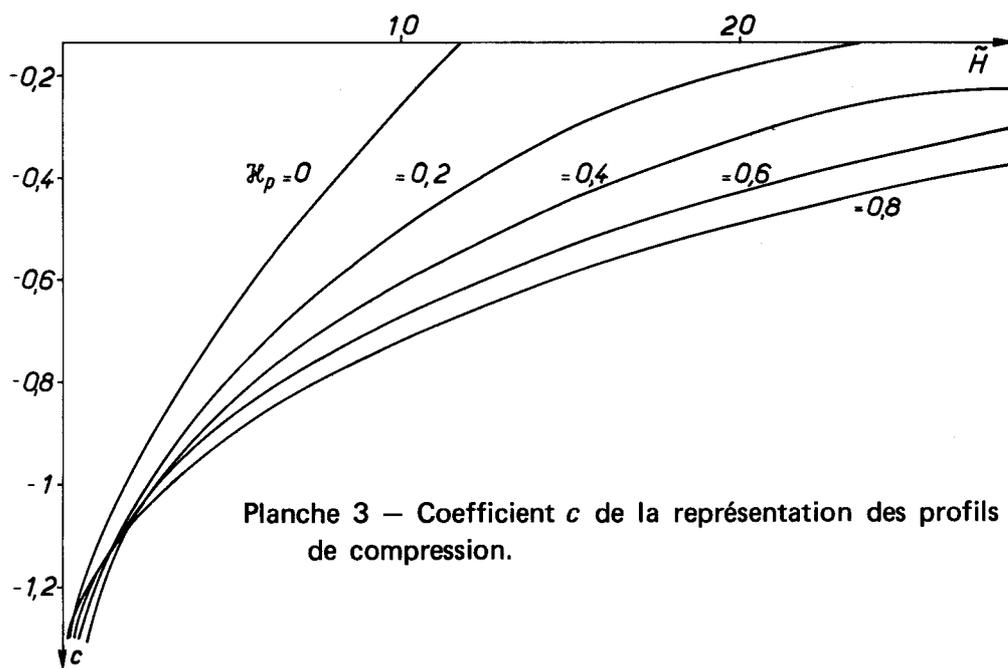


Planche 3 — Coefficient c de la représentation des profils de compression.

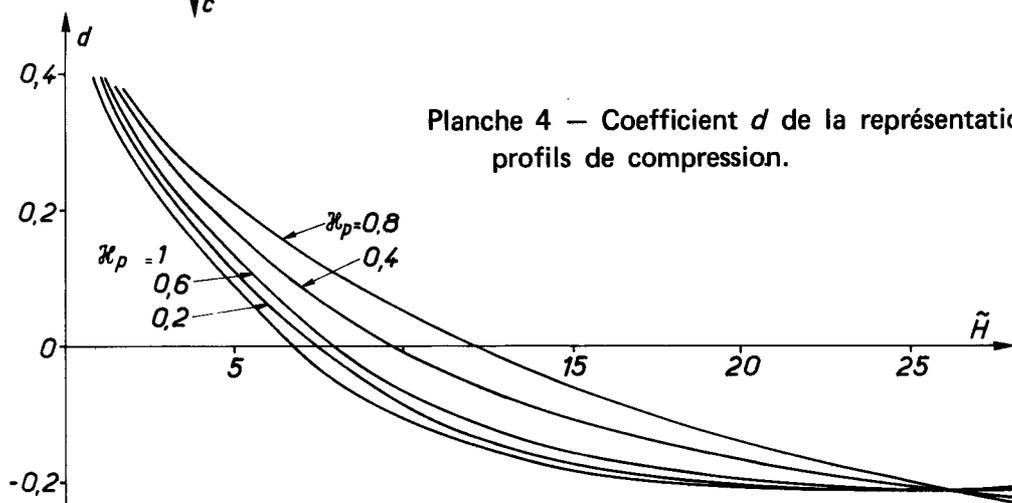


Planche 4 — Coefficient d de la représentation des profils de compression.

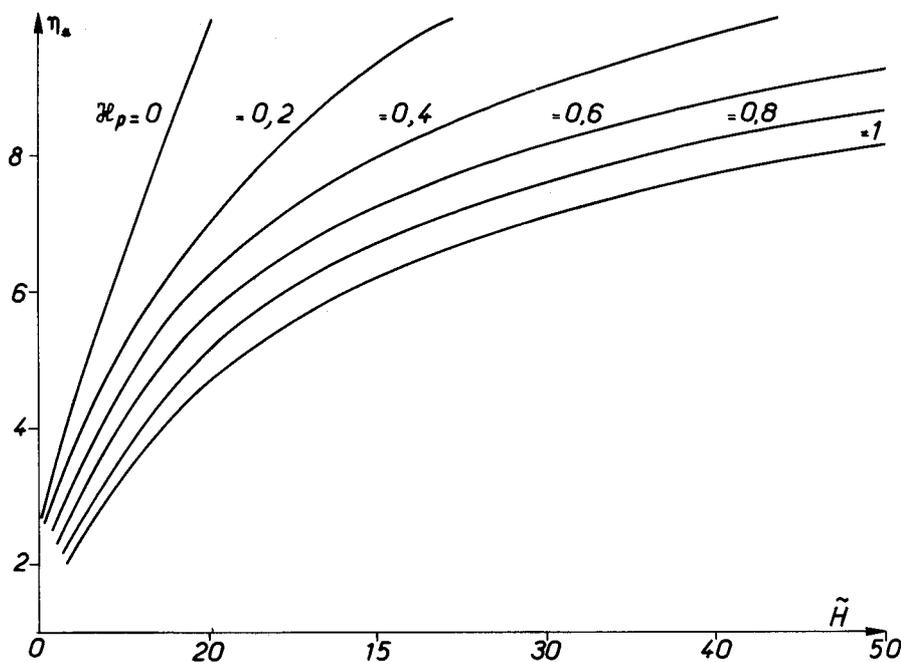


Planche 5 — Coefficient η_* de la représentation des profils de compression.



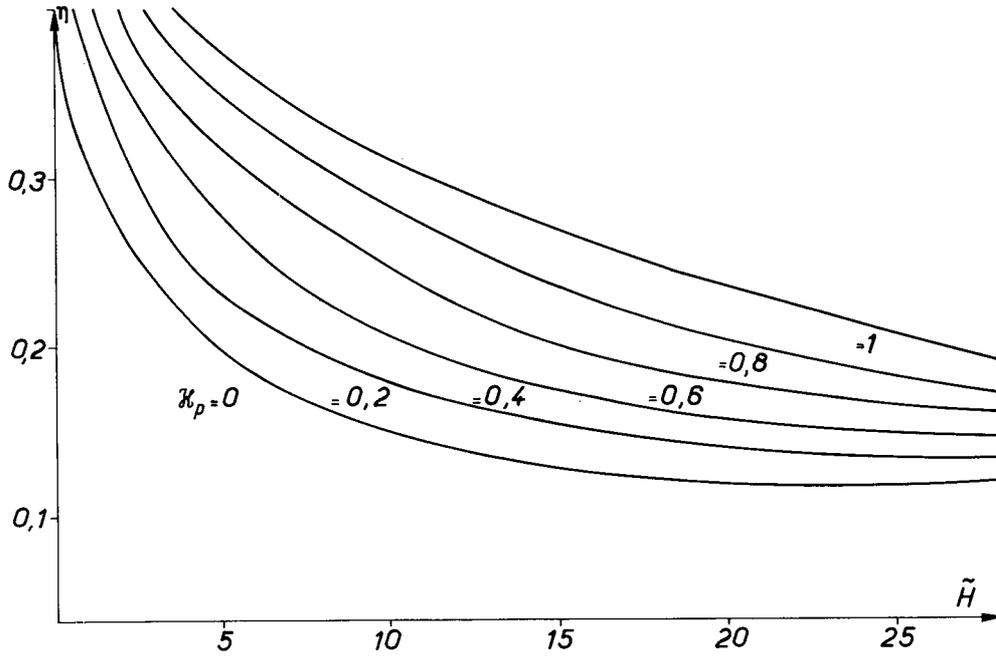


Planche 6 — Coefficient n de la représentation des profils de compression.

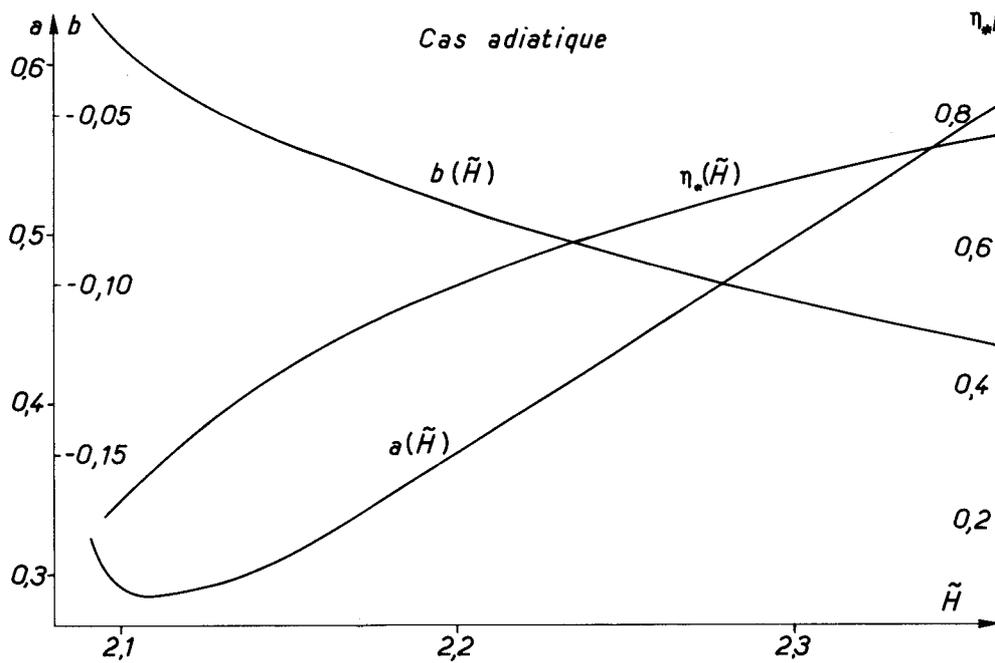


Planche 7 — Coefficients a, b, η_* de la représentation des profils de détente.

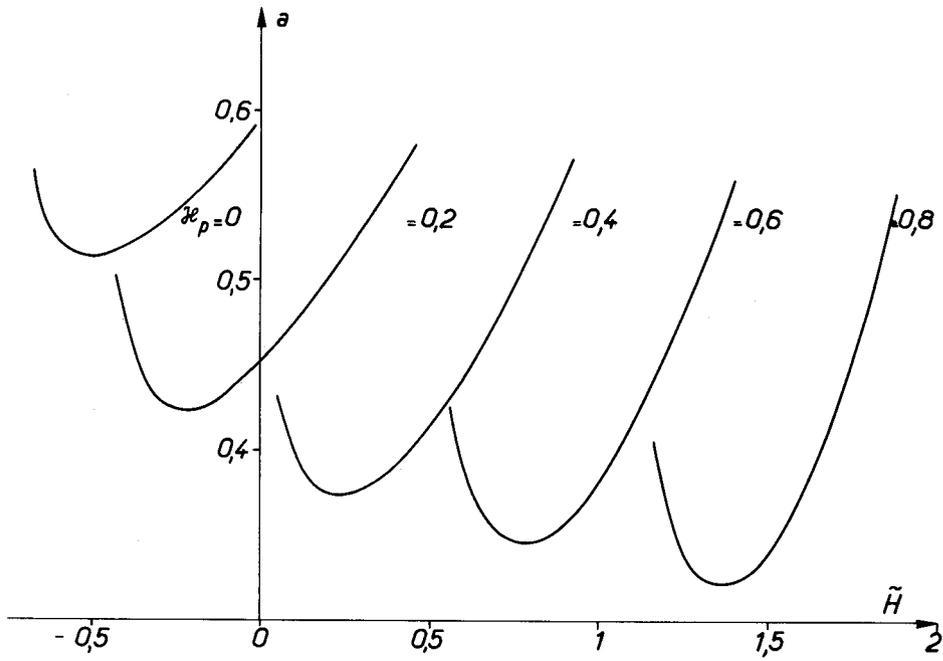


Planche 8 — Coefficient a de la représentation des profils de détente.

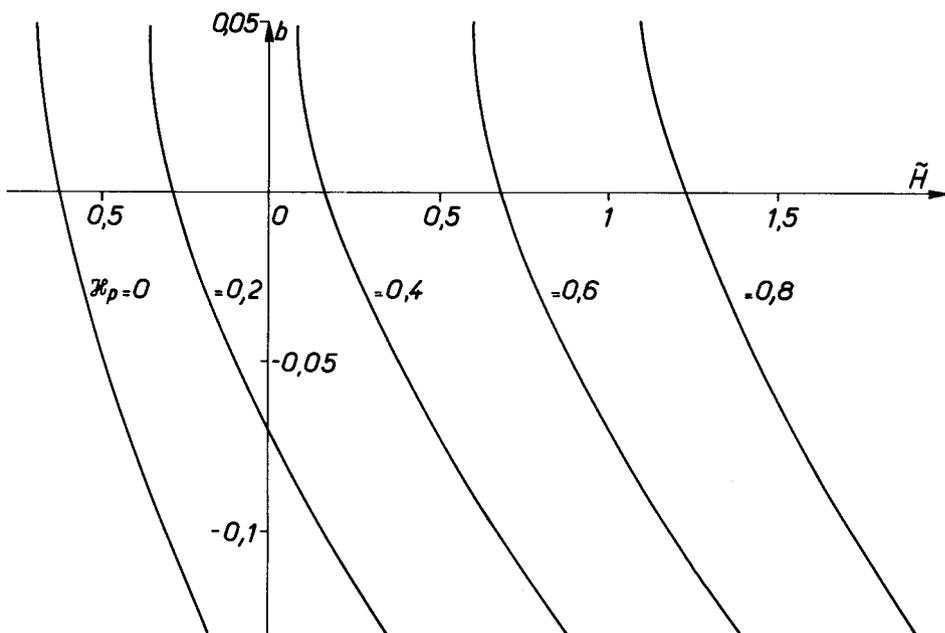


Planche 9 — Coefficient b de la représentation des profils de détente.

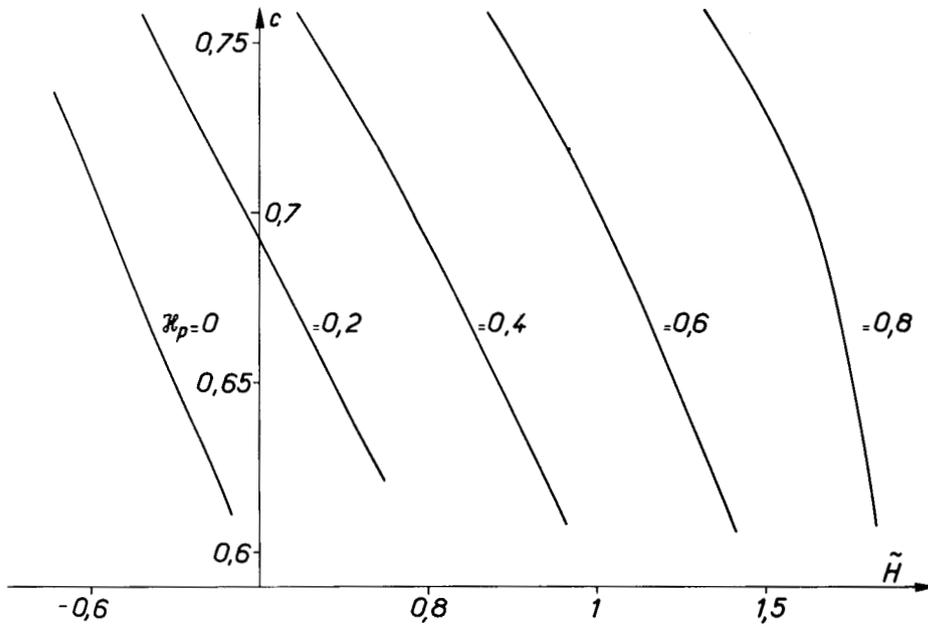


Planche 10 — Coefficient c de la représentation des profils de détente.

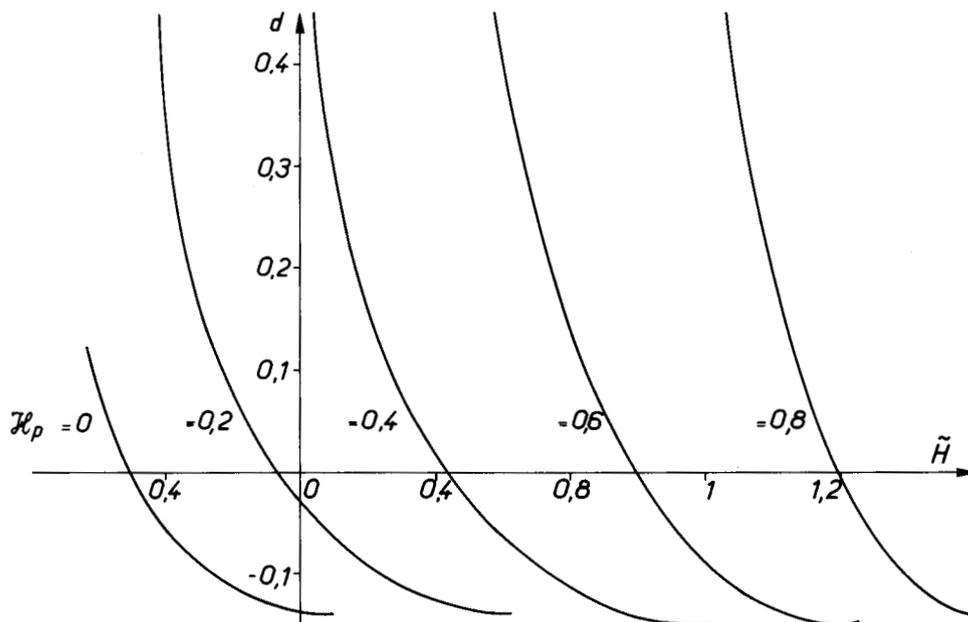


Planche 11 — Coefficient d de la représentation des profils de détente.

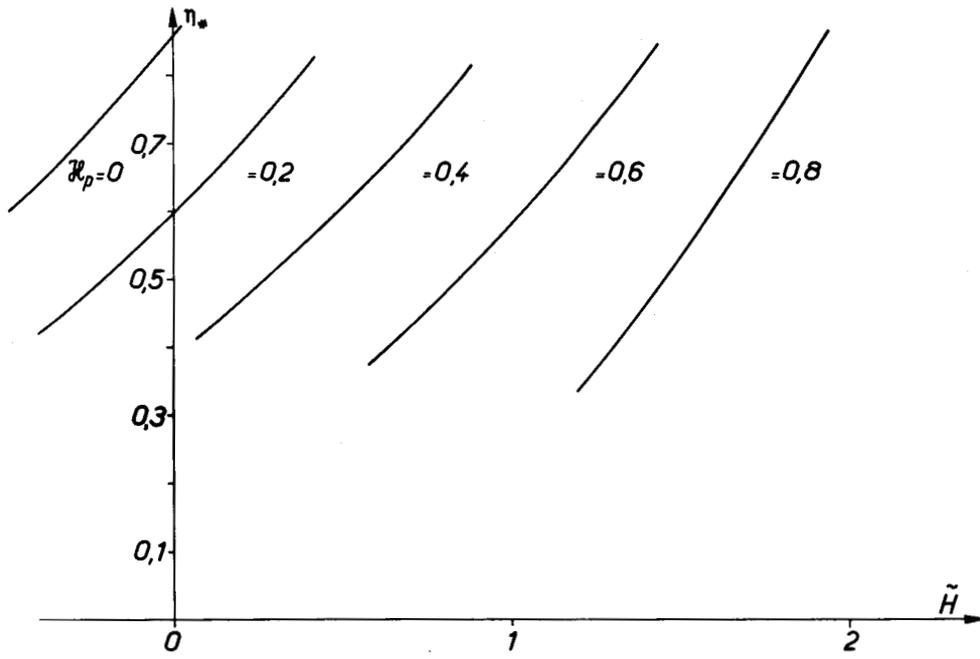


Planche 12 – Coefficient η_* de la représentation des profils de détente.

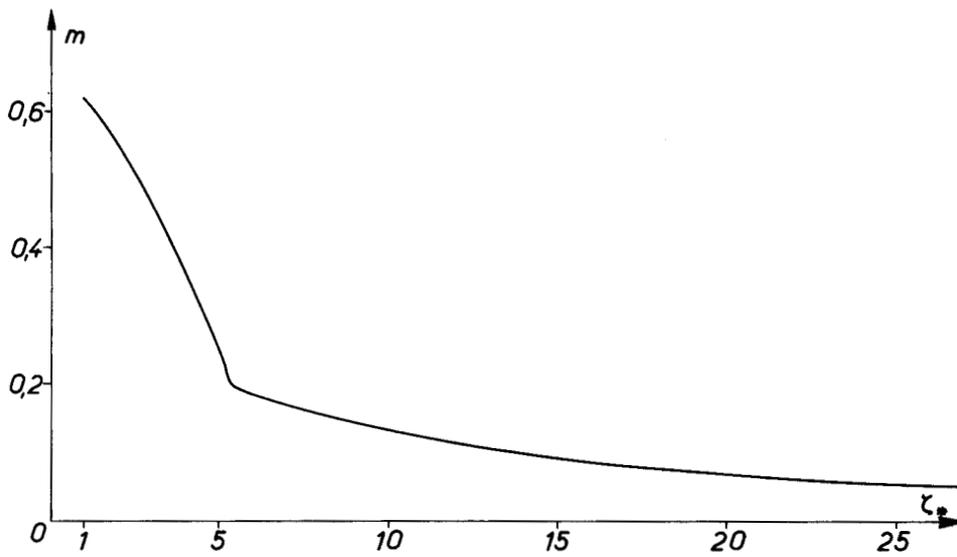
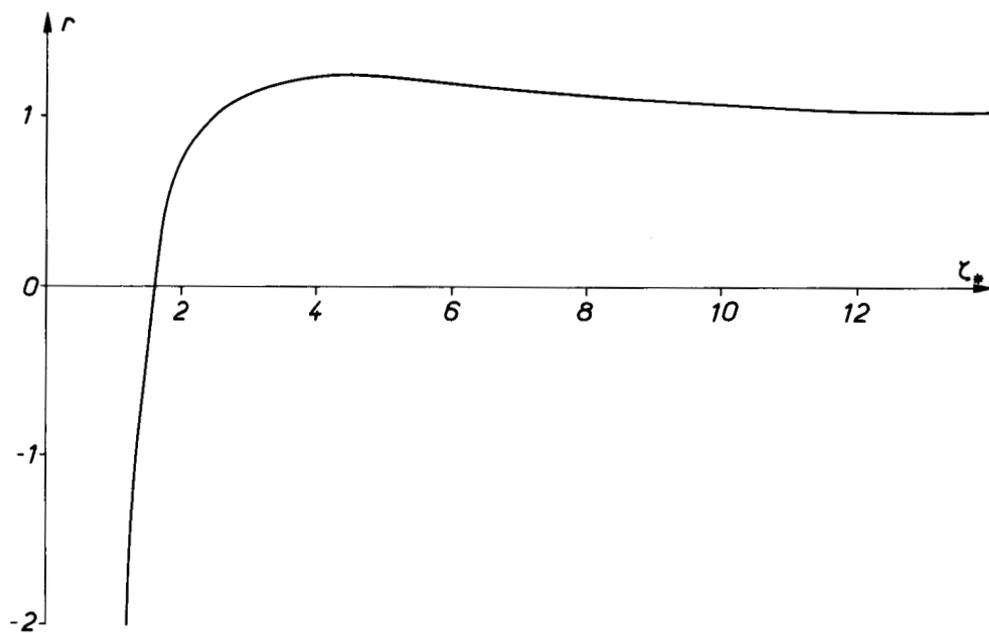
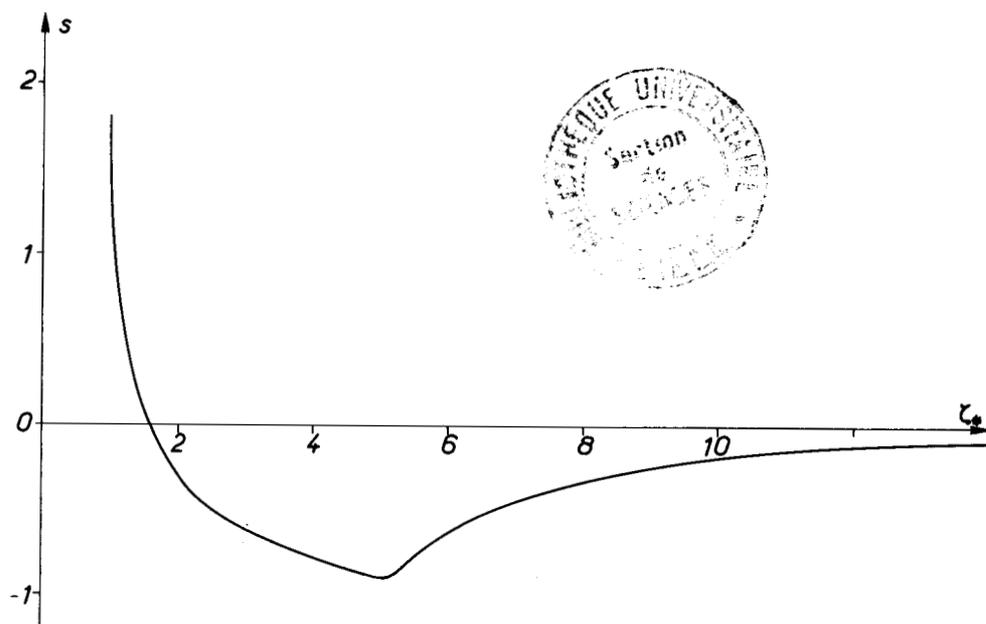


Planche 13 – Paramètre m de sous-couche.

Planche 14 — Paramètre r de sous-couche.Planche 15 — Paramètre s de sous-couche.