50376
1979
40

N° D'ORDRE 757

50376
1979
40

T H E S E

PRESENTEE

A

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

POUR OBTENIR LE TITRE

DE

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

EN MECANIQUE

par

LALVEE Gilles

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

CINEMATIQUE ET CONTRAINTE A LA PAROI ET LUBRIFICATION EN FLUIDE NON NEWTONIEN.

Soutenue le 16 Mai 1979

Président : M. ZEYTOUNIAN, Professeur (Lille I)

Rapporteur : M. DYMENT, Maître de Conférences (Lille I)

Examinateurs : MM. FLAMME, Maître de Conférences (Lille I)
PARSY, Maître de Conférences (Lille I).

TABLE DES MATIERES

Introduction I

CHAPITRE I - Rappels de Mécanique des Milieux Continus.

1.1.- Le gradient de la déformation 1

1.2.- Les tenseurs de Cauchy, Finger, Rivlin-Ericksen et White-Metzner 3

1.3.- Les écoulements viscométriques 4

1.4.- Les matériaux simples 7

CHAPITRE II - Cinématique à la paroi.

2.1.- Le gradient de la vitesse à la paroi 10

2.2.- Le gradient de la vitesse d'ordre n à la paroi 12

2.3.- Le gradient de la déformation 13

2.4.- Les tenseurs de Cauchy, Finger, Rivlin-Ericksen et White-Metzner 16

2.5.- Ecoulements particuliers 21

CHAPITRE III - Contrainte à la paroi.

3.1.- Le cas général des matériaux simples 26

3.2.- Les fluides simples incompressibles 31

3.3.- Les fluides de Rivlin-Ericksen 34

3.4.- Les fluides de White-Metzner 48

3.5.- Les fluides à fonctions de contraintes pariétales normales égales 51

3.6.- Remarque : écoulement stationnaire de matériaux simples 53

CHAPITRE IV - Lubrification des surfaces cylindriques en fluide de Rivlin-Ericksen de degré quatre.

4.1.- Introduction 56

4.2.- Le problème du patin 58

4.3.- L'effet non-viscométrique 67

4.4.- Résolution du problème du patin 69

CHAPITRE V - Application au patin plan.

5.1.- Introduction 76

5.2.- Lois de variations 79

5.3.- Les caractéristiques géométriques du film fluide 82

5.4.- Le frottement à la paroi mobile 83

5.5.- Influence des caractéristiques du matériau 87

5.6.- Conclusion concernant le cas du patin plan 94

CHAPITRE VI - *Application au coussinet.*

6.1.- Introduction 96
6.2.- Lois de variations et caractéristiques de fonctionnement.. 100
6.3.- Influence des caractéristiques du matériau 111

CONCLUSION 117

INTRODUCTION

Le sujet initial de cette étude était d'apporter une contribution à l'explication de l'amélioration des conditions de fonctionnement observée en lubrification par fluides non-newtoniens. La plupart des auteurs s'accordent à penser qu'une explication peut être trouvée dans un effet de contrainte normale. HARNOY [5] l'a montré en étudiant le problème du coussinet pour un fluide du second ordre au sens de Jauman, fluide qui introduit, en plus de la viscosité classique un seul coefficient caractéristique. Récemment DAVIES et WALTERS [6], ont émis l'idée selon laquelle cette amélioration pourrait procéder aussi d'un effet de contrainte tangentielle, ils ont étudié le problème du coussinet avec un fluide de Rivlin-Ericksen de degré trois (six coefficients caractéristiques : la viscosité classique, deux coefficients pour le degré deux, trois pour le degré trois). Leurs conclusions sont les suivantes : par rapport au fluide newtonien correspondant (c'est-à-dire le fluide newtonien présentant la même viscosité classique) et *pour une même excentricité*,

- au degré deux, effet de contrainte normale, la portance est augmentée le frottement inchangé,
- au degré trois, effet de contrainte tangentielle, le frottement et la portance sont diminués (en valeur relative la portance diminuant plus que le frottement).

Ces conclusions, apparemment favorables, du moins au degré deux, nous ont cependant semblées incomplètes. Plus précisément, les termes de la comparaison effectuée par DAVIES et WALTERS nous sont apparus discutables. En effet, ils comparent les valeurs de la portance et du frottement obtenus en fluide newtonien à leurs valeurs en fluide non newtonien, pour une *géométrie donnée du film fluide*. Nous avons pensé qu'il est plus correct d'aborder le problème en considérant la portance comme une donnée afin d'étudier l'influence des coefficients caractéristiques sur le frottement et sur l'épaisseur minimum du film fluide. Nous avons, ainsi, étudié le *problème du patin pour un fluide de Rivlin-Ericksen de degré trois* [11].

Cette première étape nous a amené tout naturellement à nous intéresser au problème général de la contrainte sur une paroi solide. En posant la condition d'adhérence comme seule hypothèse, nous avons généralisé les résultats de BERKER, relatifs à un fluide incompressible du second ordre au cas des fluides, compressibles ou non, de Rivlin-Ericksen, de *complexité quelconque* [7]. A cette occasion, nous avons introduit la classe

d'écoulements à rotationnel pariétal de direction localement fixe : le problème de lubrification en est un excellent exemple. Nous avons alors remarqué que, dans cet écoulement de lubrification, un *fluide de Rivlin-Ericksen de degré quatre* introduit, en plus d'un effet de contrainte normale de nature viscométrique (comme l'effet de contrainte normale dû au degré deux, et l'effet de contrainte tangentielle dû au degré trois) un effet supplémentaire, non-viscométrique. Deux voies de recherche s'offraient alors; le présent mémoire développe les résultats que nous avons obtenus dans ces deux directions : les trois premiers chapitres sont consacrés à la question de cinématique et contraintes à la paroi, les suivants traitent du problème de lubrification des surfaces cylindriques au degré quatre.

Le chapitre I est constitué de rappels de mécanique des milieux continus.

Au chapitre II, utilisant la condition d'adhérence à la paroi et la formule cinématique de BERKER-CASWELL et TRUESDELL qui donne le gradient de la vitesse à la paroi, nous avons calculé le *gradient de la déformation* en fonction de la norme du rotationnel de la vitesse $w(t)$ de la rotation de ce rotationnel $\omega(t)$ et du taux de dilatation volumique $\theta(t)$. Tous les tenseurs cinématiques s'en déduisent : le problème de cinématique à la paroi est donc résolu; on donne en particulier l'expression de l'histoire du tenseur de CAUCHY-GREEN en fonction des trois histoires $w^t(s)$, $\omega^t(s)$ et $\theta^t(s)$, l'histoire de ce tenseur jouant un grand rôle dans l'écriture des lois de comportement.

Dans le chapitre III est envisagé le problème général de la contrainte à la paroi. Les résultats cinématiques précédents permettent d'exprimer cette contrainte en fonction de w, ω et θ , dès qu'est donnée la loi de comportement d'un matériau simple. Des propriétés de parités permettent d'introduire la classe des écoulements à rotationnel pariétal de direction localement fixe.

Le cas des fluides de RIVLIN-ERICKSEN et de WHITE-METZNER est largement développé. Enfin il est montré, dans le cas des écoulements stationnaires, qu'il est impossible de distinguer, à la paroi, un matériau simple général d'un matériau de type différentiel de complexité deux.

La lubrification des surfaces cylindriques en fluide incompressible de RIVLIN-ERICKSEN de degré quatre, fluide qui introduit quatorze coefficients caractéristiques, et abordé au chapitre IV. Le cas du patin de forme quelconque y est traité. Nous nous sommes attachés à bien poser les hypothèses

qui permettent d'écrire les équations approchées. On constate que les quatorze coefficients du fluide s'introduisent dans ces équations par l'intermédiaire de quatre paramètres sans dimension. Nous fixant comme but d'étudier seulement l'influence de ces quatre nombres sur les caractéristiques de fonctionnement, à savoir le frottement et l'épaisseur minimum du film fluide, (la portance étant considérée comme une donnée), nous proposons, pour la résolution des équations approchées, une méthode de perturbation, désormais classique, portant sur ces quatre nombres supposés du même ordre de grandeur. La solution est alors écrite à l'ordre zéro, puis à l'ordre un.

On effectue ensuite l'application au cas du patin plan - chapitre V - et au cas du coussinet - chapitre VI - . Dans les deux cas sont tracéesles courbes donnant l'épaisseur et le frottement en fonction des quatre paramètres. Il est alors aisé de juger des modifications qu'ils apportent aux caractéristiques de fonctionnement.

CHAPITRE I

RAPPELS DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Ce chapitre est constitué de *rappels* portant sur des questions de cinématique et de lois de comportements; les notations utilisées sont pour l'essentiel celles de C. TRUESDELL*.

1.1. LE GRADIENT DE LA DEFORMATION

1.1.1.- $\bar{X}$ désignant la position d'une particule à la date t = 0, son mouvement est défini par l'application

$$\bar{x} = \chi(\bar{X},t) \tag{I.1}$$

dont la dérivée $n^{ième}$ par rapport au temps est appelée vitesse d'ordre n :

$$\overset{(n)}{\bar{x}} = \partial_t^n \chi(\bar{X},t), \quad (\dot{\bar{x}} \text{ vitesse}, \ \ddot{\bar{x}} \text{ accélération},\ldots). \tag{I.2}$$

Le gradient du champ χ est le gradient de la déformation; il est noté $F_o(\bar{X},t)$ ou plus simplement $F_o(t)$,

$$F_o(t) \equiv \text{Grad } \chi(\bar{X},t), \quad F_o(o) = I . \tag{I.3}$$

1.1.2.- En description relative, la configuration actuelle (à la date t) est choisie comme configuration de référence; la position $\bar{\xi}$ de la particule à la date τ est alors définie par

$$\bar{\xi} = \chi_t(\bar{x},\tau) \quad , \quad \chi_t(\bar{x},\tau) = \chi(\chi^{-1}(\bar{x},t),\tau) . \tag{I.4}$$

Le gradient de la déformation relative $F_t(\bar{x},\tau)$, ou $F_t(\tau)$, est le gradient du champ χ_t

$$F_t(\tau) \equiv \text{grad } \chi_t(\bar{x},), \quad F_t(t) = I ; \tag{I.5}$$

---

* Pour plus de détails, on peut se reporter à l'ouvrage, très complet, de C. TRUESDELL "Introduction à la Mécanique des Milieux Continus" [1] et aussi à ceux de G. ASTARITA et G. MARRUCCI "Non-Newtonian Fluid Mechanics" [2] et de COLEMAN, MARKOVITZ et NOLL "Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids" [3] .

on a évidemment,

$$F_t(\tau) = F_o(\tau)\, F_o^{-1}(t) \ . \tag{I.6}$$

1.1.3.- La description spatiale (point de vue eulérien) introduit $\bar{x}$ et t comme variables indépendantes. Les valeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles f(X,t) d'une fonction f définie en point de vue lagrangien sont alors notées (avec un abus de notation) $f(\bar{x},t)$ et si on pose

$$\dot{f} = \partial_t f(\bar{X},t) \quad , \quad f' = \partial_t f(\bar{x},t) \ , \tag{I.7}$$

on obtient la relation classique

$$\dot{f} = (\text{grad } f)\, \dot{\bar{x}} + f' \ . \tag{I.8}$$

Si la vitesse d'ordre n définie par (2) est écrite sous la forme

$$\overset{(\underline{n})}{x} = \overset{(\underline{n})}{x}(\bar{x},t), \tag{I.9}$$

le gradient du champ $\overset{(\underline{n})}{x}$ est appelé le gradient de la vitesse d'ordre n :

$$G_n(t) \equiv \text{grad } \overset{(\underline{n})}{x}(\bar{x},t) \ . \tag{I.10}$$

On établit aisément les deux relations suivantes :

$$G_n(t) = \partial^n F_t(\tau)\Big|_{\tau=t} \tag{I.11}$$

$$\overset{(n)}{F_o}(t) = G_n(t)\, F_o(t) \tag{I.12}$$

Cette dernière égalité, écrite pour n = 1, présente un grand intérêt car, si le gradient de la vitesse $G_1(t)$ est donné, elle constitue l'équation différentielle

$$\dot{F}_o(t) = G_1(t)\, F_o(t) \tag{I.13}$$

dont la solution est le gradient de la déformation, *l'existence et l'unicité* de cette solution étant assurées par la régularité de $G_1(t)$ et par la condition $F_o(0) = I$.

1.2. LES TENSEURS DE CAUCHY, FINGER, RIVLIN-ERICKSEN ET WHITE-METZNER

1.2.1.- La décomposition polaire de Cauchy

$$F_o(t) = R_o(t)\, U_o(t) = V_o(t)\, R_o(t), \tag{I.14}$$

où R_o est un tenseur orthogonal, $R_o\, R_o^T = I$ et U_o et V_o tenseurs symétriques, permet d'introduire les tenseurs de Cauchy-Green (ou tenseur des dilatations) à droite et à gauche,

$$C_o(t) \equiv U_o^2(t) = F_o^T(t)\, F_o(t),\ B_o(t) \equiv V_o^2(t) = F_o(t)\, F_o^T(t); \tag{I.15}$$

leurs inverses étant les tenseurs de Finger. Le tenseur de Cauchy-Green relatif à droite vérifie donc la relation

$$C_t(\tau) = F_t^T(\tau)\ \ F_t(\tau)\ . \tag{I.16}$$

Si $\bar{x} + d\bar{x}$ est une position voisine de $\bar{x}$ on a

$$(d\,\bar{x}_t)^2 = d\bar{x}\ C_t(\tau)\ d\bar{x}\ ,$$

et de même, le vecteur $d\bar{s}(t)$ désignant un élément de surface et $\rho(t)$ la masse volumique de la particule,

$$(d\bar{s}_t)^2 = d\bar{s}\ C_t^{-1}(\tau)\ d\bar{s}\ \left(\frac{\rho(t)}{\rho(\tau)}\right)^2\ ; \tag{I.17}$$

on a pu dire, ainsi, que le tenseur de Cauchy-Green relatif $C_t(\tau)$ mesure des variations de longueur, tandis que le tenseur de Finger relatif mesure des variations de surfaces.

1.2.2.- Les dérivées successives par rapport à τ, pour $\tau = t$, du tenseur $C_t(\tau)$ (resp. du tenseur $-\ C_t^{-1}(\tau)$) sont les tenseurs de Rivlin-Ericksen A_n (resp. les tenseurs de White-Metzner B_n) :

$$A_n = \partial_\tau^n\, C_t(\tau)\Big|_{\tau=t}\ ,\ B_n = -\ \partial_\tau^n\, C_t^{-1}(\tau)\Big|_{\tau=t} \tag{I.18}$$

Des relations (16) et (11) on déduit aisément

$$A_n = G_n + G_n^T + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j}\ G_j^T\, G_{n-j}\ , \tag{I.19}$$

et aussi,

(I.20) $$A_{n+1} = \dot{A}_n + A_n G_1 + G_1^T A_n \ , \ A_1 = G_1 + G_1^T$$

puisque, d'après (12),

(I.21) $$G_{n+1} = \dot{G}_n + G_n G_1 \ .$$

De même, en introduisant les dérivées,

(I.22) $$H_n(t) = \partial_\tau^n F_t^{-1}(\tau)\Big|_{\tau=t}$$

il vient

(I.23) $$B_n = H_n + H_n^T + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} H_j H_{n-j}^T \ ,$$

(I.24) $$B_{n+1} = \dot{B}_n + B_n H_1^T + H_1 B_n = \dot{B}_n - B_n G_1^T - G_1 B_n, \quad B_1 = G_1 + G_1^T$$

1.3. LES ECOULEMENTS VISCOMETRIQUES

1.3.1.- Etant donnée une fonction ψ à valeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles $\psi(\bar{X},\tau)$, si $\tau = t-s$, $s \geq 0$, (τ est un instant passé), la fonction ψ^t définie par

(I.25) $$\psi^t(s) = \psi(\bar{X},t-s) \ , \qquad s \geq 0$$

est l'histoire jusqu'à l'instant présent t de la fonction ψ .

F_t^t, C_t^t sont les histoires du tenseur de la déformation et du tenseur de Cauchy-Green relatifs ($F_t^t(s) = F_t(\bar{x},t-s)$).

On appelle *écoulement à histoire constante des dilatations principales relatives*, ou encore écoulement essentiellement permament au sens de COLEMAN, tout écoulement tel que, pour chaque position $\bar{x}$ il existe un tenseur orthogonal $Q(t)$, $Q(o) = I$, et tel que l'on ait

(I.26) $$C_t^t(s) = Q(t)\, C_o^o(s)\, Q^T(t) \ .$$

D'après un théorème de NOLL ([1] page 179), un écoulement est à histoire constante des dilatations principales relatives si et seulement si il existe un tenseur orthogonal $Q(t)$, un scalaire κ et un tenseur N_o indépendants du temps (mais, en général variables avec la position $\bar{X}$) tels que le tenseur gradient de la déformation soit de la forme

(I.27) $$F_o(t) = Q(t) \exp(t \kappa N_o), \quad |N_o| = 1, \ Q(o) = I \ .$$

En posant,

(I.28) $$N = Q\, N_o\, Q^T ,$$

des relations (6), (13), (16) et (18) il résulte

(I.29) $$F_t(\tau) = Q(\tau) \exp\,[(\tau-t)\,\kappa\, N_o]\, Q^T(t) = Q(\tau)\, Q^T(t) \exp[(\tau-t)\,\kappa N]$$

(I.30) $$G_1(t) = \dot{Q}(t)\, Q^T(t) + \kappa\, N ,$$

(I.31) $$C_t(\tau) = Q(t) \exp\,[(\tau-t)\,\kappa\, N_o^T] \exp[(\tau-t)\,\kappa N_o]\, Q^T(t) = \exp[(\tau-t)\kappa\, N^T] \exp[(\tau-t)\,\kappa N],$$

(I.32)
$$\begin{cases} A_1 = \kappa\,(N + N^T), \\ A_2 = \kappa\,(N^T A_1 + A_1 N) = \kappa^2 (N^2 + N^{T\,2} + 2\, N^T N) , \\ \vdots \\ A_n = \kappa\,(N^T A_{n-1} + A_{n-1} N) , \end{cases}$$

(I.33)
$$\begin{cases} B_1 = \kappa\,(N + N^T), \\ B_2 = -\kappa\,(B_1 N^T + N B_1) = -\kappa^2\,(N^2 + N^{T\,2} + 2\, N N^T) , \\ \vdots \\ B_n = -\kappa\,(B_{n-1} N^T + N B_{n-1}) . \end{cases}$$

On remarque que les tenseurs A_n et B_n vérifient

(I.34) $$A_n(t) = Q(t)\, A_n(o)\, Q^T(t), \quad B_n(t) = Q(t)\, B_n(o)\, Q^T(t),$$

relations qui, d'ailleurs, découlent immédiatement de (26) et (18).

Une propriété remarquable des écoulements à histoire constante des dilatations principales relatives est constituée par le corollaire de WANG ([1] page 181) :

L'histoire d'un tenseur de Cauchy Green relatif $C_t^t(s)$ vérifiant (26) est déterminée de manière unique par la donnée des trois premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen (des deux premiers, seulement, si les valeurs propres de A_1 sont distinctes deux à deux).

1.3.2.- Un écoulement à histoire constante des dilatations principales relatives pour lequel le tenseur N_o introduit par (27) est soumis à la restriction

(I.35) $$N_o^2 = 0 \ , \text{ (ou, aussi, } N^2 = 0, \text{ d'après (28))}$$

est appelé *écoulement viscométrique*.

Cette restriction entraîne, en particulier,

(I.36) $\qquad \operatorname{tr} N_o = 0 \ , \text{ ou } \operatorname{tr} N = 0 \ ,$

c'est-à-dire, d'après (30),

(I.37) $\qquad \operatorname{tr} G_1 = 0 \ :$

un écoulement viscométrique est nécessairement isovolumique.

D'autre part, toujours à cause de (35), on a

(I.38) $\qquad A_n = B_n = 0 \text{ si } n \geq 3 \ .$

Ainsi, la définition et les propriétés des écoulements viscométriques sont résumées par les équations et conditions suivantes

(I.39) $\qquad F_o(t) = Q(t)\,[I + t\,\kappa\,N_o] \ , \ |N_o| = 1 \ , \ \operatorname{tr} N_o = 0, \ N_o^2 = 0 \ ,$

(I.40) $\qquad N = Q\,N_o\,Q^T \ , \ |N| = 1 \ , \ \operatorname{tr} N = 0 \ , \ N^2 = 0 \ ,$

(I.41) $\qquad G_1(t) = \dot{Q}(t)\,Q^T(t) + \kappa\,N(t) \ ,$

(I.42)
$$\begin{cases} F_t^t(s) = Q(t-s)\,Q^T(t)\,[I - s\,\kappa\,N] \ , \\ C_t^t(s) = I - s\,\kappa\,(N + N^T) - s^2\,\kappa^2\,N^T N \ , \\ C_t^{t\,-1}(s) = I + s\,\kappa\,(N + N^T) + s^2\,\kappa^2\,N\,N^T \ , \end{cases}$$

(I.43)
$$\begin{cases} A_1 = B_1 = \kappa\,(N + N^T) \ , \\ A_2 = 2\,\kappa^2\,N^T N \ , \quad B_2 = 2\,\kappa^2\,N\,N^T \ , \\ A_n = B_n = 0 \text{ si } n > 2 \ . \end{cases}$$

Les égalités (40) montrent qu'il existe une base orthonormée, qui, en général dépend du temps (et qui varie d'une position $\bar{x}$ à une autre) telle que, relativement à celle-ci, la matrice du tenseur $N = \frac{1}{\kappa}\,(G_1 - A)$, $A = \dot{Q}\,Q^T$ étant la rotation de cette base, prenne la forme particulièrement simple,

(I.44) $$[N] = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \ .$$

1.4. LES MATERIAUX SIMPLES

1.4.1.- Généralement on appelle matériau simple, un milieu pour lequel le tenseur des contraintes T s'exprime par une fonctionnelle de l'histoire du gradient de la déformation.

$$T = \underset{s\geq 0}{G} \left[F_o^t(s)\right] . \tag{I.45}$$

L'axiome d'indifférence matérielle conduit, ([1] page 145), à l'expression

$$T^{R_o} = \underset{s\geq 0}{G} \left[\left(C_t^t(s)\right)^{R_o}, C_o(t)\right] , \tag{I.46}$$

qui est l'une des formes réduites de Noll où il a été posé, pour tout tenseur S

$$S^{R_o} = R_o^T S R_o$$

R_o étant la rotation locale introduite par la décomposition polaire de Cauchy(14).

Si le matériau est isotrope, la forme (46) devient

$$T = \underset{s\geq 0}{R} \left[C_t^t(s), B_o(t)\right] , \tag{I.47}$$

où la fonctionnelle R est une fonctionnelle *isotrope* de ses deux arguments, B_o est le tenseur de Cauchy Green à gauche défini par la relation (15). *Dans le cas des fluides*, le paramètre B_o de la fonctionnelle R est à remplacer par la masse volumique ρ .

1.4.2.- Un cas particulier important de matériaux simples à "mémoire infiniment courte" est constitué par les matériaux de type différentiel de complexité n pour lequels (45) s'écrit

$$T = f\left(F_o, \dot{F}_o, \ldots, F_o^{(n)}\right) \tag{I.48}$$

où cependant le choix de F_o et de ses n dérivées comme arguments de la fonction y est heuristique, on peut aussi considérer $(F_o)^{-1}$ et ses dérivées. La forme (46) devient alors dans ces deux cas

$$T^{R_o} = f\left(A_1^{R_o}, A^{R_o}, \ldots, A_n^{R_o}, C_o\right), \; T^{R_o} = f\left(B_1^{R_o}, B_2^{R_o}, \ldots, B_n^{R_o}, C_o^{-1}\right) \tag{I.49}$$

où les A_i et B_i sont respectivement le tenseur de Rivlin-Ericksen et le tenseur de White-Metzner de rang i. Les lois

$$T = g(A_1, A_2, \ldots, A_n, B_o \text{ ou } \rho), \; T = g(B_1, B_2, \ldots, B_n, B_o^{-1} \text{ ou } \rho) \tag{I.50}$$

où g sont des fonctions isotropes de leurs n + 1 arguments, sont des cas particuliers de (47) et correspondent à des solides ou fluides de Rivlin-Ericksen, ou de White-Metzner, de complexité n.

La fonction g étant isotrope, on a, pour tout tenseur Q orthogonal,

$$(I.51)\quad g(Q\,A_1\,Q^T,\ Q\,A_2\,Q^T,\ldots Q\,A_n\,Q^T,\ Q\,B_o\,Q^T \text{ ou } \rho) = Q\,g(A_1,A_2,\ldots A_n, B_o \text{ ou } \rho)Q^T.$$

1.4.3.- Les solutions g de l'équation fonctionnelle précédente ont été données, dans le cas de la complexité 2, par C. TRUESDELL (1951) puis par RIVLIN et ERICKSEN (1955). C.C. WANG [4] , (1970), a proposé des théorèmes de représentation généraux qui permettent de construire les solutions de (51) pour une complexité quelconque.

Dans le cas de la *complexité 2*, la première relation (50) devient, pour un fluide sans liaison,

$$(I.52)\quad T = -\,p\,I + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_1^2 + \alpha_4 A_2^2 + \alpha_5 (A_1 A_2 + A_2 A_1) +$$

$$+ \alpha_6(A_1^2 A_2 + A_2 A_1^2) + \alpha_7(A_1 A_2^2 + A_2^2 A_1) + \alpha_8(A_1^2 A_2^2 + A_2^2 A_1^2)$$

où les neufs coefficients p, α_1, ..., α_8 sont des fonctions arbitraires de la masse volumique ρ et des *traces* des dix tenseurs A_1, A_1^2, A_1^3, A_2, A_2^2, A_2^3, $A_1 A_2$, $A_1^2 A_2$, $A_1 A_2^2$, $A_1^2 A_2^2$.

(52) est donc la loi de comportement du fluide de Rivlin-Ericksen de complexité 2, sans liaison, le plus général; si ce fluide est incompressible, le coefficient p est à remplacer par la pression hydrostatique (fonction de point, indéterminée) et les huit coefficients α_1, α_2, ..., α_8 sont fonctions arbitraires des traces de huit tenseurs seulement puisqu'alors on a $\text{tr } A_1 = 0$ et $\text{tr } (A_1^2) = \text{tr } A_2$.

1.4.4.- On appelle fluide de Rivlin-Ericksen de *degré* N un fluide de complexité N tel que les composantes du tenseur des contraintes s'écrivent comme polynômes des composantes des tenseurs A_1, A_2, ..., A_N, la dimension en l'inverse d'un temps de chacun des monômes n'excédant pas N, (l'introduction des fluides de degré N s'effectue de façon naturelle dans la théorie des mouvements retardés, l'approximation d'un fluide de *complexité* N par un fluide de *degré* N étant d'autant meilleure que le mouvement est lent au sens des mouvements retardés).

Par exemple, la loi de comportement du fluide de *degré* 4, sans liaison, est

$$
\begin{aligned}
(I.53)\quad T = {} & [-p + C_1 \operatorname{tr} A_1 + C_2 \operatorname{tr} A_1^2 + C_3 \operatorname{tr} A_1^3 + C_4 \operatorname{tr} A_1^4 + C_5 \operatorname{tr} A_2 + C_6 \operatorname{tr} A_2^2 + \\
& + C_7 \operatorname{tr} (A_1 A_2) + C_8 \operatorname{tr} (A_1^2 A_2) + C_9 \operatorname{tr} A_3 + C_{10} \operatorname{tr} (A_1 A_3) + \\
& + C_{11} \operatorname{tr} A_4]\, I + \\
& + [C_{12} + C_{13} \operatorname{tr} A_1 + C_{14} \operatorname{tr} A_1^2 + C_{15} \operatorname{tr} A_1^3 + C_{16} \operatorname{tr} A_2 + \\
& + C_{17} \operatorname{tr} (A_1 A_2) + C_{18} \operatorname{tr} A_3 +]\, A_1 + \\
& + [C_{19} + C_{20} \operatorname{tr} A_1 + C_{21} \operatorname{tr} A_1^2 + C_{22} \operatorname{tr} A_2]\, A_1^2 + \\
& + [C_{23} + C_{24} \operatorname{tr} A_1 + C_{25} \operatorname{tr} A_1^2 + C_{26} \operatorname{tr} A_2]\, A_2 + \\
& + [C_{27} + C_{28} \operatorname{tr} A_1]\, [A_2 A_1 + A_1 A_2] + \\
& + [C_{29} + C_{30} \operatorname{tr} A_1]\, A_3 + C_{31} [A_2 A_1^2 + A_1^2 A_2] + C_{32} [A_3 A_1 + A_1 A_3] \\
& + C_{33} A_2^2 + C_{34} A_4
\end{aligned}
$$

où p et les 34 coefficients sont fonctions de ρ .

Pour un fluide de degré 4, incompressible, (53) devient, à un changement de notation près,

$$
\begin{aligned}
(I.54)\qquad T = {} & - p\, I + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \ , \text{ avec} \\
& S_1 = \mu\, A_1 , \\
& S_2 = \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 , \\
& S_3 = \beta_1 (\operatorname{tr} A_2)\, A_1 + \beta_2 (A_2 A_1 + A_1 A_2) + \beta_3 A_3 , \\
& S_4 = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 (A_3 A_1 + A_1 A_3) + \gamma_3 A_2^2 + \\
& \qquad \gamma_4 (A_2 A_1^2 + A_1^2 A_2) + \gamma_5 (\operatorname{tr} A_2) A_2 + \gamma_6 (\operatorname{tr} A_2)\, A_1^2 + \\
& \qquad \gamma_7 (\operatorname{tr} A_3)\, A_1 + \gamma_8 (\operatorname{tr} A_2 A_1)\, A_1
\end{aligned}
$$

Dans cette relation, p est un champ scalaire indéterminé et les quatorze coefficients μ, α_1, ..., γ_7, γ_8 sont autant de constantes caractéristiques du fluide.

CHAPITRE II

CINEMATIQUE A LA PAROI

Dans ce chapitre(*), nous rappelons l'expression du gradient de la vitesse à la paroi, dans le cas où la condition d'adhérence est vérifiée. Nous en déduisons l'expression du gradient de la déformation, si bien que le problème de cinématique à la paroi se trouve être complètement résolu.

2.1 - *LE GRADIENT DE LA VITESSE A LA PAROI.*

2.1.1.- On considère un écoulement quelconque en présence d'une paroi solide que l'on peut toujours supposer stationnaire; si cette paroi est en mouvement, il suffit alors d'introduire le champ des vitesses relatives à un système de référence lié à celle-ci et d'appliquer les relations classiques de changement de référentiel. La condition cinématique imposée à la frontière est la condition d'adhérence.

$$\dot{\underline{x}} \hat{=} 0 \quad . \tag{II.1}$$

Cette condition et la relation (I.8) entraînent immédiatement, pour tout f ,

$$\dot{f} \hat{=} f' \tag{II.2}$$

D'autre part, le théorème de Stokes appliqué au champ des vitesses $\dot{\underline{x}}$ montre que, si $\underline{n}_o$ est la normale unitaire à la paroi,

$$(\mathrm{rot}\ \dot{\underline{x}})\ \underline{n}_o \hat{=} 0 \ . \tag{II.3}$$

Il est donc possible d'introduire une base orthonormée $\{\underline{e}(t),\underline{f}(t),\underline{n}_o\}$ définie par

$$\underline{e}(t) \hat{=} \frac{1}{w(t)}\ \mathrm{rot}\ \dot{\underline{x}}\ ,\ \underline{e}^{-2} = 1, w(t) \hat{=} |\mathrm{rot}\ \dot{\underline{x}}\ | \ . \tag{II.4}$$

BERKER, CASWELL et TRUESDELL ont donné l'expression du gradient de la vitesse, à savoir

$$G_1(t) \hat{=} G(t) \equiv - w(t)\ \underline{f}(t) \otimes \underline{n}_o + \theta(t)\ \underline{n}_o \otimes \underline{n}_o \ , \tag{II.5}$$

---

* La plupart des égalités et relations des chapitres II et III ne sont vérifiées que *sur* la paroi; afin d'éviter toute confusion, le symbole $\hat{=}$ sera utilisé pour ces égalités.

où $\theta(t)$ est le taux de dilatation volumique

$$\theta(t) \hat{=} \operatorname{tr} G_1(t) = \operatorname{div} \dot{\underline{x}} \tag{II.6}$$

BERKER a indiqué deux démonstrations de la relation (5). L'une [9] fort complexe, est fondée sur une transformation d'intégrale vectorielle, l'autre [10] utilise les notions de gradient, de divergence et de rotationnel superficiels. CASWELL et TRUESDELL [1] appliquent la formule de LAMB (dérivée matérielle d'une intégrale de surface d'un champ tensoriel antisymétrique).

2.1.2.- Nous proposons une autre démonstration de la relation (5); cette démonstration dont l'extrême simplicité résulte du fait qu'elle n'implique pas l'établissement de relations vraies dans tout l'écoulement (particularisées ensuite sur la paroi à l'aide de (1)), est quelque peu inélégante puisqu'elle introduit un repère.

Soit un repère cartésien fixe $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ et u_1, u_2, u_3 les composantes de la vitesse $\dot{\underline{x}}$, (1) implique qu'il existe λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$\operatorname{grad} u_1 \hat{=} \lambda_1 \underline{n}_o \ , \ \operatorname{grad} u_2 \hat{=} \lambda_2 \underline{n}_o, \ \operatorname{grad} u_3 \hat{=} \lambda_3 \underline{n}_o \ .$$

Sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer $\underline{e}_3 = \underline{n}_o$, par suite,

$$G_1 = \operatorname{grad} \dot{\underline{x}} \hat{=} \lambda_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{n}_o + \lambda_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{n}_o + \lambda_3 \underline{n}_o \otimes \underline{n}_o \ ,$$

d'où il résulte

$$\operatorname{rot} \dot{\underline{x}} \hat{=} - \lambda_2 \underline{e}_1 + \lambda_1 \underline{e}_2 \ ,$$

$$\operatorname{div} \dot{\underline{x}} \hat{=} \lambda_3 \ .$$

On peut donc écrire le gradient G_1 sous la forme

$$G_1 \hat{=} [(\operatorname{rot} \dot{\underline{x}})^{\perp} + \operatorname{div} \dot{\underline{x}} \, \underline{n}_o] \otimes \underline{n}_o \ , \tag{II.7}$$

où la notation $\underline{U}^{\perp}$ représente le résultat de la rotation d'un vecteur $\underline{U}$, normal à $\underline{n}_o$, d'un angle droit dans le sens indirect autour de $\underline{n}_o$, ce qui établit (5).

Il est possible de considérer une base orthonormée fixe; en effet soit $\omega(t)$ la rotation du vecteur $\operatorname{rot} \dot{\underline{x}}$, c'est-à-dire d'après (4) et (2),

$$\omega(t) \hat{=} \frac{1}{w^2(t)} (\operatorname{rot} \dot{\underline{x}}, (\operatorname{rot} \dot{\underline{x}})' , \underline{n}_o). \tag{II.8}$$

Si on pose,

$$\phi(t) = \int_0^t \omega(u)\, du \,, \tag{II.9}$$

on constate que la base $\{\bar{e}(t), \bar{f}(t), \bar{n}_o\}$ est obtenue à partir de la base fixe $\{\bar{e}_o, \bar{f}_o, \bar{n}_o\}$ par la rotation d'angle ϕ autour de $\bar{n}_o$; (5) devient

$$\begin{cases} G_1(t) \hat{=} G(t) \equiv \bar{V}(t) \otimes \bar{n}_o \\ \bar{V}(t) = -w(t)\,\bar{f}(t) + \theta(t)\,\bar{n}_o = w(t)\sin\phi(t)\bar{e}_o - w(t)\cos\phi(t)\bar{f}_o + \theta(t)\bar{n}_o \end{cases} \tag{II.10}$$

2.2 - *LE GRADIENT DE LA VITESSE D'ORDRE n A LA PAROI*

Pour calculer le gradient G_n défini en (I.10), nous utilisons la loi de récurrence (I.21) et la remarque suivante : étant donnés deux tenseurs de la forme du second membre de l'identité (10), on a la propriété évidente,

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \bar{V}_1 \otimes \bar{n}_o \\ X_2 &= \bar{V}_2 \otimes \bar{n}_o \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_2 X_1 = (\mathrm{tr}\, X_1)\, X_2 \,. \tag{II.11}$$

Il vient donc :

$$\begin{cases} G_1 \hat{=} \bar{V}_1 \otimes \bar{n}_o \,, & \bar{V}_1 \equiv \bar{V} \,, \\ G_2 \hat{=} \bar{V}_2 \otimes \bar{n}_o \,, & \bar{V}_2 = \dot{\bar{V}}_1 + \theta\,\bar{V}_1 \equiv \dot{\bar{V}} + \theta\,\bar{V} \,, \\ G_3 \hat{=} \bar{V}_3 \otimes \bar{n}_o \,, & \bar{V}_3 = \dot{\bar{V}}_2 + \theta\,\bar{V}_2 \equiv \ddot{\bar{V}} + 2\theta\dot{\bar{V}} + (\dot{\theta} + \theta^2)\bar{V} \,, \\ \vdots & \\ G_n \hat{=} \bar{V}_n \otimes \bar{n}_o \,, & \bar{V}_n = \dot{\bar{V}}_{n-1} + \theta\,\bar{V}_{n-1} \,, \end{cases} \tag{II.12}$$

où $\bar{V}$ est donné par (10). On peut aussi écrire :

$$\begin{cases} G_1 \hat{=} G \,, \\ G_2 \hat{=} \dot{G}_1 + \theta\, G_1 \hat{=} \dot{G} + \theta\, G \,, \\ G_3 \hat{=} \dot{G}_2 + \theta\, G_2 \hat{=} \ddot{G} + 2\theta\dot{G} + (\dot{\theta} + \theta^2)\, G \,, \\ \vdots \\ G_n \hat{=} \dot{G}_{n-1} + \theta\, G_{n-1} \end{cases} \tag{II.13}$$

Dans les relations (12) et (13), suivant (2), une dérivée $\dot{f}$ peut être remplacée par f'.

2.3 - LE GRADIENT DE LA DEFORMATION A LA PAROI.

2.3.1.- Rappelons la propriété (I.11) :

$$G_n(t) = \partial^n F_t(\tau)\Big|_{\tau=t}$$

On constate ainsi que toutes les dérivées par rapport à τ pour $\tau = t$ du gradient de la déformation relative $F_t(\tau)$ sont connues à la paroi, puisqu'elles sont données par (13) et (7).

Soit la fonction H_t définie par

$$H_t(\tau) \hat{=} \partial_\tau F_t(\tau) \ . \tag{II.14}$$

En utilisant l'une ou l'autre des formes (12) ou (13) on obtient

$$\begin{cases} H_t(\tau)\Big|_{\tau=t} = G_1(t) = \overline{V}_1(t) \otimes \overline{n}_o \ , \\ \partial_\tau H_t(\tau)\Big|_{\tau=t} = G_2(t) = \dot{G}_1(t) + \theta(t)\, G_1(t) = \overline{V}_2(t) \otimes \overline{n}_o \ , \\ \partial_t^n H_t^{(\tau)}\Big|_{\tau=t} = G_{n+1}(t) = \dot{G}_n(t) + \theta(t)\, G_n(t) = \overline{V}_{n+1}(t) \otimes \overline{n}_o \ , \end{cases} \tag{II.15}$$

Si on pose

$$\psi_t(\tau) \equiv \int_t^\tau \theta(u)du = \int_t^\tau \mathrm{tr}\, G(u)\, du = \int_t^\tau \overline{V}(u)\, du\, \overline{n}_o \ , \tag{II.16}$$

et si on suppose la fonction H_t analytique, son expression résulte immédiatement des relations (15) et (16) :

$$H_t(\tau) = G(\tau) \exp \psi_t(\tau) = \exp \psi_t(\tau)\, \overline{V}(\tau) \otimes \overline{n}_o \ . \tag{II.17}$$

Suivant (14) et observant la condition $F_t(t) = I$, on obtient, après intégration par rapport à :

$$F_t(\tau) \hat{=} I + \int_t^\tau G(u) \exp \psi_t(u)\, du = I + \int_t^\tau \overline{V}(u) \exp \psi_t(u)\, du \otimes \overline{n}_o \tag{II.18}$$

d'où l'on déduit pour $t = 0$ et $\tau = t$ le gradient $F_o(t)$,

$$F_o(t) \hat{=} I + \int_0^t G(u) \exp \psi_o(u)\, du = I + \int_0^t \overline{V}(u) \exp \psi_o(u)\, du \otimes \overline{n}_o \ . \tag{II.19}$$

Si la paroi est en mouvement, $Q(t)$ étant le tenseur orthogonal caractérisant le changement de référentiel, $Q(0) = I$, d'après (19) et les relations de changement de référentiel, en utilisant la notation

définie par (7), on obtient le

Théorème

Sur une paroi solide en mouvement à laquelle adhère le matériau, si $\dot{\bar{x}}(t)$ désigne le champ des vitesses relatives à la paroi, le gradient de la déformation est donné par

$$(II.20)\quad F_o(t) = Q(t)\{I + \int_0^t [(\text{rot } \dot{\bar{x}}(u))^{\perp} + \text{div } \dot{\bar{x}}(u)\bar{n}_o][\exp\int_0^u \text{div } \dot{\bar{x}}(v)dv]du \otimes \bar{n}_o\}$$

où $\bar{n}_o$ est la normale unitaire à la paroi et où $Q(t)$, vérifiant $Q(0)=I$, est l'orientation du référentiel lié à celle-ci.

2.3.2.- Il est possible d'atteindre plus rapidement le résultat (19). En effet soit $G(t)$ donné par

$$G(t) = \bar{V}(t) \otimes \bar{n}_o$$

où $\bar{V}(t)$ est un vecteur régulier, $\bar{n}_o$ un vecteur indépendant du temps; considérons la fonction J définie par

$$J(t) = \int_0^t \bar{V}(u)\ (\exp \int_0^u \bar{V}(v)\ \bar{n}_o\ dv)\ du \otimes \bar{n}_o$$

On a

$$\text{tr } J(t) = \int_0^t \bar{V}(u)\ \bar{n}_o(\exp\int_0^u \bar{V}(v)\ n_o\ dv)du = \exp\int_0^t \bar{V}(u)\ \bar{n}_o\ du - 1,$$

$$\dot{J}(t) = \bar{V}(t)\ \exp\int_0^t \bar{V}(u)\ \bar{n}_o\ du \otimes \bar{n}_o = \exp\int_0^t \bar{V}(u)\ \bar{n}_o\ du\ G(t).$$

D'après la remarque (11), nous obtenons

$$G(t)\ J(t) = (\text{tr } J(t)\ )\ G(t) = [\exp\int_0^t V(u)\ n_o\ du - 1]\ \ G(t)$$

soit aussi,

$$G(t)\ [I + J(t)] = \dot{J}(t)\ .$$

On constate ainsi que $I + J(t)$ est la solution, qui prend la valeur I pour $t = 0$ de l'équation différentielle (I.13) pour laquelle $G_1(t) \hat{=} G(t)$ ce qui établit (19).

Il est à remarquer que cette seconde démonstration de (19) introduit une hypothèse (régularité de $G(t)$, c'est-à-dire régularité de $\bar{V}(t)$) moins restrictive que la démonstration du paragraphe 2.3.1 (analycité de $F_t(\tau)$).

2.3.3.- Considérons la relation (20), c'est-à-dire

$$F_o(t) \hat{=} Q(t) \left[I + \int_0^t G(u) \exp \psi_o(u)\, du \right] \tag{II.21}$$

avec $G(t) = \overline{V}(t) \otimes \overline{n}_o$, $\overline{V}(t) = -w(t)\overline{f}(t) + \theta(t)\,\overline{n}_o$

$$\psi_o(t) = \int_0^t \theta(u)\, du$$

et envisageons le cas particulier de l'écoulement relatif à la paroi stationnaire. D'après (2), le tenseur G est un tenseur fixe (w et θ sont constants et $\overline{f}(t) = \overline{f}_o$)

$$G = G_o = \overline{V}(0) \otimes \overline{n}_o \,, \quad \theta = \overline{V}(0)\,\overline{n}_o \,.$$

(21) devient

$$F_o(t) \hat{=} Q(t) \left[I + \frac{\exp(t\theta)-1}{\theta}\, G_o \right]$$

soit aussi, puisque d'après (11)

$$G_o^n = \theta^{n-1}\, G_o \,, \tag{II.22}$$

$$F_o(t) \hat{=} Q(t) \exp(t\, G_o) \,. \tag{II.23}$$

Cette dernière relation est d'ailleurs évidente puisque si G est un tenseur constant, exp(t G) est la solution de l'équation $G\, F_o(t) = F_o(t)$, $F_o(0) = 0$.

Suivant (I.6) et (I.16), on déduit de (23), l'expression de $C_t(\tau)$

$$C_t(\tau) \hat{=} Q(t) \exp\left[(\tau-t)\, G_o^T\right] \exp\left[(\tau-t)\, G_o\right] Q^T(t)$$

c'est-à-dire avec $\tau = t - s$ et puisque $Q(0) = I$,

$$C_t^t(s) \hat{=} Q(t)\, C_o^o(s)\, Q^T(t), \quad C_o^o(s) = \exp(-s\, G_o^T) \exp(-s\, G_o) \tag{II.24}$$

D'après la définition (I.26), l'écoulement *sur* la paroi est à histoire constante des dilatations principales relatives; les relations (I.27), ... (I.34) sont vraies à la paroi avec

$$G_o = \kappa\, N_o \,, \quad \kappa = |G_o| = (w^2 + \theta^2)^{1/2} \tag{II.25}$$

Si on suppose de plus l'écoulement isovolumique, $\theta = 0$ et (22) devient

$$G_o^2 = 0 \,; \tag{II.26}$$

en utilisant la notation définie par (25), l'égalité (23) prend la forme particulière

(II.27) $$F_o(t) \hat{=} Q(t)\,[I + t\,\kappa\,N_o\,]\ ,\quad \kappa = w\ ,$$

le tenseur fixe N_o étant soumis aux restrictions

(II.28) $$|N_o| = 1,\ \mathrm{tr}\,N_o = 0\ ,\ N_o^2 = 0$$

c'est-à-dire (I.39) : les relations (I.39)...(I.43) sont alors vérifiées à la paroi. On en déduit le

Corollaire 1

Si le mouvement relatif à une paroi solide est stationnaire, et si la condition d'adhérence est vérifiée, l'écoulement *sur* la paroi est à histoire constante des dilatations principales relatives; si, de plus, le mouvement est isovolumique, l'écoulement *sur* la paroi est viscométrique, le taux de glissement étant la norme du rotationnel de la vitesse relative à la paroi.

2.4 - LES TENSEURS DE CAUCHY, FINGER, RIVLIN-ERICKSEN ET WHITE-METZNER

2.4.1.- Plaçons nous dans l'hypothèse de la paroi stationnaire; ces tenseurs intrinsèques se transformeront aisément si celle-ci est mobile. Pour effectuer le calcul des tenseurs de Rivlin-Ericksen et de White-Metzner, on peut soit utiliser la définition (I.18) soit appliquer les lois de récurrence (I.20) et (I.24).

Rappelons la relation (18) et les notations qu'elle implique :

(II.29)
$$\begin{cases} F_t(\tau) \hat{=} I + \int_t^\tau G(u)\,\exp\psi_t(u)\,du \\ G(t) = \overline{V}(t) \otimes \overline{n}_o \\ \overline{V}(t) = -\,w(t)\,\overline{f}(t) + \theta\,(t)\,\overline{n}_o\,,\ -w(t)\,\overline{f}(t) \hat{=} (\mathrm{rot}\,\dot{\overline{x}}(t))^{\perp}, \\ \qquad\qquad\qquad \theta\,(t) \hat{=} \mathrm{div}\,\dot{\overline{x}}(t) \\ \psi_{t_1}(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \theta(u)\,du\ . \end{cases}$$

Appliquant (I.16), on trouve

(II.30) $$C_t(\tau) \hat{=} \left[I + \int_t^\tau G^T(u)\,\exp\psi_t(u)\,du\right]\left[I + \int_t^\tau G(u)\,\exp\psi_t(u)\,du\right]\ ;$$

il s'ensuit

$$(II.31)\qquad C_t^{-1}(\tau) \hat{=} [I - \int_t^\tau G(u) \exp \psi_\tau(u)\, du]\, [\, I - \int_t^\tau G^T(u) \exp \psi_\tau\,(u) du] \,.$$

Si l'on explicite en fonction du vecteur $\overline{V}$ on a aussi, en posant

$$(II.32)\qquad \overline{A}_t(\tau) = \int_t^\tau \overline{V}(u) \exp \psi_t(u)\, du,\ \overline{B}_t(\tau) = \overline{A}_\tau(t)\ ,$$

$$(II.33)\qquad C_t(\tau) - I \hat{=} \overline{n}_o \otimes \overline{A}_t(\tau) + \overline{A}_t(\tau) \otimes \overline{n}_o + \overline{A}_t^2(\tau)\, \overline{n}_o \otimes \overline{n}_o\ ,$$

$$(II.34)\qquad C_t^{-1}(\tau) - I \hat{=} \overline{n}_o \otimes \overline{B}_t(\tau) + \overline{B}_t(\tau) \otimes \overline{n}_o + \overline{B}_t(\tau) \otimes \overline{B}_t(\tau)\ .$$

De façon plus précise, en considérant la base $\{\overline{e}_o, \overline{f}_o, \overline{n}_o\}$ et les notations de la dernière relation (10) on obtient

$$(II.35)\qquad C_t(\tau) - I \hat{=} \int_t^\tau w \sin \phi \exp \psi_t\, du\, (\overline{e}_o \otimes \overline{n}_o + \overline{n}_o \otimes \overline{e}_o)$$

$$- \int_t^\tau w \cos \phi \exp \psi_t\, du\, (\overline{f}_o \otimes \overline{n}_o + \overline{n}_o \otimes \overline{f}_o)$$

$$+\{[\int_t^\tau w \cos \phi \exp \psi_t\, du]^2 + [\int_t^\tau w \sin \phi \exp \psi_t\, du]^2 + \exp(2\psi_t(\tau)-1)\}\, \overline{n}_o \otimes \overline{n}_o,$$

$$(II.36)\qquad C_t^{-1}(\tau) - I \hat{=} [\int_t^\tau w \sin \phi \exp \psi_\tau\, du]^2\, \overline{e}_o \otimes \overline{e}_o$$

$$+ [\int_t^\tau w \cos \phi \exp \psi_\tau\, du]^2\, \overline{f}_o \otimes \overline{f}_o + [\exp(2\psi_\tau(t))-1]\, \overline{n}_o \otimes \overline{n}_o$$

$$- \int_t^\tau w \sin \phi \exp \psi_\tau\, du \int_t^\tau w \cos \phi \exp \psi_\tau\, du\, (\overline{e}_o \otimes \overline{f}_o + \overline{f}_o \otimes \overline{e}_o)$$

$$- \exp \psi_\tau(t) \int_t^\tau w \sin \phi \exp \psi_\tau\, du\, (\overline{e}_o \otimes \overline{n}_o + \overline{n}_o \otimes \overline{e}_o)$$

$$+ \exp \psi_\tau(t) \int_t^\tau w \cos \phi \exp \psi_\tau\, du\, (\overline{f}_o \otimes \overline{n}_o + \overline{n}_o \otimes \overline{f}_o)\ ,$$

où on a omis d'écrire la dépendance, par rapport à la variable u, des fonctions w, ϕ , ψ_t et ψ_τ .

L'une ou l'autre des formes (30), (33) ou (35) permet d'effectuer la remarque suivante : considérons l'histoire, (I.25), du tenseur de Cauchy-Green relatif; suivant (32) par exemple, on a évidemment

$$(II.37) \qquad C_t^t - I \hat{=} \bar{n}_o \otimes \bar{A}_t^t \otimes \bar{A}_t^t \otimes \bar{n}_o + (\bar{A}_t^t)^2 \, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o ,$$

avec

$$(II.38) \qquad \bar{A}_t^t(s) \hat{=} -\int_0^s [(\mathrm{rot}\, \dot{\bar{x}}(t-u))^{\perp} + \mathrm{div}\, \dot{\bar{x}}(t-u)\bar{n}_o][\exp \int_0^u -\mathrm{div}\, \dot{\bar{x}}(t-v)dv]du, \quad s \geq 0;$$

d'où il résulte le

Corollaire 2.

Sur une paroi solide à laquelle adhère le matériau, l'histoire du tenseur de Cauchy-Green relatif $C_t^t(s)$ est entièrement déterminée et de façon unique par les histoires du rotationnel et de la divergence de la vitesse exprimée par rapport à un référentiel lié à la paroi.

2.4.2.- Comme il a été indiqué plus haut, on peut procéder au calcul des tenseurs de Rivlin-Ericksen A_n et de White-Metzner B_n .

Pour les tenseurs A_n, en utilisant (33) on a :

$$(II.39) \qquad A_n(t) \hat{=} \bar{n}_o \otimes \partial_\tau^n \bar{A}_t(\tau)\Big|_{\tau=t} + \partial_\tau^n \bar{A}_t(\tau)\Big|_{\tau=t} \otimes \bar{n}_o$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \partial_\tau^{n-j} \bar{A}_t(\tau)\Big|_{\tau=t} \; \partial_\tau^j \bar{A}_t(\tau)\Big|_{\tau=t} \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o ,$$

où les $\binom{n}{p}$ sont les coéfficients du binôme.

Suivant la première relation (32) il vient

$$(II.40) \qquad \partial_\tau \bar{A}_t(\tau) = \bar{V}(\tau) \exp \psi_t(\tau),$$

et par suite

$$(II.41) \qquad \partial_\tau \bar{A}_t(\tau) = \bar{V}_k(\tau) \exp \psi_t(\tau), \quad \bar{V}_k(\tau) = \dot{\bar{V}}_{k-1}(\tau) + \theta(\tau)\bar{V}_{k-1}(\tau), \quad k>1,$$

$$\bar{V}_1(\tau) = \bar{V}(\tau) .$$

On obtient donc la forme récurrente

$$
(II.42)\qquad \begin{cases} A_n \hat{=} \overline{n}_o \otimes V_n + V_n \otimes n_o - [\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \overline{V}_{n-j}\ \overline{V}_j]\ \overline{n}_o \otimes \overline{n}_o \\ \overline{V}_k = \dot{\overline{V}}_{k-1} + \theta\ \overline{V}_{k-1} \\ \overline{V}_1 = \overline{V} = -\ w\ \overline{f} + \theta\ \overline{n}_o\ ,\ -\ w\ \overline{f} \hat{=} (\mathrm{rot}\ \dot{\overline{x}})^{\perp}\ ,\ \theta \hat{=} \mathrm{div}\ \dot{\overline{x}}\ . \end{cases}
$$

Par exemple, pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}^*$, on a

$$
(II.43)\qquad \begin{cases} A_1 \hat{=} \overline{n}_o \otimes \overline{V} + \overline{V} \otimes \overline{n}_o\ , \\ A_2 \hat{=} \overline{n}_o \otimes (\dot{\overline{V}} + \theta\ \overline{V}) + (\dot{\overline{V}} + \theta\ \overline{V}) \otimes \overline{n}_o + 2\ \overline{V}^2\ \overline{n}_o \otimes \overline{n}_o\ , \\ A_3 \hat{=} \overline{n}_o \otimes [\ddot{\overline{V}} + 2\ \theta\ \dot{\overline{V}}) + (\dot{\theta} + \theta^2)\overline{V}] + [\ddot{\overline{V}} + 2\ \theta\ \dot{\overline{V}} + (\dot{\theta}+\theta^2)\overline{V}] \otimes \overline{n}_o \\ \qquad + 6\ \overline{V}\ (\dot{\overline{V}} + \theta\ \overline{V})\ \overline{n}_o \otimes \overline{n}_o\ , \\ A_4 = \overline{n}_o \otimes [\dddot{\overline{V}} + 3\ \theta\ \ddot{\overline{V}} + (3\theta^2 + 3\dot{\theta})\ \dot{\overline{V}} + (\ddot{\theta} + 3\ \theta\ \dot{\theta} + \theta^3)\ \overline{V}] \\ \qquad + [\ddot{\overline{V}} + 3\ \theta\ \ddot{\overline{V}} + (3\theta^2 + 3\dot{\theta})\ \dot{\overline{V}} + (\ddot{\theta} + 3\theta\dot{\theta} + \theta^3)\ \overline{V}] \otimes \overline{n}_o \\ \qquad + [6(\dot{\overline{V}} + \theta\overline{V})^2 + 8\ \overline{V}(\ddot{\overline{V}} + 2\ \theta\ \dot{\overline{V}} + (\dot{\theta} + \theta^2)\overline{V}]\ \overline{n}_o \otimes \overline{n}_o \end{cases}
$$

Remarquons, comme il a été dit, que la loi (42) se déduit directement de (II.12) et (I.19).

De même, en ce qui concerne les tenseurs B_n, on obtient d'après (34),

$$
(II.44)\qquad \begin{aligned} B_n(t) = -\ \overline{n}_o \otimes \partial^n\ B_t(\tau)\Big|_{\tau=t} - \partial_\tau^n\ \overline{B}_t(\tau)\Big|_{\tau=t} \otimes \overline{n}_o \\ - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} [\partial_\tau^{n-j}\ \overline{B}_t(\tau)\Big|_{\tau=t} \otimes \partial_\tau^j\ \overline{B}_t(\tau)\Big|_{\tau=t}]\ , \end{aligned}
$$

---

* Pratiquement, nous n'aurons à utiliser les tenseurs de Rivlin-Ericksen et de White-Metzner que jusqu'au rang quatre.

le vecteur $\overline{B}_t(\tau)$ étant donné par les relations (32), c'est-à-dire

$$\overline{B}_t(\tau) = \int_\tau \overline{V}(u) \exp \psi_\tau (u)\, du; \tag{II.45}$$

il en résulte

$$\partial_\tau \overline{B}_t(\tau) = - \overline{V}(\tau) - \theta(\tau)\, \overline{B}_t(\tau)$$

et d'une manière générale

$$\partial_\tau^n \overline{B}_t(\tau) = \overline{U}_n(\tau) + \lambda_n(\tau)\, \overline{B}_t(\tau) \tag{II.46}$$

où les vecteurs $\overline{U}_k(\tau)$ et les scalaires $\lambda_k(\tau)$ sont définis, pour $k > 1$, par

$$\begin{cases} \overline{U}_k = \dot{\overline{U}}_{k-1} - \lambda_k \overline{V}\ , \\ \lambda_k = \dot{\lambda}_{k-1} - \theta\, \lambda_{k-1}\ , \quad \overline{U}_1 = - \overline{V}\ , \quad \lambda_1 = - \theta \end{cases} \tag{II.47}$$

On en déduit pour les tenseurs de White-Metzner la loi suivante :

$$\begin{cases} B_n \hat{=} - \overline{n}_o \otimes \overline{U}_n - \overline{U}_n \otimes \overline{n}_o - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \overline{U}_{n-j} \otimes \overline{U}_j\ , \\ \overline{U}_k = \dot{\overline{U}}_{k-1} - \lambda_k \overline{V},\ \overline{U}_1 = - \overline{V} = w\, \overline{f} - \theta\, \overline{n}_o\ ,\ \lambda_1 = - \theta \\ \lambda_k = \dot{\lambda}_{k-1} - \theta\, \lambda_{k-1}\ ,\ - w\, \overline{f} \hat{=} (\mathrm{rot}\, \dot{\overline{x}})^{\perp}\ ,\ \theta \hat{=} \mathrm{div}\, \dot{\overline{x}}\ . \end{cases} \tag{II.48}$$

Ainsi, par exemple,

$$\begin{cases} B_1 \hat{=} \overline{n}_o \otimes \overline{V} + \overline{V} \otimes \overline{n}_o\ , \\ B_2 \hat{=} \overline{n}_o \otimes (\dot{\overline{V}} - \theta\, \overline{V}) + (\dot{\overline{V}} - \theta\, \overline{V}) \otimes \overline{n}_o - 2\, \overline{V} \otimes \overline{V}\ , \\ B_3 \hat{=} \overline{n}_o \otimes [\overline{V} - \theta\, \overline{V} + (\theta^2 - 2\dot{\theta})\, \overline{V}] + [\ddot{\overline{V}} - \theta \dot{\overline{V}} + (\theta^2 - 2\dot{\theta}) V] \otimes \overline{n}_o \\ \qquad + 6\, \theta\, \overline{V} \otimes \overline{V} - 3\, (\dot{\overline{V}} \otimes \overline{V} + \overline{V} \otimes \dot{\overline{V}}), \\ B_4 \hat{=} n_o \otimes [\dddot{\overline{V}} - \theta \ddot{\overline{V}} + (\theta^2 - 3\dot{\theta})\, \dot{\overline{V}} - (\theta^3 - 5\theta\dot{\theta} + 3\ddot{\theta})\, \overline{V}] \\ \qquad + [\ddot{\overline{V}} - \theta\, \ddot{\overline{V}} + (\theta^2 - 3\dot{\theta})\, \dot{\overline{V}} - (\theta^3 - 5\theta\dot{\theta} + 3\theta)\, \overline{V}] \otimes \overline{n}_o \\ \qquad + (16\dot{\theta} - 14\theta^2) \overline{V} \otimes \overline{V} - 4(\ddot{\overline{V}} \otimes \overline{V} + \overline{V} \otimes \ddot{\overline{V}}) - 6\, \dot{\overline{V}} \otimes \dot{\overline{V}} + 10\theta (\dot{\overline{V}} \otimes \overline{V} + \overline{V} \otimes \dot{\overline{V}}). \end{cases} \tag{II.49}$$

On écrit aisément les matrices des tenseurs $A_1,\ldots,A_4$, $B_1,\ldots,B_4$ relatives à la base $\{\bar{e}(t), \bar{f}(t), \bar{n}_o\}$ déduite de la base $\{\bar{e}_o, \bar{f}_o, \bar{n}_o\}$ par rotation d'angle ϕ explicitement en fonction de w, θ, $\omega = \dot{\phi}$ et de leurs dérivées par rapport au temps.

2.5 - *ECOULEMENTS PARTICULIERS*

2.5.1.- On appelle écoulement à rotationnel pariétal de direction localement fixe (R P D L F) tout écoulement pour lequel, en chaque point de la paroi le rotationnel de la vitesse, exprimée par rapport à un référentiel lié à cette paroi, soit de direction fixe.

Les écoulements plans sont des écoulements R P D L F . On a donc :

$$(\text{rot } \dot{\underline{x}}) \wedge (\text{rot } \dot{\underline{x}})' \hat{=} 0 , \tag{II.50}$$

c'est-à-dire, d'après (8), $\omega = 0$: la base $\{\bar{e},\bar{f},\bar{n}_o\}$ est fixe.
La loi (42) se simplifie; en effet, tenant compte du fait que $\bar{f}$ est un vecteur constant, on a

$$\bar{A}_t(\tau) = -\int_t^\tau w(u) \exp \psi_t(u)\, du\, \bar{f} + [\exp \psi_t(\tau)-1]\, \bar{n}_o \tag{II.51}$$

et, (avec $\phi = 0$ dans (35)),

$$C_t(\tau) - I \hat{=} -\int_t^\tau w \exp \psi_t \, du(\bar{f} \otimes \bar{n}_o + \bar{n}_o \otimes \bar{f}) \tag{II.52}$$

$$+\{[\int_t^\tau w \exp \psi_t \, du]^2 + \exp(2\psi_t(\tau)\,)-1\}\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o,$$

si bien que les tenseurs A_n peuvent être écrits sous la forme

$$\begin{cases} A_n \hat{=} - w_n\, (\bar{f} \otimes \bar{n}_o + \bar{n}_o \otimes \bar{f}) + 2\, \theta_n\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o \\ w_n = \dot{w}_{n-1} + \theta\, w_{n-1},\ w_1 = w \\ \theta_n = \dot{\theta}_{n-1} + 2\theta\theta_{n-1} + w\, w_{n-1},\ \theta_1 = \theta. \end{cases} \tag{II.53}$$

De même, les relations (45) et (36) deviennent

$$\bar{B}_t(\tau) = \int_t^\tau w(u) \exp\ \psi_\tau(u)\, du\, \bar{f} + [\exp \psi_\tau(t)-1]\, \bar{n}_o \ , \tag{II.54}$$

$$(II.55)\qquad C_t^{-1}(\tau) - I \hat{=} \left[\int_t^\tau w \exp\psi_\tau \, du\right]^2 \bar{f}\otimes\bar{f} + [\exp(2\psi_\tau(t))-1]\,\bar{n}_o\otimes\bar{n}_o$$

$$+ \exp\psi_\tau(t) \int_t^\tau w \exp\psi_\tau \, du\,(\bar{f}\otimes\bar{n}_o + \bar{n}_o\otimes\bar{f}) \ ;$$

la loi de récurrence (48) se simplifie et on obtient :

$$(II.56)\qquad \begin{cases} B_n \hat{=} a_n \bar{f}\otimes\bar{f} + b_n \bar{n}_o\otimes\bar{n}_o + c_n(\bar{f}\otimes\bar{n}_o + \bar{n}_o\otimes\bar{f}), \\ a_n = \dot{a}_{n-1} + 2w c_{n-1}, \\ b_n = \dot{b}_{n-1} - 2\theta b_{n-1}, \\ c_n = \dot{c}_{n-1} + w b_{n-1} - \theta c_{n-1},\ a_1 = 0,\ b_1 = 2\theta,\ c_1 = -w. \end{cases}$$

2.5.2. Si l'écoulement relatif à la paroi est stationnaire, d'après (50) et (8) la base $\{\bar{e}, \bar{f}, \bar{n}_o\}$ est évidemment fixe et de plus, w et θ sont constants. Les relations précédents, se particularisent encore; ainsi on a :

$$(II.57)\qquad C_t(\tau) - I \hat{=} -\frac{w}{\theta}[\exp(\tau-t)\theta - 1](\bar{f}\otimes\bar{n}_o + \bar{n}_o\otimes\bar{f})$$

$$+ \frac{1}{\theta^2}[(w^2+\theta^2)\exp 2(\tau-t)\theta - 2w^2\exp(\tau-t)\theta + w^2-\theta^2]\bar{n}_o\otimes\bar{n}_o,$$

$$(II.58)\qquad C_t^{-1}(\tau) - I \hat{=} \frac{w}{\theta}[\exp(t-\tau)\theta - \exp 2(t-\tau)\theta](\bar{f}\otimes\bar{n}_o + \bar{n}_o\otimes\bar{f})$$

$$+ \frac{w^2}{\theta^2}[1 - 2\exp(t-\tau)\theta + \exp 2(t-\tau)\theta]\bar{f}\otimes\bar{f}$$

$$+ [\exp 2(t-\tau)\theta - 1]\,\bar{n}_o\otimes\bar{n}_o \ ;$$

d'où il s'ensuit :

$$(II.59)\qquad A_n = -w\theta^{n-1}(\bar{f}\otimes\bar{n}_o + \bar{n}_o\otimes\bar{f}) + [(2^n-2)w^2\theta^{n-2} + (2\theta)^n]\bar{n}_o\otimes\bar{n}_o$$

$$(II.60)\qquad B_n = (-1)^{n+1}(1-2^n)w\theta^{n-1}(\bar{f}\otimes\bar{n}_o + \bar{n}_o\otimes\bar{f})$$

$$+(-1)^n 2(1-2^{n-1})w^2\theta^{n-2}\bar{f}\otimes\bar{f} + (-1)^{n+1}(2\theta)^n\bar{n}_o\otimes\bar{n}_o \ .$$

2.5.3.- Un cas particulier important est le cas des écoulements isovolumiques : $\theta = 0$, $\bar{V}(t) = - w(t)\, \bar{f}(t)$. On a alors

$$\bar{A}_t(\tau) = - \int_t^\tau w(u)\, \bar{f}(u)\, du = - B_t(\tau) \tag{II.61}$$

et, donc

$$C_t(\tau) - I = -\bar{n}_o \otimes \int_t^\tau w\, \bar{f}\, du - \int_t^\tau w\, \bar{f}\, du \otimes \bar{n}_o + \Big[\int_t^\tau w\, \bar{f}\, du\Big]^2 \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o \tag{II.62}$$

$$C_t^{-1}(\tau) - I \hat{=} n_o \otimes \int_t^\tau w\, \bar{f}\, du + \int_t^\tau w\, \bar{f}\, du \otimes \bar{n}_o + \int_t^\tau w\, \bar{f}\, du \otimes \int_t^\tau w\, \bar{f}\, du\ . \tag{II.63}$$

$\omega = \partial_t\, \phi$ désignant toujours la rotation de la base $\{\bar{e}(t), \bar{f}(t), \bar{n}_o\}$, on en déduit

$$\left\{\begin{array}{l} A_n \hat{=} u_n(\bar{n}_o \otimes \bar{e} + \bar{e} \otimes \bar{n}_o) - W_n(\bar{n}_o \otimes \bar{f} + \bar{f} \otimes \bar{n}_o) + v_n\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o\ , \\ \qquad u_n = \dot{u}_{n-1} + \omega\, w_{n-1}\ , \\ \qquad w_n = \dot{w}_{n-1} - \omega\, u_{n-1}\ , \\ \qquad v_n = \dot{v}_{n-1} + 2\, w\, w_{n-1}\ , \quad u_1 = 0\ , \quad w_1 = w\ , \quad v_1 = 0\ . \end{array}\right. \tag{II.64}$$

Pour obtenir les tenseurs B_n, il est plus rapide d'utiliser la loi (I.24) que la définition (I.18) et la relation (63). Il vient

$$\left\{\begin{array}{l} B_n \hat{=} \alpha_n\, \bar{e} \otimes \bar{e} + \beta_n\, \bar{f} \otimes \bar{f} + \gamma_n(\bar{e} \otimes \bar{f} + \bar{f} \otimes \bar{e}) + \delta_n(\bar{n}_o \otimes \bar{e} + \bar{e} \otimes \bar{n}_o) \\ \qquad\qquad + \varepsilon_n(\bar{n}_o \otimes \bar{f} + \bar{f} \otimes \bar{n}_o)\ , \\ \qquad \alpha_n = \dot{\alpha}_{n-1} - 2\omega\, \gamma_{n-1}\ , \\ \qquad \beta_n = \dot{\beta}_{n-1} + 2\omega\, \gamma_{n-1} + 2\, w\, \varepsilon_{n-1}\ , \\ \qquad \gamma_n = \dot{\gamma}_{n-1} + \omega\, (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}) + w\, \delta_{n-1}\ , \\ \qquad \delta_n = \dot{\delta}_{n-1} - \omega\, \varepsilon_{n-1}\ , \\ \qquad \varepsilon_n = \dot{\varepsilon}_{n-1} + \omega\, \delta_{n-1}\ , \quad \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0\ , \quad \varepsilon_1 = - w \end{array}\right. \tag{II.65}$$

Si l'écoulement est à la fois isovolumique et R P D L F, (64) et (65) deviennent respectivement, puisqu'alors $\omega = 0$.

$$A_n \hat{=} - {}^{(n-1)}w\,(\bar{n}_o \otimes \bar{f} + \bar{f} \otimes \bar{n}_o) + v_n\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o \,, \tag{II.66}$$

$$v_n = \dot{v}_{n-1} + 2\, w\, {}^{(n-2)}w \,, \quad v_1 = 0 \,,$$

$$B_n \hat{=} - {}^{(n-1)}w(\bar{n}_o \otimes \bar{f} + \bar{f} \otimes \bar{n}_o) - v_n\, \bar{f} \otimes \bar{f} \,. \tag{II.67}$$

Enfin si l'écoulement est isovolumique et stationnaire on obtient les expressions des tenseurs A_n et B_n, soit en particularisant (62) et (63) où l'on porte w = cte, soit en posant $\theta = 0$ dans les relations (57) et (58) Comme le laisse prévoir le corollaire 1, et les égalités (I.42) et (I.43), il en résulte

$$C_t(\tau) - I \hat{=} w(t-\tau)\,(\bar{n}_o \otimes \bar{f} + \bar{f} \otimes \bar{n}_o) + w^2(t-\tau)^2\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o \,, \tag{II.68}$$

$$C_t^{-1}(\tau) - I \hat{=} w(\tau-t)(\bar{n}_o \otimes \bar{f} + \bar{f} \otimes n_o) + w^2(\tau-t)^2\, \bar{f} \otimes \bar{f} \,, \tag{II.69}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \hat{=} - w(\bar{n}_o \otimes \bar{f} + \bar{f} \otimes \bar{n}_o), \\ A_2 \hat{=} 2\, w^2\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o \,, \\ A_k \hat{=} 0 \quad \text{si } k \geq 3 \,, \end{array} \right. \tag{II.70}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 \hat{=} - w\,(\bar{n}_o \otimes \bar{f} + \bar{f} \otimes \bar{n}_o) \,, \\ B_2 \hat{=} - 2\, w^2\, \bar{f} \otimes \bar{f} \,, \\ B_k \hat{=} 0 \quad \text{si} \quad k \geq 3 \,. \end{array} \right. \tag{II.71}$$

Rappelons que dans tout le paragraphe (2.4) la paroi a été supposée stationnaire; si celle-ci est en mouvement le tenseur orthogonal Q(t) caractérisant le changement de référentiel ainsi introduit, les tenseurs A_n et B_n seront alors obtenus en utilisant les relations de transformation classiques de changement de référentiel.

* * *

*

Nous constatons que le problème cinématique posé à la paroi se trouve être entièrement résolu grâce, essentiellement, à la formule (II.20), pour des écoulements quelconques vérifiant toutefois l'hypothèse d'adhérence à la paroi. Par ailleurs il en a été déduit l'expression explicite de l'histoire du tenseur de Cauchy-Green relatif; les relations (II.37 et 38) sont donc riches de conséquences puisque, on le sait, (I,46), le tenseur des contraintes pour un matériau simple, peut s'exprimer par une fonctionnelle de cette histoire. Il est donc possible d'aborder le problème de la contrainte à la paroi, problème dont l'étude fait l'objet du chapitre III.

CHAPITRE III

CONTRAINTE A LA PAROI

R. BERKER a abordé cette question. Il a donné [10] l'expression du *vecteur* contrainte qui s'exerce, à la paroi, sur un *fluide incompressible de Rivlin-Ericksen de degré deux* ; TRUESDELL rappelle cette expression, [1] page 220, à savoir

$$\bar{t} \hat{=} T\,\bar{n}_o = [-p + (2\alpha_1 + \alpha_2)\, w^2]\,\bar{n}_o - \mu\, w\, \bar{f} - \alpha_1 (w'\, \bar{f} - \omega\, w\, \bar{e}) \tag{III.1}$$

où la base $\{\bar{e}(t), \bar{f}(t), \bar{n}_o\}$ est la base orthonormée introduite par (II.4). Nous avons généralisé la formule de BERKER [7] au cas des fluides, incompressibles ou non, de Rivlin-Ericksen de *complexité* N. Nous nous proposons dans ce chapitre de donner des résultats généraux, en ce qui concerne les matériaux simples, en détaillant le cas des fluides de Rivlin-Ericksen et ceux de White-Metzner tout en considérant non pas seulement le vecteur contrainte à la paroi mais le tenseur des contraintes T. Ce tenseur étant intrinsèque, nous supposons la paroi fixe.

3.1. LE CAS GENERAL DES MATERIAUX SIMPLES.

3.1.1.- Nous avons obtenu, (II.19), l'expression du gradient de la déformation à la paroi, à savoir

$$\text{(III.2)} \quad \begin{cases} F_o(t) \hat{=} I + \bar{A}_o(t) \otimes \bar{n}_o \,, \; A_o(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{V}(u)\, \exp \psi_o(u)\, du \,, \\ \bar{V}(t) = -\, w(t)\, \bar{f}(t) + \theta(t)\, \bar{n}_o \,, \; \psi_o(t) = \displaystyle\int_0^t \theta(u)\, du, \\ -w(t)\, \bar{f}(t) \hat{=} (\operatorname{rot} \dot{\bar{x}}(t))^{\perp}, \theta(t) \hat{=} \operatorname{div} \dot{\bar{x}}(t); \end{cases}$$

suivant (I.25) son histoire jusqu'à l'instant t est donnée par

$$F_o^t(s) \hat{=} I + \bar{A}_o(t-s) \otimes \bar{n}_o \quad , \quad s \in [0, +\infty[\tag{III.3}$$

L'examen des relations (2), (3) et (I.45) donne aussitôt le résultat :

En un point d'une paroi à laquelle adhère le matériau, les contraintes qui s'exercent sur un matériau simple sont entièrement déterminées par la donnée des histoires du vecteur rotationnel et de la divergence de la vitesse relative à cette paroi.

Ce résultat apparait aussi comme conséquence immédiate du corollaire 1 page 16 et de la forme réduite (I.46).

3.1.2.- Dans le cas d'un matériau isotrope (I.49), la fonctionnelle $\mathcal{R}$ étant isotrope, on doit avoir pour tout tenseur orthogonal Q

$$(III.4) \qquad Q\ T\ Q^T = \mathcal{R}\ [Q\ C_t^t\ Q^T,\ Q\ B_o\ Q^T \text{ ou } \rho]\ ,$$

Exprimons relativement à la base fixe $\{\bar{e}_o, \bar{f}_o, \bar{n}_o\}$ les matrices des tenseurs C_t^t, B_o . D'après (II.35), en posant

$$\alpha_t^t(s) = \int_t^{t-s} w \sin\phi \exp\psi_t\ du,\ \beta_t^t(s) = -\int_t^{t-s} w \cos\phi \exp\psi_t\ du\ ,$$

$\gamma_t^t(s) = \exp\psi_t(t-s)$, on a

$$(III.5) \qquad [C_t^t]_{w,\omega,\theta} \hat{=} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \alpha_t^t \\ 0 & 1 & \beta_t^t \\ \alpha_t^t & \beta_t^t & (\alpha_t^t)^2 + (\beta_t^t)^2 + (\gamma_t^t)^2 \end{Vmatrix}\ ,$$

les indices w, ω et θ rappelant simplement la dépendance de C_t^t par rapport aux fonctions w, ϕ, ($\dot{\phi} = \omega$) et θ .

De même, à l'aide de la deuxième relation (I.15), des relations (2), et avec

$$\alpha_o(t) = \int_0^t w \sin\phi \exp\psi_o\ du,\ \beta_o(t) = -\int_0^t w \cos\phi \exp\psi_o\ du,\ \gamma_o(t) = \exp\psi_o(t),$$

il vient

$$(III.6) \quad [B_o]_{w,\omega,\theta} \hat{=} \begin{Vmatrix} 1+\alpha_o^2 & \alpha_o\beta_o & \alpha_o\gamma_o \\ \alpha_o\beta_o & 1+\beta_o^2 & \beta_o\gamma_o \\ \alpha_o\gamma_o & \beta_o\gamma_o & \gamma_o^2 \end{Vmatrix}$$

Enfin introduisons la matrice du tenseur des contraintes T

$$[T] = \begin{Vmatrix} T\langle\bar{e}_o\ \bar{e}_o\rangle & T\langle\bar{e}_o\ \bar{f}_o\rangle & T\langle\bar{e}_o\ \bar{n}_o\rangle \\ T\langle\bar{e}_o\ \bar{f}_o\rangle & T\langle\bar{f}_o\ \bar{f}_o\rangle & T\langle\bar{f}_o\ \bar{n}_o\rangle \\ T\langle\bar{e}_o\ \bar{n}_o\rangle & T\langle\bar{f}_o\ \bar{n}_o\rangle & T\langle\bar{n}_o\ \bar{n}_o\rangle \end{Vmatrix}$$

Considérons en premier lieu le tenseur orthogonal

$$Q = \bar{e}_o \otimes \bar{e}_o + \bar{f}_o \otimes \bar{f}_o - \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o \; ; \tag{III.7}$$

on vérifie aisément d'une part

$$[Q][C_t^t]_{w,\omega,\theta}\,[Q^T] \hat{=} [C_t^t]_{-w,\omega,\theta} \; , \quad [Q][B_o]_{w,\omega,\theta}\,[Q^T] \hat{=} [B_o]_{-w,\omega,\theta} \; , \tag{III.8}$$

et d'autre part

$$[Q][T][Q^T] = \begin{Vmatrix} T\langle \bar{e}_o\, \bar{e}_o\rangle & T\langle \bar{e}_o\, \bar{f}_o\rangle & -T\langle \bar{e}_o\, \bar{n}_o\rangle \\ T\langle \bar{e}_o\, \bar{f}_o\rangle & T\langle \bar{f}_o\, \bar{f}_o\rangle & -T\langle \bar{f}_o\, \bar{n}_o\rangle \\ -T\langle \bar{e}_o\, \bar{n}_o\rangle & -T\langle \bar{f}_o\, \bar{n}_o\rangle & T\langle \bar{n}_o\, \bar{n}_o\rangle \end{Vmatrix} \tag{III.9}$$

La transformation (4) avec Q donnée par (7) revient, d'après (8), à remplacer w par -w dans la loi de comportement; il résulte donc de (9) certaines propriétés de parité des contraintes vis-à-vis de la fonction w. Si nous considérons le tenseur

$$Q = -\bar{e}_o \otimes \bar{e}_o + \bar{f}_o \otimes \bar{f}_o + \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o \; ; \tag{III.10}$$

puisque l'on a

$$[Q][C_t^t]_{w,\omega,\theta}\,[Q^T] \hat{=} [C_t^t]_{w,-\omega,\theta}, \; [Q][B_o]_{w,\omega,\theta}[Q^T] \hat{=} [B_o]_{q,-\omega,\theta} \; , \tag{III.11}$$

la transformation (4) et (10) équivaut à changer ω en $-\omega$ (c'est-à-dire ϕ en $-\phi$) dans la loi de comportement. Or, comme, avec Q donné par (10), il vient

$$[Q][T][Q^T] = \begin{Vmatrix} T\langle \bar{e}_o\, \bar{e}_o\rangle & -T\langle \bar{e}_o\, \bar{f}_o\rangle & -T\langle \bar{e}_o\, \bar{n}_o\rangle \\ -T\langle \bar{e}_o\, \bar{f}_o\rangle & T\langle \bar{f}_o\, \bar{f}_o\rangle & T\langle \bar{f}_o\, \bar{n}_o\rangle \\ -T\langle \bar{e}_o\, \bar{n}_o\rangle & T\langle \bar{f}_o\, \bar{n}_o\rangle & T\langle \bar{n}_o\, \bar{n}_o\rangle \end{Vmatrix} \; , \tag{III.12}$$

on déduit, là aussi, des propriétés de parité des contraintes par rapport à la rotation ω du rotationnel de la vitesse.

Nous avions déjà obtenu ces propriétés de parité dans le cas des fluides de Rivlin-Ericksen [7]; nous constatons qu'elles sont générales pour tout matériau simple isotrope. On peut les résumer à l'aide du tableau suivant :

(III.13)

	$T\langle \bar{e}_o\ \bar{e}_o\rangle$	$T\langle \bar{f}_o\ \bar{f}_o\rangle$	$T\langle \bar{n}_o\ \bar{n}_o\rangle$	$T\langle \bar{e}_o\ \bar{f}_o\rangle$	$T\langle \bar{e}_o\ \bar{n}_o\rangle$	$T\langle \bar{f}_o\ \bar{n}_o\rangle$
w...	Paire (P)	P	P	P	Impaire(I)	I
ω...	P	P	P	**I**	I	I

$T\langle \bar{e}\ \bar{e}\rangle$, $T\langle \bar{f},\bar{f}\rangle$, ..., $T\langle \bar{f},\bar{n}_o\rangle$ désignant les composantes du tenseur des contraintes exprimées dans la base $\{\bar{e}(t), \bar{f}(t), \bar{n}_o\}$, puisque l'on a

(III.14)

$$
\begin{cases}
T\langle \bar{e}\ \bar{e}\rangle = T\langle \bar{e}_o\ \bar{e}_o\rangle \cos^2\phi + T\langle \bar{f}_o\ \bar{f}_o\rangle \sin^2\phi + T\langle \bar{e}_o\ \bar{f}_o\rangle \sin^2\phi\ , \\
T\langle \bar{f}\ \bar{f}\rangle = T\langle \bar{e}_o\ \bar{e}_o\rangle \sin^2\phi + T\langle \bar{f}_o\ \bar{f}_o\rangle \cos^2\phi - T\langle \bar{e}_o\ \bar{f}_o\rangle \sin^2\phi\ , \\
T\langle \bar{e}\ \bar{f}\rangle = \cos 2\phi\ T\langle \bar{e}_o\ \bar{f}_o\rangle + \frac{1}{2}\sin 2\phi\,(T\langle f_o\ f_o\rangle - T\langle e_o\ e_o\rangle)\ , \\
T\langle \bar{e}\ \bar{n}_o\rangle = \cos\phi\ T\langle \bar{e}_o\ \bar{n}_o\rangle + \sin\phi\ T\langle \bar{f}_o\ \bar{n}_o\rangle\ , \\
T\langle \bar{f}\ \bar{n}_o\rangle = -\sin\phi\ T\langle \bar{e}_o\ \bar{n}_o\rangle + \cos\phi\ T\langle \bar{f}_o\ \bar{n}_o\rangle\ ,
\end{cases}
$$

on constate que toutes les propriétés (13) sont conservées pour ces composantes.

L'ensemble des résultats établis dans les deux paragraphes précédents sont rassemblés par le

Théorème 1

Sur une paroi solide et stationnaire à laquelle adhère le matériau, les contraintes qui s'exercent sur un matériau simple sont données par des fonctionnelles de trois histoires : l'histoire $w^t(s)$ de la norme du rotationnel de la vitesse, l'histoire $\omega^t(s)$ de la rotation, autour de la normale à la paroi, de ce rotationnel et l'histoire $\theta^t(s)$ du taux de dilatation volumique. Par rapport à leurs arguments w^t et ω^t , ces fonctionnelles vérifient des propriétés de parité telles que l'on ait, pour $s \geq 0$, d'une part,

$$(III.15)\quad \begin{cases} T\langle \bar{e}\ \bar{e}\rangle\,(w^t,\omega^t,\theta^t) = T\langle \bar{e}\ \bar{e}\rangle\,(-w^t,\omega^t,\theta^t), \\ T\langle \bar{f}\ \bar{f}\rangle\,(w^t,\omega^t,\theta^t) = T\langle \bar{f}\ \bar{f}\rangle\,(-w^t,\omega^t,\theta^t), \\ T\langle \bar{n}_o\ \bar{n}_o\rangle\,(w^t,\omega^t,\theta^t) = T\langle \bar{n}_o\ \bar{n}_o\rangle(-w^t,\omega^t,\theta^t), \\ T\langle \bar{e}\ \bar{f}\ \rangle(w^t,\omega^t,\theta^t) = T\langle \bar{e}\ \bar{f}\rangle\,(-w^t,\omega^t,\theta^t), \end{cases}$$

$$(III.16)\quad \begin{cases} T\langle \bar{e}\ \bar{n}_o\rangle\,(w^t,\omega^t,\theta^t) = -\,T\langle \bar{e}\ \bar{n}_o\rangle\,(-w^t,\omega^t,\theta^t), \\ T\langle \bar{f}\ \bar{n}_o\rangle\,(w^t,\omega^t,\theta^t) = -\,T\langle \bar{f}\ \bar{n}_o\rangle(-w^t,\omega^t,\theta^t), \end{cases}$$

et d'autre part,

$$(III.17)\quad \begin{cases} T\langle \bar{e}\ \bar{e}\rangle\,(w^t,\omega^t,\theta^t) \hat{=} T\langle \bar{e}\ \bar{e}\rangle\,(w^t,-\omega^t,\theta^t), \\ T\langle \bar{f}\ \bar{f}\rangle\,(w^t,\omega^t,\theta^t) \hat{=} T\langle \bar{f}\ \bar{f}\rangle\,(w^t,-\omega^t,\theta^t), \\ T\langle \bar{n}_o\ \bar{n}_o\rangle(w^t,\omega^t,\theta^t) \hat{=} T\langle \bar{n}_o\ \bar{n}_o\rangle\,(w^t,-\omega^t,\theta^t) \\ T\langle \bar{f}_o\ \bar{n}_o\rangle(w^t,\omega^t,\theta^t) \hat{=} T\langle \bar{f}\ \bar{n}_o\rangle\,(w^t,-\omega^t,\theta^t), \end{cases}$$

$$(III.18)\quad \begin{cases} T\langle \bar{e}\ \bar{f}\rangle\,(w^t,\omega^t,\theta^t) \hat{=} -\,T\langle \bar{e}\ \bar{f}\rangle\,(w^t,-\omega^t,\theta^t), \\ T\langle \bar{e}\ \bar{n}_o\rangle\,(w^t,\omega^t,\theta^t) \hat{=} -\,T\langle \bar{e}\ \bar{n}_o\rangle(w^t,-\omega^t,\theta^t). \end{cases}$$

3.1.3.- Les deux égalités (18) soulignent l'intérêt des écoulements R P D L F introduits au paragraphe 2.5.1 : pour de tels écoulements on a $\omega^t(s) = 0$ et donc

$$(III.19)\qquad T\langle \bar{e}\ \bar{f}\rangle \hat{=} 0\ ,\quad T\langle \bar{e}\ \bar{n}_o\rangle \hat{=} 0\ .$$

Cette dernière relation traduit le

Corollaire 1

En un point d'une paroi solide à laquelle adhère un matériau simple isotrope en écoulement R P D L F, le vecteur contrainte est normal au rotationnel de la vitesse.

Il résulte d'après (17) et (19) que le tenseur des contraintes à la paroi est entièrement déterminé par la donnée de quatre fonctionnelles, à valeurs scalaires, des deux histoires w^t et θ^t, ces fonctionnelles étant paramétrées, suivant (I.47) et (III.6), par $w(t)$ et $\theta(t)$ pour un matériau isotrope en général, alors qu'elles sont paramétrées par $\rho(t)$ seulement dans le cas d'un fluide.

On déduit :

Corollaire 2

Le tenseur des contraintes qui s'exercent, à la paroi, sur un matériau simple isotrope, si ce matériau ahdère à la paroi et si l'écoulement est R P D L F, est donné par

$$T \hat{=} \sum_3 I + \sum_1 \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o + \sum_2 \bar{f} \otimes \bar{f} - \tau(\bar{f} \otimes \bar{n}_o + \bar{n}_o \otimes \bar{f} \tag{III.20}$$

où $\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$ et τ sont quatre fonctionnelles, à valeurs scalaires, appelées respectivement première, deuxième, troisième fonctionnelle de contraintes pariétales normales et fonctionnelle de contraintes pariétales tangentielle; elles sont définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} \underset{s\geq 0}{\tau} (w^t(s), \theta^t(s), w(t), \theta(t)) \hat{=} - T \langle \bar{f}\, \bar{n}_o \rangle \\ \underset{s\geq 0}{\sum_1} (w^t(s), \theta^t(s), w(t), \theta(t)) \hat{=} T \langle \bar{n}_o\, \bar{n}_o \rangle - T\langle \bar{e}\, \bar{e} \rangle, \\ \underset{s\geq 0}{\sum_2} (w^t(s), \theta^t(s), w(t), \theta(t)) \hat{=} T \langle \bar{f}\, \bar{f} \rangle - T\langle \bar{e}\, \bar{e} \rangle , \\ \underset{s\geq 0}{\sum_3} (w^t(s), \theta^t(s), w(t), \theta(t)) \hat{=} T \langle \bar{e}\, \bar{e} \rangle, \end{array}\right. \tag{III.21}$$

ou les paramètres $w(t)$ et $\theta(t)$ sont à remplacer par $\rho(t)$ s'il s'agit d'un fluide. Les fonctionnelles de contraintes pariétales normales sont des fonctionnelles paires de w, tandis que la fonctionnelle de contrainte pariétale tangentielle est impaire.

3.2. *LES FLUIDES SIMPLES INCOMPRESSIBLES.*

3.2.1.- Nous reprenons les questions précédentes en considérant des *fluides simples incompressibles*. La forme réduite (I.47) devient dans ce cas

$$T = - p\, I + R\,(C_t^t(s)) \tag{III.23}$$

où $T + p\, I$ est appelée la contrainte déterminée (p fonction de point, est la pression hydrostatique), la fonctionnelle R vérifiant, pour tout tenseur Q orthogonal

(III.24) $$\mathcal{R}\ (Q\ C_t^t\ Q^T) = \mathcal{R}(C_t^t).$$

En posant

(III.25) $$N(t) = \bar{f}(t) \otimes \bar{n}_o$$

et en observant attentivement (II.37 et 38) puisque

(III.26) $$(\mathrm{rot}\ \dot{\underline{x}}(t-s))^{\perp} \hat{=} - w^t(s)\ \bar{f}^t(s)\ ,$$

on constate, que à la paroi, (23) peut être écrite sous la forme

(III.27) $$T \hat{=} - p\ I + F\ (w^t(s),\ N^t(s))$$

où F est une fonctionnelle à valeurs tensorielles symétriques vérifiant d'après (24)

(III.28) $$F\ (\pm\ w^t,\ \pm\ Q\ N^t\ Q^T) = F\ (w^t,\ N^t)$$

les signes $\pm$ étant liés à cause de (26) et (25).

En considérant les symétries (7) et (10) on retrouve, évidemment, les propriétés de parité, par rapport aux histoires w^t et ω^t, (15, 16, 17, et 18).

3.2.2.- Envisageons des écoulements *R P D L F* de fluides incompressibles. Alors, puisque $\bar{f}$ est constant, on a

(III.29) $$N^t = N = \bar{f} \otimes \bar{n}_o\ ,$$

et (27 et 28) deviennent

(III.30) $$\begin{cases} T \hat{=} - p\ I + F\ (w^t,\ N), \\ F\ (\pm\ w^t,\ \pm\ Q\ N\ Q^T) = F\ (w^t,\ N)\ , \end{cases}$$

où F est une fonctionnelle à valeurs tensorielles symétriques de w^t à valeurs scalaires, paramétrée par N et isotrope de son paramètre, lequel vérifie, d'après (29)

(III.31) $$\mathrm{tr}\ N = 0\ ,\ |N| = 1\ ,\ N^2 = 0\ .$$

Ainsi, l'invariance définie par l'équation fonctionnelle (30) montre que si l'on remplace, dans la première relation (30) w^t par $\pm\ w^t$ et simultanément N par $\pm\ Q\ N\ Q^T$ où Q est un tenseur orthogonal quelconque, le tenseur T est remplacé par $Q\ T\ Q^T$.

Pour la symétrie (10) on a $Q\ N\ Q^T = N$; en choisissant signe + dans l'équation fonctionnelle (30), d'après (12) et la condition $Q\ T\ Q^T = T$ on constate que

$$T \langle \bar{e}\ \bar{f} \rangle \hat{=} 0 \quad , \quad T \langle \bar{e}\ \bar{n}_o \rangle \hat{=} 0 \ . \tag{III.32}$$

Puisque les composantes non nulles de la contrainte déterminée, à savoir $T \langle \bar{e}\ \bar{e} \rangle + p$, $T \langle \bar{f}\ \bar{f} \rangle + p$, $T \langle \bar{n}_o\ \bar{n}_o \rangle + p$ et $T \langle \bar{f}\ \bar{n}_o \rangle$ sont à la paroi, d'après la première relation (30), des fonctionnelles de w^t, on peut toujours poser

$$\left\{ \begin{array}{l} T \langle \bar{n}_o\ \bar{n}_o \rangle - T \langle \bar{e}\ \bar{e} \rangle \hat{=} \sum_{1 \atop s \geq 0} (w^t) \\ T \langle \bar{f}\ \bar{f} \rangle - T \langle \bar{e}\ \bar{e} \rangle \hat{=} \sum_{2 \atop s \geq 0} (w^t) \\ T \langle \bar{f}\ \bar{n}_o \rangle \hat{=} - \tau_{s \geq 0} (w^t) \end{array} \right. \tag{III.34}$$

introduisant ainsi les première et deuxième fonctionnelles de contraintes pariétales normales $\sum_1$ et $\sum_2$ et la fonctionnelle de contrainte pariétale tangentielle τ . La pression hydrostatique n'étant pas déterminée par la loi de comportement, on peut toujours prendre

$$p = - T \langle \bar{e}\ \bar{e} \rangle \ ,$$

et il s'ensuit

$$T \hat{=} - p\ I + \sum_1 (w^t)\ N^T N + \sum_2 (w^t)\ N\ N^T - \tau\ (w^t)\ (N + N^T). \tag{III.35}$$

Nous avons ainsi retrouvé la forme (20) dans le cas particulier des fluides simples incompressibles.

Par ailleurs si l'on considère la symétrie (7), on a $Q\ N\ Q^T = - N$; par conséquent, l'équation fonctionnelle (30) écrite en choisissant le signe - , la condition $Q\ T\ Q^T = T$ et la relation (9) montrent que les fonctionnelles de contraintes pariétales normales sont paires de w^t, tandis que la fonctionnelle de contrainte pariétale tangentielle est impaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1 (- w^t) = \sum_1 (w^t) \ , \\ \sum_2 (- w^t) = \sum_2 (w^t) \ , \\ \tau\ (- w^t) = - \tau\ (w^t) \ . \end{array} \right. \tag{III.36}$$

3.2.3.- Considérons maintenant des écoulements *stationnaires* de fluides simples incompressibles, en chaque point de la paroi, le rotationnel de la vitesse est constant : ces écoulements sont R P D L F et de plus l'histoire $w^t(s)$ est constante, $w^t(s) = w$. Les fonctionnelles de contraintes pariétales $\sum_1(w^t)$, $\sum_2(w^t)$ et $\tau\ (w^t)$ deviennent des *fonctions* de contraintes pariétales, respectivement $\sigma_1(w)$, $\sigma_2(w)$ et $\tau(w)$. Nous écrivons donc la relation (35) sous la forme

$$T \hat{=} - p\, I + \sigma_1(w)\, N^T N + \sigma_2(w)\, N N^T - \tau(w)\, (N + N^T)\ , \tag{III.37}$$

les fonctions de contraintes pariétales σ_1, σ_2 et τ vérifiant d'après (36)

$$\begin{cases} \sigma_1(-w) = \sigma \\ \sigma_2(-w) = \sigma_2\ ), \\ \tau(-w) = -\tau(w)\ . \end{cases} \tag{III.38}$$

Le corollaire 1 page 16 , les relations (III.37 et 31) permettent d'énoncer le

Théorème 2 *

Les fonctions de contraintes pariétales d'un fluide simple incompressible en écoulement stationnaire coïncident avec ses fonctions viscométriques.

Ce théorème fournit une nouvelle interprétation des fonctions viscométriques.

3.3. *LES FLUIDES DE RIVLIN-ERICKSEN*

3.3.1.- Deux cas intéressants de *fluides simples à mémoire infiniment courte* ont été rappelés en (I.50); il s'agit des fluides de Rivlin-Ericksen et des fluides de White-Metzner. D'une façon générale, d'après (I.47), la loi de comportement de tels fluides peut être écrite sous la forme

$$T = \underset{s\in[0,\varepsilon]}{R}\ (C_t^t(s), \rho) \tag{III.39}$$

ε étant un scalaire arbitrairement petit positif.

---

* Ce résultat a déjà été signalé par GOMBERT (3ième cycle-Grenoble).

On peut donc immédiatement proposer un corollaire supplémentaire au théorème 1 page 29 :

Corollaire 3

Sur une paroi solide et stationnaire à laquelle adhère un fluide simple à mémoire infiniment courte, les contraintes sont données par des *fonctions* des valeurs actuelles de la norme $w(t)$ du rotationnel de la vitesse - de la rotation $\omega(t)$ de celui-ci - du taux de dilatation volumique $\theta(t)$ - de leurs dérivées successives par rapport au temps $w', w'', \ldots, \overset{(n)}{w}, \ldots \omega', \omega'', \ldots, \overset{(n)}{\omega}, \ldots \theta', \theta'', \ldots, \overset{(n)}{\theta}, \ldots$ - et de la masse volumique ρ (t) .

Les propriétés de parité (15) (16) (17) et (18) seront facilement écrites; par exemple la première relation (15) et la première relation (18) deviennent respectivement

$$(III.40)\quad \begin{cases} T\langle \underline{\underline{e}}\underline{\underline{e}} \rangle (\rho, w, w', \ldots, \overset{(n)}{w}, \ldots \omega, \omega', \ldots, \overset{(n)}{\omega}, \ldots \theta, \theta', \ldots \overset{(n)}{\theta}, \ldots) \\ \qquad = T\langle \underline{\underline{e}}\underline{\underline{e}} \rangle (\rho, -w, -w', \ldots, \overset{(n)}{-w}, \ldots, \omega, \omega', \ldots, \overset{(n)}{\omega}, \ldots \theta, \theta', \ldots, \overset{(n)}{\theta}, \ldots) \\ T\langle \underline{\underline{e}}\underline{\underline{f}} \rangle (\rho, w, w', \ldots, \overset{(n)}{w}, \ldots \omega, \omega', \ldots, \overset{(n)}{\omega}, \ldots \theta, \theta', \ldots, \overset{(n)}{\theta}, \ldots) \\ \qquad = -T\langle \underline{\underline{e}}\underline{\underline{e}} \rangle (\rho, w, w', \ldots, \overset{(n)}{w}, \ldots, -\omega, -\omega', \ldots, \overset{(n)}{-\omega}, \ldots, \theta, \theta', \ldots \overset{(n)}{\theta}, \ldots). \end{cases}$$

D'une façon générale, toutes les fonctionnelles $\underset{s\geq 0}{F}$ envisagées précédemment dans ce chapitre, sont à remplacer, dans le cas de matériaux à mémoire infiniment courte par des fonctions, de type de celles écrites en (40), que nous noterons, pour simplifier, $\underset{s\in[0,\varepsilon]}{F}$.

3.3.2.- Dans le cas de fluides de Rivlin-Ericksen de complexité n la loi (39) devient

$$(III.41)\qquad T = g\,(A_1, A_2, \ldots A_n, \rho)\ ,$$

(cette loi a d'ailleurs été rappelée en (I.50)), où g est une fonction, à valeurs tensorielles symétriques, isotropique de ses n premiers arguments qui sont les n premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen. WANG établi un théorème de représentation [4] qui permet de donner l'expression de toute fonction isotrope, à valeurs tensorielles symétriques, d'arguments à valeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles symétriques ou antisymétriques. Dans le cas qui nous intéresse, on peut résumer ce théorème de

représentation de la manière suivante : la condition d'isotropie

$$g(Q\,A_1\,Q^T,\ Q\,A_2\,Q^T,\ldots,\ Q\,A_n\,Q^T,\rho) = g(A_1,A_2,\ldots\,A_n,\rho)$$

vérifiée pour tout tenseur orthogonal Q implique que g soit une combinaison linéaire de tenseurs de la forme

$$A_{(r,q,i,j)} \equiv A_r^i\,A_q^j + A_q^j\,A_r^i \tag{III.42}$$

où les exposants i et j appartiennent à l'ensemble {0,1,2} et les ordres r et q des tenseurs à {0,1,2,...,n} , le tenseur de Rivlin-Ericksen de rang 0 étant le tenseur unité; les coefficients de cette combinaison sont des fonctions *arbitraires* de certains invariants de tenseurs construits à l'aide des n premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen et éventuellement de la masse volumique.

Ainsi, par exemple, la loi de comportement d'un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité 2 est

$$\begin{aligned} T = &- p\,I + \alpha_1\,A_1 + \alpha_2\,A_2 + \alpha_3\,A_1^2 + \alpha_4\,A_2^2 + \alpha_5(A_1\,A_2 + A_2\,A_1) \\ &+ \alpha_6(A_1^2\,A_2 + A_2\,A_1^2) + \alpha_7(A_1\,A_2^2 + A_2^2\,A_1) + \alpha_8(A_1^2\,A_2^2 + A_2^2\,A_1^2) \end{aligned} \tag{III.43}$$

où les coefficients p, α_1, ... α_8 sont fonctions arbitraires de la masse volumique et des dix invariants de A_1 et A_2 :

$$\begin{aligned} &\text{tr } A_1,\ \text{tr } A_2,\ \text{tr } A_1^2,\ \text{tr } A_2^2,\ \text{tr } A_1^3\ ,\ \text{tr } A_2^3\ , \\ &\text{tr } A_1\,A_2,\ \text{tr } A_1^2\,A_2,\ \text{tr } A_1\,A_2^2,\ \text{tr } A_1^2\,A_2^2\ . \end{aligned} \tag{III.44}$$

Si le fluide est incompressible la pression p est à remplacer dans la loi (43) par la pression hydrostatique et les dix invariants précédents se réduisent à huit seulement puisqu'alors $\text{tr } A_1 = 0$ et $\text{tr } A_2 = \text{tr } A_1^2$.

Nous avons donné par la loi de récurrence (II.42) l'expression, à la paroi, des tenseurs de Rivlin-Ericksen lorsque l'écoulement est quelconque. On peut donc procéder au calcul des tenseurs définis par la relation (42) et, en portant les résultats ainsi obtenus dans la loi (41), on atteint l'expression explicite du tenseur des contraintes à la paroi pour un écoulement quelconque d'un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité n.

3.3.3.- A titre d'exemple nous effectuons le calcul qui vient d'être décrit dans le cas de la complexité 2, c'est-à-dire (43). En rappelant les deux premières relations (II.43),

$$\begin{cases} A_1 \hat{=} - w\, \bar{f} \hat{\wedge} \bar{n}_o + 2\theta\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o , \\ A_2 \hat{=} w\, \bar{e} \hat{\wedge} \bar{n}_o - (w' + w\theta)\, \bar{f} \hat{\wedge} \bar{n}_o + (2\theta' + 4\theta^2 + 2w^2)\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o , \end{cases}$$

où il a été posé, pour deux vecteurs quelconques $\bar{a}$ et $\bar{b}$.

(III.45) $$\bar{a} \hat{\wedge} \bar{b} = \bar{a} \otimes \bar{b} + \bar{b} \otimes \bar{a} \quad .$$

On déduit aisément les expressions, à la paroi, des tenseurs du type (42) qui interviennent au second membre de (43), soit

$$A_1^2 \hat{=} - 2\theta\, w\, \bar{f} \hat{\wedge} \bar{n}_o + w^2\, \bar{f} \otimes \bar{f} + (w^2 + 4\theta^2)\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o ,$$

$$A_2^2 \hat{=} - w\, \omega(w' + w\theta)\, \bar{e} \hat{\wedge} \bar{f} + 2\, w\, \omega\, (\theta' + 2\theta^2 + w^2) \bar{e} \hat{\wedge} \bar{n}_o$$

$$- 2\, (w' + w\theta)(\theta' + 2\theta^2 + w^2)\, \bar{f} \hat{\wedge} \bar{n}_o + w^2\, \omega^2\, \bar{e} \otimes \bar{e} + (w' + w\theta)^2\, \bar{f} \otimes \bar{f} +$$

$$[w^2\, \omega^2 + (w' + \theta\, w)^2 + 4(\theta' + 2^{\ 2} + w^2)^2]\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o ,$$

$$A_1\, A_2 + A_2\, A_1 \hat{=} - w^2\, \omega\, \bar{e} \hat{\wedge} \bar{f} + 2\, \theta\, w\, \bar{e} \hat{\wedge} \bar{n}_o - [2\theta(w' + w\theta) + 2w(\theta' + 2\theta^2 + w^2)]\bar{f} \hat{\wedge} \bar{n}_o$$

$$+ 2w\, (w' + w\theta)\, \bar{f} \otimes \bar{f} + [2\, w\, (w' + w\theta) + 8\theta(\theta' + 2\theta^2 + w^2)]\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o ,$$

$$A_1^2\, A_2 + A_2\, A_1^2 \hat{=} - 2\, \theta\, w^2\, \omega\, \bar{e} \hat{\wedge} \bar{f} + \omega\, w(w^2 + 4\theta^2)\, \bar{e} \hat{\wedge} \bar{n}_o$$

$$-[2(w^2 + \theta^2)(w' + w\theta) + 4\, \theta\, w(\theta' + 2\theta^2 + w^2)]\, \bar{f} \otimes \bar{n}_o$$

$$+ 4w\theta(w' + w\theta) f \otimes f + [4w\theta(w' + w\theta) + 4(w^2 + 4\theta^2)(\theta' + 2\theta^2 + w^2)]\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o ,$$

$$A_1\, A_2^2 + A_2^2\, A_1 \hat{=} -2\, w^2\, \omega(\theta' + 2\theta^2 + w^2) \bar{e} \hat{\wedge} \bar{f} + w\omega\, [\, w(w' + 4\ ) + 4\theta(\theta' + 2\theta^2 + w^2)]\bar{e} \hat{\wedge} \bar{n}_o$$

$$- [w^3\omega^2 + 2w(w' + w\theta)^2 + 4w\, (\theta' + 2\theta^2 + w^2)^2 + 4\theta(w' + w\theta)(\theta' + 2\theta^2 + w^2)]\, \bar{f} \hat{\wedge} \bar{n}_o$$

$$+ 4\, w\, (w' + w\theta)(\theta' + 2\theta^2 + w^2)\, \bar{f} \otimes \bar{f}$$

$$+ \{2\, w\, (w' + w\theta)\, (\theta' + 2\theta^2 + w^2) + 4\theta\, [w^2\omega^2 + (w' + w\theta)^2 + 4(\theta' + 2\theta^2 + w^2)^2]\}\bar{n}_o \otimes \bar{n}_o ,$$

$$A_1^2\, A_2^2 + A_2^2\, A_1^2 \hat{=} - w^2\, \omega[w(w' + w\theta) + 4\theta(\theta' + 2\theta^2 + w^2)]\ \bar{e} \hat{\otimes} \bar{f}$$

$$+ w\, \omega[2\, w\, \theta(w' + w\theta) + 2(w^2 + 4\theta^2)(\theta' + 2\theta^2 + w^2)]\ \bar{e} \hat{\otimes} \bar{n}_o$$

$$- \{4(w^2+2\theta^2)(w'+w\theta)(\theta'+2\theta^2+w^2)+2\theta w[w^2\omega^2+2(w'+w\theta)^2+4(\theta'+2\theta^2+w^2)^2]\}f \hat{\otimes} \bar{n}_o$$

$$+ 2\, w(w'+w\theta)[w(w'+w\theta)+4\theta(\theta'+2\theta^2+w^2)]\ \bar{f} \otimes \bar{f}$$

$$+ \{8\theta w(w'+w\theta)(\theta'+2\theta^2+w^2)+2(w^2+4\theta^2)[w^2\omega^2+(w'+w\theta)^2+4(\theta'+2\theta^2+w^2)^2]\}\bar{n}_o \otimes \bar{n}_o .$$

En portant les expressions précédentes dans (43) nous obtenons les contraintes à la paroi en contact avec un fluide de Rivlin-Ericksen de *complexité 2 en mouvement quelconque* :

(III.46)

$$T\, \langle \bar{e}\ \bar{e} \rangle \hat{=} - p + \alpha_4\, w^2\, \omega^2 ,$$

$$T\, \langle \bar{f}\ \bar{f} \rangle \hat{=} - p + \alpha_3\, w^2 + \alpha_4 (w'+w\theta)^2 + (2\, \alpha_5\, w + 4\, \alpha_6\, w\theta)(w' + w\theta)$$

$$+ 4\, \alpha_7\, w(w'+w\theta)\ (\theta'+2\theta^2+w^2)+2\alpha_8[w^2(w'+w\theta)^2+4w\theta(w'+w\theta)(\theta'+2\theta^2+w^2)],$$

$$T\, \langle \bar{n}_o\ \bar{n}_o \rangle \hat{=} -p + 2\alpha_1\, \theta + 2\, \alpha_2(\theta'+2\theta^2+w^2) + \alpha_3(w^2+4\theta^2)$$

$$+ \alpha_4\ [w^2\ \omega^2+(w'+w\theta)^2+4(\theta'+2\theta^2+w^2)^2]+ 2\alpha_5[w(w'+w\theta)+4\theta(\theta'+2\theta^2+w^2)]$$

$$+ 4\, \alpha_6\ [w\theta(w'+w\theta)+(w^2+4\theta^2)(\theta'+2\theta^2+w^2)]$$

$$+ 4\, \alpha_7\ [w^2\omega^2\theta\ +w(w'+w\theta)(\theta'+2\theta^2+w^2)+\theta(w'+w\theta)^2+4\theta(\theta'+2\theta^2+w^2)]$$

$$+ 2\, \alpha_8\ \{4w\theta(w'+w\theta)(\theta'+2\theta^2+w^2)+(w^2+4\theta^2)\ [w^2\omega^2+(w'+w\theta)^2+4(\theta'+2\theta^2+w^2)^2]\},$$

$$T\, \langle \bar{e}\ \bar{f} \rangle \hat{=} - \omega w\{\alpha_4(w'+w\theta)+\alpha_5 w + 2\alpha_6\, w\theta + 2\alpha_7(\theta'+2\theta^2+w^2)\}$$

$$- \omega w\{\alpha_8\, w\ [w(w'+w\theta) + 4\theta(\theta'+2\theta^2+w^2)]\} ,$$

$$T\,\langle \bar{\bar{e}}\,\bar{n}_o\rangle \triangleq \omega\, w\,\{\alpha_2 + 2\alpha_4(\theta'+2\theta^2+w^2)+ 2\alpha_5 +\alpha_6(w^2+4\theta^2)+\alpha_7[w(w'+w\theta)+4\theta(\theta'+2\theta^2+w^2)]\}$$

$$+ \omega\, w\,\{\alpha_8[2w\theta(w'+w\theta)+2(w^2+4\theta^2)(\theta'+2\theta^2+w^2)]\}\ ,$$

$$T\,\langle \bar{\bar{f}}\,\bar{n}_o\rangle \triangleq -\{\alpha_1 w + \alpha_2(w'+w\theta) + 2\alpha_3\, w\,\theta + 2\alpha_4(w'+w\theta)(\theta'+2\theta^2+w^2)\ \}$$

$$-2\alpha_5[\theta(w'+w\theta)+w(\theta'+z\theta^2+w^2)]$$

$$-2\alpha_6\ [(w^2+2\theta^2)(w'+w\theta)+ 2w\theta(\theta'+2\theta^2+w^2)\ ]$$

$$-\alpha_7\ [w^3\omega^2+2w(w'+w\theta)^2+4w(\theta'+2\theta^2+w^2)^2+4\theta(w'+w\theta)(\theta'+2\theta^2+w^2)]$$

$$-2\alpha_8\{2(w^2+2\theta^2)(w'+w\theta)(\theta'+2\theta^2+w^2)+\theta w[w^2\omega^2+2(w'+w\theta)^2+4(\theta'+2\theta^2+2w^2)^2]\},$$

où p, α_1, α_2,...,α_8 sont fonctionsarbitraires de ρ et de

(III.47)
$$\begin{cases}
\operatorname{tr} A_1 \triangleq 2\theta, \\
\operatorname{tr} A_2 \triangleq 2(\theta'+ 2\theta^2 + w^2) \\
\operatorname{tr} A_1^2 \triangleq 2\ (w^2 + 2\theta^2), \\
\operatorname{tr} A_2^2 \triangleq 2\ w^2\ \omega^2 + 2(w' + w\theta)^2 + 4(\theta'+ 2\theta^2 + w^2) \\
\operatorname{tr} A_1^3 \triangleq 2\theta(3\ w^2 + 4\theta^2) \\
\operatorname{tr} A_2^2 \triangleq 2\ w^2\ \omega^2 + 2(w'+w\theta)^2 + 4(\theta'+2\theta^2+w^2), \\
\operatorname{tr} A_2^3 \triangleq 6\ w^2\ \omega^2(\theta'+2\theta^2+w^2) + 6(w'+w\theta)^2(\theta'+2\theta^2+w^2)+8(\theta'+2\theta^2+w^2)^3, \\
\operatorname{tr} A_1A_2 \triangleq 2w(w'+w\theta)+4\theta(\theta'+2\theta^2+w^2), \\
\operatorname{tr} A_1^2\ A_2 \triangleq 4\ w\ \theta(w'+w\theta) + 2\ (w^2+4\theta^2)(\theta'+2\theta^2+w^2), \\
\operatorname{tr} A_1\ A_2^2 \triangleq 4w(w'+w\theta)(\theta'+2\ ^2+w^2)+2\theta[\ w^2\omega^2+(w'+w\theta)^2+4(\theta'+\theta^2+w^2)^2]\ , \\
\operatorname{tr} A_1^2\ A_2^2 \triangleq w^2\ \omega^2(w^2+4\theta^2)+2(w^2+2\theta^2)(w'+w\theta)^2+8w\theta(w'+w\theta)(\theta'+2\theta^2+w^2) \\
\qquad\qquad + 4\ (w^2+4\theta^2)(\theta'+2\theta^2+w^2)^2\ ;
\end{cases}$$

on constate donc à l'aide des relations (47) que, à la paroi,

(III.48)
$$\begin{cases}
p,\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ \alpha_8 \text{ sont fonctions de } \rho \text{ et} \\
\theta,\ w^2,\ \omega^2,(w'+w\theta)^2,\ w(w'+w\theta),\ \theta' + 2\theta^2+w^2\ .
\end{cases}$$

Le vecteur contrainte à la paroi $\bar{t}$ étant

$$\bar{t} \triangleq T \langle \bar{e}\ \bar{n}_o \rangle\ \bar{e} + T \langle \bar{f}\ \bar{n}_o \rangle\ \bar{f} + T \langle \bar{n}_o\ \bar{n}_o \rangle\ \bar{n}_o$$

si on particularise les expressions (46) par $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0$ (fluide de Rivlin-Ericksen de degré 2) et par $\theta = \theta' = 0$ (fluide incompressible) on obtient

$$\bar{t} \triangleq \alpha_2\ w\ \omega\ \bar{e} - \alpha_1\ w\ \bar{f} + [-\ p + (2\alpha_2 + \alpha_3)\ w^2]\ \bar{n}$$

qui n'est autre que la formule de BERKER (au changement de notations $\alpha_1 \longrightarrow \mu$, $\alpha_2 \longrightarrow \alpha_1$, $\alpha_3 \longrightarrow \alpha_2$ près) rappelée en (1). Sur les relations (46) à l'aide de (47) on vérifie évidemment les propriétés de parité (15), (16), (17) et (18) dont certaines ont été explicitées en (40).

Le calcul qui vient d'être effectué pour le fluide de Rivlin-Ericksen de *complexité 2* et qui a permis d'établir les expressions (46) peut être mis en oeuvre aussi aisément pour une *complexité n quelconque*; on peut donc considérer que *le problème de la contrainte à la paroi, en contact avec un fluide de Rivlin-Ericksen quelconque, en mouvement quelconque, se trouve être résolu* (sous réserve, bien entendu, que soit vérifiée la condition d'adhérence). Nous nous proposons maintenant d'examiner et de préciser cette question pour **certains** écoulements particuliers.

3.3.3.- Considérons tout d'abord le cas d'un *fluide de Rivlin-Ericksen de complexité n en écoulement R P D L F.* La loi de comportement d'un tel fluide exprime le tenseur des contraintes comme une combinaison de tenseurs du type (42), cette combinaison étant obtenue en effectuant la somme de toutes les combinaisons, analogues au second membre de (43), qu'il est possible de construire en associant les tenseurs A_1, A_2, ... A_n deux par deux. Cette loi est donc :

$$T = \sum_k \alpha_{r_k i_k q_k j_k}\ (A_{r_k}^{i_k}\ A_{q_k}^{j_k} + A_{q_k}^{j_k}\ A_{r_k}^{i_k})$$

la sommation étant effectuée pour toutes les valeurs des indices r_k et q_k appartenant à $\{1,2,\ldots,n\}$ et les valeurs des exposants i_k et j_k à $\{0,1,2\}$, $A_p^o = I$, avec la restriction $r_k \neq q_k$ si $i_k = j_k = 2$. Dans le seul souci d'alléger l'écriture, nous poserons

$$T = \tilde{\sum} \alpha_{riqj} \left(A_r^i A_q^j + A_q^j A_r^i\right) \tag{III.49}$$

le symbole $\sim$ rappelant que l'indice de sommation k a été omis, les coefficients α_{riqj} étant fonctions arbitraires de ρ et de certains invariants des tenseurs $A_1, A_2, \ldots A_n$.

Au chapitre précédent, nous avons donné l'expression à la paroi du tenseur de Rivlin-Ericksen de rang k; dans le cas d'écoulements R P D L F on a, en rappelant (II.53) avec la notation (45)

$$\begin{cases} A_k \triangleq -w_k \bar{f} \hat{=} \bar{n}_o + 2\theta_n \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o \\ w_k = w'_{k-1} + \theta\, w_{k-1} \ , \ w_1 = w \\ \theta_k = \theta'_{k=1} + 2\theta\theta_{k-1} + w\, w_{k-1}, \ \theta_1 = \theta \ . \end{cases} \tag{III.50}$$

Il s'ensuit aussitôt, pour $(i,j) \neq (0,0)$,

$$A_r^i A_q^j + A_q^j A_r^i \triangleq a_{riqj} \bar{f} \otimes \bar{f} - b_{riqj} \bar{f} \hat{=} \bar{n}_o + c_{riqj} \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o \ , \tag{III.51}$$

les a_{riqj}, b_{riqj}, c_{riqj} étant définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{riqo} = 2(w_r)^{\ell_i} \ , \ \ell_i = 2 \text{ si } i = 2, \ \ell_i = 0 \text{ si } i = 1 \ , \\ b_{riqo} = 2(2\theta_r)^{i-1} w_r \ , \\ c_{riqo} = 2(w_r)^{\ell_i} + 2(2\theta_r)^i \ , \end{cases} \tag{III.52}$$

$$\begin{cases} a_{roqj} = 2(w_q)^{\ell_j} \ , \ \ell_j = 2 \text{ si } j = 2, \ \ell_j = 0 \text{ si } j = 1 \\ b_{roqj} = 2(2\,\theta_q)^{j-1} w_q \ , \\ c_{roqj} = 2(w_q)^{\ell_j} + 2(2\theta_q)^j \ , \end{cases} \tag{III.53}$$

et lorsque le produit i j est non nul,

$$\begin{cases} a_{riqj} = 2(w_r)^{\ell_i}(w_q)^{\ell_j} + 2(2\theta_r)^{i-1}(2\theta_q)^{j-1} w_r w_q \ , \\ b_{riqj} = (2\theta_r)^{i-1} w_r (w_q)^{\ell_j} + (2\theta_q)^{j-1} w_q (w_r)^{\ell_i} + (2\theta_q)^{j-1} w_q [(w_r)^{\ell_i} + (2\theta_r)^i] \\ \qquad + (2\theta_r)^{i-1} w_r (w_q)^{\ell_j} + (2\theta_q)^j \ , \\ c_{riqj} = 2(2\theta_r)^{i-1}(2\theta_q)^{j-1} w_r w_q + 2[(w_r)^{\ell_i} + (2\theta_r)^i][(w_q)^{j} + (2\theta_q)^j] \end{cases} \tag{III.54}$$

Par conséquent (49) devient

$$(III.55) \qquad T \hat{=} -p\, I + \sigma_1\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o + \sigma_2\, \bar{f} \otimes \bar{f} - \tau\, \bar{f} \hat{\ } \bar{n}_o$$

si on pose

$$p = -\sum_{(i,j)}^{\sim} = \alpha_{riqj}(0,0)$$

$$(III.56) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sum_{(i,j)\neq(0,0)}^{\sim} \alpha_{riqj}\, c_{riqj} \ , \ \sigma_2 = \sum_{(i,j)\neq(0,0)}^{\sim} \alpha_{riqj}\, a_{riqj} \\ \tau = \sum_{(i,j)\neq(0,0)}^{\sim} \alpha_{riqj}\, b_{riqj} \end{cases}$$

Les égalités (52) à (56) compte tenu de (50) définissent les fonctions de contraintes pariétales d'un fluide de Rivlin-Ericksen de *complexité n* en écoulement R P D L F. Il est aisé de vérifier que les fonctions de contraintes pariétales normales sont paires de w tandis que la fonction de contrainte pariétale tangentielle est impaire de w :

$$\sigma_i(w,w',\ldots,{}^{(n-1)}_{w},\theta,\theta',\ldots,{}^{(n-1)}_{\theta},\rho) = \sigma_i(-w,-w',\ldots,-{}^{(n-1)}_{w},\theta,\theta',\ldots {}^{(n-1)}_{\theta},\rho)$$

$$i \in \{1,2\}$$

$$\tau(w,w',\ldots,{}^{(n-1)}_{w},\theta,\theta',\ldots,{}^{(n-1)}_{\theta},\rho) = -\tau(-w,-w',\ldots,{}^{(n-1)}_{w},\theta,\theta',\ldots,{}^{(n-1)}_{\theta},\rho)$$

(En effet, $-w_k$ est impair de w et θ_k est pair, - les a_{riqj} et c_{riqj} sont pairs de w et les b_{riqj} impairs, - les invariants, dont sont fonctions les α_{riqj}, étant des traces de produits de puissances entières des tenseurs A_1, A_2, ... A_n, sont pairs de w).

Nous venons ainsi de retrouver, dans le cas particulier d'un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité n, la relation (20) et les propriétés (17) et (18) générales pour tout matériau simple isotrope.

Dans le cas de la complexité 2, (43), les relations (56) deviennent

$$(III.57) \quad \begin{cases} \sigma_1 = 2\,\alpha_1\,\theta_1 + 2\alpha_2\,\theta_2 + \alpha_3(w_1^2+4\theta_1^2)+\alpha_4(w_2^2+4\theta_2^2)+2\alpha_5(w_1w_2+4\theta_1\theta_2) \\ \quad + 4\alpha_6[\theta_1 w_1 w_2 + \theta_2(w_1^2+4\theta_1^2)] + 4\alpha_7[\theta_2 w_1 w_1 + \theta_1(w_2^2+4\theta^2)] \\ \quad + 2\alpha_8[4\theta_1\theta_2 w_1 w_2 + (w_1^2+4\theta_1^2)(w_2^2+4\theta_2^2)] , \\ \sigma_2 = \alpha_3 w_1^2 + \alpha_4 w_2^2 + 2\alpha_5 w_1 w_2 + 4\alpha_6\,\theta_1 w_1 w_2 + 4\alpha_7\,\theta_2 w_1 w_2 \\ \quad + 2\,\alpha_8(w_1^2 w_2^2 + 4\theta_1\,\theta_2\, w_1\, w_2) , \end{cases}$$

$$(III.57)\quad \left\{\begin{aligned}\tau &= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + 2\alpha_3\theta_1 w_1 + 2\alpha_4\theta_2 w_2 + 2\alpha_5(\theta_2 w_1+\theta_1 w_2)\\ &+ 2\alpha_6(w_2 w_1^2 + 2\theta_1^2 w_2 + 2\theta_1\theta_2 w_1)+ 2\alpha_7(w_1 w_2^2+2\theta_2^2 w_1+2\theta_1\theta_2 w_2)\\ &+ 4\alpha_8(\theta_1 w_1 w_2^2 +\theta_2 w_2 w_1^2 + 2\theta_{1\,2}^2 w_2 + 2\,\theta_1\,\theta_2^2\, w_1)\ ,\end{aligned}\right.$$

avec, d'après (50),

$$\theta_1 = \theta,\ w_1 = w,\ w_2 = w' + w\,\theta,\ \theta_2 = \theta' + 2\theta^2 + w^2.$$

Les relations (57) donnent les expressions explicites des fonctions de contraintes pariétales d'un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité 2 en écoulement R P D L F, fonctions que l'on aurait pu obtenir en posant $\omega = 0$ dans (46).

3.3.4.- Considérons maintenant le cas des *écoulements R P D L F et isovolumiques*. Les fonctions de contraintes pariétales peuvent être obtenues soit en particularisant (56) par $\theta = \theta' = \ldots \overset{(n-1)}{\theta} = 0$ soit en procédant à un calcul direct à l'aide de (49), (41) et (II.66). En utilisant les notations introduites par cette dernière relation, il suffit donc de remplacer dans (52), (53) et (54) w_k par $\overset{(k-1)}{w}$ et $2\theta_k$ par $v_k = v'_{k-1}+2w\overset{(k-1)}{w}$, $(w_1 = w,\ v_1 = 0)$.

Ainsi pour un fluide de complexité 2, il vient

$$(III.58)\quad \left\{\begin{aligned}\sigma_1 &= 2\alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^2 + \alpha_4(w'^2 + 4w^2)+ 2\alpha_5 ww'+ 4\alpha_6 w^4\\ &+ 4\,\alpha_7 w^3 w' + 2\,\alpha_8 w^2(w'^2 + 4w^2),\\ \sigma_2 &= \alpha_3 w^2 + \alpha_4 w'^2 + 2\alpha_5 w w' + 4\alpha_7 w^3 w' + 2\alpha_8 w^2 w'^2\ ,\\ \tau &= \alpha_1 w + \alpha_2 w' + 2\alpha_4 w^2 w' + 2\alpha_5 w^3 + 2\alpha_6 w^2 w'\\ &+ 2\,\alpha_7 (w w'^2 + 2 w^5) + 4\,\alpha_8 w^4 w'\ .\end{aligned}\right.$$

Les trois fonctions précédentes σ_1, σ_2 et τ sont donc les fonctions de contraintes pariétales d'un fluide incompressible de Rivlin-Ericksen de complexité 2 en écoulement R P D L F. (On aurait pu les déduire aussi en posant dans (46) $\omega = \theta = \theta' = 0$).

Nous aurons à envisager ultérieurement des fluides incompressibles de Rivlin-Ericksen de *degré* n, (en fait nous nous limiterons à $n \leq 4$).

Rappelons, en schématisant, que la loi de comportement d'un fluide de degré n en supposant que les coefficients α de (49) sont des polynômes des invariants des tenseurs A_1, $A_2 \ldots A_n$ et en ne retenant, dans le second membre de (49), que les termes dont la dimension par rapport à l'inverse d'un temps n'excède pas n. Ainsi, la loi de comportement d'un fluide incompressible de Rivlin-Ericksen de degré 4 est :

$$
\begin{aligned}
(\text{III.59}) \qquad & T = -\,p\,I + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\
& S_1 = \mu\, A_1\,, \quad S_2 = \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2\,, \\
& S_3 = \beta_1 (A_2 A_1 + A_1 A_2) + \beta_2 (\mathrm{tr}\, A_2)\, A_1 + \beta_3 A_3\,, \\
& S_4 = \gamma_1 A_4 + \gamma_2 (A_3 A_1 + A_1 A_3) + \gamma_3 A_2^2 + \gamma_4 (A_2 A_1^2 + A_1^2 A_2) \\
& \qquad + \gamma_5 (\mathrm{tr}\, A_2) A_2 + \gamma_6 (\mathrm{tr}\, A_2) A_1^2 + \gamma_7 (\mathrm{tr}\, A_3) A_1 + \gamma_8\, \mathrm{tr}(A_2 A_1)\, A_1 .
\end{aligned}
$$

où p, fonction de point, est la pression hydrostatique et μ, $\alpha_1, \ldots \gamma_8$ sont quatorze constantes caractéristiques du fluide.

Un examen attentif de l'ensemble des relations du paragraphe 3.3.3, ou, de préférence, un calcul direct effectué en portant (II.66) dans (59) fournit les fonctions de contraintes pariétales d'un fluide incompressible de Rivlin-Ericksen de degré 4 :

$$
(\text{III.60}) \quad \begin{cases}
\sigma_1 = (2\alpha_1 + \alpha_2) w^2 + (2\beta_1 + 6\beta_3) w w' + (4\gamma_3 + 4\gamma_4 + 4\gamma_5 + 2\gamma_6) w^4 + (8\gamma_1 + 2\gamma_2) w w'' \\
\qquad + (6\gamma_1 + \gamma_3)\, w'^2\,, \\
\sigma_2 = \alpha_2 w^2 + 2\beta_1\, w w' + 2\gamma_2\, w w'' + \gamma_3\, w'^2 + 2\gamma_6\, w^4\,, \\
\tau = \mu\, w + \alpha_1 w' + 2(\beta_1 + \beta_2) w^3 + \beta_3 w'' + \gamma_1 w''' + (6\gamma_2 + 2\gamma_3 + 2\gamma_4 + 2\gamma_5 + 6\gamma_7 + 2\gamma_8) w^2 w' .
\end{cases}
$$

3.3.5.- Un *écoulement stationnaire* étant, en particulier, R P D L F on obtient les fonctions de contraintes pariétales d'un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité n en posant, d'après (II.59),

$$
w_k = w\, \theta^{k-1}\,, \quad \theta_k = (2^{k-1} - 1)\, w^2\, \theta^{k-2} + 2^{k-1}\, \theta^k
$$

dans les relations (52) à (56).

Cependant, afin d'obtenir plus aisément un résultat propre aux écoulements stationnaires, nous proposons une autre forme des tenseurs de

Rivlin-Ericksen à la paroi, dans un écoulement stationnaire : soit la norme du gradient de la vitesse; on a d'après (II.5)

$$G = \kappa\, N \tag{III.61}$$

avec

$$\kappa^2 \triangleq w^2 + \theta^2 \ , \quad N \triangleq -\frac{w}{\kappa}\, \bar{f} \otimes \bar{n}_o + \frac{\theta}{\kappa}\, \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o \ ; \tag{III.62}$$

on vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} N^T N \triangleq \bar{n}_o \otimes \bar{n}_o \ , \\ N^2 \triangleq \dfrac{\theta}{\kappa} N \ , \ (N + N^T)\, N^T N \triangleq N + \dfrac{\theta}{\kappa} N^T N \ ; \end{cases} \tag{III.63}$$

en utilisant la loi de récurrence (I.20) et tenant compte des hypothèses d'adhérence et de stationnarité il vient

$$\begin{cases} A_1 \triangleq \kappa (N + N^T) \ , \\ \vdots \\ A_n \triangleq \kappa\, (N^T A_{n-1} + A_{n-1} N) \ , \end{cases} \tag{III.64}$$

relations identiques, dans leur forme, aux relations (I.32) (ce qui est évident, à cause du corollaire 1 page 16); enfin, d'après les propriétés (63), les égalités (64) deviennent

$$\begin{cases} A_1 \triangleq \kappa\ (N + N^T), \\ A_2 \triangleq 2\, \kappa^2\, N^T N + \kappa\, \theta (N + N^T), \\ A_3 \triangleq 6\, \kappa^2\, \theta\, N^T N + \kappa\, \theta^2 (N + N^T) \ , \\ \vdots \\ A_n \triangleq 2\, a_n\, \kappa^2\, \theta^{n-2}\, N^T N + \kappa\, \theta^{n-1} (N + N^T), \ a_n = 2a_{n-1} + 1, \ a_1 = 0 \ . \end{cases} \tag{III.65}$$

En utilisant ces expressions pour calculer les tenseurs (42) on trouve

$$A^i_r A^j_q + A^j_q A^i_r \triangleq \kappa^2 f_{1riqj}(\kappa^2, \theta) N^T N + \kappa^2 f_{2riqj}(\kappa^2, \theta) N N^T + \kappa\, f_{3riqj}(\kappa^2, \theta)(N + N^T) \tag{III.66}$$

où les fonctions $\kappa^2 f_{1riqj}(\kappa^2,\theta)$, $\kappa^2 f_{2riqj}(\kappa^2,\theta)$, $\kappa\, f_{3riqj}(\kappa^2,\theta)$ sont des polynômes, homogènes de κ et θ de degré $ir+jq$, que l'on peut expliciter aisément. Les invariants dont sont fonctions les coefficients α de la combinaison (49) étant eux mêmes des polynômes de κ^2 et θ , on déduit de (66)

$$(III.67) \qquad T \hat{=} -p\, I + \kappa^2\, f_1(\kappa^2,\theta)\, N^T N + \kappa^2\, f_2(\kappa^2,\theta) N N^T + \kappa\, f_3(\kappa^2,\theta)(N+N^T)$$

où les polynomes f_1, f_2 et f_3 sont connus dès que sont données la complexité du fluide et les fonctions α .

Il est possible de proposer une forme équivalente à (67); en effet d'après les deux premières égalités (65) et l'égalité

$$(III.68) \qquad A_1^2 = \kappa^2\, (N\, N^T + N^T\, N) + \kappa\, \theta\, (N + N^T)$$

on exprime aisément les tenseurs $N^T N$, $N N^T$ et $N + N^T$ du second membre de (67) à l'aide des tenseurs A_1, A_2 et A_1^2 :

$$(III.69) \qquad \begin{cases} \kappa\, (N + N^T) \hat{=} A_1 \ , \\ 2\, \kappa^2\, N^T N \hat{=} A_2 - \theta\, A_1 \ , \\ 2\, \kappa^2\, N\, N^T \hat{=} 2\, A_1^2 - A_2 - \theta\, A_1 \ , \end{cases}$$

si bien que (67) devient

$$(III.70) \qquad T \hat{=} -p\, I + g_1(\kappa^2,\theta)\, A_1 + g_2(\kappa^2,\theta)\, A_2 + g_3(\kappa^2,\theta)\, A_1^2$$

d'où le résultat(*)

Dans un écoulement stationnaire, sur une paroi à laquelle adhère le fluide, il est impossible de distinguer un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité n d'un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité 2.

Autrement dit, si l'écoulement est stationnaire, il est toujours possible de **trouver** trois fonctions α_1 α_2 et α_3 polynômes de tr A_1 et tr A_1^2 (d'après (47), $2\,\theta \hat{=} \text{tr}\, A_1 \quad 2\,\kappa^2 + 2\theta^2 \hat{=} \text{tr}\, A_1$) telles que la loi

$$(III.71) \qquad T = -\, p\, I + \alpha_1\, A_1 + \alpha_2\, A_2 + \alpha_3\, A_1^2$$

soit suffisante pour représenter, à la paroi, le comportement d'un fluide de complexité quelconque.

(*) Nous donnerons, de ce résultat, une extension au cas général d'un matériau simple (cf. remarque en fin de chapitre).

La forme (70) permet d'ailleurs de calculer les fonctions de contraintes pariétales d'un fluide complexité n en écoulement stationnaire, en effet, en utilisant (62), les deux premières relations (65) et (68), (70) devient (55) avec

$$(III.72)\quad \begin{cases} \sigma_1 = 2\,\theta\, g_1(\kappa^2,\theta) + 2(\kappa^2+\theta^2)g_2(\kappa^2,\theta) + (\kappa^2+3\theta^2)g_3(\kappa^2,\theta)\ , \\ \sigma_2 = w^2\, g_3(\kappa^2,\theta)\ , \\ \tau = w\ [g_1(\kappa^2,\theta) + \theta\, g_2(\kappa^2,\theta) + 2\,\theta^2 g_3(\kappa^2,\theta)]. \end{cases}$$

Dans le cas d'un fluide de complexité 2, on obtient

$$(III.73)\quad \begin{cases} \sigma_1 = 2\,\alpha_1\theta + (2\alpha_2+3\alpha_3)\theta^2 + 6\alpha_5\,\theta^3 + (3\alpha_4+8\alpha_6)\theta^4 + 8\alpha_7\theta^5 + 10\,\alpha_8\,\theta^6 \\ \quad + \kappa^2\,[2\alpha_2 + \alpha_3 + 10\,\alpha_5\,\theta + (9\alpha_4+20\alpha_6)\theta^2 + 36\,\alpha_7\,\theta^3 + 60\,\alpha_8\,\theta^4] \\ \quad + \kappa^4\,[4(\alpha_4+\alpha_6) + 20\,\alpha_7\,\theta + 50\,\alpha_8\,\theta^2] \\ \quad + \kappa^6\,8\,\alpha_8\ , \\ \sigma_2 = w^2\,[\alpha_3 + 2\alpha_5\,\theta + (\alpha_4+4\alpha_6)\theta^2 + 4\alpha_7\,\theta^3 + 6\alpha_8\theta^4 + 2\kappa^2(2\alpha_7\theta+5\alpha_8\theta^2)]\ , \\ \tau = w[\alpha_1 + (\alpha_2+2\alpha_3)\theta + 4\alpha_5\,\theta^2 + 2(\alpha_4+\alpha_6)\theta^3 + 6\alpha_7\theta^4 + 8\alpha_8\theta^5] \\ \quad + w\kappa^2[2\alpha_5 + 2(\alpha_4+3\alpha_6)\theta + 14\alpha_7\,\theta^2 + 18\,\alpha_8\,\theta^3] \\ \quad + w\,\kappa^4\,[4\alpha_7 + 12\,\alpha_8\,\theta\,] \end{cases}$$

Remarquons que dans ce cas particulier de la complexité 2, on pourvait déduire ces expressions de (46) avec $\omega = w' = \theta' = 0$.

3.3.6.- Enfin, si nous considérons des *écoulements stationnaires et isovolumiques* de fluide de Rivlin-Ericksen de complexité n, on sait d'après le théorème 2 page 34,que les fonctions de contraintes pariétales coïncident avec ses fonctions viscométriques.

Ainsi, par exemple, si l'on porte $\theta = 0$ dans (73) il vient

$$(III.74)\quad \begin{cases} \sigma_1 = (2\alpha_2+\alpha_3)\,w^2 + 4(\alpha_4+\alpha_6)\,w^4 + 8\alpha_8\,w^6 \\ \sigma_2 = \alpha_3\,w^2 \\ \tau = \alpha_1\,w + 2\alpha_5\,w^3 + 4\alpha_7\,w^5 \end{cases}$$

qui ne sont autres que les fonctions viscométriques [1] du fluide de Rivlin-Ericksen de complexité 2, les coefficients n'étant pas fonctions que de w^2.

De même, en posant $w' = w'' = w''' = 0$ dans (60), on retrouve [1] les fonctions viscométriques du fluide de Rivlin-Ericksen de degré 4, dont la loi de comportement a été rappelée en (59),

$$(III.75)\quad \begin{cases} \sigma_1 = (2\alpha_1 + \alpha_2)\, w^2 + (4\gamma_3 + 4\gamma_4 + 4\gamma_5 + 2\gamma_6)\, w^4 \\ \sigma_2 = \alpha_2\, w^2 + 2\gamma_6\, w^4 \\ \tau = \mu\, w + 2\,(\beta_1 + \beta_2)\, w^3 \end{cases}$$

les coefficients étant, cette fois, des constantes.

3.4. *LES FLUIDES DE WHITE-METZNER*

3.4.1.- L'ensemble des résultats et propriétés obtenus au paragraphe précédent pour les fluides de Rivlin-Ericksen peut être développé de manière analogue pour les *fluides de White-Metzner*; il suffit pour ce faire de remplacer, dans les diverses lois de comportement qui ont été écrites, les tenseurs de Rivlin-Ericksen A_k par ceux de White-Metzner B_k. Cependant les calculs sont moins simples; cette moindre simplicité peut d'ailleurs être prévue par la comparaison de (II.33) et (II.34) (ou, plus clairement, de (II.35) et (II.36)).

Par exemple, pour un fluide de white-Metzner de complexité 2, les coefficients de la loi de comportement (43) étant désignés par α'_i , $i \in \{1,\ldots,8\}$, les contraintes à la paroi sont, pour un *écoulement quelconque* :

(III.76)

$$T\,\langle \bar{e}\,\bar{e}\rangle \,\hat{=}\, -p + \alpha'_4\, w^2\, \omega^2,$$

$$T\,\langle \bar{f}\,\bar{f}\rangle \,\hat{=}\, -p - 2\,\alpha'_2\, w^2 + \alpha'_3\, w^2 + \alpha'_4\,[4\, w^4 + (3\, w\, \theta - w')^2] - 2\alpha'_5\, w(3\, w\, \theta - w')$$

$$- 4\,\alpha'_6\, w[\, w^3 + \theta(3\, w\, \theta - w')] - 4\alpha'_7\, w(3w\theta - w')(\theta' - 2\theta^2 - w^2)]$$

$$+ 2\,\alpha'_8\, w\,[4\, w^5 + w(3w\theta - w')^2 - 4\theta(3w\theta - w')(\theta' - 2\theta^2 - w^2)]\ ,$$

$$T < \bar{n}_o \bar{n}_o > \hat{=} - p + 2\alpha'_1 \theta + 2\alpha'_2(\theta'-2\theta^2) + \alpha'_3(w^2+4\theta^2)$$

$$+ \alpha'_4 [w^2 \omega^2 + (3w\theta-w')^2+4(\theta'-2\theta^2)^2] +2\alpha'_5[4\alpha'_5 \theta(\theta'-2\theta^2)-w(3w\theta-\dot{w})]$$

$$+ 4 \alpha'_6 [(w^2 + 4\theta^2) (\theta'-2\theta^2) - \theta w(3w\theta-w')]$$

$$+ 4 \alpha'_7\{\theta[w^2 \omega^2 + (3w\theta-w')^2 + 4(\theta'-2\theta^2)^2] - w(3w\theta-w')(\theta'-2\theta^2-w^2)\}$$

$$+ 2 \alpha'_8 \{(w^2+4\theta^2) [w^2\omega^2+(3w\theta-w')^2+4(\theta'-2\theta^2)^2]-4\theta w(3w\theta-w')(\theta'-2\theta^2-w^2)\},$$

$$T \ <\bar{e} \bar{f}> \hat{=} \omega w \{\alpha'_4(3w\theta-w') - \alpha'_5 w - 2\alpha'_6 \theta w - 2 \alpha'_7 w(\theta'-2\theta^2)\}$$

$$+ \omega w \alpha'_8 [w^2(3w\theta-w') - 4\theta w(\theta'-2\theta^2)]$$

$$T <\bar{e} \bar{n}_o> \hat{=} \omega w\{\alpha'_2 + 2\alpha'_4(\theta'-2\theta^2)+ 2\alpha'_5 \theta +\alpha'_6(w^2+4\theta^2)+\alpha'_7[4\theta(\theta'-2\theta^2)-w(3w\theta-w')]\}$$

$$+ \omega w 2\alpha'_8 [(w^2+4\theta^2)(\theta'-2\theta^2) - \theta w(3w\theta-w')] ,$$

$$T <\bar{f} \bar{n}_o> \hat{=} -\alpha'_1 w + \alpha'_2 (3 w\theta-w')-2\alpha'_3 \theta w+ 2\alpha'_4 (3w\theta-w')(\theta'-2\theta^2-w^2)$$

$$+ 2\alpha'_5 [\theta(3w\theta-w')-w(\theta'-2\theta^2) + w^3]$$

$$+ 2\alpha'_6 [2 w^3 \theta +(w^2+2\theta^2)(3w\theta-w')-2\theta w(\theta'-2\theta^2)]$$

$$+ \alpha'_7 [4\theta(3w\theta-w')(\theta'-2\theta^2-w^2)-4w^5-w^3\omega^2-2w(3w\theta-w')^2-4w(\theta'-2\theta^2)^2]$$

$$+ 2 \alpha'_8 \{2(w^2+2\theta^2)(3w\theta-w')(\theta'-2\theta^2-w^2)-\theta w[4w^4+w^2\omega^2+4(\theta'-2\theta^2)^2-2(3w\theta-w')^2]\}$$

où p et les α'_1, α'_2,...,α'_8 sont fonctions de ρ et θ, w^2,ω^2, $(3w\theta-w')^2$, $w(3w\theta-w')$ et $\theta'-2\theta^2$.

Pour $\omega = 0$, on obtient les fonctions de contraintes pariétales σ_1, σ_2 et τ d'un fluide white Metzner de complexité 2 en écoulement R P D L F (cf. (57) pour le fluide de Rivlin-Ericksen de complexité 2). Si l'écoulement est *R P D L F et isovolumique*, on déduit de (76), pour $\omega = \theta = \theta' = 0$, les fonctions de contraintes pariétales du fluide incompressible de complexité 2 (cf. (58) pour le fluide de Rivlin-Ericksen) :

(III.77)

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha_3' w^2 + \alpha_4' w'^2 + 2\alpha_5' w w' - 4\alpha_7' w^3 w' + 2\alpha_8' w^2 w'^2 , \\ \sigma_2 = -2\alpha_2' w^2 + \alpha_3' w^2 + \alpha_4' (w'^2 + 4w^4) + 2\alpha_5' w w' - 4\alpha_6' w^4 - 4\alpha_7' w^3 w' \\ \qquad + 2\alpha_8' w^2 (w'^2 + 4w^4), \\ \tau = \alpha_1' w + \alpha_2' w' + 2\alpha_4' w^2 w' - 2\alpha_5' w^3 + 2\alpha_6' w^2 w' + 2\alpha_7' (w w'^2 + 2w^5) - 4\alpha_8' w^4 w', \end{cases}$$

et si l'écoulement est *stationnaire*

(III.78)

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha_3' w^2, \\ \sigma_2 = (-2\alpha_2' + \alpha_3') w^2 + 4(\alpha_4' - 4\alpha_6') w^4 + 8\alpha_8' w^6 , \\ \tau = \alpha_1' w - 2\alpha_5' w^3 + 4\alpha_7' w^5 , \end{cases}$$

qui sont les fonctions viscométriques du fluide de White-Metzner de complexité 2. La comparaison de (58) et (77) ou, aussi, de (74) et (78) souligne la différence de nature entre un fluide de Rivlin-Ericksen et un fluide de White-Metzner : à des changements de signe près pour les coefficients, la fonction de contrainte pariétale tangentielle est conservée tandis que la première (resp. deuxième) fonction de contrainte pariétale normale de l'un devient la deuxième (resp. première) fonction de contrainte pariétale normale de l'autre.

3.4.2.- Nous aurons aussi à considérer le cas de fluides incompressibles de White-Metzner de *degré 4* en écoulement R P D L F. La loi de comportement de tels fluides est analogue à (59) (les A_k étant à remplacer par les B_k); désignons par μ', α_1', α_2', ..., γ_8' les quatorze coefficients constants caractéristiques d'un tel fluide. On obtient aisément à l'aide de (II.67) les fonctions de contraintes pariétales.

(III.79)

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha_2' w^2 + 2\beta_1' w w' + 2\gamma_2' w w'' + \gamma_3' w'^2 - 2\gamma_6' w^4, \\ \sigma_2 = (\alpha_2' - 2\alpha_1') w^2 + (2\beta_1' - 6\beta_3) w w' + (4\gamma_3' - 4\gamma_4' + 4\gamma_5' - 2\gamma_6') w^4 + (2\gamma_2' - 8\gamma_1') w w' + (\gamma_3' - 6\ \ ) w^2, \\ \tau = \mu' w + \alpha_1' w' - 2(\beta_1' + \beta_2') w^3 + \beta_3' w'' + \gamma_1 w''' + (-6\gamma_2' - 2\gamma_3' + 2\gamma_4' - 2\gamma_5' - 6\gamma_7' + 2\gamma_8') w^2 w'. \end{cases}$$

Si l'écoulement est stationnaire, on en déduit, pour $w' = w'' = w''' = 0$, les fonctions viscométriques du fluide incompressible de White-Metzner de degré 4 .

3.5. FLUIDES A FONCTIONS DE CONTRAINTES PARIETALES NORMALES EGALES

3.5.1.- La comparaison des expressions des fonctions de contraintes pariétales obtenues pour les fluides de Rivlin-Ericksen et pour les fluides de White-Metzner nous conduit à effectuer une remarque concernant des fluides incompressibles dont la loi de comportement est construite par une *combinaison de la loi d'un fluide incompressible de Rivlin-Ericksen et de celle d'un fluide incompressible de White-Metzner de même complexité* (sur le plan théorique, rien ne s'oppose à de telles combinaisons). Dans le cas de la *complexité 2*, le tableau suivant rappelle les expressions des contraintes à la paroi pour les fluides incompressibles de Rivlin-Ericksen et de White-Metzner en écoulement quelconque :

$T<\bar{e}\ \bar{e}>$	R.E.	$-p+\alpha_4 w^2\omega^2$
	W.M.	$-p+\alpha'_4 w^2\omega^2$
$T<\bar{f}\ \bar{f}>$	R.E.	$-p+\alpha_3 w^2+\alpha_4 w'^2+2\alpha_5 w\,w'+4\alpha_7 w^3 w'+2\alpha_8 w^2 w'^2$
	W.M.	$-p-2\alpha'_2 w^2+\alpha'_3 w^2+\alpha'_4(4w^4+w'^2)+2\alpha'_5 ww'-4\alpha'_6 w^4-4\alpha'_7 w^3 w'+2\alpha'_8 w^2(4w^4+w'^2)$
$T<\bar{n}_o\ \bar{n}_o>$	R.E.	$-p+2\alpha_2 w^2+\alpha_3 w^2+\alpha_4(w^2\omega^2+4\omega^4+w'^2)+2\alpha_5 ww'+4\alpha_6 w^4$ $+4\alpha_7 w^3 w'+2\alpha_8 w^2(w^2\omega^2+4w^4+w'^2)$
	W.M.	$-p+\alpha'_3 w^2+\alpha'_4(w^2\omega^2+w'^2)+2\alpha'_5 ww'-4\alpha'_7 w^3 w'+2\alpha'_8 w^2(w^2\omega^2+w'^2)$
$T<\bar{e}\ \bar{f}>$	R.E.	$-\omega w(\alpha_4 w'+\alpha_5 w+2\alpha_7 w^2+\alpha_8 w^3 w')$
	W.M.	$-\omega w(\alpha'_4 w'+\alpha'_5 w+\alpha'_8 w^2 w')$
$T<\bar{e}\ \bar{n}_o>$	R.E.	$\omega w(\alpha_2+\alpha_6 w^2+\alpha_7 ww'+2\alpha_8 w^4)$
	W.M.	$\omega w(\alpha'_2+\alpha'_6 w^2+\alpha'_7 ww')$
$T<\bar{f}\ \bar{n}_o>$	R.E.	$-[\alpha_1 w+\alpha_2 w'+2\alpha_4 w^2 w'+2\alpha_5 w^3+2\alpha_6 w^2 w'+\alpha_7(w^3\omega^2+2ww'^2+4w^5)+4\alpha_8 w^4 w']$
	W.M.	$-[\alpha'_1 w+\alpha'_2 w'-2\alpha'_4 w^2 w'-2\alpha'_5 w^3+2\alpha'_6 w^2 w'+\alpha'_7(w^3\omega^2+2ww'^2+4w^5)-4\alpha'_8 w^4 w']$

où les α_i et α'_i sont fonctions de w^2, ω^2, w'^2 et ww'.

On peut toujours considérer le fluide incompressible de loi (*)

$$(III.81)\quad T = -p\,I + \alpha_1 A_1 + \alpha_2(A_2-B_2) + \alpha_3 A_1^2 + \alpha_4(A_2^2+B_2^2)$$
$$+ \alpha_5(A_1A_2+A_2A_1)+\alpha'_5(A_1B_2+B_2A_1)+\alpha_6[A_1^2(A_2-B_2)+(A_2-B_2)A_1^2]$$
$$+ \alpha_7(A_1A_2^2+A_2^2A_1)+\alpha'_7(A_1B_2^2+B_2^2A_1)+\alpha_8[A_1^2(A_2^2+B_2^2)+(A_2^2+B_2^2)A_1^2] .$$

Il apparait immédiatement sur le tableau précédent que les fonctions de contraintes pariétales d'un tel fluide en écoulement R P D L F sont

$$(III.82)\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = (\alpha_3+2\alpha_2)w^2+2\alpha_4 w'^2+2(\alpha_5+\alpha'_5)ww'+4(\alpha_4+\alpha_6)w^4+4(\alpha_7-\alpha'_7)w^3w' \\ \qquad\qquad + 4\alpha_8 w^2 w'^2 + 8\alpha_8 w^6 , \\ \tau = \alpha_1 w + 2(\alpha_5-\alpha'_5)w^3+2(\alpha_7+\alpha'_7)(w w'^2+2w^5) : \end{cases}$$

les fonctions de contraintes pariétales normales du fluide incompressible dont la loi de comportement est (81) sont égales.

3.5.2.- Comme l'indique les relations (II.66 et 67), (à l'aide desquelles il est aisé de calculer les tenseurs $A^i_r A^j_q + A^j_q A^i_r$ et $B^i_r B^i_q + B^j_q B^i_r$, cf. (49)), le résultat précédent est vrai quelle que soit la complexité : *par combinaison des lois de comportement d'un fluide incompressible de Rivlin-Ericksen et d'un fluide incompressible de White-Metzner de même complexité, il est toujours possible d'obtenir une loi de comportement d'un fluide à fonctions de contraintes pariétales normales égales.*

(*) Cette loi a été obtenue en superposant la contrainte déterminée d'un fluide incompressible de Rivlin-Ericksen de complexité 2, de coéfficient α_i (cf. 43) à celle d'un fluide incompressible de White-Metzner de même, complexité, de coéfficients α'_i , en posant $\alpha'_2 = -\alpha_2$, $\alpha'_4 = \alpha_4$, $\alpha'_6 = -\alpha_6$ et $\alpha'_8 = \alpha_8$. Se souvenant de l'égalité $A_1 = B_1$, on peut toujours remplacer $\alpha_1 + \alpha'_1$ par α_1 et $\alpha_3 + \alpha'_3$ par α_3; ainsi la loi (81) introduit $2 \times 8 - 4 - 2 = 10$ coéfficients.

Par exemple, le fluide incompressible de degré 4 de loi(*)

$$
\begin{aligned}
(\text{III.83})\quad & T = -pI + S_1 + S_2 + S_3 + S_4,\\
& S_1 = \mu A_1 \ , \ S_2 = \alpha_1(A_2-B_2) + \alpha_2 A_1^2 \ ,\\
& S_3 = \beta_1 (A_2A_1+A_1A_2)+ \beta_1'(B_2A_1+A_1B_2)+ \beta_2(\text{tr } A_2)A_1+ \beta_3(A_3-B_3),\\
& S_4 = \gamma_1 (A_4-B_4)+ \gamma_2(A_3A_1+A_1A_3)+ \gamma_2'(B_3A_1+A_1B_3)+ \gamma_3(A_2^2+B_2^2)\\
& \quad + \gamma_4 [(A_2-B_2)A_1^2+A_1^2(A_2-B_2)]+ \gamma_5(\text{tr } A_2)(A_2-B_2)\\
& \quad + \gamma_6(\text{tr } A_2) A_1^2 + \gamma_7(\text{tr } A_3)A_1 + \gamma_8(\text{tr } A_2 A_1) A_1
\end{aligned}
$$

est un fluide à fonctions de contraintes pariétales normales égales.

En effet, d'après (60) et (79) il vient, avec les notations de (83),

$$
(\text{III.84})\quad \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = (2\alpha_1 + \alpha_2)\, w^2 + 2(\beta_1+\beta_1' + 3\beta_3)\, w\, w' + 2(2\gamma_3+2\gamma_4+2\gamma_6)\, w^4 \\ \qquad\qquad + 2\,(\gamma_2 + \gamma_2' + 4\gamma_1) ww'' + 2(\gamma_3+3\gamma_1)\, w'^2, \\ \tau = \mu w + 2\,(\beta_1-\beta_1' + \beta_2)\, w^3 + 2(3\gamma_2-3\gamma_2' + 3\gamma_7 + \gamma_8)\, w^2 w'. \end{cases}
$$

3.6. *REMARQUE : ECOULEMENT STATIONNAIRE DE MATERIAUX SIMPLES*

3.6.1.- Nous avons démontré (cf. (70) et note en bas de page 46) dans le cas particulier des fluides de Rivlin-Ericksen, que, dans un écoulement stationnaire, il est impossible de distinguer à la paroi un fluide de complexité n d'un fluide de complexité 2. Nous nous proposons maintenant de généraliser ce résultat au cas des *matériaux simples* soit en adaptant un corollaire de WANG soit en utilisant une propriété cinématique, à la paroi, des écoulements stationnaires.

(*) De la même manière que pour (81), (83) est obtenu en ajoutant les termes S_1, S_2, S_3, S_4 de la loi (59) (quatorze coéfficients constants μ, $\alpha_1,\ldots,\gamma_7$ et γ_8) aux termes analogues S_1', S_2', S_3' et S_4' de la loi d'un fluide incompressible de White-Metzner de degré 4 (quatorze coefficients μ', α_1', ..., γ_7', γ_8') en posant $\alpha_1' = -\alpha_1$, $\beta_3' = -\beta_3$, $\gamma_1' = -\gamma_1$, $\gamma_3' = \gamma_3$, $\gamma_4' = -\gamma_4$, $\gamma_5 = \gamma_5'$; puisque, d'une part, $A_1 = B_1$ et d'autre part, d'après (II.66 et 67), tr A_n = - tr B_n et tr $(A_2 A_1)$ = tr $(B_2 B_1)$, on peut toujours effectuer les changements de notations : $\mu + \mu' \to \mu$, $\beta_2' + \alpha_2' \to \alpha_2$, $\beta_2 - \beta_2' \to \beta_2$, $\gamma_6 - \gamma_6' \to \gamma_6$, $\gamma_7 - \gamma_7' \to \gamma_7$, $\gamma_8 + \gamma_8' \to \gamma_8$. Il en résulte la loi (83) qui introduit $2 \times 14 - 6 - 6 = 16$ coéfficients constants.

Le corollaire de WANG qui vient d'être cité est relatif aux écoulements à histoire constante des dilatations principales relatives : [1] page 181, " L'histoire du tenseur de Cauchy-Green $C_t^t(s)$ d'un mouvement à histoire constante des dilatations principales relatives est déterminée de façon unique par ses trois premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen A_1 A_2 et A_3 " . De façon plus précise, la démonstration de ce corollaire montre que cette histoire est déterminée de façon unique par la donnée de A_1 seul, si ses trois valeurs propres sont confondues, par la donnée de A_1 et A_2 si les valeurs propres de A_1 sont distinctes et par A_1, A_2 et A_3 si deux valeurs propres de A_1 sont confondues.

D'après le corollaire 1 page 16 , le corollaire de WANG est applicable; à la paroi, les valeurs propres de $A_1(0,\theta + (w^2+\theta^2)^{1/2}$, $\theta-(w^2+\theta^2)^{1/2}$ sont distinctes deux à deux sauf dans le cas particulier, inintéressant, $w = 0$, que nous écartons, d'où la propriété.:

Sur une paroi solide à laquelle adhère le matériau, l'histoire du tenseur de Cauchy-Green $C_t^t(s)$ d'un mouvement stationnaire est déterminée de façon unique par ses deux premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen.

Autrement dit, à la paroi et si l'écoulement est stationnaire, toute information contenue dans $C_t^t(s)$ se trouve aussi contenue dans A_1 et A_2 : par conséquent, pour un matériau simple quelconque, il découle de (I.46) :

$$\overset{R}{T}{}^{o} \triangleq f\left(\overset{R}{A}{}_1^{o}, \overset{R}{A}{}_2^{o}, C_o\right) \qquad \text{(III.85)}$$

où f est une *fonction*.

On en déduit, d'après (I.49), le théorème (analogue au théorème de WANG [1], page 184).

Théorème 3

Dans les écoulements stationnaires, il est impossible de distinguer, à la paroi à laquelle il adhère, un matériau simple général d'un matériau de type différentiel de complexité deux.

En termes imagés, on peut-dire que, sur la paroi, le matériau perd sa mémoire (puisque, d'après (85) tout se passe comme si celle-ci était infiniment courte); il est d'ailleurs plus exact de dire que le matériau bien que possédant une mémoire infiniment longue n'a à retenir qu'un faible

nombre d'informations, lesquelles ne concernent que son passé immédiat. Imitant TRUESDELL, lorsqu'il introduit les écoulements à histoire constante des dilatations principales relatives, on peut donner une interprétation plus précise de ce théorème : dans un écoulement stationnaire, le point matériel qui adhère à la paroi, "lorsqu'il regarde en arrière, trouve inchangée toute la suite des déformations passées relativement à sa configuration actuelle".

Il est possible d'établir directement ce résultat, en effet d'après (II.58), en posant $\tau = t - s$ et en utilisant les notations introduites par (62), il vient

$$(III.86) \qquad C_t^t(s) \triangleq \frac{1}{\theta}(\exp(-s\theta)-1)\,\kappa\,(N + N^T) + \frac{1}{\theta^2}(\exp(-s\theta)-1)^2\kappa^2\, N^T N,$$

donc, en portant cette égalité dans (I.46), on a

$$(III.87) \qquad T^{R_o} \triangleq g\,[\kappa\,(N + N^T)^{R_o}\,,\ \kappa^2 (N^T N)^{R_o},\ C_o\,]$$

où g est une fonction.

Compte tenu des deux premières relations (69), on constate que (87) n'est autre que (85).

3.6.2.- S'il s'agit d'un *fluide*, (87) devient

$$(III.88) \qquad T \triangleq g\,(\kappa\,(N + N^T),\ \kappa^2\, N^T N, \rho)$$

où g est une fonction isotrope de ses deux arguments tensoriels, c'est-à-dire, d'après le théorème de représentation de WANG, que (88) prend la forme déduite de (43) par le changement $A_1 \longrightarrow \kappa(N + N^T)$ et $A_2 \longrightarrow \kappa^2\, N^T N$, les coéfficients étant fonctions de κ^2 et θ. Utilisant alors (63) il est aisé de constater que (88) s'écrit

$$(III.89) \quad T \triangleq -p(\kappa^2,\theta)I + \kappa^2\, g_1(\kappa^2,\theta)N^T N + \kappa^2 f_2(\kappa^2,\theta)\, N\, N^T + \kappa\, f_3(\kappa^2,\theta)(N+N^T)$$

les coéfficients p, f_i étant paramétrés par ρ .

Cette relation établie à partir de leurs lois de comportement pour les fluides de Rivlin-Ericksen, (67), est donc vraie pour tous les fluides. Elle est d'ailleurs, un cas particulier (écoulement stationnaire) de (20).

CHAPITRE IV

LUBRIFICATION DES SURFACES CYLINDRIQUES EN FLUIDE DE RIVLIN-ERICKSEN DE DEGRE QUATRE.

4.1 - *INTRODUCTION*

4.1.1.- Nous considérons le *problème plan* de lubrification : deux surfaces solides sont en présence; ces deux surfaces sont cylindriques de génératrices parallèles à la direction Oz, O x y z est un référentiel lié à l'une des deux parois (paroi fixe), l'autre mobile entraîne le fluide.

En fait nous limitons notre étude à deux cas particuliers :

- la surface mobile y = 0 est plane, elle est animée d'une vitesse U constante face à un patin d'équation y = h (x), $0 \leq x \leq \ell$,

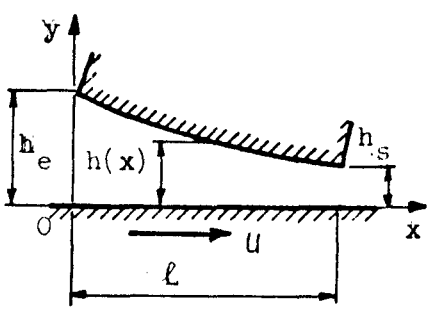


Fig. 1

Fig. 1

Problème du patin.

- les deux surfaces sont des cylindres circulaires d'axes parallèles.

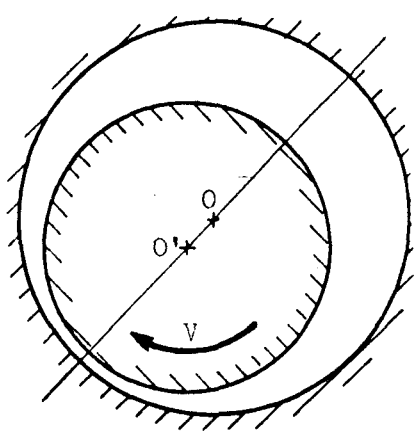


Fig. 2

Problème du coussinet

En tout point (x,y) de l'écoulement le vecteur rotationnel de la vitesse $\vec{U}(x,y)$ est parallèle à la direction fixe Oz. Sur les deux parois l'écoulement

est donc un écoulement RPDLF (voir paragraphe 2.5.1); il en résulte que les résultats des paragraphes 3.2.2, 3.3.3 et 3.3.4 sont applicables.

En particulier, le tenseur des contraintes à la paroi pour un fluide simple incompressible est donné par (III,35) c'est-à-dire

$$T = - p I + \sigma_1 \vec{n} \otimes \vec{n} + \sigma_2 \vec{f} \otimes \vec{f} - \tau (\vec{f} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{f}) \tag{IV.1}$$

où $\vec{n}$ est la normale à la paroi, $\vec{f}$ la tangente à celle-ci dans le plan de l'écoulement.

4.1.2.- L'idée selon laquelle l'explication de l'amélioration observée en lubrification par fluide non-newtonien serait due à un effet de contrainte normale semble faire la quasi-unanimité des auteurs (voir résumé de l'article de HARNOY [5]). La manière la plus simple d'introduire un tel effet est de considérer des fluides dits du second ordre. Ainsi, à une exception près, [6], les lois de comportement proposées n'appréhendent que des termes de degré deux (degré en facteur de retard); pour le fluide de Rivlin-Ericksen de degré deux ($S_3 = S_4 = 0$ dans I.54) on a

$$\sigma_1 \equiv \overset{(2)}{\sigma_1}(w) = (2\alpha_1+\alpha_2)w^2, \quad \sigma_2 \equiv \overset{(2)}{\sigma_2}(w) = \alpha_2 w^2, \quad \tau \equiv \overset{(2)}{\tau}(w) = \mu w, \tag{IV.2}$$

$\overset{(2)}{\sigma_1}(w)$, $\overset{(2)}{\sigma_2}(w)$ et $\overset{(2)}{\tau_2}(w)$ sont les fonctions viscométriques du fluide de Rivlin-Ericksen de degré deux (pour le fluide de degré un, c'est-à-dire pour le fluide newtonien on a évidemment

$$\sigma_1 \equiv \overset{(1)}{\sigma_1}(w) = 0, \quad \sigma_2 \equiv \overset{(1)}{\sigma_2}(w) = 0, \quad \tau \equiv \overset{(1)}{\tau}(w) = \mu w) .$$

DAVIES et WALTERS [6] ont étudié le problème du coussinet en fluide de Rivlin-Ericksen de degré trois; nous avons envisagé le problème du patin plan [11] pour ce même fluide. Ces deux études montrent qu'un effet de contrainte *tangentielle* peut *aussi* expliquer une modification des conditions de lubrification par fluide non-newtonien. Pour le fluide de degré trois ($S_4 = 0$ dans I.54), les contraintes à la paroi fixe sont données par

$$\sigma_1 \equiv \overset{(3)}{\sigma_1}(w) = (2\alpha_1+\alpha_2)w^2, \quad \sigma_2 \equiv \overset{(3)}{\sigma_2}(w) = \alpha_2 w^2, \quad \tau \equiv \overset{(3)}{\tau}(w) = \mu w + 2(\beta_1+\beta_2)w^3 \tag{IV.3}$$

(en effet, si la paroi fixe est le patin, ce qui est le cas en pratique, l'écoulement relatif à celle-ci est stationnaire; les fonctions

de contraintes pariétales coïncident donc avec les fonctions viscométriques du fluide).

Nous proposons ici de faire l'étude du problème de lubrification plane en fluide de Rivlin-Ericksen de *degré quatre* (I.54). A la paroi fixe, on aura, d'après (III,75),

$$(IV.4)\quad \begin{cases} \sigma_1 \equiv \overset{(4)}{\sigma_1}(w) = (2\alpha_1 + \alpha_2)\, w^2 + (4\gamma_3 + 4\gamma_5 + 2\gamma_6)\, w^4 , \\ \sigma_2 \equiv \overset{(4)}{\sigma_2}(w) = \alpha_2\, w^2 + 2\gamma_6\, w^4 , \\ \tau \equiv \overset{(4)}{\tau}(w) = \mu\, w + 2(\beta_1 + \beta_2)\, w^3 ; \end{cases}$$

nous introduisons ainsi un effet de contrainte normale beaucoup plus complexe que celui apporté par le degré deux tout en conservant l'effet de contrainte tangentielle cité plus haut; enfin nous mettrons en évidence un nouvel effet que nous appellerons *effet non-viscométrique* : *seul un degré au moins égal à quatre* permet d'introduire cet effet supplémentaire.

En résumé, la loi en degré quatre est la loi la plus simple susceptible d'appréhender simultanément différents effets de contraintes normales, un effet de contrainte tangentielle et un effet non viscométrique.

Les relations (1) et (4) montrent que pour atteindre la contrainte à la paroi, il nous faut connaitre le module du rotationnel de la vitesse w et la pression hydrostatique p . Nous procédons à la mise en équation du problème.

4.2 - LE PROBLEME DU PATIN

4.2.1.- Nous donnons l'énoncé du problème de lubrification en coordonnées cartésiennes (la surface mobile est plane).

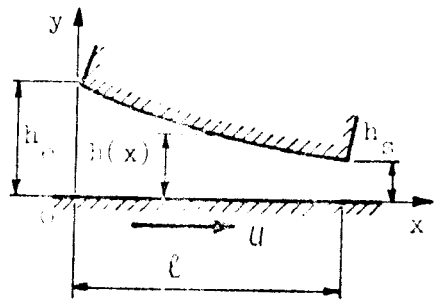


Fig. 1

Le repère O x y est lié à la surface fixe, le mouvement du fluide est plan et stationnaire; u = u(x,y) et v(x,y) sont les composantes de la vitesse d'une particule fluide, $\vec{\gamma}$ son vecteur accélération, ρ sa masse volumique. Il s'agit de trouver les champs p(x,y), u(x,y) et v(x,y) vérifiant (si on néglige les forces à distance) :

$$\rho \vec{\gamma} = - \text{grad } p + \text{div} \left(\sum_{i=1}^{4} S_i \right) \tag{IV.5}$$

$$\text{tr } A_1 = 0 \tag{IV.6}$$

$$u(x,0) = U, \quad v(x,0) = 0, \tag{IV.7}$$

$$u(x,h(x)) = 0, \quad v(x,h(x)) = 0 \ ; \tag{IV.8}$$

les S_i étant donnés par les relations (I.54) que nous rappelons

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \mu A_1 \ , \\ S_2 = \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 \ , \\ S_3 = \beta_1 (\text{tr } A_2) A_1 + \beta_2 (A_2 A_1 + A_1 A_2) + \beta_3 A_3 \ , \\ S_4 = \gamma_1 A_4 + \gamma_2 (A_3 A_1 + A_1 A_3) + \gamma_3 A_2^2 + \gamma_4 (A_2 A_1^2 + A_1^2 A_2) + \\ \qquad + \gamma_5 (\text{tr } A_2) A_2 + \gamma_6 (\text{tr } A_2) A_1^2 + \gamma_7 (\text{tr } A_3) A_1 + \gamma_2 (\text{tr } A_2 A_1) A_1 \ . \end{array} \right. \tag{IV.9}$$

μ, α_1, α_2, ... γ_7, γ_8 sont quatorze coéfficients constants caractéristiques du fluide.

La relation (6) traduit l'incompressibilité du fluide, (7) et (8) sont les conditions d'adhérence respectivement à la surface mobile et au patin.

De plus, à l'extérieur du patin, le mouvement du fluide relatif à la paroi mobile étant le repos , nous imposons des conditions à l'entrée $x = 0$ et à la sortie $x = \ell$ du patin. Dans le repère $O\ x\ y$, les composantes du tenseur des contraintes sont

$$\left\{ \begin{array}{l} T < x,x > = - p + \sum_{i=1}^{4} S_i < x\ x > \\ T < y,y > = - p + \sum_{i=1}^{4} S_i < y\ y > \\ T < x,y > = \sum_{i=1}^{4} S_i < x,y > \ . \end{array} \right. \tag{IV.10}$$

En choisissant comme origine la pression extérieure, il semble assez intuitif de poser comme conditions de pression respectivement à l'entrée et à la sortie du patin

$$(IV.11) \qquad T<y\ y>(0,y) = 0 = -\ p\ (0,y) + \sum_{i=1}^{4} S_i\ <y\ y>(0,y)\ ,$$

$$(IV.12) \qquad T<y\ y>(\ell,y) = 0 = -\ p\ (\ell,y) + \sum_{i=1}^{4} S_i\ <y\ y>(\ell,y)\ ;$$

nous reviendrons ultérieurement sur la justification de ces conditions de pression.

Le problème consiste donc en la recherche des trois fonctions $u(x,y)$, $v(x,y)$ et $p(x,y)$ vérifiant le système d'équations aux dérivées partielles (5) et (6) et sousmises aux conditions (7), (8), (11) et (12).

4.2.2.- La partie principale des contraintes. Nous n'aurons pas, (fort heureusement !) à écrire les composantes des différents tenseurs introduits par (9) ainsi que leur divergence nécessaire dans (5). En effet, les hypothèses générales du problème de lubrification, hypothèses liées à la géométrie du film fluide nous permettent de ne considérer que la partie principale de chacun de ces tenseurs.

Nous procédons à l'adimensionnalition du problème. La longueur ℓ du patin et la vitesse U de la paroi mobile sont choisies comme longueur et vitesse longitudinales de référence.

Soit $H = \varepsilon\ \ell$ et V une longueur et une vitesse transversale de référence; on suppose

$$(IV.13) \qquad \varepsilon = \frac{H}{\ell} < 10^{-3}$$

et on pose

$$(IV.14) \qquad x = \ell\ \bar{x}\ ,\ y = \varepsilon\ \ell\ \bar{y}\ ,\ u = U\ \bar{u}\ ,\ v = V\ \bar{v}\ .$$

D'une manière générale, une *lettre surlignée* représente une variable ou grandeur *sans dimension et de l'ordre de l'unité*.

La relation (6) qui s'écrit

$$(IV.15) \qquad \frac{U}{\ell}\ \bar{u}_{\bar{x}} + \frac{V}{\ell}\ \bar{v}_{\bar{y}} = 0\ ,$$

(une lettre en indice signifie que l'on considère la dérivée partielle correspondante, par exemple : $\bar{u}_{\bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$) nous incite à définir V par

$$(IV.16) \qquad V = \varepsilon\ U\ .$$

Les hypothèses (13) et (16) sont les deux hypothèses fondamentales du problème de lubrification.

Ecrivons, par leurs composantes dans la base $(\vec{x},\vec{y})$ les quatre premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen; une composante qui ne sera pas utile dans la suite ne sera pas écrite : elle sera représentée par le symbole $(-)$. D'après (I.20), (13), (14) et (16) il vient successivement les tenseurs symétriques :

$$
\text{(IV.17)}\quad
\begin{cases}
A_1 = \dfrac{U}{\ell}\begin{vmatrix} 2\bar{u}_{\bar{x}} & \dfrac{1}{\varepsilon}\bar{u}_{\bar{y}} + \sigma(\varepsilon) \\ . & 2\bar{v}_{\bar{y}} \end{vmatrix} \\[2ex]
A_2 = \dfrac{U^2}{\ell^2}\begin{vmatrix} 1(-)+\sigma(\varepsilon^2) & \dfrac{1}{\varepsilon}(\bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^2} + 2\,\bar{u}_{\bar{x}}\,\bar{u}_{\bar{y}}) + \sigma(\varepsilon) \\ . & \dfrac{1}{\varepsilon^2}\,2\,\bar{u}_{\bar{y}}^2 + \sigma(1) \end{vmatrix} \\[2ex]
A_3 = \dfrac{U^3}{\ell^3}\begin{vmatrix} 1(-)+\sigma(\varepsilon^2) & \dfrac{1}{\varepsilon}(-) + \sigma(\varepsilon) \\ . & \dfrac{1}{\varepsilon^2}\,6\,\bar{u}_{\bar{y}}(\bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^2}) + \sigma(1) \end{vmatrix} \\[2ex]
A_4 = \dfrac{U^4}{\ell^4}\begin{vmatrix} 1(-)+\sigma(\varepsilon^2) & \dfrac{1}{\varepsilon}(-) + \sigma(\varepsilon) \\ . & \dfrac{1}{\varepsilon^2}(-) + \sigma(1) \end{vmatrix},
\end{cases}
$$

d'où l'on déduit aisément

$$
\begin{cases}
A_1^2 = \dfrac{U^2}{\ell^2}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\ell^2}\bar{u}_{\bar{y}}^2 + \sigma(1) & \sigma(\varepsilon^2) \\ . & \dfrac{1}{\varepsilon^2}\bar{u}_{\bar{y}}^2 + \sigma(1) \end{vmatrix}, \\[2ex]
A_2A_1 + A_1A_2 = \dfrac{U^3}{\ell^3}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\varepsilon^2}(-) + \sigma(1) & \dfrac{1}{\varepsilon^3}\,2\,\bar{u}_{\bar{y}}^3 + \sigma(\dfrac{1}{\varepsilon}) \\ . & \dfrac{1}{\varepsilon^2}(-) + \sigma(1) \end{vmatrix}, \\[2ex]
(\operatorname{tr} A_2)A_1 = \dfrac{U^3}{\ell^3}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\varepsilon^2}(-) + \sigma(1) & \dfrac{1}{\varepsilon^3}\,2\,\bar{u}_{\bar{y}}^3 + \sigma(\dfrac{1}{\varepsilon}) \\ . & \dfrac{1}{\varepsilon^2}(-) + \sigma(1) \end{vmatrix},
\end{cases}
$$

(IV.18)

$$A_3A_1 + A_1A_3 = \frac{U^4}{\ell^4} \begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2}(-)+\sigma(1) & \frac{1}{\varepsilon^3}\left[6\bar{u}_{\bar{y}}^{-2}\,(\bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^2}\right] + \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \cdot & \frac{1}{\varepsilon^2}(-) + \sigma(1) \end{vmatrix}$$

$$(\mathrm{tr}\ A_3)A_1 = \frac{U^4}{\ell^4} \begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2}(-) + \sigma(1) & \frac{1}{\varepsilon^3}\left[6\bar{u}_{\bar{y}}^{-2}\,(\bar{u}\,\bar{u}_{xy} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^2})\right] + \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \cdot & \frac{1}{\varepsilon^2}(-) + \sigma(1) \end{vmatrix},$$

$$(\mathrm{tr}\ A_2A_1)A_1 = \frac{U^4}{\ell^4} \begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2}(-) + \sigma(1) & \frac{1}{\varepsilon^3}\left|2\bar{u}_{\bar{y}}^{-2}\,(\bar{v}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^2})\right| + \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \cdot & \frac{1}{\varepsilon^2}(-) + \sigma(1) \end{vmatrix}$$

$$(\mathrm{tr}\ A_2)A_1^2 = \frac{U^4}{\ell^4} \begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon^4}\,2\,\bar{u}_{\bar{y}}^{-4} + \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) & \sigma(\varepsilon^2) \\ \cdot & \frac{1}{\varepsilon^4}\,2\,\bar{u}_{\bar{y}}^{-4} + \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \end{vmatrix},$$

$$A_2^2 = \frac{U^4}{\ell^4} \begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2}(-) + \sigma(1) & \frac{1}{\varepsilon^3}\,2\,\bar{u}_{\bar{y}}^{-2}(\bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^2} + 2\,\bar{u}_{\bar{x}}\,\bar{u}_{\bar{y}}) + \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \cdot & \frac{1}{\varepsilon^4}\,4\,\bar{u}_{\bar{y}}^{-4} + \sigma\left(\frac{1}{2}\right) \end{vmatrix},$$

$$A_2A_1^2 + A_1^2A_2 = \frac{U^4}{\ell^4} \begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2}(-)+\sigma(1) & \frac{1}{\varepsilon^3}\,2\bar{u}_{\bar{y}}^{2}(\bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^2} + 2\bar{u}_{\bar{x}}\,\bar{u}_{\bar{y}}) + \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \cdot & \frac{1}{\varepsilon^4}\,4\,\bar{u}_{\bar{y}}^{-4} + \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \end{vmatrix},$$

$$(\mathrm{tr}\ A_2)A_2 = \frac{U^4}{\ell^4} \begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2}(-)+\sigma(1) & \frac{1}{\varepsilon^3}\,2\bar{u}_{\bar{y}}^{-2}(\bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^2} + 2\,\bar{u}_{\bar{x}}\,\bar{u}_{\bar{y}}) + \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \cdot & \frac{1}{\varepsilon^4}\,4\,\bar{u}_{\bar{y}}^{-4} + \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \end{vmatrix}.$$

SHS LILLE

Les relations (17) et (18) permettent d'obtenir les contraintes (9) et donc d'atteindre aisément la partie principale du second membre de l'équation du mouvement (5).

4.2.3.- Les équations approchées du mouvement. En introduisant une pression de référence p_a

$$p = p_a \bar{p} \tag{IV.19}$$

les équations du mouvement deviennent, en tenant compte des diverses expressions du paragraphe précédent :

$$\begin{aligned}
\bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}} = &- \frac{p_a}{\rho U^2}\,\bar{p}_{\bar{x}} + \frac{\mu}{\rho U \ell}\,\frac{1}{\varepsilon^2}\,(\bar{u}_{\bar{y}^2} + \sigma(\varepsilon^2)) + \\
&+ \frac{\alpha_2}{\rho \ell^2}\,\frac{1}{\varepsilon^2}\,(2\,\bar{u}_{\bar{y}}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \sigma(\varepsilon^2)) + \\
&+ \frac{\alpha_1}{\rho \ell^2}\,\frac{1}{\varepsilon^2}\,(3\,\bar{u}_{\bar{y}}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{u}_{\bar{x}}\,\bar{u}_{\bar{y}^2} + \bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}^2} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^3} + \sigma(\varepsilon^2)) + \\
&+ \left(\frac{\beta_1 U^2}{\rho\,\ell^3}\,\frac{1}{\varepsilon^4} \;\; \frac{\beta_2 U}{\rho\,\ell^3}\,\frac{1}{\varepsilon^4}\right)(6\,\bar{u}_{\bar{y}}^2\,\bar{u}_{\bar{y}^2} + \sigma(\varepsilon^2)) + \frac{\beta_3 U}{\rho \ell^3}\,\frac{1}{\varepsilon^2}\,(\sigma(1)) + \\
&+ \frac{\gamma_1 U^2}{\rho \ell^4}\,\frac{1}{\varepsilon^2}\,(\sigma(1)) + \frac{\gamma_6 U^2}{\rho \ell^4}\,\frac{1}{\varepsilon^4}\,(2\,(\bar{u}^4_{\bar{y}})_{\bar{x}} + \sigma(\varepsilon^2)) + \\
&+ \left(6\,\frac{\gamma_2 U^2}{\rho \ell^4} + 6\,\frac{\gamma_7 U^2}{\rho \ell^4} + 2\,\frac{\gamma_8 U^2}{\rho \ell^4}\right)\frac{1}{\varepsilon^4}\,(\bar{u}_{\bar{y}}^2(\bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^2}) + \sigma(\varepsilon^2))_{\bar{y}} + \\
&+ \left(2\,\frac{\gamma_3 U^2}{\rho \ell^4} + 2\,\frac{\gamma_4 U^2}{\rho \ell^4} + 2\,\frac{\gamma_5 U^2}{\rho \ell^4}\right)\frac{1}{\varepsilon^4}\,(\bar{u}_{\bar{y}}^2\,(\bar{u}\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{v}\bar{u}_{\bar{y}^2} + 2\bar{u}_{\bar{x}}\,\bar{u}_{\bar{y}} + \sigma(\varepsilon^2)))_{\bar{y}}
\end{aligned} \tag{IV.20}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}\,\bar{v}_{\bar{x}} + \bar{v}\,\bar{v}_{\bar{y}} = &- \frac{p_a}{\rho U^2}\,\frac{1}{\varepsilon^2}\,\bar{p}_{\bar{y}} + \frac{\mu}{\rho U \ell}\,\frac{1}{\varepsilon^2}\,(\bar{v}_{\bar{y}^2} + \sigma(\varepsilon^2)) + \\
&+ \frac{\alpha_2}{\rho \ell^2}\,\frac{1}{\varepsilon^4}\,(2\,\bar{u}_{\bar{y}}\,\bar{u}_{\bar{y}^2} + (\varepsilon^2)) + \frac{\alpha_1}{\rho \ell^2}\,\frac{1}{\varepsilon^4}\,(4\,\bar{u}_{\bar{y}}\,\bar{u}_{\bar{y}^2} + \sigma(\varepsilon^2)) + \\
&+ \frac{\beta_1 U}{\rho \ell^3}\,\frac{1}{\varepsilon^4}(\sigma(1)) + \frac{\beta_2 U}{\rho \ell^3}\,\frac{1}{\varepsilon^4}\,(\sigma(1)) + \frac{\beta_3 U}{\rho \ell^3}\,\frac{1}{\varepsilon^4}\,(\sigma(1)) + \\
&+ \frac{\gamma_1 U^2}{\rho \ell^4}\,\frac{1}{\varepsilon^4}(\sigma(1)) + \frac{\gamma_2 U^2}{\rho \ell^4}\,\frac{1}{\varepsilon^4}(\sigma(1)) + \frac{\gamma_7 U^2}{\rho \ell^4}\,\frac{1}{\varepsilon^4}(\sigma(1)) + \\
&\frac{\gamma_8 U^2}{\rho \ell^4}\,\frac{1}{\varepsilon^4}(\sigma(1)) + \left(4\,\frac{\gamma_3 U^2}{\rho \ell^4} + 4\,\frac{\gamma_4 U^2}{\rho \ell^4} + 4\,\frac{\gamma_5 U^2}{\rho \ell^4} + 2\,\frac{\gamma_6 U^2}{\rho \ell^4}\right)\frac{1}{\varepsilon^6}(\bar{u}^4_{\bar{y}})_{\bar{y}} \quad ;
\end{aligned}$$

(IV.22) $$\bar{u}_{x} + \bar{v}_{y} = 0 \ .$$

Pour obtenir les équations de la lubrification plane en fluide de degré quatre, nous formulons les hypothèses suivantes * :

(IV.23) $$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{p_a}{\rho U^2} = \frac{\mu}{\rho U \ell}\frac{1}{\varepsilon^2} \sim \frac{\alpha_i}{\rho \ell^2}\frac{1}{\varepsilon^2} \sim \frac{\beta_j U}{\rho \ell^3}\frac{1}{\varepsilon^4} \sim \frac{\gamma_k U^2}{\rho \ell^4}\frac{1}{\varepsilon^4}$$

$$i \in \{1,2\} \ ; \ j \in \{1,2,3\} \ ; \ k \in \{1,2,\ldots,8\} \ .$$

Les deux premières hypothèses (23) sont celles qui sont effectuées en fluide newtonien; la première définit donc la pression de référence p_a , la deuxième est généralement écrite sous la forme

$$R\,\varepsilon^2 << 1$$

où R est le nombre de Reynolds $R = \frac{\rho U \ell}{\mu}$. Quand aux suivantes elles sont dictées par deux considérations : on suppose que les coefficients de termes de même degré, dans la loi de comportement (I.54) sont du même ordre de grandeur ($\alpha_1 \sim \alpha_2$; $\beta_1 \sim \beta_2 \sim \beta_3$; $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim \ldots \sim \gamma_8$) et, d'autre part, on désire conserver dans les équations (20) et (21) le nombre maximum de termes. D'après les hypothèses (23) ces équations deviennent :

(IV.24) $$\sigma(\varepsilon) = -\frac{p_a}{\rho U^2}\bar{p}_x + \frac{\mu}{\rho U \ell}\frac{1}{\varepsilon^2}\bar{u}_{y^2} +$$

$$+ \frac{\alpha_1}{\rho \ell^2}\frac{1}{\varepsilon^2}(3\,\bar{u}_y\,\bar{u}_{xy} + \bar{u}_x\,\bar{u}_{y^2} + \bar{u}\,\bar{u}_{xy^2} + \bar{v}\,\bar{u}_{y^3}) + \frac{\alpha_2}{\rho \ell^2}\frac{1}{\varepsilon^2}\,2\,\bar{u}_y\,\bar{u}_{xy} +$$

$$+ (\beta_1 + \beta_2)\frac{U}{\rho \ell^3}\frac{1}{\varepsilon^4}\,6\,\bar{u}_y^2\,\bar{u}_{y^2} +$$

$$+ (6\gamma_2 + 6\gamma_7 + 2\gamma_8)\frac{U^2}{\rho \ell^4}\frac{1}{\varepsilon^4}(\bar{u}_y^2(\bar{u}\,\bar{u}_{xy} + \bar{v}\,\bar{u}_{y^2}))_y + \frac{\gamma_6 U^2}{\rho \ell^4}\frac{1}{\varepsilon^4}2(\bar{u}_y^4)_x +$$

$$+ (2\gamma_3 + 2\gamma_4 + 2\gamma_5)\frac{U^2}{\rho \ell^4}\frac{1}{\varepsilon^4}(\bar{u}_y^2(\bar{u}\,\bar{u}_{xy} + \bar{v}\,\bar{u}_{y^2} + 2\,\bar{u}_x\,\bar{u}_y))_y \ ,$$

---

* Nous ne proposons plus, ici, comme nous l'avons fait par ailleurs [11] l'hypothèse $\beta_3 = 0$; voir à ce sujet la note en bas de page 66.

$$(IV.25)\quad \sigma(\varepsilon) = -\frac{p_a}{\rho U^2}\,\bar{p}_{\bar{y}} + \frac{\alpha_1}{\rho \ell^2}\frac{1}{\varepsilon^2}\,4\,\bar{u}_{\bar{y}}\,\bar{u}_{\bar{y}^2} + \frac{\alpha_2}{\rho \ell^2}\frac{1}{\varepsilon^2}\,2\,\bar{u}_{\bar{y}}\,\bar{u}_{\bar{y}^2} +$$

$$+ (4\gamma_3 + 4\gamma_4 + 4\gamma_5 + 2\gamma_6)\,\frac{U^2}{\rho \ell^4}\frac{1}{\varepsilon^4}\,(\bar{u}^4)_{\bar{y}\bar{y}} .$$

Introduisons les trois coefficients β, γ et γ' caractéristiques du fluide, définis par

$$(IV.26)\quad \beta = \beta_1 + \beta_2 \; ; \; \gamma = 6\gamma_2 + 2\gamma_3 + 6\gamma_4 + 2\gamma_5 + 2\gamma_7 + 2\gamma_8 \; ;$$

$$\gamma' = 4\gamma_3 + 4\gamma_4 + 4\gamma_5$$

et les quatre nombres λ, ν, ν_1 et ν_2, de l'ordre de l'unité d'après (23) :

$$(IV.27)\quad \lambda = \frac{\alpha_1 U}{\mu\,\ell} \; ; \; \nu = \frac{\beta\,U^2}{\mu\,\ell^2}\,\frac{1}{\varepsilon^2} \; ; \; \nu_1 = \frac{\gamma\,U^3}{\mu\,\ell^3}\frac{1}{\varepsilon^2} \; ; \; \nu_2 = \frac{\gamma' U^3}{\mu\,\ell^3}\,\frac{1}{\varepsilon^2} .$$

A ces trois derniers nombres, on pourra préférer les nombres ω, ω_1, ω_2 au plus de l'ordre de 10^{-6} d'après l'hypothèse (13) :

$$(IV.28)\quad \omega = \frac{\beta U^2}{\mu \ell^2} = \nu\,\varepsilon^2 ; \; \omega_1 = \frac{\gamma U^3}{\mu \ell^3} = \nu_1\,\varepsilon^2 \; ; \; \omega_2 = \frac{\gamma' U^3}{\mu \ell^3} = \nu_2\,\varepsilon^2$$

De plus, on considère la "nouvelle pression hydrostatique" $\tilde{p}$ définie par*

$$(IV.29)\quad \tilde{p} = p - (2\alpha_1 + \alpha_2)\,u_y^2 - (4\gamma_3 + 4\gamma_4 + 4\gamma_5 + 2\gamma_6)\,u_y^4 ,$$

En omettant les termes d'ordre ε^2, d'après la définition (29), l'équation (25) prend la forme

$$(IV.30)\quad \bar{\tilde{p}}_{\bar{y}} = 0 \; , \; (\tilde{p} = \frac{\mu U}{\varepsilon^2 \ell}\,\bar{\tilde{p}})$$

et en posant

$$(IV.31)\quad \bar{\tilde{p}}_{\bar{x}} = A(\bar{x}) \; ,$$

où $A(\bar{x})$ est une fonction inconnue, l'équation (24) devient, à des termes d'ordre ε près

---

* Il est intéressant de noter que si l'introduction de la pression $\tilde{p}$ est justifiée par la forme du second membre de (29), il est possible d'en donner une interprétation simple : $\tilde{p} = p - \sigma_1(u_y)$ où $\sigma_1(\kappa)$ est la première fonction viscométrique du fluide de Rivlin-Ericksen de degré 4.

$$(IV.32)\quad A(\bar{x}) = \bar{u}_{\bar{y}^2} + \lambda(\bar{u}_{\bar{x}}\,\bar{u}_{\bar{y}^2} + \bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}^2} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^3} - \bar{u}_{\bar{y}}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}}) + 6\nu\,\bar{u}^{-2}_{\bar{y}}\,\bar{u}_{\bar{y}^2}$$

$$+ \nu_1(\bar{u}^{-2}_{\bar{y}}\,(\bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{v}\,\bar{u}_{\bar{y}^2}))_{\bar{y}} + \nu_2((\bar{u}^{-3}_{\bar{y}}\,\bar{u}_{\bar{x}})_{\bar{y}} - (\bar{u}^{-4}_{\bar{y}})_{\bar{x}})$$

v vérifiant évidemment la relation (22) soit :

$$(IV.33)\quad \bar{v}_{\bar{y}} = -\,\bar{u}_{\bar{x}} .$$

Les équations (31), (32) et (33) jointes aux conditions d'adhérence (7) et (8) et aux conditions de pression (11) et (12) à savoir, respectivement :

$$(IV.34)\quad \bar{u}(\bar{x},0) = 1 , \quad \bar{v}(\bar{x},0) = 0 ,$$

$$(IV.35)\quad \bar{u}(\bar{x},\bar{h}(\bar{x})) = 0, \ \bar{v}(\bar{x},\bar{h}(\bar{x})) = 0, \text{ où } \bar{h} = \frac{h}{\varepsilon\ell} ,$$

$$(IV.36)\quad \bar{\tilde{p}}(0,\bar{y}) = 0, \ \bar{\tilde{p}}(1,\bar{y}) = 0 ,$$

constituent les équations cartésiennes du problème de lubrification des surfaces cylindriques en fluide de Rivlin-Ericksen de degré quatre.

4.2.4.- *Remarque*

Les *quatorze* coefficients μ, α_1, α_2, ... γ_8 caractéristiques du fluide introduits par la loi (I.54) n'interviennent dans le problème que par l'intermédiaire des *quatre* nombres λ, ν, ν_1 et ν_2 . L'examen des relations (26) et (27) montre que α_2 et β_3 n'interviennent pas dans la solution* .

Le nombre $\frac{\alpha_1}{\mu}$ a la dimension d'un temps; tous les auteurs s'accordent à penser ([1] page 232) que α_1 vérifie l'inégalité

$$(IV.37)\quad \alpha_1 < 0 ,$$

si bien que l'on est amené à introduire un temps τ caractéristique du fluide appelé quelquefois temps de relaxation .

$$(IV.38)\quad \frac{\alpha_1}{\mu} = -\,\tau .$$

Par ailleurs le rapport $\frac{U}{\ell} = \Delta t$ est un temps caractéristique de l'écoulement : Δt est le temps mis par une particule très proche de la surface mobile pour parcourir la longueur du patin. Le nombre $\lambda = -\frac{\tau}{\Delta t}$ est souvent appelé

---

* HARNOY [5] et [8] effectue, pour un fluide du second ordre l'hypothèse $\alpha_2=0$; nous même [11] avons posé $\beta_3=0$. Ces deux hypothèses sont donc inutiles.

nombre de Deborah. En fait (27) ou (28) montre qu'il faut introduire non pas un temps caractéristique du fluide mais quatre et l'on constate que le nombre ν (ou ω) s'interprête au signe près comme le carré d'un autre nombre de Deborah tandis que ν_1 et ν_2 (ou ω_1 et ω_2) seraient des nombres de Deborah élevés à la puissance trois. Nous n'utiliserons pas cette terminologie mais nous retiendrons que, dans les équations et donc dans la solution, les termes de degré deux de la loi de comportement (I.54) dont les coefficients sont α_1 et α_2 s'introduisent seulement par α_1 (α_2 est sans influence) par l'intermédiaire du nombre

$$\lambda = \frac{\alpha_1}{\mu} \frac{U}{\ell} \quad ; \tag{IV.39}$$

les termes de degré trois de coefficients β_1, β_2, β_3 s'introduisent uniquement par la somme $\beta_1 + \beta_2$ (β_3 est sans influence) sous la forme du nombre

$$\omega = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\mu} \left(\frac{U}{\ell}\right)^2 , \tag{IV.40}$$

quant aux termes de degré quatre dont γ_1, γ_2, ..., γ_7, γ_8 ils influencent la solution seulement par les deux nombres

$$\omega_1 = \frac{1}{\mu} (6\gamma_2 + 2\gamma_3 + 2\gamma_4 + 2\gamma_5 + 6\gamma_7 + 2\gamma_8)\left(\frac{U}{\ell}\right)^3, \tag{IV.41}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\mu} 4(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5) \left(\frac{U}{\ell}\right)^3 . \tag{IV.42}$$

4.3 - L'EFFET NON-VISCOMETRIQUE

Dans l'introduction à ce chapitre nous avons déjà eu l'occasion de dire que la considération du fluide de degré quatre permet d'appréhender dans le problème de lubrification des effets de contraintes normales, un effet de contrainte tangentielle et un effet non viscométrique; nous allons préciser ces notions.

4.3.1.- Considérons tout d'abord le cas du fluide de degré trois; on a alors $\nu_1 = \nu_2 = 0$ dans l'équation (32). Il est aisé de constater en examinant les expressions des fonctions viscométriques du fluides de degré trois (3) que la solution est déterminée par la donnée des nombres

$$\lambda \frac{\ell}{U} \equiv \frac{1}{4} \left[\overset{(3)}{\sigma_1''}(o) - \overset{(3)}{\sigma_2''}(o) \right] \frac{1}{\overset{(3)}{\tau'}(o)} , \tag{IV.43}$$

$$\omega \frac{\ell^2}{U^2} \equiv \frac{1}{12} \frac{\overset{(3)}{\tau'''}(o)}{\overset{(3)}{\tau'}(o)} , \tag{IV.44}$$

où il a été posé, par exemple $\overset{(3)}{\sigma_1''}(o) = \frac{d^2}{dw^2} \overset{(3)}{\sigma_1}(w)\Big|_{w=0}$.

Ainsi donc la solution de l'écoulement de lubrification, qui est un écoulement non viscométrique, en fluide de degré trois, peut être entièrement décrite à l'aide des fonctions viscométriques du fluide, c'est-à-dire à l'aide des seules informations fournies par des écoulements viscométriques. Pour cette raison et à cause de la forme de seconds membres de (43) et (44) nous dirons que λ (terme de degré deux) prend en compte un *effet viscométrique de contraintes normales* tandis que ω (termes de degré trois) prend en charge un *effet viscométrique de contrainte tangentielle* (ou effet viscométrique de viscosité de cisaillement).

4.3.2.- Il n'en est plus de même pour le degré quatre. En effet en considérant les fonctions viscométriques du fluide de degré quatre rappelée en (4), on vérifie que si l'on a toujours

$$\lambda \frac{\ell}{U} \equiv \frac{1}{4}\left[\overset{(4)}{\sigma_1''}(o) - \overset{(4)}{\sigma_2''}(o)\right] \frac{1}{\overset{(4)}{\tau'}(o)} , \tag{IV.45}$$

$$\omega \frac{\ell^2}{U^2} \equiv \frac{1}{12} \frac{\overset{(4)}{\tau'''}(o)}{\overset{(4)}{\tau'}(o)} , \tag{IV.46}$$

on a aussi

$$\omega_2 \frac{\ell^3}{U^3} \equiv \frac{1}{24}\left[\overset{(4)}{\sigma_1'''}(o) - \overset{(4)}{\sigma_2'''}(o)\right] \frac{1}{\overset{(4)}{\tau'}(o)} ; \tag{IV.47}$$

par contre on voit que l'on ne peut exprimer ω_1 à l'aide des fonctions viscométriques du fluide de degré quatre :

$$\omega_1 \frac{3}{U^3} \equiv \left[\frac{\overset{(4)}{\sigma_1'''}(o) - \overset{(4)}{\sigma_2'''}(o)}{48} + 6\gamma_2 + 6\gamma_7 + 2\gamma_8\right] \frac{1}{\overset{(4)}{\tau'}(o)} . \tag{IV.48}$$

Aucune expérience viscométrique ne permettra de mesurer la somme $6\gamma_2 + 6\gamma_7 + 2\gamma_8$ puisque, comme le montre la dernière relation (9), γ_2 est coefficient du tenseur $A_3 A_1 + A_1 A_3$, γ_7 est multiplié par tr A_3 alors que γ_8 est facteur de tr $(A_2 A_1)$. Or nous avons rappelé au chapitre I que dans tout écoulement viscométrique $A_3 = o$ (voir I.38) et par ailleurs en examinant les relations (I.43 et 44) on vérifie aisément que dans un tel écoulement

on a aussi tr $(A_2\ A_1) = o$. Cependant on peut constater facilement en examinant les expressions des fonctions *de contraintes pariétales* du fluide incompressible de degré quatre (III.60) que ces dernières suffisent pour décrire l'effet introduit par ω_1; de manière plus précise, on peut exprimer le nombre $\omega_1 \frac{\ell^3}{U^3}$ donné par (41) à l'aide des dérivées des fonctions de contraintes pariétales normales *et* tangentielles dérivées prises par rapport à w et w'. Il est curieux de constater qu'alors que l'écoulement de lubrification n'est pas viscométrique, les informations viscométriques suffisent pour étudier la solution en fluide de degré trois et que, bien que cet écoulement soit stationnaire, des informations qui ne peuvent être obtenues que par des écoulements non-stationnaires, sont nécessaires pour décrire la solution en fluide de degré quatre (remarquons toutefois que si l'écoulement est stationnaire relativement à la paroi fixe, il ne l'est plus par rapport à la paroi mobile).

4.4 - *RESOLUTION DU PROBLEME DU PATIN*

4.4.1.- Ne pouvant intégrer le système (32), (33), nous nous proposons seulement d'obtenir quelques indications sur le mode d'influence des nombres λ, ν, ν_1 et ν_2 sur la solution. Ce but peu ambitieux est compatible avec une *méthode de résolution par perturbation*. Cette méthode sera appliquée simultanément sur ces quatre nombres que nous supposons du même ordre de grandeur; on pose, pour cela,

$$\nu = k\,\lambda \quad , \quad \nu_1 = k_1\,\lambda \quad , \quad \nu_2 = k_2\,\lambda, \tag{IV.49}$$

les trois nombres k, k_1 et k_2 étant supposés de l'ordre de l'unité.

Dans la mesure où λ (et donc ν, ν_1 et ν_2) est considéré comme petit devant l'unité, toute grandeur g sera écrite sous la forme

$$g = g^o + \lambda\, g^1 + \sigma(\lambda^2\, g)\ , \tag{IV.50}$$

et dans diverses équations nous procéderons à l'identification des termes en g^o et à celle des termes en g^1.

Nous cherchons donc la solution du système (30), ..., (36) sous la forme*

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}^o + \lambda\, \bar{u}^1 + \sigma(\lambda^2)\ , \\ \bar{v} = \bar{v}^o + \lambda\, \bar{v}^1 + \sigma(\lambda^2)\ , \\ \bar{\tilde{p}} = \bar{\tilde{p}}^o + \lambda\, \bar{\tilde{p}}^1 + \sigma(\lambda^2)\ , \\ A(\bar{x}) = A^o(\bar{x}) + \lambda\, A^1(\bar{x}) + \sigma(\lambda^2) \end{array}\right. \tag{IV.51}$$

* Ce développement n'a de sens que si $\lambda^2 << \varepsilon << \lambda$.

Par ailleurs, en introduisant deux hauteurs constantes h_o et h_1, le débit $q = \int_0^{h(x)} u\,dy$ sera écrit

$$\bar{q} = \frac{1}{2}\bar{h}_o + \lambda\frac{1}{2}\bar{h}_1 + \sigma(\lambda^2) \tag{IV.52}$$

$$(q = U\varepsilon\ell\,\bar{q},\ h_o = \bar{h}_o\,\varepsilon\,\ell,\ h_1 = \bar{h}_1\,\varepsilon\,\ell)$$

En portant (51) dans les conditions (34) et (35), il vient les conditions d'adhérence à l'ordre zéro

$$\begin{cases} \bar{u}^o(\bar{x},0) = 1\ , & \bar{v}^o(\bar{x},0) = 0 \\ \bar{u}^o(\bar{x},\bar{h}(\bar{x})) = 0, & \bar{v}^o(x,\bar{h}(\bar{x})) = 0 \end{cases} \tag{IV.53}$$

et les conditions d'adhérence à l'ordre un

$$\begin{cases} \bar{u}^1(\bar{x},0) = 0 & \bar{v}^1(\bar{x},0) = 0 \\ \bar{u}^1(\bar{x},\bar{h}(\bar{x})) = 0 & \bar{v}^1(\bar{x},\bar{h}(\bar{x})) = 0 \end{cases} \tag{IV.54}$$

4.4.2.- *Le profil des vitesses à l'ordre zéro*. A l'ordre zéro, les équations (32) et (33) deviennent

$$\begin{cases} \bar{u}^o_{\bar{y}^2} = A^o(\bar{x}) \\ \bar{v}^o_{\bar{y}} = -\bar{u}^o_{\bar{x}} \end{cases} \tag{IV.55}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} \bar{u}^o = \frac{A^o}{2}\bar{y}^2 + B^o\,\bar{y} + C^o \\ \bar{v}^o = -\frac{1}{6}A^o_{\bar{x}}\,\bar{y}^3 - \frac{1}{2}B^o_{\bar{x}}\,\bar{y}^2 + D^o \end{cases} \tag{IV.56}$$

où B^o C^o et D^o sont trois fonctions de $\bar{x}$.

La condition de débit à l'ordre zéro

$$\frac{1}{2}\bar{h}_o = \int_0^{\bar{h}(\bar{x})} \bar{u}^o\,d\bar{y} \tag{IV.57}$$

et les quatre conditions d'adhérence (53) sont vérifiées avec

$$(IV.58)\qquad \begin{cases} A^\circ = 6\,\dfrac{\bar{h}(\bar{x})-\bar{h}_o}{\bar{h}^3(\bar{x})} \\ B^\circ = \dfrac{3\bar{h}_o - 4\bar{h}(\bar{x})}{\bar{h}^2(\bar{x})} \\ C^\circ = 1\ ,\ D^\circ = 0 \end{cases}$$

Par ailleurs la relation (31) écrite à l'ordre zéro, fournit l'équation de Reynolds

$$(IV.59)\qquad \underset{\sim}{\bar{p}}^\circ_{\bar{x}} = A^\circ\ ,\quad \underset{\sim}{p}^\circ_x = 6\,\mu\,U\,\frac{h(x)-h_o}{h^3(x)}\ .$$

4.4.3.- Le profil des vitesses à l'ordre un. A l'ordre un, les équations (36) et (37) deviennent respectivement

$$(IV.60)\begin{cases} \bar{u}^1_{\bar{y}^2} = -\left(\bar{u}^\circ_{\bar{x}}\,\bar{u}^\circ_{\bar{y}^2} + \bar{u}^\circ\,\bar{u}^\circ_{\bar{x}\bar{y}^2} + \bar{v}^\circ\,\bar{u}^\circ_{\bar{y}^3} - \bar{u}^\circ_{\bar{y}}\,\bar{u}^\circ_{\bar{x}\bar{y}}\right) - 6\,k\,\bar{u}^\circ_{\bar{y}^2}\,\bar{u}^{\circ 2}_{\bar{y}} \\ \qquad - k_1\left[\bar{u}^{\circ 2}_{\bar{y}}\left(\bar{u}^\circ\,\bar{u}^\circ_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{v}^\circ\,\bar{u}^\circ_{\bar{y}^2}\right)\right]_{\bar{y}} - k_2\left[\left(u^{\circ 3}_{\bar{y}}\,\bar{u}^\circ_{\bar{x}}\right)_{\bar{y}} - \left(\bar{u}^{\circ 4}_{\bar{y}}\right)_{\bar{x}}\right] + A^1(\bar{x}), \\ \bar{v}^1_{\bar{y}} = -\,\bar{u}^1_{\bar{x}}\ , \end{cases}$$

en introduisant la fonction $\tilde{A}^1$ définie par la relation

$$(IV.61)\qquad \tilde{A}^1 = A^1 - A^\circ_{\bar{x}} + B^\circ\,B^\circ_{\bar{x}}\ ,\qquad \left(A^\circ_{\bar{x}} = \frac{d}{d\bar{x}}\,A^\circ(\bar{x})\right),$$

la première équation (60), compte tenu des relations (56), s'intègre en

$$\begin{aligned}(IV.62)\quad \bar{u}^1 &= \frac{\tilde{A}^1}{2}\,\bar{y}^2 + B^1\,\bar{y} \\ &-k\left[\frac{A^{\circ 3}}{2}\,\bar{y}^4 + 2A^{\circ 2}\,B^\circ\,\bar{y}^3 + 3A^\circ\,B^{\circ 2} + 2\,B^{\circ 3}\,\bar{y}\right] \\ &-k_1\left[A^{\circ 3}\,A^\circ_{\bar{x}}\,\frac{\bar{y}^6}{18} + A^{\circ 2}\,B^\circ\,A^\circ_{\bar{x}}\,\frac{\bar{y}^5}{3} + \left(A^{\circ 2}\,A^\circ_{\bar{x}} + \frac{7}{3}\,A^\circ B^\circ\,A^\circ_{\bar{x}} + A^{\circ 2}\,B^\circ\,B^\circ_{\bar{x}}\right)\frac{\bar{y}^4}{4}\right. \\ &\quad +\left(2A^\circ\,B^\circ\,A^\circ_{\bar{x}} + B^{\circ 3}\,A^\circ_{\bar{x}} + A^{\circ 2}\,B^\circ_{\bar{x}} + 2A^\circ\,B^{\circ 2}\,B^\circ_{\bar{x}}\right)\frac{\bar{y}^3}{3} + \\ &\qquad \left. +\left(B^{\circ 2}\,A^\circ_{\bar{x}} + 2A^\circ\,B^\circ\,B^\circ_{\bar{x}} + B^{\circ 3}B^\circ_{\bar{x}}\right)\frac{\bar{y}^2}{2}\right] \\ &+k_2\left[\frac{1}{20}\,A^{\circ 3}\,A^\circ_{\bar{x}}\,\bar{y}^6 + \frac{3}{10}\,A^{\circ 2}\,B^\circ\,A^\circ_{\bar{x}}\,\bar{y}^5 + \left(\frac{5}{8}\,A^\circ\,B^{\circ 2}A^\circ_{\bar{x}} + \frac{1}{4}\,A^{\circ 2}\,B^\circ\,B^\circ_{\bar{x}}\right)\bar{y}^4\right. \\ &\quad \left. +\left(\frac{1}{2}\,B^{\circ 3}\,A^\circ_{\bar{x}} + A^\circ\,B^{\circ 2}\,B^\circ_{\bar{x}}\right)\bar{y}^3 + \frac{3}{2}\,B^{\circ 3}\,B^\circ_{\bar{x}}\,\bar{y}^2\right]\end{aligned}$$

La condition de débit à l'ordre un

$$\frac{1}{2}\,\bar{h}^{1\prime} = \int_0^{\bar{h}(\bar{x})} \bar{u}^1\, d\bar{y} \tag{IV.63}$$

et les conditions d'adhérence (54) relatives à $\bar{u}^1$ sont vérifiées en prenant

$$\begin{aligned}\tilde{A}^1 = &- 6\,\frac{\bar{h}^1}{\bar{h}} + k\,\left(\frac{9}{5}\,A^{\circ 3}\,\bar{h}^2 + 6\,A^{\circ 2}\,B^\circ\,\bar{h} + 6\,A^\circ\,B^{\circ 2}\right)\\ &+ k_1\left[\frac{1}{14}\,A^{\circ 3}\,\underline{A}^\circ_x\,\bar{h}^4 + \frac{1}{3}\,A^{\circ 2}\,B^\circ\,\underline{A}^\circ_x\,\bar{h}^3 + \right.\\ &\quad \frac{3}{20}\,(A^{\circ 2}\,\underline{A}^\circ_x + \frac{7}{3}\,A^\circ\,B^{\circ 2}\,\underline{A}^\circ_x + A^{\circ 2}\,B^\circ\,\underline{B}^\circ_x)\,\bar{h}^2\\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\,(B^{\circ 2}\,\underline{A}^\circ_x + 2\,A^\circ\,B^\circ\,\underline{B}^\circ_x + B^{\circ 3}\,\underline{B}^\circ_x)\right]\\ &- k_2\left[\frac{9}{140}\,A^{\circ 3}\,\underline{A}^\circ_x\,\bar{h}^4 + \frac{3}{10}\,A^{\circ 2}\,B^\circ\,\underline{A}^\circ_x\,\bar{h}^3 + \right.\\ &\quad \left. + (\frac{3}{8}\,A^\circ\,B^{\circ 2}\,\underline{A}^\circ_x + \frac{3}{20}\,A^{\circ 2}\,B^\circ\,\underline{B}^\circ_x)\,\bar{h}^2 - \frac{3}{2}\,B^{\circ 3}\,\underline{B}^\circ_x\right]\end{aligned} \tag{IV.64}$$

et

$$\begin{aligned}B^1 = &\ 3\,\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}^2} - k\,(\frac{2}{3}\,A^{\circ 3}\,\bar{h}^3 + A^{\circ 2}\,B^\circ\,\bar{h}^2 - 2\,B^{\circ 3})\\ &+ k_1\left[-\frac{1}{126}\,A^{\circ 3}\,\underline{A}^\circ_x\,\bar{h}^5 + \frac{1}{20}(A^{\circ 2}\,\underline{A}^\circ_x + \frac{7}{3}\,A^\circ\,B^{\circ 2}\,\underline{A}^\circ_x + A^{\circ 2}\,B^\circ\,\underline{B}^\circ_x)\,\bar{h}^3 + \right.\\ &\quad + \frac{1}{6}\,(2A^\circ\,B^\circ\,\underline{A}^\circ_x + B^{\circ 3}\,\underline{A}^\circ_x + A^{\circ 2}\,\underline{B}^\circ_x + 2\,A^\circ\,B^{\circ 2}\,\underline{B}^\circ_x)\,\bar{h}^2 +\\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\,(B^{\circ 2}\,\underline{A}^\circ_x + 2A^\circ\,B^\circ\,\underline{B}^\circ_x + B^{\circ 3}\,\underline{B}^\circ_x)\,\bar{h}\right]\\ &- k_2\left[-\frac{1}{140}\,A^{\circ 3}\,\underline{A}^\circ_x\,\bar{h}^5 + (\frac{1}{8}\,A^\circ\,B^{\circ 2}\,\underline{A}^\circ_x + \frac{1}{20}\,A^{\circ 2}\,B^\circ\,\underline{B}^\circ_x)\,\bar{h}^3 + \right.\\ &\quad \left. + (\frac{1}{4}\,B^{\circ 3}\underline{A}^\circ_x + \frac{1}{2}\,A^\circ\,B^{\circ 2}\,\underline{B}^\circ_x)\,\bar{h}^2 + \frac{3}{2}\,B^{\circ 3}\,\underline{B}^\circ_x\,\bar{h}\right]\end{aligned} \tag{IV.65}$$

Rappelons que dans (62), (64) et (65) $A^\circ(\bar{x})$ et $B^\circ(\bar{x})$ sont données par (58) et que $\bar{h}(\bar{x})$ est le profil réduit défini par $\varepsilon\, \ell\, \bar{h}(\bar{x}) = h(\ell\, \bar{x})$

Il est aisé d'écrire la vitesse $\bar{v}^1$, en vérifiant les conditions d'adhérence (54). On a donc obtenu la solution à l'ordre un. Toutes les caractéristiques du problème peuvent en être déduites; par exemple l'équation de Reynolds, à l'ordre un, qui s'écrit d'après (31)

$$\frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial \bar{x}} = A^1(\bar{x}) \tag{IV.66}$$

devient en utilisant succéssivement (61), (64) et (58), avec $\bar{h}_{\bar{x}} = \frac{d}{d\bar{x}} \bar{h}(\bar{x})$

$$\begin{aligned} A^1(\bar{x}) = &- 6 \frac{\bar{h}_1}{\bar{h}^3} + \left(\frac{4}{\bar{h}^3} - 18 \frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^4} + 18 \frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^5}\right) \bar{h}_{\bar{x}} + \\ &+ \frac{36}{5} k \left(\frac{14}{\bar{h}^4} - 32 \frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^5} + 27 \frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^6} - 9 \frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^7}\right) + \\ &+ \frac{k_1}{35} \left(\frac{5476}{\bar{h}^5} 17082 \frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^6} + 17298 \frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^7} - 6318 \frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^8} + 486 \frac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^9}\right) \bar{h}_{\bar{x}} \\ &- \frac{k_2}{70} \left(\frac{15216}{\bar{h}^5} - 55872 \frac{h_o}{\bar{h}^6} + 73170 \frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^7} - 40743 \frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^8} + 8019 \frac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^9}\right) \bar{h}_{\bar{x}} . \end{aligned} \tag{IV.67}$$

4.4.4.- Les actions de contact à la paroi. Le vecteur contrainte supporté par une "facette" géométrique de normale $\vec{y}$ est

$$\vec{t}(x\ y) = T\langle y\ y\rangle\ (x,y)\ \vec{y} + T\langle x\ y\rangle\ (x,\ y)\ \vec{x} \tag{IV.68}$$

où les composantes $T\langle y\ y\rangle$ et $T\langle x\ y\rangle$ sont données par (10). D'après (9), (17) et (18) et tenant compte des hypothèses (23) on trouve pour la composante $T\langle y\ y\rangle$:

$$T\langle y\ y\rangle = \frac{\mu U}{\varepsilon^2 \ell} \left[-\bar{p} + (2\alpha_1 + \alpha_2)\bar{u}_{\bar{y}}^2 + (4\gamma_3 + 4\gamma_4 + 4\gamma_5 + 2\gamma_6)\bar{u}_{\bar{y}}^4 + \sigma(\varepsilon^2)\right] \tag{IV.69}$$

Ainsi on observe que la contrainte normale dans la direction $\vec{y}$ coïncide à des termes d'ordre ε^2 près avec la pression $\tilde{p}$ introduite en (29). Or l'équation du mouvement (30) montre que cette contrainte normale est indépendante de y. Cette observation justifie donc les conditions de pression (11) et

(12) à l'entrée et à la sortie du patin, conditions que nous avions posées de manière quelque peu intuitive. On atteint donc la contrainte normale t_n à la paroi mobile par

$$t_n = T \langle y\ y \rangle = - \tilde{p} = - \int_0^x A(\xi)\, d\xi + a \tag{IV.70}$$

en vertu de (31), a étant une constante.

Ainsi, avec $\bar{t}_n$ défini par

$$\frac{\mu U}{\varepsilon^2 \ell}\, \bar{t}_n = t_n \tag{IV.71}$$

il vient, à l'ordre zéro, puis à l'ordre un

$$\begin{cases} \bar{t}_n^{\,o} = - \int_0^{\bar{x}} A^o(\xi)\, d\xi + a_o \\ \bar{t}_n^{\,1} = - \int_0^{\bar{x}} A^1(\xi)\, d\xi + a_1 \end{cases} \tag{IV.72}$$

les expressions de A^o et A^1 étant données en fonction du profil $\bar{h}(\bar{x})$ par les relations (58) et (67); les constantes a_o et a_1 introduites par (72) et les deux constantes de débit $\bar{h}_o$ et $\bar{h}_1$ intervenant dans ces relations (58) et (67) seront fournies par les conditions de pression à l'ordre zéro et à l'ordre un

$$\bar{\tilde{p}}^o(0) = 0 \quad , \quad \bar{\tilde{p}}^o(1) = 0 \tag{IV.73}$$

$$\bar{\tilde{p}}^1(0) = 0 \quad , \quad \bar{\tilde{p}}^1(1) = 0 \tag{IV.74}$$

à l'entrée du patin $\bar{x} = 0$ et à sa sortie $\bar{x} = 1$; on obtient immédiatement $a_o = a_1 = 0$.

Un calcul analogue à celui effectué pour obtenir (69) donne la composante $T \langle x\ y \rangle$; il vient pour $y = 0$ la contrainte tangentielle à la paroi mobile t_s .

Avec

$$t_s = \frac{\mu U}{\varepsilon \ell}\, \bar{t}_s \ , \tag{IV.75}$$

on trouve

$$\begin{cases} \bar{t}_s^{\,o} = B^o \\ \bar{t}_s^{\,1} = B^1 + B^o_{\bar{x}} + k_1\, B^{o\,2}\, B^o_{\bar{x}} \end{cases} \tag{IV.76}$$

où B^o et B^1 sont données en fonction du profil $\bar{h}(\bar{x})$ et des deux constantes

de débit $\bar{h}_o$ et $\bar{h}_1$ par (58) et (65). Tous calculs faits on trouve

$$\bar{t}_s^o = (3\,\bar{h}_o - 4\,\bar{h})\,\frac{1}{\bar{h}^2} \quad , \tag{IV.77}$$

$$\begin{aligned}\bar{t}_s^1 = {} & 3\,\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}^2} + \left(4\,\frac{1}{\bar{h}^2} - 6\,\frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^3}\right)\bar{h}_{\bar{x}} + \frac{k}{5}\left(-\frac{352}{\bar{h}^3} + 756\,\frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^4} - 576\,\frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^5} + 162\,\frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^6}\right) + \\ & + \frac{k_1}{105}\left(-\frac{13604}{\bar{h}^4} + 40218\,\frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^5} - 38862\,\frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^6} + 13257\,\frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^7} - 729\,\frac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^8}\right)\bar{h}_{\bar{x}} + \\ & + \frac{k_2}{70}\left(-\frac{10800}{\bar{h}^4} + 39696\,\frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^5} - 52146\,\frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^6} + 29349\,\frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^7} - 5994\,\frac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^8}\right)\bar{h}_{\bar{x}} \quad .\end{aligned} \tag{IV.78}$$

4.4.5.- Conclusion concernant le problème du patin cylindrique. Toutes les caractéristiques de l'écoulement peuvent être déduites des relations précédentes. Par exemple, la force portante P et la résultante des actions tangentielles supportées par la surface mobile sont données par les expressions

$$\left\{\begin{array}{l} P = \mu\,\dfrac{U}{\varepsilon^2}\,\bar{P} \quad , \quad \bar{P} = \bar{P}^o + \lambda\,\bar{P}^1 + \sigma(\lambda^2) \quad , \\ \\ \bar{P}^o = \displaystyle\int_0^1 \bar{t}_n^o\,d\bar{x} = \int_0^1 \left\{-\int_0^{\bar{x}} A^o(\xi)\,d\xi + a_o\right\} d\bar{x} \quad , \\ \\ \bar{P}^1 = \displaystyle\int_0^1 \bar{t}_n^1\,d\bar{x} = \int_0^1 \left\{-\int_0^{\bar{x}} A^1(\xi)\,d\xi + a_1\right\} d\bar{x} \quad , \end{array}\right. \tag{IV.79}$$

$$\left\{\begin{array}{l} F = \mu\,\dfrac{U}{\varepsilon}\,\bar{F} \quad , \quad \bar{F} = \bar{F}^o + \lambda\,\bar{F}^1 + \sigma\,(\lambda^2) \quad , \\ \\ \bar{F}^o = \displaystyle\int_0^1 \bar{t}_s^o\,d\bar{x} \quad , \\ \\ \bar{F}^1 = \displaystyle\int_0^1 \bar{t}_s^1\,d\bar{x} \quad . \end{array}\right. \tag{IV.80}$$

A^o et $\bar{t}_s^o = B^o$ étant donnés par (58), A^1 et $\bar{t}_s^1$ par (67) et (78) respectivement. On peut définir un coefficient de frottement f à la paroi mobile par

$$f = \frac{|F|}{P} \tag{IV.81}$$

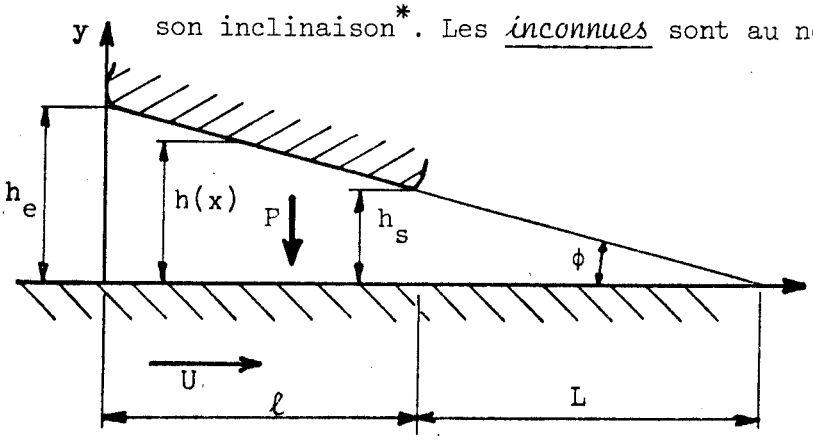
mais pour poursuivre, plus avant, cette étude, il est maintenant nécessaire de se donner la forme du patin. Le chapitre suivant est consacré aux résultats obtenus dans le cas du patin plan.

CHAPITRE V

APPLICATION AU PATIN PLAN

5.1. *INTRODUCTION*

5.1.1.- Nous supposons le patin *plan*. Outre les caractéristiques du fluide, les *données* sont la force portante P par unité d'épaisseur, supportée par la surface mobile, U la vitesse de celle-ci, ℓ la longueur du patin et ϕ son inclinaison*. Les *inconnues* sont au nombre de quatre



h_e, épaisseur du film fluide à l'entrée
h_s, " " " " à la sortie
F, somme des actions tangentielles à la paroi mobile,
f, le coefficient de frottement à la paroi mobile, défini par (IV.81).

Il est commode d'introduire le paramètre

$$\eta = \frac{h_e}{h_s} = 1 + \frac{\ell}{L} \qquad (V.1)$$

où la longueur L est définie sur la figure. Nous nous intéressons spécialement aux caractéristiques de fonctionnement h_s et f et nous nous proposons d'étudier qualitativement l'influence des nombres λ, ω, ω_1 et ω_2 sur ces caractéristiques (voir les relations IV.27 et 28 et l'équation du mouvement IV.32). Ce but, peu ambitieux il est vrai, est toutefois compatible avec la méthode de résolution par perturbation proposée au chapitre précédent.

5.1.2.- Par souci de clarté, nous rassemblons dans ce paragraphe l'ensemble des relations qui nous permettrons d'atteindre les diverses lois de variations qui seront écrites au 5.2. Sur la figure précédente, on voit que l'épaisseur du profil en fonction de l'abscisse est

---

* Le cas du patin articulé et celui du patin à support flexible ont été traités; ϕ est alors une inconnue, l'équation supplémentaire est obtenue en écrivant l'équilibre du patin. Les résultats ne sont pas mentionnés ici.

(V.2) $$\bar{h}(\bar{x}) = \bar{h}_s\left(1 + \frac{1-\bar{x}}{\bar{L}}\right)$$

(il est rappelé que les grandeurs réduites $\bar{h}$, $\bar{h}_s$, $\bar{x}$, $\bar{L}$ sont définies respectivement par $h = \varepsilon \ell \bar{h}$, $h_s = \varepsilon \ell \bar{h}_s$, $x = \ell \bar{x}$, $L = \ell \bar{L}$) . La contrainte normale à la paroi mobile s'exprime en fonction du profil $\bar{h}$ défini en (2) par les relations IV.70, 71, 72 et 67 c'est-à-dire,

(V.3)
$$\left|\begin{array}{l}
t_n = \dfrac{\mu U}{\varepsilon^2 \ell}\,\bar{t}_n \ , \\
\bar{t}_n = \bar{t}_n^{\,o} + \lambda\,\bar{t}_n^{\,1} + \theta\,(\lambda^2) \ , \\
\bar{t}_n^{\,o} = -\displaystyle\int_0^{\bar{x}} A^o(\xi)\,d\xi \ , \\
\bar{t}_n^{\,1} = -\displaystyle\int_0^{\bar{x}} A^1(\xi)\,d\xi \ , \\
A^o(\bar{x}) = 6\,\dfrac{\bar{h}-\bar{h}_o}{\bar{h}^3} \ , \\
A^1(\bar{x}) = -6\,\dfrac{\bar{h}_1}{\bar{h}^3} + \left(\dfrac{4}{\bar{h}^3} - 18\,\dfrac{\bar{h}_o}{\bar{h}^4} + 18\,\dfrac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^5}\right)\bar{h}_{\bar{x}} + \\
\qquad + \dfrac{36}{5}\,k\left(\dfrac{14}{\bar{h}^4} - 32\,\dfrac{\bar{h}_o}{\bar{h}^5} + 27\,\dfrac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^6} - 9\,\dfrac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^7}\right) + \\
\qquad + \dfrac{k_1}{35}\left(\dfrac{5476}{\bar{h}^5} - 17082\,\dfrac{\bar{h}_o}{\bar{h}^6} + 17298\,\dfrac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^7} - 6318\,\dfrac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^8} + 486\,\dfrac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^9}\right)\bar{h}_{\bar{x}} + \\
\qquad + \dfrac{k_2}{70}\left(\dfrac{15216}{\bar{h}^5} - 55872\,\dfrac{h_o}{\bar{h}^6} + 73170\,\dfrac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^7} - 40743\,\dfrac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^8} + \right. \\
\qquad \left. + 8019\,\dfrac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^9}\right)\bar{h}_{\bar{x}} \ .
\end{array}\right.$$

De même, la contrainte tangentielle à la paroi mobile est donnée en fonction du profil $\bar{h}$ par les relations IV.75, 77 et 78, soit

$$
(V.4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&t_s = \frac{\mu U}{\varepsilon \ell}\,\bar{t}_s\ ,\\
&\bar{t}_s = \bar{t}_s^{\,o} + \lambda\,\bar{t}_s^{\,1} + \sigma(\lambda^2),\\
&\bar{t}_s^{\,o} = \frac{3\bar{h}_o - 4\bar{h}}{\bar{h}^2}\ ,\\
&\bar{t}_s^{\,1} = 3\,\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}^2} + \left(4\,\frac{1}{\bar{h}^2} - 6\,\frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^3}\right)\bar{h}_{\bar{x}} + \frac{k}{5}\left(-\frac{352}{\bar{h}^3} + 756\,\frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^4} - 576\,\frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^5} + 162\,\frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^6}\right) +\\
&\qquad + \frac{k_1}{105}\left(-\frac{13604}{\bar{h}^4} + 40218\,\frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^5} - 38862\,\frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^6} + 13257\,\frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^7} - 729\,\frac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^8}\right)\bar{h}_{\bar{x}} +\\
&\qquad + \frac{k_2}{70}\left(-\frac{10800}{\bar{h}^4} + 39696\,\frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^5} - 52146\,\frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^6} + 29349\,\frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^7} - 5994\,\frac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^8}\right)\bar{h}_{\bar{x}}\ .
\end{aligned}
\right.
$$

Les constantes $\bar{h}_o$ et $\bar{h}_1$ sont les constantes de débit introduites en (IV.52)

$$
(V.5)\quad \left|
\begin{aligned}
&q = U\,\varepsilon\,\ell\,\bar{q}\ ,\\
&\bar{q} = \frac{1}{2}\,\bar{h}_o + \frac{1}{2}\,\bar{h}_1\,\lambda + \sigma(\lambda^2)
\end{aligned}
\right.
$$

quant aux nombres k, k_1 et k_2 ils ont été définis par (IV.49) :

$$
(V.6)\qquad k = \frac{\omega}{\lambda\varepsilon^2}\ ,\ k_1 = \frac{\omega_1}{\lambda\varepsilon^2}\ ,\ k_2 = \frac{\omega_1}{\lambda\varepsilon^2}\ .
$$

Enfin la portance P doit vérifier

$$
(V.7)\quad \left|
\begin{aligned}
&P = \mu\,\frac{U}{\varepsilon^2}\,\bar{P}\ ,\\
&\bar{P} = \bar{P}^o + \lambda\,\bar{P}^1 + \theta\,(\lambda^2),\\
&\bar{P}^o = \int_0^1 t_n^o\,d\bar{x}\ ,\\
&\bar{P}^1 = \int_0^1 \bar{t}_n^1\,d\bar{x}\ ;
\end{aligned}
\right.
$$

tandis que la traînée F sera calculée à l'aide de

$$
(V.8)\qquad \begin{cases} F = \mu \dfrac{U}{\varepsilon} \bar{F} \ , \\ \bar{F} = \bar{F}^{o} + \lambda \bar{F}^{1} + \theta(\lambda^{2}) \ , \\ \bar{F}^{o} = \displaystyle\int_{0}^{1} \bar{t}_{s}^{o} \, d\bar{x} \ , \\ \bar{F}^{1} = \displaystyle\int_{0}^{1} \bar{t}_{s}^{1} \, d\bar{x} \ . \end{cases}
$$

5.2 - *LOIS DE VARIATIONS*

5.2.1.- Le calcul du débit $\bar{q}$, c'est-à-dire le calcul des constantes $\bar{h}_{o}$ et $\bar{h}_{1}$ s'effectue en utilisant les conditions de pression à la sortie du patin (secondes relations IV.73 et 74) soit

$$
(V.9)\qquad \int_{0}^{1} A^{o}(\bar{x}) \, d\bar{x} = 0 \ , \qquad \int_{0}^{1} A^{1}(\bar{x}) \, d\bar{x} = 0 \ .
$$

Si on porte (2) dans les deux dernières relations (3), on voit que ces conditions font intervenir le calcul des intégrales $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{d\bar{x}}{[\bar{h}(\bar{x})]^{\bar{n}}}$

pour n = {1,2,-- 9} . De façon plus générale nous aurons à calculer ultérieurement les intégrales :

$$
(V.10)\qquad I_{n}(\bar{x}) = \int_{0}^{\bar{x}} \frac{d\xi}{[\bar{h}(\xi)]^{n}} \qquad n = \{1,2,\text{--- } 8\} \ .
$$

Un calcul rapide donne

$$
(V.11)\qquad I_{1}(\bar{x}) = \frac{1}{(n-1)\bar{h}_{s}} \left[\text{Log } n - \text{Log } \frac{\bar{h}(\bar{x})}{\bar{h}_{s}} \right] \ ,
$$

et, pour n > 1

$$
(V.12)\qquad I_{n}(\bar{x}) = \frac{1}{n-1} \quad \frac{1}{(n-1)\bar{h}_{s}^{n}} \left[\left(\frac{\bar{h}_{s}}{\bar{h}(\bar{x})} \right)^{n-1} - \frac{1}{n^{n-1}} \right] .
$$

Ainsi en portant $I_{n}(1)$ pour n = 2 et 3 dans la première condition (9) nous obtenons

$$\text{(V.13)} \qquad \bar{h}_o = \bar{h}_s \frac{2\eta}{\eta+1} ,$$

de même, en calculant $I_n(1)$ pour n = 3, 4, 5, 6 et 7, tenant compte de (13) que nous remplaçons dans l'expression de $A^1(\bar{x})$ nous trouvons à l'aide de la deuxième condition (9) :

$$\text{(V.14)} \quad \bar{h}_1 = \bar{h}_s \frac{8}{3} \frac{(\eta-1)(\eta^2-\eta+1)}{(\eta+1)^2} - \frac{8}{25} \frac{k}{\bar{h}_s} \frac{(\eta-1)^2(13\eta^2-\eta+13)}{(\eta+1)^3} +$$

$$+ \frac{1}{3675} \frac{k_1}{\bar{h}_s} \frac{\eta-1}{\eta^2(\eta+1)^4} \Big[6{\cdot}313\eta^6 - 28{\cdot}736\,\eta^5 + 32{\cdot}647\,\eta^4 + 18{\cdot}752\,\eta^3 +$$

$$+ 32{\cdot}647\,\eta^2 - 28{\cdot}736\,\eta + 6313 \Big] +$$

$$- \frac{1}{1225} \frac{k_2}{\bar{h}_s} \frac{\eta-1}{\eta^2(\eta+1)^4} \Big[1693\,\eta^6 + 4864\,\eta^5 - 24893\,\eta^4 + 46472\,\eta^3 -$$

$$- 24893\,\eta^2 + 4864\,\eta + 1693 \Big]$$

Les relations (5) (13) et (14) donnent le débit q en fonction de l'épaisseur à la sortie h_s et du rapport $\eta = \frac{h_e}{h_s}$.

5.2.2.- *La loi de variation de la pression* est donnée par les relations (3) En utilisant (12) pour n = 2, 3, 4, 5, 6 et 7 reportant dans les deuxième et troisième égalités (3), compte tenu des expressions des constantes de débit h_o et h_1 explicitées en (13) et (14) nous obtenons, tous calculs faits :

$$\text{(V.15)} \qquad \bar{t}_n^o(\bar{x}) = \frac{6}{\bar{h}_s^2(\eta-1)} \left[-\frac{1}{\eta+1} + \frac{\bar{h}_s}{\bar{h}(\bar{x})} - \frac{\eta}{\eta+1} \frac{\bar{h}_s^2}{\bar{h}^2(\bar{x})} \right]$$

et d'autre part,

$$\text{(V.16)} \quad \bar{t}_n^1(\bar{x}) = \frac{6}{\bar{h}_s^2(\eta+1)^2} \left[1-(\eta-1)^2 \frac{\bar{h}_s^2}{\bar{h}^2(\bar{x})} - 2\eta(\eta+1) \frac{\bar{h}_s^3}{\bar{h}^3(\bar{x})} + 3\eta^2 \frac{\bar{h}_s^4}{\bar{h}^4(\bar{x})} \right] +$$

$$+ \frac{k}{\bar{h}_s^4} \frac{24}{25(\eta-1)} \left[-\frac{13\eta^2+8\eta+13}{\eta(\eta+1)^3} + \frac{(\eta-1)^2(13\eta^2-\eta+13)}{\eta(\eta+1)^3} \frac{\bar{h}_s^2}{\bar{h}^2(\bar{x})} + \right.$$

$$\left. + 35 \frac{\bar{h}_s^3}{\bar{h}^3(\bar{x})} - 120 \frac{\eta}{\eta+1} \frac{\bar{h}_s^4}{\bar{h}^4(\bar{x})} + 162 \frac{\eta^2}{(\eta+1)^2} \frac{\bar{h}_s^5}{\bar{h}^5(\bar{x})} - 90 \frac{\eta^3}{(\eta+1)^3} \frac{\bar{h}_s^6}{\bar{h}^6(\bar{x})} \right] +$$

$$+\frac{k_1}{\bar{h}_s^4}\frac{1}{1225\,n^2(n+1)^4}\{6313\,n^4-28{\cdot}736\,n^3+80{\cdot}562\,n^2-28{\cdot}736\,n-6313+$$

$$+\left[-6{\cdot}313n^6+28{\cdot}736n^5+32{\cdot}647n^4+18{\cdot}752n^3+32{\cdot}647n^2-28{\cdot}736\,n+6{\cdot}313\right]\frac{\bar{h}_s^2}{\bar{h}^2(\bar{x})}$$

$$-47{\cdot}915n^2(n+1)^4\frac{\bar{h}_s^4}{\bar{h}^4(\bar{x})}+239{\cdot}148n^3(n+1)^3\frac{\bar{h}_s^5}{\bar{h}^5(\bar{x})}-403{\cdot}620n^4(n+1)^2\frac{\bar{h}_s^6}{\bar{h}^6(\bar{x})}$$

$$+252{\cdot}720\,n^5(n+1)\frac{\bar{h}_s^7}{\bar{h}^7(\bar{x})}-34{\cdot}020\,n^6\frac{\bar{h}_s^8}{\bar{h}^8(\bar{x})}\}-$$

$$-\frac{k_2}{\bar{h}_s^4}\frac{1}{1225\,n^2(n+1)^4}\{5{\cdot}079\,n^4+14{\cdot}592\,n^3-8109\,n^2+14592\,n+5079+$$

$$+\left[-5079\,n^6-14{\cdot}592n^5+74{\cdot}679n^4-139{\cdot}416n^3+74{\cdot}679n^2-14592n-5079\right]\frac{\bar{h}_s^2}{\bar{h}^2(\bar{x})}$$

$$-66{\cdot}570n^2(n+1)^4\frac{\bar{h}_s^4}{\bar{h}^4(\bar{x})}+391{\cdot}104n^3(n+1)^3\frac{\bar{h}_s^5}{\bar{h}^5(\bar{x})}-853{\cdot}650n^4(n+1)^2\frac{\bar{h}_s^6}{\bar{h}^6(\bar{x})}$$

$$+814{\cdot}860\,n^5(n+1)\frac{\bar{h}_s^7}{\bar{h}^7(\bar{x})}-280{\cdot}665\,n^6\frac{\bar{h}_s^8}{\bar{h}^8(x)}\};$$

expressions dans lesquelles on a, suivant (1) et (2)

$$\frac{\bar{h}(\bar{x})}{\bar{h}_s}=1+(n-1)(1-\bar{x}). \qquad (V.17)$$

Ainsi (16) et (17) fournissent la répartition de la pression à l'ordre un sur la surface mobile en fonction de l'épaisseur à la sortie $\bar{h}_s$ et rapport $n=\frac{\bar{h}_e}{\bar{h}_s}$ ($\bar{h}_e$, épaisseur à l'entrée). On vérifie, au second membre de (16), que, le terme écrit à la première ligne d'une part, et les fonctions respectivement multipliées par les nombres k, k_1 et k_2 d'autre part, sont nuls, *quelque soit* n, pour $\frac{\bar{h}}{\bar{h}_s}=n$ (condition de pression à l'entrée) et pour $\frac{\bar{h}}{\bar{h}_s}=1$ (condition de pression à la sortie).

Remarquons qu'il est beaucoup plus aisé d'obtenir la répartition de la contrainte tangentielle à la paroi mobile puisque celle-ci est directement explicitée en fonction du profil $\bar{h}(\bar{x})$ par les relations (4); il suffit d'y porter (13), (14) et (17).

5.3 - LES CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DU FILM FLUIDE

5.3.1.- La portance P est évidemment liée à la géométrie du film fluide (voir relations 7). Pour obtenir la loi de dépendance de la portance par rapport aux épaisseurs à l'entrée $\bar{h}_e$ et à la sortie $\bar{h}_s$ il suffit donc d'intégrer sur la surface mobile la pression donnée par (15) et (16). En utilisant (11) et (12), écrites pour $\bar{x} = 1$ et pour n = 2,3,---, 7 et 8 nous trouvons, suivant (IV.79) :

(V.18)

$$P = \mu \frac{U}{\varepsilon^2} \bar{P}$$

$$\bar{P} = \bar{P}^o + \lambda \bar{P}^1 + \theta(\lambda^2)$$

$$\bar{P}^o = \frac{6}{\bar{k}_s^2}\left[\frac{1}{(\lambda-1)^2}\,\mathrm{Log}\,\eta - \frac{2}{\eta^2-1}\right]$$

$$\bar{P}^1 = \frac{-6}{\bar{h}_s^2}\,\frac{1}{\eta}\,\frac{(\eta-1)^2}{(\eta+1)^2} + \frac{k}{\bar{h}_s^4}\,\frac{24}{25}\,\frac{(\eta-1)(13\eta^2-\eta+13)}{\eta^2(\eta+1)^3} +$$

$$+ \frac{k_1}{\bar{h}_s^4}\,\frac{1}{6.35^2}\,\frac{\eta-1}{\eta^4(\eta+1)^4}\left[-16{\cdot}831\eta^6+67{\cdot}302\eta^5-121{\cdot}019\eta^4+275{\cdot}279\eta^3 - 55{\cdot}569\eta^2-50{\cdot}438\eta+18936\right] -$$

$$- \frac{k_2}{\bar{h}_s^4}\,\frac{1}{6.35^2}\,\frac{\eta-1}{\eta^4(\eta+1)^4}\left[-11{\cdot}811\eta^6-43{\cdot}416\eta^5+158{\cdot}079\eta^4+36132\eta^3 - 136{\cdot}845\eta^2+70{\cdot}824\eta+15237\right].$$

En introduisant les variables et grandeurs dimensionnées, il vient

(V.19) $$P = \mu U \frac{\ell^2}{h_s^2}\left\{G^o(\eta) - \lambda\left[G^1_\alpha(\eta) - \frac{\ell^2}{h_s^2}\left(k\varepsilon^2 G^1_\beta(\eta) + k_1\varepsilon^2 G^1_\gamma(\eta) - k_2\varepsilon^2 G^1_{\gamma'}(\eta)\right)\right] + \sigma(\lambda^2)\right\}$$

où ont été introduites les fonctions

$$(V.20)\quad \left|\begin{array}{l} G^\circ = 6\left[\dfrac{\operatorname{Log}\eta}{(\eta-1)^2} - \dfrac{2}{\eta^2-1}\right], \qquad G^1_\alpha = -\,6\,\dfrac{1}{\eta}\,\dfrac{(\eta-1)^2}{(\eta+1)^2}, \\ \\ G^1_\beta = \dfrac{24}{25}\,\dfrac{(\eta-1)(13\eta^2-\eta+13)}{\eta^2(\eta+1)^3}, \\ \\ G^1_\gamma = \dfrac{1}{6.35^2}\,\dfrac{\eta-1}{\eta^4(\eta+1)^4}\left[-16{\cdot}831\eta^6+67{\cdot}302\eta^5-121{\cdot}019\eta^4+275{\cdot}216\eta^3\right. \\ \qquad\qquad \left. - 55{\cdot}569\eta^2-50{\cdot}438\eta+18{\cdot}939\right], \\ \\ G^1_{\gamma'} = \dfrac{1}{6.35^2}\,\dfrac{\eta-1}{\eta^4(\eta+1)^4}\left[-11{\cdot}811\eta^6-43{\cdot}416\eta^5+158{\cdot}079\eta^4+36{\cdot}132\eta^3\right. \\ \qquad\qquad \left. - 136{\cdot}845\eta^2+70{\cdot}824\eta+15{\cdot}237\right] \end{array}\right.$$

5.3.2.- Il nous est possible maintenant de déterminer l'épaisseur du film fluide à la sortie; en effet puisque λ a été supposé petit devant l'unité il est licite d'inverser (19) et l'on déduit facilement

$$(V.21)\quad \frac{h_s}{\ell} = \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} (G^\circ(\eta))^{1/2} \left\{1 - \frac{\lambda}{2}\left[\frac{G^1_\alpha(\eta)}{G^\circ(\eta)} - \frac{P}{\mu U}\,\frac{1}{(G^\circ(\eta))^2}\,(k\varepsilon^2\, G^1_\beta(\eta) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + k_1\,\varepsilon^2\, G^1_\gamma(\eta) - k_2\,\varepsilon^2\, G^1_{\gamma'}(\eta)\right)\right] + \sigma(\lambda^2)\right\}$$

Ainsi l'épaisseur à la sortie est connue en fonction des données ℓ , $\frac{\mu U}{P}$ et du paramètre η .

Si nous nous plaçons dans le cas du patin fixe à support rigide, il est facile d'éliminer η ; en effet l'angle d'inclinaison ϕ du patin est une donnée et on a

$$(V.22)\qquad \operatorname{tg}\phi = \frac{h_s}{\ell}\,(\eta-1)\ .$$

Les deux dernières relations permettent donc de calculer l'épaisseur à la sortie en fonction des seules données ℓ , $\frac{\mu U}{P}$ et ϕ.

5.4 - *LE FROTTEMENT A LA PAROI MOBILE*

Nous allons, de même, exprimer le frottement uniquement en fonction de ℓ, $\frac{\mu U}{P}$ et ϕ . Pour ce faire, commençons par calculer la résultante des actions tangentielles à la paroi mobile.

5.4.1.- Il a déjà été dit que la contrainte tangentielle t_s est obtenue à l'aide de (4), (13), (14) et (17). Selon (IV.80) en intégrant cette contrainte sur la surface mobile, on trouve, en utilisant (11) et (12)

$$
\begin{aligned}
(V.23)\quad & F = \frac{\mu U}{\varepsilon}\,\bar{F} \\
& \bar{F} = \bar{F}^{o} + \lambda\,\bar{F}^{1} + \sigma(\lambda^{2}) \\
& \bar{F}^{o} = \frac{6}{\bar{h}_s}\left[\frac{1}{\eta+1} - \frac{2}{3}\,\frac{\operatorname{Log}\eta}{\eta-1}\right] \\
& \bar{F}^{1} = \frac{6}{\bar{h}_s^{3}}\,\frac{(\eta-1)^{3}}{\eta(\eta+1)^{2}} + \frac{k}{\bar{h}_s^{3}}\,\frac{16}{25}\,\frac{-16\eta^{4}+14\eta^{3}-21\eta^{2}+14\eta-16}{\eta^{2}(\eta+1)^{3}} + \\
& + \frac{k_1}{\bar{h}_s^{3}}\,\frac{\eta-1}{3.35^{2}\eta^{3}(\eta+1)^{4}}\left[10{\cdot}080\eta^{6}-72{\cdot}240\eta^{5}-101{\cdot}640\eta^{4}-40{\cdot}320\eta^{3}+101{\cdot}640\eta^{2}-\right. \\
& \qquad \left. - 72{\cdot}240\eta+10{\cdot}080\right] \\
& - \frac{k_2}{\bar{h}_s^{3}}\,\frac{\eta-1}{35^{2}\eta^{3}(\eta+1)^{4}}\left[5733\eta^{6}+504\eta^{5}-22{\cdot}743\eta^{4}+33{\cdot}012\eta^{3}-22{\cdot}743\eta^{2}+504\eta+5733\right].
\end{aligned}
$$

En introduisant les fonctions auxilliaires,

$$
\begin{aligned}
(V.24)\quad & F^{o} = 6\left[\frac{1}{\eta+1} - \frac{2}{3}\,\frac{\operatorname{Log}\eta}{\eta-1}\right], \quad F_{\alpha}^{1} = 6\,\frac{(\eta-1)^{3}}{\eta(\eta+1)^{2}} \\
& F_{\beta}^{1} = \frac{16}{25}\,\frac{-16\eta^{4}+14\eta^{3}-21\eta^{2}+14\eta-16}{\eta^{2}(\eta+1)^{3}}\ , \\
& F_{\gamma}^{1} = \frac{1}{3.35^{2}}\,\frac{\eta-1}{\eta^{3}(\eta+1)^{4}}\left[10{\cdot}080\eta^{6}-72{\cdot}240\eta^{5}+101{\cdot}640\eta^{4}-40{\cdot}320\eta^{3}+101{\cdot}640\eta^{2}-\right. \\
& \qquad \left. 72{\cdot}240\eta+10{\cdot}080\right]\ , \\
& F_{\gamma}^{1}{}' = \frac{1}{35^{2}}\,\frac{(\eta-1)^{3}}{\eta^{3}(\eta+1)^{4}}\left[5{\cdot}733\eta^{4}+11{\cdot}970\eta^{3}-4{\cdot}536\eta^{2}+11{\cdot}970\eta+1733\right],
\end{aligned}
$$

on a donc

$$
(V.25)\quad F = \mu U\,\frac{\ell}{h_s}\left\{F^{o}(\eta)-\lambda\left[F_{\alpha}^{1}(\eta) - \frac{\ell^{2}}{h_s^{2}}\left(k\varepsilon^{2}\,F_{\beta}^{1}(\eta)+k_1\varepsilon^{2}F_{\gamma}^{1}(\eta)-k_2\varepsilon^{2}F_{\gamma}^{1}{}'(\eta)\right)\right]+\sigma(\lambda^{2})\right\}.
$$

5.4.2.- Si on définit le coefficient de frottement à la paroi par

$$f = \frac{|F|}{P} \quad , \tag{V.26}$$

en portant (21) dans (25), on obtient

$$f = \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} (G^\circ)^{1/2} \left\{ - \frac{F^\circ}{G^\circ} - \frac{\lambda}{2(G^\circ)^2} \left[G_\alpha^1 F^\circ - 2F_\alpha^1 G^\circ + \frac{P}{\mu U} \left(k\varepsilon^2 G_\beta^1 + k_1 \varepsilon^2 G_\gamma^1 - k_2 \varepsilon^2 G_{\gamma'}^1 \right) \times \frac{F^\circ}{G^\circ} \right.\right. \tag{V.27}$$

$$\left.\left. - 2 \frac{P}{\mu U} \left(k\varepsilon^2 F_\beta^1 + k_1 \varepsilon^2 F_\gamma^1 - k_2 \varepsilon^2 F_{\gamma'}^1 \right) \right] + \sigma(\lambda^2) \right\} .$$

Autrement dit, à l'aide des diverses fonctions du paramètre η introduites en (20) et (25), la relation (27) jointe à (21) et (22) nous donne le frottement en fonction des données ℓ , $\frac{\mu U}{P}$ et ϕ .

5.4.3.- Pour une meilleure facilité d'utilisation, résumons les résultats du patin plan, en omettant cette fois d'écrire les termes en $\sigma(\lambda^2)$; d'autre part, nous considérons le nombre $\lambda k \varepsilon^2 = \omega$ défini par (IV.49) et (IV.28) et les deux nombres analogues ω_1 et ω_2; rappelons que dans les équations du mouvement (chapitre IV) ces trois nombres sont au plus de l'ordre de 10^{-6}.

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{h_s}{\ell} (-1) \tag{V.28}$$

$$\frac{h_s}{\ell} = \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} (G^\circ)^{1/2} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} \frac{G_\alpha^1}{(G^\circ)^{1/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} \frac{1}{(G^\circ)^{3/2}} \tag{V.29}$$

$$\left[\omega G_\beta^1 + \omega_1 G_\gamma^1 - \omega_2 G_{\gamma'}^1 \right]$$

$$f = \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} \frac{-F^\circ}{(G^\circ)^{1/2}} - \lambda \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} \frac{G_\alpha^1 F^\circ - 2 F_\alpha^1 G^\circ}{2(G^\circ)^{3/2}} + \tag{V.30}$$

$$+ \left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} \frac{(\omega G^1 + \omega_1 G_\gamma^1 - \omega_2 G_{\gamma'}^1) F^\circ - 2(\omega F_\beta^1 + \omega_1 F_\gamma^1 - \omega_2 F_{\gamma'}^1) G^\circ}{2(G^\circ)^{5/2}}$$

les dix fonctions de η , G°, G_α^1, G_β^1, G_γ^1, $G_{\gamma'}^1$, et F°, F_α^1, F_β^1, F_γ^1, $F_{\gamma'}^1$, étant définies en (20) et (24).

En éliminant η entre (28) et (29), on trouve

$$\frac{h_s}{\ell} = F_1 \left(\frac{P}{\mu U} , \operatorname{tg} \phi , \lambda , \omega , \omega_1 , \omega_2 \right) ,$$

et en procédant de même entre (28) et (30), il vient

$$f = F_2\left(\frac{P}{\mu U}\ ,\ tg\ \phi,\ \frac{h_s}{\ell}\ ,\ \lambda,\ \omega\ ,\ \omega_1,\ \omega_2\right)\ ;$$

ces deux fonctions seront étudiées graphiquement. Le but que nous nous étions fixés, exprimer les caractéristiques de fonctionnement (épaisseur minimum du film fluide et frottement) en fonction des seules données ℓ , $\frac{\mu U}{P}$ et $tg\ \phi$ est atteint.

Les relations (29) et (30) appellent de nombreux commentaires. Proposons tout d'abord deux remarques. Nous désirons étudier l'influence des caractéristiques du matériau (α_1, β, γ, γ' - voir (IV.26)) sur l'épaisseur et le frottement. En fait on constate que les nombres λ, ω , ω_1, ω_2 s'introduisant par les effets suivants :

- effet de contrainte tangentielle (degré 3) : $\left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} \omega = \beta\ \frac{P^{1/2}\ U^{3/2}}{\mu^{3/2}\ \ell^2}$

-1er effet de contrainte normale (degré 2) : $\left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} \lambda = \alpha_1\ \frac{U^{3/2}}{P^{1/2}\ \mu^{1/2}\ \ell}$,

-2ème effet de contrainte normale (degré 4) : $\left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} \omega_2 = \gamma'\ \frac{P^{1/2}\ U^{5/2}}{\mu^{3/2}\ \ell^3}$,

- effet non viscométrique (degré 4) : $\left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} \omega_1 = \gamma\ \frac{P^{1/2}\ U^{5/2}}{\mu^{3/2}\ \ell^3}$.

Ces différents effets sont donc proportionnels à des puissances positives de la vitesse et à l'exception du 1er effet de contraintes normale à des puissances positives de la portance. Une deuxième remarque résulte de l'examen des fonctions de η ,(20) et (21); on constate que pour $\eta = 1$ tous ces effets disparaissent sauf l'effet de contrainte tangentielle. Ce résultat était attendu et d'une certaine manière peut servir de vérification, puisque $\eta = 1$ correspond au cas limite de l'écoulement par droites parallèles c'est-à-dire le cas du glissement simple (écoulement non forcé entre deux plaques planes et parallèles (voir [1]). Il nous reste maintenant à observer le sens de variation de l'épaisseur et du frottement; pour ce faire, et afin d'isoler les différents effets nous allons poser, successivement, dans (29) et (30) trois des quatre membres λ , ω , ω_1 et ω_2 nuls.

5.5 - *INFLUENCE DES CARACTERISTIQUES DU MATERIAU*

5.5.1.- Envisageons tout d'abord le 1er effet de contrainte normale; on a $\lambda \neq 0$, $\omega = \omega_1 = \omega_2 = 0$. Il vient

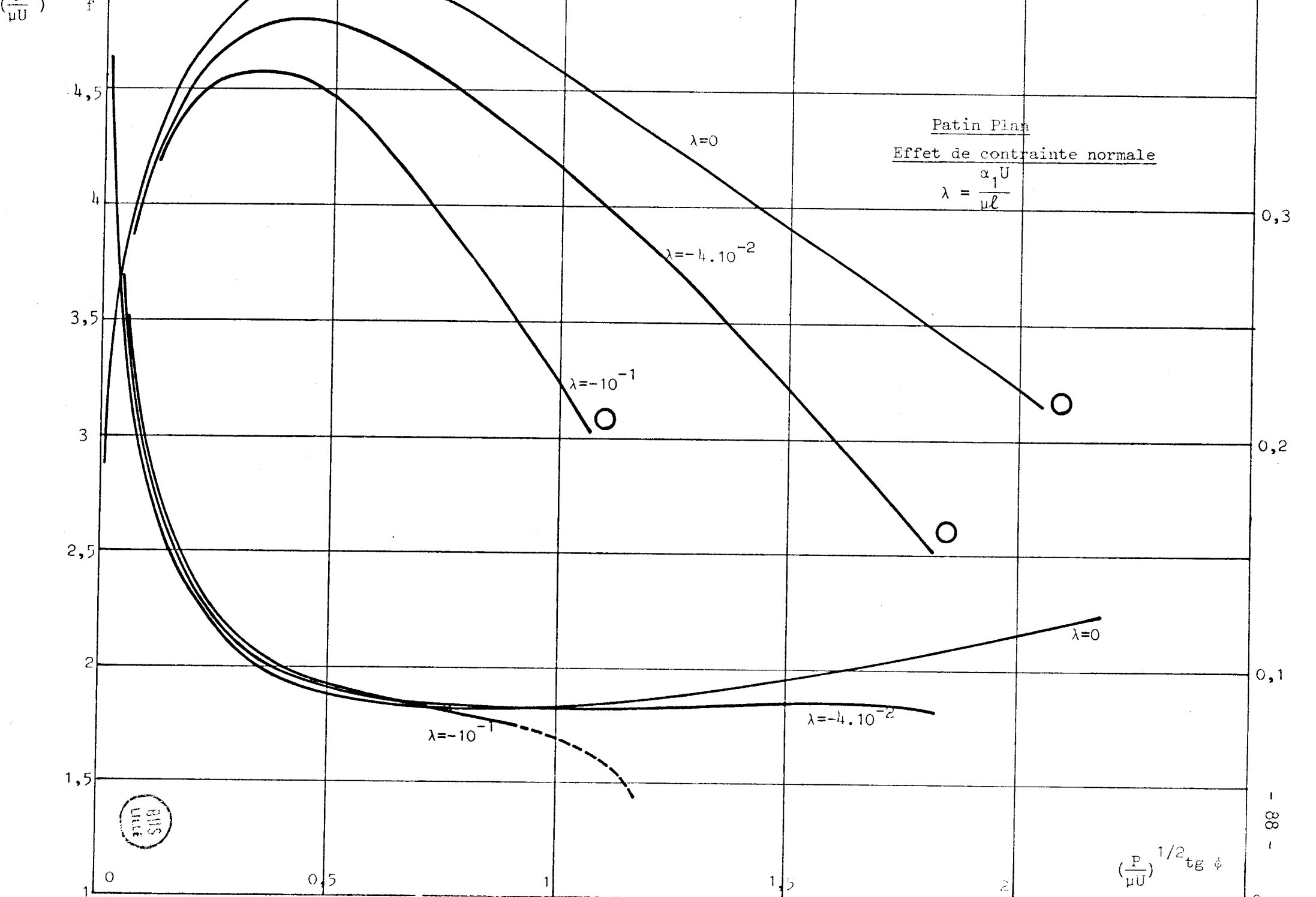
$$(V.31) \qquad f = \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} \frac{-F^\circ}{(G^\circ)^{1/2}} - \lambda \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} \frac{G_\alpha^1 F^\circ - 2 F_\alpha^1 G^\circ}{2(G^\circ)^{3/2}} ,$$

$$(V.32) \qquad tg\ \phi = \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} (G^\circ)^{1/2} (\eta - 1) - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} \frac{G_\alpha^1}{(G^\circ)^{1/2}} (\eta - 1),$$

$$(V.33) \qquad \frac{h_s}{\ell} = tg\ \phi \frac{1}{\eta - 1} \quad . \ (F^\circ, G^\circ, G_\alpha^1, F_\alpha^1 \text{ fonctions de } \eta \text{ - voir (20) et (24)-})$$

En éliminant η entre (31) et (32) d'une part et entre (32) et (33) d'autre part, il est possible de tracer les courbes représentatives de $\left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} f$ (frottement) et de $\left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} \frac{h_s}{\ell}$ (épaisseur) en fonction de $\left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} tg\ \phi$ (inclinaison), ces courbes étant paramétrées par λ . Nous avons tracé les courbes de frottement et épaisseur sur une même figure (page 88) le frottement étant porté en ordonnées à gauche, l'épaisseur en ordonnées à droite (les courbes d'épaisseur sont indiquées par le symbole 0), inclinaison en abscisses. Seules des valeurs négatives de λ ont été envisagées; en effet, il ne semble pas qu'il existe de fluides réels pour lesquels $\lambda > 0$. Signalons enfin que si les équations du mouvement on été écrites pour λ de l'ordre de l'unité, la méthode de perturbation proposée pour leur résolution suppose qu'en module λ soit considéré comme petit devant l'unité; nous nous sommes autorisés le cas $\lambda = -10^{-1}$ que nous avons considéré comme cas limite. Nous constatons que le *frottement est à peu près insensible* aux valeurs de λ (très faible augmentation de celui-ci pour $\left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} tg\ \phi < 0{,}5$; légère diminution dans le cas contrainte); il n'en est pas de même pour *l'épaisseur qui parait très influencée* par les valeurs de λ et ceci dans un sens défavorable (forte diminution quelle que soit l'inclinaison, phénomène d'autant plus accentué qu'est grande la portance).

5.5.2.- Nous considérons maintenant l'effet de contrainte tangentielle $\beta \neq 0$, $\lambda = \omega_1 = \omega_2 = 0$. On obtient, de (28), (29) et (30)


$(\frac{P}{\mu U})$
f
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0
0,5
1
1,5
Patin Plan
Effet de contrainte normale
$\lambda = \frac{\alpha_1 U}{\mu \ell}$
$\lambda=0$
$\lambda=-4.10^{-2}$
$\lambda=-10^{-1}$
$\lambda=0$
$\lambda=-4.10^{-2}$
$\lambda=-10^{-1}$
0,3
0,2
0,1
$(\frac{P}{\mu U})^{1/2} tg\ \phi$

BIUS LILLE

$$(V.34)\qquad \left|\begin{array}{l} f = \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} - \frac{F^\circ}{(G^\circ)^{1/2}} + \left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} \omega \frac{G_\beta^1 F^\circ - 2F_\beta^1 G^\circ}{2(G^\circ)^{5/2}} \\ \\ tg\,\phi = \left(\frac{\mu U}{P}\right)^{1/2} (G^\circ)^{1/2} (\eta-1) + \left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} \omega \frac{G_\beta^1}{2(G^\circ)^{3/2}} \\ \\ \frac{h_s}{\ell} = tg\,\phi \quad \frac{1}{\eta-1} \end{array}\right.$$

(F°, G°, G_β^1, F_β^1 fonctions de η - voir (20) et (24)-).

Il en résulte que si l'on choisit de représenter $\left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} f$ en fonction de $\left(\frac{P}{\mu U}\right)^{1/2} tg\,\phi$ comme au paragraphe précédent il faut prendre le paramètre $\frac{P}{\mu U}\omega$. Nous avons préféré tracer les courbes représentatives du frottement f et de l'épaisseur $\frac{h_s}{\ell}$ en fonction de tg ϕ , paramétrées par ω , *pour une valeur particulière* de $\frac{\mu U}{P}$ (la valeur 4.10^{-6} adoptée est une valeur courante en fonctionnement normal); cette façon de procéder n'est pas moins générale que la précédente : elle n'en diffère que par un changement d'échelle.
Les hypothèses (27) supposent ω (et aussi ω_1 et ω_2) de l'ordre de 10^{-6} en module. Le développement en λ que nous avons effectué implique, (pour une bonne validité des résultats obtenus), $|\omega|$ (resp. $|\omega_1|$ et $|\omega_2|$) petit devant 10^{-6}; pour cette raison nous avons envisagé $|\omega| \leq 10^{-7}$. On observe sur les courbes tracées page 91 , que frottement et épaisseur sont sensibles et même très sensibles en ce qui concerne l'épaisseur au paramètre ω .
Si ω est négatif, c'est-à-dire si $\beta = \beta_1 + \beta_2 < 0$ (fluides à comportement pseudo-plastique), *par rapport au fluide newtonien correspondant* (même μ , $\beta = 0$) *et dans les mêmes conditions de fonctionnement* ($\frac{\mu U}{P}$ fixé, ℓ et ϕ donnés), frottement et épaisseur se trouvent être diminués. Dans les conditions optima de fonctionnement (conditions définies par l'obtention simultanée du frottement minimum et de l'épaisseur maximum, c'est-à-dire pour 10^3 tg ϕ voisin de l'unité, on observe pour $\omega = -10^{-7}$ une diminution du frottement 8 %. Cette conclusion, qui semble favorable, peut ne l'être qu'en apparence; en effet cette *diminution du frottement est accompagnée d'une diminution de l'épaisseur* du film fluide de l'ordre de 25 %.

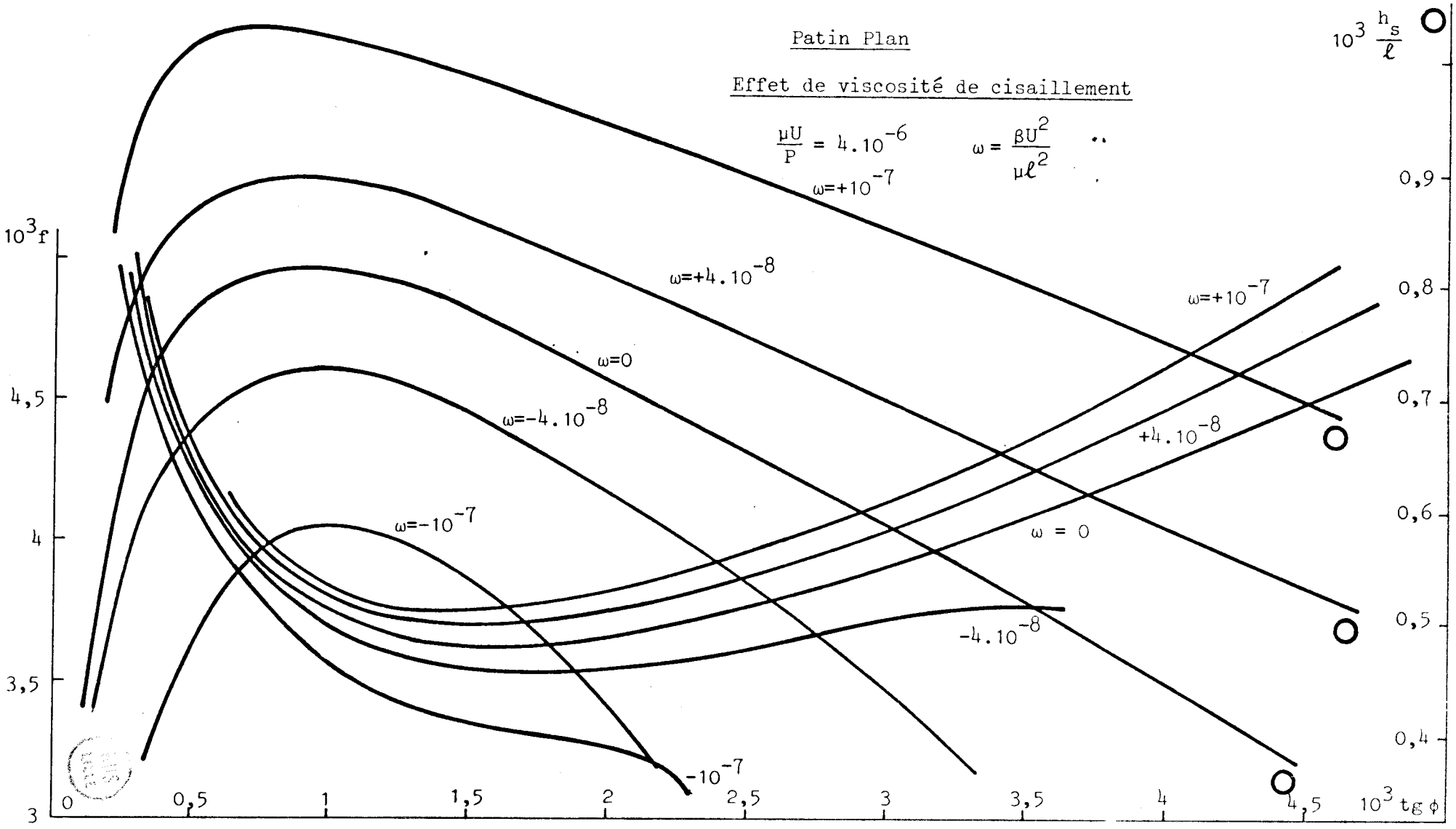
Au contraire si $\beta > 0$ (fluides dilatants) les conclusions sont inversées : *augmentation du frottement*, modeste, il est vrai, (1,8 % lorsque 10^3 tg $\phi = 1$) et *important accroissement de l'épaisseur* (25 à 28 %). Cette situation peut être très intéressante lorsqu'on désire limiter l'usure de deux surfaces en contact. La conclusion concernant l'influence du nombre ω

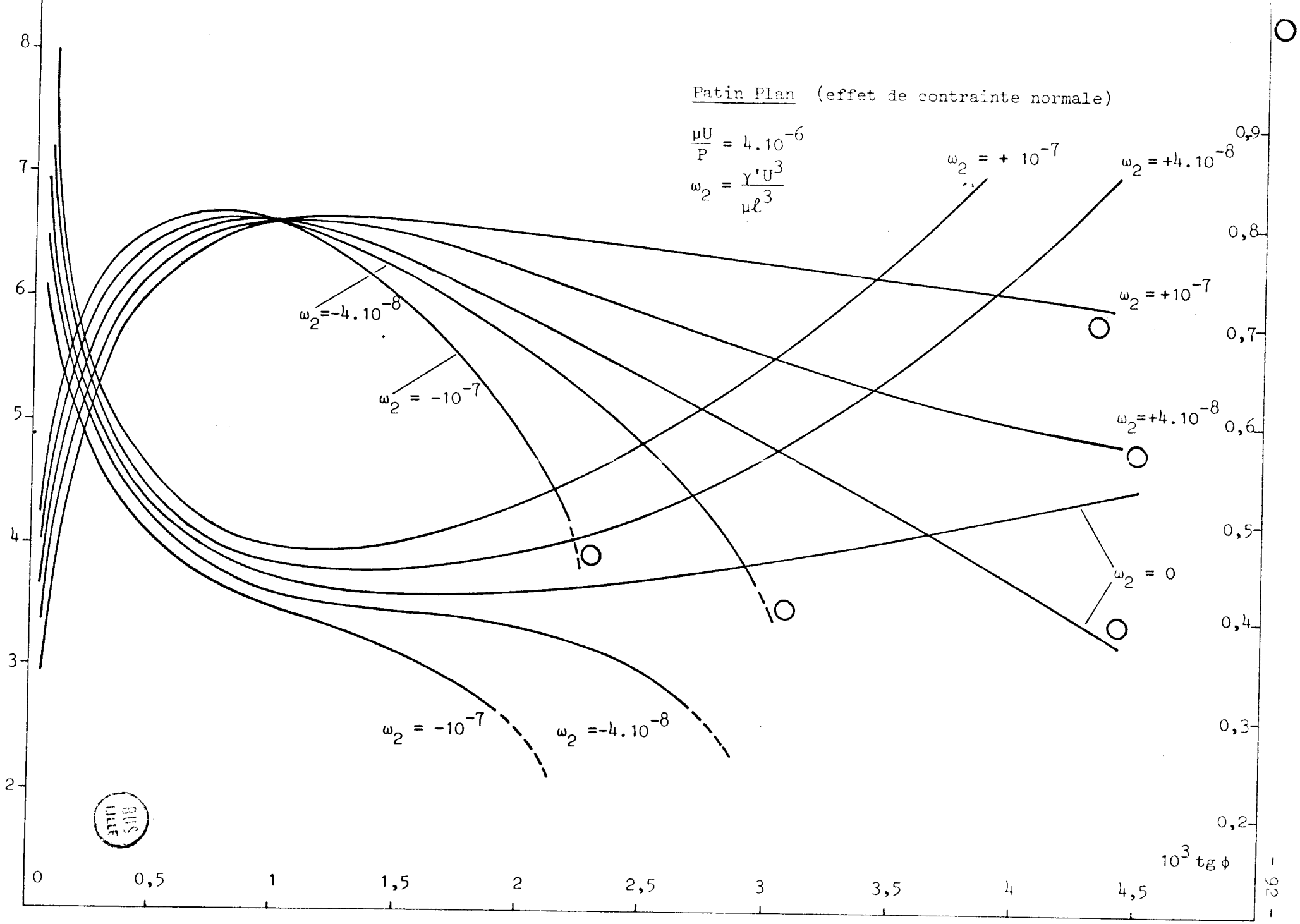
sur les caractéristiques de fonctionnement peut être résumée de la manière suivante : frottement et épaisseur sont fonctions croissantes de ω , l'épaisseur variant fortement avec ce paramètre.

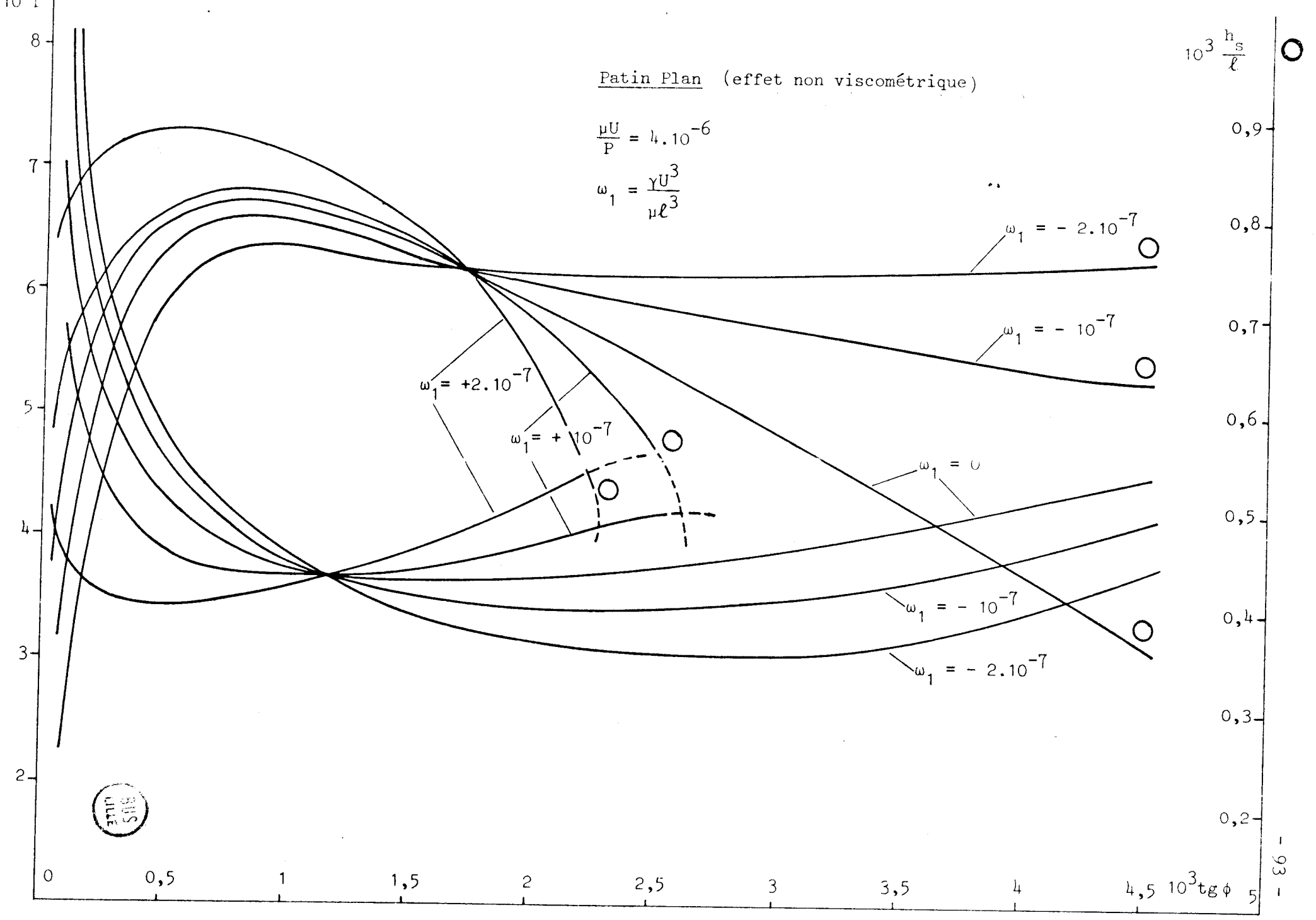
5.5.3.- En ce qui concerne *l'effet de contrainte normale* dû à la présence, dans la loi de comportement du fluide, à des termes de degré quatre, on pose dans les relations (29) et (30) $\lambda = \omega = \omega_1 = 0$ et, donc, on obtient pour le frottement et l'épaisseur des expressions analogues à celles écrites en (34) : il suffit d'y remplacer ω par $-\omega_2$ et $F_\beta^1(\eta)$ et $G_\beta^1(\eta)$ respectivement par $F_\gamma^1,(\eta)$ et $G_\gamma^1,(\eta)$, fonctions définies en (20) et (24). Les courbes, page 92 , tracées pour la même valeur particulière de $\frac{\mu U}{P}$ que dans le cas précédent font apparaître un phénomène particulier : pour 10^3 tg $\phi > 1$, frottement et épaisseur sont fonctions croissantes de ω_2 alors que si 10^3 tg $\phi < 1$, la conclusion est inverse pour l'épaisseur; celle-ci devient fonction décroissante de ω_2. Contrairement aux deux cas précédents (où une diminution du frottement était nécessairement accompagnée d'une chute de l'épaisseur, quelle que soit l'inclinaison), on peut ainsi obtenir *simultanément une diminution du frottement et une augmentation de l'épaisseur*, conditions toutes deux favorables; il suffit pour cela d'utiliser un fluide pour lequel $\gamma' < 0$ pour une inclinaison ϕ vérifiant 10^3 tg $\phi < 1$.

5.5.4.- Quant à *l'effet non-viscométrique* lui aussi dû à des termes de degré quatre (faire $\lambda = \omega = \omega_2 = 0$ dans (29) et (30) il fait apparaître ce changement de la loi de variation avec ω_1, non seulement de l'épaisseur, comme dans le cas précédent, mais aussi du frottement. En effet, les courbes de la page 93 , montrent que si l'épaisseur est croissante (resp. décroissante) avec ω_1, pour 10^3 tg $\phi > 1,75$, (resp. 10^3 tg $\phi < 1,75$) le frottement croît avec ω_1 si 10^3 tg $\phi > 1,2$ alors qu'il décroit dans le cas contraire.
Tous les cas de figure sont possibles suivant le signe de ω_1 et l'inclinaison :

- diminution du frottement et augmentation de l'épaisseur pour 10^3 tg $\phi < 1,2$ si $\omega_1 > 0$ et pour 10^3 tg $\phi > 1,75$ si $\omega_1 < 0$
- accroissement du frottement et de l'épaisseur si $\omega_1 > 0$ pour $1,2 < 10^3$ tg $\phi < 1,75$ (dans chacun de ces cas, la conclusion est inverse si on change le signe de ω_1)


Patin Plan
Effet de viscosité de cisaillement
$\frac{\mu U}{P} = 4.10^{-6}$
$\omega = \frac{\beta U^2}{\mu \ell^2}$
$10^3 f$
$10^3 \frac{h_s}{\ell}$
10^3 tg ϕ
$\omega=+10^{-7}$
$\omega=+4.10^{-8}$
$\omega=0$
$\omega=-4.10^{-8}$
$\omega=-10^{-7}$
$+4.10^{-8}$
$\omega = 0$
-4.10^{-8}
-10^{-7}
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
3
3,5
4
4,5
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9


Patin Plan (effet de contrainte normale)
$\frac{\mu U}{P} = 4.10^{-6}$
$\omega_2 = \frac{\gamma' U^3}{\mu \ell^3}$
$\omega_2 = + 10^{-7}$
$\omega_2 = +4.10^{-8}$
$\omega_2 = +10^{-7}$
$\omega_2 = +4.10^{-8}$
$\omega_2 = 0$
$\omega_2 = -4.10^{-8}$
$\omega_2 = -10^{-7}$
$\omega_2 = -10^{-7}$
$\omega_2 = -4.10^{-8}$
10^3 tg ϕ
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
2
3
4
5
6
7
8
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9


Patin Plan (effet non viscométrique)
$\frac{\mu U}{P} = 4.10^{-6}$
$\omega_1 = \frac{\gamma U^3}{\mu \ell^3}$
$\omega_1 = -2.10^{-7}$
$\omega_1 = -10^{-7}$
$\omega_1 = +2.10^{-7}$
$\omega_1 = +10^{-7}$
$\omega_1 = 0$
$\omega_1 = -10^{-7}$
$\omega_1 = -2.10^{-7}$
$10^3 \frac{h_s}{\ell}$
$10^3 tg\phi$
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
2
3
4
5
6
7
8
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9

BUS LILLE

5.6 - CONCLUSION CONCERNANT LE CAS DU PATIN PLAN

Nous sommes donc en mesure de comparer les conditions de fonctionnement de la lubrification des surfaces planes en fluide newtonien et en fluide de Rivlin-Ericksen de degré quatre. Précisons les termes de cette comparaison. Les conditions géométriques et cinématiques étant fixées (longueur ℓ du patin et vitesse U de la surface mobile) nous considérons d'une part le fluide newtonien

$$T = - p I + \mu A_1 \qquad (V.35)$$

et d'autre part le fluide de Rivlin-Ericksen de degré quatre dont la loi a été rappelée en (I.54); nous supposons que dans ces deux lois, (V.35) et (I.54) *le coefficient μ est le même*. Enfin nous considérons que la charge est imposée : *P est donné*. Les quatre nombres λ, ω, ω_1 et ω_2 définis respectivement par les relations IV.39-40-41 et 42 modifient les conditions de fonctionnement. Le tableau suivant précise le sens de ces modifications et constitue la conclusion de l'étude menée dans ce chapitre :

	Frottement	Epaisseur
$\lambda < 0$	peu sensible	↘
$\omega > 0$	↗ *	↗
$\omega < 0$	↘	↘
$\omega_1 > 0$	↘ si 10^3 tg $\phi < 1{,}20$ ↗ si 10^3 tg $\phi > 1{,}20$	↗ si 10^3 tg $\phi < 1{,}75$ ↘ si 10^3 tg $\phi > 1{,}75$
$\omega_1 < 0$	↗ si 10^3 tg $\phi < 1{,}20$ ↘ si 10^3 tg $\phi > 1{,}20$	↘ si 10^3 tg $\phi < 1{,}75$ ↗ si 10^3 tg $\phi > 1{,}75$
$\omega_2 > 0$	↗	↘ si 10^3 tg $\phi < 1$ ↗ si 10^3 tg $\phi > 1$
$\omega_2 < 0$	↘	↗ si 10^3 tg $\phi < 1$ ↘ si 10^3 tg $\phi > 1$

* Le symbole signifie que la caractéristique correspondante (ici le frottement) est augmentée par rapport à la valeur que l'on aurait obtenue pour le fluide *newtonien correspondant*, dans les *mêmes* conditions de fonctionnement.

Nous avons déjà signalé la raison pour laquelle le cas théorique $\lambda > 0$ n'est pas considéré. D'autre part, en l'absence totale de renseignements concernant le signe de ω_1 et ω_2 les deux cas possible, ω_1 et ω_2 positifs et négatifs ont été envisagés.

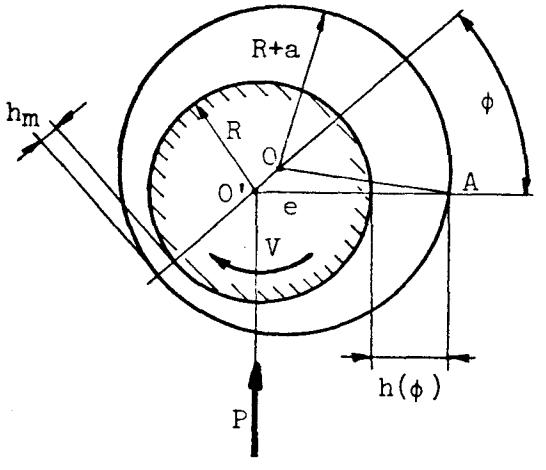
CHAPITRE VI

APPLICATION AU COUSSINET

6.1 - *INTRODUCTION*

6.1.1.- Le problème de la lubrification *plane* des surfaces cylindriques circulaires se ramène à l'étude de l'écoulement entre deux cercles excentriques. Un arbre tournant de rayon R est porté par un coussinet de rayon légèrement supérieure R + a , a étant le jeu radial,

(VI.1) $$\frac{a}{R} = \varepsilon \sim 10^{-3} \quad .$$



Une particule fluide est repérée par ses coordonnées polaires (r,ϕ) de pôle O', centre de l'arbre, et d'axe OO', ligne des centres. $u(r,\phi)$ et $v(r,\phi)$ sont les composantes radiale et tangentielle de la vitesse, $h(\phi)$ est l'épaisseur du film fluide mesurée sur le rayon polaire d'angle ϕ , e = OO' est l'extentricité et le paramètre η défini par

(VI.2) $$\eta = \frac{e}{a} \qquad 0 \leq \eta \leq 1$$

est appelé excentricité relative.

La loi de variation $h = h(\phi)$ est obtenue en considérant le triangle OO'A; on a

(VI.3) $$(R + a)^2 = e^2 + O'A^2 - 2\, e\, O'A \cos\phi$$

d'où l'on tire

$$O'A = e\cos\phi + (R+a)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{e}{R+a}\right)^2 \sin^2\phi + \sigma\left(\frac{e}{R+a}\right)^4\right] ;$$

il vient

$$\frac{h(\phi)}{a} = 1 + \eta\cos\phi + \sigma(\varepsilon) ;$$

au terme d'ordre ε près nous écrivons

(VI.4) $$\frac{h(\phi)}{a} = 1 + \eta \cos \phi \ .$$

6.1.2.- Les équations approchées du mouvement. Comme il a été fait au chapitre IV, nous procédons à l'adimensionnalisation du problème. Le rayon R et la vitesse périphérique V de l'arbre sont choisis comme longueur et vitesse de référence. En posant y = r - R, on introduit les variables et grandeurs normalisées.

(VI.5) $$\bar{r} = \frac{r}{R} \ , \ \bar{y} = \frac{y}{a} \ , \ \bar{u} = \frac{u}{U} \ , \ \bar{v} = \frac{v}{V} \ , \ \bar{p} = \frac{p}{p_a} \ ;$$

la pression de référence p_a sera définie ultérieurement. La vitesse U est définie à l'aide de la condition traduisant l'incompressibilité du fluide, tr $A_1 = 0$, c'est-à-dire

(VI.6) $$\frac{U}{a} \bar{u}_{\bar{y}} + \frac{V}{R} \frac{1}{\bar{r}} \bar{v}_{\phi} + \frac{U}{R} \frac{\bar{u}}{\bar{r}} = 0$$

qui nous incite à poser

(VI.7) $$U = \varepsilon V \ ,$$

si bien que (6) devient

(VI.8) $$\bar{u}_{\bar{y}} + \frac{1}{\bar{r}} \bar{v}_{\phi} = \sigma(\varepsilon) \ .$$

Nous pouvons donc faire subir aux équations du mouvement (IV.5) le même traitement que celui effectué au paragraphe 4.2.2 et qui nous a permis d'écrire les équations (IV.20). Il nous faut, pour ce faire, écrire en *coordonnées polaires* tous les tenseurs envisagés en (IV.17) et (IV.18). Les calculs fort longs ne seront pas développés. Résumons en disant que si l'on pose les *mêmes hypothèses* qu'en (IV.23), à savoir,

(VI.9) $$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{p_a}{\rho V^2} = \frac{\mu}{\rho U R} \frac{1}{\varepsilon^2} \sim \frac{\alpha_i}{\rho R^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \sim \frac{\beta_j V}{\rho R^3} \frac{1}{\varepsilon^4} \sim \frac{\gamma_k U^2}{\rho R^4} \frac{1}{\varepsilon^4}$$

$$i \in \{1,2\} \ , \ j \in \{1,2,3\} \quad , \quad k \in \{1,2,\ldots,8\}$$

ce qui définit la pression de référence p_a et en posant, comme en (IV.29)

(VI.10) $$\tilde{p} = p - (2\alpha_1 + \alpha_2) v_r^2 - (4\gamma_3 + 4\gamma_4 + 4\gamma_5 + 2\gamma_6) v_r^4$$

on obtient les équations du mouvement sous la forme

$$(VI.11) \qquad \sigma(\varepsilon) + \bar{\tilde{p}}_{\bar{y}} = 0 \qquad (\tilde{p} = \frac{\mu V}{\varepsilon^2 R} \bar{\tilde{p}})$$

$$(VI.12) \qquad \sigma(\varepsilon) + \frac{1}{\bar{r}} \tilde{p}_{\phi} = \bar{v}_{\bar{y}^2} + \lambda \left[\frac{1}{\bar{r}} (\bar{v}_{\phi} \bar{v}_{\bar{y}^2} + \bar{v} \bar{v}_{\bar{y}^2\phi} - \bar{v}_{\bar{y}} \bar{v}_{\bar{y}\phi}) + \bar{u} \bar{v}_{\bar{y}^3} \right]$$

$$+ 6 \nu \bar{v}_{\bar{y}}^2 \bar{v}_{\bar{y}^2} + \nu_1 \left[\bar{v}_{\bar{y}}^2 (\frac{1}{\bar{r}} \bar{v} \bar{v}_{\bar{y}\phi} + \bar{u} \bar{v}_{\bar{y}^2}) \right] \bar{y}$$

$$+ \nu_2 \frac{1}{\bar{r}} \left[(\bar{v}_{\bar{y}}^3 \bar{v}_{\phi})_{\bar{y}} - (\bar{v}_{\bar{y}}^4)_{\phi} \right]$$

où se sont introduits les nombres λ, ν , ν_1 et ν_2 (β , γ, γ' sont définis par IV.26)

$$(VI.13) \qquad \lambda = \frac{\alpha_1 V}{\mu a} , \quad \nu = \frac{\beta V^2}{\mu a^2} , \quad \nu_1 = \frac{\gamma V^3}{\mu R a^2} , \quad \nu_2 = \frac{\gamma' V^3}{\mu R a^2} ,$$

sont de l'ordre de l'unité; aux trois derniers on pourra préférer les nombres ω, ω_1 et ω_2 de l'ordre de 10^{-6} ,

$$(VI.14) \qquad \omega = \frac{\beta V^2}{\mu R^2} , \quad \omega_1 = \frac{\gamma V^3}{\mu R^3} , \quad \omega_2 = \frac{\gamma' V^3}{\mu R^3} .$$

A deux détails près, et compte tenu d'un changement de notations, les équations du mouvement (8), (11) et (12) sont identiques respectivement aux équations cartésiennes de la lubrification obtenues au chapitre IV. En effet, l'équation (11) s'écrit comme (IV.30)

$$(VI.15) \qquad \bar{\tilde{p}}_{\bar{y}} = 0$$

à cette différence près que (IV.30) était obtenue en négligeant des termes d'ordre ε^2 tandis que pour obtenir (15) il faut négliger des termes d'ordre ε . Par ailleurs, puisque d'après (5) et (1) on a $\bar{r} = 1 + \sigma(\varepsilon)$, à des termes d'ordre ε près (12) et (8) s'écrivent

$$(VI.16)\qquad \tilde{\bar{p}}_{\phi} = \bar{v}_{\bar{y}^2} + \lambda \left[\bar{v}_{\phi}\, \bar{v}_{\bar{y}^2} + \bar{v}_{\bar{y}}\, \bar{v}_{\bar{y}^2\phi} - \bar{v}\, \bar{v}_{\bar{y}\phi} + \bar{u}\, \bar{v}_{\bar{y}^3} \right]$$

$$+ 6\nu\, \bar{v}^{2}_{\bar{y}}\, \bar{v}_{\bar{y}^2} + \nu_1 \left[\bar{v}^{2}_{\bar{y}^2} (\bar{v}\, \bar{v}_{\bar{y}\phi} + \bar{u}\, \bar{v}_{\bar{y}^2}) \right]_{\bar{y}}$$

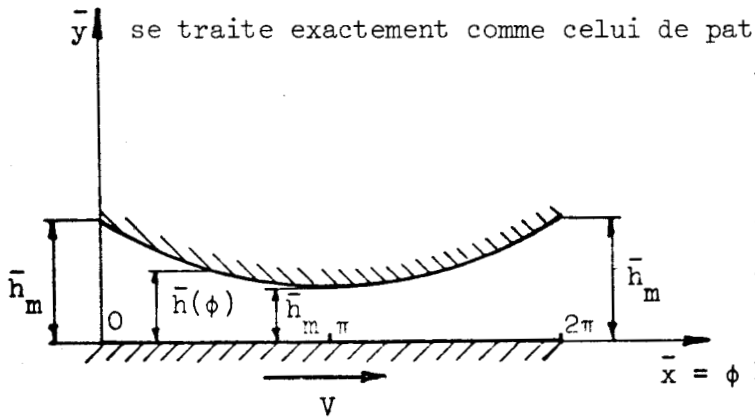
$$+ \nu_2 \left[(\bar{v}^{3}_{\bar{y}}\, \bar{v}_{\phi})_{\bar{y}} - (\bar{v}^{4}_{\bar{y}})_{\phi} \right] ,$$

$$(VI.17)\qquad \bar{u}_{\bar{y}} + \bar{v}_{\phi} = 0 \ ;$$

cette dernière équation est elle aussi écrite en négligeant un terme d'ordre ε alors que l'équation (IV.33) est exacte.

Pour les équations en fluide de degré trois on peut se reporter à l'article de DAVIES et WALTERS [6].

En résumé, on peut donc affirmer que le problème du coussinet se traite exactement comme celui de patin, la courbure de l'arbre n'intervenant dans les équations du mouvement que par des termes d'ordre ε c'est-à-dire par des termes qui sont du même ordre que ceux qui y sont déjà négligés à l'aide des hypothèses effectuées dans le cas de la surface mobile plane.



6.1.3.- Nous allons reconsidérer l'ensemble du chapitre précédent la variable $\bar{x}$ étant à remplacer ici par ϕ et l'équation du profil (V.2) par l'équation (4), le paramètre η qui était le rapport des épaisseurs à l'entrée et à la sortie du patin devenant maintenant l'excentricité relative. Par ailleurs nous avons évidemment les mêmes conditions d'adhérence aux parois; elles s'écrivent, d'une part sur l'arbre

$$(VI.18)\qquad \bar{u}(0,\phi) = 0 \ , \quad \bar{v}(0,\phi) = 1$$

et d'autre part sur le coussinet

$$(VI.19)\qquad \bar{u}\,[\bar{h}(\phi),\phi] = 0 \ , \ \bar{v}\,[\bar{h}(\phi),\phi] = 0 \ , \ (h(\phi) = a\,\bar{h}(\phi)) \ .$$

La contrainte normale t_n dans une direction perpendiculaire à l'arbre s'écrit toujours

$$\bar{t}_n = -\bar{\tilde{p}} \qquad (t_n = \frac{\mu V}{\varepsilon^2 R}\,\bar{t}_n) \tag{VI.20}$$

et d'après l'équation (15), a des termes d'ordre ε près elle ne varie pas d'une paroi à l'autre, pour ϕ fixé. Cette observation légitime l'écriture, $\bar{t}_n = \bar{t}_n(\phi)$, la variable $\bar{y}$ n'intervenant pas, et nous permet de poser la condition d'uniformité de pression

$$\bar{t}_n(0) = \bar{t}_n(2\pi) \tag{VI.21}$$

qui remplace les conditions de pression (IV.36).

Ainsi le problème du coussinet apparaît entièrement semblable, quant à son énoncé, à celui du patin. Tout ce qui a été dit au paragraphe 4.4 est encore valable et l'ensemble des relations de ce paragraphe, hormis les conditions de pression, peuvent être écrites à nouveau modulo le changement de notation $u \to v$, $v \to u$, $\bar{x} \to \phi$. Cependant, malgré les apparences, il y a une différence essentielle entre les deux problèmes; cette différence porte sur le fait que dans le cas du coussinet "les épaisseurs du film fluide à l'entrée et à la sortie" sont égales; pour le patin plan on a

$$h_e > h_s$$

tandis que pour le coussinet

$$h_e = h_s = h_M \tag{VI.22}$$

h_M étant l'épaisseur maximum (voir figure page 99). Cette remarque peut paraître anodine, il n'en est rien, comme vont le montrer les calculs ci-après.

6.2 - LOIS DE VARIATIONS ET CARACTERISTIQUES DE FONCTIONNEMENT

6.2.1.- *La pression sur l'arbre* $\bar{t}_n$ est donc donnée par

$$\left|\begin{array}{l} \bar{t}_n = \bar{t}_n^{\circ} + \lambda\,\bar{t}_n^{1} + \sigma(\lambda^2) \qquad (t_n = \dfrac{\mu V}{\varepsilon^2 R}\,\bar{t}_n) \\ \bar{t}_n^{\circ}(\phi) - \bar{t}_n^{\circ}(o) = -\displaystyle\int_o^{\phi} A^{\circ}(\alpha)\,d\alpha \\ \bar{t}_n^{1}(\phi) - \bar{t}_n^{1}(o) = -\displaystyle\int_o^{\phi} A^{1}(\alpha)\,d\alpha \end{array}\right. \tag{VI.23}$$

d'après (20) et (15), avec suivant (IV.58) d'une part,

$$(VI.24) \qquad A^{o}(\phi) = 6\,\frac{\bar{h}(\phi) - \bar{h}_o}{\bar{h}^3(\phi)} \quad , \quad (h_o = a\,\bar{h}_o) \ ,$$

et d'autre part, $A^1(\phi)$ donné en transcrivant (IV.67) où l'on a remplacé $\bar{x}$ par ϕ ; $\bar{h}_o$ et $\bar{h}_1$ sont les deux constantes de débit. Si on désire exprimer cette pression explicitement en fonction de ϕ, il faut procéder au calcul des intégrales.

$$(VI.25) \qquad I_n(\phi) = \int_o^{\phi} \frac{d\alpha}{(1+\eta\cos\alpha)^n} \quad \text{pour } n \in \{1,---7\}$$

Reynolds, en 1886, calculait ces intégrales pour $n \in \{1,2,3\}$ (cas du fluide newtonien) en procédant à un développement en série de Fourier. Il est beaucoup plus simple d'utiliser le changement de variable, proposé par Sommerfeld en 1904,

$$(VI.26) \qquad \cos\alpha = \frac{\cos\theta - \eta}{1-\eta\cos\theta} \ ;$$

il vient

$$(VI.27) \qquad I_n(\phi) = \frac{1}{(1-\eta^2)^{n-\frac{1}{2}}} \int_o^{\beta(\phi)} (1-\eta\cos\theta)^{n-1} d\theta \ .$$

$$(VI.28) \qquad \text{avec} \quad \beta(\phi) = \arccos\frac{\eta + \cos\phi}{1 + \eta\cos\phi} \ .$$

Le calcul des intégrales I_n est alors remplacé par celui des K_n

$$K_n(\phi) = \int_o^{\beta(\phi)} (1-\eta\cos\theta)^n \, d\theta$$

qui peut être fait directement si n n'est pas trop élevé ou par intégration par parties.

On a, par exemple,

$$I_3(\phi) = \frac{1}{(1-\eta^2)^{5/2}} \left(\beta - 2\eta\sin\beta + \frac{1}{4}\eta^2\sin 2\beta + \frac{1}{2}\eta^2\beta\right)$$

avec β défini par (27) et

$$\sin\beta = (1-\eta^2)^{1/2}\,\frac{\sin\phi}{1+\eta\cos\phi}\ ,\ \sin 2\beta = 2(1-\eta^2)^{1/2}\,\frac{\sin\phi(\eta+\cos\phi)}{1+\eta\cos\phi}\ .$$

Pour n > 3 les expressions $I_n(\phi)$ deviennent très lourdes. En fait, un artifice de calcul utilisé au paragraphe suivant nous permettra d'éviter la recherche explicite de $t_n(\phi)$. En résumé, la loi de variation de la pression sur l'arbre est donnée par les égalités (23) où interviennent à cause de (24) et (IV.67) les intégrales définies en (25). Cependant il nous est nécessaire de calculer les constantes de débit $\bar{h}_o$ et $\bar{h}_1$. Elles sont déterminées grâce à la condition d'uniformité de la pression (21), soit, à l'ordre zéro et à l'ordre un

$$\text{(VI.29)}\qquad \bar{t}_n^o(o) = \bar{t}_n^o(2\pi),\ \bar{t}_n^1(o) = \bar{t}_n^1(2\pi)$$

ou encore, d'après les seconds membres des relations (23)

$$\text{(VI.30)}\qquad \int_o^{2\pi} A^o(\phi)\,d\phi = o\ ,\qquad \int_o^{2\pi} A^1(\phi)\,d\phi = o\ .$$

La première de ces deux conditions donne immédiatement

$$\text{(VI.31)}\qquad \bar{h}_o = \frac{I_2(2\pi)}{I_3(2\pi)}\ .$$

Pour permettre une bonne compréhension de la remarque faite à propos de la relation (22), détaillons le calcul de la constante $\bar{h}_1$. D'après (IV.67) on a

$$\text{(VI.32)}\qquad A^1(\phi) = -6\,\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}^3(\phi)} + g_1[\bar{h}(\phi)]\frac{d\bar{h}}{d\phi} + \frac{36}{5}\,k\,g_2\,[\bar{h}(\phi)] + \frac{k_1}{35}\,g_3[\bar{h}(\phi)]\,\frac{d\bar{h}}{d\phi} - \frac{k_2}{70}\,g_4\,[\bar{h}(\phi)]\,\frac{d\bar{h}}{d\phi}$$

avec successivement

$$\text{(VI.33)}\begin{cases} \bar{h}(\phi) = 1 + \eta\cos\phi\ , \\ g_1(\bar{h}) = \dfrac{4}{\bar{h}^3} - 18\,\dfrac{\bar{h}_o}{\bar{h}^4} + 18\,\dfrac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^5}\ , \\ g_2(\bar{h}) = \dfrac{14}{\bar{h}^4} - 32\,\dfrac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^5} + 27\,\dfrac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^6} - 9\,\dfrac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^7} \\ g_3(\bar{h}) = \dfrac{5476}{\bar{h}^5} - 17{\cdot}082\,\dfrac{\bar{h}_o}{\bar{h}^6} + 17298\,\dfrac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^7} - 6318\,\dfrac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^8} + 486\,\dfrac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^9}\ , \\ g_4(h) = \dfrac{15216}{\bar{h}^5} - 55{\cdot}872\,\dfrac{\bar{h}_o}{\bar{h}^6} + 73{\cdot}170\,\dfrac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^7} - 40{\cdot}743\,\dfrac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^8} + 8019\,\dfrac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^9}\ . \end{cases}$$

Puisque $\bar{h}(o) = \bar{h}(2\pi)$ on a évidemment pour tout $g\,[\bar{h}(\phi)]$

$$\int_o^{2\pi} g\,[\bar{h}(\phi)]\,\frac{d\bar{h}}{d\phi} = 0\ , \tag{VI.34}$$

et ainsi la deuxième condition (30) s'écrit simplement

$$o = -\,\bar{h}_1 \int_o^{2\pi} \frac{d\phi}{h^3(\phi)} + \frac{6}{5}\,k \int_o^{2\pi} g_2[\bar{h}(\phi)]\,d\phi \tag{VI.35}$$

d'où l'on tire aussitôt

$$\bar{h}_1 = \frac{6}{5}\,k\,\frac{1}{I_3(2\pi)}\ [14\ I_4(2\pi) - 32\ \bar{h}_o\ I_5(2\pi) + 27\ \bar{h}_o^2\ I_6(2\pi) - 9\ \bar{h}_o^3\ I_7(2\pi)] \tag{VI.36}$$

En utilisant les résultats

$$\left\{\begin{aligned}
I_1(2\pi) &= 2\pi(1-\eta^2)^{-1/2}\ ,\\
I_2(2\pi) &= 2\pi(1-\eta^2)^{-3/2}\ ,\\
I_3(2\pi) &= \pi\ (2+\eta^2)(1-\eta^2)^{-5/2}\ ,\\
I_4(2\pi) &= \pi\ (2+3\eta^2)(1-\eta^2)^{-7/2}\ ,\\
I_5(2\pi) &= \tfrac{\pi}{4}\ (8+24\ \eta^2+3\eta^4)(1-\eta^2)^{-9/2}\ ,\\
I_6(2\pi) &= \tfrac{\pi}{4}\ (8+40\ \eta^2+15\ \eta^4)\ (1-\eta^2)^{-11/2}\ ,\\
I_7(2\pi) &= \tfrac{\pi}{8}\ (16+120\ \eta^2+90\ \eta^4+5\ \eta^6)(1-\eta^2)^{-13/2}\ ,
\end{aligned}\right. \tag{VI.37}$$

on trouve, d'après (31) et (35)

$$\bar{h}_o = 2\,\frac{1-\eta^2}{2+\eta^2} \tag{VI.38}$$

$$\bar{h}_1 = \frac{6}{5}\,k\,\frac{-6\eta^8 + 64\eta^6 - 104\ \eta^4 - 80\eta^2}{(1-\eta^2)(2+\eta^2)^4}\ . \tag{VI.39}$$

Ainsi le débit q donné par (voir IV.52)

$$\bar{q} = \frac{1}{2}\bar{h}_o + \lambda \frac{1}{2}\bar{h}_1 + \sigma(\lambda^2) \qquad (q = V\,a\,\bar{q})$$

se trouve être exprimé en fonction de l'excentricité relative par la relation

$$(VI.40) \qquad q = V\,a\left[\frac{1-\eta^2}{2+\eta^2} + \frac{3}{5}\,k\,\lambda\,\frac{-6\eta^2 + 64\eta^6 - 104\eta^4 - 80\eta^2}{(1-\eta^2)(2+\eta^2)^4} + \sigma(\lambda^2)\right].$$

Nous avons, ici, la première occasion de montrer la différence entre le problème du patin et celui du coussinet comme on le voit en comparant (39) et (V.14), dans l'expression du débit, seul intervient le nombre (voir IV.49) $k\,\lambda = \nu = \frac{\beta V^2}{\mu a^2}$; les nombres $\frac{\alpha_1 V}{\mu a}$, $\frac{\gamma V^3}{\mu R a^2}$ et $\frac{\gamma' V^3}{\mu R a^2}$ n'interviennent pas de manière explicite dans cette expression (rappelons que ces trois nombres soit introduits par les termes de degré pair de la loi de comportement (I.54)).

Il en sera de même pour la résultante des actions tangentielles comme on peut le constater, dès maintenant, en examinant (IV.78).

Il s'agit là d'une particularité essentielle du problème du coussinet : les expressions, en fonction de l'excentricité relative η, de certaines caractéristiques de l'écoulement sont exactement les mêmes que celles obtenues pour un fluide dont la loi de comportement n'introduirait pas de termes de degré pair, c'est-à-dire, ici, pour un fluide tel que

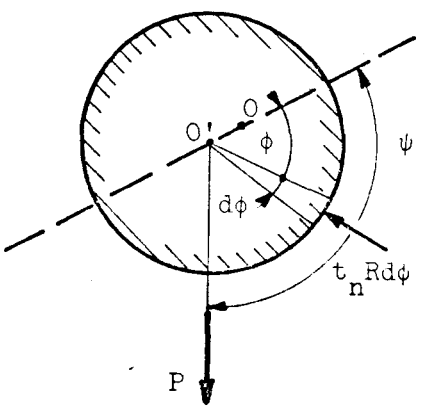
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \text{------} = \gamma_8 = 0 .$$

Précisons que cette différence de nature entre ce problème et celui du patin n'est pas due au fluide mais à la géométrie de l'écoulement puisqu'elle résulte uniquement du fait que l'épaisseur du film fluide à l'entrée est égale à son épaisseur à la sortie.

Nous reviendrons sur cette remarque en fin de chapitre.

6.2.2.- Nous déterminons maintenant *les caractéristiques géométriques du film fluide*, soit son épaisseur minimum h_m et l'angle ψ définissant la position de la ligne des centres. On a évidemment, figure page 96 ,

$$(VI.41) \qquad \bar{h}_m = 1 - \eta \ , \quad (h_m = a\,\bar{h}_m).$$



Les paramètres ψ et η vérifient

$$\bar{P}\cos\psi = -\int_0^{2\pi} \bar{t}_n(\phi)\cos\phi \, d\phi \quad , \quad \left(P = \mu \frac{VR^2}{a^2}\bar{P}\right) , \tag{VI.42}$$

$$\bar{P}\sin\psi = -\int_0^{2\pi} \bar{t}_n(\phi)\sin\phi \, d\phi \quad . \tag{VI.43}$$

Nous avons renoncé à écrive l'expression $\bar{t}_n = \bar{t}_n(\phi)$, voir les relations (23); mais, comme nous l'avons déjà mentionné, cette expression n'est pas nécessaire.

Nous allons séparer dans le second membre de (32) les termes du type $g\,[\bar{h}(\phi)]$ de ceux de la forme $g\,[\bar{h}(\phi)]\,\frac{d\bar{h}}{d\phi}$:

$$A^1(\phi) = L^1(\phi) + M^1(\phi) \tag{VI.44}$$

où il a été posé

$$L^1(\phi) = \{g_1\,[\bar{h}(\phi)] + \frac{k_1}{35}\, g_3\,[\bar{h}(\phi)] + \frac{k_2}{70}\, g_4\,[\bar{h}(\phi)]\}\,\frac{d\bar{h}}{d\phi} , \tag{VI.45}$$

$$M^1(\phi) = -6\,\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}^3(\phi)} + \frac{36}{5}\,k\,g_2[\bar{h}(\phi)] \quad ; \tag{VI.46}$$

les fonctions $g_i\,[\bar{h}(\phi)]$ ayant été définies en (33).

Considérons, en premier lieu, l'égalité (43); à l'ordre zéro nous avons, après une intégration par parties :

$$\bar{P}^o \sin\psi = \left[\cos\phi\,\bar{t}_n^o(\phi)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos\phi\,\frac{d\bar{t}_n^o}{d\phi}\,d\phi , \tag{VI.47}$$

soit, puisque $\bar{t}_n^o(0) = \bar{t}_n^o(2\pi)$,

$$\bar{P}^o \sin\psi = \int_0^{2\pi} A^o(\phi)\cos\phi \, d\phi . \tag{VI.48}$$

A l'ordre un, puisque, avec les notations introduites par (44) on a

$$\bar{t}_n^1(\phi) = \bar{t}_n^1(o) - \int_0^{\phi} L^1(\alpha)\,d\alpha - \int_0^{\phi} M^1(\alpha)\,d\alpha , \tag{VI.49}$$

la relation (43), qui s'écrit

$$\bar{P}^1 \sin\psi = -\int_0^{2\pi} \bar{t}_n^1(\phi)\sin\phi \, d\phi ,$$

devient, après une intégration par parties,

$$\bar{P}^1 \sin\psi = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\phi} L^1(\alpha)d\alpha\right]\sin\phi\,d\phi - \left[\cos\phi\int_0^{\phi} M^1(\alpha)d\alpha\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} M^1(\phi)\cos\phi\,d\phi . \tag{VI.50}$$

Or, en vertu de la condition d'uniformité de la pression

$$\bar{t}_n^1 (2\pi) = \bar{t}_n^1(o) \ , \tag{VI.51}$$

il vient

$$\int_o^{2\pi} M^1(\phi)\, d\phi = - \int_o^{2\pi} L^1(\phi)\, d\phi \ . \tag{VI.52}$$

En examinant attentivement l'expression de $L^1(\phi)$ donnée par (45) et les définitions (33) on constate qu'au second membre de (52) n'interviennent que des intégrales de la forme

$$K_n(2\pi) = \int_o^{2\pi} \frac{\sin \phi}{(1+\eta \cos\phi)^n}\, d\phi \tag{VI.53}$$

avec $n \in \{3, 4, ---, 8, 9\}$.

Or, puisque visiblement,

$$k_n(2\pi) = 0 \ , \tag{VI.54}$$

(52) devient

$$\int_o^{2\pi} M^1(\phi)\, d\phi = 0 \tag{VI.55}$$

si bien que (50) s'écrit

$$\bar{P}^1 \sin \psi = \int_o^{2\pi} \left[\int_o^{\phi} L^1(\alpha)\, d\alpha \right] \sin \phi\, d\phi + \int_o^{2\pi} M^1(\phi) \cos \phi\, d\phi \ . \tag{VI.56}$$

Reconsidérant une nouvelle fois (45) et (33), on voit que

$$\begin{aligned} \int_o^{\phi} L^1(\alpha)\, d\alpha \ = & - \frac{2}{\bar{h}^2} + 6 \frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^3} + \frac{9}{2} \frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^4} + \\ & + \frac{k_1}{35} \left[- 1369 \frac{1}{\bar{h}^4} + \frac{17082}{5} \frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^5} - 2{\cdot}883 \frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^6} + \frac{6{\cdot}318}{7} \frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^7} - \frac{243}{4} \frac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^8} \right] + \\ & - \frac{k_2}{35} \left[- 1902 \frac{1}{\bar{h}^4} + \frac{27936}{5} \frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^5} - \frac{12195}{2} \frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^6} + \frac{40743}{7} \frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^7} - \frac{8019}{16} \frac{\bar{h}_o^4}{\bar{h}^8} \right] + \\ & + \text{cte} \ . \end{aligned} \tag{VI.57}$$

En utilisant, une seconde fois, l'égalité (54) pour $n \in \{2, 3, \text{---} 8\}$ on voit que

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\phi} L^1(\alpha)\, d\alpha\right]\sin\ \phi\, d\phi = 0 \tag{VI.58}$$

et (56) devient finalement

$$P^1 \sin\psi = \int_0^{2\pi} M^1(\phi)\cos\phi\, d\phi\ . \tag{VI.59}$$

Reprenant les égalités (48) et (59), on voit, d'après (24) d'une part et (46) et (33) d'autre part, que l'on a

$$\bar{P}^o \sin\psi = 6\, J_2(2\pi) - 6\,\bar{h}_o\, J_3(2\pi)\ , \tag{VI.60}$$

$$\bar{P}^1 \sin\psi = -\,6\bar{h}_1\, J_3(2\pi) + \frac{36}{5}\,k\Big[14\, J_4(2\pi) - 32\,\bar{h}_o\, J_5(2\pi) + 27\,\bar{h}_o^2\, J_6(2\pi) - 9\,\bar{h}_o^3\, J_7(2\pi)\Big]\ , \tag{VI.61}$$

où sont apparues les intégrales

$$J_n(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi}{(1+\eta\cos\phi)^n}\, d\phi \tag{VI.62}$$

pour $n \in \{2, 3, \text{---} 7\}$.

Comme on a

$$\frac{\cos\phi}{(1+\eta\cos\phi)^n} = \frac{1}{\eta}\left[\frac{1}{(1+\eta\cos\phi)^{n-1}} - \frac{1}{(1+\eta\cos\phi)^n}\right], \tag{VI.63}$$

il vient, d'après (25),

$$J_n(2\pi) = \frac{1}{\eta}\left[I_{n-1}(2\pi) - I_n(2\pi)\right]\ , \tag{VI.64}$$

et, en utilisant les résultats (37),

$$\begin{cases} J_2(2\pi) = -\,2\,\pi\,\eta(1-\eta^2)^{-3/2}\ , \\ J_3(2\pi) = -\,3\,\pi\,\eta(1-\eta^2)^{-5/2}\ , \\ J_4(2\pi) = -\,\pi\,\eta\,(4+\eta^2)(1-\eta^2)^{-7/2}\ , \\ J_5(2\pi) = -\,\frac{\pi\eta}{4}\,(20+15\,\eta^2)(1-\eta^2)^{-9/2}\ , \\ J_6(2\pi) = -\,\frac{\pi\eta}{4}\,(24+36\,\eta^2+3\eta^4)(1-\eta^2)^{-11/2}\ , \\ J_7(2\pi) = -\,\frac{\pi\eta}{8}\,(56+140\eta^2+35\,\eta^4)(1-\eta^2)^{-13/2} \end{cases} \tag{VI.65}$$

Il reste à reporter ces résultats dans (60) et (61) et à tenir compte des expressions des constantes de débit $\bar{h}_o$ et $\bar{h}_1$ données par (38) et (39). Tous les calculs qui viennent d'être effectués lors des deux pages précédentes concernant la relation (43) peuvent être menés de manière analogue pour la relation (42); il suffit de compléter les résultats (65) par

$$J_8(2\pi) = -\frac{\pi\eta}{8}(64 + 240\,\eta^2 + 120\,\eta^4 + 5\eta^6)(1-\eta^2)^{-15/2}. \tag{VI.66}$$

On trouvera, finalement, d'une part

$$\begin{cases} \bar{P}^o \sin\psi = H^o(\eta), \\ \bar{P}^1 \sin\psi = k\,H^1_\beta(\eta), \end{cases} \tag{VI.67}$$

avec

$$H^o(\eta) = \frac{12\,\pi\,\eta}{(1-\eta^2)^{3/2}\,(2+\eta^2)}, \tag{VI.68}$$

$$H^1_\beta(\eta) = \frac{36}{5}\,\pi\,\eta\,\frac{14\eta^8 + 41\eta^6 - 146\eta^4 + 128\eta^2 + 80}{(1-\eta^2)^{5/2}\,(2+\eta^2)^4} \tag{VI.69}$$

et, d'autre part,

$$\begin{cases} \bar{P}^o \cos\psi = o, \\ \bar{P}^1 \cos\psi = G^1_\alpha(\eta) + k_1\,G^1_\gamma(\eta) - k_2\,G^1_{\gamma'}(\eta), \end{cases} \tag{VI.70}$$

avec

$$G^1_\alpha(\eta) = \frac{2\pi\eta}{(1-\eta^2)^{3/2}(2+\eta^2)^2}(2\eta^4-\eta^2+8), \tag{VI.71}$$

$$G^1_\gamma(\eta) = \frac{\pi\,\eta}{8.35^2(1-\eta^2)^{7/2}(2+\eta^2)^4}(383\cdot320\eta^{10}-152\cdot880\eta^8-1\cdot074\cdot220\eta^6 + 1\cdot890\cdot560\eta^4-627\cdot000), \tag{VI.72}$$

$$G^1_{\gamma'}(\eta) = \frac{\pi\,\eta}{8.35^2(1-\eta^2)^{7/2}(2+\eta^2)^4}(532\cdot560\eta^{10}-220\cdot500\eta^8-1\cdot385\cdot895\eta^6 + 3\cdot378\cdot480\eta^4 - 1\cdot587\cdot600\eta^2-470\cdot400). \tag{VI.73}$$

Revenant aux données dimensionnées, négligeant les termes d'ordre λ^2 et tenant compte des égalités $k\,\lambda = \nu$, $k_1\,\lambda = \nu_1$ et $k_2\,\lambda = \nu_2$ on a donc le système

$$(VI.74)\quad \begin{cases} P \sin\psi = \mu \dfrac{VR^2}{a^2}\left[H^\circ(\eta) + \nu\, H^1_\beta(\eta)\right] \\ P \cos\psi = \mu \dfrac{VR^2}{a^2}\left[\lambda\, G^1_\alpha(\eta) + \nu_1\, G^1_\gamma(\eta) - \nu_2\, G^1_{\gamma'}(\eta)\right] \\ \dfrac{h_m}{a} = 1 - \eta \end{cases}$$

qui permet d'obtenir en fonction des données a et $\dfrac{\mu V R^2}{P a^2}$ le paramètre η, l'épaisseur minimum h_m et l'angle ψ .

Rappelons que les quatre nombres λ , ν, ν_1 et ν_2 sont

$$(VI.75)\qquad \lambda = \frac{\alpha_1 V}{\mu a}\ ,\ \nu = \frac{\beta V^2}{\mu a^2}\ ,\ \nu_1 = \frac{\gamma V^3}{\mu a^2 R}\ ,\ \nu_2 = \frac{\gamma' V^3}{\mu a^2 R}\ .$$

Il est intéressant de noter que si l'on écrit la portance P sous la forme

$$(VI.76)\qquad P = P_\mu + P_\alpha + P_\beta + P_\gamma + P_{\gamma'},$$

en isolant dans son expression les contributions dues respectivement aux termes de degré un (μ viscosité classique) de degré deux (α_1) de degré trois ($\beta = \beta_1 + \beta_2$) et de degré quatre ($\gamma = 6\gamma_2 + 2\gamma_3 + 2\gamma_4 + 2\gamma_5 + 6\gamma_7 + 2\gamma_8$ et $\gamma' = 4\gamma_3 + 4\gamma_4 + 4\gamma_5$), on constate que les contributions P_μ et P_β des termes de degré impair sont perpendiculaires à la ligne des centres, tandis que celles des termes de degré pair lui sont parallèles. On peut dire, autrement, que par rapport au fluide newtonien l'effet de contrainte tangentielle ne modifie pas l'angle ψ puisque, si $\alpha_1 = \gamma = \gamma' = 0$, on a toujours $\psi = \frac{\pi}{2}$, tandis que la valeur de cet angle est perturbée par les effets de contrainte normale et l'effet non viscométrique.

6.2.3.- Il nous reste maintenant à exprimer la *résultante des actions tangentielles* sur l'arbre de manière à atteindre le coefficient de frottement. Cette résultante $F = \frac{\mu V R}{a} \bar{F}$ est donnée par (IV.80) avec suivant (IV.77 et 78).

$$(VI.77)\qquad \bar{t}^\circ_s(\phi) = \frac{3\bar{h}_o}{\bar{h}^2(\phi)} - \frac{4}{\bar{h}(\phi)}\ ,$$

$$(VI.78)\qquad \bar{t}^1_s(\phi) = 3\frac{3\bar{h}_1}{\bar{h}^2(\phi)} + \frac{k}{5}\left(-\frac{332}{\bar{h}^3(\phi)} + 756\frac{\bar{h}_o}{\bar{h}^4(\phi)} - 576\frac{\bar{h}_o^2}{\bar{h}^5(\phi)} + 162\frac{\bar{h}_o^3}{\bar{h}^6(\phi)}\right)$$

$$+ g\left[\bar{h}(\phi)\right]\frac{d\bar{h}}{d\phi}$$

dans cette dernière égalité le terme $g\,[\bar{h}(\phi)]$ n'a pas été écrit de manière explicite puisque

$$\int_0^{2\pi} g\,[\bar{h}(\phi)]\,\frac{d\bar{h}}{d\phi}\,d\phi = 0 \ .$$

Utilisant les résultats (37) et les expressions (38) et (39) on trouve

$$(VI.79)\quad \bar{F}^0(\eta) = \int_0^{2\pi} \bar{t}_s^0(\phi)\,d\phi = -4\pi\,\frac{1+2\eta^2}{(2+\eta^2)(1-\eta^2)^{1/2}} \equiv -K^0(\eta)$$

$$(VI.80)\quad \bar{F}^1(\eta) = \int_0^{2\pi} \bar{t}_s^1(\phi)\,d\phi = -k\,\frac{4\pi}{5}\,\frac{88\,\eta^{10}+232\eta^8-647\eta^6+866\eta^4+920\eta^2+80}{(2+\eta^2)^4\,(1-\eta^2)^{5/2}} \equiv -K_\beta^1(\eta)$$

où, comme il était attendu, on constate que les termes de degré pair n'interviennent pas de manière explicite.

On en déduit le coefficient de frottement

$$(VI.81)\qquad f = -\frac{F}{P} = \frac{\mu RV}{aP}\left[+K^0(\eta) + \nu\,K_\beta^1(\eta)\right]$$

6.2.4.- Nous avons obtenu toutes les relations nécessaires à l'étude de l'influence des nombres λ, ν, ν_1 et ν_2 sur l'épaisseur minimum et le frottement. Il est d'usage d'introduire le nombre de sommerfeld X défini par

$$X = \frac{\mu N}{p_o}\,\frac{R^2}{a^2} \ ,$$

où N est le nombre de tours par seconde de l'arbre et p_o une pression moyenne vérifiant

$$(VI.83)\qquad p_o = \frac{P}{2R} \ ;$$

on a ainsi

$$(VI.84)\qquad X = \frac{\mu V}{P}\,\frac{R^2}{a^2}\,\frac{1}{\pi} \ .$$

Utilisant ce nombre, nous rassemblons les relations obtenues dans ce paragraphe 6.2 :

$$(VI.85)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{X}\sin\psi = \pi\,[H^0(\eta) + \nu\,H_\beta^1(\eta)] \\ \dfrac{1}{X}\cos\psi = \pi\,[\lambda\,G^1(\eta) + \nu_1\,G_\gamma^1(\eta) - \nu_2\,G_\gamma^1,(\eta)] \\ \dfrac{h_m}{a} = 1-\eta \ , \quad \eta = \dfrac{e}{a} \ , \\ f = \pi\,\dfrac{a}{R}\,[X\ K^0(\eta) + \nu\ K_\beta^1(\eta)] \ , \end{cases}$$

les fonctions $H^\circ(\eta)$, $H_\beta^1(\eta)$, $G_\alpha^1(\eta)$, $G_\gamma^1(\eta)$, $G_\gamma^1,(\eta)$, $K^\circ(\eta)$ et $K_\beta^1(\eta)$ ayant été définies respectivement en (68), (69), (71), (72), (73), (79) et (80).

6.3 - *INFLUENCE DES CARACTERISTIQUES DU MATERIAUX*

6.3.1.- Considérons tout d'abord le *fluide de Rivlin-Ericksen de degré deux* $\nu = \nu_1 = \nu_2 = o$; les caractéristiques (85) deviennent

$$\text{(VI.86)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{X} \sin \psi = \pi \, H^\circ(\eta) \\ \dfrac{1}{X} \cos \psi = \pi \, \lambda \, G_\alpha^1(\eta) \\ f = \pi \dfrac{a}{R} \, X \, K^\circ(\eta) \qquad\qquad \dfrac{h_m}{a} = 1 - \eta \end{cases}$$

Ce sont les relations (28), (29) et (30) données par DAVIES et WALTERS page 71 de [6]. Cependant, puisque nous avons adopté un point de vue différent, nous n'allons pas tirer de (86) les mêmes conclusions que ces deux auteurs.

Considérons que η est fixé (l'épaisseur minimum du film fluide est donnée), D. et W. considèrent que, par rapport au fluide newtonien le frottement est *strictement inchangé* et que la portance est augmentée; ces conclusions sont tout à fait légitimes puisque, d'une part la troisième relation (86) donne l'expression, en fonction de η , du frottement obtenu en fluide newtonien et d'autre part, en éliminant ψ il vient

$$\text{(VI.87)} \qquad \frac{1}{X^2} = \pi^2 \left[H^\circ(\eta)^2 + \lambda^2 \, G_\alpha^1(\eta)^2 \right]$$

relation qui montre que dès que λ est non nul $\frac{1}{X}$ c'est-à-dire P est augmenté. Pour cette raison D. et W. parlent d'amélioration. Il faut cependant ne pas oublier que la méthode de perturbation que nous avons utilisée ne peut donner des résultats qui ont un sens que si

$$\lambda^2 \, G_\alpha^1(\eta)^2 \ll \varepsilon \ll \lambda \, G_\alpha^1(\eta) \, ,$$

ce qui interdit d'envisager des valeurs de η proches de l'unité, comme le montre (71). D. et W. ne sont pas très clairs sur ce point.

Nous exploitons, quant à nous, les relations (86) d'une autre manière : nous supposons P, c'est-à-dire X, donné; η devient alors un paramètre inconnu que nous éliminons de sorte que nous envisageons le frottement f et l'épaisseur $\frac{h_m}{a}$ en fonction des seules données a, $\frac{a}{R}$ et X paramètrés par λ .

Ainsi, nous traçons les courbes $f\frac{R}{a}$ et $\frac{h_m}{a}$ en fonction de X (voir page 113, le frottement est placé en ordonnées à gauche, l'épaisseur en ordonnées à droite et le nombre de Sommerfeld en abscisses). On constate que ces deux caractéristiques sont modifiées dans un sens favorable puisque le *frottement est diminué* alors que *l'épaisseur minimum se trouve être augmentée;* nous reconnaissons il est vrai que cette amélioration est certainement très faible en valeur relative puisque nous avons dû considérer une valeur importante de $|\lambda|$ (rappelons que l'on doit avoir $|\lambda|<<1$) pour la mettre en évidence.

6.3.2.- Nous envisageons le *fluide de Rivlin-Ericksen de degré trois* en supposant $\alpha_1 = o$ de façon à isoler l'effet de contrainte tangentielle; il vient

$$(VI.89)\qquad \begin{cases} \psi = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{X} = \pi \left[H^o(\eta) + \nu H_\beta^1(\eta)\right] \\ f = \pi \frac{a}{R} X \left[K^o(\eta) + \nu K_\beta^1(\eta)\right] \end{cases} , \frac{h_m}{a} = 1 - \eta .$$

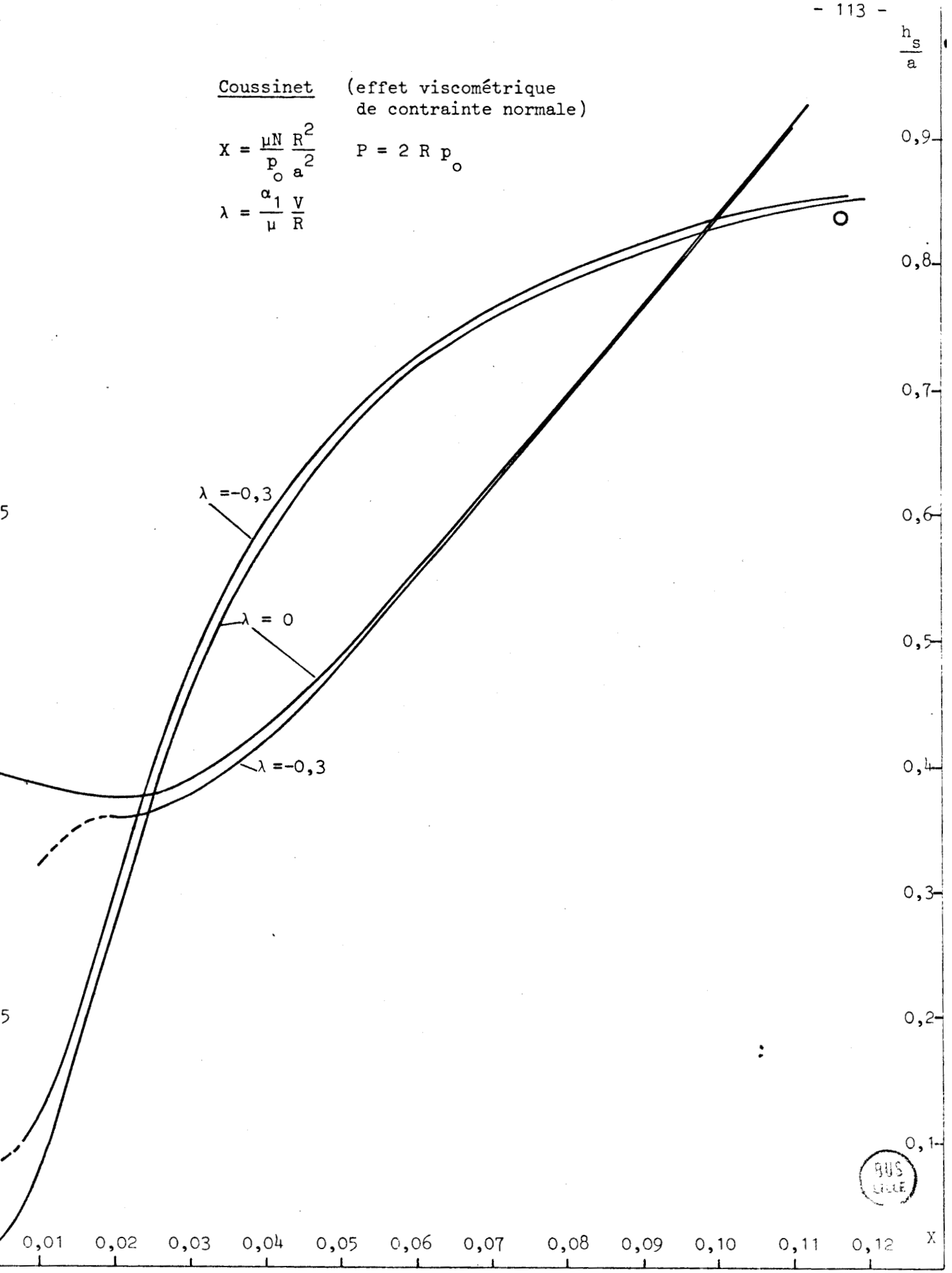
Ce sont les égalités (34) (35) et (36) données page 72 par D. et W. [6]* . Dans le cas $\beta < 0$**, ils concluent, η étant fixé, à une diminution du frottement et *aussi* à une diminution de la portance, ces deux diminutions étant d'autant plus importantes que η est éloigné de la valeur 0.

Nos propres conclusions (P fixé, η variable) résultent de l'examen des courbes tracées page suivante; leur disposition étant la même que celle adoptée au degré deux. On constate que *frottement et épaisseur sont fortement influencés* par le nombre ν et ceci pour toutes les valeurs de X; si $\nu < 0$, frottement et épaisseur sont diminués, cet effet défavorable sur l'épaisseur étant d'autant plus marqué que X est faible, l'influence bénéfique sur le frottement étant alors d'autant plus atténuée. Ces conclusions sont inversées quant aux sens de variations si $\nu > 0$.

---

* Nous pensons qu'une erreur s'est glissée dans le calcul de DAVIES et WALTERS. Nous avons trouvé pour $K_\beta^1(\eta)$, voir notre relation (80) et comparer au second membre de l'égalité (35) de D.et W., une expression légèrement différente de D. et W.

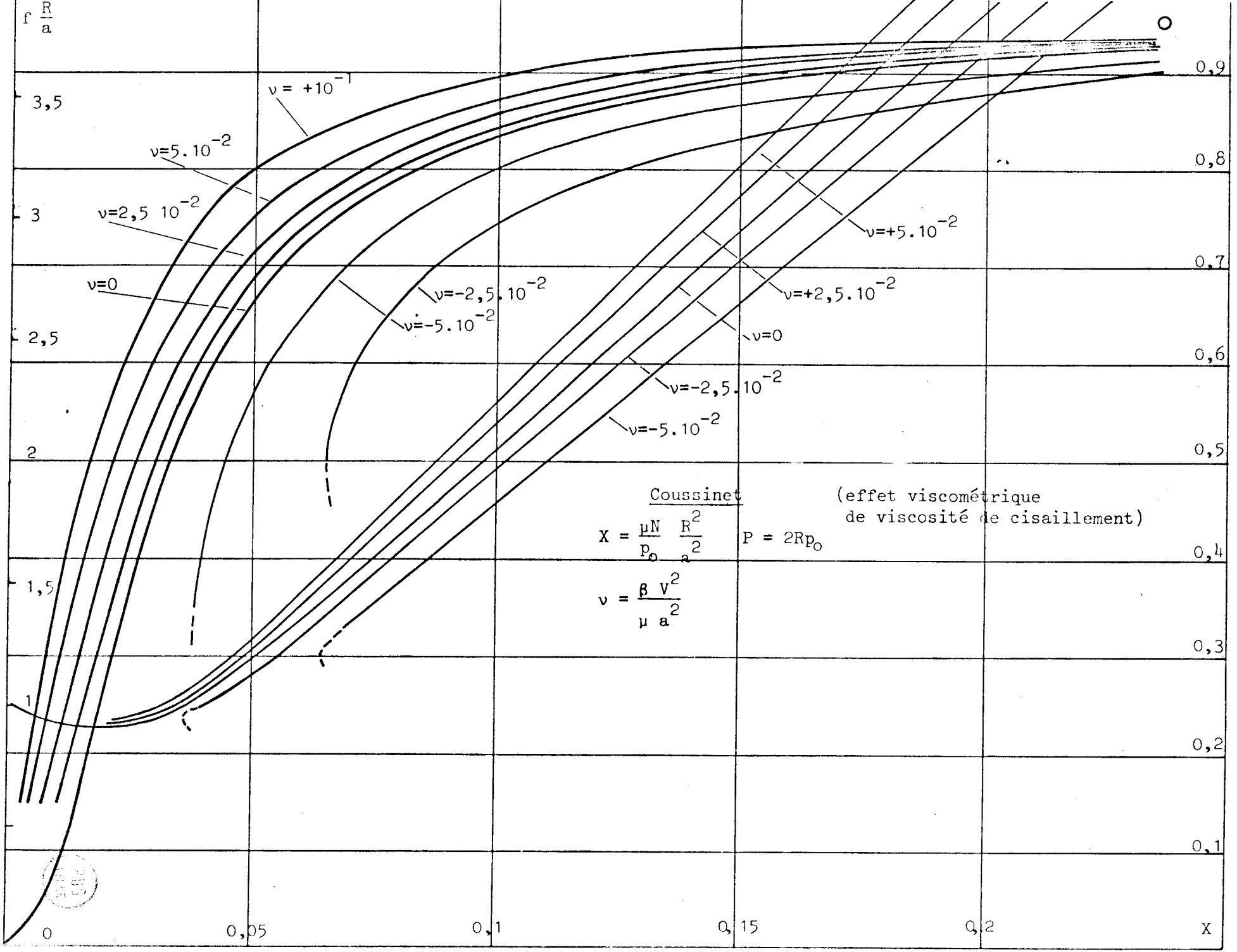
** En lubrification, seul ce cas doit être considéré car il n'existe pas d'huiles pour lesquelles $\beta > 0$. On rencontre des fluides avec $\beta < 0$ (certains produits alimentaires, colles...), ce sont des fluides dits dilatants.

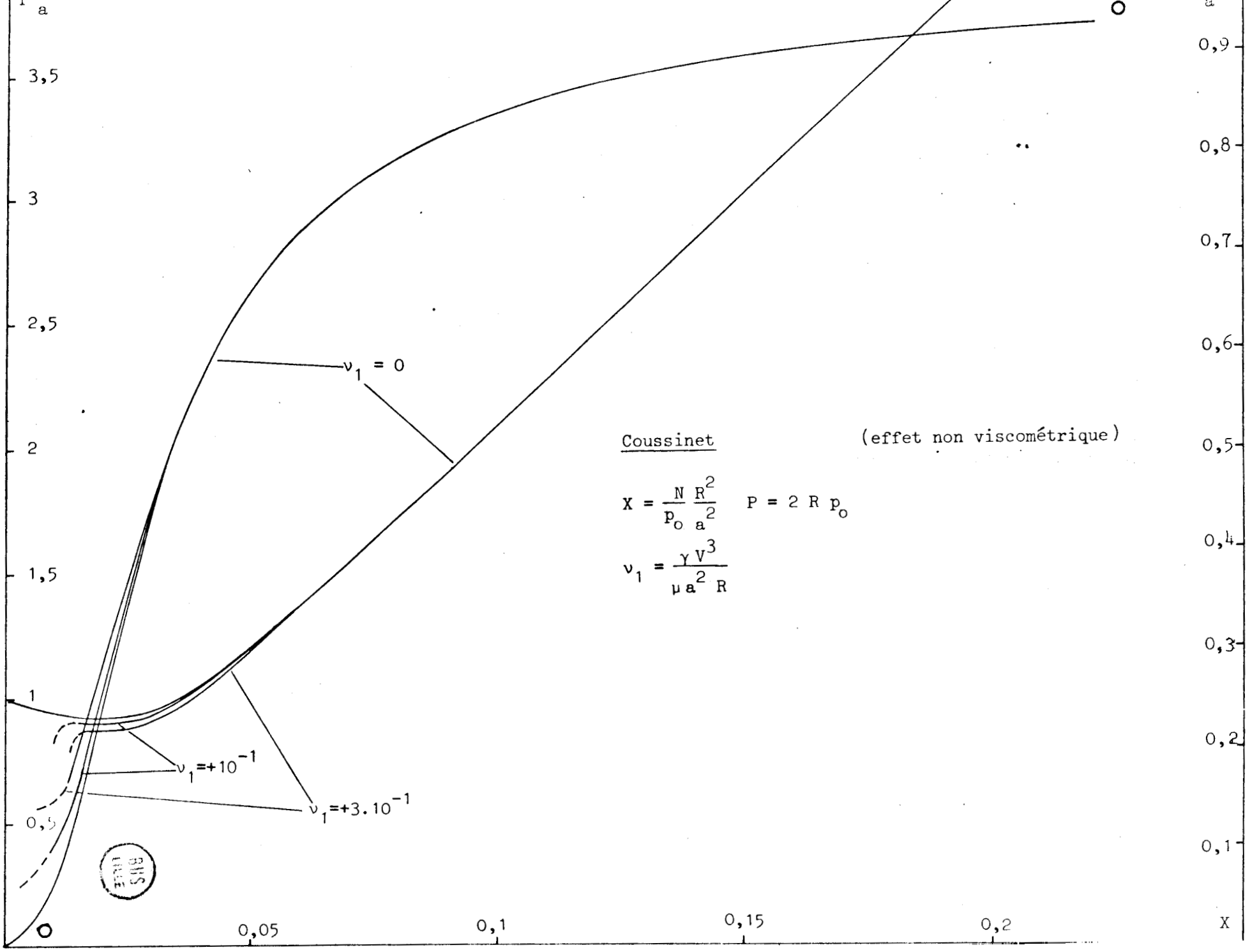

Coussinet (effet viscométrique de contrainte normale)
X = μN/p_o R²/a²
P = 2 R p_o
λ = α1/μ V/R
λ =-0,3
λ = 0
λ =-0,3
h_s/a
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
0,06
0,07
0,08
0,09
0,10
0,11
0,12
X

BUS LILLE

6.3.3.- *Au degré quatre*, en considérant l'effet non viscométrique seulement (faire $\lambda = \nu = \nu_2 = o$ dans (85)), on constate que, même pour des valeurs importantes de ν_1, frottement et épaisseur sont à peine influencées par ce paramètres; sur les courbes de la page on voit que *frottement (resp. épaisseur) apparait comme fonction très légèrement décroissante (resp. croissante)* de ν_1 si $X < 0,05$ alors que ces caractéristiques ne varient plus avec ν_1 pour $X < 0,1$.

Remarquons enfin qu'en considérant le point de vue de DAVIES et WALTERS, c'est-à-dire en fixant η, on concluerait à un *frottement inchangé*, puisque son expression en fonction de η est la même qu'en fluide newtonien, alors que la *portance serait en très forte augmentation si* $\nu_1 > 0$.
Nous n'avons pas tracé les courbes concernant l'effet de contrainte normale introduit pas ν_1. Les variations introduites par ce paramètre sont analogues et aussi peu sensibles que celles dues à ν_1.


f R/a
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,05
0,1
0,15
0,2
X
ν = +10⁻¹
ν=5.10⁻²
ν=2,5 10⁻²
ν=0
ν=-2,5.10⁻²
ν=-5.10⁻²
ν=+5.10⁻²
ν=+2,5.10⁻²
ν=0
ν=-2,5.10⁻²
ν=-5.10⁻²
Coussinet
(effet viscométrique
de viscosité de cisaillement)
X = μN/p_o · R²/a²
P = 2Rp_o
ν = β V²/μ a²



Coussinet (effet non viscométrique)

$$X = \frac{N}{p_o} \frac{R^2}{a^2} \qquad P = 2 R p_o$$

$$\nu_1 = \frac{\gamma V^3}{\mu a^2 R}$$

BIBS LILLE

- CONCLUSION -

Notre étude de la lubrification des surfaces cylindriques a mis en évidence la particularité du problème du coussinet, particularité due au fait que l'épaisseur du film fluide à l'entrée h_e est égale à celle à la sortie h_s. Signalons que cette condition peut être aussi remplie pour un patin non plan. Il en résulte que certaines caractéristiques de l'écoulement (débit, résultante des actions tangentielles, frottement) ont des expressions, en fonction de l'excentricité relative, indépendante des coefficients des termes de degré pair de la loi de comportement du fluide. Il n'en est pas de même dans le cas du patin plan : toutes les caractéristiques de fonctionnement s'expriment en fonction des coefficients des termes de degré impair *et* de ceux des termes de degré pair.

Cette observation va nous permettre de faire une remarque. Certains auteurs, dont HARNOY, DAVIES et WALTERS, pensent que les modifications de fonctionnement observées en fluides non-newtoniens peuvent s'expliquer par un effet de contrainte normale. D'autres avec TANNER estiment qu'un effet de contrainte normale n'influence pas le fonctionnement.

L'étude, que nous avons faite, du patin plan, montre que toutes les conditions sont perturbées par un effet de contrainte normale, tout autant d'ailleurs que par un effet de contrainte tangentielle. Dans le cas du coussinet, la conclusion doit être nuancée. Du point de vue de DAVIES et WALTERS (épaisseur minimum fixée, portance inconnue) l'effet de contrainte normale, introduit par les termes de degré deux, ne modifie aucunement le frottement et augmente la portance. De notre point de vue (portance donnée et épaisseur inconnue) il est indiscutable que l'effet de contrainte normale produit par le degré deux et aussi celui dû au degré quatre sont presque sans influence sur le frottement et l'épaisseur. Nous pensons, d'ailleurs, qu'il en est de même à des degrés pairs supérieurs à quatre.

Quant à la question de savoir si l'on peut parler d'amélioration, nous apportons certains éléments de réponse. Pour le coussinet, HARNOY, DAVIES et WALTERS concluent, au degré deux, à une amélioration puisqu'ils observent une portance augmentée. D'autre part ces deux derniers auteurs trouvent, au degré trois, un frottement diminué mais aussi la portance; est-ce une amélioration ? De notre côté, nous avons observé, pour le degré trois, en ce qui concerne le coussinet aussi bien que le patin une petite diminution du frottement et une importante chute de l'épaisseur. Dans des conditions

expérimentales telles qu'une épaisseur minimum compatible avec une bonne conservation des états de surface reste assurée, nous pouvons donc dire qu'il y a là, une explication d'une certaine amélioration; dans le cas contraire, force nous est de reconnaitre que cet effet risque d'être très défavorable. Enfin, mais dans le cas du patin seulement, nous avons montré que pour un fluide théorique donné on peut toujours se placer, en choisissant l'incidence, dans des conditions telles que l'on observe, soit une diminution du frottement et de l'épaisseur, soit une diminution du frottement accompagnée d'un accroissement de l'épaisseur. Il s'agit, dans ce dernier cas d'une réelle amélioration. Rappelons que si nous avions adopté le point de vue de DAVIES et WALTERS, nous aurions mis en évidence, sous certaines incidences, un accroissement de la portance et une diminution du frottement. Cependant, comme cette amélioration résulte de la présence dans la loi de comportement du fluide de coefficients de termes de degré quatre, la question de la mesure de ces coefficients est posée; d'autant plus, d'ailleurs, que pour certains d'entr'eux, de telles mesures ne peuvent être envisagées qu'en expériences non viscométriques.

Pour terminer, soulignons l'intérêt de la formule (II.20) qui donne le gradient de la déformation sur la paroi. Cette formule a permis les développements des chapitres II et III; il en résulte une meilleure compréhension de ce qui se passe à la paroi. Nous travaillons actuellement dans deux directions. Tout d'abord il est facile d'étendre les résultats des chapitres II et III au cas des parois déformables inextensibles. Par ailleurs nous avons défini une classe d'écoulements non isovolumiques tels que toutes les propriétés que nous avons mises en évidence à la paroi soient vraies partout dans l'écoulement. Pour cette raison, nous avons appelés ces écoulements "écoulements de type pariétal". Nous avons déjà montré que tout écoulement viscométrique est de ce type; ces prolongements nous apparaissent très prometteurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. TRUESDELL, Introduction à la Mécanique Rationnelle des Milieux Continus, Paris, 1974.

[2] G. ASTARITA and G. MARRUCCI, Principles of Non-Newtonien Fluid Mechanics, London, 1972.

[3] COLEMAN-MARKOVITZ-NOLL. Viscometrie Flows of Non-Newtonian Fluids, Berlin, 1966.

[4] C.C. WANG, Arch. Rat. Mech. Anal., 36, 1970, p. 166-223.

[5] A. HARNOY, J. Fluid. Mech., 76, 1976, p. 501-507.

[6] J.M. DAVIES, K. WALTERS, Rhelogy of Labricants, p. 65-80 ed. T.C. DAVENPORT, New-York, 1973.

[7] G. LALVEE, C. R. Acad. Sc. Paris, 1977, t. 284, p. 1523.

[8] Polymères et lubrification, C.N.R.S., Paris, 1975, p. 37-44.

[9] R. BERKER, Cours de D.E.A., Lille, 1964.

[10] R. BERKER, C. R. Acad. Sc. Paris, 1964, t. 258, p. 5144.

[11] G. LALVEE, C. R. Acad. Sc. Paris, 1977, t. 284, p. 1565.

[12] G. LALVEE, Communication au Congrès Français de Mécanique, Grenoble.