

50376  
1979  
48

N° d'ordre : 101

50376  
1979  
48

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR D'UNIVERSITÉ**  
**(Informatique)**

par

Pierre CLERC



**ÉLABORATION D'UN NOUVEAU MODÈLE DE PERMUTATION  
POUR LES MÉMOIRES CIRCULANTES.  
APPLICATION À LA CONCEPTION DE DISQUES ÉLECTRONIQUES.**

Soutenue le 25 mai 1979 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury

M. V. CORDONNIER

M. J. LOSFELD

M. M. LATTEUX

M. J.P. STEEN

Président, rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit  
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE  
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE  
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M. BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. DECUYPER Marcel	Géométrie
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique
M. DERCOURT Michel	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOURET René	Physique du Solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M. LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M. LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M. LEBRUN André	Electronique
M. LEHMANN Daniel	Géométrie

Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M.	LOMBARD Jacques	Sociologie
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M.	MONTREUIL Jean	Biochimie
M.	PARREAU Michel	Analyse
M.	POUZET Pierre	Analyse Numérique
M.	PROUVOST Jean	Minéralogie
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M.	SEQUIER Guy	Electrotechnique
M.	TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BODARD Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des entreprises
M.	DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme	LEHMANN Josiane	Analyse
M.	LENTACKER Firmin	Géographie
M.	LOUAGE Francis	Electronique
Mlle	MARQUET Simone	Probabilités
M.	MIGEON Michel	Chimie Physique
M.	MONTEL Marc	Physique du Solide
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	RACZY Ladislas	Electronique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	SLIWA Henri	Chimie Organique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M.	ADAM Michel	Sciences Economiques
M.	ANTOINE Philippe	Analyse
M.	BART André	Biologie Animale
M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie

M. CARREZ Christian  
M. CORDONNIER Vincent  
M. COQUERY Jean-Marie  
M<sup>le</sup> DACHARRY Monique  
M. DEBENEST Jean  
M. DEBRABANT Pierre  
M. DE PARIS Jean-Claude  
M. DHAINAUT André  
M. DELAUNAY Jean-Claude  
M. DERIEUX Jean-Claude  
M. DOUKHAN Jean-Claude  
M. DUBOIS Henri  
M. DYMENT Arthur  
M. ESCAIG Bertrand  
M<sup>e</sup> EVRARD Micheline  
M. FONTAINE Jacques-Marie  
M. FOURNET Bernard  
M. FORELICH Daniel  
M. GAMBLIN André  
M. GOBLOT Rémi  
M. GOSSELIN Gabriel  
M. GRANELLE Jean-Jacques  
M. GUILLAUME Henri  
M. HECTOR Joseph  
- M. JACOB Gérard  
M. JOURNEL Gérard  
M<sup>le</sup> KOSMAN Yvette  
M. KREMBEL Jean  
M. LAURENT François  
M<sup>le</sup> LEGRAND Denise  
M<sup>le</sup> LEGRAND Solange  
M. LEROY Jean-Marie  
M. LEROY Yves  
M. LHENAFF René  
M. LOCQUENEUX Robert  
M. LOUCHET Pierre  
M. MACKE Bruno  
M. MAHIEU Jean-Marie  
M<sup>e</sup> N'GUYEN VAN CHI Régine  
M. MAIZIERES Christian  
M. MALAUSSENA Jean-Louis  
M. MESSELYN Jean  
M. MONTUELLE Bernard  
M. NICOLE Jacques  
M. PAQUET Jacques  
M. PARSY Fernand  
M. PECQUE Marcel  
M. PERROT Pierre  
M. PERTUZON Emile  
M. PONSOLLE Louis  
M. POVY Lucien  
M. RICHARD Alain  
M. ROGALSKI Marc  
M. ROY Jean-Claude  
M. SIMON Michel  
M. SOMME Jean  
M<sup>le</sup> SPIK Geneviève  
M. STANKIEWICZ François  
M. STEEN Jean-Pierre

Informatique  
Informatique  
Psycho-Physiologie  
Géographie  
Sciences Economiques  
Géologie Appliquée  
Mathématiques  
Biologie Animale  
Sciences Economiques  
Microbiologie  
Physique du Solide  
Physique  
Mécanique  
Physique du Solide  
Chimie Appliquée  
Electronique  
Biochimie  
Chimie Physique  
Géographie  
Algèbre  
Sociologie  
Sciences Economiques  
Sciences Economiques  
**Géométrie**  
Informatique  
**Physique Atomique et Moléculaire**  
Géométrie  
Biochimie  
Automatique  
Algèbre  
Algèbre  
Chimie Appliquée  
Electronique  
Géographie  
Physique Théorique  
Sciences de l'Education  
Physique  
Physique Atomique et Moléculaire  
Géographie  
Automatique  
Sciences Economiques  
Physique Atomique et Moléculaire  
Biologique Appliquée  
Chimie Appliquée  
Géologie Générale  
Mécanique  
Chimie Physique  
Chimie Appliquée  
Physiologie Animale  
Chimie Physique  
Automatique  
Biologie  
Analyse  
Psycho-Physiologie  
Sociologie  
Géographie  
Biochimie  
Sciences Economiques  
Informatique

M. THERY Pierre  
M. TOULOTTE Jean-Marc  
M. TREANTON Jean-René  
M. VANDORPE Bernard  
M. VILLETTE Michel  
M. WALLART Francis  
M. WERNIER Georges  
M. WATERLOT Michel  
Mme ZINN-JUSTIN Nicole

Electronique  
Automatique  
Sociologie  
Chimie Minérale  
Mécanique  
Chimie  
Informatique  
Géologie Générale  
Algèbre

*Je tiens à remercier vivement :*

*Monsieur Le Professeur CORDONNIER, d' l'honneur qu'il me fait d'avoir bien voulu présider mon jury de thèse, de s'être intéressé à mon travail, et de ses conseils.*

*Monsieur le Professeur STEEN, de ses conseils, de l'aide et des encouragements qu'il m'a prodigués, et de participer à mon jury.*

*Messieurs les Professeurs LOSFELD et LATTEUX, de leurs conseils, et de participer à mon jury.*

*Merci également à Mademoiselle FIEVET Bénédicte ainsi que Madame et Monsieur DEBOCK qui ont assuré la réalisation matérielle de cette thèse.*

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

# TABLE DES MATIÈRES

## INTRODUCTION

### CHAPITRE I : LES PRINCIPAUX MODELES DE PERMUTATION DANS LES MEMOIRES CIRCULANTES

- I - 1 Introduction
- I - 2 Rappel sur les permutations
- I - 3 Le modèle de Tung-Chen-Chang
- I - 4 Le modèle de STONE

### CHAPITRE II : PROPOSITION POUR UN MODELE DE PERMUTATION

- II - 1 Objectif
- II - 2 Présentation du modèle
- II - 3 Algorithme de lecture d'une cellule k
- II - 4 Temps d'accès à une cellule
- II - 5 Algorithme de génération d'une permutation quelconque
- II - 6 Temps moyen de génération d'une permutation quelconque
- II - 7 Comparaison avec le modèle de Tung-Chen-Chang
- II - 8 Proposition pour un mécanisme de contrôle
- II - 9 Le problème du coût

CHAPITRE III : CONCEPTION D'UN DISQUE ELECTRONIQUE UTILISANT LE MODELE  
DE PERMUTATION PROPOSE

- III - 1 Rappel sur les disques classiques et électroniques
- III - 2 Objectif
- III - 3 Proposition pour la conception d'un disque électronique
- III - 4 Simulation sur ordinateur du temps moyen d'accès
- III - 5 Simulation de l'algorithme ( $\epsilon$ ) de génération d'une permutation quelconque

CHAPITRE IV : GENERALISATION DE LA NOTION DE POINT CRITIQUE

- IV - 1 Introduction
- IV - 2 Généralisation de la notion de point critique
- IV - 3 Algorithme d'accès à un article k
- IV - 4 Temps d'accès moyen à un article
- IV - 5 Temps moyen de génération d'une permutation quelconque
- IV - 6 Remarques
- IV - 7 Proposition pour la conception d'un disque électronique de très grande capacité

CONCLUSION

ANNEXE

LEXIQUE DES TERMES UTILISES

LEXIQUE DES NOTATIONS UTILISEES

BIBLIOGRAPHIE



\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

# INTRODUCTION

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Le travail présenté est centré sur un modèle de permutation dans les MEMOIRES CIRCULANTES.

Une mémoire circulante est un dispositif comprenant un milieu de propagation discrétisé où les informations binaires sont localisées dans des cellules qui communiquent entre-elles sous le contrôle d'une horloge commune, un point d'entrée auquel on présente en séquence, les informations à inscrire, un point de sortie où l'information apparaît après avoir effectué un certain parcours à travers le milieu de propagation. [CO.01]

En général, un circuit de commutation externe permet de réinjecter au point d'entrée l'information qui se présente au point de sortie, assurant une circulation permanente des données stockées, et les points d'entrée et de sortie sont confondus et s'appellent la FENETRE d'accès.

L'information qui traverse la fenêtre est la seule qui soit disponible pour un usage externe.

On appellera ce dispositif de mémoire circulante une BOUCLE.

Le temps d'accès à l'information contenue dans une cellule (cette information sera appelée un article) est un des problèmes principaux des mémoires circulantes.

Dans les mémoires adressables, toute information possède une adresse, c'est-à-dire une position relative dans la mémoire.

L'accès à l'information dans une mémoire adressable se fait sur la reconnaissance de son adresse, qui est fixe.

Au contraire, dans une mémoire circulante, l'information circule constamment et doit suivre un certain parcours à travers le milieu de propagation avant d'arriver sur la fenêtre.

Le temps d'accès à un article est le temps nécessaire à cet article pour arriver sur la fenêtre après avoir effectué un certain parcours à travers le milieu de propagation, à partir de l'instant où la demande d'accès est initialisée.

De nombreux algorithmes ont été étudiés pour minimiser le temps moyen d'accès à un article.

Tous ces algorithmes privilégient certaines cellules, et la mise en oeuvre de parcours différents à travers le milieu de propagation accélère le cheminement des articles vers la fenêtre.

Nous présenterons d'abord les caractéristiques des algorithmes les plus connus.

Puis nous proposerons un nouvel algorithme qui nous permettra de concevoir deux types de mémoires auxiliaires.

Le premier type de mémoire pourra servir à combler un maillon dans la hiérarchie des mémoires.

La figure 1 dresse un tableau des caractéristiques des principaux types de mémoires.

Type de mémoire	Temps d'accès	Capacité
Antémémoire	100 ns	quelques K octets
Mémoire centrale	1 $\mu$ s	1 M octets
Maillon manquant	100 $\mu$ s	10 M octets
Mémoire auxiliaire	10 ms	100 M octets

Figure 1 : Tableau des caractéristiques des types de mémoires.

On sait que le temps d'accès sur un disque classique est 10 000 fois plus lent qu'en mémoire centrale. Si l'on place entre la mémoire centrale et les mémoires auxiliaires (disques classiques) une mémoire tampon de temps d'accès de l'ordre de 100  $\mu$ s, la gestion des unités de disques est facilitée, le débit d'informations accru entre unité centrale et disques, et le système central est déchargé d'un certain nombre de files d'attente dues à la lenteur des accès disques classiques.

Un deuxième type de mémoire que nous étudierons, pourra remplacer les disques classiques, mais avec un temps d'accès amélioré et une capacité très largement supérieure.

```
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****  
*****
```

CHAPITRE

I

LES PRINCIPAUX MODELES DE PERMUTATION

DANS LES MEMOIRES CIRCULANTES



## I - 1 INTRODUCTION

De nombreux auteurs ont proposé des algorithmes d'accès à une cellule et de génération d'une permutation quelconque : STONE, BENES, TUNG-CHEN-CHANG,...

Le principe de ces algorithmes est de privilégier certaines cellules en établissant des liaisons entre elles ou avec la fenêtre, de manière à construire un certain réseau à travers lequel l'information va circuler.

Leurs travaux ont également permis de montrer certaines propriétés de ces modèles, et notamment l'évolution de la représentation binaire des numéros de cellules par lesquelles passent les articles.

Les propriétés ont permis de construire des mémoires spécifiques à certains problèmes mathématiques, par exemple, la transformation de FOURIER.

Sur l'ensemble du sujet voir : [ST.01], [ST.02], [ST.03], [TU.01], [TU.02], [WO.01], [WO.02].

Après quelques rappels sur les permutations, nous donnerons quelques indications sur les travaux de TUNG-CHEN-CHANG et STONE.

## I - 2 RAPPEL SUR LES PERMUTATIONS

Rappelons quelques notions et résultats de théorie des permutations. [LE.01].

L'opération qui consiste à ré-arranger  $n$  objets distincts entre-eux est appelée une permutation de degré  $n$ .

On sait qu'il existe  $n!$  permutations possibles.

L'ensemble des permutations de  $n$  objets forme un groupe, le groupe symétrique de degré  $n$ .

Une permutation qui place le premier des  $n$  objets à la suite des autres est appelée permutation circulaire ou cycle de degré  $n$ .

On démontre qu'une permutation peut être exprimée uniquement à l'aide de cycles opérant sur des sous-ensembles des  $n$  objets.

Un cycle de degré 2 est appelé une transposition.

On démontre également qu'une permutation peut être exprimée comme un produit de transpositions.

### I - 3 LE MODELE DE TUNG, CHEN, CHANG : [TU.01], [WØ.01].

Soit une boucle de  $N$  cellules,

$$N = 2m + 1, m \geq 1.$$

Les cellules sont numérotées  $0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

La position 0 désigne la fenêtre.

Le contenu d'une cellule est appelé un article, et un article pourra être désigné par la position de la cellule qui le contient.

On désigne par  $C_t(i)$  le contenu de la cellule  $i$  à l'instant  $t$ , l'unité de temps étant la durée de propagation de l'information, c'est-à-dire le temps nécessaire à un article pour aller d'une cellule à une cellule voisine.

On dira aussi que  $C_t(i)$  désigne l'article  $i$ .

Tung, Chen et Chang définissent quatre opérations, chaque opération se déroulant en une unité de temps.

- opération a :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{t+1}(i) = C_t(i + 1) \text{ pour } 0 \leq i \leq N - 2 \\ C_{t+1}(i) = C_t(0) \quad \text{si } i = N - 1 \end{array} \right.$$

- opération b :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_{t+1}(i) = C_t(0) & \text{si } i = 0 \\ C_{t+1}(i) = C_t(1) & \text{si } i = N - 1 \\ C_{t+1}(i) = C_t(i + 1) & \text{pour } 1 \leq i \leq N - 2 \end{array} \right.$$

- opération c :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_{t+1}(i) = C_t(N - i) & \text{pour } 1 \leq i \leq N - 1 \\ C_{t+1}(i) = C_t(0) & \text{si } i = 0 \end{array} \right.$$

- opération d :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_{t+1}(i) = C_t(1) & \text{si } i = 0 \\ C_{t+1}(i) = C_t(N - 1) & \text{si } i = 1 \\ C_{t+1}(i) = C_t(0) & \text{si } i = N - 1 \\ C_{t+1}(i) = C_t(N - i) & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Notons par  $(i_0, i_1, \dots, i_{N-1})$  la permutation qui transfère l'article 0 en  $i_0$ , 1 en  $i_1, \dots, N - 1$  en  $i_{N-1}$ .

Appelons "arrangement dynamique" la permutation  $\pi_k = (1, 2, \dots, k, 0, k + 1, \dots, n - 1)$ ,  $k$  étant la position de l'article auquel on veut accéder.

Tung, Chen et Chang définissent un algorithme d'accès à un article, utilisant les quatre opérations a, b, c, d définies précédemment, et produisant un arrangement dynamique.

L'algorithme amène ainsi l'article  $k$  auquel on veut accéder, sur la fenêtre, laisse à leurs positions les articles  $k + 1$  à  $N - 1$  et fait avancer d'une position les autres articles. (Voir détail de l'algorithme en annexe).

Tung-Chen-Chang montrent que le temps d'accès à un article dépend de sa position :

$$t : \begin{cases} 2k & , \text{ pour } 1 \leq k \leq m \\ 2(N-k) - 1, & \text{ pour } m+1 \leq k \leq N-2 \\ 3 & , \text{ pour } k = N-1 \end{cases}$$

Pour engendrer une permutation quelconque, Tung-Chen-Chang utilisent l'algorithme suivant :

( $P_1$ )  $\left\{ \begin{array}{l} \text{On réalise la permutation article par article, dans l'ordre, et pour} \\ \text{chacun d'eux, on utilise l'algorithme } (A_1) \text{ défini précédemment ;} \\ \text{on rajoute à chaque fois une opération a.} \end{array} \right.$

Tung-Chen-Chang montrent que le temps moyen de génération d'une permutation quelconque est :

$$\bar{t} \approx 0,4 N^2$$

#### I - 4 LE MODELE DE STONE : [ST.01],[ST.03],[ST.03]

Soit une boucle de  $N$  cellules,  $N = 2^m$ ,  $m > 1$ .

STONE définit deux opérations :

- opération  $S_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{t+1}(i) = C_t(i+1) \text{ si } i \text{ est pair,} \\ C_{t+1}(i) = C_t(i-1) \text{ si } i \text{ est impair.} \end{array} \right.$$

- opération  $S_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{t+1}(i) = C_t\left(\frac{i}{2}\right) \text{ si } i \text{ est pair,} \\ C_{t+1}(i) = C_t\left(\frac{i+N-1}{2}\right) \text{ si } i \text{ est impair.} \end{array} \right.$$



STONE définit un algorithme d'accès aux cellules et montre que le temps d'accès à un article est de l'ordre de

$$\log_2 N$$



## II - 1 OBJECTIF

On veut réaliser pour les articles d'une boucle de mémoire circulante un modèle de permutation autorisant un temps moyen d'accès à un article nettement inférieur aux temps des modèles classiques et dont le temps moyen de génération d'une permutation quelconque soit une fonction de  $N$ , nombre de cellules de la boucle.

On sait que toute permutation de  $n$  objets distincts peut être exprimée uniquement à l'aide de cycles opérant sur des sous-ensembles de ces  $n$  objets. En général, ces sous-ensembles varient d'une permutation à l'autre.

Notre but étant la génération de permutations parmi les contenus de  $N$  cellules d'une boucle de mémoire circulante, on peut se poser la question de savoir si, techniquement, la décomposition d'une permutation en cycles est réalisable.

Les cycles doivent être matérialisés par des liaisons. Tout déplacement de l'information doit nécessairement utiliser ces liaisons qui concrétisent les cycles.

D'après ce qui a été dit précédemment, les liaisons seraient variables d'une permutation à l'autre, ce qui entraînerait une difficulté de réalisation du point de vue technique et un coût prohibitif.

Nous allons définir un modèle de permutation utilisant des liaisons fixes ; l'idée de base de ce modèle est de privilégier certaines cellules de la boucle en les reliant directement à la fenêtre par des liaisons.

L'algorithme d'accès à un article devra conserver un "arrangement dynamique", tel qu'il a été défini dans l'étude du modèle de Tung, Chen, Chang (Chapitre I, par. 2) :

- l'article demandé vient sur la fenêtre,
- les articles dont les positions sont supérieures à celles de l'article demandé ne bougent pas,
- les autres articles passent à la position suivante.

## II - 2 PRESENTATION DU MODELE

On considère une boucle de  $N$  cellules :  $N = 2m + 1$ ,  $m \geq 1$ .

On désignera les cellules par leurs positions :  $0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

La cellule  $0$  désignera la fenêtre de lecture.

On appellera ARTICLE le contenu d'une cellule. Dans la suite de l'exposé, un article représentera une information élémentaire du point de vue de l'accès (bit, mot, enregistrement, ...).

On désignera par  $C_t(i)$  le contenu de la cellule  $i$  à l'instant  $t$ , l'unité de temps étant la durée nécessaire à un article pour se déplacer d'une cellule à une autre (durée de propagation).

Certaines cellules particulières pourront être appelées des POINTS.

Accéder à une cellule pour lire son contenu, revient à faire déplacer le contenu de la cellule vers la fenêtre de lecture, par un algorithme déterminé.

Nous allons définir quatre types d'opérations, une opération se déroulant en une unité de temps.

- type A : une opération définie par la transformation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{t+1}(i) = C_t(i + 1) \text{ pour } 1 \leq i \leq N - 2 \\ C_{t+1}(i) = C_t(i) \quad \text{si } i = 0 \\ C_{t+1}(i) = C_t(1) \quad \text{si } i = N - 1 \end{array} \right.$$

L'article en cellule  $0$  ne bouge pas ; celui en cellule  $1$  va en cellule  $N - 1$  ; les autres vont à la cellule précédente.

C'est une permutation cyclique vers la gauche des articles dans les cellules  $1$  à  $N - 1$ .

- type B : plusieurs opérations.

Soit  $p$  un diviseur de  $N - 1$ .

Appelons POINTS CRITIQUES les cellules  $J$  telles que  $J$  soit un multiple de  $p$ ,  $p \leq N - 1$ .

On a ainsi  $\frac{N - 1}{p}$  points critiques.

Appelons  $p$  le PAS.

Désignons par  $k$  la cellule dont on veut transférer le contenu vers la fenêtre.

Soit  $J_k$  le point critique le plus proche de  $k$ , tel que sa position soit inférieure ou égale à la position de  $k$ , pour  $k \leq p$ . Ce point critique sera dit "ASSOCIE" à l'article  $k$ .

Ce point critique est le plus proche de  $k$ , qui soit compris entre  $k$  et la fenêtre.

Pour les cellules telles que  $k < p$ , leur point critique associé sera la cellule  $N - 1$ .

La boucle possède  $\frac{N - 1}{p}$  points critiques et c'est la position de l'article à lire qui détermine le choix de l'opération B parmi les  $\frac{N - 1}{p}$  opérations possibles de type B.

On notera  $B_{J_k}$  cette opération B particulière.

L'opération  $B_{J_k}$  est définie par la transformation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_{t+1}(i) = C_t(i - 1) & \text{pour } 1 \leq i \leq J_k \\ C_{t+1}(i) = C_t(i) & \text{pour } i > J_k \\ C_{t+1}(i) = C_t(J_k) & \text{si } i = 0 \end{array} \right.$$

L'article situé sur le point critique  $J_k$  associé à la cellule  $k$  à lire va en cellule 0 (fenêtre de lecture) ; les articles des cellules 0 à  $J_k - 1$  vont en cellule suivante ; les autres ne bougent pas.

C'est une permutation cyclique vers la droite des articles dans les cellules 0 à  $J_k$ .

- type C : une opération définie par la transformation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{t+1}(i) = C_t(i - 1) \text{ pour } 3 \leq i \leq N - 1 \\ C_{t+1}(i) = C_t(i) \quad \text{si } i = 1 \text{ ou } i = 0 \\ C_{t+1}(i) = C_t(N - 1) \text{ si } i = 2 \end{array} \right.$$

Les articles situés en cellules 0 et 1 ne bougent pas ; l'article situé en cellule  $N - 1$  va en cellule 2 ; les autres vont à la cellule suivante.

C'est une permutation cyclique vers la droite des articles dans les cellules 2 à  $N - 1$ .

- type D : une opération définie par la transformation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{t+1}(i) = C_t(i + 1) \text{ pour } 0 \leq i \leq N - 2 \\ C_{t+1}(i) = C_t(0) \quad \text{si } i = N - 1. \end{array} \right.$$

L'article en position 0 va en position  $N - 1$  ; les autres articles vont en position précédente.

C'est une permutation cyclique vers la gauche des articles dans les positions 0 à  $N - 1$ .

Remarques :

- Pour les articles dont les cellules sont comprises entre la fenêtre et  $p$ , le point critique associé est  $N - 1$  ; alors  $D$  est le cycle inverse de  $B_{J_{N-1}}$ .
- Pour les types A, C et D, il n'y a qu'une seule opération.
- Pour le type B, plusieurs opérations sont possibles ; elles se distinguent par le point critique associé qui intervient dans leur définition.

Représentons ces quatre opérations sur des schémas.

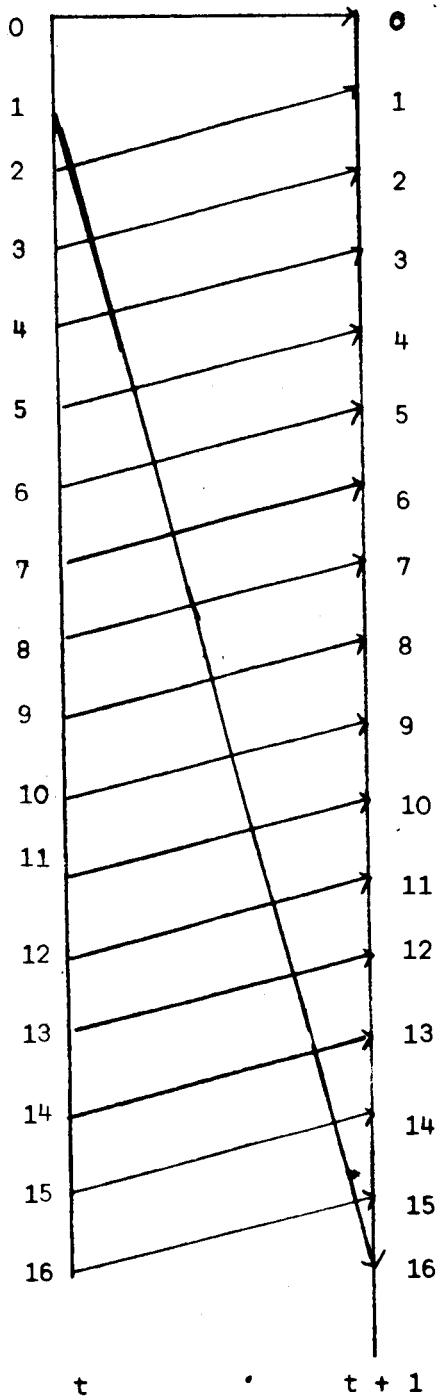
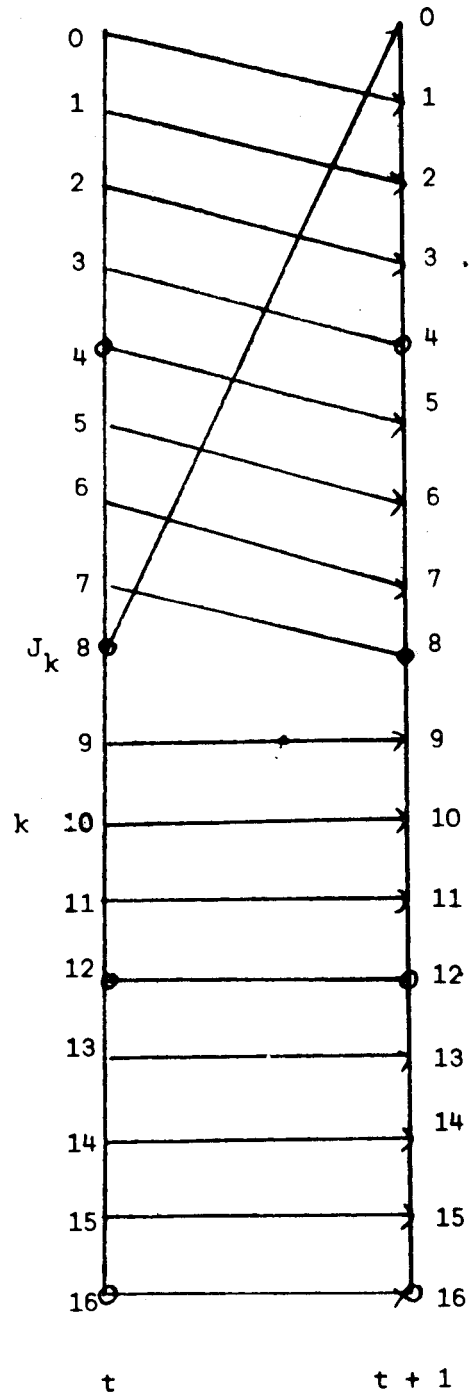
Sur la colonne de gauche, on place la liste des cellules à l'instant  $t$ .

Sur la colonne de droite, on place la liste des cellules à l'instant  $t + 1$ .

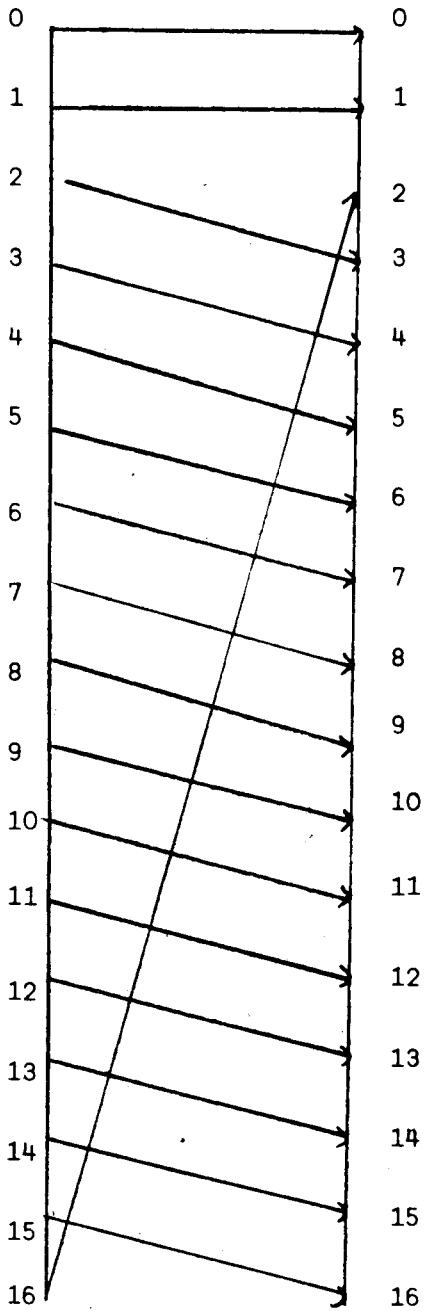
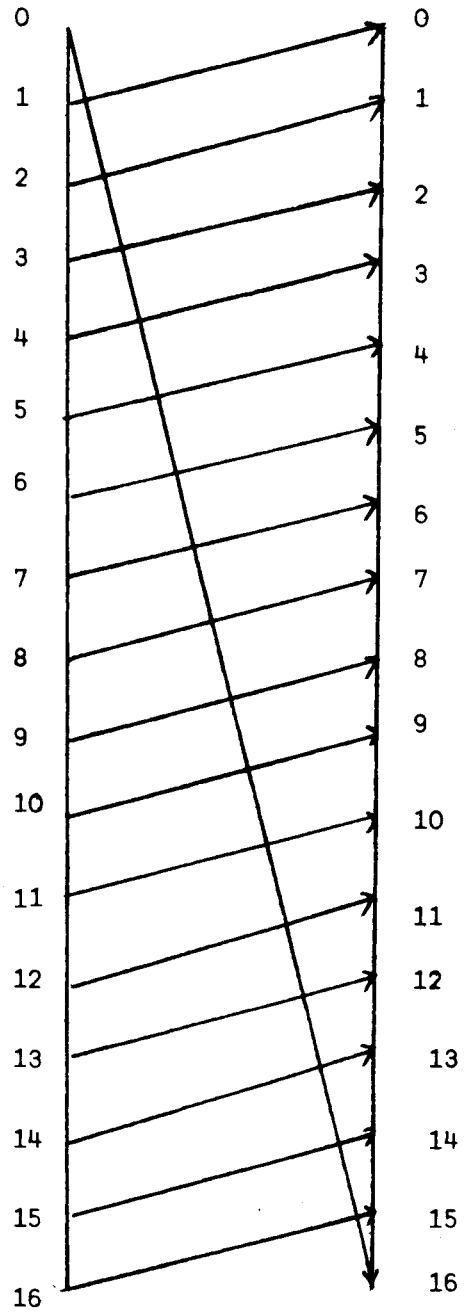
On représente le mouvement d'information entre deux cellules et entre les instants  $t$  et  $t + 1$  par une flèche.

Prenons  $N = 17$ ,  $p = 4$ .

Pour l'opération  $B_{J_k}$ , on choisit la cellule 10 comme cellule à lire ; le point critique associé  $J_k$  est alors la cellule 8 ; les points critiques sont entourés sur le schéma.

Opération AOpération B<sub>J<sub>k</sub></sub>



Opération COpération D

## II - 3 ALGORITHME DE LECTURE D'UNE CELLULE K

Un algorithme décrit les différentes opérations à réaliser pour amener sur la fenêtre l'article qui est dans la cellule K.

Désignons par (A) cet algorithme.

(A) { Soit R le reste de la division de K par p.  
 On effectue :  
 R fois l'opération A,  
 1 fois l'opération  $B_{J_k}$ ,  
 R fois l'opération C.

Cet algorithme est valable pour  $k \geq p$ .

Cas limites :

-  $0 < k < p$  :

On applique l'algorithme ( $A_0$ ) suivant :

{ Soit R le reste de la division de k par p.  
 On effectue :  
 R fois l'opération A,  
 1 fois l'opération  $B_{J_k}$ ,  
 R - 1 fois l'opération C.

-  $k = 0$  :

L'article étant sur la fenêtre, aucune opération n'est nécessaire.

Le principe de l'algorithme est ainsi d'amener l'article  $k$  sur son point critique associé ( $R$  fois l'opération  $A$ ), puis de l'amener sur la fenêtre (opération  $B_{J_k}$ ) et enfin d'effectuer une permutation cyclique vers la droite des articles contenus dans les cellules 2 à  $N - 1$  (opération  $C$ ).

A la sortie de l'algorithme, on a conservé un "arrangement dynamique" :

- l'article contenu à l'origine dans la cellule à lire  $k$  se trouve sur la fenêtre de lecture.
- les articles dans les cellules supérieures à  $k$  sont inchangés.
- les autres articles occupent chacun la cellule suivante.

Appliquons à un exemple l'algorithme (A).

Soit  $N = 17$ ,  $p = 4$ .

On veut lire la cellule 6 ( $k = 6$  et  $J_k = 4$ ).

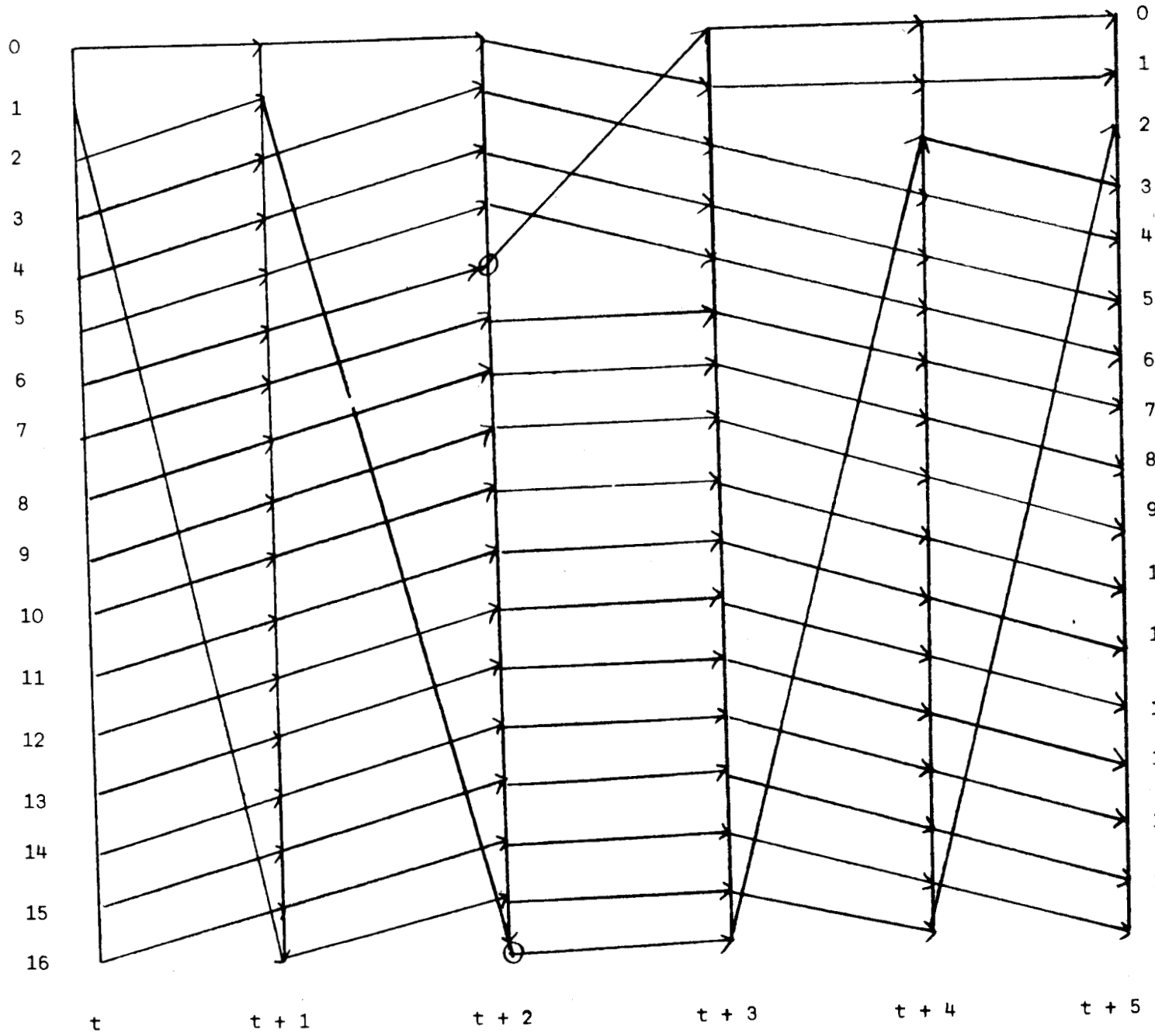
Opération  
A

Opération  
A

Opération  
B

Opération  
C

Opération  
C



## II - 4 TEMPS D'ACCES A UNE CELLULE

Nous allons étudier le temps d'accès à une cellule en fonction de sa position dans la boucle, puis donner une expression du calcul du temps moyen d'accès à une cellule.

### II - 4 - a Cas le plus favorable

C'est le cas où la cellule à lire se trouve sur un point critique. En effet,  $R$  étant nul, l'algorithme (A) ne nécessite qu'une seule opération  $B_{J_k}$ .

Appelons  $T$  le temps d'accès à une cellule

$$T = 1$$

Rappelons qu'une opération A, B ou C se déroule en une unité de temps.

### II - 4 - b Cas le plus défavorable

C'est le cas où  $R$  est le plus grand, c'est-à-dire égal à  $p - 1$ . En effet, le temps nécessaire au déroulement des opérations de l'algorithme (A) est une fonction de  $R$  et varie dans le même sens. D'autre part,  $R$  est le reste de la division de  $N - 1$  par  $p$  ; le plus grand reste possible est  $p - 1$ .

Soit  $k$  un article placé dans un tel cas :

$$k \geq p :$$

l'algorithme (A) nécessite :

$$\left\{ \begin{array}{l} R \text{ fois l'opération A} \\ + \\ 1 \text{ fois l'opération } B_{J_k} \\ + \\ R \text{ fois l'opération C,} \end{array} \right.$$

Soit au total  $2R + 1$  opérations.

Comme  $R = p - 1$ , on trouve :

$$T = 2 p - 1$$

.  $k \leq p$  :

l'algorithme ( $A_0$ ) nécessite :

$$\left\{ \begin{array}{l} R \text{ fois l'opération A} \\ + \\ 1 \text{ fois l'opération B} \\ + \\ R - 1 \text{ fois l'opération C,} \end{array} \right.$$

Soit au total  $2 R$  opérations.

Par conséquent,

$$T = 2 p - 2$$

#### II - 4 - c Cas intermédiaires

Ce sont tous les autres cas, c'est-à-dire pour lesquels  $R = 1, 2, \dots, p - 2$ .

.  $k > p$  :

$$T = 2 R + 1$$

.  $k \leq p$  :

$$T = 2 R$$

Remarque :

$T$  est indépendant de  $N$  et ne dépend que de la position relative de la cellule à lire par rapport à son point critique associé.

II - 4 - d Temps moyen d'accès à un article

On calcule séparément le temps d'accès à chacune des cellules de la boucle et on en fait la moyenne.

Si  $k \geq p$ , on utilise l'algorithme (A)

Si  $k < p$ , on utilise l'algorithme ( $A_0$ ).

Les  $N - 1$  cellules de la boucle autres que la fenêtre forment un ensemble de  $\frac{N - 1}{p}$  groupes de  $p$  cellules.

Le groupe constitué des cellules  $N - 1, 1, 2, \dots, p - 1$  obéit à l'algorithme ( $A_0$ )

Le groupe suivant constitué des cellules  $p, p + 1, \dots, 2p - 1$  obéit à l'algorithme (A).

Les groupes suivants obéissent de la même façon à l'algorithme (A).

Désignons par  $E$  la somme des temps d'accès à chacune des cellules de la boucle.

$$E = 1 + 2 + 4 + \dots + 2p - 2 + \left(\frac{N - 1}{p} - 1\right) (1 + 3 + \dots + 2p - 1)$$

$$\text{or : } 1 + 2 + 4 + \dots + 2p - 2 = (1 + 3 + \dots + 2p - 1) - (p - 1)$$

On a ainsi :

$$E = (1 + 3 + \dots + 2p - 1) - (p - 1) + \left(\frac{N - 1}{p} - 1\right) (1 + 3 + \dots + 2p - 1)$$

$$E = \left(\frac{N - 1}{p} - 1 + 1\right) (1 + 3 + \dots + 2p - 1) - (p - 1)$$

On rappelle que l'expression  $1 + 3 + \dots + 2p - 1$ , est la somme des  $p$  premiers nombres impairs :

$$1 + 3 + \dots + 2p - 1 = \sum_{i=0}^{p-1} (1 + 2i) = p^2$$

Par conséquent :

$$E = \left(\frac{N-1}{p}\right) (p^2) - p + 1$$

$$E = (N-1)p - p + 1$$

$$E = p(N-2) + 1$$

Désignons par  $\bar{T}$  le temps moyen d'accès à une cellule de la boucle :

$$\bar{T} = \frac{E}{N-1} = \frac{(N-1)p - p + 1}{N-1}$$

$$\boxed{\bar{T} = p - \frac{p-1}{N-1}}$$



## II - 5 ALGORITHME DE GENERATION D'UNE PERMUTATION QUELCONQUE

### II - 5 - a Objectif

En informatique, de nombreux problèmes, et notamment le tri, se ramènent à la génération d'une permutation.

On veut utiliser les résultats des paragraphes précédents pour engendrer une permutation des articles de la boucle.

### II - 5 - b Algorithme

On veut réaliser une permutation  $\pi$  des articles contenus dans les cellules d'une boucle.

On place les articles les uns après les autres, dans l'ordre proposé par la permutation, en utilisant pour chacun d'eux l'algorithme  $(\epsilon)$  suivant :

- $(\epsilon)$   $\left\{ \begin{array}{l} 1 - \text{On applique l'algorithme (A) ou (A}_0\text{) à la cellule origine de} \\ \quad \text{l'article ;} \\ 2 - \text{On effectue l'opération D.} \end{array} \right.$

Chacun des articles traités est ainsi amené sur la cellule  $N - 1$ , et les articles placés précédemment sont repoussés vers la fenêtre.

Pour l'article  $N - 1$ , il n'est pas nécessaire d'utiliser les deux phases de l'algorithme  $(\epsilon)$ .

En effet une fois que l'on a traité les  $N - 1$  premiers articles (cellules 0 à  $N - 2$ ), on se trouve dans la situation suivante :

$\pi(0)$  occupe la cellule 1

$\pi(1)$  occupe la cellule 2

·  
·  
·

$\pi(N - 2)$  occupe la cellule  $N - 1$ .

Le dernier article à traiter occupe la position 0.

Il suffit d'effectuer une opération D pour terminer la permutation.

Remarque :

Il est clair qu'après chaque article traité, le contenu des cellules n'est plus le même qu'au début de l'algorithme.

Il est donc nécessaire de tenir à jour, pour chaque cellule, le couple (a,c) :

a est le numéro de la cellule.

c est le numéro de la cellule qu'occupait le contenu de la cellule a au début de l'algorithme.

On peut ainsi retrouver facilement, à tout instant, l'emplacement des cellules dont on veut lire le contenu.

## II - 6 TEMPS MOYEN DE GENERATION D'UNE PERMUTATION QUELCONQUE

Pour engendrer une permutation quelconque, nous venons de voir qu'il suffit d'appliquer l'algorithme ( $\epsilon$ ) pour chacun des  $N - 1$  premiers articles de la boucle, et d'effectuer une opération D.

L'algorithme ( $\epsilon$ ) est en fait l'algorithme (A) (ou l'algorithme ( $A_0$ ) selon les cas), suivi de l'opération D.

Accéder à une cellule quelconque pour en lire le contenu demande un temps moyen  $\bar{T} = p - \frac{p-1}{N-1}$ .

Pour les  $N - 1$  premiers articles à traiter, l'algorithme ( $\epsilon$ ) nécessite donc un temps  $T_{N-1} = (N - 1)(p - \frac{p-1}{N-1} + 1)$ .

Le dernier article à traiter nécessite une opération supplémentaire.

Désignons par  $\bar{T}_G$  le temps moyen de génération d'une permutation quelconque :

$$\bar{T}_G = (N - 1) \left( p - \frac{p - 1}{N - 1} + 1 \right) + 1$$

$$\bar{T}_G = (N - 1) (p + 1) + 1 - p + 1$$

$$\bar{T}_G = (N - 1) (p + 1) + 2 - p$$

Remarque :

Pour  $N$  donné, on voit que le seul moyen de réduire le temps d'accès à un article ( $\bar{T} = p - \frac{p - 1}{N - 1}$ ) ou le temps de génération d'une permutation quelconque ( $\bar{T}_G = (N - 1) (p + 1) + 2 - p$ ) est de diminuer la valeur des pas  $p$ .

Or, cette diminution de la valeur de  $p$  entraîne une augmentation du nombre de points critiques dans la boucle, c'est-à-dire du nombre de liaisons entre les points critiques et la fenêtre.

Cette remarque est très importante et fera l'objet d'une étude plus systématique dans la suite de l'exposé.

## II - 7 COMPARAISON AVEC LE MODELE DE TUNG-CHEN-CHANG

Dans le modèle de Tung, Chen, Chang, le temps moyen de génération d'une permutation quelconque est :

$$\bar{T}_{TCC} = 0,4 N^2.$$

Dans le modèle proposé ici, ce temps moyen s'exprime par la formule :

$$\bar{T}_G = (N - 1) (p + 1) + 2 - p$$

Exprimons  $\bar{T}_G$  comme une fonction de  $N$  :

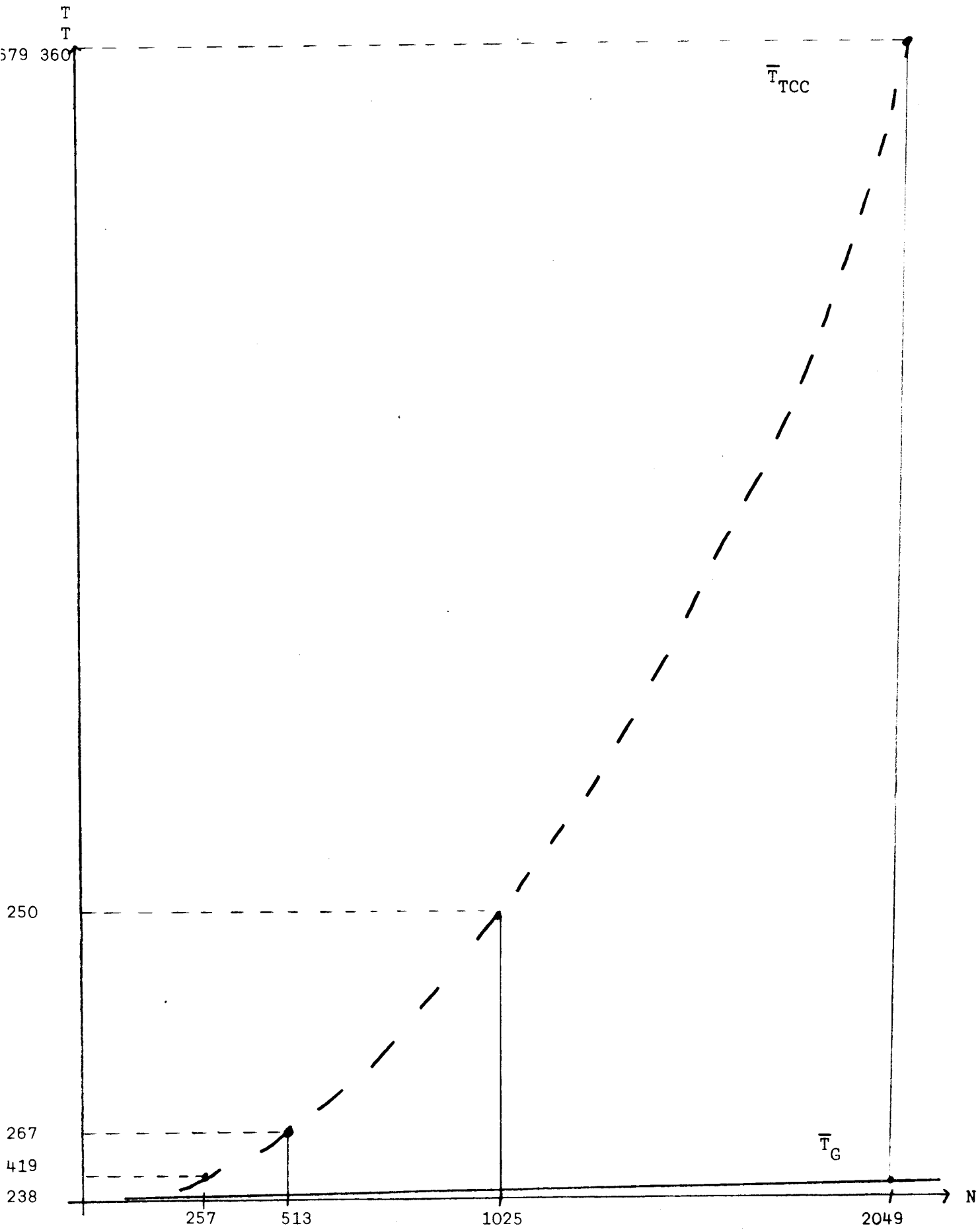
$$\bar{T}_G = (p + 1) N - 2 p + 1.$$

On remarque que dans le modèle de Tung, Chen, Chang, le temps moyen  $\bar{T}_{TCC}$  est une fonction de  $N^2$ , tandis que dans notre modèle, et pour  $p$  fixé le temps moyen  $\bar{T}_G$  est une fonction linéaire de  $N$ .

Pour comparer les deux modèles, on va calculer, pour différentes valeurs de  $N$ , les valeurs de  $\bar{T}_{TCC}$  et  $\bar{T}_G$  (avec  $p = 4$ ) :

$N$	$\bar{T}_{TCC}$	$\bar{T}_G$ (pour $p = 4$ )
2 049	1 679 360	10 238
1 025	420 250	5 118
513	105 267	2 558
257	26 419	1 278
129	6 656	638
65	1 690	318
33	435	158

Tableau comparatif des temps moyens de génération d'une permutation quelconque pour le modèle de Tung, Chen, Chang ( $\bar{T}_{TCC}$ ) et pour notre modèle ( $\bar{T}_G$ ).



Graphes de  $\bar{T}_{TCC}$  et  $\bar{T}_G$ .



Appelons  $(D_1)$  le graphe de  $\bar{T}_{TCC}$ , et  $(D_2)$  le graphe de  $\bar{T}_G$ .

Calculons les coordonnées des points d'intersection de  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .

$$0,4 N^2 = (N - 1) (p + 1) + 2 - p$$

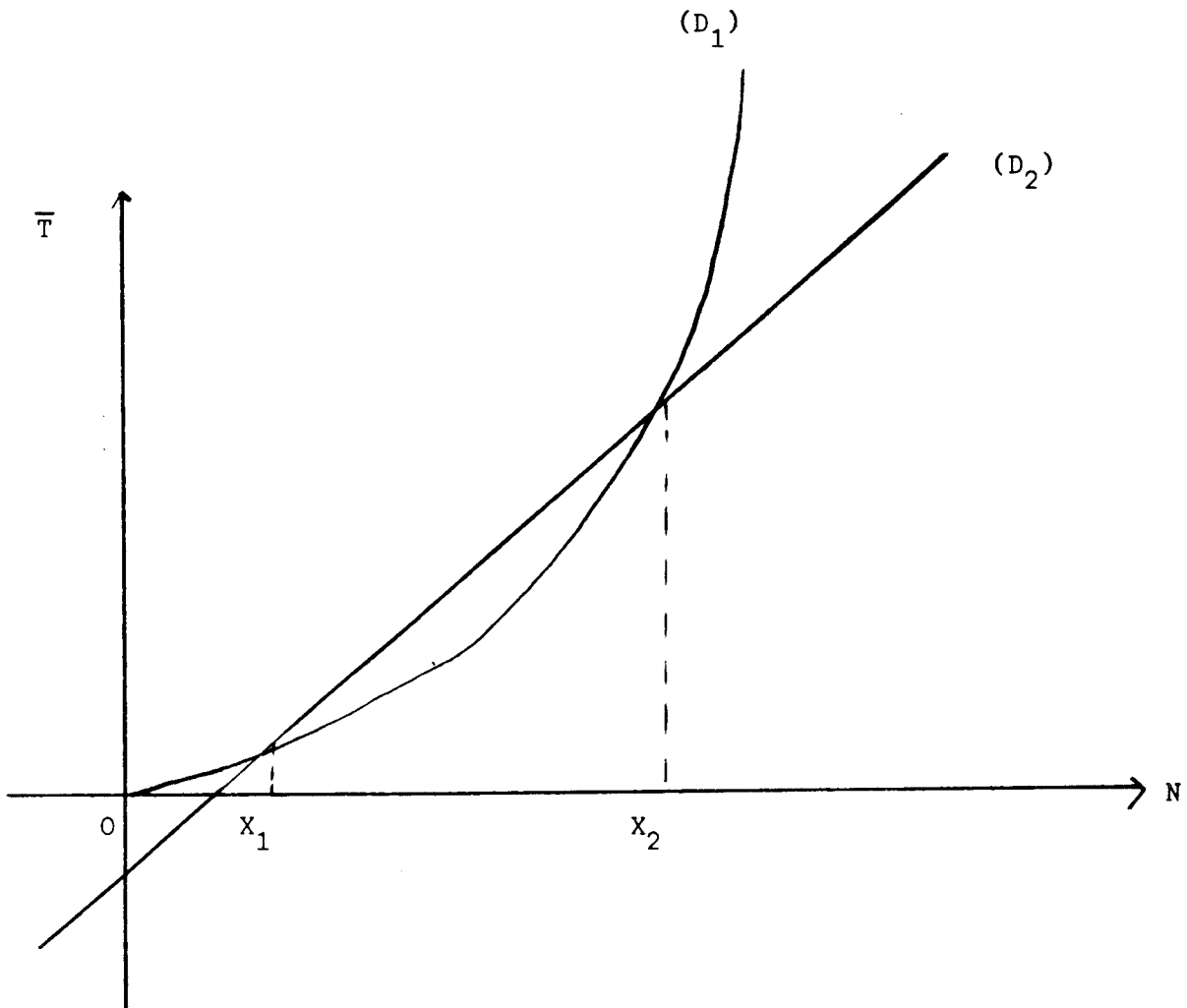
$$0,4 N^2 = N (p + 1) - p - 1 + 2 - p$$

$$0,4 N^2 = N (p + 1) + 2 p - 1 = 0$$

$$\Delta = (p + 1)^2 - 4 (0,4) (2 p - 1)$$

Les abscisses des points d'intersection sont données par l'expression :

$$X = \frac{p + 1 \pm \sqrt{\Delta}}{2(0,4)} \quad \text{qui déterminent 2 points d'abscisse } X_1 \text{ et } X_2.$$



Entre les 2 points d'abscisse  $X_1$  et  $X_2$ , le modèle de Tung, Chen, Chang permet la génération d'une permutation quelconque de manière plus rapide.

On remarque que les valeurs de  $N$  ainsi trouvées sont très limitées, puisque comprises entre  $\frac{p+1+\sqrt{\Delta}}{0,8}$  et  $\frac{p+1-\sqrt{\Delta}}{0,8}$ .

On remarque ainsi que l'intérêt de notre modèle n'est conservé que si  $\epsilon$  est suffisamment petit devant  $N$ .

## II - 8 PROPOSITION POUR UN MECANISME DE CONTROLE

Rappelons que pour engendrer une permutation quelconque, on utilise l'algorithme ( $\epsilon$ ) qui nécessite :

$$\left. \begin{array}{l} R \text{ fois l'opération } A \\ + \\ 1 \text{ fois l'opération } B_{J_k} \\ + \\ R \text{ fois l'opération } C \\ + \\ 1 \text{ fois l'opération } D \end{array} \right\} \text{ si } k \geq p$$

$$\left. \begin{array}{l} R \text{ fois l'opération } A \\ + \\ 1 \text{ fois l'opération } B_{J_k} \\ + \\ R - 1 \text{ fois l'opération } C \\ + \\ 1 \text{ fois l'opération } D \end{array} \right\} \text{ si } k < p$$

On appellera mécanisme de contrôle, le mécanisme qui permet de déterminer la suite des opérations à effectuer pour lire une cellule.

Nous allons d'abord étudier :

- les types de liaisons,
- les liaisons utilisées par chaque type d'opération.

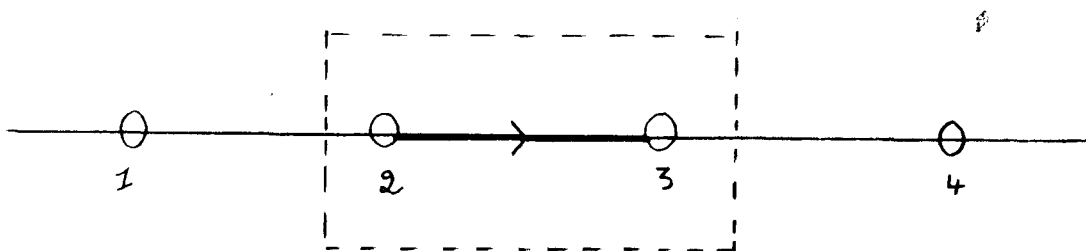
### II - 8 - a Types de liaisons

Suivant les types d'opérations utilisant ces liaisons, on peut distinguer plusieurs types de liaisons :

- la séquence directe :  
c'est une liaison entre deux cellules successives, dans l'ordre croissant des numéros de cellules.
- la séquence inverse :  
c'est une liaison entre deux cellules successives dans l'ordre inverse des numéros de cellules.
- le branchement :  
c'est une liaison entre deux cellules non successives.

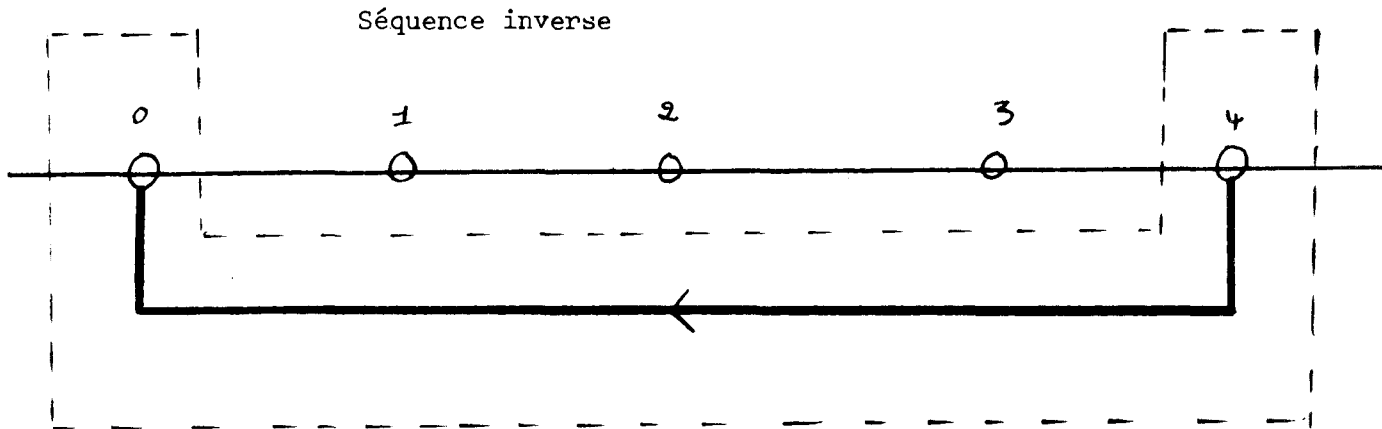
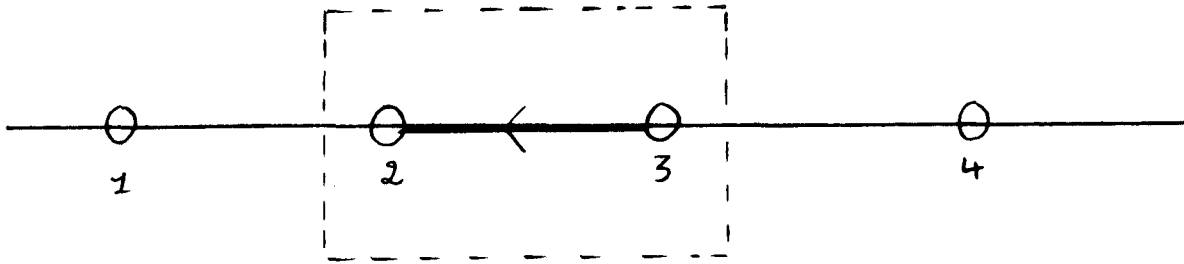
Les branchements possibles sont :

- liaisons entre les points critiques et la fenêtre,
- liaison entre les cellules  $N - 1$  et  $2$ ,
- liaison entre les cellules  $1$  et  $N - 1$ .



Séquence directe

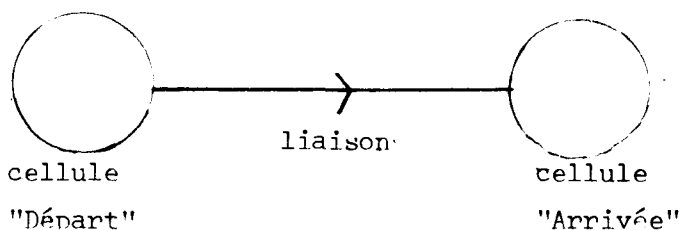




Branchement

## II - 8 - b Liaisons utilisées par chaque type d'opérations

On construit un tableau à double entrée : verticalement, on indiquera les cellules "départ" de la liaison et horizontalement les cellules "arrivée".



A l'intersection d'une ligne et d'une colonne, une liaison sera indiquée par le ou les types d'opérations sur cette liaison.

Types de liaisons :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
0	I	SD															SI	
1	SI	I	SD														B	
2		SI		SD														
3			SI		SD													
4	B			SI		SD												
5					SI	I	SD											
6						SI	I	SD										
7							SI	I	SD									
8	B							SI	I	SD								
9									SI	I	SD							
10										SI	I	SD						
11											SI	I	SD					
12	B											SI	I	SD				
13													SI	I	SD			
14														SI	I	SD		
15															SI	I	SD	
16	SD	B															SI	I

SD = Séquence Directe

SI = Séquence Inverse

B = Branchement

I = Identité



Liaisons utilisées par chaque type d'opérations :

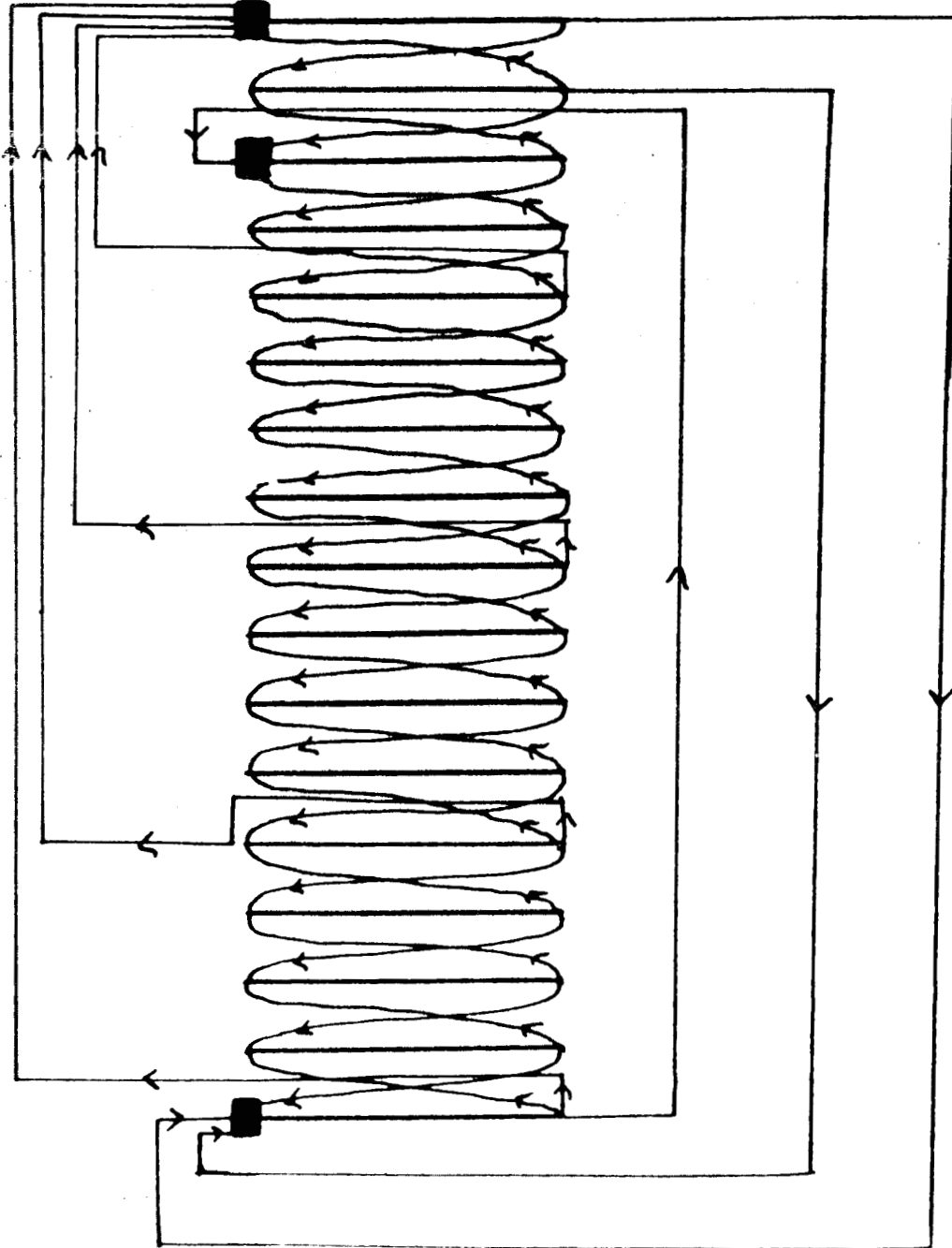
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	A,C	B															
1	D	C	B														
2		A,D		B,C													
3			A,D		B,C												
4	B			A,D		B,C											
5					A,D	B	B,C										
6						A,D	B	B,C									
7							A,D	B	B,C								
8	B							A,D	B	B,C							
9									A,D	B	B,C						
10										A,D	B	B,C					
11											A,D	B	B,C				
12	B											A,D	B	B,C			
13													A,D	B	B,C		
14														A,D	B	B,C	
15															A,D	B	B,C
16	B		C													A,D	B



II - 8 - c Implantation des liaisons matérielles

Reprenons l'exemple précédent ( $N = 17$  ;  $p = 4$ ).

On peut représenter sur un schéma la boucle avec ses liaisons.



■ = Multiplexeur



Pour toute boucle, on aura trois multiplexeurs en entrée des cellules de position 0, 2 et  $N - 1$ .

Sur le schéma, on a supposé que deux liaisons arrivant à l'entrée d'une cellule ne nécessitaient pas de multiplexeur.

L'état de la technique actuelle permet d'ailleurs d'avoir une séquence directe et une séquence inverse sur la même liaison.

### II - 8 - d Nombre de liaisons matérielles

Pour une boucle de  $N$  cellules, le nombre de liaisons se décompose de la façon suivante :

- $2 N$  liaison séquence directe et inverse entre deux cellules consécutives.
- $\frac{N - 1}{p}$  liaisons entre les points critiques et la fenêtre (sauf, pour le point critique de position  $N - 1$  qui a déjà une liaison séquence directe avec la fenêtre).
- 1 liaison de la cellule  $N - 1$  à la cellule 2.
- 1 liaison de la cellule 1 à la cellule  $N - 1$ .

On rappelle qu'en plus des liaisons matérielles, il est nécessaire d'avoir trois multiplexeurs en entrée des cellules 0 ( $\frac{N - 1}{p}$  entrées), 2 (3 entrées) et  $N - 1$  (3 entrées).

### II - 8 - e Mécanisme de contrôle

Appelons SEQUENCE D'OPERATIONS la suite d'opérations :

A, A, ..., A,  $B_{J_k}$ , C, C, ..., C, D

nécessaire pour déplacer un article.

Appelons MOT DE CONTROLE une suite finie de lettres de l'alphabet  $\{a, b_1, b_2, \dots, b_{\frac{N-1}{p}}, c, d\}$ .

Les lettres a, c, d désignent respectivement les opérations a, c, d.

Les lettres  $b_i$  désignent les opérations de type B, l'indice i correspondant au numéro du point critique.

Le nombre de mots de contrôle possibles sur notre alphabet et pour notre modèle, est fini.

En effet,

- pour  $k \geq p$ , les différents mots sont exactement :

$$\begin{array}{l}
 b_i d \\
 a b_i c d \\
 a a b_i c c d \\
 a a a b_i c c c d \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \underbrace{a a \dots a}_{(p-1) a} b_i \underbrace{c c \dots c}_{(p-1) c} d ,
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} b_i d \\ a b_i c d \\ a a b_i c c d \\ a a a b_i c c c d \\ \vdots \\ \vdots \\ \underbrace{a a \dots a}_{(p-1) a} b_i \underbrace{c c \dots c}_{(p-1) c} d ,} \right\} p \text{ mots}$$

i variant de 1 à  $\frac{N-1}{p} - 1$ .

On a donc  $(\frac{N-1}{p} - p) p$  mots, c'est-à-dire  $N - 1 - p$  mots.

- pour  $0 < k < p$ , les différents mots sont exactement :

$$\begin{array}{c}
 a \frac{b_{N-1}}{p} d \\
 a a \frac{b_{N-1}}{p} c d \\
 a a a \frac{b_{N-1}}{p} c c d \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \underbrace{a a \dots a}_{(p-1) a} \frac{b_{N-1}}{p} \underbrace{c c \dots c}_{(p-2) c} d.
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} a \frac{b_{N-1}}{p} d \\ a a \frac{b_{N-1}}{p} c d \\ a a a \frac{b_{N-1}}{p} c c d \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underbrace{a a \dots a}_{(p-1) a} \frac{b_{N-1}}{p} \underbrace{c c \dots c}_{(p-2) c} d. \end{array}} \right\} p - 1 \text{ mots}$$

On a  $p - 1$  mots.

- Si  $k = N - 1$ , le mot de contrôle est

$$\frac{b_{N-1}}{p};$$

or dans ce cas,  $b$  et  $d$  représentent des cycles inverses l'un de l'autre.

$\frac{b_{N-1}}{p} d$  représente donc l'opération "identité" qui laisse tous les articles à leur position.

Rajoutons dans notre alphabet la lettre  $i$  représentant l'opération identité.

Notre alphabet devient ainsi :

$$\{a, b_1, b_2, \dots, \frac{b_{N-1}}{p}, c, d, i\}.$$

Dans notre boucle, le mécanisme de propagation des articles est réglé par une horloge ; à chaque "top" de l'horloge, chacun des articles se trouve exactement dans une cellule ; le temps séparant chaque "top" est la durée de propagation des articles.

Nous connaissons les liaisons utilisées pour chaque type d'opérations.

L'algorithme ( $\epsilon$ ) permet de créer un mot de contrôle pour chaque article à traiter.

A chaque "top" de l'horloge, on peut déterminer pour chacune des cellules, et en fonction du mot de contrôle, les liaisons à établir.

On peut donc créer l'automate équivalent à ce déterminisme.

L'automate est un dispositif prenant successivement des états correspondant aux lettres du mot de contrôle.

A chaque lettre correspond un ensemble de liaisons déterminé par l'opération qui lui est associée.

L'automate se chargera de réaliser ces liaisons.

Exemple :  $N = 17$ ,  $p = 4$ .

On suppose qu'à un instant donné, l'article à traiter se trouve dans la cellule 6.

Pour satisfaire cette demande de traitement, le mot de contrôle est :

a a b<sub>1</sub> c c d.

Représentons les états successifs de l'automate (états correspondant au mot de contrôle) sur un tableau à double entrée :

- entrée horizontale : les états
- entrée verticale : les cellules.

On indique sur ce tableau les types de liaisons :

- séquence directe : SD
- séquence inverse : SI
- identité : I
- branchement à la cellule  $i$  : B <sub>$i$</sub> .



Sur chaque ligne correspondant à un état, on trouve donc, pour chacune des cellules 0, 1, ..., 16, le type de liaison à établir.

Cellules →

États

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a	I	B <sub>16</sub>	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
a	I	B <sub>16</sub>	DI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
b	SD	SD	SD	SD	B <sub>0</sub>	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
c	I	I	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	B <sub>2</sub>
c	I	I	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	B <sub>2</sub>
d	B <sub>16</sub>	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI

Plus généralement, représentons les états successifs de l'automate correspondant au mot de contrôle :

a a . . . a v<sub>i</sub> c c . . . c d.



Cellules →

l'opération

Etats ↓	Cellules →					point critique pour B						
	0	1	2	3	...	J-1	$J_K$	J+1	J+2	...	N-2	N-1
a	I	$B_{16}$	SI	SI	...	SI	SI	SI	SI	...	SI	SI
a	I	$B_{16}$	SI	SI	...	SI	SI	SI	SI	...	SI	SI
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
a	I	$B_{16}$	SI	SI	...	SI	SI	SI	SI	...	SI	SI
$b_i$	SD	SD	SD	SD	...	SD	$B_0$	I	I	...	I	I
c	I	I	SD	SD	...	SD	SD	SD	SD	...	SD	$B_2$
c	I	I	SD	SD	...	SD	SD	SD	SD	...	SD	$B_2$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
c	I	I	SD	SD	...	SD	SD	SD	SD	...	SD	$B_2$
d	$B_{16}$	SI	SI	SI	...	SI	SI	SI	SI	...	SI	SI



## II - 9 LE PROBLEME DE COÛT

Rappelons brièvement l'objectif que nous nous étions fixés.

Pour une boucle donnée de N cellules, on désire un temps d'accès à un article le plus faible possible avec un coût minimum (en nombre de liaisons).

Rappelons que le temps d'accès moyen à un article est donné par la formule :

$\bar{T} = p - \frac{p-1}{N-1}$  et le temps de génération d'une permutation quelconque par :

$$\bar{T}_G = (N-1)(p+1) + 2 - p.$$

Pour N donné, le seul moyen de réduire ces temps est de diminuer la valeur du pas p (à la limite p = 1).

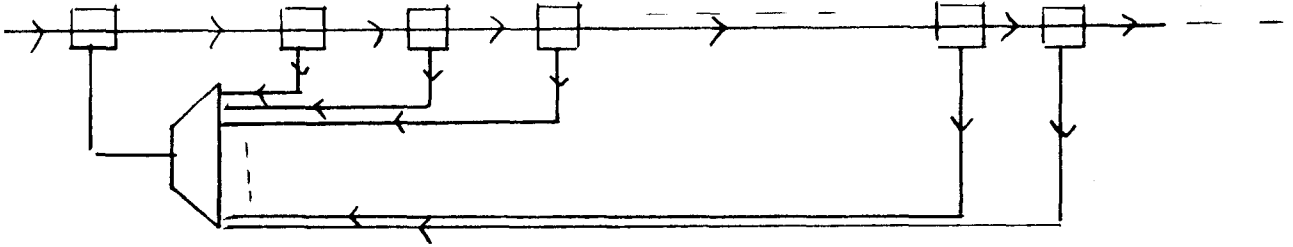
Or, le nombre de liaisons est une fonction de p ; en effet, aux liaisons fixes concernant deux cellules voisines, s'ajoutent les liaisons des points critiques à la fenêtre.

Et plus le pas p est petit, plus le nombre de liaisons entre les points critiques et la fenêtre est élevé.

On peut donc dire que la conception d'une boucle selon notre modèle sera un compromis entre la rapidité du temps d'accès aux articles et le coût entraîné par la complexité des liaisons.

D'autre part, le dispositif permettant de relier m cellules à une cellule donnée (le "multiplexeur") possède une capacité de connexion très limitée (par exemple 16 pour un composant).

Cette contrainte implique une limite au nombre maximum de points critiques dans la boucle.



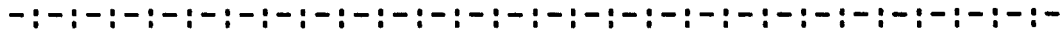
Multiplexeur



\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

CHAPITRE  
III

CONCEPTION D'UN DISQUE ELECTRONIQUE UTILISANT  
LE MODELE DE PERMUTATION PROPOSE



### III - 1 RAPPEL SUR LES DISQUES CLASSIQUES ET LES DISQUES ELECTRONIQUES

#### III - 1 - a Les disques classiques

Ce sont des disques recouverts d'une couche magnétisable et où l'information s'enregistre sur des cercles concentriques (pistes).

L'accès à un article se fait grâce à une tête de lecture/écriture qui se positionne sur la piste contenant l'article. Le disque tourne à vitesse constante et l'article recherché passera forcément sous la tête de lecture/écriture. Pour augmenter la capacité d'une telle mémoire auxiliaire, on dispose en général plusieurs disques autour d'un axe commun, le dispositif de lecture et d'écriture étant placé entre les disques.

La capacité de ces disques classiques se situe autour de 100 millions d'octets, avec un temps moyen d'accès de 20 millisecondes. Ces données sont purement indicatives car elles varient considérablement selon les constructeurs.

#### III - 1 - b Les disques électroniques

On appelle disque électronique un dispositif de conservation de l'information constitué par une boucle ou un ensemble de boucles dans lesquelles l'information circule, contrairement aux disques classiques où l'information est statique par rapport au support.

Ce type de mémoire est aussi appelé une "mémoire circulante".

Une boucle de mémoire circulante se compose d'un milieu de propagation discrétisé et d'une fenêtre d'accès aux informations.

Les informations sont localisées dans des cellules qui communiquent entre-elles sous le contrôle d'une horloge commune.

Deux techniques se dégagent actuellement : d'une part, les mémoires à couplage de charges (propagation de charges électriques dans un semi-conducteur et déplacement contrôlable à l'aide d'électrodes) ; d'autre part, les mémoires à bulles (discontinuités dans un monocristal de matériau magnétique homogène ; un réseau de zones aimantées fixe la progression de ces discontinuités ou bulles).

La durée de propagation peut être de 100 nanosecondes pour la mémoire à couplage de charges et de deux microsecondes pour la mémoire à bulles.

L'information est volatile dans la mémoire à couplage de charges et non volatile dans la mémoire à bulles.

### III - 2 OBJECTIF

On se propose de concevoir un disque électronique dont les caractéristiques soient intermédiaires entre celles de la mémoire centrale et d'un disque classique, c'est-à-dire avec un temps d'accès à un article de l'ordre de 100  $\mu$ s et de capacité de 10 millions d'octets (ou caractères).

On sait qu'une grande partie de la puissance de l'unité centrale est perdue en partie à cause de la lenteur des transferts entre mémoire centrale et disques classiques.

En effet, un accès disque est dix mille fois plus lent qu'un accès en mémoire centrale.

Dans ce contexte, l'idée d'une mémoire intermédiaire rapide de grande capacité est toute naturelle : elle servirait de "mémoire-tampon" entre la mémoire centrale et les disques.

Sa vitesse d'accès serait 100 fois inférieure à celle de la mémoire centrale mais 100 fois supérieure à celle d'un disque classique.

Sa capacité serait 10 fois supérieure à celle de la mémoire centrale mais 10 fois inférieure à celle d'un disque classique.

L'utilisation de cette mémoire tampon donne à l'unité centrale une plus grande efficacité.

### III - 3 PROPOSITION POUR LA CONCEPTION D'UN DISQUE ELECTRONIQUE

Le disque dont les objectifs ont été définis précédemment peut être conçu en technologie "charges couplées", le caractère volatile de l'information n'étant pas un handicap pour une mémoire-tampon.

La durée de propagation dans ce type de mémoire sera supposée égale à 100 nanosecondes (déjà réalisé techniquement).

On rappelle que le temps moyen d'accès à un article d'une boucle de mémoire circulante à l'aide de notre modèle de permutation est donné par la formule :  $\bar{T} = p - \frac{p-1}{N-1}$ .

On va utiliser des multiplexeurs capables de recevoir 16 entrées.

Si  $p - 1$  est petit devant  $N - 1$ , on remarque que  $\bar{T}$  peut être approché simplement grâce à la formule  $\bar{T} = p$ .



Pour obtenir un temps moyen d'accès de l'ordre de 100  $\mu$ s, on voit que l'ordre de grandeur de  $p$  doit être de 1 000 (puisque la durée de propagation est 100 nanos).

Utilisons le nombre maximal d'entrées pour les multiplexeurs, c'est-à-dire 16.

Prenons  $p = 1024$ .

Notre boucle de mémoire circulante est ainsi un ensemble de  $16 \times 1024$  cellules contenant chacune 1 bit d'information, auquel on ajoute une fenêtre d'accès, soit 16385 cellules.

Un octet étant représenté sur 8 bits plaçons en parallèle 8 boucles semblables à la précédente.

La commande d'accès doit agir sur les huit boucles simultanément, ce qui permet la lecture d'un octet dans le temps moyen  $\bar{T}$ .

Plaçons à présent 1024 ensembles de 8 boucles, en parallèle :  
(voir schéma page suivante).

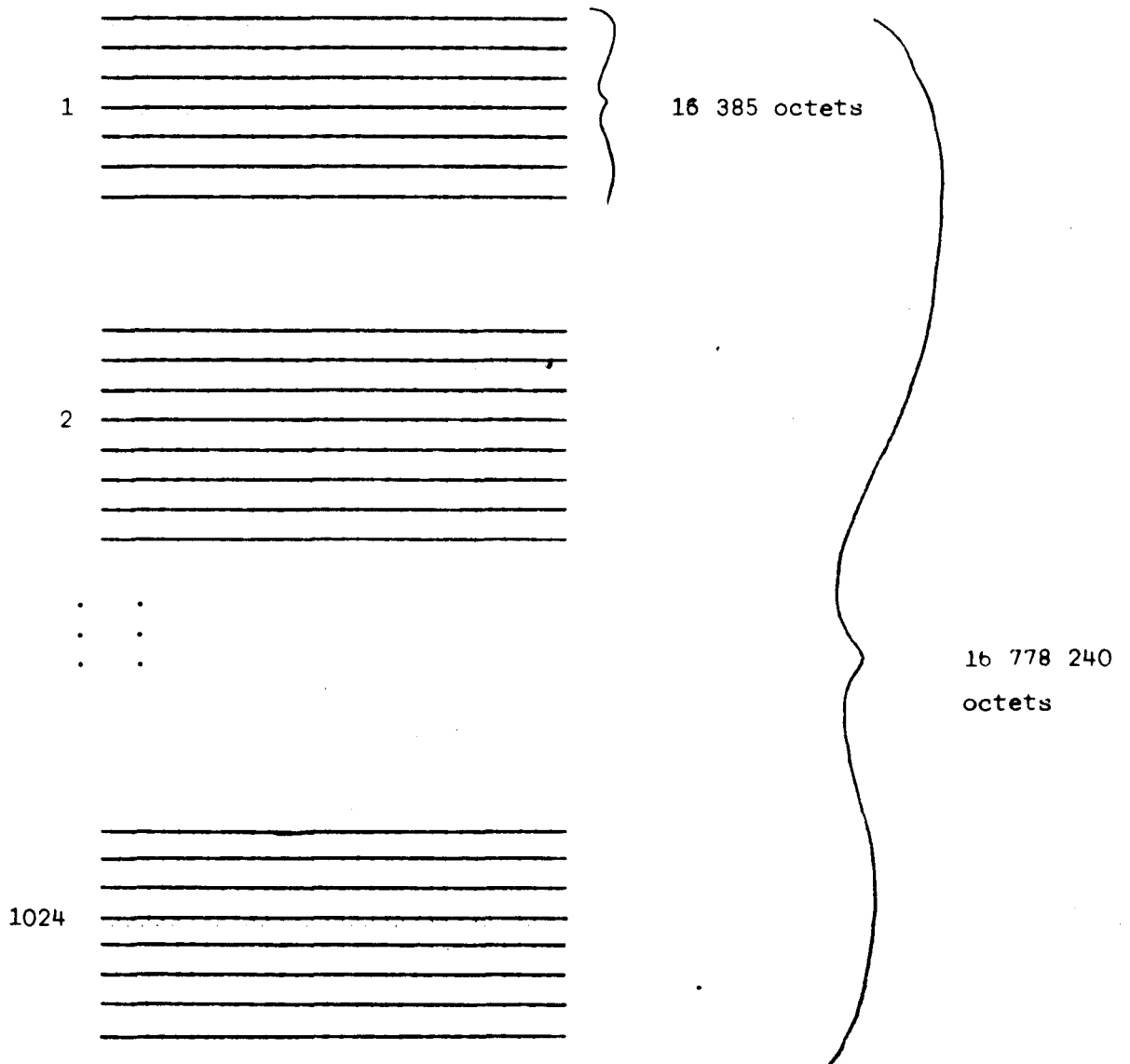
La situation idéale serait de pouvoir lire les 1024 octets par une seule commande, d'ailleurs réalisable au niveau du disque.

Mais ces octets doivent parvenir à la mémoire centrale de l'ordinateur, par un certain nombre de liaisons, séquentiellement, et à une certaine vitesse.

Nous considérons qu'une commande a accès à un sous-ensemble des 1024 ensembles de 8 boucles définis précédemment.

Cette commande sera supposée agir sur un certain nombre d'octets, de façon à ne pas provoquer de files d'attente à l'entrée de l'ordinateur.





On a ainsi défini un disque électronique possédant les caractéristiques suivantes :

- capacité : de l'ordre de 16 millions d'octets.

- temps moyen d'accès à un article :

$$\bar{T} = p - \frac{p-1}{N-1} = 1024 - \frac{1023}{16384}$$

Calculons

$$\bar{T} \text{ en } \mu\text{s} \quad \bar{T} = 1024,9376 \times 100 \times 10^{-9} \text{ s}$$



$$\bar{T} = 102,49 \mu s$$

$$\bar{T} \sim 100 \mu s$$

### III - 4 SIMULATION SUR ORDINATEUR DU TEMPS MOYEN D'ACCES

Il a paru utile de conforter les résultats par une simulation sur ordinateur.

Le programme utilisé réalise un tirage aléatoire de 10 000 nombres parmi les  $N - 1$  premiers nombres entiers représentant les  $N - 1$  cellules d'une boucle, autres que la fenêtre.

On simule l'accès aux cellules en comptants, d'après l'algorithme (A) ou ( $A_0$ ), le nombre d'opérations nécessaires et on utilise plusieurs valeurs du pas  $p$ . (voir programme en annexe).

#### III - 4 - a Boucle de 1024 cellules (+ la fenêtre) avec des pas de 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512

Temps moyen d'accès pour différentes valeurs de  $p$ .

P	Temps moyen
2	1.9984
4	3.9987
8	8.0186
16	16.0582
32	32.0496
64	64.0965
128	129.175
256	256.513
512	515.127

III - 4 - b Boucle de 16384 cellules (+ la fenêtre) avec des pas de 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024

C'est en fait la boucle proposée dans le paragraphe 4) pour la conception d'un disque électronique.

Temps moyen d'accès pour différentes valeurs de p.

P	Temps moyen
2	1.9995
4	3.9987
8	8.0008
16	16.0005
32	31.9832
64	64.0135
128	128.393
256	257.129
512	513.216
1024	1026.42

Comparaison entre les résultats donnés par la formule du temps moyen d'accès à un article :  $\bar{T} = p - \frac{p-1}{N-1}$  et ceux donnés par la simulation :

N = 1025 :

P	Formule $\bar{T} = p - \frac{p-1}{N-1}$	Simulation S	$\frac{ \bar{T} - S }{\bar{T}}$ en pourcentage
2	1.9990	1.9984	0,03 %
4	3.9970	3.9987	0,04 %
8	7.9931	8.0186	0,3 %
16	15.9853	16.0582	0,4 %
32	31.9697	32.0496	0,2 %
64	63.9384	64.0965	0,2 %
128	127.8759	129.175	1 %
256	255.7509	256.513	0,3 %
512	511.5009	515.127	0,7 %

$$N = 16385 :$$

P	Formule $\bar{T} = p - \frac{p-1}{N-1}$	Simulation S	$\frac{ \bar{T} - S }{\bar{T}}$ en pourcentage
2	1.9999	1.9995	0,02 %
4	3.9998	3.9987	0,02 %
8	7.9995	8.0008	0,01 %
16	15.9990	16.0005	0,01 %
32	31.9981	31.9832	0,05 %
64	63.9961	64.0135	0,03 %
128	127.9922	128.393	0,3 %
256	255.9844	257.129	0,4 %
512	511.9688	513.216	0,2 %
1024	1023.9376	1026.42	0,2 %

On constate que la simulation effectuée pour 10.000 valeurs aléatoires représentant des articles, et ceci pour différentes valeurs de p, approche à moins de 1 % la formule du temps d'accès moyen

$$\bar{T} = p - \frac{p-1}{N-1}$$

### III - 5 SIMULATION DE L'ALGORITHME ( $\epsilon$ ) DE GENERATION D'UNE PERMUTATION QUELCONQUE

Le programme TH 02 (voir Annexe) réalise cette simulation.

On dispose d'une boucle de N = 17 cellules, de pas p = 4.

La permutation demandée est entrée au terminal et vient remplir un tableau A de 17 éléments.

A tout instant, les éléments du tableau B représentent les cellules de la boucle.

On associe à chaque article, le numéro de la cellule qui le contient au début de l'algorithme.

Un tableau E permet de conserver les positions des cellules de la permutation

$$E(i) = B(A(i)) \text{ ? pour } i = 0, 1, \dots, 16.$$

Les quatre opérations nécessaires au déroulement de l'algorithme sont en sous-programme.

Après chaque élément traité, on liste le tableau B qui est l'image de la boucle.

Résultats de l'exécution du programme de simulation TH.02 pour la permutation  
 suivante :  $\pi = (4, 16, 7, 1, 11, 6, 3, 14, 12, 0, 9, 15, 8, 5, 10, 2, 13)$

EVOLUTION DE LA BOUCLE :

0	1	2	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	4
0	1	2	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	4	16
0	1	2	3	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15	4	16	7
0	2	3	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15	4	16	7	1
0	2	3	5	6	8	9	10	12	13	14	15	4	16	7	1	11
0	2	3	5	8	9	10	12	13	14	15	4	16	7	1	11	6
0	2	5	8	9	10	12	13	14	15	4	16	7	1	11	6	3
0	2	5	8	9	10	12	13	15	4	16	7	1	11	6	3	14
0	2	5	8	9	10	13	15	4	16	7	1	11	6	3	14	12
2	5	8	9	10	13	15	4	16	7	1	11	6	3	14	12	0
2	5	8	10	13	15	4	16	7	1	11	6	3	14	12	0	9
2	5	8	10	13	4	16	7	1	11	6	3	14	12	0	9	15
2	5	10	13	4	16	7	1	11	6	3	14	12	0	9	15	8
2	10	13	4	16	7	1	11	6	3	14	12	0	9	15	8	5
2	13	4	16	7	1	11	6	3	14	12	0	9	15	8	5	10
13	4	16	7	1	11	6	3	14	12	0	9	15	8	5	10	2
4	16	7	1	11	6	3	14	12	0	9	15	8	5	10	2	13



```
*****  
*****  
*****  
**** CHAPITRE ****  
*****  
*****  
*****  
**** IV ****  
*****  
*****  
*****
```

GENERALISATION DE LA NOTION  
DE POINT CRITIQUE





#### IV - 1 INTRODUCTION

Le modèle présenté est un compromis entre le temps d'accès à une cellule et la complexité due au nombre de liaisons entre les cellules.

Au chapitre précédent, nous avons appliqué notre modèle à la conception d'un disque électronique et nous avons remarqué que la limite de la capacité du disque est atteinte rapidement, en raison de la complexité de la réalisation.

La généralisation de la notion de "point critique" va nous permettre de reculer cette limite.

Nous pourrions ainsi étudier la conception d'un disque électronique de très grande capacité, utilisable non plus en tant que mémoire-tampon rotative mais en tant que mémoire auxiliaire avec permanence de l'information.

#### IV - 2 GENERALISATION DE LA NOTION DE POINT CRITIQUE

Considérons une boucle de  $N$  cellules et de pas  $p$ .

Appelons segment une partie de la boucle constituée par un point critique et les cellules comprises entre ce point critique et le suivant.

Pour le point critique de position  $N - 1$ , on prendra les cellules de position inférieure à  $p$

Etablissons une liaison entre le dernier point d'un segment et le premier (qui est un point critique de la boucle).

Nous définissons ainsi une boucle de  $p$  cellules, dont la fenêtre est le point critique qui a servi à sa définition.

Considérons une boucle de longueur  $N$ , de pas  $p_1$  ; nous avons ainsi  $\frac{N-1}{p_1}$  points critiques et  $\frac{N-1}{p_1}$  segments de longueur  $p_1$ .

Appelons cette boucle une boucle de niveau 1, les points critiques des points critiques de niveau 1, et nous dirons que nous nous trouvons dans une situation de niveau 1.

Considérons maintenant chacun des segments comme une boucle de longueur  $p_1$ , de pas  $p_2$ .

Nous avons ainsi  $\frac{p_1-1}{p_2}$  points critiques et  $\frac{p_1-1}{p_2}$  segments de longueur  $p_2$ .

Les nouvelles boucles ainsi définies seront des boucles de niveau 2, avec des points critiques de niveau 2, et nous dirons que nous nous trouvons dans une situation de niveau 2.

Plus généralement, plaçons-nous dans une situation de niveau  $i$ .

Désignons par  $p_i$  le pas du niveau  $i$ .

Chaque boucle de niveau  $i$  contient  $\frac{p_{i-1}-1}{p_i}$  points critiques et  $\frac{p_{i-1}-1}{p_i}$  segments de longueur  $p_i$ .

On peut à nouveau sub-diviser chacun de segments précédents en  $\frac{p_i-1}{p_{i+1}}$  segments contenant chacun  $p_{i+1}$  cellules.

On voit que, d'un niveau à l'autre, chaque  $p_i$  est lié à  $p_{i+1}$  par une équation du type :

$$p_i = c_i * p_{i+1}$$

avec  $c_i \in \mathbf{N}$ ,  $1 \leq c_i \leq p_i$

On a :

$$p_1 = c_1 * p_2$$

$$p_2 = c_2 * p_3$$

$$p_3 = c_3 * p_4$$

.

.

.

$$p_i = c_i * p_{i+1}$$

Supposons tous les  $c_i$  égaux ( $c_i = c, \forall_i$ ) ; il vient :

$$p_1 = c^i * p_i$$

#### IV - 3 ALGORITHME D'ACCES A UN ARTICLE k

Plaçons-nous dans une situation de niveau I, avec une boucle de N cellules et de pas p.

Pour accéder à un article, il faudra d'abord amener l'article sur la fenêtre du niveau de rang le plus élevé. Cette fenêtre est aussi un point critique du niveau de rang immédiatement inférieur.

L'article sautera ainsi de niveau de proche en proche, par des opérations de type B, jusqu'à la fenêtre de la boucle de niveau 1.

Appliquons l'algorithme (A) pour chaque niveau :

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} R \text{ fois l'opération de type A} \\ + \\ 1 \text{ fois une opération de type B} \\ + \\ R \text{ fois l'opération de type C} \\ (\text{ou } R - 1 \text{ fois si } k < p) \end{array} \right.$$

Dans le niveau de rang le plus élevé, on devra effectuer l'algorithme complet, c'est-à-dire  $2R + 1$  opérations.

Cependant, pour sauter de niveau, l'algorithme se réduit à une seule opération de type B.

Appelons  $(A_i)$  l'algorithme ainsi défini dans un état de niveau  $i$  :

$$(A_i) \left\{ \begin{array}{l} R \text{ fois l'opération de type A} \\ + \\ 1 \text{ fois une opération de type B} \\ + \\ R \text{ fois l'opération de type C} \\ + \\ (i-1) \text{ fois une opération de type B} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sur la boucle de niveau} \\ \text{le plus élevé} \\ \rightarrow \text{ ou } R - 1 \text{ fois si } k < R \\ \text{Sur des boucles de niveaux} \\ \text{de moins en moins élevé,} \\ \text{jusqu'à la boucle de niveau} \\ \text{1 qui conduira l'article sur} \\ \text{la fenêtre de lecture} \end{array}$$

#### IV - 4 TEMPS D'ACCES MOYEN A UN ARTICLE

Dans la boucle de niveau  $i$ , le temps moyen d'accès à un article (c'est-à-dire le temps moyen pour amener l'article sur la fenêtre de ce niveau, tout en conservant un "arrangement dynamique"), est  $p_i - \frac{p_{i-1}}{N_{i-1}}$ ,  $N_i$  étant le nombre de cellules dans la boucle de niveau  $i$ .

Ensuite, pour amener l'article sur la fenêtre du niveau 1, il faudra sauter de  $(i-1)$  niveaux, soit effectuer  $(i-1)$  opérations de type B.

Ainsi :

$$\bar{t} = p_i - \frac{p_{i-1}}{N_{i-1}} + i - 1$$

#### IV - 5 TEMPS MOYEN DE GENERATION D'UNE PERMUTATION QUELCONQUE

Au temps  $\bar{T}_G = (N - 1) (p + 1) + 2 - p$  que nous avons trouvé au chapitre II, il faut ajouter le temps nécessaire pour franchir les niveaux successifs.

Ce temps est constant :  $(N - 1) (i - 1)$ . Il vient :

$$\bar{T}_p = (N - 1) (p_i + 1) + 2 - p_i + (N - 1) (i - 1)$$

Par conséquent :

$$\bar{T}_p = (N - 1) (p_i + i) + 2 - p_i$$

#### IV - 6 REMARQUES

a) L'"arrangement dynamique" tel qu'il a été défini dans le chapitre I, se fait à l'intérieur de chaque niveau.

La progression de l'article à lire vers la fenêtre de lecture se fait de proche en proche en sautant de niveau, et en utilisant l'algorithme A à l'intérieur de chaque niveau.

Dans la boucle de niveau le plus élevé, les articles situés dans les positions supérieures à celle qui contient l'article à lire restent à la même place. L'article à lire vient se placer sur la fenêtre de cette boucle, et les autres articles progressent d'une position vers une position supérieure.

On remarque que dans la boucle générale, les articles situés dans des positions extérieures à une boucle de niveau donné (sauf de niveau 1) ne changent pas de place quand l'algorithme A travaille dans cette boucle.

Quand l'article à lire aura atteint le niveau 1, c'est-à-dire quand il sera placé sur la fenêtre de lecture, tous les articles de la boucle générale situés dans les positions supérieures à celle qu'occupait l'article à lire au début du traitement restent à la même place ; l'article à lire se trouve placé sur la fenêtre de lecture ; tous les autres articles progressent d'une position vers une position supérieure.

b) Le simple fait de rajouter un niveau :

- ne change pratiquement pas le temps moyen d'accès à un article (en gardant le pas constant).

En effet,  $\bar{t} = p_i + i - 1$  ; le fait de rajouter un niveau revient à augmenter  $\bar{t}$  d'une unité de temps de propagation de l'information dans la boucle, mais augmente considérablement la capacité de la boucle, à condition d'accepter l'accroissement du nombre de liaisons.

#### IV - 7 PROPOSITION POUR LA CONCEPTION D'UN DISQUE ELECTRONIQUE DE TRES GRANDE CAPACITE

##### IV - 7 - a Objectif

On se propose de concevoir un disque électronique possédant les caractéristiques suivantes :

- non volatile,
- temps moyen d'accès à un article : 2 ms,
- ordre de grandeur de la capacité : le milliard de caractères.

##### IV - 7 - b Proposition

On suppose qu'un multiplexeur peut supporter 16 entrées.

On utilise la généralisation de la notion de point critique pour définir une boucle à plusieurs niveaux.

On utilise la technologie des mémoires à bulles, de durée de propagation 2  $\mu$ s.

Pour une boucle de  $i$  niveaux, le temps moyen d'accès à une cellule

$$\text{est : } \bar{t} = p_i - \frac{p_i - 1}{N_i - 1} + i - 1.$$

Avec  $p_{i-1}$  petit devant  $N_{i-1}$ , on a :

$$\bar{t} \approx p_i + i - 1.$$

Soit une boucle de 3 niveaux, telle que le niveau le plus élevé possède un pas de 1024,

Le temps moyen d'accès à un article devient :

$$\bar{t} = (1024 + 3 - 1) \cdot 2 \mu\text{s}$$

$\bar{t} = 2,052 \text{ ms.}$
-------------------------------

La capacité d'une telle boucle est :

$$16 \times 16 \times 16 \times 1024 = 4\,194\,304 \text{ cellules.}$$

Plaçons 8 boucles en parallèle pour coder un octet ; on obtient ainsi 4 194 304 octets.

Plaçon en parallèle 256 ensembles de 8 boucles ; on obtient une mémoire de 8,6 milliards d'octets.

Une commande d'accès provoque la lecture d'un sous-ensemble de ces 256 ensembles de 8 boucles.

Nous avons ainsi atteint l'objectif que nous nous étions fixé, en concevant un disque électronique de temps moyen d'accès 2 ms et de capacité 8 milliards de caractères.

Théoriquement, il serait possible de concevoir un disque de plus grande capacité ; pratiquement on se heurterait à une impossibilité, en raison du nombre considérable de liaisons.





```
*****
*****
*****
*****
***** ANNEXE 1 *****
*****
*****
*****
*****
```

ALGORITHME DE TUNG-CHEN-CHANG, D'ACCES A UNE CELLULE

- (A<sub>1</sub>) {
- (1) pour  $1 \leq k \leq m$ , appliquons les opérations  
a : k - 1 fois, 1 fois, b : k - 1 fois,
- (2) pour  $m + 1 \leq k \leq N - 2$ , appliquons les opérations  
c : 1 fois, a : N - k - 1 fois, d : 1 fois,  
b : N - k - 2 fois dans cet ordre.
- (3) pour  $k = N - 1$ , appliquons les opérations  
c : 1 fois, a : 1 fois, c : 1 fois dans cet ordre.



```
220 GO TO 260
230 M = N / P
235 M = INT (M)
240 R = N - (N * P)
250 T = (2 * R) + 1
260 V = V + T
270 NEXT I
280 V : V/10000
290 PRINT P, V
300 NEXT J
310 END
```



```
500 GOSUB 4000
540 GO TO 800
600 IF R > 0 THEN 660
620 GOSUB 2000
630 GOSUB 4000
640 GO TO 800
660 FOR J = 1 TO R
665 GOSUB 1000
667 NEXT J
670 GOSUB 2000
680 FOR J = 1 TO R
685 GOSUB 3000
687 GOSUB 4000
695 GO TO 800
700 IF R > 0 THEN 760
720 GOSUB 2000
730 GOSUB 4000
740 GO TO 800
760 FOR J = 1 TO R
765 GOSUB 1000
767 NEXT J
770 GOSUB 2000
772 IF R = 1 THEN 790
780 FOR J = 1 TO R - 1
785 GOSUB 3000
787 NEXT J
790 GOSUB 4000
800 PRINT
820 FOR J = 0 TO 16
840 PRINT B(J);
860 NEXT J
900 NEXT I
```

Sous-programme :

```

1000 S = B (1)
1100 FOR G = 1 TO 15
1200 B(G) = B (G + 1)
1300 NEXT G
1400 B(16) = S
1700 FOR L = 0 TO 16
1800 E(B(L)) = L
1810 NEXT L
1900 RETURN

```

Opération A


```

2000 IF K = 16 GO TO 2030
2005 IF K > = 12 GO TO 2100
2010 IF K > = 8 GO TO 2110
2020 IF K > = 4 GO TO 2120
2030 C = 16
2040 GO TO 2200
2100 C = 12
2105 GO TO 2200
2110 C = 8
2115 GO TO 2200
2120 C = 4
2200 S = B(C)
2205 Z = C + 1
2210 FOR L = 1 TO C
2212 Z = 1 - 1
2215 B(Z) = B(Z - 1)
2225 NEXT L
2230 B(0) = S
2240 FOR L = 0 TO 16
2800 E(B(L)) = L
2810 NEXT L
2900 RETURN

```


Opération B<sub>J<sub>k</sub></sub>

```
3000 S = B(16)
3100 FOR G = 3 TO 16
3105 Z = 19 - G
3200 B(Z) = B(Z - 1)
3300 NEXT G
3400 B(2) = S
3500 FOR L = 0 TO 16
3800 E(B(L)) = L
3810 NEXT L
3900 RETURN
```



Opération C

```
4000 S = B(0)
4100 FOR G = 0 TO 15
4200 B(G) = B(G + 1)
4300 NEXT G
4400 B(16) = S
4500 FOR L = 0 TO 16
4800 E(B(L)) = L
4810 NEXT L
4900 RETURN
```



Opération D





- Opération : C'est une permutation sur les articles effectuée en une unité de temps (durée de propagation).
- Pas : C'est un diviseur de  $N - 1$ , utilisé dans la définition de l'opération de type B.
- Permutation de degré  $n$  : C'est un ré-arrangement de  $n$  objets distincts, entre-eux.
- Point critique : C'est une cellule dont le numéro est un multiple du pas ; il entre dans la définition de l'opération de type B.
- Point critique associé : Si  $k$  est la cellule contenant l'article à lire, c'est le point critique le plus proche de  $k$ , qui soit compris entre  $k$  et la fenêtre.
- Transposition : C'est un cycle de degré 2.



$T_G$  Temps de génération d'une permutation quelconque.

$\bar{T}_G$  Temps moyen de génération d'une permutation quelconque.



- [PO . 01] POHM  
Electronic replacements for Head-per-track drums and disks.
- [SA . 01] SALZER  
Bubble memories. Where do we stand ?  
Computer. Mars 1976.
- [ST . 01] STONE  
Dynamic memories with enhanced data ACCESS.  
Trans. Comp. C 21/4 04/72.
- [ST . 02] STONE  
Dynamic memories with fast random and sequential access.  
Trans. Comp. C 24/12 12/75.
- [ST . 03] STONE  
The organization of electronic  
cyclic memories.  
Computer 03/76.
- [TU . 01] Tung-Chen-Chang  
The realization of symmetric switching functions using magnetic  
bubble technology.  
I.B.M. Research Report RJ 1253 Juillet 1973.
- [TU . 02] Tung-Chen-Chang  
A bubble ladder structure for information processing.  
Trans. Comp. Mag/11 09/75.
- [WE . 01] WENSLEN  
The impact of electronic disks on system architecture  
Computer Février 1975.
- [WO . 01] WONG & COPPERSMITH  
The generation of permutations in magnetic bubble memories.  
Trans. Comp. C 25/03 03/76.

[WO . 02]

WONG-TANG

Dynamic memories with faster random and sequential access.  
I.B.M. R & D. Mai 1977.

[YP . 01]

YPMA

Bubble domain memory systems.  
AFIPS Conf. NCC 1975.

