

N° d'ordre : 228

50 376  
1 979  
50

50376  
1979  
50

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

## DOCTEUR INGENIEUR

spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Jean-Bernard PAQUET

PERTURBATIONS INDUITES PAR  
LES PAROIS D'UNE SOUFFLERIE  
METHODES INTEGRALES



Soutenu le 26 juin devant la commission d'Examen (1979)

MM.	P. POUZET	Président
	R. ZEY TOUNIAN	Examineur
	C. BREZINSKI	Rapporteur
	J. P. CHEVALLIER	Rapporteur

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit  
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE  
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE  
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M.	BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BILLARD Jean	Physique du Solide
M.	BIAYS Pierre	Géographie
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M.	BONNET Ernest	Biologie Végétale
M.	BONIE Antoine	Géologie Appliquée
M.	BOUGHON Pierre	Algèbre
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	DECUYPER Marcel	Géométrie
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique
M.	DERCOURT Michel	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M.	FAURE Robert	Mécanique
M.	FOURET René	Physique du Solide
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GLACET Charles	Chimie Organique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique
M.	GRUSON Laurent	Algèbre
M.	GUILLAUME Jean	Microbiologie
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M.	LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M.	LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M.	LEBRUN André	Electronique
M.	LEHMANN Daniel	Géométrie

.../...

Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M.	LOMBARD Jacques	Sociologie
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M.	MONTREUIL Jean	Biochimie
M.	PARREAU Michel	Analyse
M.	POUZET Pierre	Analyse Numérique
M.	PROUVOST Jean	Minéralogie
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M.	SEGUIER Guy	Electrotechnique
M.	TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BODARD Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des entreprises
M.	DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme	LEHMANN Josiane	Analyse
M.	LENTACKER Firmin	Géographie
M.	LOUAGE Francis	Electronique
Mle	MARQUET Simone	Probabilités
M.	MIGEON Michel	Chimie Physique
M.	MONTEL Marc	Physique du Solide
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	RACZY Ladislas	Electronique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	SLIWA Henri	Chimie Organique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M.	ADAM Michel	Sciences Economiques
M.	ANTOINE Philippe	Analyse
M.	BART André	Biologie Animale
M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BKOCHE Rudolphe	Algèbre
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie

M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
M <sup>le</sup> DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBENEST Jean	Sciences Economiques
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DE PAPIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
M <sup>e</sup> EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. FONTAINE Jacques-Marie	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. FORELICH Daniel	Chimie Physique
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
M <sup>le</sup> KOSMAN Yvette	Géométrie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
M <sup>le</sup> LEGRAND Denise	Algèbre
M <sup>le</sup> LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M. LOUCHET Pierre	Sciences de l'Education
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
M <sup>e</sup> N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MONTUELLE Bernard	Biologie Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POYV Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie
M <sup>le</sup> SPIX Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. STEEN Jean-Pierre	Informatique

M.	THERY Pierre	Electronique
M.	TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M.	TREANTON Jean-René	Sociologie
M.	VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M.	VILLETTE Michel	Mécanique
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WERNIER Georges	Informatique
M.	WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme	ZINN-JUSTIN Nicole	Algèbre

Que Monsieur le professeur POUZET dont j'ai suivi les enseignements lors du D.E.A. en mathématiques appliquées veuille bien trouver ici l'expression de ma gratitude pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur BREZINSKI et Monsieur le professeur ZEYTOUNIAN pour l'attention avec laquelle ils ont suivi ces travaux.

Ce travail a été effectué à l'office national d'études et de recherches aérospatiales(ONERA).Et je tiens à témoigner ma gratitude à la direction de l'office et à Monsieur CAPELIER,directeur de l'aérodynamique ,pour avoir bien voulu me confier cette étude entreprise dans le cadre de ses recherches.

J'exprime ma plus profonde reconnaissance à Monsieur CHEVALLIER pour l'aide et les précieux conseils qui ont contribué à la réalisation de ces travaux.

RESUME

Après un bref exposé sur les interprétations des vitesses induites par la présence des parois en terme de corrections globales de Mach et d'efforts, seule la détermination de ces vitesses est abordée sous l'hypothèse exclusive de respect des conditions aux parois. Les deux méthodes classiques, analytique et numérique sont critiquées en adjoignant des idées novatrices. Suivant l'orientation actuelle cette étude porte principalement sur l'adaptation des parois et sur l'utilisation des pressions pariétales pour mesurer leurs effets. Le facteur de relaxation du calcul itératif de l'écoulement virtuel extérieur est optimisé ainsi que la position des vérins servant à déformer les parois. En tridimensionnel l'adaptation des parois verticales et les effets résiduels avec uniquement les parois horizontales adaptées sont aussi abordés. Partant du premier article sur l'utilisation des pressions pariétales, les méthodes bi et tri-dimensionnelles à parois verticales pleines sont précisées. Cette dernière fait l'objet d'applications. Puis les extensions aux veines de forme quelconque, aux écoulements transsoniques et supersoniques ainsi que le principe de la double mesure sont présentés.



# NOTATIONS

- A constante d'intégration dans le plan transformé (fonction de  $p$ )
- a distance (ou vitesse du son)
- B constante d'intégration dans le plan transformé (fonction de  $p$ )
- c corde d'un profil
- $C_A$  coefficient de traînée en axe maquette
- $C_D$  coefficient de traînée (Drag, axe vent)
- $C_L$  coefficient de portance (lift, axe vent)
- $C_M$  coefficient de moment
- $C_N$  coefficient de portance en axe maquette
- $C_p$  coefficient de pression
- D Domaine de l'écoulement
- f fonction quelconque
- F Force
- g fonction quelconque
- A demi-hauteur de veine
- i incidence aérodynamique ou symbole complexe ( $\sqrt{-1}$ )
- I coefficient de pondération
- J coefficient de pondération centré
- A constante ou indice entier
- K fonction de Bessel modifiée de seconde espèce (en constante)
- l distance
- L ensemble des fonctions absolument sommables
- m intensité d'un doublet (ou indice entier)
- M nombre de Mach (ou point courant)
- n indice entier
- p pression (ou variable dans la transformée de Fourier)
- q intensité d'une source (ou pression cinétique)
- Q paramètre de porosité des parois
- R Rayon (ou paramètre de porosité ou constante des gaz parfaits)
- r rayon vecteur
- A demi-envergure de l'aile
- S surface
- $S_m$  Surface de référence maquette
- $S_v$  section de la veine ( $4\lambda h$ )
- T température
- u vitesse de perturbation
- V Vitesse de référence (à l'infini amont)

$v$	vitesse globale
$V_0$	Volume de la maquette
$w$	potentiel complexe
$z$	variable complexe
$\alpha$	angle d'attaque
$\beta$	facteur de compressibilité ( $\sqrt{1-M^2}$ )
$\gamma$	intensité d'un tourbillon (ou rapport des chaleurs spécifiques d'un gaz)
$\Gamma$	frontière d'un domaine ( $D$ )
$\delta$	coefficient de correction d'incidence
$\Delta$	Laplacien (ou opérateur aux différences)
$\varepsilon$	coefficient global de corrections de vitesse longitudinale
$\zeta$	variable dans le plan complexe (transformé)
$\eta$	variable d'intégration ou dans le plan complexe = $y$
$\theta$	coordonnée cylindrique (ou angle de flèche)
$\lambda$	Allongement de l'aile ou variable intermédiaire ( $\sqrt{r^2 + \frac{z^2 n^2}{b^2 l^2}}$ )
$\xi$	variable d'intégration ou dans le plan complexe = $x$
$\rho$	masse volumique
$\varphi$	potentiel de vitesses
$\psi$	fonction de courant

### INDICES

$b$	valeur mesurée ou brute
$c$	valeurs corrigées
$E$	file infinie
$E'$	ensemble des images de la maquette par rapport aux parois verticales
$e_m$	empennage
$H$	horizontal
$i$	interaction ( $\varphi_i = \varphi - \varphi_m$ ) ou valeurs d'arrêt
$I$	partie impaire
$m$	maquette
$n$	suivant la normale
$o$	indice de référence (infini amont)
$p$	partie paire
$A$	doublet (solid blockage)
$T$	tourbillon
$\tau$	suivant la tangente
$v$	vertical

w source (wake blockage )

x suivant axe du vent

y suivant l'envergure (ou hauteur dans le plan complexe bidimensionnel )

z suivant la hauteur

Les lettres "chapeautées" ( ^ ) résultent d'une transformation fonctionnelle

Les lettres "surlignées" ( -\_ ) représentent des variables réduites

## INTRODUCTION

Les différences de caractéristiques aérodynamiques entre les essais en veine et en atmosphère illimitée ne sont que partiellement imputables à la présence de parois. Car le critère de similitude de Reynolds, par exemple, qui est indispensable pour extrapoler les résultats sur modèles réduits, n'est pas toujours respecté. Et ceci incite à construire des souffleries préssurisées ou de grande taille. Inversement, la connaissance de l'effet des parois permet d'en corriger les résultats d'essais et éventuellement d'introduire des maquettes de plus grande taille. Les calculs d'écoulements ne permettent d'inclure efficacement les conditions aux limites sur les parois qu'en bidimensionnel. En outre, ils nécessitent une mise en oeuvre plus conséquente que celle des méthodes propres aux corrections de parois. Et ceci achève de justifier l'intérêt de ce sujet.

En fait, l'étude des effets de parois se dissocie en deux parties distinctes: la détermination des perturbations qu'elles induisent et leurs interprétations. Dans cette thèse qui récapitule le contenu de (1), on décrit tout d'abord le procédé des corrections globales à partir des survitesses calculées par la méthode élémentaire des images. Le rassemblement de leurs fondements révèle qu'elles ne s'appliquent que si elles sont faibles, ce qui restreint leur domaine d'application. D'ailleurs, la cambrure du champ de vitesses engendrée par les parois s'interprète de façon non univoque en terme de points de fonctionnement équivalents en écoulement illimité (19). Ensuite, seul le problème non ambigu de recherches des vitesses induites est abordée sous l'hypothèse omniprésente et désormais clairement posée, de respect exclusif des conditions aux parois. Selon le schéma proposé, les conditions locales qui importent, devraient s'approcher par un passage successif du champ lointain à celui proche du modèle.

A part les méthodes accessoires d'analogie rhéo-électrique (33) et semi-empirique (36), les survitesses induites s'obtenaient jusqu'à présent par deux méthodes basées sur l'équation linéarisée du potentiel en écoulement faiblement compressible. Celle numérique de détermination d'une fonction harmonique dont les valeurs frontières sont fixées, s'accommode de toute forme de veine quelle que soit la maquette. La technique récente des singularités hydrodynamiques (2,3) surpasse celle des schémas aux différences (4,5) malgré les améliorations apportées récemment pour la résolution de ce problème classique. En effet, cette technique réduit d'une dimension le maillage de calcul en ne s'intéressant qu'aux points frontières. En dépit de sa justification théorique par les formules de Green (40), l'optimisation de cette méthode numérique reste ouverte. Dans les exposés de la méthode dite "analytique" (6,7), les idées directrices des démonstrations n'apparaissent pas clairement. Son analyse succincte fait ressortir

les principales étapes de la démonstration tout en formalisant les hypothèses d'application. En outre on notera que le procédé de résolution quasi-analytique s'adresse à toute forme de veine. Le cas de la veine bidimensionnelle de longueur limitée y est traité en tant que sous problème loin en amont de celui tridimensionnel. Notons aussi que la résolution analytique pour la veine rectangulaire quelconque de longueur limitée est réalisable, à moins de se ramener à la superposition de deux problèmes déjà résolus de veines rectangulaires avec deux parois pleines.

En dehors de l'exploitation de la méthode numérique et de l'utilisation des formulaires résultant de celle analytique, l'objectif actuel est soit d'annuler les effets de parois en les adaptant, soit de les définir par les mesures pariétales. Ce dernier procédé présente surtout l'avantage de s'affranchir des conditions aux limites idéalisées et employées jusqu'à présent. Depuis la parution d'un critère pour déceler l'adaptation d'après la concordance entre les composantes de vitesses aux parois (8,9), le procédé itératif par le calcul de l'écoulement virtuel extérieur a été éprouvé (10,11). Il a été récemment démontré qu'il peut être optimiser en le réduisant à une seule itération (12,13). L'emploi des mesures pariétales engendre les méthodes qualifiées d'intégrales. Sa formalisation a été amorcée dans (14) pour le cas bi et tri-dimensionnel à parois verticales pleines où les problèmes de référence d'incidence, de longueur limitée de veine et de convergence du mach n'étaient qu'effleurés.

Avant d'unifier ces deux procédés d'origine diverse qui se réfèrent aux mesures, le fonctionnement des parois adaptables est précisé. L'installation de lames flexibles semblent être le meilleur procédé pour atteindre l'adaptation. Leur positionnement par des vérins est déterminé de sorte que la convergence du processus itératif soit réellement assuré et que la déformée soit approximée au mieux. Ensuite la combinaison entre les composantes pariétales de vitesses de l'écoulement intérieur à la veine et virtuel extérieur qui intervient dans l'adaptation itérative est optimisée en s'inspirant de (13) et en la généralisant aux cas portants et à certaines configurations tridimensionnelles. A l'optimum on parvient à l'adaptation dès la première itération ce qui rend désuet le principe de l'écoulement virtuel extérieur. D'ailleurs ce résultat avec la double mesure des composantes frontalières de vitesses s'inclut naturellement dans le cadre des méthodes intégrales. Ces deux composantes fournissent d'une part les vitesses aux parois en écoulement illimité ce qui permet l'adaptation immédiate sans qu'il soit utile de se référer à un calcul itératif d'écoulements virtuels extérieurs; D'autre part les corrections résiduelles en veine partiellement adaptée sont désormais accessibles sans assimiler les pressions mesurées sur les parois déformées à celles sur une surface de contrôle plane (14). En veine rectangulaire l'effet de parois latérales pleines apparaît même si les parois horizontales sont adaptées. Puisqu'il suffirait comme on le montre de peu déformer les parois verticales pour sup-

-primer leurs effets, on s'attend à ce qu'ils soient faibles. Or cette conclusion est nuancée par la décomposition des effets. Les blocages de volume et de sillage sont nettement amoindris ainsi que les gradients longitudinaux de vitesses induites. Seule l'incidence induite demeure inchangée.

La formalisation de l'emploi des mesures pariétales pour calculer les vitesses provoquées par les parois s'est étoffée depuis sa première publication aussi bien sur le plan théorique que celui de l'enseignement des premières applications. En bidimensionnel les questions jusqu'à présent effleurées de choix de la référence d'incidence et de limitation de la longueur de veine sont clarifiées. Différentes formulations en ne se limitant pas aux vitesses induites au centre de la veine (14) sont exprimées suivant le choix de la référence d'incidence soit aux infinis amont ou aval, soit en tout autre point et plus spécialement en celui où elle s'annule en même temps qu'à l'infini. Pour une surface de contrôle polygonale telle qu'une bande semi-infinie, la connaissance d'une composante de vitesses définit de même les vitesses induites en tout point. Cependant une approche différente permet de résoudre de façon simple et analytique le cas de la veine rectangulaire en s'inspirant de (50). Ensuite un autre avantage de ces méthodes est décrit: l'introduction d'un Mach brut nettement faussé n'intervient pas dans la détermination de l'incidence et surtout elle n'empêche pas de restituer le Mach pris comme repère en un point quelconque de la veine et pas seulement celui au centre (14). De plus en écoulement compressible un coefficient de sur-relaxation théoriquement exact en première approximation accélère la convergence de ce processus auto-convergent de définition du Mach. De même en veine rectangulaire à parois verticales pleines les vitesses induites sont ici exprimées en tout point de la veine et quelle que soit la position de la maquette. Après des vérifications sommaires des formules appliquées sur la surface de contrôle ou pour retrouver le cas bidimensionnel, le choix de la référence est aussi relaté. L'extension aux veines tridimensionnelles de forme quelconque reproduit le schéma de la méthode analytique en y remplaçant les conditions aux limites idéalisées par celles mesurées. En écoulement faiblement transsonique le développement de la solution de l'équation aux petites perturbations en puissance de  $M$  permettrait d'accéder au terme suivant du premier ordre en  $M^2$ . Les caractéristiques des écoulements supersoniques se différencient radicalement de celles subsoniques bien que la justification du concept avancé dans (15) de parois s'adaptant d'elles mêmes s'apparente à la même formulation. Toutefois les principaux résultats dans ce domaine se déduisent de la décomposition du potentiel de l'écoulement en invariants de Riemann. Enfin le principe de la double mesure est plus novateur; Elle s'accommode de la non-planéité des parois; Elle lie les mesures à la modélisation de la maquette. L'adaptation partielle et les effets résiduels sont mis en dualité ce qui suscite la notion de parois horizontales sur-

adaptées pour compenser la présence des autres.

L'application de la méthode intégrale tridimensionnelle dans une veine rectangulaire à parois verticales pleines a été tentée avec les maquettes homothétiques M2 et M3 placées dans la soufflerie S3Ch. Dans ce dernier chapitre extrait de (16), l'accent est mis sur la validité de la méthode et la mise en oeuvre numérique qui nous est impartie. A part l'analyse et la critique des coefficients de pressions mesurées, l'auto-convergence du Mach s'avère efficace. Les résultats obtenus sont encourageants et en particulier les recoupements avec la méthode classique présumée exacte en veine guidée sont concluants.

# CHAP. I <sup>-11-</sup> CORRECTIONS GLOBALES DE PAROIS

Dans ce chapitre introductif la méthode élémentaire des images sert à définir les corrections globales de parois. Les quelques singularités hydrodynamiques utilisées pour schématiser le modèle réduit ne perturbent pas l'écoulement à l'infini mais elles enfreignent les conditions aux limites aux parois de la veine. L'introduction de singularités images par rapport aux parois permet de respecter les conditions aux limites ; de plus, elles induisent des survitesses au voisinage du modèle que l'on attribue à la présence de parois. On assimile alors ces survitesses locales à la différence entre les vitesses de l'écoulement confiné par des parois et celles en écoulement illimité autour du même modèle.

Avant d'analyser les autres façons de calculer ces survitesses dues à la présence de parois (chap. II et III) et d'introduire une nouvelle méthode (chap. IV), on se propose de montrer leur utilité. Ce sera l'occasion de réunir les fondements des corrections globales de parois, ce qui n'a pas encore été effectué semble-t-il.

Quelque soit le mode de détermination des survitesses dues à l'effet des parois auquel est consacrée cette étude, on se contente de respecter les conditions aux limites sur les parois. Or il s'avère dans un exemple particulier (§ III) que les singularités introduites à l'intérieur du modèle pour respecter la condition locale sur celui-ci induisent des survitesses du même ordre de grandeur que les images. Si dans d'autres configurations cette constatation paradoxale se confirmait, il faudrait compléter toutes les méthodes proposées jusqu'à présent par une seconde étape basée sur le respect des conditions sur le profil.

## I) INFLUENCE DES FRONTIERES.

### 1) Schématisation de la maquette

L'étude linéarisée classique des écoulements autour de profils minces est subdivisée en problème d'épaisseur et problème portant. Le profil est décomposé en un profil symétrique d'épaisseur identique à celui d'origine et en un squelette ou arc de courbe coïncidant avec la ligne moyenne du profil. Un potentiel de simple couche permet de schématiser le profil symétrique. Le squelette spécifique de l'effet portant provoque des discontinuités de vitesses tangentielles entre ses bords supérieurs et inférieurs qui sont schématisées par une répartition de tourbillons suivant la corde du profil. Un filet tourbillonnaire ne pouvant disparaître à l'intérieur

d'un fluide, en tridimensionnel, les segments tourbillonnaires significatifs de la portance de l'aile se prolongent par des tourbillons marginaux coïncidant avec des lignes de courant.

L'éloignement entre la maquette et les parois, le doute concernant l'utilisation controversée d'une condition aux limites linéaires et la dispersion des mesures nous font préconiser une schématisation simple pour l'étude de l'effet des parois. On se contente souvent d'un doublet pour le profil symétrique et un tourbillon pour l'effet portant bien qu'une discrétisation en plusieurs singularités de ce type ne change rien dans le principe\*.

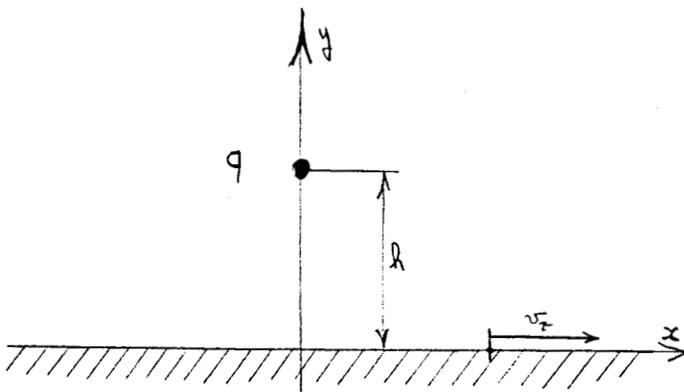
L'effort de traînée nécessite une singularité supplémentaire schématisant le sillage. En effet, une source placée dans un champ uniforme subit une action vers l'aval assimilable à la traînée, de plus sa ligne de courant nulle se remplace par un corps de longueur infinie dont la forme s'apparente à la ligne de démarcation du fluide mort derrière la maquette. Toutefois, la schématisation d'un phénomène visqueux se fait au dépend de la conservation du débit.

Bien que le moment de tangage se ramène \*\*à un doublet tourbillonnaire (19), cet élément complémentaire est généralement négligé.

## 2) Parois planes

Pour une surface solide et pleine, la condition d'imperméabilité s'écrit :

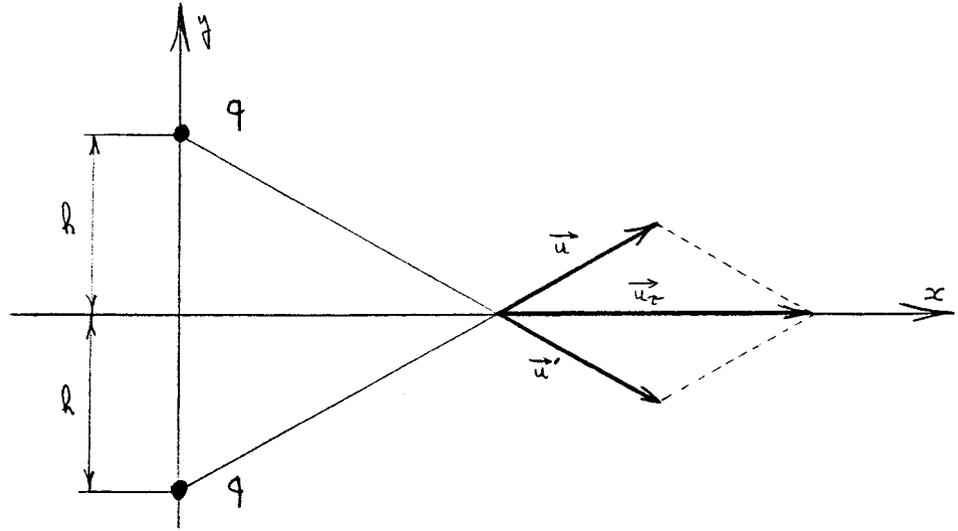
$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\text{paroi}} = 0$$



\* sur la nécessité d'améliorer la schématisation, voir (17), pour une meilleure schématisation, voir (18)

\*\*Au lieu de schématiser suivant les effets physiques, on exprime le potentiel complexe autour d'un profil théorique à partir de l'écoulement autour du cercle générateur. Par sommation des images, on obtient le potentiel d'interaction dans un développement en puissance de  $z$  correspondant à des singularités d'ordre croissant (19).

Les singularités hydrodynamiques précédentes ne s'accodent pas de ces conditions aux frontières de l'écoulement. Pour une paroi plane et pleine la superposition des mêmes singularités symétriques par rapport au plan permet de respecter la condition aux limites en tout point.



Soit  $\varphi_m$  le potentiel de perturbation de l'écoulement illimité formulé grâce à des singularités ; et  $\varphi$  le potentiel de perturbation du même corps en présence de parois. Par définition le potentiel d'interaction de parois  $\varphi_i$  représente la différence de ces deux valeurs :

$$\varphi_i = \varphi - \varphi_m$$

Si l'on suppose, hypothèse fondamentale et généralement implicite, que l'existence de parois ne modifie en rien les singularités représentatives du modèle, le potentiel d'interaction s'identifie au potentiel des images  $\varphi'_m$ . Cependant les singularités reflétées provoquent des vitesses supplémentaires sur la surface du corps étudié ; et la condition locale d'imperméabilité sur celui-ci est enfreinte. Ceci revient à dire que la fonction de courant nulle n'épouse plus la forme du solide initial et que la somme des potentiels  $\varphi_m$  et  $\varphi'_m$  représente l'écoulement autour d'un corps similaire à celui existant. Cette infraction s'élimine en répartissant des singularités supplémentaires à l'intérieur du corps. Cette introduction dans une seconde étape de nouvelles singularités s'accompagne de l'inobservation des conditions aux parois. D'où d'autres singularités reflétées pour s'assurer cette condition, puis d'autres pour la condition locale. Les séries obtenues par ces passages successifs du champ proche de la maquette au champ lointain aux parois convergent rapidement. Puisque les intensités des singularités complémentaires à l'intérieur du corps sont beaucoup plus faibles que celles significatives du corps en écoulement illimité, la méthode des images se limite à la première étape des singularités reflétées. Cependant on montrera à la fin de ce chapitre §III que cette limitation peut s'avérer insuffisante et que l'intervention des conditions locales modifie le potentiel d'interaction.

3) Conditions aux limites

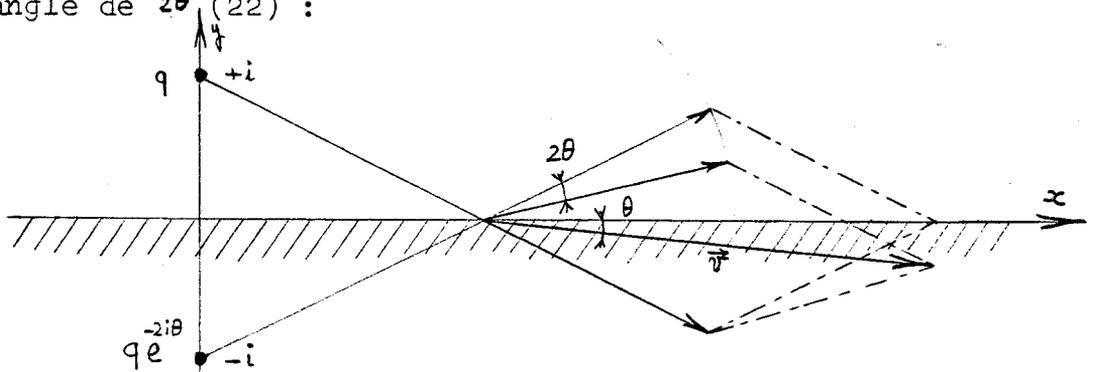
Pour éviter le blocage sonique ou pour minimiser les effets de parois ou encore pour atténuer les réflexions d'onde de choc, depuis les années 50, de nombreuses souffleries sont munies de parois à fentes longitudinales ou de parois ventilées. Grâce à des approximations et des représentations conformes successives les conditions aux limites sur ces parois s'écrivent (20, 21) :

$$\frac{d\varphi}{dx} + K \frac{d^2\varphi}{dx dn} + \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dn} = 0$$

On admet que l'écoulement au voisinage de parois perforées finement est homogène ; la relation idéalisée et simplifiée pour ces parois dites poreuses devient :

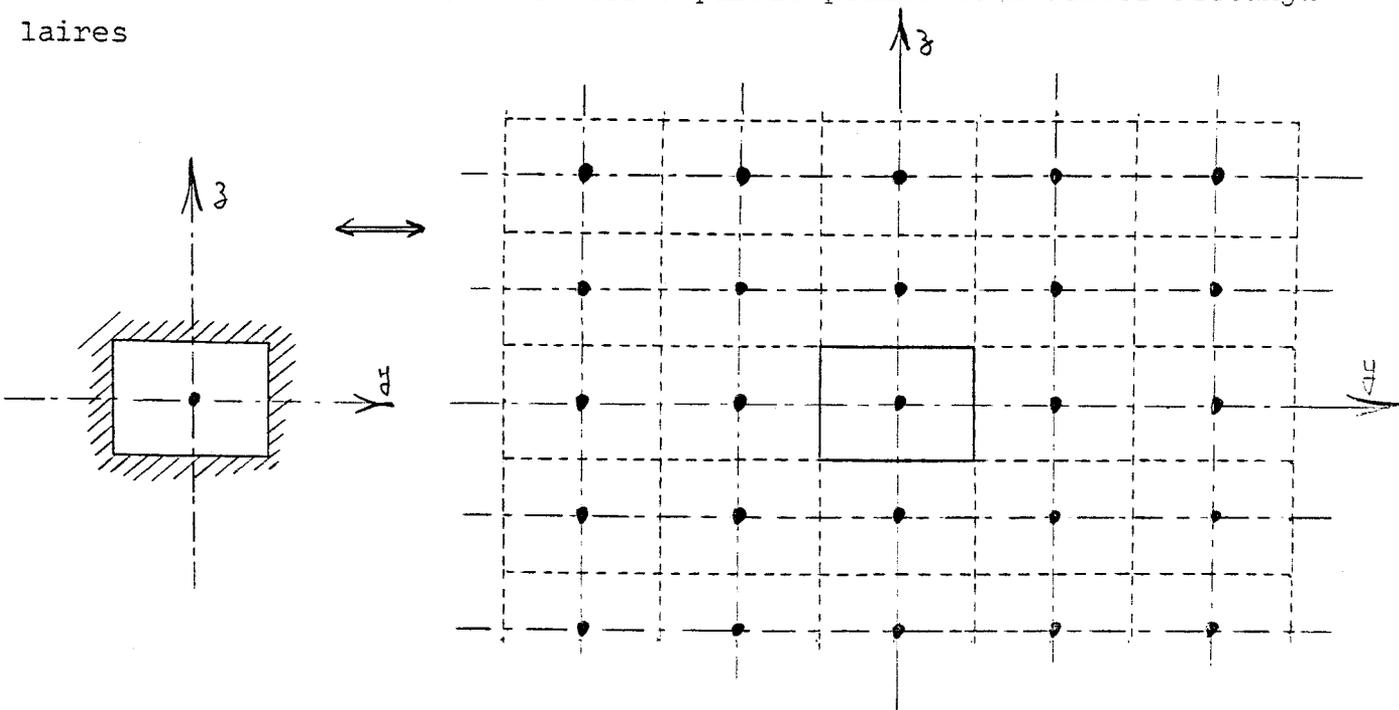
$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dn} = 0$$

Seule cette dernière condition aux limites linéaire, appelée aussi loi de Darcy se traite par la méthode des images. En effet pour la respecter, et conserver au voisinage des singularités représentatives de l'écoulement illimité les mes mêmes "types" de singularité, il suffit de pivoter les images d'un angle de  $2\theta$  (22) :



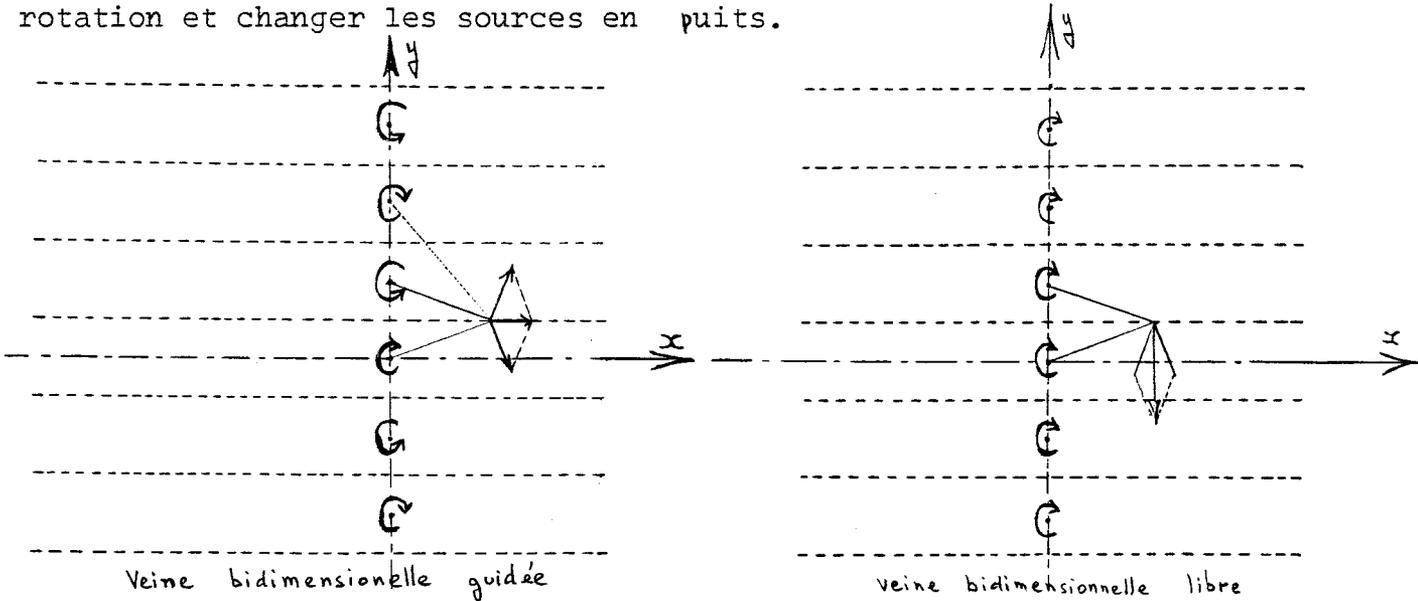
4) Veine rectangulaire

Le raisonnement précédent relatif aux parois planes s'étend immédiatement aux veines bidimensionnelles à parois planes et à celles rectangulaires



Pour une veine libre, la pression dans la cavité est en première approximation et d'après le théorème de Bernouilli, constante ; la vitesse de perturbation tangentielle sur la surface de séparation du jet est nulle.

Ainsi en parois poreuses pour passer du cas extrême de la veine guidée à porosité nulle à celui de la veine libre, il suffit comme le montre le dessin ci-contre de remplacer les images par leurs opposées : alterner le sens de rotation et changer les sources en puits.



La méthode des images décrites ci-dessus fournit les composantes des survitesses induites par les parois en tout point de la veine. Elles sont assimilées à celles provoquées par les images. En veine rectangulaire, on aboutit à des séries doubles qui ne s'expriment pas de façon analytique simple (23) sauf de rares exceptions (24). En bidimensionnel les séries simples s'obtiennent par application du théorème des résidus (25 p.175) ou par des identités adéquates provenant de développements en série de Fourier (26). Les formules analytiques des survitesses en tout point de la veine pour des profils centrés ou non et pour différentes configurations de veines sont transcrites chez la plupart des premiers auteurs (19, 27).

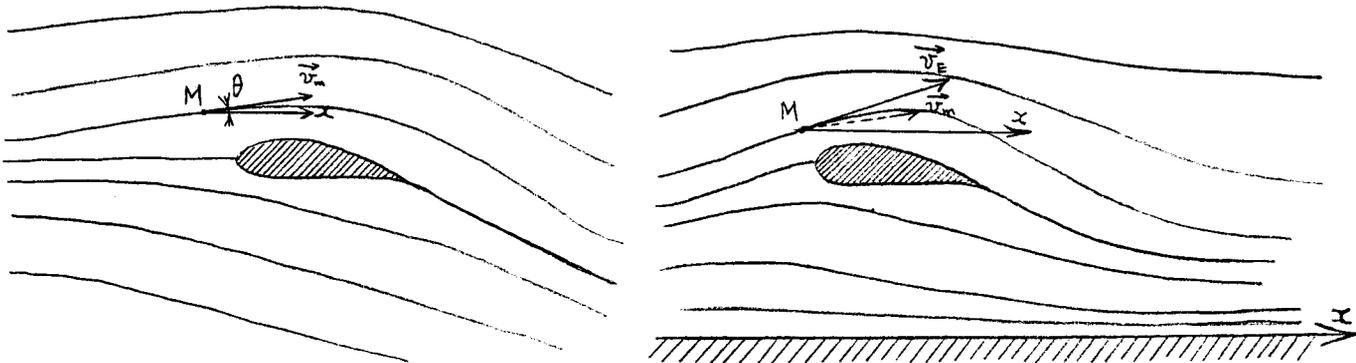
### 5) Extension

La prise en compte analytique de l'influence de frontières curvilignes est difficile. Seule la circonférence et l'ellipse s'y prête partiellement en considérant les singularités conjuguées par inversion par rapport au cercle générateur (28). Hormis ces cas d'espèces, le passage par une représentation conforme du demi plan supérieur au domaine considéré donne parfois des résultats simples pour des frontières de forme différente. C'est le cas par exemple d'une demie maquette sur le plancher d'une veine circulaire (29).

## II) DETERMINATION DES CORRECTIONS GLOBALES

### 1) Principe

Les parois d'une soufflerie imposent à l'écoulement des conditions aux limites très différentes de celles de l'évanescence des perturbations à l'infini en vol illimité. Cette différence qualitative subsiste tant que les parois n'ont pas la forme de lignes ou nappes de courant, auquel cas on introduira le concept de parois adaptées. Ceci signifie que la présence de parois habituellement non adaptées provoque en tout point de la veine et plus particulièrement à l'emplacement du modèle un écart de vitesses entre les essais et la configuration simulée. 



La réalisation dans une veine donnée d'un champ des vitesses autour d'un modèle réduit permet de mesurer ses caractéristiques aérodynamiques pour une configuration donnée. La balance fournit les efforts globaux sur le modèle et en tridimensionnel la déformation de son support prouve indirectement l'incidence ; les capteurs de pressions donnent quant à eux des indications locales. Les corrections globales de parois consistent à prévoir, à partir des mesures au cours d'un essai, un point de fonctionnement du modèle en écoulement illimité ; c'est-à-dire une valeur pour chacun des coefficients aérodynamiques globaux. D'après un champ de vitesse réalisé et des caractéristiques globales mesurées telles que les efforts, l'incidence et la vitesse loin en amont, on estime que dans un champ différent correspondant au vol en atmosphère illimité, le modèle aura tel point de fonctionnement.

En fait, la détermination de corrections globales constitue un problème mal posé. Lorsqu'apparaissent des phénomènes aérodynamiques sensibles aux petites variations locales, par exemple ondes de choc, décollements de la couche limite ou zones supersoniques, les corrections globales sont imprécises là où elles devraient être importantes. C'est en partie pour cette raison que les recherches dans ce domaine transsonique sur ce sujet sont d'actualité. En dehors de cet aspect qualitatif de différence irrémédiable entre deux écoulements pourtant voisins, le passage des valeurs mesurées aux valeurs extrapolées en vol, suppose que l'on sache tenir compte d'une faible modification du champ des vitesses. Or on est théoriquement incapable de supporter les effets d'une distorsion du champ.

Malgré cette invadibilité de principe, les corrections globales qui se basent sur de faibles différences de champs de vitesses fournissent d'assez bons points de fonctionnement, meilleurs en tout cas que si l'on confondait point d'essai et point de fonctionnement.

Ainsi les corrections globales se basent sur la connaissance des vitesses induites par les parois en un point sur l'axe de la maquette (Ox) ou au niveau de la corde aérodynamique moyenne pour prévoir un point de fonctionnement. Elles s'opposent aux corrections locales qui s'intéressent aux vitesses complémentaires sur le profil en tout point. En dehors des valeurs globales fournies par intégration des valeurs locales, elles visent les corrections de  $C_p$  en chaque point, ou l'interprétation des variations locales d'incidence. Malheureusement ces corrections locales sont peu répandues (19) et ceci tient probablement à la relation entre la difficulté de mise en oeuvre et la précision souhaitée ou accessible pour les corrections.

## 2) Points de fonctionnement équivalent (19)

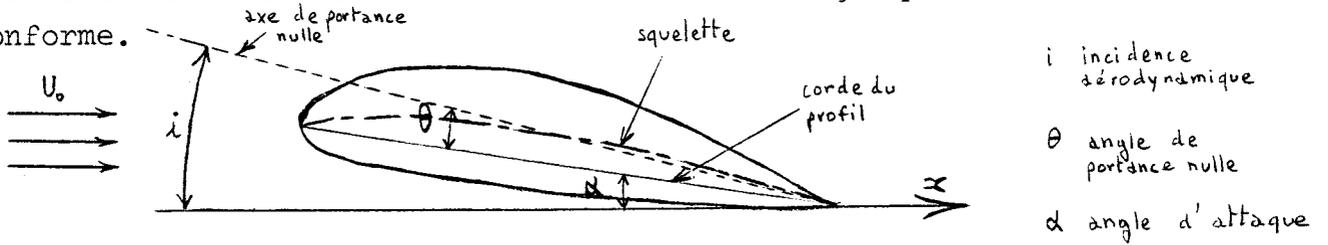
En se rapportant à la théorie linéarisée où les effets perturbateurs se superposent, on suppose que le modèle placé dans un champ accéléré et incurvé par la présence de parois est équivalent à un modèle placé dans un écoulement illimité et accéléré d'épaisseur inchangée et dont la courbure est augmentée de celle de l'incrément local de pente entre les deux champs. L'accélération du champ ou les différences de module entre les vitesses en écoulement illimité et confiné sont liées à l'effet d'épaisseur. On l'interprète facilement en modifiant globalement le nombre de Moch et les coefficients adimensionnés par rapport à la vitesse. Localement ce sont les coefficients de pression sur le profil qui changent. Il reste alors à traiter l'effet portant, c'est-à-dire de l'équivalence entre le squelette du profil initial en écoulement illimité et celui de ce squelette déformé par les incréments de pente.

A ce stade il existe trois schémas pour prendre en compte la courbure du champ.

- la vitesse verticale adimensionnée par rapport à la vitesse de référence et calculée en un point précis est interprétée comme une correction d'incidence aérodynamique car elle correspond en première approximation à un incrément local d'incidence. Cette méthode bien que peu satisfaisante car elle dépend du point choisi, est la seule utilisable en tridimensionnel.

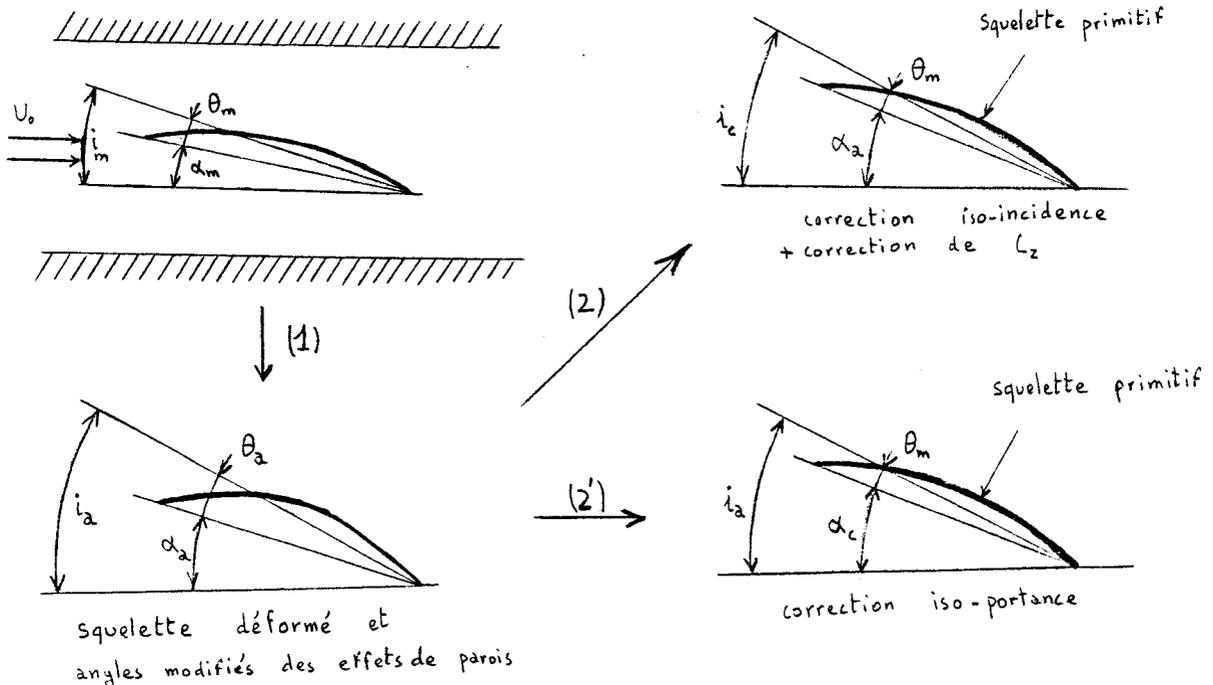
- Par transformation conforme inverse, le potentiel complexe dans le plan du profil comprenant les effets de parois par l'intermédiaire de la somme des images, fournit les pressions sur le cercle générateur.

L'intégration de celle-ci, après avoir respecté la condition de Kutta-Joukovsky au bord de fuite, fournit les efforts globaux, l'angle de portance nulle et l'incidence aérodynamique corrigée. Cette méthode est peu utilisée car elle nécessite la connaissance analytique de la transformation conforme.

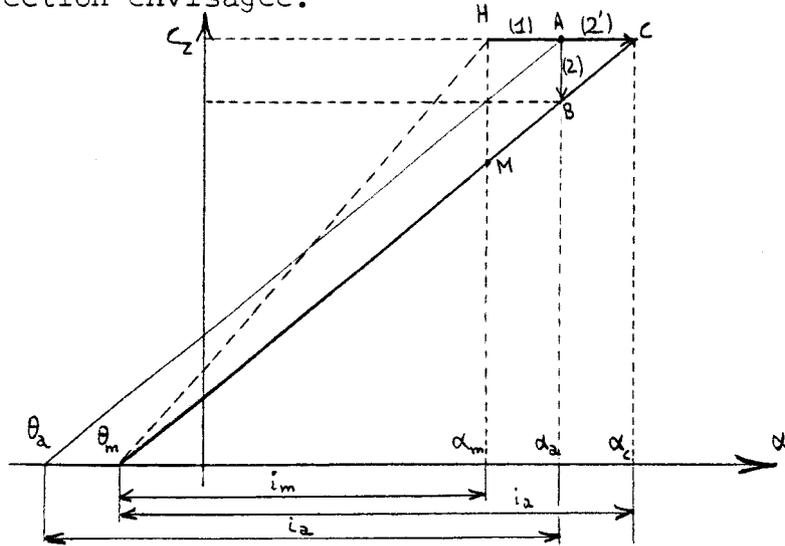


-Par l'intermédiaire de la théorie des profils minces, la circulation locale le long de la corde du profil et la forme du squelette se développent en série. Ainsi les efforts globaux dépendent uniquement des premiers coefficients de cette série.

Résumons les résultats de ce procédé extrait de (19) qui révèle clairement les équivalences entre points de fonctionnement en écoulement confiné et illimité en effectuant la synthèse des méthodes existantes. Le respect de la condition de tangence le long du squelette primitif et du squelette déformé d'une part, et le calcul analytique de la déformée à partir de la sommation des images reflétées d'autre part, donne les angles corrigés ( $i_a, \theta_a$  et  $\alpha_a$ ). Plusieurs déterminations des points de fonctionnement équivalents sont alors permises. Dans un premier cas, l'angle d'attaque est invariant, et la variation d'incidence aérodynamique se traduit par une correction du coefficient de portance lié aux coefficients de la série. C'est la correction iso-incidence. Dans un deuxième cas, la constance de l'incidence aérodynamique  $i_a$  signifie que la portance demeure inchangée. Il s'agit de correction iso-portance.

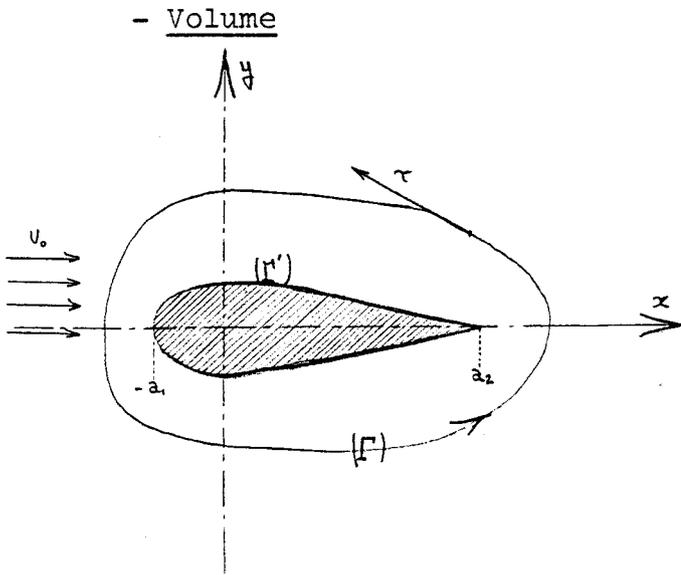


En se reportant à la courbe de portance en fonction de l'incidence, le point d'essai en écoulement confiné H se transforme en différents points équivalents suivant la correction envisagée.



3) Intensité des singularités - Maquette

Pour appliquer ces corrections globales, il faut connaître les intensités des singularités représentatives de la maquette. Les publications récentes ne justifient plus la façon de les déterminer ; et comme il n'est pas immédiat d'en retrouver l'origine, reproduisons les ici. Ensuite on se propose de concrétiser le mode de correction iso-portance afin d'achever de rassembler les fondements de la méthode de corrections globales.



Développons le potentiel complexe bi-dimensionnel de l'écoulement autour d'un corps symétrique (30) :

$$w = \varphi + i\psi = U_0 z + \frac{m_1}{2\pi j} + \frac{m_2}{2\pi j^2} z + \dots + \frac{m_n}{2\pi j^n} z^n + \dots$$

Soit  $(\Gamma)$  un contour fermé entourant l'origine, d'après le théorème des résidus :

$$\oint_{(\Gamma)} w dz = im_1 = \oint_{\Gamma'} (\varphi + i\psi) dz$$

par intégration par parties de  $\varphi y$  et  $\psi x$  on en déduit :

$$m_1 = - \oint_{\Gamma'} y \vec{v} \cdot \vec{T} d\tau = - \oint_{\Gamma'} x \vec{v}' \cdot \vec{T} d\tau$$

assimilons  $\Gamma'$  au contour du profil d'où :

$$m_1 = - \oint_{\Gamma'} y |v| d\tau = \int_{-a_1}^{a_2} \frac{y}{c} \sqrt{1-c\rho'} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} d\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\text{car } \frac{y}{c} = \sqrt{1-c\rho'} \quad \text{et} \quad d\tau = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Les différents corps testés dans une veine étant généralement de petites dimensions, les images par rapport aux parois induisent sur l'axe de la maquette des vitesses très proches de celles induites par le doublet (24). Pour tout de même tenir compte des autres coefficients de la série  $(m_2, \dots, m_n)$  on introduit un coefficient  $K_1$  dépendant de la configuration de la veine et du rapport entre les dimensions de la veine et de la maquette.

Après calcul, on s'aperçoit que l'intensité du doublet dépend essentiellement du volume ou de la surface du corps (Vol.) d'où l'expression généralement admise :

$$m_1 = \frac{K_1 K_2 V_{ol}}{4 \pi}$$

$K_2$  coefficient lié à la forme du profil ou du fuselage.

### -Circulation

Soit  $w$  le potentiel complexe de l'écoulement, exclusion faite du tourbillon représentatif de l'effet partant qui est placé en  $z_1$ . Soit  $\vec{F}$  la réaction du tourbillon placé dans cet écoulement. D'après le théorème de Joukowski qui relie la portance à l'intensité du tourbillon  $\gamma$  on a :

$$\vec{F} = i \rho \gamma \left( \frac{dw}{dz} \right)_{z_1}$$

Par définition du coefficient de portance et de l'allongement de l'aile on en déduit pour un tourbillon d'envergure finie :

$$\left. \begin{aligned} C_L &= \frac{F_z}{\rho \frac{V_0^2}{2} S_m} \\ S_m &= \frac{4b^2}{\lambda} \end{aligned} \right\} \longrightarrow C_L = \frac{\gamma \lambda}{V_0 b}$$

Un calcul similaire relie le coefficient du moment autour du foyer de l'aile à l'intensité  $\gamma'$  du doublet tourbillon représentatif :

$$C_n = \frac{2 \gamma'}{V_0 c^2}$$

### -Sillage

D'après le théorème de Lagally (31) une source de débit  $q$  placée dans un champ en un point où la vitesse est  $v_1$  subit l'effort suivant :

$$\vec{F} = -\rho q \vec{v}_1$$

D'où la relation entre le coefficient de trainée  $C_D$  et l'intensité de la source  $q$  qui est sensée la représenter :

$$q = \frac{C_D V_0 S_m}{2}$$

En écoulement incompressible pour que la source fournisse la même différence de pression loin à l'aval, ce facteur doit être légèrement modifié (32) :

$$q = \frac{C_D V_0 S_m}{2} (1 + 0,4 K^2)$$

## 4) Mise en oeuvre

### - Pression cinétique

L'effet d'épaisseur engendre globalement une survitesse dans l'axe du vent  $\vec{u}$ . Celle-ci se traduit par une correction d'ensemble des coefficients aérodynamiques. En effet la mesure des efforts par exemple, est adimensionnée en la divisant par la pression cinétique  $q$ . Puisque la vitesse de référence

change, tous les coefficients suivent ( $M, C_D, C_L, C_M$ ).

Pour une transformation isentropique, on a :

$$M = \frac{U}{\sqrt{\gamma RT}} = \frac{U \sqrt{1+0,2M^2}}{\sqrt{\gamma RT_i}}$$

D'où :

$$q = \frac{U^2}{2} \frac{\rho_i}{(1+0,2M^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}$$

$$\gamma RT_i = \frac{(U_0+u)^2 (1+0,2M_c^2)}{M_c^2} = \frac{U_0^2 (1+0,2M_b^2)}{M_b^2} \quad \text{et} \quad \rho_i = \frac{2q_b (1+0,2M_b^2)^{2,5}}{U_0^2} = \frac{2q_c (1+0,2M_c^2)^{2,5}}{(U_0+u)^2}$$

On en déduit le Mach et la pression cinétique corrigée en fonction du Mach brut et de la pression cinétique brute :

$$M_c = M_b \frac{1+\bar{u}}{\sqrt{1-0,4M_b^2\bar{u}-0,2M_b^2\bar{u}^2}}$$

$$q_c = q_b (1+\bar{u})^2 (1-0,4M_b^2\bar{u}-0,2M_b^2\bar{u}^2)^{2,5}$$

### -Incidence

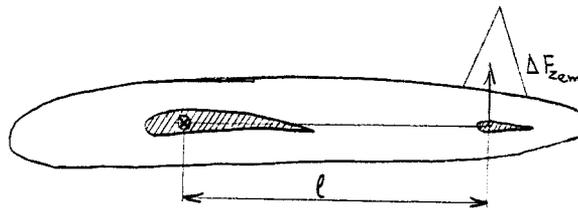
Quelque soit la méthode de correction utilisée, on aboutit à une correction d'incidence aérodynamique accompagnée ou non de correction de portance. On estime que deux profils de même épaisseur et de courbure peu différente ont des polaires semblables en axes liés au modèle, si bien que l'on ne corrige pas la traînée en axe maquette. Quant à la traînée relative aux axes fixes, elles provient des formules de rotation des axes :

$$C_{D_c} = C_{D_b} \cos(\Delta\alpha) + C_{L_b} \sin(\Delta\alpha)$$

### - Moment de tangage

Dans la théorie des profils minces, le moment par rapport à un point est la somme des moments des circulations élémentaires ce qui fournit les moments corrigés en fonction du mode de correction iso-incidence ou iso-portance. En dehors de cette théorie, seule l'analogie avec des plaques courbées procure la correction de moment en fonction de la courbure du champ.

La seconde correction du moment de tangage est propre aux essais tridimensionnels où le modèle comporte un empennage arrière.



La variation d'incidence au niveau de l'empennage arrière due à la présence des parois modifie la portance de celui-ci. La distance importante entre l'aile et l'empennage fait bras de levier. Malheureusement on ne sait pas corriger le moment en fonction de la variation d'incidence globale et seule la différence entre les corrections d'incidence entre l'aile et l'empennage est prise en compte :

$$\left. \begin{aligned} \Delta C_M &= \frac{\Delta F_{z_{em}} \ell}{\rho U_0^2 / 2 \cdot c \cdot S_m} \\ \Delta F_{z_{em}} &= \left( \frac{dC_z}{d\alpha_{em}} \right) \Delta \alpha_{em} \frac{\rho U_0^2}{2} S_{em} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{-22-} \Delta C_m = \frac{S_{em}}{S_m} \frac{\ell}{c} \left( \frac{dC_z}{d\alpha} \right)_{em} \Delta \alpha_{em}$$

### - Poussée d'Archimède (Buoyancy)

La correction locale de pression sur le modèle amène une correction de traînée. Pour la méthode globale on admet que les surpressions induites par les parois varient linéairement dans l'axe du vent ( $0_x$ ). Cette constance du gradient de pression est identique au cas d'un corps plongé dans un liquide au repos, qui subit la poussée d'Archimède d'où :

$$p = p_0 + \left( \frac{dp}{dx} \right)_x \quad \longrightarrow \quad F_z = - \left( \frac{dp}{dz} \right)_c \cdot Vol$$

En se ramenant aux variables adimensionnées il s'en déduit :

$$\Delta C_D = \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} \times \frac{2 Vol}{S_m}$$

## III) RESPECT DES CONDITIONS LOCALES

### 1) Principe

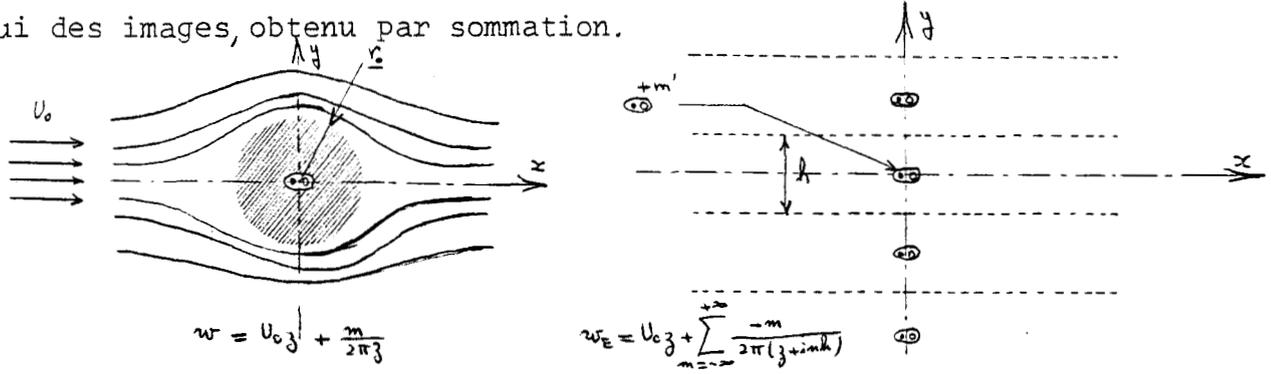
L'influence des frontières se détermine par le passage successif du champ lointain au champ proche du modèle pour respecter successivement la condition aux limites aux parois puis la condition sur le profil. Notre intention est de montrer que si l'on franchit la seconde étape en réintroduisant au niveau du modèle des singularités supplémentaires pour respecter la condition locale, les survitesses qu'elles engendrent sur le corps sont du même ordre de grandeur que celles provoquées par le respect de la condition à la paroi. Dans les études de corrections de parois, il est admis que les corrections de vitesses calculées à l'emplacement du modèle ne modifient que légèrement sa forme. Mais dans cette méthode des images, il n'est jamais question de respecter conjointement la condition à la paroi et sur le profil.

Les calculs requis pour s'assurer de l'identité entre la ligne de courant nulle et la forme du corps étudié sont difficilement praticables. Après l'obtention du potentiel des images il s'agit de répartir des singularités à l'intérieur du corps d'intensité à définir de sorte que la fonction de courant en présence de toutes ces singularités soit nulle en tout point du modèle. Afin de réaliser un calcul élémentaire de façon analytique, on se restreint au cas du doublet bidimensionnel qui correspond à l'écoulement autour d'un cercle. Ne sachant pas résoudre l'équation intégrale de Fredholm de première espèce qui surgit, on se contente de respecter "le maître couple" du cercle par introduction d'un simple doublet complémentaire à l'origine. Il s'avère que la vitesse induite par cette singularité complémentaire au point  $(0, \pm r_0)$  où passe désormais la ligne de courant nulle

est égale à celle provoquée par les images. Si dans d'autres modélisations plus réalistes ces deux survitesses restaient du même ordre de grandeur, il serait primordial d'insérer le respect de la condition locale dans toute méthode de détermination des effets de parois.

2) Calcul élémentaire

Plaçons un cercle de rayon  $r_0$  entre deux parois planes. Exprimons d'une part le potentiel complexe de l'écoulement illimité et d'autre part celui des images, obtenu par sommation.



$$w = U_0 z + \frac{m}{2\pi i}$$

$$w_E = U_0 z + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{-m}{2\pi i (z + i m h)}$$

$w_E$  se transforme en fonction trigonométrique :

$$w_E = U_0 z + \frac{m}{2h} \coth \frac{\pi z}{h} = \varphi + i \psi$$

En séparant partie réelle et imaginaire il en découle la valeur de la fonction de courant  $\psi$  :

$$\psi = U_0 y - \frac{\sin^2 \frac{\pi y}{h}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi x}{h} - \cos \frac{2\pi y}{h}}$$

Pour retrouver la forme exacte du cylindre, distribuons des doublets sur l'axe de la veine ; et imposons à la ligne de courant nulle résultante de se confondre avec le cercle :

$$\psi = U_0 y - \frac{m}{2h} \frac{\sin^2 \frac{\pi y}{h}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi x}{h} - \cos \frac{2\pi y}{h}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m'(\xi) \frac{y d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} = 0 \quad \text{en } x^2 + y^2 = r_0^2$$

Ne sachant pas résoudre, on se contente d'insérer un seul doublet à l'origine et de vérifier que la ligne de courant nulle passe par les points  $(0, \pm r_0)$ .

$$\psi = 0 = U_0 y - \frac{m}{2h} \frac{\sin^2 \frac{\pi y}{h}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi x}{h} - \cos \frac{2\pi y}{h}} - \frac{m'}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{en } (0, \pm r_0)$$

soit :

$$\frac{m'}{2\pi r_0^2} = U_0 - \frac{m}{2h \operatorname{th} \frac{\pi r_0}{h}}$$

L'intensité  $m$  du doublet initial est reliée au rayon du cercle par :

$$m = 2\pi U_0 r_0^2$$

D'où :

$$m' = m \left( 1 - \frac{\pi r_0 / h}{\operatorname{th} \frac{\pi r_0}{h}} \right)$$

En première approximation si le rayon du cercle est petit par rapport à la hauteur de la veine, on a :

$$\frac{r_0}{h} \ll 1 \quad \longrightarrow \quad m' \approx \frac{m}{3} \left( \frac{\pi r_0}{h} \right)^2$$

Ceci signifie que  $m'$  est petit à l'ordre deux devant  $m$ , c'est-à-dire que conformément à l'avis couramment admis, le corps initial est peu déformé. Toutefois, calculons la vitesse de perturbation longitudinale induite au

point  $(0, \pm r_0)$  par les images puis par le doublet complémentaire .

Doublet

$$u_d = \frac{m'}{2\pi r_0^2} \approx \frac{m}{3} \left( \frac{\pi r_0}{h} \right)^2 \times \frac{1}{2\pi r_0^2}$$

$$u_d \approx \frac{m\pi}{6h^2}$$

Images

$$u_{E'} = \frac{m\pi}{2h^2 \sin^2 \pi r_0/h} - \frac{m}{2\pi r_0^2} = \frac{m}{\pi r_0^2} \left( \frac{\pi^2 r_0^2/h^2}{\sin^2 \pi r_0/h} - 1 \right)$$

$$u_{E'} \approx \frac{m}{2\pi r_0^2} \times \left( \frac{\pi r_0/h}{3} \right)^2$$

soit :

$$u_d \approx u_{E'}$$

# CHAP. II

# METHODES NUMERIQUES ET ANALYTIQUES

## I) PRESENTATION

### 1) Différentes approches

La différence entre un écoulement illimité autour d'un profil et celui confiné se caractérise par l'écart entre deux champs de vitesses. Comme on vient de l'exposer, ces survitesses servent, bien imparfaitement il faut en convenir, à corriger globalement les coefficients aérodynamiques ou localement les coefficients de pression sur le profil. Désormais au lieu de rechercher comment utiliser ces survitesses, on s'intéresse exclusivement à la détermination de cette différence de champ.

Suite à la méthode élémentaire, des images différentes méthodes sont apparues. Elles se classent en quatre catégories :

- analytiques
- numériques avec les petits pavés
- analogies rhéo-électriques
- semies-empiriques.

Avant d'exposer le nouveau concept de parois adaptables qui vise non pas à calculer les effets de parois mais à les annuler par déformation, puis d'introduire une nouvelle méthode qui englobera en quelque sorte la précédente, on se propose d'analyser et de critiquer les méthodes existantes. L'approfondissement des deux dernières n'apporte aucun élément essentiel et on les mentionne succinctement. Les deux autres permettent soit d'envisager des veines de forme en plan quelconque (numérique), soit de traiter complètement la condition aux limites introduites précédemment et de fournir des expressions analytiques au lieu de séries.

La méthode numérique est assez récente ; pourtant elle se rapporte au problème très classique de détermination d'une fonction à Laplacien nul avec des conditions aux limites non moins classiques. Au lieu de se contenter de mentionner le contenu des dernières publications, on tente de juxtaposer les schémas aux différences mis au point pour résoudre ce problème avec la technique des singularités hydrodynamiques utilisée depuis peu de temps pour trouver cette fonction harmonique. Bien qu'ancien ce problème reste ouvert et pour innover à son sujet il serait intéressant de s'y consacrer.

Seul l'exposé de la méthode analytique présente des résultats originaux non pas sur le plan mathématique mais sur celui du traitement de l'effet de parois. Les documents sur cette méthode sont assez conséquents et il peut être difficile d'y discerner le schéma complet du calcul, d'autant qu'il y manque des intermédiaires et des hypothèses d'application, ou bien que les intermédiaires sont un peu gauches ce qui aîourdit la démonstration. L'étude du cas bidimensionnel servira à fixer le principe de la méthode. Les hypothèses d'application seront introduites pour la veine rectangulaire à parois verticales pleines. On montrera ensuite que la méthode quasi-analytique s'applique quelque soit la veine. Et on envisagera deux méthodes pour résoudre de façon plus simple le cas de la veine rectangulaire.

## 2) Analogie rhéo-électrique

L'analogie rhéo-électrique (33, 34) se base sur une simulation d'un modèle mathématique connu, par exemple : les fonctions harmoniques munies d'une condition aux limites. Pour résoudre le problème aux limites posé, il suffit de réaliser un schéma électrique qui répond aux mêmes équations que celles envisagées. Cependant elle reste pratiquement inusitée à cause probablement des questions de modélisation et de mise en oeuvre.

## 3) Lois semi-empiriques

Les lois empiriques proposées jusqu'à présent sont multiples (35) et il est souvent difficile d'y dissocier la part expérimentale du fondement théorique. On est obligé de recourir à ces indications semi-empiriques chaque fois que l'une des hypothèses inhérentes aux méthodes répertoriées est dépassée. Les deux thèmes principaux englobés sous cette en-tête sont l'apparition de décollements ou l'utilisation systématique du facteur de compressibilité de Prandlt ( $\beta = \sqrt{1-M^2}$ ).

L'augmentation de traînée occasionné par les décollements s'assimile à celle que subit une plaque plane face au vent (36). Le sillage derrière des plaques de formes différentes est modélisé par un "bulbe" de fluide mort et l'hypothèse principale sur sa contraction en présence de parois se vérifie expérimentalement. L'exclusion de cette théorie aux profils ou maquettes décollés se ramène pratiquement aux schémas classiques en procurant l'intensité d'une source représentative du fluide mort (37).

Au contraire, le facteur de compressibilité est fondé sur la linéarisation des équations de Navier-Stokes. Mais son extension au domaine transsonique est ambiguë. Ses limites d'application se décelent en confrontant les résultats de son application à ceux provenant de la méthode de ces petites perturbations (38).

## II) METHODES NUMERIQUES

### 1) Présentation

La méthode numérique actuellement utilisée pour définir l'effet de parois est assez récente (23). On la présente comme omnipotente. Certes, elle s'accommode aussi bien de n'importe quelle forme et configuration de veine que de toute position de la maquette quelle qu'elle soit. Cependant sa mise en oeuvre nécessite des précautions numériques spéciales d'autant plus que la durée des calculs demeure importante. Ainsi son champ d'application se restreint à chaque généralisation d'une autre méthode. Il serait d'ailleurs intéressant de comparer ses performances avec celles de la méthode pseudo-analytique exposée dans le paragraphe suivant qui est aussi valable à toute forme de veine.

Le problème de la détermination d'une fonction à Laglacien nul se rencontre dans de nombreux domaines de la physique comme il est montré de façon non exhaustive dans (5). Malgré les nombreux développements pour résoudre cette question, il est impossible d'extraire une seule méthode qui serait la meilleure. En fait il existe deux grands procédés : les schémas aux différences ou les singularités hydrodynamiques. Le premier se rattache à une théorie générale assez élaborée qui traite de la résolution de n'importe quelle équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles. La seconde se base sur une idée plus physique qui consiste à répartir des singularités hydrodynamiques sur le contour de la veine et d'ajuster leur intensité pour respecter les conditions aux limites. C'est celle qui est adaptée pour la détermination des effets de parois car elle présente l'avantage de ne nécessiter qu'un maillage de la frontière ce qui réduit de un la dimension de l'espace de calcul. En tridimensionnel au lieu d'un système linéaire creux de quelques milliers d'équations, il ne s'agit que de centaines.

### 2) Schéma aux différences (4, 5)

Ce mode de résolution nécessite d'être précisé car les dernières améliorations ne sont pas toujours employées (39). Par un développement taylorien, on vérifie que les dérivées partielles s'approximent par des différences finies à un certain ordre suivant le pas de calcul. Cette approximation discrète se construit à l'ordre de précision voulu, par le principe des coefficients indéterminés ou par le truchement des opérateurs aux différences.

En multidimension ceci s'étend aux maillages polygonaux sur lesquels on approxime non pas chacune des dérivées partielles séparément, mais où on recherche directement l'approximation de l'équation globale à l'ordre maximal sur un pochoir comprenant le minimum de points.

D'ailleurs l'introduction d'un opérateur idoine sur le second nombre permet parfois d'accéder à un plus grand ordre d'approximation suivant une norme adéquate, sans pour autant augmenter le nombre de points. Pourtant il ne faut pas perdre de vue qu'en général les deux phénomènes sont indissociables. L'élévation de l'ordre nécessite plus de points ce qui accroît la largeur de la matrice bande et rend sa résolution plus difficile. Bien que les techniques de résolution de tels systèmes plus ou moins larges aient été éprouvées depuis longtemps, on leur préfère le procédé de stationnarisation. Les phénomènes physiques stationnaires qui répondent à l'équation de Laplace sont souvent le résultat d'un processus évoluant dans le temps qui converge vers un état d'équilibre. Le calcul instationnaire s'avère souvent plus simple que celui de l'obtention directe de l'état stable. Après avoir choisi l'état initial (temps origine  $t = 0$ ), on cherche l'état à l'instant suivant par un schéma explicite ou implicite dans le temps. Tandis que la stabilité numérique des schémas propres à l'équation de Laplace provient du principe du maximum, l'analyse spectrale de ceux instationnaires montre la stabilité et permet de minimiser le nombre d'opérations.

### 3) Singularités hydrodynamiques

Au lieu de résoudre directement l'équation différentielle, la solution est approchée par une famille finie de singularités hydrodynamiques réparties sur le contour de la veine. D'après la formule de Green le potentiel de l'écoulement à l'intérieur de la veine peut se prolonger à l'extérieur de sorte que le potentiel ou sa dérivée normale soit identique pour les deux écoulements. Ceci justifie la discrétisation de la relation intégrale de Green qui revient à ajuster par résolution d'un système linéaire les intensités de singularités d'ordre un ou deux réparties à la frontière et à imposer les conditions aux limites idéalisées en des points de contrôle.

Sur le plan numérique le choix des singularités n'est nullement indifférent. Le bon conditionnement de la matrice incite à choisir le type de singularités contribuant de façon prépondérante à la relation au point de contrôle propre à <sup>son</sup>élément porteur. La communication (40) explicite des critères précis pour guider ce choix des singularités, avec de plus la description d'une procédure efficace pour sa fiabilité numérique, et en particulier pour évaluer correctement le coefficient d'influence d'un panneau sur lui-même. Notons aussi qu'un ensemble maillé de singularités ponctuelles ne peut convenir. Par passage à la limite du pas de maillage vers zéro, la fonction limite respecterait la relation à la frontière sur un ensemble non dénombrable de points. Mais inversement cette fonction posséderait un ensemble portant dense de singularités ce qui signifie la divergence du procédé. Une fonction continue à la frontière ne peut s'approximer sur une famille de fonctions discontinues et non bornées.

En dépit de ces justifications, cette méthode reste assez peu formalisée ; aucune indication sur sa précision, son ordre, sa convergence et sa stabilité. Et ceci se traduit par des constatations expérimentales et non systématiques sur la finesse utile du maillage. En outre la formule de Green n'est nullement indispensable pour établir cette méthode des singularités hydrodynamiques. Il existe une fonction harmonique unique prenant des valeurs données sur sa frontière. L'approximation aussi précise que souhaitée sur un espace fini de fonction n'est réalisable que si la limite de cet espace quand sa dimension croît indéfiniment s'identifie avec celui des fonctions continues à l'intérieur de  $D$  et sur la frontière  $\Gamma$ . Ceci justifie par exemple une autre méthode de singularités (41) basée sur une approche physique du phénomène qui consiste à répartir des singularités sur le contour image de l'origine par rapport aux parois. Au lieu de sommer une série d'images comme dans la méthode du même nom, les intensités des singularités sur le contour image sont ajustées pour respecter les conditions aux limites. L'effet prépondérant revient aux images directes du modèle tandis que les autres singularités s'estompent en intensité vers l'amont et l'aval car elles ne servent qu'à compenser la différence qualitative entre une singularité image ajustée et la sommation d'une série d'images.

Cette variante de la méthode des singularités aboutit nécessairement à une matrice mal conditionnée car les vitesses induites par des singularités unitaires voisines localement sont très proches. On peut y remédier en diminuant la distance entre les singularités et les parois, et en optant éventuellement pour les singularités d'ordre le plus élevé. Toutefois le problème de la détermination d'une fonction harmonique connaissant ses valeurs aux frontières reste ouvert. Sur le plan numérique il se pose sous la forme : trouver une famille fondamentale d'espaces finis de fonctions harmoniques qui approxime au mieux l'espace des fonctions harmoniques dans  $D$  et sur  $\Gamma$ . Existe-t-il une base de chacun de ces espaces optimaux qui se calcule plus simplement que par les formules alambiquées actuellement proposées (42). En outre, sur le plan analytique, on ramène le problème précédent à de simples quadratures pour des formes de veines simples (chap IV). Ne serait-ce réalisable de façon générale ?

### III) METHODE ANALYTIQUE

La méthode dite "analytique" se réfère aux transformées discrètes et intégrales de Fourier. Depuis l'apparition des veines d'essais à fentes créées pour éliminer le blocage sonique, puis avec les parois perforées susceptibles d'absorber les ondes de choc, les ouvrages parus sur ce sujet abondent. Or depuis 1954, date à laquelle Baldwin (20) schématisa la condition aux limites pour les parois à fentes, les schémas de démonstration sont simi-

laires pour chaque type de veine. A dessein de synthèse seules ces quelques idées maîtresses sont exposées ci-dessous ce qui permet de formaliser les conditions d'application et d'émettre des suggestions pour le cas général et la veine rectangulaire.

### 1) Historique (7)

Grâce aux transformées de Fourier, Baldwin exprime les corrections de volume et de portance en bidimensionnel et en veine circulaire en respectant les relations aux limites idéales qu'il a introduit. Puis par cette seule méthode efficace avec ces conditions aux limites, de nombreux calculs fragmentaires furent publiés aux alentours des années 60. Wright (22) fournit les corrections angulaires ; Acum (48) l'étend aux veines rectangulaires de rapport hauteur sur largeur de veine quelconque. Ces mêmes calculs en parois poreuses furent abordés par Holder (44) ; Wright (45) s'intéressa ensuite aux veines munies de quatre parois planes perforées. Ce n'est qu'assez récemment que des formulaires furent établis (6, 46). Depuis les derniers ajouts sur la condition de nullité des transformées de Fourier à l'infini (47) et sur la modélisation des maquettes, on possède actuellement l'ensemble des coefficients de corrections en veines courant plan, circulaires et rectangulaires munies de parois pleines ouvertes ou perforées.

### 2) Hypothèse initiale

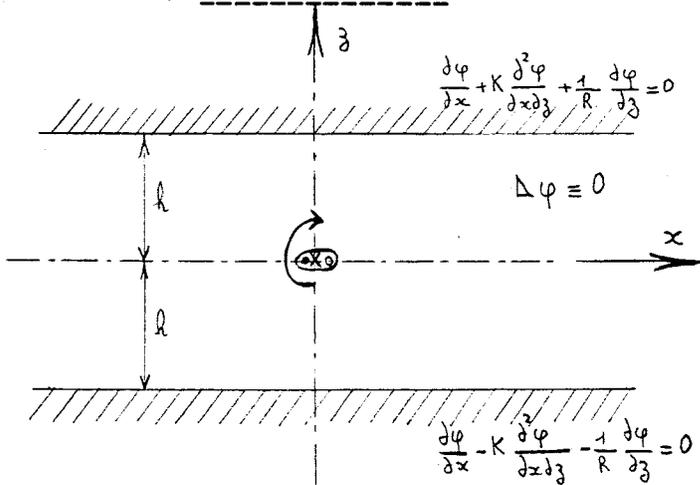
Un écoulement de fluide parfait stationnaire, isentropique, irrotationnel et faiblement compressible est régi par l'équation de Laplace :

$$\Delta \varphi = 0 \equiv \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Supposons, hypothèse fondamentale, que le potentiel considéré est régulier à l'intérieur de son domaine de définition (D). Or la présence d'un corps quelconque dans la veine fait exclure cette hypothèse. Pour s'en convaincre, il suffit d'évoquer sa schématisation par des singularités. Ceci implique que le potentiel d'interaction  $\varphi_i = \varphi - \varphi_m$  est régulier dans D si et seulement si le potentiel de l'écoulement confiné  $\varphi$  présente les mêmes singularités que celui illimité  $\varphi_m$ . Cette condition équivant à l'hypothèse sous-jacente à la méthode des images où les singularités représentatives du modèle sont indépendantes de la veine. Cette restriction illusoire se traduit dans tous les cas par l'infraction des conditions locales sur le profil. Ainsi le problème posé ci-après qu'il soit résolu par la méthode des images ou celle analytique, possède une solution unique. Et il n'en demeure pas moins qu'il est, conformément à l'idée déjà émise (p.16,22), mal posé car indépendant des conditions locales.

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \varphi_i = 0 \\ + \text{ respect des conditions limites aux parois} \end{array} \right.$$

3) bidimensionnel



En schématisant la maquette par un doublet, une source et un tourbillon la condition aux limites déjà introduite (p.) devient :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \pm K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \pm \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=\pm h} = 0$$

soit  $\varphi_m = \varphi_d + \varphi_w + \varphi_r$

Avec  $\varphi_d = \frac{m}{2\pi} \frac{x}{x^2 + \beta^2 z^2}$

$$\varphi_w = \frac{q}{2\pi\beta} \text{Log} \sqrt{x^2 + \beta^2 z^2}$$

$$\varphi_r = -\frac{\Gamma}{2\pi} \text{Arctg} \beta z/x$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \pm K \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial z} \pm \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right|_{z=\pm h} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_d + \varphi_w + \varphi_r) \pm K \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\varphi_d + \varphi_w + \varphi_r) \pm \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_d + \varphi_w + \varphi_r) \right\}_{z=\pm h}$$

D'après la linéarité du Laplacien et de la relation aux limites, la solution générale de ce système est la superposition des trois fonctions qui satisfont les équations précédentes avec un seul terme au second membre soit  $\varphi_d$  doublet, soit  $\varphi_w$  source, soit  $\varphi_r$  tourbillon. Le Laplacien devient par transformée de Fourier l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}_i}{\partial z^2} = \beta^2 \rho^2 \hat{\varphi}_i$$

D'où :  $\hat{\varphi}_i(\rho, z) = [A(\rho) \text{Ch}(\beta \rho z) + \frac{P}{|\rho|} B(\rho) \text{Sh}(\beta \rho z)] \times \frac{1}{i\rho}$

L'étape suivante consiste à relier les constantes d'intégration A et B aux conditions aux limites. Ici on se restreint au cas symétrique (B ou A = 0) car les potentiels  $\varphi_d$  et  $\varphi_w$  sont pairs en z tandis que  $\varphi_r$  est impair. La seule relation en  $z = h$  suffit car l'autre s'en déduit par symétrie. Dans le plan transformé elle s'écrit :

Doublet  $A_d(\rho) \left[ -i\rho \text{Ch}(\beta \rho z) - i\rho K \beta \rho \text{Sh}(\beta \rho z) + \frac{\beta \rho}{R} \text{Sh}(\beta \rho z) \right]_{z=h} = \frac{P}{i} \left[ -i\rho \hat{\varphi}_d - i\rho K \frac{\partial \hat{\varphi}_d}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial \hat{\varphi}_d}{\partial z} \right]_{z=h}$

Source  $A_w(\rho) \left[ -i\rho \text{Ch}(\beta \rho z) - i\rho K \beta \rho \text{Sh}(\beta \rho z) + \frac{\beta \rho}{R} \text{Sh}(\beta \rho z) \right]_{z=h} = \frac{P}{i} \left[ \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial x} + K \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_w}{\partial x \partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial z} \right]_{z=h}$

Tourbillon  $B_r(\rho) \left[ -i\rho \text{Sh}(\beta \rho z) - i\rho K \beta \rho \text{Ch}(\beta \rho z) + \frac{\beta \rho}{R} \text{Ch}(\beta \rho z) \right]_{z=h} = \frac{|\rho|}{i} \left[ \frac{\partial \hat{\varphi}_r}{\partial x} + K \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_r}{\partial x \partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial \hat{\varphi}_r}{\partial z} \right]_{z=h}$

Le stade le plus technique du calcul qui réapparaît en tridimensionnel, réside dans la détermination des transformées de Fourier des singularités représentatives du modèle. En bidimensionnel les identités utiles s'obtiennent encore aisément (48) :

$$\frac{\hat{\varphi}_d \sqrt{2\pi}}{m} = \frac{\partial \varphi_w \cdot \sqrt{2\pi} \beta}{\partial x \cdot q} = \frac{\hat{\varphi}_r \cdot \sqrt{2\pi}}{\beta \gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{i\rho x} dx}{x^2 + \beta^2 z^2} = \frac{i\rho}{2|\rho|} e^{-|\rho \beta z|}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_w \cdot \sqrt{2\pi} \beta}{\partial z \cdot q} = \frac{\hat{\varphi}_r \cdot \sqrt{2\pi}}{\beta \gamma} = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z e^{i\rho x} dx}{x^2 + \beta^2 z^2} = \frac{z}{2|\rho z|} e^{-|\rho \beta z|}$$

par dérivation:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_d}{\partial z} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{m} = \frac{\partial \varphi_w}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\sqrt{2\pi} \beta}{q} = -\frac{i\rho \beta z}{2|\rho z|} e^{-|\rho \beta z|}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_r}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta \gamma} = -\frac{|\rho|}{2} e^{-|\rho \beta z|}$$

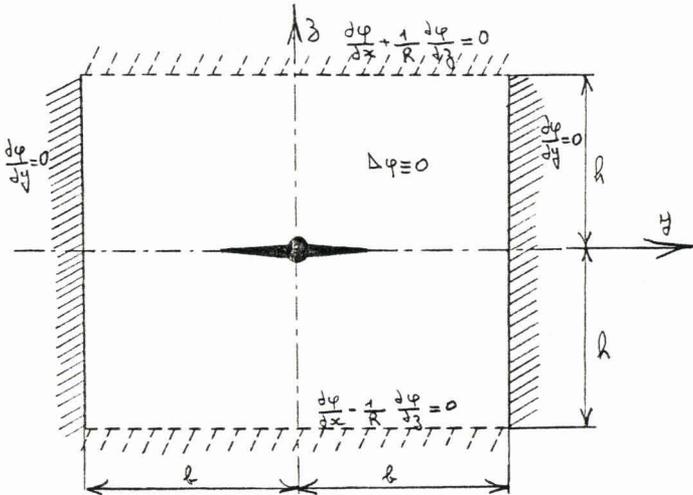
L'introduction de ces expressions dans les relations aux limites transformées procure par un calcul algébrique élémentaire les valeurs de A et B :

$$A(p) = A_w + A_s = \frac{e^{-Bk|p|} (q - imp)}{2\sqrt{2}\pi} \times \frac{\frac{i^2 p^2}{|p|^2} - ipKB + \frac{B}{R}}{\operatorname{ch}(Bk\rho) + KB \operatorname{sh}(Bk\rho) + \frac{i^2 B}{R} \operatorname{sh}(Bk\rho)}$$

$$B(p) = B_r = \frac{\gamma e^{-Bk|p|}}{2\sqrt{2}\pi} \times \frac{-\frac{p}{|p|} + KpB + \frac{i^2 B}{R}}{\operatorname{sh}(Bk\rho) + KB \operatorname{ch}(Bk\rho) + \frac{i^2 B}{R} \operatorname{ch}(Bk\rho)}$$

Le potentiel  $\varphi$  et ses dérivées en tout point du domaine proviennent de la transformée de Fourier inverse. Seuls des manègements de formules assez conséquents s'imposent avant d'aboutir aux coefficients d'effet de parois. Ils comprennent essentiellement la séparation des parties réelles et imaginaires et des simplifications occasionnées par la nullité des transformées de Fourier de fonctions impaires.

4) Veine rectangulaire à parois verticales pleines



Pour alléger le calcul, on se limite aux parois poreuses ( $K = 0$ ) ce qui ne change en rien la généralité de la démonstration. Contrairement à ce qui précède où aucune allusion n'est émise sur les conditions d'application des transformées de Fourier, elles sont ici éclaircies. Si les fonctions d'origine sont absolument sommables, leurs images existent et doivent s'annuler à l'infini d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Rien ne permettant de l'affirmer pour le potentiel, les transformées sont effectuées sur les composant de la vitesse qui devraient répondre à cette

condition, ou s'y ramener. Cette condition étant nécessaire mais non suffisante, on suppose de plus que les fonctions envisagées appartiennent au moins\* à l'ensemble des fonctions absolument sommables. En outre les transformées inverses sont comprises au sens large de la valeur principale. Une façon d'amoindrir ces hypothèses est d'employer par exemple une transformée bilatérale de Laplace (voir annexe 4). Les conditions aux limites complètes s'expriment :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} = 0 & \quad z = \pm b \\ \frac{d\varphi}{dx} \pm \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dz} = 0 & \quad z = \pm b \\ \varphi = 0 & \quad x = -\infty \\ \frac{d\varphi}{dx} \sim \frac{d\varphi}{dz} = 0 & \quad x = +\infty \end{aligned} \right\}$$

\* En se limitant à  $L^2$  ensemble des fonctions de carré sommable, la transformée appartient aussi à  $L^2$  ce qui facilite la réciprocity.

De façon plus détaillée qu'en bidimensionnel, décomposons le potentiel de l'écoulement  $\varphi$  en un potentiel maquette  $\varphi_m$ , plus le potentiel de ses images par rapport aux parois verticales  $\varphi_{E'}$  et en un potentiel complémentaire  $\varphi_c$

$$\varphi_c : \varphi = \varphi_m + \varphi_i = \varphi_m + \varphi_{E'} + \varphi_c$$

$$\text{D'où : } \varphi_i = \varphi_c + \varphi_{E'}$$

$$\varphi_{E'} = \varphi_{E'} + \varphi_m$$

$\varphi_{E'}$  représente le potentiel d'une file infinie de maquettes identiques.

D'après la première relation aux limites ( $\frac{d\varphi}{dy} = 0, y = \pm b$ ) et la définition de  $\varphi_{E'}$ , les deux fonctions  $\varphi$  et  $\varphi_{E'}$  sont périodiques, de période la largeur de veine  $2b$ . Leur différence ( $\varphi_c = \varphi - \varphi_{E'}$ ) ainsi que toutes ses dérivées partielles possèdent la même propriété. Ceci permet une décomposition en série de Fourier :

$$\varphi_c(x, y, z) = \frac{\hat{\varphi}_c(x, 0, z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_c(x, n, z) \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$\hat{\varphi}_c(x, n, z) = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_c(x, y, z) \cos \frac{n\pi y}{b} dy \quad \forall n$$

$$\text{De même } \varphi_{E'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_m(x, |y + 2bn|, z) = \frac{\hat{\varphi}_{E'}(x, 0, z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_{E'}(x, n, z) \cos \frac{n\pi y}{b}$$

Ceci permet la décomposition du problème tridimensionnel en une série de bidimensionnel sur les harmoniques où on reconnaît pour  $n=0$  ou pour  $\varphi_{E'}$  uniforme en envergure la relation bidimensionnel du § 3 :

$$\beta^2 \frac{d^2 \hat{u}_c}{dx^2} + \frac{d^2 \hat{u}_c}{dz^2} = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \hat{u}_c$$

$$\frac{d\hat{\varphi}_c(x, n, z)}{dx} + \frac{1}{R} \times \frac{d\hat{\varphi}_c(x, n, z)}{dz} = - \frac{d\hat{\varphi}_{E'}(x, n, z)}{dx} + \frac{1}{R} \times \frac{d\hat{\varphi}_{E'}(x, n, z)}{dz} \quad \text{en } z = \pm h$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_c &= -\hat{\varphi}_{E'} & \text{en } x = -\infty \\ \frac{d\hat{\varphi}_c}{dx} &= -\frac{d\hat{\varphi}_{E'}}{dx} & \text{ou } \frac{d\hat{\varphi}_c}{dz} &= -\frac{d\hat{\varphi}_{E'}}{dz} & \text{en } x = +\infty \end{aligned}$$

Le potentiel  $\varphi_{E'}$  étant défini à une constante additive près, on le suppose identiquement nul à l'infini amont ( $x = -\infty, \varphi_{E'} = 0$ ). De plus l'on admet l'une des conditions  $\frac{d\varphi_{E'}}{dx}$  ou  $\frac{d\varphi_{E'}}{dz} = 0$  en  $x = +\infty$ . Suivant que ce soit l'une ou l'autre de ces conditions qui est remplie, on effectue les transformées de Fourier sur la vitesse longitudinale ( $u_x$ ) ou sur la vitesse verticale ( $u_z$ ). Ici on choisit la direction  $0_x$ , ce qui procure les transformées intégrales de Fourier valides de ces équations. Si  $u_c$  n'était pas nul aux infinis contrairement à l'hypothèse ici admise, il suffirait de la décomposer en un terme indépendant de  $x$  et une autre fonction de  $x$  mais nul à l'infini comme on l'explicitera au paragraphe suivant § 5.

$$\frac{d^2 \hat{u}_c(p, n, z)}{dz^2} = (\beta^2 p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}) \hat{u}_c(p, n, z)$$

$$\hat{u}_c \pm \frac{i}{Rp} \frac{d\hat{u}_c}{dz} = -ip \left( \hat{\varphi}_{E'} \pm \frac{i}{Rp} \frac{d\hat{\varphi}_{E'}}{dz} \right) \quad \text{en } z = \pm h$$

$$\text{D'où : } \hat{u}_c(p, n, z) = A(p) \text{Ch}(\lambda z) + B(p) \text{Sh}(\lambda z)$$

$$\text{avec } \lambda = \sqrt{\beta^2 p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}$$

Suivant le schéma du paragraphe précédent, la symétrie induit que  $A_r = B_w = B_s = 0$ . La relation aux frontières en  $z = h$  procure chacun des termes  $A_s, A_w$  et  $B_r$ . L'étape cruciale se situe dans la recherche de  $\hat{\varphi}_\epsilon$  pour chacune des singularités tridimensionnelles considérées. Par une démonstration élaborée qui se base sur des propriétés particulières des fonctions cylindriques, on obtient  $\hat{\varphi}_{\epsilon s}, \hat{\varphi}_{\epsilon w}$  et  $\hat{\varphi}_{\epsilon r}$  sous forme de fonctions de Bessel d'ordre  $n + 1/2$  qui ne sont autres que les fonctions élémentaires suivantes (49) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_s = \frac{m}{4\pi} \frac{x}{[x^2 + \beta^2(y^2 + z^2)]^{3/2}} \\ \varphi_w = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{[x^2 + \beta^2(y^2 + z^2)]^{1/2}} \\ \varphi_r = \frac{\beta^2}{2\pi} \frac{z}{y^2 + z^2} \left( 1 + \frac{x}{[x^2 + \beta^2(y^2 + z^2)]^{1/2}} \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\varphi}_{\epsilon s} = \frac{m}{2\sqrt{2\pi}} \frac{ip}{\lambda} e^{-\lambda z} \\ \hat{\varphi}_{\epsilon w} = -\frac{q}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda z} \\ \hat{\varphi}_{\epsilon r} = \frac{i\beta^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{z}{\lambda} e^{-\lambda z} \end{array} \right.$$

D'où les conditions aux limites qui fournissent les coefficients d'intégration :

$$\begin{aligned} A_s(p) \times \left( \operatorname{ch}(\lambda h) + \frac{i\lambda}{Rp} \operatorname{sh}(\lambda h) \right) &= ip \left( \frac{mip e^{-\lambda h}}{2\sqrt{2\pi} \lambda} - \frac{i\lambda}{Rp} \times \frac{mip e^{-\lambda h}}{2\sqrt{2\pi} \lambda} \right) \\ A_w(p) \times \left( \operatorname{ch}(\lambda h) + \frac{i\lambda}{Rp} \operatorname{sh}(\lambda h) \right) &= ip \left( \frac{-q e^{-\lambda h}}{2\sqrt{2\pi} \lambda} - \frac{i\lambda}{Rp} \times \frac{-q e^{-\lambda h}}{2\sqrt{2\pi} \lambda} \right) \\ B_r(p) \times \left( \operatorname{sh}(\lambda h) + \frac{i\lambda}{Rp} \operatorname{ch}(\lambda h) \right) &= ip \left( \frac{i\beta^2 e^{-\lambda h}}{\sqrt{2\pi} \lambda} - \frac{i\lambda}{Rp} \times \frac{i\beta^2 e^{-\lambda h}}{\sqrt{2\pi} \lambda} \right) \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} A(p) &= A_w + A_s = \frac{e^{-\lambda h}}{2\sqrt{2\pi} \lambda} \times \frac{ip}{\lambda} (q - imp) \times \frac{i\lambda}{Rp} + \frac{1}{Rp} \\ B(p) &= B_r = \frac{\beta^2 e^{-\lambda h}}{\sqrt{2\pi} \lambda} \times \frac{ip}{\lambda} \times \frac{1}{Rp} \times \frac{1}{\operatorname{sh}(\lambda h) + \frac{i\lambda}{Rp} \operatorname{ch}(\lambda h)} \end{aligned}$$

Lorsque  $n$  est nul,  $\lambda$  vaut par définition  $\beta/|p|$ , on retrouve alors les équations bidimensionnelles à un facteur près  $\beta b$  qui provient de la dimension des singularités tridimensionnelles.

Des manègements algébriques similaires à ceux bidimensionnels procurent l'ensemble des formules intégrales recherchées. En outre remarquons que  $\varphi'_\epsilon$  se juxtapose à  $\varphi_\epsilon$  pour donner  $\varphi_\epsilon$ . Les formules singulières de détermination de ce potentiel sont reportées en annexe 8. La résolution précédente s'adresse à  $u_\epsilon$ ; Ainsi  $\varphi_\epsilon$  et  $u_{3\epsilon}$  se définissent par intégration à une constante additive près. Et la nullité de  $\varphi_\epsilon$  à l'infini amont fait intervenir la limite des formules intégrales quand  $x$  tend vers  $-\infty$ . Ceci répond au problème de conditions aux limites soulevé dans les références (7, 47).

## 5) Veine Circulaire et Rectangulaire (4 parois perforées)

### A- Principe

La technique de résolution diffère légèrement. De la même façon qu'en bidimensionnel, le potentiel de l'écoulement  $\varphi$  est décomposé en celui de la maquette  $\varphi_m$  et celui d'interaction  $\varphi_i = \varphi - \varphi_m$ . On passe en coordonnées cylindriques pour faire ressortir la périodicité ( $2\pi$ ) de la variable angulaire ( $\theta$ ) et intégrale suivant  $x$ . Cependant le Laplacien en coordonnée cylindrique se distingue par sa forme de celui en coordonnées cartésiennes et les transformées successives le réduisent à une équation différentielle ordinaire du second ordre que vérifient les fonctions de Bessel modifiées. La suite du calcul consiste à exprimer les constantes d'intégration de cette équation différentielle en fonction des conditions aux limites en suivant

le même schéma que précédemment. Tout d'abord discernons dans  $\varphi_i$  un élément indépendant de  $x$  et une autre fonction de  $x$  mais nul à l'infini amont ce qui élargit le domaine d'application aux potentiels non nuls à  $-\infty$ . D'après la linéarité du Laplacien et des conditions aux limites ceci se traduit par la décomposition en un problème bidimensionnel et en un tridimensionnel comportant les valeurs nulles à  $-\infty$ .

$$\varphi_i(x, r, \theta) = \varphi_{i1}(x, r) + \varphi_{i2}(z, r, \theta)$$

$\left\{ \begin{aligned} & \Delta^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \theta^2} = 0 \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \pm \frac{1}{R_v} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad y = \pm b \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \pm \frac{1}{R_u} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad z = \pm h \\ & \varphi = 0, \quad \varphi_m \neq 0 \quad x = -\infty \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad x = +\infty \end{aligned} \right.$	$\rightarrow$ $\rightarrow$	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <math display="block">\begin{aligned} \text{2-D} \quad &amp; \frac{\partial^2 \varphi_{i1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{i1}}{\partial \theta^2} = 0 \\ &amp; \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial y} \quad y = \pm b \\ &amp; \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial z} \quad z = \pm h \end{aligned}</math> </td> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <math display="block">\begin{aligned} \text{3-D} \quad &amp; \Delta^2 \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial \theta^2} = 0 \\ &amp; \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial x} \pm \frac{1}{R_v} \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial y} = 0 \quad y = \pm b \\ &amp; \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial x} \pm \frac{1}{R_u} \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial z} = 0 \quad z = \pm h \\ &amp; \varphi_{m2} = \varphi_{i2} = 0 \quad x = -\infty \\ &amp; \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial x} = 0 \text{ ou } \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial z} = 0 \text{ en } x = +\infty \end{aligned}</math> </td> </tr> </table>	$\begin{aligned} \text{2-D} \quad & \frac{\partial^2 \varphi_{i1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{i1}}{\partial \theta^2} = 0 \\ & \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial y} \quad y = \pm b \\ & \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial z} \quad z = \pm h \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{3-D} \quad & \Delta^2 \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial \theta^2} = 0 \\ & \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial x} \pm \frac{1}{R_v} \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial y} = 0 \quad y = \pm b \\ & \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial x} \pm \frac{1}{R_u} \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial z} = 0 \quad z = \pm h \\ & \varphi_{m2} = \varphi_{i2} = 0 \quad x = -\infty \\ & \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial x} = 0 \text{ ou } \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial z} = 0 \text{ en } x = +\infty \end{aligned}$
$\begin{aligned} \text{2-D} \quad & \frac{\partial^2 \varphi_{i1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{i1}}{\partial \theta^2} = 0 \\ & \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial y} \quad y = \pm b \\ & \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial z} \quad z = \pm h \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{3-D} \quad & \Delta^2 \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial \theta^2} = 0 \\ & \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial x} \pm \frac{1}{R_v} \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial y} = 0 \quad y = \pm b \\ & \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial x} \pm \frac{1}{R_u} \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial z} = 0 \quad z = \pm h \\ & \varphi_{m2} = \varphi_{i2} = 0 \quad x = -\infty \\ & \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial x} = 0 \text{ ou } \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial z} = 0 \text{ en } x = +\infty \end{aligned}$			

B- Problème 2-D

Par la transformation intégrale de Mellin (49) ou par séparation des variables (50), on démontre que :

$$\varphi_{i1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta]$$

D'où les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} [A_n \cos(n-1)\theta + B_n \sin(n-1)\theta] &= -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial y}(r, \theta) \quad \text{en } y = \pm b \\ \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} [B_n \cos(n-1)\theta - A_n \sin(n-1)\theta] &= -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial z}(r, \theta) \quad \text{en } z = \pm h \end{aligned}$$

- veine circulaire

Les relations aux limites se notent en une seule équation :

$$\frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r}(r, \theta) = -\sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} [A_n \cos(n-1)\theta + B_n \sin(n-1)\theta] \quad \text{en } r = r_0$$

C'est un développement ordinaire en série de Fourier d'autant plus simple que les potentiels d'une source et d'un doublet au centre de la veine sont indépendants de  $\theta$  et que celui d'un tourbillon en fer à cheval de faible envergure centré dans la veine est proportionnel à  $\sin \theta$ . C'est-à-dire que l'application courante aux veines circulaires se résume à un seul coefficient de la série. Il s'en déduit des résultats particulièrement simples (7).

- cas général

Puisque  $r$  dépend de  $\theta$ , les séries précédentes ne peuvent pas d'inverser. Les constantes  $A_n$  et  $B_n$  s'obtiennent par discrétisation de ces relations auxquelles s'associent des simplifications dues à la parité en  $\theta$  ou à la symétrie en  $y$ . Cette méthode quasi-analytique couramment réservée aux

veines circulaires ou rectangulaires s'étend paradoxalement à toute forme de veine.

— veine rectangulaire

Connaissant les conditions frontières sur un rectangle, il semble maladroit de passer en coordonnées cylindriques. En effet par séparation des variables, le problème plan de Dirichlet pour un rectangle se résoud entièrement sous forme analytique. Développons cette idée provenant de (50). soit à résoudre :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0 \\ \text{connaissant } u_i \text{ en } y = \pm b \text{ et } z = \pm h \end{array} \right.$$

posons :  $u_i(y, z) = f(y)g(z) \longrightarrow \frac{f''(y)}{f(y)} = -\frac{g''(z)}{g(z)} = \pm \lambda^2$

Cette fonction  $u_i$  admet les solutions particulières :  $\cos \lambda y e^{\lambda z}$ ,  $\sin \lambda y e^{\lambda z}$ ,  $\cos \lambda y e^{-\lambda z}$  et  $\sin \lambda y e^{-\lambda z}$  quelque soit  $\lambda$  et les mêmes en inversant les rôles de  $y$  et  $z$ . Par linéarité l'équation initiale se divise en deux problèmes identiques à une permutation près de  $y$  en  $z$  :

$$\begin{array}{l} 1) \left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0 \\ u_i = 0 \text{ en } y = \pm b \\ u_i \text{ connu en } z = \pm h \end{array} \right. \quad 2) \left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0 \\ u_i \text{ connu en } y = \pm b \\ u_i = 0 \text{ en } z = \pm h \end{array} \right. \end{array}$$

La nullité d'une des conditions aux limites exclut la solution exponentielle en cette variable, ce qui fournit les valeurs propres en  $\lambda$  et la solution sous forme de développement en série de Fourier. En se limitant aux fonctions paires en  $y$ , ce qui ne change en rien la généralité, on exprime les coefficients du développement en fonction des valeurs limites en se servant de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques.

$$\left| \begin{array}{l} \cos \lambda b = 0 \\ \text{ou } \sin \lambda b = 0 \end{array} \right. \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda = \frac{2n+1}{2b} \pi \\ \text{ou } \lambda = \frac{n}{b} \pi \end{array} \right.$$

Soit :  $u_{i2}(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{2b} \pi y [A_n e^{\frac{2n+1}{2b} \pi z} + B_n e^{-\frac{2n+1}{2b} \pi z}] + \sin \frac{n\pi y}{b} [A_{2n} e^{\frac{n\pi z}{b}} + B_{2n} e^{-\frac{n\pi z}{b}}]$

conditions limites pour  $u_{i2}$  paire :

$$\begin{aligned} u_{i2}(y, h) &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{2b} \pi y [A_n e^{\frac{2n+1}{2b} \pi h} + B_n e^{-\frac{2n+1}{2b} \pi h}] \\ u_{i2}(y, -h) &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{2b} \pi y [A_n e^{-\frac{2n+1}{2b} \pi h} + B_n e^{\frac{2n+1}{2b} \pi h}] \end{aligned}$$

par intégration directe on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{2}{b} \int_0^b u_{i2}(y, h) \cos \frac{2m+1}{2b} \pi y dy &= A_m e^{\frac{2m+1}{2b} \pi h} + B_m e^{-\frac{2m+1}{2b} \pi h} \\ \frac{2}{b} \int_0^b u_{i2}(y, -h) \cos \frac{2m+1}{2b} \pi y dy &= A_m e^{-\frac{2m+1}{2b} \pi h} + B_m e^{\frac{2m+1}{2b} \pi h} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{b \sinh \frac{2m+1}{2} \pi h} \int_0^b [u_{i2}(y, h) e^{\frac{2m+1}{2b} \pi h} - u_{i2}(y, -h) e^{-\frac{2m+1}{2b} \pi h}] \cos \frac{2m+1}{2b} \pi y dy \\ B_m &= \frac{1}{b \sinh \frac{2m+1}{2} \pi h} \int_0^b [u_{i2}(y, -h) e^{\frac{2m+1}{2b} \pi h} - u_{i2}(y, h) e^{-\frac{2m+1}{2b} \pi h}] \cos \frac{2m+1}{2b} \pi y dy \end{aligned}$$

La solution dont on démontre l'unicité à l'aide du principe du maximum, par exemple, nécessite la convergence des séries. Or pour des fonctions suffisamment dérivables, les coefficients de Fourier décroissent au moins comme  $1/n^2$  (51) ce qui achève la démonstration.

C- Problème 3-D

Selon le schéma établi pour les parois verticales pleines, transformons intégralement puis discrètement les relations tridimensionnelles. On en déduit :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_{i2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_{i2}}{\partial r} - \left( \rho^2 \beta^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \hat{u}_{i2} = 0$$

En posant  $\lambda = \beta \rho r$ , c'est une équation de Bessel modifiée dont la solution générale est une combinaison des fonctions cylindriques de première ( $I_n$ ) et seconde espèce ( $K_n$ ). Ces dernières fonctions n'étant pas bornées en  $r=0$ , son coefficient ( $B_n$ ) est nécessairement nul. D'où l'expression de  $\hat{u}_{i2}$  et des conditions aux limites :

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_{i2}}{\partial \lambda^2} + \lambda \frac{\partial \hat{u}_{i2}}{\partial \lambda} = (n^2 + K) \hat{u}_{i2}$$

D'où :  $\hat{u}_{i2} = A_n(\rho) I_n(\beta \rho r) + B_n(\rho) K_n(\beta \rho r)$

puis  $\hat{u}_{i2} = \frac{A_0(\rho) I_0(\beta \rho r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n}(\rho) \cos n\theta + A_{2n}(\rho) \sin n\theta] I_n(\beta \rho r)$

et  $\frac{\partial \hat{\varphi}_{m2}}{\partial x} + \frac{1}{R_v} \frac{\partial \hat{\varphi}_{m2}}{\partial y} = \frac{A_0}{2} \left\{ I_0' + \frac{i\beta}{R_v} I_0' \cos \theta \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1n} \cos n\theta + A_{2n} \sin n\theta) \left( I_n' + \frac{i\beta}{R_v} I_n' \cos \theta \right) + (A_{1n} \sin n\theta - A_{2n} \cos n\theta) \frac{i n I_n \sin \theta}{R_v \rho r}$  en  $y = \pm b$   
 $\frac{\partial \hat{\varphi}_{m2}}{\partial x} + \frac{1}{R_h} \frac{\partial \hat{\varphi}_{m2}}{\partial z} = \frac{A_0}{2} \left\{ I_0' + \frac{i\beta}{R_h} I_0' \sin \theta \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1n} \cos n\theta + A_{2n} \sin n\theta) \left( I_n' + \frac{i\beta}{R_h} I_n' \sin \theta \right) + (A_{1n} \sin n\theta - A_{2n} \cos n\theta) \frac{i n I_n \cos \theta}{R_h \rho r}$  en  $z = \pm h$

Conformément au cas bidimensionnel, on se résigne à résoudre numériquement le système linéaire discrétisé. Cette fois, les termes du premier membre sont des fonctions cylindriques et on utilise leurs relations de récurrence (49) :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_y = \frac{m}{2(2\pi)^{3/2}} i \rho K_0(\beta \rho r) \\ \hat{\varphi}_w = \frac{q}{2(2\pi)^{3/2}} K_0(\beta \rho r) \\ \hat{\varphi}_r = \frac{i I_1 \sin \theta}{(2\pi)^{3/2}} \beta K_1(\beta \rho r) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} I_n'(\rho \beta r) = n \frac{I_n(\rho \beta r)}{\rho \beta r} + I_{n+1}(\rho \beta r) \\ K_n'(\rho \beta r) = n \frac{K_n(\rho \beta r)}{\rho \beta r} - K_{n+1}(\rho \beta r) \end{cases}$$

- cas général

Il est intéressant de souligner que ces relations sont valables quelque soit la forme de veine.

- veine circulaire

Les conditions aux limites se réduisent de même à un seul terme relatif à la singularité modèle qui est le premier ou le second harmonique d'où :

$$\hat{u}_{i2}(\rho, r, \theta) = \frac{A_0(\rho)}{2} I_0(\rho \beta r) + A_{21}(\rho) \sin \theta I_1(\rho \beta r)$$

et en  $r=r_0$   $\frac{A_0(\rho)}{2} \left[ I_0 + \frac{i\beta R}{\rho} I_0'(\rho \beta r_0) \right] = -i \rho \left[ \frac{m}{2(2\pi)^{3/2}} i \rho K_0 - \frac{q}{2(2\pi)^{3/2}} K_0 \right] + \frac{1}{R} \left[ \frac{m}{2(2\pi)^{3/2}} i \rho \beta \rho K_0' - \frac{q}{2(2\pi)^{3/2}} \beta \rho K_0' \right]$

$$A_{21}(\rho) \sin \theta \left[ I_1 + \frac{i\beta R}{\rho} I_1'(\rho \beta r_0) \right] = -i \rho \frac{i I_1 \beta \sin \theta K_1}{(2\pi)^{3/2}} + \frac{1}{R} \frac{i I_1 \beta \sin \theta}{(2\pi)^{3/2}} \beta \rho K_1'$$

relations qui se simplifient en :

$$A_0(\rho) \left[ I_0(\rho \beta r_0) + \frac{i\beta}{R} I_1(\rho \beta r_0) \right] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} (q - i m \rho) \left[ K_0(\beta \rho r_0) i \rho + \frac{\beta \rho}{R} K_1(\beta \rho r_0) \right]$$

$$A_{21}(\rho) \left[ I_1(\rho \beta r_0) + \frac{i\beta}{\rho r_0 R} I_1(\rho \beta r_0) + \frac{i\beta}{R} I_2(\rho \beta r_0) \right] = \frac{I_1 \beta \rho}{(2\pi)^{3/2}} \left[ K_1(\beta \rho r_0) + \frac{i K_1(\beta \rho r_0)}{\rho R r_0} - \frac{i\beta}{R} K_2(\beta \rho r_0) \right]$$

— veine rectangulaire

La méthode de séparation des variables ne se généralise pas à un caisson rectangulaire de longueur illimitée, car aucune des solutions particulières  $\cos \lambda x$ ,  $\sin \lambda x$ ,  $e^{\lambda x}$  ou  $e^{-\lambda x}$  ne convient. Ceci signifie que la fonction n'est pas développable en série double de Fourier comme on le précise dans (1). Cette invalidité de principe est levée si la veine d'essai est schématisée par un parallélépipède de dimension bornée. Cette configuration plus réaliste fait intervenir les conditions aux limites sur les bases du parallélépipède (en  $x = -l_1, l_2 \forall y \text{ et } z$ ) qui se rattachent aux conditions réelles d'essais. La méthode préconisée présente l'intérêt de ramener la détermination des coefficients des transformées de Fourier à de simples quadratureurs grâce à l'orthogonalité des solutions particulières.

Une autre approche plus classique consiste à reproduire deux fois l'étude de la veine à parois verticales pleines :

$$\left. \begin{aligned}
 & \beta \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{i2}}{\partial z^2} = 0 \\
 & \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial x} \pm \frac{1}{R_v} \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial y} = 0 \text{ en } y = \pm b \\
 & \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial x} \pm \frac{1}{R_H} \frac{\partial(\varphi_{i2} + \varphi_{m2})}{\partial z} = 0 \text{ en } z = \pm h \\
 & \varphi_{m2} = \varphi_{i2} = 0 \text{ en } x = -\infty \\
 & \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial x} = 0 \text{ ou } \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial n} = 0 \text{ en } x = +\infty
 \end{aligned} \right\} + \left. \begin{aligned}
 & \beta \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0 \\
 & \varphi_1 = 0 \text{ en } y = \pm b \\
 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \pm \frac{1}{R_H} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial x} \pm \frac{1}{R_H} \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial z} \text{ en } z = \pm h \\
 & \varphi_1 = \varphi_{m2} = 0 \text{ en } x = -\infty \\
 & \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \text{ en } x = +\infty
 \end{aligned} \right\} + \left. \begin{aligned}
 & \beta \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0 \\
 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \pm \frac{1}{R_v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial x} \pm \frac{1}{R_v} \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial y} \text{ en } y = \pm b \\
 & \varphi_2 = 0 \text{ en } z = \pm h \\
 & \varphi_2 = \varphi_{m2} = 0 \text{ en } x = -\infty \\
 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial x} = 0 \text{ en } x = +\infty
 \end{aligned} \right\}$$

Il est immédiat que  $\varphi_{i2} = \varphi_1 + \varphi_2$  est solution du problème initial. Contrairement aux cas de parois verticales pleines, il n'est cette fois-ci plus question de potentiel d'une file infinie ( $\varphi_E$ ) et la première condition aux limites porte sur le potentiel au lieu de sa dérivée normale. Cependant ceci n'introduit que des changements de détails.

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{\hat{\varphi}_1(x, 0, z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{\varphi}_1(x, n, z) \cos \frac{2n\pi y}{2b} + \hat{\varphi}'_1(x, n, z) \sin \frac{n\pi y}{b} \right]$$

La suite du calcul reproduit celui déjà effectué à la différence près qu'il reste encore à exprimer les transformées intégrales des développements de  $\varphi_{m2}$  en série de Fourier suivant  $y$  pour  $\varphi_1$ , et suivant  $z$  pour  $\varphi_2$ .

I) PRESENTATION

- L'idée ancienne (27, 52) d'annuler les effets de parois en les déformant suivant une ligne de courant calculée à priori fut abandonnée face au manque de fiabilité des résultats obtenus. Les performances des machines à calculer actuelles et la découverte de critères adéquats pour déceler l'adaptation des parois expliquent le déploiement récent de cette méthode absolue, où la présence de parois n'influe aucunement sur le champ de vitesse autour du modèle. L'idée novatrice de parois auto-adaptables apparut simultanément dans deux publications (8, 9) bien qu'elle germait dans d'autres centres comme le dévoilent les notes internes de Monsieur Chevallier. Elle consiste à mesurer les composantes pariétales de vitesses et à détecter l'adaptation par détermination des écoulements "virtuels extérieurs".

Prolongons analytiquement l'écoulement dans la veine schématisée par une bande infinie à l'extérieur de celle-ci de sorte que la condition d'évanescence des perturbations à l'infini soit respectée. Le potentiel des vitesses à l'extérieur des parois haute et basse est fixé par la connaissance d'une des dérivées partielles à la frontière (ceci sera explicité dans § II). Ainsi pour les écoulements imaginés, l'une des composantes des vitesses aux parois est liée à l'autre composante. Si l'on identifie pour chaque écoulement les composantes verticales de vitesses aux parois, il est improbable qu'il en soit de même pour les composantes longitudinales mesurées et celles calculées par les relations fonctionnelles de l'écoulement virtuel extérieur. Si cette coïncidence surgissait, l'écoulement interne serait sans aucune restriction prolongeable à l'infini où les perturbations s'annulent. C'est-à-dire que le champ interne dans la veine s'identifierait à celui illimité et que les parois sont adaptées et sans effets.

Constatant généralement l'inadaptation grâce à ce critère, le second stade du processus d'adaptation consiste à déformer les parois en leur donnant une position où elles sont présumées adaptées. Ce nouveau concept a suscité plusieurs études et réalisations (10, 11) qui montrent l'efficacité du principe d'améliorations successives et empiriques de la forme des parois pour s'approcher de l'adaptation. En quelques itérations, on parvient par différentes techniques à une veine exempte de corrections.

Un article récent (12) établit pour le cas bidimensionnel non portant, un mode d'adaptation immédiat et sans itération par optimisation du procédé itératif précédent. Ce résultat est presque aussitôt accompagné du calcul des survitesses induites par les parois grâce aux mesures des composantes de vitesses pariétales (13).

- Reprenant ces différents travaux, on précise tout d'abord un mode opératoire indispensable pour assurer la convergence du processus itératif. Le choix justifié du système d'adaptation s'est porté sur les lames flexibles déformées par des vérins. Le positionnement optimal d'un nombre discret de ceux-ci est décrit au § III. S'inspirant de la démonstration (12) on rétablira de façon naturelle la méthode d'adaptation immédiate et on l'étendra au cas portant et tridimensionnel à parois verticales pleines (§ IV). De même en veine circulaire, une démonstration similaire à (53) permettra de généraliser les cas particuliers qui y sont traités. Ceci rendra en grande partie désuet le schéma basé sur le calcul de l'écoulement virtuel extérieur

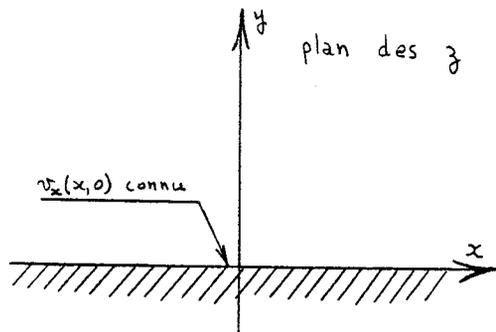
Cette étude débouche sur celle entrevue dans (13) de la détermination des effets de parois à partir des mesures des composantes de vitesses pariétales. Mais ceci anticipe sur le chapitre des méthodes intégrales et il sera abordé en toute généralité ultérieurement. Notons dès maintenant que son application aux parois adaptables est instructif. Les parois coïncident jamais parfaitement avec une ligne de courant. Toutes les études de parois adaptables parues jusqu'à présent visent l'adaptation exacte au terme de laquelle les parois n'induisent aucun effet. À l'opposé de ceci, le procédé de calcul des effets de parois à partir des mesures de pressions aux parois et de la connaissance des vitesses transmises sur celles-ci permet de calculer les corrections résiduelles en veine partiellement adaptée. À cette conclusion se joint le calcul immédiat par la même méthode de la position adaptée ce qui met en dualité corrections résiduelles et veine partiellement adaptée. Ainsi on peut juger de l'opportunité d'améliorer l'adaptation.

Deux sujets dissociés mais se rapportant à l'adaptation tridimensionnelle sont ensuite abordés. Pour une veine rectangulaire, il est montré que les déformations nécessaires pour adapter les parois verticales sont faibles et réalisables § V. Conjointement si on conserve ces parois planes les corrections devraient s'amoinrir en adoptant celles horizontales. Or cette diminution probante pour certains effets doit être nuancée § VI.

## II) ADAPTATION ITERATIVE

### 1) Relation fonctionnelle

Selon l'équation de continuité et l'existence d'un potentiel des vitesses, les composantes de celles-ci sont liées par les équations aux dérivées partielles de Cauchy-Riemann. En bidimensionnel elles représentent une condition nécessaire et suffisante pour que  $\frac{dw}{dz} = v_x - i v_y$  soit une fonction analytique. Dans ce cadre des fonctions d'une variable complexe, les formules intégrales de Poisson expriment  $v_x$  ou  $v_y$  en tout point en fonction d'une de ces valeurs sur la frontière du domaine de définition. Lorsque par exemple ce domaine est le demi-plan supérieur, on a :



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Div } \vec{v} &= 0 \\ \text{Cauchy-Riemann} \end{aligned} \right\} \leftarrow \frac{dw}{dz} = v_x - i v_y$$

avec  $z = x + iy$   
fonction analytique

$$v_x(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x(\xi,0) \frac{y \, d\xi}{(\xi-x)^2 + y^2}$$

$$v_y(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x(\xi,0) \frac{(x-\xi) \, d\xi}{(\xi-x)^2 + y^2}$$

Schématissant la veine bidimensionnelle par une bande infinie, ces deux relations fonctionnelles définissent les écoulements qualifiés de "virtuels extérieurs", l'un au dessus de la veine pour  $x \geq h$ , l'autre pour  $x \leq -h$ . En particulier la connaissance de  $v_y$  aux parois engendre le calcul de  $v_x$  pour l'écoulement virtuel extérieur ce qui boucle l'enchainement itératif des opérations d'adaptation.

- Mesure des vitesses longitudinales et transversales  $v_x^{(n)}$  et  $v_y^{(n)}$
- Calcul par la relation fonctionnelle de  $v_x^{(n) \prime}$  pour l'écoulement virtuel extérieur d'après  $v_y^{(n)}$  (ou inversement de  $v_y^{(n) \prime}$  d'après  $v_x^{(n)}$ )
- calcul inverse par la relation fonctionnelle de  $v_y^{(n+1)}$  d'après la valeur prétendue adaptée :  $h_1 v_x^{(n) \prime} + (1-h_1) v_x^{(n)}$  (ou inversement  $v_y^{(n+1)} = h_1 v_y^{(n) \prime} + (1-h_1) v_y^{(n)}$ )
- affichage de  $v_y^{(n+1)}$  soit en modifiant l'aspiration au travers de parois ventilées, soit en déformant une lame flexible avec des verins.

Les relations fonctionnelles précédentes pour un demi-plan s'étendent au demi-espace tridimensionnel (8). En supersonique une perturbation ne peut pas remonter l'écoulement et ses effets ne se ressentent qu'en un sous-domaine limité en quelque sorte par les caractéristiques passant par son point d'émission. Au passage de  $M = 1$ , les équations aux dérivées partielles régissant l'écoulement deviennent hyperboliques ou lieu d'elliptiques; Et les relations précédentes qui relient la vitesse en un point à celles sur toute la frontière du domaine, ne sont plus envisageables car spécifiques d'une équation elliptique. Ce problème a déjà été soulevé en d'autres termes (54). Une solution appropriée sera abordée au chap. IV (§ V ). Néanmoins

dans le domaine transsonique qui est mixte ( $M$  localement  $>$  ou  $< 1$ ), les schémas aux différences étudiés dernièrement conviennent parfaitement pour détecter l'adaptation par un même critère de concordance des conditions limites. Ceci nécessite que les ondes de choc n'atteignent pas les parois.

## 2) Réalisation

Les deux techniques pour changer  $v_j$  ont été éprouvées dans des installations pilotes. Malgré l'obtention de parois adaptées en quelques itérations, la difficulté majeure rencontrée réside dans la fidélité des mesures. En parois pleines la composante verticale est légèrement altérée par le développement des couches limites et les écarts de pressions entre les points de mesures sont faibles. Au Calspan les mesures de vitesses transversales au travers de parois à porosité variable et à aspiration réglable sont particulièrement soignées. Même avec de très petits capteurs (deux tubes chanfreinés) les techniques de lissage des mesures s'imposent avant l'utilisation des relations fonctionnelles (11). La première est celle des multipôles qui se sert en bidimensionnel de la méthode des moindres carrés pour ajuster l'intensité de singularités d'ordre croissant. Une précision acceptable en tridimensionnel nécessite l'emploi de distributions de singularités aux parois au lieu de singularités ponctuelles. La seconde technique est de lisser les mesures sans modélisation avec des splines d'ajustement, puis d'interpoler ces valeurs théoriques et d'utiliser les schémas aux différences propres aux équations aux petites perturbations en transsonique:

En dépit de ces précautions l'emploi de lames flexibles semble préférable. L'argument de l'absorption des ondes de choc uniquement par des parois poreuses mériterait quelques preuves et il s'y oppose la turbulence et le bruit engendré par les perforations. Sur le plan mécanique et énergétique, il en va tout autrement. Au lieu de déclinomètres, de caissons d'aspiration à débit variable avec circuit secondaire, quelques vérins suffisent. L'importante différence de pression entre la veine et l'emplacement du diffuseur où est rejeté le débit secondaire nécessite l'emploi d'un compresseur de grande puissance. A l'opposé la déformation des lames n'entraîne aucun dépôt d'huile du compresseur dont on se dispense, et aucune perturbation par réinjection du débit auxiliaire. Et maintenant que la technique commence à s'établir, on cherchera plutôt à réduire la puissance en diminuant la section de veine.

La dernière imperfection en suspens réside dans la longueur limitée de veine. Un calcul basé sur une méthode de singularités (10) par exemple précise qu'une adaptation sur une longueur équivalente à quelques hauteurs de veine (2 à 4) réduit considérablement (90 à 98%) la correction de blocage, il

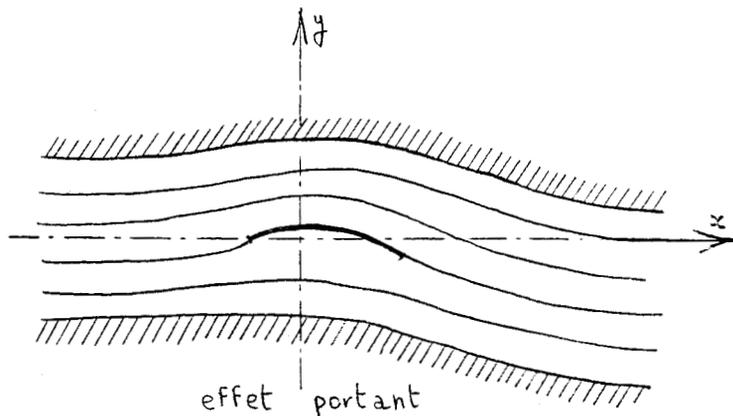
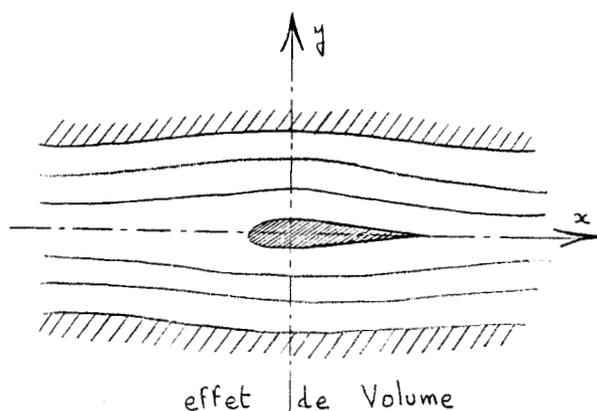
n'en demeure pas moins que les parois déformées doivent se rattacher au collecteur et au diffuseur. Cet aspect de raccord mécanique envisagé ultérieurement (3) en bidimensionnel est problématique en tridimensionnel. En particulier le diamètre d'une veine circulaire devrait être variable.

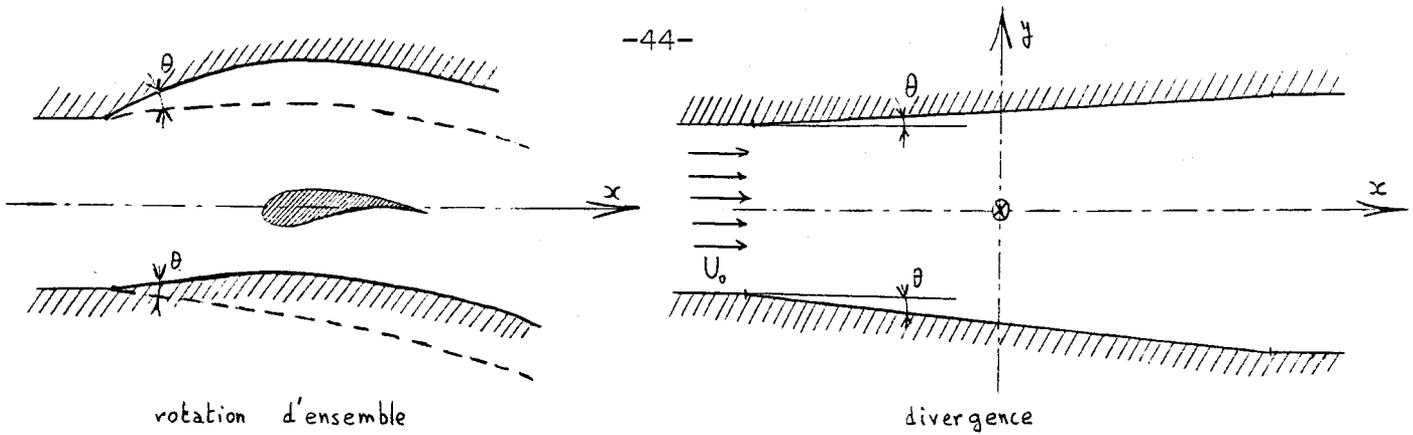
Hormis ce problème, les jalons pour l'adaptation tridimensionnelle sont déjà posés (8) et même en transsonique bidimensionnel les résultats fournis par les premières installations sont concluants. D'ailleurs ces parois auto-adaptables servent à titre indicatif à simuler l'effet de sol. En effet au lieu de déformer les deux parois en forme de ligne de courant, il suffit d'en garder une plane pour simuler le sol et d'adapter la seconde. Quant à l'extension aux maquettes propulsées et à grande incidence (11), elle semble prometteuse bien qu'hypothétique.

### 3) Mode Opératoire

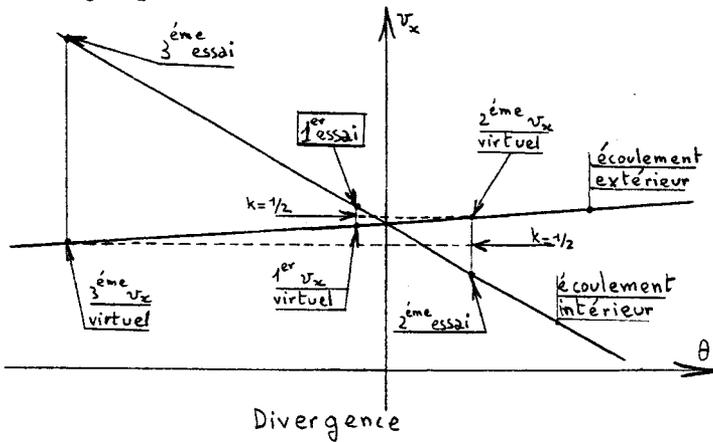
Le choix initial d'un coefficient de relaxation  $k$  égal à  $\frac{1}{2}$  se réfère à une interprétation par des singularités (9). Mais cette indication qui prétend que la forme adaptée se situe à mi-chemin entre  $v_x$  calculée et mesurée n'est fondée sur aucune justification théorique. Si en écoulement illimité les distributions de singularités  $m$  et  $m'$  sur l'axe de la veine induisent respectivement aux parois les vitesses  $v_x, v_y$  et  $v'_x, v'_y$ , si de plus en écoulement confiné on y mesure  $v_x$  et  $v'_y$ , rien ne prouve que,  $v'_x$  étant mesuré, on aurait  $v_y$ . S'il en était ainsi le choix médian serait rigoureux. L'expérience ferait plutôt opter pour un facteur de  $\frac{1}{4}$  (11). Des considérations plus physiques clarifient ce choix en indiquant aussi comment assurer la convergence du procédé itératif. L'optimisation du facteur  $k$  est reporté au § II.

Si  $v_y$  croît en tout point frontière, la vitesse longitudinale augmente en conséquence pour l'écoulement extérieur, tandis que son sens de variation est inversé pour celui intérieur. Ceci indique qu'une combinaison convexe entre  $v_x$  mesurée et calculée permettrait d'atteindre l'adaptation. Afin de préciser cette notion descriptive, décomposons la déformée en quatre morceaux superposables dont chacun caractérise un effet particulier.





Aux effets portant et de volume classiques s'ajoutent la définition de l'incidence à l'entrée de veine par rapport au profil ce qui laisse un degré de liberté dans le choix de la forme de veine. Les effets visqueux tels couches limites et sillage nécessitent une divergence globale. Mais la vitesse longitudinale de l'écoulement est peu sensible à un faible incrément de l'angle de divergence  $\theta$ , contrairement à celui interne. Comme on le voit sur la figure ci-dessous, le processus d'adaptation itératif diverge pour le choix médian.



Les erreurs de mesures et de discrétisation cumulées par intégration des pentes locales ( $v_x$ ) n'assurent pas la bonne divergence de veine, Ce qui indique que le processus est susceptible de diverger. En se basant sur la conservation du débit, un remède efficace consisterait à préciser l'amplitude de la déformée à l'entrée du diffuseur par détermination de l'épaisseur des couche

limites. L'extrémité de la paroi adaptable se raccorderait à ce point voisin de l'entrée du diffuseur par une rotation d'ensemble.

### III) POSITIONNEMENT (55)

L'équation d'une lame flexible déformée par des vérins s'apparente à une cubique par morceaux. Car si l'appui des vérins est ponctuel, la dérivée du moment de flexion  $M_f$  ne subit des discontinuités qu'en ces points. Or on sait de la résistance des matériaux que pour une poutre élastique faiblement déformée :

$$y'' = - \frac{M_f}{EI}$$

E Module de Young

I Moment d'Inertie

Entre les appuis, la lame ne reçoit aucun effort extérieur, si bien que le moment  $y$  varie linéairement. D'où le résultat avancé :  $y$  est une cubique par morceaux. De plus au niveau de chaque vérin les cubiques doivent s'identifier jusqu'à leur dérivée seconde car  $M_f$  est continue. Ces cubiques raccordées ou morceaux de polynomes sont à l'origine de la théorie de splines. En effet si l'on cherche la spline minimale, en première approximation, de l'énergie de flexion d'une poutre ( $\min \int M_f^2(x) dx$ ) on démontre que c'est la cubique par morceaux passant par les points d'appuis fixés. Evidemment la position souhaitable pour les vérins en vue de respecter au mieux l'équation de la déformée dépend du critère de meilleure approximation choisi.

soit  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ la déformée à approximer} \\ S \text{ ensemble des splines ou morceaux de polynome} \end{array} \right.$

- Cherchons la cubique dont la courbure s'éloigne le moins de celle de  $f$ .

$$\bar{\sigma} \in S : \int_a^b (\bar{\sigma}''(x) - f''(x))^2 dx = \min_{\sigma \in S} \int_a^b (\sigma''(x) - f''(x))^2 dx$$

On sait que c'est la spline d'ordre deux interpolant  $f$  en chaque noeud. De plus toute spline différant de celle d'interpolation par un polynome du premier degré vérifie cette propriété optimale. Ceci signifie que si les vérins sont positionnés d'après la déformée en leur point d'application et si l'on impose les conditions de raccordements introduites, la forme de la paroi est optimale au sens de la courbure. C'est la méthode de positionnement la plus simple.

- Adoptons la norme de la convergence uniforme pour une fonction continue à valeurs réelles, définie sur un intervalle réel, soit  $f \in C(I)$ .

$$\|f - \sigma\| = \max_{x \in I} |f(x) - \sigma(x)|$$

On cherche dans l'espace des morceaux de cubique  $S$  qui est en sous-espace vectoriel fermé de dimension  $n$  de  $C(I)$ , celle qui minimise la norme précédente. Comme il existe un seul élément de  $S$  interpolant une fonction quelconque en  $n$  points (condition de Haar), l'approximante optimale  $\bar{\sigma}$  est unique. D'après le théorème d'alternance de Tchebycheff une condition nécessaire et suffisante pour que  $\bar{\sigma}$  soit la meilleure approximation est qu'il existe  $n+1$  points tels que :

$$\begin{aligned} |f(x_i) - \bar{\sigma}(x_i)| &= \|f - \bar{\sigma}\| \\ f(x_i) - \bar{\sigma}(x_i) &= -f(x_{i+1}) + \bar{\sigma}(x_{i+1}) \end{aligned}$$

soit :  $\sigma_j$   $j = 1, \dots, n$  une base de  $S$

par exemple  $\sigma_j$  théorique :

$$\sigma_j(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

où  $y_i$  sont les points de discontinuité (ou d'appui) de  $\sigma''$

$$\forall \sigma \in S \quad \sigma(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sigma_j(x)$$

La détermination de la spline optimale revient d'après cette caractérisation à trouver  $\alpha_j$  et  $x_i$  tels que :

$$\begin{array}{l} \text{principe d'alternance} \\ \text{minimiser} \end{array} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \sigma_j(x_i) = f(x_i) + (-1)^i \rho \quad i=1, \dots, n+1$$

$$\rho = |f(x_i) - \sigma(x_i)| \quad \forall i$$

Ce problème se résout numériquement par l'algorithme de l'échange de Rémés adapté à  $C(I)$ . Il importe dans cet algorithme de prendre une base de spline convenable. La base  $\sigma_j$  utilisée dans les démonstrations théoriques est inadaptée car tous les coefficients de la matrice  $\sigma_j(x_i)$  sont non nuls ce qui nécessite l'inversion d'une matrice pleine. Au contraire les splines à support borné, c'est-à-dire non nulles uniquement sur un intervalle  $x_{i-2}, x_{i+2}$  fournissent des matrices bandes nettement plus simples.

- La meilleure approximation au sens des moindres carrés diffère des précédentes mais elle est préférable à celle au sens de la courbure et se calcule plus rapidement que la dernière étudiée. En effet le nombre de vérin étant petit, les systèmes linéaires à inverser sont de petites tailles (ordre de la dizaine). Et les problèmes de conditionnement de matrices propres à la méthode des moindres carrés (51) ne sera point crucial. D'ailleurs l'approximation demande peu de précision car les vérins possèdent une certaine précision et la lame ne se déforme pas exactement sous forme de cubiques par morceaux (efforts dus aux différences de pression veine-caisson, approximation de l'énergie potentielle de la lame). On se contente amplement de cette méthode.

$$\|f - \bar{v}\| = \int_I (f(x) - \bar{v}(x))^2 dx = \min_{\sigma \in S} \int_I (f(x) - \sigma(x))^2 dx$$

ou sous forme discrétisée :

$$\sum_{i=1}^N |f(x_i) - \bar{v}(x_i)|^2 = \min_{\sigma \in S} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - \sigma(x_i))^2$$

Exprimons  $\bar{v}$  dans une base  $\sigma_j$  de  $S$  et résolvons le problème continu de minimisation sans contraintes :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sigma_j \\ \frac{d\|f - \bar{v}\|}{d\alpha_h} = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_I \sigma_i(x) \sigma_h(x) dx = \int_I \sigma_h(x) f(x) dx \quad \forall h=0,1,\dots,n$$

posons :

$$h_{ij} = \int_I \sigma_i(x) \sigma_j(x) dx$$

$$c_i = \int_I \sigma_i(x) f(x) dx$$

Il suffit de résoudre le système linéaire :  $\sum_{j=0}^n h_{ij} \alpha_j = c_i \quad i=0,1,\dots,n$

Ici aussi on a intérêt à choisir une base de spline à support borné car dans ce cas :

$$h_{ij} = 0 \quad \forall |i-j| > 3 \quad \begin{array}{l} i=0,1,\dots,n \\ j=0,1,\dots,n \end{array}$$

$$\int_I \sigma_h(x) f(x) dx = \int_{x_{h-2}}^{x_{h+2}} \sigma_h(x) f(x) dx$$

Pour le système discret explicitons directement le polynôme recherché sans passer par une base. Supposons que dans l'intervalle  $[y_0, y_1]$ , la déformée soit une cubique ; s'il s'avérait que mécaniquement le raccord au collecteur corresponde à un encastrement, il faudrait un polynôme de premier degré sur cet intervalle ( $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ). Comme la fonction  $f(x)$  ci-dessous présente une discontinuité de la dérivée troisième égale à un en  $y_i$  et que toutes ses autres dérivées sont continues, la spline s'écrit :

$$f_i(y) = \frac{(y - y_i)_+^3}{6} = \begin{cases} \frac{(y - y_i)^3}{6} & \text{si } y > y_i \\ 0 & \text{si } y < y_i \end{cases}$$

$$\sigma(y) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i y^i + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n d_i (y - y_i)_+^3$$

Pour minimiser la fonctionnelle discrète, on stipule que ses dérivées partielles par rapport à  $\alpha_i$  et  $d_i$  sont nulles :

$$F = \min_{\sigma \in S} \sum_{j=1}^N \left\{ f(x_j) - \sum_{i=0}^3 \alpha_i x_j^i - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n d_i (x_j - y_i)_+^3 \right\}^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial F}{\partial d_i} = 0$$

soit :

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i \sum_{j=1}^N x_j^{i+l} - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n d_i \sum_{j=1}^N x_j^l (x_j - y_i)_+^3 = \sum_{j=1}^N x_j^l f(x_j) \quad l = 0, 1, 2, 3$$

$$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^n d_i \sum_{j=1}^N (x_j - y_i)_+^3 (x_j - y_i)^l - \sum_{i=1}^3 \alpha_i \sum_{j=1}^N x_j^l (x_j - y_i)_+^3 = \sum_{j=1}^N (x_j - y_i)_+^3 f(x_j) \quad l = 1, \dots, n$$

Si la lame est encastree aux deux extremités on se ramène à un problème sans contraintes en substituant  $d_n$  et  $d_{n+1}$  dans la fonction à minimiser :

$$\sum_{i=0}^N d_i = \sum_{i=0}^N d_i x_i = 0$$

La détermination des coefficients de chaque morceau est envisageable par une substitution fastidieuse et inutile.

- Les trois normes précédentes se généralisent si l'on formalise les contraintes mécaniques, par exemple limitation du rayon de courbure de la lame pour ne pas dépasser les efforts admissibles. La spline d'ajustement aux  $n$  points de discontinuité représente un compromis entre l'approximation au sens de la courbure et la minimisation du saut de la dérivée troisième en chaque noeud :

$$\int_I [\bar{\sigma}''(x) - f''(x)]^2 dx + K \sum_{i=1}^n [\bar{\sigma}'''(x_i^+) - \bar{\sigma}'''(x_i^-)]^2 = \min_{\sigma \in S} \left( \int_I [\bar{\sigma}''(x) - f''(x)]^2 dx + K \sum_{i=1}^n [\sigma''(x_i^+) - \sigma''(x_i^-)]^2 \right)$$

Les deux autres méthodes se rapportent à l'algorithme de Rémés avec contraintes et aux algorithmes généraux de programmation quadratique avec contraintes (67).

III) ADAPTATION IMMEDIATE

i) Bidimensionnel non portant

Cette demonstration s'apparente à celle de Kraft et LO (I2) qui sont enclins à l'utilisation des transformées de Fourier.

La nullité du Laplacien se traduit dans le plan transformé par:

$$\hat{\varphi}(p, \beta) = \frac{1}{i p} \left[ A(p) \operatorname{Ch}(\beta p \beta) + \frac{p}{|p|} B(p) \operatorname{Sh}(\beta p \beta) \right] = \frac{1}{2i p} \left[ e^{i \beta |p| \beta} (A(p) + B(p)) + e^{-i \beta |p| \beta} (A(p) - B(p)) \right]$$

-En écoulement illimité l'évanescence à l'infini implique:

$$A(p) = -B(p) \longrightarrow \left. \begin{aligned} \hat{\varphi}(p, \beta) &= \frac{A(p)}{i p} e^{-\beta |p| \beta} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}(p, \beta)}{\partial x} &= A(p) e^{-\beta |p| \beta} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}(p, \beta)}{\partial \beta} &= -\frac{i \beta p}{|p|} A(p) e^{-\beta |p| \beta} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \hat{v}_3(p, \beta) = -\frac{i \beta p}{|p|} \hat{v}_x(p, \beta)$$

Cette dernière relation ramenée dans le plan des  $(x, \beta)$  reproduit les formules intégrales de Poisson.

-En écoulement confiné et pour le cas symétrique nonportant considérons que  $V_z(x, 0)$  est invariant ce qui s'explique par l'inexistence sur l'axe de la veine de vitesses verticales induites par les parois. Admettons que l'on a de plus mesuré  $v_x^{(0)}(x, h)$ . Il est alors loisible d'exprimer  $A(p)$  et  $B(p)$  d'après ces deux conditions aux limites  $V_z(x, 0)$  et  $V_x(x, h)$ . Le potentiel transformé  $\hat{\varphi}$  étant connu, il s'en déduit la condition aux limites  $V_z^{(0)}(x, h)$ . La relation fonctionnelle de l'écoulement virtuel extérieur illimité fournit la valeur conjuguée  $V_x^{(0)}(x, h)$  dont on déduit la valeur  $V_x^{(1)}(x, h)$  à afficher à l'étape suivante du processus d'adaptation itératif. Si l'on suppose que cette valeur présumée plus proche de l'adaptation est réalisée avec exactitude, les mêmes deductions que celles ci-dessus procurent  $V_x^{(2)}(x, h)$  et ainsi de suite. Sous cette hypothèse la méthode converge si  $V_x^{(n)}(x, h)$  tend vers la valeur en écoulement illimité liée à  $\hat{V}_z(p, 0)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{v}_x^{(n)}(p, h) = \frac{i p}{\beta |p|} \hat{v}_3(p, 0) e^{-\beta |p| h}$$

L'objet de cette étude est double: savoir sur quel intervalle de valeurs du facteur de relaxation  $h$  le processus converge, optimiser  $h$  pour adapter en une seule itération.

$$\hat{\varphi}(p, \beta) = \frac{1}{i p} \left[ A(p) \operatorname{Ch}(\beta p \beta) + \frac{p}{|p|} B(p) \operatorname{Sh}(\beta p \beta) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{D'où :} & \left| \begin{aligned} \hat{v}_3(p, 0) &= -\frac{i \beta p}{|p|} B(p) \\ \hat{v}_x^{(0)}(p, h) &= A(p) \operatorname{Ch}(\beta p h) + \frac{p}{|p|} B(p) \operatorname{Sh}(\beta p h) \end{aligned} \right. \\ \text{soit :} & \left| \begin{aligned} B(p) &= \frac{i p}{\beta |p|} \hat{v}_3(p, 0) \\ A(p) &= \frac{\hat{v}_x^{(0)}(p, h)}{\operatorname{Ch}(\beta p h)} - \frac{p}{|p|} \operatorname{Sh}(\beta p h) \frac{i p}{\beta |p|} \hat{v}_3(p, 0) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Il s'ensuit:

$$\hat{v}_3(p, h) = i \beta \operatorname{Sh}(\beta p h) \hat{v}_x^{(0)}(p, h) + \frac{\hat{v}_3(p, 0)}{\operatorname{Ch}(\beta p h)}$$

pour l'écoulement virtuel extérieur on a:

$$\hat{v}_x'(p, h) = \frac{iP}{B|P|} \hat{v}_3(p, h) = -\frac{P}{|P|} \operatorname{th}(B_p h) \hat{v}_x(p, h) + \frac{iP}{B|P|} \frac{\hat{v}_3(p, 0)}{\operatorname{ch}(B_p h)}$$

Chaque itération se caractérise ainsi par:

$$\begin{cases} \hat{v}_x^{(n+1)}(p, h) = -\operatorname{th}(B|P|h) \hat{v}_x^{(n)}(p, h) + \frac{iP}{B|P|} \frac{\hat{v}_3(p, 0)}{\operatorname{ch}(B_p h)} \\ \hat{v}_z^{(n+1)}(p, h) = h \hat{v}_z^{(n)}(p, h) + (1-h) \hat{v}_z^{(n)}(p, h) \end{cases}$$

-On se propose de démontrer par récurrence que:

$$\begin{cases} \hat{v}_x^{(n)}(p, h) = \hat{v}_x^{(0)}(p, h) \cdot K^{n+1} + \frac{i h_n P}{B|P|} \frac{\hat{v}_3(p, 0)}{\operatorname{ch}(B_p h)} \frac{1-K^{n+1}}{1-K} \\ \text{avec } K = 1 - h [1 + \operatorname{th}(B|P|h)] \end{cases}$$

D'après les relations de récurrence on a:

$$\begin{aligned} \hat{v}_x^{(n+1)}(p, h) &= h \left[ -\operatorname{th}(B|P|h) \hat{v}_x^{(n)} + \frac{iP}{B|P|} \frac{\hat{v}_3}{\operatorname{ch}(B_p h)} \right] + (1-h) \hat{v}_x^{(n)} \\ &= K \hat{v}_x^{(n)} + \frac{i h_n P}{B|P|} \frac{\hat{v}_3}{\operatorname{ch}(B_p h)} \quad \forall n=0, 1, \dots \end{aligned}$$

Comme la relation annoncée est exacte pour  $n=0$ , supposons qu'elle le soit aussi pour  $n$ , on en déduit:

$$\hat{v}_x^{(n+1)}(p, h) = K \left\{ \hat{v}_x^{(0)} K^{n+1} + \frac{i h_n P}{B|P|} \frac{\hat{v}_3(p, 0)}{\operatorname{ch}(B_p h)} \frac{1-K^{n+1}}{1-K} \right\} + \frac{i h_n P}{B|P|} \frac{\hat{v}_3}{\operatorname{ch}(B_p h)}$$

Il s'ensuit la validité de la relation avancée quelque soit  $n$ .

-Quand  $n$  croît indéfiniment,  $K^n$  tend vers zéro si  $|K| < 1$  d'où:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{v}_x^{(n)}(p, h) = \hat{v}_x^{(0)} \cdot 0 + \frac{i h_n P}{B|P|} \frac{\hat{v}_3}{\operatorname{ch}(B_p h)} \frac{1-0}{1-K}$$

D'après la définition de  $K$ , il en découle la convergence du processus sur l'intervalle suivant:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{v}_z^{(n)}(p, h) &= \frac{iP}{B|P|} \hat{v}_3(p, 0) e^{-B|P|h} \\ \text{pour } h &\in \left] 0, \frac{2}{1 + \operatorname{th}(B|P|h)} \right[ \end{aligned}$$

Au lieu de choisir  $k$  quelconque, prenons le tel que  $K=0$ ; Ainsi dès la première itération on parvient à la relation en écoulement illimité. C'est à dire que  $\hat{V}_x(p, h)$  et  $\hat{V}_z(p, h)$  en écoulement illimité s'exprime directement en fonction de  $\hat{V}_x(p, h)$  et  $\hat{V}_z(p, 0)$ . Le corollaire de cette conclusion dépasse la simple optimisation\* de  $k$  puisque  $\hat{V}_z(p, h)$  s'exprime aussi en fonction de ces valeurs limites. Ainsi la connaissance des deux composantes de vitesses à la paroi  $\hat{V}_z'(p, h)$  et  $\hat{V}_x'(p, h)$  procure d'une part leurs valeurs parois adaptées et d'autre part  $\hat{V}_x(p, 0)$  sur l'axe de la veine. Si la composante longitudinale au même emplacement  $\hat{V}_x(p, 0)$  en écoulement illimité lui est soustrait, on obtient les vitesses résiduelles induites. Par ce biais monotone on accède aux corrections résiduelles veine partiellement adaptée. En outre celles-ci et les valeurs aux parois adaptées sont fondées sur les mêmes mesures. Et le concept de calcul d'écoulement virtuel extérieur devient désuet vis à vis de ces relations rigoureuses.

$$h_{\text{opt}} = \frac{1}{1 + \operatorname{th} B|P|h} = \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-2B|P|h} \right)$$

$$\hat{v}_x^{(10)}(p, h) = \frac{iP}{2B|P|} \left( 1 + e^{-2B|P|h} \right) \hat{v}_3(p, h) + \left( 1 + e^{-2B|P|h} \right) \frac{\hat{v}_z^{(10)}(p, h)}{2}$$

$$\hat{v}_3^{(2)}(p, h) = (1 + e^{-2Dh|p|}) \frac{\hat{v}_3^{(1)}(p, h)}{2} - \frac{i p B}{2|p|} (1 - e^{-2Dh|p|}) \hat{v}_x^{(1)}(p, h)$$

$$\hat{v}_x^{(1)}(p, 0) = \hat{v}_x^{(1)}(p, 0) - \hat{v}_x^{(1)}(p, 0) = e^{-Dh|p|} \left\{ \hat{v}_x^{(1)}(p, h) - \frac{i p}{B|p|} \hat{v}_3^{(1)}(p, h) \right\}$$

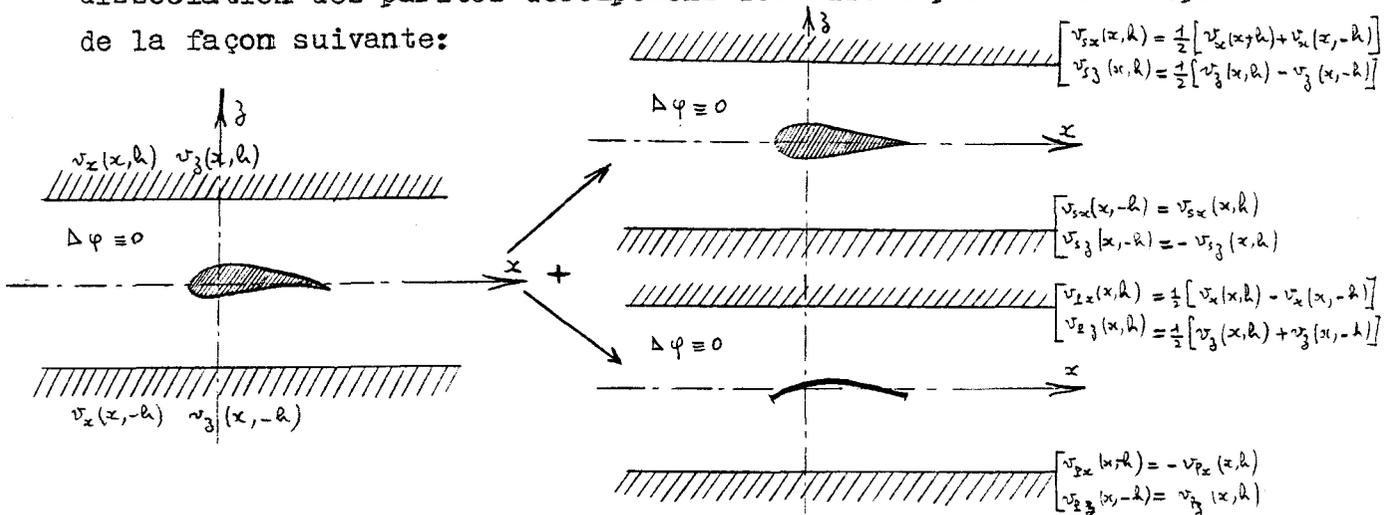
2) Bidimensionnel portant

LA demonstration précédente s'étend par symétrie à un profil bidimensionnel portant centré dans la veine. Subdivisons cette étude en un problème portant et d'épaisseur. Pour un profil symétrique les composantes longitudinales  $V_x(x, z)$  sont identiques en des points symétriques par rapport à  $Ox$  et inversement pour  $V_z$ :

$$\begin{cases} v_{sx}(x, z) & \text{paire en } z \\ v_{sz}(x, z) & \text{impaire en } z \end{cases}$$

Cette configuration se schematise par une répartition de sources sur l'axe qui correspond aux discontinuités de  $V_{sz}(x, 0)$  ou à la pente du profil dans l'approximation des profils minces. D'après la symétrie de ce problème non portant on se contente de définir le potentiel des vitesses dans le domaine  $z \geq 0$  avec une condition aux limites invariante quelle que soit la veine éventuellement en voie d'adaptation  $V_z(x, 0)$ . Puisque  $V_{sz}$  est impaire, ceci revient à se donner les discontinuités de vitesses transversales sur l'axe.

Les effets du **squelette** se conjuguent à ceux du profil de base symétrique; les rôles de  $V_z$  et  $V_x$  s'inversent. Au lieu de discontinuité sur  $V_{sz}(x, 0)$ , il s'agit de discontinuité sur  $V_x(x, 0)$ ; d'une répartition de tourbillons au lieu de sources, de fonctions paires au lieu d'impaires. Selon cette dissociation des parités décomposons les effets portant et d'épaisseur de la façon suivante:



Soit la décomposition en deux problèmes similaires:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ v_x(x, \pm h) \text{ et } v_z(x, \pm h) \text{ connues} \end{cases} \begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ v_{sx}(x, h) \text{ fonction paire et } V_{sz}(x, h) \text{ fonction impaire connues} \\ \Delta \varphi = 0 \\ v_{sx}(x, h) \text{ fonction impaire et } V_{sz}(x, h) \text{ fonction paire connues} \end{cases}$$

\* pour  $h$  élevé on retrouve pratiquement le facteur  $\frac{1}{2}$  de (9) ce qui est prévisible.

Lorsque le profil est symétrique on a montré que sur un intervalle assez large de valeurs de  $h$ ,  $v_x^{(n)}(x,h)$  et  $V_z(x,h)$  tendent vers celles induites par une répartition  $V_z(x,0)$  en écoulement illimité. Pour  $h_{opt}$  on trouve immédiatement  $V_x^{(n)}(x,h)$  et  $V_z^{(n)}(x,h)$  induits par les singularités représentatives du modèle. En reprenant la démonstration précédente dans le cas portant sans épaisseur, on a qualitativement les mêmes résultats, mais en supposant connues et discontinues non plus  $V_z(x,0)$  mais  $V_x(x,0)$ . On exprime cette fois-ci  $\hat{V}_x^{(n)'}(p,h)$  en fonction de  $\hat{V}_x^{(n)}(p,h)$  et  $\hat{V}_x(p,0)$ .

Il importe aussi de remarquer que le passage par les conditions aux limites sur l'axe de la veine n'est qu'une commodité de calcul proche du phénomène physique car la décomposition en fonction paire et impaire n'en dépend pas. Cette extension originale au domaine portant ne nécessite pas de développements supplémentaires d'autant plus qu'elle sera précisée et généralisée par exemple aux profils excentrés au chapitre IV § 5

### 3) Veine rectangulaire à parois verticales planes

Par décomposition de Fourier suivant  $y$ , l'étude de la veine rectangulaire à parois verticales pleines se ramène à une série de problèmes bidimensionnels.

$$\hat{\varphi}(p,n,z) = \frac{1}{i\rho} [A_n(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda z) + B_n(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda z)]$$

avec  $\lambda = \sqrt{\beta^2 p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$

La connaissance de deux valeurs aux limites, par exemple  $\hat{V}_z(p,n,0)$  et  $\hat{V}_x^{(n)}(p,n,h)$  quelque soit  $n$ , fixe  $A_n(\lambda)$  et  $B_n(\lambda)$ . On en tire les expressions de  $\hat{V}_z(p,n,h)$  et  $\hat{V}_x^{(n)'}(p,n,h)$  en fonction de  $\hat{V}_z(p,n,0)$  et  $\hat{V}_x^{(n)}(p,n,h)$ . La démonstration bidimensionnelle se généralise alors en remplaçant  $\beta_1 p_1$  par  $\lambda$  quelque soit  $n$ . Néanmoins il est ici question de potentiels périodiques en  $y$ . Les discontinuités sur l'axe de la veine correspondent à celles d'une file infinie en envergure. En outre lorsque les parois hautes et basses sont adaptées, il subsiste toujours l'effet des parois verticales à moins de "suradopter" les parois (chap IV § 6)

### 4) Veine circulaire

Pour achever cet aperçu de la convergence tridimensionnelle, élargissons notre champ d'application aux veines circulaires. La démonstration qui généralise les résultats de (53), ressemble à celle bidimensionnelle hormis l'introduction de fonctions cylindriques engendrées par le Laplacien en coordonnées cylindriques. Or pour ces fonctions seules les conditions aux limites connues sur un arc de cercle ( $r=r_0$ ) se traitent facilement. L'indétermination des fonctions de Bessel de seconde espèce ( $Y_n$ ) sur l'axe ( $r=0$ ) incite à admettre l'hypothèse maîtresse de cette démonstration qui réside dans la constance de la dérivée normale\* du potentiel sur un cylindre de révolution de faible rayon  $r_0$  quelque soit la forme

\* Ceci remplace l'invariance de  $v_z(x,0)$  en bidimensionnel. La dérivée tangentielle au cylindre s'introduit de la même façon.

de la veine.

$$(Voir p.34) \quad \lambda \frac{\partial^2 \hat{\varphi}(p, n, r)}{\partial \lambda^2} + \lambda \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \lambda} = (n^2 + \lambda^2) \hat{\varphi}$$

avec  $\lambda = \beta p r$

$$d'où \quad \hat{\varphi}(p, n, r) = \frac{1}{i p} [A_n(p) I_n(\beta p r) + B_n(p) K_n(\beta p r)]$$

-En écoulement illimité l'évanescence des perturbations à l'infini implique la nullité de  $A_n$ . D'où:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varphi}(p, n, r) &= \frac{B_n(p)}{i p} K_n(\beta p r) \\ \frac{\partial \hat{\varphi}(p, n, r)}{\partial x} &= B_n(p) K_n(\beta p r) \\ \frac{\partial \hat{\varphi}(p, n, r)}{\partial r} &= -i \beta B_n(p) K_n'(\beta p r) \end{aligned} \right\} \longrightarrow \hat{v}_x(p, n) = \frac{i K_n(\beta p r)}{\beta K_n'(\beta p r)} \hat{v}_r(p, n)$$

-En écoulement confiné admettons que  $v_x^{(n)}(x, \theta, R)$  et  $v_r(x, \theta, r_0)$  soient fixées et qu'à chaque itération on sache obtenir exactement par réglage:

$$v_x^{(n)}(x, \theta, R) = b_n v_x^{(n-1)} + (1-b_n) v_x^{(n-1)}$$

Reproduisons le schéma de calcul bidimensionnel.

$$\begin{aligned} \hat{v}_x^{(n)}(R) &= A_n(p) I_n(\beta p R) + B_n(p) K_n(\beta p R) \\ \hat{v}_r(p, n, r_0) &= -i \beta [A_n(p) I_n'(\beta p r_0) + B_n(p) K_n'(\beta p r_0)] \end{aligned}$$

Par élimination successive et en allégant l'expression en écrivant  $I_n$  ou  $K_n(R)$  pour  $I_n$  ou  $K_n(\beta p R)$ , on en tire:

$$\begin{aligned} A_n(p) &= \frac{1}{i \beta} \times \frac{i \beta K_n'(r_0) \hat{v}_x^{(n)}(R) + K_n(R) \hat{v}_r^{(n)}(r_0)}{K_n'(r_0) I_n(R) - I_n'(r_0) K_n(R)} \\ B_n(p) &= -\frac{1}{i \beta} \times \frac{i \beta I_n'(r_0) \hat{v}_x^{(n)}(R) + I_n(R) \hat{v}_r^{(n)}(r_0)}{K_n'(r_0) I_n(R) - I_n'(r_0) K_n(R)} \\ \hat{v}_r^{(n)}(p, n, R) &= \frac{i \beta \hat{v}_x^{(n)}(R) [I_n'(r_0) K_n'(R) - I_n'(R) K_n'(r_0)] + \hat{v}_r^{(n)}(r_0) [I_n(R) K_n'(R) - I_n'(R) K_n(R)]}{K_n'(r_0) I_n(R) - I_n'(r_0) K_n(R)} \end{aligned}$$

D'après le schéma d'adptation itératif on a les relations de récurrence:

$$\begin{aligned} \hat{v}_x^{(n+1)}(p, n, R) &= \frac{i K_n(R)}{\beta K_n'(R)} \hat{v}_r^{(n)}(R) \\ \hat{v}_x^{(n+1)}(p, n, R) &= b_n \hat{v}_x^{(n)}(R) + (1-b_n) \hat{v}_x^{(n)}(R) \end{aligned}$$

D'où la relation de récurrence propre à  $\hat{v}_x^{(n)}(R)$ :

$$\begin{aligned} \hat{v}_x^{(n+1)}(p, n, R) &= \frac{i b_n}{\beta} \hat{v}_r^{(n)}(r_0) \times \frac{K_n(R)}{K_n'(R)} \times \frac{I_n(R) K_n'(R) - I_n'(R) K_n(R)}{K_n'(r_0) I_n(R) - I_n'(r_0) K_n(R)} \\ &+ \hat{v}_x^{(n)}(R) \times \left\{ 1 - b_n \left( 1 - \frac{i}{\beta} \frac{K_n(R)}{K_n'(R)} \right) \times \frac{i \beta [I_n'(r_0) K_n'(R) - I_n'(R) K_n'(r_0)]}{K_n'(r_0) I_n(R) - I_n'(r_0) K_n(R)} \right\} \end{aligned}$$

Posons: 
$$K = 1 + \frac{K_n(R)}{K_n'(R)} \times \frac{I_n'(r_0) K_n'(R) - I_n'(R) K_n'(r_0)}{K_n'(r_0) I_n(R) - I_n'(r_0) K_n(R)}$$

qui s'écrit aussi:

$$K = \frac{K_n(R) \frac{I_n'(R)}{K_n'(R)} - I_n(R)}{K_n(R) \frac{I_n'(r_0)}{K_n'(r_0)} - I_n(R)} = \frac{K_n'(r_0) I_n(R) K_n'(R) - I_n'(R) K_n(R)}{K_n'(R) I_n(R) K_n'(r_0) - I_n'(r_0) K_n(R)}$$

La relation de récurrence se contracte en:

$$\hat{v}_x^{(n+1)}(R) = \frac{i b_n K}{\beta} \times \frac{K_n(R)}{K_n'(r_0)} \hat{v}_r^{(n)}(r_0) + (1-b_n K) \hat{v}_x^{(n)}(R)$$

Démontrons par récurrence la relation suivante:

$$\hat{v}_x^{(m)}(R) = \frac{i K_n(R)}{\beta K_n'(r_0)} [1 - (1 - hK)^m] \hat{v}_r(r_0) + (1 - hK)^m \hat{v}_x^{(0)}(R)$$

Pour  $m=1$  c'est directement la relation de récurrence. Supposons que cette relation est exacte pour  $m-1$  et montrons qu'elle l'est aussi pour  $m$  ce qui achève la démonstration.

$$\begin{aligned} \hat{v}_x^{(m)}(R) &= \frac{i h K K_n(R)}{\beta K_n'(r_0)} \hat{v}_r(r_0) + (1 - hK) \left\{ \frac{i K_n(R)}{\beta K_n'(r_0)} [1 - (1 - hK)^{m-1}] \hat{v}_r(r_0) - (1 - hK)^{m-1} \hat{v}_x^{(0)}(R) \right\} \\ &= \frac{i K_n(R)}{\beta K_n'(r_0)} \hat{v}_r(r_0) \times \left\{ hK + (1 - hK) [1 - (1 - hK)^{m-1}] \right\} + (1 - hK)^m \hat{v}_x^{(0)}(R) \quad \text{C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

- Quand  $m$  croît indéfiniment  $(1 - hK)^m$  tend vers zéro si  $|1 - hK| < 1$  D'où:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{v}_x^{(m)}(p, n, R) = \frac{i K_n(\beta p R)}{\beta K_n'(\beta p r_0)} \times (1 - 0) \hat{v}_r(r_0) - 0 \cdot \hat{v}_x^{(0)}(R)$$

soit :

$$\hat{v}_x^{(2m)}(p, n, R) = \frac{i K_n(\beta p R)}{\beta K_n'(\beta p r_0)} \hat{v}_r(p, n, r_0) \quad \forall hK \in \left\{ 0, 2, \frac{K_n'(\beta p r_0) \frac{I_n'(\beta p r_0)}{K_n(\beta p r_0)} - I_n(\beta p R)}{K_n(\beta p R) \frac{I_n(\beta p R)}{K_n(\beta p R)} - I_n'(\beta p R)} \right\}$$

La relation obtenue par passage à la limite caractérise l'écoulement illimité. Si l'on choisit en particulier  $h = \frac{1}{K}$  on aura adaptation dès la première itération ce qui étend les conclusions établies en bidimensionnel.

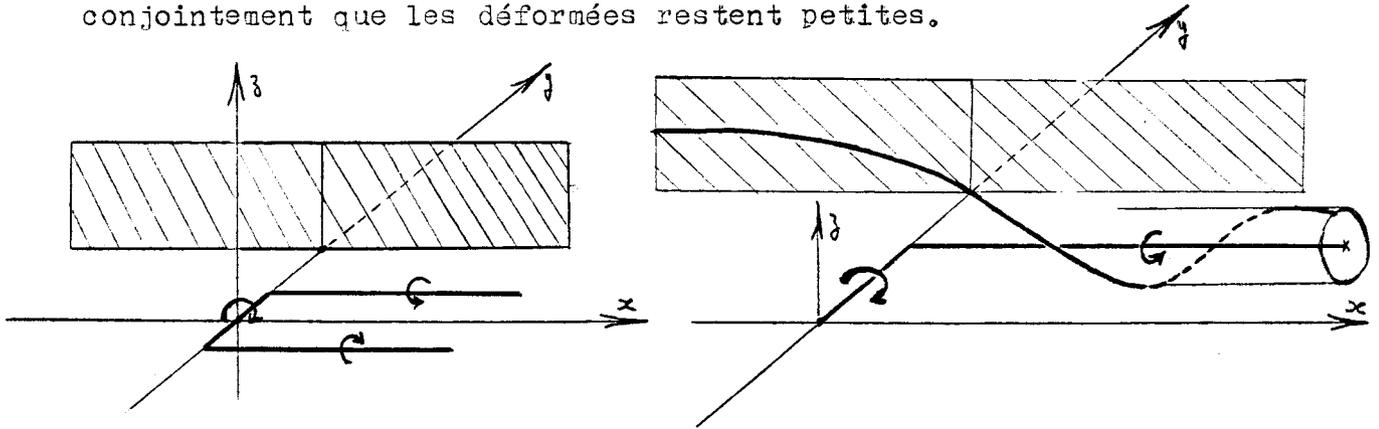
#### IV) PAROIS VERTICALES ADAPTABLES

##### 1°) Objet de l'étude

Il serait bien sûr téméraire de projeter sans circonspection l'adaptation de parois verticales. Car avant d'envisager une installation aussi complexe, il convient de s'assurer la maîtrise des parois horizontales adaptables, et ensuite d'apporter quelques arguments sur le bénéfice escomptable. Hormis la complexité technique d'une telle réalisation et la diminution chiffrée au § V des effets résiduels de parois, encore faudrait-il d'une part définir le mode de raccordement mécanique entre les quatre parois déformables et d'autre part à s'intéresser à la réduction plutôt illusoire de la discordance des mesures entre les différentes souffleries qu'engendrerait ce raffinement onéreux.

Malgré ces préliminaires pratiques ; on se propose de montrer que les déformées de parois verticales seraient faibles et réalisables. Sur le plan du blocage de volume et de sillage, l'axisymétrie des singularités (Ox) nécessite des déformées similaires pour les parois verticales et horizontales ce qui défloré le sujet ; Néanmoins une suradaptation des deux parois déformables compenserait l'effet des parois latérales (chap IV § 6). Seules les conséquences de la présence d'une nappe tourbillonnaire s'échappant du bord de fuite sont difficilement palpables. Et cette étude

s'adresse uniquement à cet aspect spécifique de l'effet portant. Le modèle portant sans épaisseur est schématisé par un tourbillon semi-infini en fer à cheval à circulation constante. Ce sujet n'étant abordé qu'à titre indicatif on se contente d'un seul tourbillon au lieu d'une distribution en envergure car il fournit une borne supérieure de vitesses induites au voisinage des parois verticales. En outre on néglige la déflexion de la nappe tourbillonnaire créée par les interactions mutuelles entre le segment porteur et les tourbillons marginaux semi-infinis. Cette approximation est confirmée à posteriori dans les exemples numériques envisagés. Selon cette schématisation élémentaire, les lignes de courant s'enroulent autour des demi-droites tourbillonnaires. Cette forme hélicoïdale de parois étant irréaliste, on se propose de montrer que pour une configuration réaliste cet enroulement n'apparaît qu'assez loin en aval du profil. Ceci signifie que le concept de parois verticales adaptables n'est pas utopique et conjointement que les déformées restent petites.



2) Mise en oeuvre

a) Formulation

L'équation de la nappe de courant s'appuyant sur la droite ( $x = -\infty, y_0$ ) provient de l'intégration des relations différentielles exprimant la propriété intrinsèque de tangence entre la vitesse et une ligne de courant. La section de cette nappe par un plan horizontal ( $z=k$ ) se résume à

l'équation: 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x + u_z}$$

La seconde équation nécessaire pour définir une ligne de courant ne fournit que son ordonnée initiale  $y_0$  (en  $x = -\infty, y_0$ ) dont la connaissance ne présente aucun intérêt. La formulation de vitesses induites par un tourbillon en U d'envergure  $s$  pour une aile d'allongement  $\lambda$  et de coefficient de portance  $C_z$  est reportée en annexe B. En variables réduites repérées en les surlignant, on aboutit au problème de Cauchy unidimensionnel:

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = F(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{C_z \bar{z} \bar{s}}{4\pi\lambda} \left\{ \frac{1}{\bar{z}^2 + (\bar{y} + \bar{s})^2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y} + \bar{s})^2}} \right) - \frac{1}{\bar{z}^2 + (\bar{y} - \bar{s})^2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y} - \bar{s})^2}} \right) \right\}$$

$$+ \frac{C_z \bar{s}}{4\pi\lambda} \left\{ \frac{\bar{y} + \bar{s}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y} + \bar{s})^2}} - \frac{\bar{y} - \bar{s}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y} - \bar{s})^2}} \right\}$$

avec les paramètres  $\bar{z} = z/b, \bar{s} = s/b, \bar{y} = y/b$   
 et les variables  $\bar{y} = y/b, \bar{x} = x/b$

b) Choix des valeurs numériques

Pour concrétiser les ordres de grandeur, on prend pour références les maquettes étalons ONERA (M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub> et M<sub>3</sub>) placées dans la veine S3M<sub>2</sub> à une portance supérieure à celle de croisière. D'où les constantes:

$$\lambda = 4.31 \quad \bar{\gamma} = \begin{cases} .846 & \text{pour M3} \\ .633 & \text{pour M2} \\ .512 & \text{pour M1} \end{cases} \quad C_L = .6$$

Pour des essais courants, l'envergure des maquettes dépasse rarement de beaucoup la demi-largeur de veine. La valeur extrême envisagée est peu réaliste, mais elle permet de déceler le début de l'enroulement de la nappe tourbillonnaire. La distribution de portance sur une aile d'envergure limitée avoisine celle elliptique d'une aile de trainée induite minimale plutôt que celle uniforme retenue. Il serait plus exact de limiter ce tourbillon qui s'étend sur toute l'aile et qui donne une majoration des vitesses induites, au centre de gravité de la répartition elliptique située à  $\frac{2}{3(1-\pi)}$  ( $\approx 7.8\%$ ) (16) de l'envergure ce qui atténuerait les déformées.

c) Solution approchée

Le point de départ de la ligne de courant pour lequel  $\bar{y}=1$  est rejeté à l'infini amont. Numériquement ceci s'interprète par le choix d'un point initial à distance bornée ce qui revient à tronquer l'intégration. Sinon physiquement on cherche la nappe de courant se raccordant à la sortie du collecteur à une abscisse à distance finie  $-\bar{x}$ .

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{y}) \quad \longleftrightarrow \quad \bar{y} - \bar{y}_0 = \int_{-\infty}^{\bar{x}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} = \int_{-\infty}^{-\bar{x}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} + \int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}$$

On se propose d'évaluer l'erreur de troncature qui correspond à la déformée en  $-\bar{x}$  pour le problème théorique. La perturbation longitudinale est faible devant la vitesse de référence ( $\bar{u}_x \ll 1$ ). De plus les perturbations provoquées par le tourbillon en fer à cheval sont faibles loin en amont; Et on prévoit que  $\bar{y} \pm \bar{x}$  varie peu dans l'intervalle  $]-\infty, -\bar{x}[$  ce qui se confirme à postériori. D'où l'intégration directe avec ces approximations:

$$\begin{cases} 1 + \bar{u}_x \approx 1 \\ \bar{y} \pm \bar{x} \approx 1 \pm \bar{x} \end{cases}$$

$$\bar{y} - \bar{y}_0 = \bar{y} - 1 \approx \int_{-\infty}^{\bar{x}} \bar{u}_y d\bar{x} \approx \frac{C_L \bar{\gamma}}{4\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\bar{x}} \left\{ \frac{1}{\bar{\gamma}^2 + (1+\bar{\gamma})^2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{\gamma}^2 + (1+\bar{\gamma})^2}} \right) - \frac{1}{\bar{\gamma}^2 + (1-\bar{\gamma})^2} \left( 1 - \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{\gamma}^2 + (1-\bar{\gamma})^2}} \right) \right\} d\bar{x}$$

$$\text{D'où: } \Delta\bar{y}(-\bar{x}) \approx \bar{y}(-\bar{x}) - 1 = \frac{C_L \bar{\gamma}}{4\pi\lambda} \left\{ \frac{1}{\bar{\gamma}^2 + (1-\bar{\gamma})^2} \left( \bar{x} - \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{\gamma}^2 + (1-\bar{\gamma})^2} \right) - \frac{1}{\bar{\gamma}^2 + (1+\bar{\gamma})^2} \left( \bar{x} - \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{\gamma}^2 + (1+\bar{\gamma})^2} \right) \right\}$$

Cette expression dépend de  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\gamma}$  et  $\bar{x}$ ; Comme il n'est pas aisé de la majorer même en  $\bar{x}=0$ , on détermine numériquement son maximum en  $\bar{z}$  pour  $\bar{s}=846$  et différentes valeurs de  $\bar{x}$ . A titre indicatif on fournit aussi

la valeur de  $z$  à l'optimum.

La petitesse de ces coefficients laisse présumer que cette estimation

$\bar{x}$	0	-1	-2	-3	-4	-5
$\Delta \bar{y}_{MAX}$	$4 \times 10^{-3}$	$6.4 \times 10^{-4}$	$2.3 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-4}$	$6.7 \times 10^{-5}$	$4.4 \times 10^{-5}$
$\bar{y}_{opt}$	-32	1.3	2.2	3	3.9	4.8

par intégration directe sera encore valide loin en amont de la maquette surtout pour la moindre envergure ( $\bar{s}=5I2$ ). De fait pour celle-ci, cette approximation est précise au centième jusque  $\bar{x}=-4$ ;

d) Résolution complète

L'étude préalable spécifique que les déformées sont petites et conjointement que  $f'_y$  varie peu. Ainsi l'intégration complète ne pose aucun problème numérique. Devant les faibles temps de calcul, l'algorithme explicite à pas séparés de Runge-Kutta est amplement satisfaisant. Et il semble inutile, ce qui facilite la programmation, de l'accélérer en le prolongeant par un des schémas explicite d'Adams comme il est de coutume. Intéressons nous plus particulièrement au pas d'intégration nécessaire pour parvenir à une précision relative de l'ordre de  $10^{-3}$ . Au moyen d'une borne d'erreur, il s'avère que pour le schéma d'Euler d'ordre 1, ce pas est trop faible pour la plus grande envergure si bien que l'on se reporte sur l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre. Il n'est alors plus possible de prévoir le pas bien que l'estimation précédente en indique l'ordre de grandeur; Mais cette lacune se comble facilement car ces méthodes de Runge-Kutta s'adapte bien au contrôle de l'erreur par pas.

-Methode d'Euler

Si  $f(x,y)$  est Lipschitzienne de constante  $K_1$ , une borne supérieure de l'erreur pour la méthode d'Euler s'exprime (56):

$$|\bar{y}(\bar{x}_n) - \bar{y}_n| \leq \frac{K_2}{K_1} (e^{(\bar{x}_n - \bar{x})K_1} - 1)h$$

où  $y(\bar{x}_n)$  est la solution exacte à l'abscisse  $\bar{x}_n$ .

$\bar{y}_n$  la valeur fournit par l'algorithme numérique de pas  $h$ .

avec

$$K_2 h = \frac{1}{h} (y(x_{n+1}) - y(x_n)) - f(x_n, y(x_n)) = \frac{h}{2} [F'_x(\bar{x}_n, \bar{y}(\bar{x}_n)) + f(\bar{x}_n, \bar{y}(\bar{x}_n)) \cdot F'_y(\bar{x}_n, \bar{y}(\bar{x}_n))] + O(h^2)$$

L'estimation de  $K_2$  grâce à une borne de  $f'_y$  est problématique car d'une part celle-ci est non bornée à l'emplacement de la singularité tourbillonnaire et d'autre part la nappe de courant demeure à l'extérieur d'un noyau tourbillonnaire. Toutefois la borne asymptotique de son rayon à  $1 - \bar{s}$  procure une majorante de  $K_1$  et de  $K_2 = \max_{(\bar{x}, \bar{y})} |F'_x + f F'_y|$  pour différentes valeurs de  $\bar{s}$ . Ainsi pour s'assurer par ces bornes supérieures une précision du millième, le pas doit être  $h \leq 5 \times 10^{-4}$  pour  $\bar{s}=846$  et  $h \leq .045$  pour  $\bar{s}= 5I2$ .

-Runge-kutta ordre 4

La minimisation du facteur  $K_2$  dans lequel interviennent toutes les dérivées partielles constituant  $\frac{d^5 y}{dx^5}$ , sur l'ensemble biparamétrique d'algo-

rithmes de Runge-Kutta d'ordre quatre est inaccessible. On opte alors pour le schéma le plus usité:

$$h_1 = h F(x_n, y_n) \quad ; \quad h_2 = h F(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h_1}{2}) \quad ; \quad h_3 = h F(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h_2}{2}) \quad ; \quad h_4 = h F(x_n + h, y_n + h_3)$$

$$\Delta y_n = \frac{1}{6} (h_1 + 2h_2 + 2h_3 + h_4)$$

On ne peut évaluer une borne de l'erreur exprimée ci-dessous à cause de la complexité de  $K^2$ . Toutefois la petitesse de  $K$ , permet de certifier que l'algorithme est numériquement stable (56).

$$|\bar{y}(x_n) - \bar{y}_n| \leq \frac{K^2}{K_1 \sum_{i=0}^n \frac{(h K_1)^i}{i!}} \left( e^{(\bar{x}_n - \bar{x}) K_1 \sum_{i=0}^n \frac{(h K_1)^i}{i!}} - 1 \right) \times \frac{h^4}{120}$$

On s'aperçoit sur la planche (1) que pour  $\bar{s} = 846$ , l'enroulement ne fait que s'amorcer à l'abscisse  $\bar{X}=4$  qui se situe souvent à l'entrée du diffuseur

V) EFFET DE PAROIS LATÉRALES PLANES (23)

1) Objet de l'étude

a) Intérêt

La petitesse des déformées nécessaires pour adapter les parois verticales laisse supposer qu'elles n'induisent que peu d'effets. Au lieu de comparer qualitativement et hâtivement par la méthode des images les effets induits par une simple et double file de singularités, on propose de chiffrer avec précision chaque composante de vitesse ce qui présente un triple intérêt.

-En présence de parois hautes et basses adaptées, ceci fournit l'ensemble des survitesses résiduelles engendrées par les parois verticales planes. La confrontation avec celles induites en veine à parois ventilées grâce aux facteurs de correction adimensionnés révèle l'intérêt de cette adaptation partielle. C'est le seul élément qui sera retenu dans l'interprétation des résultats.

-Dans la méthode analytique le potentiel d'interaction se compose du potentiel complémentaire et de celui d'une simple file infinie d'images  $\varphi'_z$  auquel on accède par cette étude.

-Dans la méthode intégrale exposée au chapitre suivant IV, on admet cette décomposition  $\varphi_i = \varphi_c + \varphi'_z$ . Et de plus la détermination de  $\varphi_c$  demande la connaissance des vitesses longitudinales induites aux parois par la file infinie de singularités représentatives du modèle  $\frac{d\varphi_c}{dz}(z, \pm k)$ .

b) Facteurs de correction

Pour s'affranchir des dimensions de la veine et de la maquette, on introduit les facteurs adimensionnés qui sont désormais quasi-normalisés:

\* ne pas confondre  $\varphi_c$  et  $\varphi'_z$ .

$$\bar{\epsilon}_s = \frac{\bar{u}}{\alpha_{1E}}, \frac{b^3}{V_{ol}} \quad \text{blocage de volume}$$

$$\bar{\epsilon}_w = \frac{\bar{u}}{\alpha_{wE}}, \frac{S_v}{S_m c_p} \quad \text{blocage de sillage}$$

$$\delta = \frac{\bar{u}}{j_{TE}}, \frac{S_v}{S_m c_L} = \frac{\bar{u}}{j_{TE}}, \frac{V_0 \bar{h}}{j_{TE}} \quad \text{portance} \quad \text{et} \quad \delta_0 = \delta(0,0,c) \quad \delta_1 = \frac{j_{TE}}{j_{TE/2,0}}$$

La définition de  $\delta$  comprend le rapport hauteur sur largeur de veine  $\bar{h}$ . Une veine dont les parois horizontales sont adaptées ressemble plutôt à une veine rectangulaire de hauteur illimitée pour laquelle ce facteur  $\bar{h}$  est indéterminé. Pour y remédier on se réfère symboliquement à la veine carrée  $\bar{h}=1$ . En outre ce coefficient qui ne se prête qu'à des comparaisons conventionnelles est lié à l'envergure du modèle et à son emplacement. En pratique on s'aperçoit qu'il varie peu avec l'envergure.

## 2) Mise en oeuvre

### a) Formulation

Les potentiels connus d'une source et d'un doublet fournissent par définition chaque composante de vitesses proportionnelles au facteur de compressibilité  $\beta$  à une certaine puissance et fonction des seuls paramètres  $\bar{x}/\beta$ ,  $\bar{y}$  et  $\bar{z}$ . Au contraire seul le potentiel d'un tourbillon de faible envergure est d'un emploi courant, ce qui engendre une schématisation du segment porteur peu satisfaisante. La formulation entièrement relatée en annexe B fournit par le biais de la loi de Biot et Savart les composantes de vitesse recherchées. Le potentiel complet s'obtient alors par intégration de ses dérivées partielles. Et on peut vérifier qu'un développement limité au premier ordre par rapport à son envergure redonne le potentiel de faible envergure. (se reporter à l'annexe B).

### b) Procédé d'obtention

Les séries doubles de la méthode tridimensionnelle des images se transforme très rarement sous forme analytique. Les tentations dans ce sens pour les séries simples relatives à l'effet des parois verticales n'échouèrent qu'en partie. L'application adéquate du théorème des résidus (25 p. 175) fournit uniquement les composantes au centre de la veine. En effet cette méthode analytique ne s'applique qu'aux fonctions uniformes en puissances entières. Et les singularités tridimensionnelles ne rentrent pas dans ce cadre sauf à l'origine:

$$\begin{aligned} \epsilon_w(0) &= 0 \\ \epsilon_s(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \\ \delta_0 &= \frac{1}{4\beta} \left( \cot^2 \frac{\pi\beta}{2} - \frac{2}{\pi\beta} \right) = \frac{1}{2\pi\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-\beta} - \frac{1}{2n+\beta} \right) \end{aligned}$$

On se résigne à un calcul numérique de séries dont la convergence est accélérée par la programmation de règles singulières et par l'algorithme de Wynn. Les formules relatives au tourbillon en fer à cheval sont soit divergentes, soit sous forme de différence de valeurs voisines ce qui impose l'utilisation de premier procédé. L'accélération de la convergence par le second n'a pu être démontrée théoriquement; néanmoins on se propose de

montrer son efficacité au point où l'expression analytique est connue. Supposons que le calcul des séries suivantes est tronqué respectivement en  $n=N_1$  et  $n=N_2$ . Et recherchons une borne inférieure du nombre de termes des sommes partielles nécessaires pour atteindre une précision de  $2 \times 10^{-3}$ .

$$2 \times 10^{-3} > \frac{\sum_{n=N_1+1}^{\infty} 1/n^3}{\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3} = \frac{1}{1.202056903} \sum_{n=N_1+1}^{\infty} 1/n^3$$

$$2 \times 10^{-3} > \frac{1/2 \pi^4 \sum_{n=N_1+1}^{\infty} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})}{\frac{1}{6} (\cot^2 \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi^2})} = \frac{2}{\pi \cot^2 \frac{\pi}{2} - 2/\pi} \sum_{n=N_1+1}^{\infty} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$$

A partir des relations élémentaires suivantes, on conclut:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \right| \geq \left| \int_{N+2}^{\infty} f(n) dn \right| ; \int_{N+2}^{\infty} \frac{dn}{n^3} = \frac{1}{2(N+2)^2} ; \left| \int_{N+2}^{\infty} \left( \frac{dn}{2n-1} - \frac{dn}{2n+1} \right) \right| = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1 - \frac{1}{2(N+2)}}{1 + \frac{1}{2(N+2)}}$$

D'où:  $N_1 \geq 12$  et  $N \geq 68$

La différence entre  $N$  et  $N_1$  ne nous surprend pas car la première série est en  $1/n^3$  et la seconde equivaut à  $1/n^2$ . L'application de l' $\epsilon$ -algorithme permet de diviser par quatre le nombre d'itérations nécessaires.

### c) Contrôle des résultats

La méthode des images se conçoit autant pour les veines libres que pour celles guidées. Pour un tourbillon en  $\perp$  la différence réside uniquement dans l'alternance des sens de rotation. Sur le plan formulation les séries sont identiques à part l'intervention d'un signe alterné  $(-1)^n$ . On s'aperçoit que pour un plan particulier ( $\bar{y}=1$ ), cette alternance des singularités images permet de simplifier par symétrie les séries qui se réduisent à un seul terme. Et l'introduction de ce coefficient  $(-1)^n$  permet un contrôle manuel des résultats de programme.

### d) Facteurs résiduels de correction

L'amointrissement de ces facteurs en adoptant les parois horizontales et en gardant les autres pleines et planes est concluant. Le blocage de volume ainsi que le maximum des vitesses axiales dues au sillage sont divisés par six ( $\rho \cdot 2 \cdot 4$ ). Leur variation longitudinale est aussi atténuée ( $\rho \cdot 5$ ). La cambrure du champ est diminuée de moitié ( $\rho \cdot 6$ ). Cependant  $\delta_0$  ou la correction absolue d'incidence demeure inchangée ce qui est directement prévisible en ne sommant que les images proches du modèle ( $\rho \cdot 7$ ). De plus les sur vitesses verticales sur le modèle moindre ( $\bar{x} = .512$ ) varie de l'ordre de 20%. D'après la sensibilité des phénomènes aérodynamiques aux variations d'incidences, la validité de la correction globale est sujette à caution surtout dans des configurations extrêmes.

# CHAP. IV METHODES INTEGRALES

Le point de départ de ce chapitre est la publication récente (14) d'une méthode bidimensionnelle étendue aux veines rectangulaires à parois pleines qui procure les vitesses induites au centre de la veine par des parois de longueur limitée grâce aux mesures de pressions pariétales. La motivation principale de cette étude est de se dispenser des conditions aux limites idéalisées et critiquables (57,58) communément admises pour les parois ventilées et de formaliser l'idée dernièrement et simultanément apparue dans plusieurs laboratoires, de se servir des mesures d'une ou deux composantes des vitesses aux parois pour contrôler ou annuler leurs effets. Malgré des études approfondies (59), cette condition aux limites est restrictive et peu réaliste. Et l'interprétation des essais préliminaires pour définir la porosité demeure ambigu. L'incitation à utiliser les mesures aux parois ne s'est concrétisé que dans la méthode numérique (60,61) faute de support logistique.

Depuis cette première communication où le problème de la référence d'incidence par exemple n'était qu'effleuré, les résultats ici rassemblés se sont étoffés aussi bien sur le plan de la théorie que celui de l'enseignement des premières applications. L'étude de la veine bidimensionnelle § I ou rectangulaire avec parois verticales pleines § II est généralisée et agrémentée d'indications complémentaires. Les extensions aux veines de forme quelconque § III, aux écoulements soit faiblement transsoniques IV, soit supersoniques § V sont originales\* et pas encore éprouvées. La double mesure aux parois pour définir leurs effets § VII est plus novatrice dans son principe. D'une part elle précise la validité de la schématisation antérieure de la veine par des parois parfaitement planes. D'autre part elle met en dualité l'adaptation partielle et les effets résiduels, ce dont on profite pour introduire le concept de suradaptation des parois horizontales pour compenser en partie les effets latéraux.

Le dénominateur "intégrales" choisi pour cet ensemble de nouvelles méthodes est impropre car les survitesses en tout point de la veine s'obtiennent par quadrature des valeurs aux limites pondérées par des fonctions de "Green" à définir. Il ne s'agit nullement d'équations intégrales bien qu'à l'avenir la prise en compte hypothétique des conditions locales sur le profil incite à conserver cette dénomination.

## I ) BIDIMENSIONNEL

### 1°) FORMULATION

#### a) Principe

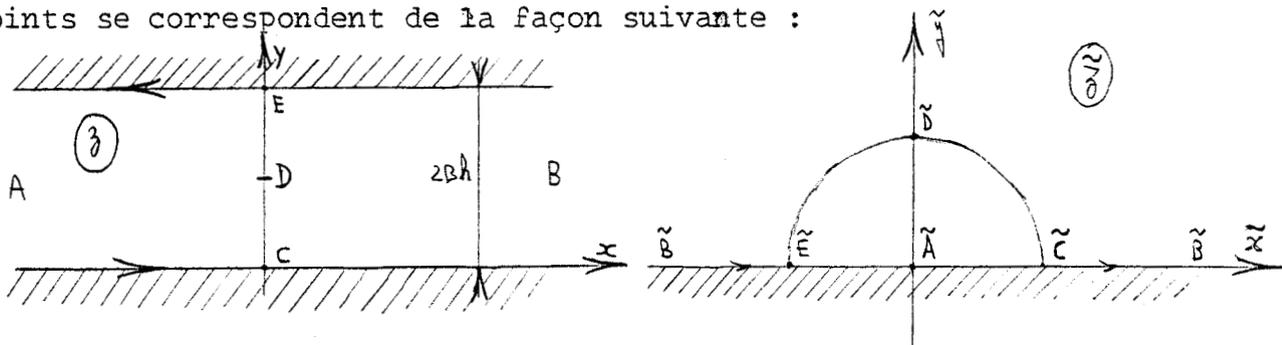
L'appareil mathématique pour le problème plan se rattache aux fonctions analytiques et plus précisément à la propriété de ces fonctions d'avoir une partie réelle et imaginaire qui vérifie l'équation de Laplace  $\Delta \psi \equiv 0$ . Le potentiel d'interaction  $\psi_i$  est une fonction harmonique de deux  
\*L'extension aux écoulements instationnaires a été abordé par M. Capelier dans une te non publiée et reprise en (1).

variables, définie dans un domaine D inclus dans la veine de la soufflerie. Elle est considérée comme la partie réelle ou imaginaire d'une fonction analytique  $w_i(z)$ . Ainsi les parties réelles et imaginaires de toutes les dérivées de  $w_i(z)$  qui existent nécessairement, sont aussi harmoniques. C'est en particulier le cas pour les composantes des vitesses induites par les parois  $u_{xi}$  et  $u_{yi}$ . Leur détermination revient à résoudre le problème de Dirichlet qui consiste à trouver une fonction harmonique dans un domaine D, continue sur  $\bar{D}$  et prenant certaines valeurs sur  $\Gamma$ . Or pour tout domaine simplement connexe D et pour toute fonction continue par morceaux sur la frontière, avec éventuellement des points de discontinuités de première espèce, il existe une solution unique du problème de Dirichlet. De plus sa résolution se ramène à la représentation conforme du domaine D sur le demi-plan supérieur ( $y > 0$ ). Notons aussi que la fonction analytique  $\frac{dw_i(z)}{dz} = u_{xi} - iu_{yi}$  de partie réelle (respectivement imaginaire) fixée à la frontière est définie en tout point de D à une constante imaginaire (resp. réelle) près. Ceci provient du fait que ses parties réelles et imaginaires sont liées par les relations aux dérivées partielles de Cauchy-Riemann qui font surgir une constante d'intégration.

Le problème de Dirichlet est déjà résolu pour le demi-plan supérieur, il se caractérise par les relations de Poisson déjà introduites (p. 41). Conformément aux indications théoriques précédentes, une simple transformation conforme de ce demi-plan sur la veine procure chaque composante de vitesses en tout point intérieur à D d'après une de ses valeurs sur la frontière  $\Gamma$  à une constante additive près.

b) Bande infinie

Schématisons le domaine D par une bande de hauteur  $2bh$  et de longueur illimitée. Insistons sur le fait primordial que D est inclus dans la veine et que la frontière  $\Gamma$  aussi dénommée "surface de contrôle" peut s'identifier aux parois de la veine, mais ceci n'est aucunement indispensable. La fonction  $e^{\pi z/2bh}$  transforme la bande infinie sur le demi-plan supérieur. Les points se correspondent de la façon suivante :



Aux frontières en  $\tilde{x} = \xi$  sur l'axe réel on a :

$$\xi = \tilde{x} < 0 \quad \leftarrow \quad \begin{cases} y = 2bh \\ \xi = -e^{\pi \tilde{x}/2bh} \end{cases} \quad \tilde{x} = \tilde{x} > 0 \quad \leftarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ \xi = e^{\pi \tilde{x}/2bh} \end{cases}$$

Cette représentation est conforme car sa dérivée en z est non nulle sauf au point critique  $x = -\infty$ . Si on suppose de plus que  $u_{xi}$  partie réelle

de  $\frac{dw_i}{dz}$  est nulle à l'infini amont ( $x=-\infty$ ) dans le plan de la veine (Z), la fonction  $u_{xi}$  est alors analytique et nulle en son point transformé qui est à l'origine. D'après la propriété de conservation de l'harmonicité par toute transformation conforme et le fait que  $u_{xi}(z)$  est borné à l'infini aval on peut appliquer les relations de Poisson dans le plan des (Z). D'où l'enchaînement de relations\* :

$$\begin{aligned} \frac{dw_i(\xi)}{dz} &= \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xi}(\xi, 0) \frac{d\xi}{\xi - z} + iC = u_{xi}(z, y) - i u_{yi}(z, y) \\ &= \frac{dw_i(\xi, 2\beta h)}{dz} = iC + \frac{1}{i\pi} \int_{\beta h}^{+\infty} u(\xi, 0) \frac{d(e^{\pi\xi/2\beta h})}{e^{\pi\xi/2\beta h} - e^{\pi\beta/2\beta h}} + \frac{1}{i\pi} \int_{\beta h}^{+\infty} u(\xi, 2\beta h) \frac{d(-e^{-\pi\xi/2\beta h})}{-e^{-\pi\xi/2\beta h} - e^{-\pi\beta/2\beta h}} \\ &= \frac{i}{2\beta h} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{u(\xi, 2\beta h)}{e^{\pi(\xi-\beta)/2\beta h} + 1} + \frac{u(\xi, 0)}{e^{\pi(\beta-\xi)/2\beta h} - 1} \right\} d\xi + iC \end{aligned}$$

Par séparation des parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} u_{xi}(x, y) &= \frac{1}{4\beta h} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{\pi y}{2\beta h} \left( \frac{u_{xi}(\xi, 2\beta h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi(x-\xi)}{2\beta h} + \cos \frac{\pi y}{2\beta h}} + \frac{u_{xi}(\xi, 0)}{\operatorname{ch} \frac{\pi(x-\xi)}{2\beta h} - \cos \frac{\pi y}{2\beta h}} \right) d\xi \\ u_{yi}(x, y) &= \frac{1}{4\beta h} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\pi(\xi-x)/2\beta h + \cos \pi y/2\beta h}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2\beta h + \cos \pi y/2\beta h} u_{xi}(\xi, 2\beta h) - \frac{\pi(\xi-x)/2\beta h - \cos \pi y/2\beta h}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2\beta h - \cos \pi y/2\beta h} u_{xi}(\xi, 0) \right\} d\xi + C \end{aligned}$$

Par dérivation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{xi}(x, y)}{\partial x} &= \frac{\pi}{2\beta h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{\pi y}{2\beta h} \operatorname{sh} \frac{\pi(x-\xi)}{2\beta h} \left\{ \frac{u_{xi}(\xi, 2\beta h)}{(\operatorname{ch} \frac{\pi(x-\xi)}{2\beta h} + \cos \frac{\pi y}{2\beta h})^2} + \frac{u_{xi}(\xi, 0)}{(\operatorname{ch} \frac{\pi(x-\xi)}{2\beta h} - \cos \frac{\pi y}{2\beta h})^2} \right\} d\xi \\ \frac{\partial u_{yi}(x, y)}{\partial x} &= \frac{\pi}{2\beta h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\cos \pi y/2\beta h \operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2\beta h + 1}{(\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2\beta h + \cos \pi y/2\beta h)^2} u_{xi}(\xi, 2\beta h) + \frac{\cos \pi y/2\beta h \operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2\beta h - 1}{(\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2\beta h - \cos \pi y/2\beta h)^2} u_{xi}(\xi, 0) \right\} d\xi \end{aligned}$$

c) constante d'integration

Il suffit de fixer une valeur de  $u_{yi}$  en un point du domaine pour fixer la constante C. Comme aux infinis les limites de  $u_{yi}$  sont indépendantes de y on peut choisir une valeur à l'infini comme référence quelque soit y.

-Réfèrence à l'infini amont

$$u_{yi}(-\infty, y) = 0 \quad \forall y \quad \longrightarrow \quad u_{yi}(-\infty, y) = 0 = -\frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} [u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0)] d\xi + C$$

Soit :

$$C = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} [u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0)] d\xi$$

$$u_{yi}(x, y) = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{u_{xi}(\xi, 2\beta h)}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2\beta h + \cos \pi y/2\beta h} - \frac{u_{xi}(\xi, 0)}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2\beta h - \cos \pi y/2\beta h} \right\} d\xi$$

C'est la formule d'origine (14) quand  $y=\beta h$

-Réfèrence à l'infini aval

$$u_{yi}(+\infty, y) = 0 \quad \forall y \quad \longrightarrow \quad C = 0$$

-Réfèrence composée

$$u_{yi}(+\infty, y) + u_{yi}(-\infty, y) = 0 \quad \forall y \quad \longrightarrow \quad C = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{+\infty} [u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0)] d\xi$$

$$u_{yi}(x, y) = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sh} \pi \frac{x-\xi}{2\beta h} \left\{ \frac{u_{xi}(\xi, 2\beta h)}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2\beta h} + \cos \pi y/2\beta h} - \frac{u_{xi}(\xi, 0)}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2\beta h} - \cos \pi y/2\beta h} \right\} d\xi$$

Formulation anti-symétrique en  $x-\xi$

-Compatibilité de références multiples

Théoriquement la veine ne présente aucune ascendance ni à l'infini amont, ni à l'infini aval :

$$u_{yi}(+\infty, y) = u_{yi}(-\infty, y) = 0 \quad \forall y$$

D'où 
$$C = 0 = K \int_{-\infty}^{+\infty} [u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0)] d\xi$$

La constante K est indéterminée et sous cette hypothèse toutes les formu-

\* p. suivante

les précédentes sont équivalentes. Ce résultat n'est pas surprenant; En effet  $\int_{-\infty}^{+\infty} \{u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0)\} d\xi$  représente la circulation de la vitesse le long de la surface de contrôle. Puisque le potentiel d'interaction est supposé régulier et harmonique à l'intérieur de la surface de contrôle, cette valeur devrait être nulle. En pratique il en va tout autrement.

2°) POINTS PARTICULIERS

a) Au centre de la veine

$$y = \beta h \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \cos \pi y / 2\beta h = 0 \\ \sin \pi y / 2\beta h = 1 \end{cases}$$

Les expressions précédentes se simplifient et il en découle :

$$\begin{aligned} u_{xi}(x, \beta h) &= \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_{xi}(\xi, 2\beta h) + u_{xi}(\xi, 0)}{\sin \pi(x-\xi)/2\beta h} d\xi \\ u_{yi}(x, \beta h) &= \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0)}{e^{\pi(\xi-x)/\beta h} + 1} d\xi && \text{pour } u_{yi}(-\infty, y) = 0 \\ u_{yi}(x, \beta h) &= \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0)}{e^{\pi(x-\xi)/\beta h} + 1} d\xi && \text{pour } u_{yi}(+\infty, y) = 0 \\ u_{yi}(x, \beta h) &= \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \pi \frac{x-\xi}{\beta h} \{u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0)\} d\xi && \text{pour } u_{yi}(-\infty, y) + u_{yi}(+\infty, y) = 0 \end{aligned}$$

Ces formules furent publiées par Palatini en 1915 dans le cadre de l'étude des fonctions d'une variable complexe (49). La démonstration y est effectuée en utilisant la représentation conforme de la bande infinie ( $y \in ]0, 2\beta h[$ ) sur l'intérieur du cercle unité. A l'usage des formules de Poisson, on y utilise l'intégrale de Schwartz pour le cercle unité  $|z| < 1$  :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{-i\theta} - z} d\theta + C$$

b) Aux parois

Connaissant les vitesses longitudinales sur la surface de contrôle, on détermine les vitesses transversales au même emplacement :

$$\begin{aligned} u_{yj}(x, 0) &= \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{u_{xi}(\xi, 2\beta h)}{1 + e^{\pi(\xi-x)/2\beta h}} - \frac{u_{xi}(\xi, 0)}{1 - e^{\pi(\xi-x)/2\beta h}} \right\} d\xi + C \\ u_{yj}(x, 2\beta h) &= \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{u_{xi}(\xi, 2\beta h)}{1 - e^{\pi(\xi-x)/2\beta h}} - \frac{u_{xi}(\xi, 0)}{1 + e^{\pi(\xi-x)/2\beta h}} \right\} d\xi + C \end{aligned}$$

Ceci signifie que la connaissance de deux conditions aux limites  $u_{xi}(\xi, 2\beta h)$ ,  $u_{xi}(\xi, 0)$  fixe les valeurs des deux autres  $u_{yi}(x, 0)$  et  $u_{yi}(x, 2\beta h)$ . Ce résultat sera généralisé ultérieurement § VI.

c) Point  $x_0$  où  $u_{yi}(x_0, \beta h) = 0$

-La connaissance de  $x_0$  faciliterait le calcul de  $u_{yi}$ . En effet dans

\*Les résultats présentés s'obtiennent en partant comme dans l'article de base (14) de la vitesse complexe  $w_i = \varphi_i + i\psi_i$  avec  $\varphi_i$  potentiel d'interaction et  $\psi_i$  fonction de courant. Mais cet intermédiaire ne paraît pas indispensable.

les expressions précédentes de  $u_{yi}$ , les coefficients pondérateurs de la fonction à intégrer sur un intervalle non borné tendent vers une limite non nulle (par exemple  $\tanh \pi \frac{x-\xi}{2\beta h} \rightarrow 1$ ). La troncature de cette intégrale n'est justifiée que pour des valeurs :

$$\int_{-K}^{+K} \{ u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0) \} d\xi < \epsilon$$

En fait la longueur de veine est limitée, le domaine n'est pas une bande infinie. On ne peut donc mesurer cette fonction que pour des abscisses bornées. La troncature représente une nécessité numérique et surtout une erreur inhérente à la méthode qui est systématique. Mais si  $x_0$  était défini avec précision il en serait autrement.

D'où :

$$u_{yi}(x_0, \beta h) = 0 = \int_{-K}^{+K} \{ u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0) \} \tanh \pi \frac{x_0 - \xi}{2\beta h} d\xi$$

$$u_{yi}(x, \beta h) = \frac{1}{4\pi} \int_{-K}^{+K} \{ u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0) \} \left\{ \tanh \pi \frac{x-\xi}{2\beta h} - \tanh \pi \frac{x_0 - \xi}{2\beta h} \right\} d\xi$$

$$= \frac{5h \pi \frac{x-x_0}{2\beta h}}{4\pi} \int_{-K}^{+K} \frac{u_{xi}(\xi, 2\beta h) - u_{xi}(\xi, 0)}{\tanh \pi \frac{x-\xi}{2\beta h} - \tanh \pi \frac{x_0 - \xi}{2\beta h}} d\xi$$

Le coefficient de pondération converge vers zéro comme  $1/\text{Ch}^2(\pi \xi / 2\beta h)$ . Si l'on connaissait  $x_0$ , la troncature n'induirait que des erreurs très faibles. On se propose de démontrer l'existence d'une telle abscisse puis de la localiser au voisinage du centre de gravité de la répartition suivant la corde des tourbillons représentatifs de l'effet portant :

-Existence de  $x_0$

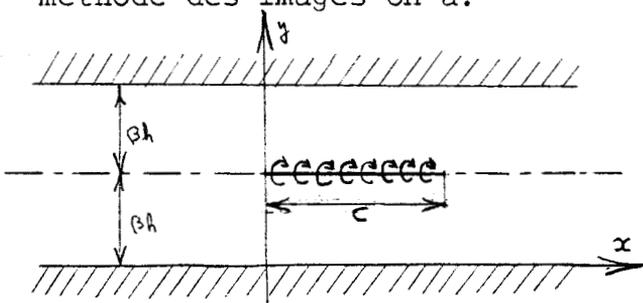
Soit :  $F = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^{+K} u_{yi}(x, \beta h) dx$

Posons  $\chi = x - \xi$  et utilisons la référence composée.

$$F = \int_{-K}^{+K} \{ u(\xi, 2\beta h) - u(\xi, 0) \} \int_{\xi-K}^{\xi+K} \tanh \frac{\pi \chi}{2\beta h} dx d\xi = \int_{-K}^{+K} \{ u(\xi, 2\beta h) - u(\xi, 0) \} \lim_{K \rightarrow \infty} \text{Log} \frac{\text{Ch} \pi \frac{\xi+K}{2\beta h}}{\text{Ch} \pi \frac{\xi-K}{2\beta h}} d\xi = 0$$

$u_{yi}(x, \beta h)$  est une fonction continue en  $x$  non identiquement nulle; elle prend des valeurs positives et négatives; Le point  $x_0$  existe donc.

-Des doublets ou sources répartis sur l'axe longitudinal induisent des vitesses nulles sur l'axe  $y=0h$ . Ainsi pour un profil symétrique non portant  $u_{yi}(x, \beta h) \equiv 0$ ,  $x_0$  est indéterminé. Il reste l'effet portant d'un profil sans épaisseur que l'on représente par des tourbillons répartis le long de la corde. Soit  $\gamma(x)$  la densité de tourbillons modélisant le profil. Par la méthode des images on a :



$$u_x(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \gamma(x_2) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{y - \beta h + 2n\beta h}{(x-x_2)^2 + (y - \beta h + 2n\beta h)^2} \right) dx_2$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \gamma(x_1) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x - x_1}{(x-x_1)^2 + (y - \beta h + 2n\beta h)^2} \right) dx_1$$

\*On peut intervertir l'ordre d'intégration car les fonctions intéressées sont uniformément bornées  $x$ .

Par une application adéquate du théorème des résidus (25 p.175) :

$$u_x(x,y) = -\frac{\cos \pi y / 2Bh}{2Bh} \int_0^c \gamma(x_1) \frac{\operatorname{ch} \pi \frac{x-x_1}{2Bh}}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-x_1}{2Bh} - \sin \frac{\pi y}{2Bh}} dx_1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^c \gamma(x_1) \frac{y-Bh}{(x-x_1)^2 + (y-Bh)^2} dx_1$$

$$u_y(x,y) = \frac{\sin \pi y / 2Bh}{2Bh} \int_0^c \gamma(x_1) \frac{\operatorname{sh} \pi \frac{x-x_1}{2Bh}}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-x_1}{2Bh} - \sin \frac{\pi y}{2Bh}} dx_1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^c \gamma(x_1) \frac{x-x_1}{(x-x_1)^2 + (y-Bh)^2} dx_1$$

En  $y=Bh$  cette relation se simplifie, mais elle ne fournit pas  $x_0$  car la répartition  $\gamma$  est inconnue. Sachant que la fonction précédente est impaire en  $x-x_1$ , on prévoit que  $x_0$  est proche du centre de gravité de  $\gamma(x)$  ce qui se vérifie dans un développement limité en  $x_0-x_1$  supposé petit.

$$u_y(x_0, Bh) = \int_0^c \gamma(x_1) \left\{ \frac{1}{2Bh \sin \frac{\pi(x_0-x_1)}{2Bh}} - \frac{1}{\pi(x_0-x_1)} \right\} dx_1 \approx \int_0^c \frac{\gamma(x_1)}{\pi(x_0-x_1)} \left\{ 1 + \frac{\pi^2(x_0-x_1)^2}{24B^2h^2} + O[(x_0-x_1)^4] - 1 \right\} dx_1$$

D'où :  $x_0 \approx \int_0^c \gamma(x) x dx / \int_0^c \gamma(x) dx$  centre de gravité de  $\gamma$

Puisque le maximum aux parois des vitesses axiales  $x'_0$  devrait aussi se situer au voisinage du centre de gravité de  $\gamma$ , on peut s'interroger sur sa coïncidence avec  $x_0$ . Cependant après vérification elle n'est qu'approximative.

$$\left. \frac{d u_x(x,y)}{dx} \right|_{y=Bh} = \pi \frac{1}{2Bh} \int_0^c \gamma(x_1) \frac{\operatorname{sh} \pi \frac{x-x_1}{2Bh}}{\operatorname{ch}^2 \pi \frac{x-x_1}{2Bh}} dx_1 \quad \text{pour } x=x'_0$$

D'où :  $\int_0^c \gamma(x_1) \cdot (x'_0-x) \cdot \left[ 1 + \frac{\pi^2}{24B^2h^2} (x'_0-x)^2 + O((x'_0-x)^4) \right] dx_1 = 0$  c. à d.  $x'_0 \approx x_0$

De plus ce résultat approché n'est exploitable qu'en dissociant l'effet portant et ceux associés de volume et de sillage. Cette constatation jointe aux erreurs de mesures et la nullité du gradient des vitesses longitudinales en  $x'_0$  fait préférer une méthode discrète et constructive de détermination de  $x_0$ , à moins de se donner  $\gamma(x_1)$ .

$$\sum_{i=1}^N \frac{Bh \pi \frac{x_0-x_i}{Bh}}{Bh} \{ u(x_i, Bh) - u(x_i, 0) \} \Delta x_i = 0$$

d) Formulation conjuguée

Au lieu de supposer connues les vitesses longitudinales  $u_{xi}$  aux parois, on peut très bien se servir des valeurs transversales et en déduire  $u_{ix}$  et  $u_{iy}$  en tout point de la veine. Au point de vue formulation on considère que les valeurs aux limites de la partie imaginaire de la fonction analytique  $f(z)$  sont connues. En remplaçant dans la démonstration précédente la partie réelle par la partie imaginaire on aboutit à :

$$u_x(x,y) = \frac{1}{4Bh} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ u_y(\xi, 2Bh) \frac{e^{\pi(x-\xi)/2Bh} + \cos \pi y / 2Bh}}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} + \cos \pi y / 2Bh} - u_y(\xi, Bh) \frac{e^{\pi(x-\xi)/2Bh} - \cos \pi y / 2Bh}}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} - \cos \pi y / 2Bh} \right\} d\xi + C'$$

$$u_y(x,y) = \frac{1}{4Bh} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{u_x(\xi, 2Bh)}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} + \cos \pi y / 2Bh} + \frac{u_x(\xi, 0)}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} - \cos \pi y / 2Bh} \right\} d\xi$$

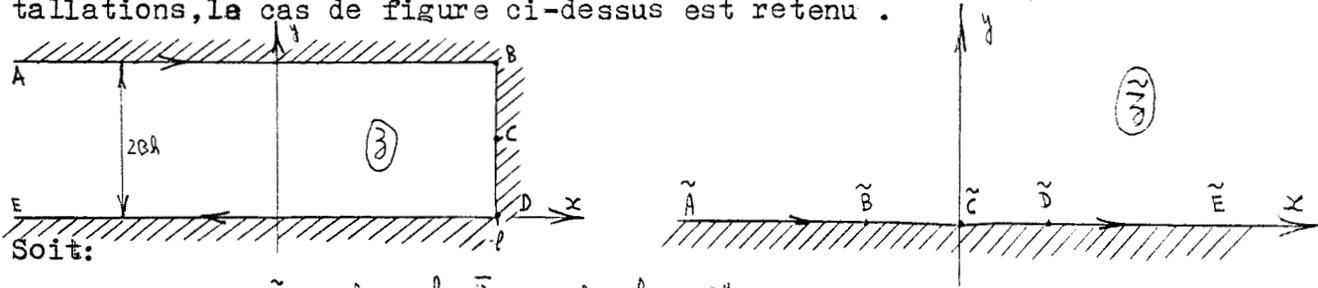
La connaissance de  $u_{ix}$  en un point fixe la valeur de la constante  $C'$ .

3°) VEINE DE LONGUEUR LIMITEE

a) Bande semi-infinie

Adoptons maintenant pour surface de contrôle une bande semi-infinie. Conformément aux résultats précédents, la connaissance de la fonction harmonique en tout point du frontière permet de déterminer  $u_{ix}$  et  $u_{iy}$  sa fonc-

tion conjuguée, en tout point du domaine. En principe il est indifférent de prendre une demi-bande orientée suivant les abscisses croissantes ou décroissantes. Puisque les mesures de  $C_p$  ne s'effectuent qu'à l'aval afin de perturber au minimum le champ de l'écoulement et pour des raisons d'installations, le cas de figure ci-dessus est retenu.



Soit:

$$\tilde{z} = \alpha \pi \frac{l - \bar{z}}{2Bh} = \alpha \pi \frac{l - x + iy}{2Bh}$$

C'est une transformation conforme de la bande semi-infinie sur le demi-plan supérieur, sauf au point critique C où  $u_{xi}$  est analytique. Les frontières se correspondent de la façon suivante :

$\begin{cases} y = 0 \\ x \in ]-\infty, l[ \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$\begin{cases} \tilde{z} = \alpha \pi \frac{l - \tilde{x}}{2Bh} & \text{et } \tilde{x} > 1 \\ \tilde{y} = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x = l \\ y \in [0, 2Bh] \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$\begin{cases} \tilde{z} = \cos \pi y / 2Bh & \text{et }  \tilde{z}  \leq 1 \\ \tilde{y} = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} y = 2Bh \\ x \in ]-\infty, l[ \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$\begin{cases} \tilde{z} = -\alpha \pi \frac{l - \tilde{x}}{2Bh} & \text{et } \tilde{x} < -1 \\ \tilde{y} = 0 \end{cases}$

Par application de la formule de Poisson on obtient cette fois-ci:

$$\frac{dw_i(z)}{dz} = \frac{d}{dz} w_i \left( \alpha \pi \frac{l - x + iy}{2Bh} \right) = iC + \frac{1}{i\pi} \int_{AB} u_i(\xi, 2Bh) \frac{d(-\alpha \pi \frac{l - \xi}{2Bh})}{-\alpha \pi \frac{l - \xi}{2Bh} - \alpha \pi \frac{l - x + iy}{2Bh}} + \frac{1}{i\pi} \int_{BCD} u_i(\xi, \xi) \frac{d(\cos \frac{\pi \xi}{2Bh})}{\cos \frac{\pi \xi}{2Bh} - \alpha \pi \frac{l - x + iy}{2Bh}} + \frac{1}{i\pi} \int_{DE} u_i(\xi, 0) \frac{d(\alpha \pi \frac{l - \xi}{2Bh})}{\alpha \pi \frac{l - \xi}{2Bh} - \alpha \pi \frac{l - x + iy}{2Bh}}$$

Soit :

$$\frac{dw_i(z)}{dz} = iC - \frac{1}{2iBh} \int_{-\infty}^l \frac{u_i(\xi, 2Bh) \operatorname{Sh} \pi \frac{l - \xi}{2Bh}}{\alpha \pi \frac{l - \xi}{2Bh} + \alpha \pi \frac{l - x + iy}{2Bh}} d\xi + \frac{1}{2iBh} \int_0^{2Bh} \frac{u_i(l, \xi) \sin \frac{\pi \xi}{2Bh}}{\cos \frac{\pi \xi}{2Bh} - \alpha \pi \frac{l - x + iy}{2Bh}} d\xi + \frac{1}{2iBh} \int_{-\infty}^l \frac{u_i(\xi, 0) \operatorname{Sh} \pi \frac{l - \xi}{2Bh}}{\alpha \pi \frac{l - \xi}{2Bh} - \alpha \pi \frac{l - x + iy}{2Bh}} d\xi$$

En décomposant en parties réelles et imaginaires, on obtient les expressions volumineuses de  $u_{xi}$  et  $u_{yi}$ . Au centre de la veine elles s'expriment :

$$u_{xi}(x, Bh) = \frac{\operatorname{Sh} \pi (l-x)/2Bh}{2Bh} \left\{ \int_{-\infty}^l \frac{[u_i(\xi, 2Bh) + u_i(\xi, 0)] \operatorname{Sh} \pi \frac{l - \xi}{2Bh}}{\alpha \pi \frac{2l - (l + \xi)}{2Bh} (\alpha \pi \frac{x - \xi}{2Bh})} d\xi + \int_0^{2Bh} \frac{u_i(l, \xi) \sin \frac{\pi \xi}{2Bh}}{\operatorname{Sh}^2 \pi \frac{l - x}{2Bh} + \cos^2 \frac{\pi \xi}{2Bh}} d\xi \right\}$$

$$u_{yi}(x, Bh) = \frac{1}{4h} \left\{ \int_{-\infty}^l \frac{[u_i(\xi, 2Bh) - u_i(\xi, 0)] \operatorname{Sh} \pi \frac{l - \xi}{2Bh}}{\alpha \pi \frac{2l - (l + \xi)}{2Bh} (\alpha \pi \frac{x - \xi}{2Bh})} d\xi - \int_0^{2Bh} \frac{\sin \pi \xi / 2Bh}{\operatorname{Sh}^2 \pi \frac{l - x}{2Bh} + \cos^2 \frac{\pi \xi}{2Bh}} u_i(l, \xi) d\xi \right\} + C$$

b) Extension

Avant d'introduire un autre schéma de démonstration, remarquons que cette étude pourrait se prolonger à souhait en passant en revue les transformations conformes classiques. Car sur le plan théorique cette transformation sur le demi-plan par exemple fixe la partie réelle et imaginaire d'une fonction analytique à une constante additive près d'après une de ces valeurs sur son contour. Et une technique telle la vélocimétrie laser per-

met d'envisager diverses surfaces de contrôle. Cependant pour un domaine très simple tel qu'un rectangle de contrôle, la transformation conforme se complique rapidement.

La transformation de Scharz-Christoffel pour les polygones fournit la transformation conforme qui est une intégrale elliptique, et dont la fonction inverse qui nous intéresse n'est pas non plus explicite, sinus elliptique de Jacobi. Ce mode de traitement bien qu'il ne soit pas totalement impraticable, est maladroit.

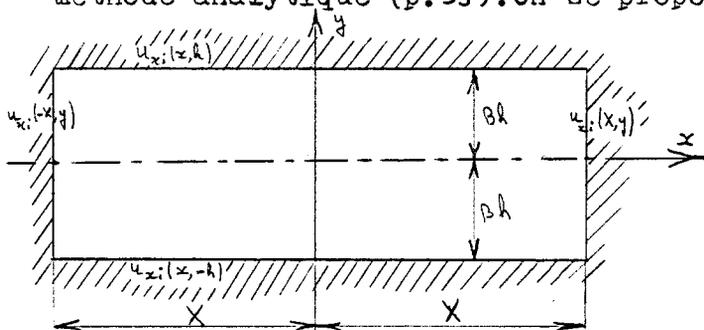
$$y = C \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \quad k \in ]0, 1[$$

Les constantes C et k sont liées à la hauteur 2bh et à la longueur du rectangle 2X par les relations :

$$X = C \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \quad \text{et} \quad Bh = \frac{C}{2} \int_1^{1/k} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}$$

c) Rectangle

Le problème de Dirichlet pour un rectangle a déjà été abordé dans la méthode analytique (p.35). On se propose ici de compléter son étude.



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial y^2} = 0 \\ u_{xi} \text{ connu en } x = \pm X \text{ et } y = \pm Bh \end{cases}$$

+

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{xi1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{xi1}}{\partial y^2} = 0 \\ u_{xi1} = 0 \text{ en } y = \pm Bh \\ u_{xi1} \text{ connu en } x = \pm X \end{cases}$$

+

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{xi2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{xi2}}{\partial y^2} = 0 \\ u_{xi2} = 0 \text{ en } x = \pm X \\ u_{xi2} \text{ connu en } y = \pm Bh \end{cases}$$

Par répartition des variables et décomposition en deux problèmes avec des conditions nulles sur deux parois, on a obtenu l'expression de  $u_{xi1}$  puis l'on s'est contenté du cas symétrique. Elargissons ceci au cas général :

$$u_{xi1}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{2X} \pi x \left( A_{2n} \left( k \frac{2n+1}{2X} \pi y + B_{2n} \operatorname{Sh} \frac{2n+1}{2X} \pi y \right) + \sin \frac{n\pi x}{X} \left( A_{1n} \left( k \frac{n\pi y}{X} + B_{1n} \operatorname{Sh} \frac{n\pi y}{X} \right) \right) \right)$$

Posons :

$$u_{xi1}(x, y) = u_p(x, y) + u_r(x, y)$$

$$u_p(x, y) = \frac{u_{xi1}(x, y) + u_{xi1}(-x, y)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{2X} \pi x \left( A_{2n} \left( k \frac{2n+1}{2X} \pi y + B_{2n} \operatorname{Sh} \frac{2n+1}{2X} \pi y \right) \right)$$

$$u_r(x, y) = \frac{u_{xi1}(x, y) - u_{xi1}(-x, y)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{X} \left( A_{1n} \left( k \frac{n\pi y}{X} + B_{1n} \operatorname{Sh} \frac{n\pi y}{X} \right) \right)$$

Par élimination directe on obtient  $A_{pn}, B_{pn}, A_{in}$  et  $B_{in}$  que l'on remplace dans l'expression de  $u_{xi1}$ , D'où :

$$\text{Avec : } \begin{cases} u_{xi1} = u_1(y) + u_1(-y) \\ u_1(y) = \frac{1}{2X} \int_{-X}^X u_{xi1}(\xi, Bh) \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[ I_{\frac{1}{2}}(x, y, \frac{2n+1}{2}) + I_{\frac{1}{2}}(-x, y, \frac{2n+1}{2}) - I_{\frac{1}{2}}(x, y, n) + I_{\frac{1}{2}}(-x, y, n) \right] d\xi \end{cases}$$

$$\text{Et : } \left| I_2(x, y, n) = \cos \frac{n\pi(\xi+x)}{X} \cdot \frac{-68 - \frac{\text{sh} \frac{2n\pi}{X} (\beta h + y)}{X}}{\text{sh} \frac{2n\pi \beta h}{X}} \right.$$

C'est encore une méth de de quadrature avec des coefficients de pondération. Sur l'axe de la veine ( $y=0$ ) la formule est un peu plus simple :

$$u_{x,1}(x,0) = \frac{1}{2X} \int_{-x}^x [u_{x,1}(\xi, \beta h) + u_{x,1}(\xi, -\beta h)] \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos \frac{2n+1}{2X} \pi x \cos \frac{2n+1}{2X} \pi \xi}{\text{ch} \frac{2n+1}{2X} \pi \beta h} + \frac{\sin \frac{2n\pi}{X} \sin \frac{n\pi \xi}{X}}{\text{ch} \frac{n\pi \beta h}{X}} \right\} d\xi$$

Le terme général décroît comme l'inverse d'un cosinus ou sinus hyperbolique; Et quelques termes devraient suffire pour les approximer par troncature. Montrons aussi qu'à partir des équations de Cauchy-Riemann, on a la composante verticale de la vitesse  $u_{y,1}$  en fonction des deux conditions aux limites  $u_{x,1}(\xi, \pm \beta h)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{x,1}}{\partial y} &= \frac{\partial u_{y,1}}{\partial x} = \frac{\partial u_{x,1}}{\partial x \partial y} \\ \text{D'où : } \frac{\partial u_{x,1}}{\partial y} &= \frac{1}{X} \int_{-x}^x u_{x,1}(\xi, \beta h) \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos \frac{2n+1}{2X} \pi x \cos \frac{2n+1}{2X} \pi \xi \cdot \frac{2n+1}{2X} \pi \cdot \frac{\text{ch} \frac{2n+1}{2X} \pi (\beta h + y)}{\text{sh} \frac{2n+1}{2X} \pi \beta h} + \sin \frac{2n\pi}{X} \sin \frac{n\pi \xi}{X} \cdot \frac{n\pi}{X} \cdot \frac{\text{ch} \frac{n\pi (\beta h + y)}{X}}{\text{sh} \frac{2n\pi \beta h}{X}} \right\} \\ &+ \frac{1}{X} \int_{-x}^x u_{x,1}(\xi, -\beta h) \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos \frac{2n+1}{2X} \pi x \cos \frac{2n+1}{2X} \pi \xi \cdot \frac{-2n+1}{2X} \pi \cdot \frac{\text{ch} \frac{2n+1}{2X} \pi (\beta h - y)}{\text{sh} \frac{2n+1}{2X} \pi \beta h} + \sin \frac{2n\pi}{X} \sin \frac{n\pi \xi}{X} \cdot \frac{-n\pi}{X} \cdot \frac{\text{ch} \frac{n\pi (\beta h - y)}{X}}{\text{sh} \frac{2n\pi \beta h}{X}} \right\} \end{aligned}$$

Par intégration ils'ensuit :

$$\begin{aligned} \text{avec : } \left. \begin{aligned} u_{y,1}(x,y) &= U_2(y) - U_2(-y) + C \\ U_2(y) &= \frac{1}{2X} \int_{-x}^x u_{x,1}(\xi, \beta h) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[ I_2(x,y, \frac{2n+1}{2}) - I_2(-x,y, \frac{2n+1}{2}) - I_2(x,y, n) - I_2(-x,y, n) \right] d\xi \end{aligned} \right\} \\ \text{et : } \left. \begin{aligned} I_2(x,y,n) &= \sin \frac{n\pi(\xi+x)}{X} \cdot \frac{\text{ch} \frac{n\pi (\beta h + y)}{X}}{\text{sh} \frac{2n\pi \beta h}{X}} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Valeurs particulières au centre :

$$u_{y,1}(x,y) = C + \frac{1}{2X} \int_{-x}^x [u_{x,1}(\xi, \beta h) - u_{x,1}(\xi, -\beta h)] \times \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{2n+1}{2X} \pi x \cos \frac{2n+1}{2X} \pi \xi}{\text{ch} \frac{2n+1}{2X} \pi \beta h} - \frac{\sin \frac{n\pi \xi}{X} \cos \frac{n\pi x}{X}}{\text{ch} \frac{2n\pi \beta h}{X}} \right) d\xi$$

Il apparait une constante d'intégration C qui est fixée par la référence d'incidence. Il reste encore à trouver une forme analytique pour les coefficients de pondération ou bien à les calculer numériquement. Par permutation des variables x et y on résoud le problème 2. Notons d'ailleurs une étrange analogie entre les coefficients "discrets"  $I_{1n}$  et  $I_{2n}$  et ceux obtenus en tridimensionnel avec des parois verticales pleines p. 43.

#### 4°) COHERENCE DE LA METHODE

##### a) Auto-convergence de la vitesse de référence

Supposons que la vitesse de référence avancée par l'expérimentateur  $U'_0$  est erronée, et qu'il existe un incrément  $\delta u_{x,1}$  entre  $U'_0$  et la valeur véritable à l'infini amont  $U_0$ . En tout point la vitesse de perturbation est

reliée à la vitesse globale par :

$$v_x = U_0 + u_x = U'_0 + u'_x \quad \longrightarrow \quad \delta u_x = U_0 - U'_0 = u'_x - u_x$$

Définissons par la méthode intégrale les composantes de vitesses en tout point à partir des valeurs aux frontières de  $u_x, u'_x, u_y$  et  $u'_y$ . Si la méthode est cohérente, une erreur de  $\delta u_x$  sur chaque valeur frontière devrait se répercuter complètement en tout point. Ceci admet le corollaire : quelque soit la vitesse de référence choisie, la méthode intégrale basée sur les mesures de pression aux parois fournit en tout point les mêmes composantes de vitesses globales. C'est ce résultat intéressant que l'on dénomme "auto-convergence de la vitesse de référence".

$$u_x = \frac{1}{4Bh} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{\pi y}{2Bh} \left( \frac{u_x(\xi, 2Bh)}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh + \cos \pi y/2Bh} + \frac{u_x(\xi, 0)}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh - \cos \pi y/2Bh} \right) d\xi$$

$$u'_x = \frac{1}{4Bh} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{\pi y}{2Bh} \left( \frac{u_x(\xi, 2Bh) + \delta u_x}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh + \cos \pi y/2Bh} + \frac{u_x(\xi, 0) + \delta u_x}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh - \cos \pi y/2Bh} \right) d\xi$$

$$u_y = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sh} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} \left( \frac{u_x(\xi, 2Bh)}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh + \cos \pi y/2Bh} - \frac{u_x(\xi, 0)}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh - \cos \pi y/2Bh} \right) d\xi + C$$

$$u'_y = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sh} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} \left( \frac{u_x(\xi, 2Bh) + \delta u_x}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh + \cos \pi y/2Bh} - \frac{u_x(\xi, 0) + \delta u_x}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh - \cos \pi y/2Bh} \right) d\xi + C$$

D'où :

$$v_x = U_0 + u_x = U'_0 + u_x + \delta u_x \times I_1$$

$$u'_y = u_y + \delta u_x \times I_2$$

Avec :

$$I_1 = \frac{1}{4Bh} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{\pi y}{2Bh} \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh + \cos \pi y/2Bh} + \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh - \cos \pi y/2Bh} \right) d\xi = \frac{\sin \frac{\pi y}{2Bh}}{2Bh} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh}{\operatorname{ch}^2 \pi(x-\xi)/2Bh - \cos^2 \pi y/2Bh} d\xi$$

$$I_2 = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sh} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh + \cos \pi y/2Bh} - \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(x-\xi)/2Bh - \cos \pi y/2Bh} \right) d\xi = -\frac{\cos \pi y/2Bh}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi(x-\xi)/2Bh}{\operatorname{ch}^2 \pi(x-\xi)/2Bh - \cos^2 \pi y/2Bh} d\xi$$

Posons  $u = \pi \frac{x-\xi}{2Bh}$  il en découle :

$$I_2 = 0 \quad \text{par symétrie en } u$$

$$I_1 = \frac{\sin \frac{\pi y}{2Bh}}{2Bh} \times \frac{2Bh}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 \frac{\pi y}{2Bh}} du = \frac{\sin \frac{\pi y}{2Bh}}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi y}{2Bh}}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{u-1}{1 - \cos^2 \frac{\pi y}{2Bh}}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

Et on retrouve :

$$\left| \begin{array}{l} v_x = U_0 + u_x = U'_0 + u'_x = U_0 + u_x + \delta u_x = c \xi \quad \forall U \\ u'_y = u_y \end{array} \right.$$

Ceci explicite la cohérence de la méthode. En outre si la référence de vitesses est choisie de façon arbitraire, par les mesures de vitesses aux parois on retrouve systématiquement la même vitesse globale. Toutefois le paragraphe suivant apporte des nuances.

### b) Auto-convergence de la pression de référence

On ne mesure pas directement  $u_x$ ; Mais d'après le théorème de Bernoulli, ces valeurs s'obtiennent en première approximation par les coefficients de pressions mesurés sur la surface de contrôle :

$$C_p = \frac{p - p_0}{\rho U_0^2 / 2} = -2 \frac{u_x}{U_0} - \frac{u_x^2 + u_y^2}{U_0^2} \approx -2 \frac{u_x}{U_0}$$

La mesure de  $p_0$  entachée d'une certaine erreur permet d'estimer successivement  $U_0^{(0)}$  et  $u_x^{(0)}$  aux parois. Mais ces valeurs estimées ne permettent pas d'accéder de façon immédiate et rigoureuse à la vitesse en un point fixé.

Soit :  $\rho_0, p_0$  et  $U_0$  les valeurs de références exactes à l'infini amont.

$\rho^{(0)}, p^{(0)}$  et  $U^{(0)}$  les valeurs estimées

Par définition :

$$v_x(x, y) = U_0 + \frac{\sin \pi y / 2Bh}{4 Bh} \times \frac{1}{\rho_0 U_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{p_0 - p |_{y=2Bh}}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} + \cos \frac{\pi y}{2Bh}} + \frac{p_0 - p |_{y=0}}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} - \cos \frac{\pi y}{2Bh}} \right) d\xi$$

$$v_x^{(0)}(x, y) = U^{(0)} + \frac{\sin \pi y / 2Bh}{4 Bh} \times \frac{1}{\rho^{(0)} U^{(0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{p^{(0)} - p |_{y=2Bh}}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} + \cos \frac{\pi y}{2Bh}} + \frac{p^{(0)} - p |_{y=0}}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} - \cos \frac{\pi y}{2Bh}} \right) d\xi$$

D'après le théorème de Bernoulli :

$$\frac{p_0 - p^{(0)}}{1/2 \rho^{(0)} U^{(0)2}} = 1 - \frac{\rho_0 U_0^2}{\rho^{(0)} U^{(0)2}}$$

D'où :

$$v_x^{(0)}(x, y) = U^{(0)} + [v_x(x, y) - U_0] + \frac{\sin \pi y / 2Bh}{4 Bh} \times \frac{1}{\rho^{(0)} U^{(0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{p^{(0)} - p_0 |_{y=2Bh}}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} + \cos \frac{\pi y}{2Bh}} + \frac{p^{(0)} - p_0 |_{y=0}}{\operatorname{ch} \pi \frac{x-\xi}{2Bh} - \cos \frac{\pi y}{2Bh}} \right) d\xi$$

La constance de  $p-p_0$  permet de reconnaître l'intégrale  $I_1$  qui est égale à l'unité, il s'ensuit :

$$v_x^{(0)}(x, y) = U^{(0)} + [v_x(x, y) - U_0] - \frac{U_0^{(0)}}{2} \left( 1 - \frac{\rho_0 U_0^2}{\rho^{(0)} U^{(0)2}} \right)$$

-Si l'écoulement est incompressible ( $\rho_0 = \rho^{(0)}$ ),  $v_x^{(0)}(x, y)$  est exact en première approximation. Posons comme précédemment  $U_0 - U^{(0)} = \delta U^{(0)}$  que l'on suppose petit.

$$\frac{U_0^{(0)}}{2} \left( 1 - \frac{U_0^2}{U^{(0)2}} \right) \approx -\delta U^{(0)} \implies v_x^{(0)}(x, y) \approx v_x(x, y)$$

-En écoulement compressible le rapport  $\rho_0/\rho^{(0)}$  dépend du Mach. On l'approxime dans l'hypothèse d'un écoulement isentropique :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho^{(0)}} &= \left( \frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{U_0^2}{a_1^2}}{1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{U^{(0)2}}{a_1^2}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \delta U^{(0)} &\ll U^{(0)} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \frac{\rho_0}{\rho^{(0)}} \approx 1 - \frac{\delta U^{(0)2}/U^{(0)2}}{\frac{a_1^2}{U^{(0)2}} - \frac{\gamma-1}{2}} = 1 - \frac{\delta U^{(0)}}{U^{(0)}} M^{(0)2}$$

Soit :

$$1 - \frac{\rho_0 U_0^2}{\rho^{(0)} U^{(0)2}} \approx 1 - \left( 1 - \frac{\delta U^{(0)} M^{(0)2}}{U^{(0)}} \right) \left( 1 + \frac{2 \delta U^{(0)}}{U^{(0)}} \right)$$

Et finalement :

$$v_x^{(0)}(x, y) \approx v_x(x, y) - \delta U^{(0)} + \delta U^{(0)} \left( 1 - \frac{M^{(0)2}}{2} \right)$$

Pour obtenir la valeur de  $v_x(x, y)$  exacte en première approximation, il faut non pas appliquer la méthode intégrale brute mais multiplier préalablement le résultat de l'intégration par  $\frac{1}{1 - M^{(0)2}/2}$ . Ce facteur de sur-relaxation n'est précis qu'au premier ordre. Néanmoins la valeur exacte s'obtient par itération. Confondons  $U_0$  et la vitesse exacte au point où s'effectue le calcul. Ceci revient en quelque sorte à considérer que le Mach d'essai est celui au point fixé. La relation de récurrence de ce processus itératif

$$s'écrit : U^{(n+1)} = U^{(n)} + \frac{4 \sin \pi \xi / 2Bh}{4 Bh} \cdot \frac{1}{\rho^{(n)} U^{(n)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{p^{(n)} - p |_{y=2Bh}}{ch \pi \frac{x-\xi}{2Bh} + i \cos \frac{\pi y}{2Bh}} + \frac{p^{(n)} - p |_{y=0}}{ch \pi \frac{x-\xi}{2Bh} - i \cos \frac{\pi y}{2Bh}} \right) d\xi$$

La vitesse  $v_x(x,y)$  sera connue précisément quand :

$$U_\infty = v_x(x,y) = U^{(n+1)} = U^{(n)}$$

C'est à dire : 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{p^{(n)} - p |_{y=2Bh}}{ch \pi \frac{x-\xi}{2Bh} + i \cos \frac{\pi y}{2Bh}} + \frac{p^{(n)} - p |_{y=0}}{ch \pi \frac{x-\xi}{2Bh} - i \cos \frac{\pi y}{2Bh}} \right) d\xi = 0$$

c) Référence à l'infini

Si les parois sont poreuses et que l'écoulement est uniforme mais incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à celui-ci, les pressions pariétales ne changent pas avec  $\alpha$ . Les formulations précédentes se basent sur la nullité de  $\alpha$  à l'infini ce qui n'inclut pas la configuration ici envisagée. Pour une veine à parois ventilées de longueur limitée on ne sait pas comment définir la référence d'incidence. Il est d'ailleurs plausible que celle-ci dépende de l'essai. Ce problème crucial n'est d'ailleurs pas spécifique à cette méthode. Il se pose aussi pour les parois adaptables où il garde un degré de liberté par la rotation d'ensemble. L'introduction d'un déclinomètre à un emplacement approprié arrêterait peut-être toute controverse à ce sujet (62) en imposant la référence.

De même on admet la nullité de la vitesse de perturbation longitudinale à l'infini amont. Or dans le collecteur celle-ci avoisine plutôt  $-U_0$ . Et il conviendrait d'intégrer les vitesses globales plutôt que celles de perturbations. Mais la longueur limitée de veine rend la discrétisation de ce procédé néfaste. Il est préférable d'envisager une veine de longueur siége d'une vitesse de perturbation nulle à l'infini amont. Cette remarque de principe oblige à éliminer dans l'exploitation les points de mesures proche du collecteur et de l'entrée du diffuseur.

d) Applications

Malgré ma collaboration néante à ce propos, il est utile d'indiquer les applications aussi bien théoriques que réelles.

-Les conditions aux limites sur une paroi poreuse plane et plane sont respectées par superposition des singularités images et éventuellement pivotées, de celles représentatives du modèle. Il découle de la première des représentations conformes précédemment présentées, les potentiels complexes de chaque singularités retenues et placées dans une bande infinie. Plus spécialement ceci procure les vitesses  $u_{xi}$  aux parois dont on déduit les vitesses induites par les quadratures avancées antérieurement (14,1).

-Un profil répertorié comme le NACA 012 se calcule théoriquement par une méthode de singularités que celui-ci soit en atmosphère illimité ou entre deux parois planes. La méthode précédente s'applique à partir des vitesses longitudinales fournies aux parois.

-Les essais d'adaptation itérative de parois qui nécessitent aussi les mesures des vitesses longitudinales, ont précédé cette théorie. L'applica-

tion de cette méthode intégrale aux relevés de pression aux parois prévues adaptées confirme la nullité des corrections dans cette configuration.

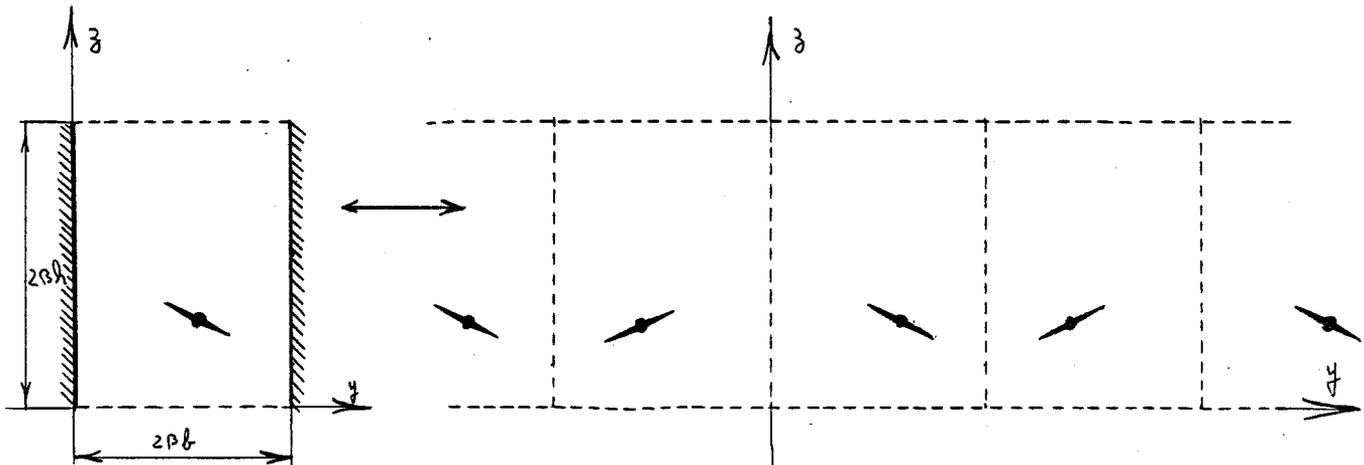
-Les autres applications qui ont succédé celle réaliste exposée dans (I4) sont toujours aussi probantes. Les essais (62,63) veines guidées et perforées se regroupent très bien. Ceci incite à aborder l'extension tridimensionnelle.

## II ) VEINE RECTANGULAIRE A PAROIS VERTICALES PLEINES

### o) FORMULATION ET POINTS PARTICULIERS

#### a) Formulation

Reprenons les notations et le schéma de démonstration du chapitre II (§III<sub>4</sub>) mais pour une maquette excentrée et dissymétrique. Le problème tridimensionnel est ramené à une série de problèmes bidimensionnels grâce à la périodicité des différents potentiels en y.



$$\varphi = \varphi_m + \varphi_i = \varphi_m + \varphi_E' + \varphi_c = \varphi_E + \varphi_c$$

Soit :

$$\varphi_i = \varphi_c + \varphi_E'$$

$$\varphi_c = \varphi - \varphi_E$$

Les effets de parois latérales ont déjà été détaillés chap. III (§V). La méthode intégrale ici présentée s'attache à la détermination de  $\varphi_c$  d'après les mesures de vitesses longitudinales sur une surface de contrôle composée de deux plans parallèles représentés sur la figure ci-dessus. Selon la périodicité de  $\varphi$  et  $\varphi_E$  en y et leur symétrie par rapport à Oz on a :

$$\varphi_c(x, y, z) = \frac{\hat{\varphi}_c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_c(x, n, z) \cos \frac{n\pi y}{2B}$$

$$\hat{\varphi}_c(x, n, z) = \frac{2}{2B} \int_0^{2B} \varphi_c(x, y, z) \cos \frac{n\pi y}{2B} dy$$

$$\varphi_E = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x, |y + 4hB|, z) \equiv \frac{\hat{\varphi}_E(x, 0, z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_E(x, n, z) \cos \frac{n\pi y}{2B}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) \Big|_{z=0}^{z=2ah} \equiv u(x, y, 2ah) \equiv \frac{-73-}{2} \hat{u}(x, 0, 2ah) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}(x, n, 2ah) \cos \frac{n\pi z}{2ah}$$

Conformément aux résultats antérieurs, les transformées discrètes et intégrales de Fourier si elles existent réduisent le problème de Dirichlet tridimensionnel aux relations :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{xc}(p, n, z) &= A_n(p) \operatorname{Ch} \lambda z + B_n(p) \operatorname{Sh} \lambda z \\ \hat{u}_{zc}(p, n, z) &= \frac{\lambda}{ip} [A_n(p) \operatorname{Sh} \lambda z + B_n(p) \operatorname{Ch} \lambda z] \end{aligned}$$

Avec :  $\lambda = \sqrt{B^2 p^2 + \frac{\pi^2 n^2}{4a^2}}$

Et les valeurs limites supposées connues :

$$\hat{u}_{xc}(p, n, 0) = \hat{u}_x(p, n, 2ah) - \hat{u}_{xc}(p, n, 2ah)$$

Contrairement au chapitre II il ne s'agit plus de se baser sur une condition aux limites idéalisés pour fixer  $A_n$  et  $B_n$ ; Les valeurs aux limites mesurées  $\hat{u}_x$  moins celles sommées par les images  $\hat{u}_{xc}$  (chap. III § V) servent à exprimer naturellement ces deux coefficients dont on extrait l'expression du potentiel et de ses dérivées partielles :

$$\begin{aligned} A_n(p) &= \hat{u}_{xc}(p, n, 0) \\ B_n(p) &= \frac{\hat{u}_{xc}(p, n, 2ah)}{\operatorname{Sh} 2ah \lambda} - \frac{\hat{u}_{xc}(p, n, 0)}{\operatorname{Sh} 2ah \lambda} \operatorname{Ch} 2ah \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \hat{u}_{xc}(p, n, z) &= \hat{u}_{xc}(2ah) \frac{\operatorname{Sh} \lambda z}{\operatorname{Sh} 2ah \lambda} + \hat{u}_{xc}(0) \frac{\operatorname{Sh} \lambda(2ah-z)}{\operatorname{Sh} 2ah \lambda} \\ \hat{u}_{zc}(p, n, z) &= \frac{\lambda}{ip \operatorname{Sh} 2ah \lambda} [\hat{u}_{xc}(p, n, 2ah) \operatorname{Ch} \lambda z - \hat{u}_{xc}(p, n, 0) \operatorname{Ch} \lambda(2ah-z)] \end{aligned}$$

En dérivant ces expressions pour obtenir les gradients intervenant dans le calcul des corrections de parois (chap. I) et en retournant dans le plan des variables initiales il s'en déduit :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{xc}(x, n, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{u}_{xc}(\xi-x, n, 2ah) I_{2n}(\xi, \beta z) + \hat{u}_{xc}(\xi-x, n, 0) I_{2n}(\xi, \beta(2h-z))] d\xi \\ \hat{u}_{zc}(x, n, z) &= \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{u}_{xc}(\xi-x, n, 2ah) I_{2n}(\xi, \beta z) - \hat{u}_{xc}(\xi-x, n, 0) I_{2n}(\xi, \beta(2h-z))] d\xi \\ \frac{\partial \hat{u}_{xc}(x, n, z)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{u}_{xc}(\xi-x, n, 2ah) I_{2n}(\xi, \beta z) + \hat{u}_{xc}(\xi-x, n, 0) I_{2n}(\xi, \beta(2h-z))] d\xi \\ \frac{\partial \hat{u}_{zc}(x, n, z)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{u}_{xc}(\xi-x, n, 2ah) I_{3n}(\xi, \beta z) - \hat{u}_{xc}(\xi-x, n, 0) I_{3n}(\xi, \beta(2h-z))] d\xi \end{aligned}$$

Et les coefficients de pondérations :

$$\begin{aligned} I_{2n}(\xi, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} \operatorname{Sh} \lambda' z}{\operatorname{Sh} 2ah \lambda'} dp & I_{2n}(\xi, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} \lambda' \operatorname{Ch} \lambda' z}{ip \operatorname{Sh} 2ah \lambda'} dp \\ I_{3n}(\xi, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} \lambda' \operatorname{Ch} \lambda' z}{\operatorname{Sh} 2ah \lambda'} dp & I_{4n}(\xi, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} - ip \cdot \operatorname{Sh} \lambda' z}{\operatorname{Sh} 2ah \lambda'} dp \end{aligned}$$

avec  $\lambda' = \sqrt{p^2 + \frac{\pi^2 n^2}{4a^2}}$

Les expressions finales de  $u_{xc}$ ,  $u_{zc}$ ,  $\frac{\partial u_{xc}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_{zc}}{\partial x}$  s'obtiennent par sommation des différents harmoniques.

b) Cas symétrique

Lorsque la maquette est sans dérapage dans l'axe de la veine ( $y=\beta b$ ), le potentiel est symétrique par rapport à  $y=\beta b$ . Il en découle que les harmoniques de rang impair du développement de Fourier sont nuls.

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, 2\beta b - y, z)$$

$$\hat{\varphi}_c(x, 2m+1, z) \equiv \hat{u}_{zc}(x, 2m+1, z) \equiv \hat{u}_{3c}(x, 2m+1, z) \equiv 0$$

Ainsi pour le cas courant symétrique, seuls les harmoniques de rang pair dans les développements précédents sont à retenir.

c) Valeurs particulières

-Au centre de la veine  $z = \beta h$  ces expressions deviennent:

$$\hat{u}_{zc}(x, n, \beta h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{u}_{zc}(\xi-x, n, 2\beta h) + \hat{u}_{zc}(\xi-x, n, 0) \right] I_{2n}(\xi, \beta h) d\xi$$

$$\hat{u}_{3c}(x, n, \beta h) = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{u}_{zc}(\xi-x, n, 2\beta h) - \hat{u}_{zc}(\xi-x, n, 0) \right] I_{2n}(\xi, \beta h) d\xi$$

avec  $I_{2n}(\xi, \beta h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i p x} dx}{2(\beta h) \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 b^2}}}$  et  $I_{2n}(\xi, \beta h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 b^2}} dp}{2i p \operatorname{Sh} 2\beta h \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 b^2}}}$

Lorsque la symétrie par rapport à  $y=\beta h$  existe, ce sont les formules d'origine (14).

-Aux parois ou plus exactement aux surfaces de contrôle:

$$\hat{u}_{3c}(p, n, 0) = \beta \frac{\sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 b^2}}}{i p} \left\{ \frac{\hat{u}_{zc}(p, n, 2\beta h)}{\operatorname{Sh} 2\beta h \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 b^2}}} - \frac{\hat{u}_{zc}(p, n, 0)}{h 2\beta h \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 b^2}}} \right\}$$

$$\hat{u}_{3c}(p, n, 2\beta h) = \beta \frac{\sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 b^2}}}{i p} \left\{ \frac{\hat{u}_{zc}(p, n, 2\beta h)}{h 2\beta h \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 b^2}}} - \frac{\hat{u}_{zc}(p, n, 0)}{\operatorname{Sh} 2\beta h \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 b^2}}} \right\}$$

Ces deux relations linéaires lient deux des conditions sur la surface de contrôle aux deux autres. Ainsi pour une fonction harmonique la connaissance de deux conditions aux limites parmi les quatre, fixe les valeurs du potentiel, de ses dérivées et plus spécialement deux autres conditions aux limites. Conformément à l'étude analytique, si deux conditions retenues sont uniformes ou si seul le premier harmonique existe, on retrouve exactement le problème bidimensionnel. Et les deux relations ici présentées généralisent les conclusions sur l'adaptation immédiate des parois aussi bien en tridimensionnel à parois verticales pleines que pour le cas particulier bidimensionnel qui s'en déduit. Ceci sera explicité au § 6 ;

d) Formulation conjuguée

Dans le même ordre d'idée, au lieu des deux conditions aux limites  $\hat{u}_{zc}(2\beta h)$  et  $\hat{u}_{zc}(0)$ , les composantes normales fournissent aussi bien le potentiel et ses dérivées partielles. En reprenant complètement le calcul précédent ou en se basant sur les deux relations entre conditions limites on montre que:

$$\hat{u}_{zc}(x, n, \beta) = \frac{1}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{u}_{3c}(\xi-x, n, 2\beta h) I_{2n}(\xi, \beta) - \hat{u}_{3c}(\xi-x, n, 0) I_{2n}(\xi, \beta(2h-3)) \right] d\xi$$

$$\hat{u}_{3c}(x, n, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{u}_{3c}(\xi-x, n, 2\beta h) I_{2n}(\xi, \beta) + \hat{u}_{3c}(\xi-x, n, 0) I_{2n}(\xi, \beta(2h-3)) \right] d\xi$$

$$\frac{\partial \hat{u}_{3c}(x, n, z)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{u}_{3c}(\xi - x, n, 2\beta h) I_{3n}(\xi, \beta z) + \hat{u}_{3c}(\xi - x, n, 0) I_{3n}(\xi, \beta(2\beta h - z)) \right] d\xi$$

$$\frac{\partial \hat{u}_{3c}(x, n, z)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{u}_{3c}(\xi - x, n, 2\beta h) I_{3n}(\xi, \beta z) - \hat{u}_{3c}(\xi - x, n, 0) I_{3n}(\xi, \beta(2\beta h - z)) \right] d\xi$$

$I_{3n}$  à  $I_{4n}$  sont identiques aux valeurs intégrales précédemment introduites. Les résultats ici présentés peuvent aussi provenir de la connaissance de conditions aux limites mixtes telles que  $\hat{u}_{3c}$  et  $\hat{u}_{3c}$  fixés sur la même paroi ou sur celles opposées.

e) Vérification sommaire

Les relations générales fournissent  $\hat{u}_{3c}(x, n, \beta z)$  en tout point en fonction par exemple de  $\hat{u}_{3c}(\xi, n, 2\beta h)$  et  $\hat{u}_{3c}(\xi, n, 0)$  pour toutes valeurs de  $\xi$ ; Ce résultat est apparemment contradictoire lorsque  $z = 0$  ou  $2\beta h$ ; On devrait retrouver la valeur ponctuelle imposée. Cependant montrons que les coefficients de pondération sont de véritables fonctions de Green et que les résultats précédents sont cohérents. Puisque la démonstration est identique pour  $z=0$  et  $2\beta h$  limitons nous à  $z=0$ .

$$\hat{u}_{3c}(x, n, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{u}_{3c}(\xi - x, n, 2\beta h) I_{3n}(\xi, 0) + \hat{u}_{3c}(\xi - x, n, 0) I_{3n}(\xi, 2\beta h) \right] d\xi$$

$$I_{3n}(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ip\xi} \operatorname{Sh} \left( 0 \cdot \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 h^2}} \right)}{\operatorname{Sh} \left( 2\beta h \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 h^2}} \right)} dp = 0$$

$$I_{3n}(\xi, 2\beta h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ip\xi} \operatorname{Sh} \left( 2\beta h \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 h^2}} \right)}{\operatorname{Sh} \left( 2\beta h \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4\beta^2 h^2}} \right)} dp = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\xi} dp = \delta(\xi)$$

$I_{3n}(\xi, 2\beta h)$  s'identifie à la distribution de Dirac d'ordre un au point  $(x - \xi)$ . D'après une propriété particulière de cette fonction de Dirac on en déduit que la formule est cohérente quand on s'approche d'un point du contour:

$$\hat{u}_{3c}(x, n, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \xi) \hat{u}_{3c}(\xi, n, 0) d\xi = \hat{u}_{3c}(x, n, 0)$$

Une autre démonstration équivalente consiste à écrire que la transformée intégrale de Fournier est réciproque ce qui ne présente aucun lien avec les fonctions de Green.

$$\hat{u}_{3c}(x, n, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} \hat{u}_{3c}(\xi, 0) d\xi \right) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \hat{u}_{3c}(p, 0) dp = \hat{u}_{3c}(x, n, 0)$$

f) Constante d'intégration

Par l'intermédiaire des conditions de Courchy-Riemann, la composante verticale est définie à une constante additive près quelque soit l'envergure. Ainsi toutes les valeurs  $\hat{u}_{3c}(x, n, \beta z)$  comprennent une constante d'intégration. Pour assurer l'existence des transformées de Fournier (fonctions absolument sommables) on suppose intrinséquement que  $\hat{u}_{3c}$  tend vers zéro avec l'éloignement de  $x$  à  $\pm\infty$ ; Ceci fixe implicitement une référence d'incidence antisymétrique en  $x$  qui correspond à celle composée en bidimensionnel. La méthode élémentaire pour se donner une autre référence serait de calculer

numériquement l'incidence sur un segment en envergure par les formules composées et de décaler le graphe ( $v_3 = f(x)$ ) de sorte que ces valeurs ponctuelles de  $\hat{v}_3(x, n, \beta)$  valent celles choisies a priori. Une autre façon plus sophistiquée consiste à imposer la nullité des coefficients de pondération relatif à l'incidence à une abscisse.

Lorsque ce point est rejeté à l'infini, la référence d'incidence à l'infini amont ou aval s'introduit tout naturellement et de façon similaire à l'étude bidimensionnelle. La transformation des coefficients de pondération sous forme de séries équivalentes procure leur valeur asymptotique aux infinis. La référence amont coïncide avec la nullité de ces coefficients à l'infini aval tandis qu'ils prennent leur valeur maximale à l'autre extrémité. (inversement pour la référence aval) (se reporter à l'annexe C) On optera désormais pour cette référence amont qui est la plus plausible.

g) Coefficients de pondération

A titre de vérification analytique, on montre par le théorème des résidus, appliqué à un contour d'intégration approprié que pour  $n=0$ , on retrouve les coefficients de pondération bidimensionnels du § I; (annexe C)

Les quatre intégrales des coefficients pondérateurs ne s'expriment apparemment pas sous forme de fonctions élémentaires. Elles dépendent uniquement de deux paramètres  $x/\beta$  et  $n$ , ce qui permet de les tabuler définitivement en incompressible tandis que leurs valeurs seront interpolées dans la table suivant le facteur de compressibilité. Ces intégrales sont difficiles à calculer directement car ce sont des transformées de Fourier. C'est à dire des fonctions oscillantes plus ou moins rapidement selon le paramètre  $x/\beta$  et sur un intervalle non borné. La description du mode de calcul adopté est précisée au chap V) § I<sub>3</sub>

III) VEINE CYLINDRIQUE DE FORME QUELCONQUE

Ces résultats bien que nouveau sont calqués sur la méthode analytique chap II) (III §5). Mais la condition aux limites, idéalisée et basée sur la modélisation de la maquette, est remplacée par les mesures des coefficients de pression sur toutes les parois. Il ne s'agit donc pas ici de reprendre une étude exhaustive, mais de relever les différences avec l'exposé précédent (p. 38).

1) Principe

les décompositions discrète en  $\theta$  et intégrale en  $x$  de Fourier fournissent les expressions:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_i(x, \theta, r) &= \frac{\hat{\varphi}_i(x, 0, r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{\varphi}_i(x, n, r) \cos n\theta + \hat{\varphi}'_i(x, n, r) \sin n\theta \right] \\ \hat{\varphi}_i(r, \theta, r) &= \frac{A_0(r) I_0(\beta r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n(r) \cos n\theta + A'_n(r) \sin n\theta \right] I_n(\beta r) \end{aligned}$$

La méthode diffère au niveau du traitement des conditions aux limites:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varphi}_i(x, r, \theta)}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\varphi}_m}{\partial x} = i\beta \frac{A_0(r)}{2} I_0(\beta r) + i\beta \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n(r) \cos n\theta + A'_n(r) \sin n\theta \right] I_n(\beta r) \\ &= \frac{\hat{u}_{x_i}(r, 0, R)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{u}_{x_i}(r, n, R) \cos n\theta + \hat{u}'_{x_i}(r, n, R) \sin n\theta \right] \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \forall \theta \in [0, 2\pi] \\ \text{sur } r \text{ parois} \end{array}$$

2) Veine circulaire

$R = R(\theta)$  Par identification des développements en série de Fourier on en déduit:

$$\varphi_i(x, r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_{xi}(\xi-x, 0, R) \hat{J}_0(\xi, r) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{u}_{xi}(\xi-x, n, R) \cos n\theta + \hat{u}'_{xi}(\xi-x, n, R) \sin n\theta \right] \hat{J}_n(\xi, r) d\xi$$

avec

$$\hat{J}_n(\xi, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_n(\beta \rho r)}{i \rho I_n(\beta \rho R)} e^{i \rho \xi} d\rho$$

La symétrie éventuelle apporte des simplifications. Par exemple pour une maquette centrée, les termes en cosinus disparaissent. Ces coefficients mériteraient une étude spécifique, orientée vers l'obtention numérique ou la simplification analytique.

3) Forme quelconque

La condition aux limites ne s'inversent pas et seule une résolution discrétisée dans le plan des transformées de Fourier procure les valeurs discrètes des coefficients  $A_n(p)$  et  $A'_n(p)$ . Dans la méthode dite "analytique" les singularités modèles sont fixées et les conditions aux limites sont idéalisées, ce qui engendre la formulation analytique du second membre. Inversement il s'agit cette fois-ci de rechercher les transformées des conditions aux limites mesurées, ce qui rend le problème plus délicat sur le plan numérique.

4) Veine rectangulaire

C'est un cas particulier du précédent. Mais comme on l'a déjà indiqué chap II) (§III), ce mode d'obtention est maladroit. Les conditions aux extrémités amont et aval se traitent par la méthode bidimensionnelle entièrement analytique (p. 35). Le développement en série double de Fourier étant inopérant pour ce problème tridimensionnel, il suffit de se reporter à un domaine parallélépipédique de longueur limitée ou de le transcrire sous forme de deux problèmes aux parois verticales ou horizontales pleines. Ceci ne présentant pas de différences essentielles avec les indications du chap. II il semble superflu de les reproduire ici.

IV) PREMIERE APPROXIMATION TRANSSONIQUE

1) Principe

Au lieu de l'équation linéarisée valide en écoulement faiblement transsonique, partons de l'équation aux petites perturbations dont les fondements sont rappelés dans (38):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (1 - M_0^2) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\beta + 1}{V_0} M_0^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

La non linéarité de cette relation approchée qui se base sur les équations d'Euler, de Bernouilli et de continuité, complique l'équation régissant le potentiel d'interaction. Il est admis pour l'équation linéarisée que les potentiels  $\varphi$ ,  $\varphi_m$  et  $\varphi_i$  sont harmoniques à une contradiction d'échel-

le près sauf aux emplacements éventuels des singularités. Or si l'on pose que  $\varphi$  et  $\varphi_m$  répondent à l'équation aux petites perturbations introduites ci-dessus,  $\varphi_i$  satisfait à l'équation:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} (1 - \eta_0^2) + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} = \frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2 \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right\}$$

Afin de transformer cette équation aux dérivées partielles en équation différentielle ordinaire on utilise comme précédemment la transformation de Fourier bien que celle de Laplace permettrait d'élargir les hypothèses d'application (annexe C). Supposant que le terme  $\frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2$  est faible, on cherche  $\varphi_i$  sous forme du développement en puissance de ce coefficient. A l'ordre zéro on retrouve bien sûr l'équation du paragraphe 1 d'où:

$$\hat{\varphi}_{i,0}(\rho, y) = \frac{1}{i \rho \mathcal{K}(2Bk\rho)} \left\{ \hat{u}_{x_i}(\rho, 2Bk\rho) \mathcal{S}h B \rho y + \hat{u}_{x_i}(\rho, 0) \mathcal{S}h B \rho (2k - y) \right\}$$

2) Ordre 1

Posons:  $\varphi_i = \varphi_{i,0} + \frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2 \varphi_i$

Cherchons la valeur principale de  $\varphi_i$  en  $\frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2$ . L'équation aux petites perturbations devient dans le plan transformé:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_{i,0}}{\partial y^2} - (1 - \eta_0^2) \rho^2 \hat{\varphi}_{i,0} + \frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2 \left\{ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial y^2} - (1 - \eta_0^2) \hat{\varphi}_i \right\} \\ \frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2 \mathcal{L}_F \left\{ \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{i,0}}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{\varphi}_m}{\partial x} + \frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2 \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_i}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{\varphi}_m}{\partial x} + \left( \frac{\partial \hat{\varphi}_{i,0}}{\partial x} + \frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{i,0}}{\partial x^2} + \frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2 \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_i}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_m}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \hat{\varphi}_{i,0}}{\partial x} + \frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x} \right) \right\}$$

$\mathcal{L}_F$  désigne la transformée de Fourier de cette expression. Pour l'approximation à l'ordre 1, on se limite aux termes en  $\frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2$ , les puissances supérieures à un en ce terme sont négligées. D'après la relation vérifiée par  $\hat{\varphi}_{i,0}$  à l'ordre zéro, on aboutit à l'équation à l'ordre 1:

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{i,1}}{\partial y^2} - (1 - \eta_0^2) \rho^2 \hat{\varphi}_{i,1} = \mathcal{L}_F \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_{i,0}}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{i,0}}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_{i,0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_{i,0}}{\partial x} \right\}$$

Notons avant de poursuivre que:

$$\mathcal{L}_F (f \cdot g) \neq \mathcal{L}_F (f) \cdot \mathcal{L}_F (g)$$

Si on l'équation aux petites perturbations s'écrirait:

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial y^2} - (1 - \eta_0^2) \rho^2 \hat{\varphi} = -i \rho^3 \frac{\gamma+1}{U_0} \eta_0^2 (\hat{\varphi})^2$$

Cette équation de la forme  $y'' = A^2 y + B y^2$  se résout facilement suivant les puissances successives de B (1). Mais le problème à traiter ici n'est pas aussi simple; par exemple la transformée de  $\frac{\partial^2 \varphi_{i,0}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \varphi_{i,0}}{\partial x}$  s'écrit d'après les théorèmes de convolution:

$$\mathcal{L}_F \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_{i,0}}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_{i,0}}{\partial x} \right\} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q^2 \left[ A(q) \mathcal{L}h B q y + B(q) \mathcal{S}h B q y \right] \left[ A(p-q) \mathcal{L}h B (p-q) y + B(p-q) \mathcal{S}h B (p-q) y \right] (p-q) dy$$

L'équation aux petites perturbations approximée à l'ordre un devient

une équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficient constant et non homogène. Mais le second membre n'est pas une fonction élémentaire comme on le voit ci-dessus pour le terme en  $\frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{i2}}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{\varphi}_{i0}}{\partial x}$ . De plus sous cette forme le second membre est inexploitable car les coefficients A (p) et B (p) qui devraient être exprimés en fonction des conditions aux limites  $\hat{u}_i(p, 2\alpha h)$ , apparaissent dans une équation intégrale. Au lieu de ceci on se sert de l'expression de  $\hat{\varphi}_{i0}$  en fonction des valeurs limites d'où l'équation à résoudre:

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{i2}}{\partial y^2} + (1 - \mu_0^2) p^2 \hat{\varphi}_{i2} = F(y)$$

avec:

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i q}{\operatorname{sh} 2\beta h q} \left[ \hat{u}_i(q, 2\alpha h) \operatorname{sh} \beta q y + \hat{u}_i(q, 0) \operatorname{sh} \beta q (2h - y) \right] - \left[ \hat{u}_i(p - q, 2\alpha h) \operatorname{sh} \beta (p - q) y + \hat{u}_i(p - q, 0) \operatorname{sh} \beta (p - q) (2h - y) \right] \frac{dq}{\operatorname{sh} 2\beta h q} \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (q - p) \hat{\varphi}_m(p - q, y) \frac{q}{\operatorname{sh} 2\beta h q} \left[ \hat{u}_i(q, 2\alpha h) \operatorname{ch} \beta q y + \hat{u}_i(q, 0) \operatorname{sh} \beta q (2h - y) \right] dq \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -(p - q)^2 \hat{\varphi}_m(p - q, y) \frac{1}{\operatorname{sh} 2\beta h q} \left[ \hat{u}_i(q, 2\alpha h) \operatorname{sh} \beta q y + \hat{u}_i(q, 0) \operatorname{sh} \beta q (2h - y) \right] dq$$

La solution de l'équation homogène à coefficient constant associé correspond à la solution générale de  $\hat{\varphi}_{i0}$ . Suivant la méthode de variation des coefficients, on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre; en effet la solution générale est la somme de cette solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

$$\hat{\varphi}_{i2} = A(p, y) \operatorname{ch} \beta p y + B(p, y) \operatorname{sh} \beta p y$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_{i2}}{\partial y} = A(p, y) \cdot \beta p \cdot \operatorname{sh} \beta p y + B(p, y) \cdot \beta p \cdot \operatorname{ch} \beta p y + \frac{\partial A(p, y)}{\partial y} \operatorname{ch} \beta p y + \frac{\partial B(p, y)}{\partial y} \operatorname{sh} \beta p y$$

Supposons que:  $\frac{\partial A(p, y)}{\partial y} \operatorname{ch} \beta p y + \frac{\partial B(p, y)}{\partial y} \operatorname{sh} \beta p y = 0$

On en déduit:  $\beta p [A(p, y) \operatorname{sh} \beta p y + B(p, y) \operatorname{ch} \beta p y] = \frac{\partial \hat{\varphi}_{i2}}{\partial y}$

D'où:  $\frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{i2}}{\partial y^2} = \beta^2 p^2 [A(p, y) \operatorname{ch} \beta p y + B(p, y) \operatorname{sh} \beta p y] + \beta p \left[ \frac{\partial A(p, y)}{\partial y} \operatorname{sh} \beta p y + \frac{\partial B(p, y)}{\partial y} \operatorname{ch} \beta p y \right]$

Compte de l'équation différentielle initiale, il s'en suit:

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{i2}}{\partial y^2} - \beta^2 p^2 \hat{\varphi}_{i2} = F(y) = \beta p \left[ \frac{\partial A(p, y)}{\partial y} \operatorname{sh} \beta p y + \frac{\partial B(p, y)}{\partial y} \operatorname{ch} \beta p y \right]$$

Et la recherche des coefficients A et B se ramène au système:

$$\begin{cases} \frac{\partial A(p, y)}{\partial y} \operatorname{ch} \beta p y + \frac{\partial B(p, y)}{\partial y} \operatorname{sh} \beta p y = 0 \\ \frac{\partial A(p, y)}{\partial y} \operatorname{sh} \beta p y + \frac{\partial B(p, y)}{\partial y} \operatorname{ch} \beta p y = F(y) / \beta p \end{cases}$$

On en déduit les solutions particulières nulles pour  $y=0$ :

$$A(p, y) = - \int_0^y \frac{F(y)}{Bp} \operatorname{Sh} Bpy \, dy \quad \text{et} \quad B(p, y) = \int_0^y \frac{F(y)}{Bp} \operatorname{Ch} Bpy \, dy$$

Exprimons les coefficients A et B en fonction des valeurs aux limites  $\hat{u}_{xi}(p, z_{0h})$  dont on déduit la solution dans le plan de Fourier:

$$\hat{u}_{xi}(p, 0) = ip A(p)$$

$$\hat{u}_{xi}(p, z_{0h}) = ip \left\{ A(p) \operatorname{Ch} z_{0h} p + B(p) \operatorname{Sh} z_{0h} p \right\} + \frac{\gamma+1}{U_0} M_0^2 \left\{ \operatorname{Sh} z_{0h} p \int_0^{z_{0h}} \frac{F(y)}{Bp} \operatorname{Ch} Bpy \, dy - \operatorname{Ch} z_{0h} p \int_0^{z_{0h}} \frac{F(y)}{Bp} \operatorname{Sh} Bpy \, dy \right\}$$

D'où:  $A(p) = \frac{\hat{u}_{xi}(p, 0)}{ip}$

$$B(p) = \frac{\hat{u}_{xi}(p, z_{0h}) - \frac{\hat{u}_{xi}(p, 0)}{ip} \operatorname{Ch} z_{0h} p}{ip \operatorname{Sh} z_{0h} p} - \frac{\gamma+1}{U_0} M_0^2 \left\{ \operatorname{Sh} z_{0h} p \int_0^{z_{0h}} \frac{F(y)}{Bp} \operatorname{Ch} Bpy \, dy - \operatorname{Ch} z_{0h} p \int_0^{z_{0h}} \frac{F(y)}{Bp} \operatorname{Sh} Bpy \, dy \right\} \times \frac{1}{ip \operatorname{Sh} z_{0h} p}$$

Finallement:

$$\hat{\varphi}_i(p, y) = \frac{1}{ip \operatorname{Sh} z_{0h} p} \left[ \hat{u}_{xi}(p, z_{0h}) \operatorname{Sh} Bpy + \frac{\hat{u}_{xi}(p, 0)}{ip} \operatorname{Sh} Bp(z_{0h}-y) \right] - \frac{\gamma+1}{ip U_0} M_0^2 \left\{ \operatorname{Sh} Bpy \int_0^{z_{0h}} \frac{F(y)}{Bp} \operatorname{Ch} Bpy \, dy - \frac{\operatorname{Sh} Bp(z_{0h}-y)}{\operatorname{Ch} z_{0h} p} \int_0^{z_{0h}} \frac{F(y)}{Bp} \operatorname{Sh} Bpy \, dy + \operatorname{Ch} Bpy \int_0^y \frac{F(y)}{Bp} \operatorname{Sh} Bpy \, dy \right\}$$

Cette expression se présente sous la forme d'un premier terme identique à l'approximation à l'ordre 0 qui est celle du paragraphe 1 et d'un second terme proportionnel à  $\frac{\gamma+1}{U_0} M_0^2$  qui est le début du développement en série suivant cette valeur supposée petite. Malheureusement ce résultat est lourd et peu maniable. Il conviendrait de l'expliciter dans le plan des variables initiales et de tenter de la simplifier en introduisant la forme développée de  $F(y)$ .

## V) ÉCOULEMENTS SUPERSONIQUES

### 1) Principe

En supersonique l'équation linéarisée change radicalement de forme par rapport à l'équation de Laplace en écoulement subsonique faiblement compressible. Au lieu d'elliptique elle devient hyperbolique ce qui explique les réserves déjà émises (54) sur la possibilité de généralisation. Pour le problème de Dirichlet la valeur du potentiel en un point de son domaine est fixée par celle sur toute sa frontière. En supersonique une perturbation ne peut pas remonter l'écoulement et ses effets ne se ressentent qu'en un sous domaine limité en quelque sorte par les caractéristiques passant par son point d'émission. Par exemple si la tuyère supersonique est parfaite, un raisonnement basé sur ces domaines d'influence montre que théoriquement les parois n'induisent aucun effet sur la maquette si sa corde est inférieure à la hauteur de veine. On se propose de formaliser et

d'étendre ce résultat .

2) Invariants de Riemann

La solution de l'équation hyperbolique s'écrit:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\varphi(x, z) = f(x - \beta z) + g(x + \beta z)$$

Supposons que  $\varphi(0, z)$  et  $\varphi'_x(0, z)$  soient identiquement nuls quelque soit  $z$ ; C'est à dire qu'il n'existe aucune perturbation antérieure à  $x=0$ .

L'utilisation de la transformée classique de Laplace est opérationnelle car les valeurs pour  $x < 0$  n'interviennent pas ce qui simplifie l'élimination des conditions initiales en supersonique par emploi des transformées bilatérales en  $x$  (annexe C).

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial z^2} = \beta^2 p^2 \hat{\varphi} \quad \longrightarrow \quad \hat{\varphi}(p, z) = A(p) e^{\beta z p} + B(p) e^{-\beta z p}$$

L'écoulement illimité se caractérise par la nullité de A. Il en découle :

$$\hat{\varphi}(p, z) = B(p) e^{-\beta z p} \quad \longrightarrow \quad \varphi(x + \beta z, z) = [B(p)]^{-1}$$

$$u_z(x, z) = -\beta u_x(x, z) = [\rho B(p) e^{-\beta z p}]^{-1}$$

La seconde relation remplace l'équation de Poisson entre les composantes de la vitesse en un point. La première est équivalente à  $g=0$ , c'est à dire qu'il n'existe que des ondes progressives.

$$\varphi(x, z) = f(x - \beta z)$$

En parois pleines et adaptées, les composantes verticales sur le profil et à la surface de contrôle sont liées par la relation:

$$\left. \begin{aligned} u_z(x, 0) &= -\beta f'(x) \\ u_z(x, h) &= -\beta f'(x - \beta h) \end{aligned} \right\} \longrightarrow u_z(x + \beta h, h) = u_z(x, 0)$$

La parois adaptée épouse la forme du profil avec un décalage d'abscisse d'une demi hauteur de veine.

En parois poreuses, l'adaptation équivaut à confondre le facteur de porosité et de compressibilité. ( $R = \beta$ )

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, h) + R \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, h) = 0 \quad \longrightarrow \quad -\beta f'(x - \beta h) + R f'(x - \beta h) = 0$$

$$\longleftarrow R = \beta$$

3°) Parois flexibles s'adaptant d'elles-mêmes. (64)

Ce concept théorique étend celui des parois auto-adaptables. Ce sont des parois qui s'adaptent d'elles-mêmes d'après les efforts qui lui sont appliqués (moment engendré par les différences de pression

entre leurs deux faces). En schématisant les parois par des segments articulés munis de ressorts de rappel, Dowell, auteur de cette deuxième théorie, montre qu'un choix approprié de la constante de rigidité du ressort rend ce concept réalisable. Les parois prendraient alors la forme du profil avec un décalage d'une demi hauteur de veine.

Dans ce même article les résultats annoncés en 2) sont également démontrés. Suivant le schéma désormais classique en écoulement confiné, la connaissance de deux conditions aux limites parmi quatre fixe le potentiel et ses dérivées par l'intermédiaire des coefficients  $A(p)$  et  $B(p)$ . L'idée nouvelle est de développer les fonctions trigonométriques en puissance de  $e^{2\beta\rho h}$ . L'application du théorème de retardement propre aux transformées de Laplace fournit le potentiel en tout point sous forme d'une série de valeurs ponctuelles aux frontières. Par exemple:

$$\hat{u}_x(\rho, 0) \operatorname{sh} \beta \rho h = \hat{u}_z(\rho, h) - \hat{u}_z(\rho, 0) \operatorname{ch} \beta \rho h$$

On en déduit:

$$u_x(x, 0) = -\frac{1}{\beta} u_z(x, 0) + \frac{2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -u_z(x - 2n\beta h, 0) + u_z(x - \beta h - 2(n-1)\beta h, \beta h) \right]$$

#### Corollaires.

- Si  $\beta h < 2\beta h$ , les parois n'ont aucun effet.
- La forme des parois adaptées épouse celle du profil avec un décalage en abscisse de  $\beta h$ : en illimité

$$u_x(x, 0) = -\frac{1}{\beta} u_z(x, 0) \longrightarrow u_z(x, 0) = u_z(x + \beta h, h)$$

- L'effet des parois non adaptées devient calculable.

L'extension aux parois poreuses est déjà traitée dans cet article. Néanmoins des réserves s'imposent quant à l'équation de départ. Le champ des vitesses est supposé continu car on utilise ses dérivées partielles ce qui exclut l'existence d'ondes de choc. Il faudrait y adjoindre une équation de conservation au travers de la discontinuité (4). De plus l'écoulement est supposé parfaitement supersonique, permanent et non dissipatif ce qui restreint le domaine de validité.

#### VI) DOUBLE MESURE $\left( u_x(x, \frac{h}{2}) \text{ et } u_z(x, \frac{h}{2}) \right)$

##### 1) Principe

a) - Il existe une apparente contradiction entre l'idée de mesurer deux composantes de vitesses sur une surface contrôle et le fait que deux de ces conditions aux limites sur quatre fixent le potentiel. En effet pour une bande infinie bidimensionnelle, les conditions aux limites d'une fonction harmonique sont liées par les deux identités caractéristiques (p. 44)

$$\hat{u}_{3i}(p, h_i - 2\beta h) = \beta \frac{|p|}{i p} \left\{ \frac{\hat{u}_{xi}(p, h_i)}{\operatorname{sh} 2\beta h |p|} - \frac{\hat{u}_{xi}(p, h_i - 2\beta h)}{\operatorname{th} 2\beta h |p|} \right\}$$

$$\hat{u}_{3i}(p, h_i) = \beta \frac{|p|}{i p} \left\{ \frac{\hat{u}_{xi}(p, h_i)}{\operatorname{th} 2\beta h |p|} - \frac{\hat{u}_{xi}(p, h_i - 2\beta h)}{\operatorname{sh} 2\beta h |p|} \right\}$$

Pourtant la double mesure ( $u_x(x, h_i - 2\beta h)$  et  $u_z(x, h_i - 2\beta h)$ ) analysée en décomposant le potentiel en parties paire et impaire permettait d'adapter immédiatement les parois (p.48). La formalisation rationnelle présentée ci-dessous élimine ce paradoxe sur l'utilité de mesurer quatre conditions aux limites alors que deux suffiraient.

b) - Le potentiel d'interaction est harmonique et l'on connaît ses dérivés aux frontières de la bande infinie.

$$\left| \begin{aligned} \hat{u}_{xi}(p, h_i) &= i p \left[ A(p) e^{i p \beta h_i} + B(p) e^{-i p \beta h_i} \right] = \hat{u}_x(p, h_i) - \hat{u}_{xm}(p, h_i) \\ \hat{u}_{xi}(p, h_i - 2h) &= i p \left[ A(p) e^{i p \beta (h_i - 2h)} + B(p) e^{-i p \beta (h_i - 2h)} \right] = \hat{u}_x(p, h_i - 2h) - \hat{u}_{xm}(p, h_i - 2h) \\ \hat{u}_{zi}(p, h_i) &= |p| \left[ A(p) e^{i p \beta h_i} - B(p) e^{-i p \beta h_i} \right] = \hat{u}_z(p, h_i) - \hat{u}_{zm}(p, h_i) \\ \hat{u}_{zi}(p, h_i - 2h) &= |p| \left[ A(p) e^{i p \beta (h_i - 2h)} - B(p) e^{-i p \beta (h_i - 2h)} \right] = \hat{u}_z(p, h_i - 2h) - \hat{u}_{zm}(p, h_i - 2h) \end{aligned} \right.$$

Ceci ne comprend que quatre équations pour six inconnues:

$$\hat{u}_{xm}(h_i, h_i - 2\beta h), \hat{u}_{zm}(h_i, h_i - 2\beta h), A \text{ et } B$$

Jusqu'à présent la modélisation du profil était fixée. Au lieu de six inconnues il ne s'agissait alors que de deux A et B pour quatre relations. Ceci s'interprète en se servant des deux relations redondantes pour lier les relations aux frontières. Ainsi les mesures de composantes longitudinales de vitesses sur une surface de contrôle jointe à la schématisation du profil fournissaient le potentiel d'interaction.

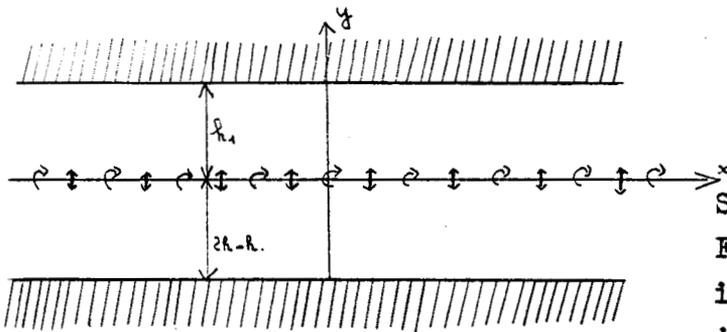
Pour se dispenser de la modélisation, on envisagerait volontiers de se servir des deux identités caractéristiques de l'harmonicité de  $\varphi_m$ . Mais il s'avère que le système linéaire ainsi composé de six relations à six inconnues est singulier. Il apparaît deux relations entre les quatre valeurs aux limites qui sont celles caractéristiques de l'harmonicité de  $\varphi$ . Cette conclusion négative est instructive car elle dévoile la cause de la contradiction.

En fait les deux identités d'harmonicité ne s'appliquent que si le potentiel intéressé est régulier, ce qui n'est pas vérifié à l'emplacement des singularités. De plus l'effet portant nécessite la définition de potentiels multiformes. On éliminait précédemment cette difficulté en divisant le domaine en deux parties où les potentiels pairs et impairs sont réguliers et uniformes.

5) - Dans la solution ici retenue, les conditions locales sur le profil sont ignorées. Conformément à l'hypothèse sous-jacente aux méthodes existantes, le potentiel d'interaction à l'opposé de  $\varphi_m$  et  $\varphi$  est régulier à l'intérieur du domaine. C'est-à-dire que  $\varphi$  et  $\varphi_m$  présentent les mêmes singularités. Admettons que les dérivées partielles de  $\varphi_m$  sont discontinues en  $y=0$  ce qui équivaut à répartir des tourbillons et sources représentatives du profil.

L'hypothèse que toutes les singularités appartiennent à la ligne  $y=0$  est fondamentale. Sans celle-ci ou une semblable, le problème posé reste indéterminé (six inconnues, quatre relations). Et les mesures aux parois ne permettent pas de simultanément, localiser les singularités et définir leur intensité.

2) FORMULATION



$$u_{xm}(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\xi) y d\xi}{(\xi-x)^2 + y^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi)(x-\xi)}{(\xi-x)^2 + y^2} d\xi$$

$$u_{ym}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\xi)(x-\xi)}{(\xi-x)^2 + y^2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi) y}{(\xi-x)^2 + y^2} d\xi$$

Seules les transformées de Fourier de ces expressions interviennent ce qui nous incite à les calculer.

$$\hat{u}_{xm}(p,y) = -\frac{|y|}{2y} e^{-|p|y} \hat{\gamma}(p) + \frac{p}{2i|p|} e^{-|p|y} \hat{q}(p)$$

$$\hat{u}_{ym}(p,y) = \frac{p}{2i|p|} e^{-|p|y} \hat{\gamma}(p) + \frac{|y|}{2y} e^{-|p|y} \hat{q}(p)$$

Si  $y=0$  ces relations sont celles de Poisson. Notons aussi que la Transformée de Fourier de  $u_x(x,0)$  s'identifie à  $\hat{\gamma}(p)/2$ . Le système des quatre équations devient:

$$\hat{u}_{xi}(p,h_1) = ip [A(p) e^{ip h_1} + B(p) e^{-ip h_1}] = \hat{u}_x(p,h_1) + \frac{e^{-ip h_1}}{2} \hat{\gamma}(p) - \frac{p}{2i|p|} e^{-ip h_1} \hat{q}(p)$$

$$\hat{u}_{xi}(p,h_1-2h) = ip [A(p) e^{ip(h_1-2h)} + B(p) e^{-ip(h_1-2h)}] = \hat{u}_x(p,h_1-2h) - \frac{e^{ip(h_1-2h)}}{2} \hat{\gamma}(p) - \frac{p}{2i|p|} e^{ip(h_1-2h)} \hat{q}(p)$$

$$\hat{u}_{yi}(p,h_1) = |p| [A(p) e^{ip h_1} - B(p) e^{-ip h_1}] = \hat{u}_y(p,h_1) - \frac{p}{2i|p|} e^{-ip h_1} \hat{\gamma}(p) - \frac{e^{-ip h_1}}{2} \hat{q}(p)$$

$$\hat{u}_{yi}(p,h_1-2h) = |p| [A(p) e^{ip(h_1-2h)} - B(p) e^{-ip(h_1-2h)}] = \hat{u}_y(p,h_1-2h) - \frac{p}{2i|p|} e^{ip(h_1-2h)} \hat{\gamma}(p) + \frac{e^{ip(h_1-2h)}}{2} \hat{q}(p)$$

Soit après résolution:

$$A(p) = \frac{1}{2 e^{ip h_1}} \left( \frac{\hat{u}_x(p,h_1)}{ip} + \frac{\hat{u}_y(p,h_1)}{|p|} \right)$$

$$B(p) = \frac{1}{2 e^{ip(h_1-2h)}} \left( \frac{\hat{u}_x(p,h_1-2h)}{ip} - \frac{\hat{u}_y(p,h_1-2h)}{|p|} \right)$$

$$\bar{q}(p) = \hat{u}_y(p, h_1) (h_1 | p | h_1 - \hat{u}_y(p, h_1 - 2h) (h_1 | p | 2h - h_1) - \frac{|p|}{i p} \left\{ \hat{u}_z(p, h_1) Sh | p | h_1 + \hat{u}_z(p, h_1 - 2h) Sh | p | 2h - h_1 \right\}$$

$$\bar{r}(p) = \frac{i p}{|p|} \left\{ \hat{u}_y(p, h_1) Sh | p | h_1 + \hat{u}_y(p, h_1 - 2h) Sh | p | 2h - h_1 \right\} - \hat{u}_z(p, h_1) (h_1 | p | h_1 + \hat{u}_z(p, h_1 - 2h) Sh | p | 2h - h_1)$$

Ainsi la double mesure fixe d'une part le potentiel et d'autre part les intensités des singularités représentatives du modèle.

### 3) CORRECTIONS RESIDUELLES

Les dérivées du potentiel d'interaction sont déterminées en remplaçant les valeurs de A et B dans leurs expressions. Le retour à la variable initiale x fournit les quadratures suivantes:

$$u_x(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_z(\xi - x, h_1) \frac{\beta(h_1 - y)}{(\xi - x)^2 + \beta^2(h_1 - y)^2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x(\xi - x, h_1 - 2h) \frac{\beta(2h + y - h_1)}{(\xi - x)^2 + \beta^2(2h + y - h_1)^2} d\xi$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_y(\xi - x, h_1) \frac{x - \xi}{(\xi - x)^2 + \beta^2(h_1 - y)^2} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_y(\xi - x, h_1 - 2h) \frac{x - \xi}{(\xi - x)^2 + \beta^2(2h + y - h_1)^2} d\xi$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_y(\xi - x, h_1) \frac{\beta(h_1 - y)}{(\xi - x)^2 + \beta^2(h_1 - y)^2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_y(\xi - x, h_1 - 2h) \frac{\beta(2h + y - h_1)}{(\xi - x)^2 + \beta^2(2h + y - h_1)^2} d\xi$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x(\xi - x, h_1) \frac{x - \xi}{(\xi - x)^2 + \beta^2(h_1 - y)^2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x(\xi - x, h_1 - 2h) \frac{x - \xi}{(\xi - x)^2 + \beta^2(2h + y - h_1)^2} d\xi$$

En présence de parois en voie d'adaptation il est désormais possible de calculer par cette double mesure les survitesses induites. D'ailleurs on peut vérifier par le truchement du critère d'adaptation qui découle des relations de Poisson, que ces intégrales s'annulent mutuellement en présence de parois adaptées.

De plus cette méthode intégrale généralise la précédente en ce sens que la géométrie réelle de la veine intervient rigoureusement par sa composante transversale. Jusqu'à présent la schématisation du domaine en une bande infinie, par exemple, imposait leur planéité parfaite. Or il apparaît ici un terme complémentaire qui s'annule bien entendu en même temps que les composantes verticales de vitesses. Toutefois la double mesure est moins fiable que le procédé de schématisation joint aux mesures de pressions pariétales. Et il reste à trouver un compromis pour utiliser simultanément la modélisation, et la composante verticale qui engendre une correction complémentaire.

4) ADAPTATION IMMEDIATE

La double mesure met en dualité les corrections résiduelles et les défauts géométriques d'adaptation sans se référer au calcul de l'écoulement virtuel extérieur. La notion d'adaptation immédiate par optimisation du facteur de relaxation  $k$  s'introduit ici tout naturellement sans faire appel à un processus itératif. En effet, pour que les parois soient adaptées, les vitesses mesurées aux parois devraient correspondre à celles induites par les discontinuités représentatives du modèle. C'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \hat{u}_x^{(\infty)}(\rho, \gamma) &= -\frac{1\gamma}{2\gamma} e^{-1\gamma|\rho|} \hat{f}(\rho) + \frac{\rho}{2i|\rho|} e^{-1\gamma|\rho|} \hat{q}(\rho) \\ \hat{u}_y^{(\infty)}(\rho, \gamma) &= \frac{\rho}{2i|\rho|} e^{-1\gamma|\rho|} \hat{f}(\rho) + \frac{\gamma}{21\gamma|} e^{-1\gamma|\rho|} \hat{q}(\rho) \end{aligned}$$

En l'absence de modélisation de la maquette, les inconnues  $\gamma$  et  $q$  sont liées aux conditions aux limites par les relations exprimées précédemment. Par retour à la variable initiale  $x$  on obtient pour  $h_1 = Bk$  :

$$\begin{aligned} u_x^{(\infty)}(x, Bk) &= \frac{u_x(x, Bk)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_y(\xi-x, Bk)}{x-\xi} d\xi - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_x(\xi-x, -Bk) \cdot Bk}{(x-\xi)^2 + 4B^2k^2} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_y(\xi-x, -Bk)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + 4B^2k^2} d\xi \\ u_x^{(\infty)}(x, -Bk) &= \frac{u_x(x, -Bk)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_y(\xi-x, -Bk)}{x-\xi} d\xi - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_x(\xi-x, Bk) \cdot Bk}{(x-\xi)^2 + 4B^2k^2} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_y(\xi-x, Bk)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + 4B^2k^2} d\xi \\ u_y^{(\infty)}(x, Bk) &= \frac{u_y(x, Bk)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_x(\xi-x, Bk)}{x-\xi} d\xi - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_y(\xi-x, -Bk) \cdot Bk}{(x-\xi)^2 + 4B^2k^2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_x(\xi-x, -Bk)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + 4B^2k^2} d\xi \\ u_y^{(\infty)}(x, -Bk) &= \frac{u_y(x, -Bk)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_x(\xi-x, -Bk)}{x-\xi} d\xi - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_y(\xi-x, Bk) \cdot Bk}{(x-\xi)^2 + 4B^2k^2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_x(\xi-x, Bk)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + 4B^2k^2} d\xi \end{aligned}$$

Si le critère d'adaptation est vérifié, les relations précédentes se ramènent aux identités:

$$u_x^{(\infty)}(x, \pm Bk) = u_x(x, \pm Bk) \quad \text{et} \quad u_y^{(\infty)}(x, \pm Bk) = u_y(x, \pm Bk)$$

5) SURADAPTATION TRIDIMENSIONNELLE

Pour l'instant, seul le procédé de décomposition en parties paire et impaire permet la généralisation aux veines à parois verticales pleines. Le schéma de la démonstration précédente est difficilement praticable et il n'a pas abouti pour cette configuration. Devant cette difficulté, bornons nous au cas non portant ce qui ne diminue en rien la généralité. La double mesure procure le potentiel complémentaire sans modélisation:

$$\hat{u}_{xc}(p, n, z) = e^{-\sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\beta^2 \ell^2}} \beta h} \operatorname{ch} \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\beta^2 \ell^2}} \left\{ \hat{u}_x(p, n, \beta h) + \frac{i p \hat{u}_3(p, n, \beta h)}{\sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\beta^2 \ell^2}}} \right\}$$

$$\hat{u}_{zc}(p, n, z) = e^{-\sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\beta^2 \ell^2}} \beta h} \operatorname{sh} \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\beta^2 \ell^2}} \left\{ \frac{\sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\beta^2 \ell^2}}}{i p} \hat{u}_x(p, n, \beta h) + \hat{u}_3(p, n, \beta h) \right\}$$

Le potentiel d'interaction s'obtient par sommation des effets de parois latérales qui nécessite la schématisation de la maquette. Pour des parois horizontales adaptées, les composantes  $u_{xc}$  et  $u_{zc}$  sont nulles, mais l'effet des parois latérales subsiste. Toutefois, il est concevable de suradapter les parois horizontales pour non pas annuler  $u_{xc}$  et  $u_{zc}$ , mais les vitesses d'interaction  $u_{xi}$  et  $u_{zi}$ . Ce nouveau concept n'apparaît bien sûr qu'en tridimensionnel, il se concrétise de façon similaire à l'étude des parois adaptables, par un critère de suradaptation et le calcul immédiat des composantes suradaptées aux parois.

Critère:  $\hat{u}_{xi}(x, n, 0) = \hat{u}_{xc}(x, n, 0) + \hat{u}_{xe}(x, n, 0) = 0$

Soit: 
$$\hat{u}_{xe}(x, n, 0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta h \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\beta^2 \ell^2}}} e^{i p (z-x)} \left\{ \hat{u}_x(\xi, n, \beta h) + \frac{i p}{\sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\beta^2 \ell^2}}} \hat{u}_3(\xi, n, \beta h) \right\} d p d \xi$$

Suradaptation:  $u_{xm}^{(2)}(x, n, \beta h) = u_{xc}^{(2)}(x, n, \beta h) - u_{xe}'(x, n, \beta h)$

Avec: 
$$\hat{u}_{xe}^{(2)}(p, n, \beta h) = i p e^{-\lambda \beta h} B_n(p) = e^{-\lambda \beta h} \left[ \operatorname{sh} \beta h \lambda \hat{u}_x(p, n, \beta h) - \frac{i p}{\lambda} \operatorname{ch} \beta h \lambda \hat{u}_3(p, n, \beta h) \right]$$

$$\hat{u}_{zm}^{(2)}(p, n, \beta h) = -\lambda e^{-\lambda \beta h} B_n(p) = e^{-\lambda \beta h} \left[ -\operatorname{sh} \beta h \lambda \frac{\lambda}{i p} \hat{u}_x(p, n, \beta h) + \operatorname{ch} \beta h \lambda \hat{u}_3(p, n, \beta h) \right]$$

Et: 
$$\lambda = \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\beta^2 \ell^2}}$$

Soit: 
$$\left| \begin{aligned} \hat{u}_{xm}^{(2)}(p, n, \beta h) &= \frac{1}{2} (1 - e^{-2\beta h \lambda}) \hat{u}_x(p, n, \beta h) - \frac{i p}{2\lambda} (1 + e^{-2\beta h \lambda}) \hat{u}_3(p, n, \beta h) - \hat{u}_{xe}'(p, n, \beta h) \\ \hat{u}_{zm}^{(2)}(p, n, \beta h) &= -\frac{1}{2} (1 - e^{-2\beta h \lambda}) \frac{\lambda}{i p} \hat{u}_x(p, n, \beta h) + \frac{1}{2} (1 + e^{-2\beta h \lambda}) \hat{u}_3(p, n, \beta h) - \hat{u}_{ze}'(p, n, \beta h) \end{aligned} \right.$$

Remarquons que  $u_{xe}'$  et  $u_{ze}'$ , calculées par modélisation ne sont pas indépendantes de  $u_{xc}$  et  $u_{zc}$ . Mais l'on ne sait comment formaliser ce lien.

# CHAP. V APPLICATION

## I) MISE EN OEUVRE.

L'application de la méthode intégrale tridimensionnelle a été tentée dans une veine de géométrie voisine du rectangle avec des parois verticales pleines à la soufflerie S3ch, avec les maquettes homothétiques ONERA (M2 et M3). L'exploitation des résultats a fait l'objet d'un rapport détaillé (16) auquel on se reporterait si des renseignements complémentaires étaient souhaités.

### 1) Test de validité.

Plusieurs tests sont réalisables pour valider cette méthode. La schématisation de la maquette par des singularités permet par l'intermédiaire de la méthode des images d'accéder aux valeurs théoriques de  $\hat{u}_{x,c}(x, n, \theta)$ . Les quadratures avec les coefficients de pondération trouvés devraient fournir les mêmes survitesses que les méthodes classiques. Il serait de même envisageable de calculer les vitesses aux parois horizontales provoquées par une maquette répertoriée en présence ou pas de parois et d'appliquer ensuite la méthode exposée. Ces contrôles théoriques qui s'étendent pour le dernier procédé aux écoulements transsoniques par les schémas aux différences propres aux équations aux petites perturbations, n'ont toujours pas été effectués pour cette extension tridimensionnelle.

Seuls des recoupements entre valeurs expérimentales ont été tentés.

- Un même modèle placé dans une même veine devrait quelque soit la configuration de celle-ci, parois pleines ou perforées, posséder les mêmes caractéristiques corrigées. Cette coïncidence probante en bidimensionnelle est cette fois inopérente pour les raisons soulevées par la suite.

- Les résultats corrigés devraient se confondre avec ceux du même modèle au même nombre de Reynolds placé dans une veine de taille suffisante pour être réputés exempts d'effets de parois. Cependant l'intervention de la veine d'essai et des caractéristiques aérodynamiques telles que turbulence, cambrure du champ, décollement etc... la rend imparfaite.

- L'application en parallèle de la méthode ici avancée et de celle classique prétendue exacte en veine guidée permet une confrontation spécifique de la méthode de corrections de parois.

L'interprétation des deux premiers rapprochements reste délicate, et il n'en ressort qu'un jugement global qui remplace l'étude des corrections de parois dans son contexte général. La détermination du Mach d'essai est parfaitement auto-convergente et ceci se confirmera au §. III. Ainsi toute erreur

sur le Mach de référence n'influe aucunement sur le Mach corrigé. Mais il en est autrement pour les mesures d'efforts et d'incidence. Il n'existe plus un grand nombre de mesures dont la moyenne pondérée procure très précisément le Mach d'essai. Cette fois de nombreux paramètres induisent des différences de mesures entre des essais effectués ou non dans la même soufflerie. D'ailleurs la reproductibilité des essais dans une même soufflerie n'est pas toujours parfaite (16). Ceci interfère avec le paramètre éventuel que constituent les effets de parois.

## 2) Validité.

Les différents tests de validité expérimentaux mentionnés présentent des sources d'erreur que l'on classe en trois catégories: hypothèses théoriques, discrétisation et erreurs de mesures.

### a)Hypothèses

Le fluide est supposé parfait, faiblement compressible et l'écoulement permanent, isentropique et uniforme à l'infini amont. Les conditions locales sont ignorées. La veine est de longueur limitée et on ne sait pas comment interpréter les mesures à la sortie du collecteur et à l'entrée du diffuseur. L'imperfection de la planéité réelle des parois intervient dans la méthode par l'intermédiaire des pressions mesurées. Les corrections qu'elle induit sont dans le bon sens; mais seul le principe de la double mesure permettrait de la prendre complètement en compte, ce qui restreint le domaine de validité aux "faibles" défauts de géométrie. Sur le plan théorique il faudrait connaître les coefficients de pression en tout point. Pour les parois perméables, cette notion de discrétisation pose un problème de principe. Comment pourrait-on mesurer les vitesses axiales au niveau d'un trou? En se contentant des mesures de pressions en dehors des perforations, rien ne permet de justifier l'interpolation entre deux points de mesure, d'autant plus que les perforations induisent de brusques variations de vitesses et un gradient de pression important qui pourrait légèrement influencer sur la transmission des pressions au travers de la couche limite.

De plus, la veine ~~est~~ est formée d'un tronc de cône sectionné par des plans parallèles <sup>qui</sup> qui s'assimile mal à un rectangle. Ces différentes sources d'erreurs sont inéluctables. Si elles étaient prépondérantes, on pourrait juger de l'étendue du domaine d'application de la méthode et de ses performances. Or on n'est pas encore parvenu à ce stade.

### b)Discrétisation

C'est le domaine qui nous est imparti. Il comprend le choix des ordonnées

de mesures et des méthodes numériques. L'emplacement optimal des prises de pression (1) est partiellement conditionné par les contraintes de réalisation: supports, hésitation à perforer les pièces fixes et arrondies de la soufflerie et interprétation ambiguë des mesures en ces perforations hypothétiques. Cette limitation des points de mesure à moins de 60 % de l'envergure compromet l'analyse harmonique.

Hormis l'option prise pour la référence d'incidence à l'amont, les choix des méthodes numériques d'exploitation, décrites dans le paragraphe suivant, sont sujets aux remarques préliminaires suivantes.

Les intégrales à calculer sont nécessairement tronquées vue la longueur limitée de la veine. Deux tendances apparaissent à ce propos: soit tronquer les intégrales dès que les coefficients de pressions mesurées indiquent que l'on se situe au niveau du collecteur ou du diffuseur; soit scinder les survitesses complémentaires  $\frac{d\varphi_c}{dx}$  en leur terme relatif à la file infinie  $\frac{d\varphi_c}{dx}(x, y, \pm \beta h)$  et en celui relatif aux mesures  $u_x(\pm \beta h)$ . Le potentiel des singularités sommées  $\varphi_c$  étant défini quelque soit  $x$ , on peut l'intégrer de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Pour le second terme on est obligé de tronquer comme précédemment à la limite de la veine. En bidimensionnel cette seconde méthode donnerait des résultats plus concluants (63). Mais jusqu'à présent seule la première procédure a été exploitée car elle est plus commode sur le plan du calcul.

Les résultats globaux sont aussi liés au critère d'élimination des points entachés d'une erreur démesurée. Afin de s'en affranchir ils sont remplacés par interpolation sur les points voisins en  $x$ .

### c) Erreurs de mesure

seuls les coefficients de pressions aux parois ( $C_p$ ) apparaissent dans les formules précédentes car par le théorème de Bernoulli les survitesses sont liées en première approximation aux  $C_p$  par la relation:

$$2\bar{u} = -C_p$$

Ces valeurs ( $C_p$ ) varient relativement peu sur la surface de contrôle; elles sont sensibles aux moindres phénomènes. L'élément prépondérant actuellement est l'existence de fréquences basses dans la veine de  $53 \text{ cm}$  qui induisent des fluctuations temporelles de ces coefficients du même ordre de grandeur que leur amplitude de variation. Les prises de pression n'étant pas branchées de façon aléatoire, ceci implique une précision désastreuse pour l'analyse harmonique en envergure et fait émettre des réserves sur la fiabilité des corrections d'incidence. En outre, puisque la précision absolue des capteurs est presque indépendante du Mach, l'application de cette méthode en subsonique est problématique vue que l'erreur

relative de mesures devient intolérable lorsque le Mach devient trop faible.

En dépit de ce défaut de fluctuations temporelles auquel on est décidé à remédier dans l'avenir, où un soin particulier sera apporté à la précision de mesures, le procédé d'exploitation exposé ci-dessous fournit des premiers résultats encourageants.

### 3) Calculs préalables

#### a) Sommation des singularités images

Les composantes  $u_{\epsilon_1}$  et  $\epsilon_1$  intervenant dans les corrections de parois ainsi que les vitesses  $u_{\epsilon_2}$  aux parois qui servent à définir les conditions limites  $u_{\epsilon_2}(\frac{0}{2h})$  dépendent éventuellement de  $x/\beta$  et sont proportionnelles au facteur de compressibilité  $\beta$  et à l'intensité de la singularité considérée. En incompressible ( $\beta = 1$ ) toutes les vitesses utiles et induites par une singularité unitaire sont définitivement calculées par l'algorithme décrit dans le chapitre III (§5). En compressible, elles sont regroupées dans un tableau à pas constant de taille minimale. Pour chaque valeur de  $\beta$ , les valeurs requises s'obtiennent par interpolation.

#### b) Coefficients de pondération

La tabulation difficile numériquement des coefficients pondérateurs qui sont des fonctions oscillantes plus ou moins rapidement suivant la valeur du seul paramètre  $x/\beta$ , est évitée en transformant ces intégrales sous forme de séries de terme général décroissant exponentiellement (annexe  $\beta$ ). Cette sommation directe de séries est beaucoup plus rapide pour  $x/\beta$  important, que l'intégration par l'algorithme accéléré de Romberg même généralisé (1). D'ailleurs pour  $x/\beta > 1$  le temps de calcul de ce dernier procédé devient prohibitif. Les deux méthodes sont aussi performantes pour  $x/\beta \approx 2$ . Au lieu de passer d'une méthode à l'autre suivant  $x/\beta$ , il est préférable d'employer l' $\epsilon$ -algorithme de Wynn (65) pour accélérer la convergence du premier procédé; d'autant plus que sous ce programme est déjà appelé pour la sommation des singularités images des parois verticales. Le procédé  $\Delta^2$  d'Aitken accélère la convergence de ces séries car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = K \neq 1$$

On ne peut assurer que l'algorithme utilisé qui en est la généralisation soit plus efficace. Toutefois ces séries qui divergent pour  $x/\beta$  nul, sont calculées jusque  $x/\beta = .01$  par cet algorithme accéléré, en un temps comparable à celui précité. Après la tabulation de taille minimale sur les symétries éventuelles en  $x$  ou  $y$ , les valeurs à l'origine sont interpolées par le schéma à pas constant de Neville - Aitken. Puisque les sommations de

ces séries convergent plus ou moins vite suivant  $x/\beta$ , on relie expérimentalement le nombre de termes sommés à ce paramètre. Pour  $x/\beta$  conséquent l'accélération de la convergence devient inutile et on la supprime. Les valeurs de ces coefficients, pour une maquette centrée et pour les premiers harmoniques, sont reportées (p. 8 à 11)

4) Discrétisation

a) Intégration

La dominante étant la dispersion des mesures, au lieu d'une intégration excellente pour des fonctions connues analytiquement avec la précision désirée, on opte pour celles où la variance de la somme reste modérée. Si les mesures n'étaient entachées que d'erreurs négligeables, la meilleure méthode d'intégration composite serait celle pour laquelle l'erreur sur chaque intervalle de calcul est la même. Le choix d'un pas de mesures non constant répond à ce souci. Mais sur le plan rigoriste de l'optimisation de la méthode, il faudrait un procédé différent pour chaque terme, vu le changement des coefficients de pondération, et pour chaque abscisse de détermination de la correction (( ). En l'absence d'indications plus adaptées, on se contente de comparer deux méthodes d'intégration élémentaires à pas non constant. Celle de Simpson devrait converger au moins comme le plus grand pas à la puissance quatre. Mais ses coefficients de discrétisation non uniformes ( $1/6, 2/3, 1/6$  pour un pas constant) multiplient par deux la variance de la somme. La méthode des rectangles, pour laquelle toutes les mesures ont pratiquement le même poids, permet de minimiser les répercussions des erreurs de mesure.

b) Décomposition de Fourier

Les quatre mesures en envergure de  $u_{xc}(x, y, \frac{2\beta h}{\sigma})$  autorisent une analyse discrète de Fourier en envergure. Soit  $u_{ic}, i=1 \text{ à } 4$  ces mesures:

$$u_{xc}(x, y, \frac{2\beta h}{\sigma}) = \sum_0^{2\beta h} \hat{u}_{xc}(x, n, \frac{2\beta h}{\sigma}) \cos \frac{n\pi y}{2\beta h}$$

$$\hat{u}_{xc}(x, n, \frac{2\beta h}{\sigma}) = \frac{\epsilon}{2\beta h} \int_0^{2\beta h} u_{xc}(x, y, \frac{2\beta h}{\sigma}) \cos \frac{n\pi y}{2\beta h} dy \quad \text{avec} \quad \epsilon = \begin{cases} 2 & \text{pour } n \neq 0 \\ 1 & \text{pour } n = 0 \end{cases}$$

Pour chaque valeur de n, on approxime  $\hat{u}_{xc}(x, n, \frac{2\beta h}{\sigma})$  par:

$$\hat{u}_{xc}(x, n, \frac{2\beta h}{\sigma}) = \sum_{i=1}^n A_{in} u_c(x, y_i, \frac{2\beta h}{\sigma})$$

-Une façon élémentaire de choisir les coefficients  $A_{in}$  est d'imposer que l'approximation de l'intégrale de 0 à  $2\beta h$  soit exacte pour un polynôme trigonométrique d'ordre le plus élevé possible en  $\cos \frac{n\pi y}{2\beta h}$ . Ceci revient à résoudre le système linéaire:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos \frac{\pi y_1}{2\beta h} & \cos \frac{\pi y_2}{2\beta h} & \cos \frac{\pi y_3}{2\beta h} & \cos \frac{\pi y_4}{2\beta h} \\ \cos \frac{2\pi y_1}{2\beta h} & \cos \frac{2\pi y_2}{2\beta h} & \cos \frac{2\pi y_3}{2\beta h} & \cos \frac{2\pi y_4}{2\beta h} \\ \cos \frac{3\pi y_1}{2\beta h} & \cos \frac{3\pi y_2}{2\beta h} & \cos \frac{3\pi y_3}{2\beta h} & \cos \frac{3\pi y_4}{2\beta h} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1n} \\ A_{20} & & & \\ A_{30} & & & \\ A_{40} & & & A_{4n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Malheureusement, cette méthode donne des résultats désastreux vu les erreurs de mesure. En effet, supposons que l'erreur de mesure  $\epsilon$  soit en valeur absolue la même en tout point et que son signe soit celui du coefficient correspondant. Pour les quatre ordonnées retenues en envergure on a :

$$\hat{u}'(0) = \hat{u}(0) + \epsilon \sum_{i=1}^4 |A_{i0}| = \hat{u}(0) + 18,8 \epsilon$$

$$\hat{u}'(1) = \hat{u}(1) + \epsilon \sum_{i=1}^4 |A_{i1}| = \hat{u}(1) + 34,4 \epsilon$$

La méthode des coefficients indéterminés pour ces ordonnées en  $y$  est numériquement assez instable car les erreurs sont fortement amplifiées en valeur absolue. On lui préfère la méthode mixte suivante.

Au lieu d'imposer que l'approximation soit exacte pour un polynôme trigonométrique de degré le plus élevé possible, on se limite à un polynôme de degré moindre, et le degré de liberté, ainsi laissé dans le choix des coefficients, sert à minimiser  $\sum_{i=0}^k |A_{in}|$ . L'exactitude de la fonctionnelle approximante pour des polynômes trigonométriques de certains degrés se traduit par des relations linéaires entre les coefficients de cette approximante. Le problème général avec un nombre  $k$  de prises de pressions en envergure s'exprime :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Min} \sum_{i=1}^k |A_{in}| \\ \text{avec} \sum_{j=1}^k K_{ij}(n) A_{jn} = 0 \quad j \in (0, m) \quad \forall n \text{ et } m \leq k-1 \end{array} \right.$$

En posant  $A_i = A_i' - A_i''$  avec  $A_i'$  et  $A_i''$  non négatifs, on se ramène à un programme linéaire (67). Dans notre cas où  $k=4$  on a choisi  $m=2$ . En substituant les coefficients dans la fonction critère, le problème revient à minimiser une fonction convexe d'une variable linéaire par morceaux. Puisque l'on sait que toute solution optimale d'un tel problème appartient à une facette minimale le minimum à tout  $n$  correspond à un point anguleux, (intersection de deux segments de droite). Tout calcul fait, on obtient cette fois :

$$\hat{u}'(0) = \hat{u}(0) + 2,15 \epsilon$$

$$\hat{u}'(1) = \hat{u}(1) + 3,74 \epsilon$$

Notons à titre indicatif que si l'on pose  $m=0$ , c'est à dire que l'on impose aux coefficients  $A_{i0}$  d'être seulement exacts pour  $u_c = c \epsilon$ ,  $\text{Min} \sum_{i=1}^4 |A_{i0}| = 1$  et de plus  $A_{10} = A_{20} = A_{30} = A_{40} = .25$

L'inconvénient majeur de cette méthode provient de l'appartenance de la solution optimale à une facette minimale. En particulier pour l'exemple traité, ( $m=2, k=4$ ) les coefficients affectés au second point de mesure en envergure sont toujours nuls. C'est à dire que cette mesure, théoriquement peu significative il faut en convenir, n'intervient pas dans le calcul. Ce résultat est inacceptable pour des mesures entachées d'une trop grande erreur. Inversement, si l'on souhaite diminuer le nombre de points de mesure, on peut éliminer cette ligne.

Pour achever cette étude de la décomposition de Fourier, signalons un procédé assez séduisant emprunté au chapitre des splines (44,55). Les valeurs en envergure sont approximées par un polynôme trigonométrique d'un

faible degré et on minimise l'écart entre les valeurs mesurées et celles de ce polynôme que l'on désire le plus régulier possible. Si  $f$  représente les mesures et  $\tilde{g}$  le polynôme approximant tel que:

$$\int_{-a/2}^{a/2} (\tilde{g}(y) - f(y))^2 dy + \lambda^2 \int_{-a/2}^{a/2} (\tilde{g}'(y))^2 dy = \min_{g \in P_{n+1}} \left\{ \int_{-a/2}^{a/2} (g(y) - f(y))^2 dy + \lambda^2 \int_{-a/2}^{a/2} (g'(y))^2 dy \right\}$$

L'analogue discret qui est directement exploitable revient à minimiser  $g$  sur un réseau fini;

$$\min_{g_q} \left\{ h_q (g_q - f_q)^2 + \lambda^2 h_q \left[ \left( \frac{g_{q+1} - g_q}{h_{q+1}} \right)^2 + \left( \frac{g_q - g_{q-1}}{h_q} \right)^2 \right] \right\}$$

La fonction  $f$  définie sur un ensemble borné, continu ou discret, se développe en série ou en série discrète de Fourier, ainsi que la fonction lissante et régulière  $g$ . La minimisation posée revient par cette analyse sur les harmoniques à diviser le coefficient de rang  $j$  de  $f$  par le facteur  $1 + (\lambda^2 h^2 j)^2$  (66). Les harmoniques à haute fréquence sont considérablement atténués ce qui constitue un filtre numérique. Pour le choix de  $\lambda$  on peut s'inspirer de la fréquence de coupure d'une cascade de tels filtres; si on introduit dans la fonctionnelle à minimiser  $\lambda^{2n}$  et la dérivée  $n$ -ième au lieu de  $\lambda^2$  et la dérivée première, les harmoniques de rang inférieur à  $\lambda^{2n} h$  restent inchangés tandis que les autres s'annulent lorsque  $n$  tend vers l'infini.

L'application des deux premiers schémas de décomposition de Fourier induisent des variations de corrections d'incidence en envergure supérieure à leur valeur moyenne. Ce phénomène non significatif provient de la dispersion des mesures et de sa propagation dans ces analyses de Fourier. L'intérêt du lissage proposé survient de la liberté dans le choix de  $\lambda$  qui permet d'amortir la variation en envergure jusqu'à ce qu'elle se juxtapose aux prévisions théoriques. En effet, l'oscillation relative des vitesses verticales autour de leur valeur moyenne est prévisible par une méthode du type image. Mais ce procédé n'est pas encore opérationnel.

### c) Lissage des données

Dans le même ordre d'idée, l'ensemble des mesures aux parois est susceptible d'être lissé comme il est fait au Calspan (41). Plusieurs arguments discréditent ce procédé bien que seul le surcroît de travail justifie son abandon:

— Les mesures ne sont pas entachées d'erreurs aléatoires; elles subissent des décalages temporels par bloc de douze valeurs dus aux fréquences basses dans la soufflerie.

— L'intégration exécute déjà un certain lissage qui peut suffire pour la précision actuellement accessible.

— En dehors des splines d'ajustement ou des polynômes d'interpolation, le lissage exige un modèle mathématique qui interfère sur le résultat.

Une méthode du type moindre carrés a été entreprise et abandonnée, car elle se rattache à la méthode numérique et elle serait trop volumineuse.

se. Il était à cet effet prévu une méthode du type Backward. Dans une première étape, similaire à celle déjà mentionnée (41), les intensités des singularités réparties sur le contour image de la surface de contrôle sont ajustées pour respecter au mieux les conditions aux limites mesurées. Dans le cadre de ce calcul apparaissent aussi les corrélations entre les mesures et chaque singularité. Dans une seconde étape, les singularités non significatives (corrélation trop faible) et les mesures erronées (à plus de  $n$  écart-type de l'approximante) sont supprimées sans nécessiter la réinversion d'une matrice. Ce lissage de valeurs frontières s'extrapole à l'infini ce qui supprime l'inconvénient de la longueur limitée de veine; de plus, il permet d'optimiser la méthode numérique en modifiant les singularités images, de sorte qu'un nombre minimal d'entre elles possède un coefficient global de pondération maximum. Ces valeurs lissées sont ensuite exploitées par la méthode intégrale. Cependant la somme directe des vitesses induites par les singularités ajustées fournit les mêmes valeurs que la méthode précédente. En dehors de son intérêt propre à la méthode numérique, cette étude se restreint ainsi à une vérification théorique. Et ceci justifie un peu mieux son abandon.

## II) RESULTATS

### I) Coefficients de pression mesurés

Sur le relevé de coefficient de pression apparaît des discontinuités repérées par des traits verticaux (p. 42). Celles-ci proviennent de l'existence de fluctuations de pression à basse fréquence ( $\sim 10^3$ ). Car la pression repère étant moyennée sur un temps plus long, le niveau du coefficient de pression sur douze prises consécutives et captées quasi-instantanément dépend essentiellement de l'instant auquel s'effectue cette mesure. Ces décalages rendent délicate l'application de la méthode.

A la limite, l'intégration qui fournit le Mach, revient à moyennner la dispersion temporelle sur un ensemble de blocs de douze valeurs. Cependant l'importance du nombre de mesures maintient la précision du Mach à un niveau acceptable.

Les véritables difficultés surgissent pour l'analyse harmonique et la détermination de l'incidence. Un décalage temporel différent entre les parois haute et basse se traduit par une forte correction d'incidence. En outre, les coefficients de pondération référencés à l'amont accentuent l'influence des premières mesures (en  $x$ ) où le pas de discrétisation est maximum, et où seulement deux mesures en envergure sont effectuées. Les décalages différents en envergure joints à la faible stabilité numérique rendent l'analyse en

envergure problématique. Et l'étude entreprise est amputée de son élément propre aux écoulements tridimensionnels.

## 2) Géométrie de la veine

En dépit de cet élément primordial, une analyse simultanée sur plusieurs essais montre que les coefficients de pression dépendent essentiellement de la géométrie de la veine et bien sûr de la signature de la maquette. Les moyennes des coefficients de pression à la paroi basse sur trois essais veine vide et autant en présence de la maquette M2 indiquent cette dépendance vis à vis de la géométrie. Non seulement les gradients globaux de vitesses sont très voisins, mais de plus les variations point par point sont dans le même sens (p.13).

## 3) Schématisation maquette

La différence entre les  $C_p$  mesurés avec et sans maquette est redevable à la présence de celle-ci. Afin d'éprouver sa schématisation, cette différence est comparée à celle provenant de la méthode des images en veine guidée (p.14). Le sillage n'est pas introduit ce qui explique la différence de niveau de  $C_p$  à la sortie de la veine.

Pour l'effet portant, malgré une bonne concordance de niveau quelque soit l'envergure, les différences de  $C_p$  entre les parois haute et basse sont légèrement trop fortes à l'amont tandis qu'à l'aval la tendance s'inverse.

La schématisation de l'effet de volume par un simple doublet est peu satisfaisant. Seul l'effet des parois verticales, effectivement calculé, est ici représenté. L'intervention des parois horizontales le multiplie théoriquement par un facteur proche de 2,5. A l'emplacement de la maquette, les survitesses sont trop fortes tandis qu'à l'aval et à l'amont apparaît une décélération peu significative. Il semblerait souhaitable d'affiner cette représentation de l'effet de volume et de définir au mieux l'intensité de ces singularités.

## 4) Auto-convergence du Mach

Le Mach pris pour référence est celui au centre de la veine. Cette valeur s'obtient itérativement (p.15) de sorte que la correction complémentaire  $u_{x_1}(0,0,0)$  calculée à partir de ce Mach repère soit nulle. D'après les prévisions théoriques, la convergence de ce processus itératif devrait être rapide et même immédiate en incompressible. En fait, cinq itérations assurent à  $M=0.70$  une précision de l'ordre de  $10^{-4}$  sur le Mach (p.15). Afin de tester cette convergence, on a introduit des Mach de référence initiaux variant de 0.8 à 0.6. Dans tous les cas, on retrouve le même Mach à  $10^{-4}$  près en cinq itérations. On en conclut que les soins apportés à la définition précise de la prise de pression de référence sont désuets, car quelque soit ce choix de la valeur initiale, on retrouve toujours la même valeur. La méthode est réelle-

ment auto-convergente.

L'analyse théorique (p. 10) postérieure à cette exploitation montre qu'en écoulement compressible, il est préférable de corriger le Mach à chaque itération, non pas à partir de  $M$  mais de  $(1 - \frac{M^2}{2})u$ . Anticipant sur ce résultat, il était déjà prévu un facteur de sur-relaxation ( $\sim 1.5$  pour  $M=4$ ) qui décroît exponentiellement avec le numéro d'itération. Ces coefficients accélèrent la convergence et permettent de se limiter à deux itérations de moins (p. 16) .

### 5) Autres résultats

L'interprétation graphique des polaires ( $C_{z1} = f(M)$ ) fournit la courbe  $C_a(M)$  à une portance donnée (p. 14) . Les résultats sont proches de ceux obtenus en veine réputée exempte de corrections d'après leur grande taille. De même, les corrections en  $C_z(\alpha)$  sont encourageantes (p. 18) .

La différence essentielle entre la méthode classique et celle-ci provient aussi bien pour le Mach que l'incidence de la correction veine vide (p. 15) . Pour le Mach ceci est conforme à l'intervention de la géométrie de la veine. Cependant, la détermination de la référence d'incidence reste le point crucial. Sinon, les deux méthodes se recourent bien.

## CONCLUSION

Au lieu d'une détermination théorique fondée sur des conditions aux limites peu réalistes et sur l'estimation du coefficient de porosité par de multiples essais préliminaires(69), les méthodes intégrales ici présentées se fondent sur des valeurs mesurées. Suivant le procédé adopté, les mesures de pressions pariétales suscitent l'adaptation immédiate ou la détermination des perturbations provoquées par la présence des parois.

Aux notions de calculs itératifs d'écoulements virtuels extérieurs et de combinaison entre les composantes de vitesses des champs internes et externes, succède désormais l'optimisation du facteur de relaxation pour adapter immédiatement les parois. La réalisation de lames flexibles déformées de façon optimale semble être le mode opératoire le plus approprié pour assurer l'adaptation. En outre pour une veine en voie d'adaptation, la connaissance des effets résiduels d'après les mêmes mesures permet de juger de l'opportunité de les réduire en améliorant la forme des parois. En veine rectangulaire la simple adaptation des parois horizontales diminue notablement le blocage de volume et de sillage ainsi que les gradients longitudinaux. Le perfectionnement immédiat consiste à suradapter les parois déformables pour compenser l'effet des autres et plus spécialement pour annuler la courbure du champ.

Cet ensemble de résultats et indications s'intègre sous le titre général de méthodes intégrales. Le principe de l'adaptation immédiate et de corrections résiduelles basées sur les mesures pariétales s'introduit naturellement par la double mesure sur une surface de contrôle. Elle procure directement le facteur de relaxation optimum. Hormis ses extensions cette étude théorique fournit les vitesses induites d'après soit la modélisation de la maquette et les pressions pariétales, soit la connaissance de deux composantes de vitesses. D'ailleurs les intensités des singularités représentatives du modèle se déduisent des conditions frontalières sur la surface de contrôle. La précision des mesures loin du modèle fait préconiser le premier schéma bien que la géométrie de la veine intervient rigoureusement dans le second par ses pentes locales. L'approfondissement de la méthode bidimensionnelle permet d'élucider les problèmes occasionnés par la référence d'incidence et la longueur limitée de la veine. Les précisions ou les modifications adéquates de formulation sur ces sujets mériteraient une exploration systématique pour accéder à de meilleurs résultats. Malgré ces imperfections de principe, la méthode d'origine est cohérente et rigoureuse sous les hypothèses classiques de fluide parfait et faiblement compressible, d'écoulement permanent et isentropique. En particulier l'introduction d'un Mach initial nettement faussé n'empêche pas de toujours restituer le même Mach pris comme repère. En écoulement compressible un coefficient théorique de sur-relaxation accélère l'auto-con-

vergence du Mach. Ceci rend suranné le soin apporté au choix de la pression de référence. D'ailleurs le fait de moyenner de façon pondérée de nombreuses mesures pour définir ce Mach laissait présager une telle conclusion. Les généralisations tridimensionnelles présentent qualitativement les mêmes résultats. Le cas de la veine rectangulaire à parois verticales pleines se ramène à une série de problèmes bidimensionnels par décomposition en harmoniques. Pour une veine circulaire ou de forme cylindrique quelconque il serait toutefois indispensable d'effectuer les mesures sur toutes les parois. L'extension esquissée pour les écoulements faiblement compressibles et basée sur l'équation aux petites perturbations fait apparaître le terme "constant" qui est le résultat antérieur et le premier terme de la solution développée en puissance de  $M^2$ . En écoulement supersonique les caractéristiques concernant les effets de parois sont nettement plus structurées. Tant que le modèle reste assez petit, ils sont nuls. Sinon la forme des parois pleines et adaptées s'identifie à celle du profil décalé d'une demi-hauteur de veine en  $x$ , tandis que celles poreuses devraient posséder un coefficient de porosité égal à celui de compressibilité. Cependant les corrections en supersonique demeurent hypothétiques car en supplément des hypothèses classiques, le champ de vitesses est supposé continu ce qui exclut les ondes de choc par exemple.

L'application dans une veine de géométrie voisine du rectangle à parois verticales pleines dévoile d'autres avantages et les principaux inconvénients de cette méthode. La petitesse des vitesses résiduelles aux parois reporte actuellement les difficultés sur l'expérimentateur. Le filtrage des mesures et l'élimination éventuelle de basses fréquences devraient fournir des résultats meilleurs que ceux déjà comparables aux méthodes classiques. De plus la méthode intègre en partie la géométrie réelle de la veine, siège d'effets visqueux. Et par l'analyse des mesures, la schématisation de la maquette est éprouvée.

En dépit des résultats ici établis de nombreuses questions restent ouvertes. Il serait intéressant de se consacrer à l'optimisation de la méthode numérique classique ou basée sur les mesures pariétales en s'inspirant éventuellement des idées émises. Les remarques avancées pour la résolution analytique méritent d'être poursuivies en particulier lorsque la veine est rectangulaire et en généralisant les conditions d'application par l'emploi systématique des transformées de Laplace. Hormis les problèmes de mise en oeuvre, la prise en compte de la longueur limitée de la veine en bi et tridimensionnel demande un développement des calculs proposés. Les problèmes de la référence d'incidence et de corrections veine vide sont toujours primordiaux bien que théoriquement résolus. Le schéma de la démonstration relative à la double mesure n'a pas encore abouti en tridimensionnel. Pour

805  
1111

l'étude des écoulements instationnaires et en fluide compressible, il serait souhaitable d'apporter quelques arguments complémentaires quant à leur validité et d'aborder les questions posées par la mise en oeuvre numérique.

Aussi bien pour les méthodes classiques que les autres cet exposé se situe en général à un niveau théorique tandis que leurs performances dépendent surtout de leur mise en oeuvre. Toutefois cette étude se limite à la détermination des vitesses induites par les parois, sous l'hypothèse permanente de respect exclusif des conditions aux parois. Or les progrès accessibles en introduisant les conditions locales, par exemple avec la méthode des singularités, pourraient être plus conséquents que ceux qui compléteraient la théorie ici exposée. Quant aux interprétations de ces perturbations existantes lorsque les parois ne sont pas adaptées, elle reste le point crucial d'un vaste problème peu formalisé et mal posé.

REFERENCES\*

- I-PAQUET J.B.  
Formalisation des effets de parois  
Rapport intérieur non publié -Avril 79-
- 2-JOPPA R.G.  
A method of calculating wind tunnel interference factors for wind tunnels of arbitrary cross-section NASA CR-345 July-1967-
- 3-BOROVIK Y.,WASSERSTOM E.,ROM J.  
Wind tunnel boundary interference corrections Part. I Theoretical calculations LR 0124 Aeronautical research center Technion-Israel institute of technology Sept. 61972-
- 4-GODOUNOV S.,RIABENKI V.  
Schémas aux différences (Introduction à la théorie)  
Ed. Mir 1973 trad. Fr.-1977-
- 5-SAMARSKI A.,ANDREEV V.  
Méthodes aux différences pour équations elliptiques  
Ed. Mir 1976 trad. Fr.-1978-
- 6-PINDZOLA M.,LO C.F.  
Boundary interference at subsonic speeds in wind tunnels with ventilated walls AEDC TR 6947 -May 1969-
- 7-VAUCHERET X.  
Coefficients de corrections de parois;veines courant plan,circulaires et rectangulaires (parois pleines,ouvertes et perforées)  
N.T. I-4/0229 AYG GSMA ONERA Dec. 74 à Janv. 1976
- 8-SEARS W.R.  
Self correcting wind tunnels  
16th Lanchester Memorial lecture Royal aeronautical society May-1973-
- 9-FERRI A.,BARONTI P.  
A method for transonic wind-tunnel corrections  
AIAA journal Vol.II n°1 janv.-1973-
- 10-CHEVALLIER J. P.  
Soufflerie transsonique à parois auto-adaptables  
AGARD CPI74 ou ONERA EP n°1975-II9- 61975-
- 11-SEARS W.R.,VIDAL R.J.,ERICKSON J.C.,RITTER A.  
Interference-free wind tunnel flows by adaptative-wall technology  
10th Congress of the international council of aeronautical sciences  
Oct.-1976-
- 12-LO C.F.,KRAFT E.M.  
Convergence of the adaptative-wall wind tunnel  
AIAA journal Vol.I6 n°1 janv.-1978-
- 13-LO C. F.,  
Tunnel interference assessment by boundary measurements  
AIAA Vol.I6 n°4 April-1978-
- 14-CAPELLIER C.,CHEVALLIER J.P.,BOUNIOU F.  
Nouvelle méthode de correction des effets de parois en courant plan  
14ème colloque d'aérodynamique appliquée Toulouse n°21 Nov.-1977-

\* Pour une bibliographie complète se reporter à (1)

- I5-DOWELL E. H.  
A compliant wall, supersonic wind tunnel  
17th Aerospace sciences meeting 79.011 New-Orleans Janv. -1979-
- I6-PAQUET J. B.  
Effets de parois calculés d'après les pressions pariétales (maquettes étalons tridimensionnelles M2 et M3 à la soufflerie S3CH)  
N.T. onera IC/3075 AN -Avril 1979-
- I7-VAUCHERET X.  
Réduction des corrections de parois en veine transsoniques classiques à l'aide d'études paramétriques sur ordinateur ONERA T.P.1976-60-  
ou AGARD 210-10 June 1976
- I8-MOKRY M.  
High-order theory of two-dimensional subsonic wall interference in a perforated wall wind tunnel NAF AR LR553 Oct.-1971-
- I9-BARBIEUX J.  
Contribution à l'étude de l'effet de parois en écoulement plan incompressible publications scientifiques et techniques du ministère de l'air n°304 thèse -1955-
- 20-BALDWIN B.S., TURNER J.B., KNETCHEL E. D.  
Wall interference in wind tunnel with slotted and porous boundaries at subsonic speeds NACA TN 3176 May-1954-
- 21-GOODMAN T. R.  
The porous wall wind tunnel -part. II Interference effect on a cylindrical body in a two-dimensional tunnel at subsonic speed  
Cornwell Aero. Lab. Report n°AD 594-A3 -1950-
- 22-WRIGHT R. H.  
The effectiveness of the transonic wind tunnel as a device for minimizing tunnel boundary interferences for model tests at transonic speeds  
AGARD 294 Mars -1959-
- 23-PAQUET J. B.  
Effets de parois latérales planes pour un modèle tridimensionnel  
Note technique ONERA B/3075 A -1978-
- 24-HERRIOT J. C.  
Blockage corrections for three-dimensional flow closed-throat wind tunnels, with consideration of the effect of compressibility  
NACA Report 995 -1950-
- 25-SPIEGEL M. R.  
Variables complexes Séries Schaum  
Mc. Graw-Hill -1973-
- 26-BASS J.  
Cours de mathématiques Masson et Cie. -1968-
- 27-LOCK C. N. H., BEAVAN J. A.  
L'influence des parois déformables de la buse sur les interactions en compressibilité de l'air dans la soufflerie à grande vitesse de NPL  
R.M. 2005 Sept. -1944-
- 28-VINCENNI W. G., GRAHAM D. J.  
The effect of wall interference upon the aerodynamic characteristics of an airfoil spanning a closed-throat circular wind tunnel  
NACA Report 849 -1946-

- 29-SCHNEIDER S.  
Corrections dues à la présence des parois dans une soufflerie circulaire munie d'un plancher -Note technique ONERA 85/1464 GN -1969-
- 30-GLAUERT H.  
The interference of a wind-tunnel on a symmetrical body  
R&M n°1544 British aeronautical research council -1933-
- 31-BINDEL S.  
Mécanique des fluides incompressibles  
cours professé à l'ENSTA (génie maritime) -1969-
- 32-ALLEN J., VINCENTI W.G.  
Interference in a two dimensional flow wind tunnel with a consideration of the effect of compressibility NACA Report n°782 -1944-
- 33-MALAVARD L.  
Etude de quelques problèmes techniques relevant de la théorie des ailes Application à leur solution de la méthode rhéoelectrique  
PST 153 Ministère de l'air -1938-
- 34-RUSHTON K.R.  
Studies of slotted wall interference using an electrical analogue  
ARC R&M 3452 -1965-
- 35-GARNER H.C., ROGERS E.W.E., ACUM W.E.A., MASKELL E.C.  
Subsonic wind tunnel wall corrections  
Agardograph 109 Oct. -1966-
- 36-MASKELL E.C.  
A theory of the blockage effects on bluff bodies and stalled wings in a closed wing tunnel R&M 3400 ARC -1965-
- 37-VAYSSAIRE J.C.  
Correction de blocage dans les essais en soufflerie -Effets de décollements Symposium AGARD/FDP Lisbonne -1972-
- 38-CHEVALLIER J.P.  
Calcul des corrections de parois en soufflerie transsonique  
9ème colloque d'aérodynamique appliquée St. Cyr Nov. -1972-
- 39-MOKRY M., GALDWAY R.D.  
Analysis of wall interference effects on ONERA calibration models in the NAE 5ft.\*5ft. wind tunnel NAE Ottawa aeronautical report  
LR-594-NCR n°15953 March -1977-
- 40-LUU T.S.  
Sur la technique des singularités en hydro et aérodynamique  
Maître de recherche Centre de calcul analogique CNRS Orsay -1977-
- 41-STREATHER R.A.  
Ventilated wall interference on a large wind-tunnel model in oscillating motion Thesis submitted for the degree of doctor of philosophy  
University of Southampton May. -1969-
- 42-KELLER J.D., WRIGHT R.H.  
A numerical method of calculating the boundary induced interference in slotted or perforated wind tunnels of rectangular cross section  
NASA TR-R-379 Nov. -1971-
- 43-ACUM W.E.A.  
Note on evaluation of solid blockage corrections for rectangular wind tunnels with slotted walls ARC R&M 3297 -1961-

- 44-HOLDER D.R.  
Upwash interference on wings of finite span in a rectangular wind tunnel with closed side walls and porous slotted floor and roof  
R&M n°3395 -1965-
- 45-WRIGHT R.H., SCHILLING B.L.  
Approximation of spanwise distribution of wind tunnel boundary interference on a lift of wings in rectangular perforated wall test section NASA TR-R-285- May -1968-
- 46-LO C.F., OLIVER R.H.  
Boundary interference in a rectangular wind tunnel with perforated walls TR-70-67- Arnold engineering development center Feb.-1973-
- 47-KRAFT E.M., LO C.F.  
A general solution for lift interference in a rectangular ventilated wind tunnels AIAA paper73-209- -1973-
- 48-ARSAC J.  
Transformée de Fourier et théorie des distributions Dunod -1961-
- 49-LAVRENTIEV M., CHABAT B.  
Méthode de la théorie des fonctions d'une variable complexe  
Ed. Mir -1972-
- 50-LEGRAS J.  
Technique de résolution des équations aux dérivées partielles  
Dunod -1956-
- 51-ISAACSON E., KELLER H.B.  
Analysis of numerical methods John Wiley and son New-York -1966-
- 52-PRESTON J.H., SWEETING N.E., COX D.K.  
The experimental determination of the two-dimensional interference on a large chord-piercing airfoil in a closed tunnel fitted with flexible roof and floor ARC R&M 2007 -1944-
- 53-SEARS W.R.  
A note on the adaptive wall wind tunnels  
Journal of applied mathematics and physics -1977-
- 54-LEGENBRE R.  
Souffleries transsoniques auto-correctrices extrait de "Omaggio a Carlo Ferri" ONERA TP-1973-33- ou librairie universitaire Levrotto et Bella Turin p.487-498 -1974-
- 55-LAURENT P.J.  
Approximation et optimisation Hermann-1972-
- 56-BREZINSKI C.  
Analyse numérique discrète -cours de maîtrise du laboratoire de calcul de Lille -1975-
- 57-GOETHERT B.H.  
Technical evaluation report -Agard specialist meeting on wind tunnel design and testing techniques London AGARD AR 97 Aout-1976-
- 58-CHAUVEAU C., CHEVALLIER J.P.  
Conditions aux limites apportées par une paroi perforée  
Rapport technique ONERA n°3/3075/AN Avril-1977-

- 59-BERNDT S.B.; SORENSEN H.  
Flow properties of slotted walls for transonic test sections  
Agard CP 174 Oct.-1975-
- 60-SMITH J.  
Preliminary evaluation of a method for determining two-dimensional  
wall interference Progress Rep. memo AC 77008 NLR, mars -1977-
- 61-KEMP W.B.  
Toward the correctable interference transonic wind tunnel  
9th. AIAA Aerodynamic testing conference juin -1976-
- 62--SMITH J.  
A working paper on a comparison between ONERA and NLR methods for  
determining 2-D wall interference corrections NLR Memoranda  
AC-78-048- Nov.-1978-
- 63-VAUCHERET X.  
Corrections de parois en soufflerie transsonique -groupe franco-sovié  
-tique Chatillon Mai-1978-
- 64-DOWELL E.H.  
A compliant wall, supersonic wind tunnel  
17th. Aerospace sciences meeting 79-0110 New-Orleans Janv. -1979-
- 65-BREZINSKI C.  
Accélération de la convergence en analyse numérique  
n°584 Springer-verlag Berlin Heidelberg -ou cours de DEA -1977-
- 66-BAKHAVALOV N.  
Méthodes numériques  
ed. Mir 1973 TRAD.FR. -1976-
- 67-HUARD P.  
Cours de DEA OU DE maitrise  
Laboratoire de calcul de Lille -1977-
- 68-PEDIAEVSKI C., VOITKOUNSKI I., FADDEEV. Y.  
Mécanique des fluides Ed. Mir -1974-
- 69-VAYSSAIRE J.C.  
Survey of methods for correcting wall constraints in transonic wind  
tunnel Laws paper n°85B AGARD Report 601 Sept.-1972-
- 70-DITKINE V., PROUDNIKOV A.  
Transformations intégrales et calcul opérationnel  
Ed. Mir 1974 trad. fr. -1978-

# ANNEXE A <sup>-106-</sup> PERTURBATIONS DUES AUX SINGULARITES

## I) DOUBLET ET SOURCE

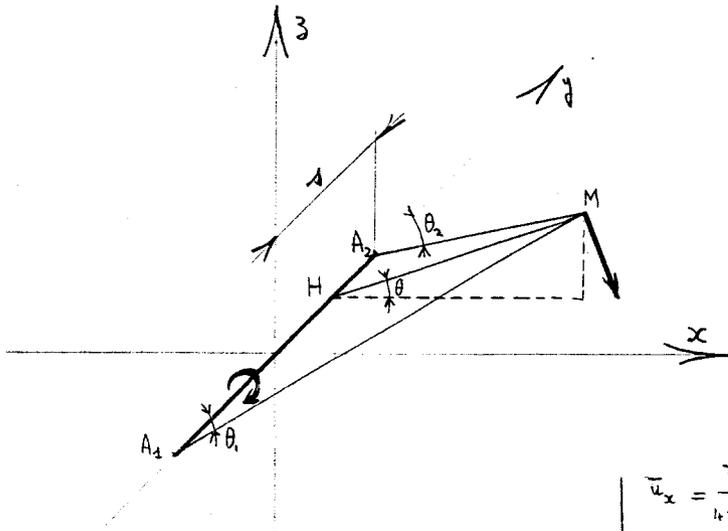
Par dérivation de leur potentiel tridimensionnel connu, on a en variables réduites par rapport à la demi-largeur de veine b:

Source	Doublet
$\bar{u}_{xE'} = \frac{C_0 \bar{y}^2}{2\pi\lambda\beta^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\bar{x}}{[\bar{x}^2 + (\bar{y}-2n)^2 + \bar{z}^2]^{3/2}}$ $\bar{u}_{yE'} = \frac{C_0 \bar{y}^2}{2\pi\lambda\beta^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\bar{y}-2n}{[\bar{x}^2 + (\bar{y}-2n)^2 + \bar{z}^2]^{3/2}}$ $\bar{u}_{zE'} = \frac{C_0 \bar{y}^2}{2\pi\lambda\beta^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\bar{z}}{[\bar{x}^2 + (\bar{y}-2n)^2 + \bar{z}^2]^{3/2}}$ $\frac{d\bar{u}_{xE'}}{d\bar{x}} = \frac{4\pi\beta^3\beta^3}{Vol} \times \frac{C_0 \bar{y}^2}{2\pi\lambda\beta^2} \bar{u}_{xE'}^{doublet}$	$\bar{u}_{xE'} = -\frac{Vol}{4\pi\beta^3\beta^3} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(\bar{y}-2n)^2 + \bar{z}^2 - 2\bar{x}^2}{[\bar{x}^2 + (\bar{y}-2n)^2 + \bar{z}^2]^{3/2}}$ $\bar{u}_{yE'} = -\frac{Vol}{4\pi\beta^3\beta^3} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{3\bar{x}(\bar{y}-2n)}{[\bar{x}^2 + (\bar{y}-2n)^2 + \bar{z}^2]^{3/2}}$ $\bar{u}_{zE'} = -\frac{Vol}{4\pi\beta^3\beta^3} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{3\bar{x}\bar{z}}{[\bar{x}^2 + (\bar{y}-2n)^2 + \bar{z}^2]^{3/2}}$ $\frac{d\bar{u}_{xE'}}{d\bar{x}} = \frac{3Vol\bar{x}}{4\pi\beta^3\beta^3} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2\bar{x}^2 - 3(\bar{y}-2n)^2 - 3\bar{z}^2}{[\bar{x}^2 + (\bar{y}-2n)^2 + \bar{z}^2]^{5/2}}$

Ces valeurs se tabulent au facteur multiplicatif près  $\frac{C_0 \bar{y}^2}{2\pi\lambda\beta^2}$  ou  $\frac{Vol}{4\pi\beta^3\beta^3}$ .  
 Pour chaque valeur de  $x/\beta$  où l'on désire connaître les survitesses, il suffit d'interpoler dans cette table.

## II) TOURBILLON EN U

### 1) Segment tourbillonnaire attaché



D'après la loi de Biot et Savart (68)

$$|U| = \frac{\gamma}{4\pi r} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

avec  $r = \sqrt{x^2 + z^2} = MH$

$$\cos\theta_2 = \frac{A_2 H}{A_2 M} = \frac{y-d}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y-d)^2}}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{A_1 H}{A_1 M} = \frac{y+d}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y+d)^2}}$$

Puisque:

$$u_x = -|U| \sin\theta = -|U| \frac{z}{r}$$

$$u_z = |U| \cos\theta = |U| \frac{x}{r}$$

On en déduit:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u}_x &= \frac{\bar{y}\bar{z}}{4\pi U (\bar{x}^2 + \bar{z}^2)} \left\{ \frac{\bar{y}+d}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y}+d)^2}} - \frac{\bar{y}-d}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y}-d)^2}} \right\} \\ \bar{u}_y &= 0 \\ \bar{u}_z &= \frac{\bar{y}\bar{x}}{4\pi U (\bar{x}^2 + \bar{z}^2)} \left\{ \frac{\bar{y}-d}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y}-d)^2}} - \frac{\bar{y}+d}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y}+d)^2}} \right\} \end{aligned} \right.$$

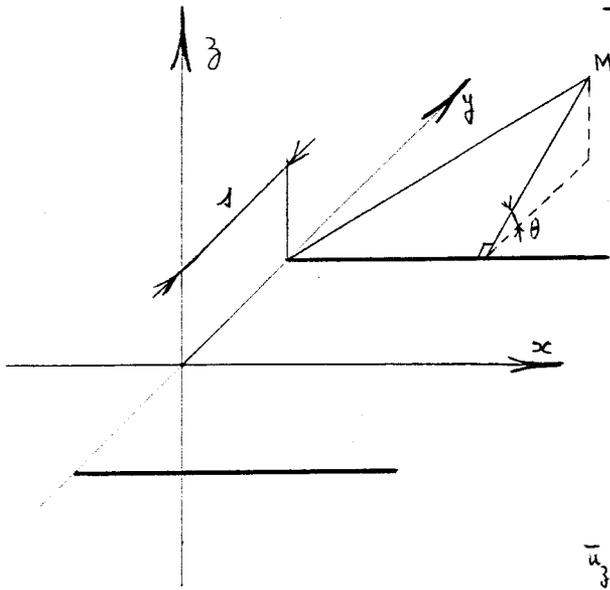
### 2) Tourbillons marginaux

$$|U| = \frac{\gamma}{4\pi r} (1 + \cos\theta')$$

avec

$$r = \sqrt{z^2 + (y-d)^2}$$

$$\cos\theta' = \frac{AH}{AM} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y-d)^2}}$$



Puisque :

$$u_y = -|U| \sin \theta = -|U| \frac{\bar{z}}{r}$$

$$u_z = |U| \cos \theta = |U| \frac{\bar{y}-\bar{d}}{r}$$

on en déduit

$$\bar{u}_x = 0$$

$$\bar{u}_y = \frac{\bar{y}\bar{z}}{4\pi U_0} \left\{ \frac{1}{\bar{z}^2 + (\bar{y}-\bar{d})^2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y}-\bar{d})^2}} \right) - \frac{1}{\bar{z}^2 + (\bar{y}+\bar{d})^2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y}+\bar{d})^2}} \right) \right\}$$

$$\bar{u}_z = \frac{\bar{z}}{4\pi U_0} \left\{ \frac{\bar{y}-\bar{d}}{\bar{z}^2 + (\bar{y}-\bar{d})^2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y}-\bar{d})^2}} \right) - \frac{\bar{y}+\bar{d}}{\bar{z}^2 + (\bar{y}+\bar{d})^2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y}+\bar{d})^2}} \right) \right\}$$

### 3) Potentiel

L'intégration directe de ces dérivées partielles procure le potentiel du fer à cheval d'envergure  $\bar{s}$ . Pour  $\bar{s}$  petit, on retrouve dans un développement limité au premier ordre le potentiel approché qui est utilisé dans la méthode analytique.

$$\varphi_T = \frac{C_L \bar{d}}{4\pi \lambda} \left\{ \text{Arctg} \frac{\bar{y}+\bar{d}}{\bar{z}} - \text{Arctg} \frac{\bar{y}-\bar{d}}{\bar{z}} + \text{Arctg} \frac{\bar{x}(\bar{y}+\bar{d})}{\bar{z} \sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y}+\bar{d})^2 + \bar{z}^2}} - \text{Arctg} \frac{\bar{x}(\bar{y}-\bar{d})}{\bar{z} \sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y}-\bar{d})^2 + \bar{z}^2}} \right\}$$

$$\varphi_T^{(1)} = \frac{C_L \bar{d}^2}{2\pi \lambda} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}} \right) \frac{\bar{z}}{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}$$

### 4) Effet des parois latérales

Cet effet provient par la méthode des images de la somme des singularités image par rapport aux parois latérales. Le changement de  $y$  en  $y - zn$  dans les expressions précédentes fournit les singularités décalées.

$$\bar{u}_{xz}' = \frac{C_L \bar{d}}{4\pi \lambda} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{y} - 2n + \bar{d}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n + \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} - \frac{\bar{y} - 2n - \bar{d}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n - \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} \right\}$$

$$\bar{u}_{yz}' = \frac{C_L \bar{d} \bar{z}}{4\pi \lambda} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\bar{z}^2 + (\bar{y} - 2n + \bar{d})^2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n + \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} \right) - \frac{1}{\bar{z}^2 + (\bar{y} - 2n - \bar{d})^2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n - \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} \right) \right\}$$

$$\bar{u}_{zE}' = \frac{C_L \bar{d}}{4\pi \lambda} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \left( \frac{\bar{y} - 2n - \bar{d}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n - \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} - \frac{\bar{y} - 2n + \bar{d}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n + \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} \right) + \frac{\bar{y} - 2n - \bar{d}}{\bar{z}^2 + (\bar{y} - 2n - \bar{d})^2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n - \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} \right) - \frac{\bar{y} - 2n + \bar{d}}{\bar{z}^2 + (\bar{y} - 2n + \bar{d})^2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n + \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} \right) \right\}$$

La correction de moment de tangage dépend aussi de la variation de  $\bar{u}_{zE}'$  suivant  $Ox$ .

$$\frac{d\bar{u}_{zE}'}{dx} = \frac{d\bar{u}_{xzE}'}{d\bar{z}} = \frac{C_L \bar{d}}{4\pi \lambda} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}{[\bar{x}^2 + \bar{z}^2]^2} \left\{ \frac{\bar{y} - 2n + \bar{d}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n + \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} - \frac{\bar{y} - 2n - \bar{d}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n - \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} \right\} - \frac{\bar{z}^2}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \left\{ \frac{\bar{y} - 2n + \bar{d}}{[\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n + \bar{d})^2 + \bar{z}^2]^{3/2}} - \frac{\bar{y} - 2n - \bar{d}}{[\bar{x}^2 + (\bar{y} - 2n - \bar{d})^2 + \bar{z}^2]^{3/2}} \right\}$$

III) REGLES SINGULIERES POUR CE TOURBILLON

1) Principe

Les séries exprimées ci-dessus pour le tourbillon en fer à cheval sont soit divergentes soit sous forme de différences de valeurs voisines. Le segment porteur indicé par n provoque par exemple la vitesse verticale:

$$\bar{u}_{3T} = \frac{c_L \bar{t}}{4\pi\lambda} \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

avec

$$\cos \theta_2 = \frac{\bar{y} - \bar{t}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y} - \bar{t})^2}}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{\bar{y} + \bar{t}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y} + \bar{t})^2}}$$

Lorsque n croît indéfiniment,  $\cos \theta_2$  et  $\cos \theta_1$  s'approchent de la même façon de un tandis que leur différence tend uniformément vers zéro. La séparation des deux termes de la série en somme de valeurs en  $\cos \theta_2$  et  $\cos \theta_1$  fournit deux séries divergentes. Un calcul convenable nécessite de formuler analytiquement la valeur principale de cette différence de sorte que la limite du terme général soit effectivement nulle.

2) Segment tourbillonnaire

Posons:

$$A = A_2 - A_1 = \frac{2n - \bar{t} - \bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n - \bar{t} - \bar{y})^2}} - \frac{2n + \bar{t} - \bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n + \bar{t} - \bar{y})^2}}$$

On a:

$$\bar{u}_{xE'} = - \frac{c_L \bar{t}}{4\pi\lambda} \frac{\bar{z}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \{A(\bar{y}) + A(-\bar{y})\}$$

$$\bar{u}_{yE'} = 0$$

$$\bar{u}_{zE'} = \frac{c_L \bar{t}}{4\pi\lambda} \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \{A(\bar{y}) + A(-\bar{y})\}$$

Exprimons la valeur principale de A par l'identité :

$$A = A_2 - A_1 = \frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2 + A_1}$$

Il en découle:

$$\bar{u}_{xE'} = \frac{c_L \bar{t}^2}{\pi\lambda} \bar{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n - \bar{y}}{D(\bar{y})} + \frac{2n + \bar{y}}{D(-\bar{y})} \right\}$$

$$\bar{u}_{yE'} = 0$$

$$\bar{u}_{zE'} = - \frac{c_L \bar{t}^2}{\pi\lambda} \bar{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n - \bar{y}}{D(\bar{y})} + \frac{2n + \bar{y}}{D(-\bar{y})} \right\}$$

avec  $D(\bar{y}) = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n - \bar{t} - \bar{y})^2} \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n + \bar{t} - \bar{y})^2} \left\{ (2n - \bar{t} - \bar{y}) \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n + \bar{t} - \bar{y})^2} + (2n + \bar{t} - \bar{y}) \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n - \bar{t} - \bar{y})^2} \right\}$

3) Tourbillons marginaux

De façon similaire posons:

$$A_1(\bar{y}) = \frac{2n - \bar{t} - \bar{y}}{\bar{z}^2 + (2n - \bar{t} - \bar{y})^2} - \frac{2n + \bar{t} - \bar{y}}{\bar{z}^2 + (2n + \bar{t} - \bar{y})^2}$$

$$A'_1(\bar{y}) = \frac{2n - \bar{t} - \bar{y}}{\bar{z}^2 + (2n - \bar{t} - \bar{y})^2} \times \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n - \bar{t} - \bar{y})^2}} - \frac{2n + \bar{t} - \bar{y}}{\bar{z}^2 + (2n + \bar{t} - \bar{y})^2} \times \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n + \bar{t} - \bar{y})^2}}$$

$$A_2(\bar{y}) = \frac{1}{\bar{z}^2 + (\bar{y} - 2n + \bar{r})^2} - \frac{1}{\bar{z}^2 + (\bar{y} - 2n - \bar{r})^2}$$

$$A'_2(\bar{y}) = \frac{\bar{x}}{[\bar{z}^2 + (\bar{y} - 2n + \bar{r})^2] \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y} - 2n + \bar{r})^2}} - \frac{\bar{x}}{[\bar{z}^2 + (\bar{y} - 2n - \bar{r})^2] \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (\bar{y} - 2n - \bar{r})^2}}$$

On a :

$$\bar{u}_{jE'} = - \frac{c_L \bar{r}}{4\pi\lambda} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [A_1(\bar{y}) + A_1(-\bar{y})] + \sum_{n=1}^{\infty} [A'_1(\bar{y}) + A'_1(-\bar{y})] \right\}$$

$$\bar{u}_{jE} = \frac{c_L \bar{r} \bar{z}}{4\pi\lambda} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [A_2(\bar{y}) - A_2(-\bar{y})] + \sum_{n=1}^{\infty} [A'_2(\bar{y}) - A'_2(-\bar{y})] \right\}$$

Par application de la même identité que précédemment il en découle :

$$\bar{u}_{jE'} = \frac{c_L \bar{r}^2}{2\pi\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2n - \bar{r} - \bar{y})(2n + \bar{r} - \bar{y}) - \bar{z}^2}{D(\bar{y})} - \frac{(2n - \bar{r} + \bar{y})(2n + \bar{r} - \bar{y}) - \bar{z}^2}{D(-\bar{y})} + 2\bar{x} \frac{(2n - \bar{y}) K_1(\bar{y})}{D'(\bar{y})} + 2\bar{x} \frac{(2n + \bar{y}) K_1(-\bar{y})}{D'(-\bar{y})} \right\}$$

$$\bar{u}_{jE} = \frac{c_L \bar{r}^2 \bar{z}}{\pi\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n - \bar{y}}{D(\bar{y})} - \frac{2n + \bar{y}}{D(-\bar{y})} + \frac{(2n - \bar{y}) K_2(\bar{y})}{D'(\bar{y})} - \frac{(2n + \bar{y}) K_2(-\bar{y})}{D'(-\bar{y})} \right\}$$

avec :  $D(\bar{y}) = [\bar{z}^2 + (2n - \bar{r} - \bar{y})^2][\bar{z}^2 + (2n + \bar{r} - \bar{y})^2]$

$$D'(\bar{y}) = [\bar{z}^2 + (2n - \bar{r} - \bar{y})^2][\bar{z}^2 + (2n + \bar{r} - \bar{y})^2] \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n + \bar{r} - \bar{y})^2} \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n - \bar{r} - \bar{y})^2} \left\{ (2n - \bar{r} - \bar{y}) [\bar{z}^2 + (2n + \bar{r} - \bar{y})^2] \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n + \bar{r} - \bar{y})^2} \right. \\ \left. + (2n + \bar{r} - \bar{y}) [\bar{z}^2 + (2n - \bar{r} - \bar{y})^2] \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + (2n - \bar{r} - \bar{y})^2} \right\}$$

$$K_1(\bar{y}) = \bar{z}^4 (\bar{x}^2 + \bar{z}^2) - (2n - \bar{r} - \bar{y})^2 (2n + \bar{r} - \bar{y})^2 [\bar{x}^2 + 3\bar{z}^2 + 2(2n - \bar{y})^2 + 2\bar{r}^2]$$

$$K_2(\bar{y}) = 3\bar{z}^4 + 2\bar{x}^2 \bar{z}^2 + 2(\bar{x}^2 + \bar{z}^2) [(2n - \bar{y})^4 + \bar{r}^2 + 3(2n - \bar{y})^2] + 10\bar{r}^2 (2n - \bar{y})^2 + 3\bar{r}^4$$

La série relative à  $\bar{u}_{jE'}$  est équivalente à  $1/n^2$  pour le premier terme provenant de  $A_1(\bar{y})$  tandis que le second est équivalent à  $1/n^3$  ; Quant à la série de  $\bar{u}_{jE}$ , elle est supérieure d'un ordre un soit en  $1/n^3$  pour  $A_2(\bar{y})$  et  $1/n^4$  pour  $A'_2(\bar{y})$ .

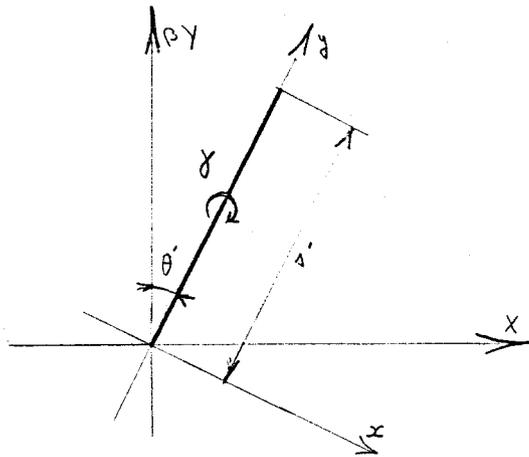
Bien que les <sup>calculs</sup> semblent alambiqués, on retrouve presque toujours les mêmes groupes de valeurs ce qui facilite la programmation. Remarquons ainsi que les termes provenant de  $A_1(\bar{y})$  et  $A_2(\bar{y})$  peuvent s'exprimer analytiquement sous formes de fonctions trigonométriques. En effet ce sont les seuls termes ne comprenant pas de puissances fractionnaires ce qui permet d'appliquer la méthode basée sur le théorème des résidus (25 p.145)

**IV) TOURBILLON AVEC FLECHE**

**f) Formulation**

Au lieu d'un segment tourbillonnaire dirigé suivant l'envergure, on schématise l'effet portant par deux segments tourbillonnaires avec flèche. En cas de dérapage il suffirait d'introduire des segments d'intensité différente et de les compléter par un doublet tourbillonnaire ; Cependant on se contente de la configuration symétrique courante ;

La compressibilité s'interprète comme une contraction d'échelle suivant Oy et Oz. Il s'ensuit les formules de rotation suivantes, en compressible :



$$\begin{cases} x = X \cos \theta' - Y \sin \theta' \\ y = X \sin \theta' + Y \cos \theta' \\ k_{\theta'} = k_{\theta} / \beta \\ \lambda' = \beta \lambda \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \end{cases}$$

avec  $\theta$  angle de flèche en incompressible  
 $\lambda$  demi-envergure en incompressible

En reprenant le schéma de calcul précédent on a :

$$|v| = \frac{\gamma}{4\pi \sqrt{\beta^2 \bar{y}^2 + (X \cos \theta' - \beta Y \sin \theta')^2}} \left\{ \frac{X \sin \theta' + \beta Y \cos \theta' - \lambda'}{\sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2 + \beta^2 \bar{z}^2 + \lambda'^2 - 2\lambda' (X \sin \theta' + \beta Y \cos \theta')}}} - \frac{X \sin \theta' + \beta Y \cos \theta'}{\sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2 + \beta^2 \bar{z}^2}} \right\}$$

Il en découle les expressions en variables réduites par rapport à  $\beta b$  ;  
 Sauf  $x$  qui l'est avec  $b \theta$ .

$$\begin{aligned} \bar{u}_{xm}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= \frac{c_L \bar{\lambda}}{4\pi \lambda} \frac{\bar{z} \cos \theta'}{\beta} A \\ \bar{u}_{ym}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= -\frac{c_L \bar{\lambda}}{4\pi \lambda} \frac{\bar{z} \sin \theta'}{\beta} A \\ \bar{u}_{zm}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= -\frac{c_L \bar{\lambda}}{4\pi \lambda} \frac{\bar{x} \cos \theta' - \bar{y} \sin \theta'}{\beta} A \end{aligned}$$

$$\text{avec: } A = \frac{1}{\bar{z}^2 + (\bar{x} \cos \theta' - \bar{y} \sin \theta')^2} \left\{ \frac{\bar{x} \sin \theta' + \bar{y} \cos \theta'}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}} - \frac{\bar{x} \sin \theta' + \bar{y} \cos \theta' - \bar{z} \frac{\cos \theta}{\cos \theta'}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - 2\lambda' \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} (\bar{x} \sin \theta' + \bar{y} \cos \theta') + \bar{z}^2 \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta'}}} \right\}$$

Les survitesses du second segment s'obtiennent en remplaçant  $\bar{y}$  en  $-\bar{y}$  ;

Contrairement au cas du segment rectiligne, l'angle de flèche dépend de la compressibilité. Pour une flèche nulle les expressions précédentes ne sont fonctions que de  $x/\beta$  à un facteur multiplicateur près en  $\beta$  ; Pour un tourbillon unitaire (facteur  $\frac{c_L \bar{\lambda}}{4\pi \lambda}$  éliminé), il est alors possible de les tabuler en  $x/\beta$  puis de les interpoler suivant la valeur de  $\beta$ . Pour un tourbillon en flèche la tabulation devrait se réaliser en  $x$  et en  $\beta$  ; Actuellement on se contente de confondre  $\theta$  et  $\theta'$  ce qui représente un compromis entre rapidité de calcul et précision limitée par une erreur de formulation. En incompressible cet inconvénient n'apparaît pas car on calcule définitivement les coefficients de vitesse à l'emplacement des prises de pression. Remarquons de plus que la symétrie en  $x$  disparaît avec l'angle de flèche ce qui double le volume de calcul.

2°) Règles singulières

Selon le schéma décrit antérieurement :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{xE'} &= \frac{c_L \bar{\lambda}^2 \cos \theta \bar{z}}{4\pi \lambda \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{N(\bar{y})}{D(\bar{y})} - \frac{N(-\bar{y})}{D(-\bar{y})} \right\} \\ \bar{u}_{yE'} &= -\frac{c_L \bar{\lambda}^2 \sin \theta \bar{z}}{4\pi \lambda \beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{N(\bar{y})}{D(\bar{y})} + \frac{N(-\bar{y})}{D(-\bar{y})} \right\} + \bar{u}_{yE'}' \end{aligned}$$

$$\bar{u}'_{yE} = - \frac{C_L \bar{\Gamma}^2}{4\pi \lambda B} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\cos\theta \bar{x} - \bar{y} \frac{\sin\theta}{B}) \frac{N(\bar{y})}{D(\bar{y})} - (\bar{x} \cos\theta + \bar{y} \frac{\sin\theta}{B}) \frac{N(-\bar{y})}{D(-\bar{y})} \right\} + \bar{u}'_{zE}$$

où  $\bar{u}'_{yE}$ , et  $\bar{u}'_{zE}$ , sont les vitesses déjà exprimées, engendrées par les tourbillons marginaux.

$$N(\bar{y}) = \left[ \bar{z} \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} - 2(\bar{x} \sin\theta' + \bar{y} \cos\theta') \right] \left[ (\bar{x} \sin\theta' + \bar{y} \cos\theta')^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2 - \bar{z}^2 \right]$$

$$D(\bar{y}) = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \bar{z}^2 + (\bar{x} \cos\theta' - \bar{y} \sin\theta')^2 \right] \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - 2\bar{z} \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} (\bar{x} \sin\theta' + \bar{y} \cos\theta')} + \bar{z}^2 \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta'} \\ & + \left[ (\bar{x} \sin\theta' + \bar{y} \cos\theta') \left( \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} + \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - 2\bar{z} \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} (\bar{x} \sin\theta' + \bar{y} \cos\theta')} + \bar{z}^2 \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta'} \right) - \bar{z} \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} \right] \end{aligned} \right\}$$

Par le même procédé on exprimerait (I) le dernier terme utile  $\frac{d\bar{u}_z}{d\bar{x}}$ .

# ANNEXE B <sup>-112-</sup> COEFFICIENTS DE PONDERATION

Les coefficients de pondération obtenus (p. 43) sont difficilement calculables directement. On se propose dans un premier temps de montrer comment on retrouve les formules bidimensionnelles à référence composée pour l'harmonique de rang nul. Puis on donnera une expression sous forme de série de chacune de ces intégrales, en montrant comment définir la référence d'incidence.

## I PASSAGE DU TRI-AU BI-DIMENSIONNEL (n=0)

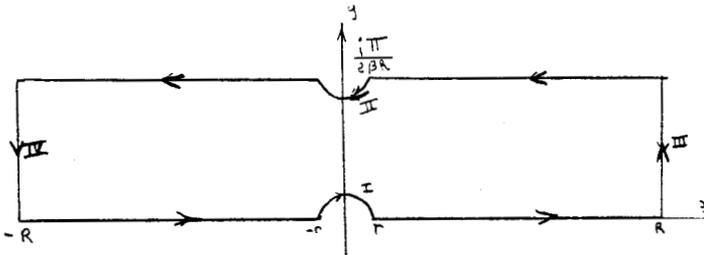
Il s'agit de calculer analytiquement les intégrales suivantes:

$$I_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} \operatorname{sh} p \xi}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} dp$$

$$I_{20} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} \operatorname{ch} p \xi}{i \operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} dp$$

$$I_{30} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} p \operatorname{ch} p \xi}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} dp$$

$$I_{40} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i e^{-ip\xi} p \operatorname{sh} p \xi}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} dp$$



On considère le contour d'intégration ci-contre qui exclut les deux pôles simples par les deux demi-cercles dont on fait tendre le rayon vers zéro. On se propose de déterminer préalablement les deux intégrales suivantes dont les quatre recherchées se déduisent

1°) CALCUL DE:  $\oint_C \frac{e^{-ip\xi} e^{k\xi}}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} dp$

$$\int_C \frac{e^{-ip\xi} e^{k\xi}}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} dp \quad \text{et} \quad \int_C p \frac{e^{-ip\xi} e^{k\xi}}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} dp$$

L'absence de singularité à l'intérieur du contour donne d'après le théorème des résidus:

$$\int_{-R}^R \frac{e^{-ip\xi} e^{k\xi}}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} dp + \int_r^R \frac{e^{-ip\xi} e^{k\xi}}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} dp - \int_r^{-R} \frac{e^{-i(p+\frac{i\pi}{2B})} e^{k(p+\frac{i\pi}{2B})}}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} (p+\frac{i\pi}{2B})} dp - \int_{-R}^{-r} \frac{e^{-i(p+\frac{i\pi}{2B})} e^{k(p+\frac{i\pi}{2B})}}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} (p+\frac{i\pi}{2B})} dp + \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} = 0$$

En majorant de façon élémentaire (1) les intégrales III et IV on montre que leur limites quand R tend vers l'infini est nulle.

Puisque:  $\int_r^R \frac{e^{-i(p+\frac{i\pi}{2B})} e^{k(p+\frac{i\pi}{2B})}}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} (p+\frac{i\pi}{2B})} dp = -e^{\frac{\pi}{2Bh}(\xi+k)} \int_r^R \frac{e^{-ip\xi} e^{k\xi}}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} dp$

Il en découle:  $\left[1 + e^{\frac{\pi}{2Bh}(\xi+k)}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} e^{k\xi}}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} dp = - \lim_{r \rightarrow 0} \left( \int_I + \int_{II} \right)$

- Calcul de  $\int_I$

soit  $p = \varepsilon = r e^{i\theta}$

$$f(p) = \frac{e^{-ip\xi} e^{k\xi}}{\operatorname{sh} 2B \operatorname{sh} p} = 2 \frac{e^{-i\varepsilon\xi} e^{k\xi}}{e^{\frac{\varepsilon\xi}{2Bh}} - e^{-\frac{\varepsilon\xi}{2Bh}}} = \frac{1}{2Bh\varepsilon} + c + o(\varepsilon)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_I = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 f(p) d\theta = \int_{\pi}^0 \frac{1}{2Bh\varepsilon} \frac{r i e^{i\theta} d\theta}{r e^{i\theta}} = - \frac{i\pi}{2Bh}$$

— Calcul de  $\int_{\Pi}$

Soit:  $p = \frac{i\pi}{2\beta h} + \epsilon \rightarrow f(p) = 2 \frac{e^{-i\pi \xi} e^{Kp}}{e^{2\beta h p} - e^{-2\beta h p}} = 2 \frac{e^{\frac{\pi}{2\beta h}(\xi + iK)} e^{(K-i\xi)\epsilon}}{e^{2\beta h(\frac{i\pi}{2\beta h} + \epsilon)} - e^{-2\beta h(\frac{i\pi}{2\beta h} + \epsilon)}}$

$f(p) = 2 \frac{e^{\frac{\pi}{2\beta h}(\xi + iK)} e^{(K-i\xi)\epsilon}}{e^{2\beta h \epsilon} - e^{-2\beta h \epsilon}} = - \frac{e^{\frac{\pi(\xi + iK)/2\beta h}}}{2\beta h \epsilon} + C + O(\epsilon)$

$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Pi} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{-\pi} f[p(\theta)] d\theta = \int_0^{-\pi} \frac{e^{\frac{\pi}{2\beta h}(\xi + iK)}}{2\beta h} \times \frac{r i e^{i\theta}}{r e^{i\theta}} d\theta = \frac{i\pi}{2\beta h} e^{\frac{\pi(\xi + iK)}{2\beta h}}$

On en conclut que:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\pi \xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2\beta h p} dp = \frac{i\pi}{2\beta h} \times \frac{1 - e^{\frac{\pi}{2\beta h}(\xi + iK)}}{1 + e^{\frac{\pi}{2\beta h}(\xi + iK)}} = \frac{i\pi}{2\beta h} \ln \frac{\pi(\xi + iK)}{4\beta h}$

2) EXPRESSION DE  $I_{10}$  ET  $I_{20}$

$I_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\pi \xi} \text{sh } p\beta}{\text{sh } 2\beta h p} dp = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{-i\pi \xi} e^{3p}}{\text{sh } 2\beta h p} - \frac{e^{-i\pi \xi} e^{-3p}}{\text{sh } 2\beta h p} \right) dp$

$I_{20} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\pi \xi} \text{ch } p\beta}{i \text{sh } 2\beta h p} dp = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{-i\pi \xi} e^{p\beta}}{i \text{sh } 2\beta h p} - \frac{e^{-i\pi \xi} e^{-p\beta}}{i \text{sh } 2\beta h p} \right) dp$

Par application du résultat précédent on en déduit algébriquement (1):

$I_{10} = \frac{\pi}{2\beta h} \frac{\sin \pi\beta/2\beta h}{\text{ch } \pi\beta/2\beta h + \cos \pi\beta/2\beta h}$

$I_{20} = \frac{\pi}{2\beta h} \frac{\text{sh } \pi\beta/2\beta h}{\text{ch } \pi\beta/2\beta h + \cos \pi\beta/2\beta h}$

Cesont les coefficients de pondération bidimensionnel avec la référence composée  $u_{zc}(-\infty) + u_{zc}(+\infty) = 0$ .

Ces formules font partie du formulaire de référence (70, p. 145)

3) CALCUL DE  $\oint_C p \frac{e^{-i\pi \xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2\beta h p} dp$

— Première méthode:

Elle s'obtient directement en dérivant par rapport à  $\xi$  le résultat du 1).

$I(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\pi \xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2\beta h p} dp = \frac{i\pi}{2\beta h} \frac{1 - e^{\frac{\pi}{2\beta h}(\xi + iK)}}{1 + e^{\frac{\pi}{2\beta h}(\xi + iK)}}$

d'où

$\frac{dI(\xi)}{d\xi} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\pi \xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2\beta h p} dp = -\frac{i\pi^2}{2\beta h^2} \frac{e^{\frac{\pi}{2\beta h}(\xi + iK)}}{[1 + e^{\frac{\pi}{2\beta h}(\xi + iK)}]^2}$

— Deuxième méthode:

Reprenons le contour dessiné précédemment; On montre que:

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{III} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{IV} = 0$

d'où:  $\int_{-\infty}^r \frac{e^{-i\pi \xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2\beta h p} p dp + \int_r^{\infty} \frac{e^{-i\pi \xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2\beta h p} p dp - \int_r^r \frac{e^{-i\pi(\rho + \frac{i\pi}{2\beta h})} K(\rho + \frac{i\pi}{2\beta h})}{\text{sh } 2\beta h(\rho + \frac{i\pi}{2\beta h})} (\rho + \frac{i\pi}{2\beta h}) d\rho - \int_{-\infty}^r \frac{e^{-i\pi(\rho + \frac{i\pi}{2\beta h})} K(\rho + \frac{i\pi}{2\beta h})}{\text{sh } 2\beta h(\rho + \frac{i\pi}{2\beta h})} (\rho + \frac{i\pi}{2\beta h}) d\rho + \int_{\frac{\pi}{2\beta h}}^{\infty} = 0$

On montre directement que l'origine n'est qu'un pôle apparent d'où  $\int_{\Gamma} = 0$

Réduisons le 3<sup>o</sup> et le 4<sup>o</sup> terme

$\int_r^R \frac{e^{-i\pi(\rho + \frac{i\pi}{2\beta h})} K(\rho + \frac{i\pi}{2\beta h})}{\text{sh } 2\beta h(\rho + \frac{i\pi}{2\beta h})} (\rho + \frac{i\pi}{2\beta h}) d\rho = \frac{\pi}{2\beta h} (\xi + iK) \left\{ \int_r^R \frac{e^{-i\pi \xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2\beta h p} p dp + \frac{i\pi}{2\beta h} \int_r^R \frac{e^{-i\pi \xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2\beta h p} dp \right\}$

Par passage à la limite de r, il en découle:

$$\left[ 1 + e^{\frac{\pi}{2Bh}(\xi+iK)} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2Bh p} dp + e^{\frac{\pi}{2Bh}(\xi+iK)} \times \frac{i\pi}{2Bh} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2Bh p} dp = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Pi}$$

La seconde intégrale a déjà été calculée (1), et par la même méthode que précédemment; On montre que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Pi} = \frac{\pi^2}{4B^2 h^2} e^{\frac{\pi(\xi+iK)/2Bh}$$

D'où l'expression complète qui équivaut à celle déjà obtenue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2Bh p} p dp = \frac{\pi^2}{4B^2 h^2} \frac{e^{\frac{\pi}{2Bh}(\xi+iK)}}{[1 + e^{\frac{\pi}{2Bh}(\xi+iK)}]^2} + \frac{\pi^2}{4B^2 h^2} \times \frac{e^{\frac{\pi}{2Bh}(\xi-iK)}}{1 + e^{\frac{\pi}{2Bh}(\xi+iK)}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi} e^{Kp}}{\text{sh } 2Bh p} dp = \frac{\pi^2}{2B^2 h^2} \times \frac{e^{\frac{\pi}{2Bh}(\xi+iK)}}{[1 + e^{\frac{\pi}{2Bh}(\xi+iK)}]^2}$$

4) EXPRESSION DE I<sub>30</sub> ET I<sub>40</sub>:

De même qu'en 2) on obtient cette fois-ci I<sub>30</sub> et I<sub>40</sub> à partir du résultat ci-dessus:

$$I_{30} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} \text{ch } p\xi}{\text{sh } 2Bh p} p dp = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{-ip\xi} e^{p\xi}}{\text{sh } 2Bh p} - \frac{e^{-ip\xi} e^{-p\xi}}{\text{sh } 2Bh p} \right) p dp$$

$$I_{40} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip\xi} \text{sh } p\xi}{\text{sh } 2Bh p} i p dp = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{-ip\xi} e^{p\xi}}{\text{sh } 2Bh p} - \frac{e^{-ip\xi} e^{-p\xi}}{\text{sh } 2Bh p} \right) p dp$$

on en déduit algébriquement (1) :

$$I_{30} = \frac{\pi^2}{4B^2 h^2} \times \frac{\cos \pi\xi/2Bh \text{ ch } \pi\xi/2Bh + 1}{[\text{ch } \pi\xi/2Bh + \cos \pi\xi/2Bh]^2}$$

$$I_{40} = \frac{\pi^2}{4B^2 h^2} \times \frac{\sin \pi\xi/2Bh \text{ sh } \pi\xi/2Bh}{[\text{ch } \pi\xi/2Bh + \cos \pi\xi/2Bh]^2}$$

**II) INTEGRATION DE I<sub>1n</sub> à I<sub>4n</sub>**

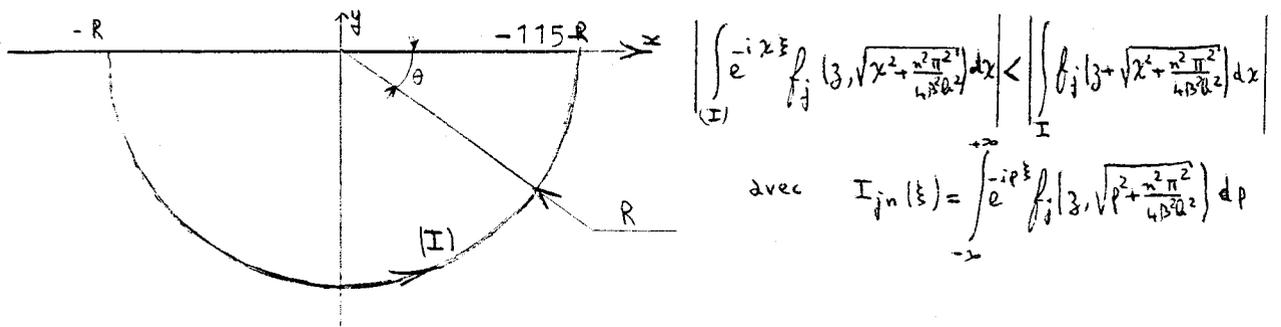
Ces quatre intégrales sont des transformées de Fourier de fonctions rapidement décroissantes dont on ne connaît pas d'expression analytique élémentaire sauf pour n=0. Pour des valeurs de ξ importantes, les intégrands sont des fonctions rapidement oscillantes difficiles à intégrer (1). On se propose d'exprimer chacune de ces intégrales sous forme de série dont le terme général décroît exponentiellement ce qui permet un calcul rapide.

Dans le plan complexe, les pôles des intégrands sont simples et se situent en :

$$z = \pm i \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{4B^2 h^2} + \frac{h^2 \pi^2}{4B^2 h^2}} = \pm \frac{i\pi}{2B} \sqrt{\frac{n^2}{B^2} + \frac{h^2}{h^2}}$$

Seule I<sub>2n</sub> possède un autre pôle en z=0; Les fonctions I<sub>1n</sub> à I<sub>4n</sub> sont paires en ξ et on se contente d'étudier le cas où ξ > 0

Pour ξ > 0 on a dans le plan complexe:



On montre de façon élémentaire que  $|f_j|$  décroît plus rapidement que toute puissance de  $1/R$  pour  $z \leq 2Bh$  et  $\theta \neq \pm \frac{\pi}{4}$ . Elles sont en particulier majorées par  $1/R^2$ ; L'intégrale le long de (I) est nulle car l'ensemble sur lequel cette majoration n'a pas lieu, est de mesure nulle et  $f_j$  y reste borné. Les intégrales  $I_{1n}$  à  $I_{4n}$  sont ainsi les sommes des résidus de  $f_{jn}$  à l'intérieur du contour précédent.

**I) CALCUL DE  $I_{1n}$ :**

-Par application du théorème des résidus à ce contour:

$$I_{1n} = \sum_{k=0}^{\infty} 2i\pi \lim_{p \rightarrow -i\frac{\pi}{2B} \sqrt{\frac{n^2}{B^2} + \frac{h^2}{R^2}}} \frac{e^{-ip\xi} \operatorname{sh} \lambda z}{\operatorname{sh} 2Bh\lambda} \left( p + \frac{i\pi}{2B} \sqrt{\frac{n^2}{B^2} + \frac{h^2}{R^2}} \right) \quad \text{avec } \lambda = \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4B^2 U^2}}$$

Par application de la règle de l'Hospital il en découle:

$$I_{1n} = \sum_{k=0}^{\infty} 2i\pi \lim_{p \rightarrow -i\frac{\pi}{2B} \sqrt{\frac{n^2}{B^2} + \frac{h^2}{R^2}}} \frac{e^{-ip\xi} \operatorname{sh} \lambda z}{\frac{2Bh p \operatorname{ch} 2Bh\lambda}{\lambda}}$$

On en déduit:

$$I_{1n}(\xi, z) = \frac{\pi}{Bh} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin \frac{\pi k z}{2Bh} e^{-\frac{\pi k}{2Bh} \sqrt{n^2 B^2 + h^2}}}{\sqrt{n^2 B^2 + h^2}} \times h \quad \text{avec } \bar{h} = h/B$$

-Puisque  $z$  est généralement proche de  $Bh$ ; c'est à dire que la maquette est voisine du milieu de la veine, translatons les axes.

$$\xi = z - Bh \quad \longrightarrow \quad z = \xi + Bh$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{xc}(z, n, \xi) &= \frac{1}{2Bh} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \bar{u}_{xc}(\xi - x, n, Bh) + \bar{u}_{xc}(\xi - x, n, -Bh) \right] \bar{J}_{1n}(\xi, \xi) + \left[ \bar{u}_{xc}(\xi - x, n, Bh) - \bar{u}_{xc}(\xi - x, n, -Bh) \right] \bar{J}_{2n}(\xi, \xi) \right\} d\xi \\ \text{avec } \bar{J}_{1n}(\xi, \xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos \frac{\pi k \xi}{2Bh} e^{-\frac{\pi k}{2Bh} \sqrt{n^2 B^2 + (2k-1)^2}}}{\sqrt{n^2 B^2 + (2k-1)^2}} \times (2k-1) \\ \bar{J}_{2n}(\xi, \xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin \frac{\pi k \xi}{Bh} e^{-\frac{\pi k}{2Bh} \sqrt{n^2 B^2 + 4k^2}}}{\sqrt{n^2 B^2 + 4k^2}} \times 2k \end{aligned}$$

Notons que  $\bar{J}_{2n}(\xi, 0) = 0$ ; C'est à dire qu'au centre de la veine, le second terme de l'intégrale est nul quelque soit  $\xi$ ;

-Pour  $n=0$  on retrouve le cas bidimensionnel

$$I_{10}(\xi, z) = \frac{\pi}{Bh} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin \frac{\pi k z}{2Bh} e^{-\frac{\pi k}{2Bh} \sqrt{0 + h^2}}}{\sqrt{0 + h^2}} h = \frac{\pi}{Bh} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \left( e^{\frac{i\pi k z}{2Bh}} - e^{-\frac{i\pi k z}{2Bh}} \right) \times \frac{e^{-\pi k / 2Bh}}{i}$$

$$I_{10} = \frac{\pi}{2i\beta h} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n\pi}{2\beta h}(\xi - i\eta)} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n\pi}{2\beta h}(\xi + i\eta)} \right]$$

Ces deux termes sont des sommes de progression géométrique dont on déduit  $I_{10}$

$$I_{10} = \frac{\pi}{2i\beta h} \left\{ \frac{1}{1 + e^{-\frac{\pi}{2\beta h}(\xi - i\eta)}} - \frac{1}{1 + e^{-\frac{\pi}{2\beta h}(\xi + i\eta)}} \right\} = \frac{\pi}{2\beta h} \frac{\sin \pi\eta/2\beta h}{\operatorname{ch} \pi\xi/2\beta h + \cos \pi\eta/2\beta h}$$

2°) CALCUL DE  $I_{2n}$

Cette intégrale présentant un pôle en  $p=0$ , on introduit dans le contour précédent un demi-cercle de rayon  $r$  entourant l'origine. Lorsque  $r$  tend vers zero, l'intégrale le long de cette demi-circonférence tend vers la moitié du résidu en ce point. C'est pourquoi on calcule le résidu à l'origine, puis conformément à la démonstration précédente, les autres résidus à l'intérieur du contour choisi.

-R<sub>1</sub> résidu en  $p = 0$

$$R_1 = 2i\pi \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda z}{i \operatorname{sh} 2\beta h \lambda} e^{-ip\xi} \times \frac{p}{p} \quad \text{avec} \quad \lambda = \sqrt{p^2 + \frac{n^2\pi^2}{4\beta^2 h^2}}$$

D'où: 
$$R_1 = \frac{\pi}{\beta h} \times \frac{\pi n \bar{h}}{\operatorname{sh} n\pi \bar{h}} \operatorname{ch} \frac{n\pi z \bar{h}}{2\beta h}$$

-R<sub>n</sub> résidu en  $\beta = -\frac{i\pi}{2\beta} \sqrt{\frac{n^2}{\beta^2} + \frac{h^2}{h^2}}$

$$R_n = 2i\pi \lim_{p \rightarrow -\frac{i\pi}{2\beta} \sqrt{\frac{n^2}{\beta^2} + \frac{h^2}{h^2}}} \frac{e^{-ip\xi} \lambda \operatorname{ch} \lambda z}{ip \operatorname{sh} 2\beta h \lambda} \left( p + \frac{i\pi}{2\beta} \sqrt{\frac{n^2}{\beta^2} + \frac{h^2}{h^2}} \right)$$

On en déduit:

$$R_n = (-1)^n \frac{\pi}{\beta h} \frac{e^{-\frac{n\xi}{2\beta h} \sqrt{n^2 \bar{h}^2 + h^2}} \cos \frac{n\pi z}{2\beta h}}{n^2 \bar{h}^2 + h^2} \times h^2$$

-Par translation des axes il en découle:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{3c}(x, n, \xi) &= \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{u}_{3c}(\xi - x, n, \beta h) - \tilde{u}_{3c}(\xi - x, n, -\beta h) \right] J_{3n}(\xi, \zeta) + \left[ \tilde{u}_{3c}(\xi - x, n, \beta h) + \tilde{u}_{3c}(\xi - x, n, -\beta h) \right] J_{4n}(\xi, \zeta) d\xi \\ \text{avec: } J_{3n}(\xi, \zeta) &= \frac{1}{2} \frac{n\pi \bar{h}/2}{\operatorname{sh} n\pi \bar{h}/2} \operatorname{ch} \frac{n\pi \bar{h} \xi}{2\beta h} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \frac{k\pi \xi}{\beta h} e^{-\frac{\pi \xi}{2\beta h} \sqrt{n^2 \bar{h}^2 + 4k^2}}}{n^2 \bar{h}^2 + 4k^2} \times 4k^2 \\ J_{4n}(\xi, \zeta) &= \frac{1}{2} \frac{n\pi \bar{h}/2}{\operatorname{ch} n\pi \bar{h}/2} \operatorname{sh} \frac{n\pi \bar{h} \xi}{2\beta h} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi \xi}{2\beta h} e^{-\frac{\pi \xi}{2\beta h} \sqrt{n^2 \bar{h}^2 + (2k-1)^2}}}{n^2 \bar{h}^2 + (2k-1)^2} \times (2k-1)^2 \end{aligned}$$

Selon le schéma de calcul déjà décrit, on montre que l'on retrouve les résultats bidimensionnels avec la référence composée. Pour parvenir à une

autre référence d'incidence, il suffit de remarquer que tous les termes des séries  $J_{3n}$  et  $J_{4n}$  sauf le premier tendent vers zéro quand  $\xi$  croît indéfiniment. Ainsi il suffit de prendre deux fois le demi-résidu en  $\rho = 0$  au lieu d'une pour choisir la référence d'incidence à l'infini amont. Inversement en éliminant ce résidu en  $\rho = 0$ , on obtient la formule avec référence à l'infini aval.

$$\begin{array}{l} \text{Référence composée} \\ \left. \begin{array}{l} \lim_{\xi \rightarrow 0} J_{3n}(\xi, \zeta) = 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} J_{3n}(\xi, \zeta) = -\frac{\pi}{2\beta h} \frac{n\pi\bar{h}/2}{\text{sh } n\pi\bar{h}/2} \text{ch } \frac{n\pi\bar{h}\bar{\zeta}}{2\beta h} = K \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Référence amont} \\ \left. \begin{array}{l} J'_{3n}(\xi, \zeta) = J_{3n}(\xi, \zeta) + \frac{\pi}{2\beta h} \frac{n\pi\bar{h}/2}{\text{sh } n\pi\bar{h}/2} \text{ch } \frac{n\pi\bar{h}\bar{\zeta}}{2\beta h} \\ \text{auquel cas } \lim_{\xi \rightarrow \infty} J'_{3n}(\xi, \zeta) = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

Suivant le même schéma de calcul on transforme  $I_{3n}$  et  $I_{4n}$  en séries.

### III) RECAPITULATIF

Les coefficients de pondération ne dépendent que de  $\bar{x}/\beta$ . La position de la maquette en hauteur est considérée comme un paramètre. En variables réduites on aboutit à l'ensemble des résultats suivants:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x/\beta h & \bar{\xi} &= \xi/\beta h & \bar{\zeta} &= \zeta/\beta h \\ \bar{u}_{2c}(\bar{x}, n, \bar{\zeta}) &= \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ U_{np}(\bar{\xi}-\bar{x}) J_{1n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) + U_{n\pi}(\bar{\xi}-\bar{x}) J_{2n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \right] d\bar{\xi} \\ \bar{u}_{3c}(\bar{x}, n, \bar{\zeta}) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ U_{np}(\bar{\xi}-\bar{x}) J_{3n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) + U_{n\pi}(\bar{\xi}-\bar{x}) J_{4n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \right] d\bar{\xi} \\ \frac{d\bar{u}_{2c}}{d\bar{x}}(\bar{x}, n, \bar{\zeta}) &= \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ U_{np}(\bar{\xi}-\bar{x}) J_{5n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) + U_{n\pi}(\bar{\xi}-\bar{x}) J_{6n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \right] d\bar{\xi} \\ \frac{d\bar{u}_{3c}}{d\bar{x}}(\bar{x}, n, \bar{\zeta}) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ U_{np}(\bar{\xi}-\bar{x}) J_{7n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) + U_{n\pi}(\bar{\xi}-\bar{x}) J_{8n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \right] d\bar{\xi} \end{aligned}$$

avec :

$$U_{n\pi} = \bar{u}_{2c}(x, n, h_1) + \bar{u}_{2c}(x, n, h_1 - 2h)$$

$$U_{np} = \bar{u}_{2c}(x, n, h_1) - \bar{u}_{2c}(x, n, h_1 - 2h)$$

$$\begin{aligned} J_{1n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) &= \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^{K-1} \cos \frac{2K-1}{2} \pi \bar{\zeta} \frac{E_{\pm}(\bar{\xi})}{\sqrt{n^2 \bar{h}^2 + (2K-1)^2}} \\ J_{2n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) &= \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \sin K\pi \bar{\zeta} \frac{E_p(\bar{\xi})}{\sqrt{n^2 \bar{h}^2 + 4K^2}} \\ J'_{3n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) &= \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \cos K\pi \bar{\zeta} \frac{E_p(\bar{\xi})}{n^2 \bar{h}^2 + 4K^2} \times 2K + \frac{n\pi\bar{h}/2}{\text{sh } n\pi\bar{h}/2} \text{ch } \frac{n\pi\bar{h}\bar{\zeta}}{2} \\ J'_{4n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) &= \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \sin \frac{2K-1}{2} \pi \bar{\zeta} \frac{E_{\pm}(\bar{\xi})}{n^2 \bar{h}^2 + (2K-1)^2} (2K-1) + \frac{n\pi\bar{h}/2}{\text{ch } n\pi\bar{h}/2} \text{sh } \frac{n\pi\bar{h}\bar{\zeta}}{2} \\ J_{5n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) &= \frac{\pi}{2} \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^{K-1} \cos K\pi \bar{\zeta} \frac{E_p(\bar{\xi})}{\sqrt{n^2 \bar{h}^2 + 4K^2}} \times 2K \\ J_{6n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) &= \frac{\pi}{2} \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^{K-1} \sin \frac{2K-1}{2} \pi \bar{\zeta} \frac{E_{\pm}(\bar{\xi})}{\sqrt{n^2 \bar{h}^2 + (2K-1)^2}} \times (2K-1) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} J_{1n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \\ J_{2n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \\ J'_{3n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \\ J'_{4n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \\ J_{5n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \\ J_{6n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{référence à} \\ \text{l'infini amont} \end{array}$$

$$J_{7n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \bar{\zeta} E_I(\bar{\xi})$$

$$J_{8n}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin k \pi \bar{\zeta} E_p(\bar{\xi})$$

avec :

$$E_p(\bar{\xi}) = e^{-\frac{\pi \bar{\xi}}{2} \sqrt{x^2 \bar{h}^2 + 4k^2}} \times 2k$$

$$E_I(\bar{\xi}) = e^{-\frac{\pi \bar{\xi}}{2} \sqrt{x^2 \bar{h}^2 + (2k-1)^2}} \times (2k-1)$$

Remarquons qu'au centre de la veine  $\bar{\zeta}=0$  on a:  $J_{2n} = J_{4n} = J_{6n} = J_{8n} = 0$

Lorsque la configuration de la maquette est symétrique par rapport à  $y=0$ , il suffit de ne considérer que les harmoniques de rang pair ( $n=2m$ ).

# ANNEXE C TRANSFORMÉE BILATÉRALE DE LAPLACE

A maintes reprises les transformées de Fourier suivant  $Ox$  sont utilisées pour ramener une équation aux dérivées partielles à une équation différentielle ordinaire. Leurs hypothèses d'application étant difficilement vérifiées on se propose d'introduire la transformée de Laplace que l'on dénomme "bilatérale". Car les résultats la concernant sont nombreux et rendent son application moins contraignante; Il opère sur des fonctions régulières, nulles pour les valeurs de  $x$  négatives et bornées par  $e^{s_0 x}$ , où  $s_0$  est son indice de croissance (49).

## I) FORMULATION

Posons:  $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$

avec  $\varphi^+ = \begin{cases} \varphi & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$  et  $\varphi^- = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \geq 0 \\ \varphi & \text{pour } x < 0 \end{cases}$

L'équation bidimensionnelle de Laplace devient:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^+}{\partial y^2} = 0 & \text{pour } x \geq 0 \\ \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^-}{\partial y^2} = 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{L}$  la transformée de Laplace définie par:

$$\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx$$

avec  $f(x) = \begin{cases} \varphi^+(x) = f(x) \\ \text{ou } \varphi^-(-x) = f(-x) \end{cases}$  pour  $x \geq 0$

Ceci équivaut à définir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^+[f^+(x)] &= \int_0^{\infty} f^+(x) e^{-px} dx = F^+(p) \\ \mathcal{L}^-[f^-(x)] &= \int_0^{\infty} f^-(x) e^{px} dx = F^-(p) = \int_0^{\infty} f(-x) e^{-px} dx \\ \text{ou } \mathcal{L}[f(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-p|x|} dx = \int_0^{\infty} [f(x) + f(-x)] e^{-px} dx \end{aligned}$$

On obtient de façon élémentaire les transformations inverses et les transformées des dérivées suivant  $Ox$ :

$$\begin{aligned} f^+(x) &= 0 \quad \text{pour } x < 0 & f^+(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F^+(p) e^{px} dp & \text{pour } x \geq 0 \\ f^-(x) &= 0 \quad \text{pour } x > 0 & f^-(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F^-(p) e^{-px} dp & \text{pour } x \leq 0 \end{aligned}$$

avec  $a$  réel supérieur à l'indice de croissance de  $f^+$  ou  $f^-$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^+ \left[ \frac{\partial \varphi^+}{\partial x}(x, y) \right] &= \rho \mathcal{L}^+ [\varphi^+] - \varphi^+(0, y) \\ \mathcal{L}^+ \left[ \frac{\partial^2 \varphi^+}{\partial x^2}(x, y) \right] &= \rho^2 \mathcal{L}^+ [\varphi^+] - \rho \varphi^+(0, y) - \frac{\partial \varphi^+}{\partial x}(0, y) \\ \mathcal{L}^- \left[ \frac{\partial \varphi^-}{\partial x}(x, y) \right] &= \varphi^-(0, y) - \rho \mathcal{L}^- [\varphi^-] \\ \mathcal{L}^- \left[ \frac{\partial^2 \varphi^-}{\partial x^2}(x, y) \right] &= \frac{\partial \varphi^-}{\partial x}(0, y) - \rho \varphi^-(0, y) + \rho^2 \mathcal{L}^- [\varphi^-] \end{aligned}$$

II) RESOLUTION

Ces notations préliminaires étant acquises, il suffit de résoudre les équations aux dérivées partielles en  $\varphi^+$  ou  $\varphi^-$  grâce à l'opérateur approprié

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}^\pm}{\partial y^2} + \beta^2 (\rho^2 \hat{\varphi}^\pm - \rho \varphi^\pm(0, y) \mp \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial x}(0, y)) = 0$$

$$\hat{\varphi}^\pm = A^\pm(\rho) \cos \beta \rho y + B^\pm(\rho) \sin \beta \rho y + \frac{\varphi(0, y)}{\rho} \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, y) \times \frac{1}{\rho^2}$$

Connaissant les conditions aux limites  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, 0) = 0$ , on en déduit  $\varphi$  ;

$$\frac{\partial \hat{\varphi}^+}{\partial x} = \rho \{ A^+(\rho) \cos \beta \rho y + B^+(\rho) \sin \beta \rho y \} + \frac{\partial \varphi^+}{\partial x}(0, y) \times \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}^-}{\partial x} = \rho \{ A^-(\rho) \cos \beta \rho y + B^-(\rho) \sin \beta \rho y \} + \frac{\partial \varphi^-}{\partial x}(0, y) \times \frac{1}{\rho}$$

Il en découle :

$$A^+(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{\varphi}^+}{\partial x}(\rho, 0) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) \times \frac{1}{\rho^2}$$

$$B^+(\rho) = \frac{1}{\rho \sin 2\beta h \rho} \frac{\partial \hat{\varphi}^+}{\partial x}(\rho, 2\beta h) - \frac{1}{\rho \tan \beta 2\beta h \rho} \frac{\partial \hat{\varphi}^+}{\partial x}(\rho, 0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) \times \frac{1}{\rho^2 \tan \beta 2\beta h \rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 2\beta h) \times \frac{1}{\rho^2 \sin 2\beta h \rho}$$

$$A^-(\rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{\varphi}^-}{\partial x}(\rho, 0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) \times \frac{1}{\rho^2}$$

$$B^-(\rho) = -\frac{1}{\rho \sin 2\beta h \rho} \frac{\partial \hat{\varphi}^-}{\partial x}(\rho, 2\beta h) + \frac{1}{\rho \tan \beta 2\beta h \rho} \frac{\partial \hat{\varphi}^-}{\partial x}(\rho, 0) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) \times \frac{1}{\rho^2 \tan \beta 2\beta h \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 2\beta h) \times \frac{1}{\rho^2 \sin 2\beta h \rho}$$

Réintroduisant ces valeurs dans  $\hat{\varphi}^+$  et  $\hat{\varphi}^-$ , puis en sommant on trouve dans le plan des variables initiales :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\sin \beta \rho y}{\rho \sin 2\beta h \rho} \left[ \frac{\partial \hat{\varphi}^+}{\partial x}(\rho, 2\beta h) e^{\rho x} - \frac{\partial \hat{\varphi}^-}{\partial x}(\rho, 2\beta h) e^{-\rho x} \right] + \frac{\sin \beta \rho (2h-y)}{\rho \sin 2\beta h \rho} \left[ \frac{\partial \hat{\varphi}^+}{\partial x}(\rho, 0) e^{\rho x} - \frac{\partial \hat{\varphi}^-}{\partial x}(\rho, 0) e^{-\rho x} \right] d\rho \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 2\beta h) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\sin \beta \rho y}{2i\pi \rho^2 \sin 2\beta h \rho} (e^{-\rho x} - e^{\rho x}) d\rho + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\sin \beta \rho (2h-y)}{2i\pi \rho^2 \sin 2\beta h \rho} (e^{-\rho x} - e^{\rho x}) d\rho + \frac{\varphi(0, y)}{2i\pi} \left( \frac{e^{\rho x}}{\rho} + \frac{e^{-\rho x}}{\rho} \right) d\rho \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, y) \left( \frac{e^{\rho x}}{\rho^2} - \frac{e^{-\rho x}}{\rho} \right) d\rho \end{aligned}$$

Lorsque l'indice de croissance est nul, c'est à dire que les fonctions sont bornées, cette expression se réduit en posant  $q = i\rho$  à la relation bidimensionnelle déjà établie :

$$\varphi = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iq(x-\xi)}}{q \operatorname{sh} 2\beta h q} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi, 2\beta h) \operatorname{sh} \beta q y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi, 0) \operatorname{sh} \beta q (2h-y) \right] dq d\xi$$

# NOMENCLATURE DES PLANCHES

N° de planche

ADAPTATION DES PARCIS VERTICALES ( $\bar{v} = .246, c_L = .6, \lambda = 4.3$ )	-1-
EFFET DE PARCIS LATERALES PLANES	
-Blocage de volume en fonction de h(hauteur/largeur de veine)	-2-
-Blocage de volume en fonction de la porosité des parois horizontales	-3-
-Blocage de sillage en fonction de la porosité des parois horizontales	-4-
-Blocage de volume en fonction de l'abscisse x	-5-
-Portance en fonction de l'abscisse	-6-
-Portance en fonction de la porosité	-7-
COEFFICIENTS DE PONDERATION	
-Vitesses longitudinales $I_{1n}$	-8-
-Vitesses verticales $I_{2n}$	-9-
-Gradients de vitesses verticales $I_{3n}$	-10-
-Gradients de vitesses longitudinales $I_{4n}$	-11-
COEFFICIENTS DE PRESSIONS MESURES	-12-
GOMETRIE DE LA VEINE	-13-
SCHEMATISATION MAQUETTE	-14-
AUTO-CONVERGENCE DU MACH	
-Itération directe	-15-
-Méthode accélérée	-16-
COUDE DE TRAINÉE ( $C_a$ ) EN FONCTION DU MACH	-17-
COEFFICIENT DE PORTANCE EN FONCTION DE L'INCIDENCE	-18-
COMPARAISON METHODE NOUVELLE ET CLASSIQUE	-19-

ADAPTATION DES PAROIS VERTICALES

en présence d'un tourbillon en U

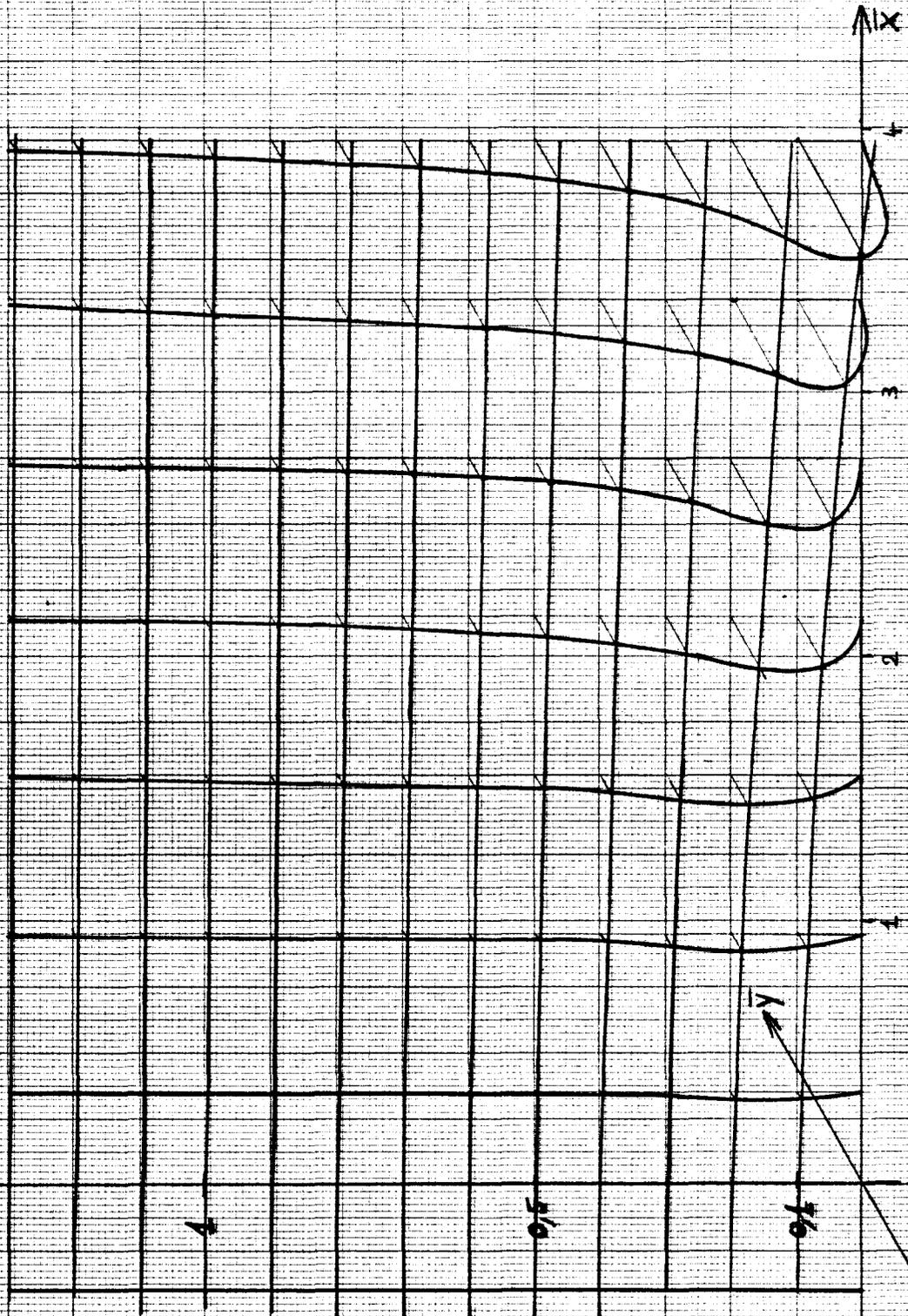


Planche 1

$$\bar{z} = \frac{A}{b} = 0.846$$

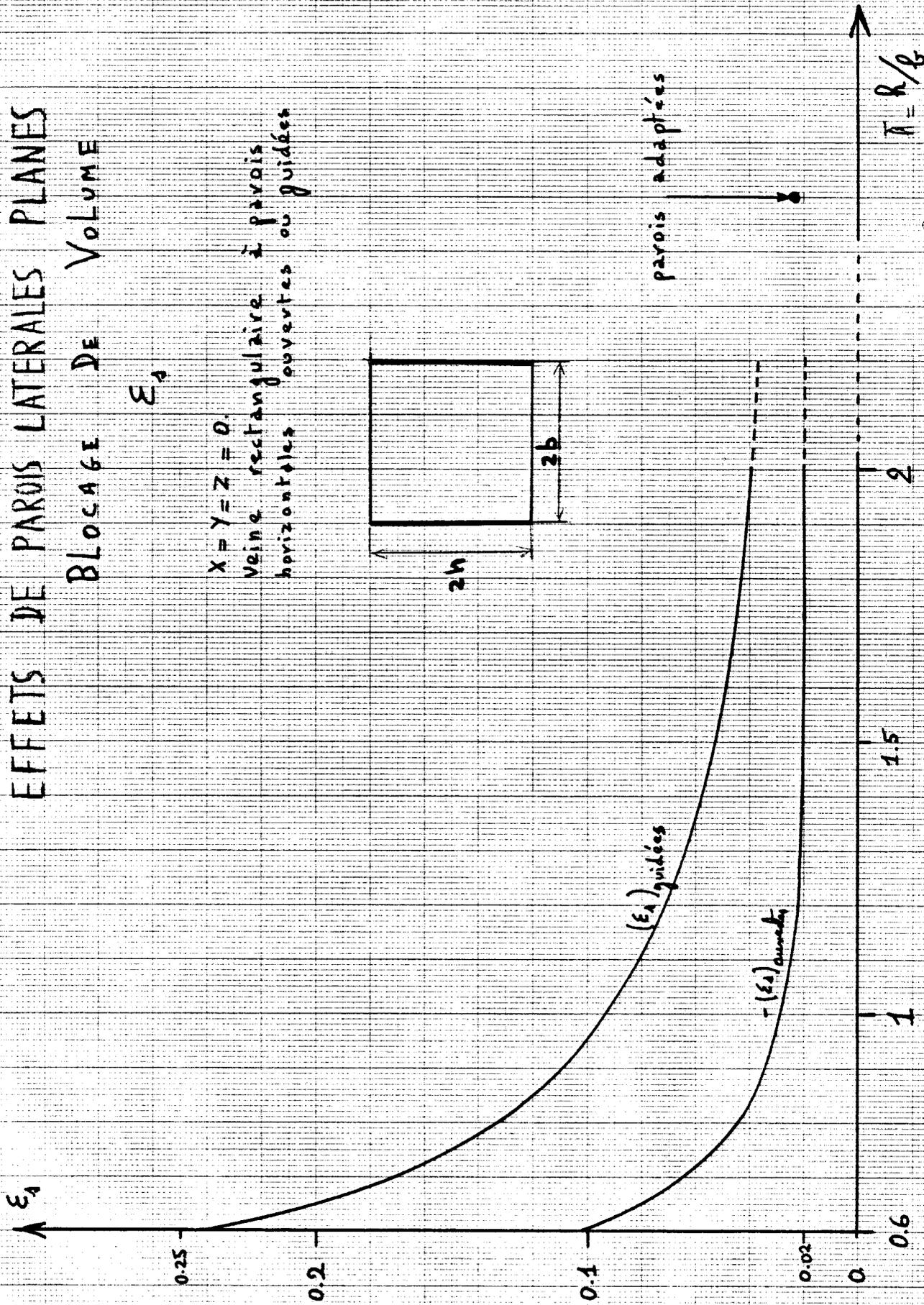
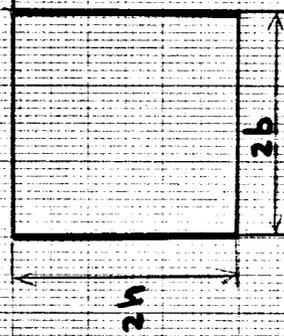
$$C_1 = 0.6$$

$$\lambda = 4.3$$



EFFETS DE PAROIS LATÉRALES PLANES  
BLOCAGE DE VOLUME  $\epsilon_A$

$X = Y = Z = 0$ .  
Veine rectangulaire à parois  
horizontales ouvertes ou guidées



parois adaptées

planimétrie

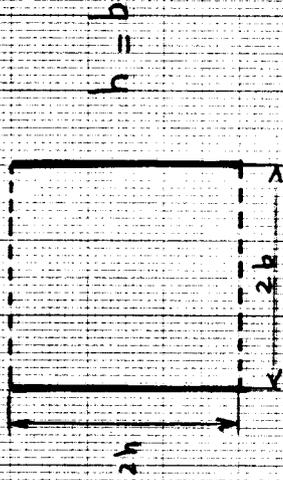
EFFETS DE PAROIS LATÉRALES PLANES

BLOCAJE DE VOLUME

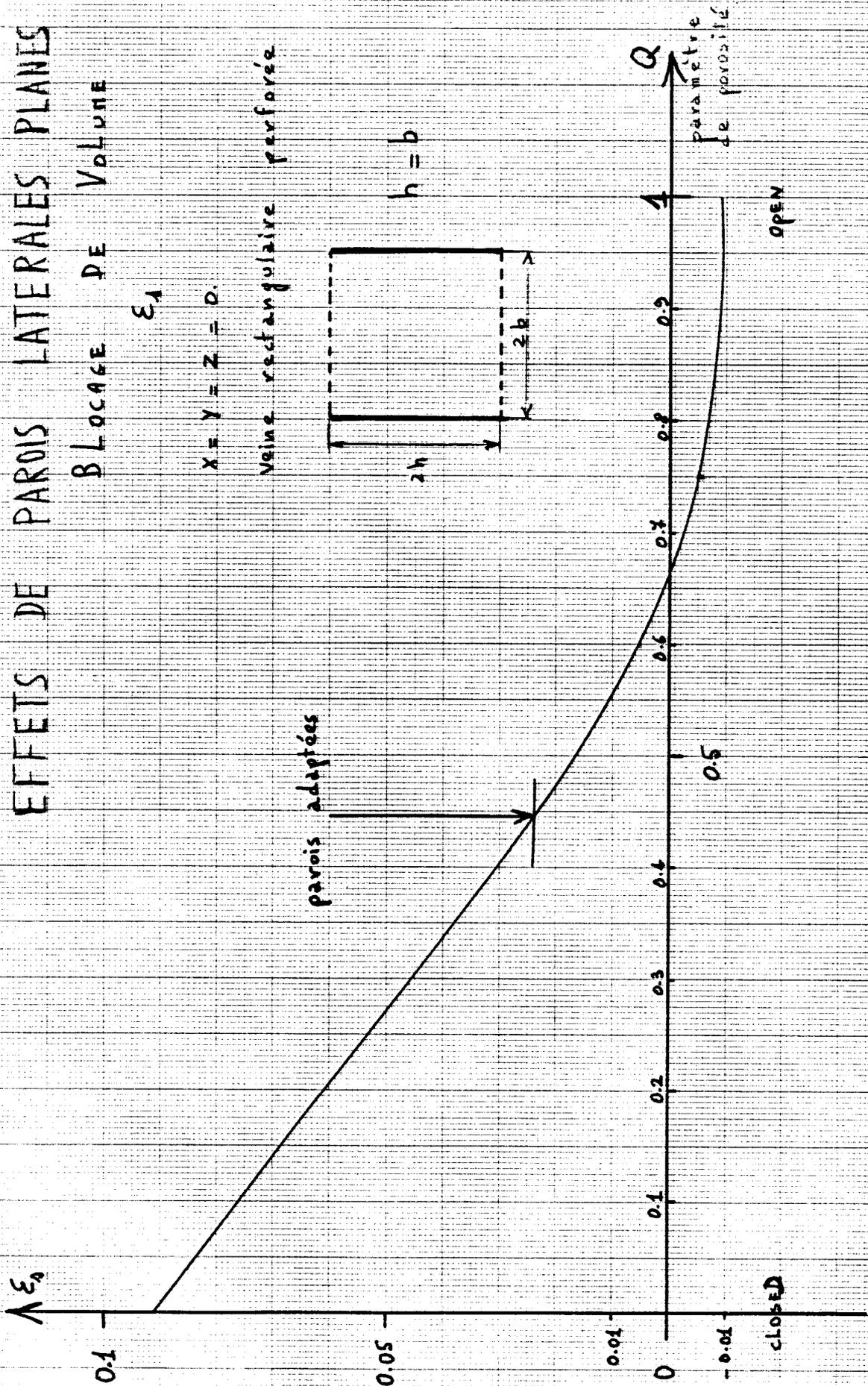
$\epsilon_1$

$x = y = z = 0.$

veine rectangulaire perforée



parois adaptées

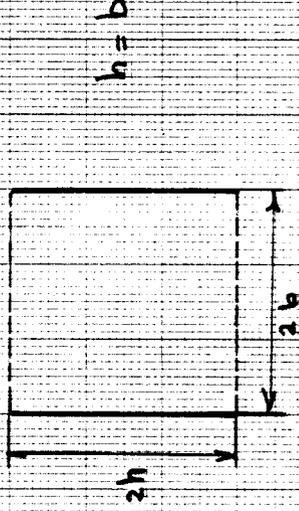


plaque - B

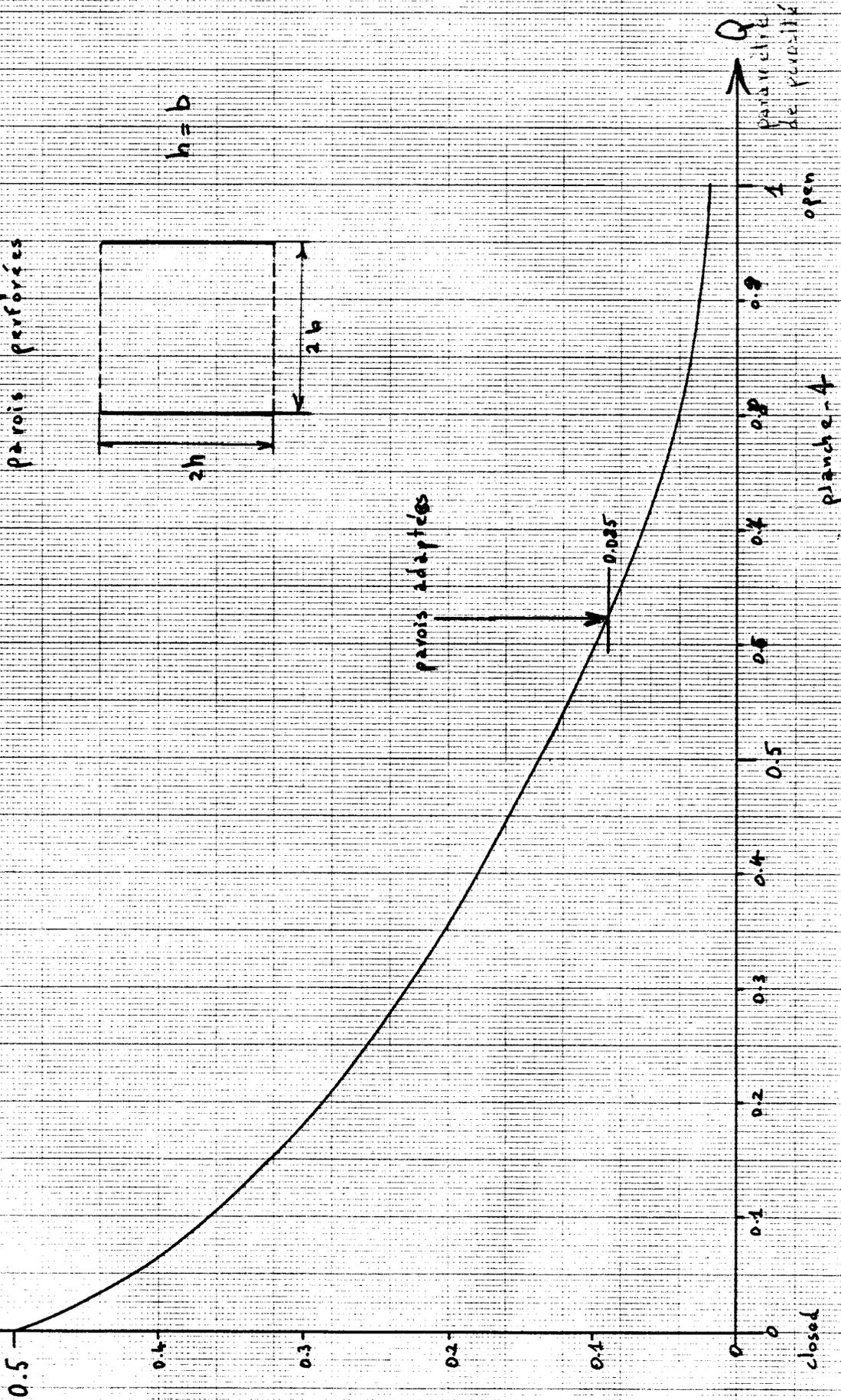


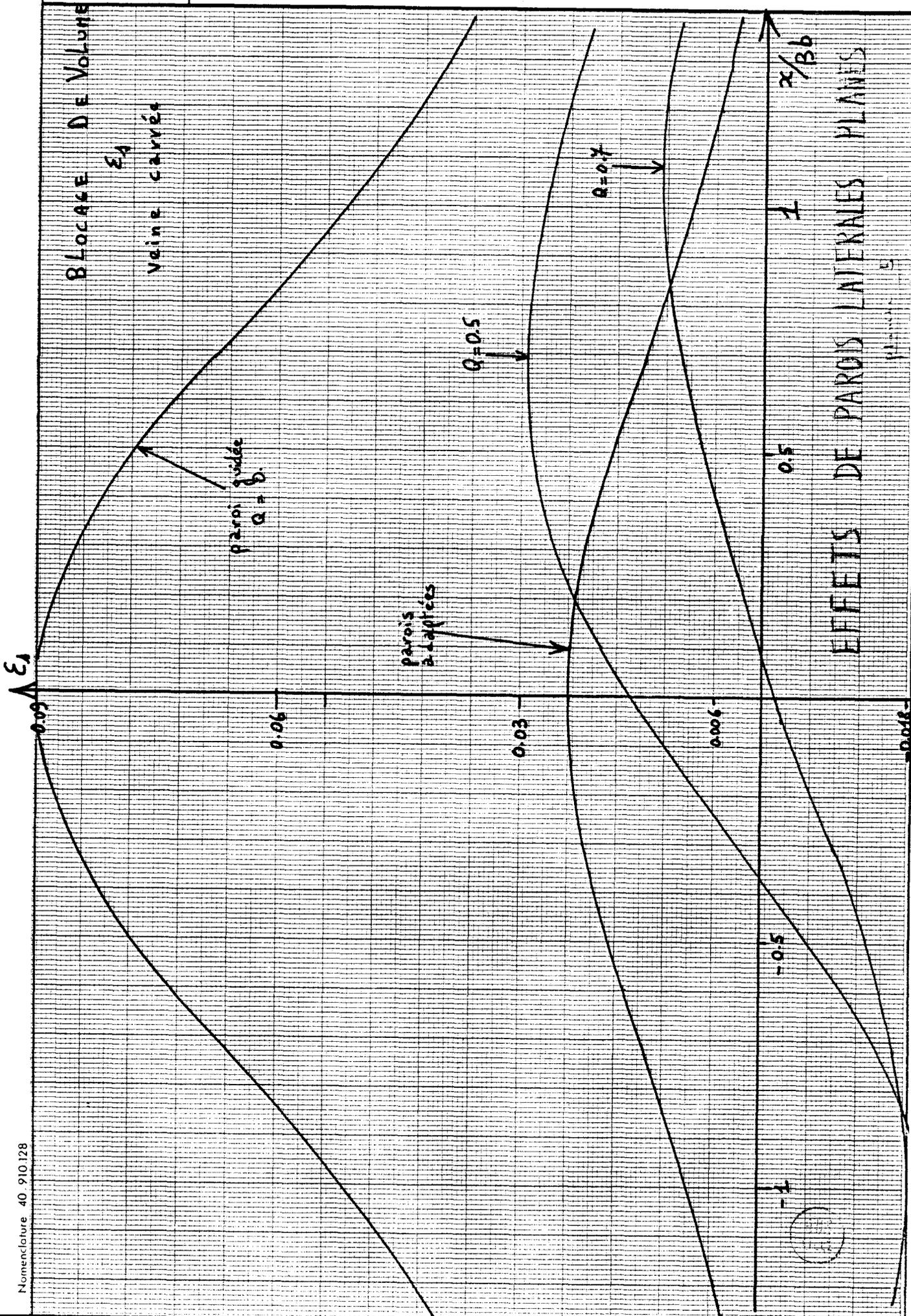
EFFETS DE PAROIS LATÉRALES PLANES  
BLOCAGE DE SILLAGE

voiles rectangulaires à  
parois perforées

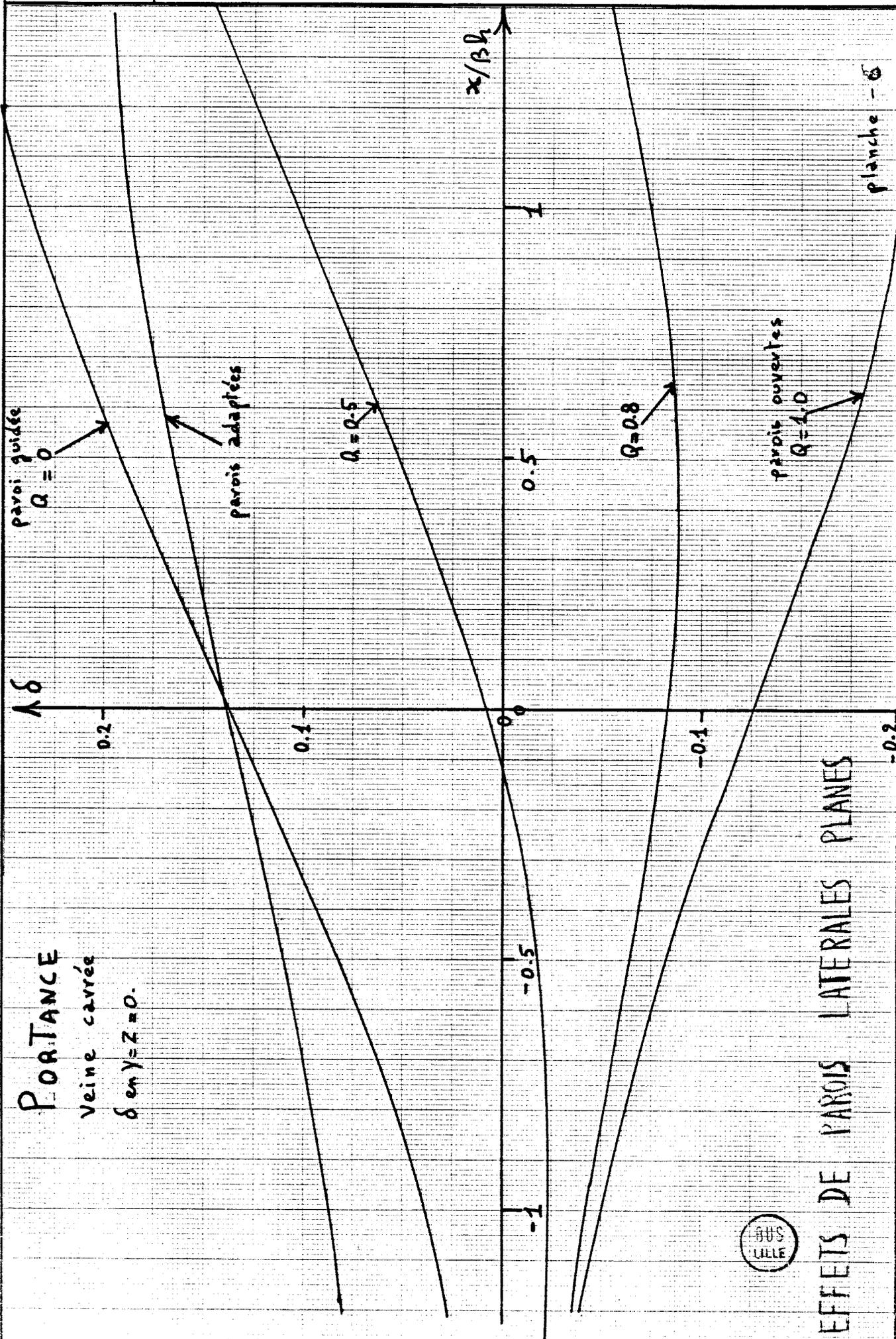


$\sqrt{\epsilon_{w \max}(x) - \epsilon_{w \min}(x)}$





Nomenclature 40 910.128



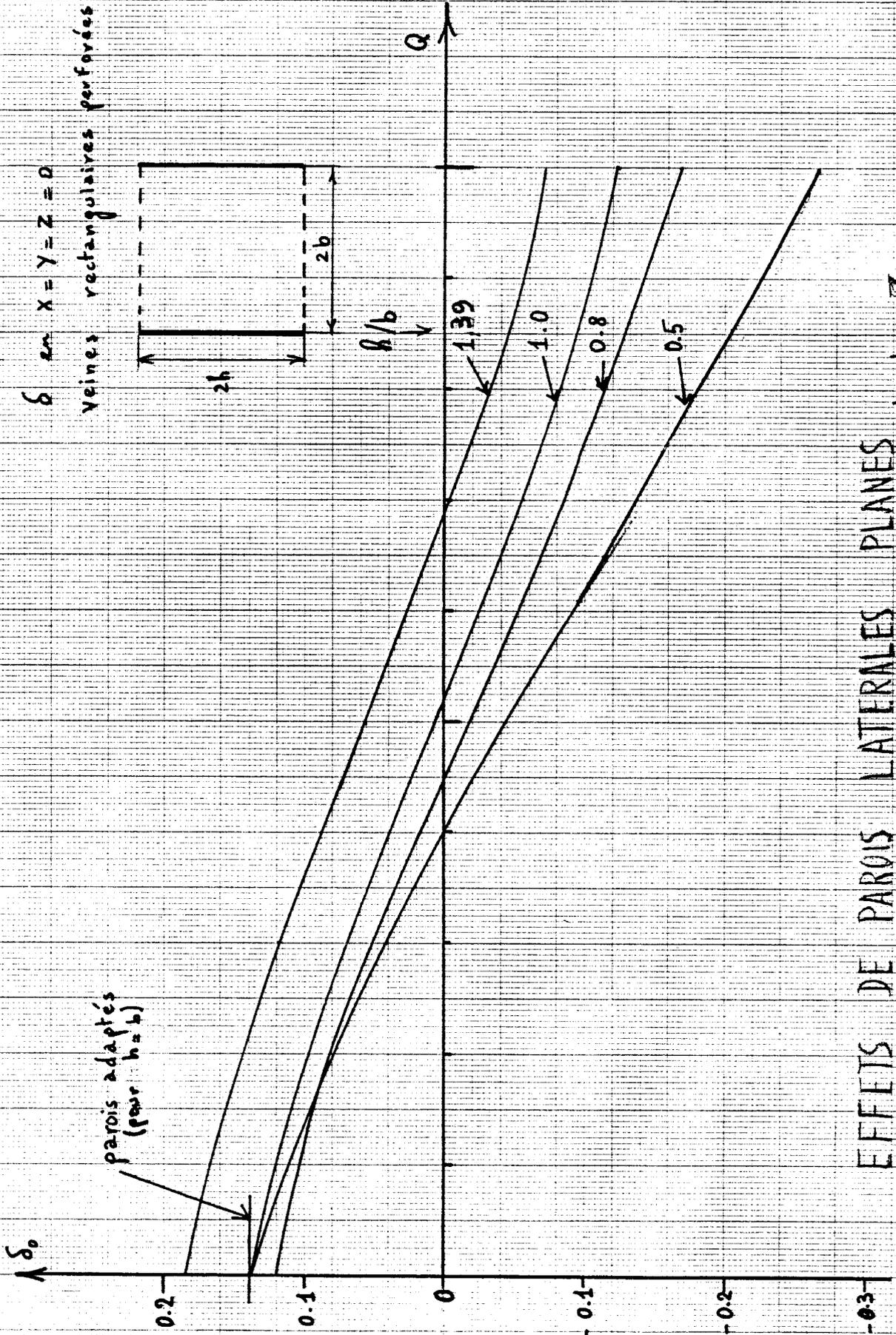
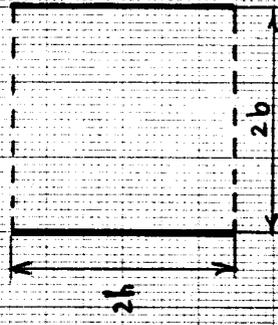
**POR.TANCE**  
 Veine carrée  
 $\delta \text{ en } \gamma = Z = 0.$



PORTANCE

$\delta$  en  $X = Y = Z = 0$

Veines rectangulaires perforées



parois adaptés  
(pour  $h=b$ )

EFFETS DE PAROIS LATÉRALES PLANES planche 7

# COEFFICIENTS DE PONDERATION

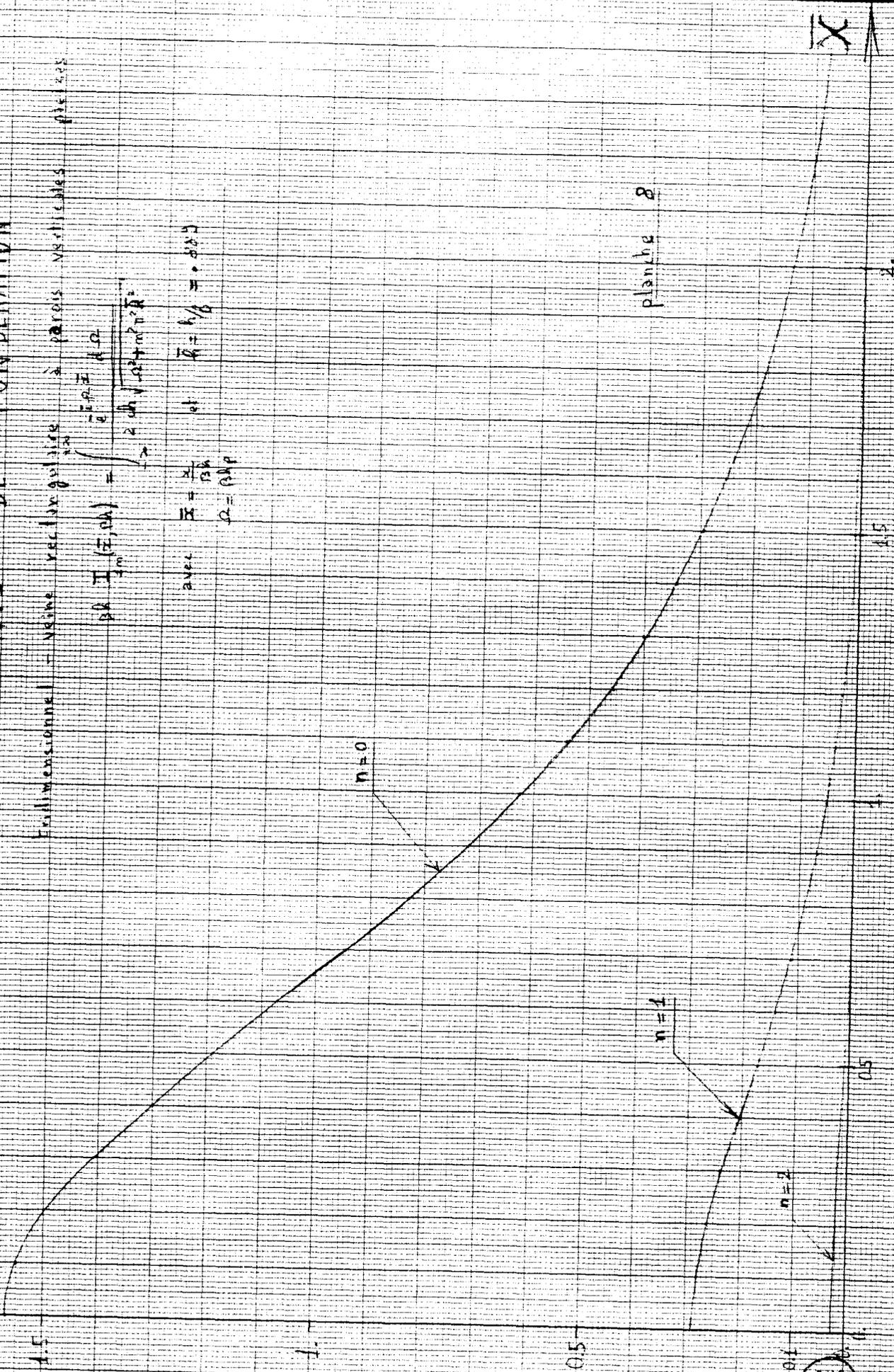
Eximensionnel - même rectification à parois verticales p=225

$$pR \int_{-a}^a I_n(z, \rho a) dz = \int_{-a}^a \frac{I_n(z, \rho a)}{2 \sqrt{a^2 - z^2}} dz$$

avec  $\bar{z} = \frac{z}{\rho a}$  et  $\bar{a} = \frac{a}{\rho} = 0.029$   
 $\Omega = \rho a p$

planche 8

$\sqrt{pR} I_n(z, \rho a)$



ONERA  
1973

COEFFICIENTS DE PONDERATION

Prédimensionnel - Veine rectangulaire  
parois verticales planes

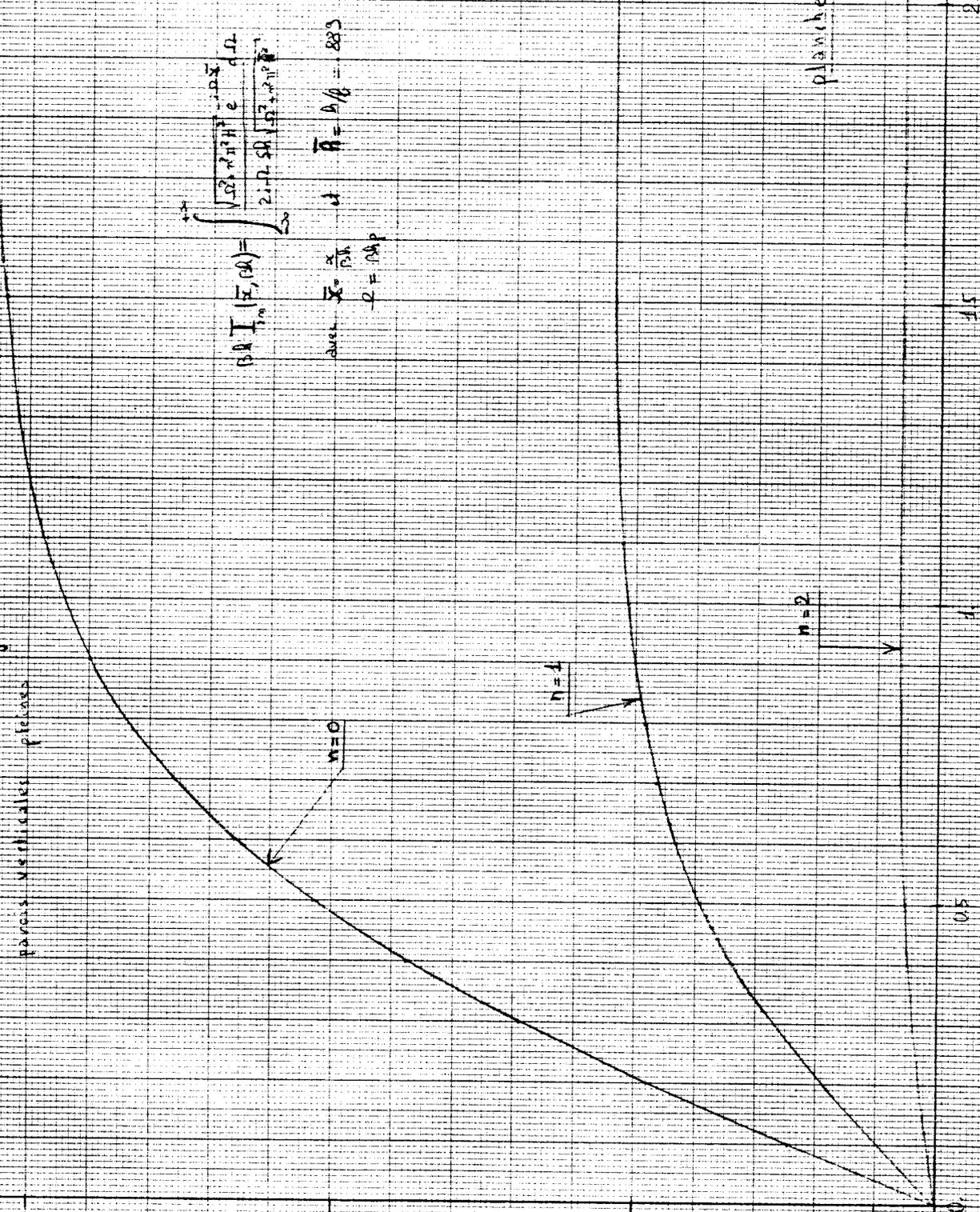
$A_{2n} I_{2n}(\bar{x}, \rho)$

1.5

1.

0.5

0



$$A_{2n} I_{2n}(\bar{x}, \rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \pi^2 H^2} e^{-\rho \sqrt{x^2 + \pi^2 H^2}}}{2i - \rho \sqrt{x^2 + \pi^2 H^2}} dx$$

avec  $\bar{x} = \frac{x}{\rho H}$  et  $\rho = \rho H$

$\bar{H} = H/\rho = 883$

planche 3

2.

1.5

1.

0.5

0

BUS  
ENCE

COEFFICIENTS DE PONDERATION

tridimensionnel - veine rectangulaire  
parois verticales pleines

$$\beta_{3D}^2 I_{3D}(\bar{x}, \bar{R}) = \int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} \frac{\sqrt{\bar{R}^2 + \eta^2} \eta^2 e^{-\eta \bar{x}}}{2 \beta \sqrt{\bar{R}^2 + \eta^2} \eta^2} d\eta$$

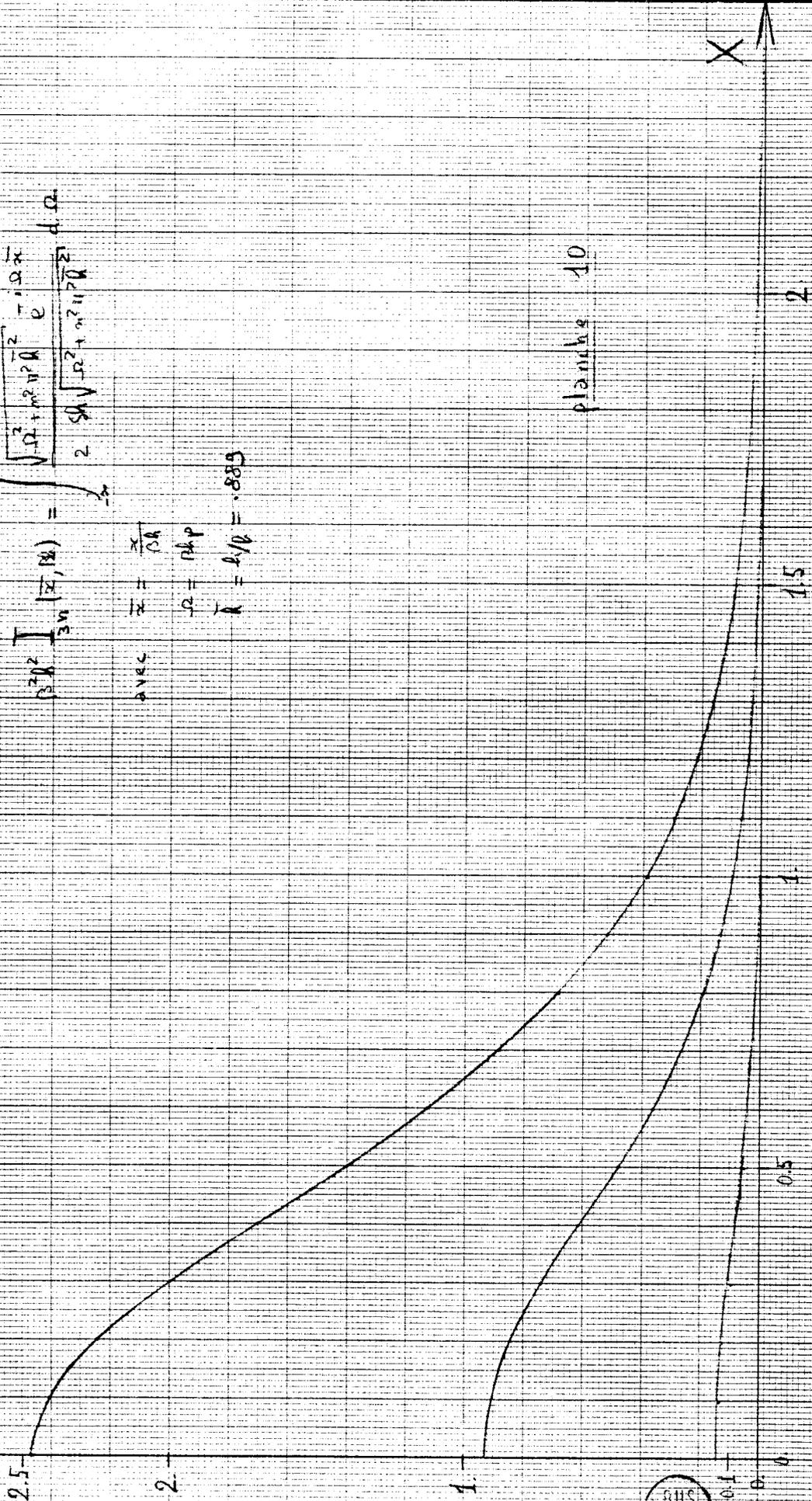
AVEC  $\bar{x} = \frac{x}{\beta R}$

$\beta = \beta_{0p}$

$\bar{R} = R/\beta = 0.889$

plans 40

$\beta_{3D}^2 I_{3D}(\bar{x}, \bar{R})$



COEFFICIENTS DE PONDÉRATION

(bidimensionnel) - veine rectangulaire  
paires verticales pleines

$$\beta^2 k^2 I_{4n}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i \rho e^{-i \rho x} d\rho}{2 \rho \sqrt{\Omega^2 + \rho^2}} d\Omega$$

avec  $\xi = \frac{x}{Bh}$

$\Omega = \rho h$

$\beta = \frac{h}{c} = 0.883$

Planches 11

$\beta^2 k^2 I_{4n}(\xi, \eta)$

1.5

1

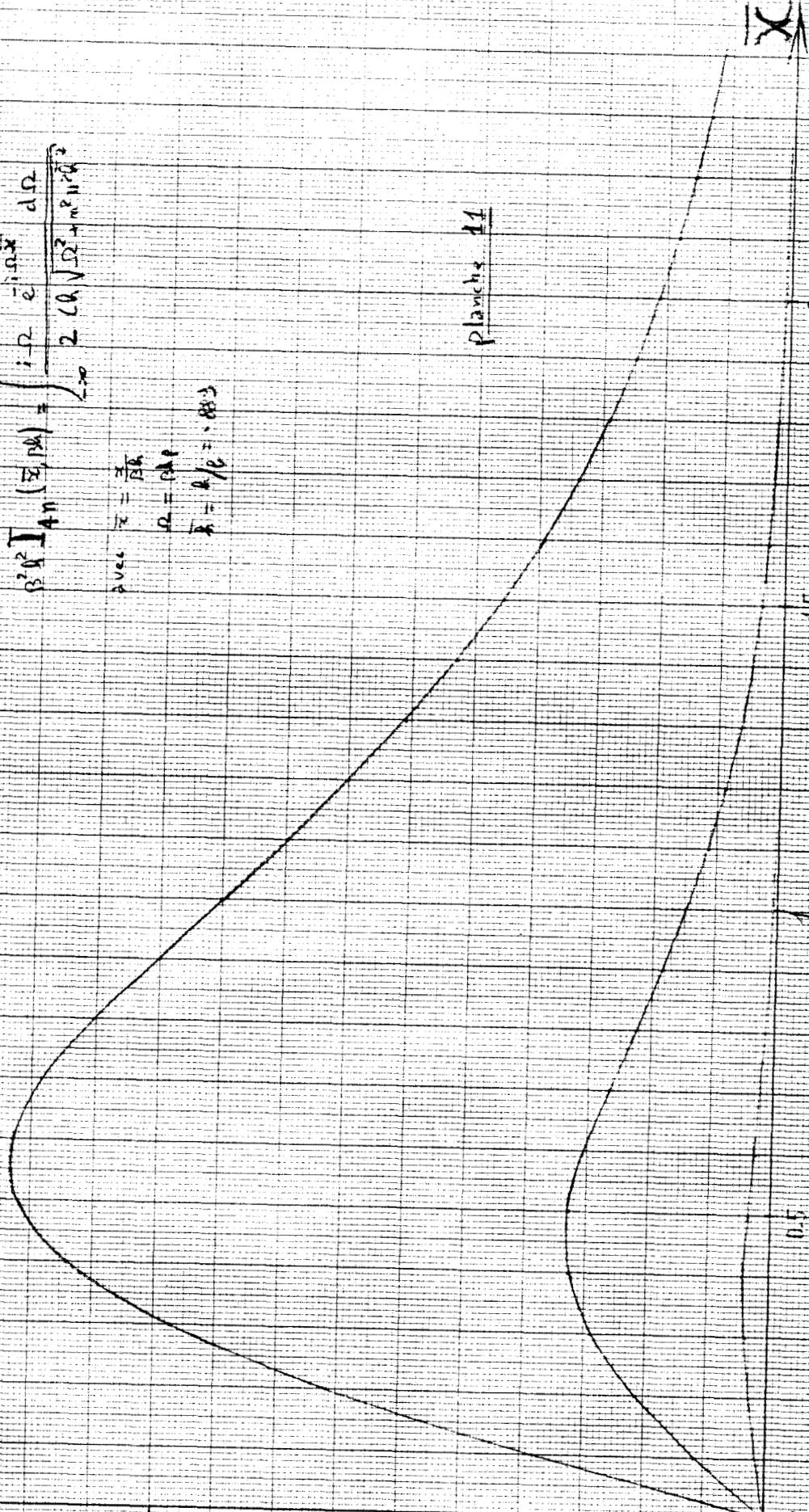
0.5

0.1

0.5

1.5

2.



513  
L116

Veine guidée avec Maquet M4  
 Essai N° 4390-1  
 y pour haut  
 x pour bas

M = 0.84  
 C<sub>2</sub> = 0.002

**ONERA**

ESSAIS A S3G1

Date :

Dessiné par :  
 F. I.

COEFFICIENTS DE PRESSION AUX PAVIS HAUT ET BASSE

Discontinuité des mesures par blocs de douze

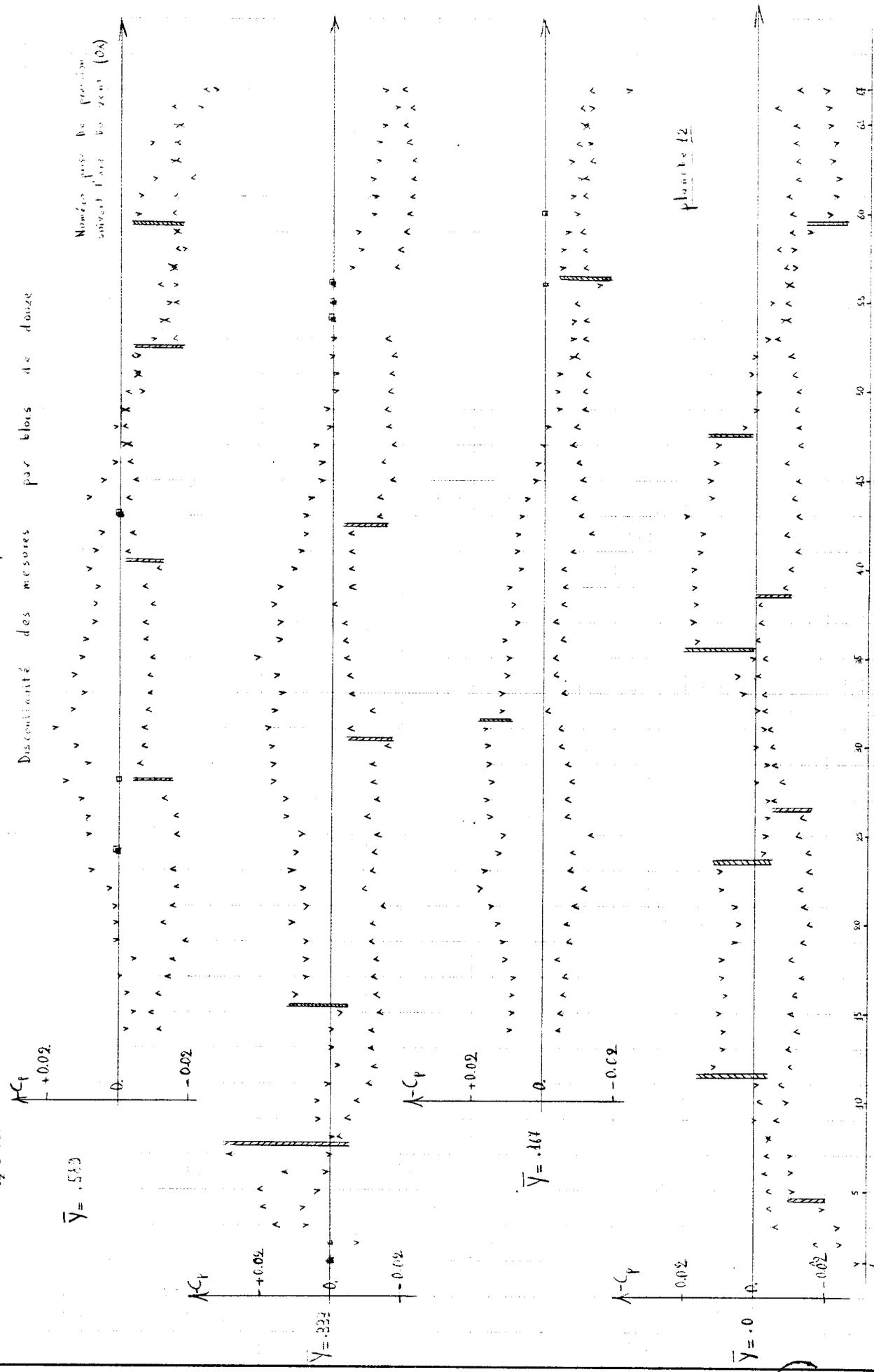


planche 12



X avec Moyenne 115 (pression) (moyenne) (moyenne)  
 + avec Vitesse (moyenne) (moyenne) (moyenne)

# ESSAIS A 336h

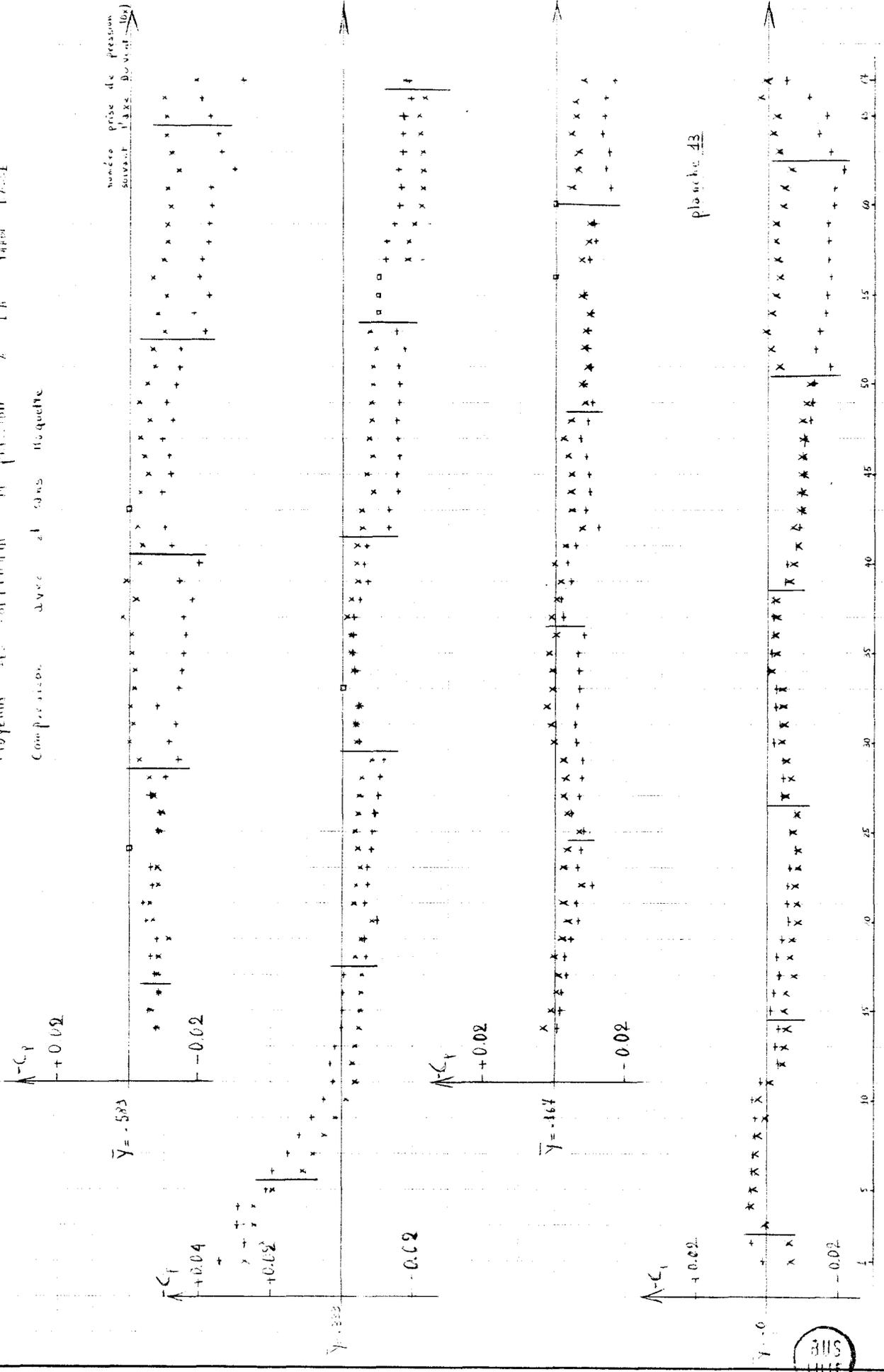
**ONERA**

Dessiné par : B. J.

Date :

Moyenne des coefficients de pression à la face avant

Comparaison avec et sans cloquette



planchette 43



DIFFERENCES  $C_p$  MIN MAX ET AWC MAQUETTE M2

(comparaison avec les  $C_p$  idéal par la méthode analytique et les exp. par rapport aux par. des ailes)

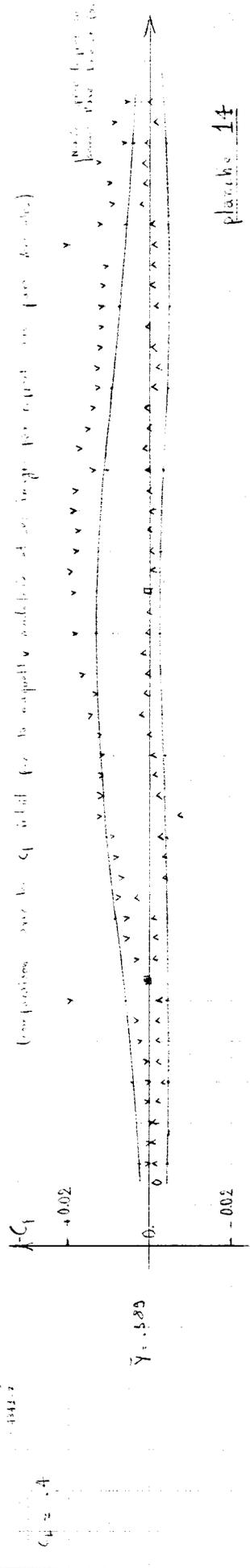
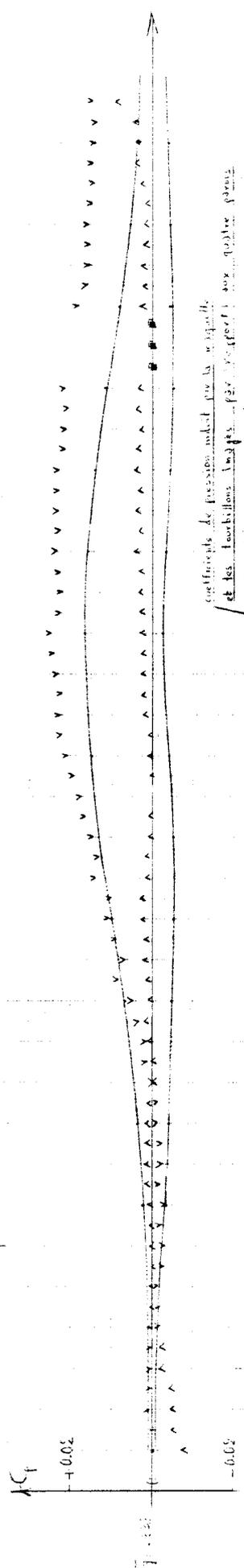
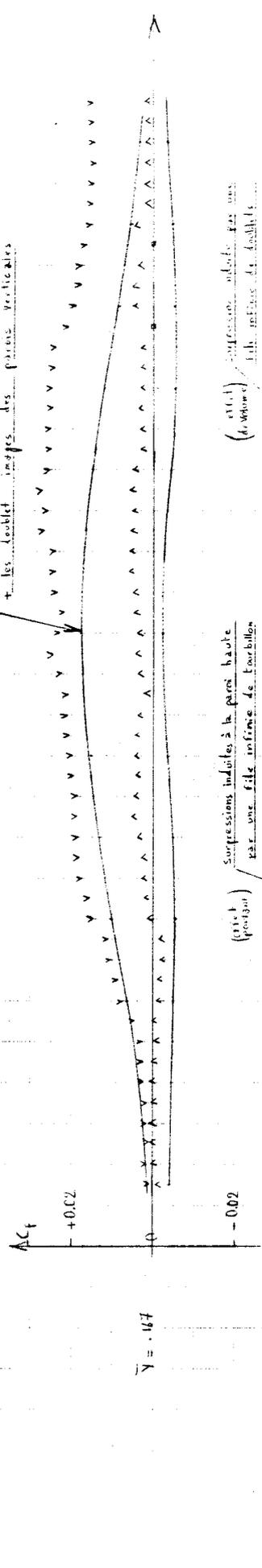


Planche 14



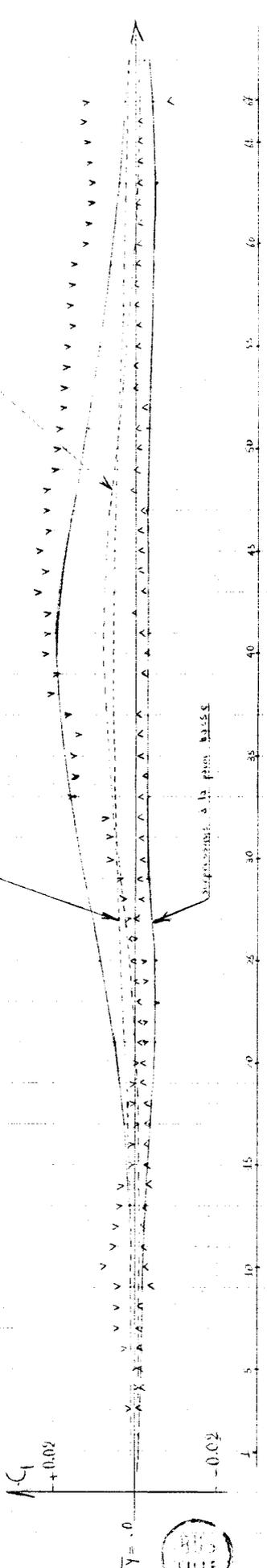
coefficients de pression induite par la wingtip et les tourbillons à l'arrière des ailes par rapport aux valeurs prévues + les tourbillons images des surfaces ventrières

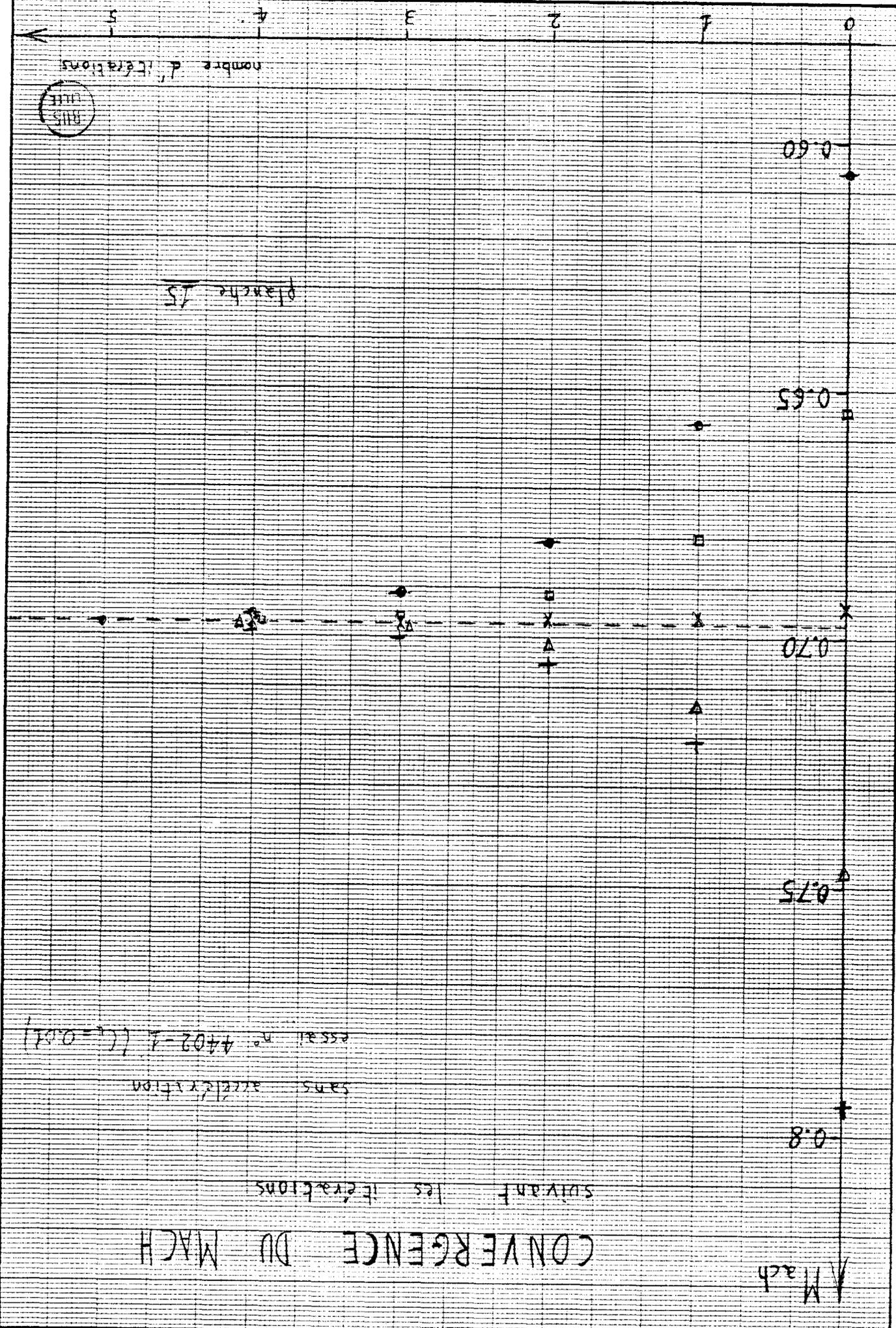


(a11) - surpression induite par une file inférieure de tourbillons

(a11) - surpression induite à la paroi haute par une file inférieure de tourbillons

(a11) - surpression induite à la paroi basse par une file inférieure de tourbillons





# CONVERGENCE DU MACH

suivant les itérations

sans accélération

essai n° 4402-1 ( $\epsilon = 0.01$ )

planche 15

nombre d'itérations



Mach

# CONVERGENCE DU MACH

suivant les itérations

Méthode accélérée

essai n° 402-1 ( $C_L = 0.01$ )

0.8

0.75

0.70

0.65

0.60

planche 16

nombre d'itérations

Nomenclature 40.910.128

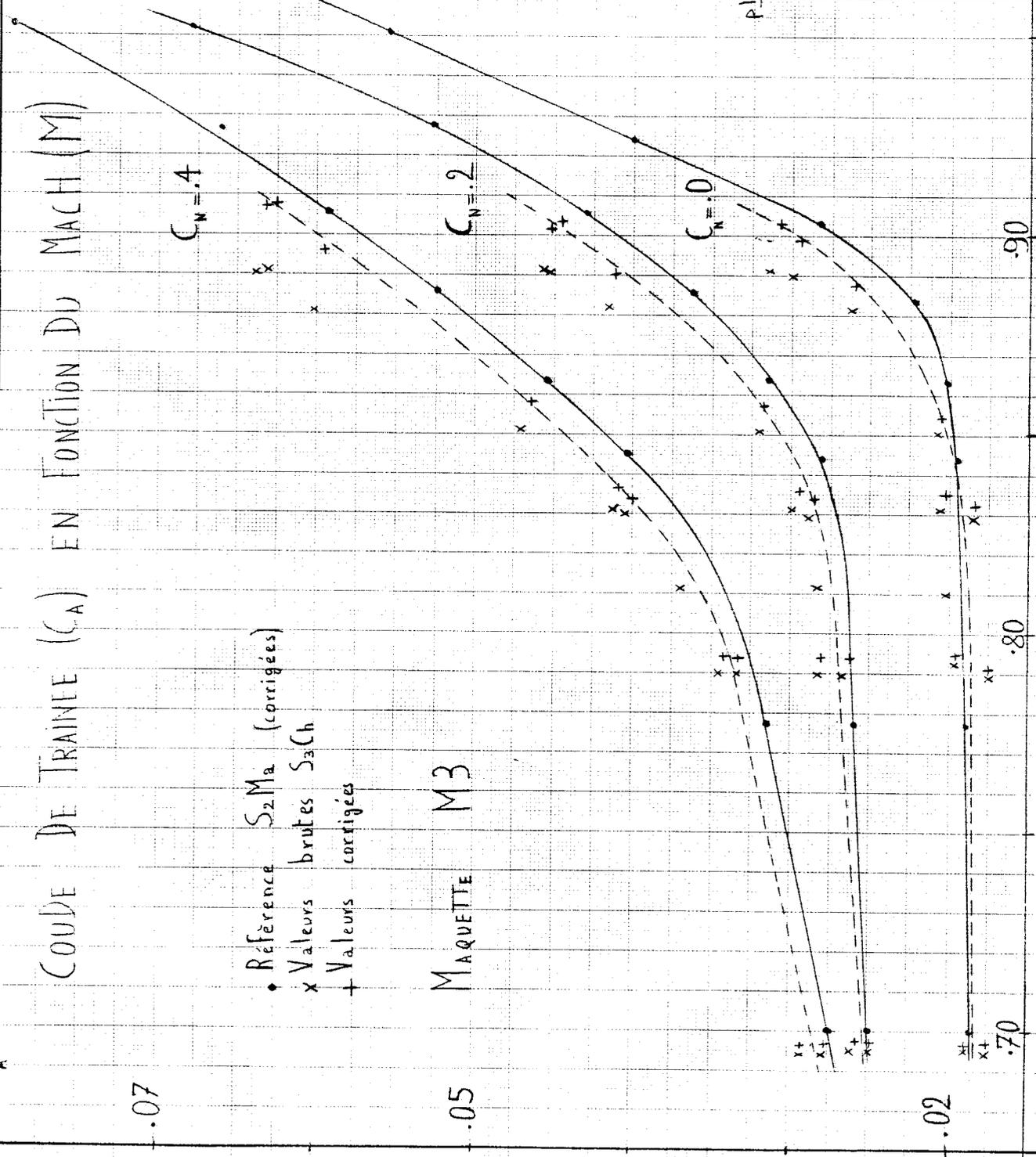


COUDE DE TRAINÉE ( $C_A$ ) EN FONCTION DU MACH (M)

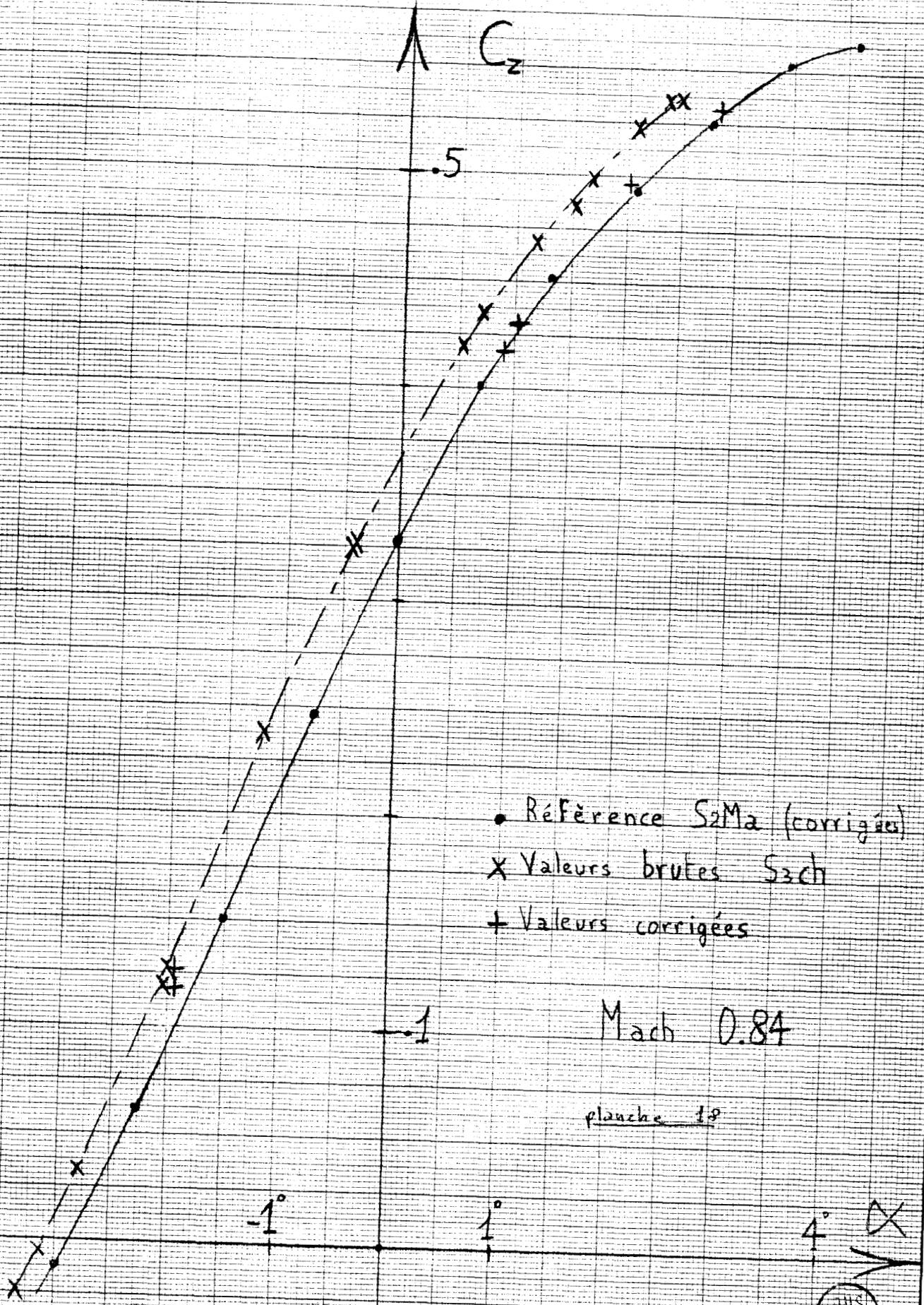
• Référence  $S_2 M_a$  (corrigees)  
 x Valeurs brutes  $S_3 Ch$   
 + Valeurs corrigees

MAQUETTE M3

Planche 17



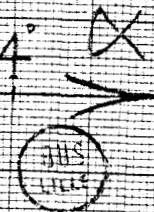
# PORTANCE EN FONCTION DE L'INCIDENCE

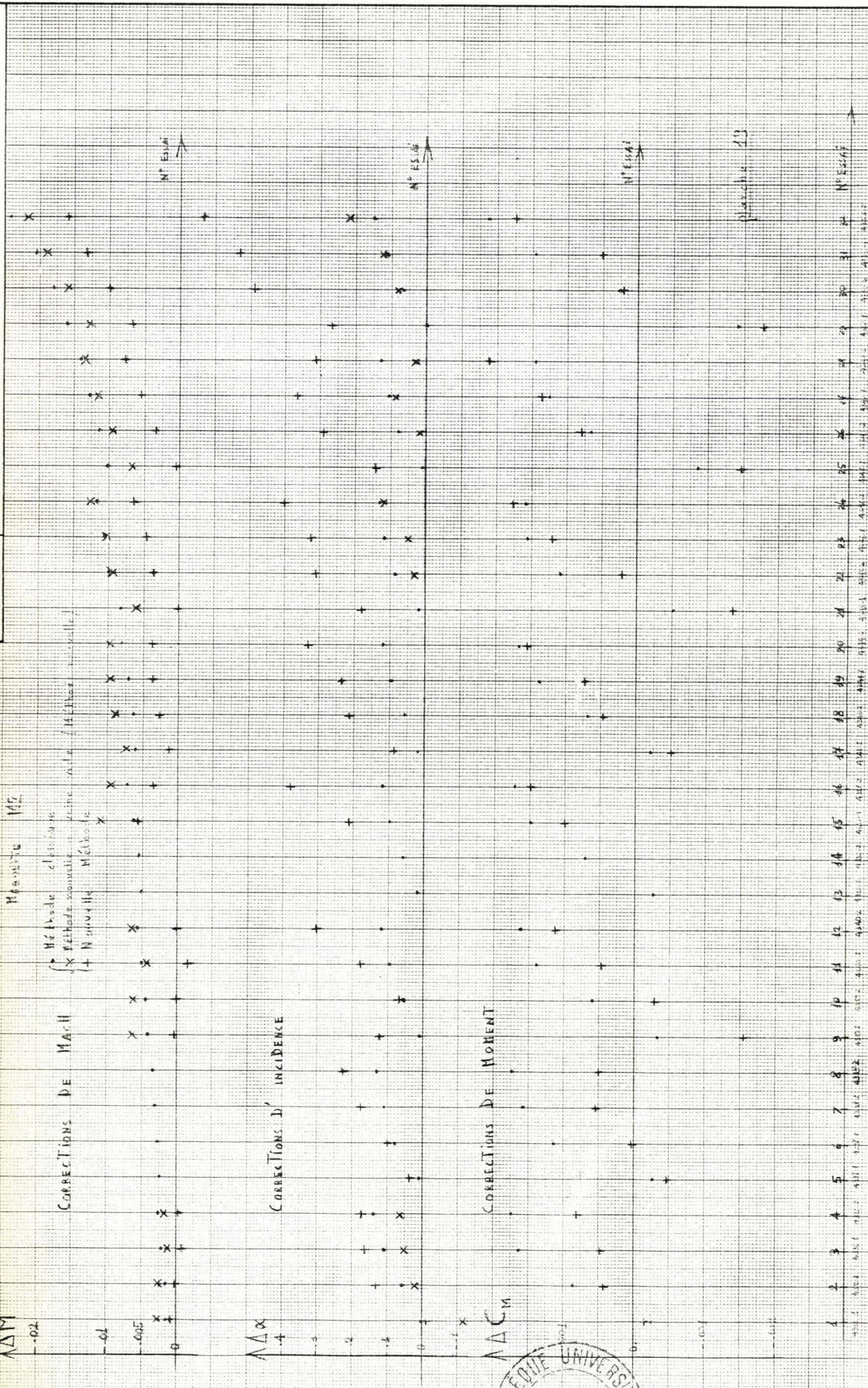


• Référence  $S_2Ma$  (corrigées)  
x Valeurs brutes  $S_3ch$   
+ Valeurs corrigées

Mach 0.84

planche 18





Plaque 13

N° 10

N° 11

N° 12

N° 13

N° 14

N° 15

N° 16

N° 17

N° 18

N° 19

N° 20

N° 21

N° 22

N° 23

N° 24

N° 25

N° 26

N° 27

N° 28

N° 29

N° 30

N° 31

N° 32

N° 33

N° 34

N° 35

N° 36

N° 37

N° 38

N° 39

N° 40

N° 41

N° 42

N° 43

N° 44

N° 45

N° 46

N° 47

N° 48

N° 49

N° 50

N° 51

N° 52

N° 53

N° 54

N° 55

N° 56

N° 57

N° 58

N° 59

N° 60

N° 61

N° 62

N° 63

N° 64

N° 65

N° 66

N° 67

N° 68

N° 69

N° 70

N° 71

N° 72

N° 73

N° 74

N° 75

N° 76

N° 77

N° 78

N° 79

N° 80

N° 81

N° 82

N° 83

N° 84

N° 85

N° 86

N° 87

N° 88

N° 89

N° 90

N° 91

N° 92

N° 93

N° 94

N° 95

N° 96

N° 97

N° 98

N° 99

N° 100

