

50376
1979
7

N° d'ordre : 459

50376
1979
7

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES

MATHEMATIQUES

par

Hassan H A G E C H E H A D E

SUR



**UNE THEORIE GENERALE
DES COQUES CYLINDRIQUES**

Soutenue le 18 SEPTEMBRE 1979 devant la Commission d'Examen

Membres du jury : MM. ZEYTOUNIAN
FLAMME
BONTHOUX
PARSY
SAVE

Président
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Examineur

A AMAL et HADY

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur ZEYTOUNIAN qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Ma gratitude va à Monsieur FLAMME, qui m'a constamment aidé dans ce travail malgré ses charges absorbantes, en me prodigant ses conseils et son amitié.

Messieurs les Professeurs BONTHOUX et PARSY n'ont pas ménagé leur temps pour examiner mon travail, qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Monsieur le Professeur SAVE m'honore par sa présence dans mon jury malgré ses préoccupations, je l'en remercie sincèrement.

Mes remerciements vont également à la Direction de l'Ecole Nationale des Techniques Industrielles et des Mines de DOUAI, et au personnel de son département mécanique pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la réalisation de ce travail.

Je remercie sincèrement Mesdames LEFEBVRE, DUPAS et BRZEZNIAK pour leur dévouement au cours de la frappe du manuscrit.

PREMIERE PARTIE

THEORIE GENERALE
DES COQUES CYLINDRIQUES

R E S U M E

La théorie générale des coques, élaborée depuis un siècle par LOVE et KIRCHOFF, n'a pas connu un développement théorique important dans la mesure où la majorité des auteurs que nous connaissons (à part NAGHDI) ont utilisé l'hypothèse fondamentale de LOVE KIRCHOFF dans leurs travaux, hypothèse applicable uniquement au cas de coques minces.

Or le développement technologique actuel, et la présence des moyens informatiques importants, nécessitent une évolution fondamentale au niveau de la théorie des coques afin que cette théorie soit applicable avec une marge de sécurité appréciable, aux coques minces et épaisses.

Dans la première partie de ce mémoire nous posons la base d'une théorie générale de coques cylindriques, sans utiliser l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF, l'élaboration de cette théorie est effectuée par linéarisation des équations de l'élasticité tridimensionnelle, cette linéarisation nous permet en premier temps d'établir les expressions des déplacements et des contraintes en un point quelconque M de la coque, considérée comme un solide tridimensionnel, en fonction des composants u_i du déplacement du point M_0 correspondant de sa surface moyenne, et en deuxième temps nous établissons, sans aucune hypothèse supplémentaire, les équations d'équilibre reliant les composants u_i du déplacement de la surface moyenne de la coque et leurs dérivées aux charges extérieures ; ces équations sont selon le cas, celles de la membrane, ou celles plus générales de la flexion.

La résolution de ces équations est faite d'une façon explicite en ce qui concerne la théorie de la membrane, par contre la résolution de ces équations dans le cas de la flexion nécessite leur découplage par approximations successives. Ceci nous conduit à proposer un système de trois équations découplées dont la résolution peut se faire en décomposant les déplacements et les charges extérieures en double série trigonométrique, cette résolution nous permet de chiffrer l'écart entre notre théorie et les théories classiques.

Dans la deuxième partie nous proposons, comme application directe de notre théorie, une méthode de dimensionnement des appareils à pression soumis à des actions locales (supports de différentes formes etc...) étant donné que l'approche classique basée sur les travaux de ZICK (1951) est inapte à décrire correctement ce phénomène.

La réalisation d'une expérience en vraie grandeur nous permet la justification, d'une part de nos critiques à l'égard de la méthode de ZICK qui sert de base à la version actuelle des codes de construction des appareils à pression, et d'autre part de la méthode que nous proposons pour dimensionner de tels appareils

PREMIERE PARTIE

I - INTRODUCTION	1
II - CHAPITRE I : THEORIE GENERALE DES COQUES CYLINDRIQUES	
1.1 - INTRODUCTION -- GENERALITE	4
1.2 - COQUE CYLINDRIQUE ET REVOLUTION ASPECT GEOMETRIQUE ET NOTATIONS	5
1.3 - EQUATION DE L'ELASTICITE TRIDIMENSIONNELLE	8
1.4 - PRINCIPE DE LA METHODE	11
1.5 - HYPOTHESE - CHOIX DES ECHELLES	12
1.6 - RESOLUTION DU PROBLEME	15
1.7 - THEORIE DE LA MEMBRANE	40
1.8 - THEORIE GENERALE DE FLEXION DES COQUES CYLINDRIQUES	46
1.9 - CONCLUSION	56
III - CHAPITRE II : COMPARAISON AVEC LES THEORIES CLASSIQUES	58
2.1 - INTRODUCTION	58
2.2 - THEORIES CLASSIQUES DES COQUES MINCES	59
2.2.1 - APPROCHE SIMPLE DE DONNELL (1933) - TIMESHENKO (1934) - FLUGGE (1960)	59
2.2.2 - APPROCHES APPROFONDIES DE DONNELL (1976) FLUGGE (1969)	65
2.3 - THEORIES MODERNES DES COQUES MINCES	72
2.3.1 - THEORIES DE KOITER (1966)	72
2.3.2 - THEORIES DE NAGHDI (1963)	74
2.4 - COMPARAISON	76

IV - CHAPITRE III : RESOLUTION ANALYTIQUE	83
3.1 - INTRODUCTION	83
3.2 - EQUATIONS D'EQUILIBRE DECOUPLEES	84
3.3 - RESOLUTION ANALYTIQUE	93
3.3.1 - SOLUTIONS POLYNOMINALES EN X	93
3.3.2 - SOLUTIONS PARTICULIERES EN DOUBLE SERIE DE FOURIER	96
3.3.3 - SOLUTIONS PARTICULIERES EN EXPONENTIELLE DE X	118
3.3.4 - SOLUTIONS GENERALES DES EQUATIONS (3.7) SANS SECOND MEMBRE	118
3.4 - CONCLUSION	127
V - CONCLUSION	128
VI - BIBLIOGRAPHIE	130
VII - ANNEXE I : CONDITIONS DE COMPATIBILITE	133
VIII - ANNEXE II : CALCUL DES D_{mn}	137

INTRODUCTION

Dans cette partie nous allons élaborer et résoudre une théorie fondamentale des coques cylindriques, dont l'originalité réside dans sa généralité dans la mesure où à l'encontre des théories classiques, nous n'avons pas appliqué l'hypothèse de LOVE KIRCHOFF, qui fait loi dans les études des coques, élaborées depuis le siècle dernier par la totalité des auteurs que nous connaissons.

Le premier chapitre constitue une étude approfondie de la linéarisation des équations d'élasticité tridimensionnelle qui régissent le problème d'équilibre local des coques minces cylindriques, une extension possible de cette théorie aux problèmes des plaques, des coques sphériques et des coques de géométrie quelconque fera l'objet d'une étude similaire qui est en cours de publication.

La généralité de notre travail trouve sa confirmation dans le fait que partant des hypothèses non limitatives et justifiées physiquement, nous développons par linéarisation les équations d'élasticité tridimensionnelle, pour établir les expressions des déplacements, des déformations et des contraintes en un point quelconque de la coque en fonction des déplacements du point correspondant de la surface moyenne de cette coque, et qu'à partir des équations générales d'équilibre établies, nous retrouvons, selon les cas étudiés, la théorie de la membrane et la théorie de la flexion des coques.

Ainsi notre travail ne se limite pas à établir l'expression des déformations en un point quelconque de la coque comme l'on fait pour certains cas particuliers de changements FRIEDRICHS (1949), REISSNER (1952) NAGHDI (1957), et REISS (1960), ni à se limiter au cadre des théories classiques basées sur l'hypothèse de Love-Kirchoff, et dont les résultats sont comparables.

En effet la technique de linéarisation utilisée diffère de celle utilisée par REISSNER (1952), et par REISS (1960), par l'utilisation des échelles indépendantes pour les variables longitudinale, circonférentielle et radiale, les expressions des déformations et des contraintes trouvées coïncident pour les deux premier ordres avec celles des théories classiques, l'étude de l'ordre supérieur nous conduit à établir les équations générales de la flexion de coque.

En effet l'hypothèse fondamentale de Love-Kirchoff dans l'étude classique des plaques et des coques est similaire à celle de Bernoulli pour la flexion des poutres, elle revient à supposer qu'une ligne droite normale à la surface moyenne avant déformation reste droite et normale à cette surface après déformation, et de même longueur qu'auparavant, ce qui revient à dire que si les positions initiale et finale de la surface moyenne sont connues, la position d'un point quelconque de la coque peut être déterminée, cette hypothèse apporte donc une grande simplification car elle permet d'exprimer les déplacements, les déformations et les contraintes en un point quelconque de la coque d'une façon linéaire en fonction des déplacements du point correspondant de la surface moyenne, et de ramener ainsi le problème d'un cas tridimensionnel à un cas bidimensionnel.

Toutefois cette hypothèse suppose que les déformations et les contraintes tangentiels à une surface normale à la surface moyenne ainsi que la contrainte normale à cette surface moyenne sont négligeables, en effet le fait de supposer qu'une fibre droite et normale à cette dernière conserve la même longueur implique que la contrainte normale correspondante et que les déformations dues aux autres contraintes principales par le biais du coefficient de Poisson soient négligeables, de même le fait de supposer que cette fibre reste droite implique que les déformations dues aux contraintes tangentiels et à leurs variations sont négligeables, dans ces conditions les seules contraintes non nulles sont celles des directions longitudinale et circonférentielle ($\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}$).

Cependant les erreurs introduites par cette hypothèse sont souvent négligeables pour les coques dites minces, constituées d'un matériau isotrope et homogène et dont l'épaisseur est très petite par rapport aux autres dimensions géométriques de la coque et par rapport aux dimensions caractéristiques des charges.

C'est ainsi que nous examinons dans le deuxième chapitre ces théories classiques afin de développer leur comparaison fondamentale avec notre travail, en précisant l'esprit et la portée de chaque théorie.

En effet ces théories donnent pratiquement les mêmes résultats, car d'une façon générale leurs auteurs étudient l'équilibre global d'une partie de la coque et leurs équations sont similaires ainsi que les résultats qu'elle donnent, leurs différences, en général négligeables, proviennent surtout de la simplification de certains termes à des stades différents du calcul notamment au stade de l'évaluation des déformations.

Dans le troisième chapitre nous développons une méthode générale de séparation des inconnues pour aboutir à un système de trois équations découplées reliant respectivement la composante radiale de déplacement aux charges extérieures et les deux autres composantes v et w à u , ce qui nous permet d'examiner les solutions analytiques possibles, notamment en développant le déplacement sous la forme d'une double série trigonométrique. Les résultats du calcul effectué sur des exemples pratiques nous aident à chiffrer l'écart entre notre théorie et les théories existantes, en particulier l'examen des ordres de grandeur des termes intervenant dans les équations d'équilibre nous permet de définir le domaine de validité de chaque théorie et sa portée.

Enfin nous mentionnons les axes d'extension possible de notre théorie, dans le domaine fondamental de linéarisation et dans les domaines appliqués de sa résolution numérique.

CHAPITRE I

THÉORIE GÉNÉRALE DES COQUES CYLINDRIQUES

1.1. - INTRODUCTION - GENERALITES

Les déformations d'une coque cylindrique en régime élastique sont solutions exactes des équations de la théorie élastique tridimensionnelle compatibles avec les conditions aux limites propres à chaque problème. Malheureusement, on ne peut, à l'heure actuelle, obtenir ces solutions exactes.

Les théories classiques, appliquées aux coques minces, fournissent une solution approchée au problème précédent. Ces théories reposent d'une part sur l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF décrite précédemment, et d'autre part sur la modification de l'expression des déformations, obtenue en tenant compte de la courbure locale de la coque. Il en résulte une gamme étendue de théories dites "de coques minces" proposées par les différents auteurs (5), (7), (19), (20) dont les solutions sont peu différentes, parce que toujours basées sur l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF.

Pour tenter d'élaborer une théorie générale, valable pour les coques minces et épaisses, nous procédons d'abord à une linéarisation particulière des équations d'élasticité tridimensionnelle. Ceci nous permettra d'établir les expressions des déplacements, déformations et contraintes en un point quelconque de la coque, en fonction des déplacements du point correspondant de la surface moyenne de la coque, le problème initial sera ainsi ramené à un problème bidimensionnel.

...

La technique de linéarisation proposée nous conduit à distinguer trois intervalles d'approximation, les résultats correspondant aux deux premiers intervalles s'identifiant aux résultats classiques pour les contraintes et les déformations longitudinales et circonférentielles, ils définissent en outre les valeurs admissibles pour les contraintes et déformations radiales non accessibles aux théories classiques. Les résultats correspondant au troisième intervalle apportent des corrections non linéaires aux résultats précédents.

Une fois que nous avons établi l'expression des contraintes, déplacements et déformations en un point quelconque M en fonction des déplacements du point correspondant M_0 de la surface moyenne, nous intégrons selon l'épaisseur les équations locales d'équilibre pour établir les équations différentielles dont la solution donne les composants du déplacement du point M_0 de la surface moyenne, cette démarche nous permet d'élaborer la solution générale du problème dans le cas de la théorie de la membrane, sans émettre aucune hypothèse supplémentaire, et de déduire des équations générales pour la théorie de flexion des coques dont la simplification nous conduit à la théorie classique établie par LOVE, TIMOSHENKO, DONNELL, FLUGGE, etc

1.2. - COQUE CYLINDRIQUE DE REVOLUTION : ASPECT GEOMETRIQUE ET NOTATIONS

Dans un système de coordonnées cylindriques (θ, x, R) , nous prenons pour surface moyenne de la coque, la surface d'équation $r = R$, dans laquelle R désigne le rayon moyen de la coque. Cette surface est limitée par les plans $x = 0$ et $x = L$, L représentant la longueur de la coque. Celle-ci est constituée de l'ensemble des points $M(\theta, x, r)$ tels que :

$$r = R + z \quad \text{avec} \quad z \in [-h, +h] ,$$

h désignant la demi-épaisseur de la coque. Figure (1.1.)

Nous repérons les déformations et les contraintes en un point $M(\theta, x, r)$ quelconque dans un système d'axe local (e_1, e_2, e_3) .

e_1 est le vecteur unitaire tangent à la circonférence perpendiculaire à l'axe ox , passant par le point M et dirigé dans le sens trigonométrique par rapport à l'axe ox ,

e_2 est le vecteur unitaire dirigé selon ox

e_3 est le vecteur unitaire radial dirigé vers l'extérieur de la coque.

...

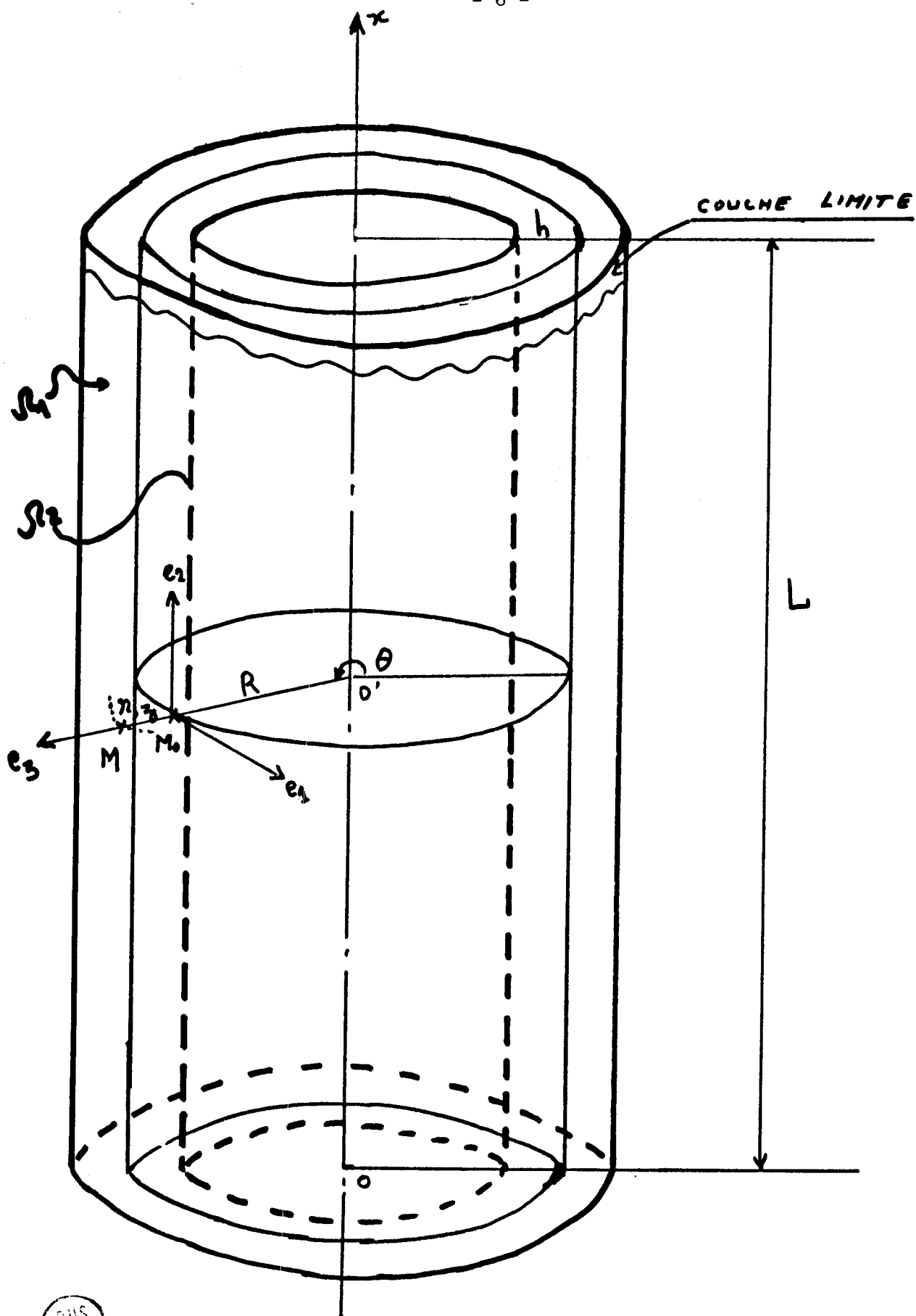


FIG. 1.1.

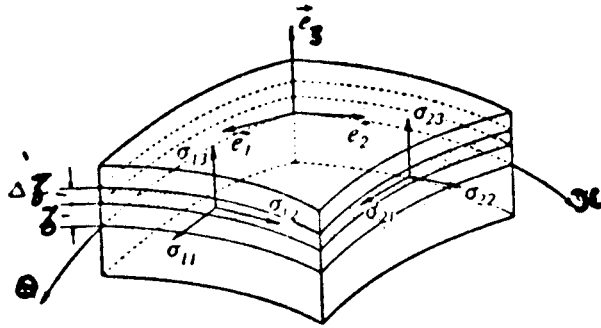


FIG. 1.2.

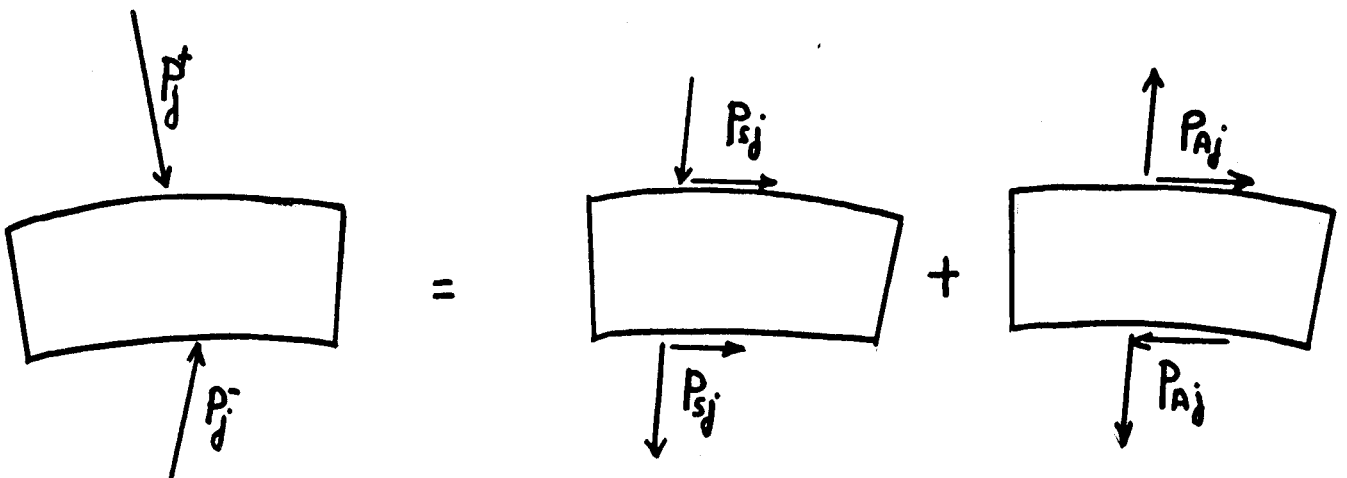


FIG. 1.3.



Nous attribuons les indices (1, 2, 3) aux différentes composantes des déplacements et des contraintes selon ce repère local, en particulier les composantes des tenseurs contraintes et du vecteur déplacement, s'écrivent :

$$(\sigma_{ij}) \quad \text{et} \quad (u_i)$$

Parfois pour alléger l'écriture nous poserons :

$$u_1 = v \quad ; \quad u_2 = w \quad ; \quad u_3 = u$$

et pour comparer nos résultats à ceux d'autres auteurs, nous remplacerons les indices 1, 2, 3 par θ , x , r .

1.3. - EQUATIONS DE L'ELASTICITE TRIDIMENSIONNELLE

1.3.1. - EQUATIONS D'EQUILIBRE LOCALES EN FONCTION DES CONTRAINTES

L'équilibre du cube curviligne élémentaire représenté à la figure (1.2.) s'écrit, en négligeant les forces de volume :

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x} + \frac{\sigma_{33} - \sigma_{11}}{r} = 0 \quad (1.1.a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + 2 \frac{\sigma_{31}}{r} = 0 \quad (1.1.b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} + \frac{\sigma_{32}}{r} = 0 \quad (1.1.c)$$

1.3.2. - CONDITIONS AUX LIMITES

Les contraintes (σ_{ij}) doivent satisfaire les conditions aux limites imposées aux surfaces élémentaires intérieures (Ω_1) et extérieures (Ω_2) de la coque :

$$M \in \Omega_1, \quad \sigma_{3j} (R - h) = + \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}^- \quad (1.2.a)$$

$$M \in \Omega_2, \quad \sigma_{3j} (R + h) = - \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}^+ \quad (1.2.b)$$

...

Les conditions aux limites en x et en θ seront présentées ultérieurement pour chaque problème particulier.

1.3.3. - LOI DU COMPORTEMENT ELASTIQUE, EQUATIONS DE COMPATIBILITE

Nous supposons que la coque est constituée d'un matériau homogène, isotrope et élastique et que ses déformations restent assez petites pour que la loi de HOOKE soit applicable ; dans ces conditions, les déplacements et les contraintes en un point quelconque sont liés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_{\theta} &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \\ \sigma_{22} = \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \nu \left[\frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u}{\partial r} \right] \right] \\ \sigma_{33} = \sigma_r &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}\tag{1.3.}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{32} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \sigma_{31} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]\end{aligned}\tag{1.4.}$$

...

Les relations (1.3.) peuvent aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$E \frac{\partial u}{\partial r} = \sigma_{33} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{11}) \quad (1.5.)$$

$$\frac{E}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) = \sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$E \frac{\partial w}{\partial x} = \sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33})$$

En outre, les six grandeurs σ_{ij} doivent vérifier les équations de compatibilité qui s'écrivent :

$$\Delta \sigma_{11} + \frac{2}{r^2} \left(2 \cdot \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \theta} + \sigma_{33} - \sigma_{11} \right) + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \sigma_I = 0$$

$$\Delta \sigma_{33} - \frac{2}{r^2} \left(2 \cdot \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \theta} + \sigma_{33} - \sigma_{11} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial r^2} = 0$$

$$\Delta \sigma_{31} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} - 2 \sigma_{13} \right) + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sigma_I = 0$$

(1.6.)

$$\Delta \sigma_{32} - \frac{1}{r^2} \left(2 \cdot \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \sigma_{32} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial x \partial r} = 0$$

$$\Delta \sigma_{12} + \frac{1}{r^2} \left(2 \cdot \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \theta} - \sigma_{12} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial \theta \partial x} = 0$$

avec :

$$\sigma_I = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

et

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

...

La formulation du problème peut se faire de deux manières équivalentes, soit avec les systèmes d'équations (1.1.), (1.3.), (1.4.), et les conditions (1.2.), soit avec les systèmes d'équations (1.1.), (1.6.), et les conditions (1.2.).

1.4. - PRINCIPE DE LA METHODE

La méthode utilisée consiste à choisir des échelles appropriées pour les variables intervenant dans les équations. Il importe à ce propos de remarquer qu'il convient dans ce choix de privilégier la direction radiale compte tenu de l'épaisseur relativement faible de la coque. C'est la raison pour laquelle, nous développerons ces variables selon une série de puissances en ϵ , paramètre assez petit, fonction de la demi-épaisseur relative $\frac{h}{R}$, selon une loi à définir pour chaque type de problème, par identification des coefficients de ϵ^n on obtient ainsi un ensemble d'équations différentielles, qui définissent les valeurs d'ordre (n) en fonction de celles d'ordre inférieur.

Cependant la grande difficulté que nous avons eu à résoudre réside dans le choix des échelles adéquates, notamment pour la variable longitudinale dont les caractéristiques dépendent de la géométrie de la coque, de la répartition des charges, et de la zone étudiée, nous aurons d'ailleurs l'occasion de discuter ce problème au paragraphe (1.5).

Une fois le choix d'échelles fixé, nous résolvons le problème à partir de la formulation basée sur les équations locales d'équilibre (1.1) et les relations déduites de la loi de HOOKE (1.4) et (1.5), ainsi que sur les conditions aux limites (1.2) et nous vérifions que la solution proposée satisfait aux équations de compatibilité (1.6).

Toutefois nous n'examinons pas, dans le cadre de ce travail, les effets de la couche dite "limite", située près des fonds (x voisin de 0 et de L), l'examen de ce problème sera effectué ultérieurement par une méthode similaire à celle utilisée par FRIEDRICHS (1949) et par REISS (1960), respectivement pour les plaques et pour les coques cylindriques chargées d'une façon rotationnelle et symétrique ($v = 0$, $\sigma_{\theta j} = 0$, $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = 0$) ; cette méthode revient à contracter l'échelle en x et la variable correspondante dans le domaine de la couche limite. Il faut cependant remarquer que l'influence de la couche limite est négligeable en dehors de sa largeur (selon x) qui est particulièrement faible, de l'ordre de l'épaisseur $2h$ de la coque et en tout cas inférieure à $\sqrt{2 R h}$ distance assez faible par rapport à R ou L .

1.5. - HYPOTHESES - CHOIX DES ECHELLES

1.5.1. - HYPOTHESES

Pour réaliser la linéarisation précédemment décrite nous émettons certaines hypothèses qui, rappelons le, sont justifiées physiquement et qui sont beaucoup moins limitatives que celles des théories classiques :

HYPOTHESE N° 1

La coque est constituée d'un matériau isotrope, homogène et non pesant, en outre nous supposons que les déformations restent assez petites pour que la loi de HOOKE soit applicable.

HYPOTHESE N° 2

L'effet du fond est tout à fait limité à une zone très faible que nous appelons couche limite, et dont la dimension dans le sens de x est très petite. Autrement dit la contribution des fonds sur la répartition des champs des déplacements et des contraintes est minime en dehors de cette couche (figure 1.1.).

HYPOTHESE N° 3

La relation de définition d' ε en fonction de h/R est de la forme :

$$\varepsilon = (h/R)^{1/p}$$

avec p réel positif (*), fonction du chargement de la coque et de sa géométrie.

Le champ des déplacements et des contraintes en un point M de la coque peut dès lors s'écrire sous la forme :

$$u_j(\theta, x, \varepsilon, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_j^{(n)}(\theta, x, z)$$

...

(*) Remarques : Pour les coques très épaisses, par exemple $(h/R) \approx 0,5$, p est un nombre fractionnaire, pour les autres coques, p peut être choisi comme entier. Pour la suite, nous supposons que p est un entier, la démarche de calcul restant valable pour p fractionnaire ou réel.

$$\sigma_{ij}(\theta, x, \varepsilon, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_{ij}^{(n)}(\theta, x, z) \quad (1.7.)$$

$$\text{avec : } u_j^{(n)} = \sigma_{ij}^{(n)} = 0 \quad \text{pour } n < 0$$

HYPOTHESE N° 4

Les charges extérieures appliquées aux surface Ω_1, Ω_2 de la coque se décomposent de la même manière que ci-dessus en série en ε . Nous supposons cependant que ces séries sont limitées dans leur développement aux valeurs de n comprises entre p et $2p-1$, le premier terme de ce développement étant nécessairement non nul. La justification physique de cette hypothèse sera établie ultérieurement.

On peut dès lors écrire :

$$p_j(\theta, x) = \sum_{p \leq n \leq 2p-1} \varepsilon^n p_j^{(n)}(\theta, x) \quad (1.8.)$$

avec :

$$p_j^{(n)}(\theta, x) = 0 \quad \text{pour } n < p \text{ et } n \geq 2p.$$

Le premier terme $p_j^{(p)}(\theta, x)$ non nul dans ce développement va dépendre surtout de la nature de la charge et de la géométrie de la coque.

Si la géométrie de la coque et la nature du chargement l'imposent, le développement des charges extérieures selon (1.8.) peut être prolongé au delà de $2p-1$. Lorsqu'il en est ainsi, on décompose le problème global en une suite de problèmes partiels qui vérifient individuellement la décomposition précisée en (1.8.) selon l'expression suivante :

$$p_j = \sum_{n=p}^{2p-1} \varepsilon^n p_j^{(n)} + \sum_{n=2p}^{4p-1} \varepsilon^n p_j^{(n)} + \dots$$

Cette décomposition montre clairement que chaque problème partiel est de la forme générale (1.8.), obtenue en y remplaçant p par $p' = 2kp$ (k : entier positif).

Le chargement extérieur en principe quelconque peut être décomposé en une partie symétrique (p_{sj}) et en une partie antisymétrique (p_{Aj}) (Figure 1.3.).

Il y correspond une séparation du problème global en deux problèmes symétrique et antisymétrique dont les inconnues respecteront à priori la parité de chargement

PROBLEME SYMETRIQUE

$$\sigma_{3j}(\theta, x, R \pm h) = \frac{1}{2} (p_j^+ + p_j^-) = p_{sj} \quad (a)$$

(1.9.)

PROBLEME ATISYMETRIQUE :

$$\sigma_{3j}(\theta, x, R \pm h) = \pm \frac{1}{2} (p_j^+ - p_j^-) = \pm p_{Aj} \quad (b)$$

Toutefois, cette distinction apparaît pour les p_j non nuls, donc à partir de $n \geq p$, ainsi la résolution ($n < p$) concerne le problème global.

Cette distinction va avoir une importance capitale dans la résolution proposée, car de ces deux problèmes le deuxième est de loin le plus important vu qu'il est rattaché à la flexion de la coque, par conséquent nous consacrons la majeure partie de démonstration à ce problème, par contre le premier problème est relatif à un chargement symétrique qui ne peut pas produire que des contraintes indépendantes de z , sinon paires en z . Ces contraintes doivent en outre vérifier les conditions aux limites (1.9.a.), ce qui limite particulièrement la contribution de ce problème dans la flexion de la coque.

1.5.2. - CHOIX DES ECHELLES

Echelle longitudinale :

Le choix des échelles est un problème crucial, parce qu'il est lié à la nature du chargement et à la zone d'application.

Dans les zones éloignées des fonds et des appuis, l'échelle longitudinale est de l'ordre de R .

Près des fonds, cette échelle est de l'ordre de h ; au voisinage des appuis, l'échelle longitudinale est intermédiaire et fonction de la charge, de la densité et de l'épaisseur $2h$ de la coque, elle est de l'ordre de la longueur d'onde caractéristique : $\sqrt{2hR}$ (voir TIMESHENKO (1934), DONNELL (1976), REISSNER (1945) etc ...).

On peut dès lors, puisque nous négligeons le problème de la couche limite, choisir pour échelle longitudinale une valeur ℓ définie par la relation :

$$h \leq \ell \leq \sqrt{2 h R} \quad (a)$$

$$\text{Echelle radiale : } h (*) \quad (b)$$

(1.10.)

$$\text{Echelle des déplacements : } U \text{ (déplacement maximal qui est de l'ordre de } h) \quad (c)$$

$$\text{Echelle des contraintes : } \sigma = E \cdot \frac{U}{R} \quad (d)$$

1.6. - RESOLUTION DU PROBLEME

1.6.1. - EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

Pour résoudre le problème linéarisé nous utilisons les variables adimensionnelles suivantes :

$$\xi = \frac{z}{h} \quad (a)$$

$$\bar{x} = \frac{x}{\ell} \quad (b)$$

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{U} \quad (c)$$

(1.11.)

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma} \quad (d)$$

$$\bar{p}_i = \frac{p_i}{\sigma} \quad (e)$$

$$\text{avec } r = R + Z = R (1 + \epsilon^p \xi) \quad (f)$$

...

REMARQUES : Contrairement aux auteurs classiques et à REISSNER (1945) et REISS (1960) nous avons préféré le choix des échelles quasi indépendantes en x , z et θ afin de conserver la généralité du problème. Ce choix implique que si l'une des échelles longitudinale et radiale tend vers zéro, l'autre tend également vers zéro.

Si nous remplaçons les variables dans les équations (1.1.) (1.4.) et (1.5.), nous obtenons le système suivant :

$$(1 + \epsilon^P \xi) \frac{\partial \bar{\sigma}_{33}}{\partial \xi} + \epsilon^P \frac{\partial \bar{\sigma}_{31}}{\partial \theta} + \alpha (\epsilon^P + \epsilon^{2P} \xi) \frac{\partial \bar{\sigma}_{32}}{\partial \bar{x}} + \epsilon^P (\bar{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}_{11}) = 0 \quad (a)$$

$$(1 + \epsilon^P \xi) \frac{\partial \bar{\sigma}_{31}}{\partial \xi} + \epsilon^P \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial \theta} + \alpha \epsilon^P (1 + \epsilon^P \xi) \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial \bar{x}} + 2 \epsilon^P \bar{\sigma}_{31} = 0 \quad (b)$$

$$(1 + \epsilon^P \xi) \frac{\partial \bar{\sigma}_{32}}{\partial \xi} + \epsilon^P \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial \theta} + \epsilon^P (1 + \epsilon^P \xi) \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial \bar{x}} + \epsilon^P \bar{\sigma}_{32} = 0 \quad (c)$$

(1.12.)

$$\bar{u} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} = (1 + \epsilon^P \xi) \left[\bar{\sigma}_{11} - \nu (\bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}) \right] \quad (a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = \epsilon^P \left[\bar{\sigma}_{33} - \nu (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}) \right] \quad (b)$$

$$\alpha \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} = \bar{\sigma}_{22} - \nu (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{33}) \quad (c)$$

(1.13.)

$$\epsilon^P (1 + \epsilon^P \xi) \bar{\sigma}_{31} = \frac{1}{2 (1+\nu)} \left[(1 + \epsilon^P \xi) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \epsilon^P (\bar{v} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta}) \right] \quad (d)$$

$$\epsilon^P \bar{\sigma}_{32} = \frac{1}{2 (1+\nu)} \left[\alpha \epsilon^P \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right] \quad (e)$$

$$(1 + \epsilon^P \xi) \bar{\sigma}_{12} = \frac{1}{2 (1+\nu)} \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + \alpha (1 + \epsilon^P \xi) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right] \quad (f)$$

1.6.2. - CONDITION AUX LIMITES

Les conditions aux limites en $\xi = \pm 1$ s'écrivent :

$$\bar{\sigma}_{3j}(\theta, x, \pm 1) = \pm p_{Aj} + p_{sj}$$

Pour x et θ les conditions seront définies pour chaque type du problème.

1.6.3. - RESOLUTION

D'après les hypothèses précédemment citées, les contraintes et les déplacements peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\sigma}_{ij}^n \epsilon^n$$

$$\bar{u}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_i^n \epsilon^n$$

En utilisant ces expressions dans les équations (1.12.) (1.13.) et (1.14.) nous obtenons le système global suivant, (dans lequel nous supprimons les barres placées au-dessus des variables adimensionnelles.)

Dans ces équations, la sommation s'effectue de $n = 0$ à $n = \infty$; en outre, $q = n + p$, $S = n + 2p$, p étant fixé.

$$\begin{aligned} \epsilon^n \frac{\partial \sigma_{33}^n}{\partial \xi} + \epsilon^q \left[\xi \frac{\partial \sigma_{33}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{31}^n}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{32}^n}{\partial x} + \sigma_{33}^n - \sigma_{11}^n \right] \\ + \epsilon^s \alpha \xi \frac{\partial \sigma_{32}^n}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (a) \\ (1.15.) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^n \frac{\partial \sigma_{31}^n}{\partial \xi} + \epsilon^q \left[\xi \frac{\partial \sigma_{31}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{11}^n}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^n}{\partial x} + 2 \sigma_{31}^n \right] + \epsilon^s \alpha \xi \frac{\partial \sigma_{12}^n}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

$$\epsilon^n \frac{\partial \sigma_{32}^n}{\partial \xi} + \epsilon^q \left[\xi \frac{\partial \sigma_{32}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^n}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^n}{\partial x} + \sigma_{32}^n \right] + \epsilon^s \alpha \xi \frac{\partial \sigma_{22}^n}{\partial x} = 0 \quad (c)$$

$$\epsilon^n \frac{\partial u^n}{\partial \xi} = \epsilon^q (\sigma_{33}^n - \nu (\sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n)) \quad (d)$$

$$\epsilon^n (u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta}) = \epsilon^n (\sigma_{11}^n - \nu (\sigma_{22}^n + \sigma_{33}^n)) + \epsilon^q (\sigma_{11}^n - \nu (\sigma_{22}^n + \sigma_{33}^n)) \quad (e)$$

$$\epsilon^n \alpha \frac{\partial w^n}{\partial x} = \epsilon^n (\sigma_{22}^n - \nu (\sigma_{11}^n + \sigma_{33}^n)) \quad (1.15.) (f)$$

$$\epsilon^q \sigma_{31}^n + \epsilon^s \xi \sigma_{31}^n = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\epsilon^n \frac{\partial v^n}{\partial \xi} + \epsilon^q \left(\xi \frac{\partial v^n}{\partial \xi} - v^n + \frac{\partial u^n}{\partial \theta} \right) \right] \quad (g)$$

$$\epsilon^q \sigma_{32}^n = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\epsilon^n \frac{\partial w^n}{\partial \xi} + \epsilon^q \alpha \frac{\partial u^n}{\partial x} \right] \quad (h)$$

$$\epsilon^n \sigma_{12}^n + \epsilon^q \xi \sigma_{12}^n = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\epsilon^n \left(\frac{\partial w^n}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial v^n}{\partial x} \right) + \epsilon^q \alpha \xi \frac{\partial v^n}{\partial x} \right] \quad (i)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \bar{\sigma}_{3j}^{(n)} (\theta, \bar{x}, \xi = \pm 1) = \sum_{n=p}^{2p-1} \epsilon^n (p_{sj}^n \pm p_{Aj}^n) \quad (1.16.)$$

...

Par identification des coefficients de ε^n , nous obtenons les équations différentielles (1.15.) définissant

$$\text{les } \frac{\partial \sigma_{ij}^{(n)}}{\partial \xi} \quad \text{et les } \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial \xi} \quad \text{en fonction des } \sigma_{ij}^{(q)} \quad \text{et } u_i^{(q)}$$

d'ordre q inférieur à n , ce qui induit une démarche récurrente lors de l'intégration en ξ .

Pour les trois intervalles d'approximation signalés dans l'introduction, qui correspondent respectivement aux valeurs de n suivantes :

$$n < p \quad ; \quad p \leq n < 2p \quad ; \quad n \geq 2p,$$

on obtient pour chaque valeur de n les équations différentielles (1.15.) et les conditions aux limites (1.16.).

Ces équations ne peuvent être intégrées globalement selon ξ , en effet cette intégration ne nécessite qu'une seule condition aux limites, alors que deux conditions (1.16.) doivent être satisfaites. En décomposant le problème global en deux problèmes symétrique et antisymétrique en ξ (1.9.), l'intégration est alors possible.

1.6.3.1. - Ordre : $n < p$

Les équations (1.15.) se réduisent alors au système (1.17.) qui correspond au problème global :

$$\frac{\partial \sigma_{33}^n}{\partial \xi} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}^n}{\partial \xi} = 0 \quad (b) \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \sigma_{32}^n}{\partial \xi} = 0 \quad (c)$$

$$\frac{\partial u^n}{\partial \xi} = 0 \quad (d)$$

$$\frac{\partial v^n}{\partial \xi} = 0 \quad (e)$$

(1.1.7)

$$\frac{\partial w^n}{\partial \xi} = 0 \quad (f)$$

$$\sigma_{11}^n = \frac{1}{1 - \nu^2} \left[u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta} + \nu \alpha \frac{\partial w^n}{\partial x} \right] + \frac{\nu \sigma_{33}^n}{1 - \nu} \quad (g)$$

$$\sigma_{22}^n = \frac{1}{1 - \nu^2} \left[\nu \left(u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial w^n}{\partial x} \right) + \frac{\nu \sigma_{33}^n}{1 - \nu} \right] \quad (h)$$

$$\sigma_{12}^n = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w^n}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial v^n}{\partial x} \right) \quad (i)$$

ce qui donne

$$\sigma_{3j}^n(x, \theta, \xi) = \sigma_{3j}^n(x, \theta) \quad (1.18.a.)$$

$$u_i^n(x, \theta, \xi) = u_i^n(x, \theta) \quad (1.18.b.)$$

en tenant compte des conditions aux limites (1.16) nous écrivons :

$$\sigma_{3j}^n = 0 \quad (1.18.c.)$$

Ceci signifie que les contraintes radiales doivent être du même ordre de grandeur que les forces extérieures appliquées, ce qui est physiquement admissible.

Par ailleurs la solution (1.18.b.) indique que les déplacements sont indépendants de ξ et représentent ainsi le déplacement d'ensemble de la coque, en particulier celui de sa surface moyenne ($\xi = 0$)

...

De plus, la solution des équations (1.17. g à i) fournit des contraintes indépendantes de ξ :

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^n &= \frac{1}{1-v^2} \left(u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta} + v \alpha \frac{\partial w^n}{\partial x} \right) \\ \sigma_{22}^n &= \frac{1}{1-v^2} \left(\alpha \frac{\partial w^n}{\partial x} + v \left(u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta} \right) \right) \\ \sigma_{12}^n &= \frac{1}{2(1+v)} \left(\frac{\partial w^n}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial v^n}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (1.19.)$$

Cette solution coïncide avec la solution de la théorie de la membrane classique.

Nous examinons plus loin la décomposition de ces résultats pour le problème symétrique et pour le problème antisymétrique ; en particulier nous établirons les équations différentielles qui permettent la résolution en u_i^n ($n < p$) pour chacun de ces deux problèmes pris séparément.

1.6.3.2. - Ordre : $p \leq n < 2p$

Posons $m = n - p$ et identifions les termes en ϵ^n ; les équations (1.15.) se réduisent au système (1.20.) qui correspond au problème global :

$$\frac{\partial \sigma_{33}^n}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_{33}^m}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{31}^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{32}^m}{\partial x} + \sigma_{33}^m - \sigma_{11}^m = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}^n}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_{31}^m}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{11}^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial x} + 2 \sigma_{31}^m = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{32}^n}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_{32}^m}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{21}^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^m}{\partial x} + \sigma_{32}^m = 0 \quad (c)$$

(1.20.)

$$\frac{\partial u^n}{\partial \xi} = \sigma_{33}^m - v (\sigma_{11}^m + \sigma_{22}^m) \quad (d)$$

$$u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta} = \sigma_{11}^n - v (\sigma_{22}^n + \sigma_{33}^n) + \xi \left[\sigma_{11}^m - v (\sigma_{22}^m + \sigma_{33}^m) \right] \quad (e)$$

$$\alpha \frac{\partial w^n}{\partial x} = \sigma_{22}^n - v (\sigma_{11}^n + \sigma_{33}^n)$$

$$\sigma_{31}^m = \frac{1}{2(1+v)} \left[\frac{\partial v^n}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial v^m}{\partial \xi} - v^m + \frac{\partial u^m}{\partial \theta} \right] \quad (1.20.)$$

$$\sigma_{32}^m = \frac{1}{2(1+v)} \left[\frac{\partial w^n}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial u^m}{\partial x} \right]$$

$$\sigma_{12}^n + \xi \sigma_{12}^m = \frac{1}{2(1+v)} \left[\frac{\partial w^n}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial v^n}{\partial x} + \alpha \xi \frac{\partial v^m}{\partial x} \right]$$

Etant donné que $0 \leq m \leq p$, les grandeurs d'ordre m doivent vérifier (1.17.), par conséquent le système se réduit selon (1.21.) :

$$\frac{\partial \sigma_{33}^n}{\partial \xi} = \sigma_{11}^m \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{11}^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial x} = 0 \quad (b)$$

(1.21.)

$$\frac{\partial \sigma_{32}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^m}{\partial x} = 0 \quad (c)$$

$$\sigma_{11}^n = \frac{1}{1-v^2} \left[u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta} + v \alpha \frac{\partial w^n}{\partial x} \right] + \frac{v}{1-v} \sigma_{33}^n - \frac{\xi}{1-v^2} \left[\sigma_{11}^m - v \sigma_{22}^m \right]$$

(d)

$$\sigma_{22}^n = \frac{1}{1-v^2} \left[v \left(u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta} \right) + \alpha \frac{\partial w^n}{\partial x} \right] - \frac{v}{1-v} \sigma_{33}^n - \frac{v \xi}{1-v^2} \left[\sigma_{11}^m - v \sigma_{22}^m \right]$$

(e)

$$\sigma_{12}^n = -\xi \sigma_{12}^m + \frac{1}{2(1+v)} \left[\frac{\partial w^n}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial v^n}{\partial x} + \alpha \xi \frac{\partial v^m}{\partial x} \right] \quad (f)$$

$$\frac{\partial u^n}{\partial \xi} = -v (\sigma_{11}^m + \sigma_{22}^m)$$

$$\frac{\partial v^n}{\partial \xi} = v^m - \frac{\partial u^m}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial w^n}{\partial \xi} = -\alpha \frac{\partial u^m}{\partial x}$$

L'intégration de ce système en ξ fournit pour σ_{3j}^n et u_i^n les solutions suivantes : (1.22.)

$$\sigma_{33}^n = \sigma_{11}^m \xi + \text{cte} \quad (\text{a})$$

$$\sigma_{31}^n = -\xi \left(\frac{\partial \sigma_{11}^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial x} \right) + \text{cte} \quad (\text{b})$$

$$\sigma_{32}^n = -\xi \left(\frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^m}{\partial x} \right) + \text{cte} \quad (\text{c})$$

(1.22.)

$$u^n = -v \xi (\sigma_{11}^m + \sigma_{22}^m) + \text{cte} \quad (\text{d})$$

$$v^n = \xi \left(v^m - \frac{\partial u^m}{\partial \theta} \right) + \text{cte} \quad (\text{e})$$

$$w^n = -\alpha \xi \frac{\partial u^m}{\partial x} + \text{cte} \quad (\text{f})$$

Les conditions aux limites sur σ_{3j}^n n'étant pas nulles, il convient, comme nous l'avons signalé de décomposer le problème global en problèmes symétrique et antisymétrique.

A - PROBLEME SYMETRIQUE

Les conditions aux limites relatives à ce problème s'écrivent (1.9.a.) :

$$\sigma_{3j}^n (+1) = \sigma_{3j}^n (-1) = p_{sj}^n$$

Il en résulte par identification avec la solution générale (1.22.) que :

$$\sigma_{3j}^n = p_{sj}^n \quad (1.23.)$$

Cette relation montre que les σ_{3j}^n sont indépendantes de ξ et de même ordre de grandeur que les forces extérieures correspondantes ; par conséquent nous avons pour l'ordre σ_{11}^m inférieur à p :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^m &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{11}^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^m}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1.24.)$$

Par ailleurs, nous devons respecter la parité des u_i^n selon ξ , ce qui implique, que les u_i^n soient indépendants de ξ et que :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^m + \sigma_{22}^m &= 0 \\ v^m - \frac{\partial u^m}{\partial \theta} &= 0 \\ \alpha \frac{\partial u^m}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1.25.)$$

La solution du problème symétrique d'ordre $m < p$ répond aux relations suivantes obtenues en tenant compte de 1.9., a. b. etc.)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^m &= 0 \\ w^m &= \text{constante} \end{aligned} \quad (1.26.)$$

...

$$\begin{aligned} v^m + \frac{\partial^2 v^m}{\partial \theta^2} &= 0 \\ u^m + \frac{\partial^2 u^m}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.26.)$$

avec $u^m(\theta)$ et $v^m(\theta)$

Cette solution s'écrit :

$$\begin{aligned} u^m &= U_0 \cos \theta \\ v^m &= -U_0 \sin \theta \\ w^m &= 0 \\ \sigma_{ij}^m &= 0 \end{aligned} \quad (1.26.bis)$$

et correspond à un déplacement plan rigide, perpendiculairement à l'axe de révolution de la coque. Ce déplacement implique la nullité de toutes les contraintes et par conséquent nous pouvons négliger la solution (1.16. bis) dans la solution globale d'ordre $m < p$ donnée en (1.18.) et (1.19.)

Par ailleurs la solution du problème symétrique d'ordre $2p > n \geq p$ sera établie plus loin en remarquant toutefois que :

$$\begin{aligned} \sigma_{3j}^n &= p_{sj}^n \\ u_i^n(\theta, x, \xi) &= u_i^n(\theta, x) \\ \sigma_{ij}^n(\theta, x, \xi) &= \sigma_{ij}^n(\theta, x) \end{aligned} \quad (1.27.)$$

B - PROBLEME ANTISYMETRIQUE

La solution (1.22.) relative au problème symétrique est telle que les σ_{3j}^n en $\xi = \pm 1$ sont liées aux pressions extérieures selon les expressions :

$$\sigma_{3j}^n(\pm 1) = \pm p_{Aj}^n \quad p \leq n < 2p \quad (1.28.)$$

Par identification avec la solution générale (1.22.) nous obtenons la solution suivante :

$$\sigma_{3j}^n = p_{Aj}^n \xi \quad (1.29.)$$

Cette solution impose des conditions sur les σ_{ij}^m non nulles ($m < p$) selon les expressions suivantes :

$$\sigma_{11}^m = p_{A3}^n$$

$$- \left(\frac{\partial \sigma_{11}^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial x} \right) = p_{A1}^n \quad (1.30.)$$

$$- \left(\frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^m}{\partial x} \right) = p_{A2}^n$$

Ces relations montrent que, pour le problème antisymétrique, les contraintes d'ordre $m < p$ sont de même ordre de grandeur que les charges extérieures d'ordre n supérieur à p .

Nous aurons d'ailleurs l'occasion d'étudier ce problème en détail lors de l'examen de la théorie de la membrane.

En outre, les σ_{ij}^m sont définies en fonctions de déplacement u_i^m de la surface moyenne de la coque, par les relations (1.19.) ; en substituant à σ_{ij}^m leurs valeurs tirées de (1.19.), nous établissons les équations différentielles en u_i^m qui permettent, en première approximation de trouver les déplacements de la surface moyenne de la coque selon le système suivant :

$$\frac{1}{1 - \nu^2} \left(u^m + \frac{\partial v^m}{\partial \theta} + \nu \alpha \frac{\partial w^m}{\partial x} \right) = - p_{A3}^n \quad (a) \quad (1.31.)$$

$$\frac{1}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial u^m}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v^m}{\partial \theta^2} + \frac{1 - \nu}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 v^m}{\partial x^2} + \frac{\alpha(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 w^m}{\partial x \partial \theta} \right] = p_{A1}^n \quad (b)$$

$$\frac{1}{1 - \nu^2} \left[\alpha \nu \frac{\partial u^m}{\partial x} + \frac{1 + \nu}{2} \alpha \frac{\partial^2 v^m}{\partial x \partial \theta} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 w^m}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 w^m}{\partial x^2} \right] = p_{A2}^n \quad (c)$$

...

Une fois que les u_i^m sont déterminés nous pouvons établir la solution générale du problème antisymétrique d'ordre $p \leq n < p$ qui se ramène aux expressions suivantes :

$$\sigma_{33}^n = \frac{\xi}{1 - \nu^2} \left[u^m + \frac{\partial v^m}{\partial \theta} + \nu \alpha \frac{\partial w^m}{\partial x} \right] \quad (a)$$

$$\sigma_{31}^n = \frac{-\xi}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial u^m}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v^m}{\partial \theta^2} + \frac{1 - \nu}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 v^m}{\partial x^2} + \frac{\alpha (1 + \nu)}{2} \frac{\partial^2 w^m}{\partial x \partial \theta} \right] \quad (b)$$

$$\sigma_{32}^n = \frac{-\xi}{1 - \nu^2} \left[\alpha \nu \frac{\partial u^m}{\partial x} + \frac{1 + \nu}{2} \alpha \frac{\partial^2 v^m}{\partial x \partial \theta} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 w^m}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 w^m}{\partial x^2} \right] \quad (c)$$

$$\sigma_{11}^n = \frac{\xi}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial v^m}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u^m}{\partial \theta^2} - \nu \alpha^2 \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} \right] \quad (d)$$

$$\sigma_{22}^n = \frac{\xi}{1 - \nu^2} \left[\nu \frac{\partial v^m}{\partial \theta} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u^m}{\partial \theta^2} \right] \quad (e)$$

$$\sigma_{12}^n = \frac{\xi}{2 (1 + \nu)} \left[\alpha \frac{\partial v^m}{\partial x} - \frac{\partial w^m}{\partial \theta} - 2 \alpha \frac{\partial^2 u^m}{\partial x \partial \theta} \right] \quad (f)$$

$$u^n = \frac{-\nu \xi}{1 - \nu} \left[u^m + \frac{\partial v^m}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial w^m}{\partial x} \right] \quad (1.32.) \quad (g)$$

$$v^n = \xi \left(v^m - \frac{\partial u^m}{\partial \theta} \right) \quad (h)$$

$$w^n = -\xi \alpha \frac{\partial u^m}{\partial x} \quad (i)$$

A ce stade, nous pouvons constater que, hors mis la contribution négligeable du problème symétrique, la solution d'ordre $m < p$ définit des déplacements et des contraintes indépendants de ξ , et représentent par conséquent, le comportement d'ensemble de la coque.

Par contre la solution d'ordre n , ($p < n < 2p$) représente la déviation linéaire par rapport à la surface moyenne de la coque, des déplacements et des contraintes en un point quelconque de côte ξ , et schématise ainsi la flexion linéaire simple, d'ailleurs les expressions que nous avons établies pour les contraintes σ_{11}^n , σ_{22}^n et pour les déplacements v^n et w^n coïncident avec celles données par les théories classiques basées sur l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF, par contre l'expression σ_{12}^n comporte un terme supplémentaire en $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ par rapport à ces théories, qui est pris en compte par les théories classiques "récentes" de DONNELL (1976) et FLUGGE (1960) ; cependant, les expressions de u^n et de σ_{3j}^n que nous avons présentées ne sont pas accessibles par ces théories.

1.6.3.3. - Ordre $n : n \geq 2p$

Posons $m = n - 2p$, $r = n - p$ et identifions dans le système (1.15.) les termes en ϵ^n , tels que $n = m + 2p = r + p$:

$$\frac{\partial \sigma_{33}^n}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_{33}^r}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{31}^r}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{32}^r}{\partial x} + \sigma_{33}^r - \sigma_{11}^r = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}^n}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_{31}^r}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{11}^r}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^r}{\partial x} + 2 \sigma_{31}^r + \alpha \xi \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial x} = 0 \quad (b)$$

(1.33.)

$$\frac{\partial \sigma_{32}^n}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_{32}^r}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^r}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^r}{\partial x} + \sigma_{32}^r + \alpha \xi \frac{\partial \sigma_{22}^m}{\partial x} = 0 \quad (c)$$

$$\frac{\partial u^n}{\partial \xi} = \sigma_{33}^r - \nu (\sigma_{22}^r + \sigma_{11}^r) \quad (d)$$

$$\frac{\partial v^n}{\partial \xi} = 2 (1 + \nu) \sigma_{31}^r - \xi \frac{\partial v^r}{\partial \xi} + v^r - \frac{\partial u^r}{\partial \theta} \quad (1.33.) \quad (e)$$

$$\frac{\partial w^n}{\partial \xi} = 2 (1 + \nu) \sigma_{32}^r - \alpha \frac{\partial u^r}{\partial x} \quad (f)$$

$$\sigma_{12}^n = - \xi \sigma_{12}^r + \frac{\xi}{2 (1+\nu)} \alpha \frac{\partial v^r}{\partial x} + \frac{1}{2 (1+\nu)} \left[\frac{\partial w^n}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial v^n}{\partial x} \right] \quad (g)$$

$$\sigma_{11}^n = \frac{1}{1 - \nu^2} \left[u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta} + \alpha \nu \frac{\partial w^n}{\partial x} \right] + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{33}^n - \frac{\xi}{1 - \nu^2} \quad (h)$$

$$\left[\sigma_{11}^r - \nu (\sigma_{22}^r + \sigma_{33}^r) \right]$$

$$\sigma_{22}^n = \frac{1}{1 - \nu^2} \left[\nu (u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta}) + \alpha \frac{\partial w^n}{\partial x} \right] + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{33}^n - \frac{\nu \xi}{1 - \nu^2} \quad (i)$$

$$\left[\sigma_{11}^r - \nu (\sigma_{22}^r + \sigma_{33}^r) \right]$$

Compte tenu du fait que $0 \leq m < p$, $p \leq r < 2p$, les grandeurs d'ordre m et r doivent vérifier respectivement (1.17.), (1.18.) et (1.23.), (1.32.). Ce qui dissocie le problème global en problèmes symétrique et antisymétrique. Ces problèmes peuvent être intégrés en tenant compte des considérations suivantes :

- 1°) Pour le problème symétrique, les inconnues doivent respecter la parité imposée par le changement (conditions aux limites), ce qui minimise la contribution de ce problème dans celui de la flexion de la coque et nous conduit à négliger les valeurs des u_i^n , σ_{ij}^n ($n \geq 2p$) relatifs à ce problème, par contre la résolution des équations déduites de (1.33.) relatives à ce problème nous permet de trouver les u_i^r , σ_{ij}^r , ($p \leq r < 2p$) relatifs au problème symétrique d'ordre r .

2°) Pour le problème antisymétrique nous devons respecter d'une part les équations différentielles (1.33.) ainsi que les conditions aux limites relatives à σ_{3j}^n , $n \geq 2p$, et tenir compte d'autre part de ce que les u_i^m , ($0 \leq m < p$) représentent les composantes du déplacement de la surface moyenne de la coque, quand cette dernière est chargée d'une façon antisymétrique.

De plus, si les conditions aux limites sur σ_{3j}^n , $n \geq 2p$ n'étaient pas nulles, nous aurions alors à vérifier des conditions supplémentaires entre les p_{sj}^r et les p_{sj}^n et la généralité du problème sera ainsi limitée, par conséquent, nous justifions notre hypothèse numéro (4) qui postule que les termes d'ordre supérieur ou égal à $2p$ dans le développement de p_{3j} , sont nuls.

A - PROBLEME SYMETRIQUE

Vu la parité des inconnues en ξ nous avons les deux systèmes suivants :

a) Système d'ordre $n > 2p$

$$\sigma_{3j}^n(\theta, x, \xi) = \sigma_{3j}^n(\theta, x) \quad (a)$$

$$\sigma_{ij}^n(\theta, x, \xi) = \sigma_{ij}^n(\theta, x) \quad (b)$$

$$u_i^n(\theta, x, \xi) = u_i^n(\theta, x) \quad (c)$$

avec : (1.34.)

$$\sigma_{11}^n = \frac{1}{1 - v^2} \left[u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta} + v \alpha \frac{\partial w^n}{\partial x} \right] \quad (d)$$

$$\sigma_{22}^n = \frac{1}{1 - v} \left[v \left(u^n + \frac{\partial v^n}{\partial \theta} \right) + \alpha \frac{\partial w^n}{\partial x} \right] \quad (e)$$

$$\sigma_{12}^n = \frac{1}{2(1+v)} \left[\frac{\partial w^n}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial v^n}{\partial x} \right] \quad (f)$$

...

compte tenu des conditions aux limites sur $\sigma_{3j}^n (\pm 1) = 0$,
ce système est semblable à celui d'ordre $m < p$ pour le problème
global (1.18.) et (1.19.), toutefois les u_i^n et les σ_{ij}^n
interviennent dans les résultats en facteur $\epsilon^n = \epsilon^m \cdot \epsilon^{2p}$,
donc en facteur de $(\frac{h}{R})^2$.

b) système d'ordre $p \leq r < 2p$

$$\sigma_{11}^r = \sigma_{33}^r + \frac{\partial \sigma_{31}^r}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{32}^r}{\partial x} \quad (a)$$

$$\alpha \frac{\partial \sigma_{12}^r}{\partial x} = - \frac{\partial \sigma_{11}^r}{\partial \theta} - 2 \sigma_{31}^r \quad (b)$$

$$\alpha \frac{\partial \sigma_{22}^r}{\partial x} = - \frac{\partial \sigma_{12}^r}{\partial \theta} - \sigma_{32}^r \quad (c)$$

(1.35.)

$$\sigma_{33}^r - \frac{v}{1-v} \left[u^r + \frac{\partial v^r}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial w^r}{\partial x} \right] = 0 \quad (d)$$

$$2 (1+v) \sigma_{31}^r + v^r - \frac{\partial u^r}{\partial \theta} = 0 \quad (e)$$

$$2 (1+v) \sigma_{32}^r - \alpha \frac{\partial u^r}{\partial x} = 0 \quad (f)$$

$$- 2 (1+v) \sigma_{12}^r + \alpha \frac{\partial v^r}{\partial x} = 0 \quad (g)$$

$$\sigma_{11}^r - v (\sigma_{22}^r + \sigma_{33}^r) = 0 \quad (h)$$

avec :

$$\sigma_{3j}^r = p_{sj}^r \quad (i)$$

...

ce qui donne la solution suivante : (les σ_{ij}^r et les u_i^r sont fonctions de θ et de x seulement)

$$\sigma_{3j}^r = p_{sj}^r \quad (a)$$

$$\sigma_{11}^r = p_{s3}^r + \frac{\partial p_{s1}^r}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial p_{s2}^r}{\partial x} \quad (b)$$

$$\sigma_{12}^r(\theta, x) - \sigma_{12}^r(\theta, x_0) = - \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial p_{s3}^r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 p_{s1}^r}{\partial \theta^2} + \alpha \frac{\partial^2 p_{s2}^r}{\partial x \partial \theta} + 2 p_{s1}^r \right) dx \quad (c)$$

$$\sigma_{22}^r(\theta, x) - \sigma_{22}^r(\theta, x_0) = \int_{x_0}^x \left[\int_{x_0}^x \left(\frac{\partial^2 p_{s3}^r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 p_{s1}^r}{\partial \theta^3} + \alpha \frac{\partial^3 p_{s1}^r}{\partial x \partial \theta^2} + 2 \frac{\partial p_{s1}^r}{\partial \theta} \right) dx - \frac{\partial \sigma_{12}^r(\theta, x_0)}{\partial \theta} \right] dx \quad (d)$$

(1.36.)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w^r}{\partial \theta} &= 0 \\ \alpha \frac{\partial w^r}{\partial x} &\approx 0 \end{aligned} \right\} w^r(\theta, x) = \text{constante} \quad (e)$$

$$\alpha \frac{\partial v^r}{\partial x} = 2 (1 + \nu) \sigma_{12}^r \quad (f)$$

$$- \alpha \frac{\partial^2 v^r}{\partial x \partial \theta} = \frac{\nu}{1 - \nu^2} \alpha \frac{\partial p_{s3}^r}{\partial x} + 2 (1 + \nu) p_{s2}^r \quad (g)$$

...

$$v^r + \frac{\partial^2 v^r}{\partial \theta^2} = \frac{v}{1 - v^2} \frac{\partial p_{s3}^r}{\partial \theta} - 2(1 + v) p_{s3}^r \quad (h)$$

(1.36.)

$$u^r = - \frac{\partial v^r}{\partial \theta} + \frac{v}{1 - v^2} p_{s3}^r \quad (i)$$

Nous obtenons ainsi un système dont la partie homogène correspond à la solution (1.26.) (pour $m < p$) relative à un déplacement rigide ; la solution générale peut donc être déterminée si on donne la répartition des p_{sj}^r en fonction de θ et de x avec des conditions aux limites adéquates en x et en θ .

B - PROBLEME ANTISYMETRIQUE - d'ordre $n \geq 2p$

En intégrant les équations (1.29.) en ξ nous obtenons à une constante près en x et θ la solution générale du problème antisymétrique d'ordre $n > 2p$, toutefois, nous devons vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\sigma_{3j}^n (\xi = \pm 1) = 0$$

et en outre nous choisissons les déplacements tels que $u_i^n (\xi = 0) = 0$ pour que les u_i^m ($m < p$) représentent les déplacements de la surface moyenne de la coque. Ceci fournit la solution suivante :

$$\sigma_{33}^n = \frac{(\xi^2 - 1)}{2(1 - v^2)} \left[-2u^m - \frac{\partial v^m}{\partial \theta} - 2v\alpha \frac{\partial w^m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 v^m + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w^m \right] \quad (a)$$

$$\sigma_{31}^n = \frac{(\xi^2 - 1)}{2(1 - v^2)} \left[3 \frac{\partial u^m}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u^m + 2 \frac{\partial^2 v^m}{\partial \theta^2} + \frac{1 - v}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 v^m}{\partial x^2} + \frac{3(1 + v)}{2} \alpha \frac{\partial^2 w^m}{\partial x \partial \theta} \right] \quad (b)$$

$$\sigma_{32}^n = \frac{(\xi^2 - 1)}{2(1 - v^2)} \left[v\alpha \frac{\partial u^m}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u^m + \frac{1 - v}{2} \alpha \frac{\partial^2 v^m}{\partial x \partial \theta} + \frac{3(1 - v)}{2} \frac{\partial^2 w^m}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 w^m}{\partial x^2} \right] \quad (c)$$

(1.37.)

$$u^n = \frac{\xi^2}{2(1-\nu^2)} \left[u^m + \nu(1+\nu) \nabla^2 u^m + (1-\nu-\nu^2) \frac{\partial v^m}{\partial \theta} + \nu \alpha \frac{\partial w^m}{\partial x} \right] \quad (d)$$

$$v^n = \frac{-\xi^2}{2(1-\nu)} \left[(2-\nu) \frac{\partial u^m}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v^m}{\partial \theta^2} + (1-\nu) \nabla^2 v^m + \frac{\partial^2 w^m}{\partial \theta} \right] \quad (e)$$

$$w^n = \frac{-\xi^2}{2(1-\nu)} \left[\nu \alpha \frac{\partial u^m}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 v^m}{\partial x \partial \theta} + (1-\nu) \nabla^2 w^m + \alpha^2 \frac{\partial^2 w^m}{\partial x^2} \right] \quad (f)$$

$$\sigma_{12}^n = \frac{\xi^2}{2(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \frac{\partial w^m}{\partial \theta} - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w^m + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 v^m \right) - \alpha \left(\nu \frac{\partial^2 u^m}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^3 v^m}{\partial x \partial \theta^2} + \alpha \frac{\partial^3 w^m}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right] \quad (g)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^n = & \frac{\xi^2}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{1-2\nu^2}{1-\nu^2} u^m + \nu \alpha^2 \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} - \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial v^m}{\partial \theta} - \frac{\partial^3 v^m}{\partial \theta^3} - \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 v^m \right. \\ & \left. + \frac{\nu(1-2\nu^2)}{1-\nu^2} \alpha \frac{\partial w^m}{\partial x} - \nu \alpha \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w^m - \alpha \frac{\partial^3 w^m}{\partial x \partial \theta^2} \right] + \frac{\nu}{2(1-\nu^2)(1-\nu)} \\ & \left[2 \left(u^m + \frac{\partial v^m}{\partial \theta} + \nu \alpha \frac{\partial w^m}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 v^m - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w^m \right] \quad (h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^n = & \frac{\xi^2}{2(1-v^2)} \left[-\frac{v^2}{1-v^2} u - v \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{v(2-v^2)}{1-v^2} \frac{\partial v^m}{\partial \theta} - v \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 v^m + \right. \\ & \left. \alpha^2 \frac{\partial^3 v^m}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{v^2}{1-v^2} \alpha \frac{\partial w^m}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w^m - \alpha^3 \frac{\partial^3 w^m}{\partial x^3} \right] \\ & + \frac{v}{2(1-v^2)(1-v)} \left[2 \left(u^m + \frac{\partial v^m}{\partial \theta} + v \alpha \frac{\partial w^m}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 v^m - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w^m \right] \end{aligned}$$

avec :

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

1.6.4. - EXPRESSIONS DES CONTRAINTES, DES DEPLACEMENTS ET DES DEFORMATIONS
EN UN POINT QUELCONQUE M DE LA COQUE EN FONCTION DES COMPOSANTES
DU DEPLACEMENT DU POINT M_O DE LA SURFACE MOYENNE.

A titre d'exemple, nous résumons ci-dessous les résultats obtenus par notre théorie pour le problème global de la flexion d'une coque de géométrie et de chargement habituels ($p \approx 1$, $m \approx 0$) la généralité du problème étant bien entendu sauvegardée puisque, pour $p \neq 1$, il suffit d'effectuer une sommation sur $m \in [0, p]$. Par ailleurs, pour simplifier l'écriture, nous enlevons l'indice $m = 0$ sur les déplacements du point $M_O(\theta, x, R)$, les fonctions relatives au point $M(\theta, x, R+z)$ étant désignées par les mêmes notations

- Déplacements en M_O :

$$u = u(\theta, x) \quad ; \quad v = v(\theta, x) \quad \text{et} \quad w = w(\theta, x) \quad (1.38.)$$

- Déplacements en M :

(1.39.)

$$u(\theta, x, R+z) = u + \frac{h}{R} u_s^{(1)} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z}{R} \left[u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + R \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{z^2}{2(1-\nu^2)R^2} \left[u + \nu(1+\nu)R^2 \nabla^2 \cdot u + (1-\nu-\nu^2) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu R \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (a)$$

$$v(\theta, x, R+z) = v + \frac{h}{R} v_s^{(1)} + \frac{z}{R} \left[v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - \frac{z^2}{2(1-\nu)R^2} \left[(2-\nu) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + (1-\nu)R^2 \nabla^2 \cdot v + R \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right] \quad (b)$$

$$w(\theta, x, R+z) = w + \frac{h}{R} w_s^{(1)} - \frac{z}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{z^2}{2(1-\nu)R^2} \left[\nu R \frac{\partial u}{\partial x} + R \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + (1-\nu)R^2 \nabla^2 \cdot w + R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (c)$$

- Contraintes en M :

(1.40.)

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\theta, x, R+z) = & \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{z}{R} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right. \\ & + \frac{z^2}{2R^2} \left[\frac{1-2\nu^2}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{R} + \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{(1-\nu^2)R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - R \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot v - \nu R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot w - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^3} \right] \right. \\ & + \left(\frac{h}{R} \right)^2 \frac{\nu}{(1-\nu)} \left[\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{R}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot v + R \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \right) \right] \left. \right\} \\ & + \frac{h}{R} \left[p_{s3} + \frac{\partial p_{s1}}{\partial \theta} + R \frac{\partial p_{s2}}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} (\theta, x, R + z) = & \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \left(\frac{1}{R} \frac{w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{z}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} \right. \right. \\ & + \frac{z^2}{2R^2} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \left(R \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot w + R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot w \right) - \frac{1}{1-\nu} \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial \theta^2} + R \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right] \right\} + \frac{h}{R} \sigma_{12s}^{(1)} \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} (\theta, x, R + z) = & \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\nu}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{z}{R} \left[\frac{\nu}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \right. \\ & + \frac{z^2}{2R^2} \left[- \frac{\nu}{1-\nu^2} \left[\nu \left(\frac{u}{R} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{(2-\nu^2)}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] - \nu R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\ & - \nu R \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot v + R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} - R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot w - R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \left. \right] \\ & + \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \left[\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{R}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot v - \frac{R^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot w \right] \left. \right\} \\ & + \frac{h}{R} \sigma_{22s}^{(1)} \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31} (\theta, x, R + z) = & \frac{h}{R} (p_{s1}^{(1)}) + \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ - \frac{z}{R} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{R} + \frac{1-\nu}{2} R \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \right. \\ & + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \left. \right] + \frac{(z^2 - h^2)}{2R^2} \left[\frac{3}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + R \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot u + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1-\nu}{2} R \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{3(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right] \right\} \end{aligned} \quad (d)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{32}(\theta, x, R+z) = & \frac{h}{R} p_{s2}^{(1)} + \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{z}{R} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right. \right. \\ & + \left. R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{(z^2 - h^2)}{2R^2} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot u + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \right. \\ & \left. \left. + \frac{3(1-\nu)}{2R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(\theta, x, R+z) = & \frac{h}{R} p_{s3}^{(1)} + \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{z}{R} \left[\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{z^2 - h^2}{2R^2} \right. \\ & \left. \left[-\frac{1}{R} \left(2u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - 2\nu \frac{\partial w}{\partial x} + R \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot v + R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot w \right] \right\} \end{aligned} \quad (f)$$

où l'opérateur ∇^2 représente le Laplacien $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$,

les termes $u_s^{(1)}$, $v_s^{(1)}$, $w_s^{(1)}$, $\sigma_{22s}^{(1)}$, $\sigma_{21s}^{(1)}$ sont donnés en fonction de $p_{sj}^{(1)}(\theta, x)$ par les formules (1.36.).

En outre, les déformations ϵ_{ij} au point M peuvent être déduites facilement des contraintes σ_{ij} en M, par l'application de la loi de HOOKE :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu (\sigma_{kk}) \delta_{ij} \right] \quad (1.41.)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kroncker.

Ainsi le problème est entièrement résolu, toutefois, les équations complètes qui donnent les composantes u_i du déplacement global du point M_0 de la surface moyenne de la coque peuvent être déduites directement par intégration selon les équations locales d'équilibre (1.1.) ce que nous ferons par la suite.

1.6.5. - CONCLUSION PRELIMINAIRE

La solution générale du problème précédemment développée nous permet de faire les constatations importantes suivantes :

- a) - La solution proposée donne les mêmes valeurs pour σ_{11} , σ_{12} , σ_{13} et pour v , w en M que les théories classiques si on se limite aux deux ordres $n < p$ et $p < n < 2p$, (à $n < p$ pour u) ceci confirme la généralité de cette solution ; d'autant plus que les contraintes radiale σ_{33} et de cisaillement σ_{31} , σ_{32} ne sont pas négligeables et sont, par notre théorie, accessibles au calcul, contrairement aux théories classiques ;
- b) - Le champ de forces extérieures va produire des contraintes des valeurs plus importantes que sa propre valeur, autrement dit, les contraintes sont de l'ordre ε^{-p} . p , ce qui justifie notre choix de considérer uniquement les pressions d'ordre n supérieur à p .
- c) - Le système de base (1.19.) constitue une approche simple du problème et ne tient pas compte de la flexion locale de la coque, par conséquent, nous pouvons examiner séparément, selon le type de charges extérieures, les théories adéquates pour le cas de la membrane et pour le cas de la flexion locale.
- d) - Les corrections à apporter aux théories classiques sont assez importantes et peuvent se situer à deux niveaux :
 - 1°) Au niveau de la théorie de la membrane que nous pouvons étudier localement à partir des équations (1.21.) et non plus d'une façon globale comme dans les théories classiques et sans émettre aucune hypothèse supplémentaire, ceci constitue un apport fondamental à la théorie des coques.
De même en ce qui concerne les contraintes déterminées par cette théorie, nous pouvons constater qu'une correction non négligeable aux valeurs de σ_{11} et à σ_{22} provient des relations des (1.37.h.) et (1.37.i) pour $\xi = 0$.
 - 2°) Au niveau de la flexion globale de la coque, nous avons inclus l'influence des contraintes de cisaillements, ce qui permet d'accéder aux déformations non linéaires et à leurs contributions dans l'évolution des contraintes.
De plus nous avons inclus la partie symétrique de forces extérieures p_s^n dont l'influence, au niveau de la flexion de la coque, reste cependant importante au niveau de la déformation d'une fibre normale au cylindre moyen, ceci apporte une correction fondamentale à l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF.

De plus les valeurs trouvées pour les u_i et les σ_{ij} montrent une répartition parabolique des champs de déplacements et des contraintes au point M en fonction de sa côte z, seule répartition compatible avec les deux conditions aux limites aux surfaces intérieure et extérieure Ω_1 et Ω_3 de la coque (*).

1.7. - THEORIE DE LA MEMBRANE

Les théories classiques traitent ce qu'on a l'habitude d'appeler la théorie de la membrane, en supposant négligeables les efforts tranchants dans la coque et la flexion locale, le long de l'épaisseur $2h$ de la coque, nous allons exposer dans ce qui suit une nouvelle version de la théorie de la membrane, plus générale qu'habituellement proposée, sans émettre aucune hypothèse supplémentaire à nos hypothèses générales de base exposées en (1.5.).

1.7.1. - ORDRE DES GRANDEURS A PRENDRE EN CONSIDERATION

Les résultats que nous avons trouvés dans notre théorie générale sont valables quelle que soit l'épaisseur $t = 2h$ de la coque, en particulier dans le cas où l'ordre (p) est grand, la théorie développée pour $m < p$ donne des résultats suffisamment proches de la réalité pour qu'on puisse négliger les ordres m supérieures à p .

En effet dans les cas des coques usuelles, non sujettes à des forces localisées trop importantes, on peut écrire :

$$\epsilon \approx \frac{1}{10}$$

et

$$10^{-p} \cdot p^{(p)} = p \quad (1.42.)$$

P représentant la pression due au chargement, de l'ordre de 10^3 N/m^2 (pression hydrostatique d'un gaz liquifié) à 10^5 N/m^2 (appareil à pression). Comme l'ordre de grandeur de $p^{(p)}$ doit être voisin de l'ordre de grandeur des contraintes induites (10^7 N/m^2), les valeurs de p vérifient les conditions :

$$2 \leq p \leq 4$$

...

* REMARQUE : Une telle répartition est impérative surtout pour les σ_{3j} , notamment pour les cas de constructions multicouches "coque en SANDWICH", nous avons besoin d'une telle répartition pour résoudre ce problème.

Par conséquent, les contraintes et les déplacements d'ordre n supérieur à p sont multipliés par ε^n ($\varepsilon^n = 10^{-2}$ à 10^{-4}), ce qui les rend négligeables par rapport aux grandeurs d'ordre $m < p$. Ces dernières suffisent dès lors pour approcher les champs des contraintes et des déplacements réels qui s'identifient d'ailleurs à ceux de la surface moyenne de la coque.

Ceci correspond physiquement à un comportement d'ensemble de l'appareil puisque les contraintes et les déplacements ne varient pas le long de l'épaisseur $2h$ de la coque et ne sont fonctions que de θ et de x (voir 1.19.).

1.7.2. - RESOLUTION DU PROBLEME

En tenant compte de l'ordre des grandeurs intervenant dans le problème, les équations qui en permettent la résolution se réduisent au système (1.19.) et s'écrivent en variables dimensionnelles :

$$\frac{\partial \sigma_{33}^n}{\partial r} = \frac{\sigma_{11}^m}{R} \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}^n}{\partial r} = - \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{11}^m}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial x} \right] \quad (b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{32}^n}{\partial r} = - \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{22}^m}{\partial x} \right] \quad (c) \quad (1.43.)$$

$$\frac{1}{r} (u^m + \frac{\partial v^m}{\partial \theta}) = \frac{1}{E} (\sigma_{11}^m - \sigma_{22}^m) \quad (d)$$

$$\frac{\partial w^m}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_{22}^m - \nu \sigma_{11}^m) \quad (e)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w^m}{\partial \theta} + \frac{\partial v^m}{\partial x} = \frac{2(1+\nu) \sigma_{12}^m}{E} \quad (f)$$

...

En intégrant les équations (1.43.) en r entre $R - h$, $R + h$ nous avons : (voir figure 1.4. On enlèvera désormais l'indice sur les variables)

$$\sigma_{33} (+h) - \sigma_{33} (-h) = \sigma_{11} \cdot \frac{t}{R} \quad (a)$$

$$\sigma_{31} (+h) - \sigma_{31} (-h) = - \frac{t}{R} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} \right] \quad (b) \quad (1.44.)$$

$$\sigma_{32} (+h) - \sigma_{32} (-h) = - \frac{t}{R} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} \right] \quad (c)$$

$$\text{or : } \sigma_{3j} (+h) - \sigma_{3j} (-h) = + \begin{pmatrix} P_{\theta} \\ P_x \\ P_r \end{pmatrix}$$

Ce qui donne la solution suivante :

$$\sigma_{11} = \frac{P_r \cdot R}{t} \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} = - \frac{P_{\theta}}{t} - \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} \quad (b) \quad (1.45.)$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} = - \frac{P_x}{t} - \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \quad (c)$$

Par intégration de ces équations en x nous obtenons la solution suivante :

$$\sigma_{11} = P_r \frac{R}{t}$$

$$\sigma_{12} = - \frac{1}{t} \int_{x_1}^{x_2} \left(P_{\theta} + \frac{\partial P_r}{\partial \theta} \right) dx + f_1 (\theta) \quad (1.46.)$$

$$\sigma_{22} = - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{P_x}{t} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \right) dx + f_2 (\theta)$$

...

où $f_1(\theta)$ et $f_2(\theta)$ sont des fonctions de θ qui vérifient les conditions aux limites selon la direction de x , et peuvent représenter par exemple des contraintes de cisaillement pour σ_{12} et de flexion pour σ_{22} .

L'intégration des déplacements à partir du système (1.44.) conduit à la solution générale suivante :

$$w = \frac{1}{E} \int_{x_1}^{x_2} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) dx + f_3(\theta) \quad (1.47.)$$

$$v = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{2(1+\nu)\sigma_{12}}{E} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) dx + f_4(\theta)$$

$$u = \frac{R}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) dx + \frac{\partial f_4(\theta)}{\partial \theta}$$

Les fonctions arbitraires $f_3(\theta)$, $f_4(\theta)$ seront déterminées pour chaque type de problèmes à partir des conditions aux limites adéquates imposées en x .

Cette solution constitue la solution générale de la théorie de la membrane des coques cylindriques et nous aurons l'occasion de l'appliquer, dans la deuxième partie, au cas d'un appareil cylindrique à axe horizontal reposant sur deux appuis en berceau, ce qui va nous conduire à l'énoncée de la théorie dite de la poutre équivalente.

Par ailleurs, et à titre d'exemple, nous allons l'appliquer au cas d'un appareil soumis à une pression intérieure constante, ce qui nous fournit les déplacements et les contraintes de la membrane.

1.7.3. - CAS D'UN APPAREIL SOUMIS A UNE PRESSION CONSTANTE

La pression intérieure étant supposée constante et uniformément répartie sur les parois de l'appareil, le chargement répond aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} P_r &= \text{cte} \\ P_x &= 0 \\ P_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (1.48.)$$

La solution s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{3j} &\approx 0 \\ \sigma_{11} &= \sigma_\theta = P_r \cdot \frac{R}{t} \\ \sigma_{12} &= \sigma_{\theta x} = f_1(\theta) \\ \sigma_{22} &= \sigma_x = -\frac{x}{R} f'_1(\theta) + f_2(\theta) \end{aligned} \quad (1.49.)$$

Pour des raisons de symétrie évidente en $x = 0$ et en $x = L$ les contraintes σ_{22} étant uniformes en θ nous avons :

$$\text{en } x = 0 \quad f_2(\theta) = \text{cte} \quad (1.50.)$$

$$\text{en } x = L \quad f_2(\theta) = \text{cte} \quad \text{et } f'_1(\theta) = 0$$

Ce qui donne la solution suivante :

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \text{cte} \\ f_2(\theta) &= \text{cte} \end{aligned} \quad (1.51.)$$

...

mais pour les mêmes raisons de symétrie, la fonction $f_1(\theta)$ est nulle ;
 $f_2(\theta)$ sera déterminée par l'examen de la projection horizontale de
l'effort global sur le fond :

en $x = 0$

$$\left(\iint_{\text{fond}} P_r \cdot dS \right)_{Ox} = \int_0^{2\pi} \sigma_{22} R \cdot t \, d\theta \quad ; \quad \sigma_{22} \text{ étant constante}$$

$$\pi R^2 P_r = f_2(\theta) \cdot 2 \pi R \cdot t$$

ce qui donne finalement la solution suivante :

$$\sigma_{11} = \sigma_{\theta} = P_r \cdot \frac{R}{t} \quad (1.52.)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{\theta x} = 0$$

$$\sigma_{22} = \sigma_x = P_r \cdot \frac{R}{2t}$$

Pour les déplacements nous avons :

$$w(x) = \int_0^x \frac{P_r}{E} \frac{R}{2t} (1 - 2\nu) \, dx + f_3(\theta)$$

Si :

$$w = 0 \text{ pour } x = 0, \quad (1.53.)$$

$$w = \frac{P_r R}{2 E t} (1 - 2\nu) x$$

ce qui donne $\nu = 0$ (vu la symétrie de chargement)

et

$$u = \frac{P_r R^2}{2 E t} (2 - \nu)$$

...

Le déplacement maximal se produit en $x = L$; par contre nous constatons que le déplacement radiale u est uniforme.

Il importe de souligner la généralité de la théorie proposée, car nous pouvons examiner le cas où P_r dépend de x et de θ en tenant compte des conditions aux limites.

1.8. - THEORIE GENERALE DE FLEXION DES COQUES CYLINDRIQUES

1.8.1. - INTRODUCTION

Les théories classiques de flexion des coques reposent entièrement sur l'écriture des équations globales d'équilibre d'une partie de la coque, et sur l'application de l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF pour relier linéairement les contraintes et les déformations en un point donné M aux déplacements du point correspondant M_0 de la surface moyenne de la coque ; en outre la majorité des auteurs 0 émettent des hypothèses simplificatrices concernant les moments de torsion $M_{x\theta}$ et $M_{\theta x}$ ainsi que les efforts tangentiels Q_θ , Q_x (voir chapitre II) ; ceci limite considérablement les théories présentées à des cas spéciaux, et rend leur résolution assez arbitraire par l'établissement des relations entre les efforts tangentiels Q_θ , Q_x et les moments M_θ , M_x , $M_{x\theta}$, $M_{\theta x}$

Pour notre part, nous essayons de développer dans la suite une théorie nouvelle qui ne tient compte d'aucune hypothèse "classique" et nous verrons que la majorité des autres théories peuvent découler de cette théorie.

1.8.2. - THEORIE GENERALE DE FLEXION DES COQUES

La théorie générale que nous proposons est basée sur l'intégration selon l'épaisseur des équations locales d'équilibres linéarisées, le choix de l'indice p découle des considérations physiques suivantes : pour obtenir une flexion de la coque, les efforts appliqués doivent induire une pression de l'ordre de 10^6 N/m^2 ; par conséquent, pour les coques usuelles $\varepsilon \approx \frac{1}{10}$ la pression $P^{(p)}$ qui doit être de l'ordre des contraintes (10^7 N/m^2) doit vérifier la relation :

$$\varepsilon^p \cdot P^{(p)} = P_a$$

soit :

$$10^{-p} \cdot 10^7 = 10^6 \text{ N/m}^2$$

ce qui fixe l'indice p à 1, les développements des expressions du déplacements et des contraintes doivent être effectués obligatoirement jusqu'à l'ordre $n > 2p$.

Si nous exprimons les contraintes sous la forme suivante avec $(P_{sj}^P = P_{sj})$ il vient :

$$\sigma_{3j} = \varepsilon (\xi \sigma_{3j}^1 + P_{sj}) + \varepsilon^2 \left[\frac{\xi^2 - 1}{2} \sigma_{3j}^2 \right] \quad (a)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^0 + \varepsilon (\xi \sigma_{12}^1 + \sigma_{12s}^1) + \varepsilon^2 \left[\frac{\xi^2}{2} \sigma_{12}^2 \right] \quad (b)$$

(1.54.)

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0 + \varepsilon (\xi \sigma_{11}^1 + \sigma_{11s}^1) + \varepsilon^2 \left[\frac{\xi^2}{2} \sigma_{11}^2 + \frac{v A}{1 - v} \right] \quad (c)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}^0 + \varepsilon (\xi \sigma_{22}^1 + \sigma_{22s}^1) + \varepsilon^2 \left[\frac{\xi^2}{2} \sigma_{22}^2 + \frac{v A}{1 - v} \right] \quad (d)$$

où les σ_j^1 sont les coefficients de ξ dans (1.32.) et σ_{3j}^2 , σ_{12}^2 , σ_{22}^2 , σ_{11}^2 sont les coefficients, respectivement de $\frac{\xi^2 - 1}{2}$ et $\frac{\xi^2}{2}$ dans (1.37.), A étant le deuxième terme des $\sigma_{11}^{(2)}$, $\sigma_{22}^{(2)}$ (indépendant de ξ), les valeurs σ_{11s}^1 , σ_{22s}^1 , σ_{12s}^1 sont les contraintes dues à la résolution du problème symétrique et elles sont déterminées directement à partir de P_{sj} (1.36.)

En remplaçant ces termes dans les équations (1.15. a, b, et c) nous obtenons le système suivant (1.55.) dans lequel la sommation s'effectue de $n = 0$ à $n = 3$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^n \frac{\partial \sigma_{33}^n}{\partial \xi} + \varepsilon (-\sigma_{11}^0) + \varepsilon^2 \left[\xi (2 \sigma_{33}^1 + \frac{\partial \sigma_{31}^1}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{32}^1}{\partial x} - \sigma_{11}^1) \right. \\ \left. - \sigma_{11s}^1 + P_{s3} + \frac{\partial P_{s1}}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial P_{s2}}{\partial x} \right] + \varepsilon^3 \left[\xi^2 (\sigma_{33}^2 - \frac{\sigma_{11}^2}{2} + \alpha \frac{\partial \sigma_{32}^1}{\partial x}) \right. \\ \left. + \frac{\xi^2 - 1}{2} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{31}^2}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{32}^2}{\partial x} \right) + \sigma_{33}^2 \right] - \frac{v}{1 - v} A + \xi \alpha \frac{\partial P_{s2}}{\partial x} \right] + \dots = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^n \frac{\partial \sigma_{31}^n}{\partial \xi} + \varepsilon \left(\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \left[\xi \left(3 \sigma_{31}^1 + \frac{\partial \sigma_{11}^1}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^1}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x} \right) + 2 P_{s1} + \frac{\partial \sigma_{11s}^1}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12s}^1}{\partial x} \right] + \varepsilon^3 \left[\xi^2 \left(\sigma_{31}^2 + \frac{1}{2} \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{\partial \sigma_{11}^2}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^2}{\partial x} \right) + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^1}{\partial x} \right) + (\xi^2 - 1) \sigma_{31}^2 + \alpha \xi \frac{\partial \sigma_{12s}^1}{\partial x} \right. \\
 & \left. + \frac{v}{1-v} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] + \dots = 0 \quad (b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^n \frac{\partial \sigma_{32}^n}{\partial \xi} + \varepsilon \left(\frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \left[\xi \left(2 \sigma_{32}^1 + \frac{\partial \sigma_{12}^1}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^1}{\partial x} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial x} \right) + \frac{\partial \sigma_{12s}^1}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22s}^1}{\partial x} \right] + \varepsilon^3 \left[\xi^2 \left(\sigma_{31}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}^2}{\partial \theta} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^2}{\partial x} \right) + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^1}{\partial x} \right) + \left(\frac{\xi^2 - 1}{2} \right) \sigma_{32}^2 + \xi \alpha \frac{\partial \sigma_{22s}^1}{\partial x} + \frac{v}{1-v} \alpha \frac{\partial A}{\partial x} \right] = 0 \quad (c)
 \end{aligned}$$

Nous allons effectuer l'intégration de ces équations en $\xi \in [-1, +1]$; cependant les résultats diffèrent légèrement selon que nous incluons ou pas l'effet de variation de la courbure par l'intervention du terme $(1 + \varepsilon \xi)$ équivalent à $1 + \frac{z}{R}$ en coordonnées initiales, (1.56.) :

$$\begin{aligned}
 & P_r - 2 \varepsilon \sigma_{11}^0 + 2 \varepsilon^2 \left[-\sigma_{11s} + P_{s3} + \frac{\partial P_{s1}}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial P_{s2}}{\partial x} \right] - \frac{2}{3} \varepsilon^3 \\
 & \left[\frac{\partial \sigma_{31}^2}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{32}^2}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{32}^1}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_{11}^2 + \frac{3v}{1-v} A \right] + \frac{2}{3} \varepsilon^3 \left[2 \sigma_{33}^1 + \frac{\partial \sigma_{31}^1}{\partial \theta} \right. \\
 & \left. + \alpha \frac{\partial \sigma_{32}^1}{\partial x} - \sigma_{11}^1 + \sigma_{33}^2 \right] + O \varepsilon^4 = 0 \quad (a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\theta} + 2 \epsilon \left[\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x} \right] + 2 \epsilon^2 \left[2 P_{s1} + \frac{\partial \sigma_{11s}^1}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12s}^1}{\partial x} \right] \\
 + \frac{2}{3} \epsilon^3 \left[-\sigma_{31}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{11}^2}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^2}{\partial x} \right) + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^1}{\partial x} + \frac{3 \nu}{1 - \nu} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] \\
 + \frac{2}{3} \epsilon^3 \left[3 \sigma_{31}^1 + \frac{\partial \sigma_{11}^1}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x} + \sigma_{31}^2 \right] + O \epsilon^4 = 0
 \end{aligned} \tag{b}$$

$$\begin{aligned}
 P_x + 2 \epsilon \left(\frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial x} \right) + 2 \epsilon^2 \left[P_{s2} + \frac{\partial \sigma_{12s}^1}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22s}^1}{\partial x} \right] \\
 + \frac{2}{3} \epsilon^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}^2}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^2}{\partial x} \right) + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^1}{\partial x} + \frac{3 \nu}{1 - \nu} \alpha \frac{\partial A}{\partial x} \right] \\
 + \frac{2}{3} \epsilon^3 \left[\sigma_{32}^2 + 2 \sigma_{32}^1 + \frac{\partial \sigma_{12}^1}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial x} \right] + O \epsilon^4 = 0
 \end{aligned} \tag{c}$$

La dernière ligne de chaque équation représente les termes supplémentaires dus à la prise en compte de la courbe locale

$\frac{z}{R} = \epsilon \xi$; nous verrons par la suite que ces termes sont d'importance faible.

Par ailleurs, si nous remplaçons chaque contrainte par son expression en fonction de u, v, w , nous constatons que les grandeurs relatives au problème symétrique s'annulent mutuellement en vertu des équations (1.35. a, b et c), ceci confirme ce que nous avons annoncé à propos de leur contribution dans le problème de la flexion des coques (voir hypothèse 4).

En effectuant la substitution des σ_{ij} , nous obtenons un système complet d'équations différentielles en u, v, w , composantes du déplacement d'un point quelconque de la surface moyenne de la coque et fonctions uniquement de θ et de x . La solution de ce système permet de résoudre entièrement le problème de la coque. Ce système s'écrit

$$\text{en variables dimensionnelles, avec } t = 2 h, \quad K = \frac{E t}{1 - \nu^2} \tag{1.57.)}$$

$$\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ R^3 \nabla^4 \cdot u \right\} + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ I (u_i, ijk, \dots) \right\}$$

$$= \frac{P_r R}{K} \quad (a)$$

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1+v}{2 R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ II (u_i, ijk, \dots) \right\}$$

$$= - \frac{P_\theta}{K} \quad (b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2 R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1+v}{2 R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ III (u_i, ijk, \dots) \right\}$$

$$= - \frac{P_x}{K} \quad (c)$$

Les termes I, II, III seront explicitées plus loin, remarquons cependant que ces termes ne comportent pas de dérivées de u d'ordre supérieur à 4 ; pour l'instant nous allons examiner successivement les différents systèmes d'équations issus de 1.57. avec simplifications à divers degrés.

1.8.2.1. - Système de base, HAGE - 1

La plupart des spécialistes de coques tels que LOVE, NOVOZHILOV, TIMESHENKO, FLUGGE et DONNELL, ont constaté que pour pouvoir étudier correctement la flexion des coques, il faut retenir les termes qui comportent l'ordre de dérivation de u le plus important et les auteurs y accèdent d'une façon approximative que nous aurons l'occasion de détailler au chapitre suivant.

En ce qui nous concerne, nous retiendrons les dérivées de u avec l'ordre de dérivation le plus élevé qui apparaît dans les équations (1.57.) (en l'occurrence 4), nous obtenons ainsi le système suivant :

...

(1.58.)

$$\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{t^2 R}{12} \nabla^4 \cdot u - \frac{P_r R}{K} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu}{2 R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{P_\theta}{K} = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1 + \nu}{2 R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2 R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{P_x}{K} = 0 \quad (c)$$

Ce système constitue la base de la théorie classique de flexion des coques, les termes autres que le terme en $\nabla^4 \cdot u$ représentent les contraintes de la membrane.

Le choix de ce système simplifié trouve sa justification dans les phénomènes physiques qui accompagnent la flexion réelle des coques, en effet il est évident, en dehors du cas spécial de la compression selon ox de la coque, que le déplacement radial u joue le rôle le plus important ; les deux autres déplacements peuvent lui être comparés selon les échelles suivantes :

- Echelle des u de même ordre que l'épaisseur $2h$ de la coque
 - Echelle des v de l'ordre du rayon moyen R de la coque
 - Echelle des w de l'ordre de la demi-longueur $\frac{L}{2}$ de la coque
- (1.59.)

Autrement dit nous avons les ordres de grandeurs suivants :

$$v \sim \frac{2h}{R} u$$

$$w \sim \frac{4h}{L} u$$

(1.60.)

Par conséquent, l'influence de u est prépondérante, et cette influence est accrue par la dérivation d'ordre (4) de u , nous verrons d'ailleurs l'importance relative du terme $\nabla^4 \cdot u$ dans l'équation (1.58.a) par rapport à son premier membre, lors de la résolution d'un problème d'une coque cylindrique soumise à des actions localisées (voir chapitre III).

...

1.8.2.2. - Système complet HAGE - 2

Considérons le système (1.57.) et remplaçons chaque terme par sa valeur à partir de (1.35.) nous obtenons ainsi le système complet suivant :

$$\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{t^2}{12} R \nabla^4 u + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ \frac{1}{2 (1-2v^2)} \right. \quad (1.61.)$$

$$\left[(1 - 2 v^2) \left[\frac{u}{R} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + \frac{3 v}{1 - v} \left[\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + v \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (a)$$

$$+ \frac{5 v}{2} R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \left[1 - \frac{3 v}{2 (1-v)} \right] \frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \left(\frac{2 - v}{2} - \frac{3 v}{2 (1-v)} \right)$$

$$R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \left(\frac{4 - v}{2} - \frac{3 v}{2 (1-v)} \right) R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left[3 - v - \frac{3 v}{2 (1-v)} \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} \left\} = \frac{P_r R}{K}$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1 + v}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1 - v}{2} R \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ \frac{1}{2 (1-2v^2)} \right.$$

$$\left[(1 - 2 v^2) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right] + \left(- 3 + \frac{3 v}{1 - v} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (b)$$

$$+ \left(- 2 + \frac{3 v}{1 - v} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \left(- \frac{3 + v}{2} + \frac{3 v}{1 - v} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - (2 - v) R \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta}$$

$$- \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} - \left(1 + \frac{3 v}{1 - v} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} - \left(\frac{5 - v}{4} + \frac{3 v}{1 - v} \right) R \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial \theta^2}$$

$$- \frac{1 - v}{2} R^3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \left(\frac{3 + v}{4} + \frac{3 v}{2 (1-v)} \right) \left(R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial \theta} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial \theta^3} \right) \left\} = - \frac{P_\theta R}{K}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{t^2}{12 R^2} \right\} \frac{-\nu}{2(1-\nu^2)} \\
 & \left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \right] + \left(\frac{3\nu}{1-\nu} + 1 - \nu \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\
 & + \left(\frac{3\nu}{1-\nu} + 1 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \left[\frac{3\nu^2}{1-\nu} - (1-\nu) \right] R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-3\nu}{2R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\
 & - \frac{3\nu}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} - \left(\frac{2+\nu}{2} \right) R^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{2} \left(\frac{3\nu}{1-\nu} + \frac{3+\nu}{2} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial \theta^3} \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{1-\nu}{2} - \frac{3\nu}{1-\nu} \right) R^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial \theta} - \frac{1-\nu}{4R} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{1}{2} \left(\frac{5-\nu}{2} + \frac{3\nu}{1-\nu} \right) R \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \\
 & - \left(1 + \frac{3\nu}{2(1-\nu)} \right) R^3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \left\} = - \frac{P_x R}{K} \quad (c)
 \end{aligned}$$

Ce système constitue l'ensemble des équations générales d'équilibres d'une coque sollicitée par des charges quelconques, sa généralité se trouve confirmée par la présence des termes contenant les dérivées d'ordre (4) en v et w ce qui est dû à l'isotropie du phénomène, d'ailleurs ces termes n'apparaissent pas dans les travaux d'autres auteurs ; en effet nous pouvons remarquer que nos équations se présentent sous la forme suivante :

EQUATIONS (a) : contient en facteur à $\frac{t^2}{12 R^2}$ des termes en

u , et ses dérivées d'ordre (4), et (2)

v , w et leurs dérivées d'ordre (3)

EQUATIONS (b) et (c) contiennent en facteur à $\frac{t^2}{12 R^2}$ des termes en :

dérivées de u d'ordre (1) et (3)

dérivées de v et w d'ordre (2) et (4)

Par conséquent, il est possible de tirer des valeurs approximatives des termes $\frac{\partial v}{\partial \theta}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta}$; $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$ respectivement à partir des trois premiers membres des équations de base (1.58.) a, b et c.

Ces valeurs reportées dans les équations (1.61.) conduisent à négliger dans ces équations les termes facteurs de

$$\left(\frac{t^2}{12 R^2}\right)^2$$

1.8.2.3. - Système simplifiés obtenus à partir du système HAGE-2

Dans la majorité des cas les termes que nous avons notés (I, II et III) dans le système (1.57.) sont négligeables ; lorsqu'il n'en est pas ainsi, il est toujours possible de simplifier ces termes en utilisant la démarche décrite dans le paragraphe précédent.

Nous allons examiner dans ce qui suit les différentes simplifications possibles qui conduisent aux équations d'équilibre de la coque ne contenant que deux inconnues dans les termes en

facteur à $\frac{t^2}{12 R^2}$.

En particulier le système de base (1.58.) s'écrit :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} = - \left(\frac{u}{R} + v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{t^2 R}{12} \nabla^4 u \right) + \frac{P_r R}{K} \quad (a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} = - \frac{2 R}{1 + \nu} \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{P_\theta}{K} \right] \quad (b) \quad (1.62.)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} = - \frac{2 R}{1 + \nu} \left[\frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2 R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{P_x}{K} \right] \quad (c)$$

En remplaçant dans I, II et III des équations (1.61.) les dérivées $\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta}$; $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta}$ par leurs valeurs (1.62.) et en négligeant dans l'expression (1.62. a) le terme facteur de $\frac{t^2}{12 R^2}$ on obtient le système suivant :

(1.63.)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{t^2}{12} R \nabla^4 \cdot u + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ \frac{u}{R} + v \frac{\partial w}{\partial x} + (3v - 1) R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\ & \left. \frac{2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + (3 - 2v) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} + R^2 \frac{4 - 3v + v^2}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right\} = \left[1 + \frac{t^2}{12 R^2} \alpha \right] \frac{P_r R}{K} \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1 - v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1 + v}{2 R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ \left(\frac{1 - v}{2(1+v)} + \frac{3v}{1 - v^2} \right) \right. \\ & \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} + \left[- \frac{(1 - v)(1 + 2v)}{2(1 + v)} + \frac{3v}{1 - v^2} \right] \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} + \left[\frac{1 - v}{2(1+v)} - \frac{3v^2}{1 - v^2} \right] \\ & \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{1 - v}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} R^2 \left[\frac{1 - v}{2(1+v)} + \frac{3v}{1 - v^2} \right] + \left[\frac{1 - v}{1 + v} + \frac{1 - 3v}{2(1 - v^2)} \right] \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial \theta^2} \left. \right\} \\ & = - \left[1 + \frac{t^2}{12 R^2} \beta \right] \frac{P_\theta}{K} \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 - v}{2 R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1 + v}{2 R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ \left[\frac{-v^2}{1 + v} + \frac{3v^2}{1 - v^2} \right] \right. \\ & \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} + \left[- \frac{1 + 2v}{1 + v} + \frac{3v^2}{1 - v^2} \right] R \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{2(1 + v)} \left[- (3 + v) + 3v \right] \\ & R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{2(1 + v)} \left[(1 - v) + 3v \right] \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{3v}{2(1 + v)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \left. \right\} \\ & = - \left(1 + \frac{t^2}{12 R^2} \gamma \right) \frac{P_x}{K} \end{aligned} \quad (c)$$

où α, β, γ représentent des opérateurs en θ et en x .

Une deuxième version de l'équation (1.63.a) peut s'obtenir en éliminant seulement $\frac{\partial w}{\partial x}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{t^2}{12} R \nabla^4 u + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ \left(\frac{u}{R} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{5 v}{2} R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + \frac{3}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \frac{2 - \nu}{2} R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{4 - \nu}{2} R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (3 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} \right\} \\ & - \frac{P_r R}{K} = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

L'intérêt de cette transformation provient du fait que dans chaque équation nous avons au second membre uniquement deux inconnues avec leur ordre de dérivation le plus élevé, en particulier nous constatons la présence des termes en $\nabla^4 v$ et $\nabla^4 w$ similaires au terme $\nabla^4 u$ déjà trouvé pour le déplacement radial, ce qui confirme la généralité de notre théorie dans le cas d'un chargement quelconque.

Ces différentes versions montrent que nous pouvons présenter les équations d'équilibres de plusieurs manières différentes, en outre nous pouvons voir que les versions données par les auteurs classiques sont en réalité équivalentes si nous substituons à certains de leurs termes, des termes équivalents tirés de (1.62.) ; physiquement ceci revient à envisager le cas de flexion pure (termes de la membrane nuls)

1.9. - CONCLUSION

La théorie que nous avons développée, sans utiliser l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF est applicable aussi bien pour les coques minces que pour les coques épaisses, soumises à n'importe quelle sollicitation, son intérêt réside donc dans sa généralité car elle nous a permis d'exprimer les contraintes et les déplacements sous leur forme la plus générale notamment pour les contraintes radiales et de cisaillement inaccessibles aux théories classiques.

Les équations d'équilibre relatives à cette théorie peuvent se limiter à l'ordre (m) ce qui correspond à la théorie générale de la membrane que nous avons établie sans émettre aucune hypothèse supplémentaire, contrairement à la démarche des autres auteurs qui supposent négligeables, à la fois, l'influence des contraintes de cisaillements et l'influence de la flexion locale ; de plus la solution générale que nous avons établie pour cette théorie peut être applicable à n'importe quel problème en détaillant l'évolution locale des contraintes ce que ne permettent pas les théories classiques de la résistance des matériaux (voir deuxième partie).

Enfin nous avons pu déduire, sans aucune hypothèse, les équations d'équilibre relatives au problème de la flexion, avec une grande généralité puisque nos équations contiennent des dérivées d'ordre (4) des déplacements, et que, de l'avis de la majorité des auteurs, ces dérivées sont seules aptes à décrire correctement le phénomène de la flexion.

CHAPITRE II

COMPARAISON AVEC LES AUTRES THEORIES

2.1. - INTRODUCTION

Comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent notre théorie nous permet d'accéder à toutes les composantes du tenseur des contraintes (respectivement des déformations) en tout point de la coque, sans utiliser l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF qui traite un problème de déformations planes.

Pour saisir son intérêt nous allons développer dans ce qui suit la comparaison avec les théories connues des coques ; cette comparaison sera chiffrée à partir de la résolution analytique du problème de la flexion des coques minces et épaisses, en particulier nous résumons dans ce qui suit les résultats des théories classiques de TIMESHENKO (1934), DONNELL (1933 et 1976), FLUGGE (1960), BIJLAARD (1955) et des théories récentes de KOITER (1966) et de NAGHDI (1963).

Ces théories peuvent être groupées en deux catégories différentes dans la mesure où elles appliquent strictement ou non l'hypothèse de LOVE KIRCHOFF , en particulier la théorie de NAGHDI est différente des autres dans la mesure où elle suppose que les rotations d'une fibre normale à la surface moyenne de la coque sont indépendantes des déplacements, ce qui permet d'accéder à des valeurs admissibles pour les contraintes de cisaillements.

Les autres théories sont pratiquement identiques dans leur esprit et débouchent sur des résultats comparables, toutefois l'étude géométrique des déformations est plus ou moins poussée selon les auteurs.

2.2. - THEORIES CLASSIQUES DES COQUES MINCES

2.2.1. - APPROCHE SIMPLE DE DONNELL (1933), TIMESHENKO (1934), FLUGGE (1960) (THEORIES LINEAIRES)

Les théories des coques minces reposent d'une part sur l'écriture d'équilibre global d'une partie de la coque, ce qui se traduit par cinq équations reliant les efforts globaux et les moments globaux sollicitant cette partie de coque fig. (2.1) ; et d'autre part sur l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF qui conduit à des déformations linéaires en fonction de la cote z du point considéré.

Partant des considérations géométriques DONNELL (1933), TIMESHENKO (1934) et FLUGGE (1960) proposent une forme simple des équations d'équilibre global d'une partie d'un cylindre de révolution d'épaisseur ($t = 2h$) (fig. 2.1), en projetant les forces et les moments appliqués sur les trois axes du repère local, ces équations deviennent en négligeant les variations de la courbure due aux efforts normaux.

$N_x, N_\theta,$

$$\begin{aligned}
 r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + r p_x &= 0 \\
 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - Q_\theta + r p_\theta &= 0 \\
 \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_\theta - r p_r &= 0 \\
 \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - r Q_\theta &= 0 \\
 r \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - r Q_x &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

avec :

$$Q_\theta = \int_{-h}^{+h} \sigma_{13} dz \qquad Q_x = \int_{-h}^{+h} \sigma_{23} dz \tag{2.2}$$

$$N_\theta = \int_{-h}^{+h} \sigma_{11} dz \qquad N_x = \int_{-h}^{+h} \sigma_{22} dz \qquad N_{x\theta} = N_{\theta x} = \int_{-h}^{+h} \sigma_{12} dz$$

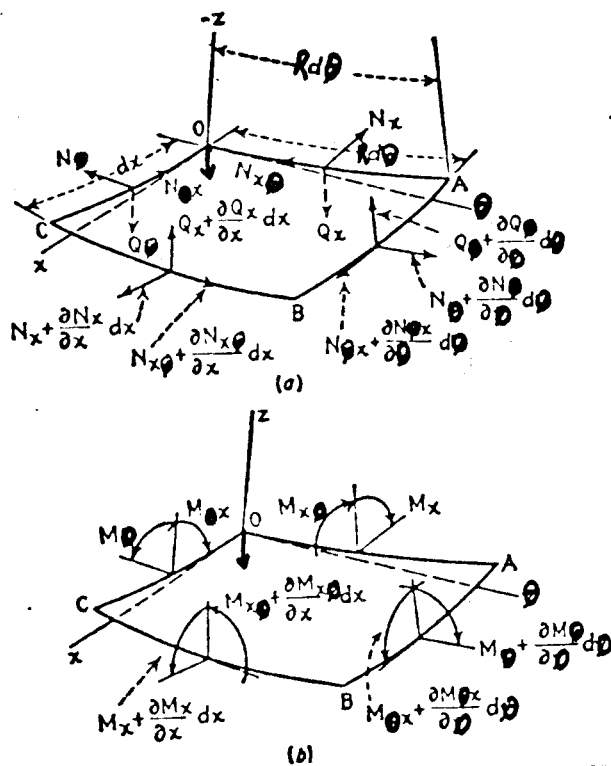


FIG. 2.1a Système complet des sollicitations

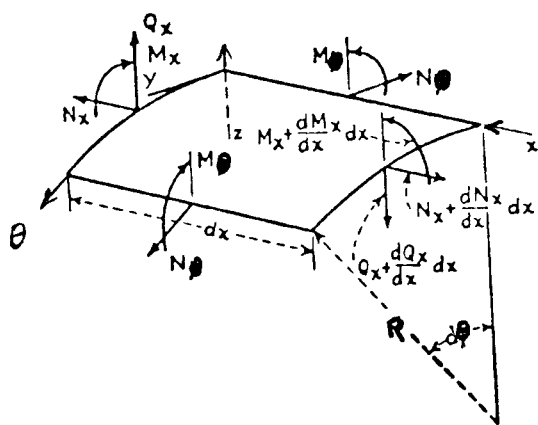


FIG. 2.1 bis Système simplifié des sollicitations

$$\text{et } M_{\theta} = - \int_{-h}^{+h} \sigma_{11} z dz \quad M_x = \int_{-h}^{+h} \sigma_{22} z dz \quad \text{et} \quad M_{\theta x} = M_{x\theta} = - \int_{-h}^{+h} \sigma_{12} z dz$$

Car dans la plupart des cas les auteurs supposent que :

$$M_{\theta x} = M_{x\theta} \quad (2.3)$$

ce qui permet l'élimination de Q_{θ} et Q_x étant donné que ces quantités sont inaccessibles par ces théories, par conséquent les auteurs les remplacent par leurs valeurs déterminées par les quatrième et cinquième équations

$$\begin{aligned} Q_{\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} \\ Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le système d'équations (2.1) se réduit donc au système suivant (2.5)

$$r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + r p_x = 0 \quad (a)$$

$$- \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + r p_{\theta} = 0 \quad (b)$$

$$2 \frac{\partial^2 M_{\theta x}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_{\theta}}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_{\theta} - r p_r = 0 \quad (c)$$

Pour simplifier le problème les auteurs supposent que les déformations et les contraintes en un point quelconque $M (\theta, x, R + z)$ sont des fonctions linéaires des déformations au point correspondant $M_0 (\theta, x, R)$ du cylindre moyen et que les contraintes dans la direction radiale sont supposées négligeables, (hypothèse de LOVE KIRSCHOFF des déformations planes) soient :

$$\begin{aligned}\epsilon_{\theta} (z) &= \epsilon_{\theta} - z \chi_{\theta} \\ \epsilon_x (z) &= \epsilon_x - z \chi_x \\ \gamma_{\theta x} (z) &= \gamma_{\theta x} - 2 z \chi_{\theta x}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_{\theta} = \frac{1}{R} (u + \frac{\partial v}{\partial \theta}) \quad ; \quad \epsilon_r \approx 0 \\ \chi_{\theta} &= \frac{1}{R^2} (\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta}) \quad ; \quad \chi_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \gamma_{\theta x} &= \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad 2 \chi_{\theta x} = \frac{1}{R} (\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial v}{\partial x})\end{aligned}\tag{2.7}$$

Les contraintes sont déduites des déformations par la loi de HOOKE selon les expression :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_{\theta} + \nu \epsilon_x) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_{\theta}) \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2 (1 + \nu)} \gamma_{\theta x}\end{aligned}\tag{2.8}$$

ce qui donne pour les contraintes en un point M ($\theta, x, R + z$) les valeurs suivantes :

(2.9)

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{1}{R} (u + \frac{\partial v}{\partial \theta}) + \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \frac{Ez}{1 - \nu^2} \left[\frac{1}{R} (\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta}) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\nu}{R} (u + \frac{\partial v}{\partial \theta}) \right] - \frac{Ez}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} (\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta}) \right]$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{Ez}{2(1 + \nu)R} \left[2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

nous aurons l'occasion de commenter ces résultats plus loin dans ce chapitre,

En remplaçant les σ_{ij} par ces valeurs dans (2.2) et (2.5) on obtient les équations d'équilibre suivantes, (avec $\vec{P} = \vec{p}^+ + \vec{p}^-$) et

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad k = \frac{Et}{(1 - \nu^2)} \quad (2.10)$$

$$\nu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{R} (\frac{\partial v}{\partial \theta} + u) + \frac{t^2}{12} R (\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4}) \quad (2.11)$$

$$- \frac{t^2}{12} (\frac{2 - \nu}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3}) - \frac{R \cdot p_r}{K} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{1 + \nu}{2R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$+ \frac{t^2}{12R^2} \left[(1 - \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right] - \frac{t^2}{12R^2} (\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}) + \frac{p_\theta}{K} = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1 + \nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{p_x}{K} = 0 \quad (c)$$

Ces équations constituent la base des théories classiques, et la majorité des auteurs supposent que seul le terme $\nabla^4 u$ dans l'équation (2.11.a) reste en facteur de $\frac{t^2}{12 R^2}$, les autres termes étant négligeables.

Cette démarche de calcul fait apparaître le besoin d'avoir des dérivées d'ordre très grand en u pour tenir compte de la flexion, d'où l'intérêt d'utiliser les relations (2.4) pour définir des efforts de cisaillement qui sont supposés négligeables.

Le système d'équations de base simplifiées, universellement admis se limite à notre système (HAGE-1), ce système peut être traité par dérivations successives pour aboutir au système suivant dit "des équations de DONNELL)":

$$\nabla^8 u + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 t^2} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{1}{D} \nabla^4 p_r$$

$$\nabla^4 v = - \frac{2+\nu}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \quad (2.12)$$

$$\nabla^4 w = - \frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2}$$

Ces équations ont servi de base pour de nombreuses résolutions analytiques, notamment pour l'étude du flambement des coques

Par ailleurs BIJLAARD (1955) propose la simplification des équations (2.11) par la suppression du premier terme en facteur de

$\frac{t^2}{12 R^2}$ dans (2.11.b), à condition de supposer que la coque est très mince ($\frac{t}{R} \ll 0.1$)

ce qui conduit à un système d'équations plus complet que (2.12)

$$\begin{aligned} \nabla^8 u + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 t^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{R^2} \cdot \left[\frac{2}{R^6} \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + \frac{(6+\nu-\nu^2)}{R^2} \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \right. \\ \left. \frac{7+\nu}{R^4} \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial \theta^4} \right] = \frac{1}{D} \nabla^4 P_r \\ - R \nabla^4_w = \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{t^2}{12 R^2} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial \theta^4} \right) \quad (2.13.) \\ - R \nabla^4_v = \frac{2+\nu}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} - \frac{t^2}{12 R^2} \left(\frac{2 R}{1-\nu} \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial \theta} + \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{1}{R} \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial \theta^3} + \right. \\ \left. \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial \theta^5} \right) \right) \end{aligned}$$

2.2.2.- APPROCHES APPROFONDIES DE DONNELL (1976) et de FLUGGE (1960) - PRISE EN COMPTE DE LA NON LINEARITE DES DEFORMATIONS

Afin de compléter l'approche classique signalée au paragraphe précédent, nous examinons ci-dessous les différentes variantes des équations d'équilibre proposées par de nombreux auteurs, notamment par FLUGGE (1960) et DONNELL (1976), toutefois, il est à noter que ces différentes théories diffèrent surtout par l'analyse géométrique des déformations et par l'introduction ou non dans l'intégration des forces et des moments (2.2) d'un terme correctif due à la courbure et égale à

$1 + \frac{z}{R}$. Ce qui contribue à créer une non linéarité artificielle en

fonction de z par le développement en série du terme $\frac{1}{1 + \frac{z}{R}}$

2.2.2.1. - EQUATIONS PROPOSEES PAR FLUGGE (1960)

En partant de l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF et en supposant que les contraintes σ_{3j} sont nulles FLUGGE (1960) propose une variation linéaire des déformations en fonction de la cote z du point considéré par rapport à son homologue du plan moyen, ce qui lui permet de trouver les déplacements sous une forme générale

Soient :

$$u(z) = u$$

$$v(z) = \frac{R+z}{R} v - \frac{z}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (2,14)$$

$$w(z) = w - z \frac{\partial w}{\partial x}$$

ce qui donne pour les déformations des valeurs suivantes :

$$\epsilon_x = \frac{\partial w}{\partial x} - z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{3R}{(R+z)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{u}{R+z} \quad (2,15)$$

$$\gamma_{\theta x} = \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{R+z}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{z}{R} + \frac{z}{R+z} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta}$$

et pour les équations d'équilibre globale en introduisant dans l'intégration de $N_x, M_x, N_\theta, M_\theta$ l'influence de la courbure par le terme $(1+\frac{z}{R})$:

(2.16)

$$\begin{aligned}
 & \nu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) + \frac{t^2 R}{12} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \right] \\
 & + \frac{t^2}{12 R^2} \left[\frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} - R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{3 - \nu}{2} R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{u}{R} \right] - \\
 & - \frac{p_r R}{K} = 0
 \end{aligned} \tag{a}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 + \nu}{2 R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\
 & + \frac{t^2}{12 R^2} \left[\frac{3}{2} (1 - \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{3 - \nu}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} \right] + \frac{p_\theta}{K} = 0
 \end{aligned} \tag{b}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2 R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1 + \nu}{2 R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \\
 & + \frac{t^2}{12 R^2} \cdot \left[\frac{1 - \nu}{2 R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - R \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1 - \nu}{2 R} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} \right] + \frac{p_x}{K} = 0
 \end{aligned} \tag{c}$$

Les termes en facteur de $\frac{t^2}{12 R^2}$ représentent ceux qui proviennent de la flexion locale (dans la plupart des cas) d'après FLUGGE, ces équations se réduisent à :

$$\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{t^2 R}{12} \nabla^4 u - \frac{P_x R}{K} = 0 \quad (a) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-v}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1+v}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{P_x}{K} = 0 \quad (b)$$

$$\frac{1+v}{2R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{t^2}{12R^3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} + \right. \quad (c)$$

$$\left. \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \right) + \frac{P_\theta}{K} = 0$$

et d'une façon plus générale il suggère la conservation des termes en $u^{(n)}$ pour les valeurs supérieures de dérivation n dans les termes en facteur à $\frac{t^2}{12 R^2}$; par des simplifications successives nous pouvons retrouver exactement le système (2.12) de DONNELL.

2.2.2.2. - DONNELL (1976)

Partant des considérations mathématiques et géométriques DONNELL (1976) propose une théorie générale concernant les coques cylindriques de révolution, en particulier, il propose une relation linéaire entre les déformations en un point $M(\theta, x, R+z)$ et celles du point correspondant du plan moyen $M_0(\theta, x, R)$ de la forme :

$$\epsilon_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} z \quad (2,18)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{R} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{u}{R^2} \right) z$$

$$\gamma_{\theta x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{R} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{R} \right) +$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) z.$$

Des relations plus simples s'obtiennent en négligeant les termes $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ dans ϵ_x et les termes semblables dans ϵ_θ et $\gamma_{\theta x}$. A partir de ces relations DONNELL exprime les équations d'équilibre global d'une partie du cylindre en supposant que ce cylindre est très mince :

$$\begin{aligned} Z \cdot v + X \cdot w + \frac{\partial u}{\partial x} \left[X \cdot u + \frac{v}{R} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot Z \cdot u + \frac{P_x}{K} &= 0 \\ Z \cdot w + Y \cdot v + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \left[Y \cdot u + \frac{1}{R} \right] + \frac{\partial u}{\partial x} Z \cdot u + \frac{P_\theta}{K} &= 0 \end{aligned} \quad (2,19)$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) + v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{t^2}{12} (R \nabla^4 u) + \frac{t^2}{12 R^2} \left(\frac{v^2}{1-v} R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. \frac{2-v}{(1-v) R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{1-v} \frac{u}{R} \right) - \frac{t^2}{12 R^2} \left[R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} \right. \\ & \left. - \frac{3-v}{2} R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right] - \frac{P_R}{K} = 0 \end{aligned}$$

avec :

$$K = \frac{Et}{1-v^2} ; \quad D = \frac{Et^3}{12(1-v^2)}$$

et

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2R} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} ; \quad Y = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} ; \\ Z &= \frac{1+v}{2R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Par manipulation des deux premières équations à l'aide des opérateurs X, Y, Z, on obtient les équations :

$$\begin{aligned} -\nabla^4 w &= \frac{1}{R} \left(-\frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \frac{2}{1-v} \frac{Z \cdot p_\theta - Y \cdot p_x}{K} \\ &+ \frac{2}{1-v} \left[Z \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} Z u + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot Y \cdot u \right) - Y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot X \cdot u + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} Z \cdot u \right) \right] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \nabla^4 v &= \frac{1}{R} \left[\frac{(2+v)}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \right] + \frac{2}{1-v} \frac{Z \cdot p_x - X \cdot p_y}{K} \\ &+ \frac{2}{1-v} \left[Z \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} X \cdot u + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} Z \cdot u \right) - X \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} Z \cdot u + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot Y \cdot u \right) \right] \end{aligned}$$

(2.21)

.../...

et l'équation complète en u :

$$\begin{aligned} \nabla^8 u + \frac{1}{R^2} \nabla^2 \left(\frac{5}{R^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{2}{R^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \right) + \frac{1}{R^4} \left(\frac{3}{R^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \right) \\ + \frac{12(1-v^2)}{R^2 t^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\nabla^4 p_r}{D} + \nabla^4 \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} F_x + \frac{F_\theta}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right) + \frac{2 F_{\theta x}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \right. \\ \left. \left(u + \frac{1}{R^2} \nabla^{-2} u \right) \right] \end{aligned} \quad (2.22.)$$

avec :

(2.23)

$$F_x = \int_{-h}^{+h} \sigma_{22} dz = K \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{v}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) - \frac{t^2}{12 R} \left\{ \frac{1-v-v^2}{1-v} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{v}{(1-v) R^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right) \right\} \right\}$$

$$F_\theta = \int_{-h}^{+h} \sigma_{11} dz = K \left\{ v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ \frac{v^2}{1-v} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(1-v) R^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right) \right\} \right\}$$

$$F_{x\theta} = \int_{-h}^{+h} \sigma_{12} dz = \frac{1-v}{2} K \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{t^2}{12 R^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

Ce système est le plus complet des théories basées sur l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF ; en particulier pour les cas de faibles déformations, le troisième et le quatrième termes des deux équations (2.2) sont négligeables et on retrouve les équations (2.12) de DONNELL.

2.3. - THEORIES MODERNES DES COQUES MINCES

Nous exposons dans ce paragraphe les théories élaborées par KOITER (1966) et par NAGHDI (1963), théories qui servent de base à la résolution des coques par la méthode des éléments finis ; toutefois ces auteurs supposent que les déformations sont planes et par conséquence utilisent des hypothèses moins strictes mais comparables à celles de LOVE-KIRCHOFF, et notamment le deuxième expose une théorie basée sur un principe variationnel élaboré par REISSNER (1950), et dont la méthodologie sort du cadre de notre travail, pour cette raison nous nous contentons de mentionner les différences avec les théories classiques.

2.3.1.- THEORIE DE KOITER (1966)

La théorie de KOITER est essentiellement obtenue en supposant la coque comme un solide à trois dimensions, d'épaisseur constante et "petite", moyennant quoi KOITER suppose que l'état de contrainte est approximativement plan et que la distribution des contraintes parallèles à la surface moyenne de la coque est approximativement linéaire, ce qui permet l'intégration du taux d'énergie selon l'épaisseur afin d'exprimer l'énergie potentielle en fonction des déplacements de la surface moyenne de la coque qui sont fonctions uniquement de x et de θ

Toutefois l'introduction du calcul tensoriel dans la théorie de la surface rend ce modèle applicable à des coques de géométrie quelconque par les biais des fonctions des formes que nous ne détaillons pas ici.

Les déplacements d'un point quelconque vont être égaux à :

$$\begin{aligned} u(z) &= u \\ v(z) &= v - \frac{z}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ w(z) &= w - z \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (2,24)$$

ce qui est tout à fait comparable aux théories classiques.

Cependant l'introduction des fonctions des formes fournit des équations complètes d'équilibre obtenues par dérivation de l'équation d'énergie potentielle, et valable uniquement pour une coque encastree à ses extrémités ($x = 0$, $x = L$) soit :

(2.25)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{t^2}{12R^2} \left\{ \frac{u}{R} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \frac{2}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right\} \\ + \frac{t^2}{12} \{ Rv^2 u \} = \frac{Pr R}{K} \end{aligned} \quad (a)$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-v}{2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{R(1-v)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} + \frac{t^2}{12R^2} \left\{ \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} - 2R \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{4}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + 2R(1-v) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\} \\ = - \frac{P\theta R}{K} \end{aligned}$$

$$v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-v}{2R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{PxR}{R} \quad (c)$$

Nous pouvons remarquer que ces équations d'équilibre sont comparables aux notres, aux équations complètes de DONNELL (1976), et à celles de FLUGGE (1960). Toutefois nous devons souligner que cette théorie part d'une hypothèse semblable à celle de LOVE KIRCHOFF et que par conséquent elle est incapable d'exprimer les contraintes de cisaillement relatives à la direction radiale, de plus les résultats pratiques de cette théorie semblent douteux dans le cas de la flexion.

2.3.2.- THEORIE DE NAGHDI (1963)

La théorie élaborée par NAGHDI repose essentiellement sur un principe variationnel trouvé par REISSNER (1950), qui lui permet de considérer les déplacements et les contraintes comme indépendants les uns des autres.

En particulier si les déplacements sont supposés plans, on peut les exprimer sous la forme suivante :

$$u(z) = u \quad (2.26)$$

$$v(z) = v + B_1 z \quad (2.27)$$

$$w(z) = w + B_2 z$$

où u , v , w sont les déplacements d'un point de la surface moyenne de la coque, B_1 et B_2 représentent les rotations autour de $\vec{a}_1$ et de $\vec{a}_2$ de a_3 . Ces cinq quantités sont supposées être des fonctions indépendantes.

Avec ces considérations, nous pouvons déduire les déformations de la membrane ($z=0$) qui sont les mêmes que, celle des théories classiques et les déformations de flexion linéaire qui dépendent de u , v , w , B_1 et B_2 .

Cependant pour trouver les contraintes, nous ne pouvons plus appliquer la loi de HOOKE, mais les résultats du principe variationnel qui relie les efforts et les moments globaux aux déformations locales, et en déduire par les relations (2.2) les contraintes, les valeurs trouvées sont celles des théories classiques, avec en plus des valeurs adéquates pour σ_{13} et σ_{23} (2.28)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \sigma_{13} &= \frac{3}{4} \frac{Q^0}{h} \left[1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right] - \frac{1}{4} P_1^+ \left(1 - \frac{2z}{h} - 3 \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) - \frac{1}{4} P_1^- \left(1 + \frac{2z}{h} - 3 \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \\ \left(1 + \frac{z}{R}\right) \sigma_{23} &= \frac{3}{4} \frac{Q_x}{h} \left[1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right] - \frac{1}{4} P_2^+ \left(1 + \frac{h}{R}\right) \left[1 - \frac{2z}{h} - 3 \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right] + \\ &\quad \frac{1}{4} P_2^- \left(1 - \frac{h}{R}\right) \left(1 + \frac{2z}{h} - 3 \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, cette théorie peut définir à priori des valeurs pour σ_{13} , σ_{23} , toutefois comme nous l'avons signalé, la loi de HOOKE n'est plus applicable aux contraintes locales, car les déformations sont supposées linéaires, alors que les contraintes σ_{23} , σ_{13} sont paraboliques pour pouvoir satisfaire aux conditions aux limites. Toutefois la mérite de cette théorie est d'abandonner une partie de l'hypothèse de LOVE KIRCHOFF car une normale à la surface moyenne avant déformation ne le reste plus forcément après déformation.

Une extension de cette théorie consiste à introduire l'effet de la contrainte normale σ_{33} , mais il semble d'après l'auteur, que cet effet soit négligeable.

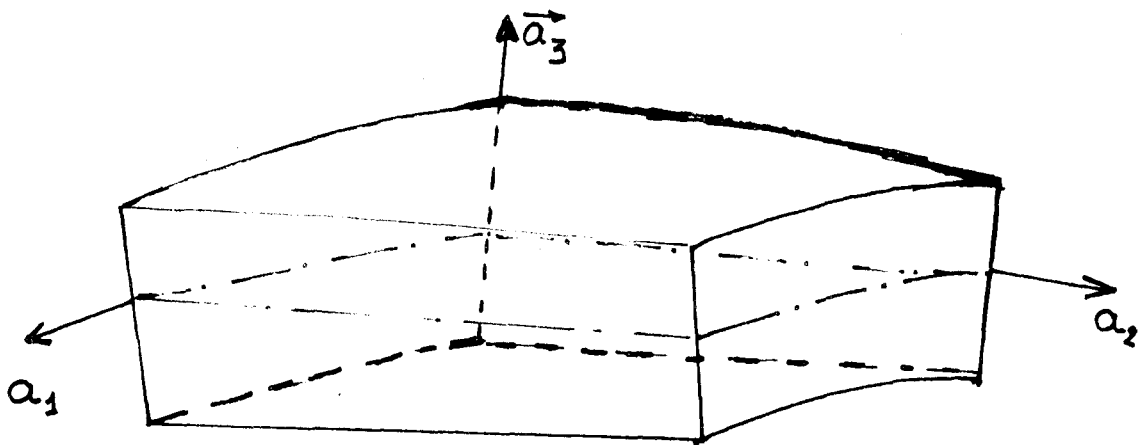


Fig. 2.2

2.4. - COMPARAISON

Pour saisir l'importance de notre travail nous proposons dans ce paragraphe la comparaison entre nos résultats et ceux des théories précédemment exposées. Cette comparaison porte sur les déplacements, sur les contraintes ainsi que sur les équations d'équilibre.

Le tableau (2.1) montre les différentes valeurs des composants du déplacement d'un point M de cote z par rapport à la surface moyenne, nous pouvons constater que les théories classiques s'arrêtent à l'approximation linéaire de LOVE KIRCHOFF, alors que notre théorie donne exactement cette approximation, plus des termes non linéaires en z non négligeables dans la mesure où ils représentent les effets des contraintes de cisaillement.

Les tableaux (2.2) montrent la comparaison entre les contraintes σ_{11} , σ_{12} et σ_{22} , nous pouvons constater que les expressions sont identiques jusqu'à l'approximation linéaire mais que seule notre théorie donne des valeurs admissibles pour l'approximation non linéaire en z .

De même l'examen du tableau (2.3) nous permet de constater qu'aucune théorie classique n'est apte à trouver des valeurs admissibles pour les contraintes σ_{13} , σ_{23} et σ_{33} , dans la mesure où l'approximation linéaire est inadéquate pour vérifier deux conditions aux limites aux surfaces $z = \pm h$; et que seule la théorie de NAGHDI (1963) propose des valeurs non linéaires en z pour σ_{13} et σ_{23} , en sacrifiant la loi de HOOKE.

Par ailleurs si nous examinons les équations d'équilibre (tableaux 2-4 à 2-6) nous constatons que les théories classiques contiennent approximativement certains de nos termes plus précisément, nous pouvons relier ces théories entre elles en utilisant la valeur proposée

pour $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ dans (1-62a), ce qui nous pousse à dire qu'il n'y a pas plu-

sieurs théories classiques mais une seule dont les résultats sont inclus dans les équations proposées par nous. Toutefois notre travail dépasse ces théories limitées aux coques minces, car nous pouvons traiter les cas de coques épaisses chargées d'une façon générale.

AUTEURS	Classiques, KOITER	FLUGGE DONNELL	NAGHDI (1963)	(Tableau 2.1) HAGE
u (θ, x, R+z)	u	u	u	$u + \frac{h}{R} u_s^{(1)} - \frac{v}{1-v} \frac{z}{R} \left[u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + R \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{z^2}{2 (1-v^2) R^2}$ $\left[u + v (1 + v) R^2 \nabla^2 \cdot u + (1 - v - v^2) \frac{\partial v}{\partial \theta} + v R \frac{\partial w}{\partial x} \right]$
v (θ, x, R+z)	$v - \frac{z}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}$	$\frac{R+z}{R} v - \frac{z}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}$	$v + B_1 z$	$v + \frac{h}{R} v_s^{(1)} + \frac{z}{R} \left[v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - \frac{z^2}{2 (1-v^2) R^2}$ $+ (1 - v) R^2 \nabla^2 \cdot v + R \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \left[(2 - v) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right]$
w (θ, x, R+z)	$w - z \frac{\partial u}{\partial \theta}$	$w - z \frac{\partial w}{\partial x}$	$w + B_2 z$	$w + \frac{h}{R} w_s^{(1)} - \frac{z}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{z^2}{2 (1-v^2) R^2}$ $+ (1 - v) R^2 \nabla^2 \cdot w + R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[v R \frac{\partial u}{\partial x} + R \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \right]$



AUTEURS	CLASSIQUES	NAGHDI	HAGE
$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]$	σ_{11}		$\left\{ \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{z}{R} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right. \right.$ $+ \frac{z^2}{2R^2} \left[\frac{1-2\nu^2}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{R} + \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{(1-\nu^2)R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]$ $- \frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - R \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot v - \nu R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot w - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^3} \left. \right\}$ $+ \left(\frac{h}{R} \right)^2 \frac{\nu}{(1-\nu)} \left[\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{R}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot v - R \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot w \right]$ $+ \frac{h}{R} \left[p_{s3} + \frac{\partial p_{s1}}{\partial \theta} + R \frac{\partial p_{s2}}{\partial x} \right]$
$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{Ez}{2(1+\nu)R} \left[2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right]$	σ_{12}	mais expressions sous forme intégrale	$= \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \left(\frac{1}{R} \frac{w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{z}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} \right) \right.$ $+ \frac{z^2}{2R^2} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \left(R \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot w + R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot w \right) - \frac{1}{1-\nu} \right.$ $\left. \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial \theta^2} + R \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right\} + \frac{h}{R} \sigma_{12s}^{(1)}$
$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right]$	σ_{22}		$= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\nu}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{z}{R} \left[\frac{\nu}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \right.$ $+ \frac{z^2}{2R^2} \left[- \frac{\nu}{1-\nu^2} \left[\nu \left(\frac{u}{R} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{(2-\nu^2)}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \nu R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right.$ $- \nu R \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot v + R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} - R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot w - R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \left. \right] + \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{h}{R} \right)^2$ $\left[\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{R}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot v - \frac{R^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot w \right] + \frac{h}{R} \sigma_{22s}^{(1)}$

			$\begin{aligned} (1 + \frac{z}{R}) \sigma_{13} &= \frac{3 Q \theta}{4 h} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \\ &- \frac{1}{4} P_1^+ \left(1 - \frac{2z}{h} - 3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) \\ &- \frac{1}{4} P_1^- \left(1 + \frac{2z}{h} - 3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= \frac{h}{R} (P_{s1}^{(1)}) + \frac{E}{1 - \nu^2} \left\{ - \frac{z}{R} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \frac{1 - \nu}{2} + R \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \right. \\ &- \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \left. \left. + \frac{(z^2 - h^2)}{2 R^2} \left[\frac{3}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + R \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot u + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right. \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \frac{1 - \nu}{2} R \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{3 (1 + \nu)}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right] \right\} \end{aligned}$
$\sigma_{31} (\theta, x, R + z)$	0		$\begin{aligned} (1 + \frac{z}{R}) \sigma_{23} &= \frac{3 Q x}{4 h} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \\ &- \frac{1}{4} P_2^+ \left(1 + \frac{h}{R} \right) \left[1 - \frac{2z}{h} - 3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] + \\ &\frac{1}{4} P_2^- \left(1 - \frac{h}{R} \right) \left(1 + \frac{2z}{h} - 3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= \frac{h}{R} P_{s2}^{(1)} + \frac{E}{1 - \nu^2} \left\{ - \frac{z}{R} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1 - \nu}{2 R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right. \right. \\ &+ R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left. \left. + \frac{(z^2 - h^2)}{2 R^2} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot u + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \frac{3 (1 - \nu)}{2 R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right\} \end{aligned}$
$\sigma_{32} (\theta, x, R + z)$	0		$= 0$	$\begin{aligned} &= \frac{h}{R} P_{s3}^{(1)} + \frac{E}{1 - \nu^2} \left\{ \frac{z}{R} \left[\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{z^2 - h^2}{2 R^2} \right. \\ &\left. \left[- \frac{1}{R} \left(2 u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - 2 \nu \frac{\partial w}{\partial x} + R \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \cdot v + R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot w \right] \right\} \end{aligned}$
$\sigma_{33} (\theta, x, R + z)$	0		$= 0$	





Tableau 2.4

Auteurs	$\frac{1}{R}(u + \frac{\partial v}{\partial \theta}) + v \frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{t^2}{12} R \nabla^4 u$	$R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$	$\frac{u}{R}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3}$	$R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta}$	$R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$	$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2}$	$\frac{\partial^3 w}{\partial x}$
Classiques TIMESHENKO HAGE - 1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TIMESHENKO YUAN, BIJLAARD	1	1	0	0	0	1	2-v	0	0	0	0
FLUGGE	1	1	0	+2	1	0	$\frac{3-v}{2}$	0	-1	$\frac{1-v}{2}$	0
DONNELL	1	1	$\frac{v^2}{1-v}$	$+\frac{2-v}{1-v}$	$\frac{1}{1-v}$	0	$\frac{3-v}{2}$	0	-1	$\frac{1-v}{2}$	$\frac{1}{80}$
KOITER	1	1	-2v	-2	1	-1	-2	2	0	0	0
HAGE - 2	1	1	$\frac{5v}{2}$	3	$\frac{1-2v^2}{2(1-v^2)} + \frac{3v}{1-v}$	$\frac{1-3v}{2(1-v)}$	$\frac{2-v}{2} - \frac{3v}{2(1-v)}$	$\frac{-1}{2(1-v^2)} + \frac{3v}{2(1-v)}$	$\frac{3v}{2} - \frac{3v}{2(1-v)}$	$\frac{3v}{2} - \frac{1-2v^2}{2(1-v^2)}$	$\frac{3v}{2}$
HAGE - Simplifié Version 1	1	1	3v-1	2	1	0	0	0	$\frac{4-3v+v^2}{2}$	3-2v	v
Version 2	1	1	$\frac{5v}{2}$	3	1	1	$\frac{2-v}{2}$	0	$\frac{4-v}{2}$	3-v	v

AUTEURS	$\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$	$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2}$	$R^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$	$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta}$	$R^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial \theta}$	$\frac{\partial^4 v}{\partial x \partial \theta^3}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4}$	$R \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2}$	$R^3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$	$R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$
Classiques HAGE - 1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TIMESHENKO YVAN - BIJLAARD	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
FLUGGE	1	0	$\frac{1-\nu}{2}$	-1	0	0	0	0	0	0	$\frac{1-\nu}{2}$	0
DONNELL	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{81}{1}$
KOITER	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
HAGE - 2	1	$\frac{-\nu^2}{2(1-\nu)} + \frac{1-\nu}{1-\nu} + \frac{3\nu}{1-\nu}$	$-\frac{3\nu}{2}$	$-\frac{2+\nu}{2}$	$-\frac{\nu(2-\nu^2)}{2(1-\nu^2)} + 1 + \frac{3\nu}{1-\nu}$	$\frac{1-\nu}{4} - \frac{3\nu}{2(1-\nu)}$	$-\frac{3+\nu}{4} - \frac{3\nu}{2(1-\nu)}$	$-\frac{1-\nu}{4}$	$-\frac{5-\nu}{4} - \frac{3\nu}{2(1-\nu)}$	$-1 - \frac{3\nu}{2(1-\nu)}$	$\frac{1-3\nu}{2}$	$\frac{-\nu^2}{2(1-\nu^2)} - (1-\nu) + \frac{3\nu^2}{1-\nu}$
HAGE simplifiée	1	≈ 0	$\frac{\nu^2-3}{2(1+\nu)}$	$-\frac{1+2\nu}{1+\nu} + \frac{3\nu^2}{1-\nu}$	0	0	0	$\frac{1-\nu}{2(1+\nu)} + \frac{3\nu}{2(1+\nu)}$	$\frac{3\nu}{2(1+\nu)}$	$-\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} + \frac{3\nu}{2(1+\nu)}$	0	0



Tableau 2.6

AUTEURS	$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{R(1-v)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}$	$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} \cdot R$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}$	$\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4}$	$\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial \theta^2}$	$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$	$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$	$\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial \theta} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial \theta^3}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$
Classiques HAGE - 1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TIMESHENKO YVAN- BIJLAARD	1	0	-1	-1	0	0	0	1 - v	1	0	0
FLUGGE	1	0	$-\frac{3-v}{2}$	0	0	0	0	$\frac{3}{2}(1-v)$	0	0	0
DONNELL	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-82-
KOITER	1	2	-2	-2	0	0	0	2(1-v)	4	0	0
HAGE - 2	1	$\frac{1-v^2}{2(1-v^2)} - 3 + \frac{3v}{1-v}$	$-(2-v)$	-1	$-(1 + \frac{3v}{1-v})$	$-(\frac{5-v}{4} + \frac{3v}{1-v})$	$-\frac{1-v}{2}$	0	$-\frac{1}{2(1-v^2)} - 2 + \frac{3v}{1-v}$	$-\frac{3+v}{4} - \frac{3v}{2(1-v)}$	$\frac{1-2v^2}{2(1-v^2)} + \frac{3+v}{2} + \frac{3v}{1-v}$
HAGE simplifiée	1	≈ 0	$-\frac{(1-v)(1+2v)}{2(1+v)} + \frac{3v}{1-v^2}$	$\frac{1-v}{2(1+v)} + \frac{3v}{1-v^2}$	$-\frac{(1-v)}{2(1+v)} - \frac{3v^2}{1-v}$	$\frac{1-v}{1+v} + \frac{(1-3v)}{2(1-v)}$	$\frac{(1-v)^2}{4(1+v)} + \frac{3v}{2(1+v)}$	0	0	0	0

505
L117

CHAPITRE III

RESOLUTION ANALYTIQUE

3.1. - INTRODUCTION

Les équations d'équilibre global (1.61.) que nous avons trouvées au chapitre précédent sont en général résolues analytiquement en supposant que les déplacements du point M de la surface moyenne de la coque peuvent se mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions indépendantes en x et en θ .

$$\text{Soit } u_i(\theta, x) = g_i(\theta) f_i(x) \quad (3.1.)$$

Ces fonctions doivent tenir compte de la symétrie de l'appareil et des charges appliquées et doivent en outre satisfaire les conditions aux limites qui déterminent la nature de la solution.

Ainsi les fonctions $g_i(\theta)$ sont souvent fonctions trigonométriques en θ et la solution générale sera exprimée en fonction d'une série de FOURIER en ces fonctions. Par contre les fonctions $f_i(x)$ peuvent être : soit des fonctions polynomiales, soit des fonctions trigonométriques, soit enfin des fonctions exponentielles. Les séries trigonométriques sont plus particulièrement utilisées pour résoudre le problème des charges localisées.

Par ailleurs, la solution complète du système (1.61.) est constituée de la somme d'une solution particulière et de la solution générale du problème homogène associé (forces extérieures nulles), cette solution complète est prise de telle façon qu'elle vérifie les conditions aux limites réelles en x et en θ .

3.2 - EQUATIONS D'EQUILIBRE DECOUPLEES

3.2.1.- Généralités

Cependant l'élaboration d'une telle solution nécessite une simplification importante des équations de base (1.61) pour les remplacer par un système équivalent d'équations découplées en u , v et w cette simplification est souvent basée sur l'intuition des auteurs et sur leurs estimations des termes simplifiés ; c'est ainsi que de nombreuses solutions ont été proposées par DONNELL (1934) et (1976) TIMESHENKO (1934), FLUGGE (1960), HOFF (1954), YUAN (1949) et BIJLAARD (1955). Le principe de la méthode utilisée consiste à dériver plusieurs fois les équations d'équilibre global pour aboutir à trois équations, la première en $\nabla^8 u$, la deuxième et la troisième exprimant respectivement $\nabla^4 v$ et $\nabla^4 w$ en fonction de u , comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre II.

Pour notre part, nous allons utiliser les équations (1.63 b et c) et les traiter en procédant par approximations successives à partir des relations (1.62 a, b et c). Cette méthode est plus générale que celle proposée classiquement dans la même mesure où l'ensemble des termes des équations (1.63 ou 1.61) est conservé.

3.2.2. - Méthode générale de séparation

Considérons le système (1.63) qui s'écrit en conservant la première équation (1.61 a)

(3.2.)

$$\frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ R^3 \nabla^4 \cdot u \right\} + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ I (u_1, ijk, \dots) \right\} = \frac{P_x R}{K} \quad (a)$$

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1+v}{2 R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ II (u, v, \dots) \right\} = - \frac{P_\theta}{K} K_2 \quad (b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2 R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1+v}{2 R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ III (u, w, \dots) \right\} = - \frac{P_x}{K} K_3 \quad (c)$$

où I, II, III sont respectivement le second terme des équations (1.61. a) et (1.63. b et c) k_2 et k_3 sont les opérateurs en x et en θ précédemment explicités.

Pour résoudre analytiquement ces équations, il est commode de séparer les inconnues u , v , w pour aboutir à un système d'équations découplées, composé d'une équation en u et de deux autres équations donnant v et w en fonction de u .

Pour effectuer ce découplage, nous dérivons dans un premier temps l'équation (3.1. c) par les opérateurs :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ et } \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

ce qui nous permet de tirer les valeurs de

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial \theta} \text{ et de } \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial \theta^3}$$

dans un second temps nous dérivons l'équation (3.1. b) par l'opérateur

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

et nous remplaçons les deux termes précédents par leurs valeurs, ce qui donne l'équation suivante pour w :

$$R^2 \nabla^4 w = -vR \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{t^2}{12R^2} \left\{ \frac{2}{1-v} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 III}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 III}{\partial x^2} - \frac{1+v}{1-v} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 II}{\partial x \partial \theta} \right\} \\ - \frac{1}{K} \left\{ \frac{2}{1-v} \times \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 (k_3^P x)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 (k_3^P x)}{\partial x^2} - \frac{1+v}{1-v} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (k_2^P \theta)}{\partial x \partial \theta} \right\} \quad (3.2.c.)$$

De même si nous appliquons successivement les opérateurs :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ et } \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \text{ à l'équation (3.1. b.) nous obtenons des valeurs pour}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial \theta^3} \text{ et } \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial \theta} \text{ que nous remplaçons dans l'équation (3.1. c.) après sa}$$

dérivation par rapport à $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$ ce qui donne pour v :

$$R^2 \nabla^4 \cdot v = - (2+v) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} - \frac{t^2}{12 R^2} \left\{ \frac{2}{1-v} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} - \frac{1+v}{1-v} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \text{III}}{\partial x \partial \theta} \right\} \\ - \frac{1}{K} \left\{ \frac{2}{1-v} \times \frac{\partial^2 (k_2^P \theta)}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 (k_2^P \theta)}{\partial \theta^2} - \frac{1+v}{1-v} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (k_3^P x)}{\partial x \partial \theta} \right\}$$

Enfin nous appliquons les opérateurs ∇^4 à l'équation (3.1.a.) ce qui donne en remplaçant $\nabla^4 v$, $\nabla^4 w$ par (3.2.b.) et (3.2.c), et en négligeant les termes en facteurs à $\left(\frac{t^2}{12 R^2}\right)$

$$\nabla^8 \cdot u + \frac{12(1-v^2)}{R^2 t^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{R^4} \left\{ \nabla^4 \cdot I - \frac{(2+v)}{R^2} \frac{\partial^3 \text{II}}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 \text{II}}{\partial \theta^3} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \text{III}}{\partial x \partial \theta^2} \right. \\ \left. - \frac{v}{R} \frac{\partial^3 \text{III}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{D} \left\{ \nabla^4 \cdot P_r + \frac{2-v-v^2}{(1-v)R^2} \frac{\partial^3 (k_2^P \theta)}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 (k_2^P \theta)}{\partial \theta^3} \right. \\ \left. - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 (k_3^P x)}{\partial \theta^2 \partial x} + \frac{v}{R} \frac{\partial^3 (k_3^P x)}{\partial x^3} \right\} \quad (3.2.a.)$$

Les termes II (u, v) III (u, w) peuvent être pris selon l'approximation faite dans le système (1.63), soit égaux à zéro (système 1.58), soit enfin en ne retenant que les termes en u dans les équations (1.63) nous allons examiner successivement ces possibilités dans le cas d'un chargement radial.

3.2.2.1. - Cas simple relatif au système de base 1.58

Si nous considérons le système de base (1.58), les termes I, II et III sont tous nuls ce qui nous donne le système découplé suivant :

$$\nabla^8 u + \frac{12(1-v^2)}{R^2 t^2} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{1}{D} \nabla^4 P_r \quad (a)$$

$$\nabla^4 v = - \frac{2+v}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \quad (b) \quad (3.3.)$$

$$\nabla^4 w = - \frac{v}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} \quad (c)$$

Ce système de base coïncide avec les équations de DONNELL, il est surtout utilisé dans l'étude du flambement longitudinal de la coque, cas sa partie homogène fournit comme solution la longueur caractéristique de l'onde dans la direction longitudinale soit :

$$\lambda = \sqrt{\frac{R^2 t^2}{12(1-v^2)}} = 0,55 \sqrt{RT} \quad (3.4.)$$

Nous ne détaillons pas ici la solution analytique correspondante, d'ailleurs largement étudiée par les autres auteurs. Ce problème est traité entièrement en paragraphe (3.3.2.2.)

3.2.2.2.- Cas général relatif à notre système (1.61 a), (1.63 b et c)

Considérons le cas général où les termes I, II et III sont pris dans nos équations générales (1.61 a) (1.63 b) et (1.63 c) qui ont été établies sans aucune simplification préalable. Ce qui donne le système suivant pour v et w (3.5)

$$\begin{aligned} \nabla^4 v + \frac{t^2}{24(1-v^2)R^2} \left\{ \frac{(3+5v)(1-v)}{R^4} \frac{\partial^6 v}{\partial \theta^6} + \left[\frac{5}{2}(1-v) + \frac{1+8v-21v^2}{1-v} \right] \frac{1}{R^2} \frac{\partial^6 v}{\partial x^2 \partial \theta^4} \right. \\ \left. + \left[\frac{(1-v)^3}{2} + 9v - \frac{4v}{1-v} \right] \frac{\partial^6 v}{\partial x^4 \partial \theta^2} + R^2 [(1-v)(v-2) + 6v] \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} \right\} = \\ - \frac{(2+v)}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} - \frac{t^2}{12(1-v^2)R^2} \left\{ (v^3 + 6v^2 + 7v - 4) \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial \theta} \right. \\ \left. + \frac{3v^2 + 24v + 1}{2R^2} \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial \theta^3} + \frac{3+8v+v^2}{2R^4} \frac{\partial^5 u}{\partial \theta^5} \right\} \quad (b) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 w + \frac{t^2}{24(1-v^2)R^2} & \left\{ \frac{(3+5v)(1-v)}{R^4} \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + \left[\frac{5}{2}(1-v) + \frac{1+8v-21v^2}{1-v} \right] \frac{1}{R^2} \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial \theta^4} \right. \\ & + \left[\frac{(1-v)^3}{2} + 9v - \frac{4v}{1-v} \right] \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \theta^2} + R^2 \left[(v-2)(1-v) + 6v \right] \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \left. \right\} = \\ & - \frac{v}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{t^2}{12(1-v^2)R^2} \left\{ (4v^2 - \frac{3v(1+v)}{1-v} - \frac{(1-v)^2}{2}) \times \right. \\ & \frac{1}{R^3} \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial \theta^4} + \left[\frac{1}{2}(1+7v)(1-v) - (2+v + \frac{2v}{1-v}) \right] \frac{1}{R} \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \theta^2} + \\ & \left. \left[\frac{1}{2}(1-v^2)(2+v) - 6v^2 \right] R \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right\} \quad (c) \end{aligned}$$

Si nous remplaçons $\nabla^4 v$ et $\nabla^4 w$ par leurs valeurs dans l'équation (3.2 a), nous pouvons obtenir une équation générale en u uniquement à condition de négliger les termes en facteur à

$$\left(\frac{t^2}{12R^2} \right)^2 \text{ soit } (3.6)$$

$$\begin{aligned} \nabla^8 u + \frac{12(1-v^2)}{R^2 t^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{2R^2} & \left\{ \frac{1}{R^2} \left[(1+6v+4v^2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2(2+v)}{R^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right. \right. \\ & + \left. \frac{2}{R^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \right] + \frac{v(v^2+7v+2)}{1+v} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + (4 + \frac{1+2v}{1+v}) \frac{1}{R^4} \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + \\ & \left. \left[10 + \frac{v(9+21v+5v^2)}{1+v} \right] \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{13-v-8v^2}{1+v} \right) \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial \theta^4} \right\} = \frac{\nabla^4 P}{D} \end{aligned}$$

Les équations (3.5) et (3.6) constituent les équations découplées, les plus générales que nous pouvons obtenir en particulier ces équations présentent beaucoup d'avantage par rapport aux équations que nous avons trouvées dans la littérature.

Les tableaux (3.1) et (3.2) montrent une comparaison entre nos équations et celles d'autres auteurs, nous obtenons avec un très faible écart les mêmes coefficients que les autres auteurs pour l'équation relative à la composante radiale u du déplacement. Par contre les équations relatives aux autres composantes du déplacement v et w contiennent des termes correctifs en dérivées d'ordre (6) de ces déplacements qui n'existent pas dans les théories classiques, ces termes sont en général non négligeables et présentent un intérêt certain lors de la résolution du problème par double série de Fourier car alors la convergence de la méthode se trouve accrue.

Tableau 3.1. première équation.

Auteurs	$\frac{t^2}{12R^2} \nabla^8 U + (1-v^2) \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}$	$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}$	$\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial \theta^2}$	$\frac{\partial^4 U}{\partial \theta^4}$	$\frac{\partial^6 U}{\partial x^6}$	$\frac{\partial^6 U}{\partial \theta^6}$	$\frac{\partial^6 U}{\partial x^2 \partial \theta^4}$	$\frac{\partial^6 U}{\partial x^4 \partial \theta^2}$
HAGE simple module de base	1	0	0	0	0	0	0	0
HAGE complet	1	$\frac{1+6v+4v^2}{2}$	$2 + v$	1	$\frac{v(v^2+7v+2)}{2(1+v)}$	$2 - \frac{1+2v}{2(1+v)}$	$\frac{13-v-8v^2}{2(1+v)}$	$5 + \frac{v(9+21v+5v^2)}{2(1+v)}$
HAGE 2 avec A ₂₀ pour $v=0,3$	1	1,6	2	1	0,5	2	4,6	6,8
BIJELAARD	1	0	0	0	0	2	$7 + v$	$6 + v - v^2$
FLUGGE	1	0	$4 - 2v$	1	$2v$	2	$8 - 2v$	6
DONNELL complet version 1	1	$4 + v - 3v^2$	$4 - v$	1	$2v + v^2$	2	$8 - v$	$6 + v + v^2$
DONNELL version 2	1	$4 - 3v^2$	$4 - 2v$	1	$2v$	2	$8 - 2v$	6
DONNELL version 3	1	$1 - v^2$	3	1	v	2	7	$5 + v$
WU-LEE	1	$\frac{12(1-v^2)}{5}$	4	1	$\frac{-12(1-v^2)}{5}$	2	8	$6 - \frac{12(1-v^2)}{5}$
MORLEY	1	1	2	1	2	2	6	6
SIMMONDS	1	0	0	1	0	2	4	2

Tableau 3.2. deuxième équation

Auteurs	$V^4 v$	$\frac{\partial^6 v}{\partial \theta^6}$	$\frac{\partial^6 v}{\partial x^2 \partial \theta^4}$	$\frac{\partial^6 v}{\partial x^4 \partial \theta^2}$	$\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}$	$\frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial \theta}$	$\frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial \theta^3}$	$\frac{\partial^5 u}{\partial \theta^5}$
HAGE	1	$\left[\frac{3+5v}{2} \right] \times \frac{1}{1+v}$	$\left[\frac{5}{2} + \frac{1+8v-21v^2}{2(1-v^2)} \right] \times \frac{1}{1+v}$	$\left[\frac{(1-v)^2}{4} + \frac{9v}{2} - \frac{2v}{(1-v)^2} \right] \frac{1}{1+v}$	$\frac{1}{1+v} \left(\frac{3v}{1-v} - \frac{2-v}{2} \right)$	$\frac{7v+5v^2-4+v^3}{1-v^2}$	$\frac{3v^2+24v+1}{2(1-v^2)}$	$\frac{3+8v+v^2}{2(1-v)}$
BIJLAARD ou autres auteurs	1	0	0	0	0	$+\frac{2}{1-v}$	$\frac{3-v}{1-v}$	1

-
06
-
Troisième équation

	$V^4 w$	$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6}$	$\frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial \theta^4}$	$\frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \theta^2}$	$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6}$	$\frac{\partial^5 u}{\partial x \partial \theta^4}$	$\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \theta^2}$	$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}$
HAGE	1	$\left[\frac{3+5v}{2} \right] \frac{1}{1+v}$	$\left[\frac{5}{4} + \frac{1+8v-21v^2}{2(1-v^2)} \right] \times \frac{1}{1+v}$	$\left[\frac{(1-v)^2}{4} + \frac{9v}{2} - \frac{2v}{(1-v)^2} \right] \frac{1}{1+v}$	$\frac{3v}{1-v} - \frac{2-v}{2}$	$\frac{4v^2}{1-v} - \frac{1-v}{2} - \frac{3v(1+v)}{(1-v)^2}$	$\frac{1+7v}{2(1+v)} - \frac{1}{1-v^2} \times \left[2+v + \frac{2v}{1-v} \right]$	$\frac{2+v}{2} + \frac{6v^2}{1-v^2}$
BIJLAARD	1	0	0	0	0	$-\frac{1+v}{1-v}$	$-\frac{1+v}{1-v}$	0



En outre, il est intéressant de noter que dans la première équation de base en u nous avons pratiquement les mêmes coefficients que les autres auteurs pour $\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4}$ et $\frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6}$, ce qui montre l'importance

de ces termes notamment dans le cas d'un chargement radial indépendant de x , dont l'aspect physique se traduit par l'étude de flambement circonférentiel d'un tube long.

Il importe de remarquer que les équations simplifiées ne peuvent être utilisées que dans le cas de faible déformation de coques minces. Lorsqu'il n'en est pas ainsi (grande déformations ou coques épaisses), on ne peut négliger à priori aucun terme par rapport aux autres dans les équations générales et celles-ci sont par conséquent les seules applicables.

Avant d'examiner les différentes solutions analytiques possibles, nous exposons ci-dessous une séparation simple en v et en w , valable pour le cas de faibles déformations.

3.2.3. - Séparation simple en v et w

Une séparation simple des inconnues v et w peut se faire en considérant l'équation de base (1.65 a) soit :

$$v \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{1}{R} (u + \frac{\partial v}{\partial \theta}) - \frac{t^2 R}{12} \nabla^4 u + \frac{P R}{K} \quad (3.7)$$

Par dérivation en $\frac{\partial}{\partial \theta}$ nous obtenons la valeur de $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$

donc il suffit de remplacer ce terme dans l'équation (1.63 b) nous obtenons ainsi une équation de la forme :

$$v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{v t^2}{12(1+v)R^2} \left\{ \left[1 - \frac{6v^2}{(1-v)^2} \right] \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + R^2 \left(\frac{1-v}{2} + \frac{3v}{1-v} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \right. \quad (3.8)$$

$$\left. \left[2 + \frac{1-3v}{(1-v)^2} \right] \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right\} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1+v}{1-v} \frac{t^2}{12R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^4 u) - \frac{v t^2}{12(1+v)R^2} \times$$

$$\left\{ \left[1 + \frac{6v}{(1-v)^2} \right] \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} - \left[1 + 2v - \frac{6v}{(1-v)^2} \right] \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1+v}{1-v} \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right.$$

De même par dérivation de $\frac{\partial v}{\partial \theta}$, tiré de la même équation (1.58 a) par rapport à $\frac{\partial}{\partial x}$ nous pouvons éliminer $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta}$ dans la troisième équation (1.63 c) pour avoir une équation en w et en u soit

$$\begin{aligned}
 (2+v) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{t^2}{12(1-v^2)R^2} \left\{ (-3+2v) R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \\
 \left. + \frac{(1+2v)}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 3v \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right\} = \frac{1+v}{12(1-v)} t^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^4 \cdot u - \\
 \frac{t^2}{6(1-v^2)R^2} \left[(-v^2 + \frac{3v^2}{1-v}) \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} + \left[-(1+2v) + \frac{3v^2}{1-v} \right] R \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] \\
 - \frac{1+v}{1-v} \frac{1}{K} \frac{\partial p_r}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{3.9.}$$

l'équation définissant u étant la même que (3.6).

Ce système a l'avantage d'être plus simple que (3.5)

3.3 - RESOLUTION ANALYTIQUE

Avant d'examiner les différentes solutions analytiques possibles nous pouvons remarquer que la solution générale de la théorie de la membrane, que nous avons déjà exposée au premier chapitre, est une solution du type analytique (3.1) qui est entièrement défini si l'on se fixe les conditions aux limites en x et en θ . Ceci sera exposé dans la deuxième partie, lors de l'étude des codes de constructions des appareils à pression.

Etant donné que la solution complète des équations (3.7) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du problème sans second membre associé, nous allons examiner dans ce qui suit, les différentes formes de solutions particulières possibles, avant de résoudre le problème homogène.

3.3.1. - Solutions polynomiales en x

Une solution particulière du problème des coques cylindriques peut être obtenue en considérant les déplacements comme un produit d'une fonction trigonométrique en θ et d'un polynôme en x .

Ces fonctions doivent à la fois vérifier les conditions aux limites en x et en θ et respecter la symétrie du problème ; de plus les polynômes en x peuvent être du second degré (dans ce cas nous avons un cylindre soumis uniquement à une flexion longitudinale et à une flexion circonférentielle pure ou d'un degré supérieur (dans ce cas, le cylindre se comporte comme une poutre en flexion simple)).

Pour fixer les idées nous allons traiter ici le problème d'un appareil cylindrique supporté par deux anneaux raidisseurs à ses extrémités et soumis uniquement à la pression hydrostatique du liquide contenu figure (3.1). Dans ce paragraphe, nous négligeons les efforts de cisaillement (problème de la flexion pure). Dans la deuxième partie de notre travail, ce problème est réexaminé dans toute sa généralité. Compte tenu de cette hypothèse, les déplacements s'écrivent dans la forme générale

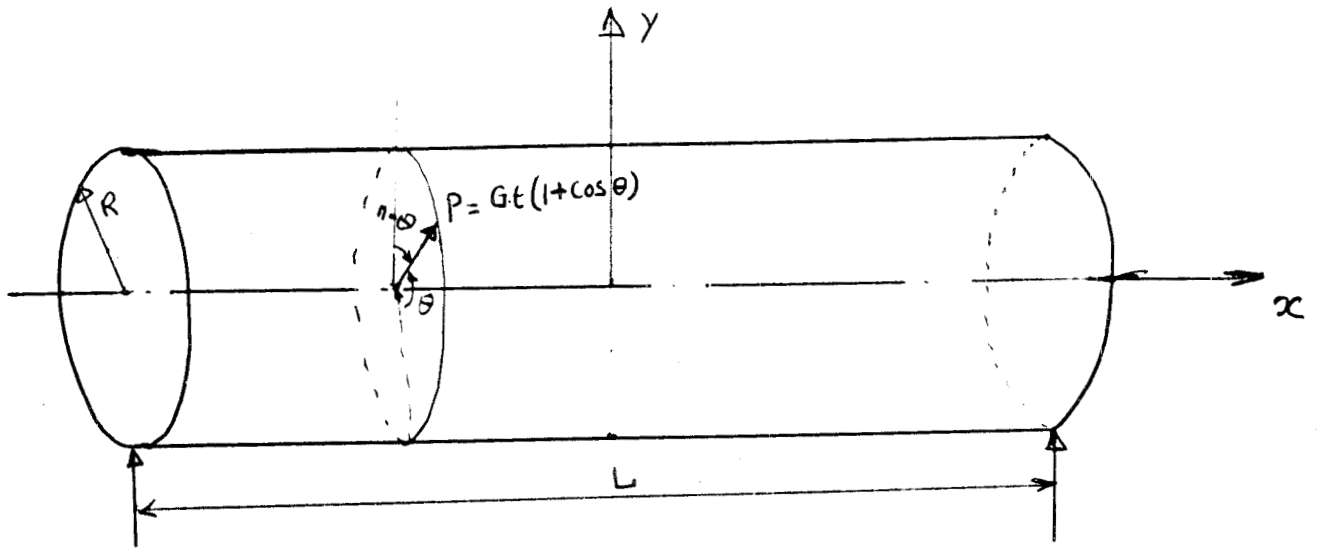


FIGURE 3.1.

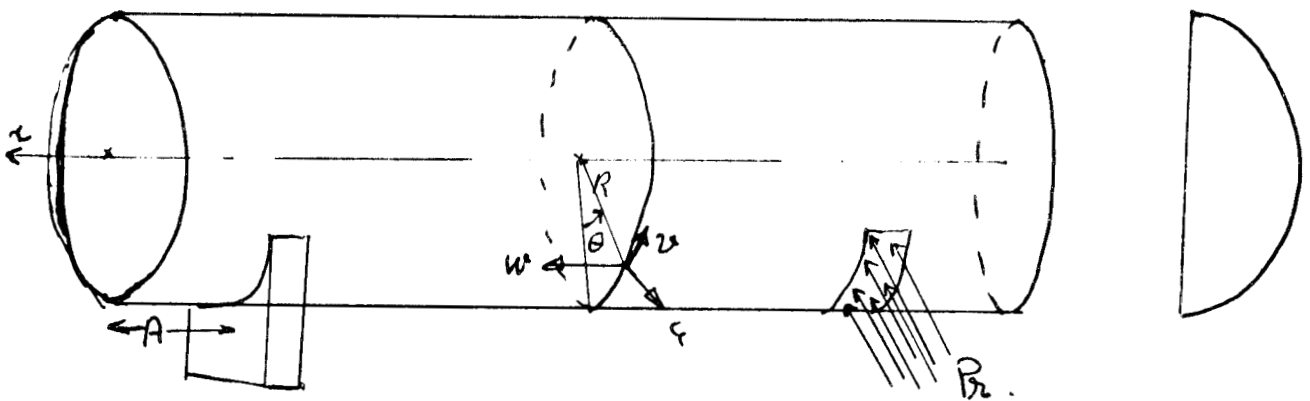


FIGURE 3.2.

$$\begin{aligned} u &= (ax^2 + bx + c) \cos \theta \\ v &= (dx^2 + ex + f) \sin \theta \\ w &= (gx^2 + hx + i) \cos \theta \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\text{avec} \quad Pr = \rho g R (1 + \cos \theta) \quad (3.11)$$

ρ représentant la masse volumique du liquide et g l'accélération de la pesanteur.

Prenons l'origine des axes au milieu de l'appareil, pour respecter la symétrie du problème et les conditions aux limites, les déplacements s'expriment selon les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u &= (ax^2 + c) \cos \theta = a \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right) \cos \theta \\ v &= (dx^2 + f) \sin \theta = d \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right) \sin \theta \\ w &= hx \cos \theta = hx \cos \theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vu la simplicité de la solution proposée nous pouvons utiliser les équations découplées (3.3 b et c) pour v et w , et l'équation complète en u (3.6) ce qui nous donne :

$$a \cos \theta = \frac{(1 + \nu)}{1 - 15\nu - 10\nu^2} \frac{\nabla^4 PA}{D} \quad (3.13.)$$

$$d = -a$$

$$h = -2a$$

et dans le cas de la pression hydrostatique (3.11) nous avons pour a la valeur suivante :

$$a = \frac{(1+\nu) \rho g R}{(1-15\nu - 10\nu^2) D} \quad (3.14.)$$

La solution correspondante pour les contraintes se réduit alors au système suivant :

$$\sigma_{11} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} 2 a \cos \theta \quad (3.15.)$$

$$\sigma_{12} = 0$$

$$\sigma_{22} = - \frac{E 2a \cos \theta}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_{3j} = 0$$

Ce qui montre que l'appareil se comporte comme une poutre soumise à une flexion pure dans les deux directions longitudinale et circonférentielle, de même l'examen de la solution (3.13) montre que chaque section droite avant déformation conserve sa forme circulaire après déformation et subit uniquement une rotation autour de son diamètre horizontal nous retrouvons ainsi les résultats classiques de l'hypothèse de Bernoulli dans le cas de la flexion pure d'une poutre.

3.3.2 - Solutions particulières en double série de FOURIER

3.3.2.1.- Généralités

Dans la plupart des études théoriques de coques, on utilise les doubles séries de FOURIER comme solution particulière.

L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que les équations différentielles (3.5) et (3.6) sont ramenées par cette formulation à des équations algébriques.

Toutefois l'utilisation de cette méthode suppose que les charges extérieures peuvent être décomposées en double séries de FOURIER et que les conditions aux limites en x et en θ sont bien définies sur les composantes u , v , w du déplacement d'un point M_0 de la surface moyenne de la coque, ce qui est toujours possible.

Dans le cas d'un chargement général $(P_r, P_\theta, P_x) \neq (0, 0, 0)$ nous pouvons traiter séparément et de la même manière chaque cas de chargement partiel radial, circonférentiel ou longitudinal, et superposer les résultats pour trouver le problème global.

Afin de fixer les idées nous allons traiter le cas d'un appareil cylindrique dont les extrémités sont soudées à des fonds de forme quelconque (la solution obtenue pour ce problème peut être généralisée à d'autres cas en modifiant les conditions aux limites correspondantes).

Si nous dissocions la virole des fonds : fig. (3.2) nous avons les conditions aux limites suivantes et aux extrémités de l'appareil ($x = 0$, $x = L$) :

$$u = v = 0 \quad \text{présence des fonds} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{absence de la flexion longitudinale} \quad (3.17)$$

ce qui donne pour les contraintes aux extrémités $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$

Pour des conditions aux limites différentes il suffit de superposer à la solution particulière la solution générale telle que la somme de ces deux solutions vérifient les conditions aux limites réelles.

En outre l'action des supports non soudés ou d'une charge répartie localement peut être analysée facilement en décomposant cette charge en double série de FOURIER, soit par exemple, en se limitant au cas de charge radiale :

$$Pr(\theta, x) = \sum_n \sum_m D_{mn} \cos m \theta \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.18)$$

L'amplitude de l'harmonique (m, n) est définie par :

$$D_{mn} = \frac{2}{\pi L} \int_0^L \int_0^{2\pi} Pr(\theta, x) \cos m \theta \sin \frac{n\pi x}{L} dx d\theta \quad (3.19)$$

Nous avons donné en annexe II les différentes valeurs possibles des D_{mn} selon le chargement de l'appareil

3.3.2.2.- Solution particulière de ce problème

Les déplacements du point Mo de la surface moyenne de la coque qui satisfont aux conditions aux limites (3.17) sont de la forme :

$$\begin{aligned} u(\theta, x) &= \sum_n \sum_m A_{mn} \cos m \theta \sin \frac{n\pi x}{L} \\ v(\theta, x) &= \sum_n \sum_m B_{mn} \sin m \theta \sin \frac{n\pi x}{L} \\ w(\theta, x) &= \sum_n \sum_m C_{mn} \cos m \theta \cos \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les coefficients de ces séries A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} sont directement obtenus en remplaçant u , v , w par leurs expressions (3.20) dans les équations générales découplées (3.5) et (3.6), ce qui nous permet de conserver la généralité du problème dont la mesure où nous avons retenu la majorité des termes des équations générales d'équilibre (1.61) contrairement aux auteurs classiques dont les travaux seront comparés plus loin.

Les coefficients de chaque harmonique sont égaux à :

$$A_{mn} = \frac{L^4}{D} \frac{(m^2 \alpha^2 + n^2 \pi^2)^2 D_{mn}}{(m^2 \alpha^2 + n^2 \pi^2)^4 + \frac{12(1-\nu^2)R^2}{t^2} n^4 \pi^4 \cdot L^4 + A} \quad (3.21)$$

(a)

$$B_{mn} = - \frac{(2+v) m \alpha^2 n^2 \Pi^2 + m^2 \alpha^4 + B}{(m^2 \alpha^2 + n^2 \Pi^2)^2 + E} \quad (b)$$

$$C_{mn} = - \frac{n \Pi m^2 \alpha^3 - v \alpha n^3 \Pi^3 + C}{D} \quad (c)$$

avec $\alpha = \frac{L}{R}$ et

$$A = L^4 \left[\frac{1}{2} (1+6v+4v^2) n^4 \Pi^4 + m^4 \alpha^4 + (2+v) m^2 \alpha^2 n^2 \Pi^2 \right] - L^2 \left[\frac{v(v^2+7v+2)}{2(1+v)} n^6 \Pi^6 \right. \\ \left. + \left(2 - \frac{1+2v}{2(1+v)} \right) m^6 \alpha^6 + \frac{13-v-8v^2}{2(1+v)} n^2 \Pi^2 m^4 \alpha^4 + \left(5 + \frac{9+21v+5v^2}{2(1+v)} \right) m^2 \alpha^2 n^4 \Pi^4 \right]$$

BUS
LILLE

$$B = (v^3 + 6v^2 + 7v - 4) m n^4 \Pi^4 + \left(\frac{3}{2} v^2 + 12v + \frac{1}{2} \right) m^3 \alpha^3 n^2 \Pi^2 + \left[\frac{3}{2} + 4v + \frac{v^2}{2} \right] m^5 \alpha^4$$

$$C = \left[4 v^2 - 3v \frac{1+v}{1-v} - \frac{(1-v)^2}{2} \right] m^4 \alpha^3 n \Pi + \left[-1 + 5v - 7v^2 - \frac{2v}{1-v} \right] m^2 \alpha n^3 \Pi^3 \\ + (1 - v^2) (2 + v) - 6v^2 \frac{n^5 \Pi^5}{\alpha}$$

$$E = - \frac{t^2}{12(1-v^2)R^2} \left\{ \frac{m^6 \alpha^4}{2} (3+5v) (1-v) + \left[\frac{5}{4} (1-v) + \frac{1+8v-21v^2}{2(1-v)} \right] m^4 \alpha^2 n^2 \Pi^2 \right. \\ \left. + \left[\frac{(1-v)^3}{4} + \frac{9}{2} v(1-v) - \frac{2v}{1-v} \right] m^2 n^4 \Pi^4 + [(v-2)(1-v) + 6v] \frac{n^6 \Pi^6}{2\alpha^2} \right\}$$

Par ailleurs si nous remplaçons les équations (3.5) et (3.6) par les équations (2.13) de BIJELAARD nous obtenons :

$$A_{mn} = \frac{L^4}{D} \frac{\left(\frac{m^2 L^2}{R^2} + n^2 \pi^2\right)^2 D_{mn}}{\left(\frac{m^2 L^2}{R^2} + n^2 \pi^2\right)^4 + 12(1-\nu^2) \frac{n^4 \pi^4 L^4}{R^2 (2h)^2} - m^2 \frac{R^4}{L^4} \left[2m^4 \frac{R^4}{L^4} + (6+\nu-\nu^2)n^4 \pi^4 + (7+\nu) \frac{m^2 n^2 \pi^2 L^2}{R^2}\right]}$$

$$B_{mn} = \frac{-m}{\left(\frac{n^2 \pi^2 R^2}{L^2} + m^2\right)^2} \left[\frac{(2+\nu)n^2 \pi^2 R^2}{L^2} + m^2 + \frac{h^2}{12R^2} \left(\frac{2}{1-\nu} \frac{R^4 n^4 \pi^4}{L^4} + \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{n^2 m^2 \pi^2 R^2}{L^2} + m^4 \right) \right] A_{mn}$$

$$C_{mn} = \frac{\frac{n\pi R}{L}}{\left(\frac{n^2 \pi^2 R^2}{L^2} + m^2\right)^2} \left[\frac{\nu n^2 \pi^2 R^2}{L^2} - m^2 - \frac{h^2}{12R^2} \frac{1+\nu}{1-\nu} m^2 \left(\frac{n^2 \pi^2 R^2}{L^2} + m^2 \right) \right] A_{mn}$$

L'examen des valeurs données par notre théorie et par celle de BIJELAARD (ou d'une façon générale par les auteurs classiques) montre la richesse de notre méthode dans la mesure où aucune simplification préalable n'a été faite, et dans la mesure où notre méthode est valable aussi bien pour les coques épaisses que pour les coques minces, alors que les autres méthodes ne le sont que pour les coques minces, de plus nous pouvons remarquer la présence des termes en

facteur à $\frac{t^2}{12R^2}$ au dénominateur de B_{mn} et C_{mn} , avec des ordres de

dérivations élevées en x et en θ , ce qui va faciliter la convergence de la méthode pour les grandes valeurs de m et de n , nous examinons par la suite les résultats correspondant à nos formulations et à celle de BIJELAARD.

Une fois les coefficients A_{mn} , B_{mn} et C_{mn} déterminés, nous pouvons calculer les composants de déplacements, des déformations et des contraintes en tout point de la coque, à partir de nos résultats (1.39), (1.40) et (1.41) ce qui résout entièrement le problème.

3.3.2.3. - Echelles de chaque harmonique, limites supérieures de m et de n

Pour fixer les limites supérieures du développement en double série de FOURIER il est nécessaire de se fixer des limites pour les échelles de chaque harmonique, en particulier nous pouvons prendre comme limite pour les échelles longitudinales la longueur caractéristique de l'onde :

$$\lambda = \frac{\sqrt[4]{R^2 t^2}}{12 (1 - v^2)} \quad (3.23.)$$

De même pour les échelles circonférentielles nous pouvons fixer comme limite un multiple de l'épaisseur $t = 2h$ de la coque soit par exemple :

$$\mu = 5 \cdot t = 10 \cdot h \quad (3.24.)$$

Cette valeur est suffisamment petite pour représenter l'évolution du phénomène sur la circonférence de l'appareil.

Ainsi pour l'harmonique du rang (m, n) les échelles sont :

$$\begin{aligned} \text{- Echelle longitudinale} \quad \lambda_{(n)} &= \frac{L}{n\pi} \\ & \quad (3.25.) \end{aligned}$$

$$\text{- Echelles circonférentielle} \quad \mu_{(n)} = \frac{2\pi R}{m}$$

Les limites supérieures pour m et n s'obtiennent en comparant les valeurs de (3.25.) à celle de (3.23.) et de (3.24.) soient :

$$n \leq \frac{L \times \sqrt[4]{12 (1-v^2)}}{\pi \sqrt{Rt}} \quad (3.26.)$$

$$m \leq \frac{2 R}{10 \cdot h}$$

Ce qui nous fixe les ordres supérieures N et M pour n et m.

Dans le cas où l'appareil et le chargement présentent une symétrie en x et en θ ces échelles seront réduites de moitié.

...

3.3.2.4.- Cas particulier d'une charge locale répartie

Pour chiffrer la comparaison entre notre théorie et les théories classiques nous allons utiliser un exemple pratique qui sera détaillé dans la deuxième partie, et qui est relatif à l'examen de l'action locale d'une charge radiale répartie dans une certaine zone limitée en x et en θ selon la figure (3.4) et ayant une variation parabolique selon θ ce qui simule l'action de deux supports en berceaux sur un appareil cylindrique à axe horizontal de longueur $L=6,4$ m et de rayon moyen $R=0,6$ m, l'épaisseur $t=2h$ va être considérée comme variable afin que nous puissions examiner l'écart entre les différentes théories selon l'épaisseur relative $\frac{t}{R}$, le calcul va être effectué selon notre méthode et selon celle de BIJELAARD.

Le calcul est effectué en plusieurs points dans la section des charges et au milieu de l'appareil, c'est-à-dire loin des charges, afin d'examiner l'influence des contraintes de la membrane σ_{11} ,

nous attribuons l'indice (a) aux résultats du calcul dans la section des charges et l'indice (b) à ceux de la section du milieu.

I - PREMIERE EQUATION D'EQUILIBRE

Les tableaux (3.1) (a et b) résument les résultats relatifs aux différents termes qui apparaissent dans la première équation d'équilibre (1.61 a) (tableau 2.4).

Nous pouvons constater que nos résultats coïncident avec ceux des théories classiques tant que la demi épaisseur relative $\frac{h}{R}$ ne dépasse pas la valeur $2 \cdot 10^{-2}$ ce qui correspond à $\frac{t}{R} \sim \frac{1}{100}$.

Pour $\frac{t}{R} \sim 10^{-1}$ nous avons un écart de l'ordre de 10% entre les deux méthodes, cet écart croît rapidement dès que $\frac{t}{R}$ augmente, et ceci provient du fait que la coque devient alors un solide tridimensionnel et l'hypothèse de LOVE-KIRCHOFF perd sa justification.

La figure (3.3) montre l'évolution entre les deux théories. En particulier nous pouvons faire les constatations suivantes :

Zone d'appui
3.1.a.

$$\frac{h}{R} = 4 \cdot 10^{-3}$$

Méthode

Angle

$$\frac{u}{R}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$R^3 \frac{\partial^4 u}{V^4}$$

$$R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3}$$

$$R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta}$$

$$R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2}$$

HAGE

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

BIJELAARD

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

HAGE

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

BIJELAARD

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$\frac{h}{R} = 4 \cdot 10^{-2}$$

HAGE

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

BIJELAARD

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

HAGE

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

BIJELAARD

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$\frac{h}{R} = 0,4$$

HAGE

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

BIJELAARD

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

BIJELAARD

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

$$= 0$$



Millieu 3.1.b.		Angle	$\frac{u}{R}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta}$	$-\frac{\partial w}{\partial x}$	$R^3 \frac{\partial^4 u}{\partial^4 \theta}$	$R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3}$	$R \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial \theta}$	$R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta^2}$
$\frac{h}{R} = 4.10^{-3}$	HAGE	= 0	- 10,1	9,5	- 0,16	- 375,7	0,5	54,3	- 51,9	- 0,58	- 0,01	0,55
		$= \frac{\pi}{2}$	6,4	- 5,9	0,1	98,6	- 0,5	- 24,9	22,7	0,5	0,002	- 0,5
	BIJELAARD	= 0	- 10,3	10,39	- 0,16	- 381,9	0,5	55,2	- 55,3	- 0,52	- 0,01	0,56
		$= \frac{\pi}{2}$	6,5	- 6,5	0,1	100	- 0,5	- 25,3	25,5	0,5	0,002	- 0,52
	HAGE	= 0	- 10,9	9,3	- 0,39	- 64,6	- 0,07	22,6	- 22	- 0,17	- 0,04	0,05
		$= \frac{\pi}{2}$	3,8	- 4,1	- 0,07	57	0,41	5,1	16,4	- 0,1	0,05	0,26
$\frac{h}{R} = 4.10^{-2}$	BIJELAARD	= 0	12,6	12,8	- 0,47	- 75,4	0,015	25,75	- 25,9	0,03	- 0,04	0,13
		$= \frac{\pi}{2}$	4,4	- 4,4	- 0,07	67	0,4	- 17,5	17,6	- 0,46	0,05	0,24
	HAGE	= 0	- 30,3	- 8,5	10,39	- 34,5	1,3	30,8	436	417	- 104	-197
		$= \frac{\pi}{2}$	0,41	- 28,9	- 19,7	0,26	0,2	- 0,34	459	419	- 109	-199
	BIJELAARD	= 0	12,6	- 12,97	1,7	20,42	- 3,7	- 12	12,8	4,1	1,2	0
		$= \frac{\pi}{2}$	0,42	- 0,45	- 0,18	- 0,4	0,23	- 0,27	0,18	- 0,22	- 0,01	0
$\frac{h}{R} = 0.4$												

5117
5117

A - COQUES MINCE $\frac{h}{R} \leq 10^{-2}$

A-1 : Zone de l'appui

Le second membre de la première équation peut être réduit au terme fondamental $\nabla^4 u$.

A-2 : Zone éloignée de l'appui (flexion circonférentielle pure)

Les autres termes en u et en v dans le second membre de cette équation ne sont plus négligeable et dans le cas des coques de longueur assez faible ($L \approx 2R$ à $4R$) les termes en w ne peuvent également être négligés. Par conséquent il faut retenir dans ces zones éloignées des appuis la totalité des termes intervenant dans les équations.

B - COQUES D'ÉPAISSEURS INTERMÉDIAIRES $10^{-2} \leq \frac{h}{R} \leq 10^{-1}$

B-1 : Zone de l'appui

Le terme $\nabla^4 u$ reste prépondérant, toutefois dans la partie supérieure de ces zones ($\theta = \pi$) les autres termes ne sont plus négligeables.

B-2 : Zones éloignées de l'appui

Les termes en v et en u sont du même ordre de grandeur que le terme $\nabla^4 u$, et par voie de conséquence, sont à retenir dans la première équation (1.61 a)

C - COQUES ÉPAISSES $\frac{h}{R} > 10^{-1}$

La coque est similaire dans ce cas à un solide tridimensionnel et nous pouvons voir que dans la zone de l'appui tous les termes du second membre de l'équation (1.61 a) sont importants, de plus dans les zones éloignées de l'appui le terme $\nabla^4 u$ devient plus petit que ces autres termes.

Dans tous les cas nous pouvons proposer les conclusions suivantes :

A - Coques minces :

Retenir uniquement les termes en u et en v dans le second membre pour les appareils assez long, mais dans le cas des appareils courts il faut retenir en plus les termes en w.

B - Pour les autres coques : il faut retenir la totalité des termes figurant dans l'équation (1.61.a).

II - DEUXIEME EQUATION

Les tableaux (3.2.a) et (3.2.b) résument les résultats de calcul relatif à la deuxième équation (1.61 b)

Nous pouvons constater l'existence d'un léger écart entre les deux méthodes même pour les faibles valeurs de l'épaisseur relative $\frac{h}{R}$ notamment pour la zone du milieu, sujette à la flexion circonférentielle pure.

Cet écart croît avec $\frac{h}{R}$ ce qui nous permet d'écrire :

A - Coques minces :

Les termes prépondérants dans le second membre de cette équation sont en u et en v dans les zones de l'appui, et en u dans les zones assez éloignées de l'appui.

B - Coques d'épaisseurs intermédiaires et épaisses :

Dans toutes les zones les termes sont du même ordre de grandeur avec une importance relativement grande pour la dérivée en θ de U, par voie de conséquence il faut retenir la totalité des termes dans cette équation.

III - TROISIEME EQUATION

Enfin le tableau (3.3a) résume les résultats relatifs à la troisième équation d'équilibre et nous pouvons proposer la formulation suivante :

A - Pour $\frac{h}{R} \leq 10^{-2}$ nous pouvons négliger le second membre de l'équation (1.61 c)

B - Pour $10^{-2} \leq \frac{h}{R} \leq 10^{-1}$ on peut ne retenir que les termes en u et en w

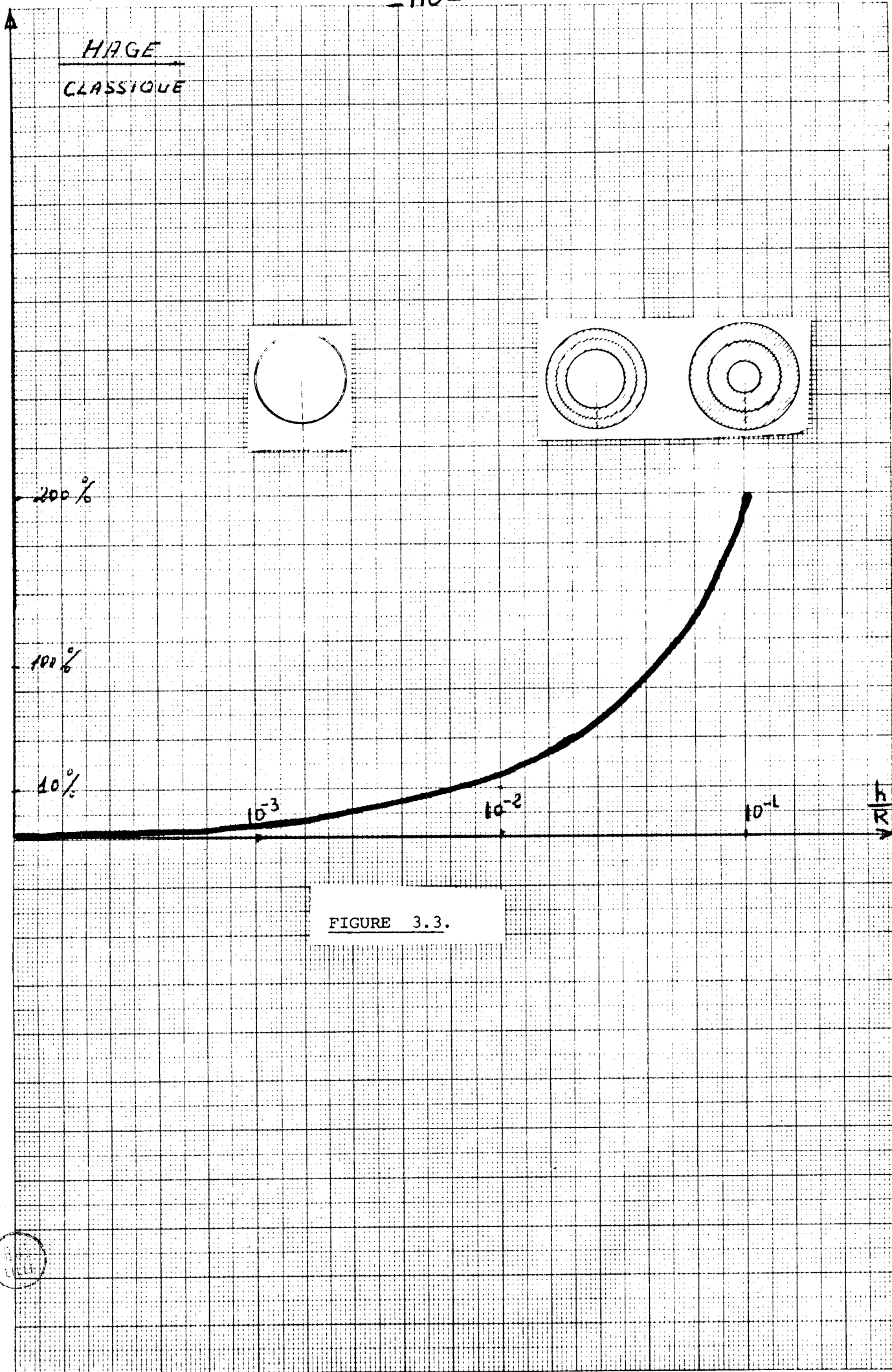
C - Pour $\frac{h}{R} \leq 10^{-1}$ il faut retenir la totalité des termes.

2ème équation 3.2.a.		$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$	$R \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta}$	$R \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3}$	$R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta^2}$	$R^3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$	$R^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial \theta}$	$\frac{\partial^4 v}{\partial x \partial \theta^3}$
$\frac{h}{R}=4.10^{-3}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	HAGE	15,8	- 13,4	0,08	0,43	- 24,3	- 142	- 8	- 0,74	- 27,5	1,18
		BIJELAARD	16	- 15,9	- 1,1	0,43	- 24,3	- 143	- 9,8	- 0,6	- 0,27	0,024
		HAGE	- 7,1	6,55	0,12	- 0,13	0,69	62,3	3,96	- 0,36	0,16	0,025
	$\theta = \frac{\pi}{2}$	BIJELAARD	- 7,2	7,3	0,15	- 0,13	0,69	63,1	4,4	- 0,03	- 0,006	0,004
		HAGE	- 7,1	6,55	0,12	- 0,13	0,69	62,3	3,96	- 0,36	0,16	0,025
		BIJELAARD	- 7,2	7,3	0,15	- 0,13	0,69	63,1	4,4	- 0,03	- 0,006	0,004
$\frac{h}{R}=4.10^{-2}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	BIJELAARD	17,3	- 16,8	-3,6	1	- 37,9	- 78,76	- 10,8	- 17,7	57,8	1,68
		HAGE	15,8	- 9,6	0,97	0,93	- 37,67	- 74	- 5,5	- 4,7	- 45,9	2,64
		BIJELAARD	2,7	- 2,6	- 0,65	0,14	3,9	22,3	- 1,7	- 6,3	2,5	2,36
	$\theta = \frac{\pi}{2}$	HAGE	2,2	- 1,3	0,27	0,1	3,8	22,3	- 0,74	1,7	- 5,9	2,2
		BIJELAARD	2,7	- 2,6	- 0,65	0,14	3,9	22,3	- 1,7	- 6,3	2,5	2,36
		HAGE	2,2	- 1,3	0,27	0,1	3,8	22,3	- 0,74	1,7	- 5,9	2,2
$\frac{h}{R}=0.4$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	HAGE	18,6	- 5,4	1,3	0,98	- 12,57	- 28,53	- 2,9	- 4,2	- 15,8	- 0,4
		BIJELAARD	3,16	- 3,6	5	1	- 12,28	- 14	- 32	13,8	53,5	- 3,9
		HAGE	22,4	- 11,3	0,22	1,6	- 5,9	- 19,2	- 6,8	2,5	- 1,9	4,5
	$\theta = \frac{\pi}{2}$	HAGE	22,4	- 11,3	0,22	1,6	- 5,9	- 19,2	- 6,8	2,5	- 1,9	4,5
		BIJELAARD	3,16	- 3,6	5	1	- 12,28	- 14	- 32	13,8	53,5	- 3,9
		BIJELAARD	3,16	- 3,6	5	1	- 12,28	- 14	- 32	13,8	53,5	- 3,9

2ème équation 3.2.b.		$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$	$R \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$	$R \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3}$	$R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta^2}$	$R^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^4}$	$R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3 \partial \theta}$	$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^3}$	
$\frac{h}{R}=4.10^{-3}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	HAGE	19,5	- 18,4	- 0,27	0,26	- 0,87	- 105,5	4,8	0,88	- 0,09	0,01	- 0,86
		BIJELAARD	19,8	- 19,9	- 0,26	0,27	- 0,9	- 107,3	- 12	0,86	0,07	0,019	- 0,88
		HAGE	- 7,9	8	- 0,03	0,04	- 0,19	76,3	3,3	0,08	0,03	- 0,03	- 0,13
	$\theta = \frac{\pi}{2}$	BIJELAARD	- 8	8	- 0,05	0,038	- 0,18	77,66	4,8	0,19	0,02	- 0,026	- 0,12
		HAGE	12,6	- 11,99	- 0,23	0,16	0,77	- 35,2	- 7,2	- 0,48	- 0,24	0,14	0,56
		BIJELAARD	14,6	- 14,7	- 0,13	0,22	0,7	- 40,85	- 8,86	- 0,78	- 0,04	0,14	0,43
	$\theta = \frac{\pi}{4}$	HAGE	7,2	- 5	- 0,5	0,5	- 0,8	- 7,3	- 3,1	0,64	- 0,05	0,04	- 0,8
		BIJELAARD	8,2	- 8,4	- 0,59	0,59	- 0,9	- 8,46	- 5,2	0,9	- 0,05	0,028	- 1
		HAGE	21,7	- 14,6	- 1,4	1,37	- 0,7	- 22,29	- 9	1,2	- 4,6	- 8,27	- 1,6
	$\theta = \frac{\pi}{4}$	BIJELAARD	- 8,5	9,1	2,9	- 1,4	2,9	8,1	6	- 3,2	- 0,9	0,57	1,8
		HAGE	30,5	- 19,75	- 2,1	1,8	- 1,36	- 30,5	- 12,29	2	- 2,6	1	- 1,4
		BIJELAARD	- 1,2	13	3,9	- 1,7	3,6	12,3	8,6	- 3,9	- 1,6	0,87	1,7
$\frac{h}{R}=4.10^{-2}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	HAGE	12,6	- 11,99	- 0,23	0,16	0,77	- 35,2	- 7,2	- 0,48	- 0,24	0,14	0,56
		BIJELAARD	14,6	- 14,7	- 0,13	0,22	0,7	- 40,85	- 8,86	- 0,78	- 0,04	0,14	0,43
		HAGE	7,2	- 5	- 0,5	0,5	- 0,8	- 7,3	- 3,1	0,64	- 0,05	0,04	- 0,8
	$\theta = \frac{\pi}{2}$	BIJELAARD	8,2	- 8,4	- 0,59	0,59	- 0,9	- 8,46	- 5,2	0,9	- 0,05	0,028	- 1
		HAGE	21,7	- 14,6	- 1,4	1,37	- 0,7	- 22,29	- 9	1,2	- 4,6	- 8,27	- 1,6
		BIJELAARD	- 8,5	9,1	2,9	- 1,4	2,9	8,1	6	- 3,2	- 0,9	0,57	1,8
	$\theta = \frac{\pi}{4}$	HAGE	30,5	- 19,75	- 2,1	1,8	- 1,36	- 30,5	- 12,29	2	- 2,6	1	- 1,4
		BIJELAARD	- 1,2	13	3,9	- 1,7	3,6	12,3	8,6	- 3,9	- 1,6	0,87	1,7
		HAGE	12,6	- 11,99	- 0,23	0,16	0,77	- 35,2	- 7,2	- 0,48	- 0,24	0,14	0,56
	$\theta = \frac{\pi}{2}$	BIJELAARD	14,6	- 14,7	- 0,13	0,22	0,7	- 40,85	- 8,86	- 0,78	- 0,04	0,14	0,43
		HAGE	7,2	- 5	- 0,5	0,5	- 0,8	- 7,3	- 3,1	0,64	- 0,05	0,04	- 0,8
		BIJELAARD	8,2	- 8,4	- 0,59	0,59	- 0,9	- 8,46	- 5,2	0,9	- 0,05	0,028	- 1
$\frac{h}{R}=0.4$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	HAGE	21,7	- 14,6	- 1,4	1,37	- 0,7	- 22,29	- 9	1,2	- 4,6	- 8,27	- 1,6
		BIJELAARD	- 8,5	9,1	2,9	- 1,4	2,9	8,1	6	- 3,2	- 0,9	0,57	1,8
		HAGE	30,5	- 19,75	- 2,1	1,8	- 1,36	- 30,5	- 12,29	2	- 2,6	1	- 1,4
	$\theta = \frac{\pi}{2}$	BIJELAARD	- 1,2	13	3,9	- 1,7	3,6	12,3	8,6	- 3,9	- 1,6	0,87	1,7
		HAGE	12,6	- 11,99	- 0,23	0,16	0,77	- 35,2	- 7,2	- 0,48	- 0,24	0,14	0,56
		BIJELAARD	14,6	- 14,7	- 0,13	0,22	0,7	- 40,85	- 8,86	- 0,78	- 0,04	0,14	0,43
	$\theta = \frac{\pi}{4}$	HAGE	7,2	- 5	- 0,5	0,5	- 0,8	- 7,3	- 3,1	0,64	- 0,05	0,04	- 0,8
		BIJELAARD	8,2	- 8,4	- 0,59	0,59	- 0,9	- 8,46	- 5,2	0,9	- 0,05	0,028	- 1
		HAGE	21,7	- 14,6	- 1,4	1,37	- 0,7	- 22,29	- 9	1,2	- 4,6	- 8,27	- 1,6
	$\theta = \frac{\pi}{4}$	BIJELAARD	- 8,5	9,1	2,9	- 1,4	2,9	8,1	6	- 3,2	- 0,9	0,57	1,8
		HAGE	30,5	- 19,75	- 2,1	1,8	- 1,36	- 30,5	- 12,29	2	- 2,6	1	- 1,4
		BIJELAARD	- 1,2	13	3,9	- 1,7	3,6	12,3	8,6	- 3,9	- 1,6	0,87	1,7



3ème équation 3.3.a.		$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta}$	$R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$	$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2}$	$R^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$	$R^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial \theta}$	$\frac{\partial^4 v}{\partial x \partial \theta^3}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4}$	$R \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2}$	$R^3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3}$	
$\frac{h}{R}=4.10^{-3}$	$\theta=0$	HAGE	- 2,4	2,2	- 0,04	- 2,3	12,78	- 3,4	- 0,19	- 12,3	12,5	- 0,13	1
	$\theta=\frac{\pi}{4}$	BIJELAARD	- 2,4	2,45	- 0,04	- 2,3	12,99	- 3,4	0,04	- 13,06	12,74	0,13	1
		HAGE	0,38	- 0,4	- 0,01	0,39	- 4,5	- 1,5	- 0,04	4,5	- 1,3	0,001	0,43
		BIJELAARD	+ 0,39	- 0,38	- 0,01	0,4	- 4,6	- 1,5	- 0,05	4,6	- 4,6	0,001	0,43
$\frac{h}{R}=4.10^{-2}$	$\theta=0$	HAGE	- 2,5	2,2	- 0,09	- 2,3	5,1	- 1,5	- 0,12	- 5,4	5,2	0,02	0,5
	$\theta=\frac{\pi}{4}$	BIJELAARD	- 2,95	3	- 0,1	- 2,7	5,9	- 1,44	- 0,14	- 5,6	5,9	0,027	0,39
		HAGE	- 1,2	0,87	- 0,08	- 1	1,2	- 0,53	- 0,15	- 0,97	1	0,1	0,23
		BIJELAARD	- 1,38	1,4	- 0,09	- 1,17	1,4	- 0,51	0,04	- 0,01	1,17	0,1	0,17
$\frac{h}{R}=4.10^{-1}$	$\theta=0$	HAGE	- 7,2	38,6	- 15,48	- 22,4	7,27	0,266	-497	-547	264	237,7	233,3
	$\theta=\frac{\pi}{4}$	BIJELAARD	3	- 3,2	0,46	2	- 3	- 0,97	1	3,22	- 1,9	- 0,5	3,2
		HAGE	- 5,2	30,5	14,36	11,7	5,1	0,28	496	538,8	-253	-236,5	-211,4
		BIJELAARD	2,1	- 2,2	0,32	1,48	- 2	0,58	0,72	0,00	1,4	0,7	0,2



Ces calculs ont été obtenus en faisant varier uniquement $\frac{h}{R}$ il est évident qu'ils doivent être utilisés avec précautions, car si en outre en fait varier $\frac{R}{L}$, il faut s'attendre à une évolution qui favoriser les dérivées en x , toutefois dans le cas des appareils courants, $\frac{R}{L} \leq \frac{1}{10}$ et ceci correspond à des résultats que nous avons présentés.

En outre si nous examinons les résultats relatifs aux déplacements u, v, w de la surface moyenne de la coque, nous constatons que dans le cas des coques minces, nos résultats coïncident avec ceux des théories classiques, par contre pour les coques moyennes et épaisses ces résultats sont très différents.

A - Coques minces :

Les déplacements trouvés par les deux méthodes figures (3.4 a-b) les deux méthodes montrent une ovalisation importante de la section médiane. Ce résultat très important a été vérifié expérimentalement sur l'appareil que nous avons construit, et qui sera étudié en détail dans la deuxième partie.

Nous pouvons également remarquer l'importance du déplacement radial u vis à vis du déplacement circonférentiel v et longitudinal w

B - Coques d'épaisseur intermédiaire :

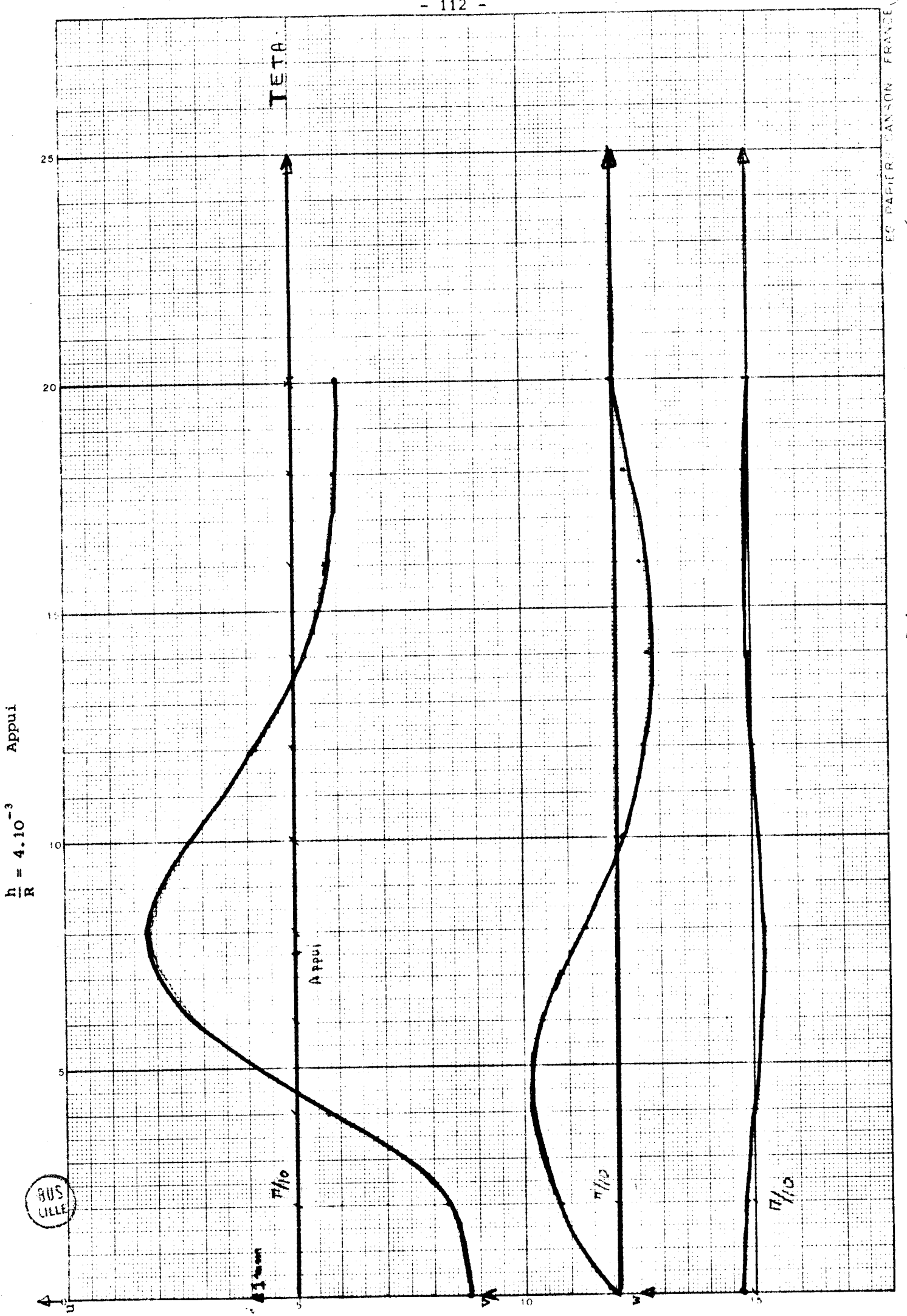
L'ordre de grandeur du déplacement radial obtenu est légèrement plus faible que celui obtenu par les méthodes classiques.

Par contre nous pouvons constater que les méthodes classiques exagèrent les valeurs du déplacement circonférentiel v aussi bien dans la zone de l'appui (ce qui est peu vraisemblable) que dans la zone du milieu Fig (3.5 a et b).

C - Coques épaisses

Notons que la méthode classique n'est pas à priori adaptable pour ce type des coques. Toutefois nous avons effectué le calcul en augmentant l'intensité de la charge pour obtenir des déplacements appréciables.

Les figures (3.6 a et b) résument l'évolution de ces déplacements en fonction de l'angle polaire et nous pouvons constater que notre méthode fait apparaître l'ovalisation de l'appareil précédemment constatée alors que les méthodes classiques donnent pour le déplacement



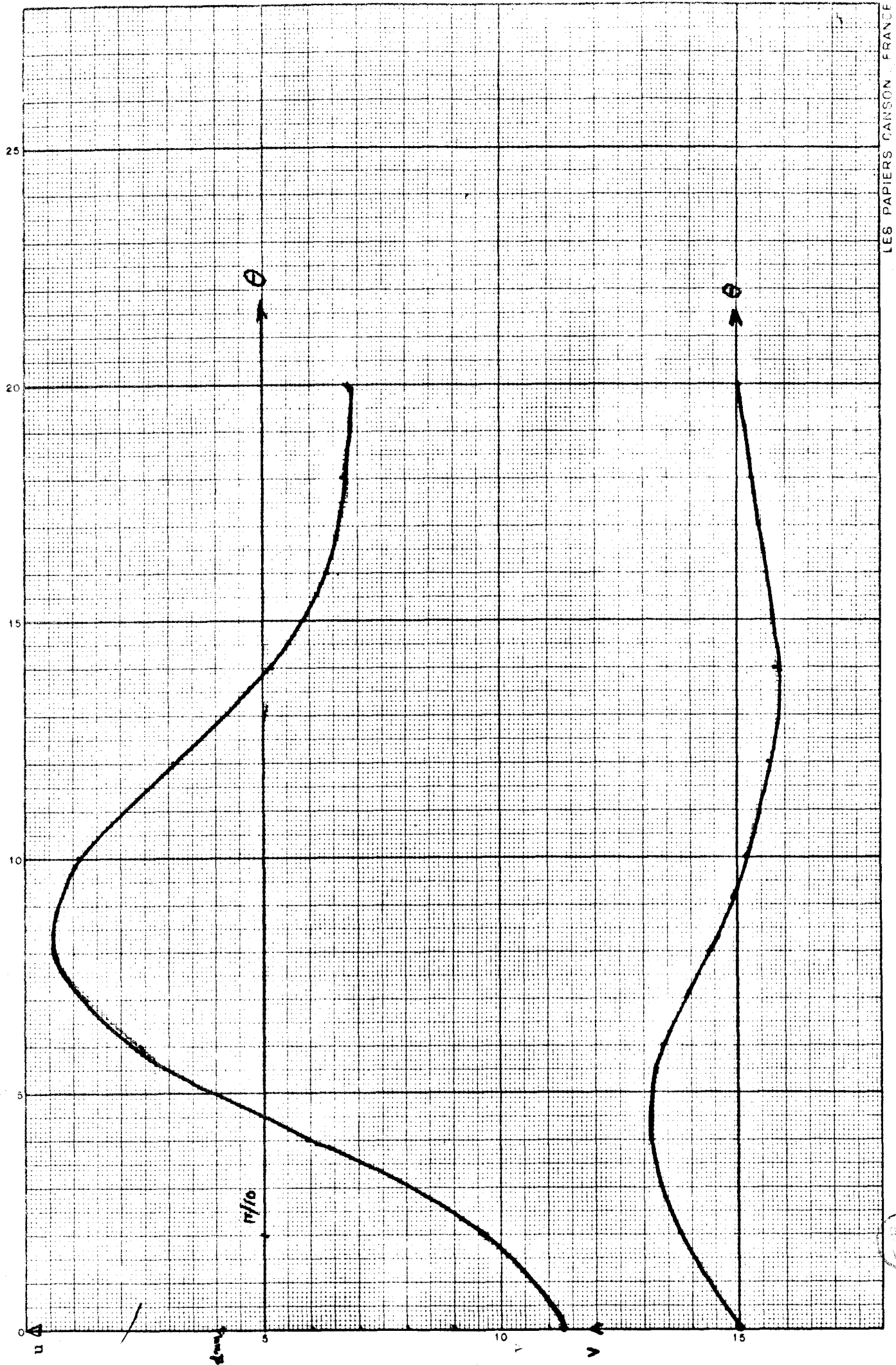
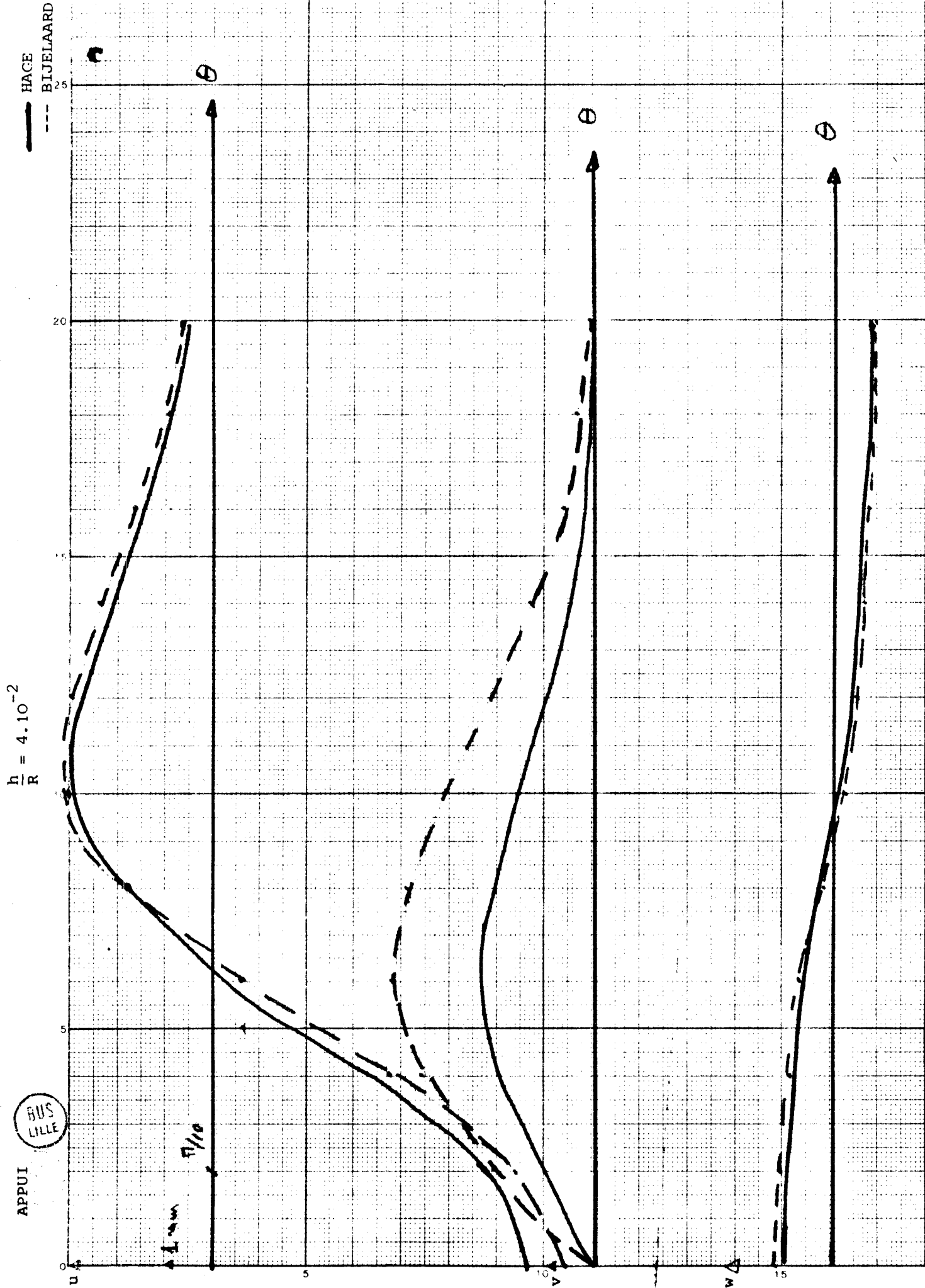


FIGURE 3.4b



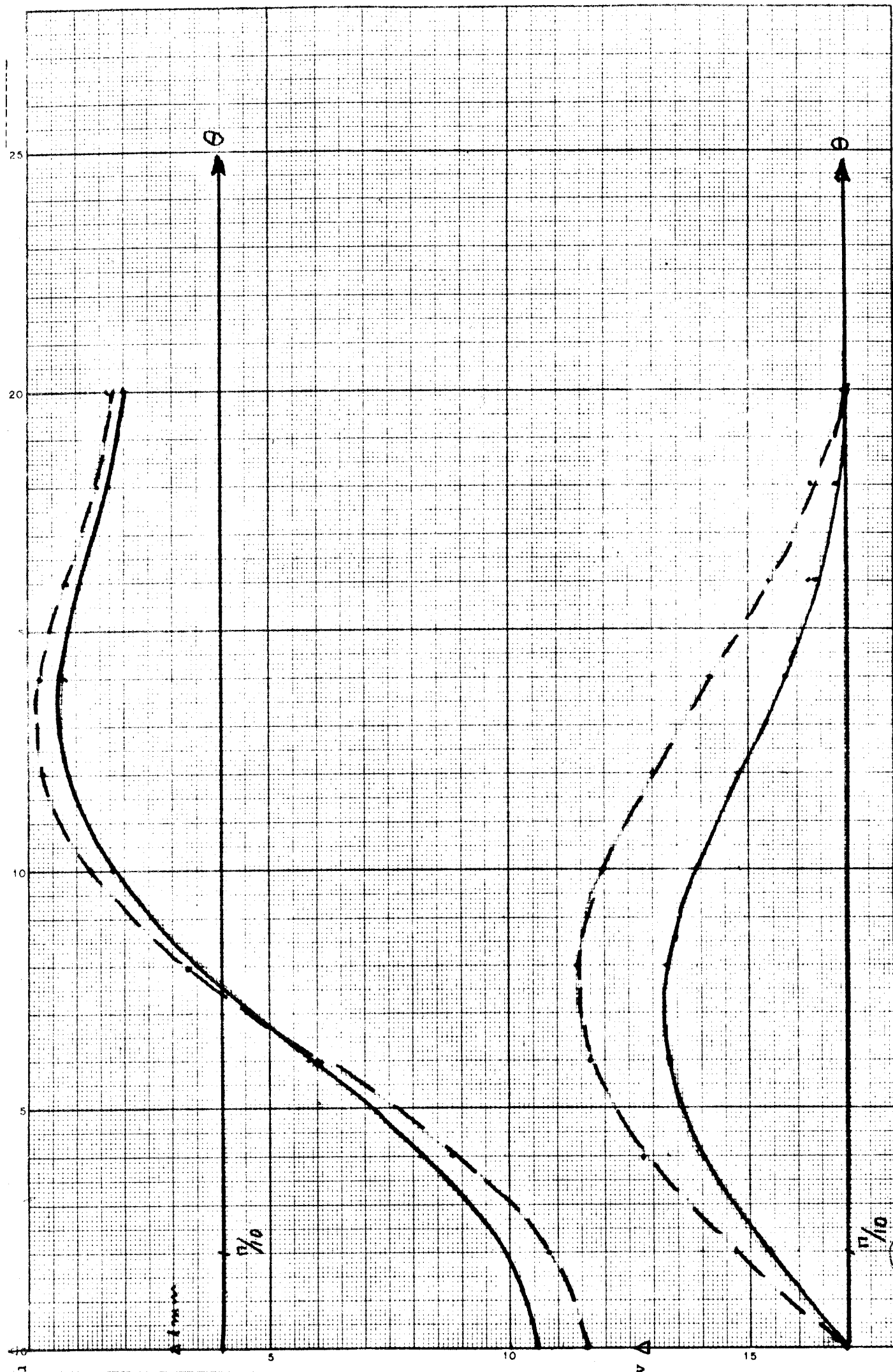
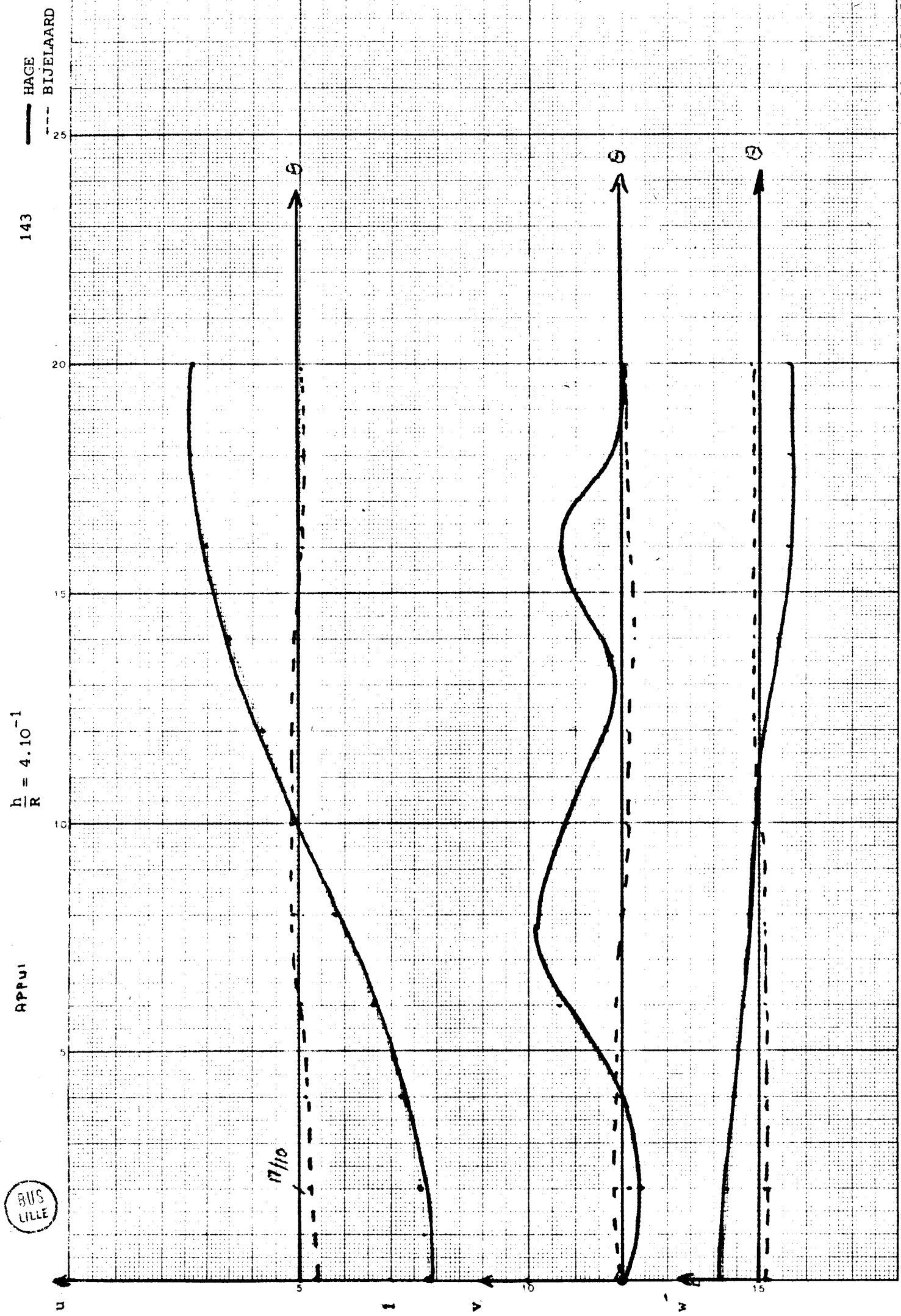


FIGURE 3.5b

BUS
LILLE



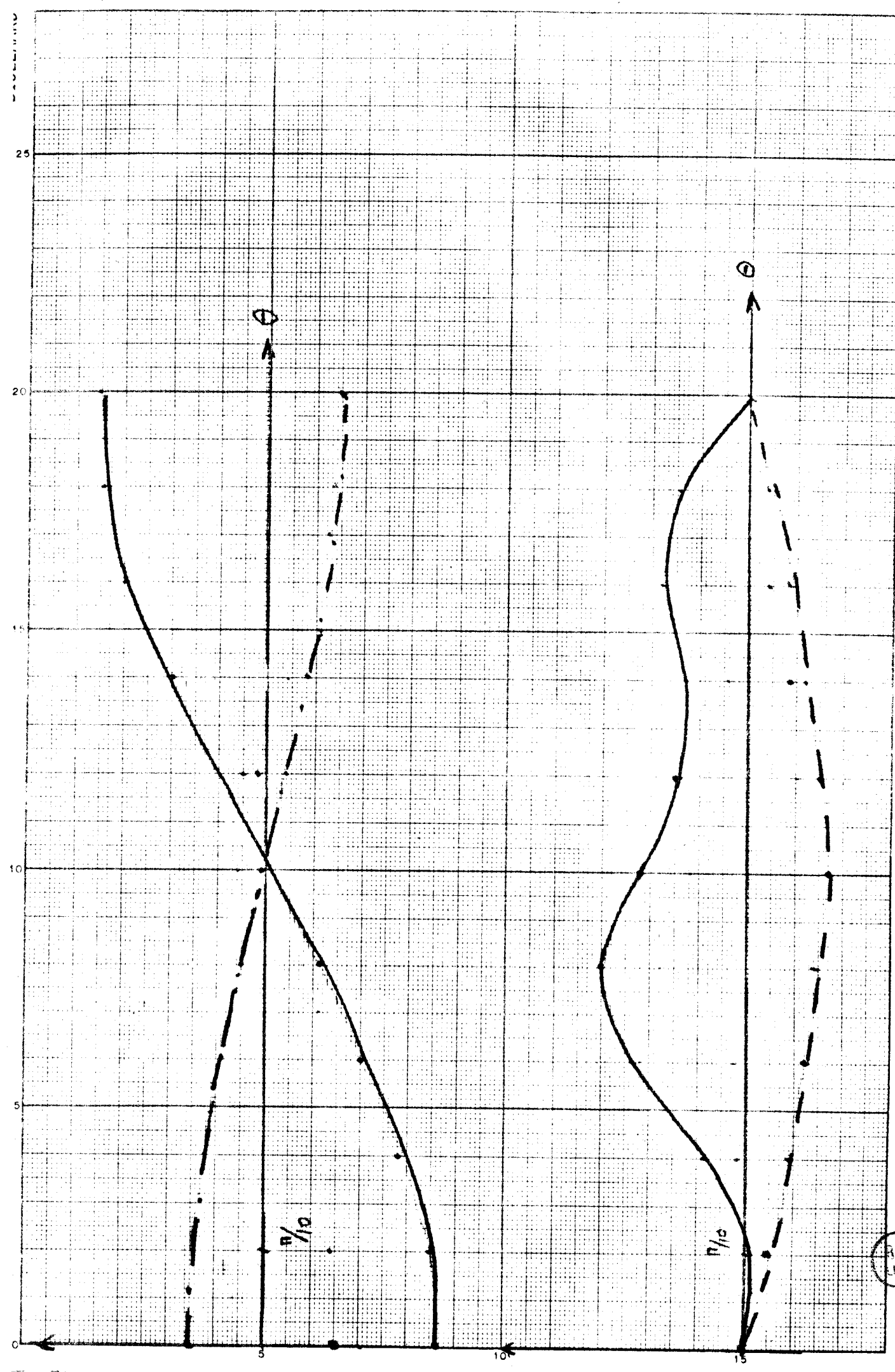


FIGURE 3.6b



radial u des valeurs pratiquement nulles au niveau de l'appui (ce qui est paradoxal) et une ovalisation inversée au niveau du milieu de l'appareil (le diamètre latéral diminue)

En outre, vu l'intensité importante de la charge nous avons fait apparaître par notre méthode un début de flambement circonférentiel d'autant plus vraisemblable que la coque se comporte comme un milieu continu tridimensionnel, ce phénomène n'apparaît pas dans les résultats classiques.

Enfin nous constatons que notre méthode respecte la réalité des déformations longitudinales dont la mesure ou nous avons une dilatation de l'appareil dans sa partie supérieure (de la zone de l'appui), alors que les résultats classiques inversent le phénomène.

3.3.3. - Solution particulière exponentielle en x

Dans le cas où le chargement s'effectue d'une façon ponctuelle ou au voisinage des fonds, il est commode d'utiliser pour $f(x)$ une fonction exponentielle, où des combinaisons de cette fonction ($ch(x)$ ou $sh(x)$) pour satisfaire les conditions aux limites.

Pour notre part nous allons étudier cette possibilité lors de l'examen de la solution générale des équations (3.7) avec $P_r = P_\theta = P_x = 0$ pour cette raison nous ne détaillons pas ce type de solution largement utilisée par les auteurs tels que FLUGGE (1960), TIMESHENKO (1934) et DONNELL (1976)

3.3.4. - Solution générale des équations (3.7) sans second membre

Comme nous l'avons mentionné la solution complète du problème est impérativement constituée de la somme de la solution générale des équations (3.7) sans charges, et d'une solution particulière, le plus souvent prise en double série de FOURIER, telle que cette solution complète vérifie les conditions aux limites réelles propres à chaque système.

Si nous appelons $U(x, \theta)$, $V(x, \theta)$ et $w(x, \theta)$ la solution générale du problème sans second membre nous pouvons les mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
 U(\theta, x) &= A e^{px} \cos m\theta \\
 V(\theta, x) &= B e^{px} \sin m\theta \\
 W(\theta, x) &= C e^{px} \cos m\theta
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

A étant réel ; B, C, p complexes

Reportons ces valeurs dans la première des équations (3.7)
ce qui donne :

$$\left(p^2 - \frac{m^2}{R^2} \right)^4 + 4 K^4 p^4 + \left\{ \frac{1}{R^4} \left[\frac{(1+6v+4v^2)}{2} \frac{p^4}{R^4} - \frac{(2+v) m^2 p^2}{R^2} + \frac{m^4}{R^4} \right] \right.
 \tag{3.28.}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{R^2} \left[\frac{v(v^2+7v+2)}{2(1+v)} p^6 + \frac{m^6}{R^6} \left(2 - \frac{1+2v}{2(1+v)} \right) - \frac{m^2 p^4}{R^2} \left(5 + \frac{v(9+21v+5v^2)}{2(1+v)} \right) \right. \\
 &\left. \left. + \frac{p^2 m^4}{R^4} \left(\frac{13-v-8v^2}{2(1+v)} \right) \right] \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } 4 K^4 = 12 (1 - v^2) \frac{R^2}{(2h)^2}$$

qui est une équation du 8ème ordre en P, dont les huit racines vont être fonction de m.

Etant donné la difficulté de la résolution d'une telle équation nous nous contentons de suivre une démarche analogue à celle de HOFF (1954), en négligeant dans les équations (3.7) les termes en facteur à $\frac{t^2}{12R^2}$, ce qui conduit aux équations de DONNELL (1936), soit

donc le système :

$$\left(p^2 - \frac{m^2}{R^2} \right)^4 + 4 K^4 p^4 = 0 \tag{3.29}$$

dont les huit racines sont :

$$p_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \qquad p_5 = \alpha_2 + i\beta_2$$

$$p_2 = \alpha_1 - i\beta_1 \qquad p_6 = \alpha_2 - i\beta_2$$

$$\begin{aligned} p_3 &= -\alpha_1 + i\beta_1 & p_7 &= -\alpha_2 - i\beta_2 \\ p_4 &= -\alpha_1 - i\beta_1 & p_8 &= -\alpha_2 - i\beta_2 \end{aligned} \quad (3.30.)$$

$$\text{avec} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\Omega + k + \frac{m^2}{\Omega}}{2} & \beta_1 &= \frac{\Omega - k - \frac{m^2}{\Omega}}{2} \\ \alpha_2 &= \frac{\Omega - k + \frac{m^2}{\Omega}}{2} & \beta_2 &= \frac{\Omega + k - \frac{m^2}{\Omega}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{où } \Omega = \sqrt{\frac{-k}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + m^4}}$$

Par ailleurs nous pouvons tirer B et C en fonction de A à partir de (3.7) ou plus simplement à partir des équations de DONNELL (3.3) soit

$$B = - \frac{vp^2 + m^2}{(p^2 - m^2)^2} p A \quad (3.31.)$$

$$C = \frac{(2+v) p^2 - m^2}{(p^2 - m^2)^2} m A$$

Il est évident que seules les racines dont les déplacements correspondants sont physiquement admissibles, seront seules retenues, étant donné que, pour obtenir les équations de DONNELL des dérivations ont été effectuées et que des racines supplémentaires ont par conséquent été introduites •

La forme générale de la solution est :

(3.32.)

$$\begin{aligned} \frac{U(\theta, x)}{R} = & - \left[e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} (A_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} + A_2 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) + e^{-\alpha_2 \frac{x}{R}} (A_3 \cos \beta_2 \frac{x}{R} + A_4 \sin \beta_2 \frac{x}{R}) \right. \\ & \left. + e^{\alpha_1 \frac{x}{R}} (A_5 \cos \beta_1 \frac{x}{R} - A_6 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) + e^{\alpha_2 \frac{x}{R}} (A_7 \cos \beta_2 \frac{x}{R} - A_8 \sin \beta_2 \frac{x}{R}) \right] \cos m\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{v(\theta, x)}{R} = & \frac{+m}{2K^2} \left[e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} \left\{ A_1 (M'_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} + M_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) - A_2 (M_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} - M'_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) \right\} \right. \\ & + e^{-\alpha_2 \frac{x}{R}} \left\{ A_3 (M'_2 \cos \beta_2 \frac{x}{R} + M_2 \sin \beta_2 \frac{x}{R}) - A_4 (M_2 \cos \beta_2 \frac{x}{R} - M'_2 \sin \beta_2 \frac{x}{R}) \right\} \\ & + e^{\alpha_1 \frac{x}{R}} \left\{ A_5 (M'_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} - M_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) - A_6 (M_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} + M'_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) \right\} \\ & \left. + e^{+\alpha_2 \frac{x}{R}} \left\{ A_7 (M'_2 \cos \beta_2 \frac{x}{R} - M_2 \sin \beta_2 \frac{x}{R}) - A_8 (M_2 \cos \beta_2 \frac{x}{R} + M'_2 \sin \beta_2 \frac{x}{R}) \right\} \right] \sin m\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w(\theta, x)}{R} = & \frac{1}{2K^2} \left[e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} \left\{ A_1 (N'_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} + N_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) + A_2 (N_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} - N'_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) \right\} \right. \\ & + e^{-\alpha_2 \frac{x}{R}} \left\{ -A_3 (N'_2 \cos \beta_2 \frac{x}{R} + N_2 \sin \beta_2 \frac{x}{R}) + A_4 (N_2 \cos \beta_2 \frac{x}{R} - N'_2 \sin \beta_2 \frac{x}{R}) \right\} \\ & + e^{\alpha_1 \frac{x}{R}} \left\{ A_5 (N'_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} - N_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) - A_6 (N_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} + N'_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) \right\} \\ & \left. + e^{\alpha_2 \frac{x}{R}} \left\{ A_7 (N'_2 \cos \beta_2 \frac{x}{R} - N_2 \sin \beta_2 \frac{x}{R}) - A_8 (N_2 \cos \beta_2 \frac{x}{R} + N'_2 \sin \beta_2 \frac{x}{R}) \right\} \right] \cos m\theta \end{aligned}$$

$$\text{avec } M_1 = m^2 \frac{\alpha_1^2 - \beta_1^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} - (2 + \nu)$$

$$M'_1 = m^2 \frac{2 \alpha_1 \beta_1}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} \quad (3.33)$$

$$M_2 = m^2 \frac{\alpha_2^2 - \beta_2^2}{(\alpha_2^2 + \beta_2^2)^2} - (2 + \nu)$$

$$M'_2 = m^2 \frac{2 \alpha_2 \beta_2}{(\alpha_2^2 + \beta_2^2)^2}$$

$$N_1 = \alpha_1 \left[\frac{m^2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \nu \right]$$

$$N'_1 = \beta_1 \left[\frac{m^2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - \nu \right]$$

$$N_2 = \alpha_2 \left[\frac{m^2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \nu \right]$$

$$N'_2 = \beta_2 \left[\frac{m^2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} - \nu \right]$$

La solution générale du problème est constituée d'une combinaison linéaire de solutions obtenues pour les diverses valeurs de $m : 0, 1, \dots, M$ soit :

$$\begin{aligned} \frac{U(\theta, x)}{R} &= - \sum_m \left[e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} (A_{1m} \cos \beta_1 \frac{x}{R} + A_{2m} \sin \beta_1 \frac{x}{R}) + e^{-\alpha_2 \frac{x}{R}} (A_{3m} \cos \beta_2 \frac{x}{R} + A_{4m} \sin \beta_2 \frac{x}{R}) \right. \\ &\quad \left. + e^{+\alpha_1 \frac{x}{R}} (A_{5m} \cos \beta_1 \frac{x}{R} + A_{6m} \sin \beta_1 \frac{x}{R}) + e^{+\alpha_2 \frac{x}{R}} (A_{7m} \cos \beta_2 \frac{x}{R} + A_{8m} \sin \beta_2 \frac{x}{R}) \right] \cos m\theta \\ \frac{V(\theta, x)}{R} &= \frac{1}{2K^2} \sum_m \left[m e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} \{ A_{1m} (M'_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} + M_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) - A_{2m} (M_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} - M'_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) \} \right. \\ &\quad \left. + \text{etc...} \right] \sin m\theta \\ \frac{W(\theta, x)}{R} &= \frac{1}{2K^2} \sum_m \left[e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} \{ -A_{1m} (N_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} + N'_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) + A_{2m} (N'_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} - N_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) \} \right. \\ &\quad \left. + \text{etc...} \right] \cos m\theta \end{aligned}$$

Cependant, pour calculer les différentes valeurs des coefficients $A_{1m}, \dots, A_{8m}$ nous devons déterminer la solution complète qui satisfait aux conditions aux limites propres à chaque problème selon les relations :

$$\begin{aligned} u(\theta, x) &= U(x, \theta) + \sum \sum A_{mn} \cos m\theta \sin \frac{n \pi x}{L} \\ v(\theta, x) &= V(x, \theta) + \sum \sum B_{mn} \sin m\theta \sin \frac{n \pi x}{L} \\ w(\theta, x) &= W(x, \theta) + \sum \sum C_{mn} \cos m\theta \cos \frac{n \pi x}{L} \end{aligned} \quad (3.35.)$$

Pour fixer les idées nous allons examiner le cas de l'appareil précédemment décrit ($L = 6,4 \text{ m}$, $R = 0,6 \text{ m}$) et envisager les conditions aux limites suivantes :

-les fonds étant soudés à la virole ce qui constitue un encastrement :

$$x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u = v = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

-loin des fonds, les déplacements ne sont plus affectés par la présence de ces fonds (effet de la couche limite)

$$\begin{array}{l} \text{limites } u, v, w = 0 \\ x \longrightarrow \infty \end{array} \quad (3.37)$$

Dans le cadre de ces hypothèses, nous obtenons les solutions complètes suivantes :

A. - Solution complète en exponentielle de α_1

$$U = -R \sum_m e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} (A_{1m} \cos \beta_1 \frac{x}{R} + A_{2m} \sin \beta_1 \frac{x}{R}) \cos m\theta \quad (3.38.)$$

$$V = \frac{R}{2K^2} \sum_m e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} \left[A_{1m} (M'_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} + M_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) - A_{2m} (M_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} - M'_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) \right] \sin m\theta$$

$$W = \frac{R}{2K^2} \sum_m e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} \left[-A_{1m} (N'_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} + N_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) + A_{2m} (N_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} - N'_1 \sin \beta_1 \frac{x}{R}) \right] \cos m\theta$$

Or,

$$V(x=0) = 0$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x=0) = - \sum \sum \frac{n \pi}{L} A_{mn} \cos m\theta$$

$$\text{Soit } -R \sum_m \left[\frac{A_{2m} \beta_1}{R} - \frac{\alpha_1 A_{1m}}{R} \right] \cos m\theta = - \frac{\pi}{L} \sum_m \left(\sum_n n A_{mn} \right) \cos m\theta$$

$$A_{2m} \beta_1 - \alpha_1 A_{1m} = \frac{\pi}{L} \left(\sum_n n A_{mn} \right)$$

(3.39.)

(3.40.)

Cette dernière condition ne sera réalisée que si la sommation en m dans la solution sans 2ème membre, a le même nombre d'indices que pour la solution particulière, c'est à dire $m = 0, 1, 2, \dots, 20$ dans les 2 cas.

$$A_{2m} = \frac{\pi}{L} \frac{\sum_n n A_{mn}}{\beta_1 - \alpha_1 \frac{M_1}{M_1'}} = \frac{\pi}{L} \frac{M_1' \sum_n n A_{mn}}{\beta_1 M_1' - \alpha_1 M_1}$$

$$A_{1m} = \frac{\pi}{L} \frac{\sum_n n A_{mn}}{\frac{M_1'}{M_1} \beta_1 - \alpha_1} = \frac{\pi}{L} \frac{M_1 \sum_n n A_{mn}}{\beta_1 M_1' - \alpha_1 M_1}$$

(3.41.)

D'où finalement :

(3.42.)

$$U = - \frac{R \pi}{L} \sum \sum \frac{n A_{mn}}{\beta_1 M_1' - \alpha_1 M_1} e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} (M_1 \cos \beta_1 \frac{x}{R} + M_1' \sin \beta_1 \frac{x}{R}) \cos m\theta \quad (a)$$

$$V = \frac{R \pi}{2 L K^2} \sum \sum \frac{mn A_{mn}}{\beta_1 M_1' - \alpha_1 M_1} e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} (M_1^2 + M_1'^2) \sin \beta_1 \frac{x}{R} \sin m\theta \quad (b)$$

$$W = \frac{R \pi}{2 L K^2} \sum \sum \frac{n A_{mn}}{\beta_1 M_1' - \alpha_1 M_1} e^{-\alpha_1 \frac{x}{R}} \left\{ (M_1' N_1 - M_1 N_1') \cos \beta_1 \frac{x}{R} - (M_1' N_1' + M_1 N_1) \sin \beta_1 \frac{x}{R} \cos m\theta \right\} \quad (c)$$

B. Solution complète en exponentielle de α_2

Nous obtenons, par la même méthode, avec les conditions aux limites :

$$V(x = 0, \theta) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x = 0, \theta) = -\sum \sum \frac{\pi n}{L} A_{mn} \cos m\theta$$

$$U = -\frac{\pi R}{L} \sum \sum \frac{n A_{mn}}{M_2' \beta_2 - \alpha_2 M_2} e^{-\alpha_2 \frac{x}{R}} (M_2 \cos \beta_2 \frac{x}{R} + M_2' \sin \beta_2 \frac{x}{R}) \cos m\theta \quad (3.43.)$$

$$V = \frac{R \pi}{2LK^2} \sum \sum \frac{mn A_{mn}}{M_2' \beta_2 - \alpha_2 M_2} e^{-\alpha_2 \frac{x}{R}} (M_2^2 + M_2'^2) \sin \beta_2 \frac{x}{R} \sin m\theta$$

$$W = \frac{R \pi}{2LK^2} \sum \sum \frac{n A_{mn}}{M_2' \beta_2 - \alpha_2 M_2} e^{-\alpha_2 \frac{x}{R}} \{ (M_2' N_2 - M_2 N_2') \cos \beta_2 \frac{x}{R} - (M_2' N_2' + M_2 N_2) \sin \beta_2 \frac{x}{R} \} \cos m\theta$$

Pour $m = 0$ ces 3 expressions sont indéterminées. Cherchons donc un équivalent pour $\alpha_2, \beta_2, M_2, N_2, M_2', N_2'$

$$\text{Pour } m \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_2 = \frac{m^2}{2K} & \beta_2 = \frac{m^2}{2K} \\ M_2 = -v & N_2 = K \\ M_2' = \frac{2K^2}{m^2} & N_2' = K \end{array} \right. \quad (3.44.)$$

$$\text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_2' \beta_2 - \alpha_2 M_2 = K \\ M_2' \sin \beta_2 \frac{x}{R} = K \frac{x}{R} \\ m(M_2'^2 + M_2^2) \sin \beta_2 \frac{x}{R} \sin m\theta = 2 K^3 \frac{x}{R} \theta \\ M_2' N_2 - M_2 N_2' = \frac{2K^3}{m^2} + v K \\ M_2' N_2' + M_2 N_2 = \frac{2K^3}{m^2} - v K \end{array} \right.$$

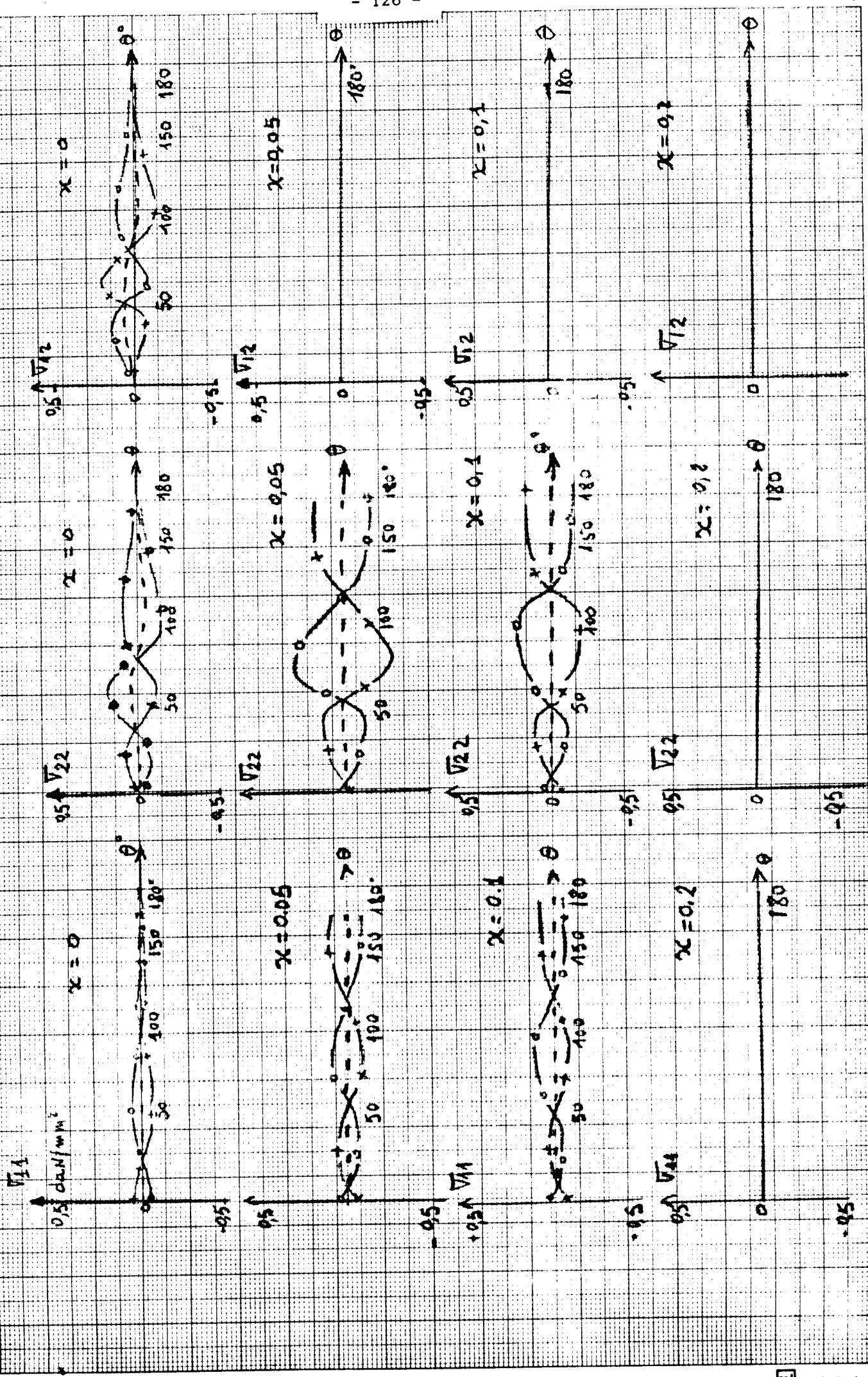
Dans ce cas.

$$\begin{aligned} \text{Pour } m \rightarrow 0 \quad U &= -\frac{\pi R}{L} \sum_n \frac{n A_{mn}}{K} \left(-v + \frac{Kx}{R} \right) \\ V &= \frac{\pi R}{2LK^2} \sum_n \frac{n A_{mn}}{K} 2 K^3 \theta \frac{x}{R} \\ W &= \frac{\pi R}{2LK^2} \sum_n \frac{n A_{mn}}{K} \left(\frac{2K^3}{m^2} + vK - \frac{xK^2}{R} \right) \end{aligned} \quad (3.45.)$$

L'expression de W est alors infinie pour $m = 0$. Cette solution en exponentielle de α_2 n'est donc valable que dans le cas restreint où la sommation en m dans l'expression de A_{mn} ne commence pas par 0.

(FIGURE 3.6.) - Courbes représentatives de la solution sans 2ème membre

$\delta = +h$
 $\delta = 0$
 $\delta = -h$



Les résultats numériques correspondent à la solution générale pour le réservoir précédemment décrit sont résumés par les courbes (3.6) Nous pouvons remarquer l'atténuation rapide de cette solution à partir d'une valeur voisine de la longueur d'ou de caractéristique $(0,55 \sqrt{Rt})$ ce qui justifie physiquement notre hypothèse n° 2, par conséquent l'étude d'une telle solution peut être négligée dans la majeure partie des cas pour cette raison nous n'étudierons plus cette solution dans la deuxième partie de notre travail.

3.4. - CONCLUSION

La méthode que nous avons développée dans ce chapitre est très intéressante dans la mesure où elle est applicable aussi bien aux coques épaisses qu'aux coques minces.

En outre l'utilisation de l'analyse de FOURIER rend cette méthode extrêmement maniable et peu onéreuse, avec une précision assez satisfaisante comme nous aurons l'occasion de le constater dans la deuxième partie.

Les calculs que nous avons effectués par notre méthode semblent être plus proches de la réalité que les résultats fournis par les autres théories et cela d'autant plus que les coques sont épaisses.

C O N C L U S I O N

Nous avons établi les bases d'une théorie générale de coque, sans utiliser l'hypothèse universellement admise de LOVE-KIRCHOFF, cette théorie a été résolue analytiquement d'une façon générale ce qui nous a permis de chiffrer l'écart entre nos équations et celles d'autres auteurs. En particulier nous avons pu constater que, si la coque a une épaisseur appréciable ($\frac{h}{R} \sim 10^{-2}$ à 10^{-1}) la notion des déformations planes de LOVE-KIRCHOFF n'est plus satisfaisante, et ceci implique que la coque soit regardée comme un solide tridimensionnel ; nous avons constaté dans ce cas que le déplacement radial u perd son rôle privilégié dans l'interprétation du phénomène de flexion par le biais du terme $\nabla^4 u$

Par ailleurs, la méthode de résolution analytique proposée est caractérisée par sa maniabilité et par la facilité avec laquelle on la met en oeuvre, contrairement à la méthode numérique des éléments finis. Cette méthode est incommode à utiliser dans la mesure où, pour interpréter correctement nos équations qui contiennent des dérivées du quatrième ordre, nous devons utiliser les polynômes d'interpolation du cinquième degré, ceci revient par exemple en utilisant l'élément de SHEBA (1), (2), à déterminer 65 constantes par élément, et soulève des difficultés de capacité pour les ordinateurs d'une part, et implique d'autre part la connaissance des conditions aux limites non seulement sur les déplacements et leurs dérivées premières, mais également sur leur dérivées secondes.

Toutefois, le travail fondamental que nous avons effectué et que nous prolongerons prochainement pour les coques de morphologie quelconque, admet une extension possible par l'étude de la couche limite près des bords du cylindre, cette étude est nécessaire pour analyser complètement le comportement des appareils sollicités dans cette région, de plus il sera intéressant de réexaminer ce problème dans le cas des déformations élasto-plastiques, et en tenant compte des contraintes thermiques.

Par ailleurs la résolution numérique de nos équations va être développée prochainement à l'université de Lille par la méthode des éléments finis et par la méthode des équations intégrales, lorsque ce travail sera terminé, il sera possible d'étendre les applications de notre travail à l'étude de flambement des coques, ainsi qu'à l'analyse de leur stabilité dynamique (vibrations)

B I B L I O G R A P H I E

- (1) ARGYRIS, J.H. ; HAASE, M. MALEJANNAKIS, G.A.
Natural geometry of surfaces with specific reference to the matrix displacement analysis of shells.
I.S.D. Report No 134, Stuttgart, 1973.
- (2) BERNADOU, M. CIARLET, P.G.
Sur l'ellipticité du modèle de Koiter
I.R.I.A. (1978).
- (3) BIJLAARD P.P. et ITHACA N.Y. Stresses from local loading in cylindrical pressure vessels. Journal of Applied Mechanics. N°17, 1955.
- (4) DONNELL L.H. Stability of Thin - Walled tubes under Torsion. Rep. NACA. N°479. 1933.
- (5) DONNELL L.H. Beams, plates and SHELLS ; Mc. GRAW - Hill Books (1976).
- (6) FLUGGE W. Statik und Dynamik der Shalen. Springer - Berlin. 1934.
- (7) FLUGGE W. STRESSES in SHELLS, Springer (1960)
- (8) FRIEDRICHS, K.Q. The edge effect in the bending of plates, Reissner Anniv. Vol, J.W. Edwards, Ann. Arbor, Mich., 1949, pp. 197-210. Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates, Proc. Sym. Appl. Math., Vol.3. Mc.Graw-Hill, New York, 1950, pp.117-124.
- (9) FRIEDRICHS K.O. et DRESSLER R.F. A Boundary layer theory for elastic plates. Communications of Pures and Applied Mathematics. Vol. 14.N°1. 1961.
- (10) GILL S.S. The stress analysis of pressure vessels and vessel components International Series of Monographs in Mechanical Engineering. Pergamon Press. 1970.
- (11) GOL'DENVEIZER A.L. et KOLOS A.V. Derivation of an approximate theory of bending of a plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity. P.M.M. Vol. 26. N°4. 1962. Traduit du russe.
- (12) GOL'DENVEIZER A.L. et KOLOS A.V. On the derivation of two dimensional equations in the theory of thin elastic plates. P.M.M. Vol. 29.N°1. 1965.
Traduit du russe.
- (13) GREEN, A.E. ; ZERNA W.
Theoretical Elasticity
Oxford University Press, 1968 (2ème édition).

- (14) HOFF N.J. The accuracy of Donnell's equations. *Journal of Applied Mechanics* 1955. N°22. (p. 320)
- (15) HOFF H.J. Boundary value problems of the thin - Walled circular cylinder. *Journal of Applied Mechanics*. N°76. 1954.
- (16) KOITER, W.T.
On the nonlinear theory of thin elastic shells.
Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B.69 (1966), 1 - 54.
- (17) KOITER, W.T.
On the foundations of the linear theory of thin elastic shells, I, II
Proc. Kon. Ned. Ak. Wet B 73 (1970), pp. 169-195.
- (18) KOITER, W.T. ; SIMMONDS, J.C.
Foundations of shell theory
Proceedings of Thirteenth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Moscou, Août 1972, pp. 150-176.
- (19) LOVE A.E.H. A treatise on the mathematical theory of the elasticity.
New-York Dover Publications. 1926 (p.499 - 552).
- (20) NAGHDI P.M. On the theory^{of} thin elastic shells. *Quartely of Applied Mathematics*.
Vol. 14. 1957.
- (21) NAGHDI P.M.
Foundations of elastic shell theory
Progress in Solid Mechanics, vol.4. pp.1-90
North-Holland, Amsterdam, 1963.
- (22) NAGHDI P.M.
The Theory of Shells and Plates, Handbuch der Physik, Vol.VI a-2,
Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- (23) NOVOZHILOV V.V. The theory of thin shells. Noordhoff L.D.T. Gronin - gen.
The Netherlands. 1959. (p.1 - 90) et (p.182 - 254).
- (24) REISS E.L et LOCKE S. On the theory of plane stress. *Quartely of Applied Mathematics*. Vol. 19 N°3. 1961.
- (25) REISS E.L. A theory of the small rotationnally symetric deformations of cylindrical shells. *Communications of Pures and Applied Mathematics*. Vol.13 1960.
- (26) REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates,
J. Appl. Mech. Vol.12, 1945, pp.69-77 On the theory of bending of elastic plates,

J. Math. Phys. Vol. 23. 1944, pp.184-191.

- (27) Eric REISSNER, Stress strain relations in the theory of thin elastic shells,
J. Math. Phys. 31, 109-119 (1952).
- (28) Eric REISSNER, On a variational theorem in elasticity, J.Math. Phys. 29, 90-95
(1950).
- (29) SIMMONDS ; A set of simple, accurate equation for circ. cyl. elast. Shells,
int. J. Solids Structures.
- (30) TIMOSHENKO ; Theory of Elasticity Mc. Graw HILL BOOK (1934)
- (31) TIMOSHENKO et WOINOWSKI - KRIEGER S. Théorie des plaques et coques.
Dunod. 1961. (p. 427 - 568).
- (32) YUAN S.W. Thin cylindrical shells subjected of concentrated loads ; Quartely of
Applied Mathematics. N°4. 1946.
- (33) W.U. and Lee A refined theory for circular cylindrical shells proc. First, int.
conf. on structural Mechanics in Reactor Technolgg, paper N°J1/5, 197.

ANNEXE I

CONDITIONS DE COMPATIBILITE

I - INTRODUCTION

Dans cette annexe nous allons démontrer que les contraintes déduites à partir de notre théorie vérifient les conditions de compatibilité (1.4.).

II - CONDITIONS DE COMPATIBILITE

En utilisant les notations du premier chapitre les conditions de compatibilités s'écrivent en variables adimensionnelles.

$$\Delta \bar{\sigma}_{11} + 2 \epsilon^{2P} \left(2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \theta} - \sigma_{11} + \sigma_{33} \right) + \frac{1}{1+\nu} \left[\epsilon^{2P} \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial \theta^2} + (\epsilon^P + \epsilon^{2P} \xi) \frac{\partial \sigma_I}{\partial \xi} \right] = 0$$

$$\Delta \bar{\sigma}_{22} + \alpha^2 \frac{\epsilon^{2P} + 2 \epsilon^{3P} \xi + \epsilon^{4P} \xi^2}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial x^2} = 0$$

(I.1)

$$\Delta \bar{\sigma}_{33} - 2 \epsilon^{2P} \left(2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \theta} - \sigma_{11} + \sigma_{33} \right) + \frac{1 + 2 \xi \epsilon^P + \xi^2 \epsilon^{2P}}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial \xi^2} = 0$$

$$\Delta \bar{\sigma}_{12} + \epsilon^{2P} \left(2 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \theta} - \sigma_{12} \right) + \alpha \frac{\epsilon^{2P} + \epsilon^{3P} \xi}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial x \partial \theta} = 0$$

$$\Delta \bar{\sigma}_{23} - \epsilon^{2P} \left(2 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \sigma_{23} \right) + \frac{\alpha (\epsilon^P + 2 \epsilon^{2P} \xi + \epsilon^{3P} \xi^2)}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial x \partial \xi} = 0$$

$$\Delta \bar{\sigma}_{13} + 2 \epsilon^{2P} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \theta} - 2 \sigma_{13} \right) + \frac{1}{1+\nu} \left[(\epsilon^P + \epsilon^{2P} \xi) \frac{\partial \sigma_I}{\partial \theta \partial \xi} - \epsilon^{2P} \frac{\partial \sigma_I}{\partial \theta} \right] = 0$$

avec :

$$\sigma_I = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\sigma_{ij}(\theta, x, \epsilon, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \sigma_{ij}^{(n)}(\theta, x, z)$$

$$\Delta = (1 + 2\xi\epsilon^p + \epsilon^{2p}\xi^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (\epsilon^p + \epsilon^{2p}\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^{2p} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \alpha^2 (\epsilon^{2p} + 2\epsilon^{3p}\xi + \epsilon^{4p}\xi^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

En identifiant les termes en facteur à ϵ^n nous aurons les trois systèmes suivants :

1°) - Système d'ordre $m < p$

Les équations (I.1) se réduisent à

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial \xi^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_{22}^m}{\partial \xi^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_{11}^m}{\partial \xi^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_{21}^m}{\partial \xi^2} &= 0 \end{aligned} \quad (I.2)$$

Les autres équations sont identiquement nulles, ces relations sont automatiquement vérifiées car les σ_{ij}^m ($m < p$) sont indépendants de ξ

2) Système d'ordre $p \leq n < 2p$

Les équations (I.1) se réduisent à ($m = n - p$)

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}^n}{\partial \xi^2} + 2 \xi \frac{\partial^2 \sigma_{11}^m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{11}^m}{\partial \xi} - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \sigma_I^m}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{22}^n}{\partial \xi^2} + 2 \xi \frac{\partial^2 \sigma_{22}^m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{22}^m}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{33}^n}{\partial \xi^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_I^n}{\partial \xi^2} + 2 \xi \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial \xi^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{12}^n}{\partial \xi^2} + 2 \xi \frac{\partial^2 \sigma_{12}^m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{33}^n}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial x \partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{31}^n}{\partial \xi^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial \theta \partial \xi} = 0$$

Etant donné que les σ_{ij}^m ($m < p$) sont indépendants ~~des~~ et que les σ_{ij}^n ($p \leq n < 2p$) sont du premier degré en ξ ces relations sont identiquement vérifiables.

3) Système d'ordre $n > 2p$

Les équations (I.1) se réduisent à ($m = n - 2p$, $q = n - p$).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \sigma_{11}^n}{\partial \xi^2} + 2 \xi \frac{\partial^2 \sigma_{11}^q}{\partial \xi^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}^m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{11}^q}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_{11}^m}{\partial \xi} \\ & + \frac{\partial^2 \sigma_{11}^m}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}^m}{\partial x^2} - 2 \sigma_{11}^m + \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \sigma_I^q}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_I^m}{\partial \xi} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{22}^n}{\partial \xi^2} + 2 \xi \frac{\partial^2 \sigma_{22}^q}{\partial \xi^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}^m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{22}^q}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_{22}^m}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}^m}{\partial \theta^2}$$

$$+ \alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}^m}{\partial x^2} + \frac{\alpha^2}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{33}^m}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \sigma_{33}^q}{\partial \xi^2} + 2\sigma_{11}^m \frac{\partial \sigma_{33}^q}{\partial \xi} + \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{\partial^2 \sigma_I^n}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \sigma_I^q}{\partial \xi^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial \xi^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{12}^n}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \sigma_{12}^q}{\partial \xi^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}^m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{12}^q}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 \sigma_{12}^m}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}^m}{\partial x^2} - \sigma_{12}^m + \frac{\alpha^2}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial x \partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{32}^n}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \sigma_{32}^q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{32}^q}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial \theta} + \frac{\alpha}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_I^q}{\partial x \partial \xi} + 2\xi \frac{\alpha}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial x \partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{31}^n}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \sigma_{31}^q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{31}^m}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial \sigma_{11}^m}{\partial \theta} + \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{\partial^2 \sigma_I^q}{\partial \theta \partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial \theta \partial \xi} - \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial \theta^2} \right] = 0$$

Etant donné les expressions de σ_{ij} en ξ ces équations se réduisent au système suivant :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}^n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{11}^q}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}^m}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}^m}{\partial x^2} - 2\sigma_{11}^m + \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \sigma_I^q}{\partial \xi} \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{22}^n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{22}^q}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}^m}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}^m}{\partial x^2} + \frac{\alpha^2}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{33}^n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{33}^q}{\partial \xi} + 2\sigma_{11}^m + \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{\partial^2 \sigma_I^n}{\partial \xi^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{12}^n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{12}^q}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 \sigma_{12}^m}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}^m}{\partial x^2} - \sigma_{12}^m + \frac{\alpha}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial x \partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{32}^n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{32}^q}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial \theta} + \frac{\alpha}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_I^q}{\partial \xi \partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{31}^n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \sigma_{31}^q}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial \sigma_{11}^m}{\partial \theta} + \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{\partial^2 \sigma_I^q}{\partial \theta \partial \xi} - \frac{\partial^2 \sigma_I^m}{\partial \theta^2} \right] = 0$$

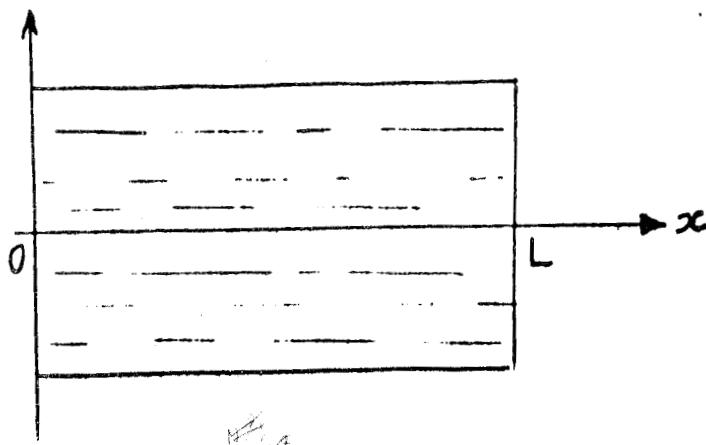
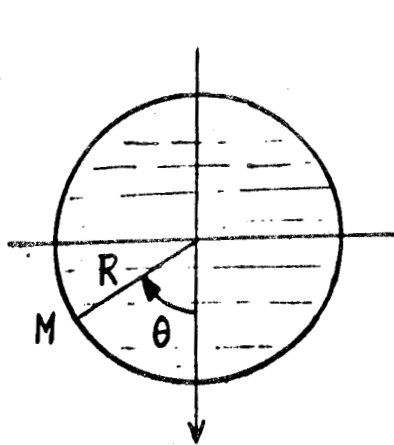
En remplaçant les σ_{ij}^n par leurs valeurs tiré du premier chapitre nous constatons que ces relations sont vérifiées.

ANNEXE - II

II. ~~2.1~~. Calcul de D_{mn} sur quelques formes de supports

1 - Cas d'une charge hydrostatique

Supposons que le réservoir soit complètement rempli d'un liquide de densité ρ ,



La pression au point M est donnée par :

$$p_r(x, \theta) = \rho g R (1 + \cos \theta)$$

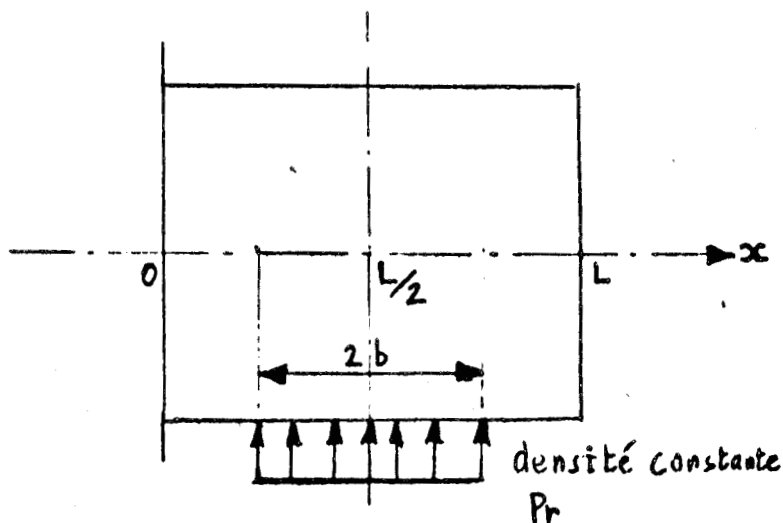
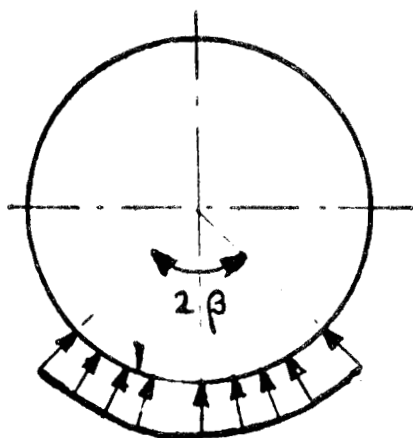
Ou, en tenant compte des extrémités en $x = 0$ et $x = L$:

$$p_r(x, \theta) = \rho g R (1 + \cos \theta) \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

D'où l'expression de D_{mn} analogue à (51) :

$$D_{mn} = \begin{cases} \frac{4\rho g R}{\pi n} & m = 0, 1 \\ 0 & m = 2, 3, 4, 5, \dots \end{cases} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

2 - Cas d'une charge rectangulaire de densité constante



La charge globale supportée par le rectangle est donnée par :

$$Q = p_r \cdot 2\beta R \cdot 2b$$

p peut se décomposer en double série de Fourier sous la forme :

$$p(x, \theta) = \frac{4}{\pi} q(\theta) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b}{L} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

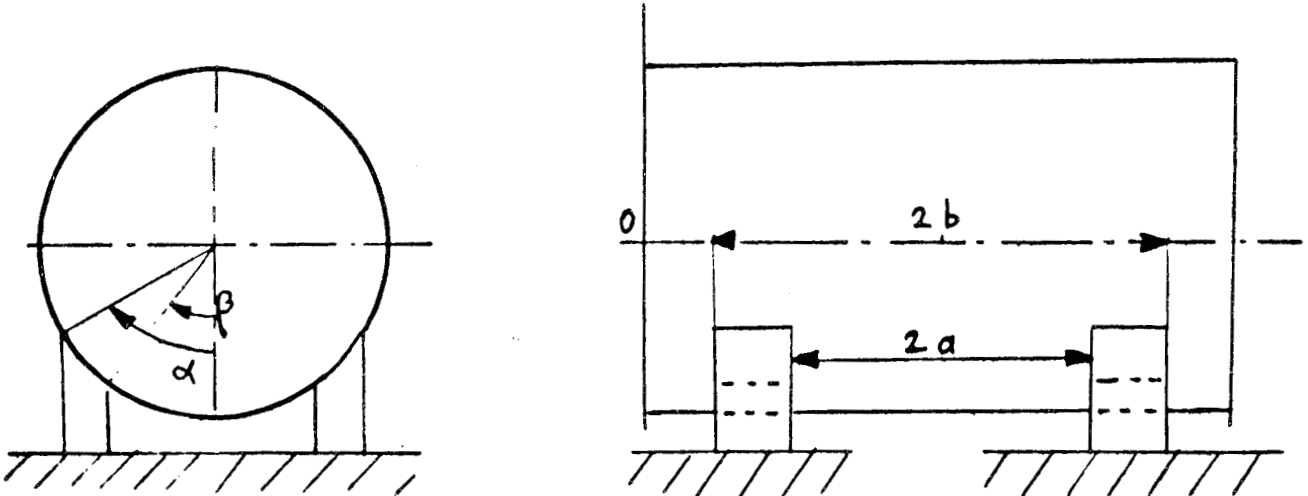
$$q(\theta) = \frac{p\beta}{\pi} + 2p_r \sum_{m=1,2,3}^{\infty} \frac{1}{m} \sin m\beta \cos m\theta$$

c'est-à-dire, en écrivant que $\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ pour $n = 1, 3, 5, \dots$

$$D_{mn} = \begin{cases} -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{4\beta p_r}{\pi^2 n} \sin \frac{n\pi b}{L} & (m = 0 ; n = 1, 3, 5, \dots) \\ -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{p_r}{\pi^2 mn} \sin m\beta \sin \frac{n\pi b}{L} & (m = 1, 2, 3, \dots ; n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}$$

3 - Cas de 4 appuis en "poteaux".

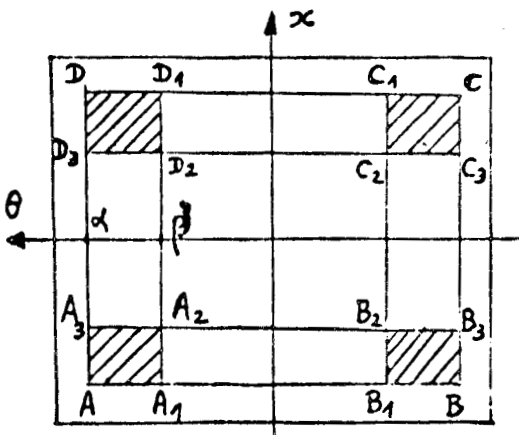
Considérons le cas d'un réservoir sur 4 appuis selon la figure suivante :



Représentons un éclatement de la surface latérale, vue de l'extérieur et super-

posons les 4 solutions suivantes :

- Densité $+p_r$ sur ABCD
- Densité $-p_r$ sur $A_3B_3C_3D_3$
- Densité $-p_r$ sur $A_1B_1C_1D_1$
- Densité $+p_r$ sur $A_2B_2C_2D_2$



Nous aurons alors l'équivalent d'une densité constante $+p_r$ sur les 4 rectangles seuls $A A_1 A_2 A_3$, $B B_1 B_2 B_3$, $C C_1 C_2 C_3$, $D D_1 D_2 D_3$.

ans ce cas

$$D_{mn} = D_{mn}(A A_1 A_2 A_3) + D_{mn}(B B_1 B_2 B_3) + D_{mn}(C C_1 C_2 C_3) + D_{mn}(D D_1 D_2 D_3)$$

D'où, en ajoutant, l'effet de la pression hydrostatique :

$$D_{mn} = \frac{4\rho g R}{n\pi} - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{16p_r}{\pi^2 n} \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \sin \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b-a}{2}\right) \cos \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$m = 0 ; n = 1, 3, 5, \dots$$

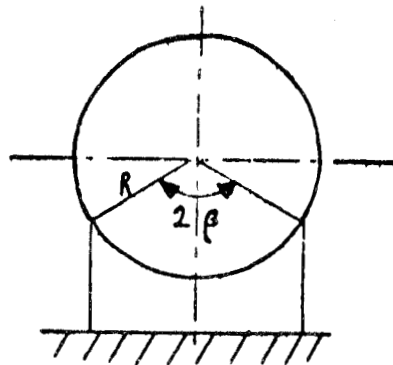
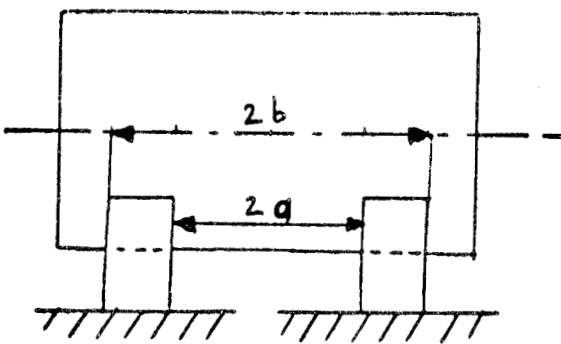
$$D_{mn} = \frac{4\rho g R}{n\pi} - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{32p_r}{\pi^2 mn} \sin m \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos m \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b-a}{2}\right) \cos \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$m = 1 \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$D_{mn} = - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{32p_r}{\pi^2 mn} \sin m \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos m \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b-a}{2}\right) \cos \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b+a}{2}\right)$$

Nous avons les 2 cas particuliers suivants qui se déduisent du cas ci-dessus

3 - Cas de 2 appuis en berceau



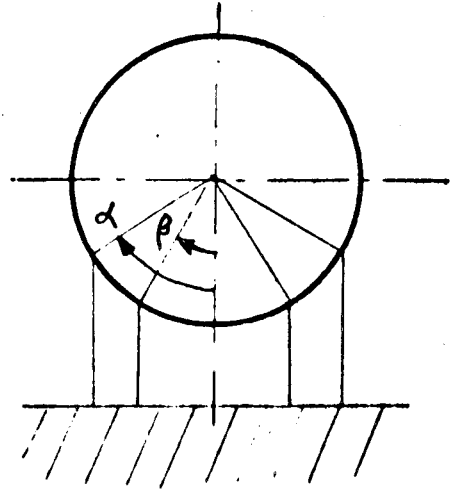
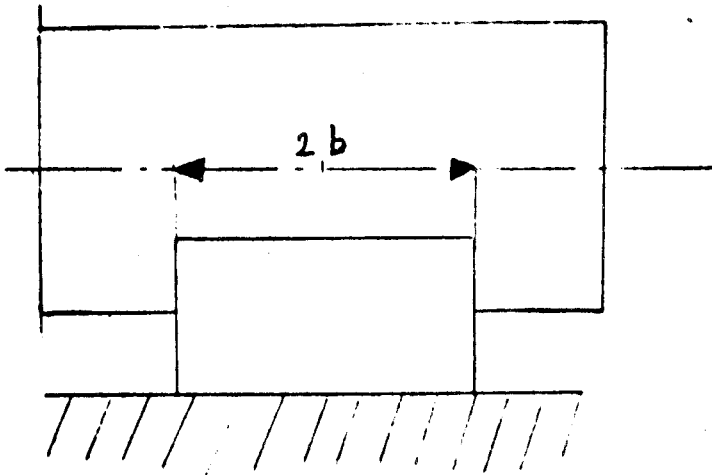
Alors :

$$D_{mn} = \frac{4\rho g R}{n\pi} - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8\beta p_r}{\pi^2 n} \sin \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b-a}{2}\right) \cos \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b+a}{2}\right) \quad m = 0 \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$D_{mn} = \frac{4\rho g R}{n\pi} - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{16p_r}{\pi^2 mn} \sin m\beta \sin \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b-a}{2}\right) \cos \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b+a}{2}\right) \quad m = 1 \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$D_{mn} = - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{16p_r}{\pi^2 mn} \sin m\beta \sin \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b-a}{2}\right) \cos \frac{n\pi}{L} \left(\frac{b+a}{2}\right) \quad m \geq 2 \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

4 - Cas de 2 longerons



$$D_{mn} = \frac{4\rho g R}{n\pi} - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8p_r}{\pi^2 n} \frac{(\alpha-\beta)}{2} \sin \frac{n\pi b}{L} \quad m=0 \quad n=1,3,5,\dots$$

$$D_{mn} = \frac{4\rho g R}{n\pi} - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{16p_r}{\pi^2 mn} \sin m \frac{(\alpha-\beta)}{2} \cos m \frac{(\alpha+\beta)}{2} \sin \frac{n\pi b}{L} \quad m=1 \quad n=1,3,5,\dots$$

$$D_{mn} = - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{16p_r}{\pi^2 mn} \sin m \frac{(\alpha-\beta)}{2} \cos m \frac{(\alpha+\beta)}{2} \sin \frac{n\pi b}{L} \quad m \geq 2 \quad n=1,3,5,\dots$$

DEUXIEME PARTIE

DIMENSIONNEMENT DES APPAREILS
CYLINDRIQUES SOUMIS A L'EFFET DE LA
PESANTEUR ET RESPOSANT SUR
DES APPUIS EN BERCEAUX

DEUXIEME PARTIE

	Pages
I. - INTRODUCTION	
II. - <u>CHAPITRE I</u> - THEORIE DE LA POUTRE EQUIVALENTE METHODE DE ZICK POUR LES DIMENSIONNEMENTS DES APPAREILS A PRESSIONS (Codes A.S.M.E. et S.C.N.C.T.)	1
1.1. - Introduction	1
1.2. - Théorie de la poutre équivalente	1
1.3. - Etude expérimentale de ZICK et CARLSON (1948)	6
1.4. - Etude théorique de ZICK (1951)	10
1.5. - Exemples de calcul par la méthode de ZICK	39
1.6. - Critiques	48
III. - <u>CHAPITRE II</u> - APPLICATION DE NOTRE THEORIE DE LA MEMBRANE	58
2.1. - Introduction	58
2.2. - Résolution	58
2.3. - Conclusion	66
IV. - <u>CHAPITRE III</u> - RESOLUTION PAR DOUBLE SERIE TRIGONOMETRIQUE	67
3.1. - Introduction	67
3.2. - Formulation du problème	68
3.3. - Déformations produites par ce type de chargement	69
3.4. - Tenseur des contraintes	74
3.4.1. - Introduction	74
3.4.2. - Répartition des contraintes dans la section de l'appui	74
3.4.3. - Répartition des contraintes dans la section médiane	76

3.4.4. - Répartition des contraintes dans les autres sections de l'appareil	82
3.4.5. - Répartition longitudinale des contraintes	95
3.4.6. - Influence de la position de l'appui sur la répartition des contraintes	105
3.4.7. - Influence de l'épaisseur de la coque	112
3.4.8. - Application à l'appareil de ZICK - CARLSON	112
3.4.9. - Influence des paramètres liés à la nature de l'appui	118
3.5. - Conclusion	133
V. - <u>CHAPITRE IV</u> - ETUDE EXPERIMENTALE SUR L'APPAREIL DE HAGE	134
4.1. - Introduction	134
4.2. - Choix de l'appareil	134
4.3. - Choix de la technologie	134
4.4. - Emplacement des points de mesure	136
4.5. - Plan des essais	136
4.6. - Déformations globales de l'appareil	138
4.7. - Tenseur des contraintes	138
4.7.1. - Appui à 0,3 m	138
4.7.2. - Appui à 0,53 m	145
4.7.3. - Appui à 1 m	152
4.7.4. - Appui à 1,15 m	160
4.7.5. - Appui à 1,28 m	168
4.7.6. - Appui à 0,18 m	168
4.8. - Conclusion	180
VI. - <u>CHAPITRE V</u> - COMPARAISON	181
5.1. - Introduction	181
5.2. - Cas de l'appareil de ZICK - CARLSON	181

5.3. - Cas de notre appareil	187
5.3.1. - Résultats de calcul par la méthode de ZICK	188
5.3.2. - Résultats de notre méthode	190
5.3.3. - Comparaison entre notre méthode, l'expérience et la méthode de ZICK	190
5.4. - Conclusion	207
VII - <u>CONCLUSION</u>	208
VIII - <u>BIBLIOGRAPHIE</u>	210
IX - <u>ANNEXE I</u>	211
X - <u>ANNEXE II</u>	222

o

o o

I N T R O D U C T I O N

=====

La théorie que nous avons développée dans la première partie admet de nombreuses applications pratiques, notamment avec l'utilisation des méthodes de résolution numérique actuellement développées. Comme application directe de nos travaux fondamentaux, nous allons étudier dans cette partie les effets des charges locales sur les coques cylindriques en vue d'améliorer une partie des codes des appareils à pression.

En effet les codes A.S.M.E. et S.N.C.T. précisent que pour la majorité des appareils à pression, l'effet prépondérant est celui de la pression intérieure du service.

Néanmoins, l'effet de la pesanteur et de la pression hydrostatique peuvent être déterminant pendant les périodes de remplissage ou de vidange de ces appareils, notamment pour les réservoirs cylindriques à axe horizontal, reposant sur des appuis en berceau ou en poteau, comme c'est le cas de la majorité des camions citernes et des appareils de stockage de gaz liquifié.

L'analyse correcte de telles sollicitations et les déformations qu'elles produisent est très compliquée pour être décrite par les méthodes usuelles de la résistance des matériaux, et une approche simple, connue sous le nom de la poutre équivalente, à inertie réduite au niveau des appuis fournit des résultats qui servent de base pour les codes A.S.M.E. et S.N.C.T.

Ces résultats ont été développés par ZICK en 1951 à partir d'une étude expérimentale effectuée en 1948, utilisant des jauges de déformation sur un appareil cylindrique à axe horizontal reposant sur deux appuis en berceau non soudés.

Cependant, cette étude laisse apparaître de nombreuses lacunes, notamment en ce qui concerne d'une part, la prise en compte des effets de la pression hydrostatique et d'autre part, la méthodologie utilisée pour trouver les résultats théoriques de l'étude.

Nous proposons dans cette partie l'exposé au premier chapitre de l'approche classique connue sous le nom de la poutre équivalente ainsi que les études expérimentales et théoriques de ZICK, qui constituent une approche simple de ce problème, résultant de l'utilisation des principes usuels de la statique, le calcul de deux appareils par cette méthode nous permet d'examiner les lacunes de cette étude et de dégager les critiques que l'on peut formuler.

Au deuxième chapitre, nous allons appliquer les résultats de la théorie de la membrane que nous avons développée dans la première partie, à ce cas pratique, pour retrouver le cas de la poutre équivalente, en résolvant en outre le problème dans les zones des appuis.

Au troisième chapitre, nous résolvons analytiquement ce problème, en utilisant une version simplifiée de nos équations d'équilibre (3.7), obtenue par l'omission des termes négligeables que nous avons déterminés dans le chapitre (III) de la première partie, et en imposant une solution pour les déplacements développable en double série de FOURIER, cette forme de solution étant inspirée par la symétrie de l'appareil considéré et de son chargement.

L'analyse de nos résultats nous permet de justifier les critiques formulées à propos de l'interprétation et des résultats expérimentaux de ZICK.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude expérimentale que nous avons effectuée aux laboratoires de l'Ecole Nationale des Techniques Industrielles et des Mines de DOUAI, sur un appareil type, calculé, par les deux méthodes précédentes et sur lequel nous avons effectué de nombreux essais afin de déceler l'influence des appuis sur la répartition des contraintes dans les sections voisines et l'influence des fonds, cette étude expérimentale nous permet d'apporter les corrections adéquates pour la représentation de pression de contact support-virole dans la mesure où l'on connaît expérimentalement les courbes représentatives de la flexion locale au dessus du support.

Enfin au cinquième chapitre nous faisons la synthèse de ces études afin de dégager une nouvelle méthode plus adéquate que celle de ZICK.

/ C H A P I T R E I /

THEORIE DE LA POUTRE EQUIVALENTE METHODE DE ZICK POUR LES DIMENSIONNEMENTS DES APPAREILS A PRESSION (Codes A.S.M.E. et S.N.C.T.)

1 - 1 - INTRODUCTION

Dans les pages qui suivent, nous exposons l'application des méthodes classiques de dimensionnement des appareils à pression, cylindriques à axe horizontal, reposant sur deux appuis en berceaux ; la méthode générale basée sur les principes fondamentaux de la statique, revient à assimiler ces appareils à des poutres souples sollicitées en flexion longitudinale.

La version actuelle des codes A.S.M.E. et S.N.C.T. est basée sur les travaux de ZICK (1951), nous examinons par conséquent les travaux expérimentaux de ZICK et CARLSON (1948) ainsi que la méthode proposée par le premier (1951) pour dimensionner de tels appareils.

Une application pratique sur des exemples concrets nous montre l'ordre des grandeurs des contraintes qui interviennent et une critique théorique et numérique de cette méthode constitue la dernière partie de ce chapitre.

1 - 2 - THEORIE DE LA POUTRE EQUIVALENTE

La théorie de la poutre équivalente revient à remplacer un appareil cylindrique à axe horizontal et reposant sur deux appuis symétriques par une poutre simple soumise à une charge uniformément répartie sur toute sa longueur, ce qui permet la résolution du problème des contraintes longitudinales introduites par la flexion de l'appareil sous l'effet de son propre poids et du liquide continu, d'après les principes de la résistance de matériaux classique.

Toutefois cette approche semble être incorrecte dans les zones des appuis, ce qui a poussé ZICK (1951) à proposer une version modifiée de cette théorie ; pour notre part nous allons exposer dans la suite les deux versions de cette théorie.

.../...

La figure (1) montre le système à étudier ainsi que les variables dimensionnelles qui le caractérisent.

Ce système est constitué d'un appareil cylindrique à axe horizontal rempli d'un liquide de densité ρ , les fonds étant elliptiques ou sphériques, en première approximation nous pouvons supposer que le poids total de l'appareil et du liquide est égal à $2.Q$ et que le poids est uniformément réparti tout le long de l'appareil à condition de remplacer les fonds par une partie cylindrique de longueur $\frac{4}{3} H$, ce qui conduit à une densité de charge :

$$W = \frac{2Q}{L + \frac{4}{3} H} \quad (1.2.1.)$$

Cette densité permet de définir une poutre équivalente reposant sur deux appuis simples au niveau des supports et ayant la même longueur que la partie cylindriques de l'appareil, la sollicitation de chaque fond est alors définie de la façon suivante :

- 1) Une force verticale qui schématise l'action du poids qui est égal à $\frac{2}{3} H.w$ appliquée au centre de gravité du fond, située à $\frac{3}{8} H$ de l'extrémité de la partie cylindrique.
- 2) Une force horizontale résultante de la poussée hydrostatique du fluide sur le fond, égale à $R.w$ et située à une distance $\frac{R}{4}$ de l'axe de l'appareil (voir figure 1.2.)

A partir de ce système isostatique nous pouvons déterminer l'effort tranchant et le moment fléchissant en tout point, la figure (1.3) résume les diagrammes de composantes du torseur des forces de gauche en tout point de la poutre.

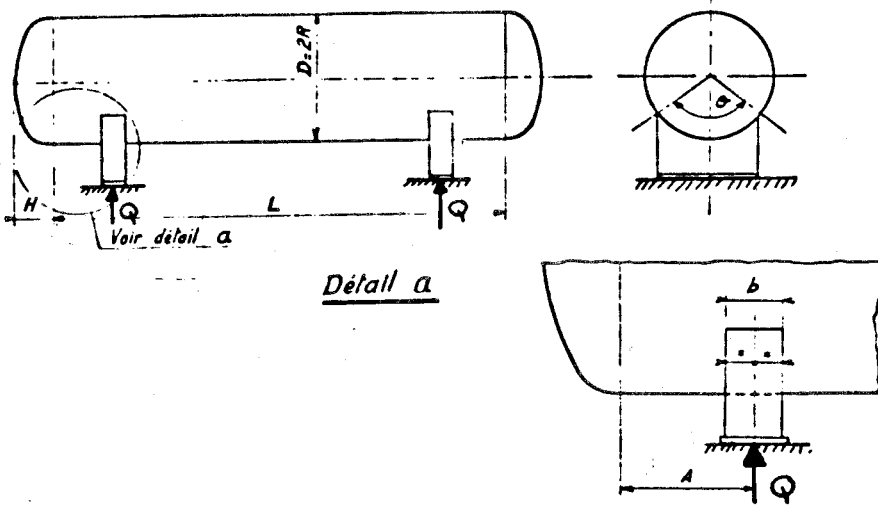
En particulier les valeurs maximales de l'effort tranchant sont atteintes au niveau des appuis, et le moment fléchissant est très important au même endroit et au milieu du cylindre.

La contrainte longitudinale (σ_f) résultant de la flexion longitudinale (en supposant que la totalité de la section travaille) vaut :

$$\sigma_f = \frac{M}{\pi R^2 e} \quad (1.2.2.)$$

à cette contrainte on doit superposer la contrainte de traction produite par la force due à la pression hydrostatique $R.w$ sur le fond et qui vaut :

$$\sigma_t = \frac{Rw}{2\pi R e} = \frac{w}{2\pi e} \quad (1.2.3.)$$



Figure(1.1): schéma du réservoir horizontal sur deux supports de fixation

A = distance de lignes de tangente (joints) au support

L = longueur du réservoir de tangente à tangente

H = profondeur de la tête (Fond)

Q = charge totale par fixation
= poids total divisé par deux

R = rayon du réservoir

e = l'épaisseur de la coque

θ = angle de contact avec la fixation du support

W = charge par unité de longueur.

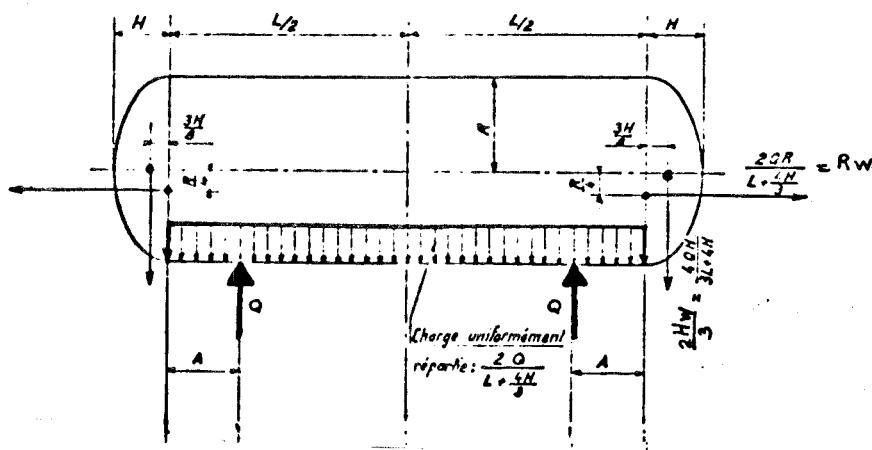


Figure (1.2.)



Les valeurs extrémales du moment fléchissant ont pour valeur :

Au niveau de l'appui :

$$M_{q_1} = W \left[\frac{2HA}{3} + \frac{A^2}{2} - \frac{(R^2 - H^2)}{4} \right]$$

et en substituant l'expression (1.2.1.) pour W, nous obtenons :

$$M_{q_1} = QA \left[1 - \frac{1 - \frac{1}{L} + \frac{R^2 - H^2}{2AL}}{1 + \frac{4H}{3L}} \right] \quad (1.2.4.)$$

Au milieu de l'appareil :

$$M_C = W \left[\frac{(L - 2A)^2}{8} - \frac{2}{3} HA - \frac{A^2}{2} + \frac{R^2 - H^2}{4} \right]$$

$$M_C = \frac{QL}{4} \left[\frac{1 + 2 \left(\frac{R^2 - H^2}{L^2} \right)}{1 + \frac{4}{3} \frac{H}{L}} - \frac{4A}{L} \right] \quad (1.2.5.)$$

Par ailleurs, la contrainte du cisaillement à l'endroit de l'appui va être égale à : (figure 1.4.)

$$\tau(\phi) = \frac{Q}{\pi Re} \sin \phi \quad (1.2.6.)$$

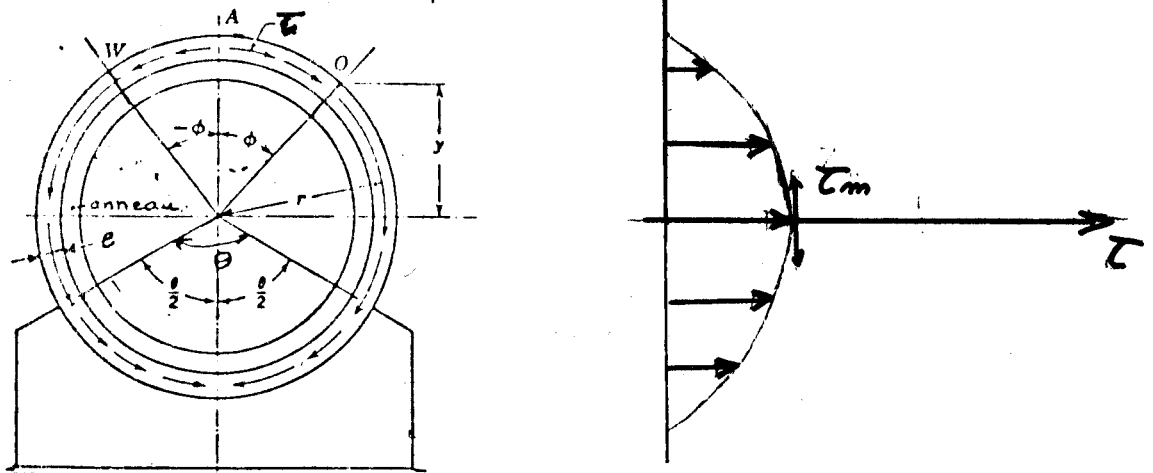
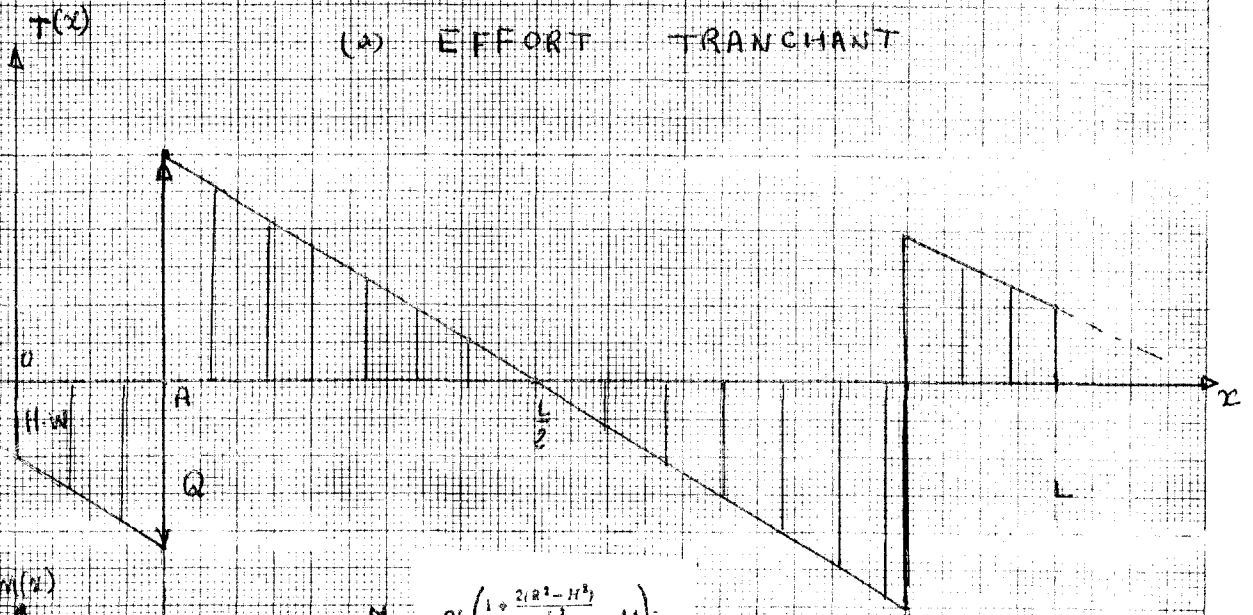
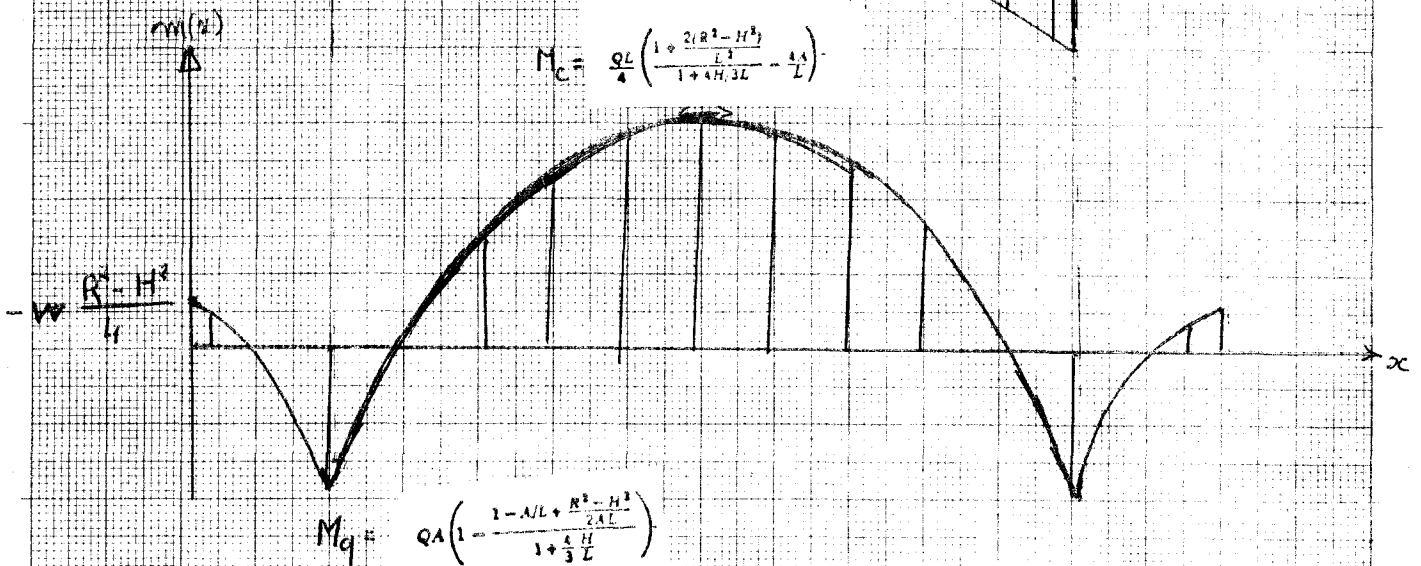


Fig. 1.4. : Contrainte de cisaillement au niveau du support.

(a) EFFORT TRANCHANT



$$M_c = \frac{QL}{4} \left(\frac{1 + \frac{2(R^2 - H^2)}{L^2}}{1 + \frac{4H}{3L}} - \frac{4}{L} \right)$$



$$M_q = QA \left(1 - \frac{1 - AL + \frac{R^2 - H^2}{2AL}}{1 + \frac{4H}{3L}} \right)$$

(b) MOMENT FLÉCHISSANT

(c) EFFORT NORMAL

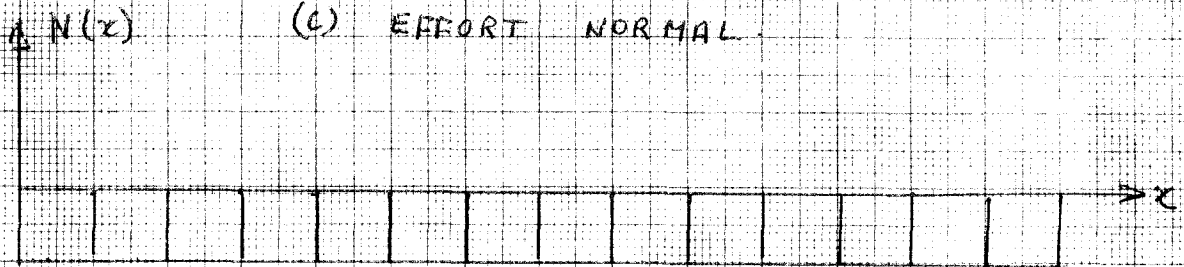


Fig. 1.3.



Cette théorie assez simple a été souvent utilisée pour le dimensionnement des tubes très longs, supportés par des anneaux raidisseurs au niveau des appuis ; ce qui a pour effet de donner à ces tubes un comportement d'ensemble dans la direction longitudinale ; pour cette raison, cette étude concerne uniquement la flexion longitudinale, et d'après sa conception, elle est inapte à déterminer les contraintes circonférencielles $\sigma_{\theta} = \sigma_{\phi}$, qui semblent être, d'après les observations expérimentales, dominantes dans le cas des appareils à pression supportés par des supports en berceau ou en poteaux ; pour cette raison, cette théorie a été modifiée par ZICK (1951), pour être appliquée au problème des appareils à pression.

1.3. - Etude expérimentale de ZICK et CARLSON (1948)

Pour étudier l'effet de support sur la répartition des contraintes dans un appareil cylindrique à axe horizontal, ZICK et CARLSON ont effectué en 1948 une série d'études expérimentales par jauges de déformation ; quoique cette technique soit naissante à l'époque, ils ont pu dégager des résultats intéressants concernant notamment les zones affectées par la présence des supports.

En utilisant deux appuis symétriques en berceau, et en changeant successivement la position de ces appuis, ils ont pu déterminer l'influence de la position de l'appui, par rapport au fond de l'appareil, et l'influence de ce dernier comme raidisseur quand l'appui se trouve auprès de lui.

1.3.1. - Caractéristiques de l'appareil utilisé par ZICK

Les caractéristiques de l'appareil utilisé sont les suivantes :

- Longueur totale $L_t = 67 \text{ feet} = 20,4 \text{ m}$

- Partie cylindrique :

. longueur $L = 62 \text{ feet} = 18 \text{ m}$

. Epaisseur $e = 1 \text{ inch} = 25,4 \text{ mm}$

. diamètre intérieur $\phi = 9 \text{ feet} = 2,7 \text{ m}$

- Fonds sphériques :

. longueur $H = 2,5 \text{ feet} = 0,76 \text{ m}$

. épaisseur $e_f = 0,77 \text{ inch} = 19 \text{ mm}$

- Supports en berceau :

. largeur : $12 \text{ inch} = 300 \text{ mm}$

. angle de contact $\theta = 120^\circ$

.../...

- liquide continu :

$$\text{. eau } \rho g = 10^4 \text{ N/m}^3$$

- charge par support :

$$\text{. } Q = 63,386 \text{ tonnes}$$

- positions successives des supports :

$$\text{. } A = 1 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 9 \quad \text{et } 13 \text{ feet}$$

$$\text{. } A = 0,3 \quad ; \quad 1,51 \quad ; \quad 2,7 \quad \text{et } 3,97 \text{ mètres}$$

1.3.2. - Résultats expérimentaux

L'approche de calcul classique par la théorie de la poutre équivalente, (voir 1.2.) semble être correcte pour les parties éloignées des supports, par contre les zones proches du support sont sujettes à des déformations importantes suite à une flexion circonférentielle que la précédente théorie ne peut pas prévoir ; ces zones sont les sièges des contraintes trop importantes par rapport à celles données par la théorie de la poutre équivalente ; en particulier les auteurs ont tiré les conclusions suivantes :

- (a) - Pour la position du support près du fond ($A \approx 0$), l'effort tranchant va être encaissé partiellement par le fond et transmis par celui-ci à la partie supérieure du cylindre, dans ce cas la flexion longitudinale est conforme à la théorie de la poutre équivalente, néanmoins on constate la présence d'une flexion circonférentielle qui produit une contrainte maximale près de l'extrémité du support.
- (b) - Dans tous les cas, les auteurs constatent que, pour la flexion circonférentielle, le point critique est localisé près de l'extrémité du support, où on rencontre les valeurs maximales de la contrainte de traction (fibre intérieure) ; et de la contrainte de compression (fibre extérieure). La contrainte de traction est due à la flexion circonférentielle, celle de compression résulte d'une part de la flexion circonférentielle et d'autre part de la compression directe du support (fig. 1.5). De même, on constate que la contrainte maximale de cisaillement est extrême en ce point.

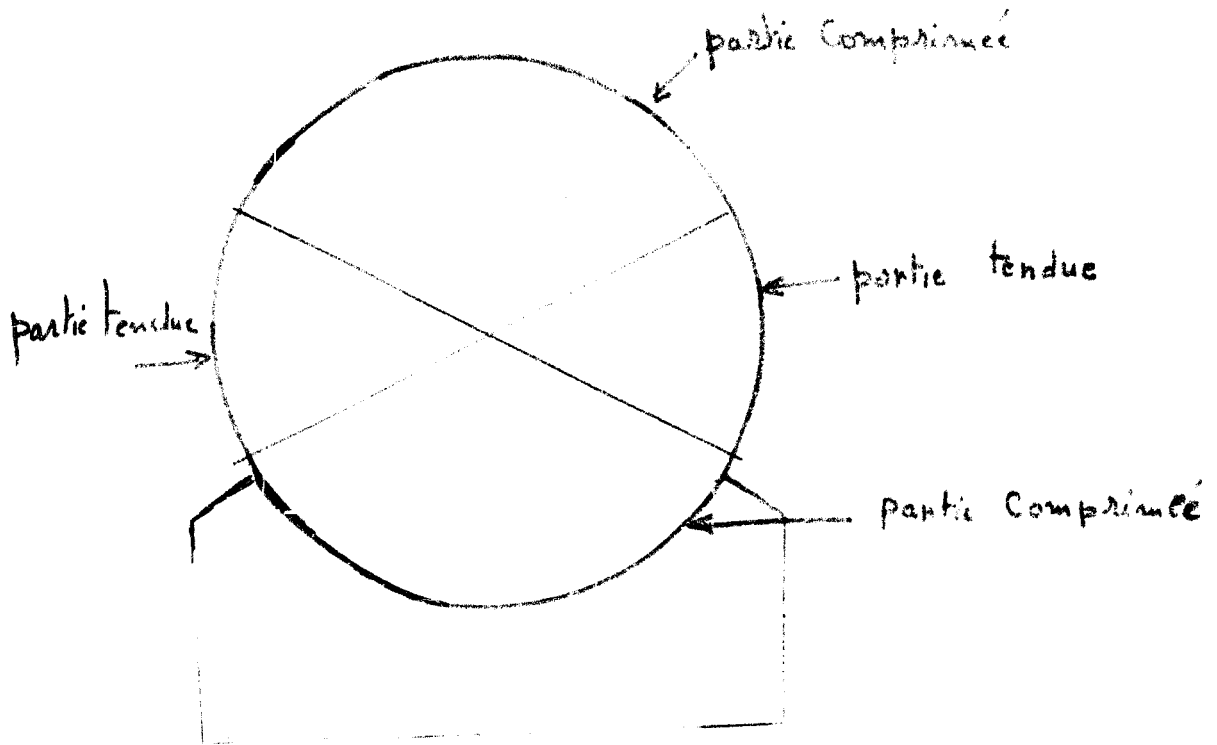


FIGURE 1.6 -- FLEXION LONGITUDINALE

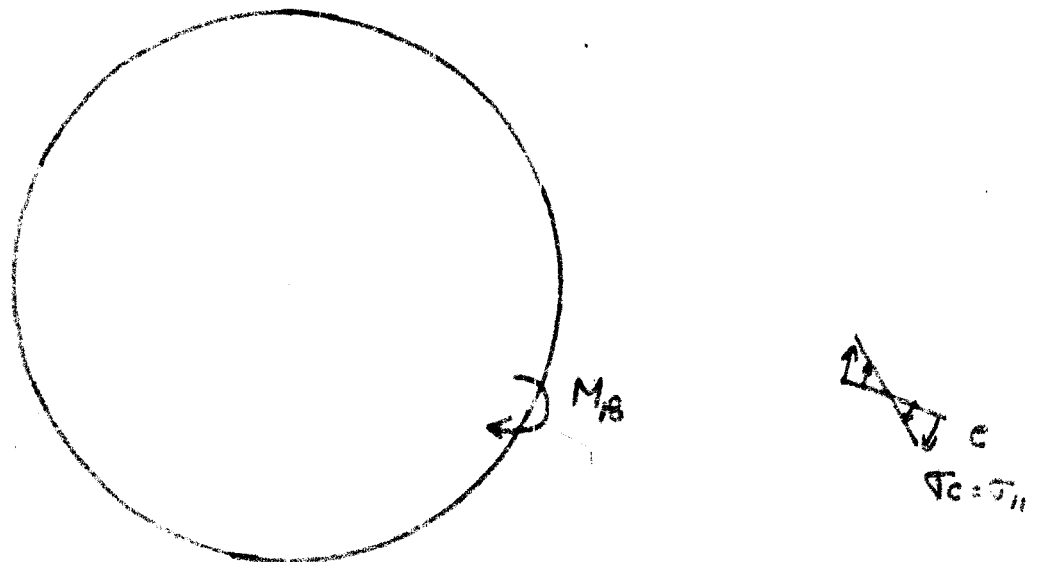


FIGURE 1.5 -- FLEXION CIRCONFÉRENTIELLE

- (c) - Pour la flexion longitudinale de l'appareil, les auteurs constatent que la théorie de la poutre équivalente est satisfaisante pour les sections éloignées des supports, l'intégration des contraintes mesurées dans de telles sections donne approximativement les mêmes valeurs que celles de cette théorie.

Par contre, pour les sections proches du support, les contraintes de flexion longitudinale mesurées, diffèrent considérablement de celles données par la théorie : en particulier, on constate qu'au dessus du support, les régions supérieure et inférieure du cylindre sont en compression et la partie médiane est en traction (Fig.1.6) ; les maxima des valeurs trouvées pour les contraintes de traction sont rencontrées un peu en dessous de la médiane et valent respectivement 1330 PSI ($0,9 \text{ daN/mm}^2$) et 2240 PSI ($1,5 \text{ daN/mm}^2$), selon que les supports se trouvent près du fond ($A \approx 0$) ou à 9 feet ; alors que les contraintes maximales données par la théorie de la poutre équivalente sont respectivement 20 PSI ($0,014 \text{ daN/mm}^2$) et 300 PSI ($0,2 \text{ daN/mm}^2$) au niveau de la fibre supérieure de la section droite.

- (d) - D'autres expériences ont montré que si la distance entre les supports est supérieure au diamètre du cylindre, les contraintes importantes proviennent de la flexion circonférentielle et le point critique se trouve près de l'extrémité du support, la destruction de l'appareil résulte donc, en premier lieu de cette flexion circonférentielle, et elle prend naissance aux extrémités du support.

- (e) - La pression intérieure ne modifie pas considérablement cette répartition des contraintes ; en particulier, les auteurs ont constaté que l'on a les mêmes répartitions des contraintes de cisaillements avec et sans pression ; de plus pour le cas où l'appareil est à moitié rempli, on trouve des valeurs des contraintes inférieures à celles mesurées quand il est complètement rempli ; ceci étant vrai pour les quatre positions du support.

.../...

En conclusion ZICK et CARLSON suggèrent la réalisation de nouvelles expériences et proposent, en attendant, leurs résultats comme étant indicatifs ; en particulier il suggèrent le renforcement de la partie supérieure de la section au-dessus de l'appui et soulignent l'importance des fonds, comme raidisseurs, quand les supports sont situés à leur proximité.

1.4. - Etude théorique de ZICK (1951)

1.4.1. - Introduction

L'étude expérimentale précédente montre clairement que les appuis introduisent des contraintes très importantes dont il faut trouver une justification mathématique adéquate, d'autant plus que ces mesures sont en contradiction avec la théorie de la poutre équivalente au niveau des appuis.

En se basant sur ses résultats expérimentaux, ZICK (1951) a tenté de trouver cette justification en restant dans le domaine de la résistance des matériaux classique, et il a distingué dans cette étude deux cas :

- l'un concerne la position des appuis près des fonds,
- l'autre concerne le cas plus général des appuis assez éloignés des fonds pour qu'on puisse négliger leur influence sur la répartition des contraintes au-dessus des appuis.

Toutefois, cette étude ne semble pas correcte, et elle est critiquable en plusieurs points, nous reviendrons sur cette question dans la partie (1.6.).

../.

1.4.2. - Torseur des forces agissantes sur une section droite du cylindre

Dans l'inventaire des forces agissantes et qui est proche de celui de la théorie de la poutre équivalente (1.2.) ZICK (1951) commet une erreur très importante car il ne tient pas compte de la poussée hydrostatique sur le fond comme une force de traction, mais il l'inclue d'une manière erronée dans un couple.

En effet, d'après ZICK (1951), un fond peut être remplacer par le système des forces suivantes :

1. - Deux forces verticales égales dont leur module commun vaut le poids du fond rempli ($\frac{2}{3} H_w$), l'une d'elles est appliquée à $\frac{3}{8} H$ de la jonction du fond avec le cylindre, et l'autre est appliquée au niveau de cette jonction, dirigée vers le haut et représente l'effort tranchant dû à la jonction.
2. - Deux forces horizontales égales dont leur module commun vaut la poussée hydrostatique R_w , l'une d'elle représente cette poussée et par conséquent elle est appliquée à $\frac{R}{4}$ au-dessous du centre et l'autre représente l'action de la jonction fond-cylindre; d'après ZICK, elle est appliquée au centre de gravité de la section.

Ceci a pour effet de créer un couple au niveau de la jonction égal à :

$$C = \frac{2}{3} H_w \times \frac{3}{8} H - R_w \frac{R}{4} = \frac{R^2 - H^2}{4} \cdot w \quad (1.4.1.)$$

Malheureusement, un tel inventaire ne respecte pas les principes fondamentaux de la statique car le fond n'est pas en équilibre (Fig.1.7)

Le schéma équivalent de l'appareil est donné dans la figure (1.8) il est obtenu en remplaçant les fonds par :

- un effort tranchant vertical égal à $\frac{2}{3} H_w$
- un couple de flexion appliqué à l'extrémité de la partie cylindrique : $C = - \frac{R^2 - H^2}{4} \cdot w \quad (1.4.2.)$

../.

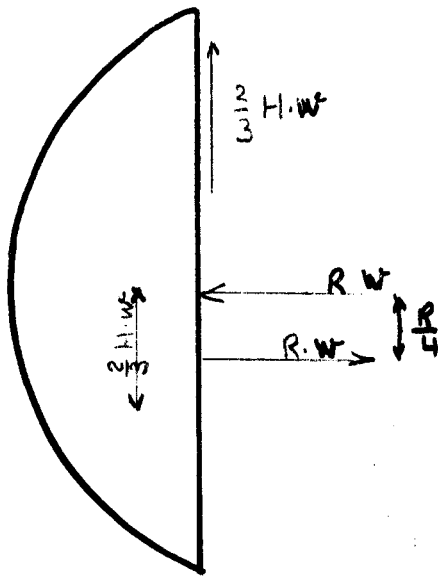


FIGURE 1.7 - FOND ISOLE

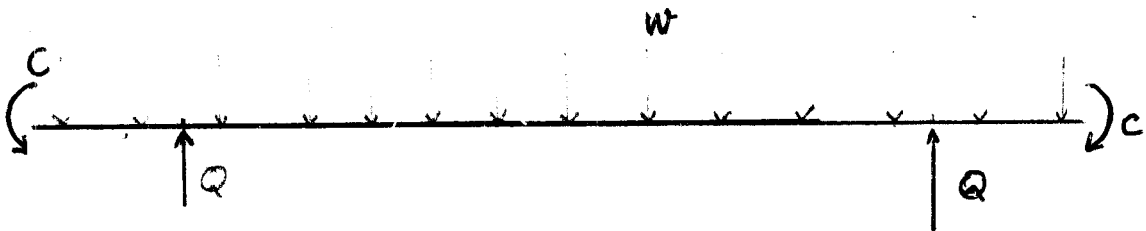


FIGURE 1.8 - SYSTEME EQUIVALENT

1.4.3. - Résultats concernant la flexion longitudinale

L'inventaire dressé par ZICK fournit les mêmes résultats généraux que ceux développés en (1.2.) à condition d'enlever la force longitudinale de traction due à la poussée hydrostatique R.w. En particulier le moment fléchissant à deux extrémités aux appuis et au milieu, leurs valeurs respectives sont :

$$\begin{aligned}
 M_q &= R^2 w \left[\frac{2HA}{3R^2} + \frac{A^2}{2R^2} - \frac{1 - \left(\frac{H}{R}\right)^2}{4} \right] \\
 &= 2 Q A \left[1 - \frac{1 - \frac{A}{L} + \frac{R^2 - H^2}{2AL}}{1 + \frac{4}{3} \frac{H}{L}} \right] = K_1 Q.L \quad (1.4.3.)
 \end{aligned}$$

et au milieu :

$$M_c = \frac{Q.L}{4} \left[\frac{1 + 2 \frac{R^2 - H^2}{L^2}}{1 + \frac{4}{3} \frac{H}{L}} - \frac{4A}{L} \right] = K_2 Q.L \quad (1.4.5.)$$

L'effort tranchant est maximal aux appuis, et égal à Q ; les diagrammes de ces moments fléchissants et de l'effort tranchant sont présentés en (1.2.) Figure (1.3.)

Des abaques (en annexe I) donnent les valeurs de M_c et M_q en fonction de A, H, R, et L

1.4.3.1. - Valeur de la contrainte longitudinale due à la flexion au niveau de l'appui

D'après ZICK (1951) les mesures par jauge de déformations montrent que la partie supérieure de la section droite du cylindre est sujette à de grandes déformations qui sont dues d'après l'auteur, à la flexion circonférentielle produite par la contrainte de cisaillement, ce qui rend cette partie inerte pour la flexion longitudinale ; dès lors la partie inférieure va encaisser seule le moment fléchissant M_q , cette partie est définie par un angle 2Δ qui dépend de l'angle du support θ et du point où la contrainte circonférentielle est maximale ; ce point d'après ZICK se trouve à $\frac{180^\circ - \theta}{6}$ à partir du sommet soit (figure 1.9.)

$$\Delta = \frac{5}{12} \theta + 30^\circ$$

.../...

Les contraintes de flexion longitudinale maximale vont être :

$$f_1 = \frac{M}{I} v_1 \quad \text{avec} \quad I = R^3 e \left[\Delta + \sin \Delta \cos \Delta - 2 \frac{\sin^2 \Delta}{\Delta} \right]$$

$$v_1 = R \left(\frac{\sin \Delta}{\Delta} - \cos \Delta \right)$$

et

$$f_2 = -\frac{M}{I} v_2 = R \left(1 - \frac{\sin \Delta}{\Delta} \right)$$

A remarquer qu'une seconde source d'erreur provient du fait que le torseur des forces de gauche n'est pas écrit au centre de gravité G de la section utile. Nous verrons ce point en (1.6)

L'angle du support est en général voisin de 120° d'où

$$\Delta \approx 80^\circ \quad I = R^3 e \left[1,4 + 0,98 \times 0,174 - 2 \frac{(0,985)^2}{1,4} \right]$$

$$I = 0,185 R^3 e$$

$$v_1 = 0,53 R \quad , \quad v_2 = 0,296 R$$

$$\text{D'où} \quad Z_1 = \frac{I}{v_1} = \frac{0,185}{0,55} R^2 e = 0,35 R^2 e$$

Alors que si la totalité de la section travaille on aurait :

$$Z_2 = (I/v) = \frac{\pi R^3 e}{R} = \pi R^2 e = 3,14 R^2 e$$

Soit une contrainte 9 fois plus petite

Par commodité ZICK a établi des diagrammes qui donnent les coefficients d'amplification des contraintes $\frac{1}{K_1}$ et $\frac{1}{K'_1}$ en fonction de l'angle θ du support (voir fig. 1.10)

$$f_1 = \frac{M}{K_1 M R^2 e} \quad f_2 = \frac{M}{K'_1 M R^2 e}$$

.../...

Par ailleurs si un anneau raidisseur se trouve au niveau de l'appui, ou si l'appui se trouve près du fond qui joue alors le rôle de raidisseur, on a :

$$K_1 = K'_1 = 1 \quad \text{autrement dit la totalité de la section travaille}$$

1.4.3.2 - Flexion au milieu de l'appareil

Au milieu du cylindre, l'effort tranchant étant nul la totalité de la section travaille et la contrainte maximale vaut :

$$f_3 = \pm \frac{M_c}{R^2 e} \quad (1.4.7)$$

Dans le cas où M_c est très grand (appareil trop long) f_3 ne doit pas dépasser la contrainte critique de flambement pour les fibres supérieures.

$$\text{Soit } f_3 \leq 0,0625 \frac{E.e}{R}$$

1.4.4. - Contraintes de cisaillement

1.4.4.1.- Cas d'un cylindre renforcé par un anneau au niveau de support

Dans ce cas la répartition de la contrainte de cisaillement dans une section droite est proportionnelle au sinus de l'angle central ϕ compté à partir du sommet.

Si l'effort tranchant est V , sa valeur à droite de l'appui est : fig.1.11

$$V = Q \left(\frac{L - 2A - H}{L + H} \right) \quad (\text{d'après ZICK}) \quad \text{car :}$$

$$V = Q - w (A + H + \xi), \quad \xi \text{ étant l'abscisse courante à partir du milieu de l'appui}$$

$$\text{avec } w = \frac{2Q}{L + 4/3 H}, \quad V = Q - \frac{2Q}{(3L + RH)} (A + H + \xi)$$

$$\text{juste à droite de l'appui } \xi = 0, \text{ ce qui donne } V = Q - 6Q \frac{A + H}{3L + 4H}$$

$$\text{Soit } V = Q \frac{L - 2A - 0,74 H}{L + 4/3 H} \approx Q \times \frac{L - 2A - H}{L + H} \quad (1.4.8)$$

En appliquant la théorie des résistances de matériaux à cette section on constate que la contrainte de cisaillement va être

$$\tau_h = \frac{V \sin \phi}{\pi R e} \quad (1.4.9)$$

sa valeur maximale est atteinte en $\phi = \frac{\pi}{2}$ ce qui donne :

$$\tau_m = \frac{V}{\pi R e} = \left[\frac{L - 2A - H}{L + H} \right] \frac{Q}{\pi R e} \quad (1.4.10)$$

ce qui est remarquable c'est que cette valeur est indépendante de l'angle du support, par contre l'effort tranchant V est plus petit que Q . Pour le dimensionnement ZICK propose

$\tau_m < 0,8 R_e$ ou R_e est la limite d'élasticité du matériau

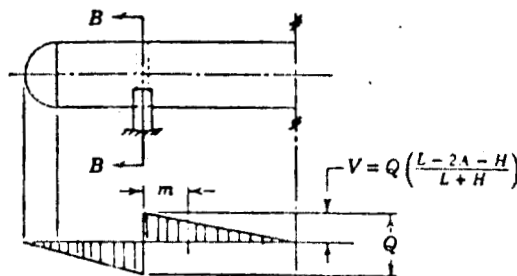


Figure 1.11: Diagramme de cisaillement

1.4.4.2. - Cas d'un appareil sans anneau raidisseur et dont l'appui est situé loin du fond

Dans ce cas, ZICK suppose que seule une partie de la section droite va travailler et ceci est dû au fait que l'autre partie est sujette à des déformations assez importantes.

Cette partie est limitée (fig.1.12) par l'angle

$2 \times \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\beta}{20} \right) = 2 (\pi - \alpha)$ d'après ZICK. Cet angle est déterminé expérimentalement.

Zick suppose ensuite que la contrainte de cisaillement (τ non renforcé) va être encaissée uniquement par cette partie, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\tau(\text{non renforcé})}{\tau(\text{renforcé})} = \frac{\int_0^{\pi} \sin^2 \phi d\phi}{\int_{\alpha}^{\pi} \sin^2 \phi d\phi} = \frac{\left[\frac{\pi}{2} \right]}{\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} \right) \right]}$$

$$\tau(\text{non renforcé}) = \frac{V \sin \phi}{r(\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)} e$$

La contrainte de cisaillement f_4 sera égale à :

$$f_4 = \frac{Q \sin \phi}{r e (\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)} \left[\frac{1 - H - 2A}{L + H} \right]$$

Le maximum est, en $\phi = \emptyset$: $f_4 = \frac{Q \cdot K_4}{R e} \frac{L - H - 2A}{L + H}$ (1.4.11)

avec $K_4 = \frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}$ (1.4.12)

on doit vérifier $f_4^{(\alpha)} < 0,8 R e$

le maximum de $f_4^{(\alpha)}$ étant en $\phi = \alpha$

pour $\phi = 120^\circ$ $K_4 = 1,140$ on a une augmentation

$$\frac{\tau_{\text{non renforcé}}}{\tau_{\text{renforcé}}} = \frac{1,14}{0,32} = 3,5 \text{ fois}$$

.../...

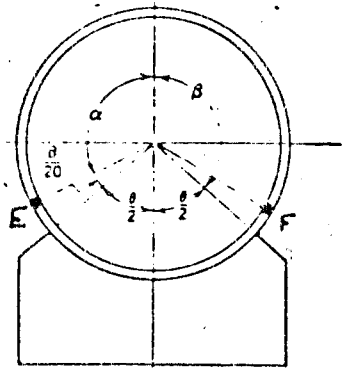


Figure 1.12

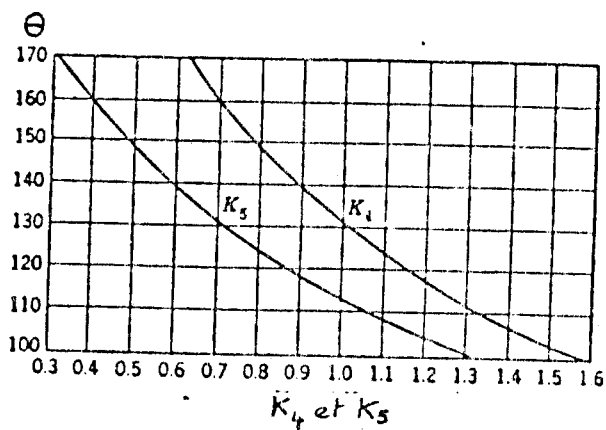


Figure - 1.13

Abaque donnant les Valeurs de K_4 et K_5
en fonction de θ



1.4.4.3.-Appareil renforcé par les fonds

La présence du fond près du support va modifier sensiblement la répartition des contraintes de cisaillement.

Sur le fond la contrainte de cisaillement va se dissocier en f_4 et en f_5 (fig. 1.14)

f_5 = contrainte vers le bas sur la partie comprise entre $0 < \phi_1 < \alpha$ due au fond

f_4 = contrainte vers le haut sur la partie comprise entre $\alpha < \phi_2 < \pi$ due à la présence du support

et dont la valeur est déjà déterminée en (1.4.4.2) ;

d'après cette répartition l'effort tranchant absorbé par la partie supérieure du fond s'écrit:

$$2 \int_0^{\alpha} \frac{Q \sin^2 \phi_1 R e_f d\phi_1}{\pi R c_f} = \frac{Q}{\pi} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

et la contrainte dans la partie inférieure est de la forme

$$f_5 = \frac{2 Q}{2 \pi R e_f} \left[\frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \right] \sin \phi_2 \quad (1.4.13)$$

de telle manière qu'on a l'équilibre de la section du fond

$$2 \int_0^{\alpha} \frac{Q \sin^2 \phi_1 R e_f d\phi_1}{\pi R e_f} - 2 \int_{\alpha}^{\pi} f_5 e_f R d\phi_2 = 0$$

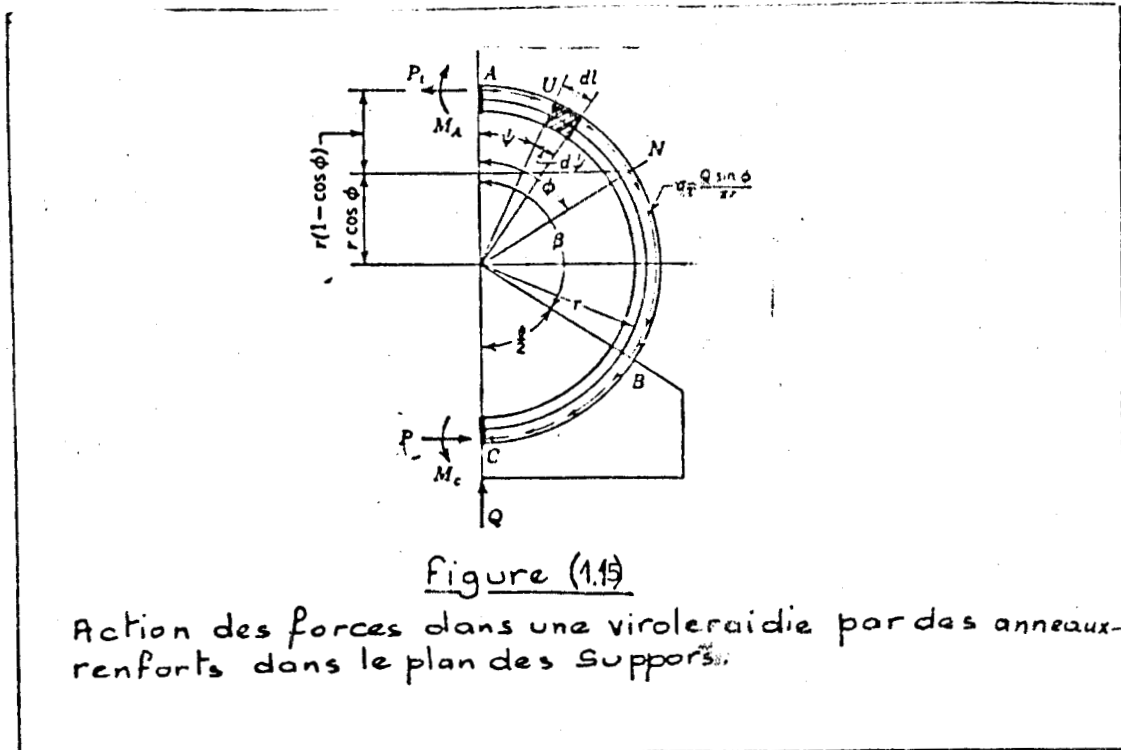
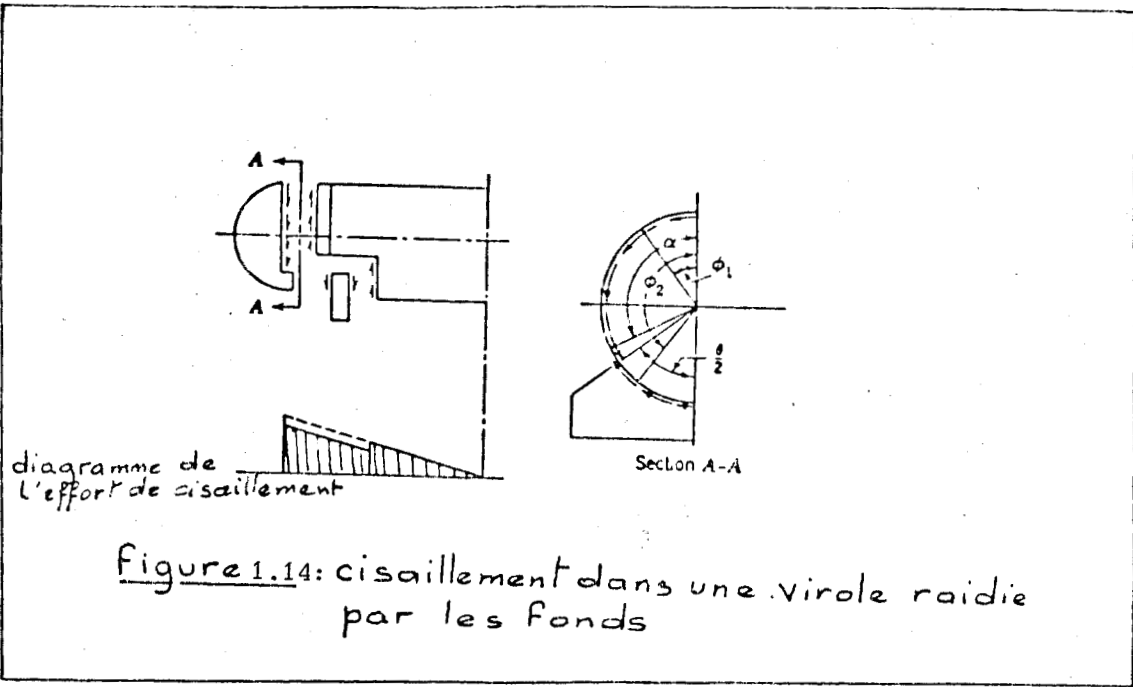
ceci paraît paradoxal, car l'effort tranchant total doit être différent du zéro ; par ailleurs si on isole la section opposée du cylindre, on constate qu'elle n'est pas en équilibre nous reviendrons sur ce point en (1.6)

Ainsi la contrainte de cisaillement maximale f_5 s'écrit:

$$f_5 = \frac{2 Q}{2 \pi R e_f} \left[\frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \right] (\sin \phi_2)_{\phi_2 = \alpha}$$

soit

$$f_5 = \frac{Q K_5}{R e_f} \quad (1.4.14)$$



de même, la contrainte dans le cylindre : f_6 est maximale pour

$$\phi_2 = \alpha \quad f_6 = \frac{Q \cdot K_5}{R e} ; K_5 = \frac{\sin \phi}{\pi} 2 \left[\frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \right]$$

et K_4 et K_5 sont donnés par la figure 1.13 en fonction de θ

En résumé la partie supérieure du cylindre va être le siège d'une contrainte de cisaillement égale à f_5 et la partie inférieure va être le siège d'une contrainte de cisaillement égale à f_4 , toutes les deux sont dirigées dans le même sens.

1.4.5 - Flexion circonférentielle

D'après l'auteur, les contraintes de cisaillement dans la section droite au dessus du support vont créer une flexion circonférentielle très importante, qui dépendra de la proximité des fonds et de la présence des anneaux raidisseurs au dessus du support.

1.4.5.1.- Cas d'un cylindre renforcé par anneau

Si on isole une demi-circonférence au dessus du support, par symétrie en A et C, les efforts verticaux sont nuls et les déplacements horizontaux ainsi que les rotations de sections en A et C sont nules aussi (Fig. 1.15)

La répartition des contraintes de cisaillement va être

$$\text{au point } (u, (\psi)) \quad \tau = \frac{Q \sin \psi}{\pi R e} \quad (1.4.15)$$

L'effort élémentaire de cisaillement appliqué sur l'élément $e \times d\ell$ avec $d\ell = R \cdot d\psi$ vaut alors :

$$\tau = \tau R d\psi = \frac{Q}{\pi} \sin \psi d\psi$$

ainsi ses composantes sont :

$$\tau_x = \frac{Q}{\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi$$

$$\tau_y = \frac{Q}{\pi} \sin^2 \psi d\psi$$

Si on se place au point N (ϕ) ces deux forces élémentaires vont produire un moment fléchissant élémentaire :

$$(dm)_\phi = \tau_x \times b_1 - \tau_y \times b_2 \quad \text{avec} \quad b_1 = R (\cos \psi - \cos \phi),$$

$$b_2 = R (\sin \phi - \sin \psi) \quad \text{le moment fléchissant au point N}$$

vaut alors :

$$M_\phi = M_A - P_t R (1 - \cos \phi) + \int_0^\phi \frac{Q}{\pi} \sin \psi \cos \psi (\cos \psi - \cos \phi) R d\psi$$

$$- \int_0^\phi \frac{Q}{\pi} \sin^2 \psi (\sin \phi - \sin \psi) R d\psi$$

soit:

$$M_\phi = M_A - P_t R (1 - \cos \phi) + M_\sigma \quad \text{avec} \quad M_\sigma = \frac{QR}{\pi} \left[1 - \cos \phi - \frac{\phi}{2} \sin \phi \right]$$

(1.4.16) (1.4.15)

Le système isolé étant hyperstatique on doit faire intervenir les déformations pour le résoudre
or la rotation des sections droites en A et en C est nulle

$$\int_A^C \frac{M_\phi R d\phi}{EI} = 0 \quad (I)$$

de même les déplacements horizontaux en A, B, C sont nuls

$$\int_A^C \frac{M_\phi m R d\phi}{EI} = 0 \quad \text{avec} \quad m = R (\cos \phi - \cos \beta)$$

ce qui donne par intégration $\int_A^B \frac{M_\phi m R d\phi}{EI} = 0 \quad (II)$

ces relations (I), (II) permettent de résoudre le problème et de déterminer P_t et M_A définis à la fig. 1.15 ainsi que M_ϕ

$$P_t = \frac{Q}{2\pi K} \left[3 \sin^2 \beta - \frac{9}{8} \beta \sin 2\beta - \beta^2 + \frac{1}{4} \beta^2 \cos 2\beta \right] \quad (1.4.19)$$

$$M_A = \frac{Qr}{2\pi K} \left[\sin^2 \beta \left(1 - \frac{1}{4} \cos \beta + \frac{1}{2} \beta \sin \beta - \frac{1}{4} \beta^2 \right) - \frac{3}{4} \beta \sin \beta + \frac{1}{4} \beta \cos \beta (2\beta + \sin 2\beta - 5\sin \beta + \beta \cos \beta) \right]$$

$$M_\phi = \frac{Qr}{2\pi K} \left[\cos \phi \left(\sin^2 \beta - \frac{5}{8} \beta \sin 2\beta + \frac{1}{4} \beta^2 \cos 2\beta \right) + \phi \sin \phi \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \frac{1}{4} \sin 2\beta - \sin^2 \beta \right) + \frac{1}{4} \beta \cos \beta (2\beta + \sin 2\beta) - \sin \beta \left(\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{8} \sin 2\beta + \frac{1}{4} \beta \cos 2\beta \right) \right] \quad (1.4.20)$$

avec

$$K = \sin^2 \beta - \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{1}{4} \beta \sin 2\beta$$

$\frac{M_A}{Q.R}$ et $\frac{P_t}{Q}$ sont donnés à la fig. (1.16) $\frac{M_\phi}{Q.R}$ est donnée en fonction de θ et ϕ

fig. (1.17) le maximum est obtenu pour $\phi = \beta = 180 - \frac{\theta}{2}$

$$\text{Soit } M_\beta = K_6 \quad Q.R \quad (1.4.21)$$

par exemple pour $\phi = \beta = 120^\circ$ $M_\beta = 0,056 \quad Q.R$

les valeurs de K_6 sont données à la fig 1.18

Les contraintes résultantes seront examinées à la fin du paragraphe suivant

Toutefois nous pouvons remarquer que M_A est égale pour $\theta = 120^\circ$, à 0,02 Q.R, alors que M_ϕ vaut 0,056 Q.R (voir fig. 1.16 et 1.17), autrement dit, ils sont du même ordre de grandeur, ce qui sera entièrement démenti par l'expérience (Chap.IV) car nous verrons qu'en dehors de la zone $\beta \in [100^\circ, 0]$ le moment M_ϕ est pratiquement nul.

.../...

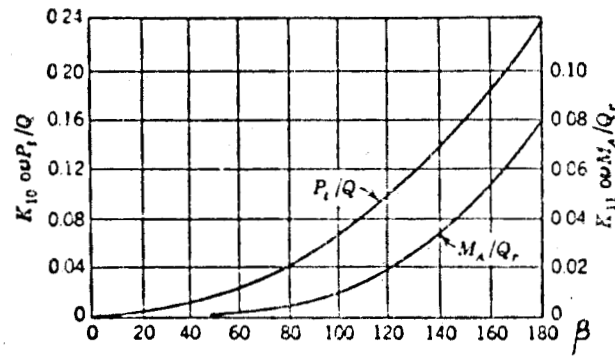


Figure 1.16 : Abaque donnant les valeurs des constantes K_{10} et K_{11} en fonction de l'angle β

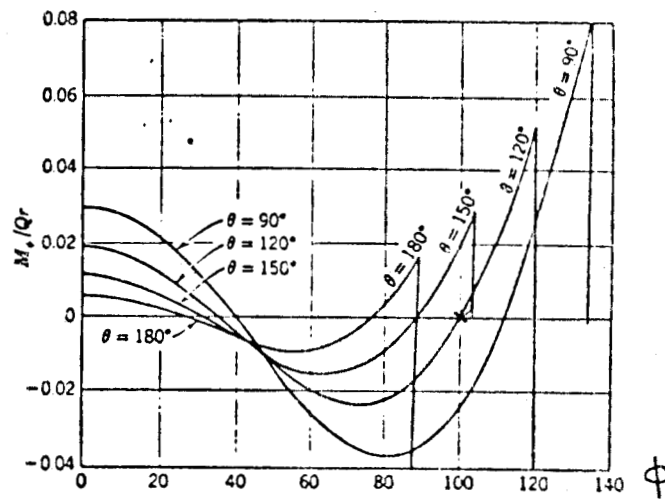


Figure 1.17 : montre la variation du moment circonférentiel autour de la coque.

1.4.5.2 - Appareil non renforcé par anneau et dont les supports sont loins des fonds

Selon ZICK les mesures par extensométrie suggèrent que le moment circonférentiel M_β est plus faible que dans le cas précédent mais on peut conserver cette valeur comme approximative.

1.4.5.3 - Appareil renforcé par le fond

Quand les fonds sont près des supports nous avons vu que la répartition des contraintes est modifiée, ce qui contribue à diminuer la contrainte de cisaillement et par conséquent M_β dont la valeur est inférieure à celle relative au cas d'un cylindre non renforcé, soit :

$$M_\beta = K_7 \quad Q.R \quad (1.4.22)$$

avec

$$K_7 = K_6 \quad \text{pour} \quad \frac{A}{R} > 1$$

$$K_7 = \frac{K_6}{4} \quad \text{pour} \quad \frac{A}{R} < \frac{1}{2}$$

1.4.5.4 - Contrainte résultante de la flexion circonférentielle

Pour être en accord avec les mesures du (1.4.4) ZICK suppose que ce moment fléchissant M_β va être encaisser par une section horizontale de l'appareil d'épaisseur e et de longueur égale à la plus petite de deux longueurs $\frac{L}{2}$ et $4 R$; cette section se trouve au niveau du point B (figures 1.19 - 1.20)

Ainsi on aura les contraintes de flexion suivantes

$$L > 8 R : \quad f_5 = \pm \frac{3 M_\beta}{2 R e^2} \quad (1.4.23)$$

et

$$\text{pour } L < 8 R \quad f_5 = \pm \frac{12 M_\beta}{L e^2} \quad (1.4.24)$$

Cette hypothèse reste tout à fait injustifiable et nous la réexaminons en (1.6) ; notamment le moment fléchissant proposé M_β est trop important (pour $\beta = 120^\circ$, $M_\beta = 0,056 \quad Q.R$)

.../...

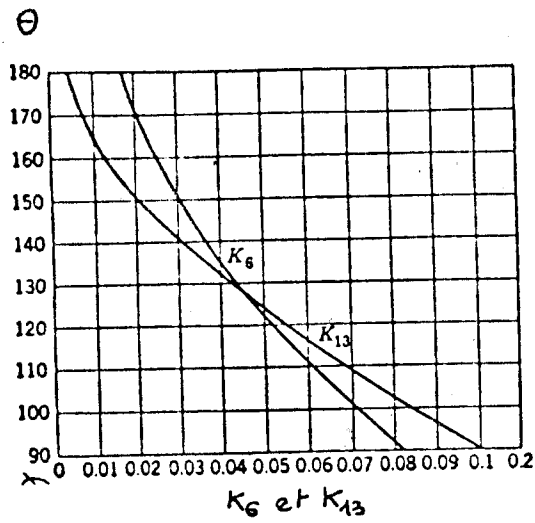


Figure 1.18 : les valeurs de K_6 et K_{13} en fonction de θ

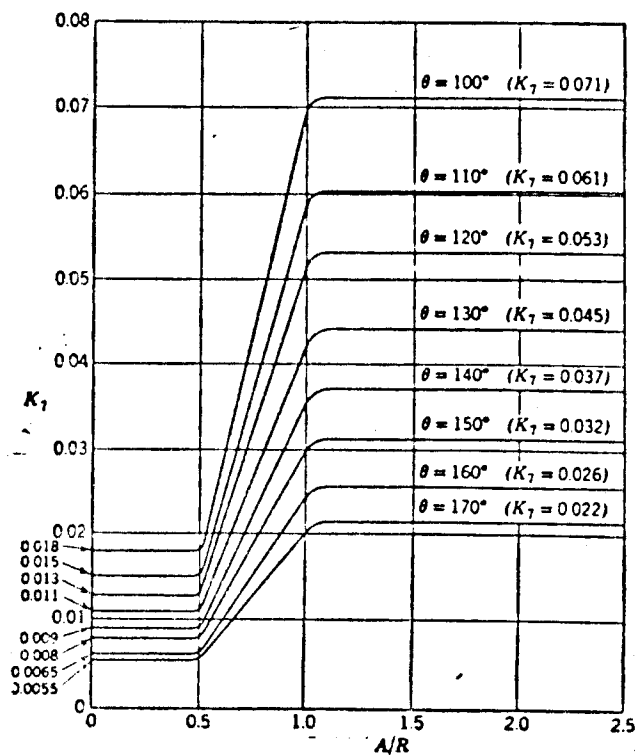


Figure 1.19 : Abaque donnant les Valeurs de K_7 en fonction de θ et du rapport A/R (avec Interpolation pour les valeurs A/R comprises entre 0,5 et 1)

AUS
VILLE

1.4.6 - Contrainte de compression au niveau du support

Par ailleurs, un effet de poinçonnement vient ajouter une contrainte de compression qui est maximale au point le plus bas C, et supposée égale au quart de cette valeur maximale au point B

En effet ZICK suppose que l'effort de compression est égal à Q en C et à $\frac{Q}{4}$ en B, et qu'en plus, la partie qui va encaisser ces efforts va être constituée par des cordes horizontales d'épaisseur e et de longueur égale à $b + 1,56 \sqrt{Re}$ où b représente la largeur du support et e l'épaisseur cumulée du cylindre et du plat renfort éventuel, figure (1.21)

1.4.7 - Contrainte totale de compression

Dans tous les cas la contrainte totale de compression s'obtient en additionnant la contrainte de compression proprement dite et celle due à la flexion circonférentielle, soit :

$$\text{au point C} \quad f_c = \frac{Q}{e (b + 1,56 \sqrt{Re})} \quad (1.4.25)$$

$$\text{au point B} \quad f_c = - \frac{Q}{4 e (b + 1,56 \sqrt{Re})} - \frac{12 M_\beta}{L_i e^2} \quad (1.4.26)$$

$$\text{avec} \quad L_i = \inf (8 R, L)$$

Dans le cas d'un appareil reposant sur plusieurs appuis, on prend L égal à deux fois la longueur intéressant l'appui considéré.

Dans tous les cas le dimensionnement s'effectue en vérifiant que $f_c \leq 1,25 Re$ (1.4.27)

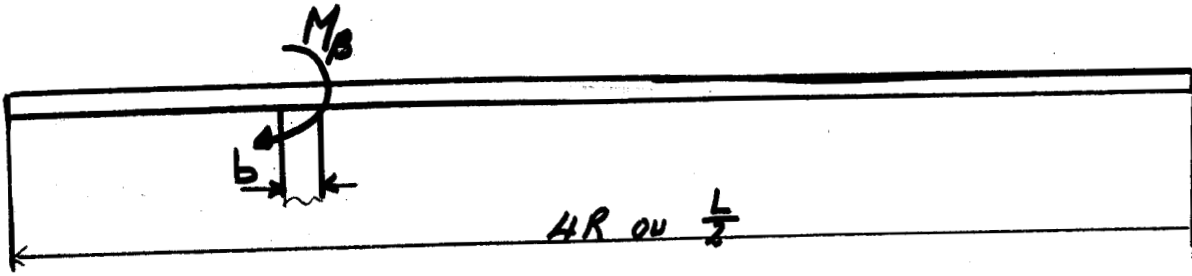


FIGURE 1.20

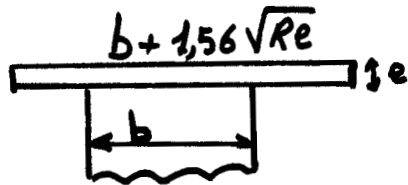


FIGURE 1.21

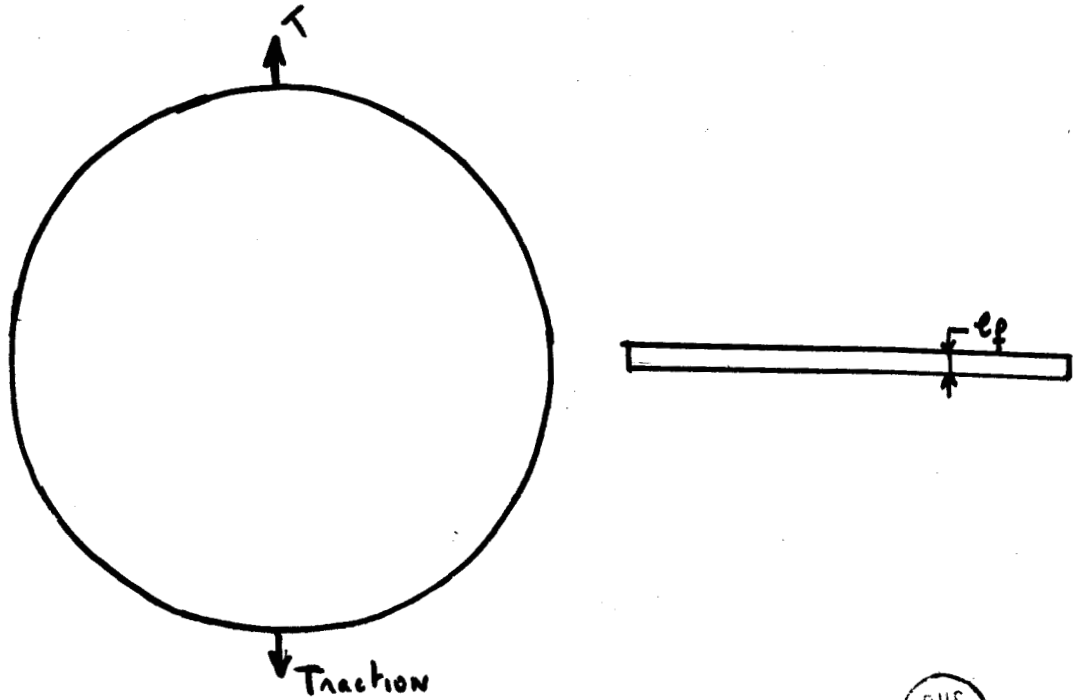


FIGURE 1.22 - FOND ASSIMILE A UN DISQUE

1.4.8 - Contrainte supplémentaire dans le fond lorsqu'il est près du support

Le fait d'avoir une contrainte de cisaillement sur une facette va impliquer que sur la facette perpendiculaire on doit trouver la même contrainte de cisaillement.

Si le fond est près du support le long de la section circulaire on doit avoir une force totale de cisaillement égale à :

$$T = \frac{Q}{2} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{\pi + \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \right] \quad (1.4.28)$$

ZICK va supposer qu'un effort directement perpendiculaire à celle-ci va agir sur le fond comme un effort de traction en introduisant une contrainte longitudinale

$$f_8 = \frac{\text{Effort}}{\text{Surface}} \times 1,5 \quad (1.4.29)$$

En supposant que le fond est un disque plat, la surface intéressant cet effort est $2 R e_f$ (Fig.1.22)

La contrainte de traction ainsi introduite va être égale à

$$f_8 = \frac{Q}{2} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{2 R e_f (\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)} \right] \times 1,5 \quad (1.4.30)$$

$$\text{Soit } f_8 = \frac{K_8 Q}{R e_f} \quad (1.4.31)$$

La figure(1.23)donne K_8

Selon ZICK la contrainte f_8 doit être combinée avec la contrainte due à la pression interne du service $\frac{P R}{2 e_f}$
on doit vérifier pour le fond $f_8 + \frac{P R}{2 e_f} < 1,25 Re$

Si la pression interne est négative on vérifie que

$$\left| f_8 - \frac{P R}{2 e_f} \right| < 1,25 Re$$

Dans le cas de fond bombé ceci constitue une approximation.

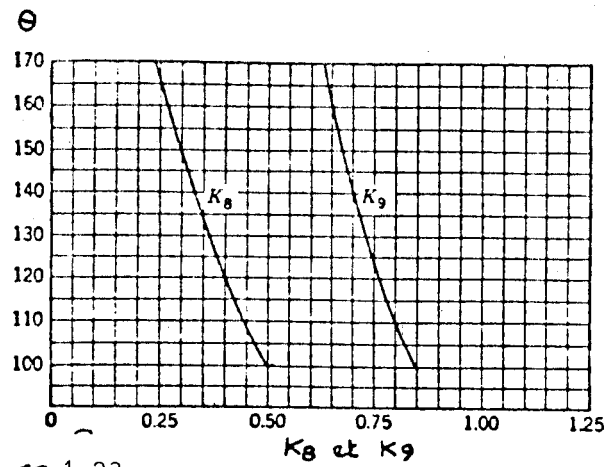


Figure 1.23 Valeurs de K_8 et K_9 en fonction de θ

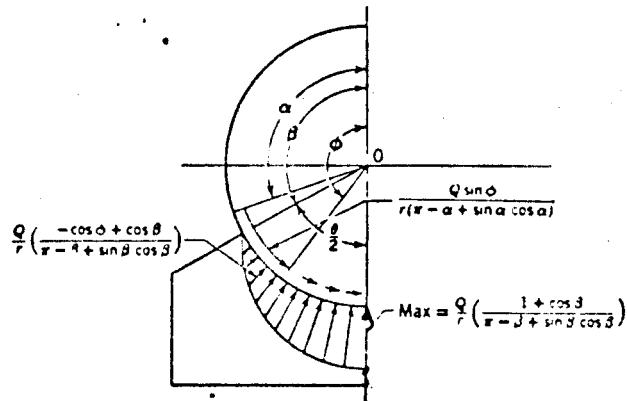


Figure 1.24 charges et reactions au: Fixation.

1.4.9 - Plat renfort au dessus du support et effet de poinçonnement de l'appui

Dans le cas général la répartition des contraintes de cisaillement respecte la symétrie circulaire et l'effort tranchant encaissé par la partie inférieure de la section droite (α, π) intéressé par le plat renfort au dessus du support va être égal à

$$V_1 = Q \left[\frac{1 + \cos \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \right] \quad (1.4.32)$$

Si, par ailleurs, on calcule le moment global au centre C de toutes ces contraintes on constate qu'il est nul, ce qui pousse l'auteur à suggérer que l'appui va produire des forces radiales sur la partie inférieure du cylindre de la forme =
(en un point (R, ϕ))

$$P = \frac{Q}{R} \left[\frac{-\cos \phi + \cos \beta}{\pi - \beta + \cos \beta \sin \beta} \right]$$

Ainsi l'effort V_1 va être un effort de compression du plat renfort qui va être pris par une section supposée égale à

$$e \times (b + 1,56 \sqrt{Re})$$

en posant $V_1 = K_9 Q$

La contrainte de compression résultante de cet effort va être

$$f_9 = \frac{k_9 Q}{e (b + 1,56 \sqrt{Pe})} \quad (1.4.33)$$

avec e = épaisseur totale du cylindre et du plat renfort, on doit vérifier $f_9 \ll 0,5 Re$

1.4.10 - Anneau raidisseur au niveau de l'appui

Comme on a pu le constater la sollicitation la plus importante va être la flexion circonférentielle, notamment lorsque les fonds sont assez éloignés des supports.

Si $\frac{A}{R} > \frac{1}{2}$ il faut donc utiliser un anneau raidisseur pour résister à la flexion circonférentielle (M_g) la distance longitudinale qui sera affectée par la présence de cet anneau est de $\ell = 0,78 \sqrt{Re}$ de part et d'autre de l'anneau, fig. 1.21

par préférence on utilise des anneaux raidisseurs placés à l'intérieur de l'appareil puisque la sollicitation la plus importante est la compression des fibres du cylindre.

D'après les calculs effectués dans la partie (1.4.5.1) on peut tirer les sollicitations qui affectent l'anneau raidisseur (fig.1.24) en particulier.

$$P_t = K_{10} Q \quad (1.4.34)$$

$$\text{avec } K_{10} = \frac{1}{2\pi K} \left[3 \sin^2 \beta - \frac{9}{8} \beta \sin 2\beta - \beta^2 + \frac{1}{4} \beta^2 \cos 2\beta \right]$$

$$\text{et } K = \sin^2 \beta - \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{1}{4} \sin 2\beta$$

(1.4.35)

la figure 10 donne les valeurs de K_{10} en fonction de β de même :

$$M_A = K_{11} Q.R \quad \text{avec } K_{11} = \frac{1}{2\pi K} \left[\sin^2 \beta \left(1 - \frac{1}{4} \cos \beta + \frac{1}{2} \beta \sin \beta - \frac{1}{4} \beta^2 \right) - \frac{3}{4} \beta \sin \beta + \frac{1}{4} \beta \cos \beta (2\beta + \sin 2\beta + 5 \sin \beta + \beta \cos \beta) \right]$$

(1.4.36)

le maximum du moment fléchissant circonférentiel est :

$$\text{pour } (\phi = \beta) \quad M_\beta = K_6 Q.R \quad (1.4.37)$$

D'autre part le moment fléchissant dû aux contraintes de cisaillement est égal en $(\phi = \beta)$ à

$$(M_t)_\beta = \frac{Q.R}{\pi} (1 - \cos \beta - \frac{1}{2} \beta \sin \beta) = K_{12} \cdot Q.R \quad (1.4.38)$$

le tableau(I) de la figure(1.18) donne les valeurs de K_{11} , K_{12} , K_{10} , K_{13} et K_6

Si on isole l'arc du cylindre défini par β (fig.1.25) et si on examine son équilibre, on constate qu'il est sollicité de la manière suivante :

$$\text{Un moment fléchissant : } M_\beta = K_6 Q.R$$

$$\text{Un effort normal } P_\beta$$

Il en résulte que :

$$(P_t + P_\beta) R + M_\beta = M_A + (M_t)_\beta$$

.../...

TABLEAU N° (1)

β	θ	K_{11}	K_{12}	K_{10}	K_6	K_{13}
135	90	0,03	0,286	0,132	0,082	0,102
120	120	0,02	0,189	0,100	0,0528	0,056
105	150	0,012	0,119	0,078	0,0316	0,021
90	180	0,006	0,0684	0,057	0,017	0,0004

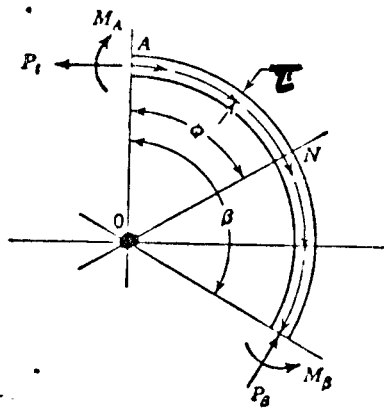


Figure 1.25 : montre les forces dans l'anneau raidisseur



Soit :

$$P_{\beta} = \frac{1}{R} \left[M_A + (M_{\beta} - M_{\beta}) \right] - P_t$$

$$P_{\beta} = (K_{11} + K_{12} - K_6 - K_{10}) Q$$

soit $\boxed{P_{\beta} = K_{13} Q}$ (1.4.39)

Ainsi l'anneau raidisseur va être sollicité en compression et en flexion, la contrainte résultante sera donc :

$$f_{10} = - \frac{K_{13} Q}{A_r} + \frac{K_6 Q.R}{I/c} \quad (1.4.40)$$

Avec :

A_r = surface de la section droite de l'anneau raidisseur

I/c = module d'inertie de cette section voir fig.(1.26), (1.27)

Dans le cas où plusieurs anneaux sont utilisés (par exemple deux anneaux de part et d'autre du support) on a :
(n : nombre des anneaux)

$$f_{10} = \frac{K_{13} Q}{n A_r} + \frac{K_6 Q.R}{(I/c) \times n} \quad (1.4.41)$$

$$\text{Il faut vérifier } f_{10} < \frac{R_e}{2} \quad (1.4.42)$$

$$\text{et } f_{10} + P < R_e$$

ou P représente la pression du service

Notons qu'il faut vérifier que l'effort tranchant sur la section en β soit faible ; nous discutons ce point en (1.6).

.../...

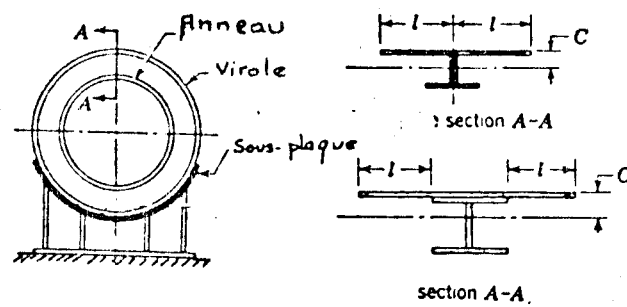


Figure 1.26 Exemple d'anneaux raidisseurs situés à l'intérieur de la coque

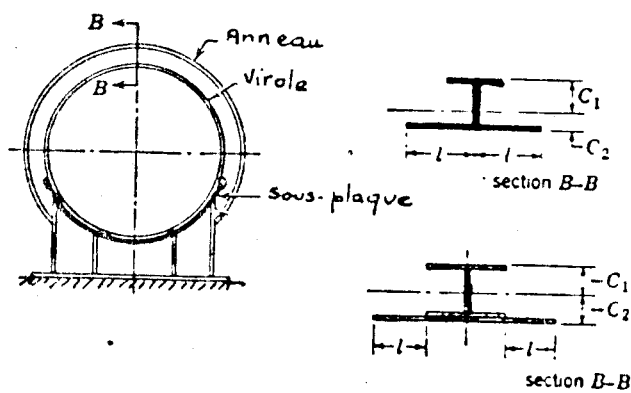


Figure 1.27 Exemple d'anneaux-raidisseurs situés à l'extérieur de la coque.

1.4.11 - Supports

Les supports doivent résister au poids propre de l'appareil ainsi qu'aux actions de contact.

Si on suppose que la répartition de ces actions est conforme à la figure 1.24 on doit vérifier surtout que l'effort de compression horizontale peut être encaissé par le support.

Pour le demi support dessiné en 1.24 cette composante horizontale vaut :

$$F = \int_{\beta}^{\pi} \frac{Q}{R} \left[\frac{-\cos \phi + \cos \beta}{\pi - \beta + \sin \beta \cos \beta} \right] R \sin (\pi - \phi) d\phi$$

$$F = Q \left[\frac{1 + \cos \beta - \frac{1}{2} \sin^2 \beta}{\pi - \beta + \sin \beta \cos \beta} \right] \quad (1.4.43)$$

Soit : $F = Q \cdot K_{14}$

pour $\phi = 120^\circ$ $\beta = 120^\circ$ on a $K_{14} = 0,204$
 $\phi = 150^\circ$ $\beta = 105^\circ$ $K_{14} = 0,260$

ZICK suppose que cet effort va être encaissé par la partie supérieure du support entre le cylindre et $\frac{R}{3}$ en dessous.

Soit pour un support d'épaisseur e_s

$$\boxed{f_{11} = \frac{3 F}{R \times e_s} < \frac{2}{3} Re} \quad (1.4.44)$$

1-4-12 - Nomographe de ZICK pour le calcul des supports

Pour faciliter le travail de bureau des études, ZICK propose dans la figure 19 un monographe qui permet le choix le plus économique pour les supports et pour leurs emplacements basés sur un fluide de (42 lbs par cubic foot). Pour d'autres liquides ce graphe peut servir pour établir un avant projet.

../..

Pour des cylindres à faible épaisseur et à large diamètre les supports doivent être mis près des fonds à condition que le cylindre puisse supporter le moment fléchissant au milieu et que les fonds soient assez résistants pour transmettre l'effort tranchant aux supports.

Pour les cylindres à grande épaisseur, on peut mettre les supports tel que le moment sur appui soit égal à celui du milieu à condition que l'épaisseur soit suffisante pour transmettre l'effort tranchant au support, sinon il faut placer des anneaux raidisseurs.

1-4-13 - Conclusion

Cette étude laisse entrevoir beaucoup de lacunes sur le plan théorique dans la mesure où l'on voit souvent un effort tranchant se transformer en effort normal et des contraintes de cisaillement qui vont produire de moments fléchissants trop importants; nous reviendrons sur ce point en (1.6) néanmoins ceci marque la volonté de ZICK, de transposer théoriquement les résultats de ces mesures expérimentales, en se limitant aux notions élémentaires de la résistance des matériaux.

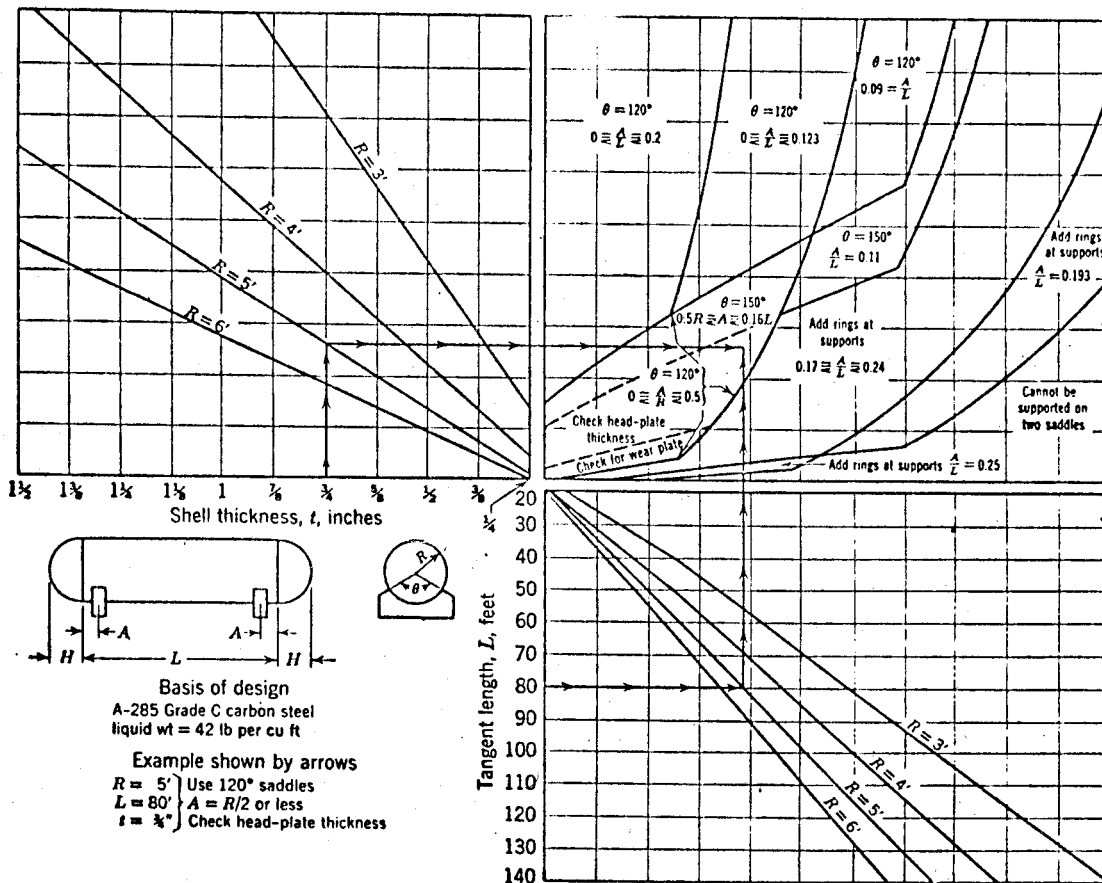


Fig. 1.28 : Diagramme donnant le type et l'emplacement du support d'après ZICK

1.5 - Exemples de calcul par la méthode de ZICK

1.5.1.-Introduction

Pour illustrer la méthode proposée par ZICK (1951) (voir 1.4) nous nous proposons d'exposer deux exemples de calcul de deux appareils cylindriques à axe horizontal reposant sur deux appuis en berceau. Le premier représente l'appareil étudié expérimentalement par ZICK et CARLON (1948) et le deuxième un appareil plus petit que nous avons construit aux laboratoires de l'Ecole Nationale des Techniques Industrielles et des Mines de DOUAI et que nous avons utilisé comme modèle de base pour comparer avec les résultats fournis par la méthode analytique décrite dans la 1ère partie

1.5.2. - Appareil de ZICK et CARLSON

L'appareil proposé est schématisé par la figure (1.29) nous effectuons le calcul pour les positions suivantes des appuis $A_1 = 300 \text{ mm}$, $A_2 = 1500 \text{ mm}$, $A_3 = 2\,750 \text{ mm}$ $A_4 = 3970 \text{ mm}$ avec un appui de largeur égale à 305 mm, et un angle de contact égal à $2\beta = 120^\circ$ (voir figure 1.29) pour les dimensions)

La charge linéaire représentant le poids d'eau continu par mètre linéaire va être $w = 6\,334 \text{ daN/m}$ et les réactions d'appuis vont être égales à

$$Q = 63\,386 \text{ daN}$$

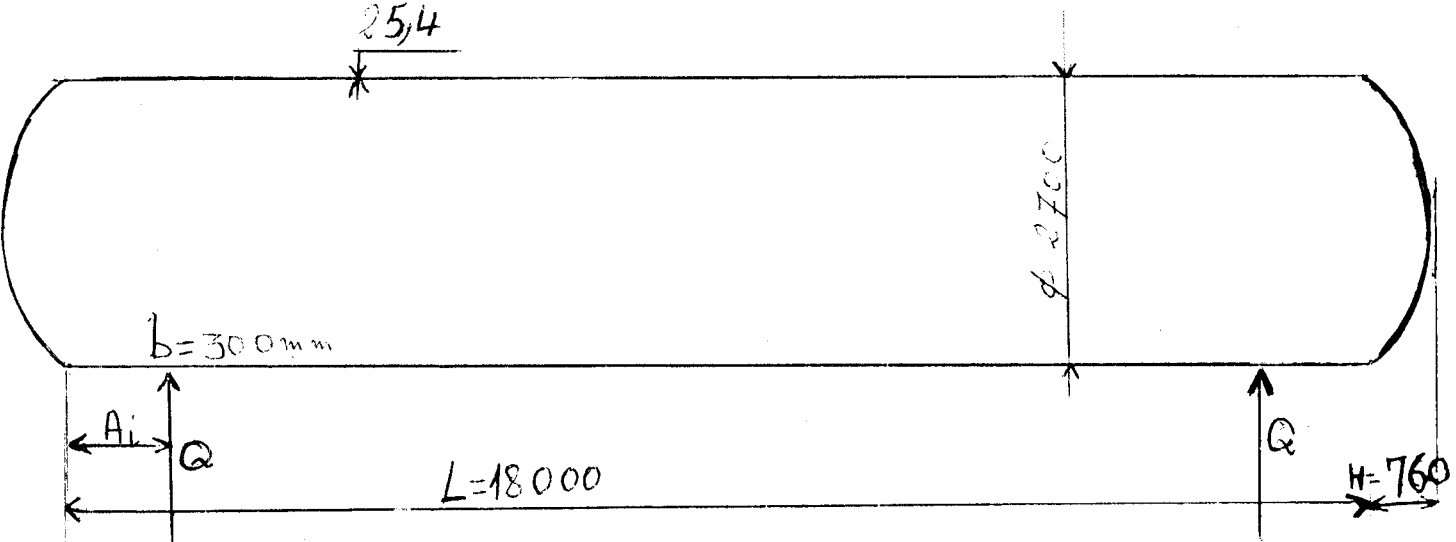


Fig. 1.29 : Appareil étudié par ZICK et CARLSON (1948)

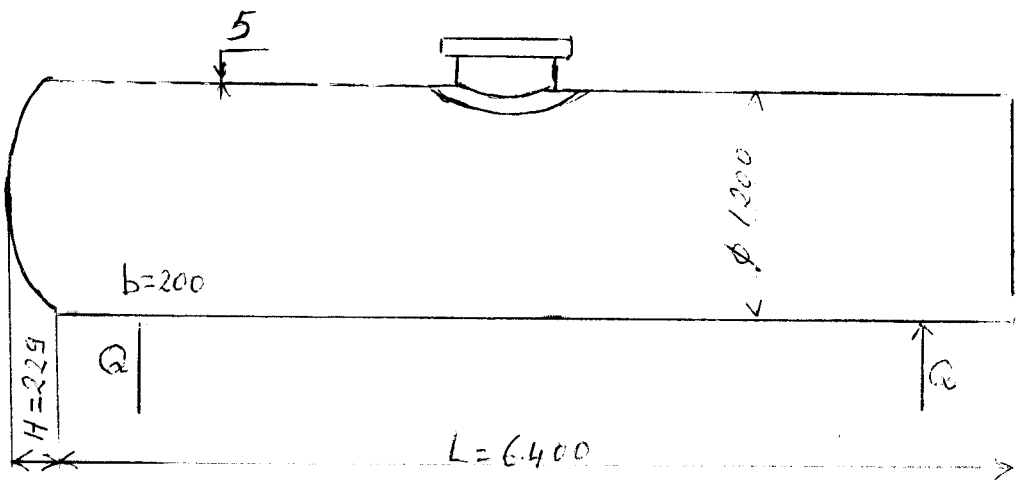


Fig. 1.30 : Appareil étudié par HAGE (1978)

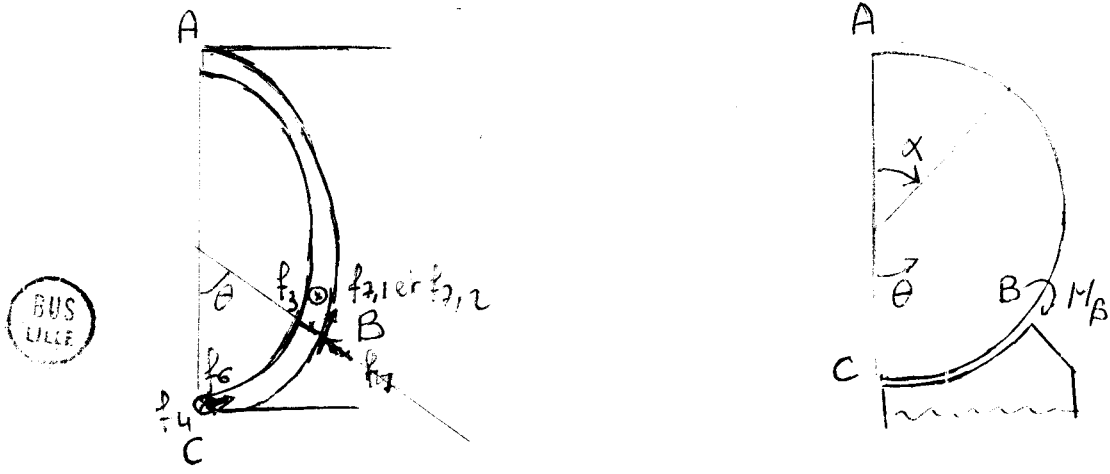


Fig. 1.31 : demi-section droite au niveau de l'appui

1.5.2.1.- Flexion longitudinale

Le torseur des forces agissantes sur une section droite de l'appareil à l'appui et au milieu est donné par le tableau ci-dessous :

Position de l'appui	Section au dessus de l'appui		Milieu MC Moment fléchis. da Nx m
	V Effort tranchant daN	Mq Moment fléchissant da Nx m	
$A_1 = 300$	58 482	823	$26,88.10^4$
$A_2 = 1\ 500$	50 448	$- 1,0056.10^4$	$19,276.10^4$
$A_3 = 2\ 750$	42 684	$- 3,176.10^4$	$10,782.10^4$
$A_4 = 3\ 970$	34 920	$- 6,075.10^4$	$3,531.10^4$

Il en résulte que les contraintes maximales de flexion longitudinales et de cisaillement vont être (daN/mm²).

Position	A p p u i s			Milieu et f ₂
	f ₃	f ₄	t ₄	
A ₁	$- 5.10^{-3}$	5.10^{-3}	1,53	$\pm 1,67$
A ₂	0,7	- 0,33	1,64	$\pm 1,2$
A ₃	2,19	- 1,04	1,4	$\pm 0,67$
A ₄	4,2	- 2	1,13	$\pm 0,22$

.../...

Il est à remarquer que ces valeurs sont supérieures pour la position A_3 de 30 % à celles mesurées expérimentalement par ZICK et CARLSON (voir 1.3); et la contrainte supplémentaire dans le fond pour la position A_1 , vaut $1,23 \text{ daN/mm}^2$

1.5.2.2.- Flexion circonférentielle et compression locale due au support

Nous distinguons uniquement deux cas : le cas où l'appui se trouve près du fond (position A_1) et les autres cas qui se réduisent ici à un seul.

Pour le cas général (A_2, A_3, A_4) le moment de flexion circonférentielle en $\alpha = 120$ va être égal à

$$M_\beta = K_6 Q.R = 0,0528 \times 63\,386 \times 1,35 = 4,52 \cdot 10^3 \text{ daNxm}$$

et pour le cas A_1 , $M_\beta = 1,13 \cdot 10^3 \text{ daNxm}$

Il en résulte que la contrainte de flexion circonférentielle va être égale (au point $\phi = 120^\circ$ point B)

$$f_{7,1} = \pm \frac{3 K_6 Q}{2 e^2} = \pm 7,78 \text{ daN/mm}^2$$

et la contrainte de compression due au support en B vaut :

$$f_{7,2} = - \frac{Q}{4 e b} = - 1,04 \text{ daN/mm}^2$$

Par ailleurs la contrainte de compression au point C

$$(\phi = \pi) \text{ est égale à } f_6 = - \frac{K_5 Q}{e(b+1,56 \sqrt{Rc})} = - 3,2 \text{ daN/mm}^2$$

Par contre, pour la position A_1 ces valeurs deviennent ~~en B~~

$$\text{en B} \quad f_{7,1} = \pm 1,95 \text{ daN/mm}^2$$

$$\text{et } f_{7,2} = - 1,04 \text{ daN/mm}^2$$

$$\text{et en C} \quad f_6 = - 3,2 \text{ daN/mm}^2$$

En conclusion la sollicitation la plus dangereuse est celle produite par la flexion circonférentielle et par la compression du support au point B, dont la valeur totale est de $8,82 \text{ daN/mm}^2$

Par contre l'expérience de ZICK et CARLSON (1948) met en défaut la théorie de ZICK pour la position A_1 , car ils ont mesuré une contrainte de flexion longitudinale égale à $0,9 \text{ daN/mm}^2$

.../...

(à la place de $0,005 \text{ daN/mm}^2$) et pour la position A_3 respectivement $1,5 \text{ daN/mm}^2$ (à la place de $2,19 \text{ daN/mm}^2$)

1.5.3.- Appareil construit par nous :

Les caractéristiques dimensionnelles de l'appareil proposé sont résumées dans la figure (1.30), nous procédons de la même manière que précédemment en prenant cinq positions successives des appuis :

$$A_1 = 80 \text{ mm}, A_2 = 430 \text{ mm}, A_3 = 760 \text{ mm}, A_4 = 1100 \text{ mm} \text{ et } A_5 = 1280 \text{ mm}$$

La charge linéaire va être égale à $w = 1131 \text{ daN/m}$ et la réaction d'appui $Q = 3 \ 845 \text{ daN}$

1.5.3.1.- Flexion longitudinale

Le torseur des forces agissantes est résumé dans le tableau suivant :

Position d'appui mm	Section au dessus de l'appui		Milieu Mc daNxm
	V daN	Mq daNxm	
$A_1 = 80$	3 528	- 17	$5,49 \ 10^3$
$A_2 = 430$	3 102	- $0,197 \ 10^3$	$4,14 \ 10^3$
$A_3 = 760$	2 759	- $0,49 \ 10^3$	$2,87 \ 10^3$
$A_4 = 1 \ 100$	2 375	- $0,93 \ 10^3$	$1,57 \ 10^3$
$A_5 = 1 \ 280$	2 171	- $1,2 \ 10^3$	$0,874 \ 10^3$

Il en résulte que les contraintes de flexion longitudinale et de cisaillement vont être : (daN/mm²)

Position	f ₃	Appui f ₄	f ₅	Milieu f ₁ et f ₂
A ₁	3 . 10 ⁻³	- 3 . 10 ⁻³	1,02	+ 0,97
A ₂	0,38	- 0,18	1,2	+ 0,73
A ₃	0,96	- 0,46	1,08	+ 0,5
A ₄	1,8	- 0,86	0,93	+ 0,28
A ₅	2,38	- 1,12	0,85	+ 0,155

1.5.3.2.- Flexion circonférentielle et compression locale due au support

Pour le cas général où l'appui est loin des fonds (positions A₂, A₃, A₄ et A₅) le moment de flexion circonférentielle maximal vaut (en B, α = 20°)

$$M_{\beta} = K_6 \cdot Q \cdot R = 121,8 \text{ daNxm}$$

ce qui est du même ordre de grandeur de M_q et de M_c

Il en résulte que la contrainte de flexion résultante va être égale (en B)

$$f_{7,1} = \pm \frac{3 M_{\beta}}{2 e^2} = \pm 12,18 \text{ daN/mm}^2$$

à cette contrainte il faut rajouter la contrainte de compression due au support en B et qui vaut :

$$f_{7,2} = - \frac{Q}{4 e \cdot b} = - \frac{3 \ 845}{4 \times 5 \times 200} \approx - 0,96 \text{ daN/mm}^2$$

Par ailleurs en C (α = π) on a la contrainte de compression qui vaut :

$$f_6 = \frac{- Q}{e(b+1,56 \text{ Re})} = \frac{- 3 \ 845}{5 \times 254,8} = - 3 \text{ daN/mm}^2$$

.../...

Par contre, pour la position A_1 ces valeurs sont plus petites, par suite de la rigidification de la section au dessus du support par le fond

$$M_8 = K_7 Q.R = \frac{K_6}{4} Q . R = 30,45 \text{ daNxm}$$

$$\text{et } f_{7,1} = + 3,045 \text{ daN/mm}^2$$

$$f_{7,2} = - 0,96 \text{ daN/mm}^2$$

Les tableaux suivants résument ces valeurs pour les deux appareils en supposant que la pression intérieure du fluide est égale à P

1.5.4 - Conclusion

Ces exemples de calcul, volontairement limité aux contraintes produites par la présence des appuis, sur un appareil sans aucune renfort, mettent en évidence l'importance considérable de la flexion circonférentielle au dessus des appuis puisque cette flexion introduit des contraintes qui sont dix fois plus importantes que celles produites par les autres sollicitations.

Cependant ces valeurs semblent exagérées et nous aurons l'occasion de discuter leur grandeur au cours de ce travail.

Par ailleurs la poussée hytostatique sur le fond va produire une contrainte de traction longitudinale de même ordre de grandeur que celle de flexion sur appuis pour les positions A_1 et A_2 ; sa valeur pour l'appareil de ZICK est de :

$$\sigma = \frac{w}{2 \pi e} = \frac{6,334}{2 \pi \times 25,4} = 0.04 \text{ daN/mm}^2$$

et pour notre appareil $\sigma = 0,036 \text{ daN/mm}^2$

Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant.

TABLEAU RECAPITULATIF -1-

APPAREIL ZICK et CARLSON

Positions	Flexion longitudinale	APPUI Cisaillement	Compression	Flexion circonférentielle + Pression	Milieu - Flexion longitudinale	f_7 max. = 120°
A_1	$\alpha = 0 \quad f_3 = \frac{PR}{2e} + 5.10^{-3}$ $\alpha = \pi \quad f_4 = \frac{PR}{2e} + 5.10^{-3}$	$\alpha = 114'$ 1,53	$\alpha = 120^\circ \quad -1,04$ $\alpha = \pi \quad -3,2$	$\alpha = 120^\circ, \frac{PR}{e} \pm 1,95$	$\alpha = 0 \quad \frac{PR}{2e} - 1,67$ $\alpha = \pi, \frac{PR}{2e} + 1,67$	$\frac{PR}{e} \pm 1,95 - 1,04$
A_2	$\alpha \approx 100^\circ \quad f_3 = \frac{PR}{2e} + 0,7$ $\alpha = \pi \quad f_4 = \frac{PR}{2e} - 0,33$	1,64	$\alpha = 120^\circ \quad -1,04$ $\alpha = \pi \quad -3,2$	$\alpha = 120^\circ, \frac{PR}{e} \pm 7,78$	$\alpha = 0, \pi$ $\frac{PR}{2e} \pm 1,2$	$\frac{PR}{e} \pm 7,78 - 1,04$
A_3	$\alpha = 100^\circ \quad f_3 = \frac{PR}{2e} + 2,19$ $\alpha = \pi \quad f_4 = \frac{PR}{2e} - 1,04$	1,4	idm	$\alpha = 120^\circ, \frac{PR}{e} \pm 7,78$	$\alpha = 0, \pi$ $\frac{PR}{2e} \pm 0,67$	$\frac{PR}{e} \pm 7,78 - 1,04$
A_4	$\alpha = 100^\circ \quad f_3 = \frac{PR}{2e} + 4,2$ $\alpha = \pi \quad f_4 = \frac{PR}{2e} - 2$	1,13	idm	$\alpha = 120^\circ, \frac{PR}{e} \pm 7,78$	$\alpha = 0, \pi$ $\frac{PR}{2e} \pm 0,22$	$\frac{PR}{e} \pm 7,78 - 1,04$



TABIEAU RECAPITULATIF -2-
APPAREIL HAGE

(dan/mm²)

Positions	Pression p Flexion longitudinale	APPU Cisaillement	Compression	Flexion circonférentielle	Milieu - Flexion longitudinale	f ₇ max. = 120°
A ₁	α = 0 f ₃ = $\frac{PR}{2e} + 3.10^{-3}$ α = f ₄ = $\frac{PR}{2e} - 3.10^{-3}$	α = 114° 1,02	α = 120°, - 0,96 α = 1° - 2,96	en = 120° + 3,04	α = 0 et 11 f = $\frac{PR}{2e} + 0,97$	$\frac{PR}{e} + 3,04 - 0,96$
A ₂	α = 100 $\frac{PR}{2e} + 0,38$ α = 1 $\frac{PR}{2e} - 0,18$	1,2	idm	+ 12,18	$\frac{PR}{2e} + 0,73$	$\frac{PR}{e} + 12,18 - 0,96$
A ₃	α = 0 $\frac{PR}{2e} + 0,96$ α = 11 $\frac{PR}{2e} - 0,46$	1,08	idm	+ 12,18	$\frac{PR}{2e} + 0,5$	idm
A ₄	α = 0 $\frac{PR}{2e} + 1,8$ α = 11 $\frac{PR}{2e} - 0,86$	0,93	idm	+ 12,18	$\frac{PR}{2e} + 0,28$	idm
A ₅	α = 0 $\frac{PR}{2e} + 2,38$ α = 11 $\frac{PR}{2e} - 1,12$	0,85	idm	+ 12,18	$\frac{PR}{2e} + 0,155$	idm



1.6 - CRITIQUES

1.6.1. Introduction

Nous avons pu constater que ZICK a pris comme base de son étude théorique, les résultats expérimentaux obtenus par jauges de déformation, chaque fois qu'il étudie une zone déterminée, il envisage une contrainte unique, autrement dit il n'a jamais envisagé la répartition totale des contraintes en un point déterminé et essayé d'en dégager les contraintes principales, mais au contraire il arrive qu'en deux points très voisins, il limite en l'un d'eux la contrainte de cisaillement et dans l'autre celle de flexion ou de compression.

Par ailleurs beaucoup de ses propositions concernant des parties ineffectives ne sont pas fondées théoriquement et ne respectent pas les principes de base de la résistance des matériaux classiques. Nous examinons ci-dessous les critiques de cet approche en nous limitant aux principes simples de la statique; les valeurs numériques, données à titre d'exemple, sont tirées de l'appareil n°2 (HAGE)

1.6.2. Critiques

Ces critiques sont assez nombreuses, pour cette raison nous pensons suivre une démarche parallèle à celle de ZICK et critiquer chaque point de son étude.

1.6.2.1. Torseur des forces agissantes à gauche d'une section droite, et contraintes normales de flexion longitudinale

Nous avons déjà signalé que ZICK a commis une erreur importante en négligeant l'effort de traction dû à la poussée hydrostatique, en supposant que si on isole le fond, le fluide contenu dans ce fond va exercer une poussée hydrostatique $R.w$ appliquée à $\frac{R}{4}$ au dessous du centre de l'appareil, et les jonctions entre le fond et la partie cylindrique de l'appareil sont équivalentes à une force $R.w$ appliquée

au centre de gravité de la section droite ce qui ramène l'action horizontale du fond à un couple dirigé dans le sens des aiguilles d'une montre, égal à $\frac{R^2 w}{4}$. Nous avons signalé que cet inventaire est faux car la poussée hydrostatique du fluide contenu dans le fond ne s'applique pas sur la section du cylindre puisqu'elle est transmise sur l'autre fond par l'intermédiaire du fluide contenu dans le cylindre; autrement dit l'action horizontale totale produite par l'isolation du fond va être égale à une poussée hydrostatique $R w$ appliquée en $\frac{R}{4}$ et dirigée vers la gauche.

Si on examine les contraintes dans la section droite au dessus de l'appui, nous constatons que nous devons rajouter dans la formule

$$f_1 = \frac{Mq}{K_1 R^2 e}$$

Une contrainte normale de traction égale à (en supposant comme ZICK qu'une partie de la section travaille)

$$f_{1p} = \frac{R \cdot w}{2 \Delta R e}$$

Soit $\frac{w}{2 e \Delta}$ qui n'est pas négligeable, pour l'appareil considéré

$$f_{1p} = \frac{1,1309}{2 \times 1,396 \times 5} = 0,08 \text{ daN/mm}^2$$

ce qui est du même ordre de grandeur que f_1 pour la position A_2 et nettement supérieur à f_1 pour la position A_1

De même, si la totalité de la section travaille à la flexion longitudinale ($M q$) et à la traction ($R w$) l'importance de f_{1p} serait accrue, en effet si $K_1 = K'_1 = 1$. on a

$$\rho_H = \frac{f_{1p}}{f_1} = \frac{R w}{2 \pi R e} \times \frac{\pi R^2 e}{M_q} = \frac{R^2 w}{2 M_q}$$

Par contre si la section utile est égale à celle proposée par ZICK $2 (R \Delta)$ ce rapport devient

$$\rho_z = \frac{f_{1p}}{f_1} = \frac{R w}{2 \Delta R e} \times \frac{K_i \pi R^2 e}{M_q} = \frac{R^2 w \pi K_i}{2 M_q \Delta}$$

../..

Pour le cas de $\beta = 120^\circ$ on a $K_1 = 0,1$ et $K'_1 = 0,19$;
 $\Delta = 1,396$, soit

$$\rho_z = 0,43 \rho_H \text{ pour } K'_1$$

$$\text{et } \rho_z = 0,23 \rho_H \text{ pour } K_1$$

ce qui donne pour le cas de l'appareil que nous avons construit :

Section résistante	Position		A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
2 Δ Re	ρ_z	K' ₁	2,6	0,23	0,1	0,05	0,04
		K ₁	5	0,44	0,18	0,095	0,073
2 π Re	ρ_H		11,7	1,034	0,415	0,22	0,17

Cette importance non négligeable, comme nous pouvons le constater risque d'être plus grande si le rayon du cylindre est plus grand.

Une deuxième source d'erreur provient du fait que ZICK n'a pas écrit le torseur des forces de gauche au centre de gravité de la section présumée "résistante" c'est-à-dire en

$$\frac{R \sin \Delta}{\Delta} \text{ au dessous de centre O de la section circulaire,}$$

ceci a pour effet de modifier la valeur de M_q selon

$$M_{qp} = M_q + R^2 w \frac{\sin \Delta}{\Delta}$$

Pour saisir l'importance de cette erreur nous pouvons examiner l'importance du terme $R^2 w \frac{\sin \Delta}{\Delta}$ selon la position de l'appui

c'est-à-dire selon le rapport $\xi_H = \frac{R^2 w}{M_q} \frac{\sin \Delta}{\Delta}$, pour notre appareil

$$\Delta = 80^\circ \text{ et } \xi_H = 0,705 \frac{R^2 w}{M_q} \text{ soit } \xi_H = 1,41 \rho_H$$

Autrement dit, les contraintes proposées par ZICK doivent être modifiées considérablement dans le rapport $CH = \frac{M_q p}{M_q}$

Positions	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
	16,5	1,4 ⁵⁸	0,59	0,31	0,24
$\frac{M_q p}{M_q} = C_H$	17,5	2,4 ⁵⁸	1,59	1,31	1,24

Autrement dit les valeurs proposées par ZICK pour la contrainte longitudinale de flexion doivent être modifiées dans des proportions allant du 165 % à 24 % ce qui est considérable, et nous poussent à douter de la crédibilité de la méthode proposée par ZICK.

Pour la section du milieu, l'erreur causée par la suppression de la poussée hydrostatique est plus petite, sa valeur maximale pour la position A₅ est de 23,34 %, et sa valeur minimale, pour A₁, est de 3,7 %.

Dans tous les cas nous constatons que des modifications très importantes sont apportées si nous voulons appliquer les principes de base de la résistance des matériaux classiques.

1.6.2.2 - Contrainte de cisaillement à l'endroit de l'appui

1.6.2.2.1- Cas d'un cylindre renforcé par un anneau au Niveau du support

1.6.2.3 - Contrainte de cisaillement à l'endroit du support

1.6.2.3.1- Cas de cisaillement à l'endroit du support

Dans ce cas, ZICK a supposé que la totalité de la section droite va encaisser l'effort tranchant; cet effort tranchant vaut :

$$V = Q \frac{L - 2 A - H}{L + H}$$

Sa valeur dépend surtout de la position de l'appui, cependant cette valeur a été tirée par dérivation du moment fléchissant à l'appui, mais comme en ce point l'effort tranchant subit une discontinuité égale à Q nous pensons qu'il aurait été plus logique de prendre $V = Q$.

La contrainte de cisaillement est alors la même que celle proposée par la théorie de la poutre équivalente (voir 1.2.)

$$t = \frac{V}{\pi R e} \sin \phi$$

1.6.2.3.2- Cas d'un appareil sans anneau raidisseur et loin du fond

Basé sur les mesures qu'il a effectuées en 1948 (1.3) ZICK va supposer qu'une partie de la section droite va encaisser l'effort du cisaillement V , cette partie différente de celle travaillant à la flexion, va être définie par un angle $(\pi - \alpha)$ telle que $\alpha = \frac{19}{20} (\pi - \frac{\beta}{2})$

Pour le cas d'un support à 120° , $\alpha = 114^\circ$ et la section qui travaille va être limitée par un angle au centre égal à 132° (fig. 1.15)

Comme l'expérience montre que la contrainte maximale de cisaillement se trouve en un point voisin de 114° ZICK a essayé de proposer une théorie qui tient compte à la fois de ce résultat, et du fait que la totalité de l'effort tranchant V est absorbé (hypothétiquement) par la section $(R_e, 132^\circ)$; il va supposer donc que cette contrainte vaut :

$$\tau_{nr} = \frac{V \sin \phi}{R_e [\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha]} \quad \phi \in [\alpha, \pi]$$

dont le maximum est atteint pour $\phi = \alpha$, et dont les valeurs pour $\phi \in [0, \alpha]$ sont nulles (fig. 1.12)

Dans le cas d'un appui à 120° , ceci donne une contrainte 3,5 fois ^{plus} grande que la contrainte trouvée si la totalité de la section travaille.

Toutefois, l'application de la théorie de résistance des matériaux à la section présumée $(R, 132^\circ)$ implique

que la contrainte de cisaillement en α doit être nulle (effet de bord) (fig. 1.4)

En plus nous remarquons que ZICK a pris deux sections droites différentes définies par (R, Δ) et $(R, \pi - \alpha)$ la première travaillant à la flexion longitudinale et la deuxième au cisaillement, or la théorie de cercle de MOHR montre clairement que la contrainte de cisaillement est liée à celle de flexion et il est paradoxal que ZICK ait trouvé la contrainte de cisaillement maximale en un point où les contraintes principales sont plus faibles qu'au point (R, Δ) .

1.6.2.3.3- Cas de supports près des fonds

Nous avons vu que la présence du fond près du support va modifier la répartition des contraintes de cisaillement car le fond va jouer le rôle du raidisseur (1.4)

En particulier ZICK suppose que le diagramme de l'effort tranchant est assez particulier (voir fig. 1.4) car il est constamment positif.

Dans ces conditions la contrainte de cisaillement sur le fond va avoir deux-valeurs (fig. 1.4)

- sur la partie supérieure la contrainte vaut :

$$\tau_1 = \frac{Q \sin \phi_1}{\pi R e} \quad \text{pour } \phi_1 \in [0, \alpha] \text{ dirigée vers le bas}$$

- sur la partie inférieure :

$$\tau_2 = \frac{Q}{\pi R e} \left[\frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \right] \sin \phi_2$$

pour $\phi_2 \in [\alpha, \pi]$

De telle manière que la section droite du fond soit en équilibre, ce qui est paradoxal, car ceci doit rester vrai même pour $A = 0,5 R$, ce qui revient à négliger le poids de la partie constituant le fond et une partie cylindrique égale à $A \times R$ soit

$$\left[\frac{2}{3} H + 0,5 R \right] w$$

../..

Dans le cas de notre appareil ceci est égal à $= 382 \text{ daN}$ soit près du 12 % de la valeur de l'effort tranchant global. Par ailleurs le fond va être sollicité dans ce cas par un effort de traction qui sera reconverti en un effort de cisaillement sur la partie supérieure du cylindre (voir 1.4)

Sur le support on a de part et d'autre la contrainte t_2 donc l'équilibre du support n'est plus évident

$$2 \times \int_{\alpha}^{\pi} \frac{t_2 \sin \phi_2}{r} r d\phi_2 = \frac{Q}{\pi} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \neq Q$$

enfin sur la section opposée du cylindre la somme de toutes les forces élémentaires produites par les contraintes de cisaillement dépasse largement la valeur de l'effort tranchant. En effet toutes les forces sont dirigées vers le haut et leurs valeurs valent (en projection verticale)

$$\begin{aligned} \Sigma &= 2 \int_0^{\alpha} \frac{Q \sin^2 \phi_1}{\pi r} r d\phi_1 + 2 \int_{\alpha}^{\pi} \frac{Q \sin^2 \phi_2}{\pi r} \left[\frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} r \right] d\phi_2 \\ &= \frac{2Q}{\pi} \left[\frac{\phi_1}{2} - \frac{\sin \phi_1 \cos \phi_1}{2} \right]_0^{\alpha} + \frac{2Q}{\pi} \left[\frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \right] \left[\frac{\phi_2}{2} - \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2}{2} \right]_{\alpha}^{\pi} \\ &= \frac{Q}{\pi} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + \frac{Q}{\pi} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\Sigma \neq Q$$

Ainsi, il apparait qu'une telle supposition ne peut être vérifiée puisqu'elle ne respecte pas les principes de la statique. De plus le diagramme de moment fléchissant proposé par ZICK, pour le cas, nous semble assez douteux (voir fig. 1.14)

1.6.2.4- Flexion circonférentielle et compression au dessus du support

Nous avons pu constater l'influence de la flexion circonférentielle au dessus du support d'autant ^{plus} qu'elle introduit des contraintes beaucoup plus importantes que les autres sollicitations, Une critique générale peut être adressée à ZICK, car son approche de ce problème n'est pas fondée théoriquement surtout sur les deux points suivants :

- 1 - Une contrainte de cisaillement peut elle créer un moment fléchissant.
- 2 - Ce moment fléchissant créé dans une section au dessus de l'appui nécessite-t-il une section horizontale dont la longueur est égale à $\frac{L}{2}$ ou $4 R$ pour être encaissé ?

Car dans les deux cas des modifications importantes doivent être incluses dans la théorie de ZICK, et pour le premier point, par exemple, le maximum de l'effort tranchant étant localisé à l'appui ne serait-il pas plus logique de prendre uniquement la section intéressant l'appui et supposée d'après ZICK de largeur $b + 1,56 \sqrt{R.e}$? Et pour le deuxième point la pression hydrostatique latérale ne joue-t-elle pas un rôle important ? et la théorie des arcs reste-t-elle applicable si on envisage le quart du cylindre (dimension $\frac{L}{2}$ supérieure à la longueur de l'arc)

1.6.2.4.1.- Cas d'un appareil avec anneau raidisseur

Nous avons vu (1.4) que dans le cas l'arc considérée (voir fig. 1.15) est sollicitée de telle manière que le moment fléchissant maximal vaut :

$$M_{\beta} = K_6 Q.R$$

et pour $\beta = 120^{\circ}$ $M_{\beta} = 0,0528 Q.R$

$$\text{avec } M_A = \frac{Q R}{2} f_2 (\beta) = 0,02 Q.R$$

$$P_t = \frac{Q}{2 \pi} f_1 (\beta) = 0,1 Q$$

La contrainte de flexion introduite sur la bande
 ($\frac{L}{2}$ ou $4 R$) et e) va être égale pour notre appareil à :

$$f_8 = \pm \frac{3 \times 0,0528 Q.R}{R e^3} = \pm 12,18 \text{ daN/mm}^2$$

ce qui est de 10 à 100 fois plus que les contraintes introduites par les autres sollicitations.

Donc d'après l'auteur la contrainte due à la flexion circonférentielle est trop importante. et la longueur hypothétique

$\frac{L}{2}$ ou $4 R$ des fibres intéressées par cette flexion reste mal définie car si on isole un demi cylindre de longueur $\frac{L}{2}$ ou $4 R$ et on étudie son équilibre, on doit tenir compte de la pression hydrostatique à l'intérieur de cette bande et dont l'influence est de même ordre de grandeur que celle de M_β , de plus dans ces conditions nous ne sommes pas sûrs que la théorie des arcs s'applique sur une telle pièce.

Dans la mesure où cette théorie s'applique, la pièce à étudier est définie par la figure ($b = \frac{L}{2}$ ou $4 R$) la résolution de ce système est un peu plus compliqué que le précédent. Néanmoins une valeur approximative du moment M_A et M_β peut s'écrire : (voir annexe II pour les détails de calculs)

$$P_A = \left| \frac{Q}{2 \pi} + \frac{\rho g h^2}{2} \times b \right| f_1 (\beta)$$

$$M_A = \left| \frac{QR}{2\pi} + \frac{\rho g R^3 \cdot b}{2} \right| f_2 (\beta)$$

$$M_\beta = \left| \frac{QR}{2\pi} + \frac{\rho g R^3 \cdot b}{2} \right| f_3 (\beta)$$

On constate que les valeurs de ces moments sont très modifiées dans une proportion de l'ordre de 100 %.

../..

En effet :

$$w = \rho g \pi R^2$$

$$\text{ce qui donne } Q' = \frac{\rho g R^2}{2} b = \frac{\rho g \pi R^2}{2 \pi} b = \frac{w b}{2 \pi}$$

$$\text{autrement dit si } Q = w \frac{L}{2}$$

$$\text{on a } Q' \approx Q$$

$$\text{et } Q' \cdot R \approx Q \cdot R$$

Il convient par conséquent de revoir complètement la notion de la flexion circonférentielle car elle est la base de la théorie de ZICK, c'est en effet elle qui délimite la zone déformée au dessus du support et c'est elle qui donne la valeur maximale de la contrainte.

Pour le cas où l'appareil ne comporte pas d'anneau raidissant ce raisonnement constitue une approximation d'après l'auteur et nous avons des résultats légèrement supérieurs pour M_β .

1.6.2.4.2.- Compression du support

Dans tous les cas la bande intéressée par cette compression a une longueur égale à $b + 1,56 \sqrt{Re}$ (voir fig. 1.4) cependant ce qui apparaît paradoxal c'est le fait que l'effort de compression est égal à Q en bas de l'appareil, et égal à $\frac{Q}{4}$ à l'extrémité du support, variation arbitraire de cet effort.

Il serait plus logique de considérer la valeur réelle de l'effort en chaque point, ce que nous faisons dans notre théorie de la membrane (1ère partie).

CHAPITRE II

Application de notre théorie de la membrane.

2.1. Introduction.

Nous avons mis en lumière, au premier chapitre, les nombreuses lacunes que présente la théorie de ZICK, notamment le fait que cette théorie est inapte à expliquer correctement le comportement de l'appareil au niveau des supports.

Nous allons examiner dans ce chapitre l'application de nos résultats relatifs à la théorie de la membrane, autrement dit lorsque nous supposons que l'appareil a un comportement d'ensemble, ce qui exclut pour l'instant l'étude des flexions locales circonférentielles et longitudinales, étude que nous effectuons au chapitre suivant.

Toutefois nous verrons que l'application de notre théorie de la membrane va nous permettre de retrouver les résultats classiques de la théorie de la poutre équivalente ; de plus étant donné que nous partons des équations locales de l'élasticité, nous sommes en mesure de détailler d'une façon rationnelle l'évolution des contraintes dans les zones particulières du contact support-virole, évolution que la théorie classique est inapte à décrire. Cependant ce travail constitue une étude approchée du problème dans la mesure où nous n'examinons pas pour l'instant le problème de la flexion locale de la coque.

2.2. Résolution par notre théorie de la membrane.

2.2.1. Présentation du problème.

En supposant que l'appareil a un comportement d'ensemble, autrement dit, qu'il se comporte localement d'une façon "rigide" notamment au niveau des supports, nous allons le décomposer en cinq zones : Figure (2.1) :

Zone 1. Située entre le fond à gauche et le début du support, la longueur de cette zone est égale à A ,

Zone 2 : ZONE du support de longueur b .

Zone 3 : Entre les deux supports.

Zone 4 et 5 : respectivement symétriques aux zones 2 et 1.

Les forces extérieures agissantes se réduisent à la pression hydrostatique de l'eau : (Fig. 2.1)

$$\begin{aligned} P_r &= \rho g R (1 - \cos \theta) \\ P_x &= P_\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

aux poussées résultantes sur les fonds $= \rho g \times \pi R^3$.

Dans les zones des supports (2 et 4) nous avons en plus la pression extérieure de contact que nous paramétriserons plus loin.

Les contraintes prises en compte sont représentées par la figure (2.2), et sont uniforme sur toute l'épaisseur t , selon l'hypothèse de la théorie de la membrane.

2.2.2. Résolution du problème dans les zones (1), (3) et (5).

Dans les zones éloignées des appuis les équations locales d'équilibre se réduisent à (voir première partie chapitre I)

$$\sigma_{11} = \frac{P_r R}{t} = G(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} = - \frac{G}{R} \sin \theta \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} = - \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta}$$

avec $G = \frac{\rho g R^2}{t}$.

L'intégration de ces équations va donner la solution générale suivante :

$$\sigma_{11} = G(1 - \cos \theta)$$

$$\sigma_{12} = - G \frac{x}{R} \sin \theta + f_1(\theta) \quad (2.3)$$

$$\sigma_{22} = + G \left(\frac{x^2}{2 R^2} \right) \cos \theta + f_2(\theta) - \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \times \frac{x}{R}$$

où $f_1(\theta)$ représente un taux de répartition des contraintes de cisaillement, $f_2(\theta)$

représentent un taux de répartition des contraintes longitudinales ; ces deux fonctions sont déterminées par les conditions aux limites relatives à chaque zone ; toutefois

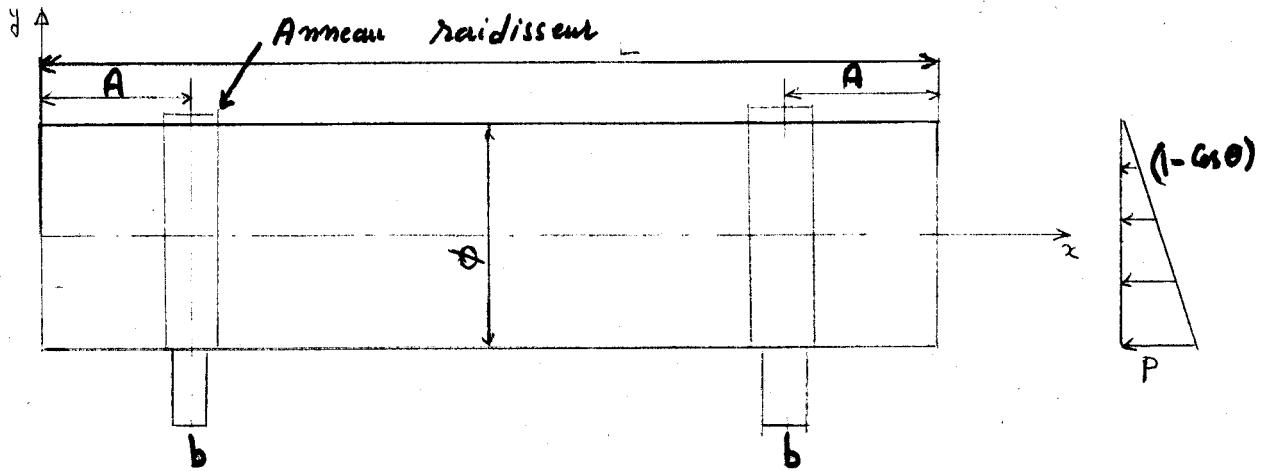


Figure (2.1)

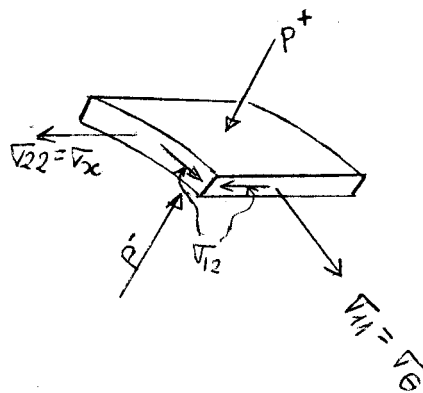


Figure (2.2.)

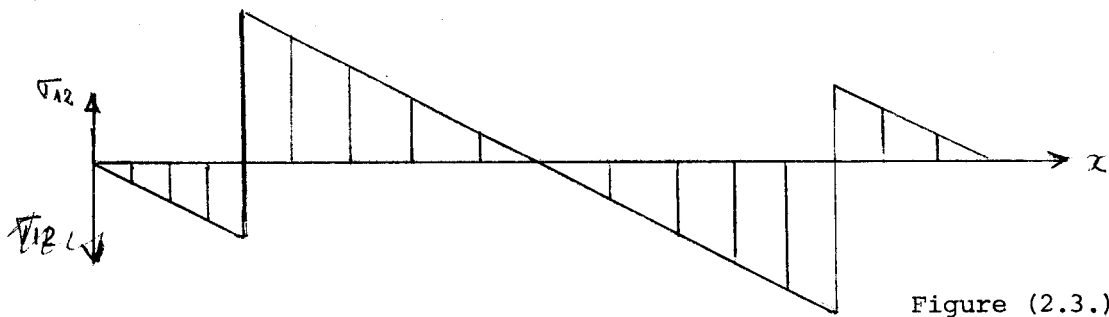


Figure (2.3.)

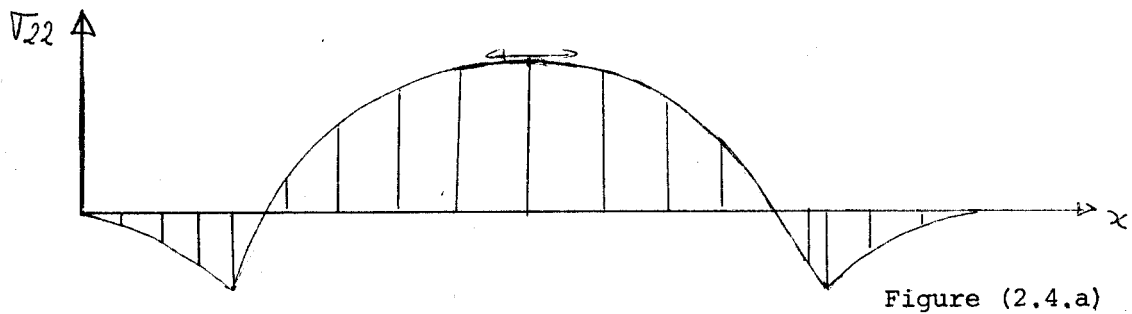


Figure (2.4.a)

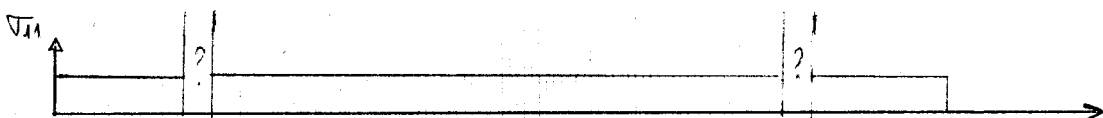


Figure (2.4.b)

en l'absence des forces locales longitudinales ou des couples de flexions locales nous avons une continuité des valeurs pour la contrainte longitudinale au raccordement entre deux zones juxtaposées, par contre la présence des supports va modifier la répartition des contraintes de cisaillements entre ces deux régions.

Ainsi les conditions aux limites vont être

- Zone 1 : $0 \leq x < A$

$$\text{en } x = 0 \quad \sigma_{12} = 0$$

$$\sigma_{22} = \frac{\text{Poussée}}{2 \pi R t} = \frac{G}{2} \quad (2.4)$$

- Zone 3 : $A < x < L - A$

$$\text{en } x \simeq A \text{ et en } x \simeq L - A \text{ continuité pour } \sigma_{22}$$

Discontinuité de σ_{12} due au support.

- Zone 5 : même conditions que la zone 1.

La solution générale du problème devient :

$$\begin{aligned} \text{Zone 1 :} \quad \sigma_{11} &= G(1 - \cos \theta) \\ \sigma_{12} &= -G \frac{x}{R} \sin \theta \quad (2.5) \\ \sigma_{22} &= + \frac{G}{2 R^2} x^2 \cos \theta + \frac{G}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zone 3 :} \quad \sigma_{11} &= G(1 - \cos \theta) \\ \sigma_{12} &= -\frac{G}{R} \left(x - \frac{L}{2}\right) \sin \theta \quad (2.6) \\ \sigma_{22} &= + \frac{G}{2 R^2} (x^2 - L(x - A)) \cos \theta + \frac{G}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zone 5 :} \quad \sigma_{11} &= G(1 - \cos \theta) \\ \sigma_{12} &= -\frac{G}{R} (x - L) \sin \theta \\ \sigma_{22} &= + \frac{G}{2 R^2} (x - L)^2 \cos \theta + \frac{G}{2} \quad (2.7) \end{aligned}$$

Les figures (2.3) et (2.4) représentent l'évolution de σ_{12} et de σ_{11} en fonction de x ($\cos \theta$ étant pris négatif) nous constatons que ces courbes coïncident avec celles obtenues à partir de la théorie de la poutre équivalente.

2.2.3. Résolution du problème dans les zones de l'appui.

Toutefois pour avoir une solution complète du problème nous devons examiner la zone des appuis, qui sont soumis à des pressions de contact cent fois plus grandes que la pression hydrostatique.

La grande difficulté dans une telle étude provient surtout de la schématisation de la pression de contact, et nous aurons l'occasion de résoudre ce problème au chapitre suivant. Pour l'instant, nous allons supposer que cette pression est radiale, qu'elle s'applique proportionnellement à $\cos \theta$, dans la direction circonférentielle et qu'elle est uniforme dans le sens longitudinal. Figure (2.5)

Soit pour $\theta \in [0, \beta]$ où 2β représente cette fois l'angle du contact support virole

$$P_r = - \frac{Q [\cos \theta - \cos \beta]}{Rb [\pi - \beta + \sin \beta \cos \beta]} = - P (\cos \theta - \cos \beta) \quad (2.8)$$

A la solution précédemment décrite, nous superposons la solution locale à la zone de l'appui :

En effectuant un changement de variable locale

$$x = A + \xi$$

les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= - P (\cos \theta - \cos \beta) \frac{R}{t} \\ \sigma_{12} &= - P \frac{\xi}{t} (\sin \theta) + g_1(0) \\ \sigma_{22} &= + \frac{P}{Rt} \cos \theta \frac{\xi^2}{2} - \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta} \frac{\xi}{R} + g_2(\theta) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Les fonctions $g_1(\theta)$, $g_2(\theta)$ sont déterminées en examinant les conditions aux limites en $\xi = 0$ et $\xi = b$; comme nous examinons le problème local nous pouvons prendre en $\xi = 0$ et $\xi = b$

$\sigma_{22} = 0$ (sinon il faut prendre $\sigma_{22} = - \frac{G A^2}{2 R^2} \cos \theta + \frac{G}{2}$) pour le problème global). Ce qui donne :

$$g_2(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_1}{\partial \theta} = + \frac{Pb}{t} \xi \cos \theta \quad (2.10)$$

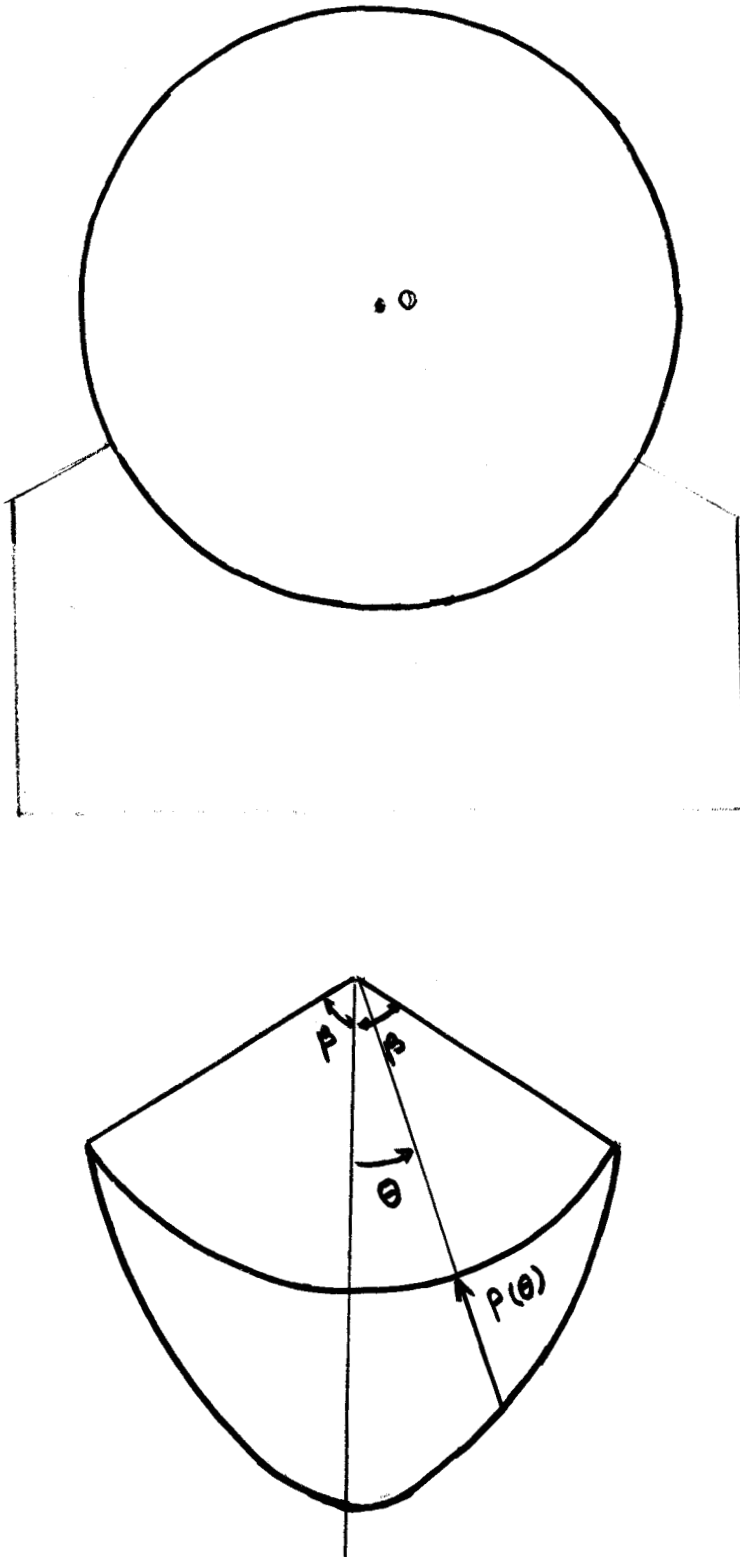


Figure 2.5 - Répartition de la pression du contact

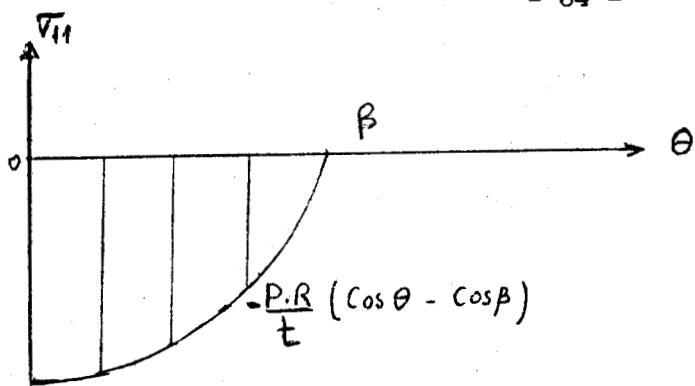


figure 2.6.a

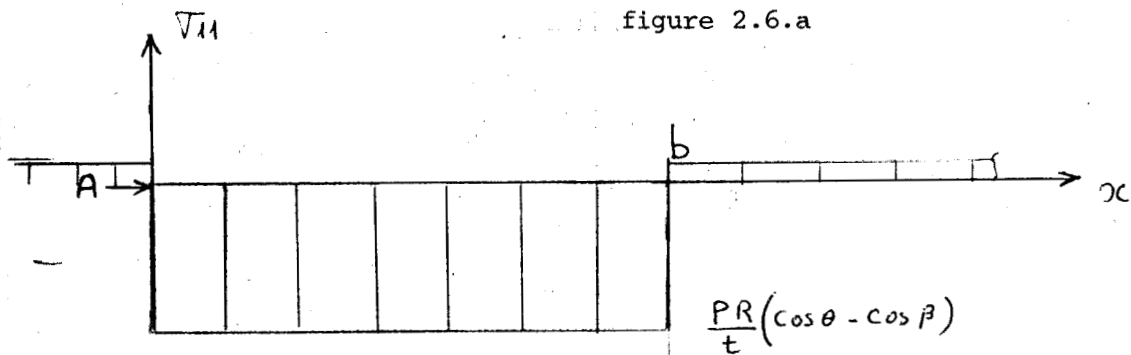


figure 2.6.b

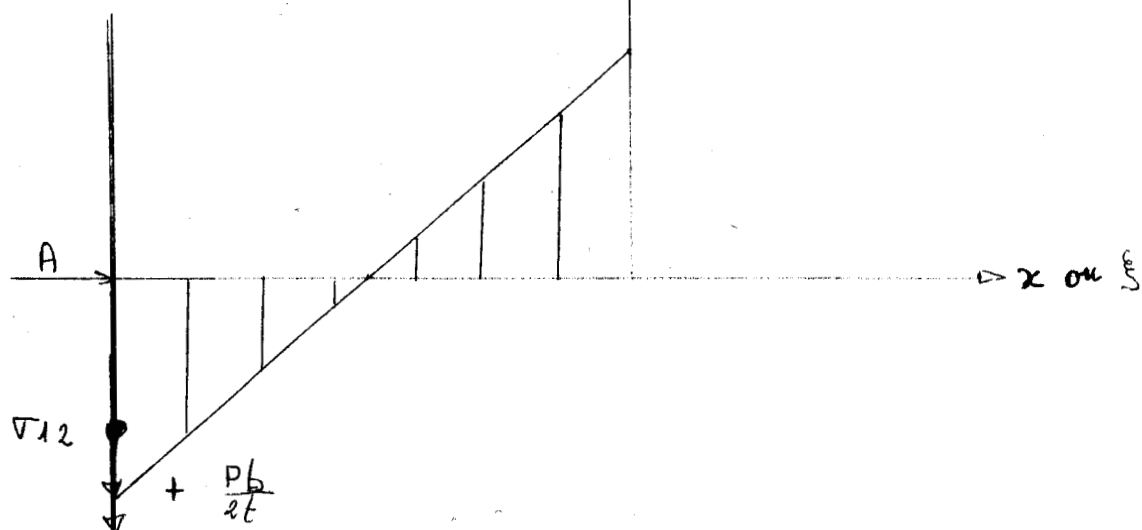


figure 2.7.

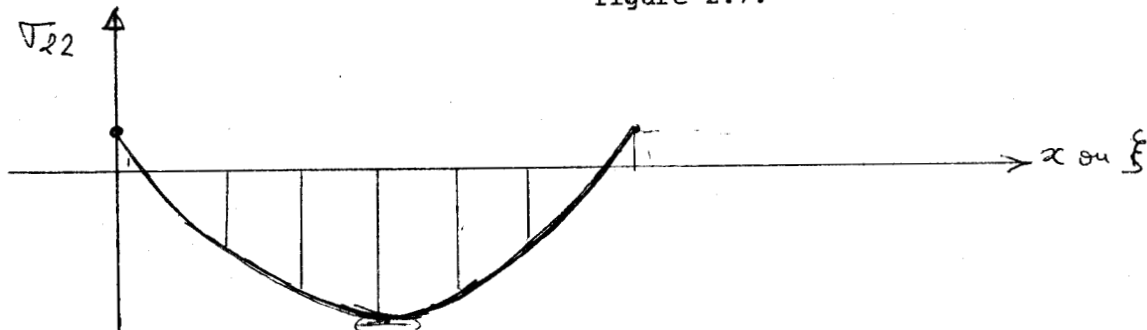


figure 2.8. - solution locale dans la zone du support

Soit
$$g_1(\theta) = + \frac{Pb}{t} \xi \sin \theta \quad (2.11)$$

La solution complète du problème local valable pour $|\theta| \in [0, \beta]$ et $\xi \in [0, b]$ est donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= - \frac{PR}{t} [\cos \theta - \cos \beta] \\ \sigma_{12} &= \frac{P}{t} \left[\frac{b}{2} - \xi \right] \sin \theta \\ \sigma_{22} &= \frac{P}{2Rt} \xi [\xi - b] \cos \theta \end{aligned} \quad (2.12)$$

A titre d'exemple nous avons représenté ces évolutions locales aux figures (2.6), (2.7) et (2.8). **Celles** ci montrent l'importance des effets locaux, que les théories classiques sont inaptes à décrire correctement ; la solution complète s'obtient en superposant ces résultats aux résultats globaux précédemment obtenus (2.5). Cependant nous pouvons remarquer que pour analyser correctement ce phénomène il faut modifier la représentation de la pression extérieure dans la direction longitudinale.

Pour comparaison au travail de ZICK nous pouvons déjà souligner que l'action de la pression locale des supports sur l'appareil est décrite correctement. En outre nous verrons au chapitre suivant que l'action de supports est purement locale ce qui justifie l'interprétation donnée du phénomène par notre travail.

2.2.4. Calcul des déplacements :

Les déplacements sont donnés par les formules (1.4.7) (première partie) qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} U &= \frac{R}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) - \int_0^x \left(\frac{2(1+\nu)}{E} \right) \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} dx + \frac{\partial f_4}{\partial \theta}(\theta) \\ V &= \int_0^x \left(\frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{12} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) dx + f_4(\theta) \\ W &= \frac{1}{E} \int_0^x (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) dx + f_3(\theta) \end{aligned}$$

Etant donné que nous allons ultérieurement analyser en détail ce problème nous nous contentons de donner l'expression générale de ces déplacements loin de la zone de l'appui, soit la solution suivante pour la première zone :

$$U = + \left[-1 + x^2 - \frac{x^4}{24R^2} \right] \frac{G}{E} \cos \theta + \frac{RG}{E} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right)$$

$$V = \left[- (2 + \nu) \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24R^2} \right] \frac{G}{ER} \sin \theta$$

$$W = + \frac{Gx}{E} \left[\left(\frac{x^2}{GR^2} + \nu \right) \cos \theta + \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \right]$$

Cette solution montre notamment que l'appareil se comporte comme une partie en flexion simple (expression de W).

Par ailleurs cette solution confirme ce que nous avons avancé dans la première partie (Chapitre III) sur la nécessité d'utiliser des polynômes en x de degré supérieur à deux pour u , v et w afin de décrire correctement la théorie de la poutre équivalente.

2.3. Conclusion :

L'application de notre théorie de la membrane fait ressortir les avantages suivants, sur la théorie de la poutre équivalente.

1) L'analyse fine des zones et l'appui est accessible au calcul ; notamment nous avons pu déterminer d'une façon rationnelle, l'évolution des contraintes longitudinale, corconférentielle et de cisaillement dans cette zone, alors que la théorie de ZICK est incapable d'accéder à cet analyse, ceci est essentiellement dû en fait que nous partons des équations locales d'équilibre.

2) Nous avons pu déterminer les déformations moyennes de l'appareil ce qui nous permet de réaliser une étude complète du comportement global de cet appareil.

Toutefois la résolution exacte de ce problème nécessite l'examen de la flexion locale de la coque et nous sommes obligés de réaliser une résolution analytique du problème pour approcher la réalité du phénomène.

CHAPITRE III

RESOLUTION PAR DOUBLE SERIE TRIGONOMETRIQUE

3.1 - INTRODUCTION

La méthode de calcul des appareils à pression proposée par ZICK (1951) et précédemment décrite, repose comme nous venons de le constater, sur des hypothèses inadmissibles physiquement, et comporte de nombreuses lacunes en contradiction avec les principes fondamentaux de la statique.

Dans le but délaborer une méthode générale des calculs des appareils cylindriques reposant sur des appuis en berceau nous allons étudier dans ce chapitre la résolution du problème par la méthode que nous avons mise au point dans le chapitre III (première partie) ; et qui consiste à décomposer les déplacements et la pression de contact support-virole en doubles séries trigonométriques, qui respectent d'une part la symétrie de chargement et de l'appareil, et vérifient d'autre part les conditions aux limites (3.16, 3.17, chap.III première partie)

Dans la pratique ce dernier point est difficile à réaliser dans la mesure où les extrémités de la virole sont soudées à des fonds qui les régidifient, sans pour autant symbolier des encastrements parfaits ; toutefois étant donné que nous nous intéressons aux efforts développés par l'action des supports, ces conditions aux limites sont un effet secondaire surtout sur la répartition des contraintes de cisaillement ; nous aurons d'ailleurs l'occasion de préciser ce point au cours de ce chapitre.

En outre, nous avons pu constater dans le chapitre III de la première partie, que la prise en compte des conditions aux limites réelles revient à trouver la solution générale du problème sans second membre ; or, les calculs que nous avons effectués sur des cas pratiques ont montré que cette solution s'atténue rapidement dès qu'on s'éloigne des extrémités du cylindre, par conséquent il est normal que nous négligeons la contribution de cette solution dans la résolution pratique de notre problème.

.../...

La deuxième source de difficultés que nous avons dû résoudre, consiste à trouver une schématisation correcte de la pression des supports sur la virole, aussi bien dans le sens longitudinal que dans le sens circonférentiel ; cependant nous verrons dans ce chapitre que cette schématisation a un effet purement local dans la section du support, pour cette raison nous allons examiner ici le comportement global de l'appareil sous l'effet d'une pression constante et ensuite examiner d'autres schémas acceptables de cette pression ; la confrontation des résultats de calcul avec l'expérience fournira la schématisation exacte.

3.2. - FORMULATION DU PROBLEME

En utilisant les notations de la première partie (chapitre III), les double séries trigonométriques qui approchent les déplacements d'un point M de la surface moyenne de la coque peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} u(\theta, x) &= \sum_n \sum_m A_{mn} \cos m \theta \sin \frac{n\pi x}{L} \\ v(\theta, x) &= \sum_n \sum_m B_{mn} \sin m \theta \sin \frac{n\pi x}{L} \\ w(\theta, x) &= \sum_n \sum_m C_{mn} \cos m \theta \cos \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Les limites supérieures pour m et n sont fixées par les relations (3.35) (première partie) ; les coefficients A_{mn} , B_{mn} et C_{mn} sont déterminées à partir de nos équations générales (3.7) après leurs simplifications par omission des termes négligeables que nous avons déterminés dans le chapitre III (première partie)

En supposant la pression uniformément répartie sur la surface de contact appui-virole, le taux de répartition de cette pression vaut :

$$P = \frac{Q}{2 R b \sin \beta} \quad (3.2.)$$

où Q représente la moitié du poids du liquide continu dans l'appareil.

b = la largeur de l'appui

β = angle du contact support-virole, figure (2.5.)

Cependant, étant donné que ces valeurs correspondent à un chargement faible, il faut considérer les résultats numériques de ce chapitre comme indicatifs.

En supposant que les deux appuis sont symétriques, la pression du contact appui-virole se met sous la forme :

$$P_r(\theta, x) = \sum_n \sum_m D_{mn} \cos m \theta \sin \frac{n\pi x}{L}$$

le nombre des termes utilisés est déterminé par :

$$n \leq \frac{L \times \sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{2\pi \sqrt{Rt}}$$

$$m \leq \frac{2R}{2.10.h}$$

L'amplitude de l'harmonique (m, n) est définie par :

$$D_{mn} = \frac{2}{\pi L} \int_0^L \int_0^{2\pi} P_r(\theta, x) \cos m \theta \sin \frac{n\pi x}{L} dx d\theta$$

3.3. - DEFORMATIONS PRODUITES PAR CE TYPE DE CHARGEMENT

Les résultats du calcul donnent les mêmes types de déformation pour notre appareil et pour celui de ZICK-CARLSON (1948) ; cependant un léger écart apparaît dans les résultats selon qu'on utilise la version I ou la version II de nos équations ; par conséquent, nous limitons, à titre

.../...

d'exemple l'étude des déformations de la section de l'appui et de la section médiane à partir de la version générale II. (3.7.) de nos équations.

3.3.1. - Déformation de la section de l'appui :

Les supports ne sont pas soudés, leur action va déformer complètement la section circulaire de la virole, en particulier la figure (3.1.) montre cette déformation dans le cas où l'appui se trouve à $A = 20\%$ de L , et nous pouvons constater que le diamètre horizontal de l'appareil va augmenter alors que nous assistons à un affaissement de la partie supérieure de la virole. Ce type de déformation a été également constaté pour l'appareil de ZICK-CARLSON ; par contre quand l'appui se trouve près du fond ($A \approx 0.18m$), figure(3.2.), nous assistons au même phénomène mais l'amplitude des déformations est très atténuée par la présence des fonds.

3.3.2 - Sections éloignées de l'appui :

Les deux appareils se comportent d'une façon identique, et nous assistons à une ovalisation de la section médiane avec une augmentation du diamètre horizontal et une diminution du diamètre vertical, les déformations trouvées sont plus importantes que celles de la section de l'appui. figure (3.3.), par ailleurs ces déformations sont petites si les appuis se trouvent près des fonds figure (3.2.).

Ces résultats invraisemblables ont été confirmés expérimentalement sur notre appareil toutefois l'amplitude de la déformation réelle de la section médiane est plus importante que celle obtenue par le calcul avec une pression uniforme ; nous verrons par la suite qu'une bonne approximation s'obtient en utilisant une répartition parabolique en Θ de la pression de contact appui-virole.

Cependant, quelle que soit la position de l'appui, nous avons constaté que l'épaisseur joue un rôle fondamental dans le comportement de l'appareil, pour cela nous avons effectué la comparaison entre les déformations de notre appareil et celles de l'appareil de ZICK-CARLSON, suivant le tableau suivant :

Soit : (pour la position de l'appui à 20% de L)

HAGE	Appui	$\frac{u}{2h}$	(u mm)
		0,66	3,3
	Milieu	1,4	7
	Appui	0,36	9
	Milieu	0,6	15

Tableau : valeurs calculées pour les deux appareils étudiés sur la génératrice supérieure ($\Theta = \pi$) (pour $A = 20\%$ de L)

.../...

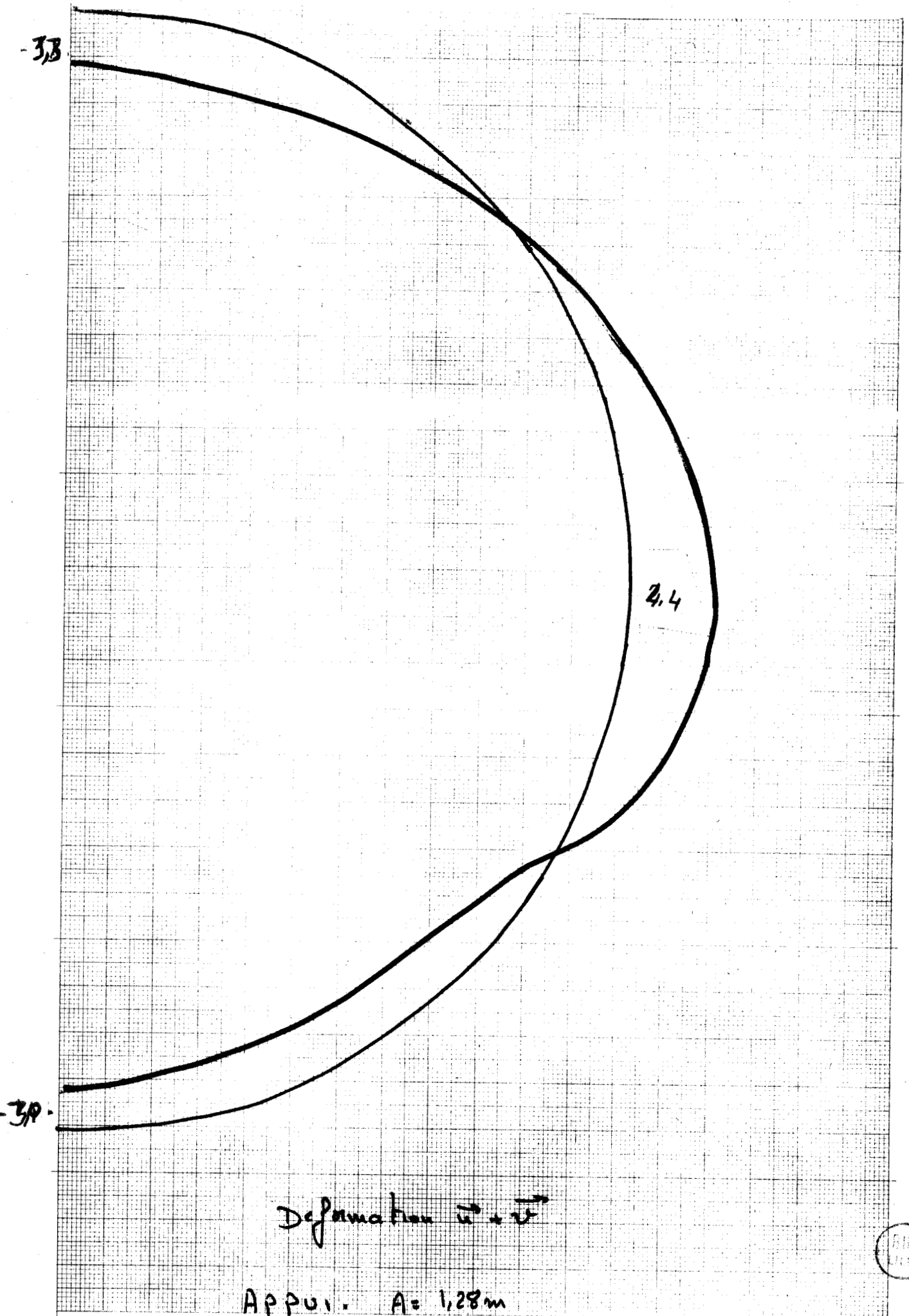


Figure (3.1) Déformation de la section de l'appui

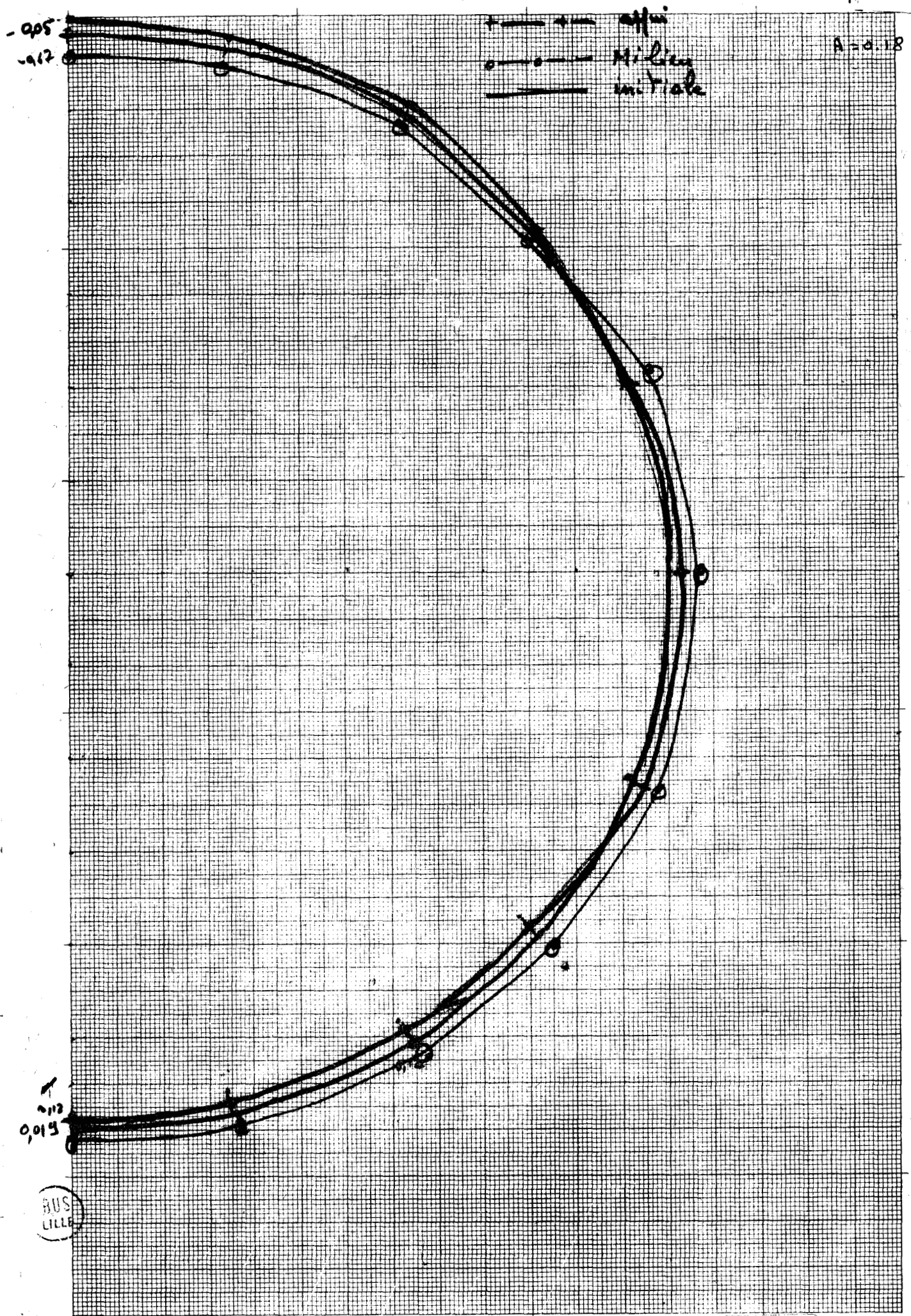


Figure (3.2) cas d'un appui près du fond $A = 0.18$

-6.8

+6.5

Deformations $\sigma = \sigma$
au milieu.

A = 1.28 m

Figure (3.3.)



3.4. - TENSEUR DES CONTRAINTES

3.4.1. - Introduction

La détermination des composants u , v , w du déplacement d'un point M_0 de la surface moyenne de la coque à partir de (3.1.) nous permet d'accéder au tenseur des contraintes en tout point de la coque à partir des formules (1.6.4.) que nous avons établies dans le premier chapitre de la première partie.

Dans un premier temps, nous analysons la répartition des contraintes dans la section de l'appui selon que les supports se trouvent près des fonds ou assez éloignés d'eux ; dans un deuxième temps, nous effectuons une analyse analogue pour les autres sections, afin de dégager les caractéristiques générales du tenseur des contraintes. Ces calculs sont effectués sur l'appareil construit par nous et sur celui utilisé par ZICK-CARLSON (1948).

3.4.2. - Répartition des contraintes dans la section de l'appui

Nous distinguons dans ce paragraphe deux cas : appui situé près du fond et appui assez éloigné du fond.

3.4.2.1. - Appui situé près du fond : $A/R \approx 0.18$, figure (3.4.)

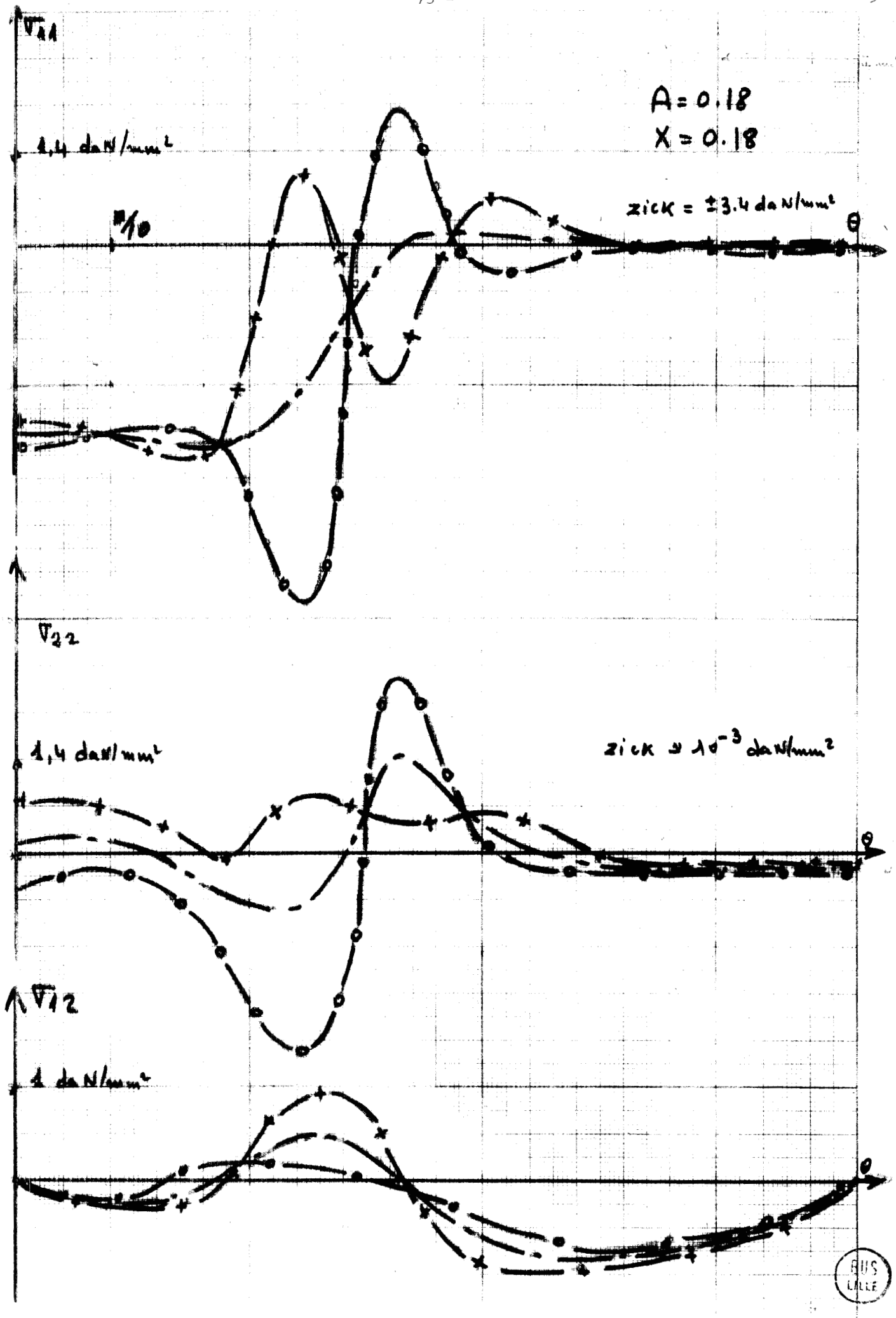
1 - Contrainte circonférentielle σ_{11} :

La présence du fond près de la section de l'appui va amortir l'amplitude de la flexion circonférentielle ; toutefois, nous distinguons cinq variations de signe pour le moment de flexion circonférentielle, la zone entre 0 et 32° étant très peu sollicitée en flexion locale, le maximum de la contrainte circonférentielle se trouve en compression à 54° à partir du milieu de l'appui, à l'intérieur de la zone de contact appui-virole (en contre peau) ($z = -h$). Par ailleurs, la compression proprement dite (contrainte de la membrane) est pratiquement constante jusqu'à 45° et s'amortit ensuite en s'annulant à l'extrémité de l'appui ; à l'extérieur de l'appui, la contrainte est maximale (en traction) au voisinage de 72° et s'amortit rapidement à partir de 90° pour s'annuler à partir de 108° .

2 - Contrainte de flexion longitudinale σ_{22} :

La flexion longitudinale est fortement influencée par la présence de l'appui qui agit comme une charge répartie ; pour cette raison, la zone comprise entre 0 et 108° n'agit pas selon la théorie de la poutre équivalente, en plus, la partie supérieure se trouve comprimée avec une contrainte plus grande que celle proposée par cette théorie, là aussi, nous distinguons trois zones de changement de signe pour le moment de flexion locale dont la plus importante se trouve confondue avec la zone de contact appui-virole,

.../...



Figure(3.4) Contraintes calculées dans la section de l'appui

le maximum de la contrainte est en compression à 54° en contre peau et en traction au voisinage de 72° .

3 - Contrainte de cisaillement τ_{12} :

La contrainte de cisaillement va subir trois changements de signe dont deux à l'intérieur de la zone d'appui ; pour la partie supérieure (à partir de 72°) nous obtenons une variation en $(\sin 2\theta)$, les maxima se trouvent au voisinage de 50° et de 90° mais sont de signes inverses.

3.4.2.2. - Appui assez éloigné du fond $A = 0.2 L$

1 - Contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta 1}$, figure (3.5.a)

Bien que les fonds soient assez éloignés de l'appui, nous constatons cependant que la contrainte de compression de la membrane est pratiquement la même qu'auparavant ; par contre le moment de la flexion circonférentielle subit quatre changements de signe, avec une amplitude très faible entre 0 et 18° et deux amplitudes importantes entre 18 et 60° d'une part, et entre 60 et 108° d'autre part ; la dernière zone entre 108 et 180° étant très peu sollicitée. Le maximum de la contrainte en compression est en contre peau à 54° ; en traction elle est également en contrepeau au voisinage de 72° .

2 - Contrainte de flexion longitudinale σ_{r2} figure (3.5b)

L'action de l'appui reste localisée, par contre le fait d'être assez loin du fond libère les fibres de la virole ; nous constatons que l'appareil est complètement comprimé entre (0 et 150°) et entre (126 et 180°) ; il est tendu entre 50 et 126° ; la contrainte maximale se trouve cette fois en traction au voisinage de 72° . Ces résultats sont très intéressants car ils sont confirmés par l'expérience de ZICK et CARLSON (Chap. I), toutefois nous constatons encore que la flexion localisée reste la plus importante notamment entre 36 et 90° et qu'elle change de signe trois fois, à partir de 90° ; l'appareil se comporte comme une poutre en compression alors que la théorie de la poutre équivalente la suppose tendue.

3 - Contrainte de cisaillement τ_{12} ; figure (3.5.C) :

La contrainte de cisaillement présente une allure en $(\sin 2\theta)$, ce qui est essentiellement dû au choix des déplacements et aux conditions aux limites (en $x = 0$ et $x = L$) que ce choix implique.

3.4.3. - Répartition des contraintes dans la section médiane de l'appareil

3.4.3.1. - Appui près des fonds figure (3.6.)

.../...

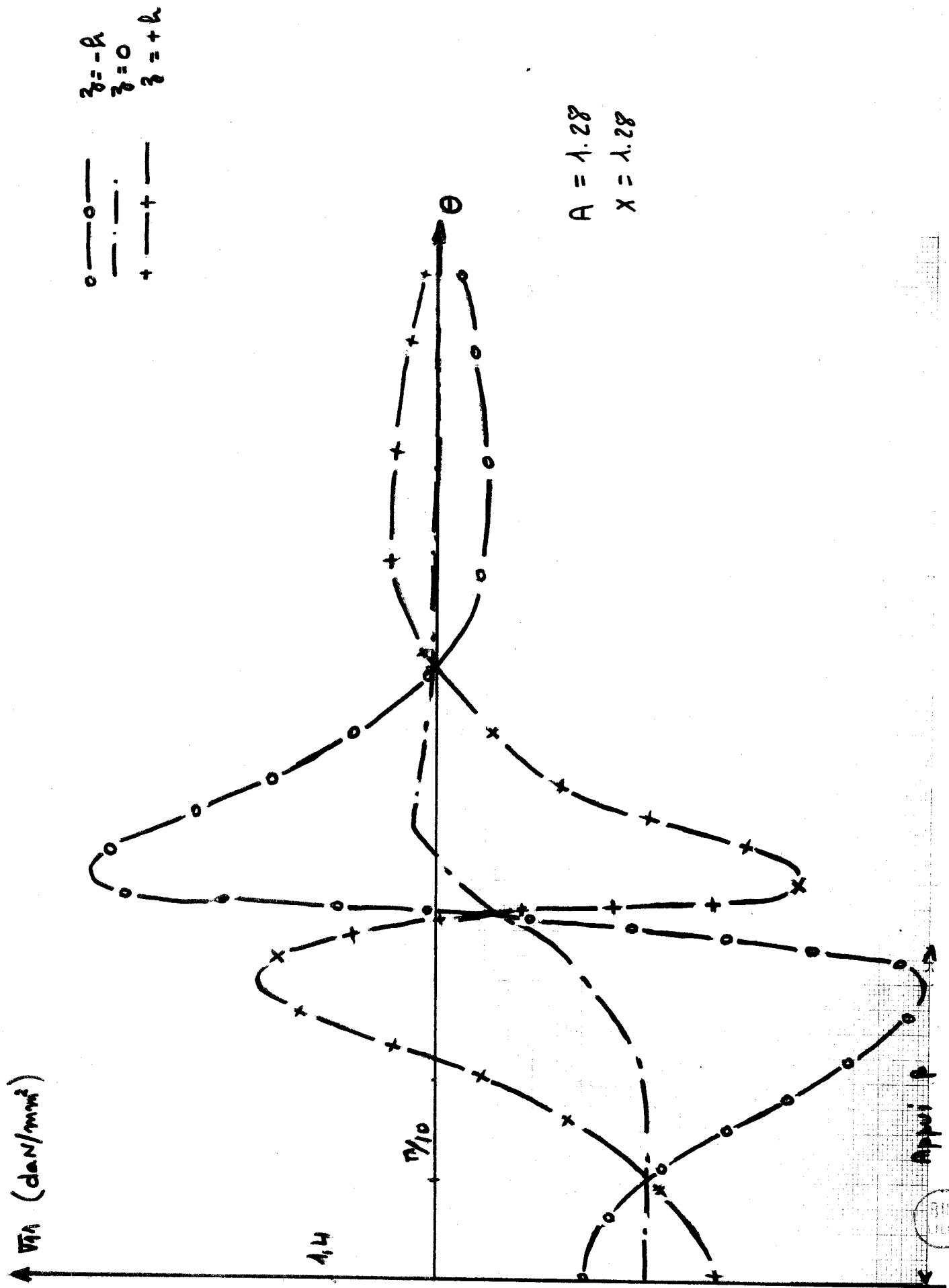
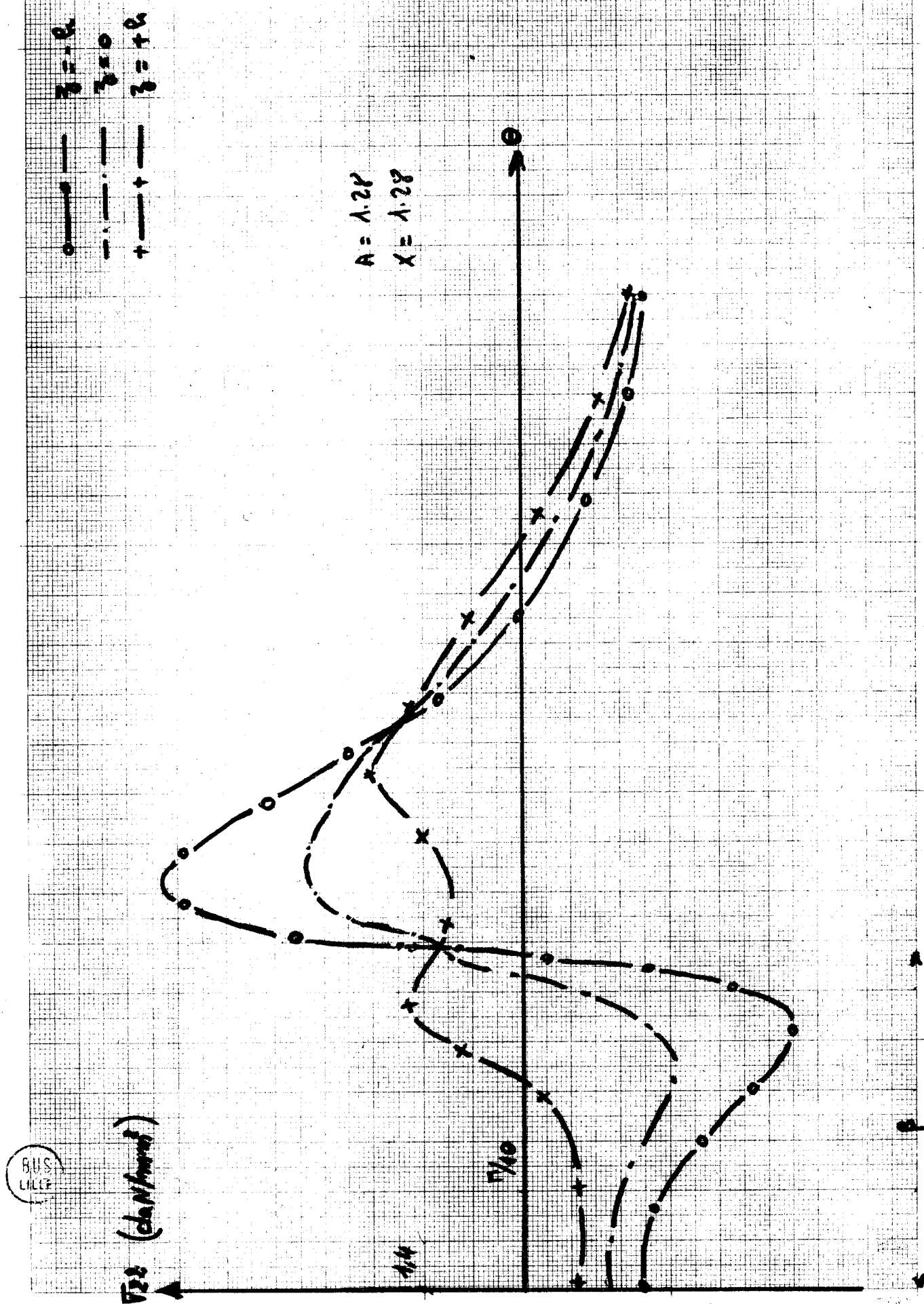


Figure (3.5a)



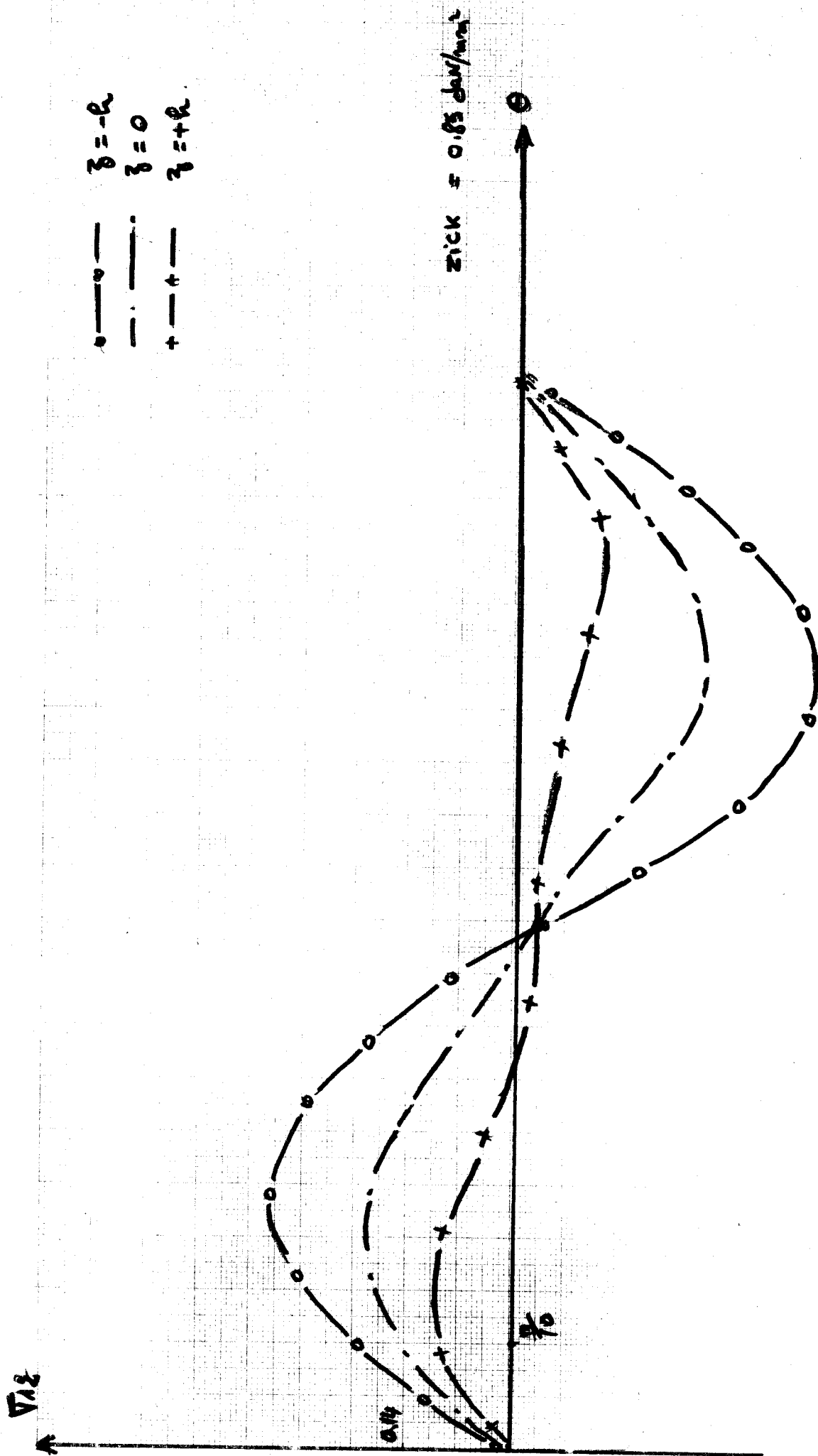


Figure (3.5c)

Milieu $x = 3.2$ $A = 1.28$

$\begin{cases} \gamma = +R \\ \gamma = -R \\ \gamma = 0 \end{cases} \text{ HAGE}$
 $\begin{cases} \text{---+---} \\ \text{---o---} \\ \text{---.---} \end{cases}$
 $\begin{cases} \text{---z---z} \\ \text{---} \end{cases} \text{ ZICK.}$
 $\rightarrow \theta$

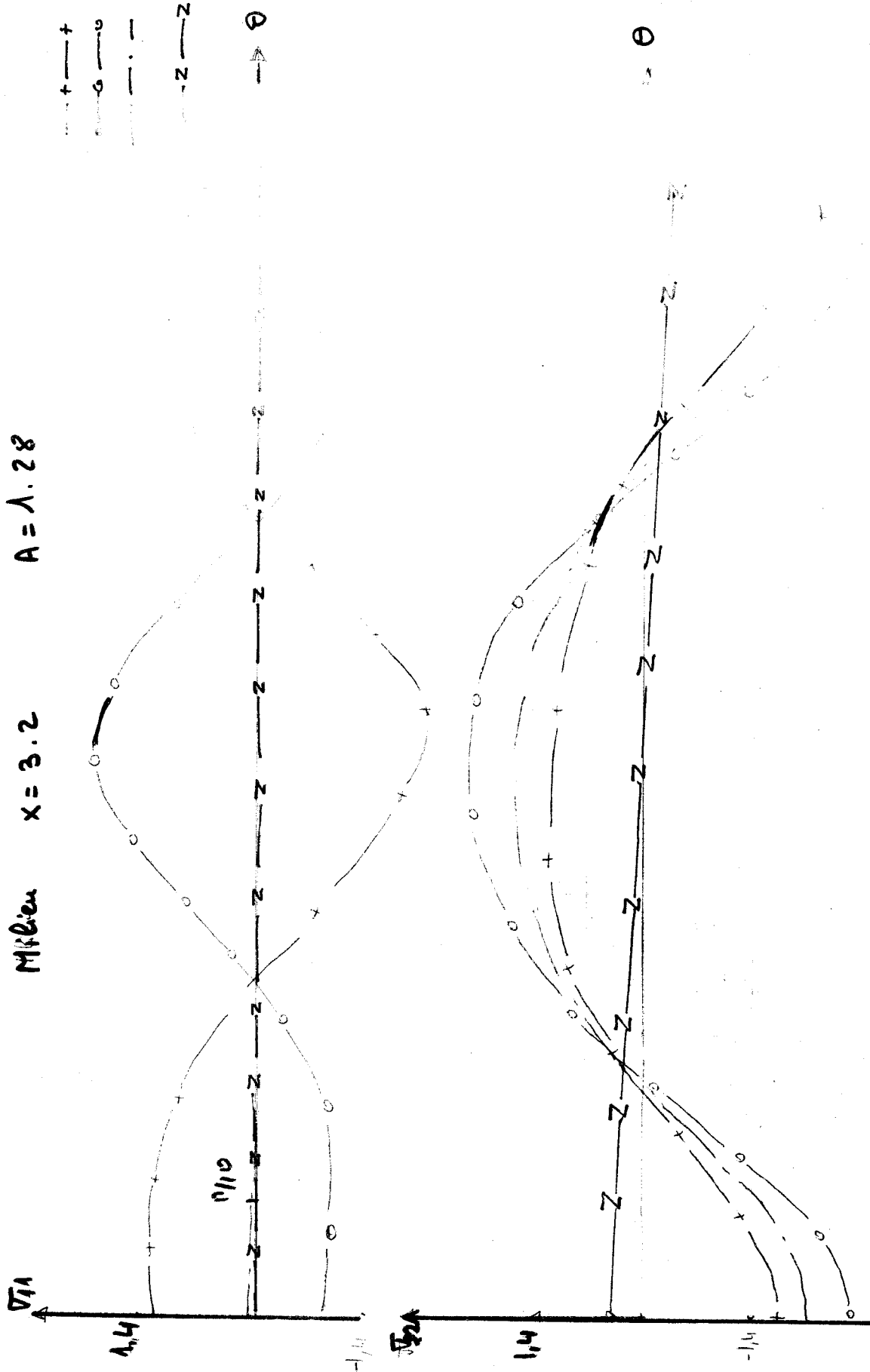


Figure (3.7) Section du milieu $A = 1.28$



Dans ce cas la présence d'appui ne semble pas influencer la répartition des contraintes, notamment la contrainte de flexion circonférentielle présente l'allure d'une flexion pure avec trois changements de signe comme nous l'avons démontré lors de la critique de la méthode de ZICK (paragraphe 1.6.2.4.) et avec une amplitude faible. Par contre, la contrainte de flexion longitudinale est approximativement égale à celle proposée par la théorie de la poutre équivalente.

3.4.3.2. - Appuis loin des fonds, figure (3.7.)

Nous constatons que la contrainte de flexion circonférentielle σ_{11} est celle d'une flexion pure, avec trois changements de signe ; son amplitude est loin d'être négligeable, contrairement aux résultats de ZICK (courbe $z \text{ --- } z \text{ --- } z$), ceci semble confirmer les critiques que nous avons formulées au paragraphe (1.6.2.4.)

En outre, la flexion longitudinale est très différente de celle proposée par la théorie de la poutre équivalente, elle apparaît latéralement et verticalement, en particulier les parties situées entre (0 et 40°), et entre (120 et 180°) sont comprimées et la partie médiane (40°, 120°) se trouve complètement tendue ; la contrainte trouvée est pratiquement exempte de la flexion locale, cette répartition semble être due à l'ovalisation latérale de cette section, dont l'amplitude est beaucoup plus grande pour cette position de l'appui que pour la position précédente.

Il apparaît donc que la position des appuis joue un rôle fondamental dans la répartition des contraintes même dans les sections assez éloignées de l'appui ; pour cette raison, nous proposons d'étudier la répartition des contraintes dans les autres sections de l'appareil, pour ces deux positions des appuis.

3.4.4. - Répartitions des contraintes dans les autres sections de l'appareil

Dans le but d'étudier l'influence de la position de l'appui sur la répartition des contraintes dans les différentes sections de l'appareil, nous avons distingué trois zones :

- a) zone I comprise entre l'appui et le fond
 - b) zone II située au voisinage de l'appui
 - c) zone II située entre l'appui et le milieu de l'appareil.
- et considéré deux positions de l'appui :
- a) appuis éloignés des fonds ($A = 0.2 L$)
 - b) appuis près du fond ($A = 0.18 m$)

.../...

3.4.4.1 - Appuis loin des fonds - figures (3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13)

a) zone I $0 \leq x \leq 1,18$

a - 1) Contrainte de flexion circonférentielle $\bar{V}_{11}$, figure (3.8)

Cette contrainte se présente sous la forme d'une contrainte de flexion pure dont la répartition près du fond présente plusieurs changements de signe ce qui traduit le rôle de raidisseur joué par le fond, le nombre de ces changements diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne du fond, l'amplitude de cette flexion augmente dans le même sens pour atteindre son maximum près des appuis entre (20° et 90°) ; dans tous les cas, son amplitude au delà de 108° est faible.

Par contre, la contrainte de la membrane reste constamment nulle jusqu'au voisinage de l'appui où elle représente une compression dont la valeur est proche de la valeur donnée par notre théorie de la membrane (chapitre II).

a - 2) Contrainte de flexion longitudinale $\bar{V}_{22}$.

L'examen de la figure (3.9.) montre que cette contrainte est directement influencée par la charge de l'appui ; en particulier les fibres entre 0 et 54° et au delà de 126° sont comprimées et celles de la partie médiane sont tendues, par ailleurs, près du fond, la flexion locale autour de la fibre moyenne ($z = 0$) présente plusieurs changements de signe ce qui montre l'influence du fond dans la rigidification de ces fibres, le nombre de ces changements de signe va diminuer quand on s'éloigne du fond, par contre l'amplitude de la flexion locale va augmenter, du fait de la présence de la charge de contact appui-virole.

a - 3) Contrainte de cisaillement $\bar{V}_{12}$, figure (3.10)

La contrainte de cisaillement présente toujours une variation en $(\sin 2)$ ce qui suppose que chaque section ne subit aucun effort tranchant global ; autrement dit, la partie supérieure pousse sur la partie inférieure et vice versa. Ceci se traduit par une traction du fond ; l'amplitude de cette contrainte augmente avec x .

b) zone II, voisinage de l'appui $1,08 \leq x \leq 1,48$

b - 1) Contrainte de flexion circonférentielle $\bar{V}_{11}$, figures (3.8), (3.11)

Tout se passe comme si une compression agissait sur la fibre moyenne pour l'amener de zéro jusqu'à sa valeur maximale en $x = 1,28$, en effet la flexion circonférentielle pure conserve pratiquement la même amplitude en fonction de x et nous avons toujours le maximum de son intensité entre 20 et 90° ; toutefois, cette amplitude est augmentée dans la section de l'appui.

.../...

$\chi = 1,08$

$A = 1.28$

+ — + — = $\beta = +R$
• — • — = $\beta = 0$
○ — ○ — = $\beta = -R$

$\chi = 0.88$

$\chi = 0.68$

$\chi = 0.28$

$\chi = 0.08$

Figure(3.8) flexion circonférentielle

b - 2) Contrainte de flexion longitudinale ∇_{22} figures (3.9), (3.12)

La contrainte moyenne reste pratiquement la même entre $x = 1.08$ et $x = 1.48$, ce qui suppose que la flexion longitudinale globale s'effectue indépendamment de la dimension longitudinale de l'appui, par contre la flexion locale augmente et atteint son maximum pour la section située au milieu de l'appui notamment au voisinage de l'extrémité de l'appui entre 40 et 80° .

b - 3) Contrainte de cisaillement ∇_{12} figure (3.10)

De $x = 0$ jusqu'en $x = 1.28$, la contrainte de cisaillement se présente sous la forme de $(\sin \theta)$ avec un maximum d'amplitude à l'appui mais à partir de $x = 1.28$, il y a un changement d'allure qui correspond d'une façon approchée à $\sin$ surtout entre $(40$ et $100^\circ)$, le maximum se produisant pour $\theta = 60^\circ$.

c) zone III $1.48 \leq x \leq 3.2$

c - 1) Flexion circonférentielle ∇_{11} figure (3.12)

Comme nous l'avons constaté précédemment, cette contrainte présente un caractère de flexion pure ; la fibre moyenne est légèrement tendue au voisinage de l'appui, elle n'est plus sollicitée à partir de $x = 1.88$ et l'augmentation, constatée sur l'appui, de l'amplitude de cette flexion entre 20 et 90° s'amortit progressivement avec x croissant ; le nombre de changements de signe tombe de quatre au bord de l'appui à trois à partir de $x = 2.28$.

c - 2) Flexion longitudinale ∇_{22} figure (3.13)

Nous constatons que la courbe de flexion longitudinale en $x = 1.48$ de l'appui est tout à fait indentique à celle obtenue en $x = 1.08$; par contre dès qu'on s'éloigne de l'appui la courbe moyenne devient pratiquement symétrique en par rapport à $\theta = \frac{\pi}{2}$; la flexion localisée s'amortit progressivement pour devenir négligeable au milieu, le nombre de changements de signe diminue aussi de quatre jusqu'à trois à partir de $x = 2.28$.

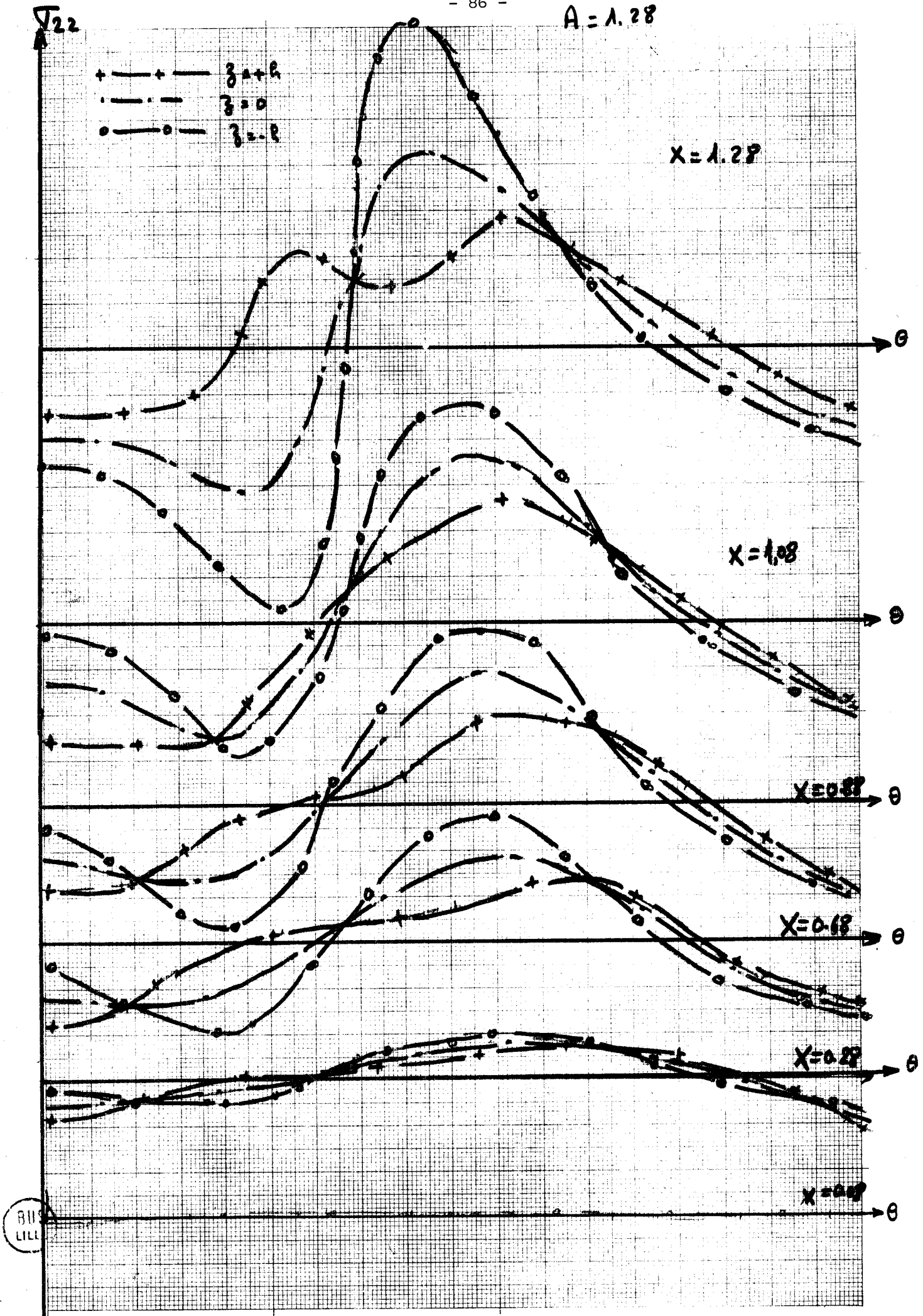
c - 3) Contrainte de cisaillement ∇_{12} figure (3.10)

Cette contrainte semble varier selon $\sin \theta$ et s'amortit progressivement avec x pour s'annuler au milieu, son maximum se situe toujours vers $\theta = 60^\circ$ et se déplace vers $\theta = \frac{\pi}{2}$ quand on s'éloigne de l'appui.

D'une façon générale, nous constatons le phénomène suivant : les fonds retiennent les fibres longitudinales ; par l'action de la pression hydrostatique et par l'action locale des appuis on assiste à la création

.../...

$A = 1.28$



Figure(3.9) flexion longitudinale

5 $\gamma_{92} \text{ (daN/mm}^2\text{)}$

- 87 -

$A = 1.28$

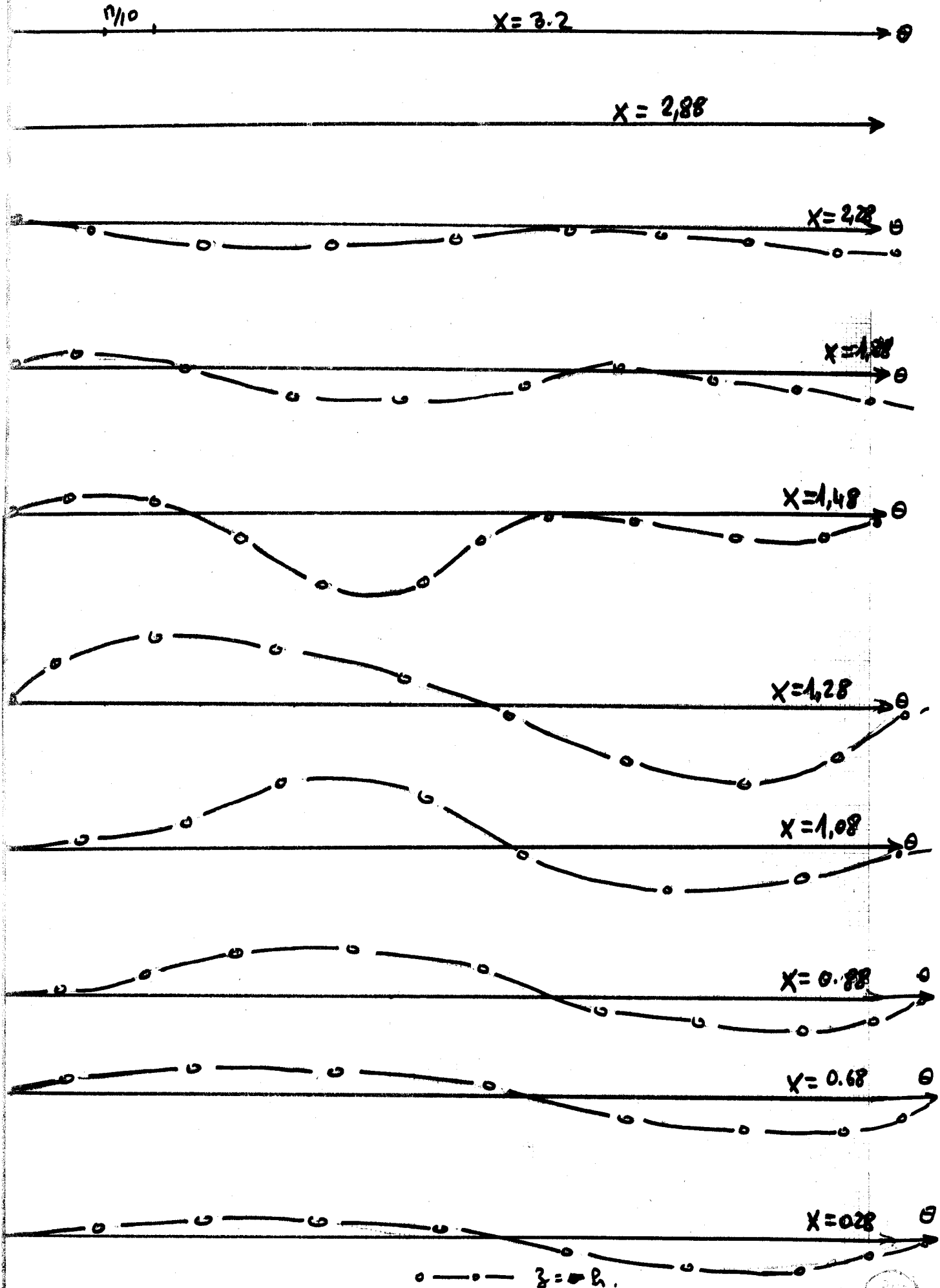


Figure (3.10) contrainte de cisaillement

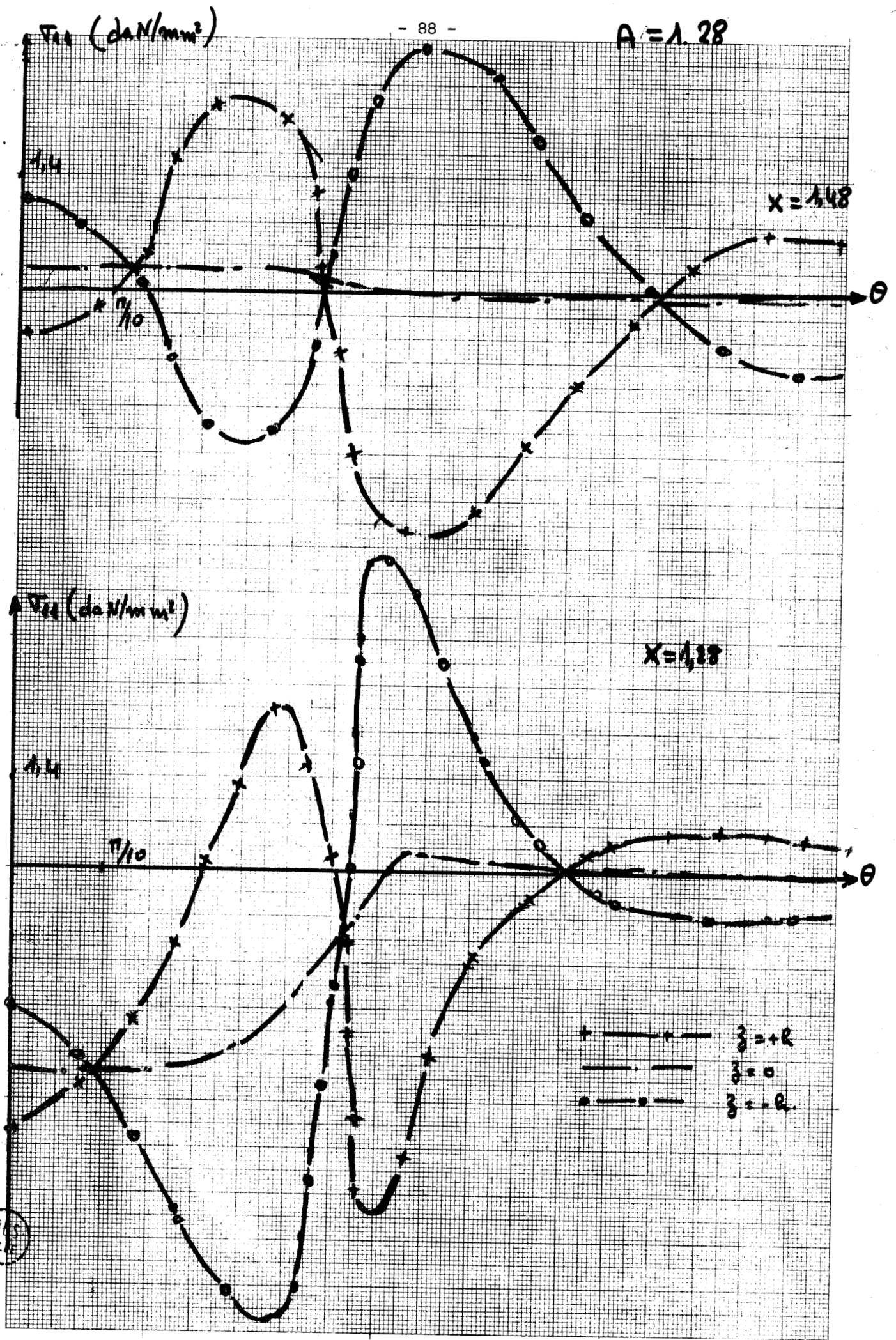


Figure (3.11) flexion circonférentielle

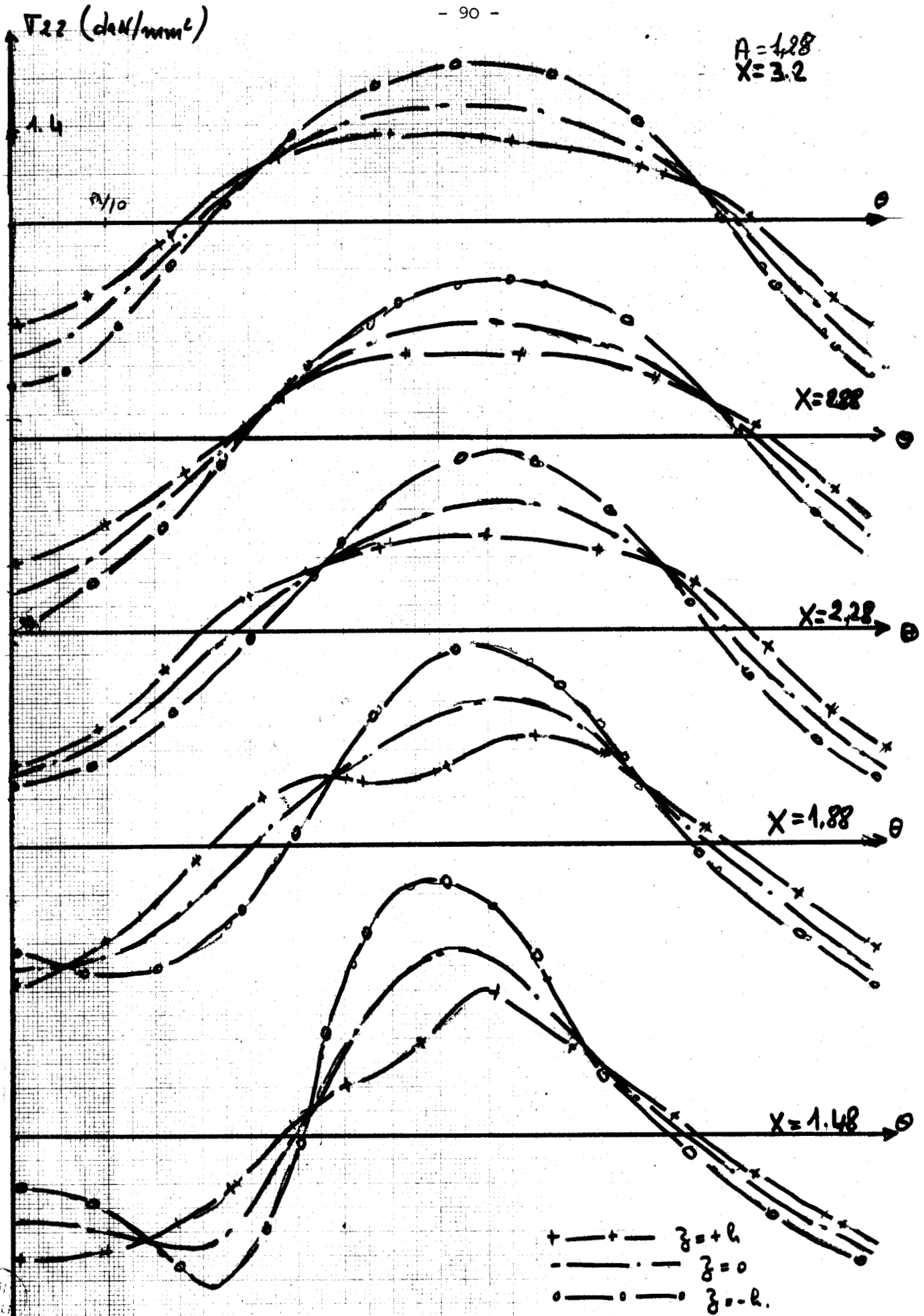


Figure (3.13) flexion longitudinale

d'une flexion circonférentielle pure qui change de signe d'une façon croissante quand on s'approche des fonds, les appuis intervenant localement pour dévier en compression la fibre poyenne et pour amplifier localement cette flexion entre 20 et 90°.

La contrainte de flexion longitudinale est le résultat d'une flexion verticale et transversale avec une action localisée des appuis.

3.4.4.2 - Appuis près des fonds $A = 0.2$ m figures (3.14), (3.15), (3.16)

a-b) Zones I et II

Etant donné la proximité de l'appui du fond, ce dernier joue alors le rôle d'un raidisseur et, par conséquent, il limite "la propagation" de la flexion localisée. Pour la partie située à gauche de l'appui et pour la zone située sur l'appui, la contrainte de cisaillement qui est proportionnelle à $\sin 2\theta$ près du fond, devient proportionnelle à $\sin \theta$ dans la zone de l'appui ; la flexion circonférentielle suit exactement les résultats que nous avons trouvés pour le cas précédent ($A = 0.2 L$), mais l'amplitude du moment fléchissant correspondant est plus faible qu'auparavant.

c) Zone III $0.2 < x \leq 3.2$

A l'inverse du cas précédent ($A = 0.2 L$) nous constatons un amortissement plus rapide des effets locaux de l'appui.

c-1) Flexion circonférentielle V11 figure (3.14)

L'amplification locale de la contrainte entre 36 et 90° s'amortit rapidement dès qu'on s'éloigne de l'appui, la flexion elle-même devient négligeable à partir de $x = 1.8$ m ; et nous obtenons à partir de cette distance jusqu'au milieu de l'appareil la même flexion circonférentielle.

c-2) Flexion longitudinale V22 figure (3.15)

Le redressement de la courbe représentant la flexion globale se manifeste plus rapidement qu'auparavant à partir de $x = 1.2$ m ; cette flexion s'identifie à celle d'une poutre continue à partir de cette distance $x = 1.2$ m.

c-3) Contrainte de cisaillement V12 figure (3.16)

Au delà de $x = 0.4$ nous constatons que la courbe représentant V12 tend vers la proportionnalité à $\sin \theta$; ceci est réalisé à partir de $x = 1.2$. Par conséquent, nous pouvons conclure que l'action de l'appui est différente selon que celui-ci se trouve près du fond ou en est assez éloigné.

.../...

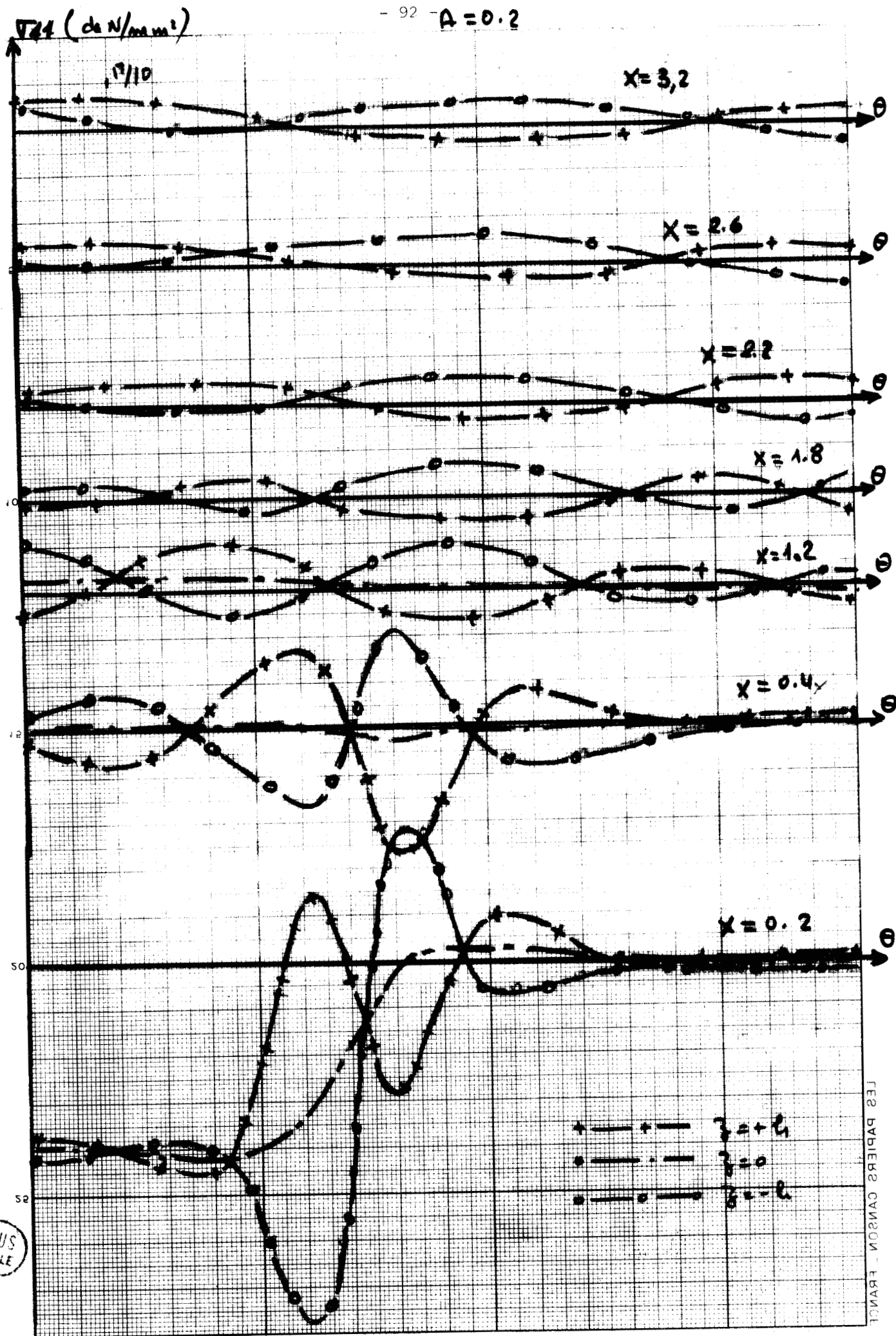


Figure (3.14)

$A = 0.2$

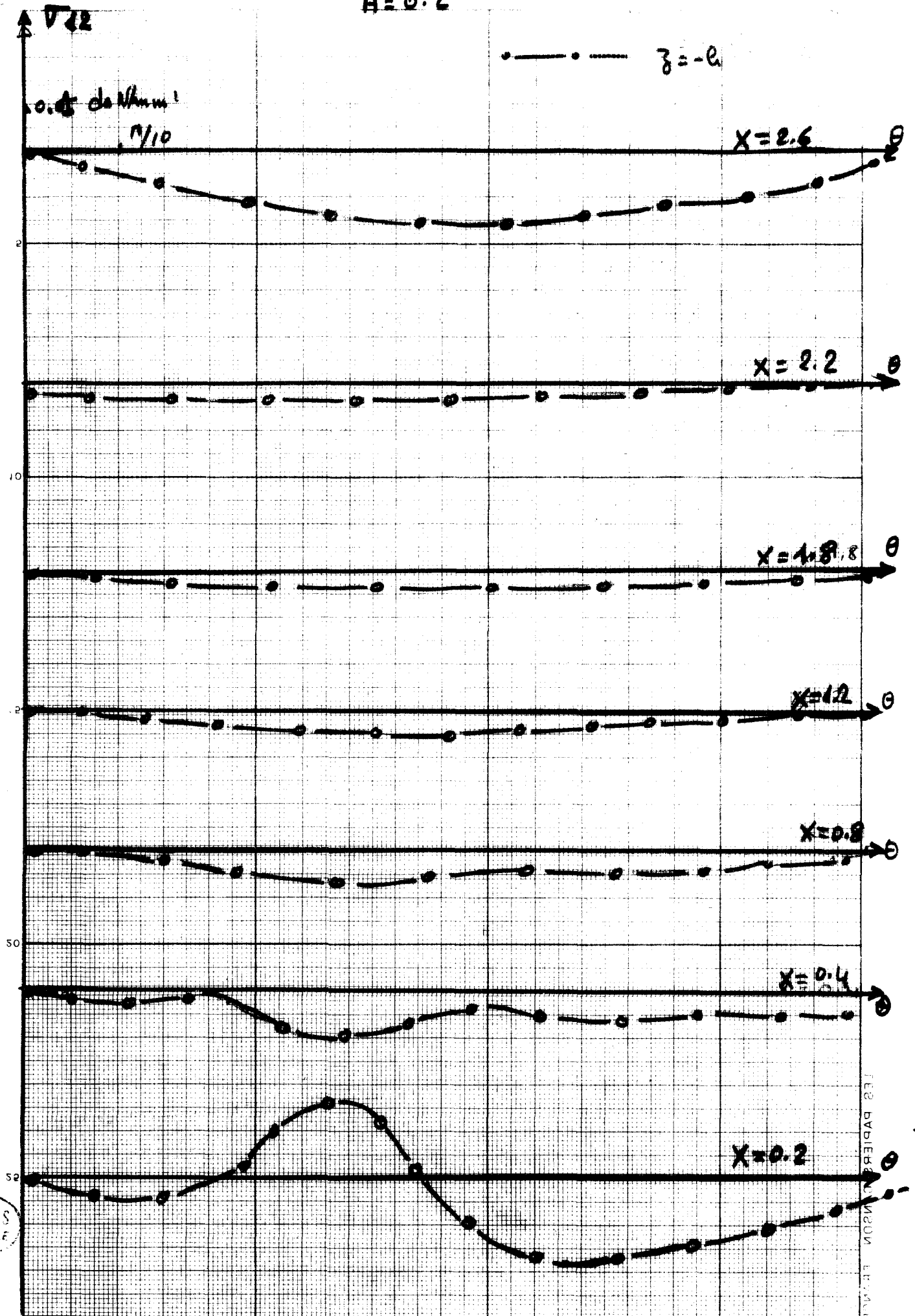


Figure (3.16)

L'analyse que nous venons d'effectuer fait ressortir le caractère local du phénomène ; pour confirmer ce résultat nous allons analyser dans ce qui suit les variations des contraintes en suivant une fibre longitudinale donnée.

3.4.5. - REPARTITION LONGITUDINALE DES CONTRAINTES

3.4.5.1. - Appuis éloignés des fonds $A = 0.2 L$

Si nous examinons l'évolution des contraintes σ_{22} et σ_{11} en fonction de x , nous pouvons constater que pour une fibre donnée ($\theta = 0^\circ$) les effets de l'appui se font sentir de la manière suivante :

1 - $\theta = 0^\circ$ Figure (3.17)

1.1 - Flexion circonférentielle σ_{11}

La fibre moyenne subit une compression à l'endroit de l'appui et une faible traction sur ses côtés, la flexion circonférentielle est faible à ces endroits, sa valeur est pratiquement la même sur la distance entre l'origine et $x = 2.18$ ensuite son signe change à $2.28 m$ jusqu'au milieu avec une amplitude non négligeable.

1.2 - Flexion longitudinale σ_{22}

La flexion moyenne d'ensemble est pratiquement non perturbée par contre à l'endroit de l'appui la flexion localisée est pratiquement celle d'une poutre encastree, uniformément chargée, cette flexion localisée est pratiquement nulle à gauche de l'appui, très faible à droite :

2 - $\theta = 1/10$ Figure (3.18)

Même remarque pour σ_{22} ; par contre pour σ_{11} un changement appréciable se produit : la flexion locale se fait sentir de la même manière sur la distance $b + 200 mm$, (avant $b - 100$ et après $b + 100$) on a le changement de signe avec une amplitude nulle à gauche et croissante à droite jusqu'au milieu.

3 - $\theta = 2/10$ Figure (3.19)

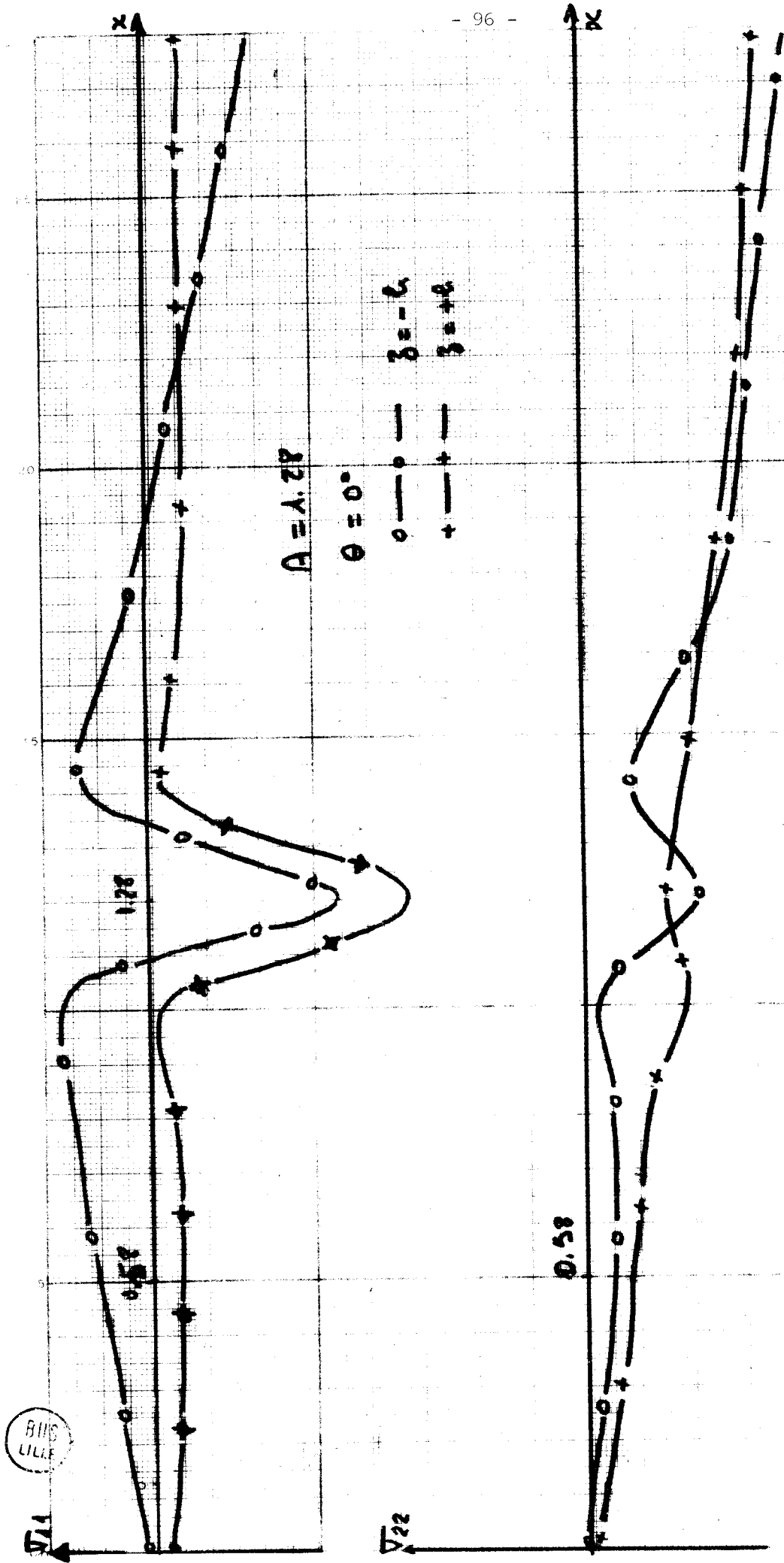
Le phénomène de la flexion locale étant seule différente des cas précédents, nous constatons qu'elle est amplifiée considérablement ; en particulier σ_{11} se fait sentir le long de l'appareil avec un maximum à l'endroit de l'appui et la flexion circonférentielle localisée se fait pratiquement avec la même amplitude le long de l'appareil.

4 - $\theta = 3/10$ Figure (3.20)

4.1 - Flexion circonférentielle σ_{11}

Le maximum du moment fléchissant apparaît cette fois à l'endroit de l'appui et s'amortit progressivement quand on s'en éloigne pour s'annuler au milieu.

.../...

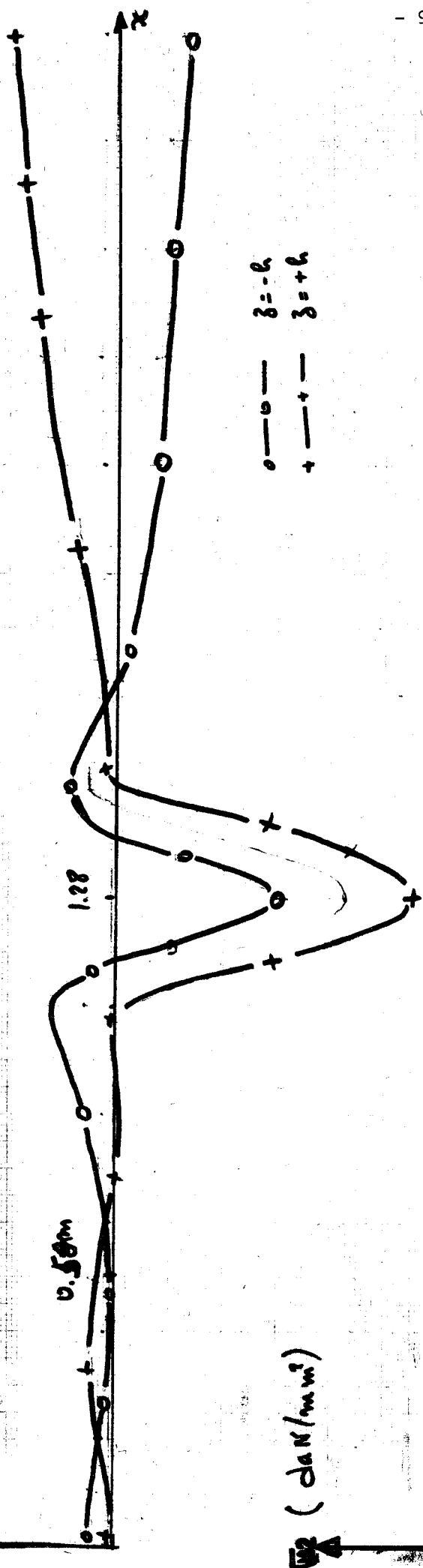


, APPUI

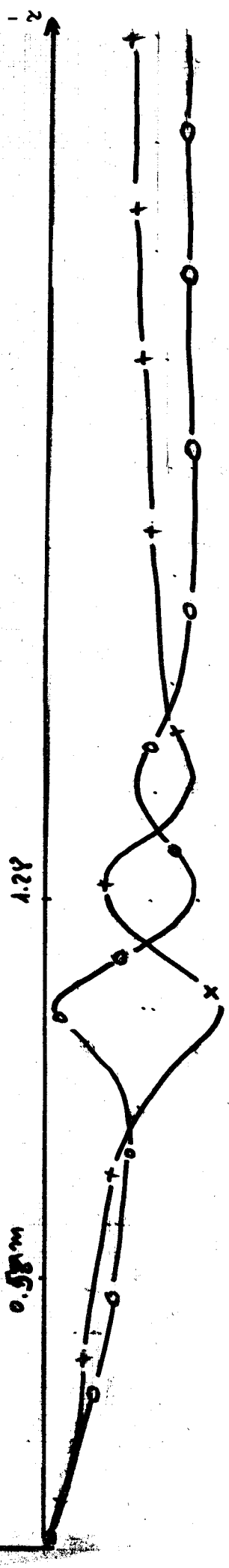
Figure (3.17)

$\sqrt{t} \text{ (cm}^2\text{/min)}^2$

$A = 1.28$
 $\theta = 1/10$



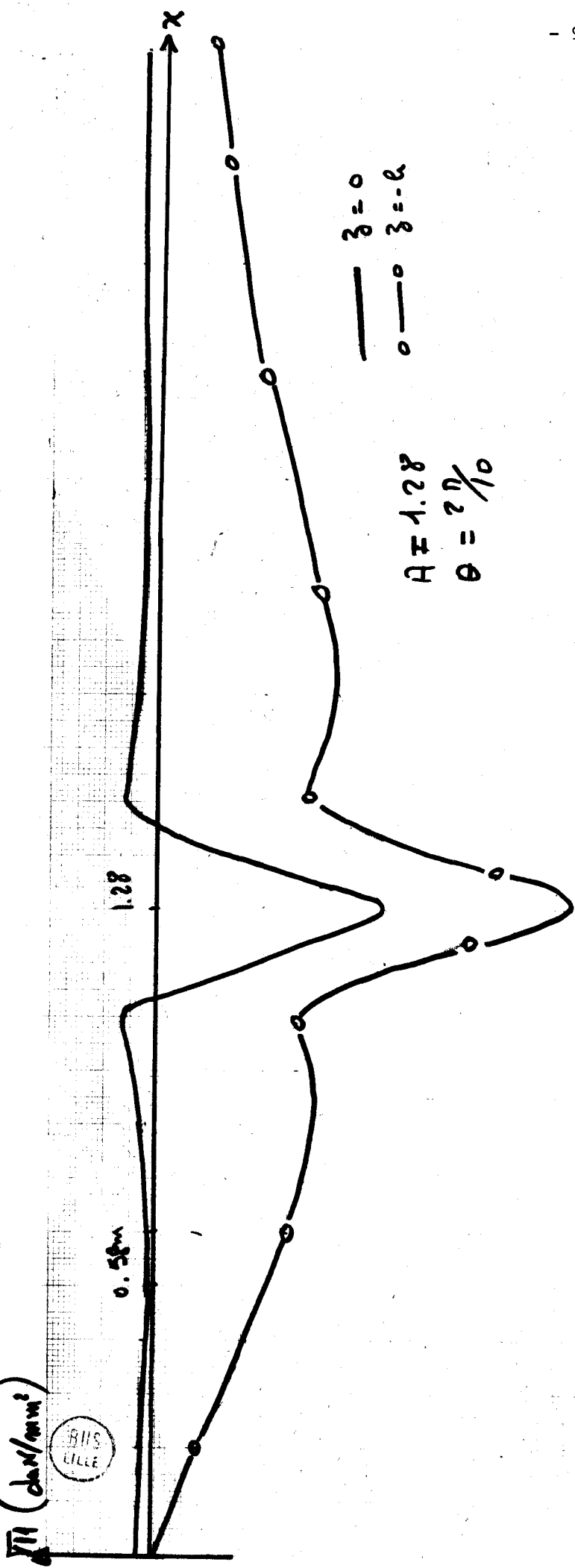
$\sqrt{t} \text{ (cm}^2\text{/min)}^2$



- 97 - z

Figure (3.18)





- 98 -

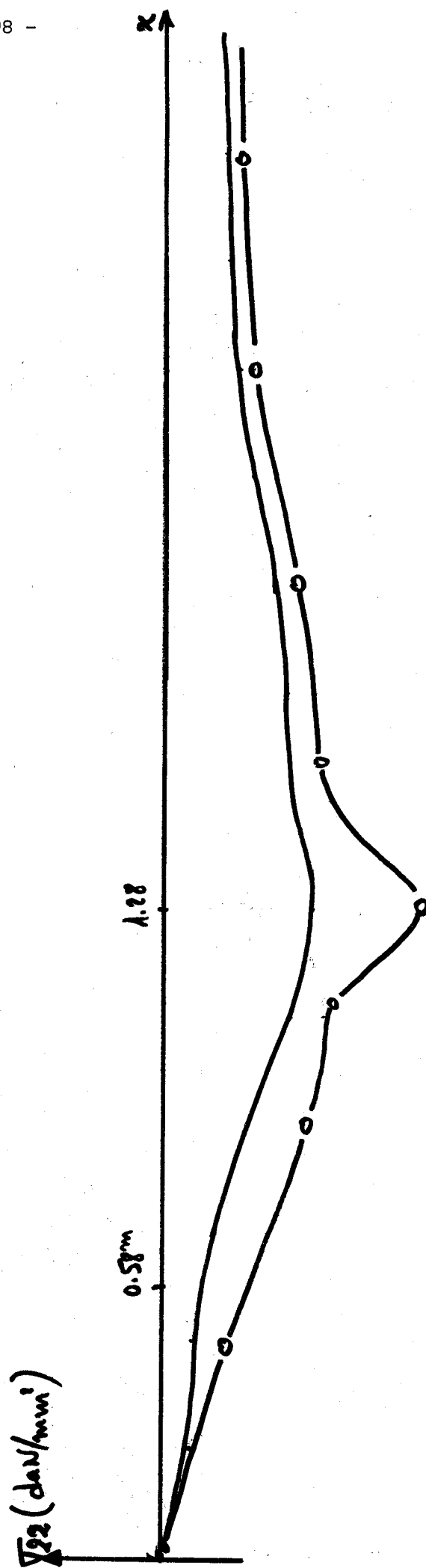


Figure (3.19)

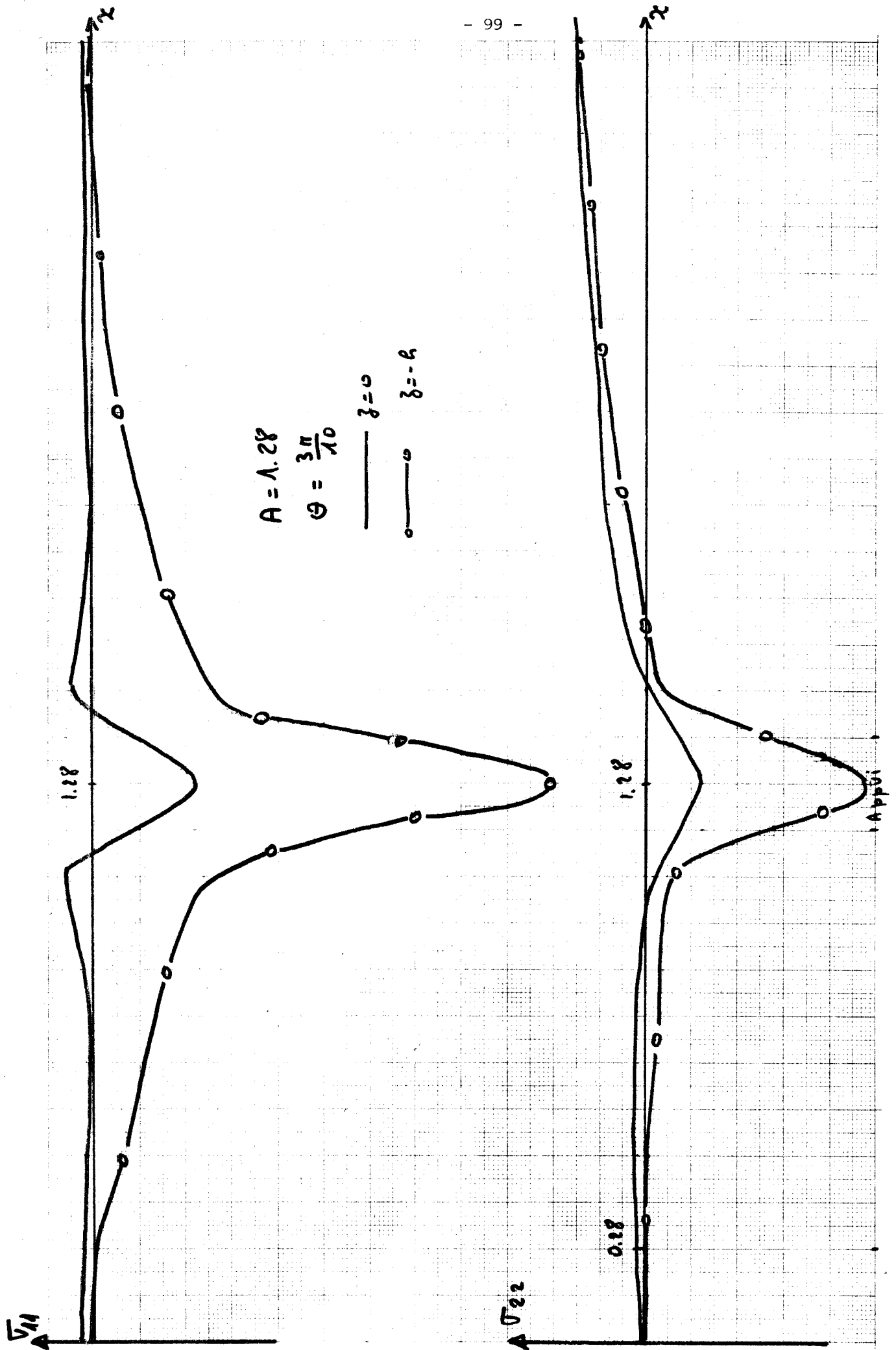


Figure (3.20)

BUS
LILLE

4.2. - Flexion longitudinale

Nous constatons la même remarque pour ∇_{22} qu'auparavant ; toutefois, la contrainte moyenne devient positive juste à droite de l'appui jusqu'au milieu, elle est légèrement modifiée à l'endroit de l'appui.

5 - $\theta = \frac{2\eta}{5}$ Figure (3.21)

5.1. - Flexion circonférentielle ∇_{11}

La fibre moyenne n'est soumise à aucune sollicitation et la flexion circonférentielle se fait sentir avec le même signe sur tout l'appareil (maximum à l'endroit de l'appui).

5.2. - Flexion longitudinale ∇_{22}

Nous avons la même constatation qu'au 3 - mais les signes sont inversés, la contrainte moyenne est modifiée au niveau de l'appui.

6 - $\theta = \frac{\eta}{2}$ Figure (3.22)

6.1. - La flexion circonférentielle ∇_{11} agit sur la totalité de la longueur de cette fibre, sa valeur maximale est au milieu de l'appareil.

6.2. - Flexion longitudinale ∇_{22}

A partir de $\theta = \frac{\eta}{2}$, la flexion longitudinale locale n'est plus influencée par la position de l'appui ; nous avons une courbe de flexion pure d'un appareil fixé à ses extrémités.

7 - $\theta = \frac{6\eta}{10}$, $\theta = \frac{7\eta}{10}$... etc Figure (3.23)

7.1. - La flexion circonférentielle apparaît à partir de $x = 1.48$ et agit sur la partie de l'appareil comprise entre $x = 1.48$ et $x = 4.9$ m, son maximum est au milieu de l'appareil.

7.2. - La flexion longitudinale ne présente aucune flexion locale appréciable.

3.4.5.2. - Appuis près des fonds $A = 0.2$ m figure (3.24)

Nous avons un phénomène tout à fait comparable au cas précédent, toutefois, l'amortissement de la flexion circonférentielle est plus rapide qu'auparavant, (hormis la section de l'appui), l'amplitude de cette flexion peut être négligée à partir de $x = 1.8$ m = 3R.

Par ailleurs, la contrainte de flexion longitudinale T_{22} va être semblable à celle de la poutre équivalente au milieu de l'appareil, et la partie supérieure de l'appareil finit par être comprimée à partir de la section de l'appui jusqu'à la section $x = 0.4$ m (voir figure 3.15).

Dans tous les cas, nous assistons à une action locale des supports qui agissent chacun sur une bande dont la largeur est plus faible quand l'appui se trouve près des fonds.

.../...

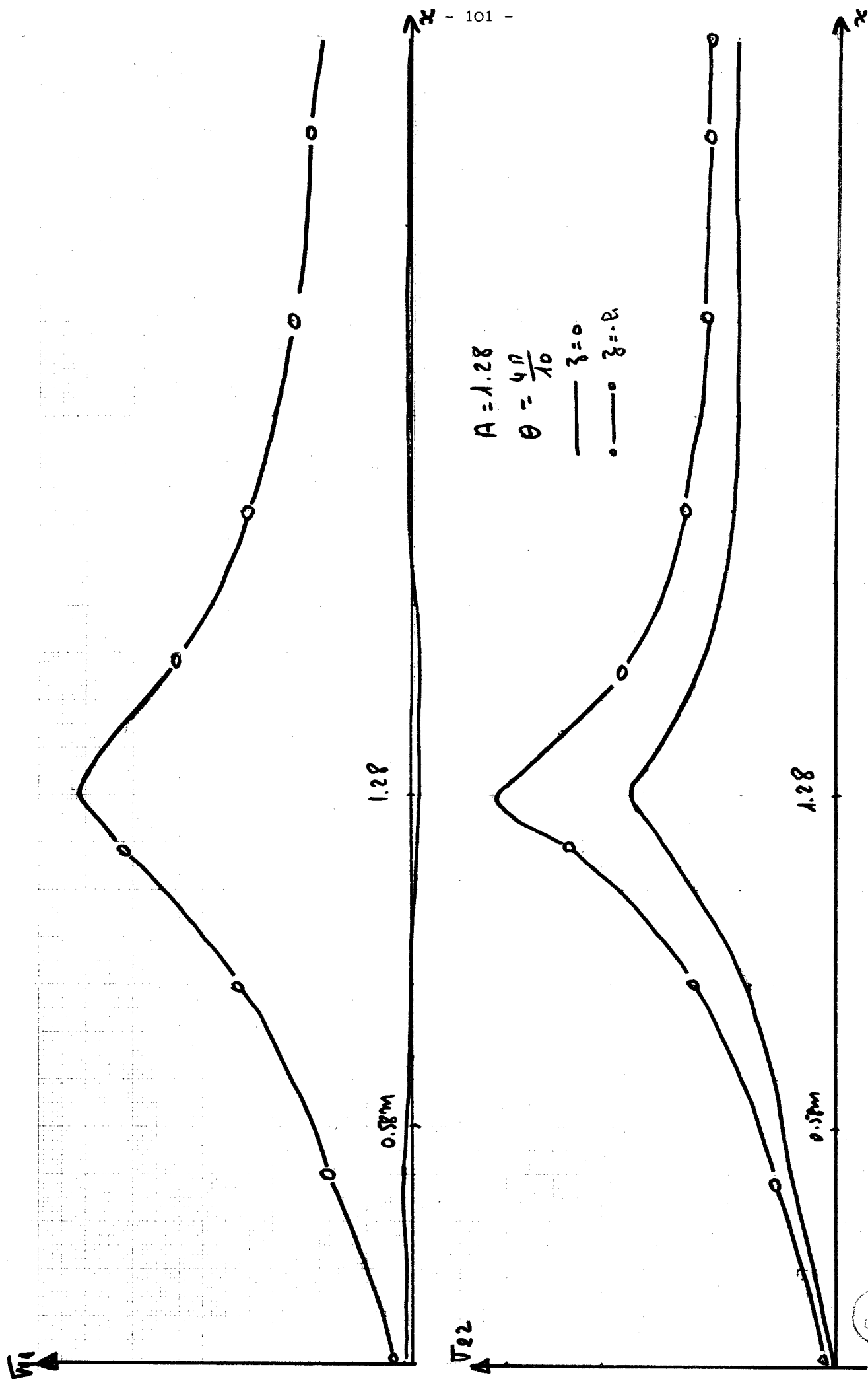


Figure (3.21)



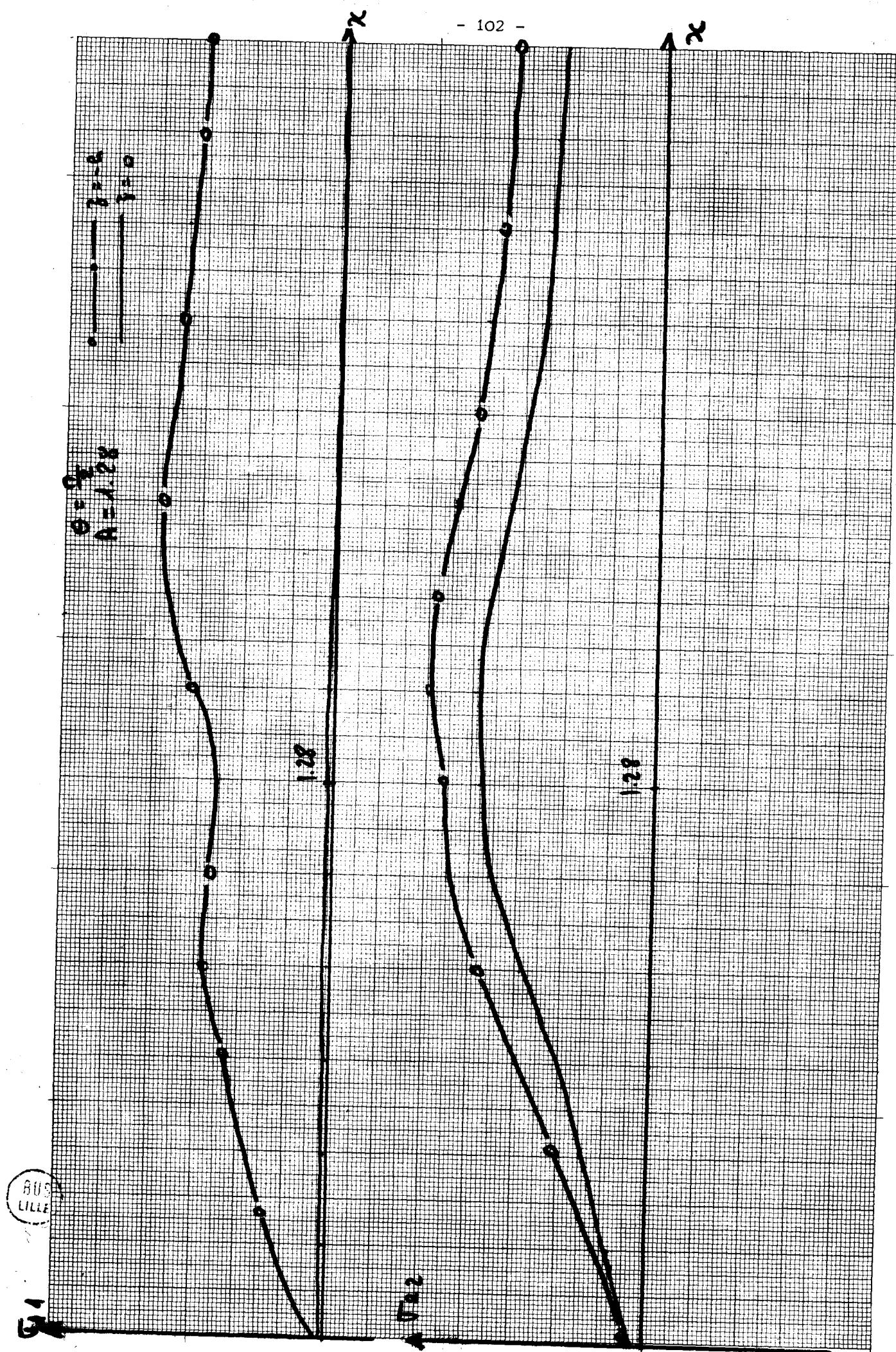


Figure (3.22)

A = 1.28

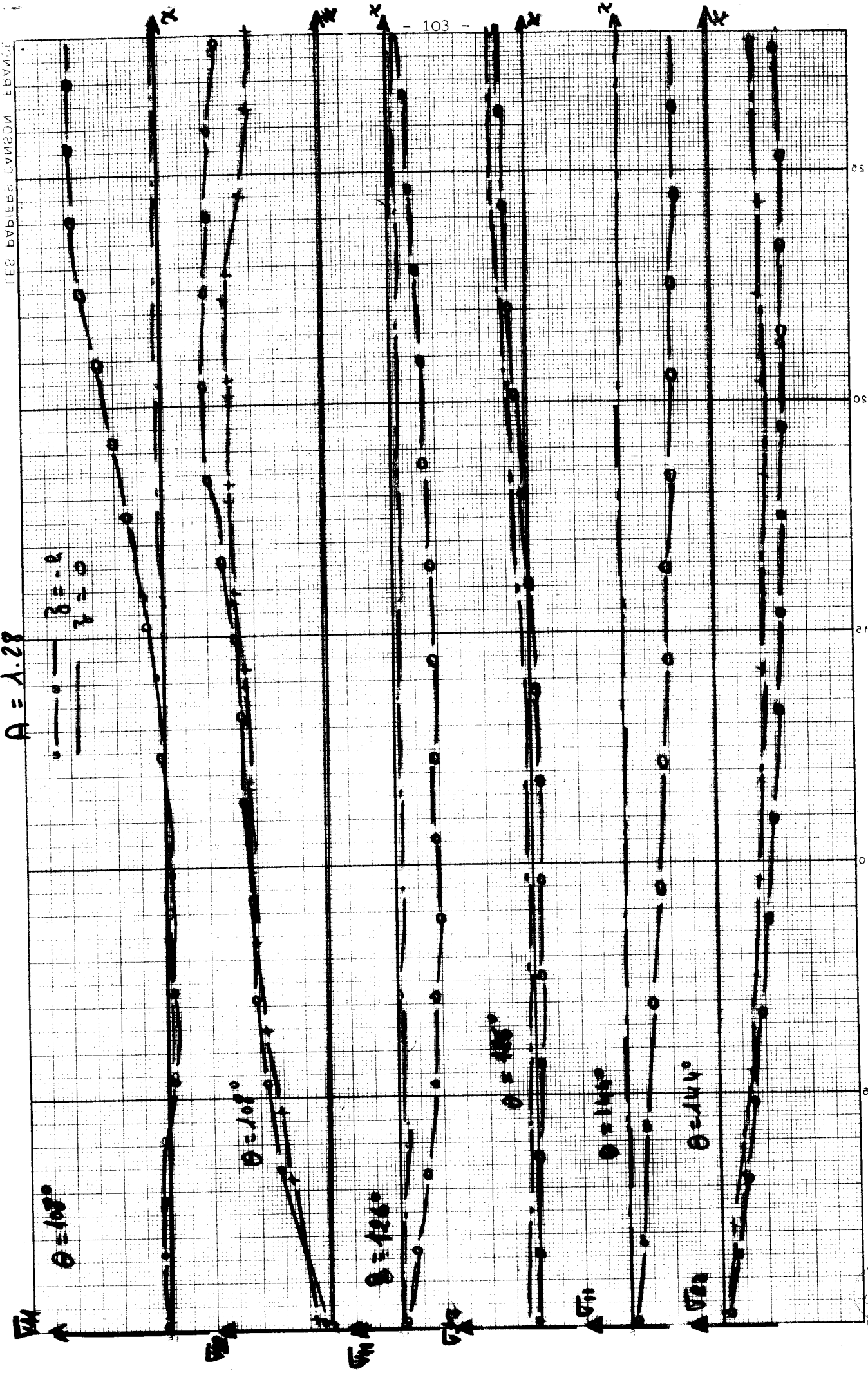


Figure (3.23)



BUS
LILLE

22

ΔV_{II} $\theta = 0$

$A = 0.2$

+ — + — $\zeta = 0$
• — • — $\zeta = 0.6$

λ

- 104 -

0.2
0.4 m

Figure (3.24)

3.4.6. - INFLUENCE DE LA POSITION DE L'APPUI SUR LA REPARTITION DES CONTRAINTES

De l'étude précédente il apparaît que la position de l'appui joue un rôle important dans la répartition des contraintes même assez loin de cet appui ; en particulier si on fait varier la position de l'appui nous constatons qu'à partir d'une certaine position, la section du milieu va être sollicitée davantage en flexion circonférentielle et en plus, la flexion longitudinale de cette section commence à différer de la flexion d'une poutre ($A = 0.1$) pour devenir à la limite une flexion présentant une symétrie par rapport à l'axe $\theta = \frac{\pi}{2}$; mais dans tous les cas, la présence de l'appui conserve un caractère local limité à une zone dont la largeur est fonction de la largeur b de l'appui.

En particulier si nous examinons les figures (3.25, 3.26) et (3.27, 3.28) effectivement relatives à la position de l'appui en $A = 0.53m$ et en $A = 1m$ nous pouvons déduire les constatations suivantes :

- 1 - Les courbes représentatives de la contrainte circonférentielle dans la section de l'appui sont similaires ; en particulier pour les positions de l'appui en $A = 0.53, 1, 1.28m$ nous avons la même contrainte de la membrane ; sa valeur est proche de celle donnée par notre théorie de la membrane.
- 2 - Les contraintes de flexion longitudinale dans la section de l'appui dans les deux méthodes sont du même ordre de grandeur contrairement à la théorie de ZICK.
- 3 - Dans la section du milieu, nous constatons qu'à partir de $A = 0.53$, la section du milieu commence par être comprimée sur sa partie supérieure longitudinalement ; ceci provient surtout du fait que l'appareil s'ovalise dans cette région ce qui revient à pousser vers le bas les fibres supérieures de l'appareil.

Par ailleurs, la flexion circonférentielle dans cette section est plus importante pour la position de l'appui correspondant à $A = 1m$; ce qui infirme l'hypothèse de ZICK d'une flexion circonférentielle constante sur la moitié de l'appareil à partir de $A > 0.3m$; en effet, pour $A = 1m$ nous avons trouvé des contraintes supérieures à celles obtenues pour $A = 0.53m$. Par ailleurs, si nous examinons les résultats des calculs dans toutes les sections pour la position $A = 1m$, figures (3.29) et (3.30).

Nous assistons à un phénomène tout à fait comparable à celui relatif à la position $A = 1.28$ précédemment exposé ; en particulier nous constatons que :

.../...

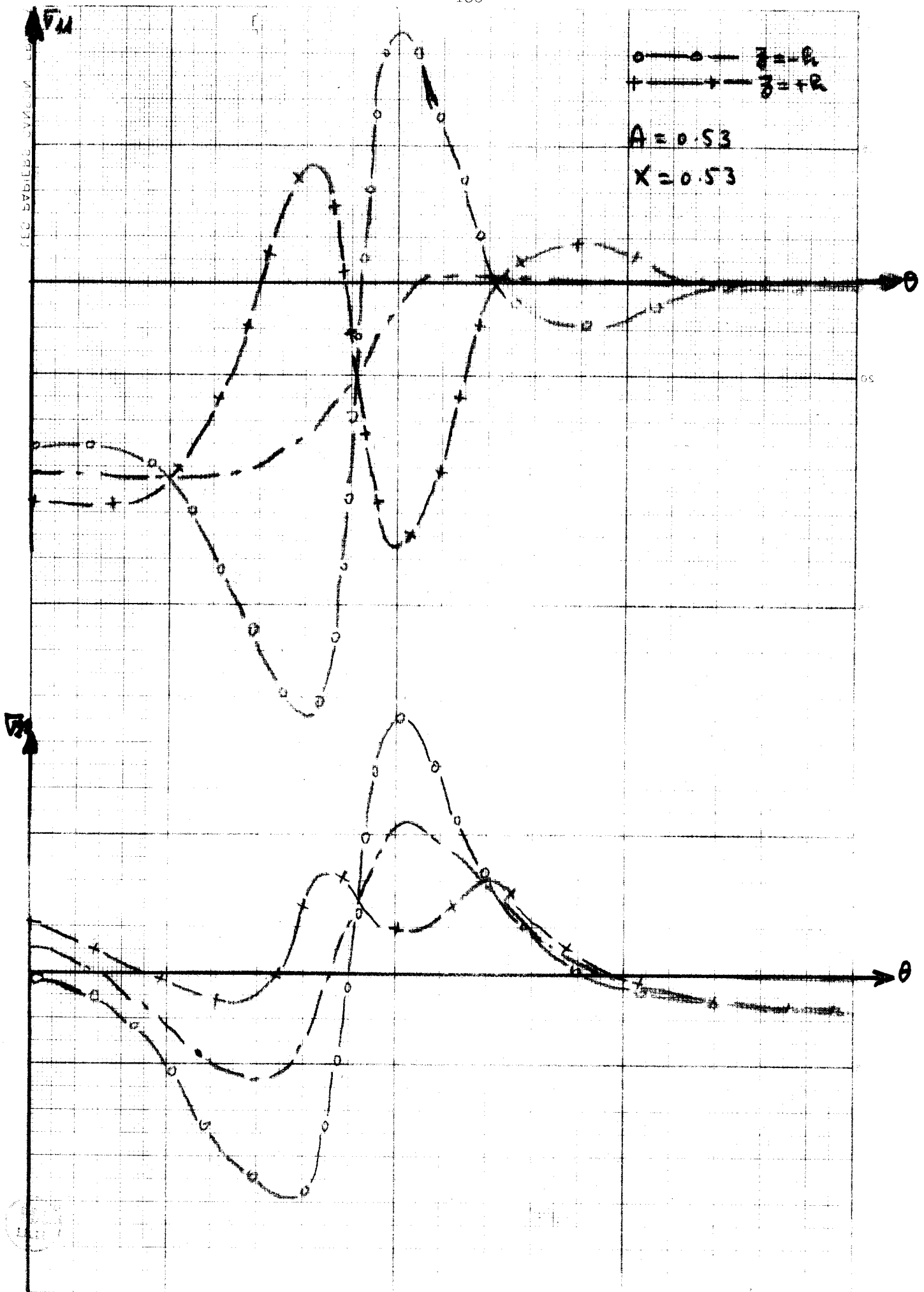


Figure (3.25)

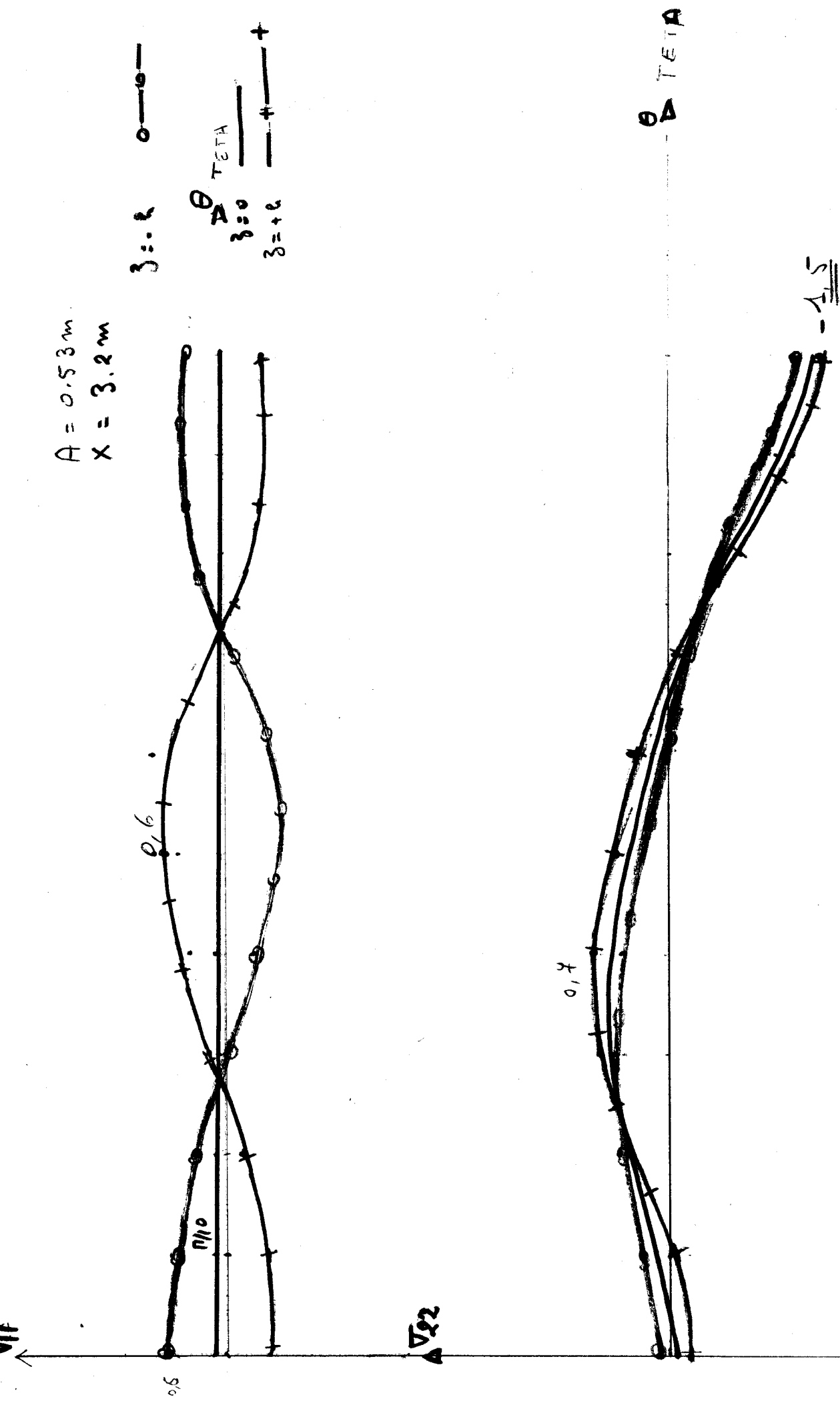


Figure (3.26) section du milieu



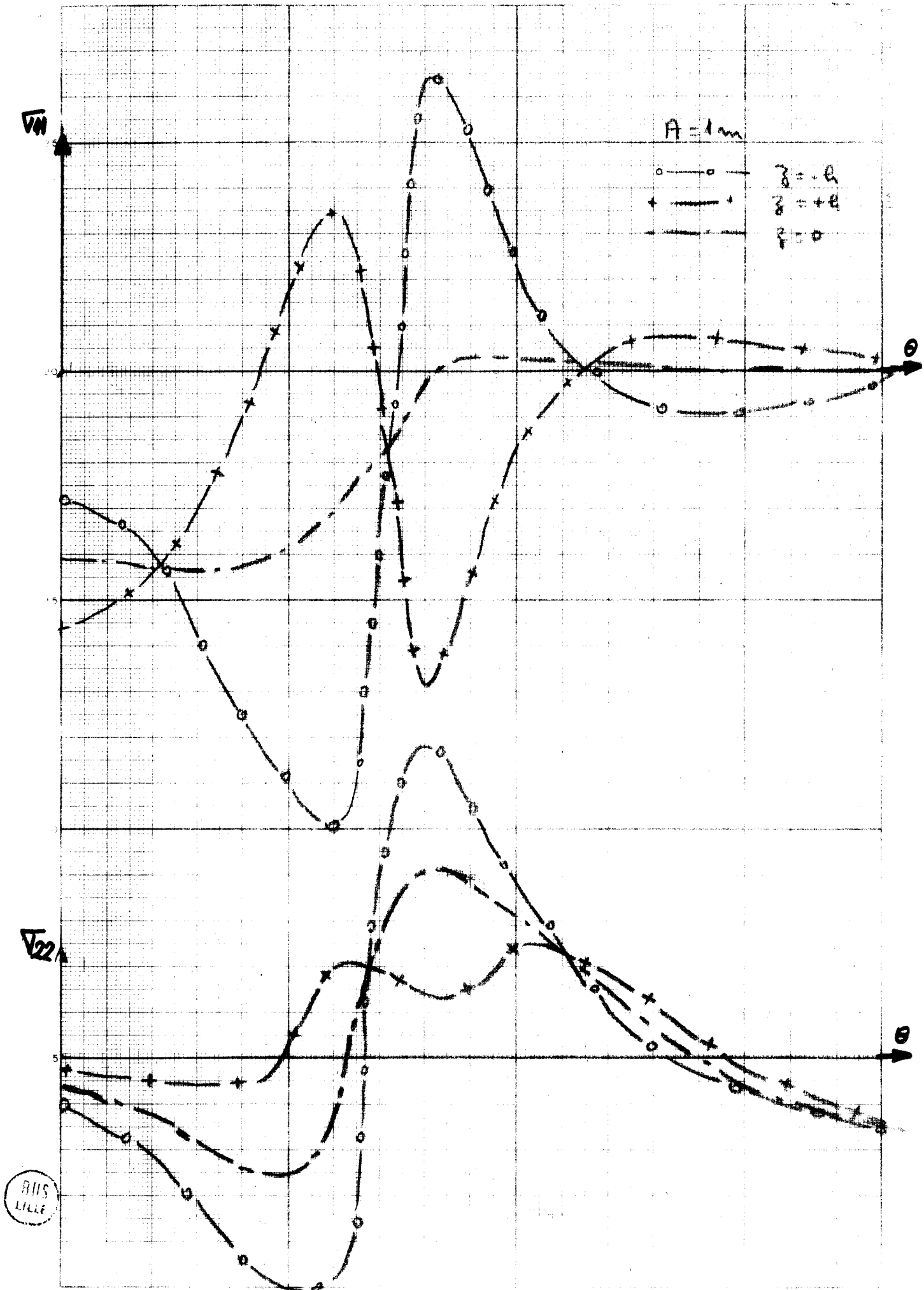


Figure (3.27) section de l'appui

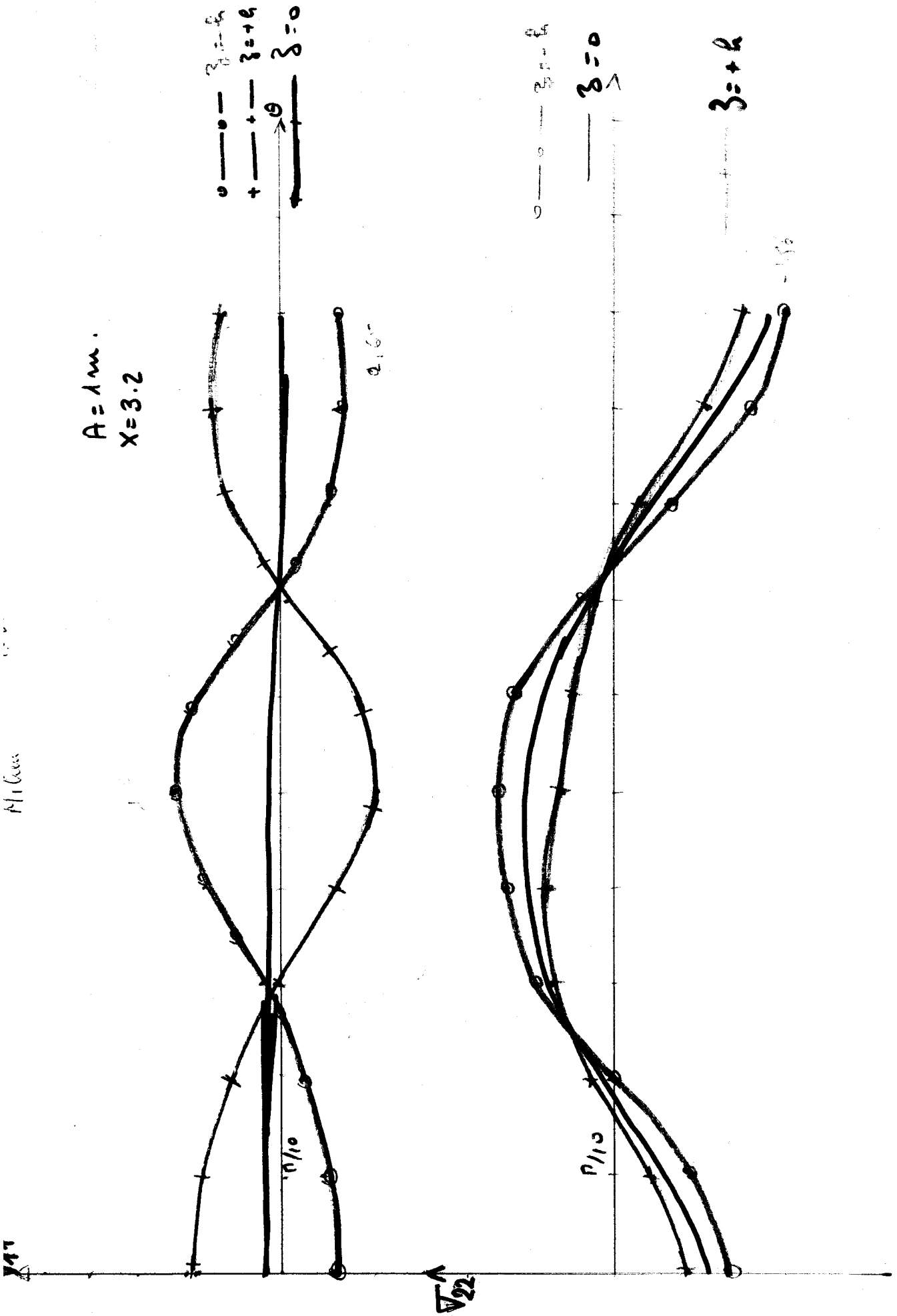


Figure (3.28) section du milieu

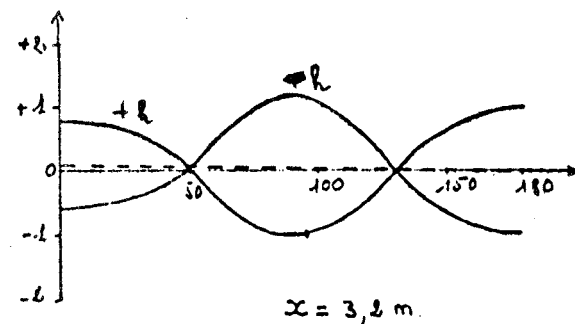
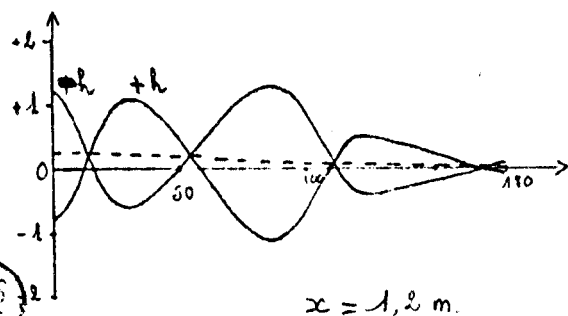
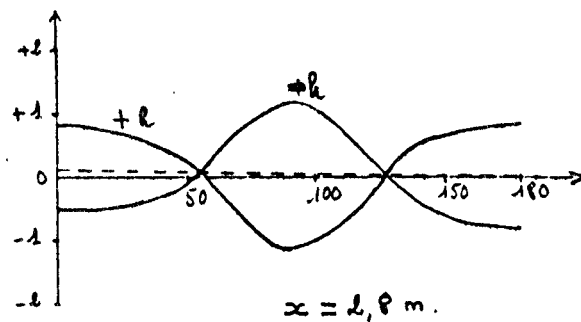
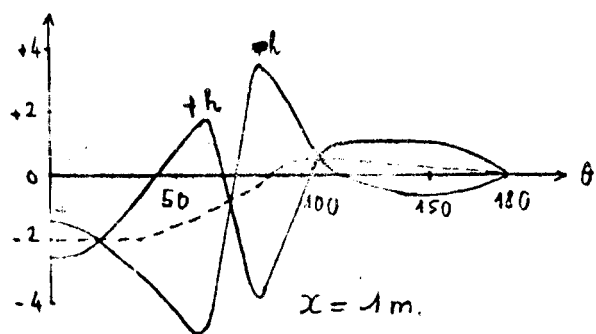
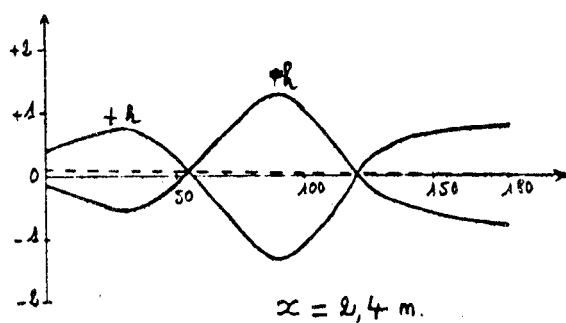
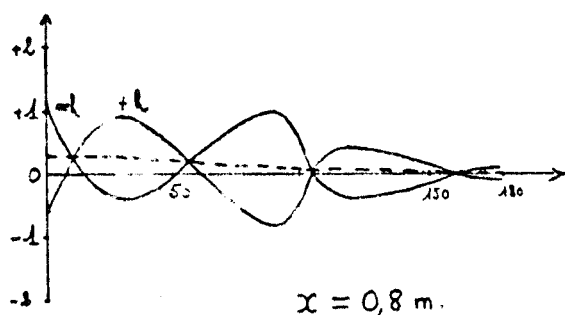
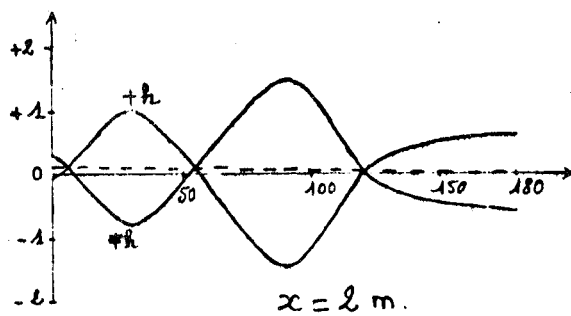
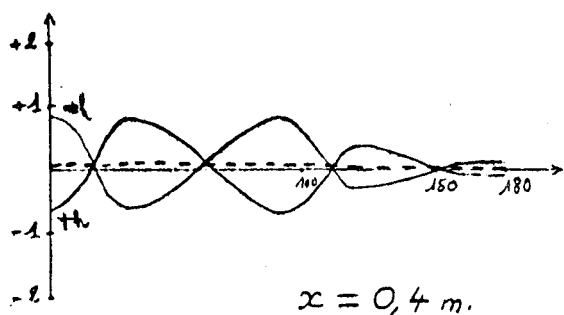
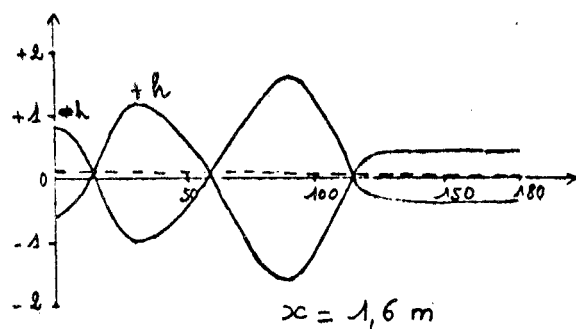
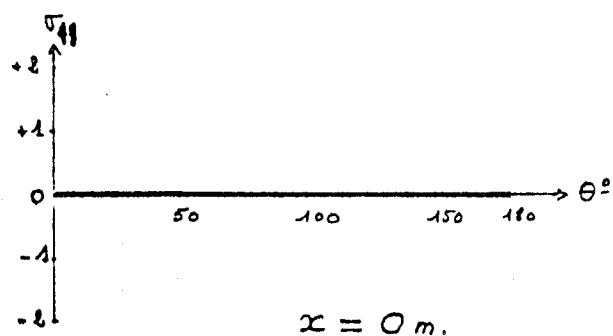


Figure (3.29) Appui à 1 m

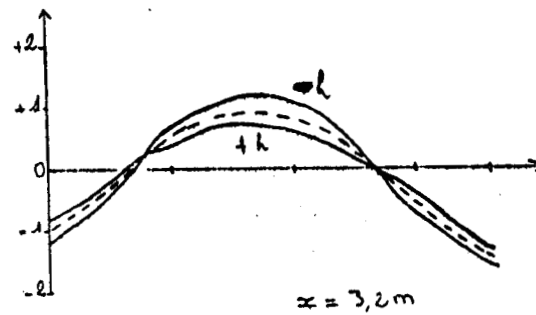
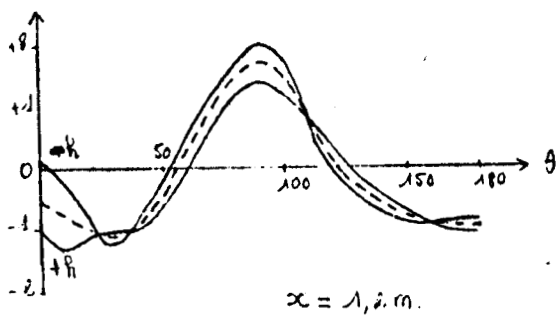
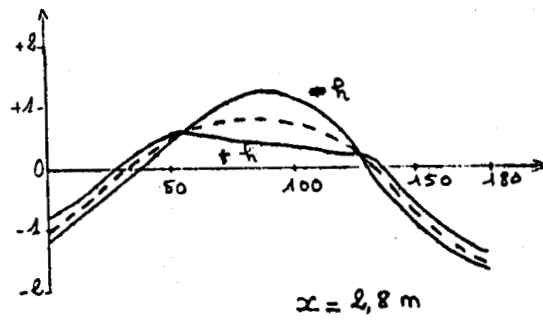
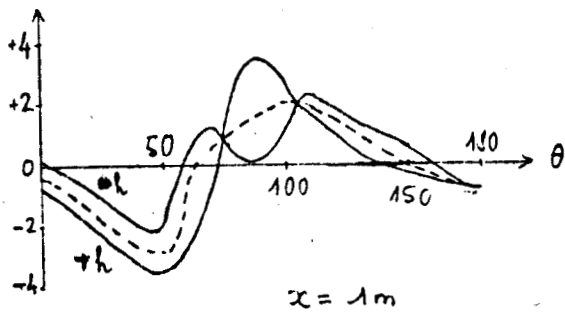
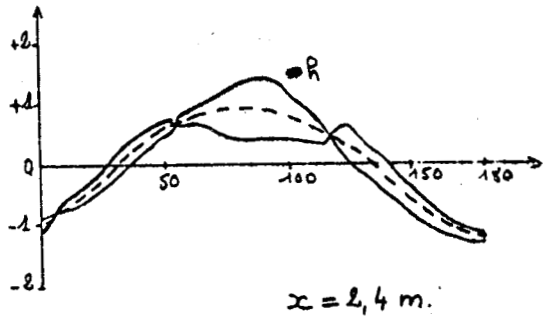
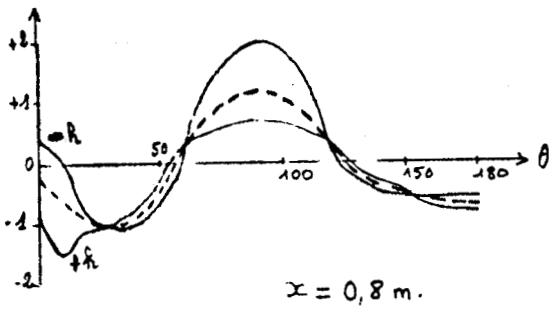
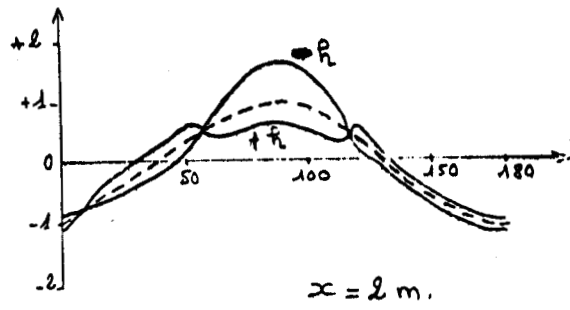
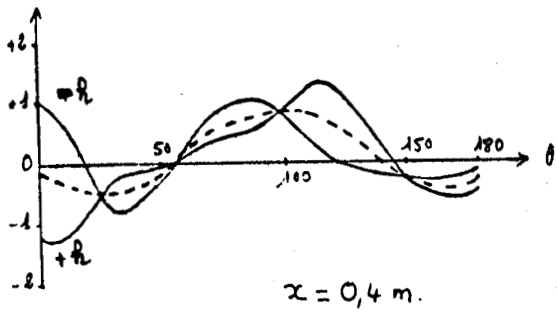
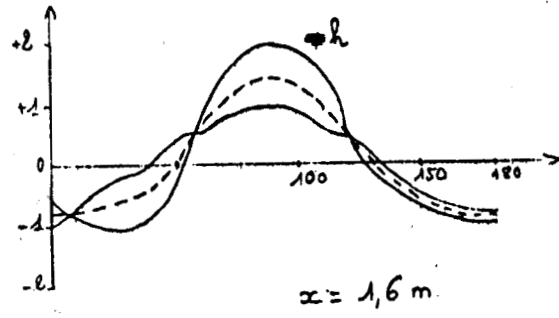
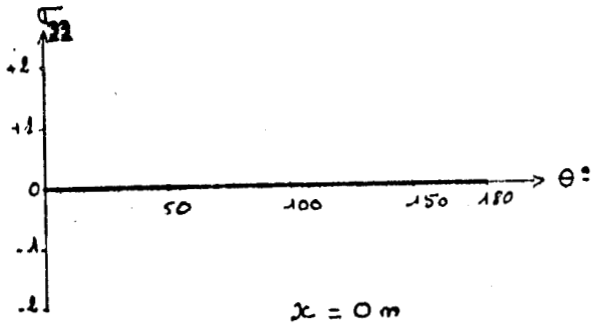


Figure (3.30) Appui à 1 m

A - La flexion circonférentielle ∇_{11} est très amplifiée au niveau de l'appui et la compression de la membrane n'apparaît que dans cette section.

B - La flexion longitudinale ∇_{22} est directement liée à la déformation de l'appareil suite à son ovalisation, car la compression des fibres supérieures s'effectue tout le long de l'appareil, ce résultat a été vérifié expérimentalement par nous.

Autrement dit, la notion de la poutre équivalente perd tout sens dès que l'appareil admet une épaisseur faible.

3.4.7. - INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE LA COQUE - Figure (3.31)

En diminuant l'épaisseur de la coque, nous assistons à une amplification des variations des contraintes précédemment trouvées, toutefois il semble que la contrainte circonférentielle de la membrane varie d'une façon inverse à l'épaisseur t de la coque ; cependant, l'allure des courbes représentatives des contraintes ∇_{11} , ∇_{22} et ∇_{12} dans la section de l'appui est conservée ; toutefois, il apparaît que la répartition générale des contraintes dans les autres sections dépend d'une façon très importante de l'épaisseur de l'appareil, pour cette raison nous effectuons le calcul sur l'appareil utilisé par ZICK et CARLSON.

3.4.8. - Application de notre méthode à l'appareil ZICK-CARLSON figures (3.32, 3.33, 3.34 et 3.35)

Dans le but d'étudier d'une part, le comportement d'un appareil de grande épaisseur, et de comparer les résultats de nos calculs à l'expérience de ZICK-CARLSON, nous avons calculé la répartition des contraintes dans leur appareil en conservant la répartition uniforme de la pression de contact précédemment décrite. Les résultats du calcul montrent que l'appareil a un comportement d'ensemble selon la théorie de la poutre équivalente uniquement dans sa section du milieu sauf pour la position de l'appui à $A = 20 \% L$ où nous remarquons que la flexion longitudinale locale, dans cette section, devient importante ; par contre, la flexion circonférentielle dans cette section est loin d'être négligeable comme l'a supposé ZICK.

En outre, nous assistons au même phénomène que pour notre appareil dans les sections de l'appui où effectivement nous avons une compression longitudinale pour les fibres supérieures et inférieures de cette section, cette compression peut s'expliquer facilement par l'ovalisation de l'appareil. Toutefois, les valeurs trouvées par nous semblent être beaucoup plus proches de la réalité expérimentale que celles proposées par ZICK ; nous aurons l'occasion de comparer ces valeurs au chapitre V.

.../...

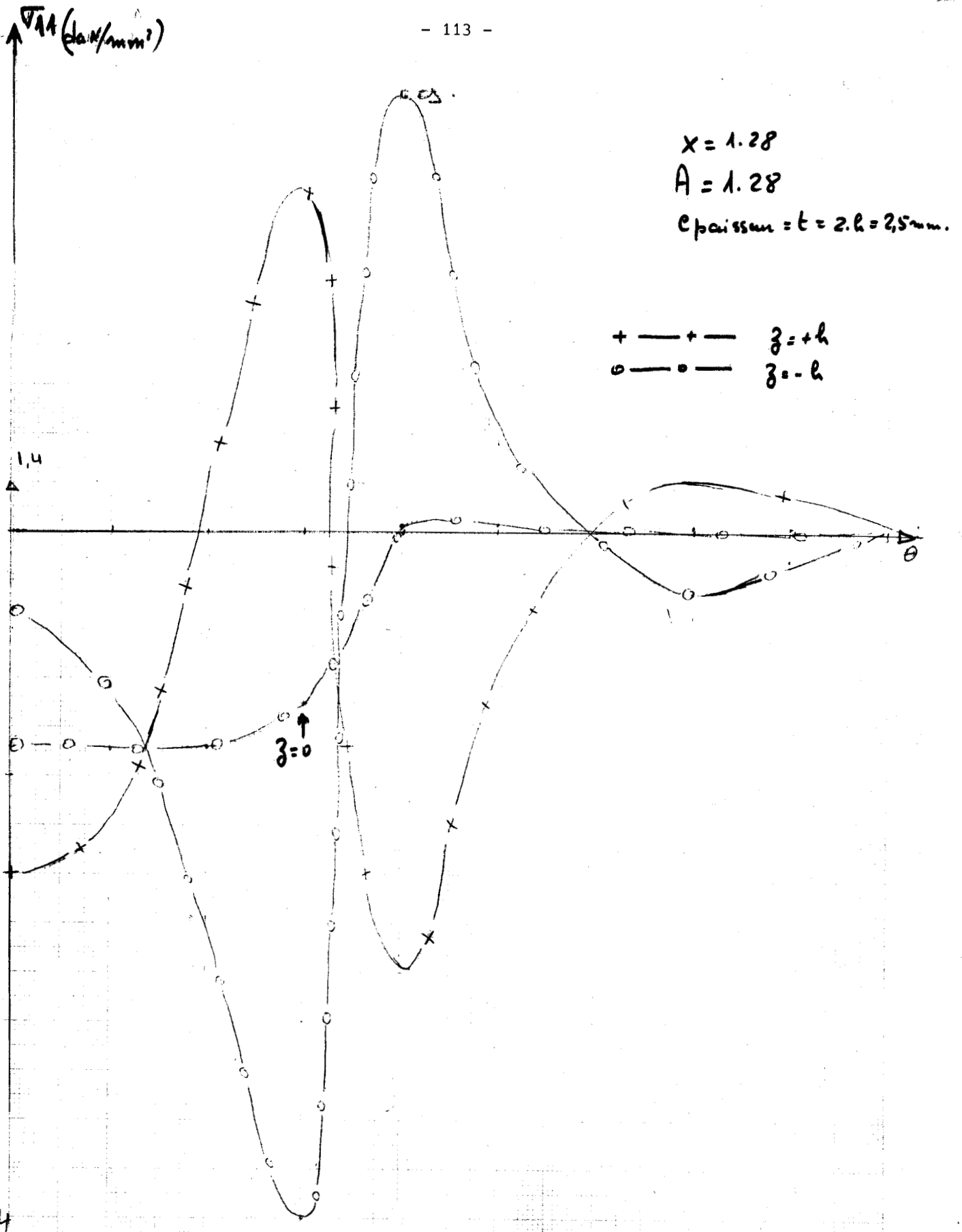


Figure (3.31) Influence de l'épaisseur de la virole

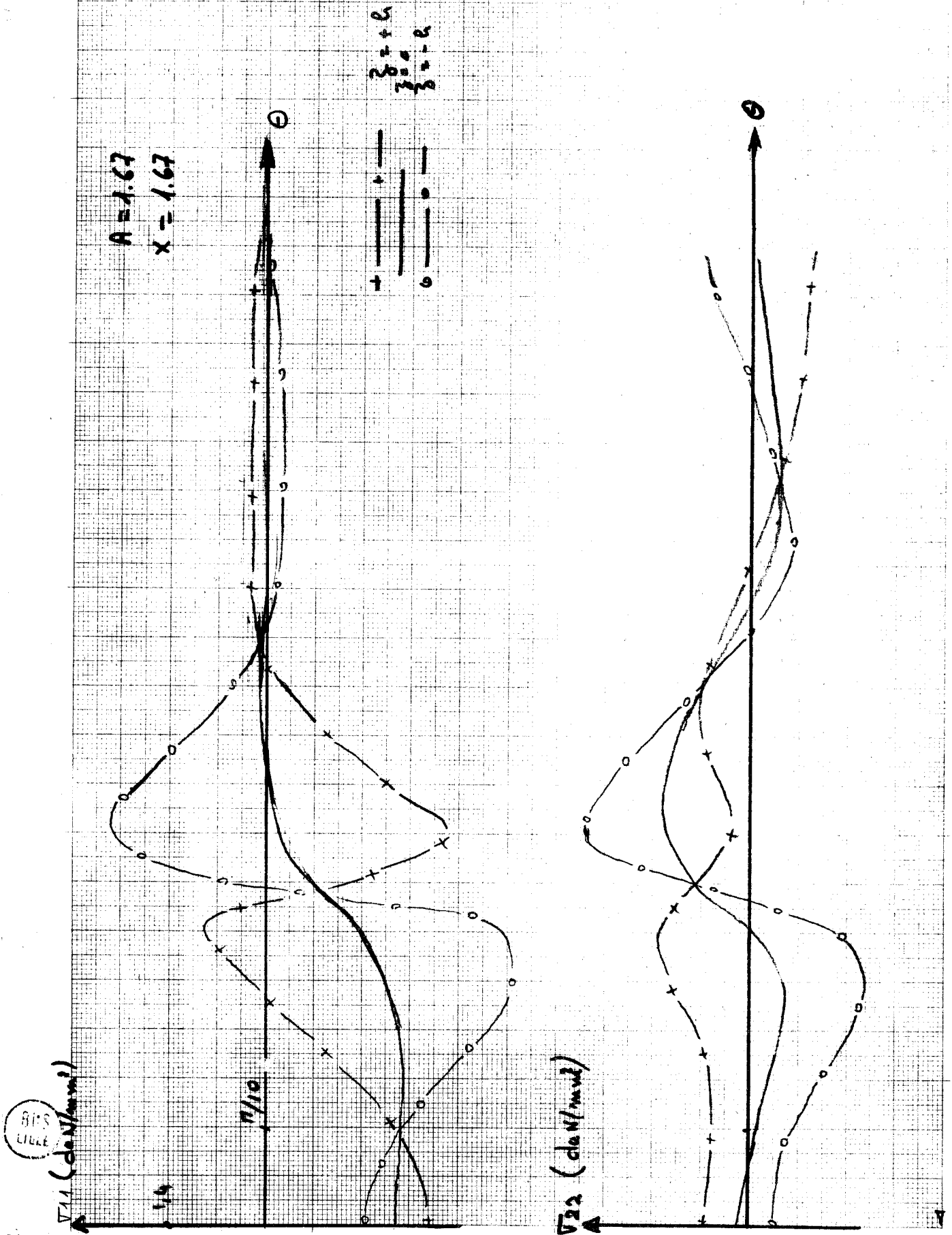


Figure: (3.32) Section de l'appui $x = 1.67$ m

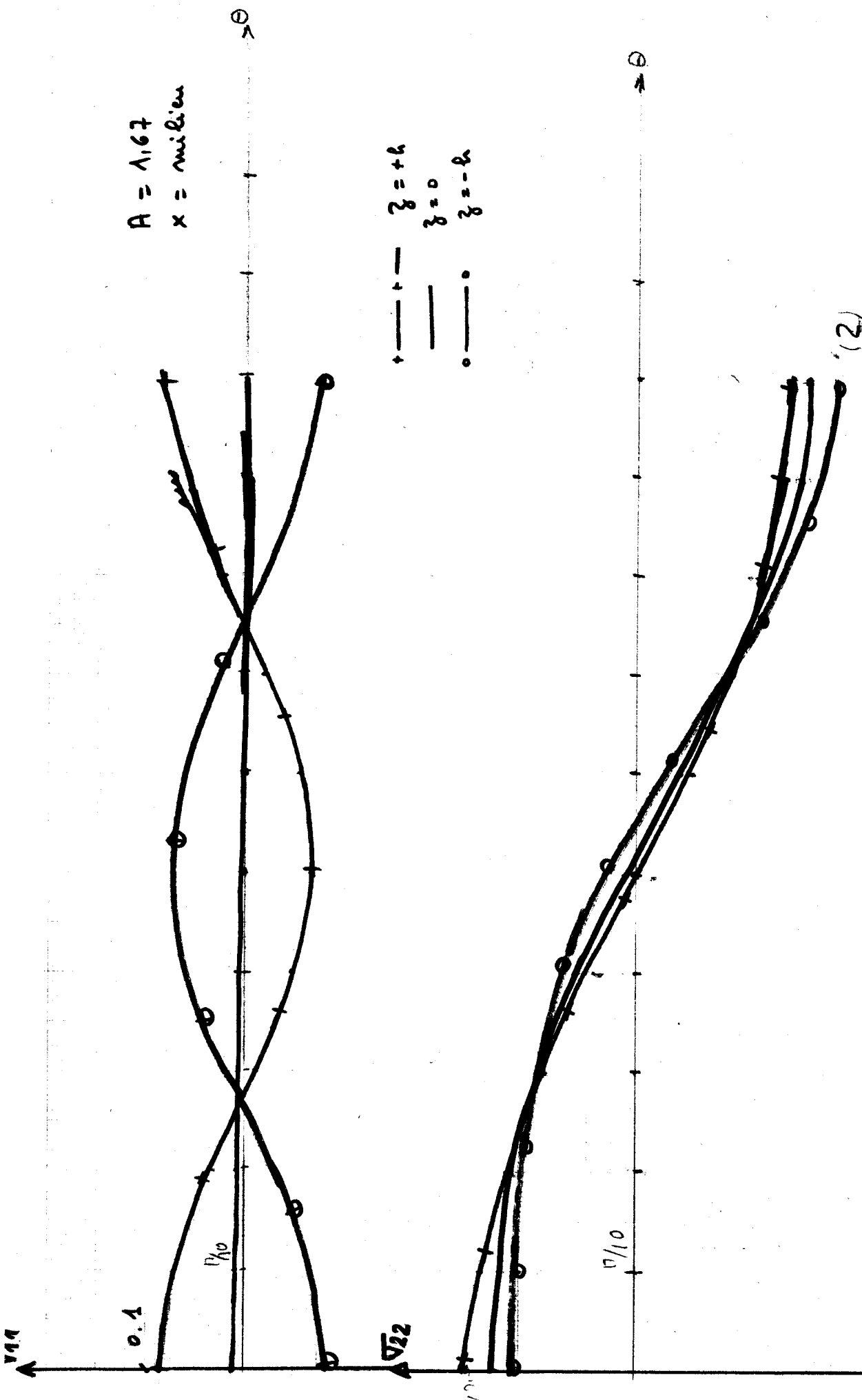


Figure (3.33) Section du milieu

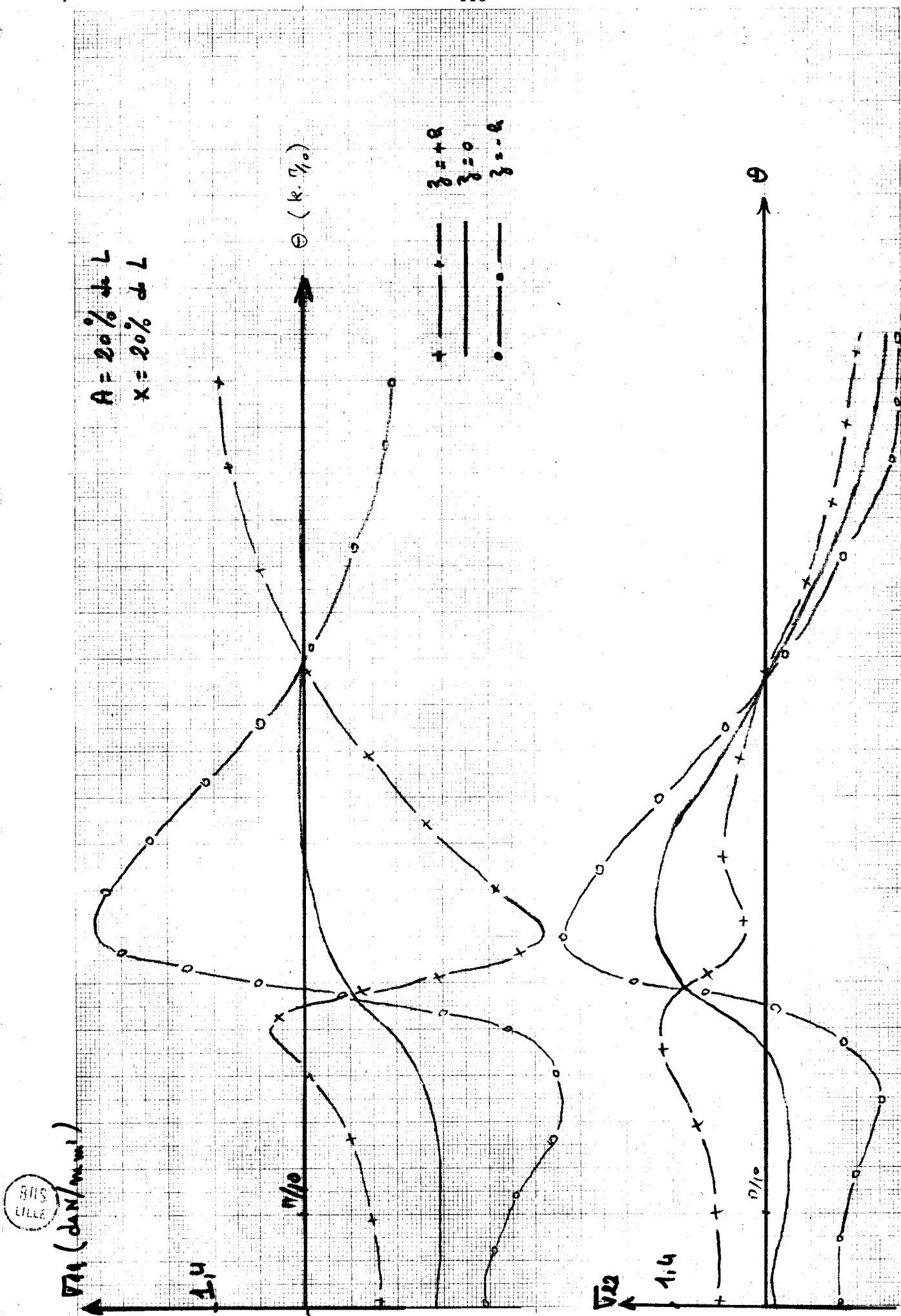


Figure (3.34) : section de l'appui $x = 20\% \text{ de } L$

$A = 20\%$ du L
 $x = \text{milieu}$

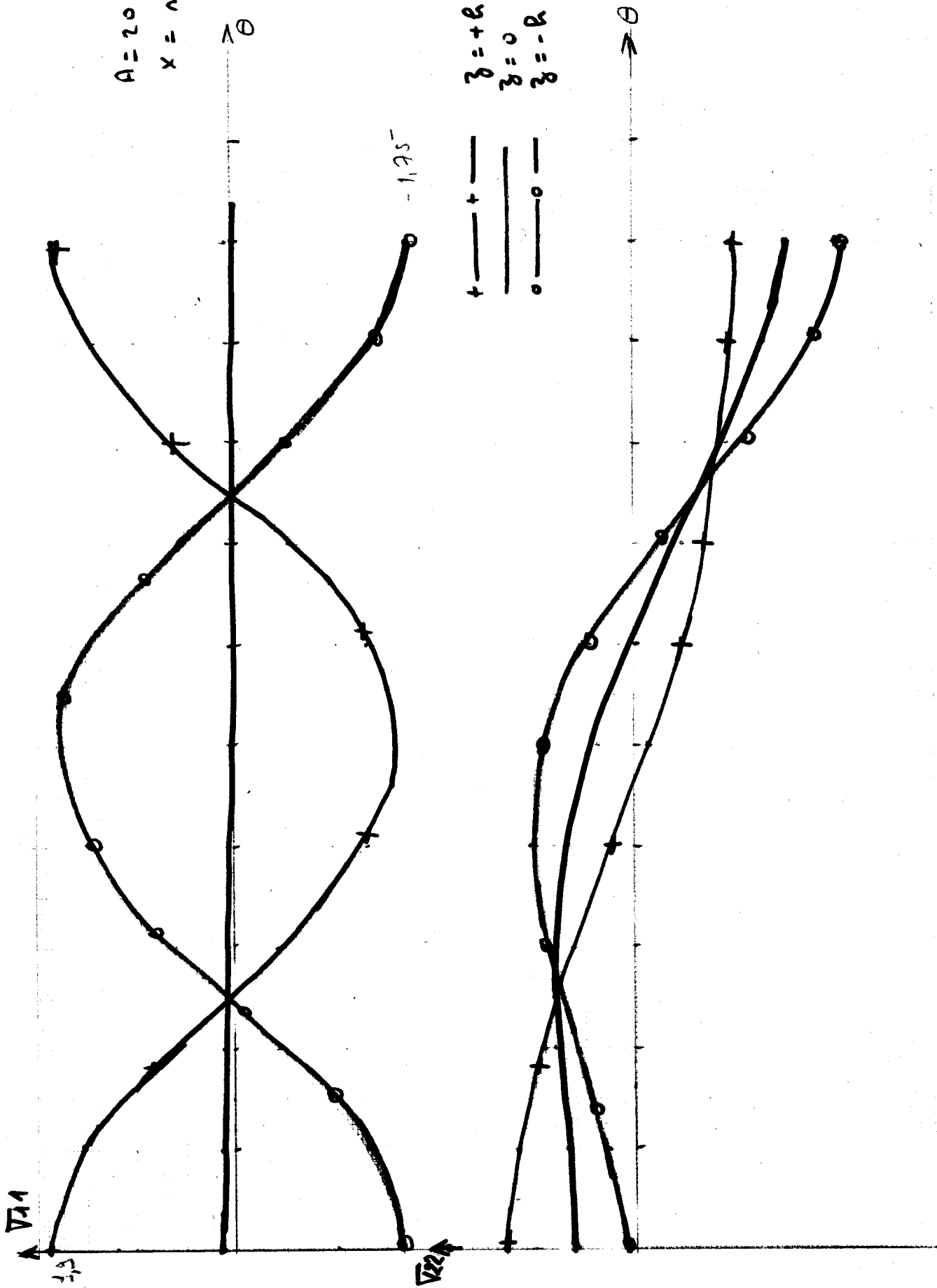


Figure (3.35) : section du milieu

En outre, nous constatons que l'épaisseur de l'appareil joue un rôle fondamental, car à partir d'une certaine épaisseur, l'appareil devient assez rigide pour se comporter comme une poutre sur deux appuis simples avec des effets locaux limités à la zone de l'appui.

3.4.9. - INFLUENCE DES PARAMETRES LIES A LA NATURE DE L'APPUI

Etant donné le caractère "local" de l'action du contact support-virole, nous nous proposons d'étudier l'influence de certains paramètres qui caractérisent l'appui notamment sa largeur, son angle de contact avec la virole, et la représentation de la pression de contact exercée sur la virole.

3.4.9.1. - Influence de la largeur de l'appui b

Nous avons effectué le calcul pour différentes largeurs de l'appui et l'examen des résultats montre que la largeur b n'a aucune influence pratique sur la répartition générale des contraintes en dehors de la zone de l'appui, notamment pour ce qui concerne la flexion longitudinale moyenne qui reste la même pour les cas envisagés. Par contre la flexion locale devient de plus en plus intense quand b diminue, et ceci vient du fait que la pression de contact augmente mais dans tous les cas nous avons la même allure des courbes en fonction de θ , et en fonction de x .

Par contre pour la flexion circonférentielle, c'est le moment de cette flexion qui ne semble pas être modifié d'une façon appréciable et c'est la contrainte de la membrane qui varie d'une façon inverse à b .

Dans tous les cas nous avons la même allure des courbes, figures (3.36), (3.37), (3.38), (3.39), (3.40).

Ces résultats sont valables aussi bien pour les positions de l'appui près du fond qu'assez éloigné de celui-ci (respectivement $A = 0.2$ et $A = 1.28$).

3.4.9.2. - Influence de l'angle de contact 2β - Figure (3.41, 3.42)

Nous avons examiné différents cas de support dont l'angle de contact varie successivement de $\beta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$, tout en considérant que ces supports introduisent une pression radiale uniforme.

La figure (3.42) montre que nous avons, approximativement la même allure pour la flexion circonférentielle dans la section de l'appui ; la zone de contact direct limitée par l'angle 2β va être comprimée (contrainte de la membrane) et le moment fléchissant s'annule dans la partie supérieure de cette section.

La même remarque s'applique à propos de la flexion longitudinale dans la section de l'appui. La section médiane de l'appareil, semble être sollicitée de la même manière quel que soit l'angle 2β de l'appui (figure (3.42)).

.../...

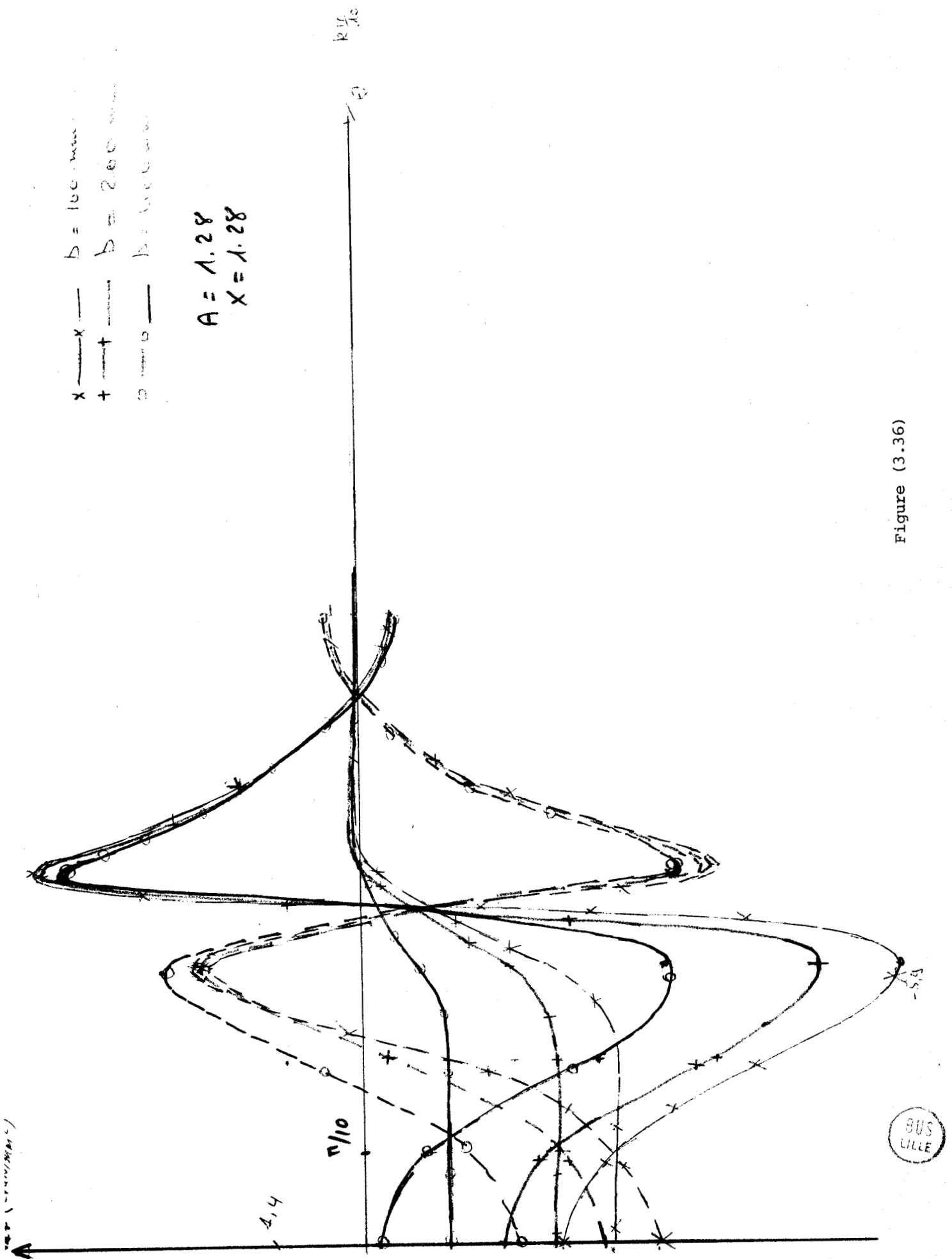
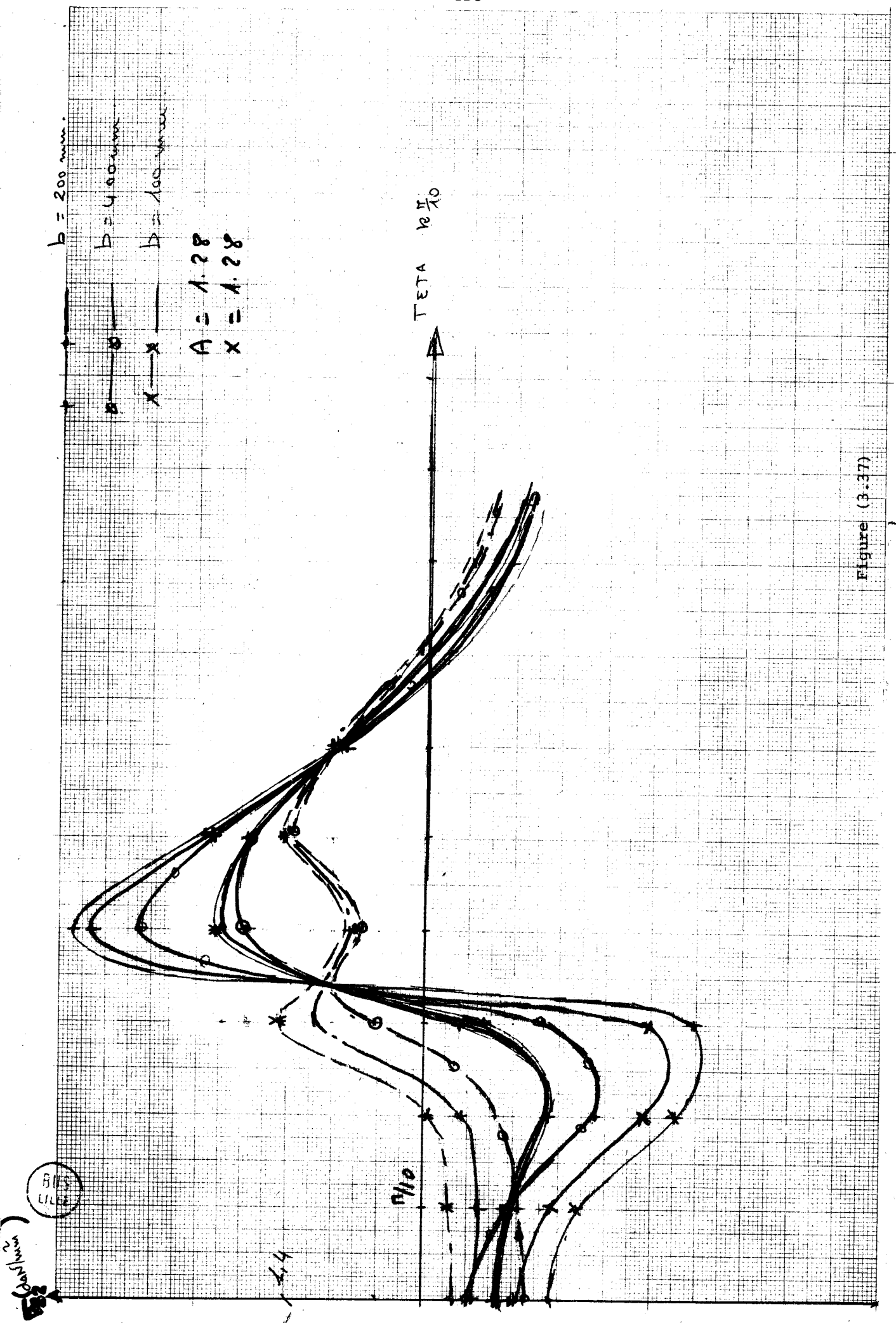


Figure (3.36)



$\sigma_{22} \text{ (daN/mm}^2\text{)}$

$\times$ — $b = 100$
 $+$ — $b = 200$
 $\circ$ — $b = 400$

$A = 0.2$
 $\chi = 0.2$

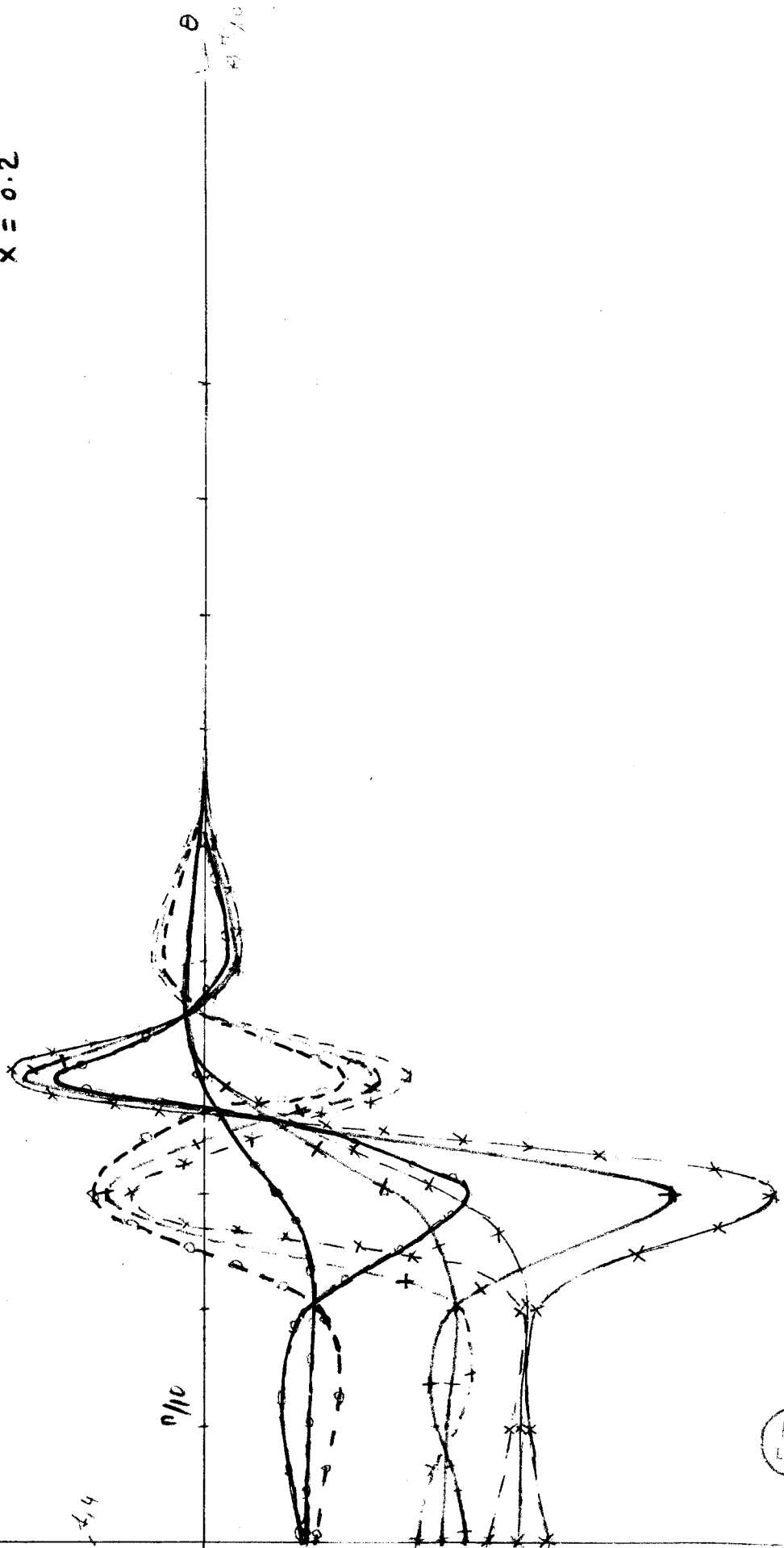


figure (3.38)



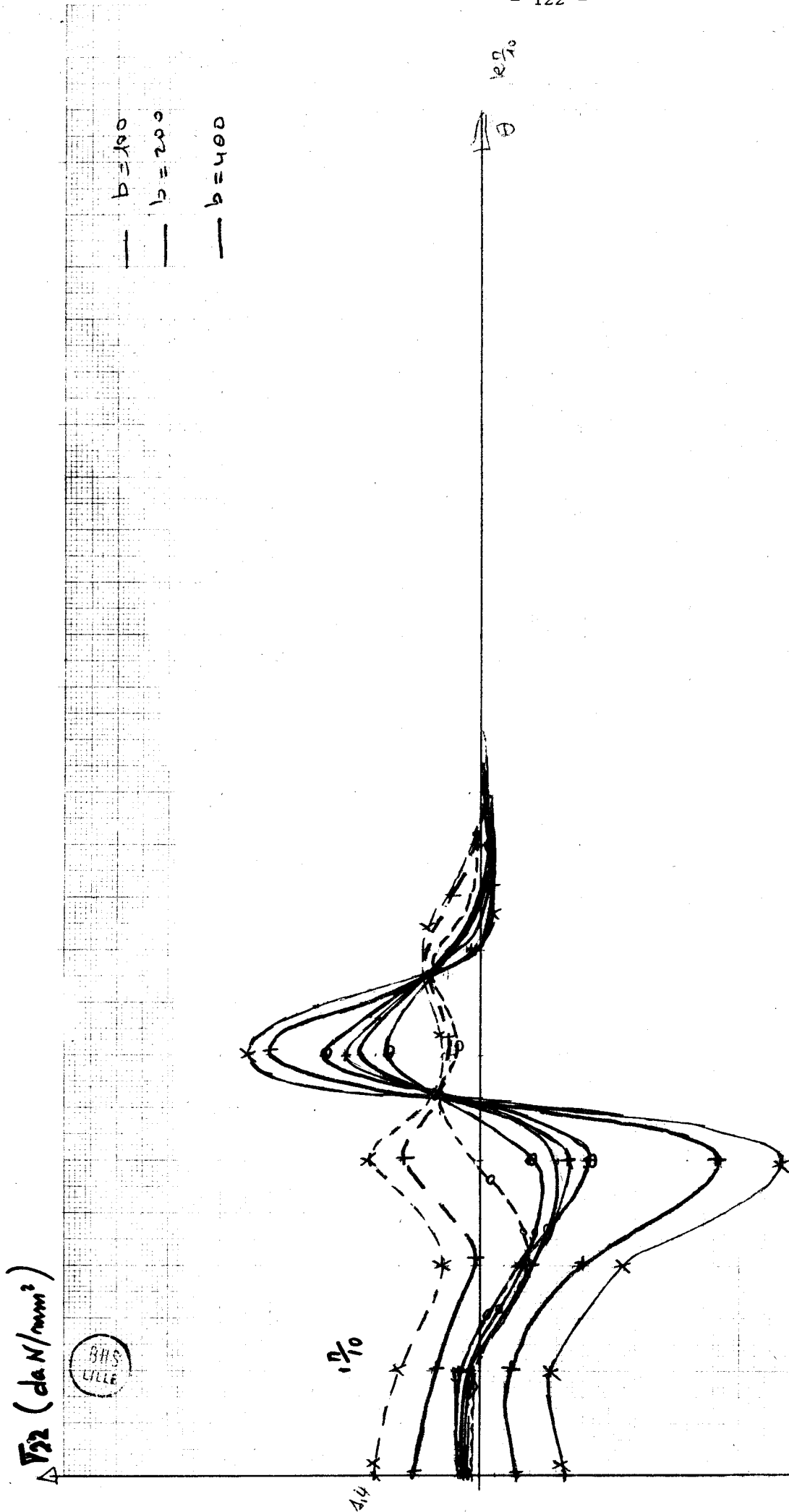


Figure (3.39)

∇_{11} (daN/cm²)

- 123 -

$A = 0.2$

$\times$ — $b = 0.1$
 $+$ — $b = 0.2$
 $\circ$ — $b = 0.4$

$\theta = 0$
 $\zeta = 0$

$\theta = 1/10$

$\theta = 2/10$

$\theta = 3/10$

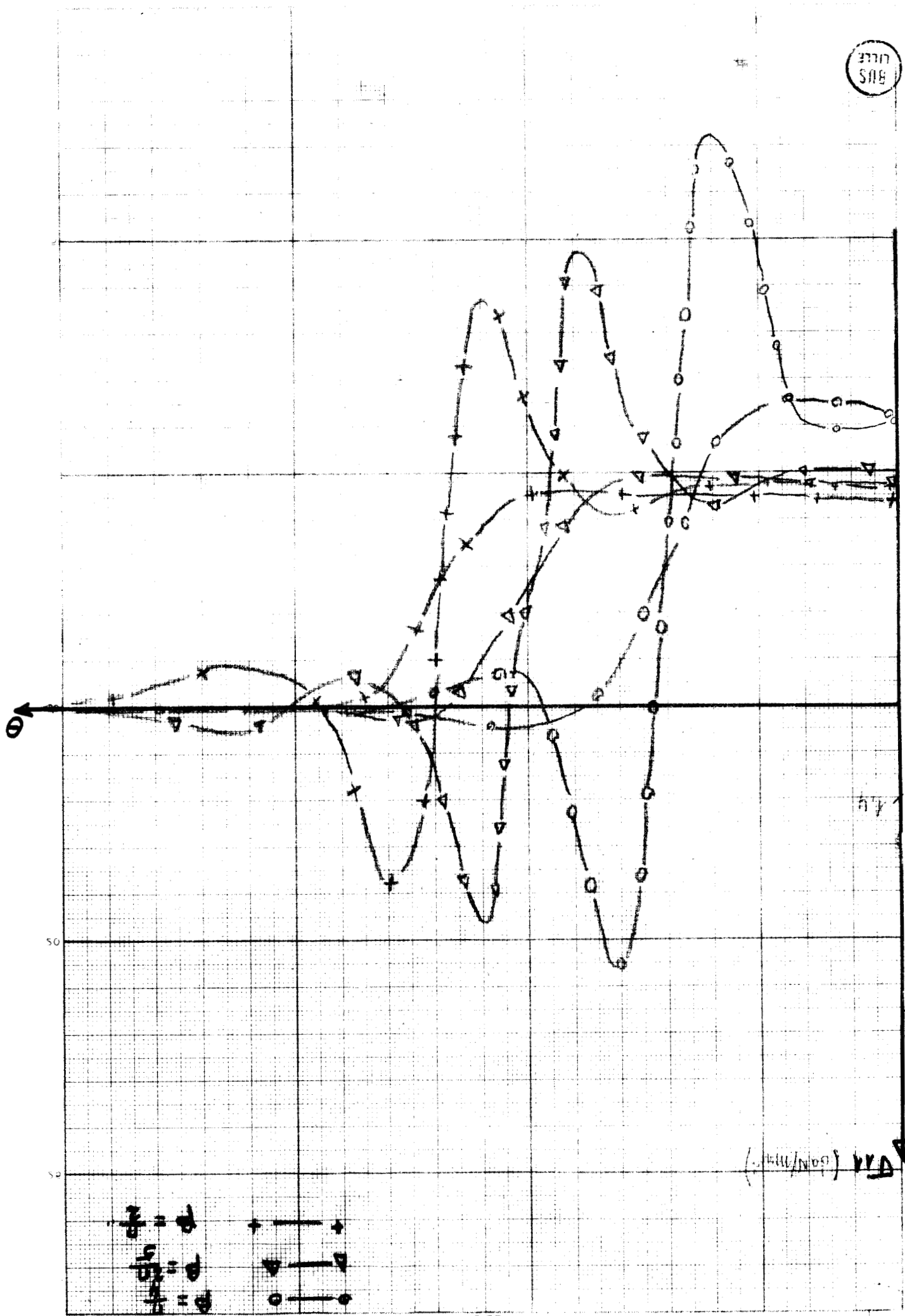
$\theta = 4/10$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$

Figure (3.40) Variation des contraintes selon x en fonction de b

Figure (3.41) variation des contraintes en fonction de l'angle du support



$\circ - \circ - \beta = \frac{1}{4}D$
 $\Delta - \Delta - \beta = \frac{2}{5}D$
 $+ - + - \beta = \frac{3}{4}D$

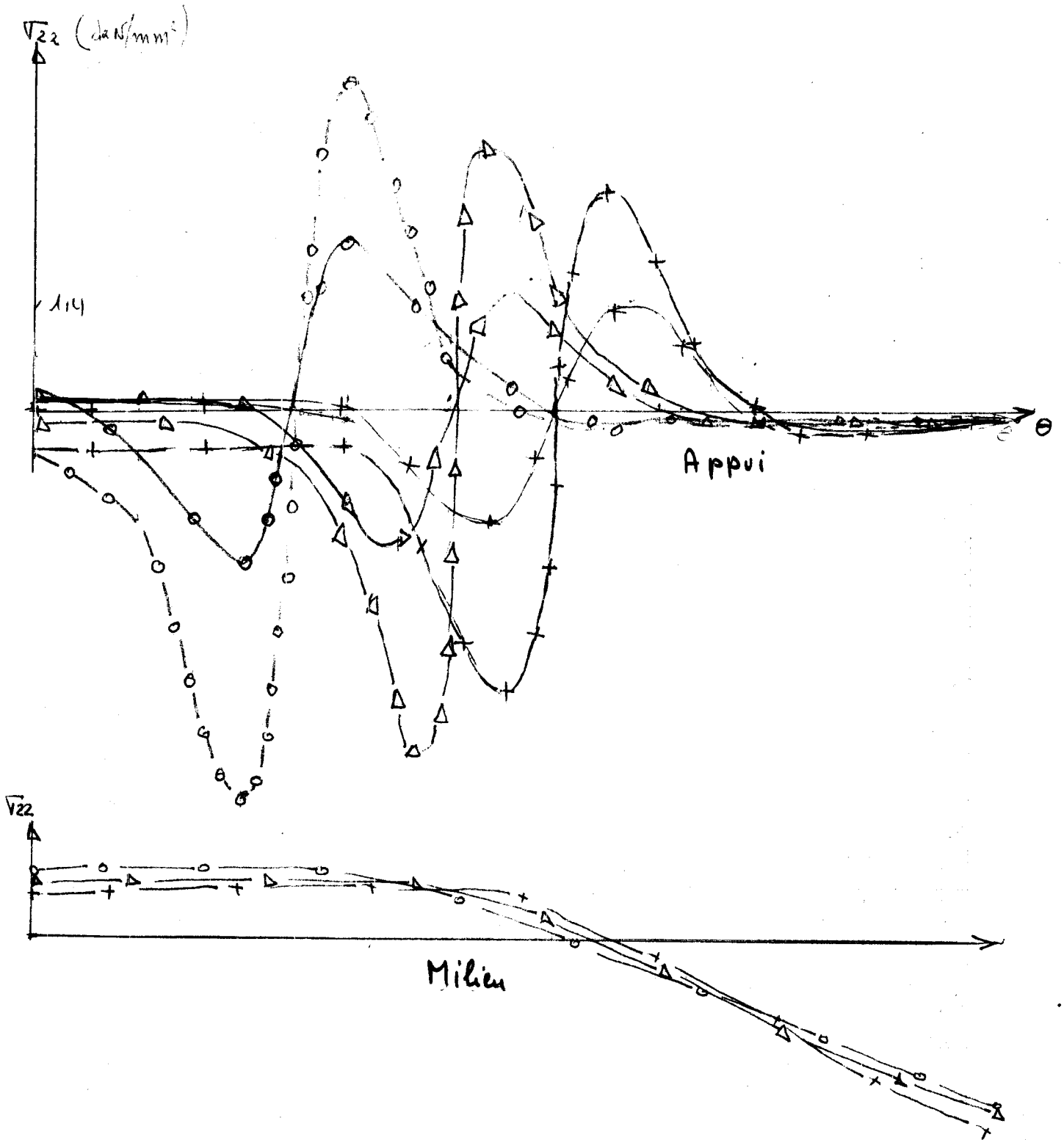


Figure (3.42)



Des calculs similaires pour la position $A = 0.2 L$ confirment la schématisation générale du tenseur de contraintes précédemment dégagée.

3.4.8.3. - Représentation de la pression de contact - figure (3.43)

La question la plus délicate à résoudre reste cependant le choix d'une schématisation correcte de la répartition de pression de contact en particulier nous avons à priori plusieurs possibilités qui ne peuvent être confirmées que par l'expérimentation dans la chapitre suivant : hormis le cas de la pression constante déjà étudié, la pression de l'appui peut être essentiellement considéré comme : figures (3.43)

- 1) linéaire $p = a\theta + b$
- 2) parabolique $p = a\theta^2 + b$
- 3) mixte parabolique et constante
- 4) définie pour la relation $p = a(\cos\theta - \cos\beta)$

L'étude de la répartition linéaire nous a fourni des résultats comparables à ceux d'une répartition uniforme en prenant

$$p = p_0 \left[-0.6 \frac{\theta}{\pi} + 1.1 \right] \quad (3.4)$$

Pour le cas parabolique, on peut écrire

$$p = p_0 \left[\theta^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \right] \quad (3.5)$$

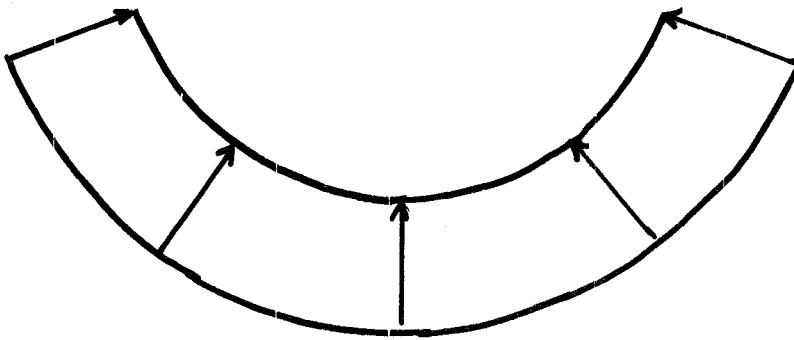
p_0 étant déterminé en écrivant que la somme des projections verticales des forces est égale à Q demi poids de l'appareil soit

$$p_0 = \frac{Q}{4(\beta \cos\beta - \sin\beta)} \quad (3.6)$$

Les déformations trouvées par cette méthode sont données dans les figures (3.2 première partie) nous constatons une amplification des valeurs des u : par rapport aux valeurs données par une répartition uniforme de la pression de contact (figure 3.44), et une ovalisation plus importante de la section du milieu.

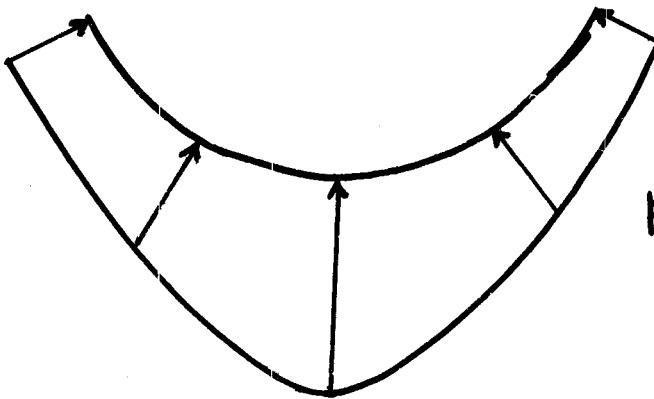
Par ailleurs, les contraintes de flexion longitudinale et circonférentielle sont différentes de celles données par la répartition uniforme, en particulier les maxima des valeurs sont rencontrés dans la section de l'appui au niveau des fibres inférieures ($\theta = 0$) figure (3.46), (3.48).

.../...



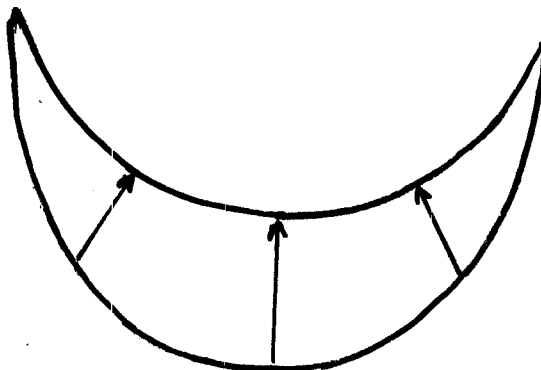
$$p = \text{CONSTANTE}$$

(a)



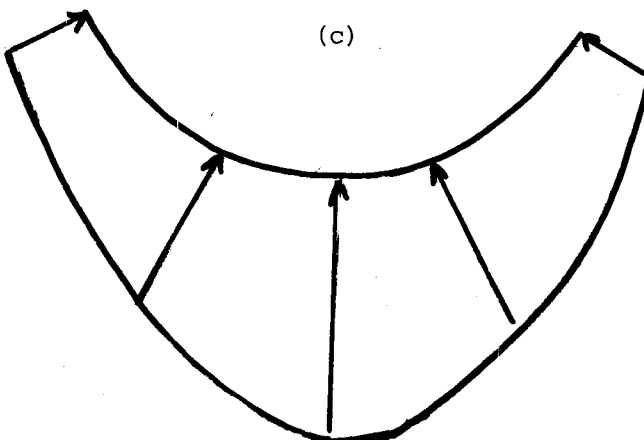
$$p = a\theta + b$$

(b)



$$p = p_0 (\theta^2 - \beta^2)$$

(c)



$$p = (1-k)p_1 + k p_0 (\theta^2 - \beta^2)$$

(d)

Figure (3.43) : répartition de la pression du contact



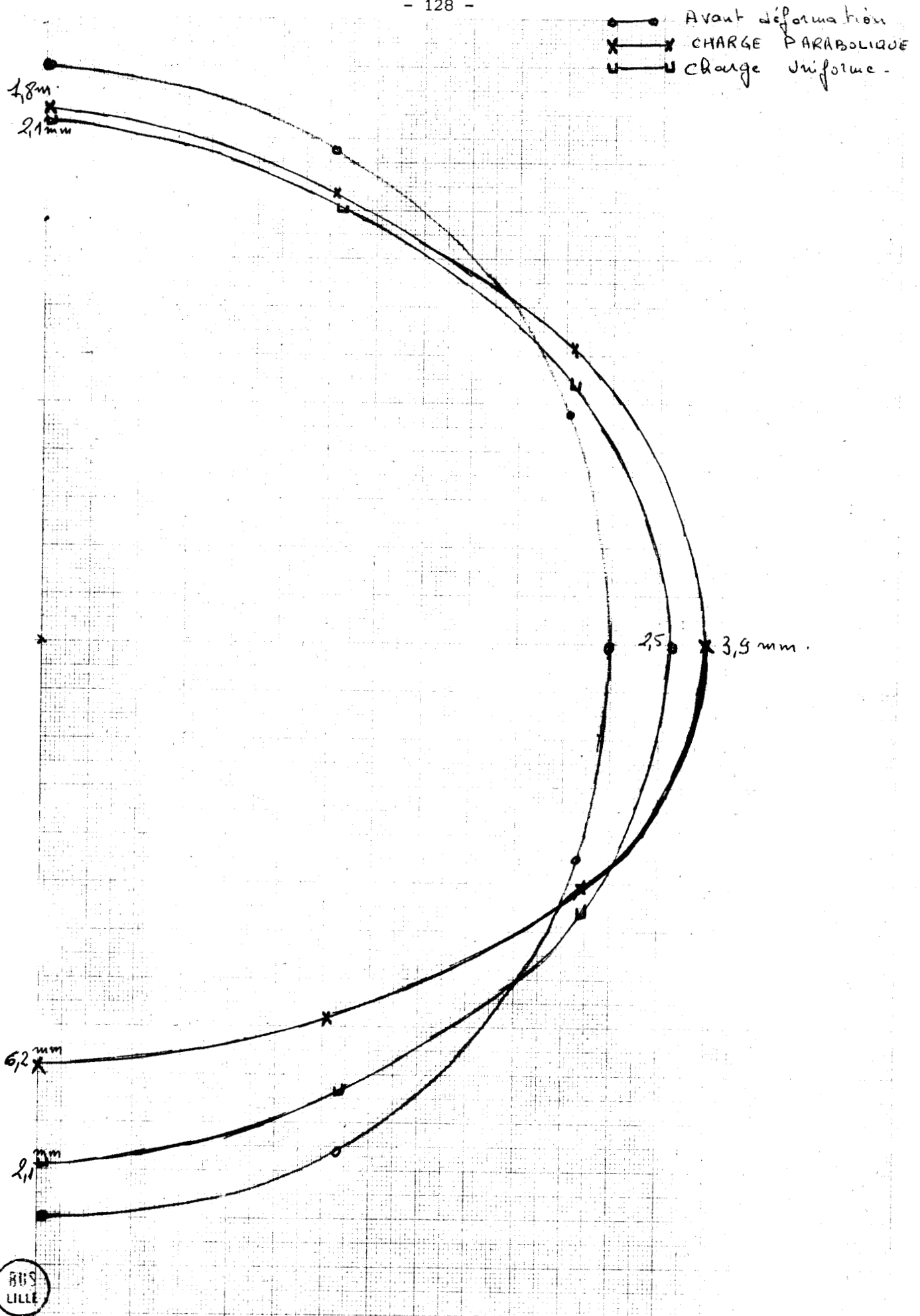


Figure (3.44) Déformation de la section du milieu

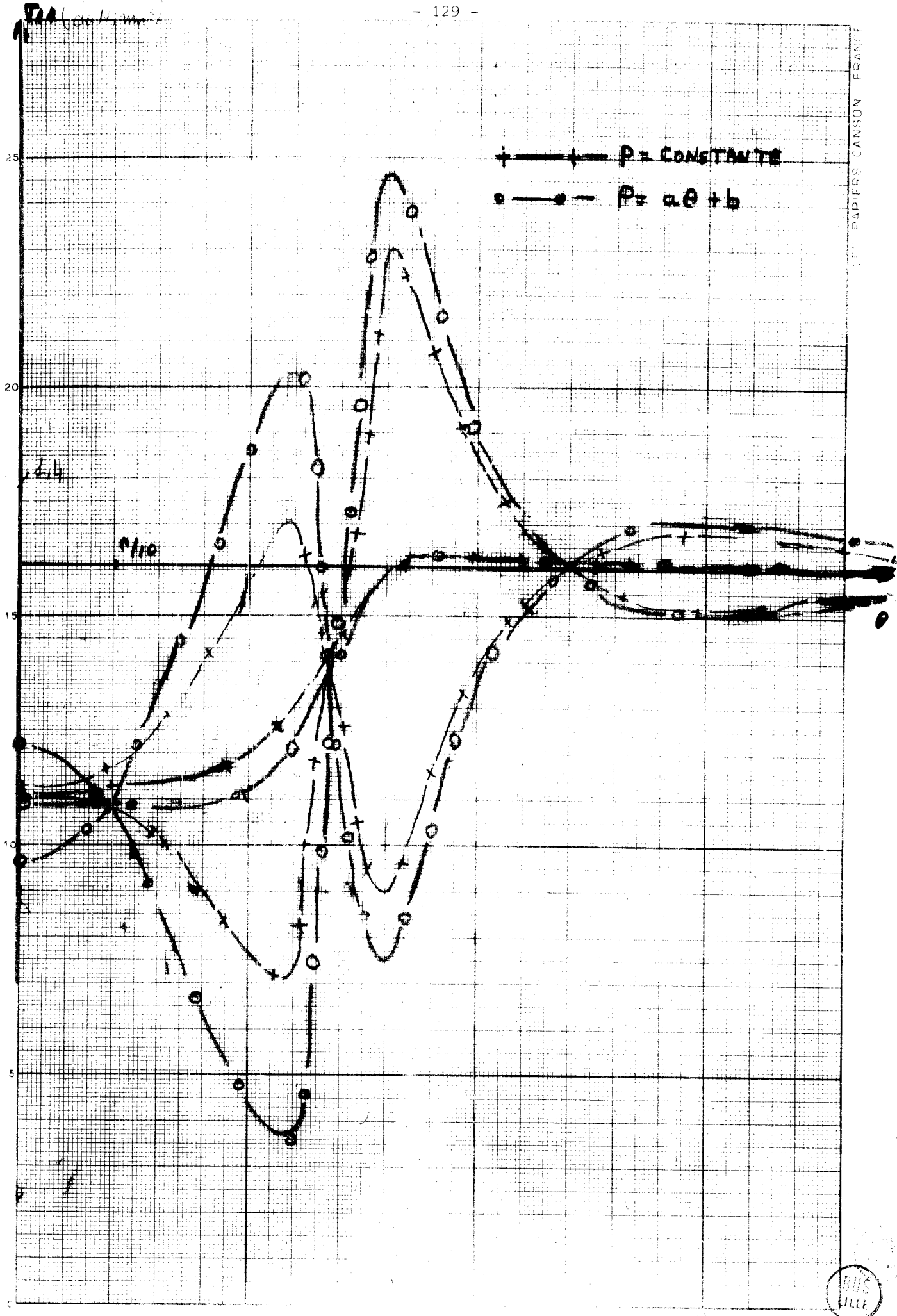


Figure (3.45)

ΔT_{11} (en μm)

$\Delta \rightarrow \Delta$ $P = \text{parabolique}$
 $\Delta(\cos \theta - \cos \phi)$

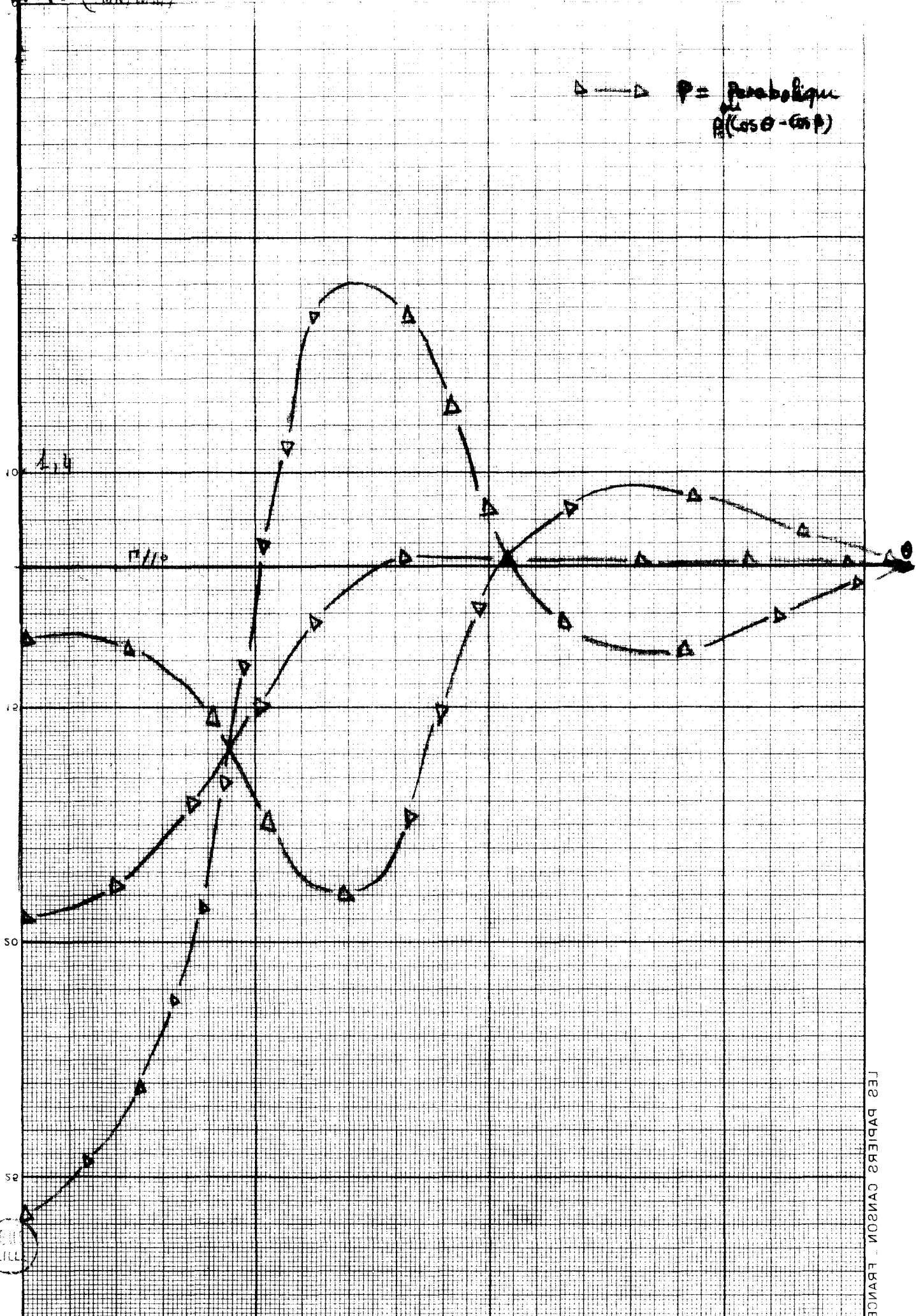


Figure (3.46)

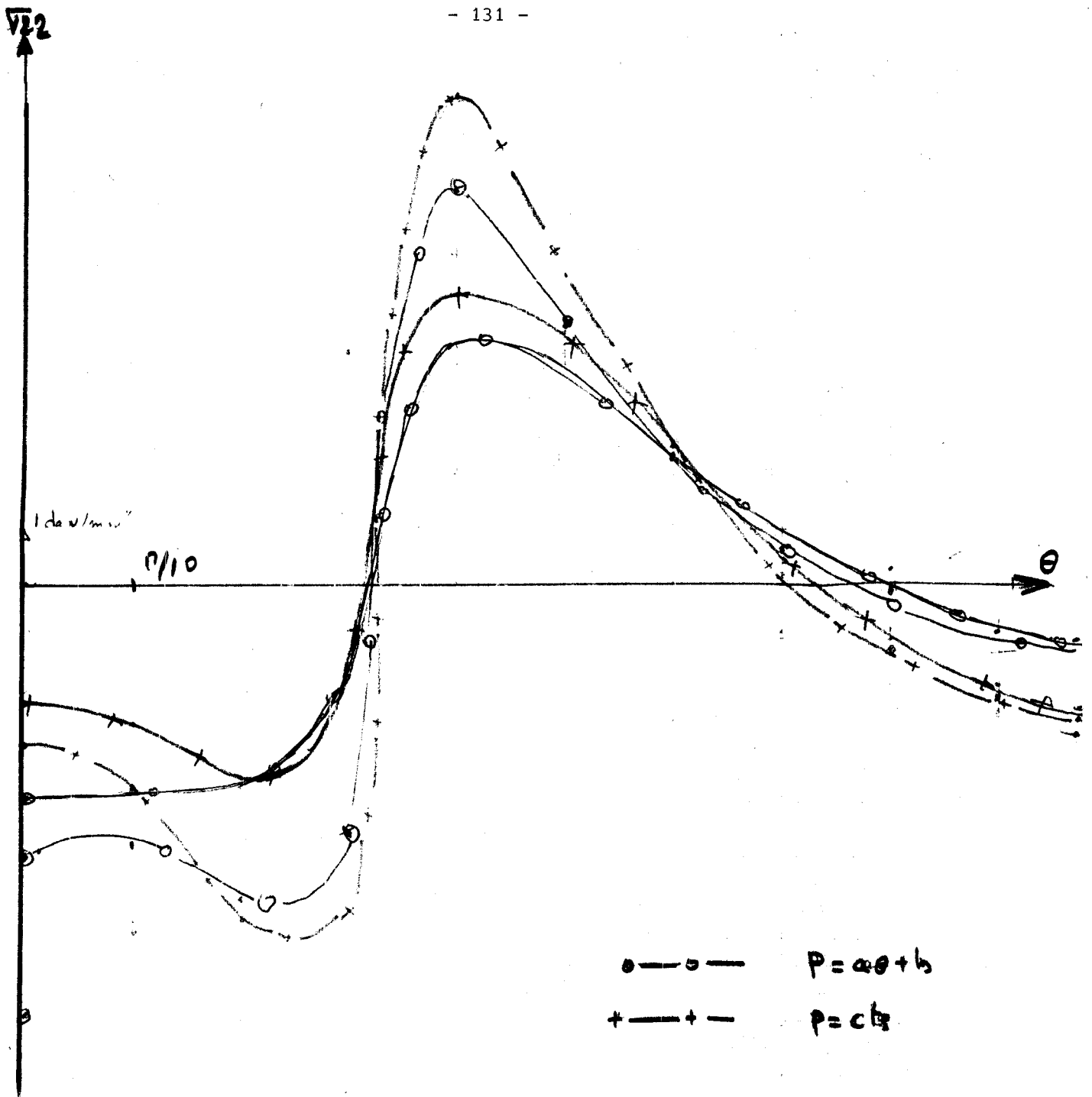


Figure (3.47)

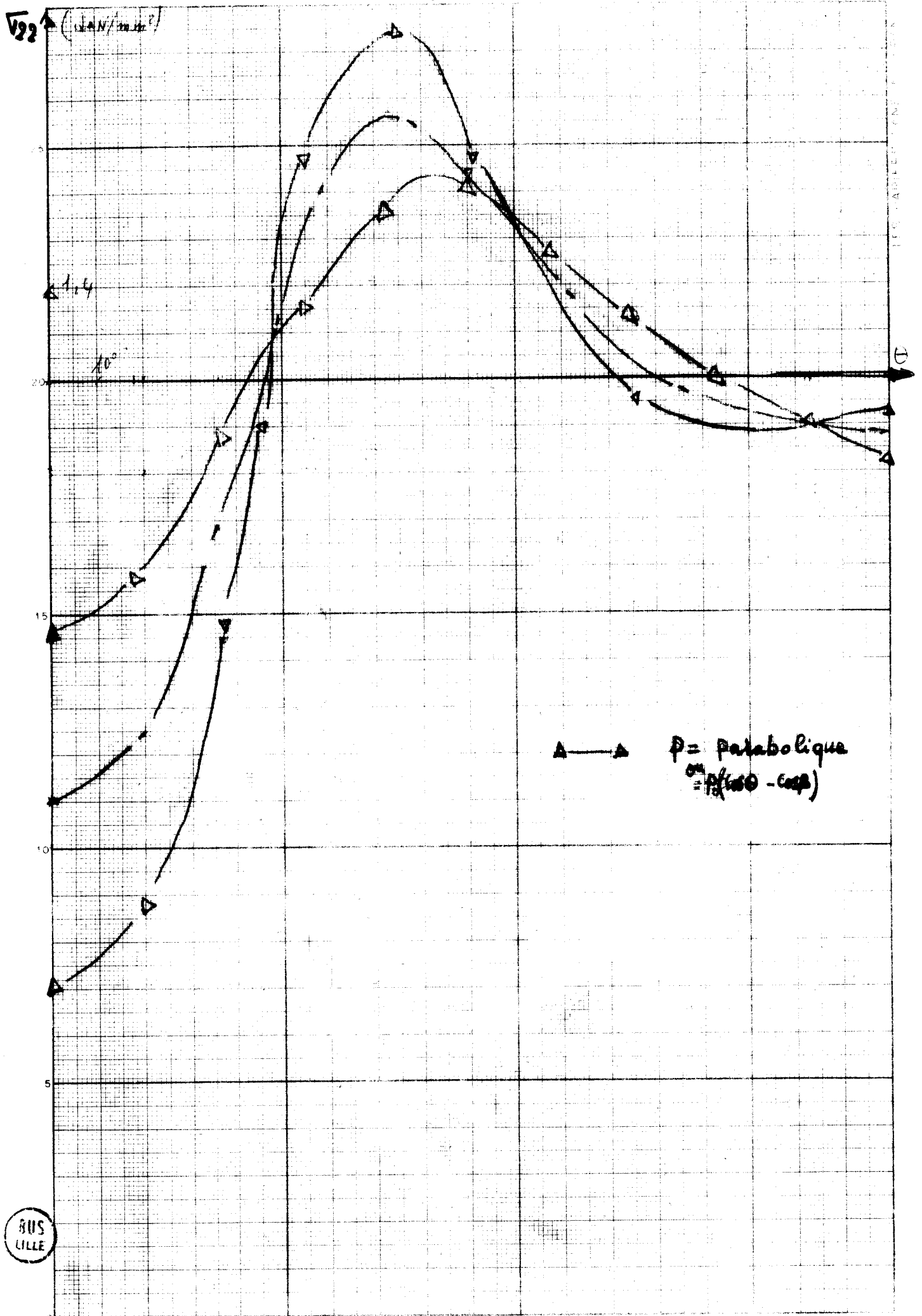


Figure (3.48)

Enfin l'étude d'une variation sinusoïdale de la pression (selon $\cos \theta$) donne une répartition des contraintes et des déformations similaire à celle de la répartition parabolique.

En outre, il nous paraît impératif d'examiner le cas d'une répartition mixte (uniforme et parabolique) avec un taux de proportionnalité k variable, qui généralise les autres hypothèses de répartition de pression envisagées. figure (3.43)

$$p(\theta) = k p_0 + (1-k) p_1 \left[\theta^2 - \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 \right] \quad (3.7)$$

Les résultats de calcul donnent une évolution intermédiaire entre le cas parabolique et le cas uniforme, cette évolution apparaît d'une façon importante dans la section de l'appui, nous exposons plus loin les résultats obtenus par cette hypothèse (chapitre I)

Cependant les schématisations proposées, supposent que l'appareil reste parfaitement circulaire ce qui est loin d'être le cas des appareils réels, notamment quand les appuis se trouvent loin des fonds. En effet, suite à l'ovalisation de l'appareil, les contacts réels sont amplifiés aux bords du support, ce qui explique, en partie, les résultats expérimentaux de ZICK-CARLSON (1948)

3.5. - CONCLUSION

L'analyse numérique de la méthode que nous venons d'exposer dégage des grandes lignes du comportement de l'appareil sous l'effet de l'action des supports, qui peuvent être résumées comme suit :

- 1) les déformations de l'appareil (ovalisation) peuvent expliquer son comportement au niveau de la section de l'appui.
- 2) les effets des supports sont purement locaux (abstraction faite de son ovalisation), en particulier les contraintes trouvées par notre méthode ont des ordres de grandeur sensiblement constants quelle que soit la position de l'appui, contrairement aux résultats fournis par la méthode de ZICK qui donne des ordres de grandeur variant de 10^{-3} à 10 daN/mm^2 selon qu'on se place près des fonds ou à $0.2 L$ de ce dernier.

Vu l'abondance des résultats théoriques, nous allons exposer dans le prochain chapitre les résultats de l'expérience que nous avons réalisée à l'Ecole des Mines de DOUAI, afin de dégager le comportement réel de notre appareil et de le comparer aux résultats théoriques.

CHAPITRE IV

Etude expérimentale sur l'appareil de HAGE

4.1. Introduction.

Les résultats de la théorie de ZICK sont en contradiction avec son expérience sur l'appareil ZICK-CARLSON d'une part, et avec les résultats de notre théorie ; d'autre part pour cette raison il nous a semblé impératif, faute de trouver des résultats expérimentaux dans la littérature, de réaliser une expérience en vraie grandeur, afin de dégager une méthode valable de dimensionnement des appareils cylindriques soumis aux actions de leurs supports ; ces supports peuvent être d'ailleurs de forme tout à fait quelconque.

Notre objectif consiste donc à étudier la topologie des contraintes selon la position des supports par rapport aux fonds.

4.2. Choix de l'appareil.

Les critères qui ont fixé les dimensions de notre appareil sont les suivantes :

1) Nous devons utiliser un appareil très long pour vérifier d'une part, l'importance de la flexion circonférentielle, en particulier la zone d'action directe de l'appui (qui est d'après ZICK égale à la plus petite de deux distances $\frac{L}{2}$ ou $4R$); et d'autre part vérifier si le comportement de l'appareil s'effectue selon la théorie de la poutre équivalente ou selon notre théorie.

2) Nous avons prévu des études ultérieures avec plusieurs appuis, ce qui nous permettra de fixer la distance d'interaction entre appuis

3) Nous avons utilisé un appareil de faible épaisseur pour accéder à des contraintes importantes ce qui a pour effet d'augmenter la précision de nos mesures d'une part, et de creuser les écarts entre la méthode de ZICK et notre méthode d'autre part.

4) Des études supplémentaires sous pression ont été prévues notamment aux niveaux des fonds dont l'un deux est plat.

4.3. Choix de la technologie.

Etant donné les critères du choix de l'appareil nous étions obligés d'utiliser une technologie des mesures fiables et durables et d'un goût non excessif.

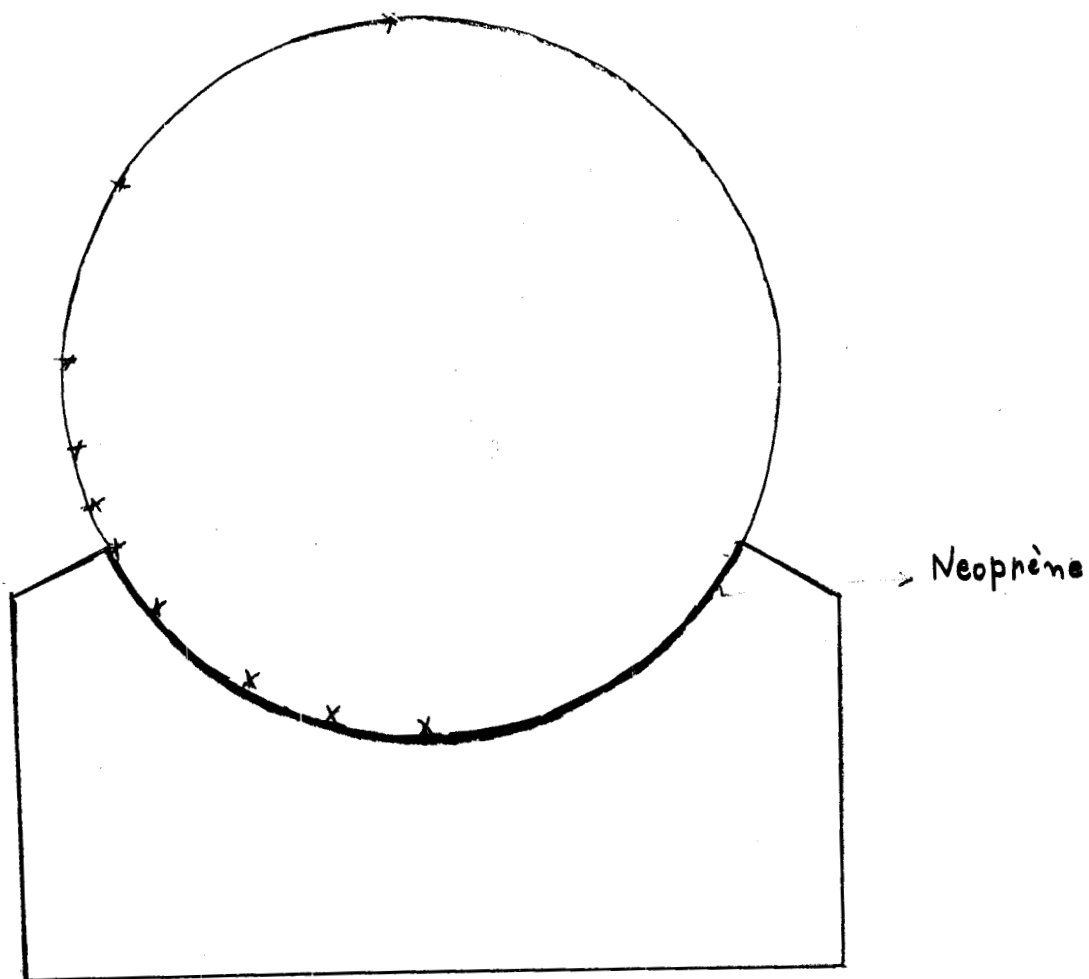


FIGURE (4.1) - section de l'appui

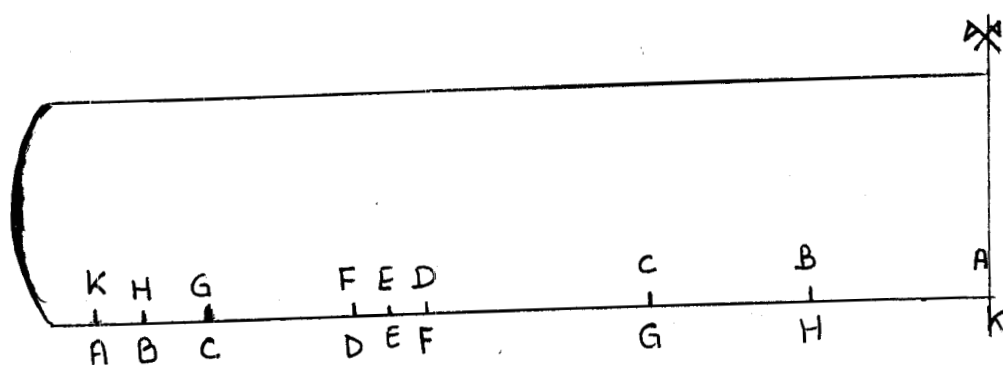


FIGURE (4.2.) - sections étudiées



La technologie de mesure qui répond à ces exigences est celle des jauges de déformation dont le principe est très simple bien que sa mise en oeuvre soit longue, notamment à cause de la protection nécessaire des jauges intérieures et des câbles électriques qui les relient aux instruments de mesure.

Après de nombreux tests nous avons opté pour une protection multiforme par résines ; cette protection s'est avérée efficace : nous avons enregistré un pourcentage de défaillance très faible (de l'ordre de 2 %).

4.4. Emplacement des points de mesure.

Etant donné que nous envisageons une étude complète de la répartition des contraintes dans la virole, nous avons effectué le collage de 120 points de mesure intérieures et extérieures avec des rosettes tridimensionnelles et bidimensionnelles.

4.5. Plans des essais.

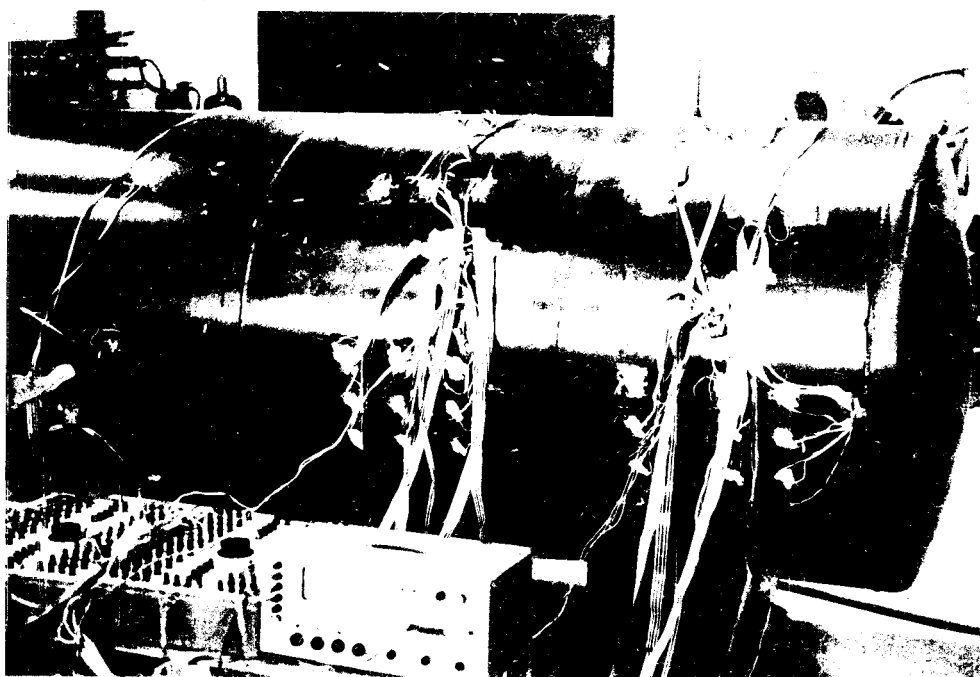
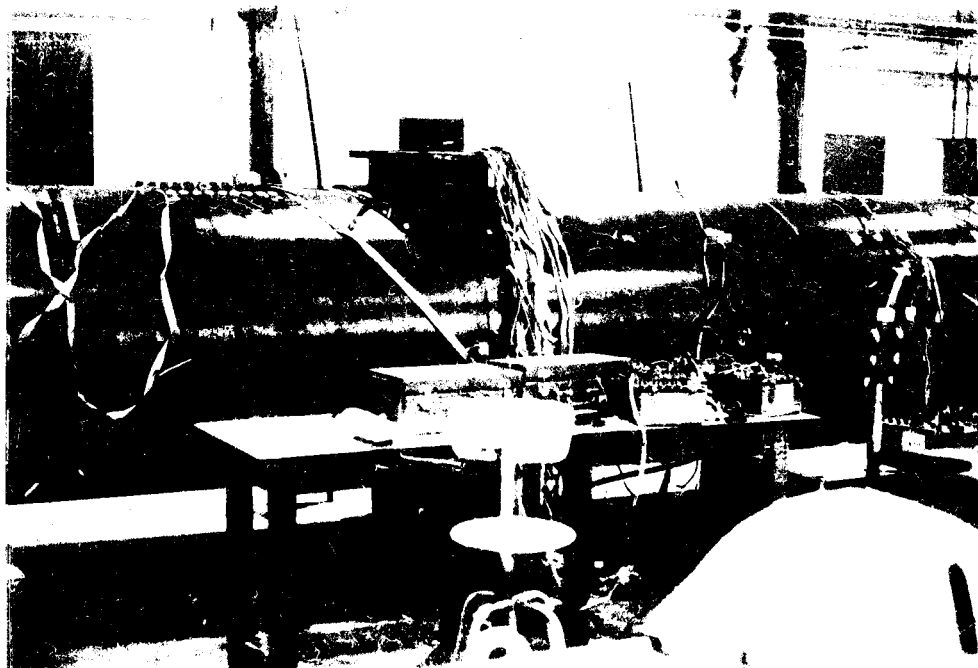
Nous avons effectués six essais avec deux appuis simples, en les disposant successivement et d'une façon symétrique sur les six premières sections, pour chaque essai nous avons effectué trois expériences afin de dégager une moyenne faible.

Par ailleurs, il faut noter que le contact réel entre le support et l'appareil s'effectue à travers une bande de caoutchouc (ou de néoprène) afin de réaliser une meilleure répartition des efforts de contact ; ce qui fait que la largeur du support réel à prendre en compte est plus faible que la largeur de cette bande (200 mm), il faut par conséquent apporter une faible correction de largeur lors de la comparaison pratique entre notre méthode et l'expérience, les sections que nous avons étudiées sont les suivantes :

	X = 0,18, 0,3, 0,53, 1, 1,15, 1,28m, 2, 250, 3,2m								
extérieures	A	B	C	D	E	F	G	H	K
intérieures	K	H	G	F	E	D	C	B	A

Les sections intérieures importantes (0,18 jusqu'ici 1,28) sont complètement couvertes, par contre seules les sections extérieures à 0,3m et à 1,15m ont été couvertes, vu que l'appui empêche, par son contact sur la virole le collage extérieur des jauges sur la partie inférieure de la virole.

Ainsi nous pouvons accéder pour chaque expérience à 250 valeurs des déformations (et ensuite des contraintes) qui couvrent pratiquement la totalité de l'appareil, malheureusement nous étions limités par la capacité des matériels de mesure mis à notre disposition par l'université de Lille et par l'Ecole des mines de DOUAI, ce qui nous a poussé à s'intéresser plus particulièrement aux zones de l'appui et à une zone très éloignée de l'appui, afin de vérifier le bien fondé des théories proposées.



- FIGURE (4.3.) - DETAILS DE L'APPAREIL ETUDIE

BHS
LILLE

4.6. Déformations globales de l'appareil

En effectuant les trois premiers essais (A, B, C), nous avons remarqué une ovalisation faible de l'appareil dans sa partie située entre les deux appuis, mais cette ovalisation n'était pas visible à l'oeil nu.

Cependant quand nous avons commencé le quatrième essais nous avons constaté que l'appui palcé en $x = 1m$, ne touche l'appareil qu'au niveau de ses bords (en $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$), autrement dit l'appareil a conservé l'ovalisation précédemment décrite et ceci est essentiellement dû à sa faible épaisseur. Ce phénomène va avoir des conséquences importantes dans notre interprétation du chargement (voir la conclusion).

L'ovalisation constatée, par la suite, dans la section du milieu est proche de celle donnée par notre méthode en supposant que la pression du support sur la virole s'effectue d'une façon parabolique ou mixte, en particulier nous avons une diminution du diamètre verticale de l'ordre de 2cm ; cependant la mesure de cette déformation étant peu précise, nous préférons étudier plus en détails le tenseur des contraintes.

4.7. Tenseur des contraintes.

La répartition des contraintes constatée est loin d'être celle de la théorie de ZICK ou de la poutre équivalente, en particulier nous distinguons deux zones bien distinctes du point de vue comportement, la première située entre le fond et la distance R , la deuxième est définie par $x > R$; cette distinction sera analysée ultérieurement, cependant dans tous les cas nous avons la confirmation d'une action locale au niveau du support, comme nous l'avons analysé dans le chapitre III. Toutefois étant donné la déformation globale de l'appareil nous allons exposer dans ce chapitre les résultats expérimentaux dans l'ordre de leur exécution, afin de tenir compte éventuellement des déformations résiduelles, par ailleurs nous avons effectué en premier l'essai avec l'appui à 0,10m du fond, malheureusement suite à une défaillance de certains appareils de mesure nous n'avons pas eu des résultats intéressants, pour cette raison nous exposons à la fin de ce chapitre le dernier essai que nous avons refait avec cette position.

4.7.1. Appui à 0.3 M

Les tableaux (4.1) , (4.2) montrent les valeurs mesurées des contraintes et des déformations.

1) Section de l'appui $x = 0,3$, Figure (4.5)

1.1. Contrainte circonférentielle σ_{11} .

Nous constatons que dans la section de l'appui la contrainte circonférentielle maximale se trouve à l'intérieur de la section sur la fibre inférieure ($\theta = 0$) sa valeur est de l'ordre du $- 7,77$ de N/mm^2 (en compression), contrairement aux affirmations de ZICK, et d'une façon très analogue à nos résultats avec une répartition de charge paraboliques ou mixte.

- TABLEAU (4-1) -

```

*****
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
```

```

*****
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
```

```

*****
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*

```

```

*****
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
```

8115
LILLE

- TABLEAU (4-2) -

*
* SECTION G INTERIEURE $X=0.53$
* $A=0.3$ *

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-253	†	16	†	-5.221	†	-1.249
2	†	-132	†	-69	†	-3.210	†	-2.291
3	†	59	†	-19	†	1.130	†	-0.024
4	†	111	†	-27	†	2.161	†	0.132
5	†	-65	†	-12	†	-1.441	†	-0.662
6	†	-94	†	20	†	-1.848	†	-0.172
7	†	-34	†	-39	†	-0.960	†	-1.033
8	†	-37	†	-56	†	-1.130	†	-1.409

*
* SECTION C EXTERIEURE
* $A=0.3$ $X=0.53$ *

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-121	†	-25	†	-2.700	†	-1.294
2	†	-30	†	-25	†	-0.802	†	-0.730
3	†	34	†	16	†	0.817	†	0.557
4	†	-22	†	21	†	-0.330	†	0.302
5	†	-48	†	-97	†	-1.633	†	-2.353
6	†	-16	†	-67	†	-0.769	†	-1.511

*
* SECTION D EXTERIEURE
* $A=0.3$ $X=1m$ *

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-39	†	-14	†	-0.907	†	-0.540
2	†	-36	†	-12	†	-0.832	†	-0.479
3	†	-22	†	-13	†	-0.547	†	-0.422
4	†	32	†	-27	†	0.515	†	-0.362
5	†	-34	†	-41	†	-0.972	†	-1.075
6	†	-13	†	-75	†	-0.756	†	-1.660

*
* SECTION G EXTERIEURE
* $A=0.3$ $X=2m$ *

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-30	†	-22	†	-0.781	†	-0.655
2	†	-23	†	21	†	-0.351	†	0.296
3	†	-21	†	-15	†	-0.536	†	-0.447
4	†	-30	†	-37	†	-0.863	†	-0.966
5	†	12	†	-82	†	-0.256	†	-1.655

BUS
LILLE

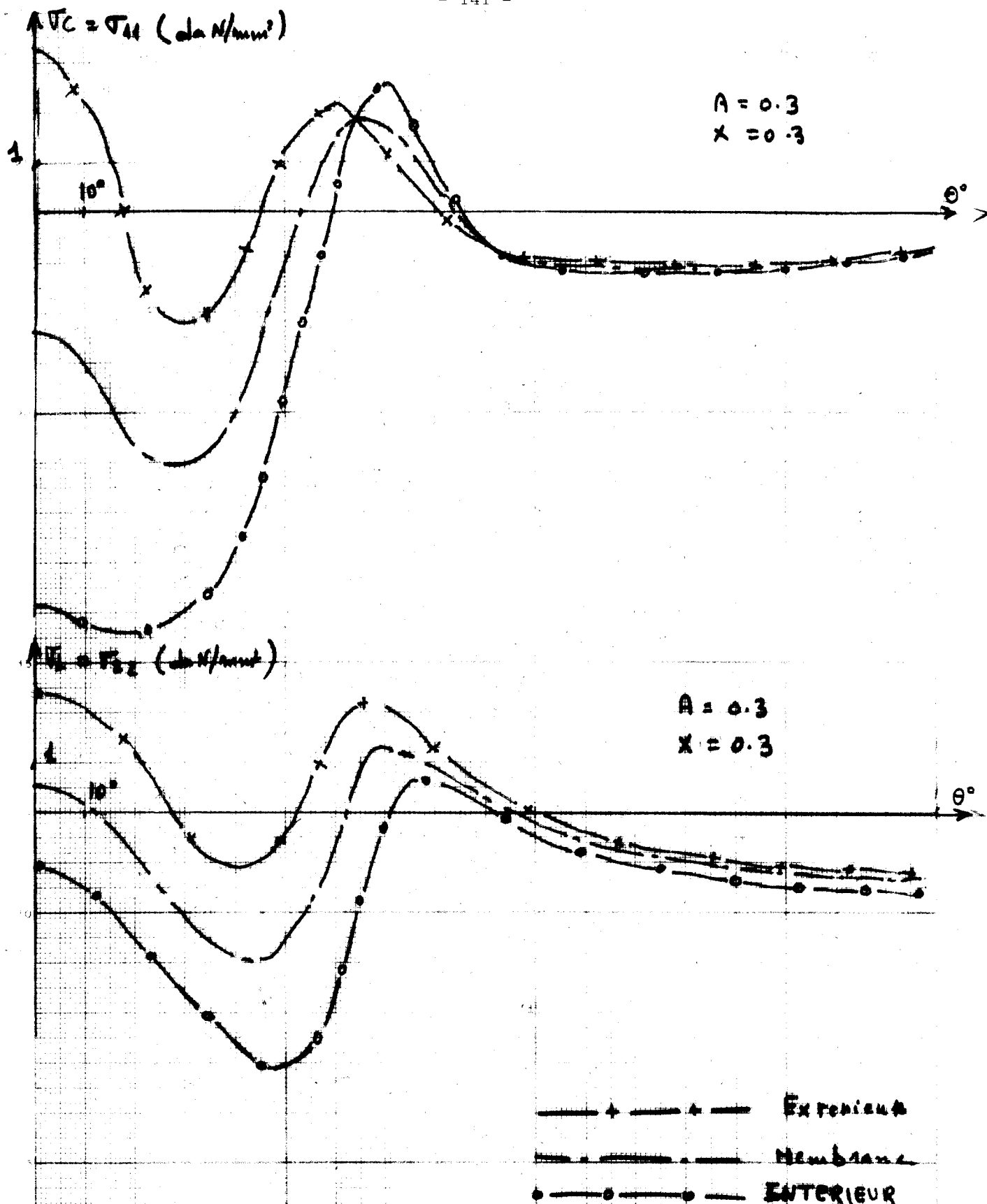


FIGURE (4-5) - section de l'appui



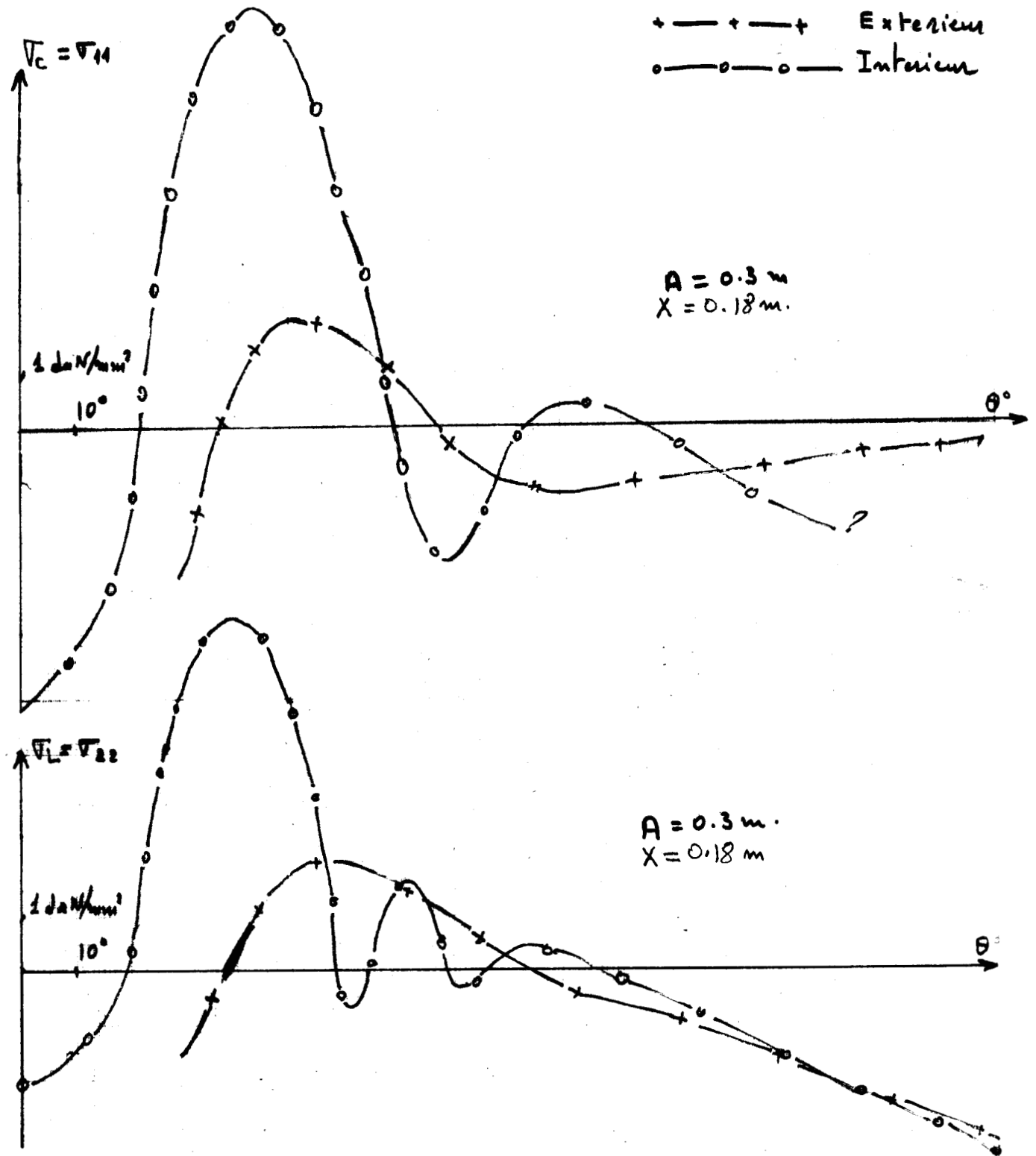


FIGURE (4-6) - section X = 0,18

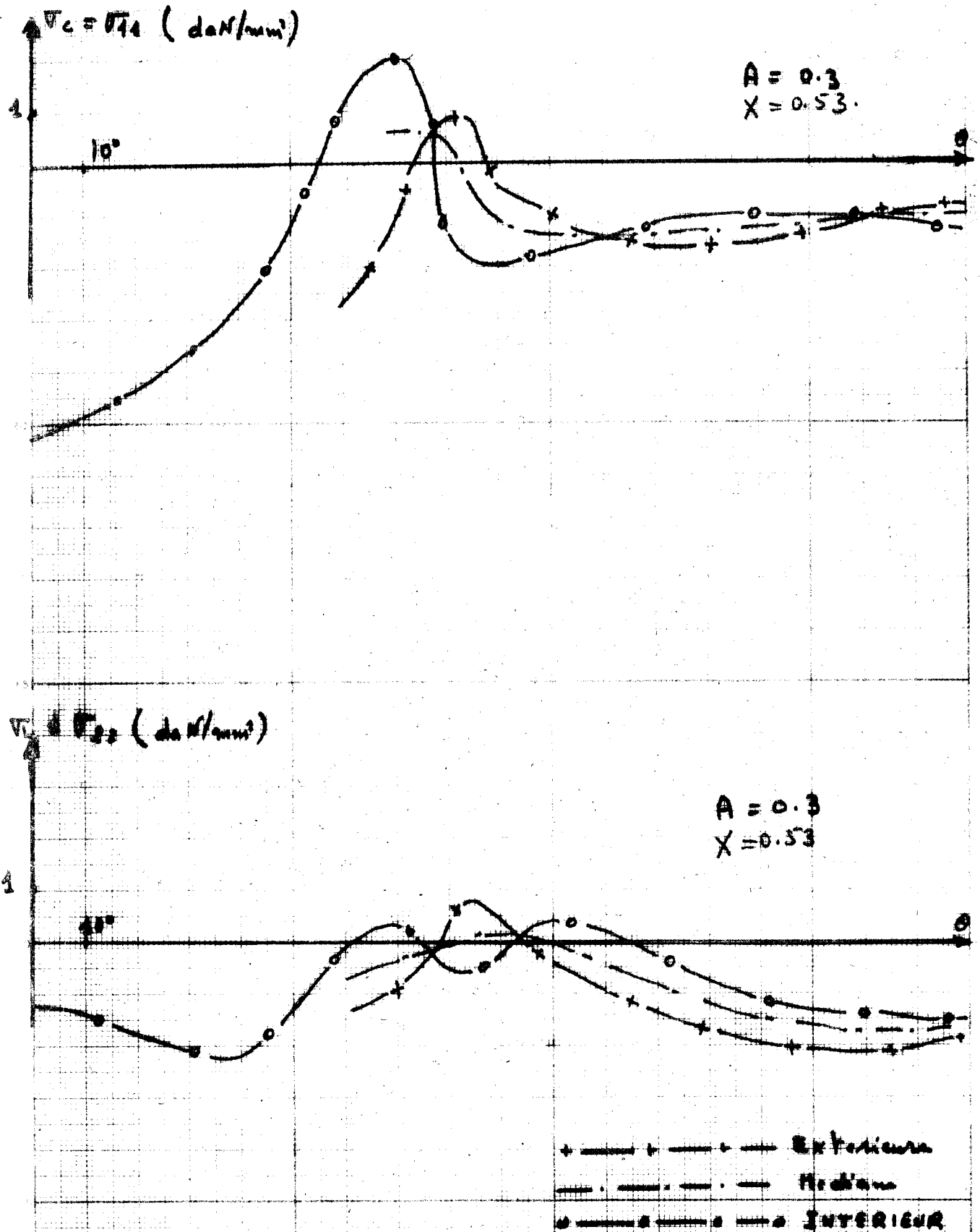


FIGURE (4-7) - section $X = 0.53$

$$\sigma_c = \sigma_{11} \text{ (daN/mm}^2\text{)}$$

+ — + — + Exterieur

$$A = 0.3$$

$$X = 1$$

$$\sigma_L = \sigma_{22} \text{ (daN/mm}^2\text{)}$$

$$A = 0.3$$

$$X = 1$$

$$\sigma_c = \sigma_{11} \text{ (daN/mm}^2\text{)}$$

$$A = 0.3$$

$$X = 2$$

$$\sigma_L = \sigma_{22} \text{ (daN/mm}^2\text{)}$$

$$A = 0.3$$

$$X = 2$$

$$\sigma_c = \sigma_{11} \text{ (daN/mm}^2\text{)}$$

$$A = 0.3$$

$$X = 3, 2$$

$$\sigma_L = \sigma_{22} \text{ (daN/mm}^2\text{)}$$

$$A = 0.3$$

$$X = 3, 2$$

FIGURE (4-8) - sections éloignées de l'appui

1.2. Contrainte longitudinale.

La contrainte moyenne longitudinale est en accord avec les résultats expérimentaux de ZICK-CARLSON (1948), dans la mesure où la fibre moyenne est comprimée dans la zone de contact appui-virole ainsi que dans la partie supérieure de la virole, et tendue dans la partie médiane de cette section. Cependant le maximum de cette contrainte se trouve en contre peau (-5 da N/mm^2) et à 45° à partir du bas.

Ces résultats sont très éloignés de la théorie de la poutre équivalente et des suggestions de ZICK, en effet la partie supérieure de la coque est comprimée d'une façon appréciable : ($-1,45 \text{ da N/mm}^2$) alors que ZICK suppose l'absence des contraintes dans cette zone ; en plus nous constatons une flexion locale dans cette direction trop importante dont l'amplitude moyenne est voisine de 2 da N/mm^2 dans toute la partie de contact support virole ($\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$) cette flexion locale ne peut pas être décrite à partir de la version actuelle des codes A.S.M.E. et S.N.C.T.

2) Sections proches de l'appui $A = 0.18$, $A = 0.53$.

Les résultats de la figure (4.6) sont à considérer avec précaution vu la défaillance des instruments des mesures connectées aux jauges placées dans cette section.

L'examen des résultats dans la section 0.53 (figure 4.7) fait apparaître une flexion circonférentielle appréciable (maximum en $\theta = 0$, $-2,7 \text{ da N/mm}^2$) cependant nous n'avons pas pu tracer l'évolution moyenne de la contrainte de la membrane faute de pouvoir coller des jauges dans la partie basse extérieure de cette section ; la contrainte de flexion longitudinale suit une allure comparable à celle de la section de l'appui (compression dans ses parties supérieures et inférieures et traction dans sa partie médiane) cependant nous notons l'amortissement de la flexion locale longitudinale dans cette section.

3) Sections éloignées de l'appui

L'examen de la figure (4.8) fait apparaître une flexion circonférentielle pure dans les sections 1m, 2m et 3,2 m, dont les valeurs maximales sont comparables et de l'ordre de $1,3 \text{ da N/mm}^2$ en $x = 1$, de 1 da N/mm^2 en $x = 2m$ et de $0,6 \text{ da N/mm}^2$ dans la section du milieu, par contre, la flexion longitudinale dans ces sections est loin d'être celle de la poutre équivalente en effet, nous constatons que la compression de la fibre inférieure de la coque est présente en $x = 1m$ et en $x = 2m$.

4.7.2. Appui à 0.53 m

Les tableaux (4.3) et (4.4) résument les résultats expérimentaux et nous pouvons faire les constatations suivantes :

1) Sections de l'appui : Fig. (4.9)

1.1. Contraintes circonférentielle σ_{11} .

Comme dans le cas précédent la contrainte de la membrane n'est pas nulle en dehors de la zone du contact support-virole. En outre la flexion circonférentielle s'effectue conformément aux résultats de nos calculs (chapitre III) avec un maximum de compression en contre peau voisine de $- 6,5 \text{ da N/mm}^2$ pour la première expérience et $- 8,9$ pour la deuxième ; cet écart est essentiellement dû à l'adaptation de l'appareil aux nouvelles sollicitations après déformations initiales ; le maximum de cette contrainte en traction se trouve près du bord de l'appui à (72°) , sa valeur est voisine de 5 da N/mm^2 .

1.2. Contraintes longitudinales σ_{22} .

La flexion longitudinale de l'appareil est similaire à celle obtenue dans le cas où $A = 0,3$. La section de l'appui comporte deux zones comprimées en bas et en haut de l'appareil et une zone tendue ; la valeur maximale de la contrainte se trouve à l'intérieur de la zone du contact support-virole à $\theta \approx 35^\circ$ en contre peau, sa valeur est de : $- 7,2 \text{ da N/mm}^2$, le maximum en traction est de 2 da N/mm^2 en peau ; dans la partie supérieure de l'appareil la contrainte de compression est de $- 1,34 \text{ da N/mm}^2$ ces contraintes ne sont pas négligeables.

Dans cette section, ni la théorie de la poutre équivalente, ni la théorie de ZICK ne sont pas applicables pour évaluer les contraintes.

2) Zone entre le fond et l'appui : Fig. (4.10)

La contrainte de la membrane est pratiquement nulle. Seule la flexion circonférentielle apparaît avec une amplitude de contrainte de l'ordre de 1 da N/mm^2 .

La flexion longitudinale est influencée par la présence de l'appui. Elle provoque une compression pour les zones inférieure et supérieure de l'appareil et une traction pour la zone médiane.

3) Zones entre l'appui et le milieu de l'appareil Fig. (4.11) .

Nous avons les mêmes constatations qu'auparavant, en plus nous remarquons que la flexion longitudinale ^{est} très différente de celle proposée dans la théorie de ZICK.

Les sections $X = 1\text{m}$ et à $X = 2\text{m}$ et $X = 3,2$ (milieu de l'appareil) sont comprimées dans leurs parties supérieures et inférieures et tendues dans leur partie médiane, conformément aux résultats de nos calculs (chapitre II).

- TABLEAU (4.3.)

A.P. 41 A = 0.53

SECTION A MOYEN
Extérieure Ext.

X = 0.18

MESURE	↑	EPSILON C	↑	EPSILON L	↑	SIGMA C	↑	SIGMA L
1	↑	-62	↑	-13	↑	-1.398	↑	-0.677
2	↑	-14	↑	-67	↑	-0.719	↑	-1.506
3	↑	64	↑	-45	↑	1.068	↑	-0.549
4	↑	-53	↑	49	↑	-0.801	↑	0.706
5	↑	-33	↑	-44	↑	-0.981	↑	-1.135
6	↑	-62	↑	-70	↑	-1.743	↑	-1.861

SECTION G INTERIEURE

A = 0.53
X = 0.53

MESURE	I	EPSILON C	I	EPSILON L	I	SIGMA C	I	SIGMA L
1	I	-418	I	-20	I	-8.907	I	-3.064
2	I	-263	I	-266	I	-7.211	I	-7.247
3	I	172	I	-99	I	2.988	I	-0.995
4	I	285	I	-72	I	5.532	I	0.272
5	I	-248	I	17	I	-5.107	I	-1.200
6	I	-88	I	53	I	-1.513	I	0.563
7	I	-8	I	-43	I	-0.447	I	-0.956
8	I	-22	I	-57	I	-0.821	I	-1.336

SECTION C Extérieure

A = 0.53
X = 0.53

MESURE	↑	EPSILON C	↑	EPSILON L	↑	SIGMA C	↑	SIGMA L
1	↑	-193	↑	-79	↑	-4.551	↑	-2.875
2	↑	87	↑	42	↑	2.102	↑	1.433
3	↑	63	↑	87	↑	1.882	↑	2.227
4	↑	-10	↑	30	↑	-0.021	↑	0.567
5	↑	-27	↑	-26	↑	-0.734	↑	-0.727
6	↑	-19	↑	-36	↑	-0.639	↑	-0.889



- TABLEAU (4.4.)

Appui $A = 0.53$

SECTION B extérieure

$A = 0.53$
 $X = 0.3$

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L
1	192	-49	1.830	-0.397
2	-16	-55	-0.693	-1.259
3	72	-67	1.090	-0.353
4	7	37	0.330	0.821
5	-7	-44	-0.424	-0.968
6	42	45	-1.187	-1.215
7	43	-25	0.745	-0.254
8	-47	46	-0.768	0.667

SECTION D extérieure $A = 0.53$
 $X = 1m$

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L
1	-56	14	-1.898	-0.052
2	-49	23	-0.981	0.185
3	31	-12	0.583	-0.064
4	52	-13	0.958	-0.152
5	-24	-35	-0.735	-0.889
6	12	-54	-0.888	-1.058

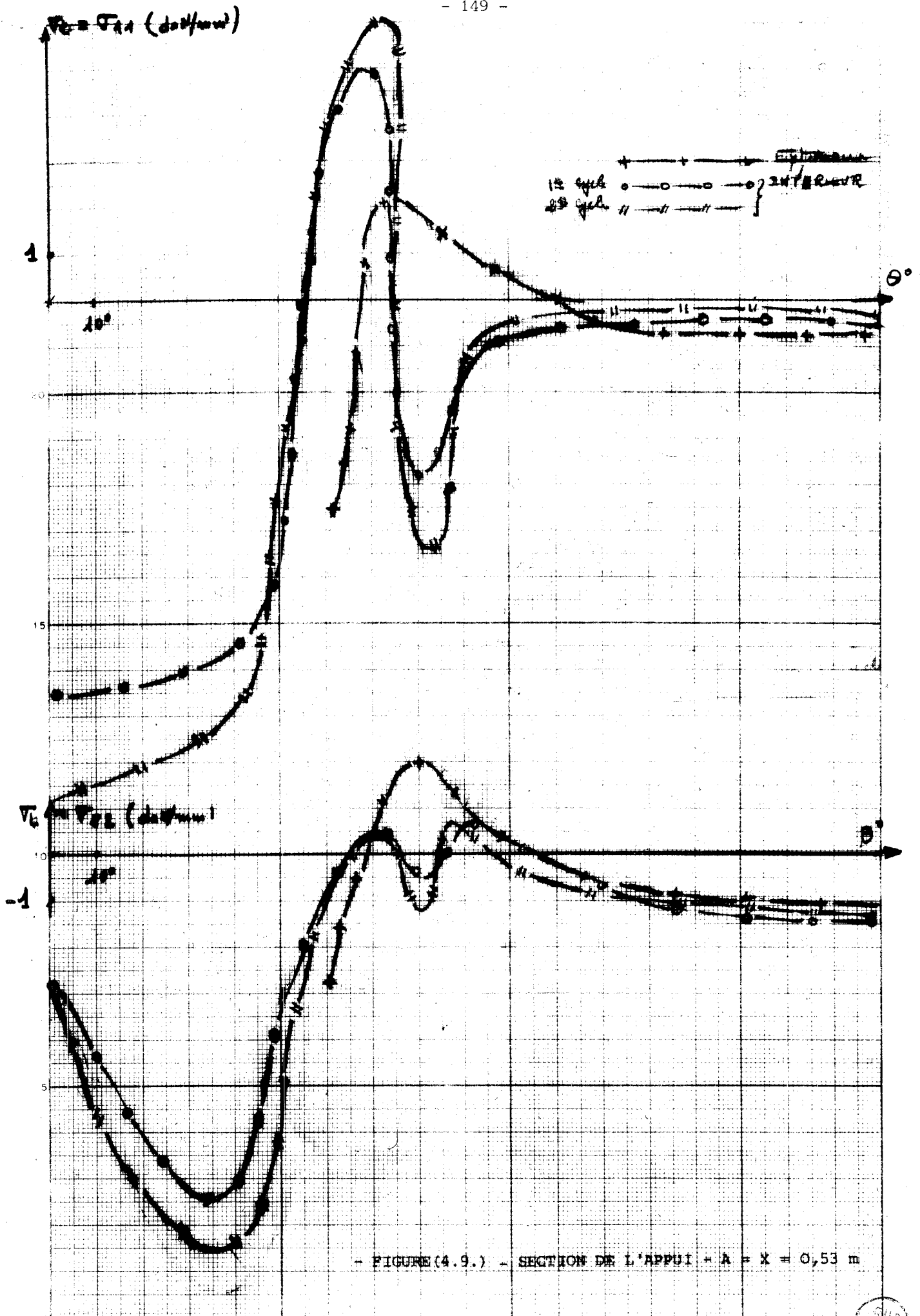
SECTION G MOYEN

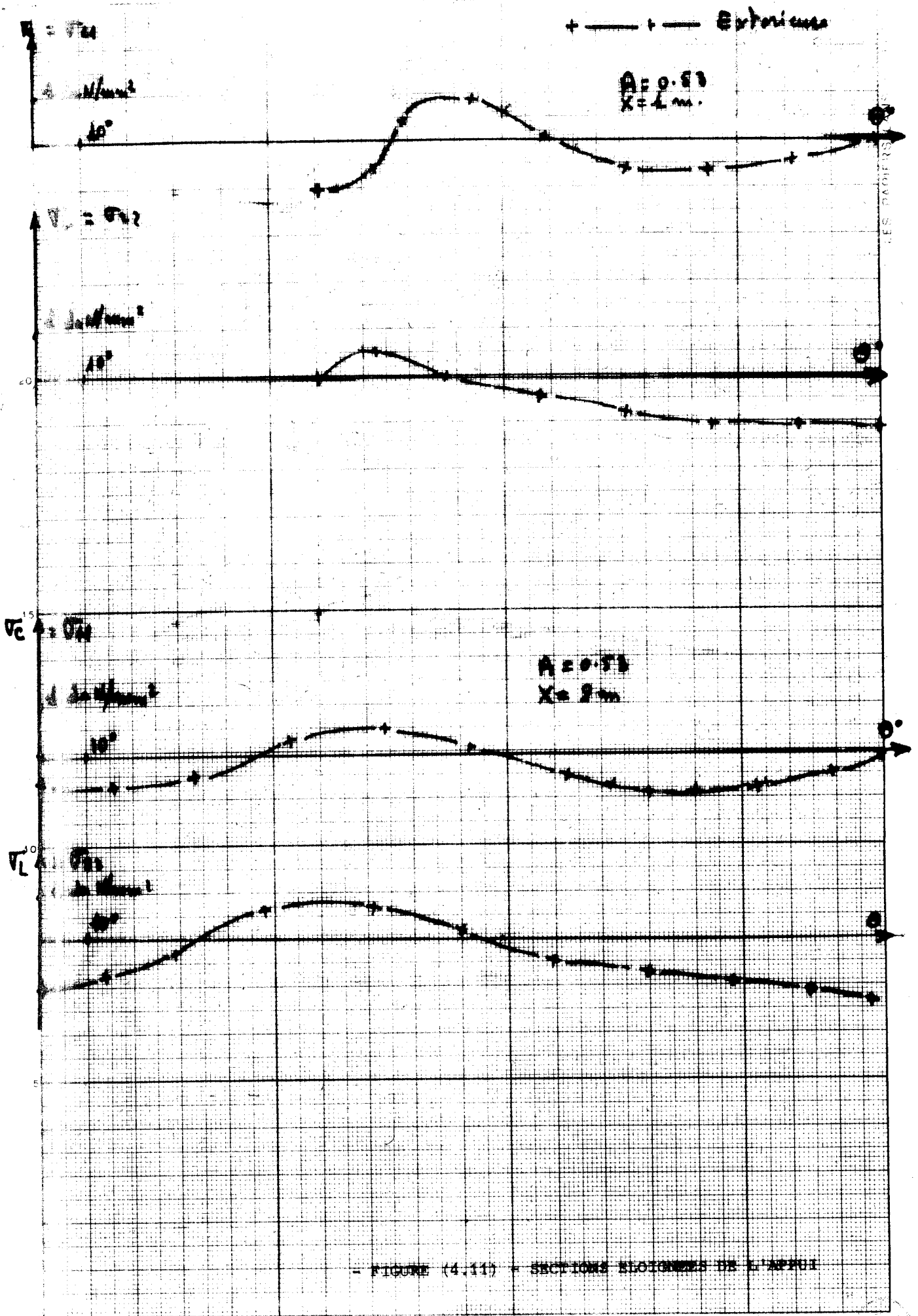
$A = 0.53$
 $X = 2m$

extérieure

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L
1	-18	-41	-0.647	-0.978
2	-13	29	-0.090	0.527
**	11	3	0.260	0.135
4	-26	-30	-0.735	-0.794
5	24	-70	0.074	-1.316







- FIGURE (4.11) - SECTIONS ÉLOIGNÉES DE L'APPUI

Par ailleurs la contrainte circonférentielle correspond sensiblement à la seule flexion (absence de contrainte de la membrane, celle ci n'apparaît que dans la section de l'appui).

4.7.3. Appui à 1m.

Dans cet essai, nous avons constaté que l'appareil a conservé son ovalisation précédemment décrite ; autrement dit les supports touchent l'appareil pratiquement en ses extrémités ($\theta = \pm \frac{\pi}{3}$) ; de plus nous avons constaté un affaissement de la partie centrale de l'appui selon la direction longitudinale, de sorte que le contact entre support et appareil ne s'effectue plus d'une façon uniforme dans le sens longitudinal. Ces constatations sont, d'ailleurs également observées pour les positions de l'appui définies par $A = 1,15$ m et par $A = 1,28$ m ; les valeurs trouvées sont résumées dans les tableaux (4.5) et (4.6).

1) Section de l'appui 1 m :

1.1. Contrainte circonférentielle σ_{11} .

La figure (4.13) fait apparaître les courbes trouvées expérimentalement ; en particulier nous constatons que la flexion circonférentielle s'effectue d'une façon similaire aux résultats de nos calculs, à condition de prendre une répartition de pression uniforme, cependant comme nous l'avons trouvé, la contrainte maximale mentionnée dans le chapitre III en compression se trouve en contrepeau à l'intérieur de la zone de l'appui contrairement à la théorie de ZICK sa valeur est voisine de -9 du N/mm^2 ; par contre la valeur maximale en traction se trouve près des extrémités du support. ($\theta \simeq 70^\circ$), la contrainte de la membrane subit une légère distorsion qui peut être imputée à la déformation de l'appareil d'une part et aux erreurs expérimentales d'autre part.

1.2. Contrainte longitudinale σ_{22}

La flexion longitudinale s'effectue d'une façon analogue aux flexions obtenues par les autres positions d'appui, avec une compression des parties inférieures et supérieures de la section et une traction de sa partie médiane. La partie supérieure est comprimée d'une façon appréciable ($2,2$ du N/mm^2) ; la contrainte maximale en compression est en peau ($-3,94$ du N/mm^2) (pour θ voisin de 60°).

2) Sections assez éloignées de l'appui Figure (4.12).

Sauf erreur expérimentale importante (qui d'après l'allure des résultats peut exister dans la section à $0,3$ m du fond) nous constatons une flexion circonférentielle pure d'amplitude voisine de 1 daN/ mm^2 en $X = 0,3$ et en $X = 2$ m, et de

- TABLEAU (4.5) -

*
* SECTION H INTERIEURE $A=1m$
* $\lambda=0.3$ *

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-4	†	-24	†	-0.235	†	-0.529
2	†	16	†	-113	†	-0.371	†	-2.277
3	†	26	†	-6	†	0.508	†	0.038
4	†	-64	†	4	†	-1.319	†	-0.319
5	†	-53	†	-91	†	-1.686	†	-2.245
6	†	-67	†	-106	†	-2.075	†	-2.648

*
* SECTION B EXTERIEURE $\lambda=0.3$
* $A=1m$ *

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	35	†	29	†	0.921	†	0.842
2	†	-49	†	-21	†	-1.178	†	-0.766
3	†	-41	†	-41	†	-1.122	†	-1.130
4	†	-19	†	-26	†	-0.577	†	-0.681
5	†	24	†	-28	†	0.328	†	-0.437
7	†	-47	†	-39	†	-1.245	†	-1.119
8	†	-28	†	-56	†	-0.941	†	-1.352

*
* SECTION G EXTERIEURE $\lambda=2m$
* $A=1m$ *

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	11	†	-69	†	-0.191	†	-1.376
2	†	-26	†	24	†	-0.407	†	0.336
3	†	18	†	15	†	0.483	†	0.443
4	†	-44	†	-21	†	-1.058	†	-0.725
5	†	16	†	-86	†	-0.197	†	-1.714

*
* SECTION H EXTERIEURE $\lambda=3.2m$
* $A=1m$ *

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-58	†	3	†	-1.210	†	-0.306
2	†	16	†	20	†	0.464	†	0.527



SECTION F INTERIEURE

A = 1m
X = 1m

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-309	†	-76	†	-6.968	†	-3.543
2	†	-431	†	15	†	-8.957	†	-2.400
3	†	399	†	-202	†	7.103	†	-1.739
4	†	-343	†	38	†	-6.960	†	-1.352
5	†	-111	†	-142	†	-3.236	†	-3.684
6	†	-85	†	-109	†	-2.472	†	-2.825
7	†	9	†	-108	†	-0.491	†	-2.211

SECTION D EXTERIEURE

X = 1m

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-365	†	-78	†	-8.156	†	-3.938
2	†	93	†	20	†	2.082	†	1.016
3	†	71	†	67	†	1.913	†	1.854
4	†	-34	†	53	†	-0.377	†	0.909
5	†	-54	†	-51	†	-1.468	†	-1.415
6	†	-27	†	-75	†	-1.050	†	-1.748

SECTION E INTERIEURE

X = 1,15

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-337	†	-161	†	-8.094	†	-5.515
2	†	-367	†	-87	†	-8.269	†	-4.153
3	†	290	†	-98	†	5.469	†	-0.242
4	†	-125	†	14	†	-2.534	†	-0.483
5	†	62	†	-142	†	0.407	†	-2.591
6	†	19	†	-43	†	0.128	†	-0.783
7	†	26	†	-64	†	0.143	†	-1.180

SECTION E EXTERIEURE

X = 1,15

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	174	†	83	†	4.177	†	2.839
2	†	-193	†	-16	†	-4.154	†	-1.552
3	†	-22	†	-46	†	-0.752	†	-1.105
4	†	71	†	11	†	1.563	†	0.689
5	†	21	†	51	†	0.762	†	1.203
6	†	-64	†	-49	†	-1.653	†	-1.432
7	†	-12	†	-77	†	-0.751	†	-1.706

- TABLEAU (4.7.) -

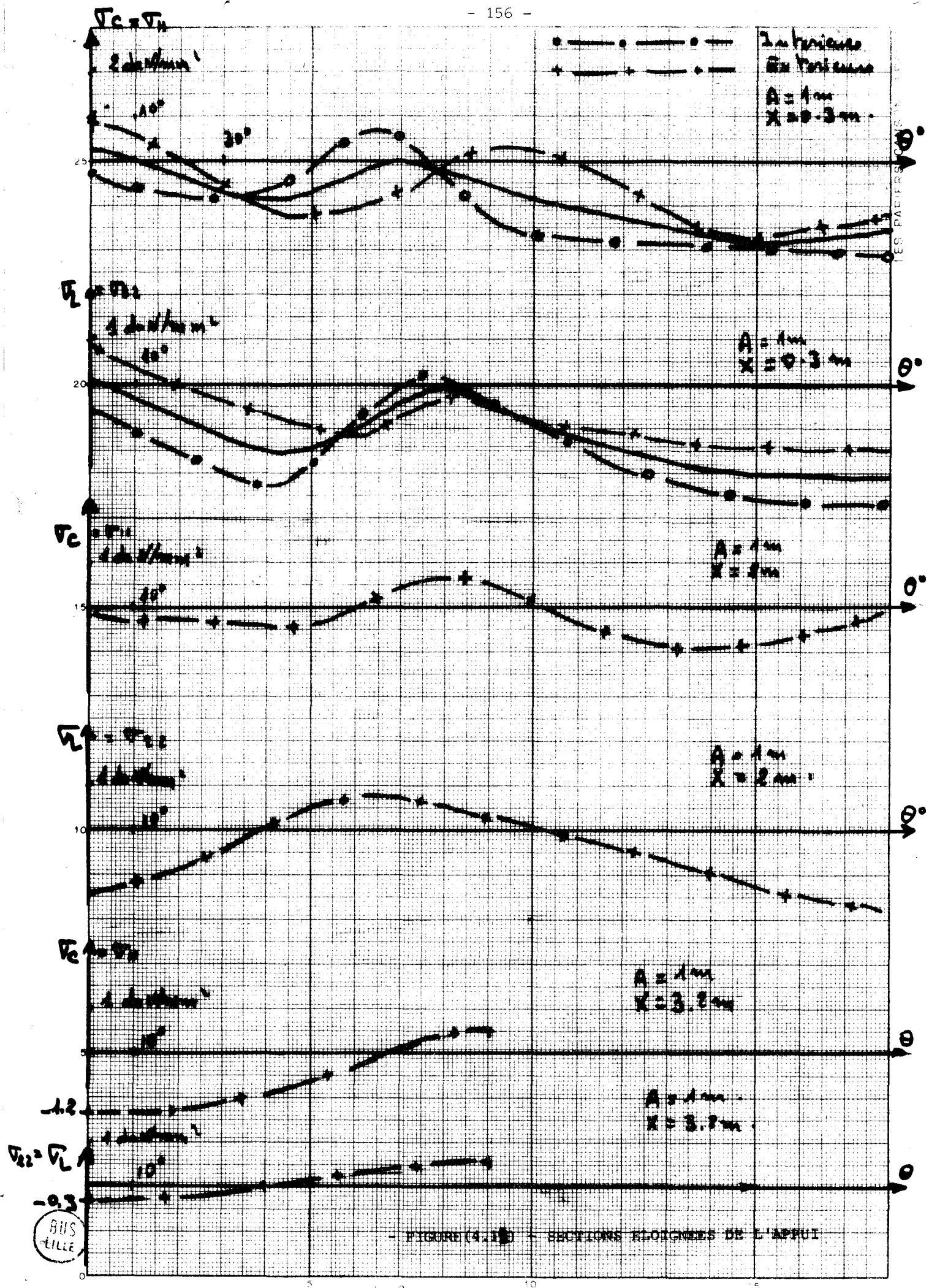
```

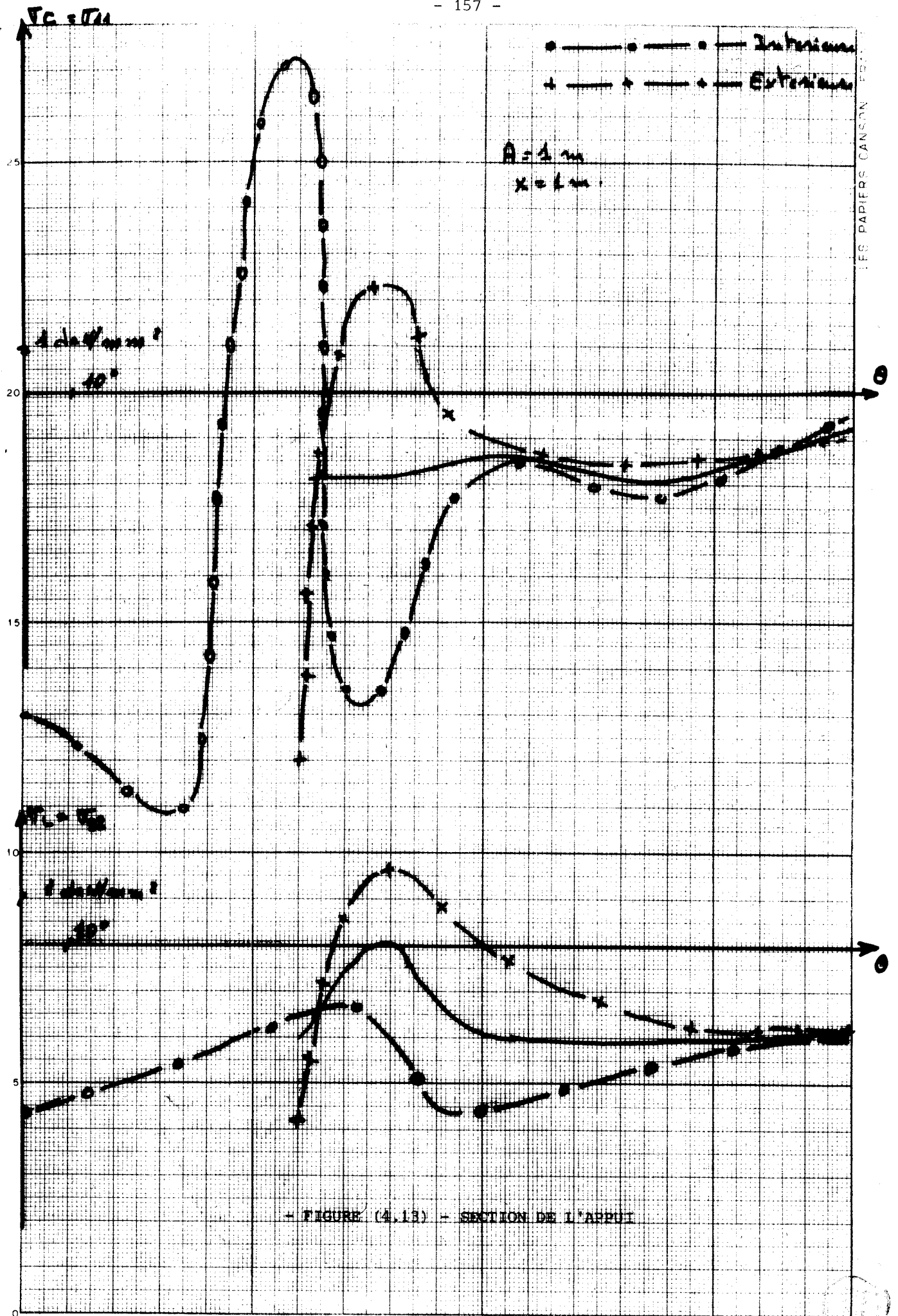
*****
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
```

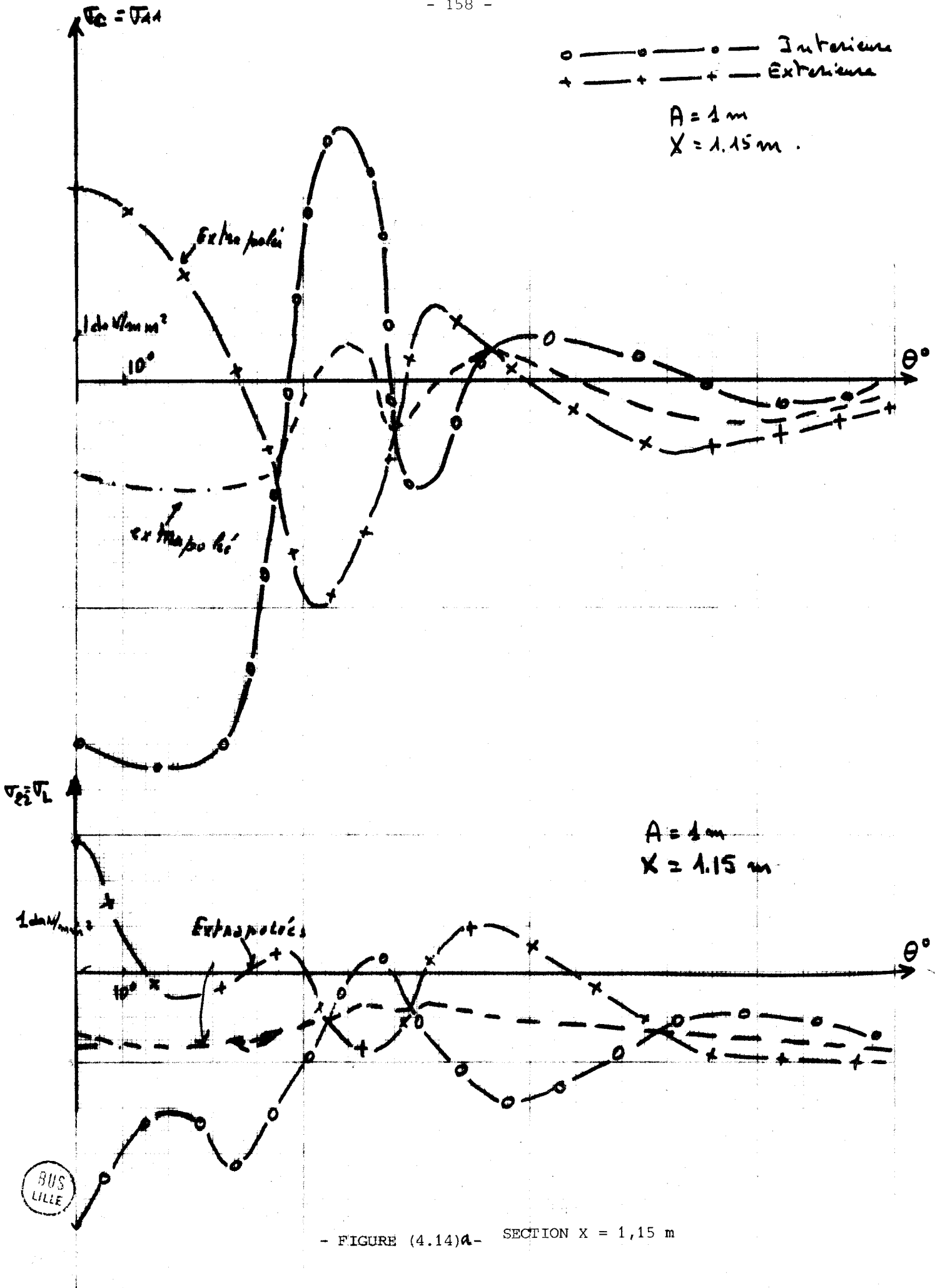
```

*****
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
```

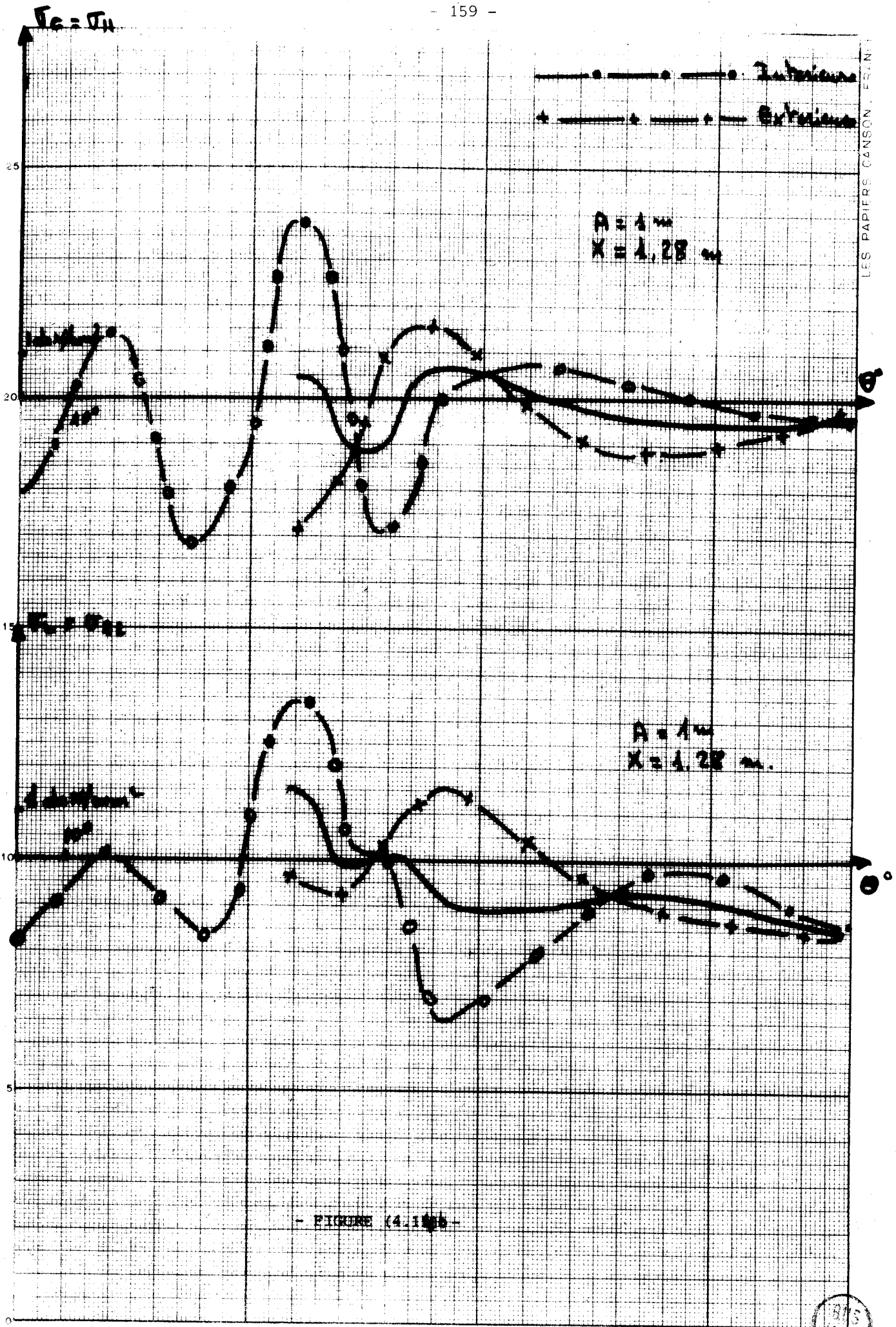
BUS
LILLE







- FIGURE (4.14)a- SECTION X = 1,15 m



0,5 da N/mm² dans la section du milieu.

La flexion longitudinale fait apparaître une compression de l'appareil sur toute sa longueur dans ses fibres inférieures ($\theta = 0$) et dans ses fibres supérieures ($\theta = \pi$), ainsi qu'une traction dans sa partie médiane. Cette flexion est d'amplitude plus importante dans la zone de l'appareil située entre les deux appuis que dans celle située entre les fonds et les appuis.

3) Sections voisines de l'appui ($X = 1,15$ m et $X = 1,28$ m). Figure (4.14)

L'étude des résultats de mesure dans les sections 1,15 m et 1,28 m fait apparaître l'influence de la déformation de l'appareil d'une part et l'inclinaison de la charge des appuis d'autre part ; ceci se traduit par une amplitude de la flexion locale aussi bien dans le sens longitudinal que circonférentiel avec des niveaux de contrainte beaucoup plus importantes que dans le cas de la section de l'appui. Cette flexion locale apparaît, d'ailleurs, dans la totalité de la section y compris dans sa partie supérieure ; la section $X = 1,15$ distante seulement de 5 centimètres du bord de l'appui étant bien sûre plus sollicitée.

Cependant la contrainte de la membrane est faible dans les deux cas par rapport aux contraintes introduites par ces flexions locales.

4.7.4. Appui à $A = 1,15$ m.

Les résultats sont rassemblés dans les tableaux 4-8 , 4-9, et 4-10 et nous constatons la même tendance qu'auparavant, en particulier, en ce qui concerne la flexion locale trop importante dans les sections près des appuis.

1) Section de l'appui $X = 1,15$ m

1-1 - Contrainte circonférentielle σ_{11}

La figure (4.17) résume les résultats expérimentaux nous avons une inversion des tendances pour les contraintes circonférentielles dont le maximum est en contre peau et en traction ($+ 10$ da N/mm²) près du bord de l'appui, par contre le maximum en contrainte négative se trouve cette fois en peau et au même point ($- 9,4$ da N/mm²). Cette tendance est essentiellement due à l'ovalisation trop importante de l'appareil dans cette région à tel point que presque la totalité de l'effort se trouve reporté près des bords de l'appui ($\theta = \pm \frac{\pi}{3}$)

1-2 - Contrainte longitudinale σ_{22}

La flexion longitudinale admet la même tendance toutefois nous avons toujours deux parties comprimées et une partie médiane tendue avec une flexion locale très importante.

SECTION H INTERIEURE

$A=1,15$ $X=0.3$

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L
1	-14	11	-0.232	0.150
2	16	-117	-0.401	-2.356
3	37	5	0.809	0.338
4	-45	-6	-0.983	-0.410

SECTION E EXTERIEURE

$A=1,15$
 $X=0.3$

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L
1	-11	-35	-0.452	-0.804
2	-50	-42	-1.315	-1.197
3	-35	-21	-0.867	-0.662
4	-16	-18	-0.437	-0.437
5	-27	-12	-0.643	-0.422
7	-44	-46	-1.214	-1.243
8	-3	-44	-0.340	-0.943

SECTION F INTERIEURE

$X=1m$
 $A=1,15$

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L
1	-56	-132	-2.006	-3.125
2	-301	-63	-6.728	-3.222
3	+338	-338	4.855	-4.982
4	-462	-147	-10.628	-5.998
5	-55	-162	-2.186	-3.752
6	-45	-44	-1.233	-1.211
7	33	-101	0.067	-1.910

— 0°
— 30°
— 60°
— 72°
— 90°
— 135°
— 190°

SECTION D EXTERIEURE

$A=1,15$
 $X=1m$

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L
1	-302	-36	-6.569	-2.659
2	65	9	1.422	0.599
3	87	63	2.224	1.871
4	34	50	1.029	1.264
5	-55	-103	-1.804	-2.510
6	2	-75	-0.431	-1.582



SECTION D INTERIEURE

A=1,15

X=1,28

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L
1	-320	-98	-7.337	-4.074
2	131	-163	1.735	-2.695
3	-347	-32	-7.489	-2.858
4	-85	145	-0.882	2.506
5	285	51	6.309	2.877
6	-183	25	-2.846	-0.376
7	-333	80	-6.5	-0.421
8	39	-190	-0.37	-3.752
9	2	-36	-0.18	-0.740
	3	-111	-0.623	-2.319

SECTION F EXTERIEURE

A=1,15

X=1,28

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L
1	-234	-28	-5.09	-2.062
2	-23	-35	-0.704	-0.88
3	60	28	1.436	0.966
4	31	63	1.048	1.518
5	-64	-33	-1.552	-1.096
6	14	-38	-0.323	-1.979

SECTION G EXTERIEURE

A=1,15

X=2m

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L
1	8	-90	-0.389	-1.836
2	26	11	0.629	0.408
3	19	13	0.484	0.403
4	-53	-17	-1.22	-0.691
5	25	-101	-0.101	-1.96

SECTION H EXTERIEURE

A=1,15

X=3,2

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L
1	-14	-78	-0.785	-1.726
2	8	17	0.275	0.407

- TABLEAU (4.10) -

SECTION E EXTERIEURE					
A=1.15 X=1.15					
MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L	
1	-102	-131	-2.970	-3.404	0
2	-416	-37	-9.361	-4.671	60
3	75	49	1.897	1.515	72
4	73	73	1.993	1.993	80
5	12	20	0.392	0.509	90
6	-65	-73	-1.825	-1.943	135
7	23	-83	-0.040	-1.598	180

SECTION E INTERIEURE					
A=1.15 X=1.15					
MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L	
1	-98	48	-1.756	0.391	0
2	-349	-43	-7.630	-3.102	36
3	534	-97	10.630	1.317	60
4	-333	10	-7.056	-1.928	72
5	29	-133	-0.421	-2.678	90
6	8	-72	-0.286	-1.462	135
7	-78	-143	-2.539	-3.494	180

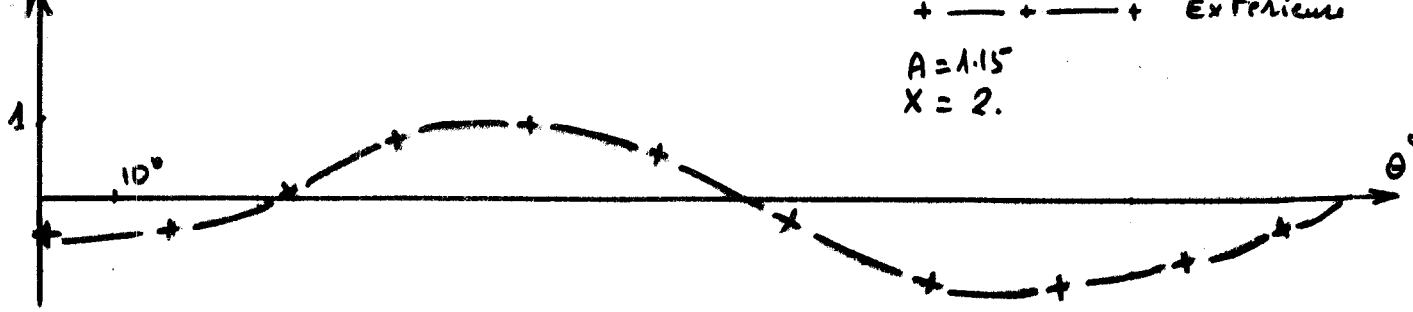
4-8



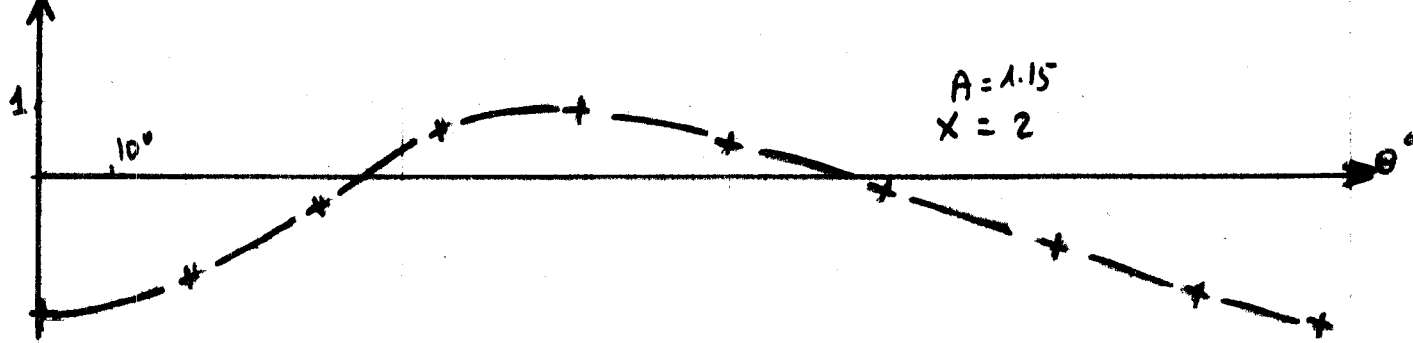
+ — + — + Extérieurs

$A = 1.15$
 $X = 2.$

$\sigma_c = \sigma_{11} \text{ (daN/mm}^2\text{)}$



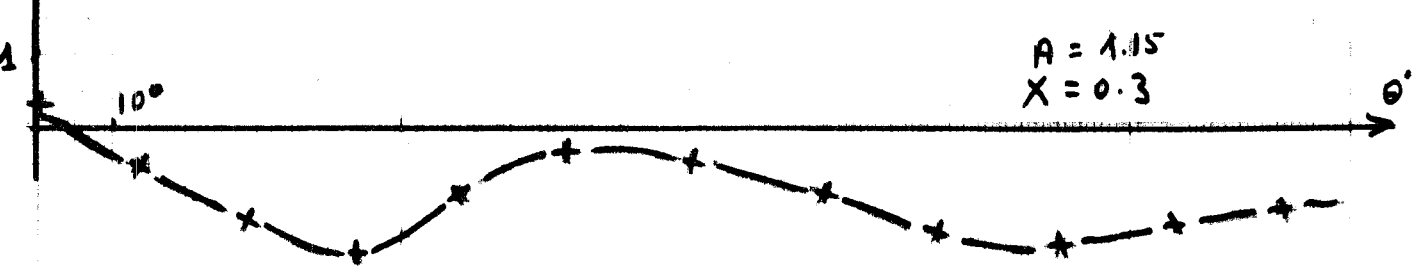
$\sigma_L = \sigma_{22} \text{ (daN/mm}^2\text{)}$



$\sigma_c = \sigma_{11} \text{ (daN/mm}^2\text{)}$

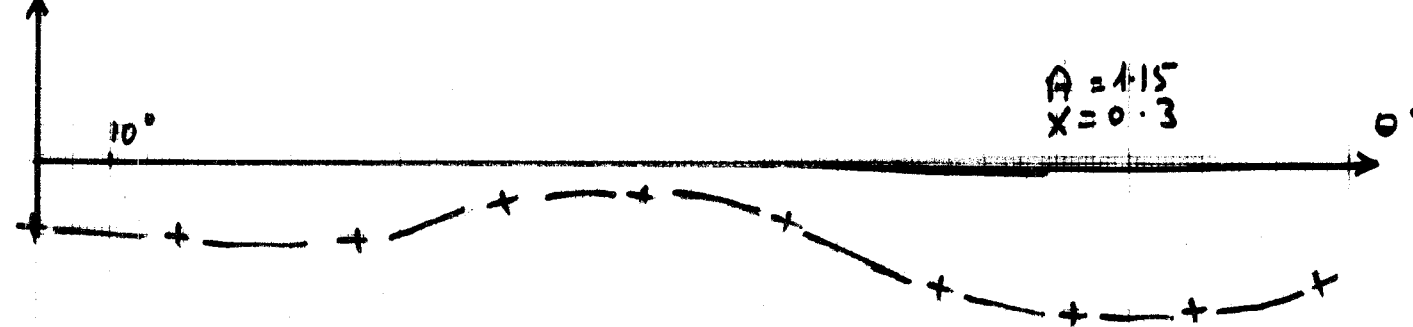
$X = 0.3$

$A = 1.15$
 $X = 0.3$



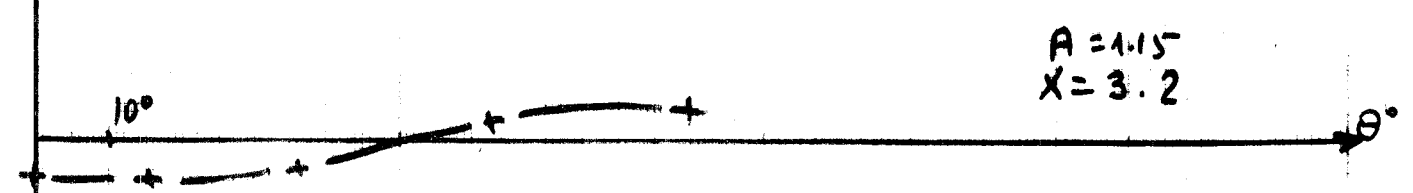
$\sigma_L = \sigma_{22}$

$A = 1.15$
 $X = 0.3$



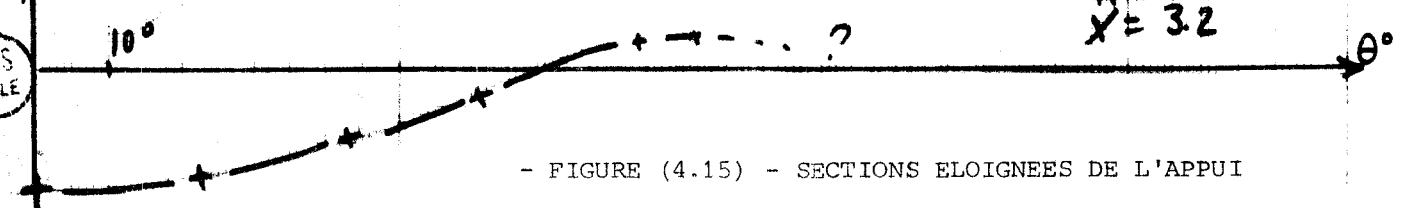
$\sigma_c = \sigma_{11}$

$A = 1.15$
 $X = 3.2$



$\sigma_L = \sigma_{22}$

$A = 1.15$
 $X = 3.2$

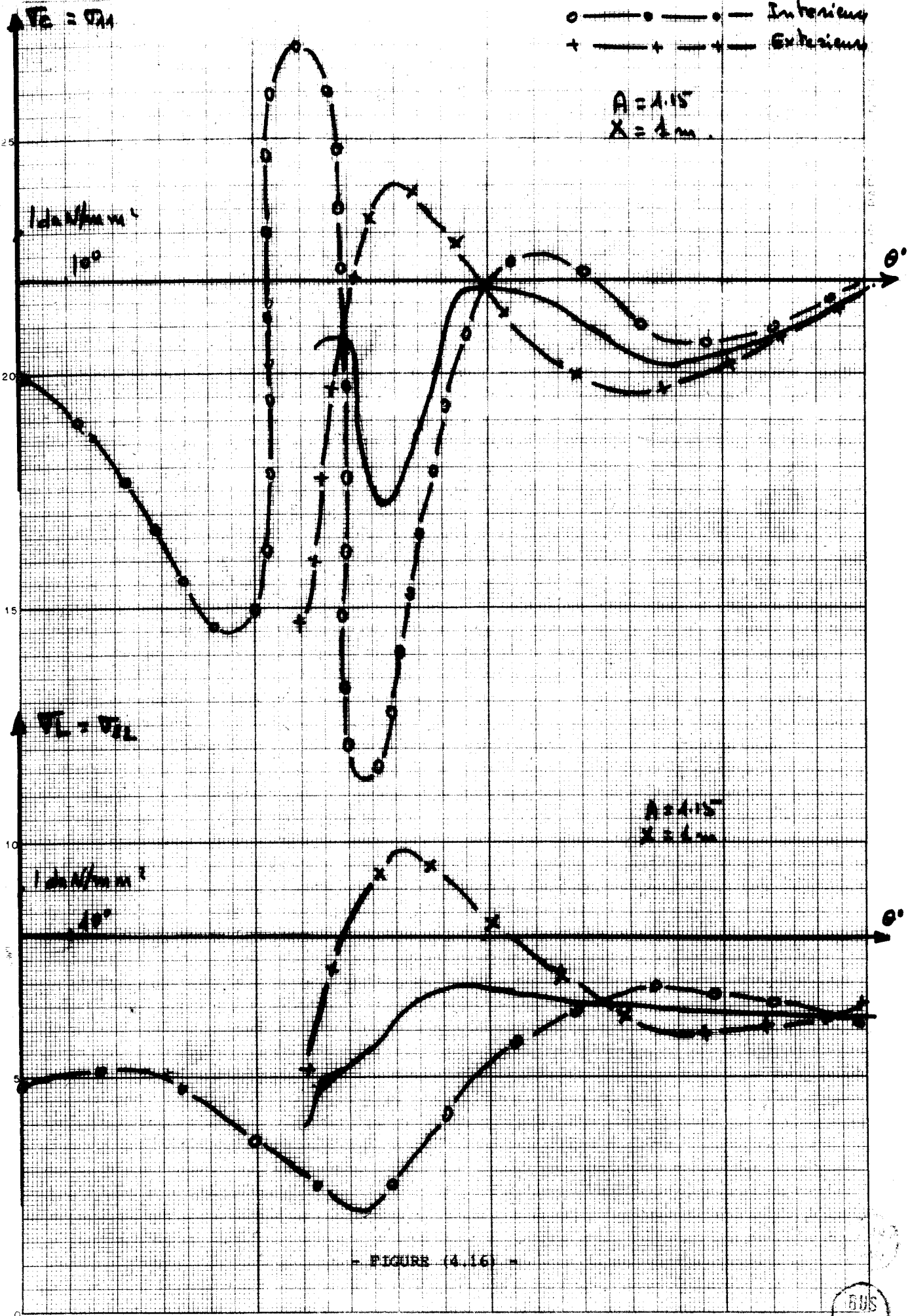


- FIGURE (4.15) - SECTIONS ELOIGNEES DE L'APPUI

BHS
LILLE

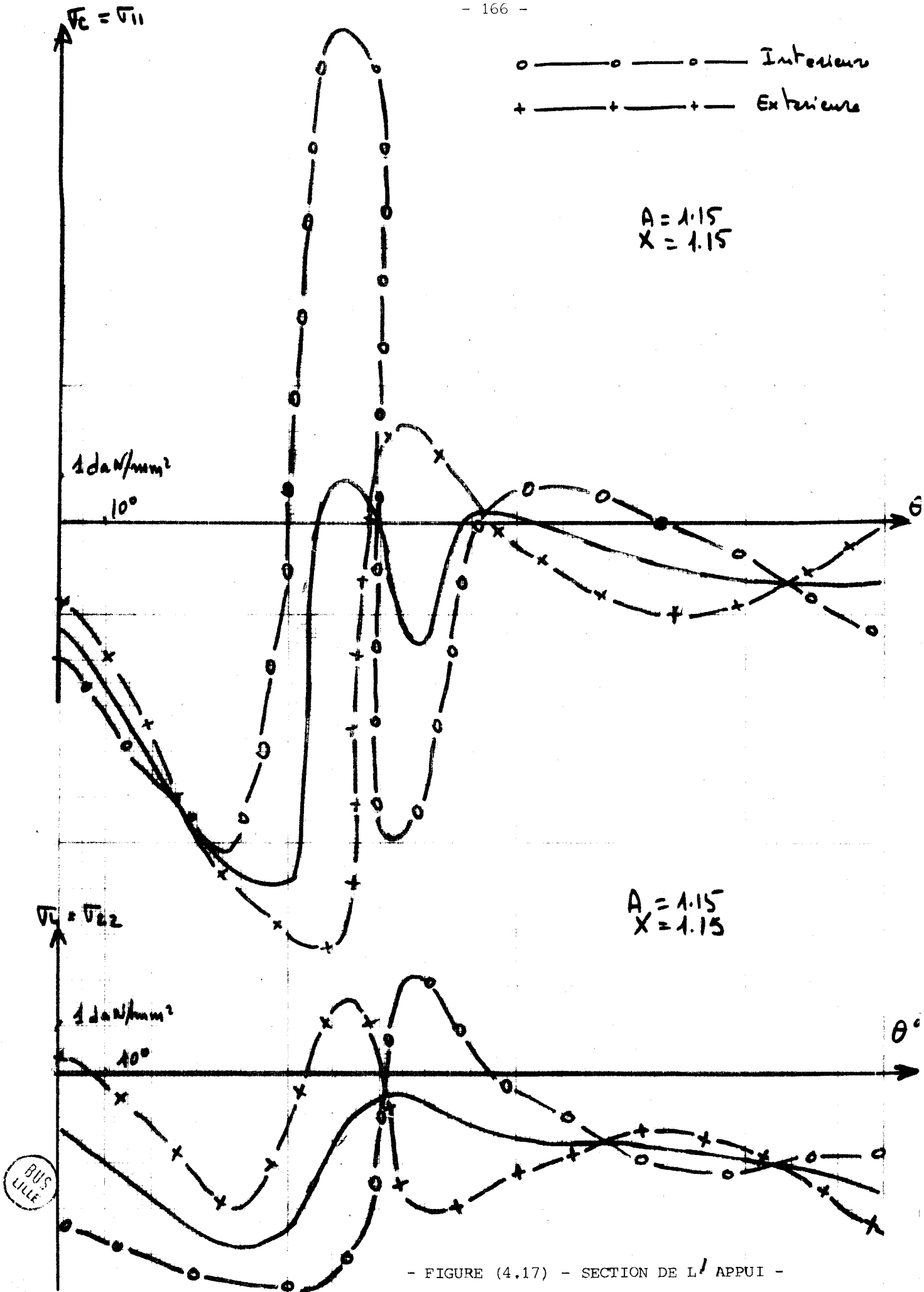
○ — — — — — Interior
+ — — — — — Exterior

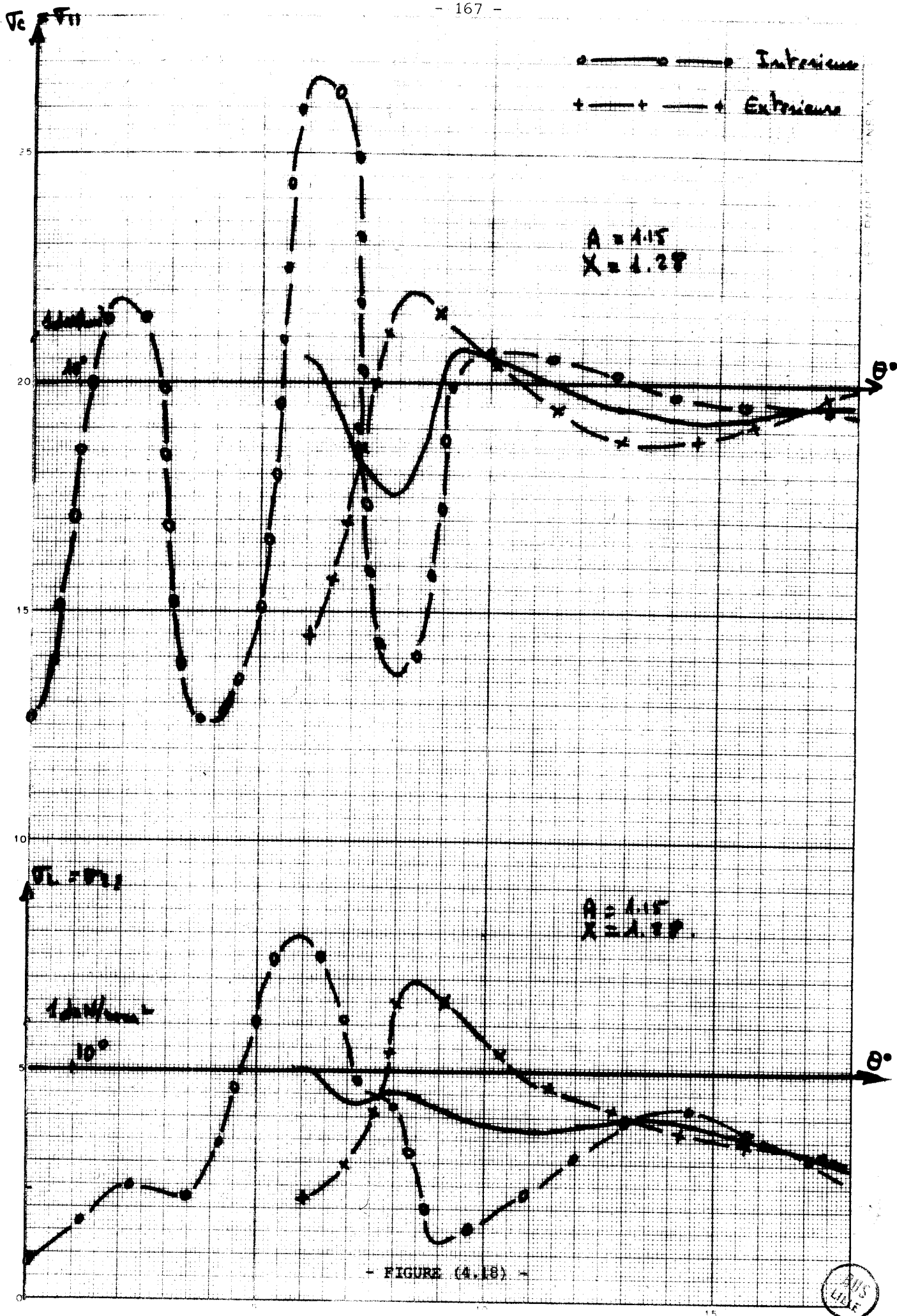
$A = 1.15$
 $X = 1m$



- FIGURE (4.16) -

605
LILLE





2) Section éloignée des appuis : $X = 0,3m$, $X = 2m$, $X = 3,2 m$, Fig.(4.15).

La flexion circonférentielle est pure (absence des contraintes de la membrane correspondante), son amplitude est de l'ordre de $1,2 \text{ da } N/mm^2$ en $X = 0,3$ et en $X = 2m$; par contre elle est très faible au milieu ($0,5 \text{ da } N/mm^2$) , ceci étant essentiellement dû à la présence d'un trou d'homme qui renforce cette section.

Par ailleurs le niveau de contrainte longitudinale confirme nos résultats théoriques dans la mesure où l'appareil se trouve comprimé dans ses fibres inférieures et tendu dans ses fibres médianes, et ceci sur toute sa longueur.

3) Section près du support $X = 1m$, $X = 1,28m$ Figures (4.16), (4.18)

Nous avons la même tendance que pour la section de l'appui avec une influence trop importante de la flexion locale dans les deux sens maxima des contraintes circonférentielles en compression et en traction se rencontrent en contre peaux à 60° en traction ($5 \text{ da } N/mm^2$) et à 72° en compression ($- 10,6 \text{ da } N/mm^2$) pour la section à $1m$ et respectivement $+ 6,5 \text{ da } N/mm^2$ et $- 7,5 \text{ da } N/mm^2$, pour la section $x = 1.28$

La tendance générale en flexion longitudinale est la même que pour la section $A = 1,15$.

4.7.5. Appui à $X = 1,28 m$.

Les tableaux 4-11, 4-12 et 4-13 résument nos résultats expérimentaux, nous avons la même tendance constatée dans la position $X = 1,15$; toutefois la contrainte circonférentielle maximale est en contre peau en $\theta = 60^\circ$ dans la section de l'appui ($+ 9,87 \text{ da } N/mm^2$).

Les constatations précédemment décrites (cas $X = 1,15$) sont valables pour le cas présent. (voir figures (4.19), (4.20), (4.21), (4.22).

4.7.6. Position de l'appui près du fond $X = 0.18 m$

Vu la défaillance de certains appareils de mesure nous avons effectué un essai supplémentaire pour cette section, toutefois nous devons interpréter ces résultats avec précaution dont la mesure où l'appareil a déjà subi une trentaine de cycle de chargement en changeant les positions de l'appui ; autrement dit son ovalisation est devenue permanente.

Le tableau 4-14 résume les résultats des essais et nous pouvons déduire d'après l'étude des figures (4-23) et (4-24) les conclusions suivantes :

1) Section de l'appui $X = 0.18$.

La flexion circonférentielle est pratiquement celle déduite de nos calculs théoriques avec un changement uniforme ; le maximum en compression est en contre peau à $\theta = 0$ ($- 4,8 \text{ da } N/mm^2$) et en traction toujours en contre peau en $\theta = 60^\circ$

SECTION H INTERIEURE

$\chi = 0.3$

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-9	†	-11	†	-0.258	†	-0.288
2	†	22	†	-130	†	-0.347	†	-2.588
3	†	31	†	13	†	0.733	†	0.468
4	†	-41	†	-12	†	-0.947	†	-0.513

SECTION B EXTERIEURE

$\chi = 0.3$

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	39	†	48	†	1.121	†	1.254
2	†	-70	†	-29	†	-1.653	†	-1.050
3	†	-70	†	-74	†	-1.950	†	-2.009
4	†	-74	†	-77	†	-2.039	†	-2.083
5	†	-56	†	-77	†	-1.675	†	-1.983
7	†	-101	†	-59	†	-2.506	†	-1.889
8	†	-47	†	-105	†	-1.652	†	-2.512

SECTION F INTERIEURE

$\chi = 1/m$

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-18	†	-90	†	-0.948	†	-2.014
2	†	-203	†	-40	†	-4.529	†	-2.133
3	†	218	†	-116	†	3.847	†	-1.063
4	†	-236	†	-92	†	-5.536	†	-3.419
5	†	-53	†	-60	†	-1.502	†	-1.597
6	†	-13	†	-28	†	-0.449	†	-0.670
7	†	43	†	-73	†	0.443	†	-1.262

SECTION D EXTERIEURE

$\chi = 1/m$

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-202	†	-62	†	-4.633	†	-2.575
2	†	-51	†	-100	†	-1.704	†	-2.432
3	†	43	†	-36	†	0.687	†	-0.482
4	†	35	†	32	†	0.937	†	0.893
5	†	-113	†	-95	†	-2.972	†	-2.707
6	†	-44	†	-135	†	-1.775	†	-3.112



- TABLEAU (4.12) -

9

```

*****
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*

```

```

*****
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*

```

SECTION D INTERIEURE

X = 1.28

MESURE	EPSILON C	EPSILON L	SIGMA C	SIGMA L	
1	-35	-93	-1.321	-2.174	-0
2	-20	-50	-0.428	-0.126	-18
3	-286	-6	-6.044	-1.928	-36
4	40	380	3.234	8.232	-50
5	432	128	9.87	5.389	-60
6	-290	46	-5.8	-0.861	-72
7	-190	130	-3.17	1.533	-80
8	60	-216	-0.1	-4.158	-90
9	-4	-26	-0.248	-0.571	-135
	4	-97	-0.5	-2.012	-180



TABLEAU (4.13) -

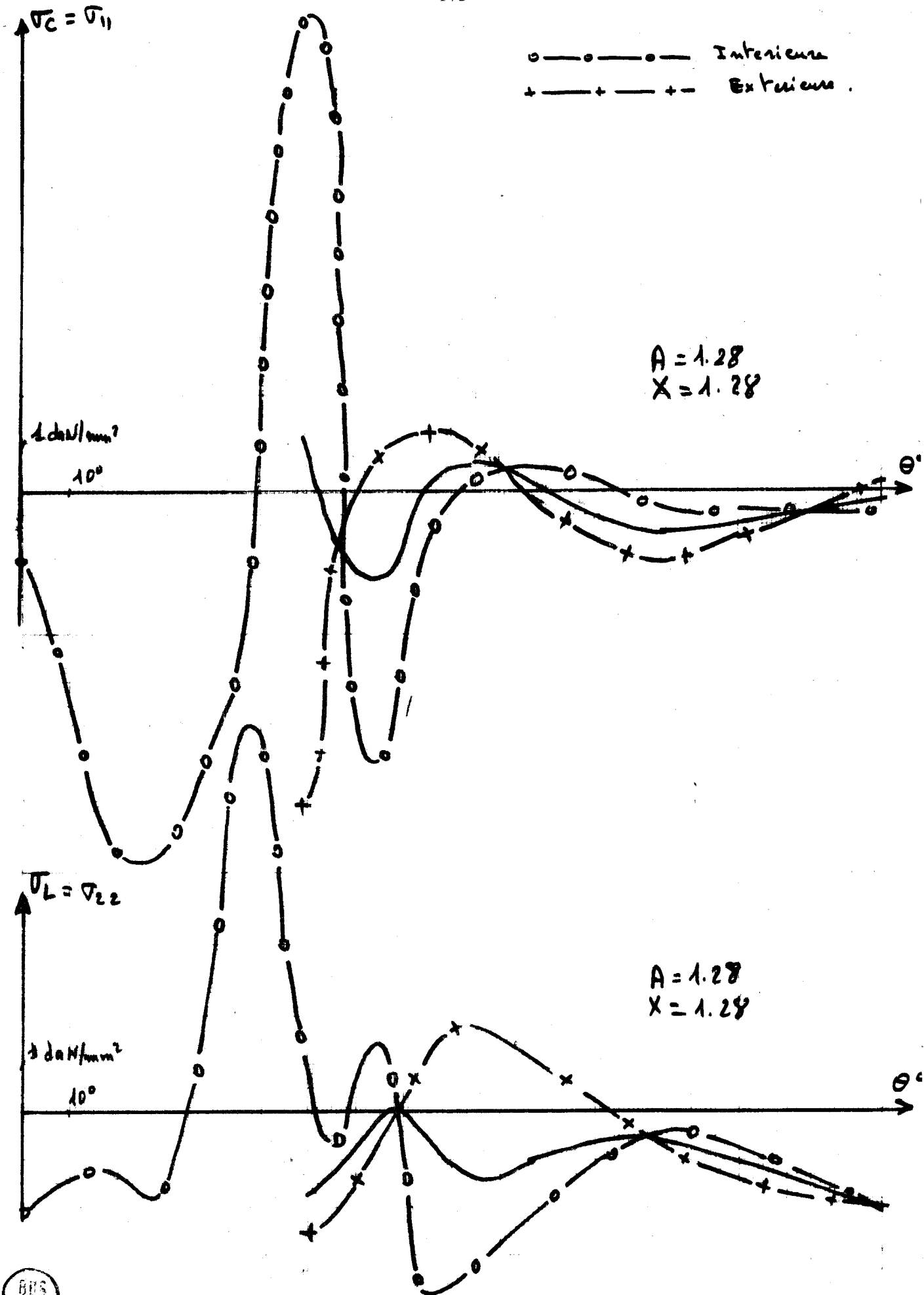
SECTION F EXTERIEURE $\chi = 1.28$

MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	-313	†	-25	†	-6.731	†	-2.497
2	†	23	†	-53	†	0.149	†	-0.968
3	†	21	†	15	†	0.536	†	0.447
4	†	40	†	72	†	1.294	†	1.764
5	†	-52	†	-20	†	-1.218	†	-0.748
6	†	49	†	-108	†	0.349	†	-1.959

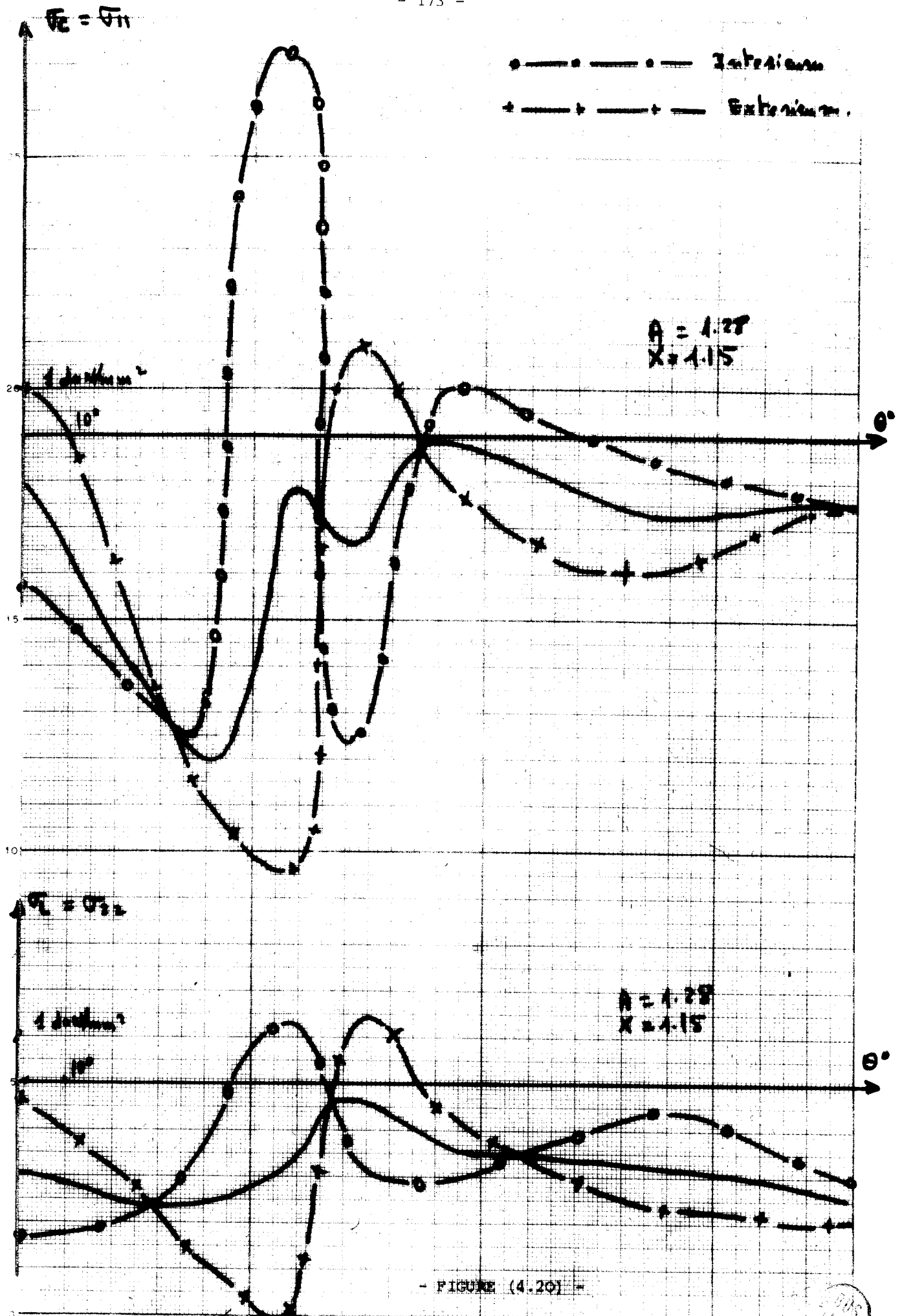
SECTION G EXTERIEURE MOY $\chi = 2m$

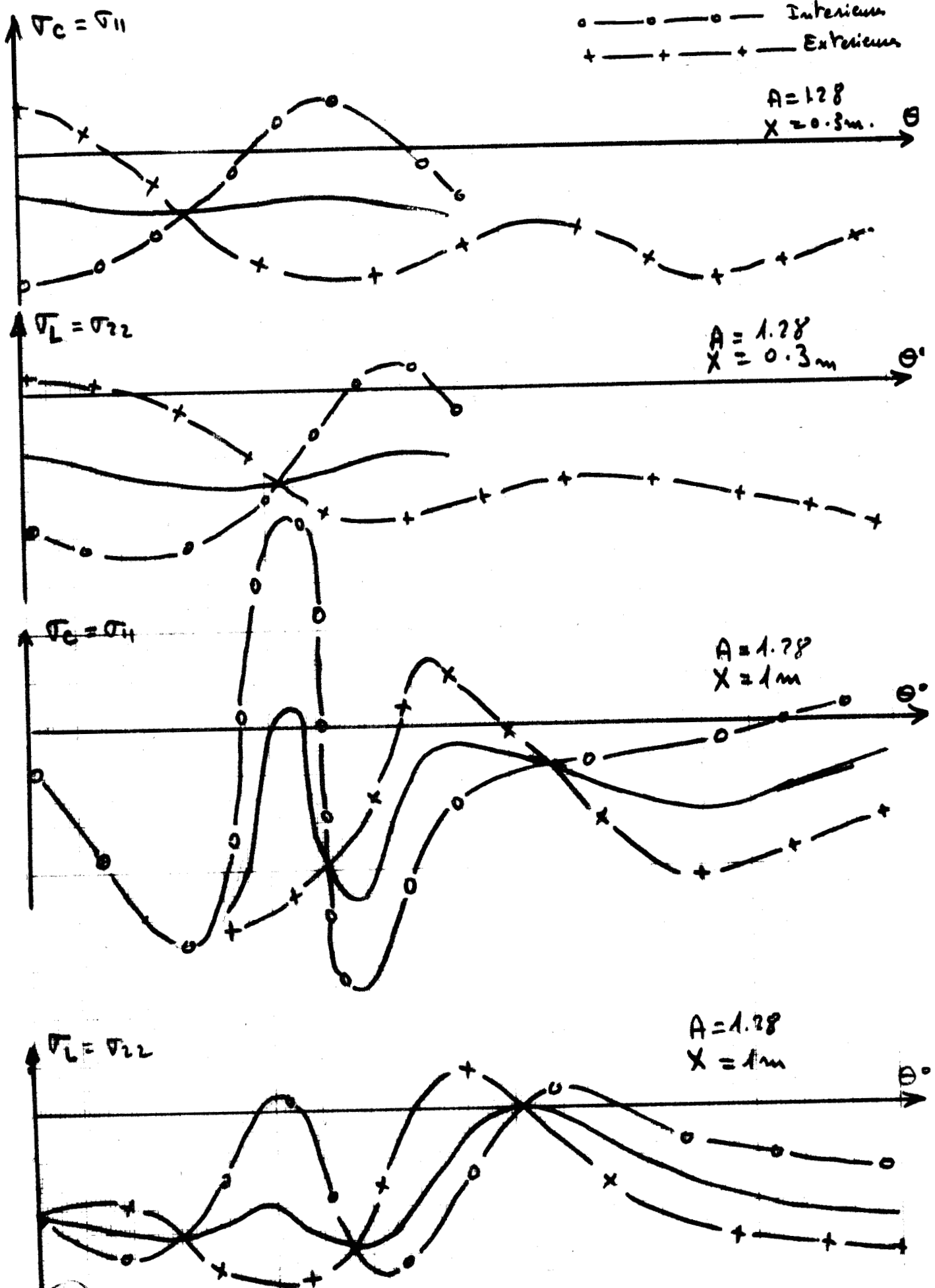
MESURE	†	EPSILON C	†	EPSILON L	†	SIGMA C	†	SIGMA L
1	†	41	†	-50	†	0.543	†	-0.802
2	†	-59	†	26	†	-1.075	†	0.174
3	†	54	†	22	†	1.286	†	0.816
4	†	-51	†	-9	†	-1.131	†	-0.521
5	†	51	†	-109	†	0.384	†	-1.968



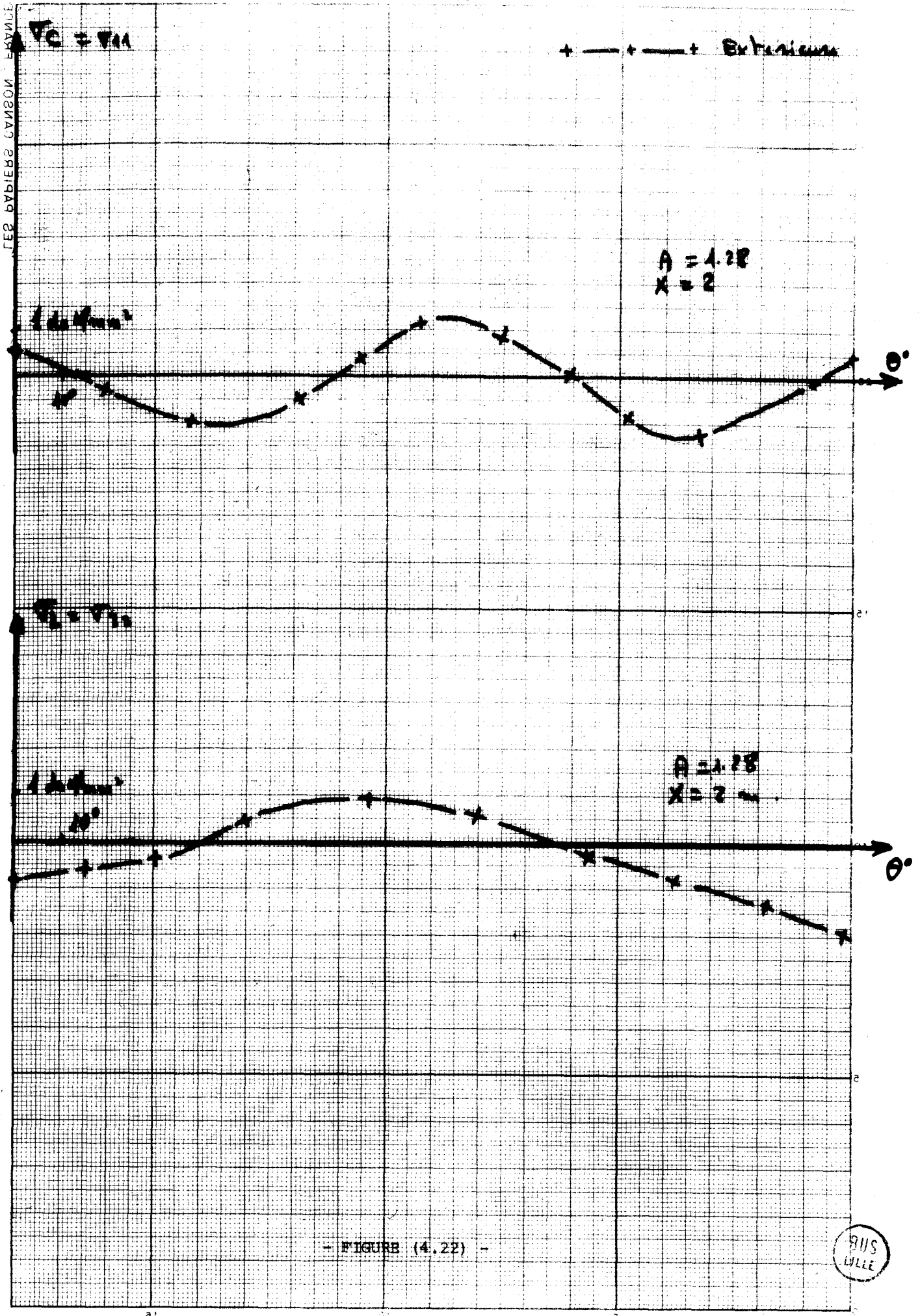


- FIGURE (4.19) - SECTION DE L'APPUI





- FIGURE (4.21) -



- 176 -
SECTION K INTERIEURE a 0.18 APPUIS a 0.18

- TABLEAU (4.14) -

MESURE	I	EPSILON C	I	EPSILON L	I	SIGMA C	I	SIGMA L
1	I	-219	I	-38	I	-4.838	I	-2.178
2	I	-33	I	42	I	-0.428	I	0.674
3	I	-89	I	73	I	-1.409	I	0.972
4	I	33	I	-58	I	0.328	I	-1.010
5	I	363	I	-63	I	7.226	I	0.964
6	I	82	I	-1	I	1.716	I	0.496
7	I	-110	I	34	I	-2.096	I	0.021
8	I	-19	I	30	I	-0.210	I	0.510
9	I	10	I	-21	I	0.078	I	-0.378
10	I	-144	I	-149	I	-3.963	I	-4.036

SECTION A EXTER a 0.18m APPUIS a 0.18m

MESURE	I	EPSILON C	I	EPSILON L	I	SIGMA C	I	SIGMA L
1	I	-93	I	-88	I	-2.381	I	-2.014
2	I	126	I	103	I	3.295	I	2.957
3	I	13	I	91	I	0.846	I	1.993
4	I	-47	I	15	I	-0.893	I	0.019
5	I	-21	I	-24	I	-0.592	I	-0.636
6	I	-10	I	-40	I	-0.462	I	-0.903

SECTION B EXT a 0.3m Appui A=0.18

MESURE	I	EPSILON C	I	EPSILON L	I	SIGMA C	I	SIGMA L
1	I	320	I	216	I	8.081	I	6.552
2	I	77	I	20	I	1.743	I	0.905
3	I	58	I	-10	I	1.155	I	0.155
4	I	38	I	59	I	1.170	I	1.478
5	I	-18	I	42	I	-0.113	I	0.769
7	I	-9	I	-30	I	-0.378	I	-0.687
8	I	17	I	-43	I	0.086	I	-0.796

SECTION G EXT a 2m APPUIS a 0.18m

MESURE	I	EPSILON C	I	EPSILON L	I	SIGMA C	I	SIGMA L
1	I	-20	I	6	I	-0.382	I	0.000
2	I	-36	I	35	I	-0.536	I	0.508
3	I	-21	I	-14	I	-0.529	I	-0.426
4	I	-10	I	-37	I	-0.443	I	-0.840
5	I	11	I	-66	I	-0.185	I	-1.317

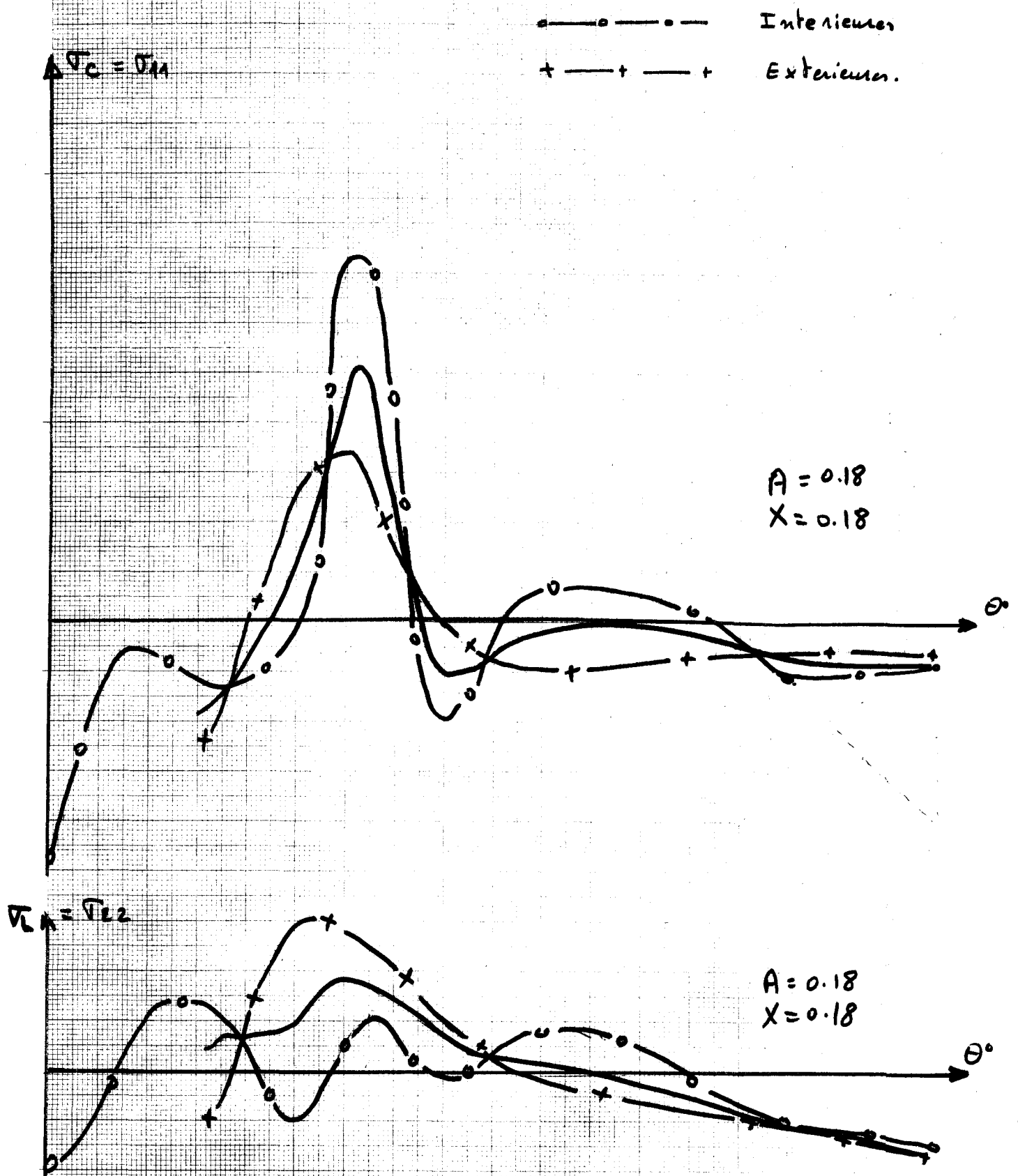
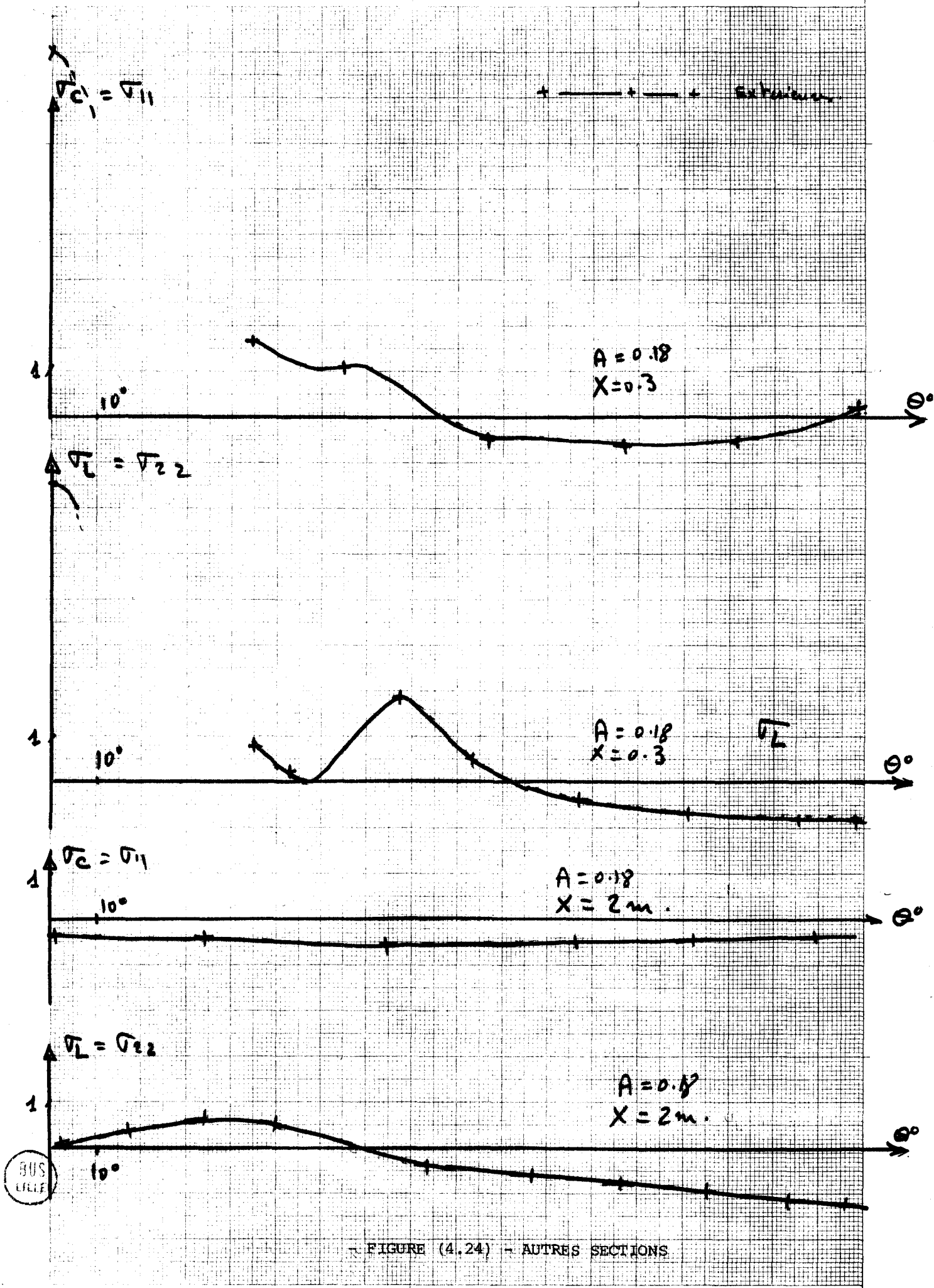


FIGURE (4.23) - SECTION DE L'APPUI



- FIGURE (A.24) - AUTRES SECTIONS

(7,2 da N/mm²), la partie supérieure n'étant pratiquement par sollicitée.

Par ailleurs la flexion longitudinale ne s'effectue pas selon la théorie de ZICK : nous avons toujours les parties inférieures et supérieures de l'appareil qui sont comprimées et la partie médiane qui est tendue, le maximum est en compression en contre peau à $\theta = 0$ (- 2,2 da N/mm²) et en traction $\theta = 60^\circ$ en peau (2,96 da N/mm²).

2) Section près de l'appui $X = 0.3$ m.

Vu l'affaissement de l'appareil cette section est très sollicitée, notamment dans sa partie inférieure ($\theta = 0$) où nous rencontrons des contraintes importantes ($\sigma_{11} = + 8$ da N/mm², $\sigma_{22} = 6,5$ da N/mm²).

3) Section éloignée de l'appui $X = 2$ m.

Nous remarquons l'absence d'une flexion circonférentielle appréciable et la tendance de la partie supérieure de la section à être comprimée longitudinalement contrairement aux résultats théoriques de ZICK.

4.8. Conclusion.

La répartition des contraintes constatée expérimentalement fait apparaître deux groupes de résultats :

1 - Lorsque l'appui se trouve près du fond $A < R$ nous avons une section parfaitement circulaire soumise à une charge répartie d'une façon parabolique ou mixte, telle que les contraintes maximales se trouvent au bas de cette section ($\theta = 0$).

2 - Lorsque l'appui se trouve assez éloigné du fond, la section peut se déformer plus librement (ovalisation), ce qui réduit le contact entre les support et la section aux zones situées aux bords du support ($\theta = \frac{\pi}{3}$), autrement dit nous obtenons les sollicitations maximales dans ces zones (conformément aux résultats de l'expérience de ZICK - CARLSON) ; les valeurs expérimentales dans les deux cas sont très éloignées des valeurs données par ZICK, et du même ordre de grandeur que celles données par notre théorie.

Cependant les traits communs à toutes nos expériences peuvent être résumées en deux points.

1) Le phénomène de flexion circonférentielle est purement local ; sa zone d'influence est pratiquement celle de l'appui tant que celui ci se trouve près du fond (jusqu'à 1 m), et dans tous les cas la largeur de la zone influencée par cette flexion est plus faible que la largeur proposée par ZICK ($4R$ ou $\frac{L}{2}$).

2) La flexion longitudinale est fortement influencée par l'ovalisation de l'appareil, ce qui explique le fait que les fibres supérieures et inférieures sont comprimées et que les fibres médianes sont tendues, cette tendance est remarquée tout

le long de l'appareil, et d'une façon plus accentuée, quand les appuis sont assez éloignés du fonds.

Toutefois, et dans tous les cas, la théorie de la poutre équivalente et celle de ZICK donnent des résultats très éloignés de la réalité : chacune d'elles fournit comme courbes représentatives de σ_{22} (contrainte de flexion longitudinales) des droites, et pour la contrainte σ_{11} (flexion circonférentielle) des valeurs qui sont loin d'être négligeables dans la partie supérieure de la section et dont le maximum se trouve près du bord du support.

CHAPITRE V

COMPARAISON

5.1. Introduction :

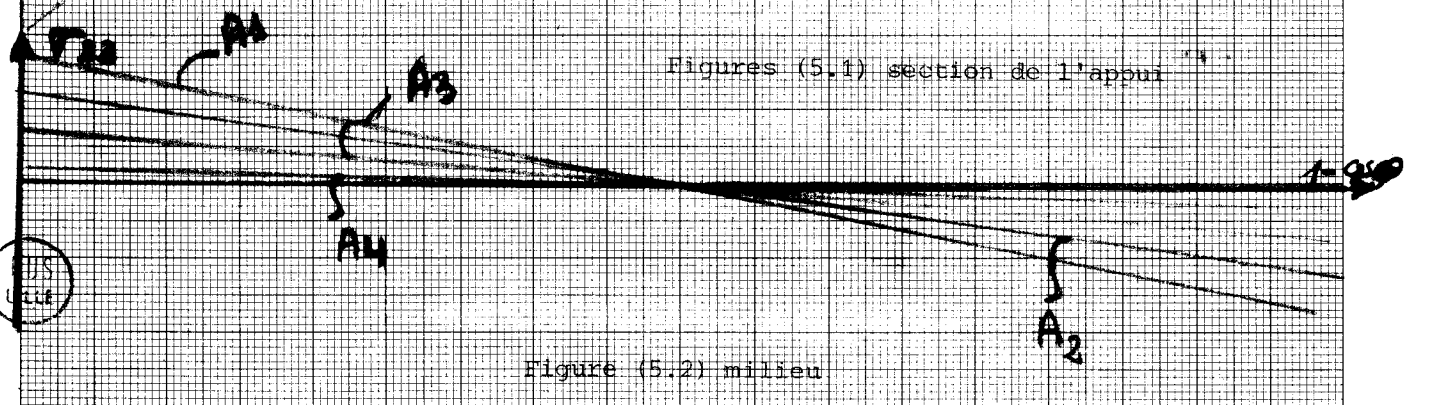
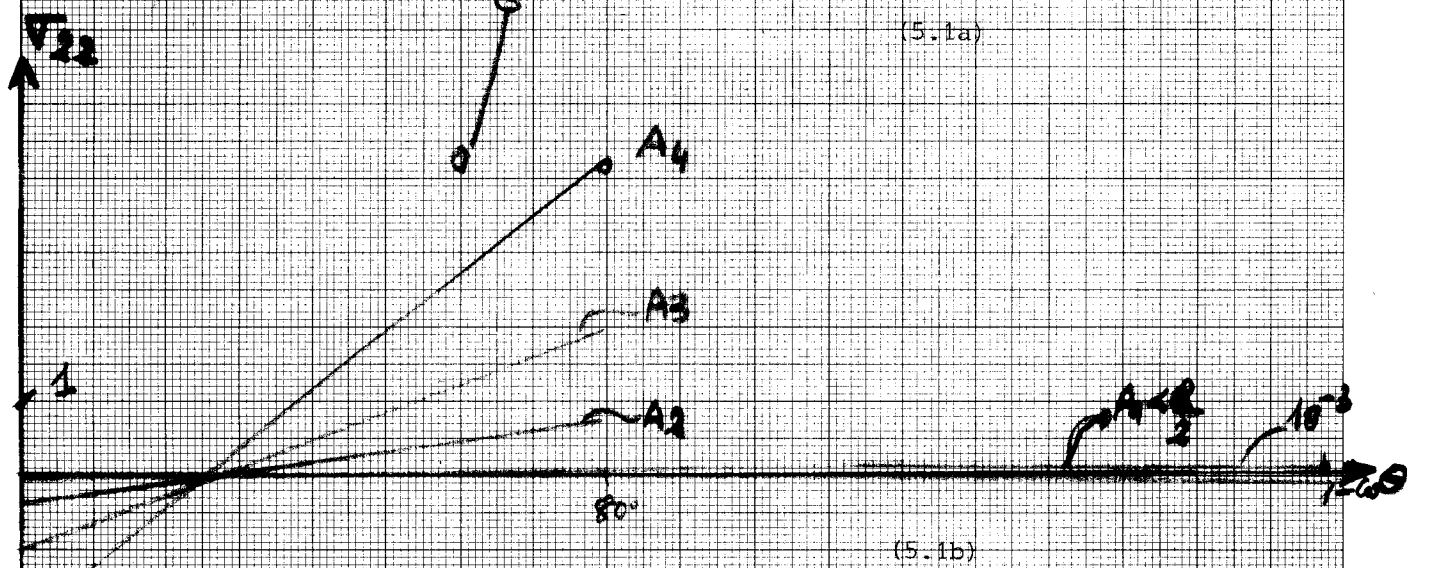
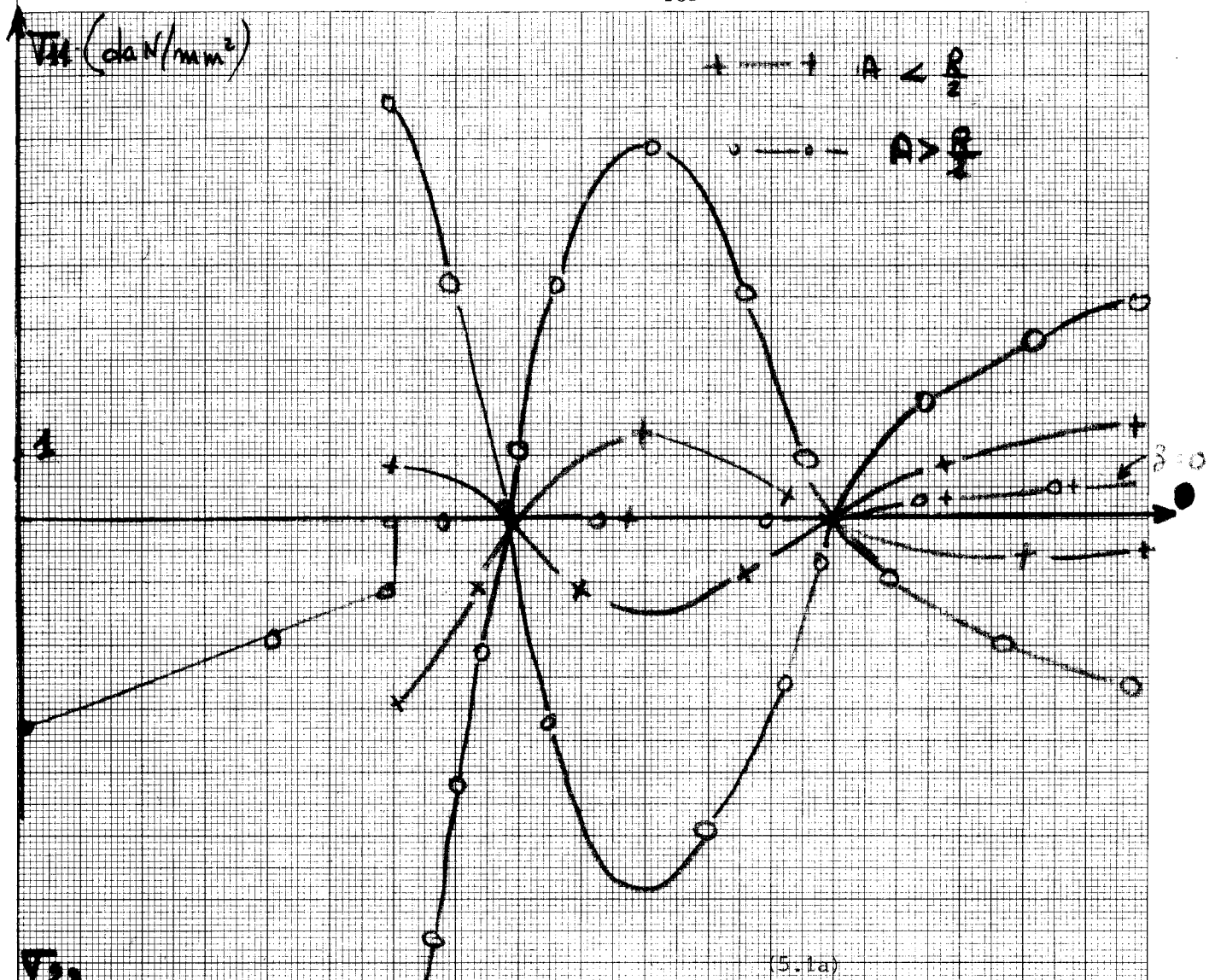
Dans le but de dégager une nouvelle méthode de calcul des appareils à pression cylindrique soumis à l'effet des forces locales réparties, nous allons exposer dans ce chapitre une comparaison générale entre la méthode de ZICK (version actuelle des codes ASME et SNCT) , les résultats de l'expérience, et ^{de}notre méthode.

Cette comparaison va être effectuée dans le cas de l'appareil de ZICK CARLSON (épaisseur = 25,4 mm) et dans le cas de notre appareil (épaisseur 5 mm) afin de saisir l'influence de l'épaisseur dans le comportement de l'appareil ; à ce titre nous devons tenir compte dans l'interprétation des résultats de notre expérience des erreurs expérimentales d'une part et de la déformation permanente de l'appareil suite à son ovalisation d'autre part ; par conséquent nous attachons beaucoup plus d'importance aux allures des courbes représentant les variations des contraintes et aux ordres de grandeurs de ces contraintes qu'à une coïncidence parfaite entre les résultats calculés et ceux de l'expérience.

5.2. Cas de l'appareil ZICK - CARLSON

En l'absence d'un compte rendu détaillé de l'expérience de ZICK - CARLSON (1948) nous allons développer une comparaison rapide entre notre travail, les codes S.N.C.T. - A.S.M.E. et les quelques valeurs données dans l'article décrivant les expériences sur l'appareil de ZICK-CARLSON. Cette comparaison à l'avantage d'être faite sur un appareil d'épaisseur importante ($e = 25,4$ mm) , ce qui augmente la rigidité globale et permet ^àcet appareil de se comporter comme une poutre.

Avant de commencer cette comparaison, nous avons résumé dans la fig(5-1) les résultats de calcul de la méthode de ZICK, les deux premiers schémas (a et b) sont relatifs à la section de l'appui. Nous pouvons remarquer que les variations des contraintes circonférentielle σ_{11} et longitudinale σ_{22} vont dépendre de la position de l'appui par rapport au fond, cependant l'allure de la courbe représentative de σ_{11} reste la même quelle que soit la distance A de l'appui au fond ; son amplitude admet deux valeurs selon qu'on se trouve près du fond ($A < \frac{R}{2}$) ou loin du fond ($A > \frac{R}{2}$). Dans ce dernier cas, l'amplitude de cette flexion est quatre fois plus grande que dans le premier cas. Cependant la partie supérieure de la section de l'appui est sollicitée d'une façon appréciable, contrairement à nos résultats théoriques et expérimentaux. Malheureusement ZICK et CARLSON passe sous silence les résultats expérimentaux obtenus dans cette région. En outre la flexion locale dans la zone



Figures (5.1) section de l'appui

Figure (5.2) milieu

du support n'est pas explicitée dans le travail de ZICK qui suppose que le maximum de la contrainte σ_{11} est atteint aux extrémités du support.

Par contre la flexion longitudinale s'effectue uniquement sur la partie inférieure de la section de l'appui (section présumée résistante d'angle 2Δ , $\Delta = 80^\circ$), sauf dans le cas où l'appui se trouve près du fond ($A < \frac{R}{2}$) où elle est pratiquement nulle quoi qu'elle agisse sur la totalité de la section.

Enfin le schéma (c) montre qu'au milieu de l'appareil la flexion circonférentielle est inexistante et la flexion longitudinale est identique à celle d'une poutre sur deux appuis simples, uniformément chargée.

Faute d'avoir les valeurs expérimentales relatives à cet appareil, nous allons développer la comparaison uniquement pour les deux cas $A = 0,3 \text{ m}$ et $A = 2,71 \text{ m}$.

Les calculs effectués par notre méthode montrent que dans les deux cas la théorie de la poutre équivalente est applicable pour la section du milieu figure (5.2), par contre nos résultats divergent de ceux de ZICK en ce qui concerne la section de l'appui :

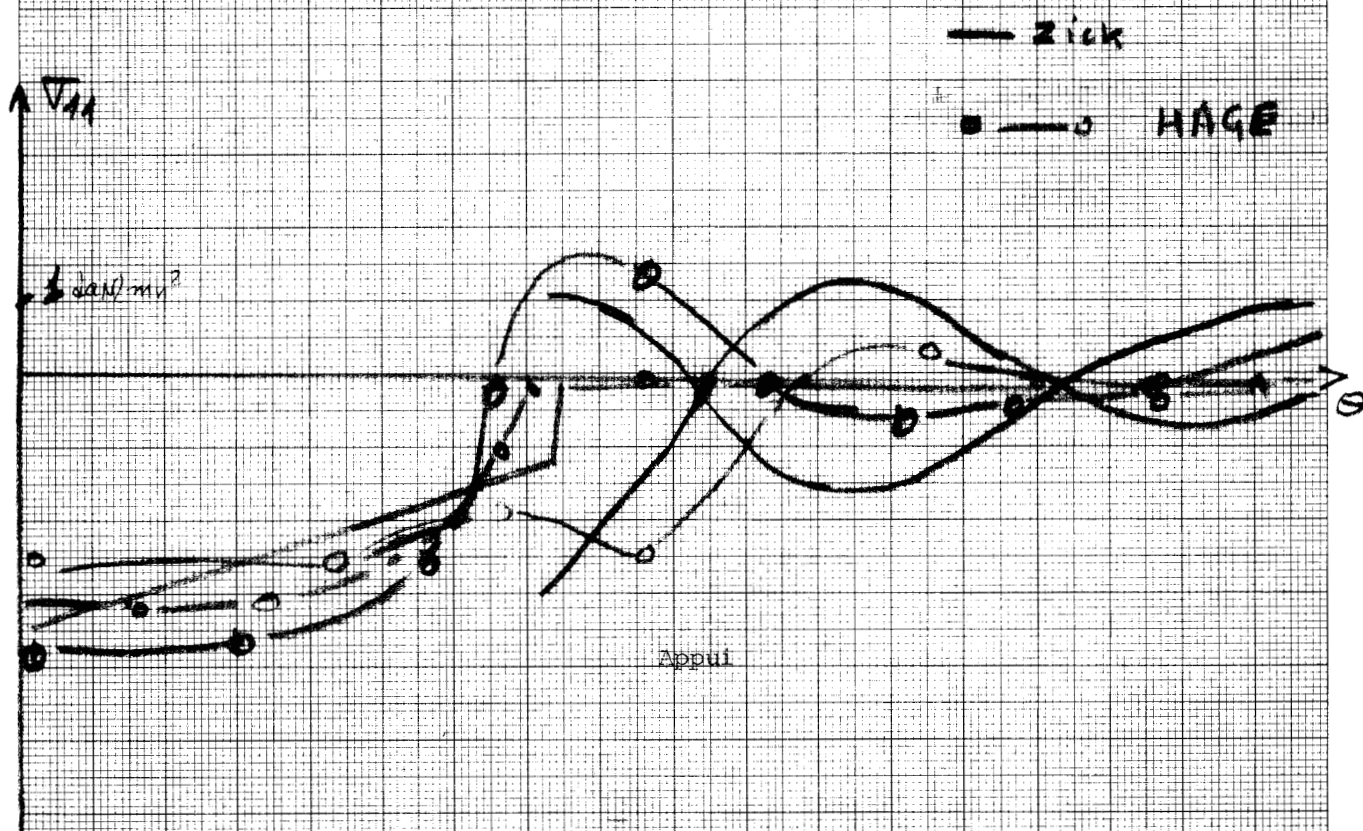
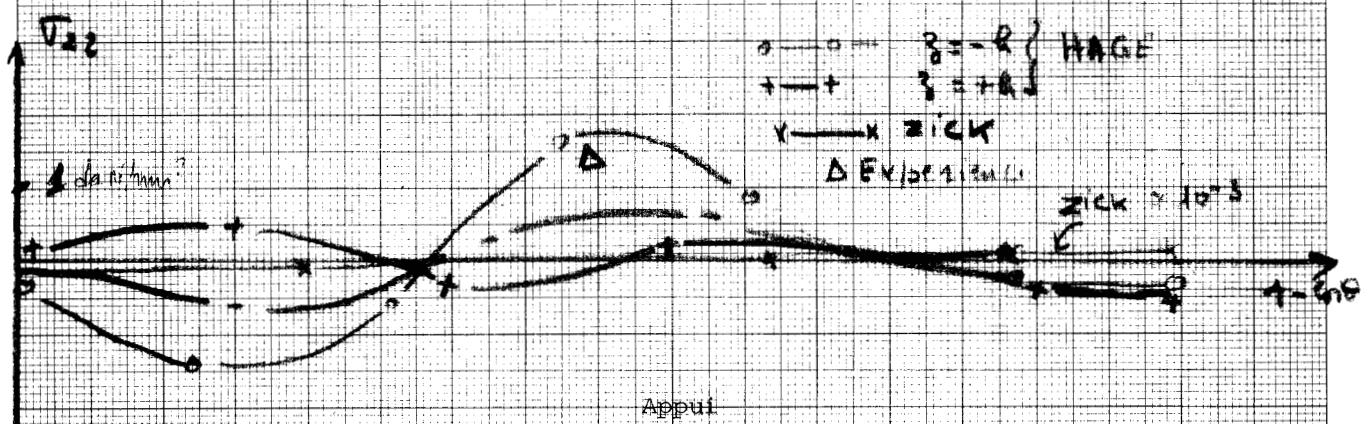
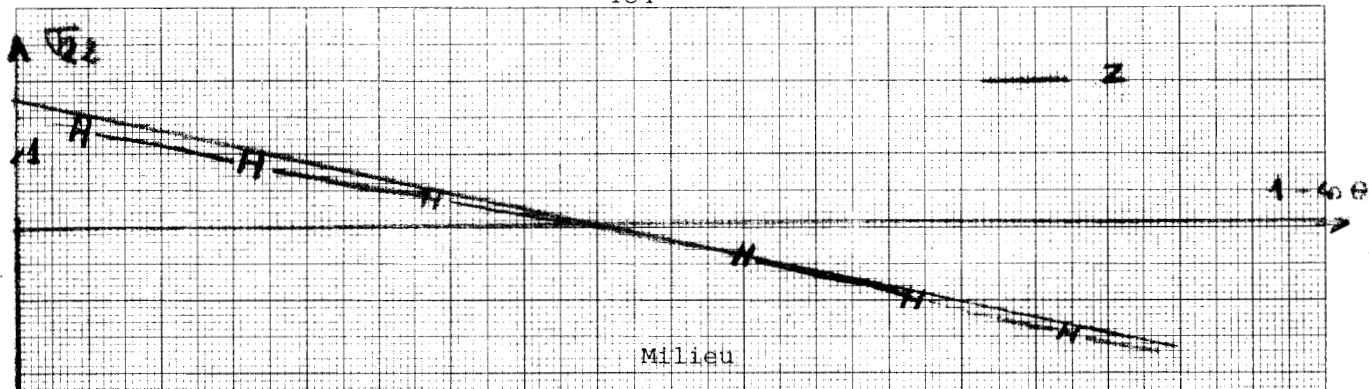
1) $A = 0,3 \text{ m}$:

La figure (3.3) montre nos résultats et ceux de ZICK pour la flexion circonférentielle qui, comme nous l'avons constatée précédemment (d'après nos résultats), est importante dans la partie inférieure de la section de l'appui et s'amortit à partir de $\theta = 100^\circ$, contrairement aux résultats de ZICK ; de plus les maxima des contraintes calculés se rencontrent dans la zone du contact support-virole et non près du bord du support. Par contre la flexion longitudinale calculée par la théorie de ZICK est insignifiante (10^{-3} da N/mm²) alors qu'expérimentalement ZICK et CARLSON ont trouvé une contrainte de l'ordre de 0,9 da N/mm² valeur très proche de celle donnée par notre méthode Figure (5.3 b).

2) $A = 2,7 \text{ m}$:

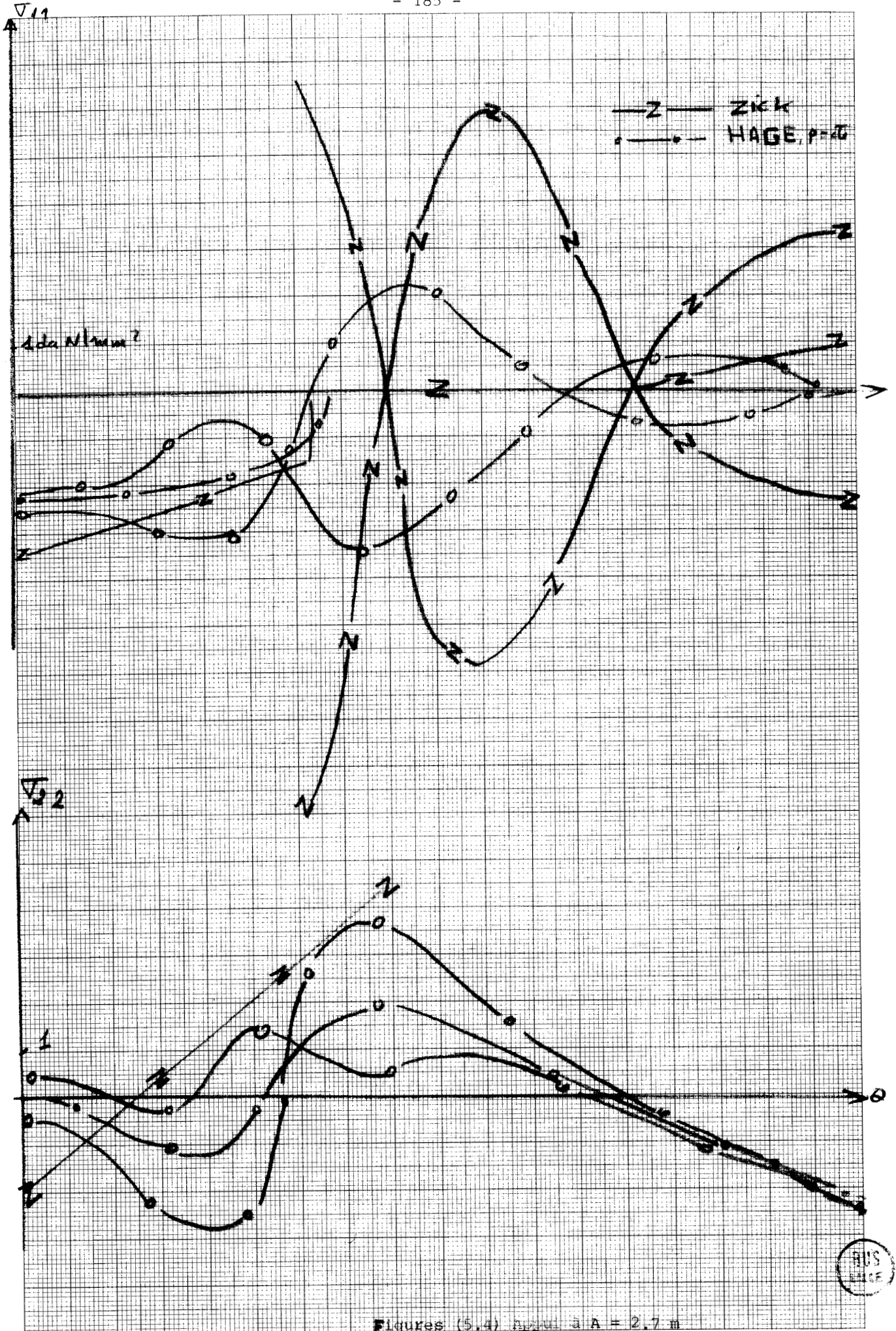
La figure (5.4 a) montre les courbes relatives à $\sqrt{\sigma_{11}}$ et nous pouvons constater que la méthode de ZICK exagère les valeurs des contraintes alors que notre méthode fournit des valeurs admissibles ; en particulier la sollicitation la plus importante se rencontre à l'intérieur de l'appui ; et la flexion circonférentielle est pratiquement nulle à partir de 100° .

Par contre, la figure (5.4 b) compare nos résultats et ceux de ZICK ; nous pouvons remarquer que la partie supérieure de la section subit une **compression** non négligeable contrairement aux affirmations de ZICK.



Figures (5.3) Appui à 0.3 m

BUS
LINE



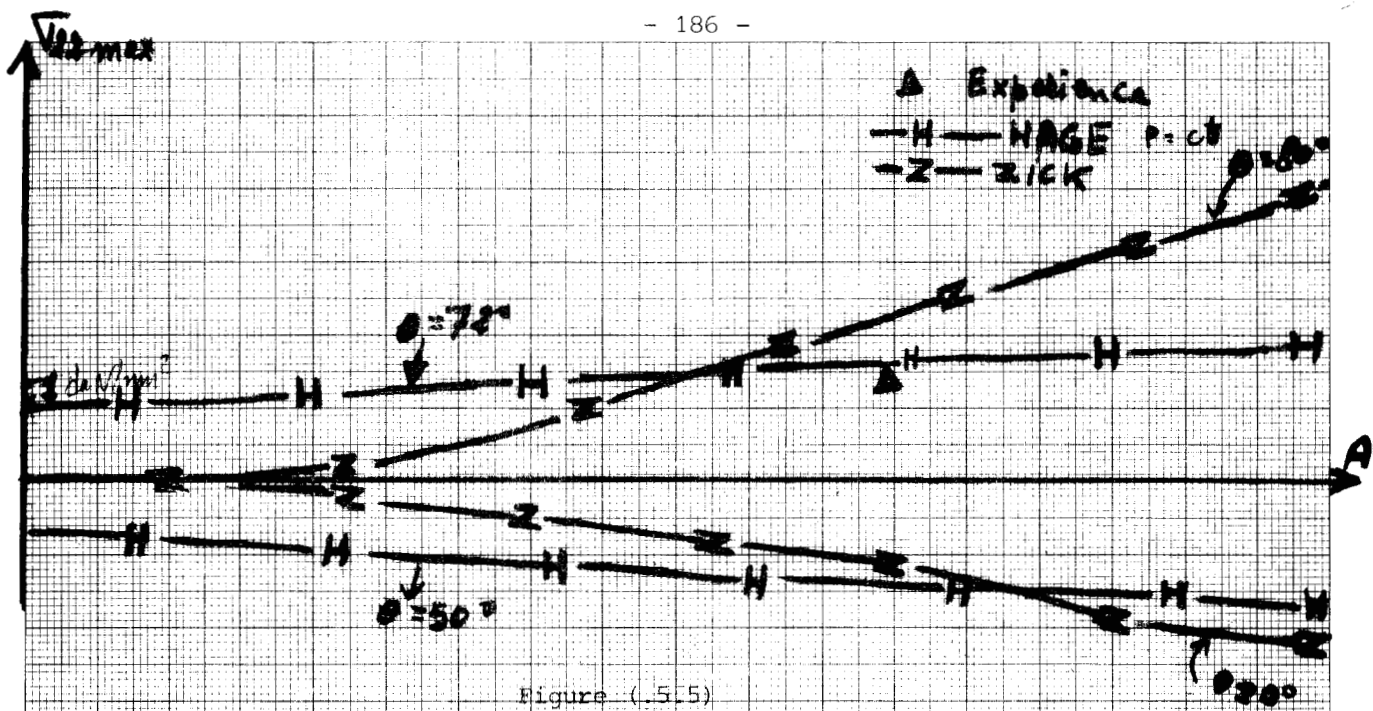


Figure (5.5)

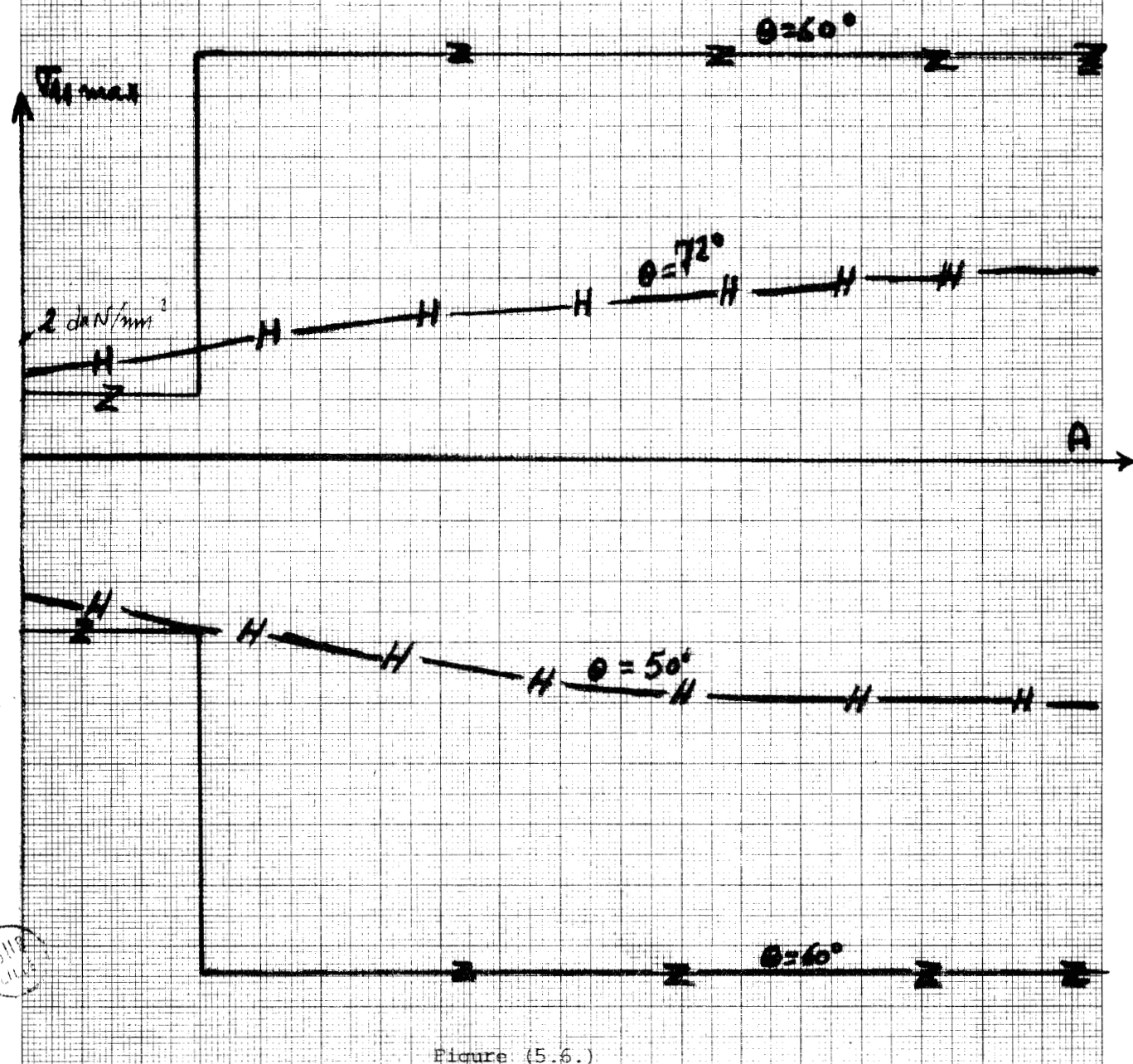


Figure (5.6.)

D'une façon globale nous pouvons remarquer que quel que soit la position de l'appui la contrainte de flexion longitudinale reste du même ordre de grandeur, cette constatation est confirmée par les mesures expérimentales de ZICK et CARLSON ; ce qui infirme la notion de la section résistante selon ZICK.

Enfin les figures (5.5) et (5.6) montrent l'évolution globale des contraintes maximales en fonction de la position de l'appui et nous pouvons constater que la méthode de ZICK est loin d'être confirmée expérimentalement, alors que notre méthode est très proche de valeurs avancées par ZICK et CARLSON d'une part, et est en bon accord avec la réalité physique du phénomène qui résulte de l'action "locale" du support sur la virole d'autre part.

5.3. Cas de notre appareil

5.3.1. - Résultats de calcul par la méthode de ZICK.

Pour faire apparaître la divergence entre notre méthode et celle de ZICK nous allons résumer dans ce paragraphe les résultats du calcul de notre appareil par la méthode de ZICK.

1) Section du milieu.

Les calculs exposés dans le premier chapitre de cette partie, montrent que la flexion longitudinale de cette section est conforme à la théorie de la poutre équivalente Figure (5.7) ; par contre la flexion circonférentielle est supposée nulle dans cette section.

2) Section de l'appui.

Dans ce cas, la proximité de l'appui du fond joue un rôle fondamental, et la distinction entre les positions de l'appui près du fond (A_1 et A_2) et loin du fond (A_3 , A_4 et A_5) fait apparaître un grand écart dans les résultats ; en particulier, la flexion circonférentielle Figure (5.8 a) est importante pour les positions (A_3, A_4, A_5) ($12,12 \text{ da N/mm}^2$), et le reste au sommet de la section ($\theta = \Pi$) où sa valeur est voisine de 5 da N/mm^2 . Cette contrainte est réduite au quart de ces valeurs pour les positions A_1 et A_2 .

En outre la flexion longitudinale suit un comportement analogue Figure (5.8 b) pour les positions A_1 et A_2 , la totalité de la section travaille mais le maximum des contraintes est négligeable (de l'ordre de $10^{-3} \text{ da N/mm}^2$), pour les positions A_3, A_4 et A_5 , la section présumée résistante encaisse seule le moment fléchissant au niveau de l'appui.

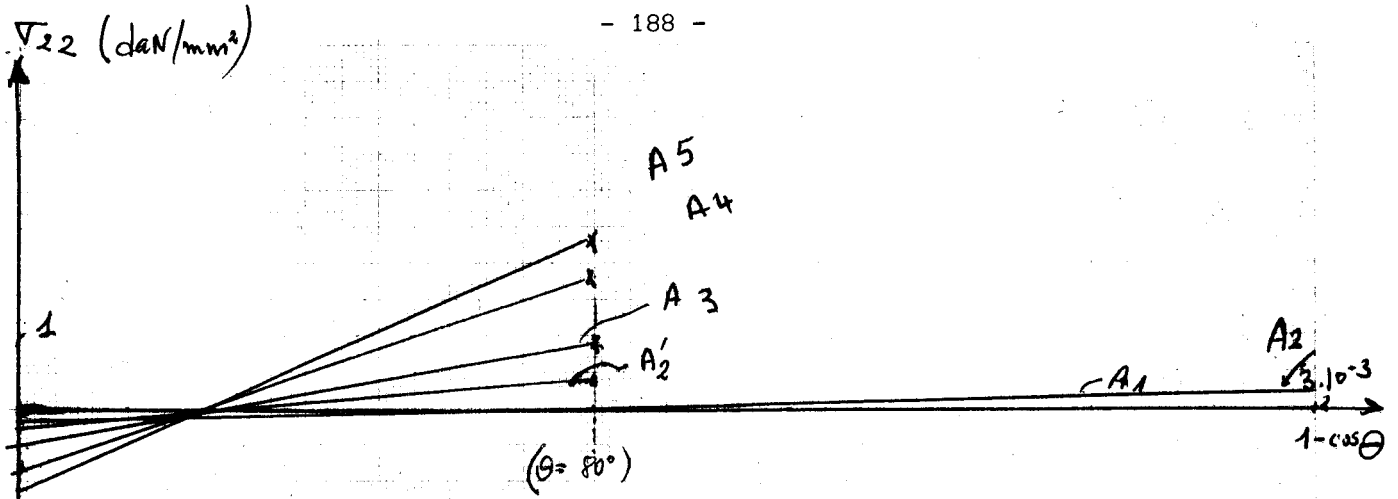


Figure (5.8b) section de l'appui

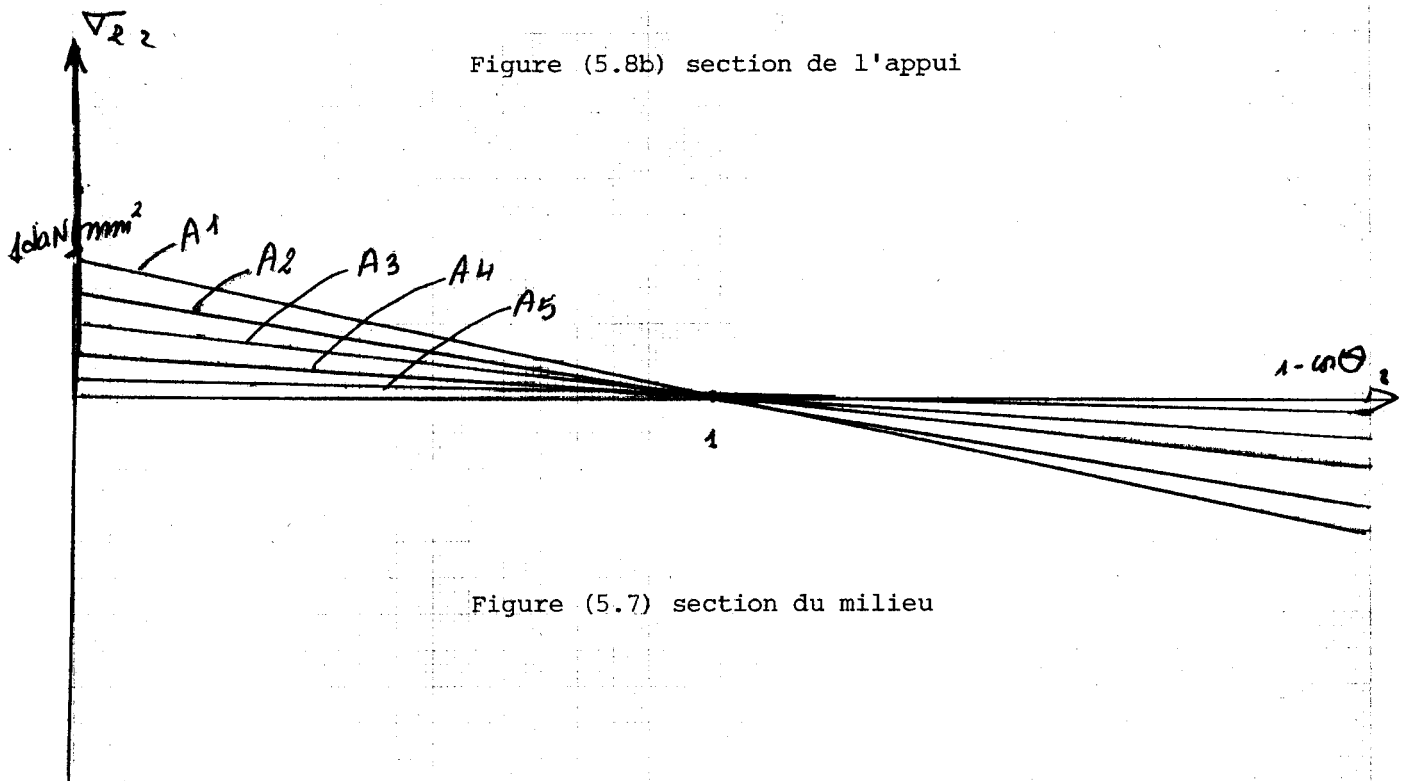
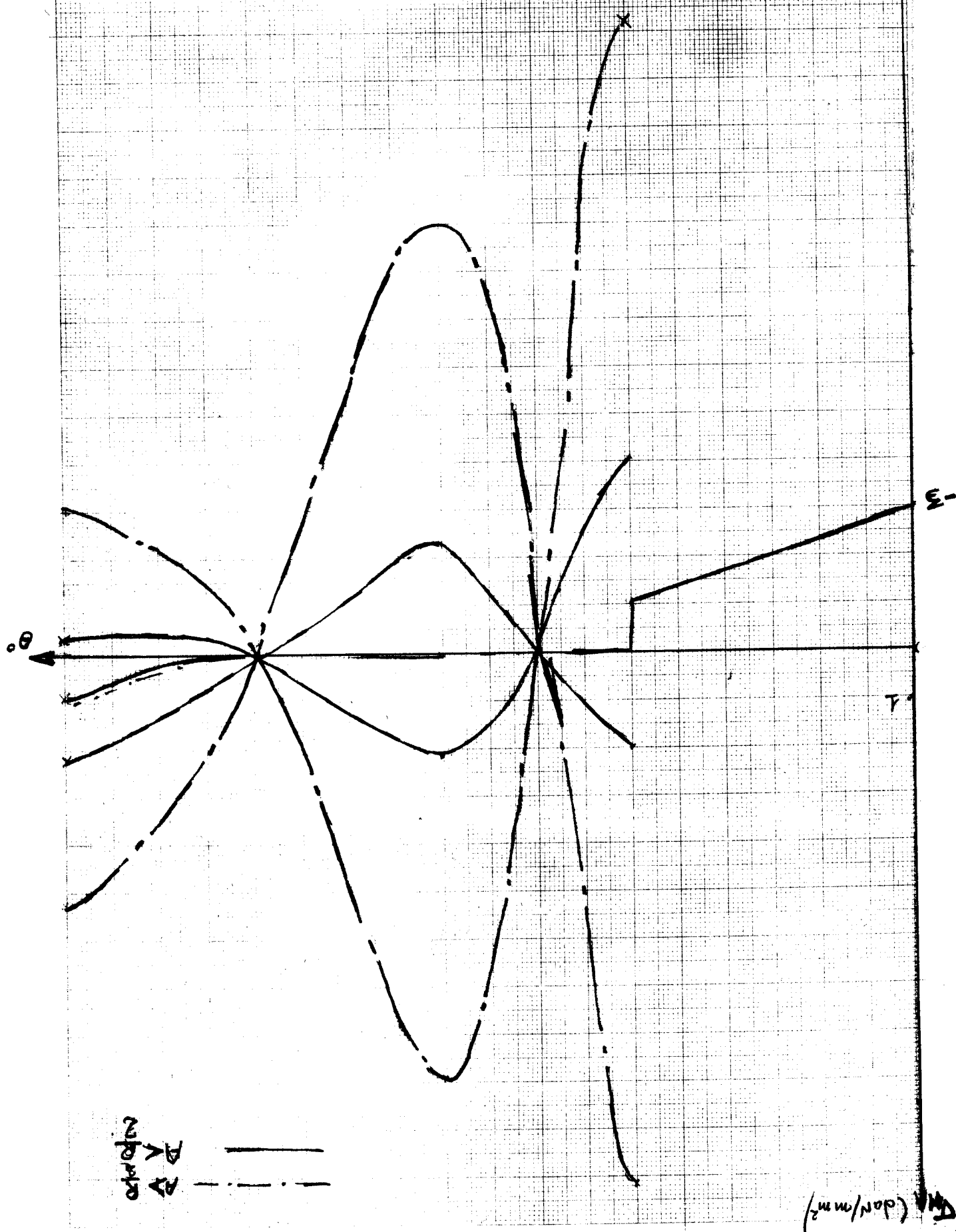


Figure (5.7) section du milieu

US
FILE

Figure 5.8a) contrainte σ d'après ZICK



Etant donné l'abondance des résultats expérimentaux, nous allons détailler la comparaison pour les positions A_2 , A_3 , A_4 : la comparaison globale sera faite plus loin sur les maxima trouvés pour chaque position de l'appui.

5.3.2. Résultats de notre méthode.

Avant de commencer la comparaison générale nous avons jugé utile de résumer les résultats du calcul par notre méthode en envisageant une répartition parabolique et une répartition uniforme de la pression du contact support virole. Les résultats de ce calcul sont résumés aux figures (5.9 à 5.14). Il est intéressant de noter que les courbes décrivant l'évolution de la contrainte dans la section de l'appui dépendent de la schématisation de la pression du contact, toutefois le comportement de l'appareil en dehors de cette section apparaît comme indépendant de cette schématisation, pour cette raison nous ne détaillons pas pour l'instant ces résultats puisqu'ils ont été largement commentés dans le chapitre III.

5.3.3. Comparaison entre notre méthode, l'expérience, et la méthode de ZICK.

5.3.3.1. Répartition des contraintes en fonction de la position de l'appui

1) - Appui à $A = 0,3$ m du fond.

1.1. Section de l'appui :

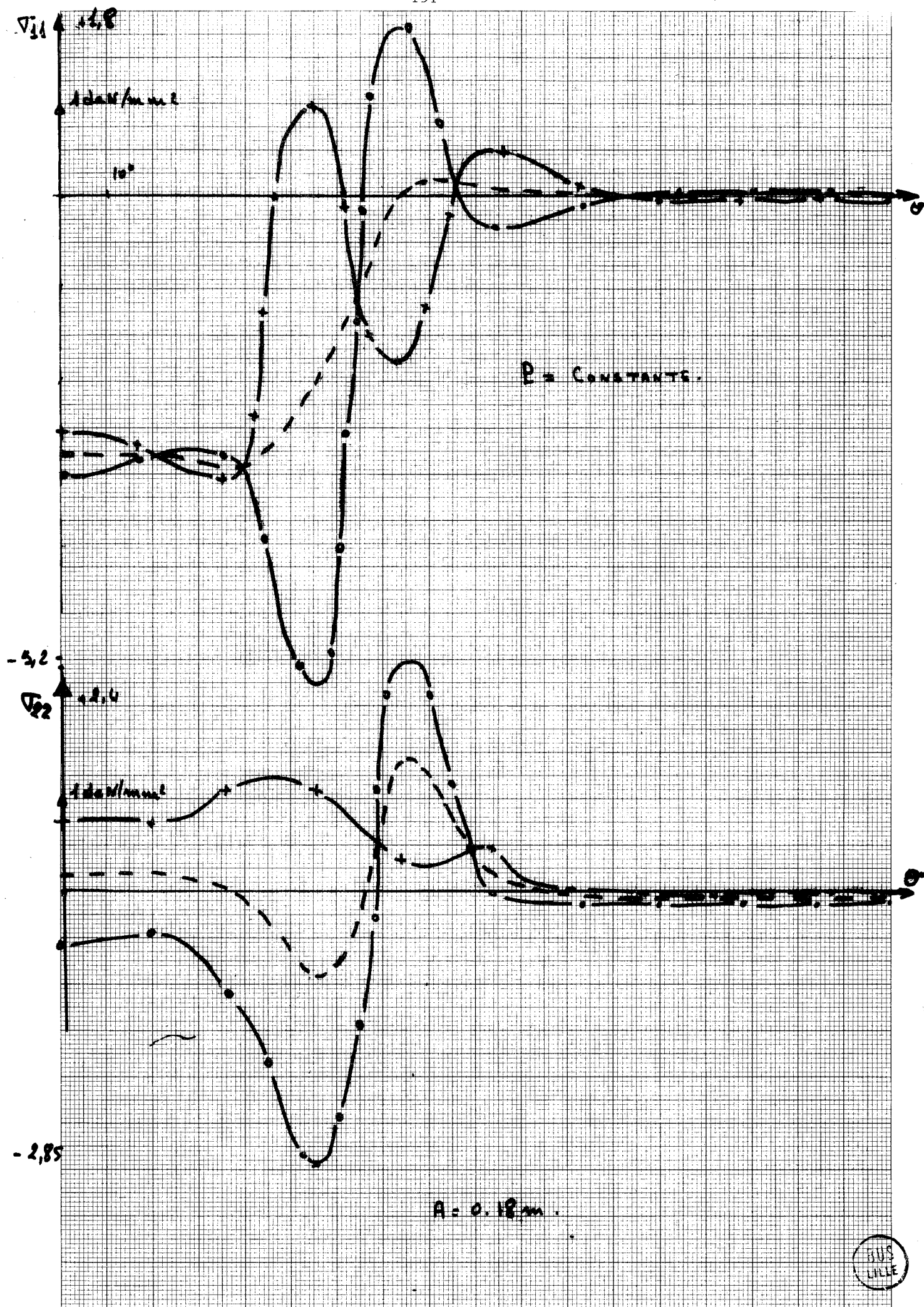
a) Contrainte longitudinale σ_{22} :

La courbe (4.6) montre l'évolution expérimentale constatée ; en particulier la contrainte maximale de compression se trouve à $\theta = 50^\circ$ en contre peau et celle de traction à $\theta = 0^\circ$ et à $\theta = 70^\circ$ en peau, la partie supérieure de cette section étant comprimée d'une façon appréciable.

Cette répartition est pratiquement celle donnée par notre méthode à condition de réduire la largeur du support et de considérer une répartition uniforme de la pression du contact Figure (5.10) ; en outre cette évolution est loin d'être celle donnée par la théorie de ZICK, car nous constatons la présence d'une flexion locale non négligeable dont cette théorie est incapable de la décrire ; la contrainte maximale trouvée a une valeur mille fois plus importante que la valeur proposée par ZICK ($A \leq \frac{R}{2}$)

b) Contrainte circonférentielle σ_{11}

La flexion circonférentielle suit pratiquement l'évolution que nous avons décrite à partir de notre méthode (Chap.III) à condition d'envisager une répartition parabolique de la pression de contact, ce qui donne des contraintes en $\theta = 0$

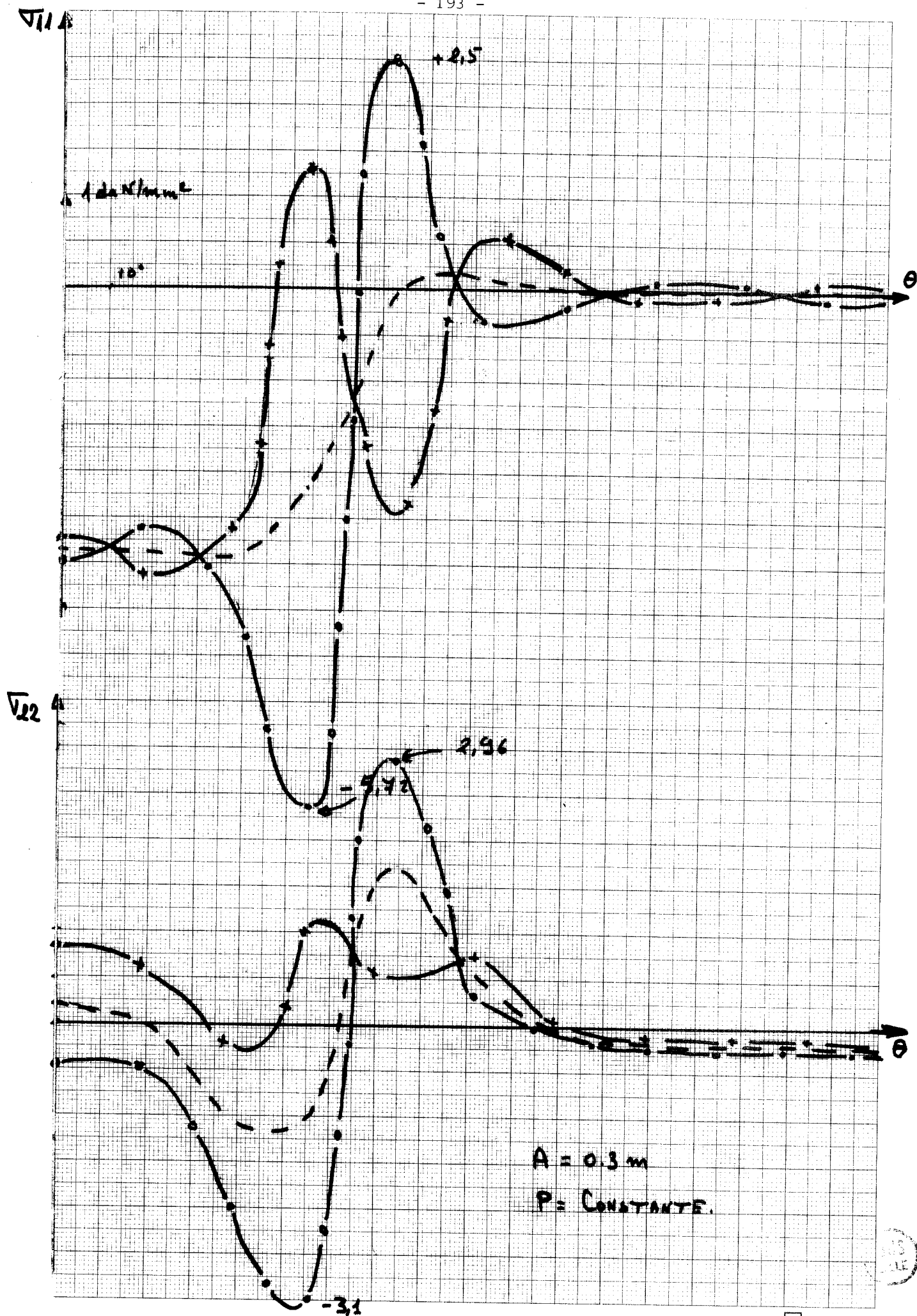


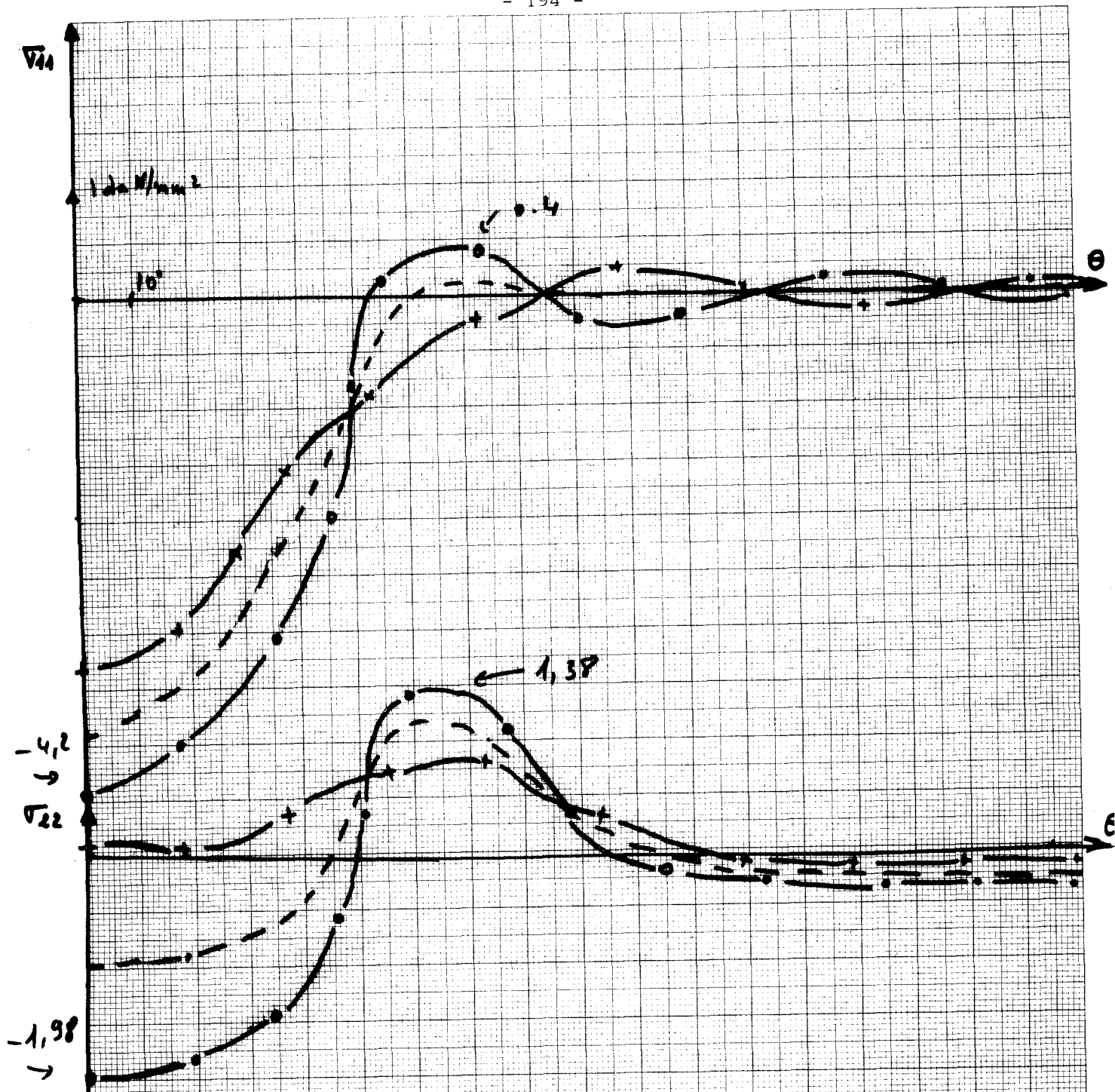


$$A = 0.18m.$$

$$P = a(\cos \theta - \sin \theta).$$

BUS
LINE

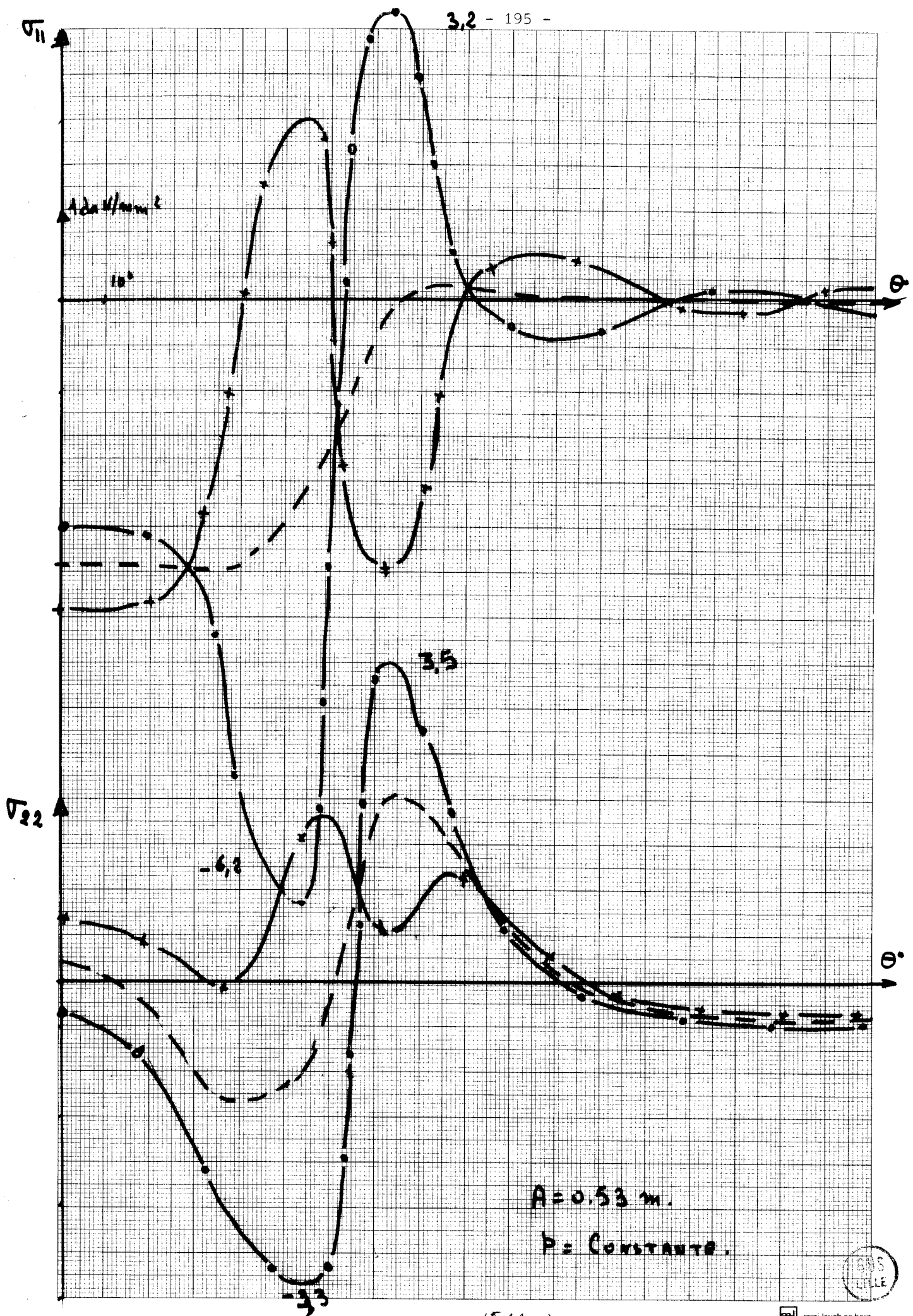


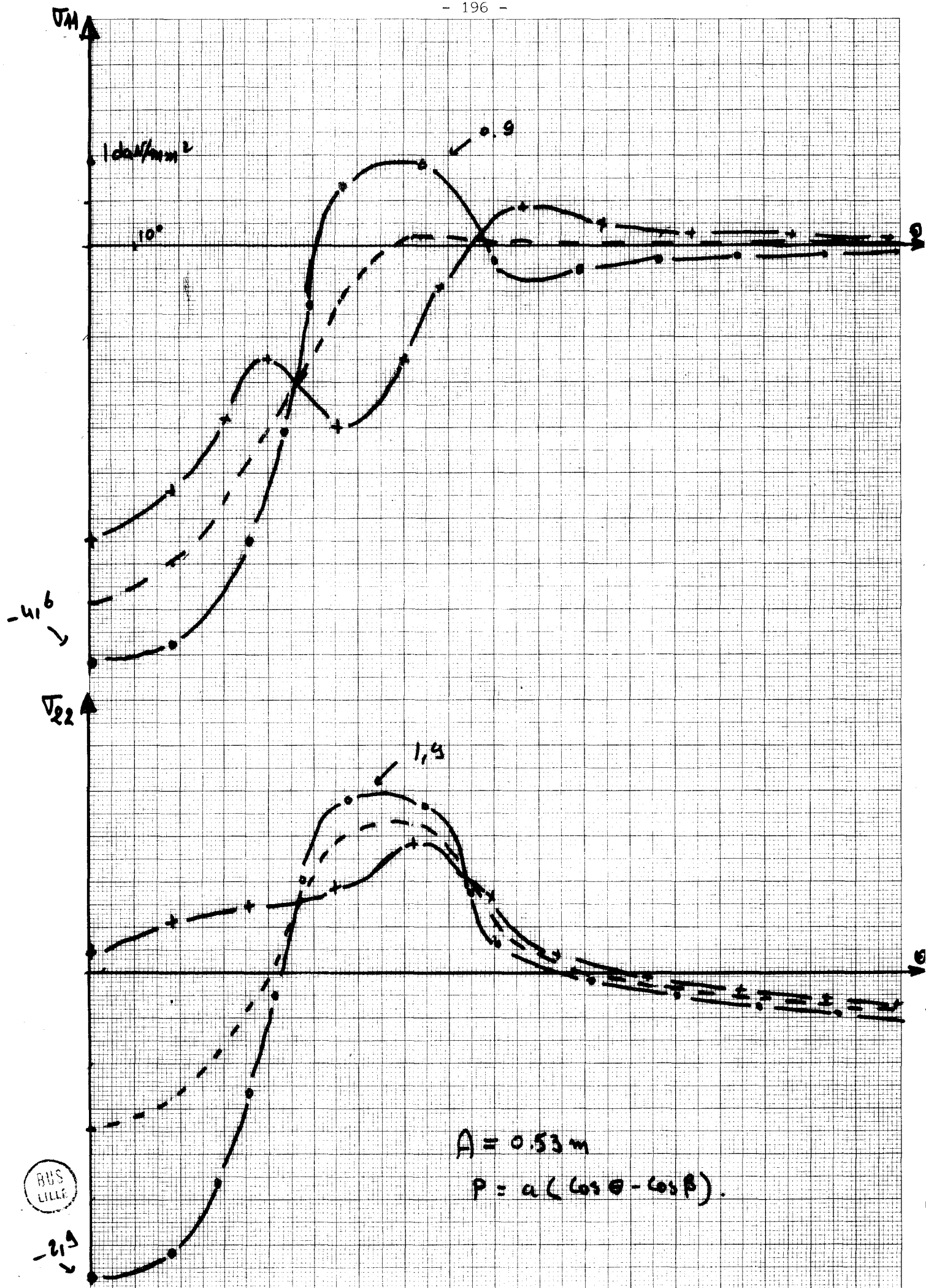


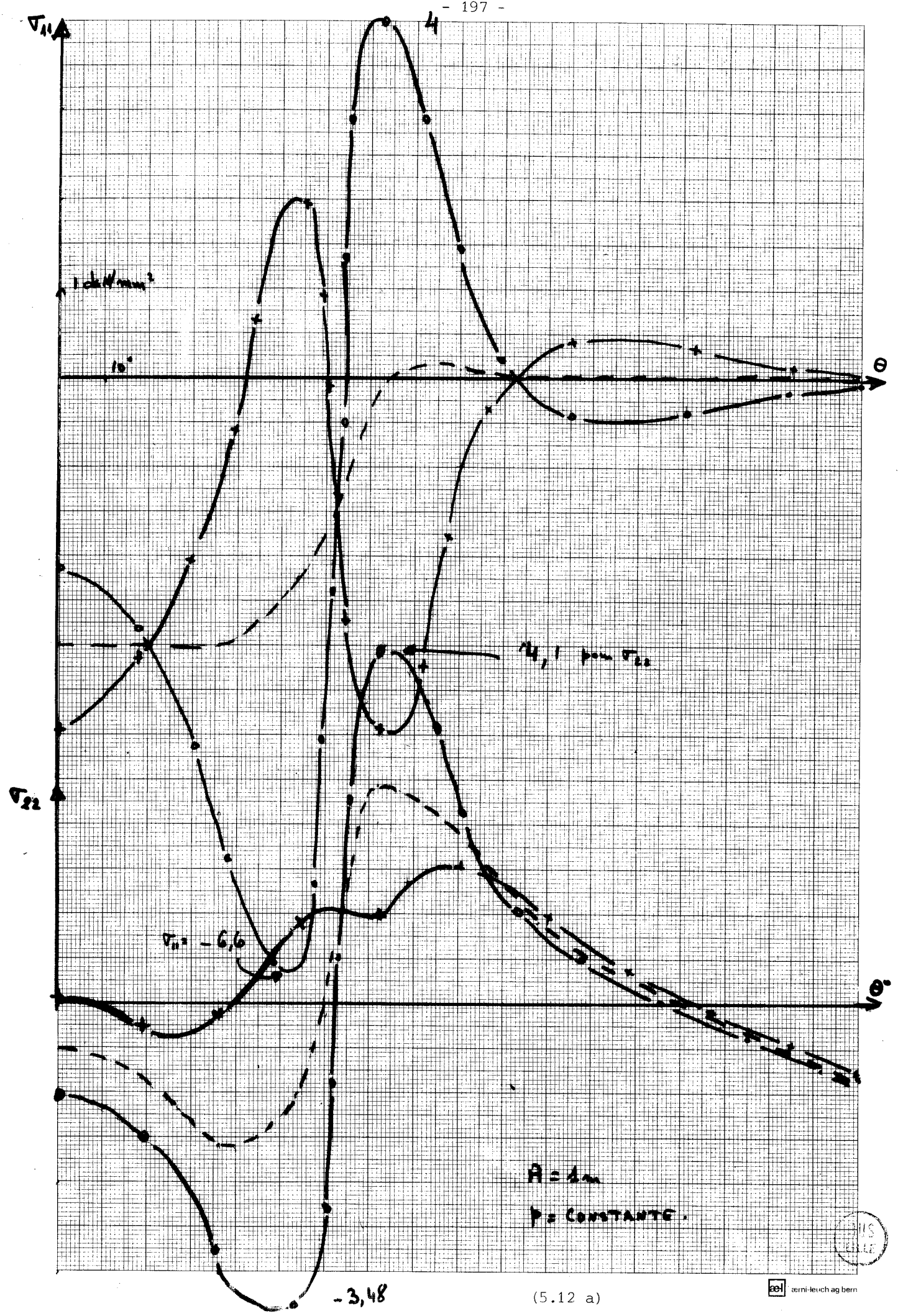
$$A = 0.3 \text{ m}$$

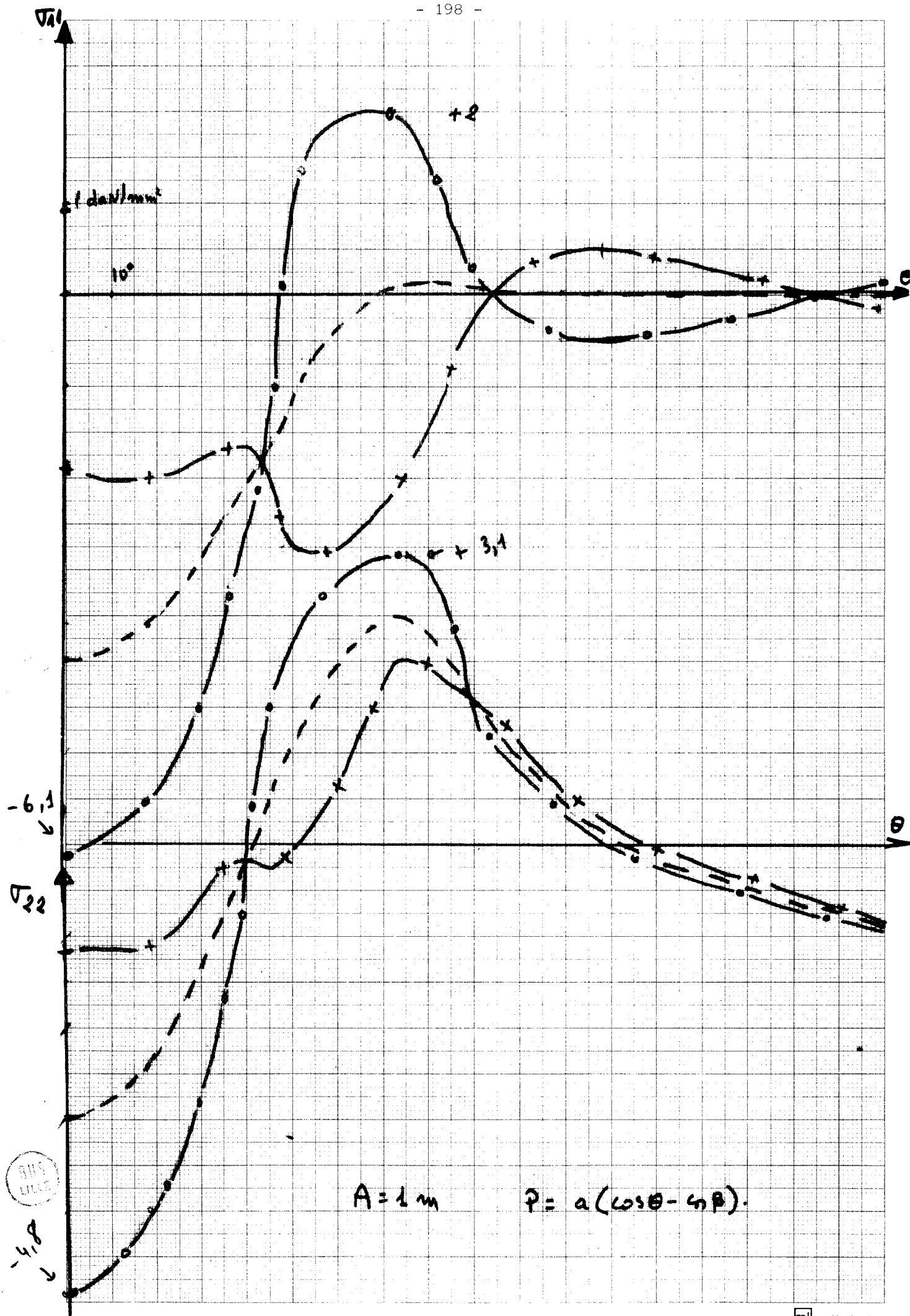
$$P = a (\cos \theta - \sin \theta)$$

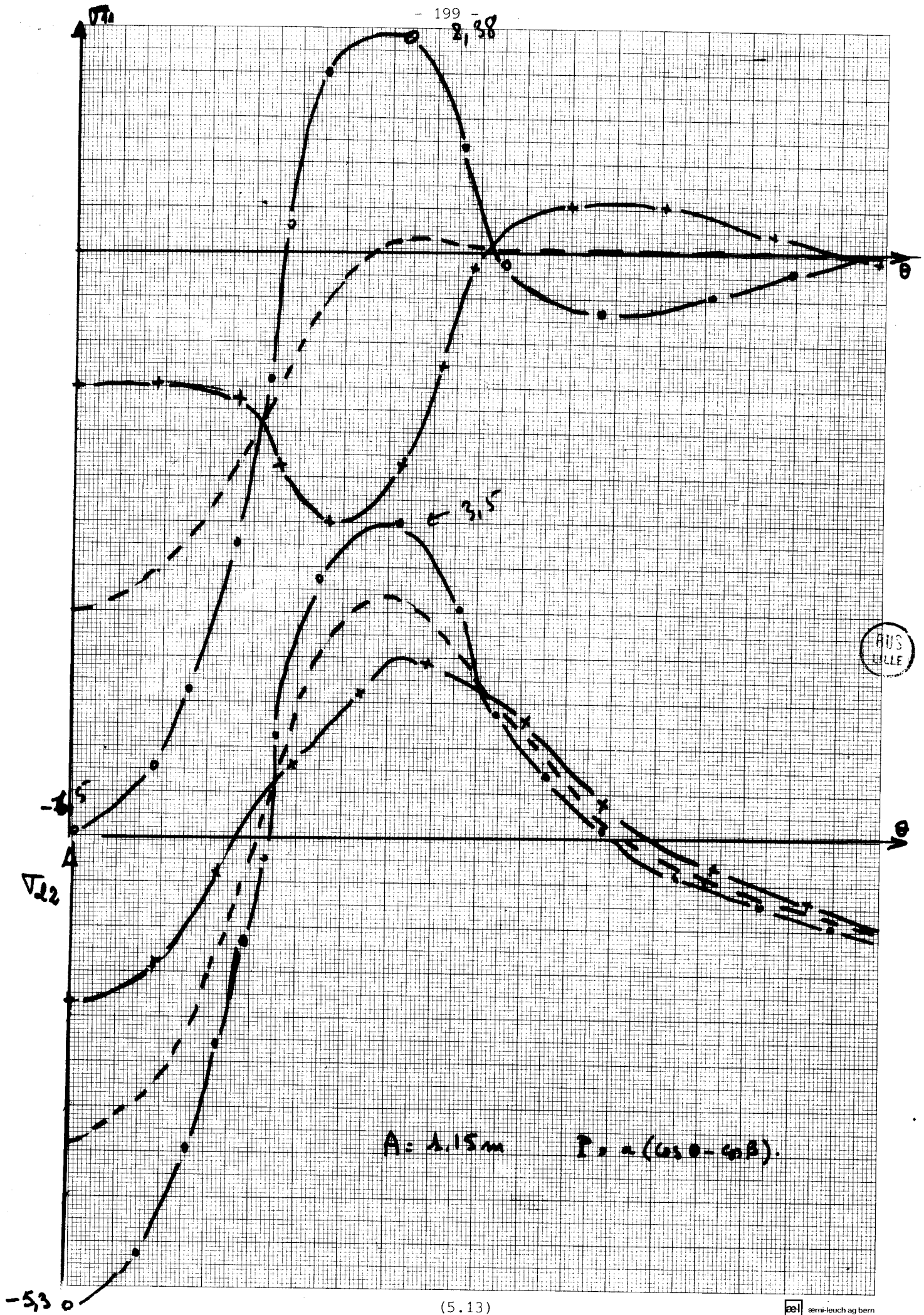
BUS
LILL











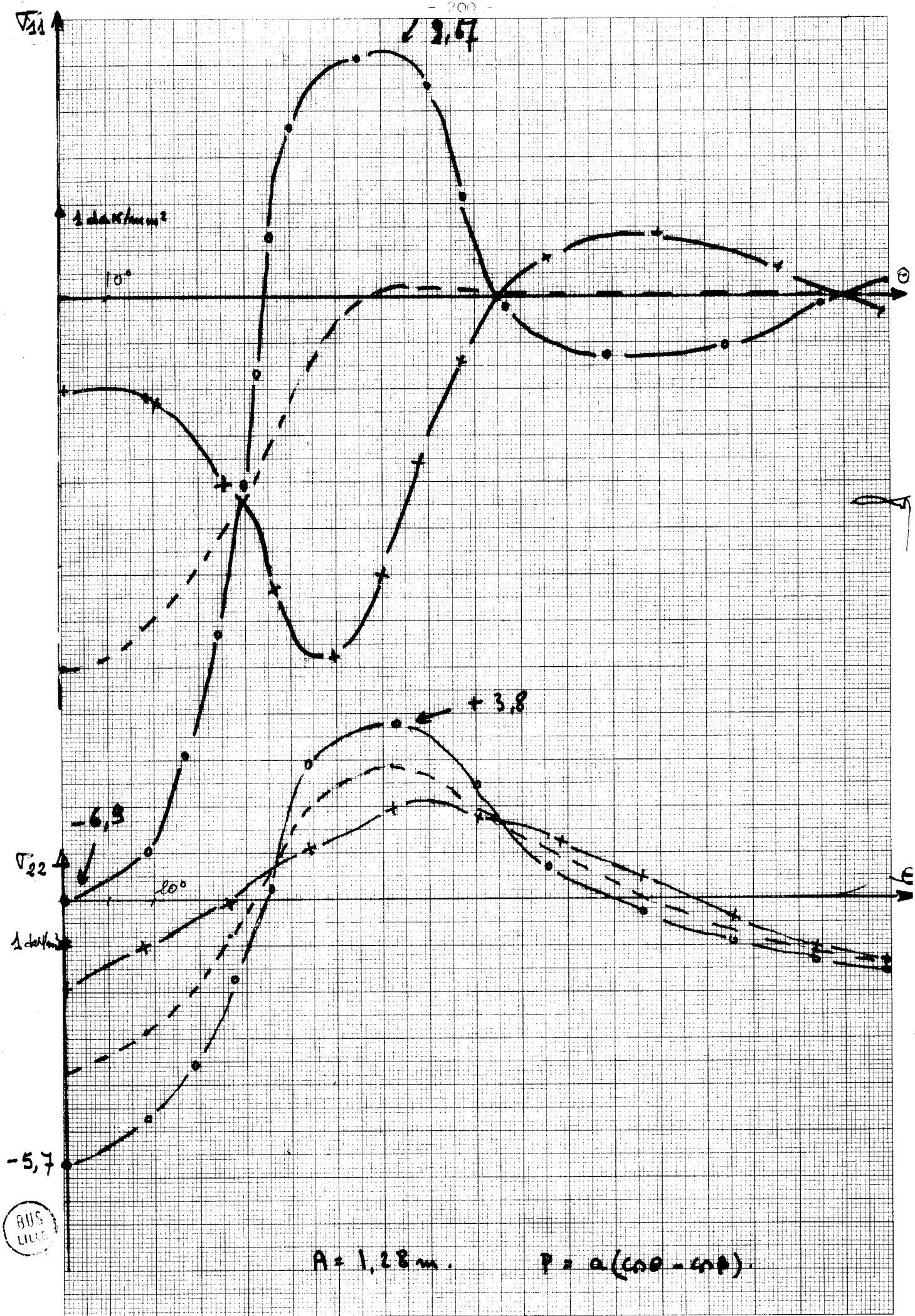


Figure (5.11 b), cependant l'évolution de la contrainte de la membrane en dehors de la zone de contact ne peut être décrite par notre théorie car elle est directement rattachée à la déformation de l'appareil ; toutefois nous constatons l'absence de toute flexion circonférentielle locale à partir de $\theta = 90^\circ$ en accord avec notre travail et contrairement aux résultats de ZICK, la valeur maximale de cette contrainte est deux fois supérieure à celle proposée par ZICK. ($A \leq \frac{R}{2}$).

1.2. Sections éloignées de l'appui $x = 1$ m et $x = 2$ m.

a) Flexion longitudinale.

Les courbes (4.8) confirment nos résultats théoriques car nous constatons la persistance de la compression des fibres inférieurs de l'appareil conformément à nos conclusions (voir (3.2.2.1 et 3.2.2.2)). Les valeurs expérimentales sont très proches de celles données par nous ; alors que la théorie de la poutre de ZICK n'a plus aucune signification physique même dans la section du milieu.

b) Flexion circonférentielle

La flexion circonférentielle constatée expérimentalement est loin d'être celle qui existe dans la section de l'appui, conformément à nos résultats théoriques.

2) - Appui à $A = 0,53$ m.

2.1. Section de l'appui Figure (4.9) et (5.11).

a) Contraintes longitudinale : nous faisons la même constatation que précédemment sur la répartition des contraintes dont le maximum est en compression à $\theta = 50^\circ$ avec une valeur sept à huit fois plus grande que celle proposée par ZICK ; la flexion locale près du bord du support étant très faible.

b) Contrainte circonférentielle σ_{11}

Comme pour la position $A = 0.3$, nous avons une répartition de la contrainte σ_{11} proche de celle donnée par notre théorie avec une répartition de pression parabolique, le maximum de la contrainte est en compression en contre peau à $\theta = 0$, sa valeur est légèrement supérieure à la moitié de celle donnée par ZICK et qui, d'après lui doit se trouver en $\theta = 60^\circ$ en peau, ce qui est entièrement faux car en ce point, nous avons une contrainte sept fois plus petite que celle proposée par ZICK ; là aussi la flexion circonférentielle locale est insignifiante à partir de $\theta = 95^\circ$.

2.2. Sections éloignées de l'appui : $X = 0,18$, $X = 0.3$, $X = 1$ m, $X = 2$ m
l'examen de la figure (4.10) confirme ce que nous avons annoncé au chapitre III à propos du caractère purement local de la flexion circonférentielle, et à propos de la compression de la totalité des fibres inférieurs de l'appareil, ceci en opposition avec les résultats de ZICK.

3) Position de l'appui à $A = 1 \text{ m}$ Figure (5.12).

Suite à l'ovalisation de l'appareil nous avons un contact réel, support-virole, plus accentué aux bords de l'appui ($\theta = \pm \frac{\pi}{3}$) ; Cependant les contraintes trouvées expérimentalement peuvent être approchées par notre méthode, en utilisant une répartition uniforme de la pression du contact.

3.2. Section de l'appui $X = 1 \text{ m}$

a) - Contrainte longitudinale σ_{22} : La courbe expérimentale (4.13) montre une évolution très proche de celle que nous avons obtenue avec une pression uniforme ; le maximum de la contrainte est en peau à $\theta = 72^\circ$, elle est égale à 2 fois la valeur proposée par ZICK ; cependant nous remarquons que la flexion locale est loin d'être négligeable contrairement aux affirmations de ZICK ; de plus cette contrainte σ_{22} n'est pas nulle dans la partie supérieure de l'appareil ($\theta = \pi$).

b) - Contrainte circonférentielle σ_{11}

Les résultats sont très proches des résultats obtenus par notre théorie (pour une répartition uniforme de la pression), avec un maximum en compression en contre peau à $\theta = 50^\circ$ et en traction à $\theta = 60^\circ$, cependant la valeur trouvée pour le moment fléchissant en ce point est légèrement supérieure à la moitié de la valeur proposée par ZICK.

2.2. Sections éloignées de l'appui $X = 0.3, X = 2 \text{ m}, X = 3,2 \text{ m}$

Nous avons la confirmation du caractère local de la flexion circonférentielle et de la compression longitudinale des fibres inférieurs et supérieurs de l'appareil , conformément à nos résultats théoriques.

Ainsi l'examen de nos résultats expérimentaux et théoriques et des résultats de ZICK fait ressortir une vérification indéniable de notre méthode, en particulier nous pouvons résumer cet examen selon deux constatations suivantes :

1) La flexion longitudinale est intimement liée à la déformation de l'appareil par ovalisation, les fibres inférieures et supérieures de cet appareil sont alors comprimées et ses fibres médianes sont tendues, contrairement à l'hypothèse de ZICK qui considère l'appareil comme une poutre ; de plus la notion de la section résistante proposée par ZICK n'a aucune signification réelle car nous avons constaté d'une part, que pour les position $A > R$, la partie supérieure de la section de l'appui est le siège des contraintes non négligeables, et d'autre part que la flexion locale dans la section de l'appui est prépondérante.

2) La flexion circonférentielle a un caractère purement local, autrement dit elle affecte une bande de largeur voisine de celle de l'appui, contrairement à l'hypothèse de ZICK qui propose une largeur de l'ordre de $4R$ ou $\frac{L}{2}$. De plus cette flexion est

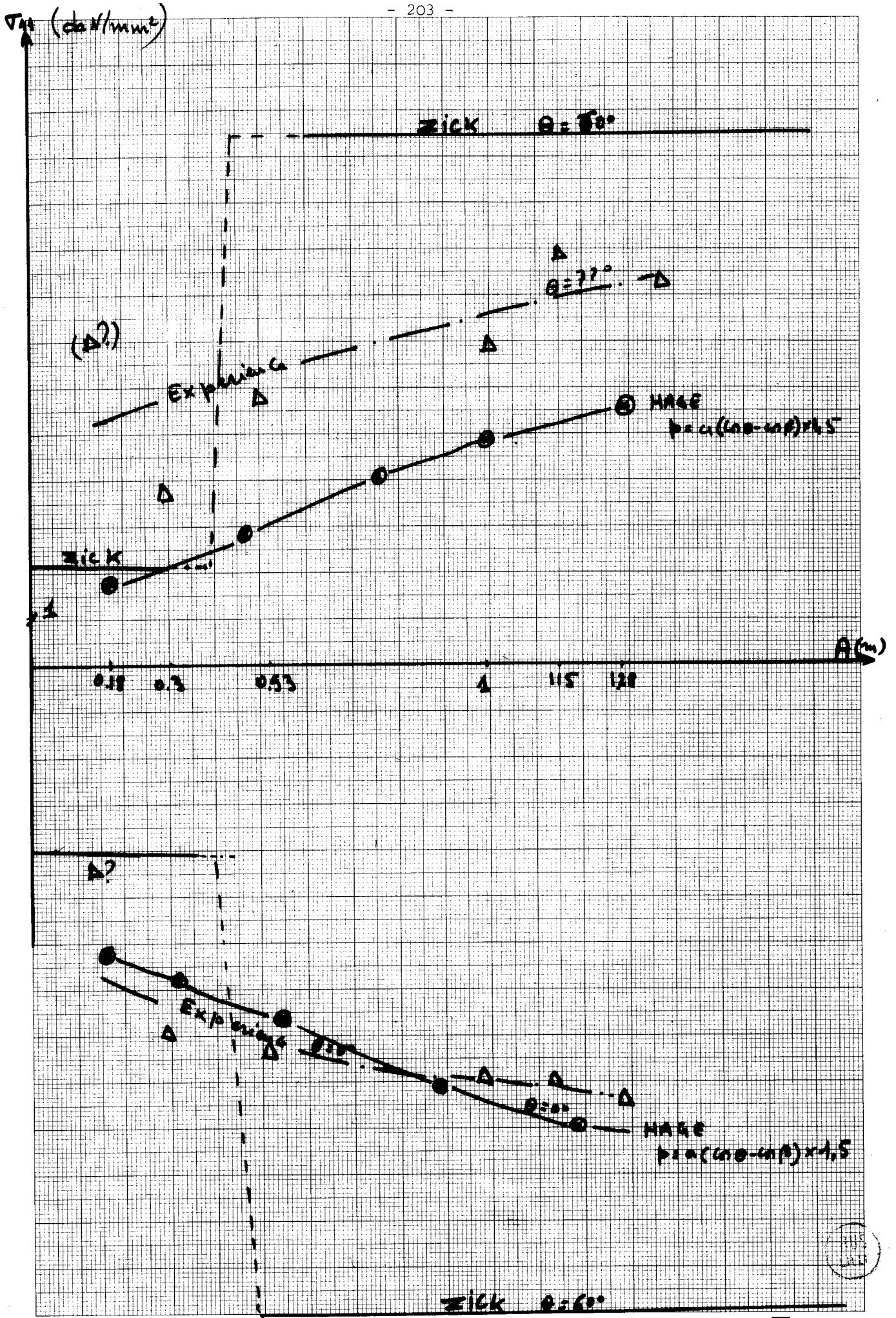
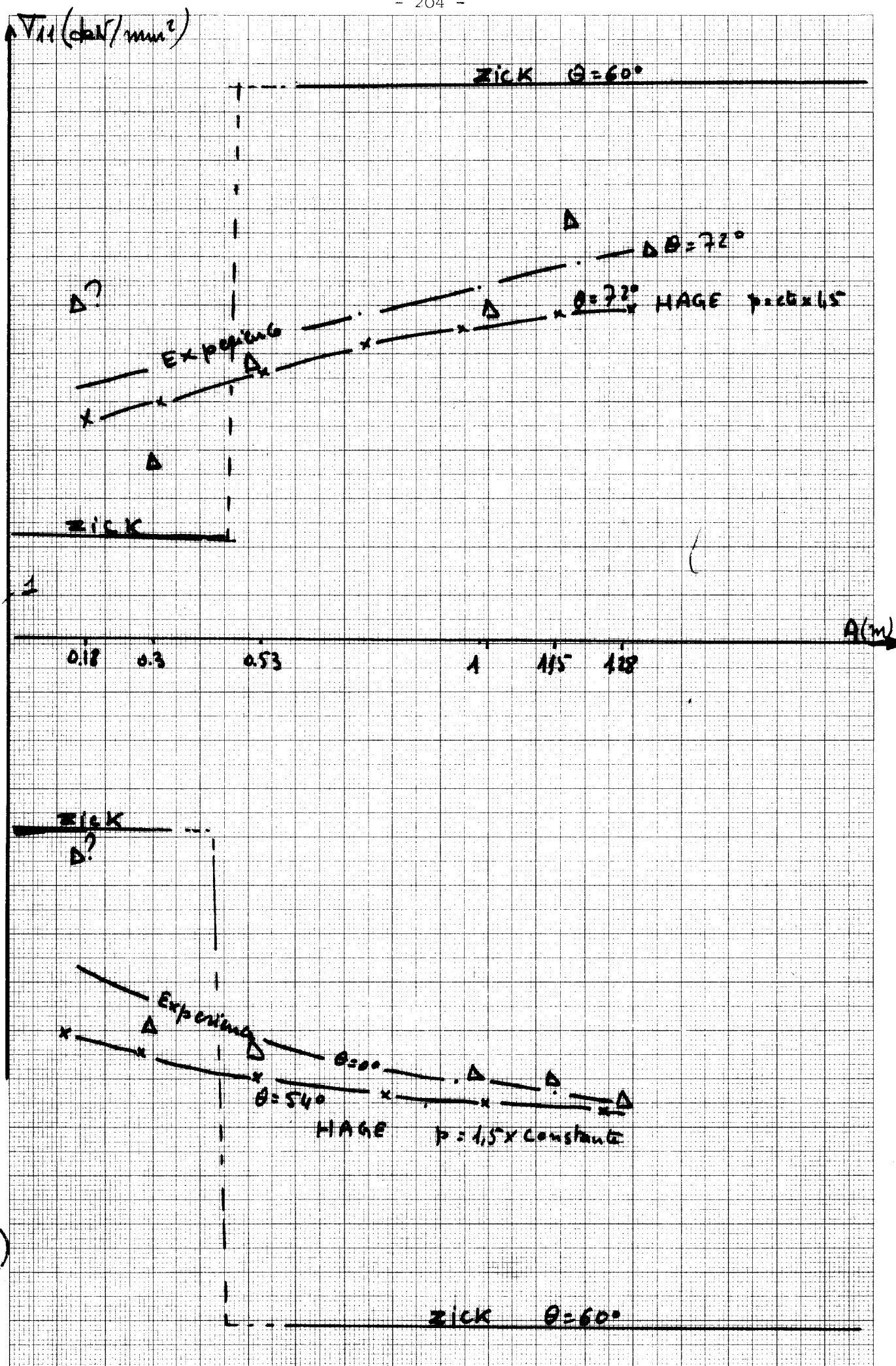
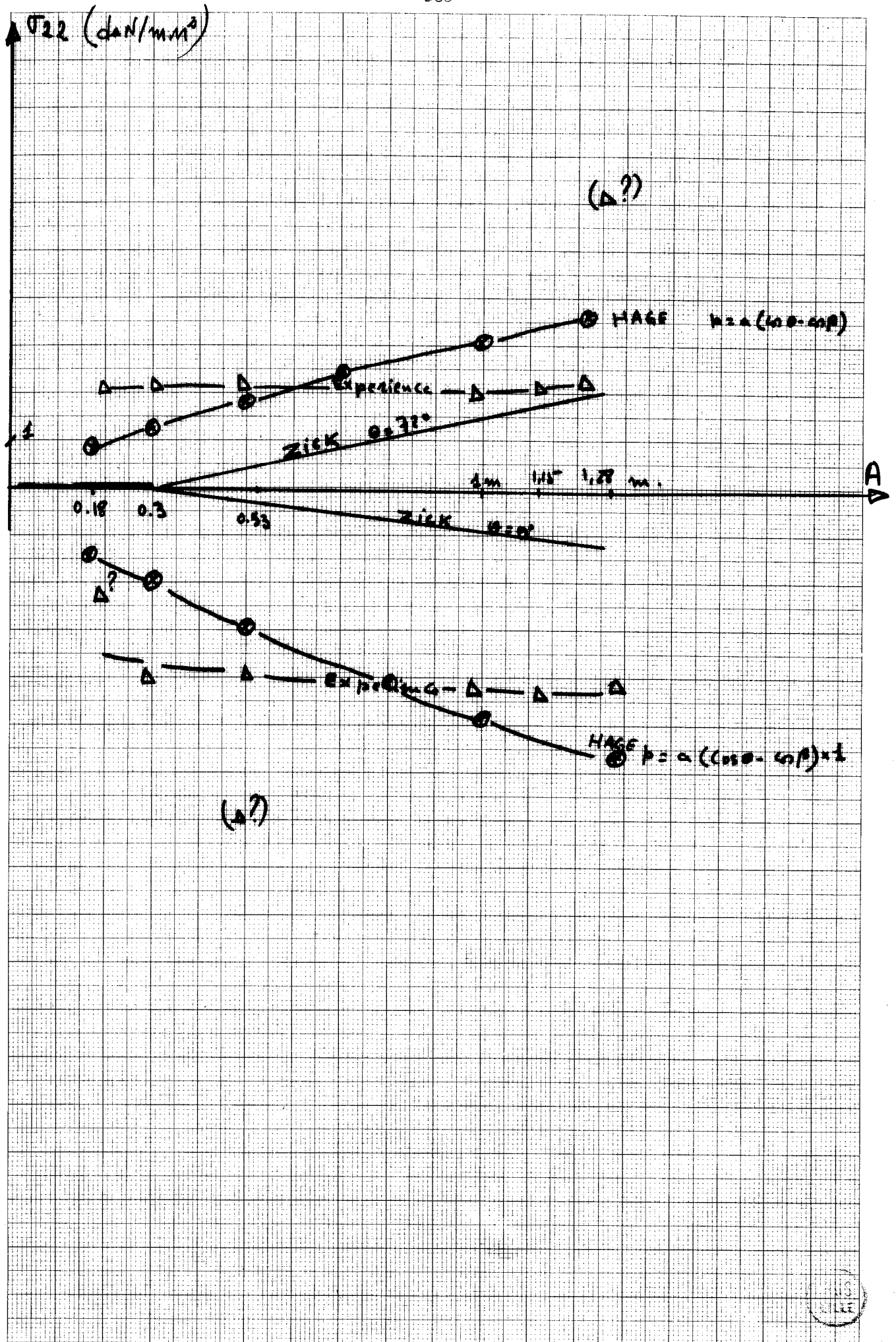


Figure (5.15 a)





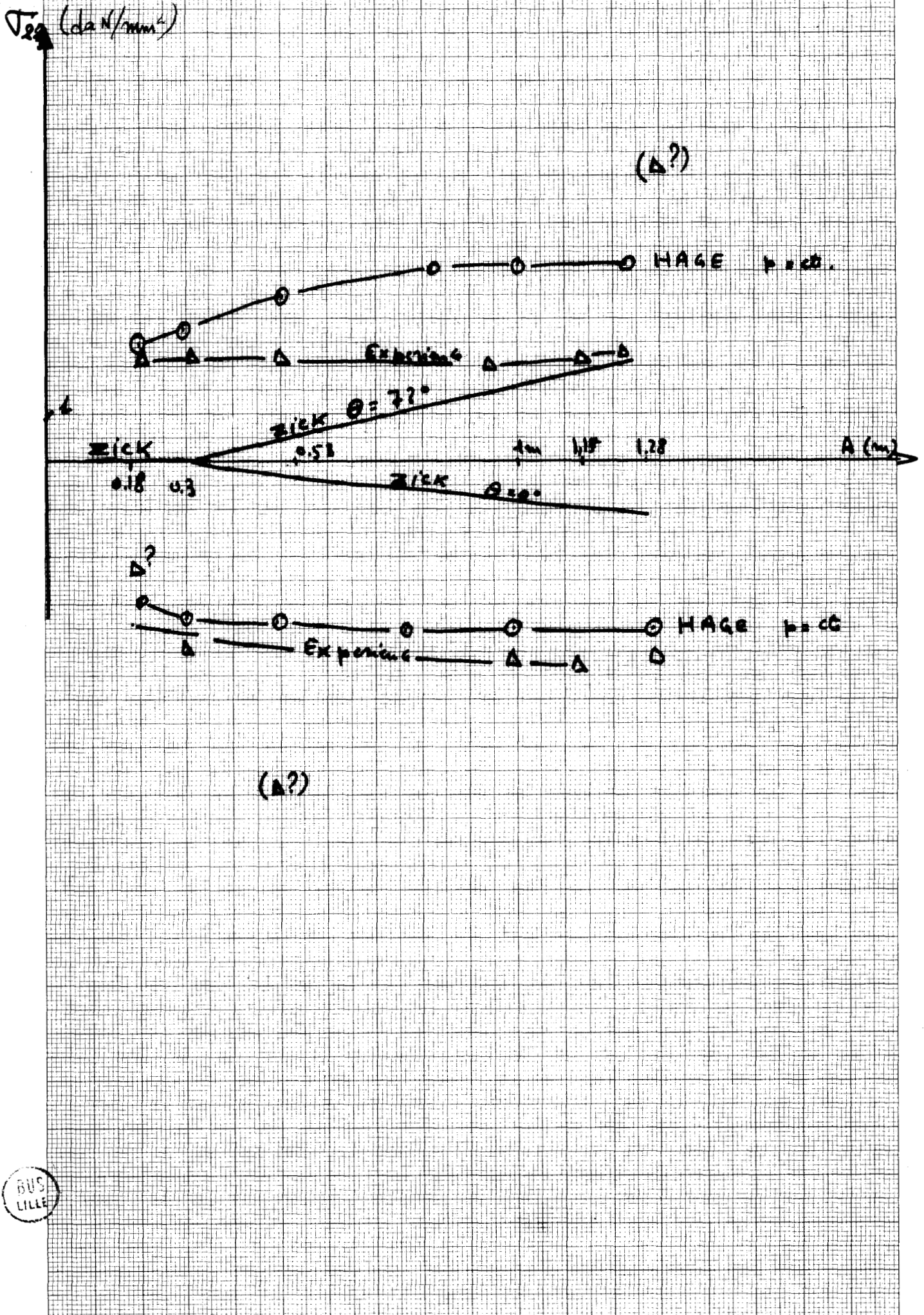


Figure (5.16 b)

pratiquement insignifiante dans la partie supérieure de la section de l'appui.

5.3.3.2. Comparaison des maxima des contraintes.

Les figures (5.15) et (5.16) résument les valeurs maximales tirées de l'expérience, du calcul par la méthode de ZICK et de notre méthode. Ces valeurs maximales ne correspondent pas aux mêmes points, pour cette raison il faut considérer ces figures comme indicatives.

En particulier nous pouvons remarquer que l'évolution expérimentale de la contrainte de flexion circonférentielle coïncide avec l'évolution calculée par notre méthode alors que la méthode de ZICK sous estime ses valeurs pour les positions de l'appui près du fond et surestime ces valeurs pour $A > R$.

La même conclusion s'applique sur l'évolution de la contrainte de la flexion longitudinale σ_{22} ; en particulier l'écart est trop important pour les contraintes de compression (ZICK sous estime la contribution de la flexion dans ce phénomène).

5.4. Conclusion.

La comparaison que nous avons présentée dans ce chapitre met en relief les défauts de la méthode de ZICK et confirme le caractère local de l'action du support sur la virole. Il apparaît que notre méthode peut décrire la réalité du phénomène et peut donner des indications précieuses sur l'ordre des grandeurs et la répartition des contraintes dans la virole.

Toutefois nous devons signaler l'inconvénient majeure de notre méthode qui résulte du choix préalable des déplacements, ce qui représente un handicap dans le cas où la géométrie initiale de l'appareil n'est pas parfaitement cylindrique (défaut de fabrication); Dans ce cas, la répartition de la pression du contact doit être modifiée en conséquence.

Cependant, pour la majorité des applications, l'utilisation d'une répartition parabolique ou mixte de la pression du contact suffit pour ^{décrire} l'évolution des contraintes. Ceci se traduit par le calcul de contraintes de comparaison (par exemple contraintes de von Mises) supérieures aux contraintes obtenues dans d'autres hypothèses de répartitions de pression, et permet un dimensionnement correct des appareils industriels.

CONCLUSION

L'étude réalisée dans cette partie met en relief les applications pratiques que nous pouvons tirer de la théorie générale de coques cylindriques et de sa résolution par double série trigonométrique que nous avons développées dans la première partie de ce mémoire.

Il en ressort qu'une nouvelle méthode de dimensionnement des appareils à pression cylindrique peut être proposée soit d'une façon rudimentaire, à partir de notre théorie de la membrane, en lui superposant une étude simple de la flexion locale dans les deux directions (longitudinale et circonférentielle) (méthode de simple basée sur les théories des poutres et des arcs), soit d'une façon plus rationnelle, à partir de la résolution de ce problème par double série trigonométrique.

Du point de vue pratique nous avons pu constater que le phénomène critique qui accompagne la sollicitation de tels appareils est essentiellement due à deux facteurs, le premier est l'action locale du support dont les contraintes sont en général acceptable, et le deuxième est rattachée à la déformation globale de l'appareil notamment son ovalisation, ce dernier facteur apparait comme étant plus critique que le premier et nécessite un renforcement de l'appareil non pas dans la région des supports, mais dans la section du milieu.

Toutefois avant de se prononcer d'une façon catégorique, il nous semble nécessaire d'effectuer des expériences sur des appareils industriels, afin de dégager la meilleure représentation de la pression support-virole, étant donné l'influence importante de cette schématisation sur les résultats du calcul.

En outre la méthode que nous avons développée s'applique à n'importe quelle forme de supports (en poteaux, en longerons, etc...) la schématisation de la pression du contact relative à chaque cas étant déterminée d'une façon analogue à celle que nous avons réalisée dans le présent cas (appui en berceau)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - BROWNELL-YOUNG: Process Equipement Design, Vessel Désign,
John WILEY and sons inco

- [2] - CHERET J., VENON M. et d'ESCATHA Y. : Prise en compte du poids
dans le calcul d'un réservoir cylindrique horizontal à gaz
liquéfié reposant sur 4 appuis. Chaudronnerie - Tôlerie
(A.F.I.A.P. - 1977)

- [3] - Code de Construction des Appareils à Pression -
fascicule C-7 : S.N.C.T.

- [4] - ZICK L.P. et CARLSON C.E. : "Strain Gage Technique Employed
in studying propane Tank Stresses Under Service Conditions"
Steel 86-88 (Apr. 12, 1948).

- [5] - ZICK L.P. : "Stresses in large horizontal cylindrical vessels
on two saddle supports. Welding Journal. Research
supplément Septembre 1951.

NC 713 2

COMMENTAIRE DU PARAGRAPHE C 713 2

CALCUL DES CONTRAINTES DANS UN RÉSERVOIR CYLINDRIQUE A GÉNÉRATRICE HORIZONTALE REPOSANT SUR DEUX BERCEAUX-SUPPORTS

NC 713 2-1 - GÉNÉRALITÉS

La méthode exposée ci-après ne s'applique intégralement qu'aux appareils du type réservoir présentant un plan de symétrie perpendiculaire à la direction des génératrices. Elle peut, cependant, être extrapolée à des appareils d'autres types; il est alors nécessaire :

a) De déterminer les moments de flexion et les efforts tranchants par les méthodes habituelles de la statique en fonction de la répartition particulière des charges;

b) De faire une vérification de la valeur des contraintes locales pour chaque appui dans le cas où il n'existe pas de symétrie.

L'analyse du comportement d'un réservoir présente deux aspects :

a) Étude du comportement global du réservoir considéré comme poutre sur deux appuis simples (paragr. NC 713 2-3);

b) Étude du comportement local de la virole au droit des supports en fonction de son mode de renforcement (paragr. NC 713 2-4).

Remarque. — Ce chapitre ne reprend pas l'étude des contraintes dues aux seuls effets de la pression intérieure ou extérieure; cette étude doit évidemment être faite au préalable d'après les règles des chapitres C 2, C 3, C 4.

NC 713 2-2 - NOTATIONS

P = pression de calcul (comptée positivement si c'est une pression intérieure).

f = contrainte nominale de calcul pour le métal de la virole et des fonds.

f_r = contrainte nominale de calcul pour le métal des anneaux-renforts.

e = épaisseur de la virole.

e_f = épaisseur des fonds.

e_r = épaisseur des plaques-renforts.

$2Q$ = poids total de l'appareil.

x = largeur de tôle de virole associée à un anneau-renfort, déterminée suivant la règle du paragraphe C 405.

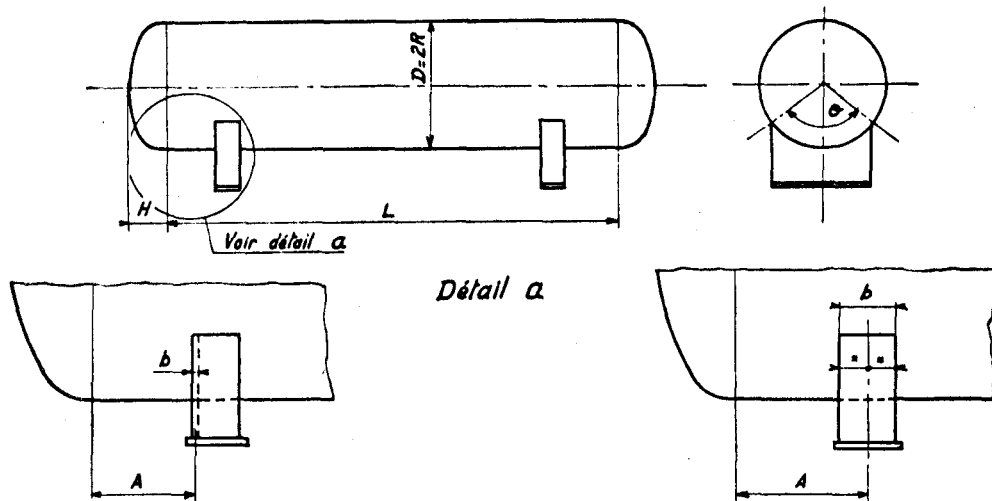
D, R, L, H, A, b, θ = données géométriques définies par la figure NC 713 2-2.

Les autres notations sont explicitées en cours du texte.

Nota : Les contraintes calculées au moyen des formules des paragraphes NC 713 2-3 et NC 713 2-4 ci-après sont des contraintes de :

— Traction si leur valeur est positive;

— Compression si leur valeur est négative.



Support métallique soudé sur la virole de l'appareil

A : distance de la naissance de la courbure du fond à l'axe de l'âme du support;

b : épaisseur de l'âme du support.

Appareil posé sur des supports métalliques ou en béton

A : distance de la naissance de la courbure du fond à l'axe de la surface de contact;

b : largeur de la surface de contact de la virole sur les supports.

Fig. NC 713 2-2

C7-12

NC 713 2-3 - FLEXION LONGITUDINALE DU RÉSERVOIR CONSIDÉRÉ COMME UNE POUTRE SUR DEUX SUPPORTS

NO 713 2-31

GÉNÉRALITÉS

Le poids propre du réservoir étant toujours faible devant le poids du liquide contenu, on peut faire l'hypothèse simplificatrice consistant à supposer que le réservoir est de poids négligeable et contient un liquide de poids spécifique :

$$\delta = \frac{2Q}{\pi R^2 \left(L + \frac{4H}{3} \right)}$$

Les efforts s'exerçant sur le réservoir sont alors :

— Charge verticale uniformément répartie sur la longueur L de la virole :

$$\frac{2Q}{L + \frac{4H}{3}}$$

— Poussée hydrostatique horizontale sur chaque fond, appliquée au centre de poussée :

$$\frac{2QR}{L + \frac{4H}{3}}$$

— Poids de chaque fond, appliqué à son centre de gravité :

$$\frac{4QH}{3L + 4H}$$

— Réaction de chaque appui : Q.

La figure NC 713 2-31 montre la répartition de ces forces ainsi que le moment de flexion et l'effort tranchant agissant sur la virole, dont les expressions sont :

$$M_1 = -QA \left[1 - \frac{1 - \frac{A}{L} + \frac{R^2 - H^2}{2AL}}{1 + \frac{4H}{3L}} \right]$$

$$M_2 = \frac{QL}{4} \left[\frac{1 + 2 \frac{R^2 - H^2}{L^2}}{1 + \frac{4H}{3L}} - \frac{4A}{L} \right]$$

$$M_3 = \frac{2Q}{L + \frac{4H}{3}} \cdot \frac{R^2 - H^2}{4}$$

$$T_1 = \frac{2Q}{L + \frac{4H}{3}} \left(\frac{2H}{3} + A \right)$$

$$T_1 = Q \frac{L - 2A}{L + \frac{4H}{3}} = T$$

$$T_3 = \frac{2Q}{L + \frac{4H}{3}} \cdot \frac{2H}{3}$$

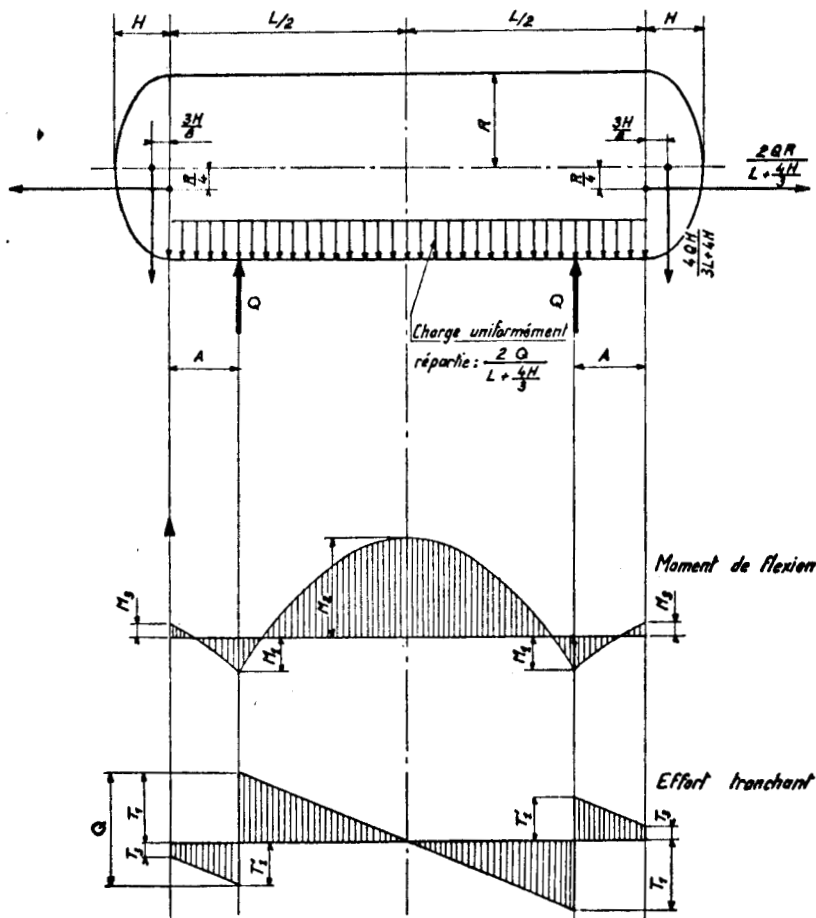


Fig. NC 713 2-31

Pour le calcul des contraintes maximales, les expressions à prendre en compte sont : M_1 , M_2 et T .
Si l'on pose :

$$C_1 = 1 + \frac{4H}{3L}$$

$$C_2 = \frac{R}{2L} \left(1 - \frac{H^2}{R^2} \right)$$

$$C_3 = \frac{0,25 + \left(1 - \frac{H^2}{R^2} \right) \frac{R^2}{2L^2}}{1 + \frac{4H}{3L}} = \frac{0,25 + C_2 \frac{R}{L}}{C_1}$$

$$C_4 = \frac{1 - 2 \frac{A}{L}}{1 + \frac{4H}{3L}} = \frac{1 - 2 \frac{A}{L}}{C_1}$$

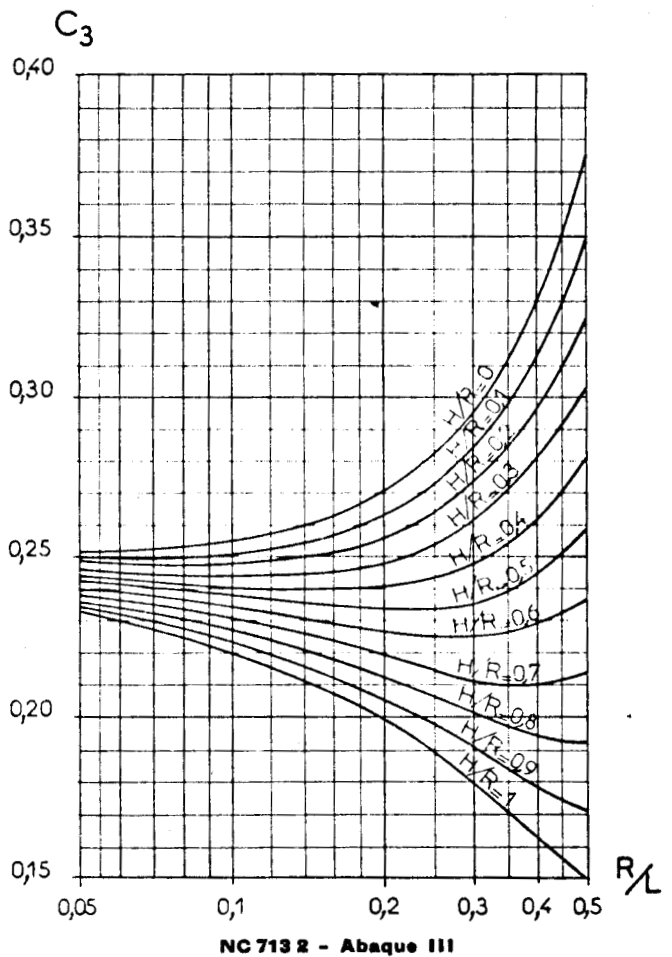
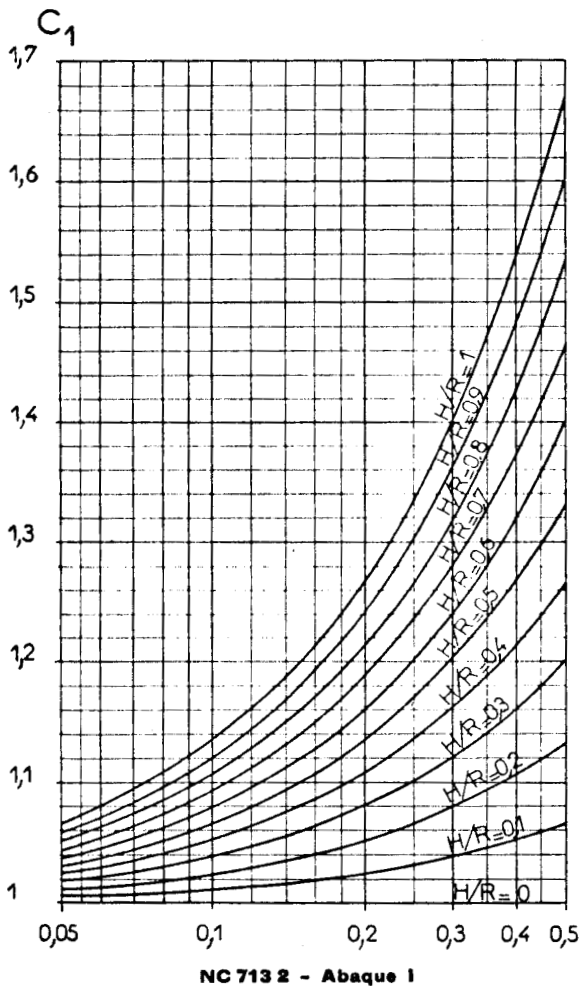
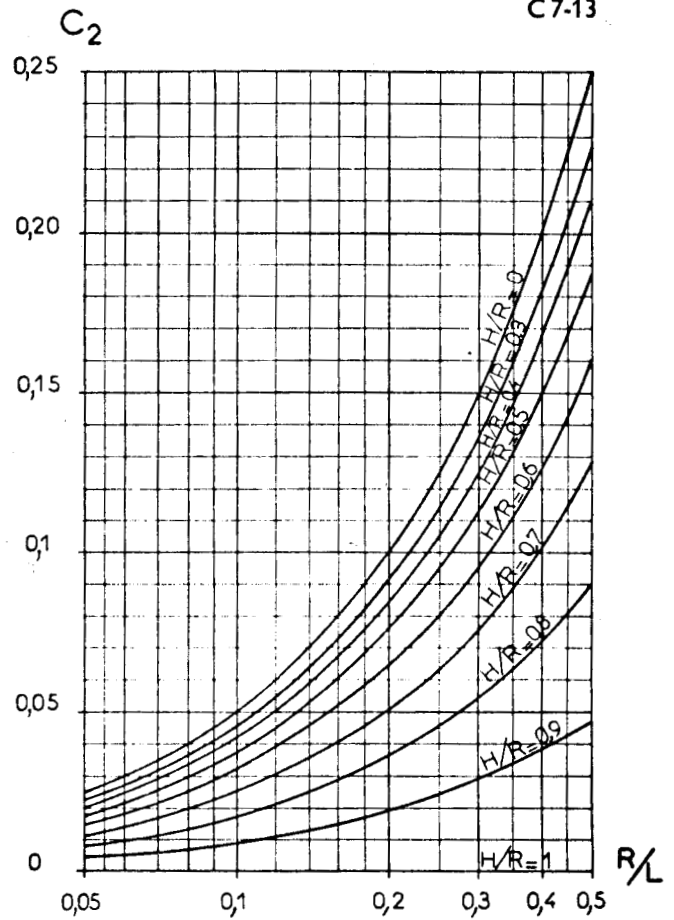
les expressions de M_1 , M_2 et T deviennent :

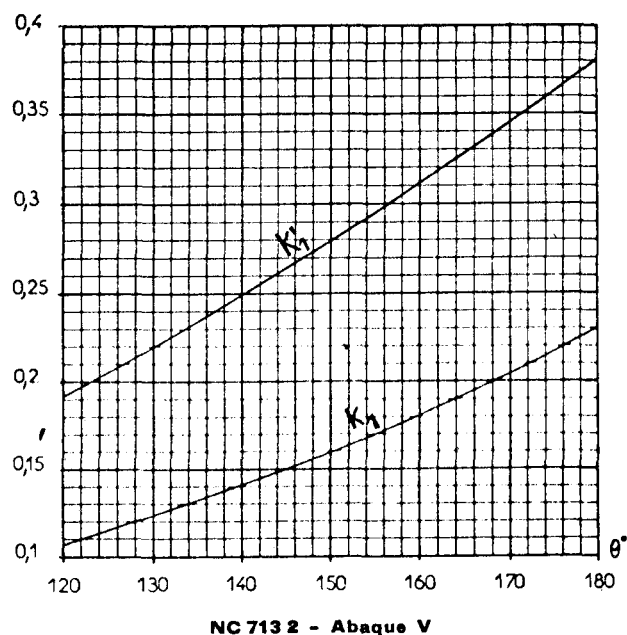
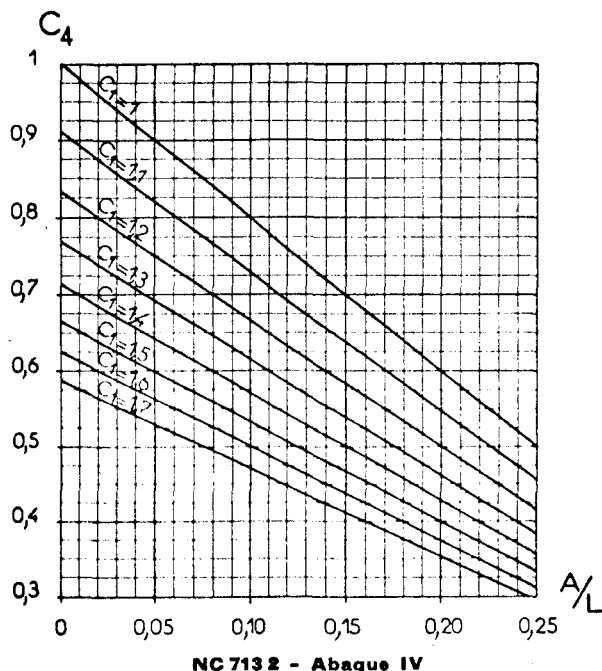
$$M_1 = \frac{QA}{C_1} \left(1 - \frac{A}{L} + C_2 \frac{R}{A} - C_1 \right)$$

$$M_2 = Q (C_3 L - A)$$

$$T = C_4 Q$$

Les coefficients C_1 , C_2 , C_3 sont donnés en fonction de $\frac{R}{L}$ et $\frac{H}{R}$ par les abaques I, II et III. Le coefficient C_4 est donné en fonction de $\frac{A}{L}$ et C_1 par l'abaque IV.





NO 713 2-32

CONTRAINTES LONGITUDINALES DE FLEXION

NC 713 2-321 - Contraintes longitudinales de flexion au milieu de la virole

Sur la génératrice inférieure :

$$f_1 = \frac{PR}{2e} + \frac{M_1}{\pi R^2 e}$$

Sur la génératrice supérieure :

$$f_2 = \frac{PR}{2e} - \frac{M_1}{\pi R^2 e}$$

Il est, de plus, toujours nécessaire de vérifier qu'en l'absence de pression intérieure, la contrainte de compression $f_2 = -\frac{M_1}{\pi R^2 e}$ au milieu de la génératrice supérieure ne dépasse pas la valeur admissible (voir paragr. NC 713 2-323).

NO 713 2-322 - Contraintes longitudinales de flexion au droit des supports

La valeur de ces contraintes dépend de la rigidité de la virole au droit des appuis. En effet, si le réservoir s'ovalise sous l'effet des moments de flexion transversaux dus à la transmission des réactions d'appui (voir paragr. NC 713 2-4), la partie supérieure de la virole n'offre pas de résistance à la flexion longitudinale. La figure NC 713 2-322 schématise le phénomène.

Une rigidité suffisante de la virole peut être assurée :

— Par l'adjonction d'anneaux raidisseurs au droit, ou de part et d'autre de chaque support (voir paragr. NC 713 2-42);

— Par la présence des fonds si les supports en sont suffisamment proches, c'est-à-dire si : $A < \frac{R}{2}$.

Les contraintes longitudinales de flexion ont pour valeur :

— Sur la génératrice supérieure d'une virole raidie ou aux points les plus hauts de la section résistante d'une virole non raidie (points A et B de la figure NC 713 2-322) :

$$f_3 = \frac{PR}{2e} - \frac{M_1}{K_1 \pi R^2 e}$$

— Sur la génératrice inférieure de la virole :

$$f_4 = \frac{PR}{2e} + \frac{M_1}{K'_1 \pi R^2 e}$$

Il est, de plus, toujours nécessaire de vérifier qu'en l'absence de pression intérieure, la contrainte de compression $f_4 = \frac{M_1}{K'_1 \pi R^2 e}$ sur la génératrice inférieure ne dépasse pas la valeur admissible (voir paragr. NC 713 2-323).

Les valeurs des coefficients K_1 et K'_1 sont :

- $K_1 = K'_1 = 1$ si la virole est raidie par des anneaux-renforts ou par les fonds;
- données par l'abaque V en fonction de l'angle θ si la virole n'est pas raidie.

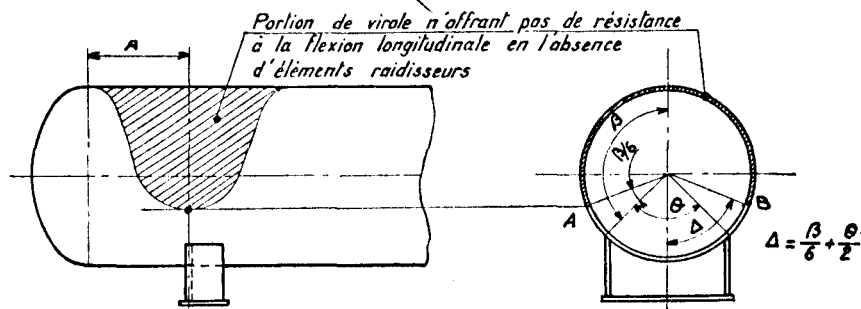


Fig. NC 713 2-322

Les expressions de ces coefficients étant :

$$K_1 = \frac{\Delta + \sin \Delta \cos \Delta - \frac{2 \sin^2 \Delta}{\Delta}}{\pi \left(\frac{\sin \Delta}{\Delta} - \cos \Delta \right)}$$

$$K'_1 = \frac{\Delta + \sin \Delta \cos \Delta - \frac{2 \sin^2 \Delta}{\Delta}}{\pi \left(1 - \frac{\sin \Delta}{\Delta} \right)}$$

avec : $\Delta = \frac{\theta}{2} + \frac{\beta}{6}$ (voir fig. NC 713 2-322).

NC 713 2-323 - Valeurs admissibles pour les contraintes de flexion longitudinale

a) Les contraintes de traction ne doivent pas dépasser la valeur de la contrainte nominale de calcul f pour le métal de la virole (tenir compte, le cas échéant, de la présence de soudures circonférentielles ou d'ouvertures dans les zones où s'exercent ces contraintes).

b) Les contraintes de compression ne doivent pas dépasser la plus petite des deux valeurs :

- Contrainte nominale de calcul f ,
- Contrainte critique de flambage $f_{cr} = 0,0625 \frac{Ee}{R}$,

E étant le module d'élasticité du matériau constituant la virole.

NC 713 2-33

CONTRAINTES DUES A L'EFFORT TRANCHANT AU DROIT DES SUPPORTS

La transmission du poids du réservoir aux supports engendre au droit des appuis des contraintes de cisaillement dans la virole et éventuellement dans les fonds.

La répartition et l'intensité de ces contraintes dépendent de la rigidité de la virole au droit des supports.

NC 713 2-331 - Virole non raidie par les fonds ($A > R/2$) et comportant des anneaux-renforts dans le plan des supports

La virole supporte seule la contrainte de cisaillement; les points où cette contrainte est maximale sont les points C et D (fig. NC 713 2-331).

Cette contrainte maximale a pour valeur :

$$t_1 = \frac{T}{\pi Re}$$

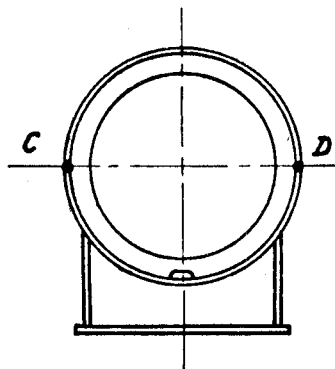


Fig. NC 713 2-331

NC 713 2-332 - Virole non raidie par les fonds ($A > R/2$) et ne comportant pas d'anneaux-renforts dans le plan des supports

La virole supporte seule la contrainte de cisaillement; les points où cette contrainte est maximale sont les points E et F (fig. NC 713 2-332) (1).

Cette contrainte maximale a pour valeur :

$$t_2 = K_2 \frac{T}{Re}$$

où :

$$K_2 = \frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}$$

Les valeurs de K_2 sont données en fonction de θ par l'abaque VI.

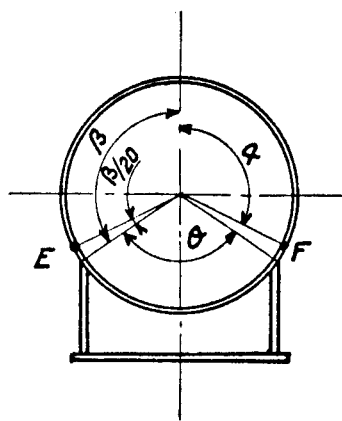


Fig. NC 713 2-332

NC 713 2-333 - Virole raidie par les fonds ($A < R/2$)

La transmission de l'effort tranchant engendre alors des contraintes de cisaillement dans la virole et à la naissance de la courbure des fonds.

Les fonds sont de plus soumis à une contrainte horizontale de traction s'ajoutant aux contraintes dues à la pression intérieure.

Dans le cas de réservoir sous vide, cette contrainte se retranche de la contrainte due à la pression et peut généralement être négligée.

Les contraintes de cisaillement sont maximales aux mêmes points que dans le cas NC 713 2-331 ci-dessus. Elles ont pour valeur :

— Dans la virole :

$$t_3 = K_3 \frac{Q}{Re}$$

— Dans les fonds :

$$t'_3 = K_3 \frac{Q}{Re_f}$$

avec :

$$K_3 = \frac{\sin \alpha}{\pi} \left[\frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \right]$$

(1) La position de ces points a été déterminée expérimentalement (réf. 1).

C7-16

Les valeurs de K_s sont données en fonction de l'angle θ par l'abaque VI.

La contrainte de traction dans les fonds a pour valeur :

$$f_s = K_s \frac{Q}{R_{ef}} \quad (1)$$

où :

$$K_s = \frac{3}{8} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \right]$$

Les valeurs de K_s sont données en fonction de θ par l'abaque VI.

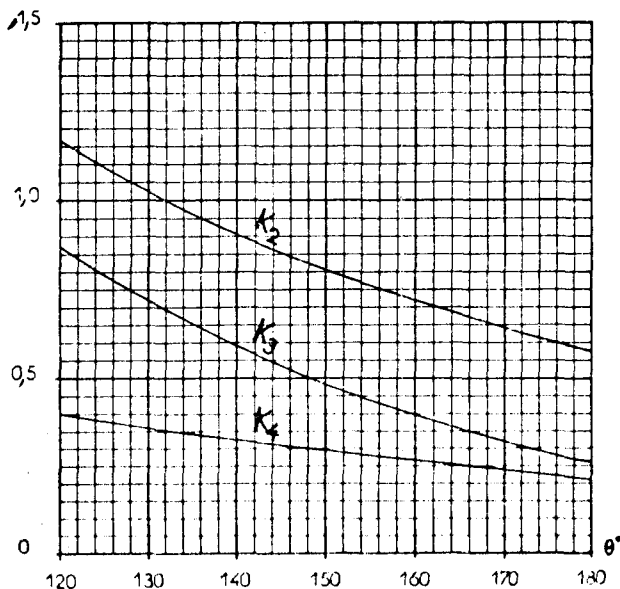
NC 713 2-334 - Valeurs admissibles pour les contraintes dues à l'effort tranchant (2)

a) Les contraintes de cisaillement ne doivent pas dépasser la valeur : $0,8 f$.

b) La contrainte de traction dans les fonds ne doit pas dépasser la valeur : $1,25 f - f_n$,

f_n étant la contrainte due à la pression intérieure calculée suivant les règles du chapitre C 3 (tenir compte éventuellement de la présence de soudures dans les fonds).

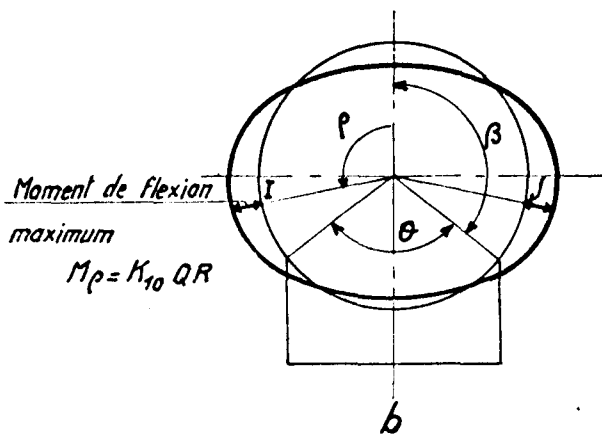
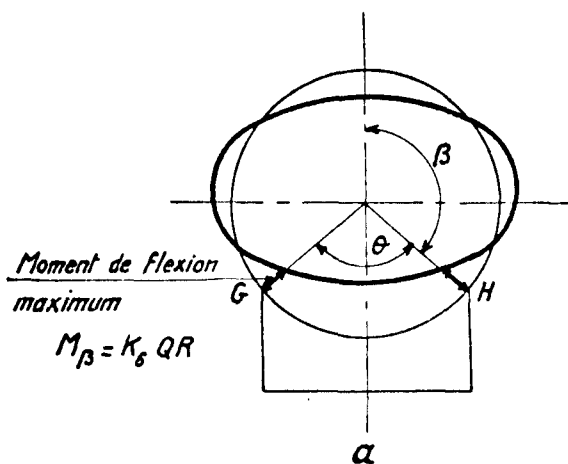
Les valeurs élevées admises pour ces contraintes se justifient par leur caractère local et par leur possibilité d'adaptation.



NC 713 2 - Abaque VI

**NC 713 2-4 - FLEXION TRANSVERSALE DE LA VIROLE
AU DROIT DES SUPPORTS (3)**

La figure NC 713 2-4 a et b montre la répartition du moment de flexion transversale au droit des supports.



a) Virole sans anneaux raidisseurs (paragr. NC 713 2-41) ou avec anneaux raidisseurs dans le plan des supports (paragr. NC 713 2-421).

b) Virole avec anneaux raidisseurs de part et d'autre de chaque support (paragr. NC 713 2-422).

Fig. NC 713 2-4

(1) Cette valeur, exacte dans le cas d'un fond plat, constitue une approximation suffisante en pratique pour un fond bombé (réf. 1).

(2) Ces valeurs sont celles recommandées par Zick (réf. 1).

(3) Ce paragraphe, basé sur les travaux de Zick (réf. 1), néglige l'effet favorable de la pression intérieure sur la flexion transversale de la virole. Il peut, bien entendu, en être tenu compte dans une analyse plus détaillée.

NC 713 2-41

RÉSERVOIR SANS ANNEAUX RAIDISSEURS

La virole supporte seule les contraintes dues à la flexion transversale.

Ces contraintes sont :

— Une contrainte de compression, maximale sur la génératrice inférieure :

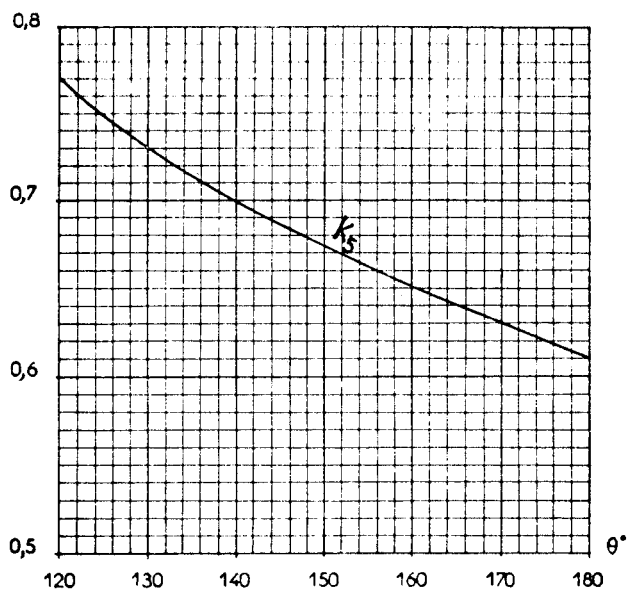
$$f_s = \frac{-K_s Q}{e(b+x)}$$

où :

$$K_s = \frac{1 + \cos \alpha}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}$$

(voir définition de α , fig. NC 713 2-332)

Les valeurs de K_s sont données en fonction de θ par l'abaque VII.



NC 713 2 - Abaque VII

— Une contrainte de compression et flexion, qui est maximale aux points G et H (fig. NC 713 2-4 a) et dont la valeur est calculée en supposant que la longueur de virole résistant à la flexion est la plus petite des deux valeurs $4R$ ou $L/2$ et que la moitié seulement de la réaction d'appui est transmise au support par l'intermédiaire de la contrainte de compression.

Donc :

Si $L > 8R$

$$f_t = \frac{-Q}{4e(b+x)} - \frac{3K_t Q}{2e^2}$$

Si $L < 8R$

$$f_t = \frac{-Q}{4e(b+x)} - \frac{12K_t QR}{Le^2}$$

où :

$$K_t = K_s \text{ si } \frac{A}{R} > 1$$

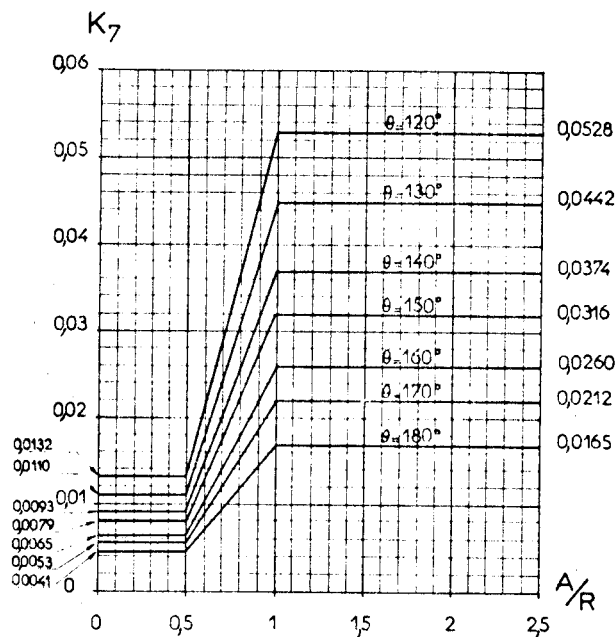
et :

$$K_t = \frac{K_s}{4} \text{ si } \frac{A}{R} < 0,5 \text{ (virole raidie par les fonds)}$$

avec :

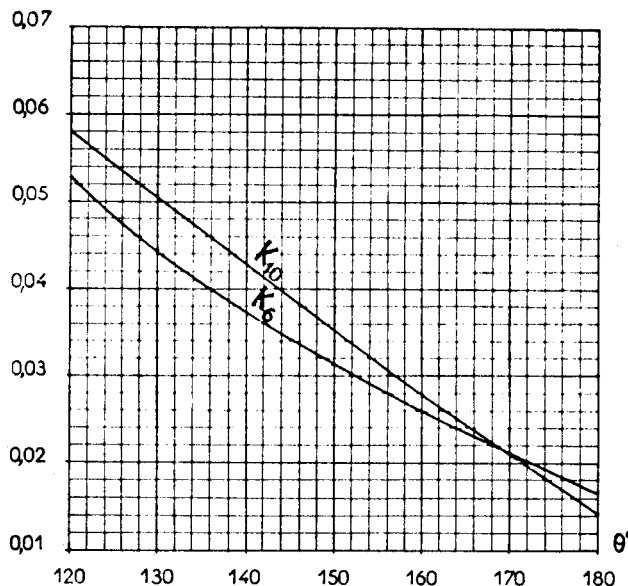
$$K_s = \frac{\frac{3}{4} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos \beta - \frac{5}{4} \frac{\sin \beta}{\beta} \cos^2 \beta + \frac{\cos^2 \beta}{2} - \frac{1}{4} \frac{\sin \beta}{\beta} + \frac{\cos \beta}{4} - \beta \sin \beta \left[\left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{\sin 2\beta}{\beta} \right]}{2\pi \left[\left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{\sin 2\beta}{\beta} \right]}$$

L'abaque VIII donne les valeurs de K_t en fonction de θ et du rapport A/R (avec interpolation pour les valeurs de A/R comprises entre 0,5 et 1).



NC 713 2 - Abaque VIII

L'abaque IX donne les valeurs de K_t en fonction de θ (voir au paragr. NC 713 2-421 l'utilisation du coefficient K_s).



NC 713 2 - Abaque IX

La valeur de la contrainte f_s peut être réduite par l'adjonction d'une plaque-renfort soudée sur la virole au droit des supports, comme illustré figure NC 713 2-41.

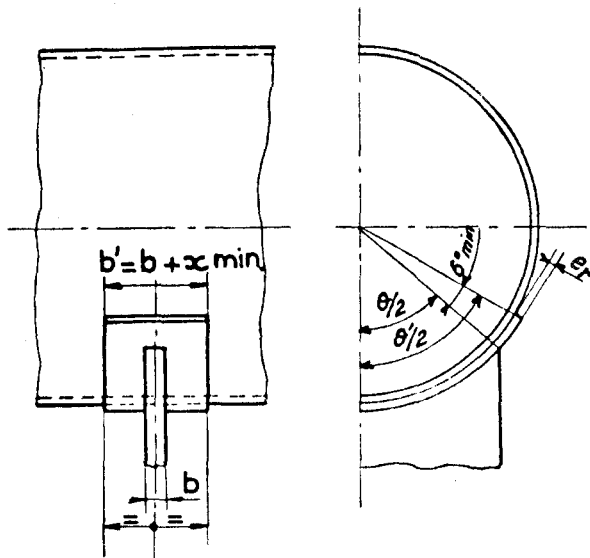


Fig. NC 713 2-41

La valeur de cette contrainte devient alors :

a) Au droit de la plaque-renfort :

$$f_s = \frac{-K_s Q}{(e + e_r)(b + x)}$$

b) De part et d'autre de la plaque-renfort :

$$f'_s = \frac{-K'_s Q}{e(b' + x)}$$

b' étant la largeur réelle de la plaque de renforcement, et K'_s la valeur du coefficient K_s lue sur l'abaque VII en remplaçant θ par θ' .

De même, la présence d'une plaque-renfort réduit l'intensité de la contrainte f_r dont la valeur devient :

a) Au droit de la plaque-renfort :

Si $L > 8R$

$$f_r = \frac{-Q}{4(e + e_r)(b + x)} - \frac{3K_s Q}{2(e + e_r)^2}$$

Si $L < 8R$

$$f_r = \frac{-Q}{4(e + e_r)(b + x)} - \frac{12K_s QR}{L(e + e_r)^2}$$

b) De part et d'autre de la plaque-renfort :

Si $L > 8R$

$$f'_r = \frac{-Q}{4e(b' + x)} - \frac{3K'_s Q}{2e^2}$$

Si $L < 8R$

$$f'_r = \frac{-Q}{4e(b' + x)} - \frac{12K'_s QR}{Le^2}$$

K'_s étant la valeur du coefficient K_s lue sur l'abaque VIII en remplaçant θ par θ' .

Si la virole n'est pas raidie par les fonds, c'est-à-dire si $A > \frac{R}{2}$, il peut être, dans certains cas,

impossible de réduire suffisamment l'intensité de la contrainte f_r par l'adjonction d'une plaque-renfort d'épaisseur raisonnable : il y a alors lieu de prévoir des anneaux de renforcement.

Remarque. — Dans le cas où la plaque-renfort est constituée d'un métal dont la contrainte nominale de calcul est inférieure à celle du métal de la virole, il est nécessaire de corriger, dans le calcul des contraintes f'_s et f'_r , l'épaisseur e_r dans le rapport de ces contraintes nominales de calcul.

NC 713 2-42

RÉSERVOIR AVEC ANNEAUX RAIDISSEURS

Deux cas sont à distinguer suivant que la virole est raidie par un anneau-renfort dans le plan de chaque support, ou par des anneaux-renforts situés de part et d'autre de chaque support.

NC 713 2-421 - Virole raidie par anneaux-renforts dans le plan des supports

La répartition du moment de flexion transversale est alors la même que dans le cas d'une virole non raidie (voir fig. NC 713 2-4 a). La virole ne supporte directement que la contrainte de compression :

$$f_s = \frac{-K_s Q}{e(b + x)}$$

qui peut être réduite par l'adjonction d'une plaque-renfort, comme indiqué au paragraphe NC 713 2-41.

Les contraintes de compression et flexion, maximales aux points G et H (fig. NC 713 2-4 a), sont supportées à la fois par l'anneau raidisseur et la virole, et ont pour valeur :

a) Pour un anneau-renfort intérieur (fig. NC 713 2-421 a)

Dans la virole :

$$f_s = -\frac{K_s Q}{a} - \frac{K_s QRc_1}{I}$$

Dans l'anneau-renfort :

$$f_s = -\frac{K_s Q}{a} + \frac{K_s QRc_2}{I}$$

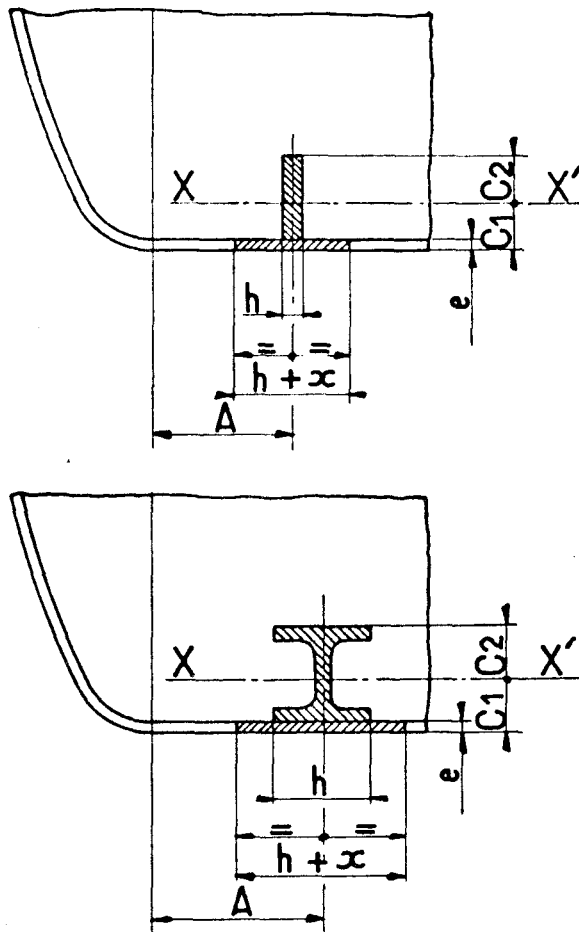


Fig. NC 713 2-421 a

où :

a = section de métal participant à la résistance (section hachurée de la figure NC 713 2-421 a);
 I = moment d'inertie de cette section par rapport à son axe neutre XX' parallèle à l'axe de la virole.

c_1, c_2 = distances des fibres extrêmes de cette section à l'axe neutre XX' .

$$K_s = \frac{\cos \beta \left[1 - \frac{\cos 2\beta}{4} + \frac{9}{4} \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \beta - 3 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \right]}{2\pi \left[\left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{\sin 2\beta}{\beta} \right]} + \frac{\beta \sin \beta}{2\pi}$$

(les valeurs de K_s sont données en fonction de θ par l'abaque X) :

K_s = coefficient défini au paragraphe NC 713 2-41, dont les valeurs sont données par l'abaque IX.

b) Pour un anneau-renfort extérieur (fig. NC 713 2-421 b)

Dans la virole :

$$f_s = -\frac{K_s Q}{a} + \frac{K_s Q R c_1}{I}$$

Dans l'anneau-renfort :

$$f_s = -\frac{K_s Q}{a} - \frac{K_s Q R c_2}{I}$$

les définitions de a, I, c_1, c_2, K_s et K_s étant les mêmes qu'au paragraphe précédent.

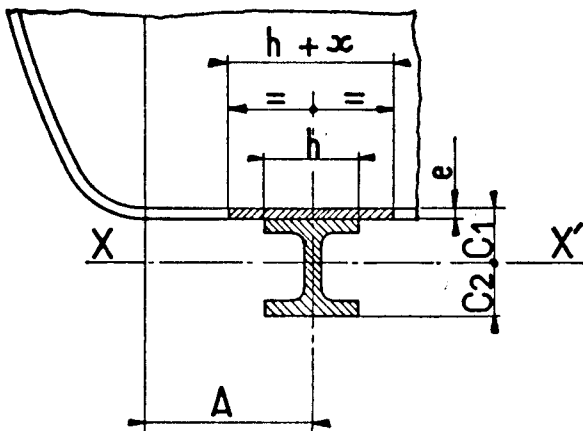
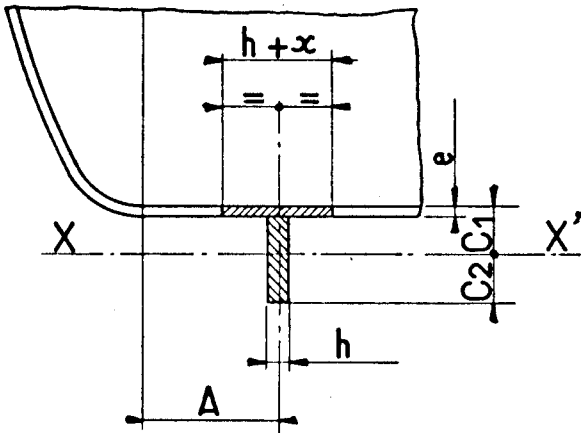
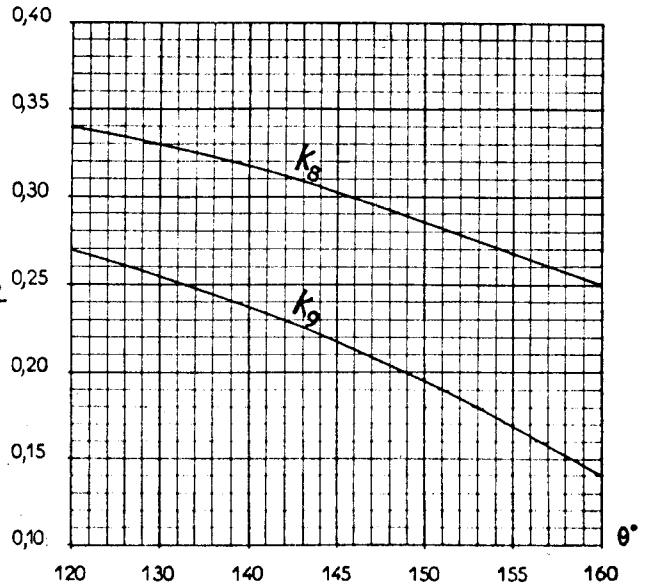


Fig. NC 713 2-421 a



NC 713 2 - Abaque X

NC 713 2-422 - Virole raidie par anneaux-renforts situés de part et d'autre de chaque support

Les figures NC 713 2-422 a, b et c illustrent les dispositions possibles pour ces anneaux.

La distance l entre ces anneaux doit être inférieure à R ; si elle est inférieure à x , l'ensemble des deux anneaux doit être considéré comme un anneau unique et le problème traité suivant les règles du paragraphe NC 713 2-421 ci-dessus. La figure NC 713 2-422 a illustre un exemple de ce cas.

La suite du paragraphe suppose donc que :
 $x < l < R$

Comme dans les cas précédents, la virole supporte sur sa génératrice inférieure la contrainte de compression :

$$f_s = -\frac{K_s Q}{e(b+x)}$$

qui peut être réduite par l'adjonction d'une plaque-renfort (paragr. NC 713 2-41).

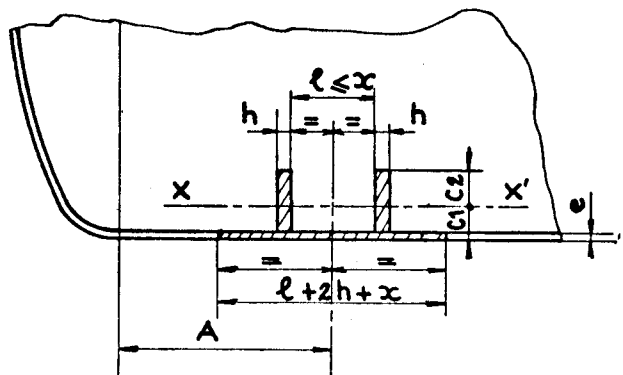


Fig. NC 713 2-422 a

Exemple de disposition à considérer comme un anneau unique ($l \leq x$)

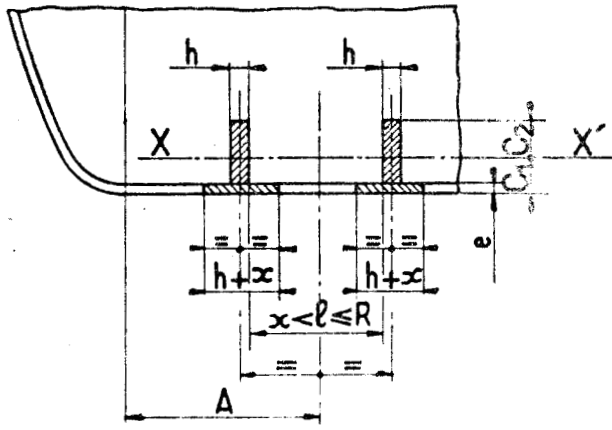


Fig. NC 713 2-422 b

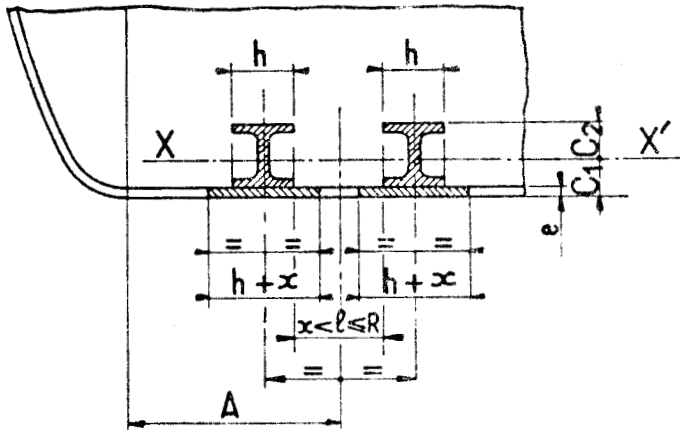


Fig. NC 713 2-422 c

Les contraintes de compression et flexion supportées par l'anneau raidisseur et la virole sont maximales aux points I et J (fig. NC 713 2-4 b) définis par l'angle ρ dont la valeur est donnée par l'équation :

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\rho}{\frac{1}{2} + (\pi - \beta) \cotg \beta}$$

soit :

θ	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
ρ	93°40'	91°08'	87°50'	84°10'	79°40'	74°	66°56'

La valeur de ces contraintes est :

a) Pour des anneaux-renforts intérieurs (fig. NC 713 2-421 b)

Dans la virole :

$$f_{10} = -\frac{K_0 Q}{a} + \frac{K_{10} Q R c_1}{I}$$

Dans les anneaux-renforts :

$$f_{11} = -\frac{K_0 Q}{a} - \frac{K_{10} Q R c_2}{I}$$

où :

a = section totale du métal participant à la résistance (section hachurée de la figure NC 713 2-422 b) ;

I = moment d'inertie de cette section par rapport à l'axe neutre XX' ;

c_1, c_2 = distances des fibres extrêmes de cette section à l'axe neutre XX' .

$$K_0 = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{2} + (\pi - \beta) \cotg \beta \right\} \cos \rho + \rho \sin \rho$$

$$K_{10} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \rho \sin \rho + \cos \rho \left[\frac{3}{2} + (\pi - \beta) \cotg \beta \right] - \frac{\pi - \beta}{\sin \beta} \right\}$$

Les valeurs de K_0 et K_{10} sont respectivement données en fonction de θ par les abaques X et IX.

b) Pour des anneaux-renforts extérieurs (fig. NC 713 2-422 c)

Dans la virole :

$$f_{10} = -\frac{K_0 Q}{a} - \frac{K_{10} Q R c_1}{I}$$

Dans les anneaux-renforts :

$$f_{11} = -\frac{K_0 Q}{a} + \frac{K_{10} Q R c_2}{I}$$

les définitions de a, I, c_1, c_2, K_0 et K_{10} étant les mêmes qu'au paragraphe précédent.

NC 713 2-43

**VALEURS ADMISSIBLES
POUR LES CONTRAINTES DUES
A LA FLEXION TRANSVERSALE**

La contrainte de compression f_c , f'_c ou f''_c ne doit pas dépasser la valeur de la contrainte nominale de calcul f pour le métal de la virole.

La contrainte de compression et flexion dans la virole sans anneau-renfort (f , f' , ou f'') ne doit pas dépasser la valeur de la contrainte nominale de calcul f .

La contrainte de compression et flexion dans la virole munie d'anneaux-renforts (f_c , f'_c , f_{1c} ou f'_{1c}) ne doit pas dépasser la valeur :

$$\text{Pour un réservoir sous pression intérieure } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ si c'est une compression} \\ f - \frac{PR}{e} \text{ si c'est une traction} \end{array} \right. \quad (P > 0)$$

$$\text{Pour un réservoir sous pression extérieure } \left\{ \begin{array}{l} f + \frac{PR}{e} \text{ si c'est une compression} \\ f \text{ si c'est une traction} \end{array} \right. \quad (P < 0)$$

La contrainte de compression et flexion dans les anneaux-renforts (f_c , f'_c , f_{1c} ou f'_{1c}) ne doit pas dépasser la valeur de la contrainte nominale de calcul f_r pour le métal de ces anneaux.

NC 713 2-5 - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 - L. P. ZICK - « Stresses in large horizontal cylindrical pressure vessels on two saddle supports » - *Welding Journal - Research supplement* - September 1951, pages 435 S à 445 S.
 - 2 - L. E. BROWNELL et E. H. YOUNG - « Process equipment design », éd. 1959, ch. 11, pages 203 à 218.
 - 3 - BRITISH STANDARD 1515 - Part 1, 1965, paragraphe 3.11.3, page 42, et paragraphe A 4.3, pages 103 à 113.
-

ANNEXE II

Influence de la pression hydrostatique latérale.

I. Introduction :

La théorie des arcs utilisée par ZICK (1951), pour étudier la flexion circonférentielle est incomplète dans la mesure où il néglige deux effets importants :

a) La contribution des efforts normal et tranchant dans les formules de Bresse, contribution en générale non négligeable (modification des résultats de l'ordre de 20 %).

b) La contribution de la pression hydrostatique latérale, dont l'effet est très important si nous supposons comme ZICK que la largeur de l'arc intéressé par la flexion circonférentielle est égale à $4R$ ou $\frac{L}{2}$.

Dans le présent paragraphe nous analysons la contribution (b), et nous renvoyons le lecteur à des ouvrages spécialisés pour l'étude de la contribution présentée en (a).

(TIMOSHENKO, COURBON etc...).

II. Formulation du problème :

L'inventaire des forces agissantes sur une bande de la virole de largeur B fait apparaître les forces suivantes : Figure (2.1).

(1) - Contraintes de cisaillement, qui agissent sur les bords latéraux de cette bande, et dont la résultante au dessus du support vaut :

$$\tau = \frac{Q \sin \psi}{\pi R e}$$

(2) - La pression hydrostatique agissante sur cette bande admet comme résultante au dessus du support la force suivante :

$$P = \rho g (1 - \cos \psi) R^2 B$$

Le Torseur des forces de gauche en un point $M(R, \phi)$ de l'arc au dessus du support va être réduit à :

$$- \text{Effort Normale, } N_x = - P_A + B \rho g R^2 \left[1 - \cos \phi - \frac{\sin^2 \phi}{2} \right] + \frac{Q}{\pi} \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]$$

$$- \text{Effort tranchant, } N_y = \rho g B R^2 \left(\sin \phi - \frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4} \right) -$$

$$- \frac{Q}{2\pi} \left[\phi - \frac{\sin 2\phi}{2} \right]$$

- Moment fléchissant :

$$M_{\phi} = M_A - P_A R (1 - \cos \phi) + \left(\frac{\rho g R^3 B}{2} + \frac{Q R}{2 \pi} \right) [2 - 2 \cos \phi - \phi \sin \phi]$$

Autrement dit le moment fléchissant va être égale à celui proposé par ZICK à condition de remplacer $\frac{Q R}{2 \pi}$ par le terme suivant :

$$\frac{\rho g R^3 B}{2} + \frac{Q R}{2 \pi}$$

L'importance du terme $\frac{\rho g R^3 B}{2}$ va dépendre surtout de la largeur B de la bande intéressée par la flexion circonférentielle, en particulier nous pouvons envisager les possibilités suivantes :

$$1) B = b + 1,56 \sqrt{Re} \quad \text{ou} \quad b.$$

Un calcul simple montre que nous avons une contribution supplémentaire de l'ordre de $\frac{2b + 3,3 \sqrt{Re}}{L}$ des résultats de ZICK.

$$2) B = 4R \quad \text{ou} \quad \frac{L}{2}$$

Le calcul précédent n'est pas directement applicable car la section du support n'est plus la section médiane de la bande B , et il faut ajouter un moment fléchissant longitudinal et latéral, dans ces conditions nous pouvons constater facilement que les résultats de ZICK sont modifiés (dans le rapport $\frac{8R}{L}$ ou $\frac{L}{L}$) c'est à dire de l'ordre de 100 %).

Conclusion.

Nous pouvons ainsi constater que la théorie des arcs ne peut pas être appliquée à une bande dont la largeur B dépasse les autres dimensions de l'arc, et par conséquent la largeur hypothétique de ZICK ($4R$ ou $\frac{L}{2}$) n'a aucune signification physique.

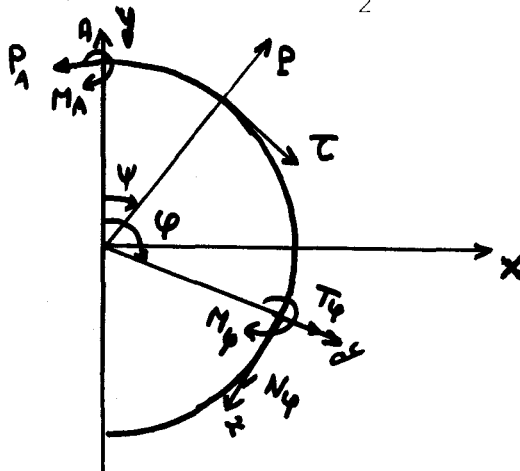


Figure (2.1)