

N° d'ordre 446

THÈSES
présentées à
L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I
pour obtenir
le grade de Docteur ès Sciences
Spécialité Mathématiques
Mention Mécanique céleste

par

Luc DURIEZ



PREMIÈRE THÈSE

APPROCHE D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE PLANÉTAIRE
EN VARIABLES ELLIPTIQUES HÉLIOCENTRIQUES

Deuxième Thèse

L'ASTROMÉTRIE SPATIALE

Thèses soutenues le 6 avril 1979, devant la Commission d'Examen :

MM. Michel PARREAU, *Président*
Pierre BACCHUS
Jean CHAPRONT *Rapporteurs*
Jacques HENRARD
Jean KOVALEVSKY, *Examinateur*
V.A. BRUMBERG, *Invité*

DOYENS HONORAIRES De l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R.DEFRETIN, H.LEFEBVRE, M.PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

MM. ARNOULT, Mme BEAUJEU, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P.GERMAIN, GLACET, GONTIER, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SAVARO, SCHILTZ, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R.DEFRETIN, M.PARREAU, J.LOMBARD.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. M.MIGEON.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des Entreprises
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique
M. DERCOURT Jean	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOURET René	Physique du Solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique

M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M. LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M. LEBRUN André	Electronique
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. SALMER Georges	Electronique
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M. WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. BKUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. HERMAN Maurice	Physique Spatiale
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LENTACKER Firmin	Géographie
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
Mle MARQUET Simone	Probabilités
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MIGEON Michel	Chimie Physique
M. MONTEL Marc	Physique du Solide
M. RACZY Ladislav	Electronique
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. SLIWA Henri	Chimie Organique
M. WATERLOT Michel	Géologie Générale

MAITRES DE CONFERENCES (et Chargés d'Enseignement)

M.	AL FAKIR Sabah	Algèbre
M.	ANTOINE Philippe	Analyse
M.	BART André	Riologie Animale
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BOBE Bernard	Sciences Economiques
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie
M.	CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M.	COQUERY Jean-Marie	Psychophysiologie
M.	COURBIS Bernard	Sciences Economiques
M.	COUTURIER Daniel	Chimie Organique
M.	DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M.	DEGAUQUE Pierre	Electronique
M.	DELORME Pierre	Physiologie Animale
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M.	DHAINAUT André	Biologie Animale
M.	DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUBRULLE Alain	Physique
M.	DUEE Gérard	Géologie
M.	DYMENT Arthur	Mécanique
M.	ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
M.	FLAMME Jean-Marie	Technologie de Construction
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	GAMBLIN André	Géographie
M.	GOBLOT Rémi	Algèbre
M.	GREVET Patrick	Sciences Economiques
M.	JACOB Gérard	Informatique
M.	KREMBEL Jean	Biochimie
M.	LAURENT François	Automatique
Mle	LEGRAND Denise	Algèbre
Mle	LEGRAND Solange	Algèbre
M.	LEVASSEUR Michel	Sciences Economiques
M.	LHENAFF René	Géographie
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M.	LOSFELD Joseph	Informatique
M.	MACKE Bruno	Physique
M.	MIGNOT Fulbert	Analyse Numérique
M.	N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M.	PARSY Fernand	Mécanique
Mle	PAUPARDIN Colette	Biologie Physiologie Végétales
M.	PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M.	PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M.	PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M.	POVY Lucien	Automatique
M.	RICHARD Alain	Biologie
M.	RIETSCH François	Chimie
M.	ROGALSKI Marc	Analyse
M.	ROY Jean-Claude	Psychophysiologie
M.	SALAMA Pierre	Sciences Economiques
Mme	SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M.	SIMON Michel	Sociologie
M.	SOMME Jean	Géographie

Mle SPIK Geneviève
M. STERBOUL François
M. TAILLIEZ Roger
M. TOULOTTE Jean-Marc
M. TREANTON Jean-René
M. VANDORPE Bernard
M. WALLART Francis
Mme ZINN-JUSTIN Nicole

Biochimie
Informatique
Biologie
Automatique
Sociologie
Chimie Minérale
Chimie
Algèbre

Je tiens à exprimer tous mes remerciements à Monsieur PARREAU, Professeur à l'Université de Lille I, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Après m'avoir initié à la recherche, Monsieur BACCHUS, Professeur à l'Université de Lille I, m'a donné toutes facilités pour réaliser ce travail et m'a constamment soutenu de ses conseils. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je suis redevable à Monsieur CHAPRONT, Maître de Recherches au CNRS, de m'avoir introduit dans le domaine des théories planétaires. Après m'avoir proposé ce travail, il en a suivi de près l'évolution et je lui dois bien des encouragements. Qu'il soit assuré de toute ma gratitude.

Cette thèse constitue un prolongement des travaux de Monsieur BRUMBERG, de l'Institut d'Astronomie Théorique de Léninegrad. Je suis particulièrement touché de l'intérêt qu'il a maintes fois manifesté envers mon travail et je le remercie très sincèrement d'avoir accepté de le juger.

J'exprime encore mes plus vifs remerciements à Monsieur HENRARD, Professeur à l'Université de Namur, pour s'être intéressé à mon travail et avoir bien voulu participer à ce jury.

Je remercie non moins vivement Monsieur KOVALEVSKY, Directeur du Centre d'Etudes et de Recherches Géodynamiques et Astronomiques, d'avoir accepté si volontiers de faire partie du jury.

Je voudrais également remercier Messieurs SIMON et BRETAGNON, du Bureau des Longitudes, qui ont permis de fructueuses confrontations avec les résultats de leurs propres recherches.

Enfin, je n'aurais garde d'oublier Madame BÉRAT qui s'est attachée avec soin et compétence à la présentation de cette thèse, ainsi que tous ceux sans lesquels sa réalisation pratique n'aurait pas été possible.

TABLE DES MATIERES

=====

	Pages
<u>Introduction.</u>	I
<u>Chapitre I</u> - EQUATIONS DU MOUVEMENT DES PLANETES.	1
1. Eléments osculateurs des orbites planétaires.	1
2. Formulation des équations.	6
3. Développement de la fonction perturbatrice	12
- terminologie utilisée à propos de ces développements	14
- quelques propriétés du développement de la fonction perturbatrice	16
4. Développement des seconds membres des équations.	19
<u>Chapitre II</u> - INTEGRATION DES EQUATIONS.	22
1. Principes de la méthode.	23
2. Séparation des termes périodiques	25
- ordre 1	31
- ordre 2	33
- ordres supérieurs	36
3. Résolution du système autonome.	38
- théorème de Poisson	38
- forme du système autonome	40
- algorithme de résolution du système autonome	42
- intégration des équations $\frac{dz_{oi}}{dt}$ et $\frac{d\zeta_{oi}}{dt}$	46
4. Remarques sur la détermination des constantes d'intégration.	55
<u>Chapitre III</u> - MISE EN ŒUVRE DE LA THEORIE GENERALE.	61
1. Problèmes relatifs à la construction des seconds membres des équations	61
- Critères de sélection des termes dans une théorie limitée à l'ordre 1.	64
- Critères de sélection à adopter à l'ordre 1 pour construire l'ordre 2.	67

- Construction des seconds membres des équations	69
2. Manipulation des séries formelles sur ordinateur	71
- Principes utilisés pour structurer les développements	72
- Structure des développements : modules	74
- Langage de manipulation des modules	84
<u>Chapitre IV - RESULTATS.</u>	89
1. Développements d'inégalités périodiques	90
- Développements relatifs à un même monôme	90
- Développements relatifs à une même inégalité périodique	98
2. Développement et solution du système autonome	105
- Détermination des constantes p_{oi}	106
- Détermination des solutions z_{oi} et ζ_{oi}	109
. 1ère approximation : solution de Laplace-Lagrange	109
. 2ème et 3ème approximations : apport des termes non linéaires	118
. Comparaison avec les solutions de Hill, de Brouwer-Van Woerkom, de Bretagnon, de Brumberg ; comparaison avec l'intégration numérique de Cohen et al.	150
- Report de ces solutions dans les équations dq_{oi}/dt ; détermination des solutions q_{oi} .	163
3. Report de la solution du système autonome dans les inégalités périodiques.	172
<u>Conclusion.</u>	181
Annexe 1 - Développement de la fonction perturbatrice.	184
Annexe 2 - Construction du développement de la fonction perturbatrice et des seconds membres des équations.	194
Annexe 3 - Théorème de Poisson en variables elliptiques héliocentriques.	218
Annexe 4 - Correspondances entre les éléments osculateurs héliocentriques classiques et les éléments osculateurs héliocentriques d'ordre 0.	236
<u>Bibliographie.</u>	241

TABLE DES ILLUSTRATIONS

=====

	Pages
Tableau 1 : Nombre de termes du développement de la fonction perturbatrice, degré par degré.	17
2 : Constantes utilisées dans la théorie générale.	57
3 : Nombre de termes du développement des seconds membres des équations, degré par degré.	63
4 : Nombre de termes sélectionnés à l'ordre 1 dans chaque équation, en vue de construire l'ordre 2.	70
5 a,b,c : Solution intermédiaire d'ordres 1 et 2 dans Δp , Δq et Δz .	92 et 94
6 : Développements de l'inégalité $(N_5 - N_6)$ dans Δp_5 et Δq_5 aux ordres 1 et 2 (degrés 0 et 2).	100
7 a,b,c : Développements de l'inégalité $(2N_5 - 5N_6)$ dans Δp_5 , Δq_5 , Δp_6 et Δq_6 , aux ordres 1 et 2 (degré 3).	101 et 104
8 : Détermination des constantes p_{oi} .	107
9 a,b : Système de Laplace-Lagrange aux ordres 1 et 2.	110
10 : Valeurs propres du système de Laplace-Lagrange.	113
11 : Solution de Laplace-Lagrange (z_{oi} et ζ_{oi} , $i = 5$ à 8).	117
12 : Termes de degré 3 dans les équations $\frac{dz_{o5}}{dt}$ et $\frac{dz_{o6}}{dt}$ aux ordres 1 et 2.	119
13 : Termes résonnants de degrés 3 et 5 dans les équations $\varepsilon \frac{dy_{li}}{dt}$ ($i = 1$ à 8).	126
14 a,b : Modifications des valeurs propres par les termes non linéaires du système autonome.	129 et 130
15 a,b : Contributions de la grande inégalité $(2N_5 - 5N_6)$ et de l'inégalité $(N_5 - N_6)$ aux modifications des valeurs propres à l'ordre 2.	132 et 134
16 : Valeurs λ_{oi} adoptées dans la solution du système autonome, comparées à celles de Hill, de Brouwer-Van Woerkom et de Bretagnon.	136
17.1 à 17.8 : Solutions z_{oi} et ζ_{oi} ($i = 5$ à 8).	139 à 146
18 a : Comparaison de la solution z_{o6} avec celle analogue obtenue par Hill, par Brouwer-Van Woerkom et par Bretagnon.	152

18 b :	Eléments moyens des grosses planètes obtenus par Bretagnon (1978).	151
18 c :	Ecart au bout de 1000 ans entre ces éléments moyens et les solutions z_{oi} et ζ_{oi} .	154
18 d :	Ecart au bout de 1000 ans entre ces éléments moyens et les solutions de Brouwer-Van Woerkom, de Bretagnon (1974) et de Brumberg.	154
19 a,b,c :	Solutions q_{oi} ($i = 5$ à 8).	165 à 168
20 a,b :	Développement à très longues périodes de l'amplitude de la grande inégalité ($2N_5 - 5N_6$) dans Δq_5 et Δq_6 .	174 et 177
Figures 1 et 2 :	Déplacements des affixes représentant les solutions z_{o5} et z_{o7} sur 500 000 ans, comparaison avec l'intégration numérique de Cohen et avec les solutions de Brouwer et de Bretagnon :	159 et 160
Figure 3 :	Déplacements du pôle moyen de l'orbite de Jupiter, de Saturne et d'Uranus ; comparaison à l'intégration numérique de Cohen.	161
Figure 4 :	Comparaison, au voisinage de l'instant initial, de la solution z_{o5} avec la solution à variations séculaires de Bretagnon.	162
Figure 5 :	Variations à très longues périodes des solutions q_{o5} , q_{o6} , q_{o7} et q_{o8} .	169
Figure 6 :	Variations à très longues périodes de l'amplitude de la grande inégalité, dans la longitude moyenne de Jupiter.	179

INTRODUCTION

=====

L'étude du mouvement des planètes autour du Soleil est basée sur la représentation de ces mouvements dans le cadre d'un modèle mathématique et mécanique qui schématise le système solaire et les forces qui le régissent. Le modèle encore admis actuellement est celui dans lequel le Soleil et N planètes sont assimilées à $N+1$ masses ponctuelles s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation universelle.

Les équations du mouvement relatif de N corps ne sont pas intégrables de façon rigoureuse, mais ici, le problème est simplifié parce que la masse du Soleil étant prépondérante sur celles des planètes, on peut considérer les attractions des planètes entre elles comme des perturbations de l'attraction principale due au Soleil. En première approximation, les mouvements peuvent ainsi être considérés comme képlériens : chaque planète décrit une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers, en suivant la loi des aires ; de plus le rapport entre le carré de la période et le cube du demi-grand axe est une constante, sensiblement la même pour toutes les planètes. Enfin, pour les grosses planètes qui nous intéressent plus particulièrement ici, l'excentricité de leurs orbites est petite, et l'inclinaison mutuelle de leurs différents plans est faible.

Dans toutes les théories planétaires, on utilise ensuite une méthode de perturbation pour rechercher une solution du problème des N corps par approximations successives ordonnées suivant les puissances des petits paramètres que sont les masses planétaires par rapport à celle du Soleil ; l'approximation dont on part est généralement la solution képlérienne du problème des 2 corps (ordre 0). On peut y mettre à profit la petitesse des excentricités et des inclinaisons pour développer la solution suivant les puissances des variables

représentant ces éléments.

Les théories planétaires diffèrent les unes des autres par les variables utilisées pour représenter les mouvements, par la méthode d'intégration des équations, qui influe sur la forme de la solution, et par l'introduction de la valeur numérique des constantes à un état plus ou moins avancé des calculs.

On distingue essentiellement deux types de théories planétaires. Les théories à variations séculaires (ou classiques), qui furent les premières développées, et les théories générales dont la mise en oeuvre pratique est plus récente.

Les théories à variations séculaires sont essentiellement construites pour l'établissement des éphémérides ; de ce fait, elles cherchent avant tout à représenter le mieux possible les mouvements planétaires dans un intervalle de temps limité, centré sur l'époque actuelle (quelques millénaires par exemple).

Celle de Le Verrier fut la première à donner une solution pour l'ensemble des planètes (1858-1876). Utilisant la méthode de variation des constantes dues à Lagrange, Le Verrier représente le mouvement de chaque planète par l'intermédiaire des éléments du mouvement képlérien osculateur héliocentrique qu'on aurait à chaque instant si, à partir de cet instant, il n'y avait plus de perturbation ; la théorie représente les variations de ces éléments au cours du temps sous l'effet des perturbations d'ordres successifs. Ces variations sont représentées par deux sortes de termes : des polynômes du temps t (termes séculaires, encore appelés éléments moyens), et des produits d'un polynôme de t par une fonction périodique de t (termes mixtes) ; les polynômes en question sont des fonctions très lentement variables du temps, à variations séculaires. Le degré de ces polynômes augmente comme l'ordre des perturbations considérées : en particulier, si le polynôme est de degré 0, les termes mixtes

sont des termes périodiques (cas de l'ordre 1 notamment). La forme polynomiale de ces termes résulte de la méthode d'intégration des équations : la solution est recherchée sous forme d'un développement au voisinage des valeurs des éléments d'orbite à un instant initial donné, et ce développement est limité aux premières approximations.

Le Verrier a développé la fonction perturbatrice sous une forme complètement analytique jusqu'au degré 7 par rapport aux excentricités et aux inclinaisons ; le nombre de termes est considérable, mais puisqu'il développe au voisinage de valeurs numériques données (ces constantes sont en fait ajustées progressivement aux observations), il peut limiter le nombre de ces termes à ceux dont la valeur numérique est jugée non négligeable. Il a tenu compte des perturbations d'ordre 1 et 2, et parfois de celles d'ordre 3. C'est le caractère analytique des développements qui a permis à Le Verrier d'ajuster les constantes aux observations et d'améliorer la connaissance qu'on avait jusque là de la masse des planètes.

Une théorie analogue fut construite par Newcomb (1883), mais les inconnues sont les coordonnées héliocentriques et non les éléments osculateurs. La nature des développements considérés par Newcomb, l'amène à introduire numériquement dans ceux-ci les valeurs des excentricités et des inclinaisons ; au contraire de Le Verrier qui partait de bases médiocres, Newcomb disposait des résultats de ce dernier et il put réaliser une théorie globale lui permettant de proposer un ensemble quasi-cohérent de constantes astronomiques fondamentales. Hansen et Gylden proposèrent également des méthodes basées sur les coordonnées héliocentriques, mais plus directement applicables aux petites planètes.

Depuis lors, ces théories furent plusieurs fois reprises pour tenir compte de perturbations négligées par leurs auteurs. C'est ainsi par exemple que Gaillot approfondit les théories de Jupiter et de Saturne issues de Le Verrier, en abordant les perturbations d'ordre 3 pour ces planètes et en améliorant la

masse de Saturne (1904 à 1913). Actuellement, à la suite de Chapront, Simon et Bretagnon reprennent la théorie de Le Verrier avec des constantes meilleures, en l'étendant à l'ordre 3 sous la même forme que la solution de Le Verrier (Simon, Bretagnon 1975 et 1978), et à l'ordre 6 (pour les quatre grosses planètes) sous forme de développements semi-numériques (*) construits par une méthode itérative (Bretagnon 1978). Par ailleurs, Clemence, à la suite de Ross (1916) a repris la théorie de Newcomb relative à Mars, qu'il a développée à l'ordre 3 (1949, 1961). Notons que les travaux de Clemence d'abord, puis ceux de Simon et de Bretagnon utilisent les possibilités de calcul offertes par les ordinateurs et dont ne disposaient évidemment pas leurs prédécesseurs, rendant leurs travaux encore plus méritoires.

La forme même des solutions obtenues dans les théories à variations séculaires montre que les variables qu'elles représentent ne sont pas bornées dans le temps. Comme on l'a dit, il s'agit là d'une particularité due à la méthode d'intégration des termes séculaires : celle-ci donne le développement en puissances de t de termes à très longues périodes qu'on obtiendrait par d'autres méthodes qu'on verra à propos des théories générales. On peut cependant donner une analogie sur un exemple simple : l'équation $\frac{dz}{dt} = \sqrt{-1} \varepsilon az$ où ε est supposé petit, admet, au voisinage de $z = z_0$, la solution à variations séculaires suivante, obtenue par approximations successives suivant les puissances de ε :

$$z = z_0 + \sqrt{-1} \varepsilon z_0 a t - \varepsilon^2 z_0 a^2 \frac{t^2}{2} - \dots$$

Celle-ci n'est en fait que le développement limité, au voisinage de $t = 0$, de la solution générale bornée : $z = z_0 \exp \sqrt{-1} \varepsilon a t$, de période très longue puisque de l'ordre de $1/\varepsilon$.

(*) Seules les longitudes moyennes sont conservées sous forme littérale.

Il s'ensuit que la durée de validité des théories à variations séculaires est limitée. D'après les résultats de Bretagnon (1978), entre la solution obtenue à l'ordre 6 et l'intégration numérique des mêmes équations avec les mêmes constantes initiales, la différence reste inférieure à $0''{,}1$ sur 1000 ans. Cette précision interne n'est limitée que par les termes polynomiaux constituant les éléments moyens, et par ceux contenus dans certains termes mixtes de grande amplitude associés à des longues périodes ; la précision des termes à courte période est bien meilleure ($0''{,}001$). Au-delà de 1000 ans, la précision des éléments moyens et des termes mixtes se dégrade rapidement car le degré des polynômes (donc l'ordre des perturbations) devient insuffisant ; cependant, il serait illusoire de vouloir étendre toujours davantage la durée de validité des théories à variations séculaires (avec la même précision), en augmentant, avec l'ordre des développements, le degré des polynômes de t , car manifestement, on cherche à représenter par des polynômes des fonctions qui n'ont pas le caractère polynomial : l'extension des théories à variations séculaires passe nécessairement par la construction de théories générales qui permettent d'exprimer la solution autrement que par l'intermédiaire de polynômes.

C'est ce but que nous cherchons à atteindre dans ce travail, en proposant une méthode (chapitres I et II) et son application pratique (chapitres III et IV).

Au contraire des théories à variations séculaires, les théories générales s'efforcent essentiellement à donner une solution sous la forme la plus générale possible (donc complètement analytique), dont la durée de validité soit la plus grande possible en évitant que le temps n'apparaisse ailleurs que dans des fonctions trigonométriques. Elles s'appuient pour cela sur les résultats théoriques établissant l'existence de solutions quasi-périodiques du temps pour les problèmes de type planétaire (Jefferys et Moser 1966,

Krasinsky 1969) ; on connaissait déjà ce type de solution pour le problème des trois corps de type lunaire (méthode de Hill).

En contre partie de la longue durée de validité, la précision d'ensemble des théories générales est actuellement moins bonne que celle des théories à variations séculaires, essentiellement pour des raisons de difficulté de mise en oeuvre pratique qui limitent l'extension qu'on devrait donner à ce type de théorie. Cependant, nous voulons montrer ici qu'une théorie générale planétaire n'aurait pas besoin d'être poussée aussi loin en ordre qu'une théorie à variations séculaires pour fournir une précision comparable (sur 1000 ans par exemple) ; nous verrons qu'il suffit d'exprimer la solution générale en fonction de solutions à très longues périodes qui contiennent en elles-mêmes les approximations polynomiales des théories classiques.

Jusqu'ici, la plupart des travaux concernant les théories générales restent de nature purement formelle : les développements ne sont généralement pas explicités, et d'ailleurs, bien souvent, le choix des variables ou des repères (variables canoniques ou variables associées aux repérages de Jacobi par exemple), ne permet pas d'effectuer facilement ces développements (voir la théorie de Message 1975 par exemple).

Par ailleurs, le but de ces travaux n'est pas en général de fournir une solution complète et concrète, mais de mettre en évidence des propriétés de ces solutions et notamment leur stabilité. C'est ainsi que de nombreux travaux concernent uniquement l'étude des variations séculaires qu'on voudrait ne plus représenter par des polynômes.

Parmi ceux-ci, citons la démonstration de l'invariabilité des demi-grands axes lorsqu'on a égard aux perturbations d'ordres 1 et 2 (théorème de Poisson, 1809). Au-delà de l'ordre 2, d'après les résultats des théories à variations séculaires de Simon et de Bretagnon, des termes séculaires apparaissent dans l'expression des grands axes (ils avaient été prévus théoriquement

notamment par Meffroy en 1955) ; la théorie générale présentée par Message montre qu'en fait ces termes seraient uniquement à très longues périodes. On verra qu'à ce propos, nous avons été amenés à repreciser les conditions d'application du théorème de Poisson dans le cas où on utilise comme variables les éléments osculateurs héliocentriques (cf. Annexe 3).

La théorie de Message donne par ailleurs une méthode (par transformations canoniques) qui permet de séparer les termes séculaires des termes périodiques, et qui montre formellement que, quels que soient l'ordre et le degré des termes, les excentricités et les inclinaisons, associées aux longitudes des noeuds et des périhélie, ne subissent que des variations périodiques, à très longues périodes, pures ou mélangées à des courtes périodes. Il s'agit ici de l'extension d'un résultat établi par Laplace et Lagrange : si les équations relatives à ces variables sont réduites à la partie d'ordre 1 qui donnerait les termes à variations séculaires dans une théorie classique, et si on ne conserve dans cette partie que les termes de degré 1 en excentricité et en inclinaison, on obtient des variations à très longues périodes pour ces éléments (*).

Le Verrier obtint la valeur de ces périodes dès 1839, mais avec des masses encore incertaines (ces périodes s'échelonnent entre 50 000 ans et 2 000 000 ans). Par la suite, Hill (1897), Brouwer et Van Woerkom (1950), Brumberg (1971) et Bretagnon (1974) améliorèrent ces périodes en tenant compte de termes non linéaires, et en introduisant les termes d'ordre 2. Nous analyserons davantage leurs résultats dans le chapitre IV, car nous avons aussi été amené à reprendre la détermination de ces très longues périodes dans notre théorie : la précision avec laquelle on détermine ces très longues périodes conditionne finalement la durée de validité de la théorie générale ; c'est pourquoi nous analysons longuement

(*) avec plusieurs variables, on obtient une équation matricielle du type

$$\frac{dZ}{dt} = \sqrt{-1} \varepsilon AZ \quad \text{où } \varepsilon \text{ est de l'ordre des masses ; les périodes sont associées}$$

aux valeurs propres de la matrice εA .

dans ce chapitre les incertitudes qui subsistent sur leur détermination.

L'étude des termes à variations séculaires n'est cependant pas l'objet unique d'une théorie générale, il faut aussi interpréter les termes mixtes, c'est-à-dire traiter le problème dans son ensemble. La seule théorie générale qui ait été entreprise dans son ensemble pour être appliquée au système solaire dans le but d'en tirer des éphémérides, est celle de Brumberg (1970), et Brumberg et Chapront (1973). S'il a fallu attendre des dates aussi récentes, c'est que le développement d'une théorie générale, pour 8 planètes, exige la manipulation de plusieurs centaines de milliers de termes, complètement analytiques par rapport à l'ensemble des variables : cela exige des moyens informatiques importants, disponibles depuis peu de temps.

Notre travail a été directement inspiré de celui de Brumberg mais nous n'utilisons pas les mêmes variables, ni la même méthode, ni les mêmes techniques de manipulation.

Brumberg recherche directement, comme Newcomb, les coordonnées héliocentriques des planètes, en généralisant la méthode de l'orbite variationnelle (ou intermédiaire), introduite par Hill pour traiter le problème central de la Lune, de façon à obtenir uniquement des solutions quasi-périodiques de t .

Au contraire, nous utilisons comme variables les éléments osculateurs héliocentriques (ou d'autres qui s'en déduisent directement), en "généralisant" en quelque sorte la méthode utilisée par Le Verrier ; de cette façon, nous restons dans la tradition française et nous pouvons facilement comparer notre théorie générale avec les théories développées par Simon et Bretagnon.

La méthode de Brumberg et la nôtre conduisent toutes deux, comme celle de Message, à la séparation des termes périodiques et des termes séculaires ; ces derniers sont regroupés dans un système autonome qui s'intègre indépendamment des termes périodiques, pour donner les solutions à très longues périodes

dont il était question plus haut. La formulation des équations est donnée dans le chapitre I tandis que la méthode d'intégration que nous proposons occupe le chapitre II.

Pour limiter le nombre des termes, Brumberg remplace les demi-grands axes par leur valeur numérique, et utilise les valeurs numériques des moyens mouvements moyens (reliés aux demi-grands axes par la 3ème loi de Kepler). Il conserve cependant le caractère analytique par rapport à ces éléments en recherchant la solution dans le faisceau des mouvements voisins de mouvements circulaires uniformes coplanaires donnés. De cette façon, la théorie n'est plus aussi générale qu'elle pourrait l'être, mais sans cette restriction, son application pratique au système solaire serait quasi-impossible. Pour cette raison, nous procédons de la même façon, en développant notre solution dans le voisinage de mouvements circulaires donnés, définis par leur rayon A et leur moyen mouvement moyen N .

Malgré cela, la difficulté essentielle de la construction pratique d'une théorie générale, reste le nombre de termes encore très grand qu'il faut manipuler. Brumberg n'élimine aucun terme sur des critères d'ordre numérique comme on le fait dans la théorie de Le Verrier : il semble que la nature de ses variables ne lui permettait pas de connaître d'avance et facilement l'ordre de grandeur de ses termes, si bien qu'il a conservé sous forme complètement analytique, pour 8 planètes, la solution d'ordre 1 jusqu'aux termes de degré 5 ou 7 suivant les planètes (et partiellement les termes de degré 8 pour Jupiter et Saturne ^(*)). Il semble que ce sont les problèmes de manipulation de cet énorme ensemble de termes qui ont pour le moment empêché Brumberg de poursuivre la construction de l'ordre 2 au-delà des termes de degré 0 et 1.

(*) Il s'agit de développements de la même forme que celui donné dans l'expression A 18 de l'annexe 1.

Nous avons également développé les seconds membres de nos équations jusqu'au degré 5 ou 7 suivant les planètes, mais ayant mis en évidence que dans leur grande majorité ces termes apportent des contributions négligeables, nous avons résolu le problème du nombre de termes en sélectionnant uniquement ceux qui satisfont à certains critères : nous retenons notamment les termes dont les majorants (définis au chapitre III) sont supérieurs à un certain seuil choisi en fonction de la précision souhaitée. Nous avons aussi cherché à faciliter au maximum la manipulation de ces termes, soit individuellement, soit en blocs dans des séries convenablement structurées (cf. chapitre III).

Nous avons alors pu entreprendre l'application pratique de la méthode proposée au chapitre II. Elle concerne seulement une approche de la solution générale du problème planétaire, car nous n'avons considéré pour le moment que les quatre grosses planètes : Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, et car la précision avec laquelle nous déterminons l'ordre 2 est encore limitée.

Nous nous sommes surtout efforcés d'obtenir le mieux possible la solution à très longues périodes, en développant le système autonome jusqu'à l'ordre 2 et au degré 7. L'étude détaillée des contributions d'ordre et de degré divers a permis d'évaluer la précision des résultats que nous donnons, d'après la façon dont s'effectue la convergence ordre par ordre et degré par degré. La comparaison de ces solutions au voisinage de $t = 0$ avec les éléments moyens donnés par la théorie de Bretagnon montre que les variations séculaires caractéristiques des théories classiques sont bien les développements de ces solutions à très longues périodes.

Nous avons cherché également les développements analytiques de quelques inégalités importantes aux ordres 1 et 2, notamment la grande inégalité du couple Jupiter-Saturne ; nous verrons que malgré leur limitation en ordre et en degré, ces développements permettent de retrouver les termes mixtes obtenus à l'ordre 6 dans la théorie de Bretagnon, avec une précision

qui laisse augurer favorablement de la possibilité pratique d'étendre les théories à variations séculaires par les théories générales.

Pour finir, nous mettons en évidence que les moyens mouvements moyens ajustés aux observations grâce aux théories à variations séculaires, ne sont que des valeurs "instantannées", subissant eux aussi des variations à très longues périodes mais dont l'amplitude ne dépasse pas $0'',1$ par an.

CHAPITRE I

EQUATIONS DU MOUVEMENT DES PLANETES

=====

Dans ce chapitre, on précise d'abord la nature des éléments d'orbite osculateurs héliocentriques dont on veut chercher l'expression en fonction du temps. On formule ensuite les équations du mouvement en fonction de ces éléments, puis on montre comment se développent les seconds membres des équations en série ordonnée suivant les puissances croissantes des petits paramètres.

I - 1.- Eléments osculateurs des orbites planétaires.

Dans cette étude du mouvement relatif des planètes par rapport au Soleil, on suppose que tous ces astres sont des solides à symétrie sphérique et que les seules forces agissant sur eux sont les attractions newtonniennes mutuelles des masses qui les composent. Dans le cas d'un Soleil de masse M_{\odot} et de centre S , et de N planètes de masses m_i et de centres P_i ($i = 1$ à N), le problème se réduit à l'étude des mouvements héliocentriques des points P_i , régis par les équations suivantes :

$$(1.1) \quad \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = - \frac{G(M_{\odot} + m_i) \vec{r}_i}{r_i^3} - \sum_{j \neq i} G m_j \left(\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad i = 1 \text{ à } N$$

où \vec{r}_i désigne le rayon vecteur héliocentrique de P_i , et Δ_{ij} la distance de P_i à P_j ; G est la constante de gravitation universelle. Les termes du second membre, dérivant d'un potentiel, on écrit également :

$$(1.2) \quad \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \overrightarrow{\text{grad}}_i \frac{G(M_{\odot} + m_i)}{r_i} + \overrightarrow{\text{grad}}_i \left(\sum_{j \neq i} G m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} \right) \right)$$

où $\overrightarrow{\text{grad}}_i$ désigne l'opérateur donnant le vecteur des dérivées partielles par rapport aux coordonnées de P_i .

Parce que la masse du Soleil est grande devant celle des planètes, et qu'on suppose qu'aucune des distances mutuelles ne devient petite par rapport aux autres, le premier terme du second membre de ces équations est toujours prépondérant sur la somme des autres termes. Ces derniers constituent des accélérations perturbatrices, dérivant de potentiels perturbateurs, qui altèrent le mouvement principal képlérien qu'on obtiendrait par la considération du seul premier terme. Ces termes perturbateurs, fonctions linéaires des masses m_j sont dits d'ordre 1 des masses.

L'intégration des équations (1.1) tronquées à leur premier terme permet d'exprimer le mouvement képlérien en fonction de 6 constantes d'intégration par planète ; ce peuvent être \vec{r}_0 et \vec{v}_0 les position et vitesse à un instant initial τ_0 dans un repère héliocentrique $Sxyz$ de directions fixes, ou bien les 6 éléments constants de l'orbite elliptique képlérienne décrite pour chaque planète :

- a le demi-grand axe
- e l'excentricité
- i l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan Sxy
- Ω la longitude du noeud ascendant sur ce plan
- $\bar{\omega}$ la longitude du périhélie
- ε la longitude moyenne à l'instant initial τ_0 .

Ces trois longitudes sont mesurées à partir de la direction fixe Sx , avec $\bar{\omega} = \Omega + \omega$ où ω est la distance angulaire entre le noeud ascendant et le périhélie, et avec $\varepsilon = \varpi + M_0$ où M_0 est l'anomalie moyenne M à l'instant τ_0 ; on a : $M = n(t - \tau_0) + M_0$ où n est le moyen mouvement, relié au demi-grand axe par la troisième loi de Kepler :

$$(1.3) \quad n^2 a^3 = GM_{\odot} \left(1 + \frac{m}{M_{\odot}}\right)$$

la longitude moyenne à l'instant t est alors :

$$(1.4) \quad \lambda = M + \varpi = n(t - \tau_0) + \varepsilon.$$

Le plan de référence Sxy peut être l'écliptique d'une date fixée, mais on verra que la solution générale des équations s'exprime plus naturellement par rapport au plan invariable du système solaire défini comme étant perpendiculaire au vecteur moment cinétique, constant, du système solaire.

Remarquons dès maintenant qu'il n'y a pas équivalence stricte entre la donnée des conditions initiales \vec{r}_0 et \vec{v}_0 , et celle des 6 éléments d'orbite $(a, e, i, \Omega, \varpi, \varepsilon)$ car le calcul de ces derniers à partir des conditions initiales nécessite en plus la connaissance de la masse m de la planète. On pourra voir dans l'annexe 4 que les éléments a, e, ϖ et ε ne seraient pas les mêmes suivant que l'on choisit m nul ou non ; seuls les éléments i et Ω , caractérisant le plan de l'orbite, sont complètement définis par la donnée de \vec{r}_0 et \vec{v}_0 , et ne dépendent pas de m . Les éléments a, e, ϖ et ε dépendent donc implicitement de la masse m , qu'on pourrait considérer comme un 7ème élément de l'orbite héliocentrique de la planète.

L'intégration des équations (1.1) en tenant compte des termes perturbateurs s'effectue ensuite en appliquant la méthode de variation des constantes due à Lagrange : le mouvement perturbé de chaque planète est encore décrit par un mouvement képlérien, mais ses 6 éléments sont maintenant des fonctions du temps à déterminer, qui seront développées ici par approximations successives ordonnées suivant les puissances des masses. Les éléments d'orbite à l'instant t sont alors appelés éléments osculateurs à cet instant, dans le

sens que ce sont les éléments de l'orbite képlérienne fixe que décrirait cette planète si, à partir de cet instant, les perturbations disparaissaient. Ces éléments osculateurs sont encore représentatifs de la position et de la vitesse héliocentriques de cette planète à cet instant *. Pour obtenir la position héliocentrique de la planète à l'instant t , on utilise le formulaire du mouvement képlérien avec des éléments d'orbite calculés pour cet instant.

C'est de cette façon qu'on définit classiquement les éléments osculateurs héliocentriques des planètes. Cependant, la présence implicite des masses planétaires dans leur définition exige quelques précautions pour construire la théorie générale planétaire. On verra en effet dans l'exposé de la méthode d'intégration utilisée (chap. II), que la solution des équations s'obtient par approximations successives ordonnées suivant les puissances croissantes des masses relatives $\frac{m}{M_{\odot}}$, en procédant par identification des termes de même ordre par rapport aux masses. Si l'approximation képlérienne dont on part n'est pas strictement d'ordre zéro en masses, les approximations suivantes seront d'un ordre mal défini et le processus d'identification n'est pas applicable ; autrement dit, il faut que l'approximation zéro soit vraiment d'ordre zéro, pour que le numéro d'ordre des approximations suivantes soit égal à leur ordre par rapport aux masses. Il faut donc que les développements manipulés dans la théorie générale soient complètement analytiques par rapport aux masses.

On verra d'ailleurs dans le chapitre II, que s'il n'en est pas ainsi, on obtient notamment à la 2ème approximation, dans l'expression des demi-grands

* mais le plan de l'orbite osculatrice à l'instant t , qui contient le rayon vecteur et le vecteur vitesse, n'est pas le plan osculateur de la trajectoire qui contient lui, les vecteurs vitesse et accélération.

axes, des termes séculaires * qui seraient explicitement d'ordre 2 des masses et qu'on démontrerait être implicitement d'ordre 3. (Théorème de Poisson en variables héliocentriques, cf. II.3.1 et annexe 3). Or, la détermination de ces termes est délicate car ils résultent d'une élimination presque totale de termes bien plus grands qu'eux, qu'il faut donc déterminer avec beaucoup de précision ; comme l'élimination est totale si l'approximation zéro est strictement d'ordre zéro, on a aussi intérêt à se placer dans ce cas pour ne pas avoir le problème de cette détermination.

Pour être complètement analytique par rapport aux masses on peut utiliser les équations (1.1) avec un terme principal dépendant de la masse de la planète, à condition de tenir compte analytiquement de la 3ème loi de Kepler en exprimant par exemple le demi-grand axe sous forme d'un développement des masses :

$$(1.5) \quad a = \left(\frac{GM_{\odot}}{n^2} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{m}{M_{\odot}} - \frac{1}{9} \left(\frac{m}{M_{\odot}} \right)^2 + \dots \right) .$$

On a trouvé plus simple de considérer comme terme képlérien principal de l'équation (1.1) la partie : $-\frac{GM_{\odot} \vec{r}_i}{3 r_i^3}$ et de prendre $-\frac{Gm_i \vec{r}_i}{3 r_i^3}$ comme une perturbation supplémentaire qu'on appellera dans la suite perturbation képlérienne. Le mouvement képlérien héliocentrique non perturbé est alors décrit par l'équation suivante, d'ordre zéro des masses :

$$(1.6) \quad \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = - \frac{GM_{\odot}}{3 r_i^3} \vec{r}_i = \text{grad} \frac{GM_{\odot}}{r_i} .$$

* ces termes seraient proportionnels au temps dans une théorie classique à variations séculaires ; ils seraient à très longues périodes dans la théorie générale.

Ses éléments sont complètement déterminés par la donnée des position et vitesse héliocentriques initiales et sont indépendants de la masse de la planète. Ils deviennent éléments osculateurs héliocentriques lorsqu'on prend en considération les perturbations données maintenant par le gradient de la fonction R_i :

$$(1.7) \quad R_i = \frac{GM_i}{r_i} + \sum_{j \neq i} Gm_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} \right) .$$

La constante de la 3ème loi de Kepler $n^2 a^3 = GM_\odot$ est maintenant la même pour toutes les planètes. Les éléments osculateurs héliocentriques, qu'on définit comme précédemment, mais à partir des équations (1.6) et (1.7), seront appelés dans la suite, éléments osculateurs héliocentriques d'ordre zéro.

On pourra voir dans l'annexe 4 comment on peut passer de ces derniers aux éléments osculateurs héliocentriques classiques, grâce à des développements relativement simples en puissances des masses.

1 - 2.- Formulation des équations.

On prend comme point de départ les équations de Lagrange classiques ^{*}, qui donnent les variations des éléments elliptiques osculateurs de l'orbite d'une planète P, subissant en plus de l'attraction newtonnienne du Soleil, des forces perturbatrices dérivant d'un potentiel R. En appelant σ la matrice colonne de ces éléments elliptiques ainsi rangés :

$$\sigma = (\sigma_j) = \begin{pmatrix} a \\ \epsilon \\ e \\ \bar{\omega} \\ i \\ \Omega \end{pmatrix}$$

* Cf. Tisserand, Tome 1, p. 169.

on met ces équations sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d\sigma}{dt} = A \frac{\partial R}{\partial \sigma}$$

où A désigne la matrice antisymétrique :

$$A = \frac{1}{na^2} \begin{bmatrix} 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & \frac{\psi(1-\psi)}{e} & 0 & \frac{\gamma}{\psi\chi} & 0 \\ 0 & -\frac{\psi(1-\psi)}{e} & 0 & -\frac{\psi}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\psi}{e} & 0 & \frac{\gamma}{\psi\chi} & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{\psi\chi} & 0 & -\frac{\gamma}{\psi\chi} & 0 & -\frac{1}{2\psi\gamma\chi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\psi\gamma\chi} & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\psi = \sqrt{1-e^2}$, $\gamma = \sin \frac{i}{2}$, $\chi = \cos \frac{i}{2}$, et où $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$ représente le gradient

de la fonction perturbatrice R par rapport aux éléments de σ :

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial R}{\partial \sigma_i} \right) = \begin{pmatrix} \partial R / \partial a \\ \partial R / \partial \epsilon \\ \partial R / \partial e \\ \partial R / \partial \pi \\ \partial R / \partial i \\ \partial R / \partial \Omega \end{pmatrix}$$

Avec ces variables, les équations de Lagrange ne sont plus valables lorsque e ou i sont nuls car ces quantités apparaissent dans A au déno-

minateur de certains termes. Cette singularité des équations provient en fait de l'indétermination des longitudes du périhélie et du noeud lorsque e et i sont nuls. On élimine cette singularité géométrique en utilisant, à la place de e , $\bar{\omega}$, i et Ω , les variables complexes suivantes :

$$(1.10) \quad z = e \exp \sqrt{-1} \bar{\omega} \quad \text{et son conjugué } \bar{z}$$

$$(1.11) \quad \zeta = \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} \Omega \quad \text{et son conjugué } \bar{\zeta}.$$

Ce changement de variables est d'autant plus nécessaire qu'on recherche ici une description des mouvements planétaires au voisinage de mouvements circulaires uniformes coplanaires de rayons A et de moyen mouvements N fixés, ce qui suppose que e et i restent voisins de zéro.

Pour représenter l'écart entre les mouvements réels et ces mouvements circulaires, on utilise une nouvelle variable, notée p , à la place de l'élément a (ou n), qui caractérise les variations relatives de a par rapport à A , (ou de n par rapport à N) :

$$(1.12) \quad a = A(1 + p)^{-2/3}$$

$$(1.13) \quad n = N(1 + p).$$

$$\text{Ce qui implique : } n^2 a^3 = N^2 A^3.$$

Enfin, à la place de l'élément ϵ , on utilise une nouvelle variable, notée q , qui représente l'écart entre la longitude moyenne osculatrice et la longitude Nt du mouvement circulaire de référence :

$$(1.14) \quad \lambda = \int n dt + \epsilon = Nt - \sqrt{-1} q$$

La variable p est réelle tandis que q est imaginaire pure. Il s'agit maintenant d'exprimer les équations pour ces nouvelles variables. En appelant V la matrice colonne composée de ces dernières, dans l'ordre suivant :

$$V = (V_i) = \begin{pmatrix} p \\ q \\ z \\ \bar{z} \\ \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix}$$

le passage de σ à V correspond à une transformation T , non linéaire, fonction des éléments osculateurs et du temps, qui s'écrit ainsi :

$$V = (T_i(\sigma_j, t)) = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{A}\right)^{-3/2} - 1 \\ \sqrt{-1} \left(\int n dt + \varepsilon - Nt \right) \\ e \exp \sqrt{-1} \bar{\omega} \\ e \exp -\sqrt{-1} \bar{\omega} \\ \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} \Omega \\ \sin \frac{i}{2} \exp -\sqrt{-1} \Omega \end{pmatrix}$$

On a alors : $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}$

où $\frac{\partial T}{\partial \sigma}$ désigne la matrice jacobienne de la transformation :

$$(1.15) \quad \frac{\partial T}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial T_i}{\partial \sigma_j} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2A}(1+p)^{5/3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z/e & \sqrt{-1} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z}/e & -\sqrt{-1} \bar{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta X}{2Y} & \sqrt{-1} \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\zeta} X}{2Y} & -\sqrt{-1} \bar{\zeta} \end{pmatrix}$$

la présence explicite du temps dans la 2^{ème} composante de T (relative au passage de ε à q), introduit le terme $\sqrt{-1}(n-N)$, égal encore à $\sqrt{-1} Np$, dans le 2^{ème} élément de la matrice colonne $\frac{\partial T}{\partial t}$; les autres éléments de cette matrice sont nuls.

On a ensuite :

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)^t \frac{\partial R}{\partial V}$$

où $\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)^t$ désigne la matrice transposée de $\frac{\partial T}{\partial \sigma}$, de sorte qu'on obtient le nouveau système d'équations, sous la forme :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \sigma} A \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)^t \frac{\partial R}{\partial V} .$$

On obtient la nouvelle matrice antisymétrique :

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma} A \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)^t = \frac{\sqrt{-1}}{na^2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3a}{A}(1+p)^{5/3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3a}{A}(1+p)^{5/3} & 0 & z \frac{\psi(1-\psi)}{e^2} & \bar{z} \frac{\psi(1-\psi)}{e^2} & \zeta \frac{1}{2\psi} & \bar{\zeta} \frac{1}{2\psi} \\ 0 & -z \frac{\psi(1-\psi)}{e^2} & 0 & 2\psi & z\bar{\zeta} \frac{1}{2\psi} & z\bar{\zeta} \frac{1}{2\psi} \\ 0 & -\bar{z} \frac{\psi(1-\psi)}{e^2} & -2\psi & -0 & -\bar{z}\bar{\zeta} \frac{1}{2\psi} & -\bar{z}\bar{\zeta} \frac{1}{2\psi} \\ 0 & -\zeta \frac{1}{2\psi} & -z\bar{\zeta} \frac{1}{2\psi} & \bar{z}\bar{\zeta} \frac{1}{2\psi} & 0 & \frac{1}{2\psi} \\ 0 & -\bar{\zeta} \frac{1}{2\psi} & -z\zeta \frac{1}{2\psi} & \bar{z}\zeta \frac{1}{2\psi} & -\frac{1}{2\psi} & 0 \end{bmatrix}$$

La quantité γ est maintenant absente des dénominateurs, mais il reste e^2 dans certains d'entre eux ; en fait, ils disparaissent aussi car on a :

$$\frac{1-\psi}{e^2} = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{1 - (1-e^2)} = \frac{1}{1+\psi} .$$

Dans la suite, on appelle Ψ cette quantité, égale à $\frac{1}{1+\psi}$.
 Ψ et ψ sont des fonctions de z et de \bar{z} car on a $\sqrt{1-e^2} = \sqrt{1-z\bar{z}}$. Il reste à remplacer $\frac{a}{A}$ par $(1+p)^{-2/3}$ et $1/na^2$ par $(1/NA^2)(1+p)^{1/3}$ pour que cette matrice soit complètement exprimée en fonction de nouvelles variables. En remarquant que les équations relatives à \bar{z} et à $\bar{\zeta}$ sont les conjuguées de celles relatives à z et à ζ , il reste quatre équations scalaires indépendantes pour représenter le mouvement d'une planète P :

$$(1.17) \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{3\sqrt{-1}}{NA^2} (1+p)^{4/3} \frac{\partial R}{\partial q}$$

$$(1.18) \quad \frac{dq}{dt} = \sqrt{-1} Np + \frac{\sqrt{-1}}{NA^2} (1+p)^{1/3} \left[3(1+p) \frac{\partial R}{\partial p} + \psi\Psi(z \frac{\partial R}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial R}{\partial \bar{z}}) + \frac{1}{2\psi} (\zeta \frac{\partial R}{\partial \zeta} + \bar{\zeta} \frac{\partial R}{\partial \bar{\zeta}}) \right]$$

$$(1.19) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{-1}}{NA^2} (1+p)^{1/3} \left[-\psi\Psi z \frac{\partial R}{\partial q} + 2\psi \frac{\partial R}{\partial \bar{z}} + \frac{z}{2\psi} (\zeta \frac{\partial R}{\partial \zeta} + \bar{\zeta} \frac{\partial R}{\partial \bar{\zeta}}) \right]$$

$$(1.20) \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\sqrt{-1}}{NA^2} (1+p)^{1/3} \left[-\zeta \frac{\partial R}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \bar{\zeta}} - \zeta (z \frac{\partial R}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial R}{\partial \bar{z}}) \right] \times \frac{1}{2\psi} .$$

On verra dans le prochain paragraphe que R est une fonction réelle des variables $p, q, z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}$ relatives à toutes les planètes ; la variable p est réelle, q est imaginaire pure, les autres sont complexes. On vérifie bien que les seconds membres des équations sont de même nature que les variables dont ils représentent les dérivées par rapport au temps.

Remarque : La variable q a été choisie imaginaire pure de façon à ce que le nombre $\sqrt{-1}$, qui était introduit naturellement dans $\frac{\partial T}{\partial \sigma}$ par la

dérivée par rapport à $\bar{\omega}$ de $e \exp\sqrt{-1} \bar{\omega}$ par exemple, puisse se mettre en facteur en toutes les équations ; ceci simplifie sensiblement la manipulation de ces équations sur ordinateur.

1 - 3.- Développement de la fonction perturbatrice.

Avec le choix qu'on a fait des éléments osculateurs héliocentriques d'ordre zéro, la fonction perturbatrice R_i d'une planète P_i se compose de 3 parties :

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{Gm_i}{r_i} && \text{provenant de la perturbation képlérienne} \\
 & \cdot \sum_{j \neq i} Gm_j \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} && \text{venant des perturbations indirectes}^* \\
 & \cdot \sum_{j \neq i} Gm_j \frac{1}{\Delta_{ij}} && \text{venant des perturbations directes.}
 \end{aligned}$$

On exprime ces 3 parties en fonction des variables choisies p, q, z, \bar{z}, ζ et $\bar{\zeta}$; sachant que ces variables représentent un mouvement képlérien osculateur, on peut calculer les rayons vecteurs r_i et r_j ainsi que les distances mutuelles Δ_{ij} , à tout instant, en utilisant le formulaire du mouvement elliptique képlérien. $\frac{1}{r_i}$, $\frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3}$ et $\frac{1}{\Delta_{ij}}$ s'expriment ainsi en séries de Fourier ayant pour arguments les longitudes moyennes λ_i et λ_j , et dont les coefficients sont des séries entières des autres variables $p_i, p_j, z_i, z_j, \bar{z}_i, \bar{z}_j, \zeta_i, \zeta_j, \bar{\zeta}_i$ et $\bar{\zeta}_j$.

* Remarquons que les perturbations képlérienne et indirectes ne sont pas dues à des forces physiques, mais résultent du caractère non galiléen du repère héliocentrique : ces perturbations représentent des accélérations d'entraînement du Soleil dues à la présence des planètes.

On trouvera le détail de ces calculs dans l'annexe 1. Contentons nous ici de donner la forme générale des développements en insistant sur leurs particularités les plus intéressantes.

On obtient les développements suivants :

. pour la partie képlérienne :

$$(1.21) \quad \frac{G_{m_i}}{r_i} = \frac{m_i}{M_\bullet} N_i^2 A_i^2 \sum_{(n)_3} C_{(n)_3} p_i^{n_1} z_i^{n_2} \bar{z}_i^{-n_3} \exp k_i q_i \exp \sqrt{-1} k_i N_i t$$

où $(n)_3$ représente le triplet d'entiers $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ et où on a $k_i = n_3 - n_2$; les coefficients $C_{(n)_3}$ sont des nombres rationnels.

. pour les deux autres parties :

$$(1.22) \quad G_{m_j} \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} \right) = \frac{m_j}{M_\bullet} N_i^2 A_i^2 \sum_{\ell} \sum_{(n)_{10}} C_{\ell} (n)_{10} (\alpha_{ij}) \cdot$$

$$\times p_i^{n_1} z_i^{n_2} \bar{z}_i^{-n_3} \zeta_i^{n_4} \bar{\zeta}_i^{-n_5}$$

$$\times p_j^{n_6} z_j^{n_7} \bar{z}_j^{-n_8} \zeta_j^{n_9} \bar{\zeta}_j^{-n_{10}}$$

$$\times \exp(k_i q_i + k_j q_j) \exp \sqrt{-1} (k_i N_i + k_j N_j) t$$

où $(n)_{10}$ représente le 10-uplet $(n_1, n_2, \dots, n_{10}) \in \mathbb{N}^{10}$ et où on a :

$$(1.23) \quad k_i = n_3 - n_2 + n_5 - n_4 + \ell$$

$$k_j = n_8 - n_7 + n_{10} - n_9 - \ell$$

avec $\ell \in \mathbb{Z}$ en ce qui concerne les termes de $\frac{1}{\Delta_{ij}}$, et ℓ égal à 0, ou ± 1 pour les termes des parties indirectes.

Il s'ensuit :

$$(1.24) \quad k_i + k_j = n_3^{-n_2+n_5-n_4+n_8-n_7+n_{10}-n_9} .$$

Tous les 10-uplets sont pairs par rapport aux inclinaisons c'est-à-dire que $n_4+n_5+n_9+n_{10}$ est un nombre pair ; les coefficients $C_{\ell, (n)}^{(\alpha_{ij})}$ sont des fonctions réelles du rapport α_{ij} des demi-grands axes A_i et A_j :

$$(1.25) \quad \alpha_{ij} = \frac{\min(A_i, A_j)}{\max(A_i, A_j)} .$$

Ces coefficients sont calculés numériquement pour les valeurs de α_{ij} relatives aux différents couples de planètes, car leur expression analytique en série entière de α_{ij} converge trop lentement, surtout lorsque α_{ij} est voisin de 1 (ce qui les rendrait trop volumineuses d'un point de vue pratique). On calcule la valeur des α_{ij} grâce à la connaissance qu'on a déjà des moyens mouvements N_i et N_j par les théories existantes à variations séculaires (voir paragraphe II.4). On utilise la 3ème loi de Kepler : $N_i^2 A_i^3 = N_j^2 A_j^3 = GM_\odot$ qui permet d'obtenir le rapport A_i/A_j en fonction de N_i/N_j .

I - 3.1.- Terminologie utilisée à propos de ces développements.

On précise ici la terminologie suivante, déjà consacrée en partie par l'usage courant. Considérons une série dont le terme général aurait la forme suivante, en fonction des variables et paramètres associés à n planètes :

$$(1.26) \quad \begin{aligned} & C \begin{matrix} v_1 & v_2 & & v_n & r_1 & r_2 & & r_n & s_1 & -s_2 & s_3 & & -s_{2n} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n & p_1 & p_2 & \dots & p_n & z_1 & z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{matrix} \\ & \times \begin{matrix} \sigma_1 & \sigma_2 & & \sigma_{2n} \\ \zeta_1 & \zeta_1 & \dots & \zeta_n \end{matrix} \exp(k_1 q_1 + k_2 q_2 + \dots + k_n q_n) \\ & \times \exp\sqrt{-1}(k_1 N_1 + k_2 N_2 + \dots + k_n N_n) t . \end{aligned}$$

L'ordre d'un tel terme est égal à la somme $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ des exposants des masses ; son grade est la somme $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ des exposants des variables p ; son degré est la somme $\sum_{i=1}^{2n} (s_i + \sigma_i)$ des exposants des variables z, \bar{z}, ζ et $\bar{\zeta}$; son degré en excentricité est la somme partielle $\sum s_i$ et son degré en inclinaison la somme restante $\sum \sigma_i$. Sa caractéristique est la somme $\sum_{i=1}^n k_i$ des coefficients de la combinaison linéaire des N_i . Les termes ayant le même argument $(k_1 N_1 + \dots + k_n N_n)t$ appartiennent à une même classe de termes appelée inégalité ; tous ses termes ont la même caractéristique, qui est la caractéristique de l'inégalité.

Si tous les k_i sont nuls, l'inégalité est dite séculaire ; si la somme $S = \sum_{i=1}^n k_i N_i$ est non nulle, l'inégalité est dite périodique de période $2\pi/|S|$, à courte période si S est du même ordre de grandeur que N_i , à longue période si S est petit devant N_i ; si S est nul l'inégalité est dite résonnante (ceci implique en toute rigueur la commensurabilité de certains N_i)*. Les termes qui composent ces inégalités sont appelés respectivement termes séculaires, termes périodiques, à courte ou à longue période, et termes résonnants.

Dans toute la suite, les planètes sont numérotées dans l'ordre de leur éloignement au Soleil, à partir de Mercure ; une inégalité sera désignée, soit par l'argument commun de ses termes, soit par la suite ordonnée des coefficients k_i (non nuls) des N_i dans cet argument, en précisant les planètes auxquelles ils se rapportent ; par exemple, la grande inégalité (2,-5) du couple Jupiter -

* Les approximations rationnelles des rapports des différents N_i du système solaire, à la même précision que celle de la détermination de ces N_i ($\approx 10^{-8}$ à 10^{-10}), font intervenir le rapport d'entiers très grands. Alors, les inégalités résonnantes qui leur correspondent ont des caractéristiques élevées et n'interviennent pas en pratique (voir paragraphe I. 4).

Saturne a comme argument $(2N_5 - 5N_6)t$, sa période, 880 ans, est longue devant celle de Jupiter ou de Saturne.

On utilisera cette terminologie aussi bien pour les termes des développements de la fonction perturbatrice, que pour ceux des développements des seconds membres des équations ou de leur solution.

I - 3.2.- Quelques propriétés du développement de la fonction perturbatrice.

La fonction perturbatrice R_i d'une planète P_i est ainsi la somme du développement (1.21) à 4 variables et d'autant de développements à 12 variables de la forme (1.22) qu'il y a de planètes P_j perturbant P_i . On voit que tous ses termes sont d'ordre 1 ; leur grade comme leur degré peut être quelconque, leur degré en inclinaison est pair.

D'après (1.23) et (1.24), une inégalité de caractéristique c donnée ne contient que des termes de degré $|c|$, $|c| + 2$, $|c| + 4$, etc... par exemple la grande inégalité, de caractéristique 3, se développe dans la fonction perturbatrice de Jupiter ou de Saturne en termes de degré 3, 5, 7, etc...

D'après (1.23), en faisant varier ℓ sans changer les entiers n_i , on obtient des inégalités différentes qui ont cependant la même caractéristique d'après (1.24). De ce fait les inégalités de même caractéristique admettent des développements semblables dans le sens qu'un monôme présent dans l'une d'elles est forcément présent dans toutes les autres. Il est ainsi possible d'établir une liste des monômes présents dans une inégalité qui soit valable pour toutes celles qui ont la même caractéristique *.

Les développements (1.21) et (1.22) ont les mêmes propriétés de convergence que les séries (A_3) et (A_4) de l'annexe 1 dont ils sont issus ;

* La table 10 de l'annexe 2 donne le nombre de termes présents dans cette liste, degré par degré pour les inégalités de caractéristique comprise entre 0 et 5.

pour la valeur des excentricités et des inclinaisons qu'on observe dans le système planétaire, ils convergent assez rapidement pour qu'on puisse les limiter à des termes de degré assez faible (en pratique inférieur à 7 ou 8 dans le cas des 4 grosses planètes).

Cette limitation est d'ailleurs nécessaire d'un point de vue pratique : il suffit de consulter le tableau 1 pour se rendre compte du nombre de termes qu'on a degré par degré dans un développement de la forme (1.22) (limité au grade zéro et pour ℓ fixé, donc développé uniquement par rapport aux 8 variables d'excentricité et d'inclinaison). Il faut encore multiplier ces nombres par le nombre de valeurs de ℓ que l'on conserve, et par le nombre de termes des développements de grades divers : 1 terme de grade 0, 2 termes de grade 1, 3 termes de grade 2 etc... et il y a autant de ces développements qu'il y a de couples de planètes. On limite les valeurs de ℓ à l'intervalle $|\ell| \leq \ell_M$ où ℓ_M doit être d'autant plus grand que le rapport α_{ij} des grands axes du couple de planètes considéré est voisin de 1. Ceci est dû à ce que pour un

Tableau 1

degré	nombre de termes	nombre de termes cumulés jusqu'à un degré donné
0	1	1
1	4	5
2	20	25
3	60	85
4	170	255
5	396	651
6	868	1519
7	1716	3235

Nombre de termes de degré donné, de grade 0, pour ℓ fixé dans un développement de la forme (1.22).

α_{ij} et pour un 10-uplet $(n)_{10}$ fixés, la suite des modules des coefficients $C_{\ell, (n)_{10}}^{(\alpha_{ij})}$ du développement (1.22) relative à des valeurs croissantes de $|\ell|$, est décroissante seulement à partir d'une certaine valeur de ℓ d'autant plus grande que α_{ij} est voisin de 1 ; par exemple, on peut prendre $\ell_M = 15$ pour traiter convenablement le problème des 4 grosses planètes.

On peut cependant diviser sensiblement par 2 le nombre total des termes car, R_i étant une fonction réelle, lorsqu'on a un terme, on a immédiatement son conjugué, qui a le même coefficient.

On verra, dans le chapitre III que si on remplace les variables z et ζ par leur valeur numérique à un instant donné, la plupart des termes de degré élevé deviennent négligeables vis-à-vis d'une certaine précision (0",001 par exemple) ; ce fait permettra de réduire le nombre de termes retenus dans les développements, en rapport avec la précision souhaitée.

Remarque : Les perturbations mutuelles de 2 planètes ne dépendent plus de leur inclinaison mutuelle lorsque leurs plans d'orbite sont confondus, la partie du développement de la fonction perturbatrice dépendant des variables ζ_i et ζ_j de ces planètes s'annule identiquement lorsque ζ_i et ζ_j sont égales. Cette annulation s'effectue inégalité par inégalité, et à l'intérieur de chaque inégalité entre termes de même degré : la somme de tous les termes de même degré non nul en inclinaison, qui se trouvent en facteur d'un même monôme des autres variables, est identiquement nulle lorsque $\zeta_i = \zeta_j$, c'est-à-dire que la somme de leurs coefficients est identiquement nulle. Cette relation qui lie les coefficients de ces termes n'est cependant pas utilisable en pratique pour déterminer l'un d'eux à partir des autres, mais sachant qu'elle

existe, on pourra déceler, si elle n'est pas vérifiée, qu'il manque des termes en inclinaison dans le développement de ces inégalités.

I - 4.- Développement des seconds membres des équations.

Possédant le développement de la fonction perturbatrice d'une planète P_i sous la forme (1.21) et (1.22), il reste à le reporter dans les équations (1.17) à (1.20). On voit qu'il faut en prendre les dérivées partielles par rapport aux variables associées à cette planète, puis à les multiplier par des fonctions relativement simples des variables p , z et ζ .

Ces opérations n'altèrent pas la forme des développements, qui restent donc semblables dans les équations à celui qu'on a obtenu en (1.21) et (1.22) pour la fonction perturbatrice, mais les relations (1.23) et (1.24), ainsi que les parités peuvent ne plus être les mêmes, entraînant des changements dans les propriétés des développements des inégalités :

Les relations (1.23) et (1.24) ne sont pas altérées dans les dérivées partielles $\frac{\partial R}{\partial q}$ et $\frac{\partial R}{\partial p}$, ni dans les dérivées homogènes $z \frac{\partial R}{\partial z}$, $\bar{z} \frac{\partial R}{\partial \bar{z}}$, $\zeta \frac{\partial R}{\partial z}$ et $\bar{\zeta} \frac{\partial R}{\partial \bar{\zeta}}$, ni enfin dans les produits de ces quantités par les fonctions de p ou les fonctions de $z\bar{z}$ (comme ψ , $1/\psi$ et $\psi\bar{\psi}$). Il s'ensuit que les développements des seconds membres des équations $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$ sont de la même forme que celui de R et que notamment, dans ces équations, une inégalité de caractéristique c donnée ne comporte que des termes de degré $|c|$, $|c| + 2$, $|c| + 4$, etc... Ces développements sont également pairs par rapport aux inclinaisons.

Par contre, les dérivées partielles $\frac{\partial R}{\partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial R}{\partial \bar{\zeta}}$, ainsi que les multiplications par z ou par ζ de développements de la même forme que R ,

modifient les relations (1.23) et (1.24). Ainsi, pour les équations $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$, ces relations doivent être remplacées par les suivantes :

$$(1.27) \quad k_i = n_3 - n_2 + n_5 - n_4 + \ell + 1$$

$$k_j = n_8 - n_7 + n_{10} - n_9 - \ell .$$

$$(1.28) \quad k_i + k_j = n_3 - n_2 + n_5 - n_4 + n_8 - n_7 + n_{10} - n_9 + 1.$$

Ceci a pour conséquence de modifier d'une unité la règle de construction des inégalités, dans ces équations : une inégalité de caractéristique c donnée, y comportera des termes de degré $|c-1|$, $|c-1| + 2$, $|c-1| + 4$, etc... Par ailleurs, le développement du second membre de l'équation $\frac{d\zeta}{dt}$ devient impair par rapport aux inclinaisons.

Par exemple, la grande inégalité (2,-5) du couple Jupiter-Saturne, de caractéristique -3, admet un développement de degré 3 au moins dans les équations $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$, et de degré 4 au moins dans les équations $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$; son opposé, l'inégalité (-2,5) est de degré 3 au moins dans $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$, et de degré 2 au moins dans $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$.

Par contre, une inégalité de caractéristique 0, comme l'inégalité $(N_5 - N_6)t$, ou comme l'inégalité séculaire, se développe à partir du degré 0 dans les équations $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$, tandis qu'elle commence avec des termes de degré 1 dans les équations $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$.

Ces propriétés du développement des inégalités sont importantes car elles permettent d'éliminer pratiquement les inégalités résonnantes qu'on trouve nécessairement dans le développement des seconds membres pour des entiers k_i

et k_j suffisamment grands : ces inégalités sont de caractéristique élevée et interviennent donc seulement dans des termes de degré élevé, suffisamment grand pour qu'on puisse les négliger. On considérera donc ici, que pour les grosses planètes, il n'y a aucun terme résonnant dans les seconds membres des équations.

Remarque : Lorsque les variables ζ_i et ζ_j sont égales, on observe dans le développement des seconds membres, l'élimination de tous les termes dépendant de ces variables et de leurs conjuguées, degré par degré dans chaque inégalité, exactement comme dans le développement de la fonction perturbatrice. Il n'y a en effet aucune perturbation dépendant de ces variables lorsque les plans d'orbite sont confondus (voir par exemple les termes dépendant des ζ dans les tableaux 6, 7a, 7b, 9a et 12 dans le chapitre IV).

On se reportera à l'annexe 1 pour avoir le détail du calcul de la fonction perturbatrice, et à l'annexe 2 pour la description de l'algorithme élaboré pour effectuer sur ordinateur ce calcul et celui des seconds membres. Dans l'article qui est incorporé à cette annexe, on trouvera en outre des indications sur la réalisation pratique de cet algorithme.

CHAPITRE II

INTEGRATION DES EQUATIONS

=====

On peut résumer de la façon suivante le système d'équations (1.17)

à (1.20), qu'on obtient pour chaque planète P_i ($i = 1$ à N)

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_i}{dt} &= \sqrt{-1} N_i \sum_{j=1}^N L_{ij}^{(1)}(p, q, z, \zeta, t) \\
 \frac{dq_i}{dt} &= \sqrt{-1} N_i \sum_{j=1}^N L_{ij}^{(2)}(p, q, z, \zeta, t) + \sqrt{-1} N_i p_i \\
 \frac{dz_i}{dt} &= \sqrt{-1} N_i \sum_{j=1}^N L_{ij}^{(3)}(p, q, z, \zeta, t) \\
 \frac{d\zeta_i}{dt} &= \sqrt{-1} N_i \sum_{j=1}^N L_{ij}^{(4)}(p, q, z, \zeta, t)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

où on a, en notant e le numéro de l'équation, compris entre 1 et 4 :

$$\begin{aligned}
 L_{ij}^{(e)}(p, q, z, \zeta, t) &= \frac{m_j}{M_\odot} \sum_{\ell} \sum_{(n)} C_{\ell, (n)}^{(e)} (\alpha_{ij}) p_i^{n_1} z_i^{n_2} z_i^{n_3} \\
 &\times \zeta_i^{n_4} \zeta_i^{n_5} p_j^{n_6} z_j^{n_7} z_j^{n_8} \zeta_j^{n_9} \zeta_j^{n_{10}} \exp(k_i q_i + k_j q_j) \exp \sqrt{-1} (k_i N_i + k_j N_j) t
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

avec les inégalités (k_i, k_j) vérifiant la propriété :

$$\begin{aligned}
 k_i &= n_3 - n_2 + n_5 - n_4 + \ell + \delta(e) \\
 k_j &= n_8 - n_7 + n_{10} - n_9 - \ell \qquad n_k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{Z} \\
 \delta(e) &= \begin{cases} 0 & \text{si } e = 1 \text{ ou } 2 \\ 1 & \text{si } e = 3 \text{ ou } 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

et les propriétés de parité déjà décrites dans le paragraphe I.4.

II- 1.- Principes de la méthode.

On utilise essentiellement le fait que les seconds membres des équations ont en facteur les masses planétaires, de sorte que les variations $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$ sont très petites ; autrement dit, les variables p , q , z et ζ s'écartent lentement et peu des valeurs qu'elles ont à un instant donné.

Ceci permet la recherche d'une solution par approximations successives ordonnées suivant les puissances des masses, comme dans les théories classiques à variations séculaires du type de celle de Le Verrier. La forme de la solution donnée par ces théories permet d'ailleurs d'imaginer la forme de la solution générale et la façon de l'obtenir :

Schématiquement, ces théories donneraient, pour la variable osculatrice σ représentant l'une quelconque des variables p , q , z ou ζ , une solution de la forme suivante, valable au voisinage d'une date t_0 fixée dans un intervalle ΔT de l'ordre de quelques milliers d'années au plus :

$$\sigma_i = S_i^{(\sigma)}(t) + P_i^{(\sigma)}(t)$$

où la partie "séculaire" $S_i^{(\sigma)}(t)$ est un polynôme $s_{i_0}^{(\sigma)} + s_{i_1}^{(\sigma)}t + s_{i_2}^{(\sigma)}t^2 + \dots$

et où la partie "périodique" $P_i^{(\sigma)}(t)$ est une somme de termes "mixtes" :

$$\sum_j (p_{i_1}^{(\sigma)} + p_{i_2}^{(\sigma)}t + p_{i_3}^{(\sigma)}t^2 + \dots)_j \exp \sqrt{-1} \beta_j t ;$$

les $\beta_j t$ désignent les arguments (de la forme $(\sum_i k_i N_i)t$) retenus dans la théorie, et numérotés par j . Les polynômes de t dans $S_i^{(\sigma)}(t)$ et ceux qu'on trouve en facteur des $\exp \sqrt{-1} \beta_j t$ sont des fonctions très lentement variables de t : $s_{i_k}^{(\sigma)}$ et $p_{i_k}^{(\sigma)}$ sont des nombres de l'ordre des masses à la puissance k .

On sait cependant exprimer autrement la solution σ_i quand on ne garde dans les équations que la partie qui donnerait les termes "séculaires" $S_i^{(\sigma)}(t)$ dans la théorie classique : en conservant analytiquement cette partie réduite aux seuls termes d'ordre 1 et de degré 1, on obtient, par la méthode de Laplace-Lagrange, les variations séculaires de z et de ζ sous une forme bornée : la solution de Laplace-Lagrange est formée d'une somme finie de termes à très longues périodes (supérieures à 50 000 ans : les rapports entre les périodes des planètes et ces très longues périodes sont de l'ordre des masses), dont on sait calculer les amplitudes et les phases à partir de la valeur des éléments moyens relatifs à z et à ζ , connus à une date t_0 par les théories classiques. Cette solution est valable sur un intervalle de temps beaucoup plus grand que celle de la théorie à variations séculaires, mais il faut l'améliorer en considérant le système d'équations réduit aux inégalités séculaires, non limité aux termes de degré 1 et d'ordre 1. Si les polynômes $S_i^{(\sigma)}(t)$ et $(\sum p_{ik}^{(\sigma)} t^k)_j$ sont les développements en puissances de t de termes à très longues périodes, il est logique de chercher à exprimer les amplitudes des inégalités périodiques comme des fonctions de la solution à très longues périodes du type Laplace-Lagrange.

Le but de la théorie générale est ainsi d'obtenir ensemble la solution à très longues périodes et les inégalités à courtes périodes sous forme de fonctions de cette solution à très longues périodes (bien sûr, on recherche cette dernière pour toutes les variables : p , q , z et ζ) ; on se propose de construire cette solution générale du problème planétaire dans le voisinage de la solution du système d'équations réduit aux seuls termes séculaires, appelé encore système autonome. On est ainsi amené à séparer dans les équations les termes périodiques, qui dépendent explicitement de t , et les autres, séculaires, qui n'en dépendent pas.

II - 2.- Séparation des termes périodiques.

En regroupant les variables $(p_i, q_i, z_i, \bar{z}_i, \zeta_i, \bar{\zeta}_i)$ pour $i = 1$ à N , dans une matrice V à $6N$ éléments, les équations (2.1) se condensent dans la notation :

$$(2.3) \quad \frac{dV}{dt} = \Lambda(V, t)$$

Λ est d'ordre 1, sauf pour les termes $\sqrt{-1} N_i p_i$ présents dans les seconds membres des équations $\frac{dq_i}{dt}$.

On cherche pour V une solution de la forme :

$$(2.4) \quad V(t) = V_0(t) + \Delta V(V_0, t)$$

qui devra donc satisfaire l'équation :

$$(2.5) \quad \frac{dV_0}{dt} + \frac{\partial \Delta V}{\partial V_0} \frac{dV_0}{dt} + \frac{\partial \Delta V}{\partial t} = \Lambda(V_0 + \Delta V, t).$$

On conduit sa résolution en séparant dans le second membre la partie autonome (ou séculaire), notée $\langle \Lambda \rangle$ et la partie non autonome, (qui dépend explicitement de t), notée $\{ \Lambda \}$, de façon à ce que V_0 et ΔV satisfassent les conditions suivantes : d'une part, V_0 représente la solution de cette équation réduite à sa partie autonome, exprimée sous forme de termes à très longues périodes uniquement dont les amplitudes sont numériques, et d'autre part ΔV représente la solution de cette équation réduite à sa partie non autonome, exprimée sous la forme de termes périodiques uniquement dont les amplitudes sont fonction des éléments de V_0 (de la même forme qu'en (1.26)). Ces conditions impliqueront pour ΔV d'être une solution particulière, d'ordre 1 au moins, et pour V_0 de contenir les constantes arbitraires d'intégration et donc des termes d'ordre 0.

Supposant alors que ΔV reste petit quel que soit t , on peut développer Λ en série de Taylor au voisinage de V_0 :

$$(2.6) \quad \Lambda(V, t) = \Lambda(V_0, t) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial V}\right)_0 \Delta V + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial V}\right)_0 \Delta V \right]^{(2)} + \dots$$

et on procède à l'identification suivante des parties autonome et non-autonome de ce développement avec le 1er membre de l'équation (2.5) :

$$(2.7) \quad \frac{dV_0}{dt} = \langle \Lambda(V_0, t) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial V}\right)_0 \Delta V + \dots \rangle = \Lambda(V_0) + \langle \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial V}\right)_0 \Delta V \rangle + \dots$$

$$(2.8) \quad \frac{\partial \Delta V}{\partial V_0} \frac{dV_0}{dt} + \frac{\partial \Delta V}{\partial t} = \{ \Lambda(V_0, t) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial V}\right)_0 \Delta V + \dots \} .$$

Par construction, le second membre de (2.7) ne contient que des termes séculaires, identifiés à $\frac{dV_0}{dt}$. A condition que ΔV ne contienne que des termes périodiques, $\frac{\partial \Delta V}{\partial t}$ et $\frac{\partial \Delta V}{\partial V_0}$ ne contiennent aussi que des termes périodiques, et le produit $\frac{\partial \Delta V}{\partial V_0} \frac{dV_0}{dt}$ également, ce qui justifie dans (2.8), l'identification de ces expressions avec le second membre qui ne contient par construction que des termes périodiques.

Pour construire et intégrer le système (2.7) et (2.8), on est amené à procéder par approximations successives ordonnées suivant les puissances croissantes des masses. Il est commode de poser :

$$(2.9) \quad \begin{aligned} V &= \Delta_0 V + \Delta_1 V + \Delta_2 V + \dots + \Delta_n V + \dots \\ V_0 &= V_0^{(0)} + V_0^{(1)} + \dots + V_0^{(n)} + \dots \end{aligned}$$

où $\Delta_n V$ et $V_0^{(n)}$ sont d'ordre n .

En notant $(p_{oi}, q_{oi}, z_{oi}, \bar{z}_{oi}, \zeta_{oi}, \bar{\zeta}_{oi})$ $i = 1$ à N les éléments de V_o et $(\Delta p_i, \Delta q_i, \Delta z_i, \Delta \bar{z}_i, \Delta \zeta_i, \Delta \bar{\zeta}_i)$ $i = 1$ à N ceux de ΔV , lorsqu'on reporte ces expressions dans les équations (2.7) et (2.8), on obtient pour chaque variable, d'abord à l'ordre 0 :

$$\frac{dp_{oi}^{(o)}}{dt} = 0 \quad \text{d'où } p_{oi}^{(o)} = \text{constante}$$

$$\frac{dq_{oi}^{(o)}}{dt} = \sqrt{-1} N_i p_{oi}^{(o)} \quad \text{d'où } q_{oi}^{(o)} = q_{oi}^o + \sqrt{-1} N_i p_{oi}^{(o)} t$$

(2.10)

$$\frac{dz_{oi}^{(o)}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\zeta_{oi}^{(o)}}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta_o p_i}{\partial V_o} \frac{dV_o^{(o)}}{dt} + \frac{\partial \Delta_o p_i}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta_o q_i}{\partial V_o} \frac{dV_o^{(o)}}{dt} + \frac{\partial \Delta_o q_i}{\partial t} = \sqrt{-1} N_i \Delta_o p_i$$

(2.11)

$$\frac{\partial \Delta_o z_i}{\partial V_o} \frac{dV_o^{(o)}}{dt} + \frac{\partial \Delta_o z_i}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta_o \zeta_i}{\partial V_o} \frac{dV_o^{(o)}}{dt} + \frac{\partial \Delta_o \zeta_i}{\partial t} = 0$$

La forme très simple des seconds membres de (2.11), permet d'adopter la solution particulière $\Delta_o V = 0$ (tout autre choix de constante entraînerait par la suite des termes proportionnels à t dans $\Delta_1 V, \Delta_2 V, \dots$).

A cause du terme $\sqrt{-1} N_i p_i$, d'ordre 0, dans l'équation relative à q_i , on est amené à identifier $\frac{dq_{oi}^{(o)}}{dt}$ à la constante $\sqrt{-1} N_i p_{oi}^{(o)}$, qui reste en principe arbitraire jusqu'à l'achèvement de la théorie et sa comparaison à l'observation : ayant traité un problème donné avec un certain choix de N_i (numériques) on détermine à la fin les constantes d'intégration, notamment les $p_{oi}^{(o)}$. On aurait pu traiter le même problème avec un autre choix N_i^* , et on déterminerait un autre $p_{oi}^{(o)*}$, mais, en vertu de la définition de la variable q_i ($\lambda_i = N_i t - \sqrt{-1} q_i$) le terme proportionnel à t doit être le même dans λ_i à l'issue de ces 2 traitements et donc on devra avoir :

$$N_i (1 + p_{oi}^{(o)}) = N_i^* (1 + p_{oi}^{(o)*}) = N_i^{**} .$$

En choisissant N_i^{**} , on obtiendrait un p_{oi}^{**} nul. C'est ce dernier choix qu'on a supposé être fait pour construire la théorie générale, choix qui simplifie beaucoup les équations puisqu'alors $\frac{dV_o^{(o)}}{dt}$ est nul ; il est d'ailleurs possible de faire ce choix en analysant les théories classiques existantes (voir paragraphe II.4). Ce choix implique aussi qu'on ne recherche pour les p_{oi} qu'une solution particulière.

Pour plus de généralité, nous écrirons cependant les équations à l'ordre 1 et 2 sans éliminer $\frac{dV_o^{(o)}}{dt}$, ce qui permettra de voir les difficultés qui apparaîtraient en plus si les constantes $p_{oi}^{(o)}$ étaient non nulles. On obtient :

$$\frac{dp_{oi}^{(1)}}{dt} = 0 \quad \implies \quad p_{oi}^{(1)} = \text{constante}$$

$$\frac{dq_{oi}^{(1)}}{dt} = \sqrt{-1} N_i p_{oi}^{(1)} + \langle \sqrt{-1} N_i \sum_j L_{ij}^{(2)}(p_o, z_o, \zeta_o) \rangle$$

(2.12)

$$\frac{dz_{oi}^{(1)}}{dt} = \langle \sqrt{-1} N_i \sum_j L_{ij}^{(3)}(p_o, z_o, \zeta_o) \rangle$$

$$\frac{d\zeta_{oi}^{(1)}}{dt} = \langle \sqrt{-1} N_i \sum_j L_{ij}^{(4)}(p_o, z_o, \zeta_o) \rangle$$

$$\sum_j \sqrt{-1} N_j p_{oj}^{(o)} \frac{\partial \Delta_1 p_i}{\partial q_{oj}} + \frac{\partial \Delta_1 p_i}{\partial t} = \sqrt{-1} N_i \sum_j L_{ij}^{(1)}(p_o, q_o, z_o, \zeta_o, t)$$

$$\sum_j \sqrt{-1} N_j p_{oj}^{(o)} \frac{\partial \Delta_1 q_i}{\partial q_{oj}} + \frac{\partial \Delta_1 q_i}{\partial t} = \sqrt{-1} N_i \Delta_1 p_i + \{ \sqrt{-1} N_i \sum_j L_{ij}^{(2)}(p_o, q_o, z_o, \zeta_o, t) \}$$

(2.13)

$$\sum_j \sqrt{-1} N_j p_{oj}^{(o)} \frac{\partial \Delta_1 z_i}{\partial q_{oj}} + \frac{\partial \Delta_1 z_i}{\partial t} = \{ \sqrt{-1} N_i \sum_j L_{ij}^{(3)}(p_o, q_o, z_o, \zeta_o, t) \}$$

$$\sum_j \sqrt{-1} N_j p_{oj}^{(o)} \frac{\partial \Delta_1 \zeta_i}{\partial q_{oj}} + \frac{\partial \Delta_1 \zeta_i}{\partial t} = \{ \sqrt{-1} N_i \sum_j L_{ij}^{(4)}(p_o, q_o, z_o, \zeta_o, t) \}$$

$$\frac{dp_{oi}^{(2)}}{dt} = \langle \sqrt{-1} N_i \sum_j \left(\frac{\partial L_{ij}^{(1)}}{\partial v} \right)_o \Delta_1 v \rangle = 0 \quad (\text{Théorème de Poisson})$$

$$\frac{dq_{oi}^{(2)}}{dt} = \sqrt{-1} N_i p_{oi}^{(2)} + \langle \sqrt{-1} N_i \sum_j \left(\frac{\partial L_{ij}^{(2)}}{\partial v} \right)_o \Delta_1 v \rangle$$

(2.14)

$$\frac{dz_{oi}^{(2)}}{dt} = \langle \sqrt{-1} N_i \sum_j \left(\frac{\partial L_{ij}^{(3)}}{\partial v} \right)_o \Delta_1 v \rangle$$

$$\frac{d\zeta_{oi}^{(2)}}{dt} = \langle \sqrt{-1} N_i \sum_j \left(\frac{\partial L_{ij}^{(4)}}{\partial v} \right)_o \Delta_1 v \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \sum_j \sqrt{-1} N_j p_{oj}^{(o)} \frac{\partial \Delta_2 p_i}{\partial q_{oj}} + \frac{\partial \Delta_2 p_i}{\partial t} &= \{ \sqrt{-1} N_i \sum_j \left(\frac{\partial L_{ij}^{(1)}}{\partial v} \right)_o \Delta_1 V \} - \frac{\partial \Delta_1 p_i}{\partial v_o} \frac{dv_o^{(1)}}{dt} \\
 \sum_j \sqrt{-1} N_j p_{oj}^{(o)} \frac{\partial \Delta_2 q_i}{\partial q_{oj}} + \frac{\partial \Delta_2 q_i}{\partial t} &= \sqrt{-1} N_i \Delta_2 p_i + \{ \sqrt{-1} N_i \sum_j \left(\frac{\partial L_{ij}^{(2)}}{\partial v} \right)_o \Delta_1 V \} - \frac{\partial \Delta_1 q_i}{\partial v_o} \frac{dv_o^{(1)}}{dt} \\
 (2.15) \quad \sum_j \sqrt{-1} N_j p_{oj}^{(o)} \frac{\partial \Delta_2 z_i}{\partial q_{oj}} + \frac{\partial \Delta_2 z_i}{\partial t} &= \{ \sqrt{-1} N_i \sum_j \left(\frac{\partial L_{ij}^{(3)}}{\partial v} \right)_o \Delta_1 V \} - \frac{\partial \Delta_1 z_i}{\partial v_o} \frac{dv_o^{(1)}}{dt} \\
 \sum_j \sqrt{-1} N_j p_{oj}^{(o)} \frac{\partial \Delta_2 \zeta_i}{\partial q_{oj}} + \frac{\partial \Delta_2 \zeta_i}{\partial t} &= \{ \sqrt{-1} N_i \sum_j \left(\frac{\partial L_{ij}^{(4)}}{\partial v} \right)_o \Delta_1 V \} - \frac{\partial \Delta_1 \zeta_i}{\partial v_o} \frac{dv_o^{(1)}}{dt}
 \end{aligned}$$

Dans ces équations, on a explicité le développement de la solution p_{oi} (en $p_{oi}^{(1)} + p_{oi}^{(2)} + \dots$), uniquement dans le terme $\sqrt{-1} N_i p_{oi}$. Il n'est pas utile de développer p_{oi} et les autres variables de V_o à l'intérieur des autres termes (dans $L_{ij}^{(e)}$ et ΔV) car la solution V_o pourra s'obtenir globalement en intégrant un système autonome unique rassemblant tous les ordres.

L'identification des éléments de $\Delta_1 V$ et de $\frac{dv_o^{(1)}}{dt}$ se fait donc simplement d'après la présence explicite d'une masse en facteur des termes du développement des $L_{ij}^{(e)}$ ($p_o, q_o, z_o, \zeta_o, t$), sans préjuger de la forme de la solution qu'on obtiendra pour les variables p_o, q_o, z_o et ζ_o .

Chaque terme des seconds membres des équations (2.13) a donc explicitement une masse en facteur. Il en est de même pour les équations (2.12), sauf pour celle relative à $q_{oi}^{(1)}$ qui contient le terme $\sqrt{-1} N_i p_{oi}^{(1)}$; ce terme contient une constante d'intégration non arbitraire, choisie pour éliminer les termes constants qui existent dans le développement de $\langle \sqrt{-1} N_i \sum_j L_{ij}^{(2)}(p_o, z_o, \zeta_o) \rangle$ et qui, sans cette élimination, donneraient des termes proportionnels à t dans $q_{oi}^{(1)}$; cette élimination revient à identifier la constante $p_{oi}^{(1)}$ à des

termes d'ordre 1, et donc $p_{oi}^{(1)}$ est d'ordre 1.

De même, chaque terme des seconds membres des équations (2.14) et (2.15) a explicitement un produit de 2 masses en facteur, sauf pour le terme $\sqrt{-1} N_i p_{oi}^{(2)}$, mais, comme à l'ordre 1, la constante d'intégration $p_{oi}^{(2)}$ est choisie pour éviter les termes proportionnels à t dans $q_{oi}^{(2)}$, de sorte que $p_{oi}^{(2)}$ est bien d'ordre 2.

Notons encore que tout ceci suppose que pour intégrer $\Delta_1 V$ et $\Delta_2 V$, on prenne des constantes d'intégration non arbitraires, choisies nulles.

II - 2.1.- Ordre 1.

a) Intégration de $\Delta_1 V$.

Les équations (2.13) sont de la forme suivante, en désignant par $\Delta\sigma$ l'une quelconque des fonctions Δp , Δz ou $\Delta\zeta$:

$$\sum_j \sqrt{-1} N_j p_{oj}^{(o)} \frac{\partial \Delta_1 \sigma_i}{\partial q_{oj}} + \frac{\partial \Delta_1 \sigma_i}{\partial t} = \sqrt{-1} N_i \sum_{k_i, k_j} C_{k_i, k_j}(p_o, z_o, \zeta_o) \exp(k_i q_{oi} + k_j q_{oj}) \exp \sqrt{-1} (k_i N_i + k_j N_j) t$$

(2.16)

où k_i et k_j ne sont jamais tous deux nuls. La solution d'une telle équation est donnée, terme à terme, par :

$$\Delta_1 \sigma_i = \sum_{k_i, k_j} \frac{N_i}{k_i N_i (1+p_{oi}^{(o)}) + k_j N_j (1+p_{oj}^{(o)})} C_{k_i, k_j}(p_o, z_o, \zeta_o) \times \exp(k_i q_{oi} + k_j q_{oj}) \exp \sqrt{-1} (k_i N_i + k_j N_j) t.$$

(2.17)

$\Delta_1 q_i$ contient des termes de la même forme, plus d'autres ayant en facteur $\frac{N_i^2}{[k_i N_i (1+p_{oi}^{(o)}) + k_j N_j (1+p_{oj}^{(o)})]^2}$ provenant de la deuxième intégration

de $\Delta_1 p_i$.

Avec des $p_{oi}^{(o)}$ et $p_{oj}^{(o)}$ nuls, ces dénominateurs se simplifient évidemment.

Avec des $p_{oi}^{(o)}$ et $p_{oj}^{(o)}$ non nuls, conservés sous forme littérale, on serait amené à mettre ces dénominateurs sous la forme :

$$(k_i N_i + k_j N_j)(1 + \rho_{k_i k_j})$$

avec :

$$\rho_{k_i k_j} = \frac{k_i N_i p_{oi}^{(o)} + k_j N_j p_{oj}^{(o)}}{k_i N_i + k_j N_j} .$$

Dans ce cas, le développement de $\frac{1}{1 + \rho_{k_i k_j}}$ pourrait ne pas être convergent si les $p_{oi}^{(o)}$ et $p_{oj}^{(o)}$ étaient trop grands, surtout dans le cas des inégalités (k_i, k_j) à longues périodes (ou à petits diviseurs $k_i N_i + k_j N_j$). Ceci ne fait que mettre en évidence les instabilités qu'on pourrait avoir dans les termes à longues périodes de la solution, si, à la fin, on devait modifier la valeur des N_i par l'intermédiaire de $p_{oi}^{(o)}$ non nuls.

b) Le système autonome $\frac{dV_o^{(1)}}{dt}$.

Les équations (2.12) rassemblent dans leurs seconds membres les termes séculaires des développements $L_{ij}^{(e)}$. On étudiera leur forme et la façon de les

intégrer dans le paragraphe II.3, en même temps que $\frac{dV_o^{(2)}}{dt}$, $\frac{dV_o^{(3)}}{dt}$,

après avoir regroupé les contributions des divers ordres dans un système autonome unique $\frac{dV_o}{dt}$. Rappelons seulement que les termes séculaires étant ceux

pour lesquels k_i et k_j sont tous deux nuls, les seconds membres de (2.12) ne dépendent ni du temps ni des variables q_{oi} et q_{oj} .

II - 2.2.- Ordre 2.

a) Intégration de $\Delta_2 V$.

Connaissant $\frac{dV_o^{(1)}}{dt}$ et la solution $\Delta_1 V$, on voit que les seconds

membres des équations (2.14) et (2.15) relatives à l'ordre 2 sont complètement

déterminés : le produit des termes séculaires identifiés à $\frac{dV_o^{(1)}}{dt}$, avec les

termes $\frac{\partial \Delta_1 \sigma_i}{\partial V_o}$, tous périodiques, donne des termes périodiques ; c'est pour-

quoi les expressions $\frac{\partial \Delta_1 \sigma_i}{\partial V_o} \frac{dV_o^{(1)}}{dt}$ n'apparaissent que dans les seconds membres

des équations (2.15) relatives à $\Delta_2 V$. Ces termes appartiennent aux mêmes iné-

galités qu'on trouve à l'ordre 1 dans $\Delta_1 \sigma_i$, associées aux combinaisons

$k_i N_i + k_j N_j$ de N_i et d'un N_j (cf. (2.17)), mais leurs monômes peuvent

dépendre des variables associées à 3 planètes : en effet, $\frac{\partial \Delta_1 \sigma_i}{\partial V_o} \frac{dV_o^{(1)}}{dt}$ est égal

à $\sum_{(\sigma_o)} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial \Delta_1 \sigma_i}{\partial \sigma_{ok}} \frac{d\sigma_{ok}^{(1)}}{dt} \right) (\sigma_o = p_o, q_o, z_o, \bar{z}_o, \zeta_o, \bar{\zeta}_o)$ et dans cette expression,

chaque terme de $\Delta_1 \sigma_i$ dépend de 2 indices (ou 2 planètes) i et j et chaque

terme de $\frac{d\sigma_{oi}^{(1)}}{dt}$ (resp. $\frac{d\sigma_{oj}^{(1)}}{dt}$) dépend de 2 indices i et k (resp. j et k)

où k est éventuellement égal à j (resp. i). En combinant les relations de

la forme (1.23) ou (1.27) relatives à chaque facteur d'un tel produit, on mon-

trerait facilement que la somme $k_i + k_j$ est encore de la forme (1.23) ou (1.27),

égale à la somme des exposants des variables \bar{z} et $\bar{\zeta}$, moins celle des expo-

sants des variables z et ζ . L'intégration s'effectue terme à terme comme en (2.17).

Remarquons que l'expression $\frac{\partial \Delta_1 \sigma_i}{\partial q_{ok}} \frac{dq_{ok}^{(1)}}{dt}$ donne un terme de la forme $\sqrt{-1} N_k p_{ok}^{(1)} \frac{\partial \Delta_1 \sigma_i}{\partial q_{ok}}$; pour l'inégalité (k_i, k_j) de $\Delta_1 \sigma_i$, notée $\Delta_1 \sigma_i(k_i, k_j)$

(contenant le facteur $\exp(k_i q_{oi} + k_j q_{oj})$), il en résulte qu'à l'ordre 2, l'inégalité $\Delta_2 \sigma_i(k_i, k_j)$ contient un terme égal à :

$$(2.18) \quad \frac{k_i N_i p_{oi}^{(1)} + k_j N_j p_{oj}^{(1)}}{k_i N_i + k_j N_j} \Delta_1 \sigma_i(k_i, k_j) .$$

Cette même inégalité dans $\Delta_2 q_i$ contient des termes de la même forme, plus d'autres résultant de la double intégration de $\Delta_2 p_i$:

$$\frac{N_i (k_i N_i p_{oi}^{(1)} + k_j N_j p_{oj}^{(1)})}{(k_i N_i + k_j N_j)^2} \Delta_1 p_i(k_i, k_j) .$$

Il faudra s'assurer que les $p_{oi}^{(1)}$ et $p_{oj}^{(1)}$ sont suffisamment petits pour que le rapport $\frac{k_i N_i p_{oi}^{(1)} + k_j N_j p_{oj}^{(1)}}{k_i N_i + k_j N_j}$ soit petit même dans le cas de petits diviseurs. En fait, on verra en II.3.3 que les $p_{oi}^{(1)}$ et $p_{oj}^{(1)}$ seront calculés pour éliminer les termes constants des équations relatives à $q_{oi}^{(1)}$ et $q_{oj}^{(1)}$, de sorte que les termes tels qu'en (2.18) s'éliminent aussi avec les termes constants de ces équations.

Quant aux autres termes $(\frac{\partial L_{ij}}{\partial V})_0 \Delta_1 V$, présents dans les équations (2.15), on verrait par un raisonnement analogue au précédent qu'ils dépendent aussi des variables associées à 3 planètes au plus, mais qu'ils peuvent appar-

tenir à des nouvelles inégalités combinant 3 fréquences N , de la forme $k_i N_i + k_j N_j + k_l N_l$. Ces termes s'intègrent aussi comme en (2.17), toujours avec une constante d'intégration non arbitraire, choisie nulle pour ne pas introduire de termes d'ordre 0 dans la solution d'ordre 2. Notons que si les $p_{oi}^{(0)}$ sont non nuls, la construction pratique de l'ordre 2 nécessite de développer par rapport aux $p_{oi}^{(0)}$ et $p_{oj}^{(0)}$ les expressions ρ_{k_i, k_j} dans les diviseurs de $\Delta_1 \sigma_i$ (cf. (2.17)) ; or, on ne sait pas si ces développements convergeront dans le cas de petits diviseurs.

b) Le système autonome $\frac{dV_o^{(2)}}{dt}$.

Dans les produits $(\frac{\partial L_{ij}}{\partial V})_o \Delta_1 V$, lorsqu'un terme de $(\frac{\partial L_{ij}}{\partial V})_o$ appar-

tenant à une inégalité (k_i, k_j) vient en facteur d'un terme de $\Delta_1 V$ appartenant à l'inégalité opposée $(-k_i, -k_j)$, on obtient un terme séculaire d'ordre 2

qu'on associe à $\frac{dV_o^{(2)}}{dt}$. Remarquons que les termes séculaires de $(\frac{\partial L_{ij}}{\partial V})_o$

n'apportent pas de contribution à $\frac{dV_o^{(2)}}{dt}$ puisque $\Delta_1 V$ ne contient pas de terme séculaire.

On verra dans le chapitre IV que ce sont les termes à longues périodes

d'ordre 1 qui engendrent l'essentiel des termes de $\frac{dV_o^{(2)}}{dt}$, notamment en ce

qui concerne les parties non linéaires de $\frac{dV_o^{(2)}}{dt}$; ces dernières sont, pour

certaines, supérieures aux parties correspondantes de $\frac{dV_o^{(1)}}{dt}$, ce qui pose

un problème de convergence dans l'obtention de la solution à très longue période du système autonome.

La structure de ce système d'ordre 2 est identique à celle d'ordre 1, grâce au théorème de Poisson qu'on verra plus loin, qui assure la nullité de

$\frac{dp_{oi}^{(2)}}{dt}$ (voir le paragraphe II.3 pour l'intégration du système autonome).

II - 2.3.- Les ordres supérieurs à 2.

Ayant obtenu $\Delta_2 V$ et $\frac{dV_o^{(2)}}{dt}$, on peut ensuite construire le 3ème

ordre ; on opère pour cela la séparation des termes périodiques, donnée ci-dessous à titre d'exemple pour l'équation en p :

$$(2.19) \quad \frac{dp_{oi}^{(3)}}{dt} = \left\langle \sqrt{-1} N_i \sum_j \left(\frac{\partial L_{ij}^{(1)}}{\partial V} \right)_o \Delta_2 V + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial L_{ij}^{(1)}}{\partial V} \right)_o \Delta_1 V \right]^{(2)} \right\rangle$$

$$(2.20) \quad \frac{\partial \Delta_3 p_i}{\partial t} = \left\{ \sqrt{-1} N_i \sum_j \left(\frac{\partial L_{ij}^{(1)}}{\partial V} \right)_o \Delta_2 V + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial L_{ij}^{(1)}}{\partial V} \right)_o \Delta_1 V \right]^{(2)} \right\} \\ - \frac{\partial \Delta_1 p_i}{\partial V_o} \frac{dV_o^{(2)}}{dt} - \frac{\partial \Delta_2 p_i}{\partial V_o} \frac{dV_o^{(1)}}{dt}$$

Au contraire de ce qu'on avait aux deux ordres précédents on ne sait pas si le second membre de (2.19) est aussi rigoureusement nul ; s'il n'est pas nul, on sait seulement que puisqu'il regroupe des termes de caractéristique 0 de l'équation $\frac{dp}{dt}$, il ne contiendra que des termes de degré pair mais

sans terme de degré 0 car un tel terme ne peut pas être imaginaire pur (or le développement de $L_{ij}^{(1)}$ est imaginaire pur). La constante d'intégration qu'on introduit dans $p_{oi}^{(3)}$ est choisie, comme aux deux ordres précédents,

pour éliminer le terme constant de l'équation $\frac{dq_{oi}^{(3)}}{dt}$, évitant ainsi un terme

proportionnel à t dans $q_{oi}^{(3)}$. On opèrerait de la même façon aux ordres supérieurs.

Quant aux équations donnant $\Delta_3 V$, leur intégration s'opère terme à terme, comme aux deux ordres précédents, avec des constantes d'intégration non arbitraires choisies nulles. Notons cependant que, par exemple les termes

$$\frac{\partial \Delta_1 p_i}{\partial V_o} \frac{dV_o^{(2)}}{dt} \quad \text{dans (2.20) donneront en particulier des termes de la forme sui-}$$

vante dans $\Delta_3 p_i$:

$$\frac{k_i N_i p_{oi}^{(2)} + k_j N_j p_{oj}^{(2)}}{k_i N_i + k_j N_j} \Delta_1 p_i(k_i, k_j).$$

Ces termes pourront s'associer aux termes d'ordre 2 de la même forme qu'en (2.18), grâce à la mise en facteurs suivante :

$$\frac{k_i N_i (p_{oi}^{(1)} + p_{oi}^{(2)}) + k_j N_j (p_{oj}^{(1)} + p_{oj}^{(2)})}{k_i N_i + k_j N_j} \Delta_1 p_i(k_i, k_j).$$

On aurait des termes de la même forme aux ordres supérieurs, ce qui montre que pour les seuls termes ayant nécessité le développement des p_{oi} ordre par ordre, on n'aura besoin finalement que de la somme $p_{oi}^{(1)} + p_{oi}^{(2)} + \dots$ dont une détermination globale suffira donc.

On peut ainsi construire ordre par ordre l'ensemble des termes périodiques de la solution générale ΔV , et en même temps on construit le système autonome $\frac{dV_o}{dt}$ également ordre par ordre en respectant les conditions

qu'on s'était fixées sur la forme de ΔV et de $\frac{dV_o}{dt}$. Remarquons qu'on n'a

pas besoin de connaître la solution du système autonome pour calculer ΔV .

On effectue la résolution de ce dernier en y rassemblant tous les ordres, seulement quand on estime l'avoir construit suffisamment loin en ordre : on se base pour cela sur l'importance de la contribution de chaque ordre par rapport à celle des ordres précédents, ce qui permet de juger de la convergence pratique de la méthode. C'est seulement au cours de cette résolution qu'on introduit les constantes d'intégration de la solution générale ; le fait qu'elles apparaissent à ce stade avancé du calcul facilite évidemment les modifications qu'on pourrait être amené à leur apporter (voir le paragraphe II.4).

II - 3.- Résolution du système autonome.

Cette résolution s'effectue évidemment en tenant compte des particularités et des propriétés des seconds membres du système autonome. Avant de voir comment résoudre, examinons ces propriétés, et en particulier le théorème de Poisson qui simplifie notablement les équations relatives aux p_{oi} .

II - 3.1.- Théorème de Poisson.

Ce théorème établit les égalités suivantes :

$$\frac{dp_{oi}^{(1)}}{dt} = \frac{dp_{oi}^{(2)}}{dt} = 0 \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } N.$$

Celles-ci sont équivalentes à l'absence de perturbation séculaire dans l'expression des demi-grands axes aux ordres 1 et 2. A l'ordre 1, l'annulation de $\frac{dp_{oi}^{(1)}}{dt}$ est immédiate puisque $\frac{dp_i}{dt}$, proportionnel à $\frac{\partial R_i}{\partial q_i}$ ne contient que des termes périodiques.

A l'ordre 2, la démonstration est bien moins aisée ; on la considère comme acquise au moins depuis Tisserand (1873) et pourtant, elle fut remise en

question récemment par la découverte faite par J.L. Simon (1975)* de termes séculaires très petits mais non nuls dans l'expression des demi-grands axes héliocentriques de Jupiter et de Saturne à la 2ème approximation de sa théorie qui reprend en l'améliorant, celle de Le Verrier. On trouvera dans l'annexe 3 une nouvelle démonstration du théorème de Poisson, adaptée au cas des variables héliocentriques, qui montre que ces termes séculaires apparemment d'ordre 2 sont en fait d'ordre 3, et qu'on peut les éliminer de la 2ème approximation en choisissant les éléments osculateurs d'ordre zéro définis dans le premier chapitre, avec la fonction perturbatrice (1.7) qui découle de ce choix.

Donnons cependant ici les points essentiels qui ressortent de cette démonstration : on met en évidence qu'une théorie planétaire dans laquelle on utilise dès le début les valeurs numériques des moyens mouvements et des demi-grands axes, contient des termes dépendant implicitement des masses, si ces moyens mouvements et ces demi-grands axes sont reliés entre eux par une 3ème loi de Kepler faisant intervenir les masses planétaires (elles-mêmes numériques bien sûr). Alors, on trouve qu'à la deuxième approximation (apparemment d'ordre 2, mais contenant en fait de l'ordre 2, 3, 4, ...) il reste dans l'équation :

$$\frac{dp_{oi}^{(2)}}{dt} = \langle \sqrt{-1} N_i \sum_j \left(\frac{\partial L_{ij}^{(1)}}{\partial v} \right)_o \Delta_1 v \rangle$$

des termes de la forme :

$$\sqrt{-1} N_i \sum_{j \neq i} m_i m_j (m_i - m_j) [c_{ij} (z_{oi} \bar{z}_{oj} - z_{oj} \bar{z}_{oi})$$

+ des termes de degré 4, 6, ...]

(analogues aux expressions (50) et (51) de l'annexe 3), dans lesquels le facteur $(m_i - m_j)$ n'apparaît pas explicitement mais est inclus numériquement dans la constante c_{ij} et dans celle des termes de degré supérieur ; ces constantes

(*) Communication privée ; voir aussi J.L. Simon et P. Bretagnon (1978).

dépendent du rapport des grands axes et des moyens mouvements, ainsi que des masses planétaires par l'intermédiaire de la 3ème loi de Kepler. On met ce facteur $(m_i - m_j)$ en évidence lorsqu'on constate que les coefficients de ces termes s'annulent lorsque les masses sont égales, ou encore lorsqu'on utilise, pour calculer les grands axes, une 3ème loi de Kepler dont la constante est la même pour toutes les planètes (voir tableau 1, Annexe 3). On trouvera en outre dans cette annexe une démonstration analytique de cette annulation.

Finalement, il suffit d'éviter la construction de termes dont les coefficients dépendent implicitement des masses pour que le théorème de Poisson soit valable en variables héliocentriques, d'où le choix des éléments osculateurs d'ordre zéro ; on aurait pu cependant conserver les éléments osculateurs classiques à condition de conserver analytiquement les masses, même dans la 3ème loi de Kepler, en développant par exemple le demi-grand axe sous forme :

$$a = \left(\frac{GM_{\odot}}{n^2}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{m}{M_{\odot}} - \frac{1}{9} \frac{m^2}{M_{\odot}^2} + \dots\right)$$

mais au prix d'une plus grande complexité du développement de la fonction perturbatrice. L'absence de dépendance implicite des masses est nécessaire par ailleurs pour pouvoir faire convenablement les identifications de termes ordre par ordre, dont on se sert fondamentalement pour construire la théorie générale planétaire.

II - 3.2.- Forme du système autonome.

Le système autonome rassemble tous les termes séculaires de tous les ordres ; ces termes ne dépendent pas des variables q_{oi} ($i = 1$ à N) ; les seconds membres des équations du système autonome ne dépendent donc que des p_{oi} , z_{oi} , \bar{z}_{oi} , ζ_{oi} et $\bar{\zeta}_{oi}$ ($i = 1$ à N) ; le système autonome se présente alors ainsi :

$$(2.21) \quad \frac{dp_{oi}}{dt} = \sqrt{-1} N_i K_i^{(1)}(p_o, z_o, \zeta_o)$$

$$(2.22) \quad \frac{dq_{oi}}{dt} = \sqrt{-1} N_i p_{oi} + \sqrt{-1} N_i K_i^{(2)}(p_o, z_o, \zeta_o)$$

$$(2.23) \quad \frac{dz_{oi}}{dt} = \sqrt{-1} N_i K_i^{(3)}(p_o, z_o, \zeta_o)$$

$$(2.24) \quad \frac{d\zeta_{oi}}{dt} = \sqrt{-1} N_i K_i^{(4)}(p_o, z_o, \zeta_o) \quad (i = 1 \text{ à } N)$$

Vu les propriétés de parité des développements des inégalités séculaires (cf. chapitre I) le développement $K_i^{(1)}(p_o, z_o, \zeta_o)$ est imaginaire pur, d'ordre 3 au moins (théorème de Poisson), et de degré pair au moins égal à 2 ; le développement $K_i^{(2)}(p_o, z_o, \zeta_o)$ est réel, d'ordre 1 au moins, de degré pair (éventuellement égal à 0) ; les développements $K_i^{(3)}$ et $K_i^{(4)}$ sont complexes d'ordre 1 et de degré impair (éventuellement égal à 1). $K_i^{(1)}$, $K_i^{(2)}$ et $K_i^{(3)}$ sont pairs par rapport aux inclinaisons tandis que $K_i^{(4)}$ est impair.

De ceci on déduit en particulier que les parties de degré 1 dans $\frac{dz_{oi}}{dt}$ ne dépendent que des variables p_{oj} et z_{oj} ($j = 1 \text{ à } N$) et que les parties de degré 1 dans $\frac{d\zeta_{oi}}{dt}$ ne dépendent que des variables p_{oj} et ζ_{oj} ($j = 1 \text{ à } N$).

Ces propriétés entraînent que les équations (2.21) s'intègrent immédiatement par quadrature si on limite leur second membre aux ordres 1 et 2. Les équations (2.22) s'intégreront par quadrature dès que les solutions p_{oi} , z_{oi} et ζ_{oi} ($i = 1 \text{ à } N$) seront connues. Les équations (2.21), (2.23) et (2.24) doivent être considérées ensemble si l'ordre n'est pas limité ; cependant, si on se limite aux ordres 1 et 2, les p_{oi} étant connus, il restera à intégrer

ensemble les équations (2.23) et (2.24). (On peut, en outre, séparer, d'une part les équations relatives aux z_{oi} , et d'autre part, celles relatives aux ζ_{oi} , si on limite leurs seconds membres au degré 1). Or, la connaissance des p_{oi} nécessite la détermination du terme constant des $K_i^{(2)}$, mais les termes de degré 2, 4... pourront donner également d'autres termes constants à l'issue de la substitution des solutions z_{oi} , \bar{z}_{oi} , ζ_{oi} et $\bar{\zeta}_{oi}$ ($i = 1$ à N) dans $K_i^{(2)}$. Si on veut éviter les termes proportionnels à t dans q_{oi} , il faut éliminer ces nouveaux termes constants par le bon choix des constantes d'intégration des solutions p_{oi} . Comme les solutions z_{oi} et ζ_{oi} sont inconnues au départ, la détermination de ces constantes devra se faire par approximations successives en partant par exemple de l'approximation $z_{oi} = \zeta_{oi} = 0$ qui revient à ne conserver du développement de $K_i^{(2)}$ que les termes de degré 0.

II. 3.3.- Algorithme de résolution du système autonome.

On s'intéresse ici à la résolution du système autonome limité aux ordres 1 et 2, et qui serait aussi valable aux ordres supérieurs si on trouvait que $\frac{dp_{oi}}{dt}$ était nul au-delà de l'ordre 2. On adopte l'algorithme d'intégration suivant, qui procède par approximations successives en évitant d'introduire des termes proportionnels à t dans les solutions. Notons que pour la résolution de ce système autonome, les masses doivent être remplacées par leur valeur numérique (voir tableau 2).

Pas 1. Détermination des p_{oi} .

a) initialisation : les constantes p_{oi} , solutions des équations (2.21) réduites à l'ordre 2, doivent éliminer le terme constant des équations (2.22). Ne connaissant pas au début les solutions z_o et ζ_o , on calcule la 1ère approximation de ces constantes comme étant opposée aux termes de degré zéro de $K_i^{(2)}(p_o, z_o, \zeta_o)$ (ce qui revient à faire $z_{oi} = \zeta_{oi} = 0$ pour tout i en 1ère approximation) ; ces termes sont développés en série entière des

variables p_{oi} , à partir du grade 0.

b) calcul : on résout par approximations successives un système de N équations, non linéaires, à N inconnues :

$$(2.25) \quad p_{oi} = -K_i^{(2)}(p_{o1}, p_{o2}, \dots, p_{oN}) \quad i = 1 \text{ à } N$$

en substituant dans les second membres de (2.25) les approximations successives à partir de l'approximation $p_{oi} = 0$.

Pas 2. Détermination des z_{oi} et ζ_{oi} .

On reporte la valeur des p_{oi} obtenue au pas 1, dans les équations (2.23) et (2.24) ; on en recherche une solution sous forme d'une somme de termes périodiques à très longues périodes, par la méthode qui sera exposée dans le paragraphe II.3.4. On obtient (cf. (2.46) et (2.47)) :

$$(2.26) \quad z_{oi} = \sum_k A_{ik} \exp \sqrt{-1} c_k t$$

$$\zeta_{oi} = \sum_k B_{ik} \exp \sqrt{-1} d_k t$$

les c_k et les d_k sont des nombres réels du même ordre de grandeur que les masses (avec une unité de temps de l'ordre des périodes de révolution des planètes), qui sont des combinaisons linéaires de $2N$ fréquences λ_{oj} elles-mêmes de l'ordre des masses ; l'indice k ne sert qu'à numéroter ces combinaisons. Les amplitudes A_{ik} et B_{ik} sont des nombres complexes dont les modules sont d'ordre zéro des masses ; elles sont déterminées de façon à ce que pour $t = 0$, z_{oi} et ζ_{oi} soient égaux à certaines valeurs moyennes des variables z_i et ζ_i (voir le paragraphe II.4 sur les constantes d'intégration). Les plus grandes de ces amplitudes sont de l'ordre des excentricités et des inclinaisons.

Pas 3. Report dans l'équation $\frac{dq_{oi}}{dt}$.

Reportant les solutions p_{oi} , z_{oi} , ζ_{oi} dans l'équation (2.22), il reste à effectuer une quadrature pour obtenir q_{oi} . Cependant, ce report entraîne l'apparition de nouveaux termes indépendants du temps car parmi les termes de degré 2 par exemple, un produit tel que $z_{oi}\bar{z}_{oi}$ (qui appartient à l'inégalité séculaire dans cette équation) donne le terme constant : $\sum_k A_{ik}\bar{A}_{ik}$.

On absorbe ces nouveaux termes constants dans les constantes p_{oi} , en reprenant au pas 1, b) la résolution du système (2.25) complété par ces nouveaux termes. D'un point de vue analytique, ces termes sont au moins de degré 2 et d'ordre 1 ce qui est confirmé numériquement (cf. IV.2.1.) ; les modifications des p_{oi} sont alors très minimes. On recalcule ensuite les z_{oi} et ζ_{oi} dans le pas 2, avec les nouvelles valeurs des p_{oi} , puis on reprend le pas 3, et on boucle ainsi jusqu'à ce que les p_{oi} ne soient plus modifiés d'une itération à la suivante. Il reste alors à effectuer le pas 4 :

Pas 4. détermination des q_{oi} .

Ayant reporté les solutions p_{oi} , z_{oi} et ζ_{oi} dans l'équation (2.22), et ayant éliminé les termes constants de cette équation, il reste dans le second membre une fonction du temps, de la forme :

$$(2.27) \quad \frac{dq_{oi}}{dt} = \sqrt{-1} \sum_j [C_{ij} \exp \sqrt{-1} f_j t + \bar{C}_{ij} \exp -\sqrt{-1} f_j t]$$

où l'indice j numérote les combinaisons f_j non nulles des fréquences c_k et d_k introduites dans les solutions (2.26) de z_{oi} et ζ_{oi} . Comme ces fréquences, les f_j sont de l'ordre des masses ; les coefficients C_{ij} sont de l'ordre du produit d'une masse par le carré d'excentricités ou d'inclinaisons, comme les termes de $K_i^{(2)}$ dont ils sont issus. L'intégration de cette

équation donne alors des termes d'ordre 0 des masses mais qui sont de l'ordre du carré des excentricités et des inclinaisons :

$$(2.28) \quad q_{oi} = q_{oi}^0 + \sum_j \left[\frac{C_{ij}}{f_j} \exp \sqrt{-1} f_j t - \frac{\bar{C}_{ij}}{f_j} \exp -\sqrt{-1} f_j t \right]$$

la détermination de la constante d'intégration q_{oi}^0 sera étudiée au paragraphe II.4.

Remarque : On peut proposer une forme différente pour les solutions $\Delta_1 p_i$ en y admettant des termes séculaires (ne dépendant que des variables p_{oi} , z_{oi} et ζ_{oi}) (Duriez 1978) : on peut en effet ajouter à la solution de l'équation (2.13) (aux dérivées partielles par rapport à t et par rapport aux q_{oi}) relative aux $\Delta_1 p_i$, une fonction arbitraire "séculaire", ne dépendant que des p_{oi} , z_{oi} et ζ_{oi} . Si on admet des termes séculaires dans la somme $\{\sum L_{ij}^{(2)}\}$ de l'équation (2.13) relative aux $\Delta_1 q_i$, on peut les éliminer en choisissant les fonctions séculaires introduites dans $\Delta_1 p_i$ opposées à ces termes séculaires. Ces fonctions séculaires $\langle \Delta_1 p_i \rangle$ correspondent au développement analytique (par rapport aux variables p_{oi} , z_{oi} et ζ_{oi}) de la perturbation constante du demi-grand axe qu'on introduit dans les théories classiques à variations séculaires pour ne pas avoir à modifier le terme proportionnel à t dans la longitude moyenne. En reportant la solution du système autonome relative aux p_{oi} , z_{oi} et ζ_{oi} dans la fonction séculaire de $\Delta_1 p_i$, on obtiendrait des termes à très longues périodes dans $\Delta_1 p_i$. Cette forme de solution pour $\Delta_1 p_i$ convient à l'ordre 1, mais elle entraîne l'inconvénient

de produire à l'ordre 2 des termes non nuls dans $\frac{dp_{oi}^{(2)}}{dt}$ égaux à

$$-\frac{\partial \langle \Delta_1 p_i \rangle}{\partial v_o} \frac{dv_o^{(1)}}{dt}, \text{ soit encore à } \frac{\partial \langle \sum L_{oi}^{(2)} \rangle}{\partial v_o} \frac{dv_o^{(1)}}{dt}.$$

L'intégration des équations $\frac{dp_{oi}^{(2)}}{dt}$ n'est alors plus immédiate.

II - 3.4.- Intégration des équations $\frac{dz_{oi}}{dt}$ et $\frac{d\zeta_{oi}}{dt}$.

Après avoir substitué la valeur des constantes p_{oi} dans les équations (2.23) et (2.24), et en notant X la matrice colonne formée des $2N$ variables z_{oi} et ζ_{oi} , on peut regrouper ces équations sous la forme matricielle suivante, séparant les termes linéaires des autres :

$$(2.30) \quad \frac{dX}{dt} = \sqrt{-1} A X + \sqrt{-1} F(X, \bar{X})$$

Grâce aux lacunes mentionnées au paragraphe II.3.2, en rangeant les éléments de X dans l'ordre :

$$X = \begin{bmatrix} z_{o1} \\ z_{o2} \\ \vdots \\ z_{oN} \\ \zeta_{o1} \\ \vdots \\ \zeta_{oN} \end{bmatrix}$$

la matrice A est diagonale par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

où A_1 et A_2 sont des matrices réelles carrées $N \times N$. La matrice colonne F a pour éléments des développements à coefficients réels, de degré impair

au moins égal à 3 des variables z_{oi} , \bar{z}_{oi} , ζ_{oi} et $\bar{\zeta}_{oi}$ ($i = 1$ à N). Les matrices A et F sont d'ordre 1 au moins (on y a rassemblé les contributions de tous les ordres) ; numériquement, pour les 4 grosses planètes les éléments de A ne dépassent pas 19"/an (cf. tableaux 9a et 9b).

Les matrices A_1 et A_2 ont leurs valeurs propres toutes réelles ; on pourrait en effet les mettre sous une forme symétrique par un changement homothétique des variables. (*) Les valeurs propres dépendent des valeurs données aux masses et aux demi-grands axes. Pour celles qu'on observe dans le système planétaire, les valeurs propres sont toutes distinctes, mais on pourrait très bien obtenir des valeurs propres égales pour une répartition différente de ces masses et de ces grands axes (Duriez, 1971). Une des valeurs propres de A_2 est nulle ; ceci n'est qu'une conséquence de ce que les équations en inclinaison ne sont pas indépendantes, les perturbations dépendant en fait des inclinaisons mutuelles.

Soient L la matrice diagonale des $2N$ valeurs propres ℓ_i de A , P la matrice de ses vecteurs propres et P^{-1} son inverse. P et P^{-1} sont réelles et ont la même forme diagonale par blocs que A . On prend des vecteurs propres normés à 1 pour des raisons de bon conditionnement des calculs numériques.

Le changement de variables $X = PY$ conduit à la nouvelle équation matricielle :

$$(2.31) \quad \frac{dY}{dt} = \sqrt{-1} L Y + \sqrt{-1} P^{-1} F(PY, P\bar{Y}).$$

Si on la limitait à sa partie linéaire, on obtiendrait la solution de Laplace-Lagrange, à très longues périodes puisque les valeurs propres sont petites (elles sont du même ordre de grandeur que les éléments de la matrice A) :

(*) cf. Tisserand p. 408.

$$(2.32) \quad Y = \exp \sqrt{-1} L t Y(0)$$

où $\exp \sqrt{-1} L t$ désigne la matrice diagonale d'éléments $\exp \sqrt{-1} \ell_i t$ et où $Y(0)$ est la valeur de Y pour $t = 0$, déduite de celle $X(0)$ de X , supposée connue à cet instant : $Y(0) = P^{-1}X(0)$; ayant normé les vecteurs propres, les éléments de $Y(0)$ sont de l'ordre des excentricités et des inclinaisons comme ceux de $X(0)$, et sont donc petits dans le problème des grosses planètes. Or, la partie des équations qu'on vient de négliger est de degré 3 au moins par rapport aux variables Y et \bar{Y} ; par rapport à la partie linéaire, les coefficients des termes présents dans cette partie sont donc multipliés par des quantités qui seront de l'ordre du carré des excentricités et des inclinaisons. On va alors considérer cette partie comme une perturbation du système linéaire, caractérisée par un coefficient ε petit, de l'ordre du carré des excentricités et des inclinaisons, qu'on pourrait mettre en facteur de la partie non linéaire en normalisant les variables Y , d'où l'équation :

$$(2.33) \quad \frac{dY}{dt} = \sqrt{-1} L Y + \varepsilon \sqrt{-1} G(Y, \bar{Y}).$$

Dans cette notation, ε ne sert qu'à marquer le terme perturbateur.

Nous allons rechercher une solution par approximations successives ordonnées suivant les puissances de ε , en nous efforçant de ne pas introduire de termes autres que périodiques, ce qui impose de modifier les fréquences (ou valeurs propres) de la solution de Laplace-Lagrange. Pour cela, posons :

$$(2.34) \quad Y = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \dots$$

$$L = \Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1 + \varepsilon^2 \Lambda_2 + \dots$$

Soit encore :

$$\ell_i = \lambda_{0i} + \varepsilon \lambda_{1i} + \varepsilon^2 \lambda_{2i} + \dots \quad i = 1 \text{ à } 2N$$

et il s'agit de déterminer les $\varepsilon^i Y_i$ et les $\varepsilon^i \Lambda_i$ de sorte que Y vérifie l'équation (2.33) en restant quasi-périodique ; on obtient :

$$(2.36) \quad \frac{dY_0}{dt} + \varepsilon \frac{dY_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dY_2}{dt} + \dots = \sqrt{-1}(\Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1 + \varepsilon^2 \Lambda_2 + \dots) \\ \times (Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \dots) + \varepsilon \sqrt{-1} G(Y_0 + \varepsilon Y_1 + \dots, \bar{Y}_0 + \varepsilon \bar{Y}_1 + \dots).$$

En développant G en série de Taylor au voisinage de Y_0 et \bar{Y}_0 puis en identifiant les termes de même ordre en ε , on obtient les approximations successives par les équations suivantes :

$$(2.37) \quad \frac{dY_0}{dt} = \sqrt{-1} \Lambda_0 Y_0$$

$$(2.38) \quad \varepsilon \frac{dY_1}{dt} = \sqrt{-1} \Lambda_0 \varepsilon Y_1 + \sqrt{-1} \varepsilon \Lambda_1 Y_0 + \sqrt{-1} \varepsilon G(Y_0, \bar{Y}_0)$$

$$(2.39) \quad \varepsilon^2 \frac{dY_2}{dt} = \sqrt{-1} \Lambda_0 \varepsilon^2 Y_2 + \sqrt{-1} \varepsilon^2 \Lambda_1 Y_1 + \sqrt{-1} \varepsilon^2 \Lambda_2 Y_0 \\ + \sqrt{-1} \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial G}{\partial Y} \right)_0 Y_1 + \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{Y}} \right)_0 \bar{Y}_1 \right] \quad \text{etc...}$$

Considérons alors l'équation scalaire d'indice i dans l'équation matricielle (2.37) ; sa solution est :

$$(2.40) \quad y_{oi} = a_i \exp \sqrt{-1} \lambda_{oi} t$$

λ_{oi} est égal à ℓ_i en première approximation, et a_i est le $i^{\text{ème}}$ élément (complexe) de $Y(o)$ égal à $(P^{-1}X(o))_i$. En introduisant ainsi dès la lère approximation les constantes d'intégration a_i du système complet, on est amené à ne rechercher pour les autres équations (2.38), (2.39)... que des solutions particulières s'annulant pour $t = 0$. Pour cela, il suffit de voir qu'une équation du type :

$$(2.41) \quad \frac{dy}{dt} = \lambda y + \sum_i \alpha_i \exp c_i t$$

admet pour solution particulière, nulle quand $t = 0$, la fonction :

$$(2.42) \quad y = \sum_i \frac{\alpha_i}{\lambda - c_i} (\exp \lambda t - \exp c_i t).$$

Une telle solution convient si tous les c_i sont différents de λ (même si λ est nul). Or, lorsqu'on substitue dans $\varepsilon G(Y, \bar{Y})$ les solutions de la forme (2.40), on obtient dans (2.38), des équations scalaires de la forme (2.41) ; par exemple pour l'indice i :

$$(2.43) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \varepsilon y_{li} &= \sqrt{-1} \lambda_{oi} \varepsilon y_{li} + \sqrt{-1} a_i \varepsilon \lambda_{li} \exp \sqrt{-1} \lambda_{oi} t \\ &+ \sqrt{-1} \sum_j \gamma_{ij} \exp \sqrt{-1} c_j t. \end{aligned}$$

Les fréquences c_j sont des combinaisons des λ_{ok} : $c_j = \sum_{k=1}^{2N} \beta_{kj} \lambda_{ok}$ où $\beta_{kj} \in \mathbb{Z}$ (l'indice j ne sert qu'à numérotter ces combinaisons) (*) ; par exemple le monôme de degré 3, $y_{o1}^2 \bar{y}_{o2}$ se transforme par cette substitution en

$$a_1^2 \bar{a}_2 \exp \sqrt{-1} (2\lambda_{o1} - \lambda_{o2}) t.$$

Mais parmi tous les termes constituant εG , il en est qui, dans (2.43) donneront une fréquence c_j égale à λ_{oi} (on parle alors de terme résonnant) ; au degré 3 par exemple, ce sont des termes dont les monômes sont de la forme

(*) Remarquons encore que G étant composé de termes de degré impair, ces combinaisons sont telles que : $\sum_{k=1}^{2N} \beta_{kj}$ vaut 1 (cf. IV.2.2.2.2).

$y_{oi} y_{ok} \bar{y}_{ok}$ qui se transforme en $a_i a_k \bar{a}_k \exp \sqrt{-1} \lambda_{oi} t$. Dans (2.43), le terme $\sqrt{-1} a_i \varepsilon \lambda_{li} \exp \sqrt{-1} \lambda_{oi} t$ est lui-même résonnant mais son coefficient est jusqu'à présent indéterminé puisqu'il contient $\varepsilon \lambda_{li}$: on calcule justement $\varepsilon \lambda_{li}$ de façon à éliminer tous les termes résonnants qui sont créés dans le développement des monômes de la fonction εG . Par exemple, au degré 3, les termes résonnants de la $i^{\text{ème}}$ composante de $\varepsilon G : \sum_k \sqrt{-1} g_{ik} y_{oi} y_{ok} \bar{y}_{ok}$ sont éliminés en calculant $\varepsilon \lambda_{li}$ par la relation :

$$(2.44) \quad \varepsilon \lambda_{li} = - \sum_k g_{ik} a_k \bar{a}_k .$$

On éliminerait en même temps les termes résonnants de degré 5, 7, ... Ayant ainsi $\varepsilon \lambda_{li}$ pour $i = 1$ à $2N$, on obtient une meilleure valeur de λ_{oi} , égale à $\ell_i - \varepsilon \lambda_{li}$ dont on se sert pour intégrer les termes non résonnants de (2.43) notés \tilde{Y}_{ij} :

$$(2.45) \quad \varepsilon y_{li} = \sum_j \frac{\tilde{Y}_{ij}}{\lambda_{oi} - c_j} (\exp \sqrt{-1} \lambda_{oi} t - \exp \sqrt{-1} c_j t) .$$

Les termes de εG sont d'ordre 1 au moins ; comme les valeurs propres de A sont du même ordre, l'intégration précédente donne donc des termes d'ordre 0 par rapport aux masses. Ces derniers sont cependant de l'ordre du cube des excentricités et des inclinaisons, puisque εG est de degré 3 au moins.

On opèrerait de la même façon avec l'équation (2.39), en calculant $\varepsilon^2 \Lambda_2$ de façon à éliminer les termes résonnants introduits par $\varepsilon^2 \Lambda_1 Y_1$ et par $\varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial G}{\partial Y} \right)_o Y_1 + \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{Y}} \right)_o \bar{Y}_1 \right]$; on en déduit une meilleure approximation de Λ_o , égale à $L - \varepsilon \Lambda_1 - \varepsilon^2 \Lambda_2$, puis par l'intégration des termes non résonnants, on obtient $\varepsilon^2 Y_2$ et ainsi de suite...

On voit donc que les $2N$ fréquences initiales ℓ_i sont modifiées par des quantités $\varepsilon\lambda_{1i} + \varepsilon^2\lambda_{2i} \dots$, qui sont au moins de l'ordre du carré des excentricités et des inclinaisons (d'après (2.44)), et on obtient pour la variable Y une solution ne comportant que des termes à très longues périodes.

La solution X , égale à PY , a la même forme, et finalement, on obtient les variables z_{oi} et ζ_{oi} sous la forme suivante :

$$(2.46) \quad z_{oi} = \sum_{j=1}^N b_{ij} \exp \sqrt{-1} \lambda_{oj} t + \sum_k e_{ik} \exp \sqrt{-1} \psi_k t$$

$$(2.47) \quad \zeta_{oi} = \sum_{j=N+1}^{2N} d_{ij} \exp \sqrt{-1} \lambda_{oj} t + \sum_k f_{ik} \exp \sqrt{-1} \theta_k t$$

Les ψ_k et les θ_k sont des combinaisons linéaires entières des λ_{oj} ; les coefficients sont complexes, calculés pour représenter z_{oi} et ζ_{oi} à $t = 0$.

Si les termes non linéaires des équations de départ sont suffisamment petits, le processus converge. On peut étudier cette convergence en résolvant le système autonome par étapes, en ne considérant d'abord que le système d'ordre 1, puis le système regroupant les ordres 1 et 2, puis celui d'ordre 1, 2 et 3 etc... Connaissant ainsi la contribution de chaque ordre on peut décider s'il est nécessaire de faire intervenir l'ordre suivant d'après l'importance de chaque contribution par rapport aux précédentes. On verra dans le chapitre IV ce qu'il faut penser de cette convergence pour le problème des 4 grosses planètes.

L'avantage de cette méthode d'intégration par rapport à la méthode de Krylov-Bogolioubov utilisée pour le même problème par P. Bretagnon (1974), est de fournir une solution dans laquelle les constantes d'intégration introduites dans la première approximation, n'ont pas à être ajustées à l'issue des

suivantes. En effet, la solution donnée par la méthode de Krylov-bogolioubov n'est pas identique à celle que nous avons obtenue (cette solution n'est d'ailleurs pas unique) : Dans cette méthode, on obtient à la place de (2.46) et (2.47) :

$$z_{oi} = \sum_{j=1}^N B_{ij} \exp \sqrt{-1}(\lambda_{oj}t + \phi_j) + \sum_k E_{ik} \exp \sqrt{-1} \psi_k$$

$$\zeta_{oi} = \sum_{j=N+1}^{2N} D_{ij} \exp \sqrt{-1}(\lambda_{oj}t + \phi_j) + \sum_k F_{ik} \exp \sqrt{-1} \theta_k$$

où les ψ_k et θ_k sont des combinaisons entières des $(\lambda_{oj}t + \phi_j)$ et où les amplitudes B_{ij} , D_{ij} , E_{ij} et F_{ij} sont des nombres réels ; les $4N$ constantes d'intégration sont les $2N$ phases ϕ_j (chacune étant associée à une fréquence λ_{oj}) et les $2N$ amplitudes B_{ii} et D_{ii} ; les autres amplitudes dépendent de ces constantes. Ces $4N$ constantes, obtenues d'abord par l'intégration du système linéaire, sont modifiées ensuite dans la méthode de Krylov-Bogolioubov par l'introduction des termes non linéaires du système autonome et doivent être ajustées pour que la solution convienne à l'instant initial.

Au contraire, nos $4N$ constantes d'intégration sont les valeurs (complexes) que prennent les variables z_{oi} et ζ_{oi} à l'instant initial et ne sont pas modifiées par l'apport des termes non linéaires ; en conséquence, on obtient par exemple pour y_i (égal à $y_{oi} + \varepsilon y_{1i} + \dots$) :

$$y_i = (a_i + \sum_j \frac{\tilde{\gamma}_{ij}}{\lambda_{oi} - c_j} + \dots) \exp \sqrt{-1} \lambda_{oi} t - \sum_j \frac{\tilde{\gamma}_{ij}}{\lambda_{oi} - c_j} \exp \sqrt{-1} c_j t - \dots$$

où certains des c_j sont égaux aux λ_{oj} ($\neq \lambda_{oi}$).

Lorsqu'on passe ensuite aux variables z_{oi} et ζ_{oi} , comme les coefficients $\tilde{\gamma}_{ij}$ sont quelconques, on trouve que la phase associée à λ_{ok} dans z_{oi} ou ζ_{oi} n'est pas égale à celle associée au même λ_{ok} dans les autres solutions z_{oj} ou ζ_{oj} ($j \neq i$). Seule la phase associée à la valeur propre nulle est

la même dans tous les ζ_{oi} ; l'amplitude associée à cette valeur propre nulle est d'ailleurs aussi la même dans tous les ζ_{oi} (*).

Remarque : Il est possible de conserver assez facilement la solution en variable Y sous une forme complètement analytique par rapport aux constantes d'intégration $Y(0)$, au moins dans les deux premières approximations Y_0 et ϵY_1 , avec tout l'avantage que cela comporte dans le cas où on est amené à modifier ou à ajuster ces constantes.

Le plus difficile à obtenir pratiquement, c'est le transformé $P^{-1}F(PY, P\bar{Y})$ des termes non linéaires $F(X, \bar{X})$; cette transformation implique que dans chaque monôme de $F(X, \bar{X})$, on substitue à chaque variable un polynôme homogène de degré 1, opération longue à effectuer lorsque le degré des monômes est élevé, d'autant plus qu'alors le nombre de ces monômes est lui-même grand. Cette transformation dépend, comme la matrice P , des valeurs données aux constantes p_{oi} , et doit donc être effectuée à chaque passage dans le pas 2 de l'algorithme décrit en II.3.3.

(*) La valeur propre nulle de la matrice A_2 reste nulle lorsqu'on tient compte des termes non linéaires car la singularité des équations concerne aussi ces termes. L'expression (2.47) des ζ_{oi} contient donc un terme constant. On pourrait sans doute montrer que ce terme serait nul dans chaque ζ_{oi} si le plan de référence S_{xy} auquel on rapporte les inclinaisons était le plan invariable du système solaire (Tisserand (p. 423) en donne une démonstration dans le cas du système de Laplace-Lagrange d'ordre 1). Ce terme constant caractérise donc la position du plan invariable par rapport à S_{xy} et doit être le même dans chaque ζ_{oi} .

II - 4.- Remarques sur la détermination des constantes d'intégration.

Il faut qu'à l'instant initial choisi, repéré arbitrairement par la valeur $t = 0$, la solution générale

$$\sigma_i(t) = \sigma_{oi}(t) + \Delta\sigma_i(\sigma_o, t)$$

représente la valeur de l'élément osculateur σ_i à cet instant. Cette solution contient les $6N$ constantes d'intégration, introduites à des stades plus ou moins avancés du calcul, qu'on devrait en principe déterminer à la fin pour que cette solution satisfasse les observations. En supposant que ces observations soient ramenées à la donnée des éléments osculateurs à un instant initial, cela reviendrait à résoudre par rapport à ces constantes, le système d'équations :

$$(2.48) \quad \sigma_i(0) = \sigma_{oi}(0) + \Delta\sigma_i(\sigma_o, 0).$$

En fait, les théories classiques existantes à variations séculaires (et notamment celle de P. Bretagnon (1978)), déjà ajustées aux observations sur un certain intervalle de temps, fournissent avec une certaine précision ces éléments osculateurs à n'importe quelle date dans cet intervalle. En outre, la comparaison formelle entre notre solution générale et la solution de P. Bretagnon (comparaison facilitée par la nature presque identique des variables utilisées dans les deux théories^(*)), permet d'obtenir une valeur approchée de ces constantes avant même d'avoir construit la solution générale, ce qui rend possible l'utilisation de leur valeur numérique au cours de cette construction. Nous allons seulement nous intéresser ici à la détermination des constantes d'intégration de la solution générale, par sa comparaison avec la solution obtenue par P. Bretagnon, constantes qu'il faudrait éventuellement améliorer par la suite si la précision l'exigeait.

(*) On pourra voir dans l'annexe 4 que la solution en variables osculatrices d'ordre 0 ne diffère de celle qu'on obtiendrait avec les variables osculatrices classiques, que par des termes périodiques, sans conséquence sur la détermination des constantes d'intégration introduites dans la solution du système autonome.

Reprenons la forme de la solution des théories à variations séculaires, valable sur l'intervalle de temps ΔT (développées à l'ordre μ) :

$$(2.49) \quad \sigma_i(t) = S_i^{(\sigma)}(t) + P_i^{(\sigma)}(t) = \sum_{k=0}^{\mu} s_{ik}^{(\sigma)} t^k + \sum_j \left(\sum_{k=1}^{\mu} p_{ik}^{(\sigma)} t^{k-1} \right)_j \exp \sqrt{-1} \beta_j t.$$

Les éléments moyens sont par définition les parties "séculaires" :

$$S_i^{(\sigma)}(t) = \sum_k s_{ik}^{(\sigma)} t^k.$$

Les constantes d'intégration $s_{i0}^{(\sigma)}$ y sont ajustées à l'observation, c'est-à-dire que pour différentes dates, la somme $S_i^{(\sigma)}(t) + P_i^{(\sigma)}(t)$ représente le mieux les observations à ces dates. Les autres coefficients $s_{i1}^{(\sigma)}, s_{i2}^{(\sigma)}, \dots$ et $p_{i1}^{(\sigma)}, p_{i2}^{(\sigma)}, \dots$ dépendent de ces constantes et on doit avoir à $t = 0$:

$$(2.50) \quad \sigma_i(0) = s_{i0}^{(\sigma)} + \sum_j (p_{i1}^{(\sigma)})_j.$$

Remarquons que les constantes $s_{i0}^{(\sigma)}, s_{i1}^{(\sigma)}, s_{i2}^{(\sigma)}, \dots$ sont relatives à la théorie qui les a fournies, et qu'elles seraient différentes si par exemple, la liste des termes mixtes retenus dans $P_i^{(\sigma)}(t)$ était modifiée ; de cette façon elles dépendent de la précision atteinte dans cette théorie.

La solution de la théorie classique contient des développements en puissance de t qui représentent en fait la solution du système autonome : $S_i^{(\sigma)}(t)$ est le développement de $\sigma_{oi}(t)$, et $P_i^{(\sigma)}(t)$ celui de $\Delta\sigma_i(\sigma_o, t)$ (obtenu en n'y développant que σ_o). En rapprochant les équations (2.48) et (2.49) il est alors naturel de prendre au moins en première approximation, les valeurs initiales $\sigma_{oi}(0)$ égales aux éléments moyens classiques $s_{i0}^{(\sigma)}$ à cet instant. Cependant comme la théorie générale n'est pas forcément développée avec la même précision que la théorie classique, et que en conséquence les

termes périodiques conservés dans les deux théories ne sont pas forcément les mêmes (du fait aussi de lacunes inévitables par exemple dans la détermination des termes à longues périodes), ces valeurs approchées $\sigma_{oi}(0)$ devront nécessairement être par la suite ajustées de façon à satisfaire l'équation (2.48), et d'autres analogues pour d'autres dates.

En ce qui concerne les variables z_{oi} et ζ_{oi} , on a donc pris les $2N$ constantes d'intégration (complexes) $z_{oi}(0)$ et $\zeta_{oi}(0)$ égales aux éléments moyens 1950.0 adoptés par P. Bretagnon, lesquels sont issus des éléments moyens $\langle e \rangle$, $\langle \bar{\omega} \rangle$, $\langle i \rangle$ et $\langle \Omega \rangle$ de Le Verrier, ramenés à 1950.0 (voir le tableau 2).

TABLEAU 2

CONSTANTES UTILISEES DANS LA THEORIE GENERALE

	N en "an ⁻¹	A en ua	M _o /m	Eléments moyens 1950.0			
				$z_o^{(o)}$ e cos $\bar{\omega}$	$\zeta_o^{(o)}$ e sin $\bar{\omega}$	$\sin \frac{i}{2} \cos \Omega$	$\sin \frac{i}{2} \sin \Omega$
Jupiter	109 256,6116	5,201 150 028	1 047,355	0,047 074 079	0,011 324 178	-0,001 968 791	0,011 224 426
Saturne	43 996,0792	9,537 953 84	3 498	-0,002 019 885	0,055 682 376	-0,008 570 730	0,019 971 068
Uranus	15 424,8362	19,183 042 6	22 869	-0,045 912 249	0,006 215 059	0,001 889 721	0,006 473 526
Neptune	7 865,6222	30,054 574	19 314	0,006 087 289	0,006 629 096	-0,010 205 793	0,011 645 333
Référence	(1)	(2)	(3)	(4)			

(1) : Constantes de la Connaissance des Temps, tirées des tables de Le Verrier et Gaillot

(2) : déduit de N et de GM_o par la 3e loi de Kepler, avec GM_o = 3548",187606965 j⁻¹ × 365,25

(3) : Masses proposées au Colloque d'Heidelberg (Kovalevsky, 1971)

(4) : Constantes issues des éléments moyens de Le Verrier et de Newcomb, identiques à celles adoptées par P. Bretagnon et J.L. Simon (Simon J.L., Bretagnon P. 1975).

Les valeurs numériques de ces constantes ne sont utilisées dans la construction de la solution du système autonome que pour calculer la modification des valeurs propres ℓ_j de la solution de Laplace-Lagrange, résultant des parties non linéaires du système autonome, et pour exprimer numériquement

les amplitudes et les phases de cette solution. D'un point de vue pratique, la solution de ce système en variables Y peut rester analytique par rapport à ces constantes pour les deux premières approximations Y_0 et εY_1 , mais au delà, et lorsqu'on revient aux variables z_{oi} et ζ_{oi} , il est beaucoup plus commode de remplacer ces constantes par leur valeur ; il serait cependant facile de tenir compte d'un ajustement ultérieur de ces constantes.

Il est bien plus important de connaître les bonnes valeurs des "moyens mouvements" N_i qui, eux, sont utilisés numériquement dès le début pour construire les seconds membres des équations puis pour intégrer les termes périodiques (on a vu que le choix des $p_{oi}^{(0)}$ nuls revenait à faire jouer aux N_i le rôle de constante d'intégration). Pour déterminer la valeur des N_i à partir des théories classiques, il faut remarquer que N_i est le coefficient du temps du seul terme "séculaire" présent dans la longitude moyenne (si $p_{oi}^{(0)}$ est nul) :

$$(2.51) \quad \lambda_i = N_i t - \sqrt{-1} q_i = N_i t - \sqrt{-1} q_{oi} - \sqrt{-1} \Delta q_i.$$

Dans la théorie classique, on obtient :

$$(2.52) \quad \lambda_i = \varepsilon_0 + N_{1i} t + a_i t^2 + b_i t^3 + \dots + P_i^{(\lambda)}(t)$$

où N_{1i} est le moyen mouvement moyen. Comme on identifie $P_i^{(\lambda)}(t)$ à $-\sqrt{-1} \Delta q_i$, et qu'on a exprimé q_{oi} en une somme de termes à très longues périodes (voir (2.28)), on s'aperçoit que N_i n'est pas exactement égal à N_{1i} : en effet, si on développe en puissances de t les termes à très longues périodes de l'expression (2.28) de q_{oi} , on obtient, au voisinage de $t = 0$:

$$(2.53) \quad q_{oi} = q_{oi}^0 + \sum_j \frac{C_{ij} - \bar{C}_{ij}}{f_j} + \sum_j \sqrt{-1} (C_{ij} + \bar{C}_{ij}) t + o(t^2)$$

de sorte qu'on doit avoir :

$$(2.54) \quad N_{1i} = N_i + \sum_j (C_{ij} + \bar{C}_{ij}).$$

Les C_{ij} dépendent évidemment de la date correspondant à $t = 0$, mais rappelons que ce sont des quantités de l'ordre du produit d'une masse par le carré d'excentricités ou d'inclinaisons, de sorte que l'écart $N_{1i} - N_i$ doit être inférieur à $10^{-5} N_i$ (*). Par ailleurs, N_{1i} a été ajusté aux observations au voisinage de $t = 0$, et il est possible qu'il manque dans la théorie certains termes à période longue (supérieure à la durée pendant laquelle on dispose d'observations) ; or l'ajustement aux observations d'une solution incomplète entraîne l'adoption d'une contribution empirique aux N_{1i} qu'on devrait éliminer en toute rigueur pour évaluer les N_i .

Ceci montre que les moyens mouvements moyens N_{1i} des théories à variations séculaires dépendent de la date choisie comme instant initial, de l'intervalle durant lequel on a des observations, et de l'intervalle ΔT de sa validité ; les constantes N_i de la théorie générale ne devraient pas dépendre de ces quantités (si le système solaire est stable), mais pour les déterminer il faudrait des observations sur une durée illimitée, ou des observations infiniment précises sur un intervalle de temps fini et une théorie générale parfaite.

Pour ces raisons, et parce qu'on ne connaît pas a priori la somme $\sum_j C_{ij} + \bar{C}_{ij}$, on a considéré en première approximation N_i égal à N_{1i} ; on pourra alors voir si la somme $\sum_j C_{ij} + \bar{C}_{ij}$ qu'on obtient dans la théorie construite avec ces N_i est suffisamment petite pour qu'il suffise d'apporter quelques corrections, en se servant pour cela du développement de la solution par rapport aux variables p . Si après cela on observe encore une dérive linéaire en t entre les longitudes moyennes issues de la théorie générale et celles qu'on observe, il faudra l'assimiler au terme $p_{oi}^{(o)} t$ (d'après le paragraphe II.2), et modifier en conséquence les N_i .

(*) cf. paragraphe IV.2.3b.

Enfin, quant aux constantes d'intégration q_{oi}^0 , on voit d'après les expressions (2.51) à (2.53) qu'il suffit de les prendre pour commencer, égales à :

$$(2.55) \quad q_{oi}^0 = \varepsilon_o + \sqrt{-1} \sum_j \frac{C_i - \bar{C}_{ij}}{f_j} .$$

En fait, on peut ignorer leur valeur numérique tant que le temps t n'est pas lui-même remplacé par une valeur numérique dans la solution à courtes périodes : on a besoin de leur valeur seulement pour calculer la valeur des éléments osculateurs p_i, q_i, z_i et ζ_i pour t donné.

CHAPITRE III

MISE EN OEUVRE DE LA THEORIE GENERALE

=====

Cette mise en oeuvre est essentiellement un problème de traitements analytiques sur ordinateur : il faut d'abord obtenir le développement des seconds membres des équations et ensuite les structurer et les codifier de manière à pouvoir les manipuler le plus efficacement possible.

III - 1.- Problèmes relatifs à la construction des seconds membres des équations.

Le principal problème concerne le nombre infini de termes que contient a priori chaque développement. Pratiquement, on doit limiter ce nombre en utilisant des critères de sélection basés sur l'importance des termes qu'on retient dans les seconds membres, vis-à-vis de la précision qu'on souhaite atteindre dans la solution.

III - 1.1.- Construction des seconds membres des équations.

Pour faciliter cette sélection terme à terme, nous avons mis au point un algorithme permettant de calculer le coefficient de chaque terme, indépendamment de tous les autres termes, dans l'ordre que l'on veut. Pour ne pas allonger ce paragraphe, le détail de cet algorithme a été reporté dans l'annexe 2. Il importe seulement de savoir ici que le calcul isolé du coefficient de chaque terme, de la forme (1.22), nécessite la construction préalable de tables bornées, de sorte que les exposants $\ell, n_1, n_2, \dots, n_{10}$ de son monôme soient compris dans l'ensemble $E(g, \delta_e, \delta_i, \delta, \ell_M)$ ainsi défini :

$$n_1 + n_6 \leq g \quad \text{grade maximal}$$

$$d_e = n_2 + n_3 + n_7 + n_8 \leq \delta_e \quad \text{degré maximal en excentricité}$$

$$d_i = n_4 + n_5 + n_9 + n_{10} \leq \delta_i \quad \text{degré maximal en inclinaison}$$

$$d_i + d_e \leq \delta \quad \text{degré maximal}$$

$$|\ell| \leq \ell_M.$$

Le choix des bornes $g, \delta_e, \delta_i, \delta$ et ℓ_M résulte de la précision qu'on souhaite atteindre dans la solution pour un problème donné (*); ainsi, les seconds membres des équations étant d'ordre 1, la valeur de g , qui est le degré maximal par rapport aux variables p , lesquelles sont numériquement de l'ordre des masses, indique que l'ordre maximal qu'on pourra atteindre est $g+1$. La valeur de δ dépend de l'importance des excentricités et des inclinaisons dans le problème traité; la valeur de ℓ_M dépend de l'importance du rapport des grands axes des couples de planètes de ce problème.

Le tableau 3 donne le nombre de termes du développement des seconds membres des équations, pour ℓ fixé, suivant les valeurs adoptées pour g, δ_i, δ_e et δ .

Si on choisit les bornes $\ell_M = 15, g = 2, \delta_i = 4, \delta = \delta_e = 7$, valeurs dont on verra qu'elles sont raisonnables pour les 4 grosses planètes, le calcul évoqué en légende de ce tableau conduit, pour 4 planètes, à un total de 23 248 320 termes. Ceux-ci ne concernent que les seuls développements des seconds membres; n'oublions pas que pour chaque terme, il faut conserver en plus de son coefficient l'information suffisante pour reconstituer son monôme (12 exposants et 12 variables prises parmi les 24 possibles), et que ceci ne

(*) Dans l'article inclus dans l'annexe 2, ces bornes sont notées ω et J_M , avec la correspondance : $\delta + g = \omega$ et $\ell_M = J_M$.

TABLEAU 3

Nombre de termes des développements des seconds membres des équations, cumulés jusqu'à un degré et un grade donnés, qu'on trouve par équation et par couple de planètes (perturbée et perturbante) pour chaque valeur de ℓ (pour les degrés supérieurs à 5, le degré en inclinaison est limité à 4).

Développement pair par rapport

Développement impair par rapport

aux inclinaisons :

aux inclinaisons :

équations $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$

équation $\frac{d\zeta}{dt}$

grade degré	grade		
	0	1	2
0	1	3	6
1	5	15	30
2	25	75	150
3	85	255	510
4	255	765	1530
5	651	1953	3906
6	1435	4305	8610
7	2815	8445	16890

grade degré	grade		
	0	1	2
0	0	0	0
1	4	12	24
2	20	60	120
3	80	240	480
4	240	720	1440
5	580	1740	3480
6	1204	3612	7224
7	2240	6720	13440

Dans une théorie à N planètes en interaction, avec $|\ell| \leq \ell_M$ et avec des bornes g et δ identiques pour chaque couple de planètes, on a le nombre total de termes dans chaque équation en multipliant chacun de ces nombres par $(N-1)(2\ell_M + 1)$; et il y a $3N$ équations paires et N impaires par rapport à ζ .

constitue que le point de départ de la théorie : il faut intégrer ces développements pour avoir la solution d'ordre 1, en faire des dérivées partielles par rapport à toutes les variables, puis des produits, et une nouvelle intégration pour avoir la solution d'ordre 2,...

Le nombre de termes qui résulte de ces bornes est très grand, mais heureusement, il est possible de le réduire : nous allons tout d'abord voir que dans une solution semi-numérique (*) du 1er ordre construite avec ces développements, ces bornes ne sont vraiment utiles (à l'ordre 1) que pour quelques inégalités (essentiellement à longues périodes) ; la presque totalité de ces termes apporte une contribution inférieure à 0",001 qu'il est alors légitime de ne pas conserver si c'est la précision souhaitée.

Nous verrons ensuite que cette sélection des termes d'après leur valeur numérique doit cependant être affinée pour convenir à la solution générale d'ordre 1, et qu'il faut encore ajouter d'autres critères de sélection à l'ordre 1 pour que l'ordre 2, construit avec cette sélection, soit convenable.

III - 1.2.- Critères de sélection et choix des bornes $g, \delta, \delta_e, \delta_i$ et l_M
dans une théorie limitée à l'ordre 1.

Pour préciser ce choix, nous nous sommes d'abord servis du développement complet (jusqu'au degré 5) d'un certain nombre d'inégalités dans les seconds membres des équations, dont nous avons calculé une solution du 1er ordre sous forme semi-numérique. Nous avons adopté ce type de solution au début de ce travail pour contrôler l'exactitude des développements fournis par l'algorithme, par comparaison avec la solution du même type obtenue par J. Chapront et al. (1975)

(*) Il s'agit d'une solution obtenue en intégrant les seconds membres des équations dans lesquels on a au préalable annulé les variables p et remplacé les variables z et ζ par les valeurs des éléments moyens pour 1950.0, ne laissant sous forme littérale que les variables λ ; les masses et les moyens mouvements moyens sont également numériques.

à la précision de 0,001. En séparant dans ces développements les contributions des termes de même degré, cette comparaison permet d'évaluer la contribution des termes de degré supérieur qu'on a négligés, et la précision atteinte à un degré donné dans ces inégalités (voir tableau 9a et 9b de l'article inséré dans l'annexe 2).

On peut ainsi estimer que pour les 4 grosses planètes du système solaire la précision de 0,001 serait acquise dans une solution semi-numérique d'ordre 1 en choisissant les bornes $\delta = 9$ et ℓ_M de l'ordre de 20.

Cette même étude a montré que la presque totalité des termes calculés apporte une contribution négligeable à cette solution d'ordre 1 (voir tableau 11, annexe 2) : les termes significatifs de la plupart des inégalités retenues sont ceux de degré le plus bas, ou ceux de degré le plus bas et ceux immédiatement supérieurs. Seules quelques inégalités à longues périodes, essentiellement la grande inégalité, nécessitent un développement au degré maximal. La borne $\ell_M = 20$ n'intéresse par ailleurs que les couples de planètes ayant un rapport α de leurs grands axes voisin de 1 (comme Uranus-Neptune avec $\alpha = 0,63$).

Etant donné un seuil (par exemple 0,001), on peut donc sélectionner dans la solution semi-numérique d'ordre 1, un nombre réduit de termes (par exemple quelques dizaines de milliers) qui sont ceux supérieurs en valeur absolue à ce seuil, fixé en rapport avec la précision souhaitée.

Cependant, cette sélection est basée sur la valeur des variables z_{oi} et ζ_{oi} à une date donnée, et on n'est pas assuré que des termes négligeables à cette date le resteront ou l'ont toujours été. Cette sélection ne convient donc pas à la théorie générale qui ambitionne une durée de validité beaucoup plus grande que la théorie semi-numérique, valable seulement au voisinage (quelques millénaires) d'une date donnée. Plutôt que la valeur des termes de la solution semi-numérique, à une date fixée, il est préférable d'utiliser une majo-

ration de ces termes, déterminée d'après les valeurs maximales que peuvent atteindre les variables z_{oi} et ζ_{oi} dans la solution à très longues périodes du système autonome. Ces valeurs sont inconnues a priori tant qu'on n'a pas la solution générale du problème planétaire, mais on peut les évaluer déjà convenablement en construisant le système autonome d'ordre 1 et en le résolvant une première fois, avant même tout calcul des termes périodiques ; on peut aussi se servir des résultats de P. Bretagnon (1974) qui tiennent compte d'une partie de l'ordre 2. On aboutit alors aux valeurs maximales suivantes, pour le module des variables z_{oi} et ζ_{oi} relatives aux 4 grosses planètes :

	$ z_o _{\max}$	$ \zeta_o _{\max}$
Jupiter	0,062	0,005
Saturne	0,086	0,009
Uranus	0,085	0,010
Neptune	0,016	0,012

Les valeurs de $|\zeta_o|_{\max}$ sont relatives à des inclinaisons sur le plan invariable du système solaire.

Pratiquement, pour simplifier le calcul du majorant de chaque terme, nous avons utilisé des bornes uniques pour les quatre planètes : $|z_o| \leq 0,09$ et $|\zeta_o| \leq 0,02$ (cette dernière valeur permet de borner les inclinaisons mutuelles). On verra enfin, en IV.2.1, que les p_{oi} sont des constantes toutes inférieures en valeur absolue à 0,004. On peut donc majorer ces variables par ces valeurs pour évaluer les termes de grade non nul.

Avec ces majorations, et pour un seuil fixé, on retient évidemment davantage de termes que dans la solution semi-numérique.

III - 1.3.- Critères de sélection à adopter à l'ordre 1 pour construire l'ordre 2.

Nous ne voulions pas aborder d'emblée la construction de l'ordre 2 dans la théorie générale à l'aide d'une solution d'ordre 1 "trop volumineuse", préférant auparavant construire un modèle réduit, pour apprécier les problèmes pratiques qui se posent et tâcher de les maîtriser. Aussi, nous avons adopté dans le cadre de ce travail les bornes suivantes, qui conviennent déjà bien au problème des 4 grosses planètes :

$$g = 1 \quad \delta = \delta_e = 7 \quad \delta_i = 4 \quad \ell_M = 12$$

Cette valeur de g , permet d'atteindre l'ordre 2 ; la valeur de δ tient compte de ce que, pour la grande inégalité, la valeur $\delta = 5$ adoptée dans l'étude de la solution semi-numérique s'était avérée insuffisante. Cette valeur s'est également imposée dans la construction du système autonome pour juger de la convergence des développements de ses seconds membres en fonction du degré de leurs termes (voir IV.2.2.2). Le degré en inclinaison a été limité à 4 parce que les variables ζ jouent un rôle moins important que les variables z dans le problème des grosses planètes (cela réduit aussi le nombre de termes à calculer).

Nous avons fait plusieurs essais, en retenant d'abord les termes périodiques dont les majorants intégrés dépassaient $1''$, puis $0''$,¹ (au sens des majorations précédentes). Le premier essai ne concernait en outre que le problème plan des 4 grosses planètes, limité au degré 5 en excentricité. Avec la solution d'ordre 1 qui résulte de cette sélection, nous avons construit le système autonome d'ordre 2. Nous avons également calculé à part la contribution à ce système autonome de quelques inégalités périodiques, soit en les développant complètement à l'ordre 1 dans toutes les équations (à un degré suffisant), soit en appliquant les critères de sélection précédents, ceci pour estimer la précision résultante à l'ordre 2. (cf. IV.2.2.2 1c).

Il ressort de ces divers essais, que le critère permettant de sélectionner des termes par la simple comparaison de leur majorant avec un certain seuil, doit être affiné pour tenir compte des relations qui peuvent exister entre certains termes d'ordre 2, et qui peuvent par exemple conduire à l'élimination totale de tout un groupe de termes (à condition de les prendre tous), comme dans le théorème de Poisson. On a vu dans ce théorème que les termes issus des parties indirectes de la fonction perturbatrice étaient responsables de l'élimination totale de l'inégalité séculaire d'ordre 2 relative aux variables p_{oi} . Nous avons constaté que ces mêmes termes (issus des parties indirectes) jouent aussi un rôle important dans des éliminations partielles, observées dans le développement du système autonome d'ordre 2 pour les variables z_{oi} et ζ_{oi} . L'antisymétrie des équations est sans doute impliquée aussi dans ces éliminations partielles, de même que le fait que pour construire le système autonome d'ordre 2, on combine des inégalités périodiques opposées. Il faut donc conserver tous les termes des inégalités intervenant à chaque degré dans les parties indirectes de la fonction perturbatrice, ne serait-ce que pour l'application pratique du théorème de Poisson.

Par ailleurs, si, grâce aux majorants, on a sélectionné un terme de grade nul, nous avons constaté qu'il fallait conserver systématiquement le développement de ce terme au grade 1, car on en a besoin pour obtenir les dérivées partielles de ce terme par rapport aux variables p , sans cela les éliminations partielles et totales dont on vient de parler ne se font plus.

Il y a enfin les relations existant entre les termes dépendant des variables ζ dans le développement des inégalités : la somme de leurs coefficients est nulle ; cette propriété est aussi vraie à l'ordre 2. La troncature des développements à l'ordre 1 peut conduire à ne conserver qu'une partie de ces coefficients (dont la somme n'est alors plus nulle) ; cette troncature

se répercute à l'ordre 2, donnant dans ce cas une somme non nulle pour les coefficients des termes ayant, en facteur des ζ , un même monôme des variables p et z . L'examen de ces sommes, qui devraient être nulles, permet d'estimer la précision atteinte à l'ordre 2 dans la détermination de ces termes.

III - 1.4.- Construction des seconds membres des équations.

Finalement, pour construire les seconds membres des équations, nous avons utilisé les critères suivants de sélection des termes périodiques d'ordre 1 : nous conservons dans les équations tous les termes de grade 0 dont le majorant est supérieur à $0'',1$ dans la solution ; le seuil de $0'',1$ est abaissé à $0'',0001$ dans le cas d'un terme intervenant dans les parties indirectes de la fonction perturbatrice (pour le théorème de Poisson). Pour chacun de ces termes, nous calculons son développement de grade 1 (soit 2 termes l'un en p_i l'autre en p_j dans l'expression 1.22). Quant aux termes séculaires d'ordre 1, nous les avons tous gardés afin d'avoir un système autonome d'ordre 1 le meilleur possible.

On trouvera dans le tableau 4 la répartition du nombre de termes retenus à l'issue de cette sélection, degré par degré, sachant que pour le couple Jupiter-Saturne, on a développé jusqu'au degré 7 et avec $\ell_M = 12$, tandis que pour les autres couples on a limité le degré à 5 et ℓ_M à 8. Pour les parties de degré élevé, ces nombres concernent essentiellement des termes issus des parties indirectes des fonctions perturbatrices et ceux des inégalités à longue période comme le (2,-5) ou le (4,-10) de Jupiter-Saturne, ou le (1,-2) d'Uranus-Neptune. Le calcul de tous ces termes a demandé environ une heure (sur IRIS 80). Structurés comme on le verra dans le paragraphe III.2, ils occupent près de 230 pistes de 2 048 mots de 4 octets.

On verra dans le chapitre IV que cette sélection permet de construire le système autonome d'ordre 2 avec une précision relative de l'ordre de quelques millièmes. Pour l'améliorer, il faudrait utiliser un seuil plus bas que $0'',1$;

TABLEAU 4

Nombre de termes retenus à l'ordre 1 dans le développement des seconds membres des équations et dans le système autonome, répartis suivant les planètes et suivant leur degré (grades 0 et 1 réunis).

Termes périodiques : équations relatives à													
degré \ i	$\Delta_1 p_i$ ou $\Delta_1 q_i$				$\Delta_1 z_i$				$\Delta_1 \zeta_i$				
	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	
0	72	108	114	84	72	108	114	81	0	0	0	0	
1	270	384	444	270	222	318	330	213	72	108	90	54	
2	582	912	870	576	474	720	693	504	144	261	180	144	
3	714	1314	1098	816	507	1014	1005	804	177	351	486	420	
4	780	1668	1956	1632	690	1257	1575	1428	345	534	831	687	
5	1074	1818	2244	1824	717	1272	1551	1200	711	549	648	444	
6	564	1347			636	1260			318	519			
7	870	1182			267	1083			51	213			
TOTAL :		25587				20115				8337			

Termes séculaires : équations relatives à													
degré \ i	q_{oi}				z_{oi}				ζ_{oi}				
	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	
0	12	12	12	12									
1					18	18	18	18	18	18	18	18	
2	75	75	75	75									
3					180	180	180	180	180	180	180	180	
4	471	471	471	471									
5					900	900	900	900	792	792	792	792	
6	552	552											
7					864	864			648	648			
TOTAL :		3336				5920				5256			

cependant, les calculs qu'on a faits de la contribution à l'ordre 2 de quelques inégalités périodiques d'ordre 1, soit en utilisant ce type de sélection, soit en conservant leur développement complet jusqu'à un degré fixé, montrent qu'il conviendrait alors d'adopter en plus des critères précédents, le critère suivant : dès qu'un terme a été sélectionné (par les majorants définis ci-dessus) il faut conserver systématiquement tous les termes de même degré de l'inégalité à laquelle il appartient, et également les termes de même degré (*) de cette inégalité dans les autres équations ou on peut la trouver. Ceci éliminerait complètement les troncatures dans les développements en variables ζ , et favoriserait au mieux toutes les relations pouvant conduire à des éliminations partielles ou totales entre termes d'ordre 2. Cela revient en fait à sélectionner, non plus les termes individuellement, mais les inégalités avec le degré maximal de leur développement. C'est à cause des moyens limités dont nous disposons que nous avons dû nous contenter du premier type de sélection. On verra cependant que cela suffit pour obtenir l'essentiel du système autonome d'ordre 2, permettant déjà des comparaisons très instructives avec les résultats de P. Bretagnon (1978) concernant sa théorie des grosses planètes obtenue à un ordre élevé des masses par une méthode itérative (semi-numérique).

III - 2.- Manipulation de séries formelles sur ordinateur.

Nous présentons ici la façon dont nous avons structuré les développements des seconds membres et de la solution, puis comment nous les avons codifiés pour permettre au mieux leur manipulation tout en faisant en sorte qu'ils prennent un minimum de place en mémoire, ou en stockage sur disque. La structuration et la codification adoptées conditionnent aussi la facilité de manipuler les développements et la rapidité des calculs. La réalisation

(*) à une unité près éventuellement, vu les parités différentes des développements d'une même inégalité suivant qu'il s'agit d'une équation en $(p$ ou $q)$, ou en $(z$ ou $\zeta)$.

pratique a été effectuée en FORTRAN étendu CII, sur IRIS 80.

De nombreux auteurs ont déjà décrit des systèmes permettant de manipuler des séries formelles sur ordinateur. Certains sont très généraux, capables de traiter des problèmes divers ; par souci d'efficacité, nous avons préféré ici construire un système spécialisé au problème planétaire, mais dont l'organisation pourrait se transposer à d'autres problèmes.

III - 2.1.- Principes utilisés pour structurer les développements.

Sous sa forme la plus générale, une théorie planétaire est représentée par un ensemble de séries dont les termes sont de la forme (1.26). Chaque série est identifiable par un nom qui est "la variable et la planète" auxquelles elle se rapporte. Elle se compose d'une suite de termes, chacun d'eux étant une structure comprenant le coefficient, l'ensemble des variables et l'ensemble des exposants qui composent son monôme. Le caractère additif des termes d'une même série, ou le caractère multiplicatif ou exponentiel des éléments d'un terme sont implicitement définis par les algorithmes qui manipulent ces structures. On peut organiser les termes en tableaux, en structures de liste... suivant la façon plus ou moins directe dont on veut accéder à chacun de ces termes. Comme on a choisi en principe de pouvoir sélectionner les termes, l'ensemble des monômes conservés dans une série pourra différer de celui d'une autre série et il n'est alors pas possible de ranger les termes dans un ordre systématique qui permette de reconstituer leur monôme d'après la place qu'ils occupent dans la série ; cette possibilité est cependant envisageable si, par la suite, nous voulons reprendre l'ordre 1 en sélectionnant les inégalités plutôt que les termes (cf. III.1.4).

Lors de la construction de la théorie, on peut avoir plusieurs séries identifiées par un même nom, qui correspondent à des états plus ou moins avancés du calcul vers la solution correspondant à ce nom : c'est par exemple le dévelop-

pement des seconds membres des équations, ou celui de ses dérivées partielles par rapport à une ou plusieurs variables, ou celui de la solution, qui correspondent à divers états de dérivation partielle ou d'intégration par rapport à t de séries associées à la même variable et à la même planète. L'identification d'une série doit ainsi être complétée par la description de son état.

On peut adjoindre à ce descripteur d'autres renseignements comme la nature de la série (série réelle, complexe, conjuguée...) ou celle des termes qui la composent (coefficients réels ou complexes par exemple).

Pour des raisons évidentes de compression de l'information il faut regrouper les termes d'une même série ayant un certain nombre de propriétés communes, qu'on peut alors mettre en facteur de ces termes, réduisant d'autant l'information attachée à chaque terme : puisqu'on ne va pas très loin en ordre, on n'a dans chaque terme que les variables associées à 2, 3 ou 4 planètes, d'où l'intérêt de regrouper les termes issus de l'interaction d'un même groupe de planètes, qui ne dépendent que des variables associées à ces planètes.

A l'intérieur de ces regroupements, on peut encore rassembler les termes ayant les mêmes masses en facteur, ou ceux ayant en commun une partie de leur monôme, ou ceux qui appartiennent à une même inégalité... Ces factorisations sont faites suivant une hiérarchie qui minimise le nombre de redondances dans les informations concernant les termes d'un même regroupement.

Enfin pour éviter la manipulation "en bloc", d'ensembles très importants de termes, il faut prévoir leur découpage : on facilite en même temps la construction et l'analyse de la solution en découpant les séries en sous-séries dont les termes ont tous le même degré, le même ordre ou le même grade.

Ces regroupements ou ces découpages peuvent être pris en charge implicitement par les algorithmes de manipulation, s'ils sont systématiques, sinon, il faut prévoir de mettre dans le descripteur de la série les informa-

tions qui les concernent.

III - 2.2.- Structure des développements.

Nous allons décrire la structure adoptée, en montrant comment à partir d'une structure de base relativement simple, nous sommes amenés à considérer une structure plus complexe, qui minimise les redondances dans les informations codées, sans pour autant rendre compliquée la manipulation de ces structures. On distingue une structure interne qui est utilisée en mémoire centrale lors des calculs transformant des développements en d'autres développements, et une structure externe qui intéresse avant tout le stockage des séries sur disques.

III - 2.2.1.- Structure interne.

a) description de la structure de base.

Chaque série est découpée en modules possédant le même nom de planète et de variable que la série dont ils sont des éléments ; ce nom est codé dans un descripteur de module, intégré au module.

Un module rassemble NT termes de cette série, qui sont tous d'un même degré, qui dépendent des variables associées à un même ensemble de K planètes (P_1, P_2, \dots, P_K) , et qui ont les mêmes masses en facteur : $m_{P_1}^{v_1} m_{P_2}^{v_2} \dots m_{P_K}^{v_K}$ (tous les termes d'un module sont donc du même ordre). Ces informations sont aussi codées dans le descripteur de module.

On permet à plusieurs modules d'avoir le même descripteur (au nombre NT de termes près), pour pouvoir découper les séries en sous-séries contenant un nombre de termes limité (à 1 000 par exemple pour la commodité des manipulations), ou bien pour séparer les termes séculaires des termes périodiques d'une même série, qui pourront être rangés dans des modules distincts.

Chaque terme d'un module est représenté par son coefficient (réel), par le 5K-uplet de son monôme (formé des exposants (entiers) des 5 variables $p, z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}$ associées aux K planètes), et par le K-uplet de l'inégalité à laquelle il appartient (formé des exposants (entiers relatifs) des fonctions $\exp q$, lesquels interviennent aussi dans la combinaison des K fréquences $N_{P_1}, N_{P_2}, \dots, N_{P_K}$). Les coefficients sont regroupés dans un tableau de réels : $C(1 : NT)$, les 5K-uplets dans un tableau d'entiers : $T_1(1 : NT, 1 : 5K)$, les K -uplets dans un autre tableau d'entiers : $T_2(1 : NT, 1 : K)$.

On note encore dans le descripteur de module, en plus des informations déjà données, l'état de la série, qui indique les diverses transformations subies par le module depuis son état primaire de second membre d'équation. Ces transformations peuvent être l'intégration par rapport au temps, la dérivation partielle par rapport à une ou plusieurs variables, le calcul du conjugué. Suivant cet état, on connaît implicitement les unités dans lesquelles sont exprimées les coefficients dans le tableau C , et on tient compte éventuellement du facteur $\sqrt{-1}$ affecté à chacun de ces coefficients dans le cas où le module représente un second membre d'équation.

b) Codification comprimée des éléments de T_1 et T_2 .

Nous disposons en FORTRAN de fonctions logiques IAND, IOR, et de fonctions de décalage ISL qui permettent de faire avec efficacité des opérations au niveau du bit à l'intérieur d'entiers (4 octets). Dans ces conditions, nous n'avons pas hésité à condenser au maximum toutes les informations, que ce soit dans le descripteur ou dans les tableaux T_1 et T_2 .

Ainsi le 5-uplet des exposants des 5 variables $p, z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}$ associées à une planète occupe moins d'un demi-mot : 3 bits par exposant (permettant de faire varier chacun d'eux entre 0 et 7). Sur un mot on code

donc le 10-uplet associé aux 10 variables de 2 planètes (cas de l'ordre 1, par exemple). Sur 2 mots, on peut coder le 15-uplet ou le 20-uplet correspondant à 3 ou 4 planètes en interaction (ordre 2 ou ordre 3) (*).

Outre le gain de place obtenu, l'intérêt d'une telle codification est de permettre des calculs en bloc sur l'ensemble des exposants : par exemple, dans le produit de deux termes, on additionne en une fois les deux mots qui contiennent en réalité chacun 10 exposants (**).

Quant au K-uplet de l'inégalité $(k_{p_1}, k_{p_2}, \dots, k_{p_K})$, il occupe 1 mot jusqu'à $K = 4$ (ordre 3) : en supposant que chaque entier k_i soit inférieur en valeur absolue à 64, on mémorise sur les 7 premiers bits de chaque octet la valeur $k_i + 64$ (qui est alors un nombre positif) ; si K est inférieur à 4, on complète les octets non utilisés en leur attribuant la valeur 64 (c'est-à-dire des k_i nuls). La manipulation d'une inégalité est alors ramenée à celle d'un entier positif ; par exemple pour faire le produit de 2 inégalités, on additionne (en une fois, après un réordonnement éventuel des k_i) les 2 entiers qui les représentent et on leur retranche systématiquement un entier formé de 4 octets contenant chacun 64.

(*) un 15-uplet occupe en principe 1 mot 1/2, mais le demi-mot n'est pas facilement accessible en FORTRAN.

(**) Cependant, si ces 2 termes sont issus de modules dépendant de deux ensembles différents de planètes (K_1 et K_2 planètes par exemple), leur produit dépend des variables associées à l'intersection de ces deux ensembles (K_3 planètes). Avant d'effectuer l'addition du code du $5K_1$ -uplet avec celui du $5K_2$ -uplet, il faut éventuellement étendre chacun de ces codes sur le nombre de mots correspondant à K_3 , et réordonner les 5-uplets dans chacun de ces codes. (L'ordre dans lequel on trouve les 5-uplets correspond à celui dans lequel on a codé l'ensemble des K planètes). C'est le même réordonnement qu'on fait pour chaque produit entre termes de ces 2 modules ; il peut alors être systématisé.

c) Redondances dans la structure de base : factorisations.

Les propriétés des développements des seconds membres des équations vues en I.4 se conservent lorsqu'on passe au développement de leur solution aux divers ordres (cf. II.2.2 par exemple). Celles qu'on rappelle ci-dessous mettent en évidence les redondances possibles dans le code de ces développements, et vont permettre la mise en facteurs soit des monômes, soit des inégalités, dans chaque module. Le choix de l'une de ces factorisations ou de l'autre, est déterminé pour chaque module par le souci de l'encombrement minimal des modules, justifié aussi par le fait que la durée des calculs diminue avec le nombre de monômes ou d'inégalités codées dans chaque module.

. A un degré donné, on ne trouve dans les développements que des inégalités de caractéristique inférieure en valeur absolue à ce degré (à une unité près éventuellement dans le cas de développements relatifs aux z ou aux ζ) ; ces caractéristiques ont toutes la même parité.

. A un degré donné, les inégalités de même caractéristique se développent à l'aide des mêmes monômes (donc avec un même ensemble (fini) de $5K$ -uplets). Par exemple, si dans un module on a le développement complet (pour le degré de ce module) des inégalités $(1,-1)$ et $(2,-2)$, on trouve dans le tableau T_1 un premier ensemble de $5K$ -uplets associés au $(1,-1)$ et un deuxième ensemble identique au premier, associé au $(2,-2)$. Si leur développement est incomplet (ce peut être le cas avec la sélection des termes qu'on a décrite en III.1.4), ces 2 ensembles ne sont plus identiques mais ont généralement des éléments communs.

. Le nombre des inégalités retenues à un degré donné, dépend de la précision souhaitée dans la solution (à l'ordre 1, il dépend beaucoup du rapport α des grands axes) ; le nombre des monômes possibles à chaque degré est fini, mais croît avec le degré (voir tableau 1 par exemple). Lorsque le degré est faible (inférieur à 3 ou 4) on a beaucoup d'inégalités et peu de monômes

tandis que lorsqu'il est élevé, il reste peu d'inégalités (essentiellement à longues périodes) et on a beaucoup de monômes.

Dans ces conditions, on peut minimiser l'encombrement des tableaux T_1 et T_2 en effectuant l'une ou l'autre des factorisations suivantes :

- factorisation des monômes : on regroupe les termes possédant le même 5K-uplet, qu'on met en facteur des divers K-uplets représentant les inégalités retenues pour ces termes.
- factorisation des inégalités : on regroupe les termes possédant le même K-uplet, qu'on met en facteur des divers 5K-uplets représentant les divers monômes du développement de cette inégalité.

Dans la factorisation des monômes, le tableau T_1 des 5K-uplets est réduit à NF lignes, correspondant au nombre de factorisations effectuées (encore égal au nombre de 5K-uplets différents dans le module) ; par contre le tableau T_2 est inchangé (NT lignes), tout comme le tableau C, mis à part l'ordre dans lequel sont rangés maintenant les K-uplets et les coefficients, qui sont regroupés par monôme. On adjoint alors au module un tableau T_3 (1 : NF) indiquant pour chaque monôme, le nombre d'inégalités factorisées. On inverse le rôle de T_1 et T_2 dans le cas de la factorisation des inégalités.

On met dans le descripteur de module le type de la factorisation qu'on y a faite, et le nombre NF de ces factorisations.

Evidemment, la factorisation des inégalités est plus intéressante lorsque leur nombre est limité (comme pour les modules de degré élevé, ou pour ceux relatifs au système autonome qui contiennent seulement l'inégalité séculaire).

d) Factorisation entre modules.

Dans le cas où, pour les raisons évoquées en III.1.4, on conserverait dans tous les modules le développement complet (*) de toutes les inégalités qui s'y trouvent, la factorisation des monômes perd l'avantage qu'elle avait pour les modules de bas degré, au profit de la factorisation des inégalités, qui peut alors devenir la règle générale.

En effet, si ces développements sont complets, en factorisant les inégalités dans un module, on obtient en facteur de chaque inégalité d'une même caractéristique donnée, le même sous-ensemble de 5K-uplets : ce sous-ensemble est répété dans T_1 autant de fois qu'il y a d'inégalités ayant cette caractéristique dans ce module. On peut donc se contenter de le donner une seule fois dans ce module.

Par ailleurs, aux diverses caractéristiques possibles dans un module, correspondent des sous-ensembles disjoints de 5K-uplets ; on peut donc partitionner le tableau T_1 entre ces caractéristiques, qui contient alors sans redondance tous les monômes possibles pour ce degré. Il suffit d'associer à chaque inégalité l'information suffisante pour retrouver la partie de tableau T_1 correspondant à sa caractéristique.

Dans un autre module, de même degré, et dont le nom est relatif à la même variable, on a aussi tous les monômes possibles pour ce degré, donc le même ensemble de 5K-uplets que dans le premier module. Ceci est vrai même si ces modules sont associés à des ensembles différents de K planètes (par exemple l'inégalité (1,-1) Jupiter-Saturne et l'inégalité (2,-2) d'Uranus-Neptune admettent le même ensemble de 5K-uplets).

(*) complet pour le degré de ces modules.

Dans ces conditions, on peut sortir le tableau T_1 des modules et n'en conserver qu'un seul exemplaire par degré et par nom de variable ; il suffit de consulter le descripteur de chaque module pour faire correspondre aux 5K-uplets les K planètes qui concernent ce module. Alors, un module ne contient plus que les tableaux T_2 , T_3 et C, le tableau T_3 servant maintenant à indiquer pour chaque inégalité où trouver à l'extérieur du module la partie de tableau T_1 correspondant à sa caractéristique. On peut de plus réduire le tableau T_3 au nombre de caractéristiques possibles pour le degré de ce module.

Notons cependant que la "mise en facteur" des tableaux T_1 à l'extérieur des modules, intéresse d'abord la minimisation de l'encombrement des modules pour leur stockage sur disque ; lors d'un calcul, il faut de toutes façons réintégrer d'une manière ou d'une autre le tableau T_1 à l'intérieur du module. Remarquons aussi que pour utiliser le même tableau T_1 dans plusieurs modules il faut des développements complets, conservant même les coefficients nuls.

e) Remarques sur l'utilisation de la codification comprimée.

. Dans un module donné, l'exposant relatif à une variable donnée, associée à une planète donnée, occupe toujours la même place (ou les mêmes bits) dans les mots où sont codés les 5K-uplets (ou les K-uplets). Lorsqu'on calcule par exemple la dérivée partielle des termes de ce module par rapport à cette variable, il suffit alors de construire au préalable un masque qui permette d'isoler cet exposant dans tous les 5K-uplets (ou K-uplets) (pour tester s'il n'est pas nul), et un autre qui permette de soustraire 1 en une seule opération à cet exposant. De même, le calcul du conjugué d'un terme consiste à réordonner les exposants dans le 5K-uplet de son monôme, et dans le K-uplet de son inéga-

lité. On exécute cette opération avec beaucoup d'efficacité au moyen de masques, d'intersections et de décalages logiques. On opère de façon similaire pour réordonner les 5K-uplets, comme on l'évoquait en note dans III.2.2.1.b, à propos du produit de 2 termes.

. En rangeant les éléments de T_1 et T_2 dans l'ordre des valeurs croissantes (équivalent à l'ordre lexicographique sur les 5K-uplets par exemple), on accède très rapidement à un terme donné (monôme donné et inégalité donnée) en utilisant une méthode de dichotomie. L'adressage calculé des 5K-uplets serait possible suivant la méthode exposée par Brumberg et Chapront (1973) par exemple, mais seulement dans le cas où tous les monômes possibles à un degré donné sont présents dans le module et si on a factorisé les monômes.

III.2.2.2.- Structure externe.

a) regroupement de modules associés à plusieurs séries.

A l'ordre 1, supposant les termes périodiques du second membre d'une équation structurés en modules avec des tableaux T_1, T_2, T_3 et C (T_1 intégré ou non au module), il est évident que la solution de cette équation peut admettre exactement la même structure, avec les mêmes tableaux T_1, T_2, T_3 mais avec un tableau C' déduit de C par l'intégration de chaque terme.

Dans ces conditions, nous avons donc regroupé dans un même module les tableaux T_1, T_2, T_3 et les 2 tableaux C et C' correspondant au développement du second membre d'une équation et à celui de sa solution. On a vu en outre que les développements relatifs aux variables p et q sont semblables (cf. I.4). Ceci permet de les structurer en modules contenant exactement les mêmes tableaux T_1, T_2 et T_3 . Les développements de leur solution admettent aussi la même structure et sont de plus liés naturellement par la double intégration de $\Delta_1 p$, nécessaire pour obtenir $\Delta_1 q$. Dans ce cas, nous avons donc

regroupé dans un module unique les 3 tableaux T_1 , T_2 et T_3 et les 4 tableaux de coefficients C_1 , C_2 , C_3 et C_4 correspondant aux développements des termes périodiques des seconds membres des équations en p et q , et de leurs solutions.

Le descripteur du module contient alors, en plus des informations communes aux 2 ou 4 modules initiaux, le nombre de tableaux de coefficients qu'il contient, et leur identification.

b) structure de l'ensemble des modules.

Tous les modules répondant aux quatre mêmes spécifications : (variable, planète, ordre, degré), sont structurés en liste : on accède au dernier module créé grâce à un tableau donnant pour chaque spécification l'adresse de ce module sur le disque et sa longueur ; son descripteur contient l'adresse et la longueur du module de même spécification créé juste avant lui ; le dernier module de la liste contient un pointeur spécial (nil) indiquant la fin de la liste.

Les divers modules d'une même liste correspondent aux divers ensembles de planètes perturbatrices, et aux diverses masses mises en facteur de chaque module. Ils correspondent aussi à un découpage des séries qui, par commodité, impose à un module de contenir un nombre limité de termes ou de blocs de termes factorisés. Ce type de structure est très bien adapté à un traitement global des séries (n'exigeant pas l'accès à des termes isolés donnés) ; il permet en outre d'étendre facilement les séries, par exemple lorsqu'on augmente la précision.

Avec cette structure, l'ensemble des termes périodiques retenus à l'issue de la sélection décrite en III.1.4, dans les seconds membres des équations et dans leur solution à l'ordre 1, forme 303 modules totalisant 159 240 termes ;

on a autant de coefficients (en double précision (*)), mais seulement 54 039 monômes et inégalités grâce aux factorisations et à l'association de plusieurs tableaux de coefficients par module (cf. tableau 4).

Quant au système autonome d'ordre 1, il comporte 140 modules contenant au total 14 512 termes ; ces modules sont structurés en une liste distincte de celle des modules contenant les termes périodiques, et sont accessibles au moyen d'un deuxième tableau d'adresses contenant pour chaque spécification l'adresse de la tête de liste.

c) remarque.

Pour faciliter le traitement du système autonome, nous avons adopté, pour ce système, des modules à structure maximale : ceux-ci sont déduits des modules vus jusqu'ici, en étendant systématiquement aux N planètes la liste des K planètes associées à ces modules. Le tableau T_1 contient alors des $5N$ -uplets et le tableau T_2 est réduit à un seul élément contenant l'inégalité séculaire.

(*) Sur l'IRIS 80, la double précision comporte 15,7 chiffres significatifs, contre 6,0 seulement pour la simple précision ; cette dernière pourrait suffire si on s'arrêtait à l'ordre 1, mais des produits de séries sont nécessaires pour construire l'ordre 2 et dans bien des cas, nous avons observé que les termes obtenus dans ces produits se compensent partiellement pour donner après simplification des termes ayant moins de chiffres significatifs, d'où une dégradation de la précision.

En adoptant la double précision, nous évitons, dans l'estimation des erreurs, d'avoir à considérer celles dues aux troncatures, et nous pouvons les attribuer entièrement aux limitations des développements (limitations en degré par exemple, ou bien résultant de la sélection des termes d'ordre 1).

Nous avons par ailleurs estimé que, pour calculer l'ordre 2 les opérations en double précision sur les coefficients consomment environ 8 % de la durée totale ; l'emploi de la simple précision n'améliorerait donc pas sensiblement cette durée ; son seul avantage serait de réduire notablement l'encombrement des séries et il serait intéressant de voir si, l'utilisant pour stocker l'ordre 2, on pourrait encore construire convenablement l'ordre 3.

De cette façon, les masses étant incorporées numériquement aux coefficients, on peut faire toutes les simplifications entre termes d'un même monôme, qui se trouvaient auparavant, dans des modules différents, associés à des masses différentes. On admet également que l'on puisse avoir dans ces nouveaux modules des termes de degrés et d'ordres divers ; de tels modules seront appelés dans la suite, des super-modules, identifiés seulement par le nom d'une variable et d'une planète.

III - 2.5.- Langage de manipulation des modules.

Nous avons constitué un ensemble de sous-programmes FORTRAN, spécialisés chacun dans une certaine manipulation élémentaire des séries ; l'appel de ces sous-programmes, dans l'ordre voulu pour effectuer un calcul défini (par les équations (2.12) à (2.15), par exemple), constitue en quelque sorte une phrase dans un langage de manipulation de séries ; ce sera en fait ici un langage de manipulation des modules constituant ces séries. Dans ce paragraphe, nous allons simplement donner la liste des principaux sous-programmes, avec leur fonction, d'abord pour la création et la manipulation des modules, puis pour celle des super-modules et pour le traitement du système autonome.

III - 2.5.1.- Création et manipulations de modules.

A l'ordre 1, la création des modules fait appel aux sous-programmes permettant le calcul isolé des termes des seconds membres (dont nous donnons le principe en Annexe 2) ; nous avons calculé ces termes dans chaque équation, dans l'ordre des degrés et grades croissants, en déterminant pour chaque monôme les inégalités qu'il convenait de retenir en fonction des principes de sélection définis en III.1.4. Nous avons ainsi réalisé directement la factorisation des monômes ; les termes périodiques ont été immédiatement intégrés de façon à construire en une seule fois chaque module avec ses 2 ou 4 tableaux de coefficients (cf. III.2.2.2. a).

Pour construire l'ordre 2, nous faisons appel aux sous-programmes suivants, classés suivant leur fonction :

a) sous-programmes qui transforment un module en un autre, consistant à :

- . dériver un module par rapport à une ou plusieurs variables,
- . intégrer par rapport au temps un module constitué de termes périodiques,
- . conjuguer un module,
- . isoler une inégalité donnée dans un module (utile pour étudier par exemple sa contribution dans un calcul).

b) sous-programmes qui, opérant sur deux modules, créent un troisième module ; ils consistent à :

- . faire la somme de deux modules ayant même spécification (avec simplification automatique des termes ayant même monôme et appartenant à la même inégalité, et avec l'élimination des termes nuls ou inférieurs à une quantité donnée).
- . faire le produit de deux modules de spécifications quelconques (avec les mêmes simplifications automatiques du résultat que dans le sous-programme somme). Ce sous-programme permet aussi de ne faire intervenir dans le produit que les termes des 2 modules, sélectionnés selon leur appartenance à une ou plusieurs inégalités données ; on peut aussi ne calculer que les termes du produit contribuant à une ou plusieurs inégalités données. Ceci permet l'analyse des contributions provenant d'inégalités données, et la construction d'inégalités données ; par exemple, les termes séculaires d'ordre 2 ont ainsi été calculé indépendamment des termes périodiques d'ordre 2, réalisant directement la séparation de ces termes.

c) sous-programmes de gestion des modules, ils permettent de :

- . lire un module sur disque suivant ses spécifications et certains paramètres de son descripteur.
- . écrire un module sur disque (extension de la liste des modules).
- . mettre en facteur les inégalités ou les monômes dans un module.
- . éditer un module sur imprimante.

III - 2.5.2.- Création et manipulations des super-modules.

Pour les traitements du système autonome, les développements sont mis sous la forme de super-modules (définis en III.2.2.2. c). Nous faisons d'abord appel aux sous-programmes suivants qui permettent de :

- . substituer des valeurs numériques aux variables (notamment les p_{oi}).
- . isoler des termes donnés, ou de degré donné (pour reconstituer par exemple les matrices A_1 et A_2 du système autonome).
- . faire la somme de deux super-modules.
- . faire le produit d'un super-module par une constante.

Ayant obtenu les constantes p_{oi} , et calculé les valeurs propres et vecteurs propres de A_1 et de A_2 , il faut ensuite obtenir le transformé $P^{-1}F(PY, P\bar{Y})$ des termes non linéaires $F(X, \bar{X})$. Cette opération consiste à remplacer, dans chaque monôme de F , chaque variable constituant X par un polynôme de degré 1 issu de la transformation linéaire $X = PY$. C'est un cas particulier de substitution d'une série dans une série.

Dans cette transformation, un monôme des variables de X associées à K planètes, donne plusieurs monômes des variables de Y associées aux N planètes. C'est ce qui a justifié la création des super-modules : en représentant les développements en variables X par des super-modules, et la transformation PY par d'autres super-modules représentant maintenant des développements

en variables Y , on obtient naturellement le transformé de F sous forme d'un super-module en variable Y . On a donc une loi de composition interne entre super-modules dont l'intérêt est le suivant :

L'opération de substitution consiste en un grand nombre de produits de polynômes (nombre croissant avec le degré des monômes et, à chaque degré, avec le nombre des monômes). Si le degré est élevé, c'est une opération longue donc coûteuse ; en adoptant les super-modules, il n'y a pas, dans ces produits, de réordonnement des $5N$ -uplets, comme dans le produit de deux modules (cf. note en III.2.2.1. b), d'où un gain de temps par rapport au produit de modules.

Nous avons tenté de minimiser le nombre de ces substitutions en établissant de façon dynamique un catalogue donnant le transformé (sous forme d'un super-module en variable Y) de tous les monômes déjà traités : on initialise ce catalogue avec le transformé des puissances utiles des variables z_{oi} et ζ_{oi} (constituant X) ; si le monôme qu'on doit transformer n'est pas encore catalogué, on le décompose en un produit de 2 monômes partiels, dont l'un est une des puissances de z_{oi} ou ζ_{oi} ; si leur transformé est catalogué, on les extrait du catalogue pour en faire le produit, sinon on opère une nouvelle décomposition du monôme. Chaque nouveau monôme transformé est ajouté au catalogue.

C'est néanmoins cette transformation des termes non linéaires qui est finalement la plus longue à effectuer dans tout le traitement du système autonome. Il s'avère que la durée de ce calcul croît rapidement avec le nombre N des planètes (cf. IV.2.2.2.1 d) : pour 2 planètes, nous avons pu transformer le système complet jusqu'au degré 7, tandis que pour 4 planètes, nous nous sommes limités aux degrés 3 et 5 (*). La façon dont nous procédons peut certainement encore être améliorée (notamment la gestion du catalogue, et sans doute aussi la manière d'effectuer les produits entre termes de super-modules) ; il le faudrait pour traiter les 8 planètes à un degré élevé.

(*) on verra cependant que les résultats concernant le degré 7 pour le couple Jupiter-Saturne peuvent s'extrapoler aux quatre planètes.

Disposant des super-modules en variable Y, on obtient la solution du système autonome (en variable Y) en faisant appel à des sous-programmes permettant notamment de :

- . isoler les termes résonnants dans ces super-modules,
- . substituer aux variables Y des expressions de la forme

$$\sum_j K_j \exp \sqrt{-1} \left(\sum_{i=1}^{2N} n_{ij} \lambda_{oi} \right) t$$

où K_j est complexe et où les arguments $\sum_i n_{ij} \lambda_{oi}$ sont codés comme les inégalités par l'intermédiaire des n_{ij} , ou bien sont sous la forme numérique $c_j t$ où c_j est réel.

- . intégrer les termes non résonnants, en tenant compte de la modification des valeurs propres due aux termes résonnants.

CHAPITRE IV

RESULTATS =====

Il est matériellement impossible de donner ici les développements analytiques de tous les résultats acquis ; nous allons donc seulement illustrer les principales étapes de la construction d'une théorie générale, grâce à des tableaux de résultats permettant d'analyser la contribution apportée aux développements des seconds membres des équations ou de leur solution par les termes de divers ordres, grades et degrés, ou par certaines inégalités. Ceci permettra de juger de la convergence numérique des séries, et d'estimer la précision des résultats.

Nous étudierons d'abord le comportement numérique des inégalités périodiques aux ordres 1 et 2, puis celui du système autonome et de sa solution, également aux ordres 1 et 2. Nous serons alors amenés à des comparaisons avec les résultats obtenus par P. Bretagnon (1978) dans la solution semi-numérique à variations séculaires qu'il a développée jusqu'à l'ordre 6 pour les 4 grosses planètes, et avec des solutions du système autonome obtenues par Brouwer et Van Woerkom (1950), Bretagnon (1974) et Brumberg (1975) qui tiennent compte de l'ordre 1 et de certaines parties de l'ordre 2 pour les 8 planètes.

Nous avons déjà décrit en III.1.4 la façon dont nous avons sélectionné les termes d'ordre 1 en vue de construire l'ordre 2. Nous avons indiqué à cette occasion que les résultats qui suivent ne représentent pour le moment qu'une approche de la solution générale, de précision limitée, dans le cadre du problème des 4 grosses planètes. Nous verrons cependant que ces résultats permettent d'augurer favorablement de leur extension : leur analyse montre en effet dans

quelles directions (ordres, grades, degré) il faudrait d'abord étendre les développements acquis jusqu'ici pour en améliorer la précision.

Dans tous les résultats donnés ici, les masses m_i ont été remplacées par leur valeur numérique, et ces résultats tiennent compte de ces valeurs. On trouvera les valeurs des N_i et des m_i dans le tableau 2, ainsi que les constantes d'intégration $z_{oi}^{(0)}$ et $\zeta_{oi}^{(0)}$ utilisées dans le système autonome. Ces constantes ont été choisies identiques à celles adoptées par P. Bre'tagnon (1978) afin de faciliter les comparaisons.

IV - 1.- Développement d'inégalités périodiques.

Une analyse des inégalités périodiques d'ordre 1 a déjà été exposée dans l'article inséré en annexe 2. Nous n'ajouterons ici que quelques tableaux donnant le développement limité de quelques inégalités périodiques aux ordres 1 et 2, qui illustrent bien le comportement général des inégalités périodiques à ces ordres. La comparaison des contributions données à chaque ordre permettra de juger de la convergence numérique. Nous verrons sur ces illustrations comment se comportent d'abord les termes ayant le même monôme et appartenant à diverses inégalités, puis les termes de divers degrés et grades du développement d'une même inégalité périodique dans le cas d'une courte période et d'une longue période (la grande inégalité). Ces deux approches décrivent finalement le comportement des développements dans une factorisation des monômes puis dans une factorisation des inégalités.

IV - 1.1.- Développements relatifs à un même monôme.

Nous avons choisi d'illustrer ce type de développement par le monôme de degré 0, donnant ce qu'on appelle la solution intermédiaire. C'est sous ce vocable que Brumberg, à la suite de Hill, désigne les termes de degré 0 dans la solution. Leur intérêt réside surtout dans le fait que ne dépendant pas des

variables z_{oi} et ζ_{oi} , ces termes ont une amplitude constante, par opposition aux autres termes (de degré non nul) dont les amplitudes sont des fonctions de la solution à très longues périodes du système autonome. Ces amplitudes ne dépendent que des valeurs données aux masses m_i et aux moyens mouvements N_i . On obtient de tels termes seulement dans les inégalités de caractéristique 0 dans les solutions Δp_i et Δq_i , et de caractéristique 1 dans les Δz_i (il n'y a pas de terme de degré 0 dans $\Delta \zeta_i$).

Nous donnons dans les tableaux 5a, 5b et 5c les termes de la solution intermédiaire supérieurs à $0''{,}1$ dans les développements de $\Delta_1 p$, $\Delta_1 q$, $\Delta_1 \bar{z}$, $\Delta_2 p$, $\Delta_2 q$ et $\Delta_2 \bar{z}$ relatives aux 4 grosses planètes^(*). Il faut lire ces tableaux de la façon suivante : par exemple $\Delta_1 p_5$ et $\Delta_1 q_5$ sont de la forme :

$$\Delta_1 p_5 = -6''{,}08 \exp[\sqrt{-1}(N_5 - N_6)t + q_{05} - q_{06}] - 20''{,}80 \exp[\sqrt{-1}(2N_5 - 2N_6)t + 2q_{05} - 2q_{06}] + \dots$$

$$\Delta_1 q_5 = -24''{,}36 \exp[\sqrt{-1}(N_5 - N_6)t + q_{05} - q_{06}] + \dots$$

les q_{05} et q_{06} sont les solutions à très longues périodes du système autonome, développées éventuellement en puissances de t .

Pour les Δp_i et Δq_i , il faut ajouter à chaque terme donné son conjugué (changé de signe pour Δq_i).

(*) tous les résultats donnés ici et dans la suite concernent les conjugués

$$\Delta \bar{z}_i, \Delta \bar{\zeta}_i, \frac{d\bar{z}_{oi}}{dt} \text{ et } \frac{d\bar{\zeta}_{oi}}{dt} ; \text{ ceci vient de ce que nous avons initialement construit les équations pour les variables } x = \bar{z} \exp \sqrt{-1} Nt$$

et $y = \bar{\zeta} \exp \sqrt{-1} Nt$ d'où nous avons tiré les équations pour \bar{z} et $\bar{\zeta}$ (cf. annexe 1 et l'article de l'annexe 2). Nous n'avons pas jugé utile par la suite d'en prendre les conjugués.

TABLEAU 5a

Solution intermédiaire d'ordre 1 dans Δp et Δq

N_5	N_6	$\Delta_1 p_5$	$\Delta_1 q_5$	N_5	N_6	$\Delta_1 p_6$	$\Delta_1 q_6$	N_5	N_7	$\Delta_1 p_7$	$\Delta_1 q_7$	N_5	N_8	$\Delta_1 p_8$	$\Delta_1 q_8$
1	-1	- 6",08	-24",36	1	-1	-546",12	268",09	1	-1	-647",04	352",62	1	-1	-761",19	456",49
2	-2	-20 ,80	-33 ,63	2	-2	51 ,31	74 ,40	2	-2	2 ,76	3 ,05	2	-2	0 ,52	0 ,54
3	-3	- 9 ,52	-12 ,42	3	-3	23 ,49	28 ,03	3	-3	0 ,63	0 ,60				
4	-4	- 4 ,56	- 5 ,23	4	-4	11 ,26	11 ,97	4	-4	0 ,15	0 ,13				
5	-5	- 2 ,24	- 2 ,36	5	-5	5 ,54	5 ,46								
6	-6	- 1 ,12	- 1 ,11	6	-6	2 ,77	2 ,59								
7	-7	- 0 ,57	- 0 ,54	7	-7	1 ,41	1 ,26	N_6	N_7			N_6	N_8		
8	-8	- 0 ,29	- 0 ,26	8	-8	0 ,72	0 ,62	1	-1	-166",80	78",04	1	-1	-184",83	96",05
9	-9	- 0 ,15	- 0 ,13	9	-9	0 ,37	0 ,31	2	-2	9 ,94	13 ,51	2	-2	1 ,51	1 ,73
				10	-10	0 ,19	0 ,16	3	-3	4 ,15	4 ,49	3	-3	0 ,40	0 ,39
N_5	N_7			N_6	N_7			4	-4	1 ,81	1 ,84	4	-4	0 ,11	0 ,10
1	-1	- 0",03	- 0",11	1	-1	- 0",57	- 2",16	5	-5	0 ,81	0 ,78				
2	-2	- 0 ,24	- 0 ,31	2	-2	- 2 ,16	- 3 ,29	6	-6	0 ,37	0 ,33	N_7	N_8		
				3	-3	- 0 ,90	- 1 ,11	7	-7	0 ,17	0 ,15	1	-1	- 23",69	16",34
				4	-4	- 0 ,39	- 0 ,43	N_7	N_8			2	-2	5 ,32	9 ,03
				5	-5	- 0 ,18	- 0 ,18	1	-1	-2",78	-12",69	3	-3	2 ,86	3 ,90
				N_6	N_8			2	-2	-7 ,87	-14 ,70	4	-4	1 ,61	1 ,92
				1	-1	- 0",08	- 0",26	3	-3	-4 ,24	- 6 ,24	5	-5	0 ,92	1 ,01
				2	-2	- 0 ,49	- 0 ,64	4	-4	-2 ,38	- 3 ,04	6	-6	0 ,54	0 ,56
				3	-3	- 0 ,13	- 0 ,14	5	-5	-1 ,37	- 1 ,59	7	-7	0 ,32	0 ,31
								6	-6	-0 ,80	- 0 ,87	8	-8	0 ,19	0 ,18
								7	-7	-0 ,48	- 0 ,49	9	-9	0 ,12	0 ,11
								8	-8	-0 ,28	- 0 ,28				
								9	-9	-0 ,17	- 0 ,16				

TABLEAU 5b

Solution intermédiaire d'ordre 1 dans $\Delta \bar{z}$

N_5	$\Delta_1 \bar{z}_5$	N_6	$\Delta_1 \bar{z}_6$	N_6	N_7	$\Delta_1 \bar{z}_6$	N_7	$\Delta_1 \bar{z}_7$	N_7	N_8	$\Delta_1 \bar{z}_7$	N_8	$\Delta_1 \bar{z}_8$				
-1	196",94	-1	58",97	-4	3	0",18	-1	9",02	-8	7	0",11	-1	10",68				
				-3	2	0 ,35			-7	6	0 ,18						
N_5	N_6	N_5	N_6	-2	1	0 ,10	N_5	N_7	-6	5	0 ,29	N_5	N_8				
-8	7	0",15	-8	7	- 0",18	0 -1 - 1 ,89	-3	2	- 0",13	-4	3	0 ,68	-1	0	710",14		
-7	6	0 ,27	-7	6	- 0 ,34	1 -2 9 ,79	-2	1	- 0 ,40	-3	2	0 ,94	0	-1	201 ,49		
-6	5	0 ,52	-6	5	- 0 ,64	2 -3 1 ,91	-1	0	567 ,55	-2	1	- 0 ,54	1	-2	270 ,69		
-5	4	0 ,97	-5	4	- 1 ,17	3 -4 0 ,65	0	-1	208 ,60	-1	0	- 2 ,48	2	-3	- 0 ,63		
-4	3	1 ,79	-4	3	- 2 ,11	4 -5 0 ,25	1	-2	241 ,58	0	-1	- 5 ,15					
-3	2	3 ,13	-3	2	- 3 ,50	5 -6 0 ,11	2	-3	- 3 ,54	1	-2	-423 ,71	N_6	N_8			
-2	1	- 1 ,13	-2	1	- 4 ,22		3	-4	- 0 ,74	2	-3	14 ,09	-2	1	- 0",21		
-1	0	- 7 ,09	-1	0	407 ,50	N_6	N_8	4	-5	- 0 ,17	3	-4	5 ,10	-1	0	157 ,15	
0	-1	-16 ,53	0	-1	258 ,11	-1	0	- 0",19	N_6	N_7	4	-5	2 ,42	0	-1	63 ,88	
1	-2	134 ,91	1	-2	141 ,03	0	-1	- 0 ,62	-5	4	- 0",18	5	-6	1 ,26	1	-2	70 ,40
2	-3	22 ,41	2	-3	- 94 ,67	1	-2	1 ,27	-4	3	- 0 ,36	6	-7	0 ,70	2	-3	- 2 ,02
3	-4	8 ,09	3	-4	- 34 ,87	2	-3	0 ,22	-3	2	- 0 ,67	7	-8	0 ,39	3	-4	- 0 ,49
4	-5	3 ,46	4	-5	- 15 ,09				-2	1	- 0 ,96	8	-9	0 ,22	4	-5	- 0 ,13
5	-6	1 ,59	5	-6	- 7 ,00				-1	0	126 ,79				N_7	N_8	
6	-7	0 ,76	6	-7	- 3 ,37				0	-1	73 ,24				-6	5	- 0",11
7	-8	0 ,38	7	-8	- 1 ,66				1	-2	59 ,01				-5	4	- 0 ,17
8	-9	0 ,19	8	-9	- 0 ,83				2	-3	- 16 ,50				-4	3	- 0 ,26
N_5	N_7		N_5	N_7					3	-4	- 5 ,77				-3	2	- 0 ,34
0	-1	- 0",35	11	-12	- 0 ,11				4	-5	- 2 ,31				-2	1	- 0 ,57
1	-2	0 ,59							5	-6	- 0 ,98				-1	0	17 ,78
N_5	N_8								6	-7	- 0 ,43				0	-1	13 ,52
0	-1	- 0",13							7	-8	- 0 ,19				1	-2	116 ,09
1	-2	0 ,15													2	-3	- 13 ,92
															3	-4	- 5 ,14
															4	-5	- 2 ,46
															5	-6	- 1 ,29
															6	-7	- 0 ,72
															7	-8	- 0 ,41
															8	-9	- 0 ,24

a) Ordre 1.

A l'ordre 1 (tableaux 5a et 5b), nous avons séparé les contributions dues à chaque planète perturbatrice. Dans $\Delta_1 \bar{z}_i$, on remarque notamment la partie issue de la perturbation képlérienne, égale à $206265'' \frac{m_i}{M_\odot}$ (cf. Annexe 4).

On peut extraire de ces tableaux deux propriétés des développements qu'on retrouve qualitativement pour les autres monômes (de degré non nul) lorsque, pour chacun d'eux, on parcourt l'ensemble des inégalités qui contiennent ce monôme :

1 - Dans chaque colonne relative à un couple de planètes, les termes sont rangés suivant les valeurs croissantes de l'entier relatif l (cf. 2.2) ; les coefficients correspondant aux grandes valeurs de l sont sensiblement en progression géométrique de raison α (rapport des demi-grands axes^(*)). On se rend bien compte ainsi de la décroissance de ces suites de coefficients suivant α , et cela permet de préciser la borne l_M des valeurs de l qu'il convient d'adopter dans chaque cas pour obtenir une précision donnée.

Remarquons que cette décroissance existe primitivement, avant intégration, dans les seconds membres des équations, et que parfois, dans des développements analogues relatifs à des monômes de degré non nul, l'intégration peut altérer notablement ces suites dans le cas d'une inégalité à petit diviseur (ou à longue période).

(*) pour les quatre grosses planètes, les rapports α_{ij} sont les suivants :

$$\alpha_{56} = 0,545313$$

$$\alpha_{57} = 0,271133$$

$$\alpha_{58} = 0,173057$$

$$\alpha_{67} = 0,497207$$

$$\alpha_{68} = 0,317355$$

$$\alpha_{78} = 0,638275$$

Tableau 5c

Solution intermédiaire d'ordre 2 dans Δp , Δq et $\Delta \bar{z}$

N_5	N_6	Δ_{2p5}	Δ_{2q5}	N_5	N_6	N_7	Δ_{2p6}	Δ_{2q6}	N_5	N_6	N_7	N_8	Δ_{2p7}	Δ_{2q7}	N_5	N_6	N_7	N_8	Δ_{2p8}	Δ_{2q8}
1	-1	0",15	0",39	1	-1		0",17	-1",28	-1		3	-2	1",55	-0",24	1		1	-2	0",05	-0",30
2	-2	0",09	0,17	2	-2		0,22	-0,58	1		1	-2	-0,03	0,90	2		-2	0,47	-0,28	
3	-3	0,07	0,10	3	-3		-0,35	-0,13	3	-2	-1		-0,28	0,17	3	-2		-1	-0,34	0,21
				4	-4		-0,10	-0,11	2		-2		0,35	-0,19	1	1		-2	0,24	-0,13
				1	-3	2	0,01	-0,19	1	1	-2		0,21	-0,07	2	-1		-1	0,16	-0,10
									2	-1	-1		0,13	-0,07	1		-1		-0,45	0,10
									1	-1			0,14	-0,06	1			-1	0,45	-0,09
									1	-3	2		0,38	-0,23	1	-1			-0,13	0,01
									1	1	-2		-0,01	0,18	1			-1	0,13	-0,02
									2	-4	2		-0,15	-0,18	1	-1			-0,12	0,02
										1	-1		-0,10	-0,41	1		-1		0,12	0,02
										2	-2		0,82	-0,13		1	-1		-0,10	0,24
N_5	N_6	N_7	N_8	$\Delta_{2\bar{z}5}$	N_5	N_6	N_7	N_8	$\Delta_{2\bar{z}6}$	N_5	N_6	N_7	N_8	$\Delta_{2\bar{z}7}$	N_5	N_6	N_7	N_8	$\Delta_{2\bar{z}8}$	
1	-2			-0",64	1	-2			2",28					-6",91				1	-2	3",80
0	-1			0,25	1	1	-4	2	0,51					-1,07				-1	-1	0,81
2	-3			-0,16	2	-3			0,47					-0,85				-1	0	0,62
3	-4			-0,07	0	-1			-0,33					0,70				-2	1	0,58
-1	0			0,06	3	4			0,33					-0,62				-3	2	0,32
2	-6	3		0,05			1	-2	0,25					0,52				-1	-1	0,27
0	1		-2	0,04	2	-6	3		-0,19					0,46				1	-1	0,26
					-3	2			-0,18					0,40				1	1	-3
					-1	0			0,17					0,28				1		-2
					-2	1			0,15					0,26				1	-1	0,17
					4	-5			0,13					0,22				1	-1	-1
					5	-6			0,07					0,20				2	-3	0,16
					2	-5	2		-0,05					0,19				-2	1	0,15
														0,19				-1	0	0,14
														0,17				3	-2	-2
														0,14				-1	3	-3
														0,13						0,11
														0,11						0,12
														0,10						0,11
														-0,10						

Solution intermédiaire d'ordre 3 :

N_7	N_8	$\Delta_{3\bar{z}7}$	N_7	N_8	$\Delta_{3\bar{z}8}$
1	-2	0",55	1	-2	-0",21

2 - On remarque que dans les parties correspondant aux perturbations dûes à une planète intérieure (par exemple Uranus perturbé par Jupiter), un ou plusieurs termes sont très gros par rapport aux autres. Ils proviennent essentiellement du développement de la partie indirecte de la fonction perturbatrice, qui contient dans ce cas le facteur $N_i \frac{m_j}{M_\odot} \alpha_{ji}^{-2}$, et ce facteur est d'autant plus grand que α_{ji} est plus petit. Ces termes (de degré nul) n'interviennent que dans les inégalités (1,-1) et (-1,1) des $\Delta_1 p_i$ et $\Delta_1 q_i$ et dans les inégalités (-1,0), (0,-1) et (1,-2) des $\Delta_1 \bar{z}_i$. Naturellement, les termes de degré non nul provenant de ces mêmes parties indirectes sont aussi généralement plus grands que ceux issus des parties directes de la fonction perturbatrice. On conçoit dans ces conditions l'importance des termes issus de ces parties indirectes lorsqu'on construit l'ordre 2 (comme dans le théorème de Poisson).

Notons encore l'importance de tous les termes en (1,-2) dans les $\Delta_1 \bar{z}_i$, même dans $\Delta_1 \bar{z}_5$ qui ne contient aucune partie indirecte en α^{-2} ; dans ce dernier cas c'est l'intégration, équivalant à une multiplication par 5 environ, qui en est responsable. Dans le cas d'Uranus et de Neptune, l'inégalité (1,-2) étant à longue période ($\approx 4\ 200$ ans), l'intégration équivaut à une multiplication par 50,7 pour Uranus, et par 25,9 pour Neptune.

b) Ordre 2.

Les termes d'ordre 2 donnés dans le tableau 5c sont issus des produits de la forme $\left\{ \left(\frac{\partial L_{ij}^{(e)}}{\partial V} \right)_0 \Delta_1 V \right\}$ (cf. (2.15)) dans lesquels, pour obtenir un terme de degré 0, on voit qu'il faut prendre les termes de degré 0 et 1 de $L_{ij}^{(e)}$, et ceux de degré 0 de $\Delta_1 V$ (c'est-à-dire la solution intermédiaire d'ordre 1) ;

les termes $\frac{\partial \Delta_1 V}{\partial V_0} \cdot \frac{dV_0^{(1)}}{dt}$ ne contribuent pas à la partie de degré 0 de $\Delta_2 V$

car $\frac{dV_0^{(1)}}{dt}$ est de degré non nul (les seuls termes de degré nul, dans les $\frac{dq_{oi}}{dt}$, sont éliminés par le choix des constantes p_{oi}).

Les termes publiés ici résultent d'un calcul que nous avons effectué au moment de la mise au point du programme de calcul des seconds membres, en vue de comparer cette solution intermédiaire à celle obtenue par Brumberg (cf. annexe 2). Nous avons alors pris dans les $L_{ij}^{(e)}$ tous les termes de degré 0 et 1 avec $l_M = 20$, et retenu dans $\Delta_1 V$ tous ceux (de degré 0) supérieurs à $0'',001$. De cette façon la solution d'ordre 2 donnée ici est obtenue avec une précision meilleure que $0'',001$ sauf pour quelques inégalités à longues périodes. Nous avons pu nous en assurer par comparaison avec la solution intermédiaire obtenue par Brumberg (1973), (après avoir mis notre solution sous une forme comparable à la sienne, cf. paragraphe 5b de l'annexe 2), et par des calculs directs reconstituant tous les produits de termes d'ordre 1 qui contribuent à un terme donné d'ordre 2.

On remarque que c'est encore l'inégalité (1,-2) qui a le plus gros coefficient, notamment dans $\Delta_2 \bar{z}_7$ et $\Delta_2 \bar{z}_8$. Ceci est encore vrai à l'ordre 3, dont nous avons calculé la partie issus de $\left\{ \left(\frac{\partial L_{ij}^{(e)}}{\partial V} \right)_0 \Delta_2 V \right\}$: seuls les termes en (1,-2) relatifs à Uranus et Neptune sont supérieurs à $0'',1$ dans $\Delta_3 \bar{z}_7$ et $\Delta_3 \bar{z}_8$, tous les autres termes ne dépassent pas quelques millièmes de secondes de degré.

Notons encore l'apparition d'inégalités dépendant de trois N_i . Les plus importantes d'entre elles sont à longues périodes, ou bien s'expliquent par la combinaison des quelques très gros termes d'ordre 1 issus des parties indirectes en α^{-2} .

c) Remarques.

Cette solution intermédiaire d'ordre 1 et 2 montre que la convergence numérique ordre par ordre, dans chaque inégalité, est très variable suivant les inégalités, sans lien apparent avec la longueur de leur période : on constate que pour la plupart des inégalités la contribution d'ordre 2 est environ 100 fois plus petite que celle d'ordre 1, mais que pour certaines, ces deux contributions sont du même ordre de grandeur (comme l'inégalité $(-2N_5 + N_7)$ dans $\Delta_1 \bar{z}_7$ et $\Delta_2 \bar{z}_7$) ; pourtant on aurait pu espérer un rapport égal à 1000 entre ces contributions, en relation avec la valeur des masses relatives $\frac{m_i}{M_e}$.

La convergence ordre par ordre n'est donc pas aussi rapide qu'on pourrait le penser. On verra même que pour des termes de degré non nul dans le système autonome, l'ordre 2 est 10 fois supérieur à l'ordre 1. Heureusement que les excentricités et inclinaisons sont suffisamment petites pour que cela n'ait pas de conséquence catastrophique !

Signalons enfin que la solution intermédiaire donnée dans le tableau 5 ne comporte, à l'ordre 1, que les termes de grade 0, tandis qu'à l'ordre 2, on a compté, en plus du grade 0, les termes d'ordre 1 et de grade 1 (toujours de degré nul). Ces derniers ont été calculés en y remplaçant les p_{oi} par leurs valeurs (cf. tableau 8). Nous n'avons pas voulu surcharger ce tableau en séparant à l'ordre 1 la contribution de grade 0 et de grade 1. Cependant, à titre d'exemple, on obtient, pour les termes de grade 1 associés à l'inégalité (1,-1) de $\Delta_1 p_5$, l'expression suivante :

$$\Delta_1 p_5 = [-6'',08 - 18'',24 p_{o6} + 6'',07 p_{o5}] \exp[\sqrt{-1}(N_5 - N_6)t + q_{o5} - q_{o6}] + \dots$$

Avec les valeurs de p_{o5} et p_{o6} , la contribution des termes de grade 1 vaut $0'',044$, soit 140 fois moins que celle de grade 0. L'ordre 2 apporte une contribution comparable, égale à $0'',102$ (cf. tableau 5c).

Pour les autres termes périodiques, les termes de grade 1 ont le plus souvent des coefficients plus grands que ceux de grade 0 (parfois 10 fois plus grands). Ceci explique en partie qu'à l'ordre 2 on obtienne généralement une contribution seulement 100 fois plus petite qu'à l'ordre 1.

IV - 1.2.- Développements relatifs à une même inégalité périodique.

Nous prenons deux exemples de tels développements : l'un concerne l'inégalité $(N_5 - N_6)$, à courte période, l'autre la grande inégalité. Ils illustreront l'aspect numérique du comportement général des inégalités périodiques aux ordres 1 et 2.

Les tableaux 6 et 7 donnent ainsi les développements limités au degré 3 et aux ordres 1 et 2, de ces inégalités dans les seconds membres des équations relatives aux Δp_i et Δq_i de Jupiter et de Saturne, et dans leur solution.

Dans chaque ligne de ces tableaux on trouve les coefficients d'un même monôme (décrit par ses exposants) dans divers développements de la même inégalité : à l'ordre 1, il s'agit du développement des seconds membres $L_{ij}^{(1)}$ et $L_{ij}^{(2)}$ et de celui de leur solution $\Delta_1 p_i$ et $\Delta_1 q_i$ (cf. 2.13 et 2.17) ; à l'ordre 2, il s'agit des développements issus des produits $\{(\frac{\partial L_{ij}}{\partial V})_0 \cdot \Delta_1 V\}$ et $\frac{\partial \Delta_1 \sigma}{\partial V_0} \cdot \frac{dV_0^{(1)}}{dt}$ (*) présents dans les seconds membres de (2.15), et ceux de leurs solutions $\Delta_2 p_i$ et $\Delta_2 q_i$. Bien entendu, les colonnes relatives à une solution sont des combinaisons linéaires des autres, utilisant les coefficients suivants :

$$N_5 = 0,5296910 \text{ rad par an}$$

$$N_6 = 0,2132990 \text{ rad par an}$$

$$N_5 - N_6 = \frac{1}{3,16064} \text{ rad par an}$$

$$2N_5 - 5N_6 = -\frac{1}{140,586} \text{ rad par an.}$$

(*) σ représente ici les variables p_i ou q_i .

Le tableau 7c donne en outre une illustration de l'évaluation numérique de l'amplitude des termes d'une inégalité à une époque donnée. On verra en IV.3 les variations de cette amplitude avec le temps grâce à la solution à très longue période du système autonome.

a) Ordre 1.

A l'ordre 1, nous pouvons faire les 5 remarques suivantes, valables d'une façon générale pour toutes les équations :

1. Dans les seconds membres $L_{ij}^{(1)}$, la contribution des termes de grade 1 est calculée en y remplaçant les p_{oi} par leur valeur (tableau 8) ; comme dans la solution intermédiaire, nous constatons que cette contribution est environ 100 fois plus petite que celle du grade 0. On retrouve le même rapport 100 pour l'ensemble des autres inégalités du couple Jupiter-Saturne et le plus souvent un rapport plus grand encore pour les autres couples de planètes.

2. Dans l'inégalité (N_5-N_6) , entre le terme de degré 0 et ceux de degré 2, les coefficients sont en moyenne multipliés par 10, les coefficients des termes de degré 4, non donnés ici, sont eux-mêmes plus grands que ceux de degré 2. Cette progression se poursuit avec le degré, et se retrouve d'une façon générale dans toutes les inégalités. Elle pourrait être catastrophique pour la convergence si les excentricités et les inclinaisons étaient plus importantes qu'elles ne le sont dans le cas des grosses planètes.

3. Dans l'inégalité (N_5-N_6) , les termes dépendant des inclinaisons (variables ζ_{oi}) sont plusieurs fois supérieurs en moyenne à ceux dépendant des excentricités (variables z_{oi}). Pour la grande inégalité ce serait plutôt

Tableau 6

Développements de l'inégalité $(N_5 - N_6)t$ dans Δp_5 et Δq_6

degrés 0 et 2 Ordres 1 et 2

exposants des variables :								$N_5 L_{56}^{(1)}$		Δ_{1P_5}	$N_5 \left(\frac{\partial L_{56}^{(1)}}{\partial v} \right)_o \Delta_{1V}$	$\frac{\partial \Delta_{1P_5}}{\partial v_o} \frac{dv_o^{(1)}}{dt}$	Δ_{2P_5}	
\bar{z}_{o5}	z_{o5}	\bar{z}_{o6}	z_{o6}	$\bar{\zeta}_{o5}$	ζ_{o5}	$\bar{\zeta}_{o6}$	ζ_{o6}	grade 0	grade 1	+ grade 0 + grade 1				
0	0	0	0	0	0	0	0	-1",924 an ⁻¹	0",014 an ⁻¹	-6",037	0",0325 an ⁻¹	0",0000 an ⁻¹	0",102	
0	0	0	0	0	0	1	1	30",931	-0,250	96,971	-0,4104	-0,0137	-1,254	
0	0	0	0	0	1	1	0	-29,007	0,236	-90,935	0,4737	0,0137	1,454	
0	0	0	0	1	0	0	1	-32,855	0,264	-103,008	0,4051	0,0137	1,237	
0	0	0	0	1	1	0	0	30,931	-0,250	96,971	-0,4670	-0,0137	-1,432	
0	0	1	1	0	0	0	0	-6,289	0,052	-19,713	-1,7249	0,0048	-5,467	
0	1	1	0	0	0	0	0	-5,361	0,023	-16,871	0,9510	-0,0010	3,009	
1	0	0	1	0	0	0	0	11,094	-0,082	34,805	5,1315	-0,0015	16,223	
1	1	0	0	0	0	0	0	-6,289	0,052	-19,713	-2,9751	0,0002	-9,404	
								$N_5 \Delta_{1P_5}$	$N_5 L_{56}^{(2)}$	Δ_{1q_5}	$N_5 \Delta_{2P_5}$	$N_5 \left(\frac{\partial L_{56}^{(2)}}{\partial v} \right)_o \Delta_{1V}$	$\frac{\partial \Delta_{1q_5}}{\partial v_o} \frac{dv_o^{(1)}}{dt}$	Δ_{2q_5}
0	0	0	0	0	0	0	0	-3",198 an ⁻¹	-4",461 an ⁻¹	-24",206	0",054 an ⁻¹	0",019 an ⁻¹	0",000 an ⁻¹	0",233
0	0	0	0	0	0	1	1	51,365	91,125	450,36	-0,664	-0,881	-0,055	-4,71
0	0	0	0	0	1	1	0	-48,167	-81,860	-410,97	0,770	0,684	0,057	4,41
0	0	0	0	1	0	0	1	-54,562	-90,146	-457,37	0,655	1,123	0,053	5,45
0	0	0	0	1	1	0	0	51,365	80,880	417,98	-0,758	-0,929	-0,055	-5,16
0	0	1	1	0	0	0	0	-10,442	-19,435	-94,43	-2,896	-1,424	0,018	-13,71
0	1	1	0	0	0	0	0	-8,936	1,871	-22,33	1,594	1,675	-0,006	10,35
1	0	0	1	0	0	0	0	18,436	24,677	136,26	8,593	4,471	-0,007	41,31
1	1	0	0	0	0	0	0	-10,442	-17,353	-87,85	-4,981	-3,866	0,003	-27,97
								grade 0 + grade 1						

Tableau 7-a

Développements de l'inégalité $(2N_5 - 5N_6)$ dans Δp_5 et Δq_5
degré 3 ordres 1 et 2

\bar{z}_{05}	z_{05}	\bar{z}_{06}	z_{06}	$\bar{\zeta}_{05}$	ζ_{05}	$\bar{\zeta}_{06}$	ζ_{06}	$N_5 L_{56}^{(1)}$		$\Delta_1 P_5$	$N_5 \left(\frac{\partial L_{56}^{(1)}}{\partial v} \right)_0 \Delta_1 V$	$\frac{\partial \Delta_1 P_5}{\partial v_0} \frac{dv_0^{(1)}}{dt}$	$\Delta_2 P_5$
								grade 0	grade 1				
0	0	0	1	0	0	0	2	-130",507	1",194	18179",6	0",520	-3",153	-491",1
0	0	0	1	0	1	0	1	261,014	-2,389	-36359,2	-1,016	6,259	1022,8
0	0	0	1	0	2	0	0	-130,507	1,194	18179,6	0,448	-3,106	-499,6
0	1	0	0	0	0	0	2	67,865	-0,676	-9445,8	-0,619	1,219	258,4
0	1	0	0	0	1	0	1	-135,729	1,353	18891,6	1,245	-2,415	-514,6
0	1	0	0	0	2	0	0	67,865	-0,676	-9445,8	-0,549	1,195	245,2
0	0	0	3	0	0	0	0	-267,938	1,800	37415,5	0,380	11,102	1507,4
0	1	0	2	0	0	0	0	490,897	-3,689	-68495,0	-6,683	-22,076	-2164,1
0	2	0	1	0	0	0	0	-296,708	2,466	41366,5	9,499	14,488	701,4
0	3	0	0	0	0	0	0	59,377	-0,541	-8271,6	-1,763	-3,138	-193,3

\bar{z}_{05}	z_{05}	\bar{z}_{06}	z_{06}	$\bar{\zeta}_{05}$	ζ_{05}	$\bar{\zeta}_{06}$	ζ_{06}	$N_5 \Delta_1 P_5$	$N_5 L_{56}^{(2)}$	$\Delta_1 q_5$	$N_5 \Delta_2 P_5$	$N_5 \left(\frac{\partial L_{56}^{(2)}}{\partial v} \right)_0 \Delta_1 V$	$\frac{\partial \Delta_1 q_5}{\partial v_0} \frac{dv_0^{(1)}}{dt}$	$\Delta_2 q_5$
0	0	0	1	0	0	0	2	9629",6	-250",304	-1318880"	-260",11	33",4	229",0	64060"
0	0	0	1	0	1	0	1	-19259,2	478,858	2640800	541,7	-73,6	-454,7	-129740
0	0	0	1	0	2	0	0	9629,6	-228,554	-1321920	-264,7	34,7	225,7	64060
0	1	0	0	0	0	0	2	-5003,3	147,264	684460	136,9	-16,9	-85,9	-28950
0	1	0	0	0	1	0	1	10006,7	-283,218	-1367340	-272,6	36,7	165,2	56380
0	1	0	0	0	2	0	0	-5003,3	135,954	682880	129,9	-18,1	-88,3	-28130
0	0	0	3	0	0	0	0	19818,6	-245,791	-2751880	798,4	50,3	-816,1	-234050
0	1	0	2	0	0	0	0	-36281,2	569,915	5021020	-1146,3	-99,6	1619,3	402810
0	2	0	1	0	0	0	0	21911,5	-417,029	-3022230	371,5	66,5	-1060,2	-210640
0	3	0	0	0	0	0	0	-4381,4	98,013	602290	-102,4	-12,6	229,1	48380

grade 0 + grade 1

Tableau 7-b

Développements de l'inégalité $(2N_5 - 5N_6)$ dans Δp_6 et Δq_6
degré 3 - Ordres 1 et 2

\bar{z}_{05}	z_{05}	\bar{z}_{06}	z_{06}	$\bar{\zeta}_{05}$	ζ_{05}	$\bar{\zeta}_{06}$	ζ_{06}	$N_6 L_{65}^{(1)}$		$\Delta_1 P_6$	$N_6 \left(\frac{\partial L_{65}^{(1)}}{\partial v} \right)_0 \Delta_1 V$	$\frac{\partial \Delta_1 P_6}{\partial v_0} \frac{dv_0^{(1)}}{dt}$	$\Delta_2 P_6$
								grade 0	grade 1				
0	0	0	1	0	0	0	2	804",678	-8",670	-111908"	-11",633	19",681	4402"
0	0	0	1	0	1	0	1	-1609,357	17,340	223816	22,961	-39,072	-8721
0	0	0	1	0	2	0	0	804,678	-8,670	-111908	-11,841	19,392	4391
0	1	0	0	0	0	0	2	-418,439	4,843	58145	5,907	-7,643	-1905
0	1	0	0	0	1	0	1	836,878	-9,686	-116290	-11,875	15,135	3797
0	1	0	0	0	2	0	0	-418,439	4,843	58145	6,476	-7,492	-1964
0	0	0	3	0	0	0	0	1652,052	-13,779	-230319	-6,858	-67,960	-8590
0	1	0	2	0	0	0	0	-3026,768	27,648	421635	32,722	135,211	14408
0	2	0	1	0	0	0	0	1829,439	-18,169	-254640	-52,296	-88,786	-5130
0	3	0	0	0	0	0	0	-366,107	3,924	50917	13,026	19,240	874

\bar{z}_{05}	z_{05}	\bar{z}_{06}	z_{06}	$\bar{\zeta}_{05}$	ζ_{05}	$\bar{\zeta}_{06}$	ζ_{06}	$N_6 \Delta_1 P_6$	$N_6 L_{65}^{(2)}$	$\Delta_1 q_6$	$N_6 \Delta_2 P_6$	$N_6 \left(\frac{\partial L_{65}^{(2)}}{\partial v} \right)_0 \Delta_1 V$	$\frac{\partial \Delta_1 q_6}{\partial v_0} \frac{dv_0^{(1)}}{dt}$	$\Delta_2 q_6$
0	0	0	1	0	0	0	2	-23870	805",1	3243540"	939",	-130",6	-571",3	-193960"
0	0	0	1	0	1	0	1	47740	-1556,5	-6494560	-1860	272,8	1134,5	382650
0	0	0	1	0	2	0	0	-23870	751,4	3251020	937	-129,4	-563,2	-192660
0	1	0	0	0	0	0	2	12402	-460,8	-1679390	-406	68,9	220,5	78420
0	1	0	0	0	1	0	1	-24804	893,8	3362680	810	-125,2	-436,6	-157650
0	1	0	0	0	2	0	0	12402	-432,9	-1683280	-419	68,7	216,1	79620
0	0	0	3	0	0	0	0	-49127	991,7	6767950	-1833	-189,8	1995,7	564840
0	1	0	2	0	0	0	0	89934	-2111,8	-12348580	3073	374,6	-3961,9	-1041720
0	2	0	1	0	0	0	0	-54314	1455,4	7432730	-1094	-238,9	2595,5	552310
0	3	0	0	0	0	0	0	10861	-327,1	-1481230	186	48,7	-561,0	-111930

grade 0 + grade 1

l'inverse. Il s'avère que, d'une façon générale, pour une inégalité (k_i, k_j) , plus les entiers k_i et k_j sont petits en valeur absolue, plus les coefficients des termes en inclinaison sont grands par rapport à ceux en excentricité ; on en verra encore l'illustration à propos de l'inégalité séculaire.

4. Dans l'inégalité (N_5-N_6) , l'intégration équivaut à multiplier les seconds membres par 3,16 ; pour la grande inégalité, le facteur d'intégration vaut -140,59. Ceci explique l'importance des inégalités à longues périodes par rapport aux courtes périodes. Cependant, n'oublions pas que les énormes coefficients qui découlent de la double intégration dans $\Delta_1 q_5$ et $\Delta_1 q_6$ pour la grande inégalité, sont en facteur de monômes de degré 3 : leur évaluation numérique à une date donnée équivaut à multiplier ces coefficients par des quantités de l'ordre de 10^{-4} (cf. tableau 7c).

Remarquons aussi que la solution $\Delta_1 q_i$ provient essentiellement de la deuxième intégration de $\Delta_1 p_i$ dans le cas d'une inégalité à longue période, tandis que dans le cas d'une courte période, les contributions de $\Delta_1 p_i$ et de $L_{ij}^{(2)}$ restent comparables.

5. Les tableaux 6 et 7 illustrent la propriété remarquée en I.4, énonçant que dans chaque inégalité, la somme des coefficients des termes dépendant des variables ζ_{oi} est identiquement nulle. On constate par ailleurs que la somme des coefficients des termes ne dépendant que des variables z_{oi} est bien plus petite que chacun de ces coefficients, (comme dans le cas de la grande inégalité). On a constaté la même petitesse relative de ces sommes dans la plupart des autres inégalités, et dans toutes les équations ; cette particularité est moins évidente à un degré donné pour les inégalités qui contiennent à ce degré des termes issus des parties indirectes de la fonction perturbatrice (comme l'inégalité N_5-N_6 au degré 2). Ceci indique que les pertur-

bations passent par un minimum lorsque les variables z_{oi} sont égales ou voisines, c'est-à-dire quand, dans le mouvement à très longue période, les excentricités sont égales ou voisines et que les périhélies sont à la même longitude ou presque.

b) Ordre 2.

A propos de l'ordre 2, nous pouvons faire les 3 remarques suivantes :

1. L'importance relative des termes issus de $\frac{\partial \Delta_1 \sigma}{\partial V_o} \frac{dV_o^{(1)}}{dt}$ par rapport à ceux de $\left\{ \left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial V} \right)_o \Delta_1 V \right\}$ dépend essentiellement de l'importance prise par $\Delta_1 \sigma$ par rapport à L_{ij} à l'issue de l'intégration à l'ordre 1, et donc dépend de la période de chaque inégalité. Notons que dans les produits $\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial V_o} \cdot \frac{dV_o^{(1)}}{dt}$, nous n'avons fait intervenir que les termes de degré non nul de $\frac{dV_o^{(1)}}{dt}$, car les seuls qui soient de degré nul (dans les $\frac{dq_{oi}^{(1)}}{dt}$) sont éliminés par le choix des constantes p_{oi} .

2. Dans l'inégalité $(N_5 - N_6)$, les termes de $\Delta_2 p_5$ et $\Delta_2 q_5$ dépendant des inclinaisons sont inférieurs en moyenne à ceux dépendant des excentricités (on avait l'inverse à l'ordre 1) ; pour la grande inégalité on vérifie la même particularité, mais moins nettement. Ceci illustre en fait une propriété des développements observée d'une façon générale : la décroissance des coefficients d'un même monôme, ordre par ordre, est plus rapide pour les termes dépendant des variables ζ_{oi} que pour ceux ne dépendant que des variables z_{oi} (ou de leurs conjuguées).

3. La somme des coefficients des termes dépendant des variables ζ_{oi} dans un même développement n'est pas rigoureusement nulle. Ceci est uniquement la conséquence de la sélection des termes opérée à l'ordre 1 (cf. III.1.4). L'écart moyen de ces diverses sommes avec la valeur zéro permet d'estimer que la précision relative atteinte pour ces termes à l'ordre 2 à l'issue de cette sélection, est voisine de 1 % dans le cas de la grande inégalité au degré 3 ; comme, pour la grande inégalité, l'ordre 2 est globalement 10 fois moins important que l'ordre 1, la précision relative sur la somme de ces deux ordres est ainsi voisine du millième. Cependant, comme à chaque degré donné, la sélection affecte davantage les termes dépendant de ζ_{oi} à cause de leur majorant plus petit que celui des z_{oi} , la précision des termes ne dépendant que des z_{oi} est un peu meilleure. D'après l'évaluation numérique donnée dans le tableau 7c on peut alors estimer que la contribution des termes de degré 3 de la grande inégalité dans Δ_2q_5 et Δ_2q_6 est ici connue avec une incertitude inférieure à la seconde.

Tableau 7-c

Amplitude des termes de degré 3 de la grande inégalité ($2N_5 - 5N_6$) dans Δ_1q_5 , Δ_2q_5 , Δ_1q_6 et Δ_2q_6 pour l'époque 1950.0 (contributions de chaque monôme)

exposants des variables								Δ_1q_5		Δ_2q_5		Δ_1q_6		Δ_2q_6	
\bar{z}_{o5}	z_{o5}	\bar{z}_{o6}	z_{o6}	$\bar{\zeta}_{o5}$	ζ_{o5}	$\bar{\zeta}_{o6}$	ζ_{o6}	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
0	0	0	1	0	0	0	2	-26",01	22",98	1",26	-1",12	63",96	-56",52	-3",82	3",38
0	0	0	1	0	1	0	1	21",03	-29",76	-1",03	1",46	-51",73	73",18	3",05	-4",31
0	0	0	1	0	2	0	0	-3",58	8",87	0",17	-0",43	8",80	-21",82	-0",52	1",29
0	1	0	0	0	0	0	2	-7",83	-13",55	0",33	0",57	19",21	33",25	-0",89	-1",55
0	1	0	0	0	1	0	1	11",24	11",93	-0",46	-0",49	-27",65	-29",34	1",30	1",38
0	1	0	0	0	2	0	0	-3",58	-2",36	0",15	0",10	8",83	5",83	-0",42	-0",38
0	0	0	3	0	0	0	0	-51",68	473",22	-4",39	40",25	127",10	-1163",84	10",61	-97",13
0	1	0	2	0	0	0	0	-719",09	-229",23	-57",69	-18",39	1768",50	563",76	149",19	47",56
0	2	0	1	0	0	0	0	192",16	-344",32	13",39	-24",03	-472",59	848",05	-35",12	63",02
0	3	0	0	0	0	0	0	51",92	44",47	4",17	3",57	-127",69	-109",36	-9",65	-8",26
Somme x 2 :								-1070",82	-116",50	-88",20	-2",98	2633",50	286",38	254",84	10",18

Notes : . Les valeurs des z_{oi} et ζ_{oi} utilisées pour calculer les monômes sont celles données dans le tableau 2.

. Pour avoir tous les termes de degré 3 de la grande inégalité, il convient d'ajouter à ceux donnés ici leur conjugué changé de signe, de sorte qu'on aura par exemple dans la longitude moyenne de Jupiter :

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{-1} \Delta_1q_5 = & -1070",82 \sin[(2N_5 - 5N_6)t - \sqrt{-1}(2q_{o5} - 5q_{o6})] \\
 & - 116",50 \cos[(2N_5 - 5N_6)t - \sqrt{-1}(2q_{o5} - 5q_{o6})]
 \end{aligned}$$

Nous pouvons comparer les résultats du tableau 7c avec les contributions obtenues par Bretagnon (1978) pour la grande inégalité, dans la longitude moyenne de Jupiter et de Saturne, à 10^{-3} " près :

	$\sin(2N_5 - 5N_6)t$	$\cos(2N_5 - 5N_6)t$
$\Delta_1 \lambda_5 =$	-1062",301	-106",520
$\Delta_2 \lambda_5 =$	-99",459	-4",012
$\Delta_1 \lambda_6 =$	2609",107	261",622
$\Delta_2 \lambda_6 =$	249",644	10",447

Nous voyons que les termes de degré supérieur à 3 apportent encore des contributions de plusieurs dizaines de secondes.

Bretagnon avait d'ailleurs déterminé que les ordres supérieurs à 2 apportent également des contributions de quelques dizaines de secondes, ce qui montre la lenteur de la convergence ordre par ordre dans le cas de la grande inégalité (cf. IV.3).

Pour les inégalités à courtes périodes la convergence est toujours bien plus rapide dans l'absolu, car les amplitudes sont plus petites.

IV - 2.- Développement et solution du système autonome.

A l'ordre 1, nous avons limité le système autonome aux termes de degré inférieur ou égal à 7 pour le couple Jupiter-Saturne, et à 5 pour les autres couples ; dans tous les cas, ces termes sont de degré inférieur ou égal à 4 en inclinaison. Dans le cadre de ces limitations nous avons calculé tous ces termes aux grades 0 et 1.

A l'ordre 2, nous avons construit le système autonome jusqu'au degré 7 pour les équations relatives à Jupiter et à Saturne, et au degré 4 pour les autres, en ne calculant pour ces termes que la contribution de grade 0 ; du fait

de la sélection des termes périodiques d'ordre 1, le système autonome d'ordre 2 est incomplet : lorsque le degré est faible, on a obtenu tous les monômes qu'il est possible d'avoir à ce degré dans l'inégalité séculaire d'ordre 2 mais leur coefficient a une précision limitée ; lorsque le degré est plus élevé, il manque en outre certains monômes. Cependant nous verrons que globalement, le système autonome d'ordre 2 a été obtenu avec une précision relative de l'ordre de 1 %.

Le calcul de l'ordre 2 a duré 90 minutes environ, et a donné après la fusion de nombreux modules en 12 super-modules, un total de 5 000 termes environ.

Dans ce paragraphe, nous suivrons pas à pas l'algorithme de résolution du système autonome, défini en II.3.3.

IV - 2.1.- Pas 1 : détermination des constantes p_{oi} .

Le système d'équations (2.25), réduit aux termes de grade 0 et 1 est linéaire par rapport aux inconnues p_{oi} . On le met sous la forme matricielle suivante :

$$(4.1) \quad (I + K_1)P = K_0$$

où I est la matrice unité ($N \times N$), P la matrice colonne des inconnues p_{oi} , K_0 et K_1 les matrices contenant les coefficients des termes de grade 0 et 1 respectivement (termes de degré 0 dans les équations $\frac{dq_{oi}}{dt}$, à la première approximation). On donne dans le tableau 8 la matrice $I + K_1$, la matrice K_0 aux deux premières approximations, et la solution P qu'on en déduit. Dans K_1 on a des termes d'ordre 1 uniquement tandis que dans K_0 on a, aux deux premières approximations, des contributions d'ordre 1 et d'ordre 2.

A la 1^{ère} approximation, on vérifie que les coefficients des termes d'ordre 1 dans K_0 et K_1 sont bien du même ordre de grandeur que les masses,

Tableau 8

Détermination des p_{oi}

a) Equation (4.1) :

grade 1 : matrice $I + K_1$

$$\begin{pmatrix} 1,002\ 023 & -0,000\ 181 & -0,000\ 002 & -0,000\ 001 \\ -0,001\ 106 & 1,004\ 193 & -0,000\ 018 & -0,000\ 004 \\ -0,000\ 162 & -0,000\ 241 & 1,003\ 272 & -0,000\ 073 \\ -0,000\ 060 & -0,000\ 070 & -0,000\ 096 & 1,003\ 035 \end{pmatrix}$$

grade 0 : matrice K_0

1ère approximation		apport de la 2ème approximation	
ordre 1	ordre 2	ordre 1	ordre 2
-0,001 8396	-0,000 0025	0,000 0009	0,000 0002
-0,003 0652	-0,000 0006	-0,000 0083	-0,000 0020
-0,002 7962	-0,000 0059	-0,000 0036	-0,000 0001
-0,002 8079	-0,000 0096	-0,000 0008	-0,000 0004

b) Solution :

	1ère approximation		2ème approximation	
i	$p_{oi}^{(1)}$	$p_{oi}^{(2)}$	$p_{oi}^{(1)}$	$p_{oi}^{(2)}$
5	-0,001 8364	-0,000 0025	-0,001 8355	-0,000 0023
6	-0,003 0545	-0,000 0006	-0,003 0628	-0,000 0026
7	-0,002 7882	-0,000 0059	-0,002 7919	-0,000 0060
8	-0,002 8000	-0,000 0096	-0,002 8008	-0,000 0099
	$p_{oi} (= p_{oi}^{(1)} + p_{oi}^{(2)})$		p_{oi}	
5	-0,001 8389		-0,001 8378	
6	-0,003 0551		-0,003 0654	
7	-0,002 7942		-0,002 7979	
8	-0,002 8096		-0,002 8107	

et qu'ainsi, les $p_{oi}^{(1)}$ sont bien numériquement d'ordre 1 ; de même on constate que les $p_{oi}^{(2)}$ sont bien d'ordre 2.

Comme les seconds membres des équations sont d'ordre 1, leurs termes de grade 1 sont équivalents numériquement à des termes d'ordre 2 ; cela justifie que, n'ayant pas cherché à atteindre l'ordre 3, on n'ait pas cherché les termes de grade 2 dans les équations ; dans ces conditions, on aurait pu se contenter des valeurs $p_{oi}^{(1)}$, les $p_{oi}^{(2)}$ n'introduisant que des modifications d'ordre 3, mais encore fallait-il s'en assurer.

Voyons dès maintenant la deuxième approximation : ayant substitué les solutions z_{oi} et ζ_{oi} (qu'on verra plus loin) dans les termes de degré 2 et 4 des équations $\frac{dq_{oi}}{dt}$, on obtient des nouveaux termes constants qui s'ajoutent à K_o .

Nous constatons dans le tableau 8 que ces termes sont en fait du même ordre de grandeur que ceux de degré 0 obtenus à l'ordre 2, bien que provenant essentiellement de termes d'ordre 1 et de degré 2 au moins. Dans ces conditions, il n'est pas nécessaire de calculer une nouvelle approximation des solutions z_{oi} et ζ_{oi} avec les nouvelles valeurs des p_{oi} , car les différences avec la première approximation seraient d'ordre 3.

Les résultats qui suivent sont ainsi calculés avec la valeur des p_{oi} obtenue à la 1ère approximation. Dans les tableaux 9 à 12, on trouvera parfois les trois contributions suivantes à un même terme : (ordre 1, grade 0), (ordre 1, grade 1), (ordre 2, grade 0), qui seront notées respectivement ordre (1+0), ordre (1+1), ordre (2+0). Comme dans le cas des inégalités périodiques, on pourra constater que la contribution d'ordre (1+1) est toujours 100 fois plus faible au moins que celle d'ordre (1+0).

IV - 2.2.- Pas 2 : Détermination des solutions z_{oi} et ζ_{oi} .

La recherche de ces solutions s'effectue par approximations successives, à partir de l'approximation de Laplace-Lagrange donnée par la partie linéaire du système autonome, conformément à la méthode exposée en II.3.4.

IV.2.2.1.- 1ère approximation : solution de Laplace-Lagrange.

a) description du système linéaire.

Nous donnons dans les tableaux 9a et 9b les matrices A_1 et A_2 représentant la partie linéaire du système autonome (cf. 2.30) ; leurs éléments seront notés a_{ij} , avec i et j compris entre 5 et 8.

Dans A_1 nous constatons que par rapport à la contribution de l'ordre (1+0), l'ordre (2+0) atteint parfois 13 % sur la diagonale, et 30 % hors de la diagonale (pour les éléments a_{78} et a_{87}), alors que l'ordre (1+1) ne dépasse pas 1 %. Par contre, dans A_2 , les contributions des ordres (1+1) et (2+0) sont sensiblement équivalentes et ne représentent chacune que 1 % de l'ordre (1+0). C'est une nouvelle illustration de la décroissance plus rapide, entre l'ordre 1 et l'ordre 2, pour les coefficients d'un même monôme dépendant des variables ζ_{oi} , que pour ceux d'un même monôme ne dépendant que des z_{oi} (cf. IV.1.2.b).

Dans chacune de ces matrices, on peut s'intéresser surtout aux éléments diagonaux : en effet, on constate dans le tableau 10 que leurs valeurs propres ℓ_i sont voisines des éléments diagonaux a_{77} et a_{88} d'une part, et des valeurs propres de la sous-matrice 2×2 relative aux indices 5 et 6 d'autre part ; ensuite, une modification de ces éléments entraîne une modification assez comparable des valeurs propres : pour la matrice A_1 , les termes d'ordre 2 modifient les valeurs propres obtenues à l'ordre 1 d'environ 10 %, tandis que pour A_2 , ces modifications ne dépassent pas 1 %.

Tableau 9-a

Système de Laplace-Lagrange

Termes de degré 1 dans les équations $\frac{d \bar{z}_{oi}}{dt}$ (matrice A_1)

équation	contributions		coefficients des variables :			
	ordre	grade	\bar{z}_{o5}	\bar{z}_{o6}	\bar{z}_{o7}	\bar{z}_{o8}
$\frac{d \bar{z}_{o5}}{dt}$	1	0	-7,502 096	4,834 424	0,027 674	0,005 017
	1	1	0,041 611	-0,030 461	-0,000 127	-0,000 023
	2	0	-1,020 691	0,328 856	0,000 313	+0,000 406
$\frac{d \bar{z}_{o6}}{dt}$	1	0	11,923 198	-18,611 428	0,181 981	0,026 100
	1	1	-0,079 940	0,109 841	-0,000 393	-0,000 061
	2	0	0,836 691	-0,310 657	0,005 548	0,000 185
$\frac{d \bar{z}_{o7}}{dt}$	1	0	0,314 639	0,838 923	-2,753 467	0,315 112
	1	1	-0,001 535	-0,001 736	0,008 300	-0,000 903
	2	0	-0,001 053	0,023 948	-0,254 637	0,102 376
$\frac{d \bar{z}_{o8}}{dt}$	1	0	0,038 487	0,081 184	0,212 615	-0,669 050
	1	1	-0,000 187	-0,000 183	-0,000 610	0,002 055
	2	0	-0,000 006	-0,000 204	0,067 794	-0,042 781

coefficients en ".an⁻¹

Tableau 9-b

Système de Laplace-Lagrange

Termes de degré 1 dans les équations $\frac{d \bar{\zeta}_{oi}}{dt}$ (matrice A_2)

équation	contributions		coefficients des variables :			
	ordre	grade	$\bar{\zeta}_{o5}$	$\bar{\zeta}_{o6}$	$\bar{\zeta}_{o7}$	$\bar{\zeta}_{o8}$
$\frac{d \bar{\zeta}_{o5}}{dt}$	1	0	7,502 096	-7,396 386	-0,082 429	-0,023 280
	1	1	-0,041 611	0,041 195	0,000 324	0,000 090
	2	0	-0,041 018	0,040 847	0,000 124	0,000 048
$\frac{d \bar{\zeta}_{o6}}{dt}$	1	0	-18,241 795	18,611 428	-0,302 972	-0,066 661
	1	1	0,108 971	-0,109 841	0,000 702	0,000 166
	2	0	0,126 319	-0,126 731	0,000 289	0,000 035
$\frac{d \bar{\zeta}_{o7}}{dt}$	1	0	-0,937 186	-1,396 684	2,753 467	-0,419 596
	1	1	0,003 989	0,003 113	-0,008 300	0,001 197
	2	0	0,000 857	0,002 401	0,004 142	-0,007 400
$\frac{d \bar{\zeta}_{o8}}{dt}$	1	0	-0,178 590	-0,207 347	-0,283 114	0,669 050
	1	1	0,000 747	0,000 501	0,000 809	-0,002 055
	2	0	0,000 134	0,000 049	-0,004 990	0,004 807

coefficients en ".an⁻¹

Pour comprendre l'importance de l'ordre 2 par rapport à l'ordre 1, surtout pour la matrice A_1 , il faut voir que ces termes proviennent uniquement du produit des termes d'ordre 1 qui sont de degré le plus bas dans les inégalités de caractéristiques -2, -1, 0, 1 et 2 :

En effet, $\frac{dz_{oi}^{(2)}}{dt}$ est identifié à une somme d'expressions de la

forme $(\frac{\partial L_{ij}^{(3)}}{\partial \sigma}(k_i, k_j))_0 \Delta_1 \sigma(-k_i, -k_j)$, combinant les inégalités (k_i, k_j) de $L_{ij}^{(3)}$ avec leur opposée dans $\Delta_1 \sigma$; deux cas peuvent se produire :

Cas 1 : σ désigne une des variables z, \bar{z}, ζ ou $\bar{\zeta}$. Pour que le résultat soit de degré 1, les termes de $L_{ij}^{(3)}$ doivent être de degré 1 (ou 2) et ceux de $\Delta_1 \sigma$ de degré 1 (ou 0) ; en fait, comme $L_{ij}^{(3)}$ est pair en inclinaison et que $\Delta_1 \zeta$ ne contient pas de degré 0, les termes de degré 2 de $L_{ij}^{(3)}$ n'interviennent pas. Les termes de degré 1 de $L_{ij}^{(3)}$ sont de caractéristique 0 ou 2, et comme des inégalités opposées sont de caractéristiques opposées, ceux de degré 1 de $\Delta_1 z$ ne peuvent être que de caractéristique 0, et ceux de $\Delta_1 \bar{z}$ de caractéristique 0 et 2. Seules se combinent donc les inégalités de $L_{ij}^{(3)}$ telles que : ...(-2,2), (-1,1), (1,-1), (2,-2),... (1,1), (0,2), (-1,3),... avec leur opposée dans $\Delta_1 z$ ou $\Delta_1 \bar{z}$.

Cas 2 : σ désigne une des variables p ou q : les termes de $L_{ij}^{(3)}$ doivent alors être de degré 0 (ou 1) et ceux de $\Delta_1 \sigma$ de degré 1 (ou 0) ; les termes de $L_{ij}^{(3)}$ sont alors de caractéristique 1 (ou 0 et 2) et ceux de $\Delta_1 \sigma$ de caractéristique -1 (ou 0) ; la caractéristique 2 n'intervient donc pas. Seules se combinent donc les inégalités de $L_{ij}^{(3)}$: ... (2,-1), (1,0), (0,1), (-1,2),... et ...(-2,2), (-1,1), (1,-1), (2,-2)... avec leur opposée de $\Delta_1 p$ ou $\Delta_1 q$.

Pour le système en inclinaisons, le cas 1 est valable en inversant les rôles de z et de ζ . Au cas 2, seuls interviennent les termes de caractéristique 0 car $L_{ij}^{(4)}$ ne contient pas de degré 0.

Sachant que certaines de ces inégalités peuvent atteindre plusieurs centaines de secondes, du fait notamment des parties indirectes en α^{-2} , ou par exemple dans l'inégalité à longue période (1,-2) d'Uranus-Neptune (*), on s'explique aisément l'importance des termes obtenus à l'ordre 2.

b) précision de la détermination des valeurs propres.

Les termes d'ordre 1 des matrices A_1 et A_2 sont déterminés avec une précision surabondante ($\approx 10^{-10}$) tandis que ceux d'ordre 2 sont entachés d'erreurs à cause de la sélection des termes périodiques d'ordre 1. Ces erreurs sont cependant faibles car les termes de bas degré sont relativement peu affectés par cette sélection. Or, nous disposons d'éléments de comparaison pour estimer ces erreurs : ce sont les valeurs propres obtenues par Brumberg (1973) pour les ordres 1 et 2.

En ce qui concerne le système linéaire autonome, les résultats de Brumberg sont plus complets que les nôtres car la sélection des termes périodiques d'ordre 1 qu'il effectue pour calculer l'ordre 2, est seulement liée au choix d'un équivalent de la valeur limite ℓ_M (de l'ordre de 20), et parce qu'il tient compte des 8 planètes. Cependant la masse de Saturne qu'il adopte est celle proposée par Newcomb, égale à 1/3501,6, alors que celle proposée au Colloque d'Heidelberg, que nous avons prise, vaut 1/3498 soit une différence de 1 millième.

Nous avons calculé les matrices A_1 et A_2 pour les 8 planètes à l'ordre 1, en adoptant la masse choisie par Brumberg pour Saturne. Nous avons

(*) sensible surtout sur les éléments hors diagonaux a_{78} et a_{87} .

Tableau 10

Solution de Laplace-Lagrange

Valeurs propres ℓ_j des matrices A_1 et A_2

Cas des 4 grosses planètes

Valeurs obtenues en tenant compte des planètes intérieures et d'une masse différente pour Saturne, comparées à celles obtenues par Brumberg

j	ordre 1 (grades 0 et 1)	+ ordre 1 ordre 2	+ ordre 1 (8 planètes) ordre 2 (4 planètes)	Brumberg
1	-22",3331 an ⁻¹	-23",2309 an ⁻¹	-23",2281 an ⁻¹	-23",2207 an ⁻¹
2	-3 ,7039	-4 ,1341	-4 ,1414	-4 ,1426
3	-2 ,7034	-2 ,9799	-2 ,9784	-2 ,9772
4	-0 ,6338	-0 ,6581	-0 ,6578	-0 ,6569
5	0	0 (3.10 ⁻⁵)	0 (5.10 ⁻⁵)	0
6	0,6784	0,6818	0,6815	0,6823
7	2,9074	2,9127	2,9134	2,9157
8	25,7884	25,6209	25,6430	25,6680

ajouté à ces matrices (8×8) , les sous-matrices (4×4) d'ordre 2 correspondant aux 4 grosses planètes, issues de la sélection des termes d'ordre 1.

Nous n'avons pas modifié la masse de Saturne dans l'ordre 2 car cela reviendrait à faire des corrections d'ordre 3. L'apport des planètes telluriques sur les éléments des matrices (4×4) relatives aux 4 grosses planètes à l'ordre 1, consiste à augmenter (en valeur absolue) uniquement les éléments diagonaux a_{ii} ($i = 5$ à 8) respectivement de $0'',016658$, $0'',001877$, $0'',000159$ et $0'',000033$. Par rapport aux matrices obtenues par Brumberg, il nous manque alors les termes d'ordre 2 associés aux planètes telluriques, qui sont probablement inférieurs à $0'',0001$ sur les éléments relatifs aux 4 grosses planètes, et les termes d'ordre 2 que nous avons négligés par la sélection des termes périodiques d'ordre 1. La comparaison des valeurs propres obtenues ainsi pour 8 planètes, avec celles de Brumberg, donne donc essentiellement les erreurs dues à cette sélection. On constate que la précision relative avec laquelle nous avons déterminé les valeurs propres est de l'ordre du millième de sorte que l'incertitude sur les valeurs propres ne dépasse pas quelques millièmes de seconde par an, sauf pour les plus grandes valeurs propres pour lesquelles cette incertitude atteint le centième de seconde par an.

Ces incertitudes doivent cependant être nuancées par la considération d'autres limitations présentes chez nous comme chez Brumberg : vu l'importance des modifications apportées par l'ordre 2, on peut penser que l'ordre 3 n'est sûrement pas négligeable et qu'il pourrait bien modifier encore les valeurs propres de quelques centièmes de seconde par an.

Par ailleurs, l'incertitude sur la masse de Saturne (actuellement de l'ordre de 10^{-4}), ne permet pas de connaître les valeurs propres à mieux que le millième de seconde par an, car par exemple, le terme a_{55} d'ordre 1 dans les matrices A_1 et A_2 , égal à $7'',502\ 096\ \text{an}^{-1}$ est la somme de plusieurs termes dont l'un, égal à $7'',\ 396\ \text{an}^{-1}$ a la masse de Saturne en

facteur. L'incertitude sur les autres masses (sauf celle de Jupiter), conduit à des incertitudes relatives analogues sur les termes de ces matrices concernés par ces masses, mais comme ils sont plus petits, les incertitudes absolues sont aussi plus faibles.

c) transformation du système linéaire : 1ère approximation.

Ayant rassemblé dans la matrice A les 3 contributions d'ordre (1+0), (1+1) et (2+0) données dans les tableaux 9a et 9b, et ayant calculé ses valeurs propres ℓ_j , nous avons obtenu la matrice P de ses vecteurs propres, que nous avons normé par la "norme du Max". Le changement de variable $X = PY$ transforme le système linéaire AX en un système diagonal LY. Sa solution constitue la 1ère approximation Y_0 , dont les éléments sont de la forme (cf. 2.40) :

$$y_{0j} = a_j \exp \sqrt{-1} \ell_j t \quad (j = 1 \text{ à } 2N).$$

Nous donnons dans le tableau 11 les amplitudes complexes $a_j = \rho_j \exp \sqrt{-1} \phi_j$, qui sont les transformés par P^{-1} des constantes égales aux valeurs des z_{oi} et ζ_{oi} pour 1950.0 (cf. tableau 2). Notons que la normalisation des vecteurs propres permet de considérer les ρ_j comme étant du même ordre de grandeur que les excentricités et les inclinaisons (*).

Remarquons encore que les matrices P et P^{-1} sont, comme la matrice A, définies avec une précision relative de l'ordre du millième ; il en est alors de même des amplitudes a_j données dans le tableau 11.

Nous donnons également dans le tableau 11 la solution $X_0 = PY_0$ de Laplace-Lagrange, relative à la 1ère approximation. Les affixes des z_{oi} et ζ_{oi} se comportent comme résultant d'une composition de mouvements circulaires

(*) en fait demi-inclinaisons sur le plan invariable, lui-même défini par y_{05} .

dont les vitesses angulaires sont les valeurs propres ℓ_j .

Lorsqu'on considère N planètes, on obtient $2N$ valeurs propres dont une nulle. Dans la mesure où lorsqu'on réduit le problème à $N-1$ planètes, les $2N-2$ valeurs propres qui en résultent sont comparables à $(2N-2)$ des $2N$ valeurs propres du système complet, on peut dire que les 2 valeurs propres qui ont disparu sont associées à la planète supprimée. Comme à chaque valeur propre ℓ_i correspond une solution y_{oi} , on dira que les 2 solutions y_{oi} correspondant à ces 2 valeurs propres sont aussi associées à cette planète. On peut ainsi définir la correspondance suivante entre valeurs propres et planètes (cf. Duriez, 1971) :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{o1}, \quad -23'',2309 \\ y_{o2}, \quad -4'',1341 \\ y_{o8}, \quad 25'',6209 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \text{Couple Jupiter-Saturne}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{o3}, \quad -2'',9799 \\ y_{o7}, \quad 2'',9127 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \text{Uranus}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{o4}, \quad -0'',6581 \\ y_{o6}, \quad 0'',6818 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \text{Neptune}$$

Notons que l'influence de Jupiter ou de Saturne est telle que les valeurs propres obtenues en supprimant une de ces planètes sont totalement bouleversées. On ne peut donc séparer l'influence de ces planètes et on attribue les 3 valeurs propres ℓ_1 , ℓ_2 et ℓ_8 au couple. La valeur propre nulle pourrait aussi être attribuée à ce couple dans la mesure où le plan invariable du système solaire dépend pour près de 90 % de ces 2 planètes. Ces associations sont aussi à mettre en relation avec une certaine prépondérance des éléments diagonaux ou de certains blocs diagonaux dans les matrices A_1 et A_2 .

Tableau 11

Solution de Laplace-Lagrange obtenue à la 1ère approximation

forme de la solution : $\bar{y}_{oj} = \rho_j \exp \sqrt{-1}(\ell_j t + \phi_j)$; $\bar{z}_{oi} = \sum_{j=1}^N s_{ij} \exp \sqrt{-1}(\ell_j t + \phi_j)$
 $\bar{z}_{oi} = \sum_{j=N+1}^{2N} s_{ij} \exp \sqrt{-1}(\ell_j t + \phi_j)$

j	\bar{y}_{oj}			s_{ij}			
	$\ell_j (" \cdot \text{an}^{-1})$	ρ_j	ϕ_j	\bar{z}_{o5}	\bar{z}_{o6}	\bar{z}_{o7}	\bar{z}_{o8}
1	-23,2309	-0,047 855	47°,458	0,016 650	-0,047 855	0,001 778	0,000 121
2	-4,1341	-0,042 660	149°,106	-0,042 660	-0,036 345	0,040 041	-0,001 937
3	-2,9799	0,029 570	63°,399	-0,001 848	-0,001 823	-0,029 570	0,003 741
4	-0,6581	-0,009 453	106°,394	-0,000 059	-0,000 073	-0,001 716	-0,009 453
				\bar{z}_{o5}	\bar{z}_{o6}	\bar{z}_{o7}	\bar{z}_{o8}
5	0	0,013 802	72°,845	-0,013 802	-0,013 802	-0,013 802	-0,013 802
6	0,6818	-0,005 858	157°,362	-0,000 585	-0,000 564	0,000 564	0,005 858
7	2,9127	0,008 827	44°,739	-0,000 480	-0,000 392	0,008 827	-0,001 057
8	25,6209	0,007 877	52°,996	0,003 164	-0,007 877	0,000 349	0,000 039

IV.2.2.2.- 2ème et 3ème approximations : apport des termes non linéaires.

1) Comportement des termes non linéaires du système autonome.

a) système autonome relatif aux excentricités.

Nous illustrons ces termes dans le tableau 12, par les termes de degré 3 par rapport aux variables associées à Jupiter et à Saturne, extraits des équations $\frac{d \bar{z}_{oi}}{dt}$ relatives à ces 2 planètes. Chaque ligne de ce tableau correspond à un même monôme de degré 3 dans l'inégalité séculaire relative à chaque équation avec la répartition de ses diverses contributions (*).

A l'ordre 1, on peut faire, dans l'ensemble, les mêmes remarques sur le comportement de l'inégalité séculaire, que pour les inégalités périodiques (cf. IV.1.2 a) :

- . faiblesse de la contribution d'ordre (1+1) par rapport à celle (1+0).
- . importance plus grande des coefficients des termes dépendant des ζ_{oi} par rapport à ceux ne dépendant que des z_{oi} .
- . croissance des coefficients, dans leur ensemble, lorsqu'on passe des termes linéaires (cf. matrices A_1 et A_2 dans le tableau 9), aux termes cubiques et au delà. Les coefficients de degré 5 qui prolongeraient le tableau 12 et qui ne dépendent que des z_{oi} , sont de l'ordre de quelques centaines de secondes par an, tandis que ceux dépendant des ζ_{oi} sont en moyenne 10 à 15 fois plus gros.
- . nullité de la somme des coefficients dépendant des ζ_{oi} .

Ces remarques concernent de façon analogue tous les termes séculaires dans toutes les équations pour toutes les planètes, à l'ordre 1 (y compris le système relatif aux inclinaisons).

(*) Notons que ce tableau 12 est bien représentatif des équations $\frac{d \bar{z}_{o5}}{dt}$ et $\frac{d \bar{z}_{o6}}{dt}$ au degré 3, car les plus gros termes de même degré dépendant des autres planètes ont des coefficients de l'ordre de la seconde par an à l'ordre 1, et du dixième de seconde par an à l'ordre 2.

Tableau 12

Termes de degré 3 par rapport aux variables z_{oi} et ζ_{oi} de Jupiter et de Saturne, dans les équations $\frac{d \bar{z}_{o5}}{dt}$ et $\frac{d \bar{z}_{o6}}{dt}$

exposants des variables :								$\frac{d \bar{z}_{o5}}{dt}$			$\frac{d \bar{z}_{o6}}{dt}$			$\frac{d \bar{z}_{o5}}{dt}$	$\frac{d \bar{z}_{o6}}{dt}$
\bar{z}_{o5}	z_{o5}	\bar{z}_{o6}	z_{o6}	$\bar{\zeta}_{o5}$	ζ_{o5}	$\bar{\zeta}_{o6}$	ζ_{o6}	ordre (1+0)	ordre (1+1)	ordre (2+0)	(G.I)	(1+0)	(1+1)	(2+0)	(G.I)
0	1	0	0	2	0	0	0	-154,196	1,082	-20,28	-16,296	174,508	-1,464	70,55	66,545
0	1	0	0	1	0	1	0	308,392	-2,164	40,62	32,592	-349,017	2,928	-141,36	-133,091
0	1	0	0	0	0	2	0	-154,196	1,082	-20,38	-16,296	174,508	-1,464	70,54	66,545
1	0	0	0	1	1	0	0	172,038	-1,292	11,66	-1,209	-337,094	2,849	-10,30	5,734
1	0	0	0	0	0	1	1	157,245	-1,209	11,59	-1,209	-337,094	2,849	-9,67	5,734
1	0	0	0	0	1	1	0	-164,641	1,250	-10,07	1,209	349,017	-2,929	11,50	-5,734
1	0	0	0	1	0	0	1	-164,641	1,250	-10,17	1,209	325,171	-2,769	7,92	-5,734
0	0	0	1	0	0	2	0	70,757	-0,565	29,49	26,982	-80,487	0,753	-111,95	-109,093
0	0	0	1	1	0	1	0	-141,514	1,130	-58,89	-53,963	160,975	-1,506	224,38	218,186
0	0	0	1	2	0	0	0	70,757	-0,565	29,50	26,982	-80,487	0,753	-113,19	-109,093
0	0	1	0	0	0	1	1	-136,679	1,100	-8,43	2,325	424,299	-3,356	-11,45	-11,027
0	0	1	0	1	1	0	0	-136,679	1,100	-8,50	2,325	387,815	-3,138	-10,77	-11,027
0	0	1	0	0	1	1	0	131,845	-1,069	8,74	-2,325	-406,057	3,247	13,44	11,027
0	0	1	0	1	0	0	1	141,514	-1,131	6,57	-2,325	-406,057	3,247	8,69	11,027
2	1	0	0	0	0	0	0	-4,460	0,093	-39,69	-37,692	30,173	-0,266	166,23	153,934
0	0	2	1	0	0	0	0	24,353	-0,188	179,20	169,462	-85,952	0,590	-723,95	-685,292
0	1	2	0	0	0	0	0	-14,108	0,120	-109,26	-102,337	60,062	-0,487	442,29	417,948
1	0	1	1	0	0	0	0	-39,311	0,302	-218,41	-206,707	114,163	-0,935	883,79	835,896
1	1	1	0	0	0	0	0	22,051	-0,190	135,04	124,829	-96,954	0,785	-541,23	-509,905
2	0	0	1	0	0	0	0	12,234	-0,103	67,23	62,415	-34,795	0,310	-271,90	-252,395

Coefficients exprimés en ".an⁻¹

(G.I) désigne la contribution apportée par la Grande Inégalité à l'ordre 2

A l'ordre 2, il ressort essentiellement du tableau 12 que les termes ne dépendant que des z_{oi} sont 5 à 10 fois plus gros qu'à l'ordre 1, et qu'au contraire, ceux dépendant des ζ_{oi} sont en moyenne 10 fois plus petits qu'à l'ordre 1. Dans des conditions, on peut se demander si les termes de degré 3 d'ordre 1 et 2 réunis représentent encore une perturbation du système linéaire. En fait, lorsqu'on évalue les termes cubiques en prenant des valeurs moyennes pour les z_{oi} et ζ_{oi} ($\approx 0,05$) ; on trouve qu'ils représentent environ 15 % des termes linéaires, ce qui est beaucoup, mais encore acceptable comme on le verra en étudiant les premières approximations successives de la solution Y.

Notons encore que l'illustration des termes non linéaires donnée dans le tableau 12 constitue le cas le plus critique du point de vue de la convergence, et que les autres développements du système autonome (relatifs aux autres planètes) sont tous tels que l'ordre 2 y est inférieur à l'ordre 1 (et souvent très inférieur).

D'ailleurs, c'est essentiellement la grande inégalité qui contribue, dans les équations relatives à Jupiter et à Saturne, aux termes d'ordre 2 donnés dans le tableau 12 : on y voit, en effet, que la différence terme à terme entre l'ordre 2 et la contribution de la grande inégalité est toujours inférieure à l'ordre 1.

Pourtant, les termes de la grande inégalité concernés dans ces termes séculaires de degré 3 sont fort peu nombreux : ce sont uniquement les termes de degré 2 de l'inégalité $(-2N_5 + 5N_6)$ dans $L_{ij}^{(3)}$; ceux-ci, dérivés par rapport à \bar{z}_5 et \bar{z}_6 (ou $\bar{\zeta}_5$ et $\bar{\zeta}_6$) donnent des termes de degré 1, puis, par multiplication par les termes de degré 2 de l'inégalité $(2N_5 - 2N_6)$ dans $\Delta_1 \bar{z}_5$ et $\Delta_1 \bar{z}_6$ (ou $\Delta_1 \bar{\zeta}_5$ et $\Delta_1 \bar{\zeta}_6$), donnent des termes séculaires de degré 3 ; la grande inégalité dans $\Delta_1 \bar{\zeta}_5$ et $\Delta_1 \bar{\zeta}_6$ étant moins importante que dans $\Delta_1 \bar{z}_5$ et $\Delta_1 \bar{z}_6$, on s'explique la différence obtenue entre les termes ne dépendant que des z_{oi} et les autres.

Les autres dérivées partielles (par exemple par rapport à q_{05}) donnent nécessairement des termes séculaires de degré 5 (car par exemple, la grande inégalité dans $\Delta_1 q_5$ ne contient que des termes de degré 3 au moins). Donc, les termes de la grande inégalité dans $\Delta_1 q_5$ et $\Delta_1 q_6$, qui, par la double intégration, sont très importants, ne contribuent au système autonome d'ordre 2 qu'à partir du degré 5.

Nous avons constaté en effet cette importance sur les coefficients des termes de degré 5 qui prolongeraient le tableau 12 : ils sont 100 à 1000 fois plus gros à l'ordre 2 qu'à l'ordre 1 (la plupart des coefficients des termes de degré 5 et d'ordre 2 ne dépendant que des z_{05} et z_{06} dépassent $10^5 \text{''}. \text{an}^{-1}$ dans $\frac{d \bar{z}_{05}}{dt}$ et atteignent $10^6 \text{''}. \text{an}^{-1}$ dans $\frac{d \bar{z}_{06}}{dt}$; les termes dépendant des variables ζ_{05} et ζ_{06} sont globalement 10 fois plus petits). Dans ces conditions, lorsqu'on évalue ces termes de degré 5, on les trouve presque aussi importants que ceux de degré 3, représentant encore globalement près de 10 % de la partie linéaire.

Il importe de remarquer que les termes de plus bas degré de la grande inégalité dans les solutions du premier ordre ($\Delta_1 p_5, \Delta_1 p_6, \Delta_1 q_5 \dots$) sont nettement prépondérants sur ceux des degrés suivants ; ces termes (de plus bas degré) se combinent entre eux pour former uniquement les termes de degré 3 et 5 du système autonome. Pour former les termes de degré 7, ils doivent se combiner avec des termes de degré supérieur, la moindre importance de ces derniers entraîne une moindre importance des termes de degré 7 et des suivants : on trouve que les coefficients des termes de degré 7 sont du même ordre de grandeur que ceux de degré 5, mais la différence de degré et la petitesse des z_{0i} font que leurs contributions ne représentent que quelques millièmes de celle du degré 5.

b) Remarque sur le système autonome relatif aux inclinaisons.

Le système autonome $\frac{d\zeta_{oi}}{dt}$ est beaucoup moins perturbé par les termes non linéaires que celui $\frac{dz_{oi}}{dt}$ relatif aux excentricités : même dans le cas des équations relatives à Jupiter et à Saturne, les termes de degré 3 et d'ordre 1 équivalent globalement à modifier de 3 % la partie linéaire ; ceux d'ordre 2 sont en outre 10 à 100 fois plus petits que ceux d'ordre 1. Cette moindre importance de l'ordre 2 dans le système $\frac{d\zeta_{oi}}{dt}$ provient essentiellement du fait que les perturbations périodiques $\Delta_1\zeta_i$ sont beaucoup plus faibles que les Δ_1z_i ; on s'en aperçoit par exemple en constatant que dans une théorie semi-numérique comme celle de Simon et Bretagnon (1975), toutes les inégalités périodiques dans $\Delta_1\zeta_i$ ont des amplitudes 100 fois plus faibles que les mêmes inégalités dans Δ_1z_i (même pour la grande inégalité), bien que les ζ_{oi} ne soient pas 100 fois plus faibles que les z_{oi} .

c) Précision des termes non linéaires d'ordre 2.

Pour évaluer la précision de ces termes, nous avons utilisé deux méthodes : la première, valable pour les termes dépendant des ζ_{oi} , teste l'écart à zéro de la somme des coefficients des termes dépendant de ces variables (comme pour les inégalités périodiques à l'ordre 2) ; la seconde consiste à comparer deux calculs partiels de l'ordre 2, l'un ayant subi la sélection d'ordre 1, et l'autre non ; cette méthode convient en plus aux termes ne dépendant que des z_{oi} . Dans la seconde méthode, nous avons calculé les contributions à l'ordre 2 des 3 inégalités périodiques : (2,-5), (1,-1), et (1,-2) de Jupiter - Saturne (et de leurs opposées), qui sont parmi les plus importantes pour ces planètes à l'ordre 1. Dans un premier calcul, les termes de leur développement subissent la sélection définie en III.1.4 ; dans un deuxième calcul, on prend tous les termes de ces inégalités dans toutes les équations, jusqu'au degré 4 ; pour la grande inégalité nous sommes allés jusqu'au degré 7.

Les termes linéaires du système autonome ne sont pas affectés par la sélection dans les inégalités (1,-1) et (1,-2), mais les termes de degré 3 le sont : on constate que les erreurs dues à la sélection atteignent parfois 1" par an dans les termes ne dépendant que des z_{oi} , résultat analogue à ce qu'on obtient par la première méthode pour les termes dépendant des ζ_{oi} (examiner par exemple ces termes dans le tableau 12). Remarquons toutefois que la grande inégalité intervient ici complètement sans effet de sélection. Les incertitudes relatives sur les termes de degré 3 et d'ordre 2 peuvent ainsi être estimées comme étant globalement inférieures à 1 %. Pour les termes de degré 5 et 7, la contribution de la grande inégalité est très fortement prépondérante (on le verra plus loin encore dans la comparaison des tableaux 14 et 15) ; la sélection n'a affecté pour la grande inégalité, aucun terme ne dépendant que des z_{oi} (jusqu'au degré 7). Les termes dépendant des ζ_{oi} jouant un rôle mineur, c'est dire que jusqu'au degré 7, les résultats associés à la grande inégalité sont très significatifs.

2) Transformation des termes non linéaires du système autonome.

Le changement de variables $X = PY$ étant linéaire, un terme de $F(X, \bar{X})$ qui est de degré d dans l'équation (2.30), est transformé en plusieurs termes de $G(Y, \bar{Y})$, de même degré d par rapport aux y_i et \bar{y}_i ; plus précisément, la matrice P étant diagonale par blocs, tout comme la matrice A , les z_{oi} sont transformés en y_i pour $i = 1$ à N , les ζ_{oi} en y_i pour $i = N + 1$ à $2N$. Alors, un monôme de $F(X, \bar{X})$, de degré d par rapport aux z_{oi} (resp. \bar{z}_{oi}) ou par rapport aux ζ_{oi} (resp. $\bar{\zeta}_{oi}$), engendre plusieurs monômes qui sont tous du même degré d par rapport aux y_i pour $i = 1$ à N (resp. \bar{y}_i), ou par rapport aux y_i pour $i = N + 1$ à $2N$ (resp. \bar{y}_i). Il est donc possible de reconnaître d'après leurs indices, les termes de $G(Y, \bar{Y})$ issus des monômes de $F(X, \bar{X})$ dépendant de tel ou tel type

de variable (par exemple ceux ne dépendant que des z_{oi}) (*).

Si N est supérieur à 2, à chaque degré on engendre davantage de monômes distincts dans $G(Y, \bar{Y})$ qu'on en avait dans $F(X, \bar{X})$, tant que l'ordre atteint dans $F(X, \bar{X})$ ne dépasse pas $N - 1$: en effet, si $F(X, \bar{X})$ est d'ordre 1, chaque monôme ne peut dépendre que des variables associées à 2 planètes (par exemple d'indice i et j) ; chacune de ces variables est transformée en une quelconque des variables y_k pour $k = 1$ à N (ou $k = N + 1$ à $2N$) ; dans ces conditions, un monôme indicé par i et j se transforme en monômes dont les variables y_k peuvent avoir des indices k tous différents (le nombre des indices distincts est seulement limité par le degré du monôme considéré et par le nombre $2N$ des variables y_k).

Alors on conçoit que la durée du calcul du transformé de $F(X, \bar{X})$ augmente très rapidement avec le degré des monômes et le nombre N de planètes considérées :

Ainsi, les 54 monômes de degré 3 qu'on trouve à l'ordre 1 dans chaque équation $\frac{d z_{oi}}{dt}$ ou $\frac{d \zeta_{oi}}{dt}$ pour $N = 4$, engendrent 144 monômes de degré 3 en variables y_k ($k = 1$ à $2N$) ; la trentaine de termes de degré 3 qui, à l'ordre 2, dépendent de 3 planètes, n'engendre pas de nouveau monôme ; cette transformation dure 20 secondes environ pour la première équation transformée puis 15 secondes pour la suivante en utilisant le catalogue des transformés (cf. III.2.5.2) construit à la 1ère équation, et décroît jusqu'à 10 secondes pour le traitement de la 4ème équation.

Au degré 5, nous n'avons transformé, pour $N = 4$ et dans les équations

(*) On en déduit aussi que les monômes de $G(Y, \bar{Y})$ possèdent les mêmes propriétés que les termes séculaires, notamment celle assurant comme en (1.28), que pour chaque monôme, la somme des exposants des variables y_i moins celle des \bar{y}_i vaut 1.

$\frac{d z_{oi}}{dt}$, que les termes dépendant exclusivement des z_{oi} (problème plan) ;

ils sont 34 dans chaque équation à l'ordre 1, qui engendrent 200 termes des variables y_k pour $k = 1$ à N ; ceux d'ordre 2 n'engendrent pas de nouveau monôme. Ce calcul dure 170 secondes pour la 1ère équation, puis 150 secondes, 80 secondes et 60 secondes pour les suivantes. Les quelques 250 autres termes de degré 5 qui dépendent des ζ_{oi} engendreraient plusieurs milliers de termes, pour une durée dépassant une demi-heure uniquement pour la 1ère équation ; nous n'avons pas cherché à les obtenir car leur importance numérique est bien moindre que celle des termes ne dépendant que des z_{oi} ; par ailleurs, leur contribution à la solution provient essentiellement des termes dépendant des variables ζ_{o5} et ζ_{o6} associées à Jupiter et à Saturne ; or on traite plus facilement le système autonome restreint à ce couple de planètes : on a alors $N = 2$, et les 470 termes de degré 3, 5 et 7 présents dans chaque équation engendrent 470 termes en variables y_k ($k = 1$ à 4), pour une durée de l'ordre de 200 secondes. Nous avons pu ainsi nous rendre compte de cette très faible contribution des termes dépendant des ζ_{oi} aux degrés 5 et 7 (on le verra plus loin en comparant, dans les tableaux 14 et 15, le "problème plan" avec le "problème complet").

Il résulte de ces transformations, un développement $G(Y, \bar{Y})$ dont les termes ont leur coefficient du même ordre de grandeur que ceux de $F(X, \bar{X})$ (grâce à la normalisation des vecteurs propres). Nous en donnons une illustration dans le tableau 13, qui rassemble tous les termes résonnants de degré 3 et ceux de degré 5 associés aux excentricités apparaissant dans les équations (2.43) relatives aux \bar{e}_{1i} (voir aussi 2.44) ; pour chaque degré, les termes non résonnants de chaque équation sont d'un ordre de grandeur comparable à celui des termes résonnants de cette équation (regroupés par colonnes dans ce tableau).

Tableau 13

Termes résonnants de degré 3 et 5 dans les développements de $\varepsilon G(Y_o, \bar{Y}_o)$ relatifs aux équations $\frac{d}{dt} \varepsilon y_{li}$ ($i=1$ à 8)
(coefficients en ".an⁻¹)

i		1	2	3	4	5	6	7	8
fréquences résonnantes : ℓ_i		-23",2309	-4",1341	-2",9799	-0",6581	0	0",6818	2",9127	25",620
I	$y_{oi} y_{o1} \bar{y}_{o1}$	-1360",9	-43",7	-14",6	-0",9	0",03	0",67	6",80	248",62
	$y_{oi} y_{o2} \bar{y}_{o2}$	-115 ,8	-3 ,6	-38 ,4	-5 ,5	0 ,12	2 ,95	30 ,18	48 ,62
	$y_{oi} y_{o3} \bar{y}_{o3}$	-2 ,6	-2 ,6	-9 ,6	-5 ,4	0	3 ,01	15 ,38	1 ,14
	$y_{oi} y_{o4} \bar{y}_{o4}$	-0 ,2	-0 ,5	-7 ,5	-3 ,5	0	2 ,43	3 ,49	0 ,15
II	$y_{oi} y_{o5} \bar{y}_{o5}$	-2",6	-4",2	-0",7	-0",1	0",45	0",12	0",15	1",07
	$y_{oi} y_{o6} \bar{y}_{o6}$	0 ,8	1 ,4	18 ,3	10 ,8	-0 ,03	-4 ,35	-15 ,32	-0 ,73
	$y_{oi} y_{o7} \bar{y}_{o7}$	4 ,9	8 ,3	60 ,2	9 ,8	-0 ,01	-9 ,90	-25 ,70	-4 ,61
	$y_{oi} y_{o8} \bar{y}_{o8}$	1056 ,4	75 ,6	26 ,6	2 ,8	0 ,40	-2 ,69	-27 ,75	-510 ,66
III	$y_{oi} y_{o1}^2 \bar{y}_{o1}^2$	-290174"	-12780"	-1787"	-35"				
	$y_{oi} y_{o1} y_{o1} \bar{y}_{o1} y_{o2} \bar{y}_{o2}$	-68078	-623	-403	-10				
	$y_{oi} y_{o1} y_{o1} \bar{y}_{o1} y_{o3} \bar{y}_{o3}$	-658	-31	-44	-2				
	$y_{oi} y_{o1} y_{o1} \bar{y}_{o1} y_{o4} \bar{y}_{o4}$	-17	-1	-3	-2				
	$y_{oi} y_{o2}^2 \bar{y}_{o2}^2$	-904	18	-271	-15				
	$y_{oi} y_{o2} y_{o2} \bar{y}_{o2} y_{o3} \bar{y}_{o3}$	-96	-49	-261	-56				
	$y_{oi} y_{o2} y_{o2} \bar{y}_{o2} y_{o4} \bar{y}_{o4}$	-3	-3	-76	-26				
	$y_{oi} y_{o3}^2 \bar{y}_{o3}^2$	-6	-12	-23	-16				
	$y_{oi} y_{o3} y_{o3} \bar{y}_{o3} y_{o4} \bar{y}_{o4}$	-1	-6	-45	-33				
	$y_{oi} y_{o4}^2 \bar{y}_{o4}^2$	-0	-1	-24	-7				
Contributions à $\varepsilon \lambda_{li}$									
ensemble I		-3",3409	-0",1092	-0",1126	-0",0171	-0",00014	0",0097	0",0843	0",6608
ensemble II		0 ,0658	0 ,0046	0 ,0069	0 ,0013	0 ,00011	-0 ,0010	-0 ,0042	-0 ,0318
ensemble III		-1 ,8214	-0 ,0702	-0 ,0126	-0 ,0004				

Ces termes de $\varepsilon G(Y_o, \bar{Y}_o)$ sont issus des termes de degré 3 et 5 de $F(X, \bar{X})$, cumulant les ordres 1 et 2.

Dans le tableau 13, nous avons distingué 3 ensembles de termes (notés I, II et III), classés selon leur degré et le type de termes dont ils sont issus : les termes des ensembles I et III sont issus des termes de $F(X, \bar{X})$ ne dépendant que des z_{oi} dans les équations $\frac{d \bar{z}_{oi}}{dt}$, tandis que ceux de l'ensemble II proviennent de ceux qui dépendent des ζ_{oi} . On y remarque notamment :

. Dans les 2 premières colonnes (associées à Jupiter-Saturne comme les valeurs propres l_1 et l_2), quelques très gros coefficients : ceux des ensembles I et III proviennent essentiellement des contributions de degré 3 et 5 par rapport aux z_{oi} , issues de la grande inégalité dans $\frac{d \bar{z}_{o5}}{dt}$ et $\frac{d \bar{z}_{o6}}{dt}$, qui se retrouvent ici concentrées surtout dans $\varepsilon \frac{d \bar{y}_{11}}{dt}$; ceux de l'ensemble II viennent au contraire des termes d'ordre 1 qui dans ces mêmes équations, dépendent des ζ_{oi} (on constate en effet dans le tableau 12 que ces termes sont assez comparables à ceux d'ordre 2 ne dépendant que des z_{oi}).

. Dans la colonne 5 relative à la valeur propre nulle, des coefficients petits mais non nuls ; si on s'était limité à l'ordre 1 ou si on avait un ordre 2 complet ceux-ci seraient nuls : ils montrent ici encore l'effet de la sélection des termes d'ordre 1 retenus pour construire l'ordre 2, avec manifestement une meilleure précision pour les termes dépendant des z_{oi} que pour ceux dépendant des ζ_{oi} .

3) Modification des valeurs propres.

a) Modifications issues de la 2ème approximation.

Possédant les solutions y_{oi} ($i = 1$ à 8) à l'issue de la 1ère approximation (cf. tableau 11), on évalue les termes résonnants donnés dans

le tableau 13, qu'on identifie aux $\varepsilon\lambda_{1i}$; ces valeurs viennent modifier les valeurs propres ℓ_i obtenues à la 1ère approximation (cf. 2.44).

Nous donnons en bas de chaque colonne du tableau 13, la contribution à chaque $\varepsilon\lambda_{1i}$ issue des 3 ensembles I, II et III ; on y remarque notamment :

. la modification de près de 15 % de la valeur propre $23''$,2309 par les termes de degré 3, et celle d'encore 8 %, dans le même sens, par ceux de degré 5 ; les autres valeurs propres sont nettement moins modifiées.

. la prépondérance au degré 3, de la contribution de l'ensemble I sur celle de l'ensemble II, bien que les coefficients dans ces deux ensembles soient assez comparables (ce sont les solutions y_{oi} qui, dans le problème planétaire traité ici, sont moins importantes en module pour celles issues des ζ_{oi} que pour celles issues des z_{oi}) ; vu les signes opposés de ces coefficients dans ces 2 ensembles, il est assez paradoxal de constater que si les ζ_{oi} étaient plus importants (du même ordre de grandeur que les z_{oi}), ces contributions pourraient assez bien se compenser, et qu'alors les modifications des valeurs propres seraient moindres.

Une prépondérance analogue des termes issus des z_{oi} sur ceux issus des ζ_{oi} se reproduit aux degrés 5 et 7 : nous l'avons vérifié dans les solutions z_{o5} et z_{o6} développées complètement jusqu'au degré 7 dans le cas $N = 2$ pour Jupiter et Saturne ; nous en donnons une illustration dans les tableaux 14a et 14b, qui montrent comment se répartissent les modifications des valeurs propres suivant l'ordre et le degré, pour 2 et 4 planètes, et suivant qu'on se limite au problème plan (ζ_{oi} nuls) ou qu'on considère le système complet :

Tableau 14-a

Modifications des valeurs propres du système en excentricité $\left(\frac{d \bar{z}_{oi}}{dt}\right)$

Nature du problème	Valeurs propres ℓ_i de A_1	Contributions des termes non linéaires, réparties suivant leur degré :			nouvelles "valeurs propres" λ_{oi}	
		3	5	7		
ordre 1	couple Jupiter-Saturne	-22",0139	-0,3247	-0,0035	-0,00006	-22,3421
		-3,4739	-0,0113	-0,0003	0,00001	-3,4856
	4 grosses planètes	-22,3331	-0,3226			-22,6557
		-3,7039	-0,0179			-3,7218
		-2,7024	-0,0787		-2,7821	
		-0,6338	-0,0089		-0,6427	
ordre 1	couple Jupiter-Saturne	-22",9188	-3,3302	-1,8968	0,0522	-28,0935
		-3,9006	-0,1181	-0,0892	0,0052	-4,1027
+ ordre 2	4 grosses planètes	-23,2309	-3,2751			-26,5060
		-4,1341	-0,1046			-4,2387
		-2,9799	-0,1057			-3,0856
		-0,6581	-0,0158			-0,6739
ordre 1	couple Jupiter-Saturne	-22,9188	-3,3939	-1,9058	0,0479	-28,1706
		-3,9006	-0,1216	-0,0894	0,0052	-4,1064
+ ordre 2 problème plan	4 grosses planètes	-23,2309	-3,3409	-1,8218		-28,3936
		-4,1341	-0,1092	-0,0702		-4,3135
		-2,9799	-0,1126	-0,0126		-3,1051
		-0,6581	-0,0171	-0,0004		-0,6756
4 grosses planètes ordres 1 et 2		-23",2309	-3,2751	-1,81	0,05	-28,26
extrapolation des contributions des degrés 5 et 7 dans le problème non plan		-4,1341	-0,1046	-0,065	0,005	-4,298
		-2,9799	-0,1057	-0,011		-3,096
		-0,6581	-0,0158	-0,0004		-0,6743

(unités : ".an⁻¹)

Tableau 14-b

Modifications des valeurs propres du système en inclinaison $\left(\frac{d \bar{\zeta}_{oi}}{dt}\right)$

Nature du problème	Valeurs propres ℓ_i de A_2	Contributions des termes non linéaires, réparties suivant leur degré :			nouvelles "valeurs propres" λ_{oi}	
		3	5	7		
ordre 1	couple Jupiter-Saturne	0 25,4878	0 0,6076	0 0,0072	0 0,0001	0 26,1027
	4 grosses planètes	0 0,6784 2,9074 25,7884	0 0,0089 0,0825 0,6090			0 0,6873 2,9899 26,3974
ordre 1 + ordre 2	couple Jupiter-Saturne	0 25,3205	0 0,6274	0 0,0389	0 0,0133	0 26,0001
	4 grosses planètes	0 0,6818 2,9127 25,6209	0 (3.10 ⁻⁵) 0,0087 0,0801 0,6290			0 0,6905 2,9928 26,2499
4 grosses planètes ordres 1 et 2		0 0,6818	0 0,0087			0 0,6905
estimation des contributions des degrés 5 et 7		2,9127 25,6209	0,0801 0,6290	0,039	0,013	2,9928 26,302

(unités : ".an⁻¹)

On constate bien dans ces tableaux que les modifications des valeurs propres dans le problème plan sont très voisines de celles du problème complet, à tous les degrés, pour 2 et 4 planètes, marquant par là la prépondérance à chaque degré des termes ne dépendant que des z_{oi} .

Nous pouvons faire encore les remarques suivantes :

. A l'ordre 1, pour 2 planètes, les contributions à ces modifications décroissent très rapidement avec le degré.

. Comparant, avec l'ordre 1, les modifications des valeurs propres obtenues pour 2 et 4 planètes en ajoutant l'ordre 1 à l'ordre 2, on constate la prééminence de l'ordre 2 uniquement à propos des valeurs propres associées à Jupiter et à Saturne, à tous les degrés sauf au degré 3 dans le système en inclinaison.

. Cette prééminence de l'ordre 2 vient uniquement de la grande inégalité : on donne dans le tableau 15-a les modifications des valeurs propres calculées en ne conservant dans le système autonome que les termes d'ordre 2 provenant exclusivement de la grande inégalité (considérée complètement jusqu'au degré 7 sans effet de sélection) ; leur comparaison avec les résultats du tableau 14 relatifs à la réunion des ordres 1 et 2, montre bien que la contribution de toutes les autres inégalités périodiques dans l'ordre 2 est inférieure à celles de l'ordre 1.

. Enfin, on vérifie bien que les termes de degré 7 sont moins influents que ceux de degré 5, (cf. IV.2.2.2.1a). Si cette décroissance se poursuit aux degrés supérieurs, on peut estimer que la contribution de la grande inégalité aux modifications des fréquences est ainsi connue avec une précision de l'ordre du millième de seconde par an (tout au moins dans le cadre de cette 2ème approximation).

Tableau 15-a
 Contributions de l'inégalité (2,-5) du couple Jupiter-Saturne
 aux modifications des valeurs propres
 (ordre 2)

Nature du problème	Valeurs propres	Contributions des différents degrés			Somme de ces contributions	Contributions calculées par :	
		3	5	7		Brouwer et Van Woerkom	Bretagnon
couple Jupiter-Saturne	-22,9188	-2,8372	-1,8993	0,0511	-4,6854	-4,6883	
	-3,9006	-0,1015	-0,0903	0,0049	-0,1869	-0,1678	
	25,3205	-0,0141	0,0272	0,0128	0,0259	-	
4 grosses planètes	-23,2309	-2,7853					-2,7978
	-4,1341	-0,0815					-0,0462
	-2,9799	-0,0112					-
	-0,6581	-0,0002					-
	0,6818	0 ($3 \cdot 10^{-7}$)					-
	2,9127	0 ($-4 \cdot 10^{-6}$)					-
25,6209	-0,0139					-0,0139	

(unités : ".an⁻¹)

Nous donnons aussi dans le tableau 15-a les contributions de la grande inégalité calculées par Brouwer et Van Woerkom (1950) et par Bretagnon (1972) :

La valeur $-4'',6883$ obtenue par les premiers, coïncide presque avec la nôtre ; en fait, ces auteurs ont utilisé la contribution de la grande inégalité calculée par Hill à partir des résultats de Le Verrier, ne gardant dans le système autonome que les termes de degré 3 et 5 indépendants des inclinaisons. Cette coïncidence montre simplement que la contribution issue du degré 7 est sensiblement égale à celle des termes de degré 3 et 5 qui dépendent des inclinaisons. D'ailleurs, pour la 2ème valeur propre, l'accord est moins bon, l'écart avec nos résultats approchant $0'',02$ par an.

Quand aux valeurs obtenues par Bretagnon, elles sont seulement comparables aux contributions de la grande inégalité au degré 3, car la nature des développements utilisés par Bretagnon lui permettait de considérer seulement la contribution de plus bas degré. Comme en outre la méthode de Krylov-Bogolioubov utilisée par Bretagnon donne une solution différente de la nôtre, (cf. II.3.4) on peut seulement constater la similitude des résultats.

b) Précision de la détermination des nouvelles "valeurs propres".

Nous donnons en bas des tableaux 14-a et 14-b, une estimation des modifications des valeurs propres qu'apporteraient les termes de degré 5 et 7 aux ordres 1 et 2, dans le problème non plan de 4 planètes : elle résulte d'une extrapolation des résultats donnés pour 2 et 4 planètes, obtenue en comparant les contributions issues du problème plan avec celle du problème non plan ; on tient compte notamment du fait que l'influence des termes dépendant des ζ_{oi} est faible et systématiquement opposée à celle prépondérante des termes ne dépendant que des z_{oi} ; de plus, la différence entre les contributions de ces deux classes de termes est presque la même, au degré 3,

pour deux planètes que pour quatre planètes ; on suppose alors, pour extrapoler de deux à quatre planètes, que tout ceci se reproduit aux degrés supérieurs.

La précision des nouvelles "valeurs propres" ainsi obtenues dépend encore des erreurs dues à la sélection des termes périodiques d'ordre 1 ; pour estimer des erreurs, nous avons calculé les modifications des valeurs propres associées à Jupiter-Saturne, provenant uniquement de l'inégalité (1,-1), développée jusqu'au degré 4, une 1ère fois avec effets de sélection, et une 2ème fois sans sélection (d'après les résultats publiés par Bretagnon (thèse 1972), cette inégalité fait partie de celles qui modifient le plus les valeurs propres). On constate dans le tableau 15-b que la précision est voisine de 0",01 et que l'accord avec les résultats de Bretagnon est satisfaisant. On peut penser que les quelques autres inégalités périodiques d'importance comparable donnent la même précision, de sorte que globalement, l'incertitude sur les nouvelles "valeurs propres" λ_{oi} données en bas des tableaux 14-a et 14-b doit être estimée à quelques centièmes de seconde par an.

Tableau 15-b
Contributions de l'inégalité (1,-1) du couple Jupiter-Saturne
aux modifications des valeurs propres à l'ordre 2.

Valeurs propres	Contributions de l'inégalité (1,-1)		Valeurs obtenues par Bretagnon
	sans sélection à l'ordre 1	avec sélection à l'ordre 1	
-22,9188	-0,0431	-0,0458	-0,0628
-3,9006	-0,0734	-0,0723	-0,0555
0	0	0,0003	-
25,3205	-0,5171	-0,5071	-0,5038

c) Remarques sur la modification des valeurs propres à la 3ème approximation.

Vu l'importance des modifications apportées par la 2ème approximation, on pouvait craindre que la 3ème approximation soit loin d'être négligeable. Afin de trancher, nous avons abordé (à la main) le calcul de la 3ème approximation, dans le cadre du problème plan restreint au couple Jupiter-Saturne : conformément aux équations (2.39), nous avons calculé les développements $(\frac{\partial G}{\partial Y})_0$ et $(\frac{\partial G}{\partial \bar{Y}})_0$, limités au degré 3, et, avec les solutions Y_1 et \bar{Y}_1 qu'on verra plus loin, nous avons déterminé les termes résonnants dans les équations associées aux deux valeurs propres $-22'',9188$ et $-3'',9006$ qu'on obtient dans le cadre de ce problème. Alors, on trouve qu'aux modifications apportées par la 2ème approximation, soit $-3'',3939$ et $-0'',1216$, il faut ajouter respectivement $-0'',046$ et $-0'',026$, à l'issue de la 3ème approximation.

Ce calcul montre donc que la convergence des approximations successives semble meilleure qu'on ne pouvait le craindre, et que l'apport de la 3ème approximation est du même ordre de grandeur que les incertitudes sur les résultats de la 2ème approximation (due à la précision limitée des termes d'ordre 2). Dans ces conditions, nous avons estimé qu'il n'y aurait lieu de tenir compte complètement de la 3ème approximation que si la solution de la 2ème approximation était par la suite améliorée en précision.

Cependant, nous avons tenu compte de ce que nous savons de la 3ème approximation : on note en effet que la valeur $-0'',046$ compense sensiblement la contribution de degré 7 obtenus à la 2ème approximation ; par ailleurs, l'apport de la 3ème approximation s'oppose à la contribution des termes dépendant des variables ζ_{oi} dans la 2ème approximation. Alors, en adoptant des nouvelles "valeurs propres" λ_{oi} qui tiennent compte aux ordres 1 et 2, de

Tableau 16

Valeurs λ_{oi} adoptées pour calculer la solution ϵy_{1i}
comparées à celles obtenues par Hill, par Brouwer et
Van Woerkom, et par Bretagnon.

I : λ_{oi}	II : Hill	III : Brouwer Van Woerkom	IV : Bretagnon
-28",328	-27",7301	-27",7741	-26",2167
-4 ,3089	-4 ,0995	-4 ,2959	-4 ,2072
-3 ,0982		-2 ,7193	-3 ,0652
-0 ,6743		-0 ,6333	-0 ,6678
0		0	0
0 ,6905		0 ,6775	0 ,6914
2 ,9928		2 ,9026	2 ,9998
26 ,250		25 ,7335	26 ,2671

Nature du problème traité dans le cadre de chacune de ces solutions :

- I [4 planètes
ordre 1 : degrés 1, 3, (5) (degré 5 en excentricités seules)
ordre 2 : degrés 1, 3, (5)
prise en compte implicitement du degré 7 et de la 3ème approximation.
- II [2 planètes (Jupiter-Saturne)
ordre 1 : degré 1
ordre 2 : degrés (3) et (5) issus de la grande inégalité, excentricités seules.
- III [8 planètes
ordre 1 : degré 1
ordre 2 : termes donnés par Hill
masse de Saturne différente : (1/3501,6)
- IV [8 planètes
ordre 1 : degrés 1, 3
ordre 2 : degrés 1, {3} (il manque au degré 3 la contribution des inégalités périodiques de caractéristiques comprises entre -2 et 2, lesquelles n'ont été prises en compte qu'au degré 1).

de tous les termes de degré 3 (en excentricité et en inclinaison), et de ceux de degré 5 en excentricité seulement, on est sans doute plus proche des valeurs λ_{oi} finales que si on prenait complètement le résultat de la 2ème approximation.

C'est ainsi que pour intégrer la solution à très longue période ϵy_{1i} relative à la 2ème approximation, nous avons adopté les valeurs λ_{oi} données dans le tableau 16; leur précision peut encore être estimée à quelques centièmes de seconde par an.

Dans le tableau 16, on reproduit aussi l'équivalent des valeurs λ_{oi} obtenues par Hill (1897), par Brouwer et Van Woerkom (1950) et par Bretagnon (1974).

En comparant la nature des systèmes autonomes dont sont tirés ces 4 ensembles de valeurs, on constate que les valeurs obtenues par Brouwer et Van Woerkom sont surtout comparables aux valeurs propres ℓ_i données dans le tableau 10 pour l'ordre 1, sauf pour les deux premières qui manifestent l'importance de la grande inégalité. Quant aux valeurs obtenues par Bretagnon, elles ne diffèrent essentiellement des nôtres que par la contribution des termes de degré 5 issus de la grande inégalité, à l'ordre 2.

Rappelons cependant que les termes d'ordre 3 viendront probablement encore modifier les λ_{oi} de plusieurs centièmes de seconde par an, voire même peut être d'un dixième de seconde par an en ce qui concerne $\lambda_{o1} = -28'',328 \text{ an}^{-1}$.

4) Solutions z_{oi} et τ_{oi} issues des deux premières approximations.

Avec les nouvelles "valeurs propres" λ_{oi} définies au paragraphe précédent, nous avons intégré les termes non résonnants des équations (2.43) : il en résulte les solutions ϵy_{1i} conformément à l'expression (2.45). Nous avons considéré pour cela tous les termes non résonnants de $\epsilon G(Y_o, \bar{Y}_o)$ issus

des termes de $F(X, \bar{X})$ qui sont d'ordre 1 et 2 et de degré 3 par rapport aux excentricités et aux inclinaisons ; pour les équations $\frac{d}{dt} \epsilon y_{1i}$ ($i = 1 \text{ à } 4$) associées aux excentricités, nous avons en plus considéré les termes de $F(X, \bar{X})$ d'ordre 1 et 2 et de degré 5 par rapport aux excentricités. Ces termes non résonnants sont ainsi issus des mêmes termes de $F(X, \bar{X})$ que les termes résonnants que nous avons retenus pour calculer les λ_{oi} (cf. paragraphe précédent) : il importe de procéder ainsi car à chaque degré, les coefficients des termes résonnants étant du même ordre de grandeur que ceux des termes non résonnants, il serait anormal de tenir compte des uns et non des autres.

Notons que l'intégration (donnant ϵy_{1i} conformément à (2.45)), conduit à diviser les coefficients des termes non résonnants de cette équation par des valeurs $\lambda_{oi} = \sum_k s_k \lambda_{ok}$ telles que $\sum_k s_k = 1$; on peut craindre alors l'amplification de certains termes correspondant à des petits diviseurs ; nous n'avons en fait trouvé aucun terme amplifié de cette façon pouvant remettre en cause la convergence ; cependant, si un tel diviseur avait été trouvé inférieur à la précision avec laquelle on connaît les λ_{ok} , on aurait considéré le terme correspondant comme résonnant, et il aurait contribué au calcul des modifications des valeurs propres.

Possédant les solutions y_{oi} et ϵy_{1i} , nous sommes alors revenus aux variables z_{oi} et ζ_{oi} : pour obtenir ces dernières, rassemblées dans la matrice colonne X , on applique à la solution $Y_0 + \epsilon Y_1$ la transformation linéaire de matrice P ; il en résulte pour z_{oi} et ζ_{oi} les expressions suivantes (cf. 2.46 et 2.47) :

$$z_{oi} = \sum_{j=1}^N b_{ij} \exp \sqrt{-1} \lambda_{oj} t + \sum_k e_{ik} \exp \sqrt{-1} \psi_k t$$

$$\zeta_{oi} = \sum_{j=N+1}^{2N} d_{ij} \exp \sqrt{-1} \lambda_{oj} t + \sum_k f_{ik} \exp \sqrt{-1} \theta_k t .$$

Tableau 17-1

SOLUTION	δ_{05}	EXP(λ_{01}	λ_{02}	λ_{03}	λ_{04}	λ_{05}	λ_{06}	λ_{07}	λ_{08}
.015741	EXP(52,06273	(1	0	0	0	0	0	0)
-.044544	EXP(149,99680	(0	1	0	0	0	0	0)
-.001729	EXP(55,19735	(0	0	1	0	0	0	0)
-.000056	EXP(106,74329	(0	0	0	1	0	0	0)
-.000009	EXP(58,53327	(-1	0	0	0	0	0	2)
-.000007	EXP(136,88568	(0	-1	0	0	0	0	2)
.000007	EXP(27,61189	(1	0	0	0	-1	0	1)
.000011	EXP(55,71472	(1	0	0	0	0	0	-1)
-.000002	EXP(64,58646	(0	1	0	0	1	0	0)
-.000004	EXP(168,95208	(0	1	0	0	1	0	-1)
-.000001	EXP(53,62510	(0	1	0	0	-1	1	0)
.000001	EXP(73,47141	(0	1	0	0	0	1	-1)
-.000001	EXP(36,48363	(0	1	0	0	0	-1	0)
.000012	EXP(140,84925	(0	1	0	0	0	0	-1)
.000002	EXP(129,25948	(0	1	0	0	-1	0	1)
-.000001	EXP(130,77726	(0	0	1	0	0	-1	0)
-.000001	EXP(55,14288	(0	0	1	0	0	0	-1)
.000003	EXP(39,01569	(0	0	0	1	0	0	0)
-.000688	EXP(125,81061	(2	-1	0	0	0	0	0)
.000045	EXP(31,51698	(2	0	-1	0	0	0	0)
-.000002	EXP(168,52286	(2	0	0	-1	0	0	0)
.000412	EXP(133,16457	(1	1	-1	0	0	0	0)
.000007	EXP(90,17044	(1	1	0	-1	0	0	0)
.000419	EXP(141,75182	(1	-1	1	0	0	0	0)
.000001	EXP(4,46407	(1	0	1	-1	0	0	0)
-.000007	EXP(4,74595	(1	-1	0	1	0	0	0)
-.000001	EXP(90,45232	(1	0	-1	1	0	0	0)
.000029	EXP(70,75336	(-1	2	0	0	0	0	0)
-.000056	EXP(54,81215	(0	2	-1	0	0	0	0)
-.000005	EXP(165,04699	(-1	1	1	0	0	0	0)
-.000002	EXP(12,09991	(0	1	-1	1	0	0	0)
.000007	EXP(157,69304	(0	-1	2	0	0	0	0)
-.000014	EXP(24,16303	(3	-2	0	0	0	0	0)
-.000002	EXP(109,86940	(3	-1	-1	0	0	0	0)
-.000001	EXP(40,10424	(2	-2	1	0	0	0	0)
.000001	EXP(172,40095	(-2	3	0	0	0	0	0)
-.000003	EXP(97,80628	(0	2	-2	1	0	0	0)
.000003	EXP(144,69891	(0	-1	3	-1	0	0	0)

VARIATIONS SECLAIKES:	RE	IM
.047074079		-.011324178
.001158850 ϵ		-.002141952 ϵ^2
-.000107096 ϵ^2		-.000099134 ϵ^3
-.000004147 ϵ^3		.000005114 ϵ^4
.000000199 ϵ^4		.000000086 ϵ^4

Tableau 17-2

SOLUTION		\bar{z}_{06}		λ_{01}	λ_{02}	λ_{03}	λ_{04}	λ_{05}	λ_{06}	λ_{07}	λ_{08}
-.048406	EXP(51,76125	-28,3278 *T)	(1	0	0	0	0	0	0)
-.032879	EXP(150,13424	-4,3089 *T)	(0	1	0	0	0	0	0)
-.001395	EXP(53,34618	-3,0982 *T)	(0	0	1	0	0	0	0)
-.000053	EXP(106,84211	-.6743 *T)	(0	0	0	1	0	0	0)
.000014	EXP(58,53327	80,8275 *T)	(-1	0	0	0	0	0	2)
.000004	EXP(136,88568	56,8086 *T)	(0	-1	0	0	0	0	2)
.000001	EXP(142,93887	-29,0183 *T)	(1	0	0	0	1	-1	0)
.000005	EXP(67,30450	-54,5776 *T)	(1	0	0	0	1	0	-1)
.000003	EXP(27,61189	-2,0779 *T)	(1	0	0	0	-1	0	1)
.000010	EXP(55,71472	-5,0707 *T)	(1	0	0	0	0	-1	1)
-.000001	EXP(64,58646	-4,9994 *T)	(0	1	0	0	1	-1	0)
.000010	EXP(168,95208	-30,5588 *T)	(0	1	0	0	1	0	-1)
-.000001	EXP(53,62510	-3,6184 *T)	(0	1	0	0	-1	1	0)
-.000003	EXP(73,47141	-29,8683 *T)	(0	1	0	0	0	1	-1)
-.000001	EXP(36,48363	-2,0066 *T)	(0	1	0	0	0	-1	1)
-.000033	EXP(140,84925	-27,5660 *T)	(0	1	0	0	0	0	-1)
-.000003	EXP(129,25948	21,9410 *T)	(0	1	0	0	-1	0	0)
-.000002	EXP(167,76503	-28,6576 *T)	(0	0	1	0	0	1	-1)
-.000001	EXP(130,77726	-.7959 *T)	(0	0	1	0	0	-1	1)
.000004	EXP(55,14288	-26,3553 *T)	(0	0	1	0	0	0	-1)
.000003	EXP(39,01569	-2,9766 *T)	(0	0	0	1	0	1	-1)
.002254	EXP(125,81061	-52,3466 *T)	(2	-1	0	0	0	0	0)
-.000147	EXP(31,51698	-53,5573 *T)	(2	0	-1	0	0	0	0)
.000007	EXP(168,52286	-55,9812 *T)	(2	0	0	-1	0	0	0)
-.001197	EXP(133,16457	-29,5384 *T)	(1	1	-1	0	0	0	0)
-.000021	EXP(90,17044	-31,9623 *T)	(1	1	0	-1	0	0	0)
-.001191	EXP(141,75182	-27,1171 *T)	(1	-1	1	0	0	0	0)
-.000004	EXP(4,46407	-30,7516 *T)	(1	0	1	-1	0	0	0)
.000020	EXP(4,74595	-24,6932 *T)	(1	-1	0	1	0	0	0)
.000004	EXP(90,45232	-25,9039 *T)	(1	0	-1	1	0	0	0)
-.000262	EXP(70,75336	19,7100 *T)	(-1	2	0	0	0	0	0)
-.000051	EXP(54,81215	-5,5196 *T)	(0	2	-1	0	0	0	0)
.000032	EXP(165,04699	20,9207 *T)	(-1	1	1	0	0	0	0)
-.000002	EXP(28,04112	23,3445 *T)	(-1	1	0	1	0	0	0)
-.000002	EXP(12,09991	-1,8850 *T)	(0	1	-1	1	0	0	0)
.000002	EXP(79,34062	22,1313 *T)	(-1	0	2	0	0	0	0)
.000007	EXP(157,69304	-1,8875 *T)	(0	-1	2	0	0	0	0)
.000048	EXP(24,16303	-76,3655 *T)	(3	-2	0	0	0	0	0)
.000006	EXP(109,86940	-77,5762 *T)	(3	-1	-1	0	0	0	0)
-.000003	EXP(40,10424	-51,1359 *T)	(2	-2	1	0	0	0	0)
-.000005	EXP(172,40095	43,7289 *T)	(-2	3	0	0	0	0	0)
-.000003	EXP(97,80628	-3,0957 *T)	(0	2	-2	1	0	0	0)
.000003	EXP(114,69891	-4,3114 *T)	(0	-1	3	-1	0	0	0)

VARIATIONS SECLAIRES:

RE	IM
-.002019885	-.055682376
-.005334655 t	.003633047 t
.000303706 t ²	.000319729 t ²
.000012259 t ³	-.000015808 t ³
-.000000631 t ⁴	-.000000254 t ⁴

Tableau 17-4

SOLUTION		\bar{z}_{08}		λ_{01}	λ_{02}	λ_{03}	λ_{04}	λ_{05}	λ_{06}	λ_{07}	λ_{08}
.000105	EXP(52,50453	-28,3278 *T)	(1	0	0	0	0	0	0)
-.001583	EXP(150,24443	-4,3089 *T)	(0	1	0	0	0	0	0)
.003610	EXP(55,44515	-3,0982 *T)	(0	0	1	0	0	0	0)
-.009153	EXP(106,73240	-,6743 *T)	(0	0	0	1	0	0	0)
.000002	EXP(176,57829	4,3089 *T)	(0	-1	0	0	2	0	0)
-.000002	EXP(52,99478	7,9922 *T)	(0	-1	0	0	0	1	1)
-.000002	EXP(120,37263	10,2945 *T)	(0	-1	0	0	0	0	2)
.000002	EXP(138,70115	6,7815 *T)	(0	0	-1	0	0	1	1)
-.000002	EXP(26,07900	9,0838 *T)	(0	0	-1	0	0	0	2)
-.000003	EXP(27,61189	-2,0779 *T)	(1	0	0	0	-1	0	0)
.000005	EXP(123,09257	-2,7684 *T)	(1	0	0	0	0	-1	0)
.000003	EXP(55,71472	-5,0702 *T)	(1	0	0	0	0	0	-1)
.000004	EXP(81,72793	-6,6112 *T)	(0	1	0	0	0	-1	-1)
-.000013	EXP(36,48363	-2,0066 *T)	(0	1	0	0	0	-1	-1)
.000005	EXP(176,02156	-5,4005 *T)	(0	0	1	0	0	-1	-1)
-.000126	EXP(130,77726	-,7959 *T)	(0	0	1	0	0	-1	-1)
-.000006	EXP(39,01569	-2,9766 *T)	(0	0	0	1	0	-1	-1)
-.000002	EXP(173,77138	1,6280 *T)	(0	0	0	1	0	-1	-1)
-.000004	EXP(125,81061	-52,3466 *T)	(2	-1	0	0	0	0	0)
.000004	EXP(133,16457	-29,5384 *T)	(1	1	-1	0	0	0	0)
.000002	EXP(141,75182	-27,1171 *T)	(1	-1	1	0	0	0	0)
-.000002	EXP(70,75336	19,7100 *T)	(-1	2	0	0	0	0	0)
-.000053	EXP(54,81215	-5,5196 *T)	(0	2	-1	0	0	0	0)
.000006	EXP(11,81802	-7,9434 *T)	(0	2	0	-1	0	0	0)
.000011	EXP(106,11165	-6,7328 *T)	(0	1	1	-1	0	0	0)
-.000043	EXP(12,09991	-1,8850 *T)	(0	1	-1	1	0	0	0)
-.000022	EXP(157,69304	-1,8875 *T)	(0	-1	2	0	0	0	0)
-.000006	EXP(20,40528	-5,5221 *T)	(0	0	2	-1	0	0	0)
-.000047	EXP(20,68716	,5363 *T)	(0	-1	1	1	0	0	0)
.000002	EXP(63,68129	2,9602 *T)	(0	-1	0	2	0	0	0)
-.000003	EXP(149,38766	-1,7495 *T)	(0	0	-1	2	0	0	0)
.000006	EXP(97,80628	-3,0957 *T)	(0	2	-2	1	0	0	0)
.000030	EXP(71,98667	-,6769 *T)	(0	-2	3	0	0	0	0)

VARIATIONS SECLAINES:

RE	IM
.006087289	-.006629096
.000009944 t	-.000076222 t
-.000004170 t ²	-.000000813 t ²
-.000000029 t ³	.000000036 t ³
.000000001 t ⁴	.000000001 t ⁴

Tableau 17-5

SOLUTION		\sum_{05}		λ_{01}	λ_{02}	λ_{03}	λ_{04}	λ_{05}	λ_{06}	λ_{07}	λ_{08}
-.013807	EXP(72,88408	,0000 *T)	(0	0	0	0	1	0	0	0)
-.000583	EXP(156,71130	,6905 *T)	(0	0	0	0	0	1	0	0)
-.000483	EXP(40,61095	2,9928 *T)	(0	0	0	0	0	0	1	0)
.003160	EXP(53,10144	26,2499 *T)	(0	0	0	0	0	0	0	1)
-.000001	EXP(37,05452	1,0203 *T)	(1	0	-1	0	0	0	0	1)
.000002	EXP(79,00894	24,7094 *T)	(-1	1	0	0	0	1	0	0)
.000018	EXP(146,38679	27,0117 *T)	(-1	1	0	0	0	0	1	0)
-.000006	EXP(154,64331	50,2687 *T)	(-1	1	0	0	0	0	0	1)
.000001	EXP(63,06773	-,5202 *T)	(0	1	-1	0	0	1	0	0)
-.000011	EXP(130,44558	1,7821 *T)	(0	1	-1	0	0	0	1	0)
-.000004	EXP(138,70210	25,0392 *T)	(0	1	-1	0	0	0	0	1)
.000001	EXP(173,30257	25,9200 *T)	(-1	0	1	0	0	1	0	0)
-.000002	EXP(60,68042	28,2223 *T)	(-1	0	1	0	0	0	1	0)
.000002	EXP(71,65499	1,9012 *T)	(0	-1	1	0	0	1	0	0)
-.000009	EXP(139,03283	4,2035 *T)	(0	-1	1	0	0	0	1	0)
-.000004	EXP(147,28936	27,4605 *T)	(0	-1	1	0	0	0	0	1)
.000005	EXP(1,74508	,5689 *T)	(0	0	1	-1	0	0	1	0)
.000003	EXP(20,35548	3,1144 *T)	(0	0	-1	1	0	1	0	0)
.000010	EXP(41,92066	-82,9054 *T)	(2	0	0	0	0	0	0	-1)
-.000009	EXP(143,56824	-58,8865 *T)	(1	1	0	0	0	0	0	-1)
-.000005	EXP(65,21583	-34,8676 *T)	(0	2	0	0	0	0	0	-1)

VARIATIONS SECLAIRES:

RE	IM
-.001968791	-.011224426
-.000315889 t	.000233627 t
-.000016220 t ²	-.000020646 t ²
.000000818 t ³	-.000000557 t ³
.000000031 t ⁴	.000000033 t ⁴

Tableau 17-6

SOLUTION		γ_{06}		λ_{01}	λ_{02}	λ_{03}	λ_{04}	λ_{05}	λ_{06}	λ_{07}	λ_{08}	
-0,013806	EXP(72,88409	,0000 *T)	(0	0	0	0	1	0	0	0)
-0,000562	EXP(156,71123	,6905 *T)	(0	0	0	0	0	1	0	0)
-0,000392	EXP(40,59072	2,9928 *T)	(0	0	0	0	0	0	1	0)
-0,007877	EXP(53,10133	26,2499 *T)	(0	0	0	0	0	0	0	1)
-0,000001	EXP(123,09162	-21,0261 *T)	(1	-1	0	0	0	0	1	0)
0,000017	EXP(131,34815	2,2310 *T)	(1	-1	0	0	0	0	0	1)
-0,000001	EXP(37,05452	1,0203 *T)	(1	0	-1	0	0	0	0	1)
0,000001	EXP(174,48962	24,0189 *T)	(-1	1	0	0	1	0	0	0)
-0,000004	EXP(79,00894	24,7094 *T)	(-1	1	0	0	0	1	0	0)
-0,000046	EXP(146,38679	27,0117 *T)	(-1	1	0	0	0	0	1	0)
0,000004	EXP(154,64331	50,2687 *T)	(-1	1	0	0	0	0	0	1)
0,000001	EXP(63,06773	-,5202 *T)	(0	1	-1	0	0	1	0	0)
-0,000010	EXP(130,44558	1,7821 *T)	(0	1	-1	0	0	0	1	0)
0,000010	EXP(138,70210	25,0392 *T)	(0	1	-1	0	0	0	0	1)
-0,000003	EXP(173,30257	25,9200 *T)	(-1	0	1	0	0	1	0	0)
0,000005	EXP(60,68042	28,2223 *T)	(-1	0	1	0	0	0	1	0)
0,000002	EXP(71,65499	1,9012 *T)	(0	-1	1	0	0	1	0	0)
-0,000007	EXP(139,03283	4,2035 *T)	(0	-1	1	0	0	0	1	0)
0,000010	EXP(147,28936	27,4605 *T)	(0	-1	1	0	0	0	0	1)
0,000004	EXP(1,74508	,5689 *T)	(0	0	1	-1	0	0	1	0)
0,000002	EXP(20,35548	3,1144 *T)	(0	0	-1	1	0	1	0	0)
-0,000024	EXP(41,92066	-82,9054 *T)	(2	0	0	0	0	0	0	-1)
-0,000001	EXP(151,82477	-35,6294 *T)	(1	1	0	0	0	0	-1	0)
0,000020	EXP(143,56824	-58,8865 *T)	(1	1	0	0	0	0	0	-1)
0,000001	EXP(73,47235	-11,6106 *T)	(0	2	0	0	0	0	-1	0)
0,000014	EXP(65,21583	-34,8676 *T)	(0	2	0	0	0	0	0	-1)

VARIATIONS SECLAIRES:

RE	IM
-0,008570730	-0,019971068
0,000806450 t	-0,000591445 t
0,000040209 t ²	0,000051753 t ²
-0,000002046 t ³	0,000001374 t ³
-0,000000076 t ⁴	-0,000000083 t ⁴

Tableau 17-7

SOLUTION		$\bar{\Sigma}_{07}$		λ_{01}	λ_{02}	λ_{03}	λ_{04}	λ_{05}	λ_{06}	λ_{07}	λ_{08}	
-.013800	EXP(72,88409	,0000 *T)	(0	0	0	0	1	0	0	0)
.000558	EXP(156,70739	,6905 *T)	(0	0	0	0	0	1	0	0)
.008871	EXP(40,60532	2,9928 *T)	(0	0	0	0	0	0	1	0)
.000356	EXP(53,09923	26,2499 *T)	(0	0	0	0	0	0	0	1)
-.000001	EXP(112,11705	5,2951 *T)	(0	0	0	0	0	-1	2	0)
.000007	EXP(123,09162	-21,0261 *T)	(1	-1	0	0	0	0	1	0)
.000286	EXP(131,34815	7,2310 *T)	(1	-1	0	0	0	0	0	1)
.000002	EXP(28,79799	-22,2367 *T)	(1	0	-1	0	0	0	1	0)
.000024	EXP(37,05452	1,0203 *T)	(1	0	-1	0	0	0	0	1)
.000009	EXP(146,38679	27,0117 *T)	(-1	1	0	0	0	0	1	0)
.000004	EXP(154,64331	50,2687 *T)	(-1	1	0	0	0	0	0	1)
.000004	EXP(63,06773	-,5202 *T)	(0	1	-1	0	0	1	0	0)
.000178	EXP(130,44558	1,7821 *T)	(0	1	-1	0	0	0	1	0)
-.000005	EXP(138,70210	25,0392 *T)	(0	1	-1	0	0	0	0	1)
-.000001	EXP(20,07360	-2,9440 *T)	(0	1	0	-1	0	1	0	0)
-.000003	EXP(60,68042	28,2223 *T)	(-1	0	1	0	0	0	1	0)
-.000001	EXP(68,93694	51,4794 *T)	(-1	0	1	0	0	0	0	1)
-.000018	EXP(71,65499	1,9012 *T)	(0	-1	1	0	0	1	0	0)
.000183	EXP(139,03283	4,2035 *T)	(0	-1	1	0	0	0	1	0)
.000003	EXP(147,28936	27,4605 *T)	(0	-1	1	0	0	0	0	1)
-.000001	EXP(114,36723	-1,7334 *T)	(0	0	1	-1	0	1	0	0)
-.000002	EXP(1,74508	,5689 *T)	(0	0	1	-1	0	0	1	0)
-.000006	EXP(114,64911	4,3250 *T)	(0	-1	0	1	0	1	0	0)
-.000049	EXP(20,35548	3,1144 *T)	(0	0	-1	1	0	1	0	0)
-.000002	EXP(87,73333	5,4167 *T)	(0	0	-1	1	0	0	1	0)
.000002	EXP(50,17719	-59,6482 *T)	(2	0	0	0	0	0	-1	0)
.000001	EXP(41,92066	-82,9054 *T)	(2	0	0	0	0	0	0	-1)
.000007	EXP(151,82477	-35,6294 *T)	(1	1	0	0	0	0	-1	0)
.000005	EXP(143,56824	-58,8865 *T)	(1	1	0	0	0	0	0	-1)
-.000002	EXP(66,11840	-34,4188 *T)	(1	0	1	0	0	0	-1	0)
-.000020	EXP(73,47235	-11,6106 *T)	(0	2	0	0	0	0	-1	0)
-.000003	EXP(65,21583	-34,8676 *T)	(0	2	0	0	0	0	0	-1)
.000003	EXP(55,14383	-8,0976 *T)	(0	1	1	0	0	-1	0	0)
-.000013	EXP(167,76598	-10,3999 *T)	(0	1	1	0	0	0	-1	0)
-.000002	EXP(159,50946	-33,6570 *T)	(0	1	1	0	0	0	0	-1)
.000002	EXP(149,43746	-6,8869 *T)	(0	0	2	0	0	-1	0	0)
.000003	EXP(82,05961	-9,1892 *T)	(0	0	2	0	0	0	-1	0)

VARIATIONS SECLAIRES:

RE	IM
.001889721	-.006473526
-.000125375 t	.000115996 t
-.000002054 t ²	-.000003179 t ²
.000000079 t ³	-.000000071 t ³
.000000002 t ⁴	.000000005 t ⁴

Tableau 17-8

SOLUTION		\sum_{08}		λ_{01}	λ_{02}	λ_{03}	λ_{04}	λ_{05}	λ_{06}	λ_{07}	λ_{08}
-.013805	EXP(72,88409	.0000 *T)	(0	0	0	0	1	0	0	0)
.005822	EXP(156,70960	.6905 *T)	(0	0	0	0	0	1	0	0)
-.001062	EXP(40,60126	2,9928 *T)	(0	0	0	0	0	0	1	0)
.000038	EXP(53,10291	26,2499 *T)	(0	0	0	0	0	0	0	1)
-.000061	EXP(131,34815	2,2310 *T)	(1	-1	0	0	0	0	0	1)
-.000017	EXP(37,05452	1,0203 *T)	(1	0	-1	0	0	0	0	1)
-.000017	EXP(63,06773	-.5202 *T)	(0	1	-1	0	0	1	0	0)
-.000006	EXP(130,44558	1,7821 *T)	(0	1	-1	0	0	0	1	0)
.000006	EXP(87,45145	-.6417 *T)	(0	1	0	-1	0	0	1	0)
-.000014	EXP(71,65499	1,9012 *T)	(0	-1	1	0	0	1	0	0)
-.000026	EXP(139,03283	4,2035 *T)	(0	-1	1	0	0	0	1	0)
.000001	EXP(114,36723	-1,7334 *T)	(0	0	1	-1	0	1	0	0)
-.000048	EXP(1,74508	.5689 *T)	(0	0	1	-1	0	0	1	0)
.000001	EXP(114,64911	4,3250 *T)	(0	-1	0	1	0	1	0	0)
-.000001	EXP(2,02696	6,6273 *T)	(0	-1	0	1	0	0	1	0)
.000007	EXP(20,35548	3,1144 *T)	(0	0	-1	1	0	1	0	0)
.000002	EXP(87,73333	5,4167 *T)	(0	0	-1	1	0	0	1	0)
.000003	EXP(140,85020	-9,3083 *T)	(0	2	0	0	0	-1	0	0)
.000003	EXP(73,47235	-11,6106 *T)	(0	2	0	0	0	0	-1	0)
-.000003	EXP(55,14383	-8,0974 *T)	(0	1	1	0	0	-1	0	0)
.000005	EXP(167,76598	-10,3999 *T)	(0	1	1	0	0	0	-1	0)
-.000002	EXP(149,43746	-6,8869 *T)	(0	0	2	0	0	-1	0	0)
-.000002	EXP(82,05961	-9,1892 *T)	(0	0	2	0	0	0	-1	0)

VARIATIONS SECLAIRES:

RE		IM	
-.010205793		-.011645333	
-.000000452	t	-.000025639	t
-.000000066	t ²	-.000000194	t ²
.000000009	t ³	-.000000007	t ³
.000000000	t ⁴	.000000000	t ⁴

Les affixes associées à ces solutions sont le résultat de la composition d'un nombre fini de mouvements circulaires, fini tout comme le nombre de termes de degrés 3 et 5 considérés (voir les figures 1 à 3 par exemple).

Nous présentons ces solutions dans les tableaux 17-1 à 17-8, par l'intermédiaire des amplitudes complexes b_{ij} , e_{ik} , d_{ij} et f_{ik} (exprimées par leur module et leur argument) associées chacune à la valeur d'une combinaison linéaire des λ_{oi} (cette combinaison linéaire est d'ailleurs donnée également par ses coefficients). Nous ne donnons dans ces tableaux que les termes dont le module est supérieur à 10^{-6} (radians). Les arguments (ou phases) ont été ramenés à l'intervalle $(0^\circ, 180^\circ)$, en inversant éventuellement le signe du module, de façon à rendre directement comparables les phases de ces mouvements circulaires entre les diverses solutions z_{oi} et ζ_{oi} ($i = 5$ à 8).

Les variations séculaires des z_{oi} et ζ_{oi} qu'on donne en bas de chaque tableau sont obtenues en développant en puissances de t ces termes à très longues périodes au voisinage de $t = 0$ (correspondant à 1950.0) ; le temps t y est exprimé en milliers d'années juliennes (365 250 jours) ; nous les examinerons plus particulièrement dans le prochain paragraphe.

Les 4 premiers termes de chacun de ces tableaux sont d'abord à comparer à la solution de Laplace-Lagrange obtenue à l'issue de la 1ère approximation (tableau 11) : on constate que pour les z_{oi} , les modules sont modifiés notablement, parfois de 10 % alors que pour les ζ_{oi} , les modules sont presque inchangés ; en outre, comme on le remarquait en II.3.4, par comparaison avec la solution de Krylov-Bogolioubov, les phases associées au même λ_{oi} dans les diverses solutions sont maintenant différentes, notamment dans les z_{oi} , qui sont davantage perturbés par les termes non linéaires, que les ζ_{oi} .

Enfin, les petites différences qu'on remarque entre les termes associés à la valeur propre nulle dans les diverses solutions ζ_{oi} (ces termes qui définissent le plan invariable devraient être égaux), montrent que la précision de ces solutions est voisine de 4.10^{-6} soit encore 1". On note encore que la 2ème approximation précise la définition du plan invariable obtenue à la 1ère approximation : son inclinaison sur l'écliptique est pratiquement inchangée tandis que son noeud est déplacé de $0^{\circ},04$.

Quant aux termes suivants de chacun de ces tableaux (termes associés à des combinaisons $\sum_{k=1}^8 s_k \lambda_{ok}$ de plusieurs λ_{ok}), on constate que la plupart sont beaucoup plus faibles que les 4 premiers termes (qu'on appellera désormais termes de Laplace-Lagrange). Pour analyser la provenance de ces différents termes, il faut remarquer que ceux dont la somme $S = \sum_{k=1}^8 |s_k|$ vaut 3 proviennent de termes de $F(X, \bar{X})$ de degrés 3 et 5, tandis que ceux dont S vaut 5 sont issus de termes de degré 5 uniquement. Par ailleurs, les termes relatifs à une combinaison dépendant des λ_{ok} associés aux inclinaisons ($k = 5$ à 8) sont issus de termes de $F(X, \bar{X})$ dépendant des variables ζ_{oi} .

En ce qui concerne les z_{oi} , on peut alors remarquer que les termes dont S vaut 5 sont du même ordre de grandeur que ceux issus des termes de degré 3 dépendant des ζ_{oi} dans $F(X, \bar{X})$. Pourtant, cela ne veut pas dire que les termes de degré 5 contribuent à la solution de la même façon que ces termes de degré 3 car ils interviennent aussi dans les autres termes de degré 3.

En effet, notamment dans z_{o5} et z_{o6} , nous avons constaté que la solution qu'on obtient en ne conservant dans $F(X, \bar{X})$ que les termes de degré 3, est totalement bouleversée lorsqu'on ajoute à $F(X, \bar{X})$ les termes de degré 5 en excentricité : Rappelons-nous que ces derniers termes contribuent presque

autant que les termes de degré 3 à modifier la valeur propre $-23'',2309 \text{ an}^{-1}$. Ainsi, par exemple, les plus gros termes de \bar{z}_{06} qu'on obtient en réduisant $F(X, \bar{X})$ au degré 3 sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 & - 0,048\ 318 \exp \sqrt{-1} (50^\circ,608 + \lambda_{01} t) && \text{avec } \lambda_{01} = -26'',5060 \text{ an}^{-1} \\
 & - 0,034\ 150 \exp \sqrt{-1} (150^\circ,063 + \lambda_{02} t) && \lambda_{02} = -4'',2387 \\
 & - 0,001\ 639 \exp \sqrt{-1} (62^\circ,072 + \lambda_{03} t) && \lambda_{03} = -3'',0856 \\
 & - 0,000\ 062 \exp \sqrt{-1} (107^\circ,189 + \lambda_{04} t) && \lambda_{04} = -0'',6740 \\
 & + 0,001\ 160 \exp \sqrt{-1} [125^\circ,810 + (2\lambda_{01} - \lambda_{02})t] \\
 & - 0,000\ 436 \exp \sqrt{-1} [133^\circ,164 + (\lambda_{01} + \lambda_{02} - \lambda_{03})t] \\
 & - 0,000\ 434 \exp \sqrt{-1} [141^\circ,752 + (\lambda_{01} - \lambda_{02} + \lambda_{03})t] \\
 & - 0,000\ 114 \exp \sqrt{-1} [70^\circ,753 + (-\lambda_{01} + 2\lambda_{02})t]
 \end{aligned}$$

On voit par comparaison avec le tableau 17.2 que les termes de degré 5 modifient de 100 % le module des termes qu'on obtenait avec le degré 3 seul ; on peut faire la même remarque à propos de z_{05} . Ces apports importants du degré 5 sont essentiellement dus aux termes d'ordre 2 issus de la grande inégalité, tout comme pour les modifications des valeurs propres associées à Jupiter et à Saturne. Si, comme pour les modifications des valeurs propres, les termes de degré 7 apportent à la solution une contribution cent fois plus faible que celle de degré 3 et 5, on peut s'attendre à ce qu'ils modifient alors les plus gros termes de ces solutions de quelques 10^{-5} rad, mais peut être la 3ème approximation vient-elle aussi compenser leur contribution.

Par contre, dans z_{07} et z_{08} , l'apport du degré 5 est beaucoup plus modeste, ne dépassant pas quelques pour cents de l'apport du degré 3.

En ce qui concerne les ζ_{0i} , on peut remarquer que les termes de Laplace-Lagrange sont très nettement prépondérants sur les autres termes, sauf toutefois dans ζ_{07} qui contient quelques termes dont l'amplitude dépasse

10^{-4} rad. Il est probable que les termes de degré 5 et au-delà, n'apporteraient dans les ζ_{oi} que des termes inférieurs à 10^{-6} rad.

IV. 2.2.3.- Comparaison de ces solutions avec celles de Hill, de Brouwer-Van Woerkom, de Bretagnon et de Brumberg ; comparaison avec l'intégration numérique de Cohen - Hubbard - Oesterwinter.

Hill (1897), Brouwer et Van Woerkom (1950) et Bretagnon (1974) ont donné des solutions à très longues périodes directement comparables à la nôtre (bien que les constantes d'intégration ne soient pas exactement les mêmes car associées à des éléments moyens pour des dates différentes, les termes à très longues périodes restent comparables en module ; c'est leur phase qui est surtout affectée par le choix de l'origine du temps). Cependant comme la solution du système autonome sous forme quasi-périodique n'est pas unique et dépend notamment de la méthode d'intégration utilisée, les comparaisons terme à terme peuvent être assez médiocres, même si globalement les solutions comparées sont équivalentes.

Nous examinerons donc ensuite l'équivalence de ces solutions, d'abord par l'intermédiaire de leurs développements en puissances de t au voisinage de l'instant initial, lesquels devront être identiques s'il s'agit de la même solution ; Brumberg (1975) et Bretagnon (1978) donnent d'ailleurs cette solution directement sous cette forme. Après cela, nous comparerons notre solution avec les résultats d'une intégration numérique sur un million d'années, réalisée par Cohen et al. (1973) pour les planètes extérieures, de Jupiter à Pluton : les positions et les vitesses sont calculées avec un pas de 40 jours, de l'époque 0 aux époques $\pm 500\ 000$ ans ; les éléments osculateurs qu'ils en ont déduits ont été moyennés sur des intervalles de 500 ans : ils représentent très sensiblement les éléments moyens, avec leurs variations à très longues périodes.

Tableau 18-a

Eléments moyens des grosses planètes obtenus par Bretagnon
(1978)

	$\langle e \cos \bar{\omega} \rangle$	$\langle e \sin \bar{\omega} \rangle$	$\langle \sin \frac{i}{2} \cos \Omega \rangle$	$\langle \sin \frac{i}{2} \sin \Omega \rangle$
Jupiter				
	0,047 074 079	0,011 324 178	-0,001 968 791	0,011 224 426
t	0,001 169 790	0,002 147 990	-0,000 314 022	-0,000 233 011
t ²	-0,000 107 273	0,000 100 656	-0,000 016 493	0,000 020 824
t ³	-0,000 004 379	-0,000 005 056	0,000 000 763	0,000 000 521
t ⁴	0,000 000 365	-0,000 000 197		
Saturne				
	-0,002 019 885	0,055 682 376	-0,008 570 730	0,019 971 068
t	-0,005 376 981	-0,003 660 288	0,000 804 622	0,000 589 772
t ²	0,000 303 560	-0,000 326 502	0,000 040 968	-0,000 052 455
t ³	0,000 013 323	0,000 015 742	-0,000 001 920	-0,000 001 281
t ⁴	-0,000 000 662	0,000 000 371		
Uranus				
	-0,045 912 249	0,006 215 059	0,001 889 721	0,006 473 526
t	0,000 174 795	-0,000 753 218	-0,000 125 744	-0,000 116 265
t ²	-0,000 000 540	0,000 012 100	-0,000 002 048	0,000 003 203
t ³	-0,000 000 520	-0,000 000 538		
Neptune				
	0,006 087 289	0,006 629 096	-0,010 205 793	0,011 645 333
t	0,000 009 763	0,000 078 061	-0,000 000 413	0,000 025 752
t ²	-0,000 001 184	0,000 000 822	-0,000 000 178	0,000 000 190

t est exprimé en milliers d'années juliennes à partir de 1950.0

Repère : écliptique et équinoxe moyen 1950.0

Tableau 18-b

Comparaison de l'amplitude des termes à très longues périodes obtenus par Hill,
par Brouwer-Van Woerkom et par Bretagnon dans leur solution analogue à z_{05} et z_{06}
relative à Jupiter et à Saturne ($\times 10^6$)

Combinaison des λ_{oi} attachée à chaque terme	Théorie générale		Hill		Brouwer Van Woerkom		Bretagnon	
	\bar{z}_{05}	\bar{z}_{06}	z_{05}	z_{06}	z_{05}	z_{06}	z_{05}	z_{06}
	λ_{01}	15741	-48406	-15683	48268	-15355	48628	-16150
λ_{02}	-44544	-32879	43749	32735	44819	32912	43416	34475
λ_{03}	-1729	-1395			1470	1479	2000	1785
λ_{04}	-56	-53			53	64	58	62
$2\lambda_{01} - \lambda_{02}$	-688	2254	-591	1921	538	2020	298	-962
$\lambda_{01} - \lambda_{02} + \lambda_{03}$	419	-1191					-113	348
$\lambda_{01} + \lambda_{02} - \lambda_{03}$	412	-1197					-111	349
$2\lambda_{01} - \lambda_{03}$	45	-147					-23	78
$2\lambda_{02} - \lambda_{01}$	29	-262	-15	-121	-159	-490	-10	-50
$2\lambda_{02} - \lambda_{03}$	-56	-51					-66	-46
$\lambda_{01} - 2\lambda_{08}$	-9	14					-9	15
$3\lambda_{01} - 2\lambda_{02}$	-14	48	25	-94				
$3\lambda_{02} - 2\lambda_{01}$	1	-5	8	-2				

Les conditions d'obtention de ces solutions sont données dans le tableau 16 ;
les λ_{oi} correspondant à chacune d'elles sont ceux donnés dans ce tableau ;
les solutions de Hill et de Bretagnon sont rapportées à l'écliptique et l'équinoxe 1850.0 tandis que les
autres solutions sont relatives à 1950.0

Nous donnons ainsi dans le tableau 18-b un extrait des solutions obtenues par Hill, par Brouwer et Van Woerkom et par Bretagnon, relatives aux variables z_{05} et z_{06} . Les conditions dans lesquelles ont été obtenues ces solutions ont déjà été décrites dans le tableau 16, à propos des "valeurs propres" obtenues par ces auteurs.

Les solutions de Hill et de Brouwer-Van Woerkom montrent essentiellement que la grande inégalité intervient surtout dans le terme associé à la combinaison $2\lambda_{01} - \lambda_{02}$, dans lequel son influence est prépondérante sur celle de tous les autres termes. On note encore l'importance du degré 5 issu de la grande inégalité dont l'absence dans la solution, de Bretagnon permet d'expliquer l'essentiel des désaccords avec les autres solutions. La solution de Bretagnon est d'ailleurs davantage comparable à la solution donnée pour z_{06} dans le paragraphe précédent, relative au système autonome limité aux ordres 1 et 2 et aux degrés 1 et 3.

Pour la comparaison globale de ces solutions, nous avons la chance de disposer d'une solution pouvant servir de référence sur quelques millénaires autour de l'époque 1950.0 : il s'agit de la solution obtenue par Bretagnon (1978) en utilisant une méthode itérative semi-numérique ; elle donne les termes périodiques sous forme de termes mixtes (cf. 2.1), et les termes séculaires représentés directement sous forme de polynômes de t représentant les éléments moyens $\langle e \cos \bar{\omega} \rangle$, $\langle e \sin \bar{\omega} \rangle$, $\langle \sin \frac{i}{2} \cos \Omega \rangle$ et $\langle \sin \frac{i}{2} \sin \Omega \rangle$ au voisinage de 1950.0. Cette solution a été développée jusqu'à l'ordre 6 par rapport aux masses pour les 4 grosses planètes, et son ajustement à l'intégration numérique (supposée représenter des observations idéales sur 1000 ans, pour des conditions initiales fixées, elles-mêmes déterminées pour représenter au mieux les observations actuelles) permet d'assurer une précision de 10^{-7} sur ces éléments moyens pendant 1000 ans. Nous reproduisons leur expression dans le tableau 18-a ; le temps t y est exprimé en milliers d'années juliennes.

Tableau 18-c

Écarts au bout de 1000 ans, entre les éléments moyens obtenus par Bretagnon (1978) et les solutions z_{oj} et ζ_{oj} de la théorie générale

	$\langle e_j \cos \bar{\omega}_j \rangle - \text{Re}(z_{oj})$	$\langle e_j \sin \bar{\omega}_j \rangle - \text{Im}(z_{oj})$	$\langle \sin \frac{i_j}{2} \cos \Omega_j \rangle - \text{Re}(\zeta_{oj})$	$\langle \sin \frac{i_j}{2} \sin \Omega_j \rangle - \text{Im}(\zeta_{oj})$
Jupiter	$10,6 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$0,8 \cdot 10^{-6}$
Saturne	$-41,4 \cdot 10^{-6}$	$-33,9 \cdot 10^{-6}$	$-0,9 \cdot 10^{-6}$	$-2,4 \cdot 10^{-6}$
Uranus	$0,8 \cdot 10^{-6}$	$-1,2 \cdot 10^{-6}$	$-0,4 \cdot 10^{-6}$	$-0,3 \cdot 10^{-6}$
Neptune	$-0,2 \cdot 10^{-6}$	$-1,9 \cdot 10^{-6}$	$-0,1 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$

Tableau 18-d

Variations séculaires des solutions analogues à z_{06} et ζ_{06} obtenues par Brouwer et Van Woerkom (1950), par Bretagnon (1974) et par Brumberg (1975) ; écarts au bout de 1000 ans entre ces solutions et celle de Bretagnon (1978) (entre 1950.0 et 2950.0, en ignorant le terme constant de ces développements du fait des repères différents adopté par ces auteurs).

	Brouwer et Van Woerkom		Bretagnon (1974)		Brumberg	
	$e \cos \bar{\omega}$	$e \sin \bar{\omega}$	$e \cos \bar{\omega}$	$e \sin \bar{\omega}$	$e \cos \bar{\omega}$	$e \sin \bar{\omega}$
t	-0,005 339 700	-0,003 545 673	-0,005 399 808	-0,003 272 399	-0,004 569 668	-0,002 911 829
t ²	0,000 295 633	-0,000 325 480	0,000 213 832	-0,000 294 771	0,000 196 007	-0,000 241 795
t ³	0,000 012 782	0,000 152 230	0,000 014 637	0,000 011 547	0,000 009 140	0,000 007 730
t ⁴	-0,000 000 627	0,000 000 337	-0,000 000 250	0,000 000 326	-0,000 000 221	0,000 000 250
écarts sur 1000 ans	$30,1 \cdot 10^{-6}$	$115,1 \cdot 10^{-6}$	$60 \cdot 10^{-6}$	$415 \cdot 10^{-6}$	$738 \cdot 10^{-6}$	$779 \cdot 10^{-6}$
	$\frac{1}{2} \sin i \cos \Omega$	$\frac{1}{2} \sin i \sin \Omega$	$\sin \frac{i}{2} \cos \Omega$	$\sin \frac{i}{2} \sin \Omega$	$\frac{1}{2} \sin i \cos \Omega$	$\frac{1}{2} \sin i \sin \Omega$
t	0,000 784 161	0,000 597 491	0,000 817 344	0,000 585 122	0,000 818 192	0,000 584 348
t ²	0,000 037 160	-0,000 048 659	0,000 037 134	-0,000 051 779	0,000 038 998	-0,000 051 820
t ³	-0,000 002 022	-0,000 001 544	-0,000 002 197	-0,000 001 575	-0,000 002 167	-0,000 001 451
t ⁴	-0,000 000 048	0,000 000 063	-0,000 000 050	0,000 000 070	-0,000 000 063	0,000 000 074
écarts sur 1000 ans	$24 \cdot 10^{-6}$	$11 \cdot 10^{-6}$	$15 \cdot 10^{-6}$	$15 \cdot 10^{-6}$	$18 \cdot 10^{-6}$	$16 \cdot 10^{-6}$

Il est très intéressant de comparer ces éléments moyens aux variations séculaires qu'on déduit des solutions à très longues périodes en les développant en puissances de t au voisinage de la même date (cf. tableaux 17.1 à 17.8). Cela permet en effet de vérifier que les termes à variations séculaires des théories classiques sont bien les développements en puissances de t des termes à très longues périodes présents dans les théories générales. La comparaison est ici facilitée par l'identité des variables et de leurs valeurs initiales dans notre théorie et dans celle de Bretagnon.

Les différences qu'on observe peuvent paraître encore importantes (quelques millièmes en valeur relative), mais il faut surtout remarquer que la théorie générale poussée à l'ordre 2 donne déjà très convenablement les termes en t , t^2 , t^3 de ces développements, alors que si on avait arrêté la construction de la théorie classique à l'ordre 2, on n'aurait que les termes en t et t^2 , probablement moins bons d'ailleurs que ceux que nous avons.

Ces différences proviennent en partie des erreurs dues à la sélection des termes d'ordre 1 retenus pour construire l'ordre 2 ; elles proviennent aussi de la limitation de la théorie générale en ordre et en degré, sans qu'il soit vraiment possible de dire laquelle de ces causes est la plus importante. Cependant on peut déjà se rendre compte de l'importance de la contribution des termes d'ordre 2 et de degré 5, en comparant avec le développement donné dans le tableau 17.2, le développement de la solution \bar{z}_{06} obtenue en limitant l'ordre à 2 et le degré à 3 (on a donné les principaux termes à longues périodes de cette solution dans le paragraphe précédent) :

$\text{Re}(\bar{z}_{06})$	$\text{Im}(\bar{z}_{06})$
- 0,002 019 885	- 0,055 682 376
- 0,005 023 213 t	0,003 437 673 t
0,000 262 411 t^2	0,000 290 639 t^2
0,000 011 546 t^3	- 0,000 012 288 t^3
- 0,000 000 433 t^4	- 0,000 000 301 t^4

les écarts sont maintenant de l'ordre de quelques pour cent.

Ces différences entre notre solution et les éléments moyens de Bretagnon peuvent encore être synthétisées par les écarts qu'on obtient entre ces deux solutions au bout de 1 000 ans (cf. tableau 18-c) : on observe que ces écarts sont plus faibles pour les ζ_{oi} que pour les z_{oi} ; exprimés autrement, au bout de 1 000 ans, ces écarts restent inférieurs à 1" pour les ζ_{oi} et atteignent près de 10" pour z_{o6} alors que la précision des éléments moyens obtenus par Bretagnon est inférieure à 0",1. Notons qu'avec la solution limitée à l'ordre 2 et au degré 3, les écarts $\text{Re}(\bar{z}_{o6}) - \langle e_6 \cos \bar{\omega}_6 \rangle$ et $\text{Im}(\bar{z}_{o6}) - \langle e_6 \sin \bar{\omega}_6 \rangle$ s'élèvent à 289×10^{-6} et 255×10^{-6} respectivement et sont donc 6 fois plus grands que dans le cas où on tient compte en plus du degré 5. (*)

A titre de comparaison, nous donnons encore dans le tableau 18-d le développement en puissances de t de la solution à très longues périodes, relative à Saturne, obtenue par Brouwer-Van Woerkom et par Bretagnon, nous donnons également pour cette planète, la solution obtenue par Brumberg (1975) en intégrant le système autonome de façon à la construire directement sous forme polynomiale. Le système autonome considéré par Brumberg contient les termes d'ordre 1 jusqu'au degré 5 (et au degré 7 pour Jupiter et Saturne), et les termes linéaires d'ordre 2.

La comparaison des coefficients de ces polynômes entre eux ou avec les nôtres et ceux de Bretagnon (1978), permet de donner une idée de l'influence des contributions des degrés divers à l'ordre 2. Notons cependant que Bretagnon (1974) et Brumberg donnent leurs solutions par rapport à l'écliptique et l'équinoxe 1850.0 ; les différences observées entre ces dernières représentent essentiellement l'apport des termes de degré 3 issus de la grande inégalité, et sont surtout sensibles sur les développements de $\langle e \cos \bar{\omega} \rangle$ et $\langle e \sin \bar{\omega} \rangle$.

(*) La figure 4 donne une illustration, pour z_{o5} , des écarts entre les solutions obtenues en ne conservant, dans le système autonome, que les termes de degré 1, puis 1 et 3, puis 1, 3 et 5 : seule la dernière solution est sensiblement confondue, sur 5000 ans avec la solution à variations séculaires de Bretagnon.

On remarque que la solution obtenue par Brouwer-Van Woerkom est déjà très proche de celle de Bretagnon (1978) : il n'est pas impossible qu'en fait les développements de Hill utilisés par ces auteurs, (dont certains coefficients ont été obtenus par Hill de manière empirique à partir de ceux de Le Verrier), contiennent davantage que la contribution de la grande inégalité.

Nous donnons encore dans le tableau 18-d, les écarts en 1000 ans (entre 1950.0 et 2950.0), de ces solutions avec celle de Bretagnon (1978). On note essentiellement que pour les inclinaisons, l'absence de l'ordre 2 chez Brouwer et Van Woerkom conduit à des écarts 10 fois plus importants que les nôtres ; pour les excentricités, les écarts avec la solution de Bretagnon (1978) sont plus importants que ceux issus de notre solution, ce qui manifeste l'importance qu'il faut attacher à l'ordre 2 dans le système autonome.

Au-delà de 1000 ans, entre la solution à très longues périodes comme la nôtre et les éléments moyens (polynomiaux) de Bretagnon (1978), les écarts augmentent rapidement^(*) ; il faut choisir une autre référence. Elle existe dans l'intégration numérique de Cohen et al. car leur résultat est indépendant d'un développement en ordres et en degrés.

Cependant, si les conditions initiales choisies représentent bien, comme les nôtres, les mouvements à l'époque actuelle, leurs masses ne sont pas identiques aux nôtres : celle de Saturne est prise égale à $M_{\odot}/3501,6$, celle de Pluton à $M_{\odot}/360000$ et celles des planètes intérieures sont ajoutées à celle du Soleil. Ces différences ont des effets à très long terme mais encore limités au bout de 500 000 ans : même si ces différences de masses devaient modifier de $0",01 \text{ an}^{-1}$ les valeurs propres associées à Jupiter et à Saturne par exemple, les arguments des mouvements circulaires qui leur correspondent et qui composent les solutions z_{oi} et ζ_{oi} , seraient différents de $5000''$ au bout de 500 000 ans. Par contre, le mouvement de Neptune étant fort perturbé par Pluton,

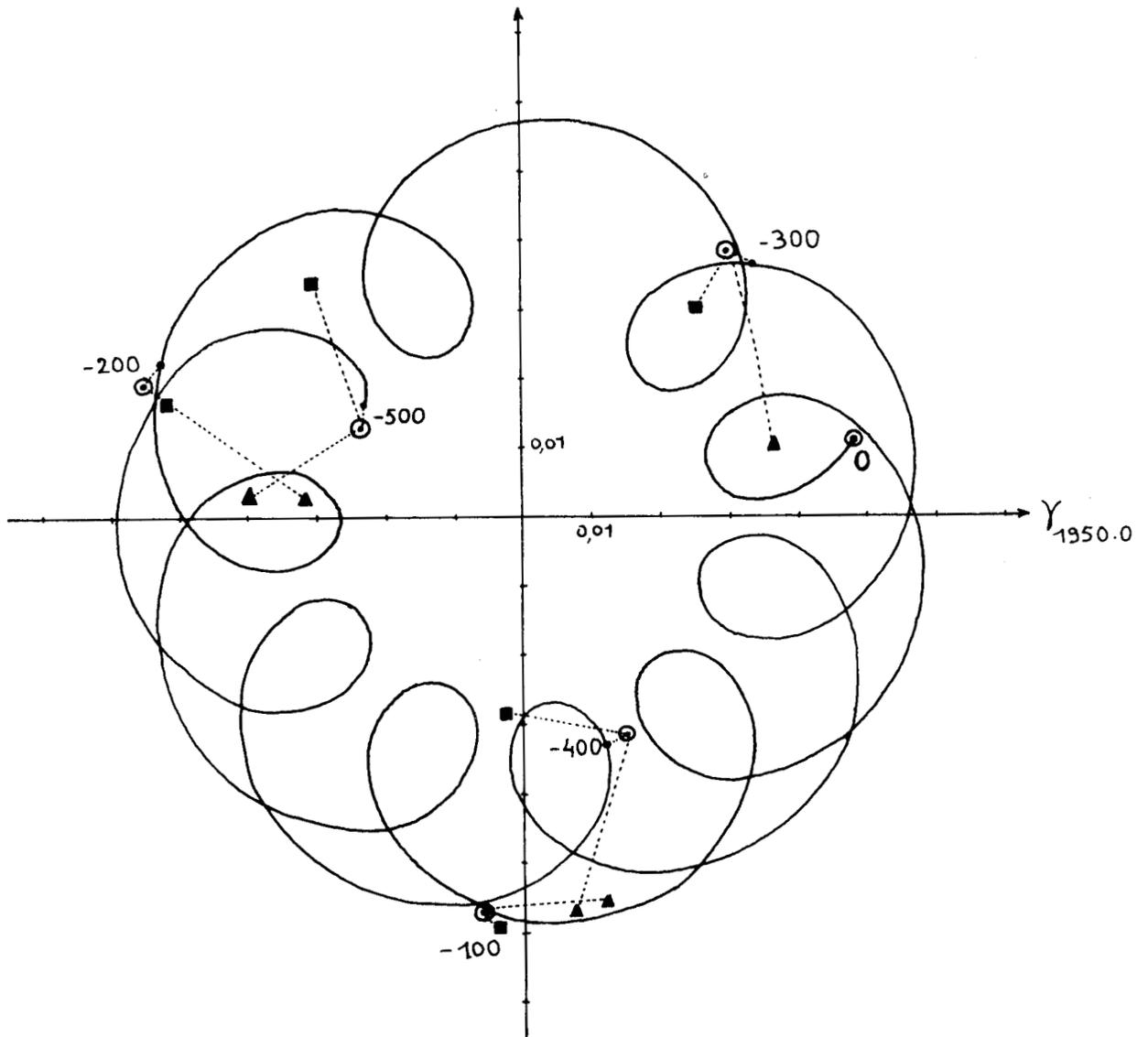
(*) Voir figure 4.

pour Neptune leur solution est difficilement comparable à la nôtre.

Cohen et al. ont estimé que la précision qu'ils ont obtenue est surtout limitée par les erreurs de troncature mais que cette erreur reste petite (moins de $7''{,}5$ au bout de 500 000 ans dans la longitude moyenne de Jupiter, variations relatives de l'intégrale de l'énergie et du moment cinétique inférieures à 10^{-9}). Nous ne disposons pas cependant de la même précision pour leurs éléments moyens car les résultats qui les concernent sont présentés sous forme de graphiques dont la lecture est assez peu précise : on y lit les excentricités et les inclinaisons à 0,001 près environ et les longitudes des noeuds et des périhélie à quelques degrés près. Nous avons visualisé quelques points de leurs graphiques (tous les 100 000 ans) avec une précision analogue dans les figures 1 à 3.

Ces figures montrent quelques exemples du déplacement des affixes représentant notre solution sur 500 000 ans ; à titre de comparaison, nous avons pointé tous les 100 000 ans les valeurs données par les solutions à très longues périodes de Brouwer-Van Woerkom et de Bretagnon (1974) ; nous constatons que partant d'une position commune pour $t = 0$ (sauf pour la solution de Bretagnon qui diffère légèrement des autres à $t = 0$ notamment pour Uranus), ces diverses solutions s'écartent progressivement de la position donnée par l'intégration numérique. L'ampleur de ces écarts permet de mesurer l'effet des termes négligés dans chacune de ces solutions (décrites par exemple dans le tableau 16). Ces figures permettent ainsi de rendre compte de la précision obtenue dans chacune de ces solutions dans un intervalle de 500 000 ans. Notons seulement que pour Uranus, la solution de Brouwer-Van Woerkom n'est issue que du système autonome d'ordre 1 et de degré 1 auquel s'ajoute une partie de l'ordre 2 provenant uniquement de la grande inégalité du couple Jupiter-Saturne.

Figure 1



Déplacements de l'affixe représentant z_{05} (Jupiter) entre l'époque - 500 000 ans et l'époque actuelle.

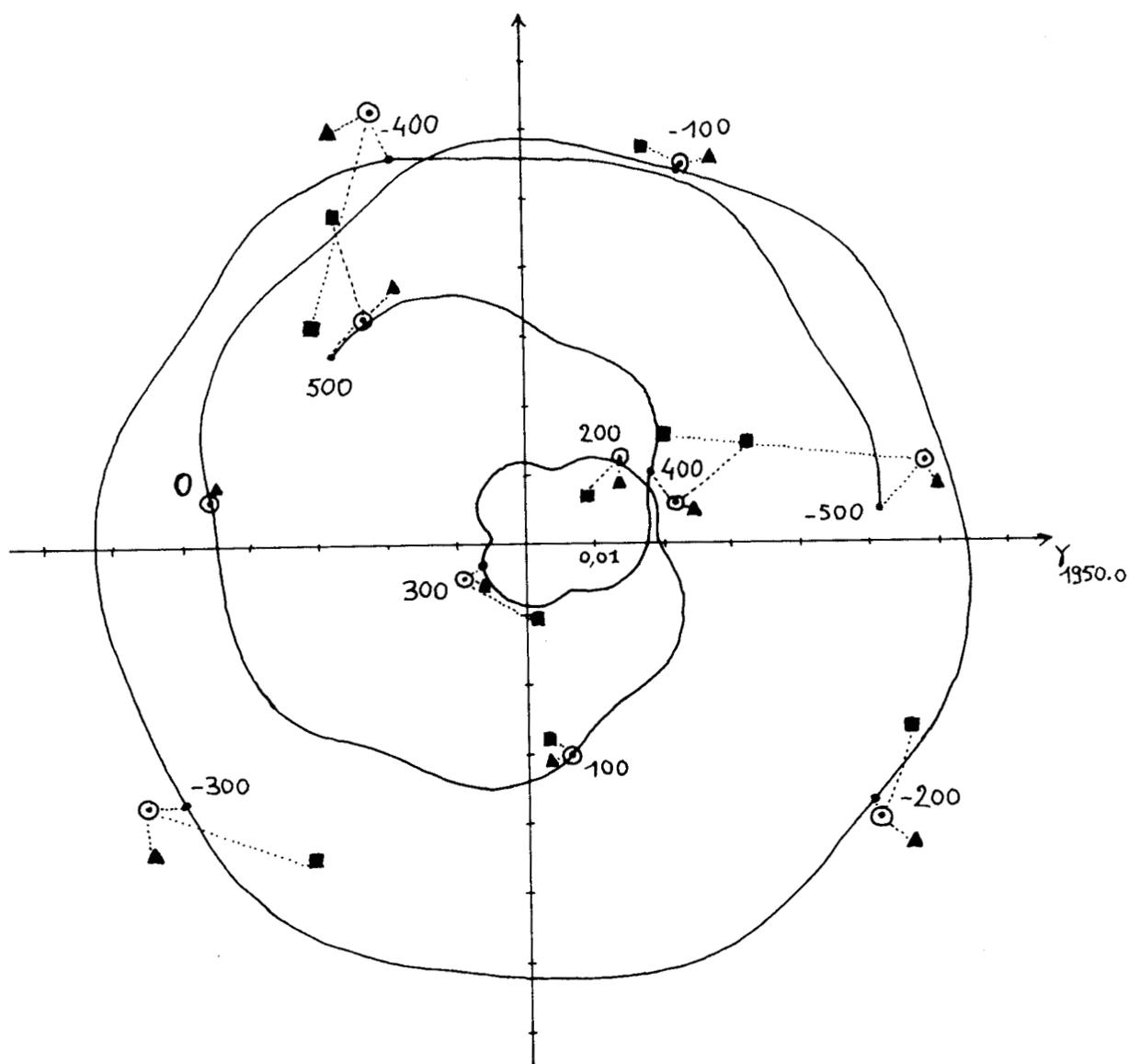
On a également représenté, tous les 100 000 ans, les positions données à ces époques par diverses solutions :

symbole \odot : Intégration numérique de Cohen et al.

■ : Solution de Brouwer - Van Woerkom

▲ : Solution de Bretagnon (1974).

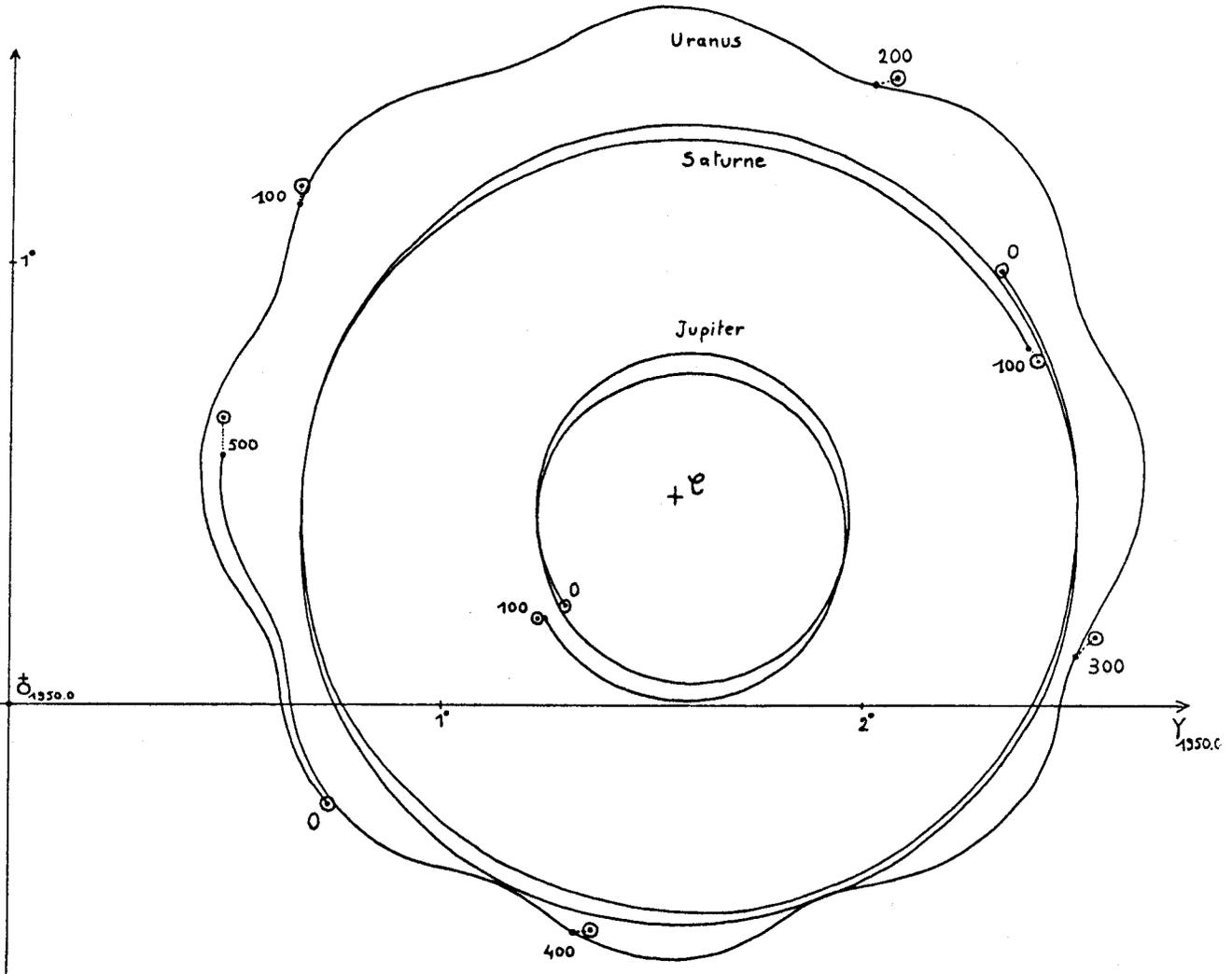
Figure 2



Déplacements de l'affixe représentant z_{07} (Uranus) entre l'époque - 500 000 ans et l'époque + 500 000 ans.

- ⊙ : Intégration numérique de Cohen et al.
- : Solution de Brouwer - Van Woerkom
- ▲ : Solution de Bretagnon (1974).

Figure 3



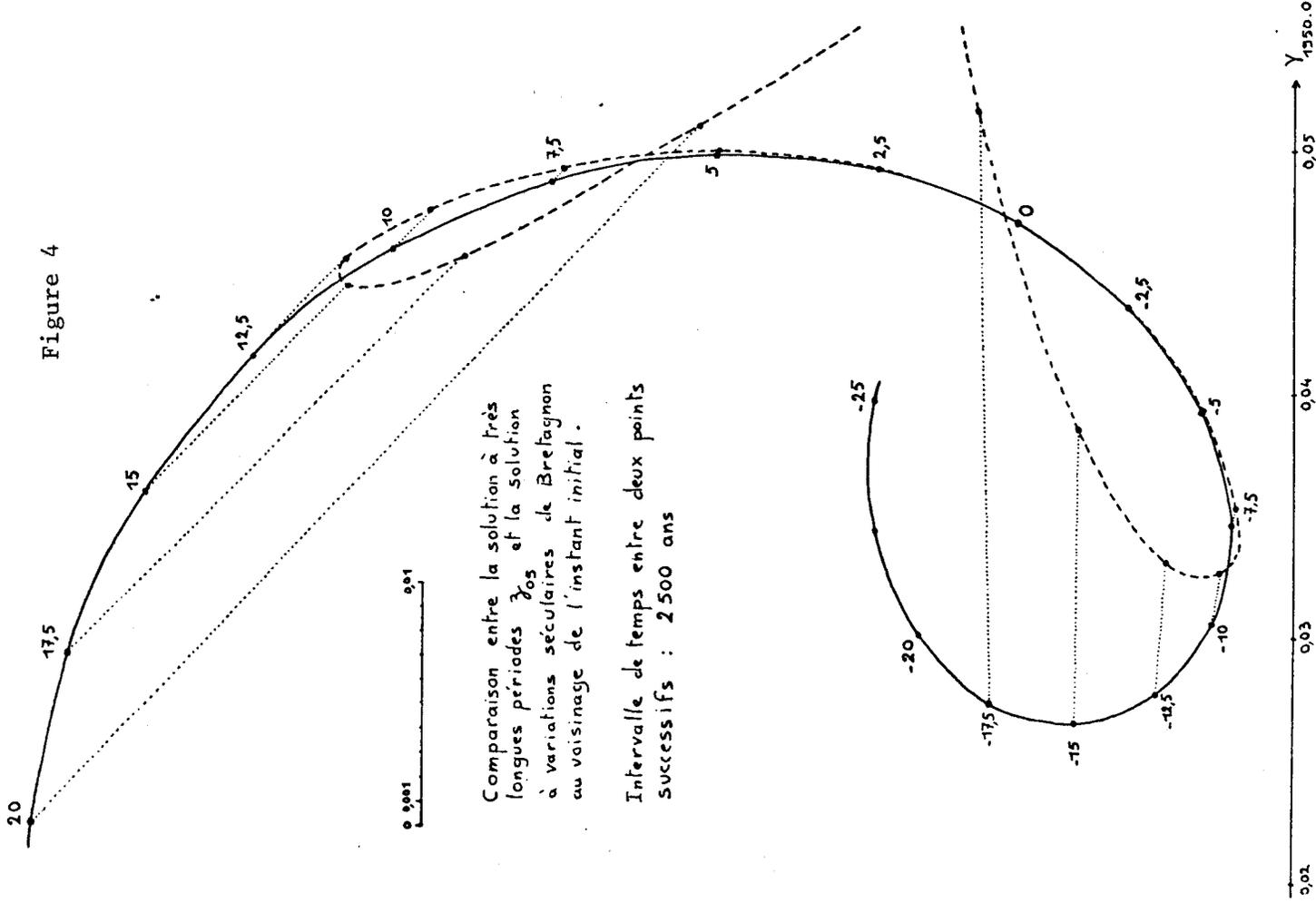
Déplacements du pôle moyen des orbites de Jupiter et de Saturne sur 100 000 ans, et de celui de l'orbite d'Uranus sur 500 000 ans ; l'origine du temps correspond à 1950.0

e représente le pôle du plan invariable.

Ces courbes sont issues des solutions ζ_{05} , ζ_{06} et ζ_{07} .

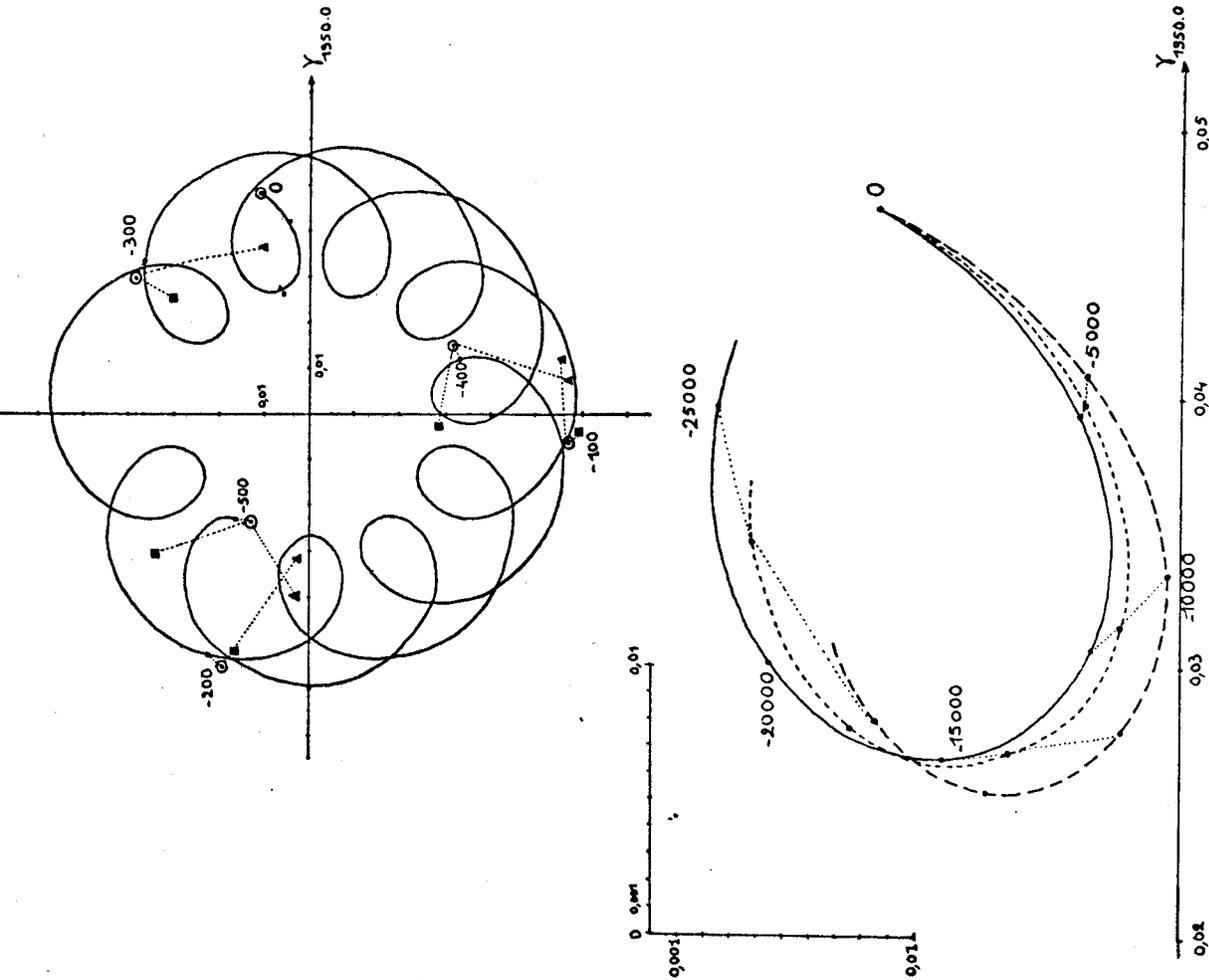
On a pointé, tous les 100 000 ans, la position de ces pôles donnée par l'intégration numérique de Cohen et al. (Symbole \odot).

Figure 4



Comparaison entre la solution à très longues périodes γ_{0s} et la solution à variations séculaires de Bretagnon au voisinage de l'instant initial.

Intervalle de temps entre deux points successifs : 2500 ans



Déplacements de l'affixe représentant γ_{0s} (Jupiter) sur 15000 ans à partir de 1950.0. Solutions données par :

- Ordres 1 et 2 degré 1 (Laplace - Lagrange)
- - - Ordres 1 et 2 degrés 1 et 3
- Ordres 1 et 2 degrés 1, 3 et 5

IV - 2.3.- Pas 3 et 4 : report des solutions z_{oi} et ζ_{oi} dans les équations

$$\frac{dq_{oi}}{dt} \quad ; \quad \text{solutions} \quad q_{oi}.$$

a) Solution à très longues périodes.

Nous avons reporté les solutions z_{oi} et ζ_{oi} obtenues précédemment (tableaux 17.1 à 17.8) dans les termes de degrés 2 et 4, d'ordres 1 et 2, des seconds membres des équations $\frac{dq_{oi}}{dt}$. On obtient dans chaque équation, un terme constant, et une somme de termes à très longues périodes, conformément à l'expression (2.27).

Nous avons vu en IV.2.1., que ces termes constants s'éliminaient grâce à une nouvelle détermination des constantes p_{oi} (cf. tableau 8), mais qu'ils apportaient des modifications d'ordre 3 des masses, donc négligeables dans cette solution.

La somme des autres termes s'intègre terme à terme, comme en (2.28), pour donner finalement la solution q_{oi} . Nous donnons dans les tableaux 19-a à 19-d, les seconds membres $\frac{dq_{oi}}{dt}$ et leur solution q_{oi} ($i = 5$ à 8), limitée aux termes supérieurs à 1", et mise sous la forme :

$$\begin{aligned} q_{oi} &= q_{oi}^{(o)} + \sum_j \rho_{ij} [\exp \sqrt{-1}(\phi_{ij} + f_j t) - \exp -\sqrt{-1}(\phi_{ij} + f_j t)] \\ &= q_{oi}^{(o)} + \sum_j 2\sqrt{-1} \rho_{ij} \sin(\phi_{ij} + f_j t). \end{aligned}$$

Chaque terme est associé à une fréquence f_j qui résulte d'une combinaison des λ_{oi} ($f_j = \sum_i s_{ij} \lambda_{oi}$, avec $\sum_i s_{ij} = 0$). On constate que dans chaque solution, un ou deux termes sont prépondérants sur tous les autres ; le terme prépondérant est dans tous les cas associé à la valeur

$f_j = 1'',2107 \text{ an}^{-1} = \lambda_{o2} - \lambda_{o3}$ correspondant à une période d'un million d'années environ ; dans le cas d'Uranus, l'amplitude $2\rho_j$ de ce terme dépasse $1^\circ,5$ (*)

Rappelons que ces solutions interviennent dans les longitudes moyennes :

$$(4.2) \quad \lambda_i = N_i t - \sqrt{-1} q_{oi}^{(o)} + \sum_j 2\rho_{ij} \sin(\phi_{ij} + f_j t) - \sqrt{-1} \Delta q_i$$

L'amplitude de ces termes à très longues périodes est du même ordre de grandeur que celle des termes périodiques de Δq_i , mais les ordres de grandeur entre les périodes de ces 2 classes de termes sont très différents ; remarquons d'ailleurs que la division par f_j qu'on effectue pour intégrer les q_{oi} , tend à donner davantage d'importance aux termes associés à des faibles f_j donc aux plus longues des très longues périodes ; remarquons également que si f_j est inférieur aux incertitudes sur la détermination des λ_{oi} , il est préférable d'associer le terme correspondant au terme constant, avant intégration ; c'est le cas notamment du terme associé à la combinaison $2\lambda_{o2} - 3\lambda_{o3} + \lambda_{o4}$ qui donne $f = 0'',0025 \text{ an}^{-1}$, mais dont l'amplitude, avant intégration, ne dépasse pas deux dix millièmes du terme constant ; vu la valeur de ce dernier (tableau 8), cette amplitude est négligeable.

Cette solution que nous obtenons pour les q_{oi} n'est comparable semble-t-il à aucune autre car, dans les théories classiques à variations séculaires, les termes qui aboutiraient à une solution équivalente, sont évalués numériquement pour contribuer à une perturbation constante du demi-grand axe, évitant ainsi d'avoir à modifier les moyens mouvements moyens ; notons cependant que si on avait procédé de façon à inclure ces termes dans les perturbations du demi-grand axe (voir la remarque du paragraphe II.3.3), il en résulterait que la partie des perturbations du demi-grand axe, qui est constante dans les théories classiques, est à très longue période dans la théorie générale (cf. Duriez, 1978).

(*) voir par exemple la figure 5.

Tableau 19-a

Solution q₀₅ (termes d'amplitude supérieure à 1") de la forme :

$$\sum_j \rho_j [\exp \sqrt{-1}(\phi_j + f_j t) - \exp -\sqrt{-1}(\phi_j + f_j t)]$$

coefficient avant intégration (= ρ _j f _j)	ρ _j	φ _j	f _j	combinaison des λ _{oi} relative à f _j
0",000 585 an ⁻¹	99",58	140°,484	1",2107 an ⁻¹	λ ₀₂ - λ ₀₃
0,006 737	57,82	89,716	24,0189	λ ₀₂ - λ ₀₁
-0,001 101	-8,65	160,288	26,2499	λ ₀₈ - λ ₀₅
-0,000 076	-6,47	8,520	2,4214	2 λ ₀₂ - 2 λ ₀₃
-0,001 022	-4,39	19,546	48,0377	2 λ ₀₂ - 2 λ ₀₁
-0,000 017	-4,27	65,338	0,7618	- λ ₀₁ + λ ₀₂ + λ ₀₇ - λ ₀₈
0,000 471	4,23	6,667	22,8082	λ ₀₁ - 2 λ ₀₂ + λ ₀₃
-0,000 011	-3,26	85,040	0,6905	λ ₀₆ - λ ₀₅
-0,000 030	-2,82	62,059	2,2310	λ ₀₁ - λ ₀₂ - λ ₀₅ + λ ₀₈
0,000 317	2,60	17,208	25,2295	λ ₀₃ - λ ₀₁
0,000 023	1,59	147,757	2,9928	λ ₀₇ - λ ₀₅
-0,000 074	-0,66	13,072	23,2571	λ ₀₈ - λ ₀₇
0,000 119	0,49	116,155	49,2482	- 2 λ ₀₁ + λ ₀₂ + λ ₀₃
0,000 080	0,15	8,799	109,1552	- 2 λ ₀₁ + 2 λ ₀₂

Variations séculaires au voisinage de 1950.0 :

$$\sqrt{-1} [213",043 + 0",484 t - 0",709 t^2 + 0",002 t^3]$$

(t en milliers d'années juliennes) .

Tableau 19-b

Solution q_{06}

coefficient avant intégration	ρ_j	ϕ_j	f_j
$-0",004\ 360\ \text{an}^{-1}$	-742",87	109°,903	1",2107 an^{-1}
-0,024 875	-213,60	89°,579	24,0189
0,000 294	24,97	7,572	2,4214
0,002 801	22,01	160,323	26,2499
0,000 061	16,80	69,812	0,7618
-0,001 809	-16,37	6,506	22,8082
0,003 553	15,26	19,527	48,0377
-0,000 200	-11,35	145,447	3,6345
0,000 111	10,31	62,497	2,2310
0,000 510	4,53	12,612	23,2571
-0,000 038	-3,46	62,418	2,3023
0,000 034	2,95	40,431	2,4239
0,000 006	2,90	0,902	0,4489
-0,000 260	-2,12	91,024	25,2295
0,000 009	1,79	148,507	1,0203
-0,000 003	-1,58	92,861	0,3298
-0,000 352	-1,47	118,141	49,2484
0,000 009	1,41	68,902	1,3322
0,000 177	1,32	57,955	27,6534
-0,000 012	-1,32	165,836	1,5405
-0,000 008	-1,22	127,697	1,2132
0,000 211	0,61	122,916	72,0566
-0,000 303	-0,57	8,694	109,1552
-0,000 199	-0,48	87,916	85,1364
-0,000 080	-0,27	167,661	61,1175

Variations séculaires au voisinage de 1950.0 :

$$\sqrt{-1} [- 1769",618 + 2",241 t + 2",672 t^2 - 0",014 t^3 - 0",003 t^4]$$

Tableau 19-c

Solution q_{07}

coefficients avant intégration	ρ_j	ϕ_j	f_j
0",013 995 an ⁻¹	2384",20	85°,351	1",2107 an ⁻¹
0,018 283	157,00	98,688	24,0189
0,001 100	93,66	50,991	2,4239
0,001 643	93,25	136,543	3,6345
0,000 841	75,38	64,157	2,3023
-0,006 467	-52,87	3,044	25,2295
-0,000 295	-20,34	147,744	2,9928
0,000 052	14,09	85,662	0,7618
-0,001 522	-13,50	12,447	23,2571
0,000 710	6,43	8,601	22,8082
0,000 060	5,10	38,832	2,4214
0,000 037	4,99	154,033	1,5405
-0,000 027	-4,15	68,559	1,3322
0,000 006	3,79	66,233	0,3298
0,000 019	3,23	110,698	1,2132
-0,000 422	-3,15	54,783	27,6534
0,000 043	2,51	161,485	3,5130
-0,000 001	-2,47	125,452	0,1216
0,000 010	1,84	153,032	1,0916
-0,000 480	-1,59	106,534	49,2484
0,000 188	1,51	76,538	25,5594
0,000 029	-1,24	46,448	4,8452
0,000 190	1,48	109,927	26,4402
-0,000 136	-1,06	160,078	26,2499
-0,000 853	-3,66	23,930	48,0377

Variations séculaires au voisinage de 1950.0 :

$$\sqrt{-1}(5478",669 - 19",152 t - 1",984 t^2 + 0",061 t^3 + 0",001 t^4)$$

Tableau 19-d

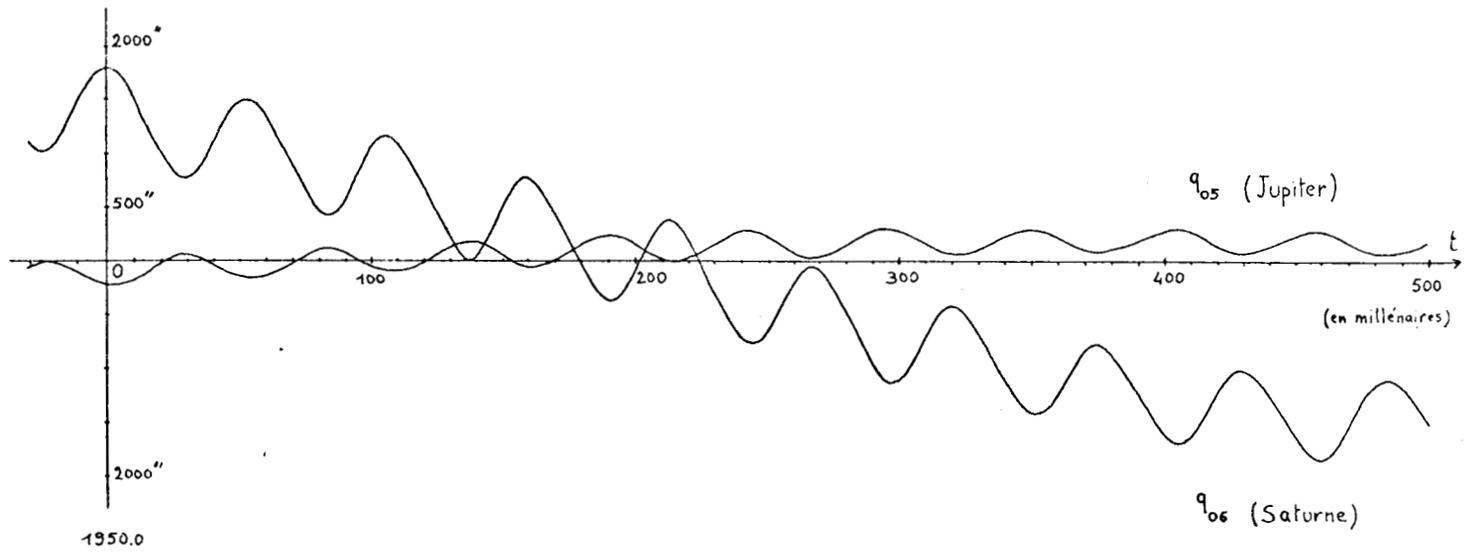
Solution q_{08}

coefficients avant intégration	ρ_j	ϕ_j	f_j
$0'',003\ 295\ \text{an}^{-1}$	561'',51	85°,254	$1'',2107\ \text{an}^{-1}$
-0,000 695	-59,13	51,146	2,4239
-0,000 396	-35,45	64,115	2,3023
-0,000 580	-32,95	136,499	3,6345
0,000 908	7,78	99,026	24,0189
0,000 018	4,93	87,735	0,7618
0,000 038	2,58	147,722	2,9928
-0,000 013	-1,74	154,931	1,5405
-0,000 009	-1,67	154,533	1,0916
0,000 014	1,23	146,087	2,4214
0,000 001	1,27	4,246	0,1216
0,000 004	1,13	83,825	0,6905
-0,000 129	-0,96	55,132	27,6534
0,000 069	0,55	76,392	25,5594
-0,000 040	-0,32	160,217	26,2499

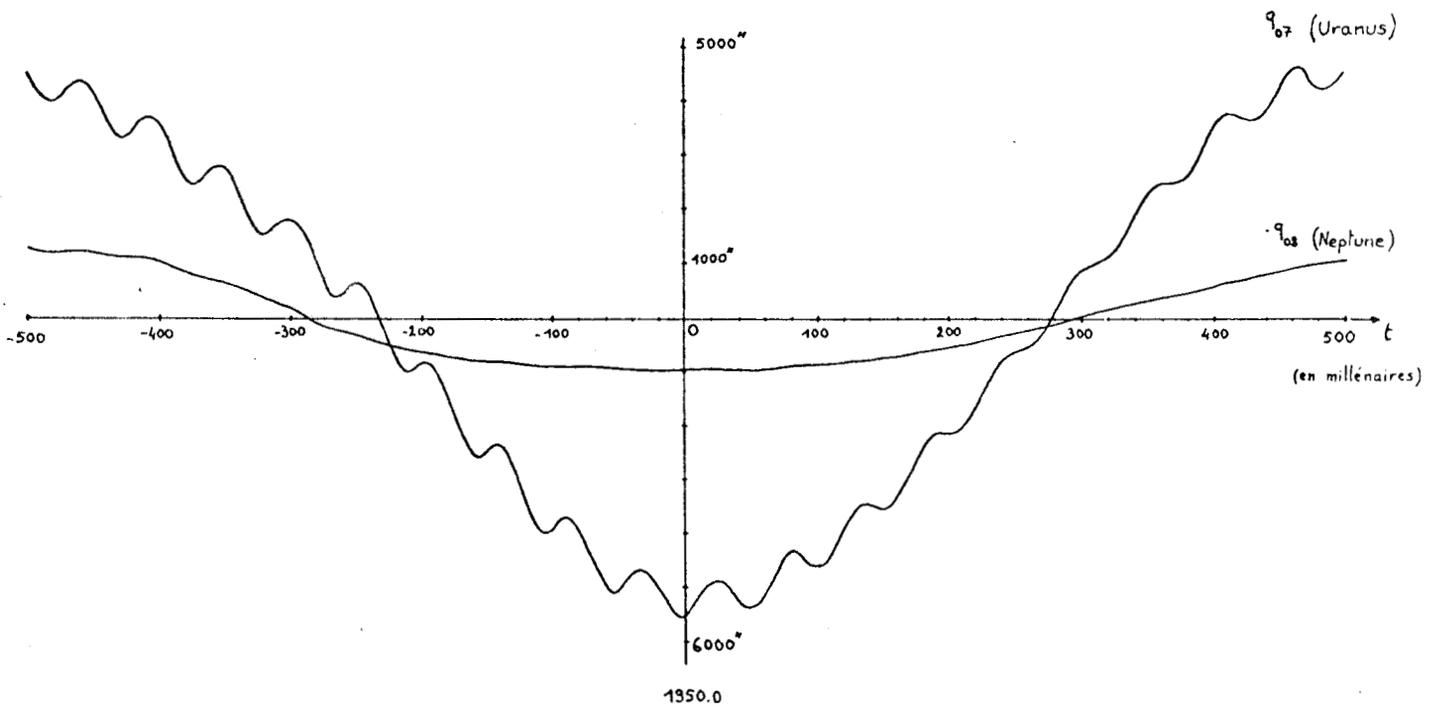
Variations séculaires au voisinage de 1950.0 :

$$\sqrt{-1} [940'',841 - 0'',231 t - 0'',096 t^2 + 0'',001 t^3] .$$

Figure 5



Variations à très longues périodes des solutions q_{05} et q_{06}



Variations à très longues périodes des solutions q_{07} et q_{08}

Notons encore que la grande inégalité intervient à l'ordre 2 dans les équations $\frac{dq_{05}}{dt}$ et $\frac{dq_{06}}{dt}$, à partir du degré 4 ; nous tenons donc compte de cette contribution, qui se trouve être près de 10 fois plus importante que la contribution d'ordre 1 et de degré 4 ; il est possible que, comme dans les équations $\frac{dz_{05}}{dt}$, $\frac{dz_{06}}{dt}$, les termes de degré immédiatement supérieur (ici de degré 6) soient aussi importants que ceux de degré 4 ; dans $\frac{dq_{05}}{dt}$ et $\frac{dq_{06}}{dt}$ ces termes de degré 4 représentent globalement près de 10 % des termes de degré 2 (ordre 1 et 2 réunis), de sorte que les termes de degré 6 issus de la grande inégalité sont peut être encore non négligeables.

b) Variations séculaires associées à cette solution.

Lorsqu'on étudie la solution au voisinage d'une époque donnée il est commode d'en prendre le développement en puissances de t . Nous donnons ainsi, dans les tableaux 19-a à 19-d, les variations séculaires des solutions q_{05} à q_{08} au voisinage de 1950.0 ; le temps y est exprimé en milliers d'années juliennes.

Le terme constant de ce développement s'ajoute à la constante d'intégration $q_{oi}^{(0)}$, pour former la longitude moyenne à l'instant initial (cf. 2.55).

Il est surtout intéressant de constater la petitesse des termes linéaires en t dans ces développements, car ces termes viennent en fait modifier la valeur des N_i dans (4.2) ; notons que ces modifications des N_i sont relatives à l'époque 1950.0 ; la plus importante d'entre elles concerne actuellement Uranus dont N_7 égal à $15\,424'',8362 \text{ an}^{-1}$ est modifié de $-0'',0191 \text{ an}^{-1}$, soit $1,2 \times 10^{-6} N_7$.

Cependant, d'après (2.53), ces modifications sont encore égales à la somme des coefficients (complexes) des seconds membres des équations $\frac{dq_{oi}}{dt}$,

avant intégration ; or, comme il s'agit d'une somme de termes trigonométriques, en supposant la convergence absolue des seconds membres, on peut majorer la valeur de ces modifications par la somme des modules de ses coefficients. Cette majoration représente encore, d'après (2.54) l'écart maximal entre les moyens mouvements moyens N_{1i} (qu'on déterminerait à chaque époque dans le voisinage de celle-ci), et les moyens mouvements N_i^{**} de la théorie générale (indépendants de tout instant initial (*)).

Ainsi, on trouve que $N_{1i} - N_i$ est borné, pour $i = 5$ à 8 , par les valeurs respectives suivantes :

$$\begin{aligned} &0'',0219 \text{ an}^{-1} \\ &0'',0817 \text{ an}^{-1} \\ &0'',0956 \text{ an}^{-1} \\ &0'',0128 \text{ an}^{-1} . \end{aligned}$$

Ces valeurs sont très intéressantes car elles montrent, pour la première fois semble-t-il, que les moyens mouvements moyens qu'on déterminerait à d'autres époques restent très voisins des valeurs actuelles (**). Il se fait d'ailleurs qu'actuellement, nous sommes très loin de ces valeurs extrêmes, sauf peut-être pour Uranus. La petitesse de ces valeurs justifie a posteriori le choix des N_i que nous avons fait pour construire la théorie générale (cf. II.4) ; elle résulte finalement de la petitesse des excentricités et des inclinaisons, ainsi que de celle des masses, car n'oublions pas que cette solution provient de termes d'ordre 1 et de degré 2 au moins. C'est un argument supplémentaire en faveur de la stabilité du système solaire.

(*) ce qui suppose la stabilité du système solaire, tout au moins dans le cadre du modèle Newtonien représenté par cette théorie générale.

(**) indépendamment d'une amélioration éventuelle de ces valeurs par comparaison aux observations.

Remarque :

Ces développements de la longitude moyenne en puissance de t ne sont pas comparables à ceux obtenus par Bretagnon (1978) : les termes dont ils sont issus, seraient en effet traités dans sa théorie semi-numérique comme contribuant à une perturbation constante du demi-grand axe tandis que les développements qu'il donne résultent d'une part des termes séculaires dans les demi-grands axes trouvés à partir de l'ordre 2, et d'autre part de l'ajustement de sa solution avec l'intégration numérique sensée représenter des observations idéales.

IV - 3.- Report des solutions z_{oi} et ζ_{oi} dans les inégalités périodiques.

Possédant d'une part les solutions à très longues périodes z_{oi} et ζ_{oi} , et d'autre part, l'ensemble des monômes constituant le développement analytique (par rapport aux z_{oi} et aux ζ_{oi}) d'une inégalité périodique, nous pouvons déterminer le développement à très longues périodes de ces monômes : il permet de connaître les variations d'amplitude de cette inégalité sur un très grand intervalle de temps.

Nous pouvons aussi développer ces termes à très longue période en puissances de t au voisinage d'un instant initial : on obtient alors les variations d'amplitude de cette inégalité au voisinage de cet instant, sous la forme de termes "mixtes". Mis sous cette forme, nous allons pouvoir comparer la solution de la théorie générale à celle de la théorie semi-numérique de Bretagnon (1978) : rappelons que la forme adoptée pour la solution de la théorie générale reposait sur l'hypothèse que les termes mixtes des théories semi-numériques sont les développements de termes à très longues périodes au voisinage d'une date fixe (cf. II - 1).

L'inégalité périodique que nous avons choisie pour illustrer ce paragraphe est la grande inégalité dans la longitude moyenne de Jupiter et de

Saturne. C'est en effet une des inégalités les plus difficiles à obtenir avec précision dans les théories semi-numériques : pour connaître cette inégalité avec la précision de 0",01 au bout de 1000 ans il est en effet nécessaire d'atteindre l'ordre 6 par rapport aux masses (d'après les résultats de Bretagnon (1978)), c'est-à-dire que pour représenter avec cette précision les variations d'amplitude de la grande inégalité dans cet intervalle de temps (ou le double en remontant dans le passé), il faut un polynôme de degré 5 par rapport au temps. Limité à ce degré 5, la précision donnée par ce développement en puissances de t se dégrade très rapidement au delà de 1000 ans.

Nous allons donc examiner ici jusqu'à quel point la solution de la théorie générale que nous avons obtenue (concernant la grande inégalité), est comparable à celle de Bretagnon.

a) Développement à très longues périodes de l'amplitude de la grande inégalité.

Ces développements, relatifs à la grande inégalité dans la longitude moyenne de Jupiter et de Saturne, sont de la forme :

$$\Delta q(2,-5) = \sum_j r_j \{ \exp \sqrt{-1}(\Psi_j + g_j t) \exp [\sqrt{-1}(2N_5 - 5N_6)t + 2q_{05} - 5q_{06}] - \exp \sqrt{-1}(-\Psi_j - g_j t) \exp [\sqrt{-1}(-2N_5 + 5N_6)t - 2q_{05} + 5q_{06}] \}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} -\sqrt{-1} \Delta q(2,-5) = & \sum_j 2r_j \cos(\Psi_j + g_j t) \sin((2N_5 - 5N_6)t - \sqrt{-1}(2q_{05} - 5q_{06})) \\ & + \sum_j 2r_j \sin(\Psi_j + g_j t) \cos((2N_5 - 5N_6)t - \sqrt{-1}(2q_{05} - 5q_{06})). \end{aligned}$$

Tableau 20-a

Développement à très longues périodes de la grande inégalité dans Δq_5 ,
de la forme : $\sum_j 2 r_j \frac{\cos(\psi_j + g_j t)}{\sin(\psi_j + g_j t)} \frac{\sin}{\cos} [(2 N_5 - 5 N_6) t - \sqrt{-1}(2 q_{05} - 5 q_{06})]$

r_j contribution issue de		ψ_j	g_j	combinaison des λ_{oi} donnant g_j
l'ordre 1 degrés 3 et 5	l'ordre 2 degré 3			
544",061	45",861	155,264	-84",9833 an ⁻¹	3 λ_{01}
-163,388	-16,101	74,322	-60,9644	2 $\lambda_{01} + \lambda_{02}$
71,590	6,059	49,162	-109,0021	4 $\lambda_{01} - \lambda_{02}$
-41,295	-3,332	56,676	-86,1939	3 $\lambda_{01} + \lambda_{02} - \lambda_{03}$
-39,443	-3,230	65,740	-83,7726	3 $\lambda_{01} - \lambda_{02} + \lambda_{03}$
8,567	-0,334	157,751	24,1720	2 $\lambda_{08} + \lambda_{01}$
8,318	0,375	132,930	-110,2128	4 $\lambda_{01} - \lambda_{03}$
-7,857	-1,001	155,590	-62,1751	2 $\lambda_{01} + 2 \lambda_{02} - \lambda_{03}$
-5,480	-0,888	172,929	-36,9455	$\lambda_{01} + 2 \lambda_{02}$
-4,527	-0,235	124,311	-133,0210	5 $\lambda_{01} - 2 \lambda_{02}$
3,368	0,122	139,086	-107,7914	4 $\lambda_{01} - 2 \lambda_{02} + \lambda_{03}$
2,484	0,185	103,538	-59,7537	2 $\lambda_{01} + \lambda_{03}$
-1,664	-1,773	92,888	-12,9267	3 λ_{02}
-1,387	0,100	76,217	48,1909	2 $\lambda_{08} + \lambda_{02}$
-1,084		64,458	-84,2215	2 $\lambda_{01} + \lambda_{02} + \lambda_{07} - \lambda_{08}$
-1,018		138,078	-87,4046	3 $\lambda_{01} + 2 \lambda_{02} - 2 \lambda_{03}$

Variations séculaires de $\sum_j 2 r_j \cos(\psi_j + g_j t)$:

ordre 1 : - 1063",793 + 94",877 t + 81",631 t² - 5",026 t³ - 1",009 t⁴
ordres 1 et 2 : - 1151",999 + 100",231 t + 88",490 t² - 5",415 t³ - 1",093 t⁴
terme mixte de Bretagne : - 1182",487 + 107",373 t + 91",501 t² - 6",658 t³ - 0",983 t⁴

Variations séculaires de $\sum_j 2 r_j \sin(\psi_j + g_j t)$:

ordre 1 : - 108",246 - 412",595 t + 28",430 t² + 10",560 t³ - 0",628 t⁴
ordres 1 et 2 : - 105",262 - 447",704 t + 30",478 t² + 11",449 t³ - 0",679 t⁴
terme mixte de Bretagne : - 117",644 - 461",872 t + 34",725 t² + 11",699 t³ - 0",847 t⁴

(t exprimé en milliers d'années juliennes à partir de 1950.0) .

Les g_j sont des combinaisons des λ_{oi} : $g_j = \sum_{i=1}^8 s_{ij} \lambda_{oi}$ telles qu'on aît $\sum s_{ij} = 3$ (égal au degré le plus bas des termes constituant l'inégalité).

Nous donnons un extrait de ces développements dans les tableaux 20-a et 20-b, par l'intermédiaire des nombres r_j , ψ_j et g_j , et en séparant pour r_j les contributions d'ordre 1 et d'ordre 2. A l'ordre 1, nous avons pris tous les termes de degré 3 plus ceux de degré 5 par rapport aux z_{oi} ; à l'ordre 2, on a seulement les termes de degré 3 (par rapport aux z_{oi} et ζ_{oi}). Dans ces tableaux, nous nous sommes limité aux termes d'amplitude supérieure à 1" (voir également la figure 6).

On constate que ces développements comportent aux ordres 1 et 2 un terme prépondérant sur tous les autres, associé à $g_1 = -84'',9833 \text{ an}^{-1}$ correspondant à la période de 15 250 ans c'est-à-dire plus de 17 fois la période associée à $2N_5 - 5N_6$. A cause de cette prépondérance, l'amplitude qui résulte de la somme de ces termes, est majorée par la somme des modules $\sum_j |r_j|$ et minorée par $|r_1| - \sum_{j \neq 1} |r_j|$. Ainsi, on trouve que dans la longitude moyenne de Jupiter, l'amplitude de la grande inégalité reste comprise entre 350" et 2100" environ, tandis que dans la longitude moyenne de Saturne, ces bornes valent respectivement 750" et 5200" environ. C'est dire que les valeurs actuelles sont tout à fait moyennes.

Remarquons que les λ_{oi} qui interviennent dans ces développements, sont essentiellement associés aux excentricités (λ_{oi} pour $i = 1$ à 4), ce qui montre encore une fois la prépondérance des termes en excentricité sur ceux en inclinaison.

Remarquons encore que les très longues périodes intervenant dans le développement de la grande inégalité, sont plus courtes dans l'ensemble que

celles associées aux λ_{oi} , ou que celles obtenues dans les solutions q_{oi} : ceci est essentiellement dû à ce que les entiers s_{ij} de la combinaison des λ_{oi} doivent avoir leur somme égale à 3 et que les plus gros termes des solutions z_{o5} et z_{o6} sont associés aux plus grands des λ_{oi} . Comme cette somme est encore égale à la caractéristique de l'inégalité il est sans doute possible qu'une inégalité de caractéristique suffisamment grande (c'est-à-dire à longue période pour qu'elle soit encore importante en pratique), puisse admettre un développement à très longues périodes, dont certaines, associées aux termes les plus importants, soient cependant plus courtes que la période de l'inégalité.

b) Développement en puissance de t de l'amplitude de la grande inégalité.

Nous donnons en bas des tableaux 20-a et 20-b les développements en puissances de t de $\sum_j 2r_j \cos(\Psi_j + g_j t)$ et de $\sum_j 2r_j \sin(\Psi_j + g_j t)$, valables au voisinage de $t = 0$, c'est-à-dire de 1950.0. Nous reproduisons également pour comparaison, les développements obtenus par Bretagnon (1978), en facteur de $\sin(2\lambda_5 - 5\lambda_6)$ et de $\cos(2\lambda_5 - 5\lambda_6)$; le temps y est exprimé en milliers d'années juliennes.

On constate que l'accord est moins bon que celui obtenu lors de la comparaison des variations séculaires des z_{oi} et ζ_{oi} avec les éléments moyens : d'abord, pour $t = 0$ on n'a pas l'égalité des résultats ; les différences s'expliquent essentiellement par l'absence chez nous de termes d'ordre 3 et plus, qui apportent, d'après Bretagnon, $-20'',727$ et $-7'',112$ pour Jupiter, et $51'',393$ et $17'',477$ pour Saturne, respectivement en facteur de $\sin(2\lambda_5 - 5\lambda_6)$ et de $\cos(2\lambda_5 - 5\lambda_6)$; les quelques secondes d'écart qui

Tableau 20-b

Développement à très longues périodes de la grande inégalité dans Δq_6

r_j	r_j	ψ_j	g_j
ordre 1 degrés 3 et 5	ordre 2 degré 3		
-1338",176	-112",644	155°,263	-84",9833 an ⁻¹
401,777	39,112	74,323	-60,9644
-175,565	-15,155	49,166	-109,0021
100,862	8,454	56,654	-86,1939
96,641	7,969	65,756	-83,7726
-21,199	1,275	157,755	24,1720
-20,242	-1,545	132,850	-110,2128
18,758	2,370	155,486	-62,1751
13,331	-4,814	172,837	-36,9455
10,985	0,843	124,152	-133,0210
-8,064	-0,616	138,910	-107,7914
-6,126	-0,501	104,062	-59,7537
4,219	4,310	92,715	-12,9267
3,478	0,380	76,225	48,1909
2,748		64,414	-84,2215
2,509		138,077	-87,4046
2,402		155,726	-82,5619
2,183		50,208	-35,7348
-1,847		29,779	-134,2317
1,775		13,517	-88,6178
-1,544		54,844	0,1531
1,494		108,854	-81,3487

Variations séculaires de $\sum_j 2 r_j \cos(\psi_j + g_j t)$:

ordre 1 : 2617",949 - 233",352 t - 200",869 t² + 12",361 t³ + 2",486 t⁴
ordres 1 et 2 : 2845",387 - 251",482 t - 217",906 t² + 13",392 t³ + 2",695 t⁴
Terme mixte de Bretagne : 2910",144 - 264",239 t - 225",089 t² + 16",488 t³ + 2",579 t⁴

Variations séculaires de $\sum_j 2 r_j \sin(\psi_j + g_j t)$:

ordre 1 : 266",497 + 1014",822 t - 69",925 t² - 25",991 t³ + 1",547 t⁴
ordres 1 et 2 : 276",682 + 1103",259 t - 75",361 t² - 28",189 t³ + 1",678 t⁴
Terme mixte de Bretagne : 289",546 + 1136",615 t - 85",526 t² - 28",828 t³ + 2",244 t⁴

manqueraient encore pourraient provenir des termes d'ordre 2 et de degré 5 que nous n'avons pas, et des incertitudes attachées à nos solutions à très longues périodes.

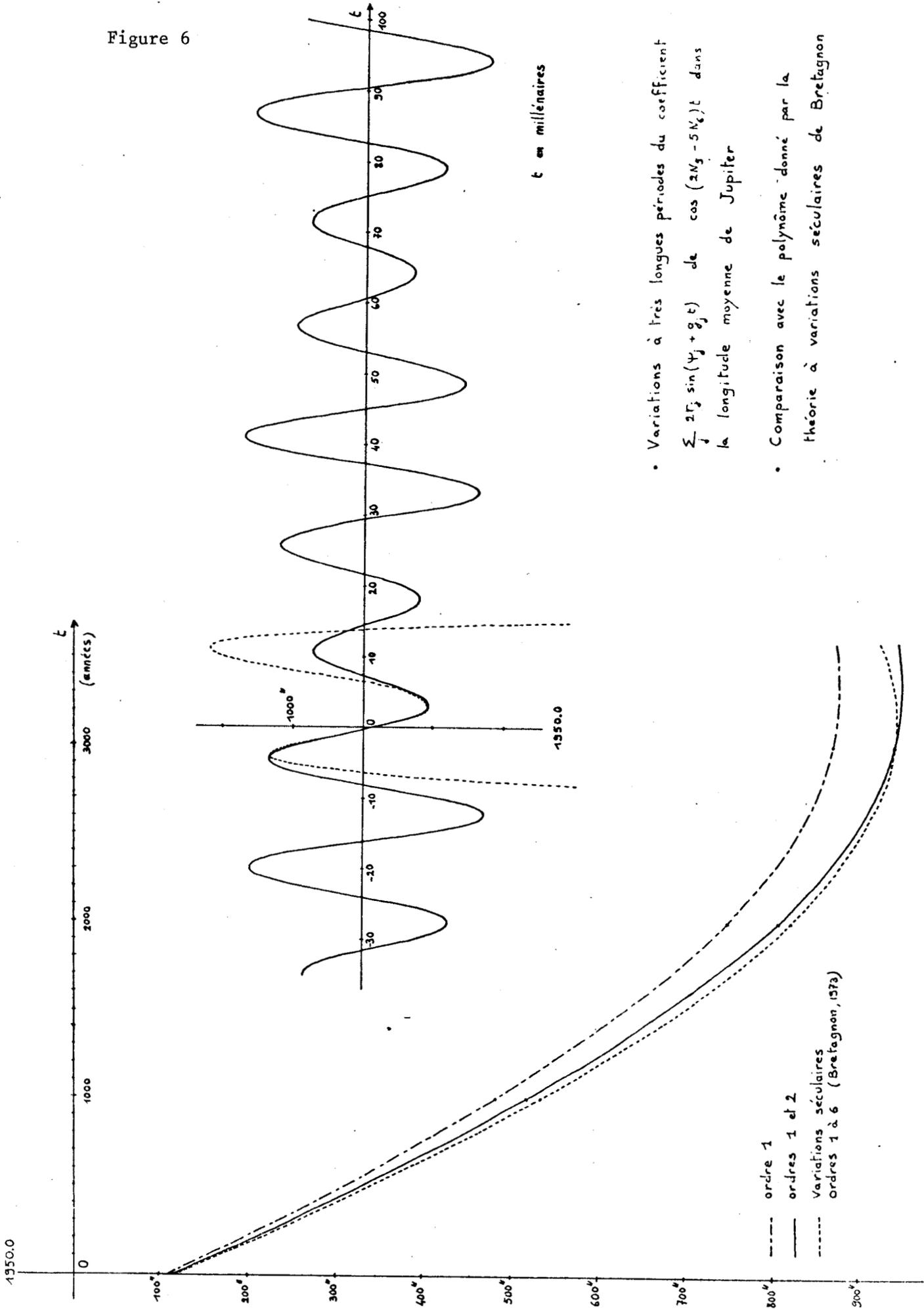
Ensuite, nos termes en t, t^2, \dots diffèrent de près de 10 % de ceux de Bretagnon en étant systématiquement plus faibles que les siens, alors que dans le cas des z_{oi} et ζ_{oi} , les différences n'excédaient pas quelques pour cent. Ces écarts proviennent sans doute également des termes manquants d'ordre 3 et plus.

Cependant, ces développements sont déjà fort comparables jusqu'aux termes en t^4 , bien que nous ayons seulement l'essentiel des ordres 1 et 2 ; il faut en effet bien voir que si la théorie classique avait elle aussi été limitée à l'ordre 2, ces développements seraient limités aux termes linéaires en t et seraient très loin de la solution obtenue à l'ordre 6 : d'après Bretagnon, ces développements seraient en effet égaux à :

pour Jupiter :	- 1062",301	- 99",459	+ 72",604	t
	- 106",520	- 4",012	- 334",734	t
pour Saturne :	2609",107	+ 249",644	- 178",325	t
	261",622	+ 10",441	+ 822",137	t
	ordre 1	ordre 2		

Ceci permet de penser que la théorie générale n'aurait pas besoin d'être poussée aussi loin en ordre de masse que la théorie classique pour atteindre la même précision, d'autant plus que la nécessité d'atteindre un ordre élevé dans les théories classiques est essentiellement le fait de quelques termes à longues périodes, comme la grande inégalité ou l'inégalité $N_7 - 2N_8$ d'Uranus-Neptune ; dans les théories classiques les développements

Figure 6



• Variations à très longues périodes du coefficient $\sum \downarrow 2\Gamma_j \sin(\psi_j + g_j t)$ de $\cos(2N_3 - 5N_6)t$ dans la longitude moyenne de Jupiter

• Comparaison avec le polynôme donné par la théorie à variations séculaires de Bretagnon

en termes mixtes des inégalités à courtes périodes, sont beaucoup plus vite convergents, pour une précision donnée, que ceux de la grande inégalité, et seraient obtenus avec la même précision par la théorie générale d'ordre 2.

Notons que pour la grande inégalité, la comparaison des développements en termes à très longues périodes, obtenus à l'ordre 1 et à l'ordre 2, montre que les premiers termes (rangés par amplitudes décroissantes) sont associés aux mêmes $(\Psi_j + g_j t)$ dans le même ordre ; par ailleurs le rapport entre deux de ces amplitudes de l'ordre 1 est sensiblement le même que son homologue à l'ordre 2, de sorte qu'en extrapolant, on pourrait éventuellement déterminer de combien il faudrait modifier ces amplitudes en respectant ces proportions, pour que le développement en puissances de t (pour les g_j fixés), coïncide au mieux avec celui obtenu par Bretagnon. On aurait ainsi pour la grande inégalité, une expression à très longues périodes probablement assez voisine de l'expression qui serait issue de l'ordre 3, sans avoir à calculer l'ordre 3 ; ceci permettrait sans doute d'étendre la durée de validité de l'expression de la grande inégalité dans la théorie classique (en développant par exemple ces nouveaux termes à très longues périodes en polynômes du temps, de façon à obtenir les termes en t^5 , t^6 , ... etc...).

CONCLUSION

=====

Les résultats pratiques que nous avons obtenus à partir de la méthode proposée dans cette théorie générale sont encore partiels puisqu'ils ne concernent que les 4 grosses planètes et que nous n'avons étudié en détails que quelques inégalités périodiques et l'inégalité séculaire. Leur comparaison avec les résultats de Bretagnon (1978), et l'analyse que nous en avons faite nous permettent cependant de croire en de réelles possibilités d'extension des théories classiques par les théories générales.

L'essentiel est d'obtenir d'abord la meilleure solution possible pour le système autonome. L'analyse que nous en avons faite montre la nécessité, pour les quatre grosses planètes, d'un développement à l'ordre 2 et au degré 5 au moins. Les comparaisons avec les éléments moyens obtenus par Bretagnon sur 1000 ans, ou avec l'intégration numérique sur 500 000 ans nous permettent de penser que les "valeurs propres" du système autonome sont connues avec une précision meilleure que $0'',1$ par an ; on peut alors situer les noeuds et les périhélies moyens à quelques dizaines de degrés près au bout d'un million d'années, et donner à moins de 10 % près la valeur moyenne des excentricités et des inclinaisons au bout du même laps de temps ; cela donne l'ordre de grandeur de la durée de validité de la théorie générale.

Pour améliorer ces précisions, il conviendrait d'étendre aux 8 planètes le système autonome d'ordre 1 et de considérer la partie du système autonome d'ordre 3 et de degré 1, au moins pour les planètes Jupiter et Saturne. Il faudrait alors prendre en compte aussi la 3ème approximation dans l'algorithme de résolution du système autonome relatif aux z_{oi} .

Le calcul des termes séculaires d'ordre 3 et de degré 1 n'est pas hors de portée des moyens actuels car il suffit pour cela d'avoir les termes périodiques dans les seconds membres des équations jusqu'au degré 3 (ordre 1), et les termes périodiques dans les solutions d'ordre 1 et 2 jusqu'au degré 1.

Il resterait encore à vérifier si les solutions du système autonome relatives aux planètes intérieures ne seront pas trop perturbées par les termes non linéaires du fait des excentricités importantes de Mars et de Mercure ; il faudrait voir également si les approximations successives utilisées pour obtenir ces solutions convergent aussi bien que pour les grosses planètes, car il se pourrait que certaines instabilités de la solution se manifestent du fait de valeurs propres presque égales.

Enfin, pour calculer l'ordre 2, il serait sans doute préférable de sélectionner les inégalités d'ordre 1 plutôt que les termes individuellement comme on l'indiquait en III.1.4.

Ces améliorations devraient sans doute permettre d'obtenir les valeurs propres à quelques millièmes de secondes par an près, (soit quelques degrés d'incertitude sur les noeuds et les périhélies au bout de 10 millions d'années). Notons que cette précision est tout juste significative vis à vis de la précision avec laquelle on connaît la masse des planètes, de sorte qu'une extension de la durée de validité exigera ensuite une amélioration de la valeur des masses.

Par ailleurs, sur de tels intervalles de temps, il serait sans doute nécessaire d'affiner le modèle choisi pour représenter le système planétaire, en prenant en compte par exemple les perturbations relativistes.

Une fois obtenue la meilleure solution possible pour le système autonome, l'extension des théories à variations séculaires concerne l'amélioration de la connaissance des termes mixtes. Il suffit en fait d'obtenir dans la théorie générale, le développement des inégalités périodiques, sous forme analytique

par rapport aux z_{oi} et ζ_{oi} , limité à un certain degré dépendant pour chaque inégalité de la précision souhaitée. On n'aurait d'ailleurs à calculer que des inégalités choisies en ne prenant que celles apparaissant comme les plus significatives dans les théories à variations séculaires.

Les possibilités que nous avons de construire et de manipuler les développements inégalité par inégalité, ou terme à terme seraient alors pleinement utilisées.

Notons enfin que la construction pratique d'une théorie générale aurait été impossible sans la connaissance des théories à variations séculaires ; ce sont ces dernières qui fournissent en effet la valeur des éléments moyens à l'instant initial ; le fait de disposer de ces valeurs, connues avec une bonne précision, était capital pour calculer la solution du système autonome. Ce sont aussi les théories à variations séculaires qui fournissent la valeur des moyens mouvements moyens, nécessaires pour développer les seconds membres des équations.

Il ne semble pas que les théories générales puissent dans un proche avenir, supplanter les théories à variations séculaires pour l'amélioration des constantes d'intégration et des masses, car en fait, il s'agit alors de faire des comparaisons à des observations, limitées à un intervalle de temps petit, c'est-à-dire, dans le domaine où les théories à variations séculaires sont les plus précises.

ANNEXE 1 : DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

On donne dans cette annexe, le détail des calculs permettant d'aboutir à la forme des développements qu'on a énoncée simplement dans le chapitre I.

I - Quelques développements utiles.

On connaît, pour le mouvement elliptique képlérien, les développements suivants du rayon vecteur en fonction de l'excentricité e et de l'anomalie moyenne M (voir Kovalevsky, 1963, p. 86) :

$$\frac{a}{r} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 J_k(ke) \cos k M$$

$$(A1) \quad \frac{r}{a} \cos v = -\frac{3e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke) \right] \cos k M$$

$$\frac{r}{a} \sin v = \sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[J_{k-1}(ke) + J_{k+1}(ke) \right] \sin k M$$

où v désigne l'anomalie vraie. Des 2 derniers développements, on déduit encore, en posant $\theta = \exp \sqrt{-1}(v-M)$:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} \theta &= -\frac{3e}{2} \exp -\sqrt{-1} M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{2} J_{k-1}(ke) - \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2} J_{k+1}(ke) \right] \exp \sqrt{-1}(k-1)M \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2} J_{k-1}(ke) - \frac{1+\sqrt{1-e^2}}{2} J_{k+1}(ke) \right] \exp \sqrt{-1}(k+1)M. \end{aligned}$$

Les propriétés des développements des fonctions de Bessel pour e petit, induisent pour ces séries la propriété suivante, dite de d'Alembert : le développement en puissances de e qu'on peut mettre en facteur de $\exp\sqrt{-1}(\pm kM)$ est de degré k au moins en excentricité, et a la même parité que k . Ceci permet d'exprimer autrement ces développements, sous forme de séries entières des variables X et \bar{X} (conjugué de X), définies par :

$$(A 2) \quad X = e \exp\sqrt{-1} M = e \exp \sqrt{-1}(\lambda - \varpi) = \bar{z} \exp \sqrt{-1} \lambda$$

On obtient alors, avec $e^2 = X\bar{X}$:

$$\frac{a}{r} = 1 + \frac{1}{2} X + \frac{1}{2} \bar{X} + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{2} \bar{X}^2 + \frac{9}{16} X^3 - \frac{1}{16} X^2 \bar{X} - \frac{1}{16} X \bar{X}^2 + \frac{9}{16} \bar{X}^3 + \dots$$

(A 3)

$$\frac{r}{a} \theta = 1 + \frac{1}{2} X - \frac{3}{2} \bar{X} + \frac{3}{8} X^2 - \frac{1}{2} X \bar{X} + \frac{1}{8} \bar{X}^2 + \frac{1}{3} X^3 - \frac{3}{8} X^2 \bar{X} + \dots$$

On peut ensuite avoir facilement, par multiplications polynomiales successives, les développements en X, \bar{X} des fonctions $\theta, \frac{a}{r} \theta$, et plus générale-

ment $\left(\frac{r}{a}\right)^n \theta^m$, ou de leurs conjuguées, sous la forme :

$$(A 4) \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \theta^m = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}} C_{k_1, k_2}^{n, m} X^{k_1} \bar{X}^{k_2} \quad (n \text{ et } m \in \mathbb{Z}).$$

En en prenant le conjugué, on obtient d'ailleurs : $C_{k_1 k_2}^{n, -m} = C_{k_2 k_1}^{n, m}$; ces coefficients sont rationnels.

On en déduit immédiatement les développements en z, \bar{z} :

$$(A 5) \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \theta^m = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}} C_{k_1, k_2}^{n, m} z^{-k_1} \bar{z}^{k_2} \exp\sqrt{-1}(k_1 - k_2)\lambda$$

On peut montrer que, considérés comme séries entières de e , les développements (A_1) ne convergent que pour $e < 0,6627\dots$ (cf. Tisserand, p. 262). Les séries entières en X, \bar{X} ont le même rayon de convergence, ainsi que toutes celles qui s'en déduisent par opérations algébriques, comme $(\frac{r}{a})^n \theta^m$.

2 - Développement de la partie képlérienne de la fonction perturbatrice.

En exprimant la constante de gravitation G au moyen de la 3ème loi

de Kepler, on met $\frac{Gm_i}{r_i}$ sous la forme :

$$\frac{m_i}{M_\odot} N_i^2 A_i^3 \frac{1}{a_i} \frac{a_i}{r_i}$$

d'où on déduit, d'après (A 5), et avec $\lambda_i = N_i t - \sqrt{-1} q_i$:

$$(A 6) \quad \frac{Gm_i}{r_i} = \frac{m_i}{M_\odot} N_i^2 A_i^2 \sum_{k_1, k_2} (1+p_i)^{2/3} C_{k_1, k_2}^{-1, 0} \frac{z_i^{k_1}}{z_i^{k_2}} \exp(k_1 - k_2) q_i \exp \sqrt{-1} (k_1 - k_2) N_i t$$

les variables p_i étant de l'ordre des masses (cf. IV.2.1) $(1+p_i)^{2/3}$ peut s'exprimer par le développement rapidement convergent : $1 + \frac{2}{3} p_i - \frac{1}{9} p_i^2 + \dots$

3 - Développement de la partie indirecte.

Dans ce paragraphe et le suivant, on reprend la méthode utilisée par Abu-el-Ata et Chapront (1975), légèrement modifiée pour permettre le développement par rapport aux variables p .

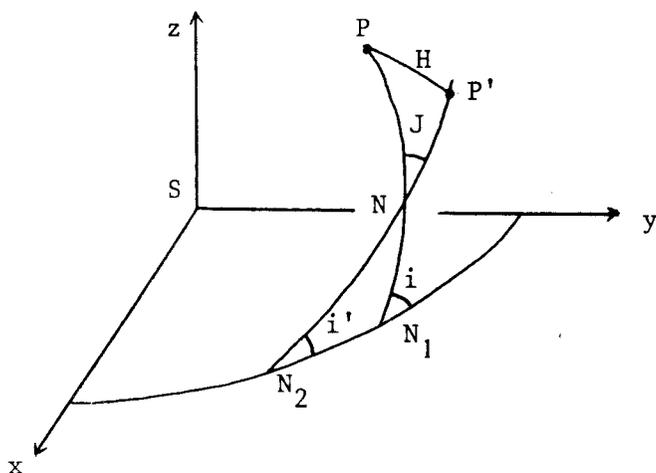
Ne considérons qu'un couple de planètes, notées P et P' , en abandonnant provisoirement les indices i et j , pour simplifier. En introduisant l'angle H entre leurs rayons vecteurs \vec{r} et \vec{r}' , on a d'abord pour la partie indirecte relative à P perturbée par P' :

$$Gm' \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} = Gm' \frac{r}{a} \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \frac{a}{a'^2} \cos H$$

puis, avec (A 4) :

$$(A 7) \quad Gm' \frac{r}{a} \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \frac{a}{a'^2} = \frac{m'}{M_\odot} N^2 A^2 \left(\frac{A}{A'}\right)^2 (1+p)^{-2/3} (1+p')^{4/3} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} C_{k_1, k_2}^{1,0} C_{k_3, k_4}^{-2,0} X^{k_1} \bar{X}^{k_2} X'^{k_3} \bar{X}'^{k_4}$$

Un calcul classique permet ensuite de calculer $\cos H$ en fonction de l'inclinaison mutuelle J des 2 plans d'orbite, des longitudes vraies w et w' , et des angles σ et σ' qui caractérisent la position du noeud N des 2 orbites. On a :



$$\begin{aligned} w &= \widehat{xN_1} + \widehat{N_1P} \\ w' &= \widehat{xN_2} + \widehat{N_2P'} \\ \sigma &= \widehat{xN_1} + \widehat{N_1N} \\ \sigma' &= \widehat{xN_2} + \widehat{N_2N} \end{aligned}$$

il vient : $\cos H = \cos(w - \sigma)\cos(w' - \sigma') + \sin(w - \sigma)\sin(w' - \sigma')\cos J$

puis : $\cos H = \cos^2 \frac{J}{2} \cos(w - w' - \sigma + \sigma') + \sin^2 \frac{J}{2} \cos(w + w' - \sigma - \sigma')$.

$$\text{En notant : } \mu = \cos \frac{J}{2} \exp \sqrt{-1} \frac{\sigma - \sigma'}{2}$$

$$v = \sin \frac{J}{2} \exp \sqrt{-1} \frac{\sigma + \sigma'}{2}$$

on obtient encore :

$$\cos H = \text{Re}(\mu^2 \exp \sqrt{-1}(w' - w) + v^2 \exp \sqrt{-1}(-w - w'))$$

puis, avec $w = v + \varpi = \lambda + v - M$, et $\theta = \exp \sqrt{-1}(v - M)$:

$$\cos H = \text{Re} \left[\bar{\theta} \theta' \mu^2 \exp \sqrt{-1}(\lambda' - \lambda) + \bar{\theta} \bar{\theta}' \nu^2 \exp \sqrt{-1}(-\lambda - \lambda') \right]$$

Comme μ est de degré 0 en inclinaison, on peut séparer dans $\cos H$ une partie de degré 0, en posant :

$$\begin{aligned} \mu^2 \exp \sqrt{-1}(\lambda' - \lambda) &= \exp \sqrt{-1}(\lambda' - \lambda) + G_1 \\ \nu^2 \exp \sqrt{-1}(-\lambda - \lambda') &= G_2 \end{aligned}$$

où G_1 et G_2 sont de degré 2 au moins en inclinaison ; on obtient ainsi :

$$(A8) \quad \cos H = \text{Re} \left[\bar{\theta} \theta' \exp \sqrt{-1}(\lambda' - \lambda) + \bar{\theta}(\theta' G_1 + \bar{\theta}' G_2) \right].$$

Les relations de Delambre dans le triangle $N N_1 N_2$ permettent ensuite d'exprimer G_1 et G_2 en fonction des variables ζ et ζ' , et des longitudes moyennes λ et λ' ; on obtient :

$$\begin{aligned} \sin \frac{J}{2} \cos \frac{\sigma + \sigma'}{2} &= \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} \cos \Omega - \cos \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \cos \Omega' \\ \sin \frac{J}{2} \sin \frac{\sigma + \sigma'}{2} &= \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} \sin \Omega - \cos \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \sin \Omega' \\ \cos \frac{J}{2} \cos \frac{\sigma - \sigma'}{2} &= \cos \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} + \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \cos (\Omega - \Omega') \\ \cos \frac{J}{2} \sin \frac{\sigma - \sigma'}{2} &= \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \sin (\Omega - \Omega') \end{aligned}$$

d'où on tire, en notant $\chi = \cos \frac{i}{2} = (1 - \zeta \bar{\zeta})^{1/2}$:

$$\mu = \chi \chi' + \zeta \bar{\zeta}'$$

$$\nu = \chi' \zeta - \chi \zeta'$$

puis :

$$G_1 = (-\zeta \bar{\zeta}' - \zeta' \bar{\zeta} + \zeta \bar{\zeta} \zeta' \bar{\zeta}' + \zeta^2 \bar{\zeta}'^2 + 2 \chi \chi' \zeta \bar{\zeta}') \exp \sqrt{-1}(\lambda' - \lambda)$$

$$G_2 = [(1 - \zeta' \bar{\zeta}') \zeta^2 + (1 - \zeta \bar{\zeta}) \zeta'^2 - 2 \chi \chi' \zeta \zeta'] \exp \sqrt{-1}(-\lambda - \lambda').$$

On peut enfin faire apparaître dans G_1 et G_2 uniquement la différence des longitudes moyennes, en posant :

$$(A9) \quad Y = \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1}(\lambda - \Omega) = \bar{\zeta} \exp \sqrt{-1} \lambda.$$

On obtient :

$$(A10) \quad \begin{aligned} G_1 &= (-Y\bar{Y} - Y'\bar{Y}' + Y\bar{Y} Y'\bar{Y}') \exp \sqrt{-1}(\lambda' - \lambda) + 2\chi\chi'\bar{Y}Y' + \bar{Y}^2 Y'^2 \exp \sqrt{-1}(\lambda - \lambda') \\ G_2 &= (1 - Y'\bar{Y}') \bar{Y}^2 \exp \sqrt{-1}(\lambda - \lambda') - 2\chi\chi'\bar{Y}Y' + (1 - Y\bar{Y}) \bar{Y}'^2 \exp \sqrt{-1}(\lambda' - \lambda) \end{aligned}$$

Dans ces expressions, χ et χ' se développent en :

$$\chi = (1 - Y\bar{Y})^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} Y\bar{Y} - \frac{1}{8} Y^2 \bar{Y}^2 - \dots$$

Il suffit alors de reporter ces développements de G_1 et de G_2 dans l'expression (A8) de $\cos H$, puis de former les produits $\frac{r}{a} \bar{\theta}$, $\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \theta'$ et leurs conjugués (qui résultent de la multiplication de $\cos H$ par l'expression (A7)), pour obtenir le développement de la partie indirecte :

$$(A11) \quad \begin{aligned} &\frac{m'}{M_o} N^2 A^2 \left(\frac{A}{A'}\right)^2 (1+p)^{-2/3} (1+p')^{4/3} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \right. \\ &C_{k_1 k_2}^{1, -1} \left[C_{k_3 k_4}^{-2, 1} (1 - Y\bar{Y} - Y'\bar{Y}' + Y\bar{Y} Y'\bar{Y}') + C_{k_3 k_4}^{-2, -1} (1 - Y\bar{Y}) \bar{Y}'^2 \right] \exp \sqrt{-1}(\lambda' - \lambda) \\ &+ (C_{k_3, k_4}^{-2, 1} \bar{Y}^2 Y'^2 + C_{k_3 k_4}^{-2, -1} (1 - Y'\bar{Y}') \bar{Y}^2) \exp \sqrt{-1}(\lambda - \lambda') \\ &\left. + 2(C_{k_3 k_4}^{-2, 1} \bar{Y}Y' \chi\chi' + C_{k_3 k_4}^{-2, -1} \bar{Y}\bar{Y}' \chi\chi') \right] X^{k_1} \bar{X}^{k_2} X'^{k_3} \bar{X}'^{k_4} \left. \right\} \end{aligned}$$

En revenant aux variables z et ζ , on obtient bien un développement sous la forme donnée au chapitre I en (1.22).

Remarque : En notant $\alpha = \frac{\min(A, A')}{\max(A, A')}$, on voit que la partie indirecte a en facteur α^2 ou α^{-2} suivant que la planète perturbante P' est plus loin ou plus proche du Soleil que P .

Si α est petit, l'effet de la partie indirecte peut alors être amplifié : l'accélération d'entraînement du Soleil due à une planète proche

de lui a des effets importants sur les éléments osculateurs héliocentriques des planètes lointaines mais ce ne sont que des effets purement cinématiques engendrés par le choix d'un repère héliocentrique.

4 - Développement de la partie directe.

En appelant Δ la distance PP' et en supposant $\rho = \frac{r}{r'}$ toujours inférieur à 1, ainsi que α égal à A/A' , on obtient :

$$\Delta^2 = r'^2(1 + \rho^2 - 2\rho \cos H) .$$

D'après l'expression (A8) de $\cos H$, on peut en déduire :

$$\frac{a'}{\Delta} = \frac{a'}{r'} D^{-1} (1 - \rho u D^{-2})^{-1/2} ,$$

où on a posé :

$$D^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos (w-w') \quad (\text{indépendant des inclinaisons})$$

$$u = 2 \operatorname{Re}(\bar{\theta} \theta' G_1 + \bar{\theta} \bar{\theta}' G_2) .$$

Comme G_1 et G_2 , u est ainsi de degré 2 au moins en inclinaisons. Dans le problème planétaire, $\rho u D^{-2}$ est toujours inférieur à 1 ; on peut alors développer :

$$(A12) \quad \frac{A'}{\Delta} = \frac{A'}{r'} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1/2)_k}{(1)_k} (\rho u)^k D^{-2k-1} .$$

On a posé : $(a)_0 = 1$ et $(a)_k = a(a+1)(a+2) \dots (a+k-1)$; en particulier, on a : $(1)_k = k!$.

Il reste ainsi à obtenir le développement des $(\rho u)^k$ et celui des D^{-2k-1} auquel on associera le facteur $\frac{A'}{r'}$. On a :

$$(A13) \quad \rho u = \frac{a}{a'} \frac{r}{a} \frac{a'}{r'} u = 2\alpha(1+p)^{-2/3} (1+p')^{2/3} \operatorname{Re} \left[\frac{r}{a} \bar{\theta} \left(\frac{a'}{r'} \theta' G_1 + \frac{a'}{r'} \bar{\theta}' G_2 \right) \right] .$$

On pourrait obtenir son développement sous une forme presque identique à l'expression (A11), en y supprimant le terme indépendant des inclinaisons et en y remplaçant $C_{k_3 k_4}^{-2, \pm 1}$ par $C_{k_3 k_4}^{-1, \pm 1}$. On en déduirait que $(\rho u)^k$ a la forme générale suivante :

$$(\rho u)^k = \alpha^k \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\ell, (n)} C_{\ell, (n)}^{(k)} p^{n_1} X^{n_2} \bar{X}^{n_3} Y^{n_4} \bar{Y}^{n_5} \right. \\ \left. \times p'^{n_6} X'^{n_7} \bar{X}'^{n_8} Y'^{n_9} \bar{Y}'^{n_{10}} \exp \sqrt{-1} \ell (\lambda - \lambda') \right\}$$

où $n_4 + n_5 + n_9 + n_{10}$ est pair et au moins égal à $2k$, et où ℓ est compris entre $-k$ et $+k$.

On développe ensuite D^{-s} par l'intermédiaire de coefficients de Laplace $b_{s/2}^{(j)}(\rho)$ définis par :

$$D^{-s} = (1 + \rho^2 - 2\rho \cos(w-w'))^{-s/2} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} b_{s/2}^{(j)}(\rho) \cos j(w-w') .$$

Avec $b_{s/2}^{(j)} = b_{s/2}^{(-j)}$, on peut écrire :

$$D^{-s} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_0^j}{2} b_{s/2}^{(j)}(\rho) \theta^j \bar{\theta}'^j \exp \sqrt{-1} j(\lambda - \lambda') \right\} ,$$

où δ_0^j est le symbole de Kronecker.

On peut montrer que les coefficients de Laplace ont pour expression (cf. Brouwer et Clemence p. 496) :

$$\frac{1}{2} b_{s/2}^{(j)}(\rho) = \frac{(s/2)_j}{(1)_j} \rho^j F\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} + j, j + 1; \rho^2\right) \quad (j \geq 0) ,$$

où F est la fonction hypergéométrique de ρ^2 définie par :

$$F(a, b, c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(1)_k} .$$

En remplaçant dans ce développement x^k par $(x+y)^k$, on obtient :

$$F(a, b, c; x + y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{y^m}{(1)_m} F(a + m, b + m, c + m; x)$$

Comme on peut écrire :

$$\rho^2 = \left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 (1+p)^{-4/3} (1+p')^{4/3} - 1 = \alpha^2 + \alpha^2 \beta$$

on pourra donc transformer les fonctions hypergéométriques de ρ^2 dans $b_{s/2}^{(j)}(\rho)$, en fonctions hypergéométriques de α^2 ; en développant encore ρ^j dans les coefficients de Laplace, on obtient :

$$D^{-s} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{s,m}^{(|j|)}(\alpha) \beta^m \left(\frac{r}{a} \frac{a'}{r'}\right)^{-2/3} (1+p)^{-2/3} (1+p')^{2/3} |j| \theta^j \bar{\theta}'^j \exp \sqrt{-1} j(\lambda-\lambda')$$

avec

$$\phi_{s,m}^{(j)}(\alpha) = \frac{\left(\frac{s}{2}\right)_j \left(\frac{s}{2}\right)_m \left(\frac{s}{2} + j\right)_m}{(1)_j (1)_m (1+j)_m} \alpha^{2m+j} F\left(\frac{s}{2} + m, \frac{s}{2} + m + j, 1 + j + m; \alpha^2\right).$$

Notons que dans ce développement de D^{-s} , β est une série entière des variables p, p', X, \bar{X}, X' et \bar{X}' commençant aux termes de degré 1 et de grade 1; si on veut limiter le développement de D^{-s} à un degré d donné par rapport à ces variables, il sera alors inutile de calculer β^m pour $m > d$.

Quant aux fonctions $\phi_{s,m}^{(j)}(\alpha)$, pour s, m et α fixés, elles décroissent lorsque j augmente, à partir d'un certain J qui est d'autant plus grand que α est voisin de 1; ces fonctions de α ont toutefois le mérite d'être calculables avec toute la précision souhaitée, quel que soit α inférieur à 1.

Si on développe β^m par la formule de binôme, on obtient finalement pour $\frac{A'}{r'} D^{-s}$:

$$(A15) \quad \frac{A'}{r'} D^{-s} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{s,m}^{(|j|)}(\alpha) \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \frac{\binom{m-k+1}{k}}{(1)_k} \\ \times (1+p)^{-\frac{2}{3}(2k+|j|)} (1+p')^{\frac{2}{3}(2k+|j|+1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k+|j|} \theta^j \left(\frac{a'}{r'}\right)^{2k+|j|+1} \bar{\theta}'^j \exp \sqrt{-1}(\lambda-\lambda')$$

Exprimé en fonction des variables X, \bar{X}, X' et \bar{X}' grâce à (A4), ce développement est de la forme :

$$(A16) \quad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{(n)_6} C_{j,(n)_6}^{(s)}(\alpha) p^{n_1} X^{n_2} \bar{X}^{n_3} p'^{n_4} X'^{n_5} \bar{X}'^{n_6} \exp \sqrt{-1} j(\lambda - \lambda')$$

Lorsqu'enfin on reporte les expressions A13 et A15 dans A12, on obtient l'expression suivante pour A'/Δ , limitée au degré δ_i par rapport aux inclinaisons, au degré δ_e par rapport aux excentricités, et au grade g :

$$(A17) \quad \frac{A'}{\Delta} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{E(\frac{\delta_i}{2})} \sum_{m=0}^{\delta_e + g} (-1)^k \frac{(-1/2)_k}{(1)_k} \alpha^k \phi_{-2k-1,m}(|j|, \alpha)$$

$$\times \left[\sum_{n=0}^m (-1)^{m-n} (1+p)^{-2/3(2n+|j|+k)} (1+p')^{2/3(2n+|j|+k+1)} \right.$$

$$\times \left. \left(\frac{r}{a} \right)^{2n+|j|+k} \theta^j \left(\frac{a'}{r'} \right)^{2n+|j|+k+1} \bar{\theta}, j \right]$$

$$\times \left[\bar{\theta}(\theta' G_1 + \bar{\theta}' G_2) + \theta(\bar{\theta}' \bar{G}_1 + \theta' \bar{G}_2) \right]^k \exp \sqrt{-1} j(\lambda - \lambda').$$

Quand on rétablit les indices i et j des 2 planètes, et qu'on effectue les produits des développements des fonctions à une variable (p ou p'), à 2 variables (X, \bar{X} ou X', \bar{X}'), et à 4 variables (Y, Y', \bar{Y}, \bar{Y}') présentes dans (A17), on obtient un résultat de la forme suivante :

$$(A18) \quad \frac{G_{m,j}}{\Delta_{ij}} = \frac{m_j}{M_\theta} N_i^2 A_i^2 \frac{A_i}{\max(A_i, A_j)} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \sum_{(n)_{10}} C_{\ell,(n)_{10}}^{(\alpha_{ij})}$$

$$\times p_i^{n_1} \bar{X}_i^{n_2} X_i^{n_3} \bar{Y}_i^{n_4} Y_i^{n_5} p_j^{n_6} \bar{X}_j^{n_7} X_j^{n_8} \bar{Y}_j^{n_9} Y_j^{n_{10}} \exp \sqrt{-1} \ell(\lambda_i - \lambda_j).$$

où $n_4 + n_5 + n_9 + n_{10}$ est un entier pair.

En remplaçant les variables X par $\bar{z} \exp \sqrt{-1} \lambda$, et Y par $\bar{\zeta} \exp \sqrt{-1} \lambda$, puis en exprimant λ sous forme de $Nt - \sqrt{-1} q$, on obtient finalement le développement (1.22), énoncé avec ses propriétés dans le chapitre I.

ANNEXE 2 : CONSTRUCTION DU DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE
ET DES SECONDS MEMBRES DES EQUATIONS.

Pour aborder l'étude de la théorie générale planétaire en variables elliptiques, nous avons d'abord utilisé le formulaire établi par J. Chapront, P. Bretagnon et M. Mehl (1975), dans lequel les dérivations partielles de la fonction perturbatrice dans les équations de Lagrange, sont déjà effectuées. L'algorithme qu'on a élaboré avec ce formulaire, constitue une partie de l'article 1 joint à cette annexe.

Ce formulaire (eq. (10) à (13) de cet article), compact, s'était révélé très commode à utiliser dans la méthode itérative développée par P. Bretagnon, et on pensait alors, qu'il conviendrait également à la théorie générale. Avec ce formulaire, on est amené à développer $1/\Delta^3$, et d'autres fonctions plus au moins compliquées venant en facteur en $1/\Delta^3$. On s'aperçut plus tard que le formulaire des équations de Lagrange donné au chapitre I (en (1.17) à (1.10)) devait être plus commode à utiliser dans la théorie générale, sans qu'on ait rien à changer ou presque, à l'algorithme de calcul du $1/\Delta^3$, qui se transpose très facilement au calcul de $1/\Delta^n$ quel que soit $n > 0$.

L'algorithme utilisé pour construire $1/\Delta$ est donc exactement celui décrit pour $1/\Delta^3$ dans l'article 1 aux paragraphes 4a et 4b, à cela près qu'on change les fonctions $\phi_{3,m}^{(j)}(\alpha)$ en $\phi_{1,m}^{(j)}(\alpha)$ et qu'on a en facteur $\frac{a'}{r'}$ à la place de $(\frac{a'}{r'})^3$. On peut le résumer ici en disant qu'on tabule préalablement les fonctions $\phi_{s,m}^{(j)}(\alpha)$ pour tous les indices utiles (voir A17, en y bornant $|j|$ par J_M), et pour tous les α relatifs aux différents couples de planètes ; on tabule également les développements des fonctions à une, deux ou 4 variables :

$$(1+p)^{-2k/3}, \left(\frac{r}{a}\right)^n \theta^m, G_1, G_2, \bar{G}_1, \bar{G}_2$$

et leurs produits, pour tous les exposants utiles pour atteindre un degré et un grade fixés (pour k et n négatifs ces développements sont à associer aux variables p' et X', \bar{X}'). Alors, pour obtenir directement un coefficient $C_{\ell, (n)_{10}}(\alpha)$ du développement A18, caractérisé par la donnée d'une valeur de α et d'une suite des 11 entiers $\ell, n_1, n_2, \dots, n_{10}$ (comprise dans les limites des tableaux précédents), on recherche, dans ces tableaux, les fonctions de α et les coefficients des monômes à une, deux et quatre variables qui constituent le monôme $(n)_{10}$, de façon à reconstituer ce coefficient $C_{\ell, (n)_{10}}(\alpha)$, conformément à l'expression A17. On construit de la même façon le coefficient du même monôme dans les parties indirectes, en utilisant les mêmes tableaux.

Pouvant ainsi calculer isolément chaque coefficient du développement de la fonction perturbatrice R_{ij} (de la planète P_i perturbée par P_j), on calcule tout aussi facilement chaque coefficient du développement des dérivées partielles de R_{ij} : En appelant $T_{ij}(\ell, n_1, n_2, \dots, n_{10})$ un coefficient de R_{ij} , et $(F_{ij})(\ell, n_1, n_2, \dots, n_{10})$ celui d'une fonction F_{ij} de R_{ij} , telle qu'on en trouve dans les équations (1.17) à (1.20), on a les relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial R_{ij}}{\partial q_i}\right)(\ell, n_1, n_2, \dots, n_{10}) = (n_3 - n_2 + n_5 - n_4 + \ell) T_{ij}(\ell, n_1, n_2, \dots, n_{10})$$

$$\left(\frac{\partial R_{ij}}{\partial p_i}\right)(\ell, n_1, n_2, \dots, n_{10}) = (n_1 + 1) T_{ij}(\ell, n_1 + 1, n_2, \dots, n_{10})$$

$$\left(\frac{\partial R_{ij}}{\partial z_i}\right)(\ell, n_1, n_2, \dots, n_{10}) = (n_2 + 1) T_{ij}(\ell, n_1, n_2 + 1, n_3, \dots, n_{10})$$

$$\left(z_i \frac{\partial R_{ij}}{\partial z_i} + \bar{z}_i \frac{\partial R_{ij}}{\partial \bar{z}_i}\right)(\ell, n_1, n_2, \dots, n_{10}) = (n_2 + n_3) T_{ij}(\ell, n_1, n_2, n_3, \dots, n_{10})$$

$$\left(z_i \frac{\partial R_{ij}}{\partial q_i}\right)(\ell, n_1, n_2, \dots, n_{10}) = (n_3 - n_2 + n_5 - n_4 + \ell) T_{ij}(\ell, n_1, n_2 - 1, n_3, \dots, n_{10})$$

pour pouvoir atteindre le degré 7 dans ces équations ; avec ces tableaux on pourra alors atteindre des termes de degré 8 dans les deux autres équations

$$\frac{dp}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dq}{dt} .$$

et d'autres expressions qu'on établirait aisément pour les dérivées par rapport aux ζ_i ou par rapport aux variables d'indice j . Quand enfin, on cherche par exemple le coefficient d'un terme de $(2\psi (1+p_i)^{1/3} \frac{\partial R_{ij}}{\partial \bar{z}_i}) (\ell, n_1, n_2, \dots, n_{10})$ on opère ainsi : ayant développé 2ψ (de la forme $a_0 + a_1 \bar{z}z + a_2 \bar{z}^2 z^2 + \dots$) et $(1+p)^{1/3}$ (de la forme $b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots$), on calcule la somme suivante :

$$\sum_{k,h} a_k b_h (n_3+1) T_{ij}(\ell, n_1^{-h}, n_2^{-k}, n_3^{+1-k}, n_4, \dots, n_{10})$$

pour tous les k et h tels que n_1^{-h} , n_2^{-k} et n_3^{+1-k} soient tous positifs ou nuls.

Ce schéma constitue une simplification très importante par rapport à l'algorithme décrit, dans l'article 1, pour le second membre des équations ; il permet notamment de n'avoir plus à considérer l'ensemble $T'_{(X,X')}$ des fonctions venant en facteur de $1/\Delta^3$ dans ces seconds membres, et il est alors possible de conserver intégralement l'ensemble noté $P(\omega, J_M)$ dans cet article, (qui a été étendu à $\omega = \delta_e + g = 9$ et à $J_M = 15$, totalisant 16 906 coefficients). Ceci supprime du même coup la reconstitution du coefficient d'un monôme en X, \bar{X} ou en X', \bar{X}' qu'on devait effectuer à partir des éléments de $P'_{X,X'}$ et $T'_{X,X'}$, et réduit encore d'un facteur 2 en moyenne les durées des calculs précisées dans la partie 5 de cet article. Ces durées ont encore été réduites d'un facteur voisin de 2 lors du récent changement d'ordinateur (IRIS 80 à la place du 10 070).

Remarque : A cause des dérivations partielles par rapport à z ou à ζ , pour atteindre des termes de degré d dans les équations $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$, il faut pouvoir calculer des termes de degré $d + 1$ dans le développement de la fonction perturbatrice. Il faut donc que les tableaux des développements des fonctions $\left(\frac{r}{a}\right)^n \theta^m$ soient construits avec $\omega = 8$

Annexe 2 (suite)

Théorie Générale Planétaire en Variables Elliptiques

I. Développement des Equations

L. Duriez

Laboratoire d'Astronomie, 1 Impasse de l'Observatoire, F-59000 Lille, France
 Université des Sciences et Techniques de Lille

Reçu le mai 6, 1976

General Planetary Theory in Elliptic Variables

I. Expansion of the Equations

Summary. We intend to construct a general planetary theory, without secular terms, analogous to Brumberg's (1970), but using variables of keplerian nature from the beginning of the theory. This choice of variables facilitates the connection of this theory to the classical ones (like Le Verrier's) which are being studied by the researchers of the Bureau des Longitudes (Bretagnon, et al.) in order to improve their validity period and their precision. We hope to contribute to these aims by determining the analytic expression of long and very long-period terms up to high orders with respect to the masses, and by taking into account their mutual influence. Then we may analyse the mechanism by which these terms occur to form the secular and mixed terms in classical theories, hoping either to improve them or to replace them.

We looked for a method allowing to obtain these long and very long-period terms up to high orders in the masses directly, such a method does not need to compute the complete set of lower order terms. Indeed, in the general theory, this set would be composed of a very large number of terms. It is not necessary to compute them because they are essentially short-period terms already well known by classical theory; besides, these terms may be mostly neglected. That is why we propose to expand the equations in elliptic variables by a computer-adapted method capable of furnishing any term of these expansions independently of all other terms. We especially studied this method in order to reduce the number of operations as much as possible; so we minimized the computing time for each term. Optimized computations are fundamental in planetary theory because any increasing precision requires a much increased number of calculated terms. Moreover, the proposed method provides the best precision for each term independently of α (ratio of the semi-major axes of interacting planets).

In this paper, we present this method followed by some applications showing how the expansions behave with respect to the parameters. The principal application of the method is the construction of a general theory; it is now being worked out and will be published in the future.

Parameters, Equations, Expansions. To reduce the number of terms in the expansions and to provide the best precision, we expanded the equations by calculating them for fixed values A of the semi-major axes a . These values A were calculated with the relation (15) using known values of the masses m and of the mean motions N . However, in order to preserve the variability of the semi-major axes, we introduce the real variable p , defined in (14) or (16). In the mean longitude λ , we separated the linear part: $L = Nt + L_0$, from the remaining part representable by the pure imaginary variable q [relation (17)]. The variables p and q are of the same order as the disturbing masses and can be expressed by quasi-periodic functions of time. Finally, we used the complex variables x and y , and their conjugated quantities \bar{x} and \bar{y} [defined in (18)]. These variables are of the same order as the eccentricities and inclinations. The variables X and Y defined in (3) were used as efficient intermediary variables in the expansions.

To simplify the notations, in this paper we only consider two planets P and P' (P' is the outer one), and we affect a prime to all symbols concerning P' . We start with the Equations (10) to (13) expressed in osculating heliocentric elements. From them we derive the Equations (20) to (23) expressed in the new variables. The development of these equations is of the form (24) as a function of $\lambda - \lambda'$ or (25) as a function of $L - L'$.

We obtain this expansion by writing the equations in the form (27) to (30) and by considering them as made of a sum of standard expressions such as (56) or (57): In (57), we show the quantity $D_3 = \left(\frac{a'}{PP'}\right)^3$ in factor of developable functions of only one variable (p in $P_{\alpha 1}$ and p' in $P'_{\alpha 2}$), of two variables (X, \bar{X} in $X_{\beta 1}$ and $X_{\beta 2}$, and X', \bar{X}' in $X'_{\gamma 1}$ and $X'_{\gamma 2}$) and of four variables (Y, \bar{Y}, Y', \bar{Y}'

in Y_x and \tilde{Y}_x). The expansion of D_3 depends itself on these ten variables and is of the form (24). We adopted a development in Laplace's coefficients, to make as precise as we wish the calculation of each term for all

values of $\alpha_0 = \frac{A}{A'}$ [relations (44) to (49)]; In this development, we display the coefficients $\phi_{s,m}^{(j)}$ depending on α_0 , in factor of other functions of one, two and four variables (with the same grouping). All these functions are developed up to the degree ω ($=5$ in the present application) and are assembled in the set \mathcal{P}^* which has to be calculated only once. On the contrary, the set Φ of the coefficients $\phi(\alpha_0)$ is particular for each pair of planets.

Then the calculation of the coefficients $C_{j,d_{10}}$ of any term in the form of (24), of the expansion of (57) satisfies the following principles: $C_{j,d_{10}}$ results of a linear combination of coefficients $\phi(\alpha_0)$ (present in D_3) with numbers obtained by calculating the product of the respective coefficients of p^{n_1} , p'^{n_2} , X^{n_3} , \tilde{X}^{n_4} , X'^{n_5} , \tilde{X}'^{n_6} , Y^{n_7} , \tilde{Y}^{n_8} , Y'^{n_9} , $\tilde{Y}'^{n_{10}}$ in the expansions of the functions of one, two and four variables found in factor of σ^j in developed expression of (57), [in (57) we replace D_3 by expressions of the form (51) and (53)]. Then the algorithm which describes this linear combination, consists essentially in addressing some elements of the sets \mathcal{P}^* and Φ , and in combining them in order to reconstruct each term in an optimal way. We especially indicate how to reduce the size of the set \mathcal{P}^* (tables 1 to 4).

Applications. The algorithm had been designed mostly to optimize the computer time. Tables 7 and 8 show that we obtain any term of the equations in a few milliseconds.

The development and the verification of the program has needed the comparison with the results of other works, particularly those of Chapront et al. (1975) and those of Brumberg (1970). The example given in Table 9 allows to judge the convergence of expansions. It also allows to compare the number of calculated terms with the number of terms that may not be neglected. Moreover, Table 11 better shows the very few number of terms that may not be neglected in analytic expansions of planetary theory.

To avoid superfluous calculations, we propose to determine a priori the higher value of any term by using graphs like those presented in Figure 1: in these, we show the largest term (in absolute value) of the set of terms which are of the same degree with respect to the 12 variables, in the development of the equation dp/dt , as a function of α_0 , of the degree of these terms and as a function of j (in σ^j).

We conclude by an illustration of the future application of this method: to determine the development of long-period terms up to high orders in the masses without having to compute all the terms of lower orders.

Key words: planetary theory — literal development — algebraic manipulations

1. Introduction

Un certain nombre de travaux sont actuellement en cours d'élaboration au Bureau des Longitudes pour améliorer la théorie de Le Verrier, dans le but de construire des éphémérides de haute précision valables sur un long intervalle de temps (Chapront, 1970; Simon et Chapront, 1974; Simon et Bretagnon, 1975). Ces travaux montrent qu'on arrive à représenter les mouvements planétaires avec une très bonne précision (par exemple 0,01) sur des intervalles de temps réduits (quelques décennies), pour atteindre une précision inférieure à la seconde sur 1000 ans; cette représentation se dégrade encore avec le temps pour finalement convenir difficilement sur des intervalles de temps de plusieurs milliers d'années. Ceci est dû à la méthode d'intégration des équations, qui fournit en fait le développement de Taylor tronqué de la solution générale au voisinage d'un instant initial. L'expression des éléments d'orbite chargés de représenter ces mouvements, contient alors des termes séculaires (en t, t^2, \dots) et des termes mixtes [en $t \sin(\omega t + \phi), t^2 \sin(\omega t + \phi), \dots$] non bornés en t .

Au niveau de la théorie, les termes séculaires ou mixtes sont des développements limités au voisinage de l'instant initial, de termes à *très longues périodes* (10^4 à 10^6 ans) qu'on sait construire en première approximation par la méthode de Laplace-Lagrange en linéarisant, par rapport aux excentricités et inclinaisons, la partie constante des équations au 1^{er} ordre des masses. Bretagnon (1974) a d'ailleurs montré la nécessité d'étendre cette méthode en tenant compte des termes non linéaires de cette partie constante, et des termes périodiques du 1^{er} ordre des masses qui engendrent des termes à très longues périodes au 2^e ordre des masses.

On peut juger de l'importance de ces termes en comparant la théorie à l'intégration numérique; les écarts trouvés sur un intervalle de temps de l'ordre de mille ans peuvent dans leur ensemble être représentés par des termes séculaires qui manifestent l'insuffisance du développement limité des termes à très longues périodes, et aussi celle de la théorie en ce qui concerne certains termes de *petit diviseur*. Ces derniers sont des termes à *longues périodes* (10^2 à 10^4 ans) encore mal connus: il faudrait sans doute développer leur expression jusqu'à l'ordre 3, et peut-être 4 par rapport aux masses. La difficulté essentielle de leur détermination provient du volume considérable des calculs: en effet, pour calculer un terme d'ordre donné n par rapport aux masses, on a besoin de tous les termes d'ordre $(n-1)$ qui engendrent ce terme par substitution dans les équations de départ: dans le cas d'un terme à longue période, les termes d'ordre inférieur qui l'engendrent peuvent être négligeables, mais doivent cependant être conservés dans les développements, car le terme de petit diviseur engendré, amplifié par intégration, peut ne pas être négligeable.

L'amélioration de la durée de validité des théories planétaires exige ainsi une recherche plus complète des

termes à longues et très longues périodes, et pour y arriver, la théorie doit être mise en oeuvre par des techniques permettant d'atteindre assez facilement ces termes à un ordre élevé par rapport aux masses. Par ailleurs l'influence des termes à longues périodes sur les termes à très longues périodes est encore mal connue, mais ne semble pas négligeable. Il faut donc une théorie qui puisse aussi la mettre en évidence.

La théorie générale planétaire exposée par Brumberg (1970) est de nature à résoudre ces problèmes, car elle donne, ensemble et avec leur interaction, les termes à courtes périodes, à longues périodes et à très longues périodes sans introduire de termes séculaires ou mixtes, et ceci ordre par ordre par rapport aux masses. Brumberg et Chapront (1973) ont exprimé la solution de cette théorie au 1^{er} ordre des masses, puis Brumberg (1975) a pu exprimer les termes à très longues périodes analogues à ceux obtenus par Bretagnon, sous forme de polynômes d'approximation en t . Entre temps, Brumberg (1974) proposait aussi une version itérative de sa théorie, dans laquelle la distinction entre les différents ordres des masses s'estompe, les itérations étant conduites pour chaque terme de la solution en fonction de son ordre de grandeur et de la précision souhaitée. C'est encore cette méthode qu'utilise Sagnier (1973) pour l'étude du mouvement des satellites galiléens de Jupiter.

Nous proposons une approche analogue à celle de Brumberg, mais utilisant dès le départ des variables de nature képlérienne pour permettre un raccordement aisé avec la théorie classique de Simon et de Bretagnon; ce système de variables est également très voisin de celui utilisé par Sagnier. Nous avons en effet montré (Duriez, 1975) qu'avec un système de variables issu des éléments elliptiques osculateurs et qu'on précisera plus loin, on arrive à mettre les équations du mouvement sous une forme générale identique à celle obtenue par Brumberg, mis à part les termes d'ordre 0 par rapport aux masses présents chez Brumberg et absents de nos équations. La même méthode d'intégration (simplifiée pour l'ordre 0 des masses) s'applique donc à nos équations et permet d'obtenir une solution générale analytique en variables elliptiques. Avec ces variables, les termes à courtes périodes de cette solution sont identiques à ceux des théories classiques; compte tenu de la bonne connaissance que nous en avons déjà, il suffit alors que nous nous intéressions plus spécialement aux termes réputés critiques de ces théories classiques, c'est-à-dire aux termes à longues et très longues périodes, insuffisamment connus à un ordre élevé des masses.

Afin de pouvoir réaliser avec souplesse la recherche et le calcul de ces termes «critiques», nous avons mis au point une méthode adaptée au calcul sur ordinateur, qui permet d'effectuer le développement analytique des équations de Lagrange par rapport à tous les éléments elliptiques; son originalité est de permettre le calcul très rapide d'un terme quelconque de ces développements indépendamment de tous les autres termes.

Pour cela, nous considérons les demi-grands axes comme restant voisins de valeurs numériques fixées pour chaque planète; la perte de généralité qui en résulte pour les développements, est compensée par la possibilité qu'on a de calculer chaque terme avec toute la précision souhaitée.

Cette démarche est à opposer à celle utilisée par Chapront (1970) puis par Simon et Chapront (1974), à partir du formulaire de Brumberg (1967): leurs développements sont complètement analytiques (même par rapport aux demi-grands axes), avec l'avantage de convenir à toutes les planètes, mais le nombre des termes conservés est forcément énorme, et est encore insuffisant pour assurer toute la précision souhaitée dans le cas où le rapport des demi-grands axes est voisin de l'unité.

Nous avons décidé d'exposer en détail la méthode que nous avons mis au point, car la construction effective d'une théorie planétaire dépend beaucoup de l'efficacité des techniques employées pour calculer et manipuler les développements analytiques: nous nous sommes notamment efforcé de minimiser le nombre d'opérations nécessaires au calcul de chaque terme; cette optimisation réside dans un compromis entre ce qui peut être calculé d'avance, une fois pour toutes, et ce qui reste à calculer pour obtenir chaque terme; c'est aussi un compromis entre l'encombrement du programme de calcul et le temps nécessaire à ce calcul.

A la suite de l'exposé de cette technique, on trouvera quelques indications sur son application et notamment une étude du comportement des développements suivant le degré de leurs termes, ce qui permettra de juger de la façon dont ils convergent. Quant à l'intégration de ces équations par la méthode de Brumberg, en cours d'élaboration, elle fera l'objet d'une publication ultérieure.

2. Paramètres et équations du mouvement

Soient k la constante de gravitation, $m_0 = 1$ la masse du Soleil et m la masse d'une planète P du système solaire. Les éléments osculateurs héliocentriques de son orbite seront notés:

- a demi-grand axe
- e excentricité
- i inclinaison
- Ω longitude du noeud ascendant
- $\tilde{\omega}$ longitude du périhélie
- ε longitude moyenne à l'instant initial.

Les quatre derniers éléments sont rapportés à un repère héliocentrique de direction fixe. De ces éléments on tire encore:

$$\begin{aligned} \text{le moyen mouvement:} & \quad n = (k(1+m)a^{-3})^{1/2} \\ \text{la longitude moyenne à l'instant } t: & \quad \lambda = nt + \varepsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

On évite l'indétermination de $\tilde{\omega}$ et de Ω lorsque les valeurs de e et i s'annulent en utilisant les variables de Lagrange z et ζ représentatives du péricentre et du pôle de l'orbite:

$$\begin{aligned} z &= e \exp \sqrt{-1} \tilde{\omega} \\ \zeta &= \sin(i/2) \exp \sqrt{-1} \Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Leurs quantités conjuguées seront notées \bar{z} et $\bar{\zeta}$. On utilise aussi les deux variables X et Y qui s'en déduisent:

$$\begin{aligned} X &= e \exp \sqrt{-1} (\lambda - \tilde{\omega}) = \bar{z} \exp \sqrt{-1} \lambda = e \exp \sqrt{-1} M \\ Y &= \sin(i/2) \exp \sqrt{-1} (\lambda - \Omega) = \bar{\zeta} \exp \sqrt{-1} \lambda \end{aligned} \quad (3)$$

où M est l'anomalie moyenne.

Si on pouvait considérer que la planète P était seule avec le Soleil, λ serait fonction linéaire du temps, et tous les autres éléments seraient constants. En réalité la présence des autres planètes se manifeste sur le mouvement de P , et peut s'exprimer en termes de perturbation des éléments définis ci-dessus. Leur variation s'obtient par les équations de Lagrange, qu'on sait exprimer en fonction de ces éléments eux-mêmes; Chapront et al. (1975) en ont donné une formulation qui nous servira de point de départ; son avantage est d'y trouver les dérivées partielles de la fonction perturbatrice directement explicitées en fonction des éléments d'orbite:

Notant avec ces auteurs, par r le rayon vecteur et par v l'anomalie vraie de la planète P , on définit les quantités suivantes:

$$\begin{aligned} \theta &= \exp \sqrt{-1} (v - M), \text{ fonction de l'équation du centre} \\ \tau &= \exp \sqrt{-1} (v + \tilde{\omega}) = \theta \exp \sqrt{-1} \lambda \\ \varrho &= r\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

On pose aussi:

$$\phi = \sqrt{1 - e^2}; \quad \psi = 1/(1 + \phi); \quad \chi = \cos(i/2). \quad (5)$$

Puis, en accentuant les symboles relatifs à une autre planète P' , soit Δ la distance PP' :

$$\Delta = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\tilde{r}, \tilde{r}'))^{1/2}. \quad (6)$$

En posant ensuite:

$$\begin{aligned} \mu &= \chi\chi' + \zeta\bar{\zeta}' \\ v &= \chi'\zeta - \chi\zeta' \\ \pi &= \mu^2\varrho' + v^2\bar{\varrho}' \end{aligned} \quad (7)$$

on peut montrer que $|v| = \sin(J/2)$ et $|\mu| = \cos(J/2)$, où J est l'inclinaison mutuelle des deux plans d'orbite, et que Δ prend la forme suivante:

$$\Delta = (r^2 + r'^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{\varrho}\pi))^{1/2}. \quad (8)$$

En posant enfin:

$$\mathbf{R}_1 = -1/\Delta^3 \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_2 = 1/\Delta^3 - 1/r'^3 \quad (9)$$

les équations de Lagrange relatives à la planète P perturbée par P' s'expriment ainsi:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2nam'}{1+m} \frac{1}{\phi} (\operatorname{Im}(\bar{z}(\varrho\mathbf{R}_1 + \pi\mathbf{R}_2)) + \operatorname{Im}(\bar{\tau}\pi)\mathbf{R}_2) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} - n &= \frac{nam'}{1+m} \left(-\operatorname{Re}((2\bar{\varrho} + a\phi\psi\bar{z})(\varrho\mathbf{R}_1 + \pi\mathbf{R}_2)) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\psi}{\phi} \operatorname{Im}(\bar{z}\varrho) \operatorname{Im}(\bar{\tau}\pi) + \frac{2}{\phi\psi\chi} \operatorname{Im}(\bar{\zeta}\varrho) \operatorname{Im}(\bar{\mu}v\bar{\varrho}') \right\} \mathbf{R}_2 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{nam'}{1+m} \left(-\sqrt{-1} a\phi(\varrho\mathbf{R}_1 + \pi\mathbf{R}_2) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{\phi} (zr + \varrho) \operatorname{Im}(\bar{\tau}\pi) + \sqrt{-1} \frac{2z}{\phi\psi\chi} \operatorname{Im}(\bar{\zeta}\varrho) \operatorname{Im}(\bar{\mu}v\bar{\varrho}') \right\} \mathbf{R}_2 \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{nam'}{1+m} \left[\frac{1}{\phi\psi} (\varrho - \zeta \operatorname{Re}(\bar{\zeta}\varrho) \operatorname{Im}(\bar{\mu}v\bar{\varrho}')) \right] \mathbf{R}_2. \quad (13)$$

Les équations relatives à la planète P' perturbée par P s'en déduisent en inversant l'accentuation de tous les symboles. Dans le cas de \mathcal{N} planètes en interaction, les seconds membres des quatre équations relatives à chaque planète sont la somme de $\mathcal{N} - 1$ expressions analogues, relatives chacune à un couple {planète perturbée - planète perturbante}.

A cause de leur complexité, on ne peut trouver de solution analytique à ces équations qu'en développant en série leurs seconds membres, de manière à obtenir une somme de fonctions plus simples, qu'on saura alors intégrer. Nous verrons que ces développements peuvent se présenter sous la forme de séries de Fourier de la variable $(\lambda - \lambda')$, avec des coefficients fonction des variables X , X' , Y et Y' , et dépendant des demi-grands axes a et a' par l'intermédiaire de leur rapport $\alpha = \frac{\min(a, a')}{\max(a, a')}$.

Les excentricités et les inclinaisons mutuelles sont ici suffisamment faibles pour justifier le développement de ces coefficients suivant les puissances croissantes des X et des Y . Par ailleurs, ces coefficients s'expriment sous forme de séries entières en α ; or, celui-ci peut être voisin de 1 (comme par exemple pour le couple Vénus-Terre avec $\alpha = 0,72$), et dans ce cas, les séries en α convergent très lentement, ce qui obligerait dans une théorie complètement analytique, à conserver un nombre de termes prohibitif. On évite cet inconvénient, tout en diminuant la généralité des développements, en imposant à α de rester au voisinage d'une valeur numérique α_0 avec laquelle on calcule la valeur de ces séries; pour cela on pose:

$$a = A(1 + p)^{-2/3} \quad (14)$$

où A est une constante numérique choisie pour chaque planète en sorte que p soit une fonction du temps restant petite.

Cette nouvelle variable p reste du même ordre de grandeur que les perturbations relatives du demi-grand axe, c'est à dire encore du même ordre que les masses perturbatrices, si la valeur de A est bien choisie. Les séries en α qu'on vient de considérer sont alors calculées

pour la valeur: $\alpha_0 = \frac{\min(A, A')}{\max(A, A')}$, et sont développées suivant les puissances croissantes de p .

Dès lors, l'orbite de la planète P doit être considérée comme appartenant au faisceau des trajectoires voisines de l'orbite circulaire particulière dont le rayon est A .

Nous avons choisi de fixer la valeur de A par la relation:

$$N^2 A^3 = n^2 a^3 = k(1+m) \quad (15)$$

où N représente le moyen mouvement moyen, fourni par l'observation sur une durée suffisamment longue. De (14) et (15) on tire encore:

$$n = N(1+p) \quad (16)$$

de sorte que p représente en fait les variations relatives du moyen mouvement.

Ensuite, en séparant dans la variable λ une partie linéaire en t , notée L , le reste constitue une nouvelle variable, notée q :

$$\lambda = L - \sqrt{-1}q. \quad (17)$$

En choisissant L de sorte que $\frac{dL}{dt} = N$, on force q à

représenter une quantité dont la valeur moyenne est nulle et qui représente l'ensemble des inégalités périodiques de la longitude moyenne; on ne doit pas craindre les termes séculaires ou mixtes puisque la méthode de Brumberg va éviter leur introduction. Dès lors, la variable q reste du même ordre de grandeur que les masses perturbatrices, du moins dans le cas non résonnant qui nous intéresse ici, et on pourra développer les équations suivant les puissances croissantes de q . La constante additive L_0 présente dans L est arbitraire, puisqu'elle dépend de l'orientation du repère fixe, elle-même arbitraire.

Enfin, les variables X et Y qui dépendent de λ , sont alors avantageusement remplacées par deux autres, x et y , fonctions de L , et ainsi définies:

$$\begin{aligned} x &= e \exp \sqrt{-1}(L - \tilde{\omega}) \\ y &= \sin(i/2) \exp \sqrt{-1}(L - \Omega). \end{aligned} \quad (18)$$

Tenant compte de (3) et de (17), on obtient encore:

$$\begin{aligned} x &= X \exp \sqrt{-1}(L - \lambda) = X \exp(-q) \\ y &= Y \exp(-q). \end{aligned} \quad (19)$$

Désormais, à la place des six éléments osculateurs initiaux, nous utiliserons la variable réelle p , la variable

imaginaire pure q , et les deux variables complexes x et y . En dérivant par rapport au temps les expressions (14), (17) et (18), on obtient aisément les équations aux variations des nouvelles variables en fonction des anciennes:

$$\frac{dp}{dt} = -(3/2)(1+p) \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right) \quad (20)$$

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{-1} N p + \sqrt{-1} \left(\frac{d\lambda}{dt} - n \right) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{-1} N x + \frac{d\bar{z}}{dt} \exp \sqrt{-1} L \\ &= \sqrt{-1} N x + \left(\frac{d\bar{z}}{dt} \exp \sqrt{-1} \lambda \right) \exp(-q) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \sqrt{-1} N y + \frac{d\bar{\zeta}}{dt} \exp \sqrt{-1} L \\ &= \sqrt{-1} N y + \left(\frac{d\bar{\zeta}}{dt} \exp \sqrt{-1} \lambda \right) \exp(-q). \end{aligned} \quad (23)$$

En formulant ainsi les équations, on aura l'avantage de pouvoir appliquer immédiatement la méthode de Brumberg. Il reste seulement à développer, en fonction des nouvelles variables, les expressions formulées en (10)

et (11): $\frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ et $\frac{d\lambda}{dt} - n$, et celles déduites de (12) et (13):

$$\frac{d\bar{z}}{dt} \exp \sqrt{-1} \lambda \quad \text{et} \quad \frac{d\bar{\zeta}}{dt} \exp \sqrt{-1} \lambda.$$

Remarques sur la nature des variables et des paramètres

On voit que les équations relatives à \mathcal{N} planètes dépendent déjà de $3\mathcal{N}$ constantes: $\{m, L_0, N\}$ pour chaque planète. On donne aux masses et aux moyens mouvements moyens des valeurs numériques (qui permettent de calculer les constantes A), tandis que les constantes L_0 restent arbitraires jusqu'à la comparaison de la théorie avec les observations. Les valeurs données aux constantes m et N sont elles-mêmes tirées essentiellement des comparaisons réalisées par Le Verrier et par Newcomb entre leur théorie et les observations: or, on sait que ces deux théories n'aboutissent pas exactement aux mêmes masses ni aux mêmes moyens mouvements moyens: en fait ces théories ne sont ni identiques, ni complètes; il peut manquer à l'une certaines inégalités présentes dans l'autre et vice-versa; les mêmes inégalités ne sont pas non plus forcément calculées avec la même précision; cela se produit notamment pour certaines inégalités à longues périodes: si leur période est supérieure à l'intervalle de temps durant lequel on dispose d'observations, leur manque de précision ou leur absence contribuent globalement à la formation de

termes séculaires empiriques lors de la comparaison entre théorie et observations. Ces termes empiriques viennent affecter les valeurs trouvées pour les constantes N et on ne sait pas les isoler des vrais moyens mouvements moyens N_0 . Ces derniers seraient déterminés idéalement en comparant une théorie complète à des observations couvrant une durée très longue; leur existence théorique a été démontrée en même temps que l'existence d'une représentation des mouvements planétaires sous forme de fonctions quasi-périodiques du temps (Jefferys et Moser, 1966; Krasinsky, 1969). C'est cette représentation qu'on recherche par la méthode de Brumberg.

Les $2\mathcal{N}$ constantes L_0 et N font ici figure de constantes d'intégration pour les variables q et p qui ne contiennent plus d'arbitraire: en effet, on peut considérer L_0 comme constante d'intégration de la variable q , et le fait de l'avoir isolée de q permet de prendre nulle la constante d'intégration de l'Eq. (21) relative à cette variable. De même, N étant fixé et recherchant une solution sans terme séculaire, la constante d'intégration de l'Eq. (20) relative à la variable p , doit être choisie pour annuler le terme constant de l'Eq. (21), qui introduirait sinon un terme séculaire sur q ; cette constante d'intégration dépend donc des valeurs données aux moyens mouvements moyens et aux masses, directement et par l'intermédiaire des constantes A .

Ainsi, l'expression de p et de q va contenir les masses en facteur, ce qui distingue nettement ces variables des x et des y : ces dernières introduisent les $2\mathcal{N}$ constantes d'intégration restantes (complexes), dont les modules sont de l'ordre de grandeur des excentricités et des inclinaisons. Ceci permettra de développer les équations par rapport aux variables p et q à un degré moins élevé comparativement aux développements en x et en y .

Le fait que les constantes N et N_0 soient à priori différentes, entraîne qu'on ne saura rattacher à l'observation la théorie la plus complète possible faite avec les N , qu'en ajoutant un terme séculaire empirique sur chaque variable q , ce qui permettra une meilleure détermination des N si les observations couvrent un intervalle de temps suffisant. On pourra ainsi être amené à refaire tout ou partie des calculs avec des nouvelles valeurs des N (et aussi éventuellement des masses). Il est alors fondamental que la méthode utilisée pour développer et intégrer les équations soit aussi souple et rapide que possible, et nous nous sommes efforcé pour qu'il en soit ainsi.

Si on désire introduire, dès la théorie, un terme séculaire sur q , le développement des équations suivant les puissances de q est alors impropre; on pourra choisir dans ce cas la variable $u = \exp(q)$ avec l'équation correspondante:

$$\frac{du}{dt} = u \frac{dq}{dt} = \sqrt{-1} N p u + \sqrt{-1} u \left(\frac{d\lambda}{dt} - n \right).$$

3. Développement des équations

a) Forme des développements

Pour ne pas compliquer les notations, considérons toujours les deux seules planètes P et P' , et supposons $A' > A$. Nous allons montrer que les Eqs. (20) à (23) admettent des développements de la forme:

$$N \frac{m'}{1+m} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\{d_{10}\}} C_{j,d_{10}} p^{n_1} p'^{n_2} X^{n_3} \bar{X}^{n_4} X'^{n_5} \bar{X}'^{n_6} Y^{n_7} \bar{Y}^{n_8} \bar{Y}'^{n_9} \bar{Y}'^{n_{10}} \sigma^j \exp(nq) \quad (24)$$

où d_{10} représente un 10-uplet $\{n_i\}_{i=1,10}$ d'entiers positifs ou nuls, caractérisant un monôme des 10 variables citées.

$C_{j,d_{10}}$ est un coefficient numérique dépendant de α_0 .

σ représente $\exp \sqrt{-1} (\lambda' - \lambda)$.

n vaut 0 ou -1 , suivant qu'il s'agit des Eqs. (20) et (21), ou (22) et (23).

Dans la suite, on notera $\mathcal{V}_6(p, X)$ l'ensemble des 6 variables p, p', X, \bar{X}, X' et \bar{X}' , $\mathcal{V}_4(Y)$ celui des 4 variables Y, \bar{Y}, Y' et \bar{Y}' , et $\mathcal{V}_{10}(p, X, Y)$ la réunion de ces deux ensembles; les monômes relatifs aux variables appartenant à l'un de ces ensembles seront représentés par des combinaisons d'exposants notées respectivement d_6, d_4 et d_{10} , et de degrés respectifs notés δ_6, δ_4 et δ_{10} .

Grâce aux relations (17) et (19), quand on aura obtenu les développements sous la forme (24), on en déduira aisément des développements par rapport aux 12 variables:

$$N \frac{m'}{1+m} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\{d_{10}\}} C_{j,d_{10}} p^{n_1} p'^{n_2} X^{n_3} \bar{X}^{n_4} X'^{n_5} \bar{X}'^{n_6} Y^{n_7} \bar{Y}^{n_8} \bar{Y}'^{n_9} \bar{Y}'^{n_{10}} \cdot \exp(n_3 - n_4 + n_7 - n_8 - j + n)q \cdot \exp(n_5 - n_6 + n_9 - n_{10} + j)q' \times \exp \sqrt{-1} j(L' - L). \quad (25)$$

Dans ces développements, les exponentielles de q et de q' peuvent encore être développées en séries entières de ces variables. L'intérêt de la formulation (25) réside dans la mise en facteur de $\exp \sqrt{-1} j(L' - L)$ où $L' - L$ est une fonction linéaire par rapport au temps, dont la dérivée reste constante dans toute la théorie.

Pour obtenir les équations sous la forme (24), il suffit de faire apparaître dans les Eqs. (10) à (13) les quantités sans dimension: $\frac{r}{a}, \frac{a'}{r'}, \left(\frac{a'}{a}\right)^3$ et $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$, puis de développer ces quantités en utilisant le formulaire du mouvement elliptique: α vient alors en facteur dans les équations; on l'exprime évidemment en fonction de α_0 :

$$\alpha = \alpha_0 (1+p)^{-2/3} (1+p')^{2/3}. \quad (26)$$

En notant: $\mathbf{D}_3 = \left(\frac{a'}{a}\right)^3$ et $\mathbf{R}'_3 = \left(\frac{a'}{r'}\right)^3$, et en explicitant dans les Eqs. (10) à (13) les quantités décrites en (4), (7) et (16),

les Eqs. (20) à (23) peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{3}{2} \sqrt{-1} N \frac{m'}{1+m} [\alpha_0^3 P_0 P'_6 D_3 X_1 + \alpha_0^2 P_2 P'_4 (D_3 - R'_3)(X_2 F_1 + X_3 \bar{F}_1)] \quad (27)$$

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{-1} N p + \sqrt{-1} N \frac{m'}{1+m} [\alpha_0^3 P_{-3} P'_6 D_3 X_4 + \alpha_0^2 P_{-1} P'_4 (D_3 - R'_3)(X_5 F_1 + X_6 \bar{F}_1 - X_7 F_2 - X_8 \bar{F}_2)] \quad (28)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{-1} N x + \sqrt{-1} N \frac{m'}{1+m} [\alpha_0^3 P_{-3} P'_6 D_3 X_9 + \alpha_0^2 P_{-1} P'_4 (D_3 - R'_3)(X_{10} F_1 + X_{11} \bar{F}_1 + X(X_7 F_2 + X_8 \bar{F}_2))] \exp(-q) \quad (29)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{-1} N y + \sqrt{-1} N \frac{m'}{1+m} [\alpha_0^2 P_{-1} P'_4 (D_3 - R'_3) \cdot (Y(X_{12} F_2 + X_{13} \bar{F}_2) - X_8 F_3)] \exp(-q). \quad (30)$$

Dans cette formulation, les quantités P_i , P'_i , X_i , F_i et R'_3 ne dépendent que des 10 variables de $\mathcal{V}_{10}(p, X, Y)$ tandis que D_3 dépend en plus de α_0 ; plus précisément, les quantités P_i (resp. P'_i) ne dépendent que de p (resp. p'):

$$\begin{aligned} P_i &= (1+p)^{i/3} \\ P'_i &= (1+p')^{i/3} \end{aligned} \quad (31)$$

les quantités X_i ne dépendent quant à elles que de X et de \bar{X} :

$$\begin{aligned} X_1 &= \left(\bar{X} \frac{r}{a} \bar{\theta} - X \frac{r}{a} \theta \right) / \phi \\ X_2 &= -(\bar{X} + \theta) / \phi; \quad X_3 = -\bar{X}_2 \\ X_4 &= 2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \phi \psi \left(X \frac{r}{a} \theta + \bar{X} \frac{r}{a} \bar{\theta} \right) / 2 \\ X_5 &= -\frac{r}{a} \theta - (2\phi \psi \bar{X} + \psi \theta X_1) / 4; \quad X_6 = \bar{X}_5 \\ X_7 &= -\frac{1}{2\phi} \frac{r}{a} \theta; \quad X_8 = \bar{X}_7 \\ X_9 &= -\phi \frac{r}{a} \bar{\theta} \\ X_{10} &= \phi - \frac{1}{2} \frac{r}{a} \theta \bar{X}_2; \quad X_{11} = \frac{1}{2} \frac{r}{a} \bar{\theta} \bar{X}_2 \\ X_{12} &= \frac{1}{2} X_7; \quad X_{13} = -\bar{X}_{12}. \end{aligned} \quad (32)$$

Les développements du mouvement elliptique donnent par ailleurs:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 + \frac{e^2}{2} - \left(e - \frac{3e^3}{8} \dots \right) \cos M - \left(\frac{1}{2} e^2 + \dots \right) \cos 2M \\ &\quad - \left(\frac{3}{8} e^3 \dots \right) \cos 3M \dots \\ &= 1 - \frac{X}{2} - \frac{\bar{X}}{2} - \frac{X^2}{4} + \frac{X\bar{X}}{2} - \frac{\bar{X}^2}{4} \\ &\quad - \frac{3X^3}{16} + \frac{3\bar{X}X^2}{16} + \frac{3\bar{X}^2X}{16} + \dots \\ v - M &= \left(2e - \frac{e^3}{4} + \dots \right) \sin M + \left(\frac{5e^2}{4} + \dots \right) \sin 2M \\ &\quad + \left(\frac{13e^3}{12} + \dots \right) \sin 3M \dots \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(2X - 2\bar{X} + \frac{5X^2}{4} - \frac{5\bar{X}^2}{4} + \frac{13X^3}{12} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{X}X^2}{4} + \frac{\bar{X}^2X}{4} - \frac{13\bar{X}^3}{12} + \dots \right). \end{aligned} \quad (33)$$

On en tire l'expression de θ ($= \exp \sqrt{-1}(v - M)$):

$$\begin{aligned} \theta &= 1 - \bar{X} + X - \frac{\bar{X}^2}{8} - \bar{X}X \\ &\quad + \frac{9X^2}{8} + \frac{13\bar{X}^3}{24} - \frac{5\bar{X}^2X}{8} + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Ces développements permettent ensuite d'obtenir facilement ceux de $\frac{r}{a} \theta$, de $\frac{a'}{r'}$ et de $\frac{a'}{r'} \theta'$ et de leur conjugués.

On a par ailleurs:

$$\begin{aligned} \phi &= (1 - X\bar{X})^{1/2} = 1 - \frac{X\bar{X}}{2} - \frac{X^2\bar{X}^2}{8} + \dots \\ \psi &= 1/(1 + \phi) = \frac{1}{2} + \frac{X\bar{X}}{8} + \frac{X^2\bar{X}^2}{16} + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Quant aux quantités F_i , elles valent ensuite:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= X'_{14} Y_1 + X'_{15} Y_2 \\ F_2 &= Y F_3 \\ F_3 &= X'_{14} Y_3 - X'_{15} \bar{Y}_3 \end{aligned} \quad (36)$$

où $X'_{14} = \frac{r'}{a} \theta'$ et $X'_{15} = \bar{X}'_{14}$ sont fonctions de X' et de \bar{X}' , et où les Y_i sont fonctions des inclinaisons:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \mu^2 \exp \sqrt{-1}(\lambda' - \lambda) = \mu^2 \sigma \\ Y_2 &= \nu^2 \exp \sqrt{-1}(-\lambda' - \lambda) \\ Y_3 &= \frac{\mu \bar{\nu}}{\chi} \exp \sqrt{-1} \lambda'. \end{aligned} \quad (37)$$

Ces dernières se développent par rapport aux quatre variables d'inclinaison et dépendent de σ et $\bar{\sigma}$,

puisque, en tenant compte des relations (3), (5) et (7), elles s'expriment encore ainsi:

$$\begin{aligned}\chi &= (1 - Y\bar{Y})^{1/2} = 1 - \frac{Y\bar{Y}}{2} - \frac{Y^2\bar{Y}^2}{8} + \dots \\ Y_1 &= (1 - Y\bar{Y})(1 - Y'\bar{Y}')\sigma \\ &\quad + 2\bar{Y}(1 - Y\bar{Y})^{1/2}Y'(1 - Y'\bar{Y}')^{1/2} + \bar{Y}^2Y'^2\bar{\sigma} \\ Y_2 &= (1 - Y\bar{Y})\bar{Y}'^2\sigma \\ &\quad - 2\bar{Y}(1 - Y\bar{Y})^{1/2}\bar{Y}'(1 - Y'\bar{Y}')^{1/2} + \bar{Y}^2(1 - Y'\bar{Y}')\bar{\sigma} \\ Y_3 &= Y(1 - Y'\bar{Y}')\sigma \\ &\quad - (1 - 2Y\bar{Y})(1 - Y\bar{Y})^{-1/2}Y'(1 - Y'\bar{Y}')^{1/2} - \bar{Y}Y'^2\bar{\sigma}.\end{aligned}\quad (38)$$

Y_1 et Y_2 sont des fonctions paires des inclinaisons, tandis que Y_3 est impaire.

Enfin, la quantité $R'_3 = \left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ ne dépend que de X' et de \bar{X}' , et, pour achever le développement des équations, il reste à exprimer celui de D_3 ; nous verrons au prochain paragraphe que cette dernière quantité admet elle-même un développement de la forme (24) (sans le facteur $N \frac{m'}{1+m}$ évidemment).

On obtient par ailleurs les équations relatives à la planète P' perturbée par P , en inversant l'accentuation de tous les symboles présents dans les expressions (26) à (38). Cependant, on n'introduit qu'un minimum de symboles nouveaux en remarquant:

$$\begin{aligned}\alpha'_0 &= \alpha_0^{-1}; & \Delta' &= \Delta; & D'_3 &= \alpha_0^3 P_{-6} P'_6 D_3 \\ \sigma' &= \bar{\sigma}; & Y'_1 &= \bar{Y}_1; & Y'_2 &= Y_2.\end{aligned}$$

Les fonctions X'_i ont les mêmes développements que les X_i (au nom des variables près); seule la fonction Y'_3 est nouvelle.

Les équations relatives à la planète P' ont alors la même forme que celles de P , mais les puissances de α_0 mises en facteur sont différentes; on obtient en effet:

$$\alpha_0^3 P'_0 P_6 D'_3 = P_0 P'_6 D_3 \quad (39)$$

$$\begin{aligned}\alpha_0^3 P'_{-3} P_6 D'_3 &= P_0 P'_3 D_3 \\ \alpha_0^2 P'_2 P_4 (D'_3 - R_3) &= \alpha_0 P_{-2} P'_8 D_3 - \alpha_0^{-2} P_4 P'_2 R_3 \\ \alpha_0^2 P'_{-1} P_4 (D'_3 - R_3) &= \alpha_0 P_{-2} P'_5 D_3 - \alpha_0^{-2} P_4 P'_{-1} R_3.\end{aligned}\quad (40)$$

b) Développement de $\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3$

En supposant $r' > r$ et en séparant, dans l'expression (7) de π , le terme indépendant des inclinaisons, l'expression de Δ^2 donnée en (8) peut s'écrire ainsi:

$$\Delta^2 = r'^2 \left(D^2 - \frac{r}{r'} u \right) \quad (41)$$

avec

$$D^2 = 1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\frac{r}{r'} \operatorname{Re}(\bar{\tau}\tau') \quad (42)$$

$$u = 2 \operatorname{Re}((\mu^2 - 1)\bar{\tau}\tau' + \nu^2\bar{\tau}\tau'). \quad (43)$$

D est alors indépendant des inclinaisons, tandis que u est de degré pair et au moins égal à deux par rapport à elles. Nous obtenons ainsi:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3 &= \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 D^{-3} \left(1 - \frac{r}{r'} u D^{-2}\right)^{-3/2} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(-3/2)_i}{(1)_i} \left(\frac{r}{r'} u\right)^i \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 D^{-3-2i}.\end{aligned}\quad (44)$$

Il reste maintenant à développer les puissances de D^{-1} et celles de $\frac{r}{r'} u$. Pour cela, nous avons utilisé la méthode exposée par Abu-el-Ata et Chapront (1975), modifiée légèrement pour permettre le développement par rapport aux variables p et p' . Dans ce but, il suffit en effet de poser:

$$\frac{r}{r'} = \alpha \frac{r}{a} \frac{a'}{r'} = \alpha_0 (1+p)^{-2/3} (1+p')^{2/3} \frac{r}{a} \frac{a'}{r'} \quad (45)$$

et le reste du calcul est inchangé; on se reportera à leur publication pour le détail des calculs. Nous obtenons finalement, avec $\frac{r}{r'} \bar{\tau}\tau'$ égal à $\alpha \frac{r}{a} \bar{\theta} \frac{a'}{r'} \theta' \sigma$:

$$\begin{aligned}D^{-s} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2 - \delta_j^0) \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{s,m}^{(j)} h^m (1+p)^{-2j/3} (1+p')^{2j/3} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^j \left(\frac{a'}{r'}\right)^j \sigma^j \right) \quad (46)\end{aligned}$$

où δ_j^0 est le symbole de Kronecker

$$\begin{aligned}\phi_{s,m}^{(j)} &= \frac{(s/2)_j (s/2)_m (s/2+j)_m}{(1)_j (1)_m (1+j)_m} \\ &\quad \cdot \alpha_0^{2m+j} F(s/2+m, s/2+m+j, 1+m+j; \alpha_0^2)\end{aligned}$$

$$F(a, b, c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (1)_k} x^k$$

$$(a)_0 = 1; \quad (a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$$

$$h = (1+p)^{-4/3} (1+p')^{4/3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 - 1.$$

Nous avons d'ailleurs, par la formule du binôme:

$$h^m = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k (1+p)^{-4k/3} (1+p')^{4k/3} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k} \left(\frac{a'}{r'}\right)^{2k} \quad (47)$$

Remarquons que h est de degré 1 au moins par rapport aux variables $p, p', X, \bar{X}, X', \bar{X}'$.

En posant enfin, avec l'aide de (38):

$$Y_0 = Y_1 - \sigma \quad (48)$$

nous déduisons de (43) et (45):

$$\frac{r}{r'} u = 2\alpha_0(1+p)^{-2/3}(1+p')^{2/3} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{r}{a} \bar{\theta} \left(\frac{a'}{r'} \theta' Y_0 + \frac{a'}{r'} \bar{\theta}' Y_2 \right) \right). \quad (49)$$

Dans le développement (46), seuls les coefficients $\phi_{s,m}^{(j)}$ dépendent de α_0 ; toutes les autres quantités sont des fonctions développables des 6 variables de $\mathcal{V}_6(p, X)$.

On retrouve ces mêmes fonctions dans $\frac{r}{r'} u$ en facteur des quantités Y_0 et Y_2 qui sont fonction des 4 variables d'inclinaison $\mathcal{V}_4(Y)$. $\left(\frac{a'}{A}\right)^3$ admet donc bien un développement de la forme (24), et il en est alors de même pour les Eqs. (27) à (30). Nous verrons plus loin comment calculer effectivement leurs coefficients $C_{j,d_{10}}$.

c) Remarques d'ordre pratique

1. Les variables p , X et Y restant petites devant l'unité, les développements en série indicés par i et m dans (44) et (46) convergent rapidement; on pourra donc les limiter à des ordres relativement faibles:

h^m étant de degré m par rapport aux 6 variables de $\mathcal{V}_6(p, X)$, on pourra choisir un entier ω tel que h^m soit considéré comme négligeable pour $m > \omega$; pratiquement, sauf pour Mercure ou Mars dont les excentricités sont assez fortes, $\omega=5$ suffit généralement pour représenter le développement des équations.

Comme d'autre part, les variables X et Y ont des ordres de grandeur comparables et que u est degré 2 au moins par rapport à ces variables, si dans l'expression (44), D^{-3} est développé jusqu'au degré ω , il suffit de calculer D^{-5} jusqu'au degré $\omega-2$, puis D^{-7} au degré $\omega-4, \dots$: la valeur de l'indice i de ce développement n'a donc pas besoin de dépasser la partie entière de $\omega/2$ [notée par la suite $E(\omega/2)$].

2. De la même façon, les termes du développement (46) indicés par j décroissent d'autant plus vite que α_0 est plus petit: ils pourront être considérés comme négligeables dès que j sera supérieur à un certain j_m , lui-même d'autant plus petit que α_0 est plus petit. Dans la plupart des couples de planètes, α_0 est assez petit pour qu'une valeur de j_m de l'ordre de 5 à 10 suffise; par contre pour d'autres couples (Vénus-Terre avec $\alpha_0=0,72$ par exemple), le développement de D^{-s} converge très lentement avec j , et on peut être amené à choisir j_m de l'ordre de 30 ou de 40.

Ces valeurs de ω et de j_m dépendent finalement de la précision souhaitée dans la description des mouvements. Elles doivent alors tenir compte également de l'éventuelle existence de quasi-commensurabilités entre les moyens mouvements car les termes concernés sont amplifiés lors de l'intégration: les négliger en tronquant prématurément les développements reviendrait à limiter la

durée de validité de la théorie. Cependant, on peut difficilement se permettre de développer intégralement les équations, car même avec des valeurs faibles de ω et de j_m (par exemple $\omega=5$ et $j_m=10$) cela conduirait à des développements de plusieurs millions de termes en tenant compte de toutes les planètes. D'ailleurs, les théories existantes montrent que la très grande majorité de ces termes correspond à des perturbations négligeables, bien que certains d'entre eux puissent quand même en se combinant entre eux, engendrer par la suite des termes de petit diviseur non négligeables.

Ceci montre l'intérêt de posséder une technique qui permette de s'adapter facilement à chaque cas particulier que constitue chaque couple de planètes. A cet égard, les techniques habituelles de développement sont assez contraignantes: avec celles qui traitent les développements sous forme de blocs de coefficients (J. Chapront, M. Chapront et Simon, 1974), on limite de toutes façons ces blocs aux seuls termes non négligeables, mais si on s'aperçoit que certains termes de petit diviseur nécessitent des termes qu'on a négligés, ou si on veut améliorer la précision en poussant plus loin les développements, on est généralement obligé de les recalculer complètement. De même, les techniques fondées sur l'emploi de relations de récurrence nécessitent le calcul de tous les intermédiaires pour atteindre un terme fixé.

Ceci explique pourquoi nous avons recherché une autre technique qui permette d'atteindre directement chaque terme des développements, indépendamment de tous les autres.

4. Algorithme de développement des équations

L'idée fondamentale est de se servir des deux ensembles \mathcal{P}^* et Φ ainsi définis:

– \mathcal{P}^* est l'ensemble des développements de toutes les fonctions qui, dans les Eqs. (27) à (30) et (44) à (49), ne dépendent que des 10 variables de $\mathcal{V}_{10}(p, X, Y)$ présentes dans l'expression (24), et qui ne dépendent pas de α_0 . Cet ensemble peut être construit une fois pour toutes.

– Φ est l'ensemble de tous les coefficients dépendant de α_0 dans ces équations. Calculé pour une valeur donnée de α_0 , cet ensemble particularise un couple de planètes.

Ces deux ensembles sont évidemment bornés par des valeurs données à ω et à j_m .

En mettant les Eqs. (27) à (30) sous une forme standardisée précisée plus loin, nous allons voir qu'à partir de ces deux ensembles, il est possible de reconstituer facilement les combinaisons qui contribuent à la formation d'un terme donné et de calculer son coefficient $C_{j,d_{10}}$ [voir l'expression (24)], conformément à la description qu'on a faite, des Eqs. (27) à (30) et (44) à (49). Cette reconstitution représente un algorithme dont les données sont \mathcal{P}^* , Φ , j et d_{10} . Ces deux ensembles \mathcal{P}^* et Φ peuvent cependant être très volu-

mineux: nous allons préciser la façon de les construire et de les utiliser pour les minimiser et pour rendre le calcul de chaque coefficient $C_{j,d_{10}}$ le plus efficace possible.

Pour faciliter l'exposé technique, nous allons tout d'abord voir comment on peut calculer un terme quelconque du développement de $\left(\frac{a'}{A}\right)^3$, en distinguant pour commencer, le cas où ce terme est indépendant des inclinaisons.

a) Termes indépendants des inclinaisons dans $\left(\frac{a'}{A}\right)^3$

D'après (44), ces termes proviennent du développement de $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 D^{-3}$, et ont la forme suivante:

$$C_{j,d_6} p^{n_1} p'^{n_2} X^{n_3} \bar{X}^{n_4} X'^{n_5} \bar{X}'^{n_6} \sigma^j. \tag{50}$$

L'exposant j pourra être choisi parmi les entiers relatifs, une valeur négative s'interprétant comme associée au conjugué de l'expression explicitée en (46) derrière le symbole Re. Pour j fixé, et pour un 6-uplet d_6 d'exposants n_i donnés, le coefficient C_{j,d_6} provient alors du développement de l'expression suivante qui vient en facteur de σ^j :

$$\sum_{m=0}^{\delta_6} \phi_{3,m}^{(|j|)} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k \cdot \left((1+p)^{-2/3} (1+p')^{2/3} \frac{r}{a} \frac{a'}{r'} \right)^{2k+|j|} \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \bar{\theta}^{|j|} \theta^j \tag{51}$$

où δ_6 désigne le degré du monôme d_6 : $\delta_6 = \sum_{i=1}^6 n_i$.

Remarquons que dans cette expression, seuls les coefficients $\phi_{3,m}^{(|j|)}$ dépendent de α_0 , les autres facteurs n'étant fonction que d'une ou de deux variables. Ce dernier point nous a incité à élaborer l'algorithme suivant: on range dans un tableau T , indicé de 0 à δ_6 , le résultat du produit des quatre coefficients obtenus de la manière suivante pour chaque valeur de k comprise entre 0 et δ_6 :

- le coefficient de p^{n_1}
dans le développement de $(1+p)^{-2(2k+|j|)/3}$
- le coefficient de p'^{n_2}
dans le développement de $(1+p')^{2(2k+|j|)/3}$
- le coefficient de $X^{n_3} \bar{X}^{n_4}$
dans le développement de $\left(\frac{r}{a}\right)^{2k} \left(\frac{r}{a} \bar{\theta}\right)^{|j|}$
- le coefficient de $X'^{n_5} \bar{X}'^{n_6}$
dans le développement de $\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2k+3} \left(\frac{a'}{r'} \theta'\right)^{|j|}$.

Si j est négatif, ce sont les coefficients des conjugués $X^{n_4} \bar{X}^{n_3}$ et $X'^{n_6} \bar{X}'^{n_5}$ qu'il faut tirer de ces mêmes développements. Le coefficient C_{j,d_6} n'est ensuite que la combinaison linéaire des éléments du tableau T avec les facteurs $(-1)^{m-k} C_m^k$, puis $\phi_{3,m}^{(|j|)}$, conformément à l'expression (51).

Table 1. Nombre de termes $a_i(\omega)$ d'un polynôme de degré ω à i variables^a

ω	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_1(\omega)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_2(\omega)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

^a $a_i(\omega) = a_i(\omega - 1) + a_{i-1}(\omega)$

Supposons construits les deux ensembles bornés suivants:

$$\mathcal{P}_{\omega,j_m} = \left\{ (1+p)^{-2(2k+j)/3}, (1+p')^{2(2k+j)/3}, \tag{52}$$

$$\left. \left(\frac{r}{a} \right)^{2k} \left(\frac{r}{a} \bar{\theta} \right)^j, \left(\frac{a'}{r'} \right)^{2k+3} \left(\frac{a'}{r'} \theta' \right)^j \right\}_{\substack{0 \leq k \leq \omega \\ 0 \leq j \leq j_m}}$$

$$\Phi_{s,\omega}^{(j_m)} = \left\{ \phi_{s,k}^{(j)} \right\}_{\substack{0 \leq k \leq \omega \\ 0 \leq j \leq j_m}} \text{ pour } s \text{ et } \alpha_0 \text{ fixés.}$$

Les éléments de \mathcal{P}_{ω,j_m} , eux-mêmes développés jusqu'au degré ω , sont des polynômes à une ou deux variables: p , ou p' , ou (X, \bar{X}) , ou (X', \bar{X}') . Les éléments de l'ensemble Φ sont calculés avec toute la précision souhaitée pour la valeur de α_0 . Alors, muni de ces 2 ensembles, l'algorithme précédent donne avec un minimum de calculs, tout coefficient C_{j,d_6} du développement de $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 D^{-3}$, à condition que l'on ait: $|j| \leq j_m$ et $\delta_6 \leq \omega$.

On note $\mathcal{A}(\mathcal{P}, \Phi, s, j, d_6, \omega, j_m)$ cet algorithme.

Si on change de couple de planètes, seul l'ensemble $\Phi_{s,\omega}^{(j_m)}$ doit être recalculé pour la nouvelle valeur de α_0 ; si on désire utiliser le même ensemble \mathcal{P}_{ω,j_m} pour tout couple de planètes, il suffit de donner à ω et à j_m les valeurs relatives au couple le plus exigeant, tout en pensant cependant que l'encombrement de cet ensemble croît vite avec ω et avec j_m ; on pourra voir la Table 1 qui donne l'encombrement de ces polynômes en fonction de ω .

La construction de \mathcal{P}_{ω,j_m} s'opère aisément par l'application répétée d'un programme de multiplication de polynômes à une ou deux variables, à partir des développements limités au degré ω , de $(1+p)^{-2/3}$, $(1+p')^{2/3}$, $\frac{r}{a}$, $\frac{a'}{r'}$, $\frac{r}{a} \bar{\theta}$ et $\frac{a'}{r'} \theta'$, qu'on peut construire comme en (33) et (34).

L'adressage d'un coefficient quelconque dans l'ensemble \mathcal{P}_{ω,j_m} est facilité en rangeant par valeurs croissantes de k et j , les polynômes relatifs aux mêmes variables; chaque polynôme à n variables est représenté par la suite de ses coefficients, ordonnée suivant le degré global des monômes qui leur sont associés, les termes de même degré d étant rangés dans l'ordre lexicographique défini sur l'ensemble des n exposants dont la somme égale d [voir par exemple (33) ou (34) et les principes d'adressage exposés par Brumberg et Chapront, 1973].

Remarque

L'ensemble $\mathcal{P}_{\omega, j_m}$, composé par des polynômes à une ou deux variables, aurait pu être défini par l'ensemble des polynômes à six variables, qui résultent de leurs produits, mais l'encombrement de ce nouvel ensemble serait excessif: par exemple, pour $\omega = 5$ et $j_m = 20$, $\mathcal{P}_{\omega, j_m}$ totalise 5664 coefficients dans le 1^{er} cas et en totaliserait 58212 dans le cas des polynômes à 6 variables; par ailleurs, le temps gagné dans la construction du tableau T en évitant le calcul du produit des 4 coefficients, serait facilement reperdu dans l'accès à l'un de ces termes. De plus cet ensemble devrait encore être fortement agrandi ensuite pour tenir compte des termes dépendant des inclinaisons, alors qu'avec les polynômes à 1 ou 2 variables, nous allons voir que $\mathcal{P}_{\omega, j_m}$ est utilisable tel quel.

b) Termes dépendant des inclinaisons dans $\left(\frac{a'}{A}\right)^3$

D'après (44), ces termes proviennent du développement des fonctions $\frac{(-3/2)_i}{(1)_i} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 D^{-3-2i} \left(\frac{r}{r'} u\right)^i$ pour $i \geq 1$, et sont de la forme (24). L'introduction du facteur $\left(\frac{r}{r'} u\right)^i$, qui dépend des 10 variables de $\mathcal{V}_{10}(p, X, Y)$ et de σ , n'altère pas le principe de l'algorithme qu'on vient de décrire: elle ne modifie que légèrement la recherche des 4 coefficients qui servent à construire T .

En effet, d'après l'expression (49) de $\frac{r}{r'} u$, en développant les fonctions Y_0, \bar{Y}_0, Y_2 et \bar{Y}_2 comme en (38), on voit que $\left(\frac{r}{r'} u\right)^i$ est constitué d'une somme de termes de la forme:

$$Y^{i_1} \bar{Y}^{i_2} Y^{i_3} \bar{Y}^{i_4} \alpha_0^i (1+p)^{-2i/3} (1+p')^{2i/3} \cdot \sum C_Y \left(\frac{r}{a}\theta\right)^{i_1} \left(\frac{r}{a}\bar{\theta}\right)^{i_2} \left(\frac{a'}{r'}\theta'\right)^{i_3} \left(\frac{a'}{r'}\bar{\theta}'\right)^{i_4} \sigma^{j_3} \quad (53)$$

où la sommation se fait pour: $\{i_1, i_2, i_3, i_4 > 0; i_1 + i_2 = i; i_3 + i_4 = i; |j_3| \leq i\}$. C_Y est un coefficient numérique dépendant de tous les exposants.

Sachant que $\theta\bar{\theta} = 1$, on peut encore écrire:

$$\left(\frac{r}{a}\theta\right)^{i_1} \left(\frac{r}{a}\bar{\theta}\right)^{i_2} = \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^{2i_2} \left(\frac{r}{a}\theta\right)^{i_1-i_2} & \text{si } i_1 > i_2 \\ \left(\frac{r}{a}\right)^{2i_1} \left(\frac{r}{a}\bar{\theta}\right)^{i_2-i_1} & \text{si } i_1 < i_2. \end{cases} \quad (54)$$

Ce produit est donc de la forme $\left(\frac{r}{a}\right)^{2k_1} \left(\frac{r}{a}\bar{\theta}\right)^{j_1}$ avec la convention suivante: si j_1 est négatif, la valeur absolue $|j_1|$ agit sur le conjugué de $\frac{r}{a}\bar{\theta}$. De la même façon, le produit $\left(\frac{a'}{r'}\theta'\right)^{i_3} \left(\frac{a'}{r'}\bar{\theta}'\right)^{i_4}$ peut s'écrire $\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2k_2} \left(\frac{a'}{r'}\theta'\right)^{j_2}$ avec la même convention. En exprimant ainsi ces produits,

on rend possible l'utilisation de l'algorithme \mathcal{A} sans avoir à modifier l'ensemble $\mathcal{P}_{\omega, j_m}$.

Finalement, l'expression (53) peut être codée en associant au monôme $d_4 = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ une suite d'ensembles \mathcal{C}_Y de la forme: $\{C_Y, j_1, j_2, j_3, k_1, k_2\}$, et $\left(\frac{r}{r'} u\right)^i$ peut être représenté par une table $\mathcal{S}_Y^{(i)}$ comprenant l'ensemble des codes associés à chaque monôme d_4 , rangés dans l'ordre lexicographique des exposants l_i de manière à rendre cette table facilement adressable suivant la valeur de ces exposants.

Alors, étant donné un entier j et un monôme $d_{10} = \{d_6, d_4\}$, le terme de coefficient $C_{j, d_{10}}$ dans le développement de $\frac{(-3/2)_i}{(1)_i} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 D^{-3-2i} \left(\frac{r}{r'} u\right)^i$ provient d'une expression résultant du produit de (51) et de (53), et s'obtient ainsi: On recherche dans la table $\mathcal{S}_Y^{(i)}$ les ensembles \mathcal{C}_Y associés à d_4 et on applique pour chacun d'eux l'algorithme:

$$\mathcal{A}_1(\mathcal{P}, \Phi_{3+2i, j}, d_6, i, j_1, j_2, j_3, k_1, k_2, \omega, j_m)$$

défini comme l'algorithme \mathcal{A} par l'adressage suivant, pour k variant de 0 à δ_6 :

- le coefficient de p^{n_1} dans le développement de $(1+p)^{-2(2k+i+|j-j_3|)/3}$
- le coefficient de p^{n_2} dans le développement de $(1+p')^{2(2k+i+|j-j_3|)/3}$
- le coefficient de $X^{n_3} \bar{X}^{n_4}$ dans le développement de $\left(\frac{r}{a}\right)^{2(k+k_1)} \left(\frac{r}{a}\bar{\theta}\right)^{|j-j_3|} \left(\frac{r}{a}\theta\right)^{j_1}$
- le coefficient de $X^{n_5} \bar{X}^{n_6}$ dans le développement de $\left(\frac{a'}{r'}\right)^{3+2(k+k_2)} \left(\frac{a'}{r'}\theta'\right)^{|j-j_3|} \left(\frac{a'}{r'}\theta'\right)^{j_2}$.

Pour les 2 derniers coefficients, il reste à appliquer la règle de calcul:

$$\left(\frac{r}{a}\bar{\theta}\right)^{|j-j_3|} \left(\frac{r}{a}\theta\right)^{j_1} = \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\bar{\theta}\right)^{|j+j_1-j_3|} & \text{si } j-j_3 \text{ et } j_1 \text{ sont de même signe} \\ \left(\frac{r}{a}\bar{\theta}\right)^{|j+j_1-j_3|} \left(\frac{r}{a}\right)^{2\text{Min}(|j-j_3|, |j_1|)} & \text{dans le cas contraire} \end{cases} \quad (55)$$

et c'est encore aux conjugués qu'on s'adresse si $j+j_1-j_3 < 0$ ou $j+j_2-j_3 < 0$. On en déduit le tableau $T(0; \delta_6)$ dont les éléments sont ensuite combinés avec les facteurs $(-1)^{m-k} C_m^k$ puis avec les coefficients $\frac{(-3/2)_i}{(1)_i} \alpha_0^i \phi_{3+2i, m}^{(j-j_3)}$, comme avec l'expression (51). Le résultat est enfin multiplié par C_Y .

Finalement, le calcul d'un terme quelconque $C_{j, d_{10}}$ du développement de $\left(\frac{a'}{A}\right)^3$ est représentable par un

algorithme $\mathcal{A}_2(\mathcal{I}_Y, j, d_6, d_4)$ qui exécute simplement l'algorithme $\mathcal{A}_1(\mathcal{P}, \Phi_3, j, d_6, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ égal à $\mathcal{A}(\mathcal{P}, \Phi_3, j, d_6)$ si le terme ne dépend pas des inclinaisons, et qui dans le cas contraire, recherche dans les tables $\mathcal{I}_Y^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq \frac{\delta_4}{2}$, les ensembles \mathcal{C}_Y associés à d_4 , et construit la combinaison linéaire des C_Y avec les résultats correspondants de l'algorithme $\mathcal{A}_1(\mathcal{P}, \Phi_{3+2i}, j, d_6, i, j_1, j_2, j_3, k_1, k_2)$.

Remarques

1. Pour atteindre tous les coefficients $C_{j,d_{10}}$ tels que $|j| \leq j_m$ et $\delta_{10} \leq \omega$, il suffit d'avoir construit l'ensemble $\mathcal{P}_{\omega, j_m + 2E(\omega/2)}$, à peine plus encombrant que dans le cas sans inclinaison, ainsi que l'ensemble

$$\Phi = \{\Phi_{3+2i,\omega}^{(j_m)} \text{ pour } 0 \leq i \leq E(\omega/2)\},$$

défini maintenant par:

$$\Phi_{3+2i,\omega}^{(j_m)} = \begin{cases} (-3/2)_i \alpha_0^i \phi_{3+2i,m}^{(j)} & \text{pour } 0 \leq m \leq \omega - 2i \\ (1)_i & \text{pour } 0 \leq j \leq j_m + i \end{cases}$$

2. Les tables $\mathcal{I}_Y^{(i)}$ sont relativement peu encombrantes (336 nombres pour $i=1$ et $i=2$ correspondant au cas $\omega=5$). Ceci est dû au fait que les développements de Y_0, \bar{Y}_0, Y_2 et \bar{Y}_2 pris séparément sont très «creux»: lorsqu'on les rassemble en un seul développement, chaque monôme d_4 est associé dans $\mathcal{I}_Y^{(1)}$ à un seul ensemble \mathcal{C}_Y , sauf pour les 3 monômes réels $Y\bar{Y}, Y'\bar{Y}'$ et $Y\bar{Y}Y'\bar{Y}'$, présents à la fois dans Y_0 et dans \bar{Y}_0 , qui sont associés à deux de ceux-ci; de même, dans $\mathcal{I}_Y^{(2)}$ on a au plus 3 ensembles \mathcal{C}_Y associés à chaque monôme d_4 . Les Tables 2 et 3 présentent d'ailleurs une façon économique de coder $\mathcal{I}_Y^{(1)}$, obtenue en regroupant les 12 formes possibles de l'expression $\left(\frac{r}{a}\bar{\theta}\right)^{j_1} \left(\frac{a'}{r'}\theta'\right)^{j_2} \sigma^{j_3}$ qui vient en facteur de $C_Y Y^{l_1} \bar{Y}^{l_2} Y'^{l_3} \bar{Y}'^{l_4}$ dans le développement de $\frac{r}{r'}u$; la partie de degré six qui suivrait ne compte que 12 monômes sur les 84 possibles.

c) Calcul d'un coefficient $C_{j,d_{10}}$ du développement des équations

On peut considérer que chacune des Eqs. (27) à (30) est constituée d'une somme de 3 termes au plus, dont la forme générale est la suivante:

$$P_{\alpha_1} P'_{\alpha_2} (X_{\beta_1} F_X + X_{\beta_2} \bar{F}_X)(D_3 - R_3) \tag{56}$$

soit encore:

$$P_{\alpha_1} P'_{\alpha_2} (X_{\beta_1} (X'_{\gamma_1} Y_{\chi_1} + X'_{\gamma_2} Y_{\chi_2}) + X_{\beta_2} (X'_{\gamma_1} \bar{Y}_{\chi_1} + X'_{\gamma_2} \bar{Y}_{\chi_2}))(D_3 - R_3). \tag{57}$$

Dans le cas où R_3 est absent, X_{β_2} est nul et F_X vaut 1. Exprimé sous cette forme, on peut coder le facteur de $(D_3 - R_3)$ exactement comme on l'a fait pour le facteur

Table 2. Code de $\frac{r}{r'}u = \sum C_Y Y^{l_1} \bar{Y}^{l_2} Y'^{l_3} \bar{Y}'^{l_4}$ (facteur)

l_1	l_2	l_3	l_4	C_Y	n° du facteur	l_1	l_2	l_3	l_4	C_Y	n° du facteur
0	0	0	2	1	10	0	3	1	0	0	
0	0	1	1	-1	6,7	0	4	0	0	0	
0	0	2	0	1	3	1	0	0	3	0	
0	1	0	1	-2	11	1	0	1	2	-1	5
0	1	1	0	2	8	1	0	2	1	1	2
0	2	0	0	1	12	1	0	3	0	0	
1	0	0	1	2	5	1	1	0	2	-1	10
1	0	1	0	-2	2	1	1	1	1	1	6,7
1	1	0	0	-1	6,7	1	1	2	0	-1	3
2	0	0	0	1	1	1	2	0	1	1	11
0	0	0	4	0		1	2	1	0	-1	8
0	0	1	3	0		1	3	0	0	0	
0	0	2	2	0		2	0	0	2	1	4
0	0	3	1	0		2	0	1	1	-1	1
0	0	4	0	0		2	0	2	0	0	
0	1	0	3	0		2	1	0	1	-1	5
0	1	1	2	1	11	2	1	1	0	1	2
0	1	2	1	-1	8	2	2	0	0	0	
0	1	3	0	0		3	0	0	1	0	
0	2	0	2	0		3	0	1	0	0	
0	2	1	1	-1	12	3	1	0	0	0	
0	2	2	0	1	9	4	0	0	0	0	
0	3	0	1	0							

Table 3. Code des facteurs (de la forme: $\left(\frac{r}{a}\bar{\theta}\right)^{j_1} \left(\frac{a'}{r'}\theta'\right)^{j_2} \sigma^{j_3}$) dans $\frac{r}{r'}u$

n° du facteur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
j_1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
j_2	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
j_3	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1

$\left(\frac{r}{r'}u\right)^i$ de D^{-s} au paragraphe précédent: on construit une table $\mathcal{I}_Y^*(\chi)$ qui associe à chaque monôme d_4^* du développement de $Y_{\chi_1}, Y_{\chi_2}, \bar{Y}_{\chi_1}$ et \bar{Y}_{χ_2} , son coefficient C_Y^* , l'exposant j_4 de σ qui lui est en facteur, et les deux numéros β et γ qui désignent respectivement les indices β_1 ou β_2 des fonctions X_{β_1} ou X_{β_2} , et les indices γ_1 ou γ_2 des fonctions X'_{γ_1} ou X'_{γ_2} qui viennent en facteur de ce monôme.

Alors, pour obtenir le coefficient $C_{j,d_{10}}$ d'un terme du développement de (57), il suffit d'exécuter l'algorithme:

$$\mathcal{A}_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \chi, j, d_6, d_4)$$

dont les données désignent les développements de $P_{\alpha_1}, P'_{\alpha_2}, X_{\beta_1}, X_{\beta_2}, X'_{\gamma_1}$ et X'_{γ_2} associés à F_X et à \bar{F}_X ; cet algorithme effectue la recherche des monômes d_4^* et d_4 des variables Y, \bar{Y}, Y' et \bar{Y}' , dont le produit égale d_4 et tels que d_4 soit de degré pair par rapport à ces variables: pour chaque d_4^* trouvé, on consulte la table $\mathcal{I}_Y^*(\chi)$ pour en tirer le coefficient C_Y^* et les entiers j_4, β et γ associés

à d_4^* . Le coefficient $C_{j,d_{10}}$ est alors le résultat du produit par C_Y^* de l'algorithme:

$$\mathcal{A}_2^*(\mathcal{I}_Y, j-j_4, d_6, d_4, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma)$$

qui ne fait qu'exécuter l'algorithme $\mathcal{A}_1(\mathcal{I}_Y, j-j_4, d_6, d_4)$ défini au paragraphe précédent, en se servant de l'algorithme:

$$\mathcal{A}_1(\mathcal{P}^*(\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma), \Phi_{3+2i}, j-j_4, d_6, i, j_1, j_2, j_3, k_1, k_2).$$

Dans ce dernier, l'ensemble \mathcal{P}^* remplace l'ensemble \mathcal{P} qui servait jusqu'ici dans le développement de $\left(\frac{a'}{A}\right)^3$:

\mathcal{P}^* désigne l'ensemble des développements obtenus en multipliant les éléments de \mathcal{P} par les développements des fonctions P_i, P'_i, X_i et X'_i rencontrées dans les Eqs. (27) à (30) et dans celles analogues relatives à la planète P' ; ces fonctions forment un ensemble noté \mathcal{Q} . $\mathcal{P}^*(\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma)$ désigne alors le sous-ensemble de \mathcal{P}^* qui rassemble les produits des éléments de \mathcal{P} avec ceux du sous-ensemble de \mathcal{Q} constitué par les fonctions: $\{P_{\alpha_1}, P'_{\alpha_2}, X_\beta, X'_\gamma\}$. Bien sûr, ces produits ne sont à effectuer qu'entre développements relatifs aux mêmes variables. Dans ces conditions, comme un terme quelconque des équations provient d'une expression résultant du produit de $P_{\alpha_1} P'_{\alpha_2} (X_\beta F_\chi + X'_\beta \bar{F}_\chi)$ avec (51) et (53), le tableau T construit dans l'algorithme \mathcal{A}_1 est formé à partir:

— du coefficient de p^{n_1}
dans le développement de
 $(1+p)^{(\alpha_1 - 2(2k+i + |j-j_4-j_3|))/3}$

— du coefficient de p'^{n_2}
dans le développement de
 $(1+p')^{(\alpha_2 + 2(2k+i + |j-j_4-j_3|))/3}$

— du coefficient de $X^{n_3} \bar{X}^{n_4}$
dans le développement de
 $X_\beta \left(\frac{r}{a}\right)^{2(k+k_1)} \left(\frac{r}{a} \bar{\theta}\right)^{|j-j_4-j_3|} \left(\frac{r}{a} \bar{\theta}\right)^{j_1}$

— du coefficient de $X'^{n_5} \bar{X}'^{n_6}$
dans le développement de
 $X'_\gamma \left(\frac{a'}{r'}\right)^{3+2(k+k_2)} \left(\frac{a'}{r'} \theta'\right)^{|j-j_4-j_3|} \left(\frac{a'}{r'} \theta'\right)^{j_2}$

et le reste de l'algorithme est inchangé.

Dans le cas où j peut être égal à j_4 et où R'_3 existe, l'algorithme \mathcal{A}_1 retranche en outre du résultat précédent le coefficient $C_{j_4, d_{10}}$ du développement du terme contenant R'_3 : $C_{j_4, d_{10}}$ n'est que le produit par C_Y^* des coefficients de p^{n_1} , de p'^{n_2} , de $X^{n_3} \bar{X}^{n_4}$ et de $X'^{n_5} \bar{X}'^{n_6}$ tirés respectivement des développements de P_{α_1} , de P'_{α_2} , de X_β et de $X'_\gamma R'_3$.

Finalement, un terme quelconque du développement d'une des Eqs. (27) à (30) s'obtient en exécutant au maximum trois fois l'algorithme \mathcal{A}_3 avec diverses valeurs des données $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \chi)$, et en faisant ensuite la combinaison linéaire de ces résultats avec les coefficients

$$N \frac{m'}{1+m} \alpha_0^3 \text{ et } N \frac{m'}{1+m} \alpha_0^2.$$

d) Remarques d'ordre pratique

Dans les Eqs. (28) à (30), les termes de la forme (57) ayant X ou Y en facteur ne sont évidemment concernés que par les monômes d_{10} contenant ces variables à une puissance non nulle. Cette remarque s'applique aussi aux termes contenant F_2 et \bar{F}_2 puisqu'on a $F_2 = YF_3$, et permet d'éviter des calculs inutiles.

Il y a cependant une difficulté d'ordre pratique due à l'encombrement trop important de l'ensemble \mathcal{P}^* si on calcule effectivement le produit de tous les éléments de \mathcal{P} avec ceux de \mathcal{Q} .

Pour surmonter cette difficulté, nous n'avons calculé de \mathcal{P}^* que la partie la moins encombrante relative aux développements à une variable:

$$\mathcal{P}_{p,p}^* = \{(1+p)^{k/3}\}_{-3-2\omega_1 \leq k \leq 8+2\omega_1 \text{ avec } \omega_1 = 2\omega + 2E(\omega, 2) + j_m + 1} \quad (58)$$

Cet ensemble est borné de façon à permettre le calcul de tout terme $C_{j,d_{10}}$ de degré δ_{10} inférieur à ω et pour $|j| \leq j_m$, en tenant compte des décalages d'adressage par rapport à k et à j susceptibles de se produire dans l'algorithme \mathcal{A}_1 .

La partie de \mathcal{P}^* concernant les développements par rapport à (X, \bar{X}) et à (X', \bar{X}') n'est pas explicitée, c'est-à-dire que l'on conserve séparément les parties correspondantes de \mathcal{P} et de \mathcal{Q} . Alors, dans l'algorithme \mathcal{A}_1 , l'adressage direct des coefficients de $X^{n_3} \bar{X}^{n_4}$ et de $X'^{n_5} \bar{X}'^{n_6}$ dans un développement p^* de \mathcal{P}^* est remplacé par un adressage plus compliqué qui restitue ces coefficients à partir des 2 développements de \mathcal{P} et de \mathcal{Q} dont le produit égale p^* : ce nouvel adressage est en fait la recherche des paires de monômes à deux variables dont le produit est un monôme donné.

Dans ces conditions, on peut aussi rechercher d'autres ensembles \mathcal{P}' et \mathcal{Q}' dont le produit égale encore \mathcal{P}^* , mais dont l'encombrement est moindre que celui de \mathcal{P} et de \mathcal{Q} . C'est ainsi que nous avons choisi les ensembles $\mathcal{P}'_{X,X'}$ et $\mathcal{Q}'_{X,X'}$, suivants:

$$\mathcal{P}'_{X,X'} = \left\{ \left(\frac{r}{a} \bar{\theta}\right)^j, \left(\frac{a'}{r'} \theta'\right)^j \right\}_{0 \leq j \leq j_m + 2E(\omega/2) + 1} \quad (59)$$

$$\mathcal{Q}'_{X,X'} = \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{2k} X_i, \left(\frac{a'}{r'}\right)^{3+2k} X'_i \right\}_{\substack{0 \leq k \leq \omega \\ 0 \leq i \leq 15}} \quad (X_0 = X'_0 = 1)$$

Leur taille augmente aussi moins vite avec ω et j_m que pour \mathcal{P} et \mathcal{Q} . On trouvera d'ailleurs dans la Table 4 l'encombrement de ces divers ensembles pour diverses valeurs de ω et de j_m .

Pour terminer, signalons que pour obtenir un coefficient quelconque du développement des Eqs. (27) à (30) sous la forme (25) par rapport aux 12 variables (y compris q et q'), il suffira de multiplier le résultat de l'algorithme qu'on vient de décrire, par les coefficients de $q^{n_{11}}$ et de $q'^{n_{12}}$ tirés des développements des exponentielles de q et de q' conformément à l'expression (25).

Table 4. Encombrement de $\mathcal{P}_{p,p}^*$, $\mathcal{P}_{q,q}^*$, $\mathcal{P}'_{X,X}$ et $\mathcal{Q}'_{X,X}$ en fonction de (ω, j_m)

		ω	3	5	7	9	9
		j_m	15	20	25	30	40
Nombre de polynômes	à une	$-\mathcal{P}_{p,p}^*$	108	152	196	240	280
	variable	$-\mathcal{P}_{q,q}^*$	20	27	34	41	51
	à deux	$-\mathcal{P}'_{X,X}$	38	52	66	80	100
	variables	$-\mathcal{Q}'_{X,X}$	128	192	256	320	320
Nombre total de termes:			2172	5840	12512	23124	24384

Pour ce dernier calcul, on a alors besoin d'un dernier ensemble

$$\mathcal{P}_{q,q}^* = \{\exp(jq)\}_{0 \leq j \leq j_m + \omega + 1}. \quad (60)$$

Comme pour les développements par rapport à p et à p' , il pourra d'ailleurs être suffisant d'arrêter ces développements au degré 3 ou 4, car les variables p , p' , q et q' sont des quantités du même ordre de grandeur que les masses perturbatrices.

Le calcul d'un terme quelconque du développement des équations relatives à P' perturbée par P s'opère exactement de la même façon, sauf pour le terme contenant R_3 [voir (40)]; ce dernier est en facteur des fonctions $P_4 P_2'$ ou $P_4 P_1'$ différentes de celles qui sont en facteur de D_3 . Ces fonctions doivent alors apparaître comme données supplémentaires de l'algorithme \mathcal{A}_3 , dans le cas de ces équations.

5. Réalisation et applications de l'algorithme

Comme dans toute théorie générale planétaire, le nombre de termes des développements qu'on aura à déterminer est considérable; il est alors fondamental de pouvoir calculer très rapidement chacun d'eux: ce n'est qu'à cette condition, associée à la possibilité qu'on a déjà de calculer chaque terme indépendamment de tous les autres, qu'on pourra raisonnablement atteindre des termes d'ordre élevé par rapport aux masses; dans ce domaine de la mécanique céleste, tout gain de temps permet d'espérer une amélioration de la précision par l'augmentation du nombre de termes calculés.

L'algorithme présente déjà une certaine optimisation entre ce qui est calculé d'avance, et ce qui reste à calculer; voyons maintenant les moyens mis en oeuvre pour sa réalisation, avec le souci constant de diminuer au maximum les temps de calcul. Nous verrons ensuite comment nous avons pu contrôler l'exactitude du programme, et enfin nous présenterons quelques résultats concernant le comportement des développements en fonction de certains des paramètres dont ils dépendent; une telle étude est en effet nécessaire pour pouvoir manipuler par la suite ces développements plus efficacement.

a) Réalisation pratique et performances

La réalisation du programme représentant l'algorithme qu'on vient de décrire, a été faite sur l'ordinateur CII 10070 du centre de calcul de l'Université de Lille; signalons à toutes fins utiles, que cet ordinateur est environ deux fois moins rapide que l'IBM 360-65.

Les algorithmes \mathcal{A}_3 et \mathcal{A}_2 ont été transcrits en FORTRAN, tandis que la majeure partie de l'algorithme \mathcal{A}_1 a été transcrite en langage d'assemblage: par rapport à la version écrite complètement en FORTRAN, ceci a permis de diviser par 2 le temps de calcul de chaque terme. Ce programme occupe au total moins de 1400 mots de 4 octets.

Dans la version actuelle, développée pour $\omega=5$ et $j_m=20$, les tableaux représentant les ensembles \mathcal{S}_Y^* , \mathcal{S}_Y , $\mathcal{P}_{p,p}^*$, $\mathcal{P}'_{X,X}$, $\mathcal{Q}'_{X,X}$ et $\mathcal{P}_{q,q}^*$ occupent en double précision, moins de 14000 mots; d'après les données de la Table 4, même une extension à $\omega=9$ et $j_m=40$ serait encore réalisable, d'autant plus que la simple précision devrait normalement suffire pour des termes de degré élevé. La Table 5, qui donne la durée du calcul de ces tableaux pour diverses valeurs de ω , montre en outre que leur construction ne pose aucun problème de temps, d'autant plus qu'ils peuvent être calculés une fois pour toutes.

Pour les mêmes bornes ($\omega=5$ et $j_m=20$), il y a aussi 276 coefficients $\phi_{s,m}^{(j)}$ par couple de planètes, qui servent dans toutes les équations relatives à ce couple. Ici encore, la durée de leur calcul est très minime, même pour les grandes valeurs de α_0 : les résultats donnés à ce sujet dans la Table 6 correspondent à des calculs effectués en double précision à 10^{-10} près, en isolant le pôle de la fonction hypergéométrique qui apparaît dans l'expression des $\phi_{s,m}^{(j)}$, pour en accélérer la convergence (voir à ce propos Chapront, 1970).

On trouvera dans la Table 7, la durée moyenne du calcul d'un des termes du développement des équations, en fonction de son degré global par rapport aux 12 variables, et en fonction de l'équation dont il est tiré. Cependant, la durée réelle du calcul d'un terme donné peut différer assez notablement de sa valeur moyenne; on le constate en effet dans la Table 8 où l'on trouve, pour l'équation dp/dt , la durée du calcul d'un terme de degré donné ne dépendant que de certaines variables: les différences importantes observées en faveur des

Table 5. Durée du calcul de l'ensemble: $\{\mathcal{P}_{p,p}^*, \mathcal{P}_{q,q}^*, \mathcal{P}'_{X,X}, \mathcal{Q}'_{X,X}\}$ en fonction de ω ($j_m=20$)

ω :	1	2	3	4	5
Durée:	0,4 sec	1,0 sec	2,1 sec	3,9 sec	6,6 sec

Table 6. Durée du calcul des coefficients $\phi_{s,m}^{(j)}$ nécessaires pour $\omega=5$ et $j_m=20$ en fonction de α_0

α_0 :	0,01	0,1	0,3	0,5	0,7
Durée:	0,8 sec	0,9 sec	1,1 sec	1,4 sec	1,8 sec

Table 7. Durée moyenne (en millisecondes) du calcul d'un terme à 12 variables en fonction de son degré global et de l'équation d'origine

Equation	Degré					
	0	1	2	3	4	5
$\frac{dp}{dt}$	2,3	3,4	4,6	6,1	8,2	12,6
$\frac{dq}{dt}$	2,5	3,5	4,8	6,5	9,3	15,8
$\frac{dx}{dt}$	2,5	3,5	4,6	6,2	8,6	14,1
$\frac{dy}{dt}$	—	1,4	1,7	2,4	3,2	6,0

Table 8. Durée (en millisecondes) du calcul d'un terme ne dépendant que de certaines variables, en fonction de son degré (équation dp/dt)

Variables	Degré					
	0	1	2	3	4	5
p, p', q, q'	2,3	2,9	3,6	4,3	4,9	5,6
x, \bar{x}, x', \bar{x}'	2,3	4,0	6,0	8,9	12,4	16,7
y, \bar{y}, y', \bar{y}'	2,3	—	4,2	—	9,8	—

termes qui ne dépendent que de p, p', q, q' sont dues essentiellement au fait qu'on adresse directement les polynômes à une variable de $\mathcal{P}_{p,p'}$ et de $\mathcal{P}_{q,q'}$ tandis que pour les autres termes, on doit adresser deux développements à 2 variables (dans $\mathcal{P}'_{x,x'}$ et $\mathcal{Q}'_{x,x'}$) ou à 4 variables (dans \mathcal{I}_Y^* et \mathcal{I}_Y) pour reconstituer un monôme qui devrait normalement être tiré de leur produit. C'est dans cette reconstitution qu'on passe une grande partie du temps de calcul; une amélioration radicale consisterait à disposer d'un ordinateur suffisamment puissant pour pouvoir traiter directement l'ensemble \mathcal{P}^* .

A la vue de ces résultats, on peut cependant penser qu'une extension à $\omega=9$ conduirait, pour des termes de ce degré, à des temps de calcul approchant le dixième de seconde; ceci commence à être très important mais on pourrait sans doute diminuer un peu cette durée en opérant en simple précision.

b) Mise au point et contrôle du programme

La réalisation du programme a évidemment exigé des contrôles pour assurer l'exactitude du calcul. Les premiers tests concernent les propriétés de parité ou de symétrie entre termes de certains développements: ainsi le développement de $\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3$ doit être réel, d'où égalité entre termes conjugués; il en est de même du développement de dq/dt ou de dq'/dt , tandis que celui de dp/dt ou de dp'/dt doit être imaginaire pur. Ces propriétés permettent d'ailleurs de diminuer de moitié le nombre de termes à calculer pour ces équations. Un

autre test est fourni par les termes d'inclinaison qui doivent se détruire degré par degré lorsque Y et Y' sont égaux (pas de perturbation en provenance des inclinaisons lorsque les plans d'orbite sont confondus).

Cependant, le véritable contrôle de l'exactitude du calcul passe par la comparaison de nos développements avec ceux analogues obtenus par d'autres méthodes. Ainsi, nous avons tout d'abord comparé notre développement de $\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3$ avec celui obtenu par Abu-el-Ata et Chapront (1975) au moyen des techniques de manipulation de séries polynomiales à 8 variables (les 4 variables p, p', q, q' ne sont pas prises en compte); leur développement nous a été fort utile pour la mise au point du programme, qui s'est avérée assez délicate, mais l'effort fourni paraît justifié par la rapidité d'exécution que nous avons obtenue: par rapport à leur résultat, disposant des ensembles \mathcal{P}' , \mathcal{Q}' et Φ , le calcul des 1360 termes du développement de $\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3$ limité à $\omega=3$ et $j_m=15$, dure 2,7 sec; pour $\omega=5$ et $j_m=20$ les 13671 termes sont calculés en 44 sec.

Nous avons également comparé notre développement de $\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3$ avec celui obtenu par une méthode itérative par Chapront et al. (1975); ce développement se présente sous la forme semi-numérique suivante:

$$\sum_{i,j} C_{ij} \cos(i\lambda + j\lambda') + S_{ij} \sin(i\lambda + j\lambda'). \quad (61)$$

La méthode itérative fournit les coefficients C_{ij} et S_{ij} avec une précision fixée à l'avance qui est ici égale à 10^{-10} . Cette comparaison est instructive car elle permet d'apprécier la précision atteinte dans nos développements en fonction de leur degré ω . Pour cela, on détermine les termes de la forme (24) (avec $p=p'=q=q'=0$ car ici encore ces variables ne sont pas concernées), qui engendrent chacune des inégalités $(i\lambda + j\lambda')$ et on substitue aux variables z, z', ζ et ζ' les valeurs numériques des excentricités, des inclinaisons et des longitudes des noeuds et des périhélie. La comparaison a été effectuée pour le couple Jupiter-Saturne; elle montre que pour ces planètes et avec $\omega=5$, la précision obtenue sur chaque terme de notre développement est voisine de 10^{-8} . Cependant, pour le coefficient de la grande inégalité: $2\lambda_j - 5\lambda_s$, qui vaut $2,418 \cdot 10^{-5}$, ceci ne donne que 4 chiffres exacts, ce qui est encore trop peu pour un terme à longue période tel que celui-là, ainsi qu'on le constatera plus loin.

Etant assurés de l'exactitude du développement de $\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3$, nous avons alors pu contrôler celle du développement des équations, également par comparaison avec des développements semi-numériques qui nous ont encore été fournis par Bretagnon; ceux-ci proviennent des mêmes Eqs. (10) à (13) développées par la méthode

Table 9a. Principales inégalités de la longitude moyenne de Jupiter perturbé par Saturne

Argument	Méthode itérative		Méthode analytique		Nombre de termes calculés	Nombre de termes $\geq 0,001$ classés suivant leur degré:					
	sin	cos	sin	cos		0	1	2	3	4	5
$2\lambda_5 - 5\lambda_6$	-1062,3010	-106,5198	-1062,2927	-106,4615	80	—	—	—	10	—	69
$\lambda_5 - 2\lambda_6$	126,4443	-21,7997	126,4443	-21,7997	122	—	2	—	19	—	41
$2\lambda_5 - 2\lambda_6$	-66,3522	0,4836	-66,3523	0,4836	61	1	—	8	—	16	—
$\lambda_5 - \lambda_6$	-49,1136	0,8338	-49,1136	0,8338	61	1	—	8	—	33	—
$2\lambda_5 - 3\lambda_6$	15,3483	-22,9683	15,3483	-22,9683	122	—	2	—	19	—	0
$3\lambda_5 - 3\lambda_6$	-24,1508	-0,0125	-24,1508	-0,0125	61	1	—	8	—	11	—
$2\lambda_5 - 4\lambda_6$	5,4604	12,6975	5,4608	12,6970	46	—	—	6	—	30	—
$3\lambda_5 - 4\lambda_6$	5,8650	-8,9928	5,8650	-8,9928	122	—	2	—	18	—	0
$\lambda_5 - 3\lambda_6$	-3,7801	10,5452	-3,7799	10,5451	46	—	—	6	—	23	—
λ_6	5,7101	6,4711	5,7101	6,4711	122	—	2	—	20	—	3
$4\lambda_5 - 4\lambda_6$	-9,9574	-0,0933	-9,9574	-0,0933	61	1	—	8	—	10	—
0	0	-7,5615	0	-7,5615	61	1	—	8	—	6	—
$4\lambda_5 - 5\lambda_6$	2,7503	-4,2865	2,7504	-4,2865	122	—	2	—	14	—	1
$3\lambda_5 - 5\lambda_6$	1,4161	3,2455	1,4164	3,2451	46	—	—	6	—	23	—

Table 9b. Principales inégalités de la longitude moyenne de Jupiter perturbé par Saturne (suite): contributions degré par degré

Argument	Degré	sin	cos	Degré	sin	cos	Degré	sin	cos
$2\lambda_5 - 5\lambda_6$	3	-1070,9037	-115,4600	5	8,6110	8,9985			
$\lambda_5 - 2\lambda_6$	1	127,3542	-20,7710	3	-0,9115	-1,0270	5	0,0016	-0,0016
$2\lambda_5 - 2\lambda_6$	0	-66,8599	0	2	0,5123	0,4862	4	-0,0046	-0,0026
$\lambda_5 - \lambda_6$	0	-48,3474	0	2	-0,7590	0,8331	4	-0,0072	0,0007
$2\lambda_5 - 3\lambda_6$	1	15,6241	-23,0401	3	-0,2773	0,0720	5	0,0015	-0,0002
$3\lambda_5 - 3\lambda_6$	0	-24,6621	0	2	0,5174	-0,0114	4	-0,0061	-0,0011
$2\lambda_5 - 4\lambda_6$	2	5,4124	12,8395	4	0,0484	-0,1425			
$3\lambda_5 - 4\lambda_6$	1	5,9998	-9,1065	3	-0,1362	0,1144	5	0,0015	-0,0006
$\lambda_5 - 3\lambda_6$	2	-3,8551	10,6132	4	0,0753	-0,0681			
λ_6	1	5,6653	6,3678	3	0,0445	0,1024	5	0,0003	0,0009
$4\lambda_5 - 4\lambda_6$	0	-10,3803	0	2	0,4296	-0,0936	4	-0,0067	0,0003
0	0	0	-7,4612	2	0	-0,0993	4	0	-0,0010
$4\lambda_5 - 5\lambda_6$	1	2,8352	-4,4039	3	-0,0863	0,1186	5	0,0015	-0,0012
$3\lambda_5 - 5\lambda_6$	2	1,4127	3,3025	4	0,0037	-0,0573			

itérative déjà citée, et ils ont été construits de façon à assurer une précision de 10^{-3} seconde de degré sur les perturbations périodiques des éléments d'orbite, après intégration au 1^{er} ordre des masses. Nous avons ainsi été amenés à construire la théorie du 1^{er} ordre d'un certain nombre de planètes choisies pour l'importance de leurs perturbations, notamment le couple Jupiter-Saturne et le couple Vénus-Terre. On trouvera dans la Table 9 un exemple des résultats obtenus par la méthode itérative et par notre méthode (avec $\omega = 5$ et $j_m = 20$), qui concerne les inégalités les plus importantes de la longitude moyenne de Jupiter perturbée par Saturne [pour cette comparaison les constantes utilisées sont celles de Simon et Bretagnon (1975)]; on a en outre donné pour chaque inégalité, le nombre total de termes calculés dans son développement, le nombre des termes de même degré de ce développement dont l'amplitude est supérieure à 0,001, et enfin les contributions à cette inégalité degré par degré. Ceci permet de juger de la convergence des développements avec le degré des

termes. La Table 10 donne par ailleurs la répartition du nombre des termes du développement d'une inégalité $i\lambda + j\lambda'$, en fonction de sa caractéristique $|i+j|$ et du degré de ces termes.

On peut remarquer dans cet exemple, le bon accord entre les 2 méthodes, sauf peut-être pour la grande inégalité où l'absence des termes de degré supérieurs à 5 est manifeste. Etant donnée la décroissance des contributions lorsque le degré augmente, on peut estimer qu'il faudrait sans doute aller jusqu'au degré 9 pour obtenir la grande inégalité à 0,001 près (au 1^{er} ordre des masses); cependant, pour les inégalités relatives aux autres éléments (a , z et ζ), nous avons trouvé une précision meilleure, avec dans bien des cas, l'égalité des termes obtenus par les deux méthodes à mieux que (10^{-5}).

L'insuffisance du développement de certaines inégalités est encore révélée par la valeur du rapport entre le nombre de termes de même degré trouvés supérieurs à 0,001, et le nombre total de termes calculés (donné dans la Table 10): un rapport voisin de 1 indique que les

Table 10. Répartition des termes du développement d'une inégalité $(i\lambda + j\lambda')$ suivant leur degré, et en fonction de la caractéristique $|i + j|$

$ i + j $	Degré						Total
	0	1	2	3	4	5	
0	1	—	8	—	52	—	61
1	—	2	—	20	—	100	122
2	—	—	6	—	40	—	46
3	—	—	—	10	—	70	80
4	—	—	—	—	19	—	19
5	—	—	—	—	—	28	28

termes de degré supérieurs sont probablement non négligeables (exemple: la grande inégalité). On verra plus loin comment la décroissance de ce rapport avec le degré du développement pourra servir de test pour arrêter ce développement et éviter le calcul de termes négligeables.

Auparavant, voyons comment nous avons vérifié l'exactitude des termes dépendant des 4 variables p, p', q et q' : nous avons construit la solution intermédiaire des équations, qui constitue un préalable à l'application de la méthode de Brumberg (Duriez, 1975), et nous l'avons comparée à celle obtenue par Brumberg (1970) et par Brumberg et Chapront (1973). Cette solution est obtenue en intégrant la partie des équations de degré zéro par rapport aux variables, qui est aussi d'ordre 1 par rapport aux masses; le report de cette solution dans les termes de degré 1, puis l'intégration du développement qui en résulte, fournit la solution intermédiaire d'ordre 2 par rapport aux masses, etc... Nous avons effectivement construit cette solution jusqu'à l'ordre 3 des masses; il restait cependant à exprimer, en fonction de nos variables, la variable P (complexe) utilisée par Brumberg et ainsi définie:

$$x + \sqrt{-1}y = A(1 - P) \exp \sqrt{-1}L \quad (62)$$

où x et y sont les deux coordonnées d'une planète dans le plan de son orbite, et où A et L ont les mêmes significations qu'en (15) et (17) (les variables d'inclinaison n'interviennent pas dans cette solution intermédiaire). Cette variable P contient donc mélangées, les perturbations du demi-grand axe, de la longitude moyenne, de l'excentricité et de la longitude du périhélie; on trouve que P s'exprime ainsi en fonction de nos variables:

$$P = \frac{2}{3}p - q - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\bar{x} - \frac{5}{2}p^2 + \frac{2}{3}pq + \frac{1}{3}px - p\bar{x} - \frac{1}{2}q^2 - qx - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}x\bar{x} - \frac{1}{8}\bar{x}^2 + \dots \quad (63)$$

On pourra d'ailleurs constater l'analogie de ce développement avec le changement de variables proposé par Brumberg pour passer d'un système différentiel du second ordre en P à un système du premier ordre.

En remplaçant dans l'expression (63), les quantités p, q, x et \bar{x} par la solution intermédiaire trouvée pour ces variables, nous avons retrouvé identiquement la solution intermédiaire de Brumberg pour la variable P , et

ceci ordre par ordre par rapport aux masses. Cette identité signifie que ces solutions sont strictement équivalentes, et que nos développements par rapport aux variables $p, p', q, q', x, \bar{x}, x'$ et \bar{x}' sont corrects au moins jusqu'aux termes de degré 2.

c) Applications de l'algorithme

Comme on l'a annoncé dans l'introduction, l'application principale constituera la construction de la théorie générale par la méthode de Brumberg, avec en particulier la recherche des termes à longues et très longues périodes. Auparavant, il nous a paru nécessaire d'étudier le comportement du développement des équations en fonction des divers paramètres qui le composent, afin de pouvoir ensuite les manipuler plus efficacement.

Lorsque nous avons construit la solution semi-numérique du 1^{er} ordre des masses pour Jupiter ou pour Vénus, nous avons en effet constaté qu'un très petit nombre de termes fournit l'essentiel des perturbations et donc, il serait intéressant de pouvoir détecter a priori les termes négligeables. Prenons encore l'exemple de la longitude moyenne de Jupiter perturbée par Saturne:

Pour $\omega = 5$ et $j_m = 20$, le développement à 8 variables $(x, \bar{x}, y, \bar{y}, x', \bar{x}', y', \bar{y}')$ totalise 13671 termes qui engendrent 211 inégalités dont 1 terme séculaire; dans cet ensemble, 139 inégalités sont supérieures à 0,001, mais surtout, il n'y a que 1417 termes qui soient eux aussi supérieurs à 0,001, soit un peu plus de 10% du nombre total. Notons que ce pourcentage est encore relativement important à cause de la masse fortement perturbatrice de Saturne; si par contre, on considère dans les mêmes conditions l'ensemble des inégalités de la longitude moyenne de Vénus perturbée par la Terre, il reste seulement 90 inégalités et 197 termes supérieurs à 0,001, mais dans ce cas, la valeur importante de α_0 ($=0,72$) contribue encore à multiplier le nombre des inégalités: même l'inégalité $20\lambda_v - 20\lambda$, fait encore partie de ces 90 inégalités. En fait, le nombre des termes non négligeables qu'on peut trouver dans les autres équations est en général encore bien inférieur à ceux qu'on vient de citer, et peut même par fois être nul, ainsi qu'on peut le constater dans la Table 11.

Pour éviter le calcul inutile des termes négligeables, il paraît donc nécessaire de prévoir des tests qui permettent de préciser les limites ω et j_m à adopter pour chaque inégalité, en fonction de α_0 , des masses perturbatrices, des valeurs susceptibles d'être prises par les variables et aussi de la précision souhaitée sur le résultat final. Ces limites pourront d'ailleurs changer suivant l'ordre des masses auquel on se place.

Nous avons tout d'abord utilisé le comptage des termes de même degré, supérieurs à une quantité donnée (par exemple 0,001), qui contribuent à une même inégalité: on arrête le développement de cette inégalité dès que, dans l'ensemble des termes de même degré qui y contribuent, on n'en trouve aucun supérieur à 0,001

Table 11. Nombre de termes $\geq 0,001$ dans la théorie du 1^{er} ordre de Jupiter^a; Nombre de termes $\geq 0,0001$ dans la théorie du 1^{er} ordre de Vénus

Jupiter perturbé par	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Saturne	Uranus	Neptune
a	14	15	18	13	1889	55	14
λ	9	10	10	9	1417	42	13
$e \exp\sqrt{-1}\hat{\omega}$	15	19	17	15	1871	66	15
$\sin\left(\frac{i}{2}\right)\exp\sqrt{-1}\Omega$	2	6	2	0	610	2	2
Vénus perturbée par	Mercure	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
a	68	252	27	43	9	1	0
λ	167	415	79	103	30	3	2
$e \exp\sqrt{-1}\hat{\omega}$	134	495	54	147	36	2	0
$\sin\left(\frac{i}{2}\right)\exp\sqrt{-1}\Omega$	15	165	4	47	12	0	0

^a Chaque nombre est à comparer aux 13671 termes fournis par: $\{\omega=5, j_m=20\}$

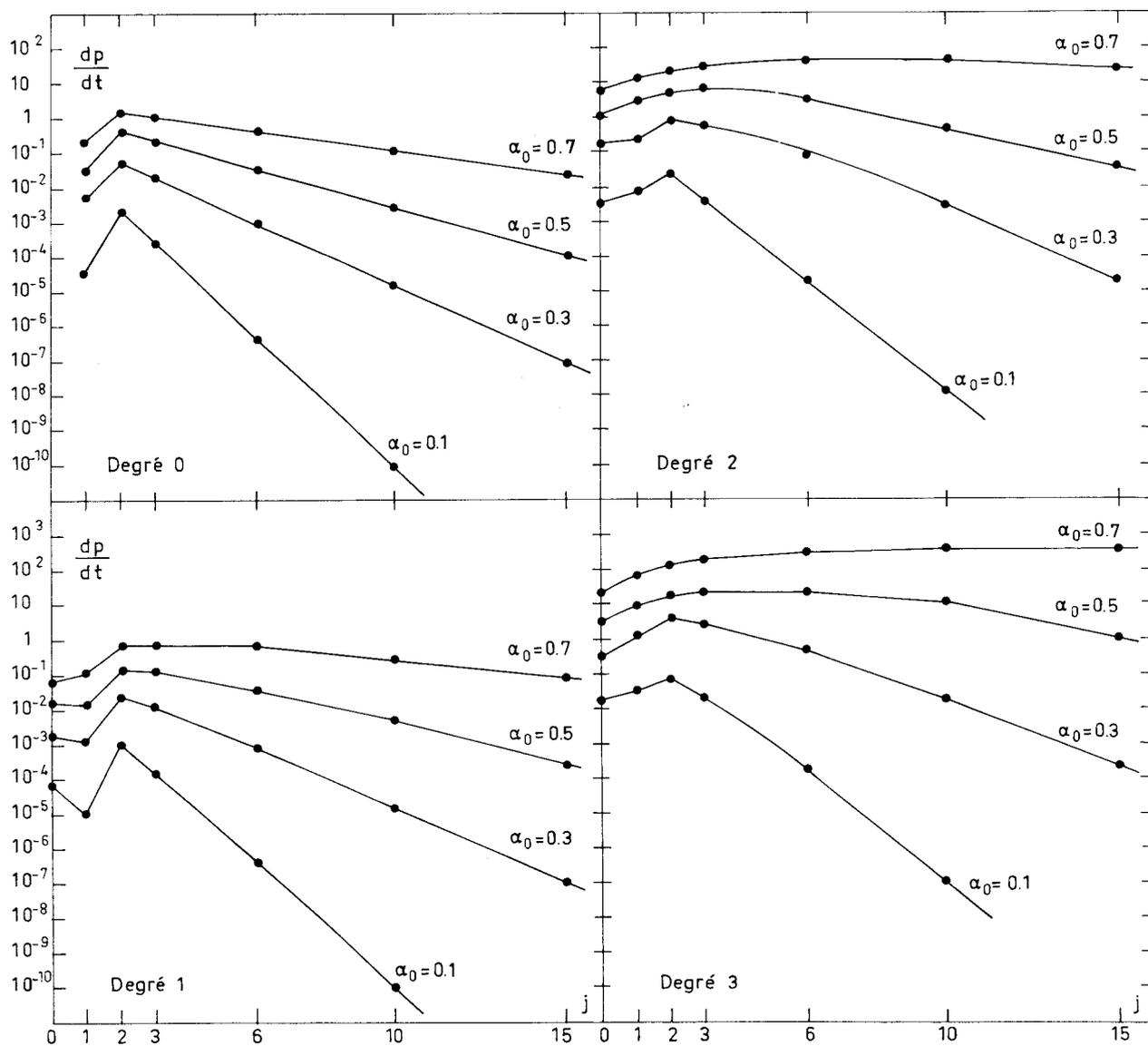


Fig. 1. Développement de dp/dt par rapport aux 12 variables [forme (25)]; on a représenté le terme le plus grand en valeur absolue, de l'ensemble des termes de même degré global, relatifs à des valeurs fixées de j et de α_0 , en fonction de ce degré, de j et de α_0 . Le coefficient $N \frac{m'}{1+m}$ est ici pris égal à 1

(par exemple). C'est ainsi qu'avec ce test, le nombre de termes calculés effectivement tombe respectivement à 9586 et à 4007 dans les deux exemples relatifs à Jupiter et à Vénus cités au paragraphe précédent; les durées de ces deux calculs sont, dans ces conditions, égales à 282^s et 92^s.

On pourrait encore gagner du temps si on pouvait aussi éviter le calcul de ces derniers termes qui, ayant été reconnus négligeables, ont permis de décider l'arrêt du développement. Dans ce but, nous avons réalisé une étude du comportement du développement des équations, dont on trouvera quelques résultats présentés dans la Figure 1 sous forme de graphiques. Ceux-ci sont relatifs au développement de l'équation dp/dt mais se présenteraient de la même façon pour les autres équations et avec les mêmes conclusions. Dans ces graphiques, chaque point représente dans une échelle logarithmique, le terme le plus grand en valeur absolue parmi les termes de même degré [par rapport aux 12 variables de la forme (25)], relatifs à des valeurs fixées de α_0 et de j [exposant dans la fonction $\exp\sqrt{-1}j(L'-L)$]; nous avons relié entre eux les points correspondant à diverses valeurs de j pour une même valeur de α_0 . Ces résultats ne tiennent pas compte du facteur $N \frac{m'}{1+m}$ pour permettre l'emploi du même graphique pour divers couples de planètes.

Dans ces graphiques, on remarque la rapide décroissance des termes avec j lorsque α_0 est petit, tandis que pour α_0 grand, les termes restent du même ordre de grandeur sur un grand intervalle en j et ne décroissent ensuite que très lentement; les termes relatifs à un même degré et à une même valeur de j croissent d'autant plus avec α_0 que j est plus grand, on a constaté par ailleurs que la dispersion des valeurs absolues des termes de même degré, en dessous de leur valeur maximum, croit assez vite avec ce degré. On pourrait diminuer cette dispersion en considérant des graphiques analogues relatifs à des ensembles de termes dont on considère le degré global par rapport à certaines variables seulement; par exemple, dans les termes de degré 2, il y a les termes de degré 2 en (p, p', q, q') ou en $(x, \bar{x}, x', \bar{x}')$ ou en $(y, \bar{y}, y', \bar{y}')$, et les termes de degré 1 dans deux de ces ensembles de variables; la distinction entre ces différents groupes de variables est légitime à cause des différences de nature existant entre ces variables, ainsi que par le fait que les termes dépendant des inclinaison ont en général leur coefficient plus grand que dans le cas où ils dépendent des autres variables.

Avec ces graphiques et d'autres analogues pour les autres équations, on peut alors prévoir l'ordre de grandeur maximum de chaque terme, et donc, en fonction du facteur $N \frac{m'}{1+m}$ et de la valeur susceptible d'être prise par les variables, on peut décider de le calculer ou de le négliger. Pour construire ces graphiques, il suffit de calculer le développement des équations

pour quelques valeurs choisies de α_0 et de j , et ensuite on procède par interpolation. Il faut cependant veiller à ce que l'estimation d'un terme prenne beaucoup moins de temps que son calcul effectif, ce qui semble réalisable surtout pour les termes de degré élevé; la forme relativement simple des courbes permet d'ailleurs la réalisation d'une représentation efficace de ces graphiques.

6. Conclusion

Nous pensons que l'algorithme que nous venons de décrire, et sa réalisation pratique, nous donnent un outil efficace pour tenter la construction d'une théorie générale planétaire orientée spécialement vers la recherche de certaines inégalités à des ordres élevés par rapport aux masses. On en trouvera l'application dans une publication ultérieure. Donnons cependant dès maintenant un exemple qui montre à ce sujet la souplesse d'utilisation de notre technique:

Il s'agit de l'inégalité $3L_J - 8L_S - 2L_U + 7L_N$ qui intervient à l'ordre 3 des masses dans la solution intermédiaire des quatre grosses planètes. Avec une période égale à 119000 ans, elle introduit un petit diviseur qui conduit, par double intégration, à multiplier le terme correspondant de la longitude moyenne de Jupiter (par exemple), par le facteur intégrant $(N_J/(3N_J - 8N_S - 2N_U + 7N_N))^2$ égal à 10^8 , avec les constantes de la Connaissance des Temps (10^{10} avec celles de l'Astronomical Ephemeris); on pourrait alors s'attendre à un terme important. Son calcul fait intervenir tous les termes de la solution intermédiaire d'ordre 1 et 2 des masses, qui l'engendrent par substitution dans des termes de degré 2 et 1 des équations; le calcul de tous ces termes avec les substitutions dure moins d'une minute et donne une amplitude de 0,002 (0,060, 0,002 et 0,046 respectivement pour Saturne, Uranus et Neptune, constantes de la Connaissance des Temps). Ce résultat est intéressant car il permet de juger de la convergence des développements et des itérations par rapport aux masses pour des termes de si petit diviseur, et il montre qu'on peut atteindre directement et facilement des termes d'ordre élevé en masses sans avoir à calculer complètement les ordres inférieurs.

Cet exemple est sans doute un cas extrême, mais c'est ce type de technique que nous allons utiliser pour déterminer avec précision d'autres inégalités beaucoup plus importantes pour la connaissance à long terme des mouvements planétaires, comme la grande inégalité $2L_J - 5L_S$, ou le terme $L_U - 2L_N$, encore insuffisamment connus à un ordre élevé des masses, surtout en ce qui concerne leur interaction avec les termes à très longues périodes.

Signalons pour terminer, que le programme FORTRAN pour le calcul d'un terme quelconque des développements est disponible auprès de l'auteur.

Remerciements. L'auteur tient à exprimer toute sa gratitude à Monsieur J. Chapront pour l'initiation à ce travail, et pour les nombreux conseils et encouragements qu'il lui a prodigués. Il remercie aussi très vivement les chercheurs du Bureau des Longitudes, Messieurs Abu-el-Ata, Bretagnon et Simon, qui ont permis les nombreuses confrontations avec des résultats de leurs propres recherches. Il adresse enfin tous ses remerciements à Monsieur le Professeur P. Bacchus pour l'intérêt qu'il a toujours porté à ce travail, manifesté par des discussions nombreuses et fructueuses.

Références

- Abu-el-Ata, N., Chapront, J.: 1975, *Astron. Astrophys.* **38**, 57
 Bretagnon, P.: 1974, *Astron. Astrophys.* **42**, 259
 Brumberg, V. A.: 1967, *Bull. Inst. Theor. Astron.* **11**, 125
 Brumberg, V. A.: 1970, dans *Periodic Orbits, Stability and Resonances*, G.E.O. Giacaglia (ed.), Reidel, Dordrecht, p. 409
 Brumberg, V. A., Chapront, J.: 1973, *Celes. Mech.* **8**, 335
 Brumberg, V. A.: 1974, dans *The Stability of the Solar System and of small Stellar Systems*, Y. Kozai (ed.), Reidel, Dordrecht, p. 139
 Brumberg, V. A.: 1975, *Celes. Mech.* **11**, 131
 Chapront, J.: 1970, *Astron. Astrophys.* **7**, 175
 Chapront, J., Chapront, M., Simon, J. L.: 1974, *Astron. Astrophys.* **31**, 151
 Chapront, J., Bretagnon, P., Mehl, M.: 1975, *Celes. Mech.* **11**, 379
 Duriez, L.: 1975, Théorie générale planétaire en variables elliptiques. Tables rondes de Mécanique Céleste, Paris, 18 Juin 1975
 Jefferys, W. H., Moser, J.: 1966, *Astron. J.* **71**, 568
 Krasinsky, G. A.: 1969, *Trans. Inst. Theor. Astron. (Leningrad)*, **13**, 105
 Sagnier, J. L.: 1973, *Astron. Astrophys.* **25**, 113
 Simon, J. L., Bretagnon, P.: 1975, *Astron. Astrophys.* **42**, 259
 Simon, J. L., Bretagnon, P.: 1975, *Astron. & Astrophys. Suppl.* **22**, 107
 Simon, J. L., Chapront, J.: 1974, *Astron. Astrophys.* **32**, 51

Théorème de Poisson en variables héliocentriques

Conditions d'application de ce théorème relatif à l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires à l'ordre deux des masses

L. Duriez

Université des Sciences et Techniques de Lille, Laboratoire d'Astronomie, 1, Impasse de l'Observatoire, F-59000 Lille, France

Reçu le 14 Novembre 1977

Poisson's Theorem in Heliocentric Variables

Conditions for the Application of this Theorem Concerning the Invariability of the Major Axes of Planetary Orbits to Second Order in the Masses

Summary. Poisson's theorem is generally expressed as follows: There is no secular inequality in the major axes of the orbits of the planets to the first and to the second approximation with respect to the masses. However, we must state precisely that in the various demonstrations of this theorem concerning the second approximation, the major axes are always relative to orbits of planets described in such frames of reference that the planetary problem becomes a Hamiltonian system: Generally the frames are those defined by Jacobi (as in Tisserand's, Hill's, Hagihara's or Message's demonstration); it may also be the inertial frame connected to the center of masses of the solar system (as in Lagrange's demonstration). Even if the frame is not defined (as in Poincaré's or Andoyer's demonstration) all planets are assumed to have the same disturbing function, in order to make easier the proof of the theorem (by using for example the antisymmetric form of Lagrange's equations, as in Tisserand's demonstration, the secular terms then appear in pairs with opposite signs and thus vanish); but in these demonstrations, the definition of the major axes depends implicitly on the planetary masses: thus it is also necessary to define precisely the order in the masses of the successive approximations before using the theorem.

However, for the practical construction of a planetary theory, we generally prefer to refer each planet to the Sun because its heliocentric elements are most immediately "observable"; but in the motion relative to the Sun, the disturbing function is particular for each planet and therefore the demonstration of the theorem is not at all evident. Moreover, the successive approximations of a heliocentric planetary theory are not equivalent (with respect to their order in the masses) with the approximations of the same rank using Jacobi variables, so that we cannot deduce from the preceding demonstrations that Poisson's theorem in its above cited form is also valid when using heliocentric variables.

As a proof, a secular inequality has been discovered numerically by Simon in the heliocentric osculating major axes of the planets to the second approximation

of his improved "Le Verrier" theory, though the technique for constructing the successive approximations is the same as in Tisserand's demonstration. This has been confirmed by an independent calculation of Bretagnon.

The present work aims at explaining the appearance of such a term by constructing its analytic expression [given in (50) and (51)]. In particular, we show why the elimination of the secular term does not occur when using the heliocentric elements, while it occurs with Jacobi variables.

However, we found numerically that a partial elimination of this term exists, which depends on the order in the masses of the initial keplerian solution: we observed that the elimination was complete when the initial keplerian solution is rigorously of zero-order in the masses: this is equivalent to use a third Kepler law where $n^2 a^3$ is a constant, the same for all planets (Table 1). Such a condition was superfluous with Jacobi variables.

This shows that the secular term is in fact of the third order in the masses though it appears at the second approximation, depending implicitly on the planetary masses by using the numerical values of the major axes a and of the mean motions n connected with the third Kepler law.

Afterwards, we present a direct and analytic demonstration of the elimination of the secular term when $n^2 a^3$ does not depend on the planetary masses, in the case of coplanar orbits whatever their eccentricities and the ratio α of their semi-major axes. To do this, we put the expression $[A_2 a]$ of the secular term of a in a form developed with Hansen's coefficients, which enables us to show that it is identically equal to zero [Eq. (69)]; the term do not vanish in pairs as in Tisserand's demonstration, but the elimination results from the existence of recurrence formulae between Hansen's coefficients which are presented in the four propositions A , B , C and D . Of course, these relations have also been confirmed numerically.

Finally, Poisson's theorem is still valid with heliocentric variables when it is so expressed: The osculating major axes of the heliocentric orbits of the planets do not contain any secular inequality to the second order in the masses; no secular term appears in these major axes at the second approximation of a classical theory (e.g. Le Verrier's), if the expression $n^2 a^3$ is a constant, the same for all planets; a secular term of the third order in the masses does appear at the second approximation, if $n^2 a^3$ is a function of the planetary masses different from one planet to another.

This result is important for the future construction of a general planetary theory in elliptic heliocentric variables, because, in such a theory, it is necessary to know well the order in the masses of the terms which appear at each approximation, and which must be afterwards identified with other terms of the same order in the masses.

Key words: planetary theory — Poisson's theorem — secular perturbations

1. Introduction

«Les grands axes des orbites décrites par les planètes autour du Soleil n'ont d'inégalité séculaire, ni à la première, ni à la seconde approximation» (par rapport aux masses). C'est ainsi que Tisserand, dans son *Traité de Mécanique Céleste* (tome 1, p. 400), énonce le théorème dû à Poisson sur l'invariabilité des grands axes. Ce théorème, qui est à la base de tout ce qui concerne la stabilité du système solaire, doit cependant être interprété convenablement, car sa formulation ne précise pas complètement toutes les conditions dans les quelles il s'applique. Il faut en effet aussi connaître des éléments qui ont été nécessaires à sa démonstration, comme la nature des grands axes, liée au choix des repères, et comme la définition des approximations successives utilisées pour lesquelles il ne faut pas identifier systématiquement leur numéro d'ordre et leur ordre par rapport aux masses.

Ainsi, on peut même croire que ce théorème est faux si on cherche à calculer le terme séculaire susceptible d'apparaître dans l'expression des grands axes à la deuxième approximation d'une théorie planétaire de type classique en variables elliptiques héliocentriques: de tels termes, apparemment d'ordre 2 des masses, très petits mais non nuls, ont en effet été découverts numériquement par J. L. Simon dans les grands axes de Jupiter et de Saturne lors de son travail sur l'amélioration de la théorie de Le Verrier; ils ont été confirmés par un calcul indépendant de P. Bretagnon, et finalement, un développement analytique de leur expression a pu être établi, comme on le verra dans cet article.

Pourtant, la façon de construire les approximations successives est exactement la même que dans la dé-

monstration de Tisserand; c'est celle utilisée par Le Verrier et qui sert en pratique pour construire les théories planétaires de type classique: on développe les équations suivant les puissances des masses en partant d'une solution képlérienne supposée d'ordre zéro par rapport aux masses.

La seule différence réside dans la nature des variables: Tisserand utilise en effet des éléments elliptiques osculateurs associés au repérage de Jacobi: une 1^{ère} planète est rapportée au Soleil, une 2^{ème} au barycentre du Soleil et de la 1^{ère}, une 3^{ème} au barycentre du Soleil et des deux premières, et ainsi de suite. Au contraire, Simon, Bretagnon et moi-même utilisons les éléments elliptiques osculateurs héliocentriques pour toutes les planètes. Sauf pour la 1^{ère} planète, l'écart entre les éléments barycentriques et héliocentriques de chaque planète est ainsi de l'ordre des masses (au moins pour les éléments métriques: grand axe, excentricité et inclinaison). Mais alors, on peut penser que les approximations successives obtenues par Tisserand ne sont pas équivalentes à celles de même rang obtenues par Le Verrier (ou nous-mêmes) en ce qui concerne leur ordre par rapport aux masses; en effet, prenons par exemple la 1^{ère} planète choisie par Tisserand: ses éléments osculateurs héliocentriques s'expriment en fonction de ces éléments eux-mêmes et des éléments barycentriques des autres planètes; si, pour comparer avec la solution de Le Verrier, on voulait par exemple développer les perturbations de cette planète obtenues à l'ordre 1 des masses (1^{ère} approximation), en exprimant les éléments barycentriques qu'elles contiennent, en fonction des éléments héliocentriques correspondants, on obtiendrait bien sûr des termes d'ordre 1 des masses d'abord, mais également des termes d'ordres supérieurs, et rien ne permet d'affirmer a priori qu'il y a élimination des termes séculaires d'ordre 2 des masses qui pourraient ainsi être produits dans l'expression des grands axes. Ceci rend plausible le résultat que nous obtenons dans une théorie en variables héliocentriques, mais ne donne pas la nature exacte de ces termes séculaires.

Il est cependant important d'expliquer l'apparition de ces termes dans une théorie en variables héliocentriques, car c'est bien avec ces variables et non avec celles liées au repérage de Jacobi, que l'on construit en pratique les théories planétaires.

Pourtant, la présence de ces termes fut d'autant plus difficile à admettre que, dans la démonstration faite par Poisson lui-même en Juin 1808, toutes les planètes sont rapportées au Soleil; cette démonstration se compose de deux parties qu'on peut résumer ainsi, et qu'on reprendra plus en détail par la suite: dans la première, pour déterminer les perturbations à l'ordre 2 des masses du grand axe d'une planète A troublée par une autre B, Poisson calcule la variation de la fonction perturbatrice de A provenant des variations des éléments de la planète A elle-même à l'ordre 1 des masses; il met cette variation sous la forme d'une somme de termes de

la forme $P \int Q dt - Q \int P dt$ et montre que chacun de ces termes n'introduit dans le grand axe de A que des termes périodiques, les termes séculaires de $P \int Q dt$ étant égaux à ceux de $Q \int P dt$.

Dans la 2^{ème} partie, Poisson considère les variations de la fonction perturbatrice de A provenant des variations d'ordre 1 des éléments de la planète B; mais les fonctions perturbatrices de A et de B étant différentes (à cause des parties indirectes), ces variations se mettent maintenant sous forme de termes $P \int Q' dt - Q \int P' dt$, et l'élimination des termes séculaires n'est plus du tout évidente. Poisson a alors recours à un raisonnement qualitatif basé sur l'intégrale de l'énergie, et «il parvient d'une manière ingénieuse à faire voir que ces sortes de termes ne peuvent pas non plus produire dans le grand axe des variations proportionnelles au temps.» (Lagrange, Août 1808). Cependant, en voulant utiliser le résultat obtenu dans la 1^{ère} partie de sa démonstration pour en quelque sorte démontrer la 2^{ème} partie par symétrie, il semble bien que Poisson ait omis de prendre en considération certains termes, ceux-là mêmes qui conduisent aux termes séculaires trouvés par Simon, et que Poisson aurait certainement trouvés si il avait pu effectuer complètement leur calcul.

C'est d'ailleurs peut-être l'aspect qualitatif du raisonnement de Poisson qui amena Lagrange à reprendre la question deux mois plus tard, en remarquant que la forme des termes $P \int Q dt - Q \int P dt$ résulte de l'antisymétrie des équations qui portent son nom, et que si les fonctions perturbatrices de A et de B étaient les mêmes (à un facteur près éventuellement), la 2^{ème} partie de la démonstration de Poisson serait identique à la 1^{ère}, ce qui résoudrait complètement le problème. Ainsi, il démontra facilement l'absence de termes séculaires dans les grands axes à la deuxième approximation lorsque toutes les planètes sont rapportées au centre de gravité de système solaire (dans ce cas la fonction perturbatrice est en effet la même pour toutes les planètes). Cependant, en voulant passer des grands axes «galiléens» aux grands axes héliocentriques, Lagrange fit plusieurs fautes de calcul signalées par Serret en 1873, qui réduisent à néant sa démonstration de l'invariabilité de ces derniers.

C'est cette remarque de Serret qui incita Tisserand à reprendre la démonstration en 1876, en utilisant cette fois les éléments d'orbite associés au repérage de Jacobi pour lequel les fonctions perturbatrices sont toutes les mêmes à des facteurs constants près, ce qui permet d'appliquer la démonstration de Lagrange, avec cette fois une planète «héliocentrique», toutes les autres étant «barycentriques». Ensuite, comme Tisserand remarque que «l'on peut prendre pour première planète rapportée au Soleil telle planète que l'on voudra», le problème de l'invariabilité des grands axes héliocentriques à l'ordre 2 des masses, fut par la suite considéré comme définitivement résolu; les démonstrations proposées depuis Tisserand par Poincaré (1897), Andoyer

(1902), Hill (1904), Hagihara (1944) et Message (1975) ne s'en distinguent que par l'élégance procurée par l'emploi de variables canoniques, mais elles sont toutes relatives à des représentations autres qu'héliocentriques permettant d'avoir une seule fonction perturbatrice (ou Hamiltonien) pour toutes les planètes.

Il reste néanmoins à expliquer ces termes séculaires découverts par Simon dans les grands axes de Jupiter et de Saturne. On se propose de montrer ici que ces termes séculaires sont finalement d'ordre 3 par rapport aux masses, et que s'ils apparaissent dès la deuxième approximation dans une théorie en variables héliocentriques du type de celle de Le Verrier, c'est que les mouvements képlériens héliocentriques utilisés comme solution initiale ne sont pas rigoureusement d'ordre zéro des masses. Ils correspondent en effet chacun à une équation de la forme suivante:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + G(M_{\odot} + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (1)$$

dans laquelle la masse m de la planète apparaît déjà et se retrouve ensuite dans la 3^{ème} loi de Kepler:

$$n^2 a^3 = G(M_{\odot} + m). \quad (2)$$

Les moyens mouvements n et les demi-grands axes a ne sont donc pas indépendants des masses planétaires, et on va montrer que le terme séculaire trouvé par Simon s'annule si, à la place de (2), on suppose que les quantités $n^2 a^3$ relatives à chaque planète sont toutes égales à GM_{\odot} . On aurait également l'annulation de ce terme séculaire dans les grands axes si les planètes avaient toutes la même masse. L'absence de cette condition supplémentaire dans les démonstrations antérieures en variables héliocentriques permet sans doute d'expliquer leur échec relatif.

Il est remarquable que la démonstration de Tisserand n'exige pas que la solution initiale képlérienne soit strictement d'ordre 0 des masses; même la fonction perturbatrice pourrait y être différente de celle du problème des N corps. On verra qu'en variables héliocentriques, la forme de la fonction perturbatrice a son importance: l'annulation du terme séculaire n'est plus une simple élimination de paires de termes tels que $P \int Q dt$ et $Q \int P dt$, mais l'identification à zéro d'une expression très compliquée qui n'a pu être reconnue nulle que grâce au calcul sur ordinateur. Nous avons ensuite explicité complètement cette expression analytiquement et démontré, grâce à des relations de récurrence sur les coefficients de Hansen, qu'elle était identiquement nulle; cette démonstration est faite dans le cas de 2 planètes tournant dans un même plan autour du Soleil; on donne des indications sur sa démonstration dans le cas général non coplanaire.

Finalement, le théorème de Poisson est donc encore valable en variables héliocentriques à condition de

l'énoncer ainsi: Les grands axes osculateurs des orbites héliocentriques décrites par les planètes n'ont pas d'inégalité séculaire d'ordre 2 des masses; il n'apparaît pas d'inégalité séculaire dans ces grands axes à la 2^{ème} approximation d'une théorie planétaire du type de celle de Le Verrier si la quantité $n^2 a^3$ est une constante, la même pour toutes les planètes; si $n^2 a^3$ est une fonction des masses planétaires distincte pour chaque planète, il apparaît dans ces grands axes à la 2^{ème} approximation une inégalité séculaire d'ordre 3 des masses.

2. Construction du terme séculaire des grands axes héliocentriques à la 2^{ème} approximation d'une théorie classique

Dans ce paragraphe, on expose rapidement la 1^{ère} partie de la démonstration de Poisson, sous une forme qui se rapproche de celle de Tisserand, ce qui permettra d'introduire les notations et de montrer ce qui change par rapport à cet auteur lorsque les planètes sont toutes rapportées au Soleil.

2.1. Equations du mouvement

On utilise les équations de Lagrange donnant les variations des éléments osculateurs héliocentriques à l'instant t de l'orbite d'une planète P perturbée par une autre P'; on peut les mettre sous la forme matricielle suivante qui souligne bien leur antisymétrie: (cf. Kovalevsky, 1963)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ e \\ e \\ \omega \\ i \\ \Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{na^2} \begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & -\frac{1-e^2}{e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-e^2}{e} & 0 & -\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-e^2)^{1/2} \operatorname{tg} i} & 0 & \frac{-1}{(1-e^2)^{1/2} \sin i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-e^2)^{1/2} \sin i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial a} \\ \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} \end{pmatrix} \quad (3)$$

et qu'on peut encore condenser dans la notation vectorielle:

$$\frac{d\sigma}{dt} = A \operatorname{grad}_{\sigma} R$$

Dans cette équation, a est le demi-grand axe de l'orbite de P, e son excentricité, i son inclinaison sur un plan fixe, Ω la longitude du noeud ascendant, ω l'argu-

ment de la latitude du périhélie au dessus du plan fixe, et ε l'anomalie moyenne de P à l'instant initial t_0 . On a $\varepsilon = M - \int_{t_0}^t n dt$ où M est l'anomalie moyenne à l'instant t et où n , le moyen mouvement, ne représente qu'une notation pour $(G(M_{\odot} + m))^{1/2} a^{-3/2}$. G est la constante de la gravitation et m la masse de la planète P, petite devant celle du Soleil notée M_{\odot} . Enfin, R est la fonction perturbatrice de P:

$$R = Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \right) \quad (4)$$

avec \mathbf{r} et \mathbf{r}' les rayons vecteurs héliocentriques de P et de P' et Δ leur distance $|\mathbf{PP}'|$. Dans la suite, on notera avec un accent toutes les quantités se rapportant à la planète P'.

On a des équations analogues pour la planète P' perturbée par P, avec une fonction perturbatrice R' différente de R :

$$R' = Gm \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \right). \quad (5)$$

Partant d'une solution initiale képlérienne pour P et P', les fonctions R et R' se développent en séries de Fourier à deux arguments M et M' , de la forme:

$$R = Gm' \sum_{p,q} C_{pq} \cos(pM + qM') + S_{pq} \sin(pM + qM') \quad (6)$$

$$R' = Gm \sum_{p,q} C'_{pq} \cos(pM + qM') + S'_{pq} \sin(pM + qM')$$

où C_{pq} , S_{pq} , C'_{pq} , et S'_{pq} sont fonctions de tous les éléments des orbites des 2 planètes, à l'exclusion de M et de M' ; p et q prennent ici toutes les valeurs dans l'ensemble des entiers relatifs.

2.2 Intégration des équations

Comme dans la théorie de Le Verrier, on cherche une solution ayant la forme suivante, par exemple pour le

demi-grand axe:

$$a = a_0 + \Delta_1 a + \Delta_2 a + \dots \quad (7)$$

où a_0 est le demi-grand axe constant de la solution initiale képlérienne, où $\Delta_1 a$ regroupe les perturbations obtenues à la 1^{ère} approximation, et $\Delta_2 a$ celles obtenues à la 2^{ème} approximation, etc. . . .

Si a_0 est considéré comme étant d'ordre 0 par rapport aux masses, $\Delta_1 a$ est d'ordre 1 en masses, $\Delta_2 a$, d'ordre 2, etc. . . . On aurait des expressions analogues pour les autres éléments, qu'on peut condenser dans la notation: $\sigma = \sigma_0 + \Delta_1 \sigma + \Delta_2 \sigma + \dots$. Ayant une solution initiale σ_0 , σ'_0 , on définit les approximations successives suivantes, à partir du développement de Taylor du second membre des équations de Lagrange (3):

$$\frac{d}{dt} \Delta_1 \sigma = (A \mathbf{grad}_\sigma R)_0$$

$$\frac{d}{dt} \Delta_1 \sigma' = (A' \mathbf{grad}_{\sigma'} R')_0 \quad (8)$$

où l'indice zéro signifie qu'on remplace les éléments d'orbite présents dans les seconds membres par ceux de la solution initiale. Comme dans la suite on n'utilise que ces éléments initiaux, on simplifiera les notations en omettant désormais cet indice zéro. Pour la variable a , on aura en particulier:

$$\frac{d}{dt} \Delta_1 a = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \quad (9)$$

La seconde égalité vient de ce que dans les développements de R , ε n'intervient que par l'intermédiaire de

$$M = n(t - t_0) + \varepsilon$$

L'équation en ε peut d'ailleurs être remplacée par une équation en M :

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{d\varepsilon}{dt}$$

et on écrira la première approximation:

$$\frac{d}{dt} \Delta_1 M = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \Delta_1 a - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

Le terme $-\frac{3}{2} \frac{n}{a} \Delta_1 a$ représente la partie d'ordre 1 en masses de $\int n dt = \int \sqrt{G(M_\odot + m)} a^{-3/2} dt$. En l'introduisant sous cette forme, on évite un terme séculaire dans $\Delta_1 M$, et pour calculer $\frac{\partial R}{\partial a}$, on ne doit pas dériver n (par $\frac{\partial R}{\partial n} \frac{dn}{da}$) partout où n est directement associé au temps comme dans M (cf. Tisserand, 1889 p. 191).

On a ensuite pour le grand axe de P, la seconde approximation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta_2 a = & \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{2}{na} \right) \frac{\partial R}{\partial M} \Delta_1 a + \frac{2}{na} \left\{ \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial a} \Delta_1 a + \frac{\partial^2 R}{\partial M^2} \Delta_1 M \right. \\ & + \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial e} \Delta_1 e + \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial \omega} \Delta_1 \omega + \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial i} \Delta_1 i \\ & + \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial \Omega} \Delta_1 \Omega + \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial a'} \Delta_1 a' + \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial M'} \Delta_1 M' \\ & + \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial e'} \Delta_1 e' + \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial \omega'} \Delta_1 \omega' + \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial i'} \Delta_1 i' \\ & \left. + \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial \Omega'} \Delta_1 \Omega' \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Remarque: $\Delta_1 a$ et $\Delta_1 a'$ ne peuvent contenir de terme séculaire puisque $\frac{\partial R}{\partial M}$ et $\frac{\partial R'}{\partial M'}$ ne contiennent d'après (6), que des termes périodiques.

2.3. Calcul du terme séculaire de $\Delta_2 a$

Il est donné par l'intégration du terme constant susceptible d'apparaître dans le second membre de (10), et qu'on notera désormais $[\Delta_2 a]$.

Tout d'abord il n'en apparaît pas dans $\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{2}{na} \right) \frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial M} dt$ car, $\int \frac{\partial R}{\partial M} dt$ étant la somme de termes périodiques et d'un terme constant, il en est de même pour $\left(\int \frac{\partial R}{\partial M} dt \right)^2$, et qu'on peut écrire:

$$\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial M} dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\int \frac{\partial R}{\partial M} dt \right)^2 \right]. \quad (11)$$

On peut ensuite rassembler les autres termes de (10) dans les 10 groupements suivants qui résultent de l'antisymétrie des Equations (8):

$$\frac{2}{na} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial M \partial a} \int \frac{\partial R}{\partial M} dt - \frac{\partial^2 R}{\partial M^2} \int \frac{\partial R}{\partial a} dt \right] \quad (12)$$

$$\frac{\varphi^2}{na^2 e} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial M \partial e} \int \frac{\partial R}{\partial M} dt - \frac{\partial^2 R}{\partial M^2} \int \frac{\partial R}{\partial e} dt \right] \quad (13)$$

$$\frac{\varphi}{na^2 e} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial M \partial \omega} \int \frac{\partial R}{\partial e} dt - \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial e} \int \frac{\partial R}{\partial \omega} dt \right] \quad (14)$$

$$\frac{1}{na^2 \varphi \operatorname{tg} i} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial M \partial i} \int \frac{\partial R}{\partial \omega} dt - \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial \omega} \int \frac{\partial R}{\partial i} dt \right] \quad (15)$$

$$\frac{1}{na^2 \varphi \sin i} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial M \partial \Omega} \int \frac{\partial R}{\partial i} dt - \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial i} \int \frac{\partial R}{\partial \Omega} dt \right] \quad (16)$$

$$\frac{2}{n'a'} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial M \partial a'} \int \frac{\partial R'}{\partial M'} dt - \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial M'} \int \frac{\partial R'}{\partial a'} dt \right] \quad (17)$$

$$\frac{\varphi'^2}{n'a'^2e'} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial M \partial e'} \int \frac{\partial R'}{\partial M'} dt - \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial M'} \int \frac{\partial R'}{\partial e'} dt \right] \quad (18)$$

$$\frac{\varphi'}{n'a'^2e'} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial M \partial \omega'} \int \frac{\partial R'}{\partial e'} dt - \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial e'} \int \frac{\partial R'}{\partial \omega'} dt \right] \quad (19)$$

$$\frac{1}{n'a'^2\varphi' \operatorname{tg} i'} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial M \partial i'} \int \frac{\partial R'}{\partial \omega'} dt - \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial \omega'} \int \frac{\partial R'}{\partial i'} dt \right] \quad (20)$$

$$\frac{1}{n'a'^2\varphi' \sin i'} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial M \partial \Omega'} \int \frac{\partial R'}{\partial i'} dt - \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial i'} \int \frac{\partial R'}{\partial \Omega'} dt \right] \quad (21)$$

où on a noté $\varphi = (1 - e^2)^{1/2}$ et $\varphi' = (1 - e'^2)^{1/2}$.

Il reste encore les deux termes provenant de $\int n dt$ et $\int n' dt$ dans $\Delta_1 M$ et $\Delta_1 M'$:

$$-\frac{3}{a^2} \frac{\partial^2 R}{\partial M^2} \iint \frac{\partial R}{\partial M} dt dt \quad (22)$$

$$-\frac{3}{a'^2} \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial M'} \iint \frac{\partial R'}{\partial M'} dt dt \quad (23)$$

Les Expressions (12) à (23) doivent encore être multipliées par $\frac{2}{na}$. Calculons tout de suite le terme constant des 2 dernières: D'après le développement (6) de R , l'Expression (22) est aussi le produit de séries suivant:

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{a^2} \left\{ Gm \sum_{p,q} | -p^2 C_{pq} \cos(pM + qM') \right. \\ & \quad \left. - p^2 S_{pq} \sin(pM + qM') \right\} \\ & \cdot \left\{ Gm \sum_{p',q'} \left[\frac{p' C_{p'q'}}{(p'n + q'n')^2} \sin(p'M + q'M') \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{p' S_{p'q'}}{(p'n + q'n')^2} \cos(p'M + q'M') \right] \right\} \end{aligned}$$

dont le terme constant est:

$$-\frac{3}{a^2} \frac{G^2 m^2}{2} \sum_{p,q} \left[\frac{p^3 C_{pq} S_{pq}}{(pn + qn')^2} - \frac{p^3 C_{pq} S_{pq}}{(pn + qn')^2} \right] = 0. \quad (25)$$

Donc il n'y a pas de terme constant dans (22).

Par contre, on ne peut plus conclure aussi facilement le calcul du terme constant de l'Expression (23), qu'on obtiendrait de la même façon sous la forme:

$$-\frac{3}{a'^2} \frac{G^2 m m'}{2} \sum_{p,q} \left[\frac{pq^2 C_{pq} S'_{pq} - pq^2 C'_{pq} S_{pq}}{(pn + qn')^2} \right]. \quad (26)$$

Ce terme serait nul si on avait R' proportionnel à R , comme dans la démonstration de Tisserand; mais ici, en variables héliocentriques, il n'est plus nul; il faudra l'associer aux termes constants qu'on va maintenant mettre aussi en évidence dans les groupements (17) à

(21). On peut encore exprimer chacun de ces groupements sous la forme suivante, par exemple pour (17):

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n'a'} \left\{ \frac{\partial}{\partial a'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial M'} dt \right] - \frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial^2 R'}{\partial M' \partial a'} dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial M'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial a'} dt \right] + \frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial^2 R'}{\partial M' \partial a'} dt \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

qui se réduit à la somme des 1^{er} et 3^{ème} termes. La même réduction opérée sur les Expressions (12) à (21) conduit aux 10 nouveaux groupements:

$$\frac{2}{na} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial M} dt \right] - \frac{\partial}{\partial M} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial a} dt \right] \right\} \quad (28)$$

$$\frac{\varphi^2}{na^2 e} \left\{ \frac{\partial}{\partial e} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial M} dt \right] - \frac{\partial}{\partial M} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial e} dt \right] \right\} \quad (29)$$

$$\frac{\varphi}{na^2 e} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial e} dt \right] - \frac{\partial}{\partial e} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial \omega} dt \right] \right\} \quad (30)$$

$$\frac{1}{na^2 \varphi \operatorname{tg} i} \left\{ \frac{\partial}{\partial i} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial \omega} dt \right] - \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial i} dt \right] \right\} \quad (31)$$

$$\frac{1}{na^2 \varphi \sin i} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial i} dt \right] - \frac{\partial}{\partial i} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R}{\partial \Omega} dt \right] \right\} \quad (32)$$

$$\frac{2}{n'a'} \left\{ \frac{\partial}{\partial a'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial M'} dt \right] - \frac{\partial}{\partial M'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial a'} dt \right] \right\} \quad (33)$$

$$\frac{\varphi'^2}{n'a'^2 e'} \left\{ \frac{\partial}{\partial e'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial M'} dt \right] - \frac{\partial}{\partial M'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial e'} dt \right] \right\} \quad (34)$$

$$\frac{\varphi'}{n'a'^2 e'} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial e'} dt \right] - \frac{\partial}{\partial e'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial \omega'} dt \right] \right\} \quad (35)$$

$$\frac{1}{n'a'^2 \varphi' \operatorname{tg} i'} \left\{ \frac{\partial}{\partial i'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial \omega'} dt \right] - \frac{\partial}{\partial \omega'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial i'} dt \right] \right\} \quad (36)$$

$$\frac{1}{n'a'^2 \varphi' \sin i'} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Omega'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial i'} dt \right] - \frac{\partial}{\partial i'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial R'}{\partial \Omega'} dt \right] \right\} \quad (37)$$

Les groupements (28) et (29) n'amènent pas de terme constant, d'après (11) d'une part, et parce que les dérivées partielles par rapport à M n'en ont pas d'autre part.

Les groupements (30), (31) et (32) n'en amènent pas non plus puisqu'en développant R comme en (6), les termes constants seraient donnés par les expressions suivantes, analogues à (25):

$$\begin{aligned} & \frac{G^2 m^2 \varphi}{2na^2 e} \sum_{p,q} \frac{-p}{pn + qn'} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \left[C_{pq} \frac{\partial C_{pq}}{\partial e} + S_{pq} \frac{\partial S_{pq}}{\partial e} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial e} \left[C_{pq} \frac{\partial C_{pq}}{\partial \omega} + S_{pq} \frac{\partial S_{pq}}{\partial \omega} \right] \right\} \quad (38) \end{aligned}$$

$$\frac{G^2 m^2}{2na^2 \varphi \operatorname{tg} i} \sum_{p,q} \frac{-p}{pn+qn'} \left\{ \frac{\partial}{\partial i} \left[C_{pq} \frac{\partial C_{pq}}{\partial \omega} + S_{pq} \frac{\partial S_{pq}}{\partial \omega} \right] - \frac{\partial}{\partial \omega} \left[C_{pq} \frac{\partial C_{pq}}{\partial i} + S_{pq} \frac{\partial S_{pq}}{\partial i} \right] \right\} \quad (39)$$

$$\frac{G^2 m^2}{2na^2 \varphi \sin i} \sum_{p,q} \frac{-p}{pn+qn'} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[C_{pq} \frac{\partial C_{pq}}{\partial i} + S_{pq} \frac{\partial S_{pq}}{\partial i} \right] - \frac{\partial}{\partial i} \left[C_{pq} \frac{\partial C_{pq}}{\partial \Omega} + S_{pq} \frac{\partial S_{pq}}{\partial \Omega} \right] \right\}. \quad (40)$$

Chacune de ces expressions est identiquement nulle, les termes s'éliminant 2 par 2, et finalement, on trouve comme dans la 1^{ère} partie de la démonstration de Poisson, qu'il n'apparaît pas de terme séculaire dans le grand axe d'une planète P si on ne tient compte que des variations d'ordre 1 des éléments de la planète P elle-même. On peut noter que ceci reste vrai quelle que soit la fonction perturbatrice R supposée développable comme en (6), et donc, que ce résultat est vrai quelle que soit la nature des éléments osculateurs, c'est-à-dire quels que soient les repères choisis.

Par contre, pour les groupements (33) à (37), l'élimination des termes constants 2 par 2 n'est plus possible dès lors que R' n'est pas proportionnel à R . Il subsiste alors les termes constants suivants:

$$\frac{G^2 mm'}{n'a'} \sum_{p,q} \frac{pq}{pn+qn'} \frac{\partial}{\partial a'} [-C_{pq} S'_{pq} + S_{pq} C'_{pq}] \quad (41)$$

$$\frac{G^2 mm' \varphi'^2}{2n'a'^2 e'} \sum_{p,q} \frac{pq}{pn+qn'} \frac{\partial}{\partial e'} [-C_{pq} S'_{pq} + S_{pq} C'_{pq}] \quad (42)$$

$$\frac{G^2 mm' \varphi'}{2n'a'^2 e'} \sum_{p,q} \frac{-p}{pn+qn'} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega'} \left[C_{pq} \frac{\partial C'_{pq}}{\partial e'} + S_{pq} \frac{\partial S'_{pq}}{\partial e'} \right] - \frac{\partial}{\partial e'} \left[C_{pq} \frac{\partial C'_{pq}}{\partial \omega'} + S_{pq} \frac{\partial S'_{pq}}{\partial \omega'} \right] \right\} \quad (43)$$

$$\frac{G^2 mm'}{2n'a'^2 \varphi' \operatorname{tg} i'} \sum_{p,q} \frac{-p}{pn+qn'} \left\{ \frac{\partial}{\partial i'} \left[C_{pq} \frac{\partial C'_{pq}}{\partial \omega'} + S_{pq} \frac{\partial S'_{pq}}{\partial \omega'} \right] - \frac{\partial}{\partial \omega'} \left[C_{pq} \frac{\partial C'_{pq}}{\partial i'} + S_{pq} \frac{\partial S'_{pq}}{\partial i'} \right] \right\} \quad (44)$$

$$\frac{G^2 mm'}{2n'a'^2 \varphi' \sin i'} \sum_{p,q} \frac{-p}{pn+qn'} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Omega'} \left[C_{pq} \frac{\partial C'_{pq}}{\partial i'} + S_{pq} \frac{\partial S'_{pq}}{\partial i'} \right] - \frac{\partial}{\partial i'} \left[C_{pq} \frac{\partial C'_{pq}}{\partial \Omega'} + S_{pq} \frac{\partial S'_{pq}}{\partial \Omega'} \right] \right\} \quad (45)$$

qui s'ajoutent au terme déjà donné en (26), qu'on réécrit sous la forme:

$$-\frac{3G^2 mm'}{2a'^2} \sum_{p,q} \frac{pq^2}{(pn+qn')^2} [C_{pq} S'_{pq} - S_{pq} C'_{pq}]. \quad (46)$$

Un calcul tout à fait analogue montrerait qu'il subsiste également des termes séculaires apparemment irréductibles dans $\Delta_2 a'$. Dans un tel cas, seul un calcul effectif permet de déterminer à coup sûr si l'élimination

se produit d'une autre façon. Nous allons en fait montrer que ce terme est identiquement nul (globalement, et non par élimination des termes 2 par 2), à condition qu'on ait $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$. Voyons comment nous sommes arrivé à ce résultat.

2.4. Calcul effectif du terme séculaire de $\Delta_2 a$ ou de $\Delta_2 a'$

Dans les Expressions (41) à (46), les entiers p et q prennent leurs valeurs dans l'ensemble des entiers relatifs; les sommations doublement infinies qui en résultent sont préjudiciables à un calcul numérique. Cependant, nous savons que le terme séculaire cherché s'élimine si on a R proportionnel à R' . Or, on peut écrire:

$$R' = \frac{m}{m'} R + F \quad (47)$$

où F est la fonction $Gmr \cdot r' \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} \right)$, développable comme en (6):

$$F = Gmr \cdot r' \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} \right) = \sum_{p,q} A_{pq} \cos(pM + qM') + B_{pq} \sin(pM + qM') \quad (48)$$

de sorte qu'on a les relations suivantes entre les coefficients des développements de R et de R' :

$$C'_{pq} = C_{pq} + A_{pq} \\ S'_{pq} = S_{pq} + B_{pq}.$$

La valeur des termes constants (41) à (46) est alors inchangée si on y remplace partout C'_{pq} par A_{pq} et S'_{pq} par B_{pq} .

Or, les coefficients A_{pq} et B_{pq} sont beaucoup plus simples que ceux de la partie directe $1/\Delta$: on montre (cf. Brouwer et Clemence, p. 488) que ces coefficients sont de degré au moins égal à $\min(|p-1|+|q+1|, |q-1|+|p+1|)$ par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des 2 planètes. On connaît également des propriétés plus complexes mais du même type pour le développement de $1/\Delta$. Dans ces conditions, si on veut se contenter de calculer un développement limité du terme séculaire $[\Delta_2 a]$, limité aux termes d'un degré donné par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, le nombre d'arguments (p, q) à prendre en considération sera fini. Comme le terme séculaire du grand axe est de caractéristique zéro, son développement est pair par rapport aux variables e, e', i et i' . On trouve que pour avoir les termes de degré 2 du développement de $|\Delta_2 a|$, il suffit de ne considérer que les 9 arguments suivants: (1, -1), (2, -2), (1, -2), (2, -1), (2, -3), (1, -3), (1, 0), (2, 0) et (1, 1). Pour atteindre les termes de degré 4, il faut ajouter à cette liste les 9 autres arguments: (3, 0), (3, -1), (3, -2), (3, -3), (3, -4), (1, -4), (2, -4), (2, 1) et (1, 2). Notons qu'il n'y a pas de terme de degré zéro, ce cas correspondant à 2 orbites initiales circulaires et

Tableau 1. Valeurs des contributions $C_{(p,q)}$ des arguments (p,q) donnant naissance à un terme séculaire de degré 2 en excentricités dans le demi-grand axe de Jupiter perturbé par Saturne, à la 2^{ème} approximation d'une théorie de type classique en variables elliptiques héliocentriques. $C_{(p,q)}$ est exprimé en u.a./an et doit être multiplié par $(mm'/M_{\odot}^2)ee' \sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')$ qui vaut $7,217 \cdot 10^{-10}$ avec les éléments donnés par Simon et Bretagnon (1975)

Argument (p,q)	Cas 1 $C_{(p,q)}$	Cas 2 $C_{(p,q)}$	Cas 3 $C_{(p,q)}$
(1, -1)	11,73159	11,68066	11,74112953
(2, -2)	11,53791	11,49881	11,54850141
(1, -2)	-30,80484	-31,31727	-30,92373377
(2, -3)	-9,24598	-9,22769	-9,25539839
(2, -1)	-0,77280	-0,77946	-0,77477061
(1, 0)	-2,10461	-2,09225	-2,10568157
(1, -3)	20,62719	20,18514	20,59555284
(1, 1)	0,26372	0,26217	0,26385447
(2, 0)	-1,08957	-1,07801	-1,08945390
$\Sigma C_{(p,q)}$	0,14261	-0,86789	0
Conditions du calcul	$\begin{cases} N^2 a^3 = G(M_{\odot} + m) \\ N'^2 a'^3 = G(M_{\odot} + m') \\ \alpha = \frac{a}{a'} = 0,54543241 \end{cases}$	$\begin{cases} n^2 a^3 = G(M_{\odot} + m) \\ n'^2 a'^3 = G(M_{\odot} + m') \\ \alpha = \frac{a}{a'} = 0,54449947 \end{cases}$	$\begin{cases} N^2 a^3 = GM_{\odot} \\ N'^2 a'^3 = GM_{\odot} \\ \alpha = \frac{a}{a'} = 0,54531088 \end{cases}$
Valeurs numériques utilisées	$\begin{cases} N = 299,1283 \text{ j}^{-1} \\ N' = 120,4547 \text{ j}^{-1} \\ m = M_{\odot}/1047,355 \\ m' = M_{\odot}/3498 \end{cases}$	$\begin{cases} n = N - [\Delta_1 n] \\ n' = N' - [\Delta_1 n'] \\ [\Delta_1 n] = -6,3615 \text{ an}^{-1} \\ [\Delta_1 n'] = 110,2752 \text{ an}^{-1} \end{cases}$	

coplanaires, pour lequel les développements de R et de R' sont tels que pour tout p et tout q on a :

$$\frac{C_{pq}}{C'_{pq}} = \frac{S_{pq}}{S'_{pq}}$$

Pour déterminer le développement analytique de ce terme séculaire, limité aux termes de degré 2 puis 4, nous avons utilisé le programme de développement des équations de Lagrange exposé par ailleurs (Duriez, 1977), qui permet de calculer isolément le développement des seuls termes qui nous intéressent dans ces équations, et qui a été associé à un ensemble de sous-programmes permettant leur manipulation (intégration, multiplication, dérivation par rapport à l'une quelconque des variables...). Les variables par rapport auxquelles on développe les équations dans ce programme ne sont pas exactement celles utilisées ici, mais sont de toutes façons associées à des éléments d'orbite osculateurs héliocentriques et le passage à ces derniers est très facile. On y utilise notamment les variables Y et X représentatives du pôle et du péri vecteur :

$$X = e \exp \sqrt{-1\bar{\omega}}; \quad Y = \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1\Omega}$$

(où $\bar{\omega} = \Omega + \omega$), qui évitent les singularités des Equations (3) lorsque e ou i s'annulent. Par ailleurs, le programme auquel on se réfère ci-dessus a été modifié de façon à développer $1/\Delta$ au lieu de $1/\Delta^3$, mais selon les mêmes principes, pour ensuite traiter les équations de Lagrange sous leur forme qui dépend des dérivées partielles de la fonction perturbatrice par rapport aux variables. Cette modification a permis de gagner encore un facteur 2 en

moyenne sur la rapidité du calcul dans la nouvelle version par rapport à l'ancienne.

Dans ce programme, $1/\Delta$ est exprimé en coefficients de Laplace, calculés avec toute la précision souhaitée pour une valeur numérique du rapport α des grands axes; les valeurs de a et de a' sont obtenues par l'intermédiaire des moyens mouvements n et n' , eux aussi numériques, grâce à la 3^{ème} loi de Kepler :

$$n^2 a^3 = K; \quad n'^2 a'^3 = K'. \quad (49)$$

La possibilité de refaire très rapidement les calculs pour divers choix des constantes K et K' a été déterminante. Nous avons ainsi calculé la contribution de chacun des arguments précédents dans le développement analytique de $[\Delta_2 a]$ défini par par les Expressions (41) à (46), et nous avons observé les résultats suivants :

Au degré 2 il reste dans $\Delta_2 a$ et $\Delta_2 a'$ un terme séculaire de la forme :

$$\frac{mm'}{M_{\odot}^2} Cee' \sin(\bar{\omega} - \bar{\omega}') \quad (50)$$

où C est une constante numérique [dépendant de α et des moyens mouvements n et n' notamment dans les expressions de la forme $(pn + qn')$ qui apparaissent lors de l'intégration à l'ordre 1]. Cette constante est la somme des 9 contributions $C(p,q)$ relatives aux 9 arguments (p,q) de la 1^{ère} liste. Le Tableau 1 donne chacune de ces contributions au terme séculaire $[\Delta_2 a]$ de Jupiter perturbé par Saturne, calculées pour diverses définitions des grands axes. On observe que dans les Cas 1 et 2, leur somme est environ 100 fois plus petite

que les plus grandes de ces contributions, et que d'autre part, la valeur de cette somme est très sensible aux valeurs qu'on donne aux moyens mouvements et à la façon de calculer α : le Cas 1 correspond au calcul du demi-grand axe a à partir du moyen mouvement moyen N , le Cas 2 utilise, comme dans la méthode de Le Verrier, le moyen mouvement osculateur n déduit de N en retranchant la perturbation constante $[A_1 n]$ du moyen mouvement à l'ordre 1 des masses; pour ces deux cas, les masses interviennent numériquement dans la 3^{ème} loi de Kepler, et aussi dans $[A_1 n]$ pour le Cas 2.

Ces résultats montrent qu'il se produit une élimination partielle des diverses contributions; nous avons pensé que les masses intervenant dans la 3^{ème} loi de Kepler pouvaient avoir une influence sur le résultat, et c'est en essayant des grands axes et des moyens mouvements vérifiant $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$ que nous avons obtenu l'élimination totale du terme séculaire (Cas 3). Ceci prouvait que le terme séculaire apparu à la deuxième approximation était en fait d'ordre 3 des masses, et qu'il provenait de l'introduction numérique des masses dans le calcul des grands axes.

Le calcul de la partie de ce terme séculaire qui est de degré 4 par rapport aux excentricités et aux inclinaisons confirma pleinement le résultat obtenu pour le degré 2: Avec les 18 arguments (p, q) des 2 listes précédentes; on obtient le terme suivant:

$$\begin{aligned} & \frac{mm'}{M_\odot^2} \left\{ C_1 e'^2 \left[\sin^2 \frac{i}{2} \sin(2\bar{\omega}' - 2\Omega) + \sin^2 \frac{i'}{2} \sin(2\bar{\omega}' - 2\Omega') \right] \right. \\ & \quad \left. - 2 \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \sin(2\bar{\omega}' - \Omega - \Omega') \right] \\ & + C_2 e e' \left[\sin^2 \frac{i}{2} \sin(\bar{\omega} + \bar{\omega}' - 2\Omega) \right. \\ & \quad \left. + \sin^2 \frac{i'}{2} \sin(\bar{\omega} + \bar{\omega}' - 2\Omega') \right. \\ & \quad \left. - 2 \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \sin(\bar{\omega} + \bar{\omega}' - \Omega - \Omega') \right] \\ & + C_3 e^2 \left[\sin^2 \frac{i}{2} \sin(2\bar{\omega} - 2\Omega) + \sin^2 \frac{i'}{2} \sin(2\bar{\omega} - 2\Omega') \right. \\ & \quad \left. - 2 \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \sin(2\bar{\omega} - \Omega - \Omega') \right] \\ & + C_4 e e' \left(\sin^2 \frac{i}{2} + \sin^2 \frac{i'}{2} \right) \sin(\bar{\omega} - \bar{\omega}') \\ & + C_5 e e' \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \sin(\bar{\omega} - \bar{\omega}' + \Omega - \Omega') \\ & + C_6 e e' \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \sin(\bar{\omega} - \bar{\omega}' - \Omega + \Omega') \\ & + C_7 e e'^3 \sin(\bar{\omega} - \bar{\omega}') + C_8 e^2 e'^2 \sin(2\bar{\omega} - 2\bar{\omega}') \\ & \left. + C_9 e^3 e' \sin(\bar{\omega} - \bar{\omega}') \right\}. \quad (51) \end{aligned}$$

Dans les Cas 1 et 2 on observa que les 18 contributions à chaque C_i ($i=1$ à 9) ont pour somme un nombre environ 10000 fois plus petit que les plus grandes de ces contributions; l'élimination y était donc aussi presque complète. Elle fut complète dans le Cas 3. Par ailleurs, on a observé la même élimination pour d'autres couples de planètes correspondant à d'autres valeurs de α , de sorte qu'en généralisant ces résultats numériques, il devenait possible d'affirmer qu'il n'y a pas de terme séculaire d'ordre 2 par rapport aux masses dans l'expression des grands axes héliocentriques obtenus par la méthode de Le Verrier, mais qu'il peut apparaître un terme séculaire d'ordre 3 à la deuxième approximation suivant le choix de la solution képlérienne de départ. Ces résultats montrent qu'il faut associer avec prudence le numéro d'ordre d'une approximation et l'ordre en masses de cette approximation.

Pour remédier au manque de généralité dû au fait que les résultats précédents sont uniquement numériques et ne concernent que les termes de degré 2 et 4, nous avons cherché à démontrer analytiquement l'annulation du terme séculaire lorsqu'on fait $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$, quelles que soient les conditions initiales. La démonstration proposée dans la suite est en fait restreinte au cas des orbites coplanaires, quel que soit le rapport α de leurs grands axes et quelles que soient leurs excentricités; la méthode utilisée dans ce cas est sans doute généralisable au cas non coplanaire, mais impliquerait des calculs considérables et sans doute démesurés par rapport aux conclusions qu'on en tirerait et qui sont déjà acquises numériquement pour les termes de degré 2 par rapport aux inclinaisons.

Remarques. Il va sans dire que la substitution des valeurs de $e, e', i, i', \omega, \omega', \Omega$ et Ω' dans les expressions (50) et (51) confirmèrent pleinement les résultats numériques de Simon et de Bretagnon. Le terme séculaire ainsi obtenu dans le demi-grand axe de Jupiter perturbé par Saturne par la méthode de Le Verrier vaut $6,26 \cdot 10^{-10}$ u.a./an, et celui de Saturne $7,36 \cdot 10^{-10}$ u.a./an. Ceux des autres planètes sont au moins 100 fois plus petits. De tels termes ne sont pas cependant complètement négligeables en théorie classique, car ils amènent des termes en t^2 dans la longitude moyenne des planètes, égaux à $9,86 \cdot 10^{-6}$ ("/an²) t^2 pour celle de Jupiter et $2,54 \cdot 10^{-6}$ ("/an²) t^2 pour celle de Saturne, soit respectivement $9'',86$ et $2'',54$ en 1000 ans. Il faut dire encore que ces termes sont profondément modifiés par les termes séculaires qui s'introduisent par la suite à la 3^{ème} approximation et aux suivantes (Simon et Bretagnon).

Nous avons observé, pour le couple Jupiter-Saturne, qu'on a un rapport voisin de 100 entre le coefficient C de la partie principale de $[A_2 a]$ [celle de degré 2 exprimée en (50)], et les coefficients C_i de la partie qui est de degré 4 donnée en (51); alors, quand on donne aux excentricités et aux inclinaisons leurs valeurs numériques, les termes de degré 4 deviennent complètement négligeables; la

grande inégalité qui correspond à l'argument (2, -5), donnerait une contribution de degré 6 et elle est elle aussi complètement négligeable.

Par contre, on pouvait s'attendre à ce que l'argument (1, -2) résonant pour le couple Uranus-Neptune donne une forte contribution au terme séculaire du grand axe de ces planètes; en fait, l'importance de cette contribution est toute relative car les masses d'Uranus et de Neptune étant assez voisines, la relation $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$ est presque vérifiée pour ces planètes dans la méthode de Le Verrier, et de ce fait, les termes séculaires de $\Delta_2 a$ pour ces planètes sont extrêmement petits.

3. Démonstration du théorème de Poisson en variables héliocentriques

Dans ce paragraphe, on se propose de mettre le terme séculaire de $\Delta_2 a$ sous une forme qui permette de montrer qu'il est identiquement nul lorsque $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$. Il s'agit donc d'une démonstration directe de l'élimination de ce terme.

3.1. Mise en forme de $[\Delta_2 a]$

D'après les résultats obtenus au paragraphe précédent, il suffit de calculer $\Delta_2 a$ par les Expressions (23) et (33) à (37), en y remplaçant R' par la fonction F définie en (47). Ces expressions se simplifient notablement lorsqu'on remarque que (47) peut se mettre sous la forme:

$$R' = \frac{m}{m'} R + \frac{dU}{dt} + \text{termes d'ordre 2 en masses} \quad (52)$$

où U est strictement d'ordre 1 en masses. On a en effet:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -GM_{\odot} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \text{termes d'ordre 1 en masses}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = -GM_{\odot} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} + \text{termes d'ordre 1 en masses} \quad (53)$$

et donc:

$$F = Gm \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} \right) = \frac{m}{M_{\odot}} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r}' \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right) + \text{ordre 2.} \quad (54)$$

En remplaçant R' par $\frac{dU}{dt}$ dans les Expressions (23) et (33) à (37), leur partie constante se réduit alors pour le problème plan, à la somme suivante, dans laquelle on ne recherche que les termes constants des expressions

entre crochets:

$$\left[\frac{d}{dt} \Delta_2 a \right] = \frac{2}{na} \left\{ \frac{3}{a'^2} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial^2 U}{\partial M'^2} dt \right] + \frac{2}{n'a'} \frac{\partial}{\partial a'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \frac{\partial U}{\partial M'} \right] + \frac{\phi'^2}{n'a'^2 e'} \frac{\partial}{\partial e'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \frac{\partial U}{\partial M'} \right] + \frac{\phi'}{n'a'^2 e'} \left(\frac{\partial}{\partial \omega'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \frac{\partial U}{\partial e'} \right] - \frac{\partial}{\partial e'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \frac{\partial U}{\partial \omega'} \right] \right) \right\}. \quad (55)$$

Les termes d'ordre 2 en masses dans (52) n'interviennent pas dans $[\Delta_2 a']$, car il faudrait en prendre la dérivée partielle par rapport à M' qui est alors une somme de termes purement périodiques.

Il n'a pas été possible de montrer que le fait de pouvoir identifier F à la dérivée totale d'une fonction U , soit suffisant pour que l'Expression (55) de $[\Delta_2 a]$ soit nulle; nous allons voir que la forme des fonctions F ou U intervient aussi, en relation avec celle de R .

Dans l'expression analytique (50) et (51) de $[\Delta_2 a]$ obtenue par ordinateur, les coefficients numériques C et C_i résultent du calcul d'un certain nombre de coefficients de Laplace dans les développements de R et de R' , coefficients qui sont en fait des séries entières en α . Si on développe analytiquement par rapport à α , les expressions qu'on obtient deviennent tellement complexes qu'il n'est pas possible de conclure à leur identification à zéro. Par ailleurs, les résultats numériques montrent que $[\Delta_2 a]$ s'annule quel que soit α (avec $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$ évidemment). C'est pourquoi il a semblé préférable d'adopter pour R un développement en polynômes de Legendre, qui met α^k en facteur du polynôme P_k de degré k ; il suffira ensuite d'exhiber la partie de $[\Delta_2 a]$ qui est en facteur de α^k et de montrer qu'elle est nulle quel que soit k . On écrit donc:

$$R = \sum_{k=2}^{\infty} R_k = Gm' \frac{1}{a'} \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k \left(\frac{r}{a} \right)^k \left(\frac{a'}{r'} \right)^{k+1} P_k(\cos H) \quad (56)$$

où H désigne l'angle entre les rayons vecteurs héliocentriques \mathbf{r} et \mathbf{r}' , et en supposant $r' > r$. Ce dernier point implique que l'Expression (55) de $[\Delta_2 a]$ est relative au grand axe d'une planète P plus proche du Soleil que P'; on verra ensuite comment traiter le cas inverse.

Dans le problème plan, $\frac{r}{a}$ et $\frac{a'}{r'}$ sont des fonctions des excentricités et des anomalies vraies v et v' , et on a $H = v - v' + \omega - \omega'$. Comme F et U peuvent aussi s'exprimer en fonction de $e, e', v, v', \omega, \omega'$, il aurait été agréable de pouvoir calculer l'Expression (55) de $[\Delta_2 a]$ à partir des développements de R et de U en anomalies vraies, mais, comme il reste à effectuer au moins une intégration par rapport au temps, et que v et v' sont des

fonctions du temps indépendantes, il est nécessaire de développer en anomalies moyennes; on obtient:

$$R_k = Gm' \frac{a^k}{a'^{k+1}} \sum_{l=0}^{E(k/2)} C_{k,l} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \cdot \sum_{q=-\infty}^{+\infty} X_p^{k,k-2l}(e) X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') \cos [pM + qM' + (k-2l)(\omega - \omega')] \quad (57)$$

où $C_{k,l}$ est le coefficient de $\cos(k-2l)H$ dans le développement de P_k en cosinus des multiples de H (cf. Brouwer and Clemence p. 121):

$$C_{k,0} = 2 \cdot \frac{1.3. \dots (2k-1)}{2.4. \dots 2k}$$

$$C_{k,l} = (2 - \delta_k^{2l}) \frac{1.3. \dots (2l-1)}{2.4. \dots 2l} \cdot \frac{1.3. \dots (2k-2l-1)}{2.4. \dots (2k-2l)}$$

où δ_k^{2l} est le symbole de Kronecker et $E\left(\frac{k}{2}\right)$ désigne la partie entière de $k/2$.

Les coefficients de Hansen $X_k^{n,m}(e)$ sont des fonctions de l'excentricité e qui sont les coefficients du développement de Fourier en anomalie moyenne de la fonction:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \sqrt{-1}mv = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^{n,m}(e) \exp \sqrt{-1}kM \quad (58)$$

d'où on tire:

$$X_k^{n,m}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \sqrt{-1}mv \exp \sqrt{-1} - kMdM \quad (59)$$

$$X_k^{n,m}(e) = X_{-k}^{n,-m}(e) \quad (60)$$

et on peut montrer que $X_k^{n,m}(e)$ est de degré $|k-m|$ en excentricité. De même, on peut développer F , puis U en coefficients de Hansen, à partir de l'expression:

$$F = Gmaa' \left[\frac{1}{a'^3} \cdot \frac{r}{a} \cdot \frac{a'^2}{r'^2} - \frac{1}{a^3} \frac{r'}{a'} \frac{a^2}{r^2} \right] \cos(v - v' + \omega - \omega') \quad (61)$$

soit encore:

$$F = Gmaa' \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a'^3} X_p^{1,1}(e) X_{-q}^{-2,1}(e') - \frac{1}{a^3} X_p^{-2,1}(e) X_{-q}^{1,1}(e') \right) \cos(pM + qM' + \omega - \omega'). \quad (62)$$

La propriété que possède la fonction F d'être la dérivée d'une fonction U , s'exprime par la relation

suivante entre les coefficients de Hansen:

$$p^2 X_p^{1,1}(e) = X_p^{-2,1} \forall p. \quad (63)$$

En effet, chacune des Equations (53) est équivalente à la suivante:

$$\frac{d^2}{dt^2} (r \exp \sqrt{-1}v) = -\mu \frac{r \exp \sqrt{-1}v}{r^3}$$

puis, si on pose $n^2 a^3 = \mu$ et $ndt = dM$, on a l'équation:

$$\frac{d^2}{dM^2} \left(\frac{r}{a} \exp \sqrt{-1}v \right) = -\frac{a^2}{r^2} \exp \sqrt{-1}v.$$

On obtient ensuite l'égalité (63) en développant les 2 membres de cette équation en coefficients de Hansen comme en (58), et en identifiant les coefficients de $\exp \sqrt{-1}kM$. Ceci permet d'écrire F sous la forme:

$$F = Gmaa' \sum_p \sum_q \left(\frac{q^2}{a'^3} - \frac{p^2}{a^3} \right) \cdot X_p^{1,1}(e) X_{-q}^{1,1}(e') \cos(pM + qM' + \omega - \omega'). \quad (64)$$

Cependant, sa réduction à la forme $\frac{dU}{dt}$ n'apparaît que si on a $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$: si on avait $n^2 a^3 = \mu$ et $n'^2 a'^3 = \mu' (\mu \neq \mu')$, on aurait en effet:

$$\frac{q^2}{a'^3} - \frac{p^2}{a^3} = \frac{q^2 n'^2}{\mu'} - \frac{p^2 n^2}{\mu}$$

qui est irréductible; mais si μ et μ' sont égaux (à GM_\odot par exemple), on écrit alors:

$$\frac{q^2}{a'^3} - \frac{p^2}{a^3} = \frac{1}{GM_\odot} (qn' - pn)(pn + qn') \quad (65)$$

d'où on déduit:

$$U = \frac{m}{M_\odot} aa' \sum_p \sum_q (qn' - pn) \cdot X_p^{1,1}(e) X_{-q}^{1,1}(e') \sin(pM + qM' + \omega - \omega'). \quad (66)$$

Avec les expressions de R et de U écrites en (57) et (66), il est alors possible de calculer $[\Delta_2 a]$ par son Expression (55). Cependant, la dérivée partielle par rapport à a' doit se faire avant la transformation (65), car on a vu que les moyens mouvements issus d'une dérivation de M ou de M' par rapport au temps ne doivent plus être considérés comme fonctions de a ou de a' . Le 2^{ème} terme de (55) doit donc être calculé à partir de $\frac{\partial}{\partial a'} \left[\frac{\partial R}{\partial M} \int \frac{\partial F}{\partial M'} dt \right]$; on trouve qu'il se simplifie ensuite avec le 1^{er} terme de (55), pour donner finalement:

$$\frac{2}{na} \left(\frac{3}{a'^2} \left[\frac{\partial R_k}{\partial M} \int \frac{\partial^2 U}{\partial M'^2} dt \right] + \frac{2}{n'a'} \frac{\partial}{\partial a'} \left[\frac{\partial R_k}{\partial M} \int \frac{\partial F}{\partial M'} dt \right] \right) = \frac{2Gmm'}{naM_\odot} \frac{a^{k+1}}{a'^{k+2}} \sum_{l=0}^{E(k/2)} \frac{C_{k,l}}{2} \sum_{p,q} \left(2pqk \frac{qn' - pn}{n'} + 3pq^2 \right) \cdot [X_p^{k,k-2l}(e) X_p^{1,1}(e) X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_{-q}^{1,1}(e') \sin(k-2l-1)(\omega - \omega') + X_p^{k,k-2l}(e) X_{-p}^{1,1}(e) X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_q^{1,1}(e') \sin(k-2l+1)(\omega - \omega')]. \quad (67)$$

Les 3 derniers termes de (55) amènent ensuite 3 termes constants qu'on peut réunir sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{2}{na} \left\{ \frac{\varphi'^2}{n'a'^2 e'} \frac{\partial}{\partial e'} \left[\frac{\partial R_k}{\partial M} \frac{\partial U}{\partial M'} \right] + \frac{\varphi'}{n'a'^2 e'} \left(\frac{\partial}{\partial \omega'} \left[\frac{\partial R_k}{\partial M} \frac{\partial U}{\partial e'} \right] - \frac{\partial}{\partial e'} \left[\frac{\partial R_k}{\partial M} \frac{\partial U}{\partial \omega'} \right] \right) \right\} = \frac{2Gmm'}{naM_\odot} \frac{a^{k+1}}{a'^{k+2}} \sum_{l=0}^{E(k/2)} \frac{C_{k,l}}{2} \sum_{p,q} \left(-p \frac{qn' - pn}{n'} \right) \\ \cdot \left[X_p^{k,k-2l}(e) X_p^{1,1}(e) \left\{ \left(q \frac{\varphi'^2}{e'} + \frac{\varphi'}{e'} \right) \frac{d}{de'} (X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_{-q}^{1,1}(e')) \right. \right. \\ \left. \left. + (k-2l-1) \frac{\varphi'}{e'} X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') \frac{d}{de'} X_{-q}^{1,1}(e') \right\} \sin(k-2l-1)(\omega-\omega') \right. \\ \left. + X_p^{k,k-2l}(e) X_{-p}^{1,1}(e) \left\{ \left(q \frac{\varphi'^2}{e'} - \frac{\varphi'}{e'} \right) \frac{d}{de'} (X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_q^{1,1}(e')) \right. \right. \\ \left. \left. + (k-2l+1) \frac{\varphi'}{e'} X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') \frac{d}{de'} X_q^{1,1}(e') \right\} \sin(k-2l+1)(\omega-\omega') \right]. \quad (68) \end{aligned}$$

En remplaçant G par $n^2 a^3 / M_\odot$ et en regroupant les expressions (67) et (68), on peut écrire finalement $\left[\frac{d}{dt} \Delta_2 a \right]$ sous la forme:

$$\left[\frac{d}{dt} \Delta_2 a \right] = an \frac{mm'}{M_\odot^2} \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^{k+2} \sum_{l=0}^{E(k/2)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{n}{n'} C_{k,l} [A_{k,l}^{(1)}(e) B_{k,l}^{(1)}(e') \sin(k-2l-1)(\omega-\omega') \\ & + A_{k,l}^{(2)}(e) B_{k,l}^{(2)}(e') \sin(k-2l+1)(\omega-\omega')] \\ & + C_{k,l} [A_{k,l}^{(3)}(e) B_{k,l}^{(3)}(e') \sin(k-2l-1)(\omega-\omega') \\ & + A_{k,l}^{(4)}(e) B_{k,l}^{(4)}(e') \sin(k-2l+1)(\omega-\omega')] \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

avec:

$$A_{k,l}^{(1)}(e) = \sum_p p^2 X_p^{k,k-2l}(e) X_p^{1,1}(e) \quad (70)$$

$$A_{k,l}^{(2)}(e) = \sum_p p^2 X_p^{k,k-2l}(e) X_{-p}^{1,1}(e) \quad (71)$$

$$A_{k,l}^{(3)}(e) = \sum_p p X_p^{k,k-2l}(e) X_p^{1,1}(e) \quad (72)$$

$$A_{k,l}^{(4)}(e) = \sum_p p X_p^{k,k-2l}(e) X_{-p}^{1,1}(e) \quad (73)$$

$$B_{k,l}^{(1)}(e') = \sum_q Y_{k,l,q}(e') \quad (74)$$

$$B_{k,l}^{(2)}(e') = \sum_q Z_{k,l,q}(e') \quad (75)$$

$$B_{k,l}^{(3)}(e') = \sum_q (3q^2 X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_{-q}^{1,1}(e') - q Y_{k,l,q}(e')) \quad (76)$$

$$B_{k,l}^{(4)}(e') = \sum_q (3q^2 X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_q^{1,1}(e') - q Z_{k,l,q}(e')) \quad (77)$$

Dans l'Expression (69), on a mis en évidence pour chaque valeur de k , une partie en facteur de $\frac{n}{n'} \alpha^{k+2}$, soit encore $\alpha^{k+\frac{1}{2}}$, et une autre en facteur de α^{k+2} . On va montrer que chacune de ces parties est identiquement nulle, en utilisant leur structure ainsi que des relations de récurrence entre les coefficients de Hansen.

3.2. L'élimination

On peut remarquer que pour k fixé, chaque partie de (69) est une somme de termes en $\sin i(\omega-\omega')$ où i a la parité inverse de k et varie entre -1 et $k+1$. La valeur $i = \pm 1$ est atteinte (pour k pair) dans 3 termes: $(k-2l+1)$ et $(k-2l-1)$ pour $l = E\left(\frac{k}{2}\right)$, et $(k-2l-1)$ pour $l = E\left(\frac{k}{2}\right) - 1$. La valeur $i=0$ donne un terme nul par

$$\begin{aligned} Y_{k,l,q}(e') = -2kq X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_{-q}^{1,1}(e') + \frac{\varphi'^2}{e'} \frac{d}{de'} (q X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_{-q}^{1,1}(e')) + \frac{\varphi'}{e'} \frac{d}{de'} (X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_{-q}^{1,1}(e')) \\ + (k-2l-1) \frac{\varphi'}{e'} X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') \frac{d}{de'} X_{-q}^{1,1}(e') \quad (78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{k,l,q}(e') = -2kq X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_q^{1,1}(e') + \frac{\varphi'^2}{e'} \frac{d}{de'} (q X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_q^{1,1}(e')) - \frac{\varphi'}{e'} \frac{d}{de'} (X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') X_q^{1,1}(e')) \\ + (k-2l+1) \frac{\varphi'}{e'} X_{-q}^{-k-1,k-2l}(e') \frac{d}{de'} X_q^{1,1}(e'). \quad (79) \end{aligned}$$

lui-même. La valeur $i=k+1$ est atteinte dans un seul terme: celui en $(k-2l+1)$ pour $l=0$. Toutes les autres valeurs de i sont atteintes dans 2 termes correspondants à des valeurs consécutives de l , l'une dans $(k-2l-1)$, l'autre dans $(k-2l+1)$. On va en fait montrer que les coefficients de $\sin i(\omega-\omega')$ sont nuls quel que soit i , pour tout k .

Les simplifications qu'on va faire apparaître dans l'Expression (70) à (79) de ces coefficients, grâce à des relations entre les coefficients de Hansen, ont toutes été contrôlées numériquement pour les premières valeurs de k et pour quelques valeurs des excentricités. Ces calculs ont permis de mettre en évidence le processus d'élimination, que nous avons ensuite démontré pour k , e et e' quelconques, et qui peut s'énoncer par les quatre propositions suivantes:

Pour la partie en facteur de $\frac{n}{n'}$:

Proposition A: Cette partie est nulle terme à terme car on a: $B_{k,l}^{(1)}(e')=B_{k,l}^{(2)}(e')=0$ pour tout k et tout l , quelle que soit l'excentricité e' .

Pour la partie indépendante de $\frac{n}{n'}$:

Proposition B: Pour tout k et tout l tels que $1 < i = k-2l-1 < k+1$, le coefficient $C_{k,l}A_{k,l}^{(3)}(e)B_{k,l}^{(3)}(e') + C_{k,l+1}A_{k,l+1}^{(4)}(e)B_{k,l+1}^{(4)}(e')$ de $\sin i(\omega-\omega')$ est nul, quelles que soient e et e' .

Proposition C: Pour tout k pair, lorsque $l=\frac{k}{2}$, le coefficient $C_{k,l-1}A_{k,l-1}^{(3)}(e)B_{k,l-1}^{(3)}(e') - C_{k,l}A_{k,l}^{(3)}(e)B_{k,l}^{(3)}(e') + C_{k,l}A_{k,l}^{(4)}(e)B_{k,l}^{(4)}(e')$ de $\sin(\omega-\omega')$ est nul, quelles que soient e et e' .

Proposition D: Pour tout k , le coefficient de $\sin(k+1)(\omega-\omega')$ est nul car $A_{k,0}^{(4)}(e)$ est identiquement nul.

Vue la structure de l'Expression (69), ces 4 propositions suffisent pour assurer que $\left[\frac{d}{dt} \Delta_2 a\right]$ est identiquement nul quelles que soient les excentricités et quel que soit le rapport α des grands axes.

Dans la démonstration qui suit de ces 4 propositions, on n'a donné que les principales étapes des calculs, avec les indications nécessaires à leur obtention, ceci pour ne pas allonger démesurément cet article. Rappelons que chaque étape a été vérifiée numériquement pour un certain nombre de valeurs des paramètres.

Remarque. La décomposition en facteurs décrite en (65) n'est plus possible si on a $\mu \neq \mu'$, mais, si on pose $\mu = G(M_\odot + m)$ et $\mu' = \mu \left(1 + \frac{m' - m}{M_\odot + m}\right)$ on pourra écrire:

$$\frac{q^2}{a'^3} - \frac{p^2}{a^3} = \frac{1}{\mu} (qn' - pn) (pn + qn')$$

$$- \frac{q^2 n'^2}{\mu} \cdot \frac{m' - m}{M_\odot + m} + \text{ordre 2.}$$

Le terme de $\Delta_2 a$ provenant de la 1^{ère} partie de cette expression s'annule, et il reste un terme ayant en facteur $mm'(m'-m)$, qui est donc bien d'ordre 3 en masses et qui ne s'annule pas si $m \neq m'$, comme on l'a constaté numériquement.

3.2.1. Quelques relations entre les coefficients de Hansen

Les coefficients $A_{k,l}^{(i)}$ et $B_{k,l}^{(i)}$ ($i=1$ à 4) se simplifient si on tient compte des relations suivantes entre les coefficients de Hansen:

$$\bullet \sum_k X_k^{n_1, m_1}(e) X_k^{n_2, m_2}(e) = X_0^{n_1 + n_2, m_1 - m_2}(e) \quad (80)$$

C'est en effet le terme constant du développement de Fourier de

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{n_1} \exp\sqrt{-1}m_1 v \times \left(\frac{r}{a}\right)^{n_2} \exp\sqrt{-1}m_2 v.$$

$$\bullet k X_k^{n, m}(e) = \frac{-ne}{2\varphi} (X_k^{n-1, m+1}(e) - X_k^{n-1, m-1}(e)) + m\varphi X_k^{n-2, m}(e) \quad (81)$$

obtenue par l'intégration par parties de la Relation (59), en y faisant, grâce au formulaire du mouvement elliptique:

$$\frac{d}{dM} \left(\frac{r}{a}\right) = \frac{e \sin v}{\varphi}; \quad \frac{dv}{dM} = \frac{a^2}{r^2} \varphi.$$

On en déduit notamment, pour $k=0$:

$$m X_0^{n-2, m}(e) = \frac{ne}{2\varphi^2} (X_0^{n-1, m+1}(e) - X_0^{n-1, m-1}(e)). \quad (82)$$

$$\bullet \sum_k k X_k^{n, m}(e) X_k^{1, 1}(e) = \frac{m+n}{n+1} \varphi X_0^{n-1, m-1}(e) \quad (83)$$

Cette relation est obtenue en multipliant les 2 membres de (81) par $X_k^{1, 1}(e)$, et en appliquant les Relations (80) puis (82). On obtient de la même façon:

$$\bullet \sum_k k X_k^{n, m}(e) X_{-k}^{1, 1}(e) = \frac{m-n}{n+1} \varphi X_0^{n-1, m+1}(e) \quad (84)$$

En appliquant les Relations (63) puis (80), on obtient encore:

$$\bullet \sum_k k^2 X_k^{n, m}(e) X_k^{1, 1}(e) = X_0^{n-2, m-1}(e) \quad (85)$$

$$\bullet \sum_k k^2 X_k^{n, m}(e) X_{-k}^{1, 1}(e) = X_0^{n-2, m+1}(e) \quad (86)$$

On a enfin, pour la dérivée des coefficients de Hansen:

$$\bullet \frac{d}{de} X_k^{n, m}(e) = \frac{1}{2} (m-n) X_k^{n-1, m+1}(e) - \frac{1}{2} (m+n) X_k^{n-1, m-1}(e) + \frac{m}{2\varphi^2} (X_k^{n, m+1}(e) - X_k^{n, m-1}(e)) \quad (87)$$

obtenue par dérivation de (59) avec:

$$\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{r}{a} \right) = -\cos v; \quad \frac{\partial v}{\partial e} = \sin v \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{\varphi^2} \right).$$

$$\bullet \quad \varphi^2 \frac{d}{de} X_0^{n,m}(e) + (2n+3)e X_0^{n,m}(e) + \frac{n+2}{2} (X_0^{n+1,m+1}(e) + X_0^{n+1,m-1}(e)) = 0 \quad (88)$$

obtenue en dérivant par rapport à e l'expression:

$$X_0^{n,m}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a} \right)^n \exp \sqrt{-1} m v dM$$

dans laquelle, grâce à $dM = \frac{r^2}{a^2} \frac{dv}{\varphi}$, v devient la variable muette et on peut utiliser la relation:

$$\frac{d}{de} \left(\frac{r}{a} \right) = \frac{d}{de} \left(\frac{1-e^2}{1+e \cos v} \right) = \frac{-2e}{\varphi^2} \frac{r}{a} - \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{r^2}{a^2} \right) \cos v.$$

3.2.2. Démonstration de la proposition A

Quels que soient k, l et e' , on a: $B_{k,l}^{(1)}(e') = \sum_q Y_{k,l,q}(e') = 0$.

L'Expression (78) de $Y_{k,l,q}$ est en effet la somme de quatre termes; pour le premier terme, on applique la formule (83) qui donne:

$$-2k \sum_q q X_q^{-k-1,k-2l}(e') X_q^{1,1}(e') = 2(2l+1) \varphi' X_0^{-k-2,k-2l-1}(e').$$

On en déduit le deuxième terme:

$$\frac{\varphi'^2}{e'} \frac{d}{de'} \left(\sum_q q X_q^{-k-1,k-2l}(e') X_q^{1,1}(e') \right) = \frac{2l+1}{k} \varphi' X_0^{-k-2,k-2l-1}(e') - \frac{(2l+1)}{k} \frac{\varphi'^3}{e'} \frac{d}{de'} X_0^{-k-2,k-2l-1}(e').$$

D'après (80) on a pour le troisième terme:

$$\frac{\varphi'}{e'} \frac{d}{de'} \left(\sum_q X_q^{-k-1,k-2l}(e') X_q^{1,1}(e') \right) = \frac{\varphi'}{e'} \frac{d}{de'} X_0^{-k,k-2l-1}(e')$$

puis en appliquant (87), cette expression est encore égale à:

$$\frac{\varphi'}{e'} \left[\frac{2k-2l-1}{2} X_0^{-k-1,k-2l}(e') + \frac{2l+1}{2} X_0^{-k-1,k-2l-2}(e') + \frac{k-2l-1}{2\varphi'^2} (X_0^{-k,k-2l}(e') - X_0^{-k,k-2l-2}(e')) \right].$$

Enfin, pour le dernier terme de $Y_{k,l,q}$ sachant que l'on a, d'après (87):

$$\frac{d}{de'} X_q^{1,1}(e') = -X_q^{0,0}(e') - \frac{1}{2\varphi'^2} (X_q^{1,0}(e') - X_q^{1,2}(e'))$$

on obtient, grâce à (80):

$$(k-2l-1) \frac{\varphi'}{e'} \sum_q X_q^{-k-1,k-2l}(e') \frac{d}{de'} X_q^{1,1}(e') = -(k-2l-1) \frac{\varphi'}{e'} \left[X_0^{-k-1,k-2l}(e') + \frac{1}{2\varphi'^2} (X_0^{-k,k-2l}(e') - X_0^{-k,k-2l-2}(e')) \right].$$

Lorsqu'on regroupe ces résultats, il reste après simplification:

$$B_{k,l}^{(1)}(e') = \frac{2l+1}{k} \frac{\varphi'}{e'} \left[(2k+1)e' X_0^{-k-2,k-2l-1}(e') + \frac{k}{2} (X_0^{-k-1,k-2l}(e') + X_0^{-k-1,k-2l-2}(e')) - \varphi'^2 \frac{d}{de'} X_0^{-k-2,k-2l-1}(e') \right].$$

La quantité entre crochets est identiquement nulle car on y reconnaît l'Expression (88) dans laquelle on aurait fait $n = -k-2$ et $m = k-2l-1$.

En procédant de la même façon avec $Z_{k,l,q}(e')$, on obtient:

$$B_{k,l}^{(2)}(e') = \sum_q Z_{k,l,q}(e') = -\frac{(2k-2l+1)}{k} \frac{\varphi'}{e'} \left[(2k+1)e' X_0^{-k-2,k-2l+1}(e') + \frac{k}{2} (X_0^{-k-1,k-2l+2}(e') + X_0^{-k-1,k-2l}(e')) - \varphi'^2 \frac{d}{de'} X_0^{-k-2,k-2l+1}(e') \right]$$

C.Q.F.D.

qui est aussi identiquement nul pour la même raison.

3.2.3. Démonstration de la proposition B

Pour k et l vérifiant $1 < k - 2l - 1 < k + 1$ on a :

$$C_{k,l} A_{k,l}^{(3)}(e) B_{k,l}^{(3)}(e') + C_{k,l+1} A_{k,l+1}^{(4)}(e) B_{k,l+1}^{(4)}(e') = 0.$$

Pour ces valeurs de k et de l , on a d'abord : $\delta_k^{2l} = \delta_k^{2l+2} = 0$; on déduit alors de l'expression $C_{k,l}$ donnée en (57) :

$$\frac{C_{k,l}}{C_{k,l+1}} = \frac{2k - 2l - 1}{2l + 1} \cdot \frac{2l + 2}{2k - 2l}. \tag{89}$$

Des expressions de $A_{k,l}^{(3)}(e)$ et de $A_{k,l}^{(4)}(e)$ données en (72) et en (73), on tire ensuite pour tout k et tout l , grâce aux Relations (83) et (84) :

$$\left. \begin{aligned} A_{k,l}^{(3)}(e) &= \frac{2k - 2l}{k + 1} \varphi X_0^{k-1, k-2l-1}(e) \\ A_{k,l+1}^{(4)}(e) &= -\frac{2l + 2}{k + 1} \varphi X_0^{k-1, k-2l-1}(e) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{A_{k,l}^{(3)}(e)}{A_{k,l+1}^{(4)}(e)} = -\frac{2k - 2l}{2l + 2}. \tag{90}$$

En appliquant la Formule (85) au calcul du 1^{er} terme de $B_{k,l}^{(3)}$ donné en (76), puis en déterminant le 2^{eme} terme $\sum_q q Y_{k,l,q}$ par un calcul analogue à celui décrit dans la proposition A, on obtient pour tout k et tout l :

$$B_{k,l}^{(3)}(e') = (2k + 3) X_0^{-k-3, k-2l-1}(e') - \frac{\varphi'^2}{e'} \frac{d}{de'} X_0^{-k-3, k-2l-1}(e') + \frac{2l + 1}{k} \frac{\varphi'}{e'} \frac{d}{de'} (\varphi' X_0^{-k-2, k-2l-1}(e')) \\ + \frac{k - 2l - 1}{2e'\varphi'} \left[2\varphi' X_0^{-k-2, k-2l-2}(e') - \frac{e'}{2\varphi'} (X_0^{-k-1, k-2l-3}(e') - 2X_0^{-k-1, k-2l-1}(e') + X_0^{-k-1, k-2l+1}(e')) \right].$$

En remarquant que les 2 premiers termes de cette expression peuvent s'écrire autrement grâce à la Relation (88), et que les 3 derniers peuvent se simplifier en leur appliquant deux fois la Formule (82), on obtient pour tout k et tout l , après réduction :

$$B_{k,l}^{(3)}(e') = \frac{2l + 1}{ke'} \left[\varphi' \frac{d}{de'} (\varphi' X_0^{-k-2, k-2l-1}(e')) - (k - l) X_0^{-k-2, k-2l}(e') - (l + 1) X_0^{-k-2, k-2l-2}(e') \right]. \tag{91}$$

En appliquant la même méthode pour calculer $B_{k,l+1}^{(4)}(e')$, on trouve :

$$B_{k,l+1}^{(4)}(e') = \frac{2k - 2l - 1}{ke'} \left[\varphi' \frac{d}{de'} (\varphi' X_0^{-k-2, k-2l-1}(e')) - (k - l) X_0^{-k-2, k-2l}(e') - (l + 1) X_0^{-k-2, k-2l-2}(e') \right]. \tag{92}$$

De sorte qu'on obtient finalement :

$$\frac{C_{k,l} A_{k,l}^{(3)}(e) B_{k,l}^{(3)}(e')}{C_{k,l+1} A_{k,l+1}^{(4)}(e) B_{k,l+1}^{(4)}(e')} = -1 \tag{93}$$

C.Q.F.D.

3.2.4. Démonstration de la proposition C

Pour $l = \frac{k}{2}$, on a :

$$C_{k,l-1} A_{k,l-1}^{(3)}(e) B_{k,l-1}^{(3)}(e') - C_{k,l} A_{k,l}^{(3)}(e) B_{k,l}^{(3)}(e') \\ + C_{k,l} A_{k,l}^{(4)}(e) B_{k,l}^{(4)}(e') = 0.$$

Pour cette valeur de l , on a $\delta_k^{2l} = 1$, mais $\delta_k^{2l-2} = 0$, de sorte que le rapport $\frac{C_{k,l-1}}{C_{k,l}}$ vaut ici le double de ce

qu'on obtiendrait par la Relation (89), mais le reste des calculs de la proposition B restant valable pour $l = \frac{k}{2}$, on trouverait à la place de (93) :

$$C_{k,l-1} A_{k,l-1}^{(3)}(e) B_{k,l-1}^{(3)}(e') + 2C_{k,l} A_{k,l}^{(4)}(e) B_{k,l}^{(4)}(e') = 0.$$

Comme $C_{k,l} A_{k,l}^{(3)}(e) B_{k,l}^{(3)}(e')$ et $C_{k,l} A_{k,l}^{(4)}(e) B_{k,l}^{(4)}(e')$ sont respectivement en facteur de $\sin(-\omega + \omega')$ et $\sin(\omega - \omega')$, il suffit alors de montrer que ces deux coefficients sont opposés par le signe pour démontrer la proposition C.

Or on a, d'après (90), pour $l = \frac{k}{2}$:

$$A_{k,k/2}^{(3)}(e) = \frac{k}{k+1} \varphi X_0^{k-1, -1}(e)$$

et, pour $l + 1 = \frac{k}{2}$:

$$A_{k,k/2}^{(4)}(e) = -\frac{k}{k+1} \varphi X_0^{k-1, 1}(e).$$

On en déduit, d'après (60) :

$$A_{k,k/2}^{(3)}(e) = -A_{k,k/2}^{(4)}(e).$$

De la même façon, les Expressions (91) et (92) permettent d'obtenir:

$$B_{k,k/2}^{(3)}(e') = \frac{k+1}{ke'} \left[\varphi' \frac{d}{de'} (\varphi' X_0^{-k-2,-1}(e')) - \frac{k}{2} X_0^{-k-2,0}(e') - \frac{k+2}{2} X_0^{-k-2,-2}(e') \right]$$

$$B_{k,k/2}^{(4)}(e') = \frac{k+1}{ke'} \left[\varphi' \frac{d}{de'} (\varphi' X_0^{-k-2,1}(e')) - \frac{k+2}{2} X_0^{-k-2,2}(e') - \frac{k}{2} X_0^{-k-2,0}(e') \right].$$

On a donc finalement:

$$C_{k,k/2} A_{k,k/2}^{(3)}(e) B_{k,k/2}^{(3)}(e') = -C_{k,k/2} A_{k,k/2}^{(4)}(e) B_{k,k/2}^{(4)}(e').$$

C.Q.F.D.

vraies, tout au moins pour calculer le 1^{er} membre de (68) où il n'apparaît pas d'intégration par rapport au temps. Il resterait néanmoins à appliquer les mêmes relations de récurrence entre les coefficients de Hansen pour terminer la démonstration.

3.3. Traitement du terme séculaire de $\Delta_2 a'$

Le terme séculaire $[\Delta_2 a']$ relatif à la planète extérieure P' peut se calculer de façon analogue à $[\Delta_2 a]$: comme les perturbations du 1^{er} ordre dues à la planète P' elle-même ne donnent pas de terme séculaire dans $\Delta_2 a'$, il reste à déterminer l'expression suivante, obtenue à partir des groupements (33) à (37) en inversant l'accentuation de tous les symboles:

$$\left[\frac{d}{dt} \Delta_2 a' \right] = \frac{2}{n'a'} \left\{ \frac{2}{na} \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\partial R'}{\partial M'} \int \frac{\partial R}{\partial M} dt \right] + \frac{3}{a^2} \left[\frac{\partial R'}{\partial M'} \iint \frac{\partial^2 R}{\partial M^2} dt dt \right] + \frac{\varphi^2}{na^2 e} \frac{\partial}{\partial e} \left[\frac{\partial R'}{\partial M'} \int \frac{\partial R}{\partial M} dt \right] + \frac{\varphi}{na^2 e} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\partial R'}{\partial M'} \int \frac{\partial R}{\partial e} dt \right] - \frac{\partial}{\partial e} \left[\frac{\partial R'}{\partial M'} \int \frac{\partial R}{\partial \omega} dt \right] \right) \right\}. \quad (94)$$

L'application de la Relation (52) existant entre R et R' permet de transformer cette expression: sachant qu'elle est nulle lorsque $R' = \frac{m}{m'} R$, et que la partie constante d'un terme tel que $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial M'} \right) \int \frac{\partial R}{\partial \sigma} dt$ est encore égale à celle de $-\frac{\partial U}{\partial M'} \frac{\partial R}{\partial \sigma}$, on obtient:

$$\left[\frac{d}{dt} \Delta_2 a' \right] = \frac{2}{n'a'} \left\{ \frac{2}{na} \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\partial F}{\partial M'} \int \frac{\partial R}{\partial M} dt \right] - \frac{3}{a^2} \left[\frac{\partial U}{\partial M'} \int \frac{\partial^2 R}{\partial M^2} dt \right] - \frac{\varphi^2}{na^2 e} \frac{\partial}{\partial e} \left[\frac{\partial U}{\partial M'} \frac{\partial R}{\partial M} \right] - \frac{\varphi}{na^2 e} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\partial U}{\partial M'} \frac{\partial R}{\partial e} \right] - \frac{\partial}{\partial e} \left[\frac{\partial U}{\partial M'} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right] \right) \right\}.$$

3.2.5. Démonstration de la proposition D

Pour tout k , on a: $A_{k,0}^{(4)}(e) = 0$.

On a en effet, quel que soit k :

$$A_{k,0}^{(4)}(e) = \sum_p p X_p^{k,k}(e) X_{-p}^{1,-1}(e)$$

qui est identiquement nul d'après la Relation (84).

C.Q.F.D.

Remarque: Les calculs précédents montrent que $[\Delta_2 a]$ s'exprime finalement en fonction uniquement de coefficients $X_0^{n,m}$, qui sont les termes constants de $\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \sqrt{-1} m v$; ceci laisse à penser qu'on aurait pu utiliser les développements de R et de U en anomalies

On peut ensuite utiliser les mêmes développements de R , F et U donnés en (57), (64) et (66) pour obtenir une expression de $\left[\frac{d}{dt} \Delta_2 a' \right]$ de la même forme que celle de $\left[\frac{d}{dt} \Delta_2 a \right]$ écrite en (69), qu'on démontre être identiquement nulle de la même façon.

3.4. Cas des orbites non coplanaires

L'expression de $\left[\frac{d}{dt} \Delta_2 a \right]$ donnée en (55) doit dans ce cas être complétée par les 2 termes issus des groupements (36) et (37) qui font intervenir les dérivées partielles de R et de R' par rapport à i' et à Ω' . Il faut aussi utiliser

les développements complets de R et de F , obtenus à partir de (56) et de (62) en y faisant maintenant :

$$\begin{aligned} \cos H = & \cos^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{i'}{2} \cos (v-v'+\omega-\omega') \\ & + \cos^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{i'}{2} \cos (v+v'+\omega+\omega'-2\Omega') + \cos^2 \frac{i'}{2} \sin^2 \frac{i}{2} \cos (v+v'+\omega+\omega'-2\Omega) \\ & + 2 \cos \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} [\cos (v-v'+\omega-\omega'-\Omega+\Omega') - \cos (v+v'+\omega+\omega'-\Omega-\Omega')] \\ & + \sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{i'}{2} \cos (v-v'+\omega-\omega'-2\Omega+2\Omega') \end{aligned}$$

puis (cf. Brumberg, 1967):

$$P_k(\cos H) = \sum_{l=0}^k \sum_{l'=0}^k \sum_{j=0}^k (2-\delta_0^j) C_{k,l,l',j}(i,i') \cos [(k-2l)(v+\omega) - (k-2l')(v'+\omega') + j(\Omega-\Omega')].$$

Il faut ensuite développer en anomalies moyennes, et le résultat, au lieu de dépendre des deux fonctions $\sin(k-2l\pm 1)(\omega-\omega')$ pour tout k et tout l vérifiant $0 \leq l \leq E\left(\frac{k}{2}\right)$, dépend maintenant des douze fonctions :

$$\begin{aligned} & \sin [(k-2l\pm 1)\omega - (k-2l'\pm 1)\omega' + j(\Omega-\Omega')] \\ & \sin [(k-2l\pm 1)\omega - (k-2l'\mp 1)\omega' + (j\mp 2)\Omega - j\Omega'] \\ & \sin [(k-2l\pm 1)\omega - (k-2l'\mp 1)\omega' + j\Omega - (j\pm 2)\Omega'] \\ & \sin [(k-2l\pm 1)\omega - (k-2l'\pm 1)\omega' + (j\mp 1)(\Omega-\Omega')] \\ & \sin [(k-2l\pm 1)\omega - (k-2l'\mp 1)\omega' + (j\mp 1)\Omega - (j\pm 1)\Omega'] \\ & \sin [(k-2l\pm 1)\omega - (k-2l'\pm 1)\omega' + (j\mp 2)(\Omega-\Omega')] \end{aligned}$$

où l, l' et j varient entre 0 et k , pour tout k .

Dans ces conditions, la mise en évidence de relations entre les coefficients d'une même fonction $\sin(n_1\omega + n_2\omega' + n_3\Omega + n_4\Omega')$ serait encore possible, mais au prix de calculs énormes. On peut réduire ces calculs en utilisant l'inclinaison mutuelle des deux plans d'orbite à la place de i et de i' , mais même dans ce cas, le volume des calculs est encore très important et il semble peu réaliste de tenter une démonstration par la méthode employée dans le cas coplanaire, pour en tirer finalement une conclusion qui est déjà assurée numériquement au moins pour les termes de degré 0 et 2 en inclinaison et dont on ne voit pas pourquoi elle ne serait plus vérifiée pour les termes de degrés supérieurs. Il est d'ailleurs possible que l'élimination de $[\Delta_2 a]$ et de $[\Delta_2 a']$ lorsqu'on a $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$ découle d'une propriété des fonctions R et F qu'il reste à découvrir, et qui permettrait d'éviter le développement de ces fonctions en anomalies moyennes.

3.5. Cas où il y a plus de deux planètes

La fonction perturbatrice R_p d'une planète P est alors une somme d'expressions de la forme (4) relatives

chacune à un couple de planètes. Pour calculer le $[\Delta_2 a]$ associé à P, il faut d'abord prendre les variations de R_p en fonction des perturbations d'ordre 1 des éléments de la planète P elle-même mais on sait que celles-ci n'introduisent pas de terme séculaire dans ce $\Delta_2 a$ quelle que soit la fonction perturbatrice. Ensuite il faut en prendre les variations par rapport aux perturbations d'ordre 1 des éléments des autres planètes, mais, pour obtenir un terme séculaire, il faut combiner des arguments $pM + qM'$ égaux ou opposés par le signe, de sorte que la détermination de ce terme séculaire s'opère par couples de planètes: On considère dans R_p la partie qui ne dépend que de P' [qui a la forme (4)], et dans les perturbations de P', la partie qui dépend de P [de la forme (5)]. Le terme séculaire $[\Delta_2 a]$ est alors la somme des termes séculaires obtenus pour chaque couple et le résultat acquis pour 2 planètes est donc aussi vrai dans le cas de N planètes: Il sera nul à condition qu'on ait $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$ pour chaque couple de planètes, c'est-à-dire $n^2 a^3$ égal à une constante, la même pour toutes les planètes.

4. Conséquences de cette démonstration et conclusion

Si on désire que dans une théorie planétaire en variables héliocentriques les grands axes ne possèdent pas de terme séculaire à la deuxième approximation, il est nécessaire que la solution initiale képlérienne soit rigoureusement d'ordre zéro en masses, c'est-à-dire qu'on aura la mise en équations suivante pour 2 planètes P et P':

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -GM_{\odot} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{grad} R_1 \\ \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} &= -GM_{\odot} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} + \mathbf{grad}' R'_1 \end{aligned} \quad (95)$$

où les fonctions perturbatrices sont maintenant:

$$R_1 = \frac{Gm}{r} + Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \right)$$

$$R_1' = \frac{Gm'}{r'} + Gm \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \right) + Gm \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \right). \quad (96)$$

C'est donc en toute rigueur avec R_1 et R_1' qu'il aurait fallu faire la démonstration précédente à la place de R et de R' . Cependant, le résultat aurait été le même, car le calcul de $[\Delta_2 a]$ (ou de $[\Delta_2 a']$), nécessite de dériver 2 fois R (ou R'): une fois par rapport à un élément de l'orbite de P , et une deuxième fois par rapport à un élément de P' [voir (10) par exemple]; on peut donc ajouter à R ou à R' toute fonction qui ne dépende que des éléments d'une seule des planètes sans affecter le résultat du calcul de $[\Delta_2 a]$ ou de $[\Delta_2 a']$.

Les résultats précédents sont intéressants pour la construction d'une théorie générale planétaire dans laquelle on procède généralement par identification des termes qui sont de la même forme, et spécialement qui sont de même ordre par rapport aux masses; il est alors important de bien connaître l'ordre en masses des termes produits dans les développements à chaque approximation et surtout, il faut que ces termes ne soient pas implicitement fonctions des masses, ce qui fausserait l'identification. A cet égard, on se rend bien compte ici de la façon dont on pourrait être abusé en confondant le numéro d'ordre d'une approximation et son ordre par rapport aux masses, surtout si la solution initiale n'est pas rigoureusement d'ordre zéro en masses comme c'est généralement le cas avec l'approximation classique du mouvement képlérien relatif héliocentrique.

C'est ainsi que dans la théorie générale planétaire en variables héliocentriques décrite dans un article précédent (Duriez, 1978), les termes séculaires écrits en (50) et (51) qu'on obtient avec $n^2 a^3 \neq n'^2 a'^3$, seraient des termes à longues périodes (de l'ordre des périodes de révolution des noeuds et des périhélie); leur apparition à la deuxième approximation troublerait la résolution du système d'équations donnant les mouvements à longues périodes des noeuds et des périhélie, d'autant plus que la nécessité d'ordre pratique de développer la théorie générale numériquement par rapport à α , entraîne qu'on ne saurait pas détecter que ces termes à longues périodes sont en fait d'ordre 3 par rapport aux

masses. Dans ces conditions, il semble maintenant préférable d'utiliser une solution initiale qui soit rigoureusement d'ordre 0 en masses comme celle donnée par les Equations (95) et (96), à moins de pouvoir traiter α et les fonctions qui en dépendent sous forme de développements en puissances des masses.

Se pourrait-il enfin que les termes séculaires qui apparaissent à la troisième approximation et aux suivantes dans les grands axes, disparaissent quand on impose la condition $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$? Les résultats numériques obtenus par Simon et Bretagnon en variables héliocentriques, ou ceux plus théoriques de Meffroy ou de Message en variables barycentriques, ne semblent pas aller dans ce sens, mais il est vrai aussi qu'ils n'appliquent pas cette condition.

Remerciements. Je remercie vivement Monsieur J. Chapront pour les discussions nombreuses et fructueuses qui ont jalonné ce travail. Je remercie tout autant Messieurs P. Bretagnon et J. L. Simon d'avoir bien voulu me communiquer des résultats non encore publiés de leurs propres travaux et de m'avoir facilité les comparaisons de mes résultats avec les leurs.

Références

- Andoyer, H.: 1902, *Ann. Obs. de Paris* **23**, A1
 Bretagnon, P.: Communication privée
 Brouwer, D., Clemence, G. M.: 1961, *Methods of Celestial Mechanics*, Acad. Press
 Brumberg, V. A.: 1967, *Bull. Inst. Astron. Theor. Leningrad* **11**, 73
 Duriez, L.: 1978, in *Dynamics of Planets and Satellites and Theories of Their Motion*, p. 15, ed. V. Szebehely, chez Reidel
 Duriez, L.: 1977, *Astron. Astrophys.* **54**, 93
 Hagihara, Y.: 1944, *Japan J. Astron. Geophys.* **21**, 9
 Hill, G. W.: 1904, *Astron. J.* **24**, 27
 Kovalevsky, J.: 1963, *Introduction à la Mécanique Céleste*, Coll. Armand Colin
 Lagrange, J. L.: 1808, *Mem. Acad. Sci.*, Paris 1^{ère} série
 Meffroy, J.: 1955, *Bull. Astron.* **19**, 1
 Message, P. J.: 1975, *Long Time Predictions in Dynamics*, ed. Szebehely and Tapley, p. 279
 Poincaré, H.: 1897, *Bull. Astron.* **14**, 241
 Poisson, D.: 1808, *J. de l'Ecole Polytechnique*, **15**, 1
 Serret, A.: 1873, *Oeuvres de Lagrange* **6**, p. 713
 Simon, J. L.: Communication privée
 Simon, J. L. et Bretagnon, P.: 1975, *Astron. Astrophys. Suppl.* **22**, 107
 Tisserand, F.: 1876, *Compt. Rend. Acad. Sci.*, **82**, 442
 Tisserand, F.: 1889, *Traité de Mécanique Céleste*, 1, pp. 391-403

ANNEXE 4 : CORRESPONDANCES ENTRE LES ELEMENTS OSCULATEURS
HELIOCENTRIQUES CLASSIQUES ET LES ELEMENTS
OSCULATEURS HELIOCENTRIQUES D'ORDRE 0.

Les éléments osculateurs héliocentriques d'ordre 0 associés à une planète P sont complètement déterminés par la donnée de sa position \vec{r} et de sa vitesse \vec{V} par rapport au Soleil à un instant t : on suppose sa masse nulle et son mouvement régi par l'attraction unique du Soleil selon la loi de Newton en $\frac{GM_{\odot}}{r^2}$; les quatre éléments a, e, $\bar{\omega}$ et λ dépendent de GM_{\odot} tandis que i et Ω n'en dépendent pas. En posant $\gamma = \frac{rV^2}{GM_{\odot}}$ on obtient :

$$a = \frac{r}{2 - \gamma} \quad \text{par l'intégrale de l'énergie}$$

$$n = (GM_{\odot})^{1/2} \left(\frac{2 - \gamma}{r}\right)^{3/2} \quad \text{par la 3^{ème} loi de Kepler .}$$

De l'équation polaire de l'orbite elliptique osculatrice :

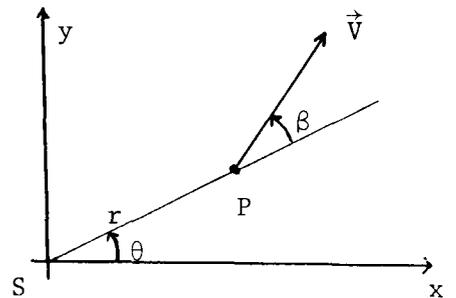
$$r = \frac{C^2/GM_{\odot}}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})} \quad (\text{où } C, \text{ la constante des aires, vaut } r V \sin \beta),$$

on tire :

$$e \cos(\theta - \bar{\omega}) = \gamma \sin^2 \beta - 1$$

En dérivant r par rapport au temps, et sachant que $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est égal à C, on obtient la vitesse radiale $V \cos \beta$, d'où on tire :

$$e \sin(\theta - \bar{\omega}) = \gamma \sin \beta \cos \beta$$



On en déduit :

$$e = (1 - (2\gamma - \gamma^2) \sin^2 \beta)^{1/2}$$

$$\theta - \bar{\omega} = \text{arc tg} \left(\frac{\gamma \sin \beta \cos \beta}{\gamma \sin^2 \beta - 1} \right)$$

Enfin, la longitude moyenne λ se déduit de e et $\bar{\omega}$ par l'intermédiaire de l'anomalie excentrique E :

$$\lambda = \bar{\omega} + E - e \sin E$$

avec

$$\text{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{tg} \frac{(\theta - \bar{\omega})}{2} .$$

Si on modifie la constante GM_{\odot} sans changer les conditions initiales \vec{r} et \vec{V} , on obtient des nouveaux éléments a , n , e , $\bar{\omega}$ et λ ; c'est ce qui se produit lorsqu'on passe des éléments osculateurs d'ordre 0 aux éléments osculateurs classiques qui font intervenir la masse de la planète par l'intermédiaire de $G(M_{\odot} + m)$. En posant $GM_{\odot} = k$, on calcule facilement les variations de ces éléments pour une variation de k et des conditions initiales \vec{r} et \vec{V} inchangées :

$$\frac{da}{dk} = - \frac{a}{k} \left(\frac{2a}{r} - 1 \right)$$

$$\frac{dn}{dk} = \frac{n}{k} \left(\frac{3a}{r} - 1 \right)$$

$$\frac{de}{dk} = - \frac{1}{k} (e + \cos(\theta - \bar{\omega}))$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dk} = - \frac{\sin(\theta - \bar{\omega})}{ke} .$$

De ces deux dernières expressions, on tire encore :

$$\frac{dz}{dk} = -\frac{1}{k} (z + \exp \sqrt{-1} \theta)$$

On a enfin :

$$\frac{dE}{dk} = \frac{1}{k} \frac{a \sin E}{r e} = \frac{1}{k} \frac{\sin(\theta - \bar{\omega})}{e \sqrt{1-e^2}}$$

puis :

$$\frac{d\lambda}{dk} = \frac{1}{k} \left[\frac{a}{r} (1 - e^2 - \sqrt{1 - e^2}) + e^2 \right] \frac{\sin E}{e}$$

De ces relations, on peut obtenir les éléments osculateurs classiques en fonction des éléments osculateurs d'ordre 0 (notés dans la suite avec un indice zéro), en effectuant le développement de Taylor des éléments au voisinage de $k = GM_{\odot}$; on aura par exemple :

$$a = a_0 + \left(\frac{da}{dk}\right)_0 \frac{\Delta k}{k} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2a}{dk^2}\right)_0 \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + \dots$$

On obtient alors les expressions suivantes, analogues à des développements en puissances des masses si on suppose $\frac{\Delta k}{k}$ égal à $\frac{m}{M_{\odot}}$:

$$a = a_0 \left[1 - \left(\frac{2 a_0}{r} - 1\right) \frac{\Delta k}{k} + \left(\frac{2 a_0}{r} - 1\right) \frac{2 a_0}{r} \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 - \left(\frac{2 a_0}{r} - 1\right) \frac{4 a_0^2}{r^2} \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^3 + \dots \right]$$

$$n = n_0 \left[1 - \left(1 - \frac{3 a_0}{r}\right) \frac{\Delta k}{k} + \left(1 - \frac{3 a_0}{r} + \frac{3 a_0^2}{2 r^2}\right) \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 - \left(1 - \frac{3 a_0}{r} + \frac{3 a_0^2}{2 r^2} + \frac{a_0^3}{2 r^3}\right) \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^3 + \dots \right]$$

$$z = z_0 - (z_0 + \exp \sqrt{-1} \theta) \left[\frac{\Delta k}{k} - \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^3 - \dots \right]$$

Le développement de λ est moins simple, mais pourrait s'obtenir à partir de ceux de e et de $\bar{\omega}$:

$$\begin{aligned}
 e &= e_o - (e_o + \cos v_o) \frac{\Delta k}{k} + (e_o + \cos v_o + \frac{\sin^2 v_o}{2 e_o}) \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 \\
 &\quad - (e_o + \cos v_o + \frac{\sin^2 v_o}{2 e_o} - \frac{\sin^2 v_o \cos v_o}{2 e_o^2}) \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^3 + \dots \\
 \bar{\omega} &= \bar{\omega}_o - \frac{\sin v_o}{e_o} \frac{\Delta k}{k} - \frac{\sin 2 v_o}{2 e_o^2} \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 - \frac{\sin 3 v_o}{3 e_o^3} \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^3 - \dots
 \end{aligned}$$

où on a noté $v_o = \theta - \bar{\omega}_o$.

Des résultats analogues peuvent également s'obtenir pour nos variables p , q et z , en utilisant le calcul des perturbations basé sur les équations de Lagrange (1.17.), (1.18) et (1.19), avec la fonction perturbatrice limitée à sa partie képlérienne $\frac{GM_\odot}{r}$; en développant $\frac{GM_\odot}{r}$ comme en (A6) dans l'annexe 1, on trouve notamment, à des termes de degré 5 près :

$$\begin{aligned}
 p &= p_o - \frac{3m}{M_\odot} \left[(e_o - \frac{e_o^3}{8}) \cos(\lambda_o - \bar{\omega}_o) + (e_o^2 - \frac{e_o^4}{3}) \cos 2(\lambda_o - \bar{\omega}_o) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{9}{8} e_o^3 \cos 3(\lambda_o - \bar{\omega}_o) + \frac{4}{3} e_o^4 \cos 4(\lambda_o - \bar{\omega}_o) \right] \\
 q &= \sqrt{-1} N(p_o + \frac{2m}{M_\odot}) t + \frac{m}{M_\odot} \sqrt{-1} \left\{ (-\frac{e_o}{2} - \frac{3e_o^3}{16}) \sin(\lambda_o - \bar{\omega}_o) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e_o^4}{24} \sin 2(\lambda_o - \bar{\omega}_o) + \frac{3}{16} e_o^3 \sin 3(\lambda_o - \bar{\omega}_o) + \frac{e_o^4}{3} \sin 4(\lambda_o - \bar{\omega}_o) \right\} \\
 z &= z_o - \frac{m}{M_\odot} \left\{ (1 - e_o^2) \exp \sqrt{-1} \lambda_o + (e_o - \frac{5}{4} e_o^3) \exp \sqrt{-1} (2 \lambda_o - \bar{\omega}_o) \right. \\
 &\quad + \frac{9}{8} e_o^2 \exp \sqrt{-1} (3 \lambda_o - 2 \bar{\omega}_o) - \frac{1}{8} e_o^2 \exp \sqrt{-1} (-\lambda_o + 2 \bar{\omega}_o) \\
 &\quad \left. + \frac{4}{3} e_o^3 \exp \sqrt{-1} (4 \lambda_o - 3 \bar{\omega}_o) - \frac{1}{12} e_o^3 \exp \sqrt{-1} (-2 \lambda_o + 3 \bar{\omega}_o) \right\}
 \end{aligned}$$

L'expression donnant p est encore égale à $p_0 - \frac{3m}{M_\odot} \left(\frac{a_0}{r} - 1 \right)$;

pour éviter le terme proportionnel à t dans q , il faut choisir la constante

p_0 égale à $-\frac{2m}{M_\odot}$; cette valeur constitue une partie des constantes p_{oi}

déterminées au paragraphe IV.2.1., notable surtout pour la constante p_{o5} relative à Jupiter.

Par ailleurs, on pourrait montrer que la partie entre accolades dans l'expression donnant z , est le développement limité de $(z_0 + \exp \sqrt{-1} \theta)$.

L'intérêt de ces développements est de montrer que le passage des éléments osculateurs d'ordre 0 aux éléments classiques ne fait intervenir que des termes périodiques. Les éléments moyens d'une théorie classique à variations séculaires qu'on aurait développée avec des éléments osculateurs classiques ou ceux d'ordre 0, seraient donc les mêmes, justifiant ainsi leur emploi pour obtenir les valeurs des constantes d'intégration du système autonome dans la théorie générale (cf. II.4). La seule incidence du choix des variables osculatrices d'ordre 0 sur le système autonome concerne les constantes p_{oi} , représentatives finalement d'une perturbation constante des demi-grands axes, qui se trouve ainsi différente suivant qu'on utilise ou non les éléments osculateurs héliocentriques d'ordre 0.

BIBLIOGRAPHIE

=====

- ABU el ATA, N. et CHAPRONT, J. - 1975, *Astron. Astrophys.* 38, 57.
- BRETAGNON, P. - 1972, *Variations à longues périodes des éléments des planètes. Thèse, Paris.*
- BRETAGNON, P. - 1974, *Astron. Astrophys.* 30, 141.
- BRETAGNON, P. - 1978, *Sur une solution globale du mouvement des planètes. Thèse, Paris.*
- BROUWER, D. et VAN WOERKOM, A.J.J. - 1950, *A.P.A.E. Vol. XIII*, 2.
- BROUWER, D. et CLEMENCE, G.M. - 1961, *Methods of celestial Mechanics. Acad. Press.*
- BRUMBERG, V.A. - 1970, in *Periodic Orbits, Stability and Resonances.* ed. Giacaglia, Reidel (p. 410).
- BRUMBERG, V.A. et EVOGORA, A.V. - 1971, *Nablyudeniya Iskustbenykh Nebesnykh, tel. 62*, p. 42.
- BRUMBERG, V.A. et CHAPRONT, J. - 1973, *Celest. Mech.* 8, 335.
- BRUMBERG, V.A. EVDOKIMOVA, L.S. et SKRIPNICHENKO, V.I. - 1975, *Celest. Mech.* 11, 131.
- BRUMBERG, V.A. - 1978, in *Dynamics of Planets and Satellites and Theories of their Motion.* ed. Szebehely, Reidel, p. 33.
- BRUMBERG, V.A. - 1978, *Celestial Mechanics* 18, 319.
- CHAPRONT, J. - 1970, *Astron. Astrophys.* 7, 175
- CHAPRONT, J., BRETAGNON, P. et MEHL, M. - 1975, *Celest. Mech.* 11, 379.
- COHEN, C.J., HUBBARD, E.C. et OESTERWINTER, C. - 1973, *A.P.A.E. Vol. XXII*, 1.
- DURIEZ, L. - 1971, *Application des perturbations séculaires à la détermination des éléments moyens de l'anneau des petites planètes. Thèse, Lille.*
- DURIEZ, L. - 1978, in *Dynamics of Planets and Satellites, and Theories of their Motion.* ed. Szebehely, Reidel (p. 15).
- GAILLOT, J.B. - 1904-1913, *Annales de l'Observatoire de Paris.*
- HILL, G.W. - 1897, *Astron. J.* 17, 11.

- JEFFERYS, W.H., MOSER, J. - 1966, Astron. J. 71, 568.
- KOVALEVSKY, J. - 1963, Introduction à la Mécanique Céleste. A. Colin.
- KOVALEVSKY, J. - 1971, Celestial Mechanics 4, 213.
- KRASINSKY, G.A. - 1969, Trans. Inst. Theor. Astron. (Leningrad) 13, 105.
- LE VERRIER, U.J.J. - 1855-1876, Annales de l'Observatoire de Paris.
- MESSAGE, P.J. - 1975, in Long time predictions in dynamics.
ed. Szebehely and Tapley, p. 279.
- SIMON, J.L. et BRETAGNON, P. - 1975a, Astron. Astrophys. 42, 259.
- SIMON, J.L. et BRETAGNON, P. - 1975b, Astron. Astrophys. suppl. 22 , 107.
- SIMON, J.L. et BRETAGNON, P. - 1978a, Astron. Astrophys. 69, 372.
- SIMON, J.L. et BRETAGNON, P. - 1978b, Astron. Astrophys. suppl. 34, 183.
- TISSERAND, F. - 1889, Traité de Mécanique Céleste, Tome I.

