

50376
1979
9

N° d'Ordre 775

50376
1979
9

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

EN MATHÉMATIQUES PURES

par

Etienne GHYS



***SUR LES ACTIONS LOCALEMENT LIBRES
DU GROUPE AFFINE***

Membres du Jury : D. LEHMANN, Président
G. HECTOR, Rapporteur
A. VERJOVSKY
U. HIRSCH Examineurs

Soutenue le 21 Septembre 1979

Je suis heureux de remercier Gilbert Hector qui m'a accueilli au sein de son équipe. Son enseignement et sa disponibilité m'ont permis de m'initier à la théorie des feuilletages. J'ai apprécié l'intérêt qu'il a porté à l'élaboration de ce travail ; ses conseils et ses remarques m'ont été très utiles.

Alberto Verjovskey m'a fait partager sa grande connaissance des systèmes dynamiques au cours de très nombreuses discussions. C'est grâce à son enthousiasme et sa sympathie que j'ai pu mener à bien ce travail. Qu'il en soit ici très sincèrement remercié.

Je remercie également Daniel Lehmann et Ulrich Hirsch d'avoir accepté de participer à ce jury.

Madame Bérat a dactylographié ce travail avec soin et rapidité. Je l'en remercie, ainsi que les services de l'imprimerie de l'U.E.R. de Mathématiques de Lille I.

INTRODUCTION

=====

Les actions localement libres de groupes de Lie sur les variétés constituent une généralisation naturelle des systèmes dynamiques. Si l'on suppose que l'action est de codimension 1, on dispose de toute la théorie qualitative des feuilletages de codimension 1 pour en aborder l'étude.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux actions localement libres du groupe affine sur les variétés compactes de dimension trois. Ce groupe est le groupe de Lie de dimension deux des transformations affines de la droite réelle préservant l'orientation.

Plusieurs raisons motivent ce travail. La première est le lien étroit entre ces actions et les flots d'Anosov ; les feuilletages stables des flots d'Anosov de codimension 1 peuvent être considérés comme des feuilletages obtenus à l'aide d'actions localement libres du groupe affine.

Par ailleurs, les actions localement libres de groupes abéliens ainsi que celles de groupes nilpotents sont bien connues (Cf. [Ros, Rou, Wei], [Cha], [Hec-1]). Le groupe affine apparaît comme le premier exemple de groupe de Lie résoluble mais non nilpotent. On peut donc considérer cette étude comme un modèle d'étude d'actions localement libres de groupes résolubles plus généraux.

Enfin, dans un travail précédent, en collaboration avec V. Sergiescu, (Cf. [Ghy-Ser]), nous avons mis en évidence un phénomène de stabilité très forte pour les actions localement libres du groupe

affine sur les 3-variétés fermées à groupe fondamental résoluble. Il s'agissait de savoir si cette rigidité était due à la variété ambiante ou au groupe affine. Nous n'avons répondu que partiellement à cette dernière question.

Soit G^n un groupe de Lie de dimension n et G^{n+1} un groupe de Lie de dimension $(n+1)$ contenant un sous-groupe isomorphe à G^n . Supposons que G^{n+1} contienne un sous-groupe discret Γ tel que G^{n+1}/Γ soit compact. Le groupe G^n opère sur G^{n+1} par translation à gauche, il opère donc sur G^{n+1}/Γ . Les actions localement libres obtenues de cette façon peuvent être appelées "actions homogènes de G^n ".

Le groupe affine étant résoluble, il est moyennable. Nous en déduisons l'existence d'une mesure de Borel sur la variété ambiante invariante par l'action et dont le support est la variété toute entière. Notre travail consiste essentiellement à démontrer le résultat suivant (théorème "principal" 5.C.4.). Si la mesure invariante est compatible avec la structure différentiable, alors, l'action localement libre considérée du groupe affine est différentiablement conjuguée, avec paramètres, à une action homogène. Dans ce cas, nous pouvons faire une description explicite de ces actions.

Notre démarche est la suivante. Le chapitre I résume quelques propriétés générales des actions localement libres de groupes de Lie qui sont appliquées dans le chapitre II au cas du groupe affine. Dans le chapitre III, nous décrivons les exemples d'actions homogènes du groupe affine, ce qui permet de ramener notre problème à celui de l'existence d'un champ de vecteurs vérifiant certaines propriétés.

Le chapitre IV discute de l'existence d'une forme volume invariante. Ceci permet de réduire le problème à une équation fonctionnelle que nous résolvons dans le chapitre V en utilisant des techniques de la théorie des représentations des groupes de Lie dans les espaces de Hilbert. Nous obtenons finalement le théorème principal à la fin du chapitre V. Enfin, le chapitre VI complète un peu le théorème et donne deux propositions laissant espérer que la condition imposée sur la mesure invariante est inutile.

PLAN

<u>CHAPITRE I : ACTIONS LOCALEMENT LIBRES DE GROUPES DE LIE.</u>	1
A - Les champs fondamentaux.	1
B - La codimension un.	4
<u>CHAPITRE II : REMARQUES GENERALES SUR LES ACTIONS LOCALEMENT LIBRES DU GROUPE AFFINE.</u>	9
A - Propriétés algébriques et géométriques du groupe affine.	9
B - Conséquences pour les actions du groupe affine.	14
<u>CHAPITRE III : LES EXEMPLES D'ACTIONS LOCALEMENT LIBRES DU GROUPE AFFINE.</u>	25
A - Construction générale d'actions homogènes.	25
B - Les actions résolubles.	27
C - Les actions semi-simples.	31
D - Propriétés communes aux deux familles d'exemples.	33
E - Relation avec les flots d'Anosov.	34
<u>CHAPITRE IV : LA FORME VOLUME INVARIANTE.</u>	36
<u>CHAPITRE V : LE TROISIEME CHAMP DE VECTEURS.</u>	42
A - Représentations unitaires irréductibles du groupe affine.	43
B - Le champ de classe C^0	46
1 - Position du problème ;	46
2 - Résolution partielle ;	49
3 - Résolution globale ;	51
C - Différentiabilité du champ Z .	61

.../...

<u>CHAPITRE VI : QUELQUES COMPLEMENTS.</u>	68
A - <i>Orientabilité et conséquences du théorème.</i>	68
B - <i>Remarques concernant la compatibilité de la mesure avec la structure différentiable.</i>	70
<u>CONCLUSION.</u>	76

CHAPITRE I

=====

ACTIONS LOCALEMENT LIBRES DE GROUPES DE LIE.

Soit G un groupe de Lie de dimension n et M une variété de dimension p . Une action à gauche de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$) de G sur M est dite localement libre si le stabilisateur de tout point de M est un sous-groupe discret de G . Toute action localement libre d'un groupe de Lie conduit naturellement à une action localement libre de son revêtement universel. Sans perdre de généralité, nous supposons donc par la suite que G est simplement connexe.

Si l'action du groupe G sur la variété M est localement libre, les orbites des points de M sous l'action de G définissent un feuilletage de M de classe C^r et de codimension $p-n$. La feuille de ce feuilletage passant par un point m de M est homéomorphe au quotient de G par le stabilisateur de m .

A - Les champs de vecteurs fondamentaux.

Considérons une action localement libre de G sur M :

$$\Phi : G \times M \rightarrow M.$$

Pour simplifier, nous noterons $g.m$ le point $\Phi(g,m)$.

Soit $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ une base de l'algèbre de Lie de G considérée comme l'algèbre des champs de vecteurs sur G invariants à droite.

Soient C_{ij}^k les constantes de structure associées à cette base, c'est-à-dire :

$$[\bar{X}_i, \bar{X}_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k \bar{X}_k.$$

A l'aide des champs \bar{X}_i , nous pouvons construire de manière naturelle des champs de vecteurs X_i sur M , de classe C^{r-1} , définis par :

$$X_i(m) = d\phi(-, m)_e(\bar{X}_i(e))$$

où e désigne l'élément neutre du groupe G et $\phi(-, m)$ l'application partielle de G dans M . Les champs de vecteurs ainsi construits vérifient de manière immédiate la relation de commutation :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k.$$

D'autre part, l'action étant supposée localement libre, les champs X_i sont linéairement indépendants en chaque point. (On pourrait, d'ailleurs, définir les actions localement libres par cette propriété). Il est clair que ces champs X_i sont complets, c'est-à-dire que chaque X_i est associé à un flot global de M .

La proposition suivante montre que, réciproquement, on peut reconstruire l'action du groupe G à l'aide des champs complets X_i que l'on appellera "champs de vecteurs fondamentaux" associés à l'action.

Proposition 1.A.1. - Soit M une variété de dimension p .
Supposons qu'il existe, sur M , n champs de vecteurs complets
 $(X_i)_{i=1,n}$ linéairement indépendants en chaque point et tels que :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k.$$

Alors il existe une unique action localement libre du groupe
de Lie simplement connexe G dont les champs de vecteurs fondamentaux
sont les champs $(X_i)_{i=1,n}$.

Démonstration (Cf. [Die], chapitre XIX-3, ex-1).

Nous ne donnerons que le schéma de la démonstration.

Considérons, dans $G \times M$, le champ de n -plans engendré par
les n -champs de vecteurs $(\bar{X}_i(g), X_i(m))$ de $T_{(g,m)}(G \times M)$. Les condi-
tions de crochet montrent que ce champ de n -plans est intégrable. Puisque
les champs X_i sont complets, les feuilles du feuilletage ainsi défini
se projettent biunivoquement sur G . On peut alors définir une action
de G sur M de la façon suivante :

$(g, g.m)$ est l'unique point de $G \times M$ appartenant à la même
feuille que (e, m) .

On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une action localement
libre ayant les X_i comme champs de vecteurs fondamentaux. ■

Puisque nous disposons de n champs de vecteurs X_i sur la
variété M ainsi que d'une action de G sur M , il peut être utile
de décrire la façon dont G opère sur ces champs.

Considérons la représentation adjointe de G dans son algèbre de Lie G_e :

$$\text{ad} : G \longrightarrow \text{Aut}(G_e).$$

Cette représentation s'écrit de la façon suivante :

$$\text{ad}(g)(\bar{X}_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(g)\bar{X}_j .$$

Les champs de vecteurs fondamentaux sur M se transforment alors par l'action de G comme la représentation adjointe. Plus précisément, on a :

$$g_*(X_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(g)X_j .$$

(Comme nous le ferons souvent par la suite, nous avons identifié ici l'élément g du groupe G et le difféomorphisme correspondant de M).

Il suffit, en effet, de voir comment les champs de vecteurs invariants à droite \bar{X}_i de G se transforment par l'action à gauche. Or, ceci est précisément une définition de la représentation adjointe.

B - La codimension un.

Nous ne nous intéresserons désormais qu'aux actions localement libres de codimension un, c'est-à-dire que nous supposerons que $n = p-1$. On peut alors faire quelques remarques d'ordre qualitatif sur le feuilletage de codimension un engendré par l'action.

Rappelons qu'un lacet γ d'une feuille d'un feuilletage est appelé cycle évanouissant s'il existe une homotopie libre $(\gamma_t)_{0 \leq t \leq 1}$

telle que :

- i) $\gamma_0 = \gamma$
- ii) $\forall t \in [0,1]$, γ_t est un lacet d'une feuille.
- iii) γ_0 n'est pas homotope à zéro dans sa feuille.
- iv) $\forall t \in]0,1]$, γ_t est homotope à zéro dans sa feuille.

Si un feuilletage ne possède pas de cycle évanouissant, le groupe fondamental de chaque feuille s'injecte dans celui de la variété.

Proposition 1.B.1.- Un feuilletage induit par une action localement libre de groupe de Lie est sans cycle évanouissant.

Démonstration (Cf. [Pla-2], [Bui]).

Supposons qu'il existe un cycle évanouissant γ_t . Soient m_t le point $\gamma_t(0)$ et F_t la feuille passant par m_t . On peut alors construire une famille continue de revêtements.

$$\begin{array}{ccc} p_t : G & \longrightarrow & F_t \\ g & \longrightarrow & \Phi(g, m_t). \end{array}$$

Puisque, pour t strictement positif, le lacet γ_t de F_t est homotope à zéro, il se relève dans G en un lacet. Par continuité de la famille de revêtements p_t , le lacet γ_0 se relève dans G en un lacet, ce qui contredit le fait que γ_0 n'est pas homotope à zéro dans F_0 . ■

Corollaire 1.B.2.- Soit G un groupe de Lie homéomorphe à \mathbb{R}^n . S'il existe une action localement libre de G sur une variété M de dimension $n+1$, alors le revêtement universel \tilde{M} de M est homéomorphe à \mathbb{R}^{n+1} .

Démonstration : Soient F le feuilletage induit par l'action et \tilde{F} son relevé dans \tilde{M} . Puisque F est sans cycle évanouissant, toutes les feuilles de \tilde{F} sont homéomorphes à G c'est-à-dire à \mathbb{R}^n . D'après un théorème de Palmeira (Cf. [Pal]), la variété \tilde{M} est homéomorphe à \mathbb{R}^{n+1} . ■

Rappelons rapidement quelques notions relatives à la croissance (Cf. [Hec-3], [Pla-1]). Soient f_1 et f_2 deux fonctions croissantes de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ (ou de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$). On dit que f_1 et f_2 ont même type de croissance s'il existe des constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$, γ et $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$, γ' telles que :

$$\forall x, \quad f_1(x) \leq \alpha f_2(\beta x + \gamma)$$
$$f_2(x) \leq \alpha' f_1(\beta' x + \gamma').$$

On appelle type de croissance d'une fonction croissante f , sa classe d'équivalence relativement à cette relation d'équivalence.

Soit maintenant (M, F) un feuilletage d'une variété compacte. Munissons M d'une métrique riemannienne et soit m un point de M . Considérons alors la fonction croissante associant au réel positif x le volume de la boule de centre m et de rayon x dans la feuille passant par m . Le type de croissance obtenu s'appelle type de croissance de la feuille F passant par m . (On vérifie qu'il ne dépend

ni du point m de F , ni de la métrique choisie).

Soit G/H un espace homogène de groupes de Lie muni d'une métrique invariante à droite. La fonction associant au réel positif x le volume de la boule de centre eH et de rayon x est croissante. Son type de croissance est appelé type de croissance de l'espace homogène G/H .

Dans le cas d'un feuilletage défini par une action localement libre de groupe de Lie, ces deux notions sont reliées par la :

Proposition 1.B.3.- Soit Φ une action localement libre de classe C^r ($r \geq 2$) sur une variété compacte M . Alors, le type de croissance de la feuille F_m passant par un point m est le même que celui de l'espace homogène G/G_m où G_m désigne le stabilisateur de m .

Démonstration : Munissons M d'une métrique riemannienne de telle sorte que les champs de vecteurs fondamentaux soient orthogonaux deux à deux et soient de norme un. Dans ce cas, il est clair que la boule de centre m et de rayon R dans F_m est isométrique à la boule de centre eG_m et de rayon R dans G/G_m pour une métrique invariante à droite. ■

Soient Γ un groupe de type fini et Σ un système fini de générateurs. Associons à l'entier positif n le nombre d'éléments de Γ s'écrivant comme produit de moins de n éléments de Σ . Le type de croissance de cette fonction est appelé type de croissance de Γ , il est indépendant de Σ .

Théorème 1.B.4.- Soit G un groupe de Lie dont tous les espaces homogènes G/Γ avec Γ discret, ont une croissance exponentielle (i.e ont même type de croissance que la fonction exponentielle). S'il existe une action localement libre de codimension un de G sur une variété compacte M , alors le groupe fondamental de M a une croissance exponentielle.

Démonstration : Il s'agit d'une application directe du théorème de J. Plante (Cf. [Pla-1]) suivant lequel la croissance des feuilles d'un feuilletage est dominée par celle du groupe fondamental de la variété ambiante lorsque le feuilletage considéré est sans cycle évanescent. ■

CHAPITRE II

=====

REMARQUES GENERALES SUR LES ACTIONS LOCALEMENT LIBRES DU GROUPE AFFINE.

Nous noterons GA le groupe affine de la droite réelle, c'est-à-dire le groupe des transformations

$$x \longmapsto ax + b \quad (a > 0)$$

Ce sont les actions localement libres de GA que nous allons étudier. Nous représenterons un élément g de GA par un couple (a,b) , et lorsque cela sera nécessaire, nous noterons $a(g)$ et $b(g)$ les deux composantes de g .

A - Propriétés algébriques et géométriques de GA .

La loi de composition dans GA est :

$$(a,b)(a',b') = (aa', ab' + b).$$

L'inverse de (a,b) est $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$. Commençons par décrire quelques propriétés de GA .

Proposition 2.A.1.- Le groupe affine est résoluble.

Démonstration : Il est clair que le commutateur de deux applications affines est une translation. Le premier groupe dérivé de GA est donc abélien. ■

Proposition 2.A.2.- Les deux champs de vecteurs de GA :

$$\bar{X}_{(a,b)} = a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b}$$

$$\bar{Y}_{(a,b)} = \frac{\partial}{\partial b}$$

sont invariants à droite. Ils forment une base de l'algèbre de Lie de GA.

La relation de commutation est :

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = -\bar{Y} \quad \blacksquare$$

La vérification de cette proposition est immédiate. En calculant comment ces champs se transforment par translation à gauche, on obtient la :

Proposition 2.A.3.- La représentation adjointe est donnée par :

$$\text{ad}(g)(\bar{X}) = \bar{X} - b(g)\bar{Y}$$

$$\text{ad}(g)(\bar{Y}) = a(g)\bar{Y} \quad \blacksquare$$

Proposition 2.A.4.- La mesure de Haar invariante à droite sur GA est la mesure :

$$\lambda = \frac{da \wedge db}{a}$$

Une métrique invariante à droite sur GA est la métrique

$$ds^2 = \frac{b^2+1}{a^2} da^2 - \frac{b}{a} da db + db^2 \quad \blacksquare$$

Il s'agit encore d'une vérification immédiate. Cette proposition montre que, géométriquement, le groupe affine s'identifie au demi-plan de Poincaré. (Les formules ne sont pas les formules habituelles car nous avons pris la métrique invariante à droite).

Il va nous falloir étudier les feuilles d'un feuilletage induit par une action localement libre de GA. Pour cela, étudions les sous-groupes discrets de GA et la croissance des espaces homogènes correspondants.

Proposition 2.A.5.- Tout sous-groupe discret de GA est soit trivial, soit infini cyclique.

Démonstration : Soit Γ un sous-groupe discret non trivial de GA. Si Γ est abélien, deux cas sont possibles :

i) Γ est uniquement constitué de translations. Etant discret, Γ doit être infinicyclique.

ii) tous les éléments de Γ fixent un point commun de \mathbb{R} (par l'action canonique de Γ sur \mathbb{R}). Dans ce cas, on peut (quitte à effectuer une conjugaison intérieure) supposer que Γ est inclus dans le groupe des homothéties de centre 0. Ici encore, Γ étant discret, il doit être infini cyclique.

Si Γ n'est pas abélien, il contient au moins une translation $(1,b)$ et une homothétie (a,b') . Alors Γ contient :

$$(a,b')^{-n}(1,b)(a,b')^n = \left(1, \frac{b}{a^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1,0)$$

Le sous-groupe Γ n'est donc pas discret. ■

Proposition 2.A.6. - Les espaces homogènes GA/Γ avec Γ discret sont homéomorphes à :

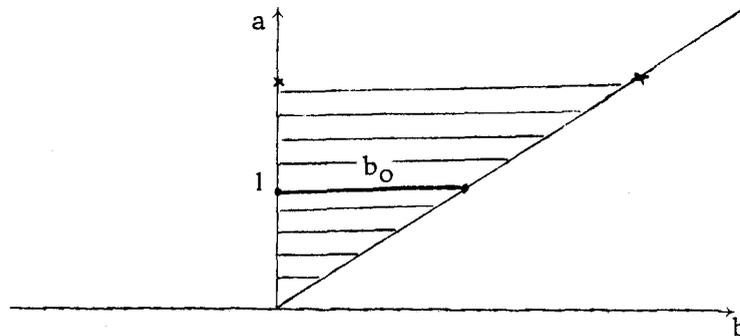
- un plan si Γ est trivial,
- un cylindre dans le cas contraire.

Ils sont tous à croissance exponentielle.

Démonstration : Ces calculs de croissance ont été effectués par J.P. Boulenguez. Pour la simplicité des calculs, nous utiliserons les deux modèles de la géométrie hyperbolique : le demi-plan et le disque.

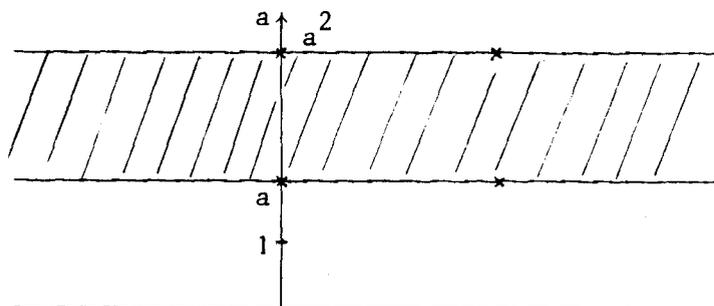
La première partie de la proposition est claire. Dessinons un domaine fondamental de GA/Γ lorsque Γ est cyclique.

1er cas : Γ est engendré par la translation $(1, b_0)$



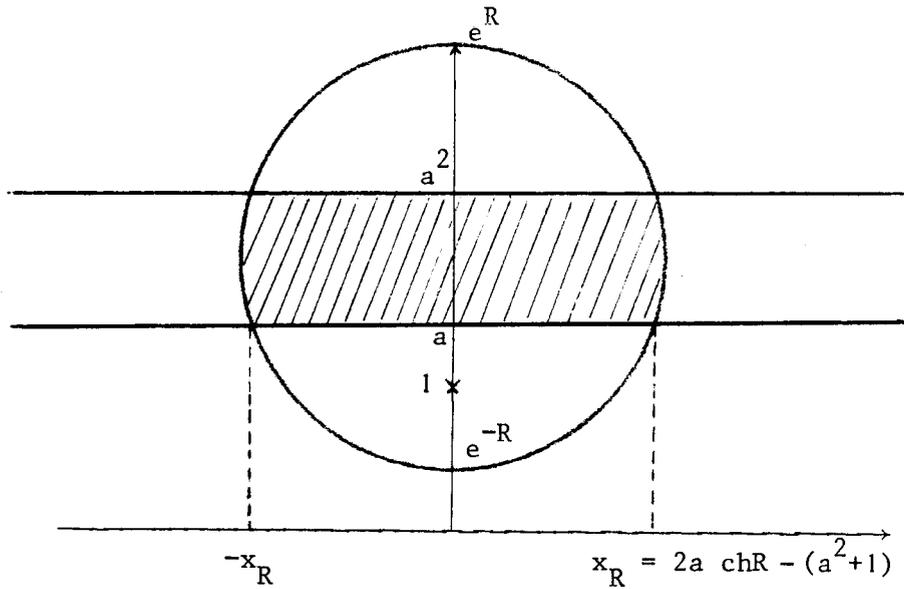
(Les deux points marqués d'une croix doivent être identifiés).

2ème cas : Γ est engendré par l'homothétie $(a, 0)$



(Ici encore, on identifie les points marqués d'une croix).

Dans la géométrie hyperbolique, le disque de centre (1,0) et de rayon hyperbolique R est le disque euclidien orthogonal à l'axe des "a" et passant par les points $(e^R, 0)$ et $(e^{-R}, 0)$. Plaçons-nous dans le 2ème cas. Pour calculer le volume de la boule de rayon R dans l'espace homogène GA/Γ , il faut calculer le volume du domaine hachuré suivant :



Ce volume est supérieur à :

$$\int_{\substack{-x_R \leq x \leq x_R \\ a \leq y \leq a^2}} \frac{dx dy}{y} = 2x_R \text{Log } a = 2 \text{Log } a (2a \text{ch } R - (a^2 + 1)).$$

Ceci donne bien une croissance exponentielle.

En ce qui concerne le 1er cas, on procède de manière analogue, ce qui donne encore une croissance exponentielle. (On verra d'ailleurs que les espaces homogènes du premier type ne sont jamais orbites d'une action).

Il reste à calculer la croissance du groupe affine par lui-même.
Pour cela, utilisons le modèle du disque de Poincaré où la métrique est :

$$ds^2 = \frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{(1-r^2)^2}$$

et le volume :

$$\lambda = \frac{r d\theta dr}{(1-r^2)^2} .$$

La boule de centre 0 et de rayon hyperbolique R est la boule euclidienne de centre 0 et de rayon $\text{th } R$. Le volume de la boule de centre 0 et de rayon R est donc :

$$2\pi \int_0^{\text{th } R} \frac{t dt}{(1-t^2)^2} = \left[\pi \frac{1}{1-t^2} \right]_0^{\text{th } R} = \pi \text{sh}^2 R.$$

Ici encore, la croissance est exponentielle. ■

B - Conséquence pour les actions du groupe affine.

L'étude précédente du groupe affine, ainsi que les remarques du chapitre 1 relatives aux actions en général, mènent aux conclusions suivantes :

Proposition 2.B.1.- Soit Φ une action localement libre du groupe affine sur une variété compacte M de dimension trois, de classe C^r ($r \geq 2$). Alors :

i) il existe deux champs de vecteurs de classe C^{r-1} X et Y sur M, linéairement indépendants en chaque point, tels que $[X, Y] = -Y$.

Ces champs se transforment sous l'action du groupe par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\forall g \in GA, \quad g_*(X) &= X - b(g)Y \\ g_*(Y) &= a(g)Y .\end{aligned}$$

ii) les feuilles du feuilletage induit sont des cylindres ou des plans. Toutes sont à croissance exponentielle. Par conséquent, la variété M est sans bord, son groupe fondamental est à croissance exponentielle et le revêtement universel de M est difféomorphe à \mathbb{R}^3 . ■

Précisons ces résultats.

Proposition 2.B.2.- Il existe effectivement des cylindres, il existe effectivement des plans. Tous les cylindres ont une holonomie non triviale.

Démonstration : Si le feuilletage défini par l'action avait toutes ses feuilles homéomorphes à des plans, la variété M serait homéomorphe au tore T^3 (Cf. [Ros], [Bui]). Le groupe fondamental de M ne serait pas à croissance exponentielle, d'où une contradiction.

De même, si le feuilletage ne contenait que des cylindres, le groupe fondamental de la variété serait à croissance polynomiale (Cf. [Hec-2]), ce qui donne encore une contradiction.

De plus, si l'un des cylindres avait une holonomie triviale, l'argument utilisé dans le lemme fondamental de [Hec-2] pourrait s'appliquer et montrerait que toutes les feuilles sont des cylindres. Tous les cylindres ont donc une holonomie non triviale. ■

Proposition 2.B.3.- Toutes les feuilles d'un feuilletage obtenu à l'aide d'une action localement libre de classe C^2 de GA sur une variété compacte de dimension trois, sont partout denses.

Démonstration : Les feuilles du feuilletage induit étant des plans ou des cylindres, elles ont un ou deux bouts (Cf [Eps]). On utilise alors le résultat de G. Duminy (Cf. [Dum]) affirmant que si un feuilletage de codimension un et de classe C^2 d'une variété compacte possède un minimal exceptionnel, il possède au moins une feuille ayant une infinité de bouts. Comme le feuilletage considéré est sans feuilles compactes, toutes les feuilles sont partout denses. ■

Remarquons que cet argument reste valable pour une action de groupe résoluble, car les espaces homogènes de groupes de Lie résolubles ont un nombre fini de bouts. (Cf. [Aus]).

Nous utiliserons la notion de groupe moyennable (Cf. [Gre]). Soit G un groupe de Lie. Considérons l'espace $C_b^0(G)$ des fonctions continues bornées définies sur G et à valeur dans \mathbb{R} . On dit que G est moyennable s'il existe une fonctionnelle :

$$\eta : C_b^0(G) \rightarrow \mathbb{R}$$

- telle que
- i) $f \geq 0$ implique $\eta(f) \geq 0$
 - ii) $\eta(\lambda f + \mu g) = \lambda \eta(f) + \mu \eta(g)$
 - iii) $\eta(1) = 1$
 - iv) η est invariant par translation à gauche.

Rappelons quelques résultats :

- i) tout groupe de Lie résoluble est moyennable, par exemple le groupe affine.

ii) Soit G un groupe moyennable et K un convexe compact d'un espace vectoriel topologique. Si G opère sur K de manière affine, alors il existe un point de K fixe par l'action de G .

Nous en venons à une proposition qui sera très importante pour la suite.

Proposition 2.B.4. - Toute action localement libre de GA sur une variété compacte M préserve une mesure de Borel finie sur les compacts. Si l'action est de classe C^2 , cette mesure est strictement positive sur les ouverts.

Démonstration : Considérons une action localement libre du groupe affine sur M . Le groupe GA opère sur l'espace des mesures bornées sur M de manière affine. D'autre part, il est clair que cette action préserve le convexe compact (pour la topologie faible) formé des mesures positives et de masse totale un. Le théorème de point fixe cité précédemment donne le résultat.

On peut d'ailleurs "explicitement" cette mesure. Soit m un point de M . Une mesure invariante μ sur M sera donnée par sa valeur sur une fonction continue ψ définie sur M :

$$\int_M \psi \, d\mu = \eta(g \rightarrow \psi(g.m)).$$

Le support de cette mesure est un fermé invariant par l'action. Si l'action est de classe C^2 , toutes les feuilles sont partout denses, le support de la mesure est donc M tout entier. Les ouverts de M ont donc une mesure strictement positive. ■

Désormais, nous supposons que l'action localement libre étudiée est de classe C^2 .

Corollaire 2.B.5.- L'ensemble des points non errants du flot associé à X (ou à Y) est la variété M toute entière. Le flot associé à X est transitif.

Démonstration : Il s'agit du théorème du retour de Poincaré. ■

Proposition 2.B.6.- Soit C un cylindre. Alors, il existe sur C une orbite périodique du champ X et une seule. Le champ Y ne possède pas d'orbite périodique.

Démonstration : On sait déjà que le stabilisateur d'un point est un groupe cyclique engendré soit par une translation $(1,b)$ soit par une homothétie (a,b) (avec $a > 1$). Montrons que le premier cas ne peut pas se produire.

Supposons qu'un point m soit fixe par la translation $(1,b)$. C'est-à-dire :

$$(1,b).m = m.$$

Dans ce cas, le cylindre passant par m contient une orbite périodique de Y de période b . Soit $a > 1$, on a alors :

$$(a,0)(1,b)\left(\frac{1}{a}, 0\right)(a,0)m = (a,0)m$$

soit $(1,ab)\left[(a,0).m\right] = (a,0)m.$

Ceci montre que le cylindre passant par m contient aussi une

orbite périodique de Y de période ab . En choisissant a assez petit, cette orbite fermée sera homotope à zéro, contredisant le fait que le groupe fondamental de chaque feuille s'injecte dans celui de la variété.

Soit alors m un point d'un cylindre, stable par le sous-groupe engendré par (a_0, b_0) (avec $a_0 > 1$).

Soit m' un autre point du même cylindre. Ce point s'écrit

$$m' = (a, b).m.$$

Le stabilisateur du point m' est le groupe engendré par le conjugué de (a_0, b_0) par (a, b) c'est-à-dire par :

$$(a_0, b(1-a_0) + a b_0).$$

Le point m' appartient à une orbite périodique de X si et seulement si son stabilisateur est constitué d'homothéties, c'est-à-dire si :

$$b(1-a_0) + a b_0 = 0.$$

Cette équation donne au rapport $\frac{b}{a}$ une unique valeur, ce qui montre qu'il existe sur le cylindre une unique orbite périodique de X . ■

A l'aide de cette proposition et de la mesure invariante, nous allons pouvoir préciser la nature de l'holonomie des cylindres.

Proposition 2.B.7. - Soient C un cylindre et $T(t)$ un arc transverse au feuilletage paramétré par $t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$ tel que $T(0)$ soit un point m de l'unique orbite périodique de X tracée sur C . L'holonomie de C calculée le long de cette orbite périodique orientée

positivement est une contraction au sens large, c'est-à-dire que si l'on désigne par H le germe d'holonomie considéré, on a :

$$\forall t \neq 0 \quad |H(t)| < |t|.$$

Démonstration : Soit U un voisinage de l'élément neutre dans GA . Si l'on choisit U et T assez petits, l'application :

$$\begin{aligned} \psi : U \times]-\varepsilon, +\varepsilon[&\longrightarrow M \\ g, t &\longrightarrow g.T(t) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme sur son image $\psi(U \times]-\varepsilon, +\varepsilon[) = V$ qui est un voisinage de m dans M . Soit ψ_t l'application partielle de U dans M .

Notons μ une mesure invariante sur M . D'après [Rok], il existe une unique mesure μ_1 sur $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ telle que pour tout Borélien B inclus dans V , on ait :

$$\mu(B) = \int_{]-\varepsilon, +\varepsilon[} \lambda(\psi_t^{-1}(B)) d\mu_1(t)$$

où λ désigne la mesure de Haar invariante à droite sur GA . Etudions l'holonomie à l'aide de la carte ψ . Puisque ψ est un difféomorphisme, il existe un réel positif η et deux fonctions :

$$\begin{aligned} G :]-\eta, +\eta[&\longrightarrow GA \\ H :]-\eta, +\eta[&\longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

telles que :

$$(A, 0).T(t) = G(t).T(H(t)) \quad , \quad G(0) = e$$

où l'élément $(A,0)$ est le générateur du stabilisateur de m (avec $A > 1$) et H est l'holonomie du cylindre étudié. On doit choisir η éventuellement plus petit que ε de façon à ce que H soit défini sur l'intervalle $] -\eta, +\eta[$.

On peut alors trouver un voisinage ouvert U' de e dans GA , inclus dans U tel que :

$$\begin{aligned} \forall g \in U', \quad \forall t \in] -\eta, +\eta[, \\ (A,0).g.T(t) &= (A,0)g(A,0)^{-1}(A,0)T(t) \\ &= [(A,0)g(A,0)^{-1}].G(t)T(H(t)). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que dans la carte $\psi|_{U' \times] -\eta, +\eta[}$, l'application

$$x \in M \longmapsto (A,0).x \in M$$

s'écrit en coordonnées locales :

$$(g,t) \longrightarrow [(A,0)g(A,0)^{-1}G(t), H(t)].$$

Ecrivons que la mesure μ est invariante par l'action en utilisant la mesure μ_1 sur $] -\varepsilon, +\varepsilon[$.

On obtient, en prenant pour B l'image par ψ du produit d'une boule de GA de centre e par l'intervalle $[0, t]$:

$$(1) \quad \int_0^t d\mu_1 = \int_0^{H(t)} A a(G(t)) d\mu_1.$$

En effet, la mesure de Haar invariante à droite λ se transforme de la façon suivante par l'action à gauche :

$$\lambda(gE) = a(g)\lambda(E) \quad \text{pour tout borélien } E \text{ de } GA.$$

(c'est-à-dire que la fonction modulaire du groupe affine est :

$$\Delta_G(g) = a(g).$$

Supposons alors que l'holonomie H ne soit pas contractante, c'est-à-dire qu'il existe une suite de réels t_n tels que :

$$\begin{aligned} t_n &\longrightarrow 0 \\ |H(t_n)| &\geq |t_n| \end{aligned}$$

On aurait alors :

$$\mu_1([0, t_n]) \geq A \left[\inf_{t \in [0, t_n]} a(G(t)) \right] \cdot \mu_1([0, t_n]).$$

Or, ceci est impossible car

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = G(0) = e = (1, 0).$$

Alors que l'inégalité précédent donne :

$$\inf_{0 \leq t \leq t_n} a(G(t)) \leq \frac{1}{A} < 1.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition. ■

Nous allons préciser la proposition 2.B.3. relative à la densité des orbites par la :

Proposition 2.B.8. - Soit Φ une action localement libre de GA sur une variété compacte de dimension trois. Si Φ est de classe C^2 , deux cas sont possibles et s'excluent mutuellement.

i) soit les orbites du champ Y sont denses dans M .

ii) soit M est un fibré en tores sur le cercle et les orbites de Y sont tangents aux fibres d'une fibration de classe C^r . Le flot associé à X est alors une suspension d'un difféomorphisme du tore.

Démonstration : Il s'agit d'adapter une proposition analogue due à J. Plante (Cf. [Pla-3]) pour le cas des flots d'Anosov.

Supposons que le champ Y ait une orbite non dense.

Soit m un minimal du champ Y . On a

$$m \neq M.$$

Il est clair que, pour toute homothétie $(a,0)$, on a :

$$(a,0)m \cap m = \emptyset \quad \text{ou} \quad (a,0)m = m.$$

L'ensemble des réels a tels que

$$(a,0)m = m$$

est un sous-groupe fermé de \mathbb{R}_+^* . Ce sous-groupe n'est pas \mathbb{R}_+^* car, sinon m serait toute la variété M . Il n'est pas non plus trivial car tous les points de M sont non errants pour le flot associé au champ X . Il est donc infini cyclique. Soit γ un générateur de ce groupe. L'ensemble

$$\bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} (a,0)m = \bigcup_{a \in [1, \gamma]} (a,0)m$$

est alors un fermé invariant par l'action de GA , c'est-à-dire qu'il est égal à la variété M toute entière. Il s'ensuit que m est une sous-variété de classe C^0 de M . En effet, soient (ψ_t) le flot associé

à X et S un petit disque transverse à X et ne reconstruit pas η .
Pour chaque x de S , il existe un unique réel $t(x)$ de $]0, \gamma[$ tel que :

$$\Psi_{t(x)}(x) \in \eta.$$

Le minimal η étant compact la fonction t est continue, ce qui montre que η est défini localement par la carte :

$$x \in S \longmapsto \Psi_{t(x)}(x) \in \eta.$$

Le minimal η est donc bien une sous-variété de classe C^0 , qui est homéomorphe à un tore car elle supporte un flot sans singularité.

Ceci montre que M est un fibré (de classe C^0) en tores sur le cercle. Dans [Ghy-Ser], nous avons classifié, à conjugaison différentiable près, les feuilletages sans feuilles compactes sur ces fibrés en tores sur le cercle. Cette classification montre que le flot (Ψ_t) est strictement contractant sur une transversale au feuilletage. Autrement dit, le flot (Ψ_t) est un flot d'Anosov. On peut alors appliquer le théorème de [Pla-3] qui montre que la fibration de fibre η et de base S^1 que nous venons d'exhiber est différentiable et que le flot Ψ_t est une suspension. ■

CHAPITRE III

=====

LES EXEMPLES D' ACTIONS LOCALEMENT LIBRES DU GROUPE AFFINE.

A - Construction d'actions "homogènes".

Soient G un groupe de Lie de dimension n et G' un groupe de Lie de dimension p contenant un sous-groupe isomorphe à G . Supposons que G' contienne un sous-groupe discret Γ tel que G'/Γ soit compact. Le groupe G opère sur G' par translations à gauche, il opère donc sur l'espace homogène G'/Γ .

$$\begin{aligned} G \times G'/\Gamma &\longrightarrow G'/\Gamma \\ (g, h.\Gamma) &\longrightarrow gh.\Gamma. \end{aligned}$$

Le stabilisateur du point $h\Gamma$ est :

$$h\Gamma h^{-1} \cap G.$$

Ce groupe est discret dans G . Par conséquent, l'action que nous venons de décrire de G sur G'/Γ est localement libre. Les actions de ce type seront appelées "actions homogènes" de G .

Essayons d'appliquer cette méthode au groupe affine.

Proposition 3.A.1.- Il existe deux groupes de Lie G' et deux seulement tels que :

- i) G' est simplement connexe et de dimension trois.

- ii) G' contient un sous-groupe isomorphe à GA .
- iii) G' contient un sous-groupe discret Γ tel que G'/Γ est compact.

Ces deux groupes de Lie sont les suivants :

i) le revêtement universel $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ de $SL_2(\mathbb{R})$, dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, avec les relations :

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Y}] &= -\bar{Y} \\ [\bar{X}, \bar{Z}] &= \bar{Z} \\ [\bar{Y}, \bar{Z}] &= 2\bar{X} . \end{aligned}$$

ii) un groupe de Lie résoluble de dimension trois que nous noterons G_3 dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ avec les relations :

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Y}] &= -\bar{Y} \\ [\bar{X}, \bar{Z}] &= \bar{Z} \\ [\bar{Y}, \bar{Z}] &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration : Il suffit d'examiner, dans la liste des algèbres de Lie de dimension trois (Cf. par exemple [Kir]) celles qui contiennent deux éléments X et Y tels que $[X, Y] = -Y$. On trouve finalement que les seuls groupes de Lie simplement connexes de dimension trois contenant le groupe affine sont :

- i) $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$
- ii) G_3
- iii) $GA \times \mathbb{R}$.

Le troisième cas est à éliminer car $GA \times \mathbb{R}$ ne contient aucun sous-groupe discret tel que le quotient soit compact (ceci est élémentaire).

Le fait que $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ contienne des sous-groupes uniformes discrets (i.e à quotients compacts) est bien connu. Nous étudierons le cas de G_3 dans le paragraphe suivant, et en particulier, nous verrons qu'il existe effectivement des sous-groupes uniformes discrets de G_3 . ■

Nous voyons donc apparaître deux familles d'actions localement libres du groupe affine ; celles sur les espaces G_3/Γ , et celles sur $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$. Les deux paragraphes suivants sont consacrés à la description géométrique de ces actions.

Remarque 1.- Les "actions homogènes" sont évidemment transversalement homogènes, c'est-à-dire que la structure transverse du feuilletage associé à l'action est modélée sur l'espace homogène G'/G .

Remarque 2.- Dans le cas d'une action de groupe de Lie nilpotent G , on sait que la variété ambiante est un espace homogène G'/Γ où G' est un sur-groupe de G (Cf. [Hec-1]). Cependant, l'action localement libre peut être totalement différente d'une action "homogène". En ce qui concerne le groupe affine, nous allons montrer que si la mesure invariante est suffisamment régulière (Cf. Chapitre IV), l'action est conjuguée à une action "homogène".

B - Les actions "résolubles".

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux actions homogènes du type :

$$GA \times G_3/\Gamma \longrightarrow G_3/\Gamma.$$

Commençons par préciser la nature de G_3 et de ses sous-groupes uniformes discrets. Soit A une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à deux. La condition relative à la trace signifie que A possède deux valeurs propres strictement positives. Ceci permet de définir A^t pour tout réel t . Considérons, dans l'ensemble des triplets (t,x,y) de \mathbb{R}^3 , la loi de composition suivante :

$$(t,x,y) (t',x',y') = (t+t', A^t(x',y') + (x,y)).$$

On vérifie facilement que ceci définit une structure de groupe et que le groupe obtenu est isomorphe à G_3 (et ceci quelle que soit la matrice A de $SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $\text{tr } A > 2$).

Indiquons comment le groupe affine se plonge dans G_3 . Soit U un vecteur propre de A , associé à la valeur propre positive λ . A l'élément (a,b) de GA , associons l'élément

$$\left(\frac{\text{Log } a}{\text{Log } \lambda}, bU \right)$$

de G_3 . On obtient ainsi deux plongements de GA dans G_3 (un pour chaque direction propre de A).

Soit Γ_A le sous-groupe de G_3 formé des triplets entiers (t,x,y) de \mathbb{Z}^3 . Il est facile de constater que Γ_A est un sous-groupe uniforme discret de G_3 .

Proposition 3.B.1.- L'espace homogène G_3/Γ_A est difféomorphe à un fibré en tores sur le cercle T_A^3 dont la monodromie est donnée par A . Plus précisément :

$$T_A^3 \simeq T^2 \times \mathbb{R} / (m, t) \sim (\bar{A}(m), t+1)$$

où \bar{A} désigne l'automorphisme du tore déduit de A .

Démonstration : Le groupe Γ_A est engendré par :

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0) \quad \text{et} \quad (0, 0, 1).$$

L'espace homogène G_3/Γ_A est donc l'espace \mathbb{R}^3 où l'on identifie les points :

$$\begin{aligned} (t, x, y) & \text{ avec } (t+1, A(x, y)) \\ & (t, x+1, y) \\ & (t, x, y+1) . \end{aligned}$$

Il est alors clair que G_3/Γ_A est difféomorphe à T_A^3 . ■

La proposition suivante montre que les espaces homogènes décrits précédemment sont les seuls à considérer :

Proposition 3.B.2.- Soit Γ un sous-groupe uniforme discret de G_3 . Alors, il existe une matrice A de $SL_2(\mathbb{Z})$, de trace strictement supérieure à deux telle que Γ soit conjugué à Γ_A dans G_3 .

Démonstration : Le groupe G_3 s'écrit comme une extension :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0.$$

Soit γ un élément de Γ qui n'est pas dans \mathbb{R}^2 . Le sous-groupe discret $\Gamma \cap \mathbb{R}^2$ de \mathbb{R}^2 est un sous-groupe discret invariant

par la conjugaison intérieure par γ . Ce sous-groupe n'est pas trivial car, le commutateur de deux éléments de Γ appartient à \mathbb{R}^2 , et Γ n'est pas abélien. Ce sous-groupe n'est pas non plus de rang 1 car l'action de γ sur \mathbb{R}^2 aurait une valeur propre égale à ± 1 . Ceci montre que $\Gamma \cap \mathbb{R}^2$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 et que l'action de γ sur \mathbb{R}^2 préserve ce treillis : Il est alors facile de compléter la démonstration. ■

Il nous reste à décrire géométriquement les actions obtenues sur ces fibrés T_A^3 .

Le feuilletage de \mathbb{R}^2 par droites parallèles à l'une des directions propres de A définit un feuilletage par droites du tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Le feuilletage produit sur $T^2 \times \mathbb{R}$ est évidemment invariant par l'application :

$$(m, t) \in T^2 \times \mathbb{R} \longmapsto (\bar{A}(m), t+1) \in T^2 \times \mathbb{R}.$$

On obtient ainsi deux feuilletages (un pour chaque choix d'une direction propre) sur le fibré en tores T_A^3 . Ces feuilletages sont évidemment ceux définis par les actions homogènes de GA sur T_A^3 .

Précisons les champs de vecteurs fondamentaux associés à l'action. Soit (u, v) des coordonnées propres de \mathbb{R}^2 relatives à la matrice A et λ la valeur propre correspondant à la direction propre choisie. Les deux champs de vecteurs de \mathbb{R}^3

$$\tilde{X}(u, v, t) = \frac{1}{\text{Log } \lambda} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{Y}(u, v, t) = \lambda^t \frac{\partial}{\partial v}$$

passent au quotient sur T_A^3 en deux champs de vecteurs X et Y qui sont bien sûr les champs de vecteurs fondamentaux associés à l'action.

En plus de ces deux champs, on dispose d'un troisième champ Z correspondant au troisième générateur de l'algèbre de Lie de G_3 . Ce champ est défini par :

$$Z_{(u,v,t)} = \lambda^{-t} \frac{\partial}{\partial u} .$$

Il se transforme sous l'action de GA par la formule :

$$\forall g \in GA, \quad g_* Z = \frac{1}{a(g)} Z .$$

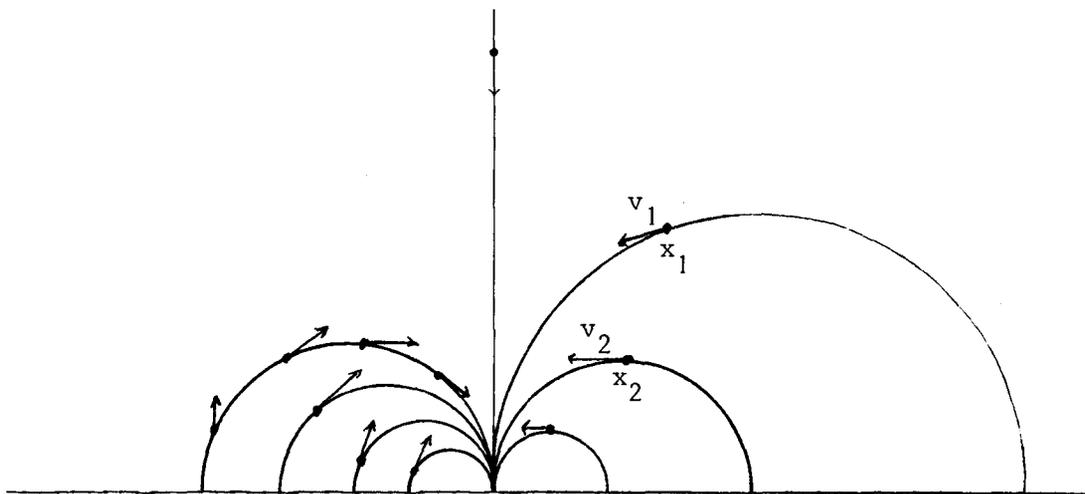
C - Les actions "semi-simples".

Le groupe affine se plonge dans $SL_2(\mathbb{R})$ de deux façons "naturelles" :

$$\begin{aligned} GA &\longrightarrow SL_2(\mathbb{R}) \\ (a,b) &\longmapsto \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} \\ (a,b) &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ -\frac{b}{\sqrt{a}} & \sqrt{a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A ces plongements correspondent des actions homogènes que nous allons décrire.

Soit \mathbb{H}^2 le demi-plan de Poincaré. Le groupe $PSL_2(\mathbb{R})$ opère par isométrie sur \mathbb{H}^2 , il opère donc sur le fibré unitaire tangent $T_1(\mathbb{H}^2)$ à \mathbb{H}^2 . On vérifie facilement que cette action est transitive et libre, ce qui permet d'identifier $PSL_2(\mathbb{R})$ à $T_1(\mathbb{H}^2)$. Considérons alors les relations d'équivalence suivantes dans $T_1(\mathbb{H}^2)$. Deux points (x_1, v_1) et (x_2, v_2) de $T_1(\mathbb{H}^2)$ sont équivalents si et seulement si les géodésiques partant de x_1 et x_2 dans les directions v_1 et v_2 (resp. dans les directions opposées à v_1 et v_2) ont mêmes points à l'infini. Les classes d'équivalence dans $T_1(\mathbb{H}^2)$ munissent $T^1(\mathbb{H}^2)$ d'un feuilletage (trivial) invariant par l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$. Une feuille de ce feuilletage peut être représentée de la façon suivante :



Si Γ est un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$ tel que le quotient $SL_2(\mathbb{R})/\Gamma$ soit compact, on peut considérer la variété M_Γ quotient de $T_1(\mathbb{H}^2)$ par l'action de Γ munie du feuilletage quotient. Les feuilletages ainsi obtenus sont les "feuilletages horocycliques" sur M_Γ . Suivant la relation d'équivalence choisie dans $T_1(\mathbb{H}^2)$, les feuilletages obtenus sont ceux correspondants aux actions homogènes de GA sur $SL_2(\mathbb{R})/\Gamma$ déduites de l'un ou de l'autre des plongements naturels de GA dans $SL_2(\mathbb{R})$.

Les variétés M_{Γ} ont beaucoup été étudiées ; par exemple, les fibrés unitaires tangents aux surfaces de genre supérieur à deux, ainsi que les variétés de Brieskorn $V_{p,q,r}$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$) sont de type. Toutes ces variétés sont des fibrés de Seifert.

Ici encore, il existe sur M , outre les champs X et Y définissant l'action, un troisième champ de vecteur Z correspondant au troisième générateur de l'algèbre de Lie de $SL_2(\mathbb{R})$. Ce champ Z se transforme sous l'action de GA par la formule :

$$g_* Z = \frac{1}{a(g)} Z + 2 \frac{b(g)}{a(g)} X - \frac{b^2(g)}{a(g)} Y.$$

Il suffit pour cela d'expliciter la représentation adjointe

$$\text{ad} : SL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{Aut}(SL_2(\mathbb{R}))$$

et de prendre sa restriction au sous-groupe GA de façon à obtenir l'action de GA sur le champ Z .

\mathcal{D} - Propriétés communes aux deux familles d'exemples.

Dans les deux familles décrites précédemment, on a la caractéristique commune suivante. En plus des champs X et Y , il existe un troisième champ Z vérifiant les propriétés suivantes :

- i) X, Y, Z sont linéairement indépendants en chaque point ;
- ii) $[X, Y] = -Y$; $[X, Z] = Z$; $[Y, Z] = kX$;
- iii) $g_*(Z) = \frac{1}{a(g)} Z + 2 \frac{b(g)}{a(g)} kX - \frac{b^2(g)}{a(g)} k Y.$

Si le réel k est nul, on retrouve la famille "résoluble", si k est non nul, on retrouve la famille semi-simple. Il est clair que si, dans le cas général, on arrive à construire un troisième champ de vecteurs Z vérifiant les trois propriétés précédentes, il sera facile de montrer que l'action considérée est conjuguée, avec paramètres, à l'une des actions que nous venons de décrire. En particulier, la variété ambiante sera soit un fibré en tores sur le cercle, soit un fibré de Seifert.

C'est ce champ de vecteurs que nous allons désormais essayer de construire. Nous n'y parviendrons qu'en imposant à la mesure invariante trouvée dans le chapitre précédent d'être suffisamment "bonne".

Pour cela, nous commencerons par montrer que, sous les hypothèses faites quant à la mesure, l'action étudiée préserve une forme volume de classe C^r . C'est en effet le cas dans les exemples décrits, car, aussi bien $SL_2(\mathbb{R})$ que G_3 sont unimodulaires, la mesure de Haar, invariante à gauche et à droite définit donc une forme volume invariante sur $SL_2(\mathbb{R})/\Gamma$ ou G_3/Γ .

E - Relation avec les flots d'Anosov.

Rappelons qu'un flot f_t sur une variété compacte M est dit "flot d'Anosov" (Cf. [Ano]) s'il existe une décomposition du fibré tangent à M en une somme de trois sous-fibrés continus :

$$T_x(M) = E_x^u \oplus E_x^s \oplus E_x^l$$

telle que : i) E_x^l est le fibré tangent aux orbites de f_t .
(E_x^l est de dimension un).

- ii) E^u et E^s sont invariants par df_t .
- iii) df_t contracte exponentiellement les vecteurs tangents à E^s quand t tend vers $+\infty$.
- iv) df_{-t} contracte exponentiellement les vecteurs tangents à E^u quand t tend vers $+\infty$.

On peut dire que la donnée d'une action localement libre de GA donne lieu à un "demi-flot d'Anosov". En effet, la condition de crochet $[X, Y] = -Y$ montre que le flot associé à X dilate exponentiellement les vecteurs proportionnels à Y . Cependant, on ne dispose pas a priori du sous-espace stable E^s . Par contre, le champ instable E^u , qui est ici Y est supposé différentiable, ce qui n'est pas le cas pour un flot d'Anosov quelconque.

Inversement, d'après un théorème de Marcus, (Cf. [Mar]), pour tout flot d'Anosov de codimension un (i.e tel que la dimension de E^u soit un), il existe une action localement libre de GA, de classe C^0 telle que :

$\forall x \in M$, le flot $t \rightarrow (e^t, 0).x$ est le flot donné.

$\forall x \in M$, la courbe $b \rightarrow (1, b).x$ est une courbe tangente en tout point à E^u .

En conséquence, les problèmes de classification des flots d'Anosov et des actions du groupe affine s'avèrent très voisins.

CHAPITRE IV

=====

LA FORME VOLUME INVARIANTE.

Commençons par indiquer la restriction que nous imposerons à la mesure invariante.

Définition 4.1.- Soit μ une mesure de Borel sur une variété compacte M munie d'une forme volume ω . Nous dirons que μ est compatible avec la structure différentiable s'il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que :

$$c_1\omega \leq \mu \leq c_2\omega .$$

Nous nous proposons dans ce chapitre de démontrer le résultat suivant :

Proposition 4.2.- Soit Φ une action localement libre du groupe affine sur une 3-variété compacte orientable M , de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$). Si Φ préserve une mesure borélienne compatible avec la structure différentiable alors Φ préserve une forme volume de classe C^r .

Remarque : Nous pourrions améliorer le résultat en supposant seulement que la mesure μ est absolument continue par rapport à une mesure de Lebesgue.

Cependant, nous ne le ferons pas car cela nous obligerait à développer un certain nombre de lemmes "techniques" alors que le résultat ne serait pas beaucoup plus fort que celui que nous donnons.

Plaçons-nous dans les hypothèses de la proposition et choisissons une forme volume arbitraire ω sur M . Nous pouvons alors construire les "jacobiens" J_g définis de la façon suivante :

$$\forall g \in GA, \quad J_g : M \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ g^* \omega = J_g \cdot \omega .$$

Lemme 4.3. - Si μ est compatible avec la structure différentiable, alors, il existe un réel ℓ strictement positif tel que :

$$\forall g \in GA \quad \frac{1}{\ell} \leq J_g \leq \ell .$$

Démonstration : Supposons qu'il existe une suite g_n dans GA et x_n dans M telle que :

$$J_{g_n}(x_n) > n .$$

Soit B_n une boule de centre x_n suffisamment petite pour que :

$$\inf_{x \in B_n} J_{g_n}(x) \geq \frac{n}{2} .$$

On a alors :

$$\int_{g_n(B_n)} \omega = \int_{B_n} g_n^* \omega = \int_{B_n} J_{g_n} \cdot \omega \geq \frac{n}{2} \int_{B_n} \omega .$$

Utilisons alors le fait que μ est invariante et que

$$c_1 \omega \leq \mu \leq c_2 \omega .$$

On obtient :

$$\int_{g_n(B_n)} \mu \geq c_1 \int_{g_n(B_n)} \omega \geq c_1 \frac{n}{2} \int_{B_n} \omega \geq c_1 \frac{n}{2} \frac{1}{c_2} \int_{B_n} \mu$$

c'est-à-dire :

$$n \leq 2 \frac{c_2}{c_1} .$$

D'où une contradiction.

On montre exactement de la même façon que les jacobiens J_g sont uniformément bornés inférieurement par un nombre strictement positif. ■

Corollaire 4.4.- Si μ est compatible avec la structure différentiable, l'action Φ préserve une forme volume de classe C^0 .

Démonstration : Il s'agit d'une conséquence d'un théorème de W.H. Gottschalk et G.A. Hedlund [Got-Hed] que nous allons expliciter.

Soit $\tilde{\Phi}$ l'application suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : GA \times (M \times \mathbb{R}) &\longrightarrow M \times \mathbb{R} \\ (g, m, t) &\longmapsto (\Phi(g, m), t + \text{Log } J_g(m)). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\tilde{\Phi}$ est une action de GA sur $M \times \mathbb{R}$. Cette action est évidemment localement libre car Φ l'est. Puisque les

J_g sont bornés, toute feuille de l'action $\tilde{\Phi}$ est relativement compacte. Par conséquent, il existe un minimal compact η dans $M \times \mathbb{R}$ pour l'action $\tilde{\Phi}$. Les orbites de $\tilde{\Phi}$ étant denses, ce minimal η se projette surjectivement sur M . Par ailleurs, le minimal η coupe chaque fibre $\{*\} \times \mathbb{R}$ en un point unique, car si η contient $(*,u)$ et $(*,u+v)$, il contient $(*,u+nv)$ pour tout entier n , ce qui contredit la compacité de η . Le minimal est donc donné par une équation :

$$t = F(m)$$

où F est une fonction continue de M dans \mathbb{R} .

L'application F vérifie évidemment :

$$\forall g \in GA, \forall m \in M, F(g.m) - F(m) = \text{Log } J_g(m).$$

Considérons alors la forme volume Ω de classe C^0 définie par :

$$\Omega = \exp(-F).\omega.$$

On a :

$$\begin{aligned} g^* \Omega &= \exp(-F \circ g).g^* \omega \\ &= \exp(-F \circ g).J_g.\omega \\ &= \exp(-F)\omega \\ &= \Omega. \end{aligned}$$

Nous avons donc bien trouvé une forme volume invariante de classe C^0 . ■

Proposition 4.5.- La forme volume Ω trouvée précédemment est en fait de classe C^r .

Démonstration : Soit m un point périodique du champ X , i.e :

$$\exists A > 1, \quad (A,0).m = m.$$

Considérons la matrice jacobienne de l'application :

$$y \in M \longmapsto (A,0).y \in M$$

au point m , relativement à une base X, Y, Z où Z est un champ de vecteur quelconque transverse au feuilletage. Cette matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

Puisque l'action préserve une forme volume de classe C^0 , le déterminant de cette matrice doit être égal à un. Par suite :

$$\lambda = \frac{1}{A} < 1 .$$

Il s'ensuit que l'on peut construire une variété stable T transverse au feuilletage (Cf. [Hir, Pug, Shu]). Il s'agit d'un arc de classe C^r immergé dans M , passant par m , et invariant par $(A,0)$. Comme au paragraphe 2.B.7., nous pouvons construire sur T , à l'aide de Ω , une forme volume Ω_1 de classe C^0 . Comme au paragraphe 2.B.7., notons H le germe d'holonomie associé à l'orbite considérée et mesurée sur T . L'équation (1) de 2.B.7 s'écrit ici :

$$\int_0^{H(t)} \Omega_1 = \frac{1}{A} \int_0^t \Omega_1.$$

Autrement dit, l'application :

$$t \longmapsto \int_0^t \Omega_1$$

est un difféomorphisme local de classe C^1 conjugant l'holonomie H à l'homothétie :

$$t \longmapsto \frac{1}{A} t .$$

Utilisons alors le résultat suivant de [Ste-1]. Soit H un germe de difféomorphisme de classe C^r de \mathbb{R} en 0 ($\omega \geq r \geq 2$) ; si la dérivée de H à l'origine est différente de 1 , alors H est C^{r-1} conjugué à une homothétie. De plus, la conjugaison est unique à une homothétie près. En particulier, toutes les conjugaisons de classe C^1 sont de classe C^{r-1} .

En appliquant ce résultat au cas que nous considérons, on obtient que l'application :

$$t \longrightarrow \int_0^t \Omega_1$$

est de classe C^{r-1} et donc que la forme Ω est de classe C^r au voisinage du point m . Or, l'ensemble des points où la forme est de classe C^r est invariant par l'action. L'action de GA ayant ses orbites denses, la forme Ω est de classe C^r sur la variété M toute entière.

CHAPITRE V
=====

LE TROISIEME CHAMP DE VECTEURS.

Dans ce chapitre, nous considérons une action localement libre de GA, de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$) sur une 3-variété compacte M. Nous supposons qu'une mesure invariante par l'action est compatible avec la structure différentiable. Nous nous proposons de construire un champ de vecteurs Z de classe C^{r-1} tel que l'on ait les égalités

$$\begin{aligned} [X, Z] &= Z \\ [Y, Z] &= 2kX \end{aligned}$$

pour une certaine constante réelle k.

Pour cela, nous allons d'abord construire un champ Z de classe C^0 se transformant sous l'action de GA selon la formule :

$$(1) \quad g_* Z = \frac{1}{a(g)} Z + 2k \frac{b(g)}{a(g)} X - k \frac{b^2(g)}{a(g)} Y.$$

Nous montrerons ensuite que le champ trouvé est de classe C^{r-1} et qu'il vérifie les relations de crochet écrites plus haut.

Nous utiliserons de façon importante la classification des représentations unitaires irréductibles du groupe affine. Commençons par faire quelques rappels concernant ces représentations.

A - Représentations unitaires irréductibles du groupe affine.

Une référence générale est [Kir].

Définitions. - Une représentation unitaire d'un groupe de Lie G dans un espace de Hilbert H est un morphisme continu de groupes

$$R : G \longrightarrow \text{Aut}(H)$$

tel que pour tout élément g de G , l'automorphisme $R(g)$ est unitaire.

Deux représentations R_1 et R_2 d'un groupe G dans les espaces de Hilbert H_1 et H_2 sont équivalentes, s'il existe un isomorphisme ψ de H_1 sur H_2 tel que :

$$\forall g \in G \quad R_2(g) = \psi R_1(g) \psi^{-1}.$$

La représentation R est dite irréductible, si les seuls sous-espaces fermés de H invariants par tous les $R(g)$ sont $\{0\}$ et H .

Le théorème suivant montre que l'étude des représentations unitaires se réduit en grande partie à celle des représentations unitaires irréductibles.

Théorème 5.A.1. (Cf. [Kir] page 144). - Toute représentation unitaire R de G dans un espace de Hilbert séparable H peut être décomposée en une somme continue de représentations irréductibles.

Explicitons un peu ce théorème. Il existe un ensemble mesuré (X, ν) tel que l'espace H est une somme continue d'espaces de Hilbert H_x :

$$H = \int_X H_x \, d\nu .$$

Et la représentation R se décompose en :

$$R = \int_X R_x \, d\nu$$

où R_x est une représentation unitaire irréductible de G dans H_x .

Il s'avère que les représentations unitaires irréductibles du groupe affine sont entièrement connues à équivalence près. Donnons en la liste (Cf. [Nai, Ge1]) :

(1) les représentations de dimension un.

Il s'agit d'une famille à un paramètre. Soit α un réel et considérons l'espace de Hilbert $H_\alpha = \mathbb{C}$ et la représentation R_α définie par :

$$\begin{array}{ccc} GA \times H_\alpha & \xrightarrow{R_\alpha} & H_\alpha \\ (a,b), z & \longmapsto & e^{i\alpha \operatorname{Log} a} \cdot z . \end{array}$$

(2) les représentations de dimension infinie.

Il y a deux telles représentations. Soit H_+ (resp. H_-) l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x})$ et considérons les représentations R_+ et R_- suivantes :

$$\begin{array}{ccc} R_+ : GA \times H_+ & \longrightarrow & H_+ \\ & & R_+[(a,b), f](x) = e^{ibx} f(ax) \end{array}$$

$$R_- : GA \times H_- \longrightarrow H_-$$

$$R_- [(a,b), f](x) = e^{-ibx} f(ax).$$

Les représentations R_α , R_+ et R_- épuisent la liste des représentations unitaires irréductibles de GA .

Indiquons maintenant comment nous pouvons associer une représentation unitaire de GA à une action localement libre de GA sur une variété compacte M . Soit μ une mesure invariante par l'action. Puisque GA opère sur M , il opère sur l'espace de Hilbert $L^2(M, \mu)$ de la façon suivante :

$$GA \times L^2(M, \mu) \longrightarrow L^2(M, \mu)$$

$$(g, F) \longmapsto Fog^{-1}.$$

Cette représentation de GA dans $L^2(M, \mu)$ est unitaire car la mesure μ est invariante :

$$\int_M |Fog^{-1}|^2 d\mu = \int_M |F|^2 d\mu.$$

C'est cette représentation que nous allons utiliser. Remarquons que celle-ci n'est pas irréductible. Par exemple, dans le cas des actions homogènes sur T_A^3 , le sous-espace de $L^2(T_A^3, \mu)$ formé des fonctions constantes sur les fibres est un sous-espace fermé non trivial et invariant par la représentation. Ce sous-espace s'identifie à l'espace des fonctions définies sur la base de la fibration, c'est-à-dire à l'espace des fonctions périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . La décomposition de la représentation restreinte à ce sous-espace est exactement la décomposition des fonctions

périodiques en séries de Fourier.

B - Le champ Z de classe C^0 .

1) Position du problème.

Supposons la variété M compacte orientable et notons toujours Ω une forme volume invariante par l'action de GA.

Soit alors Z' un champ de vecteurs tel que :

$$\Omega(X, Y, Z') = 1.$$

Appliquons un élément g de GA à cette égalité :

$$g^* \Omega(X, Y, Z') = \Omega(X, Y, Z') = 1$$

$$\Omega(g_* X, g_* Y, g_* Z') = 1$$

$$\Omega(X - b(g)Y, a(g)Y, g_* Z') = 1.$$

Ceci montre que $g_* Z'$ s'écrit sous la forme :

$$g_* Z' = \frac{1}{a(g)} Z' + \phi'_g X + \Psi'_g Y$$

où ϕ'_g et Ψ'_g sont, pour chaque g de GA, des fonctions réelles définies sur M. Commençons par expliciter les relations fonctionnelles liant les fonctions ϕ'_g et Ψ'_g .

Si g et h sont deux éléments de GA, on a :

$$(gh)_* Z' = \frac{1}{a(gh)} Z' + \phi'_{gh} X + \Psi'_{gh} Y$$

$$= g_*(h_* Z')$$

$$= g_* \left(\frac{1}{a(h)} Z' + \phi'_h X + \Psi'_h Y \right)$$

$$= \frac{1}{a(h)} \left[\frac{1}{a(g)} Z' + \phi'_g X + \Psi'_g Y \right] + \phi'_h \text{og}^{-1} [X - b(g)Y] + \Psi'_h \text{og}^{-1} . a(g)Y .$$

Ceci mène aux égalités.

$$(2) \quad \phi'_{gh} = \frac{1}{a(h)} \phi'_g + \phi'_h \text{og}^{-1} .$$

$$(3) \quad \Psi'_{gh} = \frac{1}{a(h)} \Psi'_g - b(g) \phi'_h \text{og}^{-1} + a(g) \Psi'_h \text{og}^{-1} .$$

Notre problème est de trouver un champ Z se transformant par GA comme dans la formule (1). Nous chercherons Z sous la forme :

$$Z = Z' + F.X + G.Y$$

où F et G sont des fonctions numériques définies sur M .

Exprimons les conditions imposées à F et G . On a d'une part :

$$\begin{aligned} g_* Z &= g_* Z' + F \text{og}^{-1} (X - b(g)Y) + G \text{og}^{-1} a(g)Y \\ &= \frac{1}{a(g)} Z' + \phi'_g X + \Psi'_g Y + F \text{og}^{-1} (X - b(g)Y) + G \text{og}^{-1} . a(g) . Y \\ &= \frac{1}{a(g)} [Z - FX - GY] + \phi'_g X + \Psi'_g Y + F \text{og}^{-1} (X - b(g)Y) + G \text{og}^{-1} . a(g)Y . \end{aligned}$$

D'autre part, la condition imposée à Z est :

$$g_* Z = \frac{1}{a(g)} Z + k \frac{2b(g)}{a(g)} X - k \frac{b^2(g)}{a(g)} Y .$$

En comparant ces deux formules, on obtient les conditions cherchées :

$$(4) \quad -\frac{1}{a(g)} F + \phi'_g + Fog^{-1} = 2k \frac{b(g)}{a(g)}$$

$$(5) \quad -\frac{1}{a(g)} G + \psi'_g - b(g)Fog^{-1} + a(g)Gog^{-1} = -k \frac{b^2(g)}{a(g)}.$$

Finalement, le problème est le suivant : Résoudre les équations fonctionnelles (4) et (5) sachant que ϕ'_g et ψ'_g satisfont (2) et (3).

Remarque : Tous ces calculs pourraient se formaliser de la façon suivante. Soit X l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents aux feuilles. Le groupe GA opère évidemment sur X . Les fonctions ϕ'_g et ψ'_g permettent de définir une application :

$$\begin{aligned} c : GA &\longrightarrow X \\ g &\longrightarrow a(g)(\phi'_g X + \psi'_g Y). \end{aligned}$$

Les conditions (2) et (3) signifient simplement que cette une cochaîne de GA à valeur dans X est un cocycle. De même les fonctions F et G définissent un 0-cocycle α de GA à valeur dans X , en l'occurrence le champ $FX + GY$. Notons c_k le 1-cocycle suivant :

$$\begin{aligned} c_k : GA &\longrightarrow X \\ g &\longrightarrow k(2b(g)X - b^2(g)Y). \end{aligned}$$

Résoudre les équations fonctionnelles (4) et (5) revient à résoudre l'équation en α :

$$c - c_k = d\alpha.$$

Autement dit nous sommes précisément en train d'étudier une classe de cohomologie de $H_c^1(GA, X)$, cohomologie continue de GA à valeur dans X . Nous n'utiliserons pas cependant ce formalisme car nous aurons besoin par la suite de formules explicites.

2) Résolution partielle.

Nous allons résoudre (4) et (5) dans le cas particulier où g est une homothétie $(a, 0)$. Nous verrons ensuite que si les équations (4) et (5) sont vérifiées pour les homothéties, alors elles le sont pour tous les éléments de GA . Ceci est dans l'esprit d'un lemme dû à Mautner que nous citerons ici bien que nous ne l'utilisions pas.

Lemme. - Soit R une représentation de GA dans un espace de Hilbert H . Soit V un élément de H invariant par les homothéties, i.e :

$$\forall a > 0 \quad R(a, 0)(V) = V.$$

Alors, V est invariant par tout le groupe :

$$\forall g \in GA \quad R(g)(V) = V. \blacksquare$$

Commençons donc par étudier le cas des homothéties.

Si $g = (a, 0)$, les équations (4) et (5) s'écrivent :

$$F = a \phi'_{(a, 0)} + a F \circ (a^{-1}, 0)$$

$$G = a \psi'_{(a, 0)} + a^2 G \circ (a^{-1}, 0)$$



Considérons, dans l'espace de Banach $C_0(M)$ des fonctions continues sur M , les fonctionnelles U_a et V_a suivantes.

$$F \in C_0(M) \longrightarrow U_a(F) = a \phi'_{(a,0)} + a.F \circ (a^{-1}, 0)$$

$$G \in C_0(M) \longrightarrow V_a(G) = a \Psi'_{(a,0)} + a^2 G \circ (a^{-1}, 0).$$

Il est clair que, si a est strictement inférieur à 1, ces fonctionnelles sont des contractions. Il s'ensuit que, pour chaque a strictement inférieur à 1, il existe un unique couple de fonctions (F_a, G_a) tels que :

$$F = U_a(F)$$

$$G = V_a(G).$$

Montrons, maintenant, que les solutions trouvées (F_a, G_a) ne dépendent pas de a et que cette solution commune est encore solution pour a supérieur à 1. Il suffit pour cela, de remarquer que si a et a' sont deux réels strictement positifs :

$$U_a \circ U_{a'} = U_{a'} \circ U_a = U_{aa'}$$

$$V_a \circ V_{a'} = V_{a'} \circ V_a = V_{aa'}.$$

Les opérateurs U_a et $U_{a'}$ (resp. V_a et $V_{a'}$) commutent, et ayant chacun un unique point fixe, ces points fixes sont en fait tous les mêmes, c'est-à-dire que

$$F_a = F_{a'}, \text{ et } G_a = G_{a'}, \text{ si } a < 1 \text{ et } a' < 1.$$

Soit F (resp. G) cette solution commune et soit $a > 1$.

On a alors :

$$U_a^{-1}(F) = U_{\frac{1}{a}}(F) = F.$$

Donc $F = U_a(F)$
et de même $G = V_a(G).$

En conclusion, nous avons trouvé deux fonctions F et G vérifiant (4) et (5) dans le cas particulier où g est une homothétie. Il va falloir montrer maintenant que si les équations (4) et (5) sont vérifiées lorsque g est une homothétie, elles le sont aussi pour les autres éléments de GA .

3) Résolution globale.

Considérons le champ Z défini par :

$$Z = Z' + FX + GY$$

où F et G sont les fonctions trouvées précédemment. Introduisons les fonctions ϕ_g et ψ_g telles que :

$$g_*Z = \frac{1}{a(g)} Z + \phi_g X + \psi_g Y .$$

Ces fonctions peuvent, bien sûr, s'exprimer en termes de ϕ'_g et ψ'_g .

$$\begin{aligned} g_*Z &= g_*Z' + Fog^{-1}(X - b(g)Y) + Gog^{-1}.a(g)Y \\ &= \frac{1}{a(g)} Z' + \phi'_g X + \psi'_g Y + Fog^{-1}(X - b(g)Y) + Gog^{-1}.a(g)Y. \end{aligned}$$

Ceci donne :

$$\phi_g = \phi'_g - \frac{1}{a(g)} F + Fog^{-1}$$

$$\Psi_g = \Psi'_g - \frac{1}{a(g)} G - b(g)Fog^{-1} + a(g)Gog^{-1}.$$

Les fonctions ϕ_g et Ψ_g vérifient elles aussi les relations (2) et (3). Par définition de Z , on a :

$$\phi_{(a,0)} = 0$$

$$\Psi_{(a,0)} = 0.$$

Nous aurons donc résolu notre problème si nous montrons la proposition suivante :

Proposition 5.B.1. - Soient ϕ_g et Ψ_g deux familles de fonctions continues sur M , indexées par les éléments g du groupe affine et vérifiant :

$$1) \quad \phi_{gh} = \frac{1}{a(h)} \phi_g + \phi_h \circ g^{-1}$$

$$2) \quad \Psi_{gh} = \frac{1}{a(h)} \Psi_g - b(g)\Psi_h \circ g^{-1} + a(g)\Psi_h \circ g^{-1}$$

$$3) \quad \Psi_{(a,0)} = 0$$

$$4) \quad \phi_{(a,0)} = 0.$$

Alors, il existe une constante réelle k telle que :

$$\forall x \in M, \quad \phi_g(x) = k \cdot \frac{2b(g)}{a(g)}$$

$$\Psi_g(x) = -k \frac{b^2(g)}{a(g)}.$$

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration de la proposition. Nous allons utiliser ici les résultats de la partie A concernant les représentations. L'espace de Hilbert $L^2(M, \mu)$ se décompose en une somme continue d'espaces de Hilbert, chacun d'entre eux étant isomorphe à H_α , H_+ ou H_- . Sur chacun de ces espaces, la représentation est R_α , R_+ ou R_- . Les fonctions ϕ_g et ψ_g , en tant qu'éléments de $L^2(M, \mu)$ vont se décomposer sur les différents espaces H_α , H_+ et H_- . Nous allons montrer que les composantes de ϕ_g et ψ_g sur H_α , H_+ et H_- sont toutes nulles, à l'exception des composantes sur H_0 qui sont respectivement égales à $2k \frac{b(g)}{a(g)}$ et $-k \frac{b^2(g)}{a(g)}$.

La représentation R_0 correspondant aux fonctions invariantes par GA et les fonctions ϕ_g et ψ_g étant continues, la proposition sera démontrée. En définitive, la proposition se scinde en trois lemmes correspondants aux trois types de représentations : R_0 , R_α (avec $\alpha \neq 0$) et R_\pm .

Lemme 5.B.2. (Cas de R_0).- Soient z_g et w_g deux familles de complexes, indexées par GA telles que :

- 1) $z_{gh} = \frac{1}{a(h)} z_g + z_h$;
- 2) $w_{gh} = \frac{1}{a(h)} w_g - b(g)z_h + a(g)w_h$;
- 3) $z_{(a,0)} = 0$;
- 4) $w_{(a,0)} = 0$.

Alors, il existe une constante k telle que :

$$\forall g \in GA, \quad z_g = 2k \frac{b(g)}{a(g)}$$

$$w_g = -k \frac{b^2(g)}{a(g)} .$$

Lemme 5.B.3. (Cas de R_α , avec $\alpha \neq 0$).- Si z_g et w_g vérifient :

- 1) $z_{gh} = \frac{1}{a(h)} z_g + e^{i\alpha \text{Log } a(g)} \cdot z_h$;
- 2) $w_{gh} = \frac{1}{a(h)} w_g - b(g) e^{i\alpha \text{Log } a(g)} \cdot z_h + a(g) e^{i\alpha \text{Log } a(g)} \cdot w_h$;
- 3) $z_{(a,0)} = 0$;
- 4) $w_{(a,0)} = 0$.

Alors, pour tout g de GA , on a :

$$z_g = w_g = 0.$$

Lemme 5.B.4. (Cas de R_+ et R_-).- Soient F_g^+ et G_g^+ (resp. F_g^- et G_g^-) deux familles de fonctions de $L^2(R_+^*, \frac{dx}{x})$ indexées par GA et telles que :

- 1) $F_{gh}^\pm(x) = \frac{1}{a(h)} F_g^\pm(x) + e^{\pm ib(g) \cdot x} F_h^\pm(a(g)x)$;
- 2) $G_{gh}^\pm(x) = \frac{1}{a(h)} G_g^\pm(x) - b(g) e^{\pm ib(g)x} F_h^\pm(a(g) \cdot x) + a(g) e^{\pm ib(g)x} G_h^\pm(a(g) \cdot x)$
- 3) $F_{(a,0)}^\pm = 0$;
- 4) $G_{(a,0)}^\pm = 0$.

Alors, $\forall g \in GA, F_g^\pm = G_g^\pm = 0$.

Démonstration des lemmes 5.B.2., 3., 4. -

Lemme 5.B.2. - On a :

$$z_{(a,b)} = z_{(1,b)}(a,0) = \frac{1}{a} z_{(1,b)} + z_{(a,0)} = \frac{1}{a} z_{(1,b)} .$$

D'autre part :

$$z_{(1,b+b')} = z_{(1,b)} + z_{(1,b')} .$$

Il existe donc une constante k telle que

$$z_{(1,b)} = 2k.b .$$

Par suite :

$$z_{(a,b)} = 2k \frac{b}{a} .$$

Etudions maintenant w_g .

$$\begin{aligned} w_{(a,b)} = w_{(1,b)}(a,0) &= \frac{1}{a} w_{(1,b)} - b z_{(a,0)} + w_{(a,0)} \\ &= \frac{1}{a} w_{(1,b)} . \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} w_{(1,b+b')} &= w_{(1,b)} - b z_{(1,b')} + w_{(1,b')} \\ &= w_{(1,b)} + w_{(1,b')} - 2kbb' . \end{aligned}$$

Ceci montre qu'il existe λ tel que :

$$w_{(1,b)} = -kb^2 + \lambda b .$$

C'est-à-dire que :

$$w_{(a,b)} = \frac{1}{a} w_{(1,b)} = -k \frac{b^2}{a} + \lambda \frac{b}{a} .$$

Montrons que cette valeur de w_g ne peut satisfaire l'équation fonctionnelle que si λ est nul.

$$w_{(a,b)}(a',b') = \frac{1}{a'} \left(-k \frac{b^2}{a} + \lambda \frac{b}{a} \right) - b \cdot 2k \frac{b'}{a'} + a \left(-k \frac{b'^2}{a'} + \lambda \frac{b'}{a'} \right)$$

$$w_{(aa',ab'+b)} = -k \frac{(b+ab')^2}{aa'} + \lambda \frac{ab'+b}{aa'} .$$

On doit donc avoir l'identité :

$$-k \frac{(b^2 + 2bb'a + a^2b'^2)}{aa'} + \lambda \frac{b+a^2b'}{aa'} = -k \frac{(b+ab')^2}{aa'} + \lambda \frac{ab'+b}{aa'} .$$

Ce qui donne immédiatement $\lambda = 0$ et donc finalement :

$$\forall g \in GA, \quad w_g = -k \frac{b^2(g)}{a(g)} . \quad \blacksquare$$

Lemme 5.B.5. - On procède de façon analogue :

$$\begin{aligned} z_{(a,b)} &= z_{(1,b)}(a,0) = \frac{1}{a} z_{(1,b)} + e^{i\alpha \text{Log } 1} z_{(a,0)} \\ &= \frac{1}{a} z_{(1,b)} \end{aligned}$$

$$z_{(1,b+b')} = z_{(1,b)} + z_{(1,b')} .$$

Ceci montre que z_g doit s'écrire sous la forme :

$$z_{(a,b)} = \frac{1}{a} z_{(1,b)} = 2k \frac{b}{a} .$$

Montrons que ceci ne peut convenir que si k est nul.

$$z_{(a,b)}(a',b') = \frac{1}{a} z_{(a,b)} + e^{i\alpha \text{Log } a} . z(a',b')$$

$$2k . \frac{(ab'+b)}{aa'} = \frac{2k}{a'} \frac{b}{a} + e^{i\alpha \text{Log } a} . 2k \frac{b'}{a'}$$

ceci n'est possible que si k est nul, c'est-à-dire que :

$$\forall g \in GA, \quad z_g = 0 .$$

Étudions w_g de la même façon.

$$w_{(a,b)} = w_{(1,b)}(a,0) = \frac{1}{a} w_{(1,b)}$$

$$w_{(1,b+b')} = w_{(1,b)} + w_{(1,b')} .$$

On doit donc avoir :

$$w_{(1,b)} = \lambda b$$

$$\text{donc} \quad w_{(a,b)} = \frac{1}{a} \lambda . b .$$

Or, on vérifie, de même que dans le lemme 5.B.2. que cette valeur ne peut convenir que si λ est nul, c'est-à-dire :

$$\forall g \in GA, \quad w_g = 0 . \blacksquare$$

Lemme 5.B.4. - On procède d'une façon similaire. (Nous traitons seulement le cas de \mathbb{R}_+ , l'autre cas étant identique).

$$F_{(a,b)}(x) = F_{(1,b)}(a,0)(x) = \frac{1}{a} F_{(1,b)}(x) \quad \text{car } F_{(a,0)} \text{ est nul.}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} (1) \quad F_{(a,b)}(a',b')(x) &= \frac{1}{a'} \left(\frac{1}{a} F_{(1,b)}(x) \right) + e^{ibx} \frac{1}{a'} F_{(1,b')}(ax) \\ &= \frac{1}{aa'} F_{(1,ab'+b)}(x). \end{aligned}$$

Cette égalité donne pour $a = 1$.

$$F_{(1,b)}(x) + e^{ibx} F_{(1,b')}(x) = F_{(1,b+b')}(x)$$

et par symétrie :

$$F_{(1,b')}(x) + e^{ib'x} F_{(1,b)}(x) = F_{(1,b'+b)}(x).$$

Ceci montre que :

$$\frac{F_{(1,b)}(x)}{1-e^{ibx}} = \frac{F_{(1,b')}(x)}{1-e^{ib'x}}.$$

Par conséquent, $F_{(1,b)}$ s'écrit sous la forme :

$$F_{(1,b)}(x) = (e^{ibx}-1)\psi(x).$$

L'égalité (1) donne alors :

$$\frac{1}{aa'} (e^{ibx}-1)\psi(x) + e^{ibx} \frac{1}{a'} (e^{iab'x}-1)\psi(ax) = \frac{1}{aa'} (e^{i(ab'+b)x}-1)\psi(x).$$

Remplaçons ab' par b' , on obtient :

$$(e^{ibx}-1)\psi(x) + a e^{ibx}(e^{ib'x}-1)\psi(ax) = (e^{i(b'+b)x}-1)\psi(x) .$$

La quantité $a\psi(ax)$ est donc indépendante de a , c'est-à-dire que ψ s'écrit sous la forme :

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{x} .$$

Finalement, $F_{(a,b)}$ s'écrit :

$$F_{(a,b)}(x) = \frac{1}{a} F_{(1,b)}(x) = \frac{1}{a} (e^{ibx}-1)\psi(x) = \frac{1}{a} (e^{ibx}-1) \frac{\lambda}{x} .$$

Enfin, ceci entraîne que λ est nul car la fonction $F_{(a,b)}$ est un élément de $L^2(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x})$, alors que la fonction

$$x \longmapsto \frac{e^{ibx} - 1}{x}$$

n'est pas dans $L^2(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x})$. Donc $F_g = 0$.

Etudions maintenant, de la même façon, la fonction G_g .

$$G_{(a,b)} = G_{(1,b)}(a,0) = \frac{1}{a} G_{(1,b)}(x) \text{ car } F_g \text{ et } G_{(a,0)} \text{ sont nuls.}$$

L'équation fonctionnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} G_{(a,b)}(a',b')(x) &= \frac{1}{aa'} G_{(1,ab'+b)}(x) \\ &= \frac{1}{a'} \frac{1}{a} G_{(1,b)}(x) + a e^{ibx} \frac{1}{a'} G_{(1,b')}(ax). \end{aligned}$$

Pour $a = 1$, on obtient :

$$G_{(1,b+b')}(x) = G_{(1,b)}(x) + e^{ibx} G_{(1,b')}(x).$$

C'est-à-dire, que, ici encore, $G_{(1,b)}$ s'écrit sous la forme :

$$G_{(1,b)}(x) = (e^{ibx}-1)\psi(x).$$

L'équation fonctionnelle s'écrit alors :

$$\frac{1}{aa'} (e^{i(ab'+b)x} - 1)\psi(x) = \frac{1}{aa'} (e^{ibx} - 1)\psi(x) + \frac{a}{a'} e^{ibx} (e^{ib'x} - 1)\psi(ax).$$

Ici encore, en remplaçant ab' par b' , on obtient que ψ s'écrit sous la forme

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{C'est-à-dire que } G_{(a,b)}(x) &= \frac{1}{a} G_{(1,b)}(x) = \frac{1}{a} (e^{ibx}-1)\psi(x) \\ &= \frac{\lambda}{a} \left(\frac{e^{ibx}-1}{x^2} \right). \end{aligned}$$

Cette fonction n'est dans $L^2(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x})$ que si λ est nul, ce qui montre que $G_g = 0$ et termine la démonstration des trois lemmes. ■

Nous avons donc en définitive trouvé un champ de vecteurs Z de classe C^0 tel que

$$a) \quad g_*Z = \frac{1}{a(g)} Z + 2k \frac{b(g)}{a(g)} X - k \frac{b^2(g)}{a(g)} Y ;$$

$$b) \quad \Omega(X,Y,Z) = 1.$$

Le but du paragraphe suivant est de montrer que ce champ est différentiable.

C - Différentiabilité du champ Z.

Pour montrer que le champ Z est différentiable, il suffit de montrer qu'il l'est sur un ouvert, car l'ensemble des points où il est différentiable est clairement invariant par l'action du groupe et les orbites de cette action sont denses.

Considérons un point m de M stable par l'homothétie (A,0).
Puisque l'on a :

$$(A,0)_* Z_m = \frac{1}{A} Z_m$$

$$(A,0)_* X_m = X_m$$

et $(A,0)_* Y_m = AY_m,$

les valeurs propres de

$$(A,0)_* : T_m(M) \longrightarrow T_m(M)$$

sont $A, 1$ et $\frac{1}{A}.$

Nous pouvons donc construire une variété stable T du point fixe m (Cf. [Hir - Pug - Shu]). Il s'agit d'une courbe différentiable, de classe C^r , immergée dans M, invariante par (A,0) et telle que :

$$y \in T \text{ implique } (A,0)^n y \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} m.$$

Construisons, comme nous l'avons fait au paragraphe 2.B.7., une carte de M au voisinage du point m, en choisissant un arc T' voisinage de m dans T et un voisinage U de l'élément neutre dans GA de telle sorte que :

$$\begin{aligned} U \times T' &\longrightarrow M \\ g, t &\longrightarrow g.t \end{aligned}$$

soit un difféomorphisme sur son image.

Comme au paragraphe 2.B.7., la forme Ω donne une 1-forme différentielle sur T' de classe C^r . Paramétrons T' à l'aide de cette forme, soit $T(t)$ ce paramétrage. On obtient alors une carte de classe C^{r-1} au voisinage de m

$$\begin{aligned} U \times]-\varepsilon, +\varepsilon[&\longrightarrow M \\ (\alpha, \beta), t &\longrightarrow (\alpha, \beta).T(t) \end{aligned}$$

telle que :

1) dans cette carte, la forme invariante s'écrit

$$dt \wedge \frac{d\alpha \wedge d\beta}{\alpha} .$$

2) dans la carte, l'application

$$y \in M \longrightarrow (A, 0).y \in M$$

s'écrit :

$$(\alpha, \beta, t) \xrightarrow{\phi_A} \left(\alpha, A\beta, \frac{t}{A} \right) .$$

3) pour les valeurs de $g = (a, b)$ proches de l'identité, l'application

$$y \in M \longrightarrow g.y \in M$$

s'écrit dans la carte :

$$(\alpha, \beta, t) \xrightarrow{\theta_g} (\alpha, a\beta + b, t) .$$

Proposition 5.C.1. - Soit k un réel quelconque. Alors, il existe un unique germe de champ de vecteur \bar{Z} de classe C^0 au voisinage de $(1,0,0)$ dans $GA \times \mathbb{R}$ tel que :

$$1) dt \wedge \frac{d\alpha \wedge d\beta}{\alpha} (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = 1 \quad (\text{où } \bar{X} \text{ et } \bar{Y} \text{ sont les champs}$$

canoniques sur GA) ;

$$2) (\phi_A)_* \bar{Z} = \frac{1}{A} \bar{Z} \quad ;$$

$$3) (\theta_g)_* \bar{Z} = \frac{1}{a(g)} \bar{Z} + 2k \frac{b(g)}{a(g)} \bar{X} - k \frac{b^2(g)}{a(g)} \bar{Y} \quad \text{pour les valeurs}$$

de g proches de l'identité.

Cet unique germe possède un représentant global analytique.

Démonstration : Cherchons la restriction de \bar{Z} à $\{e\} \times \mathbb{R}$.

$$\bar{Z}_{1,0,t} = u(t) \bar{X}_{1,0,t} + v(t) \bar{Y}_{1,0,t} + w(t) \frac{\partial}{\partial t} .$$

La condition 1) relative à la forme volume donne $w(t) = 1$.

La condition 3) permet de calculer \bar{Z} en un point quelconque :

$$\begin{aligned} \theta_{(\alpha,\beta)}^* (\bar{Z}_{1,0,t}) &= \frac{1}{\alpha} \bar{Z}_{\alpha,\beta,t} + 2k \frac{\beta}{\alpha} \bar{X}_{\alpha,\beta,t} - k \frac{\beta^2}{\alpha} \bar{Y}_{\alpha,\beta,t} \\ &= u(t) \theta_{(\alpha,\beta)}^* (\bar{X})_{\alpha,\beta,t} + v(t) \theta_{(\alpha,\beta)}^* (\bar{Y})_{\alpha,\beta,t} + \theta_{(\alpha,\beta)}^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\alpha,\beta,t} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u(t) (\bar{X} - \beta \bar{Y}) + v(t) \cdot \alpha \bar{Y} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \bar{Z}_{\alpha,\beta,t} + 2k \frac{\beta}{\alpha} \bar{X} - k \frac{\beta^2}{\alpha} \bar{Y} + \frac{\partial}{\partial t} .$$

Finalement :

$$\bar{Z}_{\alpha,\beta,t} = (\alpha u(t) - 2k\beta) \bar{X}_{\alpha,\beta,t} + (\alpha^2 v(t) - \alpha\beta u(t) + k\beta^2) \bar{Y}_{\alpha,\beta,t} + \frac{\partial}{\partial t} .$$

Il reste à vérifier la condition 2.

$$(\phi_A)_*(\bar{Z}) = \frac{1}{A} \bar{Z}$$

$$\begin{aligned} & (\alpha u(t) - 2k\beta)X + A(\alpha^2 v(t) - \alpha\beta u(t) + k\beta^2)Y + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \frac{1}{A} \left[(\alpha u(\frac{t}{A}) - 2kA\beta)X + (\alpha^2 v(\frac{t}{A}) - \alpha\beta Au(\frac{t}{A}) + kA^2\beta^2)Y + \frac{\partial}{\partial t} \right] . \end{aligned}$$

Ce qui donne, réductions faites :

$$u(t) = \frac{1}{A} u(\frac{t}{A})$$

$$A\alpha^2 v(t) - A\alpha\beta u(t) = \frac{\alpha^2}{A} v(\frac{t}{A}) - \alpha\beta u(\frac{t}{A}) .$$

La première de ces équations donne :

$$u(t) = \frac{1}{A^n} u(\frac{t}{A^n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Donc $u(t) = 0$.

La seconde devient donc :

$$v(t) = \frac{1}{A^2} v(\frac{t}{A}) .$$

$$\text{De même } v(t) = \frac{1}{A^{2n}} v(\frac{t}{A^{2n}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Par conséquent $v(t) = 0$. C'est-à-dire que le seul germe de champ \bar{Z} vérifiant 1), 2) et 3) est :

$$\bar{Z} = -2k \beta \bar{X} + k \beta^2 \bar{Y} + \frac{\partial}{\partial t} .$$

Il est analytique, ce qui démontre la proposition. ■

Corollaire 5.C.2.- Le champ Z , construit dans la partie précédente est de classe C^{r-1} .

Démonstration : En effet, si l'on considère le champ Z dans les coordonnées locales $U \times]-\epsilon, +\epsilon[$, on obtient un champ \bar{Z} vérifiant les hypothèses de la proposition. Dans $U \times]-\epsilon, +\epsilon[$, le champ \bar{Z} est analytique. La carte étant de classe C^{r-1} , le champ Z est de classe C^{r-1} au voisinage de m , donc partout.

Corollaire 5.C.3.- Le champ Z vérifie :

$$\begin{aligned} [X, Z] &= Z \\ [Y, Z] &= 2k Z \end{aligned}$$

Démonstration : Il suffit de considérer le crochet de deux champs de vecteurs comme l'opposé de la dérivée du second dans la direction du flot associé au premier. Si l'on prend le flot associé à X , i.e :

$$(t, m) \longrightarrow (e^t, 0).m \quad ,$$

on a :

$$(e^t, 0)_* Z = e^{-t} Z$$

donc, $[X, Z] = Z$.

Si on prend le flot associé à Y , i.e

$$(t, m) \longrightarrow (1, t).m \quad ,$$

on obtient :

$$(1,t)_* Z = Z + 2k t X - k t^2 Y ,$$

donc

$$[Y, Z] = -2k X. \blacksquare$$

Si k est nul, on obtient donc une action localement libre de G_3 sur M prolongeant celle de GA .

Si k est non nul, on obtient une action localement libre de $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ sur M prolongeant celle de GA .

Nous avons donc démontré le :

Théorème principal 5.C.4. - Soit $\Phi : GA \rightarrow M \rightarrow M$. une action localement libre du groupe affine, de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$) sur une variété compacte orientable de dimension trois.

Supposons que l'action préserve une mesure de Borel compatible avec la structure différentiable.

Alors, il existe un C^r difféomorphisme ψ de M sur un espace homogène G_3/Γ (ou $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$) où Γ est discret, conjugant l'action Φ à l'action homogène de GA sur G_3/Γ (ou $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$), i.e tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} GA \times M & \xrightarrow{\Phi} & M \\ \downarrow \text{id} \times \psi & & \downarrow \psi \\ GA \times G_3 & \longrightarrow & G_3/\Gamma \end{array} \quad (\text{ou}) \quad \begin{array}{ccc} GA \times M & \xrightarrow{\Phi} & M \\ \downarrow \text{id} \times \psi & & \downarrow \psi \\ GA \times \widetilde{SL_2(\mathbb{R})/\Gamma} & \longrightarrow & \widetilde{SL_2(\mathbb{R})/\Gamma} \quad \blacksquare \end{array}$$



CHAPITRE VI
=====

QUELQUES COMPLÉMENTS.

A - Orientabilité et conséquences du théorème 5.C.4.

Considérons une action localement libre de GA sur M , de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$). Supposons que l'action préserve une mesure compatible avec la structure différentiable. Commençons par nous débarrasser de l'hypothèse d'orientabilité.

Proposition 6.A.1. - Si le champ Y est minimal, alors M est orientable.

Démonstration : Supposons M non orientable et soit \hat{M} le revêtement à deux feuillets correspondant. Soit f l'involution définissant le revêtement. On peut munir \hat{M} d'une métrique d telle que f soit une isométrie. D'après le théorème, l'action relevée sur \hat{M} est conjuguée à l'action canonique sur $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}/\Gamma$. Cette action commute évidemment avec f . Dans ce cas, on sait que le flot Y est topologiquement mixing (Cf. [Mar]) c'est-à-dire que, pour tout couple d'ouverts (U, V) de \hat{M} , il existe b_0 tel que :

$$\forall b \geq b_0 \quad b \cdot U \cap V \neq \emptyset$$

Prenons pour V une boule de rayon ε et pour U un ouvert tel que :

$$d(U, f(U)) > 0.$$

Il existe b_0 tel que :

$$\begin{aligned} \forall b \geq b_0 & & b. U \cap V \neq \emptyset \\ & & b.f(U) \cap V \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Il s'en suit que :

$$d(U, f(U)) \leq \text{diam}(V) = 2\varepsilon.$$

D'où une contradiction. ■

Proposition 6.A.2. - Si le champ Y n'est pas minimal, alors M est un fibré hyperbolique T_A^3 orientable ou non défini par une matrice A de $GL_2(\mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à deux et l'action est conjuguée à l'action canonique.

Démonstration : Si M est orientable, il s'agit du théorème. Si M n'est pas orientable, le revêtement à deux feuilletés \hat{M} correspondant est un fibré orientable T_B^3 avec $B \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $\text{tr } B > 2$ et l'action relevée sur T_B^3 est l'action homogène.

Il est alors facile de voir que les seules involutions de T_B^3 commutant avec l'action et renversant l'orientation sont les applications quotient de :

$$(m, t) \in T^2 \times \mathbb{R} \longmapsto (Am, t) \in T^2 \times \mathbb{R}$$

où $\det A = -1$ et $A^2 = B$.

Il est alors clair que M est difféomorphe à T_A^3 et que l'action sur M est l'action canonique. ■

Proposition 6.A.3.- Si Y est minimal, il est mixing et uniquement ergodique. Le flot X est ergodique (pour la mesure invariante μ).

Démonstration : Il s'agit de propriétés bien connues des actions canoniques. (Cf. [Ano], [Mar], etc...). Remarquons que nous pouvons démontrer ces mêmes propriétés sans l'hypothèse de compatibilité de la mesure invariante avec la structure différentiable.

B - Remarques concernant la compatibilité de la mesure avec la structure différentiable.

Pour terminer, nous donnerons deux propositions laissant penser qu'il est possible que la condition forte imposée sur la mesure invariante ne soit pas nécessaire pour démontrer le théorème. Dans cette partie, nous abandonnons donc l'hypothèse de compatibilité de la mesure invariante avec la structure différentiable.

Proposition 6.B.1.- Soit $\Phi : GA \times M \rightarrow M$ une action localement libre de GA , de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$). Si le flot associé à Y n'est pas minimal, l'action est C^r conjuguée à une action canonique sur un fibré hyperbolique T_A^3 . C'est-à-dire que dans ce cas, l'hypothèse du théorème relative à la mesure est inutile.

Démonstration : On sait dans ce cas, que M est un fibré en tores T_A^3 et que le champ Y est tangent aux fibres de T_A^3 . Construisons alors le champ relevé \bar{Y} dans $T^2 \times \mathbb{R}$ et considérons l'application envoyant le réel t sur le nombre de rotation de la restriction de \bar{Y} à $T^2 \times \{t\}$.

Cette application continue doit être constante car sinon, elle prendrait des valeurs rationnelles et Y aurait des orbites périodiques. D'autre part, le champ \bar{Y} est invariant par :

$$(m,t) \in T^2 \times \mathbb{R} \longmapsto (Am,t+1) \in T^2 \times \mathbb{R}.$$

Ce nombre de rotation, considéré comme une demi-droite de \mathbb{R}^2 (Cf. [Ghy, Ser]) doit donc être un vecteur propre de A , sa pente est donc un nombre quadratique sur \mathbb{Q} . On peut donc appliquer le principal résultat de [Her], et le champ \bar{Y} est donc différentiablement conjugué à un champ linéaire. Il est alors facile de conclure. (En fait, d'après [Her], on peut conjuguer le feuilletage induit par Y à un feuilletage linéaire. On peut alors conjuguer le champ Y à un champ linéaire en utilisant par exemple [Ste-2]). ■

Proposition 6.B.2. - Soit Φ une action localement libre de GA sur M^3 , de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$). Supposons qu'il existe un homéomorphisme ψ d'un espace homogène $SL_2(\mathbb{R})/\Gamma$ sur M^3 tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} GA \times \widetilde{SL_2(\mathbb{R})/\Gamma} & \longrightarrow & \widetilde{SL_2(\mathbb{R})/\Gamma} \\ \downarrow \text{id} \times \psi & & \downarrow \psi \\ GA \times M^3 & \longrightarrow & M^3 \end{array} .$$

Alors, l'homéomorphisme ψ est en fait de classe C^r .

Cette proposition montre le caractère profondément rigide des actions localement libres de GA . La proposition équivalente concernant les actions de \mathbb{R}^n serait évidemment fausse.

Pour démontrer ce résultat, nous démontrerons d'abord deux propositions ayant leur intérêt en soi.

Proposition 6.B.3.- L'ensemble des points périodiques du flot associé à X est dense dans M^3 .

Démonstration : Nous avons déjà vu que l'ensemble des points non errants de X est la variété M^3 toute entière. On utilise alors l'argument de M. Hirsch (Cf. [Fra]) montrant que, pour un flot d'Anosov, les orbites périodiques sont denses dans l'ensemble des points non errants. Cet argument peut être utilisé dans notre cas, car il existe μ -presque partout une variété stable (Cf. [Rue]). ■

Proposition 6.B.4.- Il existe sur M^3 un unique feuilletage de dimension deux, de classe C^1 , transverse au feuilletage défini par l'action de GA et invariant par le flot associé à X . Toutes les feuilles de ce feuilletage sont de classe C^r .

Démonstration : Nous ne donnerons qu'une idée de la démonstration. Soit Ψ_t le flot associé à X . Le difféomorphisme Ψ_1 , induit un automorphisme $(\Psi_1)_*$ de l'espace de Banach des champs de vecteurs continus sur M . Si toutes les orbites périodiques étaient hyperboliques, nous pourrions appliquer [Hir-Pug-Shu], théorème 2-5, remarque 2 (page 13). La densité des orbites périodiques donnerait que $(\Psi_1)_*$ est hyperbolique. Dans notre cas, nous savons seulement que le spectre de l'opérateur $(\Psi_1)_*$ restreint à une orbite périodique est séparé par un cercle de rayon ρ (avec $1 < \rho < e$) d'après 2.B.7. En adaptant la démonstration du théorème déjà cité de [Hir-Pug-Shu], on obtient qu'il en est de même pour le spectre de $(\Psi_1)_*$. Il s'en suit qu'il existe une variété centrale. On vérifie que, dans ce cas, la variété centrale est unique. On obtient donc un champ de

plans intégrable vérifiant les conditions de la proposition. ■

Démonstration de la proposition 6.B.2. :

Notons toujours X et Y les champs fondamentaux associés à Φ et soient X' , Y' et Z' les champs canoniques sur $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}/\Gamma$. Soit F le feuilletage de M^3 trouvé dans la proposition précédente. Il est clair que l'image de F par ψ^{-1} est le feuilletage de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}/\Gamma$ engendré par X' et Z' . Notons F' ce feuilletage. Soit b un réel non nul et considérons le feuilletage de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}/\Gamma$ de dimension un dont les feuilles sont les intersections de celles de F' et de celles de $(1,b)_*F'$. Un calcul simple montre que ce feuilletage de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}/\Gamma$ est engendré par le champ $Z' + bX'$. Une orbite de $Z' + bX'$ étant l'intersection d'une feuille de F' et d'une feuille de $(1,b)_*F'$, son image par ψ est une courbe de classe C^0 située à la fois dans une feuille de F et dans une feuille de $(1,b)_*F$. Ces feuilles étant de classe C^r , on en déduit que, pour tout b non nul, ψ envoie toute orbite de $Z' + bX'$ sur une courbe de classe C^r .

Etudions alors ψ au voisinage d'un point m de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}/\Gamma$. Soit T' un arc d'orbite de $Z' + X'$ passant par m et paramétré par $]-\varepsilon', +\varepsilon'[$. Comme nous l'avons déjà fait, nous obtenons ainsi une carte au voisinage de m

$$U \times]-\varepsilon', +\varepsilon'[\longrightarrow \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}/\Gamma$$

où U est un voisinage de e dans GA .

Soit T l'image de T' par ψ . Nous venons de montrer que T est un arc de classe C^r de M^3 . Paramétrons T différemment par un réel de $]-\varepsilon, +\varepsilon[$. Nous obtenons aussi une carte autour de $\psi(m)$:

$$U \times]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow M^3.$$

C'est dans ces cartes que nous allons étudier ψ . Définissons h comme étant l'unique application continue de $]-\varepsilon', +\varepsilon'[$ dans $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ telle que

$$\psi[(1,0),t] = [(1,0),h(t)].$$

Ceci définit entièrement ψ car ψ commute aux actions :

$$\psi[(x,y),t] = [(x,y),h(t)] \quad (x,y) \in U \subset GA.$$

Considérons un arc d'orbite de $Z' + 2X'$ passant par m . Cet arc peut être défini dans la carte $U \times]-\varepsilon, +\varepsilon'[$ par une équation du type

$$t \longrightarrow [(\gamma(t), \lambda(t)), t] \in U \times T'$$

où λ et γ sont deux fonctions de classe C^r et où $\gamma'(0)$ est non nul car les champs $X' + Z'$ et $X' + 2Z'$ sont linéairement indépendants.

L'image de cet arc par ψ est donnée par :

$$t \longrightarrow [(\gamma(t), \lambda(t)), h(t)] \in U \times]-\varepsilon, +\varepsilon[.$$

Or, nous avons vu que cette image est une courbe de classe C^r . La fonction γ étant localement inversible au voisinage de 0, on en déduit que $h(t)$ dépend différentiablement de $\gamma(t)$. La fonction γ étant de classe C^r , il en est de même pour h et donc pour ψ au voisinage de m . Le point m étant arbitraire, la proposition est démontrée. ■

Remarque : Les arguments utilisés dans cette démonstration ne sont pas spécifiques à GA ni à $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$. Cette proposition pourrait se généraliser à certaines actions localement libres de groupes de Lie suffisamment "hyperboliques" dans un sens à préciser.

CONCLUSION

=====

Ce travail suscite deux problèmes. Le premier est de savoir si la mesure invariante par l'action du groupe affine est toujours compatible avec la structure différentiable. Nous espérons pouvoir y répondre dans un proche avenir...

Le second est une généralisation : A quels groupes de Lie ce genre de technique peut-il s'appliquer ? Les principales propriétés du groupe affine que nous avons utilisées dans ce travail sont en fait les suivantes :

i) GA est résoluble, ce qui nous a permis de trouver une mesure invariante.

ii) GA n'a pas d'espaces homogènes compacts, ce qui nous a permis de montrer (en utilisant là aussi la résolubilité de GA) que les orbites d'une action de classe C^2 sont partout denses.

iii) Le groupe affine n'est pas unimodulaire, ce qui donne le fait que ses actions sont transversalement contractantes.

On peut donc envisager une étude globale des actions localement libres de groupes de Lie vérifiant ce genre de propriétés...

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [Ano] Anosov, *Geodesic flows on compact riemannian manifolds of negative curvature*, Proc. Stekelov Math. Inst., AMS Translations, 1969.
- [Aus] L. Auslander, L. Green et F. Hahn, *Flows on homogeneous spaces*, Annals of Mathematic Studies, n° 53, 1963.
- [Bui] F. Buire, *Feuilletages par plans sur les 3-variétés compactes*,
- [Cha] G. Châtelet, *Sur les feuilletages induits par l'action de groupes de Lie nilpotents*, Ann. Inst. Fourier, 27 (2) (1977), 161-190.
- [Die] J. Dieudonné, *Eléments d'Analyse*, tome 4, Gauthier Villars, 1971.
- [Dum] G. Duminy, *Bouts des feuilles dans les minimaux exceptionnels*, (à paraître).
- [Eps] D.B.A. Epstein, *Ends*, dans *Topology of 3-manifolds and related topics*, editor M.K. Fort, 1962.
- [Fra] Franks, *Anosov diffeomorphisms*, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math. Vol. XIV, AMS, 1970.
- [Gel-Nai] IM. Gelfand et M.A. Naimark, *Représentations unitaires du groupe des transformations linéaires de la droite*, Doklady Acad. Scien. URSS, 55, 7 (1947).
- [Ghy-Ser] E. Ghys et V. Sergiescu, *Stabilité et conjugaison différentiable de certains feuilletages sans feuilles compactes*, (à paraître).
- [Got-Hed] W.H. Gottschalk et G.A. Hedlung, *Topological dynamics*, Am. M. Soc., Coll. Pub. Vol. 36, Providence 1955.
- [Gre] F. Greenleaf, *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand (Math. Studies, n° 16), 1969.
- [Hec-1] G. Hector, *On manifolds admitting locally free nilpotent Lie group actions of codimension one*, (à paraître).
- [Hec-2] G. Hector, *Feuilletages en cylindres*, IIIème ELAM, Rio de Janeiro, 1976, Lecture Notes n° 594, pp. 252-271.
- [Hec-3] G. Hector, *Croissance des feuilletages presque sans holonomie*, Lecture Notes, School of Topology, P.U.C. - RJ, 1976.
- [Her] M. Herman, *Thèse*, Orsay, 1976.
- [Hir-Pug-Shu] M. Hirsch, C. Pugh et M. Shub, *Invariant manifolds*, Springer Verlag (Lecture Notes in Math., n° 583), 1977.

- [Kir] A. Kirilov, *Eléments de la théorie des représentations*, M.I.R., 1974.
- [Mar] B. Marcus, *Ergodic properties of horocyclic flows for surfaces of negative curvature*, Ann. of Math., 105 (1977).
- [Pal] C.F.B. Palmeira, *Open manifolds foliated by planes*, Annals of Math. 107 (1978), pp. 109-131.
- [Pla-1] J. Plante, *Foliations with measure preserving holonomy*, Ann. of Math. 102 (1975), pp. 327-361.
- [Pla-2] J. Plante, *Asymptotic properties of foliations*, Commentarii Mathematici Helvetici, 47 (1972), pp. 449-456.
- [Pla-3] J. Plante, *Anosov flows*, American J. of Math., 94 (3), 1972, pp. 729-754.
- [Ros] H. Rosenberg, *Foliations by planes*, Topology, 7 (1968), pp. 131-138.
- [Ros-Rou-Wei] H. Rosenberg, R. Roussarie et D. Weil, *A classification of 3-manifolds of rank two*, Ann. of Math., 91-3 (1970) pp. 449-469.
- [Rok] V. Roklin, *Sur les idées fondamentales de la théorie de la mesure (en russe)*, Mat. Sbornik, 25 (67), (1949), pp. 107-150.
- [Rue] D. Ruelle, *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*, preprint I.H.E.S., 1978.
- [Ste-1] S. Sternberg, *Local C^n transformations of the real line*, Duke. Math. J. 24 (1957), pp. 97-102.
- [Ste-2] S. Sternberg, *Celestial mechanics*, Benjamin, 1969.

