

N° d'ordre : 444

Année 1979

50376
1979
90

50376
1979
90

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR D'ÉTAT

Mention Sciences Physiques

Spécialité Automatique

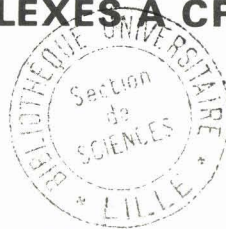
par

Marcel STAROSWIECKI

Ingénieur ENSAM

Docteur - Ingénieur

**CONTRIBUTION À L'ANALYSE ET À LA COMMANDE
DE SYSTÈMES COMPLEXES À CRITÈRES MULTIPLES**



Soutenue le 16 janvier 1979 devant la Commission d'Examen

MM.

P. VIDAL
Z. BUBNICKI
F. LHOÏTE
L. POVY
L. PUN
G. SALMER

Président
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur



030 020967 0

A Câlinetteke

A Zouilleke.

Tout ce qui est simple est faux,
tout ce qui ne l'est pas est
inutilisable.

(Paul Valéry).

J'aime calculer lentement lentement
mais faux.

J'aime les calculs faux
car ils donnent
des résultats plus justes.

J'aime également
calculer avec beaucoup de peine
sans obtenir le moindre résultat.

(Jean Arp).

- A V A N T - P R O P O S -

Ce travail de recherche a été réalisé au Centre d'Automatique de l'Université des Sciences & Techniques de Lille 1, dirigé par Monsieur le Professeur Pierre VIDAL, à qui nous exprimons notre profonde gratitude pour l'accueil qu'il nous a réservé, pour les qualités humaines et les dons pédagogiques dont il a fait preuve tout au long de notre formation. Nous sommes très sensibles à l'honneur qu'il nous fait de bien vouloir présider notre Jury.

Monsieur Z. BUBNICKI, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Basse Silésie de Wroclaw (Pologne), a été à l'origine d'une partie du travail que nous présentons ici. Ses conseils éclairés nous ont été précieux dans bien des domaines et nous lui exprimons notre profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il nous a toujours manifesté. Sa présence dans ce jury nous honore grandement.

Nous tenons à remercier tout particulièrement Monsieur F. LHOTE, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et de Micromécanique de Besançon, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail et la bienveillance dont il a fait preuve lors de sa préparation. Il a bien voulu accepter de juger ce travail et nous l'en remercions vivement.

Monsieur L. POVY, Maître de Conférences à l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille, nous a été un précieux soutien tout au long de ce travail, tant par les encouragements et les conseils qu'il nous a prodigués que par l'amitié qu'il nous a toujours manifesté. Qu'il en soit ici remercié et qu'il sache tout l'attachement que nous lui portons.

Monsieur L. PUN, Directeur du Groupe de Recherche en Automatisation Intégrée de l'Université de Bordeaux nous honore grandement en participant à ce jury. Ses remarques pertinentes nous ont permis d'améliorer la présentation de certaines parties de ce travail et nous l'en remercions vivement.

Que Monsieur le Professeur G. SALMER, Vice-Président de l'Université de Lille 1, trouve ici l'expression de notre profonde gratitude pour avoir accepté de tenir, dans ce jury, le rôle ingrat du "non spécialiste". Qu'il sache que les années où nous avons enseigné sous sa direction à l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille comptent pour nous parmi les plus enrichissantes sur le plan humain, et que nous sommes heureux de lui témoigner ici notre admiration.

.../...

Ma reconnaissance va aussi à tous ceux qui, de près ou de loin, par leur compétence ou par leur amitié, m'ont soutenu dans l'élaboration de ce travail et plus particulièrement à ma femme qui a su, pendant de longs mois, me supporter avec une patience angélique.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1: DEFINITION D'UN JEU D'AGREGATION.....	11
CHAPITRE 2: UN JEU D'AGREGATION PARTICULIER.....	42
CHAPITRE 3: ALGORITHMES DE RECHERCHE D'UN POINT D'EQUILIBRE.....	72
CHAPITRE 4: UN EQUILIBRE COOPERATIF DE TYPE PARTICULIER.....	108
CHAPITRE 5: EQUILIBRE SOCIAL EN TEMPS MINIMUM	140
CONCLUSION.....	165
ANNEXES:.....	173
ANNEXE 1: PARTITION ET SECTORISATION	
ANNEXE 2: DENOMBREMENTS DANS LES PROBLEMES DE PARTITION	
ANNEXE 3: METHODE GENERALE DE DECOMPOSITION DES PROBLEMES D'OPTIMISATION (G. COHEN)	
ANNEXE 4: DECOMPOSITION PAR ACTION SUR LES CRITERES INDIVIDUELS (J.L. LIONS)	
ANNEXE 5: RECHERCHE D'UN POINT DE NASH AU MOYEN D'UNE PARTIE FICTIVE CONTINUE	

INTRODUCTION

Lors des tentatives d'application des méthodes classiques d'analyse et de commande à des systèmes de plus en plus complexes -systèmes industriels de production, systèmes socio-économiques ou biologiques- les automaticiens ont constaté que la nature même de ces systèmes leur imposait l'élaboration d'une méthodologie nouvelle, pour la conception d'une commande réalisable.

Les difficultés liées à la commande de tels systèmes sont de deux ordres :

En premier lieu, le grand nombre des variables nécessaires à la description complète du système conduit à des modèles de dimensions importantes, souvent prohibitives. De plus, ces variables peuvent être de nature différente, et l'obtention de modèles doit faire appel à des méthodes de disciplines scientifiques différentes. Par exemple, la modélisation d'une unité de production requiert le concours de physiciens, d'automaticiens, de gestionnaires, d'économistes, de sociologues pour appréhender les multiples aspects de son fonctionnement. La modélisation du processus d'épuration biologique de l'eau dans un bassin nécessite la collaboration de chimistes, de biologistes, d'automaticiens, de spécialistes en mécanique des fluides. La tâche d'analyse, de modélisation mais aussi de simplification, revêt alors une importance primordiale pour la compréhension et la maîtrise des systèmes complexes.

En second lieu, ces systèmes se caractérisent dans la plupart des cas, par une multiplicité des objectifs de la commande, le plus souvent incommensurables et/ou antagonistes, et quelquefois difficiles à formaliser. C'est ainsi que les objectifs d'une unité de production qui portent principalement sur la quantité et la qualité des produits ouvrés, sur les coûts de production, de stockage et de livraison, sur les conditions de travail, sont évidemment concurrents. La production au meilleur coût peut, par exemple, conduire à une politique d'embauche désastreuse sur le plan des rapports sociaux, une meilleure qualité est bien souvent coûteuse, etc... Par ailleurs, certains critères sont délicats à formaliser et à évaluer : qualité des rapports sociaux, ou coût d'un retard de livraison, par exemple. Ainsi, l'analyse et la modélisation du comportement d'un système doit se doubler, le plus souvent d'une analyse et d'une modélisation du schéma des préférences de ses multiples utilisateurs.

Ces deux caractéristiques des systèmes complexes n'autorisent pas une application directe des méthodes classiques de l'Automatique. En effet, face à la diversité des fonctionnements possibles du système, aux perturbations qui les affectent, à la pluralité des objectifs, les décisions sont nombreuses, interdépendantes, de nature et de fréquences différentes. La dimension du système rend difficile, sinon irréalisable (et irréaliste), l'établissement d'un modèle global, de même, on conçoit que l'exécution d'une manière globale des diverses fonctions de commande relève de l'utopie.

L'accroissement de la complexité du système se traduit ainsi par un changement non seulement quantitatif mais aussi qualitatif dans l'approche de l'Automaticien, caractérisé par l'élaboration de méthodes particulières d'analyse et de commande.

1 - ANALYSE DES SYSTEMES COMPLEXES

De façon classique, l'analyse d'un système conduit à l'élaboration d'un modèle, dont les paramètres sont identifiés à partir d'un certain nombre

d'observations. Dans cette optique, les observations ne constituent qu'une référence pour un choix optimal d'un modèle particulier dans une classe donnée a priori. Cependant, les difficultés de modélisation croissent directement avec le nombre de variables du système et le nombre de leurs interconnexions. On peut diminuer la dimension d'un modèle en réduisant le nombre de variables prises en compte. Il s'agit alors de définir des variables explicatives, soit parmi l'ensemble initial des variables, soit par agrégation de plusieurs d'entre elles. Cette approche s'applique aussi bien à la réduction des modèles de fonctionnement /1/ - /6/ qu'à celle des modèles de décision, où elle conduit aux méthodes d'agrégation d'ordres, ou d'analyses multicritères /7/ -/10/. Elle fait largement appel aux méthodes descriptives de l'Analyse des Données /11/ : analyse en composantes principales, analyse des préférences, etc...

Une deuxième approche consiste à envisager l'ensemble des données sans a priori concernant la structure du système. Elle s'appuie sur l'hypothèse que cette structure est toujours décelable dans les réponses du système à des excitations diverses puisque leurs effets se concrétisent par des évolutions non indépendantes de certaines variables, ou de certains critères, du système. Ces réponses se présentent sous la forme de données enregistrées, et c'est l'analyse de ces données qui permettra l'analyse structurale du système /12/ - /13/. Celle-ci consiste à décomposer le système global en sous-systèmes, en s'appuyant sur l'hypothèse généralement vérifiée que, dans un système de grandes dimensions, toutes les variables ne sont pas en relation ou, si elles le sont, qu'il existe une hiérarchie dans l'intensité de leurs couplages. Le but de l'analyse est alors de définir l'ensemble des variables (ou des critères) du système en termes de "groupements naturels et homogènes", d'éléments "les plus représentatifs". Cette approche permet la mise en oeuvre efficace de méthodes de modélisation par modèles locaux découplés ou d'une modélisation globale de dimensions plus réduites, chaque groupe de variables donnant naissance à un ou plusieurs agrégats. Elle débouche sur les problèmes de structuration en Analyse des Données et plus particulièrement sur les méthodes de classification

automatique, dont le but est de trouver une partition d'un ensemble fini telle que chaque objet ressemble plus aux objets intérieurs à son groupe qu'aux objets extérieurs, au sens d'un critère donné.

Dans ce travail, la formulation de ce problème nous conduit à définir la notion du jeu d'agrégation. Dans un tel jeu, le nombre de joueurs est supérieur au nombre de commandes du système sur lequel ils souhaitent agir. Dans ce sens, toute action sur le système suppose un regroupement préalable de certains joueurs, c'est à dire une classification de leur ensemble /26/ /27/.

2 - COMMANDE DES SYSTEMES COMPLEXES

En général, un système complexe poursuit des objectifs multiples, incommensurables et/ou contradictoires. La définition d'une commande réalisable demande dans ce cas que soit précisée la notion d'optimalité.

2 - 1 Problèmes à centre de décision unique

Dans ce cas, le décideur est seul à pouvoir assumer les conflits existant entre les divers objectifs. Deux approches peuvent être utilisées, suivant que son arbitrage se situe avant ou après la procédure d'optimisation.

Dans le premier cas, on admet (ou l'on démontre/14/) l'existence d'une fonction d'utilité globale que le décideur cherche à maximiser sur l'ensemble des commandes admissibles. On se ramène donc essentiellement au cas d'un critère unique. C'est l'idée générale des méthodes d'analyse multicritères qui, à partir d'un n-uple de structures sur l'ensemble des commandes admissibles, élaborent une structure unique sur cet ensemble /7/ - /10/. On peut alors, en principe, appliquer les algorithmes disponibles en optimisation. Cependant, la dimension du problème impose souvent une résolution décentralisée /15/. Le problème global est alors découpé en sous-problèmes solubles indépendamment, ces sous-problèmes devant être coordonnés d'une façon ou d'une autre pour que la juxtaposition de leurs solutions constitue une solution du problème initial. A chaque sous-problème est associé un modèle mathématique,

dit "sous processus". Ces sous processus interagissent, matérialisant le fait que les sous-problèmes ne sont pas, en réalité, indépendants. On voit, à ce niveau, l'importance de la phase d'analyse du système complexe et, en particulier, de sa décomposition en sous-systèmes décrits par des modèles locaux faiblement couplés. En effet, la coordination, qui est un processus dynamique, est d'autant plus rapide que les sous-systèmes sont faiblement couplés.

Dans le deuxième cas, l'arbitrage du décideur se situe après la procédure d'optimisation. Celle-ci doit donc prendre en compte de façon spécifique les objectifs multiples. On définit dans ce sens des solutions Pareto-optimales /16/ - /17/ (ou des points efficaces /18/, admissibles /19/, non inférieurs /20/, etc...) telles qu'il n'est pas possible, partant d'une telle solution, d'améliorer à la fois tous les critères. Ces solutions ne sont en général pas uniques ; chacune d'elles étant, par définition, aussi bonne qu'une autre (dans le sens où elles ne sont pas comparables) c'est au décideur d'effectuer les choix, les compromis nécessaires.

2 - 2 Problèmes à centres de décision multiples

Le cadre naturel des problèmes multicritères est celui où plusieurs centres de décision sont en présence. La situation la plus simple est celle dans laquelle tous les critères sont identiques, les différents centres collaborent alors complètement pour minimiser un critère unique et forment une équipe, assimilable à un centre de décision unique. Dans la plupart des cas, il n'en est pas ainsi, et l'on doit soigneusement définir la notion d'optimalité /21/. Lorsque les joueurs coopèrent, on peut comme précédemment définir des solutions Pareto-optimales. Les conflits n'étant plus assumés par un décideur unique, les joueurs doivent négocier pour arriver à un accord. La théorie doit alors être prolongée avec les notions de stratégies de menace, de coalitions, de coeur, de nucleolus /22/ - /23/.

Sur le plan strict de l'optimisation, la différence entre les problèmes à centre de décision unique et les jeux coopératifs se situe au niveau

de l'arbitrage entre solutions non comparables. En fait, si l'on suppose que les différents centres décident de coopérer, on peut considérer qu'ils forment une équipe qui se définit une fonction d'utilité collective, le critère pouvant d'ailleurs être différent de celui de Pareto. C'est le cas, en particulier, pour la programmation par objectifs /24/, cas particulier des solutions de compromis.

Dans ce travail, nous introduisons la notion d'équilibre social à partir de la remarque suivante : la définition d'un point de Pareto interdit toute modification des décisions préjudiciable à l'un quelconque des joueurs, quels que soient les coûts effectivement supportés par ceux-ci. En fait, il peut quelquefois être avantageux d'améliorer la situation du (ou des) centre le plus défavorisé quitte à le faire au détriment d'autres dont la situation était meilleure. Dans ce sens, l'équilibre social est un équilibre coopératif de type particulier, dans lequel l'équipe se préoccupe de la situation du joueur le plus défavorisé.

3 - PRESENTATION DES CHAPITRES SUIVANTS

Confronté à un système complexe, l'Automaticien est amené à élaborer des méthodes d'analyse et de commande spécifiques. Le but de ce travail est d'apporter une contribution à la résolution de ce problème. Dans ce sens, il comprend deux parties : la première est consacrée à l'analyse des systèmes complexes, et plus particulièrement à la structuration d'un ensemble de données, débouchant sur des méthodes de classification automatique. Celles-ci reposent sur la formulation du problème au moyen d'un jeu d'agrégation.

Dans la deuxième partie, plus particulièrement consacrée au problème de la commande en présence de critères multiples, on propose et on étudie un équilibre coopératif de type particulier, l'équilibre social.

Au chapitre 1, on introduit la notion de jeu d'agrégation, qui permet une formulation générale des problèmes de classification. On définit le jeu et la notion d'optimalité d'abord sous la forme d'un jeu à deux niveaux puis sous forme de fonction caractéristique. On présente enfin un algorithme de

programmation dynamique adapté à cette dernière forme, particulièrement efficace lorsque le problème est très contraint.

Au chapitre 2, les problèmes de classification relevant de l'analyse des données sont décrits au moyen d'un jeu d'agrégation particulier, pour lequel on donne les théorèmes d'existence des solutions optimales. On étudie certaines formes particulières de fonctions de coût, pour lesquelles les joueurs sont amenés à utiliser des stratégies pures. Le point d'équilibre résultant est, dans ces conditions, une partition ou un recouvrement.

La formulation d'un problème de classification au moyen d'un jeu d'agrégation conduit à utiliser des algorithmes de recherche d'un point d'équilibre dans un jeu à N personnes. La grande dimension des problèmes à traiter implique l'utilisation de méthodes de décomposition. On propose, au chapitre 3, certains algorithmes de ce type, et on étudie leur convergence.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à l'étude d'un équilibre coopératif particulier, l'équilibre social. Cette notion est définie au chapitre 4, où l'on étudie ses propriétés, et où l'on donne certains théorèmes permettant le calcul des solutions. De plus, on montre que cette approche peut être utilisée pour la détermination de l'ensemble des points de Pareto d'un problème d'optimisation multicritères.

Au chapitre 5, on étend le problème à la commande en temps minimal. Dans ce cas, la formulation est plus complexe car les différents critères sont définis sur des horizons différents. On donne les théorèmes permettant le calcul des solutions d'un problème d'allocation simultanée de tâches et de ressources, pour la planification d'un ensemble d'opérations technologiques en temps minimal, sous des contraintes budgétaires.

- BIBLIOGRAPHIE -

- /1/ M. AOKI : Control of Large Scale Dynamic Systems by Aggregation. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC. 13, n° 3, Juin 1968.
- /2/ M.B. PRIESTLEY, T. SUBBA RAO, H. TONG : Applications of Principal Components Analysis and Factor Analysis in the Identification of Multivariable Systems. IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. AC. 19, n° 6, Décembre 1974 .
- /3/ P. BERTRAND, G. MICHAILESCO, J.M. SIRET : Sur la Synthèse de Modèles réduits par Agrégation. RAIRO, Vol. 10, n° 7, juillet 1976.
- /4/ A. FOSSARD : On a Method for simplifying linear dynamic Systems. IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. AC. 15, n° 2, 1970.
- /5/ M.R. CHIDAMBARA : Two simple Techniques for the Simplification of large dynamic Systems. Proc. 1969 JACC, Boulder, Colorado, 1959.
- /6/ E.J. DAVISON : A Method for simplifying dynamic Systems IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. AC. 11, n° 1, 1966.
- /7/ G. BERNARD, M.L. BESSON : Douze Méthodes d'Analyse multicritères RIRO V.3, 1971.
- /8/ J.L. GUIGOU : Analyse des Données et choix à critères multiples. Coll. Finance et Economie Appliquée, Vol. 45, Dunod, 1974.
- /9/ B. ROY : Problems and Methods with multiple objective functions. Mathematical Programming, Novembre 1971.
- /10/ J.P. AUBIN : Optimisation en présence de critères multiples. Cours de Mathématiques de la décision. Université de Paris IX.
- /11/ P. BERTIER, J.M. BOUROCHE : Analyse des Données Multidimensionnelles. P.U.F., Paris 1975

- /12/ M. RICHTIN : Analyse structurale des Systèmes Complexes en vue d'une
Commande hiérarchisée. Thèse de Docteur ès Sciences.
Université Paul Sabatier Toulouse 1975.
- /13/ R.C. CONANT : Detecting Subsystems of a Complex System.
IEEE Trans. Syst., Man, Cyber., Septembre 1972, pp. 550-553.
- /14/ J.Y. JAFFRAY : Existence of a Continuous Utility Function : an elementary
proof, *Econometrica*, Vol. 43, n° 5-6, Septembre Novembre 1975.
- /15/ P. BERNHARD : "Commande Optimale, Décentralisation et Jeux Dynamiques"
Dunod Paris 1976.
- /16/ R. FRISCH : Maxima and Minima : Theory and Economic Applications.
Chicago, IL : Mc Nally, 1966.
- /17/ M.D. INTRILIGATOR : Mathematical Optimization and Economic Theory.
Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1971.
- /18/ T.C. KOOPMANS : "Analysis of Production as an efficient combination of
activities" in *Activity analysis of Production and Allocation*.
T.C. Koopmans, Ed, New-York : Wiley 1951, pp. 33-97.
- /19/ K.J. ARROW, E.W. BARANKIN, D. BLACKWELL : "Admissible points in
Convex Sets" in *Contributions to the theory of games*, Vol. II,
H.W. Kuhn and A.W. Tucker, Eds, Princeton, NJ : Princeton Univ. Press
1953, pp. 87-91.
- /20/ L.A. ZADEH : Optimality and non scalar valued performance criteria
IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC. 8, pp. 59-60, janvier 1963.
- /21/ A. BLAQUIERE : "Quantitative games : Problem statement and examples, new
geometric aspects" in *the theory and applications of differential games*,
Proc. of the NATO Advanced Study Institute, J.D. Grote, Ed, Univ. of
Warwick, Coventry 1975.
- /22/ H. SCARF : "The Core of a n-person game" *Econometrica*, Vol. 35, 1967.
- /23/ : D. SCHMEIDLER : "The Nucleolus of a characteristic function game"
SIAM journal Appl. Math. Vol. 17, 1969.

- /24/ A. CHARNES, R.W. CLAWER, K.O. KORTANEK : Effective Control through Coherent decentralization with prehemptive goals.
Econometrica, Vol. 35, n° 2, Avril 1967.
- /25/ A. TITLI : Contribution à l'étude des structures de commande hiérarchisées en vue de l'optimisation des processus complexes.
Thèse de Docteur ès Sciences Toulouse 1972.
- /26/ M. STAROSWIECKI, J.C. DIVERREZ : Application de la Théorie des Jeux à l'Analyse de Données et aux problèmes d'Agrégation.
3^d Int. Conf. Syst. Sci. Wroclaw, Septembre 1976.
- /27/ M. STAROSWIECKI : Une nouvelle approche en analyse des données multidimensionnelles : la théorie des jeux à N personnes à somme non nulle.
Congrès AFCET Modélisation et Maîtrise des Systèmes Techniques, Economiques, Sociaux. Versailles Novembre 1977.

CHAPITRE 1

DEFINITION D'UN JEU D'AGREGATION

1- INTRODUCTION

2- DEFINITION D'UN JEU D'AGREGATION

2-1. Le système

2-2. Les joueurs

2-3. Classes et coalitions

2-3.1 Commandes admissibles pour une coalition

2-3.2 Notion d'optimalité pour une coalition

2-4. Relations de comparaison, jouabilité

2-5. Optimalité

3- REMARQUES

3-1. Jeu à deux niveaux

3-2. Affectations et classification

4- EXEMPLES

5- JEU SOUS FORME DE FONCTION CARACTERISTIQUE

5-1. Stratégies pures, stratégies mixtes

5-2. Jeu symétrique

5-3. Partitions optimales et programmation dynamique

5-3.1 Partitions Nash-optimales

5-3.2 Critères additifs

5-3.3 Discussion

6- CONCLUSION

CHAPITRE UN

DEFINITION D'UN JEU D'AGREGATION

1- INTRODUCTION.

Au cours des dernières années, la théorie de l'optimisation, développée d'abord pour des fonctions de coût à valeurs scalaires, a été étendue à des fonctions de coût à valeurs vectorielles /1/, et plus généralement non scalaires /2/,/3/.

On peut proposer une classification des problèmes d'optimisation, suivant le nombre d'agents qu'ils font intervenir, le nombre d'acteurs, et le nombre de commandes manipulables par ces acteurs. Une telle classification nous permettra d'introduire la notion de jeu d'agrégation.

a) Commande optimale.

La théorie de la commande optimale considère le cas d'un centre de décision unique agissant sur un système donné de façon à minimiser un critère sur un ensemble de décisions admissibles donné.

b) Optimisation multicritères.

Dans ce cas, on a toujours un centre de décision unique agissant sur un système donné, mais désirant minimiser sur son ensemble de décisions admissibles plusieurs critères incommensurables et/ou contradictoires. On peut considérer ce problème comme celui de N agents ($1 < N < \infty$), possédant chacun son propre critère, mais ne pouvant agir sur le système que par l'intermédiaire

d'un manipulateur unique, effectuant seul la prise de décision.

c) Théorie des jeux.

La théorie des jeux à N personnes considère le cas dans lequel N centres de décision agissent sur le même système; chacun d'eux peut agir au moyen d'une commande appartenant à un ensemble admissible, et possède un critère qu'il cherche à minimiser. Dans l'optique précédente, un joueur est à la fois un agent (il possède un critère) et un manipulateur (il choisit une décision dans un ensemble admissible et agit directement sur le système). Le nombre de commandes distinctes manipulables du système est égal au nombre de joueurs.

d) Jeu d'agrégation.

La formulation d'un problème de classification nous conduit à définir la notion de jeu d'agrégation, dans lequel on distingue l'ensemble des agents (ou joueurs), l'ensemble des manipulateurs, et l'ensemble des commandes manipulables du système. Si le nombre des manipulateurs, m , est inférieur au nombre des joueurs, N , toute action sur le système suppose un regroupement préalable de certains joueurs, c'est-à-dire une classification de l'ensemble des N joueurs en m classes.

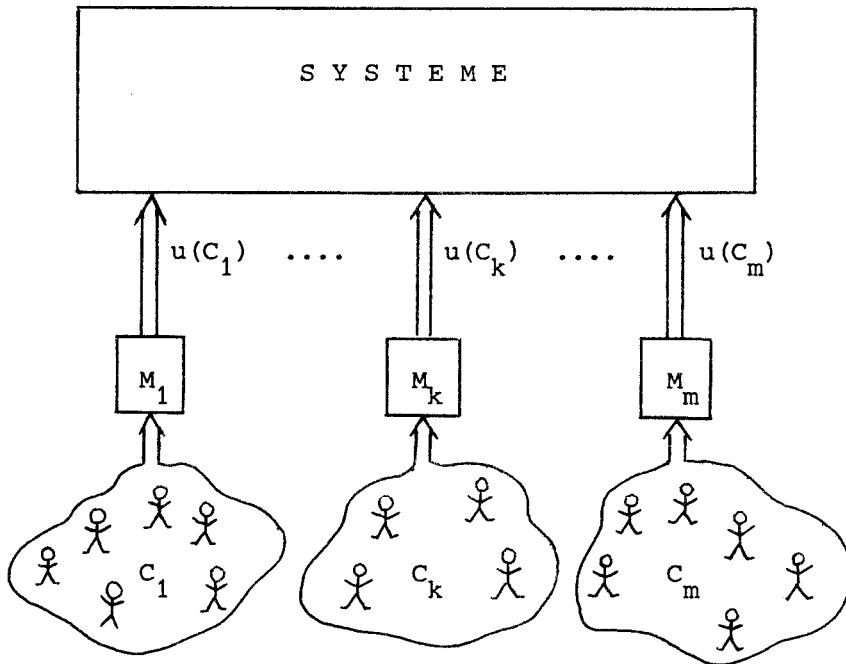
Remarque: On peut envisager aussi une classification de l'ensemble des joueurs en $m+1$ classes, la $m+1^{\text{ème}}$ étant formée par ceux qui décident de ne pas prendre part au jeu. Si une telle possibilité est laissée aux joueurs, on obtient alors un sous-ensemble d'inclassés. De la même façon, on peut admettre que certains manipulateurs ne soient "mandatés" par aucun joueur, on obtient dans ce cas une classification en m' classes, $m' < m$.

Le tableau de la page suivante résume cette classification des problèmes d'optimisation et situe la notion de jeu d'agrégation. La figure illustre sa structure.

Récemment, A. BLAQUIERE /4/ a défini de façon générale un jeu à N personnes et les concepts d'optimalité qui s'y rattachent. La caractérisation du jeu fait apparaître:

Nombre de joueurs (Nombre de critères)	Nombre de manipulateurs	Nombre de commandes manipulables	Problème
1	1	1	Commande optimale
N	1	1	Commande multicritères
N	N	N	Théorie des jeux
N	$1 \leq m \leq N$	n	Jeu d'agrégation

STRUCTURE D'UN JEU D'AGREGATION



N joueurs

m manipulateurs

n commandes distinctes manipulables

$$1 \leq m \leq N$$



- La définition du système: états, commandes, trajectoires.
- La définition des joueurs: critères, stratégies, relations de préférence, de comparaison.

Pour un jeu d'agrégation, il faut adjoindre à ces deux définitions celle d'une relation d'affectation entre l'ensemble des joueurs et l'ensemble des manipulateurs.

2- DEFINITION D'UN JEU D'AGREGATION.

2-1. Le système.

On considère un système décrit à tout instant $t \in T$ par son vecteur d'état $x(t) \in X$, où T et X sont deux ensembles donnés, $T \subset \mathbb{R}_+$.

Soient U_β , $\beta=1, \dots, n$, n ensembles donnés, et $U=U_1 \times \dots \times U_n$.

Un élément $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$ est une commande admissible.

Soit Γ une relation donnée qui à tout couple $(x_0, u) \in X \times U$ associe une trajectoire unique $\gamma(x_0, u)$ au moyen d'une équation d'évolution. Par exemple:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad x(0) = x_0 \quad \text{ou}$$

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

On se donne par ailleurs un sous-ensemble θ de $T \times X$ appelé cible ou ensemble terminal. Un trajet complet est une trajectoire γ telle qu'il existe un instant $t_f \in T$ et un état $x(t_f) \in \gamma$ vérifiant: $(t_f, x(t_f)) \in \theta$.

2-2. Les joueurs.

On considère un ensemble de N joueurs: $J = \{J_1, \dots, J_N\}$

Soient $U_{\alpha\beta}$, $\alpha=1, \dots, N$, $\beta=1, \dots, n$, Nn ensembles donnés. $U_{\alpha\beta}$ est l'ensemble des décisions admissibles du joueur J_α relativement à la $\beta^{\text{ième}}$ commande du système. On supposera:

$$\forall \alpha \in A = \{1, \dots, N\}, \forall \beta \in B = \{1, \dots, n\} \quad U_{\alpha\beta} \subset U_\beta$$

On considère par ailleurs un ensemble de m manipulateurs: $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_m\}$

Une affectation est une relation binaire (vulgaire ou floue) sur le produit

$J \times \mathcal{M}$. Rappelons qu'une relation binaire floue sur $J \times \mathcal{M}$ est un sous-ensemble

flou du produit $\mathcal{J} \times \mathcal{M}$, c'est-à-dire un ensemble de couples /5/:

$$F = \{((J_\alpha, M_k), \lambda_\alpha^k); J_\alpha \in \mathcal{J}, M_k \in \mathcal{M}, \lambda_\alpha^k \in \Lambda_\alpha^k \subset L\}$$

où Λ_α^k est un ensemble donné $\forall \alpha \in A, \forall k \in K = \{1, \dots, m\}$, et L est un ensemble donné totalement ordonné.

λ_α^k est la fonction caractéristique d'appartenance du couple (J_α, M_k) au graphe de la relation. Lorsque $\Lambda_\alpha^k = \{0, 1\}$, $\forall \alpha \in A, \forall k \in K$, on retrouve la définition d'une relation binaire au sens vulgaire.

Une affectation est entièrement définie par la matrice des fonctions caractéristiques d'appartenance:

$$\lambda = (\lambda_\alpha^k, \alpha \in A, k \in K)$$

On notera:

$\lambda_\alpha = (\lambda_\alpha^1, \dots, \lambda_\alpha^m)$ la colonne α de cette matrice.

$\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_N^k)$ la ligne k de cette matrice.

On se donne N ensembles: $\Lambda_\alpha \subset \prod_{k=1}^m \Lambda_\alpha^k \quad \alpha=1, \dots, N$

$\Lambda = \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$ est l'ensemble des affectations admissibles.

Soient $\Omega_\alpha, \alpha=1, \dots, N$, N ensembles donnés, et $V_\alpha, \alpha=1, \dots, N$, N applications données:

$$V_\alpha: X \times U \times \Lambda \longrightarrow \Omega_\alpha$$

$$(x_0, u, \lambda) \longmapsto V_\alpha(x_0, u, \lambda) \quad \alpha=1, \dots, N$$

Soient $(\underline{<})_\alpha \subset \Omega_\alpha^2, \alpha=1, \dots, N$, N relations réflexives données.

V_α est le critère du joueur J_α ; $V_\alpha(x_0, u, \lambda)$ est le coût du joueur J_α relatif à l'affectation λ et à la trajectoire engendrée à partir de x_0 par le n -uple de commande u ; $(\underline{<})_\alpha$ est sa relation de préférence.

2-3. Classes et coalitions.

A toute affectation $\lambda \in \Lambda$ on associe m classes $C_k, k \in K$, par:

$$C_k = \{(J_\alpha, \lambda_\alpha^k), \alpha \in A\} \quad k=1, \dots, m$$

Une classe est donc un sous-ensemble flou de l'ensemble des joueurs; à chaque classe C_k est associé le manipulateur M_k .

Soit μ un élément donné de L . On dira qu'un joueur J_α appartient au niveau μ à la classe C_k si l'on a: $\lambda_\alpha^k \geq \mu$, où \geq est la relation d'ordre total dans L . On notera dans ce cas: $J_\alpha \in_\mu C_k$ et on dira que le joueur J_α agit sur le système par l'intermédiaire du manipulateur M_k . On dira qu'une classe est une coalition si les joueurs qui lui appartiennent au niveau μ peuvent définir de concert la commande que le manipulateur M_k appliquera au système. Pour qu'une classe soit une coalition, il faut alors définir son ensemble de commandes admissibles et sa notion d'optimalité.

2-3-1. Commandes admissibles pour une coalition.

Soient $f_k, k=1, \dots, m$ applications données:

$$f_k: P^N(U_1) \times \dots \times P^N(U_n) \times \Lambda \times L \longrightarrow P(U_1) \times \dots \times P(U_n)$$

$$((U_{\alpha\beta}, \alpha \in A, \beta \in B), \lambda, \mu) \longmapsto (U_1(C_k), \dots, U_n(C_k))$$

$P(U_\beta), \beta=1, \dots, n$ est l'ensemble des parties de U_β .

$U_\beta(C_k)$ est l'ensemble des décisions admissibles pour la coalition C_k relativement à la $\beta^{\text{ième}}$ commande du système.

Soit: $B_k = \{\beta \in B; U_\beta(C_k) \text{ est non vide}\} \quad k=1, \dots, m$

Les m applications f_k sont définies de telle sorte que $\{B_1, \dots, B_m\}$ soit une partition de B . L'ensemble des commandes admissibles de la coalition C_k est alors défini par:

$$U(C_k) = \coprod_{\beta \in B_k} U_\beta(C_k)$$

2-3-2. Notion d'optimalité pour une coalition.

Soient $\Omega^k, k=1, \dots, m$ ensembles donnés et soient $W^k, k=1, \dots, m$ applications données.

$$W^k: X \times U \times \Lambda \times L \longrightarrow \Omega^k \quad k=1, \dots, m$$

$$(x_0, u, \lambda, \mu) \longrightarrow W^k(x_0, u, \lambda, \mu)$$

Soient $(\underline{<})^k \subset \Omega^k \times \Omega^k$, $k=1, \dots, m$, m relations réflexives données.

W^k est le critère de la coalition C_k ; $W^k(x_0, u, \lambda, \mu)$ est son coût relatif à l'affectation λ , au niveau μ , et à la trajectoire γ engendrée à partir de x_0 par le n -uple de commande u ; $(\underline{<})^k$ est sa relation de préférence.

La définition de la notion d'optimalité pour une coalition et pour le jeu d'agrégation nécessite à présent l'introduction des concepts de comparabilité et de jouabilité.

2-4. Relations de comparaison, jouabilité.

On se donne N relations \mathcal{C}_α , $\alpha=1, \dots, N$, réflexives et symétriques, $\mathcal{C}_\alpha \subset \Lambda \times \Lambda$. Si $\lambda \mathcal{C}_\alpha \lambda'$ on dira que les affectations λ et λ' sont comparables pour le joueur J_α .

De même, on se donne m relations \mathcal{C}^k , $k=1, \dots, m$, réflexives et symétriques, $\mathcal{C}^k \subset U \times U$. Si $u \mathcal{C}^k u'$, on dira que les n -uples de commande u et u' sont comparables pour la coalition C_k .

On dira qu'un n -uple de commande u est jouable en x_0 si la trajectoire $\gamma(x_0, u)$ est un trajet complet. On désignera par $J(x_0)$ l'ensemble des n -uples de commande jouables en x_0 .

On dira qu'une affectation admissible λ est jouable en x_0 si:

$U(x_0, \lambda) = J(x_0) \bigcap_{k=1}^m U(C_k)$ est non vide, c'est-à-dire s'il existe une commande

jouable en x_0 par les m coalitions définies par λ (le niveau μ est supposé donné une fois pour toutes.)

On notera $\Lambda(x_0)$ l'ensemble des affectations jouables en x_0 .

2-5. Optimalité.

A) Soit λ une affectation jouable en x_0 . On dira qu'un n -uple de commande u^* est \bar{c} -optimal, $\bar{c} = (c^1, \dots, c^m)$, si l'on a:

(i) $u^* \in U(x_0, \lambda)$ et

$$(ii) \left. \begin{array}{l} W^k(x_0, u^*, \lambda, \mu) (\leq)^k W^k(x_0, u, \lambda, \mu) \\ \forall u \in U(x_0, \lambda) \text{ tel que: } u \mathbb{C}^k u^* \end{array} \right\} k=1, \dots, m$$

Soit $U^*(x_0, \lambda)$ l'ensemble des commandes $\bar{\mathbb{C}}$ -optimales en x_0 pour l'affectation λ .

B) On dira qu'une affectation λ^* est $\underline{\mathbb{C}}$ -optimale en x_0 , $\underline{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_N)$ si l'on a:

(i) $\lambda^* \in \Lambda(x_0)$ et

(ii) $\exists u^* \in U^*(x_0, \lambda^*)$ tel que:

$$\left. \begin{array}{l} V_\alpha(x_0, u^*, \lambda^*) (\leq)_\alpha V_\alpha(x_0, u, \lambda) \\ \forall u \in U^*(x_0, \lambda) \\ \forall \lambda \in \Lambda(x_0) \text{ tel que: } \lambda \mathbb{C}_\alpha \lambda^* \end{array} \right\} \alpha=1, \dots, N$$

On désignera par $\Lambda^*(x_0)$ l'ensemble des affectations $\underline{\mathbb{C}}$ -optimales en x_0 .

3- REMARQUES.

3-1. Jeu à deux niveaux.

Un jeu d'agrégation est un jeu à deux niveaux: les joueurs (niveau supérieur) et les manipulateurs (niveau inférieur). La primauté hiérarchique du premier niveau se traduit par le fait que c'est lui qui détermine les coalitions par le choix d'une affectation λ . Dans ces conditions, au niveau inférieur, les m manipulateurs déterminent l'ensemble $U^*(x_0, \lambda)$ par la résolution d'un jeu quantitatif défini par:

- les ensembles de commandes admissibles: $U(\mathbb{C}_k)$ $k=1, \dots, m$
- les critères: W^k
- les relations de préférence: $(\leq)^k$
- les relations de comparaison: \mathbb{C}^k
- le système: (TxX, Γ, θ)

Au niveau supérieur, l'ensemble des affectations $\underline{\mathbb{C}}$ -optimales en x_0 est déterminé par la résolution d'un jeu à N personnes défini par:

- les ensembles d'affectations admissibles: $\Lambda_\alpha, \alpha=1, \dots, N$
- les critères: V_α
- les relations de préférence: $(<)_\alpha$
- les relations de comparaison: \mathbb{C}_α

3-2. Affectations et classification.

A toute affectation $\lambda \in \Lambda$ on fait correspondre m classes $C_k, k=1, \dots, m$:

$$C_k = \{ (J_\alpha, \lambda_\alpha^k), \alpha=1, \dots, N \}$$

Soit $L = R$, et posons:
$$\eta_\alpha = \sum_{k=1}^m \lambda_\alpha^k \quad \alpha=1, \dots, N$$

$$\eta^k = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha^k \quad k=1, \dots, m$$

Certaines affectations particulières sont intéressantes:

a) $\Lambda_\alpha = \{ \lambda_\alpha ; \lambda_\alpha^k \in \{0, 1\} \quad k=1, \dots, m, \eta_\alpha \geq 1 \} \quad \alpha=1, \dots, N$

L'ensemble des affectations admissibles est l'ensemble des relations binaires au sens vulgaire de \mathcal{J} vers \mathcal{M} . Dans ces conditions, l'ensemble $\{C_1, \dots, C_m\}$ est un recouvrement d'ordre: $\max_\alpha \eta_\alpha - 1$ de \mathcal{J} en m' classes non vides ($m' \leq m$). Si, de plus, $\min_k \eta^k \geq 1$, on a un recouvrement de \mathcal{J} en m classes non vides.

b) $\Lambda_\alpha = \{ \lambda_\alpha ; \lambda_\alpha^k \in \{0, 1\} \quad k=1, \dots, m, \eta_\alpha = 1 \} \quad \alpha=1, \dots, N$

L'ensemble des affectations admissibles est l'ensemble des applications de \mathcal{J} vers \mathcal{M} . Alors, $\{C_1, \dots, C_m\}$ est une partition de \mathcal{J} en m' classes non vides ($m' \leq m$). Si, de plus, les applications sont surjectives, on a: $\eta^k \geq 1, k=1, \dots, m$ et on obtient une partition de \mathcal{J} en m classes non vides.

c) $\Lambda_\alpha = \{ \lambda_\alpha ; \lambda_\alpha^k \in [0, 1] \quad k=1, \dots, m, \eta_\alpha = 1 \} \quad \alpha=1, \dots, N$

L'ensemble des affectations admissibles est un polyèdre convexe, $\Lambda = \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$. Son profil, $\bar{\Lambda}$, est un ensemble fini et Λ est égal à la fermeture convexe de son profil /6/. De plus, $\bar{\Lambda}$ est l'ensemble des partitions de \mathcal{J} en $m' \leq m$ classes. La démonstration de cette propriété est comparable à celle du théorème de Birckhoff-Von Neumann /7/, et se trouve en annexe 1.

On appellera sectorisation toute affectation du type c).

On doit bien remarquer que deux affectations λ et λ' telles que la matrice λ est obtenue en permutant les lignes de la matrice λ' sont différentes; bien que les classes définies soient les mêmes, celles-ci n'utilisent pas le même manipulateur.

On dira qu'un jeu d'agrégation est symétrique si les solutions du jeu supérieur sont indépendantes de la numérotation des manipulateurs.

4- EXEMPLES.

Exemple 1. Considérons d'abord le cas d'un système statique pour lequel on a $m = n$ (autant de manipulateurs que de commandes manipulables).

Soit $U = U_1 \times \dots \times U_m = \mathbb{R}^m$ l'ensemble des commandes admissibles. On supposera que l'état du système est donné par:

$$x = f(u_1, \dots, u_m) \quad x \in \mathbb{R}^p$$

L'ensemble des commandes admissibles pour un joueur J_α relativement à la commande manipulable β du système ($\beta=1, \dots, m$) est défini par: $U_{\alpha\beta} \subset \mathbb{R}$.

Les affectations admissibles sont données par:

$$\alpha = 1, \dots, N \quad \Lambda_\alpha = \{\lambda_\alpha; \lambda_\alpha^k \in [0, 1], k=1, \dots, m, \eta_\alpha = 1\}$$

et l'ensemble des commandes admissibles d'une coalition C_k est défini par:

$$U_\beta(C_k) = \{\} \quad \text{si } \beta \neq k$$

$$U_k(C_k) = \bigcup_{\alpha \in A_k} U_{\alpha\beta}$$

où $\{\}$ désigne l'ensemble vide, et: $A_k = \{\alpha; \lambda_\alpha^k \geq \mu\}$ μ étant donné.

Soit $\Omega_\alpha = \mathbb{R}$, $(\leq)_\alpha$ est la relation d'ordre total dans \mathbb{R} , $\alpha=1, \dots, N$. Les coûts individuels sont définis par:

$$V_\alpha(x, u, \lambda) = \sum_{k=1}^m \lambda_\alpha^k g_\alpha^k(x, u_k)$$

où les g_α , $\alpha=1, \dots, N$ sont N applications données de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} .

De même, soit $\Omega^k = \mathbb{R}$, $(\leq)^k$ est la relation d'ordre total dans \mathbb{R} , $k=1, \dots, m$.

Le coût d'une coalition C_k est défini par:

$$W^k(x, u, \lambda) = \max_{\alpha \in A_k} g_\alpha(x, u_k)$$

Soient \mathcal{C}_α et \mathcal{C}^k , $\alpha=1, \dots, N$, $k=1, \dots, m$ les relations de comparaison:

$$\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N \quad \lambda \mathcal{C}_\alpha \lambda' \iff \lambda_j = \lambda'_j \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} - \{\alpha\}$$

$$\forall u, u' \in R^m \quad u \mathcal{C}^k u' \iff u_j = u'_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} - \{k\}$$

Dans ces conditions, le jeu d'agrégation s'interprète de la façon suivante:

A) Soit λ une affectation admissible telle que $A_k \neq \{\}$, $k=1, \dots, m$. Elle définit m coalitions non vides C_k . Une commande $\bar{\mathcal{C}}$ -optimale est par définition telle que:

$$W^k(x^*, u_1^*, \dots, u_k^*, \dots, u_m^*, \lambda) \leq W^k(x, u_1^*, \dots, u_{k-1}^*, u_k, u_{k+1}^*, \dots, u_m^*, \lambda)$$

$$\forall u_k \in U_k(C_k), \text{ avec: } x^* = f(u_1^*, \dots, u_k^*, \dots, u_m^*)$$

$$x = f(u_1^*, \dots, u_{k-1}^*, u_k, u_{k+1}^*, \dots, u_m^*)$$

Une commande $\bar{\mathcal{C}}$ -optimale est donc un point de Nash entre coalitions, le coût de chacune étant le maximum des coûts supportés par les joueurs qui en font partie au niveau donné μ . (On montrera dans la deuxième partie de ce travail que la définition d'un tel coût pour une coalition conduit à un point de Pareto pour les joueurs qui en font partie au niveau μ).

Soit $U^*(\lambda)$ l'ensemble des commandes $\bar{\mathcal{C}}$ -optimales pour l'affectation λ .

B) Une affectation λ^* est $\underline{\mathcal{C}}$ -optimale si elle est telle que:

$$1) A_k \neq \{\} \quad k=1, \dots, m$$

$$2) \exists u^* \in U^*(\lambda^*) \text{ tel que:}$$

$$V_\alpha(x^*, u^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_\alpha^*, \dots, \lambda_N^*) \leq V_\alpha(x, u, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{\alpha-1}^*, \lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+1}^*, \dots, \lambda_N^*)$$

$$\forall \lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha, \forall u \in U^*(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{\alpha-1}^*, \lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+1}^*, \dots, \lambda_N^*)$$

$$\text{avec: } x^* = f(u^*), \quad x = f(u).$$

Une commande $\underline{\mathcal{C}}$ -optimale est donc un point de Nash entre joueurs, sachant qu'au niveau inférieur les manipulateurs jouent des commandes $\bar{\mathcal{C}}$ -optimales.

Exemple 2. Considérons à présent un jeu dynamique à N joueurs, avec $n = N$

(autant de commandes manipulables que de joueurs).

Le système est défini par son équation d'état:

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (t_0, x_0) \text{ fixé.}$$

avec: $x(t) \in R^p \quad \forall t \in [t_0, t_f]$
 $u(t) \in R^q$

Les commandes admissibles appartiennent à $U = U_1 \times \dots \times U_N$, ensemble donné d'un espace fonctionnel.

Pour un jeu sur un horizon fixé, la cible θ est définie par:

$$\theta = \{(t, x) \in R \times R^p; t = t_f\}$$

Soit $\Omega_\alpha = R$, $(\leq)_\alpha$ est la relation d'ordre total dans R , $\alpha=1, \dots, N$. Les coûts individuels sont définis par N fonctionnelles:

$$V_\alpha(x_0, u, \lambda) = \int_{t_0}^{t_f} v_\alpha(x(t), u(t), t) dt$$

avec Λ , ensemble des affectations admissibles, défini par:

$$\Lambda = \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N \quad \Lambda_\alpha = \{\lambda_\alpha; \lambda_\alpha^k \in \{0, 1\}, \eta_\alpha = 1\} \quad \alpha=1, \dots, N$$

Une affectation admissible est donc une partition de l'ensemble des joueurs en m classes (dont certaines peuvent être vides), une classe C_k étant définie par:

$$C_k = \{J_\alpha \in \mathcal{J}; \lambda_\alpha^k = 1\} \quad k=1, \dots, m$$

Soit $U_{\alpha\beta}$ l'ensemble des commandes admissibles pour le joueur J_α relativement à la commande manipulable β du système:

$$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \quad \text{si } \alpha = \beta$$

$$U_{\alpha\beta} = \{\} \quad \text{si } \alpha \neq \beta$$

L'ensemble des commandes admissibles pour la classe C_k est défini par:

$$U(C_k) = \prod_{J_\alpha \in C_k} U_\alpha \quad k=1, \dots, m$$

On note $u(C_k)$ un élément de $U(C_k)$ et:

$$u = (u(C_k), \hat{u}(C_k)) \quad k=1, \dots, m$$

Le coût d'une coalition est un élément de l'ensemble:

$$\Omega^k = \prod_{J_\alpha \in C_k} \Omega_\alpha \quad k=1, \dots, m$$

c'est-à-dire un σ_k -uple, ($\sigma_k = \text{card. } C_k$):

$$W^k(x_0, u, \lambda) = (\mathcal{V}_\alpha(x_0, u, \lambda))_{J_\alpha \in C_k}$$

où $\mathcal{V}_\alpha(x_0, u, \lambda)$ est défini comme suit:

$$J_\alpha \in C_k \implies \mathcal{V}_\alpha(x_0, u, \lambda) = \max_{\hat{u}(C_k) \in \prod_{j \neq k} U(C_j)} v_\alpha(x_0, u, \lambda)$$

Définissons à présent les relations de préférence et de comparaison pour une coalition:

Soient: $W^k = (\mathcal{V}_\alpha)_{J_\alpha \in C_k}$ et $\bar{W}^k = (\bar{\mathcal{V}}_\alpha)_{J_\alpha \in C_k}$. On définit:

$$W^k \underset{(\leq)}{<}^k \bar{W}^k \implies \left. \begin{array}{l} \mathcal{V}_\alpha = \bar{\mathcal{V}}_\alpha \quad \forall J_\alpha \in C_k \text{ ou} \\ \exists J_\alpha \in C_k \text{ tel que: } \mathcal{V}_\alpha < \bar{\mathcal{V}}_\alpha \end{array} \right\} \quad k=1, \dots, m$$

Les relations de comparaison \mathcal{C}^k , $k=1, \dots, m$, sont telles que:

$$\forall u(C_k), \bar{u}(C_k) \in U(C_k) \quad u(C_k) \mathcal{C}^k \bar{u}(C_k)$$

Dans ces conditions, à toute partition λ on associe un ensemble $U^*(x_0, \lambda)$ de solutions $\bar{\mathcal{C}}$ -optimales qui correspond à la notion de Pareto-optimalité coalitive /8/, /9/; ce concept implique pour chaque coalition le choix d'une décision sup-Pareto-optimale /10/, c'est-à-dire d'une décision Pareto-optimale pour les membres de la coalition, lorsque chacun d'eux suppose que l'ensemble des joueurs extérieurs à celle-ci adopte la commande la plus défavorable pour lui.

On définit à présent les relations de comparaison des joueurs par:

$$\lambda, \lambda' \in \Lambda \quad \lambda \mathcal{C}_\alpha \lambda' \iff (\lambda_j)_{j \neq \alpha} = (\lambda'_j)_{j \neq \alpha}$$

Alors, une affectation \mathcal{C} -optimale pour les joueurs est un point de Nash du jeu

supérieur, avec les coûts individuels définis plus haut. En d'autres termes, supposant les affectations des autres joueurs fixées, chaque joueur choisit d'appartenir à la coalition qui lui assure le coût minimal, sachant que celle-ci adoptera une décision sup-Pareto-optimale.

Exemple 3. Modifions l'exemple précédent, en définissant:

$$W^k(x_0, u, \lambda) = (V_\alpha(x_0, u, \lambda))_{J_\alpha \in C_k} \quad k=1, \dots, m$$

$$\text{et: } \forall u, u' \in U \quad u \mathcal{C}^k u' \iff (u(C_j))_{j \neq k} = (u'(C_j))_{j \neq k} \quad k=1, \dots, m$$

Alors, à toute partition λ on associe un ensemble $U^*(x_0, \lambda)$ de solutions $\bar{\mathcal{C}}$ -optimales pour les coalitions qui correspond à la notion de Nash-optimalité coalitive /8/, /11/. En effet, une solution du jeu inférieur est un équilibre de Nash entre coalitions et un équilibre de Pareto au sein de chaque coalition. Comme précédemment, une affectation $\underline{\mathcal{C}}$ -optimale est un point de Nash du jeu supérieur.

5- JEU SOUS FORME DE FONCTION CARACTERISTIQUE.

Un jeu sous forme de fonction caractéristique est un couple (\mathcal{J}, v) où $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_N\}$ est l'ensemble des joueurs et v est une application définie sur l'ensemble des parties non vides de \mathcal{J} , $P(\mathcal{J})$, et à valeurs dans l'ensemble des parties non vides de $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$, $P(\Omega)$:

$$\begin{aligned} v: P(\mathcal{J}) &\longrightarrow P(\Omega) \\ S &\longmapsto v(S) \end{aligned}$$

Les éléments de $P(\mathcal{J})$ sont les coalitions. La fonction caractéristique définit, pour chaque coalition, les coûts que celle-ci peut assurer à ses joueurs. Ainsi, considérant les ensembles:

$$\Omega(S) = \prod_{J_\alpha \in S} \Omega_\alpha \quad \forall S \in P(\mathcal{J})$$

la fonction caractéristique fera correspondre à une coalition $S \in P(\mathcal{J})$ un

ensemble $v(S) \subset \Omega(S)$.

Pour un jeu d'agrégation, ce concept doit être étendu en précisant le manipulateur par l'intermédiaire duquel la coalition considérée agit sur le système.

Soit μ^S le vecteur des fonctions caractéristiques d'appartenance définissant une coalition $S \in P(\mathcal{Y})$, et définissons l'ensemble des affectations admissibles comme l'ensemble des partitions de \mathcal{Y} en m' classes, $2 \leq m' \leq m$, sous la contrainte: $\lambda^k = \mu^S$, c'est-à-dire telles que la classe C_k coïncide avec la coalition S .

$$\Lambda = \{ \lambda; \lambda_\alpha^1 \in \{0,1\} \forall \alpha \in A, \forall l \in K, \lambda_\alpha^k = 1 \forall J_\alpha \in S, \lambda_\alpha^k = 0 \forall J_\alpha \notin S, \dots \\ \dots \eta_\alpha = 1 \forall \alpha \in A \}$$

A toute affectation $\lambda \in \Lambda(x_0)$ on peut faire correspondre l'ensemble $U^*(x_0, \lambda)$ des commandes \bar{C} -optimales en x_0 pour l'affectation λ . Dans ces conditions, $\forall u \in U^*(x_0, \lambda), \forall \lambda \in \Lambda(x_0), v_\alpha(x_0, u, \lambda)$ est le coût du joueur J_α relatif à l'affectation λ et à la commande \bar{C} -optimale u , et le σ -uple: $(v_\alpha(x_0, u, \lambda))_{J_\alpha \in S}$ $\sigma = \text{card. } S$, est le σ -uple des coûts supportés par les membres de S agissant par l'intermédiaire du manipulateur M_k pour l'affectation λ et la commande \bar{C} -optimale u . L'ensemble de ces coûts, pour $u \in U^*(x_0, \lambda)$ est noté $\sqrt_S^k(x_0, \lambda)$:

$$\sqrt_S^k(x_0, \lambda) = \{ (\omega_\alpha)_{J_\alpha \in S}; \omega_\alpha \in \Omega_\alpha, \exists u \in U^*(x_0, \lambda) \text{ tel que } \omega_\alpha = v_\alpha(x_0, u, \lambda) \}$$

Un cas particulièrement intéressant est celui dans lequel l'ensemble $\sqrt_S^k(x_0, \lambda)$ ne dépend que de λ^k , c'est-à-dire de la coalition S (soit que les coûts supportés par les membres d'une classe ne dépendent pas de la façon dont se classent les autres joueurs, soit que celle-ci soit déterminée par une règle bien précise).

Dans ces conditions, la fonction caractéristique de la coalition S agissant par l'intermédiaire du manipulateur M_k est donnée par l'ensemble $\sqrt_S^k(x_0, \lambda^k)$.

De plus, lorsque le jeu d'agrégation est symétrique, les solutions sont indépendantes de la numérotation des manipulateurs. Il en est de même pour les ensembles $\sqrt_S^k(x_0, \lambda^k)$ et on peut alors parler de fonction caractéristique de la

coalition S.

5-1. Stratégies pures, stratégies mixtes.

Nous supposons, dans ce paragraphe:

$\forall \lambda \in \Lambda(x_0), U^*(x_0, \lambda)$ est un singleton, c'est-à-dire que la solution \bar{C} -optimale en x_0 est unique.

Soit $\Lambda = \bar{\Lambda}$, ensemble des partitions de J en m' classes, $m' \leq m$. Le jeu peut être formulé de la façon suivante:

Chaque joueur $J_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$, choisit un numéro de classe: $k \in K$. Le résultat est une partition de J en m' classes $C_k, k=1, \dots, m', m' \leq m$. Compte-tenu de l'hypothèse, le coût obtenu par chaque joueur dans cette partition est défini de façon unique.

L'ensemble des choix possibles pour chaque joueur (les numéros de classe) sera appelé son ensemble de stratégies pures:

$$S_\alpha = K = \{1, \dots, m\} \quad \alpha = 1, \dots, N$$

A tout N- uple stratégique $(s_1, \dots, s_N) \in S_1 \times \dots \times S_N$ correspond une partition $\lambda \in \bar{\Lambda}$ et un N- uple de coûts notés $\omega_\alpha(x_0, s), \omega_\alpha(x_0, s) \in \Omega_\alpha$.

Le jeu peut alors être représenté sous la forme d'un tableau, et la donnée des ensembles Ω_α , des relations de comparaison \mathcal{C}_α , des relations de préférence $(\underline{<})_\alpha, \alpha=1, \dots, N$, le définit complètement.

Exemple. Considérons le cas d'un jeu à 3 joueurs J_1, J_2, J_3 agissant sur un système donné par l'intermédiaire de deux manipulateurs. Les ensembles stratégiques sont: $S_1 = S_2 = S_3 = \{1, 2\}$ et correspondent à l'ensemble des affectations admissibles définissant les partitions possibles de $\{J_1, J_2, J_3\}$ en m' classes, $0 < m' \leq 2$. Le jeu est défini par le tableau:

		J_2 	J_2 	
		1 2	1 2	
J_1	{	1, 4, 2	7, 2, 5	J_1
	2	6, 5, 4	7, 4, 6	
J_3		A: $s_3 = 1$	B: $s_3 = 2$	

La décomposition en deux sous-tableaux correspond aux deux choix possibles de J_3 , $s_3 = 1$ et $s_3 = 2$.

Un triplet stratégique donné induit une partition de $\{J_1, J_2, J_3\}$ ainsi que les manipulateurs correspondant à chaque classe. Les gains réels des joueurs apparaissent dans la case correspondante où le premier nombre désigne le gain de J_1 , le second celui de J_2 et le troisième celui de J_3 . De façon à faire apparaître les classes et les manipulateurs associés, on peut encore représenter le jeu par le tableau ci-dessous:

C_2 (manipulateur M_1)	C_2 (manipulateur M_2)	$\omega_1(s)$	$\omega_2(s)$	$\omega_3(s)$
$\{J_1, J_2, J_3\}$	$\{\}$	1	4	2
$\{J_1, J_2\}$	$\{J_3\}$	4	6	3
$\{J_1, J_3\}$	$\{J_2\}$	7	2	5
$\{J_2, J_3\}$	$\{J_1\}$	6	5	4
$\{J_1\}$	$\{J_2, J_3\}$	2	5	8
$\{J_2\}$	$\{J_1, J_3\}$	4	3	5
$\{J_3\}$	$\{J_1, J_2\}$	7	4	6
$\{\}$	$\{J_1, J_2, J_3\}$	5	3	1

1°) Soit $\Omega_\alpha = R$, $\alpha=1,2,3$; les relations de préférence $(\leq)_1, (\leq)_2, (\leq)_3$ sont la relation d'ordre total dans R , les relations de comparaison sont définies par:

$$(s_1, s_2, s_3) \mathbb{C}_\alpha (s'_1, s'_2, s'_3) \iff s_i = s'_i \quad \forall i \neq \alpha, \quad \alpha=1,2,3$$

Dans ces conditions, le jeu conduit à la recherche de triplets Nash-optimaux sur le tableau ci-dessus, et on obtient deux partitions Nash-optimales:

$$C_1 = \{J_1, J_2\} \qquad C_2 = \{J_3\} \qquad \text{et}$$

$$C_1 = \{J_2\} \qquad C_2 = \{J_1, J_3\}$$

correspondant aux triplets stratégiques optimaux: $(1,1,2)$ et $(2,1,2)$ et aux

gains réels respectifs: 4,6,3 et 4,3,5.

2°) Soit $\Omega_\alpha = R^3$, $\alpha=1,2,3$; les relations de comparaison sont définies par:

$$C_1 = C_2 = C_3, (s_1, s_2, s_3) \in C_\alpha (s'_1, s'_2, s'_3) \quad \forall (s_1, s_2, s_3), (s'_1, s'_2, s'_3) \in S_1 \times S_2 \times S_3, \\ \alpha=1,2,3.$$

Posons de même: $(\underline{<})_1 = (\underline{<})_2 = (\underline{<})_3 = (\underline{<})$ où $(\underline{<})$ est définie comme suit:

$$\left. \begin{array}{l} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in R^3 \\ (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3) \in R^3 \\ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) (\underline{<}) (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3) \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \omega_\alpha = \omega'_\alpha \quad \alpha=1,2,3 \text{ où} \\ \exists \alpha \in \{1,2,3\} \text{ tel que } \omega_\alpha > \omega'_\alpha \end{array}$$

Dans ces conditions, le jeu conduit à la recherche de triplets Pareto-optimaux sur le tableau ci-dessus. On obtient quatre partitions Pareto-optimales:

$C_1 = \{J_1, J_2\}$	$C_2 = \{J_3\}$	$s = (1, 1, 2)$	coûts: 4, 6, 3
$C_1 = \{J_2, J_3\}$	$C_2 = \{J_1\}$	$s = (2, 1, 1)$	coûts: 6, 5, 4
$C_1 = \{J_1\}$	$C_2 = \{J_2, J_3\}$	$s = (1, 2, 2)$	coûts: 2, 5, 8
$C_1 = \{J_3\}$	$C_2 = \{J_1, J_2\}$	$s = (2, 2, 1)$	coûts: 7, 4, 6

Remarque: Lorsque le jeu est symétrique, le nombre de cas total à envisager décroît fortement, puisqu'il se réduit au nombre de partitions d'un ensemble de N éléments en un nombre de classes compris entre un et m. A titre d'exemple, le tableau définissant le jeu comporte 81 cases (3^4) pour un jeu non symétrique à 4 joueurs et à 3 manipulateurs. Il n'en comporte que 14 lorsque le jeu est symétrique.

Supposons maintenant que la partie se répète un grand nombre de fois. Les joueurs peuvent alors être amenés à minimiser l'espérance mathématique de leurs coûts en choisissant des stratégies mixtes /13/.

Soit λ_α^k la probabilité que se définit le joueur J_α d'agir par l'intermédiaire du manipulateur M_k . L'espérance mathématique de son coût est alors:

$$E_\alpha = \sum_{s \in S_1 \times \dots \times S_N} p(s) \omega_\alpha(x_0, s)$$

où $p(s)$ est la probabilité pour que le N -uple stratégique ait la valeur:

$s = (s_1, \dots, s_N)$, définie par:

$$p(s) = \prod_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^{s_{\alpha}}$$

$$s_{\alpha} \in S_{\alpha} = \{1, 2, \dots, m\} \quad \forall J_{\alpha} \in \mathcal{J}$$

Dans ce cas, l'ensemble des affectations admissibles est la fermeture convexe de $\bar{\Lambda}$, c'est-à-dire l'ensemble des sectorisations.

Exemple: Reprenons l'exemple précédent, et notons:

λ_{α} : probabilité pour que le joueur J_{α} utilise le manipulateur M_1 .

$\mu_{\alpha} = (1 - \lambda_{\alpha})$: probabilité pour que J_{α} utilise M_2 .

Les espérances de gain sont alors fournies par:

$$E_1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 5\mu_1 \mu_2 \mu_3 + 4\lambda_1 \lambda_2 \mu_3 + 7\mu_1 \mu_2 \lambda_3 + 7\lambda_1 \mu_2 \lambda_3 + 4\mu_1 \lambda_2 \mu_3 + 6\mu_1 \lambda_2 \lambda_3 + 2\lambda_1 \mu_2 \mu_3$$

$$E_2 = 4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 3\mu_1 \mu_2 \mu_3 + 6\lambda_1 \lambda_2 \mu_3 + 4\mu_1 \mu_2 \lambda_3 + 2\lambda_1 \mu_2 \lambda_3 + 3\mu_1 \lambda_2 \mu_3 + 5\mu_1 \lambda_2 \lambda_3 + 5\lambda_1 \mu_2 \mu_3$$

$$E_3 = 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 + 3\lambda_1 \lambda_2 \mu_3 + 6\mu_1 \mu_2 \lambda_3 + 5\lambda_1 \mu_2 \lambda_3 + 5\mu_1 \lambda_2 \mu_3 + 4\mu_1 \lambda_2 \lambda_3 + 8\lambda_1 \mu_2 \mu_3$$

La recherche d'un point de Nash en stratégies mixtes conduit à considérer les quantités:

$$\frac{\partial E_1}{\partial \lambda_1} = -3 + 3(\lambda_2 + \lambda_3) - 8\lambda_2 \lambda_3$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial \lambda_2} = \lambda_1 + \lambda_3$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial \lambda_3} = 5 - 8\lambda_1 - 6\lambda_2 + 8\lambda_1 \lambda_2$$

avec: $0 \leq \lambda_{\alpha} \leq 1$, $\alpha = 1, 2, 3$.

On trouve alors facilement que tous les triplets de la forme:

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1, 1, 0)$ sont Nash-optimaux. Les gains correspondants sont respectivement: $4, 3+3\lambda_1$ et $5-2\lambda_1$.

5-2 Jeu symétrique.

Lorsque le jeu est symétrique, l'ensemble des coûts réalisables par une coalition S pour une affectation λ (telle que l'une des classes soit S) ne dépend pas du manipulateur utilisé par S . Nous supposons comme précédemment que pour toute partition de \mathcal{J} , la solution $\bar{\tau}$ -optimale en x_0 est unique, et que les coûts supportés par les éléments d'une classe sont indépendants de la façon dont se classent les autres joueurs.

Soit μ^S le vecteur des fonctions caractéristiques d'appartenance à la classe S . On note $\omega_\alpha(x_0, \mu^S)$ le coût supporté par un joueur $J_\alpha \in S$.

Soit $\bar{\Lambda}$ l'ensemble des affectations admissibles (ensemble des partitions de \mathcal{J} en m' classes, $m' \leq m$).

Soient $g_\alpha, \alpha=1, \dots, N$, N applications telles que:

$$g_\alpha : X \times \bar{\Lambda} \longrightarrow \Omega_\alpha$$

$$(x_0, \lambda) \longmapsto g_\alpha(x_0, \lambda) = \omega_\alpha(x_0, \lambda^k) \quad \text{si } J_\alpha \in C_k$$

Soit $S \in P(\mathcal{J})$ une partie quelconque non vide de \mathcal{J} . On définit les applications suivantes:

$$\forall J_\alpha \in S \quad e_\alpha^S : X \times \bar{\Lambda} \longrightarrow \Omega_\alpha$$

$$(x_0, \lambda) \longmapsto e_\alpha^S(x_0, \lambda) = g_\alpha(x_0, \lambda) - \omega_\alpha(x_0, \mu^S)$$

Soit $\sigma = \text{card. } S$; le σ -uple $(e_\alpha^S(x_0, \lambda))_{J_\alpha \in S}$ définit les regrets des membres de S relativement à la partition λ .

Soient $R_S, S \in P(\mathcal{J}), 2^N - 1$ ensembles donnés et $\rho_S, S \in P(\mathcal{J}), 2^N - 1$ applications données.

$$\forall S \in P(\mathcal{J}) \quad \rho_S : X \times \bar{\Lambda} \longrightarrow R_S$$

$$(x_0, \lambda) \longmapsto \rho_S(x_0, \lambda)$$

Soient $(\rightarrow)_S \subset R_S \times R_S, 2^N - 1$ relations réflexives données.

$\rho_S(x_0, \lambda)$ est le regret de la coalition S relativement à la partition λ , pour la condition initiale x_0 . $(\rightarrow)_S$ est sa relation de préférence.

On peut, pour un jeu d'agrégation comme pour un jeu à N personnes, définir les concepts suivants:

Coalition bloquante. Soit $\lambda \in \bar{\Lambda}$ une partition de \mathcal{Y} et soit $S \in P(\mathcal{Y})$. On dira que la coalition S bloque la partition λ s'il existe une partition λ' telle que:

$$\rho_S(x_0, \lambda') (\rightarrow)_S \rho_S(x_0, \lambda)$$

Coeur du jeu. Une partition appartient au coeur du jeu si elle ne peut être bloquée par aucune coalition $S \in P(\mathcal{Y})$.

Super-coeur du jeu./10/ Une partition appartient au super-coeur du jeu si elle ne peut être bloquée par aucune partie $S \in P(\mathcal{Y})$ le long des trajectoires qu'elle engendre.

Si λ appartient au super-coeur, on a:

$$\rho_S(x, \lambda) (\rightarrow)_S \rho_S(x, \lambda') \quad \forall S \in P(\mathcal{Y}), \forall \lambda' \in \bar{\Lambda}$$

$\forall x \in \gamma(x_0, u)$, trajectoire engendrée à partir de x_0 par la commande $u \in U^*(x_0, \lambda)$.

Considérons à présent le cas suivant:

$\forall S \in P(\mathcal{Y}), R_S = (R), (\rightarrow)_S = (\rightarrow)$, où $(\rightarrow) \subset (R) \times (R)$ est une relation d'ordre total.

Soit $\theta(x_0, \lambda)$ le $(2^N - 1)$ -uple des éléments $\rho_S(x_0, \lambda)$ rangés dans l'ordre décroissant:

$$1 \leq i \leq j \leq 2^N - 1 \quad \theta_i(x_0, \lambda) (\xi) \theta_j(x_0, \lambda)$$

Nucléolus du jeu./14/ La partition λ appartient au nucléolus du jeu si pour toute autre partition λ' , $\theta(x_0, \lambda)$ précède $\theta(x_0, \lambda')$ dans l'ordre lexicographique, c'est-à-dire si l'on a:

$$\theta_1(x_0, \lambda) (\rightarrow) \theta_1(x_0, \lambda')$$

$$\theta_1(x_0, \lambda) = \theta_1(x_0, \lambda') \implies \theta_2(x_0, \lambda) (\rightarrow) \theta_2(x_0, \lambda')$$

$$\theta_2(x_0, \lambda) = \theta_2(x_0, \lambda') \implies \theta_3(x_0, \lambda) (\rightarrow) \theta_3(x_0, \lambda')$$

etc....

Stratégies mixtes. On a vu que, lorsque le jeu d'agrégation était symétrique, il pouvait être défini par un tableau dont le nombre de cases est le nombre de

partitions d'un ensemble de N éléments en un nombre de classes compris entre un et m . Lorsque, de plus, les coûts supportés par une classe sont indépendants de la façon dont se classent les autres joueurs, il suffit de considérer l'ensemble $P(\mathcal{Y})$ des parties non vides de \mathcal{Y} , de cardinal $2^N - 1$.

Dans le cas où les joueurs adoptent des stratégies mixtes, soit $p(s)$, $S \in P(\mathcal{Y})$, la probabilité pour que l'une des classes de la partition soit S ; l'espérance du coût d'un joueur J_α s'écrit:

$$E_\alpha = \sum_{S \in P_\alpha(\mathcal{Y})} p(s) \omega_\alpha(x_0, \mu^S)$$

où $P_\alpha(\mathcal{Y})$ désigne l'ensemble des parties de \mathcal{Y} contenant J_α . Par ailleurs, compte-tenu du fait que $\{C_1, \dots, C_m\}$ est une partition de \mathcal{Y} , on a:

$$p(s) = \sum_{k=1}^m \text{Pr}\{C_k = S\}$$

et, si chaque joueur joue de façon indépendante:

$$\text{Pr}\{C_k = S\} = \prod_{J_i \in S} \lambda_i^k \prod_{J_j \notin S} (1 - \lambda_j^k) = \psi(\lambda^k, \mu^S)$$

où λ_i^k , $i=1, \dots, N$, $k=1, \dots, m$, désigne la probabilité pour que le joueur J_i choisisse le numéro de classe k . On a alors:

$$\alpha=1, \dots, N \quad E_\alpha = \sum_{k=1}^m \sum_{S \in P_\alpha(\mathcal{Y})} \psi(\lambda^k, \mu^S) \omega_\alpha(x_0, \mu^S)$$

Dans ces conditions, une solution \underline{C} -optimale pour les joueurs sera définie par:

(i) $\lambda^* \in \Lambda(x_0) \subset \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$

$$\Lambda_\alpha = \{\lambda_\alpha; \lambda_\alpha^k \in [0, 1] \quad \forall k \in K, \eta_\alpha = 1\} \quad \alpha=1, \dots, N$$

(ii) $\sum_{k=1}^m \sum_{S \in P_\alpha(\mathcal{Y})} \psi(\lambda^{*k}, \mu^S) \omega_\alpha(x_0, \mu^S) (\leq)_\alpha \sum_{k=1}^m \sum_{S \in P_\alpha(\mathcal{Y})} \psi(\lambda^k, \mu^S) \omega_\alpha(x_0, \mu^S)$

$$\forall \lambda \in \Lambda(x_0) \quad \text{tel que } \lambda \underline{C}_\alpha \lambda^*, \alpha=1, \dots, N$$

Remarque. La classification dans laquelle chaque joueur s'affecte de façon équiprobable à chacune des m classes est, dans cette formulation, une solution

triviale Nash-optimale (si elle est jouable). En effet, on vérifie facilement qu'au point:

$$\lambda_{\alpha}^1 = \lambda_{\alpha}^k = \frac{1}{m} \quad \forall \alpha \in A, \forall l, k \in K$$

on a:

$$\frac{\partial E_{\alpha}}{\partial \lambda_{\alpha}^1} = 0 \quad \forall \alpha \in A, \forall l \in K$$

5-3. Partitions optimales et programmation dynamique.

La formulation d'un jeu d'agrégation sous forme de fonction caractéristique permet, sous les hypothèses du §5-2, l'utilisation d'algorithmes du type programmation dynamique. Le processus est rendu dynamique en envisageant successivement des partitions en 2, 3, ... m classes.

5-3-1. Partitions Nash-optimales.

Lemme. Si $\{C_0, C_1, \dots, C_m\}$ est une partition Nash-optimale d'un ensemble E en m+1 classes, ceci implique que $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ est une partition Nash-optimale de l'ensemble E-C₀ en m classes.

Démonstration: Supposons que $\{C_1, \dots, C_m\}$ ne soit pas une partition Nash-optimale de E-C₀ en m classes. Alors, il existerait un indice α , une classe C_j et une classe C_k, $J_{\alpha} \in E-C_0$, $j, k \in \{1, \dots, m\}$, tels que:

$$J_{\alpha} \in C_j \text{ et } \omega_{\alpha}(x_0, C_j) (>)_{\alpha} \omega_{\alpha}(x_0, C_k \cup \{J_{\alpha}\})$$

ce qui prouve que la partition $\{C_0, C_1, \dots, C_m\}$ ne serait pas Nash-optimale pour l'ensemble E.

Conséquence: Soit P_m(E) une partition Nash-optimale de l'ensemble E en m classes non vides. On a:

$$P_{m+1}(E) \in \{\{S, P_m(E-S)\}, S \in Q_m\}$$

où Q_m désigne l'ensemble des parties de E telles qu'il existe au moins une partition P_m(E-S). On peut remarquer que Q_m est inclus dans l'ensemble des parties de E telles que: card.(E-S) \geq m.

Ainsi, en notant N-opt. l'opération qui consiste à ne retenir que les partitions de la forme $\{S, P_m(E-S)\}$ Nash-optimales, on obtient la récurrence suivante:

$$\forall E \in P(\mathcal{Y}) \quad P_{m+1}(E) = \text{N-opt. } \{S, P_m(E-S)\} \\ S \in Q_m$$

initialisée par:

$$\forall S \in P(\mathcal{Y}) \quad P_1(S) = S$$

Remarque: On a:

$$\text{card. } Q_1 = \text{card. } P(\mathcal{Y}) = \pi_1 = 2^N - 1$$

$$\text{card. } Q_2 = \pi_2 \leq \pi_1 - N$$

⋮

$$\text{card. } Q_k = \pi_k \leq \pi_{k-1} - C_N^{k-1}$$

Exemple: Le tableau de la page suivante définit les coûts individuels dans un jeu statique à quatre joueurs, pour toutes les coalitions possibles:

$S \in P(\{J_1, J_2, J_3, J_4\})$. Les quatre colonnes de droite donnent les résultats obtenus par programmation dynamique respectivement pour des partitions Nash-optimales en 1, 2, 3 et 4 classes.

5-3-2. Critères additifs.

Dans un grand nombre d'applications, on associe à chaque classe C_k $k=1, \dots, m$, un coût global réel $W(C_k)$, et l'on cherche une partition optimale au sens de la minimisation de la somme de ces coûts. Cette approche correspond à la recherche d'un point de Pareto au moyen du processus de scalarisation.

Lemme. Si $\{C_0, C_1, \dots, C_m\}$ est une partition de l'ensemble E en m+1 classes non vides telle que la somme: $\sum_{k=0}^m W(C_k)$ soit minimale, ceci implique que $\{C_1, \dots, C_m\}$ est une partition de l'ensemble $E - C_0$ en m classes non vides telle que la somme: $\sum_{k=1}^m W(C_k)$ soit minimale.

Démonstration: Supposons qu'il existe une partition $\{S_1, \dots, S_m\}$ de $E - C_0$ en m classes non vides telle que:

S	$\omega_1(S)$	$\omega_2(S)$	$\omega_3(S)$	$\omega_4(S)$	$P_1(S)$	$P_2(S)$	$P_3(S)$	$P_4(S)$
{1}	0				{1}			
{2}		0			{2}			
{3}			0		{3}			
{4}				0	{4}			
{12}	1	2			{12}	{1} {2}		
{13}	2		3		{13}	{1} {3}		
{14}	3			3	{14}	{1} {4}		
{23}		1	2		{23}	{2} {3}		
{24}		2		2	{24}	{2} {4}		
{34}			1	1	{34}	{3} {4}		
{123}	2	1	2		{123}	{1} {23}	{1} {2} {3}	
{124}	1	2		2	{124}	{1} {24}	{1} {2} {4}	
						{4} {12}		
{134}	2		1	2	{134}	{1} {34}	{1} {3} {4}	
{234}		2	1	2	{234}	{2} {34}	{2} {3} {4}	
{1234}	3	4	3	2	{1234}	{1} {234}	{1} {2} {34}	{1} {2} {3} {4}
						{12} {34}		



Remarque. On a noté: $\{\alpha\beta\gamma\}$ pour désigner l'ensemble $\{J_\alpha, J_\beta, J_\gamma\}$

$$\sum_{k=1}^m W(S_k) < \sum_{k=1}^m W(C_k)$$

alors la partition $\{C_0, S_1, \dots, S_m\}$ donnerait un coût global inférieur à celui obtenu pour la partition $\{C_0, C_1, \dots, C_m\}$, d'où la contradiction.

Conséquence: Soit $P_m(E)$ une partition optimale de E en m classes non vides, et $W_m(E)$ le coût global correspondant. On a:

$$P_{m+1}(E) \in \{\{S, P_m(E-S)\}, S \in Q_m\}$$

où Q_m désigne l'ensemble des parties de E telles qu'il existe au moins une partition $P_m(E-S)$.

De même, on obtient la récurrence:

$$\forall E \in P(\mathcal{Y}) \quad W_{m+1}^*(E) = \min_{S \in Q_m} (W(S) + W_m^*(E-S))$$

initialisée par:

$$\forall S \in P(\mathcal{Y}) \quad W_1^*(S) = W(S)$$

Exemple: On reprend l'exemple précédent, en définissant $W(S)$ comme la somme des coûts des joueurs appartenant à S :

$$\forall S \in P(\mathcal{Y}) \quad W(S) = \sum_{J_\alpha \in S} \omega_\alpha(S)$$

On obtient alors le tableau donné à la page suivante.

5-3-3. Discussion.

L'algorithme de programmation dynamique procède à chaque étape par dichotomie, (S et $E-S$), et réduit fortement le nombre de cas total à envisager (voir l'annexe 2 pour les problèmes de dénombrement). Cependant, celui-ci reste malgré tout assez élevé pour interdire son emploi lorsque le nombre de joueurs et de classes augmente, en dehors de toute contrainte sur les partitions admissibles.

Lorsque les contraintes sur les partitions admissibles en réduisent fortement le nombre (existence d'une propriété d'ordre, par exemple /15/, /16/),

S	$W_1(S)$	$P_2(S)$	$W_2(S)$	$P_3(S)$	$W_3(S)$	$P_4(S)$	$W_4(S)$
{1}	0						
{2}	0						
{3}	0						
{4}	0						
{12}	3	{1} {2}	0				
{13}	5	{1} {3}	0				
{14}	6	{1} {4}	0				
{23}	3	{2} {3}	0				
{24}	4	{2} {4}	0				
{34}	2	{3} {4}	0				
{123}	5	{1} {23}	3	{1} {2} {3}	0		
		{3} {12}	3				
{124}	5	{4} {12}	3	{1} {2} {4}	0		
{134}	5	{1} {34}	2	{1} {3} {4}	0		
{234}	5	{2} {34}	2	{2} {3} {4}	0		
{1234}	12	{1} {234}	5	{1} {2} {34}	2	{1} {2} {3} {4}	0
		{2} {134}	5				
		{3} {124}	5				
		{4} {123}	5				
		{12} {34}	5				



l'algorithme de programmation dynamique est un outil efficace pour la recherche de partitions optimales. Signalons enfin que cette approche peut être étendue à d'autres types de critères d'optimalité que ceux présentés ici /17/.

6- CONCLUSION.

Le but de ce chapitre était de reconnaître l'intérêt de la théorie des jeux à N personnes à somme non nulle pour la formulation de certains problèmes de classification. Nous avons proposé dans ce sens la notion de jeu d'agrégation, dans lequel N joueurs agissent sur un système comportant n commandes par l'intermédiaire de m manipulateurs ($m \leq N$). Dans ces conditions, toute action sur le système suppose un regroupement préalable des joueurs en m coalitions, c'est-à-dire une classification de l'ensemble des joueurs en m classes. La définition du jeu d'agrégation donne l'ensemble des règles à partir desquelles on peut définir la notion de classification optimale.

Un jeu d'agrégation apparaît ainsi comme un jeu à deux niveaux, à chacun desquels est associé un ensemble propre de variables de décision et une notion d'optimalité. Au premier niveau se trouvent associées les variables d'affectation, qui définissent les coalitions et les manipulateurs correspondants. Au deuxième niveau, les manipulateurs agissent sur le système au moyen des variables de commande, au mieux des intérêts de la classe qu'ils représentent.

La définition du jeu sous forme de fonction caractéristique permet de se limiter à une formulation à un seul niveau. Sous certaines hypothèses, on se ramène à la forme classique de jeu sur un tableau. La distinction entre stratégies pures et stratégies mixtes correspond alors à celle entre partitions et sectorisations. On présente enfin un algorithme de programmation dynamique pour la recherche de partitions optimales, surtout efficace lorsque le problème est très contraint.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude d'un jeu d'agrégation particulier, appliqué aux problèmes de classification automatique relevant de l'Analyse des données.

- BIBLIOGRAPHIE -

- /1/ L.A. ZADEH: Optimality and non-scalar-valued performance criteria. IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-8, Janvier 1963.
- /2/ H.P. GEERING: Optimal control theory for non-scalar-valued performance criteria. Ph. D; dissertation, Dep. Elec. Eng., Mass. Inst. Technol., Cambridge, Août 1971.
- /3/ M. ATHANS, H.P. GEERING: Necessary and sufficient conditions for differentiable non-scalar-valued functions to attain extrema. IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-18, Avril 1973.
- /4/ A. BLAQUIERE: Quantitative games: problem statement and examples, new geometric aspects. Dans: Grote J.D. (ed.) The theory and application of differential games, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, Boston, 1974.
- /5/ L.A. ZADEH: Fuzzy sets. Information and Control, Vol. 8, 1965.
- /6/ C. BERGE: Espaces topologiques, fonctions multivoques. Dunod, Paris, 1966.
- /7/ C. BERGE: Principes de combinatoire. Dunod, Paris, 1968. (chap. 20)
- /8/ W.E. SCHMITENDORF: Many player differential games with coalitions. Dans: Grote J.D. (ed.) The theory and application of differential games, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, Boston, 1974.
- /9/ A. HAURIE: On Pareto-optimal decisions for a coalition of a subset of players. IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-18, Avril 1973.
- /10/ A. HAURIE: Jeux coopératifs. Commande optimale sur un horizon infini. Thèse doct. ès Sciences, Univ. Paris 7, Avril 1975.
- /11/ G. MORIARTY: Ph. D. Thesis, Illinois Inst. Technol., Chicago, 1974.
- /12/ J. VON NEUMANN, O. MORGENSTERN: Theory of games and economic behaviour. Princeton Univ. Press, New Jersey, 1947.

- /13/ D. SCHMEIDLER: The nucleolus of a characteristic function game. SIAM Jour. Appl. Math., Vol. 17, 1969.
- /14/ W.D. FISHER: On grouping for maximum homogeneity. Jour. Americ. Statist. Assoc., 53, Décembre 1958.
- /15/ Y. LECHEVALLIER: Classification automatique optimale sous contrainte d'ordre total. Rapport de recherche n° 200, IRIA, Novembre 1976.
- /16/ Y. TITREN, M. STAROSWIECKI: A dynamic programming algorithm for local modelling by a lexicographical minimum partition. 5th Internat. Conf. Syst. Science, Wroclaw, Septembre 1978.

CHAPITRE 2

UN JEU D'AGREGATION PARTICULIER

1- INTRODUCTION

2- UN JEU D'AGREGATION PARTICULIER

3- INTERPRETATION DU JEU D'AGREGATION

4- EXISTENCE DE SOLUTIONS OPTIMALES

4-1. Jeu non coopératif

4-2. Jeu coopératif

5- SOLUTIONS EN STRATEGIES PURES

5-1. Sectorisation Nash-optimale

5-2. Sectorisation Pareto-optimale

6- FORME PARTICULIERE DES COUTS INDIVIDUELS

6-1. Conditions suffisantes de concavité

6-2. Applications g_j décroissantes

6-3. Application aux coûts quadratiques

6-4. Les centres de classe: variables d'optimisation

7- CONCLUSION

CHAPITRE DEUX

UN JEU D'AGREGATION PARTICULIER

1- INTRODUCTION.

L'obtention des groupements "naturels et homogènes" d'une population, ainsi que de ses éléments "les plus représentatifs", ou de ses paramètres "les plus explicatifs", constitue le point de départ de nombreuses techniques d'aide à la décision.

Une approche de la solution de ce problème est fournie par les techniques de classification automatique, qui consistent à trouver une partition d'un ensemble fini \mathcal{Y} (l'ensemble de référence) telle que chaque objet ressemble plus aux objets intérieurs à son groupe qu'aux objets extérieurs. Cette classification a pour support le tableau des données caractérisant l'ensemble de référence. Celui-ci associe, à chaque élément $J_\alpha \in \mathcal{Y}$ un vecteur de paramètres caractéristiques $x_\alpha \in X$, où l'ensemble X dépend de la nature des données (quantitatives, qualitatives, dichotomiques,...).

Il arrive que les données se présentent sous la forme d'un tableau carré définissant une relation binaire (vulgaire ou floue) dans \mathcal{Y} . C'est le cas, par exemple, lorsque les données définissent des similarités, ou des préférences, entre des couples d'objets. On peut noter qu'il est facile de passer de données rectangulaires à des données carrées en définissant, par exemple, un indice de similarité entre deux objets à partir de leur profil

sur l'ensemble des paramètres /1/. Mais l'inverse n'est pas vrai, car pour passer de données carrées concernant un seul ensemble à des données rectangulaires, concernant deux ensembles, il faudrait "créer" un nouvel ensemble.

Deux approches peuvent être utilisées lors de l'analyse d'un tableau de données rectangulaire.

La première consiste à calculer un tableau (carré) des distances, ou des ressemblances, entre les éléments de l'ensemble de référence, et à utiliser les propriétés du graphe valué ainsi créé. La recherche d'une structure éventuellement présente dans l'ensemble de référence repose ainsi sur l'étude des propriétés de connexité de ce graphe, lorsque la relation binaire est vulgaire /2/ à /5/. Lorsqu'elle est floue, on utilise une décomposition hiérarchique de son graphe /6/, /7/, basée sur la définition d'une distance ultramétrique sur \mathcal{Y} . L'obtention d'une hiérarchie indicée unique implique le plus souvent une opération de fermeture transitive appliquée à la relation originale /8/ à /10/.

Les méthodes utilisant les propriétés des graphes produisent des solutions dont rien ne permet d'affirmer qu'elles soient optimales vis-à-vis du but poursuivi. Celui-ci peut être défini par les deux critères suivants:

a) Les classes doivent être "les plus différentes" possible les unes des autres, vis-à-vis des paramètres.

b) Chaque classe doit être "la plus homogène" possible vis-à-vis de ces paramètres.

Cette formulation du problème suppose de toute évidence que l'on a introduit une bonne mesure de l'homogénéité d'une classe et de la différence entre deux classes. Dans les méthodes citées plus haut, ces mesures sont des distances intra-classe et inter-classes définies à partir de la matrice de similarité des objets pris deux à deux.

Cependant, il paraît préférable d'utiliser les propriétés de l'espace dans lequel les données sont plongées pour construire des algorithmes de classi-

fication plus adaptés à celles-ci et pour obtenir certaines propriétés d'optimalité. C'est l'objet de la seconde approche, recherchant directement une partition de J en m classes, et caractérisée par le traitement direct du tableau des données rectangulaire. Les premiers travaux dans ce sens /11/, /12/, remontent à 1967. Actuellement, aucune méthode n'aboutit rapidement à un optimum global pour un nombre de classes fixé à l'avance, aussi se contente-t-on le plus souvent d'algorithmes rapides donnant une ou plusieurs solutions, considérées comme des optima locaux. La méthode des nuées dynamiques /13/, /14/, est un bon exemple d'algorithme de ce type.

Dans ce qui suit, nous considérons chaque élément J_α de l'ensemble de référence comme un joueur, et nous formulons le problème de classification comme un jeu d'agrégation particulier.

2- UN JEU D'AGREGATION PARTICULIER.

Soit $J = \{J_1, \dots, J_N\}$ un ensemble de N joueurs, caractérisé chacun par un vecteur de paramètres $x_\alpha \in X$, $\alpha = 1, \dots, N$. Ces joueurs agissent sur un système statique possédant m commandes distinctes manipulables par l'intermédiaire de m manipulateurs ($m < N$).

Le jeu d'agrégation est défini comme suit:

- 1) Commandes admissibles du système.

Soit U un ensemble donné. Le domaine admissible pour les m commandes manipulables du système est défini par:

$$U_\beta = U \quad \beta = 1, \dots, m$$

- 2) Commandes admissibles des joueurs.

L'ensemble des décisions admissibles d'un joueur J_α relativement à la β ^{ième} commande du système est:

$$U_{\alpha\beta} = U \quad \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$$

- 3) Coûts individuels.

On se donne N ensembles Ω_α et N applications:

$$V_{\alpha} : X \times U^m \times \Lambda \longrightarrow \Omega_{\alpha} \quad \alpha=1, \dots, N$$

$$(x_{\alpha}, u, \lambda) \longmapsto V_{\alpha}(x_{\alpha}, u, \lambda)$$

avec: $u = (u_1, \dots, u_m)$

$\Lambda = \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$ est l'ensemble des affectations admissibles. Pour chaque joueur J_{α} , le vecteur des paramètres caractéristiques x_{α} étant fixé, on notera plus simplement $V_{\alpha}(u, \lambda)$ le coût correspondant au m-uple u et à l'affectation λ . De plus, on considère un jeu symétrique, c'est-à-dire tel que les coûts V_{α} sont indépendants de toute permutation portant sur les m-uples (u_1, \dots, u_m) et $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$.

4) Coalitions.

a) Commandes admissibles pour une coalition.

Elles sont définies par:

$$U_k(C_k) = U$$

$$U_{\beta}(C_k) = \{\} \quad \forall \beta \in B - \{k\}$$

La classe C_k ne peut agir que sur la $k^{\text{ième}}$ composante du m-uple (u_1, \dots, u_m) .

b) Coût d'une coalition.

On se donne m ensembles Ω^k et m applications:

$$W^k : X^{\sigma} \times U^m \times \Lambda \longrightarrow \Omega^k$$

$$(X_k, u, \lambda) \longmapsto W^k(X_k, u, \lambda)$$

avec: $X_k = (x_{\alpha})_{J_{\alpha} \in C_k}$ et $\sigma = \text{card. } C_k$

Comme précédemment, les vecteurs x_{α} étant fixés, on notera plus simplement: $W^k(u, \lambda)$ le coût de la coalition C_k .

5) La donnée de l'ensemble des affectations admissibles, des relations de préférence $(\underline{<})_{\alpha}$, $\alpha=1, \dots, N$, $(\underline{<})^k$, $k=1, \dots, m$, et des relations de comparaison \mathcal{C}_{α} , $\alpha=1, \dots, N$ et \mathcal{C}^k , $k=1, \dots, m$, termine la définition du jeu.

Exemple 1: Analyse typologique multicritères.

L'ensemble de référence est constitué de N éléments, décrits par le vecteur de leurs indices de qualité relativement à p critères. On a ainsi:

$$\forall J_\alpha \in \mathcal{J} \quad x_\alpha \in \mathbb{R}^p$$

Soit $U = \mathbb{R}^p$

$$\Lambda_\alpha = \{\lambda_\alpha; \lambda_\alpha^k \in \{0,1\}, k \in \{1, \dots, m\}, \sum_{k=1}^m \lambda_\alpha^k = 1\} \quad \forall \alpha \in A$$

Les coûts individuels sont définis par:

$$\Omega_\alpha = \mathbb{R}^N \quad \alpha=1, \dots, N$$

$$V_\alpha: U^m \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$(u, \lambda) \longmapsto (f_1(u, \lambda_1), \dots, f_N(u, \lambda_N))$$

avec: $f_\alpha(u, \lambda_\alpha) = \sum_{k=1}^m \lambda_\alpha^k \|x_\alpha - u_k\|^2$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^p .

Le coût d'une coalition est défini par:

$$W^k: U^m \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, \lambda) \longmapsto \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha^k \|x_\alpha - u_k\|^2$$

On définit par ailleurs les relations de préférence par:

$$(\underline{<})_1 = (\underline{<})_2 = \dots = (\underline{<})_N = (\underline{<}) \quad \text{et:}$$

$$\left. \begin{array}{l} v = (f_1, \dots, f_N) \in \mathbb{R}^N \\ v' = (f'_1, \dots, f'_N) \in \mathbb{R}^N \\ v (\underline{<}) v' \end{array} \right\} \implies \sum_{\alpha=1}^N f_\alpha \leq \sum_{\alpha=1}^N f'_\alpha$$

Par ailleurs, $(\underline{<})^1 = \dots = (\underline{<})^m = \underline{<}$, relation d'ordre total dans \mathbb{R} .

Définissons à présent les relations de comparaison:

$$\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda \quad \lambda \underset{\alpha}{\mathcal{C}} \lambda' \quad \alpha=1, \dots, N \quad \text{et}$$

$$\forall u_k, w_k \in U \quad u_k \underset{k}{\mathcal{C}} w_k \quad k=1, \dots, m$$

Dans ces conditions, à toute partition λ est associée une solution $\bar{\mathcal{C}}$ -optimale unique du jeu inférieur: $u^*(\lambda) = (u_1^*(\lambda), \dots, u_m^*(\lambda))$ telle que:

$$u_k^*(\lambda) = \frac{\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^k x_{\alpha}}{\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^k} \quad k=1, \dots, m$$

avec: $\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^k \neq 0$ faute de quoi la classe C_k serait vide.

Par ailleurs, une partition λ^* \underline{C} -optimale est une solution du jeu supérieur telle que, $\forall \lambda \in \Lambda$:

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^m \lambda_{\alpha}^{*k} \|x_{\alpha} - u_k^*(\lambda^*)\|^2 \leq \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^m \lambda_{\alpha}^k \|x_{\alpha} - u_k^*(\lambda)\|^2$$

Soit I le moment d'inertie des N points à classer, considérés comme un nuage dans R^p . D'après le théorème de König-Huygens, on a:

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad I = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^m \lambda_{\alpha}^k \|x_{\alpha} - u_k^*(\lambda)\|^2 + \sum_{k=1}^m \text{card.} C_k \|u_k^*(\lambda)\|^2$$

Le premier terme du membre de droite est appelé "distance intra-classes" de la partition λ , le second terme est appelé "distance inter-classes". Le théorème de König-Huygens indique que leur somme est constante, quels que soient le nombre de classes et la partition retenus. On voit qu'une partition λ^* solution du jeu supérieur est telle que la distance intra-classes est minimale sur Λ . La distance inter-classes est alors maximale.

Exemple 2: Lissage par modèles locaux /31/.

De façon classique, on modélise le résultat d'un ensemble de mesures:

$\{(x_{\alpha}, y_{\alpha}), \alpha=1, \dots, N\}$ au moyen d'une fonction polynôme:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_q x^q$$

où les coefficients $a_i, i=0, \dots, q$, sont déterminés de façon à minimiser le coût:

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (y_{\alpha} - f(x_{\alpha}))^2$$

Les impératifs de précision et de simplicité de la représentation sont évidemment

antagonistes vis-à-vis de l'ordre du polynôme. De plus, d'éventuelles discontinuités sont mal prises en compte par cette approche. On peut alors avoir recours aux méthodes de classification: l'ensemble de définition $\{x_1, \dots, x_N\}$ est partitionné en m classes C_k , chacune d'elles étant décrite par un modèle local, par exemple une fonction linéaire:

$$g_k(x) = a_k x + b_k$$

Dans ces conditions, la minimisation du coût:

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^m \lambda_{\alpha}^k (y_{\alpha} - g_k(x_{\alpha}))^2$$

où λ_{α}^k est la fonction d'appartenance du point x_{α} à la classe C_k décrite par le modèle $g_k(.)$ s'interprète, de la même façon que dans l'exemple précédent, comme la recherche d'un point de Pareto dans un jeu d'agrégation entre les N joueurs x_{α} , et fournit à la fois la partition de $\{x_1, \dots, x_N\}$ et les modèles de lissage locaux optimaux.

3- INTERPRETATION DU JEU D'AGREGATION.

Soit $\{(J_{\alpha}, x_{\alpha}), \alpha=1, \dots, N\}$ le tableau des données, et soit $\{C_1, \dots, C_m\}$ une partition de l'ensemble $J = \{J_1, \dots, J_N\}$ en m classes. Considérons deux variables aléatoires, X et Y , dont les occurrences appartiennent respectivement à $\{x_1, \dots, x_N\}$ et à $\{C_1, \dots, C_m\}$.

L'entropie d'une variable aléatoire est une mesure de son degré d'indétermination à priori. Notons $P(x_{\alpha})$ la probabilité pour que la variable aléatoire X présente l'occurrence x_{α} ; son entropie est définie par: /15/

$$H(X) = - \sum_{\alpha=1}^N P(x_{\alpha}) \log_a P(x_{\alpha})$$

(l'unité d'entropie est le bit si $a = 2$)

Si toutes les occurrences de X sont équiprobables, $P(x_{\alpha}) = \frac{1}{N}$, $\alpha = 1, \dots, N$, l'entropie de X est maximale et vaut:

$$H(X) = - \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \log_a \frac{1}{N} = \log_a N$$

L'entropie conditionnelle de X sachant Y est définie à partir des probabilités conditionnelles de la façon suivante:

$$H_Y(X) = - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^m P(x_\alpha, C_k) \log_a P(x_\alpha / C_k)$$

où $P(x_\alpha, C_k)$ est la probabilité pour que le couple de variables aléatoires (X, Y) présente l'occurrence (x_α, C_k) et $P(x_\alpha / C_k)$ est la probabilité pour que X présente x_α sachant que Y présente C_k . Si l'on suppose encore toutes les occurrences équiprobables, on a:

$$P(x_\alpha / C_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } J_\alpha \notin C_k \\ \frac{1}{c_k} & \text{si } J_\alpha \in C_k \quad (c_k = \text{card } C_k) \end{cases}$$

$$P(C_k) = \frac{1}{m}$$

d'où l'on obtient, avec: $P(x_\alpha, C_k) = P(x_\alpha / C_k) \cdot P(C_k)$,

$$H_Y(X) = - \sum_{k=1}^m \sum_{\alpha \in C_k} \frac{1}{mc_k} \log_a \frac{1}{c_k} = - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \log_a \frac{1}{c_k}$$

En particulier, pour $m = N$ (partition en N classes), on a:

$$c_k = 1, k=1, \dots, m \implies H_Y(X) = 0$$

Il n'y a pas d'indétermination sur la variable aléatoire X, on dit que l'information apportée par la partition en N classes est maximale.

Au contraire, lorsque $m = 1$ (partition en une classe), on a:

$$c_1 = N \implies H_Y(X) = - \log_a \frac{1}{N} = \log_a N$$

L'indétermination de X est maximale, l'information apportée par la partition en une classe est nulle.

L'information apportée par une variable aléatoire Y relativement à une variable aléatoire X est, par définition:

$$I(X:Y) = H(X) - H_Y(X)$$

C'est une quantité positive ou nulle. On montre sans difficulté que si $\{S_1, \dots, S_M\}$ est une partition de $\{J_1, \dots, J_N\}$ plus fine que $\{C_1, \dots, C_m\}$, l'information apportée

au sujet de X par la variable aléatoire Y_S qui prend ses occurrences dans l'ensemble $\{S_1, \dots, S_M\}$ est supérieure à celle apportée par la variable aléatoire Y /16/.

Ainsi, toute partition en m classes de l'ensemble \mathcal{J} apporte une information sur la variable aléatoire X , et cette information est inférieure à celle apportée par une partition en N classes. Si l'on considère les éléments J_α de l'ensemble de référence \mathcal{J} comme des joueurs, on peut encore dire qu'une partition en m classes pénalise les joueurs dans le sens où chacun d'eux perd sa spécificité et se confond avec son groupe.

La recherche d'une classification optimale vis-à-vis d'un critère d'homogénéité des classes conduit, pour chaque partition, à quantifier ces pénalisations. En d'autres termes, on peut se poser le problème suivant: pour tout joueur J_α , comment approximer au mieux la valeur x_α à partir de la seule information: $J_\alpha \in C_k$? On est ainsi conduit à définir, pour chaque classe, un élément représentatif, ou noyau, pris dans un ensemble donné U , et pour chaque joueur J_α un coût individuel qui associe, à toute classification λ et à tout m -uple de noyaux (u_1, \dots, u_m) une mesure de l'erreur de représentation de x_α .

La modélisation du problème de classification sous la forme d'un jeu d'agrégation en découle immédiatement: chaque joueur se trouve pénalisé lorsqu'il se groupe avec d'autres, du fait d'une certaine perte de spécificité; il supporte alors un coût défini par l'application V_α . Chaque coalition, quant à elle, détermine un noyau optimal vis-à-vis de son critère W^k .

4- EXISTENCE DE SOLUTIONS OPTIMALES.

Nous supposons qu'à toute affectation admissible $\lambda \in \Lambda$, on puisse faire correspondre un m -uple unique $u^*(\lambda)$ solution du jeu inférieur. Si l'on connaît l'application:

$$\begin{aligned} h: \Lambda &\longrightarrow U^m \\ \lambda &\longmapsto u^*(\lambda) = h(\lambda) \end{aligned}$$

le jeu d'agrégation se réduit au jeu du niveau supérieur, défini par:

$(\Lambda_1, \dots, \Lambda_N, R_1, \dots, R_N, (\leq)_1, \dots, (\leq)_N, \mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_N)$, où R_α , $\alpha=1, \dots, N$ sont les applications:

$$R_\alpha: \Lambda \longrightarrow \Omega_\alpha$$

$$\lambda \longmapsto R_\alpha(\lambda) = v_\alpha(u_1(\lambda), \dots, u_m(\lambda), \lambda)$$

Nous considérons l'ensemble des affectations admissibles Λ défini par:

$$\Lambda_\alpha = \{\lambda_\alpha; \lambda_\alpha^k \in [0, 1], k=1, \dots, m, \sum_{k=1}^m \lambda_\alpha^k = 1\} \quad \alpha=1, \dots, N$$

Une partition est un point du profil de $\Lambda, \bar{\Lambda}$; toute solution de ce type sera une solution en stratégies pures. Une sectorisation est un point de Λ . Si c'est un point intérieur, on dira que c'est une solution en stratégies mixtes.

Pour le jeu supérieur, on envisage deux concepts de solution: jeu non coopératif (point de Nash) et jeu coopératif (point de Pareto).

4-1. Jeu non coopératif.

Le concept de solution envisagé est défini par:

- . $\Omega_\alpha = R$, $\alpha=1, \dots, N$
- . $(\leq)_\alpha = \leq$, $\alpha=1, \dots, N$, où \leq est la relation d'ordre total dans R
- . $\lambda \mathbb{C}_\alpha \lambda' \implies \lambda_\beta = \lambda'_\beta$, $\forall \beta \neq \alpha$, $\alpha=1, \dots, N$

Définition. Le N-uple $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*)$ est Nash-optimal si:

- 1) Il est admissible: $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*) \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$
- 2) Pour tout N-uple admissible de la forme: $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{\alpha-1}^*, \lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+1}^*, \dots, \lambda_N^*)$ on a:

$$R_\alpha(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{\alpha-1}^*, \lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+1}^*, \dots, \lambda_N^*) \leq R_\alpha(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{\alpha-1}^*, \lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+1}^*, \dots, \lambda_N^*)$$

On voit qu'une solution Nash-optimale est telle que toute modification unilatérale des décisions d'affectation d'un joueur unique à l'équilibre ne peut que lui être défavorable /30/.

Soit ϕ une fonction multivoque définie de la façon suivante:

$$\phi: \Lambda \longrightarrow \Lambda$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \longmapsto (A_1, \dots, A_N) = \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

où les ensembles A_α , $\alpha=1, \dots, N$, sont tels que:

$$A_\alpha = \{ \mu_\alpha ; \mu_\alpha \in \Lambda_\alpha, R_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \mu_\alpha, \lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_N) \leq R_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_N), \\ \forall \lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha \}$$

On a alors le théorème d'existence suivant /17/:

Théorème 4-1. Si les ensembles Λ_α , $\alpha=1, \dots, N$, sont convexes et compacts, si les applications R_α , $\alpha=1, \dots, N$, sont continues et telles que, pour tout N-uple λ les ensembles A_α , $\alpha=1, \dots, N$, soient convexes, alors le jeu possède un point de Nash.

Démonstration. L'image $\phi(\lambda)$ d'un N-uple λ est un ensemble convexe, non vide.

Ceci découle de l'hypothèse concernant les ensembles A_α ainsi que des conditions de compacité et de continuité imposées aux ensembles Λ_α et aux applications R_α .

ϕ est une application multivoque qui applique Λ , convexe, compact et non vide,

dans lui même. Comme elle est semi-continue supérieurement, on conclut, en

appliquant le théorème de Kakutani /18/ à l'existence d'un point fixe: $\lambda^* \in \phi(\lambda^*)$.

Par définition des ensembles A_α , ce point fixe est un point de Nash.

4-2. Jeu coopératif.

Le concept de solution envisagé est défini par:

. $\Omega_\alpha = R^N$, $\alpha=1, \dots, N$

. $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\lambda \mathbb{C}_\alpha \lambda'$, $\alpha=1, \dots, N$

. $\forall v = (v_1, \dots, v_N) \in R^N$, $\forall v' = (v'_1, \dots, v'_N) \in R^N$

$$v (\leq)_\alpha v' \iff \begin{cases} v_i = v'_i & \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ \exists i \text{ tel que } v_i < v'_i \end{cases} \quad \text{ou} \quad \alpha=1, \dots, N$$

Définition. Le N-uple $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*)$ est Pareto-optimal si:

1) Il est admissible: $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*) \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$

2) $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$, $\forall \alpha \in \{1, \dots, N\}$

$$R_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \leq R_\alpha(\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*) \implies R_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = R_\alpha(\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*)$$

En prenant pour référence les coûts Pareto-optimaux $R_\alpha(\lambda^*)$, on voit que les N

joueurs ne peuvent espérer réduire l'un quelconque de leurs coûts en choisissant un N-uple différent de λ^* .

On peut remarquer qu'un point de Pareto λ^* est solution des N problèmes d'optimisation suivants:

$$\text{Problème n}^\circ \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\lambda \in \Lambda} R_\alpha(\lambda) \quad \text{sous les contraintes:} \\ R_\beta(\lambda) \leq R_\beta(\lambda^*) \quad \forall \beta \neq \alpha \end{array} \right.$$

Une telle caractérisation des points de Pareto nous permet en fait de nous ramener à la résolution d'un seul problème d'optimisation, grâce à la condition suffisante suivante:

Théorème 4-2. S'il existe des scalaires positifs p_α , $\alpha=1, \dots, N$, tels que:

$$\sum_{\alpha=1}^N p_\alpha R_\alpha(\lambda^*) \leq \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha R_\alpha(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

alors λ^* est un point de Pareto.

Démonstration. Soit λ^* un tel point, et soit $\bar{\lambda} \in \Lambda$ tel que:

$$R_\beta(\bar{\lambda}) \leq R_\beta(\lambda^*) \quad \forall \beta \neq \alpha$$

Puisque p_α est strictement positif, on a:

$$R_\alpha(\lambda^*) \leq R_\alpha(\bar{\lambda}) + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{p_\beta}{p_\alpha} (R_\beta(\bar{\lambda}) - R_\beta(\lambda^*))$$

donc aussi: $R_\alpha(\lambda^*) \leq R_\alpha(\bar{\lambda})$, ce qui prouve que λ^* est solution du problème n° α .

Comme α est quelconque, il en résulte que λ^* est un point de Pareto.

Ce théorème conduit à la recherche des points de Pareto au moyen d'un processus de scalarisation /19/. Il montre qu'un point de Pareto est un équilibre coopératif: en effet, les N joueurs se sont mis d'accord sur le choix d'un critère commun, pondération de leurs différents critères. Les coefficients p_α peuvent s'interpréter comme les poids des différents joueurs au sein de l'équipe ainsi formée.

Cette condition suffisante nous permet de conclure aisément à l'existence

de points de Pareto dans un jeu d'agrégation. En effet, pour tout N-uple $(p_1, \dots, p_N) \in R_+^N$, la fonction numérique: $\sum_{\alpha=1}^N p_\alpha R_\alpha(\lambda)$ possède un minimum dans les deux cas qui nous intéressent:

- 1) Λ est un ensemble fini
- 2) Λ est un ensemble compact et les applications R_α sont continues.

5- SOLUTIONS EN STRATEGIES PURES.

On s'intéresse, dans cette partie, aux propriétés des sectorisations optimales. En particulier, on peut se poser la question suivante: dans quelles conditions, les ensembles Λ_j , $j=1, \dots, N$ étant supposés convexes, la solution est-elle un point extrémal? En d'autres termes, dans quels cas les joueurs sont-ils amenés à utiliser des stratégies pures?

De façon à envisager aussi bien des recouvrements que des partitions, nous généraliserons légèrement la définition des ensembles admissibles Λ_j , $j=1, \dots, N$:

$$\Lambda_j = \{ \lambda_j; \lambda_j^k \in [0, \beta_j], k=1, \dots, m, \sum_{k=1}^m \lambda_j^k = \eta_j \}$$

avec: $\eta_j \in]0, m\beta_j]$ $j=1, \dots, N$

On supposera que les applications R_j , $j=1, \dots, N$, sont continues.

On dira qu'un joueur J_j s'affecte totalement à une classe C_k si l'on a: $\lambda_j^k = \beta_j$. On dira au contraire qu'il y a affectation partielle lorsque: $\lambda_j^k \in]0, \beta_j[$.

5-1. Sectorisation Nash-optimale.

Théorème 5-1. Sous les hypothèses précédentes, et si pour tout joueur J_j l'application R_j est concave par rapport à λ_j alors, s'il existe un N-uple Nash-optimal $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*)$, soit l'une au plus des affectations λ_j^{*k} est partielle ($k=1, \dots, m$), soit il existe un sous-ensemble de Λ_j sur lequel R_j est constante.

Démonstration. Posons: $\alpha_j = E(\frac{\eta_j}{\beta_j})$, $\gamma_j = \eta_j - \alpha_j \beta_j \in [0, \beta_j[$

Soit $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*)$ un point de Nash. Le théorème que nous nous proposons de montrer affirme:

- (1) $\forall j \in \{1, \dots, N\}$ λ_j^* possède: . q_j composantes égales à β_j
 . une composante égale à γ_j
 . $m - (q_j + 1)$ composantes nulles

a) Le sous-ensemble des vecteurs de Λ_j possédant la propriété définie par (1) n'est pas convexe. En effet, soient λ_j et λ'_j deux vecteurs de ce sous-ensemble.

- $\forall \mu \in [0, 1]$ $\mu\lambda_j$ possède: . q_j composantes égales à $\mu\beta_j$
 . une composante égale à $\mu\gamma_j$
 . $m - (q_j + 1)$ composantes nulles

et on vérifie immédiatement que le vecteur $\mu\lambda_j + (1 - \mu)\lambda'_j$ ne présente la propriété

(1) que si l'on a: $\lambda_j = \lambda'_j$ ou $\mu \in \{0, 1\}$.

b) Soit $\tilde{\lambda}_j$ un élément quelconque de Λ_j . On définit le sous-ensemble $L(\tilde{\lambda}_j)$ de la façon suivante:

$$(2) \quad L(\tilde{\lambda}_j) = \{\lambda_j; \lambda_j \in \Lambda_j, \lambda_j^k = \tilde{\lambda}_j^k \quad \forall k \in K_1, \lambda_j^k \in]0, \beta_j[\quad \forall k \in K_2\}$$

avec:

K_1 : ensemble des indices des classes tels que $\tilde{\lambda}_j^k \in \{0, \beta_j\}$

K_2 : ensemble des indices des classes tels que $\tilde{\lambda}_j^k \in]0, \beta_j[$

Remarque: si $\text{card } K_2 \leq 1$ on a $\text{card } L(\tilde{\lambda}_j) = \text{card } K_2$

si $\text{card } K_2 > 1$, $L(\tilde{\lambda}_j)$ est convexe

Ceci découle directement de la définition des ensembles admissibles Λ_j . On a,

en effet: $\sum_{k \in K_2} \lambda_j^k = \eta_j - q'_j \beta_j$, où q'_j est un entier naturel inférieur ou égal

à q_j .

c) Supposons $\text{card } K_2 > 1$, et soit $\lambda_j \in L(\tilde{\lambda}_j)$. On a:

(3) $\forall \lambda_j \in L(\tilde{\lambda}_j) \quad \exists (\lambda'_j, \theta) \in L(\tilde{\lambda}_j) \times [0, 1]$ tel que:

$$\tilde{\lambda}_j = \theta\lambda_j + (1 - \theta)\lambda'_j$$

Ceci est une conséquence du fait que $L(\tilde{\lambda}_j)$ est un convexe ouvert. En effet:

(i) $\forall k \in K_1$ on a $\lambda_j^k = \lambda_j^k$ et il suffit de prendre $\lambda_j^k = \lambda_j^k$, de sorte que:

$$(4) \quad \forall k \in K_1 \quad \lambda_j^k = \theta \lambda_j^k + (1 - \theta) \lambda_j^k \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

(ii) $\forall k \in K_2$ il suffit de montrer que l'on peut trouver θ , $\theta \in [0, 1]$, tel que $\lambda_j^k \in]0, \beta_j[$. On doit avoir:

$$(5) \quad 0 < \lambda_j^k - \theta \lambda_j^k < (1 - \theta) \beta_j$$

d'où:

$$\forall k \in K_2 \quad \theta < \min \left\{ \frac{\lambda_j^k}{\lambda_j^k}, \frac{\beta_j - \lambda_j^k}{\beta_j - \lambda_j^k} \right\} = \bar{\theta}_k$$

On en déduit:

$$(6) \quad \theta \in T, \quad T = \{ \theta; \theta < \min_{k \in K_2} \bar{\theta}_k \}$$

et, finalement, l'existence d'un θ admissible, c'est-à-dire appartenant à l'ensemble $[0, 1] \cap T$. Cette intersection est, en effet, non vide, puisque:

$$\forall k \in K_2 \quad \lambda_j^k, \lambda_j^k \in]0, \beta_j[$$

d) Soit λ^* un point de Nash et supposons que l'on ait, pour un joueur J_j , plus d'une affectation partielle. Dans ces conditions, on a pour ce joueur, $\text{card } K_2 > 1$ et, d'après (3):

$$(7) \quad \forall \lambda_j \in L(\lambda_j^*) \quad \exists (\lambda_j', \theta) \in L(\lambda_j^*) \times [0, 1] \text{ tel que:}$$

$$\lambda_j^* = \theta \lambda_j + (1 - \theta) \lambda_j'$$

Le N-uple $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*)$ étant Nash-optimal, on a:

$$(8) \quad \forall \lambda_j \in L(\lambda_j^*) \quad R_j(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j^*, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_N^*) \leq R_j(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_N^*)$$

et, par suite:

$$(9) \quad \forall \theta \in [0, 1], \quad \forall \lambda_j, \lambda_j' \in L(\lambda_j^*)$$

$$R_j(\lambda^*) \leq \theta R_j(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_N^*) + (1 - \theta) R_j(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j', \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_N^*)$$

Or, d'après (7) et l'hypothèse de concavité de R_j , on a:

(10) $\forall \lambda_j \in L(\lambda_j^*), \forall \lambda_j' \in L(\lambda_j^*)$ vérifiant (7):

$$R_j(\lambda_j^*) \geq \theta R_j(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_N^*) + (1-\theta) R_j(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j', \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_N^*)$$

Soit $D(\lambda_j, \lambda_j^*)$ la droite passant par les points λ_j et $\lambda_j^* \in L(\lambda_j^*)$. D'après (9) et (10), le coût R_j reste constant quel que soit $\bar{\lambda}_j \in L(\lambda_j^*) \cap D(\lambda_j, \lambda_j^*)$, $\forall \lambda_j \in L(\lambda_j^*)$.

Compte-tenu de la convexité de $L(\lambda_j^*)$, on en déduit:

- . soit le coût R_j est constant sur $L(\lambda_j^*)$
- . soit il y a contradiction, et $\text{card } K_2$ ne peut être supérieur à un.

Conséquence. Sous les hypothèses du théorème précédent, et s'il n'existe pas de sous-ensemble de Λ_j sur lequel R_j soit constant, $j=1, \dots, N$, alors, lorsque η_j est multiple de β_j , $j=1, \dots, N$, toute sectorisation Nash-optimale est un recouvrement d'ordre égal à: $\max_j q_j - 1$.

Démonstration. Puisque η_j est multiple de β_j , cela implique que tout joueur jouant une affectation partielle en jouerait au moins deux, ce qui est en contradiction avec le résultat précédent.

En particulier, si $\eta_j = \beta_j = 1$, $j=1, \dots, N$, toute sectorisation Nash-optimale est une partition Nash-optimale.

5-2. Sectorisation Pareto-optimale.

Utilisant le principe de scalarisation, on cherchera un point de Pareto au moyen du problème d'optimisation suivant:

$$\min_{\lambda \in \Lambda} R_o(\lambda) = \sum_{j=1}^N p_j R_j(\lambda)$$

Théorème 5-2. Soit λ^* une solution du problème. Si l'application R_o est concave par rapport à λ_j , on a:

$$(11) \quad \text{card } K_2 > 1 \implies R_o(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_N^*) = \text{constante} \quad \forall \lambda_j \in L(\lambda_j^*)$$

Démonstration. Comme précédemment, on a:

$$\text{card } K_2 > 1 \text{ pour le joueur } J_j \implies \forall \lambda_j \in L(\lambda_j^*) \quad \exists (\lambda_j', \theta) \in L(\lambda_j) \times [0, 1] \text{ tel que:}$$

$$\lambda_j^* = \theta \lambda_j + (1-\theta) \lambda_j'$$

D'après l'optimalité de λ^* , on a:

$$(12) \quad R_0(\lambda^*) \leq \theta R_0(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_N^*) + (1-\theta) R_0(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j', \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_N^*)$$

Par ailleurs, la concavité de R_0 par rapport à λ_j implique:

$$(13) \quad R_0(\lambda^*) \geq \theta R_0(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j, \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_N^*) + (1-\theta) R_0(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{j-1}^*, \lambda_j', \lambda_{j+1}^*, \dots, \lambda_N^*)$$

d'où le résultat annoncé.

On en déduit, comme précédemment:

- 1- Lorsque R_0 est concave par rapport à tous les λ_j , $j=1, \dots, N$, l'équilibre trouvé est tel que, dans le cas général, il existe au plus une affectation partielle pour chaque joueur.
- 2- Lorsque η_j est multiple de β_j , $j=1, \dots, N$, toute sectorisation Pareto-optimale ainsi trouvée est un recouvrement d'ordre égal à $\max_j q_j - 1$.

6- FORME PARTICULIERE DES COUTS INDIVIDUELS.

Dans de nombreux cas pratiques, les fonctions de coût individuel R_j ont une forme particulière, à partir de laquelle on peut conclure rapidement à l'existence de points d'équilibre en stratégies pures.

Dans ce paragraphe, on étudie le cas où les coûts individuels ont la forme:

$$(14) \quad R_j(\lambda) = \sum_{k=1}^m \lambda_j^k g_j(\lambda^k)$$

Cette forme se rencontre dans de nombreuses applications; c'est le cas par exemple lorsque l'on caractérise une classification donnée à partir de la mesure des inerties intra et inter-classes /20/.

L'étude des solutions en stratégies pures à partir des résultats précédents conduit à définir des conditions de concavité des coûts lorsque ceux-ci ont la forme particulière (14). Nous donnons d'abord dans ce cas une condition suffisante de concavité des coûts individuels, nous montrons ensuite que les résultats peuvent être obtenus à partir d'hypothèses moins fortes.

6-1. Conditions suffisantes de concavité.

Théorème 6-1. Une condition suffisante pour que les applications R_j soient concaves par rapport à λ_j est que les applications g_j soient concaves et décroissantes par rapport à $\lambda_j^k, k=1, \dots, m$.

Démonstration. Soient λ_j et μ_j deux vecteurs de Λ_j , et soient p et q deux réels non négatifs tels que $p + q = 1$. L'ensemble Λ_j étant convexe, $p\lambda_j + q\mu_j$ est admissible, et l'on a:

$$R_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, p\lambda_j + q\mu_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_N) = \sum_{k=1}^m (p\lambda_j^k + q\mu_j^k) g_j(\lambda_1^k, \dots, \lambda_{j-1}^k, p\lambda_j^k + q\mu_j^k, \lambda_{j+1}^k, \dots, \lambda_N^k)$$

Pour simplifier les notations, on écrira de façon évidente:

$$R_j(p\lambda_j + q\mu_j) \text{ et } g_j(p\lambda_j^k + q\mu_j^k)$$

D'après la concavité des applications g_j on a:

$$(15) \quad R_j(p\lambda_j + q\mu_j) \geq \sum_{k=1}^m (p\lambda_j^k + q\mu_j^k) (pg_j(\lambda_j^k) + qg_j(\mu_j^k)) \\ \geq \sum_{k=1}^m (p^2\lambda_j^k g_j(\lambda_j^k) + pq(\lambda_j^k g_j(\mu_j^k) + \mu_j^k g_j(\lambda_j^k)) + q^2\mu_j^k g_j(\mu_j^k))$$

Par ailleurs, la décroissance des applications g_j implique:

$$k=1, \dots, m \quad (\lambda_j^k - \mu_j^k) (g_j(\lambda_j^k) - g_j(\mu_j^k)) \leq 0$$

c'est-à-dire:

$$(16) \quad \sum_{k=1}^m \lambda_j^k g_j(\mu_j^k) + \mu_j^k g_j(\lambda_j^k) \geq \sum_{k=1}^m \lambda_j^k g_j(\lambda_j^k) + \mu_j^k g_j(\mu_j^k)$$

En utilisant (16) pour minorer le deuxième membre de (15) on a:

$$R_j(p\lambda_j + q\mu_j) \geq p(p+q) \sum_{k=1}^m \lambda_j^k g_j(\lambda_j^k) + q(p+q) \sum_{k=1}^m \mu_j^k g_j(\mu_j^k)$$

d'où le résultat, en notant que $p+q = 1$:

$$\forall \lambda_j, \mu_j \in \Lambda_j, \forall p \geq 0, q \geq 0 \text{ tels que } p+q = 1,$$

$$R_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, p\lambda_j + q\mu_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_N) \geq pR_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_N) + \dots \\ \dots + qR_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \mu_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_N)$$

On peut remarquer que la décroissance stricte, ou la concavité stricte des applications g_j suffit à assurer la concavité stricte des coûts individuels R_j par rapport à λ_j . Dans ces conditions, l'application du théorème 5-1 conduit à affirmer que l'une au plus des affectations Nash-optimales de chaque joueur est partielle.

Théorème 6-2. Une condition suffisante pour que l'application:

$$R_0(\lambda) = \sum_{j=1}^N p_j R_j(\lambda) \quad p_j > 0, j=1, \dots, N$$

soit concave par rapport à λ_k est que les applications g_j soient concaves par rapport à λ_k^i , $i=1, \dots, m$, et concaves et décroissantes par rapport à λ_j^i , $j=1, \dots, N$, $i=1, \dots, m$.

Démonstration. D'après le théorème précédent, si g_j est concave et décroissante par rapport à λ_j^i , $i=1, \dots, m$, alors R_j est concave par rapport à λ_j .

D'après la concavité de g_j par rapport à λ_k^i , $i=1, \dots, m$, on a:

$\forall k \neq j, \forall \lambda_k, \mu_k \in \Lambda_k, \forall p \geq 0, q \geq 0$, tels que $p+q = 1$

$$R_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, p\lambda_k + q\mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N) = \sum_{i=1}^m \lambda_j^i g_j(\lambda_1^i, \dots, \lambda_{k-1}^i, p\lambda_k^i + q\mu_k^i, \lambda_{k+1}^i, \dots, \lambda_N^i)$$

et, en utilisant les notations simplifiées:

$$R_j(p\lambda_k + q\mu_k) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_j^i (p g_j(\lambda_k^i) + q g_j(\mu_k^i))$$

c'est-à-dire:

$$R_j(p\lambda_k + q\mu_k) \geq p R_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N) + q R_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N)$$

Ainsi, $\forall j \in \{1, \dots, N\}$, $\forall k \in \{1, \dots, N\}$, R_j est concave par rapport à λ_k . On en déduit que R_0 est concave par rapport à λ_k , $k=1, \dots, N$.

6-2. Applications g_j décroissantes.

Dans le cas où les coûts individuels sont de la forme (14), les conditions suffisantes de concavité données plus haut utilisent une hypothèse de décroissance des applications g_j associée à une hypothèse de concavité. En fait, celle-

ci est inutilement restrictive, et nous allons montrer que la seule hypothèse de décroissance permet d'obtenir un résultat concernant les solutions en stratégies pures. Afin de simplifier l'exposé, nous adopterons comme ensembles d'affectations admissibles les ensembles suivants:

$$j=1, \dots, N \quad \Lambda_j = \{ \lambda_j; \lambda_j^k \in [0,1], \sum_{k=1}^m \lambda_j^k = 1 \}$$

Théorème 6-3. Si les applications $g_j, j=1, \dots, N$, sont décroissantes par rapport à $\lambda_j^k, k=1, \dots, m$, une sectorisation Nash-optimale est une partition.

Démonstration. Avec la notation: $\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_j^k, \dots, \lambda_N^k) = (1_j^k, \lambda_j^k)$ on a, à l'équilibre de Nash:

$$j=1, \dots, N \quad R_j(\lambda^*) = \sum_{k=1}^m \lambda_j^{*k} g_j(1_j^{*k}, \lambda_j^{*k})$$

$$\leq \sum_{k=1}^m \lambda_j^k g_j(1_j^{*k}, \lambda_j^k) \quad \forall \lambda_j \in \Lambda_j$$

En particulier, pour $\lambda_j = e_i$, vecteur tel que $\lambda_j^i = 1$ et $\lambda_j^k = 0 \quad \forall k \neq i$, on obtient:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_j^{*k} g_j(1_j^{*k}, \lambda_j^{*k}) \leq g_j(1_j^{*i}, 1) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

d'où: $\forall p \in P_m, P_m = \{p=(p_1, \dots, p_m); p_i \geq 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1\}$

$$(17) \quad \sum_{k=1}^m \lambda_j^{*k} g_j(1_j^{*k}, \lambda_j^{*k}) \leq \sum_{i=1}^m p_i g_j(1_j^{*i}, 1)$$

Par ailleurs, la décroissance des applications g_j implique:

$$(18) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad g_j(1_j^{*i}, 1) \leq g_j(1_j^{*i}, \lambda_j^{*i})$$

En multipliant les deux membres de (18) par λ_j^{*i} , en faisant la sommation sur $i=1, \dots, m$ et en utilisant le résultat pour minorer (17), on obtient:

$$(19) \quad \forall p \in P_m \quad \sum_{i=1}^m (\lambda_j^{*i} - p_i) g_j(1_j^{*i}, 1) \leq 0$$

Soit T l'ensemble des indices tels que:

$$\forall t \in T \quad g_j(l_j^{*t}, 1) < g_j(l_j^{*i}, 1) \quad \forall i \notin T$$

En utilisant la relation:

$$\forall t \in T \quad \lambda_j^{*t} - p_t = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^m (\lambda_j^{*i} - p_i)$$

on a, à partir de (19): $\forall p \in P_m, \forall t \in T,$

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_j^{*i} - p_i) g_j(l_j^{*i}, 1) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^m (\lambda_j^{*i} - p_i) (g_j(l_j^{*i}, 1) - g_j(l_j^{*t}, 1)) \leq 0$$

On en déduit:

$$(20) \quad \forall i \notin T \quad \lambda_j^{*i} = 0$$

$$(21) \quad R_j(\lambda^*) = \sum_{t \in T} \lambda_j^{*t} g_j(l_j^{*t}, \lambda_j^{*t}) \quad \lambda_j^{*t} \in [0, 1] \quad \sum_{t \in T} \lambda_j^{*t} = 1$$

Compte-tenu de la décroissance des applications g_j on a:

$$(22) \quad R_j(\lambda^*) \geq \sum_{t \in T} \lambda_j^{*t} g_j(l_j^{*t}, 1) = \tau_j$$

$$\text{avec: } \tau_j = g_j(l_j^{*t}, 1) \quad \forall t \in T$$

Finalement, la valeur τ_j de la borne inférieure est atteinte seulement en choisissant l'une des fonctions d'appartenance λ_j^{*t} égale à un, les autres étant nulles.

6-3. Application aux coûts quadratiques.

Dans de nombreuses applications, les données seprésentent sous la forme d'un nuage de points dans l'espace euclidien R^p . On caractérise alors souvent une classe par son inertie vis-à-vis du centre de classe, celui-ci étant le point de R^p par rapport auquel cette inertie est minimale. Dans ce sens, la formulation des coûts individuels est la suivante:

$$V_j: \quad (R^p) \times \Lambda \xrightarrow{m} R$$

$$(u_1, \dots, u_m, \lambda) \longmapsto V_j(u_1, \dots, u_m, \lambda) = \sum_{k=1}^m \lambda_j^k f_j(u_k)$$

avec: $f_j(u_i) = \frac{1}{2} (x_j - u_i)^T H_j (x_j - u_i)$

H_j : matrice symétrique, définie positive.

Chaque coalition adopte un critère d'utilité globale qui est le coût moyen des joueurs qui en font partie, et détermine son noyau, ou centre de classe, par:

$$(23) \quad u_k = \left(\sum_{j=1}^N \lambda_{jH_j}^k \right)^{-1} \sum_{j=1}^N \lambda_{jH_j}^k x_j$$

Si λ_j^k est interprété comme la probabilité pour que le joueur J_j appartienne à la classe C_k , on voit que l'inertie du nuage C_k par rapport à u_k n'est autre que sa variance, lorsque $H_j = I$, $j=1, \dots, N$. A partir de (23), on peut écrire les coûts individuels sous la forme particulière (14):

$$R_j(\lambda) = \sum_{k=1}^m \lambda_j^k g_j(\lambda^k)$$

avec: $g_j(\lambda^k) = (A_j^k)^T (\lambda_{jH_j}^k + B_j^k)^{-1} H_j (\lambda_{jH_j}^k + B_j^k)^{-1} A_j^k$

$$A_j^k = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq j}}^N \lambda_{\alpha H_{\alpha}}^k (x_j - x_{\alpha}) \quad B_j^k = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq j}}^N \lambda_{\alpha H_{\alpha}}^k$$

On peut remarquer que A_j^k et B_j^k ne dépendent que des fonctions d'appartenance des joueurs autres que J_j à la classe C_k . La matrice H_j , $j=1, \dots, N$, étant définie positive, on note:

$$H_j = h_j^T h_j \quad \text{et} \quad \psi_j(\lambda_j^k) = h_j (\lambda_{jH_j}^k + B_j^k)^{-1} A_j^k$$

Un calcul direct fournit alors:

$$\frac{d\psi_j}{d\lambda_j^k}(\lambda_j^k) = -h_j (\lambda_{jH_j}^k + B_j^k)^{-1} h_j^T \psi_j(\lambda_j^k) \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial g_j}{\partial \lambda_j^k}(\lambda^k) &= (\psi_j(\lambda_j^k))^T \frac{d\psi_j}{d\lambda_j^k}(\lambda_j^k) \\ &= -(\psi_j(\lambda_j^k))^T h_j (\lambda_{jH_j}^k + B_j^k)^{-1} h_j^T \psi_j(\lambda_j^k) \end{aligned}$$

On en déduit, puisque $(\lambda_j^k H_j + B_j^k)^{-1}$ est symétrique, définie positive, que g_j est décroissante par rapport à λ_j^k , $k=1, \dots, m$. D'après le théorème 6-3, un équilibre de Nash est une partition dans laquelle chaque joueur joue une affectation totale à la classe qui lui assure le coût minimum. L'unicité de cette classe dépend du tableau des données.

6-4. Les centres de classe: variables d'optimisation.

On considère les coûts individuels de la forme suivante:

$$V_j(u_1, \dots, u_m, \lambda) = \sum_{k=1}^m \lambda_j^k f_{j,k}(u_k) \quad j=1, \dots, N$$

et l'on suppose que chaque coalition adopte un critère d'utilité globale. Les centres de classe, solutions du jeu inférieur, sont alors fournis par la résolution du problème d'optimisation auxiliaire:

$$Q^k(\lambda^k, u_k) = \min_{v \in U} Q^k(\lambda^k, v)$$

de sorte que la recherche d'un point de Pareto pour le jeu supérieur au moyen du processus de scalarisation conduit au problème d'optimisation suivant:

$$(24) \quad \text{minimiser} \quad \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m p_j \lambda_j^i f_{j,i}(u_i)$$

sous les contraintes:

$$\begin{aligned} \lambda_j &\in \Lambda_j & j=1, \dots, N \\ Q^i(\lambda^i, u_i) &\leq Q^i(\lambda^i, v) & \forall v \in U \quad i=1, \dots, m \end{aligned}$$

Supposons à présent que l'on considère la fonction objectif comme une fonction de $N+m$ variables indépendantes: $(\lambda_1, \dots, \lambda_N, u_1, \dots, u_m)$, et que l'on résolve le problème:

$$(25) \quad \text{minimiser} \quad \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m p_j \lambda_j^i f_{j,i}(u_i)$$

sous les contraintes:

$$\begin{aligned} \lambda_j &\in \Lambda_j & j=1, \dots, N \\ u_i &\in U & i=1, \dots, m \end{aligned}$$

Les centres de classe u_i^* ainsi obtenus sont évidemment tels que:

$$i=1, \dots, m \quad \sum_{j=1}^N p_j \lambda_j^{*i} f_j(u_i^*) = \min_{u_i \in U} \sum_{j=1}^N p_j \lambda_j^{*i} f_j(u_i)$$

On en déduit que toute solution du problème (25) est aussi solution du problème (24) lorsque l'on a:

$$Q^i(\lambda^i, u_i) = \sum_{j=1}^N p_j \lambda_j^i f_j(u_i) \quad i=1, \dots, m$$

c'est-à-dire lorsque le critère d'utilité globale de chaque classe est défini comme le coût moyen de ses membres, chacun intervenant dans sa classe avec le même poids p_j que dans l'équipe globale.

Dans ce cas, on a, de plus:

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m p_j \lambda_j^{*i} f_j(u_i^*) \leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m p_j \lambda_j^i f_j(u_i^*)$$

d'où, les affectations λ_j des différents joueurs étant indépendantes:

$$j=1, \dots, N \quad \forall \lambda_j \in \Lambda_j \quad \sum_{i=1}^m (\lambda_j^{*i} - \lambda_j^i) f_j(u_i^*) \leq 0$$

Lorsque $\beta_j = \eta_j = 1$, $j=1, \dots, N$, et s'il existe un indice k unique tel que:

$f_j(u_k^*) < f_j(u_i^*) \quad \forall i \neq k$, on en déduit que toute sectorisation optimale est une partition telle que: $\lambda_j^{*k} = 1$, $\lambda_j^{*i} = 0 \quad \forall i \neq k$.

Dans le cas des coûts quadratiques envisagés au paragraphe précédent, la formulation est telle que les centres de classe peuvent être considérés comme des variables d'optimisation indépendantes, lorsque les joueurs ont les mêmes poids au niveau supérieur et au niveau inférieur. D'après ce qui précède, si pour chaque joueur J_j l'indice k défini par:

$$g_j(1_j^{*k}, 1) < g_j(1_j^{*i}, 0) \quad \forall i \neq k$$

est unique, le résultat est une partition dans laquelle le joueur J_j est affecté totalement à la classe C_k .

7- CONCLUSION.

Les problèmes de classification relevant de l'Analyse des données peuvent être abordés au moyen d'un jeu d'agrégation particulier, que nous avons défini, et dont nous avons donné une interprétation vis-à-vis de l'ensemble de référence constitué par les objets à classer. Deux exemples d'application illustrent cette approche, qui présente sur le plan du calcul les avantages suivants:

a) Elle n'utilise pas la notion de ressemblance des objets pris deux à deux, qui mutile le tableau des données et supprime toute liberté de choix pour l'espace des centres de classe.

b) Elle permet d'éviter la mise en mémoire du tableau $\frac{N(N-1)}{2}$ de ces ressemblances; cela permet le traitement de populations beaucoup plus importantes que par d'autres techniques plus classiques (/13/, /5/, /6/, /20/ à /22/). De plus, elle permet de s'affranchir de l'opération de fermeture transitive, destinée à transformer une relation de ressemblance en relation de similitude, /8/, /23/, qui déforme encore la relation d'origine.

c) Les algorithmes obtenus, dont l'étude fait l'objet du chapitre suivant, ne souffrent pas de l'effet de chaîne, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas tendance à rapprocher deux points éloignés mais liés par une file serrée de points /6/, /24/, /25/.

d) Il n'est pas nécessaire de définir des seuils arbitraires pour la détermination des classes, ni pour l'arrêt du processus (/26/ à /29/).

e) L'espace des centres de classe peut être choisi, indépendamment de l'espace des paramètres, suivant la nature du problème. Le centre d'une classe peut être, par exemple, un modèle de la classe, un sous-espace de l'espace des paramètres (axes factoriels de la classe), un élément représentatif appartenant ou non à l'ensemble des objets à classer.

L'existence des solutions du jeu d'agrégation a été étudiée, et nous avons montré que pour certaines configurations fréquemment rencontrées en pratique, celles-ci correspondent à des stratégies pures et conduisent ainsi à l'obtention de recouvrements, ou de partitions de l'ensemble de référence.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude des algorithmes permettant d'obtenir ces solutions.

- BIBLIOGRAPHIE -

- /1/ H. LERMAN: "Les bases de la classification automatique" Gauthiers-Villars, Paris, 1970.
- /2/ F. HARARY: "A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with a view towards finding its eigenvalues" Jour. Math. Physics, n° 38, 1959.
- /3/ D.V. STEWARD: "Partitionning and tearing systems of equations" SIAM Jour. Numerical Analysis, ser. B, Vol. 2, n° 2, 1965.
- /4/ M. RICHTIN: "Analyse structurale des systèmes complexes en vue d'une commande hiérarchisée" Thèse Doctorat ès Sciences, Univ. Paul Sabatier, Toulouse, 1975.
- /5/ V. DEGOT, J.M. HUALDE: "De l'utilisation de la notion de clique (sous-graphe complet symétrique) en matière de typologie de populations" RAIRO, V-1, Janvier 1975.
- /6/ S.C. JOHNSON: "Hierarchical clustering shemes" Psychometrica, 32, 1967.
- /7/ R.M. CORMACK: "A review of classification" Jour. of the Royal Statistical Society, A, Vol. 134, part 3, 1971.
- /8/ S. TAMURA, S. HIGUCHI, K. TANAKA: "Pattern classification based on fuzzy relations" IEEE Trans. Syst. Man and Cybernet., Vol. SMC-1, Janvier 1971.
- /9/ M. GONDRAN: "Valeurs propres et vecteurs propres en classification hiérarchique" RAIRO Informatique Théorique, Vol. 10, n° 3, Mars 1976.
- /10/ T. DUBOIS: "Méthodes d'évaluation et de gestion dans les systèmes didactiques multimédia" Thèse Univ. Louvain, Mai 1975.
- /11/ H.P. FRIEDMAN, J. RUBIN: "On some invariant criteria for grouping data" Jour. Amer. Statist. Assoc., Vol. 62, Décembre 1967.

- /12/ G.H. BALL, D.J. HALL: "A clustering technique for summarizing multivariate data" Behavioural Science, Vol. 12, n° 2, Mars 1967.
- /13/ E. DIDAY: "Optimisation en classification automatique et reconnaissance des formes" RAIRO, V-3, Novembre 1972.
- /14/ E. DIDAY: "Nouvelles méthodes et nouveaux concepts en classification automatique et en reconnaissance des formes" Thèse Doctorat d'Etat, Univ. Paris 6, 1972.
- /15/ E. ROUBINE: "Introduction à la théorie de la communication" Masson, Paris, 1970.
- /16/ P. BERTIER, J. DONIO: "Programmes de structuration de données" SEMA, Rapport de recherche n° 52, Septembre 1970.
- /17/ S. KARLIN: "Mathematic methods and theory in games, programming and economics" Pergamon Press, 1963.
- /18/ S. KAKUTANI: "A generalization of Brouwer's fixed point theorem" Duke Math. Jour., 8, 1941.
- /19/ N.O. DA CUNHA, E. POLAK: "Constrained minimization under vector valued criteria in finite dimensionnal spaces" Jour. Math. Anal. Appl., Vol. 19, n° 1, 1967.
- /20/ P. BERTIER, J.M. BOUROCHE: "Analyse des données multidimensionnelles" PUF, Paris, 1975.
- /21/ R.R. SOKHAL, P.H.R. SNEATH: "Numerical taxonomy" W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1963.
- /22/ M. ROUX: "Un algorithme pour construire une hiérarchie particulière" Thèse 3^{ème} Cycle, Labo. Statistique mathématique, Univ. Paris 6, 1968.
- /23/ A. KAUFMAN: "Introduction à la théorie des sous-ensembles flous" Masson et Cie, Paris, 1973.

- /24/ C.I. ZAHN: "Graph theoretical methods for detecting and describing gestalt clusters" IEEE Trans. Computers, Vol. C-20, Janvier 1971.
- /25/ M. HUGUES: "Segmentation et typologie" Bordas Management.
- /26/ G.S. SEBESTIEN: " Automatic off-line multivariate data analysis" Proc. Fall Joint Computer Conf., 1966.
- /27/ R.E. BONNER: "On some clustering techniques" IBM Journal of Research and Development, 1964.
- /28/ D.R. HILL: "Mechanized information storage, retrieval and dissemination" Proc. of the FID/IFIP Joint Conference, Rome, 1967.
- /29/ B. ROY: "Algèbre moderne et théorie du graphe", chap. 6, Dunod.
- /30/ J. NASH: "Equilibrium points in n-person games" Proc. Nat. Acad. Science USA, Vol. 36, 1950.
- /31/ M. STAROSWIECKI, Y. TITREN: "Modelling a system by local models with typological methods" 4th Int. Conf. on Systems Science, Wroclaw, Septembre 1977.

CHAPITRE 3

ALGORITHMES DE RECHERCHE D'UN POINT D'EQUILIBRE

1- INTRODUCTION

2- COORDINATION PAR PREDICTION DES INTERACTIONS

2-1. Algorithme itératif

2-1.1 Jeu d'agrégation à affectation totale

2-1.2 Algorithme à pas fractionnaire

2-2. Introduction d'une fonction d'écart

2-2.1 Première décomposition

2-2.2 Deuxième décomposition

3- COORDINATION PAR ACTION SUR LES CRITERES INDIVIDUELS

3-1. Recherche d'un point de Nash

3-2. Recherche d'un point de Pareto

4- DEFINITION D'UNE PARTIE FICTIVE CONTINUE

4-1. Recherche d'un point de Nash

4-2. Recherche d'un point de Pareto

5- RECHERCHE D'UN POINT DE PARETO PAR DECOMPOSITION

5-1. Décomposition sur l'ensemble des joueurs

5-1.1 Coordination par prédiction des interactions

5-1.2 Coordination par le critère

5-2. Décomposition sur l'ensemble des classes

5-2.1 Première décomposition

5-2.2 Deuxième décomposition

6- CONCLUSION

CHAPITRE TROIS

ALGORITHMES DE RECHERCHE D'UN POINT D'EQUILIBRE

1 - INTRODUCTION

La notion de jeu d'agrégation a été présentée au chapitre 1 comme un cadre dans lequel peuvent facilement s'inscrire les problèmes de classification. Dans une première étape, nous l'avons formulé comme un jeu à deux niveaux faisant intervenir N agents et m manipulateurs ($m \leq N$). Dans une seconde étape à partir de la notion de fonction caractéristique, nous avons pu le ramener au concept de jeu sur un tableau. Une telle forme conduit à des méthodes de calcul actuellement bien au point en ce qui concerne les jeux à deux joueurs à somme nulle /1/ /2/, qu'on ramène le plus souvent à un problème de programmation linéaire /3/ /4/. Cependant, elle se prête plus difficilement au calcul pratique des points d'équilibre, lorsque le nombre des joueurs et des stratégies est élevé. En effet, si n_α est le nombre des stratégies pures du joueur J_α , le tableau des états possibles du jeu comprend $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_N$ éléments, pour chacun desquels il faut connaître les N coûts des différents joueurs. A partir de la description d'un jeu à deux niveaux, on peut, pour les jeux d'agrégation définis au chapitre précédent, définir la forme normale comme le $2N$ -uple :

$$(\Lambda_1, \dots, \Lambda_N, R_1, \dots, R_N)$$

Un point de Nash est alors défini par :

$$\alpha = 1, \dots, N \quad R_{\alpha}(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{\alpha}^*, \dots, \lambda_N^*) = \min_{\lambda_{\alpha} \in \Lambda_{\alpha}} R(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{\alpha-1}^*, \lambda_{\alpha}, \lambda_{\alpha+1}^*, \dots, \lambda_N^*)$$

et l'on cherchera un point de Pareto par l'intermédiaire du problème d'optimisation suivant :

$$R_0(\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*) = \min_{\lambda_{\alpha} \in \Lambda_{\alpha}} \sum_{\alpha=1}^N R_{\alpha}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad \alpha=1, \dots, N$$

Pour la recherche d'une sectorisation optimale, si les fonctions numériques R_{α} sont de classe C^1 , une condition nécessaire d'équilibre intérieur est donnée par :

$$\text{Point de Nash : } \alpha = 1, \dots, N \quad \frac{\partial R_{\alpha}}{\partial \lambda_{\alpha}}(\lambda^*) = 0$$

$$\text{Point de Pareto : } \alpha = 1, \dots, N \quad \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_{\alpha}}(\lambda^*) = 0$$

On a alors un système de mN équations à mN inconnues, en général non linéaire, et difficile à résoudre. De plus, un tel système de conditions nécessaires ne fournit pas, lorsqu'elles existent, les solutions en stratégies pures, c'est-à-dire correspondant à des affectations nulles ou totales.

Une idée séduisante consiste à utiliser les techniques du calcul hiérarchisé pour la résolution de ce problème de grandes dimensions /5/. Elle répond à la question suivante : peut-on approcher un point d'équilibre par des procédés itératifs utilisant à chaque pas une optimisation à un seul critère, ou vis à vis d'une seule variable?

L.F. Pau /6/ propose une application de ces idées à la résolution d'un jeu dynamique à N joueurs, à somme non nulle. La définition d'une partie fictive /3/, /4/, dans laquelle les joueurs jouent séquentiellement, ou en parallèle est un autre moyen de se ramener, à chaque sous-itération, à une optimisation à un seul critère.

Une telle approche conduit à la décomposition du système global formé

par les N joueurs en N sous-systèmes couplés. Différents modes de coordination peuvent alors être définis, conduisant à l'énoncé de différents principes de coordination /7/. Nous utiliserons principalement la coordination par prédiction des interactions ; la coordination par action sur les critères individuels, proposé par J.L. Lions /8/ est un autre moyen permettant l'approximation des états d'équilibre dans un jeu à N personnes. Nous étudierons aussi un algorithme définissant une partie fictive, dans laquelle chaque joueur utilise une recherche du type gradient.

Enfin, lorsque l'équilibre recherché correspond à un point de Pareto, la description à deux niveaux conduit à une décomposition particulière du système faisant intervenir les m manipulateurs plutôt que les N joueurs.

2 - COORDINATION PAR PREDICTION DES INTERACTIONS

A partir de la forme normale du jeu, on décompose le système global formé par les N joueurs, en N sous-systèmes couplés : chaque joueur constitue un sous-système, et les interactions entre les sous-systèmes sont les commandes des autres joueurs.

Dans le cas de la coordination par prédiction des interactions le problème inférieur, ou problème du joueur J_α est défini par :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Point de Nash :} \\ \text{Point de Pareto :} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \min_{\lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha} R_\alpha(\lambda_\alpha, \mu^\alpha) \\ \min_{\lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha} R_\alpha(\lambda_\alpha, \mu^\alpha) \end{array}$$

où $\mu^\alpha \in \prod_{j \neq \alpha} \Lambda_j$ est un vecteur d'intervention qui représente les interactions entre sous-systèmes. Il est considéré comme une grandeur connue au niveau du sous-problème, ce qui permet de résoudre localement celui-ci et de déterminer une commande locale : $\lambda_\alpha = \varphi_\alpha(\mu^\alpha)$. Ce résultat est envoyé vers le niveau supérieur, le coordonnateur, qui vérifie si l'information précédente était correcte, et la modifie si nécessaire afin que le premier niveau puisse

recommencer sa tâche sur une information plus valable.

Le principe de coordination correspondant s'exprime de la façon suivante :

/9/

Soient $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^N$ les interactions prédites par le coordonnateur, et soient $\varphi_1(\mu^1), \dots, \varphi_N(\mu^N)$ les commandes obtenues après résolution des problèmes locaux. Le point d'équilibre cherché vérifie :

$$\forall j \in \{1, \dots, N\} \quad \mu_\alpha^j = \varphi_\alpha(\mu^\alpha)$$

où μ_α^j est l'interaction due au joueur J_α prédite au joueur J_j .

L'application de ce principe fournit directement le problème supérieur, qui est de trouver les prédictions μ^j telles que :

$$(2) \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \forall \alpha \neq j \quad \varepsilon_\alpha^j = \mu_\alpha^j - \varphi_\alpha(\mu^\alpha) = 0$$

Remarque. La satisfaction des égalités (2) constitue, par définition, une condition nécessaire et suffisante pour que le point ainsi défini soit Nash-optimal. Par contre, elle ne constitue qu'une condition nécessaire de Pareto-optimalité, comme on peut s'en convaincre en considérant l'exemple suivant :

Exemple 1. Soit le jeu de stratégie à deux joueurs, à somme non nulle, défini par le tableau suivant :

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
s_1	(0,5)	(7,9)	(4,4)	(2,0)
s_2	(-1,3)	(2,1)	(1,0)	(0,-1)
s_3	(2,2)	(0,3)	(1,-1)	(3,5)
s_4	(-2,6)	(4,2)	(2,3)	(1,4)

Il existe deux points de Nash en stratégies pures : (s_1, σ_2) et (s_3, σ_4) , vérifiant tous deux l'égalité (2), mais on voit que seul le point (s_1, σ_2) est Pareto-optimal.

Si l'on suppose à présent que le coordonnateur fournit à chaque sous système la même prédiction, le problème du niveau supérieur est de

trouver un vecteur $\mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$ tel que :

$$(3) \quad \varepsilon = \mu - \varphi(\mu) = 0$$

$$\text{avec : } j=1, \dots, N \quad \varepsilon_j = \mu_j - \varphi(\mu^j)$$

$$\mu^j = (\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N)$$

2-1. Algorithme itératif

L'algorithme le plus simple consiste à prédire, à l'étape $t+1$, les interactions effectivement réalisées à l'étape t . On a alors :

$$(4) \quad \mu(t+1) = \varphi(\mu(t))$$

Remarques : 1) Cet algorithme peut être interprété comme définissant une partie fictive dans laquelle, à chaque étape, les joueurs effectuent la parade qui leur semble la meilleure, étant donné ce que les adversaires ont joué au coup précédent.

2) Les conditions de convergence d'un tel algorithme sont bien connues. Cependant, dans le cas où la commande locale est une stratégie pure, elles ne sont pas vérifiées, et l'existence possible de cycles rend son application hasardeuse.

Exemple : L'application de l'algorithme itératif à l'exemple précédent conduit, quel que soit l'état initial, à la convergence vers l'un des deux points :

(s_1, σ_2) ou (s_3, σ_4) lorsque les mouvements des joueurs correspondent à la recherche d'un point de Nash. Par contre, s'ils recherchent un point de Pareto par le maximisation de la somme de leurs gains, les conditions initiales appartenant à l'ensemble :

$$(s_1, \sigma_4), (s_2, \sigma_4), (s_3, \sigma_1), (s_3, \sigma_2), (s_3, \sigma_3), (s_4, \sigma_4)$$

conduisent au cycle :

$$(s_3, \sigma_2) \longrightarrow (s_1, \sigma_4) \longrightarrow (s_3, \sigma_2)$$

Toutes les autres conditions initiales conduisent au point de Pareto (s_1, σ_2) , sauf (s_3, σ_4) qui vérifie la condition nécessaire (2) mais qui n'est pas une

solution Pareto-optimale.

Exemple 2. Soit le jeu suivant :

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
s_1	(2,2)	(3,5)	(1,6)	(2,7)
s_2	(8,9)	(2,3)	(0,4)	(1,5)
s_3	(5,1)	(0,4)	(1,6)	(4,0)
s_4	(2,3)	(1,6)	(4,3)	(0,3)

Il existe un point de Nash en stratégies pures : (s_2, σ_1) et l'on voit que, quel que soit l'état initial différent de celui-ci, l'algorithme itératif conduit à l'un des deux cycles suivants :

- a) $(s_4, \sigma_2) \rightarrow (s_1, \sigma_2) \rightarrow (s_1, \sigma_4) \rightarrow (s_3, \sigma_4) \rightarrow (s_3, \sigma_3) \rightarrow (s_4, \sigma_3) \rightarrow (s_4, \sigma_2)$
 b) $(s_1, \sigma_3) \rightarrow (s_4, \sigma_4) \rightarrow (s_3, \sigma_2) \rightarrow (s_1, \sigma_3)$

2-1-1 Jeu d'agrégation à affectation totale.

Considérons le jeu d'agrégation pour lequel les ensembles de commande admissibles sont définis par :

$$(5) \quad \Lambda_\alpha = \{ \lambda_\alpha; \lambda_\alpha^k \in [0, 1], \sum_{k=1}^m \lambda_\alpha^k = 1 \}$$

et tel que les coûts individuels vérifient les conditions définies au chapitre 2, qui impliquent que toute sectorisation optimale est une partition. Dans ces conditions, à chaque étape de l'algorithme itératif, la commande locale de chaque joueur est une stratégie pure, et l'on obtient une partition. Compte-tenu du nombre fini de combinaisons possibles, l'algorithme itératif converge, ou s'installe sur un cycle.

Soit ψ un point extrémal de l'ensemble convexe $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$, et définissons l'ensemble $D(\psi)$:

$$(6) \quad D(\psi) = \{ \mu; \mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N, \varphi(\mu) = \psi \}$$

A chaque étape de l'algorithme itératif, on a :

$$(7) \quad \mu(t) \in D(\psi) \implies \mu(t+1) = \psi$$

Supposons à présent que l'algorithme ne converge pas, et qu'on obtienne le cycle suivant :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_0 \in D(\psi_1) \\ \psi_1 \in D(\psi_2) \\ \vdots \\ \psi_K \in D(\psi_0) \implies \psi_{K+1} = \psi_0 \end{array} \right.$$

Soit I_j l'ensemble des indices des stratégies pures utilisées par le joueur

J_j le long du cycle, on a : $I_j \subset \{1, 2, \dots, m\}$.

On définit alors le jeu suivant :

$$(9) \quad (\Lambda_1^i, \dots, \Lambda_N^i, R_1, \dots, R_N)$$

où les ensembles de commande admissibles sont tels que :

$$(10) \quad \Lambda_j^i = \{\lambda_j^i; \lambda_j^i \in [0, 1] \forall i \in I_j, \lambda_j^i = 0 \forall i \notin I_j, \sum_{i=1}^m \lambda_j^i = 1\}$$

$\forall j, \Lambda_j^i$ est un convexe fermé, inclus dans Λ_j .

On a, dans ces conditions, le théorème de convergence :

Théorème 2-1

Si, quels que soient les ensembles I_j , le jeu d'agrégation (9) possède un point d'équilibre, si, de plus, un tel point ne peut exister en stratégies mixtes, alors l'algorithme itératif converge.

Démonstration : Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et qu'il existe un cycle, décrit par (8). Dans ces conditions, le jeu (9) possède un point d'équilibre en stratégies mixtes ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Applications : 1) Sous les hypothèses de concavité des coûts des théorèmes 5-1 et 5-2 (chap. 2), si le jeu d'agrégation conduit à une partition, l'algorithme itératif converge.

2) Lorsque les coûts individuels ont la forme particulière

$$R_j(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \sum_{i=1}^m \lambda_j^i \varphi_j(\lambda^i) \text{ donnée au §6 du chapitre 2, et sous les hypothèses}$$

des §6-2 et 6-4, l'algorithme itératif converge.

Pour obtenir ces résultats, il suffit de montrer que pour tout jeu d'agrégation de la forme (9), c'est-à-dire dans lequel chaque joueur ne peut s'affecter qu'à un sous-ensemble de l'ensemble des classes, le point d'équilibre ne peut donner lieu à des stratégies mixtes. Les démonstrations correspondantes sont identiques en tous points à celles données au chapitre 2, en remplaçant à chaque fois l'ensemble Λ_j par Λ'_j qui est, comme lui, convexe et fermé.

2-1-2. Algorithme à pas fractionnaire.

Pour l'algorithme itératif, le coordonnateur ne fournit une nouvelle information qu'après que tous les joueurs aient joué, c'est-à-dire lorsque toutes les commandes locales ont été élaborées. Une variante possible consiste à actualiser l'information fournie par le coordonnateur après que chaque joueur ait joué. On a alors une partie fictive séquentielle, qui se traduit par un algorithme à pas fractionnaire, défini par :

$$(11) \quad \mu_j(t + \frac{j}{N}) = \varphi_j(\mu^j(t + \frac{j-1}{N}))$$

avec :

$$\mu^j(t + \frac{j-1}{N}) = (\mu_1(t + \frac{1}{N}), \dots, \mu_{j-1}(t + \frac{j-1}{N}), \mu_{j+1}(t-1 + \frac{j+1}{N}), \dots, \mu_N(t))$$

Dans ce cas, les conditions initiales sont constituées non seulement par l'état du jeu au début de la partie fictive, mais aussi par la donnée de l'ordre suivant lequel les joueurs ont le trait, c'est-à-dire par leur numérotation.

Pour la recherche d'un point de Nash, cette variante ne résout pas les problèmes de convergence rencontrés par l'algorithme itératif : si, pour l'exemple 1, quel que soit l'état initial et le joueur ayant le trait le premier, l'algorithme (11) converge vers l'un des deux points d'équilibre, il n'en est pas de même pour l'exemple 2, où seules les conditions initiales :

$$\{(s_1, \sigma_1), (s_2, \sigma_1), (s_3, \sigma_1), (s_4, \sigma_1), J_1 \text{ a le trait}\}$$

$$\{(s_2, \sigma_1), (s_2, \sigma_2), (s_2, \sigma_3), (s_2, \sigma_4), J_2 \text{ a le trait}\}$$

conduisent au point de Nash. Toutes les autres conditions initiales mènent, quel que soit le joueur ayant le trait le premier, au cycle :

$$(s_1, \sigma_4) \rightarrow (s_3, \sigma_4) \rightarrow (s_3, \sigma_3) \rightarrow (s_4, \sigma_3) \rightarrow (s_4, \sigma_2) \rightarrow (s_1, \sigma_2) \rightarrow (s_1, \sigma_4)$$

Par contre, lorsque l'on recherche un point de Pareto, cette variante assure la convergence vers un point satisfaisant la condition nécessaire (2).

Démonstration : On cherche un minimum de la fonction :

$$R_o(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \sum_{j=1}^N R_j(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

Soit $(\mu_1(t), \dots, \mu_N(t))$ le vecteur des prédictions du coordonnateur à l'itération t. On écrira : $R_o(t) = R_o(\mu_1(t), \dots, \mu_N(t))$

Le joueur J_1 a le trait, et joue la commande locale :

$$\lambda_1(t + \frac{1}{N}) = \varphi_1(\mu_2(t), \dots, \mu_N(t)) \text{ telle que, par définition du sous problème}$$

n°1, on ait :

$$(12) \quad R_o(t + \frac{1}{N}) = R_o(\lambda_1(t + \frac{1}{N}), \mu_2(t), \dots, \mu_N(t)) = \min_{\lambda_1 \in \Lambda_1} R_o(\lambda_1, \mu_2(t), \dots, \mu_N(t))$$

c'est-à-dire : $R_o(t + \frac{1}{N}) \leq R_o(t)$

La prédiction du coordonnateur à l'étape $t + \frac{1}{N}$ devient, en vertu de (11) :

$$\mu_1(t + \frac{1}{N}) = \lambda_1(t + \frac{1}{N})$$

les autres μ_i restant inchangés. Le joueur J_2 ayant à présent le trait, il résoud son sous problème et définit ainsi $\lambda_2(t + \frac{2}{N})$ tel que :

$$(13) \quad R_o(t + \frac{2}{N}) = R_o(\lambda_1(t + \frac{1}{N}), \lambda_2(t + \frac{2}{N}), \mu_3(t), \dots, \mu_N(t)) \\ = \min_{\lambda_2 \in \Lambda_2} R_o(\lambda_1(t + \frac{1}{N}), \lambda_2, \mu_3(t), \dots, \mu_N(t))$$

de sorte que l'on a : $R_o(t + \frac{2}{N}) \leq R_o(t + \frac{1}{N}) \leq R_o(t)$

En poursuivant ce raisonnement, on obtient finalement :

$$(14) \quad R_o(t+1) \leq R_o(t)$$

et l'égalité ne tient que si aucun joueur n'a modifié sa commande locale par

rapport à celle prédite par le coordonnateur. (Dans le cas où l'application $\varphi_j(\mu^j)$ est multivoque, on décide de garder $\lambda_j = \mu_j$ lorsque l'on a $\mu_j \in \{\varphi_j(\mu^j)\}$). La suite $R_0(t)$ ainsi définie est donc décroissante. Comme elle est bornée inférieurement sur $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$, elle converge.

Exemple : L'application de l'algorithme (11) au jeu de l'exemple 2 conduit, quelle que soit la condition initiale et quel que soit le joueur ayant le trait le premier, à l'un des quatre points suivants, vérifiant la condition nécessaire (2) :

$$(s_2, \sigma_1), (s_1, \sigma_4), (s_3, \sigma_3), (s_4, \sigma_3)$$

Le point de Pareto du jeu est : (s_2, σ_1) .

2-2. Introduction d'une fonction d'écart.

On peut penser résoudre le problème du niveau supérieur en utilisant l'algorithme de Newton. Les interactions prédites à l'étape $t+1$ seraient, dans ces conditions, données par :

$$(15) \quad \mu(t+1) = \mu(t) - k \left[I - \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(\mu(t)) \right]^{-1} (\mu(t) - \varphi(\mu(t)))$$

où k est un coefficient d'itération positif.

Cependant, la dimension de la matrice $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ (quand elle existe !) rend une telle approche impraticable. Dans ce sens, la définition d'une fonction d'écart associée au coordonnateur, et sa minimisation à deux niveaux, permettent de définir des algorithmes de coordination réalisables.

On pose :

$$(16) \quad V(\mu) = \frac{1}{2} \left\| \mu - \varphi(\mu) \right\|^2$$

$\| \cdot \|$ désignant la norme euclidienne dans R^{mN} , et on définit la tâche du coordonnateur comme celle de la minimisation de la fonction d'écart V .

Une approche directe conduit à utiliser un algorithme du gradient pour minimiser cette fonction. On a alors, si $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ existe :

$$(17) \quad \mu(t+1) = \mu(t) - k \left[I - \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(\mu(t)) \right] (\mu(t) - \varphi(\mu(t)))$$

Si cette méthode ne nécessite pas l'inversion de la matrice $\left[I - \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right]$, elle fait néanmoins appel à son calcul à chaque itération. On peut remarquer, par ailleurs, que les prédictions proposées par le coordonnateur étaient, pour l'algorithme itératif, admissibles à chaque étape. Au contraire, pour l'algorithme du gradient, il n'en est rien. En effet, si $\mu(t)$ et $\varphi(\mu(t))$ sont admissibles, rien n'assure que l'on aura la même propriété pour $\mu(t+1)$. En fait, celà n'est pas gênant dans la mesure où, l'algorithme ayant convergé, la solution obtenue sera forcément admissible. En effet, on a :

$$(18) \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^{mN} \quad \varphi(\mu) \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$$

Toutefois, la convergence de l'algorithme coordonnateur peut être améliorée par décomposition de la tâche de coordination.

2-2-1. Première décomposition.

On écrit la fonction d'écart sous la forme :

$$v = \frac{1}{2} \|\mu - \eta\|^2$$

et l'on introduit les contraintes égalité :

$$\eta = \varphi(\mu)$$

Le Lagrangien du problème s'écrit :

$$(19) \quad L = \frac{1}{2} \|\mu - \eta\|^2 + \langle \rho, \eta - \varphi(\mu) \rangle$$

où ρ est le vecteur des paramètres de Lagrange associés aux contraintes, $\langle \dots \rangle$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^{mN} .

A partir de (19) on décompose le problème de la façon suivante :

a) $\mu(t)$ étant donné, le premier niveau résoud le problème vis-à-vis des variables η et ρ . On obtient ainsi :

$$(20) \quad \begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial \rho} = \eta - \varphi(\mu(t)) = 0 & \eta(t) = \varphi(\mu(t)) \\ \frac{\partial L}{\partial \eta} = \eta - \mu(t) + \rho = 0 & \rho(t) = \mu(t) - \varphi(\mu(t)) \end{array} \quad \Longrightarrow$$

b) Il reste à minimiser, au niveau supérieur :

$$(21) \quad L(\mu(t+1), \eta(t), \rho(t)) = \min_{\mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N} \frac{1}{2} \|\mu - \varphi(\mu(t))\|^2 + \langle \mu(t) - \varphi(\mu(t)), \varphi(\mu(t)) - \varphi(\mu) \rangle$$

Théorème de convergence :

Une condition suffisante pour que l'algorithme (21) converge est que l'application φ vérifie :

$$(22) \quad \forall \mu, \mu' \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N \quad \langle \mu - \mu', \varphi(\mu) - \varphi(\mu') \rangle \geq \frac{1}{2} \|\varphi(\mu) - \varphi(\mu')\|^2$$

Démonstration : Posons, pour simplifier les notations, $\mu(t) = \mu$, $\mu(t+1) = \mu'$.

On a, par définition de l'algorithme (21) :

$$(23) \quad \frac{1}{2} \|\mu' - \varphi(\mu)\|^2 + \langle \mu - \varphi(\mu), \varphi(\mu) - \varphi(\mu') \rangle \leq \frac{1}{2} \|\mu - \varphi(\mu)\|^2$$

Par ailleurs, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mu' - \varphi(\mu)\|^2 &= \frac{1}{2} \|\mu' - \varphi(\mu') + \varphi(\mu') - \varphi(\mu)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\mu' - \varphi(\mu')\|^2 + \frac{1}{2} \|\varphi(\mu') - \varphi(\mu)\|^2 + \langle \mu' - \varphi(\mu'), \varphi(\mu') - \varphi(\mu) \rangle \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant dans (23) :

$$(24) \quad \frac{1}{2} \|\mu' - \varphi(\mu')\|^2 - \frac{1}{2} \|\varphi(\mu) - \varphi(\mu')\|^2 + \langle \mu - \mu', \varphi(\mu) - \varphi(\mu') \rangle \leq \frac{1}{2} \|\mu - \varphi(\mu)\|^2$$

et finalement, compte-tenu de l'hypothèse :

$$(25) \quad \|\mu' - \varphi(\mu')\|^2 \leq \|\mu - \varphi(\mu)\|^2$$

c'est-à-dire : $V(t+1) \leq V(t)$, qui implique la convergence.

Caractérisation des points stationnaires :

Soit μ^* un point stationnaire, c'est-à-dire tel que l'algorithme (21) ne lui trouve pas de successeur vérifiant (23). On a : $\forall \mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$

$$(26) \quad \frac{1}{2} \|\mu - \varphi(\mu)\|^2 - \frac{1}{2} \|\varphi(\mu) - \varphi(\mu^*)\|^2 + \langle \mu^* - \mu, \varphi(\mu^*) - \varphi(\mu) \rangle > \frac{1}{2} \|\mu^* - \varphi(\mu^*)\|^2$$

Théorème 2-2

Si $V(\mu)$ est convexe et si φ est continue, alors μ^* est tel que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad V(\mu^*) < \varepsilon \quad \text{c'est-à-dire} \quad V(\mu^*) = 0$$

Démonstration: Supposons que $V(\mu^*)$ ne soit pas nul, et soit μ_0 un point admissible tel que: $V(\mu_0) < V(\mu^*)$ (un tel point existe puisque le jeu admet un état d'équilibre)

Soit: $\mu = p\mu^* + q\mu_0$ avec $p, q \geq 0$ et $p + q = 1$. μ est admissible par la convexité de $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$, et la convexité de V implique:

$$(27) \quad V(\mu) \leq pV(\mu^*) + qV(\mu_0)$$

En reportant ceci dans (26), on obtient:

$$(28) \quad \frac{1}{2} V(\mu^*) < \frac{1}{2} (pV(\mu^*) + qV(\mu_0)) - \frac{1}{2} \|\varphi(\mu) - \varphi(\mu^*)\|^2 + \langle \mu^* - \mu, \varphi(\mu^*) - \varphi(\mu) \rangle$$

$$(29) \quad V(\mu_0) < V(\mu^*) < V(\mu_0) + \frac{2}{q} \langle \mu^* - \mu, \varphi(\mu^*) - \varphi(\mu) \rangle$$

$$V(\mu_0) < V(\mu^*) < V(\mu_0) + 2\|\mu^* - \mu_0\| \cdot \|\varphi(\mu^*) - \varphi(\mu)\|$$

D'après la continuité de φ , on a:

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \delta(\eta) > 0 \quad \text{tel que } \|\mu^* - \mu\| < \delta(\eta) \implies \|\varphi(\mu^*) - \varphi(\mu)\| < \eta$$

d'où:

$$(30) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in]0, 1] \quad \text{tel que } V(\mu_0) < V(\mu^*) < V(\mu_0) + \varepsilon$$

On achève la preuve en prenant dans (30) μ_0 tel que $V(\mu_0) = 0$.

Lorsque les commandes locales $\varphi(\mu)$ peuvent être des stratégies pures, l'hypothèse de continuité du théorème précédent n'est plus vérifiée, et l'ensemble $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$ est décomposé en K sous-ensembles $D(\psi_i)$, où ψ_i est un point extrémal de $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$.

$$D(\psi_i) = \{\mu; \mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N, \varphi(\mu) = \psi_i\} \quad i=1, \dots, K$$

Les intersections du type: $D(\psi_i) \cap D(\psi_j) \cap D(\psi_k) \dots \quad i \neq j \neq k$, définissent les points indifférents vis-à-vis des vecteurs de stratégies pures $\psi_i, \psi_j, \psi_k, \dots$

L'algorithme (21) est alors adapté de la façon suivante:

$$(31) \quad \mu(t) \in \bigcap_{i=1}^{K_t} D(\psi_i)$$

$$L_i(\mu_i(t+1)) = \min_{\mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N} \frac{1}{2} \|\mu - \psi_i\|^2 + \langle \mu(t) - \psi_i, \psi_i - \varphi(\mu) \rangle$$

$$L(\mu(t+1)) = \min_{i=1, \dots, K_t} L_i(\mu_i(t+1))$$

Sous l'hypothèse (22) cet algorithme converge et on a le théorème suivant:

Théorème 2-3

Si $V(\mu)$ est convexe, un point stationnaire est un minimum global.

Démonstration: Soit μ^* un point stationnaire, avec $\mu^* \in D(\psi_1^*)$. On a, d'après (26):

$$(32) \quad \forall \mu \in D(\psi_1^*) \quad V(\mu) \geq V(\mu^*)$$

Supposons que μ^* ne corresponde pas à un minimum global de V , alors il existe un point admissible μ_0 tel que: $V(\mu_0) < V(\mu^*)$.

Soit: $\mu = p\mu^* + q\mu_0$ un point du segment $[\mu_0, \mu^*]$. D'après la convexité de V , on a:

$$(33) \quad V(\mu) \leq pV(\mu^*) + qV(\mu_0) < V(\mu^*) \quad \forall p \in [0, 1[$$

On a alors deux possibilités:

A) $\exists p \in [0, 1[$ tel que $\mu \in D(\psi_1^*)$ c'est-à-dire: $D(\psi_1^*) \cap [\mu_0, \mu^*] \neq \{\}$

On a alors:

$$\mu \in D(\psi_1^*) \implies V(\mu) \geq V(\mu^*) \quad \text{d'après (32)}$$

$$\mu \in [\mu_0, \mu^*] \implies V(\mu) < V(\mu^*) \quad \text{d'après (33)}$$

d'où l'on déduit que, s'il existe μ_0 tel que $V(\mu_0) < V(\mu^*)$, on a forcément:

B) $\forall p \in [0, 1[\quad \mu \notin D(\psi_1^*) \iff D(\psi_1^*) \cap [\mu_0, \mu^*] = \{\mu^*\}$

Cela signifie que μ^* n'est pas un point intérieur de $D(\psi_1^*)$ et, en particulier, qu'il existe un ensemble $D(\psi_2^*)$ tel que:

$$(34) \quad \mu^* \in D(\psi_1^*) \cap D(\psi_2^*)$$

Dans ces conditions, d'après (31) et la stationnarité de μ^* , on a:

$$(35) \quad \forall \mu \in D(\psi_1^*) \cup D(\psi_2^*) \quad V(\mu) \geq V(\mu^*)$$

On envisage, comme plus haut, les deux possibilités:

- Si $[\mu_0, \mu^* [\cap (D(\psi_1^*) \cup D(\psi_2^*)) \neq \{ \}$ on aboutit à une contradiction, d'après (33) et (35).

- On en déduit qu'il existe un ensemble $D(\psi_3^*)$ tel que:

$$\mu^* \in D(\psi_1^*) \cap D(\psi_2^*) \cap D(\psi_3^*)$$

En poursuivant ce raisonnement on voit que s'il existe μ_0 tel que $V(\mu_0) < V(\mu^*)$

on a:

$$(36) \quad \mu^* \in \bigcap_{i=1}^K D(\psi_i)$$

et, d'après la stationnarité de μ^* :

$$(37) \quad \forall \mu \in \bigcup_{i=1}^K D(\psi_i) \quad V(\mu) \geq V(\mu^*) \quad \text{d'où la contradiction, si l'on remarque}$$

$$\text{que: } \bigcup_{i=1}^K D(\psi_i) = \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$$

2-2-2. Deuxième décomposition.

On écrit la fonction d'écart sous la forme:

$$V = \frac{1}{2} \|\mu - \varphi(\eta)\|^2 \quad \text{sous: } \eta = \mu$$

Dans ces conditions, le Lagrangien s'écrit:

$$(38) \quad L = \frac{1}{2} \|\mu - \varphi(\eta)\|^2 + \langle \rho, \eta - \mu \rangle$$

Comme précédemment, $\mu(t)$ étant fixé, on résoud au premier niveau:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \eta - \mu(t) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = \rho + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(\eta) \right] (\varphi(\eta) - \mu(t)) = 0$$

$$\text{d'où: } (39) \quad \eta(t) = \mu(t)$$

$$\rho(t) = - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(\mu(t)) \right] (\varphi(\mu(t)) - \mu(t))$$

On minimise ensuite, au niveau supérieur, par rapport à μ , ce qui donne l'algorithme coordonnateur:

$$(40) \quad L(\mu(t+1), \eta(t), \rho(t)) = \min_{\mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N} \frac{1}{2} \|\mu - \varphi(\mu(t))\|^2 + \langle \varphi(\mu(t)) - \mu(t), [\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(\mu(t))] \mu \rangle$$

Remarque: Cet algorithme peut encore être obtenu à partir d'une méthode générale de décomposition des problèmes d'optimisation due à G. COHEN /15/. On trouvera en annexe 3 un exposé de cette méthode ainsi que les théorèmes de convergence des algorithmes auxquels elle conduit.

3- COORDINATION PAR ACTION SUR LES CRITERES INDIVIDUELS.

La définition d'une partie fictive, dans laquelle les joueurs jouent séquentiellement ou en parallèle, constitue un moyen de se ramener, à chaque sous-itération, à une optimisation à un seul critère. Dans la coordination par prédiction des interactions, les critères des différents joueurs ne sont pas modifiés, et la coordination s'effectue par le biais des informations sur l'état du jeu communiquées à ceux-ci par le coordonnateur. Dans l'approche proposée par J.L. LIONS /8/, on définit une partie fictive dans laquelle la coordination s'effectue au moyen de la modification des critères individuels.

Nous donnons les hypothèses et les algorithmes proposés par J.L. LIONS et nous renvoyons le lecteur à l'annexe 4 pour la démonstration des théorèmes de convergence.

3-1. Recherche d'un point de Nash.

a) Hypothèses:

On suppose les fonctions R_j continues et telles que:

i) $\forall j, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_N) \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_{j-1} \times \Lambda_{j+1} \times \dots \times \Lambda_N$, $R_j(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ est convexe en λ_j et différentiable.

ii) $A(\lambda)$ désignant l'opérateur: $A(\lambda) = (\frac{\partial R_1}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \dots, \frac{\partial R_N}{\partial \lambda_N}(\lambda_1, \dots, \lambda_N))$

on suppose:

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que: } \langle A(\lambda) - A(\lambda'), \lambda - \lambda' \rangle \geq \alpha \|\lambda - \lambda'\|^2 \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$$

b) Algorithme:

1) On donne une condition initiale $(\lambda_1(0), \dots, \lambda_N(0)) \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$

2) $(\lambda_1(t+1), \dots, \lambda_N(t+1))$ est déterminé à partir de $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$ par:

$\lambda_j(t+1)$ est solution du problème P_j :

$$P_j: \min_{\mu_j \in \Lambda_j} \tau_t R_j(\lambda_1(t), \dots, \lambda_{j-1}(t), \mu_j, \lambda_{j+1}(t), \dots, \lambda_N(t)) + \|\mu_j - \lambda_j(t)\|^2$$

c) Théorème de convergence:

Sous les hypothèses précédentes et si, de plus, on a:

$$\forall j, \forall \lambda_j, \mu^j, v^j \quad \left\| \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j}(\lambda_j, \mu^j) - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j}(\lambda_j, v^j) \right\| \leq \sigma \|\mu^j - v^j\|$$

alors, si τ_t est choisi de telle sorte que:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \tau_t = +\infty, \quad 0 < \tau_t < \frac{\alpha}{2\sigma^2(N-1)}$$

il existe un point de Nash unique. Par ailleurs, le problème P_j définit $\lambda_j(t+1)$ de façon unique, et l'on a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)) = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*)$$

3-2. Recherche d'un point de Pareto.

a) Hypothèses:

On note $\Lambda = \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$; Λ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de \mathbb{R}^{mN} , muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit de plus sur \mathbb{R}^{mN} une norme $|\cdot|$ continue correspondant au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et l'on suppose:

i) R_0 est strictement convexe, semi-continue inférieurement sur Λ .

ii) $\Lambda = \bigcap_{i=1}^N K_i$ où K_i est un ensemble convexe fermé de \mathbb{R}^{mN}

iii) $R_0 = \sum_{i=1}^N R_i(\lambda)$, R_i étant une fonctionnelle réelle définie sur K_i , convexe

et semi-continue inférieurement sur K_i . Si K_i n'est pas borné, on suppose:

$$\lim_{\substack{\|\lambda\| \rightarrow \infty \\ \lambda \in K_i}} R_i(\lambda) = +\infty$$

b) Algorithme:

1) On donne une condition initiale $u^0 \in K_N$

2) $u^{t + \frac{i}{N}}$ est déterminé à partir de $u^{t + \frac{i-1}{N}}$ comme l'unique élément de K_i

qui minimise la fonctionnelle:

$$\phi_{t,i}(\lambda) = \frac{1}{2\tau_t} \left| \lambda - u^{t + \frac{i-1}{N}} \right|^2 + R_i(\lambda)$$

où τ_0, τ_1, \dots est une suite de nombres strictement positifs tels que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \max_{0 < t < T} \tau_t \right\} = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_T = +\infty \quad \text{avec} \quad \sigma_T = \sum_{t=0}^T \tau_t$$

A la suite $u^{t + \frac{i}{N}}$ ainsi définie, on associe la suite:

$$w^{T + \frac{i}{N}} = \frac{1}{\sigma_T} \sum_{t=0}^T \tau_t u^{t + \frac{i}{N}} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, N \\ T=0, 1, \dots \end{matrix}$$

c) Théorème de convergence:

Sous les hypothèses précédentes, il existe un élément unique $\lambda^* \in \Lambda$ qui réalise le minimum de R_0 , et l'on a:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} w^{T + \frac{i}{N}} = \lambda^* \quad i=1, \dots, N$$

4- DEFINITION D'UNE PARTIE FICTIVE CONTINUE.

La résolution d'un jeu au moyen d'un système différentiel conduit à définir une partie fictive continue, c'est-à-dire un schéma d'informations parfait et instantané, chaque joueur modifiant, à tout instant, sa riposte, compte-tenu de ce que ses adversaires jouent à cet instant./10 à 12/.

4-1. Recherche d'un point de Nash.

a) Hypothèses.

On suppose les fonctions R_j continues et telles que:

$$(41) \quad \forall j, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_N) \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_{j-1} \times \Lambda_{j+1} \times \dots \times \Lambda_N$$

R_j est convexe en λ_j et différentiable

$A(\lambda)$ désignant l'opérateur: $A(\lambda) = (\frac{\partial R_1}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \dots, \frac{\partial R_N}{\partial \lambda_N}(\lambda_1, \dots, \lambda_N))$, on suppose de plus:

$$(42) \quad \exists \alpha > 0 \quad \langle A(\lambda) - A(\lambda'), \lambda - \lambda' \rangle \geq \alpha \|\lambda - \lambda'\|^2 \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$$

D'autre part, on considère les ensembles Λ_j suivants:

$$(43) \quad \lambda_j \in \Lambda_j \iff \lambda_j^i \in [0, \beta_j] \quad c^T \lambda_j = \alpha_j \quad \forall i, \forall j$$

avec $c^T = (1, 1, \dots, 1)$

Compte-tenu de la convexité de $R_j(\lambda)$ par rapport à λ_j ($\forall \lambda \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$), une condition nécessaire et suffisante d'équilibre de Nash est donnée par:

$$(44) \quad \langle \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j}(\lambda^*), \lambda_j - \lambda_j^* \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda_j \in \Lambda_j$$

b) Système différentiel:

On définit une partie fictive continue au moyen du système différentiel suivant:

$$(45) \quad \forall j \quad \frac{d\lambda_j}{dt} = - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j}(\lambda) + u_j$$

Pour chaque joueur J_j , le régime autonome de l'équation différentielle (45) correspond à un mouvement dans la direction du gradient de sa fonction de coût, alors que sa "variable de commande" u_j , dont le but est de rendre les différentes trajectoires admissibles, est déterminée au moyen de la loi suivante:

$$(46) \quad \|u_j\|^2 = \min_{v_j \in \mathbb{R}^m} \|v_j\|^2$$

sous les contraintes: a) $c^T v_j = c^T \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j}(\lambda)$

$$b) \quad v_j^i \geq \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i}(\lambda) \quad \text{ssi: } \lambda_j^i = 0$$

$$c) \quad v_j^i \leq \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i}(\lambda) \quad \text{ssi: } \lambda_j^i = \beta_j$$

La variable de commande u_j est ainsi calculée de la façon suivante:

Soit $\lambda_j \in \Lambda_j$ un point tel que:

$$\forall k \in K \quad \lambda_j^k = 0$$

$$\forall l \in L \quad \lambda_j^l = \beta_j$$

$$\forall i \notin K \cup L \quad \lambda_j^i \in]0, \beta_j[$$

et soit $K_1 \subset K$ l'ensemble des indices tels que: $u_j^k = \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^k}(\lambda)$; card. $K_1 = p$

$L_1 \subset L$ l'ensemble des indices tels que: $u_j^l = \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^l}(\lambda)$; card. $L_1 = q$

On a alors:

$$(47) \quad \begin{cases} \forall k \in K_1 & u_j^k = \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^k}(\lambda) \\ \forall l \in L_1 & u_j^l = \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^l}(\lambda) \\ \forall i \notin K_1 \cup L_1 & u_j^i = \frac{1}{m-p-q} \sum_{i \notin K_1 \cup L_1} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i}(\lambda) \end{cases}$$

et les ensembles d'indices K_1 et L_1 sont tels que:

$$(48) \quad \begin{cases} \forall k \in K_1 & \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^k}(\lambda) > \frac{1}{m-p-q} \sum_{i \notin K_1 \cup L_1} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i}(\lambda) \\ \forall l \in L_1 & \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^l}(\lambda) < \frac{1}{m-p-q} \sum_{i \notin K_1 \cup L_1} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i}(\lambda) \end{cases}$$

en effet, dans le cas contraire, les contraintes (46-b et c) ne seraient pas saturées.

On peut vérifier par ailleurs qu'une telle loi de commande engendre des trajectoires admissibles.

c) Théorème de convergence.

Soit λ^t une solution du système (45) obtenue à partir d'une condition initiale admissible λ^0 . On a:

$$1- \forall \lambda^0 \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^t = \lambda^*$$

2- λ^* est point de Nash.

Démonstration: En raison de sa longueur, la démonstration du théorème de convergence fait l'objet de l'annexe 5.

4-2. Recherche d'un point de Pareto.

a) Hypothèses.

On suppose la fonction $R_0(\lambda) = \sum_{j=1}^N R_j(\lambda)$ différentiable, et les ensembles Λ_j donnés par (43).

b) Système différentiel.

On définit:

$$(49) \quad \forall j \quad \frac{d\lambda_j}{dt} = - \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j}(\lambda) + u_j$$

où le vecteur de commande u_j est donné au moyen de (46). On voit que ce système définit un algorithme du gradient en présence des contraintes $\lambda_j \in \Lambda_j \quad \forall j$.

c) Théorème de convergence.

Le système (49) converge, quelle que soit la condition initiale, vers un minimum local de R_0 . Si R_0 est convexe, on obtient ainsi le minimum global.

Démonstration: Soit λ_j un point de Λ_j tel que:

$$\forall k \in K_1 \quad \lambda_j^k = 0 \quad u_j^k = \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^k}(\lambda)$$

$$\forall l \in L_1 \quad \lambda_j^l = \beta_j \quad u_j^l = \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^l}(\lambda)$$

$$\forall i \in K_1 \cup L_1 \quad \lambda_j^i \in [0, \beta_j] \quad u_j^i = \frac{1}{m-p-q} \sum_{n \in K_1 \cup L_1} \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^n}(\lambda)$$

On a :

$$\frac{dR_0}{dt}(\lambda) = \sum_{j=1}^N \left\langle \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j}(\lambda), -\frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j}(\lambda) + u_j \right\rangle$$

et :

$$(50) \quad \left\langle \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j}(\lambda), -\frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j}(\lambda) + u_j \right\rangle = \sum_{i \in K_1 \cup L_1} \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^i}(\lambda) \left(\frac{1}{m-p-q} \sum_{n \in K_1 \cup L_1} \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^n}(\lambda) - \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^i}(\lambda) \right)$$

d'où :

$$(51) \quad \left\langle \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j}(\lambda), -\frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j}(\lambda) + u_j \right\rangle = -\frac{1}{m-p-q} \sum_{i=1}^{m-p-q-1} \sum_{n=i+1}^{m-p-q} \left(\frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^i}(\lambda) - \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^n}(\lambda) \right)^2$$

On en déduit : $\frac{dR_0}{dt}(\lambda) \leq 0$ d'où, comme R_0 est bornée inférieurement sur

$\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$, la convergence.

Soit alors $\lambda^* \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$ un point tel que :

$$(52) \quad \forall j \quad \frac{d\lambda_j^*}{dt} = -\frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j}(\lambda^*) + u_j^* = 0$$

et soient K_1^* , L_1^* les ensembles d'indices correspondant respectivement à :

$$u_j^{*k} = \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^k}(\lambda^*), \quad \lambda_j^{*k} = 0 \quad \text{et} \quad u_j^{*1} = \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^1}(\lambda^*), \quad \lambda_j^{*1} = \beta_j$$

On a :

$$(53) \quad \forall i \in K_1^* \cup L_1^* \quad -\frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^i}(\lambda^*) + \frac{1}{m-p-q} \sum_{n \in L_1^* \cup K_1^*} \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^n}(\lambda^*) = 0$$

Ce système linéaire homogène, de déterminant nul, admet la solution :

$$(54) \quad \forall i \in K_1^* \cup L_1^* \quad \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^i}(\lambda^*) = \theta_j$$

et, à partir des relations définissant les contraintes saturées, on a :

$$(55) \quad \begin{cases} \forall k \in K_1^* & \lambda_j^{*k} = 0 & \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^k}(\lambda^*) > \theta_j \\ \forall l \in L_1^* & \lambda_j^{*l} = \beta_j & \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^l}(\lambda^*) < \theta_j \end{cases}$$

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ un point quelconque de $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$. On a :

$$(56) \quad \forall j \quad \left\langle \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j}(\lambda^*), \lambda_j - \lambda_j^* \right\rangle = \sum_{k \in K_1^*} \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^k}(\lambda^*) (\lambda_j^k - \lambda_j^{*k}) + \dots$$

$$\dots + \sum_{l \in L_1^*} \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^l}(\lambda^*) (\lambda_j^l - \lambda_j^{*l}) + \sum_{i \notin K_1^* \cup L_1^*} \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^i}(\lambda^*) (\lambda_j^i - \lambda_j^{*i})$$

Compte-tenu de (54) et de la contrainte égalité, la dernière somme s'écrit :

$$(57) \quad \sum_{i \notin K_1^* \cup L_1^*} \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^i}(\lambda^*) (\lambda_j^i - \lambda_j^{*i}) = -\theta_j \left(\sum_{k \in K_1^*} (\lambda_j^k - \lambda_j^{*k}) + \sum_{l \in L_1^*} (\lambda_j^l - \lambda_j^{*l}) \right)$$

de sorte que (56) devient :

$$(58) \quad \left\langle \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j}(\lambda^*), \lambda_j - \lambda_j^* \right\rangle = \sum_{k \in K_1^*} \left(\frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^k}(\lambda^*) - \theta_j \right) (\lambda_j^k - \lambda_j^{*k}) + \sum_{l \in L_1^*} \left(\frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j^l}(\lambda^*) - \theta_j \right) (\lambda_j^l - \lambda_j^{*l})$$

et, compte-tenu des relations (55), on aboutit à :

$$(59) \quad \forall j, \forall \lambda \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N \quad \left\langle \frac{\partial R_0}{\partial \lambda_j}(\lambda^*), \lambda_j - \lambda_j^* \right\rangle \geq 0$$

qui montre que λ^* est un minimum local de R_0 . Si R_0 est convexe par rapport à λ , (59) montre bien que λ^* est un minimum global de R_0 .

5- RECHERCHE D'UN POINT DE PARETO PAR DECOMPOSITION.

Un point de Pareto étant défini au moyen de la minimisation de la fonction de coût globale: $R_0(\lambda) = \sum_{j=1}^N R_j(\lambda)$, on fait, dans cette partie, la remarque que pour le calcul de cette fonction, la sommation sur l'ensemble des joueurs peut être remplacée par une sommation sur l'ensemble des classes.

On écrira :

$$(60) \quad R_0(\lambda, u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda^i, u_i)$$

où $Q_i(\lambda^i, u_i)$ est la somme des coûts des joueurs appartenent à la classe C_i , de noyau u_i , avec une fonction d'appartenance λ_j^i . On supposera dans ce qui suit, que les centres de classe sont donnés par l'intermédiaire d'une relation:

$$(61) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad u_i = h(\lambda^i)$$

où les λ^i sont tels que $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ soit admissible. Pour les ensembles Λ_j définis par (43) on obtient, par exemple, les contraintes suivantes:

$$(62) \quad \sum_{i=1}^m \lambda^i = \alpha \quad \alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

$$0 \leq \lambda^i \leq \beta \quad \beta^T = (\beta_1, \dots, \beta_m)$$

On peut alors envisager la recherche d'un point de Pareto par décomposition directe de la fonction de coût global de deux manières différentes:

- Chaque sous-problème est celui d'un joueur: $J_j \quad j=1, \dots, N$
- Chaque sous-problème est celui d'une classe: $C_i \quad i=1, \dots, m$

5-1. Décomposition sur l'ensemble des joueurs.

Dans ce type de décomposition, chaque joueur définit un sous-système, les interactions entre sous-systèmes étant les commandes des autres joueurs.

Soit μ^j le vecteur des interactions des autres joueurs sur le joueur J_j . On a:

$$R_0 = \sum_{j=1}^N R_j(\lambda_j, \mu^j) \quad \text{sous les contraintes } \mu_i^j = \lambda_i \quad \forall j, \forall i \neq j.$$

Le Lagrangien du problème s'écrit:

$$(63) \quad L = \sum_{j=1}^N L_j \quad L_j = R_j(\lambda_j, \mu_1^j, \dots, \mu_N^j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \langle \rho_j^k, \mu_k^j - \lambda_k \rangle$$

où les ρ_j^k sont les paramètres de Lagrange associés aux contraintes égalité.

Il prend une forme plus simple si l'on introduit un seul vecteur d'interactions,

commun à tous les joueurs: $\mu_i = \mu_i^j = \mu_i^{j'} \quad \forall j, j' \quad \forall i \neq j, j'$

Les contraintes se réduisent alors à:

$$\mu_i = \lambda_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

et le Lagrangien s'écrit:

$$(64) \quad L = \sum_{j=1}^N L_j \quad L_j = R_j(\lambda_j, \mu_1, \dots, \mu_N) + \langle \rho_j, \mu_j - \lambda_j \rangle$$

5-1-1. Coordination par prédiction des interactions.

A l'étape t , le coordonnateur fixe les interactions $(\mu_1(t), \dots, \mu_N(t))$. La tâche du sous-système J_j le conduit à minimiser par rapport à $\lambda_j \in \Lambda_j$ le Lagrangien L_j donné par (64). Il renvoie alors vers le niveau supérieur les valeurs $\lambda_j(t+1) = \mu_j(t)$ et $\rho_j(t+1)$, à partir desquelles celui-ci calculera les nouvelles interactions $(\mu_j(t+1), \dots, \mu_N(t+1))$, en résolvant le problème:

$$(65) \quad \min_{\mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N} \sum_{j=1}^N R_j(\mu_j(t), \mu^j) + \langle \rho_j(t+1), \mu_j \rangle$$

Cette méthode ne présente ici aucun intérêt, le problème du niveau supérieur étant aussi difficile à résoudre que le problème original.

5-1-2. Coordination par le critère.

On a la décomposition du Lagrangien donnée par (63) et, à l'étape t , le coordonnateur fixe les quantités $\rho_j^k(t)$. Au niveau local, chaque joueur résoud alors le problème:

$$(66) \quad R_j(\lambda_j(t+1), \mu^j(t+1)) + \langle \rho_j(t), \mu^j(t+1) \rangle \leq R_j(\lambda_j, \mu^j) + \langle \rho_j(t), \mu^j \rangle$$

$\forall \lambda_j, \mu^j$ admissibles.

Il reste au niveau supérieur à maximiser le Lagrangien L par rapport à ρ . Cette méthode est inutilisable en pratique; en effet, elle nécessite la mise en mémoire des N vecteurs $(\lambda_j(t+1), \mu^j(t+1))$ de dimension mN .

5-2. Décomposition sur l'ensemble des classes.

Les résultats décevants de la décomposition sur l'ensemble des joueurs conduisent à utiliser la remarque permettant d'écrire le coût global sous la forme (48). On a alors le problème d'optimisation suivant:

$$(67) \quad R_0 = \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda^i, u_i)$$

sous les contraintes:

$$u_i = h(\lambda^i)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda^i = \alpha \quad i=1, \dots, m$$

$$0 \leq \lambda^i \leq \beta$$

5-2-1. Première décomposition.

On pose: $u_i = h(\mu^i)$ et l'on introduit les contraintes supplémentaires:
 $\mu^i = \lambda^i, i=1, \dots, m.$

Le Lagrangien s'écrit alors:

$$(68) \quad L = \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda^i, h(\mu^i)) + \langle \rho_i, \mu^i - \lambda^i \rangle$$

et conduit à l'algorithme suivant:

a) A l'étape t, le coordonnateur fixe $\mu^i(t)$ admissible. Le sous-système n°i résoud alors son problème sans contrainte:

$$(69) \quad \frac{\partial L_i}{\partial \lambda^i} = \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\lambda^i, u_i(t)) - \rho_i = 0 \implies \rho_i(t) = \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i(t), u_i(t))$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \rho_i} = \mu^i(t) - \lambda^i = 0 \implies \lambda^i(t) = \mu^i(t)$$

b) Le niveau supérieur minimise L par rapport aux μ^i pour trouver les $\mu^i(t+1)$.

On a alors:

$$(70) \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i(t), h(\mu^i(t+1))) + \langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i(t), u_i(t)), \mu^i(t+1) \rangle =$$

$$\min_{\mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N} \sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i(t), h(\mu^i)) + \langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i(t), u_i(t)), \mu^i \rangle$$

Théorème de convergence.

Sous les hypothèses suivantes:

i) $\forall \lambda^i, i=1, \dots, m \quad Q_i(\lambda^i, h(\lambda^i)) = \min_{u_i \in U_i} Q_i(\lambda^i, u_i)$

ii) $i=1, \dots, m \quad Q_i(\lambda^i, u_i)$ est concave par rapport à λ^i .

iii) $\forall \eta^i, \mu^i \quad \sum_{i=1}^m \langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\eta^i, v_i) - \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, u_i), \mu^i - \eta^i \rangle \leq 0$

avec: $v_i = h(\eta^i), u_i = h(\mu^i)$

l'algorithme (70) converge vers un minimum global de R_0 .

Démonstration: D'après (70) on a, avec des notations évidentes:

$$(71) \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\mu_t^i, u_i^{t+1}) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu_t^i, u_i^t), \mu_{t+1}^i - \mu_t^i \right\rangle \leq \sum_{i=1}^m Q_i(\mu_t^i, u_i^t)$$

Puisque $u_i^t = h(\mu_t^i)$ minimise $Q_i(\mu_t^i, u_i^t)$ (hypothèse (i)), on a:

$$(72) \quad i=1, \dots, m \quad Q_i(\mu_t^i, u_i^{t+1}) \geq Q_i(\mu_t^i, u_i^t)$$

d'où l'on tire, avec (71):

$$\sum_{i=1}^m Q_i(\mu_t^i, u_i^t) \geq \sum_{i=1}^m Q_i(\mu_t^i, u_i^t) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu_t^i, u_i^t), \mu_{t+1}^i - \mu_t^i \right\rangle$$

et, finalement:

$$(73) \quad \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu_t^i, u_i^t), \mu_{t+1}^i - \mu_t^i \right\rangle \leq 0$$

De même, on a:

$$(74) \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\mu_{t+1}^i, u_i^{t+1}) \leq \sum_{i=1}^m Q_i(\mu_{t+1}^i, u_i^t)$$



D'après l'hypothèse (ii) on peut écrire:

$$(75) \quad i=1, \dots, m \quad Q_i(\mu_{t+1}^i, u_i^t) \leq Q_i(\mu_t^i, u_i^t) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu_t^i, u_i^t), \mu_{t+1}^i - \mu_t^i \right\rangle$$

et, en reportant dans (74):

$$(76) \quad R_0(t+1) \leq R_0(t) + \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu_t^i, u_i^t), \mu_{t+1}^i - \mu_t^i \right\rangle$$

On obtient alors finalement, compte-tenu de (73):

$$(77) \quad R_0(t+1) \leq R_0(t) \quad \text{d'où la convergence.}$$

Soit alors $\bar{\mu}$ un point stationnaire, c'est-à-dire tel que l'algorithme (70) ne lui trouve pas de successeur vérifiant strictement (71). On a alors:

$$(78) \quad \forall \mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$$

$$\sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, u_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i), \mu^i - \bar{\mu}^i \right\rangle \geq \sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i)$$

La concavité de $Q_i(\lambda^i, u_i)$ par rapport à λ^i implique:

$$(79) \quad i=1, \dots, m \quad Q_i(\bar{\mu}^i, u_i) \leq Q_i(\mu^i, u_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, u_i), \bar{\mu}^i - \mu^i \right\rangle$$

et on a alors, avec (78):

$$(80) \quad \forall \mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$$

$$\sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i, u_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, u_i) - \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i), \bar{\mu}^i - \mu^i \right\rangle \geq \sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i)$$

Compte-tenu de l'hypothèse (iii) on en déduit:

$$(81) \quad \forall \mu \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i, u_i) \geq \sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i)$$

qui montre que $\bar{\mu}$ est un minimum global de R_0 .

Théorème de convergence.

Sous les hypothèses suivantes:

i) $Q_i(\lambda^i, u_i)$ est convexe par rapport à λ^i et à u_i

$$ii) \quad \forall \eta^i, \mu^i \quad \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\eta^i, v_i) - \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, w_i), \mu^i - \eta^i \right\rangle \geq 0$$

$$\text{avec: } v_i = h(\eta^i) \quad w_i = h(\mu^i)$$

$$iii) \quad \forall \eta^i, \mu^i \quad \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\mu^i, v_i) - \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\eta^i, w_i), w_i - v_i \right\rangle \geq 0$$

l'algorithme (70) converge vers un minimum global de R_0 .

Démonstration: D'après (70), on a:

$$\sum_{i=1}^m Q_i(\mu_t^i, u_i^{t+1}) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu_t^i, u_i^t), \mu_{t+1}^i - \mu_t^i \right\rangle \leq \sum_{i=1}^m Q_i(\mu_t^i, u_i^t)$$

La convexité de $Q_i(\lambda^i, u_i)$ par rapport à λ^i implique:

$$(82) \quad i=1, \dots, m \quad Q_i(\mu_t^i, u_i^{t+1}) \geq Q_i(\mu_{t+1}^i, u_i^{t+1}) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu_{t+1}^i, u_i^{t+1}), \mu_t^i - \mu_{t+1}^i \right\rangle$$

d'où:

$$(83) \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\mu_{t+1}^i, u_i^{t+1}) \leq \sum_{i=1}^m Q_i(\mu_t^i, u_i^t) - \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu_{t+1}^i, u_i^{t+1}) - \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu_t^i, u_i^t), \mu_t^i - \mu_{t+1}^i \right\rangle$$

La somme apparaissant dans le membre de droite étant positive par l'hypothèse (ii), on en déduit: $R_0(t+1) \leq R_0(t)$ d'où la convergence.

Soit alors $\bar{\mu}$ un point tel que l'algorithme ne lui trouve pas de successeur. On a:

$$(84) \quad \forall \mu \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i, u_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, \bar{u}_i), \mu^i - \bar{\mu}^i \right\rangle \geq \sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i)$$

L'hypothèse de convexité par rapport à u_i implique:

$$(85) \quad i=1, \dots, m \quad Q_i(\mu^i, u_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\mu^i, u_i), \bar{u}_i - u_i \right\rangle \leq Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i)$$

d'où l'on tire:

$$\forall \mu \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i) \leq \sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i, \bar{u}_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\mu^i, u_i), u_i - \bar{u}_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, \bar{u}_i), \mu^i - \bar{\mu}^i \right\rangle$$

et, finalement:

$$(86) \quad \forall \mu \quad \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\mu^i, u_i), u_i - \bar{u}_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, \bar{u}_i), \mu^i - \bar{\mu}^i \right\rangle \leq 0$$

Par ailleurs, on a d'après la convexité par rapport à u_i :

$$(87) \quad i=1, \dots, m \quad Q_i(\mu^i, u_i) \geq Q_i(\mu^i, \bar{u}_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\mu^i, \bar{u}_i), u_i - \bar{u}_i \right\rangle$$

De même, Q_i étant convexe par rapport à λ^i on a:

$$(88) \quad i=1, \dots, m \quad Q_i(\mu^i, \bar{u}_i) \geq Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, \bar{u}_i), \mu^i - \bar{\mu}^i \right\rangle$$

d'où, en sommant (87) et (88),

$$(89) \quad \forall \mu \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i, u_i) \geq \sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\mu^i, \bar{u}_i), u_i - \bar{u}_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, \bar{u}_i), \mu^i - \bar{\mu}^i \right\rangle$$

L'hypothèse (iii) permet de minorer le membre de gauche:

$$(90) \quad \forall \mu \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i, u_i) \geq \sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\bar{\mu}^i, u_i), u_i - \bar{u}_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i), \mu^i - \bar{\mu}^i \right\rangle$$

d'où l'on déduit, avec (86):

$$(91) \quad \forall \mu \quad R_0(\mu) \geq R_0(\bar{\mu})$$

5-2-2. Deuxième décomposition.

On écrit le Lagrangien du problème sous la forme:

$$(92) \quad L = \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda^i, u_i) + \langle \rho_i, u_i - h(\lambda^i) \rangle$$

et l'on propose l'algorithme suivant:

a) A l'étape t, le coordonnateur propose des $\lambda^i(t)$ admissibles. Le niveau inférieur résoud alors le problème:

$$\frac{\partial L_i}{\partial u_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\lambda^i(t), u_i) + \rho_i = 0$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \rho_i} = u_i - h(\lambda^i(t)) = 0$$

et fournit les solutions locales:

$$(93) \quad u_i(t) = h(\lambda^i(t))$$

$$\rho_i(t) = - \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\lambda^i(t), h(\lambda^i(t)))$$

b) Le niveau supérieur minimise L par rapport aux λ^i pour trouver les $\lambda^i(t+1)$.

On a alors:

$$(94) \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda^i(t+1), u_i(t)) + \langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\lambda^i(t), u_i(t)), h(\lambda^i(t+1)) \rangle =$$

$$\min_{\lambda \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N} \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda^i, u_i(t)) + \langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\lambda^i(t), u_i(t)), h(\lambda^i) \rangle$$

Théorème de convergence:

Si l'application h est telle que: $u_i = h(\lambda^i)$ minimise sans contrainte le coût $Q_i(\lambda^i, u_i)$, alors l'algorithme (94) converge vers un minimum local de R_0 .

Démonstration: On a: $\forall i, \forall \lambda^i \quad \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\lambda^i, h(\lambda^i)) = 0$

d'où, à partir de (94):

$$(95) \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda_{t+1}^i, u_i^t) \leq \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda_t^i, u_i^t)$$

On a, par ailleurs,

$$(96) \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda_{t+1}^i, u_i^{t+1}) \leq \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda_{t+1}^i, u_i^t)$$

d'où, avec (95): $R_o(t+1) \leq R_o(t)$

Soit (λ^*, u^*) un point stationnaire, on a:

$$(97) \quad \forall \lambda \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N \quad R_o(\lambda, u^*) \geq R_o(\lambda^*, u^*)$$

Remarque: On retrouve, dans ce cas particulier, l'algorithme des nuées dynamiques

de E. DIDAY /13/, /14/: en effet, à chaque itération, on procède en deux étapes:

- a) A partir d'une sectorisation donnée, l'application h fournit, pour chaque classe, les noyaux.
- b) A partir des noyaux ainsi déterminés, l'algorithme fournit une nouvelle sectorisation.

Théorème de convergence:

Sous les hypothèses suivantes:

i) $Q_i(\lambda^i, u_i)$ est convexe par rapport à λ^i et à u_i .

ii) $\forall \eta^i, \mu^i$ avec: $v_i = h(\eta^i)$, $w_i = h(\mu^i)$ on a:

$$\sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\eta^i, v_i) - \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\mu^i, w_i), v_i - w_i \right\rangle \leq 0$$

iii) $\sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\eta^i, w_i) - \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, v_i), \eta^i - \mu^i \right\rangle \leq 0$

l'algorithme (94) converge vers un minimum global de R_o .

Démonstration: D'après (94) on a:

$$(98) \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda_{t+1}^i, u_i^t) - \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\lambda_t^i, u_i^t), u_i^t - u_i^{t+1} \right\rangle \leq \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda_t^i, u_i^t)$$

la convexité de $Q_i(\lambda^i, u_i)$ par rapport à u_i implique:

$$(99) \quad i=1, \dots, m \quad Q_i(\lambda_{t+1}^i, u_i^t) \geq Q_i(\lambda_{t+1}^i, u_i^{t+1}) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\lambda_{t+1}^i, u_i^{t+1}), u_i^t - u_i^{t+1} \right\rangle$$

d'où, en reportant dans (98):

$$(100) \quad R_o(t) \geq R_o(t+1) + \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\lambda_{t+1}^i, u_i^{t+1}) - \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\lambda_t^i, u_i^t), u_i^t - u_i^{t+1} \right\rangle$$

Compte-tenu de l'hypothèse (ii) la somme apparaissant dans le membre de droite est positive, on en déduit la convergence de l'algorithme.

Soit alors $\bar{\mu}$ un point tel que l'algorithme ne lui trouve pas de successeur. On a:

$$(101) \quad \forall \mu \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i, \bar{u}_i) \geq \sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i), \bar{u}_i - u_i \right\rangle$$

D'après la convexité de $Q_i(\lambda^i, u_i)$ par rapport à λ^i , on a:

$$i=1, \dots, m \quad Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i) \geq Q_i(\mu^i, \bar{u}_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, \bar{u}_i), \bar{\mu}^i - \mu^i \right\rangle$$

et, en utilisant ceci dans (101) on obtient:

$$(102) \quad \forall \mu \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i, \bar{u}_i) \geq \sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i, \bar{u}_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, \bar{u}_i), \bar{\mu}^i - \mu^i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i), \bar{u}_i - u_i \right\rangle$$

d'où:

$$(103) \quad \forall \mu \quad \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\mu^i, \bar{u}_i), \bar{\mu}^i - \mu^i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i), u_i - \bar{u}_i \right\rangle \geq 0$$

Par ailleurs on obtient, en utilisant l'hypothèse (i):

$$\forall \mu \quad \sum_{i=1}^m Q_i(\mu^i, u_i) \geq \sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, u_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\bar{\mu}^i, u_i), \mu^i - \bar{\mu}^i \right\rangle \quad (\text{convexité}/\lambda^i)$$

$$\sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, u_i) \geq \sum_{i=1}^m Q_i(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i) + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\bar{\mu}^i, u_i), u_i - \bar{u}_i \right\rangle \quad (\text{convexité}/u_i)$$

et la somme de ces deux inégalités permet d'obtenir:

$$(104) \quad \forall \mu \quad R_o(\mu) \geq R_o(\bar{\mu}) + \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i), u_i - \bar{u}_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\bar{\mu}^i, u_i), \mu^i - \bar{\mu}^i \right\rangle$$

Compte-tenu de l'hypothèse (iii) on peut encore écrire:

$$(105) \quad \forall \mu \quad R_0(\mu) \geq R_0(\bar{\mu}) + \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial u_i}(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i), u_i - \bar{u}_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda^i}(\bar{\mu}^i, \bar{u}_i), \mu^i - \bar{\mu}^i \right\rangle$$

D'après (103), la somme apparaissant dans le membre de droite est non négative, on en déduit que $\bar{\mu}$ est un minimum global de R_0 .

6- CONCLUSION.

La formulation du problème de classification au moyen d'un jeu d'agrégation conduit à utiliser des algorithmes de recherche d'un point d'équilibre dans un jeu à N personnes. Dans la majorité des cas, ces problèmes sont de dimensions importantes, cette caractéristique implique l'utilisation de méthodes de décomposition.

La décomposition la plus immédiate consiste à considérer chaque joueur comme un sous-système résolvant son propre problème, les interactions entre sous-systèmes étant constituées par les commandes des autres joueurs.

On peut alors distinguer deux classes d'algorithmes, suivant que l'on travaille à partir de la fonction: "réponse d'un joueur à une configuration donnée du jeu" ou à partir des fonctions de coût, c'est-à-dire de la forme normale du jeu. Dans le premier cas, nous avons proposé un algorithme itératif de mise en oeuvre extrêmement simple, et les résultats obtenus au chapitre 2, concernant les points d'équilibre en stratégies pures, nous ont permis de montrer sa convergence. Dans les autres cas, on peut utiliser des algorithmes plus "sophistiqués", dont la convergence requiert parfois des hypothèses assez restrictives.

Lorsque l'on recherche un point de Pareto, il est possible toutefois de proposer une autre décomposition, chaque classe constitue alors un sous-système, et les interactions entre sous-systèmes se situent uniquement au niveau des contraintes définissant les ensembles de commande admissibles.

- BIBLIOGRAPHIE -

- /1/ G.W. BROWN: "Iterative solution of games by fictitious play" Activity Analysis of Production and Allocation, J. Wiley, New York, 1951.
- /2/ J. ROBINSON: "An iterative method for solving a game" Annals of Mathematics, 54, 1951.
- /3/ S. VAJDA: "Théorie des jeux et programmation linéaire" Dunod, Paris, 1959.
- /4/ G.B. DANTZIG: "A proof of equivalence of the programming problem and the game problem" Dans T.C. Koopmans (éd.): Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission Monograph n° 13, J. Wiley, New York, 1951.
- /5/ A. TITLI: "Contribution à l'étude des structures de commande hiérarchisées en vue de l'optimisation des processus complexes" Thèse Doctorat ès Sciences, Toulouse, 1972.
- /6/ L.F. PAU: Application de la théorie des jeux dynamiques aux systèmes complexes. Résolution numérique" Thèse Doctorat ès Sciences, Univ. Paris 7, 1976.
- /7/ M.D. MESAROVIC, D. MACKO, Y. TAKAHARA: "Theory of hierarchical multilevel systems" Academic Press, New York, 1970.
- /8/ J.L. LIONS, G.I. MARCHOUK: "Sur les méthodes d'analyse numérique en sciences physiques et économiques" Dunod, Paris, 1974.
- /9/ M.D. MESAROVIC, D. MACKO, Y. TAKAHARA: "Structuring of multilevel systems" IFAC Symposium on multivariable control systems, Dusseldorf, 1968.
- /10/ G.W. BROWN, J. VON NEUMAN: " Solution of games by differential equations" Dans Kuhn, Tucker (éd.): Contributions to the theory of games, I, Annals of Math. Studies, Vol. 24, Princeton Univ. Press, 1950.
- /11/ K.J. ARROW, L. HURWICZ: "The gradient method for concave programming" Dans Arrow, Hurwicz, Uzawa (éd.): Studies in linear and non-linear programming, Stanford Univ. Press, 1958.
- /12/ H. UZAWA: "The gradient method for concave programming" Dans: même ouvrage

- /12/ H. UZAWA: "The gradient method for concave programming" Dans: même ouvrage que /11/.
- /13/ E. DIDAY: "Optimisation en classification automatique et reconnaissance des formes" RAIRO, V-3, Novembre 1972.
- /14/ E. DIDAY: "Nouvelles méthodes et nouveaux concepts en classification automatique et en reconnaissance des formes" Thèse Doctorat d'Etat, Univ. Paris 6, 1972.
- /15/ G. COHEN: Thèse Doctorat ès Sciences (à paraître), Univ. Paris 9.

CHAPITRE 4

UN EQUILIBRE COOPERATIF DE TYPE PARTICULIER

1- INTRODUCTION

1-1. Problème de localisation optimale

1-2. Problème d'allocation optimale

2- SOLUTIONS DE COMPROMIS

3- EQUILIBRE SOCIAL

4- PROPRIETES DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS OPTIMALES

5- PROCESSUS DE SCALARISATION

6- PROBLEMES D'ALLOCATION

7- DETERMINATION DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS PARETO-OPTIMALES

8- CONCLUSION

CHAPITRE QUATRE

UN EQUILIBRE COOPERATIF DE TYPE PARTICULIER

1 - INTRODUCTION

Lorsque l'on ajoute l'idée d'optimisation à un "modèle mathématique" celui-ci devient un "modèle économique".

Quel que soit le système étudié, un abus de formalisation donne souvent lieu à un modèle traduisant imparfaitement la réalité et, de plus, inutilisable du point de vue de l'optimisation, car trop complexe. L'analyse d'un système de grandes dimensions par les données conduit au regroupement de celles-ci et à une modélisation sous forme d'agrégats. Celle-ci se justifie non seulement par la structure des observations qu'on a pu faire sur le système mais aussi par la structure de la commande : le modèle est de plus en plus global au fur et à mesure qu'on l'observe d'un niveau plus élevé de la hiérarchie.

Une application essentielle de l'analyse présentée dans les chapitres précédents consiste à réaliser une partition du système global afin, le plus souvent, d'appliquer aux parties disjointes une méthode de gestion spécifique. Cette gestion, qui s'applique globalement à tous les éléments d'une classe, doit tenir compte de leurs différents critères. On est ainsi conduit à étudier les comportements coopératifs entre joueurs d'une même coalition, qui définissent les solutions du jeu inférieur.

Deux exemples, concernant un problème de localisation et un

problème d'allocation de tâches et de ressources, nous permettront d'introduire un équilibre coopératif de type particulier. Nous définirons alors rigoureusement la notion "d'équilibre social" et nous en présenterons les propriétés et les applications importantes.

1-1. Problème de localisation optimale.

On considère le problème suivant : définir de façon optimale la localisation de n centres de service (entrepôts, écoles, stations de bus,..) dans une zone géographique donnée, qui est un sous-ensemble donné : $D \subset \mathbb{R}^2$.

Supposons connue la demande, $d(x)$, émanant de chaque point $x \in D$. Soit (u_1, \dots, u_n) le n-uple définissant la localisation des n centres, et supposons que la qualité du service rendu par un centre situé en u à la population située en x peut être mesurée en introduisant la fonction de coût :

$$f : D \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, u) \longmapsto f(x, d(x), u)$$

Le problème de localisation optimale conduit à définir un jeu d'agrégation dont la solution sera une partition optimale de D en n classes C_i , $i=1, \dots, n$; chaque classe sera servie par un centre de classe u_i [1], [18]. Si l'on envisage un service public, on est conduit à définir le coût de la localisation u_i au moyen du critère :

$$Q(C_i, u_i) = \max_{x \in C_i} f(x, d(x), u_i)$$

Dans ce sens, le n-uple optimal (u_1^*, \dots, u_n^*) correspondant à une partition (C_1, \dots, C_n) sera tel que :

$$i = 1, \dots, n \quad Q(C_i, u_i^*) = \min_{u_i \in \mathbb{R}^2} \max_{x \in C_i} f(x, d(x), u_i)$$

La situation ainsi définie est celle dans laquelle la variable de décision de la classe C_i est calculée de façon à minimiser le coût des usagers les plus défavorisés de la classe, en accord avec la notion d'équilibre social.

1-2. Problème d'allocation optimale.

Soit à planifier la production d'une certaine quantité y_0 d'un bien économique donné sous des contraintes budgétaires, au moyen de n centres (usines, procédés technologiques, régions, etc..)

Le problème d'allocation des tâches et des ressources est formulé comme suit : soient y_i et x_i , $i = 1, \dots, n$, respectivement la tâche et la ressource allouées au $i^{\text{ème}}$ processus. On suppose connues les n applications ϕ_i qui définissent, pour chaque processus, le temps de réalisation de la tâche y_i sous la contrainte budgétaire x_i .

$$i = 1, \dots, n \quad T_i = \phi_i(x_i, y_i)$$

sous les contraintes globales :

$$\sum_{i=1}^n y_i = y_0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq x_0 \quad x_0 \text{ donné}$$

La quantité y_0 du bien économique sera disponible au bout du temps :

$$T_0 = \max_{i=1, \dots, n} T_i$$

On est ainsi conduit à poser le problème suivant /2/ :

$$\min_{(x,y) \in E} \max_{i=1, \dots, n} \phi_i(x_i, y_i)$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, E est l'ensemble des couples (x, y) vérifiant les contraintes globales.

Si l'on considère chaque processus comme un joueur supportant le coût T_i on a défini un problème d'équilibre social, dans lequel l'ensemble des joueurs se préoccupe de la situation des joueurs les plus défavorisés.

2- SOLUTIONS DE COMPROMIS

On considère un ensemble de n joueurs : $i = 1, 2, \dots, n$.

La commande de chaque joueur i est un vecteur de décisions x_i , soumis à des contraintes locales :

$$(1) \quad x_i \in X_i^{\text{ad}} \subset E_i \quad i = 1, \dots, n$$

E_i est un ensemble donné, X_i^{ad} définit les décisions admissibles localement.

On peut, de plus, introduire un ensemble de contraintes globales :

$$(2) \quad x \in X^{\text{ad}} \subset E$$

avec : $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$$

Les coûts des différents joueurs sont définis par les applications :

$$(3) \quad \begin{aligned} \phi_i : X &\longrightarrow \mathbb{R} & i = 1, \dots, n \\ x &\longmapsto \phi_i(x) \end{aligned}$$

$$X = \{x; x \in X^{\text{ad}}, x_i \in X_i^{\text{ad}}, i = 1, \dots, n\}$$

On notera :

$$\Phi(X) = \{ (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)); x \in X \}$$

et l'on supposera :

$$(4) \quad i = 1, \dots, n \quad \phi_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$$

Remarques : 1) L'hypothèse (4) n'apporte aucune restriction si l'ensemble $\Phi(X)$ est minoré. En effet, supposons qu'elle ne soit pas vérifiée; on définit alors :

$$i = 1, \dots, n \quad y_i^* = \inf \{ \phi_i(x); x \in X \}$$

Le point $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ est appelé point idéal du problème. Il s'interprète de la façon suivante : lorsqu'il est réalisable, c'est à dire s'il existe $x^* \in X$ tel que $\phi_i(x^*) \leq \phi_i(x) \quad \forall x \in X, i = 1, \dots, n$, alors x^* minimise simultanément les n critères.

Dans ces conditions, le choix des n critères définis par les regrets :

$$i=1, \dots, n \quad \Phi_i(x) - \Phi_i(x^*)$$

permet de satisfaire l'hypothèse (4).

2) Le problème peut aussi être formulé comme problème à centre de décision unique, en présence de n critères. Dans ces conditions, l'ensemble admissible X est défini de façon indépendante de n ; c'est le cas en particulier dans l'exemple 1.

Il n'existe pas pour ce type de problème, de concept de solution communément admis (/3/ à /6/). L'utilisation de la notion de structure de domination /7//8/ permet d'étudier les hypothèses sous-jacentes à chaque concept de solution, cependant aucune raison ne milite en faveur d'un concept particulier. En effet, pour les problèmes à objectifs multiples, l'espace des coûts n'est que partiellement ordonné. Dans ce sens, on peut cependant définir un ensemble de solutions optimales en utilisant le concept de domination. Par exemple, un point de Pareto est tel qu'il n'est pas possible de trouver un ensemble de décisions compatibles avec les contraintes et diminuant tous les critères à la fois. Toutefois, la décision finale dépend du jugement du décideur unique ou du pouvoir de négociation des n joueurs.

Une classe de solutions particulièrement intéressante est fournie par les solutions de compromis (/9/, /10/). On définit dans ce cas, une classe de coûts globaux par :

$$F_p(x) = \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(x)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

Par définition, une solution de compromis de paramètre p minimise F_p sur l'ensemble des décisions admissibles.

Remarque. La solution de compromis correspondant à $p = 2$ a été proposée par Salukvadze /11/; elle correspond à la minimisation de la norme euclidienne du vecteur des n coûts. Les solutions correspondant à la programmation par

objectifs /12/ ou à la simple règle majoritaire sont des solutions de compromis avec $p = 1$. Le choix de $p = \infty$ correspond à la notion d'équilibre social, plus particulièrement étudiée dans ce travail, et conduit à un critère de la forme :

$$\min_{x \in X} \max_{i=1, \dots, n} \phi_i(x)$$

Soit Λ le cône défini par :

$$\Lambda = \{d \in \mathbb{R}^n; d \geq 0\}$$

On dira qu'un ensemble E est Λ -convexe si $E + \Lambda$ est convexe.

Les solutions de compromis présentent les propriétés suivantes /9/, /13/ :

1- Faisabilité: Pour tout $p \geq 1$, si l'ensemble $\Phi(X)$ est compact, il existe toujours une solution de compromis (on peut remarquer que certains concepts de solution tels que le cœur du jeu, par exemple, ne possèdent pas cette propriété).

2- Non dictature: La décision du groupe n'est pas entièrement déterminée par l'un quelconque des joueurs. Contrairement à la minimisation lexicographique[†] dans laquelle certains joueurs peuvent ne pas intervenir dans la décision finale, chaque critère est considéré dans une solution de compromis.

3- Pareto-optimalité: Pour $1 \leq p < \infty$, toute solution de compromis est Pareto-optimale. Cette propriété résulte directement de la définition.

4- Unicité: Supposons $\Phi(X)$ Λ -convexe. Soit \bar{x}^p une solution de compromis pour le paramètre p . Alors le n -uple $\phi_1(\bar{x}^p), \dots, \phi_n(\bar{x}^p)$ est unique pour $1 < p < \infty$.

[†] Soit $X^0 = X$. Pour $i = 1, \dots, n$ on définit:

$$X^i = \{x^0 \in X^{i-1}; \phi_i(x^0) \leq \phi_i(x), \forall x \in X^{i-1}\}$$

Pour la minimisation lexicographique, la décision finale appartient à l'ensemble X^n . Cependant, si X^k , $k < n$, ne contient qu'un point, elle est déterminée de façon unique et $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n$ ne sont pas considérés.

5- Symétrie ou principe d'équité: Si $\Phi(X)$ est convexe et fermé par rapport à une rotation cyclique, alors pour tout p , $1 < p \leq \infty$ les $\Phi_i(\bar{x}^p)$, $i=1, \dots, n$, sont identiques. Pour $p = 1$, il y a au moins une solution de compromis telle que les $\Phi_i(\bar{x}^1)$, $i=1, \dots, n$, soient identiques. Ainsi, le principe d'équité est implicite dans le concept de solution de compromis.

L'inconvénient majeur des solutions de compromis est qu'elles imposent une intercomparaison des différents critères par l'intermédiaire de la fonction de coût globale. Cette contrainte n'est pas admissible dans certains cas, en particulier lorsque les différents coûts sont incommensurables. Cependant, nous verrons que, même dans ce cas, la notion d'équilibre social peut être utilisée pour déterminer l'ensemble des points de Pareto du problème. Le choix d'une solution particulière est alors laissé au jugement du décideur ou à la négociation entre joueurs.

3 - EQUILIBRE SOCIAL

Pour un jeu coopératif à n personnes, on définit un point de Pareto comme un élément de X tel qu'il n'est pas possible de trouver un autre ensemble de décisions admissibles diminuant à la fois tous les coûts.

Sur le plan des décisions du groupe, un tel point peut être préférable à un point de Nash. Cependant, il n'est généralement pas unique et le choix d'une décision est déterminé par le concept de solution retenu. En fait, une décision Pareto-optimale est telle qu'elle interdit toute modification préjudiciable à l'un quelconque des joueurs, quels que soient par ailleurs les coûts effectivement supportés par ceux-ci. Or dans certains problèmes (cf. exemples 1 et 2, ou lorsque l'on fait intervenir la notion d'équité), il peut quelquefois être souhaitable d'améliorer la situation d'un joueur (ou d'un groupe de joueurs) plus défavorisés, quitte à le faire au détriment de joueurs dont la situation était meilleure.

Sous certaines conditions /14/, la recherche d'un point de Pareto

se ramène à la minimisation d'un critère unique :

$$(5) \quad \begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x) \\ x \in X, \quad \lambda_i > 0 \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases}$$

On peut alors interpréter les coefficients λ_i comme les poids des différents joueurs au sein de l'équipe ainsi formée. En pratique, cela suppose un processus de négociation, au cours duquel les n joueurs s'entendent sur les coefficients de pondération λ_i de leur influence. A priori, ces coefficients peuvent être quelconques et, en particulier, indépendants des coûts $\phi_i(x^*)$ qu'ils induiront pour chacun des joueurs à l'équilibre. Lorsque l'on introduit les considérations évoquées plus haut, on constate, au contraire, l'influence primordiale de ces coefficients.

Dans ce sens, on introduit la notion d'équilibre social, qui est une solution de compromis avec $p = \infty$. Elle s'interprète comme un équilibre coopératif de type particulier, dans lequel l'équipe tient compte de la situation du joueur le plus défavorisé.

Définition 3-1

On dira qu'un point x^* est un équilibre social si sont vérifiées les propriétés suivantes :

$$(6) \quad \begin{aligned} 1) \quad & x^* \in X \\ 2) \quad & \forall x \in X \quad \max_i \phi_i(x^*) \leq \max_i \phi_i(x) \quad i=1, \dots, n \end{aligned}$$

Pour toute décision admissible x , on notera :

$$(7) \quad \alpha_1(x) = \max_i \phi_i(x)$$

et l'on dira que deux décisions x^1 et x^2 sont équivalentes si l'on a :

$$(8) \quad \alpha_1(x^1) = \alpha_1(x^2)$$

Soit A_1 la classe d'équivalence des décisions optimales, c'est-à-dire

conduisant à un équilibre social. On a :

$$(9) \quad A_1 = \{y; y \in X, \alpha_1(y) = \min_{x \in X} \alpha_1(x)\}$$

Si x^1 et x^2 sont optimales, on a :

$$(10) \quad \begin{cases} \max_i \phi_i(x^1) = \phi_{i_1}(x^1) = \alpha_1(x^1) \\ \max_i \phi_i(x^2) = \phi_{i_2}(x^2) = \alpha_1(x^2) = \alpha_1(x^1) \end{cases}$$

On définit les quantités suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha_2(x^1) = \max_{i \neq i_1} \phi_i(x^1) \\ \alpha_2(x^2) = \max_{i \neq i_2} \phi_i(x^2) \end{cases}$$

et l'on dira que la solution optimale x^1 est meilleure que x^2 si l'on a :

$$(12) \quad \alpha_2(x^1) < \alpha_2(x^2)$$

Soit A_2 l'ensemble défini par :

$$(13) \quad A_2 = \{z; z \in A_1, \alpha_2(z) = \min_{y \in A_1} \alpha_2(y)\}$$

On obtient immédiatement les propriétés suivantes :

- i) $A_2 \subset A_1$
- ii) Toute solution $z \in A_2$ est meilleure que toute solution $y \in A_1 - A_2$
- iii) Pour tout indice k tel que :

$$1 \leq k \leq n-1, \quad \text{card } A_k > 1$$

on peut définir l'ensemble A_{k+1} , inclus dans A_k , des solutions toutes meilleures que l'une quelconque des solutions appartenant à $A_{k+1} - A_k$.

Définition 2-2

On dira que x^* est une meilleure solution optimale si c'est un élément de l'ensemble A_k non vide d'indice le plus élevé.

4 - PROPRIETES DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS OPTIMALES

Définissons n problèmes d'optimisation P_k , $k=1, \dots, n$, par :

$$(14) \quad P_k \quad \begin{cases} \min_{x \in X} \phi_k(x) \\ \phi_i(x) - \phi_k(x) \leq 0 \quad i=1, \dots, n \end{cases}$$

et soit x_k^* une solution du problème P_k . On a le théorème suivant :

Théorème 4-1

Soit x^* une solution optimale. On a :

$$(15) \quad \alpha_1(x^*) = \min_k \phi_k(x_k^*) \quad k=1, \dots, n$$

Démonstration : Si x^* est optimale, on a, par définition :

$$(16) \quad \max_i \phi_i(x^*) \leq \max_i \phi_i(x) \quad \forall x \in X, i=1, \dots, n$$

Si x_k^* (k quelconque) est solution de P_k , on a :

$$(17) \quad x_k^* \in X, \quad \max_i \phi_i(x_k^*) = \phi_k(x_k^*)$$

d'où :

$$(18) \quad \forall k \quad \max_i \phi_i(x^*) \leq \phi_k(x_k^*)$$

et il s'ensuit :

$$(19) \quad \max_i \phi_i(x^*) \leq \min_k \phi_k(x_k^*)$$

Par ailleurs, soit Y_k l'ensemble des commandes admissibles du problème P_k :

$$(20) \quad Y_k = \{y; y \in X, \phi_i(y) \leq \phi_k(y), i=1, \dots, n\}$$

Par définition du problème P_k on a :

$$(21) \quad \max_i \phi_i(x_k^*) = \phi_k(x_k^*) \leq \phi_k(x) \quad \forall x \in Y_k$$

Comme les ensembles Y_k sont tels que :

$$(22) \quad \bigcup_{k=1}^n Y_k = X$$

on en déduit l'existence d'un indice j vérifiant :

$$(23) \quad x^* \in Y_j$$

D'après (21) on a alors :

$$(24) \quad \exists j \text{ tel que } \phi_j(x_j^*) \leq \phi_j(x^*)$$

et, en utilisant (24) et (19) on obtient :

$$(25) \quad \phi_j(x_j^*) \leq \max_i \phi_i(x^*) \leq \min_k \phi_k(x_k^*) \leq \phi_j(x_j^*)$$

d'où l'on déduit :

$$(26) \quad \phi_j(x_j^*) = \max_i \phi_i(x^*) = \min_k \phi_k(x_k^*) = \alpha_1(x^*)$$

Le théorème 4-1 fournit un moyen de calculer une solution optimale. Les propriétés suivantes permettront de mieux caractériser l'ensemble de ces solutions.

Théorème 4-2

Une meilleure solution optimale est un point de Pareto.

Démonstration : Soit x^* une meilleure solution optimale, et supposons qu'elle ne soit pas un point de Pareto. Alors on pourrait trouver un ensemble de décisions admissibles, \bar{x} , tel que :

$$(27) \quad i=1, \dots, n \quad \phi_i(\bar{x}) \leq \phi_i(x^*) \text{ avec au moins une inégalité stricte.}$$

Deux cas peuvent se présenter :

- 1) x^* n'est pas optimale
- 2) x^* et \bar{x} sont optimales, \bar{x} est meilleure que x^*

et, dans les deux cas, on a une contradiction avec le fait que x^* est une meilleure solution optimale.

Théorème 4-3

Si l'ensemble des décisions admissibles est convexe, et si les fonctionnelles $\phi_i(\cdot)$, $i=1, \dots, n$, sont quasi-convexes, l'ensemble des solutions optimales est convexe.

Démonstration : Soient x^* et \bar{x} deux solutions optimales. On a :

$$(28) \quad i=1, \dots, n \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_i(x^*) \leq \alpha_1(x^*) = \max_k \phi_k(x^*) \\ \phi_i(\bar{x}) \leq \alpha_1(\bar{x}) = \max_k \phi_k(\bar{x}) \end{array} \right.$$

avec: (29) $\alpha_1(x^*) = \alpha_1(\bar{x}) = \alpha$

Posons : $\tilde{x} = px^* + q\bar{x}$ avec $(p, q) \in \mathbb{P}_2$, c'est-à-dire :

$$p, q \geq 0, \quad p + q = 1$$

\tilde{x} est un vecteur de décisions admissibles, par la convexité de X . De plus, la quasi-convexité des fonctionnelles $\phi_i(\cdot)$ implique :

$$(30) \quad i=1, \dots, n \quad \phi_i(\tilde{x}) = \phi_i(px^* + q\bar{x}) \leq \alpha$$

On en déduit :

$$(31) \quad \max_i \phi_i(\tilde{x}) \leq \alpha \leq \max_k \phi_k(x) \quad \forall x \in X$$

d'où l'optimalité de \tilde{x} .

Corollaire 4-1 : Sous les hypothèses du théorème 4-3, les ensembles A_k , $k=1, \dots, n$, sont convexes.

Démonstration : D'après le théorème 4-3, l'ensemble A_1 est convexe. L'ensemble A_k ($k=2, \dots, n$) est l'ensemble des solutions d'un problème d'équilibre social sur A_{k-1} , d'où le résultat annoncé.

En particulier, l'ensemble des meilleures solutions optimales est convexe.

Corollaire 4-2 : Sous les hypothèses du théorème 4-3 et si, de plus, les fonctionnelles $\phi_i(\cdot)$ sont telles que :

$$(32) \quad \forall i, \forall p \notin \{0,1\} \quad \phi_i(px^1 + qx^2) < \max \{ \phi_i(x^1), \phi_i(x^2) \}$$

alors la solution optimale est unique. Elle est donc aussi la meilleure solution optimale.

Démonstration : S'il existait deux solutions optimales, x^* et \bar{x} , on aurait :

$$(33) \quad \forall (p,q) \in \mathbb{P}_2, p \notin \{0,1\} \quad \phi_i(px^* + q\bar{x}) < \alpha$$

$$(34) \quad \max_i \phi_i(px^* + q\bar{x}) < \alpha = \max_i \phi_i(x^*) = \max_i \phi_i(\bar{x})$$

ce qui contredit l'optimalité de x^* et de \bar{x} .

5 - PROCESSUS DE SCALARISATION.

On sait que, sous certaines conditions, la recherche d'un point de Pareto se ramène à la minimisation d'un critère unique, pondération des critères des différents joueurs. On a montré qu'une meilleure solution optimale était un point de Pareto, et on a constaté, par ailleurs, l'influence des coefficients de pondération sur les coûts supportés par chaque joueur à l'équilibre. Désignant par \mathbb{P}_n l'ensemble :

$$(35) \quad \mathbb{P}_n = \{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n); \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \}$$

on introduit la fonctionnelle suivante :

$$(36) \quad f : \mathbb{P}_n \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad f(\lambda, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x)$$

Théorème 5-1

S'il existe un vecteur $\lambda \in \mathbb{P}_n$, de composantes toutes positives, tel que :

$$(37) \quad f(\lambda, x^*) \leq f(\lambda, x) \quad \forall x \in X \implies \phi_i(x^*) = \phi_j(x^*) \quad \forall i, j$$

alors x^* est un point d'équilibre social.

Démonstration : x^* est un point de Pareto. On en déduit :

$$(38) \quad \forall x \in X \quad \exists i \text{ tel que } \phi_i(x) \geq \phi_i(x^*)$$

Corollaire 5-1: S'il existe un vecteur unique $\lambda \in \mathbb{P}_n$ tel que :

$$(39) \quad f(\lambda, x^*) \leq f(\lambda, x) \quad \forall x \in X \Rightarrow \begin{cases} \phi_i(x^*) = \phi_j(x^*) & \forall i, j \in I \\ \phi_k(x^*) < \phi_i(x^*) & \forall i \in I, \forall k \notin I \end{cases}$$

où I est l'ensemble des indices des composantes non nulles de λ , alors x^* est un point d'équilibre social.

Démonstration : Elle est identique à celle du théorème précédent, en remarquant que x^* est un point de Pareto pour le sous-ensemble des joueurs indicés par I .

Soit $X(\alpha)$ l'ensemble défini par :

$$(40) \quad X(\alpha) = \{x; x \in X, \phi_i(x) \leq \alpha \quad i=1, \dots, n\}$$

Lemme 5-1. Une condition nécessaire et suffisante pour que $x \in X(\alpha)$ est que l'on ait :

$$(41) \quad \forall \lambda \in \mathbb{P}_n \quad f(\lambda, x) \leq \alpha$$

Démonstration : 1) Soit $x \in X(\alpha)$. Alors on a :

$$(42) \quad \forall i \quad \phi_i(x) \leq \alpha \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha = \alpha \quad \forall \lambda \in \mathbb{P}_n$$

2) Réciproquement, soit x un vecteur de décisions admissibles tel que (41) soit vraie. En prenant $\lambda = e_i$, vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$, égale à 1, on obtient :

$$(43) \quad \forall i \quad f(e_i, x) \leq \alpha \iff \phi_i(x) \leq \alpha$$

Théorème 5-2

La relation suivante est vraie :

$$(44) \quad \max_{\lambda \in \mathbb{P}_n} \min_{x \in X} f(\lambda, x) \leq \min_{x \in X} \max_{\lambda \in \mathbb{P}_n} f(\lambda, x) = \alpha_1(x^*)$$

Démonstration : Posons :

$$(45) \quad \forall x \in X \quad \beta(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{P}_n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x)$$

On a :

$$(46) \quad \forall x \in X \quad \beta(x) = \max_i \phi_i(x) = \alpha_1(x) \quad \text{de sorte que :}$$

$$(47) \quad \min_{x \in X} \beta(x) = \min_{x \in X} \max_{\lambda \in \mathbb{P}_n} f(\lambda, x) = \alpha_1(x^*)$$

D'autre part, à partir du lemme 5-1, on a :

$$(48) \quad x^* \in X(\alpha_1(x^*)) \iff \forall \lambda \in \mathbb{P}_n \quad f(\lambda, x^*) \leq \alpha_1(x^*)$$

et comme on a :

$$(49) \quad \forall \lambda \in \mathbb{P}_n \quad \min_{x \in X} f(\lambda, x) \leq f(\lambda, x^*)$$

on en déduit, en utilisant (48) et (49) :

$$(50) \quad \max_{\lambda \in \mathbb{P}_n} \min_{x \in X} f(\lambda, x) \leq \alpha_1(x^*)$$

Théorème 5-3

Si la fonctionnelle $f(\lambda, x)$ admet un point selle dans $\mathbb{P}_n \times X$, c'est un équilibre social.

Démonstration : Soit (λ^*, x^*) un point selle de $f(\lambda, x)$ dans $\mathbb{P}_n \times X$:

$$(51) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x^*) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \phi_i(x^*) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \phi_i(x) \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{P}_n$$

En majorant le membre de droite par $\max_i \phi_i(x)$, et en prenant $\lambda = e_i$ dans le membre de gauche, on obtient :

$$(52) \quad \forall x \in X \quad \max_i \phi_i(x^*) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \phi_i(x^*) \leq \max_i \phi_i(x)$$

d'où l'optimalité de x^* .

Remarque : Le théorème 5-2 donne une minoration du coût de la solution optimale par résolution d'un problème de maximisation dans \mathbb{P}_n . Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un point selle est que (44) soit une

égalité. Il en est ainsi, en particulier, lorsque l'ensemble :

$$(53) \quad \Phi(X) = \{ \zeta; \exists x \in X \text{ tel que } \zeta = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)) \}$$

est convexe /15/. En fait, ce résultat est encore valable sous des conditions légèrement moins sévères.

On définit l'application suivante :

$$(54) \quad h : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\lambda \longmapsto h(\lambda) = \min_{x \in X} f(\lambda, x)$$

On suppose, comme on l'a fait jusqu'à présent, qu'un minimum est effectivement atteint dans X de sorte que, $\forall \lambda \in \mathbb{P}_n$, l'ensemble X_λ défini ci-dessous n'est pas vide :

$$(55) \quad X_\lambda = \{x^0 \in X; f(\lambda, x^0) = h(\lambda)\}$$

Théorème 5-4

Si, $\forall \lambda \in \mathbb{P}_n$, l'ensemble X_λ est non vide, et si l'ensemble $\Phi(X)$ est Λ -convexe avec :

$$\Lambda = \{d \in \mathbb{R}^n; d \geq 0\}$$

alors $f(\lambda, x)$ admet un point selle dans $\mathbb{P}_n \times X$. Ce point est un équilibre social.

Démonstration :

Soit $\Psi = \Phi(X) + \Lambda$, Ψ est convexe par hypothèse. On a :

$$(56) \quad \forall \psi \in \Psi \quad \exists (x, d) \in X \times \Lambda \text{ tel que } \psi = \Phi(x) + d$$

en notant $\Phi(x)$ le vecteur : $(\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x))$.

Les deux propriétés suivantes découlent immédiatement de (56) :

a) $\Phi(X) \subset \Psi$

b) $\forall \psi \in \Psi, \forall \lambda \in \mathbb{P}_n : \langle \lambda, \psi \rangle \geq h(\lambda)$. En effet :

$$(57) \quad \forall \psi \in \Psi, \forall \lambda \in \mathbb{P}_n, \exists (x, d) \in X \times \Lambda \text{ tel que :$$

$$\langle \lambda, \psi \rangle = \langle \lambda, \Phi(x) + d \rangle = f(\lambda, x) + \langle \lambda, d \rangle$$

le produit scalaire $\langle \lambda, d \rangle$ étant positif ou nul, et l'inégalité :

$f(\lambda, x) \geq h(\lambda)$ vérifiée par définition de $h(\lambda)$, on en déduit la propriété b).

De plus, on a :

$$(58) \quad \forall \lambda \in \mathbb{P}_n \quad \min_{\psi \in \Psi} \langle \lambda, \psi \rangle = h(\lambda)$$

En effet, en utilisant le fait que $\Phi(X) \subset \Psi$ on a :

$$(59) \quad \forall \lambda \in \mathbb{P}_n \quad \min_{\psi \in \Psi} \langle \lambda, \psi \rangle \leq \min_{x \in X} f(\lambda, x) = h(\lambda)$$

qui, associé à b) démontre (58).

On fait maintenant l'hypothèse que le vecteur nul, $\psi = 0$, n'appartient pas à Ψ . En effet, ce cas ne présente pas d'intérêt puisqu'on aurait alors :

$$(60) \quad \exists x^* \in X \text{ tel que } \Phi(x^*) = 0$$

Définissons la norme d'un élément ψ de Ψ par :

$$(61) \quad \|\psi\| = \max_i \psi_i \quad i=1, \dots, n$$

et soit δ la distance minimale de 0 à l'ensemble convexe Ψ . En utilisant

(58) on montre facilement /15/ :

$$(62) \quad \min_{\psi \in \Psi} \|\psi\| = \max_{\lambda \in \mathbb{P}_n} h(\lambda) = \delta$$

Soient ψ^* et λ^* tels que :

$$(63) \quad \|\psi^*\| = h(\lambda^*) = \delta$$

On a :

$$(64) \quad \begin{cases} \psi^* \in \Psi \implies \langle \lambda^*, \psi^* \rangle \geq h(\lambda^*) = \delta \\ \lambda^* \in \mathbb{P}_n \implies \langle \lambda^*, \psi^* \rangle \leq \|\psi^*\| = \delta \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$(65) \quad \langle \lambda^*, \psi^* \rangle = \delta$$

Dans ces conditions, on obtient :

$$(66) \quad \exists x^* \in X_{\lambda^*} \text{ tel que } \psi^* = \Phi(x^*)$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait :

$$(67) \quad \psi^* = \Phi(\tilde{x}) + d \quad \tilde{x} \notin X_{\lambda^*} \quad d \geq 0$$

$$\text{et : } \langle \lambda^*, \psi^* \rangle = f(\lambda^*, \tilde{x}) + \langle \lambda^*, d \rangle > h(\lambda^*)$$

qui est en contradiction avec (65).

D'après (66) et (63) on a alors :

$$(68) \quad \max_i \phi_i(x^*) = \|\psi^*\| \leq \|\psi\| \quad \forall \psi \in \Psi \quad i=1, \dots, n$$

et, comme $\Phi(X)$ est inclus dans Ψ , on obtient :

$$(69) \quad \max_i \phi_i(x^*) \leq \max_i \phi_i(x) \quad \forall x \in X \quad i=1, \dots, n$$

ce qui montre que x^* est un équilibre social.

Par ailleurs, (65) montre l'existence du point selle correspondant; en effet :

$$(70) \quad \langle \lambda^*, \psi^* \rangle = f(\lambda^*, x^*) = h(\lambda^*) = \|\psi^*\|$$

$$\text{avec } h(\lambda^*) = \min_{x \in X} f(\lambda^*, x)$$

$$\text{et } \|\psi^*\| = \max_{\lambda \in \mathbb{P}_n} f(\lambda, x^*)$$

6 - PROBLEMES D'ALLOCATION

Dans de nombreux problèmes d'allocation de ressources, ou d'assignement de tâches, la notion d'équilibre social joue un rôle important, comme le montre l'exemple 2 donné en introduction. Le problème est alors défini de la façon suivante :

a) Commandes admissibles.

$$(71) \quad X_i^{\text{ad}} = E_+ \text{ orthant positif d'un espace vectoriel donné.}$$

$$(72) \quad X^{\text{ad}} = \{x = (x_1, \dots, x_n); \sum_{i=1}^n x_i = x_0\}$$

b) Critères individuels.

$$(73) \quad i=1, \dots, n \quad \phi_i(x) = \phi_i(x_i)$$

Dans ce type de problèmes, un cas particulièrement intéressant est celui dans

lequel l'allocation optimale conduit à un coût unique, commun à tous les joueurs. La solution est alors obtenue directement par la résolution d'un système de n équations.

Théorème 6-1

Si toutes les fonctionnelles $\Phi_i(x_i)$ sont continues et strictement croissantes par rapport à tous leurs arguments, la meilleure solution optimale vérifie le système d'équations :

$$(74) \quad \forall i \text{ tel que } x_i \neq 0 \quad \Phi_i(x_i) = \alpha$$

Démonstration : Supposons que cela ne soit pas le cas, et qu'il existe deux ensembles d'indices, I et J tels que :

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \forall i \in I & \text{card } I = n_i \geq 1 \\ \forall j \in J & \text{card } J = n_j \geq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} \Phi_i(x_i^*) = \alpha & x_i^* \neq 0 \\ \Phi_j(x_j^*) < \alpha & \end{array}$$

avec :

$$(76) \quad \sum_{i \in I} x_i^* + \sum_{j \in J} x_j^* = x_0$$

Soit $\epsilon \in E_+ - \{0\}$ tel que :

$$(77) \quad \forall i \in I \quad \bar{x}_i = x_i^* - \epsilon \geq 0$$

Alors, la croissance stricte des fonctionnelles $\Phi_i(.)$ implique :

$$(78) \quad \forall i \in I \quad \Phi_i(\bar{x}_i) < \Phi_i(x_i^*)$$

Posons à présent :

$$(79) \quad \forall j \in J \quad \begin{array}{ll} j \neq j_1 & \bar{x}_j = x_j^* \\ j = j_1 & \bar{x}_{j_1} = x_{j_1}^* + n_i \epsilon \end{array}$$

où j_1 est un indice de J tel que $x_{j_1}^* < x_0$. Comme $n_i \geq 1$, on est assuré de

l'existence d'un tel indice dans J.

La continuité des fonctionnelles $\Phi_i(.)$ implique :

(80) $\forall \eta > 0 \quad \exists \delta(\eta)$ tel que :

$$\| \bar{x}_{j_1} - x_{j_1} \| < \delta(\eta) \implies | \phi_{j_1}(\bar{x}_{j_1}) - \phi_{j_1}(x_{j_1}) | < \eta$$

Il s'ensuit qu'il existe un nombre $\bar{\delta}$ tel que :

$$(81) \quad n_i \|\varepsilon\| < \bar{\delta} \implies \phi_{j_1}(\bar{x}_{j_1}) - \phi_{j_1}(x_{j_1}^*) < \alpha - \phi_{j_1}(x_{j_1}^*)$$

L'ensemble :

$$(82) \quad \mathcal{G} = \{ \varepsilon; 0 < \varepsilon \leq x_i^* \quad \forall i, x_{j_1}^* + n_i \varepsilon \leq x_o, \|\varepsilon\| < \frac{\bar{\delta}}{n_i} \}$$

n'est pas vide.

Dans ces conditions, $\forall \varepsilon \in \mathcal{G}$, les vecteurs de décision \bar{x} définis à partir de (77) et (79) vérifient :

$$(83) \quad \begin{cases} \forall i \in I & \phi_i(\bar{x}_i) < \alpha \\ \forall j \in J & \phi_j(\bar{x}_j) < \alpha \end{cases}$$

ce qui contredit l'optimalité de la solution x^* .

On a encore le théorème suivant, dont la démonstration est identique en tous points à celle du théorème 6-1 :

Théorème 6-2

Si toutes les fonctionnelles $\phi_i(.)$ sont continues et strictement décroissantes par rapport à tous leurs arguments, si la meilleure solution optimale n'est pas telle que :

$$(84) \quad \max_i \phi_i(x_i^*) = \phi_k(x_o)$$

alors elle vérifie le système d'équations :

$$(85) \quad \forall i \quad \phi_i(x_i^*) = \alpha$$

Dans le cas où les décisions x_i sont constituées par deux sous-ensembles de décisions (allocation simultanée de tâches et de ressources, par exemple) on peut appliquer conjointement les deux théorèmes précédents.

Posons : $x_i^T = (y_i^T, z_i^T) \quad i=1, \dots, n$

$$(86) \quad x_i^{\text{ad}} = \{(y_i, z_i); y_i \geq 0, z_i \geq 0\}$$

$$x^{\text{ad}} = \{x = (x_1, \dots, x_n); \sum_{i=1}^n y_i = y_0, \sum_{i=1}^n z_i = z_0\}$$

Théorème 6-3

Si les fonctionnelles $\phi_i(\cdot)$ sont continues, strictement croissantes par rapport aux arguments y_i et strictement décroissantes par rapport aux arguments z_i , si la meilleure solution optimale n'est pas telle que :

$$(87) \quad \max_i \phi_i(y_i, z_i) = \phi_k(0, z_0)$$

alors elle vérifie le système d'équations :

$$(88) \quad i=1, \dots, n \quad \phi_i(y_i, z_i) = \alpha$$

Jusqu'à présent, les résultats obtenus concernant les problèmes d'allocation supposent la continuité des fonctionnelles $\phi_i(\cdot)$. Nous allons montrer qu'ils restent valables lorsque les fonctionnelles $\phi_i(\cdot)$ sont seulement continues par morceaux.

Si l'on suppose qu'il existe un nombre fini de discontinuités, on note : $\phi_i(x_i^-)$ et $\phi_i(x_i^+)$ respectivement la limite à gauche et la limite à droite de $\phi_i(\cdot)$ en un point x_i quelconque. On introduit la fonctionnelle auxiliaire $\psi_i(\cdot)$, multivoque, par :

$$(89) \quad \forall x_i \quad \psi_i(x_i) = [\phi_i(x_i^-), \phi_i(x_i^+)]$$

Compte-tenu du but poursuivi, qui est la minimisation des critères $\phi_i(\cdot)$, on définit :

$$(90) \quad \forall x_i \quad \phi_i(x_i) = \phi_i(x_i^-) \quad \text{si} \quad \phi_i(x_i^-) \leq \phi_i(x_i^+)$$

$$(91) \quad \forall x_i \quad \phi_i(x_i) = \phi_i(x_i^+) \quad \text{si} \quad \phi_i(x_i^+) \leq \phi_i(x_i^-)$$

Théorème 6-4

Si les fonctionnelles $\phi_i(\cdot)$ sont continues par morceaux, et strictement croissantes par rapport à tous leurs arguments, la meilleure solution

optimale est telle que :

$$(92) \quad \bigcap_{i=1}^n \psi_i(x_i) \neq \{\} \quad \forall x_i^* \neq 0$$

où $\{\}$ désigne l'ensemble vide.

Démonstration : Les propriétés des fonctionnelles $\phi_i(\cdot)$ impliquent :

$$(93) \quad \forall x_i \quad \phi_i(x_i^+) \geq \phi_i(x_i^-)$$

(94) $\forall x_i$ il existe un voisinage à droite de x_i tel que :

$$\forall \eta \in V(x_i^+) \quad \phi_i(x_i + \eta) = \phi_i(x_i^+) + \zeta_i(x_i, \eta)$$

où $\zeta_i(x_i, \eta)$ est une fonctionnelle continue, strictement croissante par rapport à $\eta \in V(x_i^+)$, et telle que :

$$(95) \quad \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \eta > 0}} \zeta_i(x_i, \eta) = 0$$

D'après (92), on doit avoir :

$$(96) \quad \exists \alpha \text{ tel que } \forall i \text{ vérifiant } x_i^* \neq 0, \alpha \in \psi(x_i^*)$$

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors deux ensembles d'indices, I et J, tels que :

$$(97) \quad \begin{aligned} \forall i \in I \quad \text{card } I = n_i \geq 1 \quad x_i^* \neq 0 \quad \alpha \in \psi_i(x_i^*) \\ \forall j \in J \quad \psi_j(x_j^*) < \alpha \text{ c'est-à-dire } \forall \beta_j \in \psi_j(x_j^*), \beta_j < \alpha \end{aligned}$$

Soit $\epsilon \in E_+ - \{0\}$, on définit :

$$(98) \quad \begin{aligned} \forall i \in I \quad \bar{x}_i &= x_i^* - \epsilon \\ \forall j \in J, j \neq j_1 \quad \bar{x}_j &= x_j^* \\ j = j_1 \quad \bar{x}_{j_1} &= x_{j_1}^* + n_i \epsilon \end{aligned}$$

La croissance stricte des fonctionnelles $\phi_i(\cdot)$ implique :

$$(99) \quad \forall i \in I \quad \psi_i(\bar{x}_i) < \psi_i(x_i^*)$$

On montre alors qu'il est possible de trouver ϵ tel que :

$$(100) \quad \psi_{j_1}(\bar{x}_{j_1}) < \alpha$$

En effet, d'après (94), on a :

$$(101) \quad \psi_{j_1}(x_{j_1}^* + n_i \varepsilon) = \phi_{j_1}(x_{j_1}^{*+}) + \zeta_{j_1}(x_{j_1}^*, n_i \varepsilon)$$

pour $n_i \varepsilon \in V(x_{j_1}^{*+})$

(100) est alors vraie si l'ensemble \mathcal{E} défini ci-dessous n'est pas vide :

$$(102) \quad \mathcal{E} = \{ \varepsilon; 0 < \varepsilon \leq \min_{i \in I} x_i^*, x_{j_1}^* + n_i \varepsilon \leq x_o, n_i \varepsilon \in V(x_{j_1}^{*+}), \zeta_{j_1}(x_{j_1}^*, n_i \varepsilon) < \alpha - \phi_{j_1}(x_{j_1}^{*+}) \}$$

Ceci est le cas, en effet on a :

$$(103) \quad \phi_{j_1}(x_{j_1}^{*+}) < \alpha \quad \text{par définition de l'ensemble des indices } J.$$

On en conclut que si (97) est vraie, x^* n'est pas optimale, en effet on a trouvé un vecteur \bar{x} meilleur que x^* , d'où la contradiction.

Ce résultat s'étend de façon directe au cas où les fonctionnelles $\phi_i(.)$ sont continues par morceaux et strictement décroissantes par rapport à tous leurs arguments, en définissant $\phi_i(x_i)$ au moyen de (91). On obtient de la même manière l'équivalent du théorème 6-3.

7 - DETERMINATION DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS PARETO OPTIMALES

L'inconvénient majeur des solutions de compromis est qu'elles imposent une intercomparaison des différents critères par l'intermédiaire de la fonction de coût globale. En particulier, pour l'équilibre social, les différents coûts doivent être directement comparables ce qui impose l'existence d'une unité de mesure commune aux n joueurs. Lorsque cette contrainte n'est pas admissible, nous allons montrer que la notion d'équilibre social peut néanmoins être utilisée pour déterminer l'ensemble des points de Pareto du problème /16/. Le choix d'une solution particulière relève alors du jugement du décideur ou des capacités de négociation entre joueurs.

Soit $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ un vecteur de composantes strictement positives.

On définit une classe de problèmes d'équilibre social $P(\tau)$ par :

$$x^* \text{ solution de } P(\tau) \iff \max_i \tau_i \phi_i(x^*) \leq \max_i \tau_i \phi_i(x) \\ \forall x \in X, \quad i=1, \dots, n$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de Pareto-optimalité pour les fonctionnelles $\phi_1(\cdot), \dots, \phi_n(\cdot)$ (problème P).

Théorème 7-1

Une condition nécessaire et suffisante pour que x^* soit une solution Pareto-optimale du problème P est qu'il existe un vecteur τ de composantes strictement positives tel que x^* soit une meilleure solution optimale pour le problème $P(\tau)$.

Démonstration :

a) Condition nécessaire.

Soit x^* une solution Pareto-optimale du problème P. On a, par définition :

$$(104) \quad \forall x \in X \quad \phi_i(x) = \phi_i(x^*) \quad i=1, \dots, n \quad \text{ou} \\ \exists i \text{ tel que } \phi_i(x) > \phi_i(x^*)$$

Soit τ^* un vecteur tel que :

$$(105) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \tau_i^* \phi_i(x^*) = \tau_j^* \phi_j(x^*) \quad \tau_k^* > 0 \quad k=1, \dots, n$$

A partir de (104) et (105), on obtient :

$$(106) \quad \forall x \in X \quad \tau_i^* \phi_i(x) = \tau_k^* \phi_k(x^*) \quad \forall i, k \in \{1, \dots, n\} \text{ ou} \\ \exists i \text{ tel que } \tau_i^* \phi_i(x) > \tau_k^* \phi_k(x^*) \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

(106) implique alors :

$$(107) \quad \forall x \in X \quad \max_i \tau_i^* \phi_i(x) \geq \tau_k^* \phi_k(x^*) \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

que l'on peut encore écrire :

$$(108) \quad \forall x \in X \quad \max_i \tau_i^* \phi_i(x) \geq \max_i \tau_i^* \phi_i(x^*) \quad i=1, \dots, n$$

(108) montre que si x^* est Pareto-optimale pour le problème P, alors c'est

un équilibre social pour le problème $P(\tau^*)$, où τ^* est défini par (105). De plus, comme on a : $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \tau_i^* \phi_i(x^*) = \tau_j^* \phi_j(x^*)$, x^* est une meilleure solution optimale. En effet, x^* étant Pareto-optimale pour $\phi_1(\dots), \dots, \phi_n(\dots)$, elle est aussi Pareto-optimale pour $\tau_1^* \phi_1(\dots), \dots, \tau_n^* \phi_n(\dots)$.

b) Condition suffisante.

Soit x^* une meilleure solution optimale pour le problème $P(\tau)$. Alors, en vertu du théorème 4-2 (chap. 4) elle est Pareto-optimale pour les fonctionnelles $\tau_1 \phi_1(\dots), \dots, \tau_n \phi_n(\dots)$. Il s'ensuit qu'elle est Pareto-optimale pour les fonctionnelles $\phi_1(\dots), \dots, \phi_n(\dots)$.

Ce théorème nous permet de conclure que l'ensemble des solutions Pareto-optimales du problème P n'est autre que l'ensemble des meilleures solutions optimales obtenues pour les problèmes $P(\tau)$, lorsque $\tau \in R_+^n$, $\tau_i \neq 0$, $i=1, \dots, n$.

Pour chaque valeur de τ , celui-ci est un sous-ensemble de l'ensemble des points d'équilibre social, qui peut être obtenu facilement (théorèmes 4-1, 5-1, 5-3, 6-1 à 6-4). Nous nous proposons de définir un moyen d'écarter, parmi ces points d'équilibre, ceux qui ne correspondent pas à une meilleure solution optimale.

Soit X_τ^* l'ensemble des points d'équilibre social du problème $P(\tau)$.

$$X_\tau^* = \{x^* \in X; \max_i \tau_i \phi_i(x^*) \leq \max_i \tau_i \phi_i(x) \quad \forall x \in X, i=1, \dots, n\}$$

et définissons l'application suivante :

$$t : X \longrightarrow R_+^n$$

$$x \longmapsto t(x) = (t_1(x), \dots, t_n(x)) \text{ telle que :}$$

$$(109) \quad t_i(x) \phi_i(x) = t_j(x) \phi_j(x) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Le n -uple $t(x)$ est défini univoquement par l'introduction d'une contrainte supplémentaire, par exemple :

$$\forall x \in X \quad t_1(x) = 1, \quad \sum_{i=1}^n t_i(x) = 1, \quad \|t(x)\| = 1, \text{ etc..}$$

Lemme 7-2

$\forall \tau \in \mathbb{R}_+^n, \tau_i \neq 0, i=1, \dots, n$ on a :

$$(110) \quad X_\tau^* = \bigcup_{x^* \in X_\tau^*} X_{t(x^*)}^*$$

Démonstration : Nous allons montrer que :

$$\forall x^* \in X_\tau^*, \quad x^* \in X_{t(x^*)}^* \subset X_\tau^*$$

a) Supposons que $x^* \notin X_{t(x^*)}^*$. On aurait alors :

$$(111) \quad \forall \tilde{x} \in X_{t(x^*)}^* \quad \max_i t_i(x^*) \phi_i(\tilde{x}) < \max_i t_i(x^*) \phi_i(x^*)$$

et, en utilisant (109) on tire de (111) :

$$(112) \quad i=1, \dots, n \quad \phi_i(\tilde{x}) < \phi_i(x^*)$$

$$\text{d'où} \quad \max_i \tau_i \phi_i(\tilde{x}) < \max_i \tau_i \phi_i(x^*) \quad i=1, \dots, n$$

qui contredit le fait que $x^* \in X_\tau^*$.

b) Montrons à présent que $x^* \in X_\tau^* \implies X_{t(x^*)}^* \subset X_\tau^*$. On a :

$$(113) \quad \forall \tilde{x} \in X_{t(x^*)}^* \quad \max_i t_i(x^*) \phi_i(\tilde{x}) \leq \max_i t_i(x^*) \phi_i(x) \quad \forall x \in X$$

En écrivant cette relation pour $x = x^*$ et en utilisant (109), on obtient :

$$(114) \quad \forall \tilde{x} \in X_{t(x^*)}^*, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$t_i(x^*) \phi_i(\tilde{x}) \leq t_i(x^*) \phi_i(x^*)$$

et finalement :

$$(115) \quad \forall \tilde{x} \in X_{t(x^*)}^* \quad \max_i \tau_i \phi_i(\tilde{x}) \leq \max_i \tau_i \phi_i(x^*) \leq \max_i \tau_i \phi_i(x) \quad \forall x \in X$$

A partir de ce lemme, on étudie maintenant l'ensemble X_τ^* non pas comme un ensemble de points, mais comme la réunion des ensembles $X_{t(x^*)}^*$ correspondants. On peut alors énoncer les résultats suivants :

Lemme 7-3

$\forall \tau \in \mathbb{R}_+^n$, $\tau_i \neq 0$, $i=1, \dots, n$, $\forall x^* \in X_\tau^*$ si les fonctionnelles $\phi_1(\cdot), \dots, \phi_n(\cdot)$ sont constantes sur l'ensemble $X_{t(x^*)}^*$ alors tous les points de cet ensemble sont des solutions Pareto-optimales pour le problème P.

Démonstration : Soit \hat{x} un élément quelconque de $X_{t(x^*)}^*$. On a :

$$(116) \quad \max_i t_i(x^*) \phi_i(\hat{x}) \leq \max_i t_i(x^*) \phi_i(y) \quad \forall y \in X, i=1, \dots, n$$

Par ailleurs, puisque $\phi(x)$ est constant sur $X_{t(x^*)}^*$ on a :

$$(117) \quad t_i(x^*) \phi_i(\hat{x}) = t_j(x^*) \phi_j(\hat{x}) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

en effet, $\phi_i(\hat{x}) = \phi_i(x^*)$ $i=1, \dots, n$ et (109) est vraie.

On en déduit que, quel que soit \hat{x} appartenant à $X_{t(x^*)}^*$, c'est une meilleure solution optimale du problème P(τ) donc une solution Pareto-optimale du problème P.

Lemme 7-4

$\forall \tau \in \mathbb{R}_+^n$, $\tau_i \neq 0$, $i=1, \dots, n$, $\forall x^* \in X_\tau^*$, si les fonctionnelles $\phi_1(\cdot), \dots, \phi_n(\cdot)$ ne sont pas constantes sur l'ensemble $X_{t(x^*)}^*$, alors x^* n'est pas Pareto-optimale pour le problème P.

Démonstration : Puisque $\phi(x)$ n'est pas constante sur $X_{t(x^*)}^*$, on a :

$$(118) \quad \exists \bar{x} \in X_{t(x^*)}^* \text{ tel que } \max_i t_i(x^*) \phi_i(\bar{x}) = \alpha(x^*) \leq \max_i t_i(x^*) \phi_i(x) \quad \forall x \in X$$

avec :

$$(119) \quad \phi(\bar{x}) \neq \phi(x^*)$$

Prenons $x = x^*$ dans le membre de droite de (118) :

$$(120) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad t_i(x^*) \phi_i(\bar{x}) \leq \alpha(x^*) = t_j(x^*) \phi_j(x^*)$$

Compte-tenu de (119), il est impossible d'avoir n égalités dans (120). Donc :

$$(121) \quad \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } t_i(x^*) \phi_i(\bar{x}) < t_k(x^*) \phi_k(x^*) \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

ce qui prouve que x^* n'est pas une meilleure solution optimale du problème P($t(x^*)$).

De plus, à partir de (120) on obtient :

$$(122) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \phi_i(\bar{x}) \leq \frac{t_j(x^*)}{t_i(x^*)} \phi_j(x^*)$$

et, en utilisant la définition de $t(x)$ donnée par (109) :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \phi_i(\bar{x}) \leq \phi_i(x^*), \text{ l'une au moins de ces } n \text{ inégalités}$$

étant stricte, à cause de (119). On en déduit que x^* n'est pas une solution Pareto-optimale du problème P.

L'application du théorème 7-1 et des lemmes 7-3 et 7-4 permet directement de proposer l'algorithme suivant pour obtenir l'ensemble des solutions Pareto-optimales du problème P :

Etape 1 . Pour chaque vecteur τ , $\tau \in R_+^n$, $\tau_i \neq 0$, $i=1, \dots, n$, déterminer l'ensemble des points d'équilibre social du problème P(τ) :

$$X_\tau^* = \{x^* \in X; \max_i \tau_i \phi_i(x^*) \leq \max_i \tau_i \phi_i(x), \forall x \in X, i=1, \dots, n\}$$

Etape 2 . Tester la constance de $\phi(x)$ sur cet ensemble.

2.a) $\phi(x)$ est constant : X_τ^* est un sous-ensemble des solutions Pareto-optimales du problème P.

Passer au vecteur τ suivant et retourner à l'étape 1.

2.b) $\phi(x)$ n'est pas constant. Passer au vecteur τ suivant et retourner à l'étape 1.

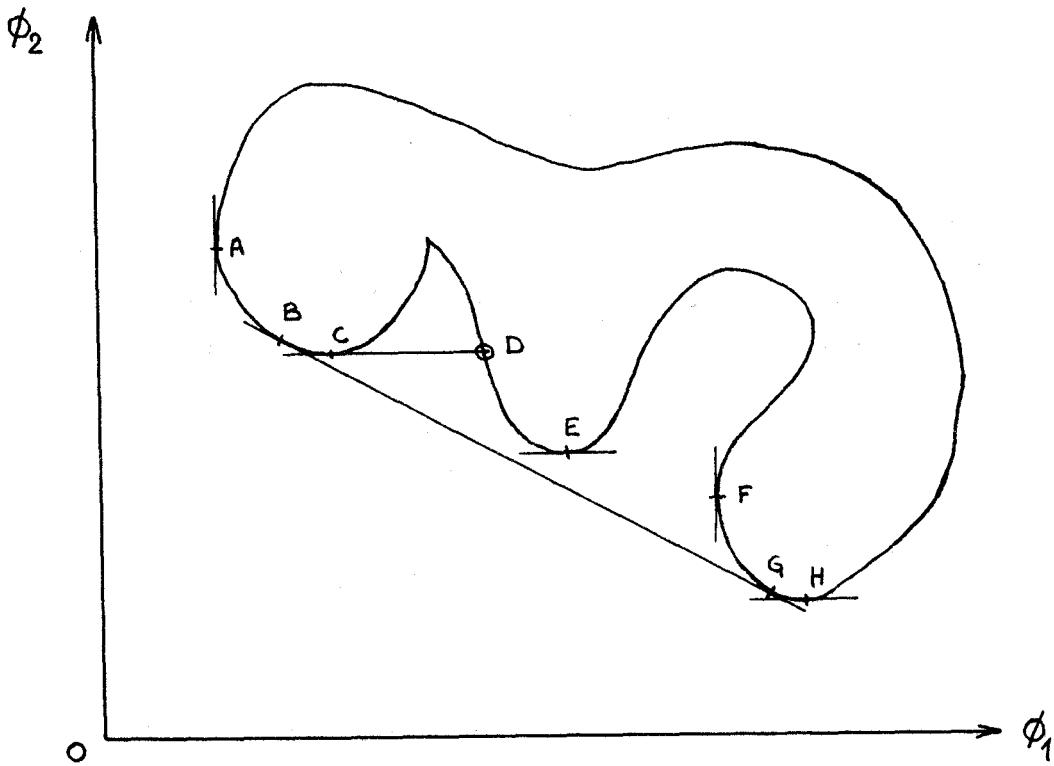
ILLUSTRATION DE LA METHODE PROPOSEE ET COMPARAISONS

La figure 1 représente, dans l'espace des coûts, l'ensemble des coûts réalisables pour un problème à deux critères, ϕ_1 et ϕ_2 .

L'ensemble des points de Pareto est constitué par la réunion des segments curvilignes :

$$\phi(X^*) = (A,C) \cup (D,E) \cup (F,H)$$

Comme on le voit sur la figure, le processus de scalarisation ne permet d'obtenir qu'un sous-ensemble de $\phi(X^*)$: $(A,B) \cup (G,H)$



- Figure - 1

La figure 2 permet de comparer la méthode proposée avec la méthode des contraintes égalité /17/. Dans cette dernière, on résout la famille de problèmes suivante :

$$\text{minimiser } \phi_n(x)$$

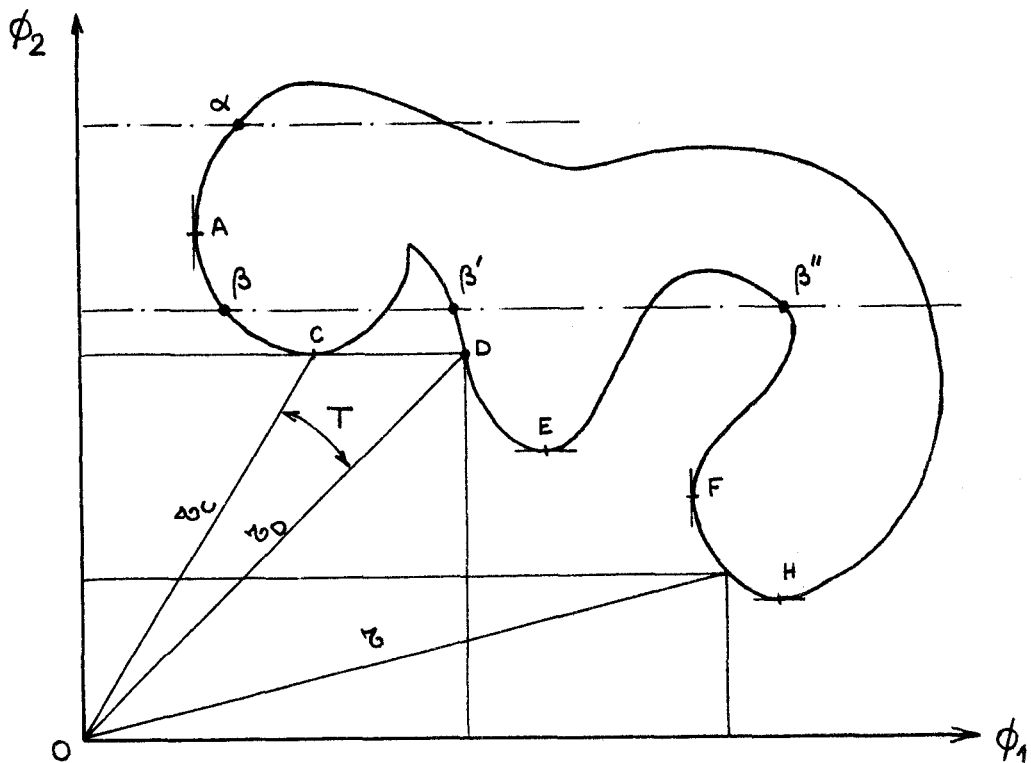
sous les contraintes : $x \in X$

$$\phi_i(x) = \alpha_i \quad i = 1, \dots, n-1$$

où les α_i , $i = 1, \dots, n-1$, sont des paramètres réels.

L'utilisation des conditions nécessaires d'optimalité conduit à l'obtention de points du type α , β' , β'' , qui ne sont pas Pareto-optimaux et doivent être écartés.

Dans l'approche proposée, tous les points de Pareto sont obtenus de façon unique comme solution d'un problème $P(\tau)$, sauf pour $\tau \in T =]\tau_C, \tau_D]$. Dans ce cas, on obtient les deux solutions C et D au problème $P_{(\tau)}$. Seul le point D doit être écarté, le test étant très simple, puisque le vecteur ϕ n'est pas constant sur $X_{\tau_D}^*$.



- Figure - 2

8 - CONCLUSION

On a présenté dans ce chapitre une solution de compromis particulière l'équilibre social, et on a montré son intérêt. Dans le cas d'un jeu à n personnes ou d'un problème à centre de décision unique, il peut être interprété comme un équilibre coopératif dans lequel l'équipe se préoccupe de la situation du joueur le plus défavorisé, ou tente de minimiser le critère le plus coûteux. On a donné les propriétés principales de l'équilibre ainsi défini ; elles permettent, dans la plupart des cas, le calcul des solutions. Cette méthode ne se limite pas au cas où les décisions admissibles sont des nombres réels, puisqu'aucune hypothèse n'a été faite sur l'ensemble des décisions admissibles X . De même, on peut envisager des coûts négatifs par changement d'origine dans l'espace des coûts.

Par ailleurs, la notion d'équilibre social est basée sur une structure de domination particulière : l'orthant négatif de l'espace des coûts, /7/ mais elle est applicable indépendamment du repère choisi, de sorte que toute structure de domination peut être étudiée par simple changement de base.

Une telle approche suppose de toute évidence que les n critères peuvent être mesurés à l'aide d'une unité commune. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, la notion d'équilibre social a permis de proposer un algorithme particulièrement simple pour la détermination de l'ensemble des points de Pareto du problème.

La comparaison de cette approche avec d'autres résultats récents /17/ met en évidence la très grande simplicité des tests à effectuer pour écarter les solutions non Pareto-optimales.

Une application particulièrement intéressante, concernant l'optimisation du plan de production d'un bien économique, a été suggérée dans l'exemple 2. On est ainsi conduit à définir un jeu de répartition de tâches et de ressources entre n joueurs, pour lequel on a donné des théorèmes permettant le calcul d'une solution optimale.

Cependant, celui-ci n'est pas toujours aussi simple. En effet, il est rare que le temps de réalisation d'une tâche soit connu explicitement en fonction des variables de décision, par exemple. Le chapitre suivant est consacré, dans ce sens, à la formulation et à la résolution du problème d'équilibre social en temps minimum, lorsque chaque joueur est caractérisé par un ensemble d'équations dynamiques.

- BIBLIOGRAPHIE -

- /1/ J.C. DIVERREZ, M. STAROSWIECKI: "An analytical procedure for the location problem and the determination of a transportation line" 3rd IFAC/IFIP/IFORS Symposium on Control in Transportation Systems, Columbus, Ohio, Août 1976.
- /2/ Z. BUBNICKI, M. STAROSWIECKI: "Optimization of the complex of operations as some example of a special polyoptimization problem" 4th Internat. Conf. on Systems Science, Wroclaw, Septembre 1977.
- /3/ J. VON NEUMANN, O. MORGENSTERN: "Theory of games and economic behaviour" Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1947.
- /4/ A. BLAQUIERE, F. GERARD, G. LEITMANN: "Quantitative and qualitative games" Academic Press, New York, 1969.
- /5/ L.S. SHAPLEY: "A value for N-person games" Dans H.W. Kuhn, A.W. Tucker (ed.): Contributions to the theory of games, II, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1953.
- /6/ A.M. GEOFFRION: "Proper efficiency and the theory of vector maximization" Jour. Math. Analysis and Applications, Vol. 22, 1968.
- /7/ P.L. YU: "Cone convexity, Cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives" Univ. of Rochester, Center for System Science, Rapport n° 72-02, 1972.
- /8/ P.L. YU : "Introduction to domination structures in multicriteria decision problems" Univ. of Rochester, Graduate School of Management, System Analysis Program, Series n° f7219, 1972.
- /9/ P.L. YU: "A class of solutions for group decision problems" Management Science, Vol. 19, 1973.
- /10/ S.C. HUANG: "Note on the mean-square strategy for vector-valued objective functions" Jour. Optimiz. Theory Applic., Vol. 9, n° 5, 1972.

- /11/ M. SALUKVADZE: "On the existence of solutions in problems of optimization under vector-valued criteria" Jour. Optimiz. Theory Applic., Vol. 13, n° 2, 1974.
- /12/ A. CHARNES, W.W. COOPER: "Management models and industrial applications of linear programming" Vol. I et II, J. Wiley and Sons, New York, 1971.
- /13/ P.L. YU, G. LEITMANN: "Compromise solutions, domination structures and Salukvadze's solution" Jour. Optimiz. Theory Applic., Vol. 13, n° 3, 1974.
- /14/ J.P. AUBIN: "Cours d'optimisation" 3^{ème} Cycle de Mathématiques de la décision, Univ. Paris 9.
- /15/ D.G. LUENBERGER: "Optimization by vector space methods" J. Wiley and Sons, New York, 1969.
- /16/ M. STAROSWIECKI: "Solution of multicriteria decision problems by means of a particular cooperative equilibrium" Internat. Conf. on Cybernetics and Society, Tokyo-Kyoto, Novembre 1978.
- /17/ J.G. LIN: "Multiple objective problems: Pareto-optimal solutions by method of proper equality constraints" IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-21, n° 5, Octobre 1976.
- /18/ M. STAROSWIECKI, J.C. DIVERREZ: "Un problème de planification: implantation optimale de centres de production dans un espace économique" 2^d Polish National Conf. on Systems Science, Wroclaw, Septembre 1975.

CHAPITRE 5

EQUILIBRE SOCIAL EN TEMPS MINIMUM

1- INTRODUCTION

2- FORMULATION DU PROBLEME

3- REDUCTION A UN PROBLEME EN TEMPS MINIMUM

4- CAS OU LA FONCTIONNELLE DE CHAQUE JOUEUR NE FAIT PAS INTERVENIR SON ETAT

4-1. Caractérisation des solutions

4-2. Problème d'allocation de tâches et de ressources

4-2.1 Allocation de ressources

4-2.2 Allocation simultanée des tâches et des ressources

5- SYSTEMES LINEAIRES

5-1. Systèmes linéaires vis-à-vis de l'état

5-2. Systèmes linéaires vis-à-vis de l'état et de la commande

5-2.1 Allocation de ressources

5-2.2 Allocation simultanée des tâches et des ressources

6- CONCLUSION

CHAPITRE CINQ

EQUILIBRE SOCIAL EN TEMPS MINIMUM

1 - INTRODUCTION

Les problèmes en temps minimum constituent une classe importante des problèmes de commande optimale, tant par la signification du critère d'optimalité que par la spécificité des commandes auxquelles ils conduisent.

On a vu, au chapitre précédent, le grand intérêt de la notion d'équilibre social dans les problèmes économiques d'allocation de tâches et de ressources : la réalisation d'un programme de travail en un temps minimum, compte tenu des ressources disponibles, a été présentée comme un exemple d'un tel problème. Il est rare, cependant, que le temps de réalisation d'une tâche soit connu de façon explicite; dans la plupart des cas, c'est une fonctionnelle faisant intervenir la dynamique du système commandé.

Une version simple de ce problème a été introduite, à l'origine, par BURKOV/1/, LERNER et TEJMAN /2/, et BUBNICKI /3/. Certains résultats ont été présentés /4/ /5/. A partir de la notion d'équilibre social, nous nous proposons de formuler et de résoudre, au moins en partie, ce problème dans un cadre général /6/.

2 - FORMULATION DU PROBLEME

On considère n systèmes dynamiques (ou joueurs) décrits par les équations d'état :

$$(1) \quad i=1, \dots, n \quad \dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i(t), t)$$

$x_i(t)$: vecteur d'état du système n° i à l'instant t.

$u_i(t)$: vecteur de commande du système n° i à l'instant t.

On prend l'instant initial $t_0 = 0$ comme origine des temps, et on suppose que les conditions initiales de chaque système sont données :

$$(2) \quad i=1, \dots, n \quad x_i(0) = x_i^0$$

Le vecteur des fonctions de commande $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est défini sur l'intervalle $[0, \infty[$, continu par morceaux, et tel que :

$$(3) \quad \forall t \in [0, \infty[\quad u(t) \in \Omega$$

Ω : ensemble fermé d'un espace vectoriel E_r , définissant les commandes admissibles.

A tout nombre réel positif, θ_i , on associe, pour chaque joueur, la fonctionnelle :

$$(4) \quad \Phi_i(\theta_i, u_i) = \int_0^{\theta_i} \phi_i(x_i(\sigma), u_i(\sigma), \sigma) d\sigma$$

A tout vecteur de fonctions de commande admissible, on associe le vecteur $\tau \in \mathbb{R}_+^n$ défini de la façon suivante :

$$(5) \quad \forall i \quad \tau_i \text{ est la plus petite solution positive de l'équation :}$$

$$\Phi_i(\tau_i, u_i) = M_i$$

où le vecteur $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$ est donné, $M \in \mathbb{R}^n$.

τ_i apparaît ainsi comme le temps mis par le système n° i à réaliser son objectif défini par la valeur M_i de la fonctionnelle $\Phi_i(\theta_i, u_i)$, si on lui applique la commande admissible u_i .

Le problème d'équilibre social en temps minimum est alors défini de la façon suivante :

$$(6) \quad \min_u \quad \max_i \tau_i$$

sous les contraintes (1) à (5)

C'est un problème d'équilibre social dans lequel le coût supporté par chaque joueur est le temps qu'il met à réaliser l'objectif qui lui a été assigné.

Les solutions optimales sont définies à partir de (6). De deux solutions optimales, on définit la meilleure comme au chapitre précédent.

Remarque :

La relation (4) ne donne qu'une définition possible des fonctionnelles $\Phi_i(\theta_i, u_i)$. Celle-ci peut varier suivant le type de problème considéré.

3 - REDUCTION A UN PROBLEME EN TEMPS MINIMUM

La difficulté du problème envisagé réside dans le fait que l'ensemble des joueurs ne peut en général pas être considéré globalement, tout au long de la partie. En effet, dès qu'un joueur a réalisé son objectif, il abandonne la partie et n'intervient plus dans la suite du jeu.

Un cas particulier intéressant, tant en théorie qu'en pratique, est celui où l'ensemble des joueurs reste le même sur l'horizon $[0, \max_i \tau_i]$. Dans ces conditions, l'équilibre social est donné par la résolution d'un problème en temps minimum de type classique.

Nous donnerons tout d'abord certaines propriétés générales des solutions optimales puis, dans le cas où les fonctionnelles $\Phi_i(\theta_i, u_i)$ sont données par (4), un théorème de réduction à un problème en temps minimum.

Théorème 3-1

Si, pour tout indice i , les fonctionnelles $\Phi_i(\theta_i, u_i)$ sont continues par rapport à θ_i et telles que :

$$(7) \quad \forall i \quad \Phi_i(0, u_i) \leq M_i \quad \forall u_i \text{ admissible}$$

alors, une condition nécessaire pour que le couple (τ^*, u^*) définisse une meilleure solution optimale est que le vecteur :

$$\Phi(\tau^*, u^*) = (\Phi_1(\tau_1^*, u_1^*), \dots, \Phi_n(\tau_n^*, u_n^*))$$

soit un point de Pareto sur l'ensemble des commandes admissibles :

$$(8) \quad \forall u \in \Omega \quad \Phi(\tau^*, u) \geq \Phi(\tau^*, u^*) \implies \Phi(\tau^*, u) = \Phi(\tau^*, u^*)$$

Démonstration :

Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors on a :

$$(9) \quad \exists \bar{u} \in \Omega \quad \text{tel que } \forall i \quad \phi_i(\tau_i^*, \bar{u}_i) \geq \phi_i(\tau_i^*, u_i^*)$$

avec au moins une inégalité stricte.

D'après (7) et la continuité des fonctionnelles $\phi_i(\cdot)$ par rapport à θ_i , on en déduit :

$$(10) \quad \exists I_0 \text{ tel que } \forall i_0 \in I_0 \quad \exists \bar{\tau}_{i_0} < \tau_{i_0}^* \text{ vérifiant :}$$

$$\phi_{i_0}(\bar{\tau}_{i_0}, \bar{u}_{i_0}) = M_{i_0}$$

$$\phi_i(\tau_i^*, \bar{u}_i) = \phi_i(\tau_i^*, u_i^*) = M_i \quad \forall i \notin I_0$$

ce qui contredit le fait que τ^* est un vecteur correspondant à une meilleure solution optimale.

Définissons l'ensemble suivant :

$$(11) \quad \Phi(\theta, \Omega) = \{ \psi; \exists u \in \Omega \text{ tel que } \psi = \Phi(\theta, u) \}$$

où $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ est un vecteur donné de R_+^n

On tire de /7/ le lemme et le théorème suivants :

Lemme 3-1

Pour un vecteur θ donné, si l'on a :

$$(12) \quad \forall u^1, u^2 \in \Omega, \forall \lambda \in [0, 1], \exists v \in \Omega \text{ tel que :}$$

$$\Phi(\theta, v) \geq \lambda \Phi(\theta, u^1) + (1-\lambda) \Phi(\theta, u^2)$$

alors, l'ensemble $\Phi(\theta, \Omega) - R_+^n$ est convexe.

Démonstration :

$$(13) \quad \Phi(\theta, \Omega) - R_+^n = \{ \varphi; \exists v \in \Omega, \exists \gamma \in R_+^n, \varphi = \Phi(\theta, v) - \gamma \}$$

D'après l'hypothèse, on a :

$$(14) \quad \forall u^1, u^2 \in \Omega, \forall \lambda \in [0, 1], \exists v \in \Omega, \exists \gamma \in R_+^n \text{ tels que :}$$

$$\Phi(\theta, v) - \gamma = \lambda \Phi(\theta, u^1) + (1-\lambda) \Phi(\theta, u^2)$$

d'où la convexité de $\Phi(\theta, \Omega) - R_+^n$.

Théorème 3-2

Si l'ensemble $\Phi(\theta, \Omega) - R_+^n$ est convexe, il existe un vecteur $\alpha \in R_+^n$, non nul, tel que si u^* est Pareto-optimal, on ait :

$$(15) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(\theta_i, u_i^*) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(\theta_i, u_i) \quad \forall u \in \Omega$$

Démonstration : u^* est Pareto-optimal : les deux ensembles :

$$\Phi(\theta, \Omega) - R_+^n$$

$$\{ \Phi(\theta, u^*) \} + R_+^n$$

ne peuvent avoir que u^* comme élément commun. Le résultat est une conséquence de la convexité de ces deux ensembles et du théorème de séparation.

Le théorème 3-1 donne une condition nécessaire vérifiée par une meilleure solution optimale. Sous les hypothèses du théorème 3-2, la recherche de celle-ci peut être abordée en utilisant le processus de scalarisation. Dans le cas où les fonctionnelles $\Phi_i(\cdot)$ sont données par (4) :

$$\Phi_i(\theta_i, u_i) = \int_0^{\theta_i} \varphi_i(x_i(\sigma), u_i(\sigma), \sigma) d\sigma$$

nous allons montrer que, sous certaines conditions, la solution est donnée directement par celle d'un problème de commande optimale en temps minimum.

Théorème 3-3

Si, pour tout indice i , on a :

$$(16) \quad \forall u \in \Omega \quad \exists \tilde{u}_i \text{ tel que :}$$

- i) $(u_1, \dots, u_{i-1}, \tilde{u}_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \in \Omega$
- ii) $\varphi_i(x_i, \tilde{u}_i, t) \geq 0 \quad \forall x_i, \forall t$

alors la solution du problème d'équilibre social en temps minimum est donnée par la solution du problème de commande optimale :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min J = \int_0^\theta dt \\ u \in \Omega \\ \text{sous : } \begin{array}{ll} \dot{x}_i = f_i(x_i, u_i, t) & x_i(0) = x_i^0 \quad x_i(\theta) \text{ libre} \\ \dot{y}_i = \varphi_i(x_i, u_i, t) & y_i(0) = 0 \quad y_i(\theta) \geq M_i \end{array} \end{array} \right.$$

Démonstration : Soit θ^* la solution du problème (17), et soit $(\tau_1^*, \dots, \tau_n^*)$, (u_1^*, \dots, u_n^*) la solution du problème d'équilibre social en temps minimum. On a, par définition :

$$(18) \quad \max_i \tau_i^* \leq \theta^*$$

Nous allons montrer que cette inégalité ne peut pas être stricte. En effet, si celà était le cas, on pourrait définir, pour tout instant θ tel que :

$$(19) \quad \max_i \tau_i^* \leq \theta < \theta^*$$

les fonctions de commande :

$$(20) \quad \bar{u} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{u}_i(t) = u_i^*(t) & \forall t \in [0, \tau_i^* [\\ \bar{u}_i(t) = \tilde{u}_i(t) & \forall t \in [\tau_i^*, \theta] \end{array} \right.$$

où \bar{u}_i vérifie les relations (16).

Les trajectoires correspondantes seraient :

$$(21) \quad \bar{x} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{x}_i(t) = x_i^*(t) & \forall t \in [0, \tau_i^* [\\ \bar{x}_i(t) = \tilde{x}_i(t) \text{ définie par (22), } & \forall t \in [\tau_i^*, \theta] \end{array} \right.$$

$$(22) \quad \frac{d\tilde{x}_i}{dt} = f_i(\tilde{x}_i, \tilde{u}_i, t) \quad \text{avec} \quad \tilde{x}_i(\tau_i^*) = x_i^*(\tau_i^*)$$

On aurait alors :

$$(23) \quad i=1, \dots, n \quad \Phi_i(\theta, \bar{u}_i) = \int_0^{\tau_i^*} \varphi_i(x_i^*, u_i^*, t) dt + \int_{\tau_i^*}^{\theta} \varphi_i(\tilde{x}_i, \tilde{u}_i, t) dt$$

d'où, par l'hypothèse :

$$(24) \quad i=1, \dots, n \quad \Phi_i(\theta, \bar{u}_i) \geq M_i$$

ce qui contredit le fait que θ^* est solution du problème de commande optimale en temps minimum défini par (17).

4 - CAS OU LA FONCTIONNELLE DE CHAQUE JOUEUR NE FAIT PAS INTERVENIR SON ETAT.

Un cas particulier très important en pratique est celui dans lequel la fonctionnelle associée à chaque joueur ne fait pas intervenir son état. La formulation du problème est alors la suivante :

$$(25) \quad \dot{x}_i = f_i(x_i, u_i, t) \quad x_i(0) = x_i^0 \quad i=1, \dots, n$$

$$(26) \quad u \in \Omega \quad \text{on suppose, de plus : } 0 \in \Omega$$

$$(27) \quad \forall \theta_i > 0 \quad \Phi_i(\theta_i, u_i) = \int_0^{\theta_i} \varphi_i(u_i(\sigma)) d\sigma \quad i=1, \dots, n$$

$$(28) \quad \Phi_i(\tau_i, u_i) = M_i \quad \Phi_i(\sigma, u_i) \neq M_i \quad \forall \sigma \in [0, \tau_i[$$

On suppose, de plus, que l'on a :

$$(29) \quad \varphi_i(0) = 0 \quad i=1, \dots, n$$

Cette version simple du problème a été introduite à l'origine dans le cadre de l'optimisation d'un ensemble d'opérations économiques (allocation de tâches et de ressources). Certaines méthodes de résolution ont été proposées /4/ /5/, et nous nous proposons de montrer comment les considérations présentées au paragraphe précédent permettent d'obtenir les solutions dans un cadre plus général.

Nous remarquerons tout d'abord que, pour ce problème particulier, le théorème 3-3 fournit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4-1

Si, pour tout indice i , on a :

$$(30) \quad \forall u \in \Omega \quad (u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) \in \Omega$$

alors la solution du problème d'équilibre social en temps minimum est donnée par la solution du problème de commande optimale :

$$(31) \quad \min_{u \in \Omega} J = \int_0^\theta dt$$

sous : $\dot{y}_i = \varphi_i(u_i) \quad y_i(0) = 0 \quad y_i(\theta) = M_i$

Démonstration : Elle est identique à celle du théorème 3-3, en prenant :

$$\tilde{u}_i(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [\tau_i^*, \theta]$$

4-1-Characterisation des solutions.

Le principe du maximum appliqué au problème (31) fournit les conditions nécessaires d'optimalité (u continue par morceaux, Ω compact).

Le hamiltonien s'écrit :

$$(32) \quad H = -1 + \sum_{i=1}^n p_i(t) \varphi_i(u_i(t))$$

et, en indiquant par un * une solution optimale, on obtient :

$$(33) \quad \begin{aligned} \text{a) } & \dot{y}_i^* = \varphi_i(u_i^*) \\ \text{b) } & \dot{p}_i^* = 0 \Rightarrow p_i^*(t) = p_i^* \quad \forall t \in [0, \theta^*] \\ \text{c) } & \sum_{i=1}^n p_i^* \varphi_i(u_i^*(t)) = \max_{u(t) \in \Omega} \sum_{i=1}^n p_i^* \varphi_i(u_i(t)) \quad \forall t \end{aligned}$$

A ce système sont associées les conditions aux limites :

$$(34) \quad \begin{aligned} \text{a) } & y_i^*(0) = 0 \\ \text{b) } & y_i^*(\theta^*) = M_i \\ \text{c) } & -1 + \sum_{i=1}^n p_i^* \varphi_i(u_i^*(\theta^*)) = 0 \end{aligned}$$

Le temps n'apparaît pas de façon explicite dans le hamiltonien, de sorte qu'une intégrale première du système est, en utilisant (34-c), donnée par :

$$(35) \quad \sum_{i=1}^n P_i^* \varphi_i(u_i^*(t)) - 1 = 0 \quad \forall t \in [0, \theta^*]$$

On obtient alors, en intégrant (35) entre 0 et θ^* , et en utilisant les conditions aux limites (34-a) et (34-b) :

$$(36) \quad \sum_{i=1}^n P_i^* M_i = \theta^*$$

4-2. Problème d'allocation de tâches et de ressources.

De nombreux problèmes de décision, d'ordre technique où économique, peuvent se ramener à la formulation suivante : une opération donnée peut être réalisée indifféremment par n processus, où agents. On dispose d'autre part d'un montant de ressources donné pour mener à bien cette opération. Le problème est de répartir les tâches et (où) les ressources de façon à réaliser globalement l'opération en un temps minimum.

Chaque processus est supposé décrit par un modèle de la forme :

$$(37) \quad \dot{y}_i(t) = \varphi_i(u_i(t)) \quad i = 1, \dots, n$$

où $u_i(t)$ est le montant des ressources allouées, à l'instant t, au processus n° i. On a :

$$(38) \quad \text{a) } i = 1, \dots, n \quad u_i(t) \geq 0 \quad \forall t$$

$$\text{b) } \forall t \quad \sum_{i=1}^n u_i(t) \leq u_0$$

$$(39) \quad \varphi_i(.) : \text{ fonction continue, non décroissante, telle que } \varphi_i(0) = 0.$$

Les conditions initiale et finale sont :

$$(40) \quad \text{a) } y_i(0) = 0$$

$$\text{b) } y_i(\theta_i) = M_i$$

où M_i représente la tâche affectée au processus n° i, $M_i \geq 0$, θ_i est le temps

mis pour la réaliser. On a :

$$(41) \quad \sum_{i=1}^n M_i = M_0$$

où M_0 est la tâche globale.

Le temps mis pour réaliser la tâche globale est :

$$(42) \quad \theta^* = \max_i \theta_i$$

Le problème consiste à définir la répartition des tâches (M_1, \dots, M_n) et des ressources (u_1, \dots, u_n) minimisant le temps de réalisation θ^* .

On constate immédiatement que le problème d'allocation de ressources (M_i fixés) est celui défini au paragraphe 4, sa solution est donnée par celle du problème de commande optimale (31). Le problème d'allocation des ressources et de répartition des tâches est alors traité en résolvant (31) avec des conditions finales libres, la variété finale est définie dans ce cas par (41).

4-2-1. Allocation de ressources.

Les résultats obtenus précédemment (cf. §4-1) conduisent à caractériser les solutions de la façon suivante : $\exists \alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ tel que :

$$(43) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \varphi_i(u_i^*(t)) = \max_{u(t) \in \Omega} \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \varphi_i(u_i(t))$$

$$(44) \quad \theta^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* M_i$$

On a, par ailleurs :

$$i) \quad \varphi_i(\xi_i) \geq 0 \quad \forall \xi \in \Omega$$

$$ii) \quad \forall i \quad \exists t \in [0, \theta^*] \quad \text{tel que} \quad \varphi_i(u_i^*(t)) > 0, \text{ si } M_i > 0$$

En effet, dans le cas contraire, les conditions aux limites (40) ne seraient pas vérifiées.

Les fonctions $\varphi_i(\cdot)$ étant non décroissantes, on en déduit :

$$(45) \quad \alpha^* \in \mathbb{R}_+^n - \{0\}$$

La connaissance du vecteur α^* suffit à déterminer l'ensemble des commandes admissibles vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité. Nous allons à présent caractériser ce vecteur de façon plus précise. Définissons les ensembles suivants :

$$(46) \quad \Psi = \{ \psi; \exists v \in \Omega \text{ tel que } \psi = \varphi(v) = (\varphi_1(v_1), \dots, \varphi_n(v_n)) \}$$

$$(47) \quad \Psi_\alpha = \{ \psi_\alpha; \psi_\alpha \in \Psi, \langle \alpha, \psi_\alpha \rangle \geq \langle \alpha, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \Psi \} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^n - \{0\}$$

$$(48) \quad \xi = \{ \rho M; \rho \geq 0 \} \quad M = (M_1, \dots, M_n)$$

et soit $[\Psi_\alpha]$ la fermeture convexe de Ψ_α . On a :

$$(49) \quad [\Psi_\alpha] = \{ \psi; \exists K \text{ tel que } \forall k \in K, \psi_\alpha^k \in \Psi_\alpha, \psi = \sum_{k \in K} p_k \psi_\alpha^k \}$$

$$\text{avec : } p_k \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k \in K} p_k = 1$$

Proposition 4-1

Si l'intersection $\xi \cap [\Psi_\alpha]$ est non vide, il existe q vecteurs

$\psi_\alpha^k \in \Psi_\alpha$ ($q \leq n$) et q intervalles de temps θ_k tels que la commande :

$$(50) \quad \varphi(u^*(t)) \equiv \psi_\alpha^k \quad \forall t \in \theta_k$$

vérifie les conditions nécessaires d'optimalité.

Démonstration : Soit $\psi^* \in \xi \cap [\Psi_\alpha]$. On a :

$$(51) \quad \psi^* = \rho^* M$$

$$(52) \quad \exists K \text{ tel que } \psi^* = \sum_{k \in K} p_k \psi_\alpha^k, \quad \psi_\alpha^k \in \Psi_\alpha$$

et : $q = \text{card } K \leq n$

ψ^* est l'intersection de la demi-droite ξ avec l'ensemble convexe $[\Psi_\alpha]$

contenu dans l'hyperplan :

$$(53) \quad H_\alpha = \{ \psi; \langle \alpha, \psi \rangle = \langle \alpha, \psi_\alpha \rangle, \psi_\alpha \in \Psi_\alpha \}$$

Si ce point n'est pas unique, on prendra ψ^* tel que ρ^* soit maximum. Dans ces conditions, compte-tenu des hypothèses sur les fonctions $\varphi_i(\cdot)$, et du fait que $\alpha \in \mathbb{R}_+^n - \{0\}$, on aura $\rho^* > 0$.

On pose alors :

$$(54) \quad \theta^* = \frac{1}{\rho^*} \quad \theta_k = p_k \theta^*$$

Soit u^* une commande définie par :

$$(55) \quad \varphi(u^*(t)) = \psi_\alpha^k \quad \text{pendant un temps } \theta_k \quad (k \in K)$$

On a :

$$(56) \quad \forall t \in [0, \theta^*] \quad \langle \alpha, \varphi(u^*(t)) \rangle \geq \langle \alpha, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \Psi$$

$$(57) \quad Y(\theta^*) = \int_0^{\theta^*} \varphi(u^*(t)) dt = \sum_{k \in K} \theta_k \psi_\alpha^k$$

d'où, en tenant compte de (54) :

$$(58) \quad Y(\theta^*) = \frac{1}{\rho^*} \psi^* = M$$

ce qui montre que u^* vérifie les conditions nécessaires d'optimalité associées au vecteur α .

Proposition 4-2

Inversement, si $u^*(t)$ est un vecteur de commande optimal, et si α est le vecteur adjoint correspondant, l'intersection $\xi \cap [\Psi_\alpha]$ n'est pas vide.

Démonstration : Soit $u^*(t)$ un vecteur de commande optimal, et α le vecteur adjoint correspondant. On a :

$$(59) \quad \langle \alpha, \varphi(u^*(t)) \rangle \geq \langle \alpha, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \Psi, \forall t \in [0, \theta^*]$$

d'où :

$$(60) \quad \langle \alpha, \varphi(u^*(t)) \rangle = \langle \alpha, \psi_\alpha \rangle \quad \forall \psi_\alpha \in \Psi_\alpha$$

et, en particulier :

$$(61) \quad \langle \alpha, \varphi(u^*(t)) \rangle = \langle \alpha, \psi_\alpha^k \rangle \quad \forall k \in K$$

On en déduit l'existence de q coefficients $p_k(t)$ tels que :

$$(62) \quad \forall t \in [0, \theta^*] \quad p_k(t) \geq 0 \quad \sum_{k \in K} p_k(t) = 1$$

$$\varphi(u^*(t)) = \sum_{k \in K} p_k(t) \psi_\alpha^k$$

On a :

$$(63) \quad M = \int_0^{\theta^*} \varphi(u^*(t)) dt = \sum_{k \in K} \left(\int_0^{\theta^*} p_k(t) dt \right) \psi_\alpha^k = \sum_{k \in K} \theta_k \psi_\alpha^k$$

avec : $\theta_k \geq 0$ $\sum_{k \in K} \theta_k = \theta^*$

d'où, en posant : $q_k = \frac{\theta_k}{\theta^*}$

(64) $\sum_{k \in K} q_k \psi_\alpha^k = \frac{1}{\theta^*} M$

ce qui montre la non vacuité de l'ensemble $\xi \cap [\Psi_\alpha]$.

Proposition 4-3

Si l'intersection $\xi \cap [\Psi_\alpha]$ est vide, α ne peut pas être un vecteur adjoint correspondant à une solution optimale.

Démonstration : Une commande optimale doit appartenir à Ψ_α , (62) doit donc être vérifiée. La vacuité de l'intersection $\xi \cap [\Psi_\alpha]$ montre que, dans ce cas, les conditions aux limites $y(\theta) = M$ ne sont vraies pour aucun θ positif.

Proposition 4-4

Soit A l'ensemble des vecteurs α tels que l'intersection $\xi \cap [\Psi_\alpha]$ ne soit pas vide. On a :

(65) $\forall \alpha \in A \quad \rho_\alpha^* = \text{constante}$

Démonstration : Soient ψ_1^* et ψ_2^* deux intersections de ξ avec $[\Psi_{\alpha_1}]$ et $[\Psi_{\alpha_2}]$ respectivement. On a :

(66) $\psi_1^* = \rho_1^* M \quad \psi_2^* = \rho_2^* M$

D'autre part :

(67) $\langle \alpha_1, \psi_1^* \rangle \geq \langle \alpha_1, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \Psi$

d'où :

(68) $\langle \alpha_1, \psi_1^* \rangle \geq \langle \alpha_1, \psi_2^k \rangle \quad \forall \psi_2^k \in \Psi_{\alpha_2}$

et, par conséquent :

(69) $\langle \alpha_1, \psi_1^* \rangle \geq \sum_{k \in K_2} p_k^2 \psi_2^k = \psi_2^*$

Pour la même raison, on a :

(70) $\langle \alpha_2, \psi_2^* \rangle \geq \sum_{k \in K_1} p_k^1 \psi_1^k = \psi_1^*$

On en déduit :

$$(71) \quad (\rho_1^* - \rho_2^*) \langle \alpha_{1,M} \rangle \geq 0$$

$$(72) \quad (\rho_2^* - \rho_1^*) \langle \alpha_{2,M} \rangle \geq 0$$

d'où :

$$(73) \quad \rho_1^* = \rho_2^*$$

en effet, $\langle \alpha_{1,M} \rangle$ et $\langle \alpha_{2,M} \rangle$ sont tous deux strictement positifs.

On voit ainsi que, pour tout vecteur α tel que l'intersection $\xi \cap [\Psi_\alpha]$ ne soit pas vide, on peut définir un ensemble de commandes U_α^* vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité, et conduisant toutes au même temps de réalisation θ^* . D'autre part, un vecteur α ne vérifiant pas la propriété ci-dessus ne peut pas être un vecteur adjoint du problème (31). On peut alors rechercher une solution optimale en étudiant l'intersection de ξ avec la réunion des ensembles $[\Psi_\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^n - \{0\}$.

Soit $[\Psi]$ la fermeture convexe de l'ensemble Ψ . Compte-tenu des hypothèses sur les fonctions $\varphi_i(\cdot)$, on a :

$$(74) \quad [\Psi] = \{ \psi ; \langle \alpha, \psi \rangle \leq \langle \alpha, \psi_\alpha \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^n - \{0\} \}$$

Soit $j(z)$ la jauge de $[\Psi]$ par rapport à 0, /8/. On a :

$$(75) \quad j(z) = \begin{cases} \inf \{ t ; t > 0, z \in t[\Psi] \} & \text{si } z \in t[\Psi] \text{ pour un} \\ & \text{nombre } t > 0 \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 4-1

Soit θ^* la solution optimale. On a :

$$(76) \quad \theta^* = j(M)$$

Démonstration : Compte-tenu des hypothèses sur les fonctions $\varphi_i(\cdot)$, on a :

$$(77) \quad j(M) < +\infty$$

$$j(M) = \min \{ t ; t > 0, M \in t[\Psi] \} = t^*$$

$$(78) \quad M \in t[\Psi] \Rightarrow \exists K \text{ tel que } M = t \sum_{k \in K} p_k \psi^k \quad \text{avec : } \psi^k \in \Psi$$

On a donc :

$$(79) \quad \langle \alpha^*, M \rangle = t \sum_{k \in K} p_k \langle \alpha^*, \psi^k \rangle$$

et, puisque t^* est minimum :

$$(80) \quad \sum_{k \in K} P_k \langle \alpha^*, \psi^k \rangle = \max_{\psi \in \Psi} \langle \alpha^*, \psi \rangle \Rightarrow M \in t^*[\Psi_{\alpha^*}]$$

On en déduit : $\theta^* = t^*$

Les considérations précédentes permettent de déterminer directement une solution optimale lorsque les fonctions $\varphi_i(\cdot)$ ont des propriétés particulières. On a :

Théorème 4-2

Si les fonctions $\varphi_i(\cdot)$ sont concaves, la solution définie par :

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(u_i^*(t)) = \text{constante} = \psi_i^* \quad \forall t \in [0, \theta^*] \\ \theta^* = \frac{M_i}{\psi_i^*} \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n u_i^* = u_0 \end{array} \right.$$

est optimale.

Démonstration : Compte-tenu des hypothèses sur les fonctions $\varphi_i(\cdot)$, l'ensemble Ψ est convexe. Comme il est fermé, il coïncide avec sa fermeture convexe $[\Psi]$.

Le résultat est une application directe du théorème 4-1. On peut remarquer que, lorsque les fonctions $\varphi_i(\cdot)$ sont strictement concaves, la solution optimale est unique.

Théorème 4-3

Si les fonctions $\varphi_i(\cdot)$ sont convexes, la solution définie par les couples (θ_k^*, ψ_k^*) , $k = 1, \dots, n$, tels que :

$$(82) \quad \begin{array}{l} \psi_k^* = \varphi_k(u_0) \\ \theta_k^* = \frac{M_k}{\varphi_k(u_0)} \end{array} \quad \theta^* = \sum_{i=1}^n \theta_k^*$$

est optimale.

Démonstration : Compte-tenu des hypothèses sur les fonctions $\varphi_i(\cdot)$, l'ensemble Ψ_{α} est constitué, $\forall \alpha \in R_+^n - \{0\}$, par un nombre fini de points de la forme :

$$(83) \quad \psi_\alpha \in \Psi_\alpha \Rightarrow \psi_\alpha = (0, \dots, 0, \varphi_k(u_0), 0, \dots, 0)$$

La solution optimale est donc donnée par l'intersection de la demi-droite ξ avec l'ensemble $[\Psi_{\alpha^*}]$ contenant tous les points de la forme (83).

L'ensemble des vecteurs ψ_{α^*} forme une base de R^n , la solution est donnée par la succession des commandes individuelles de chacun des sous-systèmes et comporte donc n commutations.

Elle n'est pas unique, en effet, quel que soit l'ordre des commutations, θ^* reste inchangé. Par contre, on voit qu'il est possible de définir l'ordre des commutations conduisant à une meilleure solution optimale. De façon évidente on a, en numérotant les sous-systèmes dans l'ordre où ils doivent être commandés :

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_n^* = \max_i \theta_i^* \\ \theta_{n-1}^* = \max_{i \neq n} \theta_i^* \\ \dots \dots \dots \text{etc} \end{array} \right.$$

4-2-2. Allocation simultanée des tâches et des ressources.

On a déjà remarqué que ce problème pouvait être traité en résolvant (31) avec des conditions finales libres, sous la contrainte supplémentaire :

$$(85) \quad \sum_{i=1}^n y_i(\theta^*) = M_0$$

Les conditions nécessaires d'optimalité (33) restent inchangées. Par contre, les conditions aux limites (34) deviennent, dans ce cas :

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } y_i(0) = 0 \\ \text{b) } \sum_{i=1}^n p_i^* \delta y_i(\theta^*) = 0, \text{ avec } \sum_{i=1}^n \delta y_i(\theta^*) = 0 \\ \text{c) } -1 + \sum_{i=1}^n p_i^* \varphi_i(u_i^*(\theta^*)) = 0 \end{array} \right.$$

ON obtient, à partir de (86-b) :

$$(87) \quad i = 1, \dots, n \quad p_i^* = \alpha_0$$

et on peut énoncer :

Théorème 4-4

Une solution optimale au problème d'allocation simultanée des tâches et des ressources est donnée par :

$$(88) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } u_i^*(t) = u_i^* = \text{constante} \quad \forall t \in [0, \theta^*] \\ \text{b) } \sum_{i=1}^n \varphi_i(u_i^*) = \max_{u \in \Omega} \sum_{i=1}^n \varphi_i(u_i) \\ \text{c) } \theta^* = \frac{M_0}{\sum_{i=1}^n \varphi_i(u_i^*)} \\ \text{d) } Y_i(\theta^*) = M_i = \frac{M_0 \varphi_i(u_i^*)}{\sum_{i=1}^n \varphi_i(u_i^*)} \end{array} \right.$$

Démonstration : (88-b) est obtenue directement à partir de la condition du maximum associée à (87).

On peut toujours choisir dans Ψ_α avec $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_0)$ une commande admissible vérifiant (88-a).

(88-c) et (88-d) découlent directement des conditions aux limites.

5- SYSTEMES LINEAIRES.

Dans le cas général, lorsque les fonctionnelles associées à chaque joueur dépendent de son état, le théorème 3-1 donne une caractérisation des solutions, qui permet de se ramener à la recherche d'un point de Pareto. Dans le cas des systèmes linéaires, et sous certaines conditions que nous allons donner, on peut, par un processus de scalarisation, obtenir les solutions optimales sous forme explicite.

5-1. Systèmes linéaires vis-à-vis de l'état.

On suppose les n sous-systèmes décrits par :

$$(89) \quad \dot{x}_i = A_i x_i + g_i(u_i)$$

$$(90) \quad \phi_i(\theta_i, u_i) = c_i^T x_i(\theta_i) = c_i^T \int_0^{\theta_i} e^{A_i(\theta_i - \sigma)} g_i(u_i(\sigma)) d\sigma$$

où T désigne la transposition.

Théorème 5-1

Si Ω est convexe, si les fonctions $c_i^T e^{A_i t} g_i(\cdot)$ sont concaves $\forall t$, alors, $\forall \theta$, si u^* est Pareto optimal, il existe un vecteur non nul $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$, tel que

$$(91) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(\theta_i, u_i^*) = \max_{u \in \Omega} \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(\theta_i, u_i)$$

Démonstration :

Soit θ un vecteur donné, u^1 et u^2 deux vecteurs de commande admissibles. On a :

$$(92) \quad \forall \lambda \in [0, 1] \\ \lambda \phi_i(\theta_i, u_i^1) + (1-\lambda) \phi_i(\theta_i, u_i^2) = c_i^T \int_0^{\theta_i} e^{A_i(\theta_i - \sigma)} [\lambda g_i(u_i^1) + (1-\lambda) g_i(u_i^2)] d\sigma$$

D'après la concavité de $c_i^T e^{A_i t} g_i(\cdot)$, on voit qu'il existe un élément $v \in \Omega$ tel que l'hypothèse du lemme 3-1 soit vérifiée. En effet, il suffit de choisir v tel que :

$$(93) \quad v_i = \lambda u_i^1 + (1-\lambda) u_i^2$$

L'application du théorème 3-2 conduit directement à (91).

5-2. Systèmes linéaires vis-à-vis de l'état et de la commande.

Pour le problème d'allocation des tâches et des ressources, nous étendrons les résultats obtenus au §4 au cas des systèmes caractérisés par (89) et (90), mais pour lesquels le modèle est linéaire vis-à-vis de l'état et de la commande. On a :

$$(94) \quad \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \quad x_i(0) = 0$$

avec A_i stable, $B_i > 0$, $i = 1, \dots, n$

$$(95) \quad \phi_i(\theta_i, u_i) = c_i^T x_i(\theta_i) = c_i^T \int_0^{\theta_i} e^{A_i(\theta_i - \sigma)} B_i u_i(\sigma) d\sigma$$

$$(96) \quad u_i(\sigma) \geq 0 \quad \forall \sigma \in [0, \infty [$$

$$\sum_{i=1}^n u_i(\sigma) \leq 1$$

5-2-1. Allocation de ressources.

Soit $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ un vecteur correspondant à une solution optimale, les sous-systèmes étant numérotés dans l'ordre suivant lequel ils achèvent la réalisation de leur tâche. On a :

$$(97) \quad \begin{cases} \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n \\ c_i^T x_i(\theta_i) = M_i \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

D'après ce qui précède, il existe un vecteur α non nul de R_+^n tel que l'on ait :

$$(98) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i^T x_i^*(\theta_i) = \max_{u \in \Omega} \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i^T x_i(\theta_i)$$

Posons :

$$(99) \quad J = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i^T x_i(\theta_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i^T \int_0^{\theta_i} e^{A_i(\theta_i - \sigma)} B_i u_i(\sigma) d\sigma$$

On peut écrire :

$$(100) \quad J = \sum_{j=1}^n \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\sum_{i=j}^n \alpha_i c_i^T e^{A_i(\theta_i - \sigma)} B_i u_i(\sigma) \right) d\sigma \quad \text{avec } \theta_0 = 0$$

La condition nécessaire fournie par le théorème 3-1 se traduit, dans le cas des systèmes linéaires, par la maximisation de la fonctionnelle J. La structure de la solution optimale est alors la suivante :

$$(101) \quad \forall t \in [0, \theta_n] \quad \exists i_0 \text{ tel que : } u_{i_0}(t) = 1$$

$$u_i(t) = 0 \quad \forall i \neq i_0$$

et on peut énoncer :

Théorème 5-2

Une solution optimale pour le problème défini par (94)-(97) est donnée par :

$$(102) \begin{cases} u_i(t) = 1 & \forall t \in [\theta_{i-1}, \theta_i [\\ u_j(t) = 0 & \forall j \neq i \end{cases}$$

avec $T_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ défini par :

$$(103) \quad c_i^T \int_0^{T_i} e^{A_i(T_i - \sigma)} B_i d\sigma = M_i$$

Démonstration : D'après (101), la solution optimale conduit à N commutations ($N \geq n$); durant chaque intervalle de temps, un seul des sous-systèmes est commandé, et réalise tout ou partie de sa tâche au rythme maximum ($u_i = 1$).

D'après la stabilité des matrices A_i , il est clair que chaque sous-système doit réaliser sa tâche en une seule fois, dans ces conditions on a $N = n$, d'où (102) et (103).

On remarque par ailleurs, à partir de (103), que le coût d'une solution optimale est indépendant de l'ordre dans lequel les sous-systèmes sont commandés. Comme précédemment, une meilleure solution optimale est alors obtenue en adoptant, pour la commande des sous-systèmes, l'ordre suivant :

$$(104) \quad \begin{cases} T_n = \max_i T_i \\ T_{n-1} = \max_{i \neq n} T_i \\ \dots\dots\dots \text{etc} \end{cases}$$

5-2-2. Allocation simultanée des tâches et des ressources.

Pour la répartition des tâches (M_1, \dots, M_n) , la solution optimale est donnée par :

$$(105) \quad \begin{cases} c_i^T \int_0^{T_i} e^{A_i(T_i - \sigma)} B_i d\sigma = M_i \\ \theta^* = \sum_{i=1}^n T_i \end{cases}$$

La répartition optimale des tâches est alors solution du problème suivant :

$$(106) \quad \begin{aligned} & \min \theta \\ & \text{sous : } M_i \geq 0 \\ & \sum_{i=1}^n M_i = M_0 \end{aligned}$$

Le Lagrangien du problème s'écrit :

$$(107) \quad L = \sum_{i=1}^n T_i(M_i) - \lambda \sum_{i=1}^n M_i - \sum_{i=1}^n \mu_i M_i$$

où la relation $T_i(M_i)$ est donnée par (105), λ est un paramètre de Lagrange et les μ_i sont des paramètres de Kuhn et Tucker associés aux contraintes inégalité.

Soit $M_i + dM_i$, $i = 1, \dots, n$, une répartition voisine de la répartition optimale, $T_i + dT_i$ sont les temps d'achèvement correspondants. A partir de la relation :

$$(108) \quad x_i(T_i + dT_i) = x_i(T_i) + \dot{x}_i(T_i) dT_i$$

on obtient :

$$(109) \quad dM_i = [c_i^T A_i x_i(T_i) + c_i^T B_i] dT_i$$

et une condition nécessaire de stationnarité du Lagrangien s'écrit :

$$(110) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial M_i} &= \frac{1}{c_i^T [A_i x_i(T_i) + B_i]} - \lambda - \mu_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_i &= M_0 \\ M_i > 0 &\implies \mu_i = 0 \end{aligned} \right.$$

Le calcul de la solution passe par la détermination des variables T_i . Dans ce sens, il est plus commode de choisir celles-ci comme variables d'optimisation : écrivant $M_i = M_i(T_i)$ on aboutit au problème :

$$(111) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n T_i \\ \text{sous : } T_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n M_i(T_i) = M_0 \end{array} \right.$$

Les contraintes inégalité sont équivalentes à celles de (106), compte-tenu du fait que $M_i(0) = 0$ et que T_i est une fonction croissante de M_i .

Les conditions nécessaires de stationnarité s'écrivent alors :

$$(112) \quad L = \sum_{i=1}^n T_i - \lambda \sum_{i=1}^n M_i(T_i) - \sum_{i=1}^n \mu_i T_i$$

$$(113) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial T_i} = 1 - \mu_i - \lambda c_i^T [A_i x_i(T_i) + B_i] = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_i(T_i) = M_0 \\ T_i > 0 \implies \mu_i = 0 \end{array} \right.$$

Dans le cas scalaire ($\forall i, x_i, A_i, B_i, c_i \in \mathbb{R}$) on peut donner par résolution directe de (110) ou (113) une condition nécessaire pour que chaque sous-système se voie affecter une part non nulle de la tâche globale M_0 . En effet, dans ce cas, on a :

$$(114) \quad \begin{array}{l} A_i M_i + c_i B_i = \frac{1}{\lambda} \\ \sum_{i=1}^n M_i = M_0 \end{array} \implies \frac{1}{\lambda} = \frac{M_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i B_i}{A_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i}}$$

d'où l'on tire :

$$(115) \quad M_i = \frac{1}{A_i} \left(\frac{M_0 + \sum_{k=1}^n \frac{c_k B_k}{A_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{A_k}} - c_i B_i \right)$$

et l'on a effectivement $\mu_i = 0 \quad \forall i$ sous la condition :

$$(116) \quad i = 1, \dots, n \quad M_0 > \sum_{k=1}^n \frac{c_i B_i - c_k B_k}{A_k}$$

6- CONCLUSION

L'extension des résultats concernant l'équilibre social au cas des problèmes en temps minimum n'est pas triviale.

La principale difficulté réside dans le fait que l'ensemble des joueurs évolue dans le temps, chaque joueur abandonnant la partie dès que son objectif est atteint.

C'est dans la mesure où il permet de surmonter cette difficulté que le théorème de réduction à un problème de commande optimale que nous avons proposé est intéressant. Il est à l'origine de tout un ensemble de résultats concernant les jeux dans lesquels la fonctionnelle associée à chaque joueur ne fait pas intervenir son état.

Lorsque cette réduction n'est pas possible, nous avons donné certaines propriétés des solutions optimales, et nous les avons appliquées à la résolution du cas linéaire. Celui-ci correspond à l'hypothèse d'un rendement constant pour chacun des sous-systèmes. Les propriétés dégagées jusqu'à présent sont insuffisantes pour s'affranchir de cette hypothèse, sauf à envisager toutes les permutations possibles ($n!$) définissant l'ordre dans lequel les sous-systèmes sont commandés. C'est dans cette voie que sont encore possibles les progrès concernant ce type de problèmes, et que nous pensons orienter une part de nos recherches ultérieures.

- BIBLIOGRAPHIE -

- /1/ W.N. BURKOV: "Optimal project control" IFAC World Congress IV, Varsovie, 1969.

- /2/ A.Y. LERNER, W.N. BURKOV: "On optimal resources allocation" IFAC World Congress IV, Varsovie, 1969.

- /3/ Z. BUBNICKI: "Optimal control of the complex of operations with random parameters" Podstawy Sterowania, 1, n° 1, 1971.

- /4/ J. WEGLARZ: "Application of the convex sets theory in a certain problem of time optimal control of a complex of operations" Systems Science, 1, n° 1, 1975, Wroclaw Technical Univ.

- /5/ S. ZDRZALKA: "Application of game theory to control of a complex of independent operations" Systems Science, 1, n° 2, 1975, Wroclaw Technical Univ.

- /6/ M. STAROSWIECKI, Z. BUBNICKI: "Optimal planning of production by means of a particular cooperative equilibrium" IFAC World Congress VII, Helsinki, Juin 1978.

- /7/ A. HAURIE: "Jeux coopératifs. Commande optimale sur un horizon infini" Thèse Doctorat ès Sciences, Univ. Paris 7, Avril 1975.

- /8/ C. BERGE: "Espaces topologiques, fonctions multivoques" Dunod, Paris, 1966.

CONCLUSION

La dialectique entre individuel et collectif (projets locaux/projets globaux, intérêts particuliers/intérêt commun,..) est au centre de nombreux problèmes actuels en Science des Systèmes, que ceux-ci soient techniques, économiques, ou sociaux.

L'interrogation: "Petits groupes et grands systèmes?" qui définit le thème du congrès AFCET 1979 témoigne de l'importance de cette problématique.

A notre sens, cette interrogation comporte deux volets:

1- Quel est le processus de formation des groupes à l'intérieur d'un grand système?

2- Quelles sont les actions permettant de tenir compte des intérêts individuels des composants d'un système et de l'intérêt général?

Notre travail propose une contribution à la résolution de ces deux problèmes.

1- Pour approcher le processus de formation des groupes à l'intérieur d'un grand système, nous avons proposé la notion originale de jeu d'agrégation. Dans un tel jeu, la définition de la notion d'optimalité fait intervenir deux niveaux de décisions: au niveau supérieur, les joueurs définissent des coalitions optimales alors qu'au niveau inférieur, le manipulateur associé à chaque coalition agit effectivement sur le système.

Dans certains problèmes, l'introduction des manipulateurs peut sembler artificielle. En fait, elle peut toujours se faire à partir de la notion de centre de classe, ou noyau, habituelle dans les problèmes de classification.

Cependant, la définition du jeu sous forme de fonction caractéristique permet de se ramener à une formulation à un seul niveau, et à la forme classique de jeu sur un tableau. Dans ce cas, le recours aux manipulateurs n'est plus obligatoire, à condition de définir l'application qui associe à toute partie non vide de l'ensemble de référence les coûts supportés par les joueurs qui lui appartiennent. Nous donnons les conditions sous lesquelles le passage à une telle formulation est possible, ainsi qu'un algorithme de programmation dynamique adapté à celle-ci, pour la recherche de partitions optimales.

Nous définissons, au chapitre deux, un jeu d'agrégation particulier appliqué aux problèmes de classification relevant de l'Analyse des Données. Nous montrons l'existence de solutions optimales dans les cas d'un jeu coopératif et d'un jeu non coopératif, et donnons certaines conditions suffisantes garantissant la non existence de solutions en stratégies mixtes. On obtient dans ce cas des partitions, ou des recouvrements de l'ensemble de référence.

L'intérêt de ces conditions apparaît au chapitre trois, consacré à l'étude de certains algorithmes permettant d'obtenir les solutions du jeu. Compte-tenu de la dimension des problèmes et du caractère particulier de la formulation, nous avons utilisé des méthodes de décomposition-coordination. Nous envisageons d'abord la coordination par prédiction des interactions. On constate dans ce cas que le principe de coordination correspondant constitue une condition nécessaire et suffisante de Nash-optimalité mais seulement une condition nécessaire de Pareto-optimalité. Nous proposons alors un algorithme itératif et un algorithme à pas fractionnaire dont la convergence ne peut malheureusement pas être démontrée dans le cas général. Sous certaines hypothèses relatives à l'obtention de stratégies pures, nous donnons cependant des conditions originales de convergence.

La minimisation d'une fonction d'écart constitue un autre moyen de résoudre le problème de coordination. Là encore, le cas des stratégies pures doit être étudié séparément.

Dans la coordination par prédiction des interactions, aucune distinction n'est faite au niveau des algorithmes de coordination entre la recherche d'un point de Nash et celle d'un point de Pareto. En fait, cette distinction est effectuée lors de la résolution des problèmes locaux.

Il n'en est pas de même pour les autres algorithmes étudiés. Nous donnons tout d'abord deux algorithmes dus à J.L.Lions puis, sous des hypothèses légèrement moins restrictives, deux algorithmes de type gradient respectivement pour la recherche de points de Nash et de Pareto.

Enfin, dans le cas particulier de la recherche d'un point de Pareto, on fait la remarque que la décomposition sur l'ensemble des joueurs peut être remplacée par une décomposition sur l'ensemble des classes. Chaque classe constitue alors un sous-système et les interactions entre sous-systèmes se situent uniquement au niveau des contraintes définissant les ensembles de commandes admissibles.

Certains avantages de l'approche utilisant un jeu d'agrégation ont été donnés au chapitre deux. On y souligne surtout les avantages relatifs aux problèmes de calcul numérique et à la liberté du choix de l'ensemble des centres de classe admissibles. D'autres aspects sont liés à la généralité de la définition sous la forme d'un jeu; certains peuvent conduire à des extensions intéressantes de ce travail:

a) Existence de solutions en stratégies mixtes. Celles-ci s'introduisent naturellement dans notre formulation. Elles correspondent aux notions de probabilité d'appartenance, et plus généralement d'appartenance floue; ainsi, en économie spatiale, un client appartient plus ou moins à une surface de marché, dans les problèmes de sélection du personnel un candidat correspond plus ou moins à un profil déterminé, aux courses, un parieur peut jouer plusieurs combinaisons, etc..

b) Dans les problèmes de classification, le centre de classe est "transpa-

rent", c'est-à-dire entièrement déterminé par la classe qu'il représente. Dans la formulation générale d'un jeu d'agrégation, la définition du critère et de la relation de préférence d'une coalition peuvent faire intervenir des caractéristiques propres au manipulateur qui agira en son nom. Dans ces conditions, le jeu n'est pas symétrique. Un cas extrême est celui dans lequel les commandes jouées par les manipulateurs ne dépendent pas de la classe dont ils sont les "porte-parole". Ainsi, lors d'élections, la partition de l'ensemble des électeurs peut être modélisée par la solution d'un jeu d'agrégation dans lequel les commandes jouées par les manipulateurs (annoncées par voie d'affiches, tracts, déclarations, etc..) ne dépendent que des options politiques de ceux-ci.

c) La définition d'un jeu d'agrégation n'est pas limitée au cas statique. Une extension possible de nos travaux consiste à considérer un jeu dans lequel les relations d'affectation peuvent être fonction du temps. On peut de même envisager l'évolution des critères, des relations de préférence et de comparaison. D'autres extensions concernent l'introduction d'incertitudes liées au manque d'informations, soit à l'intérieur d'un niveau, soit entre niveaux. Ainsi, reprenant l'exemple des élections, les actions réelles des manipulateurs peuvent être différentes de celles annoncées (!) ou encore n'être connues des joueurs que d'une façon partielle, déformée ou retardée.

d) La définition du jeu d'agrégation comprend, en particulier, celle des coûts et des relations de préférence des joueurs. La modélisation de ces coûts est évidemment dépendante des applications considérées, et nous n'avons pas envisagé le problème de leur définition. Pour les applications relevant de l'Analyse des Données, ces coûts sont souvent basés sur la notion de distance (distance quadratique pour des données quantitatives, distance du χ^2 pour les tableaux de contingence correspondant à des données qualitatives). Dans les problèmes de décomposition de systèmes complexes, on utilise, pour définir les coûts associés à une décomposition donnée, des notions issues de la théorie de

l'information: coefficient de transmission, coefficient de couplage entre variables. La symétrie de la notion de distance conduit à rechercher des décompositions sous la forme bloc-diagonale. Celle-ci n'est cependant pas la seule possible; en particulier, une décomposition conduisant à une matrice de couplage triangulaire peut être d'un grand intérêt. Dans ce sens, l'étude et la définition de coûts non symétriques nous semble être une voie de recherches pleine de promesses.

e) Aucune hypothèse n'est faite à priori sur les critères et les ensembles de coûts admissibles des joueurs. En particulier, ces coûts peuvent être non scalaires et conduire à des problèmes de classification multicritères, qui ne sont formulés en tant que tels par aucune méthode de notre connaissance. Nous n'avons considéré, aux chapitres deux et trois, que des coûts réels, et l'approche multicritères nous semble être une voie intéressante pour la poursuite de nos travaux.

2- L'étude des compromis entre intérêts particuliers et intérêt général fait l'objet, dans des optiques légèrement différentes, de la théorie de la commande multicritères et de la théorie des jeux coopératifs. A l'origine, nos recherches dans cette voie ont démarré à partir de problèmes pratiques de localisation et d'affectation optimale de tâches et de ressources. Dans ce sens, une classe de solutions particulièrement intéressante est fournie par les solutions de compromis de paramètre p , et plus particulièrement, compte-tenu des applications envisagées, par les solutions de paramètre $p = +\infty$. Nous avons introduit la notion de meilleure solution optimale, à l'aide d'un processus analogue à celui de la définition du nucléolus d'un jeu à N personnes.

Dans une première partie, nous avons caractérisé l'ensemble des solutions optimales par des propriétés débouchant sur des algorithmes de calcul. Nous avons montré la relation entre meilleure solution optimale et point de Pareto, et nous avons étudié le parallèle entre notre approche et l'approche classique

des problèmes de commande multicritères définie par le processus de scalarisation. Le théorème de point selle que nous avons établi permet de faire la liaison entre ces deux approches.

Dans le cas particulier des problèmes d'allocation où les coûts sont exprimés explicitement en fonction des variables de commande, nous avons établi plusieurs théorèmes illustrant le principe d'équité, qui se traduisent sur le plan du calcul par la recherche d'une meilleure solution optimale comme solution d'un système d'équations en général non linéaires, et nous avons étendu ces résultats au cas où les fonctionnelles à minimiser sont seulement continues par morceaux.

L'inconvénient majeur des solutions de compromis est qu'elles imposent une intercomparaison des différents critères par l'intermédiaire de la fonction de coût globale. En particulier, pour l'équilibre social, les différents coûts doivent être directement comparables, ce qui impose l'existence d'une unité de mesure commune pour tous les critères. Lorsque cette contrainte n'est pas admissible, nous avons montré que la notion d'équilibre social pouvait néanmoins être utilisée pour déterminer l'ensemble des points de Pareto du problème. Nous avons dans ce sens défini une classe de problèmes d'équilibre social, et donné une condition nécessaire et suffisante originale de Pareto-optimalité.

Les méthodes de recherche de l'ensemble des points de Pareto d'un problème multicritères sont soit incomplètes (elles ne fournissent pas toutes les solutions, sauf sous des hypothèses très restrictives) soit elles introduisent des solutions "parasites" dont l'élimination ultérieure est compliquée. Utilisant notre approche, nous avons pu définir un algorithme donnant toutes les solutions Pareto-optimales, associé à des tests d'élimination très simples.

Dans une deuxième partie, nous avons étudié un problème d'affectation de tâches et de ressources associé à un critère de temps minimum, dans lequel les fonctionnelles à minimiser sont données de façon implicite, et dépendent de la dynamique des joueurs. La difficulté de ce problème d'équilibre social réside

dans le fait que toutes les fonctionnelles ne sont pas définies sur le même horizon: dès qu'un joueur a réalisé son objectif, il abandonne la partie et n'intervient plus dans la suite du jeu. Nous établissons deux théorèmes qui sont à la base de la recherche des solutions. Le premier donne une condition nécessaire reliant une meilleure solution optimale à un point de Pareto sur l'ensemble des commandes admissibles; le deuxième permet, sous certaines hypothèses, de se ramener à la résolution d'un problème de commande optimale en temps minimum.

L'utilisation de ces deux théorèmes nous permet alors d'aboutir aux solutions, d'abord dans le cas simple où la fonctionnelle de chaque joueur ne fait pas intervenir son état, puis dans le cas où chaque sous-système possède un régime autonome linéaire vis-à-vis de l'état. Dans les deux cas, nous envisageons les problèmes d'allocation de ressources puis d'allocation simultanée de tâches et de ressources.

Une partie des résultats obtenus sont déjà connus. Cependant, l'approche originale que nous avons adoptée a permis de les présenter de façon unifiée, d'obtenir certaines propriétés nouvelles, et de traiter des problèmes jusqu'alors non résolus. Toutefois, les propriétés dégagées jusqu'à présent sont encore insuffisantes pour s'affranchir de l'hypothèse de linéarité, sauf à envisager toutes les permutations définissant l'ordre dans lequel les sous-systèmes sont commandés. La poursuite de nos travaux dans ce domaine peut ainsi prendre deux directions, suivant qu'on cherchera à définir de façon analytique une numérotation optimale ou qu'on s'orientera vers l'étude d'algorithmes convergeant vers une telle numérotation.

D'autres extensions, allant vers une plus grande conformité de ce modèle d'activité par rapport aux problèmes réels, nous semblent devoir être envisagées: en premier lieu, le modèle étudié considère une activité unique réalisée en une étape; une extension naturelle conduit à envisager le cas multiproduits-multiétapes. Dans ces conditions, les différents sous-systèmes traitent chaque produit sur

des horizons qui ne diffèrent plus seulement par la valeur de l'instant final, mais aussi par celle de l'instant initial. La structure du processus de production devient alors une structure série-parallèle. En second lieu, il semble souhaitable de pouvoir introduire un modèle stochastique pour chacun des sous-systèmes; la définition du critère d'optimalité pose, dans ces conditions, un problème délicat que nous pensons aborder prochainement.

ANNEXES

ANNEXE 1

PARTITION ET SECTORISATION

Soit $\Lambda = \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N$ l'ensemble des affectations admissibles, où Λ_α , $\alpha=1, \dots, N$ est défini par:

$$\Lambda_\alpha = \{ \lambda_\alpha; \lambda_\alpha^k \in [0,1] \quad k=1, \dots, m, \quad \sum_{k=1}^m \lambda_\alpha^k = 1 \} \quad \alpha=1, \dots, N$$

Λ est un polyèdre convexe. En effet, il est l'intersection des demi-espaces $H_\alpha^k = \{ \lambda; \lambda_\alpha^k \geq 0 \}$, $\alpha=1, \dots, N$, $k=1, \dots, m$, et des plans $E_\alpha = \{ \lambda; \sum_{k=1}^m \lambda_\alpha^k = 1 \}$, $\alpha=1, \dots, N$. C'est donc un tronçon. De plus, $\forall \lambda \in \Lambda$ on a:

$$\| \lambda \| = \left(\sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^m (\lambda_\alpha^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (Nm)^{\frac{1}{2}}$$

Nous allons montrer que le profil de Λ , $\dot{\Lambda}$, est l'ensemble des partitions de $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_N\}$ en m' classes, $m' \leq m$.

Soit P l'ensemble des partitions de \mathcal{J} en $m' \leq m$ classes. On a:

$$P = P_1 \times \dots \times P_N \quad \text{avec:} \quad P_\alpha = \{ \lambda_\alpha; \lambda_\alpha^k \in \{0,1\} \quad k=1, \dots, m, \quad \sum_{k=1}^m \lambda_\alpha^k = 1 \} \quad \alpha=1, \dots, N$$

a) Montrons que $\lambda \in P \implies \lambda \in \dot{\Lambda}$.

On a $P \subset \Lambda$, il suffit de montrer que λ est un point extrémal du polyèdre convexe Λ .

Supposons $\lambda = p\mu + (1-p)\bar{\mu}$ avec $0 < p < 1$, et $\mu, \bar{\mu} \in \Lambda$. On a:

$$\lambda_\alpha^k = p\mu_\alpha^k + (1-p)\bar{\mu}_\alpha^{-k} \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, N\}, \forall k \in \{1, \dots, m\} \text{ de sorte que:}$$

$$\lambda_\alpha^k = 0 \implies \mu_\alpha^k = \bar{\mu}_\alpha^{-k} = 0$$

Comme $\lambda \in P$, on a: $\forall \alpha \in \{1, \dots, N\}$ un seul des $\lambda_\alpha^k = 1$, d'où:

$$\lambda_\alpha^k = 1 \implies \max \{ \mu_\alpha^k, \bar{\mu}_\alpha^{-k} \} > 0$$

Comme on a par ailleurs:

$$p\mu_\alpha^k + (1-p)\bar{\mu}_\alpha^{-k} \leq \max \{ \mu_\alpha^k, \bar{\mu}_\alpha^{-k} \} \leq 1, \text{ on en déduit:}$$

$\mu_{\alpha}^k = \bar{\mu}_{\alpha}^k = 1 \quad \forall (\alpha, k) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, m\}$ tel que $\lambda_{\alpha}^k = 1$, c'est-à-dire:
 $\mu = \bar{\mu} = \lambda$, ce qui montre que λ est un point extrémal de Λ .

b) Montrons que $\lambda \in \ddot{\Lambda} \implies \lambda \in P$.

Supposons que λ ne soit pas une partition. Alors, il existe un indice α_0 et un ensemble $K_0 \subset \{1, \dots, m\}$ tel que:

$$\text{card } K_0 > 1, \quad 0 < \lambda_{\alpha_0}^k < 1 \quad \forall k \in K_0, \quad \sum_{k=1}^m \lambda_{\alpha_0}^k = 1$$

Soit $\mu \in \Lambda$ quelconque, et soit $D(\mu, \lambda)$ la droite:

$$D(\mu, \lambda) = \{\bar{\mu}; \bar{\mu} = \tau\mu + (1-\tau)\lambda, \tau \in \mathbb{R}\}$$

L'intersection de cette droite avec Λ est le segment $D_T(\mu, \lambda) \subset D(\mu, \lambda)$:

$$D_T(\mu, \lambda) = \{\bar{\mu}; \bar{\mu} = \tau\mu + (1-\tau)\lambda, \tau \in T\}$$

où T est défini par:

$$\tau \in T \iff -\lambda_{\alpha}^k \leq \tau(\mu_{\alpha}^k - \lambda_{\alpha}^k) \leq 1 - \lambda_{\alpha}^k \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, N\}, \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

Dans ces conditions, on voit que: $\forall \mu \in \Lambda(\lambda)$, où $\Lambda(\lambda)$ est l'ensemble:

$$\Lambda(\lambda) = \{\mu; \mu_{\alpha}^k = 0 \quad \forall (\alpha, k) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, m\} \text{ tel que } \lambda_{\alpha}^k = 0\}$$

la droite $D(\mu, \lambda)$ est privilégiée si λ n'est pas une partition. En effet, 0 est alors un point intérieur de T . Ceci est en contradiction avec le fait que $\lambda \in \ddot{\Lambda}$.

ANNEXE 2

DENOMBREMENTS DANS LES PROBLEMES DE PARTITION

1- Nombre de partitions d'un ensemble de N éléments en m classes.

C'est le nombre de Stirling de deuxième espèce: $s(N,m)$, donné par la relation de récurrence:

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) + ks(n,k)$$

En effet, on peut introduire un $(n+1)^{\text{ème}}$ élément de deux façons différentes:

- Il forme une classe à lui tout seul. Le nombre de partitions de ce type est égal au nombre de partitions des n autres éléments en $k-1$ classes.

- Pour chacune des partitions de n éléments en k classes, on peut affecter le $(n+1)^{\text{ème}}$ élément à l'une des classes.

TABLEAU $s(N,k)$

k	1	2	3	4	5	...
N						
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	
7	1	63	301	350	140	
8	1	127	966	1701	1050	
9	1	255	3025	7770	6951	
10	1	511	9330	34105	42525	
⋮						

2- Nombre de partitions de N éléments en m classes vérifiant la propriété d'ordre.

Définition de la propriété d'ordre .

Soit $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_N\}$ un ensemble de N éléments mesurés par un paramètre Q.

Soit q_i la mesure associée à l'élément J_i .

On dit qu'une partition $\{C_1, \dots, C_m\}$ de l'ensemble \mathcal{J} en m classes possède la propriété d'ordre si pour deux éléments J_i et J_j classés dans la même classe

C_1 on a:

$$\forall J_k \in \mathcal{J} \quad q_i < q_k < q_j \implies J_k \in C_1$$

Le nombre de ces partitions est donné par la récurrence suivante:

$$\sigma(N, k) = \sigma(N-1, k-1) + \sigma(N-2, k-1) + \dots + \sigma(k-1, k-1)$$

TABLEAU $\sigma(N, k)$

k	1	2	3	4	5	6	...
N							
1	1						
2	1	1					
3	1	2	1				
4	1	3	3	1			
5	1	4	6	4	1		
6	1	5	10	10	5	1	
7	1	6	15	20	15	6	
8	1	7	21	35	35	21	
9	1	8	28	56	70	56	
10	1	9	36	84	126	126	
⋮							

3- Nombre de parties à envisager pour la programmation dynamique.

- Pour la partition en deux classes: $2^N - 1 - N - C_N^2$
- " " " " trois " : $2^N - 1 - N - C_N^2 - C_N^3$
- ⋮
- " " " " m-1 " : $2^N - 1 - N - C_N^2 - C_N^3 - \dots - C_N^{m-1}$
- " " " " m " : 1

D'où, au total:

$$\mathcal{N} = 1 + (m-2)(2^N - 1 - N - C_N^2) + (m-3)C_N^3 + \dots + C_N^{m-1}$$

Si les partitions cherchées doivent posséder la propriété d'ordre, le nombre de parties à envisager devient:

- Pour la partition en 2 classes: N-1
- " " " " 3 " : N-2
- " " " " 4 " : N-3
- ⋮
- " " " " m " : N-m+1

D'où, au total:

$$\mathcal{N} = N-m+1 + N-m+2 + \dots + N-1 = \frac{N(N-1) - (N-m+1)(N-m+2)}{2}$$

4- Nombre de tests pour une partition Nash-optimale en m classes.

A chaque partition on fait au maximum: $N(m-1)$ tests (chaque élément est essayé successivement dans les $m-1$ autres classes). D'où:

$$\mathcal{C} = s(N,m)N(m-1)$$

En utilisant la programmation dynamique: au pas k , soit P_k l'ensemble des parties de E à $e-k$ éléments au plus (E est une partie de \mathcal{J} , $e = \text{card } E$).

	Nombre de parties	Nombre de tests
Parties à 1 élément	e	0
" " 2 "	C_e^2	$2kC_e^2$
" " 3 "	C_e^3	$3kC_e^3$
⋮	⋮	⋮
" e-k "	C_e^{e-k}	$(e-k)kC_e^{e-k}$

Pour une partie E donnée, le nombre de tests à effectuer pour trouver les partitions Nash-optimales de E en k+1 classes est donc:

$$k(2C_e^2 + 3C_e^3 + \dots + (e-k)C_e^{e-k}) = k \sum_e^k$$

Par ailleurs, E appartient à l'ensemble des parties de \mathcal{Y} à plus de k éléments.

On a: nombre de parties de \mathcal{Y} à k+1 éléments: C_N^{k+1}
 ⋮
 " " " N " : C_N^N

Le nombre total de tests à effectuer au pas k est donc:

$$\mathcal{C}_k = k(C_N^{k+1} \sum_{k+1}^k + C_N^{k+2} \sum_{k+2}^k + \dots + C_N^{N-k} \sum_N^k)$$

Le nombre total de tests à effectuer pour la recherche d'une partition en m classes est:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \dots + \mathcal{C}_{m-1} + (m-1) \sum_N^m$$

5- Exemple.

Considérons le cas: N = 10, m = 3.

Nombre de partitions possibles: $s(10,3) = 9330$

Nombre de tests pour un point de Nash: $\mathcal{C} = 186\ 600$

Avec la programmation dynamique:

Nombre de parties à envisager: $\mathcal{N} = 969$

Nombre de tests pour un point de Nash: $\mathcal{C} = 19\ 140$

Lorsque l'on impose la propriété d'ordre:

Nombre de partitions possibles: $\sigma(10,3) = 36$

Nombre de parties à envisager par la programmation dynamique: $\mathcal{N} = 9$

ANNEXE 3

METHODE GENERALE DE DECOMPOSITION DES PROBLEMES D'OPTIMISATION (G. COHEN)

On considère le problème d'optimisation suivant, dit problème principal (PP):

$$\min_{x \in X} \text{ad } \mathcal{J}(x)$$

où \mathcal{J} est une fonctionnelle convexe de \mathcal{X} (espace de Banach) dans \mathbb{R} , et X^{ad} une partie convexe de \mathcal{X} . En supposant \mathcal{J} Fréchet-différentiable (de dérivée \mathcal{J}'), on a la condition nécessaire et suffisante:

$$\langle \mathcal{J}'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X^{\text{ad}}$$

cette inéquation variationnelle caractérisant toute solution x^* .

On considère une autre fonctionnelle J dite "noyau", de la même nature que \mathcal{J} et un point $x^k \in X^{\text{ad}}$, et le problème dit auxiliaire (PA):

$$\min_{x \in X} \text{ad } J(x) + \langle \varepsilon \mathcal{J}'(x^k) - J'(x^k), x \rangle$$

avec $\varepsilon > 0$, $\langle \dots \rangle$ est le produit de dualité.

Toute solution du PA, x^{k+1} , est caractérisée par l'inéquation variationnelle:

$$\langle J'(x^{k+1}) - J'(x^k) + \varepsilon \mathcal{J}'(x^k), x - x^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X^{\text{ad}}$$

Lemme fondamental: Si $x^k = x^{k+1}$, alors $x^k = x^*$.

Démonstration: évidente.

ALGORITHME (version A)

- 1) Choisir $x^0 \in X^{\text{ad}}$. Faire $k=0$.
- 2) Résoudre le PA ci-dessus. Soit x^{k+1} une solution.
- 3) Stopper si $\|x^k - x^{k+1}\| < \text{seuil}$, sinon faire $k=k+1$ et retourner en 2).

Théorème de convergence.

Hypothèses: 1) f et J convexes, Fréchet-différentiables sur X^{ad} convexe.

2) f et J coercifs sur X^{ad} , c'est-à-dire:

$$\exists a > 0 \text{ tel que: } \forall x, y \in X^{ad} \quad \langle f'(x) - f'(y), x - y \rangle \geq a \|x - y\|^2$$

(même inégalité pour J avec une constante b)

3) f' et J' lipschitziennes sur X^{ad} , c'est-à-dire:

$$\exists A > 0 \text{ tel que: } \forall x, y \in X^{ad} \quad \|f'(x) - f'(y)\|_* \leq A \|x - y\|$$

(même inégalité pour J avec une constante B)

Alors: La suite $\{x^k\}$ engendrée par l'algorithme ci-dessus converge vers x^* unique, quel que soit x^0 , si ϵ est choisi plus petit strictement que $\frac{2b}{A}$.

VARIANTE B DE L'ALGORITHME

1) Choisir $x^0 \in X^{ad}$. Faire $k=0$.

2) Résoudre le PA: $\min_{x \in X^{ad}} J(x) + \langle f'(x^k) - J'(x^k), x \rangle$

Soit \hat{x}^{k+1} la solution.

3) Soit $x^{k+1} = \epsilon \hat{x}^{k+1} + (1-\epsilon)x^k$ ($\epsilon > 0$)

4) Stopper si $\|x^k - x^{k+1}\| < \text{seuil}$, sinon faire $k=k+1$ et retourner en 2).

Dans cet algorithme, il n'y a pas de coefficient ϵ dans la modification linéaire de J , mais on "réinjecte" une combinaison linéaire de x^k et de la dernière solution.

Le même théorème s'applique (même choix de ϵ).

VARIANTE C DE L'ALGORITHME

Soit M un opérateur linéaire de \mathcal{X} dans son dual \mathcal{X}^* , auto-adjoint et coercif, c'est-à-dire:

$$\exists m > 0 \text{ tel que } \forall x, \quad \frac{1}{2} \langle Mx, x \rangle \geq m \|x\|^2$$

(M également lipschitzien)

On considère alors l'algorithme:

1) Choisir $x^0 \in X^{\text{ad}}$. Faire $k=0$.

2) Résoudre le PA:
$$\min_{x \in X} J(x) + \langle \mathcal{J}'(x^k) - J'(x^k), x \rangle + \frac{1}{2} \langle M(x - x^k), x - x^k \rangle$$

Soit x^{k+1} la solution.

3) Stopper ou retourner en 2).

Théorème de convergence.

Hypothèses: Les mêmes que précédemment, plus celles sur M .

Condition de convergence: $b + m > \frac{A}{2}$

Autrement dit, en choisissant M "assez positif" (m assez grand), on arrive toujours à faire converger l'algorithme.

UTILISATION DANS LE CADRE DE NOTRE PROBLEME.

On a: $\mathcal{J}(x) = G(x, h(x)) = G(x, y)$ avec $y = h(x)$.

On choisit le noyau: $J(x) = J^k(x) = G(x, h(x^k))$.

Le fait que le noyau dépende du pas k ne gêne pas la théorie, mais bien sûr, les constantes b et B dépendent du pas k .

On a alors:

$$\mathcal{J}'(x^k) - J^{k'}(x^k) = \frac{\partial G}{\partial y}(x^k, h(x^k)) \frac{dh}{dx}(x^k)$$

de sorte que le PA (version B) s'énonce:

$$\min_{x \in X} G(x, h(x^k)) + \frac{\partial G}{\partial y}(x^k, h(x^k)) \frac{dh}{dx}(x^k) x$$

qui est l'algorithme proposé au chapitre 3, §2-2-2.

Remarque: Les constantes de coercivité étant difficiles à évaluer, la règle pratique est d'utiliser la version B de l'algorithme avec ε assez petit, ou la version C avec un terme de freinage quadratique assez grand. On peut dans tous les cas faire converger l'algorithme par l'un de ces deux procédés.

ANNEXE 4

DECOMPOSITION PAR ACTION SUR LES CRITERES INDIVIDUELS (J.L.LIONS)

1- RECHERCHE D'UN POINT DE NASH.

a) Hypothèses.

On considère n fonctionnelles $J_i(v_1, \dots, v_n)$, $i=1, \dots, n$, définies sur l'espace de Hilbert: $U = \prod_{i=1}^n U_i$, et l'on cherche un point de Nash des fonctionnelles J_i sur un ensemble convexe produit:

$$U_{ad} = \prod_{i=1}^n U_{i,ad}, \quad U_{i,ad}: \text{ensemble convexe fermé de } U_i$$

On suppose les fonctionnelles J_i continues, et: J_i convexe en v_i et Gateaux-différentiable $\forall (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$.

On introduit l'opérateur A, non linéaire, de U dans U défini par:

$$A(u) = \left(\frac{\partial J_1}{\partial v_1}(u), \dots, \frac{\partial J_n}{\partial v_n}(u) \right) \quad u = (v_1, \dots, v_n)$$

En désignant par $\langle \dots \rangle$ le produit scalaire dans U, la recherche d'un point de Nash équivaut à la recherche de u tel que:

$$(1) \quad \langle A(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}, u \in U_{ad}$$

On fait alors l'hypothèse suivante:

$$(2) \quad \langle A(v) - A(u), v - u \rangle \geq \alpha \|v - u\|^2 \quad \forall u, v \in U_{ad}, \alpha > 0$$

Dans ces conditions, on a:

$$(3) \quad \frac{\langle A(v), v \rangle}{\|v\|} \rightarrow +\infty \quad \text{si } \|v\| \rightarrow +\infty$$

et il existe un élément u, unique solution de (1) /1/.

b) Algorithme.

A partir de $u^0 \in U_{ad}$, puis de proche en proche u^1, \dots, u^m , on détermine u^{m+1} par l'algorithme suivant:

u_i^{m+1} est solution du problème de minimisation de:

$$(4) \quad \tau_m J_i(u_1^m, \dots, u_{i-1}^m, v_i, u_{i+1}^m, \dots, u_n^m) + |v_i - u_i^m|^2 \quad \text{sur } U_{i,ad}$$

c) Théorème de convergence.

On suppose τ_k choisi, avec:

$$(5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k = +\infty$$

$$(6) \quad 0 < \tau_k < \frac{\alpha}{2\mu^2(n-1)}$$

$$(7) \quad \left| \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n) - \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(w_1, \dots, w_{i-1}, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n) \right| \leq \dots$$

$$\dots \mu \left(\sum_{j \neq i} |u_j - w_j| \right)^2 \quad i=1, \dots, n \quad \forall u, v, w \in U_{ad}$$

Alors: Il existe un point de Nash u unique. Par ailleurs, (4) définit u_i^{m+1} de façon unique et l'on a: $u^m \rightarrow u$ dans U_{ad} lorsque $m \rightarrow \infty$.

Démonstration:

1) La fonctionnelle $\tau_m J_i(u_1^m, \dots, u_{i-1}^m, v_i, u_{i+1}^m, \dots, u_n^m)$ étant continue convexe est minorée par une fonction affine de sorte que:

$$\tau_m J_i(u_1^m, \dots, u_{i-1}^m, v_i, u_{i+1}^m, \dots, u_n^m) + |v_i - u_i^m|^2$$

est infinie à l'infini et strictement convexe; (4) définit donc u_i^{m+1} de façon unique.

2) Pour simplifier l'écriture, posons:

$$\phi_i^{m+1} = u_i^{m+1} - u_i$$

$$\phi^{m+1} = (\phi_1^{m+1}, \dots, \phi_n^{m+1})$$

$$u^i = (u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n)$$

$$J_i(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n) = J_i(u^i, v_i)$$

L'élément u_i^{m+1} est caractérisé par:

$$(8) \quad 2\langle u_i^{m+1} - u_i^m, v_i - u_i^{m+1} \rangle + \tau_m \left\langle \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u^i, u^{m+1}), v_i - u_i^{m+1} \right\rangle \geq 0 \quad \forall v_i \in U_{i,ad}$$

En prenant $v_i = u_i$ on obtient:

$$(9) \quad 2\langle \phi_i^{m+1} - \phi_i^m, \phi_i^{m+1} \rangle + \tau_m \langle \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_m^i, u_i^{m+1}), \phi_i^{m+1} \rangle \leq 0$$

D'autre part, u étant point de Nash, on a:

$$(10) \quad -\tau_m \langle \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u^i, u_i), \phi_i^{m+1} \rangle \leq 0$$

Ajoutant (9) et (10), il vient:

$$(11) \quad 2\langle \phi_i^{m+1} - \phi_i^m, \phi_i^{m+1} \rangle + \tau_m \langle \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_m^i, u_i^{m+1}) - \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u^i, u_i), \phi_i^{m+1} \rangle \leq 0$$

Posons: $X_i = \langle \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_m^i, u_i^{m+1}) - \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u^i, u_i), \phi_i^{m+1} \rangle$, $X = \sum_{i=1}^n X_i$

On a: $X_i = \langle \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_m^i, u_i^{m+1}) - \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_{m+1}^i, u_i^{m+1}), \phi_i^{m+1} \rangle + \dots$
 $\dots + \langle \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_{m+1}^i, u_i^{m+1}) - \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u^i, u_i), u_i^{m+1} - u_i \rangle$

$$X \geq \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_m^i, u_i^{m+1}) - \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_{m+1}^i, u_i^{m+1}), \phi_i^{m+1} \rangle + \alpha |\phi^{m+1}|^2$$

D'autre part, par (7) on a:

$$|\langle \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_m^i, u_i^{m+1}) - \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_{m+1}^i, u_i^{m+1}), \phi_i^{m+1} \rangle| \leq |\langle \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_m^i, u_i^{m+1}) - \frac{\partial J_i}{\partial v_i}(u_{m+1}^i, u_i^{m+1})| |\phi_i^{m+1}|$$

$$\leq \mu |u_m^i - u_{m+1}^i| |\phi_i^{m+1}|$$

d'où l'on obtient:

$$(12) \quad X \geq \alpha |\phi^{m+1}|^2 - \mu \sum_{i=1}^n |u_m^i - u_{m+1}^i| |\phi_i^{m+1}|$$

Par ailleurs, à partir de:

$$\sum_{i=1}^n (|u_{m+1}^i - u_m^i| - 2\mu\tau_m(n-1) |\phi_i^{m+1}|)^2 \geq 0$$

on tire, en développant:

$$(13) \quad \sum_{i=1}^n |u_{m+1}^i - u_m^i| |\phi_i^{m+1}| \leq \frac{1}{2\mu\tau_m} |\phi^{m+1} - \phi^m|^2 + 2\mu\tau_m(n-1) |\phi^{m+1}|^2$$

d'où, en reportant dans (12):

$$(14) \quad X \geq \alpha |\phi^{m+1}|^2 - \frac{1}{2\tau_m} |\phi^{m+1} - \phi^m|^2 - 2\tau_m \mu^2 (n-1) |\phi^{m+1}|^2$$

A partir de (11), on a donc:

$$(15) \quad |\phi^{m+1}|^2 - |\phi^m|^2 + |\phi^{m+1} - \phi^m|^2 \leq -\tau_m X \leq -\tau_m \alpha |\phi^{m+1}|^2 + \frac{1}{2} |\phi^{m+1} - \phi^m|^2 + \dots \\ \dots + 2\tau_m^2 \mu^2 (n-1) |\phi^{m+1}|^2$$

et finalement:

$$(16) \quad |\phi^{m+1}|^2 - |\phi^m|^2 + \alpha \tau_m |\phi^{m+1}|^2 \leq 2\mu^2 \tau_m^2 (n-1) |\phi^{m+1}|^2$$

c'est-à-dire:

$$(17) \quad |\phi^{m+1}|^2 (1 + \alpha \tau_m - 2\mu^2 \tau_m^2 (n-1)) \leq |\phi^m|^2$$

On en déduit:

$$(18) \quad 0 < \tau_m < \frac{\alpha}{2\mu^2 (n-1)} \implies |\phi^m| \rightarrow 0 \text{ lorsque } m \rightarrow \infty$$

2- RECHERCHE D'UN POINT DE PARETO.

a) Hypothèses;

V est un espace de Banach réel réflexif (norme $\|\cdot\|$) et K un sous-ensemble convexe fermé non vide de V. J est une fonctionnelle réelle définie sur K et telle que:

1) J est strictement convexe, semi-continue inférieurement sur K

2) Si K n'est pas borné: $\lim_{\substack{\|u\| \rightarrow \infty \\ u \in K}} J(u) = +\infty$

On suppose que l'on peut définir sur V une norme $|\cdot|$ continue, correspondant à un produit scalaire préhilbertien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et que:

3) $V = \bigcap_{i=1}^q V_i$ les V_i étant des espaces de Banach réflexifs (norme $\|\cdot\|_i$) avec:

$V \subset V_i \subset H$ où H est l'espace de Hilbert complété de V pour la norme $|\cdot|$, les injections étant continues.

4) $K = \bigcap_{i=1}^q K_i$ où K_i est un ensemble convexe fermé de V_i

$J(v) = \sum_{i=1}^q J_i(v)$ $\forall v \in K$, J_i étant une fonctionnelle réelle définie sur

K_i et vérifiant les conditions:

5) J_i est convexe, semi-continue inférieurement sur K_i et telle que, si K_i

n'est pas borné:
$$\lim_{\substack{\|v\|_i \rightarrow \infty \\ v \in K_i}} J_i(v) = +\infty$$

b) Algorithme.

1) On donne une condition initiale $u^0 \in K_q$

2) $u^{n+i/q}$ est déterminé à partir de $u^{n+(i-1)/q}$ comme l'unique élément de

K_i qui minimise la fonctionnelle:

$$\phi_{n,i}(v) = \frac{1}{2\tau_n} |v - u^{n+(i-1)/q}|^2 + J_i(v)$$

où τ_0, τ_1, \dots est une suite de nombres strictement positifs tels que:

$$(19) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \{ \max_{0 \leq n \leq N} \tau_n \} = 0$$

$$(20) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = +\infty \quad \text{avec} \quad \sigma_N = \sum_{n=0}^N \tau_n$$

3) A la suite $u^{n+i/q}$ ainsi définie, on associe la suite:

$$\begin{matrix} i=1, \dots, q \\ N=0, 1, \dots \end{matrix} \quad w^{N+i/q} = \frac{1}{\sigma_N} \sum_{n=0}^N \tau_n u^{n+i/q}$$

c) Théorème de convergence.

Sous les hypothèses précédentes, il existe un élément unique $u^* \in K$ qui réalise le minimum de J et l'on a:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} w^{N+i/q} = u^* \quad \text{dans } V_i \text{ faible } (i=1, \dots, q)$$

Démonstration.

D'après le point 2) de l'algorithme, on a: $\forall v \in K_i$

$$(21) \quad \frac{1}{2\tau_n} |u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}|^2 + J_i(u^{n+i/q}) \leq \frac{1}{2\tau_n} |v - u^{n+(i-1)/q}|^2 + J_i(v)$$

Lemme 1. $u^{n+i/q} \in K_i$ vérifie (21) si et seulement si:

$$(22) \quad \langle u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}, u^{n+i/q} \rangle + \tau_n J_i(u^{n+i/q}) \leq \dots$$

$$\dots \langle u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}, v \rangle + \tau_n J_i(v) \quad \forall v \in K_i$$

En effet, soit de façon générale j_1 et j_2 deux fonctionnelles convexes sur \tilde{K} , j_1 étant différentiable; si $j = j_1 + j_2$ vérifie $j(v) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|v\| \rightarrow +\infty$ et si j est strictement convexe, alors l'élément u de \tilde{K} réalisant le minimum de j sur \tilde{K} est caractérisé par:

$$\langle j'_1(u), v - u \rangle + j_2(v) - j_2(u) \geq 0 \quad \forall v \in \tilde{K} \quad (\text{cf. /2/})$$

On en déduit (22), en posant $K_i = \tilde{K}$ et:

$$j_1(v) = \frac{1}{2\tau_n} |v - u^{n+(i-1)/q}|^2, \quad j_2(v) = J_i(v)$$

Soit à présent v un élément quelconque de K .

Lemme 2. On a:

$$(23) \quad \frac{1}{2\sigma_N} |u^{N+1} - v|^2 + \frac{1}{2\sigma_N} \sum_{i=1}^q \sum_{n=0}^N |u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}|^2 + \sum_{i=1}^q J_i(u^{n+i/q}) \leq \dots$$

$$\dots \leq \frac{1}{2\sigma_N} |u^0 - v|^2 + J(v) \quad \forall v \in K, \forall N \geq 0$$

En effet, puisque $v \in K$ les relations (21) et (22) ont lieu pour tout n et i .

Il est facile de voir que:

$$2\langle u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}, u^{n+i/q} - v \rangle = 2\langle (u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}) - (u^{n+(i-1)/q} - v), u^{n+i/q} - v \rangle$$

$$= |u^{n+i/q} - v|^2 - |u^{n+(i-1)/q} - v|^2 + |u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}|^2$$

Alors, (22) donne:

$$|u^{n+i/q} - v|^2 - |u^{n+(i-1)/q} - v|^2 + |u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}|^2 + 2\tau_n J_i(u^{n+i/q}) \leq \dots$$

$$\dots \leq 2\tau_n J_i(v)$$

Ajoutant ces inégalités pour $n=0, \dots, N$; $i=1, \dots, q$, on trouve:

$$(24) \quad |u^{N+1} - v|^2 + \sum_{i=1}^q \sum_{n=0}^N |u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}|^2 + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{n=0}^N \tau_n J_i(u^{n+i/q}) \leq \dots$$

$$\dots \leq |u^0 - v|^2 + 2\sigma_N J(v)$$

D'après la définition de $w^{N+i/q}$ et la convexité de J_i on a :

$$(25) \quad \sigma_N^{J_i}(w^{N+i/q}) \leq \sum_{n=0}^N \tau_n^{J_i}(u^{n+i/q})$$

et en utilisant ceci dans (24) on trouve (23).

On utilise alors (23) avec $v = v_0$ un élément fixé quelconque de K (qui est non vide). Comme les fonctionnelles J_i sont bornées inférieurement, on obtient aisément les majorations suivantes :

Lemme 3. Il existe une constante c indépendante de N et des nombres τ_n , telle que :

$$(26) \quad \frac{1}{\sigma_N} |u^{N+1}|^2 \leq c$$

$$(27) \quad \frac{1}{\sigma_N} \sum_{n=0}^N |u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}|^2 \leq c$$

$$(28) \quad \|w^{N+i/q}\|_i \leq c \quad N \geq 0, 1 \leq i \leq q$$

Grâce à la définition de $w^{N+i/q}$, et compte-tenu de (27) et de la convexité de la fonction $w \rightarrow |w|^2$, on obtient, pour $2 \leq i \leq q$:

$$\begin{aligned} |w^{N+i/q} - w^{N+(i-1)/q}|^2 &= \left| \sum_{n=0}^N \frac{\tau_n}{\sigma_N} (u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}) \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{\sigma_N} \sum_{n=0}^N \tau_n |u^{n+i/q} - u^{n+(i-1)/q}|^2 \\ &\leq c \{ \max_{0 \leq n \leq N} \tau_n \} \end{aligned}$$

et, d'après (19) :

$$(29) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (w^{N+i/q} - w^{N+(i-1)/q}) = 0 \text{ dans } H \text{ fort } 2 \leq i \leq q$$

En raison de (28), il existe une suite $N' \rightarrow \infty$ telle que :

$$(30) \quad \lim_{N' \rightarrow \infty} w^{N'+i/q} = w^{(i)} \text{ dans } V_i \text{ faible } 1 \leq i \leq q$$

En raison de (29) les $w^{(i)}$ sont égaux à un même élément w . Puisque $w^{N+i/q} \in K_i$

par définition, et que cet ensemble est fermé dans V_i faible, on a :

$$(31) \quad w = w^{(i)} \in K_i \quad \text{et donc} \quad w \in K$$

Soit à présent $v \in K$. L'inégalité (23) donne:

$$(32) \quad \sum_{i=1}^q J_i(w^{N'+i/q}) \leq \frac{1}{2\sigma_{N'}} |u^0 - v|^2 + J(v)$$

Utilisant (20) et (29), et la semi-continuité inférieure de J_i , on trouve à la limite:

$$(33) \quad \sum_{i=1}^q J_i(w) = J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in K$$

ce qui prouve que $w = u$.

On vérifie de même que de toute suite extraite de $w^{N+i/q}$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers u dans V_i faible et c'est donc la suite $w^{N+i/q}$ tout entière qui converge vers u dans V_i faible lorsque $N \rightarrow \infty$.

Remarque. L'hypothèse (19) est seulement une condition suffisante pour assurer (29) et donc (31). Si l'on peut s'assurer de (29) par un quelconque procédé (éventuellement expérimental) alors le théorème de convergence demeure valable sans (19).

REFERENCES

- /1/ G.MINTY Monotone (non linear) operator in Hilbert space. Duke Math. J., 29, 1962.
- /2/ J.L.LIONS Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris 1968.

ANNEXE 5

RECHERCHE D'UN POINT DE NASH AU MOYEN D'UNE PARTIE FICTIVE CONTINUE

a) Hypothèses.

On suppose les fonctions R_j , $j=1, \dots, N$, continues et telles que:

$$(1) \quad \forall j, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_N) \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_{j-1} \times \Lambda_{j+1} \times \dots \times \Lambda_N$$

R_j est convexe en λ_j et différentiable.

$A(\lambda)$ désignant l'opérateur: $A(\lambda) = \left(\frac{\partial R_1}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \dots, \frac{\partial R_N}{\partial \lambda_N}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \right)$ on suppose:

$$(2) \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \langle A(\lambda) - A(\lambda'), \lambda - \lambda' \rangle \geq \alpha \|\lambda - \lambda'\|^2 \quad \forall \lambda, \lambda'$$

Les ensembles admissibles Λ_j sont définis par:

$$(3) \quad \lambda_j \in \Lambda_j \iff \lambda_j^i \in [0, \beta_j] \text{ et } c^T \lambda_j = \alpha_j \quad \forall i, \forall j$$

avec: $c^T = (1, \dots, 1)$

b) Système différentiel.

A partir d'une condition initiale fixée, on intègre le système:

$$(4) \quad \forall j \quad \frac{d\lambda_j}{dt} = - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j}(\lambda) + u_j$$

où u_j est solution du problème:

$$\|u_j\|^2 = \min_{v_j \in \mathbb{R}^m} \|v_j\|^2 \text{ sous les contraintes: } 1- c^T v_j = c^T \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j}(\lambda)$$

$$2- v_j^i \geq \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i}(\lambda) \text{ ssi } \lambda_j^i = 0$$

$$3- v_j^i \leq \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i}(\lambda) \text{ ssi } \lambda_j^i = \beta_j$$

c) Théorème de convergence.

Soit λ^t une solution du système (4) obtenue à partir d'une condition

initiale admissible λ^0 . On a :

$$1) \forall \lambda^0 \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_N \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^t = \lambda^*$$

2) λ^* est point de Nash.

Démonstration. Soit λ^t un point sur la trajectoire issue de la condition initiale λ^0 et soit λ^{t+T} un point de la même trajectoire, T étant un réel positif quelconque

On introduit :

$$(5) \quad v^t = \frac{1}{2} \|\lambda^t - \lambda^{t+T}\|^2$$

On a alors :

$$\frac{dv^t}{dt} = \left\langle \frac{d\lambda^t}{dt} - \frac{d\lambda^{t+T}}{dt}, \lambda^t - \lambda^{t+T} \right\rangle$$

c'est-à-dire, compte-tenu de (4) :

$$(6) \quad \frac{dv^t}{dt} = \sum_{j=1}^N \left\langle -\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j}(\lambda^t) + u_j^t + \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j}(\lambda^{t+T}) - u_j^{t+T}, \lambda_j^t - \lambda_j^{t+T} \right\rangle$$

(on note de la même façon le produit scalaire dans Λ_j et dans $\prod_{j=1}^N \Lambda_j$, aucune confusion n'étant à craindre). On a donc :

$$(7) \quad \frac{dv^t}{dt} = - \langle A(\lambda^t) - A(\lambda^{t+T}), \lambda^t - \lambda^{t+T} \rangle + \sum_{j=1}^N \langle u_j^t - u_j^{t+T}, \lambda_j^t - \lambda_j^{t+T} \rangle$$

$$\text{Posons : } X_j^t = \langle u_j^t - u_j^{t+T}, \lambda_j^t - \lambda_j^{t+T} \rangle = \sum_{i=1}^m (u_j^{i,t} - u_j^{i,t+T}) (\lambda_j^{i,t} - \lambda_j^{i,t+T})$$

et soient I, K, L, I', K', L', les ensembles d'indices suivants :

$$\lambda_j^{k,t} = 0 \quad \forall k \in K; \quad \lambda_j^{l,t} = \beta_j \quad \forall l \in L; \quad \lambda_j^{i,t} \in]0, \beta_j[\quad \forall i \in I$$

$$\lambda_j^{k',t+T} = 0 \quad \forall k' \in K'; \quad \lambda_j^{l',t+T} = \beta_j \quad \forall l' \in L'; \quad \lambda_j^{i',t+T} \in]0, \beta_j[\quad \forall i' \in I'$$

On a, en t et en t+T, les commandes suivantes :

$$\forall k \in K_1 \subset K \quad u_j^{k,t} = \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^k}(\lambda^t) \quad \text{card } K_1 = p$$

$$\forall l \in L_1 \subset L \quad u_j^{l,t} = \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^l}(\lambda^t) \quad \text{card } L_1 = q$$

$$\forall i \in I_1 \supset I \quad u_j^{i,t} = \frac{1}{m-p-q} \sum_{i \in L_1 \cup K_1} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^t)$$

$$\forall k' \in K'_1 \subset K' \quad u_j^{k',t+T} = \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^{k'}} (\lambda^{t+T}) \quad \text{card } K'_1 = p'$$

$$\forall l' \in L'_1 \subset L' \quad u_j^{l',t+T} = \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^{l'}} (\lambda^{t+T}) \quad \text{card } L'_1 = q'$$

$$\forall i' \in I'_1 \supset I' \quad u_j^{i',t+T} = \frac{1}{m-p'-q'} \sum_{i' \in L'_1 \cup K'_1} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^{i'}} (\lambda^{t+T})$$

On notera, pour alléger l'écriture:

$$i \in I_1 \quad u_j^{i,t} = \frac{\sigma_1}{m-p-q} \quad , \quad i' \in I'_1 \quad u_j^{i',t+T} = \frac{\sigma'_1}{m-p'-q'}$$

Le calcul de x_j^t fait alors apparaître les quantités suivantes:

$$x_j^t = \sum_{i=1}^9 y_i \quad \text{avec:}$$

$$(8) \quad y_1 = \sum_{i \in K_1 \cap K'_1} \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^t) - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^{t+T}) \right) (0 - 0) = 0$$

$$(9) \quad y_2 = \sum_{i \in L_1 \cap L'_1} \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^t) - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^{t+T}) \right) (\beta_j - \beta_j) = 0$$

$$(10) \quad y_3 = \sum_{i \in I_1 \cap I'_1} \left(\frac{\sigma_1}{m-p-q} - \frac{\sigma'_1}{m-p'-q'} \right) (\lambda_j^{i,t} - \lambda_j^{i,t+T})$$

c'est-à-dire, compte-tenu du fait que les trajectoires restent admissibles,

$$(c^T \lambda_j^t = c^T \lambda_j^{t+T} = \alpha_j \quad \forall j):$$

$$(11) \quad y_3 = - \left(\frac{\sigma_1}{m-p-q} - \frac{\sigma'_1}{m-p'-q'} \right) \sum_{i \in I_1 \cap I'_1} (\lambda_j^{i,t} - \lambda_j^{i,t+T})$$

$$(12) \quad y_4 = \sum_{i \in K_1 \cap L'_1} \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^t) - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^{t+T}) \right) (0 - \beta_j)$$

$$(13) \quad y_5 = \sum_{i \in K'_1 \cap L_1} \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^t) - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^{t+T}) \right) (\beta_j - 0)$$

$$(14) \quad y_6 = \sum_{i \in K'_1 \cap I'_1} \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^t) - \frac{\sigma'_1}{m-p'-q'} \right) (0 - \lambda_j^{i,t+T})$$

$$(15) \quad y_7 = \sum_{i \in L'_1 \cap I'_1} \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^t) - \frac{\sigma'_1}{m-p'-q'} \right) (\beta_j - \lambda_j^{i,t+T})$$

$$(16) \quad y_8 = \sum_{i \in K'_1 \cap I_1} \left(\frac{\sigma_1}{m-p-q} - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^{t+T}) \right) (\lambda_j^{i,t} - 0)$$

$$(17) \quad y_9 = \sum_{i \in L'_1 \cap I_1} \left(\frac{\sigma_1}{m-p-q} - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^{t+T}) \right) (\lambda_j^{i,t} - \beta_j)$$

En utilisant dans (11) le fait que:

$$\overline{I_1 \cap I'_1} = (K_1 \cap K'_1) \cup (L_1 \cap L'_1) \cup (K_1 \cap L'_1) \cup (K'_1 \cap L_1) \cup (K_1 \cap I'_1) \cup (L_1 \cap I'_1) \cup (K'_1 \cap I_1) \cup (L'_1 \cap I_1)$$

et en effectuant la sommation des Y_i , on obtient finalement:

$$(18) \quad x_j^t = \sum_{i \in K'_1 \cap L'_1} -\beta_j \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^t) - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^{t+T}) - \frac{\sigma_1}{m-p-q} + \frac{\sigma'_1}{m-p'-q'} \right) \\ + \sum_{i \in K'_1 \cap L_1} \beta_j \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^t) - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^{t+T}) - \frac{\sigma_1}{m-p-q} + \frac{\sigma'_1}{m-p'-q'} \right) \\ + \sum_{i \in K_1 \cap I'_1} -\lambda_j^{i,t+T} \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^t) - \frac{\sigma_1}{m-p-q} \right) \\ + \sum_{i \in L_1 \cap I'_1} (\beta_j - \lambda_j^{i,t+T}) \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^t) - \frac{\sigma_1}{m-p-q} \right) \\ + \sum_{i \in K'_1 \cap I_1} \lambda_j^{i,t} \left(\frac{\sigma'_1}{m-p'-q'} - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^{t+T}) \right) \\ + \sum_{i \in L'_1 \cap I_1} (\lambda_j^{i,t} - \beta_j) \left(\frac{\sigma'_1}{m-p'-q'} - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^{t+T}) \right)$$

Par ailleurs, les ensembles K_1 et L_1 sont tels que:

$$(19) \quad \forall k \in K_1 \quad \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^k}(\lambda) > \frac{1}{m-p-q} \sum_{i \notin K_1 \cup L_1} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i}(\lambda)$$

$$\forall l \in L_1 \quad \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^l}(\lambda) < \frac{1}{m-p-q} \sum_{i \notin K_1 \cup L_1} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i}(\lambda)$$

avec les mêmes relations pour les ensembles K_1' et L_1' . En effet, dans le cas contraire, les contraintes inégalité correspondantes ne seraient pas saturées.

En utilisant (19), et compte-tenu du fait que les trajectoires restent toujours admissibles ($\forall \tau, \lambda_j^{i,\tau} \in [0, \beta_j] \forall i$), on déduit de (18):

$$(20) \quad x_j^t \leq 0 \text{ avec } x_j^t = 0 \text{ si et seulement si } p = q = p' = q' = 0, \text{ c'est-à-dire si aucune contrainte n'est saturée en } t \text{ ni en } t+T.$$

Dans ces conditions, on peut majorer (7) par:

$$(21) \quad \frac{dv^t}{dt} \leq - \langle A(\lambda^t) - A(\lambda^{t+T}), \lambda^t - \lambda^{t+T} \rangle$$

Utilisant l'hypothèse (2) on obtient alors:

$$(22) \quad \forall t, T \quad \frac{dv^t}{dt} \leq - \alpha \|\lambda^t - \lambda^{t+T}\|^2 = - 2\alpha v^t$$

d'où:

$$(23) \quad \forall t, T \quad v^t \leq v^0 e^{-2\alpha t}$$

ce qui démontre la convergence de l'algorithme.

Unicité du point d'équilibre. Considérons deux conditions initiales différentes:

λ^0 et μ^0 , et soient λ^t et μ^t deux points appartenant aux trajectoires qui en sont issues. On introduit la fonction:

$$w^t = \frac{1}{2} \|\lambda^t - \mu^t\|^2$$

On démontre de la même façon que précédemment:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w^t = 0$$

Nash-optimalité. Il reste à montrer que le point ainsi obtenu est bien le point

de Nash du problème. Soit λ^* ce point. On a:

$$(24) \quad \frac{d\lambda_j^*}{dt} = - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j}(\lambda^*) + u_j^* = 0 \quad j=1, \dots, N$$

Soient K_1^* et L_1^* les ensembles d'indices correspondant aux contraintes saturées. On a, à partir de (24):

$$(25) \quad \forall i \notin K_1^* \cup L_1^* \quad - \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j} (\lambda^*) + \frac{1}{m-p-q} \sum_{i \notin K_1^* \cup L_1^*} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^*) = 0$$

Ce système linéaire homogène, de déterminant nul, admet la solution:

$$(26) \quad \forall i \notin K_1^* \cup L_1^* \quad \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^*) = 0$$

A partir des relations (19) caractérisant les contraintes saturées on a, en utilisant (26):

$$(27) \quad \forall k \in K_1^* \quad \lambda_j^{k*} = 0 \quad \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^k} (\lambda^*) > 0$$

$$\forall l \in L_1^* \quad \lambda_j^{l*} = \beta_j \quad \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^l} (\lambda^*) < 0$$

Soit λ un point quelconque admissible. On a:

$$(28) \quad \left\langle \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j} (\lambda^*), \lambda_j - \lambda_j^* \right\rangle = \sum_{k \in K_1^*} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^k} (\lambda^*) (\lambda_j^k - \lambda_j^{k*}) + \sum_{l \in L_1^*} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^l} (\lambda^*) (\lambda_j^l - \lambda_j^{l*}) + \sum_{i \notin K_1^* \cup L_1^*} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^*) (\lambda_j^i - \lambda_j^{i*})$$

Compte-tenu de (26) et de la contrainte égalité, la dernière somme s'écrit:

$$(29) \quad \sum_{i \notin K_1^* \cup L_1^*} \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^i} (\lambda^*) (\lambda_j^i - \lambda_j^{i*}) = -\theta \left(\sum_{k \in K_1^*} (\lambda_j^k - \lambda_j^{k*}) + \sum_{l \in L_1^*} (\lambda_j^l - \lambda_j^{l*}) \right)$$

de sorte que (28) devient:

$$(30) \quad \left\langle \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j} (\lambda^*), \lambda_j - \lambda_j^* \right\rangle = \sum_{k \in K_1^*} \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^k} (\lambda^*) - \theta \right) (\lambda_j^k - \lambda_j^{k*}) + \sum_{l \in L_1^*} \left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j^l} (\lambda^*) - \theta \right) (\lambda_j^l - \lambda_j^{l*})$$

et, compte-tenu de (27) on obtient alors:

$$(31) \quad \forall j \quad \left\langle \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j}(\lambda^*), \lambda_j - \lambda_j^* \right\rangle \geq 0 \quad \forall \lambda$$

ce qui montre, grâce à la convexité de R_j par rapport à λ_j , que la solution λ^* est Nash-optimale.

