THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ

(Mathématiques Appliquées)

par

Jean-Paul DELAHAYE

QUELQUES PROBLÈMES POSÉS PAR LES SUITES DE POINTS NON CONVERGENTES ET ALGORITHMES POUR TRAITER DE TELLES SUITES

Soutenue le 31 janvier 1979 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury	Monsieur P. POUZET,	Président
	Monsieur C. BREZINSKI,	Examinateur
	Monsieur G. COEURE,	Examinateur
	Monsieur J.C. FIOROT,	Examinateur
	Monsieur P. HUARD,	Rapporteur

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

01.02.1976

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M.	BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BILLARD Jean	Physique du Solide
M.	BIAYS Pierre	Géographie
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M.	BOUGHON Pierre	Algèbre
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	DECUYPER Marcel	Géométrie
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique
M.	DERCOURT Michel	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M.	FAURE Robert	Mécanique
M.	FOURET René	Physique du Solide
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GLACET Charles	Chimie Organique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique
M.	GRUSON Laurent	Algèbre
M.	GUILLAUME Jean	Microbiologie
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M.	LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M.	LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M.	LEBRUN André	Electronique
M.	LEHMANN Daniel	Géométrie

Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M.	LOMBARD Jacques	Sociologie
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M.	MONTREUIL Jean	Biochimie
M.	PARREAU Michel	Analyse
M.	POUZET Pierre	Analyse Numérique
M.	PROUVOST Jean	Minéralogie
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M.	SEGUIER Guy	Electrotechnique
M.	TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BODARD Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des entreprises
M.	DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme	LEHMANN Josiane	Analyse
M.	LENTACKER Firmin	Géographie
M.	LOUAGE Francis	Electronique
Mle	MARQUET Simone	Probabilités
M.	MIGEON Michel	Chimie Physique
M.	MONTEL Marc	Physique du Solide
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	RACZY Ladislas	Electronique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	SLIWA Henri	Chimie Organique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M.	ADAM Michel	Sciences Economiques
M.	ANTOINE Philippe	Analyse
M.	BART André	Biologie Animale
M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie

M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBENEST Jean	Sciences Economiques
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
Me EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. FONTAINE Jacques-Marie	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. FORELICH Daniel	Chimie Physique
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
Mle KOSMAN Yvette	Géométrie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
Mle LEGRAND Denise	Algèbre
Mle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M. LOUCHET Pierre	Sciences de l'Education
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
Me N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MONTUELLE Bernard	Biologique Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie
Mle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. STEEN Jean-Pierre	Informatique

.../...

M.	THERY Pierre	Electronique
M.	TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M.	TREANTON Jean-René	Sociologie
M.	VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M.	VILLETTE Michel	Mécanique
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WERNIER Georges	Informatique
M.	WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme	ZINN-JUSTIN Nicole	Algèbre

Je remercie très respectueusement Monsieur le Professeur POUZET qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur HUARD de m'avoir donné l'idée de ce travail et de m'avoir suivi et conseillé tout au long de sa réalisation. Qu'il trouve exprimée ici ma profonde gratitude.

Je suis très honoré de la présence de Monsieur le Professeur COEURE qui a accepté de s'intéresser à ce travail et de le juger.

Je remercie Monsieur le Professeur BREZINSKI pour avoir bien voulu donner son avis sur cette thèse et pour m'avoir accueilli dans le séminaire qu'il anime.

Je remercie également Monsieur J.C. FIOROT d'avoir accepté de participer à ce Jury, ainsi que tous les membres de l'équipe d'optimisation du Laboratoire de Mathématiques Appliquées, en particulier J. DENEL, qui m'ont aidé par les échanges amicaux que nous avons eus ensemble.

J'apprécie la compétence et le soin apportés à la réalisation matérielle de cette thèse par Madame CARON qui a dactylographiée ce travail avec rapidité, et par Monsieur et Madame DEBOCK qui ont tiré les épreuves.

A Martine qui m'a bien aidé.

TABLE DES MATIERES

*

* *

DEUXIEME PARTIE : ALGORITHMES POUR SUITES NON CONVERGENTES

*

* *

*

*   *

*

INTRODUCTION

Fréquemment en mathématiques appliquées, on dispose d'algorithmes construisant des suites dont on n'est pas certain de la convergence : algorithmes d'optimisation (W.I. Zangwill [1], E. Polak [1] [2], P. Huard [1] [2] [3] [4], J.C. Fiorot et P. Huard [1] [2], J.C. Fiorot [1], etc...) algorithmes généraux multivoques (S. Kakutani [1], B.C. Eaves [1], W.I. Zangwill [1], P. Huard [1] [5], G.G.L. Meyer [1] [2] [3], R.R. Meyer [1] [2] [3], J. Denel [1] [2] [3], etc...) algorithmes basés sur une itération de Picard : $x_{n+1} = f(x_n)$ (S. Ulam et P. Stein [1], A.N. Sarkowski [1], F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1], G.G.L. Meyer et R.C. Raup [1], etc...). C'est pourquoi une étude générale des suites non convergentes, de leurs points d'accumulation et des algorithmes pour traiter de telles suites (algorithmes essayant de reconnaître la convergence, de dénombrer les points d'accumulation, d'extraire des sous-suites convergentes) semblait intéressante à entreprendre.

C'est cette étude que nous avons tenter de faire dans ce travail, où on pourra distinguer :

1) La mise en avant des problèmes généraux que posent les suites non convergentes (§ I, II et III).

2) La formation d'outils pour le traitement de ces suites (§ II, IV et V).

3) L'étude détaillée de deux types particuliers de ces suites (§ VI et VII).

4) La recherche de méthodes pour le traitement de ces suites (§ VIII, IX, X).

5) Quelques expériences numériques (annexe).

1) La mise en avant des problèmes généraux que posent les suites non convergentes (§ I, II et III)

Certains auteurs (J.L. Kelley [1], J. Dugundji [1], N. Bourbaki [2]) jugent avec raison, que la notion de suite est inadaptée à l'étude des espaces topologiques généraux. En effet, contrairement aux notions de filtres (ou de familles filtrantes), la notion de suite ne permet pas en général une caractérisation des fermés, des compacts et des fonctions continues. Cependant, les notions de filtres et de familles filtrantes ne peuvent satisfaire les mathématiques appliquées, car celles-ci sont par nature, confrontées à des problèmes de suites (1).

Les trois premiers chapitres qui traitent de manière abstraite de quelques-uns de ces problèmes de suites, ont été rédigés très en détail pour en faciliter la lecture et l'utilisation.

Ils n'ont pas l'ambition de donner des résultats théoriques de grande difficulté, mais ils sont destinés à être utilisés dans les mathématiques appliquées et plus particulièement dans les chapitres suivants où diverses catégories de suites non convergentes sont rencontrées.

Sans pouvoir prétendre avoir tout dit sur un tel sujet, nous avons voulu régler certaines questions abordées isolément dans la littérature à des

Note (1) : Outre le fait que les notions de filtres et de familles filtrantes appellent logiquement l'emploi de l'axiome du choix avec, pour conséquence, d'introduire des objets, comme, par exemple, les ultrafiltres non triviaux, dont l'existence est démontrée mais qui restent introuvables !

niveaux de généralité différents en les présentant dans un cadre unifié. Ceci nous permet d'aborder plus librement la suite de ce travail, et nous l'espérons, pourra être utile pour d'autres problèmes.

2) La formation d'outils pour le traitement des suites non convergentes (§ II, IV et V)

Il a semblé utile d'introduire quelques outils nouveaux pour l'étude de ces suites. Ce sont, par exemple, des notions permettant de mesurer l'irrégularité de ces suites ("force d'un point d'accumulation"). Elles se révèlent très pratiques lors de la construction d'algorithmes et lors de la démonstration de leur bon fonctionnement.

3) L'étude détaillée de deux types particuliers de suites non convergentes (§ VI et VII)

Les suites telles que : $d(x_{n+1}, x_n) \to 0$, qui interviennent dans bien des problèmes (A.M. Ostrowski [1], J.C. Fiorot et P. Huard [1] [2], J.C. Fiorot [1], R.R. Meyer [1] [2]) méritaient une étude attentive.

Le classique résultat d'Ostrowski s'obtient comme cas particulier d'une des propositions du § VI, et d'autres résultats, qui semblent nouveaux, sont aussi établis au § VI, en particulier le contre-exemple quelque peu surprenant de la fin du paragraphe.

Les suites obtenues par une relation de la forme : $x_{n+1} = f(x_n)$, sont étudiées au § VII (sans faire d'autre hypothèse que la continuité de f). Les résultats de F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1], de A.N. Sarkowski [1] et de G.G.L. Meyer et R.C. Raup [1] ont été systématiquement généralisés. De nouveaux contre-exemples sont proposés dont un résoud le problème de F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1].

4) La recherche de méthodes pour le traitement des suites non convergentes (§ VIII, IX et X)

On est en général assez démuni pour tirer des informations d'une suite non convergente, alors que dans un certain nombre de situations pratiques cela serait utile ; par exemple :

- dans une itération de Picard, s'il y a p points d'accumulation alors chacun d'eux vérifie : $f^p(x) = x$.

- En optimisation, bien des résultats portent sur les points d'accumulation de la suite construite même lorsqu'elle ne converge pas.

Pour résoudre ce type de problèmes, nous supposons disposer d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, chaque point étant connu de manière exacte (pas d'erreur d'arrondi) et cette suite pouvant être calculée aussi loin qu'on le veut (elle existe potentiellement en totalité) ; nous essayons alors de répondre à des questions comme :

- la suite est-elle convergente ?

- combien de points d'accumulation a la suite ?

(algorithmes - questions ; § VIII)
ou bien nous essayons d'extraire des sous-suites convergentes de cette suite (algorithmes de traitement ; § IX).

Comme dans les algorithmes d'accélération de la convergence (C. Brezinski [1], B. Germain-Bonne [1]), à chaque étape nous supposons ne disposer que d'un nombre fini de points de la suite. Et comme pour les procédés d'accélération de la convergence, nos résultats énoncent que pour telle classe de suites, l'algorithme donné fonctionne correctement. Les meilleurs résultats, bien sûr, sont obtenus pour les classes les plus petites.

Pour imaginer certains des algorithmes présentés, nous nous sommes inspirés des méthodes utilisées en "classification automatique". Adapté aux problèmes des suites de points (où il faut donner plus d'importance aux derniers points qu'aux premiers), ces méthodes semblent donc intéressantes.

Les résultats présentés ne résolvent pas tous les problèmes posés par les suites non convergentes, ou n'en résolvent certains que partiellement. Cependant, nous avons essayer d'établir au § X, que cela était parfois dû à la nature même des problèmes : pour certains, il ne peut pas exister d'algorithmes satisfaisants(ces mots sont évidemment définis de façon précise).

Chaque fois que cela a été possible, nous avons tenu compte des questions du nombre de calculs ; et par exemple, les procédures R.k P.E. et A.k S.F. (§ IX) ont été choisies (alors que d'autres procédures auraient pu jouer leurs rôles) pour des raisons de rapidité.

5) Quelques expériences numériques

Elles montrent que l'algorithme expérimenté est utilisable et fonctionne correctement.

NOTATIONS ET CONVENTIONS GÉNÉRALES

- $\mathbb{R}$ désignera toujours l'ensemble des nombres réels.

- $\mathbb{N}$ désignera toujours l'ensemble des entiers : 0, 1, 2, ..., n, ...

- Quand interviendront des espaces métriques, on notera toujours d la distance, et d'autre part si A et B désignent des parties de l'espace métrique E, on posera :

$$\operatorname{diam} A = \sup \{d(x, y) \mid x \in A, y \in A\},$$

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

- Si x est un point de l'espace topologique E, on désignera par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages (ouverts ou non) de x.

- Tous les espaces topologiques qui interviennent, sont supposés séparés : c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \forall y \in E : (x \neq y) \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{V}(x), \exists V \in \mathcal{V}(y) : U \cap V = \emptyset).$$

- On indique la fin d'une démonstration par le symbole : ∎

§ I

L'ENSEMBLE D'ACCUMULATION ET L'ENSEMBLE SOUS-LIMITE D'UNE SUITE

Présentation du § I

Après avoir rappelé quelques définitions et fixé les notations, nous énonçons les propriétés générales de l'ensemble d'accumulation et de l'ensemble sous-limite d'une suite. Le théorème 1 est particulièrement important puisqu'il établit l'équivalence de ces deux notions dans le cas des espaces métriques, et qu'il résume les différentes propriétés de l'ensemble d'accumulation d'une suite de points d'un espace métrique. A l'aide de la proposition 4, il permet de donner des caractérisations simples de l'ensemble d'accumulation d'une suite dans le cas des espaces métriques et dans le cas de $\mathbb{R}^m$.

Le contre-exemple 1 bien qu'assez difficile est lui aussi très important puisqu'il montre qu'en général il n'y a pas égalité entre l'ensemble d'accumulation et l'ensemble sous-limite d'une suite.

Le contre-exemple 2 qui fait appel à la propriété de Baire nous indique que l'ensemble sous-limite d'une suite n'est pas fermé ni même séquentiellement fermé en général.

Les exemples simples qui terminent le paragraphe éclairent la situation et reserviront dans la suite.

A - DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soit $(x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ une suite de points de l'espace topologique E, nous la noterons aussi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (x_n), ou même $x(n)$[(1)].

Nous noterons $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des points de la suite (x_n) c'est-à-dire :

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x \in E \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : x = x_n\}$$

Soit K une partie infinie de $\mathbb{N}$, nous noterons : $(x_k)_{k \in K}$ la sous-suite (ou suite extraite) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue en ne gardant que les x_i tels que $i \in K$.

En classant les éléments de K par ordre croissant $k(0) < k(1) < k(2) < \ldots$ la sous-suite pourra être notée $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Il y a donc deux façons équivalentes de se donner une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Soit on se donne $K \subset \mathbb{N}$, K infini.

- Soit on se donne $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $n \to k(n)$

k strictement croissante.

Nous utiliserons les deux méthodes et nous passerons de l'une à l'autre selon les nécessités des définitions, énoncés ou démonstrations.

On dit que **la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\hat{x}$** si :

$$\forall\, v \in \mathcal{V}(\hat{x}),\ \exists\, n_o \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq n_o \Rightarrow x_n \in v$$

On dit que **$\hat{x}$ est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n \in N}$** si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

Note (1) : Rappelons que, formellement, une suite d'éléments de l'ensemble E, c'est une application de $\mathbb{N}$ dans E.

- $\forall v \in \mathcal{V}(\hat{x}),\ \forall n_o \in \mathbb{N} : \{x_n\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_o}} \cap v \neq \emptyset$

- $\forall v \in \mathcal{V}(\hat{x}),\ \forall n_o \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N} : n \geq n_o$ et $x_n \in v$

- $\forall v \in \mathcal{V}(\hat{x}),\ \exists K \subset \mathbb{N} : K$ infini et $(\forall k \in K : x_k \in v)$

La terminologie concernant cette notion n'est pas très bien fixée, et si on trouve assez fréquemment le terme de point d'accumulation (L.A. Steen, J.A. Seebach [1], S.A. Gaal [1], J. Dugundji [1], L. Schwartz [1]) on trouve aussi le terme de valeur d'adhérence (G. Choquet [1], C. Berge [1], N. Bourbaki [2]), et dans la littérature anglo-saxonne on trouve aussi le terme de "cluster point" (J.L. Kelley [1], J. Greever [1]).

Il est important de ne pas confondre cette notion avec celle de point d'accumulation de l'ensemble $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ou avec celle de point adhérent à l'ensemble $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (voir proposition 2).

La notion suivante elle aussi ne doit pas être confondue avec la notion de point d'accumulation de (x_n).

On dit que $\hat{x}$ **est un point sous-limite de la suite** (x_n) si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- il existe une sous-suite de (x_n) convergente vers $\hat{x}$
- $\exists K \subset \mathbb{N}, K$ infini et $(\forall v \in \mathcal{V}(\hat{x}),\ \exists k_o \in K,\ \forall k \in K : k \geq k_o \Rightarrow x_k \in v)$

Des exemples de suites admettant un point d'accumulation $\hat{x}$ tel qu'aucune sous-suite ne converge vers $\hat{x}$ sont données par exemple par J. Dugundji [1] page 215 et par L.A. Steen et J.A. Seebach [1] page 126. Un nouveau contre-exemple est donné plus loin (voir contre-exemple 1).

Nous noterons $\mathcal{A}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (respectivement $\mathcal{L}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$) l'ensemble des points d'accumulation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. des points sous-limites de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Nous dirons que $\mathcal{A}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (resp. $\mathcal{L}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$)

est l'ensemble d'accumulation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. l'ensemble sous-limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

B - Propriétés générales

Proposition 1 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de l'espace topologique E

i) si : $\forall v \in \mathcal{V}(\hat{x})$, $\exists n \in \mathbb{N} : x_n \in v$ et $x_n \neq \hat{x}$, alors $\hat{x}$ est un point d'accumulation de (x_n).

ii) $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

iii) Si $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et si $\hat{x}$ admet un système fondamental dénombrable de voisinages alors : $\hat{x} \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Démonstration

i) Supposons que :

(*) $\forall v \in \mathcal{V}(\hat{x})$, $\exists n \in \mathbb{N} : x_n \in v$ et $x_n \neq \hat{x}$

Soit $v \in \mathcal{V}(\hat{x})$ et n_o défini grâce à (*).

Il existe $v_1 \in \mathcal{V}(\hat{x})$ tel que $x_{n_o} \notin v_1$ (car E est séparé) et tel que $v_1 \subset v$ (on remplace si nécessaire v_1 par $v_1 \cap v$). Grâce à (*) on obtient $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $x_{n_1} \in v_1$ et $x_{n_1} \neq \hat{x}$. Il existe $v_2 \in v(\hat{x})$ tel que $x_{n_1} \notin v_2$ et $v_2 \subset v_1$. Grâce à (*) on obtient $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_2} \in v_2$ et $x_{n_2} \neq \hat{x}$ etc...

Ce procédé donne un ensemble $K = \{n_o, n_1, \dots\}$ infini (car tous les n_i sont distincts) tel que :

$$\forall k \in K : x_k \in v$$

Donc $\hat{x}$ est un point d'accumulation de (x_n).

ii) Soit $\hat{x} \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, soit $K \subset \mathbb{N}$, K infini tel que $(x_k)_{k \in K}$ converge vers $\hat{x}$. Par définition de la convergence, pour tout $v \in \mathcal{V}(\hat{x})$ il existe $k_o \in K$ tel que :

$k \in K$ et $k \geq k_o \Rightarrow x_k \in v$

donc pour tout $v \in \mathcal{V}(\hat{x})$ il existe une infinité d'indices i tels que : $x_i \in v$, donc $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

iii) Soit $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Soit $v_o, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ un système fondamental dénombrable de voisinages de $\hat{x}$.

Soit n_o tel que : $x_{n_o} \in v_o$.

Soit n_1 tel que : $x_{n_1} \in v_o \cap v_1$ et $n_1 > n_o$.

Soit n_2 tel que : $x_{n_2} \in v_o \cap v_1 \cap v_2$ et $n_2 > n_1$

etc...

Cette construction est possible car dans tout voisinage v de $\hat{x}$ il y a une infinité d'indices i tels que $x_i \in v$. Il est clair que la sous-suite $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $\hat{x}$ et donc $\hat{x} \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

∎

Remarque : La condition proposée dans i) qui suffit pour que $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ n'est pas nécessaire comme le montre n'importe quelle suite constante.

On peut aussi noter que dans la démonstration de i) l'hypothèse "E séparé" intervient de façon essentielle.

Remarque : Le contre-exemple 1 proposé plus loin montre que l'inclusion ii) peut être stricte.

Proposition 2 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E. *En désignant par* $A(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ *l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, *et par* $\overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$ *l'adhérence de* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *on a :*

i) $A(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset \overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$

ii) $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = A(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \cup \{x \in E \mid$ *il existe une infinité d'indices* i *tels que* $x = x_i\}$

iii) $\overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}} = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \cup \{x \in E \mid$ *il existe un nombre fini non nul d'indices* i *tels que* $x = x_i\}$

La partie ii) de cette proposition est énoncée dans Choquet [1] page 24.

Démonstration

i) Soit $\hat{x} \in A(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Par définition cela signifie que pour tout voisinage v de $\hat{x}$ il existe un point x_i tel que $x_i \neq x$ et $x_i \in v$. La proposition 1 i) donne que $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, donc : $A(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Soit $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tout voisinage v de $\hat{x}$ rencontre $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donc par définition $\hat{x} \in \overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$.

ii) L'inclusion :

$A(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \cup \{x \in E \mid$ il existe une infinité d'indices i tels que $x = x_i\} \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est évidente car chacun des ensembles du premier membre est contenu dans $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ s'il n'existe qu'un nombre fini d'indices i tels que $x_i = \hat{x}$ alors pour tout voisinage v de $\hat{x}$ il existe un indice i tel que $x_i \in v$ et $x_i \neq \hat{x}$ ce qui signifie $\hat{x} \in A(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

iii) L'inclusion :

$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \cup \{x \in E \mid$ il existe un nombre fini d'indices i tels que $x_i = x\} \subset \overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$ est évidente car chacun des ensembles du premier membre est contenu dans $\overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $\hat{x} \in \overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une infinité d'indices i tels que $x_i = \hat{x}$ alors $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

∎

Remarque : Les inclusions de i) peuvent être strictes comme le montre l'exemple suivant :

$$E = \mathbb{R} \qquad x_n = 1 \quad \text{si n est pair,}$$
$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{si n est impair.}$$

$$A(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{0\}$$

$$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{0, 1\}$$

$$\overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\}.$$

Corollaire : Si tous les points de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont différents alors :

$$A(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Rappelons qu'un espace topologique E est dit séparable si il existe une partie D de E, dénombrable et dense dans E (voir par exemple Frechet [1], J. Greever [1], L. Schwartz [1]).

Nous dirons que la partie A de E vérifie la propriété de séparation (S) si : toute famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts disjoints de E tels que $O_i \cap A \neq \emptyset$, recouvrant A est au plus dénombrable. Si A est séparable alors A vérifie la propriété de séparations (S).

Proposition 3 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E.

i) $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est fermé.*

ii) $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *vérifie la propriété de séparation* (S).

iii) Card $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \leq 2^{2^{\aleph_0}}$

La partie i) de la proposition est énoncée dans G. Choquet [1] (page 23), N. Bourbaki [2] (ch. I page 47).

Démonstration :

i) Soit y un point adhérent à $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Soit v un voisinage ouvert de y ; v contient au moins un point $z \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$; puisque v est ouvert, v est un voisinage de z et donc il existe une infinité d'indices $i \in \mathbb{N}$ tels que $x_i \in v$. Donc $y \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

ii) Pour établir la propriété ii) nous allons démontrer un résultat un peu plus fort qui nous reservira d'ailleurs dans la démonstration de la proposition 5 :

Toute partie $A \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *vérifie la propriété de séparation* (S).

En effet soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts disjoints recouvrant A et telle que $A \cap \mathcal{O}_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$.

On pose $K = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists\, i \in I \quad x_k \in \mathcal{O}_i\}$

On définit une application $\phi : K \to I$ en faisant correspondre à chaque $k \in K$ l'indice $i \in I$ (qui est unique car les $\mathcal{O}_i$ sont disjoints) tel que $x_k \in \mathcal{O}_i$. Cette application est surjective car tout $\mathcal{O}_i$ contient un élément de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et donc des x_k.

On a donc :

$$\text{Card } (I) \leq \text{Card } (K) \leq \text{Card } (\mathbb{N})$$

(d'après par exemple N. Bourbaki [1] Ch. III page 41, ou J.L. Krivine [1] page 39).

iii) D'après la proposition 2

(■) $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset \overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$

Ce dernier ensemble admet $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ comme partie dense et donc :

(■ ■) $\text{Card } (\overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}}) \leq 2^{2^{\aleph_0}}$

d'après N. Bourbaki [2] (page 101 exercice 6) ou L. Schwartz [1] (page 371) ou L.A. Steen et J.A. Seebach [1] (page 26).

Le résultat cherché résulte de (■) et (■ ■).

■

Remarque : Un problème non résolu à notre connaissance est le suivant : $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est-il toujours séparable ?

Remarque : Le contre-exemple 1 montre que l'inégalité iii) ne peut pas être améliorée.

Proposition 4 : *Soit* A *une partie fermée et séparable de l'espace topologique* E.

Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de points de* E *telle que* $A = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Démonstration :

Soit $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une partie de A dénombrable et dense dans A.

On pose :

$(x_o, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (a_o, a_o, a_1, a_o, a_1, a_2, a_o, a_1, a_2, a_3, \ldots)$

Montrons que : $A = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

a) Soit $x \in A$, soit v un voisinage de x il existe un indice j tel que $a_j \in v$ (car $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est dense dans A), il existe donc une infinité d'indices $i \in \mathbb{N}$ tels que $x_i \in v$ (car par construction de (x_n) chaque a_j est répété une infinité de fois dans la suite (x_n)).Donc $x \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

b) Par construction :

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

donc $$\overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}} = \overline{\{a_n\}}_{n \in \mathbb{N}} = A$$

donc $\quad A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset \overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}} = A$

a) et b) donnent le résultat cherché.

∎

Proposition 5 : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E. *Alors* :

i) $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a au plus la puissance du continu.*
C'est-à-dire : Card $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \leq 2^{\aleph_0}$

ii) $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *vérifie la propriété de séparation* (S).

Démonstration :

i) Soit $\mathcal{L} = \{K \subset \mathbb{N} \mid K$ infini et $(x_k)_{k \in K}$ est convergente$\}$

Soit $\phi : \mathcal{L} \to L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

$$K \mapsto \lim_{\substack{k \in K \\ k \to +\infty}} x_k$$

ϕ est surjective donc :

(1) Card $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \leq$ Card $(\mathcal{L})$

$\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ donc :

(2) Card $(\mathcal{L}) \leq$ Card $(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

De plus on sait que :

(3) Card $(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ = Card $(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$

(voir N. Bourbaki [1] Ch. III page 41 et N. Bourbaki [2] Ch. IV page 44).

Les relations (1), (2) et (3) donnent

Card $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \leq 2^{\aleph_0}$

ii) C'est une conséquence du résultat établi dans la démonstration de la proposition 3 ii).

∎

Remarque : Il est important de noter que $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ en général n'est ni séquentiellement fermé, ni fermé (voir contre-exemple 2).

Théorème 1 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique* E.

i) $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

ii) $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est fermé.*

iii) $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a au plus la puissance du continu c'est-à-dire :*
$\text{Card } A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \leq 2^{\aleph_0}$

iv) $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est séparable*

v) L'ensemble des points isolés de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est au plus dénombrable.*

Démonstration :

i) C'est une conséquence de la proposition 1 iii) et du fait que dans un espace métrique tout point admet un système fondamental dénombrable de voisinages.

ii) Voir proposition 3.

iii) Cela résulte de i) et de la proposition 5.

iv) $\overline{\{x_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$ est séparable et contient $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (proposition 2) donc en utilisant le résultat suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{un sous espace d'un espace métrique séparable}\\ \text{est séparable (N. Bourbaki [2] Ch. IX page 18)}\end{array}\right.$$

on obtient que $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est séparable.

v) C'est une propriété générale des espaces métriques séparables (voir Frechet [1] page 232).

∎

Les résultats précédents permettent de donner les deux caractérisations suivantes :

Caractérisation 1 :

Une partie A d'un espace métrique E est l'ensemble d'accumulation d'une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E si et seulement si A est fermée et séparable.

Caractérisation 2

Une partie A de $\mathbb{R}^m$ est l'ensemble d'accumulation d'une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^m$ si et seulement si A est fermée.

Démonstration

Les conditions sont nécessaires d'après le théorème précédent.

La condition de la première caractérisation est suffisante d'après la proposition 4. La condition de la seconde caractérisation est suffisante car la $\mathbb{R}^m$ est séparable (C. Berge [1] page 97) et donc toute partie de $\mathbb{R}^m$ est séparable.

∎

C - CONTRE-EXEMPLES ET EXEMPLES

Contre-exemple 1

Prenons pour E l'ensemble des applications de [0, 1] dans [0, 1] muni de la topologie de la convergence simple.

Si $f \in E$, un système fondamental de voisinages de f est constitué par les ensembles de la forme :

$$v_{f,x_1,x_2,\dots,x_m,\varepsilon} = \{g \in E \mid \forall\, i \in \{1, 2,\dots,m\} \mid f(x_i) - g(x_i) \mid \leq \varepsilon\}$$

avec : $m \in \mathbb{N}^*$ $\quad x_1, x_2, \ldots, x_m \in [0, 1]$

$\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

Considérons la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par étapes de la façon suivante :

Etape 1

f_o est la fonction caractéristique de $[0, 1/2]$

f_1 est la fonction caractéristique de $[1/2, 1]$ $\quad \alpha(1) = 2$

Etape 2

...

Etape p

(Dans les étapes précédentes les fonctions $f_o, f_1, \ldots, f_{\alpha(p)-1}$ ont été définies, ainsi que $\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(p)$). L'intervalle $[0, 1]$ est partagé en 2^p intervalles égaux (de longueurs $1/2^p$) $I_1^p, I_2^p, \ldots, I_{2^p}^p$.
On considère toutes les fonctions caractéristiques d'ensembles $A \subset [0, 1]$, A étant obtenu en réunissant 2^{p-1} intervalles distincts parmi $I_1^p, \ldots, I_{2^p}^p$. Elles sont en nombre fini (exactement $C_{2^n}^{2^{n-1}}$).
On les ordonne et ce sont elles qui sont :

$$f_{\alpha(p)}, f_{\alpha(p)+1}, f_{\alpha(p)+2}, \ldots, f_{\alpha(p+1)-1}$$

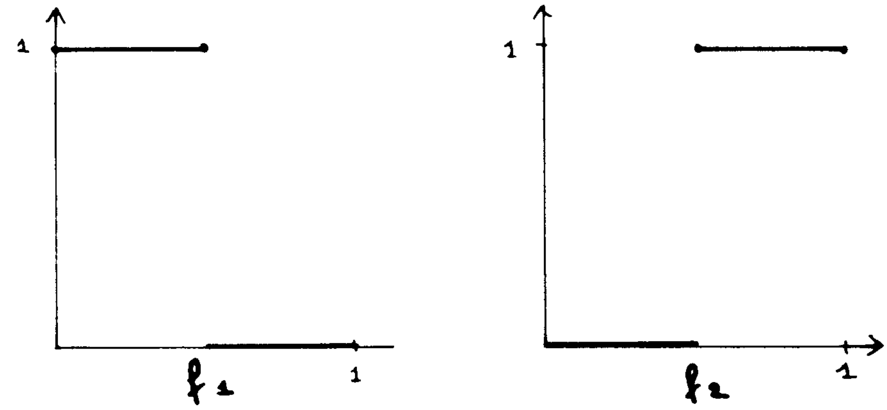
Nous allons montrer que l'ensemble des points d'accumulation de (f_n) est strictement plus grand que celui des points sous-limites de (f_n).
Pour cela nous allons établir successivement :

α) Toute fonction caractéristique d'une partie de $[0, 1]$ est point d'accumulation de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

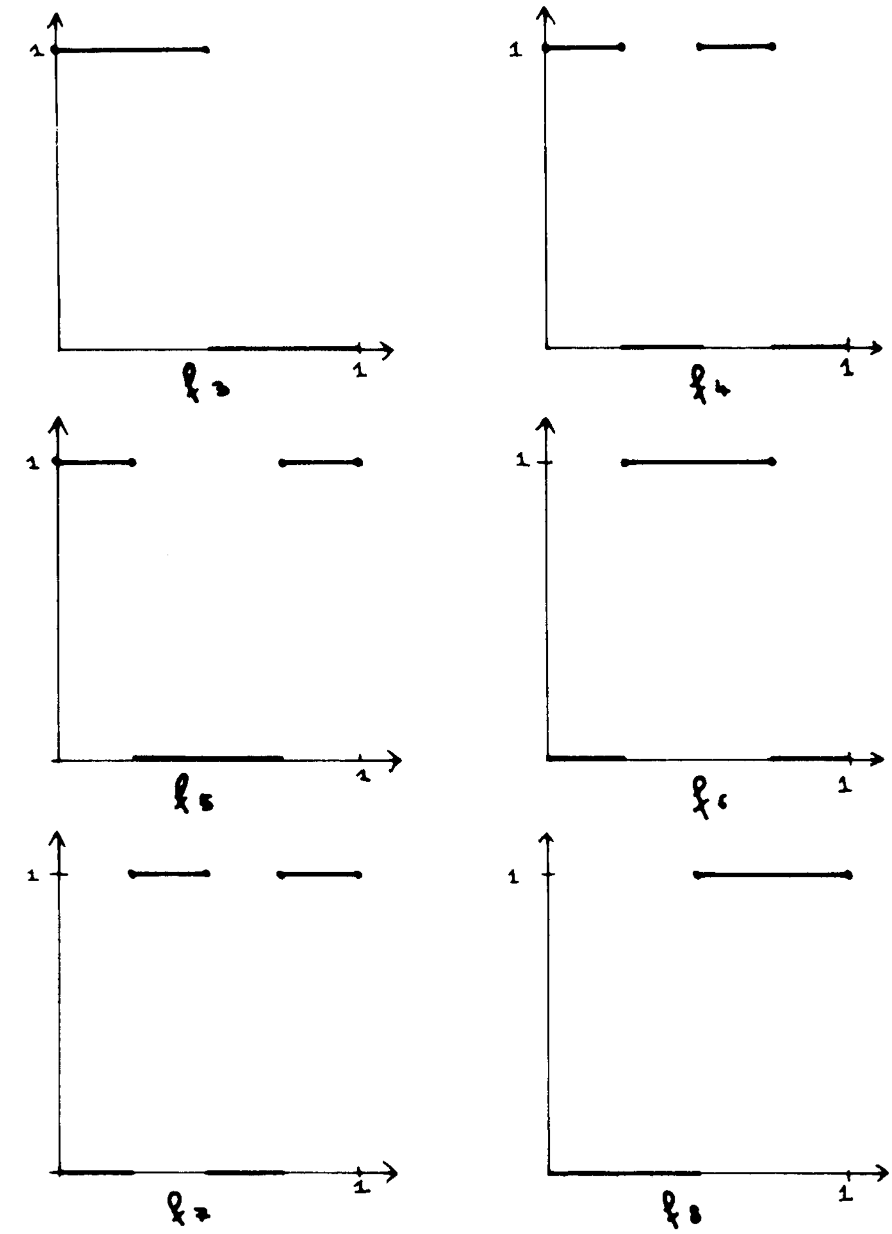
β) $A((f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ a un cardinal strictement plus grand que celui de $\mathbb{R}$.

γ) $L((f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ a un cardinal inférieur ou égal à celui de $\mathbb{R}$.

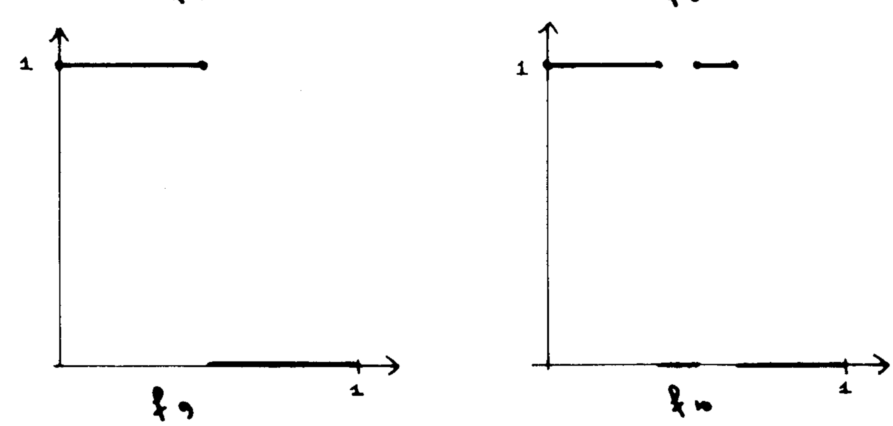
Etape 1



Etape 2



Etape 3



α) Soit g la fonction caractéristique de $A \subset [0, 1]$.

Soit $U = v_{g, x_1, x_2, \ldots, x_m, \varepsilon}$ un voisinage du système fondamental décrit plus haut. Il faut montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $f_n \in U$. Comme toute fonction qui apparait une fois dans la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y apparait une infinité de fois, il suffit de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n \in U$.

On peut supposer que $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont classés par ordre croissant :

$x_1 < x_2 < \ldots < x_m$.

Soit p tel que :

$$\frac{1}{2^p - 2} < \frac{1}{2} \min \{x_i - x_{i-1} \mid i = 2, 3, \ldots, m\}.$$

Deux x_i différents ne peuvent appartenir au même

$$I_j^p \quad j \in \{1, 2, \ldots, 2^p\}$$

Et de plus $2^p > 2m$

(car $\min \{x_i - x_{i-1} \mid i = 2, 3, \ldots, m\} \leq \frac{1}{m-1}$

donc $\frac{1}{2^p - 2} < \frac{1}{2(m-1)}$ donc $2m < 2^p$).

Ceci montre qu'il existe une fonction construite à l'étape p correspondant avec g sur tous les points $x_1, \ldots, x_m$ et ceci établit donc α).

β) D'après α) l'ensemble des fonctions caractéristiques de parties de $[0, 1]$ est contenu dans $\mathcal{A}((f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ donc le cardinal de $\mathcal{A}((f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est plus grand que celui de l'ensemble des fonctions caractéristiques de parties de $[0, 1]$.

L'ensemble des fonctions caractéristiques de parties de $[0, 1]$ est en bijection avec $\mathcal{P}([0, 1])$ l'ensemble des parties de $[0, 1]$ et l'on sait (N. Bourbaki [1] Ch. III page 47) que l'ensemble des parties de $[0, 1]$ a un cardinal strictement plus grand que le cardinal de $[0, 1]$ qui est le même que celui de $\mathbb{R}$.

Ceci établit donc β).

γ) Résulte de la proposition 5.

La conjonction des résultats β) et γ) donne :

$$\mathrm{Card}\ (L((f_n)_{n \in \mathbb{N}})) < \mathrm{Card}\ (A((f_n)_{n \in \mathbb{N}}))$$

et donc :

$$L((f_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq A((f_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Contre-exemple 2

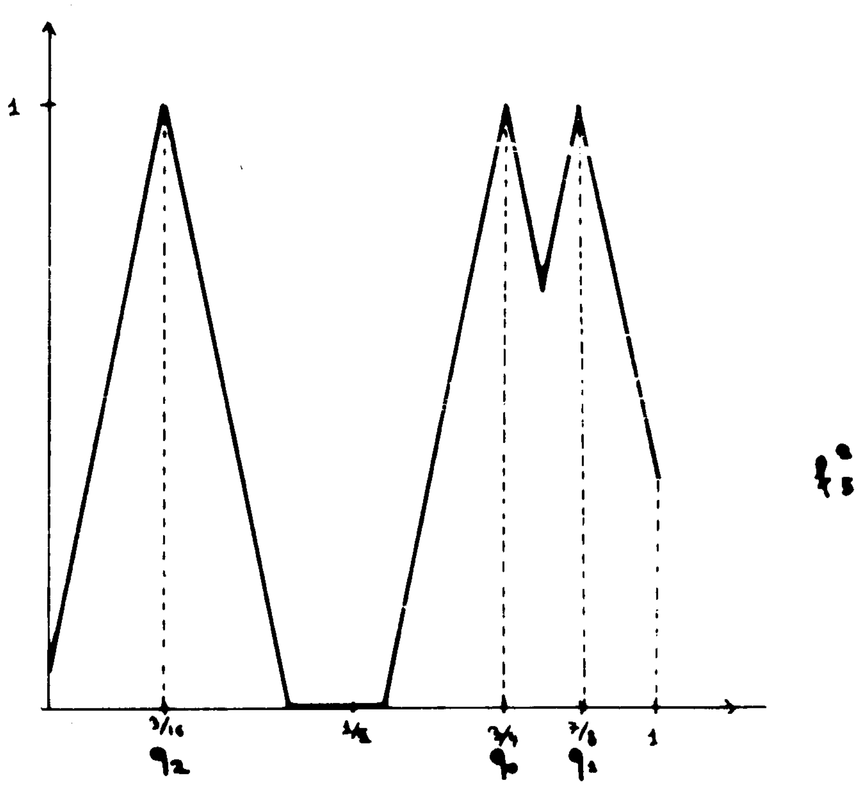
(Pour ce contre-exemple on s'est inspiré de l'exercice 107 de G. Choquet [1]).

Pour E on prend le même espace que dans le contre-exemple 1. Soit $\{q_o, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$ l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1.(On sait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et il est donc possible de "numéroter" les éléments de $\mathbb{Q}$).

Soit p un entier > 0.

On désigne par $(f_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur [0, 1] à valeurs dans [0, 1] telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^p = r_p$, où r_p désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $\{q_o, q_1, \ldots, q_p\}$. Une telle suite $(f_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être obtenue en posant :

$$f_n^p(x) = \sup \{0, \sup_{i \in \{0, 1, \ldots, p\}} (1 - n \mid q_i - x|)\}$$



On définit alors une suite g_n en posant :

$(g_o,g_1,g_2,g_3,\dots,g_n,\dots) = (f_o^o,f_1^o,f_1^1,f_2^o,f_2^1,f_2^2,f_3^o,f_3^1,f_3^2,f_3^3,\dots)$

Montrons que $L((g_n)_{n \in \mathbb{N}})$ n'est pas séquentiellement fermé (et donc à fortiori n'est pas fermé).

a) $r_p \in L((g_n)_{n \in \mathbb{N}})$

En effet par construction tous les f_i^p sont des éléments de la suite (g_n) pour $i \geq p$, et donc il existe une suite extraite de la suite (g_n) convergeant vers r_p.

b) $L((g_n)_{n \in \mathbb{N}})$ ne contient pas la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$.

En effet une limite simple de fonctions continues est continue sauf sur un ensemble maigre (voir L. Schwartz [1] page 325). Or la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'est nulle part continue.

c) Si $L((g_n)_{n \in \mathbb{N}})$ était séquentiellement fermé il contiendrait la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$.

En effet d'après le a) $r_p \in L((g_n)_{n \in \mathbb{N}})$ donc si $L((g_n)_{n \in \mathbb{N}})$ était séquentiellement fermé $\lim\limits_{p\to\infty} r_p \in L((g_n)_{n \in \mathbb{N}})$, et justement $\lim\limits_{p\to\infty} r_p$ est la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$.

La conjonction des propriétés b) et c) établit que $L((g_n)_{n \in \mathbb{N}})$ n'est pas séquentiellement fermé.

Exemple 1

Définition : La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de l'espace topologique E est dite périodique si il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+p} = x_n$$

Le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(*)$ est appelé période de la suite.

Exemple : Posons x_n = l'entier de $\{0, 1, \dots, p - 1\}$ congru à n modulo p

Propriété : Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de l'espace topologique E est périodique de période p alors les sous-suites $(x_{np})_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_{np+1})_{n \in \mathbb{N}}, \ldots,$ $(x_{np+(p-1)})$ sont constantes et on a

$$L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{x_o, x_1, \ldots, x_p\}.$$

Exemple 2

Définition : La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de l'espace topologique E est dite pseudo-périodique si il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$(\star)$ les sous-suites $(x_{np})_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_{np+1})_{n \in \mathbb{N}}, \ldots,$ $(x_{np+(p-1)})_{n \in \mathbb{N}}$ soient convergentes.

Le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\star)$ est appelé période de la suite.

Exemple : Posons $y_n = x_n + \frac{1}{n+1}$ où (x_n) est la suite de l'exemple 1.

Propriété : Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de l'espace topologique E est pseudo-périodique de période p alors :

$$L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{\lim_{p\to\infty} x_{np} \ ; \ \lim_{p\to\infty} x_{np+1} \ ; \ldots ; \ \lim_{p\to\infty} x_{np+(p-1)}\}$$

Remarque : Une suite pseudo-périodique peut avoir une période p strictement supérieure au nombre de ses points d'accumulation. Par exemple :

$$(x_o, x_1, \ldots) = (1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, \ldots).$$

Exemple 3

$(z_o, z_1, z_2, \ldots) = (0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots)$

On a :

$$L((z_n)_{n \in \mathbb{N}}) = A((z_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \mathbb{N}$$

Exemple 4

$(t_o, t_1, t_2, \ldots) = (0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \ldots)$

On a :

$$L((t_n)_{n \in \mathbb{N}}) = A((t_n)_{n \in \mathbb{N}}) = [0, 1]$$

Exemple 5

$$u_n = \left((-1)^{\alpha_n^1} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^3+1}, (-1)^{\alpha_n^4} \frac{\alpha_n^5}{\alpha_n^6+1}, \dots, (-1)^{\alpha_n^{3m-2}} \frac{\alpha_n^{3m-1}}{\alpha_n^{3m}+1}\right) \in \mathbb{R}^m$$

Où α_n^j désigne l'exposant du j-ème nombre premier dans la décomposition de $n + 1$ en facteurs premiers

$$(n + 1 = 2^{\alpha_n^1} 3^{\alpha_n^2} 5^{\alpha_n^3} \dots p_j^{\alpha_n^j})$$

On a :

$$L((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = A((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \mathbb{R}^m$$

§ II

SOUS-SUITES ; SEPARATION DES SUITES

Présentation du § II

Après avoir défini une légère généralisation de la notion de sous-suite, qui nous servira dans certaines démonstrations et lors de la construction d'algorithmes de traitement des suites, nous étudions le problème de la séparation des suites.

Le théorème 1 présente les propriétés d'une séparation finie.

Les théorèmes 2 et 3 étudient l'existence de "bonnes" séparations pour une suite donnée. Ces énoncés abstraits d'existence seront repris dans la partie algorithmique de ce travail, et nous verrons que si dans certains cas il est possible d'obtenir algorithmiquement les séparations dont l'existence est affirmée ici, dans d'autres cas cela n'est pas possible.

A - Sous-suites et sous-suites au sens large

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de l'espace topologique E.
Soit $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $n \to k(n)$ une application telle que :

$$\lim_{n \to \infty} k(n) = + \infty$$

La suite $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas à proprement parler une sous-suite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (pour cela il faudrait supposer que k(n) est strictement croissante), nous dirons que $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite au sens large de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette notion un tout petit peu plus générale que celle de sous-suite nous sera utile lorsque nous construirons des algorithmes de traitement des suites.

Remarque : La définition de sous-suite que nous avons donnée est celle habituellement adoptée (par exemple J. Dugundji [1], J. Greever [1], L. Schwartz [1], J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès [1]) il faut cependant noter que J.L. Kelley [1] appelle sous-suite ce que nous nous appelons sous-suite au sens large.

Proposition 1 : Soit (x_n) *une suite de l'espace topologique* E. $\overset{*}{x} \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, *si et seulement si, il existe une sous-suite au sens large de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *convergente vers* $\overset{*}{x}$.

Démonstration

La condition est nécessaire car toute sous-suite est une sous-suite au sens large.

Montrons que la condition est suffisante.

Soit $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite au sens large convergeant vers $\overset{*}{x}$.

On définit par récurrence l'application k'(n) en posant

$k'(0) = k(0)$

$k'(n) = k(m)$ où m est le plus petit entier tel que

$k(m) > k'(n-1)$ (qui existe car $\lim_{m \to \infty} k(m) = +\infty$).

Par définition l'application k'(m) est strictement croissante, donc $(x_{k'(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on vérifie facilement qu'elle est convergente vers $\overset{*}{x}$, et donc $\overset{*}{x} \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

∎

Exemple

Soit $(x_o, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ une suite de points de E, la suite $(x_3, x_2, x_6, x_5, x_9, x_8, x_{12}, x_{11}, \ldots)$ est une sous-suite au sens large de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 2 : *Soit* $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ *une sous-suite au sens large de la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *alors :*

i) $L((x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}) \subset L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

ii) $A((x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}) \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

Démonstration

i) Soit $\overset{*}{x} \in L((x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}})$

Soit $(x_{k(\alpha(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers x^*. Puisque $\alpha(n)$ est strictement croissante et que $\lim_{n\to\infty} k(n) = +\infty$ on a $\lim_{n\to\infty} k(\alpha(n)) = +\infty$, et donc $(x_{k(\alpha(n))})$ est une sous-suite au sens large de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc d'après la proposition 1, $x^* \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

ii) Soit $\overset{*}{x} \in A((x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}})$

Soit v un voisinage de $\overset{*}{x}$, il existe une infinité d'indices i tels que $x_{k(i)} \in v$, l'hypothèse : $\lim_{n\to\infty} k(n) = +\infty$ implique alors qu'il existe une infinité d'indices j tels que $x_j \in v$. Ceci montre que $\overset{*}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

■

B - SÉPARATION D'UNE SUITE

Définition : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E. *On appelle séparation (respectivement séparation au sens large) de la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la donnée* $((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}})_{i \in I}$ *d'une famille de sous-suites* *(resp. de sous-suites au sens large) de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telles que :*

$(*)\quad \exists\, n_o \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_o \quad \exists\, i \in I \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \quad k_i(m) = n$

Exemples

Soit la suite $(x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$

Les suites $(x_{10}, x_{12}, x_{14}, x_{16}, \ldots)$ et $(x_{11}, x_{13}, x_{15}, x_{17}, \ldots)$ forment une séparation de la suite (x_n).

Les suites $(x_4, x_3, x_2, x_8, x_7, x_6, x_{12}, x_{11}, x_{10}, \ldots)$ $(x_2, x_1, x_6, x_5, x_{10}, x_9, \ldots)$ forment une séparation au sens large de la suite (x_n).

Remarque

Si on note $k_i(\mathbb{N})$ l'ensemble $\{k_i(0), k_i(1), \ldots\}$, la condition $(*)$ signifie que :

il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble $\bigcup_{i \in I} k_i(\mathbb{N})$ contient tous les entiers supérieurs à n_o.

Théorème 1 : Soit $((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}})_{i \in I}$ *une séparation au sens large de la suite de points* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de l'espace topologique* E. *Si* I *est fini alors :*

i) $\quad A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \bigcup_{i \in I} A((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}})$

ii) $\quad L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \bigcup_{i \in I} L((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}})$

Démonstration

On pose $I = \{1, 2, \ldots, p\}$

D'après la proposition 2 les inclusions "$\supset$" sont vérifiées (même si I est infini).

i) Il suffit de montrer :

$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset \bigcup_{i \in I} A((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}})$

Soit $\overset{\star}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

Pour tout voisinage v de $\overset{\star}{x}$ soit I(v) l'ensemble des indices $i \in I$ tels qu'il existe une infinité d'entiers n vérifiant $x_{k_i(n)} \in v$.

Montrons successivement :

α) Pour tout v : $I(v) \neq \emptyset$

β) $\bigcap_{v \in V(\overset{\star}{x})} I(v) \neq \emptyset$

α) Supposons que $I(v) = \emptyset$ alors il existe un entier n_1 tel que pour $n \geq n_1 \quad x_{k_1(n)} \notin v$.

De même il existe n_2 tel que pour $n \geq n_2$: $x_{k_2(n)} \notin v$ etc... Posons $m_o = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$.

Pour tout $n \geq m_o$: $x_{k_1(n)} \notin v, \ldots, x_{k_p(n)} \notin v$.

Ce qui implique que sauf pour un nombre fini d'entiers n : $x_n \notin v$.

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\overset{\star}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

β) Si $\bigcap_{v \in V(\overset{\star}{x})} I(v) = \emptyset$, il existe v_1 tel que

$1 \notin I(v_1), \ldots,$ il existe v_p tel que $p \notin I(v_p)$

Donc : $I(v_1 \cap v_2 \cap \ldots \cap v_p) = \emptyset$ ce qui est impossible d'après α).

Soit donc : $i \in \bigcap_{v \in V(\overset{\star}{x})} I(v)$, on a que pour tout voisinage v de $\overset{\star}{x}$ il existe une infinité d'entiers n tels que $x_{k_i(n)} \in v$ ce qui signifie : $\overset{\star}{x} \in A((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}})$.

ii) Il suffit de montrer que :

$$L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset \bigcup_{i \in I} L((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}})$$

Soit $\overset{\star}{x} \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Soit k(n) strictement croissante telle que :

$$(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}} \to \overset{\star}{x}$$

L'un des ensembles :

$$k(\mathbb{N}) \cap k_1(\mathbb{N}) \; ; \; k(\mathbb{N}) \cap k_2(\mathbb{N}) \; ; \; \ldots \; ; \; k(\mathbb{N}) \cap k_p(\mathbb{N})$$

est infini. Soit $k(\mathbb{N}) \cap k_i(\mathbb{N})$ un tel ensemble.

La sous-suite de $(x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$(x_{k_i(n)})_{n \in K}$ où $K = \{n \in \mathbb{N} \mid k_i(n) \in k(\mathbb{N})\}$ est convergente de limite $\overset{\star}{x}$ et donc :

$$\overset{\star}{x} \in L((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}).$$

∎

Remarque

Si I est infini le théorème précédent n'est plus vrai.

Reprenons l'exemple 4 du § I

$$(t_o, t_1, t_2, \ldots) = (0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\ ,\ 0,\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{8},\ \frac{7}{8},\ \ldots\ )$$

L'ensemble $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dénombrable (c'est l'ensemble des nombres réels de $[0, 1[$ de la forme $\frac{m}{2^n}$ $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$) notons $a_o, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ tous ses éléments distincts ($i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$).

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ posons :

$$K_i = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = a_i\}$$

Chaque ensemble K_i est infini et donne donc une sous-suite $(x_n)_{n \in K_i}$ de (x_n).

La famille des sous-suites $(x_n)_{n \in K_i}$ est une séparation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on a :

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L((x_n)_{n \in K_i}) = \{a_o, a_1, \ldots, a_n, \ldots \} \neq L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A((x_n)_{n \in K_i}) = \{a_o, a_1, \ldots, a_n, \ldots \} \neq A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

C - EXISTENCE DE "BONNES" SÉPARATIONS

Théorème 2 : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E *telle que* $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \emptyset$.

Il existe une séparation $((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}})_{i \in I}$ *de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que* *i) chacune des sous-suites* $(x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente (de limite notée* x^i*)*

ii) $\{x^i \mid i \in I\} = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

Démonstration

Pour chaque $\alpha \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, soit $(x_{k_\alpha(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de (x_n) convergente vers α.

Si $\bigcup_{\alpha \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})} k_\alpha(\mathbb{N})$ contient tous les entiers à partir d'un certain rang, alors la famille considérée est une séparation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant i) et ii) donc la démonstration est terminée.

Supposons donc qu'il existe une infinité d'entiers (notés par ordre croissant $\beta(0)$, $\beta(1)$, ...) n'appartenant pas à $\bigcup_{\alpha \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})} k_\alpha(\mathbb{N})$.

On choisit alors $\alpha \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et on adjoint à la famille de sous-suites :

$$(x_{\beta(0)}, x_{k_\alpha(n(0))}, x_{k_\alpha(n(0)+1)}, x_{k_\alpha(n(0)+2)}, \dots)$$

$$(x_{\beta(1)}, x_{k_\alpha(n(1))}, x_{k_\alpha(n(1)+1)}, x_{k_\alpha(n(1)+2)}, \dots) \quad \text{etc} \dots$$

où $n(j)$ est un entier tel que $k_\alpha(n(j)) > \beta(j)$.

La famille ainsi obtenue est bien une séparation et elle vérifie i) et ii).

∎

La définition de séparation n'exige pas que chaque indice n dans la suite (x_n) soit utilisé une et une seule fois dans les sous-suites, d'une part un certain nombre (fini) d'indices peuvent ne pas être repris, d'autre part les indices repris peuvent l'être dans plusieurs sous-suites de la séparation. C'est pourquoi il est intéressant de définir une notion de séparation plus exigente.

<u>*Définition*</u> : *La famille* $((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}})_{i \in I}$ *de sous-suites (resp. de sous-suites au sens large) de la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une séparation-partition (resp. une séparation-partition au sens large) de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *si :* $(k_i(\mathbb{N}))_{i \in I}$ *est une partition de* $\mathbb{N}$ *(resp. si tous les* k_i *sont injectives et si* $(k_i(\mathbb{N}))_{i \in I}$ *est une partition de* $\mathbb{N}$*).*

Il est clair que l'ensemble I est alors au plus dénombrable et donc il n'est pas possible en général d'obtenir un théorème comme le précédent. Cependant nous pouvons établir le théorème suivant.

<u>*Théorème 3*</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E *telle que :* $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est non vide ; a un nombre fini* (p) *d'éléments et telle que :*

$$(T) \quad \begin{cases} \text{Pour tout voisinage } v \text{ de } L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \\ \exists\, n_o \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_o \Rightarrow x_n \in v \end{cases}$$

Alors il existe une séparation-partition $((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}})_{i \in \{1, 2, \dots p\}}$ *telle que :*

i) chacune des sous-suites $(x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente (de limite notée* x^i*)*

ii) $\{x^i \mid i = 1, 2, \dots, p\} = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

<u>Démonstration</u>

Posons $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_p\}$.

Puisque E est séparé il existe $v_1, v_2, \dots, v_p$ des voisinages de $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_p$ respectivement, et tels que :

$$i \neq j \Rightarrow v_i \cap v_j = \emptyset$$

$v = v_1 \cup v_2 \cup \dots \cup v_p$ est un voisinage de $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et donc par hypothèse il existe n_o tel que :

$$n \geq n_o \Rightarrow x_n \in v.$$

On pose alors $K_1 = \{1, 2, \ldots, n_o - 1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in v_1 \text{ et } n \geq n_o\}$

$K_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in v_2 \text{ et } n \geq n_o\}$

. . .

$K_p = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in v_p \text{ et } n \geq n_o\}$

Les sous-suites $(x_k)_{k \in K_1}$, $(x_k)_{k \in K_2}$, ..., $(x_k)_{k \in K_p}$ forment une séparation-partition de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant i) et ii).

Remarque : L'hypothèse (T) ("existence d'un entier-trappe") sera étudiée au paragraphe suivant. Elle est ici essentielle comme le montre l'exemple de la suite : $x_n = n + (-1)^n n$.

D - Sous-suites fréquentes

Soit $K \subset \mathbb{N}$, K infini, les deux conditions suivantes sont équivalentes (J.C. Fiorot [1], J.C. Fiorot et P. Huard [2])

(F_1) $\exists\, p \in \mathbb{N}, \forall\, j \in \mathbb{N} : \{j + 1, j + 2, \ldots, j + p\} \cap K \neq \emptyset$

(F_2) $\exists\, p' \in \mathbb{N}, \forall\, j \in \mathbb{N} : \{j\, p' + 1, j\, p' + 2, \ldots, (j + 1)\, p'\} \cap K \neq \emptyset$

De plus en classant les éléments de K par ordre croissant $K = \{k(0), k(1), \ldots\}$, (F_1) et (F_2) sont équivalentes à

(F_3) $\exists\, p \in \mathbb{N} \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \quad k(j + 1) - k(j) \leq p$

Définition 1 : Soit $(x_k)_{k \in K}$ une sous-suite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si K vérifie (F_1) on dit que la sous-suite est fréquente. Le plus petit entier p tel que (F_1) est appelé fréquence de la sous-suite.

On vérifie les propriétés suivantes :

$\underline{P_1}$ Si $((x_k)_{k \in K_i})_{i \in I}$ est une séparation-partition de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en sous-suites fréquentes de fréquence p alors card $I \leq p$.

$\underline{P_2}$ Si $(x_k)_{k \in K}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que K vérifie (F_2) pour p' alors la sous-suite $(x_k)_{k \in K}$ est fréquente de fréquence $\leq 2p'$.

__Définition 2__ : On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de l'espace topologique E est presque pseudo-périodique si il existe une séparation-partition de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en sous-suites fréquentes de fréquences bornées, ces sous-suites étant de plus convergentes.

On vérifie les propriétés suivantes.

$\underline{P_1}$ Si (x_n) est pseudo-périodique de période p elle est presque pseudo-périodique.

$\underline{P_2}$ Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque pseudo-périodique alors $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et ces ensembles sont finis.

<u>Exemples</u>

(0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 0, 2, 3, 0, 1, 3, 0, 1, 2, ...)

<u>Remarque</u> : Dans la définition de suite presque pseudo-périodique la condition de fréquences bornées ne doit pas être oubliée, car il existe des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettant des séparations-partitions en sous-suites fréquentes et convergentes et pour lesquelles I est infini ainsi que $L((x_n)_{n \in m})$. Exemple :

Les parties infinies de $\mathbb{N}$ suivantes :

$K_1 = 2\,\mathbb{N} = \{m \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \quad m = 2\,n\}$

$K_2 = 4\,\mathbb{N} + 1 \quad = \{m \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \quad m = 4\,n + 1\}$

$$K_3 = 8\,\mathbb{N} + 3 = \{m \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \quad m = 8\,n + 3\}$$

$$\dots$$

$$K_p = 2^p\,\mathbb{N} + (2^{p-1} - 1) = \{m \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \quad m = 2^p\,n + (2^{p-1} - 1)\}$$

$$\dots$$

forment une partition de $\mathbb{N}$.

Donc en posant $x_n = p$ si $n \in K_p$ on obtient une suite telle que les sous-suites $((x_k)_{k \in K_p})_{p \in \mathbb{N}}$ forment une séparation-partition de (x_n) en sous-suites fréquentes ($(x_k)_{k \in K_p}$ est de fréquence 2^p) convergentes.

§ III

ETUDE DE DIVERS CRITERES

PRÉSENTATION DU § III

Après avoir rappelé quelques définitions de compacité qui jouent un rôle fondamental dans les problèmes de suites, nous étudions divers critères dont certains sont classiquement utilisés.

- Critères asurant que l'ensemble d'accumulation ou l'ensemble sous-limite d'une suite est non vide.
- Critères assurant que l'ensemble d'accumulation a au plus un point.
- Critères assurant que l'ensemble d'accumulation a au plus p points.
- Critères assurant la convergence.
- Critères assurant l'existence d'entiers-trappes.

On ne fait dans ce paragraphe aucune hypothèse concernant le mode de définition des suites concernées ; nous verrons plus loin que dans le cas par exemple des suites définies par une relation de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est continue d'autres critères peuvent être énoncés.

A - LES DIVERSES NOTIONS DE COMPACITÉ ET UNE APPLICATION

Rappelons les définitions suivantes.

1) L'espace topologique E **est dit compact** si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un recouvrement fini de E (N. Bourbaki [2], J.L. Kelley [1], J. Dugundji [1], W.J. Pervin [1], etc ...).

2) L'espace topologique E **est dit semi-compact ("countably compact")** si il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

α) de tout recouvrement ouvert dénombrable de E on peut extraire un recouvrement fini de E.

β) toute suite admet un point d'accumulation (N. Bourbaki [2], J. Dugundji [1], J. Greever [1], W.J. Pervin [1], S.A. Gaal [1],etc ...)

3) L'espace topologique E **est dit séquentiellement compact** si toute suite admet une sous-suite convergente. (J. Greever [1], W.J. Pervin [1], S.A. Gaal [1],etc ...).

Proposition 1 : *i) Soit* E *un espace topologique alors :*

$$\begin{tikzcd} (E \text{ compact}) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ & (E \text{ semi-compact}) \\ (E \text{ séquentiellement compact}) \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

ii) Si E *est un espace métrique alors :*

(E *compact*) <=> (E *semi-compact*) <=> (E *séquentiellement compact*).

Démonstration

Voir J. Kelley [1] (page 138) ou S.A. Gaal [1] (page 133) ou J. Greever [1] (page 52).

∎

Remarque : En général aucune autre implication que celle donnée dans le schéma i) n'est vraie, ce qui signifie de façon précise :

- il existe des espaces compacts non séquentiellement compacts ($[0, 1]^{[0, 1]}$ par exemple ; voir L.A. Steen et J.A. Seebach [1] page 125)

- il existe des espaces séquentiellement compacts non compacts

- il existe des espaces semi-compacts non compacts

- il existe des espaces semi-compacts non séquentiellement compacts (voir L.A. Steen et J.A. Seebach [1] page 21)

Un autre type d'espace jouera un rôle très important dans la suite : les espaces à boules fermées compactes. (Voir L. Schwartz [1]).

Enonçons quelques propriétés.

$\underline{P_1}$: *Soit* E *un espace métrique :*
les boules fermées de E *sont compactes si et seulement si :*
"Pour tout $A \subset E$: A *compact* $\Leftrightarrow$ A *fermé borné".*

$\underline{P_2}$: *Si* E *est un espace métrique à boules fermées compactes*
i) E *est localement compact et donc complet*
ii) E *est dénombrable à l'infini (c'est-à-dire réunion dénombrable de compacts) et donc séparable.*

$\underline{P_3}$: *Pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^m$ *est un espace métrique à boules fermées compactes (voir L.Schwartz [1]).*

Comme application de ces notions donnons la proposition suivante :

<u>*Proposition 2*</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E.
Si $\overset{*}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *et si :*
il existe un voisinage v *de* $\overset{*}{x}$, v *compact (ou séquentiellement compact) tel que :*

$$(*) \quad v \cap A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{\overset{*}{x}\} \quad \text{alors :}$$

$$\overset{*}{x} \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

<u>Démonstration</u>

Par hypothèse il existe $K \subset \mathbb{N}$, K infini tel que

$$k \in K \Rightarrow x_k \in V$$

Si la sous-suite $(x_k)_{k \in K}$ ne converge pas vers $\overset{*}{x}$ alors il existe w un voisinage ouvert de $\overset{*}{x}$ et $K_1 \subset K$, K_1 infini tel que :

$$k \in K_1 \Rightarrow x_k \notin w$$

La sous-suite $(x_k)_{k \in K_1}$ est une suite de points de v - w qui est semi-compact, car v est semi-compact et $v - w = v \cap \complement w$ est donc aussi semi-compact (car l'intersection d'un semi-compact avec un fermé est semi-compact : J. Greever [1] page 55). Donc $(x_k)_{k \in K_1}$ admet un point d'accumulation $\overset{**}{x}$ qui est distinct de $\overset{*}{x}$ (car $\overset{**}{x} \notin w$), $\overset{**}{x}$ est aussi un point d'accumulation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce qui contredit l'hypothèse (*).

∎

<u>Corollaire</u> : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique localement compact* E *alors :*

Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est fini on a :* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Rappelons que E est dit localement compact si tout point admet un voisinage compact (N. Bourbaki [2]).

<u>B - CRITÈRES ASSURANT QUE L'ENSEMBLE D'ACCUMULATION OU L'ENSEMBLE SOUS-LIMITE EST NON VIDE</u>

<u>Proposition 3</u> : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E

i) S'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *contenue dans une partie compacte de* E *alors :*

$$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \emptyset$$

ii) S'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *contenue dans une partie séquentiellement compacte de* E *alors :*

$$L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \emptyset \quad \textit{(et donc } A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \emptyset)$$

Démonstration

Cela résulte immédiatement des définitions et de la proposition 2 du § II.

∎

Proposition 4 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points d*[e] *l'espace métrique à boules fermées compactes* E, *alors :*

S'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *qui soit bornée*

$$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \emptyset$$

Démonstration

Dire qu'il existe une sous-suite bornée implique qu'il existe une sous-suite contenue dans un compact (car toute boule est contenue dans un compact) et donc on conclut grâce à la proposition 3 i).

∎

C - CRITÈRES ASSURANT QUE L'ENSEMBLE D'ACCUMULATION A AU PLUS UN POINT

Rappelons qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace métrique E est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_o \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \ \forall p \in \mathbb{N} \ m \geq n_o \text{ et } p \geq n_o \Rightarrow d(x_m, x_p) \leq \varepsilon$$

Ce qui est équivalent à :

$$\lim_{n \to \infty} \text{diam} \ (\{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}, \ldots\}) = 0$$

Proposition 5 : Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy de l'espace métrique* E, *alors* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est bornée et* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a au plus un point.*

(Voir L. Schwartz [1] page 130).

<u>*Proposition 6*</u> *: Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de l'espace métrique* E *telle que la série de terme général* $d(x_n, x_{n+1})$ *soit convergente, alors* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a au plus un point.*

<u>Démonstration</u> :

Par hypothèse la suite $S_n = d(x_o, x_1) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)$ est convergente, elle est donc de Cauchy (car toute suite convergente est de Cauchy) et donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, m \in \mathbb{N}\quad m \geq n_o \text{ et } p \geq n_o \Rightarrow$$

$$(*) \qquad d(x_p, x_{p+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \leq \varepsilon$$

D'après l'inégalité triangulaire on a :

$$d(x_p, x_m) \leq \varepsilon$$

Ce qui montre que la suite (x_n) est de Cauchy.

∎

<u>*Corollaire 1*</u> *: Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique* E.
Si l'une des conditions suivantes est vérifiée

i) $\exists\, C \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \leq \lambda < 1,$

$\forall\, n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_{n+1}) \leq C\, \lambda^n$

ii) $\exists\, C \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \beta \in \mathbb{R},\ \beta > 1,$

$\forall\, n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_{n+1}) \leq \dfrac{C}{n^\beta}$

Alors $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a au plus un point.*

<u>Démonstration</u>

Cela vient de la convergence des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} C\,\lambda^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{C}{n^\beta}$

∎

<u>*Corollaire 2*</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique* E.

Si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \lambda < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad d(x_{n+1}, x_n) < \lambda \, d(x_n, x_{n-1})$$

Alors $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a au plus un point.*

<u>Remarque</u> : Les conditions données par la proposition 6 et ses corollaires ne sont pas nécessaires comme le montre par exemple la suite $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ de points de $\mathbb{R}$.

D - CRITÈRES ASSURANT QUE L'ENSEMBLE D'ACCUMULATION A AU PLUS P POINTS

<u>*Proposition 7*</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique* E. *S'il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que la série de terme général* $d(x_n, x_{n+p})$ *soit convergente alors* :

$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a au plus p points.*

<u>Démonstration</u> :

Les séries de terme général $d(x_{np}, x_{(n+1)p})$, $d(x_{np+1}, x_{(n+1)p+1})$, ..., $d(x_{np+(p-1)}, x_{(n+1)p+p-1})$ sont toutes convergentes donc en appliquant la proposition 5 aux suites $(x_{np})_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_{np+1})_{n \in \mathbb{N}}$, ..., $(x_{np+(p-1)})_{n \in \mathbb{N}}$ on voit que chacune a au plus un point d'accumulation, le théorème 1 du § II nous permet alors de conclure.

∎

<u>*Corollaire 1*</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique* E *et soit* $p \in \mathbb{N}^*$ *tels que l'une des conditions*

i) $\exists\ C \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ \lambda < 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_{n+p}) \leq C\ \lambda^n$

ii) $\exists\ C \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ \beta > 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{C}{n^\beta}$

soit vérifiée alors :

$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a au plus* p *points.*

<u>*Corollaire 2*</u> *: Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique* E *et soit* $p \in \mathbb{N}^*$. *Si*

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \leq \lambda < 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N} : d(x_{n+p}, x_n) \leq \lambda\ d(x_n, x_{n-p})$$

alors :

$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a au plus* p *points.*

E - CRITÈRES ASSURANT LA CONVERGENCE

Les résultats suivants bien que classiques sont utiles.

C1 Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}$ est monotone à partir d'un certain rang et bornée, elle converge.

C2 La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^m$ ($X_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m)$) est convergente si et seulement si chacune des suites $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente $i = 1, 2, \ldots, m$.

C3 $\mathbb{R}^m$ est complet (i.e. toute suite de Cauchy est convergente)

C4 La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de l'espace topologique E est convergente si et seulement si chacune de ses sous-suites converge.

Le résultat suivant avec $E = \mathbb{R}^m$ est aussi fréquemment utilisé.

Théorème 1 : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E

i) Si E *est compact et si* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est réduit à un élément* $\overset{*}{x}$ *alors* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $\overset{*}{x}$

ii) Si E *est séquentiellement compact et si* $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est réduit à un élément* $\overset{*}{x}$, *alors* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $\overset{*}{x}$.

Démonstration

Supposons vérifiées les hypothèses de i) (resp. de ii)).

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\overset{*}{x}$, il existe un voisinage ouvert v de $\overset{*}{x}$ et une partie $K \subset \mathbb{N}$, K infini, tels que :

$$k \in K \Rightarrow x_k \notin v$$

La sous-suite $(x_k)_{k \in K}$ admet un point d'accumulation (resp. un point sous-limite) $\overset{**}{x}$ distinct de $\overset{*}{x}$ ce qui est une contradiction.

■

Corollaire : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique à boules fermées compactes* E.

Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est réduit à un élément* $\overset{*}{x}$ *et que* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est bornée alors* : (x_n) *converge vers* $\overset{*}{x}$.

Remarque : Les hypothèses de compacité sont essentielles. En effet, la suite $x_n = n + (-1)^n n + \frac{1}{n}$ admet 0 comme seul point d'accumulation et pourtant ne converge pas.

Proposition 8 : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique complet* E. *Si la série de terme général* $d(x_n, x_{n+1})$ *est convergente alors* (x_n) *est convergente.*

Démonstration

On montre comme dans la proposition 4 que (x_n) est de Cauchy.

Corollaire 1 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique complet* E. *Si l'une des conditions :*

i) $\exists\, C \in \mathbb{R}_+^* \;\exists\, \alpha < 1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; d(x_n, x_{n+1}) \leq C\,\alpha^n$

ii) $\exists\, C \in \mathbb{R}_+^* \;\exists\, \beta > 1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{C}{n^\beta}$

est vérifiée alors :

(x_n) *est convergente.*

Corollaire 2 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique complet* E ; *si :*

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \leq \lambda < 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N} : d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda \;\, d(x_n, x_{n-1})$$

alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente.*

Grâce à la notion de séparation (voir § II) on peut améliorer le critère C4.

Proposition 9 : Soit $((x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}})_{i \in I}$ *une séparation finie de la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de points de l'espace topologique* E : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente vers* $\overset{*}{x}$ *si et seulement si chacune des sous-suites* $(x_{k_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ (i ∈ I), *est convergente vers* $\overset{*}{x}$.

Démonstration

La condition est nécessaire d'après la proposition 2 du § II.

Montrons qu'elle est suffisante. Posons $I = \{1, 2, \ldots, p\}$.

Soit v un voisinage de $\overset{*}{x}$. Soit n_o un entier tel que

$$\forall\, n \geq n_o \quad : \quad n \in \bigcup_{i \in I} k_i(\mathbb{N})$$

Soit $n_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ un entier tel que

$$\forall\, n \geq n_i \ : \ x_{k_i(n)} \in v.$$

Alors en posant : $N = \max \{n_o, k_1(n_1), k_2(n_2), \ldots, k_p(n_p)\}$ on a que :

$$\forall\, n \geq N \ : \ x_n \in v$$

et donc x_n converge vers $\overset{*}{x}$.

∎

Remarque 1 : Le fait que la séparation soit finie est essentiel.
On peut construire des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non convergentes admettant des séparations en sous-suites toutes convergentes de même limite.
La suite (1, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 5, ...) qui n'est pas convergente se sépare en :

(1, 1, 1, ...), (2, 1, 1, 1, ...), (3, 1, 1, 1, ...), (4, 1, 1, 1,...),...

Remarque 2 : D'autres critères de convergence sont donnés plus loin (au § VII en particulier).

F - Critères assurant l'existence d'entiers-trappes

Proposition 10 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E.

i) Si E *est compact ou séquentiellement compact alors :*

$$(T) \begin{cases} \textit{Pour tout voisinage } v \textit{ de } A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \textit{ il existe } n_o \in \mathbb{N} \textit{ tel que :} \\ n \geq n_o \Rightarrow x_n \in v \end{cases}$$

(On dit que n_o *est un entier-trappe)*

ii) Si E *est séquentiellement compact alors :*

$$(T') \begin{cases} \textit{Pour tout voisinage } v \textit{ de } L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \textit{ il existe } n_o \in \mathbb{N} \textit{ tel que :} \\ n \geq n_o \Rightarrow x_n \in v \end{cases}$$

Démonstration

Supposons que E est compact ou séquentiellement compact (respectivement séquentiellement compact). Soit v un voisinage de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (respectivement de $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$) s'il n'existe pas d'entiers n_o tel que : $n \geq n_o \Rightarrow x_n \in v$, c'est qu'il existe $K \subset \mathbb{N}$, K infini, tel que :

$$k \in K \Rightarrow x_k \notin v.$$

La sous-suite $(x_k)_{k \in K}$ admet au moins un point d'accumulation (respectivement au moins un point sous-limite) $\overset{*}{x}$ qui est aussi un point d'accumulation (respectivement un point sous-limite) de (x_n) et donc puisque $\overset{*}{x} \notin A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (resp. $\overset{*}{x} \notin L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$) on obtient une contradiction.

∎

Corollaire : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de l'espace métrique à boules fermées compactes E. Si (x_n) est bornée alors :
Pour tout voisinage v de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq n_o \Rightarrow x_n \in v.$$

Remarque : Les hypothèses de compacité de la proposition sont indispensables. La suite $x_n = n + (-1)^n\, n + \frac{1}{n}$ vérifie : $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{0\}$ et il est clair que pour $]-1, +1[$ qui est un voisinage de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ il n'existe aucun n_o tel que :

$$n \geq n_o \Rightarrow x_n \in v.$$

§ IV

APPROXIMATION DE $A((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ PAR DES ENSEMBLES FINIS

PRÉSENTATION DU § IV

Lorsqu'on dispose d'une suite non convergente (chaque point étant donné de façon exacte et les points pouvant être obtenus aussi loin que voulu) et que l'on cherche à connaître l'ensemble de ses points d'accumulation, on ne peut le faire en pratique qu'avec des sous-ensembles finis de l'ensemble des points de la suite. Le but de ce paragraphe est d'étudier comment des ensembles de la forme $\{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\}$ "approchent" $A((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Les notions de limite inférieure et de limite supérieure d'ensembles (voir par exemple C. Berge [1]) nous servent d'outils pour énoncer les résultats.

Le théorème 1 indique que dans certains expaces (par exemple $\mathbb{R}^m$) il est toujours possible d'approcher $A((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ par des ensembles finis de la forme $\{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\}$.

Les résultats trouvés nous amènent à définir la notion d'indices approchants qui sera un outil précieux dans l'étude des algorithmes de traitement des suites. Le théorème 2 établit les rapports entre cette notion et celle de suite extraite convergente.

A - PREMIERS RÉSULTATS

Dans tout ce paragraphe lorsqu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée

on pose : $X_n = \{x_i \mid i \geq n\}$

$X_n^m = \{x_i \mid n \leq i < m\}$

<u>*Proposition 1*</u> *: Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E.
La suite d'ensemble X_n *est convergente et :*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

<u>Démonstration</u>

Nous devons démontrer l'égalité des trois ensembles suivants :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n \;;\; \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n \;;\; A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

L'inclusion suivante est vérifiée pour toute suite X_n :

(*) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$$

Montrons :

(**) $$\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Soit $\hat{x} \in \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$. Par définition pour tout voisinage v de $\hat{x}$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \geq n \quad X_n \cap v \neq \emptyset$$

et donc pour tout voisinage v de $\hat{x}$ il existe une infinité d'indices i tels que : $x_i \in v$, ce qui implique $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Montrons :

(***) $$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n$$

Soit $\hat{x} \in A(x_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Par définition pour tout voisinage v de $\hat{x}$ il existe une infinité d'indices i tels que : $x_i \in v$, donc pour tout voisinage v de $\hat{x}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $v \cap X_n \neq \emptyset$ ce qui signifie que $\hat{x} \in \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$.

Les relations (*), (**) et (***) établissent l'égalité des ensembles considérés et donc le résultat souhaité.

∎

Remarque :

Une méthode rapide pour établir la proposition 1 consiste à utiliser :

1) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X}_n = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (N. Bourbaki [2], G. Choquet [1]).

2) Puisque les X_n sont décroissants les $\overline{X}_n$ aussi.

3) $\underline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \to \infty} \overline{A}_n$, $\overline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \to \infty} \overline{A}_n$

4) Si la suite d'ensembles fermés A_n est décroissante elle est convergente

et : $\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Le résultat précédent qui nous indique que l'ensemble $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est "approché" par les ensembles X_n mérite d'être amélioré, en essayant d'approcher $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ par des ensembles finis.

On peut poser le problème général sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ et } \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ tel que la suite d'ensembles} \\ X_{\alpha(n)}^{\beta(n)} \text{ soit convergente de limite } A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \end{array} \right.$$

ou encore en fixant à priori $\alpha(n) = n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ tel que la suite d'ensemble } X_n^{\beta(n)} \text{ soit} \\ \text{convergente de limite } A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \end{array} \right.$$

C'est ce deuxième problème que nous allons essayer de résoudre ; on peut quand même remarquer que si β en est une solution alors pour tout $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante $(\alpha, \beta \circ \alpha)$ est une solution du premier problème.

Remarque : Comme nous l'avons déjà signalé (note 1 § I) une suite d'éléments de E n'est pas autre chose qu'une application de $\mathbb{N}$ dans E. Quand $E = \mathbb{N}$ il est parfois plus commode de parler directement d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et d'utiliser la notation $\alpha(n)$, c'est ce que nous sommes amené à faire dans ce paragraphe (ainsi que plus loin aux § VIII, IX et X).

<u>*Proposition 2*</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E, *soit* $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tel que* : $\forall\, n \in \mathbb{N} : \beta(n) > n$, *alors* :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\; X_n^{\beta(n)} = A(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

<u>Démonstration</u>

a) Soit $\hat{x} \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\; X_n^{\beta(n)}$

Soit v un voisinage de $\hat{x}$ par définition :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, m \geq n : X_m^{\beta(m)} \cap v \neq \emptyset$$

Nous allons construire une infinité d'indices i tels que : $x_i \in v$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $m \geq n$ tel que : $X_m^{\beta(m)} \cap v \neq \emptyset$ et soit i(n) tel que : $x_{i(n)} \in v$ et $i(n) \in \{m, \ldots, \beta(m) - 1\}$. Les i(n) ainsi construits ne sont pas nécessairement distincts, mais comme : $i(n) \geq m \geq n$ cela implique que : $\lim\limits_{n\to\infty} i(n) = +\infty$ et donc que l'ensemble $\{i(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini.

Donc : $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

b) Soit maintenant $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Il existe une infinité d'indices i tels que $x_i \in v$, il existe donc une infinité d'indices i tels que :

$X_i^{\beta(i)} \cap v \neq \emptyset$ (car puisque $\beta(i) > i \quad x_i \in X_i^{\beta(i)}$)

et donc $\hat{x} \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, X_n^{\beta(i)}$.

∎

<u>*Corollaire*</u> :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, X_n^{n+1} = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, X_n^{2n} = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Pour la "limite supérieure" la situation est donc assez simple. Nous allons voir que pour la "limite inférieure" elle l'est beaucoup moins. Montrons d'abord qu'il n'y a pas d'espoir d'obtenir un résultat aussi simple que celui de la proposition 2.

Proposition 3 : *Soit* E *un espace topologique ayant au moins deux points distincts.*

Pour toute application $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *il existe des suites* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de points de* E *telles que* :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n^{\beta(n)} \neq A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Démonstration

Si il n'existe pas d'entiers n_o tels que :

$$n \geq n_o \Rightarrow \beta(n) > n$$

alors pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a :

$$\underline{\lim}\, X_n^{\beta(n)} = \emptyset$$

et donc en particulier pour une suite constante on a :

$$\underline{\lim}\, X_n^{\beta(n)} \neq A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Nous pouvons donc supposer qu'il existe n_o tel que :

$$n \geq n_o \Rightarrow \beta(n) > n$$

et puisqu'en modifiant un nombre fini de termes d'une suite d'ensembles on ne modifie pas sa limite inférieure nous pouvons même supposer que :

(*) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \beta(n) > n$

On définit alors par récurrence une application $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant :

$$\gamma(0) = \beta(0)$$

$$\gamma(n) = \beta(\gamma(n-1)) + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

D'après (*) γ vérifie :

$$\gamma(n) > \gamma(n-1) + 1 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

On considère alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_n = a & \text{si } n \in \{\beta(\gamma(0)), \beta(\gamma(1)), \ldots, \beta(\gamma(n)), \ldots\} \\ x_n = b & \text{sinon} \end{cases}$$

où a et b désignent deux éléments distincts de E.

On a alors :

i) $a \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

(car la sous-suite $(x_{\beta(\gamma(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante donc convergente vers a)

ii) $a \notin \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n^{\beta(n)}$

(car $a \notin \underline{\lim}\, X_{\gamma(n)}^{\beta(\gamma(n))}$, ce qui résulte de :

$$\beta(\gamma(n-1)) < \gamma(n) \leq \beta(\gamma(n)) - 1 < \beta(\gamma(n))$$

et donc : $X_{\gamma(n)}^{\beta(\gamma(n))} = \{b\}$)

Les résultats i) et ii) montrent que :

$$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n^{\beta(n)}.$$

∎

S'il ne peut exister de suites $\beta(n)$ permettant d'approcher tout ensemble d'accumulation, par contre pour une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée (dans un "bon espace") il existe toujours une suite $\beta(n)$ permettant d'approcher l'ensemble d'accumulation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ c'est ce qu'établit le résultat suivant :

<u>Théorème 1</u> : Soit E *un espace métrique dénombrable à l'infini.*
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* E.
Il existe une suite $\alpha(n)$ *telle que :*

$$\lim X_n^{\alpha(n)} = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

(Rappelons que E est dit dénombrable à l'infini s'il est réunion dénombrable de compacts, par exemple $\mathbb{R}^m$).

<u>Démonstration</u> :

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts telle que :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = E.$$

Soit n un entier fixé.

Il existe (Schwartz [1] lemme 2 page 87) une suite finie de boules ouvertes :

$$B(a_1^n, \frac{1}{n}),\ B(a_2^n, \frac{1}{n}),\ \ldots,\ B(a_{i(n)}^n, \frac{1}{n})$$

recouvrant $K_n \cap A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ qui est compact, et telle que chaque boule contienne au moins un point de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Il existe donc un entier $\beta(n)$ tel que :

$$(*) \quad X_n^{\beta(n)} \cap B(a_i^n, \frac{1}{n}) \neq \emptyset \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, i(n)$$

Montrons que la suite $\beta(n)$ ainsi définie vérifie :

$$\lim_{n\to\infty} X_n^{\beta(n)} = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Il est clair d'après (*) que : $\beta(n) > n$ et donc :

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n^{\beta(n)} = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

d'après la proposition 2.

L'inclusion :

$$\underline{\lim} \ X_n^{\beta(n)} \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

étant toujours vérifiée, reste à montrer que :

$$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset \underline{\lim} \ X_n^{\beta(n)}$$

Soit $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Soit n_o tel que :

$$n \geq n_o \Rightarrow \hat{x} \in K_n$$

Pour tout $n \geq n_o$, il existe $i \in \{1, 2, \ldots, i(n)\}$ tel que :

$$\hat{x} \in B(a_i^n, \frac{1}{n})$$

et donc d'après (*) il existe $\gamma(n) \in \{n, n+1, \ldots, \beta(n) - 1\}$

tel que : $d(\hat{x}, x_{\gamma(n)}) < \frac{2}{n}$

ce qui montre que $d(\hat{x}, X_n^{\beta(n)}) \to 0$ et donc que :

$$\hat{x} \in \underline{\lim} \ X_n^{\beta(n)}$$

(voir Berge [1] page 126).

∎

B - SUITES D'INDICES APPROCHANTS

Définition 1 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E.

Soit $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

La suite d'entiers $\beta(n)$ *est dite suite d'indices approchants pour* $\hat{x}$ *si :* $\hat{x} \in \varliminf_{n\to\infty} X_n^{\beta(n)}$.

La suite d'entiers $\beta(n)$ *est dite suite d'indices approchants pour* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *si :*

$$\forall\ \hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) : \hat{x} \in \varliminf_{n\to\infty} X_n^{\beta(n)}$$

(autrement dit si la suite d'ensembles $X_n^{\beta(n)}$ *est convergente de limite* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$).

Avec cette définition la proposition 3 et le théorème 1 expriment que : Pour chaque suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^m$, il existe une suite $\beta(n)$ d'indices approchants pour $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ mais cette suite dépend inévitablement de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Le problème de l'approximation de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ par des ensembles de la forme $X_n^{\beta(n)}$ se réduit à celui de la détermination d'une suite d'indices approchants. Nous allons voir et nous verrons plus loin des critères permettant de trouver $\beta(n)$.

Théorème 2 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E.

i) Si $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ *est une sous-suite de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *convergente vers* $\hat{x}$ *alors toute suite* $\alpha(n)$ *telle que* $\alpha(n) > k(n)$ *est une suite d'indices approchants pour* $\hat{x}$*, et donc en particulier la suite* $\alpha(n) = k(n) + 1$

ii) Si $\alpha(n)$ *est une suite d'indices approchants pour* $\hat{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *et si* E *est métrisable alors il existe une sous-suite* $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ *de points de* E *convergente vers* $\hat{x}$ *et telle que :*

$$\alpha^n(0) \leq k(n) \leq \alpha^{n+1}(0)$$

$(\alpha^n(0) = \alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha(n) \quad$ (n fois))

Démonstration :

i) Soit v un voisinage de $\hat{x}$ il existe n_o tel que $n \geq n_o \Rightarrow x_{k(n)} \in v$,

donc il existe n_o tel que :

$$n \geq n_o \Rightarrow X_n^{\alpha(n)} \cap v \neq \emptyset \quad (\text{puisque } n \leq k(n) < \alpha(n))$$

et donc : $\hat{x} \in \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n^{\alpha(n)}$

ii) Soit $\hat{x} \in \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n^{\alpha(n)}$. On a : $\hat{x} \in \underline{\lim}_{n\to\infty} X_{\alpha^n(0)}^{\alpha^{n+1}(0)}$

On a donc : $d(\hat{x}, X_{\alpha^n(0)}^{\alpha^{n+1}(0)}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, soit $k(n)$ un entier de

$\{\alpha^n(0), \alpha^n(0)+1, \dots, \alpha^{n+1}(0)-1\}$ vérifiant :

$d(\hat{x}, x_{k(n)}) = d(\hat{x}, X_{\alpha^n(0)}^{\alpha^{n+1}(0)})$

($k(n)$ existe car $X_{\alpha^n(0)}^{\alpha^{n+1}(0)}$ est fini)

on a : $d(\hat{x}, x_{k(n)}) \to 0$; et donc :

$$x_{k(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \hat{x}$$

∎

<u>Proposition</u> : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique* E, *et* $\hat{x} \in L((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes

i) il existe une suite d'indices approchants pour $\hat{x}$, $\beta(n)$ *telle que* $\beta(n) - n$ *soit borné.*

ii) il existe une sous-suite fréquente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente vers* $\hat{x}$.

Démonstration immédiate.

<u>Corollaire</u> : Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de l'espace métrique* E *est presque pseudo-périodique alors* $\beta(n) = 2n$ *est une suite d'indices approchants de* $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

§ V

FORCE D'UN POINT D'ACCUMULATION ; RAPIDITE D'UNE SUITE.

PRÉSENTATION DU § V

Dans ce paragraphe, nous définissons et étudions deux notions qui nous seront utiles pour la construction d'algorithmes de traitement des suites non convergentes.

i) La notion de force d'un point d'accumulation $\hat{x}$ d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui a pour but de fournir une mesure objective du fait (vérifié ou non) que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ revient souvent près de $\hat{x}$.

La définition que nous proposons bien qu'en apparence un peu compliquée, est cependant la plus simple qui donne une notion vérifiant ce que l'on est en droit d'attendre ; c'est-à-dire principalement :

- que la force soit toujours définie aussi irrégulière que soit la suite (d'où la nécessité d'une limite inférieure)

- que la force de la limite d'une suite convergente soit maximale (elle sera égale à 1)

- que la force de chacun des points d'une suite pseudo-périodique de période p soit égale à 1/p.

Les propositions démontrées confirment que la définition proposée est satisfaisante, elles établissent aussi les relations avec des notions précédemment introduites ou utilisées par d'autres auteurs.
(On pourra malgré tout remarquer que notre définition autorise certains points d'accumulation à avoir une force nulle).

ii) La notion de rapidité de convergence a pour but de mesurer à quelle vitesse la suite s'approche de son ensemble d'accumulation. Cette notion sans rapport avec la précédente est par contre très liée à celle d'entier-trappe comme l'établit la proposition 6.

A - FORCE D'UN POINT D'ACCUMULATION

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de l'espace métrique E, ε un nombre réel strictement positif, $m \in \mathbb{N}$ et $y \in E$ on pose :

$$N(y, (x_n), \varepsilon, m) = \mathrm{Card}\,\{i \in \mathbb{N} \mid i < m \text{ et } x_i \in B(y, \varepsilon)\}$$

($B(y, \varepsilon)$ désigne la boule ouverte de centre y et de rayon ε).

<u>*Définition*</u> *: On appelle force de* y *par rapport à* (x_n) *et on note :* $\alpha(y ; (x_n))$ *le nombre réel de* $[0, 1]$ *défini par :*

$$\alpha(y ; (x_n)) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\liminf_{m\to\infty} \frac{N(y, (x_n), \varepsilon, m)}{m}\right)$$

Ce nombre existe toujours et est dans $[0, 1]$ car en effet :

Soit $\varepsilon \geq \varepsilon' > 0$ alors :

$$0 \leq N(y, (x_n), \varepsilon', m) \leq N(y, (x_n), \varepsilon, m) \leq m$$

Donc :

$$0 \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{N(y, (x_n), \varepsilon', m)}{m} \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{N(y, (x_n), \varepsilon, m)}{m} \leq 1$$

Donc la fonction

$$C : \mathbb{R}_+^* \to [0, 1] \; ; \; \varepsilon \to \liminf_{m\to\infty} \frac{N(y, (x_n), \varepsilon, m)}{m} \quad \text{est}$$

croissante et bornée et donc :

$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} C(\varepsilon)$ existe et est un nombre de $[0, 1]$.

Remarque : En considérant le filtre des voisinages de y, on pourrait donner une définition valable dans tout espace topologique.

Exemple 1 : Dans la définition il est indispensable de mettre "lim inf" si l'on veut que la force de tout point soit définie. Soit en effet la suite définie par :

$$\begin{cases} x_o = 0 \\ x_i = 1 \quad \text{si il existe m pair tel que } 2^m \le i < 2^{m+1} \\ x_i = 0 \quad \text{si il existe m impair tel que } 2^m \le i < 2^{m+1} \end{cases}$$

Prenons $\varepsilon = 1/2$ et posons : $\dfrac{N(1, (x_n), \varepsilon, m)}{m} = N_m$

On a $N_1 = \frac{0}{1}$, $N_2 = \frac{1}{2}$, $N_4 = \frac{1}{4}$, $N_8 = \frac{1+4}{8}$, $N_{16} = \frac{1+4}{16}$, $N_{32} = \frac{1+4+16}{32}$, $N_{64} = \frac{1+4+16}{64}$

On voit donc que : $N_{2^{2n-1}} = 2\ N_{2^{2n}}$ ce qui interdit à la suite (N_m) de converger.

Par contre :

$$\liminf N_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{(2^2)^2} + \frac{1}{(2^2)^3} + \dots = \frac{1}{3}$$

on a donc :

$$\alpha(1, (x_n)) = 1/3$$

On vérifie aussi que :

$$\alpha(0, (x_n)) = 1/3$$

Proposition 1 : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique* E, *convergente de limite* $\hat{x}$, *alors* :

i) $\alpha(\hat{x}, (x_n)) = 1$

ii) $x \neq \hat{x} \Rightarrow \alpha(x, (x_n)) = 0$

Démonstration

i) Soit $\varepsilon > 0$ il existe n_o tel que :

$$m \geq n_o \Rightarrow x_m \in B(\hat{x}, \varepsilon)$$

Donc pour $m \geq n_o$

$$\frac{m - n_o}{m} \leq \frac{N(\hat{x}, (x_n), \varepsilon, m)}{m} \leq 1$$

Ce qui implique que :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{N(\hat{x}, (x_n), \varepsilon, m)}{m} = 1$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc :

$$\alpha(\hat{x}, (x_n)) = 1$$

ii) Soit $\varepsilon > 0$ tel que : $B(\hat{x}, \varepsilon) \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset$

il existe n_o tel que :

$$m \geq n_o \Rightarrow x_m \in B(\hat{x}, \varepsilon)$$

et donc pour $m \geq n_o$:

$$\frac{n_o}{m} \geq \frac{N(x, (x_n), \varepsilon, m)}{m} \geq 0$$

ce qui implique que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(x, (x_n), \varepsilon, m)}{m} = 0$$

et donc :

$$\alpha(x, (x_n)) = 0$$

∎

Remarque :

Il faut bien noter que même si $\alpha(\hat{x}, (x_n)) = 1$ alors (x_n) n'est pas nécessairement convergente vers $\hat{x}$.

Exemple 2 :

Posons :

$$\begin{cases} x_n = 1 & \text{si } n \in \{0, 1, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, p^2, \ldots\} \\ x_n = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

$$N(0, (x_n), \varepsilon, m^2) = \frac{m^2 - m}{m^2}$$

$$N(1, (x_n), \varepsilon, m^2) = \frac{m}{m^2}$$

ce qui permet de voir que :

$$\alpha(0, (x_n)) = 1$$

$$\alpha(1, (x_n)) = 0$$

alors que pourtant (x_n) ne converge pas vers 1.

Pour établir la proposition 2 nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme : Soient $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ k *suites bornées de* $\mathbb{R}$ *alors* :

$$\sum_{i=1}^{k} \liminf_{n\to\infty} (x_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} x_n^i\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Démonstration :

On démontre le lemme pour k = 2, le cas général s'en déduit immédiatement par récurrence.

Soient donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites bornées de $\mathbb{R}$, la suite $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, elle aussi est bornée ; elle admet donc au moins un point d'accumulation et donc :

$$-\infty < \liminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) < +\infty$$

Soit $K_1 \subset \mathbb{N}$, K_1 infini tel que :

$$\lim_{\substack{k\to+\infty \\ k\in K_1}} (x_k + y_k) = \lim_{n\to\infty} \inf (x_n + y_n)$$

Soit $K_2 \subset K_1$ K_2 infini tel que $(x_k)_{k \in K_2}$ et $(y_k)_{k \in K_2}$ soient convergentes de limites $\hat{x}$ et $\hat{y}$ respectivement (K_2 existe car $(x_k)_{k \in K_1}$ et $(y_k)_{k \in K_1}$ sont bornées).

On a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \inf x_n + \lim_{n\to\infty} \inf y_n \leq \hat{x} + \hat{y} &= \lim_{k\in K_2} (x_k + y_k) \\ &= \lim_{k\in K_1} (x_k + y_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \inf(x_n + y_n) \end{aligned}$$

∎

<u>*Proposition 2*</u> : *Soit* (x_n) *une suite de points de l'espace métrique* E. *Que* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *soit vide, fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable, on a :*

$$0 \leq \sum_{\hat{x}\in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})} \alpha(\hat{x}, (x_n)) \leq 1$$

(Pour donner un sens à la somme quand $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est un ensemble infini quelconque, se rapporter par exemple à L. Schwartz [1] page 169).

<u>Démonstration</u> :

Pour établir la seconde inégalité (la première est évidente), il suffit de montrer que pour toute partie finie $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_p$ de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ on a :

$$(\star) \quad \sum_{k=1}^{p} \alpha(\hat{x}_k, (x_n)) \leq 1$$

Soit donc $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_p$ une partie finie de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Soit ε_o tel que les boules ouvertes $B(\hat{x}_1, \varepsilon_o)$ $B(\hat{x}_2, \varepsilon_o)$, ..., $B(\hat{x}_p, \varepsilon_o)$ soient deux à deux disjointes.

Alors pour tout ε tel que : $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ on a :

$$\sum_{k=1}^{p} N(\hat{x}_k , (x_n), \varepsilon, m) \leq m$$

et donc :

$$\lim_{m\to\infty} \inf \left(\sum_{k=1}^{p} N(\hat{x}_k , (x_n), \varepsilon, m)\right)/m \leq 1$$

ce qui d'après le lemme donne :

$$\sum_{k=1}^{p} \lim_{m\to\infty} \inf \frac{N(\hat{x}_k \quad (x_n), \varepsilon, m)}{m} \leq 1$$

Ce qui établit (*).

∎

Remarque

La proposition 2 permet de voir que tout point d'accumulation d'une suite n'a pas nécessairement une force > 0.

En effet considérons une suite ayant une infinité non dénombrable de points d'accumulation, d'après L. Schwartz [1] (page 170) tous ne peuvent avoir une force strictement positive.

L'exemple 2 donné précedemment donne un exemple direct de point d'accumulation de force nulle.

Remarque

La deuxième inégalité même quand $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est fini n'est pas en général une égalité.

Dans l'exemple 1 donné précédemment on a :

$$\alpha(1, (x_n)) + \alpha(0, (x_n)) = 2/3$$

Même si la suite (x_n) n'admet qu'un seul point d'accumulation $\hat{x}$, on peut avoir : $\alpha(\hat{x}, (x_n)) = 0$.

Exemple 3

Posons

$$x_n = 1 \quad \text{si } n \in \{0, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots, p^2, \ldots\}$$

$$x_n = n \quad \text{sinon}$$

Le seul point d'accumulation de (x_n) est 1

qui vérifie : $\alpha(1, (x_n)) = 0$

(Bien sûr un tel cas ne peut pas se produire si (x_n) est bornée car alors le fait de n'avoir qu'un seul point d'accumulation $\hat{x}$ implique la convergence et donc $\alpha(\hat{x}, (x_n)) = 1$).

Remarque

La proposition 2 si elle implique que les points d'accumulation de force > 0 sont au plus dénombrables, n'implique pas qu'ils soient en nombre fini.

Voici un exemple de suite ayant une infinité dénombrable de points d'accumulation de force > 0.

Exemple 4

On pose :

x_n = l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de n.

0 est un point d'accumulation de (x_n) de force 1/2 (car il y a un entier sur deux qui est impair (et donc admet 0 comme exposant de 2 dans sa décomposition en facteurs premiers).

1 est un point d'accumulation de (x_n) de force 1/4 (car il y a un entier sur 4 qui admet 1 comme exposant de 2 dans sa décomposition en facteurs premiers).

. . .

n est un point d'accumulation de (x_n) de force $1/2^{n+1}$

. . .

On vérifie ici que :

$$\alpha(0, (x_n)) + \alpha(1, (x_n)) + \alpha(2, (x_n)) + \ldots = 1$$

Proposition 3 : *Soit* (x_n) *une suite de points de l'espace métrique* E, *et soit* $y \in E$ *tel que* $\alpha(y, (x_n)) > 0$, *alors* :

1) $\forall \lambda \in]0, \alpha(y, (x_n))[, \exists \varepsilon > 0, \exists m_o \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$

$$m \geq m_o \Rightarrow N(y, (x_n), \varepsilon, m) \geq \lambda m$$

2) $\alpha(n) = n^2$ *est une suite d'indices approchants pour* y

(c'est-à-dire $y \in \underline{\lim} \; X_n^{n2}$)

3) y *est un point d'accumulation de la suite* (x_n).

Démonstration

1) Soit $\lambda \in]0, \alpha(y, (x_n))[$:

Soit λ' : $0 < \lambda < \lambda' < \alpha(y, (x_n))$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\liminf_{m \to \infty} \frac{N(y, (x_n), \varepsilon, m)}{m} \geq \lambda'$$

Donc par définition de la limite inférieure il existe m_o tel que :

$$m \geq m_o \Rightarrow \frac{N(y, (x_n), \varepsilon, m)}{m} \geq \lambda$$

2) Soit $y \in E$ supposons que $y \notin \underline{\lim} \; X_m^{m2}$.

Par définition il existe ε_o et il existe une infinité d'indices m tels que :

$$B(y, \varepsilon_o) \cap X_m^{m2} = \emptyset$$

pour un m tel que :

$$B(y, \varepsilon_o) \cap X_m^{m2} = \emptyset$$

on a :

$$\frac{N(y, (x_n), \varepsilon_o, m^2)}{m^2} \leq \frac{m}{m^2}$$

et donc :

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{N(y, (x_n), \varepsilon_o, m)}{m} = 0$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, et donc :

$$\alpha(y, (x_n)) = 0$$

3) Cela résulte du 2) et de : $\underline{\lim}\ X_m^{m2} \subset A(x_n)$.

Rappelons la définition donnée par H. Halberstam et K.F. Roth [1] page XIX.

Soit K une partie de $\mathbb{N}$ (la donnée d'une partie de $\mathbb{N}$ est équivalente à la donnée d'une suite strictement croissante d'entiers).

On appelle densité asymptotique basse ("lower asymptotic density") de K le nombre réel de [0, 1] :

$$\underline{d}\ K = \liminf_{n\to\infty} \frac{\text{Cardinal } \{i \in K \mid i < m\}}{m}$$

<u>*Proposition 4*</u> *: Soit* (x_n) *une suite de points de l'espace métrique* E.

Soit $K \subset \mathbb{N}$, K *infini et tel que :*

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in K}} x_k = \hat{x} \qquad \underline{d}\ K = \alpha$$

Alors $\hat{x}$ *est un point d'accumulation de* (x_n) *tel que :*

$$\alpha(\hat{x}, (x_n)) \geq \alpha.$$

<u>Démonstration</u> :

Soit $\varepsilon > 0$ donné :

Il existe m_o tel que pour tout $m \geq m_o$

$$m \in K \Rightarrow x_m \in B(\hat{x}, \varepsilon).$$

Donc pour tout $m \geq m_o$:

$$\text{Card } \{i \in \mathbb{N} \mid i < m, x_i \in B(\hat{x}, \varepsilon)\} \geq \text{Card } \{i \in K \mid i < m\} - m_o$$

Donc :

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{N(\hat{x}, (x_n), \varepsilon, m)}{m} \geq \liminf_{m\to\infty} \frac{\text{Cardinal } \{i \in K \mid i < m\} - m_o}{m} = \underline{d}\, K$$

L'inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, elle implique $\alpha(\hat{x}, (x_n)) \geq \alpha$.

∎

Corollaire 1 : *Soit* (x_n) *une suite de points de l'espace métrique* E. *Si* $(x_k)_{k \in K}$ *est une sous-suite fréquente de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *convergente vers* $\hat{x}$, *de fréquence* p *alors* :

$$\alpha(\hat{x}, (x_n)) \geq \frac{1}{p}$$

Démonstration :

Par définition :

$$\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \{j + 1, j + 2, \ldots, j + p\} \cap K \neq \emptyset$$

ce qui implique :

$$\underline{d}\, K \geq \frac{1}{p}$$

et donc d'après la proposition 4 :

$$\alpha(\hat{x}, (x_n)) \geq \frac{1}{p}.$$

∎

Remarque : Il se peut que $\alpha(\hat{x}, (x_n)) \geq \frac{1}{p}$ et qu'il n'existe aucune partie infinie K de $\mathbb{N}$ tel que :

$$(x_k)_{k \in K} \to \hat{x} \quad \text{et} \quad (F_1 \text{ ou } F_2).$$

Dans l'exemple 1 on a en effet : $\alpha(1, (x_n)) = 1/3$ et il est pourtant impossible d'extraire de (x_n) une sous-suite $(x_k)_{k \in K}$ convergente vers $\hat{x}$ et vérifiant (F_1) ou (F_2).

Corollaire 2 : Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de l'espace métrique E est pseudo-périodique de période p, alors en désignant par $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^p$ ses points d'accumulation on a :

$$\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, p\} \qquad \alpha(\hat{x}^i, (x_n)) = \frac{1}{p}$$

Démonstration :

Chaque point d'accumulation a une force au moins égale à 1/p d'après le corollaire 1, et donc exactement égale à 1/p d'après la proposition 2.

∎

Considérons les propriétés suivantes :

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite de points de l'espace métrique E et $\hat{x}$ un point de E :

$|\overline{\underline{1}}|$ $\hat{x}$ est un point d'accumulation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est pseudo-périodique.

$|\overline{\underline{2}}|$ Il existe une sous-suite fréquente convergente vers $\hat{x}$

$|\overline{\underline{3}}|$ $\hat{x} \in \underline{\lim}\ X_n^{2n}$

$|\overline{\underline{4}}|$ $\alpha(\hat{x}, (x_n)) \underset{2}{>} 0$

$|\overline{\underline{5}}|$ $\hat{x} \in \underline{\lim}\ X_n^{n}$

Alors on a le tableau d'implications suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & {|\overline{\underline{3}}|} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
{|\overline{\underline{1}}|} \arrow[r, Rightarrow] & {|\overline{\underline{2}}|} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & {|\overline{\underline{5}}|} \\
 & & {|\overline{\underline{4}}|} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

On peut vérifier qu'aucune autre implication n'a lieu en général.

Proposition 3 : Soient $(x^1{}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (x^2{}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, (x^p{}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ p suites de l'espace métrique E. Soit (x_n) la suite construite "par imbrication" :

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x^1{}_o, x^2{}_o, \ldots, x^p{}_o, x^1{}_1, x^2{}_1, \ldots, x^p{}_1, x^1{}_2, x^2{}_2, \ldots, x^p{}_2, \ldots)$$

on a pour tout $y \in E$:

$$\alpha(y, (x_n)) \geq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \alpha(y, (x^k{}_n))$$

(En particulier si y est un point d'accumulation de force α par rapport à $(x^1{}_n)$ alors :

$$\alpha(y, (x_n)) \geq \frac{\alpha}{p})$$

Démonstration :

On revient à la définition de la force d'un point d'accumulation.

■

Remarque 1 : On peut obtenir d'autres énoncés de ce type en utilisant des imbrications moins régulières.

Remarque 2 : L'inégalité peut être stricte.

Exemple : On imbrique la suite de l'exemple 1 avec celle obtenue en remplaçant les 1 par des zéros et les zéros par des 1.

On a alors :

$$\alpha(0, (x_n)) = \frac{1}{2} > \frac{1}{2} [\alpha(0, (x'_n)) + \alpha(0, (x^2{}_n))] = \frac{1}{3}$$

B - Rapidité d'une suite

Définition : Soit $\varepsilon(m)$ *une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *telle que :* $\lim_{m\to\infty} \varepsilon(m) = 0$ *; on dit que la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de points de l'espace métrique* E *a une rapidité en* $\varepsilon(m)$ *si il existe* $m_o \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$m \geq m_o \Rightarrow d(x_m, A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \leq \varepsilon(m)$$

Exemple :

Posons $x_n = 1 + 1/n$ si n est pair et $\neq 0$

$x_n = \quad 1/2^n$ si n est impair ou $n = 0$.

On vérifie que :

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une rapidité en $1/n$.

Remarque 1 : Il se peut que pour une suite donnée (par exemple $x_n = 1 + n + (-1)^n\, n)$ il n'y ait aucune application $\varepsilon(m)$, telle que $\varepsilon(m)$ soit la rapidité de la suite ; dans un tel cas on dit que la suite n'a pas de rapidité.

Remarque 2 : Les notions de force d'un point d'accumulation et de rapidité sont sans rapport l'une avec l'autre. On vérifie facilement qu'il existe des suites dont tous les points d'accumulation sont de force strictement positive et qui sont sans rapidité et qu'inversement il existe des suites de rapidité en $\frac{1}{n^2}$, par exemple dont aucun point d'accumulation n'a une force strictement positive.

La proposition suivante établit le rapport entre la notion de rapidité et celle d'entier-trappe.

Proposition 6 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique* E.

i) Si on a :

(T) $\forall\, v \in \mathcal{V}(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}))\ \exists\, n_o \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_o\ x_n \in v$

Alors la suite $\varepsilon(m) = d(x_m, A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}))$ *a pour limite* 0 *et la suite* (x_n) *a une rapidité en* $\varepsilon(m)$.

ii) Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *a une rapidité en* $\varepsilon(m)$ *et si* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est* compact *alors* (T) *est vérifiée.*

Démonstration :

i) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, posons $v = \{x \in E \mid d(x, A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) < \varepsilon\}$ v est un voisinage de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, donc d'après (T) il existe $m_o \in \mathbb{N}$, tel que :
$m \geq m_o \Rightarrow x_m \in v$; ce qui démontre que : $d(x_m, A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \to 0$

ii) Soit v un voisinage ouvert de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

$\complement v$ est un fermé donc :

$$d(\complement v, A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) > 0$$

(ceci parce que $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est compact), donc si on prend n_o tel que :

$$n \geq n_o \Rightarrow \varepsilon(n) < d(\complement v, A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}))$$

on est assuré que :

$$n \geq n_o \Rightarrow x_n \in v.$$

∎

Remarque :

Dans ii), l'hypothèse $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ compact est essentielle ; voici un exemple le montrant :

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n + \frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

$$A((y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \mathbb{N}$$

On prend pour v l'ensemble : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}[$

§ VI

SUITES TELLES QUE : $d(x_{n+1}, x_n) \to 0$

PRÉSENTATION DU § VI

Les suites telles que $d(x_{n+1}, x_n) \to 0$ jouent un rôle très important en optimisation où assez fréquemment les algorithmes construisent des suites ayant cette propriété mais dont on ne peut pas établir la convergence.

Le résultat le plus intéressant qui était connu à leur sujet est celui de A.M. Ostrowski [1] qui est ici retrouvé comme corollaire du théorème 2.

Outre les théorèmes 1, 2, et 3 qui sont nouveaux concernant les propriétés de l'ensemble d'accumulation de telles suites, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un ensemble soit l'ensemble d'accumulation d'une telle suite.

Le contre-exemple proposé à la fin du paragraphe montre que la connexité de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas toujours vérifiée.

A - PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Comme dans G.G.L. Meyer [1] nous donnons la :

Définition : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique* E (*dont la distance est notée* d), *on dit que* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est asymptotiquement régulière si*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$$

Cette propriété n'est pas suffisante même dans le cas d'un espace métrique à boules fermées compactes pour entraîner la convergence. Par exemple $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ est asymptotiquement régulière et ne converge pas .

Commençons par donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle suite converge.

<u>*Proposition 1*</u> *: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite asymptotiquement régulière de points de l'espace métrique à boules fermées compactes* E :

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente* $\Longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une sous-suite fréquente} \\ \text{convergente de } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{array} \right.$

<u>Démonstration</u> :

L'implication "=>" est évidente.

Pour établir "<=" donnons-nous $(x_k)_{k \in K}$ une sous-suite fréquente convergente de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\hat{x}$ sa limite et p sa fréquence.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe k_o tel que :

$$k \geq k_o \quad k \in K \Rightarrow \quad d(\hat{x}, x_k) \leq \frac{\varepsilon}{p+1}$$

$$n \geq k_o \qquad\qquad \Rightarrow \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{p+1}$$

(On utilise que $(x_k)_{k \in K}$ est convergente et que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est asymptotiquement régulière).

Soit maintenant $n \geq k_o$. Par définition d'une sous-suite fréquente, il existe $k \geq n$, tel que :

$k \in K$ et $k - n \leq p$; on a donc :

$$d(x_n, \hat{x}) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_{k+1}, x_k) + d(x_k, \hat{x})$$

$$\leq p(\frac{\varepsilon}{p+1}) + \frac{\varepsilon}{p+1} = \varepsilon$$

Nous avons établi que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; \exists k_o \in \mathbb{N} \; \forall n \geq k_o \quad d(x_n, \hat{x}) \leq \varepsilon$$

Ce qui est exactement le résultat voulu.

∎

Remarque : On peut se demander si une suite asymptotiquement régulière qui possède un point d'accumulation de force ≥ 0 est convergente. La réponse est non, comme l'établit l'exemple suivant :

$(x_n) = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1/2,$
$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/4, 2/4, 3/4, 4/4, 4/4, 3/4, 2/4, 1/4, 0, 0, \ldots)$

on a : $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = [0, 1]$

$\alpha(0, (x_n)) = 1/2$

$\alpha(\hat{x}, (x_n)) = 0$ si $\hat{x} \in]0, 1]$

Nous verrons que par contre, si tous les points d'accumulation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de force strictement positive alors la suite est convergente (corollaire 3 du théorème 3).

Théorème 1 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite asymptotiquement régulière de points de l'espace métrique à boules fermées compactes* E.

Si : $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \emptyset$ *alors :*

$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est borné* <=> $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *est borné.*

Démonstration :

1) Supposons que l'ensemble $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est borné ; soit M tel que la boule fermée $\overline{B}(x_o, M)$ contienne $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Il est évident alors (sans même se servir de l'hypothèse que (x_n) est asymptotiquement régulière ni de l'hypothèse que $\overline{B}(x_o, M)$ est compact) que $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset \overline{B}(x_o, M)$.

2) Pour démontrer la seconde implication nous allons raisonner par l'absurde.

Supposons donc que $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est borné et que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas borné.

Soit $\overset{\star}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (qui a été supposé non vide).

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on pose :

$$C_N = \{x \in E \mid N \leq d(x, \overset{\star}{x}) \leq N + 1\} = \overline{B}(\overset{\star}{x}, N + 1) - B(\overset{\star}{x}, N).$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ nous allons montrer que :

$$C_N \cap A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \emptyset$$

ce qui sera en contradiction avec l'hypothèse $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ borné.

Pour $N = 0$ c'est évident car $\overset{\star}{x} \in C_N$.

Soit $N \neq 0$.

Puisque C_N est compact il suffit de montrer que :

$(\star)$ $\forall\, n_o \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq n_o : x_n \in C_N$

Soit n_o fixé.

Soit $n_1 \geq n_o$ tel que :

$(\blacksquare)$ $\forall\, n \geq n_1 \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{1}{2}$

Puisque $\overset{\star}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ il existe $n_2 > n_1$ tel que :

$(\blacksquare\blacksquare)$ $d(x_{n_2}, \overset{\star}{x}) \leq \frac{1}{2}$

Puisque $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas borné il existe $n_3 \geq n_2$ tel que :

$(\blacksquare\blacksquare\blacksquare)$ $d(x_{n_3}, \overset{\star}{x}) \geq N + 1$

Il est clair alors d'après les relations $(\blacksquare)$ $(\blacksquare\blacksquare)$ $(\blacksquare\blacksquare\blacksquare)$ que parmi les points $x_{n_2}, x_{n_2+1}, x_{n_2+2}, \ldots, x_{n_3}$ il y a au moins un x_i tel que :

$$N \leq d(\overset{\star}{x}, x_i) \leq N + 1$$

Ceci établit $(\star)$ et donc termine la démonstration du théorème 1.

$\blacksquare$

Le théorème va nous donner une seconde condition nécessaire et suffisante de convergence pour les suites asymptotiquement régulières.

<u>Corollaire 1</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite asymptotiquement régulière de points de l'espace métrique à boules fermées compactes* E :
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente* <=> $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est réduit à un point.*

<u>Démonstration</u>

L'implication "=>" est évidente. L'implication "<=" résulte du corollaire du théorème 1 du § III (page 44).

■

Une partie B de A est dite isolée dans A si $d(B, A - B) > 0$ ou si $B = A$.

<u>Théorème 2</u> : *Soit* E *un espace métrique dont les boules fermées sont compactes. Soit* (x_n) *une suite de points de* E, *asymptotiquement régulière.*
Si F *est une partie non vide fermée, bornée et isolée de* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$
alors : $F = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

<u>Démonstration</u> :

Supposons que : $F \neq A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

Posons $G = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) - F \neq \emptyset$

Par hypothèse : $d(G, F) > 0$.

Posons : $\varepsilon = \dfrac{d(G, F)}{3}$

$$F_\varepsilon = \{x \in E \mid \exists\, y \in F \quad d(y, x) < \varepsilon\}$$

$$G_\varepsilon = \{x \in E \mid \exists\, z \in G \quad d(z, x) < \varepsilon\}$$

On a alors :

(■) $d(F_\varepsilon, G_\varepsilon) \geq \varepsilon$

En effet soit $x \in F_\varepsilon$ et $x' \in G_\varepsilon$; par définition il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $d(x, y) < \varepsilon$ $d(x', z) < \varepsilon$; on a donc :

$$d(x, x') \geq d(y, z) - d(y, x) - d(z, x') \geq 3\,\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon \geq \varepsilon$$

ce qui démontre $(\blacksquare)$.

Soit $y \in F$. Puisque F a été supposé borné il existe M tel que la boule fermée, $\overline{B}(y, M - 2\,\varepsilon)$, contienne F, c'est-à-dire :

$(\blacksquare\,\blacksquare)$ $\quad \overline{B}(y, M - 2\,\varepsilon) \supset F.$

$\overline{B}(y, M) \cap \complement F_\varepsilon \cap \complement G_\varepsilon$ est un compact car c'est l'intersection de $\overline{B}(y, M)$ qui est compact avec deux fermés.

Nous allons trouver une contradiction en montrant qu'il existe $\overset{\star}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tel que $\overset{\star}{x} \in \overline{B}(y, M) \cap \complement F_\varepsilon \cap \complement G_\varepsilon$ (ceci donne bien une contradiction car alors : $\overset{\star}{x} \notin F_\varepsilon$ $\overset{\star}{x} \notin G_\varepsilon$; donc : $\overset{\star}{x} \notin F \cup G = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$). Pour montrer qu'il existe $\overset{\star}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tel que $\overset{\star}{x} \in \overline{B}(y, M) \cap \complement F_\varepsilon \cap \complement G_\varepsilon$ puisque ce dernier ensemble est compact il suffit d'établir que :

$(\star)$ $\quad \forall n_o \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_o \quad x_n \in \overline{B}(y, M) \cap \complement F_\varepsilon \cap \complement G_\varepsilon$

Soit n_o fixé.

Soit $n_1 \geq n_o$ tel que :

$(\blacksquare\,\blacksquare\,\blacksquare)$ $\quad \forall n \geq n_1 \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq \varepsilon/2$

Soit $z \in G$. Par définition, z est un point d'accumulation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc il existe $n_2 \geq n_1$ tel que :

$(\blacksquare\,\blacksquare\,\blacksquare\,\blacksquare)$ $\quad d(x_{n_2}, z) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (et donc $x_{n_2} \in G_\varepsilon$)

Par définition, y est un point d'accumulation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ il existe donc $n_3 \geq n_2$ tel que :

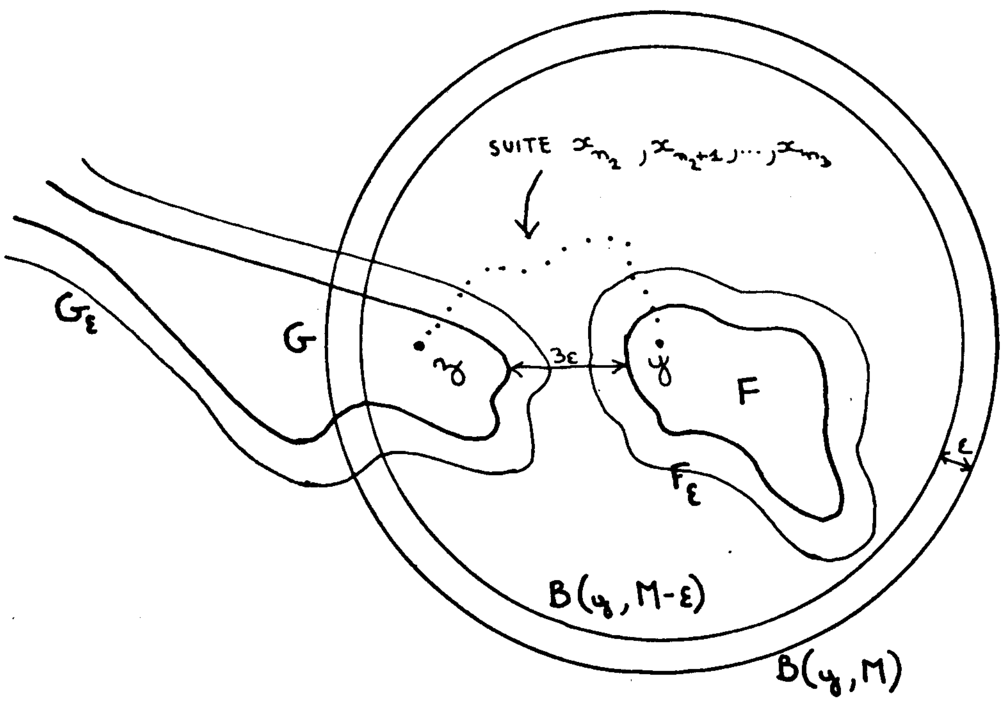
$(\blacksquare\,\blacksquare\,\blacksquare\,\blacksquare\,\blacksquare)$ $\quad d(x_{n_3}, z) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (et donc $x_{n_3} \in F_\varepsilon$).

Il est clair alors d'après les relations (■) (■ ■) (■ ■ ■) (■ ■ ■ ■) et (■ ■ ■ ■ ■) que parmi les points $x_{n_2}, x_{n_2+1}, \ldots, x_{n_3}$ il y a au moins un x_i tel que :

$$x_i \notin F_\varepsilon,\ x_i \notin G_\varepsilon,\ x_i \in \overline{B}(y\ ,\ M)$$

(On considère le plus grand indice $i \leq n_3$ tel que : $x_i \notin F_\varepsilon$)

Ceci établit (*) et donc démontre le théorème.



■

On appelle continuum un connexe fermé.

<u>*Corollaire 1*</u> *: Soit E un espace métrique dont les boules fermées sont compactes et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E asymptotiquement régulière.*

Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est borné alors c'est un connexe (c'est donc un continuum).

Démonstration :

Supposons que $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ n'est pas connexe. Il existe donc une partition $\{F_1, F_2\}$ de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en deux fermés relatifs ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$; $F_1 \neq \emptyset$; $F_2 \neq \emptyset$ $F_1 \cup F_2 = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$).

Puisque $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est fermé (théorème 1 § I) les fermés relatifs de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ sont des fermés de E. F_1 est donc une partie fermée bornée de E, c'est donc un compact. La distance entre deux fermés disjoints dont l'un est compact étant strictement positive, F_1 est une partie de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ qui est non vide, fermée, bornée et isolée.

D'après le théorème 2 : $F_1 = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ ce qui est une contradiction (car alors $F_2 = \emptyset$).

∎

Le théorème 1 et le corollaire 1 nous permettent alors d'énoncer le résultat suivant qui lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est le théorème A.M. Ostrowski ([1] page 204).

<u>*Corollaire 2*</u> : *Soit* E *un espace métrique dont les boules fermées sont compactes et soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* E *asymptotiquement régulière.*

Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *est bornée alors* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est connexe (et donc est un continuum).*

Un ensemble connexe qui contient deux points distincts a au moins la puissance du continu (voir C. Berge [1], page 101 ; nous avons vu (théorème 1 § I) que $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ avait au plus la puissance du continu ; donc :

Corollaire 3 : Soit E un espace métrique dont les boules fermées sont compactes et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E asymptotiquement régulière.

Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est borné non vide ou si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est borné alors :

1) ou bien la suite n'a qu'un point d'accumulation (et donc elle converge d'après le corollaire 1 du théorème 1).

2) ou bien la suite a une infinité de points d'accumulation dont l'ensemble a exactement la puissance du continu (et forme un continuum).

Comme nous allons le voir le théorème 2 dans le cas où $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ n'est pas borné donne un résultat intéressant.

Corollaire 4 : Soit E un espace métrique dont les boules fermées sont compactes et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points asymptotiquement régulière.

Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est non borné et ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes alors chacune d'ellesest non bornée.

Démonstration :

Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ ne possède qu'une composante connexe elle est nécessairement non bornée.

Supposons donc que $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ a plus de deux composantes connexes.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ $n \geq 2$ les composantes connexes de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Supposons que l'une d'elle soit bornée, par exemple C_1, alors C_1 est non vide ; fermée (car une composante connexe est toujours fermée, voir par exemple L. Schwartz [1], page 120), bornée et isolée (car $C_2 \cup \ldots \cup C_n$ qui est une réunion finie de fermés est un fermé et donc $d(C_1, C_2 \cup \ldots \cup C_n) > 0$) d'après le théorème 2, cela implique que

$C_1 = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ ce qui est contraire à $n \geq 2$.

∎

Remarque (1)

L'hypothèse que le nombre de composantes connexes de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est fini peut être supprimée. En effet :

Soit C une composante connexe bornée de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (que l'on a supposé non borné). Il existe $D \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tel que : $C \subset D$, et tel que D soit compact et ouvert pour la topologie de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$. (Cela résulte de Bourbaki [2] TG II 32 : Si X est un espace localement compact et K une composante connexe de X compacte alors les voisinages à la fois ouverts et fermés de K forment un système fondamental de voisinages de K). D est donc une partie non vide fermée bornée et isolée de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, ce qui d'après le théorème 2 donne : $D = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, ce qui est en contraction avec l'hypothèse : $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non borné.

Corollaire 5 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite bornée de points de l'espace métrique* E *à boules fermées compactes. S'il existe* p *tel que :*

$$\lim_{p \to +\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$$

Alors $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a au plus* p *composantes connexes.*

Démonstration évidente

∎

Théorème 3 : Soit E *un espace métrique dont les boules fermées sont compactes. Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* E *asymptotiquement régulière. Si* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *n'est pas borné alors :*

$\forall x^* \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})\ \forall d \in \mathbb{R}^+\ \exists y^* \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})\ d(x^*, y^*) = d$

(1) Due au Professeur Coeuré

Démonstration :

Soit $\overset{\star}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, soit $d \in \mathbb{R}^+$

Si $d = 0$ la propriété est évidente il suffit de prendre $\overset{\star}{y} = \overset{\star}{x}$

Supposons donc que : $d \in \mathbb{R}^{+\star}$

Soit $\varepsilon < d$.

Soit l'ensemble $C_\varepsilon = \{x \in E \mid d - \varepsilon \leq d(\overset{\star}{x}, x) \leq d + \varepsilon\}$

Soit $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$

Donnons nous un point $\overset{\star}{z} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tel que :

$$d(\overset{\star}{x}, \overset{\star}{z}) \geq d + \varepsilon$$

(un tel point existe car $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ a été supposé non borné).

Soit n_1 tel que :

(■) $n \geq n_1 \Rightarrow d(x_{n+1}, x_n) \leq \varepsilon'$

Soit $n_2 \geq n_1$ tel que :

(■ ■) $d(x_{n_2}, \overset{\star}{x}) \leq d - \varepsilon'$

Soit $n_3 \geq n_2$ tel que :

(■ ■ ■) $d(x_{n_3}, \overset{\star}{z}) \leq \varepsilon'$

Il est clair alors d'après les relations (■) (■ ■) (■ ■ ■) que parmi les points $x_{n_2}, x_{n_2+1}, \ldots, x_{n_3}$ il y en a au moins un tel que :

$$x_i \in C_\varepsilon$$

Ceci montre que l'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(x_k)_{k \in K}$ telle que :

$$d(\overset{\star}{x}, x_k))_{k \in K} \to d$$

Cette suite qui est nécessairement bornée admet au moins un point d'accumulation $\overset{\star}{y}$ qui vérifie $d(\overset{\star}{x}, \overset{\star}{y}) = d$

■

Corollaire 1 : *Soit* E *un espace métrique dont les boules fermées sont compactes et soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* E *asymptotiquement* *régulière.*

Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *n'est pas borné alors il a exactement la puissance du continu.*

Démonstration :

Soit $x^* \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

D'après la propriété énoncée par le théorème 3 pour tout $d \in \mathbb{R}^+$ il existe un point y^*_d tel que $d(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}_d) = d$.

L'application de $\mathbb{R}^+$ dans $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ qui à d fait correspondre y^*_d est bien sûr injective et donc $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ a au moins la puissance du continu. Comme on sait qu'il a au plus la puissance du continu, cela donne le résultat voulu.

∎

Corollaire 2 : *Soit* E *un espace métrique dont les boules fermées sont compactes et soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* E *asymptotiquement régulière :*

i) ou bien $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \emptyset$

ii) ou bien $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a un seul élément (et alors* (x_n) *converge)*

iii) ou bien $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est un ensemble infini ayant exactement la puissance du continu.*

Démonstration : Ce résultat est une conséquence immédiate du corollaire 3 du théorème 2 et du corollaire 1 du théorème 3.

∎

Corollaire 3 : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points asymptotiquement régulière de l'espace métrique à boules fermées compactes* E.

Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \emptyset$ *et si tous les points de* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *ont une force* *strictement positive alors* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente.*

Démonstration :

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'était pas convergente, $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ aurait la puissance du continu, ce qui d'après la proposition 2 du § V est impossible si tous les points de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ ont une force strictement positive.

∎

Le théorème suivant est une sorte de réciproque du corollaire 3.

Théorème 4 : *Soit* E *un espace métrique séparable.*
Soit X *une partie de* E *telle que* X *soit connexe et fermée alors il existe une suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de points de* E *telle que*

i) $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$ *(i.e.* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est asymptotiquement régulière)*

ii) $X = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Démonstration :

On rappelle (voir par exemple Deny [1], page 57) qu'un espace métrique E est dit bien enchaîné si quels que soient les points a et b de E et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe une chaine finie $x_o = a, x_1, \ldots, x_n = b$ vérifiant : $d(x_{i+1}, x_i) \leq \varepsilon$ pour $i = 1, \ldots, n - 1$.

On a alors les résultats suivants :

a) E métrique connexe => E bien enchaîné.

b) E métrique compact bien enchaîné => E connexe.

Ici X est connexe et métrique donc X est bien enchaîné.

Mais c'est aussi un sous-espace d'un espace séparable, il est donc séparable.

Soit $A = \{\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$ une partie dénombrable et dense de points de X comme X est fermé dans E cela signifie que $\overline{A} = X$.

On considère la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$(\beta_o, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots) = (\alpha_o, \alpha_o, \alpha_1, \alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$

Comme on l'a déjà vu (Proposition 4 du § I)

$A((\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}) = X$

A partir de la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nous allons construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifiera i) et ii).

Nous construisons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étape par étape.

<u>Etape 1</u> :

Il existe $x_o = \beta_o, x_1, \dots, x_{n_1} = \beta_1$ des points de X tels que $d(x_i, x_{i+1}) \leq 1$ pour $i \in \{0, \dots, n_1-1\}$ (car X est bien enchaîné comme nous l'avons dit).

<u>Etape 2</u> :

Il existe $x_{n_1} = \beta_1, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2} = \beta_2$ des points de X tels que $d(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{1}{2}$ pour $i \in \{n_1, \dots, n_2-1\}$

...

<u>Etape k</u> :

Il existe $x_{n_{k-1}} = \beta_{k-1}, x_{n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_k} = \beta_k$ de points de X tels que $d(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{1}{k}$ pour $i \in \{n_{k-1}, \dots, n_k\}$

...

Par construction la suite (x_n) vérifie i).

Montrons que l'on a aussi ii).

Puisque pour tout $i \in \mathbb{N}$: $x_i \in X$; on a : $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset X$.

Puisque par construction, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a $A((\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ mais on a vu que :

$A((\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}) = X$, donc $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = X$.

ce qui démontre ii).

■

Remarque : Dans le cas de $\mathbb{R}^m$ le théorème 4 peut être complété par l'énoncé suivant :

Si X est une partie fermée de $\mathbb{R}^m$ $m \geq 2$ ayant au plus un nombre fini de composantes connexes chacune non bornée , alors il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

i) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$

ii) $X = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

Quand $m = 1$ ce résultat n'est pas vrai car on a la situation particulière suivante :

que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée ou non si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est asymptotiquement régulière alors $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est connexe. (Voir J. Lelong-Ferrand [1]).

B - Contre-exemple

Le fait que l'ensemble des points d'accumulation d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^m$, asymptotiquement régulière puisse ne pas être connexe ne semble pas être connu. En voici un exemple.

On considère les deux demi-droites fermées D_1 et D_2 de $\mathbb{R}^2$ définies par :

$D_1 = \{(x, y) \mid x = 0 \text{ et } y \geq 0\}$

$D_2 = \{(x, y) \mid x = 1 \text{ et } y \geq 0\}$

Nous allons construire une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^2$ qui sera asymptotiquement régulière et telle que :

$A((X_n)_{n \in \mathbb{N}}) = D_1 \cup D_2$.

(remarquons que conformément au corollaire 4 du théorème 2 chacune des deux composantes connexes de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est non bornée).

Etape 1 :

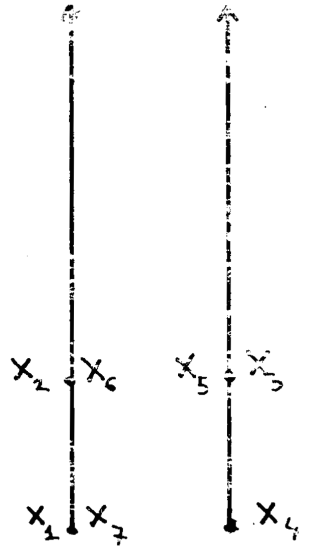
$X_1 = (0, 0)$ $X_5 = (1, 1)$

$X_2 = (0, 1)$ $X_6 = (0, 1)$

$X_3 = (1, 1)$ $X_7 = (0, 0)$

$X_4 = (1, 0)$

on pose $n_1 = 7$



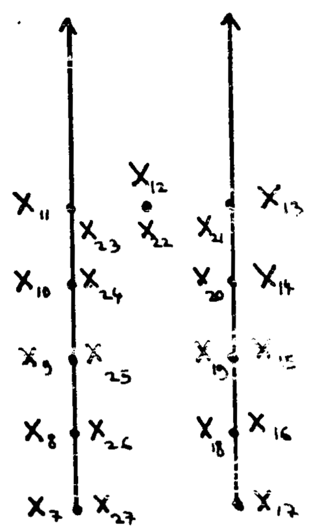
Etape 2 :

Les points construits sont

$X_8, X_9, \ldots, X_{27}$ et ils vérifient

$d(X_i, X_{i+1}) = \frac{1}{2}$

$8 \leq i < 27$



A la fin de l'étape p - 1, on a construit n_{p-1} points.

Etape p :

On construit $(4p + 2)2^{p-1}$ points

qui sont :

$X_{n_{p-1}+1}, X_{n_{p-1}+2}, \ldots, X_{n_p}$

ils vérifient

$d(X_i, X_{i+1}) = \frac{1}{2^{p-1}}$

pour $i \in \{n_{p-1}+1, n_{p-1}+2, \ldots, n_p-1\}$

Ils sont obtenus de la façon suivante.

On parcourt d'abord le segment

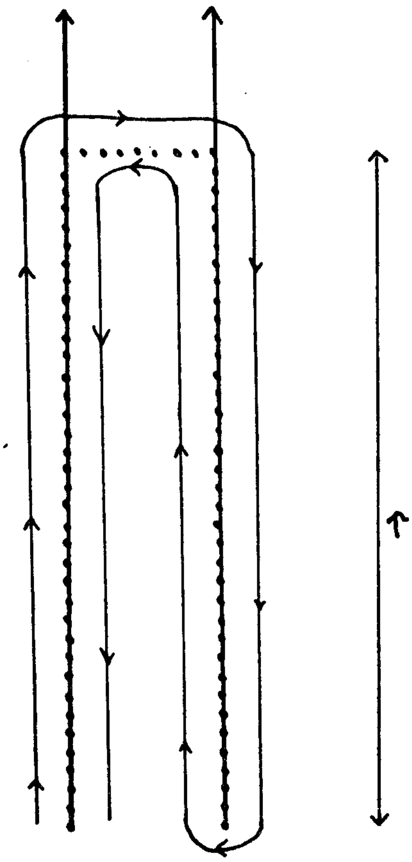
$[(0, 0), (0, p)]$ en faisant des sauts

de $\frac{1}{2^{p-1}}$ puis ensuite le segment

$[(0, p), (1, p)]$ puis $[(1, p), (1, 0)]$

et puis on "revient par le même

chemin".



Il est clair que la suite (X_n) a bien les propriétés annoncées.

C - CAS DE $\mathbb{R}^M$

Dans le cas de $\mathbb{R}^m$ voici un résumé de tout ce qui peut se produire pour une suite de points asymptotiquement régulière.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* $\mathbb{R}^m$ *asymptotiquement régulière, soit* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *l'ensemble de points d'accumulation de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

i) ou bien la suite n'a aucun point d'accumulation (i.e. $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \emptyset$*).*

ii) ou bien la suite a un seul point d'accumulation et alors elle est convergente.

iii) ou bien la suite a plus d'un point d'accumulation et alors :

1) ou bien $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est borné (ce qui est équivalent à* $\{x\}_{n \in \mathbb{N}}$ *borné) et alors* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est un continuum (fermé connexe).*

2) ou bien $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *n'est pas borné et alors chacune de ses composantes connexes est non bornée.*

Dans les cas 1) ou 2) $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est un ensemble ayant exactement la puissance du continu.*

En conséquence :

a) Si une suite (bornée ou non) asymptotiquement régulière de points de $\mathbb{R}^m$ *a un nombre fini de points d'accumulation, alors elle n'en a qu'un et converge.*

b) Une suite (bornée ou non) asymptotiquement régulière de points de $\mathbb{R}^m$ *n'a jamais une infinité dénombrable de points d'accumulation.*

<u>Remarque</u> (1)

On peut, moyennant de petites modifications dans les démonstrations, généraliser aux espaces métriques localement compacts les théorèmes 1 et 2 et leurs corollaires. Le théorème 1, par exemple, devient :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite asymptotiquement régulière de points de l'espace métrique localement compact E. Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \emptyset$, alors :

$(A(x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est compact <=> $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est contenu dans un compact.

(1) Due au Professeur Coeuré.

§ VII

SUITES DEFINIES PAR UNE RELATION DE LA FORME :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

PRÉSENTATION DU § VII

Une application continue f de l'espace topologique E dans lui-même étant donnée, ainsi qu'un point $x_o \in E$, on définit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence : $x_{n+1} = f(x_n)$.
Notre point de vue n'est pas de rechercher des conditions (nécessaires ou suffisantes) sur f ou sur E pour que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (ce point de vue a déjà été adopté par un certain nombre d'auteurs : S. Banach [1], J.B. Diaz et F.T. Metcalf [1], [2], M. Edelstein [1], [2], [3], M. Cosnard [1], [2]).
Nous nous intéresserons à l'ensemble des points d'accumulation et des points sous-limites de telles suites.
Sauf exception (proposition 8) nous ne ferons pas d'hypothèses supplémentaires sur f.
Déjà abordé sous cet angle, ce problème a donné lieu à quelques travaux dont les principaux sont ceux de A.N. Sarkowski [1], F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1] et G.G.L. Meyer et R.C. Raup [1].
Nous reprenons ici les résultats de ces auteurs dans une présentation unifiée et en nous plaçant dans des espaces généraux. Nous obtenons ainsi des généralisations (dont toutes ne sont pas évidentes) de leurs résultats.
La distinction (nécessaire) entre $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ donne lieu à de nouveaux résultats.

Nous terminons par quatre contre-exemples dont le dernier résoud le problème posé par F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1].
(Certaines démonstrations nécessitant l'emploi de la notion de "suite généralisée", nous avons rappelé en annexe quelques définitions et énoncés à propos de celle-ci).

A - PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Soit f une application d'un espace topologique E dans lui-même.
Une partie finie de E sera dite périodique de période p (pour f) si on peut ordonner ses éléments : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, de façon à ce que :

$$f(\alpha_1) = \alpha_2,\ f(\alpha_2) = \alpha_3,\ \ldots,\ f(\alpha_{p-1}) = \alpha_p,\ f(\alpha_p) = \alpha_1$$

On dira aussi de chacun des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qu'il est périodique de période p (pour f).
x est un point périodique de période p pour f si et seulement si :
$f^p(\alpha) = \alpha$ et $f^q(\alpha) \neq \alpha$ pour $q \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$.
Un point fixe pour f est un point périodique de période 1.
Nous dirons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E est générée par f si et seulement si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ :\ x_{n+1} = f(x_n)$$

De façon évidente : une suite générée par f est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si elle contient un point périodique.

<u>*Proposition 1*</u> : *Soit* f *une application de l'espace topologique* E *dans l'espace topologique* F. *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* E. *Si* f *est continue :*

i) $f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \subset A((f(x_n))_{n \in \mathbb{N}})$

ii) $f(L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \subset L((f(x_n))_{n \in \mathbb{N}})$

Démonstration

i) Soit $\overset{\star}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, soit w un voisinage de $f(\overset{\star}{x})$ puisque f est continue il existe v un voisinage de $\overset{\star}{x}$ tel que : $f(v) \subset w$; comme on a supposé que $\overset{\star}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, il existe une infinité d'indices i tels que : $x_i \in v$; donc tels que $f(x_i) \in w$; ce qui montre que :

$$f(\overset{\star}{x}) \in A((f(x_n))_{n \in \mathbb{N}})$$

ii) Soit $\overset{\star}{x} \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, soit $(x_k)_{k \in K}$ une sous-suite convergente vers $\overset{\star}{x}$; la continuité de f entraîne que $(f(x_k))_{k \in K}$ converge vers $f(\overset{\star}{x})$; et donc :

$$f(\overset{\star}{x}) \in L((f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}).$$

∎

Remarque : Un exemple simple montrant que l'on a pas toujours l'égalité dans les inclusions i) et ii) est le suivant :

$$E = F = \mathbb{R} \qquad \begin{array}{ll} f(x) = x & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 & \text{si } x \geq 1 \end{array}$$

$$x_n = n + (-1)^n\, n.$$

On a : $f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) = f(L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) = \{0\}$

$$A((f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}) = L((f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}) = \{0,\ 1\}$$

Corollaire 1 : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E, *générée par l'application continue* $f : E \to E$; *alors* :

i) $f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

ii) $f(L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \subset L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

(La partie i) est énoncée par G.G.L. Meyer et R.C. Raup [1], c'est aussi une conséquence des résultats de A.N. Sarkowski [1]. Dans le cas des espaces métriques (cas où $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$) ce corollaire est connu de F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1]).

Démonstration :

Il suffit de remarquer que :

$$(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

$$A((x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

$$L(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

ce qui grâce aux inclusions i) et ii) de la proposition 1 permet de conclure .

∎

Corollaire 2 : i) Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *(resp.* $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$*) est réduit à un élément* $\overset{\star}{x}$ *alors* $f(\overset{\star}{x}) = \overset{\star}{x}$.

ii) Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *(resp.* $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$*) a un nombre fini*(1) *d'éléments, alors il contient un sous-ensemble périodique.*

Démonstration :

i) évident :

ii) Soit y_1 un élément de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (resp. de $L(x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Désignons par i le plus petit entier tel que :

$$\exists\ k \in \mathbb{N}^\star \quad f^{k+i}(y_1) = f^i(y_1)$$

(un tel entier i existe car les éléments de la suite y_1, $f(y_1)$, $f^2(y_1)$, ... sont des éléments de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (resp. $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$)).

(1) Sous-entendu : non nul

Les éléments $f^i(y_1)$, $f^{i+1}(y_1)$, ..., $f^{i+k-1}(y_1)$ forment alors le sous-ensemble périodique cherché

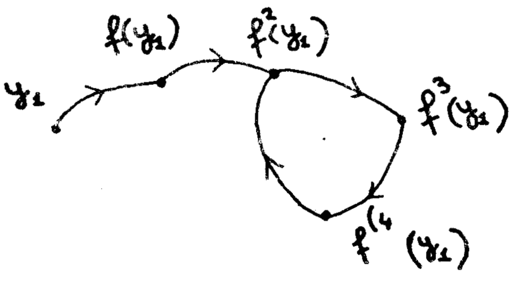


Illustration avec i = 2 et k = 3

∎

Remarque :

Comme nous le verrons plus loin, le plus souvent $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (resp. $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$) est périodique cependant des situations du type de celle de l'illustration sont possibles comme le montre le contre-exemple 1 donné plus loin.

Proposition 2 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E, *générée par l'application continue* $f : E \to E$.

i) Si E *est compact alors :* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

ii) Si E *est séquentiellement compact alors :*

$$L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = f(L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}))$$

(La partie i) lorsque E est supposé compact, est un résultat de A.N. Sarkowski [1] ; dans le cas où E est métrique compact, on retrouve une proposition de F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1]).

Démonstration :

i) Soit $\overset{\star}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Soit v un voisinage fermé de $\overset{\star}{x}$.

Il existe $K \subset \mathbb{N}$, K infini tel que :

$$k \in K \Rightarrow x_k \in v.$$

Puisque E est compact, il existe $\overset{\star}{y}(v)$ un point d'accumulation de la suite $(x_{i-1})_{i \in K}$; pour ce point on a bien sûr $f(\overset{\star}{y}(v)) \in v$.

La suite généralisée $(\overset{\star}{y}(v))_{v \in V(\overset{\star}{x})}$, admet un point d'accumulation $\overset{\star}{y}$ qui appartient à $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ car ce dernier ensemble est fermé ; ce point $\overset{\star}{y}$ vérifie bien sûr $f(\overset{\star}{y}) = \overset{\star}{x}$. Donc $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}))$, ce qui permet de conclure.

ii) Soit $\overset{\star}{x} \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Soit $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite convergente vers $\overset{\star}{x}$. La sous-suite $(x_{k(n)-1})_{n \in \mathbb{N}}$ admet un point sous-limite $\overset{\star}{y}$ et bien sûr $f(\overset{\star}{y}) = \overset{\star}{x}$. Donc $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset f(L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ ce qui permet de conclure.

■

<u>*Corollaire 1*</u> *: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de l'espace topologique E, générée par l'application continue $f : E \to E$.*
Si E est compact (resp. séquentiellement compact) et si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est fini (resp. $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est fini) alors $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (resp. $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$) est réunion de cycles.

La démonstration est évidente.

<u>Remarque</u> : Les hypothèses de compacité de l'énoncé de la proposition 2 sont indispensables, comme le montrent les contre-exemples 1 et 3 donnés plus loin où on a :

$$f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \subsetneq A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Nous verrons que ce corollaire peut être amélioré (voir corollaire 2 de la proposition 4).

Proposition 3 : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace localement compact* E, *générée par l'application continue* $f : E \to E$.

Alors :

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est contenu dans un compact} \iff A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \text{ est compact non vide.}$$

(Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^m$ ce résultat est donné par G.G.L. Meyer [1]).

Démonstration :

i) L'implication "=>" est évidente car si K est un compact de E contenant $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ alors $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est un fermé de K donc un compact.

ii) Montrons "<=" : pour cela raisonnons par l'absurde.

Supposons donc que $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est compact et que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'est contenu dans aucun compact.

$f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}))$ qui est compact admet un voisinage compact w (car dans un espace localement compact tout ensemble compact admet un voisinage compact (Bourbaki [2] page 65 proposition 10).

Montrons qu'il existe un voisinage v de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tel que :

v est compact et $f(v) \subset w$

Pour tout $y \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ soit v(y) un voisinage ouvert relativement compact de y tel que $f(v(y)) \subset w$. La famille $v(y))_{y \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})}$ est un recouvrement ouvert de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, soit $v(y_1), \ldots, v(y_p)$ un sous-recouvrement ouvert fini, $v = \bar{v}(y_1) \cup \ldots \cup \bar{v}(y_p)$ est compact (comme réunion finie de compacts) c'est donc le voisinage cherché.

Il existe un ensemble infini K tel que :

$k \in K \Rightarrow x_k \notin v \cup w$

(en effet sinon il existerait $n_o \in \mathbb{N}$ tel que :

$n \geq n_o \Rightarrow x_n \in v \cup w$

et donc l'ensemble $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ serait contenu dans le compact

$\{x_o, x_1, \ldots, x_{n_o}\} \cup v \cup w$ contrairement aux hypothèses).

Soit $i \in \mathbb{N}$, tel que $x_i \in v$.

Pour tout $k > i$, $k \in K$ on définit $i(k)$ comme étant le plus grand

entier $< k$, tel que : $x_{i(k)} \in v$.

Par construction : $x_{i(k)+1} \notin v$

$x_{i(k)+1} \in w$

Soit alors $\overset{\star}{x}$ un point d'accumulation de la suite $(x_{i(k)+1})_{\substack{k \in K \\ k>i}}$.

On a : $\overset{\star}{x} \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$; ce qui est absurde car $\overset{\star}{x} \notin \overset{\circ}{v}$.

∎

<u>*Corollaire*</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace métrique* E *à boules fermées compactes, générée par l'application continue* $f : E \to E$ *alors :*

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *est borné* $\Longleftrightarrow$ $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est borné non vide.*

<u>Remarque</u> : Dans la proposition 3 l'hypothèse "E localement compact" ne peut pas être supprimée, comme le montrent les contre-exemples 1 et 2 donnés plus loin.

<u>*Proposition 4*</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E, *générée par l'application continue* $f : E \to E$.

On suppose que :

$$(T) \begin{cases} \text{Pour tout voisinage } V \text{ de } A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \text{ (resp. de } L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \\ \exists\, n_o \in \mathbb{N},\ n \geq n_o \Rightarrow x_n \in V \end{cases}$$

Soit A *une partie propre de* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *(resp.* $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$*) ; s'il existe un voisinage* v *de* A *et un voisinage* w *de* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) - A$ *(resp. de* $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) - A$*) tel que* $v \cap w = \emptyset$ *alors :* $f(A) \not\subset A$.

(Des résultats analogues sont donnés dans le cas où E est compact par A.N. Sarkowski [1], dans le cas où E est métrique par F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1]).

Démonstration :

Supposons que $f(A) \subset A$. Soit v_1 un voisinage de A tel que :

(■) $f(v_1) \subset v$, $v_1 \subset v$

(on construit ce voisinage en posant $v_1 = \bigcup_{x \in A} (v(x) \cap v)$ où $v(x)$ désigne un voisinage ouvert de $x \in A$ tel que : $f(v(x)) \subset v$).

D'après l'hypothèse (T) il existe n_o tel que :

(■ ■) $n \geq n_o \Rightarrow x_n \in v_1 \cup w$

Soit $n_1 \geq n_o$ tel que $x_{n_1} \in v_1$ alors :

$$x_{n_1+1} = f(x_{n_1}) \in v \text{ (d'après (■))}$$

$$x_{n_1+1} = f(x_{n_1}) \in v_1 \cup w \text{ (d'après (■ ■))}$$

et donc $x_{n_1+1} \in v_1$. De même $x_{n_1+2} \in v_1$, $x_{n_1+3} \in v_1$ etc ...

Ce qui implique : $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset A$ (resp. $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset A$).

On obtient donc une contradiction avec l'hypothèse que A est une partie propre de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (resp. de $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$).

■

Corollaire 1 : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique localement compact* E, *générée par l'application continue* $f : E \to E$. *Si* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *a un nombre fini*(1) *de composantes connexes et que chacune*

(1) Sous-entendu : non nul.

est compacte : alors on peut les numéroter $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *de façon à ce que :*

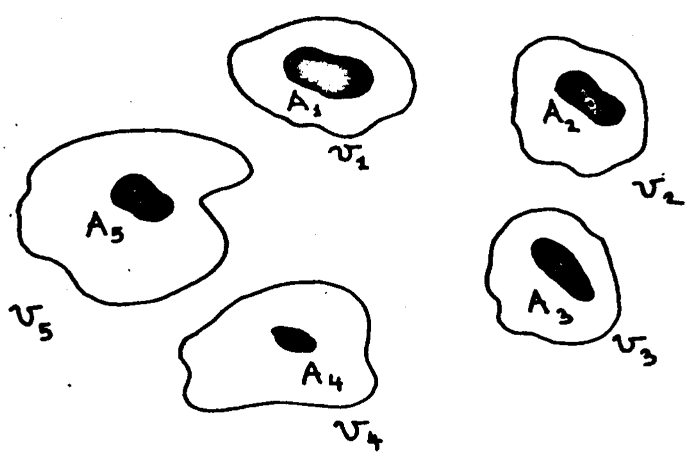
$$f(A_1) = A_2,\ f(A_2) = A_3,\ \ldots,\ f(A_{p-1}) = A_p,\ f(A_p) = A_1.$$

(Ce résultat dans le cas d'un espace métrique compact est énoncé par F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1]).

Démonstration :

$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est compact (comme réunion finie de compacts), et donc d'après la proposition 3, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est contenu dans un compact la propriété (T) est donc vérifiée d'après la proposition 10 du § III.

Numérotons provisoirement les composantes connexes de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Il existe $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des voisinages de $A_1, A_2, \ldots, A_p$ respectivement, et deux à deux disjoints (E a été supposé localement compact, il est donc normal ce qui permet de construire les voisinages $v_1, v_2, \ldots, v_p$)



La proposition 4 nous donne que :

(*) $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, p\}$: $f(A_i) \not\subset A_i$

Montrons que :

(**) S'il existe $y \in A_i$ tel que $f(y) \in A_j$ alors $f(A_i) \subset A_j$.

En effet : il existe v un voisinage de y tel que $f(v) \subset v_j$ donc tel que $f(v \cap A_i) \subset A_j$. Ce qui montre que l'ensemble $B = \{x \in A_i \mid f(x) \in A_j\}$ est un ouvert relatif de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$; c'est aussi un fermé car $B = A_i \cap f^{-1}(A_j)$, et donc c'est une composante connexe de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, donc $B = A_i$ ce qui établit (**).

Les relation (*) et (**) avec la proposition 2 (que l'on peut appliquer ici car $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est contenu dans un compact) donnent que :

S'il existe $y \in A_i$ tel que $f(y) \in A_j$ alors $f(A_i) = A_j$.

La proposition 4 appliquée à nouveau à d'éventuelles "sous-périodes" permet de conclure.

∎

<u>*Corollaire 2*</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique localement compact* E, *générée par l'application continue* $f : E \to E$.

Si $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est fini non vide, alors :*

i) $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est un sous-ensemble périodique de* E

ii) la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est pseudo-périodique.*

(La partie i) de ce corollaire dans le cas où E est compact est énoncée par A.N. Sarkowski [1], et dans le cas où E est métrique compact par F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1]. Dans un cas analogue à celui-ci, ce corollaire se trouve aussi dans G.G.L. Meyer et R.C. Raup [1]).

<u>Démonstration</u> :

Le i) résulte du corollaire 1 et de proposition 2 du § III.

Pour montrer ii), posons $p = \text{card}\,(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et donnons $y \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Soit v un voisinage compact de y tel que :

(*) $v \cap A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{y\}$

Il existe $w \subset v$ tel que $f^p(w) \subset v$.

Considérons $K = \{i \in \mathbb{N} \mid x_i \in v\}$; $K' = \{i \in K \mid x_i \notin w\}$

K' ne peut pas être infini, car alors il existerait $z \in v$, $z \neq y$ point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce qui est impossible d'après (*).

K' est donc fini ce qui signifie :

$$\exists\, n_o \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad x_{n_o+kp} \in v$$

En utilisant à nouveau (*) on en déduit que la sous-suite $(x_{n_o+kp})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente, et donc que les sous-suites :

$$(x_{pn})_{n \in \mathbb{N}},\ (x_{pn+1})_{n \in \mathbb{N}},\ \ldots,\ (x_{pn+(p-1)})_{n \in \mathbb{N}}$$

sont convergentes. Si on désigne par $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_p$ les limites respectives de ces sous-suites d'après le théorème 1 du § II on a :

$$\{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_p\} = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

∎

Remarque : Comme le montre le contre-exemple 1 donné plus loin l'hypothèse "E localement compact" est essentielle.

Proposition 5 : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E, *générée par l'application continue* $f : E \to E$. *Si il existe* $z \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *(resp.* $z \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$*), et* v *un voisinage de* z *tels que :*

i) z *est périodique de période* p *(i.e.* $f^p(z) = z$*)*

ii) $v \cap A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{z\}$ *(resp.* $v \cap L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{z\}$*)*

iii) v *est compact ou séquentiellement compact (resp.* v *est séquentiellement compact).*

Alors : $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{z, f(z), \ldots, f^{p-1}(z)\}$

et de plus la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est pseudo-périodique.*

(Cette proposition pour ce qui concerne $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et avec l'hypothèse v séquentiellement compact [hypothèse sans rapport avec : v compact] est due à G.G.L. Meyer et R.C. Raup [1]).

Démonstration :

Puisque f^p est continue, il existe w un voisinage de z tel que :
$f^p(w) \subset v$ et $w \subset v$.

Désignons par K l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \in w\}$ et par K' l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid i \in K \text{ et } x_{i+p} \notin w\}$.

K' ne peut pas être infini, car alors la sous-suite $(x_{k+p})_{k \in K'}$ d'après l'hypothèse iii) admettrait un point d'accumulation (resp. un point sous-limite) qui serait dans v et distinct de z ; contrairement à ii).

Il existe donc $i_o \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{i_o+np} \in w$$

On en déduit facilement que la sous-suite $(x_{i_o+np})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers z. La continuité de f implique alors que les sous-suites $(x_{i_o+np+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_{i_o+np+2})_{n \in \mathbb{N}}$, ..., $(x_{i_o+np+p-1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de limites respectives $f(z)$, $f^2(z)$, ..., $f^{p-1}(z)$ ce qui grâce au théorème I du § II permet de conclure.

∎

Corollaire : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique localement compact* E, *générée par l'application continue* $f : E \to E$.
Si il existe $z \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *isolé dans* $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *et périodique alors :*

$$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{z, f(z), \ldots, f^{p-1}(z)\}$$

et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est pseudo-périodique.*

Démonstration :

On se ramène immédiatement à la proposition 5.

∎

Remarque : Dans la proposition 5 l'existence de v est indispensable comme le montre le contre-exemple 4 donné plus loin, où le point (0, 0) est fixe pour f alors que pourtant $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \{(0, 0)\}$.
Les hypothèses i) et ii) ne suffisent pas pour obtenir la conclusion ; on le voit en modifiant le contre-exemple 1 donné plus loin.

Voici maintenant une proposition dont la conclusion est exactement la même que celle de la proposition 5, mais dont les hypothèses sont différentes.

Proposition 6 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de l'espace localement compact E, générée par une application continue f : E → E. On suppose que :

i) $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ a un nombre fini p de composantes connexes .

ii) que l'une d'elles est réduite à un point z.

Alors : $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{z, f(z), \ldots, f^{p-1}(z)\}$ et de plus la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est pseudo-périodique.

Démonstration :

D'après le corollaire 1 de la proposition 4, il existe une composante connexe A de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ telle que :

$f(z) = A.$

Cette composante connexe est donc réduite au point f(z). En procédant ainsi de proche en proche et puisque par hypothèse, il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes, on établit que :

$$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{z, f(z), \dots, f^{p-1}(z)\} \text{ et } f^p(z) = z.$$

En utilisant la proposition 5 on peut alors conclure.

∎

Si A est une partie d'un espace topologique E nous désignerons dans la suite de ce paragraphe par A' l'ensemble dérivé de A, c'est-à-dire l'ensemble des points d'accumulation de A.

Rappelons que $\hat{x}$ est point d'accumulation de A si et seulement si :

$$\forall v \in V(\hat{x}) \; \exists y \in v \cap A \quad y \neq \hat{x}$$

<u>*Proposition 7*</u> *: Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E, *générée par l'application continue* $f : E \to E$

i) Si E *est compact :*

$$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})' \subset f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})')$$

ii) Si E *est séquentiellement compact et compact*

$$L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})' \subset f(L(x_n)_{n \in \mathbb{N}})')$$

(Dans le cas où E est un espace métrique compact, cette proposition a déjà été énoncée par F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1]).

<u>Démonstration</u> :

Supposons E compact (resp. E séquentiellement compact et compact).

Soit $a \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$ (resp. $a \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$).

Pour tout voisinage w de a, on désigne pour b_w un point tel que :

$$\begin{cases} b_w \neq a \\ b_w \in w \cap A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \text{ (resp. } b_w \in w \cap L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \end{cases}$$

D'après la proposition 2, on a :

$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}))$ (resp. $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = f(L(x_n)_{n \in \mathbb{N}}))$

Il existe donc $c_w \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (resp. $L(x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tel que $f(c_w) = b_w$.
La suite généralisée $(c_w)_{w \in V(a)}$ admet un point d'accumulation c.

- $f(c) = a$ car f est continue et par construction la suite généralisée $(f(c_w))_{w \in V(a)}$ converge vers a

- $c \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$ (resp. $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$).

En effet soit $v \in V(c)$, v contient un point c_w et $c_w \neq c$ (sinon $b_w = f(c_w) = f(c) = a$) donc v contient un point de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (resp. de $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$) distinct de c.
Ceci établit bien les inclusions voulues.

∎

<u>*Proposition 8*</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E, *générée par l'application continue* $f : E \to E$.
Si pour tout $a \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (*resp.* $a \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$)
$f^{-1}(a)$ *est fini. Alors* :

$$f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})') \subset A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$$

(*resp.* $f(L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})') \subset L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$)

(Dans le cas où E est métrique compact cette proposition a déjà été énoncée par F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1]).

Démonstration :

Soit $x \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$ (resp. $x \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$).

Nous devons montrer que :

$f(x) \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$ (resp. $f(x) \in L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$).

Soit v un voisinage de f(x). Puisque f est continue,il existe w un voisinage de x tel que : $f(w) \subset v$; $w \cap A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (resp. $w \cap L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$) contient au moins un point distinct de x et puisque E est séparé (hypothèse faite une fois pour toute au début de ce travail) w contient une infinité de points distincts de x, l'un de ces points au moins a une image distincte de x, et donc $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \cap v$ (resp. $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \cap v$) contient un point distinct de x.

∎

Corollaire : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de l'espace topologique* E, *générée par l'application continue* $f : E \to E$

On suppose que :

i) E *est compact (respectivement séquentiellement compact et compact)*

ii) pour tout $a \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *(resp.* $L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$*)* $f^{-1}(a)$ *est fini.*

Alors :

$$f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})') = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$$

(resp. $f(L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})') = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$)

Démonstration :

Immédiate.

Remarque : L'article de F.T. Metcalf et T.D. Rogers [1] posait la question (sans y répondre) : a-t-on toujours l'égalité du corollaire (si E est métrique et compact) ? Le contre-exemple 4 donné plus loin répond par la négative à cette question.

B - CONTRE-EXEMPLES

Contre-exemple 1

On considère l'ensemble des suites d'entiers de la forme

- soit $(0, 0, \ldots, n, 0, \ldots)$ $n \geq 3$ (le n à la $(n-3)$-ième place)
- soit $(n, p, p, p, \ldots)$ $n \geq 3$ $p = 1, 2$
- soit $(p, n, p, p, \ldots)$ $n \geq 4$ $p = 1, 2$
- soit $(p, p, n, p, \ldots)$ $n \geq 5$ $p = 1, 2$

... ...

et les suites $(0, 0, 0, \ldots)$, $(1, 1, 1, \ldots)$ et $(2, 2, 2, \ldots)$

Soit E cet ensemble. On le munit de la topologie induite par celle de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites d'entiers avec la topologie de la convergence simple).

On définit alors $f : E \to E$ par le schéma de la figure.
La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ générée par f (qui est continue) à partir du point $x_o = (3, 0, 0, 0, \ldots)$ vérifie :

$$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{(0, 0, 0, \ldots), (1, 1, 1, \ldots), (2, 2, 2, \ldots, 2)\}$$

$$f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) = f(L((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) = \{(1, 1, 1, \ldots), (2, 2, 2, \ldots)\}$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée et pourtant $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est fini est un compact.

CONTRE-EXEMPLE 1

$(3,0,0,0,0,0,0,\dots) \mapsto (3,1,1,1,1,1,1,\dots) \mapsto (3,2,2,2,2,2,2,\dots)$

$\to (0,4,0,0,0,0,0,\dots) \mapsto (1,4,1,1,1,1,1,\dots) \mapsto (2,4,2,2,2,2,2,\dots)$

$\to (4,1,1,1,1,1,1,\dots) \mapsto (4,2,2,2,2,2,2,\dots)$

$\to (0,0,5,0,0,0,0,\dots) \mapsto (1,1,5,1,1,1,1,\dots) \mapsto (2,2,5,2,2,2,2,\dots)$

$\to (1,5,1,1,1,1,1,\dots) \mapsto (2,5,2,2,2,2,2,\dots)$

$\to (5,1,1,1,1,1,1,1) \mapsto (5,2,2,2,2,2,2,\dots)$

$\to (0,0,0,6,0,0,0,\dots) \;—\; (1,1,1,6,1,1,1,\dots) \mapsto (2,2,2,6,2,2,2,\dots)$

$\to (1,1,6,1,1,1,1,\dots) \mapsto (2,2,2,6,2,2,2,\dots) \to$

... ...

$(0,0,0,0,0,0,0,\dots) \mapsto (1,1,1,1,1,1,1,\dots) \mapsto (2,2,2,2,2,2,2,\dots)$

Contre-exemple 2

On considère l'ensemble des suites d'entiers de la forme

- soit $(n, p, p, p, \ldots)$ $n \geq 4$, $p = 0, 1, 2, 3$

- soit $(p, n, p, p, \ldots)$ $n \geq 5$, $p = 0, 1, 2, 3$,

- soit $(p, p, n, p, \ldots)$ $n \geq 6$, $p = 0, 1, 2, 3$

... ...

et les suites $(0, 0, 0, \ldots)$, $(1, 1, 1, \ldots)$, $(2, 2, 2, \ldots)$, et $(3, 3, 3, \ldots)$.

Soit E cet ensemble. On le munit de la topologie induite par celle de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites d'entiers avec la topologie de la convergence simple).

On définit alors $f : E \to E$ par le schéma de la figure.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ générée par f (qui est continue) à partir du point $x_o = (4, 0, 0, \ldots)$ vérifie :

$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = L((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{(0, 0, 0, \ldots), (1, 1, 1, \ldots), (2, 2, 2, \ldots), (3, 3, 3, \ldots)\}$.

On a donc un exemple où $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ n'est pas un ensemble périodique, mais est réunion de deux ensembles périodiques, et cela bien que $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ n'ait qu'un nombre fini d'éléments.

CONTRE-EXEMPLE 2

$(4,0,0,0,0,0,0,\dots) \mapsto (4,1,1,1,1,1,1,\dots) \mapsto (4,2,2,2,2,2,2,\dots) \mapsto (4,3,3,3,3,3,3,\dots)$

$(0,5,0,0,0,0,0,\dots) \mapsto (1,5,1,1,1,1,1,\dots)$

$(5,0,0,0,0,0,0,\dots) \mapsto (5,1,1,1,1,1,1,\dots) \mapsto (2,5,2,2,2,2,2,\dots) \mapsto (3,5,3,3,3,3,3,\dots)$

$(5,2,2,2,2,2,2,\dots) \mapsto (5,3,3,3,3,3,3,\dots)$

$(0,0,6,0,0,0,0,\dots) \mapsto (1,1,6,1,1,1,1,\dots)$

$(0,6,0,0,0,0,0,\dots) \mapsto (1,6,1,1,1,1,1,\dots)$

$(6,0,0,0,0,0,0,\dots) \mapsto (6,1,1,1,1,1,1,\dots) \mapsto (2,2,6,2,2,2,2,\dots) \mapsto (3,3,6,3,3,3,3,\dots)$

$(2,6,2,2,2,2,2,\dots) \mapsto (3,6,3,3,3,3,3,\dots)$

$(6,2,2,2,2,2,2,\dots) \mapsto (6,3,3,3,3,3,3,\dots)$

$(0,0,0,7,0,0,0,\dots) \mapsto (1,1,1,7,1,1,1,\dots)$

$(0,0,7,0,0,0,0,\dots) \mapsto (1,1,7,1,1,1,1,\dots)$

$(0,7,0,0,0,0,0,\dots) \mapsto (1,7,1,1,1,1,1,\dots)$

$(7,0,0,0,0,0,0,\dots) \mapsto (7,1,1,1,1,1,1,\dots) \mapsto (2,2,2,7,2,2,2,\dots) \mapsto (3,3,3,7,3,3,3,\dots)$

$(2,2,7,2,2,2,2,\dots) \mapsto (3,3,7,3,3,3,3,\dots)$

... ...

$(0,0,0,0,0,0,0,\dots) \mapsto (1,1,1,1,1,1,1,\dots)$ $(2,2,2,2,2,2,2,\dots) \mapsto (3,3,3,3,3,3,3,\dots)$

Contre-exemple 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$
\begin{cases}
f(x) = \frac{x}{2} + 1 \quad \text{si } x \le 0, \\
f(x) = x + 1 \quad \text{si } 0 \le x \le 1, \\
f(x) = -\left(n + 1 + \frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{2^n}{2^n - 1}\right)\left(x - n - 1 + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n} \\
\text{si } n \le x \le n + 1 - \frac{1}{2^n}, \\
f(x) = \left(n + 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) 2^{n+1} \left(x - n - 1 + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n} \\
\text{si } n + 1 - \frac{1}{2^n} \le x \le n + 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, \\
f(x) = x + 1 \\
\text{si } n + 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \le x \le n + 1.
\end{cases}
$$

f est continue comme on le vérifie facilement.

En prenant : $x_o = -1$

On a :

$(x_o, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) =$
$(-1, 1 - \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{4}, 2 - \frac{1}{4}, 3 - \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{8}, 2 - \frac{1}{8}, 3 - \frac{1}{8},$
$4 - \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, 1 - \frac{1}{16}, 2 - \frac{1}{16}, \ldots)$

On a pour cette suite :

$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$

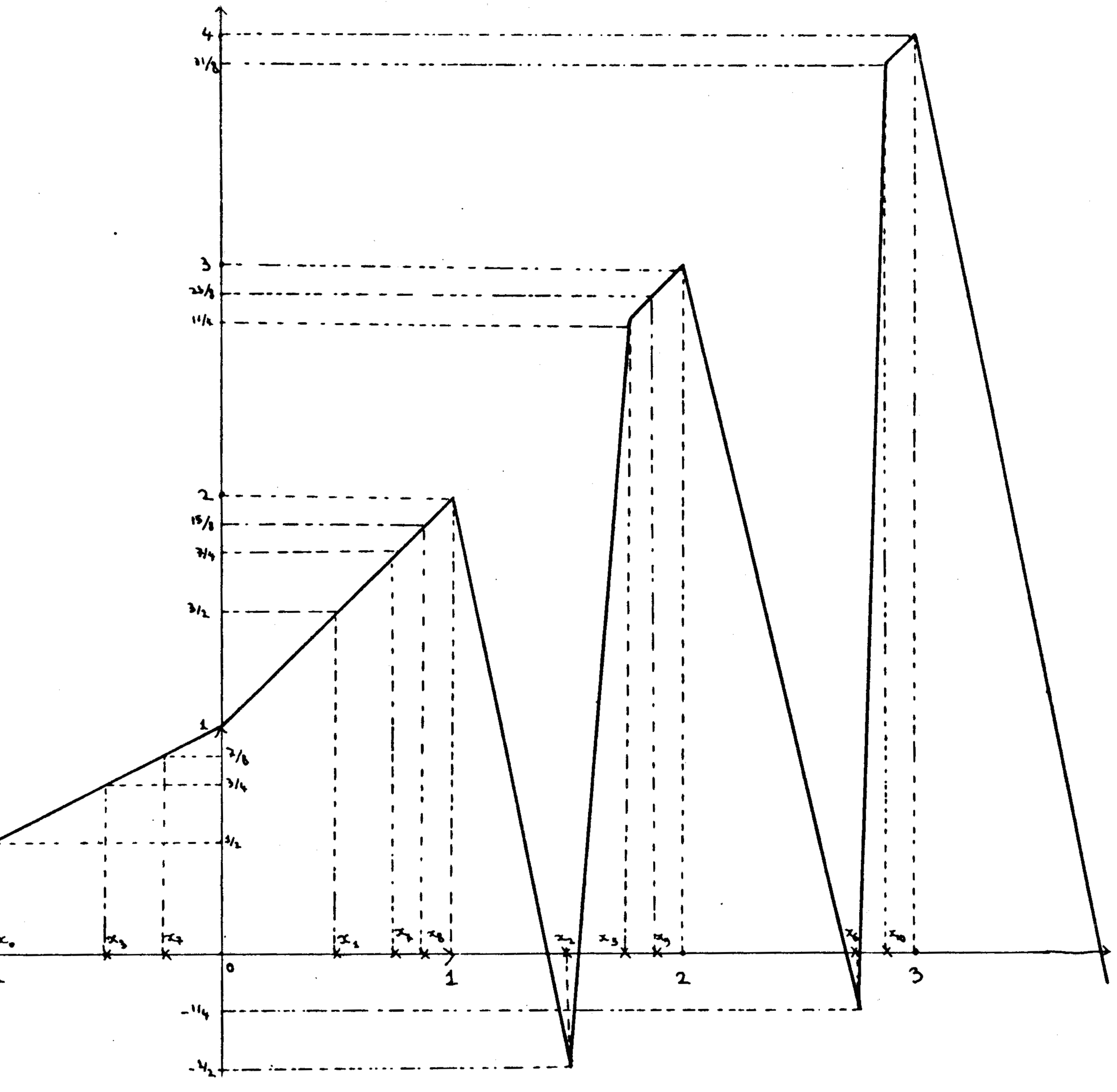
$f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}^* \neq \mathbb{N}.$

Une hypothèse de locale compacité ne suffit donc pas dans la proposition 2.

Soit $v = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}\right[$

v est un voisinage de $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ pour lequel il n'existe pas d'entier n_o tel que :

$$n \ge n_o \Rightarrow x_n \in v.$$



CONTRE-EXEMPLE 3

Contre-exemple 4

$A = \{(\frac{1}{2^n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\} \cup \{(3/2, 0)\}$

$B = \{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^m}) \mid m \in \mathbb{N} \quad n \in \mathbb{N} \quad m \geq n\}$

$C = \{(\frac{3}{2}, \frac{1}{2^n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$

$D = \{(\frac{3}{2}, \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}) \mid n \in \mathbb{N} \quad m \in \{n + 1, n + 2, \ldots, 2n\}\}$

$E = \{(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}) \mid n \in \mathbb{N}^* \quad m \in \{n + 1, n + 2, \ldots, 2n\}\}$

A chaque point $X = (x, y)$ de l'ensemble $B \cup E$, on fait correspondre une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^2$ convergente vers x.

On suppose que :

i) tous les points X_n ainsi introduits sont distincts entre eux

ii) le diamètre de l'ensemble $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pour $X = (x, y)$ donné, est inférieur à $\frac{y}{2}$.

On pose alors :

$$F = A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup (\bigcup_{X \in B \cup E} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n)$$

F est fermé (on s'en assure en vérifiant que chaque suite de points de F convergente dans $\mathbb{R}^2$, a sa limite dans F).

f est alors définie de la façon suivante :

Sur A :

$f((0, 0)) = (0, 0)$

$f((3/2, 0)) = (0, 0)$

$f((1/2^n, 0)) = (1/2^{n+1}, 0)$, $n \in \mathbb{N}$

Sur C :

$f(3/2, 1/2^n) = (1/2^{n+1} + 1/2^{n+2}, 1/2^{n+1} + 1/2^{n+2})$, $n \in \mathbb{N}$

Sur D :

$f(3/2, 1/2^n + 1/2^m) = (1/2^n + 1/2^{m+1}, 1/2^n + 1/2^{m+1})_o$ $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{n + 1, n + 2, \ldots, 2n - 1\}$

$$f(3/2,\ 1/2^n + 1/2^{2n}) = (1/2^{n+1},\ 1/2^{n+1})_o \ ,\ n \in \mathbb{N}.$$

Sur B :

$$f(1, \frac{1}{2^m}) = (\frac{3}{2}, 0) \ ,\ m \in \mathbb{N}$$

$$f(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^m}) = (\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^m}),\ n \in \mathbb{N}^*,\ m \geq n$$

Sur E :

$$f(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} \ ,\ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}}) = (\frac{1}{2^{n-1}} \ ,\ \frac{1}{2^{n-1}}) \ ,\ n \in \mathbb{N}^*$$

$$f(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} \ ,\ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}) = (\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{m-1}}),\ n \in \mathbb{N} - \{0, 1\},\ m \in \{n+1, n+2, \ldots, 2n-1\}$$

Sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{x \in B} \{X_n\}$:

$$f((1, \frac{1}{2^m})_o) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2^m}),\ m \in \mathbb{N}$$

$$f((1, \frac{1}{2^m})_p) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2^{m+p}} + \frac{1}{2^{2m+p+1}}),\ m \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}^*$$

$$f((\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^m})_p) = (\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^m})_p,\ n \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq n,\ p \in \mathbb{N}$$

Sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{X \in E} \{X_n\}$:

$$f((\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} \ ,\ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}})_p) = (\frac{1}{2^{n-1}} \ ,\ \frac{1}{2^{n-1}})_{p+1} \qquad n \in \mathbb{N}^* \ ,\ p \in \mathbb{N}$$

$$f((\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} \ ,\ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m})_p) = (\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{m-1}} \ ,\ \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{m-1}})_{p+1}$$

$$n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \ ,\quad m \in \{n, n+1, \ldots, 2\,n-1\} \ ,\quad p \in \mathbb{N}$$

On s'assure que f est continue en procédant de la façon suivante :

On considère toutes les suites (Z_n) de points de F convergentes et on vérifie que :

$$f(\lim_{n\to\infty} Z_n) = \lim_{n\to\infty} f(Z_n)$$

F étant un espace métrique, ceci est suffisant pour assurer que f est continue.

On considère la suite (X_n) générée par f à partir de (1, 1).

$$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = A \cup B \cup E$$

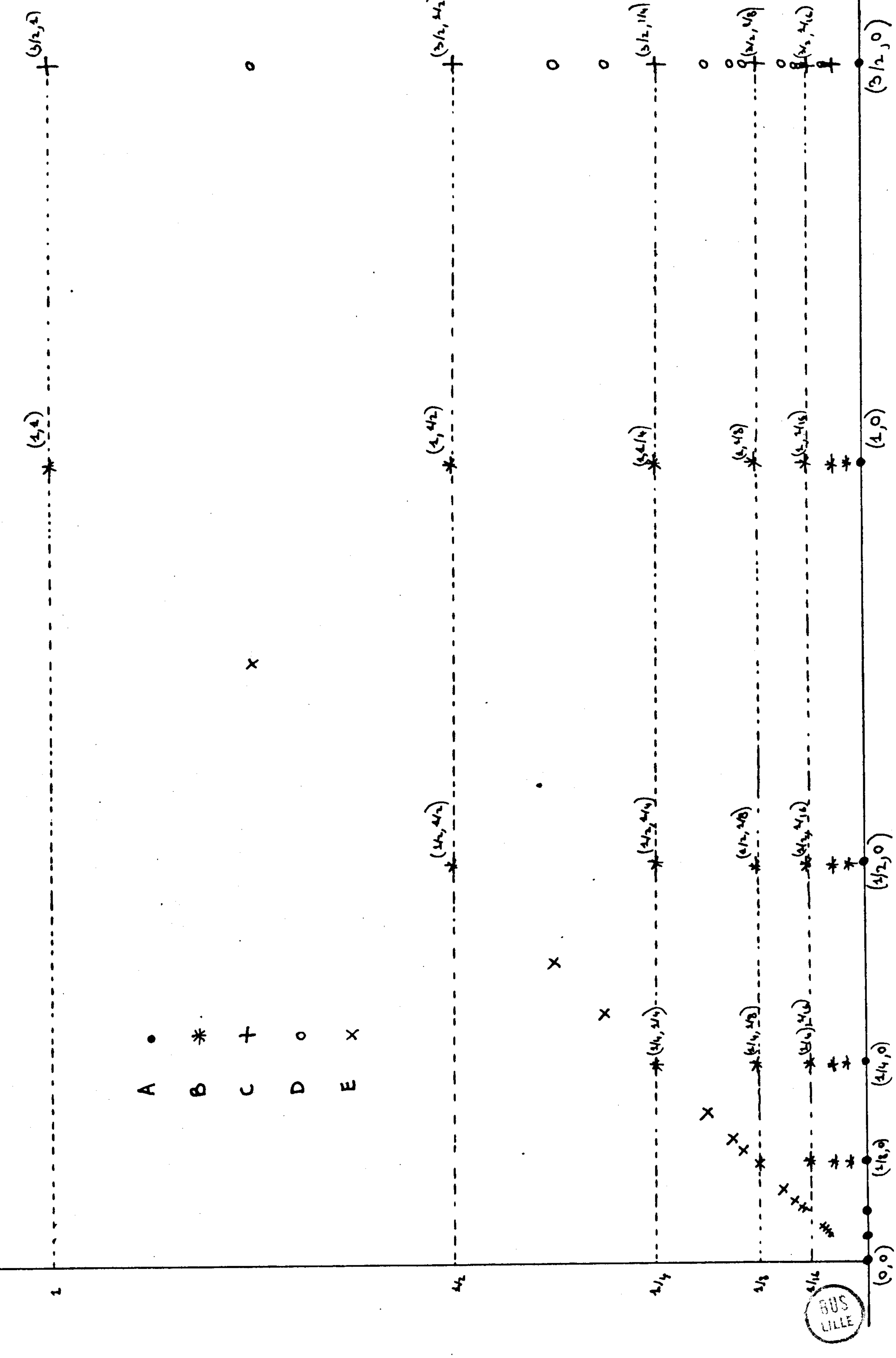
$$A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})' = A - \{(3/2, 0)\}$$

$$f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})') = A$$

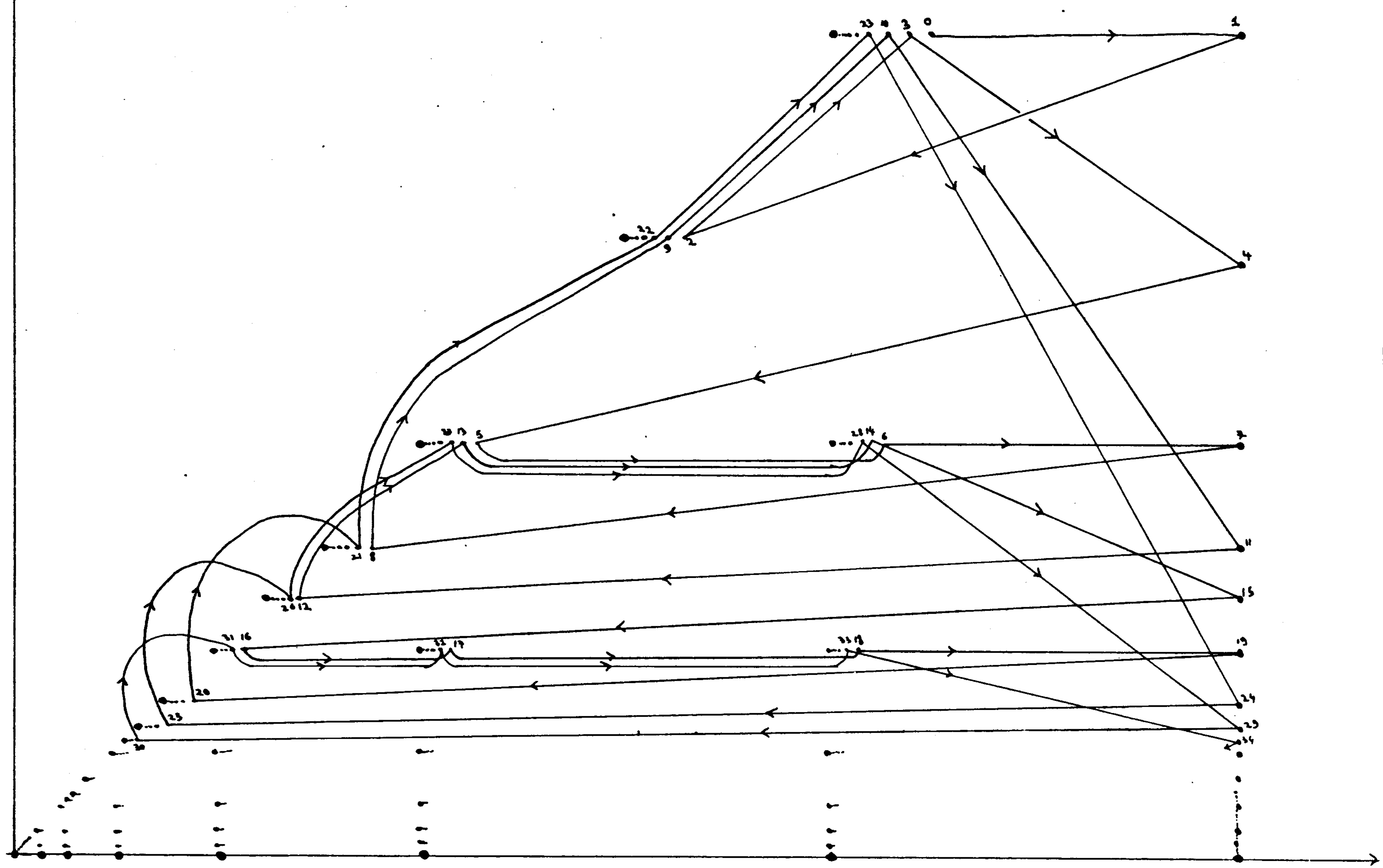
donc on a bien :

$$f(A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})') \neq A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})'$$

CONTRE-EXEMPLE 4 fig 1



CONTRE-EXEMPLE 4 fig 2



C - ANNEXE DU § VII : SUITES GÉNÉRALISÉES

On appelle suite généralisée la donnée $(x_i)_{i \in I}$ d'une famille d'éléments indexés par un ensemble I muni d'une relation d'ordre (large) vérifiant :

$$\forall\, i \in I,\ \forall\, j \in I,\ \exists\, k \in I : k \geq i \text{ et } k \geq j \text{ et } k \neq j$$

(l'ensemble I est donc nécessairement infini).

On dit que la suite généralisée $(x_i)_{i \in I}$ converge vers x si et seulement si

$$\forall\, v \in \mathcal{V}(x),\ \exists\, i \in I,\ \forall\, k \in I : k \geq i \Rightarrow x_k \in v$$

Dans un espace topologique séparé, la limite lorsqu'elle existe, est unique.

On dit que la suite généralisée $(x_i)_{i \in I}$ admet $\hat{x}$ comme point d'accumulation si et seulement si :

$$\forall\, v \in \mathcal{V}(x),\ \forall\, i \in I,\ \exists\, j \in I : j \geq i \text{ et } x_j \in v.$$

On a les propriétés suivantes :

$\underline{P_1}$ Si E est compact, toute suite généralisée admet au moins un point d'accumulation.

$\underline{P_2}$ La partie A de E est fermée si et seulement si : Toute suite généralisée convergente d'éléments de A a sa limite dans A .

$\underline{P_3}$ L'application $f : E \to F$ est continue en x si et seulement si : Pour toute suite généralisée $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E et convergente vers x, $(f(x_i))_{i \in I}$ est convergente de limite f(x).

$\underline{P_4}$ Si x est un point d'accumulation de la suite généralisée $(x_i)_{i \in I}$, si f est continue de E dans F alors f(x) est un point d'accumulation de la suite généralisée $(f(x_i))_{i \in I}$.

§ VIII

LES ALGORITHMES-QUESTIONS

PRÉSENTATION DU § VIII

Dans ce paragraphe, nous considérons un premier type d'algorithmes pour suites non convergentes que nous appelons : algorithmes-questions.

Se poser une question du genre : la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ? (ou combien de points d'accumulation la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède-t-elle ?) est une chose absurde si on ne dispose que d'un nombre fini de points de la suite (sauf dans les cas peu intéressants où on impose à la suite d'appartenir à une classe limitée de suites par exemple une classe finie).

C'est pourquoi nous posons le problème des algorithmes-questions sous une forme assez large :

A partir d'une suite de points pouvant être calculée aussi loin que l'on veut (et de façon exacte), trouver un algorithme procédant étape par étape et tel que :

- à chaque étape l'algorithme ne dispose que d'un nombre fini de points de la suite (ce nombre, nous admettrons qu'éventuellement il le détermine lui-même en fonction des résultats des étapes précédentes)

- à chaque étape l'algorithme répond à la question posée.

Bien évidemment, nous ne demandons pas à l'algorithme de donner toujours la bonne réponse ; nous dirons que l'algorithme répond de façon satisfaisante au sens i) à la question posée si :

i) La réponse donnée est juste à partir d'un certain rang.

Lorsqu'il s'agira de question dont la réponse est OUI ou NON, nous dirons que l'algorithme répond de façon satisfaisante au sens ii) à la question posée si :

ii) La réponse donnée est constamment OUI à partir d'un certain rang si et seulement si la réponse exacte est OUI.

(Dans le cas où la réponse exacte est NON, on demande donc moins qu'au i) puisqu'on demande seulement que la suite des réponses données ne soit pas constamment OUI à partir d'un certain rang).

Enfin nous dirons que l'algorithme répond de façon satisfaisante au sens iii) à la question posée si :

iii) Lorsque la réponse donnée est constamment OUI à partir d'un certain rang, alors la réponse exacte est OUI.

Deux types de résultats sont obtenus :

1) Ceux que l'on peut qualifier de positifs : on propose un algorithme qui pour des suites prises dans une classe plus ou moins grande, répond de façon satisfaisante (en un des sens indiqués plus haut) à la question posée. Un algorithme sera d'autant plus intéressant que la classe de suites pour laquelle il fonctionnera, sera plus grande.

2) Ceux que l'on peut qualifier de négatifs : on démontre que pour telle question, même avec nos exigences réduites, aucun algorithme ne peut répondre de façon satisfaisante à la question posée pour toute suite de telle classe. Les résultats négatifs pour être établis, nécessitent que soient données des définitions formelles précises. C'est ce que nous avons fait au § X où sont regroupés les résultats négatifs concernant les algorithmes pour suites non convergentes.

A - RÉPONSE À LA QUESTION : "LA SUITE CONVERGE-T-ELLE ?"

Le problème le plus simple qu'on puisse se poser quand on dipose d'une suite quelconque est celui de sa convergence. D'un point de vue algorithmique et même avec nos exigences limitées, cette question est pratiquement insoluble.

Les seuls résultats que nous présentons peuvent être considérés comme évidents ; nous ne les donnons ici que pour mettre bien en place les techniques et méthodes que nous utiliserons à propos d'autres questions.
$\mathcal{S}(E)$ désigne l'ensemble des suites d'éléments de E.
Soit $\varepsilon(p)$ une suite de nombres réels positifs de limite 0, on désigne par $\mathcal{S}(E, \varepsilon(p))$ l'ensemble des suites d'éléments de E(E étant un espace métrique, le plus souvent $\mathbb{R}^n$, dont la distance est notée d) dont $\varepsilon(p)$ est une rapidité (voir § V).

Voici maintenant le plus simple des algorithmes qu'on puisse imaginer pour ce problème :

<u>Algorithme : $C(\varepsilon(p))$</u>

<u>Etape p</u>

On dispose des points x_p et x_{p+1}
Si $d(x_p, x_{p+1}) \leq \varepsilon(p) + \varepsilon(p+1)$, répondre OUI.
Si $d(x_p, x_{p+1}) > \varepsilon(p) + \varepsilon(p+1)$, répondre NON.

<u>*Proposition 1*</u> *: Si la série de terme général* $\varepsilon(p)$ *est convergente, alors :*
1) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(E, \varepsilon(p))$, *l'algorithme* $C(\varepsilon(p))$ *est satisfaisant au sens ii) pour la question : "la suite est-elle convergente ?"*

2) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(E)$, *l'algorithme* $C(\varepsilon(p))$ *est satisfaisant au sens iii) pour la question "la suite est-elle convergente ?".*

Démonstration :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle l'algorithme répond constamment OUI à partir d'un certain rang ; d'après la proposition 8 du § III (que l'on peut appliquer car la série de terme général $\varepsilon(p) + \varepsilon(p+1)$ est convergente), on peut conclure que (x_n) est convergente. D'autre part si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\hat{x}$ et appartient à $S(E, \varepsilon(p))$, il existe m_o tel que :

$$\forall\ m \geq m_o \quad d(x_p, \hat{x}) \leq \varepsilon(p)$$

donc tel que :

$$\forall\ m \geq m_o \quad d(x_{p+1}, x_p) \leq \varepsilon(p) + \varepsilon(p+1)$$

ce qui signifie que l'algorithme répondra constamment OUI à partir d'un certain rang.

∎

Remarque 1

L'algorithme $C(\varepsilon(p))$ n'est pas satisfaisant au sens i) pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \varepsilon(p))$.

En effet prenons : $E = \mathbb{R}$ et la suite

$(\varepsilon(0), 1 + \varepsilon(1), 1 + \varepsilon(2), \varepsilon(3), \varepsilon(4), \varepsilon(5), 1 + \varepsilon(6), 1 + \varepsilon(7), 1 + \varepsilon(8), 1 + \varepsilon(9), \varepsilon(10), \ldots)$

Si : $\varepsilon(p) < \frac{1}{2}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors les réponses sont successivement :

NON, OUI, NON, OUI, OUI, NON, OUI, OUI, OUI, NON, ...

Alors qu'elles devraient être constamment NON à partir d'un certain rang si l'algorithme $C(\varepsilon(p))$ était satisfaisant au sens i).

On remarque en plus dans cet exemple que bien que la réponse exacte soit NON, la suite des réponses données comporte des séquences de OUI consécutifs, aussi longues que l'on veut.

Remarque 2

L'algorithme $C(\varepsilon(p))$ n'est pas satisfaisant au sens ii) pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(E)$.

On le voit en prenant pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\hat{x}$ et telle que :

$$d(x_p, x_{p+1}) > \varepsilon(p) + \varepsilon(p+1)$$

pour une infinité d'indices $p \in \mathbb{N}$.

Remarque 3

La condition : "$\varepsilon(p)$ terme général d'une série convergente" est essentielle. Soit en effet la suite $\varepsilon(p)$:

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \ldots)$$

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $E = \mathbb{R}$:

$$(0, \frac{1}{2}, 1, 1 - \frac{1}{4}, 1 - \frac{2}{4}, 1 - \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1, 1 - \frac{1}{16}, \ldots)$$

Bien que cette suite ne soit pas convergente la réponse donnée par l'algorithme $C(\varepsilon(p))$ est constamment OUI.

Remarque 4

La question "la suite est-elle constante à partir d'un certain rang ?", se ramène à celle de la convergence.

On munit E de la distance discrète :

$$d(x, y) = 0 \quad \text{si } x = y,$$

$$d(x, y) = 1 \quad \text{si } x \neq y.$$

En remarquant qu'ici, pour la suite $\varepsilon(p)$ constante et nulle, $\mathcal{S}(E) = \mathcal{S}(E, \varepsilon(p))$, la proposition 1 nous donne le résultat suivant :

Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E l'algorithme $C(\varepsilon(p))$ (avec $\varepsilon(p) = 0, \forall\, p$) est satisfaisant au sens ii) pour la question :

"la suite est-elle constante à partir d'un certain rang ?".

Remarque 5

L'hypothèse de rapidité que nous faisons pour les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est assez forte. Cependant comme l'établit le corollaire 1 du théorème 1 du § X, il est nécessaire pour obtenir des algorithmes répondant de façon satisfaisante au sens i) ou ii) à la question de la convergence, d'ajouter une hypothèse sur les suites traitées (c'est-à-dire de réduire la classe des suites pour laquelle on souhaite que l'algorithme fonctionne).

B - RÉPONSE À LA QUESTION : "QUEL EST LE NOMBRE DE POINTS D'ACCUMULATION DE LA SUITE ?"

Soit $\varepsilon(p)$ une suite de nombres réels positifs de limite 0. Soit $\beta(p)$ une suite d'entiers telle que : $\beta(p) > p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. On désigne par $S(E, \varepsilon(p), \beta(p))$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E dont $\varepsilon(p)$ est une rapidité et dont $\beta(p)$ est une suite d'indices approchants pour $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ (voir § IV B-).

Algorithme : NPA $(\varepsilon(p), \beta(p))$

Etape p

On dispose des points $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1}$. On propose la réponse N(p) où N(p) est le nombre de composantes connexes du graphe (non orienté) dont les sommets sont les points $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1}$ et dont les arcs sont définis par les paires $\{x_i, x_j\}$ $p \leq i, j \leq \beta(p) - 1$, telles que : $d(x_i, x_j) \leq \varepsilon(i) + \varepsilon(j)$.

Remarque

Le problème de la détermination du nombre de composantes connexes d'un graphe est très simple ; il demande un nombre de calculs qui est de l'ordre du nombre d'arcs du graphe considéré. Pour ces notions, on se reportera au livre de C. Berge [2].

Exemple détaillé du fonctionnement de l'algorithme NPA(ε(p), β(p))

$E = \mathbb{R}$

$\varepsilon(p) = \frac{1}{p+1}$

$\beta(p) = 2p+1$

$(x_o, x_1, x_2, \dots) = (1, 2 + \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{5}, 4 + \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, 2 + \frac{1}{8}, \dots)$

Etape 0

On dispose de x_o. Le graphe n'a aucun arc donc :

$N(0) = 1$

Etape 1

On dispose de x_1, x_2. Le graphe n'a aucun arc donc :

$N(1) = 2$

Etape 2

On dispose de x_2, x_3, x_4. Le graphe n'a aucun arc donc :

$N(2) = 3$

Etape 3

On dispose de x_3, x_4, x_5, x_6. Le graphe admet un arc unique défini par la paire $\{x_3, x_6\}$ donc :

$N(3) = 3$

Etape 4

On dispose de x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Le graphe admet deux arcs définis par $\{x_4, x_7\}$ et $\{x_5, x_8\}$ donc :

$N(4) = 3$

etc...

Proposition 2 : Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \varepsilon(p), \beta(p))$ ayant un nombre fini de points d'accumulation, l'algorithme NPA$(\varepsilon(p), \beta(p))$ *est satisfaisant au sens i) pour la question :*
"Quel est le nombre de points d'accumulation de la suite ?"

Démonstration

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \varepsilon(p), \beta(p))$ ayant k points d'accumulation que nous noterons $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_k$.

Soit $\varepsilon > 0$, défini par :

$$\varepsilon = \min \{d(\hat{y}_i, \hat{y}_j) \mid i, j \in \{1, \ldots, k\} \quad i \neq j\}$$

Soit p_o tel que pour tout $p \geq p_o$:

$$\begin{cases} d(x_p, A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \leq \varepsilon(p) \leq \frac{\varepsilon}{5} \\ \forall \ell \in \{1, 2, \ldots, k\} \quad \overline{B}(\hat{y}_\ell, \frac{\varepsilon}{5}) \cap X_p^{\beta(p)} \neq \emptyset \end{cases}$$

Montrons que pour tout $p \geq p_o$, $N(p) = k$.

Pour cela il suffit de montrer que pour tout $p \geq p_o$

a) $\forall \ell_1, \ell_2 \in \{1, 2, \ldots, k\} \quad \ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow$

$$d(\overline{B}(\hat{y}_{\ell_1}, \varepsilon/5) \cap X_p^{\beta(p)}, \overline{B}(\hat{y}_{\ell_2}, \varepsilon/5) \cap X_p^{\beta(p)}) > 2\,\frac{\varepsilon}{5}$$

b) $\forall n_1, n_2 \in \{p, p+1, \ldots, \beta(p) - 1\}$, $n_1 \neq n_2$,

$$\exists \ell \left.\begin{array}{l} x_{n_1} \in \overline{B}(\hat{y}_\ell, \varepsilon/5) \\ x_{n_2} \in \overline{B}(\hat{y}_\ell, \varepsilon/5) \end{array}\right\} \Rightarrow d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq \varepsilon(n_1) + \varepsilon(n_2)$$

Car la première relation montre que le nombre de composantes connexes du graphe est au moins k, et la seconde qu'il est au plus k.

Ces deux relations s'établissent facilement.

∎

On désigne par $S(E, \varepsilon(p), > 0)$ l'ensemble des suites d'éléments de E telles que $\varepsilon(p)$ soit une rapidité et donc tous les points d'accumulation ont une force strictement positive.

<u>*Corollaire*</u> : *Pour toute suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \varepsilon(p), > 0)$ *ayant un nombre fini de points d'accumulation, l'algorithme* NPA$(\varepsilon(p), p^2)$ *est satisfaisant au sens i) pour la question.*
"Quel est le nombre de points d'accumulation de la suite ?"

<u>Démonstration</u> :

Elle est évidente en utilisant la proposition 3 du § V qui montre que :

$$S(E, \varepsilon(p), > 0) \subset S(E, \varepsilon(p), p^2).$$

■

<u>Remarque 1</u>

Il est facile de montrer que si on supprime l'une des hypothèses suivantes :

- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de rapidité $\varepsilon(p)$

- $\beta(p)$ est une suite d'indices approchants pour $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. tous les points d'accumulation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de force strictement positive) alors la conclusion de la proposition 2 (resp. du corollaire) n'est plus vraie.

<u>Remarque 2</u>

Comme pour la proposition 1, les hypothèses faites sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peuvent sembler excessives. Le corollaire 4 du théorème 1 du § X montrera que, seule, une hypothèse de force des points d'accumulation ne peut suffire. Il faut donc ajouter une autre hypothèse pour que puissent exister les algorithmes cherchés ; dans la proposition cette autre hypothèse concerne la rapidité de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, malheureusement il est peu commode de la connaitre à priori, c'est pourquoi nous présentons maintenant un algorithme où l'hypothèse de rapidité est remplacée par une hypothèse différente (plus raisonnable ?).

Soit $\beta(p)$ une suite d'entiers telle que : $\beta(p) > p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Soit ρ un nombre réel > 0.

On désigne par $S(E, \rho, \beta(p))$ l'ensemble des suites d'éléments de E telles que :

$$\begin{cases} \forall\, x, y \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}),\ x \neq y \Rightarrow d(x, y) \geq \rho \\ \\ \beta(p) \text{ est une suite d'indices approchants pour } A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \end{cases}$$

<u>Algorithme NPA $(\rho, \beta(p))$</u>

<u>Etape p</u>

On dispose des points $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1}$.

On propose la réponse $N(p)$ où $N(p)$ est le nombre de composantes connexes du graphe (non orienté) dont les sommets sont les points $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1}$ et dont les arcs sont définis par les paires $\{x_i, x_j\}$, $p \leq i, j \leq \beta(p)-1$, telles que : $d(x_i, x_j) \leq 2\rho/5$.

<u>Proposition 3</u> : Si E *est une partie compacte de* $\mathbb{R}^m$, *alors :*
Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \rho, \beta(p))$, *l'algorithme* NPA$(\rho, \beta(p))$ *est satisfaisant au sens i) pour la question :*
"Quel est le nombre de points d'accumulation de la suite ?"

<u>Démonstration</u>

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \rho, \beta(p))$.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a un nombre fini de points d'accumulation, car E est une partie compacte de $\mathbb{R}^m$ et que deux quelconques de ces points d'accumulation sont éloignés d'au moins ρ.

Soit k ce nombre et $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_k$ ces points.

On pose :

$V = \overline{B}(\hat{y}_1, \rho/5) \cup \ldots \cup \overline{B}(\hat{y}_k, \rho/5)$

D'après la proposition 12 du § III, il existe p_o tel que :

$$p \geq p_o \Rightarrow x_p \in V.$$

Par définition d'une suite d'indices approchants, il existe $p_1 \geq p_o$ tel que :

$$p \geq p_1 \Rightarrow \forall \ell \in \{1, 2, \ldots, k\} \quad \overline{B}(\hat{y}_\ell, \tfrac{\rho}{5}) \cap X_p^{\beta(p)} \neq \emptyset$$

Montrons que pour tout $p \geq p_1$, $N(p) = k$.

Pour cela il suffit de montrer que pour tout $p \geq p_1$, on a :

a) $\forall \ell_1, \ell_2 \in \{1, 2, \ldots, k\} \quad \ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow$

$$d(\overline{B}(\hat{y}_{\ell_1}, \varepsilon/5) \cap X_p^{\beta(p)}, \overline{B}(\hat{y}_{\ell_2}, \varepsilon/5) \cap X_p^{\beta(p)}) > 2\,\frac{\varepsilon}{5}$$

b) $\forall n_1, n_2 \in \{p, p+1, \ldots, \beta(p) - 1\}$, $n_1 \neq n_2$,

$$\exists \ell \left.\begin{array}{l} x_{n_1} \in \overline{B}(\hat{y}_\ell, \varepsilon/5) \\ \\ x_{n_2} \in \overline{B}(\hat{y}_\ell, \varepsilon/5) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq 2\,\frac{\varepsilon}{5}$$

Car la première relation montre que le nombre de composantes connexes du graphe est au moins k, et la seconde qu'il est au plus k.

La première relation résulte de ce que si $\ell_1 \neq \ell_2$

$$d(\hat{y}_{\ell_1}, \hat{y}_{\ell_2}) \geq \rho$$

La seconde est une évidence géométrique.

∎

On désigne par $\mathcal{S}(E, \rho, > 0)$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telles que :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x, y \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \; x \neq y \Rightarrow d(x, y) \geq \rho, \\ \\ \forall x \in A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) : x \text{ est de force strictement positive.} \end{array}\right.$$

Corollaire : Si E *est une partie compacte de* $\mathbb{R}^m$, *alors :*
pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \rho, > 0)$, *l'algorithme* NPA$(\rho, p^2)$ *est satisfaisant au sens i) pour la question :*
"Quel est le nombre de points d'accumulation de la suite ?"

Démonstration

Elle est immédiate à partir de l'inclusion :

$$S(E, \rho, > 0) \subset S(E, \rho, p^2).$$

■

C - RÉPONSE À LA QUESTION : QUELLE EST LA PÉRIODE DE LA SUITE ?

Rappelons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite pseudo-périodique si il existe k tel que les sous-suites $(x_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_{kn+1})_{n \in \mathbb{N}}$, ..., $(x_{kn+k-1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, la période étant par définition le plus petit entier k ayant cette propriété.

Soit $(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q)$ une suite finie d'éléments de E (un espace métrique dont la distance est notée d),
Soit $A_1, A_2, \ldots, A_k$ une partition de l'ensemble $\{x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q\}$, on dira que l'entier $r \in \{k, k+1, \ldots, q\}$ est la période de la suite $(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q)$ pour la partition $A_1, A_2, \ldots, A_k$, si x est le plus petit entier $s \in \{k, k+1, \ldots, q\}$ tel que :

$$(*) \quad \left\{ \forall \ell \in \{p, p+1, \ldots, q\} \quad \begin{array}{l} \ell + s \leq q \\ x_\ell \in A_i \end{array} \right. \Rightarrow x_{\ell+S} \in A_i$$

Ce plus petit entier existe toujours car en prenant s = q, la relation (*) est vérifiée.

Exemple

$(x_3, x_4, x_5, \dots, x_{12}) = (2, 10, 12, 1, 12, 10, 1, 12, 2, 11)$

$A_1 = \{1, 2\} \qquad A_2 = \{10, 11, 12\}$

La période de la suite $(x_3, x_4, \dots, x_{12})$ pour la partition A_1, A_2 est 3.

Remarque

Le problème de la détermination de la période de la suite $(x_p, \dots, x_q)$ pour la partition $A_1, A_2, \dots, A_k$ se résoud en un nombre de calculs au plus égal à : $(q - p)(q - k)$ (calcul signifiant ici : test pour savoir si deux entiers appartiennent à un même A_i).

Soit $\varepsilon(p)$ une suite de nombres réels positifs de limite 0.

Soit $\beta(p)$ une suite d'entiers telle que : $\beta(p) > p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Algorithme $P(\varepsilon(p), \beta(p))$

On dispose des points : $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{\beta(p)-1}$.

On détermine les composantes connexes du graphe décrit dans l'algorithme NPA$(\varepsilon(p), \beta(p))$. Ces composantes connexes $C_1^p, C_2^p, \dots, C^p_{N(p)}$ forment une partition de l'ensemble $X_p^{\beta(p)} = \{x_p, x_{p+1}, \dots, x_{\beta(p)-1}\}$. On propose la réponse $M(p)$, où $M(p)$ désigne la période de la suite finie $(x_p, x_{p+1}, \dots, x_{\beta(p)-1})$ pour la partition $C_1^p, C_2^p, \dots, C^p_{N(p)}$.

Proposition 4 : On suppose que : $\lim \beta(p) - p = +\infty$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \varepsilon(p), \beta(p))$ *ayant un nombre fini de points d'accumulation.*

1) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est pseudo-périodique alors l'algorithme* $P(\varepsilon(p), \beta(p))$ *est satisfaisant au sens i) pour la question :*

"Quelle est la période de la suite ?"

2) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *n'est pas pseudo-périodique alors les réponses* M(1), M(2), ..., M(p), ... *données par l'algorithme forment une suite d'entiers qui n'est jamais constante à partir d'un certain rang.*

Démonstration

Soit $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_k$ les points d'accumulation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que nous supposons pseudo-périodique de période $r \geq k((x_{nr})_{n \in \mathbb{N}} \to \hat{y}_1, \ldots,$ $(x_{nr+r-1})_{n \in \mathbb{N}} \to \hat{y}_k)$

Posons :

$\varepsilon = \min \{d(\hat{y}_i, \hat{y}_j) \mid i, j \in \{1, 2, \ldots, k\} \quad i \neq j\}$

Soit $p_o \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_o$:

$$\begin{cases} d(x_p, A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \leq \varepsilon(p) \leq \dfrac{\varepsilon}{5} \\ N(p) = k, \quad d(x_{nr+i}, y_{i+1}) \leq \dfrac{\varepsilon}{5} \quad i = 1, 2, \ldots, k \\ C_i^p = B(\hat{y}_i, \varepsilon(p)) \cap X_p^{\beta(p)} \quad i = 1, 2, \ldots, k \\ \beta(p) - p > r \end{cases}$$

On vérifie sans peine que pour tout entier $p \geq p_o$, la période de la suite finie $(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1})$ pour la partition $C_1^p, C_2^p, \ldots, C^p_{N(p)}$ est r, donc à partir de p_o on a : M(p) = r ce qui établit 1).

Pour établir le 2) il suffit de montrer que si la suite des réponses est constante à partir d'un certain rang, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est pseudo-périodique, ce que l'on fait en montrant que pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\exists\, p_o \in \mathbb{N}$, $\exists\, \ell \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$,

$d(x_{p_o+j+mr}, \hat{y}_\ell) \leq \varepsilon(p_o+j+mr) \Rightarrow d(x_{p_o+j+(m+1)r}, \hat{y}_\ell) \leq \varepsilon(p_o+j+(m+1)r)$

∎

Corollaire : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \varepsilon(p), > 0)$ ayant un nombre fini de points d'accumulation.

1) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est pseudo-périodique alors l'algorithme $P(\varepsilon(p), p^2)$ est satisfaisant au sens i) pour la question :
"Quelle est la période de la suite ?"

2) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas pseudo-périodique alors les réponses, $M(1)$, $M(2)$, ..., $M(p)$, ... données par l'algorithme forment une suite d'entiers qui n'est jamais constante à partir d'un certain rang.

Comme dans la partie B- de ce paragraphe nous remplaçons maintenant l'hypothèse de rapidité par une hypothèse concernant la distance mutuelle des points d'accumulation des suites traitées.

Soit $\beta(p)$ une suite d'entiers telle que : $\beta(p) > p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Soit ρ un nombre réel > 0.

Algorithme $P(\rho, \beta(p))$

Etape p

On dispose des points : $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1}$.
On détermine les composantes connexes du graphe décrit dans l'algorithme $NPA(\rho, \beta(p))$. Ces composantes connexes $C_1^p, C_2^p, \ldots, C_{N(p)}^p$ forment une partition de l'ensemble :

$$X_p^{\beta(p)} = \{x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1}\}$$

On propose la réponse $M(p)$ où $M(p)$ désigne la période de la suite finie $(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1})$ pour la partition $C_1^p, C_2^p, \ldots, C^p_{N(p)}$.

Proposition 5 : On suppose que $\lim \beta(p)-p = +\infty$ et que E est une partie compacte de $\mathbb{R}^m$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \rho, \beta(p))$

1) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est pseudo-périodique, alors l'algorithme* $P(\rho, \beta(p))$ *est satisfaisant au sens i) pour la question :*
"Quelle est la période de la suite ?"

2) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *n'est pas pseudo-périodique alors l'algorithme* $P(\rho, \beta(p))$ *donne des réponses* $M(1), M(2), \ldots, M(p), \ldots$ *qui forment une suite d'entiers qui n'est jamais constante à partir d'un certain rang.*

Démonstration :

On l'obtient facilement en utilisant celle de la proposition 4.

∎

Corollaire : On suppose que E *est une partie compacte de* $\mathbb{R}^m$.
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \rho, > 0)$.
1) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est pseudo-périodique alors l'algorithme* $P(\rho, p^2)$ *est satisfaisant au sens i) pour la question :*
"Quelle est la période de la suite ?"

2) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *n'est pas pseudo-périodique alors l'algorithme* $P(\rho, \beta(p))$ *donne des réponses* $M(1), M(2), \ldots, M(p), \ldots$ *qui forment une suite d'entiers qui n'est jamais constante à partir d'un certain rang.*

Les algorithmes $P(\varepsilon(p), \beta(p))$ et $P(\rho, \beta(p))$ permettent de construire des algorithmes pour la question "la suite est-elle pseudo-périodique ?".

Algorithme $P'(\varepsilon(p), \beta(p))$

Etape p

On dispose des points $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p+1)-1}$.
On considère les réponse $M(p)$ et $M(p+1)$ données par l'algorithme $P(\varepsilon(p), \beta(p))$.

Si : $M(p) = M(p+1)$, répondre OUI,

Si : $M(p) \neq M(p+1)$, répondre NON.

Algorithme $P'(\rho, \beta(p))$

Etape p

On dispose des points $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{\beta(p+1)-1}$.

On considère les réponses $M(p)$ et $M(p+1)$ données par l'algorithme $P(\rho, \beta(p))$.

Si : $M(p) = M(p+1)$, répondre OUI.

Si : $M(p) \neq M(p+1)$, répondre NON.

Proposition 6 : On suppose que : $\lim \beta(p) - p = + \infty$ *(resp. que* $\lim \beta(p) - p = + \infty$ *et* E *compact de* $\mathbb{R}^m$*).*

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \varepsilon(p), \beta(p))$ *(resp.* $S(E, \rho, \beta(p))$*) ayant un nombre fini de points d'accumulation. L'algorithme* $P'(\varepsilon(p), \beta(p))$ *(resp.* $P'(\rho, \beta(p))$*) est satisfaisant au sens ii) pour la question :*

"La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est-elle pseudo-périodique ?"*

Démonstration :

Elle est immédiate à partir de la partie 2) de la proposition 4 (resp. 5).

∎

Corollaire : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \varepsilon(p), > 0)$ *ayant un nombre fini de points d'accumulation. (resp. soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E, \rho, > 0)$ *où* E *est supposé être un compact de* $\mathbb{R}^m$*).*

L'algorithme $P'(\varepsilon(p), p^2)$ *(resp.* $P'(\rho, p^2)$*) est satisfaisant au sens ii) pour la question :*

"La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est-elle pseudo-périodique ?"*

§ IX

LES ALGORITHMES DE TRAITEMENT

PRÉSENTATION DU § IX

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à un deuxième type d'algorithmes pour suites non convergentes : ceux que nous appelons algorithmes de traitement.

De façon précise, nous recherchons des algorithmes procédant étape par étape et tels que :

- à chaque étape, l'algorithme ne dispose que d'un nombre fini de points de la suite (ce nombre nous admettrons qu'éventuellement, il le détermine lui-même en fonction des résultats des étapes précédentes).

- A chaque étape, l'algorithme sélectionne un ou plusieurs points dont il se sert pour prolonger une ou plusieurs sous-suites (ou sous-suites au sens large) dont la construction a été commencée aux étapes précédentes.

Le but est bien sûr que les sous-suites construites ainsi pas à pas, soient convergentes.
Chacune des étapes de ces algorithmes se décompose en plusieurs phases. Ces phases sont constituées de ce que nous appellerons des procédures finies (par exemple : la procédure permettant de trouver à partir d'une partition $A_1, A_2, \dots, A_k$ de l'ensemble $\{x_p, x_{p+1}, \dots, x_q\}$ le point de A_1 (resp. de $A_2, \dots, A_k$) d'indice le plus élevé). Les procédures présentées sont aisément programmables. Certaines d'entre elles (les procédures de partitionnement), quoique dans des buts différents des nôtres,

ont déjà fait l'objet d'études en analyse des données où on les appelle plutôt algorithmes de classification automatique (voir P. Bertier et J.M. Bouroche [1] ou E. Diday et L. Lebart [1]).

Le paragraphe a été divisé en quatre parties.

Dans la partie A-, nous étudions la notion de k-partition-forte ; c'est grâce à elle que nous pourrons tester l'efficacité de certaines procédures décrites en B-, et c'est aussi elle qui est utilisée pour la démonstration des résultats principaux de ce paragraphe (théorèmes 1, 2 et 3).

Dans la partie B- nous définissons les diverses procédures qui vont nous servir pour "monter" nos algorithmes.

Dans la partie C- nous proposons deux algorithmes généraux qui (comme l'établit le théorème 1) pour toute suite ayant k points d'accumulation "suffisamment forts", donnent k sous-suites, chacune convergente vers l'un des points d'accumulation de la suite traitée.

Dans la partie D-, nous proposons un algorithme qui ne suppose pas à priori que la suite traitée a exactement k points d'accumulation.

A - K-PARTITION-FORTE

Soit A un sous-ensemble de l'espace métrique E et soit $k \in \mathbb{N}$. Nous appellerons k-partition-forte de A toute partition de A en k sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tels que :

$$(k.P.F.) \begin{cases} \forall\, x, y, z, t \in A \\ \exists\, i, j, h \in \{1, 2, \ldots, k\}, (j \neq h \\ x \in A_i,\ y \in A_i,\ z \in A_j,\ t \in A_h) \Rightarrow d(x, y) < d(z, t) \end{cases}$$

Dans le cas où A est fini (k.P.F.) est équivalent à :

$$\max \{\mathrm{diam}\,(A_i) \mid i = 1, 2, \ldots, k\} < \min \{d(A_i, A_j) \mid \begin{matrix} i, j \in \{1, 2, \ldots, k\} \\ i \neq j \end{matrix}\}$$

Exemple

$A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \subset \mathbb{R}$

$A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{4, 5\}$, $A_3 = \{7, 8\}$

A_1, A_2, A_3 est une 3-partition-forte de A.

Propriété 1 : Soit $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *une* k*-partition-forte de* A.
Soit $\varepsilon = \max \{\text{diam}(A_i) \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$
La relation d'équivalence associée à la partition est donnée

soit par : $d(x, y) \leq \varepsilon$,

soit par : $d(x, y) < \varepsilon$.

Si A *est fini, la première des relations est toujours bonne.*

Remarque : On ne peut pas affirmer que : $d(x, y) \leq \varepsilon$ est toujours la relation d'équivalence qui définit la partition, en effet :
La 2-partition forte $[0, 1],]2, 3]$ de $[0, 1] \cup]2, 3] \subset \mathbb{R}$ est définie par : $d(x, y) \leq 1$, et non par : $d(x, y) < 1$. De même : $d(x, y) < \varepsilon$ ne définit pas toujours la partition comme le montre :
la 2-partition forte : $]0, 1], [2, 3[$ de $]0, 1] \cup [2, 3[$ qui est définie par : $d(x, y) < 1$, et non par : $d(x, y) \leq 1$.

Démonstration de la propriété 1 :
S'il n'existe pas x, y appartenant au même A_i, et tels que $d(x, y) = \varepsilon$, alors il est clair que la partition est celle définie par la relation : $d(x, y) < \varepsilon$. S'il existe x, y appartenant au même A_i et tels que : $d(x, y) = \varepsilon$, alors pour tout couple (z, t) d'éléments de A n'appartenant pas à un même A_i, on a : $d(z, t) > \varepsilon$, et donc la partition est celle définie par la relation : $d(x, y) \leq \varepsilon$.

Propriété 2 : Si le sous-ensemble A de l'espace métrique E admet une k-partition-forte alors celle-ci est unique.

Remarque 1 : C'est cette propriété d'unicité qui donne de l'intérêt à cette notion et qui fait que l'on peut dire que si un ensemble A admet une k-partition-forte alors celle-ci est la plus "naturelle" des partitions de A (pour la distance d dont E est muni) en k sous-ensembles.

Remarque 2 : L'unicité n'est vraie que pour k fixé.
Il se peut très bien que l'ensemble A admette une k-partition-forte et une k'-partition-forte distinctes si $k \neq k'$.
En voici un exemple :

$E = \mathbb{R}$

$A = \{1, 2, 3, 16, 17, 20, 21\}$

$A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{16, 17\}$, $A_3 = \{20, 21\}$

$A'_1 = \{1, 2, 3\}$, $A'_2 = \{16, 17, 20, 21\}$

A_1, A_2, A_3 forment une 3-partition-forte de A

A'_1, A'_2 forment une 2-partition-forte de A

Remarque 3 : Un ensemble A peut très bien n'admettre aucune k-partition-forte pour $k \neq 1$:

$E = \mathbb{R} = A$

Démonstration de la propriété 2 :

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_k$, et $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$ deux k-partitions-fortes de A. Nous devons montrer qu'elles sont identiques à l'ordre près, c'est-à-dire qu'il existe α une pertmutation de $\{1, 2, \ldots, k\}$ telle que :

$A_1 = A'_{\alpha(1)}, \ldots, A_k = A'_{\alpha(k)}$

Posons $\varepsilon = \max \{\text{diam}\,(A_i) \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$

$\varepsilon' = \max \{\text{diam}\,(A'_i) \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$

On peut supposer : $\varepsilon' \leq \varepsilon$

On définit $\alpha(i)$ en le prenant tel que : $A_i \cap A'_{\alpha(i)} \neq \emptyset$

Soit $x \in A_i \cap A'_{\alpha(i)}$, et soit $y \in A'_{\alpha(i)}$.

1er Cas : Les partitions sont définies par $d(x, y) \leq \varepsilon$ et $d(x, y) \leq \varepsilon'$;

on a donc : $d(x, y) \leq \varepsilon'$; donc : $d(x, y) \leq \varepsilon$; donc $y \in A_i$.

Pour tout $i = 1, \ldots, k$, on a : $A'_{\alpha(i)} \subset A_i$, ce qui permet de conclure.

2ème Cas : Les partitions sont définies par $d(x, y) < \varepsilon$ et $d(x, y) < \varepsilon'$;

on a donc : $d(x, y) < \varepsilon'$; donc : $d(x, y) < \varepsilon$; donc : $y \in A_i$.

On conclut comme pour le cas 1.

3ème Cas : Les partitions sont définies par $d(x, y) \leq \varepsilon$ et $d(x, y) < \varepsilon'$;

on a donc $d(x, y) < \varepsilon'$, donc : $d(x, y) \leq \varepsilon$; donc : $y \in A_i$.

On conclut comme pour le cas 1.

4ème Cas : Les partitions sont définies par $d(x, y) < \varepsilon$ et $d(x, y) \leq \varepsilon'$

a) si $\varepsilon' < \varepsilon$,

on a $d(x, y) \leq \varepsilon'$, donc $d(x, y) < \varepsilon$ donc $y \in A_i$;

on conclut comme pour le cas 1.

b) si $\varepsilon' = \varepsilon$,

on permute le rôle des deux partitions et on est ramené au cas 3.

∎

B - PROCÉDURES FINIES

B - 1 - PROCEDURES DE RECHERCHE DE k POINTS ELOIGNES

Nous appellerons procédure de recherche de k points éloignés toute procédure qui à partir d'une suite finie : $(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q)$ de points de l'espace métrique E, détermine k points (notés $a_1, a_2, \ldots, a_k$) dans l'ensemble $\{x_p, \ldots, x_q\}$ et tels que :

$$(\text{R.k P.E.}) \begin{cases} \text{si l'ensemble } \{x_p, x_{p+1}, \dots, x_q\} \text{ admet une k-partition-forte} \\ A_1, A_2, \dots, A_k \text{ alors chaque } A_i \text{ contient un et un} \\ \text{seul } a_j. \end{cases}$$

Autrement dit on souhaite que lorsque l'ensemble $\{x_p, x_{p+1}, \dots, x_q\}$ se sépare "naturellement" en k morceaux, chacun d'eux soit représenté par un a_i.

Voici une procédure de recherche de k points éloignés.

<u>Procédure R.k.P.E.</u>

Les points $x_p, x_{p+1}, \dots, x_q$ sont donnés.

<u>Pas 1</u> On pose $a_1 = x_q$

<u>Pas 2</u> On prend pour a_2 une solution du programme

$$\max d(x, A_1)$$
$$x \in \{x_p, x_{p+1}, \dots, x_q\}$$

avec $A_1 = \{a_1\}$

S'il y a plusieurs solutions on prend celle de plus grand indice.

<u>Pas 3</u> On prend pour a_3 une solution du programme :

$$\max d(x, A_2)$$
$$x \in \{x_p, x_{p+1}, \dots, x_q\}$$

avec $A_2 = \{a_1, a_2\}$

S'il y a plusieurs solutions on prend celle de plus grand indice

... ...

<u>Pas k</u> On prend pour a_k une solution du programme

$$\max d(x, A_{k-1})$$
$$x \in \{x_p, x_{p+1}, \dots, x_q\}$$

avec $A_{k-1} = \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$

S'il y a plusieurs solutions on prend celle de plus grand indice.

Exemple

$x_1 = 21 \quad x_2 = 10 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 20 \quad x_9 = 22$

$X_6 = 11 \quad x_7 = \ 2 \quad x_8 = 1 \quad x_9 = 12 \quad x_{10} = 19$

$a_1 = x_{10} = 19, \; a_2 = x_3 = 0, \; a_3 = x_2 = 10$

Remarque 1 : A chacun des pas de la procédure, nous résolvons un programme fini et nous choisissons la solution d'incice le plus grand. En fait comme on va le voir dans la démonstration (de la proposition 1), ce qui compte, c'est uniquement le fait que le point choisi est une solution du programme considéré. On pourrait choisir celle d'indice le plus petit, ou en choisir une au hasard, cela ne changerait rien au résultat. Si nous faisons le choix du plus grand indice, c'est que notre but final est d'extraire des sous-suites convergentes et que, plus les points ont un indice grand, mieux ils approchent une limite ou un point d'accumulation.

Remarque 2 : Bien que paraissant assez complexe cette procédure se programme facilement et nécessite peu de calculs.
De façon précise, il faut au plus : $\frac{k^2-k}{2}$ (q-p) calculs de la distance entre deux points.
Pour chercher 3 points éloignés parmi 1000 points, il faut donc au plus 3000 calculs de distance.

Proposition 1 : La procédure R.k.P.E. *est une procédure de recherche de* k *points éloignés.*

Démonstration :

Le point a_p introduit au pas p ne peut appartenir à un paquet contenant un a_i i = 1, 2, ..., p-1, car il ne vérifierait pas le programme voulu.
Les points introduits vont donc chacun dans un paquet de la k-partition-

forte, comme il y en a k il y en a donc un dans chacun des paquets.

∎

B - 2 - PROCEDURES DE RECHERCHE DE POINTS D'ELOIGNEMENT MUTUEL SUPERIEUR A ρ

Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ donné.

Nous appellerons procédure de recherche de points d'éloignement mutuel supérieur à ρ, toute procédure qui à partir d'une suite finie $(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q)$ de points de l'espace métrique E détermine des points notés $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dans l'ensemble $\{x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q\}$, tels que :

$$(\text{R.P.E.M.}\rho) \begin{cases} \forall\, i, j \in \{1, \ldots, k\} : i \neq j \Rightarrow d(a_i, a_j) > \rho \\ \forall\, \ell \in \{p, \ldots, q\}, \exists\, i \in \{1, \ldots, k\} : d(a_i, x_\ell) \leq \rho \end{cases}$$

Remarque :

Les points $a_1, \ldots, a_k$ sont mutuellement éloignés de plus de ρ et on ne peut ajouter aucun autre point a_{k+1} parmi $\{x_p, \ldots, x_q\}$ tel que les points $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ soient mutuellement éloignés de plus de ρ.

Malgré tout, il se peut qu'il existe $\{a'_1, \ldots, a'_{k'}\}$ avec $k' > k$ tels que les points a'_i soient mutuellement éloignés de plus de ρ.

Voici un exemple d'une telle situation :

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\rho = 1{,}5$

$a_1 = x_2 \quad a_2 = x_4$ vérifient (R.P.E.M.ρ),

$a'_1 = x_1$, $a'_2 = x_3$, $a'_3 = x_5$ vérifient aussi (R.P.E.M.ρ).

Voici une procédure de recherche de points d'éloignement mutuel supérieur à ρ.

Procédure R.P.E.M.ρ

Les points $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q$ sont donnés.

Pas 1 On pose : $a_1 = x_q$.

<u>Pas 2</u> Si l'ensemble $\{x_i \mid i \in \{p, \ldots, q\}$ et $d(x_i, a_1) > \rho\}$ est non vide, on prend son élément d'indice maximum pour a_2. Sinon on s'arrête.

<u>Pas 3</u> Si l'ensemble $\{x_i \mid i \in \{p, \ldots, q\}$ et $d(x_i, a_1) > \rho$ et $d(x_i, a_2) > \rho\}$ est non vide, on prend son élément d'indice maximum pour a_3. Sinon on s'arrête.

etc...

<u>Exemple</u>

$\rho = 2,5$

$x_1 = 21 \quad x_2 = 10 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 20 \quad x_5 = 22$

$x_6 = 11 \quad x_7 = 2 \quad x_8 = 1 \quad x_9 = 12 \quad x_{10} = 19$

$a_1 = x_{10} = 19$

$a_2 = x_9 = 12$

$a_3 = x_8 = 1$

$a_4 = x_5 = 22$

<u>Remarque</u> :

Cette procédure nécessite au plus $\frac{(q-p)(q-p+1)}{2}$ calculs de distance.

<u>*Proposition 2*</u> : *La procédure* R.P.E.M. ρ *est une procédure de recherche de points d'éloignement mutuel supérieur à* ρ.

<u>Démonstration</u> :

Par construction, lorsque la procédure s'arrête (ce qui se produit nécessairement, car il y a un nombre fini de points $x_p, \ldots, x_q$), les points $a_1, \ldots, a_k$ sont de distance mutuelle $> \rho$, et aucun autre point $x_p, \ldots, x_q$ ne peut être introduit.

∎

Remarque :

Au lieu de prendre dans l'ensemble non vide (considéré au pas r de la procédure R.P.E.M.ρ) le point d'indice le plus grand, on pourrait faire un autre choix, par exemple prendre un point solution du programme :

$$\max \{\min\{d(x_i, a_1), \ldots, d(x_i, a_{r-1})\} \mid i \in \{p, \ldots, q\} \text{ et }$$
$$d(x_i, a_1) > \rho \text{ et } \ldots \text{ et } d(x_i, a_{r-1}) > \rho\}.$$

Mais un tel choix nécessite en général plus de calculs que celui proposé dans la procédure R.P.E.M.ρ

B - 3 - PROCEDURES DE k-PARTITIONNEMENT

(Comme nous l'avons déjà signalé, les problèmes que nous abordons maintenant ont déjà été étudiés en analyse des données sous le nom d'algorithmes de classification automatique).

Nous désignerons par procédure de k-partitionnement toute procédure qui, à partir d'une suite finie $(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q)$, donne une partition $A_1, \ldots, A_k$ de l'ensemble $\{x_p, \ldots, x_q\}$.

Nous dirons que la procédure de k-partitionnement est efficace si, lorsque l'ensemble $\{x_p, \ldots, x_q\}$ admet une k-partition-forte, c'est elle que propose la procédure.

Remarque :

La notion d'efficacité que nous proposons ici est nouvelle (à notre connaissance). Pour mesurer l'efficacité de leurs algorithmes, les mathématiciens se préoccupant d'analyse des données utilisent la notion d'inertie inter-classe (voir P. Bertier et J.M. Bouroche [1]).

Procédure k.P.

Les points $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q$ sont donnés.

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les points déterminés par la procédure R.k.P.E.

On pose :

$$A_1 = \{x_j \mid j \in \{p, p+1, \ldots, q\}, \forall \ell \in \{2, 3, \ldots, k\} \; d(x_j, a_1) \leq d(x_j, a_\ell)\}$$

$$A_2 = \{x_j \mid j \in \{p, p+1, \ldots, q\}, x_j \notin A_1, \forall \ell \in \{1, 3, \ldots, k\} \; d(x_j, a_2) \leq d(x_j, a_\ell)\}$$

...

$$A_k = \{x_j \mid j \in \{p, p+1, \ldots, q\}, x_j \notin A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1}, \forall \ell \in \{1, 2, \ldots, k-1\} \; d(x_j, a_k) \leq d(x_j, a_\ell)\}$$

Exemple

$x_1 = 21 \quad x_2 = 10 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 20 \quad x_5 = 22$

$x_6 = 11 \quad x_7 = 2 \quad x_8 = 1 \quad x_9 = 12 \quad x_{10} = 19$

$a_1 = x_{10} = 19$

$a_2 = x_3 = 0$

$a_3 = x_2 = 10$

$A_1 = \{x_{10}, x_4, x_1, x_5\} = \{19, 20, 21, 22\}$

$A_2 = \{x_3, x_8, x_7\} = \{0, 1, 2\}$

$A_3 = \{x_2, x_6, x_9\} = \{10, 11, 12\}$.

Proposition 3 : *La procédure* k P. *est une procédure de k-partitionnement efficace.*

Démonstration :

Soit $(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q)$ tel que l'ensemble $\{x_p, \ldots, x_q\}$ admette une k-partition-forte (alors unique) $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$. Nous devons démontrer que cette partition est la même que celle donnée par la procédure P_k, c'est-à-dire, nous devons montrer qu'il existe α, une permutation de $\{1, \ldots, k\}$ telle que :

$A_i = A'_{\alpha(i)}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Prenons pour $\alpha(i)$ l'indice j tel que $a_i \in A'_j$.

L'application α ainsi définie est injective car nous avons montré que la procédure R.k.P.E. était bien une procédure de recherche de k points éloignés.

α est donc bien une permutation. Reste à montrer que :

$A_i = A'_{\alpha(i)}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

pour cela il suffit de montrer :

$A_i \supset A'_{\alpha(i)}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

Soit donc : $x_j \in A'_{\alpha(i)}$, on a : $d(a_i, x_j) < d(x_r, x_j)$ pour tout : $x_r \notin A'_{\alpha(i)}$ (par définition d'une k-partition forte) donc en particulier : $d(a_i, x_j) < d(a_\ell, x_j)$ pour tout $\ell \in \{1, 2, \ldots, k\} - \{i\}$, donc $x_j \in A_i$.

∎

Bien que nécessitant plus de calculs que la procédure k.P., nous donnons maintenant l'adaptation d'une méthode "classique" en analyse des données, la méthode dite de classification hiérarchique (voir P. Bertier et J.M. Bouroche [1]).

Procédure k.P.C.H

Les points $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q$ sont donnés

On part de la partition $N_o = \{\{x_p\}, \ldots, \{x_q\}\}$.

C'est une partition en q-p+1 sous-ensembles à 1 élément.

Pas 1 On recherche les deux éléments les plus proches et on les regroupe. On obtient ainsi une partition N_1 en q-p sous-ensembles.

Pas 2 On recherche les deux parties de N_1 les plus proches et on les regroupe. On obtient ainsi une partition N_2 en q-p-1 sous-ensembles.

...

Pas q-p+1-k On recherche les deux parties de $N_{q-p-k+2}$ les plus proches et on les regroupe. On obtient ainsi une partition $N_{q-p+1-k}$ en k sous-ensembles.

Remarque :

Il se peut que lors du premier pas, il y ait deux couples $\{x_\rho, x_{\rho'}\}$ et $\{x_m, x_{m'}\}$ tels que :

$d(x_\rho, x_\rho') = d(x_{m'}, x_{m'}) = \min \{d(x_i, x_j) \mid i \neq j\}$

On convient alors de regrouper les deux points du couple qui possèdent le point d'indice le plus grand.

On fait une convention analogue pour les pas suivants.

Exemple :

On prend $E = \mathbb{R}^2$, k = 3 et les points :

$x_1 = (1 ; 4,5)$

$x_2 = (4 ; 4)$

$x_3 = (2 ; 0,75)$

$x_4 = (1 ; 0,5)$

$x_5 = (4 ; 3)$

$x_6 = (1,75 ; 0,5)$

$x_7 = (1 ; 4)$

$x_8 = (1 ; 0,75)$

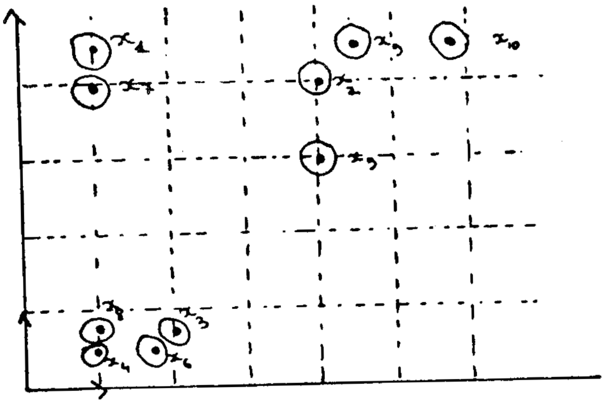
$x_9 = (4,5 ; 4,5)$

$x_{10} = (5,75 ; 4,5)$

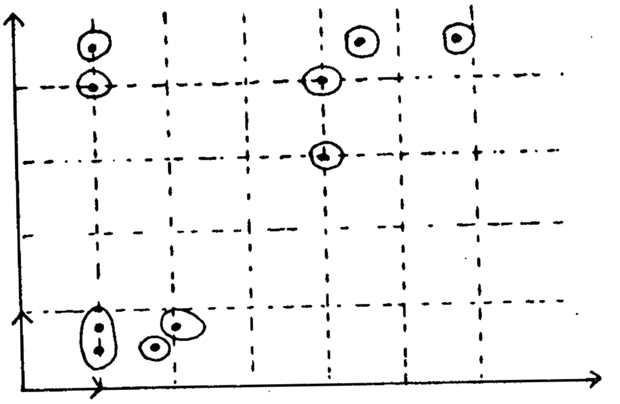
Au bout de 7 étapes, on obtient la partition :

$\{x_1, x_7\}, \{x_3, x_4, x_6, x_8\}, \{x_2, x_5, x_9, x_{10}\}$

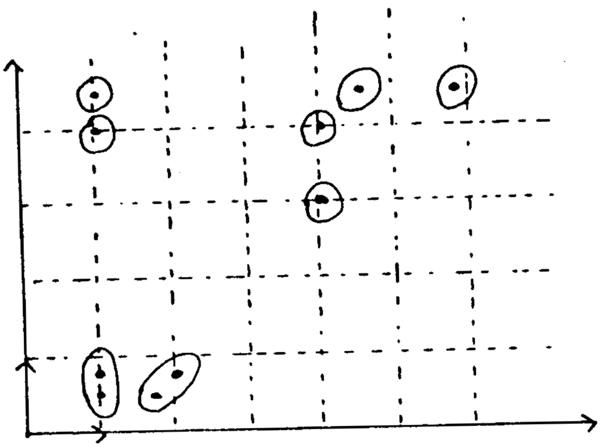
(Voir illustration).



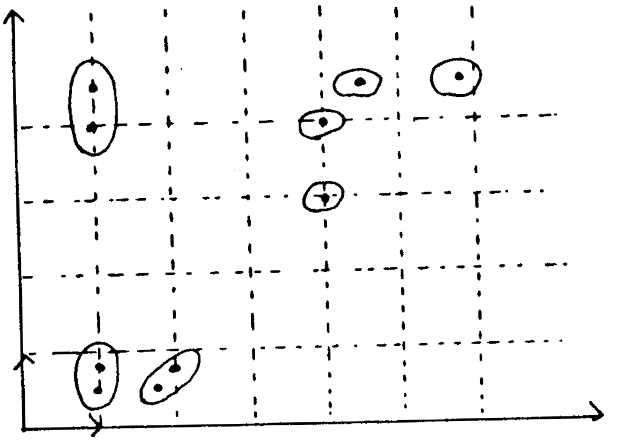
N_0



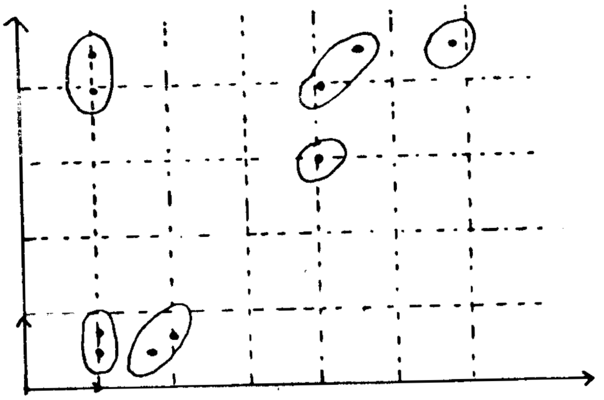
N_1



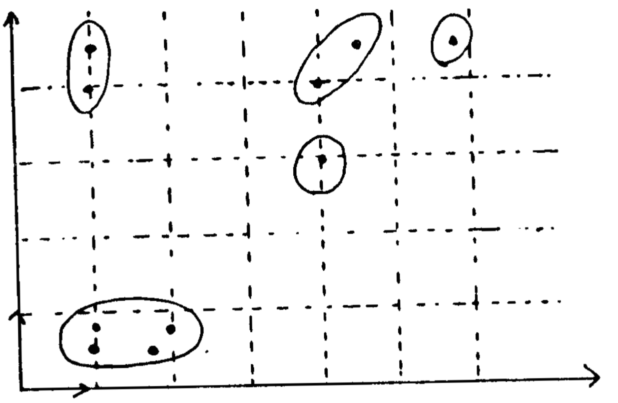
N_2



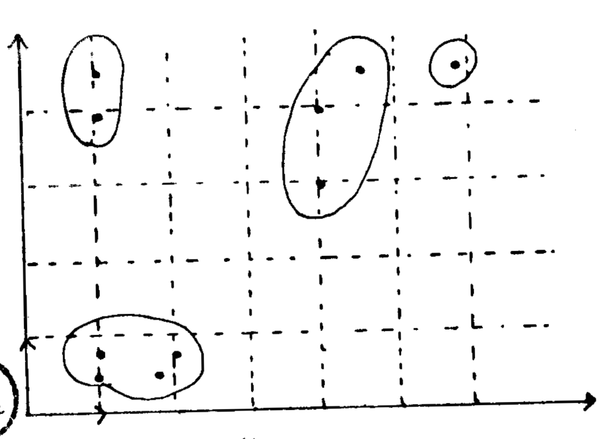
N_3



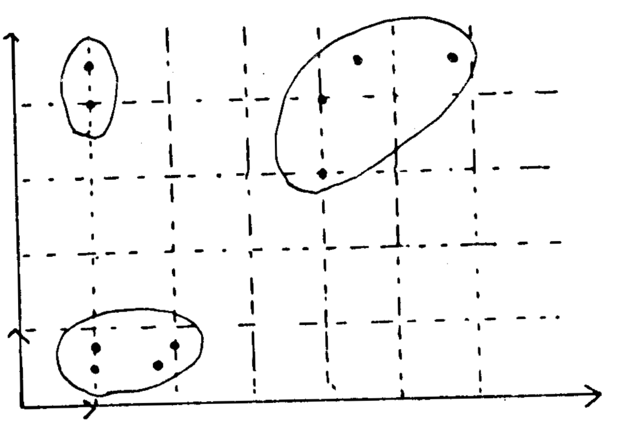
N_4



N_5



N_6



N_7

Bien que traitant d'un algorithme classique la proposition suivante est nouvelle (à nôtre connaissance).

Proposition 4 : *La procédure* k P.C.H. *est une procédure de* k *partitionnement efficace.*

Démonstration :

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ tel que l'ensemble $\{x_p, \ldots, x_q\}$ admette une k-partition-forte $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

On pose :

$$\varepsilon = \sup \{\mathrm{diam}\,(A_i) \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$$

On sait que la partition $A_1, A_2, \ldots, A_k$ est définie par la relation d'équivalence : $d(x, y) \leq \varepsilon$.

On désigne par $N_\ell^1, N_\ell^2, \ldots, N_\ell^{q-p+1-\ell}$ les $q-p+1-\ell$ parties de la partition N_ℓ.

Nous allons montrer par récurrence que pour tout $\ell \in \{0, 1, 2, \ldots, q-p+1-k\}$ on a :

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, q-p+1-\ell\},\ \exists\, j \in \{1, 2, \ldots, k\} : N_\ell^i \subset A_j$$

C'est vrai pour $\ell = 0$.

Supposons le vrai pour $\ell < q-p+1-k$ et montrons le pour $\ell+1$.

Cela résulte du lemme suivant :

Lemme : *Pour toute partition* $B_1, \ldots, B_\ell$ *avec* $\ell > k$ *telle que :* $\forall\, i \in \{1, \ldots, \ell\}, \exists\, j \in \{1, \ldots, k\} : B_i \subset A_j$ *la partition* $B'_1, \ldots, B'_{\ell-1}$ *obtenue en regroupant les deux* B_i *les plus proches vérifie :*

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, \ell-1\},\ \exists\, j \in \{1, \ldots, k\} : B'_i \subset A_j$$

Démonstration du lemme :

Il existe i et j, $i \neq j$ tels que B_i et B_j sont contenus dans un même A_r,

donc il existe i et j, $i \neq j$ tels que $d(B_i, B_j) \leq \varepsilon$. Les deux parties regroupées sont donc distantes de moins de ε. La relation $d(x, y) \leq \varepsilon$ étant une relation d'équivalence, cela implique que les deux parties regroupées sont dans un même A_r, ce que nous voulions démontrer.
Ceci termine la démonstration de la proposition.

∎

Remarque : Dans l'algorithme S1 présenté plus loin nous utilisons une procédure de k-partitionnement à chacune des étapes, c'est pourquoi dans la pratique il vaudra mieux utiliser la procédure kP. bien moins coûteuse en calculs que la procédure kP.C.H. qui par contre est peut-être meilleure (en ce sens qu'elle fait des partitions plus naturelles dans certains cas). En fait, on peut dire que la procédure kP.C.H. est mieux adaptée que la procédure kP. au problème propre de l'analyse des données, alors que la procédure kP. est mieux adaptée au problème des algorithmes de traitement des suites non convergentes.
On peut visualiser la différence de fonctionnement des procédures kP. et kP.C.H. sur l'exemple suivant :

$E = \mathbb{R}^2 \quad k = 2$

$x_1 = (1,25 \; ; \; 0) \qquad x_2 = (0 \; ; \; 3)$

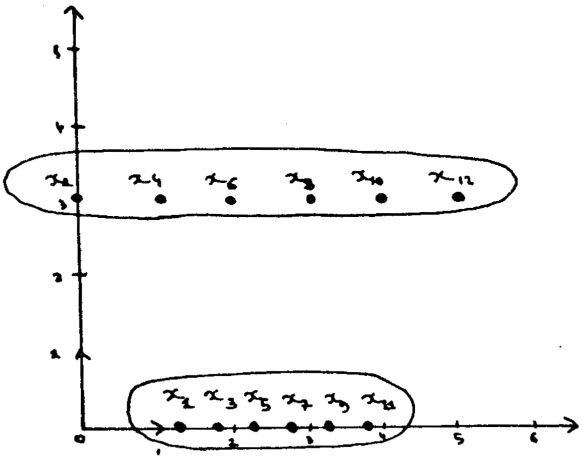
$x_3 = (1,75 \; ; \; 0) \qquad x_4 = (1 \; ; \; 3)$

$x_5 = (2,25 \; ; \; 0) \qquad x_6 = (2 \; ; \; 3)$

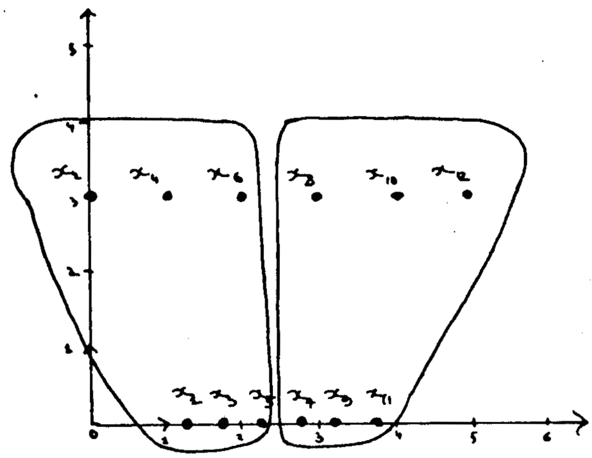
$x_7 = (2,75 \; ; \; 0) \qquad x_8 = (3 \; ; \; 3)$

$x_9 = (3,25 \; ; \; 0) \qquad x_{10} = (4 \; ; \; 3)$

$x_{11} = (3,75 \; ; \; 0) \qquad x_{12} = (5 \; ; \; 3)$



k P.C.H.



k P.

La procédure kP.C.H. proposera la partition

$\{x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, x_{11}\}$, $\{x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, x_{12}\}$

La procédure kP., après avoir déterminé les points $a_1 = x_{12}$ $a_2 = x_2$, proposera la partition

$\{x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$, $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

B - 4 - PROCEDURES DE RECHERCHE DU PLUS GRAND INDICE

Nous désignerons par procédure de recherche du plus grand indice toute procédure qui à partir d'une suite $(x_p, \ldots, x_q)$ et d'une partition $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de l'ensemble $\{x_p, \ldots, x_q\}$ fournit des points $a_1, \ldots, a_k$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} a_i = x_{\alpha(i)} \text{ avec} \\ \alpha(i) = \max \{j \in \{p, \ldots, q\} \mid x_j \in A_i\} \\ \text{pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, k\} \end{array}\right.$$

Trouver une telle procédure est évident.

B - 5 - PROCEDURES D'ALLONGEMENT DE k SUITES FINIES

Nous désignerons par procédure d'allongement de k suites finies toute procédure qui, à partir de k suites finies :

$(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_p^1), (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_p^2), \ldots, (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_p^k)$

et de k points : $a_1, a_2, \ldots, a_k$, détermine $x_{p+1}^1, x_{p+1}^2, \ldots, x_{p+1}^k$ parmi $a_1, a_2, \ldots, a_k$, de façon à ce que :

$$(\text{A.k S.F.}) \begin{cases} d(x_{p+1}^1, x_p^1) \leq d(x_{p+1}^i, x_p^1) \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \\ d(x_{p+1}^2, x_p^2) \leq d(x_{p+1}^i, x_p^2) \text{ pour tout } i \in \{2, 3, \ldots, k\}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ d(x_{p+1}^k, x_p^k) \leq d(x_{p+1}^i, x_p^k) \text{ pour tout } i \in \{k\}. \end{cases}$$

Voici une procédure d'allongement de k suites finies :

Procédure A.k S.F.

Pas 1

Déterminer la solution de plus grand indice du programme :

$$\min \{d(a_i, x_p^1) \mid i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$$

soit $a_{i(1)}$ cette solution ; poser : $x_{p+1}^1 = a_{i(1)}$

Pas 2

Déterminer la solution de plus grand indice du programme :

$$\min \{d(a_i, x_p^2) \mid i \in \{1, 2, \ldots, k\} - \{i(1)\}\}$$

soit $a_{i(2)}$ cette solution ; poser : $x_{p+1}^2 = a_{i(2)}$

... ...

Pas k

Déterminer la solution de plus grand indice du programme :

$$\min \{d(a_i, x_p^k) \mid i \in \{1, 2, \ldots, k\} - \{i(1), i(2), \ldots, i(k-1)\}\}$$

soit $a_{i(k)}$ cette solution ; poser : $x_{p+1}^k = a_i(k)$.

Remarque 1 :

La procédure A.k.S.F. définie ci-dessus, en fait ne prend en considération que le dernier point des suites finies. On peut imaginer des procédures plus complexes faisant intervenir 2, 3 ou même tous les points des suites finies, par exemple par des méthodes utilisant des barycentres.

Remarque 2 :

La condition (A.k S.F.) ne fait pas jouer un rôle équivalent aux différentes suites finies. Cette dissymétrie entre les différentes suites, se retrouvera dans le théorème 2.

C - LES ALGORITHMES S1 ET S2

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{R}^m$, grâce aux différentes procédures que nous avons définies, nous allons pouvoir construire des algorithmes de séparation de la suite en k sous-suites (plus généralement en k sous-suites au sens large).

Nous disons de ces algorithmes qu'ils sont généraux car une certaine liberté est laissée dans le choix des procédures intervenant à chaque étape. En précisant chacune des procédures, on obtient un algorithme particulier c'est-à-dire entièrement déterminé (et donc programmable sur machine). Par exemple, si dans l'algorithme S1(k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$), on convient d'utiliser la procédure de k-partitionnement k P.C.H., la procédure d'allongement de suites finies A.k S.F. et la procédure de recherche du plus grand indice R.G., on obtient un algorithme particulier que nous noterons : S1(k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$ [k P.C.H., A.k S.F., R G]. Si on ne fixe qu'une des procédures, par exemple k P.C.H., on obtient un algorithme non entièrement déterminé que nous noterons : S1(k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$) [k P.C.H.].

Soit k un entier non nul.

Soit $\alpha(p)$, et $\beta(p)$ deux suites d'entiers telles que :

$$\lim \alpha(p) = +\infty \text{ et } \forall\, p \in \mathbb{N},\ \beta(p) \geq \alpha(p) + k.$$

Algorithme général S1(k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$)

Etape 0

- On dispose des points $(x_{\alpha(0)}, x_{\alpha(0)+1}, \ldots, x_{\beta(0)-1})$
- On applique une procédure de k-partitionnement efficace à la suite finie $(x_{\alpha(0)}, x_{\alpha(0)+1}, \ldots, x_{\beta(0)-1})$, qui donne la partition $A_1^o, A_2^o, \ldots, A_k^o$.
- On applique une procédure de recherche du plus grand indice qui donne des points $a_1^o, a_2^o, \ldots, a_k^o$.
- On pose : $x_o^1 = a_1^o$, $x_o^2 = a_2^o$, $\ldots$, $x_o^k = a_k^o$.

Etape 1

- On dispose des points $(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(1)+1}, \ldots, x_{\beta(1)-1})$.
- On applique une procédure de k-partitionnement efficace à la suite finie $(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(1)+1}, \ldots, x_{\beta(1)-1})$, qui donne la partition $A_1^1, A_2^1, \ldots, A_k^1$.
- On applique une procédure de recherche du plus grand indice qui donne des points $a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1$.
- A partir des k suites finies à un élément (x_o^1), (x_o^2), $\ldots$, (x_o^k) et des k points $a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1$, on applique une procédure d'allongement de k suites finies qui donne les points $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k$.

Etape 2

(Sur le même modèle que l'étape 1)

etc ... ...

On se donne k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$, comme précédemment.

Algorithme général S2(k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$)

Etape 0

- On dispose des points $(x_{\alpha(0)}, x_{\alpha(0)+1}, \ldots, x_{\beta(0)-1})$
- On applique une procédure de recherche de k points éloignés à la suite finie $(x_{\alpha(0)}, x_{\alpha(0)+1}, \ldots, x_{\beta(0)-1})$ qui donne des points $a_1^o, a_2^o, \ldots, a_k^o$.
- On pose $x_o^1 = a_1^o$, $x_o^2 = a_2^o$, ..., $x_o^k = a_k^o$.

Etape 1

- On dispose des points $(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(1)+1}, \ldots, x_{\beta(1)-1})$.
- On applique une procédure de recherche de k points éloignés à la suite finie $(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(1)+1}, \ldots, x_{\beta(1)-1})$, ce qui donne des points $a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1$.
- A partir des k suites finies à un élément (x_o^1), (x_o^2), ..., (x_o^k) et des points $a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1$, on applique une procédure d'allongement de k suites finies qui donne les points $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k$.

Etape 2

(Sur le même modèle que l'étape 1).

etc ... ...

Théorème 1 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite bornée de points de* $\mathbb{R}^m$ *ayant* k *points d'accumulation* $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Soit $\alpha(p)$, $\beta(p)$ *deux suites d'entiers telles que :*

$\lim \alpha(p) = +\infty$, $\forall\, p \in \mathbb{N}\ \beta(p) \geq \alpha(p) + k$ et $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \underline{\lim}\ X_{\alpha(p)}^{\beta(p)}$

Alors les algorithmes généraux S1(k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$) *et* S2(k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$) *construisent* k *sous-suites au sens large* $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, ...,$(x_p^k)_{n \in \mathbb{N}}$ *chacune convergente vers un* y_i *différent.*

Enonçons tout de suite un corollaire qui sera plus utilisable que le théorème lui-même.

<u>*Corollaire*</u> *: Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite bornée de points de* $\mathbb{R}^m$ *ayant* k *points d'accumulation* $y_1, y_2, \ldots, y_k$ *de force strictement positive. Alors les algorithmes généraux* $S1(k, p, p^2+k)$ *et* $S2(k, p, p^2+k)$ *construisent* k *sous-suites au sens large, chacune convergente vers un* y_i *différent.*

<u>Démonstration du théorème</u> :

On se donne $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha(p)$, $\beta(p)$ comme dans l'énoncé.

Soit

$$\varepsilon = \min \{d(y_i, y_j) \mid i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}, i \neq j\},$$

$$V = \bigcup_{i \in \{1, \ldots, k\}} B(y_i, \tfrac{\varepsilon}{5}).$$

On se donne $n_o \in \mathbb{N}$ vérifiant :

(*) $\forall\, n \geq n_o : x_n \in V$

(n_o existe d'après la proposition 10 du § III).

Soit p_o tel que :

(**) $\forall\, p \geq p_o : \alpha(p) \geq n_o$.

Soit $p_1 \geq p_o$ tel que :

(***) $\forall\, p \geq p_1$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \cap B(y_i, \frac{\varepsilon}{5}) \neq \emptyset$

(un tel p_1 existe grâce à l'hypothèse sur $\underline{\lim}\, X_{\alpha(p)}^{\beta(p)}$).

D'après les relations (*), (**) et (***) : pour tout entier : $p \geq p_1$, l'ensemble $X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} = \{x_{\alpha(p)}, x_{\alpha(p)+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1}\}$ admet une k-partition-forte qui est :

$$X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \cap B(y_1, \tfrac{\varepsilon}{5}) \; ; \; X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \cap B(y_2, \tfrac{\varepsilon}{5}) \; ; \; \ldots \; ; \; X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \cap B(y_k, \tfrac{\varepsilon}{5}).$$

Les points $a_1^p, a_2^p, \ldots, a_k^p$ donnés par l'algorithme $S1(k, \alpha(p), \beta(p))$ ou $S2(k, \alpha(p), \beta(p))$ sont chacun dans un sous-ensemble différent de cette partition.

Soit $i_o \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tel que :

$$x^1_{p_1} \in B(y_{i_o}, \frac{\varepsilon}{5})$$

Par récurrence, on établit que :

$$\forall\ p \geq p_1 : x^1_p \in B(y_{i_o}, \frac{\varepsilon}{5})$$

La sous-suite au sens large $(x^1_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers y_{i_o}.

De même les sous-suites au sens large $(x^2_p)_{p \in \mathbb{N}}$, $(x^3_p)_{p \in \mathbb{N}}$, ..., $(x^k_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont convergentes chacune vers un y_i différent (le y_i est différent pour chacune des sous-suites au sens large, car les $y^\ell_{p_1}$ pour $\ell = 1, 2, \ldots, k$ appartiennent à une boule $B(y_i, \frac{\varepsilon}{5})$ différente).

∎

<u>Démonstration du corollaire 1</u> :

Si on prend $\alpha(p) = p$ et $\beta(p) = p^2+k$; on a bien

- $\forall\ p \in \mathbb{N} \quad \beta(p) \geq \alpha(p) + k$
- $\lim \alpha(p) = +\infty$
- pour tout point d'accumulation de force strictement positive $\hat{y}$,

$\hat{y} \in \underline{\lim}\ X^{\beta(p)}_{\alpha(p)}$ (d'après la proposition 3 du § V).

Le théorème précédent s'applique donc.

∎

<u>Remarque 1</u>

Le théorème ne donne que des sous-suites au sens large. Si on souhaite avoir des sous-suites, il suffit d'imposer la condition :

$$\forall\ p \in \mathbb{N} \quad \beta(p) \leq \alpha(p+1)$$

En particulier, l'algorithme $S1(k, k^{2^p}, k^{2^{p+1}})$ donne pour toute suite bornée de $\mathbb{R}^m$ ayant k points d'accumulation de force strictement positive, k sous-suites convergentes chacune vers un point d'accumulation différent.

Remarque 2

D'autres corollaires que le corollaire 1 peuvent être obtenus. Par exemple, on peut en obtenir un concernant les suites bornées de $\mathbb{R}^m$ ayant une force strictement supérieure à $\frac{1}{r}$ $(r \in \mathbb{N}^*)$.

Remarque 3

En modifiant la procédure d'allongement des suites finies, pour qu'elle utilise tous les points $x_{\alpha(p)}, x_{\alpha(p)+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1}$ à chaque étape, et en imposant la condition :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} : \alpha(p+1) = \beta(p),$$

On peut obtenir des algorithmes qui donneront des séparations-partitions (voir § II).

Remarque 4

L'hypothèse que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}^m$ peut être remplacée par l'hypothèse que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est contenue dans une partie compacte d'un espace métrique E.

Exemple détaillé du fonctionnement de l'algorithme

S2(k, α(p), β(p)) [R.k P.E., A.k S.F]

$E = \mathbb{R}$, $k = 3$, $\alpha(p) = 5p$, $\beta(p) = 5(p+1)$

Suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$x_o = 1$, $x_1 = 1 + 1$, $x_2 = 2 + 1$,

$x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 1 + \frac{1}{2}$, $x_5 = 2 + \frac{1}{2}$,

$x_6 = \frac{1}{4}$, $x_7 = 1 + \frac{1}{4}$, $x_8 = 2 + \frac{1}{4}$,

$x_9 = \frac{1}{8}$, $x_{10} = 1 + \frac{1}{8}$, $x_{11} = 2 + \frac{1}{8}$,

$x_{12} = \frac{1}{16}$, $x_{13} = 1 + \frac{1}{16}$, $x_{14} = 2 + \frac{1}{16}$,

... ...

Etape 0

On dispose des points x_o, x_1, x_2, x_3, x_4.

La procédure R.3 P.E. détermine les 3 points :

$$a_1^o = x_4,\ a_2^o = x_2,\ a_3^o = x_3.$$

On pose donc :

$$x_o^1 = x_4,\ x_o^2 = x_2,\ x_o^3 = x_3.$$

Etape 1

On dispose des points : x_5, x_6, x_7, x_8, x_9.

La procédure R.3 P.E. détermine les 3 points :

$$a_1^1 = x_9,\ a_2^1 = x_5,\ a_3^1 = x_7.$$

La procédure A.3 S.F. donne :

$$x_1^1 = x_7,\ x_2^1 = x_5,\ x_3^1 = x_9.$$

Etape 2

On dispose des points : x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}.

La procédure R.3 P.E. détermine les 3 points :

$$a_1^2 = x_{14},\ a_2^2 = x_{12},\ a_3^2 = x_{13}.$$

La procédure A.3 S.F. donne :

$$x_2^1 = x_{13},\ x_2^2 = x_{14},\ x_2^3 = x_{12}.$$

Etape 3

On dispose des points : x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}.

La procédure R.3 P.E. détermine les 3 points :

$$a_1^3 = x_{19},\ a_2^3 = x_{17},\ a_3^3 = x_{18}.$$

La procédure A.3 S.F. donne :

$$x_3^1 = x_{19},\ x_3^2 = x_{17},\ x_3^3 = x_{18}.$$

Etape 4

On dispose des points : $x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$.

La procédure R.3 P.E. détermine les 3 points :

$$a_1^4 = x_{24},\ a_2^4 = x_{20},\ a_3^4 = x_{22}.$$

La procédure A.3 S.F. donne :

$$x_4^1 = x_{22},\ x_4^2 = x_{20},\ x_4^3 = x_{24}.$$

etc ...

La suite $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc la suivante :

$$1 + \frac{1}{2},\ 1 + \frac{1}{4},\ 1 + \frac{1}{16},\ 1 + \frac{1}{64},\ \dots$$

elle converge vers 1.

De même, la suite $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2,

et la suite $(x_n^3)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Si on ne connait pas à priori le nombre de points d'accumulation de la suite à traiter, mais qu'on peut le majorer, nous allons voir que les algorithmes précédents (dans lesquels on spécifie certaines procédures) permettent d'obtenir des sous-suites au sens large, convergentes.

Théorème 2 : Soit k *un entier fixé.*

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite bornée de points de* $\mathbb{R}^m$ *ayant* k' *points d'accumulation avec* $k' \leq k$.

Soit $\alpha(p)$ *et* $\beta(p)$ *deux suites d'entiers tels que :*

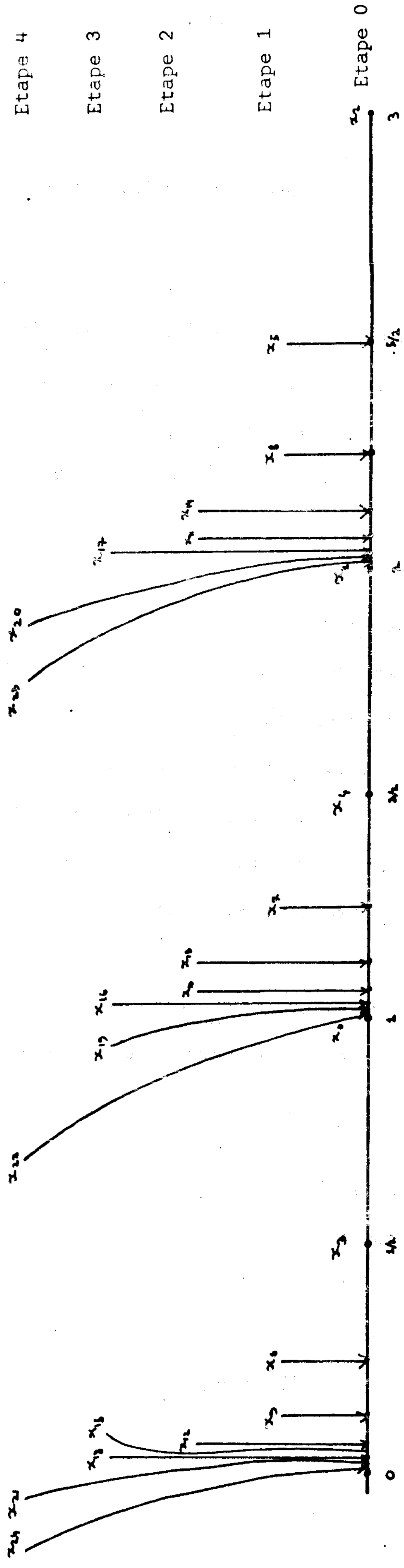
$\lim \alpha(p) = +\infty$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$ $\beta(p) \geq \alpha(p)+k$ et $A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \underline{\lim}\ X_{\alpha(p)}^{\beta(p)}$

Alors les algorithmes généraux :

S1(k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$) [k P.]

S2(k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$) [R.k P.E]

construisent k *sous-suites au sens large* $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ *dont les* k' *premières sont convergentes chacune vers un point d'accumulation*


Etape 4
Etape 3
Etape 2
Etape 1
Etape 0
3
0

de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Le corollaire suivant en résultera immédiatement.

<u>*Corollaire*</u> : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite bornée de points de* $\mathbb{R}^m$ *ayant* k' *points d'accumulation de force strictement positive avec :* $k' \leq k$. *Les algorithmes* S1(k, p,p^2+k)[k P.] *et* S2(k, p,p^2+k)[R.k P.E] *construisent* k *sous-suites au sens large* $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ *dont les* k' *premières sont convergentes chacune vers un point d'accumulation de la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

<u>Démonstration du théorème 2</u> :

Le résultat provient de ce que dans le cas où la suite finie $(x_p, \ldots, x_q)$ admet une k'-partition-forte $A_1, \ldots, A_{k'}$ la procédure R.k P.E. $(k \geq k')$ donne k points $a_1, \ldots, a_k$ tels que chaque $A_i (i = 1, 2, \ldots, k')$ contienne au moins un a_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, ce qui se démontre sans difficulté. (Il suffit de remarquer que le k' premiers pas de la procédure R.k P.E. ne sont autres que la procédure R.k' P.E.).

On se donne maintenant $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha(p)$, et $\beta(p)$ comme dans l'énoncé. On note : $y_1, y_2, \ldots, y_{k'}$, les points d'accumulation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On pose : $\varepsilon = \min \{d(y_i, y_j) \mid i, j \in \{1, 2, \ldots, k'\} \; i \neq j\}$

$$V = \bigcup_{i \in \{1, 2, \ldots, k'\}} B(y_i, \frac{\varepsilon}{5})$$

Soit $n_o \in \mathbb{N}$ tel que :

(*) $\quad \forall n \geq n_o \; : \; x_n \in V.$

Soit $p_o \in \mathbb{N}$ tel que :

(**) $\quad \forall p \geq p_o \; : \; \alpha(p) \geq n_o.$

Soit $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $p_1 \geq p_o$ et :

(***) $\quad \forall\, p \geq p_1 \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k'\}\ X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \cap B(y_i, \frac{\varepsilon}{5}) \neq \emptyset$

D'après les relations (*), (**) et (***) : pour tout entier $p \geq p_1$,

l'ensemble : $X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} = \{x_{\alpha(p)}, \ldots, x_{\beta(p)-1}\}$ admet une k'-partition-forte

qui est :

$X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \cap B(y_1, \frac{\varepsilon}{5}),\ X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \cap B(y_2, \frac{\varepsilon}{5}),\ \ldots,\ X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \cap B(y_{k'}, \frac{\varepsilon}{5})$.

Chacun des ensembles de cette partition contient au moins un des points

$a_i (i = 1, 2, \ldots, k)$.

Soit $i(1) \in \{1, 2, \ldots, k'\}$ tel que :

$$x_{p_1}^1 \in B(y_{i(1)}, \frac{\varepsilon}{5})$$

Par récurrence, on établit que :

$$\forall\, p \geq p_1 \quad x_p^1 \in B(y_{i(1)}, \frac{\varepsilon}{5})$$

la sous-suite au sens large $(x_p^1)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers $y_{i(1)}$.

Soit $i(2) \in \{1, 2, \ldots, k'\}$ tel que :

$$x_{p_1}^2 \in B(y_{i(2)}, \frac{\varepsilon}{5}).$$

Plusieurs cas peuvent se présenter :

a) $i(2) \neq i(1)$

On établit alors par récurrence que :

$$\forall\, p \geq p_1 \quad x_p^2 \in B(y_{i(2)}, \frac{\varepsilon}{5}),$$

La sous-suite au sens large $(x_p^2)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers $y_{i(2)}$.

b) $i(2) = i(1)$ et pour tout $p \geq p_1$:

il y a plus de deux points parmi $a_1^p, \ldots, a_k^p$ dans la boule $B(y_{i(1)}, \frac{\varepsilon}{5})$.

On établit alors par récurrence que :

$$\forall\, p \geq p_1 \quad x_p^2 \in B(y_{i(1)}, \frac{\varepsilon}{5})$$

La sous-suite au sens large $(x_p^2)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers $y_{i(1)}$.

c) $i(2) = i(1)$ et il existe $p \geq p_1$ tel que :

(■) la boule $B(y_{i(1)}, \frac{\varepsilon}{5})$ ne contient qu'un seul $a_i^p (i = 1, \ldots, k)$.

Soit p_2 le plus petit entier $\geq p_1$ tel que : (■)

et soit $i'(2) \in \{1, 2, \ldots, k'\}$ tel que :

$$x^2_{p_2} \in B(y_{i'(2)}, \frac{\varepsilon}{5}).$$

On a $i'(2) \neq i(1)$, ce qui permet de montrer par récurrence que :

$\forall\, p \geq p_2 \quad x^2_p \in B(y_{i'(2)}, \frac{\varepsilon}{5})$.

la sous-suite au sens large $(x^2_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers $y_{i'(2)}$.

De manière analogue, on établit que $(x^2_p)_{p \in \mathbb{N}}, \ldots, (x^{k'}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont des sous-suites au sens large, convergentes.

∎

Remarque : Le théorème n'établit la convergence que des k' premières sous-suites. Il se peut que les autres ne convergent pas, en voici un exemple :

On se place dans $\mathbb{R}$ avec $k' = 2$, $k = 3$, $\alpha(p) = 3p$, $\beta(p) = 3(p+1)$ et :

$(x_o, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, \ldots) =$

$(0, 1, 5, 0, 5, 6, 0, \frac{1}{2}, 5, 0, 5, 5+\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 5, \ldots)$

Lorsque l'on applique S2 (3, 3p, 3(p+1))[R.3P.E.]on obtient :

<u>Etape 0</u>

$a_1^o = x_2 = 5,\ a_2^o = x_o = 0,\ a_3^o = x_1 = 1.$

<u>Etape 1</u>

$a_1^1 = x_5 = 6,\ a_2^1 = x_3 = 0,\ a_3^1 = x_4 = 5$

<u>Etape 2</u>

$a_1^2 = x_8 = 5,\ a_2^2 = x_6 = 0,\ a_3^2 = x_7 = \frac{1}{2}$

<u>Etape 3</u>

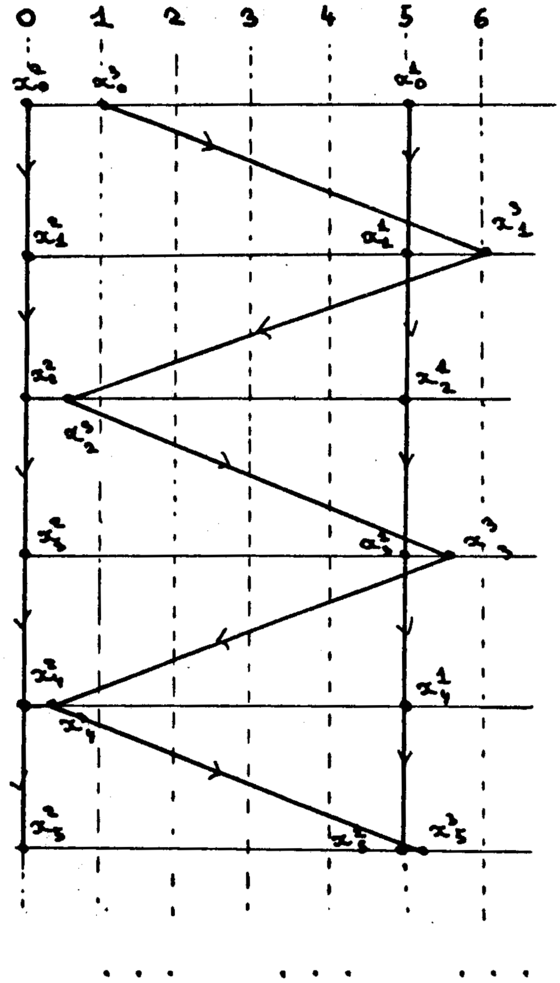
$a_1^3 = x_{11} = 5+\frac{1}{2},\ a_2^3 = x_9 = 0,\ a_3^3 = x_{10} = 5$

<u>Etape 4</u>

$a_1^4 = x_{14} = 5,\ a_2^4 = x_{12} = 0,\ a_3^4 = x_{13} = \frac{1}{4}$

<u>Etape 5</u>

$a_1^5 = x_{17} = 5+\frac{1}{4},\ a_2^4 = x_{15} = 0,\ a_3^4 = x_{16} = 5.$



Les sous-suites $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes comme l'énoncé du théorème 2 l'indique, par contre la sous-suite (x_n^3) n'est pas convergente.

D - L'ALGORITHME S

Nous avons vu qu'en remplaçant l'hypothèse "il y a exactement k points d'accumulation" par l'hypothèse "il y a au plus k points d'accumulation", on arrivait à maintenir quelques résultats sans toutefois conserver

i) que toutes les sous-suites au sens large construites sont convergentes.

ii) que toutes celles qui convergent le sont vers des points différents.

Nous nous proposons maintenant d'utiliser l'hypothèse "les points d'accumulation sont en nombre fini et au moins mutuellement distants de ρ" (ρ étant un nombre réel positif donné).

L'algorithme que nous proposons vérifiera i) et ii) de façon plus précise : il construira des sous-suites au sens large dont toutes celles qui seront infinies, convergeront vers un point d'accumulation de (x_n). Tous les points d'accumulation étant ainsi atteints une et une seule fois.

Le fait que le nombre de sous-suites au sens large à prolonger à chaque étape ne soit pas fixé une fois pour toutes, introduit une difficulté (technique plus que théorique). C'est pourquoi la procédure d'allongement que nous présentons est assez complexe en apparence.

Procédure d'allongement de suites finies en nombre non fixé, à l'étape p.

On dispose de k suites finies :

$$(x_o^1, x_1^1, \dots, x_{\alpha(1)}^1),$$
$$(x_o^2, x_1^2, \dots, x_{\alpha(2)}^2),$$
$$\dots$$
$$(x_o^k, x_1^k, \dots, x_{\alpha(k)}^k),$$

chacune de longueur inférieure à p, c'est-à-dire :

$$\forall\, i \in \{1, 2, \dots, k\} : \alpha(i) < p.$$

On dispose de k' points (qui vont servir à allonger les k suites finies) :

$$a_1^p, a_2^p, \dots, a_{k'}^p.$$

Pas 1

On cherche le point a_i^p d'indice i le plus élevé solution de :

$$\min \{d(x_{\alpha(1)}^1, a_i^p) \mid i = 1, 2, \dots, k'\}$$

Soit $a_{i(1)}^p$ ce point ; on prolonge la suite finie $(x_o^1, x_1^1, \dots, x_{\alpha(1)}^1)$ en posant :

$$x_{\alpha(1)+1}^1 = x_{\alpha(1)+2}^1 = \dots = x_p^1 = a_{i(1)}^p$$

Pas 2

On cherche le point a_i^p d'indice i le plus élevé solution de :

$$\min \{d(x^2_{\alpha(2)}, a_i^p) \mid i = 1, 2, \ldots, k' \quad i \neq i(1)\}.$$

Soit $a^p_{i(2)}$ ce point ; on prolonge la suite finie $(x^2_o, x^2_1, \ldots, x^2_{\alpha(2)})$ en posant :

$$x^2_{\alpha(2)+1} = x^2_{\alpha(2)+2} = \ldots = x^2_p = a^p_{i(2)}$$

Pas 3

etc ...

On continue ainsi jusqu'à atteindre le pas : k" = inf(k, k').

Deux cas peuvent se produire :

1) ou bien : $k' \leq k$,

On s'arrête après le pas k' (certaines des suites finies ont donc été prolongées d'autres non).

2) Ou bien : $k < k'$.

On considère alors l'ensemble :

$$\{a_i^p \mid i \in \{1, 2, \ldots, k'\} \text{ et } i \notin \{i(1), i(2), \ldots, i(k)\}\} ;$$

soit $b_1^p, b_2^p, \ldots, b_r^p$ ses éléments, on pose :

$$x_o^{k+1} = x_1^{k+1} = \ldots = x_p^{k+1} = b_1^p,$$

$$x_o^{k+2} = x_1^{k+2} = \ldots = x_p^{k+2} = b_2^p,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$x_o^{k+r}, = x_1^{k+r} = \ldots = x_p^{k+r} = b_r^p.$$

C'est-à-dire, on introduit de nouvelles suites finies (dans ce cas, toutes les suites finies dont on dispose à la fin de l'étape p sont de longueur p+1).

Pour illustrer cette procédure donnons deux exemples, l'un dans lequel $k' \leq k$, l'autre dans lequel : $k \leq k'$.

Exemple 1

$p = 4, \quad k = 5, \quad k' = 3$

$(x_o^1, x_1^1, x_2^1, x_3^1) = (1, 3, 5, 2),$

$(x_o^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2) = (10, 13, 12, 11),$

$(x_o^3, x_1^3, x_2^3) = (20, 19, 21),$

$(x_o^4, x_1^4, x_2^4) = (33, 32, 30),$

$(x_o^5, x_1^5) = (21, 18).$

$a_1^4 = 24, \quad a_2^4 = 11, \quad a_3^4 = 4$

Trois des suites finies vont être prolongées.

La première en posant : $x_4^1 = a_3^4 = 4$

La seconde en posant : $x_4^2 = a_2^4 = 11$

La troisième en posant : $x_3^3 = x_4^3 = a_1^4 = 24.$

Exemple 2

$p = 4, \quad k = 3, \quad k' = 5$

$(x_o^1, x_1^1, x_2^1, x_3^1) = (12, 10, 13, 9)$

$(x_o^2, x_1^2, x_2^2) = (1, 3, 2)$

$(x_o^3, x_1^3) = (25, 23)$

$a_1^4 = 22 \quad a_2^4 = 11 \quad a_3^4 = 5 \quad a_4^4 = 3 \quad a_5^4 = 40$

Trois suites finies sont prolongées.

La première en posant : $x_4^1 = a_2^4 = 11.$

La seconde en posant : $x_3^2 = x_4^2 = a_4^4 = 3.$

La troisième en posant : $x_2^3 = x_3^3 = x_4^3 = a_1^4 = 22$

Deux nouvelles suites finies sont introduites :

$x_o^4 = x_1^4 = x_2^4 = x_3^4 = x_4^4 = a_3^4 = 5. \quad x_o^5 = x_1^5 = x_2^5 = x_3^5 = x_4^5 = a_5^4 = 40.$

Soit ρ un nombre réel strictement positif.

Soit $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ deux suites d'entiers telles que :

$$\lim \alpha(p) = +\infty \quad \text{et } \forall\, p \in \mathbb{N} : \beta(p) \geq \alpha(p)$$

<u>Algorithme $S(\rho, \alpha(p), \beta(p))$</u>

<u>Etape p</u>

On dispose des points : $x_{\alpha(p)}, x_{\alpha(p)+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1}$.

Les étapes précédentes ont déterminées $k(p-1)$ suites finies (le nombre de ces suites finies dépend de p) que l'on note :

$(x_i^1)_{i \in \{0, 1, 2, \ldots, \gamma_1^p\}}$,

$(x_i^2)_{i \in \{0, 1, 2, \ldots, \gamma_2^p\}}$,

...

$(x_i^{k(p-1)})_{i \in \{0, 1, 2, \ldots, \gamma_{k(p-1)}^p\}}$.

On applique une procédure de recherche de points d'éloignement mutuel supérieur à $\rho/2$ à la suite finie : $(x_{\alpha(p)}, \ldots, x_{\beta(p)-1})$.

On obtient $h(p)$ points que l'on note :

$a_1^p, a_2^p, \ldots, a_{h(p)}^p$.

On applique alors la procédure d'allongement de suites finies en nombre non fixé, à ces données.

On obtient $k(p)$ suites finies (on a : $k(p) = k(p-1)$ si $h(p) \leq k(p-1)$ et on a : $k(p) = h(p)$ si $h(p) > k(p-1)$).

<u>Remarque</u> :

Dans cet algorithme seule la procédure de recherche de points d'éloignement mutuel supérieur à ρ, n'est pas fixée. Si on choisit celle que nous avons notée R.P.E.M.ρ, on notera l'algorithme ainsi obtenu par :

$S(\rho, \alpha(p), \beta(p))$ [R.P.E.M.ρ].

<u>*Théorème 3*</u> *: Soit ρ un nombre réel strictement positif.*

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite bornée de points de* $\mathbb{R}^m$ *ayant des points d'accumulation de distance mutuelle supérieure à* ρ.

Soit $\alpha(p)$ *et* $\beta(p)$ *deux suites d'entiers telles que :*

$\lim \alpha(p) = +\infty$; $\forall\, p \in \mathbb{N}\ \beta(p) \geq \alpha(p)$; $\lim X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} = A((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Alors l'algorithme $S(\rho, \alpha(p), \beta(p))$ *construit des sous-suites au sens large dont celles qui sont infinies, sont convergentes, chacune d'entre elles vers un point d'accumulation de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et tous les points d'accumulation étant atteints une et une seule fois.*

Le corollaire suivant en résultera immédiatement.

<u>*Corollaire*</u>

Soit ρ un nombre réel strictement positif.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite bornée de points de* $\mathbb{R}^m$ *ayant des points d'accumulation de distance mutuelle supérieure à* ρ *et de force strictement positive.*

Alors l'algorithme $S(\rho, p, p^2)$ *construit des sous-suites au sens large, dont celles qui sont infinies, sont convergentes, chacune d'elles vers un point d'accumulation de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *et tous les points d'accumulation étant atteints une et une seule fois.*

<u>Démonstration du théorème 3</u> :

On se donne $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha(p)$, $\beta(p)$ comme dans l'énoncé.

Les points d'accumulation sont nécessairement en nombre fini, notons les $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Soit : $V = \bigcup_{i \in \{1, \ldots, k\}} B(y_i, \frac{\rho}{5})$

On se donne $n_o \in \mathbb{N}$ vérifiant :

(*) $\quad \forall\, n \geq n_o : x_n \in V.$

Soit p_o tel que :

(**) $\forall\, p \geq p_o \;:\; \alpha(p) \geq n_o$.

Soit $p_1 \geq p_o$ tel que :

(***) $\forall\, p \geq p_1,\ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\} : X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \cap B(y_i, \frac{\rho}{5}) \neq \emptyset$.

Pour tout $p \geq p_1$, les relations (*), (**) et (***) montrent que les points déterminés par une procédure de recherche de points d'éloignement mutuel supérieur à $\rho/2$ sont exactement au nombre de k, autrement dit :

$\forall\, p \geq p_1 \;:\; h(p) = k$.

De plus, chaque : $X_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \cap B(y_i, \frac{\rho}{5})$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ contiendra un et un seul a_i^p, $(i = 1, 2, \ldots, k)$. A partir de l'étape p, l'algorithme prolonge donc exactement k suites finies qui sont les k premières.

Ces k premières suites seront donc les seules qui seront prolongées indéfiniment.

On établit par un raisonnement analogue à celui du théorème 1 que chacune de ces k suites est convergente vers un y_i différent.

∎

Exemple détaillé du fonctionnement de l'algorithme

$S(\rho, \alpha(p), \beta(p))$ [R.P.E.M.ρ]

$E = \mathbb{R}$, $\rho = 0{,}9$, $\alpha(p) = 4p$, $\beta(p) = 4(p+1)$

Suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$x_o = 1 - 1$, $x_1 = 1 + 1$, $x_2 = 3 - 1$, $x_3 = 3 + 1$,

$x_4 = 1 - \frac{1}{2}$, $x_5 = 1 + \frac{1}{2}$, $x_6 = 3 - \frac{1}{2}$, $x_7 = 3 + \frac{1}{2}$,

$x_8 = 1 - \frac{1}{4}$, $x_9 = 1 + \frac{1}{4}$, $x_{10} = 3 - \frac{1}{3}$, $x_{11} = 3 + \frac{1}{3}$,

$x_{12} = 1 - \frac{1}{8}$, $x_{13} = 1 + \frac{1}{8}$, $x_{14} = 3 - \frac{1}{4}$, $x_{15} = 3 + \frac{1}{4}$,

$x_{16} = 1 - \frac{1}{16}$, $x_{17} = 1 + \frac{1}{16}$, $x_{18} = 3 - \frac{1}{5}$, $x_{19} = 3 + \frac{1}{5}$,

... ...

Etape 0

On dispose des points : x_o, x_1, x_2, x_3.

La procédure R.P.E.M. 0,45 donne trois points :

$$a_1^o = x_3,\quad a_2^o = x_2,\quad a_3^o = x_o.$$

La procédure d'allongement donne :

$$x_o^1 = x_3,\quad x_o^2 = x_2,\quad x_o^3 = x_o.$$

(il faut remarquer que cette procédure s'applique même lorsque le nombre des suites finies déjà commencées est 0 ce qui est toujours le cas à l'étape 0).

Etape 1

On dispose des points : x_4, x_5, x_6, x_7.

La procédure R.P.E.M. 0,45 donne 4 points :

$$a_1^1 = x_7,\quad a_2^1 = x_6,\quad a_3^1 = x_5,\quad a_4^1 = x_4.$$

La procédure d'allongement donne :

$$x_1^1 = x_7,\quad x_1^2 = x_6,\quad x_1^3 = x_4.$$

(Allongement des 3 suites commencées à l'étape 0).

et :

$$x_o^4 = x_1^4 = x_5$$

(création d'une nouvelle suite finie).

Etape 2

On dispose des points : x_8, x_9, x_{10}, x_{11}.

La procédure R.P.E.M. 0,45 donne 4 points :

$$a_1^2 = 11,\quad a_2^2 = x_{10},\quad a_3^2 = x_9,\quad a_4^2 = x_8.$$

La procédure d'allongement donne :

$$x_2^1 = x_{11},\quad x_2^2 = x_{10},\quad x_2^3 = x_8,\quad x_2^4 = x_9.$$

Etape 3

On dispose des points : x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}.

La procédure R.P.E.M. 0,45 donne 3 points :

$$a_1^3 = x_{15},\quad a_2^3 = x_{14},\quad a_3^3 = x_{13}.$$

La procédure d'allongement donne :

$$x_3^1 = x_{15},\quad x_3^2 = x_{14},\quad x_3^3 = x_{13}.$$

Etape 4

On dispose des points : x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}.

La procédure R.P.E.M. 0,45 donne 2 points :

$$a_1^4 = x_{19},\quad a_2^4 = x_{17}.$$

La procédure d'allongement donne :

$$x_4^1 = x_{19},\quad x_4^2 = x_{17}.$$

Etape 5

On dispose des points : x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}.

La procédure R.P.E.M. 0,45 donne 2 points :

$$a_1^5 = x_{23},\quad a_2^5 = x_{21}.$$

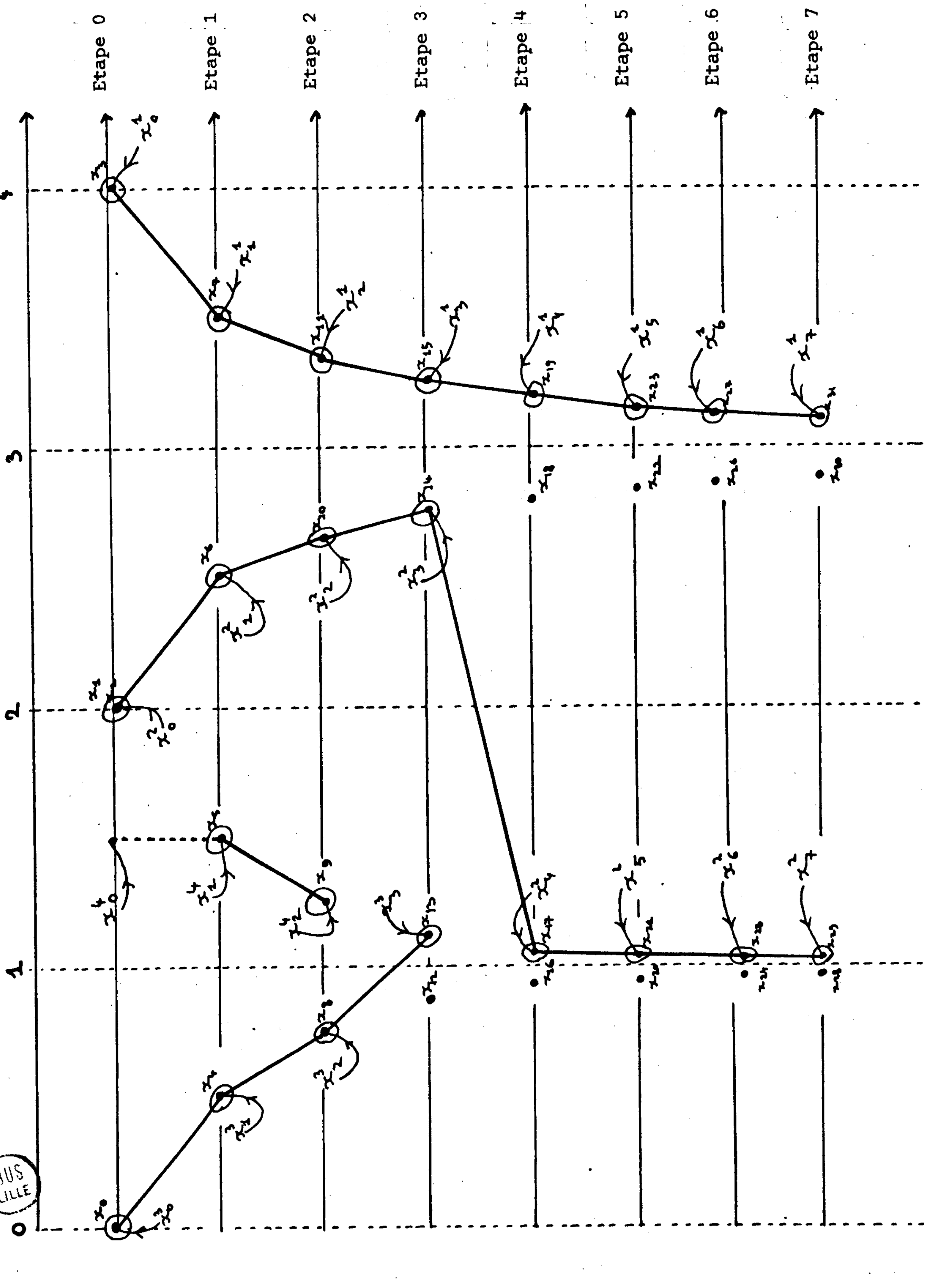
La procédure d'allongement donne :

$$x_5^1 = x_{23},\quad x_5^2 = x_{21}.$$

. . .

A partir de l'étape 4, la procédure R.P.E.M. 0,45 donne 2 points.

Donc seules les suites $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ seront prolongées indéfiniment la première converge vers 3 et la seconde vers 1.


Etape 0
Etape 1
Etape 2
Etape 3
Etape 4
Etape 5
Etape 6
Etape 7
0
1
2
3
4

L'algorithme $S(\rho, \alpha(p), \beta(p))$ permet de résoudre un des probèmes que nous avons posé au paragraphe VIII de façon précise :

Proposition 5 : *Soit* ρ *un nombre réel strictement positif.*
L'algorithme qui à l'étape p, *propose la réponse* $h(p)$ ($h(p)$ *désignant l'entier déterminé par l'algorithme* $S(\rho, p, p^2)$ *à l'étape* p) *répond de façon satisfaisante à la question :*
"Quel est le nombre de points d'accumulation de la suite ?" pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de points de* $\mathbb{R}^m$, *bornée et ayant des points d'accumulation de force positive et mutuellement éloignés de plus de* ρ.

Démonstration :

Dans la démonstration du théorème 3, nous avons vu que :

$$\forall\, p \geq p_1 \; : \; h(p) = k.$$

∎

§ X

QUELQUES RESULTATS NEGATIFS

Présentation du § X

Ce que nous avons appelé "algorithmes pour suites non convergentes" jusqu'à présent dans ce travail, n'a pas un sens très précis ; il s'agit pour parler comme les logiciens d'un terme "métamathématique".

Il est évident que pour démontrer des résultats négatifs, il faut préciser le sens de ces mots, il faut leur donner un sens "mathématique". La question de savoir si la définition "mathématique" que nous proposons correspond à la notion "métamathématique" que nous prétendons recouvrir bien qu'assez philosophique, mérite d'être posée ; c'est ce que nous faisons dans les remarques à la suite de notre définition.
Pour distinguer la notion "métamathématique" de la notion "mathématique" nous écrirons la première avec une minuscule et la seconde avec une majuscule.

Une fois donnée, cette définition permet d'énoncer (et de démontrer) quelques résultats négatifs qui se présentent tous sous la forme : il n'existe pas d'Algorithme ayant telles et telles propriétés.
Bien que de nombreux résultats puissent être obtenus sur cette voie, nous nous sommes restreintsà ceux que nous jugeons les plus intéressants (théorème 1 et ses corollaires et théorème 2), soit par la technique mise en jeu dans la démonstration, soit par la signification même de l'impossibilité exprimée.
Le théorème 1 et ses corollaires (sauf le corollaire 4) visent ce que nous

avons appelé au § VIII les algorithmes-questions. Le théorème 2, lui, concerne les algorithmes de traitement. Pour résumer très succintement le sens de ces résultats, on pourrait dire que :

La plupart des résultats des § VIII et IX ne peuvent être améliorés, car bien que parfois peu satisfaisantes, les hypothèses faites ne peuvent être supprimées.

Par exemple le théorème 2 nous montre que l'hypothèse que nous avons due faire sur la force des points d'accumulation des suites traitées par l'algorithme $S1(k, p, p^2+k)$, ne peut pas être enlevée, et que même pour d'autres algorithmes traitant du même problème on est obligé de la garder (ou, bien sûr de la remplacer par une hypothèse d'un autre type).

A - DÉFINITIONS

Soit E un espace métrique (le plus souvent $\mathbb{R}^m$).

Nous désignerons par $\mathcal{S}_f(E)$, l'ensemble des suites finies d'éléments de E de la forme :

$$(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q).$$

Nous appellerons Algorithme pour suites non convergentes (remarquer la majuscule) de points de l'espace métrique E la donnée :

i) d'un ensemble R appelé ensemble des réponses.

ii) d'une application : $\mathcal{R} : \mathbb{N} \times \mathcal{S}_f(E) \times \mathcal{S}_f(R) \to R$.

iii) d'une application : $\mathcal{C} : \mathbb{N} \times \mathcal{S}_f(E) \times \mathcal{S}_f(R) \to \mathbb{N}^2$.

Dans les algorithmes-questions, R sera un ensemble discret ; par exemple, {OUI, NON} ou {1, 2, 3, ..., n, ...}.

Dans les algorithmes de traitement, R sera l'ensemble des suites finies d'éléments de E.

L'algorithme (remarquer la minuscule) qui par convention correspond à un tel système de données, est obtenu comme suit :

Etape 0

Soit $(\alpha(0), \beta(0)) = \mathcal{C}(0, \emptyset, \emptyset)$

($\emptyset$ désigne la suite finie vide).

On dispose des points $x_{\alpha(o)}, x_{\alpha(o)+1}, \ldots, x_{\beta(o)}$

($(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite à traiter).

Soit $R_o = \mathcal{R}(0, (x_{\alpha(o)}, x_{\alpha(o)+1}, \ldots, x_{\beta(o)}), \emptyset)$.

On propose la réponse R_o.

Etape 1

Soit : $(\alpha(1), \beta(1)) = \mathcal{C}(1, (x_{\alpha(o)}, x_{\alpha(o)+1}, \ldots, x_{\beta(o)}), (R_o))$.

On dispose des points : $(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(1)+1}, \ldots, x_{\beta(1)})$.

Soit : $R_1 = \mathcal{R}(1, (x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(1)+1}, \ldots, x_{\beta(1)}), (R_o))$.

On propose la réponse R_1.

Etape 2

Soit : $(\alpha(2), \beta(2)) = \mathcal{C}(2, (x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(1)+1}, \ldots, x_{\beta(1)}), (R_o, R_1))$.

On dispose des points : $(x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(2)+1}, \ldots, x_{\beta(2)})$

Soit : $R_2 = \mathcal{R}(2, (x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(2)+1}, \ldots, x_{\beta(2)}), (R_o, R_1))$.

On propose la réponse R_2.

... ...

La suite $(R_o, R_1, R_2, \ldots)$ est appelée suite des réponses de l'Algorithme $(R, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ pour la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que l'Algorithme $(R, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ répond de façon satisfaisante au sens i) à la question Q, s'il existe n_o tel que la réponse donnée est juste pour tout $n \geq n_o$.

De même, on reprend les définitions, de "satisfaisant au sens ii)" et "satisfaisant au sens iii)" (voir § VIII).

Remarque 1

L'algorithme que nous avons obtenu à partir d'un Algorithme (R, $\mathcal{R}$, C), vérifie bien ce que nous voulions, c'est-à-dire :

- il procède étape par étape en ne disposant à chaque étape que d'un nombre fini de points de la suite traitée, ces points, il les a lui-même choisis en fonction des résultats des étapes précédentes (voir ensemble de définition de C).

- La réponse qu'il donne, est déterminée uniquement par les points dont il dispose pendant l'étape et par les réponses obtenues aux étapes précédentes (voir ensemble de définition de $\mathcal{R}$).

Remarque 2

L'adéquation de la définition que nous avons donnée, nécessite non seulement qu'à tout Algorithme corresponde bien un algorithme dans le sens où nous l'avions entendu jusqu'à présent (c'est ce que montre la remarque 1), mais aussi qu'à tout algorithme corresponde un Algorithme. En particulier, est-ce que tous les algorithmes qui ont été proposés aux paragraphes VIII et IX peuvent être obtenus à partir d'Algorithmes ? Il est facile de voir que oui, nous allons le montrer pour le premier algorithme proposé, l'algorithme $C(\varepsilon(p)$.

On prend R, $\mathcal{R}$ et C de la façon suivante :

i) $R = \{OUI, NON\}$

ii) L'application $\mathcal{R} : \mathbb{N} \times S_f(E) \times S_f(R) \to R$ est définie par :

$$\mathcal{R}(p, (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j), (R_{i'}, R_{i'+1}, \ldots, R_{j'})) = OUI,$$

sauf si :

$i = p$, $j = p+1$, $i' = 0$, $j' = p-1$, $d(x_p, x_{p+1}) > \varepsilon(p) + \varepsilon(p+1)$.

iii) L'application $C : \mathbb{N} \times S_f(E) \times S_f(R) \to \mathbb{N}^2$ est définie par :

$C(p, (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j), (R_{i'}, R_{i'+1}, \ldots, R_{j'})) = (p, p+1)$.

Dans cet exemple, l'application C ne dépend en fait que de la première variable : p.

Remarque 3 :

Dans la définition proposée nous n'imposons pas de condition de "calculabilité" pour les applications R et C, ce qui serait nécessaire si nous voulions que tous les Algorithmes puissent donner lieu à des programmes sur machines. Nous avons fait ce choix dans un but de simplification, mais il n'est en rien essentiel pour les raisons suivantes :

- tous les algorithmes proposés au § VIII et IX peuvent être obtenus à partir d'Algorithmes ne faisant intervenir que des applications calculables
- les résultats négatifs donnés dans ce paragraphe restent à fortiori vrais, si on limite la définition d'Algorithme, par une condition de calculabilité des applications R et C.

B - LE THÉORÈME 1

Théorème 1 : Soit E *un espace métrique ayant au moins un point d'accumulation. Il n'existe pas d'Algorithme répondant de la façon satisfaisante au sens ii) à la question :*

"La suite est-elle convergente ?",

pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *pseudo-périodique de période 1 ou 2 (et donc à fortiori pour toute suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E)$).

Remarque 1

La classe de suites considérées est relativement petite c'est ce qui va nous permettre de tirer un grand nombre de corollaires intéressants de ce théorème.

Remarque 2

Si dans l'énoncé, on remplace "au sens ii)" par :
"au sens iii)", le théorème devient faux. En effet, l'algorithme $C(\frac{1}{p^2})$ par exemple, répond de façon satisfaisante au sens iii) à la question :
"la suite est-elle convergente ?"
et cela pour toute suite de points de E.

Remarque 3

Dans le cas où E n'a pas de point d'accumulation (par exemple $E = \mathbb{N}$), c'est-à-dire n'est composé que de points isolés, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge que si elle est constante à partir d'un certain rang, et donc l'algorithme $C(\varepsilon(p))$ avec :

$\varepsilon(p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

est satisfaisant au sens ii) pour la convergence.
L'hypothèse que E admet un point d'accumulation est donc essentielle.

Remarque 4

Ce théorème montre que lorsque dans la proposition 1 du § VIII nous ne considérions que des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rapidité $\varepsilon(p)$, la raison profonde en était l'impossibilité d'obtenir un résultat en se passant d'hypothèse. Celle choisie n'est peut être pas la seule possible cependant il est sûr que pour ce problème il faut, d'une façon ou d'une autre, restreindre classe des suites considérées.

Remarque 5

Comme on va le voir la démonstration du théorème consiste à "piéger" un éventuel Algorithme ayant les propriétés voulues. Pour cela, on lui propose successivement une infinité de suites, qui, s'il fonctionne bien pour chacune d'entre elles, permettent la définition d'une autre suite pour laquelle il ne pourra pas fonctionner correctement.
(L'infinité de sous-suites intervenant dans la première phase sert en quelque sorte "d'appât").

Démonstration :

Soit (R, $\mathcal{R}$, C) un Algorithme répondant de façon satisfaisante au sens ii) à la question :
"La suite est-elle convergente ?"
pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pseudo-périodique de période 1 ou 2.
Nous allons obtenir une contradiction.
Désignons par a un point d'accumulation de E et soit $(a_o, a_1, a_2, \dots)$ une suite de points distincts de a convergente vers a.
Nous allons construire successivement des suites que nous noterons :
$(x_n^o)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (x_n^m)_{n \in \mathbb{N}}, \dots$

0 - La suite $(x_n^o)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$(x_o^o, x_1^o, x_2^o, \dots) = (a, a, a, a, \dots) ;$$

elle est constante ; la suite des réponses de l'Algorithme (R, $\mathcal{R}$, C) pour cette suite, est donc constamment OUI à partir d'un certain rang.
Notons $(R_o^o, R_1^o, R_2^o, \dots, R_n^o, \dots)$ la suite des réponses et $\theta(0)$ le plus petit entier i tel que : R_i^o = OUI. Jusqu'à l'étape $\theta(0)$, l'Algorithme n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite $(x_n^o)_{n \in \mathbb{N}}$; soit $\gamma(0)$, le plus grand indice des points intervenus.

Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ commençant par les mêmes $\gamma(0)$ premiers points que $(x_n^o)_{n \in \mathbb{N}}$, l'Algorithme donnera les mêmes $\theta(0)$ premières réponses et donc la $\theta(0)$-ième réponse sera un OUI.

1 - La suite $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} x_i^1 = x_i^o \text{ pour tout } i \leq \gamma(0) \\ (x^1_{\gamma(0)+1}, x^1_{\gamma(0)+2}, \ldots) = (a_1, a, a_1, a, \ldots) \end{cases}$$

Cette suite pseudo-périodique de période 2 est non convergente, la suite des réponses de l'Algorithme $(R, \mathcal{R}, C)$ pour cette suite n'est donc jamais constamment égale à OUI à partir d'un certain rang ; autrement dit, elle contient des NON aussi loin que l'on veut.

Notons $(R_o^1, R_1^1, R_2^1, \ldots, R_m^1, \ldots)$ la suite des réponses, et $\theta(1)$ le plus petit entier $i > \theta(0)$ tel que :

R_i^1 = NON.

Jusqu'à l'étape $\theta(1)$, l'Algorithme n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$; soit $\gamma(1)$ le plus grand indice des points intervenus. (on a : $\gamma(1) \geq \gamma(0)$).

Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ commençant par les mêmes $\gamma(1)$ premiers points que $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$, l'Algorithme donnera les mêmes $\theta(1)$ premières réponses et donc :

la $\theta(0)$-ième sera un OUI,

la $\theta(1)$-ième sera un NON.

2 - La suite $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} x_i^2 = x_i^1 \text{ pour tout } i \leq \gamma(1). \\ (x^2_{\gamma(1)+1}, x^2_{\gamma(1)+2}, \ldots) = (a, a, a, \ldots). \end{cases}$$

Cette suite est constante à partir de $\gamma(1)+1$, et donc, la suite des réponses de l'Algorithme $(R, \mathcal{R}, C)$ pour cette suite est constamment OUI à partir d'un certain rang.

Notons $(R_o^2, R_1^2, R_2^2, \ldots, R_m^2, \ldots)$ la suite des réponses et $\theta(2)$ le plus petit entier $i > \theta(1)$ tel que :

$$R_i^2 = \text{OUI}$$

Jusqu'à l'étape $\theta(2)$, l'Algorithme n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$; soit $\gamma(2)$, le plus grand indice des points intervenus (on a : $\gamma(2) \geq \gamma(1)$).

Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ commençant par les mêmes $\gamma(2)$ premiers points que $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, l'Algorithme donnera les mêmes $\theta(2)$ premières réponses et donc :

la $\theta(0)$-ième sera OUI,

la $\theta(1)$-ième sera NON,

la $\theta(2)$-ième sera OUI.

etc ...

Lorsque les suites $(x_n^o)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$, ... sont construites, que les indices $\gamma(0)$, $\gamma(1)$, ... et les indices $\theta(0)$, $\theta(1)$, ... sont déterminés on construit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_n = x_n^o \text{ pour tout } n \in \{0, 1, \ldots, \gamma(0)\}, \\ x_n = x_n^1 \text{ pour tout } n \in \{\gamma(0)+1, \ldots, \gamma(1)\}, \\ x_n = x_n^2 \text{ pour tout } n \in \{\gamma(1)+1, \ldots, \gamma(2)\}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{cases}$$

Cette suite est convergente car $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (c'est ici exactement qu'intervient le fait que a est un point d'accumulation de E). Donc la suite des réponses de l'Algorithme $(R, \mathcal{R}, C)$ pour cette suite, est constamment égale à OUI à partir d'un certain rang.

Ceci est en contradiction avec le fait que :

$$\begin{cases} \text{la } \theta(0)\text{-i}^{\text{ème}} \text{ réponse est OUI,} \\ \text{la } \theta(1)\text{-i}^{\text{ème}} \text{ réponse est NON,} \\ \text{la } \theta(2)\text{-i}^{\text{ème}} \text{ réponse est OUI,} \\ \text{la } \theta(3)\text{-i}^{\text{ème}} \text{ réponse est NON,} \\ \ldots \end{cases}$$

■

Dans tous les corollaires qui suivent, E désigne un espace métrique ayant au moins un point d'accumulation.

<u>Corollaire 1</u> : *Il n'existe pas d'Algorithme répondant de façon satisfaisante au sens i) à la question :*
"La suite est-elle convergente ?"
pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *pseudo-périodique de période 1 ou 2 (et donc à fortiori pour toute suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E)$*).*

<u>Démonstration</u> :

Elle résulte de ce que :

satisfaisant au sens i) => satisfaisant au sens ii).

■

<u>Corollaire 2</u> : *Il n'existe pas d'Algorithme répondant de façon satisfaisante au sens i) à la question :*
"Quelle est la période de la suite ?"
pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *pseudo-périodique de période 1 ou 2 (et donc à fortiori pour toute suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(E)$*).*

Démonstration :

Si un tel Algorithme existait, on pourrait facilement en déduire un algorithme satisfaisant au sens i) à la question : "la suite est-elle convergente ?" pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pseudo-périodique de période 1 ou 2. Chose impossible d'après le corollaire 1.

∎

Corollaire 3 : Il n'existe pas d'Algorithme répondant de façon satisfaisante au sens i) à la question :
"Quel est le nombre de points d'accumulation de la suite ?"
pour toute suite pseudo-périodique de période 1 ou 2 (et donc à fortiori pour toute suite ayant un nombre fini de points d'accumulation).

Démonstration :

Pour une suite pseudo-périodique de période 1 ou 2, les deux questions :
"Quel est le nombre de points d'accumulation de la suite ?"
"Quelle est la période de la suite ?"
sont équivalentes.
(Ceci n'est pas vrai pour une période 1, 2 ou 3 à cause des suites comme (1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, ...)).
Le corollaire 2 implique donc le corollaire 3.

∎

Remarque :

Ce corollaire est en fait assez précis. En effet, il montre que pour la classe des suites ayant un nombre fini de points d'accumulation de force strictement positive, il n'existe pas d'Algorithme pour la question du nombre de points d'accumulation. Or, en réduisant cette classe et en ne considérant plus que les suites ayant un nombre fini de points d'accumulation de force strictement positive et d'éloignement mutuel supérieur à ρ, un Algorithme pour la question du nombre de points d'accumulation existe (voir § VIII).

Corollaire 4 : Il n'existe pas d'Algorithme tel que :
pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ayant un nombre fini de points d'accumulation de force strictement positive, l'Algorithme construit des sous-suites au sens large, dont celles qui sont infinies convergent vers un point d'accumulation, chacun des points d'accumulation étant atteint une et une seule fois.*

Démonstration :
A partir d'un tel algorithme, on pourrait en construire un qui contredirait le corollaire 3.

∎

Remarque : Ce corollaire établit que dans le théorème 3 du § IX, l'hypothèse "mutuellement éloignés de plus de ρ" est indispensable.

C - LE THÉORÈME 2

Théorème 2 : Soit E, *un espace métrique ayant au moins un point d'accumulation.*
Il n'existe pas d'Algorithme tel que :
pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ayant* k *points d'accumulation, l'Algorithme construise* k *sous-suites* $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ *convergentes chacune vers un point d'accumulation différent de la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(Ce théorème montre que les hypothèses faites au § IX concernant la force des points d'accumulation (corollaire du théorème 1), sont indispensables :

non seulement sans elles, les algorithmes proposés ne conviennent pas, mais sans elles, aucun algorithme ne peut convenir).

Remarque :

L'hypothèse que E admet au moins un point d'accumulation est essentielle. Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand tous les points de E sont isolés (par exemple $E = \mathbb{N}$), un algorithme ayant la propriété voulue est facile à construire ; par exemple, de la façon suivante :

Etape p

On dispose des points : $x_o, x_1, \ldots, x_p$, on recherche les k points qui apparaissent le plus souvent (s'il y a des ex aequo, on choisit arbitrairement). Soit $a_1^p, a_2^p, \ldots, a_k^p$, ces points.

On applique une procédure d'allongement de k sous-suites (à partir des sous-suites $(x_o^1, \ldots, x_{p-1}^1), \ldots, (x_o^k, \ldots, x_{p-1}^k)$ déterminées aux étapes précédentes, et des points $a_1^p, \ldots, a_k^p$).

Pour établir que cet algorithme a bien la propriété voulue, il suffit de remarquer que dans un espace discret, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée admet les k points d'accumulation $y_1, y_2, \ldots, y_k$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, k\}, \text{ l'ensemble } \{j \in \mathbb{N} \mid x_j = y_i\} \text{ est infini,} \\ \\ \text{pour tout } x \notin \{y_1, \ldots, y_k\}, \text{ l'ensemble } \{j \in \mathbb{N} \mid x_j = x\} \text{ est fini.} \end{cases}$$

Démonstration :

On démontre le théorème pour k = 2. Pour les autres valeurs de k, à des complications de notation près, la démonstration est la même.

Soit $(R, \mathcal{R}, C)$ un Algorithme tel que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant 2 points d'accumulation l'Algorithme construise deux sous-suites : $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, chacune convergente vers un point d'accumulation différent de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous allons obtenir une contradiction.

Désignons par a, un point d'accumulation de E et soit $(a_o, a_1, a_2, \ldots)$ une suite de points distincts de a, convergente vers a. Soit b un point distinct de a. Nous allons construire successivement des suites que nous noterons : $(x_n^o)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, (x_n^m)_{n \in \mathbb{N}}, \ldots$

0 - La suite $(x_n^o)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$(x_o^o, x_1^o, x_2^o, x_3^o, \ldots) = (a, a_o, a, a_o, a, a_o, \ldots)$.

Les suites $(y_n^o)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n^o)_{n \in \mathbb{N}}$ construites par l'Algorithme sont convergentes l'une vers a, l'autre vers a_o.

Soit $\theta(0)$ le plus petit entier i tel que : $y_i^o \neq z_i^o$. Jusqu'à l'étape $\theta(0)$, l'Algorithme n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite $(x_n^o)_{n \in \mathbb{N}}$; soit $\gamma(0)$ le plus grand indice des points intervenus.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ commençant par les mêmes } \gamma(0) \text{ premiers} \\ \text{points que } (x_n^o)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ l'Algorithme donnera les mêmes } \theta(0) \text{ premières} \\ \text{réponses et donc :} \\ \qquad \{y_{\theta(0)}, z_{\theta(0)}\} \subset \{a, a_o\}. \end{array} \right.$$

1 - La suite $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^1 = x_i^o \text{ pour tout } i \leq \gamma(0), \\ (x_{\gamma(0)+1}^1, x_{\gamma(0)+2}^1, \ldots) = (b, a, a_1, a, a_1, a, a_1, \ldots). \end{array} \right.$$

Cette suite admet bien deux points d'accumulation a et a_1. Les suites $(y_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ construites par l'Algorithme seront des sous-suites de (x_n^1), chacune convergente l'une vers a, l'autre vers a_1 ; il existe donc un entier $\theta(1) \geq \theta(0)$ tel que :

$$\{y_{\theta(1)}^1, z_{\theta(1)}^1\} \subset \{a, a_1\}$$

Jusqu'à l'étape $\theta(1)$, l'Algorithme n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$; soit $\gamma(1)$, le plus grand indice des points intervenus.

(On a : $\gamma(1) \geq \gamma(0)$).

Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ commençant par les mêmes $\gamma(1)$ premières points que $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$, l'Algorithme donnera les mêmes $\theta(1)$ premières réponses et donc :

$$\{y_{\theta(0)}, z_{\theta(0)}\} \subset \{a, a_o\},$$
$$\{y_{\theta(1)}, z_{\theta(1)}\} \subset \{a, a_1\}.$$

2 - La suite $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} x_i^2 = x_i^1 \text{ pour tout } i \leq \gamma(1), \\ (x^2_{\gamma(1)+1}, x^2_{\gamma(1)+2}, \dots) = (b, a, a_2, a, a_2, a, a_2, \dots). \end{cases}$$

Cette suite admet bien deux points d'accumulation a et a_2. Les suites $(y_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ construites par l'Algorithme seront des sous-suites de (x_n^2), chacune convergente, l'une vers a, l'autre vers a_2 ; il existe donc un entier $\theta(2) \geq \theta(1)$, tel que :

$$\{y^2_{\theta(2)}, z^2_{\theta(2)}\} \subset \{a, a_2\}.$$

Jusqu'à l'étape $\theta(2)$, l'Algorithme n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$; soit $\gamma(2)$, le plus grand indice des points intervenus.

(On a : $\gamma(2) \geq \gamma(1)$).

Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ commençant par les mêmes $\gamma(2)$ premiers points que $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$, l'Algorithme donnera les mêmes $\theta(1)$ premières réponses et donc :

$$\{y_{\theta(0)}, z_{\theta(0)}\} \subset \{a, a_o\},$$
$$\{y_{\theta(1)}, z_{\theta(1)}\} \subset \{a, a_1\},$$
$$\{y_{\theta(2)}, z_{\theta(2)}\} \subset \{a, a_2\},$$

etc ...

Lorsque les suites $(x_n^o)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$, ... sont construites, que les indices $\gamma(0)$, $\gamma(1)$, ... et les indices $\theta(0)$, $\theta(1)$, ... sont déterminés, on construit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$x_n = x_n^o \text{ pour tout } n \in \{0, 1, \dots, \gamma(0)\},$$
$$x_n = x_n^1 \text{ pour tout } n \in \{\gamma(0)+1, \dots, \gamma(1)\},$$
$$x_n = x_n^2 \text{ pour tout } n \in \{\gamma(1)+1, \dots, \gamma(2)\},$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

Cette suite a deux points d'accumulation a et b, donc les suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construites par l'Algorithme devraient toutes deux converger, l'une vers a, l'autre vers b, ce qui est impossible car :

$$\begin{cases} \{y_{\theta(0)}, z_{\theta(0)}\} \subset \{a, a_o\}, \\ \{y_{\theta(1)}, z_{\theta(1)}\} \subset \{a, a_1\}, \\ \{y_{\theta(2)}, z_{\theta(2)}\} \subset \{a, a_2\}, \\ \dots \quad \dots \end{cases}$$

On a donc une contradiction.

∎

ANNEXE I

LISTE DES NOTATIONS DES § VIII, IX, X.

ANNEXE II

LE PROGRAMME EN FORTRAN D'UN ALGORITHME DU § IX

Nous présentons ici le listing d'un programme, rédigé en Fortran pour l'algorithme que nous avons noté S1(k, $\alpha(p)$, $\beta(p)$) [k.P., A.k S.F.] Dans le programme, N désigne le nombre de points de la suite traitée ; ici N = 200.

M désigne la dimension de l'espace des points de la suite ; ici M = 4.

P désigne le nombre de points d'accumulation des suites à traiter ; ici P = 4

NNN désigne le nombre d'étapes utilisées ; ici NNN = 18

INN joue le rôle de $\alpha(p)$; ici $\alpha(p) = 10\ p + 1$

JNN joue le rôle de $\beta(p)$; ici $\beta(p) = 10\ p + 30$

La suite SP générée aléatoirement (à l'aide des décimales d'un sinus) admet 4 points d'accumulation qui sont (1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4). L'algorithme donne 4 sous-suites notées ST1, ST2, ST3, ST4, chacune convergente comme on le constate, respectivement vers (4, 4, 4, 4), (1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2) et (3, 3, 3, 3). La grande irrégularité des premiers points de SP comme on peut le voir ne gêne pas le fonctionnement de l'algorithme.

```
C
C ***********************************************************************
CALGORITHME DE SEPARATION D UNE SUITE AYANT P POINTS D ACCUMULATION
C   (N,M,P,NNN,I..,J..)
C ***********************************************************************
C
C ///////////////////////////////////////////////////////////////////////
C DECLARATION DES TABLEAUX ET FIXATION DES CONSTANTES
C ///////////////////////////////////////////////////////////////////////
C
C 0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
CDECLARATION DES TABLEAUX DE LA PHASE " DEFINITION DE SP (N,M,P, ALEATOIRE) "
C       REAL SP(N,M)
        REAL SP(200,4)
C 000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
C 000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
C DECLARATION DES TABLEAUX DE LA PHASE " SEPARATION,(N,M,P,NN,INN,JNN,SP(NN))"
C       INTEGER ISR(P)
        INTEGER ISR(4)
C       REAL SR(P,M)
        REAL SR(4,4)
C 000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
C 000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
C DECLARATION DES TABLEAUX DE LA PHASE "RECHERCHE DU MEILLEURS INDICE DE CHAQUE
C PAQUET , (N,M,P,NN,INN,JNN,SP(N,M) SR(P,M) ) "
C       REAL SQ(P,M)
        REAL SQ(4,4)
C       INTEGER ISQ(P)
        INTEGER ISQ(4)
C 000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
C 0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
C DECLARATION DES TABLEAUX DE LA PHASE "ALLONGEMENT DES SUITES EXTRAITES,
C (M,P,NN,SQ(P,M),ST(NN-1,P,M),ISQ(P) ) "
C       REAL ST(NNN,P,M)
        REAL ST(18,4,4)
C       INTEGER ISTP(NNN,P)
        INTEGER ISTP(18,4)
C       INTEGER ISTQ(P)
        INTEGER ISTQ(4)
C       INTEGER JSQ(P)
        INTEGER JSQ(4)
C 0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
C 0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
C FIXATION DES CONSTANTES
        INTEGER P
        N=200
        M=4
        P=4
        NNN=16
C 0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
C
C///////////////////////////////////////////////////////////////////////
C PHASE DE DEFINITION DE SP ,(N,M,P, ALEATOIRE)
```

```
C/////////////////////////////////////////////////////////////////////////
C
C ON DEFINIT UNE SUITE ALEATOIRE  SP  DE N POINTS DE R**M  AYANT P POINTS D
C  D ACCUMULATION  DE FORCE PROBABLE 1/P , QUI SONT  (1,1,...,1),(2,2,...,2),
C ...,(P,P,...,P) .
C
      DO 860 K860=1,N
      DO 861 K861=1,M
      SP( K860,K861)=FLOAT(MOD(IFIX(1000.*SIN(FLOAT(K860))+2000.),P))  +1
     1  +1./(K860+K861+3.)
       SP(K860,K861)=SP(K860,K861)+(10.*SIN(FLOAT(K860+K861)))/K860
861   CONTINUE
      PRINT 862, K860,(SP(K860,K862),K862=1,M)
862   FORMAT(5X,/,5X,3HSP(,I4,4H )= ,10(F10.6,2H ,),(/,11(F10.6,2H ,)))
       IF(MOD(K860,25)) 556,557,556
557    PRINT 555
556    CONTINUE
860   CONTINUE
      PRINT 555
555    FORMAT (1H1)
C
C BOUCLE GENERALE DE L ALGORITHME
      DO 1 NN=1,NNN
       INN=(NN-1)*10+1
       JNN=(NN-1)*10+30
      PRINT 2,NN,INN,INN,JNN
2     FORMAT(5X///15X,6HETAPE ,I5,//10X,27HLES POINTS ETUDIES SONT SP(
     1 I5,6H ),SP(,I5,11H+1),...,SP(,I5,1H),///)
C
C ///////////////////////////////////////////////////////////////////////
C " PHASE SEPARATION,(N,M,P,NN,INN,JNN,SP(N,M) )"
C ///////////////////////////////////////////////////////////////////////
C
C ON RECHERCHE PARMI LES POINTS SL(INN),SL(INN+1),...,SL(JNN)
C P POINTS LE PLUS ELOIGNE POSSIBLE DEUX A DEUX , CES POINTS SERONT SR(1),SR(2),
C ...,SR(P) , LES INDICES CORRESPONDANTS SERONT ISR(1),ISR(2),...,ISR(P).
C ON  POSE  SR(1)=SP(JNN)
       DO 101 I101=1,M
       SR(1,I101)=SP(JNN,I101)
101     CONTINUE
       ISR(1)=JNN
C ON IMPRIME SR(1)
      II102=1
      PRINT 113,II102,JNN,(SR(1,IJ102),IJ102=1,M)
113   FORMAT(5X,/,5X,3HSR(,I3,5H)=SP(,I3,2H)=,//(5X,10(F10.7,2H ,),/))
C BOUCLE DONNANT SR(L1) POUR L1=2,3,...,P
       DO 103 L1=2,P
C ON PASSE EN REVUE LES SP(L2) POUR L2=JNN,JNN-1,...,INN
C DANS LE BUT DE DETERMINER SR(L1) ET ISR(L1)
       DO 104 I104=INN,JNN
       L2=JNN+INN-I104
C ON PASSE EN REVUE LES  SR(L3) POUR L3=1,2,...,L1-1
C DANS LE BUT DE DETERMINER CELUI QUI EST LE PLUS PROCHE DE SP(L2)
       L1M1=L1-1
       DO 105 L3=1,L1M1
C ON CALCULE LA DISTANCE ENTRE SR(L3) ET SP(L2)
      SIGM3=0
       DO 106 I106=1,M
```

```
      SIGM3=SIGM3+(SR(L3,I106)-SP(L2,I106))**2
106   CONTINUE
      IF (L3-1) 108,107,108
107   SIGM2=SIGM3
108   IF (SIGM2-SIGM3) 105,105,109
109   SIGM2=SIGM3
105   CONTINUE
      IF (L2-JNN) 111,110,111
110   SIGM1=SIGM2
111   IF (SIGM2-SIGM1) 104,104,112
112   SIGM1=SIGM2
      ISR(L1)=L2
104   CONTINUE
C REMPLISSAGE DE SR(LI)
      DO115 I115=1,M
      SR(L1,I115)=SP(ISR(L1),I115)
115   CONTINUE
C ON IMPRIME SR(LI)
      PRINT 113 ,L1,ISR(L1),(SR(L1,I113),I113=1,M)
103   CONTINUE
C
C ////////////////////////////////////////////////////////////////////////
C PHASE" RECHERCHE DU MEILLEURS INDICE DE CHAQUE PAQUET ,(N,M,P,NN,INN,JNN,
C SP(N,M),SR(P,M) ) "
C ////////////////////////////////////////////////////////////////////
C
C N,M,P,NN,INN,JNN SONT DES ENTIERS DEJA FIXES , SP(N,M),SR(P,M) SONT DES
C TABLEAUX REELS DEJA FIXES
C ON RECHERCHE DANS  LE PAQUET DES POINTS PROCHES DE SR(I) (POUR I=1,2,...,7" CE
C CELUI QUI A LE PLUS GRAND INDICE , CE POINT SERA NOTE  SQ(I)  ET L INDICE
C CORRESPONDANT ISQ(I) .
C
C ON POSE ISQ(I200)=0 I200=1,2,....,P
      DO 200 I200=1,P
      ISQ(I200)=0
200   CONTINUE
      IKL=0
C ON FAIT DEFILER LES POINTS  SP(LI1) LI1=JNN,JNN-1,....,INN
C DANS LE BUT DE DETERMINER DANS QUEL  PAQUET ILS SONT
      DO 201 I201=INN,JNN
      LI1=INN+JNN-I201
C ON FAIT DEFILER SR(LI2) LI2=1,2,....,P
      DO 202 LI2=1,P
C ON CALCULE LA DISTANCE ENTRE  SP(LI1) ET SR(LI2)
      SIGM3=0
      DO 203 I203=1,M
      SIGM3=SIGM3+(SR(LI2,I203)- SP(LI1,I203))**2
203   CONTINUE
      IF (LI2-1) 204,205,204
205   SIGM2=SIGM3
      IJK=LI2
204   IF(SIGM2-SIGM3) 202,206,206
206   SIGM2=SIGM3
      IJK=LI2
202   CONTINUE
      PRINT 220,LI1,IJK
220   FORMAT(5X,///,5X,3HSP(,I3,19H) EST ASSOCIE A SR(,I5,2H ),/)
C ON ROGARDE SI SR(IJK) A DEJA SON INDICE
```

```
      IF(ISQ(IJK)) 201,208,201
208   ISQ(IJK)=LI1
      IKL=IKL+1
C ON POSE SQ(IJK)=SP(LI1)
      DO 209 I209=1,M
      SQ(IJK,I209)=SP(LI1,I209)
209   CONTINUE
      PRINT 210,IJK,LI1,(SQ(IJK,I210),I210=1,M)
210   FORMAT(5X,//,5X,3HSQ(,I3,6H )=SP(,I5,3H )=,//,
     1 (5X,10(F10.6,2H ,),/))
      IF(IKL-P) 201,212,201
201   CONTINUE
212   CONTINUE
C
C ////////////////////////////////////////////////////////////////////////
C PHASE * ALLONGEMENT DES SUITES EXTRAITES  (M,P,NN,SQ(P,M),ST(NN-1,P,M)
C ISQ(P) ) *
C ////////////////////////////////////////////////////////////////////////
C
C ON DEFINIT ST(NN,KI1) KI1=1,2,...,P EN PRENANT PARMI LES SQ(KI2) KI2=1,2,...,P
C CELUI QUI EST LE PLUS PROCHE DE ST(NN-1,KI1)
C CHAQUE SQ(KI2) N EST UTILISE QU UNE SEULE FOIS
      IF(NN-1) 404,400,404
C ON TRAITE LE CAS SPECIAL OU NN=1
C ON POSE ST(1,I401)=SQ(I401)ISTQ(I401)=I401  ISTP(1,I401)=ISQ(I401)
C POUR I401=1,2,...,P
400   CONTINUE
      DO 401 I401=1,P
      DO 402 I402=1,M
      ST(1,I401,I402)=SQ(I401,I402)
402   CONTINUE
      ISTQ(I401)=I401
      ISTP(1,I401)=ISQ(I401)
C ON IMPRIME  ST(1,I401)=SQ(I401)=SP(ISTP(1,I401))=...
      PRINT 403,NN,I401,I401,ISTP(NN,I401),(SQ(I401,I403),I403=1,M)
403   FORMAT(5X,/,5X,3HST(,I3,2H ,I3,6H )=SQ(,I3,6H )=SP(,I5,4H  )=
     1 ,//,(5X,10(F10.6,2H ,),/))
401   CONTINUE
      GOTO 912
404   CONTINUE
C ON POSE JSQ(I900)=0   I900=1,2,...,P
      DO 900 I900=1,P
      JSQ(I900)=0
900   CONTINUE
C ON FAIT DEFILER LES POINTS ST(NN-1,KI1)  KI1=1,2,...,P  DANS LE BUT
C DE DETERMINER  QUOI PRENDRE POUR ST(NN,KI1)
      DO 901 KI1=1,P
C ON FAIT DEFILER LES POINTS SQ(KI2)  KI2=1,2,...,P POUR SAVOIR LEQUEL
C VA ETRE ST(NN,KI1)
      KMN=0
      DO 902 KI2=1,P
C ON REGARDE SI SQ(KI2) A DEJA ETE UTILISE
      IF(JSQ(KI2)) 902,903,902
903   KMN=KMN+1
C ON CALCULE LA DISTANCE ENTRE ST(NN-1,KI1) ET SQ(KI2)
      SIGM3=0
      DO 905 I905=1,M
      SIGM3=SIGM3+(ST(NN-1,KI1,I905)-SQ(KI2,I905))**2
```

```
905   CONTINUE
      IF(KMN-1) 907,906,907
906   SIGM2=SIGM3
      ISTQ(KI1)=KI2
907   IF(SIGM2-SIGM3) 902,902,908
908   SIGM2=SIGM3
      ISTQ(KI1)=KI2
902   CONTINUE
      JSQ(ISTQ(KI1))=1
      ISTP(NN,KI1)=ISQ(ISTQ(KI1))
C ON REMPLIT ST(NN,KI1)
      DO 909 I909=1,M
      ST(NN,KI1,I909)=SQ(ISTQ(KI1),I909)
909   CONTINUE
C ON IMPRIME  ST(NN,KI1)=SQ(   )=SP(   )=...
      PRINT 403,NN,KI1,ISTQ(KI1),ISTP(NN,KI1),(ST(NN,KI1,I910),I910=1,M)
901   CONTINUE
912   CONTINUE
1     CONTINUE
      PRINT 555
      DO 7 JPP=1,P
      PRINT 3 ,JPP
3     FORMAT(5X,///,5X, 22HSUITE EXTRAITE NUMERO ,I3,///)
      DO 4 NN2=1,NNN
      PRINT 6,JPP,NN2,ISTP(NN2,JPP),(ST(NN2,JPP,I116),I116=1,M)
6     FORMAT(5X,/,5X,2HST,I3,1H(,I3,6H )=SP(,I5,3H )=,/,
     1 (5X,10(F10.6,2H ,),/))
4     CONTINUE
      PRINT 555
7     CONTINUE
      STOP
      END
```

```
SP(  1 )=  11.292974 ,  3.577866 , -5.425169 , -7.464243 ,
SP(  2 )=   2.872266 , -1.641156 , -2.669021 ,  [illegible].714034 ,
SP(  3 )=  -0.379818 , -1.071414 ,  1.179726 ,  4.289954 ,
SP(  4 )=   1.727690 ,  3.412572 ,  5.742465 ,  6.564304 ,
SP(  5 )=   1.552279 ,  3.413972 ,  4.069625 ,  2.907570 ,
SP(  6 )=   2.194977 ,  2.739839 ,  1.770197 ,  0.170221 ,
SP(  7 )=   2.504277 ,  1.672073 ,  0.279750 , -0.357129 ,
SP(  8 )=   2.598480 ,  1.396895 ,  0.821441 ,  1.395950 ,
SP(  9 )=  -0.472455 , -0.039672 ,  0.470475 ,  1.529352 ,
SP( 10 )=   3.071438 ,  3.530093 ,  4.482667 ,  5.049430 ,
SP( 11 )=   0.578873 ,  1.444469 ,  1.959374 ,  1.646726 ,
SP( 12 )=   4.412639 ,  4.884328 ,  4.597462 ,  3.812712 ,
SP( 13 )=   1.820827 ,  1.555777 ,  0.831167 ,  0.310463 ,
SP( 14 )=   3.520046 ,  2.846986 ,  2.363286 ,  2.511199 ,
SP( 15 )=   2.860696 ,  2.409067 ,  2.546960 ,  3.145371 ,
SP( 16 )=   0.449126 ,  0.578252 ,  1.139127 ,  1.614068 ,
SP( 17 )=   2.605862 ,  3.133616 ,  3.580504 ,  3.533816 ,
SP( 18 )=   2.128718 ,  2.550670 ,  2.506474 ,  2.035082 ,
SP( 19 )=   2.523975 ,  2.482011 ,  2.035341 ,  1.593081 ,
SP( 20 )=   1.459993 ,  1.035574 ,  0.615351 ,  0.584248 ,
SP( 21 )=   1.035785 ,  0.635499 ,  0.605809 ,  0.972690 ,
SP( 22 )=   3.653814 ,  3.625410 ,  3.975554 ,  4.381099 ,
SP( 23 )=   1.643307 ,  1.978169 ,  2.366029 ,  2.449148 ,
SP( 24 )=   2.960567 ,  3.352214 ,  3.431823 ,  3.145135 ,
SP( 25 )=   4.339505 ,  4.415883 ,  4.140620 ,  3.765796 ,
SP( 26 )=   3.401169 ,  3.136452 ,  2.776006 ,  2.650290 ,
SP( 27 )=   1.132593 ,  0.785460 ,  0.664365 ,  0.879768 ,
SP( 28 )=   2.794237 ,  2.677434 ,  2.685112 ,  3.225509 ,
SP( 29 )=   0.689602 ,  0.890038 ,  1.218718 ,  1.372575 ,
SP( 30 )=   3.894732 ,  4.212379 ,  4.361081 ,  4.203366 ,
SP( 31 )=   4.206450 ,  4.350329 ,  4.197698 ,  3.888192 ,
SP( 32 )=   4.340250 ,  4.192364 ,  3.892509 ,  3.715709 ,
SP( 33 )=   4.187354 ,  3.896563 ,  3.725101 ,  3.829988 ,
SP( 34 )=   1.906379 ,  1.733940 ,  1.835723 ,  2.111557 ,
SP( 35 )=   3.742274 ,  3.841131 ,  4.109066 ,  4.299179 ,
SP( 36 )=   0.846239 ,  1.106714 ,  1.291530 ,  1.230230 ,
SP( 37 )=   1.104489 ,  1.284294 ,  1.224637 ,  0.979856 ,
SP( 38 )=   1.277439 ,  1.219337 ,  0.985984 ,  0.781032 ,
SP( 39 )=   4.214310 ,  3.982054 ,  3.787215 ,  3.808465 ,
SP( 40 )=   1.983071 ,  1.793091 ,  1.813795 ,  2.025702 ,
SP( 41 )=   1.798679 ,  1.818867 ,  2.025594 ,  2.228370 ,
SP( 42 )=   3.823697 ,  4.025491 ,  4.223429 ,  4.235119 ,
SP( 43 )=   1.025393 ,  1.218717 ,  1.230125 ,  1.048737 ,
SP( 44 )=   2.214220 ,  2.225359 ,  2.048064 ,  1.845004 ,
SP( 45 )=   3.220804 ,  3.047460 ,  2.848834 ,  2.807234 ,
SP( 46 )=   2.046863 ,  1.852595 ,  1.611892 ,  1.961829 ,
SP( 47 )=   3.856149 ,  3.816303 ,  3.963042 ,  4.161119 ,
SP( 48 )=   3.820531 ,  3.964206 ,  4.158149 ,  4.223729 ,
SP( 49 )=   2.965322 ,  3.155299 ,  3.219534 ,  3.098658 ,
SP( 50 )=   2.152564 ,  2.215507 ,  2.097041 ,  1.905786 ,
```

```
SP( 51 )=  3.211637 ,  3.095489 ,  2.907977 ,  2.821210 ,
SP( 52 )=  3.093995 ,  2.910084 ,  2.824980 ,  2.916650 ,
SP( 53 )=  3.912111 ,  3.828607 ,  3.918543 ,  4.098961 ,
SP( 54 )=  1.832190 ,  1.920364 ,  2.097437 ,  2.200257 ,
SP( 55 )=  0.922121 ,  1.095968 ,  1.196915 ,  1.131899 ,
SP( 56 )=  3.094552 ,  3.193691 ,  3.129831 ,  2.961442 ,
SP( 57 )=  1.195580 ,  1.127836 ,  0.962397 ,  0.846131 ,
SP( 58 )=  1.125911 ,  0.963319 ,  0.849053 ,  0.887939 ,
SP( 59 )=  0.964210 ,  0.851876 ,  0.893099 ,  1.043516 ,
SP( 60 )=  3.854605 ,  3.692186 ,  4.043043 ,  4.168262 ,
SP( 61 )=  1.894206 ,  2.042586 ,  2.165749 ,  2.150253 ,
SP( 62 )=  1.042144 ,  1.163316 ,  1.148065 ,  1.010209 ,
SP( 63 )=  4.160960 ,  4.145947 ,  4.010277 ,  3.878488 ,
SP( 64 )=  1.143897 ,  1.010343 ,  0.880610 ,  0.873783 ,
SP( 65 )=  3.010406 ,  2.882667 ,  2.875940 ,  2.996229 ,
SP( 66 )=  1.884661 ,  1.878034 ,  1.996496 ,  2.130955 ,
SP( 67 )=  0.880065 ,  0.996756 ,  1.129204 ,  1.155460 ,
SP( 68 )=  2.997  7 ,  3.127505 ,  3.153373 ,  3.050660 ,
SP( 69 )=  2.125956 ,  2.151346 ,  2.050118 ,  1.915474 ,
SP( 70 )=  2.149377 ,  2.049593 ,  1.916475 ,  1.872251 ,
SP( 71 )=  4.049083 ,  3.917837 ,  3.974233 ,  3.958202 ,
SP( 72 )=  1.919162 ,  1.876160 ,  1.958961 ,  2.091284 ,
SP( 73 )=  3.873035 ,  3.959699 ,  4.090207 ,  4.149420 ,
SP( 74 )=  2.960417 ,  3.089159 ,  3.147570 ,  3.061801 ,
SP( 75 )=  1.085139 ,  1.145769 ,  1.083875 ,  0.952980 ,
SP( 76 )=  3.144615 ,  3.079973 ,  2.953758 ,  2.881272 ,
SP( 77 )=  4.079095 ,  3.954517 ,  3.842971 ,  3.930100 ,
SP( 78 )=  1.955256 ,  1.884625 ,  1.931149 ,  2.051922 ,
SP( 79 )=  3.886239 ,  3.932172 ,  4.051414 ,  4.134205 ,
SP( 80 )=  2.933168 ,  3.050918 ,  3.132672 ,  3.103142 ,
SP( 81 )=  3.050434 ,  3.131178 ,  3.102011 ,  2.989625 ,
SP( 82 )=  2.129720 ,  2.100906 ,  1.989890 ,  1.898618 ,
SP( 83 )=  1.099830 ,  0.990149 ,  0.899975 ,  0.912096 ,
SP( 84 )=  1.990401 ,  1.901299 ,  1.913275 ,  2.015202 ,
SP( 85 )=  3.902593 ,  3.914426 ,  4.015152 ,  4.112053 ,
SP( 86 )=  0.915550 ,  1.015104 ,  1.110877 ,  1.114705 ,
SP( 87 )=  3.015057 ,  3.109727 ,  3.113510 ,  3.022820 ,
SP( 88 )=  4.108603 ,  4.112343 ,  4.022682 ,  3.921949 ,
SP( 89 )=  1.111201 ,  1.022547 ,  0.922945 ,  0.903367 ,
SP( 90 )=  2.022414 ,  1.923918 ,  1.905051 ,  1.963059 ,
SP( 91 )=  1.924870 ,  1.906209 ,  1.983358 ,  2.085286 ,
SP( 92 )=  0.907342 ,  0.983651 ,  1.084471 ,  1.117312 ,
SP( 93 )=  3.983937 ,  4.083672 ,  4.115862 ,  4.050817 ,
SP( 94 )=  3.082891 ,  3.114737 ,  3.050383 ,  2.949801 ,
SP( 95 )=  4.112635 ,  4.049957 ,  3.949544 ,  3.904624 ,
SP( 96 )=  4.049541 ,  3.950172 ,  3.905720 ,  3.956962 ,
SP( 97 )=  3.950788 ,  3.906793 ,  3.957505 ,  4.056215 ,
SP( 98 )=  2.907844 ,  2.958038 ,  3.055739 ,  3.111036 ,
SP( 99 )=  0.958560 ,  1.055274 ,  1.110610 ,  1.072361 ,
SP( 100 )=  2.054017 ,  2.109006 ,  2.071733 ,  1.977182 ,
```

```
SP( 101 )=  1.108021 ,  1.071115 ,  0.977501 ,  0.913167 ,
SP( 102 )=  3.076511 ,  2.977813 ,  2.914103 ,  2.937884 ,
SP( 103 )=  2.978119 ,  2.915032 ,  2.938577 ,  3.027030 ,
SP( 104 )=  2.915938 ,  2.939256 ,  3.026857 ,  3.098125 ,
SP( 105 )=  1.939921 ,  2.026089 ,  2.097277 ,  2.086713 ,
SP( 106 )=  1.026523 ,  1.096443 ,  1.085979 ,  1.004675 ,
SP( 107 )=  1.095627 ,  1.085258 ,  1.004714 ,  0.927973 ,
SP( 108 )=  3.084552 ,  3.004752 ,  2.928720 ,  2.926239 ,
SP( 109 )=  1.004759 ,  0.929455 ,  0.927045 ,  0.999705 ,
SP( 110 )=  3.930176 ,  3.927787 ,  3.999785 ,  4.079998 ,
SP( 111 )=  3.928515 ,  3.999865 ,  4.079266 ,  4.093648 ,
SP( 112 )=  2.999943 ,  3.078634 ,  3.092888 ,  3.029532 ,
SP( 113 )=  3.078013 ,  3.092141 ,  3.029346 ,  2.947298 ,
SP( 114 )=  1.091407 ,  1.029162 ,  0.947833 ,  0.922127 ,
SP( 115 )=  2.028981 ,  1.948359 ,  1.922876 ,  1.975900 ,
SP( 116 )=  0.948877 ,  0.923613 ,  0.976178 ,  1.056163 ,
SP( 117 )=  2.924555 ,  2.976452 ,  3.057755 ,  3.093432 ,
SP( 118 )=  2.976721 ,  3.057334 ,  3.092710 ,  3.050262 ,
SP( 119 )=  1.055920 ,  1.091998 ,  1.049938 ,  0.969289 ,
SP( 120 )=  1.091298 ,  1.049559 ,  0.969611 ,  0.924900 ,
SP( 121 )=  3.049215 ,  2.969928 ,  2.925565 ,  2.956900 ,
SP( 122 )=  2.970239 ,  2.926259 ,  2.957317 ,  3.034800 ,
SP( 123 )=  0.926923 ,  0.957728 ,  1.034579 ,  1.086766 ,
SP( 124 )=  0.958132 ,  1.034363 ,  1.086129 ,  1.065781 ,
SP( 125 )=  4.034150 ,  4.085562 ,  4.065316 ,  3.992097 ,
SP( 126 )=  2.984884 ,  2.964857 ,  1.992220 ,  1.933701 ,
SP( 127 )=  1.064467 ,  0.992341 ,  0.934282 ,  0.943557 ,
SP( 128 )=  1.992459 ,  1.934854 ,  1.944056 ,  2.011554 ,
SP( 129 )=  2.935417 ,  2.944547 ,  3.011521 ,  3.074714 ,
SP( 130 )=  1.945031 ,  2.011490 ,  2.074196 ,  2.075446 ,
SP( 131 )=  1.011459 ,  1.073686 ,  1.074925 ,  1.013991 ,
SP( 132 )=  2.073183 ,  2.074413 ,  2.013945 ,  1.947311 ,
SP( 133 )=  1.073909 ,  1.013890 ,  0.947763 ,  0.936276 ,
SP( 134 )=  2.013841 ,  1.948206 ,  1.936835 ,  1.990072 ,
SP( 135 )=  0.948643 ,  0.937326 ,  0.990199 ,  1.058603 ,
SP( 136 )=  1.937840 ,  1.990322 ,  2.058224 ,  2.079068 ,
SP( 137 )=  1.990445 ,  2.057850 ,  2.078542 ,  2.033452 ,
SP( 138 )=  4.057482 ,  4.078024 ,  4.033260 ,  3.964302 ,
SP( 139 )=  1.077513 ,  1.033071 ,  0.964609 ,  0.935036 ,
SP( 140 )=  1.032684 ,  0.964911 ,  0.935539 ,  0.971730 ,
SP( 141 )=  3.965208 ,  3.936045 ,  3.971978 ,  4.039928 ,
SP( 142 )=  0.936543 ,  0.972224 ,  1.039695 ,  1.076834 ,
SP( 143 )=  1.972465 ,  2.039465 ,  2.076394 ,  2.049256 ,
SP( 144 )=  1.039238 ,  1.075910 ,  1.048961 ,  0.983127 ,
SP( 145 )=  4.075433 ,  4.048669 ,  3.983289 ,  3.939361 ,
SP( 146 )=  1.048381 ,  0.983449 ,  0.939822 ,  0.957571 ,
SP( 147 )=  1.983606 ,  1.940275 ,  1.957934 ,  2.020244 ,
SP( 148 )=  1.940723 ,  1.958233 ,  2.020151 ,  2.069513 ,
SP( 149 )=  1.958557 ,  2.020060 ,  2.069096 ,  2.060530 ,
SP( 150 )=  2.019969 ,  2.068672 ,  2.060169 ,  2.002240 ,
```

```
SP( 151 )=   3.068260 ,  3.059813 ,  3.002268 ,  2.948493 ,
SP( 152 )=   2.059462 ,  2.002295 ,  1.948074 ,  1.948276 ,
SP( 153 )=   3.002321 ,  2.949249 ,  2.948655 ,  3.001050 ,
SP( 154 )=   2.949619 ,  2.949029 ,  3.001083 ,  3.057887 ,
SP( 155 )=   2.949399 ,  3.001117 ,  3.057553 ,  3.066786 ,
SP( 156 )=   3.001150 ,  3.057224 ,  3.066398 ,  3.020199 ,
SP( 157 )=   1.056899 ,  1.065013 ,  1.020110 ,  0.961358 ,
SP( 158 )=   4.065635 ,  4.020021 ,  3.961640 ,  3.944133 ,
SP( 159 )=   4.019934 ,  3.961920 ,  3.944523 ,  3.983702 ,
SP( 160 )=   3.962196 ,  3.944907 ,  3.983841 ,  4.043170 ,
SP( 161 )=   1.945287 ,  1.983979 ,  2.042939 ,  2.067926 ,
SP( 162 )=   1.984115 ,  2.042711 ,  2.067544 ,  2.035748 ,
SP( 163 )=   2.042485 ,  2.067166 ,  2.035566 ,  1.976707 ,
SP( 164 )=   3.066792 ,  3.035385 ,  2.976885 ,  2.945045 ,
SP( 165 )=   2.035207 ,  1.977060 ,  1.945413 ,  1.969328 ,
SP( 166 )=   3.977234 ,  3.945777 ,  3.969548 ,  4.026662 ,
SP( 167 )=   0.945137 ,  0.969766 ,  1.026537 ,  1.064225 ,
SP( 168 )=   2.969988 ,  3.026414 ,  3.063877 ,  3.047695 ,
SP( 169 )=   3.026292 ,  3.063533 ,  3.047646 ,  2.993207 ,
SP( 170 )=   3.063193 ,  3.047399 ,  2.993280 ,  2.950563 ,
SP( 171 )=   1.047155 ,  0.993353 ,  0.950886 ,  0.958767 ,
SP( 172 )=   0.993425 ,  0.951204 ,  0.959040 ,  1.009699 ,
SP( 173 )=   1.951518 ,  1.959309 ,  2.009675 ,  2.056282 ,
SP( 174 )=   3.959575 ,  4.009651 ,  4.055991 ,  4.055960 ,
SP( 175 )=   3.009628 ,  3.055702 ,  3.055672 ,  3.009535 ,
SP( 176 )=   3.055416 ,  3.055387 ,  3.009512 ,  2.959943 ,
SP( 177 )=   2.055104 ,  2.009489 ,  1.960200 ,  1.952527 ,
SP( 178 )=   2.009467 ,  1.960455 ,  1.952824 ,  1.993563 ,
SP( 179 )=   2.960706 ,  2.953116 ,  2.993629 ,  3.044967 ,
SP( 180 )=   2.953408 ,  2.993694 ,  3.044746 ,  3.059602 ,
SP( 181 )=   3.993759 ,  4.044529 ,  4.059301 ,  4.024468 ,
SP( 182 )=   2.044313 ,  2.059006 ,  2.024364 ,  1.972213 ,
SP( 183 )=   1.058712 ,  1.024260 ,  0.972394 ,  0.950772 ,
SP( 184 )=   1.024157 ,  0.972572 ,  0.951068 ,  0.979391 ,
SP( 185 )=   2.972749 ,  2.951361 ,  2.979530 ,  3.031333 ,
SP( 186 )=   1.951651 ,  1.979669 ,  2.031193 ,  2.053825 ,
SP( 187 )=   2.979805 ,  3.031054 ,  3.058539 ,  3.036967 ,
SP( 188 )=   1.030916 ,  1.058255 ,  1.036793 ,  0.986248 ,
SP( 189 )=   4.057975 ,  4.036631 ,  3.986348 ,  3.953331 ,
SP( 190 )=   2.036465 ,  1.986446 ,  1.953603 ,  1.968137 ,
SP( 191 )=   2.986545 ,  2.953873 ,  2.968301 ,  3.016539 ,
SP( 192 )=   1.954140 ,  1.968493 ,  2.016479 ,  2.053958 ,
SP( 193 )=   1.968682 ,  2.016420 ,  2.053705 ,  2.046232 ,
SP( 194 )=   2.016361 ,  2.053453 ,  2.046020 ,  2.000672 ,
SP( 195 )=   4.053205 ,  4.045809 ,  4.000893 ,  3.959728 ,
SP( 196 )=   4.045601 ,  4.000914 ,  3.959959 ,  3.960369 ,
SP( 197 )=   4.000935 ,  3.960188 ,  3.960595 ,  4.001760 ,
SP( 198 )=   0.960414 ,  0.960820 ,  1.001776 ,  1.045606 ,
SP( 199 )=   2.961041 ,  3.001791 ,  3.045402 ,  3.051754 ,
SP( 200 )=   3.001807 ,  3.045196 ,  3.051519 ,  3.014935 ,
```

SUITE EXTRAITE NUMERO 1

```
ST  1(  1 )=SP(   37 )=
  3.894732 ,  4.212379 ,  4.361081 ,  4.203386 ,

ST  1(  2 )=SP(   39 )=
  4.214310 ,  3.982054 ,  3.787215 ,  3.808463 ,

ST  1(  3 )=SP(   48 )=
  3.820531 ,  3.964206 ,  4.158149 ,  4.223729 ,

ST  1(  4 )=SP(   60 )=
  3.854605 ,  3.892186 ,  4.043043 ,  4.168262 ,

ST  1(  5 )=SP(   63 )=
  4.160965 ,  4.145947 ,  4.010277 ,  3.878488 ,

ST  1(  6 )=SP(   79 )=
  3.886239 ,  3.932172 ,  4.051414 ,  4.134205 ,

ST  1(  7 )=SP(   88 )=
  4.108603 ,  4.112343 ,  4.022682 ,  3.921949 ,

ST  1(  8 )=SP(   97 )=
  3.950788 ,  3.916793 ,  3.957505 ,  4.056215 ,

ST  1(  9 )=SP(  110 )=
  3.930176 ,  3.927787 ,  3.999785 ,  4.079908 ,

ST  1( 10 )=SP(  111 )=
  3.928515 ,  3.999865 ,  4.079266 ,  4.093648 ,

ST  1( 11 )=SP(  125 )=
  4.034150 ,  4.085502 ,  4.065316 ,  3.992097 ,

ST  1( 12 )=SP(  138 )=
  4.057482 ,  4.078024 ,  4.033260 ,  3.964302 ,

ST  1( 13 )=SP(  145 )=
  4.075433 ,  4.046669 ,  3.983289 ,  3.939361 ,

ST  1( 14 )=SP(  160 )=
  3.962196 ,  3.974907 ,  3.983841 ,  4.043173 ,

ST  1( 15 )=SP(  166 )=
  3.977234 ,  3.945777 ,  3.969548 ,  4.026662 ,

ST  1( 16 )=SP(  174 )=
  3.959575 ,  4.009651 ,  4.055991 ,  4.055960 ,

ST  1( 17 )=SP(  189 )=
  4.057975 ,  4.036631 ,  3.986343 ,  3.953331 ,

ST  1( 18 )=SP(  197 )=
  4.000935 ,  3.960188 ,  3.960595 ,  4.001760 ,
```

SUITE EXTRAITE NUMERO 2

```
ST  2(  1 )=SP(    1 )=
 11.292974 ,  3.577866 , -5.425169 , -7.464243 ,

ST  2(  2 )=SP(   38 )=
  1.277439 ,  1.219337 ,  0.987934 ,  0.781032 ,

ST  2(  3 )=SP(   43 )=
  1.025393 ,  1.218717 ,  1.230125 ,  1.048737 ,

ST  2(  4 )=SP(   59 )=
  0.964210 ,  0.851876 ,  0.890099 ,  1.043516 ,

ST  2(  5 )=SP(   67 )=
  0.880665 ,  0.996756 ,  1.129204 ,  1.155460 ,

ST  2(  6 )=SP(   75 )=
  1.088139 ,  1.145759 ,  1.083875 ,  0.952930 ,

ST  2(  7 )=SP(   89 )=
  1.111201 ,  1.022547 ,  0.922945 ,  0.903867 ,

ST  2(  8 )=SP(   99 )=
  0.958560 ,  1.055274 ,  1.110010 ,  1.072361 ,

ST  2(  9 )=SP(  109 )=
  1.004789 ,  0.929435 ,  0.927045 ,  0.999705 ,

ST  2( 10 )=SP(  120 )=
  1.091298 ,  1.049559 ,  0.969611 ,  0.924930 ,

ST  2( 11 )=SP(  127 )=
  1.064407 ,  0.992341 ,  0.934282 ,  0.943557 ,

ST  2( 12 )=SP(  140 )=
  1.032834 ,  0.964911 ,  0.935539 ,  0.971730 ,

ST  2( 13 )=SP(  146 )=
  1.048381 ,  0.983449 ,  0.939822 ,  0.957571 ,

ST  2( 14 )=SP(  157 )=
  1.056899 ,  1.066013 ,  1.020110 ,  0.961359 ,

ST  2( 15 )=SP(  167 )=
  0.946137 ,  0.969766 ,  1.026537 ,  1.064225 ,

ST  2( 16 )=SP(  172 )=
  0.993425 ,  0.951234 ,  0.959040 ,  1.039699 ,

ST  2( 17 )=SP(  183 )=
  1.030916 ,  1.058255 ,  1.036798 ,  0.956248 ,

ST  2( 18 )=SP(  198 )=
  0.960414 ,  0.960820 ,  1.001776 ,  1.045606 ,
```

```
SUITE EXTRAITE NUMERO   3

ST  3(  1 )=SP(   20 )=
   1.459993 ,  1.035574 ,  0.615351 ,  0.584248 ,
ST  3(  2 )=SP(   40 )=
   1.983071 ,  1.793091 ,  1.813795 ,  2.025702 ,
ST  3(  3 )=SP(   50 )=
   2.152564 ,  2.215507 ,  2.097041 ,  1.905786 ,
ST  3(  4 )=SP(   54 )=
   1.832100 ,  1.926364 ,  2.097437 ,  2.200257 ,
ST  3(  5 )=SP(   70 )=
   2.149377 ,  2.049593 ,  1.916475 ,  1.872251 ,
ST  3(  6 )=SP(   78 )=
   1.955256 ,  1.884625 ,  1.931149 ,  2.051922 ,
ST  3(  7 )=SP(   90 )=
   2.022414 ,  1.975913 ,  1.905051 ,  1.983059 ,
ST  3(  8 )=SP(  100 )=
   2.054817 ,  2.109006 ,  2.071733 ,  1.977182 ,
ST  3(  9 )=SP(  105 )=
   1.939921 ,  2.026689 ,  2.097277 ,  2.086713 ,
ST  3( 10 )=SP(  115 )=
   2.028981 ,  1.948359 ,  1.922876 ,  1.975900 ,
ST  3( 11 )=SP(  130 )=
   1.945031 ,  2.011491 ,  2.074196 ,  2.075446 ,
ST  3( 12 )=SP(  137 )=
   1.990445 ,  2.057850 ,  2.078542 ,  2.033452 ,
ST  3( 13 )=SP(  150 )=
   2.019969 ,  2.068672 ,  2.064169 ,  2.002242 ,
ST  3( 14 )=SP(  152 )=
   2.059462 ,  2.002295 ,  1.948874 ,  1.948276 ,
ST  3( 15 )=SP(  165 )=
   2.035207 ,  1.977262 ,  1.945413 ,  1.969328 ,
ST  3( 16 )=SP(  178 )=
   2.009467 ,  1.960455 ,  1.952824 ,  1.993563 ,
ST  3( 17 )=SP(  190 )=
   2.036465 ,  1.986446 ,  1.953603 ,  1.968107 ,
ST  3( 18 )=SP(  194 )=
   2.016361 ,  2.053453 ,  2.046020 ,  2.000872 ,

SUITE EXTRAITE NUMERO   4

ST  4(  1 )=SP(   29 )=
   0.089602 ,  0.890088 ,  1.218718 ,  1.372575 ,
ST  4(  2 )=SP(   28 )=
   2.794237 ,  2.677434 ,  2.885112 ,  3.225509 ,
ST  4(  3 )=SP(   49 )=
   2.965322 ,  3.155299 ,  3.219534 ,  3.098658 ,
ST  4(  4 )=SP(   56 )=
   3.094552 ,  3.193691 ,  3.129831 ,  2.961442 ,
ST  4(  5 )=SP(   68 )=
   2.997007 ,  3.127505 ,  3.153373 ,  3.050660 ,
ST  4(  6 )=SP(   80 )=
   2.933168 ,  3.053918 ,  3.132672 ,  3.103142 ,
ST  4(  7 )=SP(   87 )=
   3.015057 ,  3.109727 ,  3.113510 ,  3.022620 ,
ST  4(  8 )=SP(   98 )=
   2.957844 ,  2.958038 ,  3.055739 ,  3.111036 ,
ST  4(  9 )=SP(  108 )=
   3.084552 ,  3.004752 ,  2.928720 ,  2.926289 ,
ST  4( 10 )=SP(  118 )=
   2.976721 ,  3.057334 ,  3.092710 ,  3.050262 ,
ST  4( 11 )=SP(  129 )=
   2.935417 ,  2.944547 ,  3.011521 ,  3.074714 ,
ST  4( 12 )=SP(  129 )=
   2.935417 ,  2.944547 ,  3.011521 ,  3.074714 ,
ST  4( 13 )=SP(  129 )=
   2.935417 ,  2.944547 ,  3.011521 ,  3.074714 ,
ST  4( 14 )=SP(  156 )=
   3.001150 ,  3.067224 ,  3.066398 ,  3.020199 ,
ST  4( 15 )=SP(  170 )=
   3.063193 ,  3.047399 ,  2.993280 ,  2.950563 ,
ST  4( 16 )=SP(  180 )=
   2.953408 ,  2.993694 ,  3.044746 ,  3.059602 ,
ST  4( 17 )=SP(  187 )=
   2.979805 ,  3.031654 ,  3.058539 ,  3.036967 ,
ST  4( 18 )=SP(  201 )=
   3.001807 ,  3.045193 ,  3.051519 ,  3.014935 ,
```

BIBLIOGRAPHIE

S. BANACH :

[1] *"Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales."*
Fund. Math. 3 (1922) p 133-181.

C. BERGE :

[1] *"Espaces topologiques, fonctions multivoques."*
Dunod, Paris 1966.

[2] *"Graphes et Hypergraphes."*
Dunod, Paris 1973.

P. BERTIER et J.M. BOUROCHE :

[1] *"Analyse des données multidimensionnelles."*
Presses Universitaires de France, Paris 1975.

N. BOURBAKI :

[1] *"Théorie des ensembles."*
Hermann, Paris 1964.

[2] *"Topologie générale."*
Hermann, Paris 1971.

C. BREZINSKI :

[1] *"Accélération de la convergence en analyse numérique."*
Cours de D.E.A., Lille 1973.

G. CHOQUET :

[1] *"Cours d'analyse ; Tome II : Topologie."*
Masson, Paris 1969.

M. COSNARD :

[1] *"Caractérisation de la convergence locale de la méthode des approximations successives."*
R.A.I.R.O. Analyse Numérique, Vol 11 n° 3 (1977) p 225-240.

[2] *"Sur les traces du théorème de Banach : un tour d'horizon des résultats de base sur les problèmes de points fixes."*
R.R. n° 44 Math. Appliquées, Grenoble 1976.

J. DENEL :

[1] *"Nouvelles notions de continuité des applications multivoques et application à l'optimisation."*
Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, Pub. n° 83, Mars 1977.

[2] *"Un algorithme général d'optimisation : application à la linéarisation."*
Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, Pub. n° 99, Octobre 1977.

[3] *"Extensions of the continuity of point-to-set maps : application to fixed point algorithms."*
A paraître dans Mathematical Programming Studies n° 10.

J. DENY :

[1] *"Cours de Topologie".*
Polycopié, Université de Paris XI 1972.

J.B. DIAZ et F.T. METCALF :

[1] *"On the structure of the set of subsequential limit points of successive approximations."*
Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), p 516-519.

[2] *"On the set of subsequential limit points of successive approximations."*
Trans. Amer. Math. Soc. 135 (1969), p 459-485.

E. DIDAY et L. LEBART :

[1] *"L'analyse des données."*
La Recherche n° 74 (1977), p 15-25.

J. DUGUNDJI :

[1] *"Topology."*
Allyn and Bacon, Boston 1965.

B.C. EAVES :

[1] *"Computing Kakutani Fixed Points."*
S.I.A.M. J. Appl. Math. Vol 21 n° 2 (1971) p 236-244.

M. EDELSTEIN :

[1] *"On fixed and periodique points under contractive mappings."*
J. London Math. Soc., 37 (1962) p 74-79.

[2] *"On non expansive mapping."*
Proc. A.M.S., 15(1964) p 689-695.

[3] *"A remark on a theorem of M.A. Kranoselki."*
Ame. Math. Monthly 73 (1966) p 509-510.

J.C. FIOROT :

[1] *"Contribution à la convergence des algorithmes d'optimisation."*
Thèse, Lille 1977.

J.C. FIOROT et P. HUARD :

[1] *"Composition et Réunion d'Algorithmes généraux."*
Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, Pub n° 41, Mai 1974.

[2] *"Composition and Union of General Algorithm of Optimization."*
A paraître dans Mathematical Programming Studies n° 10.

FRECHET :

[1] *"Les espaces abstraits."*
Gauthier Villars, Paris 1951.

S.A. GAAL :

[1] *"Point set topology."*
Academic Press, New York 1964.

B. GERMAIN-BONNE :

[1] *"Estimation de la limite de suites et formalisation des procédés d'accélération de convergence."*
Thèse, Lille 1978.

J. GREEVER :

[1] *"Theory and examples of point-set topology."*
Cole Publishing Company, Belmont 1967.

H. HALBERSTAM et K.F. ROTH :

[1] *"Sequences."*
Clarendon Press, Oxford 1966.

P. HUARD :

[1] *"Optimisation dans* $\mathbb{R}^n$ *- $2^{\text{ème}}$ partie : Algorithmes généraux."*.
Polycopié. Lille 1972

[2] *"Algorithmes d'optimisation et fonctions multivoques."*
E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches
Série C, Vol 2, (1972) p 43-62.

[3] *"Tentatives de synthèse dans les méthodes de programmation non linéaires"*.
Cahier Centre Etude Recherche Op. Vol 16 (1974) p 347-361.

[4] *"Optimization algorithms and point-to-set maps."*
Mathematical Programming 8, (1975) p 308-331.

[5] *"Extension of Zangwill's theorem."*
A paraître dans Mathematical Programming Studies n° 10.

S. KAKUTANI :

[1] *"A generalisation of Brouwer's fixed point theorem."*
Duke Math. J., 8 (1941) p 457-459.

J.L. KELLEY

[1] *"General topology."*
D. Van Nostrand Company, Princeton 1955.

J.L. KRIVINE :

[1] *"Théorie axiomatique des ensembles".*
Presses Universitaires de France, Paris 1972.

J. LELONG-FERRAND :

[1] *"Exercices résolus d'analyse".*
Dunod, Paris 1977.

J. LELONG-FERRAND et J.M. ARNAUDIES :

[1] *"Cours de mathématiques - Tome 2 : Analyse."*
Dunod, Paris 1972.

F.T. METCALF et T.D. ROGERS :

[1] *"The cluster set of sequences of successive approximation."*
Jour. Math. Anal and Appl. 31, (1970), p 206-212.

G.G.L. MEYER et R.C. RAUP :

[1] *"On the structure of cluster point sets of iterativily generated sequences."*
A paraître.

G.G.L. MEYER

[1] *"Asymptotic properties of sequences iteratively generated by point-to-set maps."*
A paraître.

[2] *"Convergence conditions for a type of algorithm model."*
S.I.A.M. J. Control Optimization Vol. 15 n° 5 (1977) p 779-784.

[3] *"Conditions de convergence pour les algorithmes itératifs monotones, autonomes et non déterministes."*
R.A.I.R.O. An. Num. Vol. 11 n° 1 (1977) p 61-74.

R.R. MEYER :

[1] *"Sufficient conditions for the convergence of monotonic Mathematical programming algorithms".*
Jour. of Computer and System Sciences 12 (1976) p 108-121.

[2] *"On the convergence of Algorithms with restart."*
S.I.A.M. J. Num. Ana. Vol. 13 n° 5 (1976) p 696-704.

[3] *"The validity of a family of optimization methods."*
S.I.A.M. J. Control and Optimization Vol. 8 n° 1 (1970) p 41-54.

A.M. OSTROWSKI :

[1] *"Solution of equation and systems of equations."*
Academic Press, New York 1966.

W.J. PERVIN :

[1] *"Foundations of general topology."*
Academic Press, New-York 1964.

E. POLAK :

[1] *"On the convergence of optimization algorithms".*
Rev. Fr. Inf. Rech. Ope. Vol. 16 (1969) p 17-34.

[2] *"Computational Methods in Optimization : A Unified Approach."*
Academic Press, New-York 1971.

A.N. SARKOVSKI :

[1] *"Attracting and Attracted sets."*
Soviet Mathematics (Doklody) Vol. 6, n° 1 (1965) p 268-270.

L. SCHWARTZ :

[1] *"Analyse ; topologie et analyse fonctionnelle."*
Hermann Paris 1970.

L.A. STEEN et J.A. SEEBACH :

[1] *"Counterexamples in topology."*
Holt, Rinehart and Winston, New-York 1970.

S. ULAM et P. STEIN :

[1] *"Non-Linear Transformation Studies On Electronic Computers."*
Rozprawy Matematyczne, 39 (1964) p 1-66.

W.I. ZANGWILL :

[1] *"Nonlinear Programming : A Unified Approach."*
Prentice Hall, Englewood Cliffs (New Jersey) 1969.