UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES

par

Mekki TERBECHE

PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES OPÉRATEURS HOLOMORPHES DE TYPE DE FUCHS

Membres du Jury : MM. Gérard CŒURE, Président
Jean-Claude DE PARIS, Rapporteur
Robert BERZIN, Examinateur
Gérard HECQUET, Examinateur

Soutenue le 18 mars 1980

"بسم الله الرحمن الرحيم"

<< وما أوتيتم من العلم إلا قليلا >>

(قرآن كريم)

"Au nom de Dieu, l'infiniment Bon le toujours Misēricordieux"

<<Tout ce que vous avez acquis comme savoir n'est qu'infime>>

(CORAN)

A mon père,

à ma mère,

à mes frères,

à mes soeurs,

à ma famille,

à mes amis,...

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Gérard COEURÉ qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Que Messieurs Robert BERZIN et Gérard HECQUET soient également remerciés pour avoir bien voulu faire partie du jury.

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur le Professeur Jean-Claude DE PARIS qui m'a accueilli au sein de son équipe. Son enseignement et sa disponibilité m'ont permis de m'initier à la théorie des Equations aux Dérivées Partielles. Ses nombreux conseils et ses encouragements m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je témoigne aussi ma gratitude à toute l'équipe de recherche en Equations aux Dérivées Partielles de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de LILLE I au sein de laquelle j'ai trouvé une ambiance chaleureuse, des discussions fructueuses et des remarques pertinentes.

Mesdames Raymonde BÉRAT et Arlette LENGAIGNE ont dactylographié ce texte avec soin, efficacité et ont rendu possible la réalisation matérielle de ce travail avec célérité et toute amabilité. Elles ont su conserver leur sourire dans les dures épreuves qui leur ont été imposées.

Madame Monique LLORET acceptait gentiment et rapidement de me photocopier tous les documents qui m'ont été utiles.

Madame Françoise WDOWCZYK, messieurs Albert GOURNAY et Michel PROVOST ont imprimé cette thèse avec rapidité et compétence.

Je tiens à les remercier pour l'aide matérielle précieuse qu'ils m'ont apportée.

Je réunis dans une même pensée, tous ceux, collègues, maîtres et amis qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse.

*

*　　　　*

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I - DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Soient $x = (x_o,x_1,\dots,x_n) \equiv (x_o,x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ avec : $x' = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$\xi = (\xi_o,\xi_1,\dots,\xi_n) \equiv (\xi_o,\xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ avec : $\xi' = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$,

$\alpha = (\alpha_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n) \equiv (\alpha_o,\alpha') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n$ avec : $\alpha' = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

On utilise les notations de Schwartz :

$$\xi_o^\alpha = \xi_o^{\alpha_o}\, \xi_1^{\alpha_1} \ \dots\ \xi_n^{\alpha_n} \equiv \xi_o^{\alpha_o}(\xi')^{\alpha'}$$

$$\alpha! = \prod_{j=0}^{n} (\alpha_j!), |\alpha| = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j,$$

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j},\quad 0 \leqslant j \leqslant n \quad \text{et} \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_o)^{\alpha_o}.(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_n)^{\alpha_n}} \equiv D_o^{\alpha_o}\, D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} .$$

Considérons l'opérateur différentiel linéaire d'ordre $m \in \mathbb{N}$:

$$P(x;D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

et notons :

$$P_m(x;\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \quad \text{son polynôme caractéristique.}$$

Définition 1.-

Soit S une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par l'équation : $\psi(x) = 0$

1°) On dit que S est caractéristique au point x^o pour l'opérateur $P(x;D)$ si : $P_m(x^o;\mathrm{grad}_x\psi(x^o)) = 0$;

2°) Si $P_m(x^o;\mathrm{grad}_x\psi(x^o)) \neq 0$, alors S est dite non caractéristique au point x^o pour $P(x;D)$;

3°) S sera dite partout caractéristique ou plus simplement caractéristique pour $P(x;D)$ si elle est caractéristique en tout point.

Définition 2.-

1°) Un monôme différentiel $c(x)D^\alpha$ tel que $c(x)$ s'écrive sous la forme $x_o^\ell\tilde{c}(x)$ avec $\tilde{c}$ continue et $\tilde{c}(0,x') \not\equiv 0$ est dit de poids $\alpha_o-\ell$ par rapport à x_o en $x_o = 0$;

2°) Si $P(x;D)$ est un opérateur différentiel d'ordre m le poids par rapport à x_o en $x_o = 0$ du monôme différentiel $a_{m,0,\dots,0}(x)D_o^m$ est appelé poids principal de $P(x;D)$ par rapport à x_o en $x_o = 0$; on le note $m-k$.

3°) Un opérateur différentiel est dit [1] de type de Fuchs si chaque monôme différentiel $a_\alpha(x)D^\alpha$ a un poids $\leqslant m-k$ et un poids $< m-k$ si $\alpha' \neq 0$, on dit alors que l'opérateur différentiel est de poids $m-k$.

On démontre dans [1] la proposition suivante :

Proposition de Baouendi-Goulaouic 1.-

Un opérateur différentiel linéaire de type de Fuchs de poids $(m-k)$ par rapport à x_o en $x_o = 0$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme :

(1)

$$P(x;D) = x_o^k D_o^m + a_{m-1}(x')x_o^{k-1}D_o^{m-1} + \dots + a_{m-k}(x')D_o^{m-k} + \sum_{\substack{\alpha_o<m \\ \alpha_o+|\alpha'|\leq m}} x_o^{\mu(\alpha_o)} D_o^{\alpha_o}\left(a^*_{\alpha_o,\alpha'}(x_o,x')D_{x'}^{\alpha'}\right)$$

avec : $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq m$ et $\mu(\alpha_o) = \max\,(0,\alpha_o+1-(m-k)) \equiv [\alpha_o+1-(m-k)]_+$

Définition 3.-

1°) L'opérateur : $P_m(x;D_o) = x_o^k D_o^m + a_{m-1}(x')x_o^{k-1}D_o^{m-1} + \dots + a_{m-k}(x')D_o^{m-k}$

est appelé partie principale fuchsienne de l'opérateur $P(x;D)$;

2°) Le polynôme caractéristique fuchsien associé à $P(x;D)$ est :

$$C(\lambda,x') = \lambda(\lambda-1)\dots[\lambda-(m-1)] + a_{m-1}(x')\lambda(\lambda-1)\dots[\lambda-(m-2)] + \dots + a_{m-k}(x')\lambda(\lambda-1)\dots[\lambda-(m-k-1)]$$

On note $\lambda_j(x')$ pour $j \in \{1,\dots,m\}$ les racines en λ de $C(\lambda,x') = 0$.

II - RESULTATS DE Y. HASEGAWA.

Dans son article [21] Y. Hasegawa donne une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy associé à un opérateur de type de Fuchs de poids $(m-1)$ admette une unique solution.

Théorème de Y. Hasegawa 2.-

Soit :

$$P(x;D) = x_o a_{m,0}(x)D_o^m + a_{m-1,0}(x)D_o^{m-1} + \sum_{|\alpha'|=1} x_o a_{m-1,\alpha'}(x)D_o^{m-1}D_{x'}^{\alpha'} + \sum_{\substack{\alpha_o<m-1 \\ \alpha_o+|\alpha'|\leq m}} a_{\alpha_o,\alpha'}(x)D_o^{\alpha_o}D_{x'}^{\alpha'}$$

un opérateur fuchsien de poids $(m-1)$ à coefficients analytiques en x au voisinage de l'origine. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $a_{m,0}(0,0) \neq 0$ et pour tout entier positif p : $p a_{m,0}(0,0) + a_{m-1,0}(0,0) \neq 0$;

(ii) pour toutes fonctions u_j, $0 \leqslant j \leqslant m-2$, analytiques au voisinage de l'origine et pour toute fonction f analytique au voisinage de l'origine, il existe une unique fonction u analytique au voisinage de l'origine, solution du problème de Cauchy suivant :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} P(x;D)u(x) = f(x) \\ D_o^j u(0,x') = u_j(x'), \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-2 . \end{cases}$$

Idée de la démonstration :

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes :

Première étape (unicité) :

Cette étape consiste à prouver l'unicité de la solution par le développement en série entière formelle. On cherche la solution sous la forme : $u(x_o,x') = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x') \frac{x_o^j}{j!}$. Si $u_o(x'),\ldots,u_{m-2}(x')$ sont données, on constate alors que les $u_j(x')$, $(j \geqslant m-1)$ sont déterminées de façon unique par une formule de récurrence ; par conséquent, la solution formelle existe et est unique, et le problème (I) possède au plus une solution analytique au voisinage de l'origine.

Deuxième étape (convergence) :

L'existence de la solution se démontre par la méthode des fonctions majorantes qui permet de ramener le problème étudié à un problème plus simple :

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} x_o D_o^m U(x) + D_o^{m-1} U(x) = c x_o^2 D_o^m U(x) + x_o \displaystyle\sum_{\substack{\alpha_o \leqslant m-1 \\ \alpha_o + |\alpha'| \leqslant m}} A_{\alpha_o,\alpha'}(x_o,x') D_o^{\alpha_o} D_{x'}^{\alpha'} U(x) + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{\substack{\alpha_o \leqslant m-2 \\ \alpha_o + |\alpha'| \leqslant m}} B_{\alpha_o,\alpha'}(x_o,x') D_o^{\alpha_o} D_{x'}^{\alpha'} U(x) + F(x) \\ D_o^j U(0,x') = U_j(x'), \quad 0 \leqslant j \leqslant m-2 \end{cases}$$

avec c une constante, A_α et B_α se déduisant des a_α et la série formelle $u(x) << U(x)$, série formelle solution du problème (II). On montre à l'aide du lemme technique de S. Mizohata [26] qu'on rappelle :

Lemme de S. Mizohata 3.-

Soient a et b deux fonctions qui vérifient :

$$|D^\alpha a(x)| \leqslant \frac{(r+|\alpha|)!}{(k\rho)^{|\alpha|}} . A, \qquad (k > 1)$$

$$|D^\alpha b(x)| \leqslant \frac{(s+|\alpha|)!}{\rho^{|\alpha|}} . B$$

où r et s sont deux entiers non négatifs, alors :

$$\left|D^\alpha [a(x)b(x)]\right| \leqslant \frac{(r+s+|\alpha|)!}{\rho^{|\alpha|}} \times \frac{k}{k-1} \times \frac{AB}{C^r_{r+s}}$$

que le problème (II) possède une seule solution et une seule $U(x)$ analytique au voisinage de l'origine.

Ceci termine bien la démonstration du théorème d'Hasegawa.

Remarque :

. On constate que la condition (i) est équivalente à la condition suivante :

(i') pour tout entier $\lambda \geqslant m-1$, $C(\lambda,0) \neq 0$.

III - RESULTATS DE S. BAOUENDI ET C. GOULAOUIC.

Les résultats de S. Baouendi et C. Goulaouic donnés dans [1] généralisent ceux de Y. Hasegawa et démontrent pour des opérateurs différentiels de Fuchs de poids $(m-k)$ le résultat suivant :

Théorème de Baouendi-Goulaouic 4.-

Soit $P(x;D)$ un opérateur différentiel linéaire défini par (1) à coefficients analytiques en x au voisinage de l'origine alors (i) et (ii) sont équivalentes :

(i) Pour tout entier $\lambda \geqslant m-k$, $C(\lambda,0) \neq 0$;

(ii) Pour toutes fonctions u_j, $0 \leqslant j \leqslant m-k-1$, analytiques au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ et pour toute fonction f analytique au voisinage de l'origine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy :

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} P(x;D)u(x) = f(x) \\ D_o^j u(0,x') = u_j(x'), \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-k-1 \end{cases}$$

admet une unique solution u analytique au voisinage de l'origine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Idée de la démonstration :

En introduisant des espaces fonctionnels, Baouendi et Goulaouic utilisent le résultat abstrait dégagé par L.V. Ovsjannikov [27], F. Trêves [30] et T. Yamanaka [36]. La méthode est la suivante :

Soit $I =]0,1[$ et $(X_s)_{s\in I}$ une famille d'espaces de Banach telle que : $0 < s_o < s < 1$: $X_s \hookrightarrow X_{s_o}$ avec injection de norme 1. Soit d'autre part : (L_t) une famille d'applications linéaires de $\bigcup_{s\in I} X_s$ dans $\bigcup_{s\in I} X_s$ telle que : $\forall\ t \in [0,T]$ et $\forall (s,s_o) \in I \times I$, $s_o < s$: $(L_t|_{X_s}) \in \mathcal{L}(X_s,X_{s_o})$.

($\mathcal{L}(X_s,X_{s_o})$ est l'espace des applications linéaires et continues de X_s dans X_{s_o}), et il existe une constante M indépendante de t,s_o et s telle que :

$$\left\| L_t|_{X_s} \right\|_{\mathcal{L}(X_s,X_{s_o})} \leqslant \frac{M}{s-s_o}$$

alors pour tout $s \in I : 0 < s_o < s < 1$, il existe $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon = \frac{1}{eM}(1 - \frac{s_o}{s}))$ tel que : $\forall f \in C^o([0,T], X_{s_o})$ et $\forall u_o \in X_{s_o}$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = L_t u(t) + f(t) \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

admet une solution et une seule $u \in C^1([0,\varepsilon], X_{s_o})$.

On va préciser la chaîne $(X_s)_{s \in I}$.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\Omega_s = \bigcup_{a \in \Omega} B(a,s)$ avec :

$B(a,s) = \{z \in \mathbb{C}^n : \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - a_i| < s\}$; on remarque que pour $s < s_1$: $\Omega_s \subset \Omega_{s_1}$. On note par $E_s(\Omega)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes qui sont continues sur $\bar{\Omega}_s$ et holomorphes sur Ω_s et par $F_s(\Omega)$ l'adhérence dans $E_s(\Omega)$ de l'ensemble des restrictions à $\bar{\Omega}_s$ des fonctions $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ ($\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ espace des fonctions entières). L'espace $E_s(\Omega)$ muni de la norme : $||u||_{E_s(\Omega)} = \sup_{z \in \bar{\Omega}_s} |u(z)|$ est un espace de Banach. On constate que pour $0 < s < s_1 < 1$: $F_{s_1}(\Omega) \hookrightarrow F_s(\Omega)$ avec norme 1. En appliquant la formule intégrale de Cauchy associée à des polydisques de $\mathbb{C}^n$ de rayon $(s_1 - s)$ on prouve le lemme suivant :

Lemme 5.-

Soit $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients dans $F_s(\Omega)$. Alors pour tout $s_1 \in \,]s,1[$

$$\forall u \in F_{s_1}(\Omega) : ||Pu||_{F_s(\Omega)} \leqslant \left[\sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{\alpha!}{(s_1-s)^{|\alpha|}} , ||a_\alpha||_{F_s(\Omega)} \right] . ||u||_{F_{s_1}(\Omega)}$$

autrement dit :

$$P\big|_{F_s(\Omega)} \in \mathcal{L}(F_{s_1}(\Omega), F_s(\Omega)) \text{ de norme } \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{\alpha!}{(s_1-s)^{|\alpha|}} . ||a_\alpha||_{F_s(\Omega)} .$$

Soit V un voisinage connexe de 0 dans $\mathbb{C}^n$, Ω un ensemble connexe borné dans $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine et s_1 un nombre strictement positif tel que : $\bar{\Omega}_{s_1} \subset V$. On note par $(X_s)_{0<s<s_1}$ la suite $(F_{s_1-s}(\Omega))_{0<s<s_1}$ alors $(X_s)_{0<s<s_1}$ est une chaîne croissante d'espaces de Banach.

L'opérateur $P(x;D)$ écrit sous la forme (1) peut encore s'écrire sous la forme :

$$(2) \qquad P(x;D) = x_0^k D_0^m + a_{m-1}(x')x_0^{k-1}D_0^{m-1} + \ldots + a_{m-k}(x')D_0^{m-k} - \sum_{\alpha_0=0}^{m-1} x_0^{\mu(\alpha_0)} D_0^{\alpha_0} B_{m-\alpha_0}$$

où : $B_{\alpha_0}(x_0) = - \sum_{|\alpha'| \leqslant \alpha_0} a^*_{\alpha_0,\alpha'}(x_0,.)D_{x'}^{\alpha'}$ pour : $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant m-1$ et $x_0 \in D_\rho$, $\rho > 0$

$$\left(D_\rho = \{x_0 : x_0 \in [-\rho,\rho]\}\right), \qquad \mu(\alpha_0) = [\alpha_0+1-(m-k)]_+ , \quad 0 \leqslant k \leqslant m.$$

On suppose que les fonctions $a_{m-1},\ldots,a_{m-k}$ sont holomorphes sur V et que $a_{\alpha_0,\alpha'}$ sont de classe C^m sur D_ρ à valeurs dans l'espace des fonctions holomorphes sur V. Alors $(B_{\alpha_0})_{1\leqslant\alpha_0\leqslant m}$ ont la propriété suivante :

Il existe une constante $M > 0$ indépendante de x_0, s et s_2 telle que pour $1 \leqslant \alpha_0 \leqslant m$ et $0 < s < s_2 < s_1$: $x_0 \to B_{\alpha_0}(x_0)\big|_{X_s}$ est de classe $C^m(D_\rho,\mathcal{L}(X_s,X_{s_2}))$ et pour tout $k : 0 \leqslant k \leqslant m$ l'on ait :

$$\sup_{x_o \in D_\rho} \| D_o^k B_{\alpha_o}(x_o) \|_{\mathcal{L}(X_s, X_{s_2})} \leqslant \frac{M}{(s_2 - s)^{\alpha_o}} .$$

Soit E un espace de Frèchet, on note par : $C_p^q(D_\varepsilon, E)$ l'espace des fonctions u appartenant à $C^p(D_\varepsilon, E)$ et telles que pour tout $j : 0 \leqslant j \leqslant q$: $x_o^j u \in C^{p+j}(D_\varepsilon, E)$, avec : $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Baouendi et Goulaouic donnent d'abord un résultat pour un opérateur de type de Fuchs de poids 0 en redémontrant une forme du théorème d'ovsjannikov. Ensuite ils étendent ce résultat à un opérateur de Fuchs de poids $(m-k)$ en faisant un changement de fonction inconnue qui ramène le problème pour un opérateur fuchsien de poids quelconque à un problème pour un opérateur de Fuchs de poids 0, puis démontrent le théorème qu'on va énoncer :

Théorème 5.-

Supposons que $\mathrm{Re}\lambda_j(x') < m-k+h$ pour $h \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j \leqslant m$ et que pour tout entier $\lambda \geqslant m-k$, $\forall\, x' \in V$, $C(\lambda, x') \neq 0$; les coefficients de $P(x;D)$ donnés par (2), sont dans $C^{m+h}(D_\rho, \mathcal{O}_V), u_j \in X_{s_o}$, $0 \leqslant j \leqslant m-k-1$ et $f \in C^h(D_\rho, X_{s_o})$, ($\mathcal{O}_V$ est l'espace des fonctions holomorphes sur V). Alors il existe une unique fonction $u \in C_k^{m-k+h}(D_\varepsilon, X_s)$ solution du problème de Cauchy :

$$\text{(IV)} \begin{cases} P(x;D)u = f \\ D_o^j u(0,.) = u_j(.), \quad 0 \leqslant j \leqslant m-k-1 \end{cases}$$

pour : $0 < s_o < s < s_1$.

En particulier, dans le cas analytique, on aura le résultat suivant :

Si les coefficients sont analytiques en x et si $C(\lambda,x') \neq 0$ pour tout entier $\lambda \geq m-k$ et pour $x' \in V$, alors $\forall f$ analytique en $x = (x_o,x') \in D_\rho \times V$, et $\forall u_j \in X_{s_o}$ (pour $j \in \{0,\dots,m-k-1\}$) il existe une unique fonction u analytique sur $D_\varepsilon \times V$ solution du problème (IV).

Le théorème 4 de Baoundi-Goulaouic est un cas particulier du théorème précédent pour $\Omega = \{0\}$ et $X_s = F_{s_1-s}(\{0\})$.

Remarques :

1°) Le théorème de Cauchy-Kowalewski s'obtient pour $k = 0$ et celui de Hasegawa pour $k = 1$.

2°) On constate qu'il y a moins de données, tout se passe comme si on a un opérateur différentiel d'ordre $(m-k)$.

On va donner une démonstration de la version complexe de ce théorème en utilisant la méthode des majorantes sous la forme introduite par C. Wagschal dans [35].

CHAPITRE II

FORMULATION GEOMETRIQUE DU PROBLEME

Hasegawa ainsi que Baouendi-Goulaouic ont étudié le problème de Cauchy en coordonnées locales à données initiales portées par la surface S définie par l'équation $x_o = 0$. Baouendi et Goulaouic remarquent que par tout changement de coordonnées qui conserve l'équation de l'hypersurface S, l'opérateur $P(x;D)$ se transforme en un opérateur fuchsien ayant la même partie principale fuchsienne que celle de $P(x;D)$ par conséquent ils auront les mêmes racines caractéristiques. Dire que l'opérateur $P(x;D)$ est de type de Fuchs par rapport à l'hypersurface $S : x_o = 0$ est équivalent à dire que $P(x;D)$ s'écrit sous la forme (1) en coordonnées locales.

On va préciser cela en donnant une formulation géométrique des conditions nécessaires à la résolution du problème. On donne cette formulation dans le cas holomorphe ; on aurait sans problème une formulation analogue dans le cas analytique.

I - NATURE GEOMETRIQUE DE L'OPERATEUR DIFFERENTIEL.

Définition 4.-

Soient E une variété différentiable holomorphe de dimension (n+1), S une hypersurface holomorphe de E passant par a, h un opérateur différentiel holomorphe d'ordre m_o sur E et φ une équation locale de S au voisinage de a (i.e : $\exists\ \Omega$ voisinage ouvert de a tel que : $\forall x \in \Omega$ grad $\varphi(x) \neq 0$, $x \in \Omega \cap S \iff \varphi(x) = 0$) ; le poids fuchsien de h en a relativement à S sera défini par :

$\tau_{h,S}(a) = \inf\{\sigma \in \mathbb{Z} : \forall\, Y$ holomorphe au voisinage Ω de a, $\forall\, b \in \Omega \cap S$:

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \notin S}} |\psi^{\sigma+1-m}(x)\, h(Y\psi^m)(x) = 0 \,.$$

(on remarquera que $\tau_{h,S}(a)$ ne dépend pas de $m \geq m_o$).

Cette définition donne la définition habituelle. En effet :

Dans une carte locale où $\psi(x) = x_o$ et $a = (0,\dots,0)$, l'opérateur h s'écrit sous la forme : $\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$.

Soit μ_α le plus grand entier pour lequel on a :

$$a_\alpha(x) = x_o^{\mu_\alpha} \tilde{a}_\alpha(x) \quad , \quad \text{avec} \quad \tilde{a}_\alpha(0,x') \not\equiv 0$$

(si : $a_\alpha = 0$, ($\tilde{a}_\alpha = 0$), on convient que : $\mu_\alpha = +\infty$ et que $x_o^{\mu_\alpha}\tilde{a}_\alpha(x) \equiv 0$)

$h(Y\psi^m)(x)$ a pour expression dans cette carte locale :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} x_o^{\mu_\alpha} \tilde{a}_\alpha(x) D^\alpha(Y(x).(x_o^m)) \quad ;$$

nous avons :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} x_o^{\mu_\alpha}\tilde{a}_\alpha(x) D^\alpha(Y(x).(x_o^m)) = \sum_{|\alpha|\leq m} x_o^{\mu_\alpha}\tilde{a}_\alpha(x) \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o} \left[D_o^{\alpha_o-\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y(x) \right] C_{\beta_o}(m)\, x_o^{m-\beta_o}$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} \tilde{a}_\alpha(x)\, C_{\alpha_o}^{\beta_o} \left[D_o^{\alpha_o-\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y(x) \right] C_{\beta_o}(m)\, x_o^{m-(\beta_o-\mu_\alpha)}$$

où : $C_{\beta_o}(m) = \prod_{j=0}^{\beta_o-1} (m-j)$; (on convient que : $C_o(m) = 1$).

Comme $\beta_o \leq m$ alors $C_{\beta_o}(m) \neq 0$. L'expression $\psi^{\sigma+1-m}(x)h(Y\psi^m)(x)$ s'écrit dans la carte locale de la manière suivante :

$$(3)\qquad \boxed{\sum_{|\alpha|\leq m}\ \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o}\tilde{a}_\alpha(x) D_o^{\alpha_o-\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y(x) C_{\beta_o}(m) x_o^{\sigma+1-(\beta_o-\mu_\alpha)} \equiv E(x)}$$

Posons : $\mathcal{A}_{m_o} = \{\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} : |\alpha| \leq m_o\}$ et : $T = \max\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_{m_o}}(\alpha_o - \mu_\alpha)$.

Pour $\sigma \geq T$, $\beta_o \leq \alpha_o$ et $\forall\, \alpha \in \mathcal{A}_{m_o}$ on a : $\sigma + 1 - (\beta_o - \mu_\alpha) \geq 1$ et :

$\lim\limits_{\substack{x_o\to 0\\ x_o\neq 0}} E(x) = 0$ pour toute fonction Y holomorphe au voisinage de l'origine :

Donc : $\tau_{h,S}(a) \leq T$.

On remarque d'abord que si σ est telle que : $\lim\limits_{\substack{x_o\to 0\\ x_o\neq 0}} E(x) = 0$ pour toute fonction Y holomorphe au voisinage de l'origine alors il en est de même pour tout nombre $\sigma' \geq \sigma$, il suffit d'observer que : $\psi^{\sigma'+1-m}Y = (\psi^{\sigma'-\sigma}Y)\psi^{\sigma+1-m}$.

On va prouver que pour tout $\sigma < T$, il existe une fonction Y holomorphe au voisinage de l'origine telle que l'on n'ait pas : $\lim\limits_{\substack{x_o\to 0\\ x_o\neq 0}} E(x) = 0$; autrement dit que ce $\sigma \notin \{\nu \in \mathbb{Z} : \forall\, Y$ holomorphe au voisinage de l'origine : $\lim\limits_{\substack{x_o\to 0\\ x_o\neq 0}} E(x) = 0\}$. D'après la remarque ci-dessus, il suffit de le prouver pour $\sigma = T-1$. On conclut alors que la borne inférieure n'est autre que T.

Soit : $\mathcal{A} = \{\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_{m_o} : \alpha_o - \mu_\alpha = T\}$; pour $\sigma + 1 = T$, on a :

$$E(x) = \sum_{|\alpha|\leq m}\ \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o}\tilde{a}_\alpha(x)\left[D_o^{\alpha_o-\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y(x)\right] C_{\beta_o}(m) x_o^{T-(\beta_o-\mu_\alpha)}$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq m} \tilde{a}_\alpha(x) D_{x'}^{\alpha'} Y(x) C_{\alpha_o}(m) x_o^{T-(\alpha_o-\mu_\alpha)} + \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\ \alpha_o\geq 1}}\ \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o-1} \tilde{a}_\alpha(x) C_{\alpha_o}^{\beta_o}\left[D_o^{\alpha_o-\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y(x)\right] C_{\beta_o}(m)\, x_o^{T-(\beta_o-\mu_\alpha)}.$$

On note : $\begin{cases} A(x) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \tilde{a}_\alpha(x) D_{x'}^{\alpha'} Y(x) C_{\alpha_o}(m) x_o^{T-(\alpha_o-\mu_\alpha)} \\ B(x) = \sum\limits_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha_o \geq 1}} \sum\limits_{\beta_o=0}^{\alpha_o-1} \tilde{a}_\alpha(x) C_{\alpha_o}^{\beta_o} \left[D_o^{\alpha_o-\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y(x)\right] C_{\beta_o}(m) x_o^{T-(\beta_o-\mu_\alpha)} \end{cases}$.

1°) Calculons : $\lim\limits_{\substack{x_o\to 0 \\ x_o\neq 0}} A(x)$.

Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_{m_o}$, nous avons : $\alpha_o - \mu_\alpha \leq \max\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_{m_o}} (\alpha_o-\mu_\alpha) = T$;

donc : $\forall \alpha \in \mathcal{A}_{m_o}$: $T - (\alpha_o-\mu_\alpha) \geq 0$.

Si $\alpha \notin \mathcal{A}$ (i.e : $T - (\alpha_o-\mu_\alpha) > 0$) alors :

$$\lim_{\substack{x_o\to 0 \\ x_o\neq 0}} (\tilde{a}_\alpha(x) D_{x'}^{\alpha'} Y(x) C_{\alpha_o}(m) x_o^{T-(\alpha_o-\mu_\alpha)}) = 0.$$

On a donc

$$\lim_{\substack{x_o\to 0 \\ x_o\neq 0}} A(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x_o\neq 0}} \left[\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \tilde{a}_\alpha(x) D_{x'}^{\alpha'} Y(x) C_{\alpha_o}(m)\right] = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \tilde{a}_\alpha(0,x') D_{x'}^{\alpha'} Y(0,x') C_{\alpha_o}(m).$$

2°) Calculons maintenant $\lim\limits_{\substack{x_o\to 0 \\ x_o\neq 0}} B(x)$; puisque $\beta_o < \alpha_o$ alors

$T - (\beta_o-\mu_\alpha) > T - (\alpha_o-\mu_\alpha) \geq 0$, par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x_o\to 0 \\ x_o\neq 0}} B(x) = 0$.

On a donc : $\lim\limits_{\substack{x_o\to 0 \\ x_o\neq 0}} E(x) = \lim\limits_{\substack{x_o\to 0 \\ x_o\neq 0}} A(x) = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \tilde{a}_\alpha(0,x') C_{\alpha_o}(m) (D_{x'}^{\alpha'} Y)(0,x')$.

Si $\alpha \in \mathcal{A}$, $\tilde{a}_\alpha(0,x') C_{\alpha_o}(m) \neq 0$ donc $\exists (\eta_{\alpha'})_{\alpha'\in\mathcal{A}}$ $\exists$ x' tel que

$\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \tilde{a}_\alpha(0,x') C_{\alpha_o}(m) \eta_{\alpha'} \neq 0$, alors si Y est telle que : $\eta_{\alpha'} = (D_{x'}^{\alpha'} Y)(0,x')$

on aura

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{a}} \tilde{a}_\alpha(0,x')C_{\alpha_o}(m)(D_x^{\alpha'}Y)(0,x') \neq 0$$

donc $\lim\limits_{\substack{x_o\to 0\\ x_o\neq 0}} E(x) \neq 0$, et par conséquent $\tau_{h,S}(a) = T$.

C.Q.F.D.

On va interpréter géométriquement la condition sur le poids de $a_\alpha(x)D^\alpha$ donnée par Goulaouic :

a) le poids est $\leqslant m_o-k$,

b) le poids est $<m_o-k$ si $\alpha' \neq 0$.

Définition 5.-

Le poids fuchsien principal de h en a relativement à S est :

$$\tau^*_{h,S}(a) = \inf\{\sigma \in \mathbb{Z} : \lim_{\substack{x\to a\\ x\notin S}} \psi^{-m_o}(x)H^{\sigma+1}(x;\mathrm{grad}\,\psi(x)) = 0\}$$

où $H^{\sigma+1}$ est symbole principal de l'opérateur différentiel $Y \to \psi^{\sigma+1-m}h(Y\psi^m)$.

On fait l'hypothèse H-0 : $\tau^*_{h,S}$ est finie et constante sur un voisinage de a dans S. Cherchons le polynôme caractéristique de cet opérateur que nous exprimons dans la carte locale :

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o}\tilde{a}_\alpha(x)\left[D_o^{\alpha_o-\beta_o}D_x^{\alpha'}Y(x)\right]C_{\beta_o}(m)x_o^{\sigma+1-(\beta_o-\mu_\alpha)}$$

la partie principale de cet opérateur s'obtient pour $\beta_o = 0$ et $|\alpha| = m_o$;

on a donc : $H^{\sigma+1}(x;\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=m_o} C_{\alpha_o}(m)\tilde{a}_\alpha(x)x_o^{\sigma+1+\mu_\alpha}\xi^\alpha$,

pour : $\psi(x) = x_o$, $H^{\sigma+1}(x;\mathrm{grad}\,\psi(x)) = \tilde{a}_{m_o,0,\dots,0}(x)x_o^{\sigma+1+\mu_{m,0,\dots,0}} = \tilde{a}_{m_o,0,\dots,0}(x)x_o^{\sigma+1+k}$

avec : $\mu_{m_o,0,\dots,0} = k$.

$\psi^{-m_o}(x)H^{\sigma+1}(x;\text{grad }\psi(x))$ a pour expression dans cette carte locale ;

(4) $$\tilde{a}_{m_o,0,\ldots,0}(x)x_o^{\sigma+1-(m_o-k)} .$$

1°) Si $\sigma \geq m_o-k$ alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\notin S}}[\psi^{-m}(x)H^{\sigma+1}(x;\text{grad }\psi(x))] = 0$.

2°) Si $\sigma = m_o-k-1$ cette limite vaut $\tilde{a}_{m,0,\ldots,0}(0)$ et est non nulle d'après H-O et la définition $\tilde{a}_\alpha$:

on a donc : $\tau^*_{h,S}(a) = m-k.$

On a évidemment : $\tau^*_{h,S}(a) \leqslant \tau_{h,S}(a).$

On fait l'hypothèse :

(H-1) : $$\tau^*_{h,S}(a) = \tau_{h,S}(a)$$

qui exprime que dans la carte locale, chaque monôme différentiel de l'opérateur à un poids inférieur ou égal à (m_o-k).

Maintenant on va caractériser l'hypothèse b) de Baouendi-Goulaouic :

$$\alpha' \neq 0 \implies \alpha_o - \mu_\alpha < m_o-k.$$

L'opérateur défini de la manière suivante :

$$k^{\sigma+1}(Y)(x) = \psi^{\sigma+1-m}(x)\left[h(Y\psi^m)(x) - Y(x)h(\psi^m)(x)\right]$$

est appelé opérateur réduit (pour $\sigma \in \mathbb{Z}$, $x \in \Omega|S$, $m \geq m_o$).

Définition 6.-

On appelle poids fuchsien réduit le nombre suivant :

$$\tilde{\tau}_{h,S}(a) = \mathrm{Inf}\{\sigma \in Z : \forall\, Y \text{ holomorphe au voisinage } \Omega \text{ de } a,\ \forall\, b \in \Omega \cap S : \lim_{\substack{x\to b\\ x\notin S}} k^{\sigma+1}(Y)(x) = 0\}.$$

On remarquera encore que ce nombre est indépendant de $m \geq m_o$.

Exprimons $k^{\tau_{h,S}(a)}(Y)(x)$ dans une carte locale telle que :

$\psi(x) = x_o$ et $a = (0,\ldots,0) \in S$.

On note :

$$\begin{cases} T_1 = \max\limits_{0\leq\alpha_o\leq m_o}(\alpha_o-\mu_{\alpha_o,0,\ldots,0}) \\[2ex] T_2 = \max\limits_{\substack{|\alpha|\leq m_o\\ \alpha'\neq 0}}(\alpha_o-\mu_\alpha) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \end{cases}$$

on a donc $T = \max(T_1,T_2) = m_o-k$ (d'après H-1)

on a alors : $T_1 \geqslant m_o-k$ et comme $m_o-k = \max\limits_{|\alpha|\leq m_o}(\alpha_o-\mu_\alpha)$ donc :

$$T_1 = m_o-k \geqslant T_2.$$

On fait l'hypothèse suivante :

(H'-2) : $T_2 \leqslant T_1 - 1$ (condition de Goulaouic)

et on va montrer qu'elle est équivalente à la condition suivante :

(L) $\forall$ Y holomorphe au voisinage Ω de a, $\forall\, b \in \Omega \cap S$:

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x\notin S}} k^{\tau_{h,S}(a)}(Y)(x) = 0\ .$$

1°) <u>(H'-2) $\Longrightarrow$ (L)</u> : si $T_2 \in \mathbb{Z}$.

Dans cette carte locale $k^{\tau_{h,S}(a)}(Y)(x)$ a pour expression :

$$V(x) = x_o^{(m_o-k)-m} \sum_{|\alpha|\leq m} x_o^{\mu_\alpha}\tilde{a}_\alpha(x)\{D^\alpha[Y(x).(x_o^m)]-Y(x)D^\alpha(x_o^m)\} =$$

$$= \sum_{\alpha_o=1}^{m} \tilde{a}_{\alpha_o,0,\ldots,0}(x) \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o-1} C_{\alpha_o}^{\beta_o} D_o^{\alpha_o-\beta_o} Y(x) C_{\beta_o}(m) x_o^{m_o-\beta_o-k+\mu_{\alpha_o,\ldots,0}} +$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha'\neq 0}} \tilde{a}_\alpha(x) \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o} D_o^{\alpha_o-\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y(x) C_{\beta_o}(m) x_o^{m_o-\beta_o-k+\mu_\alpha}$$

$$V(x) = \left[\sum_{\alpha_o=1}^{m} \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o-1} \tilde{a}_{\alpha_o,0,\ldots,0}(x) C_{\alpha_o}^{\beta_o} D_o^{\alpha_o-\beta_o} Y(x) C_{\beta_o}(m) x_o^{T_1-(\alpha_o-\mu_{\alpha_o,0,\ldots,0})+\alpha_o-1-\beta_o}\right] x_o +$$

$$+ \left[\sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha'\neq 0}} \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} \tilde{a}_\alpha(x) C_{\alpha_o}^{\beta_o} D_o^{\alpha_o-\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y(x) C_{\beta_o}(m) x_o^{T_2-(\alpha_o-\mu_\alpha)+\alpha_o-\beta_o}\right] x_o^{T_1-T_2}$$

$$\equiv C(x) + D(x)$$

avec : $$C(x) = \left[\sum_{\alpha_o=1}^{m} \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o-1} \tilde{a}_{\alpha_o,0,\ldots,0}(x) C_{\alpha_o}^{\beta_o} D_o^{\alpha_o-\beta_o} Y(x) C_{\beta_o}(m) x_o^{T_1-(\alpha_o-\mu_{\alpha_o,0,\ldots,0})+\alpha_o-1-\beta_o}\right] x_o$$

et $$D(x) = \left[\sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha'\neq 0}} \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} \tilde{a}_\alpha(x) C_{\alpha_o}^{\beta_o} D_o^{\alpha_o-\beta_o} D_{x'}^{\alpha'} Y(x) C_{\beta_o}(m) x_o^{T_2-(\alpha_o-\mu_\alpha)+\alpha_o-\beta_o}\right] x_o^{T_1-T_2}$$

On cherche la limite de $V(x)$ lorsque $x_o \to 0$ et $x_o \neq 0$.

i) On calcule $\lim\limits_{\substack{x_o\to 0\\ x_o\neq 0}} C(x)$:

puisque $T_1 \geq \alpha_o - \mu_{\alpha_o,0,\ldots,0}$ et $\beta_o \leq \alpha_o - 1$ alors :

$T_1 - (\alpha_o - \mu_{\alpha_o,0,\ldots,0}) + \alpha_o - 1 - \beta_o \geq 0.$

et par suite : $\lim\limits_{\substack{x_o \to 0 \\ x_o \neq 0}} C(x) = 0$, $\forall\, Y$ holomorphe au voisinage de 0.

ii) Calcul de $\lim\limits_{\substack{x_o \to 0 \\ x_o \neq 0}} D(x)$:

On a : $\beta_o \leqslant \alpha_o$ et $T_2 \geqslant \alpha_o - \mu_\alpha$ $\quad\forall\, \alpha$; $|\alpha| \leqslant m_o$ et $\alpha' \neq 0$, donc :
$T_2 - (\alpha_o - \mu_\alpha) + \alpha_o - \beta_o \geqslant 0$.

Si $T_1 = T_2$ les seuls termes qui n'auront pas une limite nulle correspondent aux couples (α, β_o) tels que $\alpha' \neq 0$, $\beta_o = \alpha_o$ et $\alpha_o - \mu_\alpha = T_2$;
par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x_o \to 0 \\ x_o \neq 0}} D(x) = \sum\limits_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ \alpha' \neq 0 \\ \alpha_o - \mu_\alpha = T_2}} \tilde{a}_\alpha(0,x')(D_x^{\alpha'} Y)(0,x') C_{\alpha_o}(m)$

or : $\tilde{a}_\alpha(0,x') \neq 0$ et $C_{\alpha_o}(m) \neq 0$ donc $\exists\, Y$ holomorphe au voisinage 0 telle que :

$$\sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ \alpha' \neq 0 \\ \alpha_o - \mu_\alpha = T_2}} \tilde{a}_\alpha(0,x') C_{\alpha_o}(m)(D_x^{\alpha'} Y)(0,x') \neq 0,$$

(on prend par exemple : $Y(x) = \dfrac{x^{\alpha'}}{(\alpha')!}$ pour α' tel que : (α_o, α') vérifie :
$\alpha_o - \mu_{\alpha_o,\alpha'} = T_2$).

Si $T_1 = T_2$ alors $\exists Y$ holomorphe au voisinage Ω de a,
$\exists b \in \Omega \cap S$, telle que :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \notin S}} k^{\tau_{h,S}(a)}(Y)(x) \neq 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse et comme on a :
$T_2 \leqslant T_1$ alors l'hypothèse (L) implique bien : $T_2 \leqslant T_1 - 1$.
Si $T_2 = -\infty$, $\forall\, \alpha' \neq 0$, $a_{\alpha_o,\alpha'} = 0$ donc $V(x) = L(x)$ et on a bien encore
$(H'\text{-}2) \Longrightarrow L$.

2) Réciproquement, si $T_2 \leq T_1-1$ on a : $T_1-T_2 > 0$ alors :
$\lim\limits_{\substack{x_\sigma \to 0 \\ x_o \neq 0}} D(x) = 0$ et par suite la condition (L) sera satisfaite.

Revenons maintenant au poids fuchsien réduit $\tilde{\tau}_{h,S}(a)$:
si $\sigma = \tau_{h,S}(a) - 1$ alors pour toute fonction Y holomorphe au voisinage Ω de a, $\forall\, b \in \Omega$: $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \notin S}} \{\psi^{\sigma+1-m}(x)[h(Y\psi^m)(x) - Y(x)h(\psi^m)(x)]\} = 0$, ce qui équivaut à :

H-2 $\qquad \tilde{\tau}_{h,S}(a) \leq \tau_{h,S}(a) - 1.$

Conclusion :

La condition $\tilde{\tau}_{h,S}(a) \leq \tau_{h,S}(a) - 1$ est une formulation invariante de la condition de [1] : $\forall\alpha$ tel que $\alpha' \neq 0$ le poids de $a_\alpha D^\alpha$ est $\leq m_o-k-1$.

On donne alors facilement la définition d'un opérateur de type de Fuchs, de poids donné (voir définition 8 page 23).

II - CARACTERISATION GEOMETRIQUE DU POLYNOME CARACTERISTIQUE FUCHSIEN.

Définition 7.-

Soit h un opérateur différentiel de type de Fuchs, de poids $\tau_{h,S}(a)$ en a par rapport à S. On appelle polynôme caractéristique fuchsien le polynôme en λ à coefficients holomorphes en $y \in S$, défini par :

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \notin S}} [\psi^{\tau_{h,S}(a)-\lambda}(x)h(\psi^\lambda)(x)] = C(\lambda,y).$$

Si on choisit une carte locale telle que $\psi(x) = x_o$ et $a = (0,\ldots,0)$, on sait [1] qu'un tel opérateur s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme suivante (si on note maintenant m l'ordre de h) :

$$\sum_{j=0}^{k} a_{m-j}(x')\, x_o^{k-j} D_o^{m-j} + \sum_{\substack{\alpha_o \leq m-1 \\ \alpha_o+|\alpha'|\leq m}} x_o^{\lambda_\alpha} D_o^{\alpha_o}\left[a_{\alpha_o,\alpha'}(x_o,x') D_{x'}^{\alpha'}\right]$$

avec : $a_m = 1$ et $\lambda_\alpha = \left[\alpha_o + 1 - (m-k)\right]_+$

on a :

$$\sum_{j=0}^{k} a_{m-j}(x') x_o^{k-j} D_o^{m-j}(x_o^\lambda) + \sum_{\substack{\alpha_o < m \\ \alpha_o+|\alpha'|\leq m}} x_o^{\lambda_\alpha} D_o^{\alpha_o}\left[a_\alpha(x) D_{x'}^{\alpha'}(x_o^\lambda)\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} a_{m-j}(x') x_o^{k-j} C_{m-j}(\lambda) x_o^{\lambda-m+j} + \sum_{\alpha_o<m} x_o^{\lambda_{\alpha_o,0,\dots,0}} D_o^{\alpha_o}\left[a_{\alpha_o,0}(x_o,x') x_o^\lambda\right] =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{k} a_{m-j}(x') C_{m-j}(\lambda)\right] x_o^{\lambda-(m-k)} + \sum_{\alpha_o=0}^{m-1} x_o^{\left[\alpha_o+1-(m-k)\right]_+} D_o^{\alpha_o}\left[a_{\alpha_o,0}(x_o,x') x_o^\lambda\right]$$

$\psi^{m-k-\lambda}(x) h(\psi^\lambda)(x)$ a pour expression dans cette carte locale :

$$\sum_{j=0}^{k} a_{m-j}(x') C_{m-j}(\lambda) + \sum_{\alpha_o=0}^{m-1} x_o^{m-k-\lambda} \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o}\left[D_o^{\alpha_o-\beta_o} a_{\alpha_o,0}(x_o,x')\right] C_{\beta_o}(\lambda) x_o^{\lambda-\beta_o} x_o^{\left[\alpha_o+1-(m-k)\right]_+}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} a_{m-j}(x') C_{m-j}(\lambda) + \sum_{\alpha_o=0}^{m-1} \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o}\left[D_o^{\alpha_o-\beta_o} a_{\alpha_o,0}(x_o,x')\right] C_{\beta_o}(\lambda) x_o^{m-k-\beta_o+\left[\alpha_o+1-(m-k)\right]_+}$$

on note : $G(x) = \sum_{\alpha_o=1}^{m-1} \sum_{\beta_o=0}^{\alpha_o} C_{\alpha_o}^{\beta_o}\left[D_o^{\alpha_o-\beta_o} a_{\alpha_o,0}(x_o,x')\right] C_{\beta_o}(\lambda) x_o^{m-k-\beta_o+\left[\alpha_o+1-(m-k)\right]_+}$

i) Si $\alpha_o \geqslant m-k-1$ alors : $\left[\alpha_o+1-(m-k)\right]_+ = \alpha_o + 1 - (m-k)$ et par conséquent :

$$m - k - \beta_o + [\alpha_o + 1 - (m-k)]_+ = m-k-\beta_o + \alpha_o + 1-(m-k) = \alpha_o + 1 - \beta_o,$$

or, $\beta_o \leqslant \alpha_o$ donc :

$$\lim_{\substack{x\to(0,x') \\ x_o\neq 0}} \{C_{\alpha_o}^{\beta_o}[D_o^{\alpha_o-\beta_o} a_{\alpha_o,0}(x_o,x')] C_{\beta_o}(\lambda) x_o^{m-k-\beta_o+[\alpha_o+1-(m-k)]_+}\} = 0.$$

ii) Si $\alpha_o < m-k-1$ alors : $[\alpha_o + 1 - (m-k)]_+ = 0$, donc :

$$m - k - \beta_o + [\alpha_o + 1-(m-k)]_+ = m - k - \beta_o$$

$$\beta_o < \alpha_o \implies m-k-\beta_o \geqslant m-k-\alpha_o > m-k-(m-k-1) = 1 \quad ;$$

dans ce cas, on a aussi :

$$\lim_{\substack{x\to(0,x') \\ x_o\neq 0}} \{C_{\alpha_o}^{\beta_o}[D^{\alpha_o-\beta_o} a_{\alpha_o,0}(x_o,x')] C_{\beta_o}(\lambda) x_o^{m-k-\beta_o+[\alpha_o+1-(m-k)]_+}\} = 0.$$

Donc dans cette carte locale : $C(\lambda,x') = \sum_{j=0}^{k} a_{m-j}(x')C_{m-j}(\lambda)$ et on retrouve bien le polynôme caractéristique fuschsien de [1].

On définit un opérateur de Fuchs de la manière suivante :

Définition 8.-

Soit h un opérateur différentiel holomorphe sur E, d'ordre m_o en a, et d'ordre $\leq m_o$ au voisinage de a.

Soit S une hypersurface de E contenant a et m un entier $\geq m_o$.

Si $\sigma \in Z$, Ω est un voisinage ouvert de a dans E, Y est une fonction holomorphe sur Ω, on note, pour $x \in \Omega|S$

$$h_m^\sigma(Y)(x) = \psi^{\sigma-m}(x)h(Y\psi^m)(x)$$

$H_m^\sigma(x,\xi)$ le symbole principal de cet opérateur différentiel.

On note

(i) $\tau_{h,S}(a) = \inf\{\sigma \in Z | \forall\, \Omega, \forall\, Y, \forall\, b \in \Omega \cap S : \lim\limits_{\substack{x\to b \\ x\notin S}} h_m^{\sigma+1}(Y)(x) = 0\}.$

C'est le poids Fuchsien de h en a par rapport à S. (On constate que ce nombre ne dépend pas de $m \geq m_o$).

(ii) $\tau^*_{h,S}(a) = \inf\{\sigma \in Z | \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\notin S}} \psi^{-m_o}(x)H_m^{\sigma+1}(x;\mathrm{grad}\,\psi(x)) = 0\}.$

C'est le poids Fuchsien principal de h en a par rapport à S.

(iii) $\tilde{\tau}_{h,S}(a) = \inf\{\sigma \in Z | \forall\, \Omega, \forall\, Y, \forall\, b \in \Omega \cap S :$

$$\lim_{\substack{x\to b \\ x\notin S}} (h_m^{\sigma+1}(Y)(x) - Y(x)h_m^{\sigma+1}(1)(x)) = 0\}.$$

C'est le poids Fuchsien réduit de h en a par rapport à S.

On dit que l'opérateur différentiel h est de type de Fuchs de poids τ en a par rapport à S si et seulement si

H-0 $\tau^{*}_{h,S}$ est finie et constante et égale à τ sur un voisinage de a dans S.

H-1 $\tau_{h,S}(a) = \tau$.

H-2 $\tilde{\tau}_{h,S}(a) \leq \tau - 1$.

La version holomorphe du théorème de Baouendi-Goulaouic qu'on va démontrer s'exprime donc de manière invariante par :

Soient h un opérateur différentiel holomorphe de type de Fuchs de poids $\tau_{h,S}(a)$ en a par rapport à une hypersurface holomorphe S passant par a, d'une variété différentiable holomorphe E de dimension (n+1) et φ une équation locale de S au voisinage de a. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\forall \lambda \geq \tau_{h,S}(a)$, $C(\lambda,a) \neq 0$;

ii) $\forall$ f et v holomorphes au voisinage de a, $\exists!$u holomorphe au voisinage de a, solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} h(u) = f \\ (u-v) = O(\varphi^{\tau_{h,S}(a)}). \end{cases}$$

III - OPERATEUR FUCHSIEN DE POIDS ZÉRO ASSOCIE A UN OPERATEUR DE FUCHS DE POIDS DONNÉ.

Théorème 6.-

Soit h un opérateur différentiel holomorphe de type de Fuchs de poids $\tau_{h,S}(a)$ en a par rapport à une hypersurface holomorphe S passant par a, d'une variété différentiable holomorphe E de dimension (n+1) et φ une équation locale de S au voisinage de a. Si on définit l'opérateur différentiel h_1 par :

$$Y \xrightarrow{h_1} h_1(Y) = h(Y\,\psi^{\tau_{h,S}(a)})$$

alors h_1 est un opérateur de Fuchs de poids 0 en a par rapport à S et si on note C (respectivement C_1) le polynome caractéristique fuchsien de h (respectivement h_1) on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\quad \forall y \in S \qquad C_1(\lambda, y) = C(\lambda + \tau_{h,S}(a), y).$$

Preuve :

1°) On cherche d'abord le poids fuchsien de h_1 en a par rapport à S. Soit $m \geqslant m_o$, où m_o est l'ordre de h et h_1, on a alors :

$$\psi^{\sigma+1-m}(x)h_1(Y\psi^m)(x) = \psi^{\sigma+1-m}(x)h(Y\psi^{m+\tau_{h,S}(a)})(x)$$

$$= \psi^{(\sigma+\tau_{h,S}(a)+1)-(m+\tau_{h,S}(a))}(x)h(Y\psi^{m+\tau_{h,S}(a)})(x)$$

et par conséquent : $\tau_{h_1,S}(a) = 0$.

2°) On cherche ensuite le poids fuchsien principal de h_1 en a par rapport à S. Dans la carte locale où $\psi(x) = x_o$ et $a = (0,\dots,0)$ c'est la puissance de x_o dans le coefficient de D_o^m de h_1. Dans cette carte locale :

$$p_1(u) = p(x_o^{m_o-k}u) = x_o^k D_o^{m_o}(x_o^{m_o-k}u) + \dots$$

$$= x_o^{m_o} D^{m_o} u + \dots$$

(où les pointillés sont mis pour des termes où l'ordre de dérivation par rapport à x_o est strictement inférieur à m_o). Donc $\tau^*_{h_1,s}(a) = 0$.

3°) Si $m \geq m_o$.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\notin S}} \psi^{\tau_{h_1,S}(a)-m}(x)\left[h_1(Y\psi^m)(x) - Y(x)h_1(\psi^m)(x)\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to a\\ x\notin S}} \psi^{-m}(x)\left[h(Y\psi^{m+\tau_{h,S}(a)})(x) - Y(x)h(\psi^{m+\tau_{h,S}(a)})(x)\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to a\\ x\notin S}} \psi^{\tau_{h,S}(a)-(m+\tau_{H,S}(a))}(x)\left[h(Y\psi^{m+\tau_{h,S}(a)})(x) - Y(x)h(\psi^{m+\tau_{h,S}(a)})(x)\right]$$

$= 0$ par hypothèse.

On a enfin :

$$\psi^{\tau_{h_1,S}(a)-\lambda}(x)h_1(\psi^\lambda)(x) = \psi^{-\lambda}(x)h(\psi^{\lambda+\tau_{h,S}(a)})(x) =$$

$$= \psi^{\tau_{h,S}(a)-(\lambda+\tau_{h,S}(a))}(x)h(\psi^{\lambda+\tau_{h,S}(a)})(x)$$

qui tend vers $C(\lambda + \tau_{h,S}(a),y)$ lorsque $x \to y$ et $x \notin S$ pour $y \in S$.

On a donc bien :

$$C_1(\lambda,y) = C(\lambda + \tau_{h,S}(a),y).$$

C.Q.F.D.

CHAPITRE III

PROBLEME FORMEL

On considère l'opérateur différentiel d'ordre m et de poids $(m-k)$ par rapport à x_o en $x_o = 0$:

$$P(x;D) = \sum_{p=0}^{k} a_{m-p}(x')\, x_o^{k-p}\, D_o^{m-p} + \sum_{\substack{\alpha_o<m \\ |\alpha|\leq m}} x_o^{\mu(\alpha_o)}\, D_o^{\alpha_o}(a_{\alpha_o,\alpha'}(x_o,x')\, D_{x'}^{\alpha'})$$

avec : $\mu(\alpha_o) = [\alpha_o + 1 - (m-k)]_+$ et $a_m = 1$.

En posant :

$$P_m(x;D_o) = \sum_{p=0}^{k} a_{m-p}(x')\, x_o^{k-p}\, D_o^{m-p} \quad \text{et} \quad Q(x;D) = - \sum_{\substack{\alpha_o<m \\ |\alpha|\leq m}} x_o^{\mu(\alpha_o)}\, D_o^{\alpha_o}(a_\alpha(x)\, D_{x'}^{\alpha'})$$

alors $P(x;D)$ s'écrit sous la forme :

$$P(x;D) = P_m(x;D_o) - Q(x;D)$$

On veut démontrer le théorème suivant par la méthode des majorantes :

Théorème 8.- Si $P_m(x;D_o)$ et $Q(x;D)$ sont deux opérateurs à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout entier $\lambda \geq m - k$, $C(\lambda,0) \neq 0$;

ii) Pour toutes fonctions u_j ,$(0 \leq j \leq m - k - 1)$, holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$ et pour toute fonction f holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, il existe une unique fonction u

holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ solution du problème de Cauchy :

$$(V) \quad \begin{cases} P_m(x;D_o)\, u(x) = Q(x;D)\, u(x) + f(x) \\ D_o^j\, u(0,x') = u_j(x')\ , \qquad 0 \leq j \leq m-k-1 \end{cases}$$

Ce chapitre sera consacré au calcul formel en cherchant la solution sous la forme : $u(x_o,x') = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x') \frac{x_o^j}{j!}$.

Le problème revient à trouver $u_j(x')$ pour tout entier $j \geq 0$.
Soient deux séries entières formelles :

$$u(x_o,x') = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x') \frac{x_o^j}{j!} \qquad \text{et} \qquad v(x_o,x') = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu(x') \frac{x_o^\nu}{\nu!}$$

on a alors :

$$(F_1) \qquad u(x)\ .\ v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{j} C_j^p\, u_{j-p}(x')\, v_p(x')\right] \frac{x_o^j}{j!}$$

$$(F_2) \qquad D_o^p\, u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{j+p}(x') \frac{x_o^j}{j!}$$

$$(F_3) \qquad x_o^q\, D_o^p\, u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[C_q(j)\, u_{j+p-q}(x')\right] \frac{x_o^j}{j!}$$

en convenant que $u_k = 0$ si $k < 0$.

<u>En effet</u> : $x_o^q\, D_o^p\, u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{j+p}(x') \frac{x_o^{j+q}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} u_{j+p}(x') \frac{(j+q)!}{j!} \cdot \frac{x_o^{j+q}}{(j+q)!}$

$$= \sum_{j=q}^{\infty} u_{j+p-q}(x') \frac{j!}{(j-q)!} \cdot \frac{x_o^j}{j!} = \sum_{j=q}^{\infty} C_q(j)\, u_{j+p-q}(x') \frac{x_o^j}{j!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} C_q(j)\, u_{j+p-q}(x') \frac{x_o^j}{j!}$$

car $C_q(j) = 0$ pour $j \in \{0,\dots,q-1\}$.

I - CALCUL FORMEL DE $P_m(x;D_o)\ u(x)$.

Il résulte des formules (F_1), (F_2) et (F_3) que :

$$P_m(x;D_o)\ u(x) = \sum_{p=0}^{k} a_{m-p}(x')\ x_o^{k-p}\ D_o^{m-p}\ u(x)$$

$$= \sum_{p=0}^{k} a_{m-p}(x') \sum_{j=0}^{\infty} C_{k-p}(j)\ u_{j+m-p-k+p}(x')\ \frac{x_o^j}{j!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{k} a_{m-p}(x')\ C_{k-p}(j)\right] u_{j+m-k}(x')\ \frac{x_o^j}{j!}$$

Si on pose : $D(j,x') = \sum_{p=0}^{k} a_{m-p}(x')\ C_{k-p}(j)$ alors on a :

$$P_m(x;D_o)\ u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[D(j,x')\ u_{j+m-k}(x')\right] \frac{x_o^j}{j!}$$

Maintenant on va exprimer $D(j,x')$ en fonction de $C(j,x')$:

si $r \leqslant s$ alors $C_s(j) = C_r(j) \times C_{s-r}(j-r)$.

<u>En effet</u> : On a :

$$C_s(j) = \prod_{\ell=0}^{s-1} (j-\ell) = \prod_{\ell=0}^{r-1} (j-\ell) \times \prod_{\ell=r}^{s-1} (j-\ell) = \prod_{\ell=0}^{r-1} (j-\ell)\ .\ \prod_{\ell=0}^{s-r-1} (j-r-\ell)$$

$$= C_r(j)\ .\ C_{s-r}(j-r)$$

C.Q.F.D.

Si $p \leqslant k$, on prend : $s = m-p$ et $r = m-k$:

$$C_{m-p}(j) = C_{m-k}(j)\ .\ C_{k-p}(j-m+k)$$

on a :

$$C(j,x') = \sum_{p=0}^{k} a_{m-p}(x')\, C_{m-p}(j) = \sum_{p=0}^{k} a_{m-p}(x')\, C_{m-k}(j)\ .\ C_{k-p}(j-(m-k))$$

$$= C_{m-k}(j) \sum_{p=0}^{k} a_{m-p}(x')\, C_{k-p}(j-(m-k)) = C_{m-k}(j) \times D(j-(m-k),x')$$

Donc :
$$D(j,x') = \frac{C(j+m-k,x')}{C_{m-k}(j+m-k)}$$

et par suite :

(5)
$$P_m(x;D_o)\ u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{C(j+m-k,x')}{C_{m-k}(j+m-k)}\ u_{j+m-k}(x')\right] \times \frac{x_o^j}{j!}$$

II - <u>*CALCUL FORMEL DE* $Q(x;D)\ u(x)$</u>.

On a : $$Q(x;D)\ u(x) = - \sum_{\substack{\alpha_o<m \\ |\alpha|\leq m}} x_o^{\mu(\alpha_o)}\ D_o^{\alpha_o}(a_{\alpha_o,\alpha'}(x_o,x')\ D_{x'}^{\alpha'}\ u(x_o,x'))$$

Soit : $a_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\alpha^\nu(x') \frac{x_o^\nu}{\nu!}$; alors d'après les formules (F_1), (F_2) et (F_3) on a :

$$a_\alpha(x)\ D_{x'}^{\alpha'}\ u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{j} C_j^p\ a_\alpha^p(x')\ D_{x'}^{\alpha'}\ u_{j-p}(x')\right] \frac{x_o^j}{j!}$$

et

$$x_o^{\mu(\alpha_o)}\ D_o^{\alpha_o}(a_\alpha(x)\ D_{x'}^{\alpha'}\ u(x)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} C_{\mu(\alpha_o)}(j) \left[\sum_{p=0}^{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)} C^p_{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)}\, a_\alpha^p(x') D_{x'}^{\alpha'} u_{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)-p}(x')\right] \frac{x_o^j}{j!}$$

en convenant que
$$\begin{cases} u_k = 0 & \text{si} \quad k < 0 \\ C_r^s = 0 & \text{si} \quad r < 0 \\ \sum\limits_{i \in \phi} a_i = 0 & \end{cases}$$

d'où :

(6) $Q(x;D)\ u(x) =$

$$= - \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{\substack{\alpha_o < m \\ |\alpha| \leq m}} C_{\mu(\alpha_o)}(j) \sum_{p=0}^{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)} C^p_{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)} a^p_\alpha(x') D^{\alpha'}_{x'} u_{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)-p}(x') \right] \frac{x_o^j}{j!}$$

Soit :

(7)
$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x') \frac{x_o^j}{j!}$$

III - CALCUL FORMEL DE $P_m(x;D_o)\ u(x) = Q(x;D)\ u(x) + f(x)$.

Si on écrit $P_m(x;D_o)\ u(x) = Q(x;D)\ u(x) + f(x)$, alors en utilisant (5), (6) et (7) on trouve :

$\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{C(j+m-k,x')}{C_{m-k}(j+m-k)} \cdot u_{j+m-k}(x')$$

$$= - \sum_{\substack{\alpha_o < m \\ |\alpha| \leq m}} C_{\mu(\alpha_o)}(j) \sum_{p=0}^{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)} C^p_{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)} a^p_\alpha(x') D^{\alpha'}_{x'} u_{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)-p}(x') + f_j(x')$$

Lemme 9.-

Soit $P(\lambda,x') = \sum_{k=0}^{m} a_k(x')\,\lambda^k$, $(a_m = 1)$, un polynôme en λ à coefficients continus sur un voisinage $\tilde{V}$ de l'origine dans $\mathbb{C}^n$. Si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P(j,0) \neq 0$, alors il existe V voisinage de l'origine tel que :

$$\forall x' \in V \ , \quad \forall j \in \mathbb{N} \ , \quad P(j,x') \neq 0.$$

Preuve :

$$P(\lambda,x') = \sum_{k=0}^{m} a_k(x')\,\lambda^k = \lambda^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(x')\,\lambda^k ,$$

donc :

$$|P(\lambda,x')| \geq |\lambda|^m - \left|\sum_{k=0}^{m-1} a_k(x')\,\lambda^k\right|$$

Soit

$$M = \max_{\substack{0\leq k\leq m-1 \\ x'\in\tilde{V}}} |a_k(x')| ,$$

alors :

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1} a_k(x')\,\lambda^k\right| \leq \sum_{k=0}^{m-1} |a_k(x')| \, . \, |\lambda|^k \leq M \, . \sum_{k=0}^{m-1} |\lambda|^k$$

et par conséquent :

$$|P(\lambda,x')| \geq |\lambda|^m - M \, . \sum_{k=0}^{m-1} |\lambda|^k = |\lambda|^m \left[1 - \frac{M}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{|\lambda|^{m-k-1}}\right]$$

Si $|\lambda| > 1$ alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{|\lambda|^{m-k-1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|}} = \frac{|\lambda|}{|\lambda| - 1}$ et par suite :

$$|P(\lambda,x')| \geq |\lambda|^m \left[1 - \frac{M}{|\lambda|} \, . \, \frac{|\lambda|}{|\lambda| - 1}\right] > 1 - \frac{M}{|\lambda| - 1}$$

Si $x' \in \tilde{V}$ et $|\lambda| \geq 2M + 1$ alors : $|P(\lambda,x')| > \frac{1}{2}$; autrement dit : si j est un entier tel que $j \geq 2M + 1$ et $x' \in \tilde{V}$ alors $P(j,x') \neq 0$.

Soit maintenant $j \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq j < 2M + 1$. Puisque $P(j,0) \neq 0$ alors par continuité il existe V_j voisinage de 0 tel que :

si $x' \in V_j$ alors $P(j,x') \neq 0$.

Conclusion :

Si on prend : $V = \left(\bigcap_{0 \leq j < 2M+1} V_j \right) \cap \tilde{V}$,

on a : $\forall x' \in V$, $\forall j \in \mathbb{N}$: $P(j,x') \neq 0$.

D'après ce lemme, $\exists V$ voisinage de 0 tel que :

$\forall x' \in V$, $\forall j \in \mathbb{N}$: $C(j+m-k,x') \neq 0$; on obtient donc la formule de récurrence :

$\forall x' \in V$, $\forall j \in \mathbb{N}$:

(8) $u_{j+m-k}(x') =$

$$= - \frac{C_{m-k}(j+m-k)}{C(j+m-k,x')} \left[\sum_{\substack{\alpha_o < m \\ |\alpha| \leq m}} C_{\mu(\alpha_o)}(j) \sum_{p=0}^{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)} C^p_{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)} a^p_\alpha(x') D^{\alpha'}_{x'} u_{j+\alpha_o-\mu(\alpha_o)-p}(x') + f_j(x') \right]$$

Les indices γ de $u_\gamma(x')$ qui apparaissent dans le second membre de la formule (8) sont strictement inférieurs à $j+m-k$. En effet, on a :

$j + \alpha_o - \mu(\alpha_o) - p \leq j + \alpha_o - \mu(\alpha_o)$ et $\mu(\alpha_o) = [\alpha_o + 1 - (m-k)]_+ \geq \alpha_o + 1 - m + k$

donc : $\alpha_o - \mu(\alpha_o) \leq m - k - 1 < m - k$ et par suite : $j + \alpha_o - \mu(\alpha_o) < j + m - k$.

La relation précédente détermine donc de façon unique tous les u_γ en fonction de $u_o,\dots,u_{m-k-1}$.

Conclusion :

Sous les hypothèses du théorème 8, il existe une série formelle et une seule $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x') \frac{x_o^j}{j!}$ solution du problème (V).

CHAPITRE IV

RAPPELS SUR LES MAJORANTES

On rappelle dans ce chapitre l'essentiel des résultats établis par C. Wagschal dans [35], qui permettent une utilisation agréable et systématique de la méthode des majorantes de Cauchy. On donne, d'autre part un résultat analogue à celui démontré dans Hasegawa ([21] ; [22]).

I - NOTATIONS ET DEFINITIONS.

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient α un multi-indice de $\mathbb{N}^{n+1}$ et E une $\mathbb{K}$-algèbre de Banach, on définit une série entière formelle en x par :

$$u(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} \quad \text{avec} \quad u_\alpha \in E \quad \text{et} \quad x^\alpha = x_o^{\alpha_o}\, x_1^{\alpha_1} \,\ldots\ldots\, x_n^{\alpha_n}$$

on note $E[[x]]$ l'ensemble des séries entières formelles en x à coefficients dans l'algèbre de Banach E à $(n+1)$ indéterminées.

$E[[x]]$ muni des opérations suivantes est une $\mathbb{K}$-algèbre :

Soient $u(x) \in E[[x]]$, $v(x) \in E[[x]]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

(i) $\quad u(x) + v(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} (u_\alpha + v_\alpha) \frac{x^\alpha}{\alpha!}$

(ii) $\quad \lambda.u(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} (\lambda u_\alpha) \frac{x^\alpha}{\alpha!}$

(iii) $$u(x).v(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} \left[\sum_{0\leq\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta\, u_\beta\, v_{\alpha-\beta}\right] \frac{x^\alpha}{\alpha!} .$$

On définit une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^{n+1}$ de la manière suivante :

$(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{n+1} \times \mathbb{N}^{n+1}$: $\alpha \leq \beta$ signifie : $\forall\, j \in \{0,\dots,n\}$: $\alpha_j \leq \beta_j$.

Définition 9.-

Soient $u(x) \in E[[x]]$ et $U(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, on dit que la série formelle $U(x)$ majore la série formelle $u(x)$ (ou bien $u(x)$ est majorée par $U(x)$ ou encore $U(x)$ est une série majorante de $u(x)$) si et seulement si :

$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $||u_\alpha|| \leq U_\alpha$ et on note $u(x) << U(x)$ cette relation.

N.B. Cette relation implique que les coefficients U_α de $U(x)$ sont réels positifs.

Définition 10.-

1°) On appelle série formelle positive une série formelle qui majore la série formelle 0.

2°) Soit $u(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$, on définit la dérivation et la primitivation de cette série formelle de la manière suivante :

si $\mu \in \mathbb{Z}^{n+1}$ alors $D^\mu u(x) = \sum_{\alpha\geq[-\mu]_+} u_{\alpha+\mu} \frac{x^\alpha}{\alpha!}$ où $[-\mu]_+ = ([-\mu_o]_+,\dots,[-\mu_n]_+)$.

Définition 11.-

1°) Soit A un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^{n+1}$, on dit que l'opérateur $P(x;D)$ est un opérateur intégro-différentiel formel sur $E[[x]]$ si :

$u(x) \in E[[x]]$: $P(x;D)u(x) = \sum_{\mu\in A} a_\mu(x) D^\mu u(x)$ avec $a_\mu(x) \in E[[x]]$

(si $A \subset \mathbb{N}^{n+1}$, $P(x;D)$ est appelé opérateur différentiel formel).

2°) Si $\mathcal{P}(x;D)$ est un opérateur intégro-différentiel formel sur $\mathbb{R}[[x]]$:

$$\mathcal{P}(x;D) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^{n+1}} A_\mu(x)D^\mu \quad \text{et} \quad P(x;D) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^{n+1}} a_\mu(x)D^\mu \text{ (sommes finies).}$$

On dit que $\mathcal{P}(x;D)$ majore $P(x;D)$ et on note : $P(x;D) << \mathcal{P}(x;D)$ si et seulement si : $\forall\, \mu \in \mathbb{Z}^{n+1}$: $a_\mu(x) << A_\mu(x)$.

II - PROPRIETES DE LA RELATION << :

Soient $u(x) \in E[[x]]$, $v(x) \in E[[x]]$, $U(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ et $V(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ alors la relation << possède les propriétés suivantes :

1 - *Addition et multiplication* :

Elle est compatible avec l'addition et la multiplication :

$$\left.\begin{array}{l} u(x) << U(x) \\ v(x) << V(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \text{(i)} & u(x) + v(x) << U(x) + V(x) \\ \text{(ii)} & u(x).v(x) << U(x) \,.\, V(x) \end{array}\right.$$

Preuve :

On a par hypothèse : $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $||u_\alpha|| \leq U_\alpha$ et $||v_\alpha|| \leq V_\alpha$

(i) $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $||u_\alpha + v_\alpha|| \leq ||u_\alpha|| + ||v_\alpha|| \leq U_\alpha + V_\alpha$

(ii) $\forall\, \gamma \in \mathbb{N}^{n+1}$, $\left|\left|\sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_\gamma^\alpha u_\alpha v_\beta\right|\right| \leq \sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_\gamma^\alpha ||u_\alpha|| \cdot ||v_\beta|| \leq \sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_\gamma^\alpha U_\alpha V_\beta$.

C.Q.F.D.

2 - *Dérivation et primitivation* :

Elle est stable par la dérivation et la primitivation :

$$u(x) << U(x) \Longrightarrow \forall\, \mu \in \mathbb{Z}^{n+1},\ D^\mu u(x) << D^\mu U(x)$$

Preuve :

On a par hypothèse : $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $||u_\alpha|| \leqslant U_\alpha$, de plus :

$$D^\mu u(x) = \sum_{\alpha \geqslant [-\mu]_+} u_{\alpha+\mu} \frac{x^\alpha}{\alpha!}, \quad D^\mu U(x) = \sum_{\alpha \geqslant [-\mu]_+} U_{\alpha+\mu} \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Donc : $\forall\, \mu \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\alpha \geqslant [-\mu]_+ \implies ||u_{\alpha+\mu}|| \leqslant U_{\alpha+\mu}$.

3 - Si $u(x) << U(x)$ et si $U(|x|) < +\infty$ alors $||u(x)|| \leqslant U(|x|)$ où $|x| = (|x_o|,\ldots,|x_n|)$.

Preuve :

On a :

$$||u(x)|| = \Big|\Big| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} \Big|\Big| \leqslant \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} ||u_\alpha|| \frac{|x|^\alpha}{\alpha!} \leqslant \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} U_\alpha \frac{|x|^\alpha}{\alpha!} = U(|x|)$$

4 - Si $u(x) << U(x)$ et $P(x;D) << \mathcal{P}(x;D)$ alors :
$P(x;D)u(x) << \mathcal{P}(x;D)U(x)$.

Preuve :

D'après la propriété 2, on a : $\forall\, \mu \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $D^\mu u(x) << D^\mu U(x)$. Or par hypothèse : $\forall\, \mu \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $a_\mu(x) << A_\mu(x)$, on aura donc : $a_\mu(x)D^\mu u(x) << A_\mu(x)D^\mu U(x)$ et par suite la propriété 1, (i), nous permet d'écrire la majoration suivante pour la somme finie :

$$\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^{n+1}} a_\mu(x)D^\mu u(x) \ll \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^{n+1}} A_\mu(x)D^\mu U(x).$$

C.Q.F.D.

5 - *Autres propriétés de la relation* << :

Si on se place dans $\mathbb{K}[[x]]$ alors cette relation possède les propriétés suivantes :

(i) *La transitivité* :

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \ll U(x) \\ U(x) \ll V(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow u(x) \ll V(x).$$

(ii) *L'antisymétrie* :

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \ll U(x) \\ U(x) \ll u(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow u(x) = U(x).$$

(iii) Cette relation n'est pas réflexive.

Preuve :

(i) On a par hypothèse : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|u_\alpha| \leq U_\alpha$ et $|U_\alpha| \leq V_\alpha$, donc : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|u_\alpha| \leq V_\alpha$.

(ii) On écrit les hypothèses : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|u_\alpha| \leq U_\alpha$ et $|U_\alpha| \leq u_\alpha$, donc $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $u_\alpha = U_\alpha$ et par conséquent : $u(x) = U(x)$.

(iii) S'il existe des $u_\alpha \notin [0,+\infty[$, alors on n'a pas : $u(x) \ll u(x)$.

6 - *Composition* :

Définition 12.-

Soit une famille $\{u^j\}_{j\in J}$, $u^j \in E[[x]]$ on dit que la famille $\{u^j\}_{j\in J}$ est sommable si : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $J_\alpha = \{j \in J,\ u^j_\alpha \neq 0\}$ est fini.

Soient $v \in E[[y]]$, $(y = (y_1,\ldots,y_m))$, $V \in \mathbb{R}[[y]]$ tels que : $v(y) \ll V(y)$; soient d'autre part :

$$u^j(x) \in E[[x]] \quad \text{pour} \quad j \in \{1,\ldots,m\},\ u^j_o = 0$$

$$U^j(x) \in \mathbb{R}[[x]] \quad \text{pour} \quad j \in \{1,\ldots,m\},\ U^j_o = 0$$

tels que : $\forall j \in \{1,\ldots m\}$, $u^j(x) \ll U^j(x)$

alors : $w(x) \equiv v(u^1(x),\ldots,u^m(x)) \ll W(x) = V(U^1(x),\ldots,U^m(x))$.

Preuve :

On a : $w_\alpha = P_\alpha\left(\{v_\gamma\}_{|\gamma|\leq|\alpha|},\{u^j_\beta\}_{\substack{1\leq j\leq m\\|\beta|\leq|\alpha|}}\right)$ qui est un polynôme

à coefficients réels positifs ;

et $W_\alpha = P_\alpha\left(\{U_\gamma\}_{|\gamma|\leq|\alpha|},\{U^j_\beta\}_{\substack{1\leq j\leq m\\|\beta|\leq|\alpha|}}\right)$, donc on peut écrire :

$$||w_\alpha|| = \left|\left|P_\alpha\left((\{v_\gamma\}_{|\gamma|\leq|\alpha|},\{u^j_\beta\}_{\substack{1\leq j\leq m\\|\beta|\leq|\alpha|}}\right)\right|\right| \leq$$

$$\leq P_\alpha\left(\{||v_\gamma||\}_{|\gamma|\leq|\alpha|},\{||u^j_\beta||\}_{\substack{1\leq j\leq m\\|\beta|\leq|\alpha|}}\right) \leq P_\alpha\left(\{U_\gamma\}_{|\gamma|\leq|\alpha|},\{U^j_\beta\}_{\substack{1\leq j\leq m\\|\beta|\leq|\alpha|}}\right) = W_\alpha.$$

On vient de démontrer que : $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $||w_\alpha|| \leq W_\alpha$ (i.e : $w(x) \ll W(x)$).

C.Q.F.D.

III - JUSTIFICATION DE L'INTRODUCTION DES FONCTIONS MAJORANTES.

Soit $u(x) \in E[[x]]$, on note par :

$$\mathcal{D}(u) = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{\alpha\geq 0} ||u_\alpha|| \frac{|x|^\alpha}{\alpha!} < +\infty\}$$

le domaine de convergence de u, avec : $|x|^\alpha = |x_o|^{\alpha_o}\ldots\ldots|x_n|^{\alpha_n}$.

Remarque fondamentale :

Si $u(x) \ll U(x)$ alors $\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{D}(u)$.

En effet : Soit $x \in \mathcal{D}(U)$ alors $\sum_{\alpha\geq 0} ||u_\alpha|| \frac{|x|^\alpha}{\alpha!} \leq \sum_{\alpha\geq 0} U_\alpha \frac{|x|^\alpha}{\alpha!} < +\infty$

et par suite $x \in \mathcal{D}(u)$.

C.Q.F.D.

Cette remarque est très importante car : si la série majorante $U(x)$ converge alors il en est de même pour $u(x)$. Donc les majorantes jouent un rôle très important dans la méthode de Cauchy qui sert à démontrer l'existence d'une solution et par conséquent le problème réside au niveau de la recherche d'une fonction majorante qui converge. On va donner un exemple de construction de fonctions majorantes : Soient $r = (r_o, r_1, \dots, r_n)$ et $u(x)$ une fonction holomorphe et bornée sur le polydisque :

$$P_r = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} : \forall j \in \{0,\dots,n\}, \quad |x_j| < r_j\}$$

et soit $M = \sup\limits_{x \in P_r} \|u(x)\|$, alors il résulte de la formule intégrale de Cauchy que :

$$\|u_\alpha\| \leqslant \frac{M}{r^\alpha} \alpha! \quad \text{avec} \quad r^\alpha = r_o^{\alpha_o} r_1^{\alpha_1} \dots\dots r_n^{\alpha_n} \quad .$$

Si on prend : $U_\alpha = \frac{M}{r^\alpha} \alpha!$, alors :

$$U(x) = \sum_{\alpha \geqslant 0} U_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{M}{r^\alpha} x^\alpha = \frac{M}{\prod\limits_{j=0}^{n} (1 - \frac{x_j}{r_j})} \quad \text{majore } u(x).$$

Proposition de J.C. DE PARIS - C. WAGSCHAL 10. [8].-

Soient $P(x;D)$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine et d'ordre en x_o inférieur strictement à m, f et u_j, $(j \in \{0,\dots,m-1\})$, sont holomorphes au voisinage de l'origine alors le théorème de Cauchy-Kowalewski nous assure que le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} D_o^m u(x) = P(x;D)u(x) + f(x) \\ D_o^j u(0,x') = u_j(x') \quad , \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1 \end{cases}$$

possède une unique solution holomorphe au voisinage de 0.

Si de plus $P(x;D) << \mathcal{P}(x;D)$, $f(x) << F(x)$ et $U(x)$ une série entière formelle tels que :

$$\begin{cases} D_o^m U(x) >> \mathcal{P}(x;D)U(x) + F(x) & \\ U_j(x') >> u_j(x') & , \quad j \in \{0,\dots,m-1\} \end{cases}$$

alors : $u(x) << U(x)$.

Démonstration de la proposition :

Soient $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x') \frac{x_o^j}{j!}$ et $U(x) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(x) \frac{x_o^j}{j!}$,

on veut prouver que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\ u_j(x') << U_j(x').$$

On procède par récurrence sur j :

Cette majoration est vraie pour $j \in \{0,\dots,m-1\}$ par hypothèse. Supposons qu'elle soit vraie jusqu'au rang $m + \nu - 1$ (avec $\nu \in \mathbb{N}$) et démontrons qu'elle est vraie pour le rang suivant $m + \nu$, on a d'après la formule de Leibniz :

$$D^{m+\nu}u(0,x') = D_o^\nu\left[P(x;D)u(x) + f(x)\right]\Big|_{x_o=0} = \left(\sum_{q=0}^{\nu} C_\nu^q\left[D_o^{\nu-q}P(x;D)\right]D_o^q u(x) + D_o^\nu f(x)\right)\Big|_{x_o=0}$$

avec : $D_o^{\nu-q}P(x;D) = \sum_{|\alpha|\leq m} D_o^{\nu-q}(a_\alpha)(x)D^\alpha$.

Or $\mathrm{ord}_{x_o} P(x;D) \leqslant m-1$ donc $\mathrm{ord}_{x_o} D_o^{\nu-q} P(x;D) D_o^q \leqslant m+\nu-1 < m+\nu$

$$D_o^\nu P(x;D) = D_o^\nu \left[\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D_o^{\alpha_o} D_{x'}^{\alpha'} \right] = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sum_{q=0}^{\nu} C_\nu^q \left[D_o^{\nu-q} a_\alpha(x) \right] D_o^{q+\alpha_o} D_{x'}^{\alpha'}$$

et puisque, $\forall\, j \in \{0,\ldots,m+\nu-1\}$, $u_j(x') \ll U_j(x')$ alors : $\forall\, \alpha' \in \mathbb{N}^n$ et $\forall\, j \in \{0,\ldots,m+\nu-1\}$; $D_{x'}^{\alpha'} u_j(x') \ll D_{x'}^{\alpha'} U_j(x')$ et par conséquent :

$$u_{m+\nu}(x') = \left(\sum_{q=0}^{\nu} C_\nu^q \left[D_o^{\nu-q} P(x;D) \right] D_o^q u(x) + D_o^\nu f(x) \right)\Big|_{x_o=0} \ll \sum_{q=0}^{\nu} C_\nu^q \left[D_o^{\nu-q} P(x;D) \right]\Big|_{x_o=0} U_q(x')$$

$$+ D_o^\nu F(0,x') = D_o^\nu \left[P(x;D) U(x) + F(x) \right]\Big|_{x_o=0} \ll D_o^\nu D_o^m U(x)\Big|_{x_o=0} = U_{m+\nu}(x').$$

On vient de prouver que : $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$, $u_{m+\nu}(x') \ll U_{m+\nu}(x')$ donc, $\forall\, j \in \mathbb{N}$, $u_j(x') \ll U_j(x')$ et par suite :

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j(x') \frac{x_o^j}{j!} \ll \sum_{j=0}^{\infty} U_j(x') \frac{x_o^j}{j!}$$

ou encore : $u(x) \ll U(x)$.

C.Q.F.D.

Théorème d'Hasegawa 11 : [21].-

Soit a_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la condition suivante :

$$\forall\, j \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{m} C_i(j) a_i(0) \neq 0, \quad (a_m = 1)$$

alors il existe une fonction holomorphe A au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$ telle que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(x')} \ll \frac{A(x')}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)} \quad .$$

Preuve :

On veut prouver que :

$\exists A$ fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$ qui majore :

$$\frac{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(x')} \quad \text{pour tout} \quad j \in \mathbb{N}.$$

On a :

$$\frac{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(x')} = \frac{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(0)} \times \frac{1}{1 - \frac{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)\left[a_i(0) - a_i(x')\right]}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(0)}} \; .$$

De plus :

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(0)} = \lim_{j\to+\infty} \frac{C_m(j)}{C_m(j)a_m(0)} = \frac{1}{a_m(0)} = 1.$$

Donc $\exists\, C \geq 1$ telle que :

$$(9) \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(0)} \right| \leq C \; .$$

Soit $B(x')$ une majorante commune à $a_i(0) - a_i(x')$ pour tout $i \in \{0,\dots,m\}$ avec $B(0) = 0$, autrement dit :

$$\frac{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)\left[a_i(0) - a_i(x')\right]}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(0)} \ll B(x')\left|\frac{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(0)}\right| \ll CB(x').$$

Il résulte de la propriété 6 (composition) de la relation $\ll$ que :

$$\frac{1}{1 - \frac{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)\left[a_i(0) - a_i(x')\right]}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(0)}} \ll \frac{1}{1 - CB(x')} .$$

Donc :

$$\frac{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(x')} \ll \frac{C}{1 - CB(x')} .$$

On pose : $A(x') = \dfrac{C}{1 - CB(x')}$, d'où le résultat.

Corollaire 12.-

Sous les hypothèses du théorème d'Hasegawa, $\exists\, M > 0$, $\exists\, r > 0$ tels que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\ \frac{1}{C_1(j,x')} \ll \frac{1}{(j+1)^m} \cdot \frac{M}{1 - rt(x')}$$

où $t(x') = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Preuve :

La démonstration de ce corollaire est identique à celle du théorème d'Hasegawa, il suffit seulement de remarquer que :

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{(j+1)^m}{\sum_{i=0}^{m} C_i(j)a_i(0)} = \lim_{j\to+\infty} \frac{j^m}{C_m(j)a_m(0)} = \lim_{j\to+\infty} \frac{j^m}{j^m a_m(0)} = 1.$$

et puis on applique la proposition suivante :

Proposition 13.-

Si $A(x')$ est analytique au voisinage de 0 dans $\mathbb{K}^n$, $\exists$ $M > 0$ et $R > 0$ tels que si $x' \in \{x' : \sum_{i=1}^{n} |x_i| < R\}$ alors :

$$A(x') \ll \frac{M}{R - t(x')} .$$

Cette proposition sera justifiée dans le paragraphe suivant :

IV - CONSTRUCTION DE SERIES MAJORANTES DE FONCTIONS HOLOMORPHES.

Soit $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ on note $D_\xi = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{j=0}^{n} |x_j|\xi_j < 1\}$.

$H_b(D_\xi,E)$ = {fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach E et bornées sur D_ξ} .

Soit, d'autre part, une fonction ϕ qui associe à toute fonction holomorphe u au voisinage de l'origine une série formelle définie par :

$$\phi(u)(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} D^\alpha u(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \quad \text{(développement en série à l'origine).}$$

Si on note : $\vartheta_0(T) = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$ et $\vartheta_k(T) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+k)!\, \frac{T^j}{j!}$ deux séries formelles d'une variable T, alors on a :

$$\vartheta_k(T) = \frac{d^k}{dT^k}\,\vartheta_o(T).$$

La série formelle $<x,\xi> = x_o\xi_o + \ldots + x_n\xi_n = \sum_{j=0}^{n} \xi_j x_j$ est une série positive dont le terme constant est nul, donc on peut composer et par suite :

$$\vartheta_k(<x,\xi>) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+k)!\ \frac{(<x,\xi>)^j}{j!}$$

on pose :
$$\phi_{k,\xi}(x) = \vartheta_k(<x,\xi>)$$

on a :

$$(<x,\xi>)^j = (x_o\xi_o + \ldots + x_n\xi_n)^j = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!}\,(x_o\xi_o)^{\alpha_o}\cdot\ldots\cdot(x_n\xi_n)^{\alpha_n}$$

$$= \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!}\,\xi^\alpha x^\alpha.$$

Donc :

$$\phi_{k,\xi}(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(j+k)! \sum_{|\alpha|=j} \xi^\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} \left[(|\alpha| + k)!\,\xi^\alpha\right] \frac{x^\alpha}{\alpha!}\ .$$

Théorème de C. WAGSCHAL 14 [35].-

Il existe C_{n+1} telle que $\forall\ \xi \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ et $\forall\ u \in \mathcal{H}_b(D_\xi,E)$

on a :

$$\phi(u)(x) << C_{n+1} \sup_{x\in D_\xi} ||u(x)||\,\phi_{r,\xi}(x) \quad \text{où } r \text{ est un entier } \geq \frac{n}{2}\ .$$

Preuve :

L'idée est de construire un polydisque dans D_ξ pour qu'on puisse appliquer les inégalités de Cauchy.

Soit $S = \{\theta \in [0,1]^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} \theta_i = 1\}$ et on note :

$\frac{\theta}{\xi} = (\frac{\theta_o}{\xi_o}, \dots, \frac{\theta_n}{\xi_n})$;

$P_\theta = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} : |x| < \frac{\theta}{\xi}\}$ le polydisque de centre 0 et de rayon $\frac{\theta}{\xi}$, on a alors : $P_\theta \subset D_\xi$.

<u>En effet</u> : soit $x \in P_\theta$ alors $\sum_{i=0}^{n} |x_i|\xi_i < \sum_{i=0}^{n} \frac{\theta_i}{\xi_i}\xi_i = \sum_{i=0}^{n} \theta_i = 1$ et par conséquent $x \in D_\xi$.

Or u est holomorphe et bornée sur D_ξ donc sur P_θ, il résulte alors de la formule intégrale de Cauchy que :

$$\forall\ \theta \in S : \quad ||D^\alpha u(0)|| \leqslant \frac{\alpha\,!}{(\frac{\theta}{\xi})^\alpha} \sup_{x \in D_\xi} ||u(x)|| = \alpha!\,\frac{\xi^\alpha}{\theta^\alpha} \sup_{x \in D_\xi} ||u(x)||.$$

Pour α donné, on choisit θ pour que la majoration soit la meilleure possible, autrement dit : $\alpha!\,\frac{\xi^\alpha}{\theta^\alpha} \sup_{x \in D_\xi} ||u(x)||$ soit le plus petit possible. <u>En effet</u> :

Si $\alpha = 0$: $||u(0)|| \leqslant \sup_{x \in D_\xi} ||u(x)||$.

Si $\alpha \neq 0$ alors il existe au moins une composante non nulle, on prend par exemple $\alpha_n \neq 0$ et on pose $\theta' = (\theta_o,\dots,\theta_{n-1})$. On va étudier la fonction $L_\alpha(\theta') \equiv \theta_o^{\alpha_o}\cdots\cdots\theta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\left[1 - (\theta_o + \dots + \theta_{n-1})\right]^{\alpha_n}$ sur $K \equiv [0,1]^n \cap \{\theta' : |\theta'| \leqslant 1\}$ et on cherche son maximum.

La fonction L_α est continue sur le compact K donc elle possède un maximum, ce maximum est atteint à l'intérieur de K car elle est nulle sur la frontière. Par conséquent, la différentielle de L_α

en un tel point doit être nulle ; on va calculer les dérivées partielles de $L_\alpha(\theta')$ et calculer θ' pour qu'elles s'annulent.

$$\forall\, j \in \{0,\dots,n-1\} : \frac{\partial L_\alpha(\theta')}{\partial \theta_j} = \alpha_j \theta_o^{\alpha_o} \dots\dots \theta_j^{\alpha_j - 1} \dots\dots \theta_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \left[1 - (\theta_o + \dots + \theta_{n-1})\right]^{\alpha_n}$$

$$- \alpha_n \theta_o^{\alpha_o} \dots\dots \theta_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \left[1 - (\theta_o + \dots + \theta_{n-1})\right]^{\alpha_n - 1} =$$

$$= \frac{\alpha_j}{\theta_j} L_\alpha(\theta') - \frac{\alpha_n}{1 - |\theta'|} L_\alpha(\theta') = \left[\frac{\alpha_j}{\theta_j} - \frac{\alpha_n}{1 - |\theta'|}\right] L_\alpha(\theta')$$

$$d_{\theta'} L_\alpha(\theta') = 0 \iff \forall\, j \in \{0,\dots,n-1\} : \frac{\partial L_\alpha(\theta')}{\partial \theta_j} = 0$$

or $L_\alpha(\theta') \neq 0$ (car on n'est pas sur la frontière) donc :

$$\forall\, j \in \{0,\dots n-1\} : \frac{\alpha_j}{\theta_j} - \frac{\alpha_n}{1 - |\theta'|} = 0 \iff \forall\, j \in \{0,\dots,n-1\} : (1 - |\theta'|)\alpha_j = \alpha_n \theta_j .$$

Puisque : $1 - |\theta'| = \theta_n$ on obtient alors le système linéaire :

$$\begin{cases} \theta_o + \theta_1 + \dots + \theta_n = 1 \\ \alpha_n \theta_j = \alpha_j \theta_n \qquad , \ j \in \{0,\dots,n-1\}. \end{cases}$$

La deuxième égalité nous donne :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_n \theta_j = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \theta_n \quad \text{ou encore : } \alpha_n |\theta'| = |\alpha'| \theta_n, \text{ d'où :}$$

(10)
$$\theta_n = \frac{\alpha_n}{|\alpha|} \quad (\text{car } |\alpha| \neq 0).$$

En remplaçant θ_n par sa valeur dans $\alpha_n \theta_j = \alpha_j \theta_n$ on obtient :

(11) $$\forall\, j \in \{0,\ldots,n-1\} : \theta_j = \frac{\alpha_j}{|\alpha|} .$$

(10) et (11) entraînent que : $\theta = \dfrac{\alpha}{|\alpha|}$.

On a un maximum absolu (les différentielles s'annulent en un seul point). Donc :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1},\ ||D^\alpha u(0)|| \leqslant \alpha!\ \frac{\alpha^\alpha}{|\alpha|^{|\alpha|}}\ \xi^\alpha \sup_{x\in D_\xi} ||u(x)||$$

et par suite pour démontrer la majoration du théorème 14, il suffit de prouver que :

$$\frac{\alpha!}{\alpha^\alpha}\ |\alpha|^{|\alpha|} \leqslant C_{n+1}(|\alpha| + r)!$$

On veut minorer α^α, pour cela on utilise la formule de Stirling :

$$k\ ! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} \qquad (k \to +\infty)$$

$k \neq 0$, lorsque $k \to +\infty$ la suite $\dfrac{k!}{(\frac{k}{e})^k\sqrt{2\pi k}} \to 1$ donc elle est bornée.

Soient C_1 et C_2 telles que $C_1 < 1 < C_2$ pour lesquelles on a :

$$C_1 \leqslant \frac{k^k\sqrt{2\pi k}}{k!\,e^k} \leqslant C_2$$

d'où :

(12) $$C_1 e^k \frac{k!}{\sqrt{2\pi k}} \leqslant k^k \leqslant C_2 e^k \frac{k!}{\sqrt{2\pi k}} .$$

Si $|\alpha| \neq 0$, alors on a : $|\alpha|^{|\alpha|} \leqslant C_2 e^{|\alpha|} \dfrac{|\alpha|!}{\sqrt{2\pi|\alpha|}}$

(on convient que $\alpha_j^{\alpha_j} = 1$ si $\alpha_j = 0$).

Si $\alpha_j \neq 0$, il résulte alors de (12) que : $\alpha_j^{\alpha_j} \geqslant C_1 \dfrac{e^{\alpha_j}(\alpha_j)!}{\sqrt{2\pi\alpha_j}}$.

Or $\alpha_j \leqslant |\alpha|$ donc même si $\alpha_j = 0$, on a :

$$\forall j \in \{0,\dots,n\}, \quad \alpha_j^{\alpha_j} \geqslant C_1 \frac{e^{\alpha_j}(\alpha_j)!}{\sqrt{2\pi|\alpha|}}$$

et par suite : $\prod_{j=0}^{n} \alpha_j^{\alpha_j} \geqslant (C_1)^{n+1} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|}^{\,n+1}} \prod_{j=0}^{n} e^{\alpha_j}(\alpha_j)!$

ou bien :

$$\alpha^\alpha \geqslant (C_1)^{n+1} \frac{e^{|\alpha|}\alpha!}{\left[\sqrt{2\pi|\alpha|}\right]^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow ||D^\alpha u(0)|| \leqslant \sup_{x\in D_\xi} ||u(x)||.\xi^\alpha \alpha! \; \frac{C_2 e^{|\alpha|}(|\alpha|!)}{\sqrt{2\pi|\alpha|}} \cdot \frac{\left[\sqrt{2\pi|\alpha|}\right]^{n+1}}{(C_1)^{n+1}e^{|\alpha|}\alpha!} .$$

En posant : $C_{n+1} = \dfrac{C_2}{(C_1)^{n+1}(\sqrt{2\pi})^n}$ alors il vient que :

$$||D^\alpha u(0)|| \leqslant \sup_{x\in D_\xi} ||u(x)|| C_{n+1}.\xi^\alpha.(|\alpha|!)\left[\sqrt{|\alpha|}\right]^n.$$

On remarque que si $r \geqslant \frac{n}{2}$ alors : $\left[\sqrt{|\alpha|}\right]^n \leqslant (|\alpha|+1).....(|\alpha|+r) =$

$$= \frac{(|\alpha|+r)!}{|\alpha|!} .$$

Donc :

$$||D^\alpha u(0)|| \leqslant \sup_{x\in D_\xi} ||u(x)||.C_{n+1}\xi^\alpha\cdot(|\alpha|+r)!$$

Enfin si $\alpha = 0$, $C_{n+1} \geqslant 1$ (car $C_2 > 1$) alors :

$$||u(0)|| \leqslant C_{n+1} r! \sup_{x\in D_\xi} ||u(x)||.$$

C.Q.F.D.

<u>N.B.</u> La constante C_{n+1} ne dépend pas de la fonction u.

Corollaire 15.-

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$ contenant $\bar{D}_\xi$ et E un $\mathbb{C}$-espace de Banach alors $\forall\, u \in H(\Omega,E), \exists\, C(n,u)$ telle que :

$$\phi(u)(x) << C(n,u)\phi_{o,\xi}(x).$$

La preuve de ce corollaire nécessite le lemme suivant :

Lemme 16.-

a) Si $\xi \leq \xi'$ alors $D_{\xi'} \subset D_\xi$.

b) Si $\bar{D}_\xi \subset \Omega$ alors $\exists\, \theta \in \left]0,1\right[$ telle que $\bar{D}_{\theta\xi} \subset \Omega$.

Preuve du lemme :

a) Soit $x \in D_{\xi'}$,alors

$$\xi_o|x_o| + \ldots + \xi_n|x_n| \leq \xi'_o|x_o| + \ldots + \xi'_n|x_n| < 1$$

et par conséquent $x \in D_\xi$.

b) On le démontre par l'absurde :

Supposons que $\forall\, \theta \in \left]0,1\right[: \bar{D}_{\theta\xi} \not\subset \Omega$ on a alors :

$\forall\, p \geq 2 : \bar{D}_{(1-\frac{1}{p})\xi} \not\subset \Omega$, $(\theta = 1 - \frac{1}{p})$, donc il existe une suite $x_p \in \mathbb{C}^{n+1}$ telle que $x_p \in \bar{D}_{(1-\frac{1}{p})\xi}$ et $x_p \notin \Omega$; d'après a) du lemme : $\bar{D}_{(1-\frac{1}{p})\xi} \subset \bar{D}_{\frac{\xi}{2}}$; le théorème de Weirstrass nous assure l'existence d'une sous-suite $x_{\sigma(p)}$ convergente (où $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante) soit ℓ la limite de $x_{\sigma(p)}$. $\complement\Omega$ est fermé et $x_{\sigma(p)} \in \complement\Omega$ donc $\ell \in \complement\Omega$.

. $\ell \in \bar{D}_\xi$: <u>En effet</u> : $x_{\sigma(p)} \in \bar{D}_{(1-\frac{1}{\sigma(p)})\xi} \Longrightarrow \sum_{j=0}^{n}(1-\frac{1}{\sigma(p)})\xi_j|x_{\sigma(p),j}| \leq 1.$

En passant à la limite lorsque $p \to +\infty$ et en tenant compte du fait que $x_{\sigma(p)} \to \ell$ et σ strictement croissante alors on obtient : $\sum_{j=0}^{n} \xi_j |\ell_j| \leq 1$, par conséquent $\ell \in \bar{D}_\xi$.

On vient de prouver que : $\ell \in \bar{D}_\xi$ et $\ell \in \complement\Omega$. Or par hypothèse $\bar{D}_\xi \subset \Omega$ donc ceci est absurde.

C.Q.F.D.

Preuve du corollaire 15 :

Soit θ défini dans le lemme précédent. Le théorème 14 nous permet d'écrire :

$$\phi(u)(x) << C_{n+1} \sup_{x\in D_{\theta\xi}} ||u(x)||.\phi_{r,\theta\xi}(x).$$

Cherchons $C(n,u)$ qui vérifie la majoration suivante :

$$C_{n+1} \sup_{x\in D_{\theta\xi}} ||u(x)|| \cdot \phi_{r,\theta\xi}(x) << C(n,u)\phi_{o,\xi}(x).$$

On a :

$$\phi_{r,\theta\xi}(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} \left[(|\alpha| + r)!\, \theta^{|\alpha|}\xi^\alpha\right] \frac{x^\alpha}{\alpha!} \quad \text{et} \quad \phi_{o,\xi}(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} \left[(|\alpha|!)\xi^\alpha\right] \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Existe-il C telle que : $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $(|\alpha| + r)!\, \theta^{|\alpha|} \leq C.(|\alpha|!)$.
La série $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+r)!}{p!} \theta^p$ a pour somme : $\frac{r!}{(1-\theta)^{r+1}}$. Si on prend : $C = \frac{r!}{(1-\theta)^{r+1}}$, on a bien :

$$\phi(u)(x) << C_{n+1} \sup_{x\in D_{\theta\xi}} ||u(x)|| \frac{r!}{(1-\theta)^{r+1}} \cdot \phi_{o,\xi}(x).$$

On pose donc : $C(n,u) = C_{n+1} \frac{r!}{(1-\theta)^{r+1}} \sup_{x\in D_{\theta\xi}} ||u(x)||$.

C.Q.F.D.

V - *ESPACE DE BANACH ASSOCIE A UNE SERIE >> 0* ; *ESPACES* $B_{k,\xi}$.

On note : $E\{x\} = \{u \in E[[x]]$ telle que $\exists\ \xi \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$: $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} ||u_\alpha|| \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} < \infty\}$.

Il est clair que $E\{x\}$ est une sous-algèbre de $E[[x]]$.

Soit $a \in \mathbb{C}\{x\}$, $a(x) >> 0$, on note :

$B_a = \{u \in E[[x]]$: $\exists C \geq 0$ (dépendant de u) telle que : $u(x) << Ca(x)\}$ et on définit une norme sur B_a de la manière suivante :

$$\forall u \in B_a : ||u||_a = \inf\{C \text{ telle que : } u(x) << Ca(x)\}.$$

Remarque :

Si $u \in B_a$ alors $u(x) << ||u||_a a(x)$.

En effet :

On a : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ et $\forall C > ||u||_a, ||u_\alpha||_E \leq Ca_\alpha$, donc :
$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}, ||u_\alpha||_E \leq ||u||_a a_\alpha$.

Propriété 17.-

$(B_a, ||\ \ ||_a)$ est un espace de Banach.

Preuve :

1°) B_a est un espace vectoriel normé :

Soient $u,v \in B_a$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors :

(i) $(u+v)(x) = u(x) + v(x) << (||u||_a + ||v||_a)a(x) \Longrightarrow u + v \in B_a$ et $||u+v||_a \leq ||u||_a + ||v||_a$.

(ii) $u(x) << ||u||_a a(x) \Longrightarrow \lambda u(x) \ll |\lambda|.||u||_a a(x) \Rightarrow \lambda u \in B_a$ et $||\lambda u||_a \leq |\lambda|.||u||_a$.

Si $\lambda \neq 0$, $||u||_a = ||\frac{1}{\lambda} . \lambda u||_a \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \; ||\lambda . u||_a$.

Finalement, on a bien :

$$||\lambda u||_a = |\lambda| \; . \; ||u||_a .$$

Donc $|| \quad ||_a$ est une norme sur l'espace vectoriel B_a.

2°) B_a <u>est complet</u> :

Soit $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans B_a :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$: $\forall p \geqslant N(\varepsilon)$, $\forall q \geqslant N(\varepsilon)$: $||u^p - u^q||_a < \varepsilon$

$\Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $||u^p_\alpha - u^q_\alpha||_a \leqslant \varepsilon a_\alpha$.

avec : $u^p(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u^p_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$ et $u^q(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u^q_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$.

Pour α fixé, la suite $(u^p_\alpha)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E qui est de Banach donc cette suite converge vers u_α dans E. On pose :

$$u(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} .$$

• On veut montrer que $u \in B_a$ et $u^p \to u$ dans B_a :

Soit $\varepsilon > 0$, $\forall p \geqslant N(\varepsilon)$, $\forall q \geqslant N(\varepsilon)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$: $||u^p_\alpha - u^q_\alpha|| \leqslant \varepsilon a_\alpha$

on a : $\lim_{q\to+\infty} ||u^p_\alpha - u^q_\alpha|| = ||u^p_\alpha - u_\alpha||$; donc :

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $\forall p \geqslant N(\varepsilon)$: $||u^p_\alpha - u_\alpha|| \leqslant \varepsilon a_\alpha$ et par suite $u^p - u \in B_a$ et $||u^p - u||_a \leqslant \varepsilon$.

Puisque $u^p \in B_a$ et B_a est un espace vectoriel alors $u \in B_a$. On sait que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ tel que : $\forall p \geqslant N(\varepsilon)$, $||u^p - u||_a \leqslant \varepsilon$ donc $u^p \to u$ dans B_a.

C.Q.F.D.

Soit S une application linéaire de B_a dans $H(D_a,E)$ définie par : $u \to S(u)$ avec $S(u)(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$ (série convergente dans D_a).

Soit, d'autre part, un compact $K \subset D_a$, on munit l'espace $H(D_a,E)$ de sa topologie habituelle définie par la famille de semi-normes : $P_K(f) = \sup_{z\in K} ||f(z)||$ lorsque K décrit l'ensemble des compacts de D_a.

Propriété 18.-

$$B_a \xhookrightarrow{S} H(D_a,E)$$

(S est une application linéaire injective et continue de B_a dans $H(D_a,E)$).

Preuve :

1°) $B_a \hookrightarrow H(D_a,E)$:

On veut prouver que $\forall K$ compact de D_a, $\exists C_K \geq 0$ telle que :

$$\forall u \in B_a \qquad P_K(S(u)) \leq C_K ||u||_a.$$

Soit $u \in B_a$ alors $u(x) \ll ||u||_a . a(x)$ et par conséquent :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}, \qquad ||u_\alpha|| \leq ||u||_a . a_\alpha .$$

Soit d'autre part $x \in K$,

$$||S(u)(x)|| \leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} ||u_\alpha|| \frac{|x|^\alpha}{\alpha!} \leq ||u||_a \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} a_\alpha \frac{|x|^\alpha}{\alpha!} = ||u||_a a(|x|).$$

Tout compact contenu dans D_a peut être inclus dans un compact équilibré ; on prend donc K équilibré et on a alors :

$\forall\, x \in K : a(|x|) \leqslant P_K(a) \equiv C_K$ et par suite :

$\forall\, x \in K : ||S(u)(x)|| \leqslant ||u||_a . C_K$.

On a bien : $P_K(S(u)) \leqslant C_K||u||_a$ et S est continue.

2°) S injective :

Soient u et v appartenant à B_a telles que $S(u) = S(v)$ alors $u = v$.

En effet :

$$S(u) = S(v) \Rightarrow S(u) - S(v) = 0 = S(u-v) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} (u_\alpha - v_\alpha) \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

On a donc : $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $u_\alpha = v_\alpha$ et par conséquent $u = v$.

C.Q.F.D,

On note $B_{k,\xi} \equiv B_{\phi_{k,\xi}}$ espace de Banach quidépend de ξ et k, où $\phi_{k,\xi}$ est la série définie dans le théorème 14 et $||\ \ ||_{k,\xi}$ la norme dans cet espace de Banach.

Propriété 19.-

$D(\phi_{k,\xi}) = D_\xi$ (domaine de convergence de $\phi_{k,\xi}$).

Preuve :

1°) $D_\xi \subset D(\phi_{k,\xi})$:

Soit $x \in D_\xi$ donc : $\sum_{j=0}^{n} \xi_j |x_j| < 1$ et par suite la série : $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+k)!}{p!} (\sum_{j=0}^{n} \xi_j |x_j|)^p$ converge, autrement dit la famille :

$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} (|\alpha| + k)!\ \xi^\alpha \frac{|x|^\alpha}{\alpha!}$ est sommable et par conséquent $x \in D(\phi_{k,\xi})$.

2°) $\underline{D(\phi_{k,\xi}) \subset D_\xi}$:

Soit $x \in D(\phi_{k,\xi})$ alors $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} (|\alpha| + k)!\xi^\alpha \frac{|x|^\alpha}{\alpha!}$ est sommable,

et d'après les propriétés de l'associativité dans les familles sommables on a : $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} (|\alpha| + k)!\xi^\alpha \frac{|x|^\alpha}{\alpha!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+k)!}{p!} (\sum_{j=0}^{n} \xi_j |x_j|)^p$ qui converge

donc : $\sum_{j=0}^{n} \xi_j |x_j| < 1$ et par suite $x \in D_\xi$.

C.Q.F.D.

Corollaire 20.-

$B_{k,\xi} \xhookrightarrow{S} H(D_\xi, E)$.

Preuve :

On a : $B_{k,\xi} = B_{\phi_{k,\xi}}$ et $H(D_\xi,E) = H(D(\phi_{k,\xi}),E)$, le corollaire se déduit directement de la propriété 18 en remplaçant a par $\phi_{k,\xi}$.

Propriété 21.-

Si $\exists\ \xi \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ tel que $\Omega \supset \bar{D}_\xi$ alors $H(\Omega,E) \xhookrightarrow{\phi} B_{o,\xi}$.

Preuve :

Soit $u \in H(\Omega,E)$ alors d'après le corollaire 15, il existe $C(n,u) = C_{n+1} \frac{r!}{(1-\theta)^{r+1}} \sup_{x\in\bar{D}_{\theta\xi}} ||u(x)||$ avec $\theta \in]0,1[$, telle que :

$$\phi(u)(x) << C(n,u)\phi_{o,\xi}(x) \quad \text{donc} \quad \phi(u) \in B_{o,\xi} \quad \text{et}$$

$$||\phi(u)||_{o,\xi} \leq C_{n+1} \frac{r!}{(1-\theta)^{r+1}} P_{\bar{D}_{\theta\xi}}(u).$$

Propriété 22.-

Soit $(k,k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $(\xi,\xi') \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1} \times (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ tels que : $k \leq k'$ et $\xi \leq \xi'$

alors : $B_{k,\xi} \hookrightarrow B_{k',\xi'}$ et la norme de l'injection canonique est $\leqslant \dfrac{k!}{(k')!}$ (donc $\leqslant 1$).

Preuve :

Soit $u \in B_{k,\xi}$: $u(x) \ll ||u||_{k,\xi} \phi_{k,\xi}(x)$ et on veut démontrer que :

$u \in B_{k',\xi'}$ (i.e $u(x) \ll ||u||_{k',\xi'} \phi_{k',\xi'}(x) \ll \dfrac{k!}{(k')!} ||u||_{k,\xi} . \phi_{k',\xi'}(x)$).

Ceci revient à prouver que :

$$\phi_{k,\xi}(x) \ll \frac{k!}{(k')!} \phi_{k',\xi'}(x) \quad \text{ou encore : } \vartheta_k(<x,\xi>) \ll \frac{k!}{(k')!} \vartheta_{k'}(<x,\xi'>).$$

On a : $\xi \leqslant \xi'$ donc $<x,\xi> = \sum_{i=0}^{n} \xi_i x_i \ll \sum_{i=0}^{n} \xi'_i x_i = <x,\xi'>$

d'où :

$$\vartheta_{k'}(<x,\xi>) \ll \vartheta_{k'}(<x,\xi'>).$$

Le problème sera donc résolu si on montre que :

$\vartheta_k(<x,\xi>) \ll \dfrac{k!}{(k')!} \vartheta_{k'}(<x,\xi>)$ et a fortiori si : $\vartheta_k \ll \dfrac{k!}{(k')!} \vartheta_{k'}$

soit encore : $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $(p+k)! \leqslant \dfrac{k!}{(k')!} (p+k')!$

Si $k \leqslant k'$ alors $\forall\, p \in \mathbb{N}$: $(p+k)\ldots(k+1) \leqslant (p+k')\ldots(k'+1)$,
donc $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(p+k)!}{k!} \leqslant \dfrac{(p+k')!}{(k')!}$.

C.Q.F.D.

Corollaire 23.-

Si $\exists\, \xi \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ tel que $\Omega \supset \bar{D}_\xi$ alors :
$\forall\, k \in \mathbb{N}$, $H(\Omega,E) \xhookrightarrow{\phi} B_{k,\xi}$.

Preuve :

On a :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(\Omega,E) \arrow[r, hook, "\phi_1"] \arrow[dr, hook, "\phi"'] & B_{o,\xi} \arrow[d, "i"] \\ & B_{k,\xi} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{H}(\Omega,E) \xhookrightarrow{\phi_1} B_{o,\xi}$ d'après la propriété 21.

$B_{o,\xi} \xhookrightarrow{i} B_{k,\xi}$ d'après la propriété 22.

or $\phi = i \circ \phi_1$ donc elle est continue et injective.

Corollaire 24.-

$\forall\, r \geq \dfrac{n}{2}$ on a : $\mathcal{H}_b(D_\xi,E) \xhookrightarrow{\phi} B_{r,\xi}$.

Preuve :

On munit $\mathcal{H}_b(D_\xi,E)$ de la norme : $||u|| = \sup\limits_{x\in D_\xi} \|u(x)\|$.

Il découle du théorème 14 que :

$$\phi(u)(x) \ll C_{n+1} \sup_{x\in D_\xi} ||u(x)||\phi_{r,\xi}(x) = C_{n+1}||u||\phi_{r,\xi}(x)$$

donc : $\phi(u) \in B_{r,\xi}$ et $||\phi(u)||_{r,\xi} \leq C_{n+1}||u||$.

C.Q.F.D.

Lemme 25.-

Soit $0 < a < s < s' < b$ et $s' < es$; alors $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\exists\, \tilde{C}_p(a,b)$ tel que

$$\frac{p!}{(1-st)^{p+1}} \ll \frac{\tilde{C}_p(a,b)}{1-s't} \cdot \frac{1}{(s'-s)^p} .$$

Preuve :

On va le prouver par récurrence sur p

$p = 0$: on prend $\tilde{C}_o(a,b) = 1$.

$$p = 1 : \quad \frac{1}{(1-st)^2} << \frac{\tilde{C}_1(a,b)}{1-s't} \cdot \frac{1}{s'-s} \iff \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)s^j t^j << \frac{\tilde{C}_1(a,b)}{s'-s} \sum_{j=0}^{\infty} (s')^j t^j$$

$$\iff \forall\, j \in \mathbb{N}, \quad (j+1)\left(\frac{s}{s'}\right)^j \leqslant \frac{\tilde{C}_1(a,b)}{s'-s} .$$

On est ramené donc à étudier $\theta(x) = (x+1)a^x$, avec $a \in \left]\frac{1}{e}\,, 1\right[$

$\theta'(x) = \left[(x+1)\mathrm{Log}\ a + 1\right]a^x$

x	0		$-1-\frac{1}{\mathrm{Log}\ a}$		$+\infty$
$\theta'(x)$		$+$	0	$-$	
$\theta(x)$	1	$\nearrow$	M_a	$\searrow$	0

$$\text{où } M_a = \frac{1}{\mathrm{Log}\ a}\, a^{-1-\frac{1}{\mathrm{Log}\ a}} = -\frac{1}{\mathrm{Log}\ a}\, e^{-(1+\mathrm{Log}\ a)} = -\frac{1}{e\ a\ \mathrm{Log}\ a}$$

donc si : $\frac{s}{s'} \in \left]\frac{1}{e}\,, 1\right[$ alors on a :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad (j+1)\left(\frac{s}{s'}\right)^j \leqslant \frac{s'}{eas(\mathrm{Log}\ s'-\mathrm{Log}\ s)} \leqslant \frac{b}{ea^2(\mathrm{Log}\ s'-\mathrm{Log}\ s)}$$

de plus : $\dfrac{1}{\mathrm{Log}\ s'-\mathrm{Log}\ s} \leqslant \dfrac{b}{s'-s}$ car $\dfrac{\mathrm{Log}\ s'-\mathrm{Log}\ s}{s'-s} = \dfrac{1}{\sigma} \geqslant \dfrac{1}{b}$ $\quad (\sigma \in \left]a,b\right[)$

et finalement : $s < s' < es$

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad (j+1)\left(\frac{s}{s'}\right)^j \leqslant \frac{b^2}{ea^2} \cdot \frac{1}{s'-s} .$$

On prendra donc $\tilde{C}_1(a,b) = \dfrac{b^2}{ea^2}$

Si $\dfrac{p!}{(1-st)^{p+1}} << \dfrac{\tilde{C}_p(a,b)}{(s'-s)^p} \cdot \dfrac{1}{1-s't}$ alors :

$$\frac{(p+1)!}{(1-st)^{p+2}} << \frac{\tilde{C}_p(a,b)}{(s'-s)^p} \cdot \frac{(p+1)}{1-st} \cdot \frac{1}{1-s't} << \frac{\tilde{C}_p(a,b)(p+1)}{(s'-s)^p} \times \frac{1}{1-\frac{s}{s'}} \times \frac{1}{1-s't} =$$

$$= \frac{s'\tilde{C}_p(a,b)(p+1)}{(s'-s)^{p+1}} \times \frac{1}{1-s't} << \frac{b(p+1)\tilde{C}_p(a,b)}{(s'-s)^{p+1}} \cdot \frac{1}{1-s't} .$$

On pose donc : $\tilde{C}_{p+1}(a,b) = (p+1)b\tilde{C}_p(a,b)$.

Ce qui termine la démonstration du lemme.

VI - DERIVATION ET MULTIPLICATION DANS LES ESPACES $B_{k,\xi}$:

1 - Action de $D^\mu (\mu \in \mathbb{Z}^{n+1})$ *sur* $B_{k,\xi}$:

Soit $u \in B_{k,\xi}$ alors $u(x) << ||u||_{k,\xi}\phi_{k,\xi}(x)$ et comme la relation $<<$ est stable par D^μ donc :

$$\forall \mu \in \mathbb{Z}^{n+1}, \quad D^\mu u(x) << ||u||_{k,\xi} D^\mu \phi_{k,\xi}(x).$$

De plus :

$$D^\mu \phi_{k,\xi}(x) = \sum_{\alpha \geqslant [-\mu]_+} (|\alpha| + |\mu| + k)!\,\xi^{\alpha+\mu} \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \xi^\mu \sum_{\alpha \geqslant [-\mu]_+} (|\alpha| + |\mu| + k)!\,\xi^\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} .$$

Or les fonctions majorantes $\phi_{k,\xi}$ sont définies seulement pour $k \geqslant 0$ donc si $k + |\mu| \geqslant 0$, on peut écrire :

$$\phi_{k+|\mu|,\xi}(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} (|\alpha| + |\mu| + k)!\,\xi^\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

et par conséquent :

$$\sum_{\alpha \geqslant [-\mu]_+} (|\alpha| + |\mu| + k)!\,\xi^\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} << \phi_{k+|\mu|,\xi}(x).$$

d'où : $D^{\mu}u(x) << ||u||_{k,\xi}\xi^{\mu}\phi_{k+|\mu|,\xi}(x)$.

On a donc la :

Proposition 26.-

Si $\mu \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $k \in \mathbb{N}$ tels que $k + |\mu| \geq 0$ alors :

$D^{\mu} \in L(B_{k,\xi}, B_{k+|\mu|,\xi})$ et $||D^{\mu}||_{L(B_{k,\xi},B_{k+|\mu|,\xi})} \leq \xi^{\mu}$.

2 - *Action de la multiplication sur les* $B_{k,\xi}$:

Proposition 27.-

Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ et $\eta \in]0,1[$ alors, l'application B définie de : $B_{\ell,\eta\xi} \times B_{k,\xi}$ dans $B_{k,\xi}$

par $(a,u) \longrightarrow a\,u$

est une application bilinéaire continue de norme $\leq \dfrac{\ell!}{(1-\eta)^{\ell+1}}$.

Preuve :

Soient $a \in B_{\ell,\eta\xi}$ et $u \in B_{k,\xi}$ on a alors :

$a(x) << ||a||_{\ell,\eta\xi}.\phi_{\ell,\eta\xi}(x)$ et $u(x) << ||u||_{k,\xi}.\phi_{k,\xi}(x)$.

Or la relation $<<$ est stable par multiplication donc :

$$a(x)u(x) << ||u||_{k,\xi}.||a||_{\ell,\eta\xi}.\phi_{\ell,\eta\xi}(x).\phi_{k,\xi}(x).$$

On veut montrer que :

(i) $a\,u \in B_{k,\xi}$;

(ii) $||a\,u||_{k,\xi} \leq \dfrac{\ell!}{(1-\eta)^{\ell+1}}.||u||_{k,\xi}.||a||_{\ell,\eta\xi}$.

Il suffit pour cela que :

$$\phi_{\ell,\eta\xi}(x).\phi_{k,\xi}(x) << \frac{\ell!}{(1-\eta)^{\ell+1}}\,\phi_{k,\xi}(x) \tag{13}$$

On remarque d'abord que :

(14) $$\psi_o(\eta t).\psi_o(t) \ll \frac{1}{1-\eta}\,\psi_o(t).$$

<u>En effet</u> :

$$\psi_o(\eta t)\psi_o(t) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \eta^p t^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} t^q\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\left[\sum_{p=0}^{r} \eta^p\right] t^r << \sum_{r=0}^{\infty}\left[\sum_{p=0}^{\infty} \eta^p\right] t^r =$$

$$= \frac{1}{1-\eta}\,\psi_o(t).$$

On a : $\psi_o(\eta t) >> 0$ et comme la relation $<<$ est stable par la multiplication des séries formelles positives alors :

$$[\psi_o(\eta t)]^2\psi_o(t) << \frac{1}{1-\eta}\,\psi_o(\eta t)\psi_o(t),$$

puis on applique à nouveau la majoration (14), ce qui donne :

$$[\psi_o(\eta t)]^2\psi_o(t) << \frac{1}{(1-\eta)^2}\,\psi_o(t)$$

et par récurrence,on arrive à la majoration suivante :

$$[\psi_o(\eta t)]^{\ell+1}\psi_o(t) << \frac{1}{(1-\eta)^{\ell+1}}\,\psi_o(t) \implies \ell!\,[\psi_o(\eta t)]^{\ell+1}\psi_o(t) << \frac{\ell!}{(1-\eta)^{\ell+1}}\,\psi_o(t)$$

or : $\psi_\ell(\eta t) = \ell!\,[\psi_o(\eta t)]^{\ell+1}$, donc, $\psi_\ell(\eta t)\psi_o(t) << \dfrac{\ell!}{(1-\eta)^{\ell+1}}\,\psi_o(t)$.

En multipliant cette majoration par $k!\,[\psi_o(t)]^k$, on obtient :

$$\psi_\ell(\eta t)\psi_k(t) << \frac{\ell!}{(1-\eta)^{\ell+1}}\,\psi_k(t) \quad \text{car} \quad \psi_k(t) = k!\,[\psi_o(t)]^{k+1}.$$

Le résultat sera obtenu en remplaçant t par $<x,\xi>$ qui est une série positive dont le terme constant est nul. Il faut aussi remarquer que $\eta t = <x,\eta\xi>$.

C.Q.F.D.

CHAPITRE V

DEMONSTRATION DU THEOREME 8.

On démontre ce théorème en utilisant les mêmes idées que celles utilisées dans [1], c'est-à-dire de ramener le problème pour un opérateur de poids quelconque à celui pour un opérateur de poids zéro, puis d'utiliser une méthode d'approximations successives comme dans le théorème d'Ovsjannikov [27]. Cependant on utilise la méthode des majorantes sous la forme que lui a donné Wagschal [35]. Il faut signaler à ce propos que Hasegawa ([21], [22]) utilise aussi la méthode des majorantes pour démontrer la version réelle de son théorème, mais sous une forme plus compliquée que celle utilisée dans ce paragraphe.

Soit h un opérateur différentiel de type de Fuchs en a par rapport à S, de poids $\tau_{h,S}(a)$ et d'ordre m.

On veut résoudre le problème de Cauchy au voisinage de a :

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} h(u) = f \\ u - v = O(\psi^{\tau_{h,S}(a)}) \end{cases}$$

avec f et v fonctions holomorphes au voisinage de a.

On pose : $u - v = w$, le problème de Cauchy (VI) s'écrit :

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} h(w) = g \\ w = O(\psi^{\tau_{h,S}(a)}) \end{cases}$$

où $g = f - h(v)$.

De la seconde condition de (VII), résulte qu'il existe U unique holomorphe au voisinage de a telle que : $w = U \cdot \mathscr{P}^{\tau_{h,S}(a)}$ et trouver U revient à trouver w.

U vérifie : $h(U\,\mathscr{P}^{\tau_{h,S}(a)}) = g$, c'est-à-dire : $h_1(U) = g$ avec h_1 opérateur de Fuchs de poids 0 en a par rapport à S (théorème 7). On choisit une carte locale telle que $\mathscr{P}(x) = x_o$ et $a = (0,\dots,0)$; dans cette carte locale l'équation s'écrit :

$$\tilde{P}(U) = Q(U) + g$$

avec $\displaystyle \tilde{P} = \sum_{p=0}^{m} a_{m-p}(x')\, x_o^{m-p}\, D_o^{m-p}$ (on peut supposer que $a_m = 1$).

$$Q = -\sum_{\alpha_o=0}^{m-1} x_o^{\alpha_o+1}\, D_o^{\alpha_o}\, B_{m-\alpha_o}\,, \qquad B_{m-\alpha_o} = \sum_{|\alpha'|\leq m-\alpha_o} a_\alpha(x)\, D_{x'}^{\alpha'}$$

On a : $C_1(\lambda,x') = C(\lambda + m-k, x')$, (théorème 7), si $C_1(\lambda,x')$ est le polynôme caractéristique fuchsien de h_1 et $C(\lambda,x')$ celui de h.
Il découle du lemme 9 que si $\forall j \in \mathbb{N} : j \geq m-k$, $C(j,0) \neq 0$ alors $\exists V$ voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que :

$$\forall x' \in V\,, \quad \forall j \in \mathbb{N}\,, \quad j \geq m-k : \; C(j,x') \neq 0.$$

On en déduit :

$$\forall x' \in V\,, \quad \forall j \in \mathbb{N} : C_1(j,x') \neq 0$$

Donc $\tilde{P}$ est bijectif sur l'ensemble des germes de fonctions holomorphes en 0.

$$\text{Si} \quad u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x')\,\frac{x_o^j}{j!} \quad \text{on a} \quad \tilde{P}^{-1}\,u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(x')}{C_1(j,x')}\cdot\frac{x_o^j}{j!}$$

donc le problème (VII) est équivalent au problème (VIII) :

$$\text{(VIII)} \qquad U = (\tilde{P}^{-1} \circ Q)\ (U) + U_o \qquad \text{avec} \qquad U_o = \tilde{P}^{-1}(g) \quad .$$

On utilise comme dans [1] une méthode d'approximations successives :

on pose, pour $p \geqslant 0$: $U_{p+1} = (\tilde{P}^{-1} \circ Q)\ (U_p) + U_o$

et $\qquad V_p = U_{p+1} - U_p$

On a donc $\quad V_o = U_1 - U_o = (\tilde{P}^{-1} \circ Q)\ (U_o)$

$$V_{p+1} = U_{p+2} - U_{p+1} = (\tilde{P}^{-1} \circ Q)\ (U_{p+1}) + U_o - (\tilde{P}^{-1} \circ Q)\ (U_p) - U_o$$

$$= (\tilde{P}^{-1} \circ Q)\ (U_{p+1} - U_p) = (\tilde{P}^{-1} \circ Q)\ (V_p)$$

Ceci ramène l'étude de la suite U_p à celle de la série de terme général V_p.

On suppose que R et r sont tels que les coefficients de l'opérateur sont holomorphes sur un ouvert Ω contenant D défini par :

$$D = \{(x_o,x') \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |x_o| \leqslant \frac{1}{R} \text{ et } |x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant \frac{1}{r}\}$$

et que : $\qquad \{x' \in \mathbb{C}^n \mid |x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant \frac{1}{r}\} \subset V$

On a donc V_o holomorphe sur un voisinage ouvert de D et il existe une constante, qu'on notera $||V_o||$ telle que :

$$V_o(x) << ||V_o|| \frac{1}{1-x_o\ \xi_o} \times \frac{1}{1-st(x')}$$

avec : $t(x') = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\xi_o \geqslant \frac{R}{\eta_o}$ et $s \geqslant \frac{r}{\eta_o}$ où $\eta_o \in \,]0,1[$ est un nombre donné.

On va prouver par récurrence qu'il existe une constante K telle que :

$$\forall s' > s : V_p(x) \ll \|V_o\| \frac{K^p}{(s'-s)^{mp}} \cdot \frac{x_o^p}{1-x_o\,\xi_o} \cdot \frac{1}{1-s't(x')}$$

Cette majoration est vraie pour $p = 0$, car si :

$s' \geq s : \dfrac{1}{1-st(x')} \ll \dfrac{1}{1-s't(x')}$. Supposons le résultat vrai pour p et démontrons le pour $(p+1)$.

On a :
$$\tilde{P}^{-1} \circ Q = \sum_{\alpha_o=0}^{m-1} \tilde{P}^{-1} \circ (x_o^{\alpha_o+1} D_o^{\alpha_o} B_{m-\alpha_o}) .$$

On va étudier l'action successive des opérateurs $B_{m-\alpha_o}$, $x_o^{\alpha_o+1} D_o^{\alpha_o}$ et $\tilde{P}^{-1}$ sur V_p.

1°) On a : $B_{m-\alpha_o}(x;D_{x'}) = \sum\limits_{|\alpha'|\leq m-\alpha_o} a_{\alpha_o,\alpha'}(x_o,x')\, D_{x'}^{\alpha'}$

$\forall\alpha$ tel que $|\alpha| \leq m$, $\exists\, M_\alpha$ telle que : $a_\alpha(x) \ll \dfrac{M_\alpha}{1-x_o R} \cdot \dfrac{1}{1-rt(x')}$.

On note : $C_{m-\alpha_o}(x;D_{x'}) = \dfrac{1}{1-R\,x_o} \cdot \dfrac{1}{1-rt(x')} \sum\limits_{|\alpha'|\leq m-\alpha_o} M_{\alpha_o,\alpha'} \cdot D_{x'}^{\alpha'}$.

Donc : $B_{m-\alpha_o}(x;D_{x'}) \ll C_{m-\alpha_o}(x;D_{x'})$ (Définition 11).

Soit $\sigma \in\,]s,s'[$, alors il résulte de la propriété de $\ll$ que :

$$B_{m-\alpha_o}(V_p)(x) \ll \|V_o\| \frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{1}{1-Rx_o} \cdot \frac{x_o^p}{1-\xi_o x_o} \cdot \frac{1}{1-rt(x')} \sum_{|\alpha'|\leq m-\alpha_o} M_{\alpha_o,\alpha'} D_{x'}^{\alpha'}\left[\frac{1}{1-\sigma t(x')}\right] =$$

$$= \|V_o\| \frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{1}{1-Rx_o} \quad \frac{x_o^p}{1-\xi_o x_o} \quad \frac{1}{1-rt(x')} \sum_{|\alpha'|\leq m-\alpha_o} M_\alpha \frac{\sigma^{|\alpha'|} . |\alpha'|!}{[1-\sigma t(x')]^{|\alpha'|+1}}$$

On a d'après la proposition 27 :

$$\frac{1}{1-Rx_o} \cdot \frac{1}{1-\xi_o x_o} << \frac{1}{1-\frac{R}{\xi_o}} \cdot \frac{1}{1-\xi_o x_o} << \frac{1}{1-\eta_o} \cdot \frac{1}{1-\xi_o x_o}$$

et il résulte de la proposition 22 que :

$$\frac{|\alpha'|\,!}{[1-\sigma t(x')]^{|\alpha'|+1}} << \frac{(m-\alpha_o)\,!}{[1-\sigma t(x')]^{m-\alpha_o+1}}$$

donc :

$$B_{m-\alpha_o}(V_p)(x) <<$$

$$||V_o||\frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{1}{1-\eta_o} \cdot \frac{x_o^p}{1-\xi_o x_o} \cdot \frac{1}{1-rt(x')} \cdot \frac{(m-\alpha_o)!}{[1-\sigma t(x')]^{m-\alpha_o+1}} \sum_{|\alpha'|\leq m-\alpha_o} M_\alpha \sigma^{|\alpha'|}$$

Il résulte du lemme 26 que :

$$B_{m-\alpha_o}(V_p)(x) <<$$

$$<< ||V_o||\frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{1}{1-\eta_o} \cdot R_{\alpha_o} \cdot \tilde{C}_{m-\alpha_o}(a,b)\frac{x_o^p}{1-x_o\xi_o} \cdot \frac{1}{1-s't(x')} \cdot \frac{1}{1-rt(x')} \cdot \frac{1}{(s'-\sigma)^{m-\alpha_o}}$$

avec $R_{\alpha_o} = \sum_{|\alpha'|\leq m-\alpha_o} M_{\alpha_o,\alpha'} \; b^{|\alpha'|}$

Si on suppose $a > \frac{r}{\eta_o}$ alors :

$$\frac{1}{1-s't(x')} \cdot \frac{1}{1-rt(x')} << \frac{1}{1-\frac{r}{s'}} \cdot \frac{1}{1-s't(x')} << \frac{1}{1-\eta_o} \cdot \frac{1}{1-s't(x')}$$

et finalement :

$$B_{m-\alpha_o}(V_p)(x)<<||V_o||\frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{1}{(1-\eta_o)^2} \cdot R_{\alpha_o} \cdot \frac{\tilde{C}_{m-\alpha_o}(a,b)}{(s'-\sigma)^{m-\alpha_o}} \cdot \frac{1}{1-s't(x')} \cdot \frac{x_o^p}{1-x_o\xi_o}$$

2°) On aura donc :

$$x_o^{\alpha_o+1} D_o^{\alpha_o} B_{m-\alpha_o}(V_p)(x) \ll$$

$$||V_o||\frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{1}{(1-\eta_o)^2} \cdot R_{\alpha_o} \cdot \frac{\tilde{C}_{m-\alpha_o}(a,b)}{(s'-\sigma)^{m-\sigma_o}} \cdot \frac{1}{1-s't(x')} \; x_o^{\alpha_o+1} D_o^{\alpha_o}\left[\frac{x_o^p}{1-x_o\xi_o}\right]$$

On a :

$$\frac{x_o^p}{1-\xi_o x_o} = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_o^j x_o^{p+j}$$

$$D_o^{\alpha_o}\left[\frac{x_o^p}{1-\xi_o x_o}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_o^j C_{\alpha_o}(p+j)\, x_o^{p+j-\alpha_o}$$

$$x_o^{\alpha_o+1} D_o^{\alpha_o}\left[\frac{x_o^p}{1-\xi_o x_o}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_o^j C_{\alpha_o}(p+j)\, x_o^{p+j+1} = x_o^{p+1} \sum_{j=0}^{\infty} \xi_o^j C_{\alpha_o}(p+j)\, x_o^j$$

et par conséquent :

$$x_o^{\alpha_o+1} D_o^{\alpha_o} B_{m-\alpha_o}(V_p)(x) \ll$$

$$\ll ||V_o||\frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{R_{\alpha_o}}{(1-\eta_o)^2} \cdot \frac{\tilde{C}_{m-\alpha_o}(a,b)}{(s'-\sigma)^{m-\alpha_o}} \cdot \left[x_o^{p+1} \sum_{j=0}^{\infty} \xi_o^j C_{\alpha_o}(p+j)\, x_o^j\right] \cdot \frac{1}{1-s't(x')}$$

$$= ||V_o||\frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{R_{\alpha_o}}{(1-\eta_o)^2} \cdot \frac{\tilde{C}_{m-\alpha_o}(a,b)}{(s'-\sigma)^{m-\alpha_o}} \left[\sum_{j=p+1}^{\infty} \xi_o^{j-p-1} C_{\alpha_o}(j-1)\, x_o^j\right] \frac{1}{1-s't(x')}$$

On pose : $w_p(x) = x_o^{\alpha_o+1} D_o^{\alpha_o} B_{m-\alpha_o}(V_p)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} w_{p,j}(x')\, x_o^j$.

On a donc :

$$w_{p,j}(x') \ll ||V_o|| \frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{R_{\alpha_o}}{(1-\eta_o)^2} \cdot \frac{\tilde{C}_{m-\alpha_o}(a,b)}{(s'-\sigma)^{m-\alpha_o}} \; \xi_o^{j-p-1} \, C_{\alpha_o}(j-1) \frac{1}{1-s't(x')}$$

Si $F_p(x') = \tilde{P}^{-1}(w_p)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} F_{p,j}(x') \, x_o^j$ on a : $F_{p,j}(x') = \dfrac{w_{p,j}(x')}{C_1(j,x')}$

En utilisant le corollaire 12, on obtient :

$\forall j \geq p+1$:

$$F_{p,j}(x') \ll ||V_o|| \frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{R_{\alpha_o}}{(1-\eta_o)^2} \cdot \frac{\tilde{C}_{m-\alpha_o}(a,b)}{(s'-\sigma)^{m-\alpha_o}} \cdot \frac{\xi_o^{j-p-1}}{(j+1)^{m-\alpha_o}} \cdot \frac{M}{1-rt(x')} \cdot \frac{1}{1-s't(x')}$$

$$\ll ||V_o|| \frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{\tilde{R}_{\alpha_o}}{(s'-\sigma)^{m-\alpha_o}} \cdot \frac{\xi_o^{j-p-1}}{(p+1)^{m-\alpha_o}} \cdot \frac{1}{1-s't(x')}$$

où $\tilde{R}_{\alpha_o} = \dfrac{R_{\alpha_o}}{(1-\eta_o)^3} \cdot \tilde{C}_{m-\alpha_o}(a,b)$

donc

$$F_p(x) \ll ||V_o|| \frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{\tilde{R}_{\alpha_o}}{[(p+1)(s'-\sigma)]^{m-\alpha_o}} \left[\sum_{j=p+1}^{\infty} \xi_o^{j-p-1} \, x_o^j\right] \frac{1}{1-s't(x')} =$$

$$||V_o|| \frac{K^p}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{\tilde{R}_{\alpha_o}}{[(p+1)(s'-\sigma)]^{m-\alpha_o}} \cdot \frac{x_o^{p+1}}{1-x_o\xi_o} \cdot \frac{1}{1-s't(x')}$$

Si on choisit $\sigma \in]s,s'[$ telle que $s' - \sigma = \dfrac{s'-s}{p+1}$ alors :

$$\frac{1}{(\sigma-s)^{mp}} \cdot \frac{1}{[(p+1)(s'-\sigma)]^{m-\alpha_o}} = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{mp} \frac{(s'-s)^{\alpha_o}}{(s'-s)^{m(p+1)}} \leq e^m \frac{(b-a)^{\alpha_o}}{(s'-s)^{m(p+1)}}$$

et par conséquent :

$$F_p(x) \ll \|V_o\| \frac{K^p}{(s'-s)^{m(p+1)}} \cdot \tilde{R}_{\alpha_o} \cdot e^m (b-a)^{\alpha_o} \frac{x_o^{p+1}}{1-x_o\xi_o} \cdot \frac{1}{1-s't(x')}$$

Finalement :

$$V_{p+1}(x) = \sum_{\alpha_o=0}^{m-1} \tilde{P}^{-1}(x_o^{\alpha_o+1} D_o^{\alpha_o} \circ B_{m-\alpha_o})(V_p)(x) \ll$$

$$\ll \|V_o\| \frac{K^p}{(s'-s)^{m(p+1)}} e^m \left[\sum_{\alpha_o=0}^{m-1} \tilde{R}_{\alpha_o} (b-a)^{\alpha_o}\right] \frac{x_o^{p+1}}{1-x_o\xi_o} \cdot \frac{1}{1-s't(x')}$$

Si on prend : $K = e^m \sum\limits_{\alpha_o=0}^{m-1} \tilde{R}_{\alpha_o} (b-a)^{\alpha_o}$, on aura bien :

$$\forall s' > s : V_{p+1}(x) \ll \|V_o\| \frac{K^{p+1}}{(s'-s)^{m(p+1)}} \cdot \frac{x_o^{p+1}}{1-\xi_o x_o} \cdot \frac{1}{1-s't(x')}$$

On impose maintenant :

$$|\xi_o\, x_o| \leqslant \rho_o < 1$$

$$b(|x_1| + \dots + |x_n|) \leqslant \rho_o < 1$$

On aura donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ \forall s' > s\ ,\ |V_p(x)| \leqslant \|V_o\| \left[\frac{K.|x_o|}{(s'-s)^m}\right]^p \frac{1}{(1-\rho_o)^2}$$

Si $|x_o| \leqslant \dfrac{(s'-s)^m}{K'}$ avec $K' > K$, alors la série de terme général V_p converge normalement et la suite de terme général U_p converge uniformément sur un polydisque convenable de centre 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ vers une fonction holomorphe U. Comme $\tilde{P}(U_{p+1}) = Q(U_p) + g$ alors la limite U vérifie :

$$\tilde{P}(U) = Q(U) + g \quad \text{donc} \quad h_1(U) = g\ . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

CHAPITRE VI

THEOREME D'OVSJANNIKOV MODIFIE.

Les méthodes utilisées dans le chapitre V sont du type théorème d'Ovsjannikov. On donne dans ce chapitre une formulation de ce théorème qui généralise celles données habituellement ([27], [28], [30]).

I - HYPOTHESES ET NOTATIONS.

On fait les hypothèses suivantes :

(H-1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E_s)_{s\in I}$ une famille d'espaces de Banach sur $\mathbb{K}$ ayant les propriétés suivantes :

$\forall (s,s') \in I \times I : s < s' \Longrightarrow E_{s'} \hookrightarrow E_s$ (inclusion topologique).

On note par $I(s,s')$ la norme de l'injection canonique de $E_{s'}$ dans E_s.

(H-2) On définit $E = \bigcup_{s\in I} E_s$; il résulte de (H-1) que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On se donne $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $r \in \{1,\dots,m\}$, $\Lambda_r \in L(E)$ ($L(E)$ espace des applications linéaires de E dans E) tel que :

$\forall (s,s') \in I \times I : s < s' \Longrightarrow \Lambda_{r|E_{s'}} \in \mathcal{L}(E_{s'},E_s)$, ($\Lambda_{r|E_{s'}}$ est à valeurs dans E_s et est continue de $E_{s'}$ dans E_s).

On note :

$$C_r(s,s') = ||\Lambda_{r|E_{s'}}||_{\mathcal{L}(E_{s'},E_s)} .$$

(H-3) Soient $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $I_\rho =]-\rho, \rho[$ et pour tout $r \in \{1,\dots,m\}$ on se donne $B_r \in F(I_\rho, L(E))$, ($F(I_\rho, L(E))$ ensemble des fonctions de I_ρ dans $L(E)$) tel que :

a) $\forall (t,s) \in I_\rho \times I : B_r(t)_{|E_s} \in \mathcal{L}(E_s)$

b) $\forall \varepsilon \in [0,\rho[$, $\forall s \in I$ et $\forall r \in \{1,\dots,m\}$:

$$\sup_{|t|\leq\varepsilon} ||B_r(t)_{|E_s}||_{\mathcal{L}(E_s)} = L_r(\varepsilon,s) < +\infty$$

c) $\forall s \in I$, $\forall \varepsilon \leq \rho$: $g \in C^0(I_\varepsilon, E_s) \longrightarrow \{t \longrightarrow B_r(t)\,[g(t)]\} \in C^0(I_\varepsilon, E_s)$

Remarque :

Si on se donne $B_r \in F(I_\rho, L(E))$ tel que :

$$\forall s \in I : t \longrightarrow B_r(t)_{|E_s} \in C^0(I_\rho, \mathcal{L}(E_s))$$

alors les trois conditions a), b) et c) sont vérifiées.

En effet :

i) La première condition est triviale,

ii) Si $\varepsilon < \rho$ alors le compact $[-\varepsilon, \varepsilon]$ est contenu dans I_ρ et par suite l'application $t \to B_r(t)_{|E_s}$ continue sur le compact $[-\varepsilon, \varepsilon]$ à valeur dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E_s)$ est bornée.

iii) Soit $g \in C^0(I_\rho, E_s)$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[rr] & & (B_r(t)|_{E_s} \, , \, g(t)) \arrow[dd] \\
I_\rho \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{L}(E_s) \times E_s \arrow[d] & \\
& E_s & B_r(t) \, [g(t)]
\end{tikzcd}$$

donc l'application $t \to B_r(t)\ [g(t)]$ est continue comme composée des deux applications continues (on rappelle que si on a un espace vectoriel normé F alors l'application bilinéaire : $\begin{array}{l} \mathcal{L}(F) \times F \longrightarrow F \\ (\psi,u) \longrightarrow \psi(u) \end{array}$ est continue)

d'où la condition c).

(H-4) On se donne

$$\Delta \in \mathcal{F}\Big(\bigcup_{s\in I}\ \bigcup_{0<\varepsilon\leq\rho} C^o(I_\varepsilon,E_s)\ ,\ \bigcup_{s\in I}\ \bigcup_{0<\varepsilon\leq\rho} C^o(I_\varepsilon,E_s)\Big)$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

a) $\forall s \in I\ ,\ \forall\varepsilon > 0\ ,\ \Delta_{|C^o(I_\varepsilon,E_s)} \in L(C^o(I_\varepsilon,E_s))$

b) Si $g \in C^o(I_\varepsilon,E_s)$ et $\varepsilon' < \varepsilon$ alors : $\Delta g_{|I_{\varepsilon'}} = \Delta(g_{|I_{\varepsilon'}})$

(c'est-à-dire que Δ est un opérateur local).

c) $\exists\delta \in \mathcal{F}([0,\rho[, \mathbb{R}_+)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

i) δ est une fonction croissante

ii) $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\geq 0}} \delta(\lambda) = 0$

iii) Si $g \in C^o(I_\varepsilon,E_s)$ est telle que :

$$\forall t \in I_\varepsilon : \|g(t)\|_s \leqslant \delta(|t|)^k \, M_s(g)$$

alors : $\forall t \in I_\varepsilon$, $\|\Delta(g)(t)\|_s \leqslant \alpha_{k+1} \, \delta(|t|)^{k+1} \times M_s(g)$

où $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de $\mathbb{R}_+^*$ donnée en même temps que Δ et δ.

On note par $\|.\|_s$ la norme dans E_s .

(H-5) On note $\mathcal{M} = \{(s,s') \in I \times I : s < s'\} \times [0,\rho[$ et on suppose qu'il existe une fonction $\mathcal{B} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :

a) $\forall (s,s',\varepsilon) \in \mathcal{M} : I(s,s') \leqslant \mathcal{B}(s,s',\varepsilon)$.

b) Pour tout $(s,s',\varepsilon) \in \mathcal{M}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\operatorname*{Inf}_{s<\sigma<s'} \left\{ \sum_{r=1}^{m} L_r(\varepsilon,s).C_r(s,\sigma) \, [\mathcal{B}(\sigma,s',\varepsilon)]^{k+1} .(\prod_{i=1}^{r} \alpha_{k+i}).\delta(\varepsilon)^{r-1} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant [\mathcal{B}(s,s',\varepsilon)]^{k+2}$$

c) Pour s et s' fixés, la fonction $\lambda \to \mathcal{B}(s,s',\lambda)$ est croissante sur $[0,\rho[$.

II - ENONCE DU THEOREME D'OVSJANNIKOV GENERALISE.

Théorème 28.-

Sous les hypothèses (H-1), (H-2), (H-3), (H-4) et (H-5) on a : $\forall (s,s') \in I \times I$, $s < s'$, $\exists \, \tilde{\varepsilon}(s,s')$ tel que pour tout $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}(s,s')$ et pour tout $f \in C^0(I_\varepsilon, E_{s'})$, $\exists ! \; v \in C^0(I_\varepsilon, E_s)$ tel que :

$$\forall t \in I_\varepsilon \; , \quad v(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t) \, [(\Lambda_r \circ \Delta^r v)(t)] + f(t) \; .$$

La démonstration de ce théorème nécessite la démonstration de deux lemmes préliminaires.

On note $E_{s'}(I_\varepsilon)$ l'ensemble des fonctions $f : I_\varepsilon \to \bigcap_{s<s'} E_s$

telle que pour tout $s < s'$: $f \in C^o(I_\varepsilon, E_s)$.

On montre d'abord un lemme fondamental d'estimation de la convergence :

Lemme 29.-

Soient $(s,s') \in I \times I$, $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon)$ alors on peut définir une suite $w^k \in \mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon)$ par :

$$w^o = f \ , \quad w^{k+1}(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t) \left[(\Lambda_r \circ \Delta^r w^k)(t)\right]$$

et elle vérifie la majoration suivante :

$\forall(s,s'',\varepsilon')$ tel que : $s < s'' < s'$, $\varepsilon' < \varepsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in I_{\varepsilon'}$,

$$||w^k(t)||_s \leq \sup_{|t|\leq\varepsilon'} ||f(t)||_{s''} \ \delta(|t|)^k \left[\mathcal{B}(s,s'',\varepsilon')\right]^{k+1} .$$

Preuve :

1°) On démontre la première partie du lemme par récurrence sur k : on a : $w^o \in \mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon)$ car $w^o = f$ et $f \in \mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon)$ par hypothèse.

Supposons que $w^k \in \mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon)$ et montrons alors qu'on peut définir $w^{k+1} \in \mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon)$ par la formule :

$$w^{k+1}(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t) \left[(\Lambda_r \circ \Delta^r w^k)(t)\right]$$

Comme $\mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon) = \bigcap_{s<s'} C^o(I_\varepsilon, E_s)$ et $w^k \in \mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon)$ alors $w^k \in C^o(I_\varepsilon, E_s)$ pour tout $s < s'$ et il découle de (H-4) a) que : $\Delta^r w^k \in C^o(I_\varepsilon, E_s)$ pour tout $s < s'$; donc si $s < s'' < s'$ alors pour tout $t \in I_\varepsilon$ on a : $\Delta^r w^k(t) \in E_{s''}$ et on en déduit de (H-2) que $\Lambda_r(\Delta^r w^k(t)) \in E_s$.

$$\begin{tikzcd} I_\varepsilon \arrow[r, "\Delta^r w^k"] \arrow[dr] & E_{s''} \arrow[d, "\Lambda_r|E_{s''}"] \\ & E_s \end{tikzcd}$$

la composée $\Lambda_r \circ (\Delta^r w^k)$ des deux applications continues est continue :

$$\Lambda_r \circ (\Delta^r w^k) \in C^o(I_\varepsilon, E_s)$$

On vient de prouver que pour tout $s < s'$: $\Lambda_r \circ (\Delta^r w^k) \in C^o(I_\varepsilon, E_s)$ c'est-à-dire : $\Lambda_r \circ (\Delta^r w^k) \in \mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon)$. Il découle alors de (H-3) c) que : $\forall s < s'$: $\{t \to B_r(t)\ [(\Lambda_r \circ \Delta^r w^k)(t)]\} \in C^o(I_\varepsilon, E_s)$ et par conséquent $w^{k+1} \in \mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon)$.

2°) Montrons la deuxième partie du lemme par récurrence sur k :

$k = 0$: si $s < s'' < s'$ on a une injection de $E_{s''}$ dans E_s donc :

$$||w^o(t)||_s = ||f(t)||_s \leqslant I(s,s'') \ . \ ||f(t)||_{s''}$$

Si $\varepsilon' < \varepsilon$ et $|t| \leqslant \varepsilon'$ alors (H-5) a) implique :

$$||w^o(t)||_s \leqslant I(s,s'') \sup_{|t| \leqslant \varepsilon'} ||f(t)||_{s''} \leqslant \mathcal{B}(s,s'',\varepsilon') \sup_{|t| \leqslant \varepsilon'} ||f(t)||_{s''}$$

supposons que cette propriété est vraie jusqu'au rang k et montrons qu'elle est vraie pour le rang suivant :

$$||w^{k+1}(t)||_s = ||\sum_{r=1}^{m} B_r(t)\ [(\Lambda_r \circ \Delta^r w^k)(t)]||_s \leqslant \sum_{r=1}^{m} ||B_r(t)[(\Lambda_r \circ \Delta^r w^k)(t)]||_s \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{m} ||B_r(t)||_{\mathcal{L}(E_s)} . ||(\Lambda_r \circ \Delta^r w^k)(t)||_s \leqslant \sum_{r=1}^{m} L_r(\varepsilon',s) ||(\Lambda_r \circ \Delta^r w^k)(t)||_s$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{m} L_r(\varepsilon',s) \ . \ C_r(s,s''') \ . \ ||\Delta^r w^k(t)||_{s'''}$$

car $\Delta^r w^k(t) \in E_{s'''}$ si $s < s''' < s'' < s'$, $\Lambda_r : E_{s'''} \longrightarrow E_s$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$||w^k(t)||_{s'''} \leqslant \sup_{|t|\leqslant\varepsilon'} ||f(t)||_{s''} \cdot \delta(|t|)^k \left[\mathcal{B}(s''',s'',\varepsilon')\right]^{k+1}$$

De (H-4) c) iii) on tire :

$$||\Delta w^k(t)||_{s'''} \leqslant \sup_{|t|\leqslant\varepsilon'} ||f(t)||_{s''} \cdot \alpha_{k+1}\ \delta(|t|)^{k+1} \left[\mathcal{B}(s''',s'',\varepsilon')\right]^{k+1}$$

- -

$$||\Delta^r\ w^k(t)||_{s'''} \leqslant \sup_{|t|\leqslant\varepsilon'} ||f(t)||_{s''} \cdot \left[\prod_{i=1}^{r} \alpha_{k+i}\right] \cdot \delta(|t|)^{k+r} \cdot \left[\mathcal{B}(s''',s'',\varepsilon')\right]^{k+1}$$

On aura par conséquent :

$$||w^{k+1}(t)||_s \leqslant \sup_{|t|\leqslant\varepsilon'} ||f(t)||_{s''} \cdot \sum_{r=1}^{m} L_r(\varepsilon',s)C_r(s,s''')\left[\prod_{i=1}^{r} \alpha_{k+i}\right]\delta(|t|)^{k+r}\left[\mathcal{B}(s''',s'',\varepsilon')\right]^{k+1}$$

$$\leqslant \sup_{|t|\leqslant\varepsilon'} ||f(t)||_{s''} \cdot\delta(|t|)^{k+1} \cdot \sum_{r=1}^{m} L_r(\varepsilon',s)C_r(s,s''')\left[\prod_{i=1}^{r} \alpha_{k+i}\right]\delta(\varepsilon')^{r-1} \times$$

$$\times \left[\mathcal{B}(s''',s'',\varepsilon')\right]^{k+1}$$

Or cette inégalité est vraie pour tout $s''' \in \left]s,s''\right[$ donc :

$$||w^{k+1}(t)||_s \leqslant \sup_{|t|\leqslant\varepsilon'} ||f(t)||_{s''} \cdot\delta(|t|)^{k+1} \inf_{s'''\in]s,s''[} \left\{\sum_{r=1}^{m} L_r(\varepsilon',s)C_r(s,s''')\right.$$

$$\left.\left[\prod_{i=1}^{r} \alpha_{k+i}\right] \times \delta(\varepsilon')^{r-1} \times \left[\mathcal{B}(s''',s'',\varepsilon')\right]^{k+1}\right\}$$

$$\leqslant \sup_{|t|\leqslant\varepsilon'} ||f(t)||_{s''} \cdot\delta(|t|)^{k+1}\left[\mathcal{B}(s,s'',\varepsilon')\right]^{k+2} \qquad \text{d'après (H-5) b).}$$

C.Q.F.D.

Lemme 30.-

Les résultats du lemme 29 restent vrais si $f \in C^{o}(I_\varepsilon, E_{s'})$ et $s < s'' \leqslant s'$.

Preuve :

$$\begin{tikzcd} I_\varepsilon \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & E_{s'} \arrow[d, "i"] \\ & E_s \end{tikzcd}$$

Puisque f est continue de I_ε dans $E_{s'}$ et l'injection i est continue de $E_{s'}$ dans E_s alors f est continue de I_ε dans E_s. Il résulte de la preuve du lemme précédent qu'on a une suite $w^k \in E_{s'}(I_\varepsilon)$. Dans la majoration relative à $k = 0$, on peut prendre $s'' = s'$ ce qui est possible car $f \in C^{o}(I_\varepsilon, E_{s'})$, le reste de la démonstration est le même que celui du lemme précédent.

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème 28 :

1°) Existence.

Soient $(s,s') \in I \times I$ avec $s < s'$ et $\varepsilon(s,s')$ vérifiant la condition suivante :

$$\begin{cases} \delta(\varepsilon(s,s'))\ B(s,s',\varepsilon(s,s')) < 1 \\ \varepsilon(s,s') < \rho \end{cases}$$

Soient d'autre part $\varepsilon \leqslant \varepsilon(s,s')$ et $f \in C^{o}(I_\varepsilon, E_{s'})$; on définit une suite v^k par :

$$v^o = 0$$

$$v^{k+1}(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\ [(\Lambda_r \circ \Delta^r v^k)(t)] + f(t)$$

un raisonnement identique à celui fait dans le lemme 29 montre qu'on peut définir une suite $v^k \in \mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon)$, en particulier $v^1 = f$.

On pose : $w^k = v^{k+1} - v^k$, cette suite vérifie les propriétés suivantes :

α) $w^k \in \mathcal{E}_{s'}(I_\varepsilon)$

β) $w^o = v^1 - v^o = f$ et $w^{k+1}(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\ [(\Lambda_r \circ \Delta^r w^k)(t)]$

Il résulte alors du lemme 30 que si $s < s'' \leqslant s'$ on a :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon' \leqslant \varepsilon$, $|t| \leqslant \varepsilon'$ on a :

$$||w^k(t)||_s \leqslant \sup_{|t|\leqslant\varepsilon'} ||f(t)||_{s''} \cdot \delta(|t|)^k\ [\mathcal{B}(s,s'',\varepsilon')]^{k+1} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|t|\leqslant\varepsilon'} ||f(t)||_{s''} \cdot [\delta(\varepsilon(s,s''))\ \mathcal{B}(s,s'',\varepsilon(s,s'))]^k\ \mathcal{B}(s,s'',\varepsilon(s,s''))$$

Puisque $\varepsilon' \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon(s,s')$, $\delta(\varepsilon(s,s')) \times \mathcal{B}(s,s',\varepsilon(s,s')) < 1$ et E_s est un espace de Banach alors la série de terme général w^k converge normalement dans E_s sur tout compact $[-\varepsilon', \varepsilon']$ de I_ε et par conséquent la suite v^k converge uniformément dans E_s sur tout compact $[-\varepsilon', \varepsilon'] \subset I_\varepsilon$.

On a donc $\lim_{k\to+\infty} v^k$ qui existe et est continue sur I_ε. On note v_s cette limite, et on a : $v_s \in C^o(I_\varepsilon, E_s)$.

. Soit $s_1 < s'$ et $s_2 < s'$. Comparons v_{s_1} et v_{s_2} sur $I_{\varepsilon(s_1,s')} \cap I_{\varepsilon(s_2,s')}$.

Soit $t \in I_{\varepsilon(s_1,s')} \cap I_{\varepsilon(s_2,s')}$ alors $\begin{cases} v^k(t) \longrightarrow v_{s_1}(t) & \text{dans } E_{s_1} \\ v^k(t) \longrightarrow v_{s_2}(t) & \text{dans } E_{s_2} \end{cases}$

si on suppose que $s_1 < s_2$ on aura $E_{s_2} \hookrightarrow E_{s_1}$, donc

lorsque $k \to +\infty$ $\begin{cases} i(v^k(t)) \longrightarrow i(v_{s_1}(t)) & \text{dans } E_{s_1} \\ v^k(t) \longrightarrow v_{s_2}(t) & \text{dans } E_{s_1} \end{cases}$

il découle de l'unicité de la limite que : $v_{s_1}(t) = v_{s_2}(t)$ pour tout $t \in I_{\varepsilon(s_1,s')} \cap I_{\varepsilon(s_2,s')}$ autrement dit :

$$v_{s_1}\Big|_{I_{\varepsilon(s_1,s')} \cap I_{\varepsilon(s_2,s')}} = v_{s_2}\Big|_{I_{\varepsilon(s_1,s')} \cap I_{\varepsilon(s_2,s')}}$$

v_s <u>solution du problème sur</u> E_s :

On pose : $\tilde{\varepsilon}(s,s') = \min(\varepsilon(s,s'), \sup\limits_{s<\sigma<s'} \varepsilon(\sigma,s'), \sup\limits_{s''<s} \varepsilon(s'',s))$

Soient $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}(s,s')$ et $f \in C^o(I_\varepsilon, E_{s'})$.

. Puisque $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}(s,s')$ alors on peut définir $v_s \in C^o(I_\varepsilon, E_s)$ comme limite de la suite $v^k|_{I_\varepsilon}$ dans $C^o(I_\varepsilon, E_s)$.

. $\varepsilon \leq \sup\limits_{s<\sigma<s'} \varepsilon(\sigma,s') \Longrightarrow \exists \sigma \in]s,s'[$ tel que : $\varepsilon \leq \varepsilon(\sigma,s')$
on peut alors définir $v_\sigma \in C^o(I_\varepsilon, E_\sigma)$ comme la limite de la suite $v^k|_{I_\varepsilon}$ dans cet espace, on a alors $v_s = v_\sigma$ pour tout $t \in I_\varepsilon$, de plus :

$$||v_s(t)-\sum_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r o\Delta^r v_\sigma)(t)\right]-f(t)||_s = ||v_s(t)-v^{k+1}(t)+\sum_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r o\Delta^r(v^k-v_\sigma))(t)\right]||_s$$

$$\leqslant ||v_s(t)-v^{k+1}(t)||_s + \sum_{r=1}^{m} ||B_r(t)\left[(\Lambda_r o\Delta^r(v^k-v_\sigma))(t)\right]||_s \leqslant ||v_s(t)-v^{k+1}(t)||_s +$$

$$+ \sum_{r=1}^{m} L_r(\varepsilon,s)C_r(s,\sigma)||\Delta^r(v^k-v_\sigma)(t)||_\sigma \leqslant ||v_\sigma(t)-v^{k+1}(t)||_s +$$

$$+ \sum_{r=1}^{m} L_r(\varepsilon,s)C_r(s,\sigma)\left[\prod_{i=1}^{r}\alpha_i\right]\delta(\varepsilon)^r \sup_{|t|\leqslant\varepsilon} ||v_s(t)-v^k(t)||_\sigma \leqslant$$

$$\leqslant ||v^{k+1}(t)-v_\sigma(t)||_s + K(\varepsilon,s,\sigma)\sup_{|t|\leqslant\varepsilon} ||v_s(t)-v^k(t)||_\sigma$$

puisque pour $k \to +\infty$
$$\begin{cases} v^{k+1}(t) \longrightarrow v_s(t) & \text{dans } E_s \\ v^k(t) \longrightarrow v_\sigma(t) = v_s(t) & \text{dans } E_\sigma \end{cases}$$

alors par passage à la limite on aura : pour $t \in I_\varepsilon$,

$$v_s(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r \circ \Delta^r v_s)(t)\right] + f(t)$$

On vient de prouver que pour $\varepsilon \leqslant \tilde{\varepsilon}(s,s')$ et pour tout $f \in C^o(I_\varepsilon,E_{s'})$,

$$\exists\; v_s \in C^o(I_\varepsilon,E_s)$$

telle que si $t \in I_\varepsilon$,

$$v_s(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r \circ \Delta^r v_s)(t)\right] + f(t)$$

2°) Unicité de la solution.

On veut montrer que cette solution est unique dans $C^o(I_\varepsilon,E_s)$. On suppose qu'il existe deux solutions v_1 et v_2 dans $C^o(I_\varepsilon,E_s)$. On pose $w = v_1 - v_2$, alors :

α) $w \in C^o(I_\varepsilon,E_s)$

β) $w(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r \circ \Delta^r w)(t)\right]$

et par conséquent w est solution de l'équation :

$$w(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r \circ \Delta^r w)(t)\right] + f(t), \quad |t| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad f = 0.$$

Soit $s'' \in I$, $s'' < s$ alors $w \in C^o(I_\varepsilon,E_{s''})$, (car $E_s \hookrightarrow E_{s''}$). On définit une suite $w^k \in \mathcal{E}_{s''}(I_\varepsilon)$ par :

$$w^o = w, \quad w^{k+1}(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r \circ \Delta^r w^k)(t)\right].$$

Il découle du lemme 29 que si $s'' < s$ et $\varepsilon' \leq \varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$ $|t| \leq \varepsilon'$ alors :

$$||w^k(t)||_{s''} \leq \sup_{|t|\leq\varepsilon'} ||w(t)||_s . \delta(|t|)^k \left[\mathcal{B}(s'',s,\varepsilon')\right]^{k+1}$$

puisque $\varepsilon' \leq \varepsilon \leq \sup_{s''<s} \varepsilon(s'',s)$ alors $\exists s'' < s$ tel que $\varepsilon < \varepsilon(s'',s)$ et :

$$||w^k(t)||_{s''} \leq \sup_{|t|\leq\varepsilon'} ||w(t)||_s \left[\delta(\varepsilon(s'',s))\mathcal{B}(s'',s,\varepsilon(s'',s))\right]^k \mathcal{B}(s'',s,\varepsilon(s'',s))$$

or $\delta(\varepsilon(s'',s))\mathcal{B}(s'',s,\varepsilon(s'',s)) < 1$ donc : $\lim_{k\to+\infty} ||w^k(t)||_{s''} = 0$.

Il est clair que $w^k = w$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (par récurrence) donc $||w(t)||_{s''} = 0$ pour $|t| \leq \varepsilon'$ et par conséquent $w(t) = 0$ si $|t| \leq \varepsilon'$.

Or ceci est vrai pour tout $\varepsilon' \leq \varepsilon$ donc $w = 0$ (i.e. $v_1 = v_2$).

C.Q.F.D.

Corollaire 31.-

On fait les hypothèses suivantes :

(H-I) i) $I =]a,b[$ borné ;

ii) L'injection de $E_{s'}$ dans E_s a une norme ≤ 1 ;

(H-II) $C_r(s',s) = \dfrac{C}{(s'-s)^r}$;

(H-III) Il existe un nombre $L \geq 0$ tel que : $\forall s$, $\forall r$, $\forall \varepsilon$:

$L_r(\varepsilon,s) \leq L(\varepsilon)$;

(H-IV) Soit $\Delta = D_t^{-1}$, la notation D_t^{-1} désigne l'application de $C^o(I_\varepsilon,E_s)$ dans $C^o(I_\varepsilon,E_s)$ et elle est définie par :

si $g \in C^o(I_\varepsilon,E_s)$ alors $\Delta(g)(t) = D_t^{-1}g(t) = \int_o^t g(\tau)d\tau$.

On a dans ce cas : $\delta(\lambda) = \lambda$ et $\alpha_k = \dfrac{1}{k}$ $(k \geq 1)$.

Cette application possède les propriétés suivantes :

si $\forall t \in I_\varepsilon$, $||g(t)||_s \leq |t|^k M_s(g)$ alors :

$$||D_t^{-1}g(t)||_s \leq |\int_o^t ||g(\tau)||d\tau| \leq M_s(g)|\int_o^t |\tau|^k d\tau| = M_s(g)\ \frac{|t|^{k+1}}{k+1}\ .$$

(H-V) Existence d'une fonction $\mathcal{B}$ à partir des hypothèses ci-dessus.

On la cherche sous la forme :

$\mathcal{B}(s,s',\varepsilon) = (s'-s)^{-m}L_1$ où L_1 est une constante à déterminer :

a) $\forall(s,s',\varepsilon) \in \mathcal{M}$, $I(s,s') \leq \mathcal{B}(s,s',\varepsilon)$, il suffit de prendre : $L_1 \geq (b-a)^m$.

b) On a :

$$S \equiv \sum_{r=1}^{m} L_r(\varepsilon,s)C_r(s,\sigma)\left[\mathcal{B}(\sigma,s',\varepsilon)\right]^{k+1} \frac{\varepsilon^{r-1}}{\prod_{i=1}^{r}(k+i)} \leqslant$$

$$\leqslant C.L(\varepsilon) \sum_{r=1}^{m} \frac{(L_1)^{k+1}}{(\sigma-s)^r}(s'-\sigma)^{-m(k+1)} \frac{\varepsilon^{r-1}}{\prod_{i=1}^{r}(k+i)}$$

et on veut que : $\inf_{s<\sigma<s'} S \leqslant (L_1)^{k+2}.(s'-s)^{-m(k+2)}$

ou encore :

$$\inf_{\sigma\in]s,s'[} \left\{C.L(\varepsilon)\left(\frac{s'-s}{s'-\sigma}\right)^{m(k+1)}(s'-s)^m \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{(\sigma-s)^r} \cdot \frac{\varepsilon^{r-1}}{\prod_{i=1}^{r}(k+i)}\right\} \leqslant L_1.$$

Ceci sera vérifié si :

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left[C.L(\varepsilon). \inf_{\sigma\in]s,s'[} \left\{\left(\frac{s'-s}{s'-\sigma}\right)^{m(k+1)} \sum_{r=1}^{m} \frac{(s'-s)^m}{(\sigma-s)^r} \times \frac{\varepsilon^{r-1}}{\prod_{i=1}^{r}(k+i)}\right\}\right] \leqslant L_1.$$

Pour k donné on choisit σ tel que :

$$\frac{s'-s}{s'-\sigma} = \frac{m(k+1)+\frac{m}{3}}{m(k+1)} = 1 + \frac{1}{3(k+1)}$$

on vérifie que $\sigma \in]s,s'[$. <u>En effet</u> : $\frac{s'-s}{s'-\sigma} > 1 \implies \sigma > s$

$s' - \sigma = (s'-s)\dfrac{3(k+1)}{3(k+1)+1} > 0 \Rightarrow s' > \sigma.$

On voit que :

$$\left(\frac{s'-s}{s'-\sigma}\right)^{m(k+1)} = \left[1 + \frac{\frac{m}{3}}{m(k+1)}\right]^{m(k+1)} \leqslant e^{\frac{m}{3}}$$

et : $\sigma - s = (s'-s) - (s'-\sigma) = (s'-s)\dfrac{1}{3k+4} \geq (s'-s)\dfrac{1}{4(k+1)} \Longrightarrow \dfrac{s'-s}{\sigma - s} \leq 4(k+1)$.

On aura donc :

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \{C.L(\varepsilon) \inf_{\sigma\in]s,s'[} \left[\left(\frac{s'-s}{s'-\sigma}\right)^{m(k+1)} \sum_{r=1}^{m} \frac{(s'-s)^m}{(\sigma-s)^r} \times \frac{\varepsilon^{r-1}}{\prod_{i=1}^{k}(k+i)} \right] \} \leq$$

$$\leq C.L(\varepsilon).(4e^{\frac{1}{3}})^m \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{\sigma\in]s,s'[} \sum_{r=1}^{m} \frac{(k+1)^r}{\prod_{i=1}^{r}(k+i)} . \varepsilon^{r-1}.(s'-s)^{m-r} \leq$$

$$\leq C.L(\varepsilon)\left[4e^{\frac{1}{3}}(b-a)\right]^m . \frac{1}{\varepsilon} . \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)^r \equiv \tilde{L}_1$$

on prend : $L_1 = \max(\tilde{L}_1, (b-a)^m), B(s,s',\varepsilon) = \dfrac{L_1}{(s'-s)^m}$ et on choisit :

$$\varepsilon(s,s') < \frac{(s'-s)^m}{L_1} .$$

c) Il nous reste à vérifier que :

$\forall (s,s') \in I \times I$, $s < s'$, $\exists \varepsilon(s,s')$ tel que si $\lambda \leq \varepsilon(s,s')$ alors $\lambda B(s,s',\lambda) < 1$.

<u>En effet</u> :

$$\lambda B(s,s',\lambda) = \lambda \frac{L_1}{(s'-s)^m} \leq \varepsilon(s,s') \frac{L_1}{(s'-s)^m} < 1.$$

Donc toutes les hypothèses du théorème 28 sont vérifiées, alors sous les hypothèses (H-I), (H-II), (H-III), (H-IV) et (H-V) on peut énoncer le corollaire suivant :

$\forall (s,s') \in I \times I,\ s < s',\ \exists \tilde{\varepsilon}(s,s')$ tel que $\forall\, \varepsilon < \tilde{\varepsilon}(s,s'),\ \forall\, f \in C^o(I_\varepsilon, E_{s'})$

$\exists\, !\ v \in C^o(I_\varepsilon, E_s)$ vérifiant :

si $t \in I_\varepsilon$ alors : $v(t) = \sum\limits_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r \circ D_t^{-r} v)(t)\right] + f(t).$

Corollaire 32.-

Si on se place dans les hypothèses du corollaire 31 alors $\forall (s,s') \in I \times I,\ s < s',\ \exists \tilde{\varepsilon}(s,s')$ tel que $\forall\, \varepsilon < \tilde{\varepsilon}(s,s'),\ \forall\, f \in C^o(I_\varepsilon, E_{s'})$

$\exists\, !\ u \in C^m(I_\varepsilon, E_s)$ telle que :

$$t \in I_\varepsilon \implies \begin{cases} D_t^m u(t) = \sum\limits_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r \circ D_t^{m-r} u)(t)\right] + f(t) \\ \\ D_t^j u(0) = 0 \quad \text{pour } j \in \{0,\ldots,m-1\}. \end{cases}$$

Preuve :

On note $\Gamma^m(I_\varepsilon, E_s) = \{u \in C^m(I_\varepsilon, E_s)$ telle que $D_t^j u(0) = 0$ pour $j \in \{0,\ldots,m-1\}\}$.

On a : $C^o(I_\varepsilon, E_s) \xrightarrow{D_t^{-m}} \Gamma^m(I_\varepsilon, E_s)$ application bijective. Si $u \in \Gamma^m(I_\varepsilon, E_s)$ alors $D_t^{-r} D_t^m u(t) = D_t^{m-r} u(t)$.

En effet :

$$r = 1 : \quad D_t^{-1} D_t^m u(t) = \int_o^t D_t^m u(\tau)\, d\tau = \left[D_t^{m-1} u(\tau)\right]_o^t = D_t^{m-1} u(t) - D_t^{m-1} u(0)$$

$$= D_t^{m-1} u(t), \quad \text{car } D_t^{m-1} u(0) = 0 \ ;$$

$$r = 2 : \quad D_t^{-2} D_t^m u(t) = D_t^{-1} D_t^{m-1} u(t) = \int_o^t D_t^{m-1} u(\tau)\, d\tau = D_t^{m-2} u(t) \quad \text{car } D_t^{m-2} u(0) = 0$$

et par récurrence, pour tout $r \in \{0,\ldots,m-1\}$ on a :

$D_t^{-r}D_t^m u(t) = D_t^{m-r}u(t)$ (car $D_t^j u(0) = 0$ pour $j \in \{0,\dots,m-1\}$) par conséquent si $u \in \Gamma^m(I_\varepsilon,E_s)$ est solution du problème précédent et si on pose $D_t^m u = v$, $v \in C^o(I_\varepsilon,E_s)$, v est solution de :

$$v(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\ \left[(\Lambda_r \circ D_t^{-r}v)(t)\right] + f(t).$$

D'après le corollaire 31, v existe et est unique donc $u = D_t^{-m}v$ existe et est unique.

C.Q.F.D.

Corollaire 33.-

Sous les hypothèses du corollaire 31, on a :

$\forall (s,s') \in I \times I$, $s < s'$, $\exists \tilde{\varepsilon}(s,s')$ tel que $\forall\ \varepsilon < \tilde{\varepsilon}(s,s')$, $\forall\ f \in C^o(I_\varepsilon,E_{s'})$ et $\forall\ u_j \in \bigcup_{\sigma>s'} E_\sigma$ pour $j \in \{0,\dots,m-1\}$, $\exists\ !\ u \in C^m(I_\varepsilon,E_s)$ telle que :

$$t \in I_\varepsilon \implies \begin{cases} D_t^m u(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r \circ D_t^{m-r}u)(t)\right] + f(t) \\ D_t^j u(0) = u_j, \qquad j \in \{0,\dots,m-1\}. \end{cases}$$

Preuve :

1°) *Unicité de la solution* :

Supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2. Posons $U = u_1 - u_2$ puisque u_1 et u_2 sont dans $C^m(I_\varepsilon,E_s)$ alors il en est de même pour U, de plus :

$$D_t^j U(0) = D_t^j(u_1-u_2)(0) = u_j - u_j = 0, \quad j \in \{0,\dots,m-1\}$$

et : $$D_t^m U(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r \circ D_t^{m-r}U)(t)\right].$$

On voit que 0 est solution de ce problème et il résulte du corollaire 32 que cette solution est unique, donc $U = 0 \in C^m(I_\varepsilon, E_s)$ et par conséquent $u_1 = u_2$ d'où l'unicité de la solution.

2°) Existence de la solution :

En faisant un changement de fonction inconnue, on peut se ramener au corollaire 32.

On remarque que si $u \in C^m(I_\varepsilon, E_s)$ est solution alors :

$$U(t) = u(t) - \sum_{j=0}^{m-1} u_j \frac{t^j}{j!} \quad \text{est aussi dans} \quad C^m(I_\varepsilon, E_s).$$

On a : $u_j \in E_{\sigma_j}$ avec $\sigma_j > s' > s$ donc $u_j \in E_s$ (car $E_{\sigma_j} \subset E_s$).

De plus : $D_t^j U(0) = 0$ puisque $D_t^j u(0) = u_j$, $j \in \{0,\dots,m-1\}$

a) Equation vérifiée par U :

$$D_t^m(U)(t) = D_t^m u(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r \circ D_t^{m-r} U)(t)\right] +$$

$$+ \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\{\Lambda_r \circ D_t^{m-r}\left[\sum_{j=0}^{m-1} u_j \frac{t^j}{j!}\right]\} + f(t) =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} B_r(t)\left[(\Lambda_r \circ D_t^{m-r} U)(t)\right] + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} B_r(t)\left[\Lambda_r(D_t^{m-r} u_j \frac{t^j}{j!})\right] + f(t).$$

On pose :

$$F(t) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} B_r(t)\left[\Lambda_r(D_t^{m-r} u_j \frac{t^j}{j!})\right] + f(t) =$$

$$= \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} B_r(t)\left[\Lambda_r(u_j D_t^{m-r} \frac{t^j}{j!})\right] + f(t)$$

$$= \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=m-r}^{m-1} B_r(t) \left[\Lambda_r(u_j \frac{t^{j-(m-r)}}{[j-(m-r)]!})\right] + f(t)$$

$$= \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=m-r}^{m-1} B_r(t) \left[\frac{t^{j-(m-r)}}{[j-(m-r)]!} \Lambda_r(u_j)\right] + f(t).$$

U vérifie l'équation :

$$D_t^m U(t) = \sum_{r=1}^{m} B_r(t) \left[(\Lambda_r \circ D^{m-r} U)(t)\right] + F(t).$$

b) $F \in C^o(I_\varepsilon, E_{s'})$:

On a $u_j \in E_{\sigma_j}$ avec $\sigma_j > s'$ alors $\Lambda_r(u_j) \in E_{s'}$ par suite :

$$t \rightsquigarrow B_r(t) \left[\frac{t^{j-(m-r)}}{[j-(m-r)]!} \Lambda_r(u_j)\right] \in C^o(I_\varepsilon, E_{s'}) \quad \text{donc} \quad F \in C^o(I_\varepsilon, E_{s'}).$$

Toutes les hypothèses du corollaire 32 sont vérifiées donc ce corollaire s'applique à F et U et par conséquent U existe.

3°) u *solution du problème posé* :

Il suffit de remonter les calculs avec : $u(t) = U(t) + \sum_{j=0}^{m-1} u_j \frac{t^j}{j!}$.

C.Q.F.D.

Théorème 34 $(t \in \mathbb{C})$.-

On conserve les hypothèses (H-1) avec $(E_s)_{s\in I}$ une famille d'espaces de Banach sur $\mathbb{C}$, (H-2) et (H-5) ; l'hypothèse (H-3) est remplacée par :

(H-3)' Soit $\rho > 0$, $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ alors pour tout $r \in \{1,\dots,m\}$ on se donne $B_r \in \mathcal{H}(D_\rho, L(E))$ tel que a), b) restent inchangées et la condition c) devient :

c') $\forall s \in I, \forall \varepsilon \leq \rho : g \in \mathcal{H}(D_\varepsilon, E_s) \to \{z \to B_r(z)[g(z)]\} \in \mathcal{H}(D_\varepsilon, E_s)$.

Dans (H-4) la condition a) sera modifiée de la manière suivante :

a') $\forall s \in I, \forall \varepsilon > 0 : \Delta|_{\mathcal{H}(D_\varepsilon, E_s)} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}(D_\varepsilon, E_s))$.

On remplace le mot continu par holomorphe.

Alors $\forall (s,s') \in I \times I$, $s < s'$, $\exists \tilde{\varepsilon}(s,s')$ telque $\forall \varepsilon < \tilde{\varepsilon}(s,s')$, $\forall f \in \mathcal{H}(D_\varepsilon, E_{s'})$

$\exists !\, v \in \mathcal{H}(D_\varepsilon, E_s)$ telle que :

$$z \in D_\varepsilon \implies v(z) = \sum_{r=1}^{m} B_r(z)\left[(\Lambda_r \circ \Delta^r v)(z)\right] + f(z).$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 28. A un moment donné la convergence normale de la série w^k sur tout $D_{\varepsilon'}$ $(\varepsilon' < \varepsilon)$, entraîne la convergence uniforme de v^k et l'holomorphie de sa limite v (d'après le théorème de Weirstrass).

On peut énoncer trois corollaires de ce théorème analogues à ceux du théorème 28 ; le mot continu sera remplacé par le mot holomorphe.

Corollaire 35.-

Les hypothèses (H-I), (H-II) et (H-III) du corollaire 31 restent inchangées. On modifie (H-IV) de la manière suivante :

L'application $D_z^{-1} : \mathcal{H}(D_\varepsilon, E_s) \to \mathcal{H}(D_\varepsilon, E_s)$ est définie par :

$D_z^{-1} f(z) = \int_{\gamma_{0z}} f(\xi)\,d\xi$ où γ_{0z} est un chemin de $\mathbb{C}$ joignant 0 à z contenu dans D_ε, et on conserve (H-V).

Alors $\forall (s,s') \in I \times I$, $s < s'$, $\exists \tilde{\varepsilon}(s,s')$ tel que $\forall \varepsilon < \tilde{\varepsilon}(s,s')$

et $\forall f \in H(D_\varepsilon, E_{s'})$, $\exists !\, v \in H(D_\varepsilon, E_s)$ telle que :

$$z \in D_\varepsilon \implies v(z) = \sum_{r=1}^{m} B_r(z)\left[(\Lambda_r \circ D_z^{-r} v)(z)\right].$$

Corollaire 36.-

Sous les hypothèses du corollaire 35, on peut conclure :

$\forall (s,s') \in I \times I$, $s < s'$, $\exists \tilde{\varepsilon}(s,s')$ tel que $\forall \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}(s,s')$ et

$\forall f \in H(D_\varepsilon, E_{s'})$, $\exists !\, u \in H(D_\varepsilon, E_s)$ telle que :

$$z \in D_\varepsilon \implies \begin{cases} D_z^m u(z) = \sum_{r=1}^{m} B_r(z)\left[(\Lambda_r \circ D_z^{m-r} u)(z)\right] + f(z) \\ \\ D_z^j u(0) = 0 \qquad \text{pour} \quad j \in \{0,\ldots,m-1\}. \end{cases}$$

Corollaire 37.-

Dans les hypothèses du corollaire 35, on a :

$\forall (s,s') \in I \times I$, $s < s'$, $\exists \tilde{\varepsilon}(s,s')$ tel que $\forall \varepsilon < \tilde{\varepsilon}(s,s')$, $\forall f \in H(D_\varepsilon, E_{s'})$

et $\forall u_j \in \bigcup_{\sigma > s'} E_\sigma$ pour $j \in \{0,\ldots,m-1\}$, $\exists !\, u \in H(D_\varepsilon, E_s)$ telle que :

$$z \in D_\varepsilon \implies \begin{cases} D_z^m u(z) = \sum_{r=1}^{m} B_r(z)\left[(\Lambda_r \circ D_z^{m-r} u)(z)\right] + f(z) \\ \\ D_z^j u(0) = u_j \qquad (j \in \{0,\ldots,m-1\}). \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI and C. GOULAOUIC - *Cauchy problems with characteristic initial hypersurface*, Comm. on pure and appl. math. vol. 26, 455-475 (1973).

[2] H. CARTAN - *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variable complexe*, Hermann.

[3] CIUMASU, DORIN - *Partial differential equations of Fuchs type (romanian summary)* :

I - An. Sti. Univ. "Al. I. Cusa" Iasi. Ia Mat. (N.S.), 20 (1974), n° 2, p. 373-379.

II - Atti Acad. Naz. Lincei Rend. cl. Fis. Mat. Natur. (8), 53 (1973), 18-24 (1973).

[4] E.A. CODDINGTON et N. LEVINSON - *Theory of ordinary differential equations*, M.C. Graw-Hill Book Company, Inc. New York, 1955.

[5] J.C. DE PARIS - *Ondes asymptotiques et problème de Cauchy caractéristique local pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples.* C.R. Acad. Sc. t. 270, série A, 1970 ; p. 1509-1511.

[6] J.C. DE PARIS - *Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples ; lien avec l'hyperbolicité.* C.R. Acad. Sc. t. 272, série A, 1971, p. 478-481.

[7] J.C. DE PARIS - *Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable.* J. math. pures et appl. 51, 1972, p. 465-488.

[8] J.C. DE PARIS - *Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples.* C.R. Acad. Sc. t. 272, série A, 1971, p. 1723-1726.

[9] J.C. DE PARIS - *Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples lien avec l'hyperbolicité.* J. math. pures et appl. 51, 1972, p. 231-256.

[10] J. DIEUDONNÉ - *Calcul infinitésimal* : Hermann.

[11] L. GARDING, T. KOTAKE et J. LERAY - *Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes.* Bull. Soc. math. France 92 (1964), p. 263-361.

[12] R. GERARD - *Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe.* J. math. pures et appl. 47, 1968, p. 322-404.

[13] E. GOURSAT - *Cours d'analyse mathématique,* Tome 1, Gauthier-Villars, 1902.

[14] E. GOURSAT - *Cours d'analyse mathématique,* Tome 2, Gauthier-Villars, 1949.

[15] L. GREENBERG - *Maximal fuchsian groups.* Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 69 (1963), p. 569-573.

[16] V. GUILLEMIN, D. SCHAEFFER - *On a class of fuchsian partial differential equations.* Duke Math. Journal Vol. 44, n° 1 (1977), p. 159-192.

[17] A. HALANAY - Ecuatii differentiale editura didactică si pedagogică BUCURESTI.

[18] Y. HAMADA - *The singularities of the solutions of the Cauchy problem,* Publ. RIMS Kyoto Univ. Vol. 5 (1969), p. 21-40.

[19] Y. HAMADA - *On the propagation of singularities of the solution of the Cauchy problem,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. Vol. 6 (1970), p. 357-384.

[20] Y. HAMADA, J. LERAY et C. WAGSCHAL - *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle,* J. math. pures et appl. 55, 1976, p. 297-352.

[21] Y. HASEGAWA - *On the initial value problems with data on a double characteristic.*
J. math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) 11-2 (1971), p. 357-372.

[22] Y. HASEGAWA - *On the initial value problems with data on a characteristic hypersurface.*
J. math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) 13-3 (1973), p. 579-593.

[23] L. HÖRMANDER - *Linear partial differential operators.*
Springer-Verlag, Berlin 1964.

[24] J. LERAY - *Problème de Cauchy I.*
Bull. Soc. Math. France 85 (1957), p. 389-430.

[25] L. MACLACHLAN - *Maximal normal fuchsian groups,*
Illinois J. math. Vol. 15 (1971), p. 104-113.

[26] S. MIZOHATA - *Solutions nulles et solutions non analytiques.*
J. math. Kyoto. Univ. 1 (1962), p. 271-302.

[27] L.V. OVCHYANNIKOV - *A singular operator in a scale of Banach spaces,*
Doklady, 1965, Tom 163, n° 4.

[28] J. PERSONN - *Linear characteristic Cauchy problems for partial differential equations with variable not only time dependent coefficients,*
Bollettino U.M.I. (4) 4 (1971), p. 91-102.

[29] H. TAHARA - *Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations (Sophia University).*

[30] F. TREVES - *Ovsjannikov theorem and hyperdifferential operators,*
IMPA - Rio De Janeiro, 1968, Brazil.

[31] F. TREVES - *On the theory of linear partial differential operators with analytic coefficients,*
TAMS 137, 1969, p. 3 - 20.

[32] G. VALIRON - *Cours d'analyse mathématique : Equations fonctionnelles, applications,*
Deuxième édition Masson et Cie Editeurs, 1950.

[33] VAN DER WAERDEN - *Modern algebra,*
Frederick ungar publications, New York, 1948.

[34] C. WAGSCHAL - *Problème de Cauchy analytique à données méromorphes,*
J. math. pures et appl. 51 (1972), p. 375-397.

[35] C. WAGSCHAL - *Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes,*
J. math. pures et appl. 53, 1974, p. 99-132.

[36] T. YAMANAKA - *Note on Kowalevakaya's system of partial differential equations,*
Comment. math. Univ. St. Paul, 9-10, 1960-61, p. 1 - 20.

[37] K. YOSIDA - *Equations différentielles et intégrales,* Dunod 1971.