

N° d'ordre : 833

50376  
1980  
112

50376  
1980  
112

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

PATRICK CARON

FLOTS TRANSVERSALEMENT DE LIE



MEMBRES DU JURY : D. LEHMANN, PRÉSIDENT

G. HECTOR, RAPPORTEUR

J.C. THOMAS, EXAMINATEUR

SOUTENUE LE 27 JUIN 1980

Gilbert HECTOR m'a initié à la théorie des feuilletages ; c'est lui qui m'a proposé le thème de cette étude ; je le remercie sincèrement pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés, et pour la sympathie qu'il m'a témoignée, tout au long de l'élaboration de ce travail.

J'ai eu de nombreuses discussions avec Daniel LEHMANN, qui s'est intéressé de près à mes problèmes ; il a accepté de présider ce jury. Qu'il en soit remercié.

Je remercie également Jean-Claude THOMAS qui a bien voulu participer à ce jury.

Madame Claudine TATTI a dactylographié ce travail avec soin et rapidité. Je l'en remercie, ainsi que les services de l'imprimerie de l'U.E.R de Mathématiques de Lille I.

## INTRODUCTION

Si une variété compacte  $M$  supporte un feuilletage  $\mathcal{F}$  transversalement de Lie  $G$ , alors  $M$  se décompose en une fibration  $\bar{D}$ , de base un espace homogène compact de  $G$ , et de fibre l'adhérence d'une feuille de  $\mathcal{F}$ ; cette fibration est telle que le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur chaque fibre est lui-même transversalement de Lie  $K_e$  (où  $K_e$  est un sous-groupe de  $G$ ) [FED.].

Dans ce travail, nous nous intéressons au cas particulier des feuilletages transversalement de Lie  $G$ , de dimension un, induits par des flots (que l'on appelle  $G$ -flots) ; on montre que la fibre de la fibration  $\bar{D}$ , associée à un  $G$ -flot, est difféomorphe à un tore, et, on donne des théorèmes de conjugaison dans le cas où la structure transverse est abélienne, et, dans le cas où elle est nilpotente.

L'ordre dans lequel l'étude a été menée, est le suivant. Après avoir rappelé les propriétés essentielles des feuilletages transversalement de Lie, et, donné quelques propriétés des  $G$ -flots à orbites fermées (Ch.I, Ch.II), on montre que le feuilletage défini par un  $\mathbb{R}^n$ -flot (à orbites non fermées), est conjugué à un feuilletage linéaire de  $T^{n+1}$  ; par ailleurs les seuls  $G$ -flots minimaux, sont les  $\mathbb{R}^n$ -flots (cette étude a été faite en collaboration avec Y. Carrière [CAR;CAR.] )

Les chapitres suivants, sont consacrés au cas où le groupe de Lie  $G$  est nilpotent ; si le groupe d'holonomie  $\Gamma$  d'un  $G$ -flot nilpotent  $\phi$ , contient un sous-groupe  $\Gamma_0$ , tel que  $\Gamma_0$  est discret uniforme dans  $G$ , et  $\Gamma/\Gamma_0 \simeq \mathbb{Z}$ , alors le feuilletage défini par  $\phi$  est conjugué à un  $G$ -feuilletage homogène. Une étude détaillée est faite, dans le cas particulier où  $G$  est

le groupe de Heisenberg  $N$  de dimension 3 ; on décrit les groupes d'holonomie des  $N$ -flots (à orbites non fermées), et on montre que le feuilletage défini par un  $N$ -flot, est conjugué à un  $N$ -feuilletage homogène ; comme les seuls groupes de Lie nilpotents simplement connexes de dimension trois, sont d'une part  $\mathbb{R}^3$  et d'autre part  $N$ , on obtient ainsi une classification des  $G$ -flots nilpotents, à orbites non fermées, sur une variété compacte de dimension quatre.

# PLAN

		page
<u>CHAPITRE I</u>	<u>RAPPELS - EXEMPLES</u>	
	A - Feuilletages transversalement de Lie G	1
	B - Flots transversalement de Lie	4
<u>CHAPITRE II</u>	<u>G-FLOTS A ORBITES FERMEES.</u>	8
<u>CHAPITRE III</u>	<u><math>\mathbb{R}^n</math>-FLOTS</u>	11
<u>CHAPITRE IV</u>	<u>G-FLOTS MINIMAUX</u>	15
<u>CHAPITRE V</u>	<u>G-FLOTS SUR UNE VARIETE COMPACTE DE DIMENSION TROIS</u>	24
<u>CHAPITRE VI</u>	<u>G-FLOTS NILPOTENTS</u>	28
	A - Groupes de Lie nilpotents	28
	B - Flots nilpotents et flots homogènes	31
	C - Un exemple de G-flot nilpotent, où G n'est pas "rationnel".	38
<u>CHAPITRE VII</u>	<u>FLOTS DE HEISENBERG</u>	41
	A - Le groupe de Heisenberg de dimension trois	42
	B - Groupes d'holonomie des N-flots	44
	C - Flots homogènes et N-flots	52
	D - Théorème d'approximation du "type Tischler".	53
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>		55

\*

\*

\*

# CHAPITRE I

## RAPPELS - EXEMPLES.

-----

Nous rappelons dans la première partie de ce chapitre, les propriétés essentielles des feuilletages transversalement de Lie ; ces feuilletages ont été étudiés par E. Fedida [FED.]. La deuxième partie est consacrée au cas particulier des feuilletages transversalement de Lie de dimension 1 définis par des flots.

Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $n$ ,  $G$  un groupe de Lie de dimension  $p \leq n$ , et  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie de  $G$  ; un feuilletage transversalement de Lie  $G$  sur  $M$ , est défini par la donnée d'une 1-forme  $\omega$  à valeurs dans  $\mathcal{G}$  vérifiant une condition de Maurer-Cartan, et en tout point surjective ; un tel feuilletage peut également être défini à l'aide de cocycles à valeurs dans  $G$ .

Dans toute la suite, les structures différentiables considérées seront de classe  $C^r$  avec  $r \geq 1$ .

### A - FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT DE LIE $G$ .

Définition I-A-1.- On appelle  $G$ -cocycle localement constant sur  $M$ , la donnée d'une famille  $(U_i, f_i, g_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in I}}$  telle que :

- a)  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $M$ .
- b)  $f_i : U_i \rightarrow G$  est une submersion.
- c)  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  est une application localement constante telle que pour tout  $x \in U_i \cap U_j$ , on a :  $f_i(x) = g_{ij}(x) \cdot f_j(x)$ .

Définition I-A-2.- Soient  $(U_i, f_i, g_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in I}}$  et  $(U'_k, f'_k, g'_{kl})_{\substack{k \in K \\ l \in K}}$

deux G-cocycles localement constants sur M ; on dit que ces deux G-cocycles sont G-équivalents, si pour tout  $i \in I$  et pour tout  $k \in K$ , il existe une application localement constante  $a'_{ik} : U_i \cap U'_k \rightarrow G$  telle que pour tout  $x \in U_i \cap U'_k$ , on a :  $f_i(x) = a'_{ik}(x) f'_k(x)$ .

Remarque.- Si deux G-cocycles localement constants sur M, sont G-équivalents, alors leur réunion est encore un G-cocycle localement constant sur M.

Définition I-A-3.- Un G-cocycle localement constant sur M, définit un feuilletage  $\mathcal{F}$  ; un tel feuilletage est appelé feuilletage transversalement de Lie G.

Deux G-cocycles localement constants G-équivalents définissent sur M le même feuilletage ; un feuilletage transversalement de Lie G sur M est donc déterminé par la donnée d'une classe de G-équivalence de G-cocycles localement constants.

Remarque.- Si  $\tilde{G}$  est le revêtement universel de G, alors tout feuilletage transversalement de Lie G, est aussi transversalement de Lie  $\tilde{G}$  (cette notion ne dépend que de l'algèbre de Lie de G) ; dans la suite, nous supposons donc que le groupe de Lie G est simplement connexe.

Dans [FED.], E. Fédida a montré que l'étude d'un feuilletage transversalement de Lie G, sur une variété compacte M, se ramène (à une fibration près) à l'étude d'un feuilletage transversalement de Lie sur une sous-variété fermée de M, pour lequel toutes les feuilles sont denses ; de façon plus précise, on a le théorème suivant :

Théorème I-A-1 [FED]. - Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $n$ ,  $G$  un groupe de Lie simplement connexe de dimension  $p \leq n$ , et  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement de Lie  $G$  sur  $M$ . Si  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  est le revêtement universel de  $M$ , il existe une fibration localement triviale  $D : \tilde{M} \rightarrow G$  telle que :

i) si  $\tilde{\mathcal{F}}$  est le feuilletage relevé de  $\mathcal{F}$  dans  $\tilde{M}$ , alors  $\tilde{\mathcal{F}}$  est défini par  $D$ .

ii) il existe une représentation  $H : \Pi_1(M) \rightarrow G$  équivariante par rapport à  $p$ , c'est-à-dire que pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{M}$ , et pour tout  $\gamma \in \Pi_1(M)$  on a :  $D(\gamma.\tilde{x}) = H(\gamma)D(\tilde{x})$ .

iii) si on note  $\Gamma$  le sous-groupe de  $G$  défini par  $\Gamma = H(\Pi_1(M))$ , et  $K$  l'adhérence de  $\Gamma$  dans  $G$ , alors les adhérences des feuilles de  $\mathcal{F}$  sont les fibres d'une fibration  $\bar{D} : M \rightarrow G/K$ .

(iv) dans chaque fibre de la fibration  $\bar{D}$ , le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  est transversalement de Lie  $K_e$ , où  $K_e$  est la composante connexe de l'élément neutre dans  $K$ .

Notations. L'homomorphisme  $H$  est appelé représentation d'holonomie du feuilletage  $\mathcal{F}$ , le sous-groupe  $\Gamma$  est le groupe d'holonomie, et l'application  $D$  est l'application développante ; on appelle par ailleurs diagramme développant de  $\mathcal{F}$ , le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{M} & \xrightarrow{D} & G \\
 P \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{\bar{D}} & G/K
 \end{array}$$



Remarques.

1) Réciproquement, si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage sur  $M$  pour lequel les propriétés i) et ii) sont vérifiées, alors le feuilletage  $\mathcal{F}$  est transversalement de Lie  $G$ .

2) Si la variété  $M$  n'est pas compacte, alors le feuilletage relevé  $\tilde{\mathcal{F}}$  est défini par une submersion.

Proposition I-A-1 [FED]. Soient  $M$  une variété compacte, et,  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement de Lie  $G$  sur  $M$  ; on a les propriétés suivantes :

- a) les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont difféomorphes
- b) les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont simplement connexes si et seulement si la représentation d'holonomie  $H$  est injective.
- c) les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont denses dans  $M$ , si et seulement si, le groupe d'holonomie  $\Gamma$  de  $\mathcal{F}$ , est dense dans  $G$ .

On va à présent s'intéresser au cas particulier des feuilletages transversalement de Lie de dimension 1, définis par des flots.

B - FLOTS TRANSVERSALEMENT DE LIE.

Définition I-B-1.- Soient  $M$  une variété compacte de dimension,  $G$  un groupe de Lie simplement connexe de dimension  $(n-1)$ , et  $\phi$  un flot sur  $M$ . Le flot  $\phi$  est appelé G-flot, lorsque le feuilletage défini par  $\phi$  est transversalement de Lie  $G$ .

Les exemples de G-flots que l'on va donner dans la suite, sont du type "homogène" ; un des buts de ce travail est d'ailleurs de montrer que dans le cas où  $G = \mathbb{R}^n$ , les G-flots sont du type "homogène" (à conjugaison "sans paramètre près") ; cette propriété sera ensuite généralisée à certains flots transversalement nilpotents.

Définition I-B-2.- Soient  $\tilde{G}$  un groupe de Lie simplement connexe,  $\tilde{\Gamma}$  un sous-groupe discret uniforme de  $\tilde{G}$ , et,  $X$  un sous-groupe distingué à un paramètre de  $\tilde{G}$ . L'opération naturelle à gauche de  $X$  sur la variété compacte  $M = \tilde{G}/\tilde{\Gamma}$ , est un flot transversalement de Lie  $G = X \backslash \tilde{G}$  qu'on appellera flot homogène.

Exemple I-B-1.- Flots linéaires sur le tore.

Soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ; on considère le sous-groupe à un paramètre du groupe de Lie  $\mathbb{R}^n$ , défini par  $X(t) = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$ ; en projetant sur  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = T^n$ , on obtient un  $\mathbb{R}^{n-1}$ -flot (flot linéaire sur  $T^n$ ); ce  $\mathbb{R}^{n-1}$ -flot est homogène.

Exemple I-B-2.- Flots "propres" sur les fibrés hyperboliques.

Soit  $A$  une matrice de  $SL_2(\mathbb{Z})$  de trace strictement supérieure à deux; l'automorphisme  $A$  a deux valeurs propres réelles positives et distinctes,  $\lambda$  et  $1/\lambda$ ; on note  $V_1$  et  $V_2$  des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres  $\lambda$  et  $1/\lambda$ .

On désigne par  $T_A^3$  le fibré en tores  $T^2$  sur le cercle, obtenu en quotientant  $T^2 \times \mathbb{R}$  par la relation d'équivalence qui identifie  $(m, t)$  à  $(A(m), t+1)$ ; la direction propre  $\Delta_2$  engendrée par  $V_2$  induit sur  $T^2 \times \mathbb{R}$  un flot  $\phi_2$  (ce flot est irrationnel dans chaque tore); le flot  $\phi_2$  définit sur  $T_A^3$  un flot  $\bar{\phi}_2$  qu'on appelle flot propre de  $T_A^3$  associé à la valeur propre  $1/\lambda$ .

Proposition I-B-1.- Le flot propre  $\bar{\phi}_2$  sur  $T_A^3$ , est transversalement de Lie le groupe affine  $GA$ , et, est du type homogène.

Démonstration. Nous allons utiliser une extension du groupe affine  $GA$  par le groupe de Lie  $\mathbb{R}$ , qui a été décrite par E. Ghys [G.H.] dans son étude des actions "homogènes" du groupe affine.

Puisque la matrice  $A$  a deux valeurs réelles strictement positives, on peut définir  $A^t$  pour tout réel ; soit  $G_3^A$  le groupe de Lie obtenu en considérant sur  $\mathbb{R}^3$  la loi de composition définie ci-dessous :

$$(t,x,y)t',x',y') = (t+t', A^t(x',y') + (x,y))$$

Le groupe de Lie  $G_3^A$  est contractile et résoluble ; le sous-groupe  $\Gamma_A$  de  $G_3^A$  défini par  $\Gamma_A = \{(t,x,y) \in G_3^A ; t,x,y \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe discret uniforme de  $G_3^A$ , et l'espace homogène compact  $G_3^A/\Gamma_A$  est le tore hyperbolique  $T_A^3$  [GH.]

On identifie le groupe affine  $GA$  au groupe de Lie obtenu en considérant sur  $\mathbb{R}^2$  la loi de groupe :

$$(t,s)(t',s') = (t+t', \lambda^t s' + s)$$

On note  $\eta_1(x,y)$  la composante sur le vecteur  $V_1$  du vecteur  $(x,y)$  de  $\mathbb{R}^2$  ; il est facile de vérifier que l'application  $\Pi$  de  $G_3^A$  dans  $GA$  définie par :

$$\Pi(t,x,y) = (t, \eta_1(x,y))$$

est un homomorphisme de groupes de Lie ; l'homomorphisme  $\Pi$  est surjectif, et, son noyau  $X = \text{Ker } \Pi$  est le sous-groupe à un paramètre de  $G_3^A$  défini par  $X = \{(0, k V_2) \in G_3^A ; k \in \mathbb{R}\}$  ; Le sous-groupe à un paramètre  $X$  définit sur  $G_3^A/\Gamma_A$  le flot  $\bar{\Phi}_2$ , ce qui démontre le résultat ■

Remarque 1. - On peut définir de la même manière un  $GA$ -flot homogène  $\bar{\Phi}_1$  sur  $T_A^3$ , associé à la valeur propre  $\lambda$  ; on obtient ainsi deux flots propres sur le fibré hyperbolique  $T_A^3$ .

Remarque 2.- Soit  $\phi$  un  $G$ -flot sur une variété compacte  $M$ , de groupe d'holonomie  $\Gamma$  ; l'adhérence  $K$  de  $\Gamma$  dans  $G$ , n'est pas en général un sous-groupe connexe de  $G$  ; il suffit de considérer le  $\mathbb{R}^2$ -flot homogène défini sur  $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$  par le sous-groupe à un paramètre de  $\mathbb{R}^3$  :  $X(t) = (t, \sqrt{2}t, t)$  ; dans ce cas,  $K$  est isomorphe à  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$ .

## CHAPITRE II

### G-FLOTS A ORBITES FERMEES.

-----

D'après la proposition I.A.1, la représentation d'holonomie  $H$  d'un  $G$ -flot, est injective, si et seulement si les orbites de  $\phi$  ne sont pas fermées (dans ce cas, un élément  $\gamma$  de  $\Pi_1(M)$  et l'élément  $H(\gamma)$  de  $G$  seront notés de la même manière). On peut décrire les propriétés essentielles des  $G$ -flots à orbites fermées, de la façon suivante :

Proposition II.1. - Soit  $G$  un groupe de Lie simplement connexe de dimension  $n$ . Il existe une variété compacte  $M$  de dimension  $(n+1)$ , et, un  $G$ -flot sur  $M$ , à orbites fermées, si et seulement si, le groupe de Lie  $G$  contient un sous-groupe discret uniforme.

Démonstration. Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $(n+1)$ , et,  $\phi$  un  $G$ -flot sur  $M$  ayant ses orbites fermées. Le diagramme développant du flot  $\phi$  s'écrit :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^c & \longrightarrow & \tilde{M} & \xrightarrow{D} & G \\
 & & \downarrow P & & \downarrow \\
 \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^c & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\bar{D}} & G/K
 \end{array}$$

Les orbites de  $\phi$  sont les fibres de la fibration  $\bar{D}$  ; pour des raisons de dimension  $K$  est discret, et par conséquent on a  $\Gamma = K$  ; le groupe d'holonomie  $\Gamma$  de  $\phi$  est donc un sous-groupe discret uniforme de  $G$ .

Réciproquement, supposons que  $G$  contient un sous-groupe discret uniforme  $\Gamma$  ; soient  $M$  la variété compacte de dimension  $(n+1)$  :  $M = \mathbb{S}^1 \times G/\Gamma$  et  $\phi$  le flot sur  $M$  défini par :

$$\phi_t(s, x) = (e^{2i\pi t} \cdot s, x) ;$$

le flot  $\phi$  est un  $G$ -flot sur  $M$  ■

Corollaire II.1. - Il n'existe pas de flots transversalement de Lie  $GA$ , ayant ses orbites fermées.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition II.1, en remarquant que le groupe affine  $GA$ , ne contient aucun sous-groupe discret uniforme (les espaces homogènes de dimension 2 de  $GA$ , sont le plan et le cylindre) ■

La proposition II.1 donne une caractérisation des structures transverses des  $G$ -flots à orbites fermées ; les variétés compactes qui supportent de tels  $G$ -flots vérifient la propriété suivante :

Proposition II.2. - Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $(n+1)$ , et,  $G$  un groupe de Lie simplement connexe de dimension  $n$ .

S'il existe un  $G$ -flot sur  $M$  à orbites fermées, alors le groupe  $\Pi_1(M)$  contient un sous-groupe cyclique infini.

Démonstration. Soit  $\phi$  un  $G$ -flot sur  $M$ , à orbites fermées, et de groupe d'holonomie  $\Gamma$  ; le diagramme développant de  $\phi$  s'écrit :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \hookrightarrow & \tilde{M} & \xrightarrow{D} & G \\ & & \downarrow P & & \downarrow \\ \mathbb{S}^1 & \hookrightarrow & M & \xrightarrow{\bar{D}} & G/\Gamma \end{array}$$

La suite exacte de la fibration  $\bar{D}$  s'écrit :

$$\Pi_2(G/\Gamma) \longrightarrow \Pi_1(S^1) \xrightarrow{i} \Pi_1(M) \xrightarrow{\bar{D}_*} \Pi_1(G/\Gamma) \rightarrow 0$$

Puisque les orbites du flot relevé dans  $\tilde{M}$  sont simplement connexes, l'homomorphisme  $i$  est injectif ; on en déduit que le groupe  $\Pi_1(M)$  contient le sous-groupe cyclique infini  $i(\mathbb{Z})$  ■

Cette proposition montre qu'une fibration en cercles de base compacte, n'est pas nécessairement induite par un  $G$ -flot à orbites fermées. On a le contre-exemple suivant :

Corollaire II.2. La fibration de Hopf  $k : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  n'est pas induite par un flot transversalement de Lie.

Démonstration. La fibration de Hopf, s'obtient en identifiant d'une part  $\mathbb{S}^3$  à  $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ , et d'autre part  $\mathbb{S}^2$  à la droite projective complexe ;  $k$  est alors la projection naturelle. Le résultat est immédiat puisque  $\Pi_1(\mathbb{S}^3) = 0$  ■

On a donné précédemment un exemple de  $\mathbb{R}^n$ -flot, il s'agissait d'un flot linéaire sur  $T^{n+1}$  ; on va montrer dans le chapitre suivant, que le feuilletage défini par un  $\mathbb{R}^n$ -flot à orbites non fermées, est conjugué à un feuilletage linéaire de  $T^{n+1}$ .

## CHAPITRE III

### $\mathbb{R}^n$ -FLOTS

-----

La classification des  $\mathbb{R}^n$ -flots est donnée par le théorème suivant :

Théorème III.1. - Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $(n+1)$ , et  $\phi$  un  $\mathbb{R}^n$ -flot sur  $M$ .

Alors on a les deux possibilités suivantes :

a) les orbites de  $\phi$  sont les fibres d'une fibration en cercles de  $M$  sur  $T^n$ .

b) les orbites de  $\phi$  ne sont pas fermées ; dans ce cas la variété  $M$  est difféomorphe à  $T^{n+1}$ , et le feuilletage défini par  $\phi$  est conjugué à un feuilletage linéaire de  $T^{n+1}$ .

Si les orbites de  $\phi$  sont fermées, le groupe d'holonomie  $\Gamma$  de  $\phi$  est un sous-groupe discret uniforme de  $\mathbb{R}^n$  ; les orbites de  $\phi$  sont alors les fibres d'une fibration  $\bar{D} : M \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$  (Th.I.A.1), ce qui démontre la partie a) du théorème.

La partie b) du théorème, s'obtient en montrant que  $\phi$  possède une section isomorphe au groupe de Lie  $T^n$ , et donc  $\phi$  s'obtient par suspension d'une translation du groupe  $T^n$  ; la démonstration du théorème s'effectue à l'aide des deux lemmes suivants :

Lemme III.1. [MALC]. Soient  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\mathbb{R}^n$ , et  $K$  l'adhérence de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Le sous-groupe  $K$  est uniforme dans  $\mathbb{R}^n$ , si et seulement si,  $\Gamma$  contient un sous-groupe discret uniforme de  $\mathbb{R}^n$ .



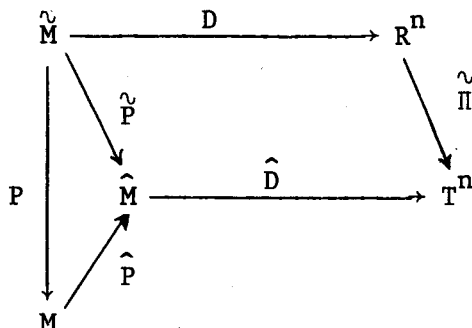
Démonstration. Si  $\Gamma$  contient un sous-groupe  $\Gamma_0$  discret uniforme dans  $\mathbb{R}^n$ , alors l'espace homogène  $\mathbb{R}^n/K$  est compact, puisque image du compact  $\mathbb{R}^n/\Gamma_0$  par la projection canonique de  $\mathbb{R}^n/\Gamma_0$  sur  $\mathbb{R}^n/K$ .

Réciproquement, si  $\Gamma$  ne contient aucun sous-groupe discret uniforme de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\Gamma$  et par conséquent  $K$  ne contiennent aucune base de  $\mathbb{R}^n$ ; le sous-espace vectoriel  $W$  engendré par  $K$ , est donc de dimension  $p < n$ ; si  $W_1$  est un supplémentaire de  $W$ , l'espace homogène  $\mathbb{R}^n/K$  est homéomorphe à l'espace produit  $W_1 \times W/K$ , ce qui montre que  $K$  n'est pas un sous-groupe uniforme de  $\mathbb{R}^n$ .

Lemme III.2. - Le flot  $\phi$  possède une section.

Démonstration. Soient  $\Gamma$  le groupe d'holonomie de  $\phi$ , et  $K$  l'adhérence de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^n$ ; comme  $K$  est un sous-groupe uniforme de  $\mathbb{R}^n$ , le sous-groupe  $\Gamma$  contient un sous-groupe  $\Gamma_0$  discret uniforme dans  $\mathbb{R}^n$  (Lemme III.1), le groupe  $H = \Gamma/\Gamma_0$  est abélien de type fini, et par conséquent  $H = H_1 \oplus H'_1$  où  $H_1$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^p$ , et,  $H'_1$  est un groupe fini; si  $\tilde{\Gamma}_0$  est l'extension de  $\Gamma_0$  par  $H'_1$ , alors le sous-groupe  $\tilde{\Gamma}_0$  est discret uniforme dans  $\mathbb{R}^n$ , et le groupe  $\Gamma/\tilde{\Gamma}_0$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^p$ .

Considérons la variété  $\hat{M} = \tilde{M}/\tilde{\Gamma}_0$ ; la projection canonique  $\tilde{p} : \tilde{M} \rightarrow \hat{M}$  est une application de revêtement galoisien, le groupe de ce revêtement est  $\tilde{\Gamma}_0$ . Il existe alors un revêtement galoisien  $\hat{p} : \hat{M} \rightarrow M$  de groupe  $\Gamma/\tilde{\Gamma}_0 = \mathbb{Z}^p$  tel que  $p = \hat{p} \circ \tilde{p}$ . On note par ailleurs  $\tilde{\Pi}$  la projection canonique de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n/\tilde{\Gamma}_0 \simeq \mathbb{T}^n$ .



La fibration  $D$  induit une fibration  $\hat{D} : \hat{M} \rightarrow T^n$  telle que :

$$\hat{D} \circ \hat{p} = \hat{\Pi} \circ D.$$

Si  $\hat{\phi}$  est le flot relevé dans  $\hat{M}$ , alors les feuilles du feuilletage défini par  $\hat{\phi}$  sont les fibres de  $\hat{D}$  ; puisque les orbites de  $\hat{\phi}$  ne sont pas fermées, le fibré  $\hat{D}$  est un fibré en droites orientable, et par conséquent la variété  $\hat{M}$  est difféomorphe à  $R \times T^n$ . Le revêtement galoisien  $\hat{p} : \hat{M} \rightarrow M$  a une base compacte, et son espace total a deux bouts ; on en déduit que son groupe à savoir  $\Gamma / \hat{\Gamma}_0$  a deux bouts et donc le groupe  $\Gamma / \hat{\Gamma}_0$  est isomorphe à  $Z$ . Un lemme technique de D. Fried [FRI.] montre que dans ces conditions, il existe une section  $\hat{\sigma}$  du fibré  $\hat{D}$  telle que  $\hat{p} \circ \hat{\sigma}$  est un plongement ; la sous-variété  $\hat{p} \circ \hat{\sigma}(T^n)$  isomorphe au groupe de Lie  $T^n$ , est alors une section du flot  $\phi$

Démonstration du théorème III.1. On note  $\Lambda$  la section du flot  $\phi$ , obtenue dans le lemme III.2 ; on modifie le paramétrage du flot  $\phi$  de manière à ce que la fonction de temps de 1er retour associée à  $\Lambda$  soit constante et égale à 1, et on appelle  $R$  le difféomorphisme de premier retour. En transportant la section  $\Lambda$  par le flot  $\phi$  (muni de son nouveau paramétrage), on obtient sur  $M$  une fibration de fibre  $\Lambda$  et de base  $R$  ; la variété  $M$  est difféomorphe au quotient de  $\Lambda \times R$  obtenu en identifiant  $(\lambda, t)$  et  $(R(\lambda), t-1)$  ; comme par ailleurs  $R$  est obtenu à partir d'une translation de  $R^n$ , la variété  $M$  est difféomorphe à  $T^{n+1}$ . Avec le nouveau paramétrage, le flot  $\phi$  est induit par le champ de vecteurs constant  $(0, 1)$  sur  $\Lambda \times R$ , et par conséquent le feuilletage défini par  $\phi$  est conjugué à un feuilletage linéaire de  $T^{n+1}$

D'après le théorème I.A.1, les adhérences des orbites d'un G-flot  $\phi$  sur une variété compacte, constituent une fibration telle que dans chaque

fibre, le flot induit par  $\Phi$ , est à orbites denses ; nous allons étudier dans le chapitre suivant les G-flots minimaux (i.e. les G-flots à orbites denses) ; les G-flots minimaux sont des  $\mathbb{R}^n$ -flots ; on obtient ainsi compte-tenu de l'étude précédente, la classification des G-flots minimaux.

## CHAPITRE IV

### G-FLOTS MINIMAUX

Pour montrer qu'un  $G$ -flot minimal est un  $\mathbb{R}^n$ -flot, il suffit de montrer que le groupe de Lie  $G$  est commutatif ; pour ce faire, nous adaptons une méthode de W. Thurston [THU.] qui consiste à construire une relation d'ordre sur les "petits éléments" du groupe d'holonomie  $\Gamma$  ; cette construction s'effectue à l'aide de la relation d'ordre naturel qui est définie sur les orbites d'un flot. En vérifiant que cet ordre est un bon ordre, on en déduit que  $\Gamma$  est commutatif ; comme par ailleurs  $\Gamma$  est un sous-groupe dense de  $G$  (proposition I.A.2), la commutativité de  $G$  en découle.

Théorème IV.1. - Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $(n+1)$ ,  $G$  un groupe de Lie simplement connexe de dimension  $n$ , et  $\phi$  un  $G$ -flot sur  $M$ . Si le  $G$ -flot  $\phi$  est minimal, alors on a :  $G = \mathbb{R}^n$ .

Munissons d'abord la variété  $M$  d'une métrique "adaptée" au flot  $\phi$  ; puisque le flot  $\phi$  est transversalement de Lie  $G$ , il existe sur  $M$  une métrique quasi-fibrée [FED.]  $\mu$  ; la métrique  $\tilde{\mu}$  relevée dans  $\tilde{M}$  est quasi-fibrée, et se projette par  $D$  sur une métrique invariante à gauche de  $G$  qui définit une distance notée  $d$ . Le relèvement vertical des courbes de  $G$  par  $D$  existe globalement et conserve les longueurs ; la projection  $p$  conserve elle aussi les longueurs des courbes verticales [REI.]

Soit  $\Gamma$  le groupe d'holonomie du flot  $\phi$  ; pour  $\varepsilon > 0$ , on note :

$$\Gamma_\varepsilon = \{g \in \Gamma ; d(e,g) < \varepsilon\} \quad \text{et} \quad G_\varepsilon = \{g \in G ; d(e,g) < \varepsilon\}.$$

La démonstration du théorème IV.1 s'effectue en trois temps :

- 1) construction d'une relation d'ordre sur  $G_\varepsilon$ .
- 2) la relation d'ordre sur  $G_\varepsilon$ , induit sur  $\Gamma_\varepsilon$  (pour  $\varepsilon$  suffisamment petit) une relation de bon ordre.
- 3) le groupe  $\Gamma$  est commutatif.

1. Relation d'ordre sur  $G_\varepsilon$ .

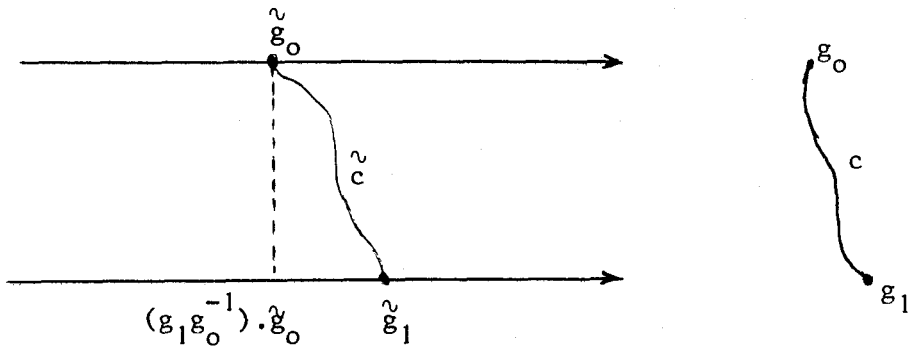
Appelons  $I_1$  la borne inférieure des longueurs des lacets de  $M$  non homotopes à zéro ; comme la variété  $M$  est compacte, le nombre  $I_1$  est strictement positif ; soit par ailleurs  $I_2 > 0$  telle que  $G_{I_2}$  est une boule géodésiquement convexe ; on notera  $I = \inf(I_1, I_2)$ . Soient  $g_0$  et  $g_1$  deux éléments distincts de  $G$  ; on dira que  $g_0$  et  $g_1$  sont comparables si :

$$g_1 g_0^{-1} \in \Gamma \text{ et } d(g_0, g_1) < I.$$

Considérons alors  $c$  un chemin de  $G$  joignant  $g_0$  à  $g_1$  de longueur  $\ell(c)$  strictement plus petite que  $I$ . Pour  $\tilde{g}_0 \in D^{-1}(g_0)$ , il existe un relèvement vertical unique  $\tilde{c}$  de  $c$  d'origine  $\tilde{g}_0$  ; notons  $\tilde{g}_1$  l'extrémité de ce relèvement. Les points  $(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0$  et  $\tilde{g}_1$  sont distincts ; en effet si  $(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0 = \tilde{g}_1$  alors  $p \circ \tilde{c}$  est un lacet de  $M$  non homotope à zéro (puisque  $g_0 \neq g_1$ ) et de longueur strictement plus petite que  $I$ , ce qui contredit le choix de  $I$ .

On dira alors que  $g_0 > g_1$  (resp.  $g_0 < g_1$ ) si :

$$\tilde{g}_1 = \tilde{\Phi}_t[(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0] \text{ avec } t > 0 \text{ (resp. } t < 0).$$



Cas :  $g_1 < g_0$ .

La relation définie ci-dessus est clairement antisymétrique ; elle vérifie en outre les propriétés suivantes :

i) elle ne dépend pas des choix de  $c$  et  $\tilde{g}_0$

Considérons  $c'$  un autre chemin de longueur strictement plus petite que  $I$  joignant  $g_0$  à  $g_1$  ; d'après le choix de  $I$  il existe une homotopie  $F_\theta$  entre  $c$  et  $c'$  telle que pour tout  $\theta : \ell(F_\theta) < I$  ; on note  $\tilde{F}_\theta$  le relèvement vertical de  $F_\theta$  d'origine  $\tilde{g}_0$ . L'application  $\psi : [0,1] \rightarrow D^{-1}(g_1)$  définie par  $\psi(\theta) = \tilde{F}_\theta(1)$  est continue, et  $(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0$  n'appartient pas à  $\text{Im } \psi$  ; les nombres  $t_\theta$  définis par :

$$\psi(\theta) = \tilde{\phi}_{t_\theta} [(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0]$$

sont donc de même signe, en particulier  $t_0$  et  $t_1$  sont de même signe.

Pour  $c$  fixé,  $t$  défini par  $\tilde{g}_1 = \tilde{\phi}_t [(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0]$  dépend continûment de  $\tilde{g}_0$  (théorème de continuité des solutions d'une équation différentielle par rapport aux conditions initiales), lorsque  $\tilde{g}_0$  varie dans  $D^{-1}(g_0)$ ,  $t$  est donc de signe constant.

ii) Pour tout  $\epsilon < I/4$  la relation induite sur  $G_\epsilon$  est transitive.

Le groupe  $\Gamma$  opère à gauche sur  $\tilde{M}$  en respectant l'orientation des orbites de  $\tilde{\phi}$ , c'est-à-dire que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , tout  $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$  et

tout  $t \in \mathbb{R}$  on a :

$$\gamma \cdot \tilde{\phi}_t(\tilde{x}_0) = \tilde{\phi}_{t'}(\gamma \cdot \tilde{x}_0)$$

avec  $t'$  de même signe que  $t$ .

Soient  $g_0, g_1$  et  $g_2$  des éléments de  $G_\epsilon$  tels que :

$g_0 < g_1$  et  $g_1 < g_2$ . Les éléments  $g_0$  et  $g_2$  sont comparables puisque  $g_2 g_0^{-1} \in \Gamma$  et  $d(g_0, g_2) < I$  (puisque  $\epsilon < I/2$ ).

Soient  $c_1$  un chemin de  $G$  joignant  $g_0$  à  $g_1$  de longueur  $\ell(c_1) < I/2$ , et  $c_2$  un chemin de  $G$  joignant  $g_1$  à  $g_2$  de longueur  $\ell(c_2) < I/2$ . Considérons  $\tilde{c}_1$  le relèvement vertical de  $c_1$  d'origine  $\tilde{g}_0$  et  $\tilde{c}_2$  le relèvement vertical de  $c_2$  d'origine  $\tilde{g}_1 = \tilde{c}_1(1)$  ; on notera  $\tilde{g}_2$  l'extrémité de  $\tilde{c}_2$ .

Les relations  $g_0 < g_1$  et  $g_1 < g_2$  montrent que l'on a :

$$\tilde{g}_1 = \tilde{\phi}_{t_1}[(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0] \quad \text{et} \quad \tilde{g}_2 = \tilde{\phi}_{t_2}[(g_2 g_1^{-1}) \cdot \tilde{g}_1] \quad \text{avec}$$

$$t_1 < 0 \quad \text{et} \quad t_2 < 0 ;$$

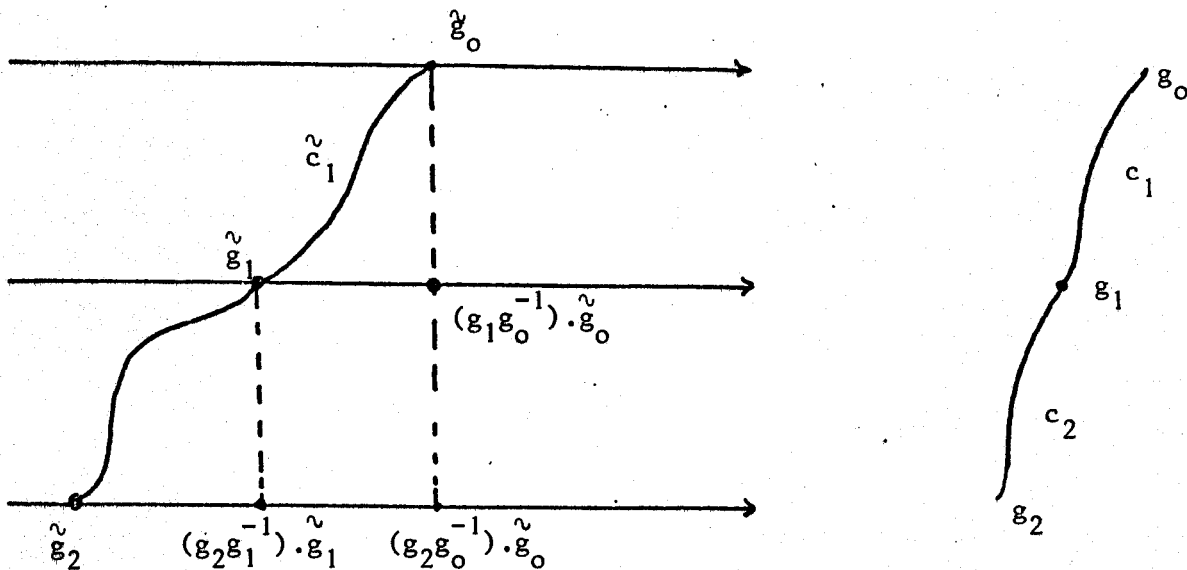
Comme  $\Gamma$  opère sur  $\tilde{M}$  en respectant l'orientation des orbites, il existe  $t'_1 < 0$  tel que :

$$(g_2 g_1^{-1}) \cdot \tilde{\phi}_{t_1}[(g_1 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0] = \tilde{\phi}_{t'_1}[(g_2 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0] ;$$

on obtient ainsi :

$$\tilde{g}_2 = \tilde{\phi}_{t_2+t'_1}[(g_2 g_0^{-1}) \cdot \tilde{g}_0] \quad \text{avec} \quad t_2+t'_1 < 0$$

et par conséquent  $g_0 < g_2$ .



iii) La relation est invariante par multiplication à gauche par les éléments de  $\Gamma$ .

Il suffit de remarquer que la métrique  $d$  est invariante à gauche, et que le groupe  $\Gamma$  opère sur  $\tilde{M}$  en respectant l'orientation des orbites.

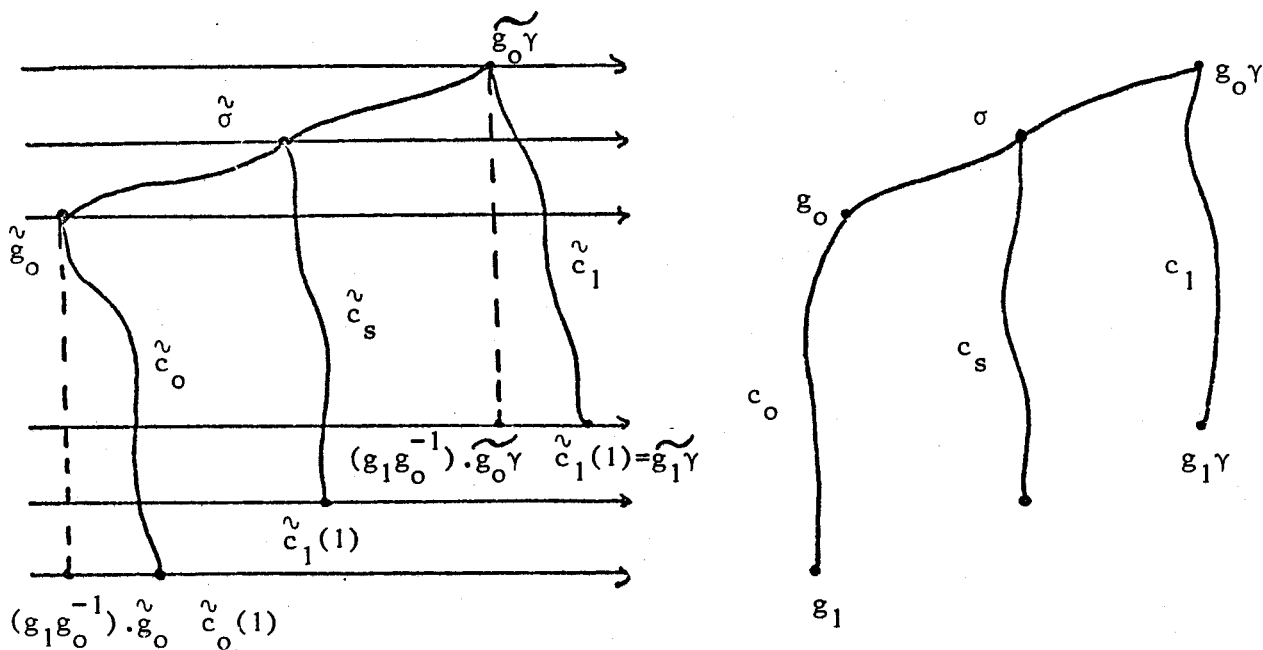
iv) Pour tout  $\varepsilon < 1/2$ , la relation induite sur  $G_\varepsilon$  est invariante par multiplication à droite par les éléments de  $\Gamma_{\varepsilon/2}$ .

Soient  $g_0$  et  $g_1$  deux éléments comparables de  $G_\varepsilon$ . Si  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma_{\varepsilon/2}$ , l'inégalité triangulaire montre que  $d(g_0\gamma, g_1\gamma) < 1$ , et par conséquent les éléments  $g_0\gamma$  et  $g_1\gamma$  sont comparables.

Par ailleurs, soit  $\sigma$  la géodésique joignant  $g_0$  à  $g_0\gamma$ , et pour tout  $s \in [0, 1]$  soit  $c_s$  la géodésique joignant  $\sigma(s)$  à  $(g_1g_0^{-1}).\sigma(s)$ , on montre comme précédemment que pour tout  $s \in [0, 1]$  :  $\sigma(s)$  et  $(g_1g_0^{-1}).\sigma(s)$  sont comparables.

Si  $\tilde{\sigma}$  est le relèvement vertical de  $\sigma$  d'origine  $\tilde{g}_0$ , on note  $\tilde{c}_s$  le relèvement vertical de  $c_s$  d'origine  $\tilde{\sigma}(s)$ . En utilisant le même argument que dans i), on remarque que si  $g_1 < g_0$  alors  $g_1\gamma < g_0\gamma$ .





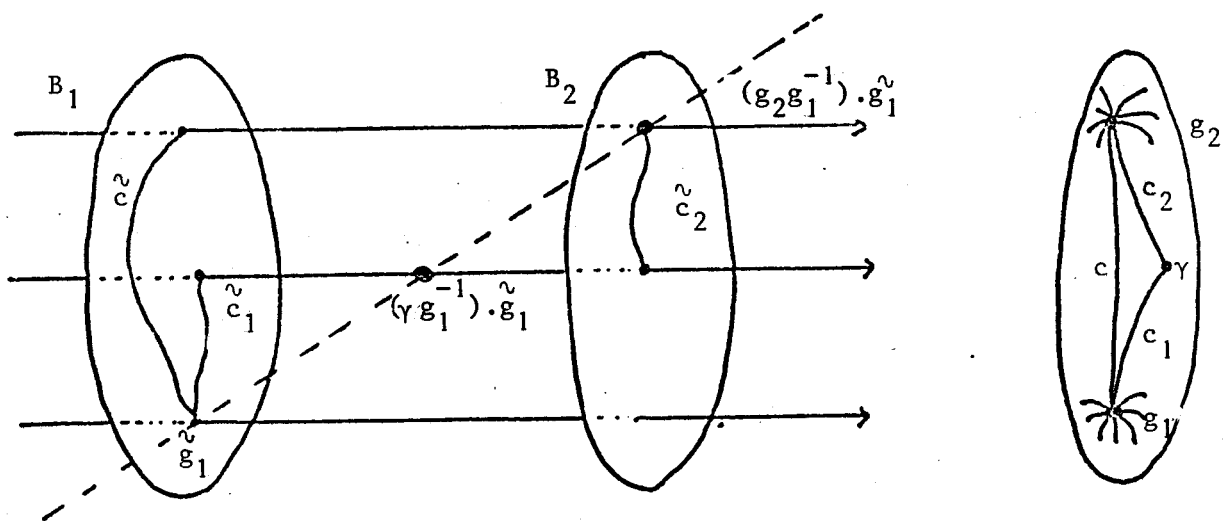
Pour résumer, si  $\epsilon < I/4$  alors la relation construite ci-dessus induit sur  $\Gamma_\epsilon$  une relation d'ordre total invariante par multiplication à droite et à gauche par les éléments de  $\Gamma_\epsilon$  (il s'agit bien entendu de considérer la relation  $g_0 \leq g_1$  si et seulement si  $g_0 < g_1$  ou  $g_0 = g_1$ ).

2. Relation de bon ordre sur  $\Gamma_\epsilon$ .

Lemme IV.1.- Pour  $\epsilon < I/4$ , la relation d'ordre définie sur  $\Gamma_\epsilon$  est une relation de bon ordre.

Démonstration. Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux éléments de  $\Gamma_\epsilon$  ; montrons qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de  $\Gamma_\epsilon$  compris entre  $g_1$  et  $g_2$ .

Fixons  $\tilde{g}_1$  dans  $D^{-1}(g_1)$ , et notons  $B_1$  la boule constituée par tous les relèvements verticaux d'origine  $\tilde{g}_1$  des géodésiques joignant  $g_1$  à un point quelconque de  $G_\epsilon$  ; de même  $B_2$  sera la boule formée de tous les relèvements verticaux d'origine  $(g_2 g_1^{-1}) \cdot \tilde{g}_1$  des géodésiques joignant  $g_2$  à un point quelconque de  $G_\epsilon$ .



Si un élément  $\gamma$  de  $\Gamma_\epsilon$ , vérifie :  $g_1 < \gamma < g_2$ , alors  $(\gamma g_1^{-1}) \cdot \tilde{g}_1$  est dans le cylindre de bases  $B_1$  et  $B_2$ , donc dans un compact fixe. Les fibres du revêtement  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  étant discrètes, l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma_\epsilon$  tels que  $g_1 < \gamma < g_2$  est fini ■

3. Le sous-groupe  $\Gamma$  est commutatif.

Nous aurons besoin dans la suite de la démonstration du lemme suivant :



Lemme IV.2.- Pour tout  $\epsilon > 0$ , l'ensemble  $\Gamma_\epsilon$  engendre  $\Gamma$ .

Démonstration. Soit  $\tilde{\Gamma}_\epsilon$  le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par  $\Gamma_\epsilon$  ;  $\tilde{\Gamma}_\epsilon$  est un sous-groupe dense de  $\Gamma$ , donc si  $g \in \Gamma$ , il existe  $h \in \tilde{\Gamma}_\epsilon$  tel que  $d(h, g) < \epsilon$  ; la distance  $d$  étant invariante à gauche, on a  $(h^{-1}g) \in \Gamma_\epsilon$  et par conséquent  $g = h \cdot (h^{-1}g)$  est un élément de  $\tilde{\Gamma}_\epsilon$ , ce qui montre que  $\Gamma = \tilde{\Gamma}_\epsilon$  ■

Remarque.- Pour  $\epsilon < 1/4$ , la relation d'ordre sur  $\Gamma_\epsilon$  est invariante par multiplication à gauche et à droite par les éléments de  $\Gamma_\epsilon$  ; une relation du type  $e < \alpha < \beta$  est donc équivalente à la relation :  $\beta^{-1} < \alpha^{-1} < e$  ; on peut ainsi remplacer  $\Gamma_\epsilon$  par  $\Gamma_\epsilon^+ = \{\gamma \in \Gamma_\epsilon ; \gamma > e\}$  dans le lemme IV.2.

Compte tenu du lemme IV.2, et, de la remarque précédente, le groupe  $\Gamma$  sera commutatif si  $\Gamma_\varepsilon^+$  est contenu dans  $C(\Gamma)$  le centre de  $\Gamma$ . C'est cette inclusion que nous démontrons dans le lemme qui suit.

Lemme IV.3.- Pour  $\varepsilon < 1/4$ , on a :  $\Gamma_\varepsilon^+ \subset C(\Gamma)$ .

Démonstration. Soit  $C_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^+ \cap C(\Gamma)$  ; raisonnons par l'absurde en supposant que  $\Gamma_\varepsilon^+ \setminus C_\varepsilon$  est non vide. Le sous-ensemble  $\Gamma_\varepsilon^+ \setminus C_\varepsilon$  est une partie non vide et minorée de  $\Gamma_\varepsilon$ , et par conséquent possède un plus petit élément  $\alpha$ . Comme  $\alpha$  est un élément de  $\Gamma_\varepsilon$ , on peut écrire :

$$d(e, \alpha) = \varepsilon - \eta \quad \text{avec } \eta > 0.$$

Le plus petit élément  $\alpha$  de  $\Gamma_\varepsilon^+ \setminus C_\varepsilon$  commute avec  $\Gamma_{\eta/2}$  ; en effet si  $g \in \Gamma_{\eta/2}$ , on a  $g \alpha g^{-1} \in \Gamma_\varepsilon$  en utilisant l'inégalité triangulaire ; comme par ailleurs la relation d'ordre est invariante par multiplication à droite et à gauche  $g \alpha g^{-1}$  vérifie :  $e < g \alpha g^{-1}$  puisque  $e < \alpha$ , et par conséquent  $g \alpha g^{-1} \in \Gamma_\varepsilon^+$ . Si  $e < g \alpha g^{-1} < \alpha$ , alors  $g \alpha g^{-1}$  est dans  $C(\Gamma)$  et donc  $\alpha \in C(\Gamma)$  puisque  $C(\Gamma)$  est un sous-groupe distingué de  $\Gamma$  ; on montre de la même manière que l'on ne peut avoir  $e < \alpha < g \alpha g^{-1}$  en remplaçant  $g$  par  $g^{-1}$ . D'où la relation :

$$g \alpha g^{-1} = \alpha.$$

Puisque  $\Gamma_{\eta/2}$  engendre  $\Gamma$ ,  $\alpha$  est dans  $C(\Gamma)$  ce qui contredit l'hypothèse ■

Conclusion :

Le groupe  $\Gamma$  est commutatif ; comme par ailleurs  $\Gamma$  est dense dans  $G$ , le groupe  $G$  est lui-même commutatif, ce qui démontre le théorème IV.1.

Le théorème IV.1 démontré ci-dessus, et l'étude des  $\mathbb{R}^n$ -flots faite dans le chapitre précédent, vont permettre de préciser la fibration

$\bar{D} : M \rightarrow G/K$  associée à un  $G$ -flot.

Théorème IV.2. Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $(n+1)$ ,  $G$  un groupe de Lie simplement connexe de dimension  $n$ , et  $\phi$  un  $G$ -flot sur  $M$ . Si  $\phi$  est un  $G$ -flot minimal, alors la variété  $M$  est difféomorphe à  $T^{n+1}$ , et, le feuilletage défini par  $\phi$  est conjugué à un feuilletage linéaire de  $T^{n+1}$ .

Démonstration. Ce théorème est une conséquence directe des théorèmes III.1 et IV.1

Théorème IV.3. Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $(n+1)$ ,  $G$  un groupe de Lie simplement connexe de dimension  $n$ , et,  $\phi$  un  $G$ -flot sur  $M$ . Alors l'adhérence  $F$  d'une orbite de  $\phi$  est difféomorphe à un tore  $T^r$ , et, le feuilletage induit par  $\phi$  sur  $F$ , est conjugué à un feuilletage linéaire de  $T^r$ .

Démonstration. Le diagramme développant de  $\phi$  s'écrit :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R} \subset & \longrightarrow & \tilde{M} & \xrightarrow{D} & G \\
 & & \downarrow P & & \downarrow \\
 F \subset & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\bar{D}} & G/K
 \end{array}$$

D'après le théorème I.A.1, le flot induit par  $\phi$  sur  $F$  est transversalement de Lie  $K_e$  (composante connexe de  $e$  dans  $K$ ), et a ses orbites denses ; dont (théorème IV.2) si  $r = \dim K+1$ , alors  $F$  est difféomorphe à  $T^r$ , et le feuilletage défini par  $\phi$  sur  $F$  est conjugué à un feuilletage linéaire de  $T^r$  ■

## CHAPITRE V

### G-FLOTS SUR UNE VARIÉTÉ COMPACTE

#### DE DIMENSION TROIS

---

Les seuls groupes de Lie simplement connexes de dimension deux, sont le groupe de Lie  $\mathbb{R}$ , et, le groupe affine  $GA$  [KIR]. L'étude des G-flots sur une variété compacte de dimension trois, sera donc celle des  $\mathbb{R}^2$ -flots, et, des GA-flots.

La classification des  $\mathbb{R}^2$ -flots a été donnée au chapitre III, dans un cadre plus général, celui des  $\mathbb{R}^n$ -flots.

On a donné au chapitre I, des exemples de GA-flots : les flots propres sur le fibré hyperbolique  $T_A^3$  ; on se propose de démontrer dans ce chapitre, que ces flots propres de  $T_A^3$  jouent le rôle de "flots modèles" pour ce qui concerne les GA-flots ; de façon plus précise, on montre que le feuilletage défini par un GA-flot sur une variété compacte, est conjugué au feuilletage défini par un flot propre sur un fibré hyperbolique  $T_A^3$  ; on utilise pour cela un lemme d'isotopie de E. Ghys et V. Sergiescu (les résultats qu'on en déduit, étaient d'ailleurs déjà connus de E. Ghys).

Proposition V.1. Les GA-flots sont des flots à orbites non fermées, et, non denses.

Démonstration. Cette proposition, est une conséquence immédiate du corollaire II.1, et du théorème IV.1 ■

Nous donnons à présent le théorème de classification des GA-flots sur une variété compacte.

Théorème V.1. Soient  $M$  une variété compacte de dimension trois, et,  $\phi$  un GA-flot sur  $M$ .

Alors la variété  $M$  est un fibré hyperbolique  $T_A^3$  (avec  $\text{tr } A > 2$ ), et le feuilletage défini par  $\phi$  est conjugué au feuilletage défini par l'un des flots propres de  $T_A^3$ .

Démonstration. Le diagramme développant de  $\phi$  s'écrit :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R} & \longleftarrow & \tilde{M} & \xrightarrow{D} & GA \\
 & & \downarrow P & & \downarrow \\
 & & M & \xrightarrow{\bar{D}} & GA/K
 \end{array}$$

Compte-tenu de la proposition V.1, la dimension de  $K$  est égale à 1, la fibration  $\bar{D}$  est alors de base  $\mathbb{S}^1$  et de fibre  $T^2$ , et elle se relève en une fibration  $D_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  de fibre de  $T^2$ ; on note  $\phi_1$  le flot relevé dans  $M_1$ . La fibration  $D_1$  est triviale puisque  $\mathbb{R}$  est contractile; si  $M_1 \simeq T^2 \times \mathbb{R}$  est une trivialisatation, on note  $\phi_1^s$  le flot induit par  $\phi_1$  sur le tore  $T^2 \times \{s\}$ . On va démontrer le théorème, en utilisant une trivialisatation de  $M_1$  "adaptée" au flot  $\phi_1$ .

i) trivialisatation "adaptée" de  $M_1$ .

Considérons une trivialisatation  $M_1 \simeq T^2 \times \mathbb{R}$  de  $M_1$ ; la restriction  $\phi_1^s$  de  $\phi_1$  à chaque tore  $T^2 \times \{s\}$ , est un flot à orbites denses; une généralisation immédiate de l'étude faite dans le cas des G-flots minimaux (CH.IV), montre qu'il existe une famille  $\sigma_s$  de sections des  $\phi_1^s$ , qui dépend différemment de  $s$ . On modifie le paramétrage de  $\phi_1$  (de façon différentiable) de manière à ce que dans chaque tore  $T^2 \times \{s\}$  la fonction de temps de ler retour associée à la section  $\sigma_s$ , soit constante et égale à 1; on note

$\bar{\phi}_1$  le flot  $\phi_1$  muni de ce nouveau paramétrage. On obtient ainsi une nouvelle trivialisation  $M_1 \simeq T^2 \times \mathbb{R}$  telle que le flot  $\bar{\phi}_1$  induit sur chaque tore  $T^2 \times \{s\}$  un flot linéaire irrationnel  $\bar{\phi}_1^s$  ; soit  $r(s) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  le nombre de rotation du flot  $\bar{\phi}_1^s$  ; la fonction  $r$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ainsi définie est continue, et par conséquent elle est constante. On vient ainsi de construire une trivialisation  $M_1 \simeq T^2 \times \mathbb{R}$ , dans laquelle le flot  $\bar{\phi}_1$  induit sur chaque tore  $T^2 \times \{s\}$  le même flot linéaire irrationnel (que l'on note  $\bar{\phi}_1^0$ ).

ii) démonstration du théorème.

On considère  $f$  le difféomorphisme de recollement du fibré  $\bar{D}$ , dans la trivialisation décrite ci-dessus ; le difféomorphisme  $f$  préserve le feuilletage  $\mathcal{F}_0$  défini par le flot linéaire irrationnel  $\bar{\phi}_1^0$  ; par conséquent, en utilisant le lemme de E. Ghys et V. Sergiescu [GH.SER],  $f$  est isotope à un difféomorphisme linéaire préservant  $\mathcal{F}_0$ , à travers des difféomorphismes qui préservent  $\mathcal{F}_0$  ; soit  $A$  la matrice définissant ce difféomorphisme linéaire ; comme le nombre de rotation de  $\bar{\phi}_1^0$ , est irrationnel, la matrice  $A$  possède une direction propre irrationnelle ;  $A$  est donc égale à  $I$ , ou, vérifie la relation  $|\text{tr}A| > 2$ . Nous allons montrer que l'on a nécessairement  $\text{tr}A > 2$ .

a) si  $A = I$ , alors le groupe d'holonomie  $\Gamma$  de  $\phi$  est commutatif ; le groupe  $K$  serait donc commutatif, ce qui est impossible car le groupe affine  $GA$  ne contient pas de sous-groupes commutatifs uniformes.

b) si  $\text{tr}A \leq -2$ , alors le feuilletage défini par  $\phi$  n'est pas transversalement orientable ; là encore on aboutit à une contradiction en remarquant que tout feuilletage transversalement de Lie, est transversalement orientable.

En conclusion, la matrice  $A$  vérifie  $\text{tr}A > 2$ , la variété  $M$  est un fibré hyperbolique  $T_A^3$ , et, le feuilletage défini par  $\phi$  est conjugué au feuilletage défini par l'un des flots propres de  $T_A^3$  ■

Remarque. - Dans son étude des e-feuilletages de codimension 2, J. Meyer [MEY] a montré que si une variété compacte  $M$  de dimension 3, supporte un G-feuilletage de dimension 1, à feuilles non fermées, alors la variété  $M$  est difféomorphe à  $T^3$ , ou, on a la relation  $\text{rang } H^1(M, \mathbb{Z}) = 1$ .

L'étude des  $\mathbb{R}^n$ -flots faite au chapitre IV, et le théorème V.1 complètent donc ces résultats.



## CHAPITRE VI

### G-FLOTS NILPOTENTS

---

Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $(n+1)$ ,  $G$  un groupe de Lie simplement connexe de dimension  $n$ , et  $\phi$  un  $G$ -flot sur  $M$  ; on dira que  $\phi$  est un  $G$ -flot nilpotent si le groupe de Lie  $G$  est nilpotent.

Ce chapitre comporte trois parties :

A) dans la première partie, on rappelle les propriétés essentielles des groupes de Lie nilpotents simplement connexes.

B) un théorème de conjugaison des  $G$ -flots nilpotents, est donné dans la deuxième partie ; on montre que si le groupe d'holonomie  $\Gamma$  d'un  $G$ -flot nilpotent  $\phi$ , sur une variété compacte  $M$ , contient un sous-groupe  $\Gamma_0$  discret uniforme dans  $G$  et tel que  $\Gamma/\Gamma_0$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , alors le feuilletage défini par  $\phi$  est conjugué à un feuilletage homogène. On donne par ailleurs un théorème qui caractérise les  $G$ -flots nilpotents qui sont des  $R^n$ -flots.

C) dans la dernière partie, on donne un exemple de  $G$ -flot dont le groupe d'holonomie  $\Gamma$  ne contient aucun sous-groupe discret uniforme de  $G$ .

#### A - GROUPES DE LIE NILPOTENTS. RAPPELS.

Les résultats donnés dans ce paragraphe sont dus à A.I Malcev [MALC.] ; on pourra trouver les démonstrations des propositions dans le livre de M.S. Raghunathan : "Discrete subgroups of Lie Groupe" [RAG. p.29-42],

ou encore dans l'article de A.I. Malcev "On a class of homogeneous spaces of nilpotent Lie groups".

Définition VI-A-1.- Soit  $G$  un groupe ; si  $H$  et  $K$  sont deux parties de  $G$ , on note  $[H,K]$  le sous-groupe de  $G$ , engendré par les commutateurs d'éléments de  $H$  et d'éléments de  $K$ .

On définit par récurrence une suite de sous-groupes de  $G$  en posant :

$$G^0 = G \quad , \quad G^n = [G, G^{n-1}]$$

On dit que le groupe  $G$  est nilpotent, s'il existe  $k$  tel que pour  $n \geq k$  on a :  $G^k = e$ .

Définition VI-A-2.- Soit  $G$  un groupe nilpotent de type fini ; il existe une filtration  $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_k = e$  telle que :  $G_i$  est un sous-groupe distingué de  $G_{i-1}$ , et,  $G_{i-1}/G_i$  est abélien. On appelle rang de  $G$ , le nombre :

$$\text{rang}(G) = \sum_{1 \leq i \leq k} \text{rang}(G_{i-1}/G_i)$$

(on montre évidemment que cette notion est indépendante de la filtration choisie).

Les sous-groupes uniformes, et, les sous-groupes discrets uniformes d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, jouent un rôle fondamental ; on peut d'une certaine manière utiliser les sous-groupes discrets uniformes dans un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, de la même façon que les réseaux dans  $\mathbb{R}^n$ . De façon plus précise, on a les propriétés suivantes :

Propriété VI-A-1.- Soient  $G$  un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, et,  $K$  un sous-groupe fermé uniforme de  $G$ .

Alors la composante connexe  $K_e$  de l'élément neutre dans  $K$ , est un sous-groupe distingué de  $G$ .

Propriété VI-A-2.- Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent simplement connexe.

- i) si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret uniforme de  $G$ , alors on a l'égalité :  $\dim G = \text{rang}(\Gamma)$ .
- ii) si  $K$  est un sous-groupe fermé uniforme de  $G$ , alors on a la relation :  $\dim G = \dim K + \text{rang}(K/K_e)$ .

Propriété VI-A-3.- Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes de Lie nilpotents simplement connexes, et  $K_1$  un sous-groupe uniforme de  $G_1$  ; alors tout homomorphisme continu  $h : K_1 \rightarrow G_2$  se prolonge de manière unique en un homomorphisme continu  $\tilde{h} : G_1 \rightarrow G_2$ .

Propriété VI-A-4.- Soit  $\Gamma$  un groupe nilpotent, de type fini, et sans torsion. Alors il existe un groupe de Lie nilpotent simplement connexe  $\tilde{G}$ , et, un homomorphisme injectif  $J : \Gamma \rightarrow \tilde{G}$  tel que  $J(\Gamma)$  est un sous-groupe discret uniforme de  $\tilde{G}$ .

Il existe des groupes de Lie nilpotents simplement connexes, qui ne contiennent aucun sous-groupe discret uniforme (un exemple est donné dans la partie C de ce chapitre) ; l'existence de sous-groupes discrets uniformes "se lit" dans l'algèbre de Lie de la manière suivante :

Propriété VI-A-5.- Soient  $G$  un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, et,  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie de  $G$ .

Alors,  $G$  contient un sous-groupe discret uniforme, si et seulement si l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  possède une base dans laquelle les constantes de structure sont rationnelles.

B - FLOTS NILPOTENTS ET FLOTS HOMOGENES.

On a montré au chapitre III, que le feuilletage défini par un  $\mathbb{R}^n$ -flot est conjugué à un feuilletage homogène ; pour cela on a utilisé le fait qu'un sous-groupe uniforme de  $\mathbb{R}^n$ , contient un sous-groupe discret uniforme ; cette propriété n'est pas vérifiée en général en ce qui concerne les groupes de Lie nilpotents simplement connexes ; pour obtenir dans le cas d'un G-flot nilpotent  $\phi$ , un théorème de conjugaison analogue à celui obtenu pour les  $\mathbb{R}^n$ -flots, on supposera que le groupe d'holonomie  $\Gamma$  de  $\phi$ , contient à un sous-groupe discret uniforme de  $G$ .

Théorème VI-B-1. - Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $(n+1)$ ,  $G$  un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, de dimension  $n$  et  $\phi$  un G-flot sur  $M$  de groupes d'holonomie  $\Gamma$ , à orbites non fermées.

Si le groupe  $\Gamma$  contient un sous-groupe  $\Gamma_0$  discret uniforme dans  $G$ , et telle que  $\Gamma/\Gamma_0$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , alors il existe un G-flot homogène  $\phi'$  sur un espace homogène compact  $M'$ , tel que les feuilletages respectivement définis par  $\phi$  et  $\phi'$  sont conjugués.

On considère le diagramme développant du flot  $\phi$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^c & \longrightarrow & \tilde{M} & \xrightarrow{D} & G \\
 & & \downarrow P & & \downarrow \\
 & & M & \xrightarrow{\bar{D}} & G/K
 \end{array}$$

La démonstration du théorème s'effectue en deux étapes :

1) dans un premier temps, on associe à  $\phi$  un G-flot homogène, c'est-à-dire un groupe de Lie simplement connexe  $\tilde{G}$  de dimension  $(n+1)$ , un sous-groupe discret uniforme  $\tilde{\Gamma}$  de  $\tilde{G}$ , et un sous-groupe à un paramètre  $X$  de  $\tilde{G}$  tel que  $X \setminus \tilde{G} \cong G$ .

2) dans un deuxième temps, on construit un difféomorphisme  $\Psi$  de  $\tilde{G}$  sur  $\tilde{M}$ , tel que les feuilletages définis par  $X$  et  $\tilde{\phi}$  soient conjugués par  $\Psi$ , et, tel que  $\Psi$  passe au quotient en une conjugaison entre le feuilletage défini par  $\phi$  et celui défini par  $X$ .

1°. Flot homogène associé à un G-flot nilpotent.

Le groupe  $\Gamma$  est de type fini ; comme par ailleurs  $\Gamma$  est un sous-groupe du groupe de Lie nilpotent simplement connexe  $G$ ,  $\Gamma$  est nilpotent et sans torsion ; il existe donc un unique groupe de Lie nilpotent simplement connexe  $\tilde{G}$ , et, un homomorphisme injectif  $J : \Gamma \hookrightarrow \tilde{G}$  tels que le sous-groupe  $\tilde{\Gamma} = J(\Gamma)$  est un sous-groupe discret uniforme de  $\tilde{G}$  (P.VI-A-4). Soit  $i : \Gamma \rightarrow G$  l'inclusion naturelle ; puisque  $J(\Gamma)$  est un sous-groupe discret uniforme de  $\tilde{G}$ , il existe un unique homomorphisme de groupes de Lie

$$\Pi : \tilde{G} \rightarrow G \quad \text{tel que} \quad \Pi \circ J = i \quad (\text{P.VI-A-3}).$$

Nous allons montrer que  $\Pi$  est un homomorphisme surjectif et que le sous-groupe  $X = \text{Ker } \Pi$  est un sous-groupe à un paramètre de  $\tilde{G}$ .

Lemme VI-B-1. Le groupe de Lie  $\tilde{G}$  est de dimension  $(n+1)$ .

Démonstration : On considère le diagramme développant du flot  $\phi$  :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \hookrightarrow & \tilde{M} & \xrightarrow{D} & G \\ & & \downarrow P & & \downarrow \\ & & M & \xrightarrow{\bar{D}} & (G/K) \end{array}$$

On appelle  $\bar{D}_*$  l'homomorphisme  $\bar{D}_* : \Pi_1(M) \rightarrow \Pi_1(G/K)$  ; puisque le groupe  $\Pi_1(M)$  a été identifié à  $\Gamma$  sous-groupe de  $G$ , par l'intermédiaire de l'application développante  $D$ , et que la fibration  $\bar{D}$  est induite par  $D$ , l'homomorphisme  $\bar{D}_*$  est la projection canonique de  $\Gamma$  sur  $K/K_e$ , où  $K/K_e$  est

identifié comme d'habitude à  $\Pi_1(G/K)$  ; la suite exacte de la fibration  $\bar{D}$  s'écrit alors :

$$\rightarrow \Pi_2(G/K) \rightarrow \mathbb{Z}^r \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\bar{D}_*} K/K_e \rightarrow 0 \quad (*)$$

(où  $r = \dim K + 1$ ).

Puisque  $K$  est un sous-groupe fermé uniforme de  $G$ , le sous-groupe  $K_e$  est distingué dans  $G$  (P.VI-A-1.) ; donc  $G/K_e$  est un groupe de Lie simplement connexe, et par conséquent  $\Pi_2(G/K) = 0$ .

La suite exacte de la fibration  $\bar{D}$  peut alors s'écrire :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^r \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\bar{D}_*} K/K_e \rightarrow 0 \quad (**)$$

Le groupe  $K/K_e$  étant un sous-groupe discret uniforme du groupe de Lie nilpotent simplement connexe  $G/K_e$ , le rang de  $K/K_e$  est égal à  $\dim G - \dim K$  (P.VI.A-2-ii) ; on en déduit en utilisant la suite exacte (\*\*) que le rang de  $\Gamma$  est égal à  $(n+1)$  ; le groupe  $\tilde{\Gamma}$  isomorphe à  $\Gamma$  est donc lui aussi de rang  $(n+1)$ , et,  $\tilde{G}$  est un groupe de Lie de dimension  $(n+1)$  puisque  $\tilde{\Gamma}$  est uniforme et discret dans  $\tilde{G}$  (P.VI.A-2-i) ■

Lemme VI-B-2.- L'homomorphisme  $\Pi$  est surjectif, et,  $\text{Ker } \Pi$  est un sous-groupe à un paramètre de  $\tilde{G}$ .

Démonstration : Le sous-groupe  $\tilde{\Gamma}$  est un sous-groupe discret uniforme de  $\tilde{G}$ , et,  $\Pi(\tilde{\Gamma})$  contient  $\Gamma_0$  qui est un sous-groupe discret uniforme de  $G$  ; on en déduit que l'homomorphisme  $\Pi$  est surjectif. Comme le groupe de Lie  $\tilde{G}$  est de dimension  $(n+1)$ , le noyau de  $\Pi$  est un sous-groupe à un paramètre de  $\tilde{G}$  ■

Le sous-groupe à un paramètre  $X = \text{Ker } \Pi$  définit sur la variété compacte  $\tilde{G}/\tilde{\Gamma}$  un flot transversalement de Lie  $G \simeq X \setminus \tilde{G}$  ; le flot homogène

ainsi construit, est appelé flot homogène associé à  $\Phi$ . On peut remarquer que ce flot homogène associé à  $\Phi$ , ne dépend que du groupe d'holonomie  $\Gamma$  de  $\Phi$ .

2°. Construction du difféomorphisme  $\Psi$ .

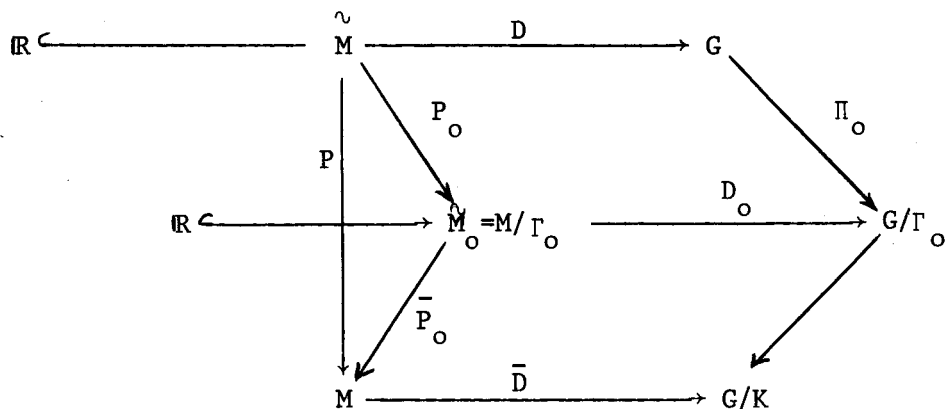
Le difféomorphisme  $\Psi$  s'obtient en construisant d'une part une trivialisatation de  $\tilde{M}$ , et d'autre part une trivialisatation de  $\tilde{G}$  "adaptée" à la précédente.

Pour construire la trivialisatation de  $\tilde{M}$ , nous aurons besoin du lemme suivant :



Lemme VI-B-3. - Le flot  $\Phi$  possède une section.

Démonstration : En utilisant le sous-groupe discret uniforme  $\Gamma_0$  de  $G$ , on peut compléter le diagramme développant de  $\Phi$  comme suit :



La fibration  $D : \tilde{M} \rightarrow G$  induit une fibration  $D_0 : \tilde{M}_0 \rightarrow G/\Gamma_0$  de fibre  $\mathbb{R}$  ; cette fibration  $D_0$  possède des sections, puisque la fibre est contractile. L'application  $\bar{p}_0 : \tilde{M}_0 \rightarrow M$  définit un revêtement galoisien de  $M$  de groupe  $\Gamma/\Gamma_0 \simeq \mathbb{Z}$  ; il existe donc [FRI.] une section  $\sigma_0$  de la fibration  $D_0$  telle que  $\bar{p}_0 \circ \sigma_0$  est un plongement. La sous-variété compacte  $\bar{p}_0 \circ \sigma_0(G/\Gamma_0)$  est une section de  $\Phi$  (les fibres de la fibration  $D_0$  sont en effet les orbites du flot relevé dans  $\tilde{M}_0$ ) ■

a) Trivialisation de  $\tilde{M}$ , et, action de  $G$  sur  $\mathbb{R}$ .

Supposons le flot  $\Phi$  paramétré de manière à ce que la fonction de temps de premier retour associée à la section  $\bar{p}_0 \circ \sigma_0(G/\Gamma_0)$  soit constante et égale à 1 ; en transportant cette section par le flot  $\Phi$  (muni de son nouveau paramétrage), on obtient une fibration de  $M$ , de base  $\mathbb{R}$  et de fibre  $G/\Gamma_0$  ; cette fibration est invariante par le flot  $\Phi$ , et, transverse à ce même flot ; en relevant dans  $\tilde{M}$ , on obtient une trivialisation invariante par  $\tilde{\Phi}$  et transverse à  $\tilde{\Phi}$  ; dans cette trivialisation, un point de  $\tilde{M}$  sera noté  $[t, g]$  où  $t$  est un élément de  $\mathbb{R}$ , et,  $g$  un point de  $G$ .

La trivialisation de  $\tilde{M}$  construite ci-dessus est invariante par le flot  $\tilde{\Phi}$ , et par le groupe  $\Gamma$  (considéré comme groupe des automorphismes de  $\tilde{M}$ ) ; on peut donc décrire l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R} \times G \simeq \tilde{M}$  de la façon suivante :

$$\gamma \cdot [t, g] = [\eta_\gamma(t), \delta_\gamma(g)]$$

Lemme VI-B-4. - Le groupe  $\Gamma$  opère par translations sur  $\mathbb{R}$ .

Démonstration : On choisit un sous-fibré  $\mathcal{C}$  de  $T(M)$  transverse au flot  $\Phi$ , et  $dlb$  une métrique invariante à gauche de  $G$  ; la métrique  $dlb$  se relève par les submersions locales qui définissent  $\Phi$ , en une métrique  $\mu$  sur  $\mathcal{C}$  ; puisque la fibration de  $M$  de fibre  $G/\Gamma_0$  est invariante par  $\Phi$ , on peut compléter la métrique  $\mu$  en une métrique  $\bar{\mu}$  sur  $M$ , qui se relève en une métrique produit dans  $\mathbb{R} \times G \rightarrow \tilde{M}$  ; le groupe  $\Gamma$  opère alors par isométries sur  $\mathbb{R}$  ■

On note  $h$  l'homomorphisme de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}$ , défini par :

$$t + h(\gamma) = \eta_\gamma(t) ;$$

puisque le sous-groupe  $\tilde{\Gamma} = J(\Gamma)$  est discret uniforme dans  $\tilde{G}$  ; il existe un



unique homomorphisme de groupes de Lie  $\tilde{h} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{h} \circ J = h$  ; en identifiant  $\mathbb{R}$  au groupe  $\text{Aut } X$  des automorphismes de  $X$ , on peut considérer  $\tilde{h}$  comme étant un homomorphisme de  $\tilde{G}$  dans  $\text{Aut } X$

b) Trivialisation de  $\tilde{G}$ .

Nous allons montrer que la sous-variété  $\text{Ker } \tilde{h}$  permet de construire une section de la fibration  $\Pi : \tilde{G} \rightarrow G$ , et par conséquent une trivialisation de  $\tilde{G}$ .

i)  $\dim \text{Ker } h = n$ .

L'homomorphisme  $\tilde{h}$  de  $\tilde{G}$  dans  $\mathbb{R}$ , est un homomorphisme de groupes de Lie ; pour montrer que  $\dim \text{Ker } \tilde{h} = n$ , il suffit de démontrer que  $\tilde{h}$  est surjectif ; le groupe de Lie  $\tilde{G}$  étant connexe, on a :  $\tilde{h}(\tilde{G}) = \mathbb{R}$  ou  $\tilde{h}(\tilde{G}) = 0$ . Supposons que l'on ait  $\tilde{h}(\tilde{G}) = 0$  ; alors l'homomorphisme  $h$  est nul, et le groupe des automorphismes  $\Gamma$  opère sur  $\mathbb{R} \times G$  comme suit :

$$\gamma \cdot [t, g] = [t, \delta_\gamma(g)] ;$$

dans ces conditions, la fibre du revêtement  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  est contenue dans la fibre  $G$  de la fibration de  $\tilde{M}$ , ce qui contredit la compacité de  $M$ .

ii) La sous-variété  $\text{Ker } \tilde{h}$  est transverse à  $X$ .

Pour obtenir ce résultat, il suffit de montrer que  $\text{Ker } \tilde{h} \cap X = \emptyset$  raisonnons par l'absurde en supposant que  $\tilde{h}(X) = 0$  ; l'homomorphisme  $\tilde{h}$  passe alors au quotient en un homomorphisme de groupes de Lie  $\hat{h} : G \rightarrow \mathbb{R}$  ; en considérant une suite (non stationnaire)  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\Gamma$  qui converge vers  $e$ , on aurait alors une suite convergente vers  $[0, e]$  dans la fibre du revêtement  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  au point base, ce qui contredit le fait que cette fibre est discrète.

Si  $g$  est un élément de  $G$ , on note  $\theta(g)$  le point  $\tilde{g}$  de  $\text{Ker } \tilde{h}$  tel que  $\Pi(\tilde{g}) = g$  ; on obtient ainsi un homomorphisme de groupes de Lie  $\theta : G \rightarrow \tilde{G}$ , qui est une section de la fibration  $\Pi : \tilde{G} \rightarrow G$  ; dans la trivialisation de  $\tilde{G}$  ainsi obtenue, un point de  $\tilde{G}$  sera noté sous la forme  $(t, g)$  où  $t \in \mathbb{R}$  et  $g \in G$ .

3°. Démonstration du théorème VI-B-1.

Considérons le difféomorphisme  $\Psi$  de  $\tilde{G}$  sur  $\tilde{M}$ , défini dans les "systèmes de coordonnées" construits précédemment, par :

$$\Psi(t, g) = [t, g].$$

Le difféomorphisme  $\Psi$  conjugue les feuilletages définis respectivement  $X$  et  $\tilde{\phi}$  ; il est facile de vérifier que  $\Psi$  passe au quotient en un difféomorphisme  $\bar{\Psi}$  de  $\tilde{G}/\Gamma$  sur  $M$  ; le feuilletage induit par  $X$  sur  $\tilde{G}/\Gamma$ , et, celui défini par  $\phi$  sur  $M$ , sont alors conjugués par  $\bar{\Psi}$ , ce qui démontre le théorème ■

Pour terminer ce paragraphe, nous donnons une caractérisation des  $G$ -flots nilpotents, qui sont des  $\mathbb{R}^n$ -flots.

Théorème VI-B-2. - Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $(n+1)$ ,  $G$  un groupe de Lie nilpotent simplement connexe de dimension  $n$ , et  $\phi$  un  $G$ -flot sur  $M$ , à orbites non fermées.

Alors le groupe de Lie  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , si et seulement si, le groupe  $\Pi_1(M)$  est commutatif.

Démonstration : Si  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , alors le groupe  $\Pi_1(M)$  qui s'identifie à un sous-groupe de  $G$ , est commutatif.

Réciproquement, supposons que le sous-groupe  $\Gamma \simeq \Pi_1(M)$  de  $G$  est commutatif ; le groupe  $\Gamma$  est de rang  $(n+1)$ , et il existe un homomor-

phisme injectif  $J$  de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $J(\Gamma)$  est un sous-groupe discret uniforme de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . (Lemme VI-B-1) ; si  $i$  est l'inclusion naturelle de  $\Gamma$  dans  $G$ , alors il existe un homomorphisme surjectif (lemme VI-B-2)  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  sur  $G$  tel que  $\Pi \circ J = i$ . On en déduit que le groupe de Lie  $G$  est commutatif, et par conséquent on a

$$G = \mathbb{R}^n \blacksquare$$

Corollaire VI-B-1. - Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $(n+1)$ ,  $G$  un groupe de Lie nilpotent simplement connexe de dimension  $n$ , et  $\phi$  un  $G$ -flot sur  $M$ .

Si le groupe d'holonomie  $\Gamma$  de  $\phi$ , contient un sous-groupe abélien d'indice fini, alors on a :

$$G = \mathbb{R}^n.$$

Démonstration : Soit  $\Gamma_1$  un sous-groupe abélien de  $\Gamma$ , d'indice fini, et  $p_1 : M_1 \rightarrow M$  le revêtement fini correspondant ; la variété  $M_1$  est compacte, et le flot  $\phi_1$  relevé de  $\phi$  dans  $M_1$ , est transversalement de Lie  $G$  ; comme le groupe  $\Gamma_1 = \Pi_1(M)$  est commutatif, on en déduit (théorème VI-B-2) que

$$G = \mathbb{R}^n \blacksquare$$

### C - UN EXEMPLE DE G-FLOT NILPOTENT, OU, G N'EST PAS RATIONNEL.

On construit dans ce paragraphe, un  $G$ -flot homogène où  $G$  est un groupe de Lie nilpotent, simplement connexe, qui ne contient aucun sous-groupe discret uniforme (cet exemple m'a été suggéré par D. Lehmann) ; pour cela, nous allons utiliser une algèbre de Lie nilpotente  $\mathcal{G}$  qui ne possède aucune base à constantes de structure rationnelles. Un exemple simple d'algèbre de Lie nilpotente "non rationnelle" a été donné par J. Scheumeman [SCH.],

nous en donnons la définition ci-dessous.

Soit  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie réelle de dimension huit, définie par la base :  $\{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, U_1, V_1\}$  avec les crochets :

$$\left\{ \begin{array}{l} [A_1, B_1] = [C_1, D_1] = U_1 \\ [C_1, E_1] = [D_1, F_1] = V_1 \\ [E_1, F_1] = \Pi U_1 \text{ les autres crochets sont nuls.} \end{array} \right.$$

L'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  est nilpotente (on a :  $[\mathcal{G} [\mathcal{G}, \mathcal{G}]] = 0$ ), et elle ne possède aucune base à constantes de structure rationnelles [SCH.] ; on note  $G$  le groupe de Lie simplement connexe, d'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  ; le groupe de Lie  $G$  est nilpotent, et ne contient aucun sous-groupe discret uniforme (P. VI-A-5).

En construisant une extension nilpotente et "rationnelle"  $\tilde{\mathcal{G}}$  de  $\mathcal{G}$  par  $\mathbb{R}$ , on obtient une algèbre de Lie réelle  $\tilde{\mathcal{G}}$  de dimension 9, ayant une base

$\{A, B, C, D, E, F, U, V, W\}$  avec les crochets :

$$\left\{ \begin{array}{l} [A, B] = [C, D] = U+W \\ [C, E] = -[D, F] = V \\ [E, F] = U \text{ les autres crochets sont nuls.} \end{array} \right.$$

L'algèbre de Lie  $\tilde{\mathcal{G}}$  est rationnelle, puisque les constantes de structure de la base  $\{A, B, C, D, E, F, U, V, W\}$  sont rationnelles ; par ailleurs  $\tilde{\mathcal{G}}$  est nilpotente, puisque  $[\tilde{\mathcal{G}}, [\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{G}}]] = 0$  ; on note  $\tilde{G}$  le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie  $\tilde{\mathcal{G}}$  ; le groupe de Lie  $\tilde{G}$  est nilpotent, et contient des sous-groupes discrets uniformes (P.VI-A-5).

Soit l'application  $\Delta$  de  $\tilde{\mathcal{G}}$  dans  $\mathcal{G}$  définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(A) = A_1 \quad ; \quad \Delta(B) = B_1 \quad ; \quad \Delta(C) = C_1 \quad ; \quad \Delta(D) = D_1. \\ \Delta(E) = \frac{1}{\sqrt{\Pi}} E_1 \quad ; \quad \Delta(F) = \frac{1}{\sqrt{\Pi}} F_1 \\ \Delta(U) = U_1 \quad ; \quad \Delta(V) = \frac{1}{\sqrt{\Pi}} V_1 \quad ; \quad \Delta(W) = W_1. \end{array} \right.$$

L'application  $\Delta$  est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie, et le noyau de  $\Delta$  est l'idéal  $\mathcal{J}$  engendré par  $W$ . En passant aux groupes de Lie associés, on obtient une suite exacte de groupes de Lie :

$$X \hookrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\bar{\Delta}} G \longrightarrow 0$$

où  $X$  est un sous-groupe distingué à un paramètre de  $\tilde{G}$  ; si  $\tilde{\Gamma}$  est un sous-groupe discret uniforme de  $\tilde{G}$ , alors  $X$  définit sur la variété compacte  $\tilde{G}/\tilde{\Gamma}$  un  $G$ -flot, dont le groupe d'holonomie ne contient aucun sous-groupe discret uniforme de  $G$ .

## CHAPITRE VII

### FLOTS DE HEISENBERG

Les seuls groupes de Lie nilpotents simplement connexes de dimension trois sont d'une part le groupe de Lie  $\mathbb{R}^3$ , et d'autre part le groupe de Lie  $N$  (groupe de Heisenberg de dimension trois) des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & u & w \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad u, v, w \in \mathbb{R} ; \quad [\text{KIR.}]$$

Pour obtenir une classification des  $G$ -flots nilpotents sur une variété compacte de dimension 4, il suffit donc de classifier les  $N$ -flots.

Ce chapitre comporte quatre parties :

A. la première partie est constituée de rappels élémentaires à propos du groupe de Lie  $N$ .

B. dans la deuxième partie, on décrit les groupes d'holonomie des  $N$ -flots.

C. on montre dans la troisième partie, que le feuilletage défini par un  $N$ -flot à orbites non fermées, est conjugué à un feuilletage homogène ; on utilise pour cela le théorème VI-B-1.

D. on vérifie dans la quatrième partie, que l'on a un théorème d'approximation du "type Tischler" pour ce qui concerne les  $N$ -flots.

A - LE GROUPE DE HEISENBERG DE DIMENSION TROIS.

On désigne par  $N$  le groupe de Lie réel des matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & u & w \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad u, v, w \in \mathbb{R}.$$

Le groupe  $N$  est isomorphe au groupe obtenu en considérant sur  $\mathbb{R}^3$  la loi de composition suivante :

$$(u, v, w)(u', v', w') = (u+u', v+v', w+w' + uv')$$

Proposition VII-A-1. - Le groupe de Lie  $N$  est connexe, contractile et nilpotent.

Démonstration : Les deux premières propriétés sont évidentes, puisque  $N$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$  ; pour vérifier que  $N$  est nilpotent, il suffit de calculer les sous-groupes  $[N, N]$  et  $[N, [N, N]]$ , on obtient

$$[N, N] = \{(0, 0, w) \in N ; w \in \mathbb{R}\} ; [N, [N, N]] = 0$$

En raison de la nullité du deuxième sous-groupe, on dira que  $N$  est métabélien ■

Proposition VII-A-2. - Le seul sous-groupe fermé et connexe de  $N$ , de dimension 1, et distingué dans  $N$ , est le sous-groupe des commutateurs  $[N, N]$ .

Démonstration : Pour obtenir ce résultat, il suffit de déterminer les idéaux de dimension 1, de l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  de  $N$  ; l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  est l'algèbre des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad u, v, w \in \mathbb{R}.$$

Notons :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la base naturelle de  $\mathcal{A}$  ;  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Lie réelle de dimension 3, où les crochets sont :

$$[A, B] = C \quad ; \quad [A, C] = [B, C] = 0.$$

Soit  $\mathcal{J}$  un idéal de  $\mathcal{A}$  de dimension 1 ; l'idéal  $\mathcal{J}$  est engendré par un vecteur  $X = \lambda_0 A + \beta_0 B + \gamma_0 C$ , et il existe  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$[X, A] = -\beta_0 C = \alpha_1 (\lambda_0 A + \beta_0 B + \gamma_0 C)$$

$$[X, B] = \lambda_0 C = \alpha_2 (\lambda_0 A + \beta_0 B + \gamma_0 C).$$

D'où :

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda_0 = \alpha_1 \beta_0 = \alpha_1 \gamma_0 + \beta_0 = 0 \\ \alpha_2 \lambda_0 = \alpha_2 \beta_0 = \alpha_2 \gamma_0 + \lambda_0 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ .

L'idéal  $\mathcal{J}$  est donc engendré par  $C$ , ce qui démontre la proposition ■

On va à présent décrire le groupe des automorphismes de  $N$  ; soit  $F : N \rightarrow N$  un automorphisme de  $N$  ; on a nécessairement  $F[N, N] = [N, N]$ , et par conséquent,  $F$  induit un automorphisme  $\bar{F}$  de  $N/[N, N]$  ; donc en notant :



$$F(u,v,w) = (\theta(u,v,w), \varphi(u,v,w), \gamma(u,v,w)),$$

on en déduit que  $\theta$  et  $\varphi$  ne dépendent que de  $(u,v)$ , et sont des applications linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $(\theta, \varphi)$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ . On obtient par ailleurs :

$$\gamma(u,v,w) = \delta(u,v) + \lambda w$$

où  $\lambda$  est un nombre réel non nul, et  $\delta$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\delta[(u,v)+(u',v')] = \delta(u,v) + \delta(u',v') - \lambda uv' + \theta(u,v) \cdot \varphi(u',v')$$

Pour terminer cette étude de  $N$ , on donne la classification des sous-groupes discrets uniformes de  $N$  [AU.GRE.HA] ; soit  $k$  un entier positif non nul et  $D_k$  le sous-groupe de  $N$  défini par :

$$D_k = \{(a,b, ab + \frac{c}{k}) \in N ; a,b,c \in \mathbb{Z}\} ;$$

alors tout sous-groupe discret uniforme de  $N$  est isomorphe à l'un des  $D_k$ .

Le but de ce chapitre, est de montrer que le feuilletage défini par un  $N$ -flot à orbites non fermées, est conjugué au feuilletage défini par un  $N$ -flot homogène ; il suffit donc de montrer (théorème VI-B-1) que le groupe d'holonomie  $\Gamma$  d'un  $N$ -flot (à orbites non fermées) contient un sous-groupe  $\Gamma_0$  tel que  $\Gamma_0$  est discret uniforme dans  $N$ , et,  $\Gamma/\Gamma_0 \simeq \mathbb{Z}$  ; on commence par décrire les groupes d'holonomie des  $N$ -flots.

### B - GROUPES D'HOLONOMIE DES N-FLOTS.

Soient  $M$  une variété compacte de dimension quatre, et  $\phi$  un  $N$ -flot sur  $M$ , à orbites non fermées, de groupe d'holonomie  $\Gamma$  ; le diagramme développant de  $\phi$  s'écrit :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R} \subset & \longrightarrow & \tilde{M} & \xrightarrow{D} & N \\
 & & \downarrow P & & \downarrow \\
 & & M & \xrightarrow{\bar{D}} & N/K
 \end{array}$$

les orbites de  $\phi$  étant non fermées (et évidemment non denses), la dimension de  $K$  est égale à 1 ou à 2, nous allons montrer que cette dimension, est nécessairement égale à 1.

Proposition VII-B-1. - Soient  $M$  une variété compacte de dimension 4, et  $\phi$  un  $N$ -flot sur  $M$  à orbites non fermées.

Si  $\Gamma$  est le groupe d'holonomie de  $\phi$ , et  $K$  l'adhérence de  $\Gamma$  dans  $N$ , alors on a :  $\dim K = 1$ .

Démonstration : Raisonnons par l'absurde, en supposant que la dimension de  $K$  est égale à 2 ; en faisant un calcul analogue à celui effectué dans la proposition VII-A-2, il est facile de vérifier que le sous-groupe  $K_e$  est de la forme :

$$K_e = \{(\alpha x, \beta x, z) \in N ; x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels non simultanément nuls.

Lemme VII-B-1. - Si on a  $\dim K = 2$ , alors le sous-groupe  $[\Gamma, \Gamma]$  est dense dans  $[N, N]$ .

Démonstration : Puisque l'adhérence de  $[\Gamma, \Gamma]$  dans  $N$ , est égale à  $[K, K]$ , il suffit de démontrer que  $[K, K] = [N, N]$ .

Le groupe de Lie  $N/K_e$  est isomorphe à  $\mathbb{R}$ , et l'espace homogène  $N/K$  est compact ; donc  $K$  n'est pas connexe, et par conséquent, il existe un élément  $(u, v, w)$  dans  $K$  tel que  $\alpha v - \beta u \neq 0$  ; en calculant le commutateur de  $(\alpha x, \beta x, z)$  et de  $(u, v, w)$  on obtient  $(0, 0, (\alpha v - \beta u)x)$ , ce qui démontre le résultat ■

Puisque  $\dim K = 2$ , on a  $N/K \simeq \mathbb{S}^1$ , et la fibre de la fibration  $\bar{D} : M \rightarrow N/K$  est le tore  $T^3$ ; soit  $A$  la matrice de  $GL_3(\mathbb{Z})$  associée au difféomorphisme de recollement du fibré en tores  $T^3$  sur  $\mathbb{S}^1$  ainsi obtenu, cette matrice  $A$  définit l'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}^3$  dans la suite exacte de la fibration  $\bar{D}$  :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Lemme VII-B-2. - Si on a  $\dim K = 2$ , alors la matrice  $A$  vérifie la relation :

$$(A-I)^2 = 0.$$

Démonstration : Puisque  $A$  définit l'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}^3$  dans la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^3 \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

le groupe  $\Gamma$  est isomorphe au groupe obtenu en considérant sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^3$  la loi suivante :

$$(n_1, X_1)(n_2, X_2) = (n_1 + n_2, A^{-n_2} X_1 + X_2).$$

Si  $X$  est un vecteur quelconque de  $\mathbb{Z}^3$ , le commutateur  $\gamma$  des éléments  $(0, X)$  et  $(1, 0)$  s'écrit :

$$\gamma = (0, (I-A)X)$$

Le commutateur des éléments  $(1, 0)$  et  $\gamma$  s'écrit :

$$(0, -(A-I)^2 X)$$

Le groupe  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $N$ , donc  $\Gamma$  est métabélien (prop. VII-A-1) ; on en déduit que  $(A-I)^2 \cdot X = 0$  pour tout  $X \in \mathbb{Z}^3$ , ce qui démontre le résultat ■

Dans la démonstration de la proposition VII-B-1, nous utiliserons également le lemme suivant :

□

Lemme VII-B-3.- Les valeurs propres de  $A$  ont un module égal à 1.

Démonstration : Le groupe  $\Gamma$  est nilpotent et de type fini ; par conséquent [WOL]  $\Gamma$  a une croissance polynomiale ; dans ces conditions les valeurs propres de  $A$  ont un module égal à 1 [MOU.PEL.] ■

Démonstration de la proposition VII-B-1. : Nous allons examiner toutes les formes possibles de  $A$ , et montrer que dans chaque cas, on aboutit à une contradiction. Nous supposerons pour ne pas alourdir le texte que  $\det A = 1$  (i.e. que  $T_A^3$  est orientable) ; les résultats obtenus restent valables pour  $\det A = -1$ .

1er cas.  $A$  a une valeur propre triple égale à 1.

Dans une base convenable, la matrice  $A$  s'écrit sous l'une des trois formes suivantes :

$$I, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a)  $A = I$ .

Dans ce cas, le groupe  $\Gamma$  est commutatif, et en utilisant le théorème VII-B-2, on obtiendrait que  $N$  est commutatif.

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque ici, que les commutateurs de  $\Gamma$ , sont de la forme

$(0, (0, n, 0))$  ; le sous-groupe  $\Gamma$  serait donc cyclique, ce qui contredit le lemme VII-B-1.

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice ne vérifie pas la relation  $(A-I)^2 = 0$

2ème cas. A a deux valeurs propres 1 et -1.

Dans une base convenable, la matrice A s'écrit sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aucune de ces deux matrices, ne vérifie la relation  $(A-I)^2 = 0$ .

3ème cas. A a trois valeurs propres distinctes.

Ces valeurs propres de A, sont nécessairement 1, i et -i ; la matrice A vérifie donc la relation  $A^4 = I$  ; en considérant l'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}^3$  définie par la matrice  $A^4$ , on obtient un sous-groupe commutatif de  $\Gamma$  d'indice 4 ; en utilisant le corollaire VI-B-1, on obtiendrait que N est commutatif ■

Nous allons préciser à présent, la forme des groupes d'holonomie des N-flots à orbites non fermées.

Proposition VII-B-2. - Soit  $\phi$  un N-flot à orbites non fermées, sur une variété compacte de dimension 4. Si  $\Gamma$  est le groupe d'holonomie de  $\phi$ , alors  $\Gamma$  est de la forme :

$$\Gamma = \{(\alpha n, \beta p, n y_1 + p y_2 + q x_1 + r x_2) \in N ; n, p, q, r \in \mathbb{Z}\}$$

où  $\alpha, \beta, y_1, y_2, x_1$  et  $x_2$  sont des nombres réels qui vérifient :

- i)  $x_1$  et  $x_2$  sont rationnellement indépendants
- ii)  $\alpha\beta = k_1 x_1 + k_2 x_2$  avec  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_*^2$

La démonstration de la proposition VII-B-2 s'effectue à l'aide des deux lemmes suivants :

Lemme VII-B-4. - Le sous-groupe fermé  $K = \bar{\Gamma}$  de  $N$ , est de la forme :

$$K = \{(\alpha n, \beta p, x) \in N ; x \in \mathbb{R}, (n, p) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Démonstration : Puisque la dimension de  $K$  est égale à 1, le sous-groupe fermé connexe  $K_e$  est lui aussi de dimension 1 ; comme par ailleurs  $K_e$  est un sous-groupe distingué de  $N$  (P.VI-A-1), on a  $K_e = [N, N]$  (proposition VII-A-2).



Ecrivons le diagramme des suites exactes naturelles :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_e & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K/K_e & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{e} & & \downarrow \text{i} & & \downarrow \bar{\text{i}} & & \\ 0 & \longrightarrow & [N, N] & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N/[N, N] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

L'inclusion de  $K$  dans  $N$ , induit une injection continue  $\bar{\text{i}}$  de  $K/K_e$  dans  $N/[N, N] = \mathbb{R}^2$  ; puisque  $K$  est un sous-groupe uniforme de  $N$ , le groupe  $\bar{\text{i}}(K/K_e)$  est un sous-groupe discret uniforme de  $N/[N, N] = \mathbb{R}^2$ , et, par conséquent  $\bar{\text{i}}(K/K_e)$  est de la forme  $\alpha\mathbb{Z} \oplus \beta\mathbb{Z}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels.

Comme  $K_e$  est égal à  $\{(0, 0, x) \in N ; x \in \mathbb{R}\}$ , le groupe  $K$  s'écrit sous la forme :  $K = \{(\alpha n, \beta p, x) \in N ; x \in \mathbb{R}, (n, p) \in \mathbb{Z}^2\}$  ■

Lemme VII-B-5. - Le sous-groupe  $\Gamma \cap K_e$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ .

Démonstration : Le groupe des commutateurs de  $K$  est le groupe cyclique :

$$[K, K] = \{(0, 0, \alpha\beta q) \in \mathbb{N} ; q \in \mathbb{Z}\} ;$$

on en déduit que les groupes  $[\Gamma, \Gamma]$  et  $[K, K]$  sont égaux

Soient  $h : \Gamma \cap K_e \rightarrow \Gamma$ ,  $\tilde{i} : \Gamma \rightarrow K$  les inclusions respectives et  $J : \Gamma \rightarrow \Gamma/\Gamma \cap K_e$  la projection canonique ; l'inclusion  $\tilde{i}$  induit un isomorphisme  $\chi$  de  $\Gamma/\Gamma \cap K_e$  sur  $K/K_e$  puisque l'on a

$$\bar{\Gamma} = K \quad \text{et} \quad K_e = \overline{\Gamma \cap K_e} .$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma \cap K_e & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \Gamma/\Gamma \cap K_e & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \tilde{i} & & \downarrow \chi & & \\ 0 & \longrightarrow & K_e & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K/K_e & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

comme on l'a remarqué dans le chapitre VI, la suite exacte de la fibration  $T^2 \rightarrow M \xrightarrow{\bar{D}} N/K$ , s'écrit :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\chi \circ j} K/K_e \longrightarrow 0$$

Le groupe  $\Gamma \cap K_e$  qui est isomorphe à  $\text{Ker}(\chi \circ j)$ , est donc isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$  ■

Démonstration de la proposition VII-B-2. Soit  $k : \Gamma \rightarrow \alpha\mathbb{Z} \oplus \beta\mathbb{Z}$  l'homomorphisme surjectif défini par  $k(\alpha n, \beta p, *) = (\alpha n, \beta p)$ . On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma \cap K_e \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{k} \alpha\mathbb{Z} \oplus \beta\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

On va construire à partir de cette suite exacte, un système de générateur de  $\Gamma$  ; le sous-groupe  $\Gamma \cap K_e$  étant isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ , et, dense dans  $K_e$ , il existe deux nombres réels rationnellement indépendants  $x_1$  et

et  $x_2$  tels que :  $f_1 = (0,0,x_1)$  et  $f_2 = (0,0,x_2)$  engendrent  $\Gamma \cap K_e$  ;  
soient par ailleurs deux éléments de  $\Gamma$  de la forme :

$$e_1 = (\alpha, 0, y_1) \text{ et } e_2 = (0, \beta, y_2).$$

Les éléments  $e_1, e_2, f_1$  et  $f_2$  constituent un système de générateurs de  $\Gamma$ , et tout élément de  $\Gamma$  s'écrit de façon unique sous la forme :

$$e_1^n \cdot e_2^p \cdot f_1^q \cdot f_2^r = (\alpha n, \beta p, n y_1 + p y_2 + \alpha \beta n p + q x_1 + r x_2)$$

Comme le groupe des commutateurs de  $\Gamma$ , est contenu dans  $\Gamma \cap K_e$ ,  
il existe deux nombres entiers  $k_1$  et  $k_2$  (non simultanément nuls) tels  
que  $\alpha\beta = k_1 x_1 + k_2 x_2$ . En conclusion, on obtient :

$$\Gamma = \{(\alpha n, \beta p, n y_1 + p y_2 + q x_1 + r x_2) \in N ; p, q, r, s \in \mathbb{Z}\}$$

avec :

- i)  $x_1$  et  $x_2$  sont rationnellement indépendants.
- ii) il existe  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_*^2$  tel que  $\alpha\beta = k_1 x_1 + k_2 x_2$  ■

Réciproquement, tout sous-groupe  $\Gamma$  de  $N$  de la forme indiquée  
dans la proposition précédente, est le groupe d'holonomie d'un N-flot.

Proposition VII-B-3. - Soit  $\Gamma$  le sous-groupe de  $N$  défini par :

$$\Gamma = \{(\alpha n, \beta p, y_1 n + y_2 p + q x_1 + r x_2) \in N ; n, p, q, r \in \mathbb{Z}\}$$

avec :

- i)  $x_1$  et  $x_2$  sont deux nombres réels rationnellement indépendants
- ii)  $\alpha\beta = k_1 x_1 + k_2 x_2$  avec  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_*^2$ .

Alors il existe une variété compacte  $M$  de dimension 4, et, un  
N-flot  $\phi$  sur  $M$ , de groupe d'holonomie  $\Gamma$ .



Démonstration : Pour démontrer cette proposition, nous allons reprendre dans le cas particulier du groupe  $N$ , la construction effectuée au chapitre VI, construction qui associe un  $N$ -flot homogène, à un  $N$ -flot.

Soit  $\tilde{G}$  le groupe de Lie nilpotent et simplement connexe, obtenu en considérant sur  $\mathbb{R}^4$  la loi de groupe :

$$(x,y,z,t)(x',y',z',t') = (x+x',y+y',z+z'+k_1xy',t+t'+k_2xy').$$

Le sous-groupe  $\tilde{\Gamma}$  de  $\tilde{G}$  défini par :

$$\tilde{\Gamma} = \{(p,q,r,s) \in \tilde{G} ; p,q,r,s \in \mathbb{Z}\},$$

est un sous-groupe discret uniforme de  $\tilde{G}$ .

Le sous-groupe  $\tilde{\Gamma}$  est isomorphe à  $\Gamma$  par l'isomorphisme :

$$J(p,q,r,s) = (\alpha p, \beta q, p y_1 + q y_2 + r x_1 + s x_2)$$

L'application  $\Pi$  de  $\tilde{G}$  dans  $N$ , définie par :

$$\Pi(x,y,z,t) = (\alpha x, \beta y, x y_1 + y y_2 + z x_1 + t x_2)$$

est un homomorphisme surjectif de groupes de Lie, de noyau :

$$X = \{(0,0,z, -\frac{x_1}{x_2} z) \in \tilde{G} ; z \in \mathbb{R}\}$$

Le sous-groupe à un paramètre  $X$ , définit sur la variété compacte  $\tilde{G}/\tilde{\Gamma} = M$ , un flot  $\phi$  transversalement de Lie  $X \setminus \tilde{G} \simeq N$ , et de groupe d'holonomie  $\tilde{\Gamma} \simeq \Gamma$  ■

### C - FLOTS HOMOGENES ET N-FLOTS.

Nous allons montrer que les hypothèses du théorème VI-B-1 sont toujours vérifiées, pour ce qui concerne les  $N$ -flots.

Théorème VII-C-1. Soient  $M$  une variété compacte de dimension quatre, et  $\phi$  un  $N$ -flot sur  $M$ , à orbites non fermées.

Alors le feuilletage défini par  $\Phi$ , est conjugué au feuilletage défini par un N-flot homogène.

Démonstration : Soit  $\Gamma$  le groupe d'holonomie de  $\Phi$  ; le groupe  $\Gamma$  s'écrit sous la forme

$$\Gamma = \{(\alpha n, \beta p, y_1 n + y_2 p + q x_1 + r x_2) \in N ; n, p, q, r \in \mathbb{Z}\}$$

où  $\alpha, \beta, y_1, y_2, x_1$  et  $x_2$  sont des nombres réels qui vérifient les propriétés i) et ii) de la proposition VII-B-3.

Pour montrer que le feuilletage défini par  $\Phi$ , est conjugué à un feuilletage homogène, il suffit de déterminer un sous-groupe  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$  tel que  $\Gamma_0$  est discret uniforme dans  $N$ , et  $\Gamma/\Gamma_0$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . (théorème VI-B-1).

Soit  $F$  l'application de  $N$  dans  $N$  définie par :

$$F(u, v, w) = (\alpha u, \beta v, y_1 u + y_2 v + \alpha \beta w)$$

l'application  $F$  est un automorphisme de  $N$  (VII.A), et le sous-groupe  $F(D_1) = \Gamma'_0$  (VII.A) est contenu dans  $\Gamma$  ;  $\Gamma'_0$  est discret uniforme dans  $N$ , distingué dans  $\Gamma$ , et le quotient  $\Gamma/\Gamma'_0$  est un groupe abélien de rang 1, en prenant l'extension de  $\Gamma'_0$  par le sous-groupe de torison de  $\Gamma/\Gamma'_0$ , on obtient un sous-groupe  $\Gamma_0$  discret uniforme dans  $N$  et tel que  $\Gamma/\Gamma_0$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ■

#### D - THEOREME D'APPROXIMATION DU "TYPE TISCHLER".

Dans son article intitulé "Sur la généralisation d'un théorème de Tischler à certains feuilletages nilpotents" D. Lehmann [LEH] a montré que le théorème d'approximation de Tischler [TIS] ne se généralise pas convenablement aux N-feuilletages ; il a donné un exemple de N-feuilletage de dimension trois, qui n'est "approchable" par aucune fibration. Par contre nous nous

proposons dans ce paragraphe de montrer que le théorème de Tischler se généralise aux N-feuilletages de dimension 1.

Théorème VI-D-1. - Soient  $M$  une variété compacte de dimension quatre, et  $\Phi$  un N-flot sur  $M$ .

Alors le feuilletage défini par  $\Phi$  est "approachable" par des feuilletages définis par des N-flots à orbites fermées.

Démonstration : Si les orbites de  $\Phi$  sont fermées, il n'y a rien à démontrer ; supposons les orbites de  $\Phi$ , non fermées ; d'après le théorème VII-C-1, on peut se restreindre aux flots homogènes ; dans ce cas  $M = \tilde{G}/\tilde{\Gamma}$  et le flot  $\Phi$  est induit par un sous-groupe à un paramètre  $X$  de  $\tilde{G}$ , de la forme  $X = \{(0,0,z, -\frac{x_1}{x_2} z) \in \tilde{G} ; z \in \mathbb{R}\}$  (proposition VII-B-3). Soient  $(p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres rationnels qui converge vers  $\frac{x_1}{x_2}$ , et  $X_n$  le sous-groupe à un paramètre de  $\tilde{G}$  défini par :

$$X_n = \{(0,0,z, -\frac{p_n}{q_n} z) \in \tilde{G} ; z \in \mathbb{R}\}.$$

Les sous-groupes à un paramètre  $X_n$  définissent sur  $\tilde{G}/\tilde{\Gamma}$  des flots  $\Phi_n$  transversalement de Lie  $N$ , à orbites fermées. Le feuilletage défini par  $\Phi$ , est "approachable" par les feuilletages définis par les flots  $\Phi_n$  ■

Remarque. - Soient  $M$  une variété compacte, et,  $\mathcal{F}$  un N-feuilletage sur  $M$  ; D. Lehmann [LEH] a démontré que si l'on a l'inégalité :

(\*)  $\dim H^1(M, \mathbb{R}) \leq 3$ , alors  $\mathcal{F}$  est "approachable" par une fibration ; la forme des groupes d'holonomie des N-flots (proposition VII-B-2) montre que cette condition (\*) est toujours vérifiée pour ce qui concerne une variété compacte de dimension 4, qui supporte un N-flot.

## BIBLIOGRAPHIE

-----

- [AU.GRE.HA] L. AUSLANDER, L. GREEN et F. HAHN, "Flows on homogeneous spaces", *Annals of Mathematical Studies*, 53 (1963).
- [CAR.CAR ] P. CARON et Y. CARRIERE, "Flots transversalement de Lie", *Publ. IRMA LILLE*, 2 - 2 (1980).
- [FED] E. FEDIDA, "Feuilletages du plan - Feuilletages de Lie", *Thèse*, Université Louis Pasteur, Strasbourg (1973).
- [FRI] D. FRIED, "Cross-sections to flows", *University of California, Berkeley*.
- [GH] E. GHYS, "Sur les actions localement libres du groupe affine", *Thèse*, Université des Sciences et Techniques de Lille I (1979).
- [GH.SER] E. GHYS et V. SERGIESCU, "Certains feuilletages sans feuilles compactes sont très stables", *Topology* 19 (1980), 179-197.
- [KIR] A. KIRILOV, "Eléments de la théorie des représentations", *M.I.R.* (1974).
- [LEH] D. LEHMANN, "Sur la généralisation d'un théorème de Tischler à certains feuilletages nilpotents", *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Série A*, Volume 82 (2), June 8 (1979).
- [MALC] A.I. MALCEV, "On a class of homogeneous spaces of nilpotent Lie groups", *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser Mat.* 13, p.9 - AMS transl. 39 (1949).
- [MEY] J. MEYER, "e-foliations of codimension two", *J. of Diff. Geometry*, 12 (1977), 583-594.
- [MOU.PEL] R. MOUSSU et F. PELLETIER, "Sur le théorème de Poincaré-Bendixon" *Ann. Inst. Fourier*, 24 (1974).
- [RAG] M.S. RAGHUNATHAN, "Discrete subgroups of Lie groups", *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* (68), Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [REI] B. REINHART, "Foliated manifolds with bundle like metrics", *Ann. of Math.*, (1) 69 (1959), 119-132.
- [SCH] J. SCHEUNEMAN, "Two-step nilpotent Lie algebras", *J. of Algebra*, 7 (1967), 152-159.

- [THU] W.P. THRUSTON, "The geometry and topology of 3-manifolds",  
Cours polycopié, Chapitre IV.
- [TIS] D. TISCHLER, "On fibering certain foliated manifolds over  $S^1$ ",  
Topology 9 (1970), 153-154.
- [WOL] J. WOLF, "Growth of Finitely generated solvable groups and  
curvature of Riemannian manifolds", J. of Diff. Geometry,  
2 (1968), 421-446.
- 

