

N° d'ordre : 479

50376
1980
118

50376
1980
118

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès SCIENCES PHYSIQUES

par

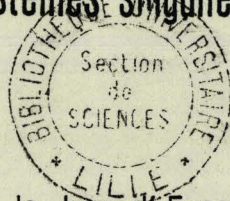
Mohamed BENREJEB

Ingénieur I.D.N.

Docteur - Ingénieur

SUR L'ANALYSE ET LA SYNTHÈSE DE PROCESSUS COMPLEXES HIERARCHISÉS

Application aux systèmes singulièrement perturbés.



soutenue le 14 Mai 1980 devant le Jury d'Examen.

MM.	F. LHOTE	Président
	P.E. BORNE	Rapporteur
	F. LAURENT	Rapporteur
	Lj.T. GRUJIĆ	Rapporteur
	J.C. GENTINA	Examineur
	C. MAIZIERES	Examineur
	M. MORIAMEZ	Invité
	A. MARRAKCHI	Invité
	M. REZGUI	Invité

A ma Soeur

A mes Frères

A mes Parents

AVANT PROPOS

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique de l'Université des Sciences et des Techniques de Lille I.

Nous sommes particulièrement sensible au grand honneur que nous a fait Monsieur le Professeur LHOTE, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques, en acceptant de présider notre Jury de thèse. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde reconnaissance.

C'est un agréable devoir pour nous d'exprimer notre très vive reconnaissance à Monsieur le Professeur LAURENT, Directeur du Laboratoire de Systématique, qui a bien voulu nous accueillir au sein de son équipe. Qu'il trouve ici l'expression de notre très profonde gratitude pour l'enseignement qu'il a su nous dispenser, l'intérêt qu'il a porté à nos travaux et les conseils éclairés qu'il nous a prodigués.

Nous tenons à exprimer notre très vive reconnaissance à Monsieur le Professeur BORNE pour nous avoir guidé durant toute l'élaboration de cette thèse avec le sérieux et la compétence qui le caractérisent. Qu'il trouve ici le témoignage de notre très profonde gratitude.

Monsieur le Professeur GRUJIC nous a très aimablement reçu à Belgrade pour nous faire profiter de sa compétence et nous conseiller dans le domaine de la stabilité. Nous lui exprimons notre très vive reconnaissance et nous lui adressons nos sincères remerciements pour avoir bien voulu jurer notre travail et participer au Jury de notre thèse..

Monsieur le Professeur GENTINA a bien voulu accepter de nous conseiller au cours de nos recherches. Sa présence à notre Jury de thèse nous a profondément touché et nous lui exprimons toute notre reconnaissance.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à Monsieur le Professeur MAIZIERES pour les conseils dont il a su nous faire profiter au cours de nos travaux. Nous le remercions également d'avoir bien voulu accepter de participer à notre Jury.

Monsieur le Professeur MARRAKCHI, Directeur de l'Ecole Nationale des Ingénieurs de Tunis, nous a, à tout moment encouragé et apporté son soutien en particulier en acceptant de participer à notre Jury de thèse. Nous tenons à ce qu'il reçoive ici le témoignage de notre très respectueuse et très vive reconnaissance ainsi que l'expression de notre profond dévouement.

Monsieur le Professeur MORIAMEZ, Directeur de l'Institut Industriel du Nord, nous a grandement honoré en acceptant de participer à notre jury de thèse. Nous sommes heureux de lui exprimer notre profonde gratitude.

Que Monsieur REZGUI, Président Directeur Général de la Société COGELEC, reçoive ici nos très sincères remerciements. Il nous a en effet permis par son amabilité et sa compétence de mieux assimiler le processus industriel dont l'étude est envisagée comme application de nos travaux. Nous lui exprimons toute notre gratitude pour sa participation à notre Jury.

Nous tenons enfin à rendre hommage à l'esprit d'équipe qui règne au Laboratoire de Systématique, aux chercheurs, au personnel ainsi qu'à Madame COPIN, qui s'est chargée de la présentation matérielle de cette thèse ; tous ont toujours répondu avec empressement à nos sollicitations et par leur amicale présence nous ont aidé dans notre travail. Nous adressons à chacun nos remerciements les plus vifs.

INTRODUCTION GENERALE

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent l'analyse et la synthèse des processus dynamiques complexes en présence éventuellement, de perturbations. Ils utilisent la méthode de LYAPUNOV et les techniques d'agrégation ; la difficulté inhérente au choix d'une fonction candidate à LYAPUNOV ou d'une fonction d'agrégation du type norme vectorielle est simplifiée par l'utilisation d'une représentation particulière remarquable des processus.

Elle consiste en une description matricielle dans l'espace d'état telle que les éléments de la matrice caractéristique, dite en flèche, sont répartis autour de la diagonale principale, dans la dernière ligne et la dernière colonne.

Cette description nous a permis de proposer, dans ce mémoire, une méthode algébrique de détermination de modèles particuliers associés aux processus en vue de faciliter leur étude.

Cette méthode paraît d'application intéressante pour les systèmes dynamiques complexes et hiérarchisés.

Après avoir précisé la classe des modèles étudiés, les notions de stabilité utilisées ainsi que les principales méthodes d'étude des systèmes de grande dimension, quelques propriétés importantes des matrices de forme en flèche sont présentées.

Des conditions suffisantes de stabilité tenant compte de la structure particulière d'un processus continu non linéaire sont ensuite établies et énoncées sous forme de théorèmes, d'application simple. La recherche systématique de ces conditions nous permet de définir de larges classes de processus pour lesquels la conjecture linéaire est vérifiée.

Plusieurs applications de ces travaux sont envisagées dans la suite de ce mémoire :

- une mise en oeuvre des résultats obtenus en vue de l'analyse du comportement dynamique d'un processus soumis à des perturbations.
- l'utilisation de la méthode proposée dans le cas d'un processus singulièrement perturbé permettant une caractérisation simple du système dégénéré associé.
- l'étude et la synthèse de la régulation en fréquence de deux groupes turbo-alternateurs couplés sur un même réseau.

Une extension aux processus discrets de la méthode décrite et exploitée pour les systèmes continus dans les trois premiers volets de ce mémoire est proposée dans la dernière partie.

CHAPITRE I

REPRESENTATION DES SYSTEMES DYNAMIQUES - STABILITE

INTRODUCTION

Ce chapitre a pour but de présenter la classe des processus étudiés, de rappeler les principales définitions ainsi que les méthodes d'études relatives à la stabilité et de définir une nouvelle représentation matricielle des processus dynamiques continus et discrets non linéaires de grande dimension.

Lorsque le processus est fortement non linéaire, il apparaît intéressant d'envisager une représentation matricielle dans l'espace d'état, la matrice caractéristique étant telle que ses éléments soient répartis autour de la diagonale principale, la dernière ligne et la dernière colonne.

Cette représentation est proposée pour la première fois comme étant une formulation pratique pour l'étude de la stabilité pour une classe particulière de processus monovariabiles continus et discrets non linéaires dans [1].

L'extension de cette formulation pour l'analyse de la stabilité des systèmes monovariabiles et multivariabiles de grande dimension a été considérée ensuite dans [4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12], et pour la synthèse dans [4, 6, 9, 10, 12].

L'appellation forme en flèche pour les matrices, apparaît plus tard et pour la première fois dans [2] dans le cadre de l'étude du problème de placement des valeurs caractéristiques d'un processus linéaire [2, 3].

Après avoir précisé la classe des processus étudiés, les notions de stabilité utilisées, ainsi que les principales méthodes d'étude des systèmes de grande dimension et plus particulièrement les

critères pratiques de BORNE et GENTINA [78, 79] que nous aurons à utiliser, nous présenterons une classification de différentes formes en flèche pour les matrices caractéristiques des processus, les principales propriétés de cette représentation, ainsi que deux méthodes, l'une graphique, l'autre analytique, permettant le passage à cette forme particulière.

I - STRUCTURES DES PROCESSUS DYNAMIQUES

I-1 GENERALITES

Nous appellerons processus ou système dynamique [13] un ensemble physique susceptible d'évoluer en fonction d'une variable indépendante appelée temps.

Les processus sont généralement caractérisés par la nature des signaux qui interviennent dans leur description : ils sont dits continus lorsque les signaux sont définis par rapport à une variable temps continue, et discrets lorsque la variable temps est discrète.

Parmi les grandeurs mesurables relatives au processus nous distinguerons les sorties et les commandes. Les sorties sont des grandeurs dont l'évolution nous intéresse et avec lesquelles nous pouvons caractériser des tâches appelées : consignes. Les commandes sont les grandeurs dont le choix permet la réalisation des consignes.

Souvent les sorties et les commandes sont assujetties à vérifier des conditions appelées contraintes. Elles définissent dans ce cas des domaines des commandes et des sorties admissibles.

En plus des grandeurs qui nous intéressent directement, les perturbations sont des grandeurs qui ne sont pas connues à l'avance et dont il faut tenir compte dans toute étude car elles constituent un obstacle pour la réalisation des consignes.

Afin de résoudre le problème du choix de la commande des processus, on établit par identification un modèle mathématique qui correspond en fait à une approximation de la réalité du processus.

Les modèles mathématiques correspondant aux systèmes étudiés, seront en général des équations différentielles, des équations récurrentes, ou des fonctions de transfert lorsqu'en particulier le processus est linéaire.

Par la suite nous utiliserons indifféremment l'appellation processus pour désigner le système réel et son modèle mathématique.

La complexité accrue du fait de l'augmentation du nombre des variables les définissant, a entraîné une évolution profonde des méthodes de la commande automatique.

Une meilleure connaissance de la structure des processus, associée à ces nouvelles méthodes peut contribuer à la résolution des problèmes d'analyse et de synthèse.

En effet toute étude peut être effectuée à partir d'une structure élémentaire en considérant le système dans son-ensemble, comme un tout, ou encore à partir d'une structure interconnectée supposant la possibilité de la décomposition du système en sous systèmes agissant les uns sur les autres linéairement ou nonlinéairement.

Dans le premier cas les systèmes seront dits complexes, et interconnectés dans le second cas.

Pour une large classe de processus, l'association d'une tâche ou d'un objectif à chaque sous-système, peut faire apparaître des conflits partiellement contradictoires entre les unités de commande choisies pour réaliser ces objectifs. Il convient dans ce cas d'avoir recours à un deuxième niveau de commande qui tienne compte des interactions et résolve les conflits en fixant les objectifs appropriés à chaque unité de commande.

Pour cette classe de systèmes dits hiérarchisés, le système de commande [14] est généralement constitué d'unités de commande disposées suivant une hiérarchie, une structure pyramidale, sur le processus à commander.

Un processus peut donc être considéré complexe ou/et interconnecté ou/et hiérarchisé. Dans ces conditions, quelle structure choisir pour mener l'étude ?

En fait, le choix dépend à la fois de la structure du processus, de la nature de l'étude, des propriétés des sous-systèmes, et des méthodes d'études envisagées.

Rechercher une propriété d'un processus, par exemple, à partir de la même propriété pour chaque sous-système, est contraignante pour les sous-systèmes [15], alors que considérer le processus à partir d'une structure élémentaire ne nécessite pas forcément la vérification de la propriété considérée pour les sous-systèmes [25].

L'interprétation de l'étude est aisée dans le premier cas alors qu'elle apparaît plus délicate dans le second.

Nous verrons par la suite, pour de larges classes de processus l'exploitation des propriétés vérifiées pour certains sous systèmes, en vue de conclure à la même propriété pour le processus.

Cette étude sera envisagée après avoir présenté dans la deuxième partie de ce chapitre les fonctions ainsi que les méthodes existantes permettant l'étude de la stabilité des systèmes complexes définis dans le paragraphe (I-2) suivant.

I-2 DESCRIPTION DES SYSTEMES DE GRANDE DIMENSION ETUDIES

I-2-1 Systèmes dynamiques perturbés/non perturbés

Le système dynamique de grande dimension étudié est régi par une équation différentielle vectorielle [44]

$$D[x(t)] = A(t, x) x + b(t, x, u) \quad (I-1)$$

où $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}, x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, est la valeur à l'instant t du vecteur état de dimension n (\mathcal{X} : ensemble connexe, $\{0\} \in \mathcal{X}, \mathcal{X} \neq \{0\}$) et $x_i(t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}_i, x_i \in \mathcal{X}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ un partitionnement de $x(t)$ tel que :

$$x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_r^T]^T$$

$$x_i^T = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i,n_r}]^T \quad \forall i = 1, 2, \dots, r$$

avec

$$n = \sum_{i=1}^r n_i$$

$u(t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}, u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, est la valeur à l'instant t du vecteur d'entrée de dimension m :

$$u^T = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$$

$D[x]$ désigne l'opération de décalage temporel $x(t + T)$ pour les systèmes échantillonnés et l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}(x)$ pour les systèmes continus [17].

\mathcal{T} désigne l'ensemble \mathcal{T}_c des nombres réels pour les systèmes continus et l'ensemble \mathcal{T}_d des entiers relatifs pour les systèmes discrets.

Les matrices $A(t, x)$ et $b(t, x, u)$ caractérisant le processus

$$A(t, x) = \{a_{ij}(t, x)\}$$

$$b(t, x, u) = \{b_k(t, x, u)\}$$

sont à éléments a_{ij} et b_k généralement non constants.

La sortie du système dépend en général du temps t , du vecteur état x et de la commande u conformément à la relation :

$$s(t) = g(t, x, u) \quad \forall s \in \mathcal{S} \subset \mathcal{R}^n \quad (I-2)$$

où g est une application généralement non linéaire de $\mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ dans \mathcal{S}

Lorsque le système est décrit par des équations (I-1) et (I-2) du type :

$$D[\dot{x}(t)] = A(t) x(t) + B(t) u(t) \quad (I-3)$$

$$s(t) = c(t) x(t) + D(t)u(t) \quad (I-4)$$

il est dit linéaire.

Les processus considérés sont libres lorsque l'entrée u est identiquement nulle et forcés dans le cas contraire.

Lorsque ces processus sont soumis à des perturbations bornées caractérisées par la matrice $P(t) \in \mathcal{P}$, $P(t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}^{n \times 1 \times n \times p^2}$, $\underline{P} \leq P(t) \leq \bar{P}$, \underline{P} et \bar{P} matrices constantes, dues à l'influence de l'environnement du processus sur celui-ci, ou aux fluctuations de la structure du processus, ils sont décrits par les relations :

$$D[\dot{x}(t)] = \tilde{A}(t, \tilde{x}, \tilde{P}) \tilde{x}(t) + \tilde{b}(t, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{P}) \quad (I-5)$$

$$\tilde{s}(t) = \tilde{g}(t, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{P}) \quad (I-6)$$

Pour $P(t)$ donnée, nous noterons par $x(t)$:

$$x(t) = x(t_0, t, x_0, u[t_0, t])$$

la solution de (I-5) définie pour une condition initiale notée x_0 , à l'instant t_0 et par $s(t)$:

$$s(t) = s(t_0, t, x_0, u[t_0, t])$$

la sortie correspondante.

Par la suite, nous supposerons que pour x_0 donnée, la trajectoire solution est unique ; de même nous supposerons que l'état d'équilibre x_e , lorsqu'il existe, est unique et ramené à l'origine :

$$x_e = 0$$

I-2-2 Systèmes du type LUR'E POSTNIKOV [77]

Un système complexe sera considéré par la suite du type Lur'e Postnikov lorsqu'il est décrit par une équation vectorielle de la forme :

$$D[x(t)] = A(t) x(t) + B(t) f(t, x, \sigma) \quad (I-7)$$

$$\sigma = u(t) + c(t, x, P) x(t) \quad (I-8)$$

avec $A(n \times n)$, $B(n \times m)$, $f(m)$, $c(m \times n)$, $u(m \times 1)$ et $\sigma = \{\sigma_i\}$,

$$\sigma \in \Sigma \subset \mathcal{R}^m$$

Si f est une fonction appartenant à la classe Φ :

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} f(t, x, \sigma) : \mathcal{T}_x \mathcal{X}_x \Sigma \rightarrow \mathcal{R}^m, f(t, x, \sigma) = \{f_i(t, x_i, \sigma_i)\} \\ f^*(t, x, \sigma) = \text{diag} \left\{ \frac{f_i(t, x_i, \sigma_i)}{\sigma_i} \right\}, f^*(t, x, \sigma) \in [\underline{L}, \bar{L}] \subset \mathcal{R}^{m \times m} \\ \forall t \in \mathcal{T}, \forall x \in \mathcal{X}, \forall \sigma \in \Sigma \end{array} \right.$$

Les relations (I-7) et (I-8) conduisent à la nouvelle description du processus :

$$D[x(t)] = A(t) x(t) + B(t) f^*(t, x, \sigma) [u(t) + c(t, x, P) x(t)] \quad (I-10)$$

En régime autonome ($u=0$), celle-ci devient :

$$D[x(t)] = [A(t) + B(t) f^*(t, x, \sigma) c(t, x, P)] x(t) \quad (I-11)$$

I-2-3 Systèmes multivariables du type interconnecté

Une représentation équivalente de la relation (I-5), faisant apparaître les vecteurs état x_i des systèmes composants S_i , $\forall i = 1, 2, \dots, r$, peut être obtenue en considérant un partitionnement adéquat des matrices $\tilde{A}(\cdot)$ et $\tilde{b}(\cdot)$:

$$\tilde{A}(t, \tilde{x}, \mathbb{P}) = \{\tilde{A}_{ij}(t, x, \mathbb{P})\}$$

$$\tilde{b}(t, \tilde{x}, \tilde{u}, \mathbb{P}) = \{b_i(t, \tilde{x}, \tilde{u}, \mathbb{P})\}$$

Les interactions entre les sous-systèmes $S_i \forall i = 1, 2, \dots, r$ sont caractérisées par les vecteurs $b_i^2(t, x, u, \mathbb{P})$ tels que :

$$D[x_i(t)] = A_{ii}(t, x_i, \mathbb{P}) x_i(t) + b_i^1(t, x_i, u_i, \mathbb{P}) + b_i^2(t, x, u, \mathbb{P}) \quad (I-12)$$

l'évolution ^{du} sous-système S_i isolé étant supposée décrite par l'équation :

$$D[x_i(t)] = A_{ii}(t, x_i, \mathbb{P}) x_i(t) + b_i^1(t, x_i, u_i, \mathbb{P})$$

ce qui n'enlève rien à la généralité de la description de S .

Lorsque le processus présente des variations de structure arbitraires, les relations régissant son évolution peuvent dépendre d'une matrice dite d'interconnexion $E_i, E_i = \{e_{ij}\} : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{r \times r}$, $e_{ij} : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\} \forall i, j = 1, 2, \dots, r$, introduite par SILJAK [18] et étendue par GRUJIC et al [19] pour caractériser à la fois les variations de structures et les perturbations.

En particulier, l'interconnexion entre des systèmes du type LUR'E POSTNIKOV conduit en régime autonome à une description de la forme :

$$D[x_i(t)] = \begin{cases} [A_{ii}(t) + B_i(t) f_i^*(t, x_i, \sigma_i) c_i(t, x, \mathbb{P})] x_i(t) \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r e_{ij} A_{ij}(t, x, \mathbb{P}) x_j \end{cases} \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (I-13)$$

1-2-4 Systèmes à perturbation singulière [43]

Cette classe de systèmes suppose la possibilité de décomposer le système S en deux sous-systèmes S_1 et S_2 dont l'évolution du vecteur état de S_1 est lente et celle de S_2 rapide :

$$D[x_1(t)] = A_{11}(t, x_1, x_2, \mu) x_1 + A_{12}(t, x_1, x_2, \mu) x_2 \quad (I-14)$$

$$\mu D[x_2(t)] = A_{21}(t, x_1, x_2) x_1 + A_{22}(t, x_1, x_2) x_2 \quad (I-15)$$

μ étant un petit paramètre positif.

Lorsqu'il est possible, pour $\mu = 0$, d'éliminer x_2 entre (I-14) et (I-15) l'étude du système peut être ramenée à l'étude du système S_1 , perturbé par S_2 , décrit par une équation de la forme :

$$D[x_1(t)] = A(t, x_1, x_2(t, x_1)) x_1(t) \quad (I-16)$$

x_2 apparaît alors comme une perturbation structurelle dépendant de t et de x_1 .

II - METHODES D'ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES DE GRANDE DIMENSION

La complexité des systèmes de grande dimension définis précédemment conduit à des méthodes d'étude de plus en plus élaborées.

Les méthodes usuelles d'étude des systèmes linéaires ont d'abord servi pour l'étude des systèmes non linéaires en les appliquant à des modèles linéaires correspondants, valables autour d'un point de fonctionnement.

Ces méthodes se sont révélées impuissantes lorsque le processus est fortement non linéaire et/ou de grande dimension. Après avoir défini la stabilité au sens de Lyapunov, plusieurs types particuliers de stabilité, correspondant aux différents modes de convergence de l'état du système vers l'état d'équilibre supposé unique, sont considérés relativement à la norme euclidienne de x , que nous désignerons par $\|x\|$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Pour garantir cette propriété, l'introduction de certaines fonctions s'avère nécessaire pour simplifier l'étude.

L'analyse des processus à partir de ces fonctions, réduisant généralement l'étude du processus non linéaire à celle d'un autre système plus simple montre l'importance du choix de ces fonctions.

Un schéma bibliographique simplifié des méthodes d'étude de la stabilité est ensuite envisagé à la fin de cette section.

II-1 NOTIONS DE STABILITE - DEFINITIONS

Il existe un très grand nombre de définitions de la stabilité, les plus utilisées seulement seront présentées dans cette section.

Ces définitions traitent de la stabilité au voisinage de l'état d'équilibre ou au voisinage d'une trajectoire fixée lorsque les conditions initiales varient, pour une entrée fixée ou pour des entrées différentes.

Définition 1 [16]

La solution $x(t) = 0$ du système décrit par (I-1), pour $u \equiv 0$, est stable au sens de LYAPUNOV si $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall t_0 \in \mathcal{T}$ il existe $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tel que si $\|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ on a $\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$.

Définition 2 [16]

La solution $x(t) = 0$ du système décrit par (I-1), pour $u \equiv 0$, est asymptotiquement stable si elle est stable au sens de LYAPUNOV et s'il existe $\delta_0(t_0) > 0$ $\forall t_0 \in \mathcal{T}$ tel que si $\|x_0\| < \delta_0(t_0)$ on a $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, t_0) = 0$.

Définition 3 [20]

La solution $x(t) = 0$ du système (I-1) pour $u \equiv 0$, est exponentiellement stable s'il existe trois nombres réels positifs α , β et η tels que :

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq \alpha \|x_0\| \exp(-\beta(t - t_0)), \forall x_0, \|x_0\| < \eta$$

et $\forall t \geq t_0, \forall t_0 \in \mathcal{R}$.

Définition 4 [16]

La solution $x(t) = 0$ du système (I), pour $u \equiv 0$, est asymptotiquement et globalement stable si elle est stable et si toutes les solutions de (I-1) tendent vers zéro quand t augmente indéfiniment.

Définition 5 [16]

Une solution $x(t, x_0, t_0)$ du système (I) est bornée s'il existe $\beta > 0$ tel que $\|x(t, x_0, t_0)\| < \beta \quad \forall t \geq t_0$, β pouvant dépendre de chaque solution.

Définition 6 [16]

Les solutions de (I) admettent un domaine d'attraction défini par la borne $\beta > 0$, s'il existe $T > 0$ tel que pour toute solution $x(t, x_0, t_0)$ de (I-1), on a $\|x(t, x_0, t_0)\| < \beta \quad \forall t \geq t_0 + T$ où β est indépendant de la solution particulière alors que T peut dépendre de chaque solution.

Définition 7 Stabilité du mouvement [21]

La trajectoire $x(t, x_0, t_0)$ est stable, si $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que

$$\forall t > t_0, \|x_0 - x_1\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x(t, x_1, t_0)\| < \varepsilon$$

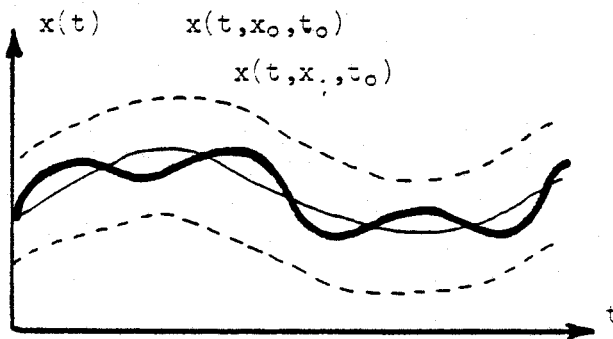


Fig. 1 Stabilité d'une trajectoire fixée

Définition 8 Stabilité entrée-sortie [21]

L'état d'équilibre $x = 0$ de l'équation différentielle (I-1) forcée, possède la propriété de stabilité entrée-sortie si pour tout $N > 0$, il existe un nombre $M > 0$ tel que :

$$\forall t \geq t_0 \quad ||u(t)|| < N \quad ||s[x(t, 0, t_0), t, u(t)]|| < M \quad \forall t \geq t_0$$

Définition 9 Stabilité entrée bornée - sortie bornée (BIBO) [21]

L'état d'équilibre $x = 0$ de l'équation (I-1) forcée est B.I.B.O. stable si pour toute entrée bornée appliquée au système initialement à l'équilibre, la sortie est bornée.

Définition 10 Stabilité pratique [22]

Soit $\mathcal{P}_A(t)$ un sous-ensemble de l'espace d'état à l'instant $t \in \mathcal{T} | \mathcal{T}_s$ et soit $\mathcal{P}_F(t)$ un sous-ensemble donné de l'espace d'état à l'instant $t \in \mathcal{T}_s$, où $\mathcal{T}_s =]t_0 + \tau_s, t_0 + \tau[$

$\mathcal{T} | \mathcal{T}_s = [t_0, t_0 + \tau_s]$, $\mathcal{T} = [t_0, t_0 + \tau[$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, et τ_s désigne la durée du régime transitoire, $\tau_s \in [0, \tau]$.

Les sous-ensembles $\mathcal{P}_I(t_0) \subseteq \mathcal{P}_A(t_0)$ et $\mathcal{P}_P(t) \in \mathbb{R}^m$ représentent les ensembles des conditions initiales x_{10} et des vecteurs perturbations x_2 respectivement à t_0 et à t .

Les relations entre ces ensembles sont illustrées sur la figure suivante :

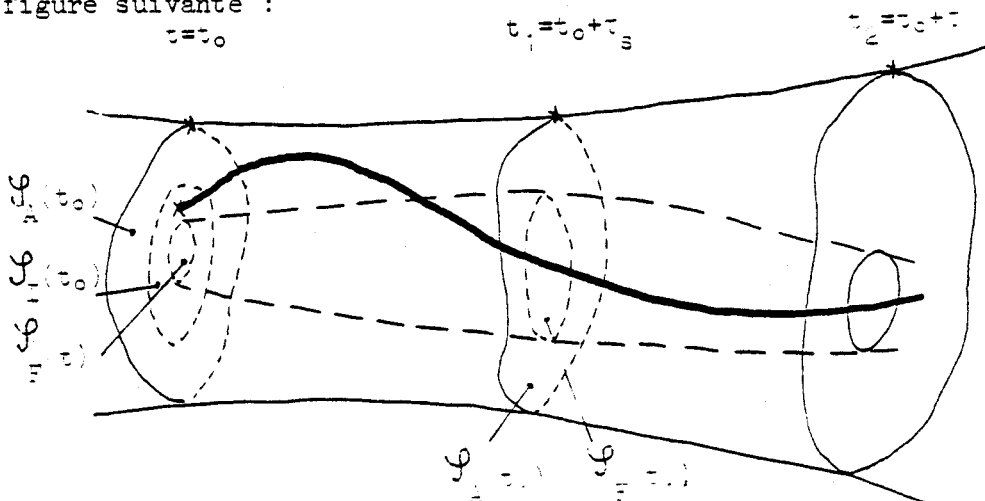


Fig. 2 Trajectoire d'un système pratiquement stable au bout d'un régime transitoire fini τ_s par rapport à $\{t_0, \mathcal{T}, \mathcal{P}_I(t), \mathcal{P}_A(t), \mathcal{P}_F(t), \mathcal{P}_P(t)\}$.

Le système (I-15) est pratiquement stable au bout d'un régime transitoire fini τ_s par rapport à $\{t_0, \mathcal{Z}, \mathcal{P}_I(t), \mathcal{P}_A(t), \mathcal{P}_F(t), \mathcal{P}_p(t)\}$ si et si seulement si $x_{10} \in \mathcal{P}_I(t_0)$ et $x_2(t, x_1) \in \mathcal{P}_p(t)$, $\forall x_1 \in \mathcal{P}_A(t)$ et $\forall t \in \mathcal{Z}$, implique $x_1(t, t_0, x_{10}) \in \mathcal{P}_A(t)$, $\forall t \in \mathcal{Z}$ et $x_1(t, t_0, x_{10}) \in \mathcal{P}_F(t)$.

II-2 LES FONCTIONS PERMETTANT L'ANALYSE DE LA STABILITE DES PROCESSUS.

La méthode de LYAPUNOV [23] permet l'analyse de la stabilité directement à partir des équations décrivant les processus et ne nécessite pas la détermination explicite des solutions.

L'introduction d'une fonction $v(t, x)$ définie positive dans l'espace d'état et l'étude du signe de la dérivée de cette fonction par rapport au temps suffisent pour pouvoir conclure à la stabilité. En effet, si $\frac{d}{dt}(v(t, x))$ est définie négative, la fonction $v(t, x)$ est dite de LYAPUNOV et le processus est asymptotiquement stable [23].

De même que les résultats obtenus par LAURENT [61] pour les systèmes discrets, le théorème de CORDUNEANU [24] pour garantir le même type de stabilité, montre qu'il suffit de satisfaire la condition :

$$\frac{d}{dt} [v(t, x)] < m [v(t, x), t] \quad \forall t \in \mathcal{Z}, \forall x \in \mathcal{X}$$

où $\frac{d}{dt} y = m(y, t)$ est une équation différentielle scalaire décrivant un système asymptotiquement stable.

L'étude du système complexe dont $x(t)$ est le vecteur état, $\forall t \in \mathcal{Z}$, est donc ramenée à l'étude d'un système dit de comparaison, d'ordre 1 dont l'évolution est définie par $y(t)$, $\forall t \in \mathcal{Z}$.

Le choix de fonctions de LYAPUNOV vectorielles a conduit BELLMAN [25] et MATROZOV [26] à la généralisation de la méthode de LYAPUNOV par la détermination de systèmes de comparaison d'ordre supérieur à l'unité.

L'introduction pour l'étude de la stabilité par BORNE et GENTINA [27, 28] de fonctions du type norme vectorielle $p(x)$, $p(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r_+$, vérifiant composante à composante les quatre conditions usuelles de la norme, conduit à une méthode systématique de construction des systèmes de comparaison pour les systèmes décrits par (I-1)

L'analyse qualitative de la stabilité des systèmes dynamiques doit pouvoir donner des informations sur les trajectoires perturbées. La définition de certaines fonctions d'agrégation de LYAPUNOV ou du type norme vectorielle réduit l'étude à celle du système de comparaison, le long des trajectoires du système sans avoir à les déterminer comme l'a montré LYAPUNOV.

L'analyse de la stabilité par la méthode de LYAPUNOV s'avère parfois délicate quand il s'agit de résoudre les problèmes des limitations de la dispersion des trajectoires. Les raisons mentionnées par LASALLE et LEFSCHETZ [29] justifient l'importance des investigations effectuées sur l'étude de la stabilité à partir de fonctions qui ne sont pas de LYAPUNOV. Cependant leurs travaux ont été limités à l'utilisation de fonctions d'agrégation positives.

WEISS et INFANTE [30] ont généralisé la méthode de LYAPUNOV en faisant appel à des fonctions, ainsi que leurs dérivées eulériennes, de signes quelconques. WEISS [31] a établi une condition nécessaire et WEISS et INFANTE [30] une condition suffisante de stabilité pratique. GUNDERSON a présenté ce concept dans [32].

L'analyse de la stabilité pratique de régime transitoire fini a été introduite dans [33a] et développée [33b et 33c] par GRUJIĆ.

La stabilité pratique des systèmes continus et discrets a été étudiée plus récemment par plusieurs auteurs : GRUJIĆ, STOREY, HERNEN, GRIPPO, LAMPARILLO, WU, HURT, KAYANDI, WONG, MICHEL, LAM. Une bibliographie récente est présentée par GRIPPO et LAMPARILLO dans [37].

En particulier, les travaux de GRUJIĆ [35 ab], de MICHEL [36] et MICHEL et WU [38] et GRIPPO et LAMPARILLO [34, 37] donnent des conditions suffisantes de stabilité pratique du système global défini à partir des propriétés de stabilité des sous-systèmes composants et des caractéristiques des interactions, en utilisant des fonctions qui ne sont pas de LYAPUNOV.

II - 3 METHODES D'ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES DYNAMIQUES DE GRANDE DIMENSION

Depuis POINCARRE [39] et LYAPUNOV [23] les études concernant la dynamique des systèmes non linéaires, ont évolué d'abord suivant trois courants [40]

- élaboration de la théorie des oscillations (ANDRONOV, 1929)
- application des travaux de LYAPUNOV (LUR'E, MALKIN, AIZERMAN, POPOV, etc..) sur la stabilité
- recherche des méthodes d'étude des systèmes non linéaires en s'inspirant des méthodes utilisées pour l'étude des systèmes linéaires (HAMEL, CYPKIN, AIZERMAN, POPOV, etc...).

Ces orientations se sont avérées souvent impuissantes pour traiter le problème de la stabilité des systèmes complexes caractérisés par un grand nombre de variables et de paramètres.

Depuis, ces problèmes ont été abordés à partir de trois approches différentes [41] :

- la méthode des perturbations singulières
- le concept de BELLMAN sur les fonctions vectorielles de LYAPUNOV
- le concept des normes vectorielles de BORNE et GENTINA

II-3-1 Méthode des perturbations singulières

La méthode des perturbations singulières appliquée à l'étude des systèmes dynamiques est de plus en plus utilisée pour la réduction de l'ordre d'un système et pour la synthèse des processus.

Des résultats importants ont été établis à partir des travaux de KOKOTOVIC , MALLEY et SANNUTI [42] .

La propriété de stabilité des systèmes singulièrement perturbés a été étudiée par GRADSHTEIN, TICHONOV, KLIMUSHEV, KRASOVSKII, ROSENBROCK, BROCKETT, HOPPENSTEADT, GRUJIĆ , WILDE, SILJAK, DESOER, SCHENSA, ZIEN, PORTER etc...

Une bibliographie plus récente et détaillée sur le sujet est présentée par GRUJIĆ dans la référence [43]. BELLMAN [25] a introduit en 1962 le concept de fonction de LYAPUNOV vectorielle pour les systèmes singulièrement perturbés considérés comme des systèmes de grande dimension.

Cette première approche considère le système dégénéré et le système rapide séparément, sans étudier la complexité structurelle qui caractérise les systèmes de grande dimension.

II-3-2 Méthode des fonctions de LYAPUNOV vectorielles:

L'analyse de la stabilité des grands systèmes caractérisés par le nombre important des variables mis en oeuvre ainsi que par la complexité des relations décrivant leur évolution, fait apparaître deux problèmes importants d'une part par la construction d'une fonction qui puisse être de LYAPUNOV, et d'autre part la définition d'un test simple permettant de conclure relativement aux propriétés de stabilité.

BAILEY [15] est le premier à introduire les fonctions de LYAPUNOV vectorielles pour l'étude de la stabilité. Il a posé le problème de rechercher des conditions sur les interactions pour obtenir la propriété de stabilité de l'ensemble du système à partir des propriétés de stabilité des sous-systèmes. Une bibliographie récente et détaillée sur ce sujet est présentée par GRUJIĆ

SILJAK [44] est le premier à poser et à résoudre le problème des perturbations structurelles de l'ensemble du système.

Le fait de traiter séparément les sous-systèmes déconnectés et leurs interactions impose souvent des contraintes sévères sur le système global ou/et les interactions. Apparaît ainsi le problème de trouver des conditions réduisant l'ordre du système à un nombre au plus égal à celui du nombre de sous-systèmes, et garantissant la propriété de stabilité de l'ensemble du processus.

Dans ce sens, les sous-systèmes ne sont plus nécessairement stables et peuvent donc être instables.

Cette étude a été entreprise par BELLMAN [25] et a été développée en utilisant le concept de fonctions de LYAPUNOV vectorielles [19] et en faisant appel au concept de normes vectorielles [27, 28, 45] .

II-3-3 Méthode des normes vectorielles

En fait, la notion de norme vectorielle fut introduite d'abord par ROBERT [46] dans un domaine relatif à l'étude de la convergence des récurrences linéaires en analyse numérique. Ces travaux ont été ensuite développés par MAITRE [47], ROBERT [48] et DEUTCH [49] pour l'étude des récurrences linéaires de grande dimension. Les premières applications de cet outil à l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension, ont été menées par BORNE et GENTINA [27, 28] dans le cadre des systèmes discrets et des systèmes continus, et par GENTINA, BORNE et LAURENT [50, 51, 52, 53] pour l'étude de la validité des modèles et l'application des conditions de stabilité du linéaire pour conclure à la stabilité des processus non linéaires de grande dimension.

Plus récemment, GRUJIĆ , BORNE, GENTINA, BURGAT et BERNUSSO U ont présenté des nouvelles solutions au problème de BAILEY dans le domaine fréquentiel et par la définition de critères algébriques dans [19] , et dans [45] des algorithmes permettant d'aboutir à l'établissement d'un test de stabilité unique défini à un niveau hiérarchique arbitraire, ne nécessitant pas la connaissance à priori d'information particulière au niveau des sous-systèmes déconnectés.

II-4 APPLICATION DES CONDITIONS DE STABILITE DU LINEAIRE POUR LE PROCESSUS NON LINEAIRE

La détermination des domaines de stabilité [57] de plus en plus larges correspond à un problème très important aussi bien pour l'analyse que pour la synthèse des processus non linéaires. L'étendue de ces domaines dépend, en fait, de la représentation adoptée pour le processus ainsi que de la méthode d'étude adoptée.

La méthode basée sur les normes vectorielles permet parfois de réduire l'étude du système initial à celle d'un système de comparaison identique au système initial et pour lequel se vérifie la conjecture linéaire.

Les critères pratiques de BORNE et GENTINA [78, 79] exploités pour les systèmes continus et discrets, généralisent ainsi le lemme de KOTELYANSKI aux processus non linéaires et définissent de larges classes de processus pour lesquelles la conjecture du linéaire ou celle d'AIZERMAN est vérifiée.

Le lemme de KOTELYANSKI ainsi que la conjecture d'AIZERMAN sont rappelés dans cette section. Un cas de validité de la conjecture linéaire est ensuite présenté.

II-4-1 Lemme de KOTELYANSKI [28]

Lorsque le processus est décrit par l'équation

$$\frac{d}{dt} x = A x \quad (I-18)$$

$A = \{a_{ij}\}$: étant une matrice $n \times n$ constante indépendante du temps, l'application des conditions de HURWITZ sur les paramètres de l'équation caractéristique :

$$\det (\lambda I - A) = 0$$

détermine le domaine de stabilité asymptotique dans l'espace des paramètres a_{ij} .

Par ailleurs les travaux de KOTELYANSKI ont mis en évidence un théorème particulier adapté à l'étude de la stabilité des systèmes (I-18) lorsque la matrice A a ses éléments non diagonaux non négatifs.

Lemme de KOTELYANSKI [28]

Un nombre réel λ est plus grand que la valeur caractéristique maximale ν de la matrice A d'éléments non diagonaux $a_{ij} > 0$ si et seulement si pour cette valeur λ tous les éléments des mineurs principaux successifs de la matrice $(\lambda I - A)$ sont positifs.

II-4-2 Conjecture d'AIZERMAN [27]

Le système de LURIE-POSTNIKOV, étudié par AIZERMAN, est donné par :

$$\frac{d}{dt} x = A x + B f(\sigma), \quad \sigma = C x \quad (I-19)$$

Les matrices A, B et C sont des matrices respectivement de dimension $n \times n$, $n \times m$ et $m \times n$, x est le vecteur état de (I-19), $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$; le vecteur non linéarité $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est composé de $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$; $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)^T$, et $\sigma_i = C_i x$ pour C_i , la i ème ligne de C.

Soit $x(t, t_0, x_0, f)$, $x(t_0, t_0, x_0, f) = x_0$, la trajectoire solution de (I-19) pour f fixé.

Notons par $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ la matrice non linéaire définie par :

$$f^*(x) = \text{diag} \left\{ \frac{f_1(Cx)}{C_1 x}, \frac{f_2(Cx)}{C_2 x}, \dots, \frac{f_m(Cx)}{C_m x} \right\}$$

et par $\mathcal{L} = \{ L : L = \text{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_m\} \}$ l'ensemble des matrices diagonales L. Si \mathcal{L} est un ensemble ouvert, nous le noterons \mathcal{L}° .

Les systèmes de la forme (I-19) sont considérés pour $f \in \Phi_i$, $i = \{0, 1\}$, où Φ_i sont des classes de non linéarités définies comme suit :

$\Phi_0(\mathcal{L})$ est l'ensemble de toutes les fonctions f vérifiant les conditions suivantes :

- (i) $x = 0$ est l'unique état d'équilibre de (I-19)
- (ii) les solutions $x(t, t_0, x_0, f)$ de (I-19) existent sur \mathbb{R}_+ , et sont uniques $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ et sont continues pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
- (iii) $f(0) = 0$
- (iv) $f^*(x)$ est définie et $f^*(x) \in \mathcal{L} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi $f(\sigma) = L \sigma \in \Phi_0(\mathcal{L})$ si $L \in \mathcal{L}$. Dans ces conditions, le système (I-19) est linéaire :

$$\frac{d}{dt} x = D(L) x, \quad D(L) = A + B L C \quad (I-20)$$

L'ensemble \mathcal{L} le plus large tel que le système (I-20) soit stable ($x = 0$ de (I-20) asymptotiquement stable) $\forall L \in \mathcal{L}$ est l'ensemble de HURWITZ de (I-20). Celui-ci est désigné par \mathcal{H}^0 .

$\Phi_1(\mathcal{L})$ est l'ensemble de tous les $f \in \Phi_0(\mathcal{L})$, continus et continûment différentiables dans $\Sigma \in \mathbb{R}^m$, qui sont notés $f(\sigma) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^m)$.

Le problème d'AIZERMAN généralisé, posé par GRUJIĆ [77], qui est originaire de la conjecture d'AIZERMAN (1949), est le suivant :

"Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité absolue pour le système (I-1) sur $\Phi_i(\mathcal{L}^0)$, $i \in \{0, 1\}$ correspondants à $\mathcal{L}^0 \subseteq \mathcal{H}^0$?"

La conjecture d'AIZERMAN indique qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter d'autres conditions pour que le système (I-19) soit absolument stable sur $\Phi_0(\mathcal{L}^0)$ lorsque $\mathcal{L}^0 \subseteq \mathcal{H}^0$. Cette conjecture a été établie pour une non linéarité scalaire $f \in \Phi_0$ ($m = 1$).

Il est bien connu actuellement que cette conjecture est en général mise en défaut [60]. Cependant, de nombreux travaux, par exemple ceux correspondant au problème d'AIZERMAN généralisé [77], ont permis la définition de larges classes de processus pour lesquelles cette conjecture est vérifiée.

II-4-3 Critères pratiques de BORNE et GENTINA [71]

II-4-3-1 Notion de norme vectorielle

Soit x et y deux vecteurs définis sur un espace vectoriel de dimension n . Soit $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_r$ un recouvrement de \mathcal{X} et x_i la projection du vecteur x dans le sous espace \mathcal{X}_i :

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 \cup \dots \cup \mathcal{X}_r$$

$$x_i = P \begin{matrix} \mathcal{X}_i \\ x \end{matrix} \quad \forall i = 1, \dots, r \tag{I-21}$$

$P \begin{matrix} \mathcal{X}_i \\ x \end{matrix}$: matrice à coefficients constants définissant la projection de l'espace \mathcal{X} dans \mathcal{X}_i .

Soit $p_i(\cdot)$, $\forall i = 1, 2, \dots, r$, une norme scalaire définie sur le sous espace \mathcal{X}_i avec la notation :

$$p_i(x) = p_i(x_i) \quad (\text{I-22})$$

Si y_i désigne un second vecteur du sous espace \mathcal{X}_i et λ un réel nous avons, $\forall i = 1, 2, \dots, r$ les inégalités (I-23) :

$$\begin{aligned} p(x) &\geq 0 && \forall x \in \mathcal{X} \\ p(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 && \\ p(x+y) &\leq p(x) + p(y) && \forall x, y \in \mathcal{X} \\ p(\lambda x) &= |\lambda| p(x) && \forall x \in \mathcal{X} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{I-23})$$

$p(\cdot)$ étant la norme vectorielle définie par :

$$p(x) = [p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_r(x_r)]^T \quad (\text{I-24})$$

II-4-3-2 Définitions des systèmes majorants [27, 28]

Définition 11

La matrice $M : \mathcal{T}_d \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{r \times r}$ définit un système majorant relatif à la norme vectorielle $p(x_k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^r$ du système discret :

$$x_{k+1} = A(t_k, x_k) a(t_k, x_k) \quad (\text{I-25})$$

si l'inégalité :

$$p(x_{k+1}) \leq M(t_k, x_k) p(x_k) \quad \forall t_k, x_k \in \mathcal{T}_d \times \mathbb{R}^n \quad (\text{I-26})$$

est vérifiée le long des trajectoires de (I-25) pour chaque composante de $p(x_{k+1})$.

Définition 12

De même, la matrice $M(t, x) : \mathcal{I}_c \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{r \times r}$ définit relativement à la norme vectorielle $p(x)$ un système majorant du système continu :

$$\frac{d}{dt} p(x) = A(t, x) p(x) \quad (I-27)$$

si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée composante à composante :

$$D^+ p(x) \leq M(t, x) p(x), \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad \forall t \in \mathcal{I}_c \quad (I-28)$$

II-4-3-3 Lemmes de comparaison

Pour chaque système (I-25) et (I-27), BORNE et GENTINA ont démontré un lemme de comparaison correspondant à une généralisation du lemme de comparaison de WAZEWSKI [55] .

Lemme de comparaison 1 [71]

S'il existe une norme vectorielle p et une matrice $M(t_k, x_k)$ d'éléments non négatifs et définissant un système majorant de (I-25) alors le système C_d défini par la relation

$$z_{k+1} = M(t_k, x_k) z_k \quad \forall t_k \in \mathcal{I}_d \quad \forall x_k \in \mathcal{X} \quad (I-29)$$

est un système de comparaison de (I-25), il vient alors lorsque l'inégalité

$$z_{k_0} \geq p(x_{k_0}) \quad (I-30)$$

est vérifiée, la relation :

$$z_k \geq p(x_k) \quad \forall k > k_0 \quad (I-31)$$

Lemme de comparaison 2 [71]

Soit une norme vectorielle p de taille k et une matrice majorante $M(t, x)$ associée au système (I-27) telle que d'une part les éléments non diagonaux de $M(t, x)$ soient non négatifs et que d'autre part l'inégalité suivante soit vérifiée le long des solutions de (I-27) :

$$D^+ p(x) \leq M(t, x) p(x) \quad \forall t \in \mathcal{I}_c, \forall x \in \mathcal{X} \quad (I-32)$$

alors le système C_c :

$$\frac{d}{dt} (z) = M(t, x) z \quad \forall t \in \mathcal{I}_c, \forall x \in \mathcal{X} \quad (I-33)$$

tel que :

$$z(t_0) \geq p(x(t_0)) \quad (I-34)$$

est un système de comparaison de (I-27) et l'inégalité suivante est vérifiée :

$$z(t) \geq p(x(t)) \quad \forall t \in \mathcal{I}_c, \forall x \in \mathcal{X} \quad (I-35)$$

II-4-3-4 Critères pratiques de stabilité

Critère pratique 1 : [27]

Soit le système décrit par l'équation (I-25) et $M(A)$ la matrice des coefficients a_{ij}^* tels que :

$$M : \{ a_{ij}^* = |a_{ij}| \quad \forall i, j \} \quad \text{irréductible} \quad (I-36)$$

Si les termes non constants de la matrice $M(A)$ sont groupés dans la dernière ligne ou la dernière colonne de $M(A)$ la stabilité asymptotique globale est assurée par la vérification des contraintes suivantes :

$$1 - a_{11}^* > \epsilon > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 - a_{11}^* & -a_{12}^* \\ -a_{21}^* & 1 - a_{22}^* \end{vmatrix} > \epsilon > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - a_{11}^* & -a_{12}^* & \dots & -a_{1n}^* \\ -a_{21}^* & 1 - a_{22}^* & \dots & -a_{2n}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1}^*(t,x) & -a_{n2}^*(t,x) & \dots & 1 - a_{nn}^*(t,x) \end{vmatrix} > \epsilon > 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{X} \quad (I-37)$$

Critère pratique 2 [28]

Soit le système décrit par l'équation (I-27) et M(A) la matrice des coefficients a_{ij}^* tels que :

$$M(A) : \begin{cases} a_{ii}^* = a_{ii} & \forall i = 1, 2, \dots, n \\ a_{ij}^* = |a_{ij}| & \forall i, j = 1, 2, \dots, n ; i \neq j \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{irréductible} \\ \text{(I-38)} \end{matrix}$$

Si les termes non constants de la matrice M(A) sont groupés dans la dernière ligne ou la dernière colonne de la matrice M(A) la stabilité asymptotique globale est assurée par la vérification des contraintes suivantes :

$$a_{11}^* < \epsilon < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{vmatrix} > -\epsilon > 0, \dots,$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^*(t,x) & a_{n2}^*(t,x) & \dots & a_{nn}^*(t,x) \end{vmatrix} > -\epsilon > 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{X} \quad (I-39)$$

III - REPRESENTATION DES PROCESSUS ETUDIES - DEFINITIONS ET PROPRIETES
DES FORMES CANONIQUES EN FLECHE

III-1 POSITION DU PROBLEME DU CHOIX DE LA REPRESENTATION DES SYSTEMES

L'analyse et la synthèse d'un système linéaire à partir d'une représentation scalaire ou matricielle s'effectuant sur l'une ou l'autre des formes canoniques existantes donnent des résultats généralement équivalents quelle que soit la méthode utilisée.

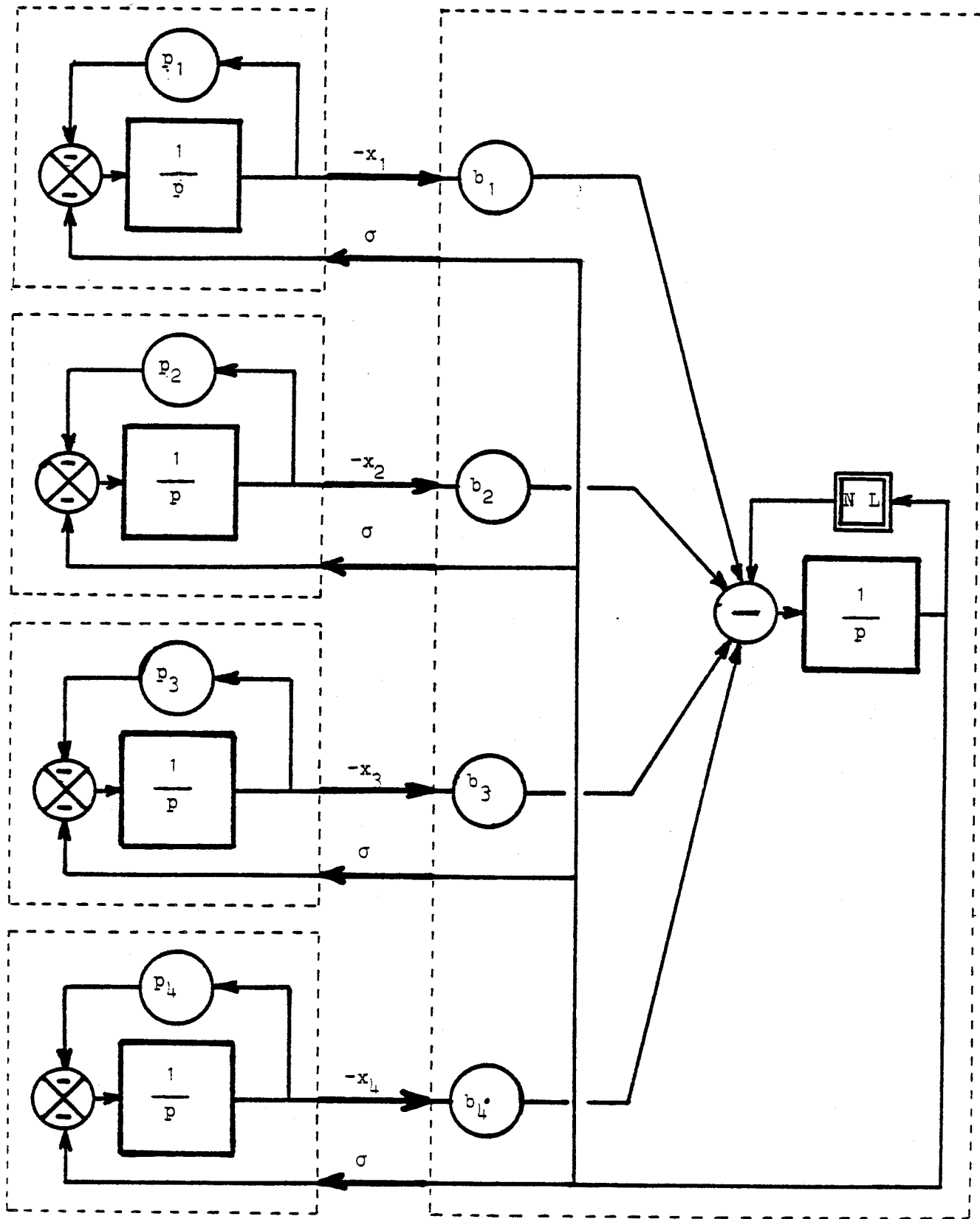
Le choix de la représentation intervient par contre, d'une manière essentielle sur l'étendue des résultats des études lorsque le processus est non linéaire. En effet, la représentation d'état, très adaptée aux grands systèmes, est définie à un changement de base près ; les études effectuées sur les systèmes de comparaison, dépendant de cette transformation, conduisent à des résultats, correspondant à des conditions suffisantes plus ou moins contraignantes selon la description adoptée.

Mais il n'est pas toujours nécessaire d'effectuer des transformations pour "conditionner" la représentation à l'étude envisagée comme le montre l'exemple suivant.

En effet considérons l'exemple de l'étude du mouvement longitudinal d'un avion (avec sa commande) effectuée [72] à partir du système d'équations :

$$\begin{aligned} D[x_i(t)] &= -p_i x_i(t) + \sigma(t) \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 \\ S : & \\ D[\sigma(t)] &= \sum_{i=1}^4 b_i x_i(t) - p_5 q \sigma(t) - f(\sigma(t)) \end{aligned} \tag{I-40}$$

où $p_i > 0$, $q > 0$ et b_i sont des constantes, $x_i \in \mathcal{R}$, $\forall i = 1, \dots, 4$, $\sigma \in \mathcal{R}$ et la fonction $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ est continue dans \mathcal{R} et vérifie les relations $f(0) = 0$ et $\sigma f(\sigma) > 0$ si $\sigma \neq 0$.



BUS
LILLE

FIG. 3 : Structure hiérarchisée à deux niveaux du système décrit par (I-40)

La propriété de stabilité d'un tel système a déjà été entreprise par PIONTKOVSKII et RUIKOVSKAYA [72] puis par MICHEL [73] et enfin par BITSOURIS [74].

La forme particulière des interactions entre les cinq sous-systèmes $S_i, \forall i = 1, 2, 3, 4, 5$ constituant :

$$S_i : D[x_i(t)] = -p_i x_i(t) \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

$$S_5 : D[\sigma(t)] = -p_5 \sigma(t) - f(\sigma(t))$$

nous permet de faire deux remarques :

- le système S a une structure hiérarchisée à 2 niveaux (fig.3) le sous-système non linéaire S_5 définit dans ce cas le coordonnateur qui constitue le niveau hiérarchisé le plus élevé.

- les sous-systèmes linéaires du premier niveau hiérarchique étant stables, l'étude de la stabilité du système non linéaire S doit être conduite à partir du critère pratique de BORNE et GENTINA pour les systèmes continus. En effet, en notant $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, \sigma]^T$ le vecteur état du processus, il vient la représentation matricielle de S :

$$D[x(t)] = A(\sigma(t)) x(t) \quad (I-41)$$

$$A(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} -p_1 & & & & 1 \\ & -p_2 & & & 1 \\ & & -p_3 & & 1 \\ & & & -p_4 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & -p_5 \sigma - \frac{f(\sigma(t))}{\sigma(t)} \end{bmatrix}$$

où A est une matrice (5x5) dont les éléments sont nuls sauf ceux de sa diagonale principale, de sa dernière ligne et de sa dernière colonne. La forme particulière de la matrice A est dite forme en flèche.

D'autre part, lorsque la matrice A est à éléments non diagonaux positifs, il est donc possible de définir dans ce cas une matrice majorante M de A, relative à la norme $p(z) = |z|$,
 $|z| = [|z_1|, |z_2|, |z_3|, |z_4|, |z_5|]^T$, $\forall z = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5]^T \in \mathcal{R}^5$
 identique à la matrice A.

L'application du critère pratique de BORNE et GENTINA pour les systèmes continus (lorsque : $M(\sigma(t)) = A(\sigma(t))$), correspondant à l'application des conditions du linéaire pour le processus non linéaire, conduit aux conditions suffisantes de stabilité asymptotique suivantes :

$$\begin{aligned}
 & -p_1 < 0 ; \quad \begin{vmatrix} -p_1 & & & & \\ & -p_2 & & & \\ & & -p_3 & & \\ & & & -p_4 & \\ & & & & -p_5 \end{vmatrix} > 0 ; \quad \begin{vmatrix} -p_1 & & & & \\ & -p_2 & & & \\ & & -p_3 & & \\ & & & -p_4 & \\ & & & & -p_5 \end{vmatrix} < 0 \\
 & \begin{vmatrix} -p_1 & & & & \\ & -p_2 & & & \\ & & -p_3 & & \\ & & & -p_4 & \\ & & & & -p_5 \end{vmatrix} > 0 ; \quad \begin{vmatrix} -p_1 & & & & 1 \\ & -p_2 & & & 1 \\ & & -p_3 & & 1 \\ & & & -p_4 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & -p_5 q - \frac{f(\sigma(t))}{\sigma(t)} \end{vmatrix} < 0
 \end{aligned}$$

Puisque p_i est positif, $i = 1, 2, 3, 4$, les conditions précédentes se simplifient considérablement et sont réduites à la seule contrainte : $\det A(\sigma(t)) < 0$ ou encore :

$$-p_5 q - \frac{f(\sigma(t))}{\sigma(t)} + \sum_{i=1}^4 \frac{b_i}{p_i} \geq \epsilon > 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{R} \quad (I-42)$$

Il est aisé de constater que l'étude de la stabilité ainsi que l'interprétation de la structure du système décrit par (I-40) sont simplifiées lorsque celles-ci sont menées à partir de la représentation matricielle (I-41). De plus, la condition suffisante de stabilité asymptotique obtenue (I-42) est moins restrictive que celles obtenues dans [72, 73, 74].

III-2 FORMES CANONIQUES EN FLECHE - DEFINITIONS ET PROPRIETES

III-2-1 Définitions des formes canoniques en flèche

La recherche d'une solution au problème du choix de la représentation, guidée par le choix des critères pratiques basés sur le concept de norme vectorielle pour l'étude de la stabilité du système (I-1) nous conduit dans cette partie à la définition de nouvelles formes canoniques, proches de la forme canonique modale, semblables à la forme de la matrice représentative retenue pour l'étude de la stabilité du mouvement longitudinal précédente, dites formes canoniques en flèche.

$$D [x(t)] = A(t, x) x(t) + b(t, x, u) \quad (I-1)$$

Ces considérations sont généralisées pour les matrices $A(t, x)$ partitionnées en blocs tous nuls sauf ceux de la diagonale principale, de la dernière ligne et de la dernière colonne qui sont quelconques.

Quatre formes canoniques en flèche sont considérées :

Définition 13 : forme canonique en flèche mince d'ordre n

notée : Forme FCFM (A)

$$FCFM(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & a_{1n} \\ & \cdot & & & \vdots \\ & & \cdot & & \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \\ & & & a_{n,n-1} & \end{bmatrix} \quad (I-43)$$

Définition 14 : Forme canonique en flèche mince généralisée d'ordre r

notée : Forme FC FMG

$$\text{FCFMG}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & a_{1r} & & a_{1n} \\ & \dots & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{r-1,r-1} & a_{r-1,r} & & a_{r-1,r} \\ a_{r1} & & a_{r,r-1} & a_{rr} & & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & & a_{n,r-1} & a_{n,r} & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{I-44})$$

Définition 15 : Forme canonique en flèche épaisse d'ordre r

notée : Forme FCFE

$$\text{FCFE}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & & & A_{1r} \\ & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ & & & \vdots \\ & & & A_{r-1,r-1} & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & & A_{r2} & \dots & A_{r,r-1} & A_{rr} \end{bmatrix} \quad (\text{I-45})$$

Définition 16 : Forme canonique en flèche épaisse généralisée d'ordre r

notée : Forme FCFEG

- la matrice A est en flèche épaisse d'ordre r
- les blocs diagonaux de A sont en flèche mince d'ordre $n_i, \forall i = 1, \dots, r-1$, avec $\sum_{i=1}^r n_i = n$

Notations

Nous adopterons dans la suite de la présentation de ce mémoire les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \phi_{11} &= \text{diag} \{A_{jj}\} \\
 \phi_{12} &= [A_{1r}^T, A_{2r}^T, \dots, A_{r-1,r}^T]^T \\
 \phi_{21} &= [A_{r1}, A_{r2}, \dots, A_{r,r-1}] \\
 \phi_{22} &= A_{rr}
 \end{aligned}
 \tag{I-46}$$

Nous désignerons par $\phi_{12}^{(i)}$, $\phi_{21}^{(j)}$ et $\phi_{22}^{(k)}$ respectivement la matrice constituée par les i premières colonnes de ϕ_{12} , la matrice constituée par les j premières lignes de ϕ_{21} et le mineur principal d'ordre k de la matrice ϕ_{22} :

$$\begin{aligned}
 \phi_{12}^{(i)} &= [A_{1r}^{(i)T}, A_{2r}^{(i)T}, \dots, A_{r-1,r}^{(i)T}]^T \\
 \phi_{21}^{(j)} &= [A_{r1}^{(j)}, A_{r2}^{(j)}, \dots, A_{r,r-1}^{(j)}]^T \\
 \phi_{22}^{(k)} &= A_{rr}^{(k)}
 \end{aligned}
 \tag{I-47}$$

avec $A_{kr}^{(i)}$, $A_{rk}^{(i)}$ et $A_{rr}^{(i)}$ respectivement la matrice constituée par les i premières colonnes de la matrice A_{kr} , la matrice constituée par les i premières lignes de la matrice A_{rk} et par le mineur principal d'ordre i de A_{rr} , $\forall k = 1, 2, \dots, r-1$; $\forall i = 1, 2, \dots, n_r$.

En particulier, nous adopterons les notations suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & f_{22} \end{bmatrix}
 \tag{I-48-1}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{11} &\equiv F_{11} & \phi_{12} &\equiv F_{12} \\
 \phi_{21} &\equiv F_{21} & \phi_{22} &\equiv f_{22}
 \end{aligned}
 \tag{I-48-2}$$

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= \text{diag} \{a_{jj}\}, F_{12} = [a_{1n}, \dots, a_{n-1,n}]^T \\
 F_{21} &= [a_{n1}, \dots, a_{n,n-1}], F_{22} = [a_{nn}]
 \end{aligned}
 \tag{I-48-3}$$

pour les matrices en flèche mince et les notations :

$$A = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \phi_{11} \equiv F_{11}
 \tag{I-49}$$

pour les matrices en flèche mince généralisée.

III-2-2 Propriétés des matrices en flèche

Les propriétés des matrices en flèche définies précédemment sont très nombreuses. Nous envisageons de présenter les plus importantes, plus précisément celles qui nous serviront pour les études envisagées dans la suite de ce travail.

III-2-2-1 Propriété 1 (P1) : Calcul des déterminants des matrices en flèche.

Théorème 1

Lorsque les éléments $a_{ii}, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$, sont non nuls, le déterminant de la matrice A en flèche mince, définie par (I-43), est égal à la quantité :

$$\left(a_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni} a_{in}}{a_{ii}} \right) \prod_{i=1}^{n-1} a_{ii}
 \tag{I-50}$$

Théorème 2

Lorsque les matrices A_{ii} , $\forall i = 1, 2, \dots, r-1$, sont régulières, le déterminant de la matrice A en flèche épaisse, définie par (I-45), est égal à la quantité :

$$\det(A_{rr} - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri} A_{ii}^{-1} A_{ir}) \prod_{i=1}^{r-1} \det(A_{ii}) \quad (I-51)$$

Démonstration :

Considérons le partitionnement de la matrice A définie par (I-45) avec les notations (I-46) qui permet d'isoler le bloc A_{rr} , il vient [75]

$$\det(A) = \det(\Phi_{11}) \det(-\Phi_{21} \Phi_{11}^{-1} \Phi_{12} + A_{rr}) \quad (I-52)$$

or si les matrices A_{ii} sont régulières, $\forall i = 1, 2, \dots, r-1$, la matrice Φ_{11}^{-1} existe et est déterminée simplement par :

$$\Phi_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & & \\ & A_{22}^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & A_{r-1,r-1}^{-1} \end{bmatrix} \quad (I-53)$$

ce qui conduit à la relation :

$$\det(A_{rr} - \Phi_{21} \Phi_{11}^{-1} \Phi_{12}) = \det(A_{rr} - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri} A_{ii}^{-1} A_{ir}) \quad (I-54)$$

qui démontre le théorème 1 et le théorème 2, le premier étant un cas particulier du second.

Nous remarquons que lorsque :

- la matrice A est en flèche épaisse généralisée d'ordre r, $A = (A_{ij})$
- la matrice A_{rr} est en flèche mince d'ordre n_r
- les matrices $A_{ii}, \forall i = 1, 2, \dots, r-1$, sont régulières
- les matrices $A_{ri}, \forall i = 1, 2, \dots, r-1$, ont tous leurs éléments nuls sauf ceux de la dernière ligne, la matrice $(A_{rr} - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri} A_{ii}^{-1} A_{ir})$ est alors une matrice en flèche d'ordre n_r ; ce qui simplifie considérablement le calcul de tous les facteurs du produit caractérisant le déterminant de A effectué conformément à la règle 2.

III-2-2-2 Propriété 2 (P2) : Calcul des inverses des matrices en flèche.

Théorème 3

La matrice A en flèche épaisse définie par (I-45) est inversible si les matrices $A_{ii}, \forall i = 1, 2, \dots, r-1$ et $(A_{rr} - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri} A_{ii}^{-1} A_{ir})$ sont régulières, et son inverse noté A^{-1} est déterminé par (I-55) :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix} \quad (I-55)$$

avec

$$W = (A_{rr} - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri} A_{ii}^{-1} A_{ir})^{-1} \quad (I-56)$$

$$V = [-W A_{r1} A_{11}^{-1}, -W A_{r2} A_{22}^{-1}, \dots, -W A_{r,r-1} A_{r-1,r-1}^{-1}] \quad (I-57)$$

$$U = \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} A_{1r} W \\ -A_{22}^{-1} A_{2r} W \\ \vdots \\ -A_{r-1,r-1}^{-1} A_{r-1,r} W \end{bmatrix} \quad (I-58)$$

$$T = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{r-1,r-1}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -UA_{r1}A_{11}^{-1}, -UA_{r2}A_{22}^{-1}, \dots, -UA_{r,r-1}A_{r-1,r-1}^{-1} \end{bmatrix} \quad (I-59)$$

Démonstration :

Les notations étant définies par (I-46), la démonstration de la règle 3 peut-être effectuée à partir de la représentation particulière de la matrice A définie par (I-45).

Les matrices ϕ_{11} et $(A_{rr} - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri} A_{ii}^{-1} A_{ir})$ étant inversibles par hypothèse, la matrice A^{-1} peut-être définie simplement par (I-55) telle que :

$$T = \phi_{11}^{-1} + \phi_{11}^{-1} \phi_{12} [-\phi_{21} \phi_{11}^{-1} \phi_{12} + A_{rr}]^{-1} \phi_{21} \phi_{11}^{-1} \quad (I-60)$$

$$U = -\phi_{11}^{-1} \phi_{12} [-\phi_{12} \phi_{11}^{-1} \phi_{12} + A_{rr}]^{-1} \quad (I-61)$$

$$V = -[-\phi_{21} \phi_{11}^{-1} \phi_{12} + A_{rr}]^{-1} \phi_{21} \phi_{11}^{-1} \quad (I-62)$$

$$W = [-\phi_{21} \phi_{11}^{-1} \phi_{12} + A_{rr}]^{-1} \quad (I-63)$$

En explicitant ϕ_{11} , ϕ_{12} et ϕ_{21} par rapport aux matrices $A_{ij}, \forall i, j = 1, 2, \dots, r$, nous retrouvons les relations (I-56), (I-57), (I-58) et (I-59) de la règle 3.

III-2-2-3 Propriété 3 : Symétrie

Si A est une matrice FCFM, FCFMG, FCFE ou FCFEG, la matrice $(A + A^T)$ est respectivement de même forme.

III-2-2-4 Propriété 4 (P4) : Structure hiérarchisée et matrice en flèche.

Le forme en flèche de la matrice caractéristique A d'un processus permet de considérer celui-ci décomposé en sous-systèmes dont les matrices caractéristiques sont blocs diagonaux de A (fig. 4). Le seul sous-système connecté avec tous les autres, les interconnexions étant définies par les blocs hors diagonaux de A, est dit coordonnateur ou sous-système de "pointe".

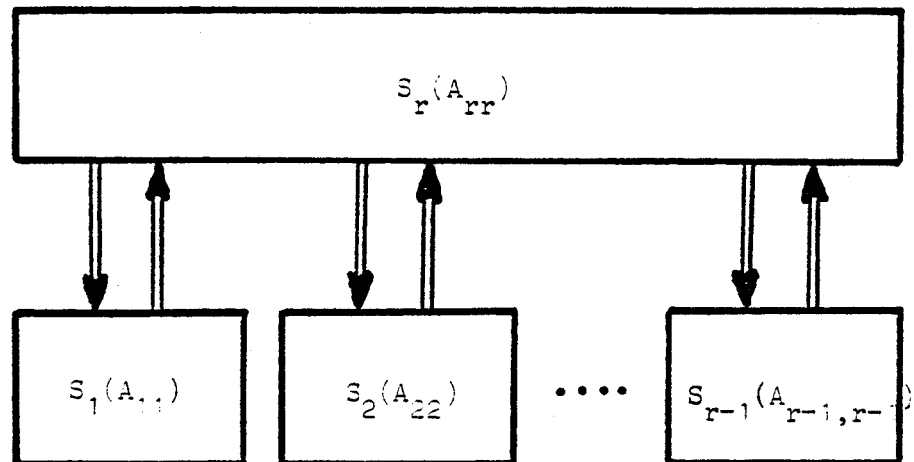


Fig. 4 : Structure hiérarchisée à 2 niveaux associée à une matrice caractéristique en flèche épaisse d'ordre r.

En fait, la décomposition en sous-systèmes du processus n'est pas unique. La représentation adoptée permet malgré tout de réduire le nombre important de paramètres arbitraires (en imposant certains d'entre eux pour avoir la forme originale en flèche) dont il faut tenir compte pour toute étude effectuée à partir de la représentation d'état des processus.

III-2-2-5 Propriété 5 (P5) : Graphe associé à une matrice en flèche.

Considérons le cas général où la matrice A est en forme en flèche épaisse d'ordre r . L'association à chaque sous-système S_i , caractérisé par A_{ii} , $\forall i = 1, 2, \dots, r$, d'un point noté (i) et à chaque liaison $S_i \rightarrow S_j$, caractérisée par A_{ij} , d'une flèche orientée du point (i) vers le point (j) , conduit au graphe dit associé à la matrice A , représenté fig. 5.

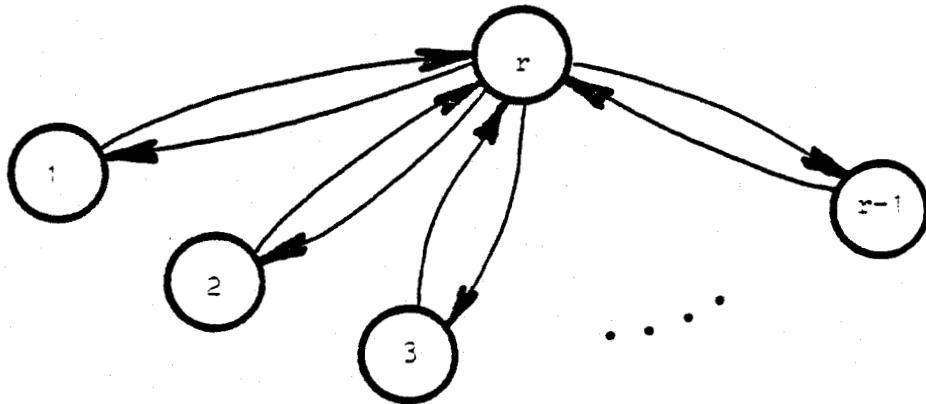


Fig. 5 : Graphe associé à une matrice A en FCPE d'ordre r .

Celui-ci, dépendant du partitionnement de la matrice A , n'est évidemment pas unique, mais permet de déterminer la classe des sous-systèmes ou d'ensembles de sous-systèmes susceptibles d'être retenus comme sous-système coordonnateur, voir III-2-4.

III-2-3 Passage aux formes canoniques en flèche

Le développement des propriétés des différentes formes canoniques en flèche considérées dans le paragraphe précédent ainsi que l'exploitation de celles-ci pour l'analyse et la synthèse de grande dimension dans les trois chapitres (II), (III) et (IV), nécessitent la détermination de la matrice de passage qui transforme la matrice caractéristique du système étudié en une matrice en flèche mince ou épaisse définie dans (III-2-1).

Des solutions partielles à ce problème complexe sont proposées dans les chapitres suivants pour de larges classes de processus non linéaires monovariables ou multivariables du type interconnecté. La recherche de résultats pouvant s'interpréter physiquement nous a conduit à faire apparaître les matrices caractéristiques des sous-systèmes composants, dans les blocs diagonaux de la matrice caractéristique du processus.

Nous envisageons dans ce paragraphe de présenter deux méthodes permettant de résoudre le problème du passage aux formes canoniques en flèche. La première, graphique, définit les blocs diagonaux de la matrice en flèche correspondant à une matrice \tilde{A} quelconque comportant des blocs hors diagonaux quelconques. La seconde méthode est analytique.

III-2-3-1 Méthode graphique

Cette méthode est basée sur une propriété structurelle des processus. En effet en associant un graphe associé (P5) à une matrice quelconque A, il est toujours possible de repérer un coordonnateur, et les sous-systèmes ou les ensembles des sous-systèmes interconnectés au coordonnateur.

La finesse de la forme en flèche est d'autant plus grande que le nombre d'ensembles de sous-systèmes interconnectés au coordonnateur est important et que le nombre de blocs hors diagonaux de A est grand (voir III-2-3-2-2).

Cette méthode, simple, permet un conditionnement rapide des matrices quelconques, comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Exemple :

Considérons le processus décrit par la matrice A partitionnée en blocs $A_{ij}, \forall i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ telle que :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & 0 & A_{25} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & A_{52} & A_{53} & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad (I-64)$$

Il vient le graphe associé (P5)

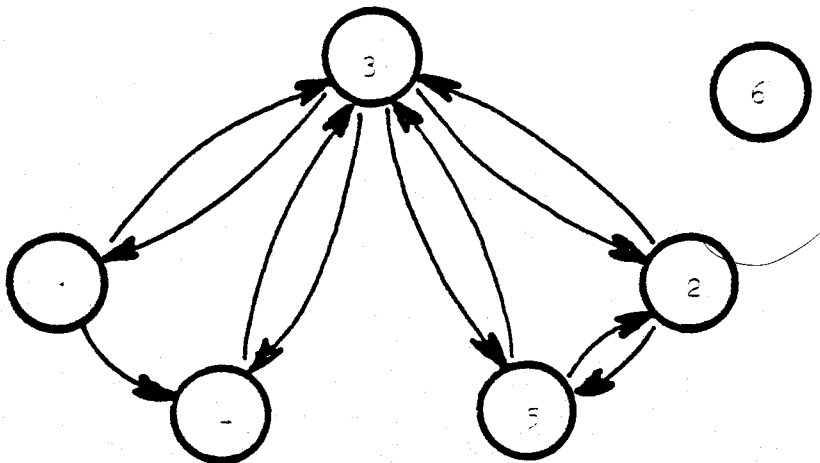


Fig. 6 : Graphe associé à la matrice A définie par (I-64)

et le graphe associé condensé faisant apparaître des ensembles de sous-systèmes $\{(1), (4)\}$, $\{(2), (5)\}$, $\{(6)\}$ isolés ou interconnectés au coordonnateur (3) :

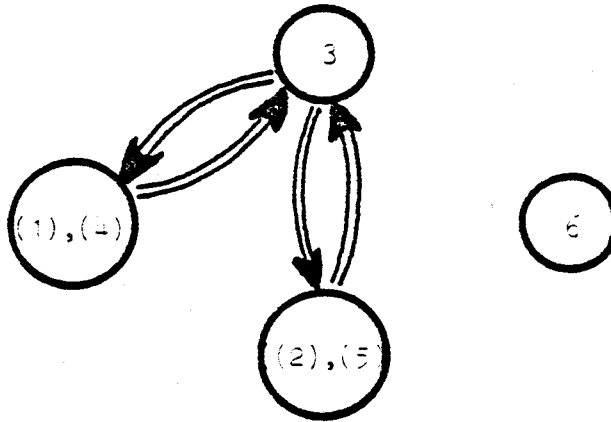


Fig. 7 : Graphe condensé associé à la matrice A définie par (I-64)

Aussi, pour le partitionnement fixé au départ, on obtient la FCFE associée à la matrice A, notée FCFE (A) :

$$\text{FCFE}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & & & 0 \\ & A_{22} & & A_{24} \\ & & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{I-65})$$

avec les notations (I-66) suivantes :

$$\mathcal{A}_{11} = A_{66}$$

$$\mathcal{A}_{44} = A_{33}$$

$$\mathcal{A}_{22} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{14} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{33} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{25} \\ A_{52} & A_{55} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{24} = \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{43} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{34} = \begin{bmatrix} A_{23} \\ A_{53} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{42} = \begin{bmatrix} A_{31} & A_{34} \end{bmatrix}$$

$$, \quad \mathcal{A}_{43} = \begin{bmatrix} A_{32} & A_{35} \end{bmatrix}$$

Remarque :

La matrice FCFE (A) obtenue est la plus "fine" possible par rapport à la décomposition imposée au départ de A (voir III-2-3-2-2).

Nous pouvons déterminer simplement d'autres formes canoniques en flèche plus épaisse que la précédente en considérant, par exemple, les ensembles de sous-systèmes suivants : $\{\mathcal{A}_{11}\}$, $\{\mathcal{A}_{22}, \mathcal{A}_{33}\}$ et $\{\mathcal{A}_{44}\}$ ou encore $\{\mathcal{A}_{11}\}$, $\{\mathcal{A}_{22}\}$, $\{\mathcal{A}_{33}, \mathcal{A}_{44}\}$ etc..

III-2-3-2 Méthode analytique

Considérons une matrice A partitionnée en blocs A_{ij} , $\forall i, j = 1, 2, \dots, r$, dont les blocs diagonaux sont des matrices sous forme compagnon. Cette hypothèse n'est pas restrictive lorsque le processus S étudié est linéaire de la forme :

$$S : D[x(t)] = A x(t) + Bu \quad (I-67)$$

Dans ce cas, il est possible [58], de décomposer le système S en r sous-systèmes gouvernables par une seule entrée, en un nombre de sous-systèmes gouvernables égal au nombre d'entrées, ou

encore en sous-systèmes monosortie observables. Des algorithmes de transformation de la représentation (I-67) sont développés dans [58] et font apparaître les blocs diagonaux de la matrice partitionnée A, sous forme compagnon.

S'il est possible de trouver un changement de base permettant de transformer la matrice sous forme compagnon en une matrice en flèche mince, il est alors possible de décomposer les systèmes S en sous-systèmes admettant une matrice caractéristique en flèche mince.

La propriété (P6) établie dans le paragraphe (III-2-3-2-1) suivant montre que cela est possible. Mais les méthodes de décomposition proposées dans [58] ne sont valables que pour les processus linéaires. Le problème du passage aux formes canoniques en flèche reste à ce niveau, entier pour le cas des processus non linéaires.

Il est possible malgré tout d'utiliser les algorithmes de passage établis dans [58], lorsque l'étude est menée à partir d'une matrice A caractéristique du processus particulière et partitionnée en 4 blocs \tilde{A}_{11} , \tilde{A}_{12} , \tilde{A}_{21} et \tilde{A}_{22} tels que \tilde{A}_{11} est une matrice constante et les matrices A_{12} , A_{21} et A_{22} généralement non linéaires.

En effet, la matrice \tilde{A}_{11} est linéaire ; il est donc possible de trouver un changement de base \tilde{P}_1 tel que la matrice $\tilde{\tilde{A}}_{11} = (\tilde{P}_1^{-1} \tilde{A}_{11} \tilde{P}_1)$ soit une matrice compagnon.

Un deuxième changement de base P_2 conduit à la forme en flèche mince pour la matrice $\tilde{P}_2^{-1} \tilde{\tilde{A}}_{11} \tilde{P}_2$.

A partir de transformations élémentaires, il est donc possible de représenter le processus non linéaire par une matrice caractéristique en flèche mince généralisée ; une représentation du processus par une matrice caractéristique en flèche épaisse peut-être obtenue de la même façon que précédemment.

III-2-3-2-1 Cas d'une matrice compagnon

Considérons le système S_i régi par le système d'équations

$$D[y_i(t)] = A_{ii}(t, y_i(t), P) y_i(t) \quad (I-68)$$

$$A_{ii}(t, y(t), P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 \\ \tilde{a}_{n_i,1}^i(\cdot) & \tilde{a}_{n_i,2}^i(\cdot) & & & \tilde{a}_{n_i,n_i-1}^i(\cdot) & \tilde{a}_{n_i,n_i}^i(\cdot) \end{bmatrix}$$

pour lequel nous notons par $\mathcal{P}_i(\lambda, t, y_i(t), P)$ "le polynôme caractéristique instantané" de A_{ii} , défini par :

$$\mathcal{P}_i(t, y_i(t), P, \lambda) = \lambda^{n_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{a}_{n_i,j}^i(t, y_i(t), P) \lambda^{j-1} \quad (I-69)$$

et par $\mathcal{N}_i(\lambda)$ le polynôme de degré (n_i-1) , dépendant de paramètres a_{jj}^i ou σ_j^i , $\forall i = 1, 2, \dots, n_i-1$ pouvant être choisis arbitrairement tel que :

$$\mathcal{N}_i(\lambda) = \prod_{j=1}^{n_i-1} (\lambda - a_{jj}^i) = \lambda^{n_i-1} + \sum_{j=1}^{n_i-1} \sigma_j^i \lambda^{n_i-j-1} \quad (I-70)$$

Propriété P6 :

Le choix du vecteur $x_i(t)$ défini par :

$$x_i(t) = (P^{1i})^{-1} y_i(t) \quad (I-71)$$

comme nouveau vecteur état du système S_i décrit par (I-67), tel que :

- (i) $a_{jj}^i \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_i = 1$ réels ou complexes distincts (I-72)
- (ii) $P^{1i} = P_1^{1i} \cdot P_2^{1i}$

$$P_1^{1i} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ -\sigma_{n_i-1} & -\sigma_{n_i-2} & \dots & -\sigma_1 & & 1 \end{bmatrix} \quad (I-73)$$

$$P_2^{1i} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \ddots \\ (a_{11}^i)^{n_i-2} & (a_{22}^i)^{n_i-2} & & & (a_{n_i-1, n_i-1}^i)^{n_i-2} & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (I-74)$$

conduit à une nouvelle description du système S_i dont la matrice caractéristique notée $A_{ii}(t, x(t), P)$ est une matrice en flèche mince :

$$D [x_i] = A_{ii}(t, x_i(t), P) x_i(t) \quad (I-75)$$



$$A_{ii}(\cdot) = \begin{bmatrix} a_{11}^i & & & & & & & a_{1n_i}^i \\ & a_{22}^i & & & & & & a_{2n_i}^i \\ & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \\ & & & & & & a_{n_i-1, n_i-1}^i & a_{n_i-1, n_i}^i \\ a_{n_i, 1}^i(\cdot) & a_{n_i, 2}^i(\cdot) & \dots & & & & a_{n_i, n_i-1}^i(\cdot) & a_{n_i, n_i}^i(\cdot) \end{bmatrix}$$

avec les notations :

$$a_{jn_i}^i = [(\lambda - a_{jj}^i) \mathcal{N}_i^{-1}(\lambda)]_{\lambda} = a_{jj}^i, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_i-1 \quad (I-76)$$

$$a_{n_j}^i(t, x_i(t), P) = -\mathcal{P}_i(t, x_i(t), P, a_{jj}^i), \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_i-1 \quad (I-77)$$

$$a_{n_i, n_i}^i(t, x_i(t), P) = -\tilde{a}_{n_i, n_i}^i(t, x_i(t), P) - \sum_{j=1}^{n_i-1} a_{jj}^i \quad (I-78)$$

Remarque :

L'étude du processus décrit par (I-68) peut donc être conduite à partir de la représentation en flèche mince (I-75) dépendant de (n-1) paramètres distincts pouvant être choisis arbitrairement. Ce nombre devient au plus égal à 2(n-2) si l'on prend $z_i(t) = P^{ii} x_i(t)$ avec $P^{ii} = \text{diag} \{P_{jj}^i\}$, comme nouveau vecteur d'état.

III-2-3-2-2 Cas d'une matrice partitionnée, dont les r blocs diagonaux sont des matrices compagnon

Soit le processus décrit par :

$$D [y(t)] = \tilde{A}(t, y(t), P) y(t) \quad (I-79)$$

Nous remarquons que A est une matrice en flèche mince généralisée d'ordre n_1 ; celle-ci est en flèche épaisse généralisée d'ordre r lorsque tous les vecteurs lignes $[L_{i,j}^1 \quad l_{i,j}^2]$, $\forall i \neq j$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, r-1$, sont identiquement nuls.

Une transformation simple, correspondant à un ensemble de permutations sur les lignes et les colonnes de la matrice A, conduit pour le même processus à la nouvelle matrice caractéristique A' définie par :

$$A' = \begin{bmatrix} F_{11}^1 & & & F_{12}^1 & & & & A_{1r}^1 \\ & F_{11}^2 & & & F_{12}^2 & & & A_{2r}^1 \\ & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & F_{11}^{r-1} & & & F_{12}^{r-1} & A_{r-1,r}^1 \\ F_{21}^1 & L_{12}^1 & \dots & L_{1,r-1}^1 & f_{22}^1 & l_{12}^2 & \dots & l_{1,r-1}^2 & A_{1r}^2 \\ L_{21}^1 & F_{21}^2 & \dots & L_{2,r-1}^1 & l_{21}^2 & f_{22}^2 & \dots & l_{2,r-1}^2 & A_{2r}^2 \\ & & \dots & & & & \dots & & \\ L_{r-1,1}^1 & L_{r-1,2}^1 & \dots & F_{21}^{r-1} & l_{r-1,1}^2 & l_{r-1,2}^2 & \dots & f_{22}^{r-1} & A_{r-1,r}^2 \\ A_{r1}^1 & A_{r2}^1 & \dots & A_{r,r-1}^1 & A_{r1}^2 & A_{r2}^2 & \dots & A_{r,r-1}^2 & A_3 \end{bmatrix} \quad (I-84)$$

dont la forme est en flèche mince généralisée d'ordre $(n - n_r - r + 2)$.

Il est donc possible, en permutant certaines composantes du vecteur état d'augmenter l'ordre de la forme en flèche. Nous dirons dans ce cas, que la nouvelle forme en flèche est plus fine que la précédente. De la même manière, nous dirons qu'une forme en flèche est d'autant plus épaisse que son ordre est petit.

CONCLUSION

Le choix d'une part d'une méthode d'étude de la stabilité des systèmes de grande dimension et d'autre part d'une représentation du processus adaptée à cette méthode constitue un problème généralement très complexe.

La mise en forme, en flèche, des matrices caractéristiques des processus, requiert pour ceux-ci, une structure hiérarchisée à deux niveaux dépendant d'un certain nombre de paramètres pouvant être choisis arbitrairement, et constitue un outil mathématique simple et puissant facilitant le conditionnement de la représentation par rapport à la méthode d'étude choisie pour le processus.

Le fait de fixer les paramètres arbitraires, dont dépend la matrice en flèche, nous conduira, par la suite, à l'établissement d'interprétations physiques, fréquentielles et graphiques des résultats obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 LAURENT F., PETTE A. et NGUYEN QUY HUNG
"Critère de stabilité des systèmes continus et échantillonnés".
C.R.A.S., t. 270, p. 1637-1640, 15 Juin 1970.
- 2 GROUMPOS P.P. and SCOTT P.D.
"The nested bordered diagonal method for symmetric eigenproblems"
Proc. 15th Annual Allerton Conference on Communication Control
and Computing (1977).
- 3 GROUMPOS P.
"Filtering Techniques for a class of Hierarchical Systems".
Modelling and Simulation, Vol. 9, Part. 3, Control and Identification
Proc. of 9th annual Pittsburgh Conference, April 1978.
- 4 BENREJEB M.
"Sur la synchronisation des systèmes continus non linéaires en
régime forcé".
Thèse Docteur Ingénieur, Lille, Juin 1976.
- 5 OZGUNER V.
"Near Optimal Control of Composite Systems : The multi-time -
Scale Approach".
IEEE Trans. Aut. Control, Aug. 1979.
- 6 BORNE P. and BENREJEB M.
"On the Stability of a class of interconnected Systems. Application
to the Forced Working conditions".
M.T.V.S. Symposium I.F.A.C., Fredericton, 1977.
- 7 BORNE P. and BENREJEB M.
"Stability of non linear Composite Systems "
1^{rst} World Conference on Mathematics at the Service of Man,
Barcelona, 1977, Spain.

- 8 BENREJEB M. and BORNE P.
"On an algebraic stability criterion for non linear processes. Interpretation in the frequency domain".
Proc. of MECO 78 Congress, Athens, Vol. 2, p. 678-682, 1978.
- 9 BORNE P., BENREJEB M. and COCQUERELLE J.L.
"On the Synthesis of a class of interconnected Systems With structural variations. Application to an electrical power plant".
Proc. of MECO 78 Congress, Athens, Vol. 2, p. 696-699, 1978.
- 10 BENREJEB M. et BORNE P.
"Sur la synthèse d'un processus continu non linéaire".
Proc. of MECO 79 Congress, Grenoble, p. 122-125, 1979.
- 11 BENREJEB M. LAURENT F.
"Sur la stabilité vis à vis des conditions initiales"
Proc. of MECO 79 Congress, Grenoble, p. 234-237, 1979.
- 12 BORNE P., BENREJEB M., LAURENT F.
"Matrix approaches to absolute and dynamical stability of Lur'e Postnikov type systems".
4^o Congreso Informatica y Automatica, Madrid, Espagne, 1979.
- 13 BOUDAREL, DELMAS J., GUICHET P.
"Commande optimale des processus".
Tome 1, Dunod 1967.
- 14 TITLI A.
"Commande hiérarchisée et Optimisation des processus complexes".
Dunod Automatique, 1975.
- 15 BAILEY
"The application of Lyapunov second method to interconnected Systems".
J. SIAM Control, Ser. A, Vol. 13, N^o 3, pp. 443-462, 1966.
- 16 YOSHIZAWA T.
"Stability theory by Lyapunov's second method".
The Mathematical Society of Japon, 1966.

- 17 BORNE P. , GENTINA J.C.
"Critère relatif aux systèmes continus et échantillonnés non linéaires".
Revue A.F.A.S., Tome IV, N° 1, pp.37-38, 1973.
- 18 ŠILJAK D.D.
"Stability of large-scale Systems under structural perturbations"
IEEE Trans, Vol. SMC 2, N° 5, pp. 657-663.
- 19 GRUJIĆ Lj.T, GENTINA J.C., BORNE P., BURGAT C., et BERNUSSOU :
"Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Fonctions de Lyapunov vectorielles".
RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control, Vol. 12, N° 4, pp. 319-348, 1978.
- 20 LEFSCHETZ S.
"Stability of non linear control systems"
Academic Press, New York, London 1965.
- 21 WILLEMS J.L.
"Stability theory of Dynamical Systems".
NELSON
- 22 GRUJIĆ Lj.
"Non-Lyapunov stability analysis of large scale Systems on time-varying sets".
I.J.C., Vol. 21, N° 3, pp. 401-405, 1975.
- 23 LYAPUNOV
"Problème général de la stabilité du mouvement".
University Press, Princeton, 1949.
- 24 CORDUNEANU C.
"Sur la stabilité asymptotique"
Revue Math. prin. Appl., 6, pp. 573-576, 1960.
- 25 BELLMAN R.
"Vector Lyapunov functions".
J. SIAM Control, Ser. A, Vol. 1, pp. 32-34, 1962.

- 26 MATROZOV V.M.
"On the theory of stability of motion".
Prikl. Mat. Mekhan 26, pp. 992-1002, 1962.
- 27 BORNE P.
"Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés".
Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, 1976.
- 28 GENTINA J.C.
"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension".
Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Lille, 1976.
- 29 LASALLE J.P. and LEFSCHETZ S.
"Stability by Lyapunov's Direct method with applications".
Academic Press, New York, 1961.
- 30 WEISS L., INFANTE E.F.,
1965, Proc. Natn. Acad. Sci. U.S.A., 54, 44 ;
1967, IEEE Trans. aut. Control, 12, 54.
- 31 WEISS L.
1967, Proceedings of the First Asilomar Conference on circuits and systems, p. 1006.
- 32 GUNDERSON R.W.
1967 a, Dissertation, University of Alabama, Alabama ;
1967 b, IEEE Trans. aut. Control, 12, 634.
- 33 GRUJIĆ Lj.
1970 a, M.S. Thesis (in Serbo-Croatien), University of Belgrade, Belgrade, Yugoslavia ; 1971 b, Proceedings of the fifth Asilomar Conference on circuits and systems, Asilomar, California, p. 174 ; 1973 c, Int. J. Control, 17, 881.

- 34 GRIPPO L. and LAMPARIELLO F.
1976 a, IFAC Symposium on large scale systems, theory and applications, Udine, Italy, p. 195 ; 1976 b, J. Franklin Inst. 302, 213.
- 35 GRUJIĆ Lj.
1975 a, Int. J. Systems Sci., 6, 181; 1975 b, Int. J. Control 21, 401.
- 36 MICHEL A.N.
1970 a, IEEE Trans. Circuit theory, 17, 292 ; 1975 b, IEEE Trans. Circuit Theory, 22, 305.
- 37 GRIPPO L. and LAMPARIELLO F.
"Practical Stability of large scale discrete time systems on produit spaces".
Int. J. Systems Sci. Vol. 9, N° 11, pp. 1235-1246, 1978.
- 38 MICHEL A.N. and WU S.H.
1969, Int. J. Control, 9, 679.
- 39 POINCARRE H.
1881-1886 , *Sur les courbes définies par des équations différentielles* ; 1892-1899 , *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*.
- 40 GILLE J.C.
"Introduction aux systèmes asservis non linéaires".
Dunod Université, 1977.
- 41 GRUJIĆ Lj.
"General Stability analysis of large scale systems".
IFAC Symposium on large scale systems theory and applications, June, 1976, Udine, Italy.
- 42 KOKOTOVIC P.V., O'MALLEY R.E.Jr. and SANNUTI
"Singular perturbation and order reduction in control theory - An overview"
Prep. 6th IFAC World Congress, Part. 1C, Instr. Soc. Amer, Pittsburgh, 1975, 51.3.

- 43 GRUJIĆ Lj.
"Vector Lyapunov functions and singularly perturbed large scale systems".
Proc. of J.A.C.C., Lafayette, Indiana, July 1976.
- 44 ŠILJAK D.D.
1971, "On large scale Syst. Stab."
Proc. 9th Ann. Allerton Conf. Circ. Syst. Theory, 731-741 ;
1972, "Stability of large scale systems under structural perturbations".
IEEE Trans. Sys. Man, Cybernetic, vol. SMC-3, N° 4, 657-663.
- 45 GENTINA J.C., BORNE P., BURGAT C., BERNUSSOU J., and GRUJIĆ Lj.
"Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Normes vectorielles".
R.A.I.R.O. Aut/systems Analysis and control, Vol. 13, N°1, 57-75, 1979.
- 46 ROBERT F.
"Normes vectorielles de vecteurs et de matrices".
R.F.T.I. Chiffres, Vol. 17, N° 4, p. 261-299.
- 47 MAITRE J.F.
"Norme composée et norme associée généralisée d'une matrice".
Numerische Mathematik, Vol. 10, 132-141, 1967.
- 48 ROBERT F.
"Etude et utilisation des normes vectorielles en analyse numérique linéaire".
Thèse de Doctorat es Sciences, Grenoble, 1968.
- 49 DEUTCH F.
"Matricial norms".
Numerische Mathematik, Vol. 16, 1970, 73-84.

- 50 BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F.
"Sur la stabilité des systèmes échantillonnés non linéaires"
RAIRO, J 2, mai 1972, 96-105.
- 51 GENTINA J.C., BORNE P., LAURENT F.
"Stabilité des systèmes continus non linéaires de grande dimension".
RAIRO, J.3, 1972, 67-77.
- 52 GRUJIĆ Lj., GENTINA J.C., BORNE P.
"General aggregation of large scale system by vector Lyapunov functions and vector norm".
Int. Journal of control, Vol. 24-4, 529-550, 1976.
- 53 BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F.
"About the error made when representing a large system by a given order model".
Proc. 3rd IFAC Symp. Sens. Adapt. Optim., Ischia, 400-406, Juin 1973.
- 54 BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F.
"Stability study of large scale non linear discrete systems by use of vectorial norms".
IFAC Congress, Udine, Juin 1976.
- 55 WAŻEWSKI T.
"Système des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications".
Ann. Soc. Pol. Math., 23, 1950, 112-166.
- 56 H.H. ROSENBRÖCK
"Some conditions for the stability of non linear time dependent differential equations".
J. SIAM Control, Ser. A, Vol. 2, N° 2, 1965.
- 57 GRUJIĆ Lj.
"Novel Development of Lyapunov stability of motion".
Int. J. Control, 1975, vol. 22, N° 4, p. 525-549.

- 58 NARENDA K.S. and TAYLOR J.H.
"Frequency domain criteria for absolute stability"
Academic Press, New York and London, 1973.
- 59 AIZERMAN M.A.
"On a problem relating to the global stability of dynamic systems".
Uopehi Mat. Nank., N° 4, 1949.
- 60 PLISS V.A.
"Certain problems in the theory of stability of motion".
Russian ed. Leningrad Univ. Press, Leningrad, 1958.
- 61 LAURENT F.
"Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés non linéaires en régime dynamique".
Thèse es Sciences Physiques, 1968.
- 62 HAHN W.
"Stability of motion"
Springer Verlag, 1967.
- 63 KEVORKIAN A.K. and SNOEK J.
"Decomposition in large scale systems : Theory and applications in solving large sets of non linear simultaneous equations".
Ibid, 491-515.
- 64 KEVORKIAN AK.
"A decompositional algorithm for the solution of large systems of linear algebraic equations".
Proc. of 1975 IEEE int. Symp. on Circuits and Systems, Boston Massachusetts, 1975.
- 65 KEVORKIAN AK.
"Structural aspects of large dynamic systems".

- 66 GRUJIĆ Lj. and ŠILJAK D.D.
"Asymptotic stability and instability of large scale systems".
IEEE Trans. of Aut. Control, Vol. AC 18, 636-645, 1973.
- 67 STEWART D.V.
"On an approach to techniques for the analysis of the structure of large systems of equations".
SIAM Review, Vol. 4, 321-342, 1962.
- 68 STEWART D.V.
"Partitioned and tearing systems of equations".
SIAM J. Numer. Anal. Ser. B, Vol. 2, 345-365, 1965.
- 69 WEISSENBERGER S.
"Stability regions of large scale systems".
Automatica, Vol. 9, 653-663, 1973.
- 70 FOSSARD A.
"Commande des systèmes multidimensionnels"
Dunod, 1972, Paris.
- 71 BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F.
"Stability study of large scale non linear discrete systems by the use of vectorial norms".
IFAC Symposium on Large Scale Systems Theory and applications, 1976, Udine, Italy.
- 72 PIONTKOVSKII A.A., RUTKOVSKAYA L.D.
"Investigations of certain stability theory problems by the vector Lyapunov functions method".
Automatica, Telemekhanika, Vol. 28, N° 10, 23-31, 1967.
- 73 MICHEL A.N.
"Stability analysis of interconnected systems"
SIAM Journal control, Vol. 12, N° 3, 554-579, 1974.

- 74 BITSORIS G.
"Principe de comparaison et stabilité des systèmes complexes".
Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Toulouse, 1978.
- 75 ROSENBROCK H.H.
"State space and Multivariable Theory".
Nelson, 1970.
- 76 POPOV V.M.
"L'hyperstabilité des systèmes automatiques".
Dunod, 1973.
- 77 GRUJIĆ Lj.
"Solutions for the Lurie-Postnikov and Aizerman problems".
Int. J. Systems Sci., 1978, Vol. 9, N° 12, pp. 1359-1372.
- 78 BORNE P., GENTINA J.C.
"Sur une extension des conditions linéaires de stabilité à certaines classes de systèmes échantillonnés non linéaires".
C.R.A.S., Paris, T. 274, p. 1275-1277, Avril 1972.
- 79 GENTINA J.C., BORNE P.
"Sur une condition d'application du critère de stabilité linéaire à certaines classes de systèmes continus non linéaires".
C.R.A.S., Paris, T. 275, p. 401-404, Août 1972.

CHAPITRE II

"CONDITIONS SUFFISANTES DE STABILITE
DES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES -
CONJECTURE LINEAIRE"

INTRODUCTION

Ce chapitre concerne la présentation d'une approche originale de la stabilité des processus non linéaires, non stationnaires en présence de perturbations.

L'étude utilise la méthode de LYAPUNOV [1] et les techniques d'agrégation [2]; la difficulté inhérente au choix d'une fonction candidate à LYAPUNOV ou d'une fonction d'agrégation du type norme vectorielle, est simplifiée par l'utilisation d'une représentation particulière remarquable des processus.

La recherche de conditions suffisantes de stabilité des processus tels que la conjecture du linéaire soit vérifiée, nous a conduit à la définition de larges classes de processus admettant la même matrice caractéristique que les systèmes de comparaison correspondants (relatifs aux fonctions d'agrégation).

Nous établissons dans une première partie de ce chapitre, des critères de stabilité pour des classes importantes de processus tels que la matrice ait ses éléments non linéaires isolés dans une seule rangée ; le cas général où les éléments non linéaires sont isolés dans k rangées ($k \leq n$) de la matrice caractéristique du processus est étudié dans une deuxième partie.

I - CAS DES PROCESSUS ADMETTANT UNE MATRICE CARACTERISTIQUE IDENTIQUE
A CELLE DU SYSTEME DE COMPARAISON - CONJECTURE DU LINEAIRE

Dans cette section, sont établies des conditions suffisantes de stabilité des systèmes du type LUR'E POSTNIKOV ainsi que des systèmes admettant une matrice caractéristique en flèche identique à celle du système de comparaison correspondant, et tels que la conjecture du linéaire soit vérifiée.

Plusieurs travaux concernant l'étude de la stabilité des systèmes du type LUR'E POSTNIKOV, en particulier les travaux de LUR'E et POSTNIKOV [3], d'AIZERMAN [4], de POPOV [6] et de GRUJIC [7], conduisent à des résultats importants de mise en oeuvre simple en pratique.

AIZERMAN [4] a émis l'hypothèse que les systèmes du type LUR'E POSTNIKOV possèdent la propriété de stabilité absolue dans tout domaine dans lequel le système linéaire correspondant est stable.

PLISS [5] a montré qu'en général cette conjecture n'est pas vérifiée et plusieurs auteurs [7, 9, 10, 11, 12, 13, 14] ont établi des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité absolue pour des classes particulières de processus.

Dans cette partie les critères de stabilité basés sur le concept des normes vectorielles établies par BORNE et GENTINA [8] qui généralisent le lemme de KOTELYANSKI [16] pour de larges classes de systèmes non linéaires, associés à la représentation en flèche des matrices caractéristiques des processus étudiés, conduisent à de nouveaux critères de stabilité faciles à mettre en oeuvre aussi bien pour l'analyse que pour la synthèse comme nous le montrerons au Chapitre III.

L'application de ces tests de stabilité aux systèmes du type LUR'E POSTNIKOV mono-entrée mono-sortie ou multivariables du type interconnecté conduit à des conditions suffisantes de stabilité faisant apparaître séparément les caractéristiques des sous-systèmes et les paramètres définissant les interconnexions.

I-1 SYSTEMES NON LINEAIRES HIERARCHISES A DEUX NIVEAUX

Pour préciser une méthode d'étude de la validité de la conjecture du linéaire nous considérons les systèmes décrits par l'équation

$$\frac{d}{dt} (x) = A(t, x, P) x \quad (\text{II-1})$$

telle que la matrice caractéristique $A(t, x, P)$ notée $A(\cdot)$, d'éléments $a_{ij}(t, x, P)$, notés $a_{ij}(\cdot)$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, généralement non linéaires, soit une matrice en flèche dont les éléments non linéaires sont isolés dans une ligne ou colonne.

La recherche d'un système de comparaison d'ordre maximum, égal à l'ordre n du système étudié, dont l'évolution est caractérisée par une matrice identique à $A(\cdot)$, associée à l'utilisation du critère pratique de BORNE et GENTINA [8] conduit à la définition de plusieurs classes de processus non linéaires hiérarchisés à deux niveaux pour lesquels il y a validité de la conjecture du linéaire.

I-1-1 Eléments non linéaires isolés dans la dernière ligne ou colonne de $A(\cdot)$

Théorème (II-1)

(a) Le processus défini par (II-1), admettant une matrice caractéristique $A(\cdot)$ en flèche mince (I-43) d'ordre n , telle que :

- (i) les éléments $a_{ii}, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$, de la matrice $A(\cdot)$ sont constants et négatifs.
- (ii) toutes les non linéarités sont isolées dans la dernière ligne ou colonne de $A(\cdot)$.
- (iii) tous les éléments hors diagonaux de $A(\cdot)$ sont non négatifs

est asymptotiquement stable s'il existe $\epsilon < 0$ et X tels que:

$$a_{nn}(\cdot) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni}(\cdot) a_{in}(\cdot)}{a_{ii}} < \epsilon \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-2})$$

b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, la stabilité est globale.

Théorème (II-2)

(a) Le processus défini par (II-1), admettant une matrice caractéristique $A(\cdot)$ en flèche mince généralisée d'ordre r (I-44), telle que :

- (i) les éléments $a_{ii}, \forall i = 1, 2, \dots, r-1$ de la matrice $A(\cdot)$ sont constants et négatifs
- (ii) toutes les non linéarités sont isolées dans la dernière ligne ou colonne de $A(\cdot)$
- (iii) tous les éléments hors diagonaux de $A(\cdot)$ sont non négatifs

est asymptotiquement stable s'il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que:

$$(-1)^i \left(\det A_{rr}^{(i)} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{A_{rj}^{(i)} \cdot A_{jr}^{(i)}}{a_{jj}} \right) > -\epsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-r \quad (\text{II-3})$$

et

$$(-1)^{n-r+1} \det \left(A_{rr}(\cdot) - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{A_{rj}(\cdot) \cdot A_{jr}(\cdot)}{a_{jj}} \right) > -\epsilon \quad (\text{II-4})$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, la stabilité est globale.

Théorème (II-3)

(a) Le processus défini par (II-1), admettant une matrice caractéristique $A(\cdot)$ en flèche épaisse d'ordre r définie par (I-45) avec :

$$A_{jj} = \begin{bmatrix} a_{11}^j & & & a_{1,nj}^j \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{nj-1,nj-1}^j & a_{nj-1,nj}^j \\ a_{nj,1}^j & \cdots & a_{nj,nj-1}^j & a_{nj,nj}^j \end{bmatrix} \quad \forall j = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{II-5})$$

telle que :

- (i) les éléments a_{ii}^j , $\forall i = 1, 2, \dots, nj-1, \forall j = 1, 2, \dots, r-1$, de la matrice $A(\cdot)$, sont constants et négatifs.
- (ii) toutes les non linéarités sont isolées dans la dernière ligne ou colonne de $A(\cdot)$
- (iii) tous les éléments hors diagonaux de $A(\cdot)$ sont non négatifs.

est asymptotiquement stable s'il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que:

$$a_{n_i, n_i}^i - \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{a_{n_i j}^i a_{j n_i}^i}{a_{jj}^i} < \epsilon \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad (\text{II-6})$$

$$(-1)^i \det \left(A_{rr}^{(i)} - \sum_{j=1}^{r-1} A_{rj}^{(i)} \cdot A_{jj}^{-1} \cdot A_{jr}^{(i)} \right) > -\epsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{II-7})$$

et

$$(-1)^{n_r} \det \left(A_{rr}(\cdot) - \sum_{j=1}^{r-1} A_{rj}(\cdot) A_{jj}^{-1} A_{jr}(\cdot) \right) > -\epsilon \quad (\text{II-8})$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{E} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

- (b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$ la stabilité est globale.

Démonstration

Les systèmes définis aux théorèmes (II-1), (II-2), (II-3), ont leur matrice caractéristique $A(\cdot)$ à éléments non diagonaux non négatifs. Soit $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T \in \mathcal{R}^n$, et $|z| = [|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|]^T$, il vient pour la norme $p(z) = |z|$

un système de comparaison de la forme :

$$\frac{d}{dt} (z) = M(A(\cdot)) z \quad (\text{II-9})$$

avec

$$M(A(\cdot)) \equiv A(\cdot) \quad (\text{II-10})$$

Comme les éléments non linéaires de la matrice $A(\cdot)$ sont isolés dans une seule ligne ou colonne, une condition suffisante de stabilité asymptotique pour le système de comparaison est que la matrice $A(\cdot)$ soit l'opposée d'une M matrice [15]. Les théorèmes (II-1), (II-2) et (II-3) sont alors déduits des conditions de KOTELYANSKI [16] ; en accord avec GANTMACHER [16], en notant $A(\cdot) \begin{pmatrix} 12 \dots h \\ 12 \dots h \end{pmatrix}$ le déterminant du mineur principal de $A(\cdot)$ d'ordre h , ces conditions correspondant à la vérification des inégalités suivantes :

$$(-1)^h A(\cdot) \begin{pmatrix} 12 \dots h \\ 12 \dots h \end{pmatrix} \geq -\varepsilon \quad \forall h = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II-11})$$

il vient pour les divers théorèmes présentés les conditions équivalentes respectives suivantes :

+ théorème (II-1) :

$$a_{jj} \leq \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{II-12})$$

$$(-1)^n \det (A(\cdot)) \geq -\varepsilon \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-13})$$

avec

$$(-1)^n \det A(\cdot) = (-1) \left(a_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni}(\cdot)a_{in}(\cdot)}{a_{ii}} \right) (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} a_{jj} \quad (\text{II-14})$$

+ Théorème (II-2) :

$$a_{jj} < \epsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{II-15})$$

$$(-1)^{r+i-1} \det \begin{bmatrix} F_{11} & \phi_{12}^{(i)}(\cdot) \\ (i) & (i) \\ \phi_{21}(\cdot) & \phi_{22}(\cdot) \end{bmatrix} > -\epsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-r+1 \quad (\text{II-16})$$

$$\forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

avec

$$(-1)^{r+i-1} \det \begin{bmatrix} F_{11} & \phi_{12}^{(i)}(\cdot) \\ (i) & (i) \\ \phi_{21}(\cdot) & \phi_{22}(\cdot) \end{bmatrix} =$$

$$(-1)^{r-1} \prod_{j=1}^{r-1} (a_{jj}) (-1)^i \det (A_{rr}^{(i)} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{A_{rj}^{(i)} A_{jr}^{(i)}}{a_{jj}}) \quad (\text{II-17})$$

$$\forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

+ Théorème (II-3)

$$a_{ii}^j < \epsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, nj-1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{II-18})$$

$$(-1)^{nj} \det A_{jj} > -\epsilon \quad \forall j = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{II-19})$$

$$(-1)^{n-r+i} \det \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12}^{(i)}(\cdot) \\ (i) & (i) \\ \phi_{21}(\cdot) & \phi_{22}(\cdot) \end{bmatrix} > \epsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_r, \quad (\text{II-20})$$

$$\forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

avec :

$$(-1)^{n-r+i} \det \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12}^{(i)}(\cdot) \\ (i) & (i) \\ \phi_{21}(\cdot) & \phi_{22}(\cdot) \end{bmatrix} =$$

$$(-1)^i \left(\det (A_{rr}^{(i)}(\cdot) - \sum_{j=1}^{n_r} A_{rj}^{(i)}(\cdot) A_{jr}^{(i)}(\cdot)) \right) \prod_{j=1}^{r-1} (-1)^{nj} \det A_{jj}$$



$$(\text{II-21})$$

les matrices $\Phi_{11}^{(i)}, F_{11}^{(i)}, \Phi_{12}^{(i)}(\cdot), \Phi_{21}^{(i)}(\cdot), \Phi_{22}^{(i)}(\cdot)$ étant définies conformément aux notations (I-46) et (I-47), $\forall t \in \mathcal{Z}, \forall x \in \mathcal{X}, \forall P \in \mathcal{P}$ ce qui démontre les théorèmes (II-1), (II-2) et (II-3).

I-1-2 Eléments non linéaires isolés dans une ligne ou une colonne quelconque de A(.)

Les opérations sur les matrices, utilisées au paragraphe précédent, sont encore applicables, sous certaines conditions, pour l'étude des signes des parties réelles des valeurs caractéristiques de la matrice caractéristique A(.) dont les éléments non linéaires sont isolés dans une ligne ou une colonne quelconque.

Dans cette partie, nous étudierons le cas général correspondant aux processus admettant une matrice caractéristique A(.) en flèche mince généralisée d'ordre r définie par (I-45) et (II-5).

En désignant par k la ligne ou la colonne non linéaire de A(.), nous supposerons sans restreindre la généralité de l'étude envisagée, que :

$$k < r$$

En effet, il est évident que, pour k défini par :

$$r \leq k \leq n$$

une permutation sur les (n-r+1) dernières composantes du vecteur état, permet d'isoler les éléments non linéaires dans la dernière ligne ou colonne de la nouvelle matrice caractéristique (obtenue après les transformations envisagées).

Théorème (II-4)

(a) Le processus défini par (II-1) et (I-44) admettant une matrice caractéristique A(.) en flèche mince généralisée d'ordre r (I-44), dont les éléments non linéaires sont isolés dans la k-ième ligne ou colonne, avec k < r, telle que :

- (i) les éléments a_{ii} $\forall i=1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,r,\dots,n$ de la matrice A(.) sont constants et négatifs.
- (ii) $a_{kk}(\cdot) \leq -\epsilon < 0 \quad \forall (t,x,P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$ (II-22)
- (iii) tous les éléments hors diagonaux de A(.) sont non négatifs.

est asymptotiquement stable s'il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que:

$$(-1)^i \det \left(A_{rr}^{(i)} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{A_{rj}^{(i)} A_{jr}^{(i)}}{a_{jj}(\cdot)} \right) > -\epsilon \quad (II-23)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n-r+1 \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

Remarques :

1 - Le théorème (II-4) peut être démontré de la même manière que le théorème (II-2), à partir des contraintes (II-15) et (II-16), en remarquant que, pour les processus étudiés (k-ième ligne ou colonne non linéaire), la factorisation du premier membre de l'inégalité (II-16) pour obtenir la contrainte (II-17), est encore possible lorsque la condition (II-22) est vérifiée.

2 - Les théorèmes (II-1) et (II-3) peuvent être aisément généralisés au cas où les éléments non linéaires de la matrice A(.), caractéristique en flèche des processus étudiés, sont isolés dans une ligne ou une colonne quelconque, comme le montre l'exemple étudié au paragraphe (I-1-3-3).

I-1-3 Exemples

I-1-3-1 Exemple (II-1) : Etude d'un système dynamique complexe

Soit $\tilde{A}(t, y)$ la matrice caractéristique à l'instant t d'un processus définie par :

$$\tilde{A}(\cdot) = \begin{bmatrix} -3 -u(\cdot) -2v(\cdot) & -u(\cdot) -2v(\cdot) & 2+u(\cdot) + 2v(\cdot) \\ -3 -u(\cdot) -4v(\cdot) & -1 -u(\cdot) -4v(\cdot) & 3+u(\cdot) + 4v(\cdot) \\ -2 -2u(\cdot) -4v(\cdot) & 1 - 2u(\cdot) -4v(\cdot) & 1+2u(\cdot) + 4v(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II-24})$$

avec $y \in \mathbb{R}^3$, vecteur état à l'instant $t \in \mathbb{T}$, $u(t, y)$ et $v(y)$, fonctions non linéaires définies par :

$$u(t, y) = \cos |2t \ ||y|| \ | \quad (\text{II-25})$$

$$v(y) = \frac{1 + 2 \ ||y||}{1 + ||y||} \quad (\text{II-26})$$

La description du même processus par rapport au vecteur état x obtenu à partir de y par la transformation linéaire suivante :

$$y = Px \quad (\text{II-27})$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

conduit à la définition d'une nouvelle matrice caractéristique $A(t, x)$ en flèche mince d'ordre 3 dont les éléments non linéaires sont isolés dans la dernière colonne de $A(t, x)$, et dont les éléments hors diagonaux sont non négatifs.

$$A(t,x) = \begin{bmatrix} -1 & & 1 - u(t, ||Px||) \\ & -2 & 1 - u(t, ||Px||) \\ 0 & 2 & -2v(||Px||) \end{bmatrix} \quad (\text{II-28})$$

L'application du théorème (II-1) montre que pour garantir la stabilité globale il suffit de vérifier la contrainte suivante :

$$1 - 2v(||Px||) - u(t, ||Px||) < \epsilon < 0 \quad (\text{II-29})$$

qui est satisfaite $\forall (t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^3$ puisque :

$$|u(t, ||Px||)| \leq 1 \text{ et } v(||Px||) > 1$$

Le processus étudié est donc globalement stable.

I-1-3-2 Exemple (II-2): Etude du comportement dynamique des réacteurs nucléaires

Le processus de fission nucléaire, de libération d'énergie, s'exprime [17] par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= [k (1 - \sum_{i=1}^m \beta_i) - 1] \frac{n}{\ell} + \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i + S \\ \frac{dc_i}{dt} &= k \beta_i \frac{n}{\ell} - \lambda_i c_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{II-30})$$

qui caractérisent l'évolution temporelle de la densité neutronique n et donc de l'énergie calorifique dégagée.

k : facteur de multiplication (qui exprime l'augmentation de la densité neutronique pendant la durée d'une génération) ($k > 0$)

ℓ : durée de vie moyenne d'un neutron ($\ell > 0$)

β_i : pourcentage des neutrons retardés du ième groupe ($\beta_i > 0$)

c_i : densité des noyaux émetteurs du ième groupe ($c_i > 0$)

m : nombre de groupe de neutrons retardés, en général égal à 6 ($m = 6$)

S : puissance de la source auxiliaire de neutrons

λ_i : constante radioactive des noyaux émetteurs du ième groupe ($\lambda_i > 0$)

En fonctionnement normal, k fluctue et doit toujours être maintenu au voisinage de 1 [17]. Nous considérons donc le facteur de multiplication k non linéaire.

L'étude de la stabilité d'un tel processus peut être conduite à partir de la description suivante (en régime libre):

$$\frac{d}{dt} (x) = A(k(t, x)) x \quad (\text{II-31})$$

$$A(k(.)) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & & & & & & \frac{\beta_1}{\ell} k(.) \\ & -\lambda_2 & & & & & \frac{\beta_2}{\ell} k(.) \\ & & -\lambda_3 & & & & \frac{\beta_3}{\ell} k(.) \\ & & & -\lambda_4 & & & \frac{\beta_4}{\ell} k(.) \\ & & & & -\lambda_5 & & \frac{\beta_5}{\ell} k(.) \\ & & & & & -\lambda_6 & \frac{\beta_6}{\ell} k(.) \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 & \frac{k(.)}{\ell} \left(1 - \sum_{i=1}^6 \beta_i \right) - \frac{1}{\ell} \end{bmatrix}$$

où $x = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, n]^T \in \mathcal{R}^7$ est le vecteur état et $A(k(.))$ est une matrice en flèche mince d'ordre 6 dans laquelle le facteur de multiplication n'apparaît que dans les expressions des éléments de la dernière colonne.

Par application du théorème (II-1), la stabilité du processus est assurée par :

$$k(.) \leq c < 1 \quad (\text{II-32})$$

Ainsi, lorsque la réactivité ρ , définie par :

$$\rho = \frac{k - 1}{k} \quad (\text{II-33})$$

est négative, ou encore lorsque le réacteur est en régime sous critique [17], le processus de fission nucléaire est asymptotiquement stable.

I-1-3-3 Exemple (II-3)

L'exemple (II-3) constitue une illustration de l'étude de la stabilité des processus d'ordre n caractérisés par des matrices $A(t,x)$ en flèche épaisse d'ordre r , les éléments non linéaires étant isolés dans une ligne ou colonne quelconque, repérée par $k : k \leq n_1$.

Soit $A(.)$ la matrice caractéristique d'un processus :

$$A(.) = \begin{bmatrix} A_{11}(.) & & A_{13}(.) \\ & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II-34})$$

composé de trois sous-systèmes S_1, S_2 et S_3 de matrices caractéristiques respectives A_{11}, A_{22} et A_{33} .

$$+ A_{11}(t, x) = \begin{bmatrix} -1 & & 1 \\ & -2 & 1 \\ a_{31}(t,x) & a_{32}(t,x) & a_{33}(t,x) \end{bmatrix}$$

$$+ A_{22} = [-1]$$

$$+ A_{33} = \begin{bmatrix} -1 & & 1 \\ & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

les interconnexions entre ces sous-systèmes étant définies par :

$$+ A_{13}(t,x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{37}(t,x) \end{bmatrix}$$

$$+ A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ A_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



avec $a_{3i}(t,x) \geq 0 \quad \forall i = 1,2,7 \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{R}$ (II-35)

La matrice $A(\cdot)$ ayant ses éléments hors diagonaux non négatifs, et ses éléments constants exceptés ceux de la troisième ligne, le processus S est asymptotiquement stable s'il existe $\varepsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que les conditions de KOTELYANSKI soient vérifiées :

$$(-1)^3 \det A_{11}(t,x) \geq -\varepsilon \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (II-36)$$

$$(-1)^7 \det A(t,x) \geq -\varepsilon \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (II-37)$$

Si la matrice $A_{11}(t,x)$ admet une inverse, $\forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{R}$ A_{22} étant inversible, il sera alors possible de calculer le déterminant de la matrice $A(t,x)$ en utilisant la propriété P1 des matrices en flèche.

Or, lorsque la contrainte (II-36) est satisfaite c'est-à-dire que :

$$\delta(t,x) = a_{33}(t,x) + a_{31}(t,x) + 0,5 a_{32}(t,x) < \varepsilon \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (II-38)$$

la matrice $A_{11}^{-1}(t,x)$ existe et est définie par :

$$A_{11}^{-1}(\cdot) \cdot \begin{bmatrix} a_{31}(\cdot) \delta^{-1}(\cdot) - 1 & 0.5 a_{32}(\cdot) \delta^{-1}(\cdot) & \delta^{-1}(\cdot) \\ 0.5 a_{31}(\cdot) \delta^{-1}(\cdot) & -0.5 + 0.25 a_{32}(\cdot) \delta^{-1}(\cdot) & 0.5 \delta^{-1}(\cdot) \\ a_{31}(\cdot) \delta^{-1}(\cdot) & 0.5 a_{32}(\cdot) \delta^{-1}(\cdot) & \delta^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (II-39)$$

La condition (II-37) devient alors :

$$\begin{aligned} (-1)^7 \det(A(\cdot)) &= [(-1)^3 \det A_{11}(\cdot)] [(-1)^1 \det A_{22}] \dots \\ &\dots [(-1)^3 \det (A_{33} - A_{31} A_{11}^{-1}(\cdot) A_{13}(\cdot) - A_{32} A_{22}^{-1} A_{23})] \geq -\varepsilon \quad (II-40) \end{aligned}$$

$$\forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}$$

ou encore :

$$\det (A_{33} - A_{31} A_{11}^{-1} (\cdot) A_{13} (\cdot) - A_{32} A_{22}^{-1} A_{23}) \leq \varepsilon \forall (t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{X} \quad (\text{II-41})$$

soit :

$$\det \begin{bmatrix} -1 & & 1 \\ & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 - a_{37}(\cdot) \delta^{-1}(\cdot) \end{bmatrix} \leq \varepsilon \forall (t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{X} \quad (\text{II-42})$$

des conditions suffisantes de stabilité asymptotique du processus S peuvent alors s'exprimer simplement en fonction des $a_{3i}(\cdot)$, $\forall i = 1, 2, 3, 7$ par la relation :

$$a_{33}(t, x) + a_{31}(t, x) + 0.5 a_{32}(t, x) + 2 a_{37}(t, x) \leq \varepsilon \forall (t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{X} \quad (\text{II-43})$$

Si de plus, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^1$, la stabilité est globale.

I-2 SYSTEMES DECRITS PAR DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES SCALAIRES

La détermination des classes de processus pour lesquels la conjecture du linéaire est vérifiée, est aisée lorsque la matrice caractéristique admet la forme en flèche ou peut s'y ramener à partir de transformations élémentaires (voir chapitre I). Lorsque le processus est décrit par une équation différentielle scalaire, il est en général possible de représenter son évolution par une équation matricielle, la matrice caractéristique étant sous forme compagnon.

Le passage de la forme compagnon à la forme en flèche étant établi au premier chapitre, la recherche des classes des processus décrits par des équations différentielles scalaires et vérifiant la conjecture du linéaire pour l'étude de la stabilité devient ainsi possible.

La forme particulière des conditions suffisantes de stabilité obtenues permet une étude graphique de la stabilité.

I-2-1 Système monovariable décrit par une équation différentielle non linéaire

Considérons le processus décrit en régime libre par l'équation différentielle suivante :

$$y_1^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(t, y, \mathbb{P}) y_1^{(i)} = 0 \quad (\text{II-44})$$

avec $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$, $y_i(t) = y_{i-1}^{(1)}(t) \quad \forall i = 2, \dots, n$
 et $\tilde{a}_j(t, y, \mathbb{P}) : \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{R}$ des fonctions généralement non linéaires, $\forall j=0, 1, \dots, n-1$.

En choisissant $y(t)$ comme vecteur état, nous pouvons décrire le processus par le système différentiel suivant :

$$\frac{d}{dt} (y) = \tilde{A}(t, y, \mathbb{P}) \cdot y \quad (\text{II-45})$$

tel que la matrice $\tilde{A}(\cdot)$ soit sous forme compagnon.

L'évolution du système peut être alors (P6) régie par l'équation (II-46) :

$$\frac{d}{dt} (x) = A(t, x, P) x \quad (II-46)$$

$$A(.) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & 1 \\ & \alpha_2 & & & 1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 \\ \gamma_1(\cdot, \alpha_1) & \gamma_2(\cdot, \alpha_2) & & & \gamma_{n-1}(\cdot, \alpha_{n-1}) \gamma_n(\cdot) \end{bmatrix}$$

avec les notations :

$$\mathcal{N}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - \alpha_i) \quad (II-47)$$

$$\mathcal{P}(t, x, P, \lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(t, x, P) \lambda^i \quad (II-48)$$

$$\gamma_i(t, x, P, \alpha_i) = - \mathcal{P}(t, x, P, \alpha_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \quad (II-49)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\gamma_n(t, x, P, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i) = - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - \tilde{a}_{n-1}(t, x, P) \quad (II-50)$$

Théorème (II-5) :

(a) S'il existe $\varepsilon > 0$, \mathcal{X} et α_i satisfaisant les inégalités

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < 0 \quad (II-51)$$

tels que :

$$(i) \quad (-1)^{n-i} \mathcal{P}(t, x, P, \alpha_i) \geq \epsilon \quad (II-52)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n-1 ; \forall t \in \mathcal{T} ; \forall x \in \mathcal{X}.$$

$$(ii) \quad \mathcal{P}(t, x, P, 0) > \epsilon \quad \forall t \in \mathcal{T} ; \forall x \in \mathcal{X}. \quad (II-53)$$

le point d'équilibre $x = 0$ du système défini par (II-54) avec les notations (II-48) est asymptotiquement stable.

(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ la stabilité est globale.

Démonstration

Le théorème (II-5) peut être démontré de la même manière que le théorème (II-1) en remarquant que lorsque les inégalités (II-51) sont vérifiées nous avons :

$$(-1)^{n-i+1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j) > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (II-54)$$

et que :

$$\gamma_i(t, x, P, \alpha_i) \geq \epsilon > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (II-55)$$

si et seulement si :

$$(-1)^{n-i} \mathcal{P}(t, x, P, \alpha_i) \geq \epsilon > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (II-56)$$

La matrice caractéristique $A(\cdot)$ du système (II-46) est dans ce cas telle que ses éléments hors diagonaux soient non négatifs.

Les éléments non linéaires étant isolés dans la dernière ligne de $A(\cdot)$, l'application du théorème (II-1) conduit dans ce cas à la seule contrainte :

$$(-1)^n \det(A(t,x,P)) \geq \varepsilon \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (\text{II-57})$$

avec :

$$\det(A(t,x,P)) = (-1)^n \mathcal{P}(t, x, P, 0) \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (\text{II-58})$$

qui garantit la propriété de stabilité asymptotique pour le processus.

I-2-2 Couplage non linéaire d'un système linéaire et d'un système non linéaire

Le système étudié est supposé défini par l'interconnexion de deux sous-systèmes S_1 et S_2 dont les sorties sont notées respectivement $s_1 \in \mathcal{R}$ et $s_2 \in \mathcal{R}$.

En l'absence d'entrées, l'évolution du processus est régie par les équations différentielles non linéaires (II-59) et (II-60)

$$s_1^{(n_1)} + \sum_{i=0}^{n_1-1} a_i^1 s_1^{(i)} = e_{12} \sum_{i=0}^{n_2-1} c_i^1 s_2^{(i)} \quad (\text{II-59})$$

$$s_2^{(n_2)} + f(t, s_2, s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(n_2-1)}, P) = +e_{21} g(t, s_1, s_1^{(1)}, \dots, s_1^{(n_1-1)}, P) \quad (\text{II-60})$$

avec $a_i^1 \in \mathcal{R}, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n_1-1, \quad c_i^1 \in \mathcal{R}, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n_2-1,$
 $e_{12} \in \{0, 1\}, \quad e_{21} \in \{0, 1\}, \quad f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ des fonctions généralement non linéaires telles que :

$$f(\cdot) = f_0^*(\cdot) s_2 + f_1^*(\cdot) s_2^{(1)} + \dots + f_{n_2-1}^*(\cdot) s_2^{(n_2-1)} \quad (\text{II-61})$$

$$g(\cdot) = g_0^*(\cdot) s_1 + g_1^*(\cdot) s_1^{(1)} + \dots + g_{n_1-1}^*(\cdot) s_1^{(n_1-1)} \quad (\text{II-62})$$

avec

$$f_i^*(\cdot) \in [\underline{f}_i, \overline{f}_i] \subset \mathcal{R} \quad \forall (t, y_2, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{P}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n_2-1$$

$$g_i^*(\cdot) \in [\underline{g}_i, \overline{g}_i] \subset \mathcal{R} \quad \forall (t, y_1, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{P}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n_1-1$$

et $y_i = [s_i, s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(n_i-1)}]^T \in \mathcal{R}^{n_i} \quad \forall i = 1, 2$

Notations :

$$\mathcal{P}_{n_1}(\lambda) = \lambda^{n_1} + \sum_{i=0}^{n_1-1} a_i^1 \lambda^i \quad (\text{II-63})$$

$$\mathcal{P}_{n_2}(\cdot, \lambda) = \lambda^{n_2} + \sum_{i=0}^{n_2-1} f_i^*(\cdot) \lambda^i \quad (\text{II-64})$$

$$R_{12}(\lambda) = \sum_{i=0}^{n_2-1} c_i^1 \lambda^i \quad (\text{II-65})$$

$$R_{21}(\cdot, \lambda) = \sum_{i=0}^{n_1-1} g_i^*(\cdot) \lambda^i \quad (\text{II-66})$$

$$R_i(\lambda) = \prod_{j=1}^{n_i-1} (\lambda - \alpha_j^i) \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{II-67})$$

L'étude de la stabilité du processus multivariable du type interconnecté défini par (II-59) et (II-60) avec les notations (II-63 - 66) peut être conduite, sous certaines conditions, à partir du théorème (II-3).

En effet, nous pouvons considérer le processus composé de deux sous-systèmes S_1 et S_2 décrits par :

$$S_1 : s_1^{(n_1)} + \sum_{i=0}^{n_1-1} a_i^1 s_1^{(i)} = 0 \quad (\text{II-68})$$

$$S_2 : s_2^{(n_2)} + \sum_{i=0}^{n_2-1} f_i^*(\cdot) s_2^{(i)} = 0 \quad (\text{II-69})$$

ou encore par :

$$S_i : \frac{d}{dt} (x'_i) = A'_{ii} x'_i \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{II-70})$$

$$A'_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_1^i & & & \prod_{j=2}^{n_i-1} (\alpha_1^i - \alpha_j^i)^{-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha_{n_i-1}^i & \prod_{j=1}^{n_i-2} (\alpha_{n_i-1}^i - \alpha_j^i)^{-1} \\ -\mathcal{P}_{n_i}(\alpha_1^i) \quad \dots \quad -\mathcal{P}_{n_i}(\alpha_{n_i-1}^i) & & -\sum_{j=1}^{n_i-1} \alpha_j^i - a_{n_i-1}^i \end{bmatrix}$$

avec $\alpha_j^i, \forall j = 1, 2, \dots, n_i-1, \forall i = 1, 2$, paramètres pouvant être choisis arbitrairement et $\mathcal{P}_{n_1}(\alpha), \mathcal{P}_{n_2}(t, x'_2, \mathbb{P}, \alpha)$ définissant les "polynômes caractéristiques instantanés" associés aux équations différentielles régissant les évolutions respectives des sous-systèmes S_1 et S_2 ($a_{n_2-1}^2 = f_{n_2-1}^*$).

Dans ce cas, les interconnexions sont caractérisées par les matrices $A'_{12}(\cdot)$ et $A'_{21}(\cdot)$ définies par :

$$A'_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ e_{12}R_{12}(\alpha_1^2) & \dots & e_{12}R_{12}(\alpha_{n_2-1}^2) & e_{12}c_{n_2-1}^1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-71})$$

$$A'_{21}(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ e_{21}R_{21}(\cdot, \alpha_1) & \dots & e_{21}R_{21}(\cdot, \alpha_{n_1-1}^1) & e_{21}g_{n_1-1}^*(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II-72})$$

Il vient alors pour la description du processus complet la matrice $A(\cdot)$ en flèche mince généralisée d'ordre $(n_1 + n_2 - 1)$ caractéristique du processus étudié :

$$\frac{d}{dt} (x) = A(t, x, P) x \quad (\text{II-73})$$

A(·.) =

...		
	α_i^1						1	0
		α_j^2				0	1	
...								
...	$\left(\frac{-\mathcal{P}_{n_1}(\lambda)(\lambda - \alpha_i^1)}{R_1(\lambda)} \right)_{\lambda=\alpha_i^1}$	$e_{12} \left(\frac{R_{12}(\alpha_j^2)(\lambda - \alpha_j^2)}{R_2(\lambda)} \right)_{\lambda=\alpha_j^2}$...	$\sum_{i=1}^{n_1-1} -\alpha_i^1$	$-a_{n_1-1}^1$	$e_{12} c_{n_2-1}^1$	$\sum_{j=1}^{n_2-1} -\alpha_j^2$	$-f_{n_2-1}^*$
...	$\left(\frac{R_{21}(\cdot, \lambda)(\lambda - \alpha_i^1)}{R_1(\lambda)} \right)_{\lambda=\alpha_i^1}$	$\left(\frac{-\mathcal{P}_{n_2}(\lambda)(\lambda - \alpha_j^2)}{R_2(\lambda)} \right)_{\lambda=\alpha_j^2}$...	$e_{21} g_{n_1-1}^*$				



Théorème (II-6)

(a) S'il existe $\epsilon < 0$, \mathcal{X} , $\alpha_i^1 \forall i = 1, 2, \dots, n_1-1$, et $\alpha_j^2 \forall j = 1, 2, \dots, n_2-1$ vérifiant les inégalités :

$$\alpha_1^1 < \alpha_2^1 < \dots < \alpha_{n_1-1}^1 < 0 \quad (\text{II-74})$$

$$\alpha_1^2 < \alpha_2^2 < \dots < \alpha_{n_2-1}^2 < 0 \quad (\text{II-75})$$

tels que :

$$(i) \quad (-1)^{n_1-i} \mathcal{P}_{n_1}(\alpha_i^1) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_1-1 \quad (\text{II-76})$$

$$(ii) \quad (-1)^{n_1-i+1} e_{21} R_{21}(\cdot, \alpha_i^1) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_1-1 \quad (\text{II-77})$$

$$\forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$(iii) \quad (-1)^{n_2-i} \mathcal{P}_{n_2}(\cdot, \alpha_i^2) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_2-1 \quad (\text{II-78})$$

$$\forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$(iv) \quad (-1)^{n_2-i+1} e_{12} R_{12}(\alpha_i^2) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_2-1 \quad (\text{II-79})$$

$$(v) \quad e_{12} c_{n_2-1}^1 \geq 0 \quad (\text{II-80})$$

$$(vi) \quad e_{21} g_{n_1-1}^*(\cdot) \geq 0 \quad \forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-81})$$

le processus décrit par (II-59-60) avec les notations (II-61-67) est asymptotiquement stable si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

$$\mathcal{P}_{n_1}(0) \geq -\epsilon \quad (\text{II-82})$$

$$\mathcal{P}_{n_1}(0) \mathcal{P}_{n_2}(\cdot, 0) - e_{12} e_{21} \cdot R_{12}(0) R_{21}(\cdot, 0) \geq -\epsilon \quad (\text{II-83})$$

$$\forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, la stabilité est globale.

Démonstration

Lorsque les conditions (II-74 → 81) sont vérifiées, la matrice $A(\cdot)$ caractéristique du processus, définie par (II-73), est telle que les éléments hors diagonaux sont non négatifs et les éléments non linéaires sont isolés dans la dernière ligne.

Pour l'étude de la stabilité, l'application du théorème (II-1) conduit aux conditions suffisantes de stabilité asymptotique : (II-82 - 83) en remarquant que :

$$(-1)^n \det A(\cdot) = (-1)^{n_1+n_2-2} \det F_{11} (-1)^2 \det(\phi_{22}(\cdot) - \phi_{21}(\cdot) F_{11}^{-1} \phi_{12}) \quad (\text{II-84})$$

$$\phi_{22}(\cdot) - \phi_{21}(\cdot) F_{11}^{-1} \phi_{12} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{n_1}(0) & R_{12}(0) \\ R_1(0) & e_{12} \frac{R_2(0)}{R_2(0)} \\ R_{21}(\cdot, 0) & \mathcal{P}_{n_2}(\cdot, 0) \\ e_{21} \frac{R_1(0)}{R_1(0)} & - \frac{R_2(0)}{R_2(0)} \end{bmatrix} \quad (\text{II-85})$$

$$\frac{\mathcal{P}_{n_1}(0)}{R_1(0)} = - \sum_{i=1}^{n_1-1} \alpha_i^1 - a_1 - \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{\mathcal{P}_{n_1}(\alpha_i^1)}{\alpha_i^1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_1-1} (\alpha_i^1 - \alpha_j^1)^{-1} \quad (\text{II-86})$$

$$\frac{\mathcal{P}_{n_2}(\cdot, 0)}{R_2(0)} = - \sum_{i=1}^{n_2-1} \alpha_i^2 - a_1 - \sum_{i=1}^{n_2-1} \frac{\mathcal{P}_{n_2}(\cdot, \alpha_i^2)}{\alpha_i^2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_2-1} (\alpha_i^2 - \alpha_j^2)^{-1} \quad (\text{II-87})$$

$$\frac{R_{21}(\cdot, 0)}{R_2(0)} = g_{n_1}^* - \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{R_{21}(\cdot, \alpha_i^1)}{\alpha_i^1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_1-1} (\alpha_i^1 - \alpha_j^1)^{-1} \quad (\text{II-88})$$

$$\frac{R_{12}(0)}{R_1(0)} = c_{n_2-1}^1 - \sum_{i=1}^{n_2-1} \frac{R_{12}(\alpha_i^2)}{\alpha_i^2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_2-1} (\alpha_i^2 - \alpha_j^2)^{-1} \quad (\text{II-89})$$

Si de plus $\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$ la stabilité du processus étudié est globale.

I-2-3 Interprétation graphique

Il est possible d'interpréter le théorème (II-5) comme la localisation des racines d'un polynôme à coefficients non constants.

A titre d'exemple considérons le système du quatrième ordre pour lequel l'évolution de $\mathcal{P}(t, x, \mathcal{P}, \lambda)$ est représentée dans la figure (II-1) suivante :

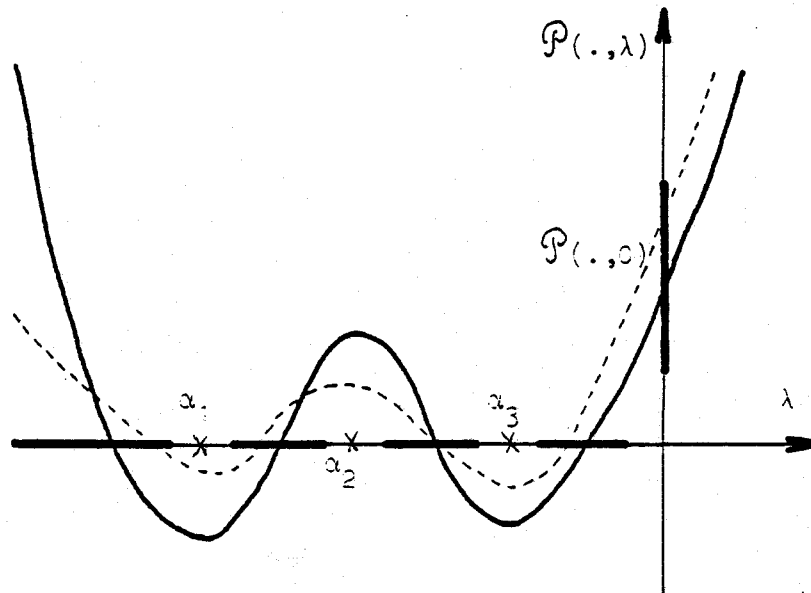


Fig.(II-1): localisation des racines de $\mathcal{P}(\cdot, \lambda)$

Lorsque (t, x) varient dans $\mathcal{Z} \times \mathcal{X}$, les domaines d'évolution des racines variables de $\mathcal{P}(\cdot, \lambda) = 0$ sur l'axe des abscisses étant bornés, les conditions suffisantes de stabilité établies au théorème (II-5) impliquent que ces domaines sont à gauche de l'axe des $\mathcal{P}(\cdot, \lambda)$ et peuvent être séparés par des nombres réels négatifs α_i .

La recherche des conditions de stabilité pour les processus étudiés au théorème (II-5) est ainsi réduite à :

- la détermination des nombres réels négatifs α_i
- et la vérification de la conjecture linéaire qui s'exprime dans ce cas spécifique par la condition $\mathcal{P}(\cdot, 0) \geq \varepsilon > 0$.

L'exploitation de ce résultat nous conduira à la définition, au chapitre III, d'une nouvelle méthode de synthèse des processus non linéaires monovariables et multivariables du type interconnecté basée sur la localisation des racines du "polynôme caractéristique instantané" d'un processus.

I-3 SYSTEMES DU TYPE LUR'E POSTNIKOV

Les conditions suffisantes de stabilité des processus non linéaires décrits par des équations différentielles scalaires s'interprètent aisément sur l'étude de la stabilité des processus hiérarchisés à deux niveaux.

La classe importante des systèmes du type LUR'E POSTNIKOV pour laquelle la validité de la conjecture du linéaire est vérifiée, permet, de plus, une interprétation fréquentielle qui nous conduira pour une classe particulière de processus à l'étude des relations existant entre les conditions suffisantes de stabilité présentées ici et les résultats obtenus par POPOV [6].

I-3-1 Systèmes monovariables du type LUR'E POSTNIKOV

I-3-1-1 Systèmes fortement non linéaires

Soit le processus défini par les relations suivantes :

$$\frac{d}{dt} (x) = A x + B u$$

$$u = \phi(t, x, P, e)$$

(II-98)

où $x \in \mathcal{X}$ désigne le vecteur état, u la loi de commande du processus à l'instant $t \in \mathcal{T}$ et $e \in \mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ l'entrée. De plus nous avons : $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times 1}$, $c \in \mathcal{R}^{1 \times n}$, $\phi \in \Phi$

$$\phi_n = \left\{ \begin{array}{l} \phi : \mathcal{T} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}, \phi(t, x, \mathbb{P}, 0) = -\phi^* x, \\ \phi^* = \text{diag}\{(\phi_i^*)\}, \phi_i^* \in [\underline{\phi}, \bar{\phi}] \subset \mathcal{R}^{n \times n}, \\ \phi_i^* : \mathcal{T} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \end{array} \right. \quad (\text{II-99})$$

Pour $e = 0$, l'état $x = 0$ est supposé être l'unique point d'équilibre de (II-98).

Soit :

$$W(p) = \frac{1}{D(p)} \quad (\text{II-100})$$

avec $D(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n$

la fonction de transfert de la partie linéaire du système (II-98).

Soit :

$$N^*(t, x, \mathbb{P}, \lambda) = c_0^*(t, x, \mathbb{P}) + c_1^*(t, x, \mathbb{P}) \lambda + \dots + c_{n-1}^*(t, x, \mathbb{P}) \lambda^{n-1} \quad (\text{II-101})$$

un polynôme en $\lambda \in \mathcal{R}$ défini, pour t et x donnés, par ses coefficients :

$$c_i^*(t, x, \mathbb{P}) = \phi_{i+1}^*(t, x, \mathbb{P}) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{et} \quad \forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-102})$$

$$c^*(t, x, \mathbb{P}) = (c_0^*(t, x, \mathbb{P}), c_1^*(t, x, \mathbb{P}), \dots, c_{n-1}^*(t, x, \mathbb{P})) \quad \forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-103})$$

Dans ces conditions, nous pouvons choisir pour le processus (II-98) en régime autonome la nouvelle représentation :

$$\frac{d}{dt} (x) = A - B \cdot C^*(t, x, \mathbb{P}) \quad x \quad (\text{II-104})$$

avec :

$$\begin{array}{l}
 A - B C^*(t, x, P) = \\
 \text{(II-105)}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \\
 & & & \dots \\
 & & & 1 \\
 -(a_0 + c_0^*(t, x, P)) & -(a_1 + c_1^*(t, x, P)) & \dots & -(a_{n-1} + c_{n-1}^*(t, x, P))
 \end{array} \right]$$

La matrice $[A - B C^*(t, x, P)]$ étant du type compagnon une étude analogue à la précédente conduit à l'énoncé du théorème (II-7)

Théorème (II-7)

(a) S'il existe ϵ , \mathcal{X} et α_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$, satisfaisant les inégalités

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < 0 \tag{II-51}$$

tels que :

$$\text{(i)} \quad (-1)^{n-i} [D(\alpha_i) + N^*(t, x, P, \alpha_i)] \geq 0 \tag{II-106}$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$\text{(ii)} \quad a_0 + c_0^*(t, x, P) > \epsilon > 0 \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \tag{II-107}$$

le système défini par (II-98) avec les notations (II 99 → 103) est asymptotiquement stable.

(b) Si la condition (a) est remplie pour $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, la stabilité est globale.

Exemple (II-4)

Soit le processus décrit par (II-98) tel que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = - (1.6 + \sin t \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}) x_1 - 3 x_2$$

il vient :

$$D(\alpha) + N^*(., \alpha) = \alpha^2 + 3\alpha + (0.6 + \sin t \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2})$$

Le choix de $\alpha = -0.5$ conduit aux inégalités :

$$-(D(\alpha) + N^*(., \alpha)) = 0,65 - \sin t \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} > 0 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2$$

$$D(0) + N^*(., 0) = 0,6 + \sin t \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \geq 0,1 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2$$

Il résulte alors du théorème (II-7) que le système est absolument stable.

I-3-1-2 Systèmes monovariabiles à non linéarité séparable

Considérons le système S du type LUR'E POSTNIKOV représenté par le schéma bloc de la figure (II-2) :

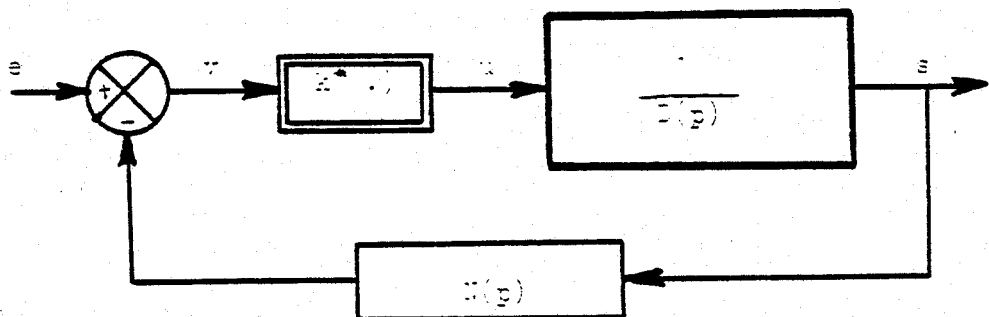


Fig. (II-2) : Système du type LUR'E POSTNIKOV

où la loi de commande est définie, pour $e = 0$, par la relation :

$$u = -k^*(t, x, P) c x \quad (\text{II-108})$$

$c = [c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]$ étant un vecteur constant et

$$k^* : \mathcal{T} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R}, \quad k^* [\underline{k}, \bar{k}] c \mathcal{R}$$

et où la partie linéaire en boucle ouverte est caractérisée par sa fonction de transfert $L(p)$ telle que :

$$L(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec :

$$N(p) = c_0 + c_1 p + \dots + c_{n-1} p^{n-1} \quad (\text{II-109})$$

$$D(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n \quad (\text{II-110})$$

Notons z_1, z_2, \dots, z_m ($m \leq n-1$) et p_1, p_2, \dots, p_n respectivement les racines des équations :

$$N(p) = 0 \quad (\text{II-111})$$

et $D(p) = 0 \quad (\text{II-112})$

Théorème (II-8)

(a) S'il existe $\epsilon > 0$ et \mathcal{X} tels que :

(i) $N(\alpha)$ admet $(n-1)$ racines z_i réelles distinctes et négatives

(ii) $D(0) + k^*(t, x, P) N(0) \geq \epsilon > 0 \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-113})$

(iii) les polynômes $N(\alpha)$ et $D(\alpha)$ forment une paire positive [16] (où les résidus relatifs aux divers pôles de $\frac{1}{W(p)}$ sont négatifs).

le point d'équilibre $x = 0$ du système S défini fig. (II-2) avec les notations (II-108→110) est asymptotiquement stable.

(b) Si la condition (a) est vérifiée pour $\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$, la stabilité est globale.

Démonstration :

Le système de la figure (II-2) est régi par le système différentiel suivant :

$$\frac{d}{dt} (x) = [A - BC k^*(t, x, P)] x \quad (\text{II-114})$$

pouvant être obtenu à partir de (II-104) en faisant

$$c^*(t, x, P) = k^*(t, x, P) c \quad (\text{II-115})$$

Pour garantir la propriété de stabilité asymptotique du processus de la figure (II-2), il suffit de choisir les paramètres α_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$, tels que

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < 0 \quad (\text{II-51})$$

$$\alpha_i = z_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{II-116})$$

$$(-1)^{n-i} D(z_i) \geq 0 \quad (\text{II-117})$$

$$\text{et } a_0 + k^*(t, x, P) c_0 \geq \varepsilon \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-118})$$

ce qui correspond à l'application du théorème (II-5)

En remarquant que (II-117) est vérifié lorsque les polynômes $N(\alpha)$ et $D(\alpha)$ forment une paire positive ou lorsque les résidus relatifs aux divers pôles de $\frac{1}{W(p)}$ sont négatifs [18] il vient le théorème (II-8).

Dans le cas où le polynôme $N(\lambda)$ admet m racines réelles et négatives, l'application du théorème (II-7) pour les processus définis au théorème (II-8) conduit, aisément, au théorème (II-9) suivant :

Théorème (II-9):

(a) S'il existe $\epsilon > 0$, \mathcal{X} et des paramètres arbitraires vérifiant les inégalités :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < 0 \quad (\text{II-51})$$

tels que :

$$(i) \quad (-1)^{n-i} [D(\alpha_i) + k^*(.) N(\alpha_i)] \geq 0 \quad (\text{II-118})$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$(ii) \quad D(0) + k^*(.) N(0) \geq \epsilon > 0 \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-113})$$

le point d'équilibre $x = 0$ du système S défini figure (II-2) avec les notations (II-108 \rightarrow 110) est asymptotiquement stable.

(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, la stabilité est globale.

I-3-2 Interprétations fréquentielle et graphique

I-3-2-1 Relation avec le critère de POPOV [6-a]

a) Le critère de POPOV [6a] correspond à une analyse fréquentielle de la stabilité relative à une certaine classe de processus monovariables pour lesquels, en particulier, la partie linéaire est supposée admettre des pôles stables.

L'application des théorèmes (II-8) et (II-9) que nous proposons fait intervenir une condition (II-113) de la forme :

$$k^*(t, x) + \frac{1}{W(0)} \geq \epsilon > 0 \quad \forall (t, x) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \quad (\text{II-119})$$

semblable à celle fournie par le critère de POPOV, cette condition étant vérifiée pour la seule pulsation ω égale à zéro.

Toutefois, il est nécessaire pour les processus définis au théorème (II-8) d'effectuer une localisation relative préalable des pôles et des zéros de la fonction de transfert $W(p)$. Lorsque celle-ci n'est

pas factorisée a priori, il suffit de vérifier des conditions du type (II-118) ou que les polynômes $N(p)$ et $D(p)$, définissant les numérateur et dénominateur de $W(p)$, forment une paire positive [16].

b) Il convient de préciser que les deux hypothèses de stabilité et de complètes commandabilité et observabilité de la partie linéaire requises par le critère de POPOV ne doivent plus nécessairement être vérifiées dans l'application des théorèmes (II-8) et (II-9) ainsi que l'illustre l'exemple (II-5) suivant.

En effet, considérons le processus représenté figure (II-3) :

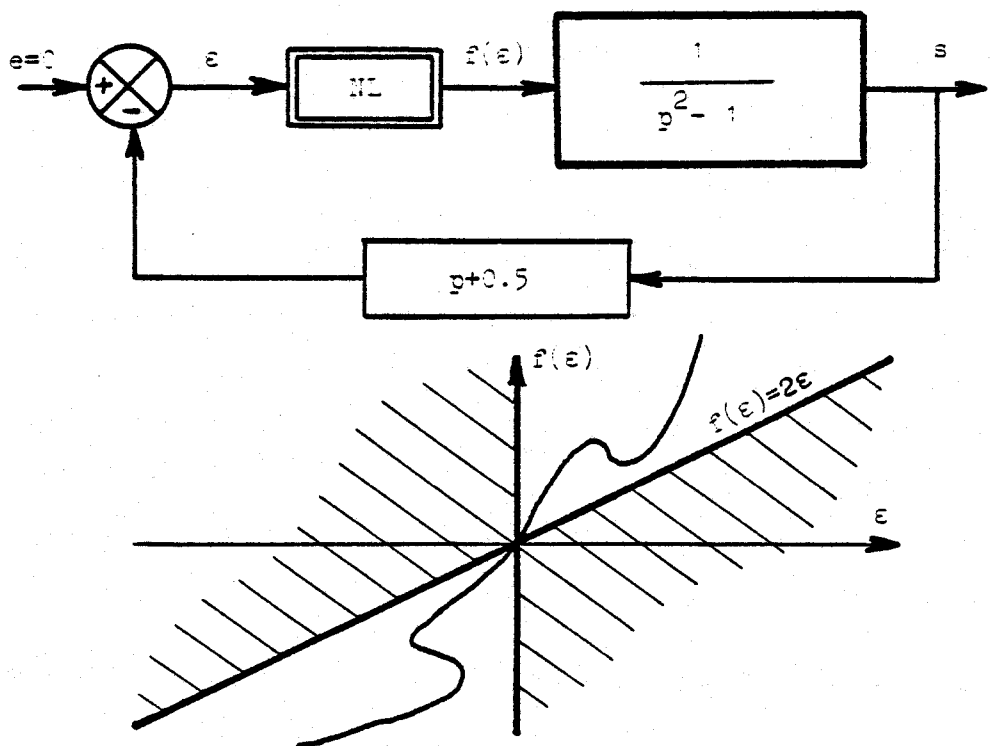


figure (II-3)

Sa caractéristique linéaire, définie par sa fonction de transfert $W(p) = \frac{p + 0.5}{p^2 - 1}$ étant instable, nous ne pouvons donc conclure, en ce qui concerne la stabilité du processus, en utilisant le critère de POPOV.

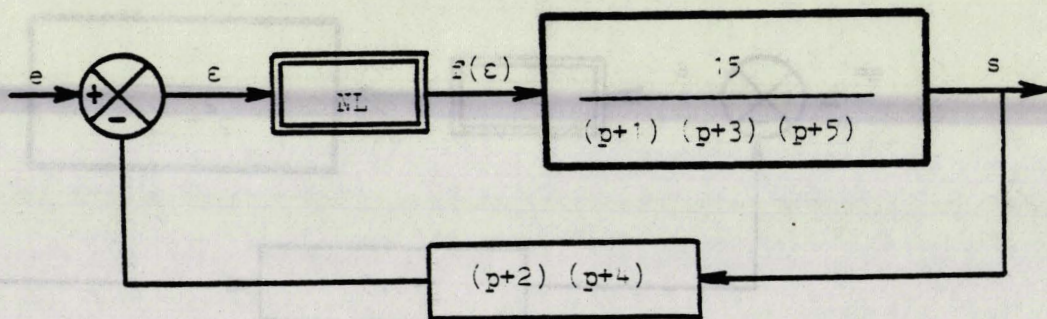
Par contre, il résulte de l'application du théorème (II-9) la condition suffisante de stabilité absolue :

$$f^*(.) + \frac{1}{W(0)} \geq \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^2$$

c) De même, il n'est plus nécessaire de vérifier que

$$\varepsilon f(\varepsilon) > 0$$

comme l'illustre l'exemple (II-6) du processus représenté figure (II-4)



figure(II-4)

pour lequel les polynômes en p définis par :

$$N(p) = (p + 2) (p + 4)$$

$$D(p) = (p + 1) (p + 3) (p + 5)$$

forment une paire positive.

L'application du théorème (II-8) montre que la stabilité absolue est garantie pour le processus si la non linéarité reste dans le domaine \mathcal{D} du plan $(f(\varepsilon), \varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.

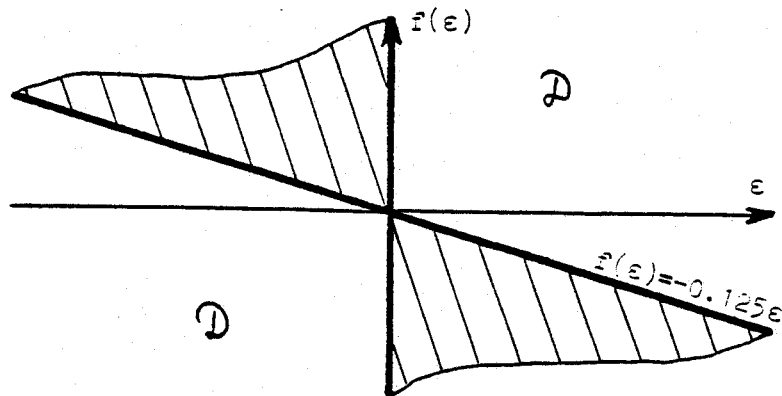


figure (II-4)

1-3-2-2 Interprétation graphique

L'interprétation des théorèmes (II-7) et (II-9) nécessite la résolution du problème du choix des paramètres arbitraires α_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$, vérifiant les inégalités (II-51).

a) Dans le cas où $N(\lambda)$ admet $(n-1)$ racines réelles, distinctes et négatives, z_i , la localisation des racines $\mathcal{P}(\cdot, \lambda) = D(\lambda) + k^*(\cdot)N(\lambda)$ peut être conduite à partir de la localisation des racines de $D(\lambda)$ en fixant le paramètre α_i égal à z_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$.

Ainsi, lorsque les zéros et les pôles de fonction de transfert $W(p)$ sont réels, négatifs, distincts et alternés, les racines $p_i(\cdot)$ $\forall i = 1, 2, \dots, n-2$, de $\mathcal{P}(\cdot, \lambda)$ sont telles que :

$$z_1 < p_1(\cdot) < z_2 < p_2(\cdot) < \dots < p_{n-2}(\cdot) < z_{n-1} < 0 \quad \forall (t, x, \mathcal{P}) \in \mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{P} \quad (\text{II-120})$$

Pour de tels processus la conjecture linéaire est vérifiée et conduit à la condition : $D(0) + k^*(\cdot)N(0) \geq \epsilon > 0 \quad \forall (t, x, \mathcal{P}) \in \mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{P}$

b) Dans le cas où $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ admettent respectivement m et ℓ racines réelles, distinctes et négatives, $m < \ell < n-1$, z_i , $\forall i = 1, 1, \dots, m$ d_j , $\forall j = 1, 2, \dots, \ell$ telles que :

$$z_1 < d_1 < z_2 < d_2 < \dots < d_{m-1} < z_m$$

le polynôme $\mathcal{P}(\cdot, \lambda)$ a $(m-1)$ racines variables séparées par les m zéros de $W(p)$:

$$z_1 < p_1(\cdot) < z_2 < \dots < p_{m-1}(\cdot) < z_m \quad (\text{II-121})$$

ce qui permet de fixer m parmi les $(n-1)$ paramètres α_i , comme suit :

$$\alpha_i = z_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$k(\cdot)$ variant, les polynômes $\mathcal{P}(\cdot, \lambda)$ passent donc par m points fixes de coordonnées $(D(z_i), z_i)$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ dans le plan $(\mathcal{P}(\cdot, \lambda), \lambda)$, et situés alternativement de part et d'autre de l'axe des λ .

Ces interprétations simplifient considérablement la résolution du problème du choix des paramètres arbitraires α_i pour localiser l'ensemble des racines du polynôme $\mathcal{P}(\cdot, \lambda)$ conformément à l'étude envisagée au paragraphe (I-2-3).

c) Exemple (II-7)

Pour le processus décrit par le schéma bloc de la figure (II-5)

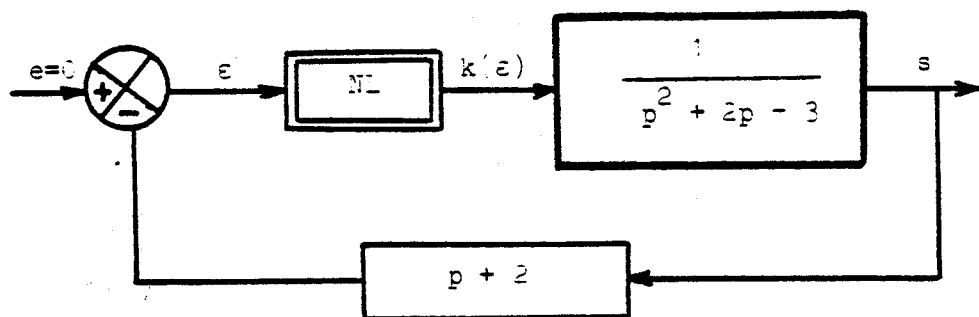


Figure (II-5)

avec $k^*(\cdot) \in [2, 4]$, nous avons :

$$\mathcal{P}(\cdot, \lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda - 3) + k^*(\cdot) (\lambda + 2)$$

$$D(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

$$N(\lambda) = \lambda + 2$$

Le choix de $\alpha_1 = z_1 = -2$ implique que $D(-2) = -3 < 0$, et donc que : $(-1) \cdot \mathcal{P}(\cdot, -2) > 0$. La vérification de la contrainte :

$$\mathcal{P}(\cdot, 0) = -3 + 2k^*(\cdot) > 0 \quad k^*(\cdot) \in [2, 4]$$

permet alors d'assurer la stabilité globale du processus.

I-3-3 Systèmes multivariables du type interconnecté

L'étude précédente (I-3-1) peut être étendue au cas où plusieurs sous-systèmes du type LUR'E POSTNIKOV sont couplés.

La recherche de classes de tels processus pour lesquels la conjecture du linéaire est vérifiée, conduit à la détermination de tests de stabilité développant des conditions portant sur la structure de couplage et sur les propriétés des sous-systèmes.

Dans ce paragraphe, est envisagé un couplage particulier de deux sous-systèmes de grande dimension ; l'extension de l'étude aux processus composés de plusieurs sous-systèmes, est présentée sur un exemple.

I-3-3-1 Description de la classe des processus étudiés

Les processus représentés figure (II-6), correspondant à l'interconnexion de deux sous-systèmes S_1 et S_2 d'ordres respectifs n_1 et n_2 , peuvent être décrits par deux équations différentielles scalaires analogues à celles envisagées dans le paragraphe (I-2-2).



Avec les notations suivantes :

$$N_i(\lambda) = \sum_{j=0}^{n_i-1} c_j^i \lambda^j \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{II-122})$$

$$N_{i+2}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n_i-1} c_j^{i+2} \lambda^j \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{II-123})$$

$$D_i(\lambda) = \lambda^{n_i} + \sum_{j=0}^{n_i-1} a_j^i \lambda^j \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{II-124})$$

$$\mathcal{P}_{n_1}(\cdot, \lambda) = \lambda^{n_1} + \sum_{j=0}^{n_1-1} (a_j^1 + k_1 f_1^*(\cdot) c_j^1 + e_{11} e_{21} k_1 f_4^*(\cdot) f_5^*(\cdot) c_j^4) \lambda^j \quad (\text{II-125})$$

$$\mathcal{P}_{n_2}(\cdot, \lambda) = \lambda^{n_2} + \sum_{j=0}^{n_2-1} (a_j^2 + k_2 f_2^*(\cdot) c_j^2 + e_{22} e_{12} k_2 f_3^*(\cdot) f_6^*(\cdot) c_j^3) \lambda^j \quad (\text{II-126})$$

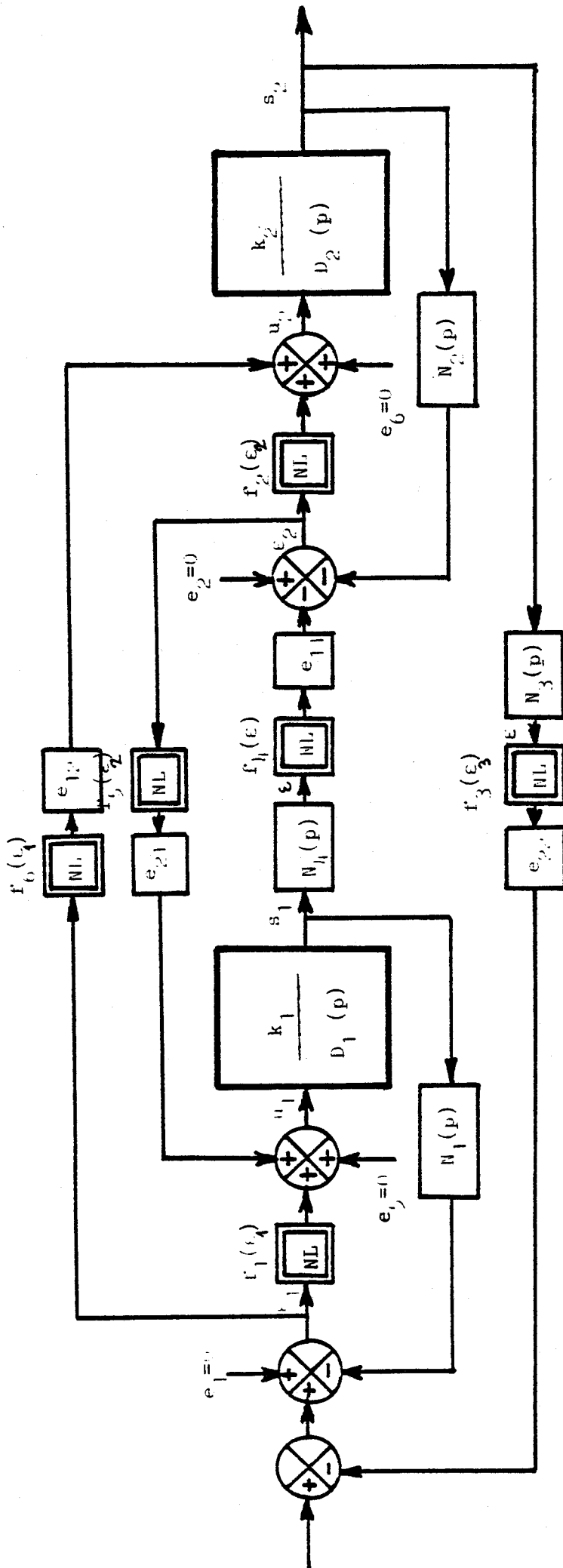


Figure (II-6): Systèmes du type LJR'E POSTNIKOV interconnectés



$$R_{21}(\cdot, \lambda) = \sum_{j=0}^{n_1-1} -k_2(e_{11}f_2^*(\cdot)f_4^*(\cdot)c_j^4 + e_{12}f_6^*(\cdot)c_j^1) \lambda^j \quad (\text{II-127})$$

$$R_{12}(\cdot, \lambda) = \sum_{j=0}^{n_2-1} -k_1(e_{22}f_1^*(\cdot)f_3^*(\cdot)c_j^3 + e_{21}f_5^*(\cdot)c_j^2) \lambda^j \quad (\text{II-128})$$

$$e_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i,j = 1,2$$

$$f_i(\cdot) \in \Phi \quad , \quad f_i(\sigma) = f_i^*(\sigma)\sigma \quad , \quad f_i^*(\cdot) \in [f_i^-, \overline{f_i}] \quad \forall i = 1,2,\dots,6$$

l'évolution du système étudié est alors régie par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} s_1^{(n_1)} + \sum_{j=0}^{n_1-1} (a_j^1 + k_1 f_1^*(\cdot) c_j^1 + e_{11} e_{21} k_1 f_4^*(\cdot) f_5^*(\cdot) c_j^4) s_1^{(j)} &= \\ &= \sum_{j=0}^{n_2-1} -k_1 (e_{22} f_1^*(\cdot) f_3^*(\cdot) c_j^3 + e_{21} f_5^*(\cdot) c_j^2) s_2^{(j)} \end{aligned} \right. \quad (\text{II-129})$$

$$\left\{ \begin{aligned} s_2^{(n_2)} + \sum_{j=0}^{n_2-1} (a_j^2 + k_2 f_2^*(\cdot) c_j^2 + e_{22} e_{12} k_2 f_3^*(\cdot) f_6^*(\cdot) c_j^3) s_2^{(j)} &= \\ &= \sum_{j=0}^{n_1-1} -k_2 (e_{11} f_2^*(\cdot) f_4^*(\cdot) c_j^4 + e_{12} f_6^*(\cdot) c_j^1) s_1^{(j)} \end{aligned} \right. \quad (\text{II-130})$$

Nous distinguons deux cas particuliers importants :

1. $e_{12} = e_{21} = 0$

le processus S est alors constitué de deux sous-systèmes S_1 et S_2 du type LUR'E POSTNIKOV couplés en série.

2. $e_{12} = e_{21} = e_{11} = e_{22} = 0$

les sous-systèmes S_1 et S_2 sont déconnectés. La recherche de

classe de systèmes S pour lesquels la conjecture du linéaire est vérifiée, peut être conduite dans ce cas séparément pour les sous-systèmes S_1 et S_2 en utilisant les résultats obtenus aux paragraphes (I-3-1) et (I-3-2).

I-3-3-2 Couplage série de deux sous-systèmes

Nous envisageons dans ce paragraphe l'étude de la stabilité d'un processus défini dans la figure (II-6), régi par les équations différentielles scalaires (II-129, 130) avec les notations (II-122 → 124) et tel que :

$$e_{12} = e_{21} = 0 \tag{II-131}$$

$$f_1^*(.) = f_1 \text{ (constante)} \tag{II-132}$$

$$f_3^*(.) = f_3 \text{ (constante)} \tag{II-133}$$

Il vient alors la représentation suivante du processus :

$$s_1^{(n_1)} + \sum_{j=0}^{n_1-1} (a_j^1 + k_1 f_1 c_j^1) s_1^{(j)} = \sum_{j=0}^{n_2-1} -k_1 e_{22} f_1 f_3 c_j^3 s_2^{(j)} \tag{II-134}$$

$$s_2^{(n_2)} + \sum_{j=0}^{n_2-1} (a_j^2 + f_2^*(.) c_j^2) s_2^{(j)} = \sum_{j=0}^{n_1-1} -k_2 e_{11} f_2^*(.) f_4^*(.) c_j^4 s_1^{(j)} \tag{II-135}$$

L'application directe du théorème (II-6) conduit à des conditions suffisantes de stabilité explicitées dans le théorème (II-10).

Théorème (II-10)

- (a) S'il existe $\epsilon < 0$, α_i^1 , $\forall i = 1, 2, \dots, n_1-1$ et α_j^2 , $\forall j = 1, 2, \dots, n_2-1$, vérifiant les inégalités (II-74, 75), tels que :

$$(i) \quad (-1)^{n_1-i} \left[(\alpha_i^1)^{n_1} + \sum_{j=0}^{n_1-1} (a_j^1 + k_1 f_1 c_j^1) (\alpha_i^1)^j \right] > 0 \quad (II-136)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n_1-1$$

$$(ii) \quad (-1)^{n_1-i} k_2 e_{11} f_2^*(.) f_4^*(.) \sum_{j=0}^{n_1-1} c_j^4 (\alpha_i^1)^j \geq 0 \quad (II-137)$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_1-1$$

$$(iii) \quad (-1)^{n_2-i} \left[(\alpha_i^2)^{n_2} + \sum_{j=1}^{n_2-1} (a_j^2 + k_2 f_2^*(.) c_j^1) (\alpha_i^2)^j \right] \geq 0 \quad (II-138)$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_2-1$$

$$(iv) \quad (-1)^{n_2-i} k_1 e_{22} f_1 f_3 \sum_{j=0}^{n_2-1} c_j^3 (\alpha_i^2)^j \geq 0 \quad (II-139)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n_2-1$$

$$(v) \quad -k_2 e_{11} f_2^*(.) f_4^*(.) c_{n_1-1}^4 \geq 0 \quad (II-140)$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$(vi) \quad -k_1 e_{22} f_1 f_3 c_{n_2-1}^3 \geq 0 \quad (II-141)$$

Le processus décrit par (II-134) et (II-135) avec les notations (II-122 + 124) et (II-132-133) est asymptotiquement stable si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$a_0^1 + k_1 f_1 c_0^1 > 0 \quad (II-142)$$

$$(a_0^1 + k_1 f_1 c_0^1) (a_0^2 + k_2 f_2^*(.) c_0^2) - e_{11} e_{22} k_1 k_2 f_1 f_2^*(.) f_3 f_4^*(.) c_0^1 c_0^2 \geq -\epsilon$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (II-143)$$

(b) Si la condition (a) est vérifiée pour $\mathcal{X} = \mathcal{R}^{n_1+n_2}$, la stabilité globale.

Remarques :

a) L'application du théorème (II-10) suppose la stabilité des sous-systèmes du type LUR'E POSTNIKOV S_1 et S_2 . En effet :

- les contraintes (II-136) et (II-142) impliquent que S_1 est asymptotiquement stable (voir théorème (II-7)).
- les contraintes (II-138) associées aux conditions (II-140 + 143) qui impliquent :

$$a_0^2 + k_2 f_2^* (.) c_j^2 \geq -\epsilon \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

confèrent au sous-système S_2 la propriété de stabilité asymptotique.

b) Lorsqu'il est possible de localiser d'une part les racines du polynôme caractéristique du sous-système S_1 et de : $N_4(\lambda) = 0$, par les mêmes $\alpha_i^1 < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$, et celles du polynôme caractéristique du sous-système S_2 et de : $N_3(\lambda) = 0$ par les mêmes paramètres $\alpha_i^2 < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$ d'autre part, le test de la stabilité par le théorème (II-10) est simplifié considérablement.

I-3-3-3 Cas d'interconnexion de deux sous-systèmes

Le processus considéré dans ce cas est présenté figure (II-6) et est régi par les équations (II-129, 130) avec les notations (II-122 + 128) telles que :

$$f_1^* (.) = f_1 \text{ (constante)} \quad (\text{II-145})$$

$$f_4^* (.) = f_4 \text{ (constante)} \quad (\text{II-146})$$

$$f_5^* (.) = f_5 \text{ (constante)} \quad (\text{II-147})$$

L'application du théorème (II-6) dans ce cas conduit au théorème (II-11).

Théorème (II-11)

(a) S'il existe $\varepsilon < 0$, \mathcal{X} , α_i^1 , $\forall i = 1, 2, \dots, n_1-1$ et α_j^2 , $\forall j = 1, 2, \dots, n_2-1$ vérifiant les inégalités (II-74,75) tels que :

$$(i) \quad (-1)^{n_1-i} \mathcal{P}_{n_1}(\alpha_i^1) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_1-1 \quad (II-148)$$

$$(ii) \quad (-1)^{n_1-i+1} R_{21}(\cdot, \alpha_i^1) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_1-1 \quad (II-149)$$

$$\forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$(iii) \quad (-1)^{n_2-i} \mathcal{P}_{n_2}(\cdot, \alpha_i^2) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_2-1 \quad (II-150)$$

$$\forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$(iv) \quad (-1)^{n_2-i+1} R_{12}(\alpha_i^2) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_2-1 \quad (II-151)$$

$$(v) \quad -k_1(e_{22} f_1 f_3^*(\cdot) c_{n_2-1}^3 + e_{21} f_5 c_{n_2-1}^2) \geq 0 \quad (II-152)$$

$$\forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$(vi) \quad -k_2(e_{11} f_2^*(\cdot) f_4(\cdot) c_{n_1-1}^4 e_{12} f_6^*(\cdot) c_{n_1-1}^1) \geq 0 \quad (II-153)$$

$$\forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

Le processus décrit par (II-129-130) avec les notations (II-122 + 128) est asymptotiquement stable si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{P}_{n_1}(0) > 0 \quad (II-154)$$

$$\mathcal{P}_{n_1}(0) \mathcal{P}_{n_2}(\cdot, 0) - R_{12}(0) R_{21}(\cdot, 0) \geq -\varepsilon \quad \forall (t, x, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (II-155)$$

(b) Si la condition (a) est satisfaite pour $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, la stabilité est globale.

II-3-3-4 Exemple d'interconnexion de plusieurs sous-systèmes : Exemple (II-8)

L'étude de la stabilité du processus représenté figure (II-7) peut être menée à partir de la description dans l'espace d'état suivante :

$$\frac{d}{dt} (x) = A(t, x) x \quad (II-156)$$

$$A(\cdot) = \begin{bmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -\mathcal{P}_3(\cdot, \alpha^3) & -\alpha^3 + (t_1^3 + t_2^3) - k_3 r_3^*(\cdot) & 0 & 0 \\ k_2 & -\mathcal{P}_2(\cdot, \alpha^2) & 0 & 0 & -\alpha^2 + (t_1^2 + t_2^2) - k_2 r_2^*(\cdot) & 0 \\ -\mathcal{P}_1(\cdot, \alpha^1) & 0 & k_1 k r^*(\cdot) & 0 & 0 & -\alpha^1 + (t_1^1 + t_2^1) - k_1 r_1^*(\cdot) \end{bmatrix}$$

Avec

+ $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ trois paramètres arbitraires choisis négatifs

+ $f_i(u) = f_i^*(u) u$, $f_i^*(\cdot) \in [\underline{f}_i, \overline{f}_i] \forall i = 1, 2, 3 \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T}_x \mathcal{R}$ (II-157)

+ $\mathcal{P}_i(\cdot, \alpha^i) = (\alpha^i - t_1^i)(\alpha^i - t_2^i) + k_i f_i^*(\cdot) (\alpha^i - \lambda^i) \quad \forall i=1, 2, 3$
(II-158)

Cas particulier

Nous supposons que :

$$\alpha^1 = \lambda^1 = t_1^1 < 0$$

$$\alpha^2 = \lambda^2 = t_1^2 < 0$$

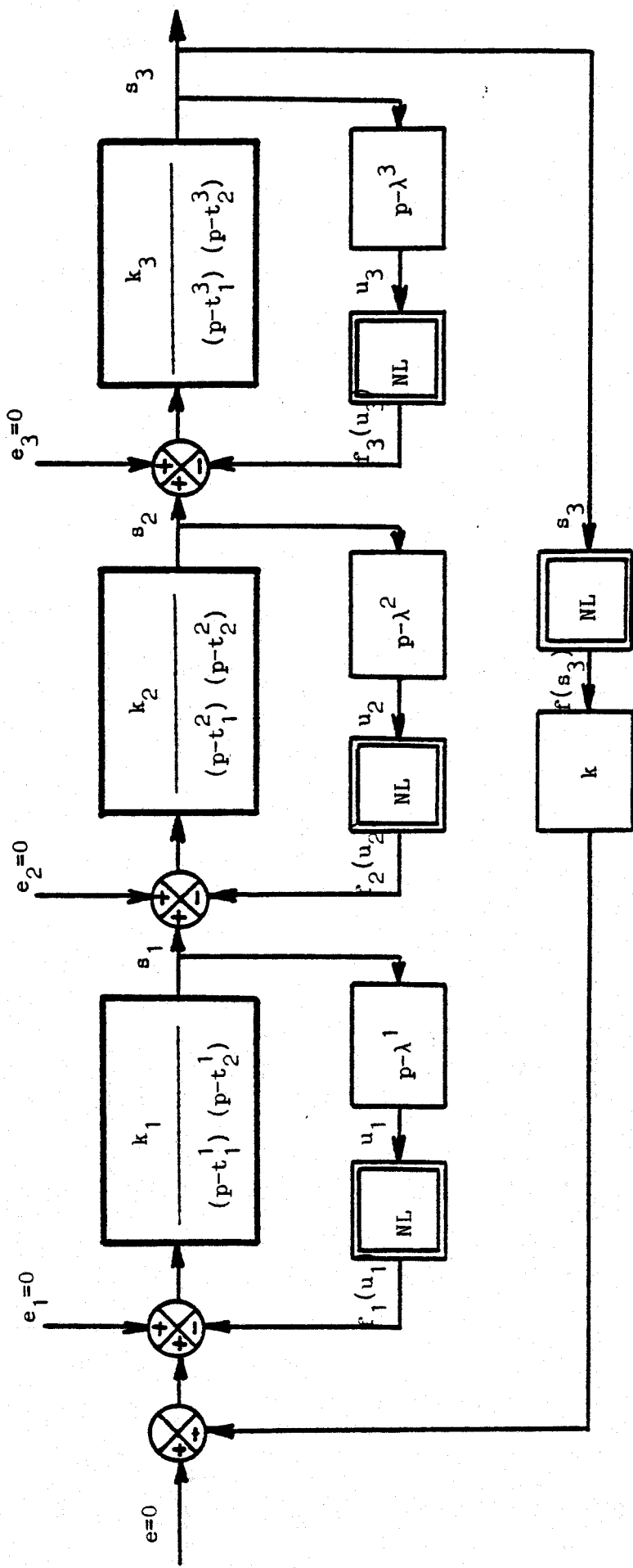


Figure (II-7): Trois sous-systèmes interconnectés en série.



$$a^3 = \lambda^3 = t_1^3 < 0$$

$$f_2^*(.) = f_2 \text{ (constante)}$$

$$f_3^*(.) = f_3 \text{ (constante)}$$

$$f^*(.) \geq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{R}$$

$$k \geq 0 \text{ et } k_i > 0 \quad \forall i = 1,2,3$$

(II-159)

Il vient :

$$\mathcal{P}_i(., a^i) = 0 \quad \forall i = 1,2,3 \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{R}$$

et la matrice $A(.)$ est une matrice en flèche mince généralisée d'ordre 4, à éléments hors diagonaux non négatifs et à éléments non linéaires isolés dans la dernière ligne de $A(.)$

L'application du théorème (II-2) conduit aux conditions suffisantes de stabilité asymptotique suivantes :

$$t_2^2 - k_2 f_2 < 0$$

$$t_2^3 - k_3 f_3 < 0$$

(II-160)

$$(t_2^1 - k_1 f_1^*)(t_2^2 - k_2 f_2)(t_2^3 - k_3 f_3) t_1^1 t_1^2 t_1^3 - k k_1 k_2 k_3 f^*(.) \geq \varepsilon > 0$$

$$\forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{R}$$

qui font apparaître les caractéristiques propres des sous-systèmes.

Remarque :

Les processus particuliers étudiés dans ce paragraphe, constituent une classe de systèmes pour laquelle la conjecture du linéaire est vérifiée et permettent l'illustration du problème concernant l'influence d'une simplification entre pôles et zéros de la fonction de transfert de la partie linéaire sur l'étude de la stabilité, par la méthode proposée, des systèmes du type LUR'E POSTNIKOV.

L'étude du processus de la figure (II-7) pour $e_1 = e_2 = e = 0$, dans le cas particulier envisagé, peut être conduite à partir du schéma

équivalent de la figure (II-8) où les sous-systèmes linéaires S_2 et S_3 en série sont remplacés par un sous-système unique S_2 dont la fonction de transfert $W'_2(p)$ est égale au produit des fonctions de transfert des sous-systèmes bouclés S_2 et S_3 .

$$W'_2(p) = \prod_{i=2}^3 \left(\frac{k_i}{(p-t_1^i)(p-t_2^i) + f_i k_i (p - \lambda^i)} \right)$$

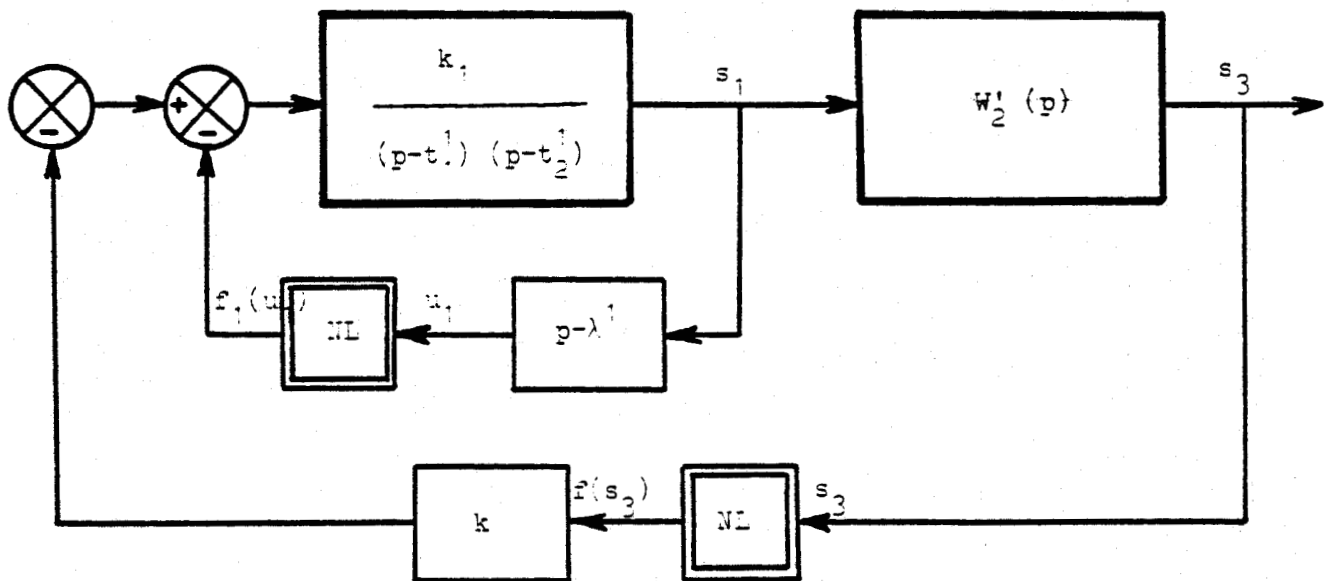


figure (II-8)

Ces considérations permettent de choisir 4 paramètres arbitraires α^i (un pour S_1 et trois pour S'_2) et donc de définir une description du processus particulier par une matrice caractéristique en flèche mince généralisée d'ordre 5, plus mince que celle définie dans (II-156).

II - ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES DYNAMIQUES COMPLEXES

II-1 SUR LE PROBLEME DU CHOIX D'UN SYSTEME DE COMPARAISON POUR L'ETUDE DE LA STABILITE

La vérification de la conjecture du linéaire pour les processus non linéaires de grande dimension dont la matrice caractéristique est identique à celle du système de comparaison, conduit à des conditions suffisantes de stabilité qui peuvent s'interpréter simplement en fonction des propriétés physiques du processus, comme nous l'avons montré dans la première partie de ce chapitre.

En général, se placer dans le cas où la conjecture du linéaire est vérifiée et où la matrice caractéristique du processus est identique à celle du système de comparaison, n'est pas toujours possible. Nous définissons alors selon la complexité du processus, un système de comparaison de dimension adéquate pour l'étude de la stabilité.

Lorsqu'en particulier la matrice caractéristique d'un processus hiérarchisé à deux niveaux comporte k rangées (lignes ou colonnes) à éléments non constants, l'étude de la stabilité du processus peut-être conduite à partir d'un système de comparaison d'ordre $(n-k+1)$, d'ordre r ou d'ordre 1 respectivement lorsque les systèmes du premier niveau sont par exemple : linéaires et stables, non linéaires et stables, ou non linéaires et instables. Dans les deux premiers cas les conditions de stabilité du processus font apparaître celles des systèmes composants alors que, dans le troisième cas, les contraintes dépendent de l'ensemble des paramètres définissant le processus.

Un conditionnement d'un ou de plusieurs systèmes composants non linéaires ou instables, à partir de transformations linéaires dans l'espace d'état, conduisant à un choix adéquat du système coordonnateur permet le changement de la nature de la stabilité et de la linéarité des systèmes composants.

Certaines classes de processus hiérarchisés à deux niveaux dont certains sous-systèmes du premier niveau sont non linéaires et instables, peuvent aussi être étudiés à partir d'un système de comparaison d'ordre $(n-k+1)$ ou r , au lieu de 1 .

II-2 ELEMENTS NON CONSTANTS ISOLEES DANS UNE RANGEE DE LA MATRICE
CARACTERISTIQUE

Le choix d'une norme vectorielle $p(z)$ d'un processus défini sur \mathcal{C} , telle que :

$$p(z) = |z| \quad , \quad |z| = [|z_1|, \dots, |z_n|]^T \quad , \quad z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$$

conduit à la définition d'un système de comparaison [23] d'ordre maximum égal à l'ordre n du processus.

Avec les notations suivantes :

$$A_{nh} = \{ m_{ij} \} \quad |A_{nh}| = \{ m'_{ij} \} \quad (II-161)$$

$$|A_{nh}| = \{ |m_{ij}| \} \quad \forall h \neq 1 \quad (II-161)^*$$

$$m'_{ii} = \text{Reel}(m_{ii})$$

$$m'_{ij} = |m_{ij}| \quad \forall i \neq j$$

il vient le théorème (II-12) :

Théorème (II-12)

Le processus défini dans \mathcal{C} par (II-1) avec les notations (II-161) et (II-161)* admettant une matrice caractéristique $A(.)$ dont les éléments non linéaires sont isolés dans la dernière ligne ou colonne de $A(.)$, est asymptotiquement stable s'il existe \mathcal{X} tel que l'une des trois conditions (a), (b) ou (c) suivantes soit vérifiée :

- (a) (i) $A(.)$ est une matrice en flèche mince d'ordre n définie par (I-43) dont les éléments diagonaux $a_{ii}, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$ sont constants et négatifs

- (ii) il existe $\epsilon < 0$ tel que :

$$\text{Reel}(a_{nn}(.)) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_{ni}(.)| \cdot |a_{in}(.)|}{\text{Reel}(a_{ii})} \leq \epsilon \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{I}, \mathcal{X}, \mathcal{P} \quad (II-162)$$

(b) (i) A(.) est une matrice en flèche mince généralisée d'ordre r définie par (I-44) dont les éléments a_{ii} sont constants et négatifs, $\forall i = 1, 2, \dots, r-1$

(ii) il existe $\epsilon < 0$ tel que :

$$(-1)^i \det \left(|A_{rr}^{(i)}| - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{|A_{rj}^{(i)}| \cdot |A_{jr}^{(i)}|}{\text{Reel}(a_{jj})} \right) \geq -\epsilon \quad (\text{II-163})$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n-r+1 \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

(c) (i) A(.) est une matrice en flèche épaisse généralisée d'ordre r définie par (II-45) et (II-5) dont les éléments a_{ii}^j sont constants et négatifs, $\forall i = 1, 2, \dots, n_j-1, \forall j = 1, 2, \dots, r-1$

(ii) il existe $\epsilon < 0$ tel que :

$$\text{Reel}(a_{n_i n_i}^i) - \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{|a_{n_i j}^i| \cdot |a_{j, n_i}^i|}{\text{Reel}(a_{jj}^i)} \leq \epsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{II-164})$$

$$(-1)^i \det \left(|A_{rr}^{(i)}| - \sum_{j=1}^{n_r} |A_{rj}^{(i)}| \cdot |A_{jj}^{-1}| \cdot |A_{jr}^{(i)}| \right) \geq -\epsilon \quad (\text{II-165})$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n_r \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

Ce théorème peut être démontré simplement en remarquant que le système de comparaison, relatif à la norme $p(z) = |z|$ définie plus haut, est tel que sa matrice caractéristique est à éléments non linéaires isolés dans une seule ligne ou colonne. Pour garantir la stabilité asymptotique pour les processus étudiés, il suffit de vérifier les conditions du linéaire.

Comme dans la première partie de ce chapitre, il est possible d'envisager plusieurs cas particuliers remarquables ; nous nous bornerons dans ce paragraphe à l'étude des systèmes du type LUR' E POSTNIKOV ou décrits par des équations différentielles scalaires.

Théorème (II-13)

Le processus défini par (II-1) est asymptotiquement stable s'il existe $\varepsilon < 0$ et \mathcal{X} et si l'une des conditions (a), (b), (c), ou (d) est vérifiée :

- (a) Le processus décrit par l'équation différentielle (II-44) avec les notations (II-48) est tel que pour α_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ nombres complexes arbitraires choisis distincts et à partie réelle négative, on ait :

$$\text{Reel} \left(- \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \right) - \tilde{a}_{n-1}(\cdot) - \sum_{i=1}^{n-1} (\text{Reel}(\alpha_i))^{-1} \left| - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \mathcal{P}(\cdot, \alpha_i) \right| \geq -\varepsilon \quad (\text{II-166})$$

$$\forall (t, x, \mathcal{P}) \in \mathcal{Z} * \mathcal{X} * \mathcal{P}$$

- (b) le processus du type LUR'E POSTNIKOV décrit le schéma bloc de la figure (II-2) avec les notations (II-109, 110) est tel que pour α_i paramètres arbitraires complexes distincts choisis à partie réelle négative, $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ on ait :

$$\text{Reel} \left(- \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \right) - a_{n-1} - c_{n-1} k^*(\cdot) - \sum_{i=1}^{n-1} (\text{Reel}(\alpha_i))^{-1} \left| - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \dots \right. \\ \left. \dots (D(\alpha_i) + k^*(\cdot) N(\alpha_i)) \right| \geq -\varepsilon \quad (\text{II-167})$$

$$\forall (t, x, \mathcal{P}) \in \mathcal{Z} * \mathcal{X} * \mathcal{P}$$

- (c) le processus du type LUR'E POSTNIKOV décrit par le schéma bloc de la figure (II-2) avec les notations (II-109, 110) est tel que :

(i) $c_{n-1} = 1$

- (ii) $N(p)$ admet $(n-1)$ racines z_i distinctes, complexes à partie réelle négative

(iii) $-\sum_{i=1}^{n-1} z_i - a_{n-1} - k^*(\cdot) - \sum_{i=1}^{n-1} (\text{Reel}(z_i))^{-1} \dots$

$$\dots \left| - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (z_i - z_j)^{-1} D(z_i) \right| \geq -\varepsilon \quad (\text{II-168})$$

$$\forall (t, x, \mathcal{P}) \in \mathcal{Z} * \mathcal{X} * \mathcal{P}$$

(d) le processus du type LUR'E POSTNIKOV décrit par le schéma bloc de la figure (II-2) avec les notations (II-109,110) est tel que :

(i) D(p) admet (n-1) racines p_i distinctes complexes à partie réelle négative, $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$

(ii) $\text{Reel}(p_n) - c_{n-1} |k^*(.)| - |k^*(.)| \sum_{i=1}^{n-1} \text{Reel}(p_i) \dots$

(II-169)

$$\dots \left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (p_i - p_j)^{-1} N(p_i) \right| \geq -\epsilon$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

Remarques :

- Les théorèmes (II-5, 7, 8,9) sont des corollaires remarquables du théorème (II-13).

- Il n'est plus nécessaire, comme l'exigent les théorèmes (II-7, 9), de séparer toutes les racines du polynôme caractéristique du système en boucle fermée par les paramètres $\alpha_i, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$, pour garantir la propriété de stabilité pour les processus considérés.

II-3 ELEMENTS NON LINEAIRES ISOLES DANS k RANGEES DE LA MATRICE CARACTERISTIQUE

L'étude de la stabilité d'un système dont la matrice caractéristique a ses éléments non constants isolés dans une seule rangée, se simplifie lorsqu'elle est conduite à partir du théorème (II-12).

Lorsque les éléments non linéaires sont isolés dans k rangées de la matrice caractéristique $A(.)$, il est possible de ramener l'étude de la stabilité au cas précédent en définissant [2] un système de comparaison non linéaire d'ordre $(n-k+1)$ dont la matrice caractéristique a ses éléments non linéaires isolés dans une seule rangée. Le système de comparaison est d'ordre 1 lorsqu'en particulier $k = n$.

En particulier, il apparaît intéressant d'étudier le système hiérarchisé à deux niveaux composé de r sous-systèmes monovariante S_i du type LUR'E POSTNIKOV, d'ordre n_i , $\forall i = 1, 2, \dots, r$, pouvant être instables, à partir d'un système de comparaison d'ordre $(n-r+1)$,

$$n = \sum_{i=1}^r n_i.$$

II-3-1 Système de comparaison d'ordre $(n-k+1)$

II-3-1-1 La matrice caractéristique est en flèche mince d'ordre n

Lorsque la matrice caractéristique $A(\cdot)$ est en flèche mince définie par (I-43) et telle que les éléments non linéaires sont isolés dans k lignes, il est possible de distinguer deux cas importants selon la répartition des éléments non constants.

1^{er} cas :

$$A(\cdot) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & a_{1n} \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & & a_{n-k,n} \\ & & a_{n-k,n-k} & & & & a_{n-k,n} \\ & & & & & & a_{n-k+1,n} \\ & & & & a_{n-k+1,n-k+1}(\cdot) & & a_{n-k+1,n}(\cdot) \\ & & & & & & \vdots \\ a_{n1}(\cdot) & \dots & a_{n,n-k}(\cdot) & & a_{n,n-k+1}(\cdot) & \dots & a_{nn}(\cdot) \end{bmatrix}$$

↑

$n-k$

↓

↑

k

↓

(II-170)

2^{ème} cas :

$$A(.) = \begin{bmatrix} a_{11}(.) & & & & & a_{1n}(.) \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & a_{kk}(.) & & & a_{kn}(.) \\ & & & a_{k+1,k+1} & & a_{k+1,n} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} \quad (\text{II-171})$$

Le choix d'un système de comparaison relatif à la norme :

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|, \dots, |x_k|, \sum_{i=n-k+1}^n |x_i|]^T \quad (\text{II-172})$$

ou :

$$p(x) = [\sum_{i=1}^k |x_i|, |x_{k+1}|, \dots, |x_n|]^T \quad (\text{II-173})$$

lorsque la matrice caractéristique est définie respectivement par (II-170) et (II-171) conduit [2] au théorème (II-14) suivant :

Théorème(II-14)

Le processus (II-1) est asymptotiquement stable s'il existe $\varepsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que l'une des deux conditions suivantes (a) et (b) soit vérifiée :

- (a) la matrice caractéristique A(.) du processus est définie sur \mathcal{E} par la relation (II-170) telle que :
 - (i) les éléments non linéaires sont isolés dans les k dernières lignes de A(.), $k < n$

(ii) les $a_{ii}, \forall i = 1, 2, \dots, n-k$ sont à partie réelle négative.

$$(iii) \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{j=n-k+1}^{n-1} \{ \text{Reel}(a_{jj}(\cdot)) + |a_{nj}(\cdot)| \} \\ \text{Reel}(a_{nn}) + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} |a_{in}(\cdot)| \end{array} \right\} \quad (II-174)$$

$$- \sum_{i=1}^{n-k} (\text{Reel } a_{ii})^{-1} |a_{ni}(\cdot)| \cdot |a_{in}| \leq \varepsilon$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

(b) la matrice caractéristique $A(\cdot)$ du processus est définie sur \mathcal{C} par la relation (II-171) telle que :

(i) les éléments non linéaires sont isolés dans les k premières lignes de $A(\cdot)$, $k < n$

(ii) les $a_{ii}, \forall i = n-k+1, \dots, n-1$, sont à partie réelle négative

$$(iii) m_1 = \max_{i=1}^k \{ \text{Reel}(a_{ii}(\cdot)) \} \leq \varepsilon \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (II-175)$$

$$(iv) \text{Reel}(a_{nn}) - m_1^{-1}(\cdot) \max_{i=1}^k |a_{ni}(\cdot)| \sum_{i=1}^k |a_{in}| - \dots$$

$$\dots \sum_{i=k+1}^{n-1} (\text{Reel } a_{ii})^{-1} |a_{ni}| |a_{in}| \leq \varepsilon \quad (II-176)$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

Remarque :

Le cas où la matrice $A(\cdot)$ est telle que ses éléments non linéaires sont isolés dans k colonnes peut être étudié de la même façon.

II-3-1-2 La matrice caractéristique est en flèche
mince généralisée d'ordre r

Propriété (P7)

Lorsque la matrice caractéristique d'un processus est en flèche, il en est de même de la matrice caractéristique du système de comparaison associé, relatif à une norme vectorielle régulière $p(x) = \{p_i(x_i)\}$, $\forall x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_r^T]^T \in \mathcal{R}^n$, $x_i \in \mathcal{R}^{n_i}, n = \sum_{i=1}^r n_i$.

Nous nous proposons de généraliser cette propriété pour une matrice caractéristique $A(.)$ en flèche mince généralisée d'ordre r telle que ses éléments non linéaires soient isolés dans k colonnes : $k < n$.

Considérons avec les notations (I-44) et (I-49), le cas suivant :

$$\begin{array}{cccc}
 & \overset{i}{\longleftarrow} & \overset{r-i-1}{\longleftrightarrow} & \overset{k-r+i-1}{\longleftrightarrow} & \overset{n-k-i}{\longrightarrow} \\
 & \longleftarrow & \longleftrightarrow & \longleftrightarrow & \longrightarrow \\
 A(.) = & \left[\begin{array}{cccc}
 F_{11}^{11} & & \phi_{12}^{11} & \phi_{12}^{12} \\
 & F_{11}^{22} & \phi_{12}^{21} & \phi_{12}^{22} \\
 \phi_{21}^{11} & \phi_{21}^{12} & \phi_{22}^{11} & \phi_{22}^{12} \\
 \phi_{21}^{21} & \phi_{21}^{22} & \phi_{22}^{21} & \phi_{22}^{22}
 \end{array} \right] & \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{l} i \\ r-i-1 \\ k-r+i-1 \\ n-k-i \end{array}
 \end{array} \quad (\text{II-177})$$

avec les notations (II-178) suivantes :

$$\begin{array}{l}
 F_{11}^{11} = \left[\begin{array}{cc} F_{11}^{11} & \\ & F_{11}^{22} \end{array} \right] \quad \phi_{12}^{11} = \left[\begin{array}{cc} \phi_{12}^{11} & \phi_{12}^{12} \\ \phi_{12}^{21} & \phi_{12}^{22} \end{array} \right] \\
 \phi_{21}^{11} = \left[\begin{array}{cc} \phi_{21}^{11} & \phi_{21}^{12} \\ \phi_{21}^{21} & \phi_{21}^{22} \end{array} \right] \quad \phi_{22}^{11} = \left[\begin{array}{cc} \phi_{22}^{11} & \phi_{22}^{12} \\ \phi_{22}^{21} & \phi_{22}^{22} \end{array} \right]
 \end{array} \quad (\text{II-178})$$

Le choix d'une norme $p(x)$ telle que :

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|, \dots, |x_i|, \sum_{j=i+1}^{k+i} |x_j|, |x_{k-i+1}|, \dots, |x_n|]^T \quad (\text{II-179})$$

conduit à un système de comparaison d'ordre $(n-k+1)$ dont la matrice caractéristique est en flèche mince généralisée d'ordre $(i+1)$ et telle que ses éléments non linéaires soient isolés dans la $(i+1)$ ième colonne et ses éléments hors diagonaux soient non négatifs.

La vérification de la conjecture du linéaire pour le système de comparaison garantit alors la propriété de stabilité asymptotique pour le processus étudié.

II-3-2 Système de comparaison d'ordre r

Considérons le cas général où la matrice caractéristique du processus est définie sur \mathcal{C} par (II-45). Le choix d'une norme vectorielle de la forme :

$$p(x) = [p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_r(x_r)]^T \quad (\text{II-180})$$

avec par exemple :

$$p_i(x_i) = \sum_{j=1}^{n_i} |x_{ij}| \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{II-181})$$

associe à une matrice caractéristique $A(.)$ de la forme :

$$A(.) = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & A_{1r} \\ & A_{22} & & & A_{2r} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & A_{r-1,r-1} & A_{r-1,r} \\ A_{r1}(.) & A_{r2}(.) & \dots & A_{r,r-1}(.) & A_{rr}(.) \end{bmatrix} \quad (\text{II-182})$$

un système de comparaison d'ordre r dont la matrice caractéristique $M(A)$ est en flèche mince d'ordre r définie par :

$$M(A) = \begin{bmatrix} m_{11} & & & & m_{1r} \\ & m_{22} & & & m_{2r} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & m_{r-1,r-1} & m_{r-1,r} \\ m_{r1}(\cdot) & m_{r2}(\cdot) & \dots & m_{r,r-1}(\cdot) & m_{rr}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II-183})$$

avec :

$$m_{ii} = \max_{h \in I_i} [\text{Reel } a_{kk} + \sum_{\substack{k \in I_i \\ h \neq k}} |a_{kh}|] \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{II-184})$$

$$m_{rr}(\cdot) = \max_{h \in I_r} [\text{Reel } a_{kk}(\cdot) + \sum_{\substack{k \in I_r \\ h \neq k}} |a_{kh}(\cdot)|] \quad (\text{II-185})$$

$$m_{ir} = \max_{h \in I_r} \left\{ \sum_{k \in I_i} |a_{kh}| \right\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{II-186})$$

$$m_{ri} = \max_{h \in I_i} \left\{ \sum_{k \in I_r} |a_{kh}(\cdot)| \right\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{II-187})$$

en notant I_i et I_j les ensembles d'indices des lignes et des colonnes intervenant dans le bloc A_{ij} .

Théorème (II-15)

- (a) Le processus décrit par (II-1) dont la matrice caractéristique est définie sur \mathcal{E} par (I-45) et (II-182) est asymptotiquement stable si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) les éléments non linéaires sont isolés dans les k dernières lignes de la matrice caractéristique A(.) du processus, $k < n_r$.
- (ii) les éléments m_{ii} , $\forall i = 1, 2, \dots, r-1$, définis par (II-184) sont négatifs.
- (iii) il existe $\varepsilon < 0$, \mathcal{X} tels que les éléments m_{ij} définis par (II-184 - 185 - 186 - 187) vérifient l'inégalité :

$$m_{rr}(\cdot) - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{m_{ri}(\cdot) m_{ir}}{m_{ii}} \leq \varepsilon \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-188})$$

- (b) lorsque la condition (a) est satisfaite pour $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ la stabilité est globale.

Remarques :

- Les conditions d'application du théorème (II-15) impliquent que les sous-systèmes S_i définis par leur matrice caractéristique $A_{ii}(\cdot)$, $\forall i = 1, 2, \dots, r$ soient stables. En effet, la relation (II-184) avec la contrainte (ii) du théorème (II-15) implique que les sous-systèmes S_i , $\forall i = 1, 2, \dots, r-1$, sont stables ; l'inégalité (II-188) implique alors l'inégalité : $m_{rr}(\cdot) \leq \varepsilon < 0$, $\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$ d'où la stabilité du dernier sous-système.

- Si $n_r < k < \sum_{j=i}^r n_j$, il est encore possible d'appliquer le théorème (II-15) en considérant le système coordonnateur d'ordre $\sum_{j=i}^r n_j$, et la matrice A(.) en flèche épaisse d'ordre i. Aucune hypothèse n'est exigée dans ce cas sur les sous-systèmes S_j , $\forall j = i, i+1, \dots, r$.

II-3-3 Cas d'une contraction à l'ordre 1

Soit $m(\cdot)$ le scalaire défini par la relation [26] :

$$m(\cdot) = \max_i \left[c_{ii}(\cdot) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |c_{ij}(\cdot)| \right] \quad (\text{II-189})$$

$$c(.) = \{ c_{ij}(.) \} \text{ pouvant \u00eatre } A(.), A^T(.), \text{ ou } (A(.) + A^T(.)) \quad [24]$$

Une condition suffisante de stabilit\u00e9 asymptotique du processus (II-1) tel que les \u00e9l\u00e9ments $a_{ij}(.)$, $\forall i, j$, de la matrice caract\u00e9ristique $A(.)$ soient non lin\u00e9aires, est qu'il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$m(.) \leq \epsilon \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-190})$$

La v\u00e9rification de cette contrainte n'impose pas la propri\u00e9t\u00e9 de stabilit\u00e9 des sous-syst\u00e8mes du premier niveau, lorsqu'en particulier le processus est hi\u00e9rarchis\u00e9 \u00e0 deux niveaux.

II-4 APPLICATION A L'ETUDE DU CAS D'INTERCONNEXION DE DEUX SYSTEMES

Pour illustrer l'\u00e9tude pr\u00e9c\u00e9dente de la stabilit\u00e9 des syst\u00e8mes dynamiques complexes nous envisageons dans ce paragraphe d'\u00e9tudier un processus non lin\u00e9aire d\u00e9crit par les \u00e9quations diff\u00e9rentielles scalaires suivantes :

$$s_1^{(n_1)} + \sum_{i=0}^{n_1-1} f_i^{1*}(.) s_1^{(i)} = e_{12} \sum_{i=0}^{n_2-1} g_i^{1*}(.) s_2^{(i)} \quad (\text{II-191})$$

$$s_2^{(n_2)} + \sum_{i=0}^{n_2-1} f_i^{2*}(.) s_2^{(i)} = e_{21} \sum_{i=0}^{n_1-1} g_i^{2*}(.) s_1^{(i)} \quad (\text{II-192})$$

dans lesquelles $s_i \in \mathcal{R}$ repr\u00e9sente la sortie du sous-syst\u00e8me S_i r\u00e9gi par l'\u00e9quation diff\u00e9rentielle scalaire :

$$s_i^{(n_i)} + \sum_{j=0}^{n_i-1} f_j^{i*}(.) s_i^{(j)} = 0 \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{II-193})$$

et

$$f_i^{j*}(.) \in [\underline{f}_i^j, \overline{f}_i^j] \subset \mathcal{R} \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n_j-1$$

$$\forall (t, y_j, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad \forall j = 1, 2 \quad (\text{II-194})$$

$$g_i^j(.) \in [\underline{g}_i^j, \overline{g}_i^j] \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n_j - 1$$

$$\forall (t, y_j, P) \in \mathcal{E} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad \forall j = 1, 2 \quad (\text{II-195})$$

$$y_j = [s_j, s_j^{(1)}, \dots, s_j^{(n_j-1)}]^T \in \mathbb{R}^n \quad \forall j = 1, 2 \quad (\text{II-196})$$

Notations :

$$\alpha_i^1, \beta_i^1 \in \mathcal{C} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$$

$$\alpha_j^2, \beta_j^2 \in \mathcal{C} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_2 - 1$$

$$P_{n_i}(\cdot, \lambda) = \lambda^{n_i} + \sum_{j=0}^{n_i-1} f_j^{i*}(\cdot) \lambda^j \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{II-197})$$

$$R_{12}(\cdot, \lambda) = \sum_{i=0}^{n_2-1} g_i^{1*}(\cdot) \lambda^i \quad (\text{II-198})$$

$$R_{21}(\cdot, \lambda) = \sum_{i=0}^{n_1-1} g_i^{2*}(\cdot) \lambda^i \quad (\text{II-199})$$

$$R_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{n_i-1} (\lambda - \alpha_j^i) \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{II-200})$$

La caractérisation d'un tel processus par une matrice $A(\cdot)$ en flèche peut être effectuée de la même manière qu'au paragraphe (I-2-2). Il vient alors la matrice caractéristique en flèche mince d'ordre (n_1+n_2-1) définie par (II-201) :

II-4-1 Système de comparaison d'ordre n-1

Le système de comparaison relatif à la norme p(x) définie par :

$$p(x) = [|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n-2}|, |x_{n-1}| + |x_n|]^T \quad (\text{II-202})$$

$$\forall x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathcal{X}$$

est décrit par la matrice caractéristique M(A) telle que :

$$M(A(\cdot)) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \vdots \\ & \text{Reel}(\alpha_i^1) & & & |\beta_i^1| \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \text{Reel}(\alpha_j^2) & |\beta_j^2| \\ & & & & \vdots \\ \dots & \frac{m_{ni}^1(\cdot)}{|\beta_i^1|} \dots & \dots & \frac{m_{nj}^2(\cdot)}{|\beta_j^2|} \dots & m_{nn}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II-203})$$

avec :

$$m_{ni}^1(\cdot) = \left\{ \left| \frac{\lambda - \alpha_i^1}{R_1(\lambda)} \right| \cdot [|-\mathcal{P}_{n_1}(\cdot, \lambda)| + e_{21} |R_{21}(\cdot, \lambda)|] \right\}_{\lambda = \alpha_i^1} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_1+1 \quad (\text{II-204})$$

$$m_{nj}^2(\cdot) = \left\{ \left| \frac{\lambda - \alpha_j^2}{R_2(\lambda)} \right| \cdot [|-\mathcal{P}_{n_2}(\cdot, \lambda)| + e_{12} |R_{12}(\cdot, \lambda)|] \right\}_{\lambda = \alpha_j^2} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_2-1 \quad (\text{II-205})$$

$$m_{nn}(\cdot) = \max \left\{ \text{Reel} \left(- \sum_{i=1}^{n_1-1} \alpha_i^1 \right) - f_{n_1-1}^{1*}(\cdot) + e_{21} |g_{n_1-1}^{2*}(\cdot)|, \dots \right. \\ \left. \dots \text{Reel} \left(- \sum_{i=1}^{n_2-1} \alpha_i^2 \right) - f_{n_2-1}^{2*}(\cdot) + e_{12} |g_{n_2-1}^{1*}(\cdot)| \right\} \quad (\text{II-206})$$

Théorème(II-16)

(a) Le processus décrit par (II-191-192) avec les notations (II-194, 195, 197 → 200, 204 → 206) est asymptotiquement stable s'il existe $\epsilon < 0$, \mathcal{X} , et des scalaires α_i^1 et α_j^2 vérifiant les inégalités :

$$\text{Reel}(\alpha_i^1) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_1-1 \quad (\text{II-207})$$

$$\text{Reel}(\alpha_j^2) < 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_2-1 \quad (\text{II-208})$$

tels que la condition suivante soit vérifiée :

$$m_{nn}(\cdot) - \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{m_{ni}^1(\cdot)}{\text{Reel}(\alpha_i^1)} - \sum_{i=1}^{n_2-1} \frac{m_{ni}^2(\cdot)}{\text{Reel}(\alpha_i^2)} < \epsilon \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-209})$$

(b) si de plus $\mathcal{X} = \mathcal{E}^n$, la stabilité est globale.

Les scalaires m_{ni}^1 et $m_{nj}^2(\cdot)$ définis par (II-204,205), intervenant dans (II-209), s'expriment simplement en fonction des polynômes caractéristiques des sous-systèmes isolés, et des polynômes $R_{12}(\cdot)$ et $R_{21}(\cdot)$ définis par (II-198,199) caractérisant les interconnexions. Lorsqu'en particulier les sous-systèmes sont déconnectés, ce qui correspond à $e_{12} = 0$ et $e_{21} = 0$, nous retrouvons des conditions suffisantes de stabilité pour chaque sous-système, analogues à celles établies au théorème (II-13-a).

II-4-2 Système de comparaison d'ordre 1

Le choix d'un système de comparaison d'ordre relatif à la norme $p(x)$ définie par :

$$p(x) = \max \left\{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n-2}|, |x_{n-1}| + |x_n| \right\}$$

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathcal{X} \quad (\text{II-210})$$

conduit aux conditions suffisantes de stabilité définies au théorème (II-17) :

Théorème (II-17)

- (a) Le processus décrit par (II-191, 192) avec les notations (II-194, 195, 197 → 200, 204 → 206) est asymptotiquement stable s'il existe $\epsilon < 0$, et des scalaires α_i^1, β_i^1 , $\forall i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$, α_j^2, β_j^2 , $\forall j = 1, 2, \dots, n_2 - 1$ tels que la condition suivante soit vérifiée :

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \max_i \left\{ \text{Reel}(\alpha_i^j) + |\beta_i^j| \right\} \quad \forall j = 1, 2 \\ m_{nn}(\cdot) + \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{m_{ni}^1(\cdot)}{|\beta_i^1|} + \sum_{i=1}^{n_2-1} \frac{m_{ni}^2(\cdot)}{|\beta_i^2|} \end{array} \right\} \leq \epsilon \quad (\text{II-211})$$

$\forall (t, x, F) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$

- (b) si de plus $\mathcal{X} = \mathcal{E}^n$, la stabilité est globale.

II-5 MATRICE CARACTERISTIQUE A ELEMENTS NON LINEAIRES

Lorsque le processus est complexe d'ordre n , tel que sa matrice caractéristique est à éléments non linéaires, il est possible de conduire l'analyse de la stabilité à partir d'un système de comparaison d'ordre n , comme le montre le théorème (II-18) suivant :

Théorème (II-18)

- (a) le processus complexe d'ordre n décrit par (II-1) est asymptotiquement stable s'il existe $\varepsilon < 0$ et $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}^n$ tels que :

$$(-1)^i M(S(A(.))) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i \\ & & & \\ & & & \\ 1 & 2 & \dots & i \end{pmatrix} \geq \varepsilon \quad \forall i=1,2,\dots,n \quad \forall (t,x,P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{II-212})$$

avec $\bar{A}^T(.)$ la matrice trans-conjuguée de $A(.)$,
 $S(A(.)) = (A(.) + \bar{A}^T(.))$, et $M(S(A(.)))$ la matrice pseudo-majorante relative à la norme vectorielle $p(x) = \{ |x_i| \}$

- (b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathcal{E}^n$, la stabilité est globale.

Démonstration

Le choix de la norme scalaire $q(x) = \bar{x}^T x$ implique la stabilité asymptotique pour le processus décrit par (II-1) s'il existe une fonction ϕ de classe K au sens de HAHN [25], telle que :

$$\frac{d}{dt} (q(x)) = \bar{x}^T S(A(.)) x \quad (\text{II-213})$$

$$\bar{x}^T S(A(.)) x < -\phi(q(x)) \quad (\text{II-214})$$

Il vient a fortiori que, si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\bar{x}^T M(S(A(.))) x < -\phi(q(x)) \quad (\text{II-215})$$

le processus (II-1) est asymptotiquement stable.

L'étude de la stabilité du processus (II-1) est analogue à celle du système :

$$\frac{d}{dt} (z) = M(S(A(.))) z \quad (\text{II-216})$$

dont la matrice caractéristique est réelle, symétrique, et à éléments hors diagonaux non négatifs.

L'application des conditions de KOTELYANSKI [15] implique l'inégalité (II-212) du théorème (II-18).

Remarque :

Le théorème (II-18) permet l'étude des processus dont la matrice caractéristique a ses éléments non linéaires isolés dans certaines de ses rangées, à partir de l'étude d'un système de comparaison d'ordre n.

Si de plus la matrice A(.) est en flèche, la vérification de la contrainte (II-212), en utilisant la propriété (P1) des matrices en flèche, comme précédemment, est immédiate. Cette méthode a été utilisée pour l'étude des processus non linéaires monovariabiles et multivariabiles du type interconnecté dans [18, 19, 20, 21, 22, 23] et des processus définis figure (II-6) singulièrement perturbés au chapitre III de ce mémoire.

Nous envisageons pour illustrer ici cette méthode, l'étude du processus fortement non linéaire défini par les équations différentielles (II-191) et (II-192), ou encore par sa matrice caractéristique (II-201) avec les notations (II-194, 195, 197 → 200, 204 → 206)

Notons :

$$\Phi_{12}(\cdot) = \begin{bmatrix} \dots \frac{1}{2!} \beta_i^1 \left(\frac{\mathcal{P}_{n1}(\cdot, \lambda)(\lambda - \alpha_i^1)}{\beta_i^1 R_1(\lambda)} \right) \Big|_{\lambda = \alpha_i^1} \dots \dots \frac{e_{12}}{2!} \left(\frac{R_{12}(\cdot, \lambda)(\lambda - \alpha_j^2)}{\beta_j^2 R_2(\lambda)} \right) \Big|_{\lambda = \alpha_j^2} \dots \\ \dots \frac{e_{21}}{2!} \left(\frac{R_{21}(\cdot, \lambda)(\lambda - \alpha_i^1)}{\beta_i^1 R_1(\lambda)} \right) \Big|_{\lambda = \alpha_i^1} \dots \dots \frac{1}{2!} \beta_j^2 \left(\frac{\mathcal{P}_{n2}(\cdot, \lambda)(\lambda - \alpha_j^2)}{\beta_j^2 R_2(\lambda)} \right) \Big|_{\lambda = \alpha_j^2} \dots \end{bmatrix} \quad (\text{II-217})$$

$$\Phi_{21}(\cdot) = \Phi_{12}^T(\cdot) \quad (\text{II-218})$$

$$F_{11} = \text{diag} \{ \dots, \alpha_i^1, \dots, \dots, \alpha_j^2, \dots \} \quad (\text{II-219})$$

$$\Phi_{22}(\cdot) = \begin{bmatrix} \text{Reel} \left(- \sum_{i=1}^{n_1-1} \alpha_i^1 \right) - f_{n_1-1}^{1*}(\cdot) & \frac{1}{2!} e_{12} g_{n_2-1}^{1*}(\cdot) + e_{21} g_{n_1-1}^{2*}(\cdot) \\ \frac{1}{2!} e_{12} g_{n_2-1}^{1*}(\cdot) + e_{21} g_{n_1-1}^{2*}(\cdot) & \text{Reel} \left(- \sum_{j=1}^{n_2-1} \alpha_j^2 \right) - f_{n_2-1}^{2*}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{II-220})$$

Théorème (II-19)

- (a) Le processus décrit par les équations différentielles (II-191, 192) est asymptotiquement stable s'il existe $\epsilon < 0$, $X \subset \mathcal{E}^n$ et $\alpha_i^1, \forall i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$, $\alpha_j^2, \forall j = 1, 2, \dots, n_2 - 1$ paramètres arbitraires choisis à partie réelle négative tels que :

$$(-1)^i \det(\phi_{22}^{(i)}(.) - \phi_{21}^{(i)}(.)F_{11}^{-1} \phi_{12}^{(i)}(.)) \geq -\epsilon \quad \forall i=1,2$$

$$\forall (t, x, p) \in \mathcal{T} \times X \times \mathcal{P}$$

avec les notations (II-194, 195, 197 \rightarrow 200, 204 \rightarrow 206, 217 \rightarrow 220).

- (b) Si de plus $X = \mathcal{E}^n$, la stabilité est globale.

Remarque :

Il n'est pas nécessaire de vérifier la propriété de stabilité des sous-systèmes isolés pour vérifier la même propriété du processus (II-191, 192) étudiée à partir du théorème (II-19).

Lorsque l'un ou/et l'autre des sous-systèmes non linéaires est/sont instable(s), le théorème (II-19) montre qu'il est possible de choisir les paramètres caractérisant les interactions de façon à garantir la propriété de stabilité asymptotique ou globale du processus complexe considéré.

CONCLUSION

Le choix de la description d'un processus, d'une représentation correspondant à une structure hiérarchisée à deux niveaux, choisie a priori, permet de simplifier considérablement le problème difficile du choix des fonctions d'agrégation et donc des systèmes de comparaison qui en résultent pour l'étude de la stabilité.

Cette structure correspondant à la représentation en flèche de la matrice caractéristique du processus permet en fait une exploration plus fine, des fonctions d'agrégation possibles, que celle effectuée sur une description quelconque du processus.

Les critères de stabilité obtenus sont d'expressions algébriques simples. Dans le cas des processus du type LUR'E POSTNIKOV une interprétation fréquentielle de ces critères est proposée. Nous avons défini pour les processus multivariables du type interconnecté des critères algébriques permettant le test de la stabilité soit au niveau hiérarchique le plus élevé, soit au niveau de chaque sous-système avec intervention des contraintes au niveau des interconnexions.

Ces résultats simplifient aussi bien l'analyse que la synthèse des processus, comme nous allons le montrer au chapitre III.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 LYAPUNOV
"Problème général de la stabilité du mouvement".
University Press, Princeton, 1949.
- 2 GENTINA J.C., BORNE P., LAURENT F.
"Stabilité des systèmes continus non linéaires de grande dimension".
Revue R.A.I.R.O., Août 1972, J-3, pp. 69-77.
- 3 LUR'E A.I., POSTNIKOV V.N.
"On the stability theory of control systems".
Prikl. Mat. i. Meh. Vol.VIII, N° 3, pp 246-248, 1944.
- 4 AIZERMAN M.A.
"On a problem related to global stability of dynamic systems".
Uspehi Mat. Nank, Vol. IV, N° 4, pp.187-188, 1949.
- 5 PLISS V.A.
"Certain Problems of the theory of the stability of motion in the whole".
Leningrad University, 1958.
- 6 POPOV V.M.
 - a) *"On absolute stability of non linear automatic control systems"*.
Avtom i Telemekh, Vol XXII, N° 8, pp 961-979, 1973.
 - b) *"Hyperstability of control systems"*.
Springler Verlag, New York, 1973.
- 7 GRUJIĆ Lj.T.
"Solutions for the Lurie Postnikov and Aizerman problems".
Int. J. Systems Sc, 1978, Vol. 9, N° 12, 1359-1372.

- 8 GENTINA J.C., BORNE P.
"Sur une condition d'application du critère de stabilité linéaire à certaines classes de systèmes continus non linéaires".
C.R.A.S., Paris, T. 275, pp; 401-404, Août 1972.
- 9 NELEPIN R.A.
"On the problem of exact boundary of the region of absolute stability of control systems".
Autom.i Telemeh., 4, pp. 30-37, 1967.
- 10 PERSIDKII S.K.
"On the problem of absolute stability"
Autom.i Telemeh., 12, 5-11, 1969.
- 11 PIATNITSKII E.S.
"Absolute stability of non stationnary non linear systems".
Autom.i Telemeh, 1, 5-15, 1970.
- 12 MUHAMETZIANOV I.A., SERIKBAEV S.S.
"On necessary and sufficient conditions for absolute stability".
Autom.i Telemeh. 11, 11-18, 1970,.
- 13 MAIGARIN B.Z.
"Certain criteria for absolute stability of control systems".
Autom.i Telemeh, 1, 188-191, 1970.
- 14 GAIDUK A.R.
"Absolute stability of control systems with multiple nonlinearities".
Autom.i Telemeh, 6, 5-11, 1976.
- 15 GENTINA J.C.
"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension".
Thèse de Doctorat es-Sciences Physique, Lille, 1976.
- 16 GANTMACHER
"Théorie des matrices".
T. 1 et II, Dunod.

- 17 GÜNTER KLEFENZ
"La régulation dans les centrales thermiques".
Eyrolles, 1974.

- 18 BENREJEB M.
"Sur la synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé".
Thèse de Docteur Ingénieur, Lille, 1976.

- 19 BORNE P., BENREJEB M.
"On the stability of a class of interconnected systems. Application to the forced working conditions".
M.T.V.S. Symposium I.F.A.C., Fredericton, 1977.

- 20 BORNE P., BENREJEB M.
"Stability of non linear composite systems".
First World Conference on mathematics at the service of man,
Barcelona, 1977.

- 21 BENREJEB M., BORNE P.
"On an algebraic stability criterion for non linear processes. Interpretation in the frequency domain".
Proc. of MECO 78 Congress, Athens, Vol. 2, pp.678-682, 1978.

- 22 BENREJEB M., LAURENT F.
"Sur la stabilité vis à vis des conditions initiales".
Proc. of MECO 79 Congress, Grenoble, pp. 234-237, 1979.

- 23 BORNE P., BENREJEB M., LAURENT F.
"Matrix approaches to absolute and dynamical stability of Lur'e Postnikov type systems".
4º Congress Informatica y Automatica, Madrid, 1979.

- 24 ROSENBROCK H.H., STOREY C.
"Mathematics of dynamical systems".
Nelson, 1970.

25 Hahn W.

"Stability of motion"

II, Dunod, 1966.

26 Laurent F., Lhote F.

"Sur une condition suffisante de stabilité asymptotique pour un système continu non linéaire".

C.R.A.S., T. 262, pp. 35-37, 1966.

CHAPITRE III

SUR LA SYNTHÈSE DES SYSTEMES CONTINUS NONLINEAIRES

INTRODUCTION

Le chapitre précédent avait pour objet la détermination des conditions suffisantes garantissant la propriété de stabilité pour de larges classes de processus non linéaires, non stationnaires, hiérarchisés et perturbés. Toutefois, les conditions mises en évidence ne donnent aucune indication concernant les performances de ces processus. Dans ce sens, ce chapitre concerne la synthèse des commandes des processus stables ou instables ou/et perturbés ou non perturbés.

La méthode de LYAPUNOV et les techniques d'agrégation, utilisées à l'origine pour l'analyse de la stabilité apparaissent bien adaptées au problème de synthèse des commandes des systèmes complexes et des systèmes multivariables du type interconnecté en particulier. Plusieurs études de ce problème ont été entreprises d'abord à partir de la définition de fonctions de LYAPUNOV scalaires [1, 16, 30, 31] et ensuite à partir de fonctions vectorielles de LYAPUNOV [2 + 7, 9 + 12, 18, 20, 21] ou du type normes vectorielles [14, 15, 17, 22]. Celles-ci développent des conditions de mise en oeuvre simple en pratique.

L'exploitation des critères de stabilité, établis au chapitre II, permet de même, la détermination de lois de commandes garantissant un comportement préspecifié du processus.

Les notions suivantes, introduites pour l'analyse de certaines classes de processus dans la première partie de ce chapitre :

- l'instabilité des processus
- la stabilité de mouvement ou stabilité dynamique des processus sensibles aux conditions initiales ou/et aux perturbations intervenant sur son état [28].
- la stabilité du système dégénéré correspondant à un processus singulièrement perturbé.

permettent l'abord du problème de la synthèse, dans la deuxième partie, dans sa généralité.

L'étude de la régulation de la fréquence de deux centrales thermiques couplées sur un même réseau est présentée dans la dernière partie de ce chapitre pour illustrer les résultats obtenus.

I - ANALYSE DE CERTAINES CLASSES DE PROCESSUS NON LINEAIRES

L'analyse de l'instabilité, de la stabilité de mouvement et de la stabilité des systèmes singulièrement perturbés est présentée dans cette section.

Après avoir établi au chapitre II des conditions suffisantes de stabilité nous envisageons dans la première partie de cette section d'établir des conditions suffisantes d'instabilité. Celles-ci quoique contraignantes, peuvent dans certaines conditions s'exprimer simplement par rapport aux caractéristiques des systèmes étudiés, en particulier, à partir de conditions semblables à celles envisageables pour les processus linéaires.

Dans une deuxième partie, le problème de la réduction de l'ordre du modèle est soulevé pour les processus non linéaires non stationnaires singulièrement perturbés, à plusieurs échelles de temps. Les conditions suffisantes de stabilité du modèle réduit du processus (système dégénéré) proposées impliquent, dans certains cas, la stabilité du processus. De même, il est possible, pour d'autres cas, de conclure à la stabilité du système dégénéré à partir de celle du processus.

L'étude de l'influence des perturbations, intervenant sur l'état d'un processus, sur la dispersion des trajectoires dans un fonctionnement à entrée non constante, a conduit à l'établissement dans les deux dernières parties de cette section de conditions suffisantes de stabilité dynamique de mise en oeuvre simple.

I-1 SYSTEMES NON LINEAIRES NON STATIONNAIRES INSTABLES

I-1-1 Systèmes minorants. Définition

L'étude de l'instabilité des processus peut être abordée de la même façon et avec les mêmes outils mathématiques que celle de la stabilité. En particulier GRUJIC et SILJAK utilisent dans [9] des

des fonctions de LYAPUNOV vectorielles, et GENTINA dans [14] les normes vectorielles.

Ces dernières ont nécessité la définition de systèmes minorants caractérisés par des matrices dites pseudo-minorantes.

Définition (III-1) [14]

La matrice $N(A(t,x))$, $\mathcal{T} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{r \times r}$ définit relativement à la norme vectorielle $p(x)$ un système minorant du système (III-1) si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$D^+[p(x)] \geq N(A(t,x)) p(x) \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (\text{III-2})$$

Nous utiliserons ici essentiellement les matrices minorantes définies comme suit :

$$1. \quad N(A(\cdot)) = \{n_{ij}(\cdot)\} \quad (\text{III-3})$$

$$n_{ii}(\cdot) = \min_{\ell \in I_i} \{ \text{Reel } a_{\ell\ell}(\cdot) - \sum_{\substack{k \in I_i \\ k \neq \ell}} |a_{k\ell}(\cdot)| \} \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{III-4})$$

$$\forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}$$

$$n_{ij}(\cdot) = - \max_{\ell \in I_j} \{ \sum_{k \in I_i} |a_{k\ell}(\cdot)| \} \quad \forall i \neq j = 1, 2, \dots, r \quad (\text{III-5})$$

I_i et I_j désignant respectivement les ensembles de lignes et de colonnes intervenant dans le bloc $A_{ij}(\cdot)$ de la matrice caractéristique $A(\cdot)$ du processus étudié.

$$2. \quad N(\cdot) = \min_{i=1}^n \{ c_{ii}(\cdot) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |c_{ij}(\cdot)| \} \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (\text{III-6})$$

$c(\cdot) = \{c_{ij}(\cdot)\}$ pouvant être la matrice $A(\cdot)$, $A^T(\cdot)$

ou $\frac{1}{2} (A(\cdot) + A^T(\cdot))$.

I-1-2 Etude de l'instabilité des systèmes mono-entrée mono-sortie

I-1-2-1 Systèmes décrits par une équation différentielle

Théorème (III-1)

Une condition suffisante pour que le processus décrit par l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(.) y^{(i)} = 0 \quad (III-7)$$

soit instable, est qu'il existe $\epsilon < 0$, \mathcal{X} et α_i nombres complexes arbitraires distincts choisis à partie réelle positive tels que :

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \text{Reel}(\alpha_i) - \tilde{a}_{n-1}(.) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\gamma_i(., \alpha_i)|}{\text{Reel}(\alpha_i)} \geq -\epsilon \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T}, \mathcal{X} \quad (III-8)$$

avec :

$$\gamma_i(., \alpha_i) = - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \left(\alpha_i^n + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{a}_j(.) (\alpha_i)^j \right) \quad (III-9)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n-1$$

Démonstration

Le processus étudié admet une matrice minorante relative à la norme $p(x) = |x|$, $|x| = [|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|]^T$,

$\forall x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, de la forme :

$$N(.) = \begin{bmatrix} \text{Reel}(\alpha_1) & & & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \text{Reel}(\alpha_{n-1}) & -1 \\ -|\gamma_1(., \alpha_1)| & \cdots & -|\gamma_{n-1}(., \alpha_{n-1})| & -\sum_{i=1}^{n-1} \text{Reel}(\alpha_i) - \tilde{a}_{n-1}(.) \end{bmatrix} \quad (III-10)$$

La matrice $N(\cdot)$ est une M-matrice si tous les déterminants des mineurs principaux sont positifs, $\forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}$ d'où le théorème (III-1).

En particulier, lorsque les conditions suivantes sont vérifiées

$$\alpha_i \in \mathcal{R} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{III-11})$$

$$\gamma_i(\cdot, \alpha_i) \geq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (\text{III-12})$$

la contrainte (III-8) du théorème (III-1) devient :

$$\tilde{a}_0(\cdot) \leq \varepsilon \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (\text{III-13})$$

Corollaire (III-1)

Le processus décrit par (III-7) avec les notations (III-8) est instable s'il existe $\varepsilon < 0$, \mathcal{X} et α_i nombres réels arbitraires distincts choisis positifs tels que les conditions (III-12) et (III-13) soient vérifiées.

I-1-2-2 Systèmes du type LUR'E POSTNIKOV

Considérons le système de la figure (II-2) non linéaire à non linéarité $k(\cdot)$ séparable, dont la partie linéaire est caractérisée par sa fonction de transfert $L(p)$:

$$L(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec :

$$D(p) = \prod_{i=1}^n (p - p_i) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i \quad (\text{III-14})$$

$$N(p) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i p^i \quad (\text{III-15})$$

$$k(t, \varepsilon, \mathbb{P}) = k^*(t, \varepsilon, \mathbb{P}) \varepsilon \quad (\text{III-16})$$

$$k^*(.) \in [\underline{k}, \bar{k}] \subset \mathcal{R} \quad \forall (t, \varepsilon, \mathbb{P}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{R} \times \mathcal{P} \quad (\text{III-17})$$

Celui-ci peut-être régi par une équation différentielle de la forme suivante :

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + k^*(.) c_i) y^{(i)} = 0 \quad (\text{III-18})$$

L'étude de l'instabilité peut ainsi être conduite à partir du théorème (III-1) ou/et du corollaire (III-1) qui imposent la positivité des parties réelles de tous les "modes instantanés" du système en boucle fermée.

Lorsqu'en particulier l'étude concerne le système en boucle ouverte, il est évident que ces conditions sont très contraignantes. En effet, il suffit dans ce cas de vérifier qu'une des racines de $D(p) = 0$ est positive pour conclure à l'instabilité du processus étudié.

Exemple (III-1)

Pour illustrer l'étude précédente relative aux systèmes monovariabiles, considérons le système du type LUR'E POSTNIKOV défini (fig. III-1) tel que :

$$z_i \in \mathcal{R} \quad , \quad p_j \in \mathcal{R} \quad , \quad \forall i = 1, 2 \quad , \quad \forall j = 1, 2, 3$$

$$D(p) = (p - p_1) (p - p_2) (p - p_3)$$

$$N(p) = (p - z_1) (p - z_2)$$

$$0 < p_1 < z_1 < p_2 < z_2 < p_3$$

$$k(\varepsilon) = k^*(\varepsilon) \varepsilon \quad , \quad k^*(\varepsilon) \in [\underline{k}, \bar{k}] \subset \mathcal{R} \quad , \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{R}$$

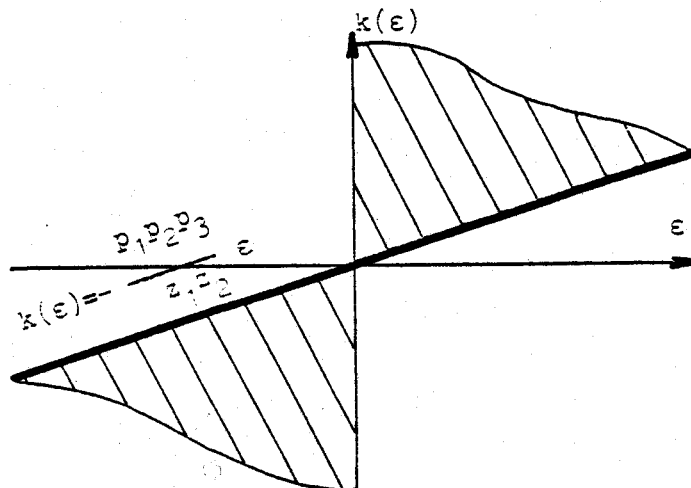
L'étude de l'instabilité d'un tel processus peut être conduite à partir du corollaire (III-1).

En effet le choix de α_i tel que $\alpha_i = z_i \quad \forall i = 1, 2$
 implique que : $\gamma_i(z_i) > 0 \quad \forall i = 1, 2.$

Une condition suffisante d'instabilité du processus est alors
 qu'il existe $\epsilon' < 0$ tel que :

$$- p_1 p_2 p_3 + z_1 z_2 k^*(\cdot) \leq \epsilon' \quad \forall \epsilon \in \mathcal{R}$$

c'est à dire que la fonction non linéaire $k(\cdot)$ reste dans le domaine
 \mathcal{D}_i défini figure (III-1).



Figure(III-1) : Domaine d'instabilité \mathcal{D}_i

I-1-3 Système hiérarchisé à deux niveaux

Plusieurs conditions d'instabilité peuvent être établies
 dans cette partie, selon le type de la forme canonique en flèche et
 selon la norme vectorielle retenue pour l'étude. En général, le choix
 des fonctions d'agrégation telles que la matrice majorante soit en
 flèche, rend possible l'utilisation des conditions établies antérieurement.

Nous envisageons dans ce paragraphe uniquement le cas d'une matrice caractéristique $A(.) = \{A_{ij}(.)\}$, (I-45), en flèche épaisse d'ordre r dont les éléments non linéaires sont isolés dans les blocs :

$$A_{kk}(\cdot) \text{ et } A_{rk}(\cdot) \text{ avec } k < r$$

Le choix de la norme :

$$p(x) = [p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_r(x_r)]^T \quad (\text{III-19})$$

avec par exemple :

$$p_i(x_i) = \sum_{j=1}^{n_i} |x_{ij}| \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{III-20})$$

associe à une matrice caractéristique de la forme :

$$A(\cdot) = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & A_{1r} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & A_{kk}(\cdot) & & A_{1k} \\ & & & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rk}(\cdot) & \dots & A_{rr} \end{bmatrix} \quad (\text{III-21})$$

une matrice pseudo-minorante en flèche mince d'ordre r définie par :

$$N(A(\cdot)) = \begin{bmatrix} n_{11} & & & & n_{1r} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & n_{kk}(\cdot) & & n_{kr} \\ & & & \ddots & \vdots \\ n_{r1} & \dots & n_{rk}(\cdot) & \dots & n_{rr} \end{bmatrix} \quad (\text{III-22})$$

(iii) Il existe $\varepsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que les éléments $n_{ij}(\cdot)$ définis par (III-23,24,25,26,27) vérifient l'inégalité :

$$n_{rr} - \frac{n_{rk}(\cdot) n_{kr}}{n_{kk}(\cdot)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r-1} \frac{n_{ri} n_{ir}}{n_{ii}} \geq -\varepsilon \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{U} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{III-30})$$

Remarques :

1. L'étude de l'instabilité des processus peut être conduite de façon semblable à celle de la stabilité. Lorsque les non linéarités figurent dans tous les blocs de la matrice en flèche, il est intéressant d'effectuer l'étude par un choix adéquat des normes vectorielles à partir d'une matrice pseudo-minorante non linéaire dont les éléments non linéaires figurent dans une seule rangée.

2. Les conditions d'instabilité proposées sont contraignantes pour le processus. Satisfaire de telles conditions signifie en fait que tous les modes instantanés de la matrice $A(\cdot)$ sont à partie réelle positive.

I-2 SYSTEMES NON LINEAIRES NON STATIONNAIRES SINGULIEREMENT PERTURBES

L'étude de la stabilité des processus hiérarchisés à deux niveaux est envisagée dans cette partie. Cette étude constitue une contribution à la résolution des problèmes de réduction de l'ordre des modèles et de séparation des échelles des temps dans la synthèse des processus, lorsque ceux-ci sont singulièrement perturbés [7, 8, 26, 27, 40, 41].

avec :

$$n_{ii} = \min_{l \in I_i} \left\{ \operatorname{Re} a_{ll} - \sum_{\substack{k \in I_i \\ k \neq l}} |a_{kl}| \right\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r \quad (\text{III-23})$$

$$n_{kk}(\cdot) = \min_{l \in I_k} \left\{ \operatorname{Re} a_{ll}(\cdot) - \sum_{\substack{k \in I_k \\ k \neq l}} |a_{kl}(\cdot)| \right\} \quad (\text{III-24})$$

$$n_{ir} = \max_{l \in I_r} \left\{ \sum_{k \in I_i} - |a_{kl}| \right\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{III-25})$$

$$n_{ri} = \max_{l \in I_i} \left\{ \sum_{k \in I_r} - |a_{kl}| \right\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r-1 \quad (\text{III-26})$$

$$n_{rk}(\cdot) = \max_{l \in I_k} \left\{ \sum_{k \in I_r} - |a_{kl}(\cdot)| \right\} \quad (\text{III-27})$$

Il vient le théorème (III-2) :

Théorème (III-2)

Le processus décrit par (III-1) dont la matrice caractéristique $A(\cdot)$ est définie sur \mathcal{E} par (I-45) et (III-21) est instable si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) La matrice $A(\cdot) = \{A_{ij}(\cdot)\}$ est en flèche épaisse d'ordre r dont les éléments non linéaires sont isolés dans les blocs $A_{kk}(\cdot)$ et $A_{rk}(\cdot)$, $k < r$.
- (ii) Les éléments n_{ii} définis par (III-23) et (III-24) sont tels que :

$$n_{ii} > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r-1 \quad (\text{III-28})$$

$$n_{kk}(\cdot) \geq -\varepsilon > 0 \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{III-29})$$

(iii) Il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que les éléments $n_{ij}(\cdot)$ définis par (III-23,24,25,26,27) vérifient l'inégalité :

$$n_{rr} - \frac{n_{rk}(\cdot) n_{kr}}{n_{kk}(\cdot)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r-1} \frac{n_{ri} n_{ir}}{n_{ii}} \geq -\epsilon \quad \forall (t,x,P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{III-30})$$

Remarques :

1. L'étude de l'instabilité des processus peut être conduite de façon semblable à celle de la stabilité. Lorsque les non linéarités figurent dans tous les blocs de la matrice en flèche, il est intéressant d'effectuer l'étude par un choix adéquat des normes vectorielles à partir d'une matrice pseudo-minorante non linéaire dont les éléments non linéaires figurent dans une seule rangée.

2. Les conditions d'instabilité proposées sont contraignantes pour le processus. Satisfaire de telles conditions signifie en fait que tous les modes instantanés de la matrice $A(\cdot)$ sont à partie réelle positive.

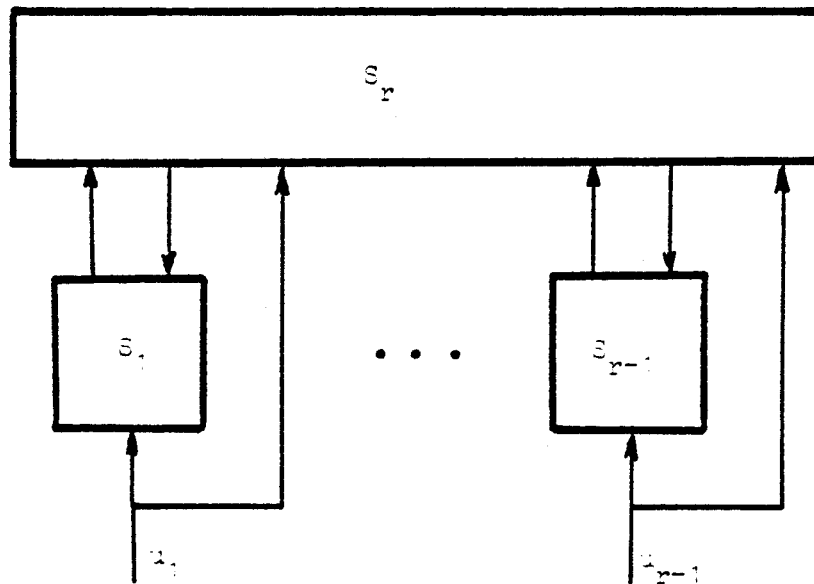
I-2 SYSTEMES NON LINEAIRES NON STATIONNAIRES SINGULIEREMENT PERTURBES

L'étude de la stabilité des processus hiérarchisés à deux niveaux est envisagée dans cette partie. Cette étude constitue une contribution à la résolution des problèmes de réduction de l'ordre des modèles et de séparation des échelles des temps dans la synthèse des processus, lorsque ceux-ci sont singulièrement perturbés [7, 8, 26, 27, 40, 41].

I-2-1 Description du système - Système dégénéré

Le système de la figure (III-3), hiérarchisé à deux niveaux non linéaires non stationnaires dont le premier niveau est constitué par (r-1) sous-systèmes "rapides", et le second niveau par un sous-système "lent", est décrit par le système différentiel suivant :

$$S : \begin{cases} u_i \frac{d}{dt}(x_i) = A_{ii}(t, x_i)x_i + A_{ir}(t, x_r)x_r + B_{ii}u_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 & \text{(III-31)} \\ \frac{d}{dt}(x_r) = A_{rr}(t, x_r)x_r + \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri}(t, x_r)x_i + \sum_{j=1}^{r-1} B_{rj}u_j & \text{(III-32)} \end{cases}$$



Figure(III-2): Système hiérarchisé à deux niveaux singulièrement perturbé

Dans ces équations $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_r^T]^T$ désigne le vecteur état, $\forall x \in \mathcal{X}$, $u = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T \in \mathcal{R}^r$ le vecteur

de commande, $\forall u \in \mathcal{U}$, μ_i est un petit paramètre positif qui indique le degré de rapidité de l'évolution du sous-système S_i par rapport au système coordonnateur S_r et $B_{ij} \in \mathcal{R}^{ni}$

Nous supposons dans la suite que la matrice $A_{ii}(\cdot)$ est inversible et son inverse est noté $A_{ii}^{-1}(\cdot)$.

En régime libre, $u = 0$, pour :

$$\mu_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{III-32})$$

il vient le système dégénéré ${}^d S$ caractérisé par le système d'équations différentielles suivant :

$$S_d : \frac{d}{dt} (x_r) = {}^d A_{rr} (t, x_r) x_r \quad (\text{III-33})$$

avec :

$${}^d A_{rr}(\cdot) = A_{rr}(\cdot) - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri}(\cdot) A_{ii}^{-1}(\cdot) A_{ir}(\cdot) \quad (\text{III-34})$$

I-2-2 Conditions suffisantes de stabilité du système dégénéré

I-2-2-1 Sous-système d'ordre 1

Le processus étudié dans cette partie est caractérisé par une matrice en flèche mince d'ordre n telle que :

$$S: \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mu_1 x_1 \\ \mu_2 x_2 \\ \vdots \\ \mu_{r-1} x_{r-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(\cdot) & & & a_{1n}(\cdot) \\ & a_{22}(\cdot) & & a_{2n}(\cdot) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{nn}(\cdot) \\ a_{n1}(\cdot) & a_{n2}(\cdot) & \dots & a_{nn}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{III-35})$$

Lorsque :

$$a_{ii}(\cdot) \neq 0 \quad \forall (t, x_i) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1$$

il vient l'équation différentielle du premier ordre caractérisant le système dégénéré dS , en régime libre :

$${}^dS : \frac{d}{dt} (x_n) = (a_{nn}(\cdot) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni}(\cdot) a_{in}(\cdot)}{a_{ii}(\cdot)}) x_n \quad (\text{III-36})$$

Les études de la stabilité et de l'instabilité de tels processus peuvent être conduites à partir des conditions suffisantes de stabilité et d'instabilité établies précédemment pouvant dépendre, dans certains cas, de celles des sous-systèmes isolés définis par :

$$S_i : \mu_i \frac{d}{dt} (x_i) = a_{ii}(\cdot) x_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{III-37})$$

$$S_n : \frac{d}{dt} (x_n) = a_{nn}(\cdot) x_n \quad (\text{III-38})$$

Théorème (III-3)

Le système S non linéaire non stationnaire hiérarchisé à deux niveaux définis par (III-35) dont la matrice caractéristique a ses éléments non linéaires isolés dans la dernière ligne ou colonne, et ses éléments hors diagonaux non négatifs, est asymptotiquement stable si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) les sous-systèmes $S_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ définis par (II-37,38), sont asymptotiquement stables.
- (ii) le système dégénéré dS correspondant défini par (III-36) est asymptotiquement stable.

Démonstration :

Le théorème (II-1) appliqué au système étudié S, confère à celui-ci la propriété de stabilité s'il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$\frac{a_{ii}}{\mu_i} < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{III-39})$$

$$a_{nn}(\cdot) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni}(\cdot) a_{in}(\cdot)}{a_{ii}} \leq \varepsilon \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (\text{III-40})$$

μ_i étant positif, le théorème (III-3) qui correspond à un cas de validité de la conjecture du linéaire s'en déduit immédiatement.

Remarques :

1. La stabilité du processus étudié S est déduite simplement et rigoureusement de celles des sous-systèmes composants et du système dégénéré dS .

2. Les conditions de stabilité de S établies au théorème (III-3) ne dépendent pas des petits paramètres μ_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$. Par contre l'étude de la stabilité de S effectuée à partir de la norme vectorielle :

$$p(x) = \max_i \{ |x_i| \} \quad (\text{III-41})$$

par exemple, conduit à la contrainte :

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \max_i \left\{ \frac{a_{ii}}{\mu_i} + \frac{|a_{in}|}{\mu_i} \right\} \\ a_{nn}(\cdot) + \sum_{i=1}^{n-1} |a_{ni}(\cdot)| \end{array} \right\} \leq \varepsilon < 0 \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (\text{III-42})$$

qui exprime que la stabilité de S peut dépendre des petits paramètres μ_i .

Ces considérations montrent que le choix de la méthode d'étude de la stabilité du système global peut fausser l'interprétation des résultats.

I-2-2-2 Sous-systèmes d'ordre quelconque

Le processus non linéaire étudié est maintenant hiérarchisé à deux niveaux, le premier niveau comportant (r-1) sous-systèmes non linéaires S_i d'ordre n_i , $\forall i = 1, 2, \dots, r-1$, interconnectés non linéairement à l'unique sous-système S_r , non linéaire, d'ordre n_r que comporte le second niveau.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mu_1 x_1 \\ \vdots \\ \mu_{r-1} x_{r-1} \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\cdot) & & & A_{1r}(\cdot) \\ & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & A_{r-1,r-1}(\cdot) & A_{r-1,r}(\cdot) \\ A_{r1}(\cdot) & \cdot & \cdot & A_{r,r-1}(\cdot) & A_{rr}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \cdot \\ x_{r-1} \\ x_r \end{bmatrix} \quad (\text{III-43})$$

Nous supposons, de plus, que la matrice $A(\cdot)$ définie dans est telle que :

(H-1) les blocs $A_{ii}(\cdot)$ sont des matrices en flèche mince d'ordre n_i , $\forall i = 1, 2, \dots, r$.

$$S_i : A_{ii}(\cdot) = \begin{bmatrix} a_{11}^i(\cdot) & & & a_{1,n_i}^i(\cdot) \\ & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & a_{n_i-1,n_i-1}^i(\cdot) & a_{n_i-1,n_i}^i(\cdot) \\ a_{n_i,1}^i(\cdot) & \cdot & \cdot & a_{n_i,n_i-1}^i(\cdot) & a_{n_i,n_i}^i(\cdot) \end{bmatrix} \quad \forall i=1,2,\dots,r-1 \quad (\text{III-44})$$

$$S_r : A_{rr}(\cdot) = \begin{bmatrix} a_{11}^r & & & a_{1,n_r}^r \\ & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & a_{n_r-1,n_r-1}^r & a_{n_r-1,n_r}^r \\ a_{n_r,1}^r & \cdot & \cdot & a_{n_r,n_r-1}^r & a_{n_r,n_r}^r \end{bmatrix} \quad (\text{III-45})$$

(H2) les éléments des blocs $A_{ri} (i \neq r)$ sont nuls exceptés ceux de la dernière ligne.

(H-3) les matrices A_{ii} sont inversibles, c'est-à-dire le scalaire :

$$\prod_{j=1}^{n_i} a_{jj}^i(.) - \sum_{j=1}^{n_i-1} (a_{n_i,j}^i(.) a_{j,n_i}^i(.) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_i} a_{kk}^i(.)) \quad (\text{III-46})$$

est différent de zéro, $\forall i = 1, 2, \dots, r-1$

Notations :

$$A_{ir}^k(.) = \{a_{ir}^{kh}(.)\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{III-47})$$

$$A_{ri}^k(.) = \{a_{ri}^{kh}(.)\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{III-48})$$

$$A_{ii}^{-1}(.) = \{a_{ii}^{kh}(.)\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{III-49})$$

$${}^d A(.) = A_{rr}^k(.) - \sum_{j=1}^{r-1} A_{rj}^k(.) A_{jj}^{-1}(.) A_{jr}^k(.) = \{{}^d a_{ij}^k(.)\} \quad (\text{III-50})$$

Dans ces conditions, il vient :

- les matrices $A_{ii}^{-1}(.) \forall i = 1, 2, \dots, r-1$, peuvent être déterminées simplement à partir de la propriété (P2) des matrices en flèche mince.
- les éléments de la matrice $A_{ri}^k(.) A_{ii}^{-1}(.) A_{ir}^k(.)$ sont nuls exceptés ceux de la dernière ligne.
- la matrice ${}^d A(.)$ est en flèche mince d'ordre n_r ; les éléments non linéaires sont, de plus, isolés dans la dernière ligne.

$$d_A(.) = \begin{bmatrix} a_{11}^r & & & a_{1,n_r}^r \\ & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & a_{n_r-1,n_r-1}^r & a_{n_r-1,n_r}^r \\ d_{a_{n_r,1}^r}^r & \cdot & \cdot & d_{a_{n_r,n_r-1}^r}^r & d_{a_{n_r,n_r}^r}^r \end{bmatrix} \quad (III-51)$$

avec :

$$d_{a_{n_r,k}^r}^r = a_{n_r,k}^r - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{h=1}^{n_i} a_{ri}^{n_r h} a_{ii}^{hj} a_{ir}^{jk} \quad (III-52)$$

$\forall k = 1, 2, \dots, r$

Théorème (III-4)

(a) Le processus dégénéré correspondant au processus décrit par (III-43) avec les notations (III-44,45,47, 48,49,50,52) en régime libre est asymptotiquement stable s'il existe $\varepsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) les hypothèses (H-1,2,3) sont vérifiées

(ii) $\text{Reel}(a_{ii}^r) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (III-53)$

(iii)

$$\text{Reel}(d_{a_{n_r,n_r}^r}^r) - \sum_{j=1}^{n_r-1} \frac{|d_{a_{n_r,j}^r}^r| \cdot |a_{j,n_r}^r|}{\text{Reel}(a_{jj}^r)} \leq \varepsilon \quad (III-54)$$

$$\forall (t,x) \in \mathbb{T} \times \mathcal{X}$$

(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathcal{E}^n$, la stabilité du processus dégénéré est globale.



I-3 STABILITE DE MOUVEMENT - INFLUENCE DE L'ETAT INITIAL

I-3-1 Position du problème

Le processus étudié est régi par l'équation d'état suivante :

$$\frac{d}{dt} (x) = f(t, u, x) \quad (\text{III-55})$$

L'évolution de l'état de la sortie dépend non seulement des signaux d'entrée $u \in \mathcal{J}_u$ mais aussi du vecteur conditions initiales $x(t_0, t_0, x_0, u_0 [t_0, t_0])$, noté x_0 .

Un tel processus peut être considéré stable en régime forcé par rapport aux perturbations initiales lorsqu'au bout d'un temps suffisamment long, le comportement de la sortie ne dépend que de l'entrée, l'effet des conditions initiales étant devenu négligeable [14, 29, 31] c'est-à-dire que :

$$\forall x_0^1, x_0^2 \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_1 \in \mathbb{T}$$

$$\forall t > t_1 \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0^1, u [t_0, t]) - x(t, t_0, x_0^2, u [t_0, t])\| < \varepsilon \quad (\text{III-56})$$

Le problème "d'unicité" du régime permanent du système (III-55) se ramène donc à l'étude de la stabilité du système aux écarts défini par la relation :

$$\frac{d}{dt} (x^1) - \frac{d}{dt} (x^2) = f(t, u, x^1) - f(t, u, x^2) \quad (\text{III-57})$$

dans laquelle $x^1(t)$ et $x^2(t)$ désignent deux trajectoires solutions de (III-55). Nous nous intéresserons aux processus pour lesquels cette expression peut être représentée sous la forme matricielle suivante [14] :

$$\frac{d}{dt} (z) = A(.) z \quad (\text{III-58})$$

$$z = x^1 - x^2 \quad (\text{III-59})$$

$$A(.) = \left\{ \frac{\Delta_j f_i}{x_j^1 - x_j^2} \right\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III-60})$$

$$\Delta_j f_i = f_i(x_1^2, \dots, x_{j-1}^2, x_j^1, \dots, x_n^1) - f_i(x_1^2, \dots, x_j^2, x_{j+1}^1, \dots, x_n^1) \quad (\text{III-61})$$

La vérification des conditions suffisantes de stabilité du système aux écarts défini par (III-58) avec les notations (III-59, 60, 61) effectuée, par exemple, à partir des critères de stabilité établis précédemment, implique l'unicité du comportement asymptotique du régime forcé quelles que soient les conditions initiales du processus défini par les relations (III-55).

I-3-2 Application à l'étude d'un système du type LUR'E POSTNIKOV

Soit le système du type LUR'E POSTNIKOV défini fig. (III-2) tel que :

- la fonction de transfert $L(p)$ de la partie linéaire du système en boucle ouverte admet l'expression :

$$L(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (\text{III-62})$$

avec

$$N(p) = \prod_{i=1}^{n-1} (p - z_i) \quad (\text{III-63})$$

$$D(p) = \prod_{i=1}^n (p - p_i) \quad (\text{III-64})$$

$$p_1 < z_1 < p_2 < z_2 < \dots < z_{n-1} < p_n < 0 \quad (\text{III-65})$$

- La non linéarité k dépend uniquement de l'écart ε entre l'entrée et la sortie du système bouclé :

$$k = k(\varepsilon)$$

L'écart entre deux réponses du processus soumis à une entrée donnée est caractérisé à l'instant $t \in \mathcal{E}$ par le vecteur $z(t)$, d'ordre n , dont l'évolution peut-être régie par le système différentiel (III-68) :

$$\frac{d}{dt} (z) = A(.) z \quad (\text{III-66})$$

avec

$$z = x^1 - x^2 \quad (\text{III-67})$$

$$A(.) = \begin{bmatrix} z_1 & & & & & & & 1 \\ & z_2 & & & & & & 1 \\ & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & & z_{n-1} & & 1 \\ \gamma_1(z_1) & \gamma_2(z_2) & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{i-1}(z_{n-1}) & - \sum_{i=1}^{n-1} z_i + \sum_{i=1}^n p_i - f^*(.) & \end{bmatrix} \quad (\text{III-68})$$

$$f^*(.) = \frac{f(\varepsilon_2) - f(\varepsilon_1)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \quad (\text{III-69})$$

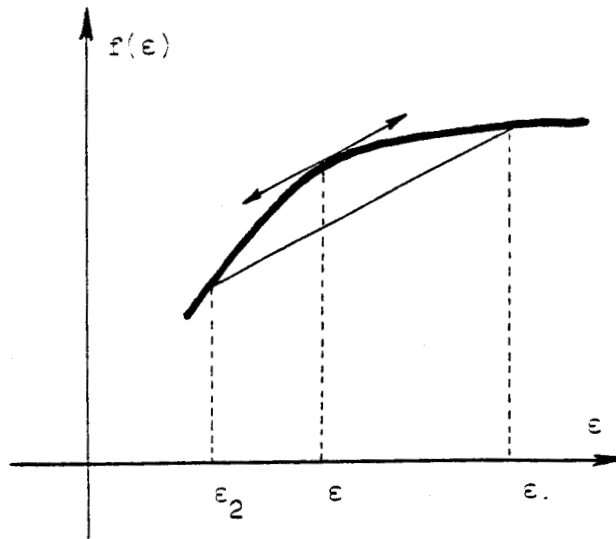
et

$$\gamma_i(z_i) = \left(- \frac{(p - z_i) D(p)}{N(p)} \right)_{p=z_i} > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{III-70})$$

Lorsque $f(.)$ est dérivable, le coefficient flottant $f^*(.)$ prend ses valeurs parmi celles de la dérivée $\frac{df}{d\varepsilon}$ de la caractéristique de la non linéarité. En effet, dans ce cas, d'après le théorème des accroissements finis, fig (III-3), il existe $\varepsilon \in]\varepsilon_1, \varepsilon_2[$ tel que :

$$f(\varepsilon_2) - f(\varepsilon_1) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{d}{d\varepsilon} (f(\varepsilon)) \quad \forall \varepsilon \in]\varepsilon_2 \varepsilon_1 [\quad (\text{III-71})$$

Le scalaire $f^*(.)$ peut donc être interprété, dans certains cas comme un gain équivalent de la non linéarité.



Figure(III-3)

Théorème (III-5)

Le système non linéaire du type LUR'E POSTNIKOV, sensible aux perturbations initiales, défini figure (II-2), dont la partie linéaire est caractérisée par sa fonction de transfert $L(p)$ telle que :

$$L(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

possède la propriété de stabilité en régime forcé par rapport aux perturbations initiales si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) les polynômes $N(p)$ et $D(p)$ de degrés respectivement égaux à $(n-1)$ et n ont des racines réelles et distinctes
- (ii) le filtre linéaire $L(p)$ est entièrement défini par sa courbe de gain dont le diagramme asymptotique est constitué par des segments de pentes successives : $0, -20, 0, -20, \dots$ dB/décade
- (iii) le gain équivalent $f^*(.)$ de la non linéarité $f(.)$ défini par (III-69) est supérieur à l'inverse du gain statique de $(-L(p))$.

Démonstration :

La fonction de transfert du filtre linéaire $L(p)$ étant entièrement définie par sa courbe de gain (lieu de Bode) (ii) ses pôles et ses zéros sont tous négatifs. Si cette courbe de gain est constituée dans le diagramme de Bode (ii) par des segments de pentes successives $0, -20, 0, -20, \dots$, les pôles et les zéros de $L(p)$ sont donc disposés comme suit :

$$0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{n-1} < p_n \quad (\text{III-65})$$

c'est-à-dire que les polynômes $N(p)$ et $D(p)$ forment une paire positive [32]. Il en résulte les inégalités (III-70).

L'application du théorème (II-4) au système aux écarts, pouvant être représenté par (III-66) donne alors la condition suffisante de stabilité du régime forcé du système étudié :

$$f^*(.) + \frac{1}{L(0)} \geq c > 0 \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (\text{III-72})$$

qui correspond à la contrainte (iii) du théorème (III-5).

I-3-3 Exemple d'un moteur à courant continu entraînant une charge mécanique

Exemple (III-2)

Considérons le système de la figure (III-4) composé d'un moteur à courant continu entraînant une charge mécanique .

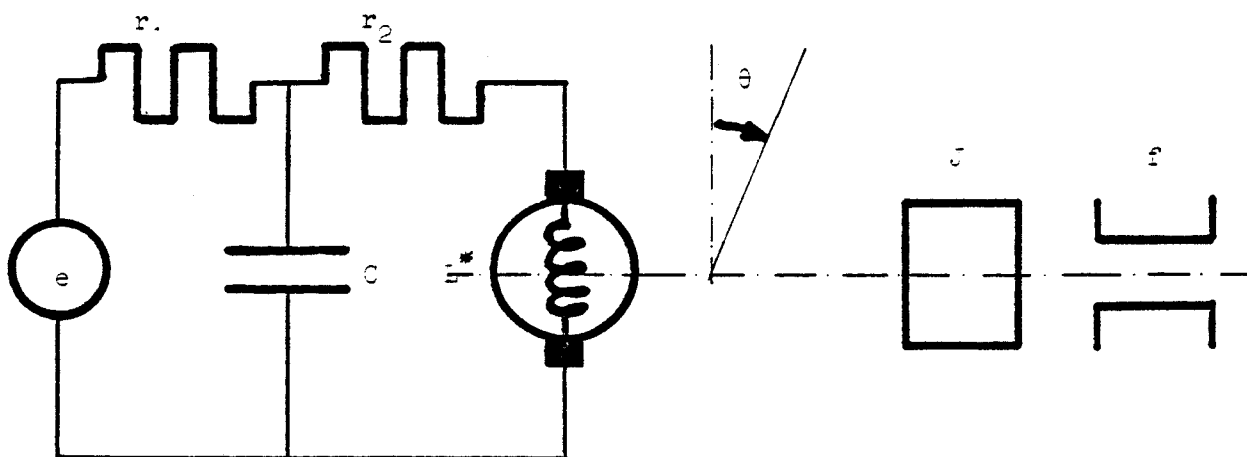


Figure (III-4)

Nous supposons le coefficient de couplage k constant, et la saturation du circuit de fer intervenant dans la valeur de la self de l'induit.

Notons ϕ : le flux dans la self $L^*(.)$ supposée non linéaire, q la charge de la capacité c , ω la vitesse de rotation de l'arbre du moteur et μ sa quantité de mouvement.



Pour une entrée fixée, il vient [34] l'équation aux écarts du système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_2 - q_1 \\ \phi_2 - \phi_1 \\ \mu_2 - \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1 c} - \frac{1}{L^*(.)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r_2}{L^*(.)} & -\frac{k}{J} \\ 0 & -\frac{k}{L^*(.)} & \frac{f}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_2 - q_1 \\ \phi_2 - \phi_1 \\ \mu_2 - \mu_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-73})$$

qui devient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mu_2 - \mu_1 \\ q_2 - q_1 \\ \phi_2 - \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{f}{J} & 0 & -\frac{k}{L^*(.)} \\ 0 & -\frac{1}{r_1 c} & -\frac{1}{L^*(.)} \\ -\frac{k}{J} & \frac{1}{c} & \frac{r_1 - r_2}{L^*(.)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_2 - \mu_1 \\ q_2 - q_1 \\ \phi_2 - \phi_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-74})$$

Le système de la figure (III-4) est stable en régime forcé par rapport aux conditions initiales si les conditions suivantes :

$$L^*(.) \geq c > 0 \quad (\text{III-75})$$

$$k^2 < f(r_2 - 2r_1) \quad (\text{III-76})$$

obtenues par application du théorème (II-12), sont vérifiées.

I-4 STABILITE DU MOUVEMENT

I-4-1 Position du problème - Définition

Cette étude concerne le comportement dynamique des trajectoires d'un processus non linéaire en présence de perturbation sur son état. La méthode d'étude utilisée ici, généralise celle proposée par BORNE, LAURENT et MAIZIERES dans [28], et développée par BORNE, BEN REJEB et LAURENT dans [22] pour l'étude des systèmes du type LUR'E POSTNIKOV. Celle-ci concerne la définition d'une méthode permettant de conclure à la stabilité dynamique d'un système [28].

Les trajectoires des processus considérés sont caractérisées à l'instant $t \in \mathcal{T}$ par le vecteur $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{X}$ et dépendent de l'état x_0 à l'instant initial t_0 et de l'évolution des entrées $e(t)$, $e : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^m$.

Pour $e(t)$ donnée, notons $\hat{x}(t) = x_e(t, t_0, x_0)$ la trajectoire nominale du processus considérée en l'absence de perturbation et pour des conditions initiales imposées. Notons par ailleurs, $x(t) = x_e(t, t_1, \hat{x}(t_1) + \delta x)$ la trajectoire après une perturbation $\delta x \in \mathcal{X}_{\delta x} \subset \mathbb{R}^n$ intervenant sur l'état entre les instants $t_1 - \delta t_1$ et t_1 avec $\delta t_1 > 0$ et $t_1 - \delta t_1 \geq t_0$.

Définition (III-1) [28]

Le système S dont l'état est défini par le vecteur $x \in \mathcal{X}$ possède la propriété de stabilité asymptotique dynamique s'il existe des fonctions ϕ et σ de classes respectives K et L au sens de HAHN [33] et telles que :

$$\|x_e(t, t_0, x_0) - x_e(t, t_1, x(t_1) + \delta x)\| \leq \sigma(t-t_0) \phi(\|\delta x\|)$$

$$\forall t, t_0, t_1 \in \mathcal{T}, \quad t \geq t_1 \geq t_0, \quad \forall (x_0, x, e) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}_{\delta x} \times \mathcal{E} \quad (\text{III-77})$$

Pour illustrer cette étude, considérons le système du type LUR'E POSTNIKOV décrit par le système différentiel :

$$\frac{d}{dt}(x) = A(t,u)x + B(t,u)f(t,\sigma,u) \quad (\text{III-78})$$

$$\sigma = e(t) + c(t,u,P)x \quad (\text{III-79})$$

avec $A : \mathcal{T} \times \mathcal{Y}_u \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $B : \mathcal{T} \times \mathcal{Y}_u \rightarrow \mathbb{R}^n$

$c : \mathcal{T} \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathcal{T}$, $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$

$u \in \mathcal{Y}_u \subset \mathbb{R}^m$, $P \in \mathcal{Y}_p \subset \mathbb{R}^{n \times p}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $e : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$f : \mathcal{T} \times \mathbb{R} \times \mathcal{Y}_u \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \Phi_1$ ou Φ_2

Dans ces relations, u caractérise les indéterminations dans la définition du modèle et P les variations de la structure du système.

$$\Phi_1 = \begin{cases} f : \mathcal{T} \times \mathbb{R} \times \mathcal{Y}_u \rightarrow \mathbb{R} \\ f(t, \sigma + \delta\sigma, u) - f(t, \sigma, u) = f^* \delta\sigma \\ f^* \in [\underline{f}, \bar{f}] = \mathcal{Y}_f \in \mathbb{R}, \forall (t, \sigma, \delta\sigma, u) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{Y}_u \end{cases} \quad (\text{III-80})$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} f : \mathcal{T} \times \mathbb{R} \times \mathcal{Y}_u \rightarrow \mathbb{R}, f(t, \sigma + \delta\sigma, u) - f(t, \sigma, u) = f^*(.)\delta\sigma + g^*(.) \\ f^*(.) \in \mathcal{Y}, g^*(.) \in [\underline{g}, \bar{g}] = \mathcal{Y}_g \in \mathbb{R}, \forall (t, \sigma, \delta\sigma, u) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{Y}_u \end{cases}$$

(III-81)

Soit :

$$A(t,u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0(t,u) & -a_1(t,u) & \dots & -a_{n-2}(t,u) & -a_{n-1}(t,u) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-82})$$

$$c(t,u) = [b_0(t,u), b_1(t,u), \dots, b_{n-1}(t,u)]^T \quad (\text{III-83})$$

les scalaires $a_i(\cdot)$ et $b_i(\cdot)$ dépendent du temps, et de u paramètre caractérisant les incertitudes intervenant dans la définition du modèle.

Il résulte des études précédentes, qu'il existe une matrice régulière Q définissant un changement de base dépendant de nombres distincts et arbitraires α_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$, telle que l'on puisse décrire l'évolution du vecteur erreur δy , $\delta y = Q \delta x$, par la relation :

$$\frac{d}{dt} (\delta y) = A^*(t, u, P, f^*) \delta y + B^*(t, u, P, g^*) \quad (\text{III-84})$$

avec :

$$A^*(\cdot) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha_{n-1} & 1 \\ a_{n1}(\cdot, \alpha_1) & \dots & a_{n, n-1}(\cdot, \alpha_{n-1}) & a_{nn}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{III-85})$$

$\alpha_i \in \mathcal{E}$, $\forall i = 1, \dots, n-1$ nombres arbitraires et distincts.

$$\mathcal{P}(t, u, P, f^*, \lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i(t, u) + f^*(.) b_i(t, u)) \lambda^i \quad (\text{III-86})$$

$$a_{ni}(., \alpha_i) = - \mathcal{P}(., \alpha_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \quad \forall i=1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{III-87})$$

$$a_{nn}(.) = - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - (a_i(.) + f^*(.) b_i(.)) \quad (\text{III-88})$$

et avec :

$$B^*(.) = 0 \text{ si } f \in \Phi_1 \quad (\text{III-89})$$

$$B^*(.) = Q^{-1} B g^*(.) \text{ si } f \in \Phi_2 \quad (\text{III-90})$$

1-4-2 Condition suffisante de stabilité des trajectoires

L'étude du problème de la stabilité des trajectoires peut être conduite aisément lorsqu'il est possible de définir a priori une structure hiérarchisée pour le processus de vecteur état δy .

Considérons en particulier le système décrit par (III-78, 79) telles que le triplet $A(., B, c(.$) soit défini par (III-82, 83) et $f(.) \in \Phi_1$.

Le choix de la norme : $p(\delta y) = |\delta y|$ définie composante à composante, conduit à la condition de stabilité asymptotique du processus défini par (III-84, 85, 89) et à la condition de stabilité asymptotique dynamique du processus défini par (III-82, 83, 89) énoncée dans le théorème (III-6).

Théorème (III-6)

S'il existe $\varepsilon < 0$ et des nombres α_i , complexes et distincts, vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(i) \text{ Reel } (\alpha_i) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{III-91})$$

$$(ii) \operatorname{Reel}(a_{nn}(\cdot)) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|a_{ni}(\cdot)|}{\operatorname{Reel}(\alpha_i)} \leq \epsilon \quad \forall (t, f^*, u, p) \in \mathcal{T} \times \mathcal{Y}_f \times \mathcal{Y}_u \times \mathcal{Y}_p \quad (III-91)$$

le processus décrit par (III-78, 79, 82, 83) avec les notations (III-86, 87, 88) possède la propriété de stabilité asymptotique dynamique.

II - METHODE DE SYNTHESE DES PROCESSUS NON LINEAIRES

II-1 POSITION DU PROBLEME

Les études précédentes avaient pour objet la détermination de conditions suffisantes d'instabilité, de stabilité asymptotique, de stabilité globale, de stabilité absolue, de stabilité des trajectoires, de stabilité dynamique des systèmes hiérarchisés non linéaires non stationnaires perturbés.

Les conditions mises en évidence ne font pas intervenir les notions de caractéristiques dynamiques en réponse à une sollicitation donnée qui définissent les performances des processus, notions essentielles du point de vue de l'utilisateur.

Dans ce sens, cette section concerne l'élaboration d'une méthode d'étude des problèmes d'estimation et d'amélioration des performances des processus non linéaires, non stationnaires et perturbés de grande dimension.

Les méthodes de synthèse des systèmes linéaires stationnaires sont généralement basées sur la localisation des pôles des fonctions de transfert des systèmes en boucle fermée [18,24,25,26,27,39]

Lorsque les processus sont non linéaires, la plupart des travaux existant sont basés sur l'utilisation des conditions de stabilité [6→8,10,12→16,18,20→22,29,31,36,38,40,41]

L'étude de la stabilité apparaît à l'heure actuelle très importante pour la détermination des chaînes de correction des processus complexes.

L'utilisation des critères de stabilité établis précédemment nous a permis d'élaborer une méthode de synthèse des commandes des systèmes de grande dimension de mise en oeuvre simple.

II-2 METHODE DE SYNTHESE DES SYSTEMES HIERARCHISES A DEUX NIVEAUX

II-2-1 Description des systèmes étudiés

Considérons le système non linéaire, non stationnaire, perturbé, multivariable du type interconnecté représenté figure(III-6) décrit par les relations :

$$S : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(x_i) = \begin{cases} A_{ii}(t, x_i, P) x_i + A_{ir}(t, x_r, P) x_r \\ + B_i(t, x_i, P) u_i \end{cases} \quad \forall i=1,2,\dots,r-1 \quad (\text{III-93}) \\ \\ \frac{d}{dt}(x_r) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri}(t, x_i, P) x_i + A_{rr}(t, x_r, P) x_r \\ + B_r(t, x_r, P) u_r \end{cases} \quad (\text{III-94}) \\ \\ y_i = c_i(.) x_i \quad \forall i = 1,2,\dots,r \quad (\text{III-95}) \end{array} \right.$$

et constitué de r sous-systèmes S_i , d'ordre n_i , définis en régime libre par :

$$S_i : \frac{d}{dt} (x_i) = A_{ii}(t, x_i, P) x_i + B_i(t, x_i, P) u_i \quad \forall i=1,2,\dots,r \quad (\text{III-96})$$

Les variables accessibles à la sortie du sous-système S_i sont désignées par $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $m_i < n_i$, $\forall i = 1,2,\dots,r$.

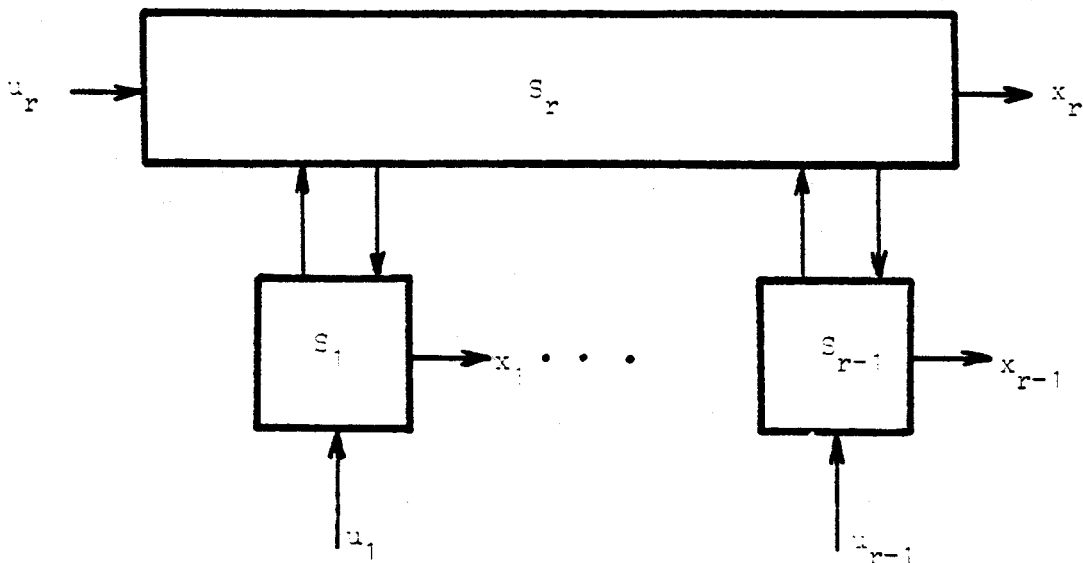


Figure (III-6)

II-2-2 Principe

Le but de la synthèse proposée est de définir une structure bouclée permettant un amortissement, selon une loi exponentielle, de l'effet du régime transitoire ainsi que des perturbations quelle que soit leur origine.

Si $\psi(x)$ désigne une norme scalaire du vecteur état du processus, il convient de déterminer les diverses commandes u_i , $\forall i = 1, 2, \dots, r$ de façon à majorer la décroissance du vecteur état par une loi de la forme :

$$\psi(x(t)) \leq \alpha e^{-\eta(t - t_0)} \psi(x(t_0)) \quad (\text{III-97})$$

avec $\alpha \geq 1$ et η nombre positif choisi.

Ce coefficient η que nous appellerons coefficient d'amortissement par analogie avec la terminologie utilisée pour les processus monovariabiles du second ordre, caractérise la dynamique du système.

Il est aisé d'étendre ces considérations aux processus forcés sensibles aux perturbations initiales ou/et aux perturbations intervenant au niveau de l'état.

L'étude de la convergence d'une trajectoire perturbée vers la trajectoire normale du processus, ou encore du vecteur écart δx vers zéro (voir I-3 et 4), permet d'imposer une dynamique préspecifiée autour de la trajectoire nominale Figure (III-6) [18].

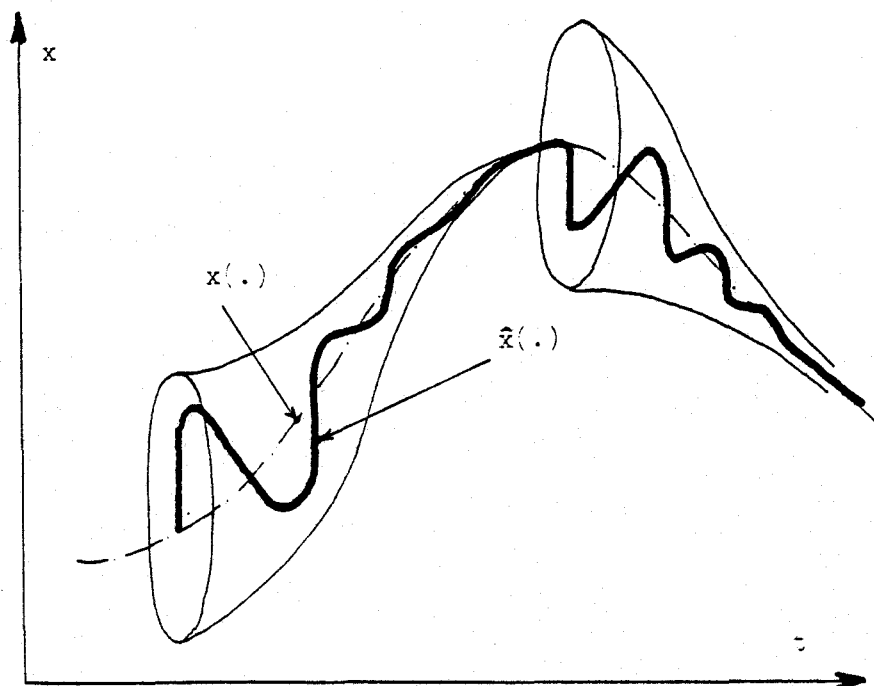


Fig. (III-6) $x(.)$: trajectoire nominale non perturbée
 $\hat{x}(.)$: trajectoire perturbée

II-2-3 Mise en oeuvre

II-2-3-1 Estimation du "coefficient d'amortissement"

Dans le cas de fonctionnement en régulateur, il est possible d'estimer [29] l'amortissement des conditions initiales d'un processus en étudiant la convergence de la norme vectorielle $p(x)$ d'ordre k qui constitue une mesure de l'écart de l'état de l'asservissement par rapport à sa position d'équilibre x_e .

Soit $A(.)$ la matrice définie par :

$$A(.) = \begin{bmatrix} A_{11}(.) & & & A_{1r}(.) \\ & A_{22}(.) & & A_{2r}(.) \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot \\ A_{r1}(.) & A_{r2}(.) & \cdot & A_{rr}(.) \end{bmatrix} \quad (\text{III-98})$$

caractérisant le processus S , (III-93, 94), en régime libre, et $M_k(A(.))$ la matrice majorante de $A(.)$ relative à la norme régulière $p(x)$ d'ordre k .

S'il existe η' , $\eta' > 0$, tel que le système suivant :

$$\frac{d}{dt} (z) = (M_k(A(.)) + \eta' I_k) z \quad (\text{III-99})$$

soit asymptotiquement stable, le coefficient d'amortissement du système est minoré par η' .

En particulier, lorsque $k = 1$, correspondant à la définition d'un système majorant d'ordre 1, celui-ci est minoré par η' défini par :

$$\eta' = -M_1(A(\cdot)) + \varepsilon \quad (\text{III-100})$$

ε étant le plus grand nombre négatif tel que :

$$M_1(A(\cdot)) + \eta' \leq \varepsilon \quad \forall (t, x, p) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{III-101})$$

Pour k différent de 1, s'il n'est pas possible de trouver une norme $p(x)$ telle que le système (III-99) soit stable, ou/et si le système (III-99) est instable, $\forall \eta', \eta' > 0$, il convient de définir une chaîne de correction qui garantit au processus une marge suffisante par rapport aux conditions critiques de fonctionnement.

II-2-3-2 Méthode d'amélioration des performances

Posons u , le vecteur de commande tel que :

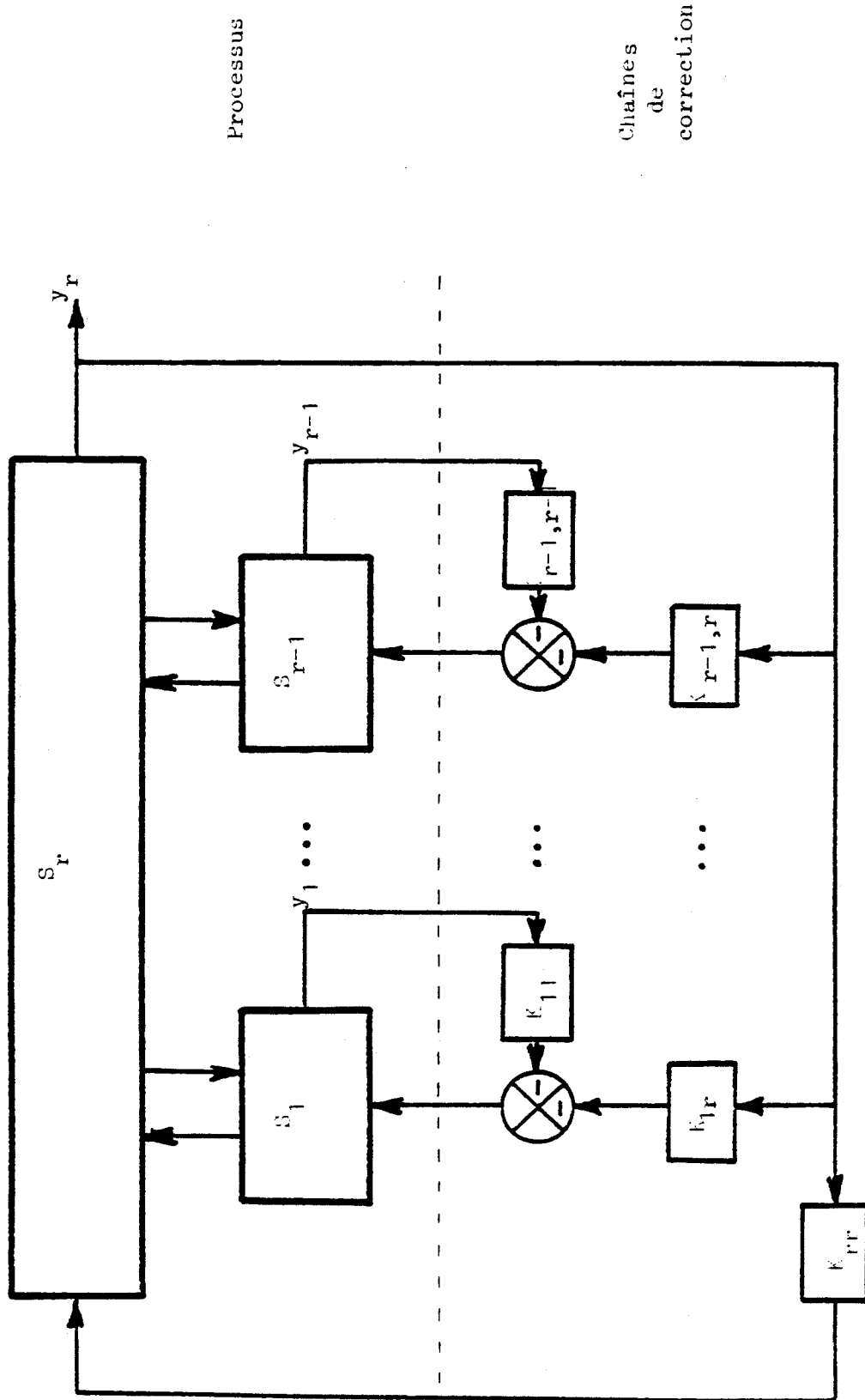
$$u = [u_1, u_2 \dots u_r]^T, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^r \quad (\text{III-102})$$

$$u_i = -K_{ii}(t, y_i) y_i - K_{ir}(t, y_r) y_r \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{III-103})$$

$$u_r = -K_{rr}(t, y_r) y_r \quad (\text{III-104})$$

La chaîne de réaction ainsi définie permet une correction au niveau des sous-systèmes S_i , $\forall i = 1, 2, \dots, r$, ainsi qu'au niveau des interconnexions, figure (III-7).

Elle conduit à la définition d'une matrice caractéristique, notée $A_c(\cdot)$, du processus S en boucle fermée, désignée par S_c , en flèche épaisse d'ordre r définie par :



Fig(III-7): Chaînes de correction des systèmes hiérarchisés à deux niveaux.

BUS LILLE

$$A_c(.) = \begin{bmatrix} A_{11}(.) - B_1(.)K_{11}(.)c_1(.) & & & A_{1r}(.) - B_1(.)K_{1r}(.)c_r(.) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & \vdots \\ A_{r1}(.) & \dots & & A_{rr}(.) - B_r(.)K_{rr}(.)c_r(.) \end{bmatrix} \quad \text{(III)105}$$

Un choix adéquat des éléments des matrices $K_{ij}(.)$, pouvant être non linéaires, caractérisant la chaîne de correction, peut garantir un amortissement suffisant η , fixé à l'avance, du régime transitoire des processus considérés.

En effet, si I_k représente la matrice identité d'ordre k , pour η fixé, la stabilité du système décrit par la relation :

$$\frac{d}{dt} (z) = (M_k(A_c(.)) + \eta'' I_k) z \quad \text{(III-106)}$$

avec $M_k(A_c(.))$ matrice majorante de la matrice $A_c(.)$ relative à la norme $p_k(x)$ d'ordre k , garantit un coefficient d'amortissement au moins égal à η'' , $\eta \geq \eta''$.

Lorsque la matrice $(M_k(A_c(.)) + \eta'' I_k)$ est en flèche épaisse d'ordre r et a ses éléments non linéaires isolés dans une seule rangée, il est possible d'utiliser les résultats précédents, concernant la stabilité, pour définir des domaines, délimités par les contraintes de stabilité du système (III-106), permettant la détermination des paramètres de correction garantissant les performances pré-spécifiées.

Si de plus la conjecture linéaire est vérifiée, c'est-à-dire que :

$$M_k(A_c(.)) \equiv A_c(.) \quad \text{(III-107)}$$

assurer un coefficient d'amortissement η , fixé à l'avance, pour tous les systèmes composants confère dans certains cas aux processus la même performance ; de même, les propriétés des processus peuvent conférer des propriétés identiques pour les sous-systèmes composants.

Ces considérations sont illustrées dans les études suivantes concernant les systèmes décrits par des équations différentielles ou/et du type LUR'E POSTNIKOV ou/et singulièrement perturbés.

II-3 CAS DES SYSTEMES NON LINEAIRES DECRITS PAR DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES SCALAIRES NON LINEAIRES

II-3-1 Systèmes décrits par une équation différentielle non linéaire

Considérons le processus défini par la relation (II-44).
En régime forcé, celui-ci est décrit par :

$$y_1^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(t, y, P) y_1^{(i)} = u_1, u_1 \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R}^n \quad (\text{III-108})$$

Notons par α_i et β_i des réels arbitraires choisis respectivement négatifs et positifs et par $A(\cdot)$ la matrice définie par (II-46) avec les notations (II-48, 49, 50).

II-3-1-1 Estimations du coefficient d'amortissement

1. Le choix d'une matrice majorante $M(A(.))$ définie par (II-189) implique que le coefficient d'amortissement de (III-108) peut être estimé par η'_1 si le système

$$\frac{d}{dt}(x) = (M_1(A(.)) + \eta'_1) x \quad (\text{III-109})$$

est stable. La contrainte (II-190) s'exprime dans ce cas qu'il existe $\alpha_i, \beta_i \forall i = 1, 2, \dots, n-1, \epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$\eta'_1 = \epsilon - \max \left\{ \begin{array}{l} \max_i (\alpha_i + \beta_i) \\ \left| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{-1} \tilde{a}_{n-1}(\cdot) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i^{-1} |(\alpha_i)^n + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{a}_j(\cdot) (\alpha_i)^j| \dots \right. \\ \left. \dots \prod_{j=1}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \right| \end{array} \right\} > 0 \quad \forall (t, x, p) \in \mathcal{X} \quad (\text{III-110})$$

2. L'application du théorème (II-12) au système

$$\frac{d}{dt}(x) = (A(.) + \eta'_2 I_n) x \quad (\text{III-111})$$

conduit à la minoration du coefficient d'amortissement par η'_2 correspondant à une solution possible du système d'inégalités :

$$\eta'_2 < -\alpha_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{III-113})$$

$$\gamma_n(\cdot) + \eta'_2 - \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i(\cdot, \alpha_i)| (\alpha_i + \eta'_2)^{-1} \leq \epsilon < 0 \quad (\text{III-114})$$

3. En particulier lorsque la matrice $A(.)$ est à éléments non diagonaux non négatifs, la conjecture linéaire est vérifiée pour le système :

$$\frac{d}{dt}(x) = (A(.) + \eta'_3 I_n) x \quad (\text{III-115})$$

l'application du théorème (II-5) conduit aux inégalités :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < 0 \quad (\text{III-116})$$

$$n'_3 < -\alpha_{n-1} \quad (\text{III-117})$$

$$(-1)^{n-i} \left[\alpha_i^n + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{a}_j(.) (\alpha_i)^j \right] \geq \epsilon > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{III-118})$$

$$(-n'_3)^n + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{a}_j(.) (-n'_3)^j \geq \epsilon > 0 \quad (\text{III-119})$$

qui s'expriment simplement par rapport au polynôme caractéristique instantané du processus (III-108).

Remarques :

Nous constatons qu'il existe plusieurs façons d'estimer, lorsque cela est possible, le coefficient d'amortissement du processus.

Sa valeur sera d'autant moins "précise" que les conditions de stabilité utilisées sont plus contraignantes.

II-3-1-2 Méthodes de détermination des commandes améliorant les performances des processus

Lorsque l'étude précédente concernant l'estimation des performances du processus décrit par (III-108) détermine un coefficient d'amortissement insuffisant, ou encore lorsque le processus (III-108) est instable, nous posons :

$$u_1 = - \sum_{i=0}^{n-1} c_i^*(.) y_1^{(i)} \quad (\text{III-120})$$

et nous recherchons les scalaires $c_i^*(.) \forall i = 1, 2, \dots, n-1$ garantissant des performances définies à l'avance par l'utilisateur.

II-3-1-2-1 Méthode basée sur la stabilité d'un système associé

Pour η fixé, le choix de la commande u_1 du système (III-108) tel que le système associé suivant :

$$\frac{d}{dt} (x) = (M_k(A_c(\cdot)) + \eta I) x \quad (\text{III-121})$$

avec :

$$A_c(\cdot) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & & 1 \\ & \alpha_2 & & & & 1 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \alpha_{n-1} & & 1 \\ \gamma_{c1}(\cdot, \alpha_1) & \gamma_{c2}(\cdot, \alpha_2) & \dots & \gamma_{c,n-1}(\cdot, \alpha_{n-1}) & & \gamma_c(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{III-122})$$

$$\mathcal{P}_c(\cdot, \lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{a}_i(\cdot) + c_i^*(\cdot)) \lambda^i \quad (\text{III-123})$$

$$\gamma_{ci}(\cdot, \alpha_i) = - \mathcal{P}_c(\cdot, \alpha_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{III-124})$$

$$\gamma_{cn}(\cdot) = - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - \tilde{a}_{n-1}(\cdot) - c_{n-1}^*(\cdot) \quad (\text{III-124})$$

soit stable, exprime que le processus (III-108) admet η comme coefficient d'amortissement.

Comme précédemment, au paragraphe (II-3-1), nous pouvons établir plusieurs conditions, plus ou moins contraignantes, permettant la détermination de la commande u_1 .

A titre d'exemple, envisageons le cas pour lequel la matrice $A_c(.)$ est définie par (III-122) telle que :

$$M_n(A_c(.) \equiv A_c(.) \tag{III-125}$$

les scalaires $c_i^*(.)$, résolvant le problème, sont des solutions du système d'inégalités :

$$(-1)^{n-i} \sum_{j=0}^{n-1} c_j^*(.) (\alpha_i)^j \geq \varepsilon - (-1)^{n-i} [\alpha_i^n + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{a}_j(.) (\alpha_i)^j] \tag{III-126}$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j^*(.) (-\eta)^j \geq \varepsilon - [(-\eta)^n + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{a}_j(.) (-\eta)^j] \tag{III-127}$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

linéaire en $c_i^*(.)$, $\forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, avec $\varepsilon > 0$ et

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < -\eta < 0 \tag{III-128}$$

Remarques :

- Les relations (III-126, 127, 128) indiquent que les scalaires $(a_i(.) + c_i^*(.))$ doivent être convenablement choisis de façon à ce que les racines des polynômes $\mathcal{P}_c(., \lambda)$ défini par :

$$\mathcal{P}_c(., \lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i(.) + c_i^*(.)) \lambda_i \tag{III-129}$$

soient réelles, négatives et séparées par des paramètres α_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ satisfaisant les inégalités (III-128).

- Ces considérations, correspondant à l'interprétation possible des contraintes par rapport aux polynômes caractéristiques du système corrigé ou non corrigé, nous ont permis de définir dans le paragraphe suivant, une procédure simple conduisant directement à la commande recherchée.

II-3-1-2-2 Méthode de synthèse par comparaison

La méthode consiste à déterminer les paramètres de correction en comparant le polynôme caractéristique du processus à corriger avec un polynôme, de même ordre que le précédent, à coefficients pouvant être non linéaires, construit par l'utilisateur.

Notons par \mathcal{P}_c la classe des polynômes $\mathcal{P}_c(.,\lambda)$ dont la partie réelle de la plus grande valeur caractéristique est inférieure à $-\eta$, η étant le coefficient d'amortissement exigé par l'utilisateur pour le système décrit par (III-108) corrigé. Soit :

$$\mathcal{P}_c(.,\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_{ci}^*(.) \lambda^i, \quad \mathcal{P}_c(.,\lambda) \in \mathcal{P}_c \quad (\text{III-130})$$

Il est évident qu'il suffit d'appliquer une commande u_1 telle que :

$$u_1 = \sum_{i=0}^{n-1} (-c_{ci}^*(.) + (\tilde{a}_e)_i(.)) y^{(i)} \quad (\text{III-131})$$

pour garantir le fonctionnement désiré par l'utilisateur pour le système défini par la relation (III-108), $(\tilde{a}_e)_i$: étant une estimation de la non linéarité $\tilde{a}_i(.)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$.

Cette procédure simplifie considérablement la recherche de la commande et conduit à une chaîne de réaction pouvant être non linéaire. Elle nécessite toutefois la résolution du problème de la définition du modèle des non linéarités (estimées).

II-3-1-2-3 Théorème (III-7)

Une condition suffisante d'existence d'une structure bouclée permettant d'assurer au processus décrit par l'équation différentielle (III-108) un coefficient d'amortissement supérieur ou égal à η est qu'il existe des scalaires $c_i^*(.)$, $\forall i = 0, 1, \dots, n-1$ tels que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

- (a) il existe α_i et β_i des réels arbitraires distincts choisis respectivement négatifs et positifs, $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$\eta = \epsilon - \max_i (\alpha_i + \beta_i)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - \tilde{a}_{n-1}(\cdot) - c_{n-1}^*(\cdot) + \dots \\ \dots \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i^{-1} |(\alpha_i)^n + \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{a}_j(\cdot) + c_j^*(\cdot)) (\alpha_i)^j| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \end{array} \right.$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{E} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \quad (\text{III-132})$$

- (b) il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ nombres complexes distincts à partie réelle négative, $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

(i) $\eta < -\text{Reel}(\alpha_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1$ (III-133)

(ii) $\eta - \sum_{i=1}^{n-1} \text{Reel}(\alpha_i) - \tilde{a}_{n-1} - c_{n-1}^*(\cdot)$

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i=1}^{n-1} (\text{Reel} \alpha_i)^{-1} |(\alpha_i)^n + \dots \\ \dots \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{a}_j(\cdot) + c_j^*(\cdot)) (\alpha_i)^j| \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \end{array} \right\} \leq \epsilon < 0 \quad (\text{III-134}) \right.$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{E} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

(c) Il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ nombres réels distincts et négatifs, $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$(i) \quad n < -\alpha_{n-1} < \dots < -\alpha_2 < -\alpha_1 \quad (III-135)$$

$$(ii) \quad (-1)^{n-i} \left((\alpha_i)^n + \sum_{j=1}^{n-1} (\tilde{a}_j(\cdot) + c_j^*(\cdot)) \alpha_i^j \right) \geq -\epsilon > 0 \quad (III-136)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$(iii) \quad (-n)^n + \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{a}_j(\cdot) + c_j^*(\cdot)) (-n)^j \geq -\epsilon > 0 \quad (III-137)$$

$$\forall (t, x, P) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

II-3-1-3 Exemple du circuit ferrorésonnant série :

Exemple (III-3)

Le système asservi étudié est à retour tachymétrique réalisant la régulation d'un filtre linéaire de second ordre constitué par une double intégration [18, 20]. Il concerne le circuit RLC série à inductance non linéaire régi par l'équation :

$$Ri + \frac{d}{dt} (\phi(i)) + \frac{1}{c} \int i dt = u \quad (III-138)$$

i et ϕ sont respectivement le courant et le flux de l'inductance L non linéaire.

Le choix d'une norme scalaire $p(x) = x^T x$, pour ce circuit ferrorésonnant pouvant être décrit [18] par la relation :

$$\frac{d}{dt} (x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} (1 - \lambda^2 f^*(\cdot)) & \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} x$$

avec $f^*(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} f(\varepsilon)$, $f^*(0) = 0$ et $\lambda = RC$ conduit à la relation :

$$\frac{d}{dt} [p(x)] \leq \max \left\{ \frac{1 - \lambda^2 f^*(.)}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda} \right\} p(x)$$

Pour garantir un coefficient d'amortissement η pour le système étudié il suffit donc de choisir convenablement la résistance R et la capacité C , c'est-à-dire λ , telles que :

$$\eta = - \max \left\{ \frac{1 - \lambda^2 f^*}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda} \right\}$$

II-3-2 Systèmes décrits par deux équations différentielles

L'étude envisagée est illustrée sur le cas du couplage non linéaire d'un système linéaire décrit par (II-68) et d'un système non linéaire décrit par (II-69) en régime libre.

La résolution du problème de la synthèse d'un tel processus peut être effectuée en définissant, par réaction d'état, des chaînes de correction au niveau des sous-systèmes, ou/et en ajustant les paramètres caractérisant les interactions.

Dans cette partie, nous recherchons par un choix adéquat des interactions non linéaires, $g_i^*(.) \forall i = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1$ et c_j^1 , $\forall j = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1$ à garantir pour le processus décrit par (II-59) et (II-60) un coefficient d'amortissement supérieur ou égal à η , et correspondant à un cas de validité de la conjecture linéaire.

Théorème (III-8) :

Une condition suffisante d'existence des scalaires $g_i^*(.)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$ et c_j^1 , $\forall j = 1, 2, \dots, n_2 - 1$, permettant d'assurer au processus décrit par les relations (II-59, 60) avec les notations

(II-61 → 67), un coefficient d'amortissement supérieur ou égal à n est qu'il existe $\varepsilon < 0$, \mathcal{X} , α_i^1 , $\forall i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$ et α_j^2 , $\forall j = 1, 2, \dots, n_2 - 1$ vérifiant les inégalités (II-74, 75) tels que :

(i) les inégalités (II-76 → 81) sont vérifiées $\forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}$

(ii) $\mathcal{P}_{n_1}(-\eta) > 0$ (III-139)

(iii) $\mathcal{P}_{n_1}(-\eta) \mathcal{P}_{n_2}(\cdot, \eta) - e_{12} e_{21} R_{12}(\eta) R_{21}(\eta) > -\varepsilon$ (III-140)

$\forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}$

(iv) $\eta + \alpha_i^1 < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$

(v) $\eta + \alpha_j^2 < 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_2 - 1$

II-4 CAS DES SYSTEMES NON LINEAIRES DU TYPE LUR'E POSTNIKOV

L'étude des systèmes non linéaires du type LUR'E POSTNIKOV peut être conduite de la même manière que celle des systèmes décrits par une équation différentielle. Toutefois, il est possible dans ce cas d'interpréter les conditions garantissant des performances pré-spécifiées par rapport aux caractéristiques de la partie linéaire du processus d'une part, et à la non linéarité d'autre part.

II-4-1 Systemes monovariabiles

En effet, considérons le processus défini figure (II-2) tel que :

- la fonction de transfert $L(p)$ de la partie linéaire du système en boucle ouverte est défini par :

$$L(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

$$\text{avec } N(p) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i p^i \quad (\text{III-109})$$

$$D(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i \quad (\text{III-110})$$

- la nonlinéarité k dépend du temps t , de l'écart ϵ entre l'entrée et la sortie du système bouclé et éventuellement des perturbations $P \in \mathcal{P}$,
 $k = k(t, \epsilon, P)$, $k \in [\underline{k}, \bar{k}] \in \mathbb{R}$

Il vient dans ce cas, la description du processus par l'équation différentielle scalaire suivante :

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + k(\cdot) c_i) y^{(i)} = 0 \quad (\text{III-141})$$

Les processus étudiés décrits par (III-141) constituent un cas particulier de la classe des systèmes envisagés dans le paragraphe (II-3) précédent. Il est donc possible d'utiliser les résultats obtenus dans ce paragraphe pour l'estimation et l'amélioration des performances des systèmes du type LUR'E POSTNIKOV considérés.

Nous envisagerons dans le théorème (III-9) l'étude de plusieurs cas possibles pour lesquels la conjecture linéaire est vérifiée, et ensuite le cas des processus fortement non linéaires pour lesquels le système de comparaison est d'ordre maximum n .

Théorème (III-9)

Une condition suffisante d'existence d'une structure bouclée permettant d'assurer au processus du type LUR'E POSTNIKOV défini figure (II-2) et par le relation (III-141) un coefficient

d'amortissement supérieur ou égal à n est qu'il existe des coefficients $c_i, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, tels que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

(a) il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ nombres réels distincts et négatifs, $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$(i) \quad n < -\alpha_{n-1} < -\alpha_{n-1} < \dots < -\alpha_2 < -\alpha_1 \quad (III-142)$$

$$(ii) \quad (-1)^{n-i} \left[(\alpha_i)^n + \sum_{j=0}^{n-1} (a_j + k(\cdot) c_j) (\alpha_i)^j \right] \geq -\epsilon > 0 \quad (III-143)$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{X} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$(iii) \quad (-n)^n + \sum_{j=0}^{n-1} (a_j + k(\cdot) c_j) (-n)^j \geq -\epsilon > 0 \quad (III-144)$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{X}$$

(b) il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

(i) les polynômes $N(p)$ et $D(p)$ forment une paire positive et $c_{n-1} = 1$

$$(ii) \quad (-n)^n + \sum_{j=0}^{n-1} (a_j + k(\cdot) c_j) (-n)^j \geq -\epsilon > 0 \quad (III-145)$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{X}$$

(c) il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ nombres complexes distincts à partie réelle négative, $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$(i) \quad n + \text{Reel}(\alpha_i) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (III-146)$$

$$(ii) \quad \left. \begin{aligned} & n - \sum_{i=1}^{n-1} \text{Reel} \alpha_i - a_{n-1} - k(\cdot) c_{n-1} \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \left| (\alpha_i)^n + \sum_{j=0}^{n-1} (a_j + k(\cdot) c_j) (\alpha_i)^j \right| (n + \text{Reel} \alpha_i)^{-1} \left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j) \right|^{-1} \end{aligned} \right\} \leq \epsilon < 0$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{X}$$

(III-147)

(d) il existe $\beta_i, \alpha_i \forall i = 1, 2, \dots, n-1$ nombres complexes distincts respectivement positifs et à partie réelle négative, $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$n = \epsilon - \max \begin{cases} \max_i (\beta_i + \text{Reel } \alpha_i) \\ -\sum_{i=1}^{n-1} \text{Reel } \alpha_i - a_{n-1} - k(\cdot) c_{n-1} \\ +\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i^{-1} |(\alpha_i)^n + \sum_{j=0}^{n-1} (a_j + k(\cdot) c_j) (\alpha_i)^j| \cdot \left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j) \right|^{-1} \end{cases}$$

$$\forall (t, x) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{X}$$

(III-148)

II-4-2 Interconnexion série de deux sous-systèmes

L'étude envisagée est illustrée sur le cas des processus non linéaires définis figure (II-6) et par les équations (II-134, 135) Dans cette partie nous recherchons par un choix adéquat des chaînes de correction au niveau des sous-systèmes d'une part et au niveau des interactions d'autre part, c'est-à-dire k_1, c_i^1, c_i^4 , $\forall i = 1, 2, \dots, n_1-1, k_2, c_j^2, c_j^3, \forall j = 1, 2, \dots, n_2-1$ à garantir au processus décrit par (II-134, 135) et correspondant à un cas de validité de la conjecture linéaire, un coefficient d'amortissement supérieur ou égal à n .

Théorème (III-10)

Une condition suffisante d'existence des scalaires $k_1, c_i^1, c_i^4 \forall i = 1, 2, \dots, n_1-1, k_2, c_j^2, c_j^3 \forall j = 1, 2, \dots, n_2-1$, permettant d'assurer au processus décrit par (II-134, 135) un coefficient d'amortissement supérieur ou égal à n est qu'il existe $\epsilon < 0, \mathcal{X} \alpha_i^1, \forall i = 1, 2, \dots, n_1-1$ et $\alpha_j^2, \forall j = 1, 2, \dots, n_2-1$ vérifiant les inégalités (II-74, 75) tels que :

(i) les inégalités (II-136 + 141) sont vérifiées

$$(ii) \quad (-n)^{n_1} + \sum_{j=0}^{n_1-1} (a_j^1 + k_1 f_1 c_j^1) (-n)^j \geq -\epsilon \quad (III-149)$$

$$(iii) \quad \left. \begin{aligned} & [(-n)^{n_1} + \sum_{j=0}^{n_1-1} (a_j^1 + k_1 f_1 c_j^1) (-n)^j] [(-n)^{n_2} + \sum_{j=0}^{n_2-1} (a_j^2 + f_2^*(.) c_j^2) (-n)^j] \\ & -R_{12}(-n) \cdot R_{21}(., -n) \end{aligned} \right\} \geq -\epsilon$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (III-150)$$

avec les notations (II-127, 128)

$$(iv) \quad \eta + \alpha_j^i < 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_i - 1, \quad \forall i = 1, 2$$

II-5 CAS DES SYSTEMES NON LINEAIRES SINGULIEREMENT PERTURBES

L'étude suivante consiste à estimer et améliorer les performances des systèmes dégénérés. Dans ce sens, l'amélioration des performances des sous-systèmes "rapides" et du système "lent" d'une part, ou/et l'ajustement des paramètres caractérisant les interactions entre les sous-systèmes, peut conduire à un fonctionnement préspecifié du système dégénéré.

Les cas des sous-systèmes d'ordre 1, d'ordre quelconque, du type LUR'E POSTNIKOV ou/et décrits par une équation différentielle, sont envisagés dans cette partie.

II-5-1 Sous-systèmes d'ordre quelconque

Considérons le processus hiérarchisé à deux niveaux (III-43) dont le premier niveau est composé de (r-1) sous-systèmes S_i caractérisés par la matrice $A_{i1}(.)$ définie par la relation (III-44), le second étant défini par le sous-système S_r et par la relation (III-45).

Théorème (III-11)

Une condition suffisante pour que le processus corrigé décrit par (III-51) avec les notations (II-43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 52) possède un coefficient d'amortissement supérieur ou égal à η est qu'il existe $\varepsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) les hypothèses (H - 1, 2, 3) sont vérifiées.

$$(ii) \quad \eta + \text{Reel}(a_{ii}^r) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_r - 1 \quad (III-151)$$

$$(iii) \quad \eta + \text{Reel}(a_{n_r n_r}^r) - \sum_{j=1}^{n_r-1} (\eta + \text{Reel } a_{jj}^r)^{-1} |a_{n_r, j}^r| |a_{j, n_r}^r| \leq \varepsilon$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (III-152)$$

Lorsqu'il est possible en particulier de définir une matrice caractéristique d'un système de comparaison identique à celle du processus, nous pouvons de la même façon que pour l'étude de la stabilité de tel processus, comparer les performances du système dégénéré par rapport à celles du processus initial.

II-5-2 Sous-systèmes du premier niveau hiérarchique d'ordre 1

Les processus monovariabiles du "type" LUR'E POSTNIKOV ou définis par une équation différentielle peuvent être décrits par un système différentiel de la forme (III-35).

Le changement de l'échelle de temps pour tout ou parties des sous-systèmes du premier niveau hiérarchisé conduit à la définition de plusieurs classes de systèmes singulièrement perturbés.

II-5-2-1 Interprétations structurelle et temporelle
des systèmes linéaires singulièrement perturbés

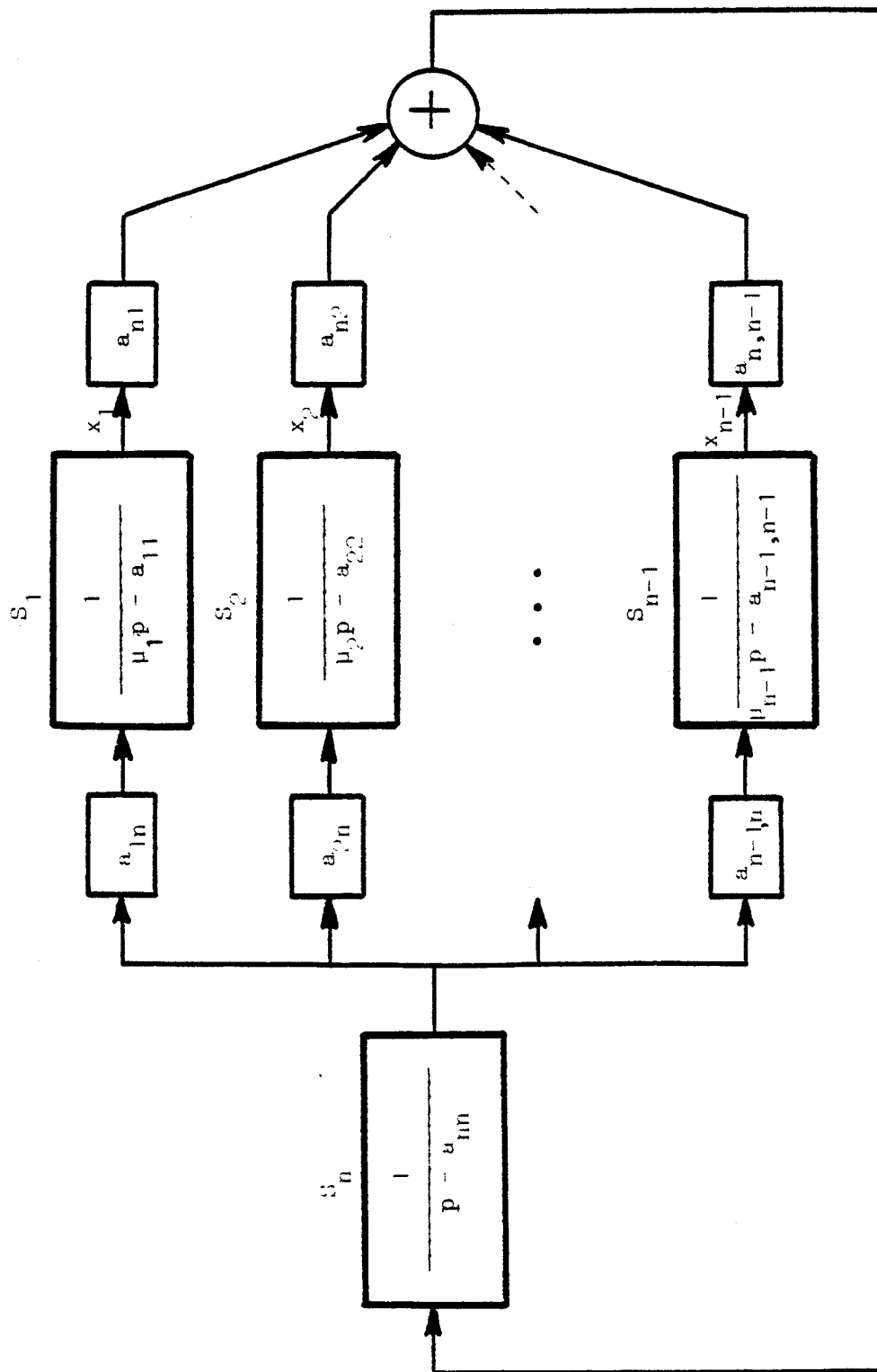
Considérons d'abord le processus linéaire décrit par :

$$\frac{d}{dt} (\mu_i x_i) = a_{ii} x_i + a_{in} x_n \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{III-153})$$

$$\frac{d}{dt} (x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \quad (\text{III-154})$$

μ_i étant un petit paramètre, $\mu_i \in \mathcal{R}_+$, $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$.

Il vient une structure hiérarchisée correspondante définie dans la figure (III-8) où p est l'opérateur de LAPLACE. En remarquant que le passage d'opérateur p à l'opérateur $\mu_i p$ correspond au changement de l'échelle des temps t par $\tau_i = \mu_i t$, et que pour $\mu_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, j$ et $\mu_i = 1, \forall i = j + 1, \dots, n-1$, l'évolution de l'état des sous-systèmes $S_i, \forall i = 1, 2, \dots, j$ est rapide par rapport à celle de $S_i, \forall i = j + 1, \dots, n$ qui est lente, il vient deux cas à considérer correspondant d'une part à un système dégénéré d'ordre 1 (figure III-9) et celui d'ordre $n-j$, $j < n$, (figure III-10) d'autre part.



Fig(III-8): système singulièrement perturbé à plusieurs échelles des temps.



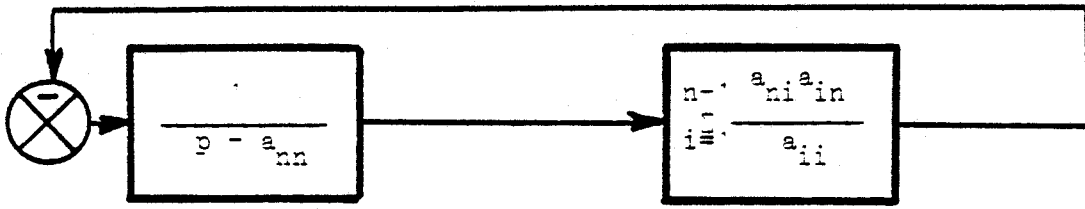


Fig. (III-9) Système dégénéré d'ordre 1

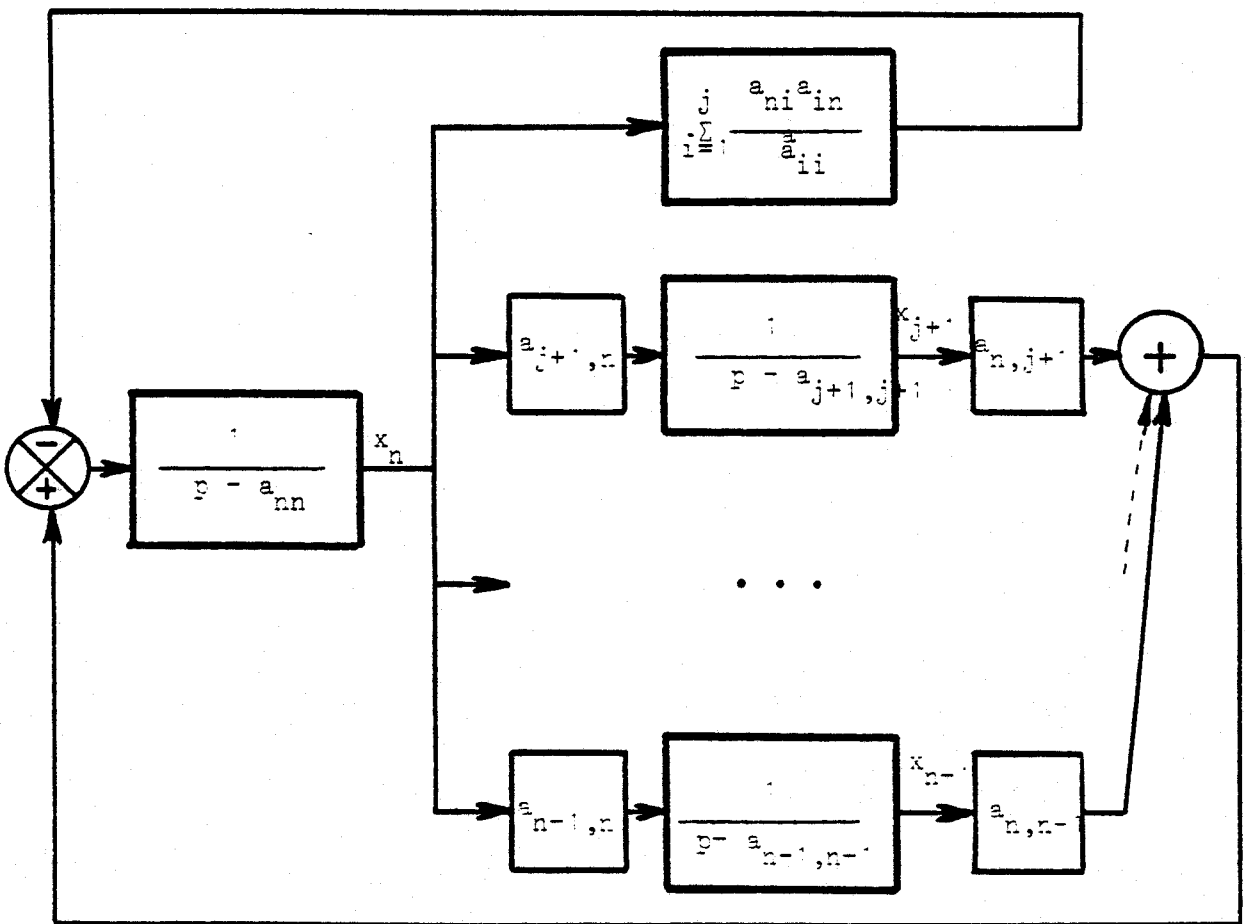


Fig. III-10) Système dégénéré d'ordre $(n-j)$, $j < n$.



II-5-2-2 Systemes d'égénérés non linéaires d'ordre 1

Théorème (III-12)

Une condition suffisante pour que le système d'égénéré décrit par (III-35) pour $\mu_i = 0$ et $a_{ii}(\cdot) \neq 0 \forall (t, x) \in \mathbb{T} \times \mathcal{X}$ $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ possède un coefficient d'amortissement supérieur ou égal à η est qu'il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$\eta + a_{nn}(\cdot) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni}(\cdot) a_{in}(\cdot)}{a_{ii}(\cdot)} \leq \epsilon \quad (\text{III-155})$$

Cas particuliers

1. Considérons en particulier le processus décrit par l'équation différentielle scalaire (II-44), admettant la représentation (II-46) dans l'espace d'état avec les notations (II-48, 49, 50).

Supposons par ailleurs que ce processus puisse être décomposé en deux parties d'ont l'une est lente et l'autre rapide telles que :

$$\frac{d}{dt} (\mu x_i) = \alpha_i x_i + x_n \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{III-156})$$

$$\frac{d}{dt} (x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i(\cdot, \alpha_i) x_i + \gamma_n(\cdot) x_n \quad (\text{III-157})$$

$\alpha_i < 0$, étant des paramètres caractérisant les sous-systèmes rapides S_i du premier niveau hiérarchique, $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$.

Le système d'égénéré est défini dans ce cas par l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{d}{dt} (x_n) = (\gamma_n(\cdot) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma_i(\cdot, \alpha_i)}{\alpha_i}) x_n \quad (\text{III-158})$$

ou encore plus simplement

$$\frac{d}{dt} (x_n) = - \tilde{a}_0(.) \prod_{i=1}^{n-1} (-\alpha_i)^{-1} x_n \quad (\text{III-159})$$

Théorème(III-13)

Une condition suffisante pour que le système dégénéré décrit par (III-156, 157) pour $\mu = 0$ et $\alpha_i < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1$ possède un coefficient d'amortissement supérieur ou égal à η est qu'il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$\eta - \tilde{a}_0(.) \prod_{i=1}^{n-1} (-\alpha_i)^{-1} \leq \epsilon \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (\text{III-160})$$

2. Considérons maintenant le processus du type LUR'E POSTNIKOV de la figure (II-2) défini par l'équation différentielle (III-141) avec les notations (II-109, 110). Supposons, comme précédemment, que ce système peut se décomposer en une partie évoluant lentement et l'autre rapidement, et qu'il est décrit par (III-156, 157) avec les notations suivantes :

$$\gamma_i(., \alpha_i) = - \left[(\alpha_i)^n + \sum_{j=0}^{n-1} (a_j + k(.) c_j) (\alpha_i)^j \right] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \quad (\text{III-161})$$

$$\gamma_n(.) = - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - a_{n-1} - k(.) c_{n-1} \quad (\text{III-162})$$

Théorème(III-14)

Une condition suffisante pour que le système dégénéré décrit par (III-156, 157) avec les notations (III-161, 162) pour $\mu = 0$ et $\alpha_i < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1$ possède un coefficient d'amortissement supérieur ou égal à η est qu'il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$\eta - (a_0 + k(\cdot) c_0) \prod_{i=1}^{n-1} (-\alpha_i)^{-1} \leq \varepsilon \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \quad (\text{III-163})$$

Remarque :

Les théorèmes (III-13) et (III-14) traitent le problème des performances des systèmes décrits par (II-44) et (III-141), singulièrement perturbés sans spécifier la partie rapide.

II-5-2-3 Systèmes dégénérés non linéaires d'ordre j

Soit le processus singulièrement perturbé décrit par :

$$\frac{d}{dt} (\mu x_i) = a_{ii}(\cdot) x_i + a_{in}(\cdot) x_n \quad \forall i = 1, 2, \dots, j \quad (\text{III-163})$$

$$\frac{d}{dt} (x_i) = a_{ii} x_i + a_{in} x_n \quad \forall i = j+1, j+2, \dots, n-1 \quad (\text{III-164})$$

$$\frac{d}{dt} (x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ni}(\cdot) x_i \quad (\text{III-165})$$

Pour $\mu = 0$ et $a_{ii}(\cdot) \leq \varepsilon < 0$ il vient le système dégénéré suivant :

$$\frac{d}{dt} (x_i) = a_{ii} x_i + a_{in} x_n \quad \forall i = j+1, j+2, \dots, n-1 \quad (\text{III-166})$$

$$\frac{d}{dt} (x_n) = \sum_{i=j+1}^{n-1} a_{ni}(\cdot) x_i + (a_{nn}(\cdot) - \sum_{i=1}^j \frac{a_{ni}(\cdot) a_{in}(\cdot)}{a_{ii}(\cdot)}) x_n \quad (\text{III-167})$$

Théorème (III-15)

Une condition suffisante pour que le système dégénéré décrit par (III-163, 164, 165) pour $\mu = 0$ et $a_{ii}(\cdot) \leq \epsilon < 0$ $\forall i = 1, 2, \dots, j$ possède un coefficient d'amortissement supérieur ou égal à η est qu'il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$n + a_{ii} < 0 \quad \forall i = j+1, \dots, n-1 \quad (\text{III-168})$$

$$n + a_{nn}(\cdot) - \sum_{i=1}^j \frac{a_{ni}(\cdot) a_{in}(\cdot)}{a_{ii}(\cdot)} - \sum_{i=j+1}^{n-1} \frac{|a_{ni}(\cdot)| |a_{in}|}{\eta + a_{ii}} < \epsilon \quad (\text{III-169})$$

$\forall (t, x) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{X}$

Le théorème (III-15) résulte de l'application du théorème (III-12) pour le processus dégénéré (III-166, 167).

II-5-3 Cas d'interconnexion de deux systèmes du type LUR'E POSTNIKOV

L'étude envisagée est illustrée sur le cas des processus non linéaires définis figure (II-6) et par les équations différentielles (II-134, 135).

Nous supposons que le système est singulièrement perturbé et décrit avec les notations (II-67, 122 → 128) par les équations suivantes :

$$\frac{d}{dt} (\mu x_{ij}) = \alpha_j^i x_{ij} + x_{in_i} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n-1 \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{III-170})$$

$$\frac{d}{dt}(x_1, n_1) = \sum_{i=1}^{n_1-1} \left(\frac{-\mathcal{P}_{n_1}(\cdot, \lambda) (\lambda - \alpha_i^1)}{R_1(\lambda)} \right)_{\lambda = \alpha_i^1} x_1 i \quad (\text{III-171})$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{i=1}^{n_2-1} \left(\frac{R_{12}(\cdot, \lambda) (\lambda - \alpha_i^2)}{R_2(\lambda)} \right)_{\lambda = \alpha_i^2} x_2 i \\ & + \sum_{i=1}^{n_1-1} \alpha_i^1 - a_{n_1-1}^1 - k_1 f_1^*(\cdot) c_{n_1-1}^1 - e_{11} e_{21} k_1 f_4^*(\cdot) f_5^*(\cdot) c_{n_1-1}^4 + e_{21} f_5^*(\cdot) c_{n_2-1}^2 x_{2n_2} \end{aligned}$$

$$- k_1 (e_{22} f_1^*(\cdot) f_3^*(\cdot) c_{n_2-1}^3 + e_{21} f_5^*(\cdot) c_{n_2-1}^2) x_{2n_2}$$

$$\frac{d}{dt}(x_2, n_2) = \sum_{i=1}^{n_2-1} \left(\frac{-\mathcal{P}_{n_2}(\cdot, \lambda) (\lambda - \alpha_i^2)}{R_2(\lambda)} \right)_{\lambda = \alpha_i^2} x_2 i \quad (\text{III-172})$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_1-1} \left(\frac{R_{21}(\cdot, \lambda) (\lambda - \alpha_i^1)}{R_1(\lambda)} \right)_{\lambda = \alpha_i^1} x_1 i$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_2-1} \alpha_i^2 - a_{n_2-1}^2 - k_2 f_2^*(\cdot) c_{n_2-1}^2 - e_{22} e_{12} f_3^*(\cdot) f_6^*(\cdot) c_{n_2-1}^3 x_{2n_2}$$

$$- k_2 (e_{11} f_2^*(\cdot) f_4^*(\cdot) c_{n_1-1}^4 + e_{21} f_5^*(\cdot) c_{n_1-1}^2) x_{1n_1}$$

Le système dégénéré obtenu en faisant $\mu = 0$, pour $\alpha_j^i < 0$;
 $\forall j = 1, 2, \dots, n_i-1, \forall i = 1, 2$, dans les relations (III-170, 171, 172)
 est défini par :

$$\frac{d}{dt} ({}^d x) = {}^d A(\cdot) {}^d x, \quad {}^d x = [x_1, n_1, x_2, n_2]^T \quad (\text{III-173})$$

$${}^d A(.) = \begin{bmatrix} -\frac{\mathcal{P}_{n1}(.,0)}{R_1(0)} & \frac{R_{12}(.,0)}{R_2(0)} \\ \frac{R_{21}(.,0)}{R_1(0)} & -\frac{\mathcal{P}_{n2}(.,0)}{R_2(0)} \end{bmatrix}$$

Théorème (III-16)

Une condition suffisante pour que le système dégénéré décrit par (III-173), obtenu à partir de (III-163, 164, 165) pour $\mu = 0$ et $\alpha_j^i < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n_i - 1, \forall j = 1, 2$, possède un coefficient d'amortissement supérieur ou égal à η est qu'il existe $\epsilon < 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$(i) \quad \eta - \frac{\mathcal{P}_{n1}(.,0)}{R_1(0)} < \epsilon \quad \forall (t,x) \in \mathbb{E} \times \mathcal{X} \quad (III-174)$$

$$(ii) \quad \left(\eta - \frac{\mathcal{P}_{n1}(.,0)}{R_1(0)} \right) \left(\eta - \frac{\mathcal{P}_{n2}(.,0)}{R_2(0)} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{R_{12}(.,0)}{R_2(0)} + \frac{R_{21}(.,0)}{R_1(0)} \right)^2 \geq -\epsilon$$

$$\forall (t,x) \in \mathbb{E} \times \mathcal{X} \quad (III-175)$$

Démonstration

Le choix d'une norme scalaire $p(x) = {}^d x^T {}^d x$ pour le système

$$\frac{d}{dt} ({}^d x) = ({}^d A(.) + \eta I_2) {}^d x \quad (III-176)$$

implique que le système (III-173) possède un coefficient d'amortissement supérieur à η si la condition suffisante suivante est vérifiée : il existe une fonction ϕ de classe K au sens de HAHN [33] tel que :

$${}^d x^T \left[M_2 \left(\frac{1}{2} ({}^d A(.) + {}^d A^T(.)) \right) + \eta I_2 \right] {}^d x \leq -\phi(\|{}^d x\|) \quad (III-177)$$

la matrice $M_2(.)$ définie par :

$$M_2(.) = \begin{bmatrix} -\frac{\mathcal{P}_{n1}(.,0)}{R_1(0)} + \eta & \frac{1}{2} \left| \frac{R_{12}(.,0)}{R_2(0)} + \frac{R_{21}(.,0)}{R_1(0)} \right| \\ \frac{1}{2} \left| \frac{R_{12}(.,0)}{R_2(0)} + \frac{R_{21}(.,0)}{R_1(0)} \right| & -\frac{\mathcal{P}_{n2}(.,0)}{R_2(0)} + \eta \end{bmatrix} \quad (\text{III-178})$$

étant à éléments hors diagonaux non négatifs, par application des conditions de KOTELYANSKI [14] il vient les contraintes (III-174,175) du théorème (III-16).

Nous constatons que le processus dégénéré possède un coefficient d'amortissement η si les sous-systèmes du type LUR'E POSTNIKOV dégénérés possèdent la même performance et si les paramètres d'interconnexions vérifient la contrainte (III-175).

III- APPLICATION A L'ETUDE DU PROBLEME DE LA REGULATION DE LA FREQUENCE DANS LES CENTRALES THERMIQUES

Nous proposons dans cette section de montrer qu'il est possible d'appliquer la méthode d'étude proposée à l'étude d'un processus industriel. Il s'agit ici d'étudier le problème bien connu (26, 34, 35, 36, 37) de la régulation de fréquence dans les centrales thermiques figure (III-11).

Le problème de la synthèse peut être réduit en définissant des formes canoniques permettant l'utilisation des critères de stabilité précédents.

III-1 DESCRIPTION DU PROCESSUS

Le première formulation du problème concernant plusieurs centrales thermiques interconnectées à un même réseau de distribution a été présentée par FOSHA et ELGERD dans [35, 42]. La synthèse des systèmes de commande a été ensuite envisagée dans [26, 36, 37] en considérant le processus linéaire.

En supposant qu'il y a un générateur de vapeur par centrale il apparaît [26] intéressant de conduire l'étude à partir des variables suivantes :

Δf_i : variation de la fréquence au niveau de la centrale i

ΔP_{ti} : variation de la sortie de la turbine au niveau de la centrale i

ΔS_{gi} : variation de la position de la commande

$\Delta P_{\ell_{gi}}$: variation de la puissance entre le réseau et la centrale i

Il vient dans ce cas le modèle mathématique de deux centrales thermiques couplées à un même réseau, correspondant au schéma bloc de la figure (III-11) :

$$\frac{d}{dt} (\Delta f_i) = \frac{D_i f_i^*}{2H_i} \Delta f_i + \frac{f_i^*}{2H_i} (\Delta P_{Li} - \Delta P_{\ell_{gi}} - \Delta P_{ti}) \quad \forall i = 1,2 \quad (\text{III-179})$$

$$\frac{d}{dt} (\Delta P_{ti}) = \frac{1}{T_{ti}} (\Delta S_{gi} - \Delta P_{ti}) \quad \forall i = 1,2 \quad (\text{III-180})$$

$$\frac{d}{dt} (\Delta S_{gi}) = \frac{1}{T_{gi}} (-\Delta S_{gi} - \frac{1}{R_i} \Delta f_i) + \frac{1}{T_{gi}} U_i \quad \forall i = 1,2 \quad (\text{III-181})$$

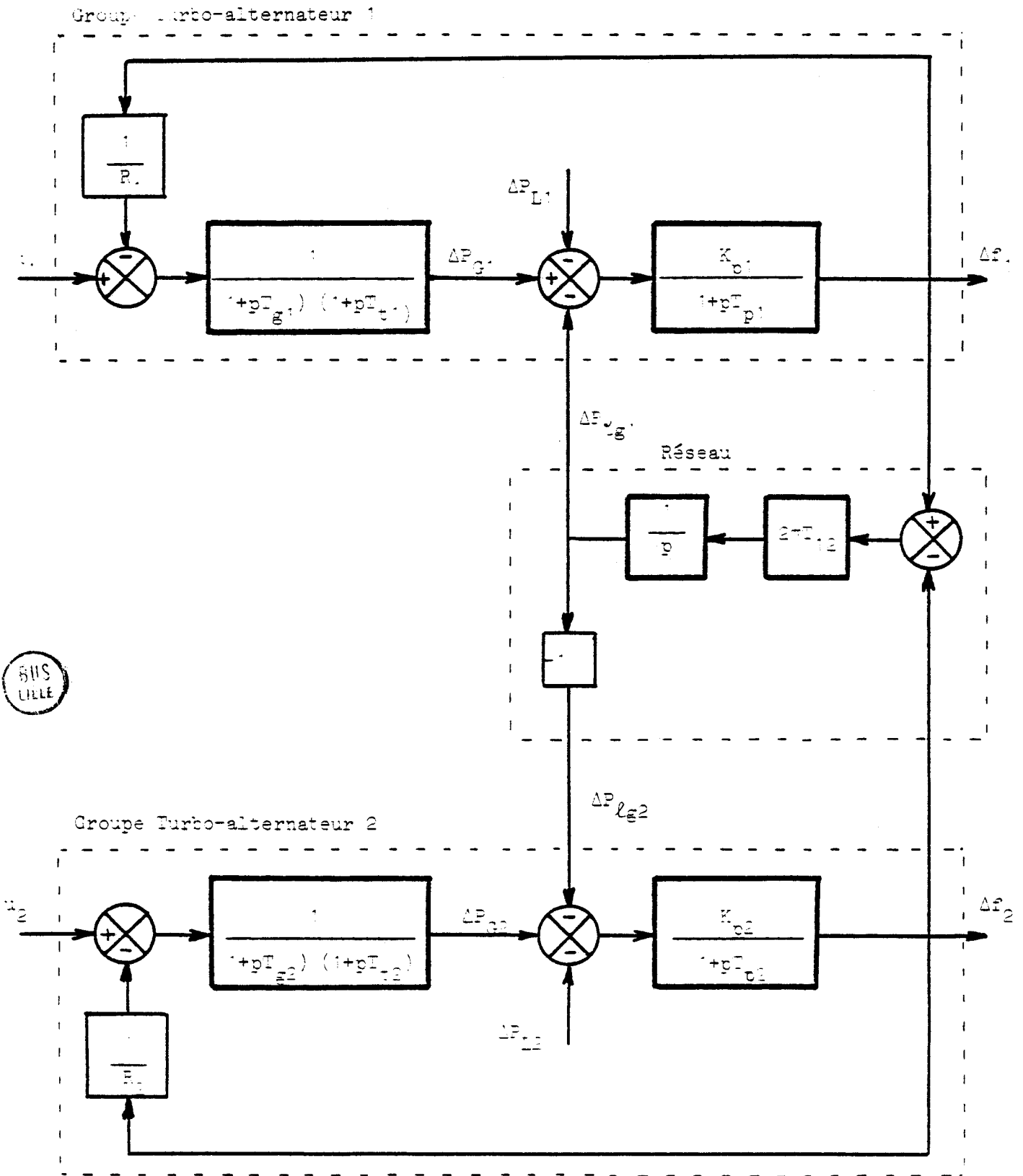


Fig. III-11) Modèle de deux centrales couplées sur un même réseau en régulation de fréquence.

$$\frac{d}{dt} (\Delta P_{Lgi}) = T_{i1} (\Delta f_i - \Delta f_j) \quad \forall (i,j) = (1,2), (2,1) \quad (\text{III-182})$$

$$ACE_i = \Delta P_{Lgi} + \beta_i \Delta f_i \quad \forall i = 1,2 \quad (\text{III-183})$$

$$\frac{d}{dt} (IACE_i) = \beta_i \Delta f_i + \Delta P_{Lgi} \quad \forall i = 1,2 \quad (\text{III-184})$$

avec f^* la fréquence nominale du système, H_i la constante d'inertie, D_i le gain du système (égal à $(K_{pi})^{-1}$), T_{ti} la constante de temps de la turbine, T_{gi} la constante de temps du système de commande de la turbine, T_{ij} la constante d'interaction, R_i le statisme, ΔP_{Li} les perturbations, ACE_i l'erreur sur la commande, $IACE_i$ l'intégrale de ACE_i , U_i la commande du variateur de vitesse.

III-2 FORMES CANONIQUES EN FLECHE DE LA MATRICE CARACTERISTIQUE DU PROCESSUS

Notations :

$$\begin{aligned} s_i &\equiv \Delta f_i \quad \forall i=1,2 ; & z_1 &\equiv \Delta P_{Lg1} ; & k_{ii} &\equiv (T_{gi} T_{ti})^{-1} \quad \forall i=1,2 \\ k_{i3} &\equiv \frac{K_{pi}}{T_{pi}} \quad \forall i=1,2 ; & z_2 &\equiv -\Delta P_{Lg1} ; & k &\equiv (2\pi T_{12}) \\ v_i &\equiv \Delta P_{Gi} \quad \forall i=1,2 ; & p_{21} &\equiv -(T_{t2})^{-1} ; & p_{i3} &\equiv -(T_{pi})^{-1} \quad \forall i=1,2 \quad (\text{III-185}) \\ u'_i &\equiv \Delta P_{Li} \quad \forall i=1,2 ; & p_{12} &\equiv -(T_{t1})^{-1} ; & p_{ii} &\equiv -(T_{gi})^{-1} \quad \forall i=1,2 \end{aligned}$$

III-2-1 Description du processus dans l'espace d'état

Le choix du vecteur état y défini par :

$$y = \left[\frac{dv_1}{dt}, \frac{d^2v_1}{dt^2}, \frac{dz_1}{dt}, \frac{ds_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \frac{d^2v_2}{dt^2}, \frac{dz_2}{dt}, \frac{ds_2}{dt} \right]^T \quad (\text{III-186})$$

conduit à la représentation suivante du processus en régime libre :

$$\frac{d}{dt} y = A^1 y \quad (\text{III-187})$$

avec :

$$A^1 = \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$y_i^T = \left[\frac{dv_i}{dt}, \frac{d^2v_i}{dt^2}, \frac{dz_i}{dt}, \frac{ds_i}{dt} \right] \quad \forall i = 1, 2$$

et

$$A_{ii}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -p_{i1}p_{i2} & p_{i1}+p_{i2} & 0 & -\frac{k_{ii}}{R_i} \\ 0 & 0 & 0 & k \\ k_{i3} & 0 & -k_{i3} & p_{i3} \end{bmatrix} \quad \forall i=1,2$$

$$A_{12} = A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III-2-2 Forme canonique en flèche épaisse généralisée de la matrice caractéristique

En posant :

$$x = [x_1^T, x_2^T]^T$$

$$x_i = P_i^{-1} y_i \quad \forall i = 1, 2$$

(III-188)

$$P_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{-k_{ii}\alpha_i}{R_i(p_{i1}-k\alpha_i)(p_{i2}-k\alpha_i)} & 0 \\ P_{i1} & P_{i2} & \frac{-k_{ii}k\alpha_i^2}{R_i(p_{i1}-k\alpha_i)(P_{i2}-k\alpha_i)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i & 1 \end{bmatrix}$$



$$P_i^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-P_{i2}}{P_{i1}-P_{i2}} & \frac{-1}{P_{i1}-P_{i2}} & \frac{-k_{ii}\alpha_i}{R_i(P_{i1}-k\alpha_i)(P_{i1}-P_{i2})} & 0 \\ \frac{P_{i1}}{P_{i1}-P_{i2}} & \frac{-1}{P_{i1}-P_{i2}} & \frac{k_{ii}\alpha_i}{R_i(P_{i1}-P_{i2})(P_{i2}-k\alpha_i)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_i & 1 \end{bmatrix}$$

il vient la nouvelle description du processus en flèche épaisse généralisée d'ordre 2 :

$$\frac{d}{dt} (x) = A x \tag{III-189}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

et

$$\phi_{ii} = \begin{bmatrix} P_{i1} & & & \frac{-k_{ii}P_{i1}}{R_i(P_{i1}-P_{i2})(P_{i1}-k\alpha_i)} \\ & P_{i2} & & \frac{k_{ii}P_{i2}}{R_i(P_{i1}-P_{i2})(P_{i2}-\alpha_i)} \\ & & k\alpha_i & k \\ k_{i3} & k_{i3} & \left\{ \begin{array}{l} -(\alpha_i)^2 k + (\alpha_i) P_{i3} - k_{i3} + \\ \frac{-k_{ii} k_{i3} \alpha_i}{R_i(P_{i1}-k\alpha_i)(P_{i2}-k\alpha_i)} \end{array} \right. & -k\alpha_i + P_{i3} \end{bmatrix}$$

$$\phi_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k k_{11} \alpha_2 \alpha_1}{R_1(P_{11}-P_{12})(P_{11}-k\alpha_1)} & \frac{k k_{11} \alpha_1}{R_1(P_{11}-P_{12})(P_{11}-k\alpha_1)} \\ 0 & 0 & \frac{-k k_{11} \alpha_2 \alpha_1}{R_1(P_{11}-P_{12})(P_{12}-k\alpha_1)} & \frac{-k k_{11} \alpha_2}{R_1(P_{11}-P_{12})(P_{12}-k\alpha_1)} \\ 0 & 0 & -k \alpha_2 & -k \\ 0 & 0 & k \alpha_1 \alpha_2 & k \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k k_{22} \alpha_1 \alpha_2}{R_2(P_{21}-P_{22})(P_{21}-k\alpha_2)} & \frac{k k_{22} \alpha_2}{R_2(P_{21}-P_{22})(P_{21}-k\alpha_2)} \\ 0 & 0 & \frac{-k k_{22} \alpha_1 \alpha_2}{R_2(P_{21}-P_{22})(P_{22}-k\alpha_2)} & \frac{-k k_{22} \alpha_2}{R_2(P_{21}-P_{22})(P_{22}-k\alpha_2)} \\ 0 & 0 & -k \alpha_1 & -k \\ 0 & 0 & k \alpha_1 \alpha_2 & k \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Remarque :

Le description (III-189) du processus montre que :

- chaque centrale isolée peut être décrite par une matrice en flèche mince d'ordre 4, dont les éléments diagonaux peuvent être interprétés par rapport à ses caractéristiques.

- il est possible du fait de la nature des interactions entre les deux centrales, de définir une nouvelle représentation du processus telle que sa matrice caractéristique est en flèche mince généralisée.

III-2-3 Forme canonique en flèche mince généralisée d'ordre 5
de la matrice caractéristique

Soit $x = [x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}]^T$ le vecteur état conduisant à la description (III-189) du processus. Le choix du nouveau vecteur état x' obtenu par simple permutation de certaines composantes de x tel que :

$$x' = [x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{13}, x_{23}, x_{14}, x_{24}]^T$$

permet de représenter le processus par le système différentiel suivant :

$$\frac{d}{dt} (x') = A' x' \quad (\text{III-190})$$

avec :

$$A' = \begin{bmatrix} F'_{11} & \Phi'_{12} \\ \Phi'_{21} & \Phi'_{22} \end{bmatrix}$$

et

$$F'_{11} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\phi'_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k k_{11} \alpha_2 \alpha_1}{R_1(P_{11}-P_{12})(P_{11}-k\alpha_1)} & \frac{-k_{11} P_{11}}{R_1(P_{11}-P_{12})(P_{11}-k\alpha_1)} & \frac{k k_{11} \alpha_1}{R_1(P_{11}-P_{12})(P_{11}-k\alpha_1)} \\ 0 & \frac{-k k_{11} \alpha_2 \alpha_1}{R_1(P_{11}-P_{12})(P_{12}-k\alpha_1)} & \frac{k_{11} P_{12}}{R_1(P_{11}-P_{12})(P_{12}-k\alpha_1)} & \frac{-k k_{11} \alpha_1}{R_1(P_{11}-P_{12})(P_{12}-k\alpha_1)} \\ \frac{k k_{22} \alpha_1 \alpha_2}{R_2(P_{21}-P_{22})(P_{21}-k\alpha_2)} & 0 & \frac{k k_{22} \alpha_2}{R_2(P_{21}-P_{22})(P_{21}-k\alpha_2)} & \frac{-k_{22} P_{21}}{R_2(P_{21}-P_{22})(P_{21}-k\alpha_2)} \\ \frac{-k k_{22} \alpha_1 \alpha_2}{R_2(P_{21}-P_{22})(P_{22}-k\alpha_2)} & 0 & \frac{-k k_{22} \alpha_2}{R_2(P_{21}-P_{22})(P_{22}-k\alpha_2)} & \frac{k_{22} P_{22}}{R_2(P_{21}-P_{22})(P_{21}-k\alpha_2)} \end{bmatrix}$$

$$\phi'_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{13} & k_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{23} & k_{23} \end{bmatrix}$$



$$\Phi'_{22} = \begin{bmatrix} k\alpha_1 & -k\alpha_2 & k & -k \\ -k\alpha_1 & k\alpha_2 & -k & k \\ \left\{ \begin{array}{l} -(\alpha_1)^2 k + \alpha_1 P_{13} - k_{13} \\ -\frac{k_{11} k_{13} \alpha_1}{R_1 (P_{11} - k\alpha_1)(P_{12} - k\alpha_1)} \end{array} \right. & k\alpha_1 \alpha_2 & -k\alpha_1 + P_{13} & k\alpha_1 \\ k\alpha_1 \alpha_2 & \left\{ \begin{array}{l} -(\alpha_2)^2 k + \alpha_2 P_{23} - k_{23} \\ -\frac{k_{22} k_{23} \alpha_2}{R_2 (P_{21} - k\alpha_2)(P_{22} - k\alpha_2)} \end{array} \right. & k\alpha_2 & -k\alpha_2 + P_{23} \end{bmatrix}$$

III-3 METHODE DE SYNTHESE

Lorsque les performances du processus ne conviennent pas à l'utilisateur il est possible d'appliquer la méthode de synthèse proposée, imposant une dynamique préspecifiée, pour améliorer celles-ci.

En effet, considérons les deux centrales fonctionnant en régime forcé :

$$\frac{d}{dt} (x) = A x + B u + B' u' \quad (\text{III-191})$$

avec :

$$u = [u_1, u_2]^T$$

$$u' = [u'_1, u'_2]^T$$

$$B^T = \begin{bmatrix} \frac{k_{11}}{P_{11}-P_{12}} & \frac{-k_{11}}{P_{11}-P_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{22}}{P_{21}-P_{22}} & \frac{-k_{22}}{P_{21}-P_{22}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B'^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -k_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{23} \end{bmatrix}$$

et A la matrice en flèche épaisse généralisée d'ordre 2 décrite dans (III-187).

Pour garantir un coefficient d'amortissement η au processus, il suffit de déterminer un vecteur de commande $u = [u_1, u_2]^T$ des variations de vitesse tel que le processus :

$$\frac{d}{dt} (x) = (M(A - BC) + \eta I) x \quad (\text{III-192})$$

soit stable, $M(\cdot)$ étant une matrice majorante d'ordre 8 de $(A - BC)$.

Dans la relation (III-192), C désigne la matrice définie par :

$$u = - C x \quad (\text{III-193})$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

caractérisant la chaîne de régulation.

Il vient alors la matrice caractéristique corrigée de chaque centrale thermique :

$$\Phi_{c_{ii}} = \begin{bmatrix} P_{i1} - \frac{c_{i1} k_{ii}}{P_{i1} - P_{i2}} & - \frac{c_{i2} k_{ii}}{P_{i1} - P_{i2}} & 0 & x \\ \frac{c_{i1} k_{ii}}{P_{i1} - P_{i2}} & P_{i2} + \frac{c_{i2} k_{ii}}{P_{i1} - P_{i2}} & 0 & x \\ 0 & 0 & k\alpha_i & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$$

(III-194)

les matrices Φ_{12} et Φ_{21} restant inchangées.

Nous remarquons que le réseau correcteur ainsi choisi permet de changer les éléments diagonaux de la matrice Φ_{ii} qui, dans l'application des résultats précédents concernant l'étude des performances, doit avoir ses éléments diagonaux inférieurs à $(-\eta)$.

L'action porte dans ce cas sur les constantes de temps des turbines et des générateurs de vapeur du processus étudié.

La méthode de synthèse des systèmes de commande proposée permet ainsi une action locale sur les caractéristiques des sous-systèmes et une action globale au niveau du processus dont la matrice caractéristique est en flèche épaisse généralisée.

CONCLUSION

La méthode de synthèse proposée est basée sur l'application des critères de stabilité établis au chapitre II.

Dans ce sens, deux problèmes principaux sont à résoudre :

- la détermination d'une représentation convenable du processus dans l'espace d'état.
- le choix des paramètres caractérisant les chaînes de régulation.

Les critères de stabilité appliqués en vue de la synthèse des commandes, sont de mise en oeuvre simple lorsque les polynômes caractéristiques des sous-systèmes constituant le processus, ont des racines réelles.

Lorsque cette propriété n'est pas satisfaite la synthèse apparaît généralement plus difficile du point de vue calcul numérique.

La méthode de synthèse est applicable aux processus non linéaires monovariables perturbés ou singulièrement perturbés, et peut être étendue aux processus non linéaires multivariables perturbés ou singulièrement perturbés.

La mise en oeuvre de cette méthode pour l'étude de la régulation de fréquence dans les centrales thermiques montre que la chaîne de commande permet une action locale au niveau de chaque centrale, et une action globale au niveau du processus constitué de plusieurs centrales interconnectées sur un même réseau.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 GRAYSON L.P.
"The status of synthesis using Lyapunov's method".
Automatica, Vol. 3, N° 2, 91-121, 1965.
- 2 ŠILJAK D.D., VUKČEVIĆ M.B.
"Decentrally stabilizable linear and bilinear large scale systems".
Int. J. Control, Vol. 27, N° 2, 289-305, 1977.
- 3 ŠILJAK D.D., VUKČEVIĆ M.B.
"Decentralization, stabilization, and estimation of large scale systems".
IEEE Trans. Aut. Control. Vol. AC 21, N° 3, 363-366, 1976.
- 4 BITSORIS G.S.
"Principe de comparaison et stabilité des systèmes complexes".
Doctorat es-sciences physiques, Toulouse, 1978.
- 5 FURASOV V.D.
"Construction of controlled systems by prescribed estimates of the transient proces".
I - Aut. i. Telemek, N° 7, 42-49, 1971
II - Aut. i. Telemek, N° 10, 29-35, 1971.
- 6 FURASOV V.D.
"On vector valued Lyapunov functions and stabilization of interconnected systems".
Prikl. Mat. Mekh, Vol. 39, N° 1, 59-65, 1975.
- 7 GRUJIĆ Lj.T.
"Singular perturbations and large scale systems".
Int. J. Control, Vol. 29, N° 1, p. 159-169, 1979.

- 8 KOKOTOVIĆ P.V., O'MALLEY R.E., SANNUTI P.
"Singular perturbations and order reduction in control theory an overview".
6th I.F.A.C. World Congress, Pittsburg, 1975.
- 9 GRUJIĆ LJ., ŠILJAK
"Asymptotic stability and instability of large-scale systems".
IEEE Trans. Aut. Control. AC 18, N° 6, 636-645, 1973.
- 10 LEFSCHETZ S.
"Stability of non-linear control systems"
Academic Press, New York, 1965.
- 11 MICHEL A.N., PORTER D.W.
"Stability analysis of composite systems".
IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC 17, N° 2, 222-226, 1972.
- 12 GEROMEL J.C., BERNUSSOU J.
"Stability of two level control schemes subjected to structural perturbations".
Int. J. Control
- 13 KALMAN R.E., BERTRAM J.E.
"Control system analysis and design via the second method of Lyapunov".
I - Continuous-time systems
Trans. A.S.M.E. J. Basic Engin, 82, 371-393, 1962.
II - Discrete-time systems
Trans. A.S.M.E. J. Basic Engin, 82, 394-400, 1962.
- 14 GENTINA J.C.
"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension".
Thèse de Doctorat es-Sciences Physique, Lille, 1976.
- 15 BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F.
"About the error made when representing a large system by a given order model".
Proc. 3rd I.F.A.C. Symposium Sens. Adapt. Optim. Ischia, 400-406, 1973.

- 16 LAURENT F.
"Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés non linéaires en régime dynamique".
Thèse es-Sciences Physiques, 1968.
- 17 GENTINA J.C., BORNE P., LAURENT F.
"General aggregation of large scale system by vector Lyapunov functions and vector norm".
Int. J. Control, Vol. 24, 4, 529-550, 1976.
- 18 BENREJEB M.
"Sur la synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé".
Thèse Docteur Ingénieur, Lille, 1976.
- 19 BORNE P., BENREJEB M.
"On the stability of a class interconnected systems. Application to the forced working conditions".
M.T.V.S. Symposium I.F.A.C., Fredericton, 1977.
- 20 BORNE P., BENREJEB M., COCQUERELLE J.L.
"On the synthesis of a class of interconnected systems with structural variations. Applications to an electrical power plant".
Proc. of MECO 78 Congress, Athens, Vol. 2, p.696-699, 1978.
- 21 BENREJEB M., BORNE P.
"Sur la synthèse d'un processus continu non linéaire"
Proc. of MECO 79 Congress, Grenoble, p. 122-125, 1979.
- 22 BORNE P., BENREJEB M., LAURENT F.
"Matrix approaches to absolute and dynamical stability of LUR'E POSTNIKOV type systems".
4^o Congreso Informatica y Automatica, Madrid, Espagne, 1979.
- 23 BOUDAREL, DELMAS, GUICHET
"Commande optimale des processus".
Tomes I, II, III et IV; Dunod, 1967.

- 24 GROUMPOS P.P., SCOTT P.D.
"The nested bordered diagonal method for symmetric eigenproblems"
Proc. 15th Annual Allerton Conference on Communication Control
and Computing, 1977.
- 25 GROUMPOS P.
"Filtering Techniques for a class of hierarchical systems".
Modelling and simulation, Vol. 9, Part. 3, Control and identification
Proc. of 9th Annual Conference, 1978.
- 26 OZGUNER U.
*"Near optimal control of composite systems. The multi time-scale
approach"*.
IEEE Trans. Aut. Control, August, 1979.
- 27 OZGUNER U.
*"Decentralized observers for a large scale composite system with
two time-scales"*.
Proc. J.A.C.C., p. 1119-1123, 1977.
- 28 BORNE P., LAURENT F., MAIZIERES C.
"Sur la stabilité des processus multivariables non-linéaires".
Proc. of MECO 77, Congress Zürich, 1977.
- 29 MAIZIERES C.
"Sur quelques méthodes d'étude des systèmes continus non linéaires".
Thèse es-Sciences Physiques, Lille, 1968.
- 30 LHOTE F., LAURENT F.
*"Sur une condition suffisante de stabilité asymptotique pour
un système continu non linéaire"*.
C.R.A.S., Paris, Série A, t. 262, p. 35-37, 1966.
- 31 MAIZIERES C., LAURENT F.
*"Sur un modèle mathématique pour l'étude du circuit ferroresonant
série. Application à la détermination d'une condition suffisante
de non démultiplication de fréquence"*.
C.R.A.S., Paris, Série B, t. 265, p. 801-803, 1967.

"Théorie des matrices". Dunod

33 HAHN

"Stability of motion".

Springler Valag, Berlin, 1967.

34 REGNIER D.

"Contribution à l'analyse des régimes dynamiques des systèmes continus. Application aux circuits non linéaires".

Thèse Docteur Ingénieur, Lille, 1971.

35 FOSHA C.E., ELGERD O.I.

"The megawatt-frequency control problem : a new approach via optimal control theory".

IEEE Trans. Power App. Syst. pp. 563-577, 1970.

36 ČALOVIĆ M.

"Linear regulation design for a load and frequency control".

IEEE Trans. Power App. Syst. tome 2, pp. 2271-2285, 1972.

37 MOUNEY G., DE SANTIS R.M.

"Introduction de boucles supplémentaires dans un système de deux réseaux interconnectés".

Proc. I.F.A.C. pp. 239-243, 1977.

38 TSYKIN Ya.Z.

"Adaptative system theory today and tomorrow".

Proc. I.F.A.C. on large scale systems theory and applications, Ischia, Italy, 1973.

39 HAHN H.

"The application of root-locus technique to nonlinear control systems with multiple steady states".

Int. J. Control, vol. 27, N° 1, pp. 143-161, 1978.

40 HOPPENSTEADT F.

"Asymptotic stability in singular perturbation problems".

Journ. Diff. Equat. 4, pp. 350-358, 1968.

41 HOPPENSTEADT F.

"Asymptotic stability in singular perturbation problems.

II : Problems having Matched asymptotic expansion solutions".

Journ. Diff. Equat. 15, pp. 510-521, 1974.

42 ELGERD O.I., FOSHA C.E.

"Optimum Megawatt frequency control of multiarea electric energy systems".

IEEE Trans. Power App. Syst. pp. 556-563, 1970.

CHAPITRE IV

APPLICATION DE LA REPRESENTATION EN FLECHE

A L'ETUDE DES SYSTEMES DISCRETS NON LINEAIRES

INTRODUCTION

Des méthodes d'analyse et de synthèse des processus continus non linéaires éventuellement perturbés ou singulièrement perturbés ont été réalisées dans les chapitres II et III à partir d'une représentation spécifique et remarquable.

De même, des conditions de convergence sont établies dans ce chapitre pour des suites récurrentes non linéaires scalaires ou vectorielles, et conduisent à un ensemble de tests définis selon des niveaux hiérarchiques croissants.

Les critères proposés sont obtenus à partir d'une formulation particulière de l'algorithme itératif et permettent une étude simplifiée de la dynamique de convergence de la récurrence définissant l'évolution du système.

Pour les systèmes complexes discrets multivariables du type LUR'E POSTNIKOV en particulier, les critères proposés admettent une interprétation remarquable mettant en évidence les rôles des parties linéaires et non linéaires du processus.

I - SYSTEMES COMPLEXES DISCRETS HIERARCHISES A DEUX NIVEAUX

Les systèmes étudiés dans ce chapitre sont régis en régime libre par un système d'équations récurrentes non linéaires de la forme :

$$x_{t+1} = A(t, x_t, P) x_t \quad (IV-1)$$

avec $A(t, x_t, P)$ matrice caractéristique d'ordre n , notée $A(\cdot)$, d'éléments $a_{ij}(t, x_t, P)$ généralement non linéaires, notés $a_{ij}(\cdot)$ $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, x_t vecteur état d'ordre n défini à l'instant $t \in \mathcal{E}_d$ par :

$$x_t = [x_{1t}^T, x_{2t}^T, \dots, x_{rt}^T]^T \quad (IV-2)$$

$$x_{it}^T = [x_{i1t}, x_{i2t}, \dots, x_{in_t}]^T \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (IV-3)$$

$$n = \sum_{i=1}^r n_i \quad (IV-4)$$

L'étude de la stabilité d'un tel processus peut être effectuée avec les outils mathématiques utilisés pour l'étude de la stabilité des systèmes continus de grande dimension, lorsqu'il est possible de caractériser les systèmes par une matrice en flèche.

En effet, la représentation correspond dans ce cas à une structure hiérarchisée à deux niveaux, choisie a priori.

I-1 SOUS-SYSTEMES D'ORDRE 1

Soit le système S d'ordre n , constitué par n sous-systèmes d'ordre 1 interconnectés, tel que sa matrice caractéristique $A(\cdot)$ soit en flèche mince d'ordre n définie par :

$$A(.) = \begin{bmatrix} a_{11}(.) & & & a_{1n}(.) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{n-1,n-1}(.) & a_{n-1,n}(.) \\ a_{n1}(.) & \dots & a_{n,n-1}(.) & a_{nn}(.) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-5})$$

Soit $M_k(A(.))$ la matrice majorante [30] de $A(.)$ relative à la norme régulière $p(x)$ d'ordre k .

Lorsque les éléments non linéaires de $M_k(A(.))$ sont isolés dans une rangée de la matrice $A(.)$, l'application du critère pratique de BORNE et GENTINA [1] pour les systèmes discrets (chapitre I) conduit au théorème (IV-1) suivant :

Théorème (IV-1)

(a) Le processus discret régi par un système d'équations récurrentes (IV-1) admettant une matrice caractéristique $A(.)$ en flèche mince d'ordre n définie par (IV-5) telle que :

(i) tous les éléments non linéaires de la matrice $A(.)$ sont isolés dans une seule rangée.

(ii) il existe $\epsilon > 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$1 - |a_{ii}(.)| \geq \epsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{Z}_d \times \mathcal{X} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{IV-6})$$

$$1 - |a_{nn}(.)| - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|a_{ni}(.)| \cdot |a_{in}(.)|}{1 - |a_{ii}(.)|} \geq \epsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{Z}_d \times \mathcal{X} \quad (\text{IV-7})$$

est asymptotiquement stable.

(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, la stabilité est globale.

Démonstration

Soit $M_n(A(.))$ la matrice majorante de $A(.)$ [30] relative à la norme $p(z_t) = |z_t|$ telle que $|z_t| = [|z_{1t}|, |z_{2t}|, \dots, |z_{nt}|]^T$
 $\forall z_t = [z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{nt}]^T$, obtenue en substituant leurs modules aux éléments de la matrice $A(.)$.

Les non linéarités étant isolées dans une seule rangée de la matrice majorante ainsi définie, la vérification des conditions de KOTELYANSKI implique la stabilité asymptotique pour le processus étudié s'il existe $\epsilon > 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$1 - |a_{11}(\cdot)| \geq \epsilon ; \left[\begin{array}{c} 1 - |a_{11}(\cdot)| \\ \vdots \\ 1 - |a_{22}(\cdot)| \end{array} \right] \geq \epsilon ; \dots$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 - |a_{11}(\cdot)| & & - |a_{1n}(\cdot)| \\ & \dots & \vdots \\ - |a_{n1}(\cdot)| & \dots & 1 - |a_{nn}(\cdot)| \end{array} \right] \geq \epsilon \quad \forall (t, x) \in \mathcal{I}_t \times \mathcal{X} \quad (IV-8)$$

Le développement de ces différents déterminants par le théorème (1) (chapitre I) conduit aux contraintes (ii) du théorème (IV-1).

En particulier la conjecture linéaire est vérifiée lorsque l'on a :

$$|a_{ij}(\cdot)| = a_{ij}(\cdot) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (IV-9)$$

I-2 SOUS-SYSTEMES DU PREMIER NIVEAU D'ORDRE 1, SOUS-SYSTEME
COORDONNATEUR D'ORDRE (n-r)

Le processus considéré ici est tel que sa matrice caractéristique est en flèche mince généralisée d'ordre r définie par :

$$A(.) = \begin{bmatrix} a_{11}(.) & & & a_{1r}(.) & \dots & a_{1n}(.) \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{r-1,r-1}(.) & a_{r-1,r}(.) & \dots & a_{r-1,n}(.) \\ a_{r1}(.) & \dots & a_{r,r-1}(.) & a_{rr}(.) & \dots & a_{rn}(.) \\ & & & & & \\ a_{n1}(.) & \dots & a_{n,r-1}(.) & a_{nr}(.) & \dots & a_{nn}(.) \end{bmatrix} \quad (IV-10)$$

I-2-1 Système de comparaison d'ordre n :

Notations :

$$D(.) = \{a_{r+i-1,r+j-1}(.)\} \subset \mathcal{R}^{(n-r+1) \times (n-r+1)} \quad (IV-11)$$

$$d_{ij}(.) = - |a_{ij}(.)| - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{|a_{ik}(.)| \cdot |a_{kj}(.)|}{1 - |a_{kk}(.)|} \quad (IV-12)$$

$$\forall i, j = r, r+1, \dots, n, i \neq j$$

$$d_{ii}(.) = 1 - |a_{ii}(.)| - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{|a_{ik}(.)| \cdot |a_{ki}(.)|}{1 - |a_{kk}(.)|} \quad (IV-13)$$

$$\forall i = r, r+1, \dots, n$$

Théorème (IV-2)

(a) Le processus discret régi par le système d'équations récurrentes (IV-1) admettant une matrice caractéristique A(.) en flèche mince généralisée d'ordre r définie par (IV-10) telle que :

(i) tous les éléments non linéaires de la matrice A(.) sont isolés dans une seule rangée

(ii) avec les notations (I-46, 47) et (IV-12, 13, 14) il existe $\epsilon > 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$1 - |a_{ii}(\cdot)| \geq \epsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{Z}_t \times \mathcal{X} \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (\text{IV-14})$$

$$D(\cdot) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i \\ & & & \\ & & & \\ 1 & 2 & \dots & i \end{pmatrix} \geq \epsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{Z}_t \times \mathcal{X} \quad \forall i = 1, 2, \dots, nr+1 \quad (\text{IV-15})$$

est asymptotiquement stable.

(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ la stabilité est globale.

Démonstration :

En notant :

$$\begin{bmatrix} F_{11}(\cdot) & \Phi_{21}(\cdot) \\ \Phi_{12}(\cdot) & \Phi_{22}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-16})$$

un partitionnement de la matrice A(.) telle que :

$$F_{11}(\cdot) = \text{diag} \{a_{ii}(\cdot)\} \subset \mathbb{R}^{(r-1)(r-1)}$$

et

$$M(A(\cdot)), M(\Phi_{21}(\cdot)), M(\Phi_{12}(\cdot)), M(\Phi_{22}(\cdot))$$

les matrices obtenues en substituant leurs modules aux éléments des matrices $A(\cdot)$, $\phi_{21}(\cdot)$, $\phi_{12}(\cdot)$ et $\phi_{22}(\cdot)$, le système récurrent défini par la relation :

$$z_{t+1} = \begin{bmatrix} M(F_{11}(\cdot)) & M(\phi_{12}(\cdot)) \\ M(\phi_{21}(\cdot)) & M(\phi_{22}(\cdot)) \end{bmatrix} z_t \quad (IV-17)$$

est un système de comparaison du processus étudié.

Les éléments non linéaires étant isolés dans une seule rangée de la matrice $A(\cdot)$, l'application du critère pratique de BORNE et GENTINA [1] pour le système de comparaison (IV-17), garantit la stabilité asymptotique du système étudié lorsque les éléments de la matrice diagonale $(I - M(F_{11}(\cdot)))$ sont positifs et lorsque la condition suivante :

$$(I - M(A(\cdot))) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i \\ & & & \\ & & & \\ 1 & 2 & \dots & i \end{pmatrix} \geq \epsilon > 0 \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{Z}_d \times \mathcal{X} \quad (IV-18)$$

$$\forall i = r, r+1, \dots, n$$

est vérifiée. Cette dernière contrainte s'explique simplement en utilisant la propriété (P1) des matrices en flèche.

Il vient :

$$\det\{ [I - M(\phi_{22}(\cdot))]^{(i)} - M(\phi_{21}(\cdot))^{(i)} [I - M(F_{11}(\cdot))]^{-1} M(\phi_{12}(\cdot))^{(i)} \} \geq \epsilon$$

$$\forall (t, x_t) \in \mathcal{Z}_d \times \mathcal{X} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-r+1 \quad (IV-19)$$

avec les notations (I-46, 47).

Le premier membre de l'inégalité (IV-19) étant le i -ème mineur principal de la matrice $D(\cdot)$ définie par (IV-11, 12, 13), pour garantir la stabilité asymptotique du processus étudié, il suffit donc d'une part que la contrainte (IV-14) soit vérifiée et d'autre part que les déterminants des mineurs principaux successifs de la matrice $D(\cdot)$ soient tous positifs ; d'où le théorème (IV-2).

I-2-2 Système de comparaison d'ordre r

Un test rapide de la stabilité des processus caractérisés par une matrice en flèche mince généralisée d'ordre r dont les éléments non linéaires sont isolés dans plusieurs lignes ou colonnes, peut être obtenu en définissant un système de comparaison d'ordre r caractérisé par une matrice en flèche mince d'ordre r.

Cas 1 : les éléments non linéaires isolés dans les (n-r+1) dernières lignes ou colonnes :

Le choix de la norme $p(x_t)$ définie par :

$$p(x_t) = [|x_{1t}|, |x_{2t}|, \dots, |x_{r-1,t}|, \sum_{i=r}^n |x_{it}|]^T \quad (IV-20)$$

conduit au système de comparaison suivant :

$$z_{t+1}^1 = M^1(A(.)) z_t^1 \quad (IV-21)$$

avec :

$$M^1(A(.)) = \begin{bmatrix} |a_{11}(\cdot)| & \dots & \max_{j=r}^n |a_{1j}(\cdot)| \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ |a_{r-1,r-1}(\cdot)| & \dots & \max_{j=r}^n |a_{r-1,j}(\cdot)| \\ \sum_{i=r}^n |a_{i1}(\cdot)| \dots \sum_{i=r}^n |a_{i,r-1}(\cdot)| & \dots & \max_{j=r}^n \sum_{i=r}^n |a_{ij}(\cdot)| \end{bmatrix}$$

Cas 2 : les éléments non linéaires isolés dans (j-1) premières lignes ou colonnes, $j < r$

Le choix de la norme $p(x_t)$ définie par :

$$p(x_t) = [\sum_{i=1}^{j-1} |x_{it}|, |x_{jt}|, \dots, |x_{nt}|]^T \quad (IV-22)$$

conduit au système de comparaison suivant :

$$z^2_{t+1} = M^2(A(\cdot)) z^2_t \tag{IV-23}$$

avec

$$M^2(A(\cdot)) = \begin{bmatrix} \max_{i=1}^{j-1} |a_{ii}(\cdot)| & \sum_{i=1}^{j-1} |a_{ir}(\cdot)| \dots & \sum_{i=1}^{j-1} |a_{in}(\cdot)| \\ & |a_{jj}(\cdot)| & |a_{j,r}(\cdot)| \dots |a_{jn}(\cdot)| \\ & \dots & \vdots \\ & & |a_{r-1,r-1}(\cdot)| |a_{r-1,r}(\cdot)| \dots |a_{r-1,n}(\cdot)| \\ \max_{i=1}^{j-1} |a_{ri}(\cdot)| & |a_{r,j}(\cdot)| \dots |a_{r,r-1}(\cdot)| & |a_{rr}(\cdot)| \dots |a_{rn}(\cdot)| \\ & \dots & \dots \\ \max_{i=1}^{j-1} |a_{ni}(\cdot)| & |a_{n,j}(\cdot)| \dots |a_{n,r-1}(\cdot)| & |a_{nr}(\cdot)| \dots |a_{nn}(\cdot)| \end{bmatrix}$$

Notations :

$$D^2(\cdot) = \{d^2_{r+i-1, r+j-1}(\cdot)\} \subset \mathcal{R}^{(n-r+1)(n-r+1)} \tag{IV-24}$$

$$|b_{k\ell}(\cdot)| = \frac{(\max_{i=1}^{j-1} |a_{ki}(\cdot)| \quad (\sum_{i=1}^{j-1} |a_{i\ell}(\cdot)|)}{1 - \max_{i=1}^{j-1} |a_{ii}(\cdot)|} + \dots \tag{IV-25}$$

$$\dots + \sum_{i=j}^{r-1} \frac{|a_{ki}(\cdot)| \cdot |a_{i\ell}(\cdot)|}{1 - |a_{ii}(\cdot)|}$$

$$d_{kl}^2(.) = - |a_{kl}(.)| - |b_{kl}(.)| \quad (IV-26)$$

$$d_{kk}^2(.) = 1 - |a_{kk}(.)| - |b_{kk}(.)| \quad (IV-27)$$

$$\forall k, \ell = r, r+1, \dots, n \quad k \neq \ell$$

Les applications du théorème (IV-1) au système de comparaison régi par (IV-21), et du théorème (IV-2) au système de comparaison décrit par (IV-23) permettent l'étude de la stabilité du processus dont la matrice caractéristique est définie par (IV-10), d'où le théorème (IV-3) :

Théorème (IV-3)

(a) Le processus discret régi par le système d'équations récurrentes (IV-1) admettant une matrice caractéristique A(.) en flèche mince généralisée d'ordre r définie par (IV-10) est asymptotiquement stable s'il existe $\epsilon > 0$ et \mathcal{X} tels que l'une des conditions (α), (β) soit vérifiée :

(α) (i) les éléments non linéaires sont isolés dans les (n-r+1) dernières lignes ou colonnes de la matrice A(.)

$$(ii) \quad 1 - |a_{ii}| > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (IV-28)$$

$$(iii) \quad 1 - \max_{j=r}^n \left(\sum_{j=r}^n |a_{ij}(.)| \right) - \dots \quad (IV-29)$$

$$\dots - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\left(\sum_{i=r}^n |a_{ij}(.)| \right) \left(\max_{i=r}^n |a_{ji}(.)| \right)}{1 - |a_{jj}|} \geq \epsilon$$

$$\forall (t, x_t) \in \mathcal{Z}_d \times \mathcal{X}$$

(B) (i) les éléments non linéaires sont isolés dans
(j-1) premières lignes ou colonnes de la matrice
A(.), $j < r$.

$$(ii) \quad 1 - |a_{ii}| > 0 \quad \forall i = j, j+1, \dots, r-1 \quad (IV-30)$$

$$(iii) \quad 1 - \max_{i=1}^{j-1} |a_{ii}(\cdot)| \geq \epsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{I}_j \times \mathcal{X} \quad (IV-31)$$

(iv) avec les notations (IV- 4, 25, 26, 27) on a :

$$D^2(\cdot) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i \\ 1 & 2 & \dots & i \end{pmatrix} \geq \epsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{I}_j \times \mathcal{X}, \forall i=1, 2, \dots, n-r+1 \quad (IV-32)$$

(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, la stabilité est globale.

I-3 SOUS-SYSTEMES D'ORDRE QUELCONQUE

Les résultats précédents concernant la classe des systèmes hiérarchisés à deux niveaux dont le premier niveau est constitué par des sous-systèmes d'ordre 1, peuvent être généralisés à la classe des processus dont les sous-systèmes sont d'ordre quelconque.

En effet, considérons le système d'ordre n caractérisé par la matrice $A(\cdot)$ en flèche épaisse d'ordre r , constitué par r sous-systèmes S_i d'ordre n_i dont la matrice caractéristique est définie par $A_{ii}(\cdot)$, $\forall i = 1, 2, \dots, r$, $n = \sum_{i=1}^r n_i$, telle que :

$$A(\cdot) = \begin{bmatrix} A_{11}(\cdot) & & & & A_{1r}(\cdot) \\ & A_{22}(\cdot) & & & A_{2r}(\cdot) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & A_{r-1,r-1}(\cdot) & A_{r-1,r}(\cdot) \\ A_{r1}(\cdot) & A_{r2}(\cdot) & \cdots & A_{r,r-1}(\cdot) & A_{rr}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-33})$$

avec :

$$A_{ij}(\cdot) = \{a_{kh}^{ij}(\cdot)\} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, r \quad (\text{IV-34})$$

Selon la complexité du processus, c'est-à-dire le nombre de rangées à éléments non linéaires, il est possible de choisir une fonction d'agrégation appropriée pour conduire l'étude du processus à partir d'un système de comparaison, admettant une matrice caractéristique en flèche, pour lequel nous pouvons appliquer les conditions linéaires de stabilité.

Pour illustrer ces considérations nous envisageons de présenter deux cas : le premier correspondant à la définition d'un système de comparaison d'ordre r caractérisé par une matrice en flèche mince dont les éléments diagonaux peuvent permettre de conclure à la stabilité de tous les sous-systèmes lorsqu'ils sont tous négatifs ; le second concerne les systèmes hiérarchisés à deux niveaux, dont le système coordonnateur et un des sous-systèmes du premier niveau sont non linéaires, étudiés à partir d'un système de comparaison d'ordre

$$(1 + \sum_{i=1}^{r-2} n_i)$$

Cas 1 : Système de comparaison d'ordre r

Le choix de la norme vectorielle $p(x)$ telle que :

$$p(x_t) = \left[\max_{j=1}^{n_1} |x_{1jt}|, \max_{j=1}^{n_2} |x_{2jt}|, \dots, \max_{j=1}^{n_r} |x_{rjt}| \right] \quad (\text{IV-35})$$

conduit au système :

$$z_{t+1} = M^1(A(.)) z_t \quad (\text{IV-36})$$

avec :

$$M^1(A(.)) = \begin{bmatrix} m_{11}^1(.) & & & m_{1r}^1(.) \\ & m_{22}^1(.) & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ m_{r1}^1(.) & m_{r2}^1(.) & \dots & m_{rr}^1(.) \end{bmatrix}$$

et

$$m_{ij}^1(.) = \max_{k=1}^{n_i} \sum_{h=1}^{n_j} |a_{kh}^{ij}(.)| \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, r \quad (\text{IV-37})$$

qui est de comparaison pour le processus étudié.

Cas 2 : Système de comparaison d'ordre $1 + \sum_{i=1}^{r-2} n_i$

Le choix de la norme vectorielle $p(x)$ telle que :

$$p(x_t) = \left[|x_{1t}^T|, |x_{2t}^T|, \dots, |x_{r-2,t}^T|, \sum_{i=r-1}^r \sum_{j=1}^{n_i} |x_{ijt}| \right]^T \quad (\text{IV-38})$$

conduit au système :

$$z_{t+1} = M^2(A(.)) z_t \quad (\text{IV-39})$$

avec :

$$M^2 A(.) = \begin{bmatrix} M_{11}^2(.) & & & M_{1,r-1}^2(.) \\ & \dots & & \\ & & M_{r-2,r-2}^2(.) & M_{r-2,r-1}^2(.) \\ M_{r-1,1}^2(.) & \dots & M_{r-1,r-2}^2(.) & m_{r-1,r-1}^2(.) \end{bmatrix} \quad (IV-40)$$

$$M_{ii}^2(.) = M_{ii}^2(A_{ii}(.)) = \{ |a_{kh}^{ii}(.)| \} \quad \forall i = 1, 2, \dots, r-2 \quad (IV-41)$$

$$M_{r-1,i}^2(.) = \left[\dots, \sum_{k=1}^{n_r} |a_{kh}^{r-1,i}(.)|, \dots \right] \quad (IV-42)$$

$$M_{i,r-1}^2(.) = \left[\dots, \max_{h=1}^{n_r} |a_{kh}^{i,r-1}(.)|, \dots \right]^T \quad (IV-43)$$

$$m_{r-1,r-1}^2(.) = \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{\ell=1}^{n_{r-1}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{r-1}} |a_{k\ell}^{r-1,r-1}(.)| + \sum_{k=1}^{n_r} |a_{k\ell}^{r,r-1}(.)| \right\} \\ \max_{\ell=1}^{n_r} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{r-1}} |a_{k\ell}^{r-1,r}(.)| + \sum_{k=1}^{n_r} |a_{k\ell}^{rr}(.)| \right\} \end{array} \right\} \quad (IV-44)$$

Théorème (IV-4) :

(a) Le système discret S hiérarchisé à deux niveaux régi par le système d'équations récurrentes (IV-1) admettant une matrice caractéristique A(.) en flèche épaisse d'ordre r définie par (IV-33) est asymptotiquement stable s'il existe $\epsilon > 0$ et \mathcal{X} tels que l'une des deux conditions (α) et (β) suivantes est vérifiée

(α) (i) les éléments non linéaires sont isolés dans les n_r dernières lignes ou colonnes de $A(\cdot)$, ou dans les n_1 premières lignes ou colonnes de $A(\cdot)$

(ii) le sous-système S_i caractérisé par la matrice $A_{ii}(\cdot)$ est stable au sens de la contrainte suivante :

$$1 - m_{ii}^1(\cdot) \geq \epsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{E}_d \times \mathcal{X} \quad (\text{IV-45})$$

$\forall i = 1, 2, \dots, r-1$ avec les notations (IV-36, 37)

(iii) avec les notations (IV-36, 37) la condition suivante est vérifiée :

$$1 - m_{rr}^1(\cdot) - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{m_{ri}^1(\cdot) m_{ir}^1(\cdot)}{1 - m_{ii}^1(\cdot)} \geq \epsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{E}_d \times \mathcal{X} \quad (\text{IV-46})$$

(β) (i) Les éléments non linéaires sont isolés dans les $(n_{r-1} + n_r)$ dernières lignes ou colonnes de la matrice $A(\cdot)$

(ii) le sous-système S_i caractérisé par la matrice $A_{ii}(\cdot)$ est stable au sens de la contrainte suivante :

$$M^2(A_{ii}(\cdot)) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ & & & \\ & & & \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \geq \epsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{E}_d \times \mathcal{X} \quad (\text{IV-47})$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, n_i$$

$\forall i = 1, 2, \dots, r-2$ avec les notations (IV-40, 41)

(iii) avec les notations (IV-40, 41, 42, 43, 44) la condition suivante est vérifiée :

$$1 - m_{r-1, r-1}^2(\cdot) - \sum_{i=1}^{r-2} M_{r-1, i}^2(\cdot) (I - M^2(A_{ii}(\cdot)))^{-1} M_{i, r-1}^2(\cdot) \geq \epsilon$$

$$\forall (t, x_t) \in \mathcal{E}_d \times \mathcal{X} \quad (\text{IV-48})$$

(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ la stabilité est globale.

II - SYSTEMES DECRITS PAR DES EQUATIONS RECURRENTES SCALAIRES

Plusieurs classes de processus, du type LUR'E POSTNIKOV en particulier, sont susceptibles d'être décrits par des équations récurrentes scalaires.

Le choix d'un vecteur d'état adéquat permet une description de ces processus dans l'espace d'état. Il est généralement possible, dans ce cas, de définir a priori une structure hiérarchisée à deux niveaux qui permet l'utilisation des résultats précédents pour l'étude de la stabilité.

Nous envisageons deux exemples pour illustrer cette étude : le premier correspond à la classe des systèmes monovariabiles pour lesquels il est possible d'interpréter les conditions suffisantes de stabilité en fonction d'un polynôme dit polynôme caractéristique instantané. Le second généralise ces dernières considérations au cas où le processus est décrit par plusieurs équations récurrentes scalaires.

II-1 SYSTEMES DISCRETS DECRITS PAR UNE EQUATION RECURRENTTE SCALAIRE

II-1-1 Conditions suffisantes de stabilité

Considérons le système discret défini en régime libre par l'équation récurrente suivante :

$$y_{t+n} + \sum_{i=1}^n a_i(t, y_t) y_{t+n-i} = 0 \quad (\text{IV-49})$$

avec

$$y_t = [y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{nt}]^T, \quad y_{it} = y_{t+n-i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

et $a_i(t, y_t)$, noté $a_i(\cdot)$, $\mathcal{E}_d \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R}$, des fonctions généralement non linéaires.

L'évolution d'un tel système peut être décrite (P6) dans l'espace d'état par le système d'équations de récurrence dépendant de (n-1) paramètres arbitraires $\alpha_i, \forall i=1,2,\dots,n-1$

$$x_{t+1} = A(t, x_t) x_t \quad (\text{IV-50})$$

$$A(.) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & & 1 \\ & \alpha_2 & & & & 1 \\ & & \dots & & & \vdots \\ & & & & & 1 \\ \gamma_1(.,\alpha_1) & \gamma_2(.,\alpha_2) & \dots & \gamma_{n-1}(.,\alpha_{n-1}) & \gamma_n(.) \end{bmatrix}$$

avec les notations suivantes :

$$\mathcal{P}(t, x_t, \lambda) = \mathcal{P}(., \lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_i(.) \lambda^{n-i} \quad (\text{IV-51})$$

$$\gamma_i(., \alpha_i) = - \mathcal{P}(., \alpha_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \quad (\text{IV-52})$$

$$\gamma_n(., \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i) = \gamma_n(.) = - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - a_1(.) \quad (\text{IV-53})$$

La matrice caractéristique du processus considéré est telle que ses éléments non linéaires sont isolés dans la dernière ligne, l'application du théorème (IV-1) conduit aux conditions suffisantes de stabilité (α) du théorème (IV-5) suivant.

S'il existe, de plus, $\varepsilon > 0$ et \mathcal{X} tels que :

$$\gamma_i(., \alpha_i) \geq \varepsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{Z}_d \times \mathcal{X} \quad \forall i=1,2,\dots,n-1 \quad (\text{IV-54})$$

$$\gamma_n(.) \geq \varepsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{Z}_d \times \mathcal{X} \quad (\text{IV-55})$$

il est possible de définir un système majorant tel que sa matrice caractéristique soit identique à celle du processus $(A(\cdot))$.

Les conditions (β) du théorème (IV-5) suivant, correspondent à ce cas important pour lequel la conjecture linéaire est vérifiée.

Théorème (IV-5)

(a) Le processus discret régi par l'équation récurrente scalaire (IV-49) est asymptotiquement stable s'il existe $\epsilon > 0$ et \mathcal{X} tels que l'une des conditions (α) et (β) suivantes avec les notations (IV-51, 52, 53) soit vérifiée :

$$(\alpha) \quad (i) \quad 1 - |\alpha_i| > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (IV-56)$$

$$(ii) \quad 1 - |\gamma_n(\cdot)| - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\gamma_i(\cdot, \alpha_i)|}{1 - |\alpha_i|} \geq \epsilon \quad (IV-57)$$

$$\forall (t, x_t) \in \mathcal{T}_d \times \mathcal{X}$$

$$(\beta) \quad (i) \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < 1 \quad (IV-58)$$

$$(ii) \quad (-1)^{n-i} \mathcal{P}(\cdot, \alpha_i) \geq \epsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (IV-59)$$

$$(iii) \quad -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - a_1(\cdot) \geq \epsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{T}_d \times \mathcal{X} \quad (IV-60)$$

$$(iv) \quad \mathcal{P}(\cdot, 1) \geq \epsilon \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{T}_d \times \mathcal{X} \quad (IV-61)$$

(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ la stabilité est globale.

II-1-2 Application aux processus du type LUR'E POSTNIKOV échantillonnés

Nous envisageons ici l'étude du système discret présenté par la figure (IV-1) suivante :

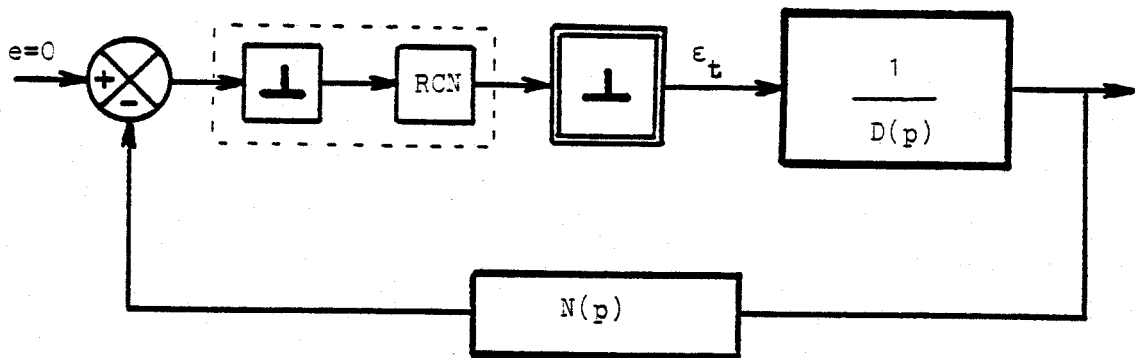


figure (IV-1)

Le filtre défini par sa fonction de transfert $\frac{1}{D(p)}$, est soumis au signal de commande élaboré par un modulateur non linéaire sans mémoire, de période constante, éventuellement précédé d'un réseau correcteur numérique linéaire. La chaîne de retour est caractérisée par le polynôme $N(p)$ tel que $d^0 N(p) \leq d^0 D(p)$.

La structure de ce système où seule la variable ϵ_n est modulée non linéairement, permet de définir, en régime autonome une équation scalaire de fonctionnement de la forme :

$$\epsilon_{t+n} + \sum_{i=1}^n f_i(\epsilon_{t+n-i}) = 0 \quad (IV-62)$$

En posant :

$$f_i(\varepsilon_{t+n-i}) = f_i^*(\varepsilon_{t+n-i}) \varepsilon_{t+n-i} \quad (\text{IV-63})$$

$$f_i^*(.) \in [\underline{f}_i, \overline{f}_i] = \phi_{f_i} \subset \mathcal{R} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

avec les notations suivantes :

$$\mathcal{P}(\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t+n-i}, \dots, \varepsilon_{t+n-1}, \lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n f_i^*(\varepsilon_{t+n-i}) \lambda^{n-i} \quad (\text{IV-64})$$

$$\gamma_i(\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t+n-i}, \dots, \varepsilon_{t+n-1}, \lambda) = -\mathcal{P}(\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t+n-1}, \lambda) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \quad (\text{IV-65})$$

$$\gamma_n(\varepsilon_{t+n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i) = -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - f_1^*(\varepsilon_{t+n-1}) \quad (\text{IV-66})$$

l'application du théorème (IV-5) (α) conduit à des conditions suffisantes de la même forme que (IV-56) et (IV-57) mais dépendant de $\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}, \dots, \varepsilon_{t+n-i}, \dots, \varepsilon_{t+n-1}$.

Les résultats ainsi obtenus sont de mise en oeuvre souvent difficile, et de plus leurs interprétations par rapport aux caractéristiques linéaires et non linéaires du processus étudié se trouvent généralement limitées.

Ces considérations sont dues au fait que la description matricielle, à partir de laquelle est menée l'étude, provient par changement de base d'une description sous forme compagnon.

Le choix d'une représentation préalable du type FROBENIUS permet de définir des conditions de stabilité semblables aux précédentes dans lesquelles les coefficients dépendent uniquement de ε_n .

En effet, il résulte des travaux de LAURENT [2, 11, 15, 25] en introduisant les variables annexes y_t^i , $\forall i = 2, 3, \dots, n$, la possibilité de décrire le système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} y_{t+1}^n \\ y_{t+1}^{n-1} \\ \vdots \\ y_{t+1}^2 \\ \varepsilon_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & -f_n(\varepsilon_t) \\ & 1 & & 0 & -f_{n-1}(\varepsilon_t) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & & -f_2(\varepsilon_t) \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & -f_1(\varepsilon_t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t^n \\ y_t^{n-1} \\ \vdots \\ y_t^2 \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} \quad (\text{IV-67})$$

Le changement de base défini par les matrices :

$$P^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \quad (\text{IV-68})$$

avec :

$$P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & (\alpha_1)^{n-2} & (\alpha_1)^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & (\alpha_2)^{n-2} & (\alpha_2)^{n-1} \\ & & \dots & & \\ 1 & \alpha_{n-1} & \dots & (\alpha_{n-1})^{n-2} & (\alpha_{n-1})^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



et une étude semblable à la précédente conduit à énoncer le théorème suivant :

Théorème (IV-6)

(a) Le système échantillonné défini figure (IV-1) et régi par l'équation récurrente scalaire (IV-62) est asymptotiquement stable s'il existe $\varepsilon' > 0$, \mathcal{X} et des réels distincts $\alpha_i, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$ tels que l'une des conditions (α) et (β) suivantes avec les notations (IV-70, 71, 72) soit vérifiée.

$$(\alpha) \quad (i) \quad 1 - |\alpha_i| > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (IV-73)$$

$$(ii) \quad 1 - \gamma_n(\varepsilon_t, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\gamma_i(\varepsilon_t, \alpha_i)|}{1 - |\alpha_i|} \geq \varepsilon' \quad (IV-74)$$

$$\forall (t, x_t) \in \mathcal{E}_d \times \mathcal{X}$$

$$(\beta) \quad (i) \quad 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < 1 \quad (IV-75)$$

$$(ii) \quad (-1)^{n-i} \mathcal{P}(\varepsilon_t, \alpha_i) \geq \varepsilon' \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (IV-76)$$

$$(iii) \quad - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - f_1^*(\varepsilon_t) \geq \varepsilon' \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{E}_d \times \mathcal{X} \quad (IV-77)$$

$$(iv) \quad \mathcal{P}(\varepsilon_t, 1) \geq \varepsilon' \quad \forall (t, x_t) \in \mathcal{E}_d \times \mathcal{X} \quad (IV-78)$$

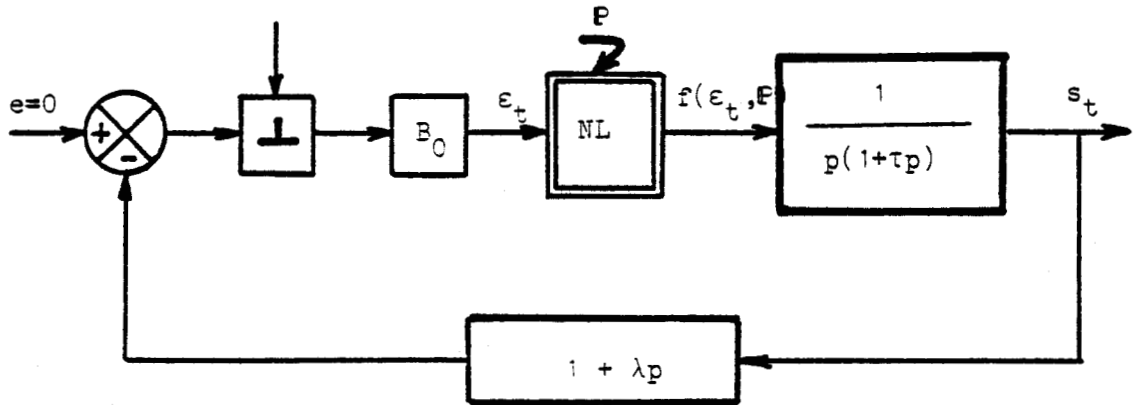
(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, la stabilité est globale.

Remarque :

Cette forme (IV-69) analogue à celle que nous avons déjà étudiée dans le cadre des systèmes continus permettrait par application des transformations correspondantes d'obtenir des résultats semblables.

Exemple (IV-1) :

Le schéma du système étudié (figure IV-2) est soumis à des perturbations caractérisées par \mathcal{P} , $\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}$, intervenant au niveau de la non linéarité.



figure(IV-2)

Le moteur à réguler en position de constante de temps τ situé dans la chaîne d'action est précédé d'une non linéarité sans mémoire, d'un bloqueur d'ordre zéro et d'un échantillonneur de Dirac. La chaîne de retour est définie par un gain unitaire et un taux de correction tachymétrique λ .

Un tel processus admet la représentation scalaire suivante :

$$\varepsilon_{t+2} + f_1(\varepsilon_{t+1}, \mathcal{P}) + f_2(\varepsilon_t, \mathcal{P}) = 0$$

avec

$$\varepsilon_t = -(s_t + \lambda s'_t)$$

$$D = \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$$

$$f_1(\varepsilon_t, P) = - (1 + D) \varepsilon_t + f(\varepsilon_t, P) [T - (\tau - \lambda)(1 - D)]$$

$$f_2(\varepsilon_t, P) = D \varepsilon_t - f(\varepsilon_t, P) [TD - (\tau - \lambda)(1 - D)]$$

En posant

α : paramètre arbitraire, $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$f(\varepsilon_t, P) = f^*(\varepsilon_t, P) \varepsilon_t, f^* \in [\underline{f}, \bar{f}] = \phi_f \subset \mathbb{R} \quad \forall (t, x_t, P) \in \mathcal{T}_d \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\varepsilon_t, \lambda) = & \lambda^2 + [-(1+D) + f^*(\varepsilon_t, P) [T - (\tau - \lambda)(1 - D)]] \lambda \\ & + [D - f^*(\varepsilon_t, P) [TD - (\tau - \lambda)(1 - D)]] \end{aligned}$$

L'application du théorème (IV-6- β) conduit à la condition suffisante de stabilité asymptotique suivante :

il existe $\varepsilon' > 0$, \mathcal{X} et α tels que :

$$0 < \alpha < 1, \quad -\mathcal{P}(\varepsilon_t, P, \alpha) \geq 0 \quad \forall (t, x_t, P) \in \mathcal{T}_d \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$-\alpha + (1+D) - f^*(\varepsilon_t, P) [T - (\tau - \lambda)(1 - D)] \geq 0 \quad \forall (t, x_t, P) \in \mathcal{T}_d \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

$$f^*(\varepsilon_t, P) (1 - D) \geq \varepsilon' > 0 \quad \forall (t, x_t, P) \in \mathcal{T}_d \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$

Ces conditions correspondent à un cas de validité de la conjecture linéaire pour le système étudié.

II-2 SYSTEMES DISCRETS NON LINEAIRES INTERCONNECTES

La généralisation des conditions suffisantes de stabilité précédentes permet, dans le cas des processus multivariables du type interconnecté, l'élaboration de nouveaux critères de stabilité pouvant s'interpréter directement par rapport aux caractéristiques des sous-systèmes composants d'une part et des interactions d'autre part.

En effet, considérons par exemple le cas de deux sous-systèmes $S_i, \forall i = 1, 2$ décrits par :

$$S_i: y_{t+n_i}^i + \sum_{j=1}^{n_i} (a_j^i + c_j^{ii} f_j^i(t, y_t^i)) y_{t+n_i-j}^i = 0 \quad \forall i = 1, 2$$

couplés à partir des coefficients d'interconnexion e_{12} et e_{21} selon les équations :

$$\left\{ \begin{aligned} y_{t+n_1}^1 + \sum_{j=1}^{n_1} (a_j^1 + c_j^{11} f_j^1(t, y_t^1)) y_{t+n_1-j}^1 \\ = - e_{12} \sum_{j=1}^{n_2} c_j^{12}(t, y_t^2) y_{t+n_2-j}^2 \end{aligned} \right. \quad (IV-80)$$

$$\left\{ \begin{aligned} y_{t+n_2}^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (a_j^2 + c_j^{22} f_j^2(t, y_t^2)) y_{t+n_2-j}^2 \\ = - e_{21} \sum_{j=1}^{n_1} c_j^{21}(t, y_t^1) y_{t+n_1-j}^1 \end{aligned} \right. \quad (IV-81)$$

En choisissant une représentation semblable à celle utilisée pour les systèmes décrits par deux équations différentielles scalaires, le processus étudié peut être caractérisé par une matrice $A(\cdot)$ en flèche mince généralisée d'ordre $(n_1 + n_2 - 1)$ définie par :

$$A(\cdot) = \begin{bmatrix} F_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21}(\cdot) & \phi_{22}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (IV-82)$$

avec les notations suivantes :

$$F_{11} = \text{diag} \{ \dots, \alpha_i^1, \dots, \dots, \alpha_j^2, \dots \} \quad (IV-83)$$

$$\Phi_{12}^T = \begin{bmatrix} \dots & \beta_i^1 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \beta_j^2 & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{IV-84})$$

$$\Phi_{21}(\cdot) = \begin{bmatrix} \dots & \left(\frac{-\mathcal{P}_{n_1}(\cdot, p)(p-\alpha_i^1)}{\beta_i^1 R_1(p)} \right)_{p=\alpha_i^1} & \dots & \dots & -e_{12} \left(\frac{R_{12}(\cdot, p)(p-\alpha_j^2)}{\beta_j^2 R_2(p)} \right)_{p=\alpha_j^2} & \dots \\ \dots & -e_{21} \left(\frac{R_{21}(\cdot, p)(p-\alpha_i^1)}{\beta_i^1 R_1(p)} \right)_{p=\alpha_i^1} & \dots & \dots & \left(\frac{-\mathcal{P}_{n_2}(\cdot, p)(p-\alpha_j^2)}{\beta_j^2 R_2(p)} \right)_{p=\alpha_j^2} & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{IV-85})$$

$$\Phi_{22}(\cdot) = \begin{bmatrix} - \sum_{i=1}^{n_1-1} \alpha_i^1 - (a_1^1 + c_1^{11} f_1^1(\cdot)) & - e_{12} c_1^{12}(\cdot) \\ - e_{21} c_1^{21}(\cdot) & - \sum_{j=1}^{n_2-1} \alpha_j^2 - (a_1^2 + c_1^{22} f_1^2(\cdot)) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-86})$$

$$\mathcal{P}_{n_i}(\cdot, \lambda) = \lambda^{n_i} + \sum_{j=1}^{n_i} (a_j^i + c_j^{ii} f_j^i(\cdot)) \lambda^j \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{IV-87})$$

$$R_i(\lambda) = \prod_{j=1}^{n_i-1} (\lambda - \alpha_j^i) \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{IV-88})$$

$$R_{12}(\cdot, \lambda) = \sum_{j=1}^{n_2} c_j^{12}(\cdot) \lambda^{n_2-j} \quad (\text{IV-89})$$

$$R_{21}(\cdot, \lambda) = \sum_{j=1}^{n_1} c_j^{21}(\cdot) \lambda^{n_1-j} \quad (\text{IV-90})$$

$\alpha_i^1, \beta_i^1, \forall i = 1, 2, \dots, n_1-1, \alpha_j^2$ et $\beta_j^2 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_2-1$, étant des paramètres distincts et arbitraires.

Posons :

$$|\beta_i^1| \cdot \gamma_i^1(\cdot, \alpha_i^1) = \left| \frac{-(p-\alpha_i^1)}{R_1(p)} \right|_{p=\alpha_i^1} \max (|\mathcal{P}_{n_1}(\cdot, \alpha_i^1)|, |e_{21} R_{21}(\cdot, \alpha_i^1)|) \quad (\text{IV-91})$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n_1-1$$

$$|\beta_j^2| \cdot \gamma_j^2(\cdot, \alpha_j^2) = \left| \left(\frac{-(p-\alpha_j^2)}{R_2(p)} \right) \right|_{p=\alpha_j^2} \max (|\mathcal{P}_{n_2}(\cdot, \alpha_j^2)|, |e_{12} R_{12}(\cdot, \alpha_j^2)|) \quad (\text{IV-92})$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, n_2-1$$

$$\gamma_{n_1+n_2-1}(\cdot) = \max \left\{ \begin{array}{l} \left| - \sum_{j=1}^{n_1-1} \alpha_j^1 - (a_1^1 + c_1^{11} f_1^1(\cdot)) \right| + \left| - e_{12} c_1^{12}(\cdot) \right| \\ \left| - e_{21} c_1^{21}(\cdot) \right| + \left| - \sum_{j=1}^{n_2-1} \alpha_j^2 - (a_1^2 + c_1^{22} f_1^2(\cdot)) \right| \end{array} \right. \quad (\text{IV-93})$$

Il vient pour le processus considéré et pour la norme $p(z_t)$ définie par :

$$p(z_t) = [|z_{1t}|, \dots, |z_{n_2-1,t}|, \max\{ |z_{n_1,t}|, |z_{nt}| \}]^T$$

$$\forall z_t = |z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{nt}|^T \in \mathcal{R}^n, \quad n = n_1 + n_2$$

$$z_{t+1} = A(\cdot) z_t \quad (\text{IV-94})$$

$$A(.) = \begin{bmatrix} \dots & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & |\alpha_i^1| & & & & |\beta_i^1| \\ & & & \dots & & & \vdots \\ & & & & \dots & & \vdots \\ & & & & & |\alpha_j^2| & |\beta_j^2| \\ & & & & & & \vdots \\ \dots & \frac{\gamma_i^1(\cdot, \alpha_i^1)}{|\beta_i^1|} & \dots & \dots & \frac{\gamma_j^2(\cdot, \alpha_j^2)}{|\beta_j^2|} & \dots & \gamma_{n_1+n_2-1}(\cdot) \end{bmatrix}$$

L'application du théorème (IV-1) pour le système de comparaison (IV-94) dont la matrice caractéristique a ses éléments non négatifs et ses éléments non linéaires isolés dans la dernière ligne conduit aux conditions suffisantes de stabilité asymptotique et globale du processus décrit par (IV-80, 81) établies au théorème (IV-6) suivant :

Théorème (IV-6)

(a) Le système discret régi par les équations aux récurrences scalaires (IV-80,81) avec les notations (IV-87 → 93) est asymptotiquement stable s'il existe $\epsilon > 0$, \mathcal{X} et des paramètres arbitraires $\alpha_i^1, \forall i = 1, 2, \dots, n_1-1$ et $\alpha_j^2, \forall j = 1, 2, \dots, n_2-1$ vérifiant :

$$1 - |\alpha_j^i| > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_i-1, \quad \forall i = 1, 2 \quad (IV-95)$$

tels que :

$$1 - \gamma_{n_1+n_2-1}(\cdot) - \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{\gamma_i^1(\cdot, \alpha_i^1)}{1 - |\alpha_i^1|} - \sum_{j=1}^{n_2-1} \frac{\gamma_j^2(\cdot, \alpha_j^2)}{1 - |\alpha_j^2|} \geq \epsilon \quad (\text{IV-96})$$

$$\forall (t, y_t) \in \mathcal{T}_d, \mathcal{X}$$

(b) Si de plus $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, la stabilité est globale.

Remarques :

- L'application du théorème (IV-6) précédent ne nécessite pas la stabilité des sous-systèmes S_1 et S_2 régis par (IV-79). Ceux-ci peuvent donc être instables alors que le processus multivariable (IV-80, 81) défini par l'interconnexion de S_1 et S_2 peut-être globalement stable.

- Ces considérations peuvent être généralisées au cas du couplage non linéaire de plusieurs sous-systèmes non linéaires.

- Dans le cas d'interconnexion de sous-systèmes discrets du type LUR'E POSTNIKOV, l'utilisation systématique d'une description intermédiaire du type FROBENIUS devrait ici encore conduire à des résultats remarquables.

CONCLUSION

Les méthodes d'analyse et de synthèse des processus discrets proposées sont basées sur une représentation remarquable des processus identique à celle retenue pour les processus continus.

Celles-ci correspondent au choix d'une description, représentation correspondant à une structure hiérarchisée à deux niveaux, choisie à priori : elles permettent, de même que pour les systèmes continus, de simplifier considérablement le problème difficile du choix des fonctions d'agrégation et donc des systèmes de comparaison qui en résultent pour l'étude de la stabilité.

Les critères de stabilité établis dans ce chapitre sont de mise en oeuvre simple pour des classes importantes de processus tels que la matrice caractéristique soit en flèche mince ou épaisse.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 BORNE P., GENTINA J.C.
"Sur une extension des conditions linéaires de stabilité à certaines classes de systèmes échantillonnés non linéaires".
C.R.A.S., Série A, N° 16, t. 274, pp.1275-1277, Avril 1972.
- 2 BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F.
"Stability of large scale Nonlinear discrete systems by the use of vectoriel norms".
Proc. of I.F.A.C. Symposium, pp. 187-194, Udine, 1976.
- 3 LAURENT F.
"Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés non linéaires en régime dynamique".
Thèse es-Sciences Physiques, Lille, 1968.
- 4 LAURENT F., BENREJEB M.
"Sur la stabilité vis à vis des conditions initiales des systèmes discrets de grande dimension".
Proc. of MECO 79 Congress, Grenoble, 1979.
- 5 BORNE P.
"Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés".
Thèse es-Sciences Physiques, Lille, 1976.
- 6 BELLMAN R.
"Vector Lyapunov functions".
J. S.I.A.M. Control, Ser. A, 1, pp.32-34, 1962.
- 7 BAILLEY F.N.
"The application of Lyapunov's second method to interconnected systems".
J. S.I.A.M. Control, Ser. A, 3, pp. 443-462, 1966.

- 8 GRUJIĆ L.T., SILJAK D.D.
"On the stability of discrete composite systems".
IEEE Trans. Aut. Control., pp. 522-524, Oct. 1973.
- 9 GRUJIĆ L.T.
"Uniform stability of discrete large scale systems".
IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. Nov. 1973.
- 10 GRUJIĆ L.T., SILJAK D.D.
"Exponential stability of large scale discrete systems"
Int. J. Control, vol. 19, N° 3, pp. 481-491, 1974.
- 11 LAURENT F.
"Sur un critère pratique de stabilité pour les systèmes échantillonnés non linéaires".
C.R.A.S., Paris, t. 269, pp. 226-228, Juillet 1969.
- 12 LAURENT F.
"Sur la stabilité globale et le temps de réponse d'un système échantillonné non linéaire".
C.R.A.S., Paris, t. 260, pp. 4444-4447, Avril 1965.
- 13 LAURENT F.
"Sur une majoration en amplitude des oscillations limites des systèmes échantillonnés non linéaires".
C.R.A.S. Paris, t. 262, pp. 659-661, Mars 1966.
- 14 BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F.
"Sur une étude par majoration de la stabilité des suites récurrentes vectorielles non-linéaires".
Colloque International CNRS, Toulouse, 1973.
- 15 LAURENT F., ROMÉLOT
"Sur le régime dynamique d'un système échantillonné non linéaire décrit par un modèle redondant".
C.R.A.S. Paris, t. 280, série A, pp. 1033-1035, 1975.

- 16 MOYAUX J.
"Sur la détermination de la commande discrète de processus multivariables".
Thèse Docteur Ingénieur, Lille, 1976.
- 17 MOYAUX J., BENREJEB M., BORNE P.
"Application des pseudo-inverses de matrice à l'étude de la commande des systèmes discrets".
A.F.A.S., Limoges, 1974.
- 18 JANAKIRAMAN P.A., RAO P.V.
"Nonlinear-discrete data systems extension of the know sector stability".
IEEE Trans. Aut. Control, pp. 301-304, june 1973.
- 19 KALMAN R.E., BERTRAM J.E.
"Criterion in nonlinear sampled-data systems".
New-York : Gordon, 1969.
- 20 ARAKI M., ANDO K., KONDO B.
"Stability of sampled data composite systems with many nonlinearities".
IEEE Trans. Aut. Control. Vol. AC-16, pp. 22-27, fev. 1971.
- 21 JURY E.I., LEE B.W.
"On the stability of certain class of nonlinear sampled data systems".
IEEE Trans. Aut. Control, Vol. A-C 9, pp. 51-61, janv. 1964.
- 22 BITSORIS G., BURGAT C.
"Stability analysis of complex discrete systems with locally and globally stable subsystems".
Int. J. Control, vol. 25, N° 3, pp. 413-424, 1977.
- 23 BORNE P., LAURENT F., MAIZIERES C.
"Sur la stabilité dynamique des processus multivariables non linéaires".
Proc. of MECO 77, Congress Zürich, 1977.

- 24 BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F.
"Sur la stabilité des systèmes échantillonnés non linéaires".
R.A.I.R.O., J. 2, pp. 96-105, 1972.
- 25 LAURENT F.
"Systèmes monovariabes". Cours IDN
"Transformation dans l'espace d'état". Cours IMA

CONCLUSION GENERALE

L'analyse des propriétés fondamentales des systèmes complexes hiérarchisés continus et discrets à partir des techniques de majoration basées sur les normes vectorielles et développées par BORNE et GENTINA constitue l'une des orientations des travaux présentés dans ce mémoire.

L'utilisation de la forme particulière en flèche pour les matrices caractéristiques des processus étudiés permet d'envisager de façon nouvelle l'étude de la stabilité des grands systèmes, en particulier dans le cas d'interconnexions.

Cette approche a permis la détermination de conditions suffisantes de stabilité de mise en oeuvre aisée, et d'interprétation simple par rapport aux caractéristiques des sous-systèmes composants, dans le cas d'un processus multivariable du type interconnecté.

Un autre apport de la méthode proposée concerne la définition d'une structure hiérarchisée à deux niveaux, choisie à priori, permettant la détermination immédiate de fonctions d'agrégation bien adaptées à l'étude de la stabilité des processus.

Une application importante concerne l'étude des systèmes singulièrement perturbés pour lesquels il a été possible de comparer les performances du processus et du système dégénéré, d'ordre réduit correspondant.

L'outil mathématique présenté dans ce mémoire a permis par ailleurs la définition d'importantes classes de processus pour lesquels la conjecture linéaire est vérifiée.

L'utilisation de la "forme en flèche" dans le cas des processus discrets semble pouvoir conduire à des résultats semblables à ceux obtenus dans le cas continu : l'approche de la stabilité ainsi réalisée permet son utilisation en vue de la synthèse de régulations du type continu ou discret et c'est dans ce sens que nous envisageons de poursuivre nos travaux.

TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION GENERALE</u>	1
<u>Chapitre I : REPRESENTATIONS DES SYSTEMES DYNAMIQUES - STABILITE</u>	
Introduction	3
I - Structure des processus dynamiques	5
I-1 Généralités	5
I-2 Description des systèmes de grande dimension étudiés.	7
I-2-1 Systèmes dynamiques perturbés/non perturbés ...	7
I-2-2 Systèmes du type LUR'E POSTNIKOV	9
I-2-3 Systèmes multivariables du type interconnecté .	9
I-2-4 Systèmes à perturbation singulière	10
II - Méthodes d'étude de la stabilité des systèmes de grande dimension	11
II-1 Notion de stabilité - Définitions	12
II-2 Les fonctions permettant l'analyse de la stabilité des processus	15
II-3 Méthodes d'étude de la stabilité des systèmes dynamiques de grande dimension	17
II-3-1 Méthode des perturbations singulières	17
II-3-2 Méthode des fonctions de LYAPUNOV vectorielle	18
II-3-3 Méthode des normes vectorielles	19
II-4 Application des conditions de stabilité linéaire pour le processus non linéaire	19
II-4-1 Lemme de KOTELYANSKI	20
II-4-2 Conjecture d'AIZERMAN	21

II-4-3 Critères pratiques de BORNE et GENTINA	22
II-4-3-1 Notion de norme vectorielle	22
II-4-3-2 Définition des systèmes majorants ..	23
II-4-3-3 Lemmes de comparaison	24
II-4-3-4 Critères pratiques de stabilité	25
III - Représentation des processus étudiés. Définitions et propriétés des formes canoniques en flèche	27
III-1 Position du problème du choix de la représentation des systèmes	27
III-2 Formes canoniques en flèche - Définitions et propriétés	31
III-2-1 Définitions des formes canoniques en flèche	31
III-2-2 Propriétés des matrices en flèche	34
III-2-2-1 Calcul des déterminants des matrices en flèche	34
III-2-2-2 Calcul des inverses des matrices en flèche	36
III-2-2-3 Symétrie	37
III-2-2-4 Structure hiérarchisée et matrice en flèche	38
III-2-2-5 Graphe associé à une matrice en flèche	39
III-2-3 Passage aux formes canoniques en flèche ...	40
III-2-3-1 Méthode graphique	40
III-2-3-2 Méthode analytique	43
Conclusion	50
Bibliographie du chapitre I	51

Chapitre II : CONDITIONS SUFFISANTES DE STABILITE DES SYSTEMES
CONTINUS NON LINEAIRES - CONJECTURE LINEAIRE

Introduction	61
I - Cas des processus admettant une matrice caractéristique identique à celle du système de comparaison - conjecture linéaire	62
I-1 Systèmes non linéaires hiérarchisés à deux niveaux ..	63
I-1-1 Eléments non linéaires isolés dans la dernière ligne ou colonne de la matrice caractéristique	63
I-1-2 Eléments non linéaires isolés dans une ligne ou colonne quelconque de la matrice carac- téristique	68
I-1-3 Exemples	70
I-1-3-1 Etude d'un système dynamique complexe	70
I-1-3-2 Etude du comportement dynamique des réacteurs nucléaires	71
I-1-3-3 Cas d'une matrice caractéristique en flèche épaisse	73
I-2 Systèmes décrits par des équations différentielles scalaires	77
I-2-1 Système monovarié décrit par une équation différentielle non linéaire	77
I-2-2 Couplage non linéaire d'un système linéaire et d'un système non linéaire	80
I-2-3 Interprétation graphique	87
I-3 Systèmes du type LUR'E POSTNIKOV	88
I-3-1 Systèmes monovariés du type LUR'E POSTNIKOV	88
I-3-1-1 Systèmes fortement non linéaires	88
I-3-1-2 Systèmes monovariés à non linéari- té séparable	91
I-3-2 Interprétations fréquentielle et graphique	94
I-3-2-1 Relation avec le critère de POPOV ...	94
I-3-2-2 Interprétation graphique	97

I-3-3	Systemes multivariables du type interconnecté.	99
I-3-3-1	Description de la classe des processus étudiés	99
I-3-3-2	Couplage série de deux sous-systemes.	102
I-3-3-3	Cas d'interconnexion de deux sous-systemes	104
I-3-3-4	Exemple d'interconnexion de plusieurs sous-systemes	106
II -	Etude de la stabilité des systemes dynamiques complexes..	110
II-1	Sur le problème du choix d'un systeme de comparaison pour l'étude de la stabilité	110
II-2	Eléments non constants isolés dans une rangée de la matrice caractéristique	111
II-3	Eléments non constants isolés dans k rangées de la matrice caractéristique	114
II-3-1	Systeme de comparaison d'ordre $(n-k+1)$	115
II-3-1-1	La matrice caractéristique est en flèche mince d'ordre n	115
II-3-1-2	La matrice caractéristique est en flèche mince généralisée d'ordre r .	118
II-3-2	Systeme de comparaison d'ordre r	119
II-3-3	Cas d'une contraction à l'ordre 1	121
II-4	Application à l'étude du cas d'interconnexion de deux systemes	122
II-4-1	Systeme de comparaison d'ordre $n-1$	125
II-4-2	Systeme de comparaison d'ordre 1	127
II-5	Matrice caractéristique à éléments non linéaires ...	127
	Conclusion	130
	Bibliographie du chapitre II	132

Chapitre III : SUR LA SYNTHÈSE DES SYSTÈMES CONTINUS NON
LINEAIRES

Introduction	136
I - Analyse de certaines classes de processus non linéaires .	138
I-1 Systèmes non linéaires non stationnaires instables ..	138
I-1-1 Systèmes minorants - Définition	138
I-1-2 Etude de l'instabilité des systèmes mono- entrée mono-sortie	140
I-1-2-1 Système décrit par une équation différentielle	140
I-1-2-2 Système du type LUR'E POSTNIKOV	141
I-1-3 Systèmes hiérarchisés à deux niveaux	143
I-2 Systèmes non linéaires non stationnaires singulière- ment perturbés	146
I-2-1 Description du système - Système dégénéré	147
I-2-2 Conditions suffisantes de stabilité du système dégénéré	148
I-2-2-1 Sous-systèmes d'ordre 1	148
I-2-2-2 Sous-systèmes d'ordre quelconque	151
I-3 Stabilité de mouvement - Influence de l'état initial.	154
I-3-1 Position du problème - Définition	154
I-3-2 Application à l'étude d'un système du type LUR'E POSTNIKOV	155
I-3-3 Exemple d'un moteur à courant continu entraî- nant une charge mécanique	159
I-4 Stabilité de mouvement	161
I-4-1 Position du problème - Définition	161
I-4-2 Conditions suffisantes de stabilité des trajectoires	164

II - Méthode de synthèse des processus non linéaires	165
II-1 Position du problème	165
II-2 Méthode de synthèse des systèmes hiérarchisés à deux niveaux	166
II-2-1 Description des systèmes étudiés	166
II-2-2 Principe	167
II-2-3 Mise en oeuvre	169
II-2-3-1 Estimation du "coefficient d'amortissement"	169
II-2-3-2 Méthode d'amélioration des performances	170
II-3 Cas des systèmes non linéaires décrits par des équations différentielles scalaires non linéaires	173
II-3-1 Systèmes décrits par une équation différentielle scalaire	173
II-3-1-1 Estimations du coefficient d'amortissement	174
II-3-1-2 Méthodes de détermination des commandes améliorant les performances des processus	175
II-3-1-3 Exemple du circuit ferrorésonnant série	176
II-3-2 Systèmes décrits par deux équations différentiel- les scalaires	181
II-4 Cas des systèmes non linéaires du type LUR'E POSTNIKOV	182
II-4-1 Systèmes monovariables	182
II-4-2 Interconnexion série de deux sous-systèmes	185
II-5 Cas des systèmes non linéaires singulièrement perturbés	186
II-5-1 Sous-systèmes d'ordre quelconque	186
II-5-2 Sous-systèmes du premier niveau hiérarchique d'ordre 1	187

II-5-2-1	Interprétation structurelle et temporelle des systèmes linéaires singulièrement perturbés	188
II-5-2-2	Systèmes dégénérés non linéaires d'ordre 1	191
II-5-2-3	Systèmes dégénérés non linéaires d'ordre j	193
II-5-3	Cas d'interconnexion de deux systèmes du type LUR'E POSTNIKOV	194
III -	Application à l'étude du problème de la régulation de la fréquence dans les centrales thermiques	197
III-1	Description du processus	198
III-2	Formes canoniques en flèche de la matrice caractéristique du processus	200
III-2-1	Description du processus dans l'espace d'état	201
III-2-2	Forme canonique en flèche épaisse généralisée de la matrice caractéristique	202
III-2-3	Forme canonique en flèche mince généralisée d'ordre 5 de la matrice caractéristique	205
III-3	Méthode de synthèse	207
	Conclusion	210
	Bibliographie du chapitre III	211

Chapitre IV : APPLICATION DE LA REPRESENTATION EN FLECHE A
L'ETUDE DES SYSTEMES DISCRETS NON LINEAIRES

Introduction	217
I - Systèmes complexes discrets hiérarchisés à deux niveaux .	218
I-1 Sous-systèmes d'ordre 1	218
I-2 Sous-systèmes du premier niveau d'ordre 1, sous système coordonnateur d'ordre $(n-r)$	221
I-2-1 Système de comparaison d'ordre n	221
I-2-2 Système de comparaison d'ordre r	224
I-3 Sous-systèmes d'ordre quelconque	227
II - Systèmes décrits par des équations récurrentes scalaires	
II-1 Systèmes discrets décrits par une équation récurrente scalaire	232
II-1-1 Conditions suffisantes de stabilité	232
II-1-2 Application aux processus du type LUR'E POSTNIKOV échantillonnés	235
II-2 Systèmes discrets non linéaires interconnectés	241
Conclusion	247
Bibliographie du chapitre IV	248
<u>CONCLUSION GENERALE</u>	252
<u>TABLE DES MATIERES</u>	254

