N° d'ordre : 482

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Monique SPIELBERG-GUIGNARD

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'OPTIMISATION EN NOMBRES ENTIERS ET DE L'OPTIMALITE EN PROGRAMMATION MATHEMATIQUE

Thèse soutenue le 30 septembre 1980 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury	MM.	P. BACCHUS	Président
		P. HUARD	Rapporteur
		P. HANSEN	Examinateur
		P. POUZET	Examinateur
		F. STERBOUL	Examinateur

PROFESSEURS 1ERE CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean	Physique
M. BONNOT Ernest	Biologie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean Pierre	S.E.S.
M. DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M. DURCHON Maurice	Biologie
M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M. GRANELLE Jean Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. HEUBEL Joseph	Chimie
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LANSRAUX Guy	Physique
M. LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M. LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie
M. MAILLET Pierre	S.E.S.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre

.../...

Professeurs 1ère classe (suite)

M. SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme SCHWARTZ Marie Hélène	Mathématiques
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M TILLIEU Jacques	Physique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème C L A S S E

M. AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M. ANTOINE Philippe	Mathématiques
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOBE Bernard	S.E.S.
M. BODART Marcel	Biologie
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. BRUYELLE Pierre (Chargé d"enseignement)	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.
M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques

.../...

M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique
M. DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M. DYMENT Arthur	Mathématiques
M. FLAMME Jean Marie	E.U.D.I.L.
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. GERVAIS Michel	S.E.S.
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gavriel	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HANGAN Théodor	Mathématiques
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LAURENT François	I.E.E.A.
Mlle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mlle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LENTACKER Firmin	G.A.S.
M. LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M. LHENAFF René	G.A.S.
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M. LOUAGE Francis	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mlle MARQUET Simone	Mathématiques
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M. MONTEL Marc	Physique
Mme NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mlle PAUPARDIN Colette	Biologie

Professeurs 2ème classe (suite)

M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RICHARD Alain	Biologie
M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	M.P.A.
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M. SCHAMPS Joël	Physique
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. WALLART Francis	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

M. TOP Géard	S.E.S.
M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. DUVEAU Jacques	S.E.S.
M. HOFLACK Jacques	I.P.A.
M. LATOUCHE Serge	S.E.S.
M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M. OPIGEZ Philippe	S.E.S.

ERRATA

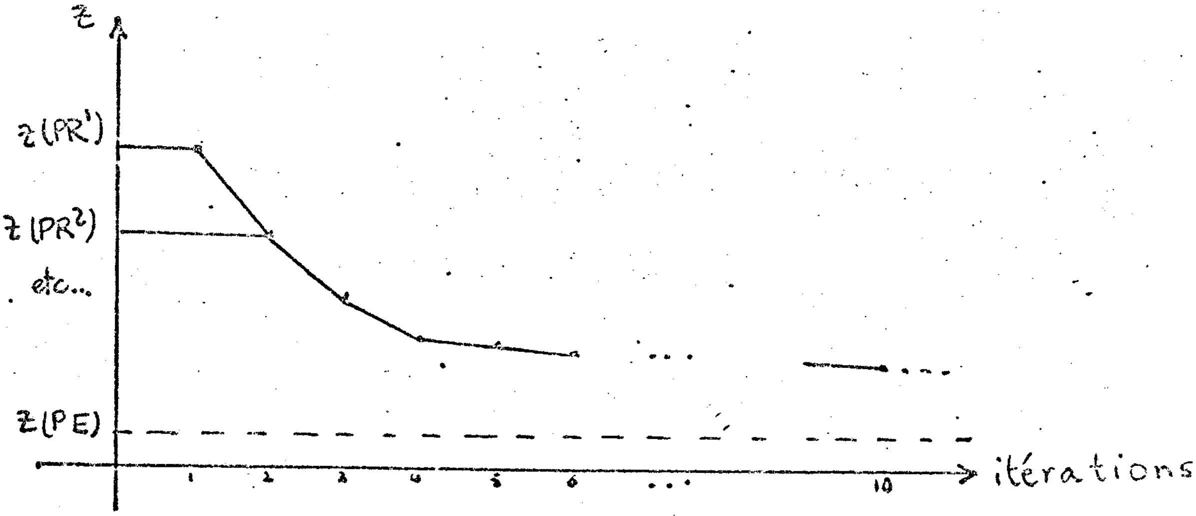
Page 18 ligne -4 lire

"associer un $\tilde{x}$"

ligne -1 lire

"u^{ℓ}" au lieu de u"

Page 23 ajouter la figure suivante :



Page 30 ligne -4 lire

"alors

$$y = \Big[$$ "

Page 114 ligne -4 lire

"(δ)"

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Huard. Il m'a fait découvrir la programmation mathématique et je lui dois mon goût pour la recherche. Qu'il soit remercié ici de l'intérêt qu'il a apporté à ce travail.

Je remercie Monsieur le Professeur Bacchus de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury et Messieurs les Professeurs Hansen, Pouzet et Sterboul pour y avoir participé.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Messieurs les Professeurs Krarup et Mevert qui ont bien voulu accepter d'être rapporteurs pour cette thèse.

Je tiens enfin à remercier Madame Tailly pour le soin et la diligence apportés à la réalisation de cette thèse, ainsi que Monsieur et Madame Debock pour leur excellent travail de reproduction et d'impression des articles et de la thèse.

INTRODUCTION

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE O

PROGRAMMATION MATHEMATIQUE

EN

NOMBRES ENTIERS

Nous nous intéressons dans ce travail à la maximisation d'une fonctionnelle linéaire de n variables sous contraintes linéaires, les variables (ou certaines de ces variables) ne pouvant prendre que des valeurs entières. Si les contraintes du problème définissent un polyèdre borné (ce qui n'est pas toujours le cas), le nombre de solutions réalisables dans le cas entier pur (c'est-à-dire dans le cas où toutes les variables doivent être entières) est fini. Ce sera le cas en particulier, des programmes linéaires en variables bivalentes, les variables ne pouvant prendre que deux valeurs, 0 ou 1 . Numériquement parlant, pour des valeurs de n relativement petites (de l'ordre de 20 ou 30), une énumération pure et simple de ces solutions, et leur comparaison par rapport à la fonctionnelle à maximiser, peut être la méthode la plus rapide. Dans la pratique toutefois il n'est pas rare aujourd'hui de rencontrer des problèmes comportant plusieurs centaines et même parfois jusqu'à plusieurs dizaines de milliers de variables. Le temps nécessaire à l'énumération totale croissant exponentiellement, il est impensable de résoudre le problème de cette façon. Une modification de cette exploration systématique (énumération implicite ou "branch-and-bound" ou "séparation et évaluation progressive") tendant à diviser le problème en sous-problèmes et à éliminer des sous-problèmes qui ou bien ne peuvent fournir aucune solution réalisable ou bien ne peuvent fournir de solution meilleure que la meilleure solution connue a été proposée au début des années 60 (voir par exemple Land, Doig [23], ou Balas [1]) et a été considérablement améliorée par un grand nombre d'auteurs. Une approche différente dans sa conception introduite dès 1958 par Gomory [15] et qui a connu un développement important depuis, consiste non pas à "énumérer" les solutions, mais à essayer de cerner l'enveloppe convexe des solutions entières réalisables. Deux procédés en un sens duaux l'un de l'autre, vont l'un préciser séquentiellement des contraintes supplémentaires automatiquement satisfaites par les solutions entières, approchant de plus en plus précisément l'enveloppe convexe des points entiers, l'autre déterminer un ensemble de points entiers réalisables parmi lesquels se trouvera nécessairement la solution optimale. Des résultats des mathématiques classiques (algèbre, arithmétique) sont utilisés dans les deux cas. Sous certaines conditions facilement satisfaites, une convergence finie est assurée. Malheureusement aucune borne supérieure du nombre d'opérations nécessaires qui soit une fonction polynomiale de la taille du problème n'est connue. Des travaux plus récents (depuis 1972 environ) se sont concentrés sur ce problème, et il est fort improbable qu'il existe un algorithme polynomial pour résoudre le problème *général* de programmation en nombres entiers. Il est toutefois possible que pour des problèmes spéciaux (knapsack, certains problèmes d'ordonnancement) des algorithmes précis aient *en moyenne* un comportement polynomial.

Dans certains des articles présentés dans cette thèse, une approche mixte est utilisée, combinant une énumération implicite et des méthodes algébriques. C'est le cas par exemple pour ([m],...). Dans d'autres articles par contre une structure particulière du programme en nombres entiers justifiait une étude plus poussée de la configuration des solutions entières réalisables (voir par exemple [n], [q],[j]).

Plusieurs types de problèmes concrets ont soit motivé la recherche soit permis a posteriori de vérifier l'intérêt des méthodes proposées. Nous allons en décrire trois en particulier.

Le problème du knapsack (ou de sac à dos) avait été étudié semble-t-il systématiquement pour la première fois par Gilmore et Gomory [14]. Ces auteurs s'intéressaient à un problème de découpes de rouleaux de papier de longueurs données correspondant à des commandes. Il s'agissait de minimiser les chutes. Leur étude a permis à de petites entreprises de réduire les chutes de 6 % en moyenne à 3 % en utilisant un ordinateur de petite taille (IBM 1620) et de coût faible. Ils utilisaient un programme linéaire de grande taille dont les colonnes n'étaient pas stockées à priori mais engendrées lorsqu'elles étaient intéressantes, c'est-à-dire lorsqu'elles étaient candidates à entrer dans la base. Le sous-problème correspondant pouvait se formuler comme un problème de sac-à-dos, du type : combien d'objets de quels types doit-on placer dans le sac-à-dos, étant donné leur volume et le volume de sac-à-dos, de façon à maximiser la "valeur totale du contenu" ? Maints problèmes de chargement et de budget peuvent se formuler de façon analogue. Lorsque les objets n'existent qu'en un exemplaire et qu'il s'agit de les choisir ou de les exclure, on parle de "knapsack bivalent".

Un autre type de problème est le problème d'implantation avec charges fixes. Un réseau consiste en des sommets donnés et des sommets possibles, et des arcs potentiels allant des uns aux autres. Souvent il s'agit d'usines ou d'entrepôts possibles et de clients donnés. Il peut aussi s'agir d'ordinateurs et de terminaux, ou de connections à placer sur des circuits imprimés, par exemple. Le choix d'un emplacement est d'habitude coûteux, il y a une "charge fixe" correspondant à l'ouverture d'une usine ou l'implantation d'un ordinateur. Les sommets existants ont une certaine demande connue, et ce peut être par exemple un certain volume de communication ou un certain nombre de tonnes de tel ou tel produit. Le coût du transport ou de l'acheminement du produit est proportionnel à la quantité transposée. Suivant les cas, il s'agit d'un problème avec ou sans capacités. Les "sources" (usines, entrepôts, ordinateurs) peuvent avoir une disponibilité maximale finie ou infinie, et les arcs (moyens de transport : camions, trains, ou lignes téléphoniques) peuvent aussi avoir une capacité maximale finie. On parlera suivant les cas de problème d'implantation simple (sans capacité) ou avec capacités. Dans tous les cas, il s'agit de minimiser le coût total d'implantation et de transport par rapport à toutes les solutions possibles.

Le troisième problème est un problème de chaine de production. Un certain type de produit fini peut être fabriqué à partir d'un certain stock de pièces détachées. Il doit avoir certaines caractéristiques techniques et on cherche à déterminer le choix optimal des pièces conduisant à un bon produit de coût minimal. Un tel problème contient en général un grand nombre de contraintes de choix multiples : un nombre plus ou moins grand de pièces de caractéristiques voisines peut être choisi pour une fonction donnée, mais son choix sera lié au choix d'autres pièces remplissant d'autres fonctions, etc... . Il est fréquent d'avoir plusieurs milliers de pièces possibles, donc plusieurs milliers de variables bivalentes. Ces problèmes de grande taille sont souvent très difficiles à résoudre avec les codes standards de programmation en nombres entiers mais les techniques que nous avons proposées dans [h,t], ...[w] par exemple se révèlent très efficaces pour ces problèmes.

Les difficultés rencontrées dans la programmation en nombres entiers sont de plusieurs ordres. D'une part, les résultats de l'analyse classique concernant les extremas liés ne s'appliquent plus. En un sens, tous les points entiers réalisables d'un programme entier pur sont des extremas liés locaux, puisqu'il n'existe dans des voisinages choisis suffisamment petits aucune autre solution réalisable et a fortiori aucune solution réalisable meilleure au sens de la fonction à optimiser. Malheureusement ceci implique qu'aucune analyse basée sur des gradients ou même des sous-gradients ne s'appliquera à ces problèmes. On ne connaît même pas de conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité qui permettent de vérifier à posteriori l'optimalité ou la non-optimalité d'une solution réalisable, et ce même en présence de fonctions ayant toutes les "bonnes" propriétés de convexité et de dérivabilité. La seule condition nécessaire nécessaire et suffisante que l'on puisse utiliser (mais qui n'est pas utilisable pratiquement) est que la solution optimale entière est également la solution optimale (en continu) du programme mathématique défini sur l'enveloppe convexe des points entiers. Cette enveloppe convexe, toutefois, n'est en général pas connue a priori et sa détermination de fait ne fait que remplacer le problème initial par un problème tout aussi complexe.

Les techniques d'analyse diophantienne se sont révélées décevantes dans le cadre de la programmation en nombres entiers. Un programme linéaire, continu ou entier, comporte toujours des inégalités, faute de quoi le problème a soit une solution triviale soit une solution infinie. On peut donc toujours se ramener à un système de contraintes défini d'une part par des équations et d'autre part par des conditions de signe sur au moins certaines des variables. On sait résoudre un système d'équations linéaires en variables entières, mais on ne sait pas comment traiter en plus des conditions de signe, ou, plus exactement, le problème redevient combinatoire en fonction de certains paramètres, et n'est donc pas résolu pour autant. Comme il a été mentionné précédemment, il semble très peu probable qu'il soit possible de résoudre le problème général de programmation mathématique en nombres entiers à l'aide d'un algorithme exact polynomial. Nous allons résumer rapidement l'état des connaissances en ce domaine ([22]). Il n'y a qu'une façon précise de définir ce qu'est un algorithme, à savoir, en utilisant une machine de Turing. Tous les essais informatiques visant à définir formellement un algorithme ont jusqu'à présent débouché sur des définitions équivalentes à celle utilisant une machine de Turing. Celle-ci est malheureusement longue et peu élégante, et la tentation est grande d'être un peu moins rigoureux. Nous obtiendrons ainsi une exposition plus simple et plus accessible aux non-informaticiens. Cook en 1971 puis Karp en 1972 furent à l'origine de cette branche de la programmation mathématique consacrée à la complexité des algorithmes. Considérons le problème suivant :

PDD | décider si P est vide,
où $P = \{s \in S \mid s$ a une certaine "propriété bien définie"$\}$
et S est un ensemble fini quelconque ($|S| < +\infty$).

PDD est un "problème de décision discret". Un *algorithme polynomial* sera un algorithme dont le nombre d'étapes est une fonction polynomiale de la longueur de la suite des données. Edmonds en 1965 fut le premier à appeler de tels algorithmes de "bons" algorithmes. On définira P comme l'ensemble des problèmes PDD qui peuvent se résoudre à l'aide d'un algorithme polynomial tandis que NP sera l'ensemble des problèmes PDD qui peuvent être résolus par un algorithme énumératif ou arborescent où la profondeur de l'arbre de recherche est une fonction polynomiale de la dimension (de la longueur des données) du problème. Le nombre d'étapes d'un algorithme pour un problème NP est une fonction exponentielle de la dimension du problème. Parmi les problèmes de NP, certains sont appelés *NP-complets*. Le problème de la satisfaisabilité des expressions booléennes est NP-complet. D'autre part presque tous les problèmes de cliques, de circuits hamiltoniens, de l'arbre de Steiner, du nombre chromatique, le problème du commis voyageur, le problème général de recouvrement ; le problème de knapsack, le problème général de programmation mathématique entière, sont tous NP-complets. Si un algorithme polynomial existe pour l'un quelconque d'entre eux, alors tous les problèmes NP-complets et a fortiori tous les problèmes de NP doivent admettre des algorithmes polynomiaux, et on aurait donc alors P = NP. En dépit de recherches extensives depuis dix ans, on n'a toujours aucune idée de la façon de répondre à la question : est-ce que NP $\subset$ P ? (on sait bien sur que P $\subset$ NP). Il y a donc peu d'espoir d'être capable de concevoir des algorithmes polynomiaux pour résoudre les problèmes NP-complets. On a alors le choix entre des algorithmes polynomiaux approchés (ou sous-optimaux), et des algorithmes exacts mais exponentiels. On désignera par "heuristique" un algorithme approché qui fournit une solution (pas forcément optimale) réalisable que l'algorithme lui-même ne peut pas améliorer.

Les chapitres suivants décriront des techniques de résolution (exacte ou approchée) et présenteront une étude systématique de la structure (non totalement explorée) de certains polyèdres enveloppes convexes des points entiers pour des problèmes spéciaux. Il semble en effet que ce ne soit guère que pour certains problèmes à structures particulières (problème du voyageur de commerce, d'implantation simple, de knapsack) que cette enveloppe convexe puisse être étudiée avec succès.

NOTATIONS

• Si $A \subset C$,
$B \subset C$,
alors $A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$, et $|A|$ est le nombre d'éléments de A.

• Si $x \in \mathbb{R}^n$, on appellera également x la matrice-colonne des composantes de x par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $x \in \mathbb{R}^{mn}$, il peut être plus pratique de représenter x par une matrice à m lignes et n colonnes et de considérer x comme une variable indicée à deux indices

$$x = [x_{ij}],\ i = 1,\dots,m, \text{ et } j = 1,\dots,n, \text{ par exemple.}$$

• Si $x \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de x par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

• On désigne par $L(X,Y)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de l'espace vectoriel X dans l'espace vectoriel Y, et $(\mathbb{R}^n)^*$ sera $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

• Si $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, on appellera également f la matrice ligne des composantes de f par rapport à la base canonique de $(\mathbb{R}^n)^*$, et f^i désignera la $i^{\text{ème}}$ composante.

• Si $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, on appellera également A la matrice à m lignes et n colonnes des composantes de A par rapport aux bases canoniques de $(\mathbb{R}^n)^*$ et de $\mathbb{R}^m$ respectivement.
Si les lignes de A sont indicées par L et les **colonnes** par K, et si $I \subset L$ et $J \subset K$, on appellera A_I^J la sous-matrice de A dont les lignes sont indicées par I et les colonnes par J.

On appellera $\bar{I}$ l'ensemble $L \setminus I$ et $\bar{J}$ l'ensemble $K \setminus J$. On écrira $A(L \quad K)$.

• $y \overset{I}{\leq} b$ y et b indicés par L, $I \subset L$.

signifiera que $\begin{cases} y_I \leq b_I \\ y_{\bar{I}} = b_{\bar{I}} \end{cases}$

Si $I=L$, $y \overset{I}{\leq} b$ est équivalent à $y \leq b$.
Si $I=\emptyset$, $y \overset{I}{\leq} b$ est équivalent à $y = b$.

• Si a est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, on appellera $a(x)$ l'image par a de $x \in \mathbb{R}^n$, de même que la matrice-colonne correspondant à $a(x) \in \mathbb{R}^m$, et on notera $a_i(x)$ sa $i^{\text{ème}}$ composante.

• Nous utiliserons le signe $\square$ pour marquer la fin d'une démonstration.

$\mathbb{Z}$ désignera l'ensemble des entiers relatifs et
$\mathbb{N}$ désignera l'ensemble des entiers naturels.

• Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera $\lfloor\alpha\rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à α,
et $\lceil\alpha\rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à α.
Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, on a donc $\alpha = \lfloor\alpha\rfloor = \lceil\alpha\rceil$.

• $a,b \in \mathbb{N}$, (a,b) est le PGDC de a et de b.

• $\mathcal{P}(I)$ est l'ensemble des sous-ensembles de I.

• Le symbole $\overset{\Delta}{=}$ signifie *est égal (par définition) à*.

• Etant donné un programme linéaire

$$(LP) \quad \text{Max}\{fx \mid Ax = b,\ x \geq 0\}, \quad A(L \times K)$$

soit B une base, (c'est-à-dire $B \subset K$ et $|B| = |K|$, et A^B est inversible).

On posera

$$t = (A^B)^{-1}b,$$
$$T = (A^B)^{-1}A,$$
$$d = f - f^B(A^B)^{-1}A.$$

On a alors pour toute solution réalisable x de (LP) les relations suivantes

$$x_B = t - T^N x_N$$

$$Z \stackrel{\Delta}{=} fx = f^B t + d^N x_N.$$

• Si on considère un programme mathématique

$$\text{(P)} \quad \{\text{Min } f(x) \mid x \in A,\ a(x) \in B\},$$

on notera Z(P) (ou parfois z5P)) la valeur de ce minimum, finie ou infinie, et on l'appellera *optimum* de (P).

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a \mid b \text{ signifie que a divise b} \\ \ \ a \nmid b \text{ signifie que a ne divise pas b} \end{array}\right\} \quad a,b \in \mathbb{N}.$$

• Si a est une fonction continuement différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, on notera $\nabla a(\bar{x})$ son gradient en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla a(\bar{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

CHAPITRE 1

TECHNIQUES DE RESOLUTION

I.1 CLASSIFICATION.

I.2 RELAXATIONS.

I.2.1 RELAXATION EN CONTINU.

I.2.2 RELAXATION LAGRANGIENNE.

I.2.3 RELAXATION EN CONTINU-ENTIER.

I.2.4 RELAXATION DE BENDERS

I.3 SONDAGES.

I.3.1 CONTRAINTES FILTRANTES.

I.3.1.1 Contraintes additionnelles valides et strictes.

I.3.1.2 Contraintes de Gomory et de Gomory-Johnson.

I.3.1.3 Conditions de Benders.

I.3.1.4 Contraintes logiques en variables bivalentes.

I.3.1.5 Contraintes logiques en variables entières.

I.3.2 DETERMINATION DE SOLUTIONS REALISABLES.

ANNEXE A

ECARTS DE DUALITÉ POUR DES PROBLÈMES D'IMPLANTATIONS AVEC CAPACITÉS.

I.1. CLASSIFICATION

On peut, indépendamment des algorithmes utilisés pour résoudre des programmes mathématiques en nombres entiers, regrouper les *techniques de résolution* en deux grandes classes : les relaxations et les sondages.

Une "*relaxation*" consistera à remplacer un problème ou un sous-problème en nombres entiers par un problème relaché, dans lequel le domaine des solutions réalisables contient le domaine entier et dans lequel la fonction économique (à minimiser par exemple) est inférieure ou égale sur le domaine entier, à la fonction à minimiser du problème en entier. Si par exemple le problème en entier se formulait

$$\text{Min } \{f(x) \mid x \in E\}$$

le problème relaché pourrait s'écrire

$$\text{Min } \{g(x) \mid x \in D\}$$

où

(1) $D \supset E$

(2) $\forall x \in E,\ g(x) \leq f(x)$

Un "sondage" consistera par contre à partir d'un problème donné (entier ou relaché suivant les cas) à "sonder" soit l'existence de solutions entières meilleures que celles déjà connues, soit l'existence, la structure ou la configuration des solutions réalisables entières.

Nous allons passer en revue rapidement les différents types de relaxations ou de sondages que nous avons utilisés dans les articles cités en référence, et les décrire de façon uniforme.

Nous considérons dans ce chapitre le programme linéaire en nombres entiers mixte suivant :

(PE) : $\quad \text{Min}\{fx + gy \mid Ax + By \leq d,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et entier}\}$

et le programme linéaire en nombres bivalents mixte

(PB) : $\quad \text{Min}\{fx + gy \mid Ax + By \leq d,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et bivalent}\}$

En fait PB peut être considéré comme un cas particulier de PE et à moins que nous ne voulions considérer *que* les problèmes bivalents (voir I.3.1.4 par exemple), nous ne mentionnerons que (PE).

1.2. RELAXATIONS

Les différents problèmes relachés que l'on peut associer à un problème en entier donné diffèrent les uns des autres soit par leurs domaines, soit par leurs fonctions économiques. Nous avons utilisé en particulier :

I.2.1 RELAXATION EN CONTINU

Ce problème relaché (PC) ignore les conditions d'intégralité sur les variables, et est donc un programme linéaire classique. Si une de ses solutions optimales est entière, elle est aussi solution du problème en entier. Toutefois, à moins que la matrice des contraintes ne soit totalement unimodulaire, on n'a en général aucune assurance que la résolution du programme continu fournisse une solution entière. On peut néanmoins analyser le tableau simplicial optimal et en déduire un certain nombre d'informations concernant le problème entier :

- l'optimum en continu est une borne inférieure de l'optimum en entier.
- les composantes hors-base du vecteur critère de candidature peuvent être utilisées pour calculer des *pénalités*, ou mesures de l'accroissement de l'optimum entier par rapport à l'optimum continu si les variables hors base

correspondantes prennent des valeurs entières non nulles dans la solution optimale en entier. Dans [s], nous avons montré comment il était parfois possible de combiner ces pénalités avec des contraintes logiques (voir I.314) pour en déduire des bornes plus fortes pour la fonction économique.

Le problème relaché en continu peut parfois être utilisé pour résoudre le problème en entier, bien que la matrice des contraintes ne soit pas totalement unimodulaire. Il a été prouvé par Balas et Padberg [2] que les problèmes de partionnement

$$(PP) : \quad \begin{array}{l} \text{Min } fx \\ \quad Ax = e \\ \forall i : x_i = 0 \text{ ou } 1 \end{array}$$

où

$$A_i^j = 0 \text{ ou } 1 \ \forall i,j \text{ et } e_i = 1 \ \forall i$$

ont la propriété suivante :

entre toute solution réalisable entière de (PP) et toute solution optimale entière de (pp), il existe un chemin passant uniquement par des sommets entiers voisins tel que la fonction économique n'augmente pas d'un sommet au sommet suivant.

Ce résultat fournit donc un critère d'optimalité (ce qui est rare en programmation en nombres entiers) :

si un sommet entier de la relaxation continue de (pp) a tous ses sommets voisins qui sont soit fractionnaires, soit entiers mais strictement moins bons au sens de la fonction économique, ce sommet entier est solution optimale de (pp).

Un sommet entier ne correspond toutefois pas en général à une base unique, ces problèmes étant fortement dégénérés. De façon à identifier des sommets entiers voisins, on peut être amené à exécuter des changements de base dégénérés sur des composantes *positives* du vecteur critère de candidature. Ceci revient à dire qu'il est illusoire de compter sur la méthode simpliciale pour résoudre ces problèmes.

Nous avons néanmoins essayé d'utiliser ces résultats pour résoudre des problèmes d'implantation sans capacités à l'aide de la relaxation en continu. Nous avons montré dans [q] comment associer des bases triangulaires aux sommets entiers de ces problèmes, ce qui permet de faire tous les calculs sous forme implicite (le tableau simplicial complet n'étant alors pas nécessaire). Tant que des changements de base améliorant la fonction économique et conduisant à des solutions entières sont possibles, on progresse comme dans la méthode simpliciale. Nous nous sommes toutefois limités à des pivots égaux à 1. Ceci garantissait que la base suivante serait unimodulaire. Il peut cependant arriver qu'une base unimodulaire ne soit pas triangulaire. On ne peut alors pas continuer les calculs sous forme implicite (on pourrait peut-être adapter la méthode des paramètres pour continuer les calculs malgré tout [19]). Il est possible à priori que des pivots différents de 1 conduisent à des solutions entières, mais il s'agit là également d'un cas où les calculs ne peuvent être conduits sous forme implicite. Or les dimensions du programme linéaire associé à un problème d'implantation deviennent vite supérieures aux capacités de calcul. Un problème avec m usines et n clients conduit à mn+n contraintes et 2 mn + m variables. Un problème (relativement) petit ayant 50 usines et 200 clients aura donc $200 \times 50 + 200 = 10200$ contraintes et $2 \times 200 \times 50 + 50 = 20050$ variables et une matrice de base sera donc d'ordre 10200. L'intérêt du calcul implicite est évident lorsqu'on sait qu'il suffit alors de calculer des tableaux (50×200).

I.2.2. RELAXATION LAGRANGIENNE

Etant donné un problème du type

(PE)
$$\text{Min } fx + gy$$
$$\left|\begin{array}{l} \bar{A}x + \bar{B}y \le \bar{d} \\ \bar{C}x + \bar{D}y \le \bar{h} \\ x \ge o \\ \quad y \ge o, \text{ entier} \end{array}\right.$$

on considère le problème de Lagrange

(PR(u))
$$\text{Min } fx + gy + u\,(\bar{C}x + \bar{D}y - \bar{h})$$
$$\left|\begin{array}{l} \bar{A}x + \bar{B}y \le \bar{d} \\ x \ge o \\ \quad y \ge o, \text{ entier} \end{array}\right.$$

où u est un vecteur ligne de dimensions convenables, positif ou nul, donné, (PR(u)) est bien une relaxation de (PE), car

1° *son domaine contient celui de (PE) ;*

2° *sur le domaine de (PE),* puisque $u \ge o$, *la fonction économique de PR(u) est inférieure ou égale à celle de (PE) :*

$$\left.\begin{array}{l} u \ge 0 \\ \bar{C}x + \bar{D}y \le \bar{h} \end{array}\right\} \Rightarrow u \;.\; (\bar{C}x + \bar{D}y - \bar{h}) \le 0$$

Dans [13], Geoffrion a montré que le maximum par rapport à u positif ou nul de l'optimum de PR(u) fournissait une bo~~n~~ne borne inférieure de l'optimum de (PE), au moins aussi bonne que l'optimum du problème relaché en continu. Si on appelle Z(u) l'optimum de PR(u), la fonction Z(u) n'est malheureusement pas continûment différentiable par rapport à u. On ne peut donc pas résoudre

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{l} \text{Max } Z(u) \\ u \ge 0 \end{array}$$

par une méthode basée sur des gradients. On peut toutefois utiliser des méthodes de sous-gradients. Ces méthodes sont cependant un inconvénient majeur, qui est que la suite $Z(u^k)_{k=1,2,\ldots}$ (où k est le numéro de l'itération), n'est pas monotone non décroissante. Si, d'autre part, la solution optimale de la relaxation en continu de PR(u) est nécessairement entière (on dit alors qu'on a la "propriété d'intégralité") l'optimum de (D) est égal à celui de la relaxation en continu : Z(D) = Z(PC).

Si le nombre de contraintes de (PE) est très grand, il peut quand même être intéressant de résoudre (D) plutôt que (PE), surtout si la résolution de (PR(u)) est très simple. Nous utilisons dans [V] une relaxation Lagrangienne particulière du problème d'implantation à plusieurs niveaux, à l'aide de variables duales provenant, non d'un algorithme de sous-gradient, mais de solutions dual-réalisables d'une relaxation en continu- entier du problème d'implantation.

I.2.3. RELAXATION EN CONTINU-ENTIER.

Si on ajoute aux contraintes du problème relaché en continu (PC) des contraintes "valides", c'est-à-dire des contraintes satisfaites par toutes les solutions réalisables entières du problème en entier, on obtient une relaxation (PCE) plus forte que la relaxation en continu. Ces contraintes valides seront caractérisées plus en détail dans la section [I.3] portant sur les sondages. On aura donc en général les inégalités suivantes :

$$Z(PC) \leq Z(PCE) \leq Z(PE)$$

et

$$Z(PC) \leq Z(D) \leq Z(PE)$$

Si on connaît en outre une solution réalisable du problème en entier et si on appelle Z^* la valeur correspondante de la fonction économique de (PE), on aura alors un encadrement de Z (PE) par la valeur du problème relaché d'une part et par Z^* d'autre part. On appellera *écart de dualité* la valeur Z(PE) - Z(PR) et *écart relatif* la valeur $\frac{Z^*-Z(PR)}{Z^*}$, où Z(PR) est la valeur du problème relaché choisi, souvent (PCE) ou (D).

Un cas particulier intéressant de contraintes valides est le cas des facettes de l'enveloppe convexe des solutions entières du problème (PC), ou encore des solutions réalisables de (PE). En effet si on connaissait toutes ces facettes il suffirait de résoudre le programme linéaire (PCE) pour obtenir l'optimum de (PE).

En général ces facettes sont très difficiles à déterminer et leur nombre peut être tellement élevé que leur génération serait plus coûteuse que la résolution de (PE) par une méthode standard. L'introduction itérative de facettes intéressantes et la résolution du problème (PCE) correspondant s'est révélée pratiquement très efficace pour le problème du voyageur de commerce [17, 18]. Nous avons montré dans [x] que pour le problème d'implantation simple, pour certaines fonctions économiques, l'écart relatif $\frac{Z(PE)-Z(PC)}{Z(PE)}$ pouvait être infiniment proche de $\frac{1}{2}$. Nous montrons un résultat similaire dans l'annexe A pour le problème d'implantation avec capacités. Pour le problème d'implantation simple, nous avons montré comment une seule facette pouvait rendre nul l'écart de dualité.

I.2.4. RELAXATION DE BENDERS

Si on réécrit (PE) sous la forme

$$Z(PE) = \underset{\tilde{y} \in S}{\mathrm{Min}} \{\hat{\tilde{g}}\hat{\tilde{y}} + \underset{\tilde{x} \in Q}{\mathrm{Min}} (\hat{\tilde{f}}\hat{\tilde{x}} \mid \hat{\tilde{A}}\hat{\tilde{x}} \leq \tilde{d} - \hat{\tilde{B}}\hat{\tilde{y}})\},$$

on a aussi

$$Z(PE) = \underset{\tilde{y} \in S}{\mathrm{Min}} \{\hat{\tilde{g}}\hat{\tilde{y}} + \underset{u}{\mathrm{Max}}(u(-\hat{\tilde{d}}+\hat{\tilde{B}}\hat{\tilde{y}}) \mid u\hat{\tilde{A}}+\hat{\tilde{f}} \geq 0,\ u \geq 0)\}$$

$$= \underset{\tilde{y} \geq o,\ \text{entier}}{\text{Min}} \{z \mid z \geq \tilde{g}\tilde{y} + \underset{u \in R}{\text{Max}} \{-u(\tilde{d} - \tilde{B}\tilde{y}),\ \text{avec}$$

u direction d'infinitude de R telle que $u(\tilde{d}-\tilde{B}\tilde{y}) \geq 0$ ou u sommet de R}

où $R = \{u \mid u\tilde{A} + \tilde{f} \geq 0,\ u \geq 0\}$ est indépendant de $\tilde{y}$.

Si l'on a déterminé (a) un certain nombre de directions d'infinitude de R telles que $u(\tilde{d}-\tilde{B}\tilde{y}) \geq 0$, soit par exemple $\{u^k\}_{k \in K}$

(b) un certain nombre de sommets de R, soit $\{u^l\}_{l \in L}$,

le problème

$$\text{(BR)}\ \underset{y \geq o,\ \text{entier}}{\text{Min}} \quad \begin{array}{l} \{z \mid z \geq \tilde{g}\tilde{y} - u^l(\tilde{d}-\tilde{B}\tilde{y}),\ \forall l \in L\} \\ u^k(\tilde{d}-\tilde{B}\tilde{y}) \geq 0,\ \forall k \in K \end{array}$$

est une relaxation de Benders de (PE).

C'est une relaxation un peu spéciale, en ce sens que le domaine de (BR) est dans l'espace de $(z,\tilde{y})$ au lieu d'être dans l'espace de $(\tilde{x},\tilde{y})$. On peut admettre qu'il s'agit malgré tout d'une relaxation pour les raisons suivantes

(1) afin qu'un $\tilde{y}$ puisse appartenir au domaine de (PE), il faut qu'on puisse lui associer au moins un $\tilde{x}$ tel que $(\tilde{x},\tilde{y})$ vérifie $\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}\tilde{y} \leq \tilde{d}$. Ceci ne sera possible que si

$$u^k(\tilde{d}-\tilde{B}\tilde{y}) \geq 0,\ \forall k \in K \qquad (B_1)$$

(2) afin qu'à un $\tilde{y}$ on puisse associer un x tel que la solution $(\tilde{x},\tilde{y})$ soit réalisable et fournisse une valeur pour la fonction économique meitleure qu'une valeur z choisie à priori, il faut que

$$z^* \geq \tilde{g}\tilde{y} - u\,(\tilde{d}-\tilde{B}\tilde{y}),\ \forall l \in L \qquad (B_2)$$

Ces conditions sont nécessaires, mais non suffisantes, si on n'a pas dans u^K *toutes* les directions d'infinitude de R ou dans u^L *tous* ses points extrêmes. C'est en ce sens seulement que l'on peut parler de "relaxation".

Dans [4], Benders a proposé un algorithme itératif qui à chaque itération engendre soit un nouveau sommet u^l soit une nouvelle direction d'infinitude u^k de R, conduisant ainsi à une suite de problèmes relachés qui se rapprochent de plus en plus du problème PE. Dans [9] nous avons montré comment le partitionnement du vecteur $[\overset{*}{y}]$ en $\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}$ suivant que l'on choisit $\tilde{x}$ = x ou $\tilde{x}$ = y, conduit à des relaxations différentes et à des algorithmes de comportements différents pour le problème d'implantation simple. Le choix usuel de $\tilde{y}$ = y et $\tilde{x}$ = x conduit à ce que l'on peut appeler un *partitionnement direct*. Par contraste nous appelons *partitionnement inverse* celui qui pose $\tilde{y}$ = x et $\tilde{x}$ = y. Il est possible alors que pour certains problèmes, on puisse obtenir y entier sans l'imposer explicitement.

Dans [m], les conditions (B_1) et (B_2) ont été systématiquement exploitées pour des sondages, comme nous le verrons plus loin.

I.3. SONDAGES

Nous reprenons dans cette partie tout ce qui a trait à la structure des solutions entières réalisables, à l'enveloppe convexe des solutions entières réalisables, et à l'écart entre l'optimum entier et l'optimum des différents problèmes relachés. Nous passerons en revue en particulier les coupes fractionnaires de Gomory et de Gomory et Johnson, les inégalités préférées en variables bivalentes ou entières, les inégalités de Benders, et nous définissons d'une façon générale les contraintes additionnelles. Nous verrons ensuite comment certaines d'entre elles peuvent être utilisées dans des méthodes heuristiques qui tentent de mettre en évidence des solutions réalisables entières.

I.3.1. CONTRAINTES FILTRANTES

Etant donné un problème

$$PE : \text{Min } \{fx + gy \mid Ax + By \leq d,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \text{ entier}\}$$

on s'intéresse maintenant à des conditions du type

$$Gx + Hy \leq \alpha + \beta.z^{*} \qquad (A)$$

où $\beta = 0$ ou 1, où z^* est la meilleure valeur connue de la fonction économique pour une solution entière, et où (A) doit être réalisée pour qu'une solution (x,y) soit réalisable pour (PE) et/ou fournisse une valeur de la fonction économique meilleure que z^*. Une telle contrainte (A) est dite "filtrante" ([24] utilise une idée analogue) car elle ne "laisse passer" que des solutions qui a priori peuvent être intéressantes. Bien sûr il ne s'agit en général que de conditions nécessaires et non suffisantes, soit de réalisabilité, soit d'amélioration de la fonction économique.

I.3.1.1. Contraintes additionnelles valides et strictes.

Parmi les contraintes filtrantes, celles qui sont nécessaires pour que (x,y) soit solution réalisable de (PE) seront appellées ***contraintes additionnelles***. On les appelle aussi "valides" dans la mesure où on peut les ajouter à n'importe quelle relaxation de (PE) et obtenir une autre relaxation "valide". Elles sont strictes si elles éliminent certains points (non entiers, bien entendu) de la relaxation utilisée (bien souvent la relaxation en continu). Dans II, nous étudierons comment on peut engendrer de telles contraintes ***à partir des contraintes initiales*** du problème. Ceci est intéressant lorsque le problème a une structure particulière dont on peut tenir compte. Pour des problèmes sans structure au contraire on a souvent intérêt à les engendrer à partir d'un tableau simplicial optimal de (PC) (I.3.1.2) ou d'un problème de Benders (I.2.4, et I.3.1.3).

1.3.1.2. Contraintes de Gomory et de Gomory-Johnson. [15, 16]

Lorsque l'on résoud un problème relaché de (PE), soit par exemple (PC), et que la solution de (PC) a des composantes fractionnaires alors qu'elles auraient dû être entières, une analyse détaillée des contraintes correspondantes relatives à cette base optimale permet d'écrire des inégalités qui sont des conditions nécessaires d'intégralité de ces composantes. Ces conditions n'étant pas satisfaites par la solution optimale de (PC), on peut les ajouter au tableau optimal de (PC), on obtient ainsi un problème de type (PCE) que l'on résoud à nouveau. On peut répéter le processus tant que la solution optimale de (PCE) est non entière. Sous certaines conditions, le procédé doit converger en un nombre fini d'itérations. En fait, ce nombre fini peut être très grand et les erreurs d'arrondi s'accumulant lors des calculs peuvent conduire à des solutions erronées si l'on ne prend pas suffisamment de précautions lors du traitement numérique. Nous avons mis au point un système interactif en APL qui procède de la façon suivante :

I) Résoudre (PC) à l'aide de la méthode simpliciale.

II) Soit $I = \{i \mid x_i$ variable de base est fractionnaire dans la solution optimale de (PC)$\}$.

Si $I = \emptyset$, fin.

Si $I \neq \emptyset$, aller en III.

III) Engendrer une coupe de Gomory-Johnson pour chaque ligne $i \in I$. Ajouter toutes ces coupes au tableau simplicial optimal qui devient primal-non réalisable mais reste dual-réalisable, c'est-à-dire optimal. On obtient un problème (PCE).

IV) Résoudre (PCE) par la méthode dual-simpliciale. Eliminer de (PCE) toutes les coupes de Gomory-Johnson dont les variables d'écart appartiennent à la base optimale de (PCE). Aller en II.

Cet algorithme suit l'ordre habituel des opérations correspondant à l'addition de coupes de Gomory. Toutefois souvent dans l'utilisation de coupes de Gomory on n'ajoute qu'*une* coupe à la fois, soit celle correspondant à la variable de base x_i dont la partie fractionnaire $x_i - \lfloor x_i \rfloor$ est la plus grande (voir Gomory [15]) soit celle qui est la plus éloignée d'un entier (celle pour laquelle $\mathrm{Min}(x_i - \lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil - x_i)$ est maximum).

Nous avons observé que l'adjonction *simultanée* de *toutes* les coupes possibles de Gomory-Johnson, une par variable de base non entière, est beaucoup plus efficace. La fonction économique augmente beaucoup plus rapidement. Dans [r], nous montrons par exemple comment le problème (28 × 35) de [24] réputé comme étant **relativement difficile** peut être résolu uniquement en ajoutant ces inégalités (6 en tout) et en réoptimisant. D'autres problèmes par contre se prètent mal à cette approche et le déroulement des itérations montre le comportement suivant (habituel, en somme) :

Remarque : comme il a été mentionné précédemment, cette méthode itérative se heurte à plusieurs problèmes d'ordre numérique. Le premier tient au grand nombre d'itérations de la méthode simpliciale qui accumule donc les erreurs d'arrondi. Il est nécessaire de réinverser la matrice de base de façon régulière, ce qui oblige à exprimer les inégalités de Gomory -Johnson en fonction des variables d'origine. Ceci en soi est déjà susceptible d'amener des erreurs. Lors de la génération des contraintes elles-mêmes, on est obligé d'introduire des tolérances, faute de quoi des contraintes (trop restrictives) risquent d'éliminer non seulement des solutions non entières, mais également des solutions réalisables entières. Ceci nous est arrivé au début des expériences numériques : pour le problème (12 × 44) de [24] par exemple, que nous résolvons maintenant uniquement grâce à cette méthode, les coupes (pas assez précises) éliminaient la solution optimale entière ! Ceci est un aspect d'habitude passé sous silence dans la littérature, mais qui nous parait important en pratique. Nous avons donc fait preuve d'une grande prudence en général dans les sondages et préférons, si besoin est, utiliser des contraintes plus faibles mais plus sûres.

I.3.1.3. Conditions de Benders.

Dans I.2.4, nous avons décrit la relaxation de Benders. La convergence de la méthode de Benders (qui oblige en particulier à résoudre un problème en variables entières à chaque itération) est en général bonne initialement, mais devient très lente lorsqu'on se rapproche de l'optimum. Dans [24], il fut proposé de remplacer cette méthode itérative par une méthode énumérative où les "conditions de Benders" B_1 et B_2 sont exploitées (utilisées comme "filtres"). En fait tout problème relaché (PCE) dans lequel on fixe les valeurs des variables entières y peut fournir des conditions de Benders :

- de type 1 si le problème est réalisable

et

- de type 2 si le problème est irréalisable (si son domaine est vide).

L'idée est simplement la suivante. Si (PCE) est un problème relaché, et si on fixe y dans (PCE),

(1) si (PCE) a une solution optimale finie, la valeur de la fonction économique dans le tableau simplicial optimal est donnée par une expression de la forme

$$z = \overset{o}{z} + d^{N_1} x_{N_1} + d^{N_2} y_{N_2}$$

où (y_{N_2}, x_{N_1}) sont les variables hors-base et où (d^{N_1}, d^{N_2}) est le vecteur critère de candidature. y étant fixé, soit par exemple

$$y = \overset{o}{y},$$

d^{N_2} est de signe quelconque, mais d^{N_1} est positif ou nul (on minimise), donc pour toute solution réalisable de (PE) :

$$z = \overset{o}{z} + d^{N_1} x_{N_1} + d^{N_2} y_{N_2} \geq \overset{o}{z} + d^{N_2} y_{N_2}$$

((PCE) est une relaxation de (PE) telle que sur le domaine de (PE), la fonction économique de (PCE) est égale à celle de **PE, et en outre**

$$d^{N_1} \geq 0$$

et

$$x_{N_1} \geq 0 \qquad \text{si } (x,y) \text{ est réalisable}).$$

On devra avoir en particulier

$$\boxed{z^* \geq \overset{o}{z} + d^{N_2} y_{N_2}} \qquad (B_Z)$$

faute de quoi y ne pourrait fournir une valeur de z meilleure que z*, la meilleure valeur connue pour une solution réalisable entière.

(2) Si (PCE) n'a pas de solution réalisable, le tableau simplicial final contient une ligne ayant un second membre négatif et **n'ayant aucun pivot possible négatif**, c'est-à-dire que

$$T_i^{N_1} x_{N_1} + T_i^{N_2} y_{N_2} + x_i = t_i, \; i \in B$$

avec $t_i < 0$ et $T_i^{N_1} \geq 0$, puisque y est fixé.

Or cette équation est valide (elle doit être vérifiée par toute solution réalisable entière, puisqu'elle est une combinaison linéaire des contraintes de (PCE)) et donc il faut, pour que (x,y) soit réalisable, que

$$T_i^{N_1} x_{N_1} + T_i^{N_2} y_{N_2} + x_i = t_i$$

ou puisque $\quad T_i^{N_1} x_{N_1} + x_i \geq 0$

$$\boxed{T_i^{N_2} y_{N_2} \leq t_i} \qquad (B_1)$$

Il est bien sûr très important de remarquer que

(a) ces conditions ne contiennent plus que des y_i comme variables

(b) elles sont moins fortes que les équations d'où on les a tirées, puisqu'on en a éliminé les termes en x.

Nous allons montrer comment ces inégalités, ne contenant plus que des variable entières (ou bivalentes, suivant les cas), peuvent être exploitées pour obtenir des informations sur les solutions réalisables. (Voir I.3.1.4 et 1.5).

Dans [m], nous avons montré comment la résolution systématique de problèmes (PCE) avec des valeurs très différentes pour les y, permet de tirer des informations importantes sur les solutions entières avant même de commencer soit une énumération soit une résolution systématique de (PE). Une énumération implicite par exemple tendraità considérer des vecteurs y voisins et à engendrer des conditions de Benders similaires. Il est donc intéressant à priori d'"explorer" des points éloignés dans l'ensemble des points possibles pour y. On n'aurait obtenu de telles informations que beaucoup plus tard lors de l'énumération.

I.3.1.4. Contraintes logiques en variables bivalentes.

Dans [f] par exemple, ou dans [24], ou dans [1] des méthodes différentes ont été proposées pour tirer de contraintes additionnelles (ou même de contraintes initiales si elles s'y prêtent) ne portant que sur les variables bivalentes des conditions logiques, c'est-à-dire des conditions dont les coefficients ne sont que des 0, des 1 ou des -1.

Dans [w], nous résumons la génération et les utilisations possibles de ces contraintes. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux conditions du type

$$\sum_{i\in P} \tilde{y}_i \geq 1$$

où $\tilde{y}_i$ est soit y_i soit $1-y_i$. La cardinalité de P ($|P|$) sera appelée le *degré* de l'inégalité et l'inégalité sera dite ***préférée***.

L'ensemble P est un ensemble de *variables préférées* : l'une d'entre elles au moins doit valoir 1 dans toute solution réalisable.

Nous avons mis au point un système de fonctions qui engendrent systématiquement toutes les inégalités préférées de degré minimum d'un système d'inégalités en variables bivalentes (ou les k premières s'il y en a trop)

I.3.1.5. Contraintes logiques en variables entières.

Dans [p], nous avons généralisé le concept d'inégalités préférées aux variables entières comprises dans un certain intervalle. L'interprétation en est alors qu'au moins l'une des variables en question doit prendre une valeur supérieure (resp. inférieure) à sa borne inférieure l_i (resp. supérieure s_i) suivant qu'il s'agit de y_i-l_i ou de s_i-y_i. Bien que moins forte que dans le cas bivalent, l'information est précieuse lorsqu'il s'agit de trouver des solutions réalisables.

I.3.2. DETERMINATION DE SOLUTIONS REALISABLES

Dans [g], nous avons proposé plusieurs méthodes heuristiques de recherche d'une solution réalisable d'un système d'inégalités en variables bivalentes. La première, liée à la recherche du nombre chromatique d'un graphe associé à un système d'inégalités préférées de degré 2, peut être utilisée avant les deux autres et leur fournira (en cas de succès) un point de départ.

Dans [v], nous déterminons des solutions réalisables du problème d'implantation avec charges fixes soit à partir d'un problème de Lagrange, soit à partir d'une solution réalisable du dual de (PCE). Dans ce dernier cas on se base sur les fonctions de gains (variables duales associées aux variables entières) pour fixer à 0 ou à 1 les variables dont les fonctions de gains sont non nulles, et on cherche ensuite de façon heuristique à déterminer les valeurs des variables dont les fonctions de gains sont nulles.
Nous sommes en train de mettre au point une méthode heuristique utilisant les résultats des mêmes problèmes, mais basée sur les déterminations d'état (voir [29] pour les problèmes à trois niveaux).

Les solutions réalisables fournissant des bornes supérieures z^* sont importantes dans la mesure où elles donnent dès qu'elles sont connues des estimations de l'écart de dualité et de l'écart relatif(1). Dans [v] par exemple le problème de Lagrange initial fournit bien souvent une très bonne borne inférieure z_{RL} et une très bonne borne supérieure z^*. On sait donc dès le début si le problème sera difficile à résoudre.

Dans [n], nous avons étudié un problème particulier d'ordonnancement d'opérations de maintenance. Le programme mixte correspondant ne pouvait pas être résolu facilement par des programmes classiques. Nous avons mis au point une méthode heuristique basée d'une part sur une relaxation spéciale, d'autre part sur une énumération partielle, qui nous a permis de mettre en évidence de bonnes solutions réalisables. L'ensemble permet de se faire une idée de la valeur de la solution obtenue grâce à l'écart relatif.

L'utilisation, conjointement, de bonnes relaxations et de bonnes heuristiques pour l'obtention de solutions réalisables est pratiquement très intéressante, et nous avons obtenu des résultats très encourageants à la fois pour les problèmes bivalents mixtes (voir [m], [r] par exemple) et pour les problèmes d'implantation avec capacités ([q], [u], [v]).

(1) On peut noter également que les conditions de Benders de type 1 ne sont utilisables que lorsqu'une valeur de z^* est connue.

ANNEXE A

ÉCARTS DE DUALITÉ POUR DES PROBLÈMES D'IMPLANTATION AVEC CAPACITÉS

Considérons le problème suivant

$$(\text{CPLP})^{*} \quad \text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} f.y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}.x_{ij}$$

$$\begin{cases} \forall i : & \sum_{j} x_{ij} \leq a.\, y_i \\ \forall j : & \sum_{i} x_{ij} \geq b \\ & y_i = o \text{ ou } 1 \\ & x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

et sa relaxation en continu (PC). L'interprétation de (CPLP) est la suivante : on expédie des quantités x_{ij} d'usines $i = 1,\dots,m$ vers les clients $j = 1,\dots,m$. La demande de tous les clients est la même soit b, et toutes les usines ont la même production a $(a > b)$. Si l'usine i est ouverte $(y_i = 1)$, on encourt une charge fixe f, et on peut expédier à partir de i au plus la quantité a, tandis que si l'usine i est fermée $(y_i = 0)$, on n'a pas de charge fixe à payer, mais on ne peut rien expédier à partir de l'usine i. Soit k un nombre entier.

---

* Capacited Plant Location Problem

Si $(k-1)\, a < mb \le ka$, on ne peut satisfaire la demande des clients que si au moins k usines sont ouvertes. On aura donc l'optimum en entier égal à $Z(PE) = k.f + m.b$, dans le cas particulier où la matrice des coûts unitaires de transport c_{ij} a la structure suivante

$$\begin{bmatrix} \infty & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \infty & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & \infty \end{bmatrix} .$$

Pour (PC) par contre, supposons que la solution optimale corresponde à

$$x = \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & & x_{1m} \\ x_{21} & \ddots & & x_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{avec } x_{ii} = 0 \quad \forall i = 1,\dots,m,$$

alors

$$\begin{bmatrix} \Sigma_j \frac{x_{1j}}{a} \\ \vdots \\ \Sigma_j \frac{x_{mj}}{a} \end{bmatrix}$$

vérifie bien

$$\sum_j x_{ij} \le a \quad y_i$$

et rend y_i (qui coûte $f\, y_i$) aussi petit que possible étant donné x. On a alors

$$Z(PC) = \sum_j \frac{x_{1j}}{a} .f + \sum_j \frac{x_{2j}}{a} .f + \ldots + \sum_j \frac{x_{mj}}{a} .f + \sum_i x_{i1} + \ldots + \sum_i x_{im}$$

or $\sum_i x_{ij} = b$ et $\sum_i \sum_j x_{ij} = m.b$, donc $Z(PC) = \frac{mb}{a} .f + m.b$, d'où

$$\begin{aligned} Z(PE) - Z(PC) &= mf(\frac{k}{m} - \frac{b}{a}) \\ &= mf.\frac{ka-mb}{am} \\ &< mf \frac{a}{am} \text{ (puisque } (k-1)\ a < mb) \\ &< f \cdot \end{aligned}$$

En outre

$$\frac{Z(PE)-Z(PC)}{Z(PE)} = \frac{mf \frac{ka-mb}{am}}{mf(\frac{k}{m} + \frac{b}{f})}$$

$$\boxed{\frac{Z(PE)-Z(PC)}{Z(PE)} = \frac{(ka-mb)\ f}{a(kf+mb)}}$$

Supposons que cet écart relatif soit égal à α, alors

$$\frac{(ka-mb)\ f}{a(kf+mb)} = \alpha$$

et $(ka-mb - a\alpha k)f = ab\alpha m$

donc $ka-mb-a\alpha k$ doit être positif :

$$\boxed{\alpha < \frac{ka-mb}{ka}}$$

Comme on a supposé initialement que

$$(k-1)a < mb < ka$$

soit $ka-mb < a$

et $\frac{ka-mb}{ka} < \frac{1}{k}$,

$$\boxed{\alpha < \frac{1}{k}}$$

donc *l'écart relatif est inférieur à* $\frac{1}{k}$.

Etant donné a et b, il suffit de choisir

$$f = \frac{ab\alpha m}{ka-mb-ka\alpha}$$

pour que l'écart relatif soit égal à $\alpha < \frac{1}{k}$.

Etant donné k, m et b, pour créer un grand écart relatif, on prendra

$$a = \begin{cases} \left\lfloor \frac{mb}{k-1} \right\rfloor & \text{si } \frac{mb}{k-1} \text{ n'est pas entier} \\ \frac{mb}{k-1} - 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

On calculera ensuite $1-\frac{mb}{ka}$ et on prendra α grand, plus petit toutefois que $1-\frac{mb}{ka}$, et on posera

$$f = \frac{ab\alpha m}{ka-mb-a\alpha k}$$

Le problème dual de (PC) s'écrit

$$\text{Max } Z_D = \sum_j b.v_j - \sum_i t_i$$

$$\begin{cases} u_i+w_{ij}-v_j+c_{ij} \geq 0 & \forall i,j \\ t_i-u_i a-\sum_j b.w_{ij}+f_i \geq 0 & \forall i \\ t_i,\ u_i,\ v_j,\ w_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

La solution

$$v_j = 1 + \frac{f}{a},\ u_i = \frac{f}{a},\ w_{ij} = 0,\ t_i = 0$$

est réalisable :

$$u_i + w_{ij} - v_j + c_{ij} \geq 0 \ ?$$

$$\begin{cases} \text{si } i = j : \frac{f}{a} + \infty - \infty - \frac{f}{a} + \quad = \quad -1 \geq 0 \\ \text{si } i \neq j : \frac{f}{a} + 0 - 1 - \frac{f}{a} + 1 = 0 \geq 0 \end{cases}$$

$$- u_i.a + t_i - \sum_j b.w_{ij} + f_i \geq 0 \ ?$$

$$- \frac{f}{a}\, a + 0 - 0 + f = -f + f = 0 \geq 0$$

$$\text{et } Z_D = \sum_j v_j.b - \sum_i t_i = m\ (1 + \frac{f}{a}).b = mb + m\,\frac{b}{a}\, f$$

$$= Z(PC).$$

Cette solution duale est donc optimale.

Si on ajoute à (PC) la condition

$$\sum_i y_i \geq k$$

on obtient un problème relaché en continu-entier ; on doit ajouter une variable duale, soit ρ, telle que

$$\forall i : \rho \leq - u_i.a - b \sum_j w_{ij} + t_i + f$$

et on doit ajouter le terme $\rho.k$ à Z_D, alors la plus grande valeur possible de ρ est :

$$\rho_{max} = \underset{i}{\mathrm{Min}}\ (f + t_i - b.\sum_i w_{ij} - u_i.a)$$

$$= \underset{i}{\mathrm{Min}}\ (f - u_i a)$$

si on garde $w_{ij} = t_i = 0$. Pour (PC), $u_i = \frac{f}{a}$, donc $\rho_{max} = 0$.

Mais $$v_j \leq u_i + w_{ij} + c_{ij}$$

avec $$w_{ij} = 0,\ v_j \leq u_i+1 \qquad \text{pour } i \neq j.$$

Si on diminue u_i de ε et si on diminue v_j de ε, $\varepsilon > 0$, alors

$$Z(PCE) - Z_D \geq -\sum_j b.\varepsilon + \rho_{max}.k$$

$$\geq -\ \varepsilon.m.b + k(a\varepsilon)$$

$$\geq -\ mb\varepsilon + ka\varepsilon$$

$$\geq\ (ka-mb)\varepsilon.$$

La plus grande valeur possible de ε est u_i, c'est-à-dire $\frac{f}{a}$, de telle sorte que

$$Z(PCE) - Z_D \geq (ka-mb)\ \frac{f}{a} = \frac{(ka-mb)}{a}\ .\ f$$

d'où $$Z(PCE) \geq (mb + \frac{mb}{a}\ f) + kf - \frac{mb}{a}\ .f$$

$$\geq\ mb + kf = Z(PE).$$

Comme $Z(PCE) \leq Z(PE)$, on aura donc

$$Z(PCE) = Z(PE)$$

et la coupe unique

$$\sum_i y_i \geq k$$

(qui il est vrai impose à au moins k des y_i d'être égaux à 1 dans une solution *entière*) réduit l'écart de dualité à 0.

Exemple.

Prenons $m = 3$, $k = 2$, $b = 34$.

$\frac{mb}{k-1} = \frac{3 \times 34}{1} = 102$ est entier.

Choisissons $a = \frac{mb}{k-1} - 1 = 101$.

$$1 - \frac{mb}{ka} = 1 - \frac{3 \times 34}{2 \times 101} = \frac{101 \times 2 - 3 \times 34}{202} = \frac{202 - 102}{202} = \frac{100}{202}$$

Choisissons $\alpha < \frac{100}{202}$, par exemple $\alpha = \frac{99}{202}$.

Soit alors

$$f = \frac{ab\alpha m}{ka-mb-a\alpha k} = \frac{\cancel{101} \times 34 \times 99 \times 3}{\underset{2}{\cancel{202}}(2 \times 101 - 3 \times 34 - 101 \times \frac{99}{202} \times 2)}$$

$$= \frac{34 \times 99 \times 3}{2(202 - 102 - 99)} = \frac{34 \times 3 \times 99}{2} = 5049$$

Alors $Z(PE) = kf + mb = 2 \times 5049 + 3 \times 34 = 10200$

$$Z(PC) = m\frac{b}{a} f + mb = \frac{3 \times 34 \times 5049}{101} + 3 \times 34 = 5200.99$$

$$\frac{Z(PE)-Z(PC)}{Z(PE)} = 0.490099 = \alpha = \frac{99}{202}$$

donc l'écart relatif est de 49 % (très proche de $\frac{1}{2}$).

CHAPITRE II

RESULTATS THEORIQUES

II.1 INTRODUCTION

Une approche de la programmation entière qui a été utilisée dès le début, c'est-à-dire dès la fin des années 50, a consisté à déduire des contraintes du problème initial des inégalités supplémentaires (contraintes additionnelles) satisfaites par toutes les solutions réalisables entières du problème (donc "valides"). Les différentes contraintes de Gomory sont de ce type ([16]). Inversement, on peut se poser la question de savoir sous quelles conditions une direction de contrainte est une *direction de contrainte additionnelle* valide en entiers, et quelles valeurs le second membre peut prendre de telle sorte que la contrainte additionnelle soit justement *valide*. Fréhel ([12]) a répondu à la question dans le cas linéaire en généralisant en quelque sorte le lemme de Farkas. Dans [h], nous avons transposé le résultat au cas pseudo-convexe - quasi-concave non linéaire. Dans ce chapitre, nous donnerons une version différente de ce résultat, toujours dans le cas pseudoconcave/quasiconvexe, mais en faisant des hypothèses différentes. On peut utiliser ces différents résultats pour engendrer de façon systématique des contraintes additionnelles. Contrairement à Fréhel qui engendre des contraintes additionnelles à partir des diviseurs premiers du déterminant de la base optimale du programme en continu, nous les engendrerons systématiquement à partir du déterminant lui-même. Certains résultats de Fréhel ne seront plus valables (par exemple si le déterminant n'est pas premier), mais nous nous efforcerons de préciser les résultats au maximum et dans certains cas nous pourrons même calculer la valeur que *devra* prendre le second membre pour que la contrainte additionnelle soit *valide et stricte*. Cette technique sera ensuite spécialisée au cas de la *programmation bivalente*, et au *problème d'implantation* avec ou sans capacités.

Un problème annexe d'un grand intérêt théorique est celui de la reconnaissance d'une contrainte additionnelle comme *facette* de l'enveloppe convexe des points entiers réalisables. Nous avons obtenu certains résultats pour le problème d'implantation sans capacités.

Les sommets fractionnaires (non entiers) du polyèdre continu correspondent à des bases réalisables et nous montrerons comment déduire de certains points fractionnaires des contraintes additionnelles valides et strictes. Ces points fractionnaires particuliers seront regroupés par "familles" et dans une même famille un sommet "père" sera un sommet tel que la contrainte additionnelle qui lui correspond éliminera *tous* les sommets fractionnaires de cette famille. Dans certains cas nous pourrons montrer que la contrainte additionnelle correspondant au sommet "père" est une facette. Elle fournira donc une information très importante en ce qui concerne l'enveloppe convexe des points entiers réalisables.

Nous montrerons enfin comment certains problèmes d'implantation simple ont nécessairement une solution en continu qui est fractionnaire et comment l'adjonction de la facette correspondante élimine l'écart de dualité, c'est-à-dire comment elle rend entière la solution optimale.

II.2 CONTRAINTES ADDITIONNELLES VALIDES ET/OU STRICTES

Théorème II.2.1. (Théorème de Farkas généralisé).

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $K = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \overset{I}{\leq} b\}$, $A(n \times n)$, $\bar{x} \in K$.

Si

1° A *est régulière et à coefficients rationnels*

2° $\nabla f(\bar{x})$ *existe et est à coefficients rationnels*

3° f *est quasi-convexe*

alors

si $x \in K \Rightarrow f(x) \leq f(\bar{x})$

il existe $u \in (Q^n)^*$: $\begin{cases} u^I \geq 0 \\ \nabla f(\bar{x}) = u.A \end{cases}$

Démonstration.

a) u existe :

La matrice A étant régulière, il existe une solution unique au système linéaire

$$\nabla f(\bar{x}) = u.A$$

b) u^I est positif :

Nous le démontrerons par l'absurde.
Supposons que $u^I \not\geq 0$, et montrons que $\bar{x}$ ne peut pas être solution optimale de

$$\text{Max } \{f(x) \mid x \in K\}$$

Soit q le dénominateur commun des éléments de A et soit

$$C = q.A \quad \left\{\Rightarrow A = \frac{1}{q} C\right\}.$$

q est un entier positif. Les éléments de C sont donc entiers, et il existe une matrice D entière telle que

$$C^{-1} = \frac{1}{|\det C|} \cdot D, \text{ ou } D = |\det C| \cdot C^{-1}$$

Ainsi

$$A^{-1} = \frac{q}{|\det C|} \cdot D = q \cdot \frac{1}{q^n \cdot |\det A|} \cdot D = \frac{D}{q^{n-1} \cdot \Delta}$$

si nous posons $\Delta = |\det A|$.

Supposons que $u^I \not\geq 0$, par exemple supposons que $1 \in I$ et que

$$u^1 < 0 \,.$$

Soit y l'unique solution du système régulier

$$\begin{cases} A_1 . y = -q^{n-1} . \Delta \\ A_j . y = 0, \ \forall j \neq 1 \end{cases}$$

alors

$$y = A^{-1} \begin{bmatrix} -q^{n-1} . \Delta \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{q^{n-1} . \Delta} D \begin{bmatrix} -q^{n-1} . \Delta \\ 0 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -D^1$$

est un vecteur entier. Soit $x = \bar{x} + y$, x doit être entier. D'autre part :

$$\begin{aligned} A . (x-\bar{x}) &= A_I . y \\ &= \begin{bmatrix} -q^{n-1} . \Delta \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \ (q > 0, \ \Delta > 0) \end{aligned}$$

$$\text{et } Ax^I \leqq \bar{A}x^I \leq b$$

donc $x \in K$.

Enfin $\nabla f(\bar{x}) \cdot (x-\bar{x}) = u \cdot A \cdot (x - \bar{x})$ (puisque $\nabla f(\bar{x}) = uA$)

$$= uAy$$

$$= u \begin{bmatrix} -q^{n-1} \cdot \Delta \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -u^1 \cdot q^{n-1} \cdot \Delta$$

$$> 0 \text{ (car } -u^1 > 0,\ q > 0,\ \Delta > 0)$$

et donc $f(x) > f(\bar{x})$ (car f est quasi convexe en $\bar{x}$). Nous obtenons une contradiction. Il faut donc que :

$$u^I \geq 0 .$$

c) $u \in (Q^n)^*$.

$$\nabla f(\bar{x}) = u \cdot A \Rightarrow u = \nabla f(\bar{x}) \cdot A^{-1}$$

et si $\nabla f(\bar{x})$ et A sont des matrices rationnelles, u est aussi à coefficients rationnels.

□

Remarque 1. Si $\bar{I} = \emptyset$ et si f est linéaire, on retrouve le résultat de Fréhel [12].

Remarque 2. Si $\bar{I} \neq \emptyset$, on n'est pas obligé de remplacer les contraintes en égalité par des paires d'inégalités de sens opposés. Ceci est important dans la mesure où le système de contraintes doit être régulier. Une remarque similaire avait déjà été faite dans [c], p. 239.

Corollaire II.2.1.

Soit $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $K = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid a(x) \overset{I}{\leq} 0\}$, $\bar{x} \in K$.

Si

1° $\nabla a(\bar{x})$ *existe et est inversible et à coefficients rationnels*

2° a_I *est pseudo-concave en* $\bar{x}$ *et* $a_{\bar{I}}$ *est linéaire*

3° f *est quasi-convexe en* $\bar{x}$

alors

si $x \in K \Rightarrow f(x) \leq f(\bar{x})$

il existe

$u \in (Q^n)^* : u \overset{I}{\geq} 0$ et $\nabla f(\bar{x}) = u \cdot \nabla a(\bar{x})$

Il suffit de remarquer que si a_I est pseudo-concave en $\bar{x}$,
$\nabla a_I(\bar{x}).(x-\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow a_I(x) - a_I(\bar{x}) \leq 0$
et de remplacer A par $\nabla a(\bar{x})$ dans le théorème précédent.

□

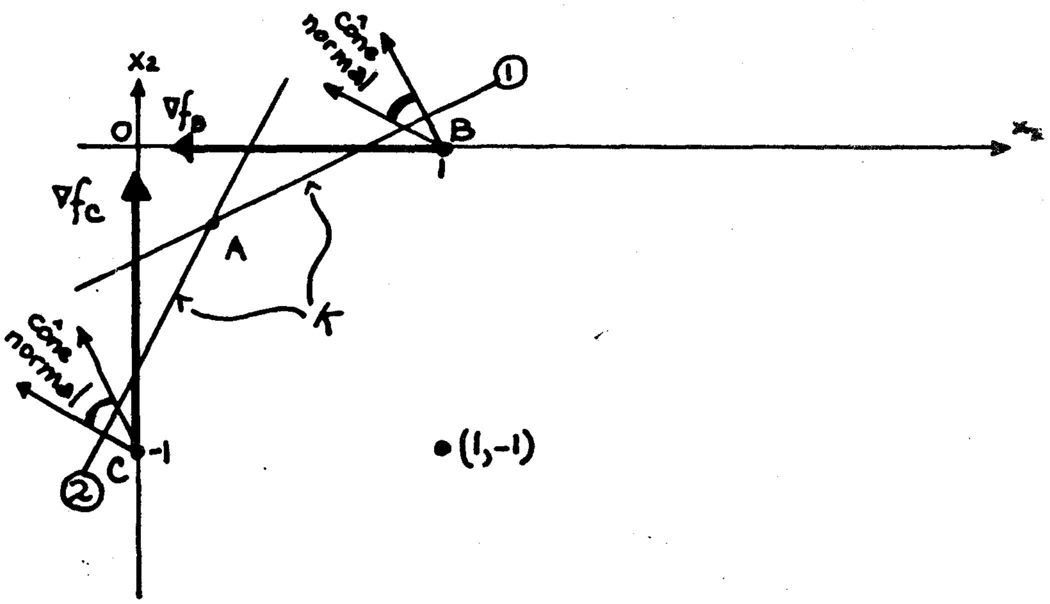
Remarque. * Il se trouve que si f est concave et non quasi- convexe, le résultat du théorème peut se révéler faux comme le montre l'exemple suivant.

Il s'agit de minimiser la distance à l'origine sur le cône de sommet A et d'équation

$$\frac{1}{2} x_1 - x_2 \geq \frac{3}{8} \qquad (1)$$

$$2x_1 - x_2 \geq \frac{3}{4} \qquad (2)$$

où A a pour coordonnées $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$. A est solution optimale en continu. Les deux points B(1,0) et C(0,-1) sont solutions optimales en entier. Le gradient de f en A a pour direction AO ; le gradient en B est porté par BO, celui en C par CO, et aucun des deux n'appartient au cône des vecteurs normaux à K et de sommet B ou C.



* Il convient de remarquer également que comme il n'y a pas de condition d'orthogonalité, les gradients de *toutes* les contraintes peuvent être nécessaires pour engendrer le gradient de la fonction f, et pas seulement ceux des contraintes actives en $\bar{x}$. Si on minimise $x_1 + x_2$ dans le cône précédent, il n'y a pas de contraintes actives en B ou en C.

<u>*Corollaire II.2.2.*</u>

1° *Soit* A *une matrice carrée inversible d'ordre* n *à coefficients rationnels. Soit* f *une matrice ligne à coefficients rationnels. Soit* $\bar{x}$ *un vecteur entier vérifiant*

$$Ax \overset{I}{\le} b,$$

b *rationnel. Alors si*

$$\left.\begin{array}{l} Ax \overset{I}{\le} b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{array}\right\} \Rightarrow f \cdot x \le f \cdot \bar{x}$$

il existe

$$u \in (Q^n)^* : \begin{cases} u \overset{I}{\geq} 0 \\ f = uA. \end{cases}$$

2° *Si* A *et* f *sont des matrices entières, alors*

$$\exists t \in \mathbb{Z}^n : t \overset{I}{\geq} 0$$
$$f = \frac{t}{\Delta} A$$

où $\Delta = |\det A|$

et en ce cas $tA = 0 \pmod{\Delta}$.

Remarque. La condition nécessaire

$$\begin{cases} u \overset{I}{\geq} 0 \\ f = uA \end{cases}$$

implique en particulier que le sommet du cône, sous les hypothèses faites, est solution optimale en continu.

Corollaire II.2.3.

1° *Soit* A *une matrice carrée inversible d'ordre* n *à coefficients rationnels. Soit* f *une matrice ligne à coefficients rationnels. Alors si*

$$\left. \begin{array}{l} Ax \overset{I}{\leq} b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} \Longrightarrow fx \leq \alpha$$

il existe

$$u \in (Q^n)^* : \begin{cases} u \overset{I}{\geq} 0 \\ f = uA \end{cases}$$

2° *Si* A *et* f *sont des matrices entières, alors*

$$\exists t \in \mathbb{Z}^n : \begin{cases} t \overset{I}{\geq} 0 \\ f = \frac{t}{\Delta} A \end{cases}$$

où $\Delta = |\det A|$, *et alors* $tA = 0 \ (\mathrm{mod}.\Delta)$.

Remarque. Il est bien évident que la condition

$$\left.\begin{array}{l} Ax \overset{I}{\leq} b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{array}\right\} \Rightarrow fx \leq \alpha$$

n'a de sens que si α est un nombre réel tel que

$$\alpha \geq \mathrm{Max}\ \{f \,.\, x \mid x \in \mathbb{Z}^n,\ Ax \overset{I}{\leq} b\}.$$

L'important ici est de voir que la condition porte sur f et non sur $f\bar{x}$ ou α, comme dans le théorème II.2.1 ou le corollaire II.2.1 Ceci nous servira à étudier des *directions* de contraintes additionnelles. Ce corollaire ne nous renseigne malheureusement pas sur la valeur de α.

Démonstration.

Si $f = u \, . \, A$, alors $u = f \, . \, A^{-1}$. Si A est une matrice entière, il existe une matrice entière M telle que

$$A^{-1} = \frac{1}{|\det A|} \, . \, M = \frac{1}{\Delta} M,$$

et

$$u = f \, . \, \frac{1}{\Delta} M = \frac{1}{\Delta} (f \, . \, M).$$

Soit $t = f \, . \, M$, alors t est un vecteur entier, et puisque $u \geq 0$, $t \geq 0$. D'autre part, $f = \frac{t}{\Delta} A$ est un vecteur entier et tA doit appartenir à $\Delta \, . \, \mathbb{Z}^n$, i.e.

$$tA = 0 \pmod{\Delta}$$

□

On ne considérera plus maintenant que A et b entiers.

Définition II.2.1.

On dira que $fx \leq \alpha$ *est une* *contrainte additionnelle* *par rapport à* (A,b,I) *(ou une contrainte additionnelle s'il n'y a pas ambiguité) si*

(1) $\{Ax \overset{I}{\leq} b, \; x \in Z^n\} \Rightarrow fx \leq \alpha$ *et* (2) $f \in Z^n$

2° *par rapport à* (A,b) *si*

(1) $\{Ax \leq b, \; x \in Z^n\} \Rightarrow fx \leq \alpha$ *et* (2) $f \in \mathbb{Z}^n$

Définition II.2.2.

Une contrainte additionnelle $f \cdot x \leq \alpha$ *est* <u>*stricte*</u> *s'il existe un vecteur* x *réel tel que*

$$Ax \overset{I}{\leq} b \quad (\text{resp. } Ax \leq b)$$

et

$$fx > \alpha$$

Cette terminologie est celle de Fréhel dans [12].

On ne considère plus dans ce qui suit par conséquent, que des matrices A, b, f à coefficients entiers. Fréhel montre que la contrainte additionnelle

$$uAx \leq \lfloor ub \rfloor \qquad \text{où} \qquad u = \frac{t}{\Delta},\ t \in \mathbb{N}^n,\ tA \equiv 0 \ (\text{mod. } \Delta)$$

est stricte si et seulement si $\lfloor ub \rfloor \neq ub$. On peut montrer un résultat très légèrement plus général :

Théorème II.2.2.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une contrainte additionnelle $fx \leq \alpha$ *par rapport à* (A,b,I) *soit stricte est que* $f \cdot A^{-1} \cdot b > \alpha$.

<u>Démonstration.</u>

1° Condition suffisante :

A étant inversible, il existe un $\bar{x}$ unique vérifiant $A\bar{x} = b$, c'est-à-dire

$$f \,.\, A^{-1} \,.\, b > \alpha \Longleftrightarrow f \,.\, \bar{x} > \alpha,$$

donc $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \quad A \,.\, \bar{x} \overset{I}{\leq} b$

$$f \,.\, \bar{x} > \alpha$$

et la contrainte additionnelle est stricte.

2° Contrainte nécessaire :

Les cônes $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \overset{I}{\lesssim} b\}$ et $C_2 = \{x \mid Ax \overset{I}{\lesssim} 0\}$ sont tels que

$$C_1 = C_2 + A^{-1}b = C_2 + \bar{x}$$

avec $\bar{x} = A^{-1}b$

ou $\forall x \in \{x : Ax \overset{I}{\lesssim} b\},\ \exists y \in \{y \mid Ay \overset{I}{\lesssim} 0\}$

tel que $x = \bar{x} + y,$

alors $f \,.\, x = f \,.\, \bar{x} + f \,.\, y = f \,.\, \bar{x} + u \,.\, A \,.\, y$

où $u^I \geq 0$ et $f = u \,.\, A.$

$$y \in C_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Ay \overset{I}{\lesssim} 0 \\ u^I \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow uAy \leq 0$$

$$\Rightarrow f \,.\, x = f \,.\, \bar{x} + u \,.\,.\, A \,.\, y \leq f \,.\, \bar{x}$$

Par hypothèse, $\exists x_o : Ax_o \overset{I}{\lesssim} b$ et $f \,.\, x_o > \alpha$, donc

$$\alpha < f \,.\, x_o \leq f \,.\, \bar{x} \Rightarrow f \,.\, \bar{x} = f \,.\, A^{-1} \,.\, b > \alpha.$$

□

Corollaire II.2.4.

Si $f \in Z^n$, *une condition nécessaire et suffisante pour qu'une contrainte additionnelle* $fx \leq \alpha$ *par rapport à* (A,b) *soit stricte est que*

$$\alpha \leq ub - 1 \text{ \textit{si} } ub \text{ \textit{est entier}}$$

$$\alpha \leq \lfloor ub \rfloor \text{ \textit{si} } ub \text{ \textit{n'est pas entier}}$$

avec $f = uA$ *ou encore* $u = f \cdot A^{-1}$.

Remarque 1. A moins que ub soit non entier, il est difficile de savoir s'il existe une valeur de α inférieure ou égale à $f \cdot \bar{x} = f \cdot A^{-1}b$ telle que l'inégalité $f \cdot x \leq \alpha$ soit *stricte*. Si ub est entier, il se peut qu'il n'existe pas de contrainte additionnelle stricte de direction f. Prenons par exemple dans $\mathbb{R}^2$ le cône d'équation $\begin{cases} A_1x \leq b_1 \\ A_2x \leq b_2 \end{cases}$ avec $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ régulière. Si $u = [1\ 0]$, $f = u^1A_1 + u^2A_2 = A_1$ et la contrainte additionnelle est de la forme :

$$f \cdot x = A_1x \leq b_1 = ub.$$

Puisque b_1 est entier, la contrainte additionnelle pour être stricte devrait avoir un second membre inférieur ou égal à b_1-1. Mais si la face d'équation $A_1x \leq b_1$ contient des points entiers, il n'est pas possible de la déplacer parallèlement à elle-même vers l'intérieur du cône sans éliminer des points entiers réalisables. Pour cette direction f, *il n'existe pas* de contrainte additionnelle qui soit stricte.

Remarque 2. Les valeurs intéressantes de α (celles pour lesquelles la contrainte additionnelle *coupe* le cône $Ax \leq b$) sont celles qui sont inférieures ou égales à $f \cdot A^{-1} \cdot b$. Parmi les valeurs possibles qui rendent la contrainte valide, il en existe une (la plus petite) $\bar{\alpha}$ pour laquelle la contrainte passe un point entier, celle-ci est alors un hyperplan d'appui à l'enveloppe des solutions entières. En général, on ne sait pas calculer cette valeur simplement. Dans les deux théorèmes suivants, nous allons préciser des conditions suffisantes (1) pour qu'il existe une valeur de α rendant la contrainte additionnelle $fx \leq \alpha$ stricte et (2) pour que $\bar{\alpha}$ soit connu exactement.

Lemme II.2.1.

Si A *est une matrice régulière, si* $f = uA = \sum_{i=1}^{n} u^i.A_i$, *si* $u^I > 0$, $I \neq \emptyset$, *alors le programme mathématique* $\text{Max}\{f.x \mid Ax \overset{I}{\leq} b\}$ *a une solution optimale unique* $\bar{x} = A^{-1}b$.

Démonstration.

1° $\bar{x}$ est solution optimale :

$$\forall x \in K \triangleq \{x \mid Ax \overset{I}{\leq} b\} : \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} Ax \overset{I}{\leq} b \\ u^I \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} uAx \leq ub \\ uA = f \end{array}\right\} \Rightarrow fx \leq ub \\ \bar{x} = A^{-1}b \Rightarrow f.\bar{x} = f.A^{-1}.b = u.A.A^{-1}.b = ub \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in K,\ fx \leq f\bar{x}.$$

2° $\bar{x}$ est l'unique solution optimale :

Supposons que $\overset{o}{x} \in K$ soit aussi solution optimale, $\overset{o}{x} \neq \bar{x}$

$$f.\overset{o}{x} = f.\bar{x} \qquad \text{et} \qquad uA\overset{o}{x} = uA\bar{x}.$$

Alors $A\overset{\alpha}{x} \overset{I}{\leq} b$, mais $A\overset{o}{x} \neq b$, donc il existe $i \in I$: $A_i\overset{o}{x} < b_i$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_i\overset{o}{x} < b_i \\ u^i > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u^i A_i \overset{o}{x} < u^i b_i \\ \\ u^j A_j \overset{o}{x} \leq u^j b_j, \ \forall j \neq i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u A\bar{x} = u A\overset{o}{x} < ub = uA\bar{x}$$

contradiction.

□

Théorème II.2.3.

> *Si* A *est une matrice carrée entière inversible, d'ordre* n,
> *si* $b \in \mathbb{Z}^n$ *et si* $A^{-1}b$ *est non entier,*
> *si* $f = uA$ *avec* $u^i > 0 \ \forall i \in I$, $I \neq \emptyset$,
> *alors il existe une valeur de* α *telle que* $fx \leq \alpha$ *soit une contrainte additionnelle stricte par rapport à* (A,b,I), *avec* α *entier,* $\alpha < ub$.

Démonstration.

Soit $\bar{x} = A^{-1}b$. Si $\bar{x}$ n'est pas entier, il existe une boule $B(\bar{x},\varepsilon)$ de centre $\bar{x}$ de rayon $\varepsilon > 0$ telle que

$$\mathbb{Z}^n \cap B(\bar{x},\varepsilon) = \emptyset .$$

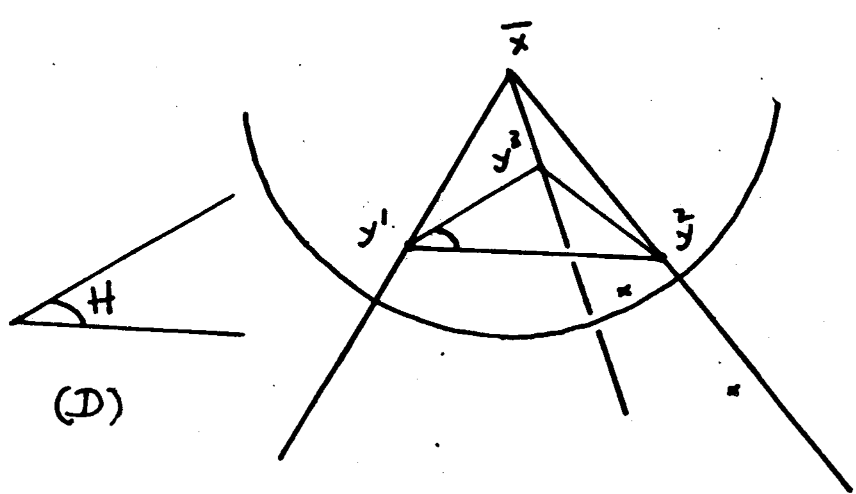
Si $u^i > 0 \ \forall i \in I$, $\bar{x}$ est la solution optimale unique du problème

(P) Max $\{f \cdot x \mid Ax \overset{I}{\leq} b\}$.

Soit alors y^i l'intersection de $\{y \in \mathbb{R}^n \mid d(\bar{x},y) = \varepsilon\}$ et de $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A_j \cdot x = b_j, \forall j \neq i\}$, $i = 1,\ldots,n$. Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ déterminé par les n points $y^1,\ldots,y^n$. $\bar{x}$ n'appartient pas à H. Soit D le demi-espace déterminé par H et ne contenant pas $\bar{x}$. Alors

$$\begin{aligned}\text{Max}\{fx \mid Ax \overset{I}{\leq} b,\ x \text{ entier}\} &\leq \text{Max}\,\{f \cdot x \mid Ax \overset{I}{\leq} b,\ x \in D\}\\ &< \text{Max}\,\{f \cdot x \mid Ax \overset{I}{\leq} b\} = f \cdot \bar{x} = u.b\end{aligned}$$

Alors si $\alpha = \text{Max}\,\{f \cdot x \mid Ax \overset{I}{\leq} b,\ x \in D\}$, $\alpha < ub$, la contrainte $fx \leq \alpha$ est valide et stricte.



$\bar{I} = \{1\}$

Théorème II.2.4.

Si • 1° $f = \frac{t}{\Delta} \cdot A$, $t^j > 0$ $\forall j \in I \neq \emptyset$, t *entier*, $u = \frac{t}{\Delta}$,

• 2° $\exists i \in I : t^i = 1$

• 3° $A^{-1}b = \bar{x}$ *est non entier*

alors l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f.x = \alpha\}$ *est un hyperplan d'appui de* $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \overset{I}{\leq} b\}$,

avec $\alpha = \begin{cases} \lfloor ub \rfloor & \text{si } ub \notin \mathbb{Z} \\ ub-1 & \text{si } ub \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Démonstration.

(1°) $\forall \beta \in \mathbb{Z}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid fx = \beta\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_j \, . \, x = b_j, \ \forall j \neq i\} \in \mathbb{Z}^n$

en effet la matrice du système est

$$\begin{bmatrix} f \\ \\ A_j, \ j \neq i \end{bmatrix}$$

dont le déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} \frac{t}{\Delta} A \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{t^i}{\Delta} A_i \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \frac{t^i}{\Delta} \begin{vmatrix} A_i \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire, en valeur absolue, $\frac{t^i}{\Delta} \, . \, \Delta = t^i = 1$. (voir Fréhel [12]).

(2°) Si $t^j > 0$, $u^j > 0$, $\forall j \in I \neq \emptyset$, **et la contrainte** $fx \leq \alpha$ **où** α **est le plus grand entier pour lequel** $\alpha \leq fA^{-1}b$, $\alpha \neq fA^{-1}b$ c'est-à-dire

$$\alpha = \begin{cases} \lfloor ub \rfloor & \text{si } ub \text{ est non entier} \\ \\ ub-1 & \text{si } ub \text{ est entier} \end{cases}$$

est une contrainte additionnelle valide et stricte.

(3°) L'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f \, . \, x = \alpha\}$ sépare les deux ensembles $\{\bar{x} = A^{-1}b\}$ et $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \overset{I}{\leq} b\}$. Il contient un point entier (voir(1°))et est par conséquent un hyperplan d'appui à $\{x \in Z^n \mid Ax \overset{I}{\leq} b\}$. La valeur correspondante de α est la plus petite possible pour laquelle la contrainte est valide et par conséquent l'inéqualité $fx \leq \alpha$ est aussi forte que possible. La valeur de α est donc déterminée *exactement*.

□

II.3 GENERATION DE DIRECTIONS DE CONTRAINTES ADDITIONNELLES

Nous allons utiliser une méthode décrite par Fiorot ([11]) pour résoudre des systèmes de congruences linéaires.
On veut résoudre

$$tA = 0 \text{ (mod. } \Delta), \; t \text{ entier}, \; t \geq 0,$$

où $\Delta = |\det (A)| > 0$, et $A(n \times n)$ entière.

Soit $C = A^t$, et $a = t^t$. On veut donc résoudre

$$A^t \, . \, t^t = C \, . \, a = 0 \text{ (mod. } \Delta).$$

Il existe deux matrices unimodulaires U et V telles que

$$G = UCV$$

soit une matrice diagonale, les éléments diagonaux, tous positifs et entiers, vérifiant en outre

$$G_i^i \mid G_{i+1}^{i+1}, \; i = 1,\ldots,n-1.$$

Soit $g_i = G_i^i$, alors

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_n \end{bmatrix}$$

et $\qquad \Delta = |\det A| = |\det C| = |\det G| = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_n.$

On doit résoudre

$$(UCV)(V^{-1}a) = 0 \pmod{\Delta}$$

soit $\qquad g_i \cdot Y_i = 0 \pmod{\Delta} \qquad i = 1,\ldots,n$

avec a = VY. V étant unimodulaire, a est entier si et seulement si Y est entier.

$\forall i = 1,\ldots,n$, $g_iY_i = 0 \pmod{\Delta}$ a $(g_i, \Delta) = g_i$ solutions. Le système $G \cdot Y = 0 \pmod{\Delta}$ a donc $g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_n = \Delta$ solutions (mod. Δ)

$$\begin{array}{l} Y_1 = \alpha_1^1 \pmod{\Delta}, \ \ldots \ , Y_1 = \alpha_1^{g_1} \pmod{\Delta}, \\ \vdots \\ Y_n = \alpha_n^1 \pmod{\Delta}, \ \ldots \ , Y_n = \alpha_n^{g_n} \pmod{\Delta}. \end{array}$$

Si on remplace ensuite dans a = VY, Y par sa valeur, on obtient :

$$a_i = V_iY = \sum_{j=1}^{n} V_i^j \, Y_j$$

soit $\qquad a = \beta^k \pmod{\Delta}, \ k = 1,\ldots,\Delta.$

a devant être positif ou nul, soit γ^k le représentant dans la classe de β^k (mod. Δ) immédiatement supérieur ou égal à 0 :

$$0 \leq \gamma_i^k < \Delta, \ \gamma_i^k = \beta_i^k \pmod{\Delta}.$$

Alors les solutions sont données par

$$t^1 = a_1 = \gamma_1^k + \ell_1.\Delta,\dots,t^n = a_n = \gamma_n^k + \ell_n.\Delta,$$

ℓ_i entier positif.

<u>Exemple</u>. Considérons le cône $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 1 \end{array} \right\}$

son sommet est $\bar{x} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}$, non entier.

On veut résoudre $tA \equiv 0 \pmod{\Delta}$

ou avec $C = A^t$ et $a = t^t$,

$$Ca = 0 \pmod{\Delta} \tag{1}$$

$$\Delta = 5,\ C = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$UCV = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = G$$

$$g_1 = 1,\ g_2 = 5.$$

$$(1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} Y = G.Y = 0 \pmod{5}$$

avec $$a = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} -y_1 + 4y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$Y_1 = 0 \pmod{5}$ a $(1,5) = 1$ solution (mod. 5), à savoir

$Y_1 = 0 \pmod{5}$

$5Y_2 = 0 \pmod{5}$ a $(5,5) = 5$ solutions (mod. 5), à savoir

$Y_2 = 0, 1,2,3,4 \pmod{5}$.

Les solutions (mod. 5) sont donc

$$\overset{1}{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{2}{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overset{3}{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overset{4}{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overset{5}{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et

$$\overset{1}{t} = (0,0), \quad \overset{2}{t} = (4,1), \quad \overset{3}{t} = (3,2), \quad \overset{4}{t} = (2,3), \quad \overset{5}{t} = (1,4)$$

Les contraintes additionnelles "fondamentales" (celles pour lesquelles $0 \leq t_i < \Delta$) sont donc :

1° $(0 \quad 0)\, x \leq \overset{1}{\alpha}$ avec $\overset{1}{\alpha} \leq 0$ $(\overset{1}{t} \not> 0)$

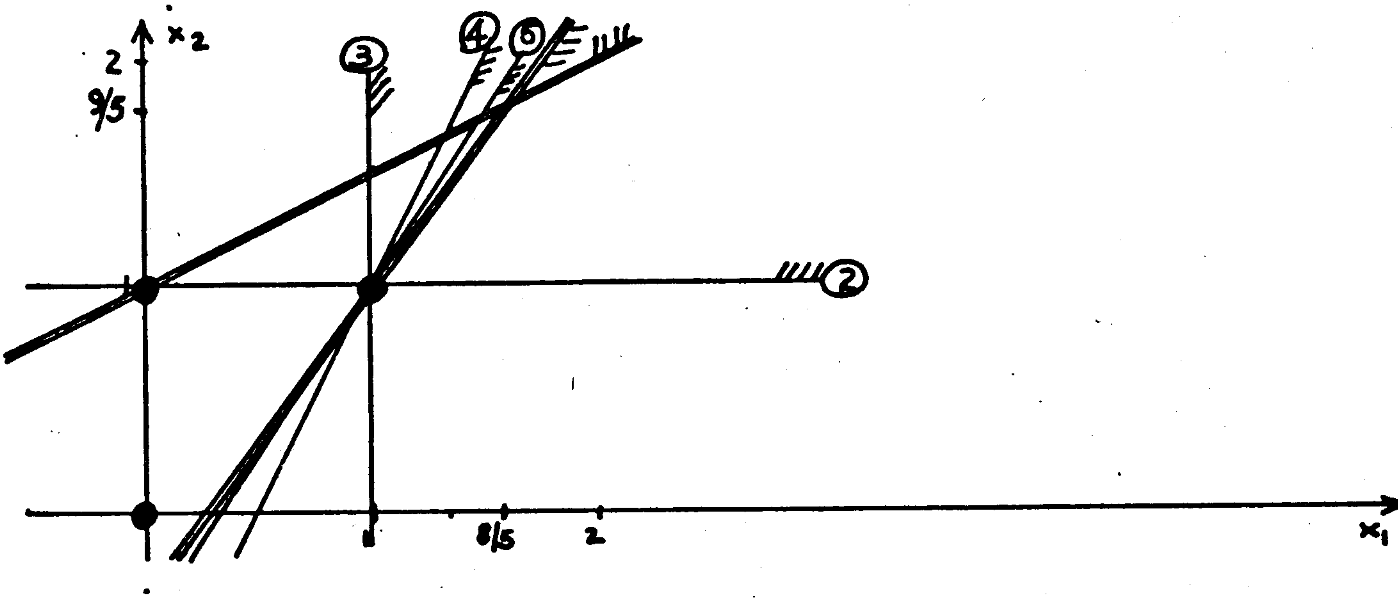
2° $(0 \quad 1)\, x \leq \overset{2}{\alpha}$ avec $\overset{2}{\alpha}$ entier, $\overset{2}{\alpha} < \frac{9}{5}$ $(\overset{2}{t} > 0)$

$$\boxed{x_2 \leq 1}$$

3° $(1 \quad 0)\, x \leq \overset{3}{\alpha}$ avec $\overset{3}{\alpha}$ entier, $\overset{3}{\alpha} < \frac{8}{5}$ $(\overset{3}{t} > 0)$

$$\boxed{x_1 \leq 1}$$

4° $(2 \; -1)\, x \leq \overset{4}{\alpha}$ avec $\overset{4}{\alpha}$ entier, $\overset{4}{\alpha} < \frac{7}{5}$ $(\overset{4}{t} > 0)$



$$\boxed{2x_1 - x_2 \leq 1}$$

5° $(3\ -2)\ x \leq \overset{5}{\alpha}$ avec $\overset{5}{\alpha}$ entier, $\overset{5}{\alpha} < \frac{6}{5}$ $(\overset{5}{t} > 0)$

soit

$$\boxed{3x_1 - 2x_2 \leq 1}$$

La première inégalité est triviale, les inégalités 2° et 5° sont aussi fortes que possible (une composante de t étant égale à 1 dans les deux cas), et 3° et 4° sont strictes et valides, mais pourraient peut-être être renforcées.

Si les contraintes avaient été de la forme

$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 1,$$

on aurait obtenu la contrainte additionnelle supplémentaire

$$x_1 - x_2 \leq -1$$

Les inégalités 2° et 5° définissent des ***hyperplans d'appui*** de l'enveloppe convexe des points entiers réalisables .

II.4 INEGALITES EN VARIABLES BIVALENTES [f]

Considérons maintenant le cas particulier d'*une* inégalité en variables bivalentes, non vide et non triviale,

$$gx \leq \beta.$$

On veut obtenir à partir de cette inégalité et des contraintes $o \leq x_i \leq 1$, $i = 1,\dots,n$, une inégalité valide contenant au moins un point bivalent.

Considérons le système

$$\begin{aligned} gx &\leq \beta \\ x &\leq e, \qquad (e_i = 1 \quad \forall i = 1,\dots,n). \\ -x &\leq o, \end{aligned}$$

et soit $\overset{1}{x}$ une solution de base non entière, réalisable, de ce système, où la base I a un seul indice i.

Soit $\qquad \bar{I} = \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$,

$$\bar{I}_+ = \{j \in \bar{I} \mid \overset{1}{x}_j = 1\} \text{ et } \bar{I}_- = \{j \in \bar{I} \mid \overset{1}{x}_j = 0\}.$$

Alors $\qquad 0 < x_i = \frac{1}{g^i}\left(\beta - \sum_{j \in \bar{I}_+} g^j\right) < 1$

Soit $A = \left[\begin{array}{c|c|c} g^{i} & g^{\bar{I}_+} & g^{\bar{I}_-} \\ 0 & U^{\bar{I}_+}_{\bar{I}_+} & 0 \\ \hline 0 & 0 & -U^{\bar{I}_-}_{\bar{I}_-} \end{array}\right]$

où U^K_K est une matrice unité indicée par K en lignes et en colonnes.
Si $fx \leq \alpha$ est une contrainte additionnelle par rapport à

$\left(A, \begin{bmatrix} \beta \\ e_{\bar{I}_+} \\ 0_{\bar{I}_-} \end{bmatrix}\right)$, alors $\exists t \geq 0$, entier, tel que $f = \frac{t}{\Delta} \cdot A$ où $\Delta = |\det A|$.

$$tA \equiv 0 \pmod{\Delta}$$

Soit $$f = \frac{t}{|g^i|} \cdot A$$

et $$t.A \equiv 0 \pmod{|g^i|}.$$

$$(t^i, t^{\bar{I}_+}, t^{\bar{I}_-}) \times \left[\begin{array}{c|c|c} g^{i} & g^{\bar{I}_+} & g^{\bar{I}_-} \\ \hline 0 & U^{\bar{I}_+}_{\bar{I}_+} & 0 \\ \hline 0 & 0 & -U^{\bar{I}_-}_{\bar{I}_-} \end{array}\right] \equiv 0 \pmod{|g^i|}.$$

ou

$$\begin{cases} t^i \cdot g^i = 0 \pmod{|g^i|} \\ t^i g^{\bar{I}_+} + t^{\bar{I}_+} = 0 \pmod{|g^i|} \\ t^i . g^{\bar{I}_-} - t^{\bar{I}_-} = 0 \pmod{|g^i|}. \end{cases}$$

Si on choisit $t^i = 1$

$$\begin{cases} t^{\bar{I}_+} = - g^{\bar{I}_+} \pmod{|g^i|}, \ t^{\bar{I}_+} \geq 0 \\ t^{\bar{I}_-} = g^{\bar{I}_-} \pmod{|g^i|}, \ t^{\bar{I}_-} \geq 0 \end{cases}$$

a toujours une solution

et

$$f^i = \frac{g^i}{|g^i|} = \text{signe } (g^i) \ (= \pm 1)$$

$$f^{\bar{I}_+} = \frac{g^{\bar{I}_+} + t^{\bar{I}_+}}{|g^i|}$$

$$f^{\bar{I}_-} = \frac{g^{\bar{I}_-} - t^{\bar{I}_-}}{|g^i|}$$

et

$$\beta = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{\alpha + t^{\bar{I}_+} e_{\bar{I}_+}}{|g^i|} \right\rfloor & \text{si } \alpha + t^{\bar{I}_+} e_{\bar{I}_+} \neq 0 \pmod{|g^i|} \\[2ex] \dfrac{\alpha + t^{\bar{I}_+} e_{\bar{I}_+} - |g^i|}{|g^i|} & \text{si } \alpha + t^{\bar{I}_+} e_{\bar{I}_+} = 0 \pmod{|g^i|} \end{cases}$$

mais puisque $0 < x_i < 1$ (i.e. $\dfrac{\alpha - g^{\bar{I}_+} e_{\bar{I}_+}}{g^i} \in \;]0,1[$)

et $\qquad t^{\bar{I}_+} = - g^{\bar{I}_+} \pmod{|g^i|}$

on a $\qquad \alpha + t^{\bar{I}_+} e_{\bar{I}_+} = \alpha - g^{\bar{I}_+} e_{\bar{I}_+} \neq 0 \pmod{|g^i|}$

donc

$$\beta = \left\lfloor \frac{\alpha + t^{\bar{I}_+} e_{\bar{I}_+}}{|g^i|} \right\rfloor$$

et la contrainte $fx \leq \beta$ sera stricte, valide, aussi forte que possible.

Le système $\qquad \begin{cases} fx = \beta \\ x_{\bar{I}_+} = e_{\bar{I}_+} \\ -x_{\bar{I}_-} = 0 \end{cases}$

a une solution entière $\overset{2}{x}$ telle que

$$\begin{cases} \overset{2}{x}_i = \dfrac{\beta - f^{\bar{I}_+} e_{\bar{I}_+}}{f^i} \quad \text{avec } f^i = \pm 1 \\ \overset{2}{x}_{\bar{I}_+} = e_{\bar{I}_+} \\ \overset{2}{x}_{\bar{I}_-} = 0_{\bar{I}_-} \end{cases}$$

$$\overset{2}{x}_i = \frac{|g^i|}{g^i}\left\{\left\lfloor\frac{\alpha + t^{\bar{I}_+} e_{\bar{I}_+}}{|g^i|}\right\rfloor - \frac{(g^{\bar{I}_+} + t^{\bar{I}_+})\, e_{\bar{I}_+}}{|g^i|}\right\}$$

$$g^{\bar{I}_+} + t^{\bar{I}_+} = 0 \ (\mathrm{mod.}\ |g^i|) \Rightarrow \frac{g^{\bar{I}_+} + t^{\bar{I}_+}}{|g^i|} \in \mathbb{Z}^{|\bar{I}_+|}$$

$$\Rightarrow \frac{g^{\bar{I}_+} + t^{\bar{I}_+}}{|g^i|} \cdot e_{\bar{I}_+} \in \mathbb{Z}$$

et

$$\overset{2}{x}_i = \frac{|g^i|}{g^i}\left\lfloor\frac{\alpha - g^{\bar{I}_+} e_{\bar{I}_+}}{|g^i|}\right\rfloor .$$

Si $\quad g^i > 0,\ \overset{2}{x}_i = \lfloor x_i \rfloor = 0$

si $\quad g^i < 0,\ \overset{2}{x}_i = -\lfloor -x_i \rfloor = -(-1) = +1.$

La droite (ou l'hyperplan) $fx \leq \beta$ contient un *point bivalent* $\overset{2}{x}$ et est donc un hyperplan d'appui de l'enveloppe convexe entière.

<u>Exemple</u>. Considérons l'inégalité

$$- 2x_1 - 3x_2 \leq -1,$$

$$x_i,\ i = 1,2, \text{ valant } 0 \text{ ou } 1$$

Le cône $\begin{cases} - 2x_1 - 3x_2 \leq -1 \\ - x_1 \qquad\quad \leq 0 \end{cases}$

a un sommet fractionnaire $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

$i = 2,\ \bar{I} = \bar{I}_- = \{1\},\ \Delta = |g^i| = 3.$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $tA \equiv 0$ (mod. 3), on a donc

$$\begin{aligned} -2t^1 - t^2 &= 0 \pmod{3} \\ -3t^1 \quad &= 0 \pmod{3} \\ -t^2 &= 2t^1 \pmod{3}. \end{aligned}$$

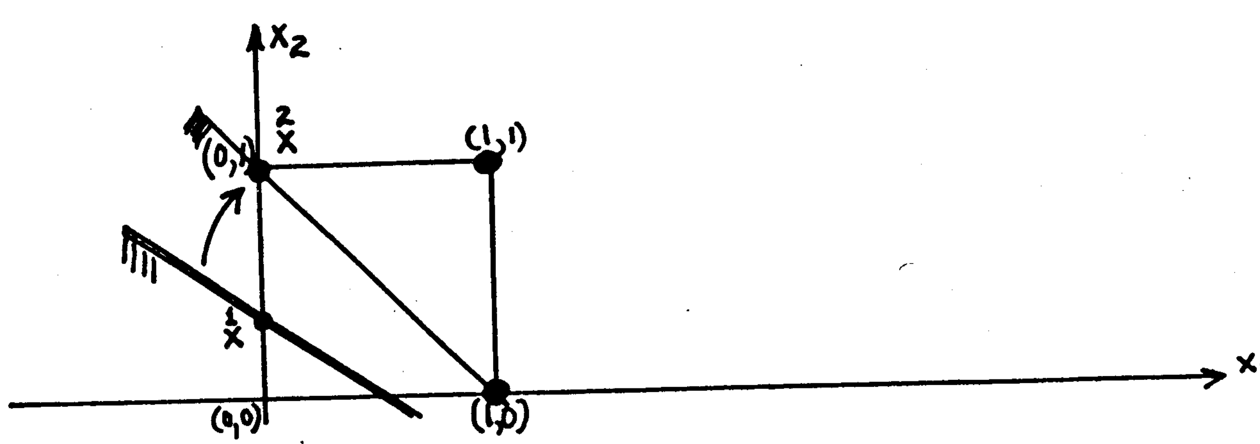
Si on choisit $t^1 = 1$, l'inégalité additionnelle sera

$$\frac{1}{3}(1 \quad 1)\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x < \frac{1}{3}(1 \quad 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-1 \quad -1)\ x < -\frac{1}{3}$$

ou $$x_1 + x_2 \geq 1$$

Le cône $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} -x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 \qquad \leq 0 \end{array} \right\}$ a un sommet bivalent $\overset{2}{x} = (0 \quad 1)$.



II.5 CONTRAINTES ADDITIONNELLES POUR LE PROBLEME D'IMPLANTATIONS SANS CAPACITES

Le problème d'implantation simple (i.e. sans capacités) peut se formuler comme suit :

SPLP *

$$\text{Min} \sum_{i \in I} (f_i \cdot y_i + \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij})$$

$$\forall j : \sum_i x_{ij} = 1 \qquad (1)$$

$$\forall i,j: \quad x_{ij} - y_i \leq 0 \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (3)$$

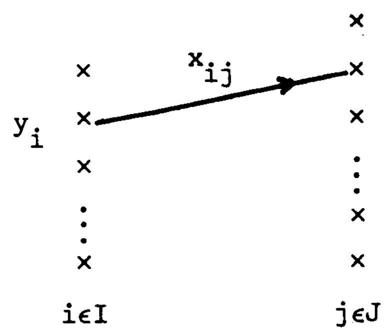
$$y_i \geq 0, \text{ entier.} \qquad (4)$$

y_i est une variable entière associée à une "source" i qui, si elle est ouverte, "coûte" f_i. Dans ce cas, à partir de cette source, on peut envoyer des quantités x_{ij} vers des destinations $j \in J$. x_{ij} est en fait d'après (1) le pourcentage de la demande de j en provenance de i. Comme il est impossible d'expédier une quantité positive à partir d'une source fermée, (2) impose $x_{ij} = 0$ si $y_i = 0$. Puisqu'il s'agit d'un problème de minimisation, y_i ne vaudra jamais plus de 1 pour une solution intéressante. On ne considérera en fait que des solutions y bivalentes. De même on pourrait se limiter à des solutions x_{ij} bivalentes, et le problème serait un programme bivalent pur.

---

* *Simple Plantation Location Problem*

On peut représenter le réseau comme un graphe biparti avec les sources à gauche et les destinations à droite



Les solutions se représentent sous forme de matrices y et x :

$$y = \begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ i \in I \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad x = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc} x_{11} \cdots & & \cdots x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ & x_{ij} & \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} \cdots & & \cdots x_{mn} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ i \in I \\ \\ \\ \end{array} \\ j \in J & \end{array}$$

avec $n \geq m$. Nous noterons $X = (x,y)$.

On peut remarquer que si $f^i > 0$, on aura dans toute solution optimale

$$y_i = \operatorname*{Max}_j \; x_{ij}.$$

D'autre part la somme des x_{ij} situés dans une même colonne est égale à un.

Si on pose $\bar{y}_i = 1 - y_i$ et $s_{ij} = 1 - \bar{y}_i - x_{ij}$, on peut réécrire SPLP comme un problème de recouvrement :

$$
\left|
\begin{array}{lllll}
\text{Min } [m + \sum_{i \in I} (-f_i \bar{y}_i + \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij})] & & & & \\
\forall j \in J : & \sum_i x_{ij} & & = 1 & \\
\forall i,j \ : & \bar{y}_i + x_{ij} + s_{ij} & & = 1 & (\Sigma_j) \\
& 1 \geq \bar{y}_i \ , \ x_{ij} \ , \ s_{ij} & & \geq 0 & (*_{ij}) \\
& \bar{y}_i = 0 \text{ ou } 1. & & &
\end{array}
\right.
$$

Le programme linéaire relaché correspondant, dans lequel on ne considère plus les conditions d'intégralité, a un grand nombre de solutions fractionnaires. Elles sont décrites en détail dans l'article de Cornuejols, Fisher et Nemhauser ([8]). A partir de certaines familles de sommets fractionnaires, on peut engendrer des contraintes additionnelles strictes et valides, et dans certains cas on peut montrer qu'il s'agit de facettes du polyèdre enveloppe convexe des solutions entières. Ceci a été montré dans ([x]). Nous allons montrer ici qu'il existe d'autres familles plus générales de solutions fractionnaires conduisant à des contraintes additionnelles strictes, hyperplans d'appui des solutions entières. Nous ne savons pas s'il s'agit en général de facettes.

Il est intéressant d'étudier systématiquement le polyèdre continu, ses sommets, ainsi que le polyèdre enveloppe convexe des solutions entières, car pour des dimensions données (n, m donnés) les polyèdres continu et entier respectivement ne varient pas d'un problème à l'autre. Seuls les coûts changent, et par conséquent la direction de la fonction économique.

Comme on sait que le polyèdre continu a un grand nombre de solutions fractionnaires, qui sont des solutions de base, non dégénérées pour la plupart, il doit exister un nombre non négligeable de SPLP qui admettent des solutions non entières. Il est par conséquent souhaitable de pouvoir, étant donné une solution fractionnaire, engendrer systématiquement une coupe qui soit si possible une facette du polyèdre entier (elle n'engendrera pas de nouvelles solutions fractionnaires) ou à défaut un hyperplan d'appui du polyèdre entier contenant le plus grand nombre possible de solutions entières et éliminant le plus grand nombre possible de sommets fractionnaires, y compris bien sûr celui de départ.

II.5.1 NOTATIONS ET DEFINITIONS

Soit $I = \{1,2,\dots,m\}$ et $J = \{1,2,\dots,m,\dots,n\}$. (On suppose $m \geq 3$).

Définition II.5.1.

On dira que $\sigma : J \to P(I)$ *est une* ***k-surjection*** *de* J *dans* I *si c'est une application multivoque vérifiant*

1° $\forall j \in J, \ |\sigma(j)| = k$

2° $\forall i \in I, \ |\sigma^{-1}/_F\,(i)| = k$

où $\sigma^{-1}/_F(i) = \{j \in F \mid i \in \sigma(j)\}$, *et* $F \subset J$, $|F| = m$.

Soit Σ la matrice booléenne

$$\Sigma_i^j = (i \in \sigma(j)).$$

Soit $\bar{\sigma}(j) = \{i \in I \mid i \notin \sigma(j)\}$.

<u>Exemple</u>. $m = 4$, $n = 4$, $k = 2$.

$$\sigma \Big\downarrow \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (1,3) & (1,3) & (2,4) & (2,4) \end{array} \Big\downarrow \begin{array}{ccc} 5 & 6 & 7 \\ (1,2) & (1,3) & (2,4) \end{array}$$

$F = \{1,2,3,4\}$.

$$\Sigma = \underbrace{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ \hline \end{array}}_{F}\left.\begin{array}{c|c|c|} \hline 1 & 1 & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}\right\} I}_{J} \qquad (1)$$

$\bar{\sigma}(1) = \{2,4\}$, etc ... .

Définition II.5.2.

> *On dira qu'une* k*-surjection de* J *dans* I *est une* <u>*k-permutation*</u> *si :*

(1) dans tout ce qui suit, les éléments manquants sont nuls.

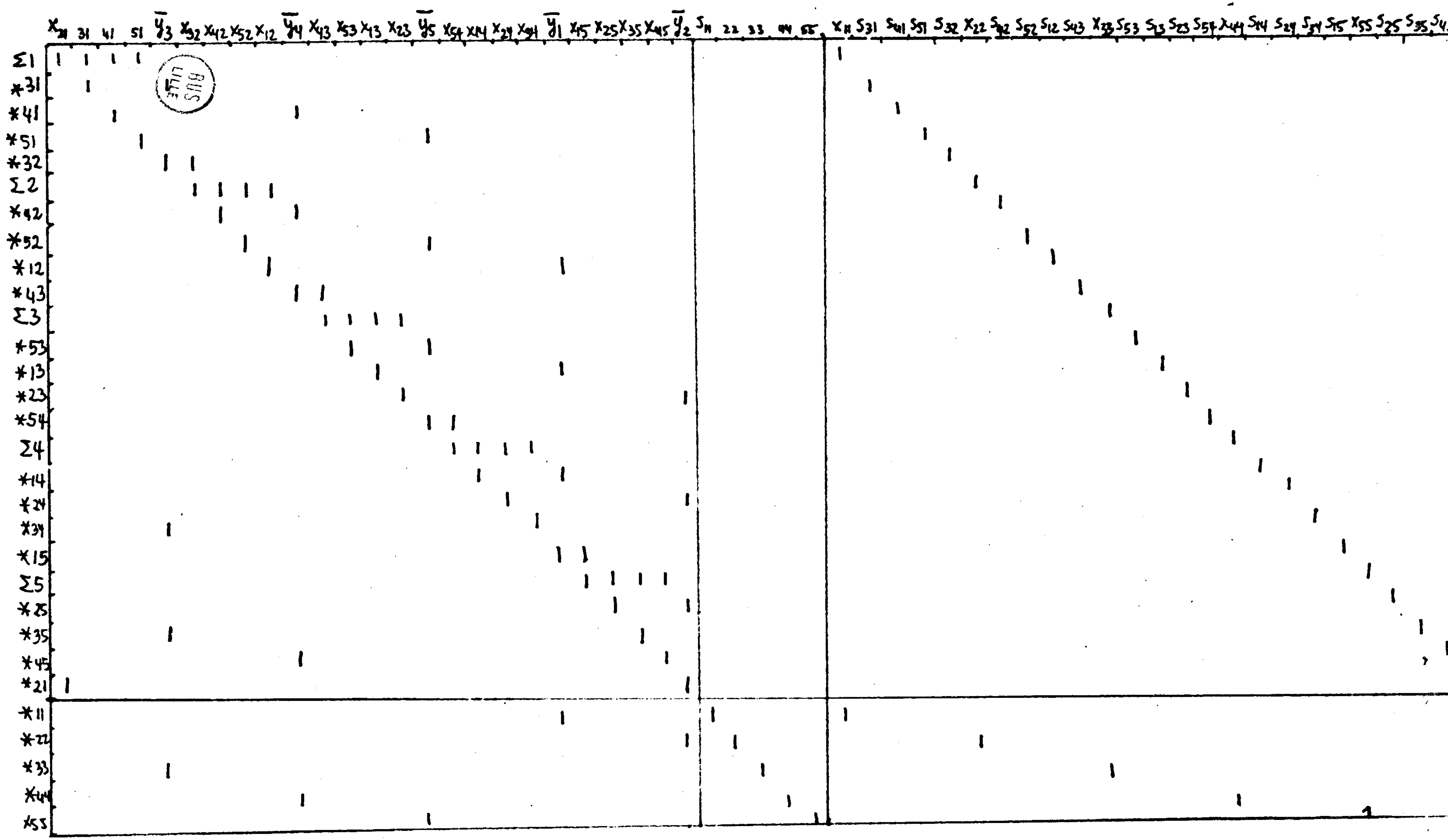

Σ1
*31
*41
*51
*32
Σ2
*42
*52
*12
*43
Σ3
*53
*13
*23
*54
Σ4
*14
*24
*34
*15
Σ5
*25
*35
*45
*21
*11
*22
*33
*44
*55

Figure 1.

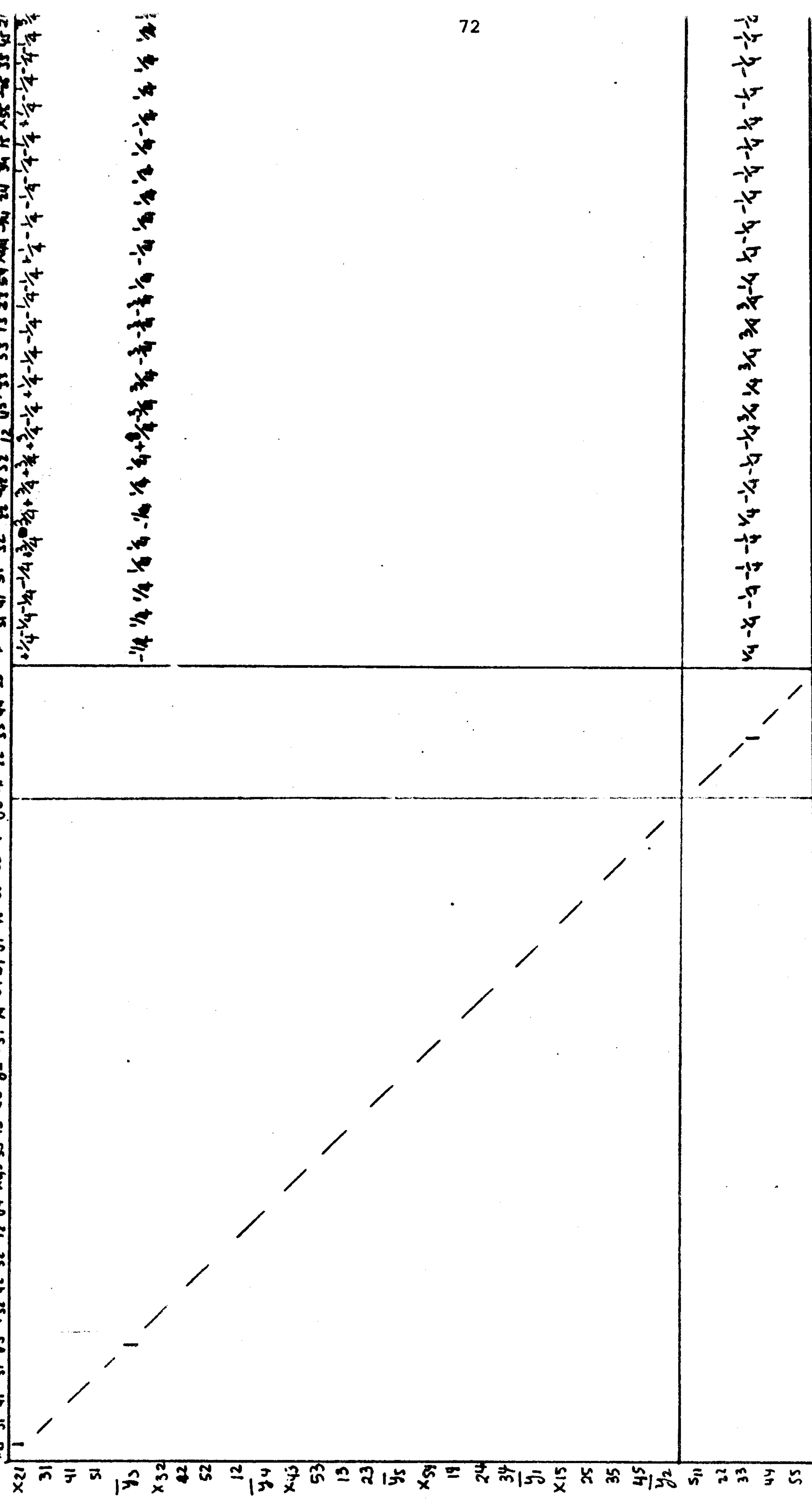


Figure 2.

il existe une permutation de I
il existe une permutation de F

telles que la matrice résultante Σ' *ait des lignes avec* k 1 *contigus déplacés successivement d'une position vers la droite dans* I × F.

<u>Exemple</u>. $m = 4$, $n = 7$, $k = 2$, $F = \{1,2,3,4\}$

$$\sigma \;\begin{array}{c|cccc|ccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & (1,3) & (3,4) & (2,4) & (1,2) & (1,2) & (1,3) & (2,4) \end{array}$$

σ est une 2-permutation :

$$\Sigma = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 1 & & & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 2 & & & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 & & & & 1 & \\ \hline 4 & & 1 & 1 & & & & 1 \\ \hline & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hspace{6em}}_{F}} & & & \end{array}$$

Dans une colonne x_{ii}, nous avons donc $\frac{1}{4}$ dans les lignes indicées par $x_{\ell k}$, $\ell \neq i$, $-\frac{3}{4}$ dans les lignes indicées par x_{ik}, $-\frac{1}{4}$ dans les lignes indicées par $\bar{y}_\ell$, $\ell \neq i$, $+\frac{3}{4}$ dans la ligne indicée par $\bar{y}_i$, $+\frac{1}{4}$ dans la ligne indicée par s_{ii}, de même que dans les lignes indicées par $s_{\ell\ell}$, $\ell \neq i$.

	x_{ii}
x_{ik}	$-\frac{3}{4}$
$\ell \neq i : x_{\ell k}$	$+\frac{1}{4}$
$\bar{y}_i$	$3/4$
$\ell \neq i : \bar{y}_\ell$	$-1/4$
$\forall \ell : s_{\ell\ell}$	$1/4$

Dans une colonne s_{ij}, nous avons $\frac{3}{4}$ en ligne $x_{j\ell}$ et en ligne x_{ij}, $-\frac{1}{4}$ en ligne $x_{\ell k}$, $\ell \neq j$ ou $\ell k \neq ij$, $-\frac{3}{4}$ en ligne $\bar{y}_j$, $\frac{1}{4}$ en ligne $\bar{y}_\ell$, $\ell \neq j$, $\frac{3}{4}$ en ligne S_{jj}, et $-\frac{1}{4}$ en ligne $s_{\ell\ell}$, $\ell \neq j$.

	s_{ij}
$x_{j\ell}$	$3/4$
x_{ij}	$3/4$
$\ell \neq j$ ou $\ell k \neq ij$ $x_{\ell k}$	$-1/4$
$\bar{y}_j$	$-3/4$
$\ell \neq j : \bar{y}_\ell$	$1/4$
s_{jj}	$3/4$
$\ell \neq j : s_{\ell\ell}$	$-1/4$

Si l'on cherche à effectuer un changement de base, c'est-à-dire à déterminer un sommet voisin, on a le choix entre

(a) $\boxed{\text{augmenter } x_{ii} \text{ pour un indice } i}$

Lorsque x_{ii} augmente, $x_{\ell k}$, $\ell \neq i$, $\bar{y}_i$ et $s_{\ell\ell}$ diminuent et s'annulent simultanément pour $x_{ii} = \frac{1/4}{1/4} = \frac{3/4}{3/4} = 1$. Le sommet voisin a donc $x_{ii} = 1$, $x_{ik} = 1$, $k \neq i$, $x_{\ell k} = 0$, $\ell \neq i$, $\bar{y}_i = 0$, $\bar{y}_\ell = 1$, $\ell \neq i$, $s_{\ell\ell} = 0$, $\forall \ell$.

Par exemple, pour $i = 1$, on obtient le sommet entier $\overset{1}{X}$:

$$\underset{\overset{1}{x}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}} \qquad \underset{\overset{1}{y}}{\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}}$$

(b) $\boxed{\text{augmenter } s_{ij}}$

La valeur maximale que preut prendre s_{ij} est $\frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$. Si on choisit par exemple s_{23}, on obtient le sommet X(3) (non entier) :

	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$
$1/3$			$1/3$	$1/3$
$1/3$	$1/3$	$1/3$		$1/3$
$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	

x(3)

$2/3$
$2/3$
1
$2/3$
$2/3$

$\bar{y}(3)$

$1/3$
$1/3$
0
$1/3$
$1/3$

y(3)

$1/3$				
	$1/3$	$1/3$		
			$1/3$	
				$1/3$

S(3)

Si l'on augmente par exemple s_{12}, on peut l'augmenter jusqu'à Min $\{\frac{\frac{1}{3}}{1}, \frac{1}{1}\} = \frac{1}{3}$ et le sommet voisin (non entier) correspondant est X(2) :

		1/3	1/3	1/3
1/3	1/3		1/3	1/3
1/3	1/3	1/3		1/3
1/3	1/3	1/3	1/3	

x(2)

2/3
1
2/3
2/3
2/3

$\bar{y}(2)$

1/3
1/3
1/3
1/3

y(2)

1/3	1/3			
		1/3		
			1/3	
				1/3

S(2)

On ne peut pas modifier s_{31} par exemple, ni s_{34}, ni s_{35}. Si on augmente x_{33} jusqu'à 1, on obtient le sommet entier voisin $\overset{3}{X}$:

1	1	1	1	1

$\overset{3}{x}$

1
1
1
1

$\overset{3}{\bar{y}}$

1

$\overset{3}{y}$

$\overset{3}{s}$

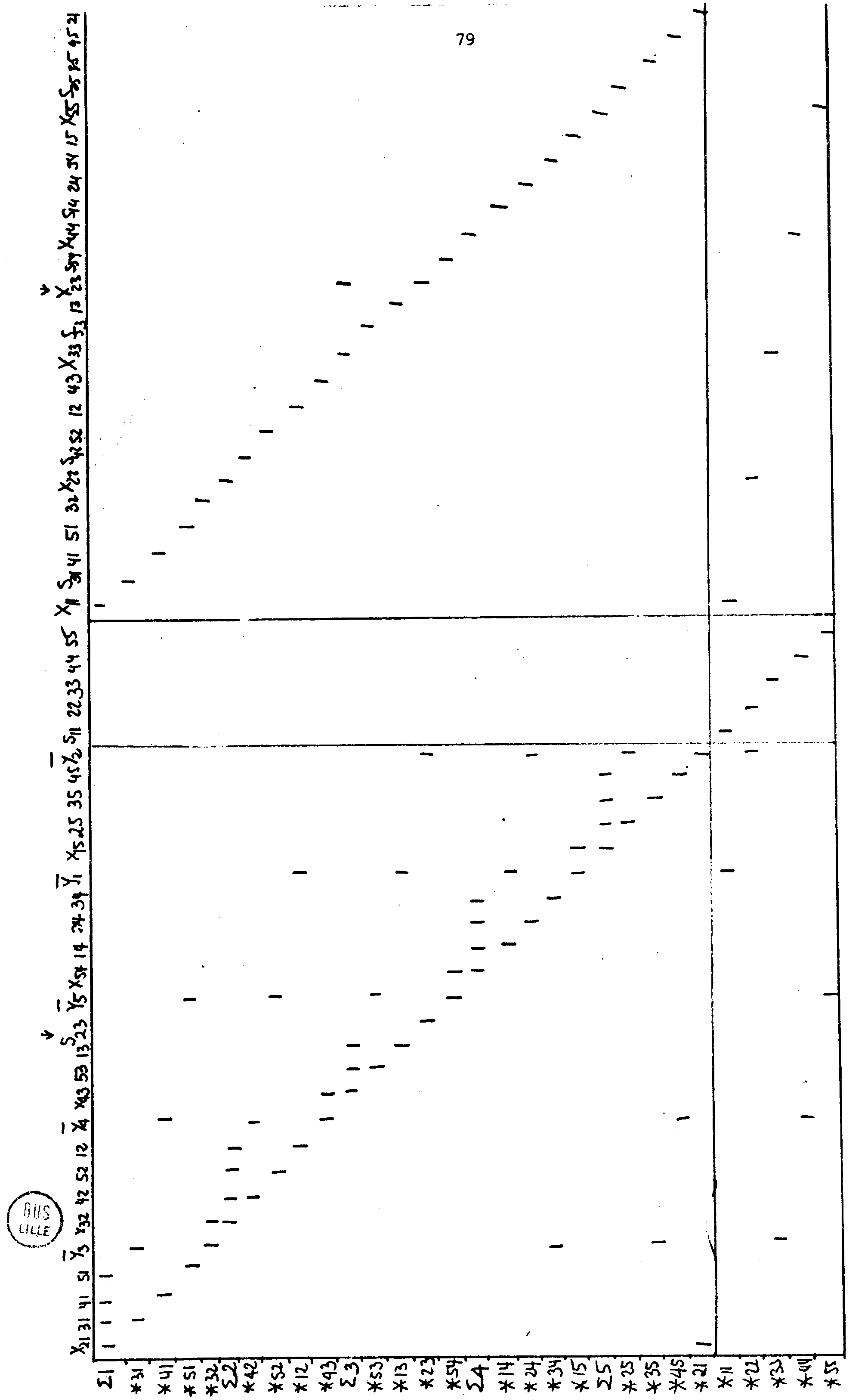


Figure 3.

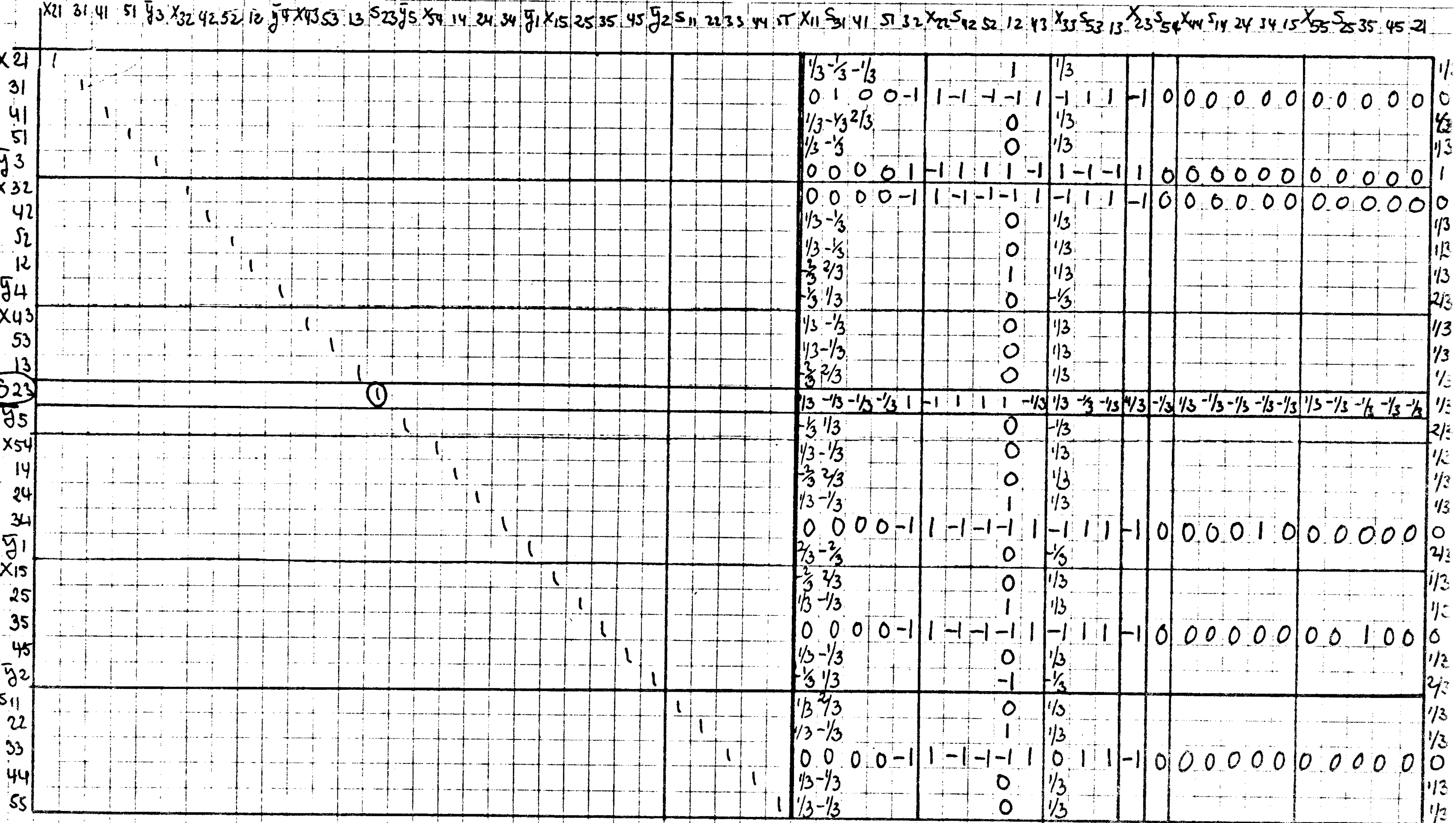


Figure 4.

On a donc tout un ensemble de sommets voisins de $\overset{0}{X}$, ayant soit une diagonale et une ligne horizontale de 0 et des $\frac{1}{3}$ ailleurs, du type $X(2)$, $X(3)$, etc..., soit des 0 partout sauf sur une ligne, du type $\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}$, $\overset{3}{X}$, etc..., dans x.

Le lemme suivant provient de ([8]).

Lemme II.5.1

> Σ^F *est régulière si et seulement si* k *et* m *sont premiers entre eux.*

Soit alors

$$C_\sigma : \sum_{j\in F} \sum_{i\in\sigma(j)} x_{ij} - \sum_{i\in I} y_i \le m - \left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil$$

Le théorème suivant est énoncé sans démonstration dans [8]. Nous allons en fournir une, basée sur la section II.2.

Théorème II.5.1.

> C_σ *est une inégalité valide qui élimine tous les points fractionnaires ayant*
>
> $$x_{ij} = \frac{1}{k},\ j \in J,\ i \in \sigma(j),$$
>
> $$x_{ij} = 0,\ j \in J,\ i \notin \sigma(j).$$

Exemple. $n = m = 5,\ k = 3.$

$$\Sigma = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & 1 & 1 & 1 & \\ \hline & & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & & \\ \hline \end{array}$$

C_σ : $\sum\limits_{j\in J} \ \sum\limits_{i\in\sigma(j)} x_{ij} - \sum\limits_i y_i \leq 5 - \lceil\frac{5}{3}\rceil = 5 - 2 = 3$ est valide et élimine $X = (x,y)$:

$$x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & 1/3 & 1/3 & 1/3 & \\ \hline & & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline 1/3 & & & 1/3 & 1/3 \\ \hline 1/3 & 1/3 & & & 1/3 \\ \hline 1/3 & 1/3 & 1/3 & & \\ \hline \end{array} \qquad y = \begin{array}{|c|}\hline 1/3 \\ \hline 1/3 \\ \hline 1/3 \\ \hline 1/3 \\ \hline 1/3 \\ \hline \end{array}$$

Démonstration.

Par hypothèse, k et m sont premiers entre eux, donc la matrice Σ^F est régulière. Faisons l'hypothèse que $\forall i,j$: $\Sigma_i^j = 0$, $x_{ij} = 0$, et $\forall i,j$: $\Sigma_i^j = 1$, $s_{ij} = 0$ et essayons de déterminer les valeurs des variables x_{ij} pour lesquelles $\Sigma_i^j = 1$. On a alors un système de $n + mk + n(m-k)$ équations par rapport à $mn + m$ inconnues :

$$\forall j : \sum_{i \,:\, \Sigma_i^j = 1} x_{ij} = 1 \qquad (n)$$

$$x_{ij} + \bar{y}_i = 1 \text{ si } \Sigma_i^j = 1,\ j \in F \qquad (mk)$$

$$\bar{y}_i + s_{ij} = 1 \text{ si } \Sigma_i^j = 0 \qquad (n(m-k))$$

Choisissons alors dans chacune des (n-m) colonnes hors de F (k-1) positions, t.q. $\Sigma_i^j = 1$, et imposons à s_{ij} d'être nul pour ces (n-m) (k-1) couples (i,j). On a alors

$$n + mk + n(m-k) + (n-m)(k-1) = nm - m$$

équations. On montre facilement que Σ^F étant régulière, le système a une solution unique,

$$x_{ij} = \frac{1}{k} \text{ pour } \Sigma_i^j = 1,\ \bar{y}_i = \frac{k-1}{k}, \text{ et } s_{ij} = \frac{1}{k} \text{ si } \Sigma_i^j = 0.$$

Il s'agit donc d'un sommet non entier du polyèdre continu.
Si l'on réécrit les équations (Σ_j) pour $j \in F$ et $(\star_{ij})$ pour $j \in F$ et (i,j) tel que $\Sigma_j^i = 1$, en traitant les variables nulles (hors base) au sommet en question comme des variables d'écart, et si l'on multiplie les inégalités Σ_j par $t^j = k-1$ et les inégalités Σ_i^j par $t^{ij} = 1$, on obtient en additionnant toutes ces inégalités

$$\sum_{j\in F} \sum_{i:\Sigma_i^j=1} [(k-1) + 1]\, x_{ij} + \sum_{i\in I} k.\bar{y}_i \leq (k-1)\, m + km$$

soit en divisant par k

$$\sum_{j\in F} \sum_{i:\Sigma_i^j=1} x_{ij} + \sum_{i\in I} \bar{y}_i \leq m + \frac{k-1}{k} \times m$$

$$\sum_{j\in F} \sum_{i:\Sigma_i^j=1} x_{ij} - \sum_{i\in I} y_i \leq m\, \frac{k-1}{k}$$

$$\leq m - \frac{m}{k}$$

Le membre de gauche devant être entier pour toute solution réalisable, on peut arrondir le membre de droite et on obtient C_σ.
Il convient de remarquer que l'équation obtenue découle du système en variables entières et que s'agissant d'une contrainte additionnelle valide et stricte (puisque $k \nmid m$) le sommet fractionnaire est effectivement éliminé. Le déterminant Δ de la base optimale est k.

□

Nous allons montrer dans la section suivante que toutes les inégalités C_σ ne sont pas nécessaires pour la détermination de l'enveloppe convexe des solutions entières, et nous montrerons que l'on peut regrouper des familles de sommets voisins (au sens de la méthode simpliciale) et ensuite éliminer les points d'une même famille.fractionnaire à l'aide d'une seule coupe C_σ.
Comme d'autre part dans la démonstration précédente les coefficients t^{ij} valaient 1, C_σ *est un hyperplan d'appui de l'enveloppe convexe des points entiers*. Il n'est pas possible de réduire davantage son second membre.
On peut le vérifier directement en remarquant que si l'on place m "1" dans x

en les répartissant sur le nombre maximum de lignes possible, il faudra les placer sur $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ lignes si l'on veut que tous ces "1" correspondent à des positions pour lesquelles $\Sigma_i^j = 1$, $j \in F$. Dans ces conditions, $\sum\limits_{j \in F} \sum\limits_{i : \Sigma_i^j = 1} x_{ij} = m$ et $\sum\limits_{i \in I} y_i = \lceil \frac{m}{k} \rceil$.

Dans l'exemple précédent, avec $m = n = 5$ et $k = 3$, il faut $\lceil \frac{m}{k} \rceil = \lceil \frac{5}{3} \rceil = 2$ lignes pour placer 5 "un" là où Σ_i^j vaut 1.
Par exemple, la solution entière

1	1	1		
			1	1

x

1
1

y

vérifie C_σ en tant qu'égalité :

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in \sigma(j)} x_{ij} - \sum_i y_i = 5 - 2 = 3$$

Si $J \supsetneq F$, i.e. si $n > m$, on peut raisonner exactement de la même façon, en plaçant les 1 pour $j \notin F$ dans l'une quelconque des lignes pour lesquelles $y_i = 1$. Ces $x_{ij} \neq 0$, $j \notin F$, n'interviennent pas dans C_σ de toutes façons.

II.5.2 FAMILLES D'INEGALITES $\mathcal{C}_{\sigma_5}$

Soit

$$A = \{a_i \mid a_i = \frac{m}{i},\ i = 2,\dots,m-1,\ (i,m) = 1\},$$

et soit

$$B = \{\lceil a_i \rceil \mid a_i \in A\}.$$

Soit

$$P = |B|,$$

alors

$$B = \{m_1,\ m_2,\dots,m_p\}$$

avec $m_1 > m_2 > m_p.$

Soit

$$I_\ell = \{i \in I,\ 2 \le i \le m-1,\ (m,i) = 1 \mid \lceil a_i \rceil = m_\ell,\ a_i \in A\}$$

$$= \{i \in I \mid \lceil \tfrac{m}{i} \rceil = m_\ell \text{ et } (m,i) = 1\},$$

et

$$k_\ell = \max\{i \mid i \in I_\ell\}$$

Soit $K = \{k_\ell \mid \ell = 1,\dots\ \}.$

<u>Exemple</u>. $m = 5.$

$$A = \{\frac{5}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{4}\}$$

$$B = \{\lceil \tfrac{5}{2} \rceil = 3,\ \lceil \tfrac{5}{3} \rceil = \lceil \tfrac{5}{4} \rceil = 2\}$$

$$m_1 = 3,\ m_2 = 2.$$

$I_1 = \{2\},\ I_2 = \{3,4\}$

$k_1 = 2,\ k_2 = 4$

$K = \{2,4\}.$

Lemme II.5.2.

Soit $k_\ell \in K$, *soit* σ *une* k_ℓ*-permutation. Alors* C_σ *élimine toutes les solutions fractionnaires ayant dans* $F \times I$ *une bande diagonale nulle de largeur* $m-q$ *recouvrant* $\bar{\sigma}(F)$, $q \in I_\ell$.

Démonstration.

$$\forall q \in I_\ell,\ \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{k_\ell} \right\rceil = m_\ell .$$

Le premier membre de C_σ est $m - \frac{m}{q}$ et

$$m - \frac{m}{q} \nleq m - m_\ell$$

□

Exemple. $m = n = 5$.

$\Sigma =$

	1	1	1	1
1		1	1	1
1	1		1	1
1	1	1		1
1	1	1	1	

$k_\ell = 4 = k_2,\ m_\ell = 2.$

$I_\ell = I_2 = \{3,4\}$

$$C_\sigma : x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{21}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+ \ldots +x_{54}-y_1-y_2-y_3-y_4-y_5 \le 3$$

	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$
$1/4$		$1/4$	$1/4$	$1/4$
$1/4$	$1/4$		$1/4$	$1/4$
$1/4$	$1/4$	$1/4$		$1/4$
$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	

$\overset{1}{X}$

largeur m-4=1
recouvrant $\bar{\sigma}(J)$

		$1/3$	$1/3$	$1/3$
$1/3$			$1/3$	$1/3$
$1/3$	$1/3$			$1/3$
$1/3$	$1/3$	$1/3$		
	$1/3$	$1/3$	$1/3$	

$\overset{2}{X}$

largeur m-3=2
recouvrant $\bar{\sigma}(J)$

	$1/3$	$1/3$	$1/3$	
		$1/3$	$1/3$	$1/3$
$1/3$			$1/3$	$1/3$
$1/3$	$1/3$			$1/3$
$1/3$	$1/3$	$1/3$		

$\overset{3}{X}$

largeur m-3=2
recouvrant $\bar{\sigma}(J)$

$\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}$, $\overset{3}{X}$ sont éliminés par C_σ.

On remarquera que par exemple X(2) est aussi éliminé, puisque

		1/3	1/3	1/3
1/3	1/3		1/3	1/3
1/3	1/3	1/3		1/3
1/3	1/3	1/3	1/3	

x(2)

$$\sum_j \sum_{i\in\sigma(j)} x_{ij} = 5 \text{ et } \sum y_i = \frac{4}{3}$$

$$\text{donc } 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3} \nless 3$$

Théorème II.5.2.

Soit $k_\ell \in K$, *soit* σ *une* k_ℓ*-permutation. Alors* C_σ *élimine toutes les solutions fractionnaires telles que*

$$\sum_{j\in F} \sum_{i\notin\sigma(j)} x_{ij} = 0 \textit{ et } \sum_{i\in I} y_i < \lceil \frac{m}{k_\ell} \rceil,$$

en particulier toutes les solutions telles que,

pour $j \in F$ *et* $i \notin \sigma(j)$, $x_{ij} = 0$

pour $j \in F$ *et* $i \in \sigma(j)$, $\begin{cases} \textit{soit } x_{ij} = 0 \\ \textit{soit } x_{ij} = \frac{1}{k_\ell} \end{cases}$

et *pour* $i \in I$, $\begin{cases} \textit{soit } y_i = 0 \\ \textit{soit } y_i = \frac{1}{k_\ell} \textit{ pour } r \textit{ indices } i, \end{cases}$

avec $\displaystyle\sum_{i:y_i\neq 0} y_i = \frac{r}{k_\ell} < \lceil \frac{m}{k_\ell} \rceil$

Démonstration.

$$\sum_{j\in F}\sum_{i\in\sigma(j)} x_{ij} = \sum_{j\in F}\sum_{i=1,\dots,m} x_{ij} - \sum_{j\in F}\sum_{i\notin\sigma(j)} x_{ij}$$

$$= m - \sum_{j\in F}\sum_{i:\Sigma_i^j=0} x_{ij}$$

$$= m$$

et

$$\sum_{j\in F}\sum_{i\in\sigma(j)} x_{ij} - \sum_{i\in I} y_i = m - \sum_{i\in I} y_i$$

$$> m - \lceil \frac{m}{k_\ell} \rceil$$

donc cette solution (x,y) est éliminée par C_σ.

$\square$

On appellera donc "famille de k_ℓ-solutions" l'ensemble des solutions fractionnaires telles que

$$\sum_{j\in F}\sum_{i\notin\sigma(j)} x_{ij} = 0$$

et

$$\sum_{i\in I} y_i < \lceil \frac{m}{k_\ell} \rceil$$

et un sommet "père" de cette famille sera un sommet fractionnaire tel que

$$x_{ij} = \frac{1}{k_\ell},\ \forall j \in F \text{ et } \forall i : \Sigma_i^j = 1$$

$$y_i = \frac{1}{k_\ell} \forall i.$$

Il existe plusieurs sommets "pères" si $\mathcal{F} \neq J$, ces "pères" ayant k composantes x_{ij} par colonne $j \notin \mathcal{F}$ égales à $\frac{1}{k_\ell}$, les autres étant nulles. Pour $\mathcal{F}$ donné toutefois, tous ces "sommets pères" engendrent la même coupe C_σ.

Si nous reprenons l'exemple de la section II.5.1, nous vérifions facilement que C_σ correspondant à $\overset{o}{x}$, c'est-à-dire

$$\sum_i \sum_{j \neq i} x_{ij} - \sum y_i \leq m - \left\lceil \frac{m}{4} \right\rceil = 5 - \left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil = 5 - 2 = 3 \qquad (\overset{o}{C})$$

élimine non seulement $(\overset{o}{x}, \overset{o}{y})$, mais également X(3) par exemple puisque

$$\sum_i \sum_{j \neq i} x_{ij} = 5 \text{ et } \Sigma y_i = \frac{4}{3} \text{ de telle sorte que } 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3} \nleq 3,$$

aussi bien que par exemple X défini par

	1/3	1/3		1/3
1/3		1/3	1/3	
	1/3		1/3	1/3
1/3		1/3		1/3
1/3	1/3		1/3	

x

1/3
1/3
1/3
1/3
1/3

y

puisque

$$\sum_i \sum_{j \neq i} x_{ij} = 5 \text{ et } \Sigma y_i = \frac{5}{3} \text{ donc } 5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3} \nleq 3$$

ou encore X' :

	1/3	1/3		
1/3		1/3	1/3	1/3
1/3	1/3		1/3	1/3
				1/3
1/3	1/3	1/3	1/3	

x'

1/3
1/3
1/3
1/3
1/3

y'

Enfin nous avons démontré dans [x] le théorème suivant :

Théorème II.5.3.

Soit $k_\ell = m - 1$, *alors* k_ℓ *et* m *sont premiers entre eux, et soit* σ *une* k_ℓ*-permutation. Alors* C_σ *élimine toutes les solutions fractionnaires telles que*

$$\sum_{j\in F} \sum_{i\notin\sigma(j)} x_{ij} = 0 \text{ et } \sum_{i\in I} y_i < 2$$

et C_σ *en outre est une facette de l'enveloppe convexe des solutions entières de SPLP.*

On a bien $\left\lceil \frac{m}{k_\ell} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{m-1} \right\rceil = 2$ et on a démontré dans [x] que l'hyperplan séparateur du demi-espace défini par C_σ contient mn+m-n sommets entiers linéairement indépendants et est donc une facette de SPLP.

□

La totalité des facettes C_σ pour lesquelles $k_\ell = m-1$ ne suffit toutefois pas à éliminer toutes les solutions fractionnaires.

Pour l'exemple précédent, $\overset{o}{C}$ est une facette. D'autre part la solution fractionnaire (qui est un sommet du polyèdre continu)

			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$

n'est éliminée par aucune des facettes C_σ avec $k_\ell = m-1$, puisque $\sum_{j\in F}\sum_{i\in\sigma(j)} x_{ij}$ est au plus égal à $m = 5$ et $\sum_{i\in I} y_i = \frac{5}{2}$ donc le premier membre de n'importe quelle C_σ ($k = k_\ell = m-1$) est au plus égal à $5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$, et jamais supérieur à $m - \lceil \frac{m}{k_\ell} \rceil$ qui vaut $5 - 2 = 3$. L'enveloppe convexe des solutions entières a donc d'autres facettes.

II.5.3 ELIMINATION D'UNE SOLUTION FRACTIONNAIRE PAR UNE COUPE C_σ

Bien que l'expérience ait montré ([10]) que la grande majorité des problèmes d'implantation simple ont une solution entière lorsqu'on les résoud à l'aide d'une méthode basée sur la méthode simpliciale, il existe un grand nombre de solutions fractionnaires et par conséquent un grand nombre de directions de fonctions économiques telles que la solution optimale soit unique et non entière.

Il n'est pas nécessaire pour cela que les coefficients de la fonction économique aient une structure très particulière, comme par exemple des coûts égaux suivant une répartition spéciale. Si l'on écrit les conditions de Kuhn et Tucker du programme linéaire relaché ainsi que le programme dual correspondant, on obtient :

Min $\Sigma\Sigma c_{ij}x_{ij}+\Sigma f_i y_i$	(x,y) solution réalisable est solution optimale si	Max $\sum_j v_j$
$\forall j : \sum_i x_{ij} \geq 1$	$\exists vj \geq 0$	$v_j \geq 0$
$\forall i,j : x_{ij} - y_i \leq 0$	$\exists w_{ij} \geq 0$	$w_{ij} \geq 0$
$\forall i,j : x_{ij} \geq 0$	$c_{ij}-v_j+w_{ij} \geq 0$	$c_{ij}-v_j+w_{ij} \geq 0$
$\forall i : y_i \geq 0$	$f_i - \sum_j w_{ij} \geq 0$	$f_i-\sum_j w_{ij} \geq 0$
<u>Primal</u>	$v_j(1-\sum_i x_{ij})=0 \ \forall j$ $w_{ij}(x_{ij}-y_i)=0 \ \forall i,j$ $(c_{ij}-v_j+w_{ij})x_{ij}=0 \ \forall i,j$ $(f_i-\sum_j w_{ij})y_i=0 \ \forall i$	<u>Dual</u>

Pour qu'une solution du type

$$\left|\begin{array}{l} x_{ij} = \frac{1}{m-1} \ \forall i \neq j, \ i \leq m \\ x_{ij} = 0, \ \forall i = j \\ x_{ij} = \frac{1}{m-1}, \ \forall j > m, \ i \leq m - 1 \\ x_{ij} = 0, \ \forall j > m, \ i = m \\ y_i = \frac{1}{m-1} \ \forall i, \end{array}\right.$$

soit solution optimale, il suffit donc que

$$\exists vj \geq 0, \ \exists w_{ij} \geq 0$$

$$c_{ij} + w_{ij} - v_j \geq 0 \; \forall i \leq m, \; j = i, \text{ ou } \forall j > m, \; i = m$$

$$c_{ij} + w_{ij} - v_j = 0 \; \forall i \neq j, \; j \leq m, \text{ ou } \forall j \geq m+1, \; i \leq m-1,$$

$$\underline{w_{ij} = 0 \; \forall i \leq m, \; j = i \text{ ou } \forall j > m, \; i = m}$$

$$f_i - \sum_j w_{ij} = o \; \forall i.$$

Donc

$$\underline{f_i = \sum_j w_{ij} \; \forall i.}$$

$$c_{ij} = v_j - w_{ij} \; \forall j \leq m, \; i \neq j, \text{ ou } \forall j \leq m, \; i \leq m-1,$$

ce qui implique en particulier que

$$w_{ij} = v_j - c_{ij} \; \forall j \leq m, \; i \neq j \text{ ou } \forall j > m, \; i \leq m-1$$

et

$$f_i = \sum_{j \leq m} w_{ij} + \sum_{j > m} w_{ij}$$

$$= \sum_{\substack{j \neq i \\ j \leq m}} w_{ij} + \sum_{j > m} w_{ij}$$

$$= \sum_{j \neq i} (v_j - c_{ij})$$

donc $$\underline{\sum_{j \neq i} c_{ij} + f_i = \sum_{j \neq i} v_j}$$

et $$\underline{c_{ij} \geq v_j \; \forall i \leq m, \; i = j, \text{ ou } \forall j > m, \; i = m.}$$

On vérifiera facilement que les données suivantes satisfont à toutes ces conditions et que la solution (x,y) présentée ci-après est optimale.

Aucune composante du vecteur critère de candidature correspondant à une variable hors base n'étant nulle, cette solution optimale est unique. Or elle est non entière.

$$\begin{cases} \Sigma f_i y_i = 19.75, \ \Sigma c_{ij}\, x_{ij} = 29.25, & \text{coût primal} = 49 \\ \Sigma v_j = 49, & \text{coût dual} \quad = 49 \end{cases}$$

Une solution entière coûtera au minimum 50, ce que l'on obtient en choisisant soit $y_1 = 1$, soit $y_2 = 1$, soit $y_3 = 1$, soit $y_4 = 1$.

Si l'on ajoute aux contraintes de SPLP la facette C_σ correspondant à

$$\bar{\Sigma}^F = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & \\ \hline & 1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ \hline & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{avec } F = \{1,2,3,4,5\}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1,\dots,5} \ \sum_{\substack{j=1,\dots,5 \\ j \neq i}} x_{ij} - \sum_{i=1}^{5} y_i \leq m - m_\ell = 5 - \left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil = 5-2=3,$$

la solution optimale précédente est éliminée, puisque

$$5 - \frac{5}{4} = 5 - 1.25 = 3.75 \not\leq 3,$$

et C_σ étant une facette, la nouvelle solution optimale sera entière.

Lorsque C_σ est ajoutée au tableau simplicial, et rapportée à la base, les coefficients des variables hors-base sont respectivement $-\frac{3}{4}$ pour les variables x_{ij} avec $\Sigma_i^j = 0$ et $-\frac{1}{4}$ pour les variables s_{ij}, $\Sigma_i^j = 1$, $j \in F$. Le second membre par contre (après avoir transformé y_i en $\bar{y}_i = 1-y_i$) est $2m - m_\ell - \frac{35}{4} = 8 - \frac{35}{4} = -\frac{3}{4}$. Une itération de la méthode duale-simpliciale va faire entrer par exemple x_{11} dans la base, la fonction économique va devenir $(-49 + \frac{4}{3}(-\frac{3}{4})) = -(-49-1) = -(-50) = +50$. La solution correspondante est duale-optimale et primale-réalisable, donc optimale. Etant en outre entière, c'est la solution cherchée. Elle n'est toutefois pas unique.

1

$[y_i]$

1	1	1	1	1	1	1

$[x_{ij}]$

0	5/3	8/3	14/3	5/3	4	3
8/3	0	14/3	5/3	11/3	1	2
8/3	8/3	0	5/3	11/3	2	3
5/3	11/3	2/3	0	8/3	2	4
8/3	11/3	5/3	2/3	0	0	0

$[w_{ij}]$

6	10	8	9	6	6	9

$[v_j]$

$t = \frac{4}{3}$

La fonction économique du dual vaut bien $\Sigma v_j - 3t = 54 - 3\ (\frac{4}{3}) = 50$.

II.5.4 SOLUTIONS ENTIERES APPARTENANT à UNE COUPE C_σ

Nous allons chercher à caractériser les solutions entières qui satisfont à une coupe C_σ en tant qu'égalité, c'est-à-dire telles que

$$\sum_{j\in F} \sum_{i\in\alpha(j)} x_{ij} - \Sigma y_i = m - m_\ell = m - \left\lceil \frac{m}{k_\ell} \right\rceil \qquad (c_\sigma^=)$$

avec

$$k_\ell = \max \{k \mid (m,k) = 1 \text{ et } \left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil = m_\ell\}.$$

Il faudra que $\Sigma\Sigma x_{ij} = m - \alpha$

$$\Sigma y_i = m_\ell - \alpha$$

avec $o \leq \alpha < m_\ell$

(il faut en effet qu'au moins l'un des y_i soit égal à 1 pour toute solution entière réalisable). Il faut, pour que la solution soit réalisable, que les y_i égaux à 1 permettent de placer m"1" sur F. $m - \alpha = p$ de ceux-ci doivent se trouver sur des emplacements où $\Sigma_i^j = 1$, et ils doivent être répartis sur $\beta = m_\ell - \alpha$ lignes. Or sur chacune de ces lignes, sur F, au plus k_ℓ de ces "1" sont comptés.

Alors
$$\begin{aligned} m - m_\ell &= m - \alpha - (m_\ell - \alpha) \\ &= p - m_\ell + \alpha \\ &= p - \beta. \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{cases} m = m_\ell k_\ell - r \text{ avec } 1 \leq r \leq k_\ell - 1, \left\lceil \frac{m}{k_\ell} \right\rceil = m_\ell, \\ p = \beta\, k_\ell - q \text{ avec } 0 \leq q \leq k_\ell - 1, \left\lceil \frac{p}{k_\ell} \right\rceil = \beta \end{cases}$$

donc $\quad m_\ell k_\ell - r - m_\ell = \beta k_\ell - q - \beta.$

ou $$\beta = m_\ell + \frac{q-r}{k_\ell - 1}$$

or $$1-k_\ell \le q-r \le k_\ell - 2$$

$$-1 \le \frac{q-r}{k_\ell - 1} \le \frac{k_\ell - 2}{k_\ell - 1}$$

et $$m_\ell - 1 \le \beta = m_\ell + \frac{q-r}{k_\ell - 1} \le m_\ell + \frac{k_\ell - 2}{k_\ell - 1}$$

mais β est entier et $\frac{k_\ell - 2}{k_\ell - 1}$ ne l'est pas, donc

$$m_\ell - 1 \le \beta \le m_\ell = \left\lfloor m_\ell + \frac{k_\ell - 2}{k_\ell - 1} \right\rfloor .$$

β ne peut donc prendre que deux valeurs, m_ℓ ou $m_\ell - 1$. On a donc :

soit

$$m - m_\ell = p - \beta = (m-1) - (m_\ell - 1)$$

avec $$\left\lceil \frac{m-1}{k_\ell} \right\rceil = m_\ell - 1$$

et $$\left\lceil \frac{m}{k_\ell} \right\rceil = m_\ell$$

donc $$m-1 = (m_\ell - 1)k_\ell - q$$

$$m = m_\ell k_\ell - r$$

et $$q = r+1-k_\ell$$

soit

$$p = m \text{ et } \beta = m_\ell, \text{ avec } q = r = m_\ell k_\ell - m,$$

et $$\left\lceil \frac{m}{k_\ell} \right\rceil = m_\ell .$$

Théorème II.5.4.

Les solutions entières vérifiant $C_\sigma^=$ sont telles que

- *soit* $\Sigma y_i = m_\ell$
- *soit* $\Sigma y_i = m_\ell - 1$ *si* $\left\lceil \frac{m-1}{k_\ell} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{k_\ell} \right\rceil - 1$

II.5.4.1. Solutions entières avec $\Sigma y_i = m_\ell$.

Pour construire des solutions entières avec $\Sigma y_i = m_\ell$ et vérifiant $C_\sigma^=$, il faut que

$$\sum_{j \in F} \sum_{i \in \sigma(j)} x_{ij} = m,$$

donc tous les x_{ij} égaux à un doivent se trouver sur des emplacements où $\Sigma_i^j = 1$, si $j \in F$. Il y en a au plus k_ℓ par ligne, et il faut utiliser $\left\lceil \frac{m}{k_\ell} \right\rceil = m_\ell$ lignes, ce qui est bien consistant avec l'hypothèse de départ.

Considérons ce qui ce passe sur F. Soit $1 \le i_o \le m$. On pourra considérer les solutions entières du type suivant :

pour $i = i_o + \theta . k_\ell$ (mod. m), $\theta = 0, 1, \ldots, m_\ell - 2$,

$$x_{ij} = 1 \ \forall j : \Sigma_i^j = 1$$

pour $i = i_o + (m_\ell - 1)k_\ell$, $x_{ij} = 1 - \sum_{\substack{i' = i_o + \theta k_\ell \\ 0 \le \theta \le m_\ell - 2}} x_{i'j}$ si $\Sigma_i^j = 1$

$$x_{ij} = 0 \text{ autrement}$$

Nous ferons les deux remarques suivantes :

a) la ligne $i_o + (m_\ell - 1)k_\ell$ (mod m) aura exactement $m - (m_\ell - 1)k_\ell$ "1" sur F, or $\qquad m-(m_\ell-1)k_\ell \neq k_\ell$

en effet $\qquad m - m_\ell k_\ell \neq 0$

puisque $\qquad m \neq m_\ell k_\ell$

car $\qquad \frac{m}{k_\ell} \neq m_\ell$ ($\frac{m}{k_\ell}$ est non entier, $k_\ell \nmid m$).

Lorsque i_o varie de 1 à m, on ne retrouve donc jamais deux fois la même solution, car la dernière ligne (mod. m) n'a pas le même nombre de "1" sur $\mathcal{F}$ que les autres lignes.

b)
$$i_o+(m_\ell-1)k_\ell+k_\ell = i_o+m_\ell k_\ell+k_\ell-k_\ell$$
$$= i_o+m_\ell k_\ell \neq i_o \pmod{m}$$

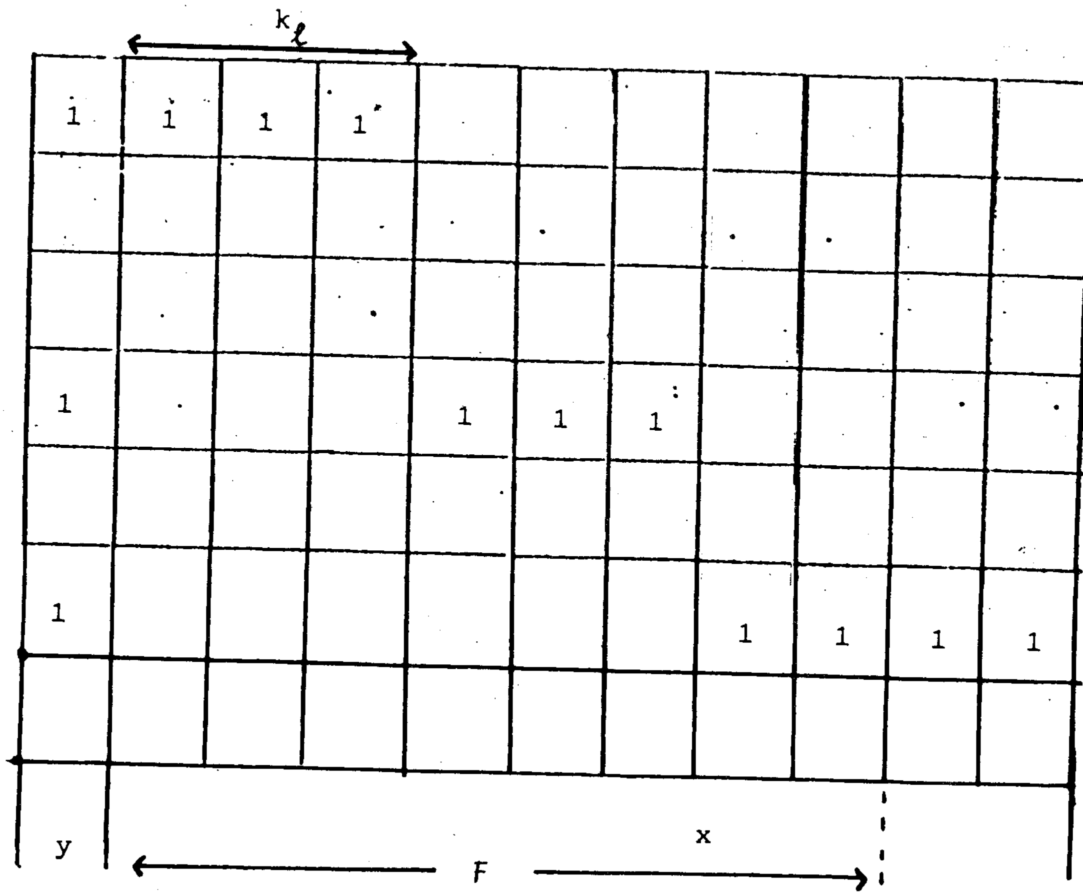
car $\qquad m_\ell k_\ell \neq 0 \pmod{m}$.

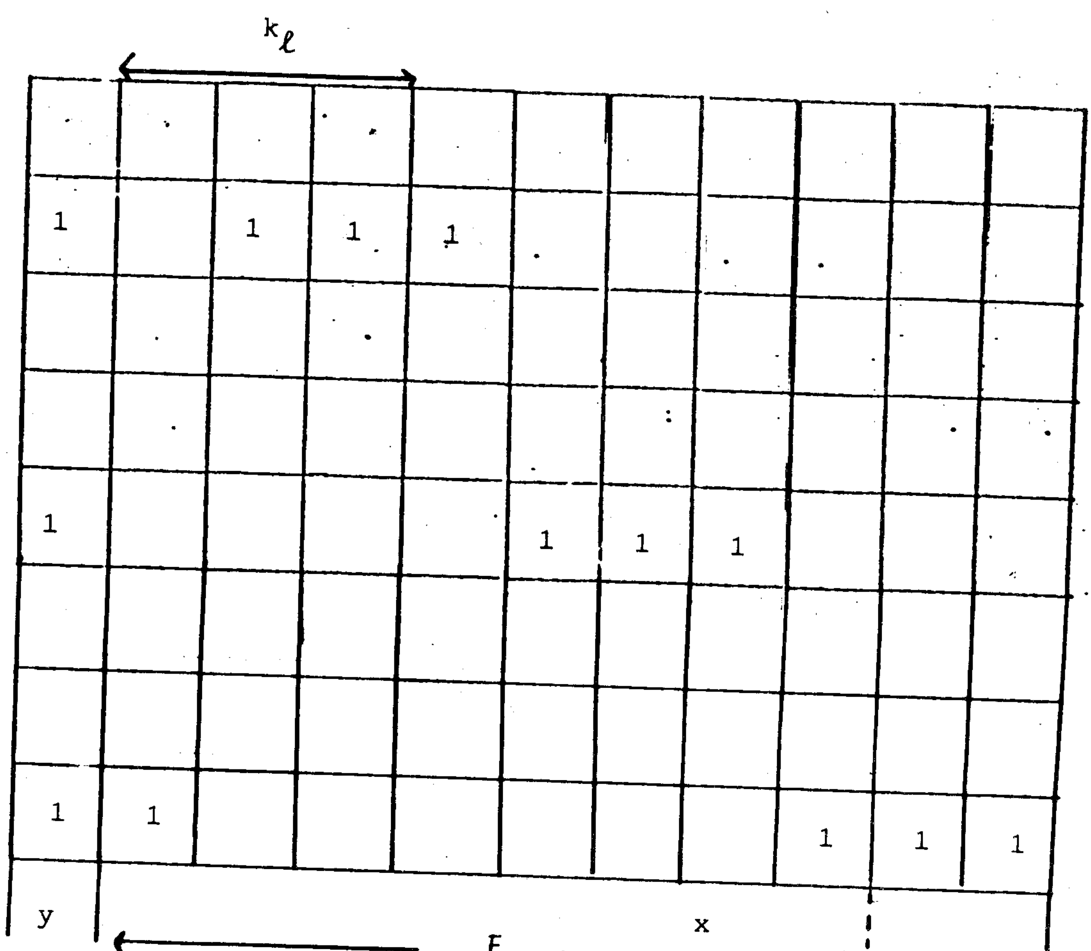
L'écart (mod. m) entre la dernière ligne et la première est différent des autres écarts (mod. m).

<u>Exemple</u> : $\qquad m = 8,\ m_\ell = 3 = \left\lceil \frac{m}{k_\ell} \right\rceil$ avec $k_\ell = 3,\ n = 10.$

$m-m_\ell = 8 - 3 = 5.$

On construit des solutions du type suivant :





etc ...

$$\Sigma^F = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 1 & 1 & & & & & \\ \hline
 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ \hline
 & & 1 & 1 & 1 & & & \\ \hline
 & & & 1 & 1 & 1 & & \\ \hline
 & & & & 1 & 1 & 1 & \\ \hline
 & & & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & & & & & & 1 & 1 \\ \hline
1 & 1 & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}$$

II.5.4.2 Solutions entières avec $\Sigma y_i = m_\ell - 1$.

Il faut maintenant que $\sum_{j\in F} \sum_{i\in\sigma(j)} x_{ij} = m-1$,

et $$\left\lceil \frac{m-1}{k_\ell} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{k_\ell} \right\rceil - 1$$

Ceci implique que

$$q = r+1 - k_\ell \geq 0$$

ou encore

$$m_\ell k_\ell - m + 1 - k_\ell \geq 0$$

soit $$k_\ell (m_\ell - 1) \geq m-1$$

ou $$k_\ell \geq \frac{m-1}{m_\ell - 1}.$$

Si $k_\ell < \frac{m-1}{m_\ell - 1}$, il n'existera donc pas de solutions entières appartenant à $C_\sigma^=$ autres que celles pour lesquelles $\Sigma y_i = m_\ell$.

<u>Exemple 1</u> Soit $m = 8$, $k_\ell = 3$, $m_\ell = 3$.

$$3 \not\geq \frac{8-1}{3-1} = \frac{7}{2}$$

et $$3 = \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{8-1}{3} \right\rceil \neq \left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil - 1 = 3-1.$$

Il n'y a donc pas de solutions entières avec $\Sigma y_i = m_\ell - 1$ pour $m=8$, $k_\ell=3$, $m_\ell=3$.

<u>Exemple 2</u> Soit $m = 5$, $k_\ell = 2$, $m_\ell = 3$.

$$2 \geq \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

et d'autre part

$$2 = \lceil\frac{4}{2}\rceil = \lceil\frac{5-1}{2}\rceil = \lceil\frac{5}{2}\rceil - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Il y a donc des solutions entières appartenant à $C_\sigma^=$ avec $\Sigma y_i = m_\ell - 1$.
Supposons donc que

$$k_\ell \le \frac{m-1}{m_\ell - 1} \quad \text{et} \quad \lceil\frac{m-1}{k_\ell}\rceil = \lceil\frac{m}{k_\ell}\rceil - 1.$$

Il est possible d'avoir p fois $x_{ij} = 1$ là où $\Sigma_i^j = 1$ sur F donc $\sum\limits_{j\in F}\ \sum\limits_{i\in\sigma(j)} x_{ij} = m_\ell - 1$ et cela sur $\lceil\frac{p}{k_\ell}\rceil = m - 1$ lignes.

Considérons ce qui se passe sur F.

Soit $1 \le i_o \le m$. On pourra considérer les solutions entières du type suivant :

pour $i = i_o + \theta k_\ell \pmod{m}$, $\theta = 0,1,\ldots,m_\ell - 3$

$$x_{ij} = 1 \quad \forall j : \Sigma_i^j = 1$$

pour $i = i_o + (m_\ell - 2)k_\ell \pmod{m}$

$$x_{ij} = 1 - \sum_{\substack{i'=i_o+\theta.k_\ell \\ 0\le\theta\le m_\ell-3}} x_{i'j}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ autrement}$$

Nous ferons les remarques suivantes :

a) la ligne $i_o + (m_\ell - 2)k_\ell \pmod{m}$ aura exactement $m - (m_\ell - 2)k_\ell$ "1" sur F, or

$$m - (m_\ell - 2)k_\ell \ne k_\ell$$

en effet $\qquad m - m_\ell k_\ell + 2k_\ell \ne k_\ell$

ou $\qquad m \neq (m_\ell - 1)k_\ell$

car $\qquad k_\ell \nmid m$ (en fait $(m,k_\ell) = 1$).

Lorsque i_o varie de 1 à m, on ne retrouve donc jamais deux fois la même solution, car la dernière ligne de "1" (mod. m) n'a pas le même nombre de "1" sur F que les autres lignes.

b) $\quad i_o + (m_\ell - 2)k_\ell + k_\ell = i_o + (m_\ell - 1)k_\ell$

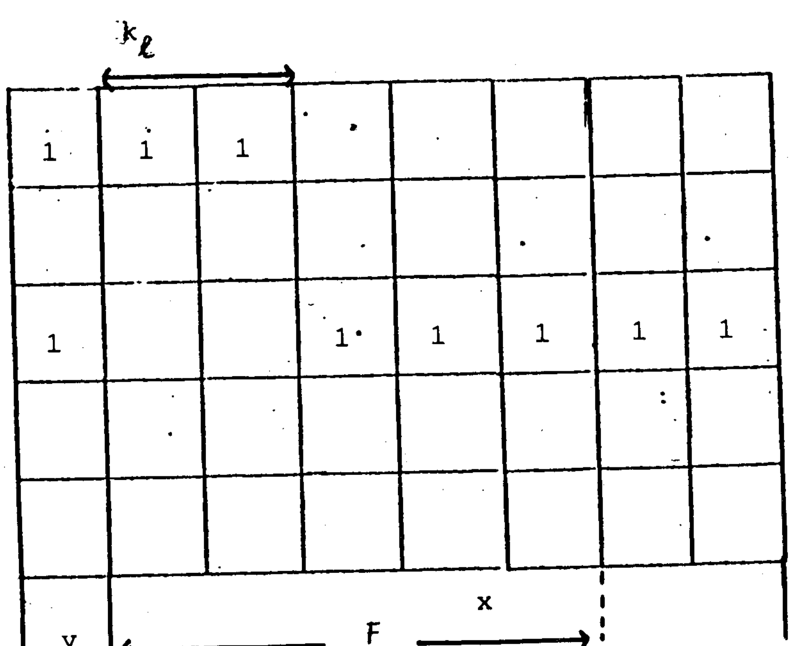
$$\neq i_o \pmod{m}$$

car $\qquad (m_\ell - 1)k_\ell \neq 0 \pmod{m}$.

L'écart (mod. m) entre la dernière ligne et la première est différent des autres écarts (mod. m).

<u>Exemple</u>. $\quad m = 5,\ k_\ell = 2,\ m_\ell = 3,\ n = 7.$

On construit des solutions du type suivant :



1		1	1				
1	1			1	1	1	1
y			F	x			

etc ...

$\Sigma^F =$

1	1			
	1	1		
		1	1	
			1	1
1				1

Remarque.

Si $k_\ell = m-1$, on a toujours $m_\ell = \lceil \frac{m}{k_\ell} \rceil = 2$ et donc

$$\lceil \frac{m-1}{k_\ell} \rceil = \lceil \frac{m}{m-1} \rceil - 1$$

car

$$\lceil \frac{m-1}{k_\ell} \rceil = \lceil \frac{m-1}{m-1} \rceil = 1 = \lceil \frac{m}{m-1} \rceil - 1 = 2-1.$$

Il y a donc toujours deux types de solutions entières sur $C_\sigma^=$, celles vérifiant $\sum_i y_i = m_\ell = 2$ et celles vérifiant $\sum_i y_i = m_\ell - 1 = 1$.
Dans [x], nous avions montré qu'il existait m solutions entières telles que $\sum_i y_i = 1$ et $n(m-1)$ solutions entières telles que $\sum_i y_i = 2$, que toutes ces solutions étaient indépendantes, et que C_σ était donc une facette du polyèdre enveloppe convexe des solutions entières de SPLP.

II.5.5. AUTRES TYPES DE CONTRAINTES ADDITIONNELLES

Les coupes C_σ ne sont pas bien sur les seules contraintes additionnelles valides et strictes que l'on puisse engendrer à partir de solutions fractionnaires.

Ecrivons de nouveau le système d'inégalités définissant le cône dont le sommetest la solution fractionnaire (x) :

$$\begin{cases} x_{ij} = \frac{1}{k} \text{ si } \Sigma_i^j = 1, \ j \in F \\ x_{ij} = 0 \text{ si } \Sigma_i^j = 0, \ j \in F \\ y_i = \frac{1}{k} \ \ \forall i \end{cases}$$

avec $(m,k) = 1.$

$$j \in F : \sum_i x_{ij} \leq 1 \qquad \text{(a)}$$

$$x_{ij} - y_i \leq 0 \quad \text{pour } \Sigma_i^j = 1 \qquad \text{(b)}$$

$$-x_{ij} \leq 0 \quad \text{pour } \Sigma_i^j = 0 \qquad \text{(c)}$$

Prémultiplions la matrice A de ce système par un vecteur ligne t et cherchons à résoudre

$$tA = 0 \text{ (mod. k)}, \ t \text{ entier},$$

ou encore

$$A^t.t^t = 0 \text{ (mod. k)}$$

soit en reprenant les notations de II.3,

$$C.a = o \text{ (mod. k)}.$$

Il existe deux matrices unimodulaires U et V telles que

$$G = UCV$$

soit une matrice diagonale, et en posant $g_i = G_i^i$ et $a = VY$,

$$g_i Y_i = 0 \text{ (mod. k)}.$$

Ce système a k solutions (mod. k) et il existe donc k directions de contraintes additionnelles dont les coefficients soient tous compris entre 0 et k-1, et entiers . L'une d'entre elles sera la contrainte triviale

$$0. \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq 0$$

Il existe donc effectivement (k-1) directions de contraintes additionnelles intéressantes.

Nous allons les déterminer simplement en multipliant (a) par $k-\alpha$,(b) par α et (c) par $(k-\alpha)$, α entier, compris entre 0 et k, et nous allons additionner membre à membre les inégalités obtenues :

$$\sum_{j\in F}\sum_{i\in\sigma(j)} (k-\alpha+\alpha)x_{ij} - \sum_i \alpha\, ky_i \le m(k-\alpha)$$

ou encore

$$\boxed{\sum_{j\in F}\sum_{i\in\sigma(j)} x_{ij} - \sum_i \alpha y_i \le \left\lfloor \frac{m(k-\alpha)}{k} \right\rfloor}$$

La contrainte additionnelle sera stricte si

$$\frac{m(k-\alpha)}{k} \notin \mathbb{Z}$$

or $(k,m) = 1$ et pour $1 \le \alpha \le k-1$, $k \nmid k-\alpha$.

On aura donc une famille d'inégalités strictes et valides

$$\sum_{j\in F}\sum_{i\in\sigma(j)} x_{ij} - \alpha\sum_i y_i \le m - \left\lceil \frac{\alpha m}{k} \right\rceil \qquad (P_\sigma^\alpha)$$

et

(1) les coefficients de (P_σ^α) sont compris entre 0 et k-1 en valeur absolue

(2) il y a (k-1) inégalités $(\alpha=1,\dots,k-1)$

(3) P_σ^1 est C_σ.

On peut remarquer d'autre part que pour la solution fractionnaire de départ,

$$\sum_{j\in F}\sum_{i\in\sigma(j)} x_{ij} = m$$

et

$$\sum y_i = \frac{m}{k}$$

donc le premier membre vaut $m - m\,\frac{\alpha}{k}$ qui est toujours positif si $0 < \alpha < k$.
De même le second membre $m - \lceil\frac{\alpha m}{k}\rceil$ est aussi toujours positif.

* *
*

- ANNEXE B

THÉORÈMES DE FARKAS

EN

PROGRAMMATION ENTIÈRE MIXTE

Le théorème de Farkas généralisé (théorème II.2.1) peut également s'écrire pour un programme non linéaire en variables mixtes du type

$$\text{(PEM) Max } \{f(x,y) \mid a(x,y) \overset{I}{\leq} b,\ x \in Z^n\}.$$

Nous donnons ci-dessous énoncé et démonstration.

Théorème B.1

Soit $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $a : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in Z^n,\ a(x,y) \overset{I}{\leq} b\}$, $(\bar{x},\bar{y}) \in K$.

Si :

1° $\nabla f(\bar{x},\bar{y})$ *existe et est à coefficients rationnels*

2° $\nabla a(\bar{x},\bar{y})$ *existe, est inversible et à coefficients rationnels,*

3° f est quasi-convexe

4° a_I *est pseudo-concave en* $(\bar{x},\bar{y})$ *et* $a_{\bar{I}}$ *est linéaire*

alors

si $(\overset{*}{x},y) \in K \Rightarrow f(x,y) \leq f(\bar{x},\bar{y})$,

il existe $u \in (Q^{n+m})^* : \begin{cases} u^I \geq 0 \\ \nabla f(\bar{x},\bar{y}) = u.\nabla a(\bar{x},\bar{y}). \end{cases}$

Démonstration.

(1) Existence de u :

La matrice $\nabla a(\bar{x},\bar{y})$ étant régulière, il existe une solution unique u au système linéaire

$$\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = u.\nabla a(\bar{x},\bar{y})$$

(2) Signe de u :

$u^I \geq 0$. Supposons que u^I ne soit pas positif ou nul. Supposons par exemple que

$$1 \in I \text{ et } u^1 < 0.$$

Alors

$$B \stackrel{\Delta}{=} \nabla a(\bar{x},\bar{y}) = \frac{D}{q}$$

où D est une matrice entière et q le dénominateur commun des éléments de B, $q > 0$.
On a donc

$$B^{-1} = q.D^{-1} = \frac{C}{\Delta.q^{n-1}}$$

où C est une matrice entière et où $\Delta = |\det B|$.
Soit $\begin{pmatrix} \overset{\circ}{x} \\ \overset{\circ}{y} \end{pmatrix} = - C'$, alors

(α) $\quad \underset{\sim}{\bar{x} + \overset{\circ}{x} \in Z^n}$

en effet $\bar{x} \in Z^n$

$\overset{\circ}{x} \in Z^n$

(β) $a[(\bar{x},\bar{y}) + (\mathring{x},\mathring{y})] \overset{I}{\leq} b$

en effet

$\nabla a(\bar{x},\bar{y}).(\mathring{x},\mathring{y}) = B.(\mathring{x},\mathring{y}) = B.(-C') = -B.\Delta q^{n-1}.(B^{-1})$

$$\nabla a_I(\bar{x},\bar{y}).(x,y) = \begin{bmatrix} -\Delta q^{n-1} \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \text{ et } \nabla a_{\bar{I}}(\bar{x},\bar{y}).(\mathring{x},\mathring{y}) = 0$$

implique, puisque a est pseudo concave en $(\bar{x},\bar{y})$ et $a_{\bar{I}}$ linéaire, que $a[(\bar{x},\bar{y}) + (\mathring{x},\mathring{y})] \leq 0$.

(γ) $f[(\bar{x},\bar{y}) + (\mathring{x},\mathring{y})] > f(\bar{x},\bar{y})$

en effet $\nabla f(\bar{x},\bar{y}).(\mathring{x},\mathring{y}) = uB.(\mathring{x},\mathring{y}) = u^1B_1(\mathring{x},\mathring{y}) = -u^1\Delta q^{n-1} < 0$

implique, puisque f est quasi convexe, en $(\bar{x},\bar{y})$, que

$f[(\bar{x},\bar{y}) + (\mathring{x},\mathring{y})] > f(\bar{x},\bar{y})$

Il y a donc contradiction et il faut que $u^I \geq 0$.

( ) $u \in (Q^{n+m})^*$.

$\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = u.\nabla Q(\bar{x},\bar{y}) \Longrightarrow u = \nabla f(\bar{x},\bar{y}).[\nabla a(\bar{x},\bar{y})]^{-1}$

et si $\nabla f(\bar{x},\bar{y})$ et $\nabla a(\bar{x},\bar{y})$ sont des matrices rationnelles u est aussi à coefficients rationnels.

□

CHAPITRE 3

ALGORITHMES ET APPLICATIONS

III.1 RESOLUTION DE PB.

La résolution du problème (PB) sans structure particulière va demander l'utilisation d'un algorithme incorporant trois aspects différents. D'une part, il devra être de type énumératif, puisque le problème est NP-complet et que pour l'instant du moins on peut considérer qu'il n'existe pas d'algorithme général qui soit polynomial. Ensuite de façon à pouvoir énumérer une portion aussi réduite que possible de l'ensemble des solutions "possibles", il faudra faire appel à des tests qui s'ils sont positifs permettront d'éliminer des sous-ensembles de ces solutions "possibles" comme étant soit dépourvues d'intérêt en ce qui concerne l'optimisation soit non susceptibles d'être réalisables. Les relaxations sont en général utilisées pour fournir des bornes et les sondages pour fournir des renseignements sur la structure des solutions entières.

Un algorithme type pourra se représenter sous la forme suivante ou sous l'une des formes écrites dans [k] ou [r] par exemple. Dans (A) nous décrivons le travail qui peut être fait à un noeud et dans (B) nous proposons une façon de construire un arbre pour l'énumération.

A

I. MISE À JOUR DU PROBLÈME. On remplace les variables fixées sur l'arbre par leurs valeurs. Soit (PB(ν)) le problème (PB) au noeud ν.

II. ESSAI DE SOLUTION(S) PARTIELLE(S). On fixe temporairement à certaines valeurs un sous-ensemble des variables entières du problème et on résoud le programme linéaire relaché restant en continu. Suivant que ce programme a ou non une solution optimale finie, on calcule des inégalités de Benders de type 1 ou 2, inégalités ne portant que sur les variables entières (si on conserve dans le programme linéaire toutes les colonnes correspondant aux variables fixées, on aura en effet des coefficients pour toutes les variables entières et les conditions de Benders seront des conditions globales).

III. RECHERCHE HEURISTIQUE DE SOLUTIONS RÉALISABLES. On utilise une ou plusieurs des heuristiques présentées en I.3.2. Si on obtient des solutions réalisables, la meilleure sera conservée (on l'appelera (x^*,y^*)) et la valeur correspondantede la fonction économique, soit z^*, sera à la fois utilisée comme borne supérieure de z et dans les inégalités de Benders de type 1.

IV. GÉNÉRATION D'INÉGALITÉS LOGIQUES. A partir, soit des contraintes (dans le cas d'un problème entier pur) soit des conditions de Benders, on engendre des inégalités logiques de degré minimum. On vérifie s'il n'est pas possible d'en déduire que certaines variables ne peuvent prendre que certaines valeurs. Si cela est possible, on les fixe à ces valeurs et on continue avec un problème réduit.

V. RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME RELACHÉ, soit (PC), soit (PCE). Pour de gros problèmes, il semble important d'ajouter aux contraintes d'origine (mises à jour) le plus de contraintes logiques possible. (voir [20] et [m]). Le programme relaché ayant été résolu on peut éventuellement y ajouter des inégalités de Gomory-Johnson et réoptimiser aussi longtemps que l'amélioration de la fonction économique est supérieure à un seuil fixé à priori.

VI. CALCUL DES PÉNALITÉS. En utilisant les conditions logiques et le tableau simplicial final de (PCE), on peut obtenir des pénalités, c'est-à-dire des bornes inférieures sur le changement de l'optimum résultant de la fixation à 1 ou à 0 des variables de $(PB(\nu))$.

VII. SONDAGES LOCAUX. En utilisant les contraintes logiques et les pénalités, on essaie de prévoir de façon systématique ce qui se passerait si on fixait les variables encore libres à l'une des deux valeurs possibles, 0 ou 1, et on suit les réactions en chaîne qui s'ensuivent lorsque l'on combine ces fixations [t] (ceci s'appelle "probing" en anglais).

B.

Ces sondages locaux peuvent être très précieux dans la mesure où l'on peut choisir de se brancher sur la variable qui va permettre de fixer dans un sens ou dans l'autre (c'est-à-dire qu'on la fixe à 0 ou à 1) le plus de variables possible. On est assuré ainsi de construire des arbres peu profonds, les variables se fixant d'elles-mêmes par des tests logiques. Si on réduit la profondeur de l'arbre de n à, par exemple, k, on aura 2^k sommets au lieu de 2^n, ce qui représente un gain de temps appréciable. Le travail effectué à chaque noeud est loin bien sur d'être négligeable, mais il est toujours préférable de réduire la *complexité* du problème autant que possible. Nous décrivons dans [b], [m], [t] et [k] par exemple, comment associer un "état" à chaque noeud de l'arbre d'énumération. Un état est par définition une partition de l'ensemble des variables libres (non fixées sur l'arbre) en trois sous-ensembles,

L0 ensemble des variables temporairement fixées à 0

L1 ensemble des variables temporairement fixées à 1

L2 ensemble des variables considérées comme libres.

La résolution (en un noeud) du problème d'état correspondant (plus contraint qu'un problème PC d'un code de Branch and Bound) fournira en particulier une (ou des) conditions de Benders qui seront ensuite utilisées pour fixer des variables ou pour guider la recherche. Des expériences faites par nous et par d'autres auteurs (voir [29] par exemple) prouvent que l'énumération d'états permet dans bien des cas de réduire considérablement la recherche en permettant de fixer des variables sans avoir à les énumérer.

III.2 RESOLUTION DE PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT D'OPERATIONS D'ENTRETIEN

Il s'agit de problème d'ordonnancement que l'on peut formuler comme problèmes de type (PB) et qui étant donné leur structure particulière vont être traités de façon plus spécifique.

Considérons un ensemble de M machines $i, i = 1,\ldots,M$, qui doivent être mises hors-service au début d'une des périodes $t = 1,2,\ldots,T$. On définit $x_{i,t}$, variable booléenne, qui indiquera si l'entretien de la machine i commence ou non en période t. L'entretien de la machine i demande D(i) périodes contigues. On peut se trouver en face de deux objectifs différents

1° soit l'ordonnancement des demandes en main d'oeuvre

2° soit l'ordonnancement de façon à maximiser les réserves.

III.2.1. SI L'ON VEUT SIMPLEMENT S'OCCUPER DE LA MAIN D'OEUVRE.

Soit L(i) un vecteur de longueur D(i) spécifiant les demandes en main d'oeuvre pour chaque unité de temps pendant l'entretien de la machine i, et soit R(t) le besoin en main d'oeuvre pendant la période t.
On cherche

$$\begin{aligned} &\text{Min } R \\ &R(t) \leq R, \; t = 1,\ldots,T \\ &R(t) = \sum_i L(i).\xi(i,t), \; t = 1,2,\ldots,T \end{aligned}$$

où $\xi(i,t) = 1(0)$ correspond à l'arrêt de la machine i en période t (ou non).

III.2.2. SI ON CONSIDERE AU CONTRAIRE QUE C'EST LA PRODUCTION DES MACHINES QUI EST D'UNE IMPORTANCE PRIMORDIALE.

Soit a(i) la capacité de la machine i, et soit L(i) un vecteur de longueur D(i) ayant tous ses coefficients égaux à a(i). Alors soit R(t) une borne supérieure de la capacité de production mise hors-circuit en période t. On veut garder autant de "réserve" que possible. Ceci sera le cas d'une compagnie fournissant par exemple de l'énergie non stockable et qui veut être capable de faire face au mieux à une augmentation soudaine de la demande à un moment quelconque de la période de gestion (i.e. $t \in \{1,2,\ldots,T\}$) :

$$\begin{aligned} &\text{Max } \lambda \\ &\quad Mx = e \\ &\quad Qx + \lambda = R. \\ &\quad x_{i,t} = 0 \text{ ou } 1,\ i = 1,\dots,M, t = 1,\dots,T. \end{aligned}$$

où $Mx = e$ représente les contraintes de choix multiple, et $e_k = 1 \ \forall k$.

Nous avons proposé dans [n] une méthode énumérative qui s'est avérée très efficace pour des problèmes de taille moyenne et qui pourrait être utilisée partiellement comme une heuristique pour des problèmes de grande taille. Ceci est rendu nécessaire par la taille des problèmes PB correspondants : un problème avec 10 machines et 52 périodes (52 semaines) se transforme en un (PB) avec 2081 variables booléennes et plus de 100 contraintes.

La méthode décrite adapte les méthodes d'énumération implicite, le sommet de l'arbre étant le vecteur nul et les machines étant interrompues une à une. Elles sont préordonnées soit par rapport aux produits a(i).D(i) soit par rapport aux classes de conflits. Plusieurs exemples sont décrits en détail dans [n].

L'algorithme proposé est particulièrement intéressant lorsqu'il s'agit d'avoir une réponse rapide sur un système intéractif du type APL ; si l'on veut prouver l'optimalité par contre, suivant la nature des problèmes (plus ou moins contraints), l'exploration sera plus ou moins longue.

III.3. RESOLUTION DE PROBLEMES D'IMPLANTATION AVEC CAPACITES.

Dans [u] et [v], nous avons proposé une méthode directe de *montée duale* ("dual ascent") qui, couplée avec une méthode heuristique de mise en évidence de solutions réalisables, et intégrée dans une méthode d'énumération implicite ou d'énumération d'états, permet de résoudre efficacement des problèmes de flots dans des graphes avec capacités et avec charges fixes sur tous les sommets sauf les sommets-clients.

L'idée de la méthode de *montée duale* (proposée initialement dans [5] par Bilde et Krarup) est essentiellement la suivante : si l'on écrit le problème dual de (PC) ou (PCE) correspondant au problème d'implantation avec capacités sur un graphe à plusieurs niveaux, ce problème dual a une structure très particulière, peu de types de contraintes différents, et un grand nombre de variables.

Si le problème est trop gros pour être résolu efficacement (et exactement) en tant que programme linéaire, on peut cependant essayer de lui trouver une solution réalisable et d'améliorer celle-ci itérativement en ne travaillant que sur des sous-ensembles des variables à chaque pas de l'algorithme. Dans [V] nous avons montré que l'adjonction de contraintes ne portant que sur les variables entières et tirées simplement de la configuration du graphe permettait d'augmenter l'optimum du dual et d'ajouter un certain nombre de degrés de liberté par l'introduction des variables duales supplémentaires. Nous avons proposé des étapes (basées sur ces variables) qui sont très efficaces parce qu'elles sont basées sur la structure du graphe associé. Nous nous proposons maintenant d'utiliser les solutions duales obtenues (1e) pour résoudre des problèmes de Benders sur les inégalités associées, les résultats obtenus par T. Van Voy étant très prometteurs, et (2e) pour obtenir des fixations de variables et des solutions heuristiques encore plus performantes.

CHAPITRE 4

CONDITIONS D'OPTIMALITE

EN

PROGRAMMATION DIFFERENTIABLE

Dans [1], nous avons démontré des conditions d'optimalité pour le programme mathématique

$$(P) : \max \{f(x) \mid a(x) \in B,\ x \in C\}$$

où $C \subset X$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a : X \to Y$, $B \subset Y$, X et Y étant des espaces de Banach et où les fonctions f et a sont supposées différentiables au sens de Fréchet. Les conditions *nécessaires* d'optimalité sont valides sous une hypothèse de qualification des contraintes très générale (elle est impliquée par toutes les hypothèses similaires qui avaient été proposées auparavant) (voir par exemple [26]) ; cette hypothèse est en outre indispensable si l'on veut que *toutes* les fonctions différentiables ayant leur optimum au même point que a(x) vérifient les conditions d'optimalité proposées. Gould et Tolle ([16]) ont d'ailleurs montré par la suite que cette hypothèse de qualification des contraintes était la plus générale possible.

Les conditions *suffisantes* d'optimalité sont démontrées sous des hypothèses de convexité bien plus faibles que celles qui avaient été imposées jusqu'alors.

Ces conditions d'optimalité sont une généralisation des conditions de Kuhn et Tucker qui, elles se rapportaient au problème

$$(P') : \max \{f(x) \mid a(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n\}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. La forme très générale des contraintes de (P) permet d'envisager une classe de problèmes beaucoup plus large que ne le permettait (P'). Récemment deux articles ([3], [25]) ont présenté des applications nouvelles de ces conditions de Kuhn et Tucker généralisées qui montrent bien que la généralisation apportée n'est pas triviale.

Dans [e], nous avons également montré comment ré-écrire ces conditions dans le cadre de la topologie faible .

Les articles plus récents, comme par exemple [6] et [30], se passant de conditions de qualifications des contraintes, obtiennent des résultats très intéressants concernant l'optimalité, mais les hypothèses étant plus faibles, les résultats le sont également. Dans notre étude par contre, nous ne renonçons pas à obtenir des conditions d'optimalité fortes, nous montrons simplement que les conditions d'optimalité se formulent d'une façon plus générale, et que sous les hypothèses classiques on retrouve les théorèmes de Kuhn et Tucker usuels. Lorsque par contre ces conditions ne sont pas vérifiées, nous démontrons qu'il existe des conditions plus générales qui sous des hypothèses parfaitement bien définies non seulement sont nécessaires mais peuvent aussi être suffisantes. Nous avons ainsi expliqué *pourquoi* les conditions de Kuhn et Tucker ne pouvaient pas être vérifiées dans tous les cas et par quoi on pouvait les remplacer lorsqu'elles n'étaient pas satisfaites.

CHAPITRE V

CONCLUSION

Les résultats des recherches qui font l'objet de cette thèse peuvent être regroupés sous deux thèmes principaux.

D'une part, *les techniques, méthodes et algorithmes* proposés pour la résolution de programmes en nombres entiers nous ont permis soit de résoudre efficacement des problèmes difficiles (problèmes d'ordonnancement, d'implantation, de réseaux avec charges fixes, voir [ ], [ ], [ ] par exemple) soit de mettre à la disposition d'autres chercheurs des outils efficaces qu'ils ont utilisés pour des problèmes de types différents (voir [20]). Il est par exemple particulièrement encourageant de voir que des techniques que nous avons étudiées comme les inégalités logiques et leurs implications, les sondages locaux, permettent de résoudre rapidement des problèmes concrets de grande taille pour lesquels un très bon code commercial avait échoué.

Nous nous sommes intéressé d'autre part, à la *structure des domaines* de solutions réalisables et à la *nature des solutions optimales*. Cela nous a conduit d'abord à étudier la génération d'inégalités valides pour les problèmes en entier à partir de la définition même du problème, c'est-à-dire à partir des contraintes telles qu'elles sont exprimées initialement, ainsi que les caractéristiques des facettes de certains problèmes particuliers. Nous avons par ailleurs définis l'optimalité d'une solution $\bar{x}$ en fonction de la position de $\bar{x}$ dans C et de $a(\bar{x})$ dans B pour le problème

$$(P) \quad \text{Max } \{f(x) \mid a(x) \in B,\ x \in C\} \ ;$$

jusqu'alors les contraintes, écrites sous la forme $a(x) \geq o$, avaient en quelque sorte "caché" le rôle de $a(\bar{x})$. Nous avons pu ainsi en particulier dégager la signification des relations d'exclusion en précisant les interactions existant entre les variables duales et $a(\bar{x})$. Nous avons obtenu des conditions qui se substituent aux conditions de Kuhn et Tucker lorsque celles-ci ne sont pas vérifiées.

REFERENCES

1 E. BALAS, *An additive Algorithms for solving linear programs with zero-one variables,* Op. Res. 13 (1965) 517-546.

2 E. BALAS, M.W. PADBERG, *On the Set covering Problem,* J. ORSA 20 (1972) 1152-1161 ; Part II : *An Algorithm,* Mgt. Sc. Res. Rep. Carnegie Mellon U., 1972.

3 P.J. BENDER, *An Application of Guignard's Generalized Kuhn-Tucker conditions,* JOTA 25 (1978).

4 J.F. BENDERS, *Partitioning Procedures for Solving Mixed-variables Programming Problems,* Num. Math. 4 (1962) 238-252.

5 O. BILDE, J. KRARUP, *Sharp lower bounds and efficient algorithms for the Simple plant location problem,* Annals of Discrete Mathematics, 1 (1977) 79-97.

6 F.H. CLARKE, *A new Approach to Lagrange Multipliers,* Math of O.R. 1 (1976) 165-174.

7 S.A. COOK, *The complexity of theorem-proving Procedure,* in : Proceedings of 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1971) 151-158.

8 G. CORNUEJOLS, M. FISHER, G. NEMHAUSER, *On the uncapacitated location problem,* Annals of Discrete Mathematics, 1 (1977) 163-177.

9 J. EDMONDS, *Maximum matching and a polyhedron with 0,1 vertices,* Journal of Research of the NBS, Sect. B69 (1965) 125-130.

10 D. ERLENKOTTER, *A Dual-Based Procedure for uncapacitated Plant Location* Operations Research, 26 (1978).

11 J.C. FIOROT, *Structures d'ensembles de points entiers,* Thèse de Doctorat de Spécialité, Lille, 1971.

12 J. FREHEL, *Une Méthode de Troncature pour la Programmation en Nombres Entiers,* Etude n° FF2-0072-0, février 1969, Service Dévelopment Scientifique, IBM France.

13 A. GEOFFRION, *Lagrangean Relaxation for Integer Programming,* M. P. Study 2 (1974) 82-114.

14 P.C. GILMORE, R.E. GOMORY, *A linear Programming Approach to the cutting Stock Problem,* Op. Res. 11, p. 863.

15 R.E. GOMORY, *An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs,* in : R.L. Graves and P. Wolfe, eds. Recent Advances in Mathematical Programming, Mc Graw Hill, 1963, 269-302.

16 R.E. GOMORY, E.L. Johnson, *Some Continuous Functions Related to Corner Polyhedra,* II M.P. 3 (1972) 359-389.

17 F. GOULD, J. TOLLE, *Geometry of Optimality conditions and constraint qualifications,* MP 2 (1972) 1-18.

18 M. GRÖTSCHEL, M.W. PADBERG, *On the Symmetric Travelling Salesman Problem, I. Inequalities,* M. P. 16 (1979) 265-280.
II. Lifting Theorems and Facets, M.P. 16 (1979) 281-302.

19 S. HONG, M.W. PADBERG, *On the Symmetric Travelling Salesman Problem : A computational Study,* IBM T.J. Watson Research Center Report, 1977.

20 P. HUARD, *La Méthode Simplex sans inverse explicite,* EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, n° 2 (1979), 79-98.

21 E.L. JOHNSON, U. SUHL, IBM Research Report, à paraître et *Experiments in Integer Programming,* Applied Discrete Mathematics, 2 (1980) 39-55.

22 R.M. KARP, *Reducibility among combinatorial problems,* in R.E. Miller and J.W. Thatcher, eds., Complexity of Computer Computations, Plenum Press, NY, 1972, 83-103.

23 B. KORTE, *Approximate Algorithms for discrete optimization problems,* Annals of Discrete Mathematics 7 (1979) 85-120.

24 A.H. LAND, A.G. DOIG, *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems,* Econometrica 28 (1960) 497-520.

25 C. LEMKE, K. SPIELBERG, *Direct Search 0-1 and Mixed-Integer Programming,* J. ORSA, (1967), 892-914.

26 J.W. NIEUWENHUIS, *Another Application of Guignard's Generalized Kuhn-Tucker Conditions,* JOTA 30 (1980) 117-125.

27 D. W. PERTERSON, *A review of constraint Qualifications in finite-dimensional spaces,* SIAM Review, (1973), 639-654.

28 K. SPIELBERG, *Algorithms for the Simple Plant location Problem with some side Conditions,* J. ORSA 17 (1969).

29 K. SPIELBERG, *Plant Location with Generalized Search Origin,* Mgt Sc. (1969).

30 D. WERTHEIMER, *Le Problème d'Implantation à trois niveaux : une Méthode de Résolution exacte,* Thèse de Doctorat de Spécialité, Lille, 1976.

31 S. ZLOBEC, A BEN-TAL, A. BEN-ISRAEL, *Characterization of optimality in Convex Programming without a constraint qualification.*

LISTE DES ARTICLES PROPOSES POUR LA THESE

*

* *

a) *Conditions d'optimalité en Programmation Mathématique dans un espace de Banach*, M. Guignard, CR.Ac Sc. Paris, (1968), Série A, t. 267, 223-225.

b) *Search Techniques with Adaptive Features for Certain Integer and Mixed Integer Programming Problems*, M. Guignard, K. Spielberg, Proceedings, IFIPS Congress, Edinburgh, (1968), 238-244.

c) *Generalized Kuhn-Tucker Conditions for Mathematical Programming Problems in a Banach Space*, M. Guignard, SIAM J. Control, (1969), 232-241.

d) *Conditions d'Optimalité et Dualité en Programmation Mathématique*, M. Guignard, Cahiers du B.U.R.O., série Recherches, Cahier n° 14, ISUP, 1970.

e) *Asymptotic Optimality Conditions and Constraint Qualifications*, M. Guignard, Publication n° 26, 1970, Université de Lille, Laboratoire de Calcul.

f) *Contraintes additionnelles en variables bivalentes*, M. Guignard, Laboratoire de Calcul, Université de Lille, Mars 1970.

g) *Méthodes Heuristiques de résolution d'un système d'inégalités linéaires en variables entières ou bivalentes*, M. Guignard, Rapport n° 32, Janvier 1972, Laboratoire de Calcul, Université de LIlle 1.

h) *Une Condition d'Optimalité en Programmation en Nombres Entiers*, M. Guignard, RFIRO, (1971), 108-113.

i) *The State Enumeration Method for Mixed 0-1 Programming*, M. Guignard, K. Spielberg, IBM Philadelphia Scientific Center Report 320-3000, 1971.

j) *Mixed-Integer Algorithms for the 0-1 Knapsack Problem*, M. Guignard, K. Spielberg, IBM J. Research and Development, (1972), 424-430.

k) *A Realization of the State Enumeration Procedure*, M. Guignard, K. Spielberg, IBM Philadelphia Scientific Center Report, 320-3025, 1973.

l) *Zero-One Zero-One Programming and Enumeration*, M. Guignard, K. Spielberg, in "Nonlinear Programming" ed. O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson, Academic Press, (1975), 333-360.

m) *An Experimental Interactive System for Integer Programming*, M. Guignard, K. Spielberg, Proceedings of the Bicentennial Conference on Mathematical Programming, SIGMAP, 1976, NBS, (1978), 328-337.

liste des articles proposés pour la thèse (suite)

n) *Maintenance Scheduling,* M. Guignard, K. Spielberg, Proceedings of the 9th International Symposium on Mathematical Programming, Budapest 1976.

p) *Reduction methods for State Enumeration Integer Programming,* M. Guignard, K. Spielberg, Annals of Discrete Mathematics, 1 (1977) 273-285.

q) *Algorithms for Exploiting the Structure of the Simple Plant Location Problem,* M. Guignard, K. Spielberg, Annals of Discrete Mathematics, 1 (1977) 247-271.

r) *Propagation, Penalty Improvement and use of logical Inequalities in Interactive 0-1 Programming,* M. Guignard, K. Spielberg, Operations Research Verfahren, XXV, teil 1, (1977) 158-171.

s) *Preferred Variables and Improved Penalties in 0-1 Programming,* M. Guignard, Technical Report n° 29, Revised Dec. 76, Dept. of Statistics, Wharton-School.

t) *Survey of Enumerative Methods for Integer Programming,* M. Guignard, K. Spielberg, U. Suhl, Proceedings, Share 51, 1978.

u) *A Direct Dual Method for the Mixed Plant Location Problem with some side constraints,* M. Guignard, K. Spielberg, Math. Prog., 17 (1979), 198-227.

v) *A Direct Dual Approach to a Transshipment Formulation for Multi-Layer Network Problems with Fixed Charges,* M. Guignard, K. Spielberg, Dept. of Stat., Wharton School, Report 43, 1979.

w) *Logical Reduction Methods in 0-1 Programming,* M. Guignard, K. Spielberg, accepted for publication in J. ORSA.

x) *Fractional Vertices, Cuts and Facets of the Simple Plant Location Problem,* Math. Prog. Study on Combinatorial Optimization, 12 (1980).

ARTICLES SUPPLEMENTAIRES.

*

* *

α) *Integer Programming in APL,* M. Guignard, K. Spielberg, Proceedings of the 1976 IBM Symposium on Mathematics and Computation, 39-50.

β) *The Collapsing 0-1 Knapsack Problem,* M. POSNER, M. GUIGNARD, (1978) 155-161.