LISTE DES ARTICLES PROPOSES POUR LA THESE

*
* *

a) *Conditions d'optimalité en Programmation Mathématique dans un espace de Banach*, M. Guignard, CR.Ac Sc. Paris, (1968), Série A, t. 267, 223-225.

b) *Search Techniques with Adaptive Features for Certain Integer and Mixed Integer Programming Problems*, M. Guignard, K. Spielberg, Proceedings, IFIPS Congress, Edinburgh, (1968), 238-244.

c) *Generalized Kuhn-Tucker Conditions for Mathematical Programming Problems in a Banach Space*, M. Guignard, SIAM J. Control, (1969), 232-241.

d) *Conditions d'Optimalité et Dualité en Programmation Mathématique*, M. Guignard, Cahiers du B.U.R.O., série Recherches, Cahier n° 14, ISUP, 1970.

e) *Asymptotic Optimality Conditions and Constraint Qualifications*, M. Guignard, Publication n° 26, 1970, Université de Lille, Laboratoire de Calcul.

f) *Contraintes additionnelles en variables bivalentes*, M. Guignard, Laboratoire de Calcul, Université de Lille, Mars 1970.

g) *Méthodes Heuristiques de résolution d'un système d'inégalités linéaires en variables entières ou bivalentes*, M. Guignard, Rapport n° 32, Janvier 1972, Laboratoire de Calcul, Université de LIlle 1.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 223-225 (29 juillet 1968). Série A

PROGRAMMATION. — *Conditions d'optimalité en programmation mathématique dans un espace de Banach.* Note (*) de M^{lle} **Monique Guignard**, présentée par M. André Lichnerowicz.

1. Introduction. — Les conditions de Kuhn et Tucker généralisées énoncées ici sont des conditions d'optimalité en programmation mathématique dans des espaces de Banach. Les hypothèses de qualification données antérieurement peuvent être considérées comme des cas particuliers de l'hypothèse introduite pour prouver que ces conditions sont nécessaires. Elles sont suffisantes lorsque le domaine est pseudo-convexe et non plus obligatoirement convexe. Au cas où même cette hypothèse n'est pas vérifiée, des conditions du second ordre sont suffisantes pour un optimum local strict.

2. Définitions. — *Cônes polaires.* — Soient E un espace euclidien de dimension 1, X un espace vectoriel topologique localement convexe; X^* le dual topologique de $X : X^* = L(X, E)$ est supposé muni de la topologie de la convergence uniforme. Soit C un cône de X. Alors $C^- = \{u \in X^* : \langle u, x \rangle \leqq 0, \forall x \in C\}$ et $C^+ = \{u \in X^* : \langle u, x \rangle \geqq 0, \forall x \in C\}$ sont les cônes polaires négatif et positif de C.

Soit C^* un cône de X^*. Alors

$$C^{*-} = \{x \in X : \langle u, x \rangle \leqq 0, \forall u \in C^*\} \quad \text{et} \quad C^{*+} = \{x \in X : \langle u, x \rangle \geqq 0, \forall u \in C^*\}$$

sont les cônes polaires négatif et positif de C^*.

Cônes et vecteurs tangents. — Soit X un espace de Banach réel, M un sous-ensemble non vide de X, $\bar{x} \in M$, $y \in X$.

Le vecteur $y \in X$ est tangent à M en $\bar{x}$ s'il existe une suite (x_k) contenue dans M et convergeant vers $\bar{x}$, et une suite (λ_k) de nombres positifs, telles que la suite $(\lambda_k(x_k - \bar{x}))$ converge vers y.

L'ensemble $T(M, \bar{x})$ de tous les vecteurs tangents à M en $\bar{x}$ est le cône tangent à M en $\bar{x}$.

L'ensemble $P(M, \bar{x})$, fermeture de l'enveloppe convexe de $T(M, \bar{x})$, est le cône pseudo-tangent à M en $\bar{x}$.

Pseudo et quasi-convexité. — M est pseudo-convexe en $\bar{x} \in M$ si $\forall x \in M$, $x - \bar{x} \in P(M, \bar{x})$.

Soit $\psi(x)$ une fonction réelle de $x \in X$.

ψ est quasi convexe si $\forall \lambda \in E \{x \in X : \psi(x) \leqq \lambda\}$ est convexe.

ψ est pseudo-convexe si ψ est différentiable en x au sens de Fréchet et si $\forall x \in$, $\langle \nabla\psi(\bar{x}), \bar{x} - x \rangle \leqq 0$ implique $\psi(\bar{x}) - \psi(x) \leqq 0$, $\nabla\psi(\bar{x})$ étant la dérivée de ψ.

3. Maximisation sur un ensemble. — Soit X un espace de Banach réel, A un sous-ensemble non vide de X, $\bar{x} \in A$, et $\varphi(x)$ une fonction réelle de $x \in X$, différentiable, au sens de Fréchet, en $\bar{x}$. On considère le problème $\mathrm{Max}\{\varphi(x) : x \in A\}$.

Théorème 1. — *Une condition nécessaire pour que $\bar{x}$ maximise φ sur A est que $\nabla\varphi(\bar{x}) \in P^{-}(A, \bar{x})$. Cette condition est aussi suffisante si φ est pseudo-concave sur A en $\bar{x}$ et si A est pseudo-convexe en $\bar{x}$.*

4. Maximisation sous contrainte. — Soient X et Y deux espaces de Banach réels, *a* une application de X dans Y, $\varphi(x)$ une fonction réelle de $x \in X$. Soient B et C deux sous-ensembles non vides de Y et X respectivement, et soit $A = \{x \in C : a(x) \in B\}$. On suppose $A \neq \emptyset$, et *a* et φ différentiables en $\bar{x} \in A$, au sens de Fréchet. On considère le problème $\mathrm{Max}\{\psi(x) : x \in C,\ a(x) \in B\}$. Soient $K = \{y \in X : \langle \nabla\varphi(\bar{x}), y\rangle \in P[B, a(\bar{x})]\}$, et $H = \{h \in X^{*} : h = u.\nabla a(\bar{x}),\ u \in P^{-}[B, a(\bar{x})]\}$.

Théorème 2 (*Conditions de Kuhn et Tucker généralisées*). — *Si H est fermé, et si G est un cône convexe fermé de X tel que $K \cap G = P(A, \bar{x})$ et tel que $K^{-} + G^{-}$ soit fermé, une condition nécessaire pour que $\bar{x}$ maximise φ sur A est qu'il existe $u \in P^{+}[B, a(\bar{x})]$ tel que $\nabla\varphi(\bar{x}) + u.\nabla a(\bar{x}) \in G^{-}$. Cette condition est aussi suffisante si G est un cône convexe fermé dans X tel que $x - \bar{x} \in G$ pour tout $x \in A$, si A ou $\{x \in X : a(x) \in B\}$ est pseudo-convexe en $\bar{x}$, et si φ est ou pseudo-convexe sur A en $\bar{x}$, ou quasi convexe avec $\nabla\varphi(\bar{x}) \neq 0$.*

Théorème 3 (*Conditions du second ordre*). — *X est supposé de dimension finie.*

Si φ et a sont deux fois continûment différentiables en $\bar{x}$, si G est un cône convexe fermé dans X, si au voisinage de $\bar{x}$, $x \in A$ implique $x - \bar{x} \in G$, si au voisinage de $a(\bar{x})$, $y \in B$ implique $y - a(\bar{x}) \in P[B, a(\bar{x})]$, alors une condition suffisante pour que $\bar{x}$ soit un maximum local isolé pour φ sur A est qu'il existe $u \in P^{+}[B, a(\bar{x})]$ tel que :

— $\nabla\varphi(\bar{x}) + u\nabla a(\bar{x}) \in G^{-}$;

— *pour tout $h \neq 0$ tel que*

$$\langle \nabla\varphi(\bar{x}), h\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \nabla a(\bar{x}), h\rangle \in -P[B, a(\bar{x})] \cap P[B, a(\bar{x})],$$

il s'ensuit que $\langle \nabla^{2}\varphi(\bar{x}) + u\nabla^{2}a(\bar{x}), (h, h)\rangle < 0$.

(*) Séance du 22 juillet 1968.

(1) J. M. Abadie, *Problèmes d'Optimisatio..*, Institut Blaise Pascal, Paris, 1965.

(2) K. J. Arrow et A. C. Enthoven, *Econometrica*, 29, 1961, p. 779-800.

(3) K. J. Arrow, L. Hurwicz et H. Uzawa, *Nav. Res. Log. Quart.*, 8, 1961, p. 175-191.

(4) M. Guignard, *Conditions d'optimalité et dualité en programmation mathématique* (*Thèse de Doctorat de Spécialité*, Université de Lille, Laboratoire de Calcul, 1967).

(5) M. Guignard, *On the Kuhn-Tucker Theory* (*Sixth Symposium on Mathematical Programming*, Princeton University, N. J., 14-18 août 1967).

(6) H. W. KUHN et A. W. TUCKER, *Nonlinear Programming*, J. Neyman (Ed.) (*Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, 1951, p. 481-492).

(7) G. P. MC CORMICK, *J. Appl. Math.*, 15, 1967, p. 641-652.

(8) R. PALLU DE LA BARRIÈRE, *Revue Française de Recherche opérationnelle*, 7, nº 27, 1963, p. 163-180.

(9) D. R. RICE et M. E. THOMAS, *Sufficiency Conditions in Nonlinear Programming*, Working paper, College of Engineering, University of Florida, 1967.

(10) P. P. VARAIYA, *Nonlinear Programming and Optimal Control*, E. R. L. Technical Memorandum M-129, University of California, Berkeley, 1965.

(*Laboratoire de Calcul, Faculté des Sciences de Lille,*
13, *place Philippe-Lebon, Lille, Nord.*)

INFORMATION PROCESSING 68 - NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY - AMSTERDAM (1969)

SEARCH TECHNIQUES WITH ADAPTIVE FEATURES FOR CERTAIN INTEGER AND MIXED INTEGER PROGRAMMING PROBLEMS

M. GUIGNARD
Laboratoire de Calcul, University of Lille, France

K. SPIELBERG
New York Scientific Center, IBM, New York, USA

The paper presents an enumerative algorithm for zero-one programming which has a certain capacity for adapting itself to the given data. There exists numerical evidence which suggests that such an algorithm may lead to substantial improvements over more rigid procedures. A number of important special problems are considered. Some preliminary computational experience is presented.

1. INTRODUCTION

We propose enumerative procedures for linear mixed integer programming with (0, 1) variables, guided by the following considerations:

a) The search should be simple, such as the procedure of Balas [2] for pure (0, 1) programming.

b) It should be flexible, and in some sense capable of adapting itself to the data. The necessity for flexibility is suggested by numerical results [3, 4]. It is introduced here by means of dynamic redefinitions of the search variables (the "state" of the search) suggested by auxiliary problems.

c) The method should make systematic use of auxiliary subproblems and generated inequality constraints [5] to curtail the search.

We believe that the resulting basic algorithm may be an improvement over other methods in current use. To illustrate some of its features, we consider a number of important special problems.

Finally, we give some preliminary computational results.

2. BASIC ADAPTIVE ALGORITHMS

2.1. *The structure of the search*

Consider the problem IP

$$\min\{\zeta = \delta\xi + \gamma\eta \mid D^0\xi + C^0\eta \leq \beta , \quad \xi \geq 0 , \ \eta \dots (0, 1) \text{ vector}\} , \tag{1}$$

with n continuous variables ξ_j, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$, and p integer variables η_k, $k \in K = \{1, 2, \dots, p\}$. An enumerative procedure constructs a sequence of trial vectors $\{\eta^s\}$ and solves the linear program $IP(\eta^s)$. In [2] the search origin is, typically, taken to be $\eta^0 = 0$. A "node ν" at "level l" (see fig. 1) is reached by l "forward steps", i.e., by the explicit process of fixing l components of η at 1. At node ν one has l components fixed at one ($k \in E^\nu$) and possibly some fixed at zero (or "cancelled") by tests or by previous exploration ($k \in Z^\nu$). One has the task of cancelling as many of the remaining "free" variables ($k \in F^\nu$) as possible and selecting among the rest the next link k^* leading to the successor node ν^+. When $F^\nu = \phi$, or when tests demonstrate that no improved solution can be expected at any successor node μ to ν, the search reverts to the predecessor node ν^-. The search terminates on such a condition at level 0.

In the following we propose a more flexible procedure, in which the "state" at node ν, i.e. a

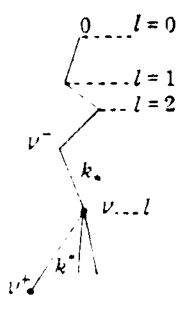


Fig. 1.

certain decomposition and interpretation of all indices, is determined "dynamically" and "adaptively" by the algorithm. Successive vectors η^s will not differ from each other in the simple fashion of fig. 1, but should be more likely to lead to improved solutions and effective curtailment of the search.

The state at ν will be defined by the decomposition of variables (indices):

$$(K, J)^\nu = (E, Z, F1, F2, F3, J)^\nu . \qquad (2)$$

The state determines a basic auxiliary problem IZ^ν, which is resolved at ν instead of the actual problem IP^ν, i.e. problem (1) with fixed components of η_k substituted. Problem IZ^ν is IP^ν with the following temporary disposition of η_k:
$k \in F1^\nu(F2^\nu)$: η_k fixed at 1(0) for ν, free to be set to 0(1) on forward steps.

$k \in F3^\nu : \eta_k$ considered continuous in $[0,1]$ at ν, free to be fixed at 0 or 1 later.

The solution to IP may be obtained from the solutions to IZ^ν over all necessary ν. When $F3^\nu = \phi$, problem IP^ν is:

$$\min\{z = dx + cy \,|\, Dx + Cy \leq b\ ,\ x \geq 0\ ,\ y = (0,\ 1)\} \qquad (3)$$

$$z = \zeta - \sum_{F1^\nu + E^\nu} \gamma_k\ , \quad b = \beta - \sum_{F1^\nu + E^\nu} (C^0)_k .$$

$$x_j = \xi_j\ ,\ d_j = \delta_j\ ,\ j \in J;$$

$$y_k = \eta_k,\ c_k = \gamma_k,\ C_k = C_k^0,\ k \in F2^\nu;$$

$$y_k = 1 - \eta_k,\ c_k = -\gamma_k,\ C_k = -C_k^0,\ k \in F1^\nu.$$

$$(C_k \ldots k\text{th column of } C.) \qquad (4)$$

When $F3 \neq \phi$, x will contain components of η, and (4) has to be altered in an obvious manner. Problem IZ^ν is (3) with $y = 0$. When it is feasible with solution $(x, y, z)^\nu$, we compare the corresponding $(\xi, \eta, \zeta)^\nu$ with the best known solution $(\xi, \eta, \zeta)^*$ of IP, and replace the latter if $\zeta^\nu < \zeta^*$. In this case the problem dual to IZ^ν, namely

$$\max\{-ub \,|\, Du \geq -d\ ,\quad u \geq 0\}\ , \qquad (5)$$

has the solution u^ν with $-u^\nu b = z^\nu$.

The inequality [5]

$$(c + u^\nu C)\,y - u^\nu b \leq z^* = \zeta^* - \sum_{E^\nu + F1^\nu} \gamma_k \qquad (6)$$

must be satisfied by any y which is to lead to an improved solution. In view of (4) it may be written as:

$$\sum_{F1^\nu} (-\gamma_k - (u^\nu C^0)_k)\,y_k + \sum_{F2^\nu} (\gamma_k + (u^\nu C^0)_k)\,y_k \leq \zeta^* - \zeta^\nu . \qquad (7)$$

When IZ^ν is infeasible, there exists a corresponding inequality

$$u^\nu (b - Cy) \geq 0 \qquad (8)$$

or

$$\sum_{F^\nu} (u^\nu C)_k y_k \leq u^\nu b - \sum_{E^\nu} (u^\nu C)_k < 0\ . \qquad (9)$$

In bare outline, our algorithm consists of:

(i) Construction of node ν (i.e., determination of k_*)

(ii) Establishment of the state at ν

(iii) Resolution of IZ^ν. Exploitation of (7), (9).

2.2. *The state at node* ν

There are basically two ways of determining the state at ν. One is to let it coincide with the last state at ν^-, altered by transfer of k_* from F to E or Z. The other consists of "guessing" at a good solution $(\hat\xi, \hat\eta, \hat\zeta)$ of IP^ν and of defining $F1^\nu(F2^\nu)$ as the sets of indices k such that $\hat\eta_k^\nu = 1(\hat\eta_k^\nu = 0)$, k formerly in $F1^\nu + F2^\nu$.

A natural way to make this guess, is to solve the problem LP^ν, obtained from (3) by relaxation of the (0, 1) contraints to $0 \leq y_k \leq 1$ for $k \in F^\nu$, and to round the solution appropriately. For special problems it may be easy (this is desirable but not necessary) to avoid infeasibility of $(\hat\xi, \hat\eta)$. Or one may use other algorithms for (3) and view any feasible solution as obtained from a relaxed problem. Suitable algorithms might be Gomory's first method [6] and Huard's method of centers [10]. In the latter the required polyhedron in y-space would be the intersection of $0 \leq y_k \leq 1$, $k \in F^\nu$, with suitable halfspaces (6) or (8). The auxiliary problems LP^ν may also provide evidence which permits a return form ν to ν^-, such as the conditions: (i) LP^ν is infeasible, (ii) LP^ν has an integral solution, (iii) the objective function to LP^ν attains or exceeds ζ^*. The determination of the state at ν, then, requires little additional effort whenever the use of auxiliary problems is contemplated anyway.

The set $F3^\nu$ is formed by the variables η_k which show the least tendency to take on fractional values at ν and predecessor nodes. It is easy to conceive of rules by which variables are transferred from $F3^\nu$ to $F1^\nu$ or $F2^\nu$.

2.3. *Curtailment and direction of the search*

Let (7) or (9) be the inequality "associated" with ν. It has the form

$$\sum_{L1} \alpha_k\, y_k - \sum_{L2} \beta_k\, y_k \leq -\gamma\ , \quad (\alpha_k,\ \beta_k, \gamma) \geq 0\ . \qquad (10)$$

Consider the quantity $t = -\sum_{L2} \beta_k$.

Condition 1:

$$-\gamma - t < 0 \tag{11}$$

implies that (10) cannot be satisfied at successor nodes of ν and justifies a return to ν^-.

Condition 2:

$$-\gamma - t - \alpha_{k*} < 0\ , \quad k^* \in F^\nu \tag{12}$$

implies the same if y_{k*} is set to 1 and justifies cancellation of k^* at ν.

Inequality (10) may finally be used, unless $\gamma = 0$ (which can be assumed to occur rarely), alone or with other inequalities (the more interesting case), to determine a "preferred" set π^ν, i.e., a set of components, minimal in the number of elements, such that

$$\sum_{k \in \pi^\nu} y_k \geq 1\ . \tag{13}$$

At node ν we need consider only $k \in \pi^\nu$ as candidates for k^*. The coefficients of y_k in (7), i.e. $-\alpha_k$ and $+\beta_k$ of (10), may be interpreted as "gain functions g_k", i.e., (7) may be rewritten as

$$\zeta^\nu - \sum_{F^\nu} g_k^\nu y_k \leq \zeta^* \tag{14}$$

so that $|g_k^\nu|$ is the maximal decrease in ζ^ν, over successive nodes ν, attainable from fixing y_k at 1. The g_k are usually determined by the state (IZ^ν) and not affected by cancellations at ν. It is desirable to have the g_k as small as possible, or the α_k large and the β_k small. If for a given k^*, $g_{k*} \leq 0$ ($\alpha_{k*} \geq 0$) at ν and at all successor nodes, then k^* may be cancelled at ν (k^* will not belong to any preferred set). In concrete cases this property is usually tied to the stronger property $g_k^\mu \leq g_k^\nu$. A simple choice of k^* is to select it so that g_{k*}^ν is maximal over $k \in F^\nu$. For examples of alternate strategies see [4].

2.4. *Algorithms*

Within the above framework, there are three types of algorithm. A "Type 1" algorithm depends on "natural" definitions of the state of the search, which permit establishment of simplifying conditions for the gain functions, in particular the condition $g_k^\mu \leq g_k^\nu$, $k \in F^\nu$. The algorithm then relies on cancellations due to non-positive gain functions. One decides to dispense with the auxiliary problem and depends on the speed of a basic iterative step.

The "Type 2" algorithm uses all devices discussed in this paper and does not rely on special properties of the gain functions. One hopes that the redefinitions of the state serve to keep the current node close to the interesting integer points, so that relatively few points have to be explored. For very special problems, one may be able to combine the above features to obtain a maximally effective algorithm ("Type 3"). However, this may be associated with greater complexity of the gain functions which in turn may entail their recomputation after cancellations [4].

The following is an outline of a type 2 algorithm. To keep it simple, we assume that LP^ν is solved at each node. We also do not describe the imposition of an arbitrary origin (initial state other than suggested by LP^0), once or several times, even though we expect this to be important in practice. Unless stated otherwise, instructions are meant to be followed in sequence.

1. Input of data: $\delta, \gamma, D^0, C^0, \beta$; τ (tolerance)
   Initialization: $l = \nu = 0$, $\zeta^* = \infty$, $F3 = J$, $x = (\xi, \eta)$, $y = 0$.
2. Solve $LP^{\nu+}$, the "projected" auxiliary problem
   a) If $LP^{\nu+}$ is infeasible, go to (c).
   If in the solution $(\xi, \eta, \zeta)_\lambda$, $\zeta_\lambda > \zeta^*$, go to (c).
   If η_λ is integral, replace ζ^* by ζ_λ, record the solution and go to (c).
   b) If $\nu = 0$, go to 3(b). Otherwise to 3(a).
   c) If $\nu = 0$, go to 8 (backup).
   If $\nu \neq 0$, cancel k^*, go to 7.
3. a) Record k^*.
   b) Replace l by l+1, ν by ν+1.
   After a forward step (ν^- to ν) go to 4.
   If $F1^\nu + F2^\nu = \phi$, go to 8.
   Retrieve inequality (gain functions) and state from memory.
   Go to 6.
4. Compute new state: First augment $F1^\nu + F2^\nu$ by a certain number of k: $k \in F3$, $\eta_{k\lambda}$ fractional. Then establish new $F1^\nu$, $F2^\nu$ by some rounding procedure. Try to keep IZ^ν feasible.
5. a) Solve problem IZ^ν, if improved solution to IP^ν found, update ζ.
   b) Compute the coefficients of (10) and store them in memory.
6. If (10) cannot be satisfied at successor nodes with improvement in ζ^* by at least τ (in case of inequality (7)), go to 8. Cancel any $k^* \in F^\nu$ which satisfy (12). (If this affects the gain functions, which it usually does not, go to 5(b). One may have to store the dual variables rather than the gain functions.)
7. If $F1^\nu + F2^\nu$ is empty, go to 8.
   Select k^* so that β_{k*} is maximal over $k \in F1^\nu + F2^\nu$. Transfer k^* to E^ν or P^ν. Go to 2.

3. If $l = 0$, terminate.
Retrieve k_*, the link from ν^- to ν. Transfer indices cancelled at ν to $F1^\nu + F2^\nu$, and those removed from $F3$ at ν back to $F3$. Transfer k_* from $Z^\nu(E^\nu)$ to $E^\nu(Z^\nu)$.
Set $l = l-2$, go to 3(b).

3. SPECIAL PROBLEMS

3.1. *Weakly linked problems*

An important class of problems may be termed "weakly linked", in as much as η_j merely determines whether ξ_j must be zero or not.

$$\min\{\zeta = d\xi + f\eta | A\xi \leq \alpha,\ B\eta \leq \beta,\ \xi_j \leq \mu_j\eta_j,\ \xi \geq 0, \eta_j\ 0 \text{ or } 1\} . \quad (15)$$

Problem (15) incorporates the important fixed charge problems, for which f_j is incurred if and only if $\xi_j > 0$.

For simplicity of notation we assume that $F3^\nu$ is empty. Then IP^ν is of the form

$$\min\{z = dx + \sum_{F2^\nu} f_k y_k - \sum_{F1^\nu} f_k y_k | \quad (16)$$

$$\begin{array}{lll} Ax & \leq \alpha & \\ x_k & \leq \mu_k & k \in E^\nu \\ x_k + \mu_k y_k & \leq \mu_k & k \in F1^\nu \\ x_k - \mu_k y_k & \leq 0 & k \in F2^\nu \\ x_k & \leq 0 & k \in Z^\nu \\ x_k \geq 0,\ y_k \ldots (0,1) & & \} . \end{array}$$

Problem IZ^ν is IP^ν with $y = 0$. The problem dual to IZ^ν is

$$\max\{z_D = -\sum_{i=1}^{m} w_i\alpha_i - \sum_{E^\nu + F1^\nu} \mu_k u_k |$$

$$A^T w + u_k + d_k \geq 0,\ (w_i, u_k) \geq 0\} . \quad (17)$$

It should be easy to determine the state at ν such that IZ^ν is feasible. The associated inequality then becomes

$$\sum_{F1^\nu} (-f_k + \mu_k u_k^\nu) y_k + \sum_{F2^\nu} (f_k - \mu_k u_k^\nu) y_k \leq \zeta^* - \zeta^\nu . \quad (18)$$

The linear programs LP^ν are of the same form as IZ^ν if $f \geq 0$, since the constraints $\xi_k \leq \mu_k\eta_k$ imply that $\eta_k = (1/\mu_k)\xi_k$ at the optimum.

3.2. *The simple plant location problem*

Consider satisfying a demand of 1 at n demand points j from m possible plants i of *unlimited capacity*. If x_{ij} is the fraction supplied by plant i, c_{ij} the corresponding cost and f_i the fixed charge for i, one has the problem:

$$\min\{\zeta = cx + f\eta | x_{ij} \leq \eta_i,\ -\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq -1,\ x_{ij} \geq 0,\ \eta_i \ldots (0,1)\} . \quad (19)$$

Alternatively, the mn constraints $x_{ij} \leq \eta_i$ may be replaced by

$$\sum_j x_{ij} \leq n_i\eta_i , \quad i = 1,2,\ldots,m . \quad (19')$$

For fixed η the solution of (19) is trivial. $x_{ij} = 1$ for $i = i(j)$, $i(j)$ being the index for a minimal cost c_{ij} over permitted i in column j. Actual problems are nevertheless difficult on account of their size. In the present context the problem will illustrate how optimal dual variables may be chosen so as to make the associated inequality effective. IP^ν can be written in a form similar to (16). The corresponding problem IZ^ν, then, has the solution

$$z^\nu = \sum_{j=1}^{n} c_{i(j),j},\ x_{i(j),j}^\nu = 1,\ x_{ij} = 0 \text{ for } i \neq i(j)$$

$$i(j): c_{i(j),j} = \min c_{ij} \text{ over } E^\nu + F1^\nu . \quad (20)$$

The problem dual to IZ^ν is

$$\text{Max}\{z_D = -\sum_{E^\nu + F1^\nu} \sum_J w_{ij} + \sum_J v_j | \begin{smallmatrix} c_{ij} + w_{ij} - v_j \geq 0 \\ (w_{ij}, v_j) \geq 0 \end{smallmatrix}\} \quad (21)$$

and the associated inequality becomes

$$\sum_{F1^\nu} (-f_i + \sum_J w_{ij}) y_i + \sum_{F2^\nu} (f_i - \sum_J w_{ij}) y_i \leq \zeta^* - \zeta^\nu \quad (22)$$

with

$$\zeta^\nu = z_D^\nu + \sum_{E^\nu + F1^\nu} f_i .$$

From complementary slackness $c_{ij} + w_{ij}^\nu - v_j^\nu = 0$ for $i = i(j)$, and $w_{ij}^\nu = 0$ for $i \in E^\nu + F1^\nu$ unless $i = i(j)$.

(i) An obvious choice is

$$v_j^\nu = c_{i(j),j} \text{ all } j,\ w_{ij}^\nu = 0,\ i \in E^\nu + F1^\nu$$

$$w_{ij}^\nu = \max\{0, v_j^\nu - c_{ij}\},\ i \in Z^\nu + F2^\nu . \quad (23)$$

However, the associated inequality (22) is effective, in general, when the gain functions are small. Thus, the above choice is poor, rendering $g_i = f_i$ for $i \in F1^\nu$.

(ii) A better, less obvious, choice is: Consider $\hat{i}(j)$:

$$c_{\hat{i}(j),j} = \mathrm{Min}\{c_{ij} \mid i \in E^\nu + F^\nu - \{i(j)\}\} . \quad (24)$$

Define

$$v_j^\nu = c_{\hat{i}(j),j} \text{ if } c_{\hat{i}(j),j} \geq c_{i(j),j}$$

$$v_j^\nu = c_{i(j),j} \text{ otherwise}$$

$$w_{ij} = \mathrm{Max}\{0, v_j^\nu - c_{ij}\} . \quad (25)$$

For $i \in E^\nu + F1^\nu$ the w_{ij}^ν differ from zero only for $i = i(j)$ when $v_j^\nu = c_{\hat{i}(j),j}$. For given j, then the contribution to z_D is either $v_j^\nu = c_{i(j),j}$ or

$$v_j^\nu - \sum_{F1^\nu + E^\nu} w_{ij}^\nu = c_{\hat{i}(j),j} - c_{\hat{i}(j),j} + c_{\hat{i}(j),j} .$$

The gain functions become

$$g_i = f_i - \sum_{j:i=i(j)} \mathrm{Max}\{0, c_{\hat{i}(j),j} - c_{i(j),j}\} , \ i \in F1^\nu$$

$$g_i = -f_i + \sum_J \mathrm{Max}\{0, c_{i(j),j} - c_{ij}\} , \ i \in F2^\nu . \quad (26)$$

These were used computationally in [4] and have properties demanded for Type 3 algorithms. However, the g_i, $i \in F1^\nu$, are "unstable", in the sense that cancellation of $i \in F2^\nu$ necessitates their recomputation due to changes in $\hat{i}(j)$. This may lead to excessively long calculations.

(iii) Finally, a third choice seems desirable for a Type 2 algorithm

$$\tilde{i}(j) : c_{\tilde{i}(j),j} = \mathrm{Min}\ c_{ij}, \ i \in E^\nu + F1^\nu - \{i(j)\}$$

$$v_j^\nu = c_{\tilde{i}(j),j}, \ w_{ij}^\nu = \mathrm{Max}\{0, v_j^\nu - c_{ij}\} . \quad (27)$$

The gain functions

$$g_i = f_i - \sum_{j:i=i(j)} (c_{\tilde{i}(j),j} - c_{ij}) , \ i \in F1^\nu$$

$$g_i = -f_i + \sum_J \mathrm{Max}(0, c_{\tilde{i}(j),j} - c_{ij}) , \ i \in F2^\nu \quad (28)$$

are now stable. Cancellations affect neither

$$c_{i(j),j} \text{ nor } c_{\tilde{i}(j),j} .$$

3.3. *Capacited plant location*

When source i may not supply more than a_i units, one denotes the requirement at j by b_j and interprets x_{ij} as shipment from i to j and c_{ij} as unit cost.

$$\mathrm{Min}\{ \zeta = cx + f\eta \mid \sum_J x_{ij} \leq a_i\eta_i, \sum_I x_{ij} \geq b_j ,$$
$$x_{ij} \geq 0 , \ \eta_i \ldots (0, 1)\} \quad (29)$$

Interestingly, the addition of the redundant constraints

$$x_{ij} \leq m_{ij}\eta_i , \quad m_{ij} = \min(a_i, b_j) \quad (30)$$

provides a formal device for obtaining strong gain functions.

IZ^ν is a transportation problem with the dual:

$$\mathrm{Max}\{ z_D = - \sum_{E^\nu + F1^\nu} (a_i u_i + \sum_J m_{ij} w_{ij}) + \sum_J b_j v_j \mid$$
$$c_{ij} + w_{ij} + u_i - v_j \geq 0 , \ (w_{ij}, u_i, v_j) \geq 0\} . \quad (31)$$

w_{ij}^ν is zero unless $x_{ij}^\nu = a_i$ or $x_{ij}^\nu = b_j$. Suppose one has a solution $(x_{ij}^\nu, {}^0u_i^\nu, {}^0v_j^\nu)$ to the transportation problem. Can one construct a solution $(w_{ij}^\nu, u_i^\nu, v_j^\nu)$ to (31) which renders the gain functions

$$g_i = \pm f_i \mp a_i u_i \mp m_{ij} w_{ij} , \quad i \in F1^\nu (F2^\nu) \quad (32)$$

as small as possible? An obvious choice is $(w_{ij}^\nu, u_i^\nu, v_j^\nu) = (0, {}^0u_i^\nu, {}^0v_j^\nu)$. However, $x_{ij}^\nu = a_i$ and $x_{ij}^\nu = b_j$ arise in practice and provide an opportunity for improving g_i, $i \in F1^\nu$.

(i) Let j be such that $\exists\ I^* \subset F1^\nu + E^\nu$ so that $x_{i^*j} = a_{i^*}$, all $i^* \in I^*$. Define

$$w_{i^*j}^\nu = \mathrm{Max}\{0, \mathrm{Min}\,(c_{ij} + {}^0u_i^\nu - {}^0v_j^\nu\} ,$$
$$\text{over } i \in E^\nu + F1^\nu - I^*$$

$$v_j^\nu = {}^0v_j^\nu + w_{i^*j}^\nu , \quad u_i^\nu = {}^0u_i^\nu \quad (i \in F1^\nu + E^\nu) . \ (33)$$

Then (31) is satisfied and z_D remains

$$- \sum a_i\, {}^0u_i^\nu + \sum b_j\, {}^0v_j^\nu .$$

All g_{i^*}, $i^* \in I^* \cap F1^\nu$ are reduced by $a_{i^*}w_{i^*j}$, but g_i, $i \in F2^\nu$ are possibly increased.

(ii) Let $i^* \in F1^\nu$ be such that $\exists\ J^* \subset J$, so that $x_{i^*j^*} = b_{j^*}$, all $j^* \in J^*$. Define

$$w^{\nu}_{i*j*} = \text{Max}\{0, \text{Min}(c_{ij*} + {}^{o}u^{\nu}_{i} - {}^{o}v^{\nu}_{j})\}, \quad i \in E^{\nu} + F1^{\nu} - \{i*\}$$

$$v^{\nu}_{j*} = {}^{o}v^{\nu}_{j*} + w^{\nu}_{i*j*}, \quad u^{\nu}_{i} = {}^{o}u^{\nu}_{i} \quad (i \in F1^{\nu} + E^{\nu}). \tag{34}$$

g_{i*} is reduced by $b_{j*}w_{i*j*}$, but g_i, $i \in F2^{\nu}$ are possibly increased. The increases in g_i, $i \in F2^{\nu}$, can be prevented, if the w_{i*j} (w_{i*j*}) are taken to be suitably less than the maximal values given above. The gain functions are stable. For certain other details see [7].

3.4. *Large scale* (0, 1) *programming - Set covering*

Large scale (0, 1) problems arise in many contexts. For concreteness consider the set covering problem

$$\text{Min}\{\zeta = c\eta \mid E\eta \geq e, \ \eta \ldots (0, 1)\}. \tag{35}$$

for which $e^T = (1, \ldots, 1)$ and E has entries 0 and 1 only. Let $c \geq 0$. See [1] for applications (e.g., airline crew scheduling) and methods. Assume that E has relatively few rows, but thousands of columns. An initial state $(F1, F2, F3)^o$ is easily found. At a general node ν, the variables for η_k, $k \in F3^{\nu}$ are treated as continuous variables for IZ^{ν}. Both IZ^{ν} and LP^{ν} may for practical purposes, be considered feasible. There is much latitude as to how the set of "designated integer variables" ($K - F3$) is expanded. One may decide, simply, to add one variable to either $F1^{\nu}$ or $F2^{\nu}$ at each new node ν. The current branch of the tree need not attain an excessively high level l (larger than $2m$, say). One may, e.g., make sure that there are enough $F2$ variables, so that forward steps will sufficiently often fix a variable at 1. IP^{ν}:

$$\min\Big\{z = \zeta - \sum_{E^{\nu}+F1^{\nu}} c_j = \sum_{F2^{\nu}+F3^{\nu}} c_j y_j - \sum_{F1^{\nu}} c_j y_j \,\Big|\, y_j = 0 \text{ or } 1, \quad i \in F^{\nu},$$

$$y_j = 0, \ i \in E^{\nu} + Z^{\nu}, \ -\sum_{F3^{\nu}} e_{ij} y_j - \sum_{F2^{\nu}} e_{ij} y_j - \sum_{F1^{\nu}} e_{ij} y_j \leq -1 - \sum_{E^{\nu}+F1^{\nu}} e_{ij}, \text{ all } i\Big\}. \tag{36}$$

The corresponding mixed integer problem, IP^{ν}_{MI} is (36) with $y_j \geq 0$ for $j \in F3^{\nu}$. The upper bound need not be enforced. IZ^{ν} is IP^{ν}_{MI} with $y_j = 0$, $j \in F1^{\nu} + F2^{\nu}$.

Let

$$I1 = \{i \mid \sum_{E^{\nu}+F1^{\nu}} e_{ij} = 0\}.$$

Then the constraints for $i \in IZ^{\nu} = I - I1^{\nu}$ are nonconstraining for IZ^{ν}. The problem dual to IZ^{ν} is:

$$\max\Big\{z_D = \sum_{I1^{\nu}} u_i - \sum_{I2^{\nu}} u_i \Big(-1 + \sum_{E^{\nu}+F1^{\nu}} e_{ij}\Big) \,\Big|\, u_i \geq 0, \ -\sum_{I} e_{ij} u_i + c_j \geq 0\Big\}. \tag{37}$$

However, u_i may be taken as zero for $i \in I2^{\nu}$. The associated inequality at node ν becomes

$$\sum_{F1^{\nu}} \Big(-c_j + \sum_{I1^{\nu}} u^{\nu}_i e_{ij}\Big) y_j + \sum_{F2^{\nu}} \Big(c_j - \sum_{I1} u^{\nu}_i e_{ij}\Big) y_j \leq \zeta^* - \zeta^{\nu}, \tag{38}$$

with

$$\zeta^{\nu} = z^{\nu} + \sum_{F1^{\nu}+E^{\nu}} c_j.$$

It will remain a necessary condition for the more constrained IP^{μ} at successive nodes, even though the set of designated integer variables may expand.

The algorithm lends itself well to heuristic procedures which generate a number of good feasible solutions and search the vicinities of these vectors for improvement. One simply defines the original state not in terms of LP^o, but in terms of the feasible solution considered.

4. COMPUTATIONAL EXPERIENCE

The potential of adaptive procedures was demonstrated for the simple plant location problem in [4], e.g., a real-life 52 plant, 52 destination problem was resolved in 4863 iterations and 12.7 minutes on a IBM 360 50 by an efficient Type 1 algorithm, and in only 51 iterations and 1.17 minutes by a Type 3 algorithm with one restart of the search at a state determined by the best solution obtained up to 50 iterations, i.e., the problem was resolved immediately after the restart. Corresponding figures for a (60, 80) problem were 11055 iterations and 55 minutes for the Type 1 program, and 83 iterations and 1.7 minutes for the Type 3 program. For other problems, the Type 3 program proved to be as much as twenty times slower, per iteration, than the Type 1 program, and was therefore unsuccessful even though the search tree remained small. Results for general (0, 1) programming are given in [9].

Preliminary results with a Type 2 program for simple plant location indicate that the gain functions (28) may not be suitable when $c_{\tilde{i}(j),j}^{\sim} = \infty$ and that modifications in strategy (choice of k^*) may be necessary. A number of (10, 10) and (20, 35) capacitated plant location problems have been solved by a Type 1 and a Type 2 algorithm. For example, (10, 10) *problem*: Type 1 algorithm 21 iterations, 84 sec (360/40), Type 2 algorithm 3 iterations, 33 sec. However, the results are highly data and parameter dependent, and considerable work remains to be done.

REFERENCES

[1] M. L. Balinski and K. Spielberg, Methods for Integer Programming, to appear in "Progress in Op. Res.", vol. 3. ed. J. Aronofsky (Wiley, New York, 1968).

[2] E. Balas, An additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables, Op. Res., vol. 13. 1965.

[3] K. Spielberg, An Algorithm for the simple Plant Location Problem with some Side Conditions. Rep. 320.2900, IBM, N.Y. Sc. Center. 1967.

[4] K. Spielberg, Plant Location with Generalized Search Origin. Rep. 320.2927, IBM, N.Y. Sc. Center, 1968.

[5] J. F. Benders. Partitioning Procedures for Solving Mixed-variables Programming Problems. Num. Math., vol. 4, 1962.

[6] R. E. Gomorv. An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, in: Recent Advances in Math. Progr., eds. R. L. Graves, P. Wolfe (McGraw-Hill, New York, 1963).

[7] K. Spielberg, On Solving Plant Location Problems, Nato Conference, Cambridge. UK.

[8] R. J. Dakin, A Tree Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems, The Comp. J., vol. 8, 1965, pp. 250-255.

[9] H. Salkin and K. Spielberg, An Adaptive Algorithm for Binary Programming, Report, IBM, N.Y. Sc. Center, 1968.

[10] P. Huard, Programmes Mathématiques Non linéaires à Variables Bivalentes, 6th Symposium on Mathematical Programming, Princeton, N.J., 1967.

SIAM J. CONTROL
Vol. 7, No. 2, May 1969

GENERALIZED KUHN–TUCKER CONDITIONS FOR MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS IN A BANACH SPACE*

MONIQUE GUIGNARD†

Abstract. Generalized Kuhn–Tucker conditions stated in this paper correspond to the optimality conditions for mathematical programming problems in a Banach space. Constraint qualifications given before can be regarded as special cases of the present constraint qualification introduced to prove the necessity. Pseudoconvexity of the constraint set rather than convexity is required for sufficiency. In case this hypothesis fails to be satisfied, second order optimality conditions are sufficient for an isolated local optimum.

1. Introduction. Optimality conditions are given for a generalized mathematical programming problem. The constraint set, defined in a Banach space similar to that in [1], was considered in a Euclidean space in [2] and is different from that in [3]. First order necessary optimality conditions stated in the first part of Theorem 2 generalize the Kuhn–Tucker conditions [4], while the constraint qualification is a substitute for all the constraint qualifications of Kuhn–Tucker [4], of Arrow, Hurwicz and Uzawa [5] and of Abadie [6]. Sufficiency is proved for objective functions either pseudoconcave [7] or quasi-concave [8], the constraint set being now taken as pseudoconvex. In case even these weakened convexity conditions fail to be satisfied, second order optimality conditions may be sufficient for an isolated local optimum. Results similar to those in [9], [10] and [11] are stated for a more general program and in a form related to first order conditions.

2. Preliminaries. For any two topological spaces S and T, $L(S, T)$ denotes the set of all continuous linear mappings from S into T. For all $s \in S$ and for all $l \in L(S, T)$, $\langle l, s\rangle$ is $l(s)$, i.e., the value of the continuous linear mapping l at s.

We consider X, a locally convex real linear topological space, and X^*, its topological dual, i.e., for E, a one-dimensional Euclidean space, $X^* = L(X, E)$. X^* is given the uniform topology. Let M be a subset in X (respectively X^*); $\overline{M}$ denotes the closure of M and $\{M\}$ is the smallest convex subset in X (respectively in X^*) containing M. $-M$ is $\{-x : x \in M\}$. Let N be another subset of X: then $M\backslash N = \{x \in X : x \in M, x \notin N\}$.

1.1. Cones. The following definitions are given.

DEFINITION 1. $C \subset X$ (respectively $C^* \subset X^*$) is a *cone* if for $x \in C$ (respectively $x^* \in C^*$), $\alpha x \in C$ (respectively $\alpha x^* \in C^*$) for all $\alpha \geqq 0$.

DEFINITION 2a. For a cone $C \subset X$, we define

$$C^- = \{u \in X^* : \langle u, x\rangle \leqq 0 \text{ for all } x \in C\},$$

$$C^+ = \{u \in X^* : \langle u, x\rangle \geqq 0 \text{ for all } x \in C\}.$$

* Received by the editors March 22, 1968, and in revised form December 30, 1968.
† Laboratoire de Calcul, Université de Lille, Lille, France.

DEFINITION 2b. For a cone $C^* \subset X^*$, we define

$$C^{*-} = \{x \in X : \langle u, x\rangle \leqq 0 \text{ for all } u \in C^*\},$$

$$C^{*+} = \{x \in X : \langle u, x\rangle \geqq 0 \text{ for all } u \in C^*\}.$$

Remark. C^- and C^+ (respectively C^{*-} and C^{*+}) are closed convex cones in X^* (respectively in X).

The following properties are given for the defined cones. Proofs can be found in [12] for a Euclidean space or in [13] for a locally convex linear topological space.

PROPERTY C1. *Let C be a cone; then $C^{--} = \overline{\{C\}}$. In particular, if C is closed and convex, $C^{--} = C$.*

PROPERTY C2. *Let C be a cone; then $C^- = \overline{\{C\}}^-$.*

PROPERTY C3. *Let C_1 and C_2 be closed convex cones; then $(C_1 \cap C_2)^- = \overline{C_1^- + C_2^-}$.*

1.2. Cones tangent and pseudotangent to a set. We consider X, a real Banach space, M, a nonempty set in $X, \bar{x} \in M, y \in X$. The following definitions are given.

DEFINITION 3 (cf. [6]). The vector y is *tangent* to M at $\bar{x}$ if there exist a sequence $\{x_k\}$ contained in M and converging to $\bar{x}$ and a sequence $\{\lambda_k\}$ of nonnegative numbers such that the sequence $\{\lambda_k(x_k - \bar{x})\}$ converges to y.

DEFINITION 4 (cf. [6]). The set $T(M, \bar{x})$ of all the vectors tangent to M at $\bar{x}$ is called the *cone tangent* to M at $\bar{x}$.

DEFINITION 5 (cf. [3]). The set $P(M, \bar{x})$, the closure of the convex hull of $T(M, \bar{x})$, is called the *cone pseudotangent* to M at $\bar{x}$.

Let I be a set of indices, not necessarily finite, $A_i \subset X, i \in I$. Let $A \equiv \bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset, \bar{x} \in A$ and $\tilde{A} \equiv \bigcup_{i\in I} A_i$. The defined cones have the following properties.

PROPERTY T1 (cf. [3]). *$T(A, \bar{x}) \subset \bigcap_{i\in I} T(A_i, \bar{x})$ and $P(A, \bar{x}) \subset \bigcap_{i\in I} P(A_i, \bar{x})$.*

Proof. For all $i \in I$, $A \subset A_i$ implies $T(A, \bar{x}) \subset T(A_i, \bar{x})$. Therefore $T(A, \bar{x}) \subset \bigcap_{i\in I} T(A_i, \bar{x}) \subset \bigcap_{i\in I} P(A_i, \bar{x})$. Since the intersection of perhaps infinitely many closed convex cones is a closed convex cone, $\bigcap_{i\in I} P(A_i, \bar{x})$ contains $P(A, \bar{x})$ which is the smallest closed convex cone containing $T(A, \bar{x})$.

PROPERTY T2. *$\bigcup_{i\in I} T(A_i, \bar{x}) \subset T(\tilde{A}, \bar{x})$ and $\bigcup_{i\in I} P(A_i, \bar{x}) \subset P(\tilde{A}, \bar{x})$.*

Proof. For all $i \in I$, $A_i \subset \tilde{A}$ implies $T(A_i, \bar{x}) \subset T(\tilde{A}, \bar{x})$ which implies that $\bigcup_{i\in I} T(A_i, \bar{x}) \subset T(\tilde{A}, \bar{x})$. Moreover, $T(A_i, \bar{x}) \subset T(\tilde{A}, \bar{x}) \subset P(\tilde{A}, \bar{x})$. Since $P(\tilde{A}, \bar{x})$ is a closed convex cone, it contains $P(A_i, \bar{x})$ which is the smallest closed convex cone containing $T(A_i, \bar{x})$ for all $i \in I$. Then $\bigcup_{i\in I} P(A_i, \bar{x}) \subset P(\tilde{A}, \bar{x})$.

1.3. Pseudoconvexity and pseudoconcavity.

DEFINITION 6 (cf. [3]). M is *pseudoconvex at* $\bar{x}$ if for all $x \in M$, $x - \bar{x} \in P(M, \bar{x})$.

DEFINITION 7. M is *convex* if for all x and $y \in M$ and for all λ, $0 < \lambda < 1$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Convex and pseudoconvex sets have the following properties.

PROPERTY PC1. *If all $A_i, i \in I$, are pseudoconvex at $\bar{x}$, then $\tilde{A}$ is pseudoconvex at $\bar{x}$.*

Proof. For all $i \in I$, A_i is pseudoconvex at $\bar{x}$, so that $x - \bar{x} \in P(A_i, \bar{x}) \subset \bigcup_{i \in I} P(A_i, \bar{x})$ for all $x \in A_i$. Then by Property T2, $x - \bar{x} \in P(\tilde{A}, \bar{x})$.

Remark 1. The intersection of several pseudoconvex sets is not necessarily pseudoconvex, as shown by the following example. E will denote a one-dimensional Euclidean space. Let $A_1 = \{x \in E : x = 1/n, n \in N\}$ and $A_2 = \{x \in E : x = 1$ or $x = \pi/n, n \in N\}$. Then $A = A_1 \cap A_2 = \{x \in E : x = 1$ or $x = 0\}$ is not pseudoconvex at $\bar{x} = 0$, although A_1 and A_2 are. Here, and also later when needed, N stands for the set of all nonnegative integers.

PROPERTY PC2 (cf. [3]). *If M is convex, M is pseudoconvex at $\bar{x}$ for all $\bar{x} \in M$.*

Proof. Let $x \in M$, and let $\{\lambda_k\}$ be a sequence of positive numbers, $0 < \lambda_k \leqq 1$, converging to 0. Then there exist a sequence $\{\mu_k\}$ of nonnegative numbers $\mu_k = 1/\lambda_k$ and a sequence $\{x_k\}$ contained in M and converging to $\bar{x}$: $x_k = \bar{x} + \lambda_k(x - \bar{x})$, such that the sequence $\mu_k(x_k - \bar{x}) = \mu_k \lambda_k(x - \bar{x}) = x - \bar{x}$ converges to $x - \bar{x}$. Hence, $x - \bar{x}$ is a vector tangent to M at $\bar{x}$, $x - \bar{x} \in T(M, \bar{x}) \subset P(M, \bar{x})$ for all $x \in M$, and M is pseudoconvex at $\bar{x}$.

Remark 2. From Property PC1 and Property PC2, the union of several convex sets the intersection of which is not empty is pseudoconvex at any point of this intersection. This is an example of a pseudoconvex set which is not necessarily convex.

Let $\psi(x)$ be a real function of $x \in X$.

DEFINITION 8 (cf. [8]). ψ is *quasi-concave* if for all $\lambda \in E$, $\{x \in X : \psi(x) \geqq \lambda\}$ is convex.

Quasi-concave differentiable functions have the following property. ∇ will denote the differential operator.

PROPERTY PC3. *If ψ is quasi-concave and Fréchet-differentiable at $\bar{x}$, then $\langle \nabla\psi(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle < 0$ implies $\psi(x) - \psi(\bar{x}) < 0$.*

The proof of this statement can be found in [8].

DEFINITION 9 (cf. [3] and [7]). ψ is *pseudoconcave* over M at $\bar{x}$ if ψ is Fréchet-differentiable at $\bar{x}$ and if $x \in M$, $\langle \nabla\psi(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \leqq 0$ implies $\psi(x) - \psi(\bar{x}) \leqq 0$.

3. First order optimality conditions. Let X be a real Banach space, A a nonempty subset in X, $\bar{x} \in A$ and $\psi(x)$ a real-valued function of $x \in X$, Fréchet-differentiable at $\bar{x}$. Consider the problem: maximize $\{\psi(x) : x \in A\}$.

THEOREM 1. *A necessary condition for $\bar{x}$ to maximize ψ over A is that $\nabla\psi(\bar{x}) \in P^-(A, \bar{x})$. It is also sufficient if ψ is pseudoconcave over A at $\bar{x}$ and A is pseudoconvex at $\bar{x}$.*

Proof. We first give the necessity proof. Let $y \in T(A, \bar{x})$. Then there exist a sequence $\{x_k\}$, $x_k \in A$ for all k, $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$, and a sequence $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k > 0$ for all k, such that $\lim_{k\to\infty} \lambda_k(x_k - x) = y$. If $\bar{x}$ maximizes ψ over A, $\psi(x_k) - \psi(\bar{x}) \leqq 0$ for all k. Moreover, $\psi(x_k) - \psi(\bar{x}) = \langle \nabla\psi(\bar{x}), x_k - \bar{x}\rangle + o(\|x_k - \bar{x}\|)$. Then

$$\langle \nabla\psi(\bar{x}), \lambda_k(x_k - \bar{x})\rangle \leqq \frac{-o(\|x_k - \bar{x}\|)}{\|x_k - \bar{x}\|} \cdot \lambda_k \|x_k - \bar{x}\|.$$

Let k go to infinity; then $\langle \nabla\psi(\bar{x}), y\rangle \leqq 0 \cdot \|y\| = 0$. Therefore, $\nabla\psi(\bar{x}) \in T^-(A, \bar{x}) = P^-(A, \bar{x})$ by Property C2.

The sufficiency proof is as follows. Let $x \in A$. Since A is pseudoconvex at $\bar{x}$, we have $x - \bar{x} \in P(A, \bar{x})$ and $\langle \nabla\psi(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \leqq 0$. But since ψ is pseudoconcave over A at $\bar{x}$, this yields $\psi(x) - \psi(\bar{x}) \leqq 0$, and $\bar{x}$ maximizes ψ over A. This completes the proof.

Let Y be another real Banach space and $\alpha : X \to Y$ a map. Let B and C be nonempty subsets in Y and X, respectively, and assume that $A = \{x \in C : \alpha(x) \in B\}$ is not void. We may rewrite the problem: maximize $\{\psi(x) : x \in C, \alpha(x) \in B\}$. Suppose that $\alpha(x)$ is Fréchet-differentiable at $\bar{x} \in A$. Let $K = \{y \in X : \langle \nabla\alpha(\bar{x}), y\rangle \in P[B, \alpha(\bar{x})]\}$, $H = \{h \in X^* : h = u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}), u \in P^-[B, \alpha(\bar{x})]\}$.

Theorem 2 (The generalized Kuhn–Tucker conditions). *If H is closed and G is a closed convex cone in X such that $K \cap G = P(A, \bar{x})$ and $K^- + G^-$ is closed, then a necessary condition for $\bar{x}$ to maximize ψ over A is that there exists $u \in P^+[B, \alpha(\bar{x})]$ such that $\nabla\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}) \in G^-$. This condition is also sufficient if ψ is continuous, and if G is a closed convex cone in X such that $x - \bar{x} \in G$ for all $x \in A$, if A or $\Delta = \{x \in X : \alpha(x) \in B\}$ is pseudoconvex at $\bar{x}$, and if either ψ is pseudoconcave over A at $\bar{x}$, or quasi-concave with $\nabla\psi(\bar{x}) \neq 0$.*

Remark 3. A sufficient condition for H to be closed is that the map $\nabla\alpha(\bar{x}) : X \to Y$ have closed range (cf. [13]).

Proof. Necessity. If $\bar{x}$ maximizes ψ over A, by Theorem 1 we have $\nabla\psi(\bar{x}) \in P^-(A, \bar{x})$. Since $K^- + G^-$ is closed, by Property C3 we have $P^-(A, \bar{x}) = K^- + G^-$. Then there exists $k \in K^+$ such that $\nabla\psi(\bar{x}) + k \in G^-$. Let $v \in H^-$; then $\langle u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}), v\rangle \leqq 0$ for all $u \in P^-[B, \alpha(\bar{x})]$. Suppose that $\nabla\alpha(\bar{x})(v) \notin P[B, \alpha(\bar{x})]$. By the strong separation theorem, and since $P[B, \alpha(\bar{x})]$ is a cone, there exists $y \in Y^*$ such that $\langle y, \nabla\alpha(\bar{x})(v)\rangle > 0 \geqq \langle y, w\rangle$ for all $w \in P[B, \alpha(\bar{x})]$. Therefore, $y \in P^-[B, \alpha(\bar{x})]$ and $y \cdot \nabla\alpha(\bar{x}) \in H$, which contradicts $\langle y \cdot \nabla\alpha(\bar{x}), v\rangle = \langle y, \nabla\alpha(\bar{x})(v)\rangle > 0$. Then $\nabla\alpha(\bar{x})(v) \in P[B, \alpha(\bar{x})]$, i.e., $v \in K$ for all $v \in H^-$. Since H and K are closed convex cones, $H^- \subset K$ yields $H \supset K^-$. Therefore, there exists $u \in P^+[B, \alpha(\bar{x})]$ such that $\nabla\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}) \in G^-$.

For sufficiency, we first prove the following lemma.

Lemma. *If G is a closed convex cone such that $x - \bar{x} \in G$ for all $x \in A$, if either A or Δ is pseudoconvex at $\bar{x}$, if there exists $u \in P^+[B, \alpha(\bar{x})]$ such that $\nabla\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}) \in G^-$, then for all $x \in A$, $\langle \nabla\psi(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \leqq 0$.*

Proof. For all $x \in A$, $x - \bar{x} \in G$. Therefore,

$$\langle \nabla\psi(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \leqq \langle -u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle. \tag{1}$$

If Δ is pseudoconvex at $\bar{x}$, $x - \bar{x} \in P(\Delta, \bar{x})$ for all $x \in A \subset \Delta$. If A is pseudoconvex at $\bar{x}$, $x - \bar{x} \in P(A, \bar{x}) \subset P(\Delta, \bar{x})$ for all $x \in A$. In both cases, $\langle \nabla\alpha(\bar{x}), y\rangle \in T[B, \alpha(\bar{x})]$ for all $y \in T(\Delta, \bar{x})$. By continuity and convexity, since $\nabla\alpha(\bar{x})$ is a continuous linear map, $\langle \nabla\alpha(\bar{x}), y\rangle \in P[B, \alpha(\bar{x})]$ for all $y \in P(\Delta, \bar{x})$, and, in particular, for all $x \in A$. Moreover, $u \in P^+[B, \alpha(\bar{x})]$, so that $\langle -u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \leqq 0$ for all $x \in A$, and by (1), $\langle \nabla\psi(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \leqq 0$ for all $x \in A$. This completes the proof.

Sufficiency. If ψ is pseudoconcave over A at $\bar{x}$, by the lemma, for all $x \in A$, $\langle \nabla\psi(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \leqq 0$; that is, $\psi(x) - \psi(\bar{x}) \leqq 0$.

If $\nabla\psi(\bar{x}) \neq 0$, there exists $x_1 \in X$ such that $\langle \nabla\psi(\bar{x}), x_1 - \bar{x}\rangle < 0$. Suppose indeed that $\langle \nabla\psi(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \geqq 0$ for all $x \in X$. Then let $x' \in X$ and $x'' = 2\bar{x} - x'$.

Then $0 \leqq \langle \nabla\psi(\bar{x}), x'' - x' \rangle = -\langle \nabla\psi(\bar{x}), x' - \bar{x} \rangle \leqq 0$, which implies $\langle \nabla\psi(\bar{x}), x' - \bar{x} \rangle = 0$ for all $x' \in X$, i.e., $\nabla\psi(\bar{x}) = 0$. Let $x \in A$. We define

$$x(\theta) = x + \theta(x_1 - x),$$

$$\bar{x}(\theta) = \bar{x} + \theta(x_1 - \bar{x})$$

for all $\theta > 0$, $\langle \nabla\psi(\bar{x}), \bar{x}(\theta) - \bar{x} \rangle = \theta\langle \nabla\psi(\bar{x}), x_1 - \bar{x} \rangle < 0$. For all $\theta \in [0, 1]$, $\langle \nabla\psi(\bar{x}), x(\theta) - \bar{x}(\theta) \rangle = (1 - \theta)\langle \nabla\psi(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \leqq 0$ by the lemma. Then for all θ, $0 < \theta \leqq 1$, $\langle \nabla\psi(\bar{x}), x(\theta) - \bar{x} \rangle < 0$. By the quasi-concavity of the function $\psi(x)$, we have (cf. Property PC3) $\psi(x(\theta)) < \psi(\bar{x})$, and $\theta \to 0$ implies $\psi(x) < \psi(\bar{x})$ for all $x \in A$.

4. Second order optimality conditions. Let us now consider the second order optimality conditions. First, additional notations required for the discussion will be introduced. If $l: X \to Y$ is Fréchet-differentiable at $\bar{x} \in X$, $\langle \nabla l(\bar{x}), x \rangle$ denotes the value of the mapping $\nabla l(\bar{x})$ at x. If l is twice continuously differentiable at $\bar{x}$, $\nabla^2 l(\bar{x})$ is an element of $L(X, L(X, Y))$ which can be identified with $L(X^2, Y)$ [14, p. 174]. We shall denote by $\langle \nabla^2 l(\bar{x}), (x, y) \rangle$ or $\langle\langle \nabla^2 l(\bar{x}), x \rangle, y \rangle$ the value of the mapping $\nabla^2 l(\bar{x})$ at $(x, y) \in X \times X$.

We suppose now that X is finite-dimensional Finite-dimensionality is a necessary and sufficient condition that the unit sphere $\{x \in X : \|x\| \leqq 1\}$ be compact in a Banach space (cf. [15, p. 85]). The second order conditions given next are sufficient for an isolated local optimum.

THEOREM 3. *If* (i) *ψ and a are twice continuously differentiable at $\bar{x}$,* (ii) *G is a closed convex cone in X,* (iii) *in a neighborhood of $\bar{x}$, $x \in A$ implies $x - \bar{x} \in G$,* (iv) *in a neighborhood of $a(\bar{x})$, $y \in B$ implies $y - a(\bar{x}) \in P[B, a(\bar{x})]$, then a sufficient condition that $\bar{x}$ be an isolated local optimum for ψ over A is that there exists $u \in P^+[B, a(\bar{x})]$ such that $\nabla\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla a(\bar{x}) \in G^-$ and for all nontrivial $h \in X$ such that $\langle \nabla\psi(\bar{x}), h \rangle = 0$ and $\langle \nabla a(\bar{x}), h \rangle \in -P[B, a(\bar{x})] \cap P[B, a(\bar{x})]$ it follows that $\langle \nabla^2\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla^2 a(\bar{x}), (h, h) \rangle < 0$.*

Proof. Suppose that $\bar{x}$ is not an isolated local maximum for ψ over A. Then there exists a sequence $\{x_k\}$, $x_k \in A$, $x_k \neq \bar{x}$ for all k, such that $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$ and $\psi(x_k) \geqq \psi(\bar{x})$ for all k. Moreover, since the unit sphere is compact, we may assume that

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|} = h \neq 0.$$

Note, then, that $h \in T(A, \bar{x})$. In a neighborhood of $\bar{x}$, $x_k \in A$, implies $x_k - \bar{x} \in G$. Then $\nabla\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla a(\bar{x}) \in G^-$ yields $\langle \nabla\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla a(\bar{x}), x_k - \bar{x} \rangle \leqq 0$. Therefore, $\langle \nabla\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla a(\bar{x}), h \rangle \leqq 0$. Since $h \in T(A, \bar{x}) \subset T(\Delta, \bar{x})$, $\langle \nabla a(\bar{x}) \cdot h \rangle \in P[B, a(\bar{x})]$. We have two cases to consider:

(i) Suppose that $\langle \nabla\psi(\bar{x}), h \rangle < 0$. Then there exists a positive number N such that for all $K \geqq N$, $\psi(x_k) - \psi(\bar{x}) < 0$. Since this is a contradiction, $\langle \nabla\psi(\bar{x}), h \rangle \geqq 0$.

(ii) Suppose that

$$\langle \nabla \alpha(\bar{x}), h\rangle \in P[B, \alpha(\bar{x})] \setminus -P[B, \alpha(\bar{x})].$$

Then $\langle \nabla\psi(\bar{x}), h\rangle \leqq -\langle u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}), h\rangle < 0$ since $u \in P^+[B, \alpha(\bar{x})]$. By (i) this is an impossibility. Therefore, $\langle \nabla\alpha(\bar{x}), h\rangle \in -P[B, \alpha(\bar{x})] \cap P[B, \alpha(\bar{x})]$, i.e., $\langle u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}), h\rangle = 0$ and $\langle \nabla\psi(\bar{x}), h\rangle = 0$.

Let us define $\zeta(x) = \psi(x) + u \cdot \alpha(x)$. Then $\langle \nabla^2\zeta(\bar{x}), (h, h)\rangle < 0$. Since $\langle \nabla\zeta(\bar{x}), x_k - \bar{x}\rangle \leqq 0$,

$$\zeta(x_k) - \zeta(\bar{x}) = \langle \nabla\zeta(\bar{x}), x_k - \bar{x}\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \nabla^2\zeta(\bar{x}), (x_k - \bar{x}, x_k - \bar{x})\rangle + (o\|x_k - \bar{x}\|^2).$$

We have that

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\zeta(x_k) - \zeta(\bar{x})}{\|x_k - \bar{x}\|^2} \leqq \tfrac{1}{2}\langle \nabla^2\zeta(\bar{x}), (h, h)\rangle < 0$$

and there exists a positive integer N' such that for all $k \geqq N'$, $\zeta(x_k) - \zeta(\bar{x}) < 0$. But in a neighborhood of $\alpha(\bar{x})$, $\alpha(x_k) \in B$ implies $\alpha(x_k) - \alpha(\bar{x}) \in P[B, \alpha(\bar{x})]$. Then $-\langle u, \alpha(x_k) - \alpha(\bar{x})\rangle \leqq 0$ and $\psi(x_k) + u \cdot \alpha(x_k) < \psi(\bar{x}) + u \cdot \alpha(\bar{x})$, i.e., $\psi(x_k) < \psi(\bar{x}) - \langle u, \alpha(x_k) - \alpha(\bar{x})\rangle \leqq \psi(\bar{x})$, which is impossible. Hence, such a sequence $\{x_k\}$ does not exist and $\bar{x}$ is an isolated local maximum for ψ over A.

It is hoped that one can apply these results to the theory of optimal control. Constraint qualification introduced here ensures that the "multiplier" associated with the objective function, which is encountered in most of the earlier papers dealing with a maximum principle, is positive. It is more general than the ones in [1] or [13] which are the same as in [5] for a more general problem in a more general space. In the following section, it is shown how these optimality conditions apply to mathematical programming problems.

5. Application to mathematical programming. Let X be an n-dimensional Euclidean space E^n and Y an m-dimensional Euclidean space $E^m \cdot E^r_+$ will denote $\{x \in E^r : x \geqq 0\}$, $r = m, n$. Two examples will be discussed.

Example 1. If $B = E^m_+$, the problem becomes: maximize $\{\psi(x) : a_i(x) \geqq 0, i = 1, \dots, m, x \in C\}$. If $\bar{x} \in A = \{x \in C : a(x) \geqq 0\}$, let I and $\bar{I}$ be such that $a_j(\bar{x}) = 0$ for all $j \in I$ and $a_j(\bar{x}) > 0$ for all $j \in \bar{I}$. Then

$$P[B, \alpha(\bar{x})] = \{u \in (E^m)^* : u \geqq 0, u \cdot \alpha(\bar{x}) = 0\} = \{u \in (E^m)^* : u^j \geqq 0, j \in I, u^j = 0, j \in \bar{I}\},$$

$$K = \{y \in E^n : \langle \nabla a_j(\bar{x}), y\rangle \geqq 0, j \in I\},$$

$$H = \{h \in (E^n)^* : h = -\sum_{j\in I} u^j \cdot \nabla a_j(\bar{x}), u^j \geqq 0, j \in I\}.$$

Notice that both K and H are closed convex cones. G must be a closed convex cone such that $K \cap G = P(A, \bar{x})$ and $K^- + G^-$ is closed. We shall call this hypothesis, imposed upon G, the hypothesis H(G).

If $C = E^n$ (respectively E^n_+), and if this hypothesis H(G) is satisfied with $G = P(C, \bar{x})$, we obtain the usual Kuhn–Tucker conditions, since

$P^-(E^n, \bar{x}) = \{0\} \subset (E^n)^*$ and $P^-(E^n, \bar{x}) = \{y \in (E^n)^* : y \leqq 0, \langle y, \bar{x}\rangle = 0\}$. In both cases, since K and G are polyhedral cones, $K^- + G^-$ is closed [16, p. 388], so that H(G) reduces to $K \cap P(C, \bar{x}) = P(A, \bar{x})$, and this constraint qualification is actually weaker than those in [4], [5] and [6].

Kuhn and Tucker [4] defined

$$C(A, \bar{x}) = \{y \in E^n : \exists \xi : E_+ \to E^n, \xi(0) = \bar{x}, \xi'(+0) = y, \xi(\theta) \in A \ \forall \theta \in [0, 1]\},$$

and their constraint qualification was $K \cap P(C, \bar{x}) = C(A, \bar{x})$.

Arrow, Hurwicz and Uzawa [5] weakened this assumption, noting that the left-hand side was always closed and convex, and their constraint qualification was $K \cap P(C, \bar{x}) = \overline{\{C(A, \bar{x})\}}$.

Abadie [6] weakened the Kuhn–Tucker constraint qualification in a different way, assuming that $K \cap P(C, \bar{x}) = T(A, \bar{x})$.

These authors did not refer to $P(C, \bar{x})$ explicitly, however; when necessary they introduced the constraints $x \geqq 0$ as components of $\alpha(x) \geqq 0$. (See Table 1.)

TABLE 1

Case $C = E^n$		Case $C = E^n_+$	
Problem	Optimality conditions	Problem	Optimality conditions
$\max \psi(x)$ $\alpha(x) \geqq 0$ $x \in E^n$	$\exists u \geqq 0, u \in (E^m)^*$ $\nabla\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}) = 0$ $u \cdot \alpha(\bar{x}) = 0$	$\max \psi(x)$ $\alpha(x) \geqq 0$ $x \geqq 0$	$\exists u \geqq 0, u \in (E^m)^*$ $W = \nabla\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}) \leqq 0$ $\langle W, \bar{x}\rangle = 0$ $u \cdot \alpha(\bar{x}) = 0$

Suppose now that H(G) is not satisfied for $G = P(C, \bar{x})$, but is satisfied for a certain closed convex cone G. We then obtain optimality conditions that could not have been written otherwise, as is shown by the following well-known example. Consider the problem: maximize $\{\psi(x_1, x_2) : x_1^3 - x_2 \geqq 0, x_2 \geqq 0\}$. Suppose $\bar{x} = (0, 0)$. Then $G = E_+ \times E$ is such that $K \cap G = P(A, \bar{x}) = \{(y_1, y_2) : y_1 \geqq 0, y_2 = 0\}$. If $\bar{x} = (0, 0)$ maximizes ψ over A, there exists $u \geqq 0$ such that $\nabla\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla\alpha(\bar{x}) \in G^-$; that is,

$$\frac{\partial\psi(\bar{x})}{\partial x_1} + u \cdot \frac{\partial\alpha(\bar{x})}{\partial x_1} \leqq 0,$$

$$\frac{\partial\psi(\bar{x})}{\partial x_2} + u \cdot \frac{\partial\alpha(\bar{x})}{\partial x_2} = 0$$

and $u \cdot \alpha(\bar{x}) = 0$.

In the following, Z will denote the set of all integers and N the set of all non-negative integers.

If $C = Z^n$ or N^n, the hypothesis H(G) is satisfied with $G = \tilde{K}^-$, i.e., the subset in E^n which is isomorphic to $K^- \subset (E^n)^*$. Then $K \cap G = K \cap \tilde{K}^- = \{0\}$

$= P(A, \bar{x})$. Suppose, indeed, that $x \in K \cap \tilde{K}^-$; then $x \in \tilde{K}^-$ implies that $\langle x, y \rangle \leqq 0$ for all $y \in K$, and, in particular, for x; therefore $\langle x, x \rangle = 0$, i.e., $x = 0$. Then, since $\tilde{K}$ is the subset in $(E^n)^*$ which is isomorphic to $K \subset E^n$, we obtain the optimality conditions given in Table 2.

TABLE 2

Problem	Optimality conditions
$\max \psi(x)$	
$a(x) \geqq 0$	$\exists u \geqq 0$
$x \in Z^n$ or N^n	$\nabla\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla a(\bar{x}) \in \tilde{K}$
	$u \cdot a(\bar{x}) = 0$

Example 2. If $B = \{0\} \times E^r$, where $\{0\} \subset E^{m-r}$, let $J = \{1, \cdots, m-r\}$ and $\bar{J} = \{m-r+1, \cdots, m\}$. Then the problem becomes: maximize $\{\psi(x) : a_j(x) = 0, j \in J, a_j(x) \geqq 0, j \in \bar{J}, x \in C\}$. Let $\bar{x} \in A = \{x \in C : a_j(\bar{x}) = 0, j \in J, a_j(\bar{x}) \geqq 0, j \in \bar{J}\}$; then $P[B, a(\bar{x})] = (E^{m-r})^* \times (E^r_+)^*$, and we obtain the optimality conditions given in Table 3.

TABLE 3

Problem	Optimality conditions
$\max \psi(x)$	
$a_j(x) \geqq 0, \quad j \in \bar{J}$	$\exists u^j \geqq 0, j \in \bar{J}$
$a_j(x) = 0, \quad j \in J$	$\exists u^j, \quad j \in J$
$x \in C$	$\nabla\psi(\bar{x}) + \sum_{j \in J \cup \bar{J}} u^j \cdot \nabla a_j(\bar{x}) \in G^-$

Note that even if the $a_j, j \in J$, are nonlinear, these conditions may be sufficient, since A or Δ need only be pseudoconvex at $\bar{x}$. But sufficiency may be derived in another way.

If sgn (u) is an element of $(E^m)^*$ such that

$$[\operatorname{sgn}(u)]^i = \begin{cases} 1 & \text{if } u^i > 0, \quad i \in J \cup \bar{J}, \\ -1 & \text{if } u^i < 0, \quad i \in J, \\ 0, 1 \text{ or } -1 & \text{if } u^i = 0, \quad i \in J \cup \bar{J}, \end{cases}$$

then let $D = \{x \in E^n : [\operatorname{sgn}(u)]^i \cdot a_i(x) \geqq 0, \ i \in J \cup \bar{J}\} \supset \Delta$. If $C \cap D \subset \bar{x} + G$, if either $C \cap D$ or D is pseudoconvex at $\bar{x}$, if either ψ is pseudoconcave over $C \cap D$ at $\bar{x}$ or quasi-concave with $\nabla\psi(\bar{x}) \neq 0$, then $\bar{x}$ maximizes ψ over $C \cap D$, and a fortiori over A.

Remark 4. A sufficient, but not necessary, condition that D be pseudoconvex at $\bar{x}$ is that $[\operatorname{sgn}(u)]^i a_i(x)$ is quasi-convex for all $i \in J \cup \bar{J}$.

Remark 5. We may point out another consequence of this statement. If the previous hypothesis is satisfied with $[\operatorname{sgn}(u)]^i = 0$, $i \in L \subset J \cup \bar{J}$, $L = \{i : u^i = 0\}$

$\neq \emptyset$, no assumption is required upon a_i, $i \in L$. So it is possible that ineffective constraints play no role for sufficiency of optimality conditions. However, they may be used in order to make D or $D \cap C$ pseudoconvex at $\bar{x}$.

The second order optimality conditions are given in Table 4.

TABLE 4

Problem	Second order optimality conditions
$\max \psi(x)$	
$a_j(x) \geqq 0, \quad j \in J$	$\exists u^j \geqq 0, \quad j \in J$
$a_j(x) = 0, \quad j \in J$	$\exists u^j, \quad j \in J$
$x \in C$	$\nabla\psi(\bar{x}) + \sum_{j \in J \cup J} u^j \cdot \nabla a_j(\bar{x}) \in G^-$
	$\left.\begin{array}{l} h \neq 0, \\ \langle \nabla\psi(\bar{x}), h\rangle = 0, \\ \langle \nabla a_i(\bar{x}), h\rangle = 0 \text{ for all } i \in J \cup \{j \in J : u^j > 0\} \end{array}\right\}$
	$\Rightarrow \langle \nabla^2\psi(\bar{x}) + u \cdot \nabla^2 a(\bar{x}), (h, h)\rangle < 0.$

Acknowledgments. I wish to acknowledge the very useful discussions I had with Professor P. Huard on the subject of this paper when preparing my thesis at the University of Lille. I also wish to thank Dr. O. Gurel and Dr. K. Spielberg for their helpful comments during the writing of this paper.

REFERENCES

[1] P. P. VARAIYA, *Nonlinear programming in Banach space*, SIAM J. Appl. Math., 15 (1967), pp. 284–293.

[2] M. GUIGNARD, *On the Kuhn–Tucker theory*, Sixth Symposium on Mathematical Programming, Princeton University, Princeton, August 14–18, 1967.

[3] ———, *Conditions d'optimalité et dualité en programmation mathématique*, Thèse de Doctorat de Spécialité, Université de Lille, Laboratoire de Calcul, 1967.

[4] H. W. KUHN AND A. W. TUCKER, *Nonlinear programming*, Proc. Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, J. Neyman, ed., University of California Press, Berkeley, 1951, pp. 481–492.

[5] K. J. ARROW, L. HURWICZ AND H. UZAWA, *Constraint qualification in maximization problems*, Naval Res. Logist. Quart., 8 (1961), pp. 175–191.

[6] J. M. ABADIE, *Problèmes d'optimisation*, Institut Blaise Pascal, Paris, 1965.

[7] O. L. MANGASARIAN, *Pseudo-convex functions*, SIAM J. Control, 3 (1965), pp. 281–290.

[8] K. J. ARROW AND A. C. ENTHOVEN, *Quasi-concave programming*, Econometrica, 29 (1961), pp. 779–800.

[9] R. PALLU DE LA BARRIÈRE, *Compléments à la théorie des multiplicateurs en programmation non linéaire*, Rev. Française Recherche Opér., 7 (1963), pp. 163–180.

[10] G. P. MCCORMICK, *Second order conditions for constrained minima*, SIAM J. Appl. Math., 15 (1967), pp. 641–652.

[11] D. R. RICE AND M. E. THOMAS, *Sufficiency conditions in nonlinear programming*, Working paper, College of Engineering, University of Florida, 1967.

[12] W. FENCHEL, *Convex cones, sets, and functions*, Hectographed, Princeton University, Princeton, 1953.

[13] P. P. VARAIYA, *Nonlinear programming and optimal control*, ERL Tech. Memo. M-129, University of California, Berkeley, 1965.

[14] J. DIEUDONNÉ, *Foundation of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.

[15] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1965.
[16] M. Simonnard, *Programmation linéaire*, Dunod, Paris, 1962.
[17] D. L. Russel, *The Kuhn–Tucker conditions in Banach space with an application to control theory*, J. Math. Anal. Appl., 15 (1966), pp. 200–212.
[18] A. M. Rubinov, *Necessary conditions for an extreme value and their use in the study of certain equations*, Soviet Math. Dokl., 7 (1966), pp. 978–980.
[19] M. Altman, *Stationary point in non-linear programming*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 12 (1964), pp. 29–35.
[20] K. Ritter, *Duality for nonlinear programming in a Banach space*, SIAM J. Appl. Math., 15 (1967), pp. 294–302.
[21] H. Halkin, *An abstract framework for the theory of process optimization*, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), pp. 677–678.
[22] H. Halkin and L. W. Neustadt, *General necessary conditions for optimization problems*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 56 (1966), pp. 1066–1071.
[23] H. Halkin, *Nonlinear nonconvex programming in an infinite dimensional space*, Mathematical Theory of Control, A. V. Balakrishnan, ed., Academic Press, New York, 1967, pp. 10–25.
[24] A. Ya. Dubovitskii and A. A. Milyutin, *Extremum problems in the presence of constraints*, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., 5 (1965), pp. 395–453.
[25] L. W. Neustadt, *An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems. I. General theory; II. Applications*, this Journal, 4 (1966), pp. 505–527; 5 (1967), pp. 90–137.
[26] B. N. Pschenichniy, *Convex programming in a normed space*, Kibernetika, 5 (1965), pp. 46–54.
[27] A. V. Fiacco, *Second order sufficient conditions for weak and strict constrained minima*, SIAM J. Appl. Math., 16 (1968), pp. 105–108.
[28] P. Huard, *Mathématiques des programmes économiques*, Monographies de Recherche Opérationnelle, Dunod, Paris, 1964.
[29] C. Raffin, *Programmes linéaires d'appui d'un programme convexe, application aux conditions d'optimalité et à la dualité*, Rev. Française Recherche Opér., 13 (1968), pp. 27–60.
[30] M. Canon, C. Cullum and E. Polak, *Discrete Optimal Control*, McGraw-Hill, New York, 1968.

INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CAHIERS DU BUREAU UNIVERSITAIRE DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

SÉRIE RECHERCHE

Cahier n° 14

Monique GUIGNARD

CONDITIONS D'OPTIMALITÉ ET DUALITÉ EN PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

1970
PARIS

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

N O T A T I O N S et D E F I N I T I O N S

Nous introduirons dans ce chapitre les notations et définitions qui seront utilisées dans la suite de l'exposé et rappellerons ou démontrerons certaines propriétés élémentaires.

I §1. NOTATIONS

- J étant un ensemble d'indices, $|J|$ représente le cardinal de J.

- Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien à n dimensions. $\mathbb{R}^n$ est donc muni :

  1) du produit intérieur ou produit scalaire :
  $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $<x,y>$ représente leur produit scalaire.

  2) de la norme associée à ce produit scalaire :
  $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $||x||$ représente sa norme, avec $||x||^2 = <x,x>$.

  3) de la topologie définie par la norme.
  On notera $B_\varepsilon(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-\bar{x}|| \leq \varepsilon\}$ la boule fermée de centre $\bar{x}$ et de rayon ε.
  Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, on notera $\bar{A}$ l'adhérence de A et $\mathring{A}$ son intérieur. Alors $Fr(A) = \bar{A} - \mathring{A}$ est la frontière de A.

- On identifie tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à la matrice colonne dont les éléments sont les composantes de x par rapport à la base canonique. Si cette matrice colonne est indicée par J, avec $|J| = n$, soit $j \in J$, x_j représente la composante d'indice j de x.

- Soit $(\mathbb{R}^m)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ le dual de $\mathbb{R}^m$. On identifie tout vecteur u de $(\mathbb{R}^m)^*$ à la matrice ligne dont les éléments sont les composantes de u par rapport à la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Si cette matrice ligne est indicée par I, avec $|I| = m$, soit $i \in I$, u^i représente la composante d'indice i de u. Soit $y \in \mathbb{R}^m$, dont les composantes sont notées y_i, $i \in I$. A y, l'application linéaire u fait correspondre dans $\mathbb{R}$ le scalaire $u.y = \sum_{i \in I} u^i y_i$, c'est-à-dire le produit de la matrice ligne u par la matrice colonne y. A toute fonction linéaire $u \in (\mathbb{R}^m)^*$ correspond un vecteur déterminé $\tilde{u}$ de $\mathbb{R}^m$ tel que

$$\forall v \in \mathbb{R}^m,\ u.v = <\tilde{u},v>.$$

Les vecteurs de $\mathbb{R}^m$ représentent biunivoquement les fonctions linéaires définies sur $\mathbb{R}^m$. On utilisera cette propriété pour identifier, dans les interprétations géométriques, un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $(\mathbb{R}^m)^*$ (resp. de $\mathbb{R}^m$) et le sous-ensemble isomorphé $\tilde{\mathcal{A}}$ de $\mathbb{R}^m$ (resp. de $(\mathbb{R}^m)^*$).

- Soit $l \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Cette application linéaire est représentée par une matrice L indicée par $I \times J$, avec $|I| = m$ et $|J| = n$.

  Soit $i \in I$. L_i représente la ligne d'indice i de L.

  Soit $j \in J$. L^j représente la colonne d'indice j de L.

  L_i^j est alors l'élément situé à l'intersection de cette ligne et de cette colonne.

- Soient $\left.\begin{array}{l} f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \text{et } g : Y \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \end{array}\right\}$ avec $X \cap Y \neq \emptyset$.

  a) Si $\left.\begin{array}{l} \cdot\ \exists Z \subset X \cap Y \\ \cdot\ \exists \lambda \in]0,+\infty[\end{array}\right\}$ tels que $\forall x \in Z : |g(x)| \leq \lambda\, |f(x)|$,

  on écrira

  $$g = O(f).$$

  b) Si $\forall \varepsilon > 0, \exists Z \subset X \cap Y$ tel que $\forall x \in Z : |g(x)| \leq \varepsilon |f(x)|$

  on écrira

  $$g = o(f).$$

- Soit $\phi : W \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$.

  Soit $\bar{x} \in W$. On écrira $\bar{\phi}$ pour $\phi(\bar{x})$.

  Si $\phi(x)$ est indicé par J, avec $|J| = p$, on écrira $\phi(x) \geq 0$ pour $\phi_j(x) \geq 0$, $\forall j \in J$.

I §2. DEFINITIONS

I §2 - A. CONVEXITE, QUASI-CONVEXITE, PSEUDO-CONVEXITE

Définition 1a: fonctions quasi-concaves et quasi-convexes

Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

ϕ est quasi-concave si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{y \in \mathbb{R}^n : \phi(y) \geq \alpha\}$ est convexe.

ϕ est quasi-convexe si $(-\phi)$ est **quasi-concave.**

Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

ϕ est quasi-concave si chacune des fonctions coordonnées est quasi- concave.

ϕ est quasi-convexe si $(-\phi)$ est quasi-concave.

Propriété des fonctions quasi-concaves

Si $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est quasi-concave, et différentiable en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\phi(x) \geq \phi(\bar{x}) \implies \overline{\frac{d\phi}{dx}}\,(x-\bar{x}) \geq 0$$

Si ϕ est quasi-concave

$$\phi(x) \geq \phi(\bar{x}) \implies \phi[\Theta x + (1-\Theta)\,\bar{x}] \geq \phi(\bar{x}),\ \forall \Theta \in [0,1]$$

Soit $\psi(\Theta) = \phi[\Theta x + (1-\Theta)\,\bar{x}]$

alors $\psi(\Theta) \geq \phi(\bar{x}) = \psi(0)$

donc

$$\left[\frac{d\psi(\Theta)}{d\Theta}\right]_{\Theta=0} \geq 0 \text{ ou encore } \overline{\frac{d\phi}{dx}}\,(x - \bar{x}) \geq 0$$

Définition 1 b : fonctions pseudo-concaves

Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, différentiable en $\bar{x} \in A \subset \mathbb{R}^n$.

ϕ est pseudo-concave sur A en $\bar{x}$ si :

$$\forall\ x \in A, \overline{\frac{d\phi}{dx}}\ (x - \bar{x}) \leq 0 \implies \phi(x) - \phi(\bar{x}) \leq 0.$$

On dira que ϕ est pseudo-concave si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, ϕ est pseudo-concave sur $\mathbb{R}^n$ en x. Réf : [25]

Définition 1 c : ensemble pseudo-convexe en un point

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in A$ et P_A le pseudo-cône tangent à A en $\bar{x}$ (cf. définition 4)

A est pseudo-convexe en $\bar{x}$ si

$$\forall\ x \in A,\ x - \bar{x} \in P_A.$$

A est pseudo-convexe si $\forall\ \bar{x} \in A$, A est pseudo-convexe en $\bar{x}$

I §2 - B. VECTEURS, CÔNES ET PSEUDO-CÔNES TANGENTS, CÔNES POLAIRES

Définition 2 : Cône. Cône polyédrique

Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$Q \subset F$ est un cône si 1) $0 \in Q$.

2) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in Q \\ \forall \lambda > 0\end{array}\right\} \lambda x \in Q$.

$Q \subset F$ est un cône polyédrique si Q est un cône défini par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés dont les hyperplans générateurs passent par l'origine.

Remarque : Un cône polyèdrique est un cône convexe.

Définition 3 : Vecteur tangent

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \bar{A}$, et $\xi \in \mathbb{R}^n$.

ξ est un vecteur tangent à A en $\bar{x}$ si

1) il existe une suite $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs

2) il existe une suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de points de A convergeant vers $\bar{x}$ quand k tend vers l'infini,

telles que la suite $\{\lambda_k(x_k - \bar{x})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers ξ.

Réf : [1].

Remarque

Le vecteur nul est toujours vecteur tangent à A en $\bar{x}$, $\forall A$, $\forall \bar{x} \in \bar{A}$.

Définition 4 : Cône et pseudo-cône tangents

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, et $\bar{x} \in \bar{A}$.

Le cône tangent à A en $\bar{x}$ est l'ensemble T_A des vecteurs tangents à A en $\bar{x}$.

Le pseudo-cône tangent à A en $\bar{x}$ est l'adhérence P_A du plus petit cône convexe contenant T_A.

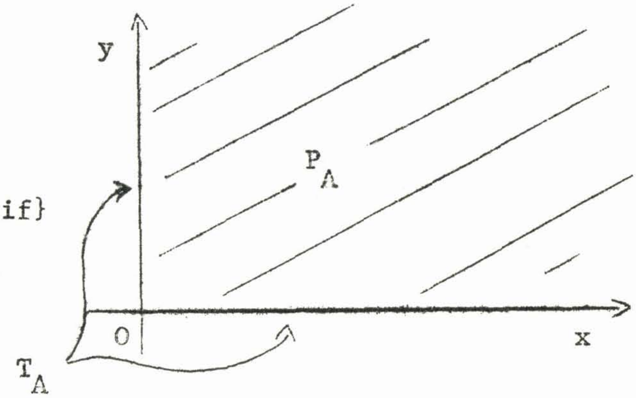
Remarques

- Le cône tangent est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Réf : [1].

- Le cône tangent n'est jamais vide, puisqu'il contient au moins le vecteur nul.

Exemple



$\bar{x} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0$
et $x+y = \frac{1}{n}$, n entier positif$\}$

$T_A = \{\xi = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha\beta = 0\}$

$P_A = \mathbb{R}^2_+$.

Théorème I : Cône tangent à un ensemble convexe

Si
- $A \subset \mathbb{R}^n$ est convexe
- $\bar{x} \in A$
- T_A est le cône tangent à A en $\bar{x}$

alors $\forall x \in A,\ x - \bar{x} \in T_A$.

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ convexe} \\ \bar{x} \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall x \in A,\ \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)\,\bar{x} \in A.$$

Soit $\{x_k\}_{k \in N}$ une suite quelconque de nombres positifs, inférieurs à 1, convergeant vers 0 quand k tend vers l'infini.

Soit $x_k = \bar{x} + \lambda_k(x - \bar{x})$.

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}. \quad \text{Soit } \mu_k = \frac{1}{\lambda_k}, \quad \forall k. \text{ Alors } \lim_{k\to\infty} \mu_k(x_k-\bar{x}) = x-\bar{x}$$

et $x-\bar{x}$ est bien vecteur tangent à A en $\bar{x}$ si x est élément de A.

Remarque : Un ensemble convexe est donc pseudo-convexe en chacun de ses points, c'est-à-dire pseudo-convexe.

Théorème 2 : Intersection de cônes tangents

> Si . $A, B \subset \mathbb{R}^n$
> . $\bar{x} \in A$
>
> alors $T_{A \cap B} \subset T_A \cap T_B$ et $P_{A \cap B} \subset P_A \cap P_B$.

Un vecteur tangent à $A \cap B$ en $\bar{x}$ est tangent à A et à B en $\bar{x}$, donc

$$T_{A \cap B} \subset T_A \cap T_B,$$

or $P_A \cap P_B \supset T_A \cap T_B$, donc $P_A \cap P_B \supset T_{A \cap B}$. $P_A \cap P_B$, intersection de deux cônes convexes fermés est aussi un cône convexe fermé. D'autre part, $P_{A \cap B}$ est le plus petit cône fermé convexe contenant $T_{A \cap B}$. Par conséquent

$$P_{A \cap B} \subset P_A \cap P_B.$$

Remarque

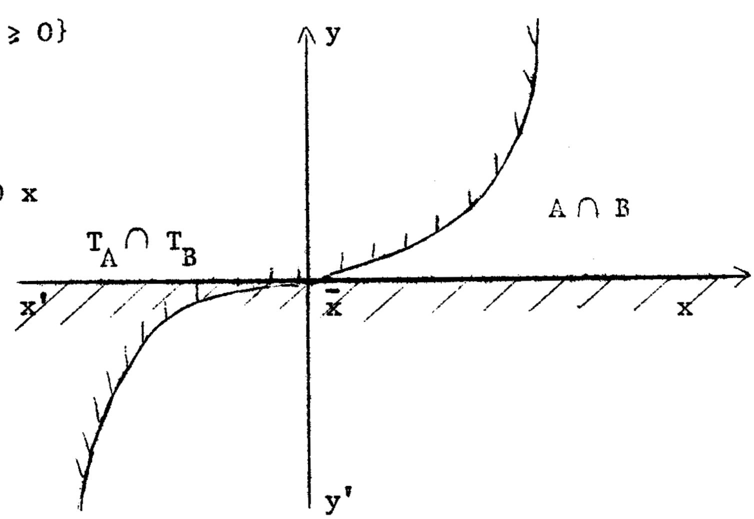
La réciproque n'est pas vraie. Il est possible en effet que $T_A \cap T_B \not\subset T_{A \cap B}$, comme le montre l'exemple suivant :

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^3\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

$\bar{x} = (0,0) \in A \cap B.$

$$\begin{cases} Ox' \subset T_A \cap T_B = x'\,O\,x \\ Ox' \not\subset T_{A \cap B} = Ox. \end{cases}$$



Définition 5 : Cône polaire ou cône dual

Soit Q un cône de $\mathbb{R}^n$.

Le cône polaire (négatif) ou cône dual de Q est l'ensemble $\Gamma(Q)$ défini par

$$\Gamma(Q) = \{\eta \in (\mathbb{R}^n)^* : \eta.\xi \leq 0 \quad \forall \xi \in Q\}.$$

Remarques

- Pour tout cône Q de $\mathbb{R}^n$, $0 \in Q \cap \Gamma(Q)$.
- On identifiera souvent, à un isomorphisme près, $\Gamma(Q)$ et $\widetilde{\Gamma(Q)} = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \langle \nu, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in Q\}$.

Propriétés des cônes polaires

- $\forall Q$ cône de $\mathbb{R}^n$:
  - $\Gamma(Q)$ est un cône fermé.
  - $\Gamma[\Gamma(Q)]$ est l'adhérence du plus petit cône convexe contenant Q.

Par conséquent si Q est un cône convexe et fermé

$$\Gamma[\Gamma(Q)] = Q.$$

- $\forall Q_1, Q_2$ cônes de $\mathbb{R}^n$:
  - $Q_1 \subset Q_2 \Longrightarrow \Gamma(Q_1) \supset \Gamma(Q_2)$
- $\forall Q_1, Q_2$ cônes convexes de $\mathbb{R}^n$:
  - $\Gamma(Q_1 + Q_2) = \Gamma(Q_1) \cap \Gamma(Q_2)$
  - $\Gamma(\bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2) = \overline{\Gamma(Q_1) + \Gamma(Q_2)}$

Si Q_1 et Q_2 sont des cônes polyédriques, $\Gamma(Q_1) + \Gamma(Q_2)$ est un cône fermé, Q_1 et Q_2 sont des cônes fermés, donc

$$\Gamma(Q_1 \cap Q_2) = \Gamma(Q_1) + \Gamma(Q_2).$$

Réf : [14] et [31].

I §2 - C. PROGRAMMES MATHEMATIQUES

Définition 6 : Programme mathématique

Soient $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}^n$.

On appelle programme mathématique le problème suivant

$$\text{Max } \{\phi(x) : x \in A\}$$

c'est-à-dire la recherche du maximum d'une fonction ϕ sur une partie A de $\mathbb{R}^n$.

On appelle contraintes la condition $x \in A$.

On appelle solution réalisable tout x satisfaisant aux contraintes.

Remarques

- Le problème Min $\{\phi(x) : x \in A\}$ est aussi un programme mathématique puisqu'il peut s'écrire

$$\text{Max } \{-\phi(x) : x \in A\}.$$

- On emploie aussi le mot "contraintes" pour désigner la frontière de A.

Définition 7 : Maximum local, maximum global

Etant donné le programme Max $\{\phi(x) : x \in A\}$ et $\bar{x} \in A$,

on dit que $\bar{x}$ maximise localement ϕ sur A (ou est un maximum local pour ϕ sur A) si

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall y \in A \cap B_\varepsilon(\bar{x}),\ \phi(\bar{x}) \geq \phi(y).$$

on dit que $\bar{x}$ maximise (globalement) ϕ sur A (ou est un maximum (global) pour ϕ sur A) si

$$\forall y \in A,\ \phi(\bar{x}) \geq \phi(y).$$

Remarques

. Si $\bar{x}$ maximise ϕ sur A, $\bar{x}$ est solution optimale du programme

$$\text{Max } \{\phi(x) : x \in A\}.$$

. Si $\bar{x}$ maximise simultanément les fonctions ϕ_j, $j \in J$, sur A, on dira que $\bar{x}$ maximise ϕ_J sur A.

Théorème 3 : Maximum local et global

Si
- $A \subset \mathbb{R}^n$ est convexe
- $\bar{x} \in A$
- $\phi : A \to \mathbb{R}$ est concave
- $\bar{x}$ maximise localement ϕ sur A

alors $\bar{x}$ maximise ϕ sur A.

Supposons qu'il existe $x \in A$, $x \neq \bar{x}$ tel que $\phi(x) > \phi(\bar{x})$.
$\bar{x}$ étant un maximum local pour ϕ sur A :

$$\exists \varepsilon > 0 : y \in A \cap B_\varepsilon(\bar{x}) \Longrightarrow \phi(y) \leq \phi(\bar{x})$$

A étant convexe, $\forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)\,\bar{x} \in A$, donc
$\exists \lambda_1 \in \,]0,1] : \lambda_1 x + (1-\lambda_1)\,\bar{x} \in A \cap B_\varepsilon(\bar{x})$.

ϕ étant concave, $\forall \lambda \in [0,1] : \phi[\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}] \geq \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\,\phi(\bar{x})$

$$\text{donc } \phi[\lambda_1 x + (1-\lambda_1)\,\bar{x}] \geq \lambda_1\phi(x) + (1-\lambda_1)\,\phi(\bar{x})$$
$$> \lambda_1\phi(\bar{x}) + (1-\lambda_1)\,\phi(\bar{x}) = \phi(\bar{x}),$$

ce qui contredit le fait que $\bar{x}$ maximise ϕ sur $A \cap B_\varepsilon(\bar{x})$.

Par conséquent il n'existe pas de $x \in A$, $x \neq \bar{x}$, tel que $\phi(x) > \phi(\bar{x})$.

I §2 - D. PROGRAMMES SOUS CONTRAINTES MIXTES. PROBLEMES DE COL.

Définition 8 : Programme sous contraintes mixtes

Soient $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, et $C \subset \mathbb{R}^n$.

On appellera programme sous contraintes mixtes le problème suivant :

$$\text{Max } \{\phi(x) : x \in C,\ a(x) \geq 0\} .$$

On appellera contraintes la condition $x \in A =' \{x : a(x) \geq 0\} \cap C$.

Remarque

On suppose $a(x)$ indicé par L, avec $|L| = m$. L'hypersurface définie par $a_l(x) = 0$ où $l \in L$, est appelée contrainte d'indice l.

Définition 9 : contraintes actives

On appelle contraintes actives en $\bar{x} \in A$ les contraintes indicées par $E \subset L$ avec

$$\begin{cases} a_E(\bar{x}) = 0 \\ a_{L-E}(\bar{x}) > 0. \end{cases}$$

On notera $L-E = \bar{E}$. Si $|E| = k$, $\bar{x}$ appartient à la $(n-k)$-variété définie par $a_E(x) = 0$.

Définition 10 : Hypothèses H(G), H(O) et H.

On pose $\Delta =' \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \geq 0\}$, et $A = \Delta \cap C$. On suppose que a est différentiable en $\bar{x} \in A$. Soient G un cône convexe fermé, P_C le pseudo-cône tangent à C en $\bar{x}$, P_A le pseudo-cône tangent à A en $\bar{x}$.

Soit $K_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \overline{\frac{da_E}{dx}} \cdot \xi \geq 0\}$ et soit $K_g = K_0 \cap G$.

$\bar{x}$ vérifie <u>l'hypothèse H(G)</u> sur A si $\begin{cases} \Gamma(K_0) + \Gamma(G) \text{ est fermé} \\ K_g = P_A. \end{cases}$

On sera amené à envisager les cas particuliers suivants :

Si $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) avec $G = R^n$, ou encore si $K_0 = P_A$, on dira que $\bar{x}$ vérifie <u>l'hypothèse H(O)</u> sur A.

Si $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) avec $G = P_C$, ou encore si

$$\begin{cases} \Gamma(K_0) + \Gamma(P_C) \quad \text{est fermé} \\ K_0 \cap P_C = P_A \end{cases}$$

on dira que $\bar{x}$ vérifie <u>l'hypothèse H</u> sur A.

<u>Remarques</u>

- Si on pose $K = K_0 \cap P_C$, il est facile de voir que $K_0 \supset K_g \supset K$, lorsque $G \supset P_C$.

- Pour que $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(O) sur A, il suffit que $K_0 = P_A$. En effet $\Gamma(K_0) + \Gamma(G) = \Gamma(K_0) + \Gamma(R^n)$
$$= \Gamma(K_0) + \{0\} = \Gamma(K_0)$$
est un cône fermé.

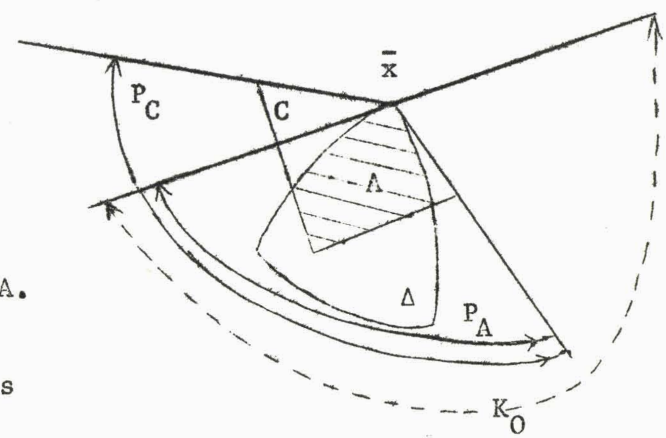
- Si G est polyédrique, $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ est un cône fermé.

Réf : [31].

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, un cône convexe fermé G ne peut être que polyédrique, donc on aura toujours $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ fermé.

Le gradient correspondant à l'une des contraintes est ici nul en $\bar{x} = 0$. $K_0 \supset P_A$, mais $K_0 \not\subset P_A$, donc $\bar{x}$ ne vérifie pas l'hypothèse H(0) sur A.



$K_0 \cap P_C = P_A$, donc $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H sur A.

Si G_1 et G_2 sont deux cônes convexes fermés,

si $G_1 \cap (K_0 - P_A) = \emptyset$, $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G_1)$ sur A,

si $G_2 \cap (K_0 - P_A) \neq \emptyset$, $\bar{x}$ ne vérifie pas l'hypothèse $H(G_2)$ sur A.

Définition 11 : Col.

Soit $\psi : X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$(\bar{x},\bar{u}) \in X \times U$ est un col pour ψ sur $X \times U$ si

$$\forall (x,u) \in X \times U : \psi(x,\bar{u}) \leq \psi(\bar{x},\bar{u}) \leq \Psi(\bar{x},u).$$

Remarques

. On emploie parfois le mot "point-selle" à la place de "col".

. Si $(\bar{x},\bar{u})$ est un col pour ψ sur $X \times U$:

$$\text{Inf } \{\psi(\bar{x},u) : u \in U\} = \psi(\bar{x},\bar{u}) = \text{Sup } \{\psi(x,\bar{u}) : x \in X\}.$$

Définition 12 : problème de col.

On appelle problème de col la recherche d'un col pour ψ sur $X \times U$.

On appelle solution réalisable du problème de col tout $(x,u) \in X \times U$.

CHAPITRE II

C O N D I T I O N S   D ' O P T I M A L I T E

Nous envisagerons dans ce chapitre des programmes mathématiques, sous des contraintes éventuellement mixtes, de la forme générale Max $\{\phi(x) : x \in A\}$, et les conditions, nécessaires ou suffisantes, pour que $\bar{x} \in A$ maximise, localement ou globalement, ϕ sur A.

II §1. PREMIERE CONDITION D'OPTIMALITE

Théorème 4 : *Première condition d'optimalité*

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, et $\bar{x} \in A$.

$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, est différentiable en $\bar{x}$.

Soit P_A le pseudo-cône tangent à A en $\bar{x}$.

A. Si $\bar{x}$ maximise ϕ sur A,

alors $\overline{\frac{d\phi}{dx}} \in \Gamma(P_A)$.

B. Si . ϕ est pseudo-concave sur A en $\bar{x}$

. A est pseudo-convexe en $\bar{x}$

. $\overline{\frac{d\phi}{dx}} \in \Gamma(P_A)$

alors $\bar{x}$ maximise ϕ sur A.

A. Soit $\xi \in T_A \iff \begin{bmatrix} \exists\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \lambda_k \in \mathbb{R}^*_+ \\ \exists\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, x_k \in A, \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \end{bmatrix} \Big\} : \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(x_k - \bar{x}) = \xi$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} \text{ maximise } \phi \text{ sur } A \\ x_k \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \phi(x_k) \leq \phi(\bar{x})$$

ou $\phi(x_k) - \phi(\bar{x}) = \overline{\frac{d\phi}{dx}} \cdot (x_k - \bar{x}) + o\,(||x_k - \bar{x}||) \leq 0$

$$\lambda_k > 0 \Longrightarrow \overline{\frac{d\phi}{dx}} \cdot \lambda_k(x_k - \bar{x}) \leq -o(||x_k - \bar{x}||) \cdot \lambda_k.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} \overline{\frac{d\phi}{dx}} \cdot \lambda_k(x_k - \bar{x}) = \overline{\frac{d\phi}{dx}} \cdot \xi \\[2ex] \lim\limits_{k\to\infty} [-o(||x_k - \bar{x}||) \cdot \lambda_k] = \lim\limits_{k\to\infty} \left[-\dfrac{o(||x_k-\bar{x}||)}{||x_k-\bar{x}||} \cdot \lambda_k ||x_k - \bar{x}||\right] \\[2ex] \qquad = 0||\xi|| \\ \qquad = 0. \end{array}\right] \Longrightarrow \overline{\frac{d\phi}{dx}} \cdot \xi \leq 0$$

Cette inégalité est vraie pour tout η limite d'une suite de combinaisons linéaires convexes de vecteurs tangents,

c'est-à-dire : $\forall\ \eta \in P_A$, $\overline{\frac{d\phi}{dx}} \cdot \eta \leq 0$, ou encore $\overline{\frac{d\phi}{dx}} \in \Gamma(P_A)$.

B. $$\left.\begin{array}{l} \overline{\frac{d\phi}{dx}} \in \Gamma(P_A) \\ \text{A pseudo-convexe en } \bar{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{\frac{d\phi}{dx}} \cdot (x-\bar{x}) \leq 0,\ \forall\ x \in A \\ \phi \text{ pseudo-concave sur A en } \bar{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \phi(x)-\phi(\bar{x}) \leq 0, \\ \forall\ x \in A \end{array}$$

<u>Remarques</u>

- Dans la suite du chapitre, on envisagera le programme sous contraintes mixtes suivant : Max $\{\phi(x) : x \in C,\ a(x) \geq 0\}$,

  où $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $C \subset \mathbb{R}^n$.

  Soient $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \geq 0\}$ et $A = \Delta \cap C$.

  Soit $\bar{x} \in A$. E sera l'ensemble des indices des contraintes actives en $\bar{x}$. P_A, P_Δ et P_C seront les pseudo-cônes tangents respectivement à A, à Δ et à C, en $\bar{x}$. G est un cône convexe fermé.

- Si a est différentiable en $\bar{x}$,

  soient $K_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \overline{\frac{da_E}{dx}} \cdot \xi \geq 0\}$,

  $K_g = K_0 \cap G$, et $K = K_0 \cap P_C$.

Corollaire : *Théorème 5* :

Si a est différentiable en $\bar{x}$,
alors $\cdot\ P_\Delta \subset K_0$

$\cdot\ P_A \subset K \subset K_0$

$\cdot\ \forall x \in \Delta,\ -a_E(x) \leqslant -a_E(\bar{x}) = 0.$

$\bar{x}$ maximise $(-a_E)$ sur Δ, et, d'après le théorème 4 :

$$\forall j \in E : -\overline{\frac{da_j}{dx}} \in \Gamma(P_\Delta), \text{ ou encore } \overline{\frac{da_E}{dx}}.\ \xi \geqslant 0 \quad \forall \xi \in P_\Delta$$

donc $P_\Delta \subset K_0$.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ P_A = P_{\Delta\cap C} \subset P_\Delta \cap P_C \text{ (théorème 3)} \\ \\ P_\Delta \subset K_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow P_A \subset P_\Delta \cap P_C \subset K_0 \cap P_C \subset K_0$$

c'est-à-dire $P_A \subset K \subset K_0$.

Remarque : Comme $K_0 \supset K \supset P_A$, $H(0) \Longrightarrow H$.

II §2. SECONDE CONDITION D'OPTIMALITE : CONDITIONS DE KUHN ET TUCKER GENERALISEES

Pour le programme Max $\{\phi(x) : x \in G,\ a(x) \geq 0\}$, G étant un cône convexe fermé, ces conditions s'écrivent :

$$(1)\quad \exists u \in (R^m)^* : \begin{cases} u \geq 0 \\ \overline{\dfrac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad\Bigg|\quad \text{ou } (2)\quad \exists u \in (R^m)^* \text{ et } v \in \Gamma(G) : \begin{cases} u \geq 0 \\ \overline{\dfrac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}} = v \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

Les composantes de u seront appelées "multiplicateurs".

II §2 - A. CONDITIONS SUFFISANTES

Le théorème 6 adapte des résultats de [26] aux programmes sous contraintes mixtes et aux conditions de Kuhn et Tucker généralisées.

Théorème 6 : Optimum local

Si
- ϕ et a sont deux fois continûment différentiables au voisinage de $\bar{x}$
- au voisinage de $\bar{x}$, $x \in A \Longrightarrow x - \bar{x} \in G$.
- les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$ et

  $\exists E' \subset E,\ E' \neq \emptyset : u^{E'} \neq 0,\ u^{L-E'} = 0$
- $\forall h \neq 0$, $\left.\begin{array}{l} \overline{\dfrac{da_{E'}}{dx}} \,.\, h = 0 \\[2ex] \overline{\dfrac{d\phi}{dx}} \,.\, h = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{h} \,.\, \overline{\dfrac{d^2[\phi+ua]}{dx^2}} \,.\, h < 0$

alors $\bar{x}$ est un maximum local strict pour ϕ sur A.

N.B. $\tilde{h}$ représente la matrice-ligne transposée de la matrice-colonne h.

Supposons que $\bar{x}$ ne soit pas un maximum local strict :

$$\exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \begin{cases} x_k \in A,\ x_k \neq \bar{x} \quad \forall k. \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \\ \phi(x_k) \geq \phi(\bar{x}) \end{cases}$$

On peut supposer de plus en raison de la compacité de la sphère unité, que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k-\bar{x}}{||x_k-\bar{x}||} = h \neq 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Au voisinage de } \bar{x},\ x_k \in A \Longrightarrow x_k - \bar{x} \in G \\ \\ \overline{\dfrac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\overline{\frac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\frac{da}{dx}}\right].(x_k-\bar{x}) \leq 0.$$

G étant un cône fermé : $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_k-\bar{x}}{||x_k-\bar{x}||} = h \in G$

donc $\left[\overline{\dfrac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}}\right] . h \leq 0$

$$\left.\begin{array}{l} x_k \in A \Longrightarrow a_E(x_k) \geq 0 \\ \\ a_E(\bar{x}) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_E(x_k) - a_E(\bar{x}) \geq 0$$

ou, $\forall j \in E$: $a_j(x_k) - a_j(\bar{x}) = \overline{\dfrac{da_j}{dx}} . (x_k-\bar{x}) + o(||x_k-\bar{x}||)$

$$= \left[\overline{\frac{da_j}{dx}}.\ \frac{(x_k-\bar{x})}{||x_k-\bar{x}||} + o(||x_k-\bar{x}||)\right].||x_k-\bar{x}|| \geq 0$$

$$\text{donc } \lim_{k\to\infty}\left[\frac{\overline{da_j}}{dx}\cdot\frac{x_k-\bar{x}}{||x_k-\bar{x}||}+0(||x_k-\bar{x}||)\right]=\frac{\overline{da_j}}{dx}\cdot h \geq 0$$

a) Supposons que $\frac{\overline{d\phi}}{dx} \cdot h < 0$

ou encore que $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\phi(x_k)-\phi(\bar{x})}{||x_k-\bar{x}\,||}=\lim\limits_{k\to\infty}\left[\frac{\overline{d\phi}}{dx}\cdot\frac{x_k-\bar{x}}{||x_k-\bar{x}||}+0(||x_k-\bar{x}||)\right]<0$

Alors $\exists N > 0 : k \geq N \Longrightarrow \phi(x_k) - \phi(\bar{x}) < 0$, car $x_k \neq \bar{x} \;\; \forall k$,

ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent $\frac{\overline{d\phi}}{dx} \cdot h \geq 0$.

b) Supposons que

$$\exists\, E'' \subset E',\; E'' \neq \emptyset : \forall j \in E'',\; \frac{\overline{da_j}}{dx}\cdot h > 0.$$

Alors $\frac{\overline{d\phi}}{dx}\cdot h \leq -u^{E''}\cdot\frac{\overline{da_{E''}}}{dx}\cdot h < 0$

ce qui, d'après a), est contraire à l'hypothèse.

Par conséquent $\frac{\overline{da_{E'}}}{dx} \cdot h = 0$.

c) Il faut donc que $\frac{\overline{d\phi}}{dx} \cdot h = 0$.

Soit $\psi(x) = \phi(x) + ua(x)$.

Alors $\tilde{h} \cdot \frac{\overline{d^2\psi}}{dx^2} \cdot h < 0$.

Or $\frac{\overline{d\psi}}{dx}\cdot(x_k-\bar{x}) = (\frac{\overline{d\phi}}{dx} + u\,\frac{\overline{da}}{dx})\cdot(x_k-\bar{x}) \leq 0$

$$\psi(\overset{k}{x}) - \psi(\bar{x}) = \overline{\frac{d\psi}{dx}} \cdot (x_k-\bar{x}) + \frac{1}{2}\widetilde{(x_k-\bar{x})}\, \overline{\frac{d^2\psi}{dx^2}}\, (x_k-\bar{x}) + o(||x_k-\bar{x}||^2)$$

$$\leq \frac{1}{2}\widetilde{(x_k-\bar{x})} \cdot \overline{\frac{d^2\psi}{dx^2}} \cdot (x_k-\bar{x}) + o\,(||x_k-\bar{x}||^2)$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(\overset{k}{x})-\psi(\bar{x})}{||x_k-\bar{x}||^2} \leq \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\widetilde{(x_k-\bar{x})}}{||x_k-\bar{x}||} \cdot \overline{\frac{d^2\psi}{dx^2}}\, \frac{(x_k-\bar{x})}{||x_k-\bar{x}||} + o\, \frac{(||x_k-\bar{x}||^2)}{||x_k-\bar{x}||^2}\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\tilde{h} \cdot \overline{\frac{d^2\psi}{dx^2}} \cdot h < 0$$

alors $\exists N' > 0 : k \geq N' \Longrightarrow \psi(x_k) - \psi(\bar{x}) < 0$

et $\phi(x_k) \leq \psi(x_k) < \psi(\bar{x}) = \phi(\bar{x})$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il n'existe donc pas de telle suite $\{x_k\}$ et $\bar{x}$ est bien un maximum local strict sur A.

<u>Lemme</u>

Si
- . A ou Δ est convexe
- . ϕ et a sont différentiables en $\bar{x} \in A$
- . $\forall x \in A$, $x - \bar{x} \in G$
- . les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$

alors $\overline{\frac{d\phi}{dx}} \cdot (x - \bar{x}) \leq 0$, $\forall x \in A$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \Longrightarrow x-\bar{x} \in G \\ \overline{\frac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\frac{da}{dx}} \in \Gamma(G) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\overline{\frac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\frac{da}{dx}}\right).(x-\bar{x}) \leq 0 \qquad (1)$$

Si A ou Δ est convexe

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} x,\bar{x}\in A,\ \forall\Theta\in[0,1]:(1-\Theta)\,\bar{x}+\Theta x\in\Delta \\ a_E(\bar{x})=0 \end{array}\right\}\Rightarrow a_E[(1-\Theta)\bar{x}+\Theta x]\geq a_E(\bar{x}) \\ \qquad\qquad a_E \text{ différentiable en } \bar{x} \end{array}\right\}\Rightarrow \overline{\frac{da_E}{dx}}.(x-\bar{x})\geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} u^{\bar{E}}=0 \\ u^{E}\geq 0 \end{array}\right\}\Longrightarrow -u.\overline{\frac{da}{dx}}.(x-\bar{x})\leq 0 \\ \qquad\qquad (1) \end{array}\right\}\Rightarrow \overline{\frac{d\phi}{dx}}.(x-\bar{x})\leq -u.\overline{\frac{da}{dx}}.(x-\bar{x})\leq 0$$

__Théorème 7__ : *__Optimum global__*

> Si
> - A ou Δ est convexe
> - ϕ et a sont différentiables en $\bar{x}\in A$
> - $\forall x\in A,\ x-\bar{x}\in G$
> - (α) ϕ est pseudo-concave sur A en $\bar{x}$, ou
>
>   (β) $\begin{cases}\phi \text{ est quasi-concave} \\ \overline{\dfrac{d\phi}{dx}}\neq 0\end{cases}$
> - les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$
>
> alors $\bar{x}$ maximise ϕ sur A.

$$(\alpha)\quad \left.\begin{array}{l} \forall x\in A,\ \overline{\dfrac{d\phi}{dx}}.(x-\bar{x})\leq 0 \text{ d'après le lemme} \\ \phi \text{ est pseudo-concave sur A en } \bar{x} \end{array}\right\}\Longrightarrow \phi(x)-\phi(\bar{x})\leq 0$$

(β) $\overline{\frac{d\phi}{dx}} \neq 0 \Longrightarrow \exists\, x_0 \in \mathbb{R}^n : \overline{\frac{d\phi}{dx}}.(x_0-\bar{x}) < 0$

Soit $x \in A$.

Soient $\begin{cases} \theta \in [0,1] \\ x(\theta) = x + \theta(x_0-x) \\ \bar{x}(\theta) = \bar{x} + \theta(x_0-\bar{x}) \end{cases}$

$$\overline{\frac{d\phi}{dx}}.\ [\bar{x}(\theta)-\bar{x}] = \theta.\ \overline{\frac{d\phi}{dx}}.(x_0-\bar{x}) < 0,\ \forall\theta > 0.$$

$\overline{\frac{d\phi}{dx}}.\ [x(\theta)-\bar{x}(\theta)] = (1-\theta).\ \overline{\frac{d\phi}{dx}}.(x-\bar{x}) \leqslant 0,\ \forall\theta\in[0,1]$, d'après le lemme.

Donc $\overline{\frac{d\phi}{dx}}.[x(\theta)-\bar{x}] = \overline{\frac{d\phi}{dx}}.[x(\theta)-\bar{x}(\theta)] + \overline{\frac{d\phi}{dx}}.[\bar{x}(\theta)-\bar{x}] < 0,\ \forall\theta\in]0,1]$.

ϕ étant quasi-concave, ceci implique que $\phi[x(\theta)] < \phi(\bar{x})$.

Or $\lim_{\theta\to 0} x(\theta) = x$ et $\lim_{\theta\to 0} \phi[x(\theta)] = \phi(x)$.

Donc $\forall x \in A,\ \phi(x) \leqslant \phi(\bar{x})$.

I §2 - B. CONDITIONS NECESSAIRES

Théorème 8

Si
- ϕ et a sont différentiables en $\bar{x} \in A$
- $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) sur A
- $\bar{x}$ maximise ϕ sur A

alors les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$.

. Si $\bar{x}$ maximise ϕ sur A, d'après le théorème 4-A, $\overline{\frac{d\phi}{dx}} \in \Gamma(P_A)$

$$\left.\begin{array}{l} P_A, K_0 \text{ et } G \text{ sont des cônes convexes fermés} \\ \Gamma(K_0) + \Gamma(G) \text{ est fermé} \\ K_0 \cap G = P_A \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma(P_A) = \Gamma(K_0) + \Gamma(G).$$

Donc $\exists \alpha \in \Gamma(K_0)$ et $\beta \in \Gamma(G)$ tels que $\overline{\frac{d\phi}{dx}} = \alpha+\beta$.

. Soit $B = \{b : b = u^E(-\overline{\frac{da_E}{dx}}),\ u^E \geq 0\}$.

$\forall \eta \in \Gamma(B),\ u^E\ (-\overline{\frac{da_E}{dx}}).\eta \leq 0\ \forall u^E \geq 0 \Rightarrow -\overline{\frac{da_E}{dx}}.\ \eta \leq 0 \Longrightarrow \eta \in K_0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Donc } \Gamma(B) \subset K_0 \Longrightarrow \Gamma(K_0) \subset \Gamma[\Gamma(B)] \\ \qquad B \text{ cône convexe fermé} \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma(K_0) \subset B.$$

$$\left.\begin{array}{l} . \ \alpha \in \Gamma(K_0) \Rightarrow \exists\, u^E \geq 0 : \alpha = u^E \left[-\overline{\frac{da_E}{dx}}\right] \\ \quad \text{Soit } u = [u^E\ u^{\bar{E}}] \text{ avec } u^{\bar{E}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{\frac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\frac{da}{dx}} \in \Gamma(G)$$

<u>Applications</u>

Si $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) avec $G = P_C$, on retrouve les résultats classiques suivants :

(1) Si $C = \mathbb{R}^n$, $P_C = G = \mathbb{R}^n$, $\Gamma(G) = \Gamma(P_C) = \{0\}$.

On obtient les conditions d'optimalité suivantes :

Max $\phi(x)$	
$a(x) \geq 0$	$\exists u \geq 0$
(x)	$\overline{\frac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\frac{da}{dx}} = 0$
	$ua(\bar{x}) = 0$

(2) Si $C = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$, $C \supset C' = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq \bar{x}\}$.

Alors $P_C \supset P_{C'} = \mathbb{R}^n_+$ et $\Gamma(P_C) \subset \Gamma(P_{C'}) = \Gamma(\mathbb{R}^n_+) = [(\mathbb{R}^n)^*]_-$.

$$\left.\begin{array}{r} C \text{ étant convexe, } x-\bar{x} \in P_C \ \forall x \in C \\ \text{Soit } \xi \in \Gamma(P_C) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \in C \Rightarrow \xi.\bar{x} \geq 0 \\ x = 2\bar{x} \in C \Rightarrow \xi.\bar{x} \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \xi.\bar{x} = 0.$$

$\Gamma(G) = \Gamma(P_C) = \{\xi \in (\mathbb{R}^n)^* : \xi \leq 0,\ \xi.\bar{x} = 0\}$.

On obtient les conditions d'optimalité suivantes :

Max $\phi(x)$	
$a(x) \geq 0$	$\exists u \geq 0$
$x \geq 0$	$\overline{\frac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\frac{da}{dx}} \leq 0$
	$\left(\overline{\frac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\frac{da}{dx}}\right) . \bar{x} = 0$
	$ua(\bar{x}) = 0$

II §2 - C. ETUDE DES CONDITIONS DE KUHN ET TUCKER GENERALISEES

La généralisation par rapport à la théorie de Kuhn et Tucker porte sur les points suivants :

(a) Les contraintes sont de deux types : $a(x) \geq 0$, et $x \in C$, où C est un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$. Ceci est intéressant lorsque C ne peut être défini par un système d'inéquations algébriques (exemple : $C = \mathbb{Z}^n$).

(b) L'hypothèse $H(G)$, soit : $K_0 \cap G$ et P_A coïncident, et $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ est fermé, est plus faible que les hypothèses précédemment énoncées lorsque $A = \Delta$ et $G = C = \mathbb{R}^n$. Elle s'écrit alors $K_0 = P_\Delta$.

$$\text{Soit } C(\bar{x}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n, \text{ différentiable à droite à l'origine} \\ \text{vérifiant } \psi(0) = \bar{x},\ \psi'(+0) = \lambda(x-\bar{x}), \text{ avec } \lambda > 0 \\ \text{et } \psi(0) \in \Delta,\ \forall \theta \in [0,1] \end{array} \right\}$$

Ces hypothèses étaient les suivantes :

$\boxed{\alpha}$ Hypothèse de Kuhn et Tucker : $K_0 = C(\bar{x})$ [21]

$\boxed{\beta}$ Hypothèse de Arrow, Hurwicz, et Uzawa : $K_0 = \overline{\{C(\bar{x})\}}$, où $\{C(\bar{x})\}$ est le plus petit cône convexe contenant $C(\bar{x})$. [4]

$\boxed{\gamma}$ Hypothèse d'Abadie : $K_0 = T_\Delta$. [1]

L'hypothèse analogue dans cet exposé est $H(0)$, elle est liée aux hypothèses α, β et γ par les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \subset \beta \\ \\ \alpha \subset \gamma \end{array}\right\} \subset H(0)$$

où la relation $A \subset B$ signifie que lorsque $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse A, $\bar{x}$ vérifie a fortiori l'hypothèse B.

(c) Lorsque $C = \mathbb{R}^n$, si l'hypothèse H(O) n'est pas vérifiée en $\bar{x}$, on peut dans certains cas trouver un cône convexe fermé G tel que $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) sur Δ, Comme $K_0 \supset P_A$, l'hypothèse H(G) ne peut être vérifiée que si $G \supset P_A$. Si $\Gamma(P_A) + \Gamma(K_0)$ est fermé, le choix $G = P_A$ est satisfaisant, mais conduit au même résultat que le théorème 4.

Lorsque $P_A = \{0\}$, on peut prendre pour G le cône $\widetilde{\Gamma(K_0)}$, isomorphe dans $\mathbb{R}^n$ à $\Gamma(K_0)$.

(d) Les conditions de Kuhn et Tucker généralisées s'écrivent

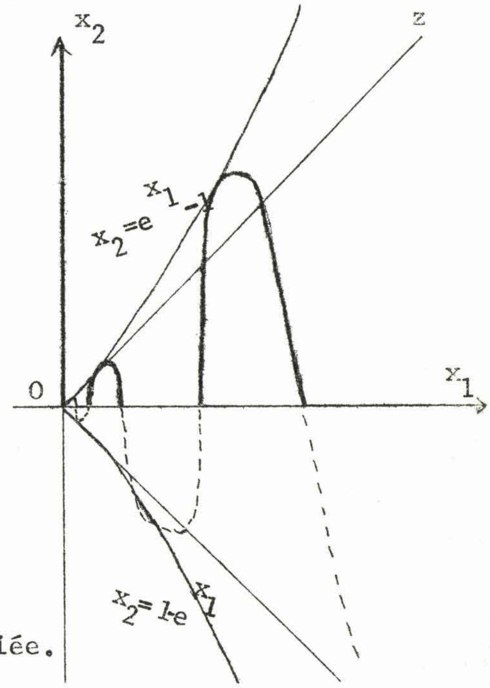
$$\exists\, u \in (\mathbb{R}^m)^* : \begin{cases} u \geq 0 \\ \overline{\dfrac{d\phi}{dx}} + u\, \overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

Si K_0 est différent de P_A, et s'il existe plusieurs cônes convexes fermés G satisfaisant à l'hypothèse H(G), le plus grand de ces cônes, correspondant au plus petit des cônes $\Gamma(G)$, fournira davantage de précisions sur les multiplicateurs.

- Les exemples suivants illustreront ces propriétés :

Exemple 1. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } \phi(x) \\ a_1(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ -[x_2 - (e^{x_1} - 1) \sin \frac{1}{x_1}]^2 \, x_1^2 & \text{sinon.} \end{array}\right\} \geq 0 \\ a_2(x) = x_1 \geq 0 \\ a_3(x) = x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$



Soit $\bar{x} = (0,0)$.

$$K_0 = \{\xi : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \xi \geq 0\} = \{\xi : \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\}$$

$$C(\bar{x}) = \overline{\{C(\bar{x})\}} = Ox_2$$

$$T_A = (x_1 Oz) \cup (Ox_2).$$

Aucune des hypothèses α, β, γ n'est vérifiée.

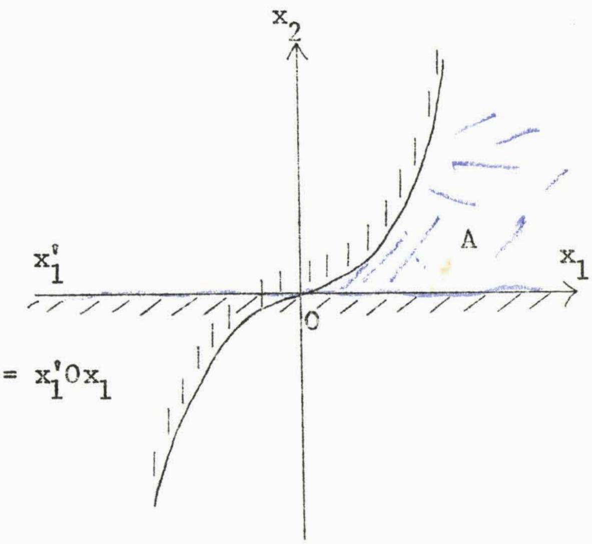
$$P_A = (x_1 O x_2) = K_0.$$

L'hypothèse $H(0)$ est vérifiée.

$$\exists\, u \in (\mathbb{R}^3)^* : \left\{\begin{array}{l} u \geq 0 \\ \overline{\dfrac{d\phi}{dx}} + u \overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(\mathbb{R}^n) \iff \overline{\dfrac{d\phi}{dx}} + u \overline{\dfrac{da}{dx}} = 0. \\ ua(\bar{x}) = 0. \end{array}\right.$$

Exemple 2. $\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{Max} \phi(x) \\ a_1(x) = x_1^3 - x_2 \geqslant 0 \\ a_2(x) = x_2 \geqslant 0. \end{array}\right.$$



Soit $\bar{x} = (0,0)$.

$$K_0 = \{\xi : \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \xi \geqslant 0\} = \{\xi : \xi_2 = 0\} = x_1' 0 x_1$$

$$C(\bar{x}) = \overline{\{C(\bar{x})\}} = T_A = P_A = 0x_1.$$

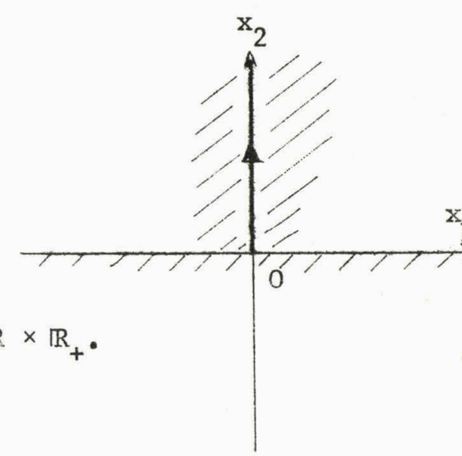
Aucune des hypothèses α, β, γ, $H(0)$ n'est vérifiée.

L'hypothèse $H(G)$ est vérifiée avec $G = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

$$\exists u \in (\mathbb{R}^2)^* : \begin{cases} u \geqslant 0 \\ \overline{\dfrac{d\phi}{dx}} + u \, \overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) \\ u a(\bar{x}) = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \overline{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}} + u \, \overline{\dfrac{\partial a}{\partial x_1}} \leqslant 0 \\ \overline{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_2}} + u \, \overline{\dfrac{\partial a}{\partial x_2}} = 0 \end{cases}$$

Exemple 3. $\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{Max} \phi(x) \\ a_1(x) = -x_1^2 \geqslant 0 \\ a_2(x) = x_2 \geqslant 0. \end{array}\right.$$



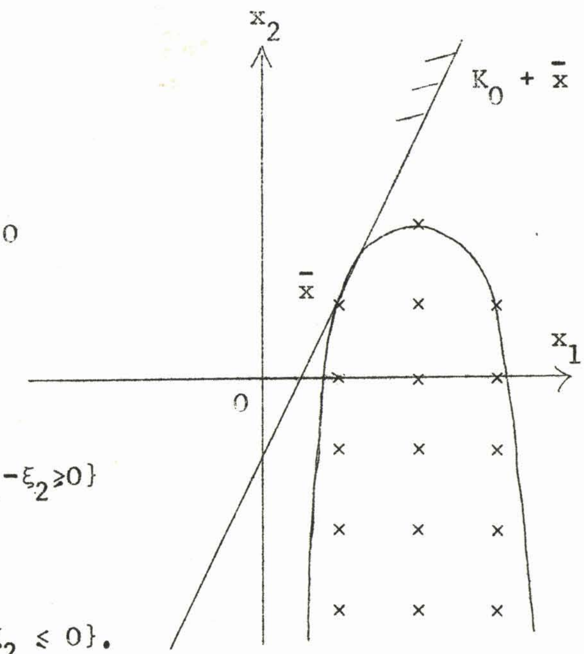
Soit $\bar{x} = (0,0)$. $K_0 = \{\xi : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \xi \geqslant 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$$C(\bar{x}) = \overline{\{C(\bar{x})\}} = T_A = P_A = 0x_2.$$

Aucune des hypothèses α, β, γ, $H(0)$ n'est vérifiée.

L'hypothèse $H(G)$ est vérifiée avec $G = P_A = \{0\} \times R_+ = Ox_2$.

On retrouve le résultat du théorème 4 : $\overline{\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}} \leqslant 0$.



Exemple 4.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } \phi(x) \\ a_1(x) = -x_1^2 + 4x_1 - x_2 - 2 \geqslant 0 \\ x = (x_1,x_2) \in \geqslant \mathbb{Z}^2 \end{array}\right.$$

Soit $\bar{x} = (1,1)$.

$K_0 = \{\xi : [2 -1].\xi \geqslant 0\} = \{\xi : 2\xi_1 - \xi_2 \geqslant 0\}$

$T_A = P_A = \{0\}$.

$G = \widetilde{\Gamma(K_0)} = \{\xi : \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \xi_2 \leqslant 0\}$.

L'hypothèse $H(G)$ est vérifiée, avec $G = \widetilde{\Gamma(K_0)}$.

$$\exists\, u \in (\mathbb{R}^1)^* : \begin{cases} u \geqslant 0 \\ \overline{\dfrac{d\phi}{dx}} + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) = \widetilde{K_0} \iff 2\left[\overline{\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}} + u\,\overline{\dfrac{\partial a}{\partial x_1}}\right] \geqslant \left[\overline{\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}} + u\,\overline{\dfrac{\partial a}{\partial x_2}}\right] \\ u a(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

II §2 - D. HYPOTHESE H(G) ET CONDITIONS DE KUHN ET TUCKER

Théorème 9

Si . A est pseudo-convexe en $\bar{x}$

. G est un cône convexe fermé contenant P_A, tel que $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ soit fermé

alors une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions ϕ différentiables en $\bar{x} \in A$ et atteignant leur maximum sur A en $\bar{x}$ vérifient les conditions de Kuhn et Tucker généralisées

est que

$\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G)$ sur A.

LA CONDITION EST SUFFISANTE

cf. théorème 8.

LA CONDITION EST NECESSAIRE

. Soit $H = \{h \in \mathbb{R}^n : h = \lambda(x-\bar{x}),\ \lambda \geq 0,\ x \in A\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A \text{ est pseudo-convexe en } \bar{x} \Longrightarrow \forall x \in A, x-\bar{x} \in P_A \\ P_A \text{ est un cône} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall \lambda \geq 0,\ \lambda(x-\bar{x}) \in P_A \end{array}\right\} \Longrightarrow H \subset P_A.$$

$$\left.\begin{array}{l} H \subset P_A. \\ \text{Soit } F = \overline{\{H\}}, \text{ où } \{H\} \text{ est le plus petit cône convexe contenant } H \end{array}\right\} \Longrightarrow F \subset P_A.$$

• Soit $\alpha \in \Gamma(F) \Longrightarrow \alpha\eta \leq 0,\ \forall \eta \in F \Longrightarrow \alpha\eta \leq 0,\ \forall \dot{\eta} \in H.$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \geq 0 \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda(x-\bar{x}) \in H \Longrightarrow \alpha\lambda(x-\bar{x}) \leq 0.$$

Si $\lambda = 1$, $\lambda x \leq \lambda\bar{x}$, $\forall x \in A$.

La fonction $\phi(x) = \alpha x$ atteint son maximum sur A en $\bar{x}$, et satisfait donc aux conditions de Kuhn et Tucker en $\bar{x}$:

$$\left.\begin{array}{l} \exists u \in (\mathbb{R}^m)^* : \left\{\begin{array}{l} u \geq 0 \\ \alpha + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l} u \geq 0 \\ ua(\bar{x}) = 0 \\ a_E(\bar{x}) = 0 \\ a_{\bar{E}}(\bar{x}) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow u^{\bar{E}} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha + u^E\,\overline{\dfrac{da_E}{dx}} \in \Gamma(G).$$

• Soit $\xi \in K_g \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \xi \in G \\ \overline{\dfrac{da_E}{dx}}.\ \xi \geq 0. \end{array}\right. \Longrightarrow u^E\,\overline{\dfrac{da_E}{dx}}\ \xi \geq 0$

$$\Longrightarrow \alpha\xi \leq 0.$$

c'est-à-dire $\forall\alpha \in \Gamma(F)$, $\alpha\xi \leq 0$, donc $\xi \in \Gamma[\Gamma(F)] = F$ puisque F est un cône convexe fermé.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} F \subset P_A \\ \xi \in F \end{array}\right\} \Longrightarrow \xi \in P_A \Longrightarrow K_g \subset P_A \\ \left.\begin{array}{ll} \text{D'après le théorème 5,} & K_0 \supset P_A \\ \text{Par hypothèse,} & G \supset P_A \end{array}\right\} \Longrightarrow K_g \supset P_A \end{array}\right\} \Longrightarrow K_g = P_A.$$

et $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) sur A, puisque par hypothèse $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ est fermé.

Remarques

. Ce résultat généralise les conclusions de [4], en envisageant un programme sous contraintes mixtes et les conditions de Kuhn et Tucker généralisées. Il convient de remarquer que l'hypothèse de convexité du domaine A est remplacée par une hypothèse de pseudo-convexité en $\bar{x}$.

. L'hypothèse H(G), comme les hypothèses α, β, γ, ne fait pas intervenir explicitement la fonction à maximiser. Il se peut qu'un domaine A soit tel que $\bar{x}$ ne vérifie pas d'hypothèse H(G), quel que soit G, mais que cependant certaines fonctions différentiables en $\bar{x}$ et atteignant leur maximum sur A en $\bar{x}$ satisfassent en $\bar{x}$ aux conditions de Kuhn et Tucker généralisées. Dans le chapitre III sera introduite une hypothèse appelée "sup", dûe à Stoer [34], qui tiendra compte simultanément de la fonction à maximiser et du domaine A.

II §2 - E. CRITERES RELATIFS A L'HYPOTHESE H(G)

Théorème 10

Si . (1) au voisinage de $\bar{x}$, $x-\bar{x} \in K_g \Longrightarrow x \in C$

. (2) $\exists \bar{\xi} \in K_g$ tel que, pour tout $j \in E$:

α - ou a_j est localement convexe au voisinage de $\bar{x}$

β - ou $a_j(\bar{x}+\xi)$ atteint son minimum sur K_g en $\xi_0=0$

γ - ou $\frac{da_j}{dx}\cdot\bar{\xi} > 0$

. (3) G est un cône convexe fermé contenant P_A et tel que $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ soit fermé

alors $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) sur A.

N.B. Si toutes les fonctions a_j, $j \in E$, vérifient 2-α ou 2-β, on prendra

$$\bar{\xi} = 0.$$

Démonstration :

- Soient $\eta \in K_g$, $\alpha > 0$ et $\theta \geq 0$, $\bar{\xi} \in K_g$ $\Longrightarrow \theta(\eta+\alpha\bar{\xi}) \in K_g$

Soit $\psi(\theta) = \bar{x} + \theta(\eta+\alpha\bar{\xi})$

$$\left.\begin{array}{l}\theta(\eta+\alpha\bar{\xi}) \in K_g \\ \psi(\theta) = \bar{x} + \theta(\eta+\alpha\bar{\xi})\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l}\psi(\theta)-\bar{x} \in K_g \\ (1)\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\theta) \in C$$

au voisinage de $\theta = 0$.

$$\forall j \in E : \left[\frac{da_j}{d\Theta} (\psi(\Theta)) \right]_{\Theta=0} = \overline{\frac{da_j}{dx}} . \left[\frac{d\psi(\Theta)}{d\Theta} \right]_{\Theta=0}$$

$$= \overline{\frac{da_j}{dx}} . (\eta+\alpha\bar{\xi})$$

$$= \overline{\frac{da_j}{dx}} . \eta+\alpha \overline{\frac{da_j}{dx}} . \bar{\xi}$$

$$\eta \in K_g \Longrightarrow \left[\frac{da_j}{d\Theta} (\psi(\Theta)) \right]_{\Theta=0} \geq \alpha \overline{\frac{da_j}{dx}} . \bar{\xi}.$$

α - Si a_j est localement convexe au voisinage de $\bar{x}$:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\xi} \in K_g \\ \\ \alpha > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \overline{\frac{da_j}{dx}} . \bar{\xi} \geq 0 \Longrightarrow \left[\frac{da_j}{d\Theta} (\psi(\Theta)) \right]_{\Theta=0} \geq 0$$

et au voisinage de $\Theta = 0$,

$$\Theta \geq 0 \Longrightarrow a_j [\psi(\Theta)] \geq a_j [\psi(0)] = a_j(\bar{x}) = 0.$$

β - Si $\xi_0 = 0$ minimise $a_j(\bar{x} + \xi)$ sur K_g :

$$\forall \xi \in K_g : a_j [\bar{x} + \xi] \geq a_j(\bar{x})$$

$$\left.\begin{array}{r} \psi(\Theta) - \bar{x} \in K_g \\ \\ \Theta \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_j [\psi(\Theta)] \geq a_j [\psi(0)] = a_j(\bar{x}) = 0.$$

γ - Si $\overline{\frac{da_j}{dx}} . \bar{\xi} > 0$,

$$\forall \alpha > 0, \alpha \overline{\frac{da_j}{dx}} . \bar{\xi} > 0 \Longrightarrow \left[\overline{\frac{da_j}{d\Theta}} (\psi(\Theta) \right]_{\Theta=0} > 0.$$

Donc au voisinage de $\Theta = 0$,

$$\Theta \geq 0 \Longrightarrow a_j [\psi(\Theta)] \geq a_j [\psi(0)] = a_j(\bar{x}) = 0.$$

- Dans les trois cas, au voisinage de $\Theta = 0$,

$$\Theta \geq 0 \implies a_E\,[\psi(\Theta)] \geq a_E\,[\psi(0)] = a_E(\bar{x}) = 0 \qquad (4)$$

D'autre part $\qquad a_{\bar{E}}\,[\psi(0)] = a_{\bar{E}}(\bar{x}) > 0,$

donc au voisinage de $\Theta = 0$,

$$\Theta \geq 0 \implies a_{\bar{E}}\,[\psi(\Theta)] \geq 0. \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(4)\\ \\(5)\end{array}\right\} \implies \text{au voisinage de } \Theta=0,\ \Theta\geq 0 \Rightarrow a[\psi(\Theta)] \geq 0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \geq 0\}\end{array}\right\} \implies \psi(\Theta) \in \Delta$$

- $\left.\begin{array}{l}\psi(\Theta) \in C\\ \\ \psi(\Theta) \in \Delta\end{array}\right\} \implies \psi(\Theta) \in A.$

$\eta + \alpha\bar{\xi} = \dfrac{\psi(\Theta)-\bar{x}}{\Theta}$ est un vecteur tangent à A en $\bar{x}$: il suffit de choisir une suite $\{\Theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $\Theta = 0$, convergeant vers 0 : la suite $\{\psi(\Theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de points de A converge vers $\bar{x}$, la suite $\{\frac{1}{\Theta_k}\ [\psi(\Theta_k) - \bar{x}]\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\eta+\alpha\bar{\xi}$, donc

$$\forall\alpha > 0,\ \eta + \alpha\bar{\xi} \in T_A.$$

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \eta + \alpha\bar{\xi} = \eta \in T_A$, puisque T_A est fermé.

Donc $\left.\begin{array}{l}K_g \subset T_A \subset P_A\\ \\ \qquad\qquad (3)\end{array}\right\} \implies \bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) sur A.

Applications

$\bar{x}$ satisfaisant aux hypothèses (1) et (3), l'hypothèse (2) sera vérifiée en particulier

• si A est pseudo-convexe en $\bar{x}$ et a un intérieur non vide, et si $\forall j \in E, \overline{\frac{da_j}{dx}} \neq 0.$

> a_E vérifie alors l'hypothèse 2-γ.
>
> En effet :
>
> $$\left.\begin{array}{l} \text{A étant pseudo-convexe en } \bar{x},\ A \subset \bar{x} + P_A. \\ \left.\begin{array}{l} \text{D'après le théorème 5, } P_A \subset K_0 \\ \\ \text{D'après l'hypothèse (3), } P_A \subset G \end{array}\right\} \Longrightarrow P_A \subset K_g \end{array}\right\} \Longrightarrow A \subset \bar{x} + K_g.$$
>
> A ayant un intérieur non vide, il en est de même pour K_g qui a donc même dimension que l'espace entier.
>
> Si pour $j \in E$, $\overline{\frac{da_j}{dx}} . \xi = 0 \quad \forall \xi \in K_g$,
>
> alors $\qquad \overline{\frac{da_j}{dx}} . \xi = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$
>
> et donc $\qquad \overline{\frac{da_j}{dx}} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
>
> Donc $\forall j \in E, \ \exists \overset{j}{\xi} \in K_g : \overline{\frac{da_j}{dx}} . \overset{j}{\xi} > 0.$
>
> et $\qquad \forall k \in E, k \neq j : \overline{\frac{da_j}{dx}} . \overset{k}{\xi} \geq 0.$
>
> Soit alors $\bar{\xi} = \sum_{j \in E} \overset{j}{\xi} : \overline{\frac{da_E}{dx}} . \bar{\xi} > 0.$

. Si chacune des contraintes actives est

- soit linéaire

  elle vérifie alors l'hypothèse 2-α

- soit convexe

  elle vérifie alors l'hypothèse 2-α

- soit pseudo-convexe sur K_g en $\bar{x}$

- soit quasi-convexe avec $\overline{\dfrac{da_j}{dx}} \neq 0$

  dans ces deux cas, elle vérifie alors l'hypothèse 2-β.
  En effet : Supposons qu'il s'agisse de la contrainte d'indice j, d'après le théorème 7, les conditions de Kuhn et Tucker sont alors suffisantes pour que $\xi_0 = 0$ maximise $- a_j(\bar{x} + \xi)$ pour $\xi \in K_g$. Ces conditions s'écrivant

$$\exists u \in (\mathbb{R}^{|E|})^* : \begin{cases} u^E \geq 0, \; u^E . \dfrac{da_E(\bar{x})}{dx} . \; \xi_0 = 0 \\ \\ - \overline{\dfrac{da_j}{dx}} + u^E \; \overline{\dfrac{da_E}{dx}} = 0. \end{cases}$$

  sont vérifiées si l'on prend $u^k = \begin{cases} 1 \text{ si } k = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

- soit concave, et E_1 étant l'ensemble des indices des contraintes actives concaves, $\exists \overset{o}{x} \in \bar{x} + G : a_{E_1}(\overset{o}{x}) > 0$.

a_{E_1} vérifie alors l'hypothèse 2-γ.

En effet :

$$\overline{\frac{da_{E_1}}{dx}} \cdot (\overset{o}{x} - \bar{x}) \geq a_{E_1}(\overset{o}{x}) - a_{E_1}(\bar{x})$$

$$\geq a_{E_1}(\overset{o}{x})$$

et il existe $\bar{\xi}$:

$$\bar{\xi} = \overset{o}{x} - \bar{x} \in K_0 \cap G$$

tel que $\overline{\frac{da_{E_1}}{dx}} \cdot \bar{\xi} > 0$.

. Si $G = \mathbb{R}^n$ et si $\overline{\frac{da_E}{dx}}$ est de rang égal à $|E|$.

a_E vérifie alors l'hypothèse 2-γ.

En effet :

soit $u > 0$. $\exists \bar{\xi}$: $\overline{\frac{da_E}{dx}} \cdot \bar{\xi} = u > 0$.

$\bar{\xi}$ appartient alors à $K_g = K_0 \cap G = K_0 \cap \mathbb{R}^n$.

CHAPITRE III

D U A L I T E

Nous envisagerons dans ce chapitre les relations existant entre deux programmes mathématiques dits "en dualité", entre leurs solutions et entre leurs valeurs optimales.

III §1. PROBLEMES DUALS ET MINIMAX

Dans [34] , Stoer, puis dans [24], Mangasarian et Ponstein ont défini deux programmes duals très généraux et un problème de col associé.

Soit $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

et soient $X \subset \mathbb{R}^n$ et $U \subset \mathbb{R}^m$.

1 - Soit $\mathcal{P}$ le premier programme (programme "primal") :

$$\underset{x\in X}{\mathrm{Sup}} \ \underset{u\in U}{\mathrm{Inf}} \ \psi(x,u),$$

ou encore, en posant $(\mathcal{P}) = \{(x,u) : \psi(x,u) = \underset{\eta\in U}{\mathrm{Inf}} \ \psi(x,\eta)\}$,

$$\mathrm{Sup} \ \{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathcal{P})\}.$$

Soit $(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{u})$ une solution de $\mathcal{P}$: alors

$$\psi(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{u}) = \underset{x\in X}{\mathrm{Sup}} \ \underset{u\in U}{\mathrm{Inf}} \ \psi(x,u) = \underset{u\in U}{\mathrm{Inf}} \ \psi(\overset{\circ}{x},u).$$

2 - Soit $\mathcal{D}$ le second programme (programme "dual") :

$$\underset{u\in U}{\mathrm{Inf}} \ \underset{x\in X}{\mathrm{Sup}} \ \psi(x,u),$$

ou encore en posant $(\mathcal{D}) = \{(x,u) : \psi(x,u) = \underset{y\in X}{\mathrm{Sup}} \ \psi(y,u)\}$

$$\mathrm{Inf} \ \{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathcal{D})\}.$$

Soit (x^*, u^*) une solution de $\mathcal{D}$: alors

$$\psi(x^*,u^*) = \underset{u\in U}{\mathrm{Inf}} \ \underset{x\in X}{\mathrm{Sup}} \ \psi(x,u) = \underset{x\in X}{\mathrm{Sup}} \ \psi(x,u^*).$$

3 - Soit P* le problème associé (problème "de col") :

$$\exists ?\, (\bar{x},\bar{u}) \in X \times U : \forall (x,u) \in X \times U,\ \psi(x,\bar{u}) \leq \psi(\bar{x},\bar{u}) \leq \psi(\bar{x},u),$$

ou encore $\psi(\bar{x},\bar{u}) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \psi(x,\bar{u}) = \operatorname*{Inf}_{u \in U} \psi(\bar{x},u)$.

P* peut donc s'écrire

$$\exists ?\, (\bar{x},\bar{u}) \in (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{D}).$$

Remarque

Ces problème peuvent ne pas avoir de solution (si l'inf ou le sup n'est pas atteint ou si ($\mathcal{P}$), ($\mathcal{D}$) ou ($\mathcal{P}$) $\cap$ ($\mathcal{D}$) est vide par exemple).

- Il y a équivalence entre le problème de col P* et les deux problèmes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

Lemme 1.

$(\bar{x},\bar{u})$ est solution de P* (1)

$$\Updownarrow$$

$(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathcal{P}$ <u>et</u> de $\mathcal{D}$. (2)

. (1) $\Longrightarrow$ (2) :

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \text{- Soit } (x,u) \in (\mathcal{P}) \\ \bar{u} \in U \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(x,u) \leq \psi(x,\bar{u}) \\
\left.\begin{array}{l} (\bar{x},\bar{u}) \text{ est solution de } P^* \\ x \in X \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(x,\bar{u}) \leq \psi(\bar{x},\bar{u})
\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(x,u) \leq \psi(\bar{x},\bar{u})$$

et $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathcal{P}$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{- Soit } (x,u) \in (\mathcal{D}) \\ \\ \bar{x} \in X\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(x,u) \geq \psi(\bar{x},u) \\ \\ \left.\begin{array}{l}(\bar{x},u) \text{ est solution} \\ \quad \text{de } P^* \\ \\ u \in U\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\bar{x},u) \geq \psi(\bar{x},\bar{u})\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(x,u) \geq \psi(\bar{x},\bar{u})$$

et $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathcal{D}$.

. (2) $\Longrightarrow$ (1) :

$$\left.\begin{array}{l}(\bar{x},\bar{u}) \text{ solution de } \mathcal{D} \Longrightarrow (\bar{x},\bar{u}) \in (\mathcal{D}) \\ \\ (\bar{x},\bar{u}) \text{ solution de } \mathcal{P} \Longrightarrow (\bar{x},\bar{u}) \in (\mathcal{P})\end{array}\right\} \Longrightarrow (\bar{x},\bar{u}) \in (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{D})$$

et $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de P^*.

Remarques

- Aucune hypothèse de continuité ni de concavité n'a été faite sur ψ .

- On adoptera les conventions suivantes :

$$\operatorname*{Inf}_{x\in\emptyset} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname*{Sup}_{x\in\emptyset} h(x) = -\infty$$

si $h : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$.

Lemme 2.

Si $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ sont non vides :

$$\left.\begin{array}{l}\forall(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \in (\mathcal{P}) \\ \\ \forall(\overset{2}{x},\overset{2}{u}) \in (\mathcal{D})\end{array}\right\} \qquad \psi(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \leq \psi(\overset{2}{x},\overset{2}{u}) \qquad (1)$$

$$\operatorname{Inf}\{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathcal{D})\} \geq \operatorname{Sup}\{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathcal{P})\} \qquad (2)$$

(1)

$$(\mathcal{P}) \neq \emptyset \implies \exists(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \in (\mathcal{P}) : \forall u \in U,\ \psi(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \leq \psi(\overset{1}{x},u)$$

$$(\mathcal{D}) \neq \emptyset \implies \exists(\overset{2}{x},\overset{2}{u}) \in (\mathcal{D}) : \forall x \in X,\ \psi(x,\overset{2}{u}) \leq \psi(\overset{2}{x},\overset{2}{u})$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{2}{u} \in U \\ \\ \overset{1}{x} \in X \end{array}\right\} \implies \psi(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \leq \psi(\overset{1}{x},\overset{2}{u}) \leq \psi(\overset{2}{x},\overset{2}{u})$$

et $\psi(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \leq \psi(\overset{2}{x},\overset{2}{u})$.

(2)

($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{D}$) étant non vides

$$\left.\begin{array}{l} \forall(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \in (\mathcal{P}) \\ \\ \forall(\overset{2}{x},\overset{2}{u}) \in (\mathcal{D}) \end{array}\right\} \quad \psi(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \leq \psi(\overset{2}{x},\overset{2}{u})$$

et donc $\mathrm{Sup}\ \{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathcal{P})\} \leq \mathrm{Inf}\ \{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathcal{D})\}$.

<u>Remarque</u>

Si ($\mathcal{P}$) et/ou ($\mathcal{D}$) est vide, d'après les conventions adoptées

$$\mathrm{Sup}\ \{\psi(x,u) : (x,u) \in \emptyset\} = -\infty$$
$$\mathrm{Inf}\ \{\psi(x,u) : (x,u) \in \emptyset\} = +\infty\ ,$$

et la relation (2) est encore vérifiée.

- La suite du paragraphe reprend l'étude de Stoer, Mangasarian et Ponstein, en utilisant toutefois, lorsque cela est possible, (théorèmes 12 et 13) des fonctions quasi-concaves (resp. quasi-convexes) et s.c.s (resp. s.c.i) au lieu de fonctions concaves (resp. convexes) et continues, grâce à une généralisation du théorème du Minimax de Kakutani [19] et Von Neumann due à Sion [32].

Théorème II : *Théorème du Minimax*

Soit $\psi : (x,u) \in X \times U \longrightarrow \psi(x,u) \in \mathbb{R}$.

Si . X et U sont deux sous-ensembles convexes compacts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement

. ψ est

(Kakutani) $\begin{cases} \text{continue et concave en } x \\ \text{continue et convexe en } u. \end{cases}$

(Von Neumann) $\begin{cases} \text{s.c.s. et concave en } x \\ \text{s.c.i. et convexe en } u \end{cases}$

(Sion) $\begin{cases} \text{s.c.s. et quasi-concave en } x \\ \text{s.c.i. et quasi-convexe en } u \end{cases}$

alors

. $\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\ \underset{u\in U}{\mathrm{Min}}\ \psi(x,u) = \underset{u\in U}{\mathrm{Min}}\ \underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\ \psi(x,u)$.

. $\exists(\overset{o}{x},\overset{o}{u}) \in X \times U$ tel que

$$\forall (x,u) \in X \times U : \psi(x,\overset{o}{u}) \leq \psi(\overset{o}{x},\overset{o}{u}) \leq \psi(\overset{o}{x},u).$$

Démonstration : cf. [32].

Définition 13

Soit $\psi : X \times U \to \mathbb{R}$, où X et U sont des convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

ψ a la propriété inf en $(\bar{x},\bar{u}) \in X \times U$ si

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, V(\bar{u}) \text{ voisinage fermé de } \bar{u} \\ \\ \exists\, E \subset X \text{ compact convexe} \end{array}\right\} : \forall u \in V(\bar{u}) \cap U,\ \psi(\bar{x},\bar{u}) \leq \operatorname*{Max}_{x\in E} \psi(x,u)$$

ψ a la propriété sup en $(\bar{x},\bar{u}) \in X \times U$ si

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, V(\bar{x}) \text{ voisinage fermé de } \bar{x} \\ \\ \exists\, F \subset U \text{ compact convexe} \end{array}\right\} : \forall x \in V(\bar{x}) \cap X : \psi(\bar{x},\bar{u}) \geq \operatorname*{Min}_{u\in F} \psi(x,u)$$

Théorème 12 : *Théorème de Stoer*

Soit $\psi : X \times U \to \mathbb{R}$, où X et U sont des convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

A Si . ψ est continue et concave en x

et s.c.i. et quasi-convexe en u

. $\exists (x,u) \in X \times U : \psi(\bar{x},\bar{u}) = \text{Inf } \{\psi(\bar{x},u) : u \in U\}$ (A)

alors une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\exists \overset{\circ}{u} \in U : \left\{\begin{array}{l} (1)\quad (\bar{x},\overset{\circ}{u}) \text{ est un col pour } \psi \text{ sur } X \times U \\ \\ (2)\quad \psi(\bar{x},\overset{\circ}{u}) = \psi(\bar{x},\bar{u}) \end{array}\right.$$

est que ψ ait la propriété sup en $(\bar{x},\bar{u})$.

B Si . ψ est s.c.s. et quasi-concave en x

et continue et convexe en u

. $\exists (\bar{x},\bar{u}) \in X \times U : \psi(\bar{x},\bar{u}) = \text{Sup } \{\psi(x,\bar{u}) : x \in X\}$ (B)

alors une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\exists \overset{\circ}{x} \in X : \left\{\begin{array}{l} (1)\quad (\overset{\circ}{x},\bar{u}) \text{ est un col pour } \psi \text{ sur } X \times U \\ (2)\quad \psi(\overset{\circ}{x},\bar{u}) = \psi(\bar{x},\bar{u}) \end{array}\right.$$

est que ψ ait la propriété inf en $(\bar{x},\bar{u})$

Réf : [34].

B. LA CONDITION EST NECESSAIRE

Soit $(\mathring{x},\bar{u})$ un col pour ψ sur $X \times U$, vérifiant (2).

Soient $E = \{\mathring{x}\}$ et $V(\bar{u})$ un voisinage fermé quelconque de $\bar{u}$.

$\forall (x,u) \in E \times (V(\bar{u}) \cap U) : \psi(\bar{x},\bar{u}) = \psi(\mathring{x},\bar{u}) \leq \psi(x,u)$.

$\psi(\bar{x},\bar{u}) \leq \underset{x \in E}{\mathrm{Max}}\ \psi(x,u)$, $\forall u \in V(\bar{u}) \cap U$,

et ψ a la propriété "inf" en $(\bar{x},\bar{u})$.

LA CONDITION EST SUFFISANTE

- D'après le théorème 11

$\exists (\mathring{x},\mathring{u}) \in E \times (V(\bar{u}) \cap U)$:

$$\forall (x,u) \in E \times (V(\bar{u}) \cap U),\ \psi(\mathring{x},u) \geq \psi(\mathring{x},\mathring{u}) \geq \psi(x,\mathring{u}) \tag{3}$$

$$\text{et } \psi(\mathring{x},\mathring{u}) = \underset{u \in V(\bar{u}) \cap U}{\mathrm{Min}} \quad \underset{x \in E}{\mathrm{Max}}\ \psi(x,u) \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} (4) \\ \text{Propriété inf en } (\bar{x},\bar{u}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\bar{x},\bar{u}) \leq \psi(\mathring{x},\mathring{u}) \\[2ex]
\left.\begin{array}{l} (3) \\ \bar{u} \in V(\bar{u}) \cap U \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\mathring{x},\mathring{u}) \leq \psi(\mathring{x},\bar{u}) \\[2ex]
\left.\begin{array}{l} (B) \\ \mathring{x} \in X \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\mathring{x},\bar{u}) \leq \psi(\bar{x},\bar{u})
\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\bar{x},\bar{u})=\psi(\mathring{x},\bar{u})=\psi(\mathring{x},\mathring{u}) \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} (5) \\ (B) \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall x \in X,\ \psi(x,\bar{u}) \leq \psi(\mathring{x},\bar{u})$$

$$\left.\begin{array}{l} (3) \\ (5) \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall u \in V(\bar{u}) \cap U,\ \psi(\mathring{x},\mathring{u}) = \psi(\mathring{x},\bar{u}) \leq \psi(\mathring{x},u) \tag{6}$$

- $\forall u \in U,\ u \notin V(\bar{u}),\ \exists \mu \in]0,1[\ :\ \overset{1}{u} = [\mu u + (1-\mu)\ \bar{u}] \in V(\bar{u})$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}(6)\\ \overset{1}{u} \in V(\bar{u})\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\overset{o}{x},\bar{u}) \leq \psi(\overset{o}{x},\overset{1}{u}) \\ \psi \text{ convexe en } u \Longrightarrow \psi(\overset{o}{x},\overset{1}{u}) \leq \mu\psi(\overset{o}{x},u) + (1-\mu)\ \psi\ (\overset{o}{x},\bar{u}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \underset{(7)}{\psi(\overset{o}{x},\bar{u}) \leq \psi(\overset{o}{x},u)}$$

$$- \left.\begin{array}{l}(6)\\ \\ (7)\end{array}\right\} \Longrightarrow \forall (x,u) \in X \times U\ :\ \psi(x,\bar{u}) \leq \psi(\bar{x},\bar{u}) = \psi(\overset{o}{x},\overset{o}{u}) = \psi(\overset{o}{x},\bar{u}) \leq \psi(\overset{o}{x},u)$$

A. La démonstration est analogue.

Théorème 13 : *Théorème général de dualité*

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ les programmes primal et dual définis au début de ce chapitre, $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ l'ensemble de leurs solutions réalisables. On suppose que X et U sont deux convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

A. Si ψ est continue et concave en x
et s.c.i et quasi-convexe en u
alors une condition nécessaire et suffisante pour que $(\bar{x},\bar{u})$ soit solution de $\mathcal{P}$ est que
$\exists \overset{o}{u} \in U$ tel que $(\bar{x},\overset{o}{u})$ soit solution de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$,
si et seulement si ψ a la propriété sup en $(\bar{x},\bar{u})$.

B. Si ψ est s.c.s et quasi-concave en x,
et continue et convexe en u,
alors une condition nécessaire et suffisante pour que $(\bar{x},\bar{u})$ soit solution de $\mathcal{D}$ est que
$\exists \overset{o}{x} \in X$ tel que $(\overset{o}{x},\bar{u})$ soit solution de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$,
si et seulement si ψ a la propriété inf en $(\bar{x},\bar{u})$.

Réf : [34] et [24].

A. $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathcal{P} \Longrightarrow \psi(\bar{x},\bar{u}) = \text{Inf } \{\psi(\bar{x},u) : u \in U\}$

$$\text{Théorème 12-A} \Longrightarrow \exists\, \overset{\circ}{u} \in U : \begin{cases} \psi(\bar{x},\overset{\circ}{u}) = \psi(\bar{x},\bar{u}) & (1) \\ (\bar{x},\overset{\circ}{u}) \text{ est un col pour } \psi \text{ sur } X\times U & (2) \end{cases}$$

si et seulement si ψ a la propriété sup en $(\bar{x},\bar{u})$.

$$\left.\begin{array}{l} (2) \\ \text{Lemme 1} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\bar{x},\overset{\circ}{u}) \text{ est solution de } \mathcal{P} \text{ \underline{et} de } \mathcal{D} .$$

B. La démonstration, analogue à celle de A, utilise la partie B du théorème 12.

__Théorème 14__ : *__Théorème strict de dualité__*

Il est des cas particuliers où on peut montrer que ψ vérifie soit la propriété sup, soit la propriété inf.

On suppose ψ convexe en u, concave en x, et continue.

A. Si . $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathcal{P}$,

. $\psi(\bar{x},u)$ est strictement convexe dans un voisinage de $\bar{u}$

alors $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathcal{D}$.

B. Si . $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathcal{D}$,

. $\psi(x,\bar{u})$ est strictement concave dans un voisinage de $\bar{x}$

alors $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathcal{P}$.

Réf : [24]

B. La fonction $\psi(x,u)$ a la propriété inf en $(\bar{x},\bar{u})$.

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $A = \{x \in X : \psi(x,\bar{u}) \geq \psi(\bar{x},\bar{u}) - \varepsilon\}$.

$$\bar{x} \in A.$$

. A est <u>convexe</u> et <u>fermé</u>.

. Supposons que A ne soit pas borné.

$\forall \omega_i > 0,\ \exists x_i : ||x_i||=1$ et $\bar{x} + \omega_i\, x_i \in A$.

A convexe $\Longrightarrow \forall \rho \in]0,\omega_i],\ \bar{x} + \rho x_i \in A$.

Si ω_i tend vers l'infini, $Q = \{x_i : ||x_i|| = 1,\ \bar{x} + \omega_i x_i \in A\}$ est un ensemble infini contenu dans le compact $S = \{x : ||x|| = 1\}$, il contient donc un point d'accumulation, soit x^*.

Alors $\forall \rho \geq 0,\ \bar{x} + \rho x^* \in A$, x^* étant un point d'accumulation de Q et ψ étant continue.

$\psi(x,\bar{u})$ étant strictement concave au voisinage de $\bar{x}$:

$\forall \bar{\rho} > 0,\ \psi[\bar{x} + \bar{\rho}x^*,\bar{u}] < \psi(\bar{x},\bar{u})$.

Appelons $\bar{\delta}$ la différence $\psi(\bar{x},\bar{u}) - \psi(\bar{x} + \bar{\rho}x^*,\bar{u})$, alors

$$\bar{\delta} > 0.$$

Soit $\rho > \bar{\rho}$, alors $\bar{x} + \bar{\rho}x^* = \frac{\bar{\rho}}{\rho}(\bar{x} + \rho x^*) + (1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho})\,\bar{x}$. Alors $\psi(\bar{x} + \bar{\rho}x^*,\bar{u}) \geq \frac{\bar{\rho}}{\rho}\,\psi(\bar{x} + \rho x^*,\bar{u}) + (1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho})\,\psi(\bar{x},\bar{u})$, puisque ψ est concave en x. On en déduit que

$$\psi(\bar{x} + \rho x^*,\bar{u}) \leq \frac{\rho}{\bar{\rho}}\,\psi(\bar{x} + \bar{\rho}x^*,\bar{u}) + \frac{\bar{\rho}-\rho}{\bar{\rho}}\,\psi(\bar{x},\bar{u})$$

$$\leq \psi(\bar{x},\bar{u}) - \frac{\rho\bar{\delta}}{\bar{\rho}}.$$

ρ pouvant être choisi arbitrairement grand.

Si $\rho > \varepsilon \frac{\bar{\rho}}{\bar{\delta}}$, $\psi(\bar{x} + \rho x^*, \bar{u}) < \psi(\bar{x}, \bar{u}) - \varepsilon$

et $\bar{x} + \rho x^* \notin A$, contrairement à l'hypothèse faite.

Par conséquent, A est <u>borné</u>.

. Soit $V(\bar{u})$ un voisinage de $\bar{u}$ tel que

$V(\bar{u}) \cap U = \{u \in U : |\psi(x,u) - \psi(x,\bar{u})| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}, \ \forall x \in A.$

Un tel voisinage existe, car ψ est continue, et donc uniformément continue sur $A \times (B \cap U)$, où B est un compact quelconque contenant $\bar{u}$.

$\psi(x,u)$ étant continue

$$\forall x^* \in X, \ x^* \notin A, \ \exists \lambda \in]0,1[\ : \begin{cases} \lambda\bar{x} + (1-\lambda)\, x^* \in A. \\ \psi[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)x^*, \bar{u}] = \psi(\bar{x},\bar{u}) - \varepsilon. \end{cases}$$

Soit $u \in V(\bar{u}) \cap U$:

$$\begin{aligned} \psi(\bar{x},u) &\geq \psi(\bar{x},\bar{u}) - \frac{\varepsilon}{2} && (\bar{x} \in A) \\ &\geq \psi[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\, x^*, \bar{u}] + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \psi[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\, x^*, u] && (\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\, x^* \in A) \\ &\geq \lambda\psi(\bar{x},u) + (1-\lambda)\, \psi(x^*,u) && (\psi \text{ concave en } x) \end{aligned}$$

donc

$\psi(\bar{x},u) \geq \psi(x^*,u), \ \forall x^* \in X, \ x^* \notin A.$

$$\left.\begin{array}{l} A \ \text{compact} \\ \psi \ \text{continue en } x \end{array}\right\} \Longrightarrow \max_{x \in A} \psi(x,u) = \sup_{x \in X} \psi(x,u), \ \forall u \in V(\bar{u}) \cap U.$$

$(\bar{x},\bar{u})$ étant solution de $\mathcal{D}$:

$$\psi(\bar{x},\bar{u}) \leq \underset{x\in X}{\operatorname{Sup}}\ \psi(x,u) = \underset{x\in A}{\operatorname{Max}}\ \psi(x,u),\ \forall u \in V(\bar{u}) \cap U,$$

et ψ a la propriété inf en $(\bar{x},\bar{u})$.

$$. \exists \overset{o}{x} \in X : \begin{cases} (\overset{o}{x},\bar{u}) \text{ est solution de } \mathcal{P} \text{ et de } \mathcal{D}. \\ \\ \psi(\bar{x},\bar{u}) = \psi(\overset{o}{x},\bar{u}). \end{cases}$$

$\psi(x,\bar{u})$ étant strictement concave au voisinage de $\bar{x}$,

$$\overset{o}{x} = \bar{x}.$$

Q.E.D.

A. La démonstration est analogue.

III §2. DUALITE EN PROGRAMMATION MATHEMATIQUE

- Soient $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

  $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

  $X = C \subset \mathbb{R}^n$.

Posons $\psi(x,u) = \phi(x) + ua(x)$ et $U = \{u \in (\mathbb{R}^m)^* : u \geq 0\}$.

Soit $i(x) = \text{Inf}\ \{\psi(x,u) : u \in U\}$

$$= \text{Inf}\ \{\phi(x) + ua(x) : u \geq 0\} = \begin{cases} \phi(x) \text{ si } a(x) \geq 0 \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

$\mathcal{P}$ s'écrit alors

$$\mathcal{P} : \underset{x \in C}{\text{Sup}}\ \{\phi(x) : a(x) \geq 0\} \text{ ou } \text{Sup}\ \{\phi(x) : x \in C,\ a(x) \geq 0\}.$$

<u>Remarques</u> :

- Si $\{x \in C : a(x) \geq 0\} = \emptyset$, d'après les conventions antérieures, le sup vaudra $-\infty$.
- Nous retrouvons pour $\mathcal{P}$ le programme étudié au chapitre II.

- Le dual $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ s'écrit

$$\mathcal{D} : \underset{u \geq 0}{\text{Inf}}\ \underset{x \in C}{\text{Sup}}\ \{\phi(x) + ua(x)\}.$$

<u>Remarque</u> : En programmation mathématique, les solutions acceptables correspondent à des inf ou sup finis, atteints à distance finie. On remplacera par la suite inf par min et sup par max.

. Cas particulier :

Si (1) a et ϕ sont différentiables sur C

(2) C est pseudo-convexe

(3) $\phi(x) + ua(x)$ est pseudo-concave sur C, $\forall u \geq 0$

alors, d'après le théorème 4 :

$$s(u) = \text{Sup}\,\{\psi(x,u) : x \in C\}$$
$$= \phi(x) + ua(x) \text{ si et seulement si } \frac{d\phi}{dx}(x) + u\,\frac{da}{dx}(x) \in \Gamma[P_C(x)]$$

$P_C(x)$ désignant le pseudo-cône tangent à C en x.

D s'écrit alors :

$$D' : \underset{u \geq 0}{\text{Inf}}\,\{\phi(x) + ua(x) : \frac{d\phi}{dx}(x) + u\,\frac{da}{dx}(x) \in \Gamma[P_C(x)]\}$$

ou encore, en supposant l'inf fini et atteint à distance finie :

$$D' : \left[\begin{array}{l} \text{Min } \phi(x) + ua(x) \\ \frac{d\phi}{dx}(x) + u\,\frac{da}{dx}(x) \in \Gamma[P_C(x)] \\ u \geq 0. \end{array}\right.$$

Remarque : Si $C = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^n_+$,
on retrouve le problème dual défini antérieurement dans [16] ou [38] par exemple.

- Nous ferons par la suite l'hypothèse que C est convexe et fermé.

- Nous pouvons appliquer aux problèmes P et D les théorèmes 13 et 14.

Théorème 15 : *Théorème de dualité en programmation mathématique.*

A. Si ϕ et a sont continues et concaves,
une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x}$ soit solution de P est que

$$\exists\, \bar{u} \geq 0 : \begin{cases} (1) & (\bar{x},\bar{u}) \text{ est solution de D} \\ (2) & \bar{u}a(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

si et seulement si $\phi(x)+ua(x)$ a la propriété sup en $(\bar{x},u^*)$, où u^* est non négatif et vérifie

$$u^*a(\bar{x}) = 0.$$

B. Si ϕ et a sont semi-continues inférieurement et quasi-concaves, une condition nécessaire et suffisante pour que $(\bar{x},\bar{u})$ soit solution de D est que

$$\exists\, \overset{o}{x} \in C : \begin{cases} (1) & \overset{o}{x} \text{ est solution de P} \\ (2) & (\overset{o}{x},\bar{u}) \text{ est solution de D} \\ (3) & \bar{u}a(\overset{o}{x}) = \bar{u}a(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

si et seulement si $\phi(x) + ua(x)$ a la propriété inf en $(\bar{x},\bar{u})$.

Il suffit d'appliquer le théorème 13.

Exemple 1.

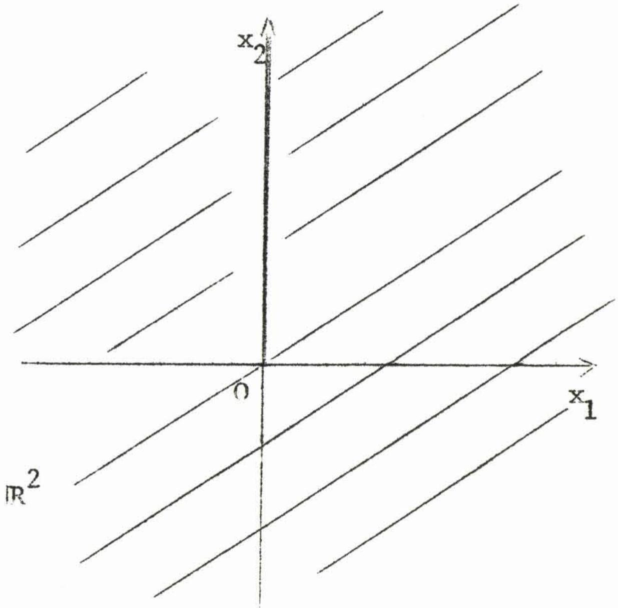
Soit P : Max $\{\phi(x) : a(x) \geq 0\}$

où $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\phi(x) = - x_2$$

$$a_1(x) = - (x_1)^2$$

$$a_2(x) = x_2,$$



soit encore

$$P : \left[\begin{array}{l} \text{Max } - x_2 \\ -(x_1)^2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\Delta = \{x : a(x) \geq 0\} = Ox_2.C = \mathbb{R}^2$$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est solution de P.

Ecrivons le dual D de P :

$$\text{Min } \{\phi(x) + ua(x) : u \geq 0,\ \phi(x) + ua(x) = \underset{\xi \in \mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \phi(\xi) + ua(\xi)\}$$

ou

$$D : \left[\begin{array}{l} \text{Min } - x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2\, x_2 \\ u^1 \geq 0 \\ u^2 \geq 0 \\ - x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2 x_2 = \underset{\xi \in \mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \{- \xi_2 - u^1(\xi_1)^2 + u^2 \xi_2\} \end{array} \right.$$

Si $\bar{x}$ fait partie d'une solution $(\bar{x},u)$ de D,

avec $u = [u^1\ u^2] \geq 0$,

$$0 = \underset{\xi \in \mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \{\xi_2(u^2 - 1) - u^1(\xi_1)^2\}$$

$$= \underset{\xi_2 \in \mathbb{R}}{\text{Max}}\ \{\xi_2(u^2 - 1)\} \quad \text{car } u^1 \geq 0.$$

ξ_2 étant de signe quelconque, il faut que $u^2 - 1 = 0$.

Si $(\bar{x},u)$ est solution de D, on a donc $u^2 = 1$.

Prenons pour voisinage $V(\bar{x})$ la boule $B(0,\varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$, et pour compact F l'ensemble $\{u^* : u^{*1} = 0,\ u^{*2} = 1\}$.

Alors $\psi(x,u) = \phi(x) + ua(x)$ a la propriété sup en $(\bar{x},u^*)$:

$$\forall x \in V(\bar{x}) \cap X : \psi(\bar{x},u^*) \geq \underset{u \in F}{\text{Min}}\ \psi(x,u).$$

En effet

$$\underset{x \in B(0,\varepsilon)}{\text{Max}}\ \underset{u=u^*}{\text{Min}}\ \{\phi(x) + ua(x)\} = \underset{x \in B(0,\varepsilon)}{\text{Max}}\ [-x_2 + 0\times(-x_1)^2 + 1 \times x_2]$$

$$= 0.$$

<u>Exemple 2.</u>

Soit P : Max $\{\phi(x) : a(x) \geq 0\}$

où $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$\phi(x) = x_1 - x_2$,

$a_1(x) = -(x_1)^2$,

$a_2(x) = x_2$,

soit encore

$$P : \left[\begin{array}{l} \text{Max } x_1 - x_2 \\ -(x_1)^2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est solution de P.

Ecrivons le dual D de P :

$$\text{Min } \{\phi(x) + ua(x) : u \geq 0,\ \phi(x) + ua(x) = \underset{\xi\in\mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \phi(\xi) + ua(\xi)\}$$

ou

$$D : \left[\begin{array}{l} \text{Min } x_1 - x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2\, x_2 \\ u^1 \geq 0 \\ u^2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2 x_2 = \underset{\xi\in\mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \{\xi_1 - \xi_2 - u^1(\xi_1)^2 + u^2\xi_2\} \end{array}\right.$$

Pour que $\bar{x}$ fasse partie d'une solution $(\bar{x},u)$ de D, il faudrait que

$$0 = \underset{\xi\in\mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \{\xi_1 - \xi_2 - u^1(\xi_1)^2 + u^2\xi_2\}$$

$$= \underset{\xi\in\mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \{\xi_1 + \xi_2(u^2 - 1)\} \quad \text{car } u^1 \geq 0.$$

Ce max est non nul, puisque, ξ_1 pouvant tendre vers $+\infty$, le max vaut $+\infty$.

Vérifions alors qu'il n'existe ni voisinage fermé de $\bar{x}$ ni compact convexe F tels que

$$\phi(\bar{x}) = 0 \geq \underset{x\in V(\bar{x})\cap X}{\text{Max}}\ \underset{u\in B}{\text{Min}}\ \{x_1 - u^1(x_1)^2 + x_2(u^2 - 1)\}.$$

En effet, x_1 et x_2 pouvant varier indépendamment l'un de l'autre dans $V(\bar{x})$ avec des signes quelconques, il faudrait avoir simultanément

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\in V(\bar{x})}{\text{Max}}\ \underset{u\in F}{\text{Min}}\ [x_1 - u^1(x_1)^2] \leq 0 \\ \text{et} \\ \underset{x\in V(\bar{x})}{\text{Max}}\ \underset{u\in F}{\text{Min}}\ [x_2(u^2 - 1)] \leq 0 \end{array}\right\} \text{car } V(\bar{x}) \text{ est un } \underline{\text{voisinage}} \text{ de } \bar{x}=0.$$

La seconde relation n'est vérifiée que si $u^2 = 1$.

Dans la première :

$$\underset{u \in F}{\text{Min}} \, [x_1 - u^1(x_1)^2] = x_1 - \alpha(x_1)^2, \text{ où}$$

$$\alpha = \text{Max} \, \{u^1 : u \in F\}$$

et $\underset{x \in V(\bar{x})}{\text{Max}} \, [x_1 - \alpha(x_1)^2] = \dfrac{1}{4\alpha} > 0.$

- Le théorème strict de dualité ne peut s'appliquer que dans sa partie B, mais nous pouvons utiliser les résultats du chapitre II et obtenir une forme particulière du théorème 15-A :

Théorème 16

A. Si
- ϕ et a sont concaves et différentiables en $\bar{x}$,
- $\bar{x}$ est solution de P,
- C est pseudo-convexe en $\bar{x}$,
- $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H sur $C \cap \{x : a(x) \geq 0\}$,

alors

$$\exists \, \bar{u} \geq 0 : \begin{cases} (\bar{x},\bar{u}) \text{ est solution de D} \\ \bar{u}a(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

B. Si
- ϕ et a sont concaves,
- $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de D,
- $\phi(x) + \bar{u}a(x)$ est strictement concave dans un voisinage de $\bar{x}$

alors

$$\begin{cases} \bar{x} \text{ est solution de P} \\ \bar{u}a(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

A. Plutôt que de montrer que $\phi(x) + ua(x)$ vérifie alors la propriété sup en un certain point (x,u^*), il est plus rapide d'utiliser les résultats du théorème 8 :

$$\exists \bar{u} \geq 0 : \begin{cases} \overline{\dfrac{d\phi}{dx}} + \bar{u}\,\overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma[P_C] \\ \\ \bar{u}a(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

$(\bar{x},\bar{u})$ est solution réalisable de D, d'après le théorème 4-B,

et $\forall (x,u) \in (\mathcal{D})$: $\phi(x) + ua(x) \geq \phi(\bar{x}) + ua(\bar{x})$

$$\geq \phi(\bar{x})$$

puisque $u \geq 0$ et $a(\bar{x}) \geq 0$,

et $\qquad \phi(x) + ua(x) \geq \phi(\bar{x}) + \bar{u}a(\bar{x})$

puisque $\bar{u}a(\bar{x}) = 0$.

Donc $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de D.

B. C'est une application directe du théorème 14-B.

B I B L I O G R A P H I E

[1] ABADIE, J.

Problèmes d'optimisation

Institut Blaise Pascal (Paris-1965)

[2] ABADIE, J.

On the Kuhn-Tucker Theorem

Operations Research Center
University of California. Berkeley
ORC.65-18

[3] ARROW, K.J, ENTHOVEN, A.C.

Quasi-concave Programming

{ . The Rand Corporation. 1959.P-1847
. Econometrica. 29 (1961) 779-800

[4] ARROW, K.J, HURWICZ, L., UZAWA, H.

Constraint Qualification in Maximisation Problems

{ . Office of Naval Res. Tech. Report n° 64-
Dep. of Economics. Stanford Univ. 1952
. Naval Res. Log. Quarterly. 8 (1961) 175-191

[5] BERNHOLTZ, B.

A new Derivation of the Kuhn-Tucker conditions

Quart. Appl. Math. 21 (1963) 295-299.

[6] CHARNES, A., COOPER, KORTANEK

A duality theorem for convex programs for convex constraints

Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962) 605-608

[7] COTTLE, R.

Symmetric dual Quadratic Programs

Quart. Appl. Math. 21 (1963) 237-243

[8] COTTLE, R.

A Theorem of Fritz John in Mathematical Programming

The Rand Corporation 1963. RM 3858 PR

[9] DORN, W.S.

Duality in Quadratic Programming

Quart. Appl. Math. 18 (1960) 155-162

[10] DORN, W.S.

A Duality Theorem for Convex Programs

IBM. J. of Res. Dev. 4 (1960) 407-413

[11] DORN, W.S.

Self-dual Quadratic Programs

J. SIAM. 9 (1961) 51-54

[12] DUFFIN, R.J.

Dual Programs and minimum cost

J. SIAM. 10 (1962) 119-123

[13] EISENBERG, E.

Duality in homogeneous Programming

Proc. Am. Math. Soc. 12 (1961) 783-787

[14] FENCHEL, W.

Convex cones, sets and functions

Princeton University. 1953

[15] HANSON, M.A.

A duality theorem in nonlinear Programming with nonlinear constraints

Austr. J. Stat. 3 (1961) 64-72

[16] HUARD, P.

Dual Programs

{ . IBM J. Res. Dev. 6 (1962) 137-139
. Proc. 5th Symp. Math. Progr. 1962

[17] HUARD, P.

Programme dual

Math. des Prog. Economiques. Monographies de Recherche opérationnelle. 1. 13-17

[18] JOHN, F.

Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions

Studies and Essays Interscience Pub. Inc. N.Y. (1948) 187-204

[19] KAKUTANI, S.

A generalisation of Brouwer's fixed point theorem

Duke Math. 8 (1941) 457-418

[20] KAO, R.C.

A note on Lagrangian multipliers

The Rand Corporation. 1963. p 2713-1

[21] KUHN, H.W., TUCKER, A.W.

Nonlinear Programming

Proc. 2nd Berk. Symp. Univ. of California Press. Berkeley. (1951) 481-492

[22] MANGASARIAN,O.L.

Duality in nonlinear programming

Quart. Appl. Math. 20 (1962) 300-302

[23] MANGASARIAN,O.L., FROMOVITZ,S.

The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints

J. of Math. An. and Appl. 17 (1967) 37-47

[24] MANGASARIAN,O.L., PONSTEIN,J.

Minimax and Duality in nonlinear Programming

J. of Math. An. and Appl. 11 (1965) 504-518

[25] MANGASARIAN,O.L.

Pseudo-convex functions

J. SIAM. Ser. A. Control. 3 (1965) 281-290

[26] PALLU DE LA BARRIERE

Compléments à la théorie des multiplicateurs en programmation non linéaire

Revue française de R.O. 27 (1963) 163-180

[27] PHIPPS,C.G.

Maxima and minima under restraint

Amer. Math. Monthly 59 (1952) 230-235

[28] PONSTEIN,J.

An extension of the min-max theorem

SIAM Review. 7 (1965) 181-188

[29] RAFFIN,C.

Programmation mathématique et dualité

Séminaire de Statistiques et Econométrie
3/3 et 12/5/1966
Université de Poitiers

[30] RUSSEL,D.L.

The Kuhn-Tucker Conditions in Banach Space, with an application to control theory

J.Am.An. and Appl. 15 (1966) 200-212

[31] SIMMONARD

Programmation linéaire

Dunod. Paris (1962)

[32] SION

Sur une généralisation du théorème du minimax

C.R.AC. SC. 244 (1957) 2120

[33] SLATER

Lagrange multipliers revisited

The Rand Corporation. 1951 - RM 676

[34] STOER,J.

Duality in nonlinear programming and the min-max theorem

Num. Math. 5 (1963) 371-379

[35] UZAWA,H.

The Kuhn-Tucker theorem in concave programming

Studies in linear and nonlinear programming

Stanford University Press. 32-37

[36] VAJDA.

Nonlinear programming. A course

North Holland Pub. Amsterdam 1966.77-92

[37] WILDE,D.J.

Differential calculus in nonlinear Programming

Opns.Res. 10 (1962) 764-773

[38] WHINSTON,A.

Conjugate functions and dual programs

[39] WOLFE,P.

A duality theorem for nonlinear programming

The Rand Corporation. P 2028

n° 26 NOVEMBRE 1970

ASYMPTOTIC OPTIMALITY CONDITIONS
and
CONSTRAINT QUALIFICATIONS

Monique GUIGNARD

A B S T R A C T

The purpose of this paper is to combine the two notions of doubly asymptotic Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in Banach spaces, as stated in [5] , and of constraint qualifications involving a weak cone of tangents, as introduced in [1].

I DEFINITIONS

Let X be a Banach space, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $\bar{x} \in \bar{A}$. $y \in X$ is a vector tangent to A at $\bar{x}$ if there exist a sequence $\{x_n\}$, $x_n \in A$, converging to $\bar{x}$, and a sequence of positive numbers λ_n, such that the sequence $\{\lambda_n (x_n - \bar{x})\}$ converges to y.

$y \in X$ is a vector weakly-tangent to A at $\bar{x}$ if there exist a sequence $\{x_n\}$, $x_n \in A$, converging to $\bar{x}$, and a sequence of positive numbers λ_n, such that the sequence $\{\lambda_n (x_n - \bar{x})\}$ converges weakly to y.

$T(A,\bar{x})$, the set of all vectors tangent to A at $\bar{x}$, is called the cone tangent to A at $\bar{x}$, and $P(A,\bar{x})$, the closure of its convex hull, is the cone pseudo-tangent to A at $\bar{x}$.

$T^*(A,\bar{x})$, the set of all vectors weakly tangent to A at $\bar{x}$, is the weak cone of tangents to A at $\bar{x}$, and $P^*(A,\bar{x})$ is the closure of its convex hull.

$A \subset X$ is weakly pseudo-convex at $\bar{x} \in A$ if $A \subset \bar{x} + P^*(A,\bar{x})$.

$T(A,\bar{x}) \subset T^*(A,\bar{x})$ and $P(A,\bar{x}) \subset P^*(A,\bar{x})$. (cf. [1]).

$T(A,\bar{x})$ is a closed cone.

Let X^* be the topological dual of X. X^* is given the uniform topology.

II FIRST OPTIMALITY CONDITION

Let X be a real Banach space, A a non-empty subset in X, $\bar{x} \in A$ and $\phi(x)$ a real-valued function of $x \in X$, Fréchet differentiable at $\bar{x}$. Consider the problem Max $\{\phi(x) : x \in A\}$.

Theorem 1

1- A necessary condition for $\bar{x}$ to maximize ϕ over A is that $\nabla\phi(\bar{x}) \in P^* - (A,\bar{x})$.

2- It is also sufficient if ϕ is pseudo-concave over A at $\bar{x}$ and if A is weakly pseudo-convex at $\bar{x}$.

1- cf [1].

2- Let $x \in A$. Since A is weakly pseudo-convex at $\bar{x}$, we have $x-\bar{x} \in P^*(A,\bar{x})$ and $\langle \nabla f(\bar{x}), x-\bar{x} \rangle \leq 0$. But since ϕ is pseudo-concave over A at $\bar{x}$, this yields $\phi(x)-\phi(\bar{x}) \leq 0$, and $\bar{x}$ maximizes ϕ over A. This completes the proof.

III MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS

Let Y be another real Banach space and $a : X \to Y$ a map.

Let B and C be non-empty subsets in Y and X respectively and assume that $A = \{x \in C : a(x) \in B\}$ is not void. We may rewrite the problem $\text{Max}\,\{\phi(x) : a(x) \in B,\ x \in C\}$.

Suppose that $a(x)$ is Fréchet-differentiable at $\bar{x} \in A$.

Let $K = \{y \in X : \langle\nabla a(\bar{x}),y\rangle \in P[B,a(\bar{x})]\}$

and $K^* = \{y \in X : \langle\nabla a(\bar{x}),y\rangle \in P^*[B,a(\bar{x})]\}$.

It can easily be shown that $K \subset K^*$.

Let $H = \{h \in X^* : h = u.\nabla a(\bar{x}),\ u \in P^-[B,a(\bar{x})]\}$

and $H^* = \{h \in X^* : h = u.\nabla a(\bar{x}),\ u \in P^{*-}[B,a(\bar{x})]\}$.

It can be shown that $H^* \subset H$.

H and H^* are convex, not necessarily closed, cones. $\bar{H}$ and $\bar{H}^*$, respectively, will stand for their closures in X^*.

Theorem 2 (asymptotic Kuhn-Tucker conditions)

1- If G is a closed convex cone in X such that $K^* \cap G = P^*(A,\bar{x})$, a necessary condition for $\bar{x}$ to maximize ϕ over A is that there exist a sequence $\{u^{i,j}\}$ in $P^{*-}[B,a(\bar{x})]$ and a sequence $\{g^i\}$ in G^- such that $\nabla\phi(\bar{x}) = \lim_{i\to\infty} [\lim_{j\to\infty} u^{i,j}\, \nabla a(\bar{x}) + g^i]$.

2- If G is a closed convex cone in X such that $A \subset \bar{x}+G$, if a is continuous in a neighbourhood of $\bar{x}$, if A or Δ is weakly pseudo-convex at $\bar{x}$, if ϕ is either pseudo-concave over A at $\bar{x}$, or quasi-concave and continuous with $\nabla\phi(\bar{x}) \neq 0$, if there exist a sequence $\{u^{i,j}\}$ in $P^{*+}[B,a(\bar{x})]$ and a sequence $\{g^i\}$ in G^+ such that $\langle\nabla\phi(\bar{x}) + \lim_{i\to\infty} [\lim_{j\to\infty} u^{i,j}\, \nabla a(\bar{x}) + g^i],\ p\rangle \leq 0 \quad \forall\, p \in P^*(\Delta,\bar{x})$, then $\bar{x}$ maximizes ϕ over A.

1- It follows from theorem 1 that $\nabla\phi(\bar{x}) \in P^{*-}(A,\bar{x})$. Since $P^*(A,\bar{x}) = K^* \cap G$, we have $P^{*-}(A,\bar{x}) = \overline{K^{*-} + G^-}$. It can be shown (cf. [1]) that $K^{*-} = \overline{H^*}$. Therefore

$$\nabla\phi(\bar{x}) \in \overline{\overline{H^*} + G^-}.$$

2- a) If Δ is weakly pseudo-convex at $\bar{x}$, $x-\bar{x} \in P^*(\Delta,\bar{x})$ for all $x \in A \subset \Delta$. If A is weakly pseudo-convex at $\bar{x}$, $x-\bar{x} \in P^*(A,\bar{x}) \subset P^*(\Delta,\bar{x})$ for all $x \in A$.

b) In both cases, $\nabla a(\bar{x}).\, y \in T(B,a(\bar{x}))$ for all $y \in T^*(\Delta,\bar{x})$: if $y \in T^*(\Delta,\bar{x})$, there exist a sequence $\{x_k\}$ in Δ, converging to $\bar{x}$, and a sequence of positive numbers $\{\lambda_k\}$ such that the sequence $\lambda_k(x_k-\bar{x})$ converges to y weakly. Then there exists a sequence $\{a(x_k)\}$ in B converging to $a(\bar{x})$, a being continuous in a neighbourhood of $\bar{x}$, such that the sequence $\{\lambda_k[a(x_k) - a(\bar{x})]\}$ converges to $\nabla a(\bar{x}).y$, for

$$\lambda_k[a(x_k)-a(\bar{x})] = \nabla a(\bar{x}).\lambda_k(x_k-\bar{x}) + \lambda_k||x_k-\bar{x}||.\frac{o(||x_k-\bar{x}||)}{||x_k-\bar{x}||},$$

where $\frac{o(||x_k-\bar{x}||)}{||x_k-\bar{x}||}$ tends to 0 and $\lambda_k||x_k-\bar{x}||$ is bounded when k goes to infinity.

By continuity and convexity, $\nabla a(\bar{x}).y \in P[B,a(\bar{x})] \subset P^*[B,a(\bar{x})]$ for all $y \in P^*[\Delta,\bar{x}]$, and in particular for all $y=x-\bar{x}$, $x \in A$.

c) $u^{i,j} \in P^{*+}[B,a(\bar{x})]$ and $\nabla a(\bar{x}).(x-\bar{x}) \in P^*[B,a(\bar{x})]$ yield $\langle u^{i,j}\nabla a(\bar{x}),x-\bar{x}\rangle \geq 0$, which implies

$$\langle\nabla\phi(\bar{x}) + u^{i,j}\nabla a(\bar{x}) + g^i,\ x-\bar{x}\rangle \geq \langle\nabla\phi(\bar{x}) + g^i,\ x-\bar{x}\rangle \geq \langle\nabla\phi(\bar{x}),\ x-\bar{x}\rangle$$

since $g^i \in G^+$ and $A \subset \bar{x}+G$.

Then $\lim\limits_{i\to\infty} [\lim\limits_{j\to\infty} \langle\nabla\phi(\bar{x}) + u^{ij}\nabla a(\bar{x}) + g^i,\ x-\bar{x}\rangle] =$

$$\langle\nabla\phi(\bar{x}) + \lim_{i\to\infty} [\lim_{j\to\infty} u^{ij}\ \nabla a(\bar{x}) + g^i],\ x-\bar{x}\rangle \leq 0,$$

and $\langle\nabla\phi(\bar{x}),\ x-\bar{x}\rangle \leq 0$. This is sufficient for $\bar{x}$ to maximize ϕ over A, given the hypotheses about ϕ. (cf. [2]).

REFERENCES

[1] F.J. GOULD, JON W. TOLLE.
Optimality conditions and constraint qualifications in Banach space.
University of North Carolina at Chapel Hill, 1970.

[2] M. GUIGNARD.
Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space.
SIAM J. Control, 7 (1969) 232-241.

[3] H. KUHN, A.W. TUCKER.
Non linear programming.
Proc. 2^{nd} Berk. Symp. on Math. Stat. and Proba. Univ. of California Press, Berkeley, (1951) 481-492.

[4] P.P. VARAIYA.
Non-linear programming in Banach space.
SIAM J. Appl. Math. 15 (1967) 284-293.

[5] S. ZLOBEC.
Doubly asymptotic Kuhn-Tucker conditions in mathematical programming.
Mc Gill University. 1970.

Contraintes additionnelles en

variables bivalentes

Monique GUIGNARD

Mars 1970

On propose une méthode de réduction du domaine des contraintes dans le cas de variables bivalentes. On génère des contraintes "additionnelles" qui dérivent des contraintes initiales et dont l'hyperplan séparateur contient au moins un point bivalent.

Théorème de Farkas généralisé.

Soit $a : R^n \longrightarrow R^n$, concave , $K = \{ x \in Z^n : a(x) \leq 0 \}$, $\bar{x} \in K$,
$f : R^n \longrightarrow R$, convexe.

On suppose que $\nabla a(\bar{x})$ existe et que $[\nabla a(\bar{x})]_i^j \in Q$, $\forall i,j$.
$\Delta = |\det(\nabla a(\bar{x}))| > 0$.

Une condition nécessaire pour que

$$\left.\begin{array}{l} a(x) \leq 0 \\ \\ x \in Z^n \end{array}\right| \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(\bar{x})$$

est qu'il existe $u \geq 0$: $\nabla f(\bar{x}) = u. \nabla a(\bar{x})$.

⊙ $\Delta > 0 \Longrightarrow \{ \nabla a_1(\bar{x}), \ldots, \nabla a_n(\bar{x}) \}$ forme une base de $(R^n)^*$.

Donc $\exists!\ u \in (R^n)^*$: $\nabla f(\bar{x}) = u \nabla a(\bar{x})$.

ou encore $u = \nabla f(\bar{x}). [\nabla a(\bar{x})]^{-1}$

⊙ Posons $B = \nabla a(\bar{x})$. Soit q le dénominateur commun des éléments de B, et soit C la matrice $(n \times n)$ telle que

$$\nabla a(\bar{x}) = B = \frac{1}{q} C, \quad q \in N, \quad q > 0.$$

$c_i^j \in Z$, $\forall i, j$. C étant à coefficients entiers, il existe une matrice D à coefficients entiers telle que

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} .D.$$

$$\text{et} \quad B^{-1} = q. \frac{1}{\det(C)} .D = \frac{q}{q^n. \det(B)} D = \frac{1}{q^{n-1} .\Delta} D.$$

Supposons que $u \not\geq 0$, par exemple $u^1 < 0$.

$$\text{Soit } \overset{o}{y} : \begin{cases} B_1 y = -\Delta. q^{n-1} \\ B_j y = 0, \quad j > 1. \end{cases}$$

$$\overset{o}{y} = B^{-1} \begin{bmatrix} -\Delta q^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{q}{q^n . \Delta} D \begin{bmatrix} -\Delta q^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in Z^n.$$

Soit alors $x = \bar{x} + \overset{o}{y}$

$$\left.\begin{array}{l} - \left.\begin{array}{l} x \in K. \\ \overset{o}{y} \in Z^n \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \bar{x} + \overset{o}{y} \in Z^n. \\ \\ - a(x) - a(\bar{x}) \leq \nabla a(\bar{x}) \,.\, (x - \bar{x}) \quad \text{car } a \text{ est concave.} \\ \qquad\qquad\qquad \leq B\,(x - \bar{x}) \\ \qquad\qquad\qquad \leq B.\,\overset{o}{y} \\ \qquad\qquad\qquad \leq \begin{bmatrix} -\Delta q^{n-1} \\ \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ \qquad\qquad\qquad \leq 0 \\ \qquad \text{donc } a(x) \leq a(\bar{x}) \leq 0. \end{array}\right\} \Longrightarrow x \in K.$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &\geq \nabla f(\bar{x}) \,.\, (x - \bar{x}) \quad \text{car } f \text{ est convexe .} \\ &\geq u.\,B.\,(x - \bar{x}) \quad \text{car} \quad \nabla f(\bar{x}) = u.\,B = u\,\nabla a(\bar{x}). \\ &\geq u.\begin{bmatrix} -\Delta q^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\geq -u^1\,\Delta q^{n-1} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Or $x \in K \Longrightarrow f(x) \leq f(\bar{x})$. Il y a donc contradiction et il faut que $u \geq 0$.

Conséquence

Si $a(x)$ est linéaire : $a(x) = Bx - b$, avec $B_i^j \in Q$, $\forall_i, j$

Si $f(x)$ est linéaire : $f(x) = f.x$,

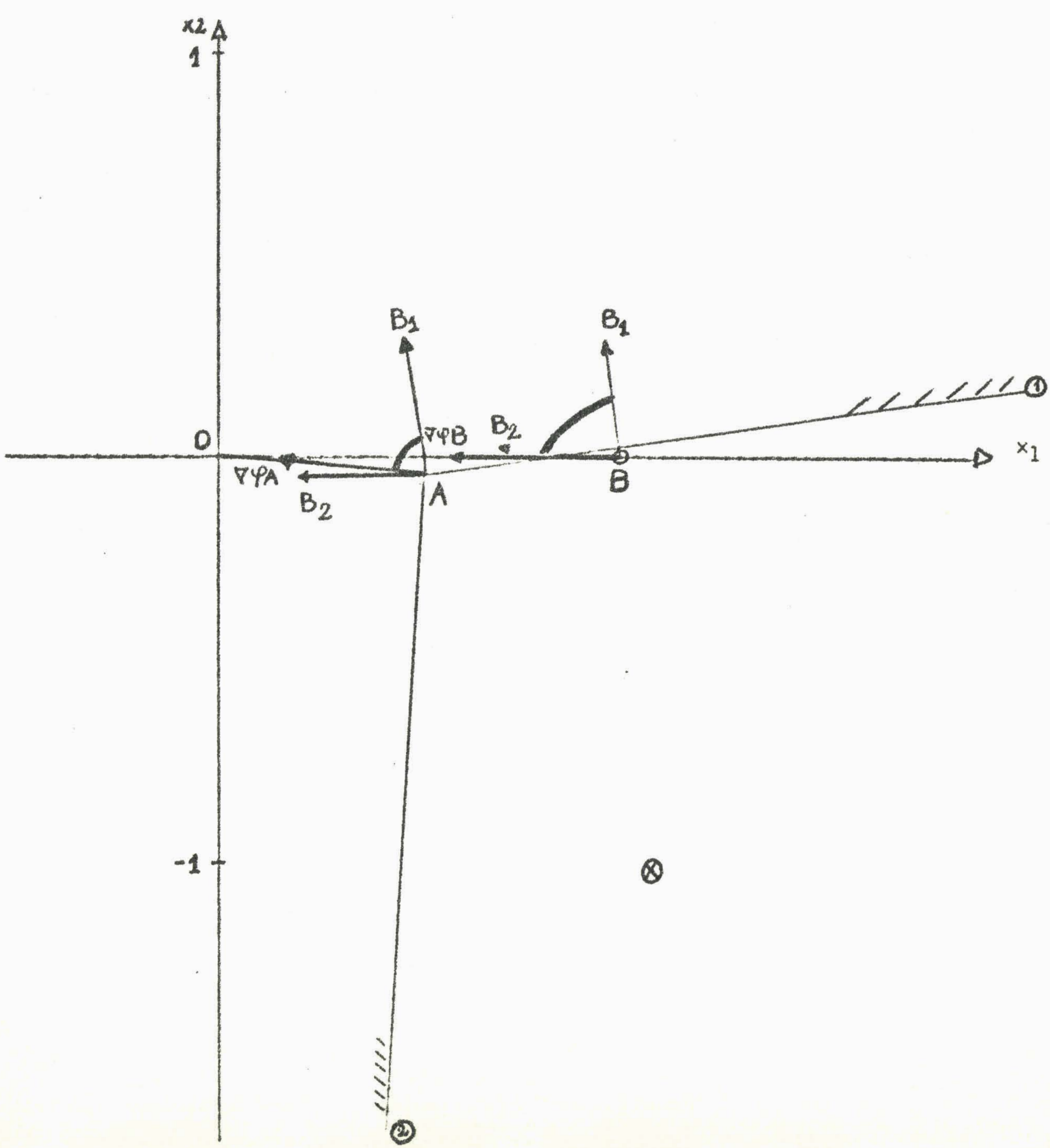
Si $\Delta = |\det(B)| > 0$, Si $B\bar{x} - b \leq 0$ et $\bar{x} \in Z^n$,

$$\left[\left.\begin{bmatrix} Bx \leq b \\ x \in Z^n \end{bmatrix} \Rightarrow fx \leq f\bar{x} \right]\right. \longrightarrow \exists\, u \geq 0 : \quad f = u.B.$$

(cf [1] pour le cas linéaire)

Si φ est concave, et non plus convexe, le résultat peut malheureusement se révéler faux, comme le montre l'exemple suivant :
On minimise la distance à l'origine sur le cône de sommet A défini par les contraintes ① et ②. L'optimum (en continu), est A, l'optimum en entiers est B. Le gradient en A est porté par $\overrightarrow{AO}$, le gradient en B est porté par $\overrightarrow{BO}$ mais n'appartient pas au cône convexe engendré par B_1 et B_2, donc

$$\exists u : \quad \nabla\varphi(\bar{x}) = u\,B,$$
$$\text{mais} \quad u \ngeq 0.$$



Contraintes additionnelles.

a) Soit un système d'inégalites

$$Bx \leq b$$

où B est une matrice régulière $(n \times n)$. On dit que $wx \leq d$ où $w^i \in Z$, $\forall_i$, et où $d \in Z$, est une contrainte additionnelle associée à

$$\begin{cases} Bx \leq b \\ x \in Z^n \end{cases}$$

si $[Bx \leq b \ , \ x \in Z^n] \Longrightarrow wx \leq d.$

D'après ce qui précède, $wx \leq d$ est une contrainte additionnelle si $\exists u \geqslant 0$: $w = u.\, B.$

Comme $w^i \in Z$, et qu'il existe une matrice D à coefficients entiers telle que $B^{-1} = \frac{1}{\Delta} D$, où $\Delta = |\det(B)|$.

u s'écrit $u = wB^{-1} = \frac{1}{\Delta} w.\, D$

c'est-a-dire $\Delta u = w.D \in Z^n$

ou encore $u \in Z^n/\Delta$.

Donc il existe $t \in Z^n$, $t \geqslant 0$, tel que $w = \frac{t}{\Delta} B.$

Comme $w \in Z^n$, $\frac{t}{\Delta} B \in Z^n$, ie. $tB \equiv 0$ (Δ).

b) D'après [1] une contrainte additionnelle $wx \leq d$ est stricte si $\exists x \in R^n$: $Bx \leq b$ et $wx > d$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une contrainte additionnelle soit stricte est que $wB^{-1}b > d$.

$\Leftarrow$ $\det(B) \neq 0 \Longrightarrow \exists!\ \bar{x}$: $B\bar{x} = b$.

$$\bar{x} = B^{-1} b.$$

$$wB^{-1}b > d \Longleftrightarrow w\bar{x} > d \longrightarrow \exists \bar{x} \in R^n \ : \ \begin{cases} B\bar{x} \leq b \\ w\bar{x} > d. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\{x : Bx \leq b\}$ est le translaté d'un cône passant par l'origine, translation de vecteur $B^{-1}b$:

$\forall x : Bx \leq b$, $\exists y$: $By \leq 0$ $\ni$ $x = \bar{x} + y$.

Alors $wx = w\bar{x} + wy$

$= w\bar{x} + u.By$ puisque $wx \leq d$ est une contrainte additionnelle.

$$\left.\begin{array}{l} \text{or } u \geq 0 \\ By \leq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow uBy \leq 0$$

donc $wx = w\bar{x} + uBy \leq w\bar{x}$.

Par hypothèse la contrainte est stricte, donc

$\exists x$: $Bx \leq b$ et $wx > d$. Ceci implique

$$d < wx \leq w\bar{x} \Longrightarrow w\bar{x} = wB^{-1} b > d.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une contrainte additionnelle soit stricte est donc que

- Si $ub \in Z$, $d \leq ub - 1$
- Si $ub \notin Z$, $d \leq [ub]$.

En effet, $wB^{-1} b = uBB^{-1}b = ub$ doit être $> d$.

Problème 1 : on cherche à générer une contrainte additionnelle de la forme $wx \leq d$ associée aux contraintes

$$\begin{cases} fx \leq \alpha \\ x_j = 0 \text{ ou } 1, \quad x \in R^n, \end{cases}$$

où $\tilde{w} \in Z^n$.

D'après le théorème de Farkas (généralisé par Fréhel),

Si y est une solution non bivalente de base relativement aux contraintes

$$\left[\begin{array}{l} fx \leq \alpha \\ 0 \leq x \leq e \end{array}\right.$$

ie. si $\left.\begin{array}{lll} 0 < y_i & < & 1 \\ y_{B^+} & = & e \\ y_{B^-} & = & 0 \end{array}\right]$ avec $y = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{B^+} \\ y_{B^-} \end{bmatrix}$

Si $wx \leq d$ est une contrainte additionnelle stricte associée au cône

$$K : \left|\begin{array}{l} fx \leq \alpha \\ x_{B^+} \leq e \\ x_{B^-} \geq 0 \end{array}\right.$$

alors $\exists t \geq 0$, $\tilde{t} \in Z^n$, tel que

$$w = \frac{t}{\Delta} B$$

$$\text{où } B = \begin{bmatrix} f^i & f^{B+} & f^{B-} \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & -U \end{bmatrix} \qquad \text{et } \Delta = |\det(B)| .$$

Comme $\tilde{w} \in Z^n$, il faut que $t \geq 0$ soit tel que $tB = 0(\Delta)$.

Comme $|\det(B)| = \Delta = |f^i|$, il suffit de résoudre le système

$$\left.\begin{array}{l} t^i f^i = 0 \quad (|f^i|) \\ t^i f^{B+} + t^{B+} = 0 \quad (|f^i|) \\ t^i f^{B-} - t^{B-} = 0 \quad (|f^i|) \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{ll} t^{B+} = - t^i f^{B+} & (|f^i|) \\ t^{B-} = t^i f^{B-} & (|f^i|) \end{array}\right.$$

Alors

$$w = \frac{tB}{|f^i|} = \frac{1}{|f^i|}(t^i \ t^{B+} \ t^{B-}) \begin{bmatrix} f^i & f^{B+} & f^{B-} \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & -U \end{bmatrix}$$

$$w = \left[\frac{t^i f^i}{|f^i|} \quad \frac{t^i f^{B+} + t^{B+}}{|f^i|} \quad \frac{t^i f^{B-} - t^{B-}}{|f^i|} \right]$$

Problème 2 : on cherche à déterminer d de telle sorte que la contrainte additionnelle passe par un point bivalent. Soit $\bar{x}$ ce point.
Pour que la contrainte additionnelle soit stricte, il faut et il suffit que $d < wy$.

$$\text{or} \quad wy = (w^i \; w^{B+} \; w^{B-}) \begin{pmatrix} y_i \\ e \\ 0 \end{pmatrix} = w^i y_i + w^{B+} e$$

$$= \frac{t^i f^i}{|f^i|} y_i + \frac{t^i f^{B+} + t^{B+}}{|f^i|} e$$

Comme $\quad t^i f^{B+} + t^{B+} = 0 \; (|f^i|) , \quad \dfrac{t^i f^{B+} + t^{B+}}{|f^i|} e \in Z.$

$$[wy] = \frac{t^i f^{B+} + t^{B+}}{|f^i|} e + \left[\frac{t^i f^i}{|f^i|} y_i \right] .$$

si $t^i y_i \in N$, il faudra que $d \leq wy - 1$.

Si $t^i y_i \notin N$, il faudra que $d \leq [wy]$.

or dans tous les cas, le point $\bar{x}'$: $\left[\begin{array}{l} \bar{x}'_i = 0 \text{ si } f^i > 0 , \; 1 \text{ sinon} \\ \bar{x}'_{B+} = e \\ \bar{x}'_{B-} = 0 \end{array} \right.$

qui appartient au cône K, car

$$f\bar{x}' = f^i \bar{x}'_i + f^{B+} e$$

$$= f^i(\bar{x}'_i - y_i) + f^i y_i + f^{B+} e$$

$$= f^i(\bar{x}'_i - y_i) + \alpha$$

$$\leq \alpha \qquad \left\{ \begin{array}{l} f^i > 0 \Rightarrow \bar{x}'_i = 0 \Rightarrow \bar{x}'_i - y_i < 0 \\ f^i < 0 \Rightarrow \bar{x}'_i = 1 \Rightarrow \bar{x}'_i - y_i > 0 \end{array} \right.$$

doit verifier $w\bar{x}' \leq d$. Or

$$w\bar{x}' = w^i(\bar{x}_i' - y_i) + wy = \frac{t^i f^i}{|f^i|}(\bar{x}_i' - y_i) + wy$$

Si $f^i > 0$, $\dfrac{t^i f^i}{|f^i|}(\bar{x}_i' - y_i) = -t^i y_i$ et $w\bar{x}' = wy - t^i\, y_i$

si $f^i < 0$, $\dfrac{t^i f^i}{|f^i|}(\bar{x}_i' - y_i) = -t^i(1-y_i)$ et $w\bar{x}' = wy + t^i y_i - t^i$.

Il faudra donc que

$$wy - t^i y_i \leqslant d \leqslant wy - 1 \quad \text{si} \quad f^i > 0 \text{ et } t^i\, y_i \in N \qquad (1)$$

$$wy + t^i(y_i - 1) \leqslant d \leqslant wy - 1 \quad \text{si} \quad f^i < 0 \text{ et } t^i\, y_i \in N \qquad (2)$$

$$wy - t^i y_i \leqslant d \leqslant [wy] \quad \text{si} \quad f^i > 0 \text{ et } t^i\, y_i \notin N \qquad (3)$$

$$wy + t^i(y_i - 1) \leqslant d \leqslant [wy] \quad \text{si} \quad f^i < 0 \text{ et } t^i\, y_i \notin N \qquad (4)$$

Si on choisit $t^i = 1$, ce qui est toujours possible, on n'a pas $t^i y_i \in N$, car $0 < y_i < 1$. Les seuls cas possibles sont donc (3) et (4), et alors il faut que

$$wy - y_i \leqslant d \leqslant [wy] \qquad \text{si } f^i > 0$$

ou $$wy - (1-y_i) \leqslant d \leqslant [wy] \quad \text{si } f^i < 0.$$

or dans ce cas,

$$wy = \frac{f^{B+} + t^{B+}}{|f^i|}\, e + \left[\frac{f^i}{|f^i|} y_i\right]$$

et $$[wy] = \frac{f^{B+} + t^{B+}}{|f^i|} e = wy - y_i \qquad \text{si } f^i > 0$$

$$= \frac{f^{B+} + t^{B+}}{|f^i|} e - 1 = wy + y_i - 1 \qquad \text{si } f^i < 0$$

La seule valeur possible de d est alors $[wy]$, quel que soit le signe de f^i.

<u>Remarque 1</u>: Le point $\bar{x}$, à composantes bivalentes, est alors sommet du cône

$$C \left[\begin{array}{l} wx \leq d \\ x_{B+} \leq e \\ x_{B-} \geq 0 \end{array}\right. \quad \text{dont la matrice} \quad \begin{bmatrix} w^i & w^{B+} & w^{B-} \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & -U \end{bmatrix} \text{est unimodulaire}$$

$$\text{car, si } \delta = \det \begin{bmatrix} w^i & w^{B+} & w^{B-} \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & -U \end{bmatrix}, \quad |\delta| = |w^i| = \left| \frac{t^i f^i}{|f^i|} \right| = 1.$$

S'il existe j tel que $t^j = 1$, soit par exemple $j \in B+$, le cône

$$\Gamma \left[\begin{array}{l} fx \leq \alpha \\ x_{B^+ - \{j\}} \leq e \\ wx \leq d \\ x_{B-} \geq 0 \end{array}\right.$$

a également un sommet entier, car la matrice

$$F = \begin{bmatrix} f^i & f^{B^+-j} & f^j & f^{B-} \\ 0 & U^{B^+-j}_{B^+-j} & 0 & 0 \\ w^i & w^{B^+-j} & w^j & w^{B-} \\ 0 & 0 & 0 & -U \end{bmatrix}$$

est unimodulaire : si $\varphi = |\det(F)|$,

$$\varphi = t^j \quad \text{car} \quad |f^i|\, w = f + t^{B^+-j} \begin{bmatrix} 0 & U^{B^+-j}_{B^+-j} & 0 & 0 \end{bmatrix} + t^j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + t^{B-} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -U \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \varphi = \frac{t^j}{|f^i|} \left| \det \begin{bmatrix} f^i & f^{B+} & f^{B-} \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & -U \end{bmatrix} \right| = \frac{t^j}{|f^i|} |f^i| = t^j$$

<u>Remarque 2</u> :

Si $j \in B^+$, $f^j < 0$ et $|f^j| < |f^i|$

ou si $j \in B^-$, $f^j > 0$ et $|f^j| < |f^i|$

$w^j = 0$, donc la contrainte additionnelle ne fait pas intervenir la variable x_j.

<u>Remarque 3</u> :

On peut envisager d'itérer le processus à partir de la contrainte additionnelle afin d'obtenir une contrainte passant par le plus grand nombre possible de points bivalents. Tant que l'on peut obtenir des solutions de base non bivalentes, on peut répéter l'opération. Si l'on obtient à une itération donnée une contrainte

$$wx \leq d$$

avec $w^j = \pm 1$, $\forall j$, toute solution de base à composantes comprises entre 0 et 1 sera en fait bivalente, donc il n'y aura plus d'amélioration possible.

<u>Exemple</u>

$f = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\alpha = 1$.

Si on choisit comme solution de base non bivalente

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

le système de contraintes correspondant est

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la résolution de $tB = 0 \pmod{|f_i|}$ conduit à

$$\left.\begin{aligned} 2t^1 - t^2 &= 0 \\ -3t^1 - t^3 &= 0 \\ 4t^1 &= 0 \end{aligned}\right\} \pmod 4$$

Si on choisit $t^1 = 1$, et $0 \leq t^j < |f^i|$, $\forall j$, on obtient

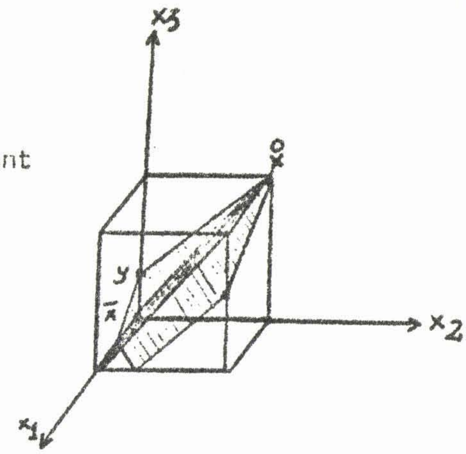
$$t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

et $w = \frac{tB}{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$d = \lfloor 1/4 \rfloor = 0.$

La contrainte additionnelle correspondante s'écrit donc

$$-x_2 + x_3 \leq 0 \quad , \quad \text{soit} \quad x_3 \leq x_2.$$



et l'hyperplan générateur passe par le point bivalent

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Comme en outre $t^3 = 1$,

$\{x : fx = \alpha\} \cap \{x : x_1 = 0\} \cap \{x : wx = d\}$ est un point entier,

ici $\overset{o}{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Si l'on choisit comme solution de base non bivalente

$$y = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

le système de contraintes correspondant est

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La résolution de $tB = 0$ (2) conduit, si $t^1 = 1$, à

$$t = [1 \quad 1 \quad 0],$$

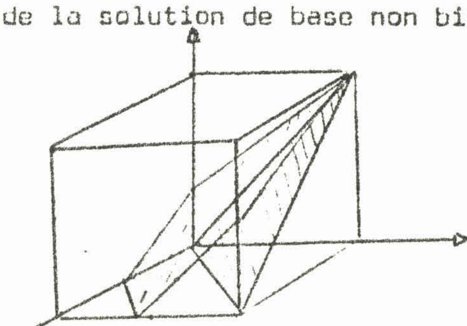
d'où $w = [1 \quad -2 \quad 2]$ et $d = [1/2] = 0$.

La contrainte additionnelle correspondante s'écrit donc

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 0$$

Si on itère le processus, à partir de la solution de base non bivalente

$$y' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ d'où } t = [1 \quad 1 \quad 0] \text{ et}$$

$w = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $d = \begin{bmatrix} 1/2 \end{bmatrix} = 0$, d'où la contrainte additionnelle

$x_1 - x_2 + x_3 \leq 0$ dont l'hyperplan générateur passe par les points bivalents $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Cette nouvelle contrainte n'introduit pas de points"parasites".

Références

1 - J. FREHEL : "Une méthode de troncature pour la programmation en nombres entiers". Etude n° FF2 - 0072 - 0 - Février 1969

Service Développement Scientifique

IBM - France.

2 - R. GOMORY : "An algoritm for integer solutions to linear programs" Princeton IBM Math Research project, technical report n°1. Nov. 1958.

Méthodes heuristiques de résolution

d'un système d'inégalités linéaires

en variables

entières ou bivalentes

Monique GUIGNARD

- Rapport n° 32 , janvier 1972 -

- INTRODUCTION -

Lors de la résolution d'un programme linéaire en variables entières ou bivalentes par une méthode d'énumération implicite ou de séparation et évaluation progressive, l'efficacité des tests utilisés repose au moins partiellement sur la connaissance d'une "bonne" solution réalisable. Il parait donc souhaitable de disposer de méthodes, peu coûteuses en temps de calcul, susceptibles de fournir une solution réalisable d'un système d'inégalités linéaires en variables entières ou bivalentes avec une probabilité non négligeable de succès. Cet article présente plusieurs méthodes de ce genre, ainsi que des résultats numériques qui permettent de se faire une idée de leur efficacité.

Table des matières

I - Le problème

On considère le programme linéaire

$$\text{Min}\quad \begin{cases} cx = z \\ Ax \leq b \\ x \in C \\ x \in Z^n \end{cases}$$

où $c \in (\mathbb{R}^n)^*$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $A_i^j \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $b_i \in \mathbb{R}$,

$C \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1,.., m$, $j = 1,..., n$.

Si $C = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$, le programme linéaire est en variables entières, si $C = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1,\ j = 1,..., n\}$ le programme lineaire est en variables bivalentes.

On cherche un $x \in C \cap \mathbb{Z}^n$ vérifiant le système d'inégalités linéaires à coefficients quelconques

$$Ax \leq b.$$

Si l'on dispose déjà d'une solution réalisable $\hat{x}$, les méthodes proposées peuvent également être utilisées en vue d'obtenir une solution meilleure par la résolution du système

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ cx \leq c\hat{x} - 1 \end{cases}$$

II - Systèmes linéaires en variables bivalentes

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, \ldots, n\} .$$

1 - *Méthode du nombre chromatique.*

On considère un système d'inégalités linéaires

$$Ax \leq b$$

assez particulier. La ligne i de la matrice A, $i = 1, \ldots, m$, est telle que

$$\exists j(i), k(i) : A_i^{j(i)} = \pm 1, \quad A_i^{k(i)} = \pm 1$$

et $\forall h \neq j(i), h \neq k(i) : A_i^h = 0$. D'autre part, la composante correspondante du second membre est telle que

si $A_i^{j(i)} = +1$ et $A_i^{k(i)} = +1$, alors $b_i = 1$,

si $A_i^{j(i)} = +1$ et $A_i^{k(i)} = -1$, alors $b_i = 0$,

si $A_i^{j(i)} = -1$ et $A_i^{k(i)} = -1$, alors $b_i = -1$,

i.e. $b_i = \left[A_i^{j(i)}\right]^+ + \left[A_i^{k(i)}\right]^+ - 1,$

où $x^+ \triangleq \text{Max} \{0, x\}$.

Autrement dit, la $i^{\text{ème}}$ inégalité, $i = 1,\ldots, m$, est de l'un des trois types suivants uniquement :

(1) $x_{j(i)} + x_{k(i)} \leq 1$

(2) $x_{j(i)} - x_{k(i)} \leq 0$

(3) $-x_{j(i)} - x_{k(i)} \leq -1.$

Chacune de ces trois inégalités exclut <u>une</u> combinaison de valeurs pour $x_{j(i)}$ et $x_{k(i)}$:

(1) interdit d'avoir simultanément $x_{j(i)} = 1$ et $x_{k(i)} = 1$,

(2) interdit d'avoir simultanément $x_{j(i)} = 1$ et $x_{k(i)} = 0$,

(3) interdit d'avoir simultanément $x_{j(i)} = 0$ et $x_{k(i)} = 0$.

on associe au problème un graphe (X,U) dont l'ensemble X des sommets est l'ensemble

$$\{(x_j = 1),\ j = 1,\ldots, n\} \cup \{(x_j = 0),\ j = 1,\ldots, n\}$$

et dont l'ensemble U des arcs est l'ensemble des incompatibilités évidentes entre $(x_j = 0)$ et $(x_j = 1)$ augmenté de l'ensemble des incompatibilités entre $(x_{j(i)} = 0 \text{ ou } 1)$ et $(x_{k(i)} = 0 \text{ ou } 1)$ fournies par le système d'inégalités linéaires, un arc entre deux sommets traduisant l'incompatibilité des valeurs correspondantes.

Le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer tous les sommets de telle sorte que deux sommets reliés par un arc aient des couleurs différentes.

Théorème 1

Si le nombre chromatique du graphe associé au système est égal à 2, toute coloration correspondante fournira deux solutions du système.

Chaque groupe de couleurs comporte au plus n sommets, chaque sommet $(x_j = 0)$ étant relié par un arc au sommet $(x_j = 1)$. Si le nombre chromatique est égal à deux, chaque groupe comporte alors exactement n sommets, ce qui signifie que l'on a deux combinaisons compatibles de valeurs pour $x_1, \dots, x_n$, qui correspondent à deux vecteurs $\overset{1}{x}$ et $\overset{2}{x}$ complémentaires :

$$\overset{1}{x}_j + \overset{2}{x}_j = 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Théorème 2

Si le nombre chromatique du graphe associé au système est supérieur à deux et si un groupe de couleurs comporte n sommets, ce groupe fournit une solution du système.

Le groupe comportant n sommets peut contenir au plus un sommet correspondant à chaque x_j, $j = 1,\dots, n$, il comporte donc une fois et une seule un sommet de la forme $x_j = 0$ ou 1, $j = 1,\dots, n$. La combinaison correspondante étant compatible fournit une solution du système. Si le nombre chromatique est supérieur à deux, le vecteur complémentaire n'est pas solution du système.

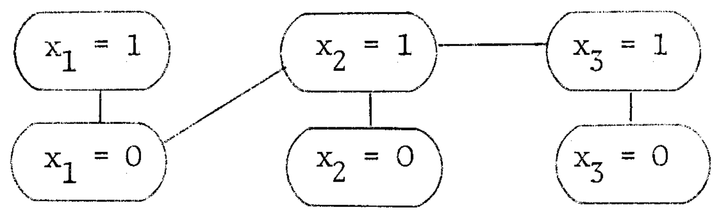
Méthode

On cherchera donc à déterminer le nombre chromatique du graphe associé et une coloration correspondante. La méthode fournira une solution si l'on se trouve dans l'un des cas envisagés par les théorèmes 1 et 2. Il est toutefois possible qu'aucune répartition chromatique ne permette de résoudre $Ax \leq b$, alors qu'une coloration comportant plus de couleurs fournirait une solution.

Exemple : Au système

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

on associe le graphe



Le nombre chromatique est 2, le partitionnement en groupes compatibles

est $G_1 = \{x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0\}$

et $G_2 = \{x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1\}$.

Ceci fournit deux solutions complémentaires du système initial :

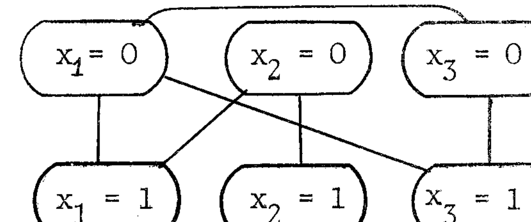
$\overset{1}{x} = (1\ 1\ 0)$ et $\overset{2}{x} = (0\ 0\ 1)$.

Remarque 1.

Si un sommet $x_j = 0$ ou $x_j = 1$ est relié à chacun des sommets $x_k = 0$ et $x_k = 1$ pour un indice k, aucune solution ne comportera la valeur correspondante de x_j. On peut donc au préalable remplacer x_j par la valeur complémentaire (mod 2) dans toutes les inéquations. Ceci peut rendre certaines inégalités triviales ou au contraire permettre de déterminer à priori d'autres variables.

Exemple :

$$\left.\begin{array}{rrrr} x_1 & - x_2 & & \leqslant 0 \\ - x_1 & & - x_3 & \leqslant -1 \\ - x_1 & & + x_3 & \leqslant 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$



$x_1 = 0$ étant incompatible avec toute valeur de x_3, on peut imposer à x_1 de valoir 1. Le système devient

$$\begin{array}{rrcr} -x_2 & & \leq & -1 \\ & -x_3 & \leq & 0 \\ & x_3 & \leq & 1 \end{array}$$

La première contrainte permet de choisir $x_2 = 1$, tandis que x_3 peut prendre n'importe quelle valeur, les deux dernières contraintes étant triviales.

Remarque 2

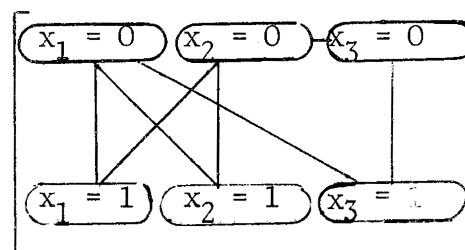
Il existe des méthodes rapides d'évaluation approchée du nombre chromatique d'un graphe, (cf. par exemple [28] et [29]), et des méthodes rigoureuses de calcul du nombre chromatique, qui ont malheureusement un caractère énumératif, et l'on risque alors de déplacer le problème sans en diminuer vraiment la difficulté (cf. par exemple [9]). Les expériences numériques rapportées plus loin ont été menées avec deux méthodes heuristiques, dûes respectivement à Welsh et Powell [28] et à Wood [29] . Même si ces méthodes ne sont pas rigoureuses, l'utilisation que l'on en fait est satisfaisante si on peut obtenir au moins une solution réalisable du problème d'origine, et c'est ce qui semble se produire dans la pratique.

Remarque 3

Si deux sommets ne sont pas reliés entre eux mais sont reliés à un même ensemble de sommets du graphe, il peut être intéressant de les identifier a priori, de façon à ne pas alourdir les calculs.

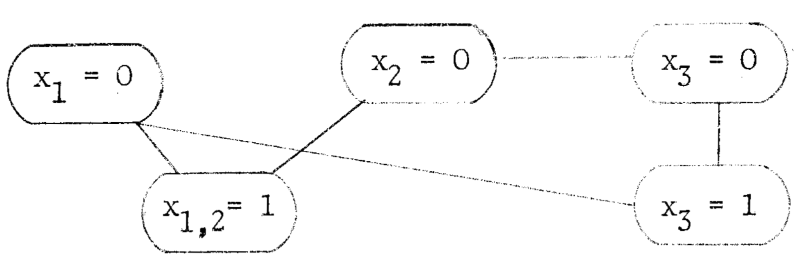
Exemple :

$$\left.\begin{array}{rrrl} -x_1 & +x_2 & & \leq 0 \\ -x_1 & & +x_3 & \leq 0 \\ & -x_2 & -x_3 & \leq -1 \\ x_1 & -x_2 & & \leq 0 \end{array}\right] \quad \Longleftrightarrow$$



(I)

Les sommets ($x_1 = 1$) et ($x_2 = 1$) sont compatibles et jouent un rôle identique. On peut donc les placer systématiquement dans le même groupe et considérer le sous-graphe



(II)

Utilisons par exemple la méthode de Wood. On classe les sommets par paires et par degrés de ressemblance décroissants, le degré de ressemblance de deux sommets compatibles étant le nombre d'incompatibilités communes.

Dans le graphe (II), les sommets ($x_1 = 0$) et ($x_2 = 0$) ont un degré de ressemblance égal à 1, ainsi que les paires ($x_1 = 0$) et ($x_3 = 0$),

$(x_2 = 0)$ et $(x_3 = 1)$, $(x_3 = 0)$ et $(x_{1,2} = 1)$, $(x_{1,2} = 1)$ et $(x_3 = 1)$.

On forme les groupes suivants :

$\left\{ G_1 = \quad (x_1 = 0)\ ,\ (x_2 = 0) \right\}$,

$\left\{ G_2 = \quad (x_3 = 0)\ ,\ (x_{1,2} = 1) \right\}$,

$\left\{ G_3 = \quad (x_3 = 1) \right\}$.

Le groupe G_2 fournit une solution réalisable :

$x = (1 \quad 1 \quad 0)$.

Exemples :

Les exemples qui suivent ont été traités avec deux méthodes heuristiques de recherche du nombre chromatique. La première méthode (utilisée pour les exemples 1(2x3) et 2(17x12)) est due à Wood [29]. On classe les sommets du graphe par paires et par degrés de ressemblance (ou nombres d'incompatibilités communes) décroissants. La seconde méthode (utilisée pour l'exemple 3 (18x35) est due à Welsh et Powell [28]. On classe les sommets par degrés décroissants (INCOM) ce qui les range par classes. Les conventions suivantes sont adoptées dans la représentation du graphe : (+i) correspond à $x_i = +1$ et (-i) correspond à $x_i=0$. Les deux vecteurs EITHER et OR contiennent les paires d'incompatibilités : EITHER (K) et OR (K) sont deux sommets reliés par un arc.

L'exemple 2 provient du problème n° 4 de Bouvier et Messoumian[8]. Les contraintes ont été utilisées pour obtenir un système d'inégalités "préférées"* (cf[26]), contenant deux variables au maximum. L'exemple 3 provient du problème n° 1 de Texaco, dix huit contraintes sur les 28 étant du type considéré ici [20].

---

* π est un ensemble de variables préférées si $\sum_{i\in\pi} y_i \leq \alpha \leq |\pi|-1$
Par analogie, une inégalité du type précédent sera appelée une inégalité préférée.

```
NB CONTRAINTES:          2
NB VARIABLES:        3




B=

    0    1

A=

    0   -1    1

    1    1    0

EITHER

    3    2   -1   -2   -3

OR

   -2    1    1    2    3

INCOM=

    2    2    2    1    2    1

ORIGINE

   -2    3    1    2

EXTREMITE

   -3    2   -2   -1

DEGRES DE RESSEMBLANCE

    1    1    1    1

GROUPES DE RESSEMBLANCE

    1    2    2    2    1    1

GROUPE NO     1

X(    1)=1

X(    2)=0

X(    3)=0

GROUPE NO     2
```

```
X(    2)=1

X(    3)=1

X(    1)=0

IL EXISTE UNE COMBINAISON COMPATIBLE

ELLE EST DONNEE PAR LE GROUPE    2

LA COMBINAISON COMPLEMENTAIRE EST AUSSI COMPATIBLE

IL EXISTE UNE SOLUTION DU SYSTEME D INEGALITES PREFEREES

X=

     1     0     0

REALISABLE GLOBALEMENT

IL EXISTE UNE SECONDE SOLUTION DU SYSTEME D INEGALITES PREFEREES

Y=

     0     1     1

REALISABLE GLOBALEMENT
```

NB CONTRAINTES: 17

NB VARIABLES: 12

A=

```
0   0   1   0   0   0   0   0   0   0
1   0
0   1   0   0   1   0   0   0   0   0
0   0
0   0   0   0   0  -1   0   0   0   0
1   0
0   0   0   0   1   0   0   0   0   0
0   1
0   0   0   0   0   0   0   1   0   0
1   0
0   0   0  -1   0   0   0   0  -1   0
0   0
0   0  -1   0   0   1   0   0   0   0
0   0
0  -1   0   0   1   0   0   0   0   0
0   0
0   0   0  -1   0   0   0   0   0   0
1   0
0   0   0   0   1   0   0   0   0  -1
0   0
0   0  -1   0   0   0   0   0   0   0
-1  0
0   0   0   0   0   0   0   0  -1   0
1   0
0   0   0   0   1   1   0   0   0   0
0   0
0   1  -1   0   0   0   0   0   0   0
0   0
0   0   0   0   0   0   1   0   0   0
1   0
```

```
   0    0    1    0    1    0    0    0    0    0
   0    0
   0    0   -1    0    0    0    0    0    0    1
   0    0
 B=
   1    1    0    1    1   -1    0    0    0    0
  -1    0    1    0    1    1    0
EITHER
  11    5   11   12   11   -9    6    5   11  -10
 -11   11    6   -3   11    5   10   -1   -2   -3
  -4   -5   -6   -7   -8   -9  -10  -11  -12
OR
   3    2   -6    5    8   -4   -3   -2   -4    5
  -3   -9    5    2    7    3   -3    1    2    3
   4    5    6    7    8    9   10   11   12
INCOM=
   1    3    3    1    7    3    2    2    1    2
   7    2    1    2    5    3    1    2    1    1
   3    2    2    1
ORIGINE
 -10    6    3   -5    7  -11    4   10    6    3
  -5   11    2   10    3    7  -11    9   -6    3
  10    3   -2  -11   -7   -5   -3  -10    3    8
  11   -4   -9   -3    6    6    6   -2   -2   -2
  -2   -4   -4   11    5  -10  -10   -9   -3  -11
 -11  -11   -9   -9   11    5    6    2    2   -3
   7   11    3    5   -3   10
EXTREMITE
  -6    8   -4   -9    7  -11    5   -3   12  -10
   6    3   -5   -3    8   -4   -9    7  -11    6
 -12   -2  -10    6    3   -5   -4   -9    7  -11
  -8    9    4   -6  -11   10    3  -10    6    3
  -5    7  -11    4   10    6    3   -5   11    2
  10    3    7  -11    9   -6    3   10    3   -2
 -11   -7   -5   -3  -10    3
```

GROUPES DE RESSEMBLANCE

1	2	1	3	3	1	1	1	1	1
2	2	2	1	3	1	1	3	2	2
3	2	1	1						

GROUPE NO 1

X(1)=1
X(3)=1
X(6)=1
X(7)=1
X(8)=1
X(9)=1
X(10)=1
X(2)=0
X(4)=0
X(5)=0
X(11)=0
X(12)=0

GROUPE NO 2

X(2)=1
X(11)=1
X(12)=1
X(1)=0
X(7)=0
X(8)=0
X(10)=0

GROUPE NO 3

X(4)=1
X(5)=1
X(3)=0
X(6)=0
X(9)=0

IL EXISTE UNE COMBINAISON COMPATIBLE.

ELLE EST DONNEE PAR LE GROUPE 1

IL EXISTE UNE SOLUTION DU SYSTEME D INEGALITES PREFEREES

X=

1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0								

NB CONTRAINTES: 18

NB VARIABLES: 35

A =

-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	1	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					

```
   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0   -1    1    0    0    0
   0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
   0    0    0    0   -1    0   -1    0    0    0
   0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0   -1    1
   0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0    1   -1
   0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
   0   -1    0   -1    0
B=
  -1    0    0    0   -1    0    0    0    0   -1
  -1    0   -1    0   -1    0    0   -1
EITHER
  -2    4    6   -6   -7   11   13   15   34  -12
 -21   24  -24   27  -27   30  -30  -34   -1   -2
  -3   -4   -5   -6   -7   -8   -9  -10  -11  -12
 -13  -14  -15  -16  -17  -18  -19  -20  -21  -22
 -23  -24  -25  -26  -27  -28  -29  -30  -31  -32
 -33  -34  -35
```

CR

-1	-3	-5	5	-6	-10	-12	-14	-33	-9
-20	-23	-22	-26	-25	-29	29	-32	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35							

INCOM=

1	1	1	2	2	2	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	1	1	1	1
1	1	1	2	1	1	2	1	2	2
1	1	1	2	1	2	2	2	1	2
3	2	1	2	2	1	3	1	2	1
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
2	2	1	2	2	1	2	2	2	1

3 CLASSES

CLASS.=

3	3	3	2	2	2	3	3	3	3
2	3	2	3	2	3	3	3	3	3
3	3	3	2	3	3	2	3	2	2
3	3	3	2	3	2	2	2	3	2
1	2	3	2	2	3	1	3	2	3
3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	3	2	2	2	3

2 GROUPES

GROUPES DE RESSEMBLANCE

2	1	1	1	2	2	1	1	1	1
1	2	2	1	1	1	1	1	1	2

1	2	1	1	2	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	2	2	2	1
1	2	2	2	2	2	1	1	2	2
2	2	2	2	1	2	1	2	2	1
2	2	2	2	2	2	1	2	2	2

GROUPE NO 1

X(2)=1
X(3)=1
X(4)=1
X(7)=1
X(8)=1
X(9)=1
X(10)=1
X(11)=1
X(14)=1
X(15)=1
X(16)=1
X(17)=1
X(18)=1
X(19)=1
X(21)=1
X(23)=1
X(24)=1
X(26)=1
X(27)=1
X(28)=1
X(29)=1
X(30)=1
X(31)=1

X(33)=1
X(34)=1
X(35)=1
X(1)=0
X(5)=0
X(6)=0
X(12)=0
X(13)=0
X(20)=0
X(22)=0
X(25)=0
X(32)=0

GROUPE NO 2

X(1)=1

X(5)=1

X(6)=1

X(12)=1

X(13)=1

X(20)=1

X(22)=1

X(25)=1

X(32)=1

X(2)=0

X(3)=0

X(4)=0

X(7)=0

X(8)=0

X(9)=0

X(10)=0

X(11)=0

X(14)=0

X(15)=0

X(16)=0

X(17)=0

X(18)=0

X(19)=0

X(21)=0

X(23)=0

X(24)=0

X(26)=0

X(27)=0

X(28)=0

X(29)=0

X(30)=0

X(31)=0

X(33)=0

X(34)=0

X(35)=0

IL EXISTE UNE COMBINAISON COMPATIBLE

ELLE EST DONNEE PAR LE GROUPE 2

LA COMBINAISON COMPLEMENTAIRE EST AUSSI COMPATIBLE

IL EXISTE UNE SOLUTION DU SYSTEME D INEGALITES PREFEREES

X=

0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1					

IL EXISTE UNE SECONDE SOLUTION DU SYSTEME D INEGALITES PREFEREES

Y=

1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0					

2 - Méthode de relaxation par colonnes

On considère maintenant un système général :

$$Ax \leq b,$$

et on suppose que le système est irréductible, c'est-à-dire :

$$\exists i \in \{1,\dots, m\} \ : \forall j = 1,\dots, n \ , \ A_i^j \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (A_i^1,\dots,A_i^n) = 1.$$

Autrement dit, si les coefficients d'une inéquation sont entiers, leur PGCD est égal à 1. Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, on peut évidemment s'y ramener en divisant les coefficients du premier membre par ce p.g.c.d et en remplaçant le second membre par la partie entière de son quotient par ce p.g.c.d. .

Soit $\bar{x}$ un vecteur de $C \cap \mathbb{Z}^n$. Si $\bar{x}$ vérifie $A\bar{x} \leq b$, c'est une solution. Sinon, on va modifier $\bar{x}$ en modifiant certaines de ses composantes de façon , si possible , à rendre $b-Ax$ positif ou nul.

Soit $E = \{j : \bar{x}_j = 1\}$ et $Z = \bar{E} = \{j : \bar{x}_j = 0\}$.

Alors $A\bar{x} = \sum_{j \in E} A^j \bar{x}_j + \sum_{j \in \bar{E}} A^j \bar{x}_j.$

$$= \sum_{j \in E} A^j.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, et soit $\bar{A} = (-A^E, A^Z)$. $\oplus$ représentant l'addition modulo 2, pour $x \in C$

$$Ax = \bar{A}(x \oplus \bar{x}) + A\bar{x}.$$

Pour que $Ax \leq b$, il faut que

$$\bar{A}(x \oplus \bar{x}) \leq b - A\bar{x}$$

$$\leq b - \sum_{j \in E} A^j$$

Soit $\bar{b} = b - \sum_{j \in E} A^j$. Posons $y = x \oplus \bar{x}$, alors $\bar{y} = 0$ sert de nouvelle origine (mod 2). Si $\bar{y} = 0$ n'est pas réalisable de

$$\bar{A}y \leq \bar{b},$$

c'est-à-dire si $\bar{x}$ n'est pas solution réalisable de

$$Ax \leq b,$$

$\exists I_1 \subset \{1,\ldots, m\}$: $\bar{b}_{I_1} < 0$. On va chercher un indice $k \in \{1,\ldots,n\}$ tel que le vecteur $y(k)$ défini par $\begin{cases} y_j = 0, & j \neq k \\ y_k = 1 \end{cases}$

soit le "meilleur" possible au sens suivant.

Soit $n_1(k) = |\{i \in I_1 : \bar{b}_i + A_i^k \geq 0\}|$ (1)*

et $n_2(k) = |\{i \notin I_1 : \bar{b}_i + A_i^k \geq 0\}|$,

---

(1)* K étant un ensemble, $|K|$ représente le cardinal de K.

autrement dit $n_1(k)$ est le nombre d'inégalités qui n'étaient pas vérifiées par $\bar{x}$ et qui le seront par $x = \bar{x} \oplus y(k)$, $n_2(k)$ est le nombre d'inégalités qui étaient vérifiées par $\bar{x}$ et qui le seront toujours par $x = \bar{x} \oplus y(k)$.

p_1 et p_2 étant des poids que l'on attribue respectivement à $n_1(k)$ et $n_2(k)$, on choisit l'indice k pour lequel $p_1\, n_1(k) + p_2\, n_2(k)$ est maximum. S'il y a ambiguité, on choisit l'indice k tel que

$$n_3(k) = \sum_{j\,:\, b_j - A_j(\bar{x} \oplus y(k)) < 0} [A_j(\bar{x} \oplus y(k)) - b_j]$$

soit minimum. $n_3(k)$ mesure en quelque sorte de combien la solution essayée $\bar{x} \oplus y(k)$ n'est pas réalisable. Si $\bar{x} + y(k)$ est réalisable, $n_3(k)$est nul, sinon $n_3(k)$ est positif. S'il y a encore indétermination, on peut, s'il s'agit de résoudre un programme linéaire, choisir la colonne k de coût minimum.

Exemples :

Les exemples qui suivent ont été traités par la méthode de relaxation par colonnes avec des poids $p_1 = 2$ et $p_2 = 1$. Les expériences réalisées avec des pondérations variées semblent indiquer que ces poids sont, pour l'ensemble des exemples essayés, les meilleurs. La détermination d'un vecteur initial $\bar{x}$ peut se faire de plusieurs manières. Si tous les coefficients c^j de la fonction économique sont de même signe on peut essayer d'utiliser initialement $\bar{x} = \mathbb{0}^*$ ou $\bar{x} = \mathbb{1}^*$. On peut aussi choisir un vecteur $\bar{x}$ au hasard. On peut enfin sélectionner la contrainte qui sera la plus difficile à satisfaire (peu de coefficients du premier membre étant inférieurs au second membre) et déterminer une solution du genre "Knapsack" pour le problème à une seule contrainte ainsi obtenu. Pour les problèmes de Knapsack proprement dits, on peut ranger les variables par intérêts décroissants et fixer à 1 toutes les variables qu'il est possible de fixer à un sans dépasser le second membre.

Par exemple, pour le problème de Knapsack suivant

$$\text{Max } (14 \quad 12 \quad 10 \quad 8 \quad 3 \quad 2 \quad 1)x = z$$
$$\begin{cases} (2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1)x \leqslant 7 \\ \qquad x_i = 0 \text{ ou } 1,\ i = 1,\dots,7 \end{cases}$$

---

* $\mathbb{0} = (0\ldots0\ldots0) \in \mathbb{R}^n$, $\quad \mathbb{1} = (1\ldots1\ldots1) \in \mathbb{R}^n$.

dont les variables sont déjà classées par "intérêts" décroissants

$(\frac{14}{2} \geqslant \frac{12}{2} \geqslant \ldots \geqslant \quad \frac{1}{1})$, on peut choisir la solution initiale

$$\bar{x} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$

pour laquelle $\bar{z} = 39$. La solution optimale en continu est

$$\hat{x} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

pour laquelle $\hat{z} = 40$, et cette solution, arrondie par défaut, aurait fourni $z = 36$ et $x = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.

Les exemples portant les références suivantes : E.H (Edith Heurgon), B.M (Bouvier et Messoumian), Texaco, Arcuri, Petersen, sont tirés des articles ou des rapports suivants : [16], [8] , [20] , [26] , [23] . Les exemples portant la référence P.F (Plateau et Fayard) sont tirés de [24] , ce sont des problèmes de Knapsack.

Lorsqu'une solution réalisable $\overset{1}{x}$ du système a été trouvée, on ajoute la contrainte $cx \leqslant c\overset{1}{x} - 1$ aux contraintes initiales et on applique la même méthode au système ainsi obtenu.

B&M n°2

NB CONTRAINTES: 7

NB VARIABLES: 10

MIN Z=CX

C=

10	7	1	12	2	8	3	1	5	3

B=

-2	-1	-1	1	-3	-7	-1

A=

3	-12	-8	1	0	0	0	0	-7	2
0	1	-10	0	-5	1	7	1	0	0
5	-3	-1	0	0	0	0	-2	0	1
-5	3	1	0	0	0	0	2	0	-1
0	0	-4	-2	0	-5	1	-9	-2	0
0	9	0	-12	-7	6	0	2	-15	-3
0	0	0	0	-1	0	-5	0	-10	0

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X0=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

APRES AVOIR CONSTRUIT 1 SOLUTION~~S~~ ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0	0	1	0	1	0	0	0	0	0

Z= 3 (c'est l'optimum).

B&M nº 4

```
NB CONTRAINTES:          6

NB VARIABLES:          12

MIN Z=CX

C=

    5     1     3     2     6     4     7     2     4     1

    1     5

B=

   -6     1    -4     8    -7    -4

A=

   -1     3   -12     0    -1     7    -1     0     0     3

   -5    -1

    3    -7     0     1     6     0     0     0     0     0

    0     0

   11     0     1    -7     0    -1     2     1    -5     0

    9     0

    0     5     6     0   -12     7     0     3     1    -8

    0     5

   -7    -1    -5     3     1    -8     0    -2     7     1

    0    -7

   -2     0     0    -4     0     0    -3    -5    -1     0

    1     1

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X0=

    0     0     0     0     0     0     0     0     0     0

    0     0

APRES AVOIR CONSTRUIT        1  SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

    0     0     1     1     0     0     0     1     0     1

    0     1

Z=          13.(C'est l'optimum).
```

NB CONTRAINTES: 10

NB VARIABLES: 10

MIN Z=CX

C=

2	8	2	5	6	9	3	8	5	4

B=

23	-2	1	-3	13	22	8	7	-7	8

A=

2	6	1	0	3	3	2	6	2	2
-6	5	-8	3	0	-1	-3	-8	-9	3
5	-6	-5	-3	-8	8	-9	-2	0	9
-9	-5	0	9	-1	8	-3	9	9	3
8	-7	4	5	9	-1	7	1	-3	2
7	5	2	0	6	6	7	6	-7	-7
-1	3	3	4	1	0	4	-1	-6	0
-1	2	-6	-9	0	7	-9	9	6	-4
4	-6	-7	-2	-2	0	-6	-6	7	-4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X0=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

APRES AVOIR CONSTRUIT 1 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0	0	1	0	0	0	1	0	0	0

Z= 5 . (C'est l'optimum).

NB CONTRAINTES: 15

NB VARIABLES: 15

MIN Z=CX

C=

7	4	1	3	4	2	6	2	1	5
1	5	7	2	7					

B=

36	-22	-3	1	10	12	-1	-2	-3	2
14	9	-25	3	32					

A=

2	6	1	0	3	3	2	6	2	2
5	3	3	7	9					
-6	5	-8	-3	0	-1	-3	-8	-9	3
-8	6	-3	-8	-6					
5	-6	-5	-3	-8	8	-9	-2	0	9
-1	7	9	-9	4					
-9	-5	0	9	-1	8	-3	9	9	3
0	-7	5	4	-9					
8	-7	4	5	9	-1	7	1	-3	2
0	-3	-5	9	7					
7	5	2	0	6	6	7	6	-7	-7
-1	-8	-3	9	1					
-1	3	3	4	1	0	4	-1	-6	0
8	0	1	-5	-4					
-1	2	-6	-9	0	7	-9	9	6	-4
5	3	1	-3	-9					
4	-6	-7	-2	-2	0	-6	-6	7	-4
0	2	8	0	4					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

-1	-1	-1	1	1					
-1	3	3	-4	5	5	7	8	-8	0
0	-1	-2	4	-6					
8	0	5	0	2	6	7	1	-1	1
4	-5	-7	-8	2					
-2	-7	-8	6	-2	-5	-9	-2	2	-8
1	-3	5	6	-8					
7	9	-7	-5	1	-5	-5	4	9	3
-4	0	0	7	-7					
7	1	4	-3	0	6	-3	7	8	1
-6	6	8	-3	8					

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					

APRES AVOIR CONSTRUIT 1 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1					

Z= 26 . (C'est l'optimum).

B & M n°14

NB CONTRAINTES: 10

NB VARIABLES: 20

MIN Z=CX

C=

2	6	3	2	9	5	6	1	7	9
7	1	2	5	2	4	9	2	3	5

B=

52	20	20	14	15	25	-6	-5	30	-3

A=

9	2	8	6	5	9	6	4	7	5
6	0	5	6	5	2	0	6	3	0
5	5	-3	3	0	0	0	-8	-2	-6
1	6	6	5	8	4	-3	4	1	6
-4	7	-1	4	-6	-7	1	5	0	5
9	8	3	6	1	5	0	8	3	4
-1	1	3	0	0	3	1	-5	8	4
0	1	-3	-3	8	0	-4	8	2	9
-6	8	6	-8	-9	4	9	5	-8	-5
2	9	-3	-5	0	-1	2	5	4	8
5	0	5	6	-8	6	0	-1	6	-3
9	-4	-2	-3	0	-8	5	5	9	7
7	8	-5	-2	-1	-9	8	3	4	3
-3	0	-1	6	2	0	-4	-9	6	-3

0	5	8	-3	-1	-2	9	-9	6	2
0	-3	1	5	-4	-5	5	-6	-9	0

7	9	8	-3	8	7	5	7	7	-1
8	5	-9	-1	-8	-2	4	-8	-1	-8

-2	2	-2	-2	2	2	-3	-3	3	3
-3	3	-3	3	-3	3	-3	-3	4	-4

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

APRES AVOIR CONSTRUIT 1 SOLUTION~~S~~ ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Z= 2. (C'est l'optimum).

B&M n°.15

NB CONTRAINTES: 20

NB VARIABLES: 20

MIN Z=CX

C=

2	6	0	9	9	6	5	8	0	1
6	9	8	7	0	8	4	4	4	6

B=

58	-11	4	-1	0	5	7	-8	42	10
31	-17	18	-21	6	-13	26	-24	7	4

A=

5	3	3	7	9	4	2	2	3	4
9	9	9	2	8	6	5	9	6	4
-8	6	-3	-8	-6	7	6	-2	3	-7
4	5	5	5	-3	3	0	0	0	-8
-1	7	9	-9	4	2	-2	-9	0	-3
3	0	-4	7	-1	4	-6	-7	1	5
0	-7	5	-4	-9	-1	-9	7	-3	-7
4	1	-1	1	3	0	0	3	1	-5
0	-3	-5	9	7	2	5	4	-7	-9
3	2	-6	8	6	-8	-9	4	9	5
-1	-8	-3	9	1	-6	6	6	1	1
6	-3	5	0	5	6	-8	6	0	-1
8	0	1	-5	-4	-1	-9	-7	2	2
1	-3	7	8	-5	-2	-1	-9	8	3

5	3	1	-3	-9	-1	-6	-8	-9	-9
6	5	0	5	8	-3	-1	-2	9	-9

0	2	6	0	4	-4	3	2	-3	0
4	3	7	9	8	-3	8	7	5	7

-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	2
2	2	-2	2	-2	-2	2	2	-3	-3

0	-1	-2	4	-6	6	7	-8	8	0
-1	-2	-4	-7	-7	7	8	8	-1	4

4	-5	-7	-8	2	-8	-5	-5	9	0
-1	-9	-3	-6	-1	5	-4	-7	-6	-3

1	-3	5	6	-8	1	1	-9	8	3
0	-8	-3	-5	-2	-2	8	-8	-6	0

-4	0	0	7	-7	-9	0	-9	-3	0
-9	0	9	-6	0	-4	9	2	4	-7

-6	6	6	-3	8	-5	1	8	4	-8
-3	8	-1	0	5	0	2	4	1	4

-6	-3	-6	-6	6	2	-7	-6	0	-7
-4	-6	5	-9	5	4	2	0	8	-3

6	-1	0	6	6	8	-2	-4	1	0
0	6	1	1	9	-7	1	-8	3	0

2	-6	2	-2	-4	-5	4	5	-1	-8
-2	-2	-4	1	0	-2	1	-9	-6	-6

9	9	0	0	-8	-4	-8	7	4	-6
9	5	-7	3	-6	0	-5	-5	-2	8

-3	0	-3	3	0	4	-6	-2	3	5
3	-4	-9	9	-4	-5	1	0	-8	-5

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

LA METHODE N A PAS PERMIS DE METTRE EN EVIDENCE UNE SOLUTION

La solution optimale et l'optimum sont respectivement

X =

1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1

Z = 29

NB CONTRAINTES: 20

NB VARIABLES: 20

MIN Z=CX

C=

3	2	5	8	6	9	7	4	5	6
3	2	4	5	8	7	3	5	2	4

B=

34	-21	-2	26	20	25	-10	-12	-9	10
21	4	-4	12	21	-14	6	-8	-21	10

A=

2	6	1	0	3	3	2	6	2	2
5	3	3	7	9	4	2	2	3	4

-6	5	-8	-3	0	-1	-3	-8	-9	3
-8	6	-3	-8	-6	7	6	-2	3	-7

5	-6	-5	-3	-8	8	-9	-2	0	9
-1	7	9	-9	4	2	-2	-9	0	-3

-9	-5	0	9	-1	8	-3	9	9	3
0	-7	5	4	-9	-1	-9	7	-3	-7

8	-7	4	5	9	-1	7	1	-3	2
0	-3	-5	9	7	2	5	4	-7	-9

7	5	2	0	6	6	7	6	-7	-7
-1	-8	-3	9	1	-6	6	6	1	1

-1	3	3	4	1	0	4	-1	-6	0
8	0	1	-5	-4	-1	-9	-7	2	2
-1	2	-6	-9	0	7	-9	9	6	-4
5	3	1	-3	-9	-1	-6	-8	-9	-9
4	-6	-7	-2	-2	0	-6	-6	7	-4
0	2	8	0	4	-4	3	2	-3	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	2
-1	3	3	-4	5	5	7	8	-8	0
0	-1	-2	4	-6	[illegible]	7	-8	8	0
8	0	5	0	2	6	7	1	-1	1
4	-5	-7	-8	2	-8	-5	-5	0	0
-2	-7	-3	6	-2	-5	-9	-2	2	-8
1	-3	5	6	-8	1	1	-9	8	3
7	9	-7	-5	1	-5	-5	4	9	3
-4	0	0	7	-7	-9	0	9	-3	0
7	1	4	-3	0	6	-5	7	8	1
-6	6	8	-3	8	-5	1	8	4	-8
3	6	1	-3	-5	6	-9	6	3	-9
-6	-3	-6	-6	6	2	-7	-6	0	-7

-3	-1	6	-6	1	-2	0	3	-3	3
6	-1	0	6	6	8	-2	-4	1	0
5	-9	-5	0	0	-6	7	1	-1	7
2	-6	2	-2	-4	-5	4	5	-1	-8
-4	4	-8	-5	-7	-7	-4	5	0	-8
9	9	0	8	-8	-4	-8	7	4	-6
-6	8	2	0	-8	-7	-6	0	9	4
-8	0	-3	3	0	4	-6	-2	3	5

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X =

1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Z = 47

ON A TROUVE UNE SOLUTION REALISABLE

X =

0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1

Z = 47 .(C'est l'optimum).

B & M n°17

NB CONTRAINTES: 23

NB VARIABLES: 20

MIN Z=CX

C =

1	5	8	1	4	6	6	8	1	5
6	5	6	3	7	8	9	5	9	4

B =

40	13	43	4	42	34	-9	8	6	-15
6	22	-27	6	5	33	5	-12	30	-19
38	-8	-3							

A =

2	2	8	6	5	9	6	4	7	5
6	0	5	6	5	2	0	6	3	0
-6	5	-3	3	0	0	0	-8	-2	6
1	6	6	5	8	4	-3	4	1	6
5	7	-1	4	-6	-7	1	5	0	5
9	8	3	6	1	5	0	8	3	4
-9	1	3	0	0	3	1	-5	8	4
0	1	-3	-3	8	0	-4	8	2	9
8	8	6	-8	-9	4	9	5	-8	-5
2	9	-3	-5	0	-1	2	5	4	8
7	0	5	6	-8	6	0	-1	6	-3
9	-4	-2	-3	0	-8	5	5	9	7
-1	8	-5	-2	-1	-9	8	3	4	3
-3	0	1	6	2	0	-4	-9	6	-3

-1	5	8	-3	-1	-2	9	-9	6	2
0	-3	1	5	-4	-5	5	-6	-9	0
4	9	8	-3	8	7	5	7	7	-1
8	5	-9	-1	-8	-2	4	-8	-1	-8
0	2	-2	-2	2	2	-3	-3	3	3
-3	3	-3	3	-3	3	-3	-3	4	-4
-1	-7	-7	7	8	8	-1	4	-5	6
6	-7	7	-8	8	9	-9	9	4	-5
8	-6	-1	5	-4	-7	-6	-3	2	-7
-7	5	8	0	-9	0	-2	7	-5	-1
-2	-5	-2	-2	8	-8	-6	0	0	1
-7	-6	0	0	-8	-6	0	-9	-8	-4
7	-6	0	-4	9	2	4	-7	4	6
-2	0	-1	-8	1	-9	1	0	9	-1
7	0	5	0	2	4	1	4	0	-9
6	4	0	3	2	-6	-1	-9	1	-7
3	-9	5	4	2	0	8	-3	0	4
4	2	6	7	-9	5	-1	0	-4	0
-3	1	9	-7	1	-8	3	0	-5	0
4	-8	9	-4	-9	5	-9	4	0	5

5	1	0	-2	1	-9	-6	-6	0	-5
-2	-1	0	5	-3	-9	-9	-1	9	5

-4	3	-6	0	-5	5	-2	5	9	1
9	9	8	4	4	0	-3	6	-7	7

-6	9	-4	-5	1	0	-8	-5	0	1
7	8	9	0	9	6	-6	-2	-9	-3

8	-1	9	4	1	3	2	9	5	-1
-3	0	0	-1	-6	7	-5	3	3	8

4	3	4	-7	-7	6	0	-6	5	8
4	-2	6	-4	-1	-8	-2	-5	6	-8

-1	7	1	0	8	0	5	0	-3	-6
6	-2	-3	1	2	-5	-1	0	9	-8

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

$X_0 =$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$Z = 53$

ON A TROUVE UNE SOLUTION REALISABLE

$X =$

1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1

$Z = 53$. (C'est l'optimum).

BRM n°18

$LANC:

NB CONTRAINTES: 23

NB VARIABLES: 20

MIN Z=CX

C =

1	5	8	1	4	6	6	8	1	5
6	5	6	3	7	8	9	5	9	4

B =

38	13	43	4	42	34	-9	8	6	-15
6	22	-27	6	5	33	5	-11	24	-19
35	-8	-3							

A =

2	2	8	6	5	9	6	4	7	5
6	0	5	6	5	2	0	6	3	0
-6	5	-3	3	0	0	0	-8	-2	6
1	6	6	5	8	4	-3	4	1	6
5	7	-1	4	-6	-7	1	5	0	5
9	8	3	6	1	5	0	8	3	4
-9	1	3	0	0	3	1	-5	8	4
0	1	-3	-3	8	0	-4	8	2	9
8	8	6	-8	-9	4	9	5	-8	-5
2	9	-3	-5	0	-1	2	5	4	8
7	0	5	6	-8	6	0	-1	6	-3
9	-4	-2	-3	0	-8	5	5	9	7

-1	8	-5	-2	-1	-9	8	3	4	3
-3	0	1	6	2	0	-4	-9	6	-3
-1	5	8	-3	-1	-2	9	-9	6	2
0	-3	1	5	-4	-5	5	-6	-9	0
4	9	8	-3	8	7	5	7	7	-1
8	5	-9	-1	-8	-2	4	-8	-1	-8
0	2	-2	-2	2	2	-3	-3	3	3
-3	3	-3	3	-3	3	-3	-3	4	-4
-1	-7	-7	7	8	8	-1	4	-5	6
6	-7	7	-8	8	9	-9	9	4	-5
8	-6	-1	5	-4	-7	-6	-3	2	-7
-7	5	8	0	-9	0	-2	7	-5	-1
-2	-5	-2	-2	8	-8	-6	0	0	1
-7	-6	0	0	-8	-6	0	-9	-8	-4
7	-6	0	-4	9	2	4	-7	4	6
-2	0	-1	-8	1	-9	1	0	9	-1
7	0	5	0	2	4	1	4	0	-9
6	4	0	3	2	-6	-1	-9	1	-7
3	-9	5	4	2	0	8	-3	0	4
4	2	6	7	-9	5	-1	0	-4	0

-3 1 9 -7 1 -6 3 0 -5 0

4 -8 9 -4 -9 5 -9 4 0 5

5 1 0 -2 1 -9 -6 -6 0 -5

-2 -1 0 5 -3 -9 -9 -1 9 5

-4 3 -6 0 -5 5 -2 8 9 1

9 9 8 4 4 0 -3 6 -7 7

-6 9 -4 -5 1 0 -8 -5 0 1

7 8 9 0 9 6 -6 -2 -9 -3

8 -1 9 4 1 3 2 9 5 -1

-3 0 0 -1 -6 7 -5 3 3 8

4 3 4 -7 -7 6 0 -6 5 8

4 -2 6 -4 -1 -8 -2 -5 6 -8

-1 7 1 0 8 0 5 0 -3 -6

6 -2 -3 1 2 -5 -1 0 9 -8

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X0=

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

LA METHODE N A PAS PERMIS DE METTRE EN EVIDENCE UNE SOLUTION

Le problème n'admet pas de solution réalisable.

B & M
n° 19

NB CONTRAINTES: 25

NB VARIABLES: 20

MIN Z=CX

C =

3	5	7	6	4	5	7	6	5	4
1	2	6	1	1	2	1	4	5	5

B =

52	22	-5	11	-20	14	-3	13	-5	23
1	-6	24	5	32	10	-27	-1	9	19
-23	34	-2	-1	29					

A =

-4	-7	-2	5	-6	6	-7	9	-4	5
0	3	-1	0	0	-4	-3	1	5	1
4	8	6	-4	7	8	1	-9	9	-8
1	7	-9	5	1	7	2	-9	7	8
3	-9	0	-4	-1	-1	-8	1	9	5
9	2	4	4	-5	8	5	1	-4	0
0	0	9	3	2	3	7	-8	5	9
9	-9	2	1	7	8	1	2	9	6
0	-7	-9	7	4	-6	-4	-5	-2	7
-3	-4	0	-2	0	-6	-2	1	4	-8
5	9	6	8	-3	0	6	7	2	-1
4	-9	-7	0	4	4	0	-4	7	-5

-6	5	5	-8	-8	-6	-1	0	-9	4
8	2	0	0	-1	9	8	-1	2	-4
1	-3	8	8	2	5	-6	-6	1	5
-3	0	2	5	7	-5	1	1	-4	8
7	0	0	2	0	-4	-9	-2	2	-9
-1	2	1	8	0	-4	-5	9	-8	7
9	7	1	5	2	6	2	8	-3	-8
6	-8	-5	6	1	9	-5	0	4	9
-7	6	-6	0	-1	0	-8	9	4	2
2	5	-9	3	-3	6	2	-4	2	-3
-2	-5	9	-7	0	4	0	-5	5	-3
0	6	0	3	0	4	7	-9	2	-6
-2	6	-8	9	7	0	0	-4	9	-5
-9	-8	4	1	2	-4	5	1	-6	2
0	6	-7	4	0	-2	0	-7	5	8
-9	5	-7	-4	8	-6	-9	4	-7	7
2	-8	0	3	6	9	-1	5	0	-9
5	0	6	-4	2	5	7	-5	6	1
4	-2	8	-8	6	4	-2	9	6	-5
9	-8	7	3	-5	1	5	0	4	-2

9	1	-4	-1	-5	-7	1	-4	-7	0
0	3	-6	6	4	4	-9	5	4	-4
2	-2	4	7	-6	-9	-4	-1	5	7
2	3	4	5	6	-5	-8	3	3	7
-3	8	-4	-9	4	4	-3	5	7	0
0	-8	0	5	4	0	-4	7	1	7
8	0	-6	5	-7	6	0	6	8	0
-2	0	0	-3	-7	8	4	3	1	-3
-8	-7	5	-3	-1	-1	0	-3	-1	9
6	0	5	5	0	2	-9	0	1	-6
3	5	-8	-1	9	9	-2	9	3	6
-5	-5	1	7	-6	8	5	0	-5	3
6	-5	2	7	8	-5	-3	-5	5	-1
-4	-9	5	4	0	-2	-6	-7	-3	6
-8	1	-4	0	7	-2	0	-8	-2	9
0	-1	5	-4	-7	-1	-4	-5	-5	-1
2	4	-8	9	0	6	-5	8	-4	-4
6	-2	-3	-6	7	5	8	5	-6	-5

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

$X_0 =$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z = 47

ON A TROUVE UNE SOLUTION REALISABLE

X =

0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	1

Z = 47. (C'est l'optimum).

B&M n°20

NB CONTRAINTES: 27

NB VARIABLES: 20

MIN Z=CX

C=

3	5	7	6	4	5	7	6	5	4
1	2	6	1	1	2	1	4	5	5

B=

52	22	-5	11	-20	14	-3	13	-5	23
1	-6	24	5	32	10	-27	-1	9	19
-23	34	-2	-1	29	-1	25			

A=

-4	-7	-2	5	-6	6	-7	9	-4	5
0	3	-1	0	0	-4	-3	1	5	1
4	8	6	-4	7	8	1	-9	9	-8
1	7	-9	5	1	7	2	-9	7	8
3	-9	0	-4	-1	-1	-8	1	9	5
9	2	4	4	-5	8	5	1	-4	0
0	0	9	3	2	3	7	-8	5	9
9	-9	2	1	7	8	1	2	9	6
0	-7	-9	7	4	-6	-4	-5	-2	7
-3	-4	0	-2	0	-6	-2	1	4	-8
5	9	6	8	-3	0	6	7	2	-1
4	-9	-7	0	4	4	0	-4	7	-5

-6	5	5	-8	-8	-6	-1	0	-9	4
8	2	0	0	-1	9	8	-1	2	-4
1	-3	8	8	2	5	-6	-6	1	5
-3	0	2	5	7	-5	1	1	-4	8
7	0	0	2	0	-4	-9	-2	2	-9
-1	2	1	8	0	-4	-5	9	-8	7
9	7	1	5	2	6	2	8	-3	-8
6	-8	-5	6	1	9	-5	0	4	9
-7	6	-6	0	-1	0	-8	9	4	2
2	5	-9	3	-3	6	2	-4	2	-3
-2	-5	9	-7	0	4	0	-5	5	-3
0	6	0	3	0	4	7	-9	2	-6
-2	6	-8	9	7	0	0	-4	9	-5
-9	-8	4	1	2	-4	5	1	-6	2
0	6	-7	4	0	-2	0	-7	5	8
-9	5	-7	-4	8	-6	-9	4	-7	7
2	-8	0	3	6	9	-1	5	0	-9
5	0	6	-4	2	5	7	-5	6	1
4	-2	8	-8	6	4	-2	9	6	-5
9	-8	7	3	-5	1	5	0	4	-2

9	1	-4	-1	-5	-7	1	-4	-7	0
0	3	-6	6	4	4	-9	5	4	-4
2	-2	4	7	-6	-9	-4	-1	5	7
2	3	4	5	6	-5	-8	3	3	7
-3	8	-4	-9	4	4	-3	5	7	0
0	-8	0	5	4	0	-4	7	1	7
8	0	-6	5	-7	6	0	6	8	0
-2	0	0	-3	-7	8	4	3	1	-3
-8	-7	5	-3	-1	-1	0	-3	-1	9
6	0	5	5	0	2	-9	0	1	-6
3	5	-8	-1	9	9	-2	9	3	6
-5	-5	1	7	-6	8	5	0	-5	3
6	-5	2	7	8	-5	-3	-5	5	-1
-4	-9	5	4	0	-2	-6	-7	-3	6
-8	1	-4	0	7	-2	0	-8	-2	9
0	-1	5	-4	-7	-1	-4	-5	-5	-1
2	4	-8	9	0	6	-5	8	-4	-4
6	-2	-3	-6	7	5	8	5	-6	-5
-4	-8	-1	3	5	-7	9	7	-3	5
-6	9	2	6	9	7	1	7	5	0
2	-6	2	1	-1	-2	-5	-5	0	-1
9	2	1	6	2	4	7	-1	0	6

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X0=

0	1	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	1

LA METHODE N A PAS PERMIS DE METTRE EN EVIDENCE UNE SOLUTION

B&M n°21

$LANC;

NB CONTRAINTES: 20

NB VARIABLES: 23

MIN Z=CX

C =

3	2	5	8	6	9	7	4	5	6
3	2	4	5	8	7	3	5	2	4
3	2	5							

B =

52	-12	-3	29	17	36	-1	-4	2	10
16	-1	-2	12	17	-13	7	-14	-19	4

A =

2	6	1	0	3	3	2	6	2	2
5	3	3	7	9	4	2	2	3	4
9	9	9							
-6	5	-8	-3	0	-1	-3	-8	-9	3
-8	6	-3	-8	-6	7	6	-2	3	-7
4	5	5							
5	-6	-5	-3	-8	8	-9	-2	0	9
-1	7	9	-9	4	2	-2	-9	0	-3
3	0	-4							
-9	-5	0	9	-1	8	-3	9	9	3
0	-7	5	4	-9	-1	-9	7	-3	-7
4	1	-1							
8	-7	4	5	9	-1	7	1	-3	2
0	-3	-5	9	7	2	5	4	-7	-9
3	2	-6							
7	5	2	0	6	6	7	6	-7	-7
-1	-8	-3	9	1	-6	6	6	1	1

6	-3	5							
-1	3	3	4	1	0	4	-1	-6	0
6	0	1	-5	-4	-1	-9	-7	2	2
1	-3	7							
-1	2	-6	-9	0	7	-9	9	6	-4
5	3	1	-3	-9	-1	-6	-8	-9	-9
6	5	0							
4	-6	-7	-2	-2	0	-6	-6	7	-4
0	2	8	0	4	-4	3	2	-3	0
4	3	7							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	2
2	2	-2							
-1	3	3	-4	5	5	7	8	-8	0
0	-1	-2	4	-6	6	7	-8	8	0
-1	-2	-4							
8	0	5	0	2	6	7	1	-1	1
4	-5	-7	-8	2	-8	-5	-5	9	0
-1	-9	-3							
-2	-7	-8	6	-2	-5	-9	-2	2	-8
1	-3	5	6	-8	1	1	-9	8	3
0	-8	-3							
7	9	-7	-5	1	-5	-5	4	9	3
-4	0	0	7	-7	-9	0	9	-3	0
-9	0	9							
7	1	4	-3	0	6	-3	7	8	1
-6	6	8	-3	8	-5	1	8	4	-8
-3	8	-1							
3	6	1	-3	-5	6	-9	6	3	-9
-6	-3	-6	-6	6	2	-7	-6	0	-7

-6 -6 5

-3 -1 0 -6 1 -2 0 3 -3 3

6 -1 0 6 6 8 -2 -4 1 0

0 6 1

5 -9 -5 0 0 -6 7 1 -1 7

2 -6 2 -2 -4 -5 4 5 -1 -8

-2 -2 -4

-4 4 -8 -5 -7 -7 -4 5 0 -8

9 9 0 8 -8 -4 -8 7 4 -6

9 5 -7

-6 8 2 0 -8 -7 -6 0 9 4

-8 0 -3 3 0 4 -6 -2 3 5

3 -4 -9

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X =

0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

1 0 1 0 1 0 1 0 1 0

1 0 1

Z_1 = 50

Z_2 = 42

Z_3 = 38

Z_4 = 37

APRES AVOIR CONSTRUIT 4 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X =

0 0 1 1 1 0 0 1 1 0

0 1 0 0 0 0 1 0 0 1

0 0 0

Z = 37 . (La valeur optimale de z est 35).

B&M n° 22

SLANC;

NB CONTRAINTES: 20

NB VARIABLES: 25

MIN Z=CX

C=

3	2	5	8	6	9	7	4	5	6
3	2	4	5	8	7	3	5	2	4
3	2	5	6	6					

B=

60	-15	-4	32	23	41	-4	4	10	8
9	-1	-4	12	22	-8	16	-14	-25	1

A=

2	6	1	0	3	3	2	6	2	2
5	3	3	7	9	4	2	2	3	4
9	9	9	2	8					
-6	5	-8	-3	0	-1	-3	-8	-9	3
-8	6	-3	-8	-6	7	6	-2	3	-7
4	5	5	5	-3					
5	-6	-5	-3	-8	8	-9	-2	0	9
-1	7	9	-9	4	2	-2	-9	0	-3
3	0	-4	7	-1					
-9	-5	0	9	-1	8	-3	9	9	3
0	-7	5	4	-9	-1	-9	7	-3	-7
4	1	-1	1	3					
8	-7	4	5	9	-1	7	1	-3	2
0	-3	-5	9	7	2	5	4	-7	-9
3	2	-6	8	6					
7	5	2	0	6	6	7	6	-7	-7
-1	-8	-3	9	1	-6	6	6	1	1

6	-3	5	0	5					
-1	3	3	4	1	0	4	-1	-6	0
8	0	1	-5	-4	-1	-9	-7	2	2
1	-3	7	8	-5					
-1	2	-6	-9	0	7	-9	9	6	-4
5	3	1	-3	-9	-1	-6	-8	-9	-9
8	5	0	5	8					
4	-6	-7	-2	-2	0	-6	-6	7	-4
0	2	8	0	4	-4	3	2	-3	0
4	3	7	9	8					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	2
2	2	-2	2	-2					
-1	3	3	-4	5	5	7	8	-8	0
0	-1	-2	4	-6	6	7	-8	8	0
-1	-2	-4	-7	-7					
8	0	5	0	2	6	7	1	-1	1
4	-5	-7	-8	2	-8	-5	-5	9	0
-1	-9	-3	-6	-1					
-2	-7	-8	6	-2	-5	-9	-2	2	-8
1	-3	5	6	-8	1	1	-9	8	3
0	-8	-3	-5	-2					
7	9	-7	-5	1	-5	-5	4	9	3
-4	0	0	7	-7	-9	0	9	-3	0
-9	0	9	-6	0					
7	1	4	-3	0	6	-3	7	8	1
-6	6	8	-3	8	-5	1	8	4	-8
-3	8	-1	0	5					
3	6	1	-3	-5	6	-9	6	3	-9
-6	-3	-6	-6	6	2	-7	-6	0	-7

```
-4   -6    5   -9    5
-3   -1    6   -6    1   -2    0    3   -3    3
 6   -1    0    6    6    8   -2   -4    1    0
 0    6    1    1    9
 5   -9   -5    0    0   -6    7    1   -1    7
 2   -6    2   -2   -4   -5    4    5   -1   -8
-2   -2   -1    1    0
-4    4   -8   -5   -7   -7   -4    5    0   -8
 9    9    0    8   -8   -4   -8    7    4   -6
 9    5   -7    3   -6
-6    8    2    0   -8   -7   -6    0    9    4
-8    0   -3    3    0    4   -6   -2    3    5
 3   -4   -9    9   -4
```

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X =

```
 1    1    1    1    1    1    1    1    1    1
 1    1    1    1    1    1    1    1    1    1
 1    1    1    1    1
```

$Z_1 =$ 75

$Z_2 =$ 73

$Z_3 =$ 64

$Z_4 =$ 47

$Z_5 =$ 45

$Z_6 =$ 37

$Z_7 =$ 34

$Z_8 =$ 33

APRES AVOIR CONSTRUIT 8 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X =

```
 0    0    1    0    1    0    0    0    1    0
 0    0    0    0    1    0    1    0    0    1
 0    1    0    0    0
```

$Z =$ 33. (C'est l'optimum).

B&M n°23

NB CONTRAINTES: 20

NB VARIABLES: 27

MIN Z=CX

C=

3	2	5	8	6	9	7	4	5	6
3	2	4	5	8	7	3	5	2	4
3	2	5	6	8	1	1			

B=

65	-15	-10	32	14	33	-5	3	18	10
17	-5	4	21	24	-6	17	-13	-30	1

A=

2	6	1	0	3	3	2	6	2	2
5	3	3	7	9	4	2	2	3	4
9	9	9	2	8	6	5			
-6	5	-8	-3	0	-1	-3	-8	-9	3
-8	6	-3	-8	-6	7	6	-2	3	-7
4	5	5	5	-3	3	0			
5	-6	-5	-3	-8	8	-9	-2	0	9
-1	7	9	-9	4	2	-2	-9	0	-3
3	0	-4	7	-1	4	-6			
-9	-5	0	9	-1	8	-3	9	9	3
0	-7	5	4	-9	-1	-9	7	-3	-7
4	1	-1	1	3	0	0			
8	-7	4	5	9	-1	7	1	-3	2
0	-3	-5	9	7	2	5	4	-7	-9
3	2	-6	8	6	-8	-9			
7	5	2	0	6	6	7	6	-7	-7
-1	-8	-3	9	1	-6	6	6	1	1

6	-3	5	0	5	6	-8			
-1	3	3	4	1	0	4	-1	-6	0
8	0	1	-5	-4	-1	-9	-7	2	2
1	-3	7	8	-5	-2	-1			
-1	2	-6	-9	0	7	-9	9	6	-4
5	3	1	-3	-9	-1	-6	-8	-9	-9
8	5	0	5	8	-3	-1			
4	-6	-7	-2	-2	0	-6	-6	7	-4
0	2	8	0	4	-4	3	2	-3	0
4	3	7	9	8	-3	8			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	2
2	2	-2	2	-2	-2	2			
-1	3	3	-4	5	5	7	8	-8	0
0	-1	-2	4	-6	6	7	-8	8	0
-1	-2	-4	-7	-7	7	8			
8	0	5	0	2	6	7	1	-1	1
4	-5	-7	-8	2	-8	-5	-5	9	0
-1	-9	-3	-6	-1	5	-4			
-2	-7	-8	6	-2	-5	-9	-2	2	-8
1	-3	5	6	-8	1	1	-9	8	3
0	-8	-3	-5	-2	-2	8			
7	9	-7	-5	1	-5	-5	4	9	3
-4	0	0	7	-7	-9	0	9	-3	0
-9	0	9	-6	0	-4	9			
7	1	4	-3	0	6	-3	7	8	1
-6	6	8	-3	8	-5	1	8	4	-8
-3	8	-1	0	5	0	2			
3	6	1	-3	-5	6	-9	6	3	-9
-6	-3	-6	-6	6	2	-7	-6	0	-7

-4	-6	5	-9	5	4	2			
-3	-1	6	-6	1	-2	0	3	-3	3
6	-1	0	6	6	8	-2	-4	1	0
0	6	1	1	9	-7	1			
5	9	-9	0	0	-6	7	1	-1	7
2	-6	2	-2	-4	-5	4	5	-1	-8
-2	-2	-4	1	0	-2	1			
-4	4	-8	-5	-7	-7	-4	5	0	-8
9	9	0	8	-8	-4	-8	7	4	-6
9	5	-7	3	-6	0	-5			
-6	8	2	0	-8	-7	-6	0	9	4
-8	0	-3	3	0	4	-6	-2	3	5
3	-4	-9	9	-4	-5	1			

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X_0 =

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0			

$Z_1 =$ 60

$Z_2 =$ 54

$Z_3 =$ 45

$Z_4 =$ 41

$Z_5 =$ 34

APRES AVOIR CONSTRUIT 5 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X =

0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0			

Z = 34 . (C'est l'optimum).

B&M n°24

NB CONTRAINTES: 20

NB VARIABLES: 28

MIN Z=CX

C =

3	2	5	8	6	9	7	4	5	6
3	2	4	5	2	7	3	5	2	4
3	2	5	6	8	1	1	4		

B =

74	-15	-13	35	18	39	-14	1	25	12
25	-12	-4	23	28	-6	9	-22	-25	1

A =

2	6	1	0	3	3	2	6	2	2
5	3	3	7	9	4	2	2	3	4
9	9	9	2	8	6	5	9		
-6	5	-8	-3	0	-1	-3	-8	-9	3
-8	6	-3	-8	-6	7	6	-2	3	-7
4	5	5	5	-3	3	0	0		
5	-6	-5	-3	-8	8	-9	-2	0	9
-1	7	9	-9	4	2	-2	-9	0	-3
3	0	-4	7	-1	4	-6	-7		
-9	-5	0	9	-1	8	-3	9	9	3
0	-7	5	4	-9	-1	-9	7	-3	-7
4	1	-1	1	3	0	0	3		
8	-7	4	5	9	-1	7	1	-3	2
0	-3	-5	9	7	2	5	4	-7	-9
3	2	-6	8	6	-8	-9	4		
7	5	2	0	6	6	7	6	-7	-7
-1	-8	-3	9	1	-6	6	6	1	1

6	-3	5	0	5	6	-8	6		
-1	3	3	4	1	0	4	-1	-6	0
8	0	1	-5	-4	-1	-9	-7	2	2
1	-3	7	8	-5	-2	-1	-9		
-1	2	-6	-9	0	7	-9	9	6	-4
5	3	1	-3	-9	-1	-6	-8	-9	-9
8	5	0	5	8	-3	-1	-2		
4	-6	-7	-2	-2	0	-6	-6	7	-4
0	2	8	0	4	-4	3	2	-3	0
4	3	7	9	8	-3	8	7		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	2
2	2	-2	2	-2	-2	2	2		
-1	3	3	-4	5	5	7	8	-8	0
0	-1	-2	4	-6	6	7	-8	8	0
-1	-2	-4	-7	-7	7	8	8		
8	0	5	0	2	6	7	1	-1	1
4	-5	-7	-8	2	-8	-5	-5	9	0
-1	-9	-3	-6	-1	5	-4	-7		
-2	-7	-8	6	-2	-5	-9	-2	2	-8
1	-3	5	6	-8	1	1	-9	8	3
0	-8	-3	-5	-2	-2	8	-8		
7	9	-7	-5	1	-5	-5	4	9	3
-4	0	0	7	-7	-9	0	9	-3	0
-9	0	9	-6	0	-4	9	2		
7	1	4	-3	0	6	-3	7	8	1
-6	6	8	-3	8	-5	1	8	4	-8
-3	8	-1	0	5	0	2	4		
3	6	1	-3	-5	6	-9	6	3	-9
-6	-3	-6	-6	6	2	-7	-6	0	-7

-4	-6	5	-9	5	4	2	0		
-3	-1	6	-6	1	-2	0	3	-3	3
6	-1	0	6	6	8	-2	-4	1	0
0	6	1	1	9	-7	1	-8		
5	-9	-5	0	0	-6	7	1	-1	7
2	-6	2	-2	-4	-5	4	5	-1	-8
-2	-2	-4	1	0	-2	1	-9		
-4	4	-8	-5	-7	-7	-4	5	0	-8
9	9	0	8	-8	-4	-8	7	4	-6
9	5	-7	3	-6	0	-5	5		
-6	8	2	0	-8	-7	-6	0	9	4
-8	0	-3	3	0	4	-6	-2	3	5
3	-4	-9	9	-4	-5	1	0		

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X_0 =

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0		

Z_1 = 73

Z_2 = 66

Z_3 = 56

Z_4 = 46

Z_5 = 44

Z_6 = 39

APRES AVOIR CONSTRUIT 6 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X =

0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1		

Z = 39. (La valeur optimale de z est 38).

B & M
n°25

NB CONTRAINTES: 20

NB VARIABLES: 30

MIN Z=CX

C=

3	2	5	8	6	9	7	4	5	6
3	2	4	5	8	7	3	5	2	4
3	2	5	6	8	1	1	4	5	3

B=

80	-15	-12	36	27	39	-6	10	30	9
24	-18	-10	27	29	2	12	-28	-27	-7

A=

2	6	1	0	3	3	2	6	2	2
5	3	3	7	9	4	2	2	3	4
9	9	9	2	8	6	5	9	6	4
-6	5	-8	3	0	-1	-3	-8	-9	3
-8	6	-3	-8	-6	7	6	-2	3	-7
4	5	5	5	-3	3	0	0	0	-8
5	-6	-5	-3	-8	8	-9	-2	0	9
-1	7	9	-9	4	2	-2	-9	0	-3
3	0	-4	7	-1	4	-6	-7	1	5
-9	-5	0	9	-1	8	-3	9	9	3
0	-7	5	4	-9	-1	-9	7	-3	-7
4	1	-1	1	3	0	0	3	1	-5
8	-7	4	5	9	-1	7	1	-3	2
0	-3	-5	9	7	2	5	4	-7	-9
3	2	-6	8	6	-8	-9	4	9	5

7	5	2	0	6	6	7	6	-7	-7
-1	-8	-3	9	1	-6	6	6	1	1
6	-3	5	0	5	6	-8	6	0	-1

-1	3	3	4	1	0	4	-1	-6	0
8	0	1	-5	-4	-1	-9	-7	2	2
1	-3	7	8	-5	-2	-1	-9	8	3

-1	2	-6	-9	0	7	-9	9	6	-4
5	3	1	-3	-9	-1	-6	-8	-9	-9
8	5	0	5	8	-3	-1	-2	9	-9

4	-6	-7	-2	-2	0	-6	-6	7	-4
0	2	8	0	4	-4	3	2	-3	0
4	3	7	9	8	-3	8	7	5	7

0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	2
2	2	-2	2	-2	-2	2	2	-3	-3

-1	3	3	-4	5	5	7	8	-8	0
0	-1	-2	4	-6	6	7	-8	8	0
-1	-2	-4	-7	-7	7	8	8	-1	4

8	0	5	0	2	6	7	1	-1	1
4	-5	-7	-8	2	-8	-5	-5	9	0
-1	-9	-3	-6	-1	5	-4	-7	-6	-3

-2	-7	-8	6	-2	-5	-9	-2	2	-8
1	-3	5	6	-8	1	1	-9	8	3
0	-8	-3	-5	-2	-2	8	-8	-6	0

7	9	-7	-5	1	-5	-5	4	9	3
-4	0	0	7	-7	-9	0	9	-3	0
-9	0	9	-6	0	-4	9	2	4	-7

7	1	4	-3	0	6	-3	7	8	1
-6	6	8	-3	8	-5	1	8	4	-8
-3	8	-1	0	5	0	2	4	1	4

3	6	1	-3	-5	6	-9	6	3	-9
-6	-3	-6	-6	6	2	-7	-6	0	-7
-4	-6	5	-9	5	4	2	0	8	-3

-3	-1	6	-6	1	-2	0	3	-3	3
6	-1	0	6	6	8	-2	-4	1	0
0	6	1	1	9	-7	1	-8	3	0

5	-9	-5	0	0	-6	7	1	-1	7
2	-6	2	-2	-4	-5	4	5	-1	-8
-2	-2	-4	1	0	-2	1	-9	-6	-6

-4	4	-8	-5	-7	-7	4	5	0	-8
9	9	0	8	-8	-4	-8	7	4	-6
9	5	-7	3	-6	0	-5	5	-2	8

-6	8	2	0	-8	-7	-6	0	9	4
-8	0	-3	3	0	4	-6	-2	3	5
3	-4	-8	9	-4	-5	1	0	-8	-5

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0

APRES AVOIR CONSTRUIT 6 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0

Z= **47.** (Problème non résolu par Bouvier et Messoumian).

IBM. n°4

NB CONTRAINTES: 15

NB VARIABLES: 30

MIN Z=CX

C=

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

B=

-6	-6	-6	-6	-6	-6	-5	-5	-5	-5
-4	-4	-4	-4	-3					

A=

-1	-2	0	0	0	0	0	0	-1	-2
-1	-2	-1	-2	0	0	0	0	0	0
-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2

0	0	-1	-2	0	0	0	0	-1	-2
0	0	0	0	-1	-2	-1	-2	0	0
-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2

0	0	0	0	-1	-2	0	0	0	0
-1	-2	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2
-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2	-1	-2

0	0	0	0	0	0	-1	-2	0	0
0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2
0	0	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2

-1	-2	-1	-2	0	0	0	0	0	0

-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0
0	0	0	0	-1	-2	-1	-2	0	0

-1	-2	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2
0	0	-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2
0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	0	0

-1	-2	0	0	0	0	-1	-2	-1	-2
-1	-2	0	0	0	0	-1	-2	-1	-2
-1	-2	0	0	0	0	-1	-2	0	0

0	0	-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2
-1	-2	0	0	0	0	-1	-2	-1	-2
0	0	-1	-2	-1	-2	0	0	0	0

0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2
0	0	-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2
-1	-2	0	0	-1	-2	0	0	0	0

0	0	0	0	-1	-2	-1	-2	0	0
-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0
-1	-2	-1	-2	0	0	0	0	0	0

-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0	0	0
0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2
-1	-2	0	0	0	0	0	0	-1	-2

-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2	0	0
-1	-2	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2
0	0	-1	-2	0	0	0	0	-1	-2

-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2	-1	-2
0	0	0	0	-1	-2	-1	-2	0	0
0	0	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2

0	0	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2
-1	-2	-1	-2	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	-2	-1	-2

-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

APRES AVOIR CONSTRUIT 21 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Z= 10. (C'est l'optimum).

IBM n°5

NB CONTRAINTES: 15

NB VARIABLES: 30

MIN Z=CX

C=

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

B=

-8	-8	-8	-8	-7	-7	-7	-7	-7	-7
-6	-6	-6	-6	-5					

A=

-1	-2	0	0	0	0	0	0	-1	-2
-1	-2	-1	-2	0	0	0	0	0	0
-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2

0	0	-1	-2	0	0	0	0	-1	-2
0	0	0	0	-1	-2	-1	-2	0	0
-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2

0	0	0	0	-1	-2	0	0	0	0
-1	-2	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2
-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2	-1	-2

0	0	0	0	0	0	-1	-2	0	0
0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2
0	0	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2

-1	-2	-1	-2	0	0	0	0	0	0

-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0
0	0	0	0	-1	-2	-1	-2	0	0

-1	-2	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2
0	0	-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2
0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	0	0

-1	-2	0	0	0	0	-1	-2	-1	-2
-1	-2	0	0	0	0	-1	-2	-1	-2
-1	-2	0	0	0	0	-1	-2	0	0

0	0	-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2
-1	-2	0	0	0	0	-1	-2	-1	-2
0	0	-1	-2	-1	-2	0	0	0	0

0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2
0	0	-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2
-1	-2	0	0	-1	-2	0	0	0	0

0	0	0	0	-1	-2	-1	-2	0	0
-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0
-1	-2	-1	-2	0	0	0	0	0	0

-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0	0	0
0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2
-1	-2	0	0	0	0	0	0	-1	-2

-1	-2	-1	-2	0	0	-1	-2	0	0
-1	-2	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2
0	0	-1	-2	0	0	0	0	-1	-2

-1	-2	0	0	-1	-2	-1	-2	-1	-2
0	0	0	0	-1	-2	-1	-2	0	0
0	0	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2

0	0	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2
-1	-2	-1	-2	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	-2	-1	-2

-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	0

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1

APRES AVOIR CONSTRUIT 4 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1

Z= 15 . (C'est l'optimum).

```
NB CONTRAINTES:        31

NB VARIABLES:        31

MIN Z=CX

C=

    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1
    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1
    1    1    1    1    1    1    1    1    1    1
    1

B=

  -10  -10   -9  -10   -9   -9   -8  -10   -9   -9
   -8   -9   -8   -8   -7  -10   -9   -9   -8   -9
   -8   -8   -7   -9   -8   -8   -7   -8   -7   -7
   -6

A=

   -1    0   -1    0   -1    0   -1    0   -1    0
   -1    0   -1    0   -1    0   -1    0   -1    0
   -1    0   -1    0   -1    0   -1    0   -1    0
   -1
    0   -1   -1    0    0   -1   -1    0    0   -1
   -1    0    0   -1   -1    0    0   -1   -1    0
    0   -1   -1    0    0   -1   -1    0    0   -1
   -1
   -1   -1    0    0   -1   -1    0    0   -1   -1
    0    0   -1   -1    0    0   -1   -1    0    0
   -1   -1    0    0   -1   -1    0    0   -1   -1
    0
    0    0    0   -1   -1   -1   -1    0    0    0
    0   -1   -1   -1   -1    0    0    0    0   -1
   -1   -1   -1    0    0    0    0   -1   -1   -1
```

-1

-1 0 -1 -1 0 -1 0 0 -1 0

-1 -1 0 -1 0 0 -1 0 -1 -1

0 -1 0 0 -1 0 -1 -1 0 -1

0

0 -1 -1 -1 -1 0 0 0 0 -1

-1 -1 -1 0 0 0 0 -1 -1 -1

-1 0 0 0 0 -1 -1 -1 -1 0

0

-1 -1 0 -1 0 0 -1 0 -1 -1

0 -1 0 0 -1 0 -1 -1 0 -1

0 0 -1 0 -1 -1 0 -1 0 0

-1

0 0 0 0 0 0 0 -1 -1 -1

-1 -1 -1 -1 -1 0 0 0 0 0

0 0 0 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1

-1

-1 0 -1 0 -1 0 -1 -1 0 -1

0 -1 0 -1 0 0 -1 0 -1 0

-1 0 -1 -1 0 -1 0 -1 0 -1

0

0 -1 -1 0 0 -1 -1 -1 -1 0

0 -1 -1 0 0 0 0 -1 -1 0

0 -1 -1 -1 -1 0 0 -1 -1 0

0

-1 -1 0 0 -1 -1 0 -1 0 0

-1 -1 0 0 -1 0 -1 -1 0 0

-1 -1 0 -1 0 0 -1 -1 0 0

-1

0 0 0 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1

-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0
0									
-1	0	-1	-1	0	-1	0	-1	0	-1
0	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	-1
0	-1	0	-1	-1	-1	0	0	-1	0
-1									
0	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	0
0	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	-1
-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1
-1									
-1	-1	0	-1	0	0	-1	-1	0	0
-1	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	-1
0	0	-1	-1	0	0	-1	0	-1	-1
0									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1									
-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0
-1	0	-1	0	-1	-1	0	-1	0	-1
0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1
0									
0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1
-1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	-1
-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0
0									
-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1
0	0	-1	-1	0	-1	0	0	-1	-1
0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0

-1									
0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0
0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0
0									
-1	0	-1	-1	0	-1	0	0	-1	0
-1	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	0
-1	0	-1	-1	0	-1	0	0	-1	0
-1									
0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1
-1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	0
0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1
-1									
-1	-1	0	-1	0	0	-1	0	-1	-1
0	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	0
-1	-1	0	-1	0	0	-1	0	-1	-1
0									
0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
0									
-1	0	-1	0	-1	0	-1	-1	0	-1
0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1
0	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	0
-1									
0	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	0
0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1
-1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	-1
-1									
-1	-1	0	0	-1	-1	0	-1	0	0
-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1
0	0	-1	0	-1	-1	0	0	-1	-1
0									

```
 0    0    0   -1   -1   -1   -1   -1   -1   -1
-1    0    0    0    0   -1   -1   -1   -1    0
 0    0    0    0    0    0    0   -1   -1   -1
-1
-1    0   -1   -1   -1   -1    0   -1    0   -1
 0    0   -1    0   -1   -1    0   -1    0    0
-1    0   -1    0   -1    0   -1   -1    0   -1
 0
 0   -1   -1   -1    0    0    0   -1   -1    0
 0    0    0   -1   -1   -1   -1    0    0    0
 0   -1   -1    0    0   -1   -1   -1   -1    0
 0
-1   -1   -1    0    0    0   -1   -1    0    0
-1    0   -1   -1    0   -1    0    0   -1    0
-1   -1    0    0   -1   -1    0   -1    0    0
-1
SOLUTION INITIALE POUR RELAX
XO=
     0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
     0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
     0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
     0
Z=        23
Z=        22
Z=        21
Z=        20
Z=        19
APRES AVOIR CONSTRUIT      5  SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE
X=
     1    0    0    0    0    0    1    0    1    1
     1    1    1    1    1    0    1    1    1    1
     1    1    1    0    1    0    1    0    0    0
     1
Z=        19
```

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1									

Z= 31

Z= 30

Z= 29

Z= 28

Z= 27

Z= 26

Z= 25

Z= 24

Z= 23

Z= 22

Z= 21

Z= 20

Z= 19

Z= 18

APRES AVOIR CONSTRUIT 14 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1									

Z= 18 . (C'est l'optimum).

Petersen n° 1

NB CONTRAINTES: 10

NB VARIABLES: 6

MIN Z=CX

C=

-100 -600-1200-2400 -500-2000

B=

80	96	20	36	44	48	10	18	22	24

A=

8	12	13	64	22	41
8	12	13	75	22	41
3	6	4	18	6	4
5	10	8	32	6	12
5	13	8	42	6	20
5	13	8	48	6	20
0	0	0	0	8	0
3	0	4	0	8	0
3	2	4	0	8	4
3	2	4	8	8	4

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X0=

0 1 0 0 0 0

VALEUR INITIALE DE LA FONCTION ECONOMIQUE -600

APRES AVOIR CONSTRUIT 3 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0 1 1 0 0 1

Z= -3800 .(C'est l'optimum).

Petersen nº2

NB CONTRAINTES: 10

NB VARIABLES: 10

MIN Z=CX

C=

-6001 -3105 -18000 -38500 -186 -1987 -8820 -4025 -3270

B=

450	540	200	360	440	480	200	360	440	480

A=

20	5	100	200	2	4	60	150	80	40
20	7	130	280	2	8	110	210	100	40
60	3	50	100	4	2	20	40	6	12
60	8	70	200	4	6	40	70	16	20
60	13	70	250	4	10	60	90	20	24
60	13	70	280	4	10	70	105	22	28
5	2	20	100	2	5	10	60	0	0
45	14	80	180	6	10	40	100	20	0
55	14	80	200	6	10	50	140	30	40
65	14	80	220	6	10	50	180	30	50

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0 1 0 0 0 0 0 0 0 0

VALEUR INITIALE DE LA FONCTION ECONOMIQUE -3105

APRES AVOIR CONSTRUIT 5 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0 1 0 1 1 0 0 1 0 1

Z= -87061 .(C'est l'optimum).

Petersen
n° 3

NB CONTRAINTES: 10

NB VARIABLES: 15

MIN Z=CX

C=

-100	-220	-90	-400	-300	-400	-205	-120	-160	-580
-400	-140	-100	-1300	-650					

B=

550	700	130	240	280	310	110	205	260	275

A=

8	24	13	80	70	80	45	15	28	90
130	32	20	120	40					
8	44	13	100	100	90	75	25	28	120
130	32	40	160	40					
3	6	4	20	20	30	8	3	12	14
40	6	3	20	5					
5	9	6	40	30	40	16	5	18	24
60	16	11	30	25					
5	11	7	50	40	40	19	7	18	29
70	21	17	30	25					
5	11	7	55	40	40	21	9	18	29
70	21	17	35	25					
0	0	1	10	4	10	0	6	0	6
32	3	0	70	10					
3	4	5	20	14	20	6	12	10	18
42	9	12	100	20					
3	6	9	30	29	20	12	12	10	30
42	18	18	110	20					
3	8	9	35	29	20	16	15	10	30
42	20	18	120	20					

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					

VALEUR INITIALE DE LA FONCTION ECONOMIQUE -220

APRES AVOIR CONSTRUIT 10 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1					

Z= -4015. (C'est l'optimum).

Petersen
nº 4

NB CONTRAINTES: 10

NB VARIABLES: 20

MIN Z=CX

C=

-100 -220 -90 -400 -300 -400 -205 -120 -160 -580
-400 -140 -100 -1300 -650 -320 -480 -80 -60 -2550

B=

550 700 130 240 280 310 110 205 260 275

A=

8	24	13	80	70	80	45	15	28	90
130	32	20	120	40	30	20	6	3	180
8	44	13	100	100	90	75	25	28	120
130	32	40	160	40	60	55	10	6	240
3	6	4	20	20	30	8	3	12	14
40	6	3	20	5	0	5	3	0	20
5	9	6	40	30	40	16	5	18	24
60	16	11	30	25	10	13	5	1	80
5	11	7	50	40	40	19	7	18	29
70	21	17	30	25	15	25	5	1	100
5	11	7	55	40	40	21	9	18	29
70	21	17	35	25	20	25	5	2	110
0	0	1	10	4	10	0	6	0	6
32	3	0	70	10	0	0	0	0	0

3	4	5	20	14	20	6	12	10	18
42	9	12	100	20	5	6	4	1	20

3	6	9	30	29	20	12	12	10	30
42	18	18	110	20	15	18	7	2	40

3	8	9	35	29	20	16	15	10	30
42	20	18	120	20	20	22	7	3	50

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z= 0

Z= -2550

Z= -3850

Z= -4500

Z= -5080

Z= -5560

Z= -5880

Z= -5980

Z= -6070

Z= -6120

APRES AVOIR CONSTRUIT 10 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Z= -6120. (C'est l'optimum).

Petersen n° 5

NB CONTRAINTES: 10

NB VARIABLES: 28

MIN Z=CX

C=

-100	-220	-90	-400	-300	-400	-205	-120	-160	-580
-400	-140	-100	-1300	-650	-320	-480	-80	-60	-2550
-3100	-1100	-950	-450	-300	-220	-200	-520		

B=

930	1210	272	462	532	572	240	400	470	490

A=

8	24	13	80	70	80	45	15	28	90
130	32	20	120	40	30	20	6	3	180
220	50	30	50	12	5	8	18		
8	44	13	100	100	90	75	25	28	120
130	32	40	160	40	60	55	10	6	240
290	80	90	70	27	17	8	28		
3	6	4	20	20	30	8	3	12	14
40	6	3	20	5	0	5	3	0	20
30	40	10	0	5	0	0	10		
5	9	6	40	30	40	16	5	18	24
60	16	11	30	25	10	13	5	1	80
60	50	20	30	10	5	3	20		
5	11	7	50	40	40	19	7	18	29
70	21	17	30	25	15	25	5	1	100
70	55	20	50	15	15	6	20		
5	11	7	55	40	40	21	9	18	29
70	21	17	35	25	20	25	5	2	110
70	55	20	50	20	15	6	20		

0	0	1	10	4	10	0	6	0	6
32	3	0	70	10	0	0	0	0	0
30	10	0	10	10	5	0	10		
3	4	5	20	14	20	6	12	10	18
42	9	12	100	20	5	6	4	1	20
50	30	5	20	20	10	10	20		
3	6	9	30	29	20	12	12	10	30
42	18	18	110	20	15	18	7	2	40
60	50	25	25	25	15	10	28		
3	8	9	35	29	20	16	15	10	30
42	20	18	120	20	20	22	7	3	50
60	55	25	30	25	15	10	28		

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1		

APRES AVOIR CONSTRUIT 20 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1		

Z= -12400 . (C'est l'optimum).

Petersen nº 6

NB CONTRAINTES: 5

NB VARIABLES: 39

MIN Z=CX

C=

-560	-1125	-300	-620	-2100	-431	-68	-328	-47	-122
-322	-196	-41	-25	-425	-4260	-416	-115	-82	-22
-631	-132	-420	-86	-42	-103	-215	-81	-91	-26
-49	-420	-316	-72	-71	-49	-108	-116	-90	

B=

600	500	500	500	600

A=

40	91	10	30	160	20	3	12	3	18
9	25	1	1	10	280	10	8	1	1
49	8	21	6	1	5	10	8	2	1
0	10	42	6	4	8	0	10	1	
16	92	41	16	150	23	4	18	6	0
12	8	2	1	0	200	20	6	2	1
70	9	22	4	1	5	10	6	4	0
4	12	8	4	3	0	10	0	6	
38	39	32	71	80	26	5	40	8	12
30	15	0	1	23	100	0	20	3	0
40	6	8	0	6	4	22	4	6	1
5	14	8	2	8	0	20	0	0	
8	71	30	60	200	18	6	30	4	8
31	6	3	0	18	60	21	4	0	2
32	15	31	2	2	7	8	2	8	0
2	8	6	7	1	0	0	20	8	
38	52	30	42	170	9	7	20	0	3
21	4	1	2	14	310	8	4	6	1
18	15	38	10	4	8	6	0	0	3
0	10	6	1	3	0	3	5	4	

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

```
1  1  1  1  0  1  1  1  1  1
1  1  1  1  1  0  1  1  1  1
1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
1  1  1  1  1  1  1  1  1
```

VALEUR INITIALE DE LA FONCTION ECONOMIQUE -8255

APRES AVOIR CONSTRUIT 33 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

```
1  1  0  0  0  1  1  1  0  1
1  0  1  1  1  1  1  1  1  1
0  1  1  0  1  1  1  1  1  1
1  1  0  1  1  1  1  1  1
```

Z= -10427. (La valeur optimale de z est égale à 10618).

Petersen nº 7

NB CONTRAINTES: 5

NB VARIABLES: 50

MIN Z=CX

C=

-560	-1125	-300	-620	-2100	-431	-68	-328	-47	-122
-322	-196	-41	-25	-425	-4260	-416	-115	-82	-22
-631	-132	-420	-86	-42	-103	-215	-81	-91	-26
-49	-420	-316	-72	-71	-49	-108	-116	-90	-738
-1811	-430	-3060	-215	-58	-296	-620	-418	-47	-81

B=

800	650	550	550	650

A=

40	91	10	30	160	20	3	12	3	18
9	25	1	1	10	280	10	8	1	1
49	8	21	6	1	5	10	8	2	1
0	10	42	6	4	8	0	10	1	40
86	11	120	8	3	32	28	13	2	4

16	92	41	16	150	23	4	18	6	0
12	8	2	1	0	200	20	6	2	1
70	9	22	4	1	5	10	6	4	0
4	12	8	4	3	0	10	0	6	28
93	9	30	22	0	36	45	13	2	2

38	39	32	71	80	26	5	40	8	12
30	15	0	1	23	100	0	20	3	0
40	6	8	0	6	4	22	4	6	1
5	14	8	2	8	0	20	0	0	6
12	6	80	13	6	22	14	0	1	2

8	71	30	60	200	18	6	30	4	8
31	6	3	0	18	60	21	4	0	2
32	15	31	2	2	7	8	2	8	0
2	8	6	7	1	0	0	20	8	14
20	2	40	6	1	14	20	12	0	1

38	52	30	42	170	9	7	20	0	3
21	4	1	2	14	310	8	4	6	1
18	15	38	10	4	8	6	0	0	3
0	10	6	1	3	0	3	5	4	0
30	12	16	18	3	16	22	30	4	0

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

VALEUR INITIALE DE LA FONCTION ECONOMIQUE -11844

APRES AVOIR CONSTRUIT 10 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0

Z= -16274. (La valeur optimale de z est égale à 16537).

E.H.
n° 202.

NB CONTRAINTES: 5

NB VARIABLES: 23

MIN Z=CX

C =

570 510 420 558 498 408 450 390 432 372

360 715 715 645 540 710 631 526 575 505

554 484 470

B =

-86 -37 -153 -210 -26

A =

-35 -35 -35 0 0 0 0 0 0 0

0 -50 -50 -50 -50 0 0 0 0 0

0 0 0

0 0 0 -35 -35 -35 0 0 0 0

0 0 0 0 0 -50 -50 -50 0 0

0 0 0

-35 -35 0 -35 -35 0 -35 -35 0 0

0 -50 -50 -50 0 -50 -50 0 -50 -50

0 0 0

-35 0 0 -35 0 0 -35 0 -35 0

-35 -50 -50 0 0 -50 0 0 -50 0

-50 0 -50

0 0 0 0 0 0 0 0 -35 -35

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

-50 -50 0

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X0 =

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0

Z = 3144

Z = 3130

Z = 3022

APRES AVOIR CONSTRUIT 3 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X =

0 0 0 0 0 0 1 0 1 0

0 1 1 0 0 1 0 0 0 0

0 0 0

Z = 3022 . (C'est l'optimum).

Texaco nº1

```
N  CONTRAINTES:        28

N  VARIABLES:        35

M N Z=CX

C

   50    0   50   25   75    0   25   25    0   50

   25  500   25   50   25  100   50   50    0    0

   75  100   25    0    0   50   50   25   75    0

   25  100   50   25   25

B

   -1    0    0    0   -1    0    0    0   -1   -1

   -1    0   -1    0   -1    0    0   -2    0   -1

-  105 1305   -1    2   -4    4-1955 2355

A

   -1   -1    0    0    0    0    0    0    0    0

    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0

    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0

    0    0    0    0    0

    0    0   -1    1    0    0    0    0    0    0

    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0

    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0

    0    0    0    0    0

    0    0    0    0   -1    1    0    0    0    0

    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0

    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0

    0    0    0    0    0

    0    0    0    0    1   -1    0    0    0    0

    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0

    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0

    0    0    0    0    0
```

0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1
-1	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	1	0					

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	-1	0					
0	-190	-330	0	-330	0	0	0	-330	-325
0	-300	0	-300	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	190	330	0	330	0	0	0	330	325
0	300	0	300	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0
0	0	-1	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1
0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0
0	-1	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0					
170	0	0	-285	0	0	-285	-285	0	0
325	0	-300	0	-300	0	0	0	-170	0

```
170   0   0 -170    0   0 -170    0    0   0
170   0   0 -170 -170
170   0   0  285    0   0  285  285    0   0
325   0 300    0  300   0    0    0  170   0
170   0   0  170    0   0  170    0    0   0
170   0   0  170  170
```

S LUTION INITIALE POUR RELAX

X =

```
1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
1  1  1  1  1
```

L METHODE N A PAS PERMIS DE METTRE EN EVIDENCE UNE SOLUTION

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

X_0 =

```
1  1  0  0  0  0  0  0  0  0
1  1  1  1  1  1  1  0  0  0
0  0  0  1  1  1  0  0  0  0
1  1  1  1  1
```

Z_1 = 1125

Z_2 = 1050

Z_3 = 975

Z_4 = 575

APRES AVOIR CONSTRUIT 4 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X =

```
1  1  1  1  0  0  1  1  1  1
1  0  0  0  0  0  0  1  0  1
0  1  1  1  1  0  0  1  0  0
1  0  1  1  1
```


Z = 575 . (La valeur optimale de z est 550)

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

VALEUR INITIALE DE LA FONCTION ECONOMIQUE 1175

APRES AVOIR CONSTRUIT 5 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0					

Z= 550

Texaco
n° 2

NB CONTRAINTES: 37

NB VARIABLES: 74

MIN Z=CX

C=

-80	-80	-55	-40	-48	-100	-55	-40	-48	-52
-100	-55	-40	-34	-55	-53	-53	-40	-50	-100
-40	-34	-50	-55	-40	-48	-55	-40	-48	-50
-18	-20	-20	-18	-16	-18	-16	-18	-18	-20
-18	-20	-18	-16	-16	-16	-18	-16	-18	-16
-16	-18	-16	-18	-16	-18	-20	-20	-20	-20
-18	-18	-20	-11	-13	-18	-15	-15	-15	-15
250	200	400	-13						

B=

2700	-2600	1500	-900	2024	-1656	905	-335	1254	-1026
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	425	-190	770
-630	450	-150	700	-500	330	-270			

A=

525	500	475	475	475	0	0	0	0	0
0	0	435	435	0	435	435	435	435	0
0	0	0	0	0	0	425	425	425	0
0	0	0	0	0	330	330	330	330	0
330	330	0	0	325	325	325	0	300	300
0	0	0	300	300	300	0	0	300	300
285	285	0	265	265	0	0	230	230	190
400	300	300	0						
-525	-500	-475	-475	-475	0	0	0	0	0
0	0	-435	-435	0	-435	-435	-435	-435	0
0	0	0	0	0	0	-425	-425	-425	0

0	0	0	0	0	-330	-330	-330	-330	0
-330	-330	0	0	-325	-325	-325	0	-300	-300
0	0	0	-300	-300	-300	0	0	-300	-300
-285	-285	0	-265	-265	0	0	-230	-230	-190
-400	-300	-300	0						
525	500	0	475	190	0	0	450	165	0
0	0	0	0	0	0	0	435	300	0
0	0	0	0	400	115	0	0	0	0
0	0	0	330	0	0	0	0	330	330
0	0	325	0	0	0	0	300	0	0
0	300	0	0	0	0	300	0	0	0
0	285	0	0	265	0	0	0	0	190
0	0	0	230						
-525	-500	0	-475	-190	0	0	-450	-165	0
0	0	0	0	0	0	0	-435	-300	0
0	0	0	0	-400	-115	0	0	0	0
0	0	0	-330	0	0	0	0	-330	-330
0	0	-325	0	0	0	0	-300	0	0
0	-300	0	0	0	0	-300	0	0	0
0	-285	0	0	-265	0	0	0	0	-190
0	0	0	-230						
525	500	0	475	190	0	0	450	165	0
0	0	435	0	0	0	0	435	300	0
400	0	0	0	400	115	0	425	140	0
0	0	0	330	0	0	330	0	330	330
0	0	325	0	0	325	0	300	0	0
0	300	0	0	300	0	300	0	300	0
0	285	0	0	265	0	0	0	230	190
0	0	300	230						
-525	-500	0	-475	-190	0	0	-450	-165	0

0	0	-435	0	0	0	0	-435	-300	0
-400	0	0	0	-400	-115	0	-425	-140	0
0	0	0	-330	0	0	-330	0	-330	-330
0	0	-325	0	0	-325	0	-300	0	0
0	-300	0	0	-300	0	-300	0	-300	0
0	-285	0	0	-265	0	0	0	-230	-190
0	0	-300	-230						
0	0	475	0	285	0	450	0	285	150
0	435	0	0	435	0	435	0	135	0
0	0	100	400	0	285	0	0	0	100
0	350	0	0	0	330	0	0	0	0
330	0	0	0	325	0	0	0	300	0
0	0	0	300	0	0	0	0	0	0
285	0	0	265	0	0	230	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	-475	0	-285	0	-450	0	-285	-150
0	-435	0	0	-435	0	-435	0	-135	0
0	0	-100	-400	0	-285	0	0	0	-100
0	-350	0	0	0	-330	0	0	0	0
-330	0	0	0	-325	0	0	0	-300	0
0	0	0	-300	0	0	0	0	0	0
-285	0	0	-265	0	0	-230	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	475	0	285	0	450	0	285	150
0	435	0	0	435	435	435	0	135	0
0	0	100	400	0	285	425	0	285	100
0	350	0	0	0	330	0	0	0	0
330	0	0	0	325	0	0	0	300	0
0	0	0	300	0	0	0	0	0	0
285	0	0	265	0	0	230	230	0	0

0	0	0	0						
0	0	-475	0	-285	0	-450	0	-285	-150
0	-435	0	0	-435	-435	-435	0	-135	0
0	0	-100	-400	0	-285	-425	0	-285	-100
0	-350	0	0	0	-330	0	0	0	0
-330	0	0	0	-325	0	0	0	-300	0
0	0	0	-300	0	0	0	0	0	0
-285	0	0	-265	0	0	-230	-230	0	0
0	0	0	0						
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0 0	0 0	0 0	0 0	0	0	0	0	0	
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
0	0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
	0	0	0	0	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
0	1 0	1 0	1 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
	0	0	0 0	0 0	0	0	0	0	0	
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 1	0
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
	0	0	0	0	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
0	0 0	0 0	0 0	1 0	1 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0	0	0		0	
	0	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
0	0 0	0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0
	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
	0	0	0	0	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
	0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0	1 0	1 0	1 0	0
	0	0 0	0 0	1 0	0	0	0	0	0	
	0	0 0	0 0	0 0	0 0	450 0	0 0	0 0	0 0	0
435		0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	435
	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
350		0	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
	0	0	0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	230	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	-450	0	0	0	0
-435	0	0	0	0	0	0	0	0	-435
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-350	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-230	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	435	0	0	0	0	0	0
0	400	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	350	0	0	0	0	330	0	0
0	330	0	0	0	0	325	0	0	300
0	0	0	0	0	300	0	0	0	300
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
400	300	300	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-435	0	0	0	0	0	0
0	-400	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-350	0	0	0	0	-330	0	0
0	-330	0	0	0	0	-325	0	0	-300
0	0	0	0	0	-300	0	0	0	-300
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-400	-300	-300	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	300
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	300

0	0	0	0	330	0	0	0	0	0
0	0	0	325	0	0	0	0	0	0
0	0	300	0	0	0	0	300	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-300
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-300
0	0	0	0	-330	0	0	0	0	0
0	0	0	-325	0	0	0	0	0	0
0	0	-300	0	0	0	0	-300	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	300
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	300	0	0	0	0	0	0	300
0	0	0	0	330	0	0	0	0	0
0	0	0	325	0	0	0	0	0	0
0	0	300	0	0	0	0	300	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-300
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-300	0	0	0	0	0	0	-300
0	0	0	0	-330	0	0	0	0	0
0	0	0	-325	0	0	0	0	0	0
0	0	-300	0	0	0	0	-300	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
300	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	285	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-300	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-285	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						

LA METHODE N A PAS PERMIS DE METTRE EN EVIDENCE UNE SOLUTION

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0						

VALEUR INITIALE DE LA FONCTION ECONOMIQUE -155

APRES AVOIR CONSTRUIT 3 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1						

Z= -380. (La valeur optimale de z est égale à - 540).

Arcuri

NB CONTRAINTES: 12

NB VARIABLES: 44

MIN Z=CX

C=

17	15	12	10	7	5	17	9	18	18
18	15	15	15	13	13	13	11	11	8
8	6	6	3	17	1	15	13	15	13
6	6	6	18	18	18	19	19	19	19
19	15	15	15						

B=

41	-31	5	-3	14	-11	12	-10	43	-33
7	-7								

A=

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	4
4	12	12	12						
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-4
-4	-12	-12	-12						
0	0	0	0	0	0	1	5	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	-1	-5	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
0	0	0	0						
9	10	11	12	13	14	14	0	2	2
2	3	3	3	4	4	4	5	5	6
6	7	7	8	8	9	9	10	8	9
0	0	0	1	1	1	0	0	0	6
6	0	0	0						
-9	-10	-11	-12	-13	-14	-14	0	-2	-2
-2	-3	-3	-3	-4	-4	-4	-5	-5	-6
-6	-7	-7	-8	-8	-9	-9	-10	-8	-9
0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	-6
-6	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	12	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	0	0	-12	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	0	-1	-1	0	0
0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0
0	0	0	0						
7	6	5	4	3	2	1	0	13	13
13	12	12	12	11	11	11	10	10	9
9	8	8	7	6	6	5	4	6	5
14	14	14	12	12	12	13	13	13	5
5	0	0	0						
-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	-13	-13

-13	-12	-12	-12	-11	-11	-11	-10	-10	-9
-9	-8	-8	-7	-6	-6	-5	-4	-6	-5
-14	-14	-14	-12	-12	-12	-13	-13	-13	-5
-5	0	0	0						
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1						
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1						

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0						

APRES AVOIR CONSTRUIT 2 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1						

Z= 73 . (C'est l'optimum).

3. *Utilisation combinée de ces deux méthodes.*

Lorsque la méthode du nombre chromatique ne peut s'appliquer qu'à un sous-ensemble des contraintes du problème, on peut essayer d'en déduire une combinaison compatible qui fournira un vecteur $\bar{x}$ de départ pour la relaxation par colonnes. Ceci, appliqué au problème Texaco -1- fournit un $\bar{x}$ qui permet de mettre en évidence une solution réalisable (non optimale) alors que la méthode échouait à partir de $\bar{x} = \mathbb{O}$ ou de $\bar{x} = \mathbb{1}$.

La génération d'inégalités préférées à deux variables à partir des contraintes du problème (lorsque cela est possible) combinée à la méthode du nombre chromatique, peut également être essayée lors de la recherche d'une solution initiale pour la méthode de relaxation. C'est ce qui a été fait avec l'exemple BM-4. Dans ce cas toutefois la méthode de relaxation seule utilisée avec $\bar{x} = \mathbb{O}$ ou $\bar{x} = \mathbb{1}$ fournissait le même résultat (optimal).

Remarque

Dans [12] , F. Granot et P. Hammer définissent la résolvante d'un système d'inégalités linéaires, et transforment un programme bivalent en un problème pseudo-booléen. Cette approche peut être comparée à la génération d'inégalités préférées à un nombre quelconque de variables.

Dans l'optique de cet article, on pourrait donc envisager de chercher une solution réalisable de l'équation résolvante au lieu de rechercher une combinaison compatible à l'aide du graphe associé. Cette approche serait sans doute préférable dans le cas général, car il est probable que dans la plupart des cas on n'obtiendra que peu ou pas d'inégalités préférées ne comportant que deux variables.

```
NB CONTRAINTES:        23
NB VARIABLES:        12
MIN Z=CX
C=
    5    1    3    2    6    4    7    2    4    1
    1    5
B=
   -6    1   -4    8   -7   -4    0    0    0    0
   -1    0    1    0    1    1    0    1    1    0
    1    1   -1
A=
   -1    3  -12    0   -1    7   -1    0    0    3
   -5   -1
    3   -7    0    1    6    0    0    0    0    0
    0    0
   11    0    1   -7    0   -1    2    1   -5    0
    9    0
    0    5    6    0  -12    7    0    3    1   -8
    0    5
   -7   -1   -5    3    1   -8    0   -2    7    1
    0   -7
   -2    0    0   -4    0    0   -3   -5   -1    0
    1    1
    0    0   -1    0    0    1    0    0    0    0
    0    0
    0   -1    0    0    1    0    0    0    0    0
    0    0
    0    0    0   -1    0    0    0    0    0    0
    1    0
```

0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0								
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0								
0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
1	0								
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1								
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0								
0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0
0	0								
0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
0	0								
0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0								
0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
1	0								
0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1
0	0								
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
-1	0								
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
1	0								
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0								
0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
0	0								
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0								

0 0 0 0 1 0 0 0 0 -1

0 0

0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0

-1 0

0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0

1 0

0 0 0 0 1 1 0 0 0 0

0 0

0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0

0 0

0 0 0 0 0 0 1 0 0 0

1 0

0 0 1 0 1 0 0 0 0 0

0 0

0 0 -1 0 0 0 0 0 0 1

0 0

0 0 1 0 0 0 0 0 0 0

1 0

0 1 0 0 1 0 0 0 0 0

0 0

0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0

1 0

0 0 0 0 1 0 0 0 0 0

0 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0

1 0

0 0 0 -1 0 0 0 0 -1 0

0 0

IL EXISTE UN SOUS SYSTEME UTILISABLE DE DIMENSION 17 SUR 12

A=

```
     0    0    1    0    1    0    0    0    0    0
     0    0
     0    0   -1    0    0    0    0    0    0    1
     0    0
B=
     1    1    0    1    1   -1    0    0    0    0
    -1    0    1    0    1    1    0
EITHER
    11    5   11   12   11   -9    6    5   11  -10
   -11   11    6   -3   11    5   10   -1   -2   -3
    -4   -5   -6   -7   -8   -9  -10  -11  -12
OR
     3    2   -6    5    8   -4   -3   -2   -4    5
    -3   -9    5    2    7    3   -3    1    2    3
     4    5    6    7    8    9   10   11   12
INCOM=
     1    3    3    1    7    3    2    2    1    2
     7    2    1    2    5    3    1    2    1    1
     3    2    2    1
ORIGINE
     3    3    3    3    3    3   11   11    2    2
     2    2    2    5   -6   -6   -6   -6   -6   11
     5   12   12   12   12   12    8    8    8    8
    11   -4   -9   -3    6    6    6   -2   -2   -2
    -2   -4   -4   11    5  -10  -10  -10  -11  -11
    -9   -9   11    5    6    2   -3    7   11    3
    -3   10
EXTREMITE
    -6    8   -4   -9    7  -11    5   -3   12  -10
     6    3   -5   -3    8   -4   -9    7  -11    6
```

-12	-2	-10	6	3	-5	-4	-9	7	-11
-8	9	4	-6	-11	10	3	-10	6	3
-5	7	-11	4	10	6	3	-5	2	10
7	-11	9	-6	-5	10	-2	-11	-7	-5
-10	3								

DEGRES DE RESSEMBLANCE

1	1	1	1	1	2	1	2	1	1
2	2	1	3	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1								

GROUPES DE RESSEMBLANCE

1	2	2	3	1	2	2	2	2	3
1	2	2	3	1	2	2	3	1	1
3	2	2	1						

GROUPE NO 1

X(1)=1

X(5)=1

X(11)=1

X(3)=0

X(7)=0

X(8)=0

X(12)=0

GROUPE NO 2

X(2)=1

X(3)=1

X(6)=1

X(7)=1

```
X(    8)=1

X(    9)=1

X(   12)=1

X(    1)=0

X(    4)=0

X(    5)=0

X(   10)=0

X(   11)=0

GROUPE NO     3

X(    4)=1

X(   10)=1

X(    2)=0

X(    6)=0

X(    9)=0

IL EXISTE UNE COMBINAISON COMPATIBLE

ELLE EST DONNEE PAR LE GROUPE   2

IL EXISTE UNE SOLUTION DU SYSTEME D INEGALITES PREFEREES

X=

    0    1    1    0    0    1    1    1    1    0

    0    1

NON REALISABLE GLOBALEMENT

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

    0    1    1    0    0    1    1    1    1    0

    0    1

APRES AVOIR CONSTRUIT      3  SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

    0    0    1    1    0    0    0    1    0    1

    0    1

Z=        13 .
```
(C'est l'optimum).

NB CONTRAINTES: 28

NB VARIABLES: 35

MIN Z=CX

C=

50	0	50	25	75	0	25	25	0	50
25	500	25	50	25	100	50	50	0	0
75	100	25	0	0	50	50	25	75	0
25	100	50	25	25					

B=

-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	-1
-1	0	-1	0	-1	0	0	-2	0	-1
-1105	1305	-1	2	-4	4	-1955	2355		

A=

-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					

0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0 0 -1 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 -1 0 -1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 -1 1 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 -1 0 -1 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 -1 1
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 -1 0 -1
-1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 -1 1 0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	-1	0					
0	-190	-330	0	-330	0	0	0	-330	-325
0	-300	0	-300	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	190	330	0	330	0	0	0	330	325
0	300	0	300	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0
0	0	-1	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1
0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0
0	-1	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0					
-170	0	0	-285	0	0	-285	-285	0	0
-325	0	-300	0	-300	0	0	0	-170	0

-170	0	0	-170	0	0	-170	0	0	0
-170	0	0	-170	-170					
170	0	0	285	0	0	285	285	0	0
325	0	300	0	300	0	0	0	170	0
170	0	0	170	0	0	170	0	0	0
170	0	0	170	170					

IL EXISTE UN SOUS SYSTEME UTILISABLE DE DIMENSION 18 SUR 35

A=

-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	1	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0					

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	-1	0					

B=

-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1
-1	0	-1	0	-1	0	0	-1		

EITHER

-2	4	6	-6	-7	11	13	15	34	-12
-21	24	-24	27	-27	30	-30	-34	-1	-2
-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
-13	-14	-15	-16	-17	-18	-19	-20	-21	-22
-23	-24	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31	-32
-33	-34	-35							

OR

-1	-3	-5	5	-6	-10	-12	-14	-33	-9
-20	-23	-22	-26	-25	-29	29	-32	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35							

INCOM=

1	1	1	2	2	2	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	1	1	1	1
1	1	1	2	1	1	2	1	2	2
1	1	1	2	1	2	2	2	1	2
3	2	1	2	2	1	3	1	2	1
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
2	2	1	2	2	1	2	2	2	1

ORIGINE

-1	-2	-3	4	-5	6	5	-6	-7	-10
11	-12	13	13	-14	15	-33	34	-9	-12
-20	-21	-23	24	-22	-24	-26	27	-25	-27
-29	30	-32	-34						

EXTREMITE

2	1	-4	3	-6	5	-7	7	6	-11
10	-13	-9	12	-15	14	-34	33	12	9
21	20	-24	23	24	22	-27	26	27	25
-30	29	34	32						

DEGRES DE RESSEMBLANCE

1	1	1	1	2	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1						

GROUPES DE RESSEMBLANCE

2	1	2	2	2	2	1	1	1	2
2	2	2	2	2	1	1	1	1	2
1	1	2	2	1	2	2	1	2	2
1	1	2	2	1	1	2	1	1	1
1	2	2	2	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	1	2	2	1	1	2
1	1	2	1	1	2	2	1	1	2

GROUPE NO 1

X(2)=1
X(7)=1
X(8)=1
X(9)=1
X(16)=1
X(17)=1
X(18)=1
X(19)=1
X(21)=1
X(22)=1
X(25)=1
X(28)=1
X(31)=1
X(32)=1
X(35)=1
X(1)=0
X(3)=0
X(4)=0
X(5)=0

X(6)=0
X(10)=0
X(11)=0
X(12)=0
X(13)=0
X(14)=0
X(15)=0
X(20)=0
X(23)=0
X(24)=0
X(26)=0
X(27)=0
X(29)=0
X(30)=0
X(33)=0
X(34)=0

GROUPE NO 2

X(1)=1
X(3)=1
X(4)=1
X(5)=1
X(6)=1
X(10)=1
X(11)=1
X(12)=1
X(13)=1
X(14)=1
X(15)=1
X(20)=1
X(23)=1
X(24)=1
X(26)=1
X(27)=1
X(29)=1
X(30)=1
X(33)=1
X(34)=1
X(2)=0
X(7)=0
X(8)=0
X(9)=0
X(16)=0
X(17)=0
X(18)=0
X(19)=0
X(21)=0
X(22)=0
X(25)=0
X(28)=0
X(31)=0
X(32)=0
X(35)=0

IL EXISTE UNE COMBINAISON COMPATIBLE

ELLE EST DONNEE PAR LE GROUPE 2

LA COMBINAISON COMPLEMENTAIRE EST AUSSI COMPATIBLE

IL EXISTE UNE SOLUTION DU SYSTEME D INEGALITES PREFEREES

X=

0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1					

NON REALISABLE GLOBALEMENT

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

0 1 0 0 0 0 1 1 1 0

0 0 0 0 0 1 1 1 1 0

1 1 0 0 1 0 0 1 0 0

1 1 0 0 1

APRES AVOIR CONSTRUIT 3 SOLUTIONS ON GARDE LA MEILLEURE

X=

1 1 1 1 0 0 1 1 1 1

1 0 0 0 0 0 1 0 0 1

1 0 1 1 1 0 0 1 0 0

1 1 0 0 1

Z= 575 . (la valeur optimale de Z est égale à 550).

IL EXISTE UNE SECONDE SOLUTION DU SYSTEME D INEGALITES PREFEREES

Y=

1 0 1 1 1 1 0 0 0 1

1 1 1 1 1 0 0 0 0 1

0 0 1 1 0 1 1 0 1 1

0 0 1 1 0

NON REALISABLE GLOBALEMENT

SOLUTION INITIALE POUR RELAX

XO=

1 0 1 1 1 1 0 0 0 1

1 1 1 1 1 0 0 0 0 1

0 0 1 1 0 1 1 0 1 1

0 0 1 1 0

ECHEC DE RELAX

Les tableaux qui suivent résument les résultats des expériences numériques. Un tiret (-) dans une colonne signifie "oui". Les différentes colonnes s'interprètent comme suit :

CHR : utilisation de la méthode du nombre chromatique.
RELAX : utilisation de la méthode de relaxation par colonnes.
COMB : utilisation combinée des deux méthodes.
INIT 0 : $\bar{x} = \mathbb{O}$
INIT 1 : $\bar{x} = \mathbb{1}$
INIT.CHR : $\bar{x}$ fourni par la méthode du nombre chromatique
INIT.K : $\bar{x}$ solution du type Knapsack.
INIT.ALEA : $\bar{x}$ choisi de façon aléatoire.
SR : on obtient au moins une solution réalisable
SO : on obtient une solution optimale.
Nb. SR. : nombre de solutions réalisables énumérées.
Si non SO écart/SO : si on ne trouve pas de solution optimale, on donne le rapport (écart entre l'optimum et la meilleure valeur trouvée)/(optimum).
ECHEC COMPLET : signification évidente.

oblème	CHR	RELAX	COMB	INIT 0	INIT 1	INIT CHR.	INIT K	INIT ALEA	SR	SO	NB.SR.	SI NON SO. ECART/SO	ECHEC COMPLI
(2×3)	-								-				
17×12)	-								-				
18×35)	-								-				
BM													
7×10)		-		-					-	-	1		
6×12)		-		-					-	-	1		
10×10)		-		-					-	-	1		
15×15)		-		-					-	-	1		
10×20)		-		-					-	-	1		
20×20)		-		-	-		-	-	non	non			-
20×20)		-						-	-	-	1		
23×20)		-			-				-	-	1		
23×20)		-		-					non	non			Ø
25×20)		-		-					-	-	1		
27×20)		-		-	-		-		non	non			-
20×23)		-						-	-	non	4	$^2/_{35}$	
20×25)		-			-				-	-	8		
20×27)		-		-					-	-	5		
20×28)		-						-	-	non	6	$^1/_{39}$	
20×30)		-						-	-	?	6		
BM													
15×30)		-			-				-	-	21		
15×30)		-						-	-	-	4		
31×31)		-		-	-				- -	non -	5 14	$^1/_{18}$	

Problème	CHR	RELAX	COMB	INIT 0	INIT 1	INIT CHR.	INIT K	INIT ALEA	SR	SO	NB.SR.	SI NON SO, ECART SO	ECHEC COMPL
Petersen													
1(10×6)		-					-		-	-	3		
2(10×10)		-					-		-	-	15		
3(10×15)		-					-		-	-	10		
4(10×20)		-		- 	 -				-	- non	10 7	- 560/6120	
5(10×28)		-			-				-	-	20		
6(5×39)		-					-		-	non	17	191/10618	
7(5×50)		-					-		-	non	10	263/16537	
E. Heurgon													
20'(5×23)		-		-					-	-	3		
Texaco													
1(28×35)		-	-	-	-	-	-		- - non	non - non	4 5 0	25/550	
2(37×74)		-	-	-	-	-	-		- non non	non non non	3	170/540	
Arcuri													
1(12×44)		-		-					-	-	2		

Résultats concernant les problèmes de Knapsack.

Nombre de variables	Nombre de problèmes essayés	Nombre de problèmes pour lesquels on a trouvé l'optimum	Ecart moyen par rapport à l'optimum (en %)	Type de la solution initiale
10	1	0	0.5 %	1
20	2	2	0 %	1
30	3	1	0.8 %	1
40	9	5	1 %	1
100	12	4	1 %	1
100	28	17	0.05 %	type Knapsack
200	9	4	0.05 %	type Knapsack

En résumé, sur $\boxed{43}$ passages portant sur 30 problèmes différents tirés de la littérature et dont 29 admettent une solution, il y a eu

$\boxed{12}$ échecs complets,

$\boxed{8}$ échecs partiels de l'ordre de 8 %

$\boxed{21}$ succès.

Pour $\boxed{1}$ problème, la solution optimale n'est pas connue (BM n° 25 : le problème n'a pu être résolu par Bouvier et Messoumian.)

En outre, $\boxed{1}$ problème n'admettait aucune solution réalisable. Il est mentionné uniquement pour que la liste BM soit complète pour les problèmes bivalents à plus d'une contrainte et à dix variables ou plus.

Pour les 29 passages correspondant à des problèmes dont on connait la solution et qui ont été au moins partiellement résolus, l'erreur relative moyenne sur l'optimum est de l'ordre de 2 %.

B I B L I O G R A P H I E

* * * * * *

[1] BALAS E. *"Un algorithme additif pour la résolution des programmes linéaires en variables bivalentes"*
Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris -
Vol. 258 - (1964) - pp. 3817-3820

[2] BALAS E. *"Extension de l'Algorithme additif à la programmation en nombres entiers et à la programmation non linéaire"*
Compte rendus de l'Académie des Sciences de Paris -
Vol. 258 - (1964) - pp. 5136-5139

[3] BALAS E. *"An additive algorithm for solving linear programs with 0-1 variables"*
Operations Research 13 (4) - 1965 - pp. 517-688

[4] BALINSKI M. *"Integer Programming : Methods, Uses, Computation"*
Management Science - Vol. 12 - n° 3 - (1965) - pp. 253-313

[5] BERGE C. *"Théorie des graphes et ses applications"*
Dunod - Paris - (1967)

[6] BERTIER P., ROY B., NGHIEM - *"Résolution de problèmes en variables bivalentes. Algorithme de Balas et procédures S.E.P."*
Note de travail n° 33 Janvier 1965 - SEMA

[7] BERTIER P., ROY B., NGHIEM - *"Procédures S.E.P. trois exemples numériques"*
Notes de travail n° 32 Janvier 1965 - SEMA

[8] BOUVIER et MESSOUMIAN - *"Programmes linéaires en variables bivalentes : Algorithme de E. Balas"*
Thèse, Grenoble (1965)

[9] CHRISTOFIDES N. *"An algorithm for the chromatic number of a graph"*
The Computer Journal - Vol. 14 n° 1 - (1971) - pp. 38-39

[10] FAURE R. et MALGRANGE- *"Une méthode booléenne pour la résolution des programmes linéaires en nombres entiers"*
Gestion : numéro spécial - avril 1963

[11] GEOFFRION A. *"An improved implicit enumeration approach for integer programming"*
Operations Research - Vol. 17 (1969) - pp. 437-454

[12] GRANOT F., HAMMER P.L. - *"On the use of boolean functions in 0-1 Programming"*
Operations Research, Statistics and Economic mimeograph Series
n° 70 - 1970 - Technion, Haifa.

[13] HALDI J. *"25 Integer Programming Test Problems"*
Working paper n° 43, Graduate School of Business, Standford
University

[14] HERVE P. *"Resolution des programmes linéaires en variables mixtes par la procédure S.E.P."*
Metra - Vol. 6 n° 1 - (1967)

[15] HERVE P. *"Les procédures arborescentes d'optimisation"*
Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle
(1967) - Vol. 3 n° 14 - pp. 69-79

[16] HEURGON E. *"Programmation linéaire en nombres entiers"*
Thèse , Paris - (1967)

[17] HUARD P. *"Résolution des programmes mathématiques en variables bivalentes, méthode CBV"*
Note EDF HR 7 - 029 - (mai 1966)

[18] LAMBERT E. *"Programmes en nombres entiers et programmes mixtes"*
Metra - Vol. 1 n° 1 - (1962)

[19] LAND et DOIG *"An automatic method of solving discrete programming problems"*
Econometrica - Vol. 28 - (1960)

[20] LEMKE C., SPIELBERG K. *"Direct search Zero-One and Mixed Integer Programming"*
Journal of ORSA - (1967) - Vol. 15 n° 5 - pp. 892-914

[21] LUDOT J.P. *"Méthode heuristique de résolution des programmes mathématiques en nombres entiers. Recherche d'une solution entière appartenant à un domaine convexe de R^n."*
Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches E.D.F.
(1968) n° 2 - pp. 65-78.

[22] LUDOT J.P. *"Méthode heuristique de résolution des programmes mathématiques en nombres entiers. Expériences numériques"*
Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches E.D.F. série C 1969 - n° 2 - pp. 29-64.

[23] PETERSEN C.C. *"Computational Experience with Variants of the Balas Algorithm Applied to the Selection of R&D Projects"*
Management Science - Vol. 13 n° 9 - (1967) - pp. 736-750

[24] PLATEAU G., FAYARD D. *"Contribution à la résolution du problème de Knapsack".*
Thèse - Université de Lille I - IEEA -(Septembre 1971)

[25] ROY B. *"Procédure d'exploration par séparation et évaluation (P.S.E.P. et P.S.E.S)"*
R.I.R.O. - Série verte n° 18 - (1969) pp. 61-90

[26] SALKIN H., SPIELBERG K. *"Adaptive Binary Programming"*
IBM - New York - Scientific Center - Technical Report - (1968) - n° 320-2951

[27] TRAUTH J.R. and WOOLSEY R.E. *"Integer linear programming : A study in computational efficiency"*
Management Science - Vol. 15 n° 9 - (1969) pp. 481-493

[28] WELSH D.J., POWELL M.B. *"An upper bound to the chromatic number of a graph and its application to time-tabling problems"*
The Computer Journal - Vol. 10 - (1967) - pp. 85-86

[29] WOOD D.C. *"A technique for colouring a graph applicable to large scale timetabling problems"*
The Computer Journal - Vol. 12 - (1969) - pp. 317-319

[30] WOOLSEY *"On integer linear programming in combinatorial analysis"*
Sandia Laboratories Reprint 54 . R . 65 - (1965)

FIN

DU PREMIER FASCICULE

-:-:-:-