**50**370 **198**0 **136** 

### UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

### THÈSE

#### PRÉSENTÉE A

### L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

#### POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

#### VLAD SERGIESCU

# CLASSE ET FORME DE GODBILLON-VEY POUR CERTAINS FEUILLETAGES

MEMBRES DU JURY : D. LEHMANN, PRÉSIDENT

G. HECTOR, RAPPORTEUR

J.P. BRASSELET, EXAMINATEUR

SOUTENUE LE 27 JUIN 1980

Je tiens à remercier particulièrement Gilbert Hector dont la disponibilité m'a permis de m'initier à la théorie des feuilletages. J'ai bénéficié durant l'élaboration de ce travail à la fois de ses questions, de ses conseils et de certains de ses résultats.

Daniel Lehmann a accepté de présider le jury de cette thèse. Je l'en remercie vivement ainsi que des discussions que j'ai eues avec lui.

Je remercie également Jean-Paul Brasselet d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je suis reconnaissant à Gérard Duminy, Etienne Ghys et Alberto Verjovsky pour leur intérêt amical et stimulant.

Mes remerciements vont aussi à Raymonde Bérat et Arlette Lengaigne qui ont dactylographié ce travail ainsi qu'aux services d'imprimerie de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de Lille I.

### INTRODUCTION

L'invariant de Godbillon-Vey des feuilletages de codimension l a été découvert en 1971. C'est une classe caractéristique qui se trouve dans le troisième groupe de cohomologie de la variété ambiante.

L'article original de Godbillon-Vey contient aussi un exemple, dû à Roussarie, prouvant que cet invariant est non-nul pour certains feuilletages sur les fibrés en cercles sur le tore à deux anses.

Un peu plus tard Thurston montra que cet invariant peut varier continûment.

Bien qu'il semblait naturel que des feuilletages ayant des propriétés qualitatives simples aient un invariant nul, ce n'est qu'en 1978 que Morita et Tsuboi, utilisant un résultat de M. Herman, prouvèrent ceci pour les feuilletages sans holonomie.

Le présent travail s'inscrit dans cette direction.

Dans la première partie, nous considérons des feuilletages pour lesquels seules les feuilles compactes ont de l'holonomie. Il est connu que l'invariant est nul dans ce cas. Nous considérons le problème de l'existence d'une 3-forme obtenue par l'algorithme de Godbillon-Vey qui soit identiquement nulle. Nous montrons son existence pourvu que :

- i) toutes les feuilles soient propres ;
- ii) il n'y ait qu'un nombre fini de composantes dans l'ensemble des feuilles compactes.

Dans la seconde partie, nous essayons de relier une propriété plus générale que l'absence de l'holonomie à la nullité de l'invariant en tant que classe de cohomologie. Nous considérons des feuilletages à croissance polynomiale, c'est-à-dire dont le volume des feuilles ne croit pas trop vite. Nous montrons que si le feuilletage

- i) est transverse à une fibration,
- ii) a une holonomie abélienne, alors son invariant est nul.

<u>Convention</u>: Tous les feuilletages considérés dans ce travail sont de codimension 1.

Sauf mention du contraire, nous nous plaçons dans la catégorie  $\ensuremath{\text{\textbf{C}}}^{\infty}.$ 

#### PLAN

======

# PARTIE 1 - SUR LA FORME DE GODBILLON-VEY DES FEUILLETAGES PRESQUE SANS HOLONOMIE.

- A. Introduction et énoncé du résultat principal.
- B. Définitions et exemples.
- C. Feuilletages modèles.
- D. Le cas général.

# PARTIE II - SUR LA CLASSE DE GODBILLON-VEY DES FEUILLETAGES A CROISSANCE POLYNOMIALE.

- A. Introduction.
- B. Quelques rappels sur l'homologie et la cohomologie des groupes.
- C. La classe de Godbillon-Vey d'un sous-groupe de  $Diff_+(I)$ .
- D. Nullité de l'invariant de Godbillon-Vey de certains groupes de difféomorphismes.
- E. Feuilletages transverses à une fibration en cercles ou en intervalles.

## PARTIE I

SUR LA FORME DE GODBILLON-VEY DES FEUILLETAGES
PRESQUE SANS HOLONOMIE

#### A. INTRODUCTION ET ENONCE DU RESULTAT PRINCIPAL.

Soit F un feuilletage de codimension l'transversalement orientable sur une variété différentiable M. La condition d'intégrabilité de Frobenius disant que F est déterminé par une l-forme nonsingulière  $\omega$  vérifiant d $\omega$   $\Lambda$   $\omega$  = 0 équivaut à l'existence d'une l-forme  $\alpha$  vérifiant d $\omega$  =  $\omega$   $\Lambda$   $\alpha$ .

Godbillon et Vey ont montré [3] que la forme  $\alpha$   $\Lambda$  d $\alpha$  est fermée et sa classe dans la cohomologie de de Rham de M ne dépend pas du choix de  $\omega$  et de  $\alpha$ .

Le problème abordé ici est alors le suivant : dans quelle mesure est-il possible de trouver  $\omega$  et  $\alpha$  tel que  $\alpha$   $\Lambda$  d $\alpha$   $\equiv$  0. Une condition nécessaire est évidemment l'annulation de la classe de Godbillon-Vey de F.

Nous commençons avec la définition des feuilletages avec lesquels nous travaillons :

<u>Définition</u> 1.A.- Un feuilletage est dit presque sans holonomie si toute feuille ayant de l'holonomie est compacte.

Nous nous proposons de démontrer le :

<u>Théorème</u> 1.A.- Soit F un feuilletage presque sans holonomie et transversalement orientable sur une variété compacte M qui vérifie les conditions :

- i) Toute feuille de F est propre.
- ii) L'ensemble des feuilles compactes a un nombre fini de composantes connexes.

Il existe alors des 1-formes  $\,\omega\,\,$  et  $\,\alpha\,\,$  comme ci-dessus, telles que  $\,\alpha\,\,\Lambda\,\,d\alpha\,\equiv\,0\,.$ 

Le plan de cette partie est le suivant :

La démonstration montrera que de telles formes sont relativement nombreuses en précisant dans quel sens.

la section B contient notamment la définition de la forme de Godbillon-Vey. Les deux sections qui suivent démontrent le théorème l.A., d'abord

dans le cas d'un feuilletage sans feuilles compactes dans l'intérieur d'une variété à bord, puis dans le cas d'une variété fermée.

#### B. DEFINITIONS ET EXEMPLES.

Nous introduisons dans cette section la forme de Godbillon-Vey associée à un champ de vecteurs, puis la notion de champ transverse projetable.

Soit F un feuilletage sur une variété M et X un champ transverse à F. Il existe une unique 1-forme  $\omega$  tel que  $\omega|_{F}\equiv 0$  et  $\omega(X)\equiv 1$ .

 $\underline{\text{Lemme}} \ \ \text{1.B.- Il existe une unique 1-forme} \quad \alpha \quad \text{tel que}$   $d\omega = \omega \ \Lambda \ \alpha \quad \text{et} \quad \alpha(X) \ \equiv \ 1 \, .$ 

 $\underline{\textit{D\'{e}monstration}} \; : \; \text{Posons} \quad \alpha \; = \; i_X d\omega \; + \; \omega \text{.}$ 

Alors  $\omega \wedge \alpha = \omega \wedge i_X d\omega$ 

or  $O = i_X(d\omega \wedge \omega) = i_Xd\omega \wedge \omega + d\omega \wedge i_X\omega$ 

 $d^{\dagger}o\tilde{u} d\omega = -i_{X}d\omega \wedge \omega = \omega \wedge \alpha$ .

De plus,  $\alpha(X) = d\omega(X,X) + \omega(X) \equiv 1$ .

Si les 1-formes  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient  $d\omega = \omega \wedge \alpha = \omega \wedge \beta$ ,  $\alpha(X) = \beta(X) \equiv 1$ , on en déduit que  $\omega \wedge (\alpha - \beta) = 0$  d'où  $\alpha - \beta = g\omega$  pour une fonction  $g: M \to \mathbb{R}$ . En évaluant sur le champ X, on trouve que  $g \equiv 0$ , c'est-à-dire  $\alpha \equiv \beta$ .

<u>Définition 1.B.-</u> On appelle forme de Godbillon-Vey associée au feuilletage F et au champ transverse X la 3-forme  $\alpha$   $\Lambda$  d $\alpha$  où  $\alpha$  est la forme unique définie par le lemme précédent.

Soit (M,F) et (N,G) deux variétés feuilletées et  $f:M\to N$  une application différentiable.

<u>Définition</u> 2.B.- L'application f est dite feuilletée si 1' image réciproque d'une feuille de G est une réunion de feuilles de F.

<u>Définition</u> 3.B.- Soit M une variété munie d'un feuilletage F. Un champ X transverse à F est appelé projetable s'il existe un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i\in I}$  de M, des variétés feuilletées de dimension 1 ou 2  $(S_i,F_i)$ , des champs transverses  $Z_i$  aux  $F_i$  et des applications  $p_i:U_i \to S_i$  vérifiant les conditions :

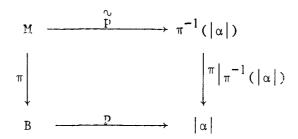
- i) p<sub>i</sub> est une application feuilletée,
- ii) Si  $x \in U_i$ , on a  $p_{i*}(X(x)) = Z_i(p(x))$ .

Exemple 1.B.- Soit F un feuilletage déterminé par une fibration  $\pi: M \to S^1$  et  $\mathcal D$  un champ de directions transverse à F. Le relevé du champ  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  le long de  $\mathcal D$  définit de manière évidente un champ projetable.

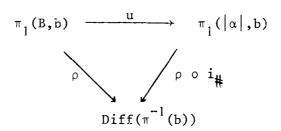
Soit F un feuilletage transverse à une fibration  $\pi: M \to B$  en cercles où intervalles de base compacte. Supposons que l'image de l'holonomie globale  $\rho: \pi_1(B,b) \to \mathrm{Diff}(\pi^{-1}(b))$ ,  $b \in B$ , est intimie cyclique engendrée par l'image d'un lacet simple  $\alpha \in \pi_1(B,b)$ . Soit  $|\alpha|$  son support.

Lemme 2.B.- Il existe des rétractions  $p:B\to |\alpha|$  et  $\stackrel{\sim}{p}:M\to\pi^{-1}(|\alpha|)$  telles que :

- i) L'homomorphisme  $p_{\#}:\pi_{1}(B,b)\to\pi_{1}(\left|\alpha\right|,b)\quad \text{a le même}$  noyau que l'holonomie globale  $\rho$ .
  - ii) Le diagramme suivant est commutatif :



iii) Si on munit  $\pi^{-1}(|\alpha|)$  du feuilletage induit par F, p est une application feuilletée.



exprime les propriétés de ρ et de α.

Puisque le cercle est un espace d'Eilenberg-Mac Lane on peut réaliser u géométriquement, soit il existe  $p:B\to |\alpha|$  tel que p = u. De plus, puisque p = u et  $|\alpha|$  sont homotopes on peut, d'après le théorème d'extension des homotopies [16], supposer que  $|\alpha| = |\alpha|$ .

L'application p se relève en une application feuilletée unique  $\stackrel{\sim}{p}: M \to \pi^{-1}(|\alpha|)$  qui est une rétraction. La vérification des propriétés i) - iv) est immédiate.

Exemple 2.B.- Avec les notations du lemme 2.B. soit Z un champ sur  $\pi^{-1}(|\alpha|)$  tangent aux fibres. Le relevé X de Z par p le long des fibres est alors un champ projetable qui est égal à Z sur  $\pi^{-1}(|\alpha|)$ .

Remarque 2.B.- Il est facile de constater que l'application  $\hat{p}$  dans le lemme 2.B. est propre.

La remarque suivante, quoique simple, sera au centre de la démonstration de la nullité de la forme de Godbillon-Vey :

Remarque fondamentale 3.B. - Si X est un champ projetable pour un feuilletage F, alors sa forme de Godbillon-Vey est nulle.

En effet, cette forme est localement l'image réciproque d'une 3-forme sur une variété de dimension 1 ou 2.

#### C. FEUILLETAGES MODELES.

Dans cette section, nous allons démontrer le théorème 1.A. pour une classe de feuilletages élémentaires.

<u>Définition</u> 1.C.- Un feuilletage presque sans holonomie (M,F) est un modèle de type 1 ou 2 si la condition correspondante est satisfaite:

- 1. Le feuilletage  $\overset{\circ}{\mathsf{F}}$  induit par  $\overset{\circ}{\mathsf{F}}$  dans l'intérieur  $\overset{\circ}{\mathsf{M}}$  de  $\mathsf{M}$  est sans feuille compacte.
- 2. M est un produit de la forme  $L \times [0,1]$  et F est transverse à la fibration en intervalles.

Pour les modèles de type 1 on a la :

Proposition 1.C.- Si toutes les feuilles d'un modèle F de type 1 sont propres alors l'intérieur  $(\mathring{M},\mathring{F})$  est une fibration sur  $S^1$  [5].

Tout d'abord, nous allons introduire des :

Notations fixes : Soit M une variété munie d'un feuilletage

- i) On désigne par  $\mathcal D$  un champ de directions transverse à  $\mathcal F$  et par Y un champ de vecteurs non-nul colinéaire à  $\mathcal D$ .
- ii) Si L est une composante connexe de M soit  $Y_L$  un champ de vecteurs obtenu en posant  $Y_L = f_L Y$  où  $f_L : M \to \mathbb{R}_+$  est une fonction qui s'annule exactement sur  $\partial M L$ .
- iii) Si  $(\psi_{\rm t})$  est le flot associé en  ${\rm Y_L},$  notons  ${\rm W(L)}$  =  $\{{\rm y}$  =  $\psi_{\rm t}({\rm x})\,\big|\,{\rm x}$   ${\rm c}$  L $\}$ .
- iv) Si  $\alpha$  est un lacet dans L de support  $|\alpha|$ , on note  $C_{\alpha}$  le cylindre  $\{y = \psi_t(x) | x \in |\alpha|\}$ .
- v) Si F est un modèle de type 1 on note  $\pi: \stackrel{\circ}{M} \to S^1$  une fibration donnée par la proposition 1.C.

Pour un modèle de type 1, remarquons que le relevé  $\pi^* \frac{\partial}{\partial \theta}$  sur M du champ  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  le long de  $\mathcal D$  est un champ projetable. Nous allons le modifier au voisinage de  $\partial M$  en lui préservant la propriété d'être projetable.

Supposons que l'holonomie de L  $\subset$   $\partial M$ , qui est infinie cyclique, est engendrée par un lacet  $\alpha$  simple (par exemple, lorsque dim  $M \geqslant 4$ ) et soit  $U_L$  un voisinage de L qui n'est pas adhèrent aux autres composantes de  $\partial L$ .

<u>Lemme</u> 1.C.- Il existe une application  $\hat{p}$ : W(L)  $\rightarrow$  C et des

champs Z et  $X_L$  sur C respectivement sur W(L) tel que :

- i)  $\overset{\circ}{p}$  est une application feuilletée lorsque W(L) et  $^{\circ}_{\alpha}$  sont munis des feuilletages induits par  $^{\circ}$ F.
  - ii)  $\stackrel{\sim}{p}|_{C_{\alpha}} = id|_{C_{\alpha}}$ , c'est-à-dire  $\stackrel{\sim}{p}$  est une rétraction.
  - iii)  $\hat{p}_{*}(X_{L}(x)) = Z(\hat{p}(x))$  pour tout x.
  - iv)  $X_L = \pi^* \frac{\partial}{\partial \theta}$  en dehors du voisinage  $U_L$ .

Pour démontrer iv) remarquons que puisque  $\stackrel{\sim}{p}$  envoie les feuilles de  $\stackrel{\succ}{F}|_{W(L)}$  sur leur trace sur  $C_{\alpha}$  on a  $\pi$  o  $\stackrel{\sim}{p}=\pi$ . D'où  $\pi^*(\frac{\partial}{\partial\theta})=\stackrel{\sim}{p}^*(\pi^*(\frac{\partial}{\partial\theta}))$  ce qui prouve qu'en dehors de  $p^{-1}(V)$ , donc de  $U_L$ , le champ  $X_L$  est égal à  $\pi^*(\frac{\partial}{\partial\theta})$ .

## Démonstration du théorème 1.A. pour les feuilletages modèles

de type 1: Remarquons d'abord qu'on peut supposer que dim M  $\geqslant$  4. En effet, si dim M = 3, on considère le produit M  $\times$  S<sup>1</sup> muni du feuilletage  $F \times S^1$ . Soit  $\theta_o \in S^1$ . Si on identifie M avec la sous-variété M  $\times$   $\{\theta_o\}$  de M  $\times$  S<sup>1</sup> alors l'existence d'une forme  $\alpha$   $\Lambda$  d $\alpha$  nulle pour  $F \times S^1$  entraîne l'existence d'une forme nulle pour le feuilletage F.

Soit, pour chaque composante L  $\subset$   $\partial M$ , un voisinage  $U_L$  tel que si L  $\neq$  L' alors  $U_L \cap U_L$ , =  $\emptyset$ . On définit un champ projetable en posant :

$$X = X_{L} \quad \text{sur} \quad W(L)$$

$$X = \pi^{*}(\frac{\partial}{\partial \theta}) \quad \text{sur} \quad M - \bigcup_{L \subset \partial M} U_{L}.$$

La forme de Godbillon-Vey du champ X est alors identiquement nulle, d'après le remarque 3.B.

#### D. LE CAS GENERAL.

Dans cette dernière section de la première partie, on démontre le théorème 1.A.

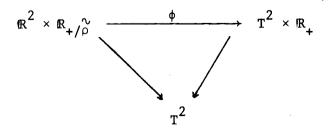
Il sera important de bien controler les voisinages des feuilles compactes où la situation est plus compliquée que dans le cas des modèles de type 1 puisque l'holonomie n'est pas cyclique en général.

Nous commençons par un lemme technique. Soit  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Supposons que  $\rho: \pi_1(T^2,0) \to \mathrm{Diff}_+(\mathbb{R}_+)$  est une représentation vérifiant les conditions :

- i) 0 est le seul point fixe de l'action définie par ρ.
- ii) L'image de p est un groupe cyclique infini engendré par un difféomorphisme infiniment tangent à l'identité en 0.

Soit  $\stackrel{\sim}{\rho}$  l'action de  $\pi_1(T^2,0)$  sur le produit  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  obtenue à partir de  $\rho$ .

Lemme 1.0.- Il existe une trivialisation  $\phi$  qui fait commuter le diagramme



tel que les conditions suivantes soient vérifiées :

- i) Il existe un lacet simple  $\alpha$  dont l'image par  $\rho$  engendre l'holonomie globale tel que le champ  $\phi^*(\frac{\partial}{\partial t})$  de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{+/\rho}^{-\gamma}$  soit projetable sur le cylindre  $C_{\alpha}$ .
- ii) Le relèvement  $\phi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  vérifiant  $\phi \mid_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{O}} = \operatorname{id} \mid_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{O}}$  est infiniment tangent à l'identité sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{O}$ .

<u>Preuve</u>: Identifions  $\pi_1(T^2,0)$  à **Z & Z** à l'aide des générateurs canoniques du groupe fondamental du tore. Soit  $\alpha = (c,d) \in \pi_1(T^2,0)$  un lacet simple dont l'image h par  $\rho$  engendre l'holonomie globale et  $\beta = (a,b)$  un lacet simple qui engendre ker  $\rho$ . Soit  $\psi$ :  $[0,1] \rightarrow [0,1]$  une application vérifiant les conditions suivantes :

- i)  $\psi(x) = 0$  si x est près de 0.
- ii)  $\psi(x) = 1$  si x est près de 1.
- iii) ♥ est décroissante.

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on choisit le repère formé par les vecteurs  $f_1 = a\vec{i} + b\vec{j}$ ,  $f_2 = c\vec{i} + d\vec{j}$ . Soit  $(x_1, x_2)$  les coordonnées respectives dans ce repère.

On pose :  $\phi(x_1,x_2,t) = (x_1,x_2,\psi(x_1)h + (1-\psi(x_1))h$ où  $\{x\}$ , [x] désignent les parties fractionnaires et entières de x.

- a) Tout d'abord  $\overset{\wedge}{\phi}$  a les propriétés suivantes :
- 1.  $\overset{\sim}{\phi}$  est un difféomorphisme. Si  $x_1 \notin \mathbb{Z}$ ,  $\overset{\sim}{\phi}$  est différentiable au point  $(x_1,x_2,t)$  puisque pour  $n < x_1 < n+1$  on a :

$$\phi_3(x_1,x_2,t) = \psi(x_1-n)h^{-n}(t) + (1-\psi(x-n))h^{-n-1}(t)$$

qui est bien différentiable. De plus, au voisinage de  $x_1 = n$  on a pour  $y > x_1$  et près de  $x_1$ :

$$\phi(y,x_2,t) = 1.\bar{h}^n(t) + 0.\bar{h}^{n-1}(t) = \bar{h}^n(t)$$

et pour  $y < x_1$  et près de  $x_1$ :

$$\mathring{\phi}(y,x_2,t) = 0.\vec{h}^{n+1}(t) + 1.\vec{h}^{n+1-1}(t) = \vec{h}^n(t) \ .$$

De plus, pour  $x_1$  et  $x_2$  constants on vérifie aisément que  $\tilde{\phi}_3(x_1,x_2,t)$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

- 2.  $\mathring{\phi}$  conjugue l'action de  $\mathring{\rho}$  sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  à l'action de  $\pi_1(T^2,0)$  agissant sur  $\mathbb{R}^2$  par translations et sur  $\mathbb{R}_+$  par l'identité. En effet,  $\mathring{\phi}_3(x_1,x_2+1,t) = \mathring{\phi}_3(x_1,x_2,t)$  et  $-[x_1+1]$   $\mathring{\phi}_3(x_1+1,x_2,h(t)) = (\emptyset\{x_1+1\})h$   $(h(t)) + (1-\emptyset\{x_1+1\})h$   $-[x_1+1]-1$  h  $(h(t)) = (\emptyset\{x_1\})h$   $(t) + (1-\emptyset\{x_1\})h$  (t) = 0  $+[x_1+1]-1$   $+[x_1+1]-1$
- 3. Soit  $\widetilde{H}$  le feuilletage horizontal  $\mathrm{d} t = 0$ ,  $\widetilde{F} = (\phi^{-1})^*(\widetilde{H})$  et  $\pi$  la projection de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  sur le plan  $\mathbf{x}_1 = 0$  parallèlement au vecteur  $\mathbf{f}_1$ . Alors  $\pi$  est une application feuilletée lorsque le plan  $\mathbf{x}_1 = 0$  est muni du feuilletage induit par  $\widetilde{F}$ .

En effet, l'ensemble des droites  $x_2$  = ct, t = ct est invariant par  $\phi$ .

- 4. Le champ  $\phi^*(\frac{\partial}{\partial t})$  est projetable. D'après 3, le champ  $\frac{\partial}{\partial t}$  est projetable par  $\pi$ , d'où la conclusion pour  $\phi^*(\frac{\partial}{\partial t})$ .
- b) La propriété i) du lemme est une conséquence directe de
   1, 2, 3, 4 par passage au quotient.

Pour vérifier ii) il suffit de considérer le cas où  $n < x_1 < n+1 \quad \text{car un passage à la limite donne après le cas où } x_1 \in \textbf{Z}.$ 

Si 
$$k > 0$$
,  $\ell \ge 0$  
$$\frac{\partial^{k+\ell} \phi_3(x,t)}{\partial^k x_1 \partial^{\ell} t} = \psi^{(k)}(x_1-n) \left[ (\bar{h}^n)^{(\ell)}(t) - \frac{\partial^k x_1 \partial^{\ell} t}{\partial^k x_1 \partial^{\ell} t} \right]$$

 $-(\bar{h}^{n-1})^{(\ell)}(t)$ . Ceci est nul pour t=0.

$$\frac{\partial^{\ell_{\hat{\eta}}}(\mathbf{x},t)}{\partial^{\ell_{t}}} = \psi(\mathbf{x}_{1}-\mathbf{n})\left[\left(\overline{\mathbf{h}}^{\mathbf{n}}\right)^{(\ell)}(t) - \left(\overline{\mathbf{h}}^{\mathbf{n}-1}\right)^{(\ell)}(t)\right] + \left(\overline{\mathbf{h}}^{\mathbf{n}-1}\right)^{(\ell)}(t).$$

Ceci est nul pour t = 0,  $\ell \neq 1$  et est égal à 1 pour t = 0,  $\ell = 1$ 

Considérons maintenant une représentation  $\rho:\pi_1(T^2,0)\to \text{piff}_+(R)$  vérifiant les conditions :

- i) 0 est le seul point fixe de l'action de  $\rho$ .
- ii) le feuilletage obtenu par la suspension de  $\,\rho\,$  est presque sans holonomie avec toutes ses feuilles propres.

La variété  $\Sigma(T^2,\rho)$  obtenue par suspension est séparée en deux composantes connexes  $K_+$  et  $K_-$  par l'unique feuille compacte du feuilletage. Cette feuille a une holonomie cyclique à gauche et à droite mais ceci n'est pas vrai globalement en général.

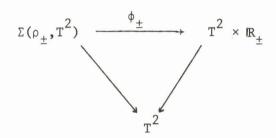
Lemme 2.D.- Il existe deux lacets  $\alpha_+$ ,  $\alpha_- \in \pi_1(T^2,0)$  et un champ X sur  $\Sigma(\rho)$  dont les restrictions à  $\overline{K}_+$  et à  $\overline{K}_-$  sont projetables sur les demi-cylindres  $C_{\alpha+} \cap \overline{K}_+$  et  $C_{\alpha-} \cap \overline{K}_-$  munis des feuilletages induits.

<u>Démonstration</u>: Si l'holonomie globale est cyclique ceci **est** une conséquence de l'exemple 2.B.

Dans le cas contraire, puisqu'elle est cyclique à gauche et à droite il résulte que ses éléments sont infiniment tangents à l'identité en 0.

Désignons par  $\rho_+$  et  $\rho_-$  les représentations obtenues à partir de  $\rho$  par restriction de son action à  $R_+$  et  $R_-$  et soit  $\Sigma(\rho_+,T^2)$  et  $\Sigma(\rho_-,T^2)$  les variétés obtenues par suspension des actions respectives.

D'après le lemme 1.D. il existe des trivialisations  $\,\varphi_{+}$  et  $\,\varphi_{-}$  telles que :



soit un triangle commutatif. De plus, la condition ii) du lemme 1.D. permet de définir un difféomorphisme  $\,\varphi\,:\,\,\Sigma(\rho)\,\,\to\,\,T^2\,\times\,{I\!\!R}\,$  par récollement de  $\,\varphi_+\,$  avec  $\,\varphi_-\,$  .

D'après la condition i) du lemme 1.D. il existe des lacets simples  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  tels que si on pose  $X=\phi^*(\frac{\partial}{\partial t})$ , les restrictions de X à  $C_{\alpha+} \cap \overline{K}_+$  et à  $C_{\alpha-} \cap \overline{K}_{\alpha-}$  soient projetables.

Nous allons maintenant généraliser le lemme précédent à une représentation  $\rho:\pi_1(L,m)\to \mathrm{Diff}_+(R)$  où L est une variété compacte de dimension plus grande ou égale à 3 telle que :

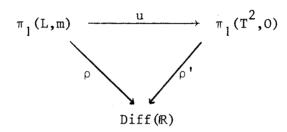
- i) O est le seul point fixe de l'action de  $\rho$ .
- ii) le feuilletage obtenu par suspension de  $\rho$  est presque sans holonomie avec ses feuilles propres. La variété  $\Sigma(L,\rho)$  obtenue par suspension est séparée en deux composantes  $K_+$  et  $K_-$  par l'unique feuille compacte.

Lemme 3.0. - Il existe deux lacets simples  $\beta_+$  et  $\beta_-$  sur L et un champ X sur  $\Sigma(L,\rho)$  dont les restrictions à  $\bar{K}_+$  et  $\bar{K}_-$  sont

projetables sur les demi-cylindres  $C_{\beta+} \cap \overline{K}_+$  et  $C_{\beta-} \cap \overline{K}_-$ .

<u>Preuve</u> : Si l'holonomie globale est cyclique, le lemme est une conséquence de l'exemple 2.B.

Identifions im  $\rho$  et  $\pi_1(T^2,0)$  à  $Z \oplus Z$  et soit  $\rho': \pi_1(T^2,0) \to \text{im } \rho \quad 1' \text{isomorphisme obtenu à travers ces identifications. On a un triangle commutatif}$ 



où l'application u est définie canoniquement.

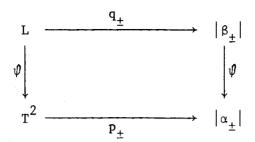
Puisque le tore est asphèrique il existe  $\psi:(L,m) \to (T^2,0)$  tel que  $\psi_{\underline{u}}=u$ .

Le lemme 2.D. fournit deux lacets simples "linéaires"  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  dont les images engendrent l'holonomie à gauche et à droite, des rétractions  $p_+: T^2 \to |\alpha_+|$  et  $p_-: T^2 \to |\alpha_-|$  et un champ X' sur  $\Sigma(T^2,\rho')$  projetable sur les demi-cylindres  $C_{\alpha^+}$  et  $C_{\alpha^-}$ .

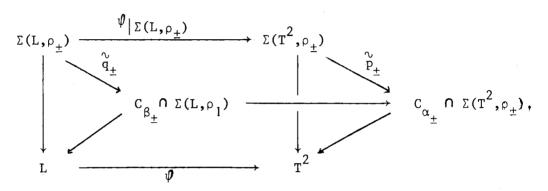
Soit  $\beta_+$  et  $\beta_-$  deux lacets simples de L, n'ayant que le point m en commun tel que  $\psi_{\sharp}[\beta_{\pm}] = [\alpha_{\pm}]$ . En utilisant le théorème d'extension des homotopies, on peut supposer que  $\psi(|\beta_{\pm}|) \subset |\alpha_{\pm}|$  et que  $\psi_{|\beta_{+}|} : |\beta_{\pm}| \to |\alpha_{\pm}|$  est un difféomorphisme.

Il est maintenant facile de conclure à l'aide de la construction faite dans le lemme 2.D. lorsque  $L=T^2$  (bien que dim  $T^2 < 3!$ ).

Soit  $q_+$  des rétractions faisant commuter le diagramme :



L'application  $\psi$  et les rétractions  $q_{\pm}$  et  $p_{\pm}$  induisent des applications  $\psi$ ,  $q_{\pm}$ ,  $p_{\pm}$  telles que le diagramme suivant commute :



On pose  $X = \widetilde{\psi}^*_X$ , le relevé se faisant le long des fibres. Le diagramme ci-dessus montre que le champ  $X_{\mid \Sigma(L,\rho_{\pm})} = X_{\mid \overline{K}_{+}}$  est projetable sur  $C_{\beta_{+}} \cap \overline{K}_{\pm} = C_{\beta_{+}} \cap \Sigma(L,\rho_{\pm})$ .

Nous allons passer maintenant à la démonstration du théorème 1.A. En utilisant le théorème de structure des feuilletages presque sans holonomie [5], on pourrait faire une réduction de la démonstration au cas des modèles traités dans la section C. Nous préférons toutefois donner une démonstration directe.

On désigne de nouveau par Y un champ transverse au feuilletage et par  $\psi$  son flot. Pour une composante connexe P du complémentaire des feuilles compactes on note  $\pi_P: P \to S^1$  la fibration déterminant le feuilletage [5]. Si Q est un compact saturé feuilleté en produit soit  $\pi_Q: Q \to [0,1]$  la fibration déterminant le feuilletage dans Q.

<u>Démonstration du théorème</u> 1.A.- Nous pouvons supposer que dim  $M \ge 4$  comme dans la démonstration pour les modèles dans la section C.

Si F n'a pas d'holonomie il s'agit d'une fibration d'après le théorème de stabilité [15]. L'exemple !.B. permet de conclure.

<u>Premier pas</u>: Construction d'un champ au voisinage d'une feuille compacte L isolée d'un seul côté.

Soit Q le compact feuilleté en produit tel que  $L \subset \partial\Omega$  et P la composante du complémentaire des feuilles compactes tel que  $L \subset \overline{P}$ . Soit  $Y_L$  un champ qui s'annule exactement sur les feuilles compactes qui ne sont pas contenues dans  $L \cup Q$ . On note W(L) la réunion des trajectoires de  $Y_L$  qui coupent L. Soit  $\alpha$  un lacet simple dont l'image engendre l'holonomie de L et C le cylindre de W(L) au-dessus de  $|\alpha|$ .

On considère un champ  $X_L$  colinéaire à Y sur  $C_{\alpha}$ , égal à  $\pi_P^*(\frac{\partial}{\partial \theta})$  et  $\pi_Q^*(\frac{\partial}{\partial t})$  en dehors d'un voisinage de  $|\alpha|$  convenablement petit.

Alors si  $U_L$  est un voisinage tubulaire arbitrairement petit de L, les mêmes arguments que ceux du lemme l.C. permettent d'étendre  $X_L$  à un champ noté encore  $X_L$ , projetable sur  $C_\alpha$  et égal à  $\pi_P^*(\frac{\partial}{\partial \theta})$  et  $\pi_Q^*(\frac{\partial}{\partial t})$  près de  $\partial U_L$ .

<u>Deuxième pas</u>: Construction d'un champ au voisinage d'une feuille compacte L isolée desdeux côtés.

Considérons la restriction du flot  $\psi$  à L × R qu'on notera encore  $\psi$ . Soit  $Y_L^i$  un champ sur L × R colinéaire à  $\frac{\partial}{\partial t}$  qui s'annule exactement sur  $\overline{\psi}^1(L)$  - L × O et notons  $\psi_L^i$  son flot.

La réunion des trajectoires de  $Y_L^{\prime}$  coupant  $L \times 0$  est un voisinage  $W^{\prime}(L \times 0)$  difféomorphe à  $L \times R$  feuilleté transversalement au facteur R.

Le lemme 3.D. fournit des lacets  $\beta_+,\beta_-$  dans L et un champ X' sur W'(L × O) projetable sur les demi-cylindres  $C_{\beta+},C_{\beta-}$  de W'(L × O).

Soit P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> les composantes du complémentaire des feuilles compactes adhérentes à L. Pour tout voisinage  $U_L$  suffisamment petit de L il existe un voisinage  $V'(L\times 0)$  de L  $\times$  0 dans  $W'(L\times 0)$  tel que  $\psi|_{V'(L\times 0)}$  soit un difféomorphisme sur  $U_L$ .

En utilisant les mêmes arguments que dans le lemme 1.C. on peut supposer que le champ X' fourni par le lemme 3.D. est égal à  $\psi^*(\pi_{P_i}^*(\tfrac{\partial}{\partial \theta})) \quad \text{près des bords de } \text{V'(L} \times \text{O}). \quad \text{On pose alors}$ 

$$X_{L} = \psi_{*}(X'|_{V'(L \times O)})$$
. On a  $X_{L} = \pi_{P_{i}}^{*}(\frac{\partial}{\partial \theta})$  près de  $\partial U_{L}$ .

Troisième pas : fin de la démonstration.

On définit un champ X sur M par récollement des champs  $\pi_P^*(\frac{\partial}{\partial \theta})$  et  $\pi_Q^*(\frac{\partial}{\partial t})$  avec les champs  $X_L$  construits au premier et second pas sur des voisinages  $U_L$  suffisamment petits pour être disjoints. Les propriétés au bord de  $U_L$  de  $X_L$  permettent ce récollement. La restriction de X au complémentaire des feuilles compactes isolée d'un côté où des deux côtés est un champ projetable. Puisque cet ensemble est dense dans M, la forme de Godbillon-Vey associé à X est identiquement nulle.

Corollaire 1.0.- Tout feuilletage de Reeb sur  $\,{}^{S}_{}^{3}\,$  admet des 3-formes  $\,{}^{\alpha}_{}^{}$   $\,{}^{\alpha}_{}^{}$  obtenues par l'algorithme de Godbillon-Vey qui sont identiquement nulles.

Remarque 1.0. - La preuve du théorème montre que, pour tout champ de directions transverses  $\mathcal{D}$ , on peut trouver une forme de Godbillon-Vey nulle, associée à un champ de vecteurs colinéaire à  $\mathcal{D}$ .

Remarque 2.D.- Le théorème de structure des feuilletages presque sans holonomie affirme qu'un tel feuilletage se décompose en modèles de type 1 et 2 [5]. Ainsi pour démontrer l'existence d'une forme nulle pour tout feuilletage presque sans holonomie avec ses feuilles propres il faudrait régler le cas des modèles de type 2 qui ne sont pas feuilletés en produit et qui ont une infinité de feuilles compactes. Il peut se produire alors un phénomène de "spiralement des directions du noyau de l'holonomie" que nous n'avons pas maîtrisé.

### Conclusion:

Plusieurs problèmes se posent à partir du théorème 1.A.

- i) Tout d'abord montrer si le théorème est vrai pour tout feuilletage presque sans holonomie avec ses feuilles propres.
- ii) Plus généralement dans quelle mesure l'existence d'une forme de Godbillon-Vey nulle s'étend-elle a des feuilletages dont toutes les feuilles sont propres ?
- iii) La forme  $\alpha$  construite dans le théorème 1.A. vérifie  $\alpha$   $\Lambda$  d $\alpha$   $\equiv$  0 et elle est non-singulière. Aussi elle définit un feuilletage G qui est en général distinct du feuilletage initial F. Ce nouveau feuilletage a aussi une forme de Godbillon-Vey par rapport au champ X. On vérifie, en utilisant un argument de projetabilité comme ci-dessus, que cette forme est encore identiquement nulle.
- iv) Enfin, il serait important d'avoir un exemple de feuilletage ayant une classe de Godbillon-Vey nulle, mais n'admettant aucune forme nulle.

## PARTIE II

SUR LA CLASSE DE GODBILLON-VEY DES FEUILLETAGES
A CROISSANCE POLYNOMIALE

#### A. INTRODUCTION.

Dans cette seconde partie, nous considérons des feuilletages sur une variété compacte M, qui a éventuellement un bord non-vide. Si un tel feuilletage est tangent au bord, et si  $\omega$  est une l-forme qui le détermine et qui vérifie  $d\omega = \omega \wedge \alpha$ , l'invariant de Godbillon-Vey  $\left[\alpha \wedge d\alpha\right]$  se trouve dans  $H^3(M;\partial M)$ .

Nous abordons ici la question de la nullité de cet invariant, pour une classe de feuilletages n'ayant pas des propriétés qualitatives "trop compliquées".

Plusieurs résultats sur la nullité de l'invariant de Godbillon-Vey ont été obtenus récemment. Celle-ci a été démontrée pour les feuilletages presque sans holonomie, ainsi que pour les feuilletages ayant toutes leurs feuilles propres, pourvu que certaines conditions soient vérifiées [11], [13].

Il est naturel de se demander si de tels résultats subsistent pour les feuilletages à croissance polynomiale (pour une définition précise voir la section D). En effet, il s'agit là d'une classe contenant toutes celles pour lesquelles la nullité a déjà été prouvée. De plus, dans tous les exemples connus où l'invariant est non-nul, la croissance du feuilletage est exponentielle.

Nous allons démontrer le :

<u>Théorème</u>.- Si F est un feuilletage à croissance polynomiale et à holonomie abélienne, transverse à une fibration, alors l'invariant de Godbillon-Vey de F est nul.

Ce résultat a été obtenu aussi par T. Nishimori [13] lorsque toutes les feuilles sont propres.

Le plan de cette partie est le suivant : dans la section B on rappelle quelques notions sur l'homologie des groupes. Dans la section C on donne quelques lemmes généraux en relation avec la classe de Godbillon-Vey d'un groupe de difféomorphismes d'un intervalle. La section D contient notamment la démonstration de la nullité de cette classe pour certains groupes de difféomorphismes. Ces résultats sont appliqués dans la section E aux feuilletages transverses à des fibrations.

# B. QUELQUES RAPPELS ET REMARQUES SUR L'HOMOLOGIE ET LA COHOMOLOGIE DES GROUPES.

Dans cette section on rappelle brièvement les quelques notions d'algèbre homologique qui nous seront utiles pour la suite. Les références pour cette section sont [9] et [16].

l - Soit G un groupe et K(G,l) l'espace d'Eilenberg-MacLane vérifiant les conditions :

i) 
$$\pi_1(K(G,1)) = G$$

ii) 
$$\pi_k(K(G,1)) = 0$$
 si  $k > 1$ .

Un tel espace peut être choisi comme étant un CW-complexe et c'est ce que nous ferons dorénavant. Il est alors unique à équivalence d'homotopie près.

Si X est un CW-complexe on a le théorème de représentation fondamental suivant :

$$[X,K(G,I)] \xrightarrow{\simeq} hom(\pi_1(X), G)$$
.

la bijection associant à f : X  $\longrightarrow$  K(G,1) le morphisme  $f_{\sharp}$  :  $\pi_1(X) \to G$  .

$$\underline{\text{Exemple 1.B.- On a : }} K(\mathbb{Z}^n, \mathbb{I}) = \mathbb{T}^n , K(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}) = \mathbb{RP}^{\infty} ,$$
 
$$K(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{CP}^{\infty}.$$

 $2 - \underbrace{\textit{Definition}}_{*} 1.B. - \text{ Soit A un anneau commutatif. On pose}:$   $i) \quad H_{*}(G;A) = H_{*}(K(G,1);A)$   $ii) \quad H^{*}(G;A) = H^{*}(K(G,1);A) .$ 

i) 
$$H_{*}(G;A) = H_{*}(K(G,1);A)$$

ii) 
$$H^*(G;A) = H^*(K(G,1);A)$$

Ces deux foncteurs peuvent être aussi définis directement.

i') Soit  $C_k(G) = A[G \times ... \times \overline{G}]$  et soit  $\partial : C_k(G) \to C_{k-1}(G)$ défini tel que

$$\partial(g_1, \dots, g_k) = (g_2, \dots, g_k) + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_k) + (-1)^k (g_1, \dots, g_{k-1}).$$

Alors  $\theta$  est un bord et si on pose que  $H_*(G;A) = \frac{\ker \theta}{\operatorname{im} \theta}$ , les groupes d'homologie obtenus sont isomorphes à  $H_{\mathbf{x}}(G;A)$ .

ii') Soit  $C^k(G) = \{f : G \times ... \times G \rightarrow A\}$  et posons  $d: C^k(G) \rightarrow C^{k+1}(G)$  tel que

$$df(g_1, ..., g_{k+1}) = f(g_2, ..., g_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i f(g_1, ..., g_i, g_{i+1}, ..., g_{k+1}) + (-1)^{k+1} f(g_1, ..., g_k).$$

On pose  $H^*(G;A) = \frac{\ker d}{\operatorname{im} d}$ . Alors les groupes de cohomologie obtenus sont isomorphes à  $H^*(G;A)$ .

Dans la suite on omettra le plus souvent l'anneau A lorsque  $A = \mathbb{R}$ .

3 - Rappelons quelques propriétés de l'homologie et de la cohomologie des groupes.

i) On a 
$$H_1(G; \mathbb{Z}) \simeq \frac{G}{[G,G]}$$
.

- ii) Si f : G  $\rightarrow$  G' est un morphisme, il existe un morphisme  $f_*: H_*(G;A) \rightarrow H_*(G',A) \quad \text{tel que la correspondance} \quad G \mapsto H_*(G;A) \quad , \quad f \mapsto f_*$  soit un foncteur covariant.
- groupe G tel que  $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$  une famille croissante de sous-groupes d'un groupe  $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ . Alors  $H_*(G;A) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} H_*(G_n;A)$ .

En effet, les inclusions  $G_n \subset G_{n+1}$  donnent lieu à des applications  $K(G_n,1) \to K(G_{n+1},1)$  qui, par un artifice standard, peuvent être considérées comme des inclusions. On pose alors  $X = \bigcup_{N} K(G_n,1)$ . Pour la topologie limite inductive X est alors un K(G,1), ce qui permet de conclure.

iv) Si 
$$G = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} G_n$$
, on a:

$$H_*(G;A) = \underset{\longrightarrow}{\underline{\text{lim}}} H_*(\underset{-n \leqslant k \leqslant n}{\oplus} G_k; A)$$
.

Il s'agit d'une conséquence de iii).

v) Formule de Küneth

$$H_n(G \times G') \simeq \bigoplus_{i+j=n} H_i(G) \otimes H_j(G';A)$$

vi) Suite exacte de Wang.

Soit  $1 \to H \overset{j}{\to} G \overset{\beta}{\to} Z \to 0$  une extension, dont l'action de Z sur H est engendrée par un automorphisme  $h: H \to H$ . Alors la suite :

$$H_n(H;A) \xrightarrow{h_*-id_*} H_n(H;A) \xrightarrow{} H_n(G;A) \xrightarrow{} H_{n-1}(H;A)$$

est exacte et on a un résultat similaire en cohomologie.

En effet, on associe à  $\beta:G\to Z$  une application  $\bar{\beta}:K(G,1)\to S^1 \text{ qui peut être considérée comme une fibration de}$  Hurewiez de fibre un K(H,1), l'action de  $\pi_1(S^1)$  sur H étant h. On applique la suite de Wang classique [16].

4 - Pour terminer on rappelle le

Théorème 1.B. (Formule de Hopf). - Soit G un groupe ayant une présentation

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

Alors le groupe d'homologie  $H_2(G; \mathbb{Z})$  est isomorphe au quotient  $\frac{[F,F] \cap R}{[F,R]}$ .

<u>Démonstration</u> (esquisse) : D'après la formule de Hopf,  $\alpha$  est représenté par un produit de commutateurs  $\prod_{i=1}^g \left[a_i,b_i\right]$  qui est une

relation. On en déduit une application  $\rho:\pi_1(T_g)\to G$  qui vérifie  $\rho_*([T_g])=\alpha[8]$  .

Posons enfin la

## C. LA CLASSE DE GODBILLON-VEY D'UN SOUS-GROUPE DE Diff,(I).

Dans cette section on reprend la définition du cocycle de Thurston et on déduit quelques conséquences.

Nous convenons que dans la suite de cette partie on note  $\text{Diff}_+(I) \quad \text{le groupe des diff\'eomorphismes de classes} \quad \text{$C^\infty$} \quad \text{pr\'eservant}$  l'orientation d'un intervalle ferm\'e I.

W. Thurston a défini un 2-cocycle réel du groupe Diff<sub>+</sub>(I) qui joue un rôle essentiel dans la suite. En fait nous utiliserons un cocycle A cohomologue dû à Mizutani, Morita et Tsuboi [1], défini ci-dessous:

$$A(f,g) = \frac{1}{2} \int_{I} \begin{vmatrix} \log Dg & \log Df \circ g \\ D \log Dg & D \log Df \circ g \end{vmatrix} dt$$

Le lemme suivant montre que l'invariant de Godbillon-Vey d'un groupe est concentré "en dehors des points fixes".

Lemme 1.C.- Soit G un groupe de difféomorphismes de I. Désignons par F l'ensemble des points fixés par tout élément de G. Si pour toute composante J de I-F le groupe  $G|_{\overline{J}}$  a un invariant nul, alors le groupe G a lui-même un invariant nul.

 $\frac{\textit{D\'{e}monstration}}{\textit{D\'{e}monstration}}: \text{ Soit } c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(f_i,g_i) \text{ un } 2\text{-cycle de } G. \text{ En }$  évaluant le cocycle  $A_G$  sur c, on trouve :

$$A_{G} \cdot c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i} \frac{1}{2} \int_{I} \begin{vmatrix} Log Dg_{i} & Log Df_{i} \circ g_{i} \\ D Log Dg_{i} & D Log Df_{i} \circ g_{i} \end{vmatrix} dt$$

Soit  $F_i = \{t \in F \mid Df_i(t) \neq 1 \text{ où } Dg_i(t) \neq 1\}$ .  $F_i$  est un ensemble dénombrable de points. Si  $t \in F - \bigcup F_i$ , chaque intégrant est nul dans l'évaluation de  $A_G$  sur c. Puisque  $\sum\limits_{l} \lambda_i (f_i|_{\overline{J}}, g_i|_{\overline{J}})$  est un cycle du groupe  $G|_{\overline{J}}$ , l'intégrale correspondant à chaque intervalle  $\overline{J}$  est nulle. Puisque l'ensemble  $\bigcup F_i$  est négligeable, on trouve par sommation que  $A_G$ . c = 0, c'est-à-dire que  $A_G$  o dans  $H^2(G)$ .

Précisons maintenant quelques définitions.

Soit G un groupe de difféomorphismes d'un intervalle J.

#### Définition 2.C.-

- i) Un point  $x_0 \in J$  est dit point fixe de G si, pour tout élément  $g \in G$ , on a  $g \times_0 = x_0$ .
  - ii) Le groupe G agit sans point fixe sur  $\mathcal J$  si l'ensemble des points fixes de G est vide.

<u>Définition</u> 3.C.- On appelle contraction d'un intervalle fermé I, un difféomorphisme croissant qui ne fixe aucun point de I.

Soit f une contraction de l'intervalle fermé I et K un groupe de difféomorphismes de l'intervalle  $\left[\bar{x}_{0}, f(x_{0})\right]$  où  $x_{0} \in \hat{I}$ . Soit  $\hat{K}$  le groupe obtenu en prolongeant à I par l'identité les éléments de K. Notons G le groupe engendré par  $\hat{K}$  et f.

Remarquons que les éléments de G ne sont pas différentiables éventuellement sur la trajectoire  $\{f^n(x_0)\}_{n\in \mathbb{Z}}$ , tout en ayant des dérivées à gauche et à droite. On en déduit que l'expression qui définit la cochaîne A a un sens sur G, et de plus, définit un cocycle  $A_G$  par une preuve similaire à celle du cas différentiable.

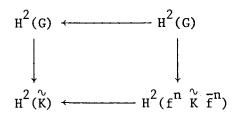
Soit  $H=\bigoplus f^n\overset{\sim}{K}\overline{f}^n$ . Puisque  $H\subset G$ , la restriction de  $ne\mathbb{Z}$   $A_G$  à H est un cocycle  $A_H$  du groupe H.

Lemme 2.C.- La nullité de l'invariant  $\begin{bmatrix} A_K \end{bmatrix}$  du groupe K entraı̂ne celle de l'invariant  $\begin{bmatrix} A_H \end{bmatrix}$  du groupe H.

- i)  $H_2(f^n \overset{\circ}{K} \overline{f}^n)$ .
- ii)  $H_1(f^n \overset{\circ}{K} \overline{f}^n) \otimes H_1(f^k \overset{\circ}{K} \overline{f}^k)$  où  $n \neq k$ .

Nous devons montrer que le cocycle  $A_{\rm H}$  , évalué sur l'image de ces groupes dans  $H_2({\rm H})$ , est identiquement nul.

L'hypothèse du lemme dit que le cocycle  $A_H$ , évalué sur les cycles du groupe  $\overset{\sim}{K}$  est nul. Puisqu'un automorphisme intérieur induit l'identité en cohomologie, on déduit que  $A_H$  s'annule sur les 2 cycles de  $f^n \overset{\sim}{K} \overline{f}^n$ , car le diagramme suivant est commutatif :



Les flèches horizontales proviennent ici des automorphismes intérieurs.

L'image des groupes  $H_1(f^n \ K \ \bar f^n) \otimes H_1(f^k \ K \ \bar f^k)$   $(n \ne k)$  dans  $H_2(H)$ , est engendrée par des 2-tores de  $H_2(H)$ , déterminés par deux difféomorphismes commutants ayant des supports disjoints. Dans ce cas, la forme du cocycle A montre immédiatement que  $A_H$  est identiquement nul sur ces 2-tores .

Le lemme suivant relie la classe de Godbillon-Vey du groupe K à celle du groupe G.

Lemme 3.C.- La nullité de l'invariant du groupe K entraîne celle de l'invariant du groupe G.

#### Démonstration:

a) Nous démontrons d'abord que G est le produit semi-direct du sous-groupe H et du sous-groupe cyclique engendré par f. En effet, si n  $\in \mathbb{Z}$  - 0 , alors  $f^n(x_0) \neq x_0$  et donc  $f^n \notin H$ . De plus, si g est un élément quelconque de G , il existe des éléments  $k_1, \ldots, k_n$  de K, et des entiers  $i_1, \ldots, i_n$  , tel que :

$$g = k_1 f^{i_1} k_2 f^{i_2} \dots k_n f^{i_n}$$

On en déduit que :

Les deux conditions dans la définition du produit semi-direct sont vérifiées.

b) Nous allons finir la démonstration en montrant que  $\text{l'application naturelle} \quad \text{H}^2(\text{G}) \rightarrow \text{H}^2(\text{H}) \text{, qui envoie la classe } \left[ A_{\text{G}} \right] \quad \text{sur la classe} \quad \left[ A_{\text{H}} \right] \text{, est injective.}$ 

Considérons la suite exacte associée au produit semi-direct ci-dessus :

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

L'action du groupe  $\mathbb Z$  sur  $\mathbb H$  est engendrée par l'automorphisme  $h:\mathbb H\to\mathbb H$  défini par  $h(u)=fu\;\overline f^l$ . Puisque les supports de u et h(u) sont différents, l'automorphisme  $h_{\mathbb Z}$  de

$$H_{1}(H;\mathbb{Z}) \simeq \frac{H}{\left[H,H\right]} \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f^{n} \overset{\sim}{K} \overline{f}^{n}}{\left[f^{n} \overset{\sim}{K} \overline{f}^{n}, f^{n} \overset{\sim}{K} \overline{f}^{n}\right]}$$

est sans point fixe non trivial. On en déduit aisément que  $h^* - id^* : H^1(H) \longrightarrow H^1(H) \text{ est surjectif. La suite de Wang cohomologique}$  permet de conclure que la flèche naturelle  $H^2(G) \to H^2(H)$  est injective.

Rappelons ici le:

Théorème 1.C. [11].- La classe de Godbillon-Vey d'un groupe abélien de type fini est nulle.

Remarque 1.C.- Ce théorème reste vrai pour les groupes abéliens quelconques puisque tout groupe est la limite inductive de ses sous-groupes de type fini.

# D. NULLITE DE L'INVARIANT DE GODBILLON-VEY DE CERTAINS GROUPES DE DIFFEOMORPHISMES.

Nous commençons cette section par quelques rappels sur la structure des actions des groupes de difféomorphismes et sur leur croissance. Nous nous limiterons au minimum nécessaire pour la suite.

a) <u>Définition</u> 1.D.- On appelle minimal de l'action d'un groupe de difféomorphisme sur un intervalle J quelconque, tout ensemble saturé, non-vide, fermé dans J, qui est minimal pour ces deux propriétés.

Soit G un groupe de type fini de difféomorphismes d'un intervalle fermé I. Soit K un fermé, saturé pour l'action de G, J une composante connexe de I-K, et  $G_J$  le sous-groupe des éléments de G qui laissent J invariant.

Proposition 1.D. [2].— Il existe un minimal pour l'action de  $G_{\overline{J}}$  sur J.

Remarque 1.D.- La convention utilisée dans ce travail est de se situer dans la catégorie  $C^{\infty}$ . Toutefois, nous attirons l'attention sur le fait que la proposition ci-dessus n'est vraie qu'une classe  $C^{r}$   $r \ge 2$ , en raison du fait que le groupe  $G_{J}$  n'est pas de type fini en général.

Soit G un groupe de type fini de difféomorphismes d'un intervalle I fermé. Nous définissons une suite croissante d'ensembles saturés fermés, de la manière suivante :

- i) M est l'ensemble des points fixes de G.
- ii) Si  $M_k$  est défini, soit  $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$  la suite des composantes connexes de  $I-M_k$ , et  $(G_{J_n})_{n\in\mathbb{N}}$  les sous-groupes laissant ces composantes invariantes. On note  $M_k^n$  la réunion (non vide) des ensembles minimaux de l'action de  $G_{J_n}$  sur  $J_n$ . On définit :

$$M_{k+1} = M_k \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_k^n).$$

On voit facilement que  $\begin{subarray}{ll} M_{k+1} & \begin{subarray}{ll} est saturé, et on vérifie que c'est un fermé de I. \end{subarray}$ 

<u>Définition</u> 2.D.- L'action d'un groupe de difféomorphismes d'un intervalle est dite de hauteur finie égale à n+1, si  $M_{n-1} \neq M_n$  et  $M_n = 1$ . Dans le cas contraire, elle est dite de hauteur infinie.

<u>Définition</u> 3.D.- Une trajectoire de l'action d'un groupe de difféomorphismes est de niveau n si elle est contenue dans  $\frac{M}{n}$  -  $\frac{M}{n-1}$ .

b) Passons à quelques rappels sur la croissance.

Soit f et g deux fonctions croissantes de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  (ou de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}).$ 

### Définitions:

- - $f(x) \le \alpha g(\beta x + \gamma)$  pour tout x.
- ii) Les deux conditions f > g et g > f définissent une relation d'équivalence. On dit que f et g ont même type de croissance, si elles sont équivalentes au sens de cette relation.
- iii) Une fonction f est à croissance polynomiale, si elle est dominée par un polynôme. Elle est dite à croissance exponentielle, si elle domine l'exponentielle.
- Soit G un groupe de type fini, et  $\Sigma = \{g_1, \ldots, g_n\}$  un système symétrique de générateurs de G contenant l'élément neutre e.

Pour un élément g  $\epsilon$  G, on note ||g|| sa longueur par rapport au système  $\Sigma$ : c'est le plus petit entier p, tel que g s'écrit comme un produit  $g_{i_1} \cdots g_{i_p}$ .

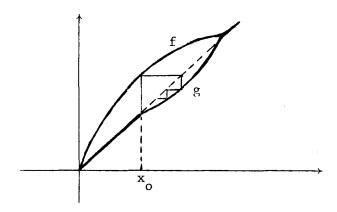
Si H est un sous-groupe de G, on définit la longueur  $||\overline{g}|| \quad d'\text{une classe } \overline{g} \in G/H \quad \text{par : } ||\overline{g}|| = \inf ||g||. \quad \text{La fonction } g \in \overline{g}$  croissance f de G/H par rapport à  $\Sigma$  est définie par :

$$f(n) = cardinal (G/H)_n pour n \in \mathbb{N}$$

où  $(G/H)_n$  est l'ensemble des éléments de longueur inférieure ou égale à n de G/H. On vérifie que le type de croissance de f ne dépend pas du choix de  $\Sigma$  [10].

c) <u>Définition</u> 4.D.- Une trajectoire  $\gamma$  de l'action d'un groupe de difféomorphismes G, est appelée ressort, s'il existe x,  $a \in \gamma$  et  $g \in G$ , tel que la suite  $g^n x$  converge vers a.

Exemple 1.0.- La figure ci-dessous illustre cette situation : la trajectoire du point  $\mathbf{x}_{o}$ , sous l'action du groupe engendré par les deux difféomorphismes f et g, est une trajectoire ressort.



Ces différentes notions sont reliées dans le théorème suivant dû à Duminy et Hector :

Théorème 1.D. [2].- L'action d'un groupe de type fini de difféomorphismes d'un intervalle fermé est à croissance polynomiale, si et seulement si, elle est de hauteur finie et sans trajectoire ressort.

Remarque 2.0.- Ce théorème est vrai pour un groupe de difféomorphismes de classe  $C^r$   $r \geqslant 2$ .

Soit G, un groupe de type fini de difféomorphismes d'un intervalle I, agissant sans point fixe sur  $\hat{I}$ . Désignons par  $M_1$ , la réunion de I et des minimaux de l'action de G sur  $\hat{I}$ . Soit  $G_1$  le sous-groupe des éléments de G dont  $M_1$  est un ensemble de points fixes.

<u>Proposition</u> 2.D.- Si l'action du groupe G n'a pas de trajectoire ressort alors :

- i) Tout élément de  $\, G \,$  ayant un point fixe dans  $\, \overset{\circ}{I} \,$  appartient  $\, \overset{\circ}{a} \,$   $\, G_{1} \,$  ;
  - ii) L'action de G sur M, I est libre;
  - iii) Si  $M_1 = I$  le groupe G est abélien.

#### Démonstration:

- i) Supposons le contraire et soit  $g \in G$ ,  $x_o \in I$  tel que  $gx_o = x_o$  et  $y_o \in M_1$  tel que  $gy_o \neq y_o$ . Désignons par J la composante connexe du complémentaire de l'ensemble des points fixes de g contenant  $y_o$ . La suite  $g^n y_o$  converge vers un point  $a \in \partial J$ . Puisque  $gx_o = x_o$  on peut supposer que  $a \notin \partial I$ , sinon on remplace g par  $g^{-1}$ . On en déduit que  $a \in \overline{Gy_o}$ , et donc  $\overline{Ga} \subset \overline{Gy_o}$ . La trajectoire de  $y_o$  étant minimale dans I, on obtient  $\overline{Ga} = \overline{Gy_o}$ . Soit alors  $g' \in G$  tel que  $g'a \in J$ . La trajectoire de a est ressort puisque  $g^n g'a \to a$ . Contradiction.
- ii) Soit g  $\epsilon$  G, x  $_{0}$   $\epsilon$  M<sub>1</sub> tel que gx  $_{0}$  = x  $_{0}$ . D'après i), g  $\epsilon$  G<sub>1</sub>, d'où tout point de M<sub>1</sub> est fixe pour g.

iii) Puisque d'après ii)  $G \Big|_{\hat{I}}^{\circ}$  agit librement sur  $\hat{I}$ , il s'agit d'un groupe totalement ordonné, archimédien pour la relation d'ordre naturelle. Le théorème de Birkhoff [1] dit qu'un tel groupe est abélien.

Nous arrivons au résultat central de cette section.

<u>Théorème</u> 2.D.- Soit G un groupe de type fini de difféomorphismes de l'intervalle fermé I, tel que :

- i) L'action de G est à croissance polynomiale.
- ii) En chaque point fixe de l'action de G les germes de l'isotropie forment un groupe abélien. Alors l'invariant de Godbillon-Vey de G est nul.

<u>Démonstration</u>: On fera une récurrence sur la hauteur p de l'action de g, qui est finie (théorème 1.D.).

Si p = 1 alors  $M_0 = I$ ,  $G = \{id\}$  et le théorème est trivial.

Supposons le théorème vrai pour  $p\leqslant n$  et considérons une action de hauteur p=n+1. D'après le lemme 1.C. on peut supposer que  $M_0=\partial I$ .

Dans le cas où  $M_1 = I$ , la proposition 2.D. dit que le groupe G est abélien, d'où la conclusion d'après le théorème 1.C.

Supposons maintenant que  $M_1 \neq I$ . La classification des ensembles minimaux et le théorème de Sacksteder (qui est encore valable sur un intervalle ouvert) [2] impliquent l'existence d'une trajectoire minimale strictement monotone  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  s'accumulant sur  $\partial I$ .

Soit f tel que  $f(x_0) = x_1$ . f est une contraction puisque la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  n'a que deux points d'accumulation. On montre facilement que  $f(x_n) = x_{n+1}$ .

Nous allons terminer la démonstration en montrant que :

- a) Le groupe G est le produit semi-direct de  $G_1$  est du groupe engendré par f.
- b) Chaque élément de  $G_1$  est égal à l'identité au voisinage de  $\partial I$ .
- c) Il existe un système générateur  $\{g_1,\ldots,g_n,f\}$  de G tel que  $g_i\in G_1$ . Soit K le groupe de difféomorphismes de  $\left[x_0,x_1\right]$  engendré par  $f^ng_i\overline{f}^n\big|_{\left[x_0,x_1\right]}$  où  $n\in\mathbb{Z}$ . Alors la classe  $\left[A_K\right]$  est nulle.
  - d) L'invariant  $A_G$  est nul.
- a) Soit g  $\varepsilon$  G. Il existe k  $\neq$  0 tel que g(x<sub>0</sub>) = x<sub>k</sub>. Alors  $\overline{f}^k$ g(x<sub>0</sub>) = x<sub>0</sub>. Donc  $\overline{f}^k$ g  $\varepsilon$  G<sub>1</sub>. Par ailleurs si n  $\neq$  0  $f^n$ (x<sub>0</sub>) = x<sub>n</sub>  $\neq$  x<sub>0</sub> d'où f<sup>n</sup>  $\notin$  G<sub>1</sub>.
- b) Puisque les germes de l'isotropie forment un groupe abélien ceci résulte du théorème de Koppel [7].
- c) Prenons un système générateur  $\{g_1,\ldots,g_n,f\}$  de G. Si on multiplie  $g_i$  avec  $f^i$  où  $k_i\in\mathbb{Z}$  est convenablement choisi on peut supposer que  $g_i\in G_1$ .

Puisque les  $g_i$  sont égaux à l'identité au voisinage de  $\partial I$  le groupe K est de type fini. Sa hauteur étant égale à n, l'hypothèse de récurrence implique que  $\left[A_k^{-}\right]=0$ .

d) Le 1emme 3.C. assure que le groupe engendré par f et les prolongements des éléments de K à I par l'identité en dehors de  $\left[x_0,x_1\right]$  a un invariant nul. On conclut en remarquant que ce dernier groupe contient le groupe G, d'où  $\left[A_G\right]=0$ .

Dans le cas où on ne fait aucune hypothèse sur l'isotropie de l'action nous allons montrer la :

<u>Proposition</u> 3.0. - Soit G un groupe de type fini de difféomorphisme d'un intervalle fermé I vérifiant les conditions :

- i) L'action de G n'a pas de trajectoire ressort;
- ii) La hauteur de l'action de G est inférieure ou égale à 3; Alors la classe de Godbillon-Vey de G est nulle.

Si  $M_1 \neq I$ , on montre comme dans la démonstration du théorème 2.D. qu'il existe une trajectoire monotone  $\gamma = \{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  où  $x_0 \in I$  et f est une contraction. Soit J une composante de  $C\gamma$ . L'action de  $G_1 \mid J$  sur J est de hauteur 1 et donc  $G_1 \mid J$  est abélien d'où,  $G_1$  est abélien lui-même. Sa classe de Godbillon-Vey est nulle d'après la remarque 1.C. Pour terminer, il suffit de montrer que l'application  $H^2(G) \rightarrow H^2(G_1)$  est injective. Ceci est une conséquence de la suite de Wang 3.VI.B. associée à l'extension  $1 \rightarrow G_1 \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$  puisque par le lemme de Koppel [7]  $fg\overline{f}^1 \neq g$  lorsque  $g \in G_1$  et la conjugaison intérieure par f induit un automorphisme sans point fixe non-trivial de  $H_1(G_1;\mathbb{Z}) \cong G_1$  (voir l'argument à la fin de la démonstration du lemme 3.C.).

Nous allons terminer cette section en calculant l'invariant de Godbillon-Vey d'un groupe qui agit sans trajectoire ressort mais dont l'action possède des trajectoires exponentielles.

Le résultat de ce calcul suggère que l'absence des trajectoires ressort devrait entraîner la nullité de l'invariant.

Exemple 2.D.- Soit E([-1,1]) l'ensemble des difféomorphismes  $f \in Diff([-1,1])$  tel que :

- i) f est  $C^{\infty}$  plat en -1 et 1.
- ii) le support de f est un intervalle  $[\bar{a}, a]$ ,  $\bar{a} < 0 < a$  et f'(x) < 1 (resp. f'(x) > 1) sur  $[\bar{a}, 0]$  (resp. sur ]0, a[).

Il existe une suite  $k_n \in E([-1,1])$  tel que si  $[a_n,a_n]$  est le support de  $k_n$  on ait :

iii)  $[\bar{a}_0, a_0] = [-1, 1], a_{n+1} = k_n(\bar{a}_{n+1})$  pour tout n et  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [\bar{a}_n, a_n] = \{0\}.$ 

iv) Si  $h = k_0$ ,  $k_{(n)} = \overline{h}^n \circ k_n \circ h^n$ ,  $\ell_{(n)} = k_{(n)} \circ k_{(n-1)} \circ \dots$  $k_{(1)}$ , alors  $\ell = \lim_{n \to \infty} \ell_{(n)}$  est un difféomorphisme plat en -1.

Soit G le groupe engendré par h et l. Dans [6], il est montré que la trajectoire de O par G est exponentielle. Par ailleurs, l'action de ce groupe n'a pas de trajectoire ressort.

Affirmation: L'invariant de Godbillon-Vey du groupe G est nul.

Désignons par  $G_n$  le groupe engendré par h et  $\ell_{(n)}$ . Il existe des morphismes de groupe  $\pi_n: G \to G_n, \ \pi_{nm}: G_n \to G_m$  tel que  $\pi_n(h) = h, \ \pi_n(\ell) = \ell_{(n)}, \ \pi_{nm}(h) = h, \ \pi_{nm}(\ell_{(n)}) = \ell_{(m)}$ .

On remarque que  $G_n$  est contenu dans le groupe  $H_n$  engendré par  $h,k_1,\ldots,k_n$ . Par application répétée du lemme 3.C. l'invariant de  $H_n$  est nul et donc l'invariant de  $H_n$  est également nul.

Remarquons que si f  $\varepsilon$  G on a  $\lim_{n\to\infty}\pi_n(f)=f$  en topologie  $C^\infty$  puisque ceci est vrai sur les générateurs.

Pour finir soit  $c = \sum_{i=1}^{K} \lambda_{i}(f_{i},g_{i})$  un cycle de G. Puisque  $c_{n} = \sum_{i=1}^{K} \lambda_{i}(\pi_{n}(f),\pi_{n}(g_{i}))$  est alors un cycle de  $G_{n}$  on a d'après ce qui précède :

$$\begin{bmatrix} A_{G_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ \sum_{i=1}^{k} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{-1}^{1} \begin{vmatrix} \log D(\pi_n(g_i)) & \log D & \pi_n(f_i \circ g_i) \\ \log D(\pi_n(g_i)) & D \log D & \pi_n(f_i \circ g_i) \end{vmatrix} dt = 0.$$

Si  $n \to \infty$ , on obtient :  $[A_G] \cdot [c] = 0$  d'où  $[A_G] = 0$ .

# E. FEUILLETAGES TRANSVERSES A UNE FIBRATION EN CERCLES OU EN INTERVALLES.

Dans cette section nous appliquons les résultats précédents aux feuilletages transverses à une fibration. La donnée d'un tel feuilletage sur une variété compacte équivaut à la donnée d'une représentation  $\rho \ : \ \pi_1(M) \to \operatorname{Diff}(F) \quad \text{où} \quad M \quad \text{est la base du fibré et} \quad F \quad \text{la fibre} \quad \boxed{4} \, .$ 

a) Rappelons que la fonction croissance d'une feuille d'un feuilletage sur une variété compacte associe à tout réel r le volume de la boule de rayon r centrée en un point x donné. Le type de croissance de cette fonction ne dépend pas des différents choix effectués [14].

Un théorème de Plante [14] établit que le type de croissance de la trajectoire d'un groupe de difféomorphismes est le même que le type de croissance de la feuille correspondante lorsqu'on suspend l'action de ce groupe.

b) Rappelons enfin le résultat fondamental reliant l'invariant de Godbillon-Vey d'un feuilletage obtenu par la suspension d'une représentation  $\rho:\pi_1(M)\to \mathrm{Diff}(I)$  du groupe fondamental d'une variété compacte dans le groupe des difféomorphismes d'un intervalle fermé à la classe [A]  $\varepsilon$  H<sup>2</sup>(Diff(I); fR).

Théorème 1. E.  $\boxed{1}$  .- Soit  $j: M \to K(\pi_1(M), 1)$  l'application d'inclusion lors de l'adjonction de cellules de dimension  $k \geqslant 2$  à M. Alors la classe de Godbillon-Vey du feuilletage obtenu par la suspension de l'action de  $\rho$  intégrée sur la fibre est l'élément  $j^*$   $\rho^*$   $\boxed{A}$   $\epsilon$   $H^2(M;\mathbb{R})$ .

Pour démontrer que l'invariant de Godbillon-Vey est nul il suffit donc que la classe  $\left[A_G\right]$   $\in$   $H^2(G;\mathbb{R})$  soit nulle où  $G=\rho(\pi_1(M))$ . Cette condition est d'ailleurs nécessaire puisque d'après le corollaire 1.B. si  $\alpha \in H_2(G)$  il existe  $\rho:\pi_1(T_g) \to G$  tel que  $\rho_*[T_g]=\alpha$  où  $T_g$  est un tore à g anses.

Nous allons démontrer le :

Théorème 2.E.- Tout feuilletage à croissance polynomiale et holonomie abélienne transverse à une fibration en cercles où en intervalles fermés a un invariant de Godbillon-Vey nul.

<u>Démonstration</u>: Pour un feuilletage transverse à une fibration en intervalles ceci est une transcription du théorème 2.D. en tenant compte des résultats mentionnés ci-dessus.

Supposons que le feuilletage est transverse à une fibration en cercles. Deux cas se présentent alors :

- i) Il n'y a pas de feuille compacte. Un théorème de Plante montre que le feuilletage est sans holonomie [14] et donc l'holonomie globale est abélienne. La nullité de l'invariant dans ce cas est prouvée dans [12].
- ii) Il existe une feuille compacte. En coupant le long de cette feuille la variété ambiante on obtient un fibré en intervalles feuilleté transverse aux fibres.

La classe de Godbillon-Vey du feuilletage ainsi obtenu est nulle. On peut alors conclure puisque la cohomologie relative au bord du fibré en intervalles s'identifie à la cohomologie relative à la feuille compacte du fibré en cercles [16].

Remarque 1.E.- Nous pouvons montrer par une démonstration similaire à celle du théorème 2.E. que tout feuilletage à croissance polynomiale de hauteur inférieure ou égale à 3 transverse à une fibration a un invariant nul. On utilise pour ceci la proposition 3.D.

#### CONCLUSION

Le premier problème soulevé par les résultats de cette seconde partie est de démontrer le théorème 2.E. sans hypothèse sur l'holonomie.

Plus généralement il est raisonnable de penser qu'un feuilletage transverse à une fibration qui n'a pas de feuilles ressort a un invariant de Godbillon-Vey nul. En particulier un feuilletage à croissance non-exponentielle aurait une classe nulle.

Enfin il restera à abandonner l'hypothèse faite sur la structure transverse en faisant sans doute appel à une étude poussée de la structure du feuilletage.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Birkhoff Lattice theory, A.M.S. vol. XXV (1948).
- [2] Cantwell-Conlon-Duminy-Hector Architecture des feuilletages, (à paraître).
- [3] C. Godbillon-J.Vey Un invariant des feuilletages de codimension 1, C.R.A.S. 273 (1971), 92-95.
- [4] A. HAefliger Variétés feuilletées,
  Ann. Ec. Norm. Sup. de Pise, Série III, vol. 16,
  (1962), 367-397.
- [5] G. Hector Croissance des feuilletages presque sans holonomie, L. N. n°. 652, (1978).
- [6] G. Hector Leaves whose growth is neither exponential nor polynomial, Topology 16 (1977), 451-459.
- [7] N. Koppel Comuting diffeomorphisms,
  Global Analysis, Symp. Pure Math., vol. XIV, A.M.S.,
  (1970), 165-184.
- [8] J.L. Loday K-théorie algébrique et représentations de groupes Thèse Strasbourg (1975).
- [9] S. Mac Lane Homology, Academic Press, (1963).
- [10] J. Milnor A note on curvature and fundamental group,
  Journ. of Diff. Geom. 2 (1968), 1-7.
- [11] T. Mizutani S. Morita T. Tsuboi Foliated J-bundles and the Godbillon-Vey class of codimension one foliations.

  (à paraître).
- [12] S. Morita T. Tsuboi The Godbillon-Vey class of codimension one foliations without holonomy, Topology, vol. 19 (1980), pp. 43-49.
- [13] T. Nishimori S.R.H. decompositions of codimension one foliations and the Godbillon-Vey classes,

  Tohôku Math. Journal (à paraître).

[14] J. Plante

- Foliations with measure preserving holonomy, Ann. of Math. 102 (1975), 327-361.

[15] G. Reeb

- Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann (1952).

[16] E. Spanier

- Algebraic Topology, Mc Graw-Hill (1966).

