

50376
1980
154

N° d'ordre : 50376
1980
154

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR INGÉNIEUR

EN MECANIQUE

PAR

JEAN-YVES HENRY



PLAQUE PERCEE D'UN TROU ET SOUMISE EN COMPRESSION :

ETUDE DES CONDITIONS DE PROPAGATION DE LA FISSURE DE TRACTION.

Soutenu le 14 novembre 1980

JURY

MM. PAQUET	Lille	Président
PARSY	UST Lille	Rapporteur
MORLIER	Université de Bordeaux	Examineur
DUFFAUT	B.R.G.M. Orléans	Examineur
HENRY	UST Lille	Examineur

A ma femme,

A Grégory et Céline,

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés dans le cadre des recherches menées par le groupe "Roches" du Laboratoire "Structure et Propriétés de l'Etat solide", associé au C.N.R.S. (LA n° 234).

Qu'il me soit permis d'abord d'exprimer ma gratitude à toutes les personnes qui m'ont apporté enseignements, conseils et encouragements à l'occasion de cette recherche.

Monsieur le Professeur J. PAQUET a bien voulu accepter de présider mon Jury. Je lui suis très reconnaissant de l'intérêt qu'il me témoigne ainsi.

J'adresse mes remerciements à Monsieur PARSY, Rapporteur de ce présent travail, ainsi qu'à Messieurs P. DUFFAUT, du B.R.G.M. Orléans et M. MORLIER, de l'Université de Bordeaux qui ont bien voulu examiner ce mémoire.

J'exprime ma vive reconnaissance à Monsieur J.P. HENRY qui m'a initié à la mécanique des roches, et m'a guidé tout au long de cette étude.

Ma reconnaissance se tourne également vers M. FREMERY, pour l'aide qu'il m'a accordé dans la réalisation de l'étude en éléments finis.

C'est avec plaisir que j'adresse tous mes remerciements à mes collègues et amis et à l'ensemble des services, tant du Laboratoire Associé que de l'E.U.D.I.L. pour le soutien moral et matériel qu'il m'ont apportés pendant toute la durée de ce travail.

Enfin, je suis heureux de remercier Madame CORNILLE à qui est revenue la lourde tâche de déchiffrer mon texte et M. DERACHE qui a assuré le tirage de ma thèse.

SOMMAIRE

CHAPITRE 1

- . Introduction p. 1

CHAPITRE 2

- . Rupture de plaque en compression simple p. 3
 - mécanismes de Rupture et Condition de Rupture selon les critères
- 2.1 Mécanismes de Ruptures : Fissure de Traction, p. 3
 - Fissure de cisaillement
- 2.2 Approche classique - Condition de Rupture selon p. 5
 - les critères
 - Etude bibliographique
 - 2.2.1 Critères d'initiation ou Critères liés à p. 6
 - des défauts non évolutifs
 - 2.2.2 Critères de propagation ou critère de p. 11
 - rupture liés à des défauts évolutifs

CHAPITRE 3

- . Etude de la formation par traction (fissure de traction)
- 3.1 Introduction - Modèle utilisé p. 18
- 3.2 Méthode des Potentiels complexes p. 18
 - 3.2.1 Rappel des équations de Koloxov-Mukhelishvili p. 19
 - 3.2.2 Transformation conforme et transformation des p. 21
 - équations de Kolosov-Mukhelishvili
 - 3.2.3 Calcul des potentiels complexes p. 24

3.2.4	Détermination de l'énergie G d'avancement de Fissure	p. 27
3.2.5	Programme de Calcul	p. 33
3.2.6	Résultats	p. 34
3.3	Eléments finis	p. 37
3.3.1	Présentation	p. 38
3.3.2	Méthode	p. 38
3.3.3	Résultats	p. 42
3.4	Méthode des discontinuités de déplacement	p. 49
3.4.1	Rappel de la Méthode	p. 49
3.4.2	Calcul de l'Energie G	p. 50
3.4.3	Introduction des Conditions aux limites	p. 52
3.4.4	Plaque Infinie Résultats	p. 54
3.4.5	Influence de la taille de la plaque	p. 56
3.5	Comparaison des Résultats obtenus par les différentes méthodes - Stabilité de la propagation	p. 60
3.5.1	Plaque Infinie	p. 60
3.5.2	Influence de la taille de la plaque	p. 60

CHAPITRE 4

. Etude expérimentale	p. 65	
4.1	Description Géomorphologique des Roches étudiées	p. 65
4.2	Détermination des énergies de propagation de fissure par flexion 3 points	p. 66
4.3	Descriptions des plaques et de l'essai	p. 69
4.3.1	Description des plaques	p. 69

4.3.2 Enregistrement de la propagation	p. 72
4.3.3 Technique de l'essai	p. 79
4.3.4 Imprégnation	p. 79
4.4 Résultats	p. 82
4.4.1 Détermination des Courbes G_c (L)	p. 82
4.4.2 Discussion des Résultats - Influence du Gradient de Contraintes en tête de fissure	p. 87
4.4.3 Autres Essais	p. 94
4.5 Etude du Mécanisme de Propagation	p. 98
4.5.1 Micrite 07	p. 98
4.5.2 Marbre 10	p. 98
4.5.3 Marbre 16	p. 98

CHAPITRE 5

. Conclusion	p.102
Annexes 1	p.104
Annexes 2	p.107
Bibliographie	p.115

INTRODUCTION

L'étude envisagée concerne le comportement d'une plaque percée d'un trou et soumise à une compression monoaxiale. Nous nous proposons de définir les conditions d'initiation et de propagation de la fissure axiale.

Une analyse bibliographique montrera que l'idée directrice des travaux antérieurs est la recherche d'un critère mécanique décrivant, ou la rupture ou le début de rupture, le matériau étant considéré comme élasto-fragile. Les critères traduisant la condition de début de rupture ne font pas, ou peu, intervenir la structure propre du matériau (pores, défauts, fissures ...).

Nous allons reprendre cette étude par la mécanique linéaire de la rupture. Celle-ci aborde le problème avec des méthodes différentes, elle s'intéresse essentiellement aux défauts et à leur évolution, en cherchant à décrire les conditions nécessaires de propagation et de stabilité de la fissure.

Les conditions d'évolution sont alors exprimées sous forme de balance d'énergie ; en faisant intervenir, d'une part l'énergie fournie au matériau (énergie potentielle, énergie interne), et, d'autre part l'énergie dépensée en la création de nouvelles surfaces pendant la propagation des défauts.

Dans une telle approche, il est nécessaire de déterminer l'énergie d'avancement de fissure G en fonction de la longueur de fissure dans le cas du modèle utilisé : plaque percée d'un trou en compression monoaxiale, comportant deux fissures radiales évoluant en mode I, symétriquement par rapport au trou. Trois types de méthodes seront utilisées :

- Une méthode de potentiels complexes et de transformation conforme, avec prolongement analytique, méthode semblable à celle utilisée par BOWIE dans le cas de la traction ; l'énergie G sera obtenue directement après lissage de la courbe par la méthode des moindres carrés.
- une méthode des éléments finis avec maillage triangulaire à trois noeuds.
- une méthode par intégrale de frontière, dite de discontinuités de déplacement, l'énergie G est alors calculée en simulant un accroissement virtuel de la longueur de fissure.

L'étude expérimentale réalisée portera sur l'analyse du comportement de plaques de roches calcaires de nature différente (micrite, marbres microfissurés).

Elle aura pour but de vérifier les conditions de propagation de la fissure de traction dans un état de contrainte particulier.

Chapitre 2.

Rupture de plaque trouée en compression simple : mécanismes

A - Dans un premier temps, nous allons analyser au travers de la bibliographie les divers types de fissures qui conduiront à la rupture globale de l'échantillon. Cette revue des travaux effectués sur le sujet montrera que l'approche du problème est toujours posée en terme de mécanique des milieux continus, c'est à dire pour un milieu exempt de défauts.

2.1 MÉCANISMES DE RUPTURES : FISSURE DE TRACTION, FISSURE DE CISAILLEMENT.

Quelques études ont été menées sur la rupture en compression à partir d'un trou sur des échantillons fabriqués, ayant un comportement élasto-fragile.

Après avoir délimité une zone de compression uniforme sur un parallélépipède d'AU 36 soumis à une compression uniaxiale (fig. 2.01), CALVET | 1 | a déterminé, pour des modèles de pates pures ou de mortier (fig. 2.02), par visualisation directe, la forme de trous de fissures à la surface du modèle et l'évolution de ces traces.

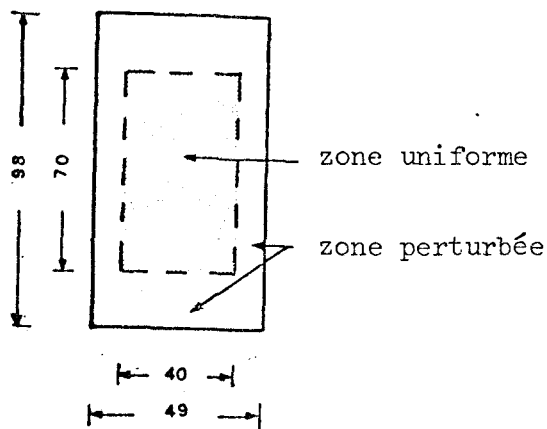


Fig. 2.01

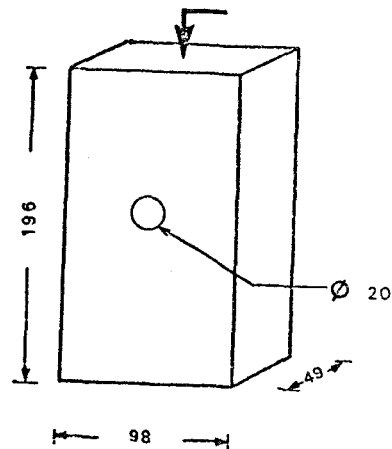


Fig. 2.02

De ces observations, CALVET distingue deux stades différents de fissuration en compression monoaxiale. Les figures (2.03, a.b) représentent l'aspect du modèle sous faible charge lors de la microfissuration (fig. 2.03, a), puis sous charges élevées lors de la rupture (fig. 2.03, b).

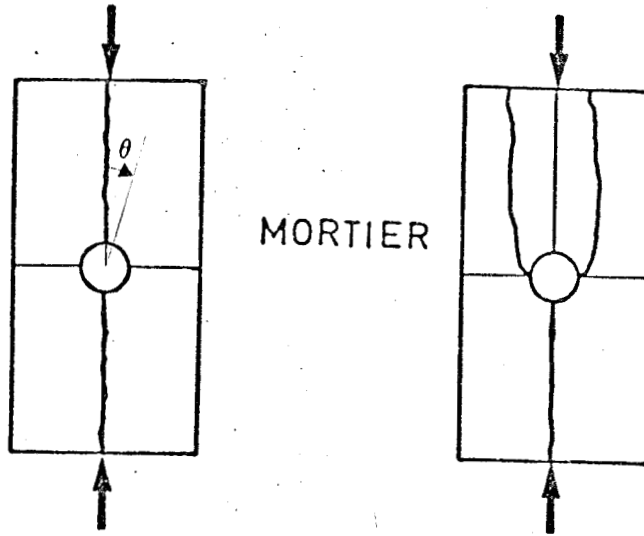


Fig. 2.03 a

Fig. 2.03 b

Fig. 2.03 a
première fissure.

Fig. 2.03 b
aspect à charge élevée
(ou rupture).

Nous pouvons constater sur la fig. 2.03 que la seule microfissure qui apparaît à faible charge est dirigée suivant l'axe $\theta = 0$. A la rupture, le modèle se comporte comme deux demi-prismes enrochés sur les bords non chargés, l'échancrure étant un demi-cercle.

Cette étude ne permet pas d'analyser l'évolution de fissuration, ni de déterminer les divers types de fissures ainsi que leur rôle respectif dans la ruine de l'échantillon. LAJTAI EZ, LAJTAI N | 2 |, dans le cas d'échantillons de plâtre (fig. 2.04) soumis à une faible pression de confinement, ont étudié le mécanisme conduisant à la rupture.

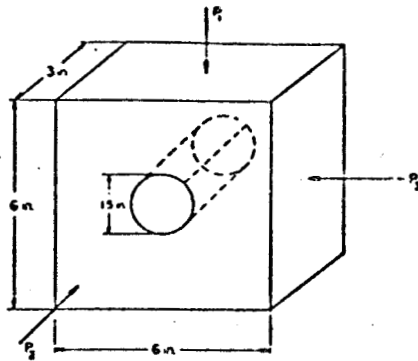


Fig. 2.04

Modèle utilisé par LAJTAI EZ
LAJTAI UN

Les divers types de fissures sont notées par ordre d'apparition (fig. 2.05). En premier (a) se développe une fissure de *traction primaire* dans l'axe de compression ($\theta = 0$), puis à $\theta = 90^\circ$ (b) par rapport à cette fissure apparaît en bord de trou, une fissure de *cisaillement normal* (c) qui devient une zone de broyage ; dans cette zone de broyage, démarre (d), en bord de trou, la fissure de *cisaillement incliné* et la rupture (e) coïncidera avec l'apparition d'une *fissure de traction secondaire*.

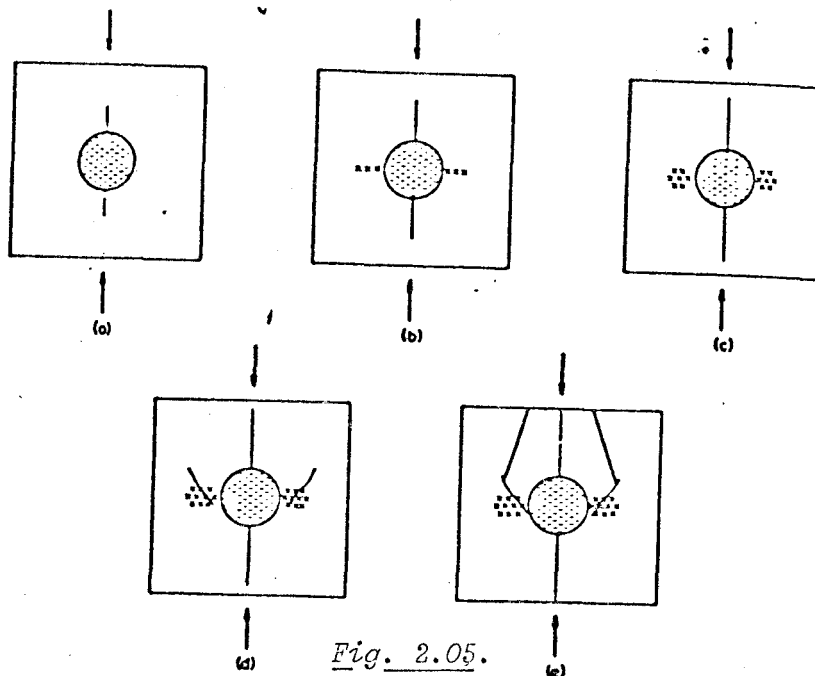


Fig. 2.05.

- a) fissure de traction primaire b) fissure de cisaillement normal
 c) zone de broyage d) cisaillement incliné dans la zone de broyage
 e) rupture coïncidant avec l'apparition de la fissure de traction secondaire.

Il faut cependant noter que la pression de confinement intervient dans le développement des fissures et change l'importance des divers types de fractures | 3 |.

De ces études, on en retire que la rupture en compression pour une plaque percée d'un trou procède :

- a) d'une fissure de traction dont le plan est dans l'axe des charges,
 b) puis d'une fissuration de cisaillement.

Dans le cadre de notre recherche, nous avons entrepris une étude théorique au sens de la mécanique de la rupture afin d'établir et de confirmer ces deux points essentiels.

2.2 APPROCHE CLASSIQUE. CONDITION DE RUPTURE SELON LES CRITÈRES.

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

La rupture fragile des roches est un processus complexe. La connaissance de cet état limite du matériau se traduit en terme de mécanique par la définition d'un critère de rupture qui prend la forme d'une relation liant les contraintes σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} en condition de rupture de la forme

$$f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, T, \dot{\sigma}) = 0$$

Dans notre étude, nous ne tiendrons pas compte de la température ni de la vitesse de prise en charge.

Lorsque l'on ne connaît pas les critères applicables au matériau, on peut, dès lors que l'on dispose d'observations expérimentales suffisamment fines de l'apparition de la fissuration, tenter de définir les lois de passage à l'état limite. Toutefois, il convient de noter que la connaissance expérimentale des figures de rupture ne peut donner qu'une image approchée des critères recherchés. Il est essentiel, en effet, de savoir en quels points se manifestent exactement les premiers désordres pour sélectionner parmi les critères connus, ou analyser celui qui permet d'apporter l'application complète et satisfaisante au comportement de la roche.

2.2.1. CRITÈRES D'INITIATION OU CRITÈRES LIÉS À DES DÉFAUTS NON ÉVOLUTIFS

FISSURE DE TRACTION

TRAVAUX DE LORRAIN | 4 | et CALVET | 1 |

Dans le cas de sa thèse, LORRAIN | 4 | a mené une étude pour déterminer, dans le cas du modèle de CALVET (Ch. 21, fig. 2.02), quels étaient les critères les plus appropriés.

Cinq critères ont été étudiés :

a) critères exprimés en contraintes :

- critère de Rankine
- critère de Tresca
- critère de Coulomb-Mohr modifié.

b) critères exprimés en déformation :

- critère de Brandenberger
- critère de Distorsion maximale.

Le tableau ci-après regroupe les valeurs théoriques des fonctions critères étudiées au contour du trou libre. Celles encadrées sont les maxima absolus

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$E\epsilon$	-1,0	-0,88	-0,53	0	-0,13	-0,27	-0,40	-0,51	-0,58	-0,60
$E\gamma$	1,2	1,1	0,64	0	0,78	1,60	2,40	3,04	3,46	3,60
$\sigma_{Tr.}$	-1,0	-0,88	-0,53	0	/	/	/	/	/	/
τ_{max}	1,0	0,88	0,53	0	0,65	1,35	2,0	2,53	2,88	3,0

d'après LORRAIN

L'analyse des modes de fissuration montre que la seule fissure apparaissant sans faible charge est dirigée suivant l'axe de compression (fig. 2.03), c'est à dire à $\theta = 0^\circ$. Il en résulte que seuls les critères d'extension maximale de contrainte de traction maximale et la théorie de Coulomb-Mohr modifiée peuvent expliquer convenablement la naissance de la fissure axiale du modèle de CALVET sous l'effet d'une sollicitation de compression monoaxiale.

Dans le cas de la compression monoaxiale, le critère de Rankine est pratiquement identique au critère de Griffith en contrainte | 5 |

D'autres études | 6 | ont montré que, dans le cas de la compression sur des matériaux fragiles, seuls deux critères classiques pouvaient être retenus, le critère de Coulomb-Mohr modifié ainsi que celui de Griffith.

- Ces critères classiques qui font appel à des défauts non évolutifs ne permettent pas une interprétation complète des phénomènes de fissuration. Le comportement à la rupture est lié (§ 2.1) au développement de fissures.

Le critère de Coulomb-Mohr modifié ainsi que le critère de Griffith ne peuvent s'appliquer à la rupture globale de l'échantillon mais simplement à l'initiation d'une fissure et donc à l'agrandissement du défaut.

TRAVAUX DE LAJTAI

Pour expliquer les conditions de naissance de la fissure axiale, LAJTAI | 7 | reprend la théorie de RANKINE qui est sensiblement identique au critère de GRIFFITH :

$$(2.01) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 = \sigma'_0 \quad \sigma_1 + 3 \sigma_2 < 0 \\ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 8 \sigma'_0 (\sigma_1 + \sigma_2) = 0 \text{ si } \sigma_1 + 3 \sigma_2 > 0 \\ \text{avec } \sigma_1 > 0 \text{ et } \sigma'_0 \text{ résistance limite à la traction} \end{array} \right.$$

Lorsqu'il y a apparition dans la structure de zone de traction :

Ainsi lorsque la contrainte maximale $\sigma_{\theta\theta}(a, \theta)$ (fig. 2.06) en bord de trou atteint la résistance à la traction σ'_0 , la fissure devrait apparaître. (a, rayon du trou).

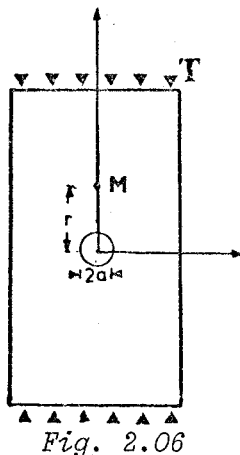


Fig. 2.06

L'état de contrainte dans la plaque en un point M (r,0), situé à une distance r du centre du trou, soumise à la compression, sera | 8 |

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = + \frac{T}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{T}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - 4 \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = + \frac{T}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{T}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{array} \right.$$

En réalité, le matériau possède des micro fissures que l'on peut supposer aléatoirement réparties (cas de l'isotropie) et par conséquent l'on peut admettre qu'il existe une microfissure de longueur d en bord de trou (fig. 2.07)

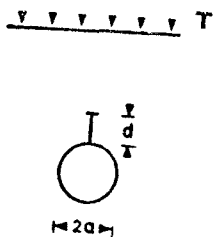


Fig. 2.07

Dans ce cas, le champ de contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est perturbé LAJTAI propose alors le critère suivant :

$$(2.02) \quad \sigma_d = \frac{\sigma_{\theta\theta}(a,0) + \sigma_{\theta\theta}(a+2d,0)}{2} = \sigma'_0$$

$$\text{avec } \sigma_{\theta\theta}(a+2d,0) = \frac{T}{2} \left(\frac{a^2}{(a+2d)^2} - \frac{3a^4}{(a+2d)^4} \right)$$

Les résultats expérimentaux présentés par LAJTAI (fig. 2.08), montrent une bonne concordance avec cette théorie en supposant des défauts de longueurs $d = 0,1$ cm.

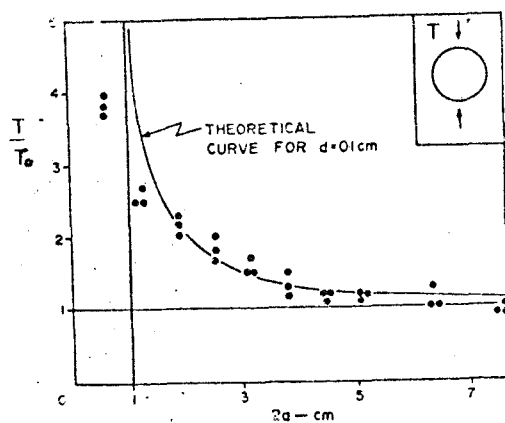


Fig. 2.08

A ce stade, l'on peut déjà faire deux remarques :

1° la valeur de σ_d (de l'équation 2.02) est surestimée, en effet, la répartition de contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ n'est pas linéaire (fig. 2.06), mais tend rapidement vers 0.

2° Ce critère n'est valable que pour des petites distances d , la contrainte $\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)$ devenant de compression à une certaine distance d_1 (fig. 2.06) du trou.

3° Le critère ne décrit pas l'évolution de la fissure.

FISSURE DE CISAILLEMENT

Le problème de l'initiation de la fissure de cisaillement normal est abordé de manière semblable au cas de la fissure de traction par NESETOVA et LAJTAI EZ | 9 |.

Le critère utilisé n'est pas celui de GRIFFITH (relation 2.01) car cette théorie néglige le fait que les fissures ou vides aplatis peuvent se fermer sous l'action de compression suffisamment élevée mais celui de Mac CLINTOCK-WALSH | 10 |. Ce critère utilise la théorie de GRIFFITH en introduisant un coefficient de frottement μ entre les lèvres de la fissure lorsque celle-ci se forme. En problème plan, ce critère a la forme :

$$(2.03) \quad \sigma_1 \left\{ (1 + \mu^2)^{1/2} - \mu \right\} - \sigma_2 \left\{ (1 + \mu^2)^{1/2} + \mu \right\} = -4\sigma_0' \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0'}\right)^2} - 2\mu\sigma_c$$

σ_c : contrainte correspondant à la fermeture du défaut

$\mu = \text{tg } \phi$: coefficient de frottement lèvre sur lèvre de la fissure.

Si l'on note

$$(2.04) \quad T_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) (\mu^2 + 1)^{1/2} - \frac{1}{2} \mu (\sigma_1 + \sigma_2)$$

Le critère du début de fissuration s'écrirait :

$$T_{\text{eff}} = S_0$$

S_0 caractéristique du matériau.

Pour les mêmes raisons que pour la condition de naissance de la fissure de traction, NESETOVA et LAJTAI ont modifié ce critère pour tenir compte de la présence d'une microfissure naturelle de longueur d en bord de trou (Fig. 2.09) et de la modification du champ de contrainte résultant.

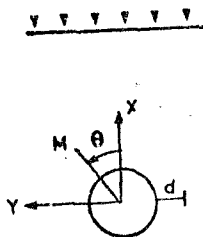


Fig. 2.09

(2.05)

$$T_d = \frac{T_{\text{eff}} \left(a, \frac{\pi}{2} \right) + T_{\text{eff}} \left(a + 2d, \frac{\pi}{2} \right)}{2} = S_0$$

$$T_{\text{eff}} \left(r, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{\mu}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\text{et } \begin{cases} \sigma_1 = \frac{T}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{T}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \\ \sigma_2 = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{T}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^4} \right) \end{cases}$$

Ici encore, les résultats présentés (fig. 2.10) concernant l'initiation de la fissure de cisaillement montre une assez bonne corrélation avec les résultats théoriques en faisant l'hypothèse d'une microfissure naturelle de longueur $d = 0,1$ cm.

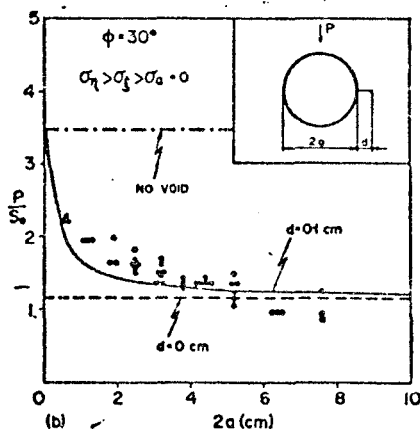


Fig. 2.10.

Résultats expérimentaux de l'initiation de la fissure de cisaillement comparés au critère pour une microfissure naturelle de $d = 0,1$ cm d'après NESETOVA et LAJTAI [9].

Si NESETOVA et LAJTAI montrent une assez bonne concordance entre la théorie et l'expérience, plusieurs remarques peuvent encore être faites :

- (i) Cette théorie a l'avantage de faire intervenir le frottement au niveau de la fissure de cisaillement, cependant la fissure de cisaillement normale (fig. 2.05) n'est pas très bien définie, il s'agit plutôt d'une zone de broyage ou de développement d'une intense microfissuration.
- (ii) Le chemin de fissuration ne peut être décrit par ce critère.
- (iii) Pour le calcul de la contrainte de cisaillement (2.05), NESETOVA et LAJTAI utilisent le modèle de la figure (2.11).

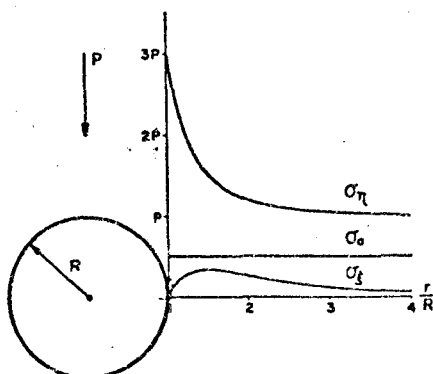


Fig. 2.11

Relation entre les contraintes principales le long du chemin théorique de fissure.

Or, la fissure de cisaillement n'apparaît qu'à charge élevée (§ 2.1) ; à ce stade, la fissure de traction a traversé l'échantillon. Dans ce cas, celui-ci se comporte comme deux demi-prismes encochés sur les bords non chargés, l'échancrure étant un demi-cercle (fig. 2.12).

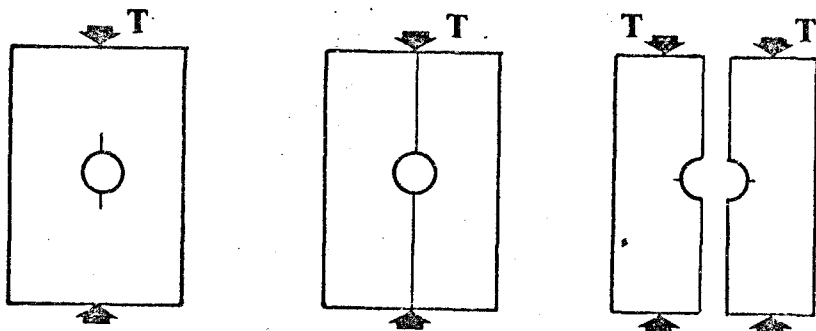


Fig. 2.12

- a) Début fissure de traction.
- b) Fin fissure de traction.
- c) Début fissure de cisaillement.

Ce qui donne un champ de contrainte totalement différent en bordure de trou à $\theta = 90^\circ$.

CONCLUSION

Tous ces critères de rupture sont des critères d'initiation. Ils ne peuvent s'appliquer à la rupture globale ou ruine de l'échantillon. Ils traduisent simplement des conditions nécessaires de naissance d'une fissure mais ne permettent pas de prévoir l'évolution de celle-ci.

Le but du travail présenté est d'exprimer les conditions de démarrage et d'évolution des fissures, c'est à dire en s'intéressant au problème de la stabilité de la fissuration. Ce problème ne peut être abordé que par l'intermédiaire de la mécanique de la rupture.

2.2.2. CRITÈRES DE PROPAGATION OU CRITÈRE DE RUPTURE LIÉS À DES DÉFAUTS ÉVOLUTIFS

Dans le présent problème, nous aurons en présence deux types de fissures, une de traction et une de cisaillement.

Dans ce cadre, nous allons présenter rapidement les principaux résultats de la mécanique de la rupture.

2.2.2.1. APPROCHE CLASSIQUE DE LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE.

- x) Différents modes de ruptures.

Considérons un état initial dans lequel un matériau contenant une

soumis à un système de forces extérieures planes, l'état général de propagation de la fissure dans le cas de notre étude peut être ramené à la superposition de deux modes de sollicitations extérieures simples.

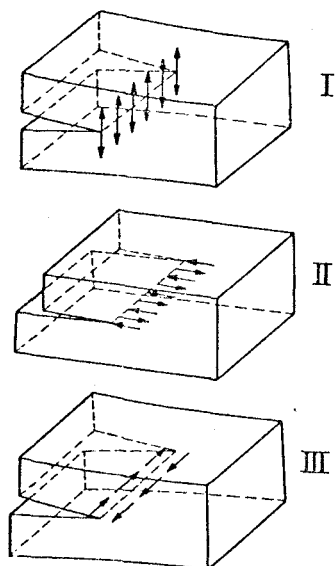


Fig. 2.13

Modes de ruptures simples.

x) Mode I ou mode de traction (fig. 2.13 a)

Les lèvres de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une par rapport à l'autre.

x) Mode II ou mode de cisaillement (fig. 2.13 b)

Les lèvres de la fissure se déplacent dans un même plan et dans une direction perpendiculaire au front de fissure.

Le mode III (ou de torsion, problème anti-plan) n'intervenant pas dans notre problème, nous ne ferons appel qu'aux résultats concernant les modes I et II.

Les facteurs d'intensité de contrainte en mode I et II seront respectivement notés K_I , K_{II} et sont déterminés par la théorie de l'élasticité linéaire en fonction de la géométrie de la fissure, de la structure et des charges appliquées.

xx) Analyse élastique des contraintes et des déformations au voisinage de la fissure.

Diverses méthodes d'analyse permettent d'étudier le champ de contrainte et de déformation au voisinage de la fissure.

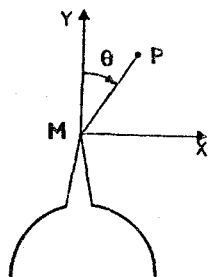


Fig. 2.14

La théorie de l'élasticité [11] montre qu'en point P du plan (x, y) située à une distance r, petite, du point M de la tête de fissure (Mg, MP) = θ (fig. 2.14), les contraintes et les déplacements sont données par les expressions suivantes pour une fissure sollicitée.

- en mode I :

$$(2.06) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \end{array} \right.$$

le problème étant étudié en contrainte plane, l'on a :

$$(2.07) \quad \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$(2.08) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\chi + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\ v = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\chi - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \end{array} \right.$$

$$\chi = (3 - \nu) / (1 + \nu)$$

- en mode II

$$(2.09) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \theta/2 \cos \theta/2 \cos 3\theta/2 \\ \sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \right] \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \end{array} \right.$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0 \quad \text{contrainte plane}$$

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{K_{II}}{2y} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\chi + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ V = \frac{K_{II}}{2y} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \left[\chi - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{array} \right.$$

2.2.2.2. CRITERE DE GRIFFITH DE PROPAGATION DE DEFAUT.

Physiquement, pour qu'une fissure se propage, il faut fournir au matériau une certaine énergie. GRIFFITH [12] a établi un critère d'évolution de fissure à partir du théorème de l'énergie potentielle minimale. Il émet l'hypothèse que l'énergie W absorbée par la création de nouvelles surfaces est directement proportionnelle à l'aire de ces surfaces créées. Considérons le cas de notre étude (fig. 2.15)

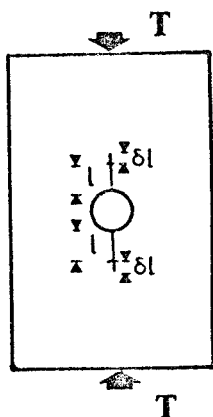


Fig. 2.15

Plaque percée d'un trou possédant deux fissures radiales soumise à une compression monoaxiale.

Si la longueur de fissure augmente virtuellement de δl , l'énergie potentielle globale diminue de :

$$(2.11) \quad \delta W = W_c - W_o = - K \cdot h \cdot G \cdot \delta l$$

h : épaisseur de la plaque.

W_c : énergie potentielle de la plaque percée d'un trou possédant 2 fissures radiales de mêmes longueur.

W_o : énergie potentielle de la plaque percée d'un trou, sans fissure, avec les mêmes conditions aux frontières.

$K=2$: nb de fissures radiales.

G : énergie disponible pour faire avancer la fissure.

Une condition *nécessaire* de propagation de la fissure s'écrira (critère de GRIFFITH | 12 |)

$$(2.12) \quad \begin{aligned} G &> G_c \\ G_c &= 2\gamma \end{aligned}$$

G_c = énergie critique pour faire avancer la fissure caractéristique du matériau.

γ = énergie de surface.

Pour qu'il y ait propagation, il est nécessaire que le critère soit vérifié ; nous n'étudierons pas le fait qu'il peut y avoir propagation sans pour cela que le critère (2.12) soit satisfait, il s'agit dans ce cas de matériau soumis à des processus de corrosion sous contrainte | 13 |.

2.2.2.3. STABILITE DE LA PROPAGATION

On distinguera deux types de propagation.

La propagation stable : La propagation d'une fissure sera dite stable lorsque celle-ci pourra être contrôlée.

La propagation instable : Lorsque celle-ci n'est plus contrôlée (de manière irrémédiable ou momentanée).

Nous avons vu que, selon GRIFFITH, la condition nécessaire d'extension d'une fissure s'écrirait :

$$G = -\frac{\partial W}{\partial l}$$

Le comportement ultérieur de la fissure dépend des variations de $\frac{\partial W}{\partial l}$ c'est à dire $\frac{\partial^2 W}{\partial l^2}$. Soit P_c la valeur de la sollicitation pour laquelle G atteint la valeur 2γ . Si l'on maintient le chargement P constant à partir de ce moment, il peut se présenter deux choses :

a) ou bien l'on est dans une situation telle que :

$$\frac{\partial G}{\partial l} = -\frac{\partial^2 W}{\partial l^2} < 0$$

et le critère de GRIFFITH n'est plus satisfait dès que la fissure aura progressé d'une quantité infinitésimale et il ne peut y avoir propagation.

b) ou bien l'on a :

$$\frac{\partial G}{\partial l} = - \frac{\partial^2 W}{\partial l^2} > 0$$

et le critère de GRIFFITH sera encore satisfait après la propagation de ∂l : il y aura effectivement propagation. Le cas (a) correspond à la *rupture contrôlée ou propagation stable*. La propagation de la fissure n'est possible que par une nouvelle augmentation de la sollicitation, c'est à dire par une augmentation de l'énergie extérieure (fig. 2.16 a).

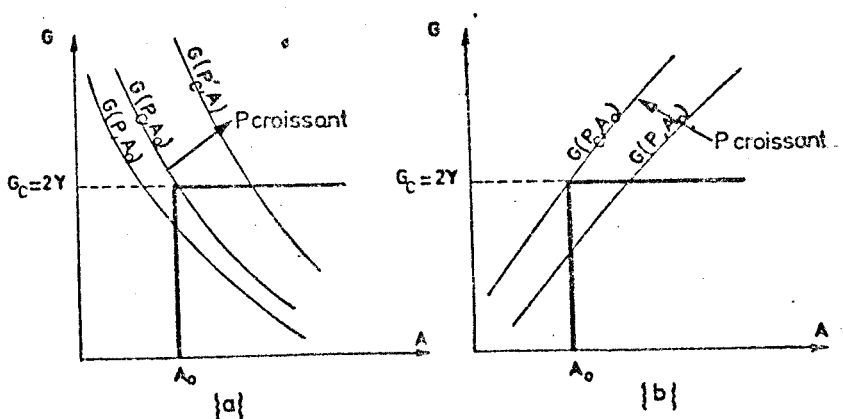


Figure 2.16

Discussion de la stabilité de la fracture selon la forme de l'énergie G disponible :

- a) propagation stable ou contrôlée
- b) propagation instable.

Le cas (b) (fig. 2.16 b) correspond à la *rupture non contrôlée ou propagation instable*. L'excès d'énergie à P constant par exemple sera transformé en énergie cinétique. La fissure se propagera alors à des vitesses de plus en plus élevées qui atteindront des vitesses de l'ordre de 1 000 m/s.

On constate donc que le phénomène de rupture (stabilité, instabilité) n'apparaît pas comme une caractéristique intrinsèque du matériau puisque son éventualité et sa forme dépendent toutes deux du potentiel total du système et par conséquent de sa géométrie, des conditions aux limites...

2.2.2.4. RELATION ENTRE G et K_I et K_{II}

Il est possible, par l'étude du champ de contraintes, et de déplacements autour du défaut, de relier G aux facteurs d'intensité de contraintes K_I , K_{II} par la relation [11]

$$(2.13) \quad G = \alpha \left(\frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} \right) \quad \begin{array}{l} \alpha = 1 - \nu^2 \text{ en déformation plane} \\ \alpha = 1 \quad \text{en contrainte plane} \end{array}$$

E = module d'Young

ν = coefficient de Poisson.

Le critère de énergétique de GRIFFITH [12] permet de traduire l'évolution des défauts. C'est ce critère que nous utiliserons pour décrire la rupture en compression à partir d'un trou. Dans ce qui suit, nous analyserons séparément et en détail, les deux stades de fissurations définis au § 2.1 (condition de démarrage et de propagation, et la stabilité de la fissuration dans le cas uniquement de la fissure de traction).

Chapitre 3.

Etude de la fissuration par traction

fissure de traction

3.1 INTRODUCTION - MODÈLE UTILISÉ

De l'analyse bibliographique exposée précédemment, nous pouvons tirer une constatation importante : à partir du trou naissent deux fissures symétriques dans l'axe de la compression, avant que les fissures de cisaillement n'apparaissent, et ces fissures dites de traction ne conduisent pas à la rupture de l'ensemble. De cette constatation bibliographique et expérimentale, nous avons alors choisi de modéliser le comportement du matériau pendant la fissuration de traction par (fig. 3.01) une plaque percée d'un trou d'où partent *symétriquement* deux fissures de longueur l .

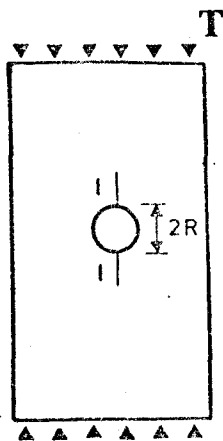


Fig. 3.01

Dans l'optique d'appliquer le critère de GRIFFITH [12], nous allons chercher à déterminer l'énergie d'avancement de fissure G en fonction de la charge de compression T et de la longueur de fissure l/R . Les conditions de calcul seront celles de l'élasticité linéaire dans le cas de matériaux isotropes. Nous proposons trois méthodes de calcul de G :

- méthode des potentiels complexes,
- méthode des éléments finis,
- méthode des discontinuités de déplacements.

3.2 MÉTHODE DES POTENTIELS COMPLEXES

Dans une configuration semblable, mais pour des plaques soumises à traction, BOWIE [14] utilise la méthode de transformation conforme ; cette

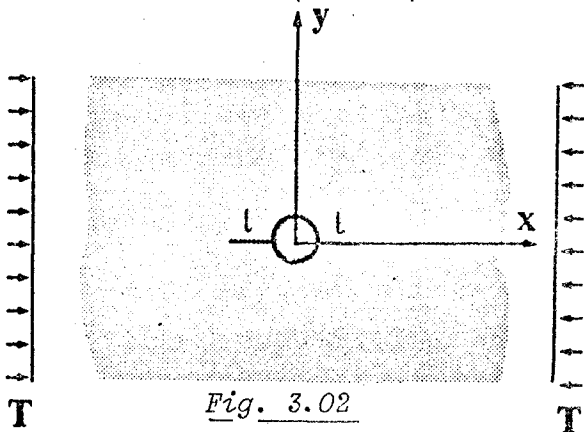


Fig. 3.02

méthode, basée sur la théorie des potentiels complexes, permet de déterminer l'énergie G d'avancement de fissure, dans le cas de plaque infinie. Nous allons reprendre cette méthode, en l'appliquant au cas de la compression (fig. 3.02).

3.2.1. RAPPEL DES ÉQUATIONS DE KOLOSOV - MUKHELISHVILI | 15 |

La solution d'un problème élastique plan s'exprime à l'aide de deux fonctions holomorphes $\phi(z)$ et $g'(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ (ou $z = x + iy$).

En coordonnées cartésiennes, les potentiels complexes sont reliées à l'état de contraintes et de déplacement, en tout point du milieu, par les relations suivantes | 16 |

$$(3.01) \quad \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 [\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] = 4 \operatorname{Re} [\phi'(z)]$$

$$(3.02) \quad \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 [\bar{z} \phi''(z) + g''(z)]$$

$$(3.03) \quad 2\mu [U_1 + iU_2] = \chi \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{g'(z)}$$

avec $\chi = 3 - 4\nu$ déformation plane

$$= \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{contrainte plane.}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E module d'Young

ν coefficient de Poisson.

D'où nous pouvons déduire : (3.01) - (3.02)

$$(3.04) \quad \sigma_{11} - i\sigma_{12} = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} - [\bar{z} \phi''(z) + g''(z)]$$

Cette relation nous permet, en séparant les parties réelles et imaginaires, de calculer les contraintes normales et tangentielles à partir des potentiels complexes.

Si $X_n dS$ et $Y_n dS$ représentent les composantes, suivant l'axe des abscisses et des ordonnées, de la force agissant sur un élément d'axe dS , nous obtenons | 4 | la résultante :

$$(3.05) \quad [\phi(z) + z \overline{\phi'(z)} + \overline{g'(z)}]_S = i \int_S (X_n + i Y_n) dS = f_1(S) + i f_2(S)$$

Pour le moment, nous avons | 15 |

$$(3.06) \quad M = R_e ([-z \bar{z} \phi'(z) + g(z) - z g'(z)]_S)$$

En coordonnées polaires dans la base orthonormée associée (X_r, X_θ) (fig. 3.03), ces équations s'écriront :

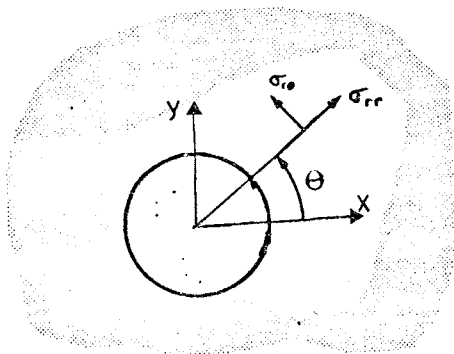


Figure 3.03

$$(3.07) \quad \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4 \operatorname{Re} \phi'(z)$$

$$(3.08) \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = [\bar{z} \phi''(z) + g''(z)]$$

$$(3.09) \quad [U_{rr} + i U_{\theta\theta}] = e^{-i\theta} [\chi \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{g'(z)}]$$

Les potentiels complexes sont des fonctions holomorphes, donc développables en séries de Laurent de la forme :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m z^{-m} \\ g'(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m z^{-m} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} a_m \in \mathbb{R} \\ b_m \in \mathbb{R} \end{array}$$

Le calcul des coefficients a_m et b_m s'effectuera de telle façon que les symétries et les conditions aux limites du problème soient respectées.

Les conditions de symétrie imposent que les coefficients a_m et b_m soient réelles.

Les conditions aux limites du problème énoncé au paragraphe 3.1. sont :

a) Compression uniforme d'intensité $-T$ à l'infini suivant l'axe des x

b) Surface latérale du trou non changée

c) Les lèvres de la ou des deux fissures (fig.302) non chargées puisque la fissure se propage en mode I.

. La condition a) de contrainte à l'infini s'écrit :

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{11}(x, y) = -T \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{12}(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

. La deuxième condition b) devrait théoriquement s'écrire :

$$\vec{T}(M, \vec{X}_R) = \vec{0} \quad \text{pour tout } M \text{ du cercle } C(0, R)$$

$$(\vec{T}(M, \vec{X}_R) \text{ vecteur contrainte appliqué sur une facette de normale } \vec{X}_R)$$
 d'où

$$\sigma_{rr} \vec{X}_{r\theta} + \sigma_{r\theta} \vec{X}_\theta = 0 \quad \text{pour } M \text{ appartenant } C(0, R)$$

En général, lorsque l'on recherche la solution, pour les potentiels $\phi'(z)$, $g'(z)$, sous la forme d'une série tronquée, il n'est pas possible de vérifier cette condition limite en tout point du cercle $C(0, R)$, mais seulement en un certain nombre de points (méthode de fixation à la frontière). Dans cet esprit il est préférable d'écrire que la résultante des actions sur un arc \widehat{AB} (fig. 3.04) est nulle, et ceci quel que soit l'arc \widehat{AB} . Cette condition a l'avantage de préserver une partie de l'équilibre global, à savoir que la résultante des forces sur le cercle $C(0, R)$ est nulle (ce qui n'est pas obligatoirement le cas si l'on impose la contrainte nulle en un certain nombre de points) ; cependant, par cette méthode, basée sur l'égalité des résultantes comme pour celle basée sur l'équilibre des contraintes, l'équilibre des moments n'est pas obligatoirement satisfait.

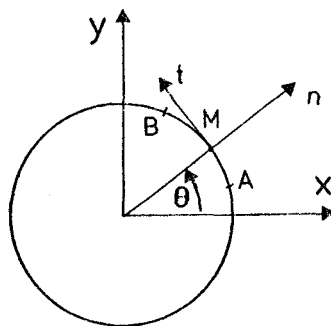


Fig. 3.04

La condition en résultante se déduit de la relation (3.05).

$$(3.12) \quad \left| \phi(z) + z \phi'(z) + g''(z) \right|_A^B = 0 \quad A, B \in C(0, R).$$

La condition aux limites (c) n'est pas pratique à intégrer dans les calculs. Comme la surface latérale et les lèvres de la fissure ne sont pas chargées, il est préférable de transformer ce contour compliqué en un cercle qui ne sera pas chargé.

3.2.2. TRANSFORMATION CONFORME ET TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DE KOLOSOV - MUKHELISHVILI.

Suivant les remarques précédentes, il s'agit de déterminer la fonction qui transforme une plaque infinie percée d'un trou de rayon R possédant K fissures radiales régulièrement réparties à $\theta = 0, \frac{2\pi}{K}, \dots, (k-1) \frac{2\pi}{K}$ de longueur en une plaque infinie percée d'un trou de rayon unité possédant K points de discontinuité ($K = 1, 2$) dans le plan (fig. 3.05).

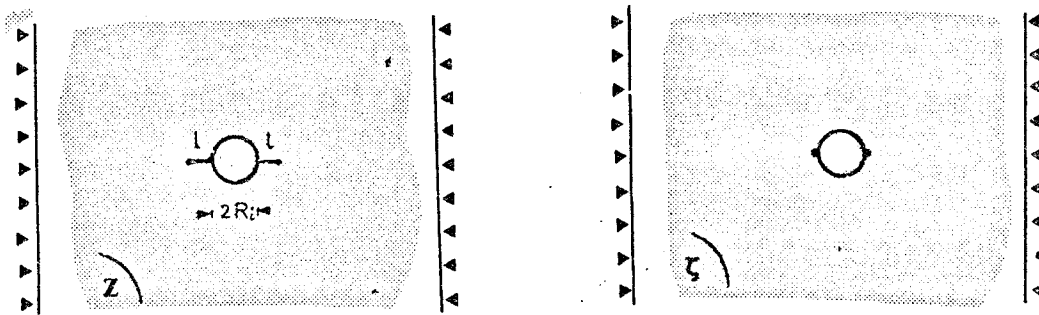


Fig 3.05.

La transformation conforme exprimé sous forme différentielle est | 17 |

$$(3.13) \quad \frac{dz}{z} = \frac{(1 - \zeta^{-K})}{(1 + 2\varepsilon \zeta^{-K} + \zeta^{-2K})^{1/2}} \left(\frac{d\zeta}{\zeta} \right)$$

avec ε : paramètre réel tel que $0 < |\varepsilon| < 1$
permettant d'ajuster la longueur des fissures au problème.

La transformation conforme donnée sous forme différentielle (3.13) ne permet pas d'exprimer aisément les équations de Kolosov-Mukhelishvili (3.07-3.08-3.09) en variable ζ , alors que cela est possible lorsque cette transformation conforme a la forme $Z = \omega(\zeta)$: La fonction $\omega(\zeta)$ sera obtenue par un développement en série de Laurent, convergeant sur et à l'extérieur du cercle unité. La forme d'un tel développement sera :

$$(3.14) \quad Z = \omega(\zeta) = C \left[\zeta + \sum_{j=1}^{+\infty} A_j \zeta^{-j} \right]$$

où les A_j seront choisis réels.

La dérivée logarithmique de (3.14) donne :

$$(3.15) \quad \frac{dZ}{Z} = \left[\frac{(1 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j (-j) \zeta^{-(j+1)})}{\zeta + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \zeta^{-j}} \right] d\zeta$$

Si l'on pose $t = -\varepsilon$ et $U = \zeta^{-K}$, l'expression (3.13) devient :

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{1 - tU}{(1 - tU - U^2)^{1/2}} \left(\frac{dU}{-KU} \right)$$

En remarquant que :

$$(1 - 2tU + U^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} U^n P_n(t)$$

(P_n : polynôme de Legendre de 1ère espèce d'ordre n).

L'équation sous forme différentielle de la transformation conforme (3.13) s'écrira :

$$(3.16) \quad \frac{dZ}{Z} = \left[\zeta^{-1} P_0(-\epsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{-(nK+1)} (P_n(-\epsilon) - P_{n-1}(-\epsilon)) \right] d\zeta$$

L'identification de (3.15) et (3.16) conduit à choisir $j = -(1-Kn)$ c'est à dire un développement de la transformation conforme sous la forme :

$$(3.17) \quad Z = \omega(\zeta) = C \left[\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^{1-Kn} \right]$$

et permet le calcul des coefficients A_n

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = -\frac{P_1 - P_0}{K} \\ A_n = \frac{- \left[(P_n(-\epsilon) - P_{n-1}(-\epsilon)) + \sum_{p=1}^{n-1} A_{n-p} (P_p - P_{p-1}) \right]}{n K} \\ \text{pour } n > 1 \end{array} \right.$$

La transformation conforme sera complètement définie, en choisissant la constante C de telle manière que :

$$R = |\omega(\sigma_1)|$$

avec σ_1 un point du cercle unité dans le plan ζ . Dans la suite, l'on prendra $R = 1$, c'est à dire que les longueurs de fissures seront exprimées par rapport à l'unité de longueur qui sera le rayon du cercle.

Les potentiels complexes s'exprimeront dans le plan Z en fonction de la variable ζ par :

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(z) = \phi(\omega(\zeta)) = \Phi(\zeta) \quad \phi'(z) = \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ g'(z) = g'(\omega(\zeta)) = G'(\zeta) \quad \text{et} \quad g'(z) = \frac{G'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \end{array} \right.$$

Le champ de contrainte (3.07 - 3.08) et de déplacement (3.09) s'écrira en fonction de la variable ζ de la manière suivante :

$$(3.20) \quad \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4 R_e \left(\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right)$$

$$(3.21) \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = \frac{2e^{2i\theta}}{\omega'(\zeta)} \left[\bar{\omega}(\zeta) \frac{\Phi'(\zeta)'}{\omega'(\zeta)} + G''(\zeta) \right]$$

$$(3.22) \quad 2[U_{rr} + iU_{\theta\theta}] = e^{-i\theta} \left[\chi\Phi(\zeta) - \omega(\zeta) \frac{\bar{\Phi}'(\zeta)'}{\omega'(\zeta)} - G'(\zeta) \right]$$

De même la résultante (3.11) devient :

$$(3.23) \quad \left| \Phi(\zeta) + \omega(\zeta) \frac{\Phi'(\zeta)'}{\omega'(\zeta)} + G'(\zeta) \right| \begin{matrix} B \\ A \end{matrix} = f_1(s) + if_2(s)$$

Conditions aux limites

Les conditions limites (3.11) et (3.12) s'écriront à l'aide des relations de Kolosov - Mukhelishvili

. au voisinage de l'infini :

$$(3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi'(\zeta) = -\frac{1}{4} TC \\ G''(\zeta) = -\frac{1}{2} TC \end{array} \right.$$

. au bord du trou non changé

$$(3.23) \quad \Phi(\zeta) + \omega(\zeta) \frac{\Phi'(\zeta)'}{\omega'(\zeta)} + G'(\zeta) = 0 \quad \text{avec } \zeta = e^{i\theta}$$

3.2.3. CALCUL DES POTENTIELS COMPLEXES

Les Potentiels complexes (3.19) sont supposés développables en série de Laurent. Les fonctions sont holomorphes dans le domaine situé à l'extérieur du trou et doivent satisfaire aux conditions limites (3.22) et (3.23). Il est nécessaire de définir la continuité analytique de ces fonctions à travers la limite définie par le cercle $C(0,1)$ sur lequel la résultante est nulle. Cette dernière condition nous permettra de définir complètement les potentiels complexes par le calcul des termes a_m et b_m .

Partageons le domaine étudié en deux parties : une partie gauche notée "G" et une partie droite notée "D". Le matériau occupe par convention la partie "G" à l'extérieur du trou de frontière Γ , le cercle $C(0,1)$ sera décrit de telle façon à laisser le domaine "G" à gauche.

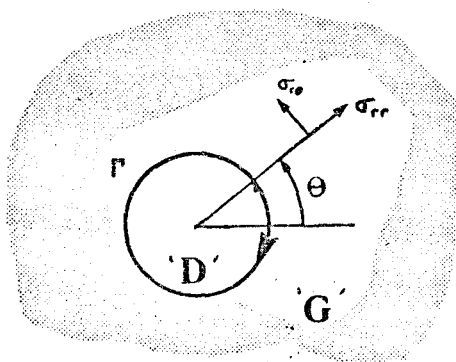


fig. 3.06

Les potentiels complexes (3.09) sont holomorphes en tout point de "G", ce qui donne, compte tenu des conditions aux limites (3.10) :

$$(3.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(z) = -\frac{1}{4} Tz + \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^{-m} \quad a_m \in \mathbb{R} \\ g'(z) = \frac{1}{2} Tz + \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^{-m} \quad b_m \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

En fonction de la variable ζ , ces potentiels prennent la forme :

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\zeta) = -CT \left[\frac{\zeta}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^{1-Kn} \right] \\ G'(\zeta) = CT \left[\frac{1}{2} \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \zeta^{1-kn} \right] \end{array} \right.$$

La condition limite (3.23) devient, après multiplication par $\omega'(\sigma)$ (pour $\zeta = \sigma$ ou $|\zeta| = 1$).

$$(3.26) \quad \omega'(\sigma) G'(\sigma) = -\omega'(\sigma) \bar{\Phi}'(\sigma) - \omega(\bar{\sigma}) \Phi'(\sigma)$$

$\Phi(\zeta)$ et $G'(\zeta)$ sont des fonctions holomorphes dans la région "G" occupée par le matériau ; mais sont indéterminées dans la région "D". Le problème est donc de prolonger la fonction $\Phi(\zeta)$ en "D", de telle manière à obtenir une continuité analytique à travers la limite définie par la circonférence $\Gamma(\sigma \bar{\sigma} = 1)$.

Pour ζ appartenant à la partie "G", l'équation (3.26) s'écrira :

$$\bar{\omega}'(\bar{\zeta}) \bar{G}'(\bar{\zeta}) = -\bar{\omega}'(\bar{\zeta}) \bar{\Phi}'(\bar{\zeta}) - \omega(\zeta) \bar{\Phi}'(\zeta) \quad \zeta \in 'G'$$

Le prolongement analytique de $\Phi(\zeta)$ (ζ en "D") est obtenu dans l'équation précédente en remplaçant $\bar{\zeta}$ par $\frac{1}{\zeta}$

$$\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \bar{\Phi}'(\zeta) = -\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \bar{G}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \omega(\zeta) \bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad \zeta \in 'D'$$

ou

$$\bar{\Phi}'(\zeta) = -\bar{G}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad \zeta \in 'D'$$

ce qui définit la fonction Φ dans le domaine "D". Cette relation permet également le calcul de la fonction $G'(\zeta)$.

$$(3.27) \quad \omega'(\zeta) G'(\zeta) = -\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \bar{\Phi}'(\zeta) - \omega'(\zeta) \bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad \zeta \in 'G'$$

Or, par hypothèse $G'(\zeta)$ est holomorphe en "G", il doit en être de même pour le second membre de cette dernière équation

Les coefficients de toutes les puissances positives en ζ de (3.27) doivent donc être nulles puisque le domaine "G" n'est pas borné.

Pour $|\zeta|$ assez grand on aura en utilisant (3.17) et (3.24) :

$$(3.28) \quad \omega'(\zeta) G'(\zeta) \approx \frac{TC^2 \zeta}{2}$$

Les puissances positives de ζ seront calculées à partir du deuxième membre de (3.27).

$$\begin{aligned} & - C'T \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^{Kn-1} \right) \left(\sum_{t=1}^{\infty} (1-tK) A_t \zeta^{-Kt} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^{Kn-1} \right. \\ & \left. + \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^{Kn-1} \right) \left(\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t (1-K_t) \zeta^{-Kt} \right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^{Kn-1} \right] \end{aligned}$$

Pour résoudre un tel système numériquement, nous limitons le nombre des inconnues α_n à N, la convergence des séries étant vérifiée a posteriori sur la valeur des coefficients α_n . On obtient ainsi le système de Cramer suivant :

* Pour $K = 1$.

$$(3.29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \cdot \alpha_p + \frac{1}{4} A_p + \sum_{n=1}^{N-p} A_{n+p} \alpha_n (1-nK) + \sum_{n=1}^{N-p} A_n \alpha_{n+p} (1-nK) = 0 \quad p \neq 2 \\ & \hspace{15em} = \frac{1}{2} \quad p = 2 \\ & \text{pour } p = 1, \dots, N-1 \\ & \cdot \alpha_N + \frac{1}{4} A_N = 0 \end{aligned} \right.$$

* Pour $K = 2$

$$(3.30) \quad \left\{ \begin{aligned} & \cdot \alpha_p + \frac{1}{4} A_p + \sum_{n=1}^{N-p} A_{n+p} \alpha_n (1-nK) + \sum_{n=1}^{N-p} A_n \alpha_{n+p} (1-nK) = 0 \quad p \neq 1 \\ & \hspace{15em} = \frac{1}{2} \quad p = 1 \\ & \text{pour } p = 1, \dots, N-1 \\ & \cdot \alpha_N + \frac{1}{4} A_N = 0 \end{aligned} \right.$$

dont la résolution permet la détermination des N coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ de $\Phi(\zeta)$. la fonction $\Phi(\zeta)$ est alors définie par la connaissance des coefficients α_n , la fonction $G'(\zeta)$ sera calculée par la relation (3.27).

3.2.4. DÉTERMINATION DE L'ÉNERGIE G D'AVANCEMENT DE FISSURE

Les valeurs de G sont calculées par la relation (2.11) du chapitre 2.3 :

$$(3.31) \quad \delta W = - K.h.G. \delta l. \quad h : \text{épaisseur de la plaque.}$$

avec δW variation de l'énergie potentielle du système dans un accroissement virtuel δl de l'ongueur des K fissures.

$$(3.32) \quad \text{Or } W = W_c - W_o$$

W_c = énergie potentielle de la plaque percée d'un trou possédant K fissures radiales, de même longueur δl disposée à $\theta = 0, \frac{2\pi}{K}, \dots, (K-1)\frac{2\pi}{K}$

W_o = énergie potentielle de la plaque percée d'un trou, sans fissure, avec les mêmes conditions aux frontières.

Calcul de l'énergie W_c

Dans le repère $(M/X_r, X_\theta)$, si l'on appelle $\vec{T}(M, \vec{X}_r)$ le vecteur contrainte appliqué sur le contour γ (cercle de centre O et de rayon R_x) et $\vec{U}(M)$, M appartenant à γ , le vecteur déplacement (fig. 3.07), l'énergie potentielle s'écrira en vertu du théorème de Clapeyron

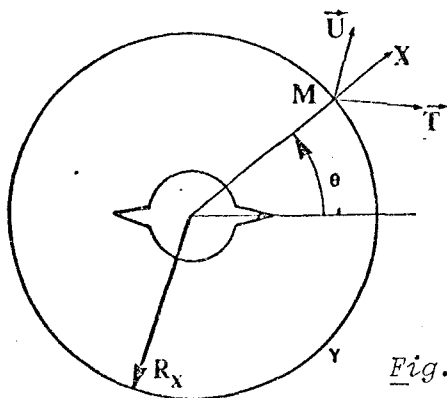


Fig. 3.07.

$$W_c = \lim_{R_x \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} h \int_{\gamma} \vec{T} \cdot \vec{U} \, ds \right]$$

$$W_c = \lim_{R_x \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} h \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} U_{rr} + \sigma_{r\theta} U_{\theta\theta}) R_x \, d\theta \right]$$

Ou encore

$$(3.33) \quad W_c = \lim_{R_x \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} h \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} [(\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta})(U_{rr} - iU_{r\theta})] R_x d\theta \right]$$

En utilisant les relations (3.20) (3.21) (3.27), W_c s'écrit :

$$(3.34) \quad W_c = \lim_{R_x \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} h \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[2R_e \left(\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right) - \frac{e^{2i\theta}}{\omega'(\zeta)} \bar{\omega}(\zeta) \left(\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right)' + \right. \right. \\ \left. \left. + G''(\zeta) \right] - e^{-i\theta} \left[\chi \Phi(\zeta) - \omega(\zeta) \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - G'(\zeta) \right] R_x d\theta \right]$$

On ne tient compte que des termes en ζ de puissance positive ou nulle pour l'intégrante.

Le problème étant étudié en contrainte plane et pour une compression à l'infini selon l'axe des x (fig. 3.01), on obtient :

$$(3.35) \quad W_c = \lim_{R_x \rightarrow \infty} \left[-\frac{h}{e} T^2 \frac{\pi}{4} \left[2 R_x^2 - A_1(1+\nu)C^2 + 4\nu\beta_1 C^2 + 4C^2\alpha_1(1-\nu) \right] \right]$$

Calcul de l'énergie potentielle W_0

Calculons maintenant l'énergie potentielle de la même plaque percée d'un trou de rayon R_1 , mais sans fissure (fig. 3.08) soumis au même chargement $T(M,n)$ sur le contour extérieur γ de centre O et de rayon R_x .

A partir des potentiels complexes $\Phi(\zeta)$ et $G'(\zeta)$ définis précédemment, nous calculons le champ de contrainte appliqué sur la circonférence γ de rayon R_x , à l'aide des relations de Kolosov-Mukhelishvili. Le matériau occupe la région comprise entre la circonférence γ de rayon extérieur R_x et la circonférence Γ de rayon intérieur R_1 ; γ est décrit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, Γ dans le sens des aiguilles d'une montre (Fig. 3.08).

. Trois régions sont ainsi délimitées :

- La région G' à l'intérieur de l'anneau
- La région D_1' à droite du sens de description de γ
- La région D_2' à droite du sens de description de Γ

Le problème est étudié par Milne Thompson [16], cette étude nous permet de déterminer les potentiels complexes à l'intérieur de l'anneau, puis à l'aide de l'équation (3.34) de calculer l'énergie potentielle W_0 en faisant tendre R_x vers l'infini.

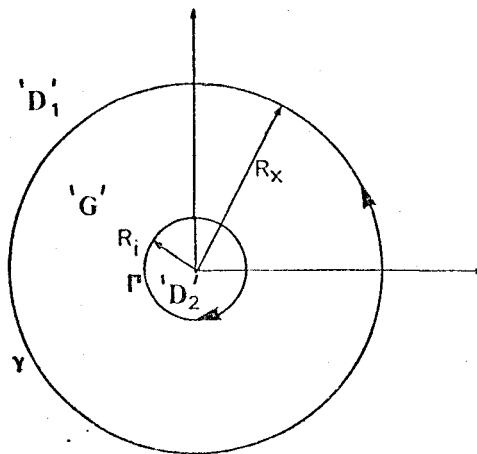


Fig. 3.08.

Contrainte appliquée sur la frontière γ

La demi différence de (3.20) et (3.21) donne

$$\sigma_{rr} - i \sigma_{r\theta} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\Phi'(z)}{\omega'(z)} \right) - \frac{e^{2r\theta}}{\omega'(z)} \left[\bar{\omega}(z) \left(\frac{\Phi'(z)}{\omega'(z)} \right)' + G''(z) \right]$$

Les potentiels $\Phi(z)$ et $G'(z)$ sont déterminés par les relations (3.25) (3.27). En séparant partie imaginaire et partie réelle et en ne tenant compte que des termes en R_x de puissance supérieure ou égale à -2 (cela suffira dans les calculs de l'énergie lorsque l'on fera tendre R_x vers l'infini), les composantes du vecteur contrainte appliquée sont :

$$(3.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \frac{T}{2} \left(1 + C^2 \frac{(A_1 - 2\beta_1)}{R_x^2} \right) - T \cos 2\theta \left[\frac{1}{2} + \frac{C^2}{R_x^2} (A_1 - 4\alpha_1) \right] \\ \sigma_{r\theta} = T \left[\frac{1}{2} - \frac{TC^2}{2R_x^2} (A_1 - 4\alpha_1) \right] \sin 2\theta \end{array} \right.$$

Recherchons les potentiels complexes à l'intérieur de l'anneau soumis au changement (3.36) sur le contour γ et à une contrainte nulle sur le contour Γ . Ces potentiels $\Phi(z)$ et $g'(z)$, solution de ce problème, sont holomorphes en tout point de "G" et seront définis par :

$$(3.37) \quad \begin{aligned} \Phi'(z) = & \frac{1}{2i\pi} \left[-\frac{T}{2} \left(C^2 \frac{(A_1 - 2\beta_1)}{R_x^2} + 1 \right) \int_{\Gamma} \frac{1}{t-z} dt \right. \\ & - T \left[\frac{1}{2} + \frac{C^2}{R_x^2} (A_1 - 4\alpha_1) \right] \int_{\gamma} \frac{e^{-2i\theta}}{t-z} dt \\ & \left. - i \frac{3}{2} \frac{TC^2}{R_x^2} [A_1 - 4\alpha_1] \int_{\gamma} \frac{\sin 2\theta}{t-z} dt \right] \\ & + \chi(z) \end{aligned}$$

avec $\chi(z)$ fonction holomorphe.

Soit $\phi_1(z)$, $\phi'_G(z)$, $\phi'_2(z)$ la somme des intégrales de (3.37) lorsque z appartient successivement au domaine D_1 , G , et D_2 ; l'équation (3.37) prend les valeurs

$$(3.38) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \phi'(z) = \phi'(z) + \chi(z) & (z \text{ en } "D_1") \\ \phi'(z) = \phi'_G(z) + \chi(z) & (z \text{ en } "G") \\ \phi'(z) = \phi'(z) + \chi(z) & (z \text{ en } "D_2") \end{array} \right.$$

Si l'on pose

$$(3.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = -\frac{T}{2} \left(C^2 \frac{(A_1 - 2\beta_1)}{R_x^2} + 1 \right) \\ q = -T \left(\frac{1}{2} + \frac{C^2}{R_x^2} (A_1 - 4\alpha_1) \right) \\ s = -\frac{3}{2} TC^2 (A_1 - 4\alpha_1) \end{array} \right.$$

Les fonctions ϕ'_1 , ϕ'_G , ϕ'_2 sont obtenues par application du théorème des résidus, et l'on obtient :

$$(3.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi'(z) = (-q R^2 + \frac{s}{2}) \frac{1}{R_x^2} \\ \phi'_G(z) = p + \frac{s}{2R_x^4} z^2 \\ \phi'_2(z) = p + \frac{s}{2R_x^4} \end{array} \right.$$

Il reste à définir la fonction $\chi(z)$, cette fonction doit satisfaire l'équation de comptabilité :

$$(3.41) \quad (R_x^2 - R_i^2) \left[\phi'(z) - z \phi''(z) \right] = R_i^2 \overline{\phi}'\left(\frac{R_i^2}{z}\right) - R_x^2 \overline{\phi}'\left(\frac{R_x^2}{z}\right) \text{ (pour } z \text{ en } "G"$$

La fonction $\chi(z)$ est développable en série de Laurent dans l'anneau $R_i < |z| < R_x$ sous la forme :

$$(3.42) \quad \chi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n z^n$$

Alors l'équation (3.41) devient :

$$(3.43) \quad (R_x^2 - R_i^2) p + \frac{s}{2R_x^4} (R_x^2 - R_i^2) z^2 + (R_x^2 - R_i^2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1-n) B_n z^n$$

$$= p R_i^2 + \frac{s R_i^6}{2R_x^4 z^2} + q z^2 + \frac{p z^2}{2R_x^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{R_i^{2(n+1)} R_x^{2(n+1)}}{z^n}$$

Relation valable pour tout z . L'identification des termes de même puissance en z définit les coefficients B_n .

$$(3.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_n = 0 \quad n \neq -2, 0, 2 \\ B_{-2} = q \quad R_i^2 R_x^2 \frac{(R_i^6 - R_x^6)}{(R_x^2 - R_i^2)^4} + \frac{s R_i^4}{2(R_x^2 - R_i^2)^3} (R_i^2 + R_x^2) \\ B_0 = -\frac{p}{2} + \frac{R_i^2 p}{2(R_x^2 - R_i^2)} \\ B_2 = -\frac{s R_i^4}{2(R_x^2 - R_i^2)^3 R_x^4} [3 R_x^2 - R_i^2] + 3q \frac{R_i^2 R_x^2}{(R_x^2 - R_i^2)^2} \end{array} \right.$$

En conclusion, la fonction holomorphe $\chi(z)$ s'écrit :

$$(3.45) \quad \chi(z) = \frac{B_{-2}}{z^2} + B_0 + B_2 z^2$$

Le prolongement analytique dans le cas de l'anneau détermine le potentiel $g''(z)$.

$$(3.46) \quad g''(z) = 2(p + B_0) \frac{R_i^2}{z^2} + R_i^2 \left(\frac{B_{-2}}{R_i^2} - \frac{s}{2R_x^4} - B_2 \right)$$

$$+ \frac{R_i^2}{z^4} \left(s \frac{R_i^4}{2R_x^4} + B_2 R_i^4 + z B_{-2} \right)$$

L'énergie potentielle s'obtient en calculant une intégrale semblable à (3.34) et en faisant tendre le rayon extérieur R_x vers l'infini, ce qui donne :

$$(3.47) \quad W_0 = \lim_{R_x \rightarrow \infty} \left(- \frac{\pi h T^2}{4E} \left[2R_i^2 + 6 R_x^2 + C^2 A (3 - \nu) - 4 C^2 \beta_1 (1 - \nu) - 4 \alpha_1 C^2 (1 + \nu) \right] \right)$$

Calcul de l'énergie disponible pour faire avancer une fissure

La variation d'énergie potentielle w nous est donnée par simple différence (3.35) et (3.47)

$$(3.48) \quad W = w_c - w_0 = \frac{\pi h T^2}{4 E} \left[6 R_i^2 + [4 A - 4 \beta_1 - 8 \alpha_1] C^2 \right]$$

Si l'on note : l La longueur de la fissure ramenée en unité de rayon du trou,

σ_1 un point du cercle unité dans le plan ζ

$$\text{alors : } l = \frac{\omega(1) - (\sigma_1)}{\omega(\sigma_1)}$$

d'où

$$(3.49) \quad 1 + l = \frac{\omega(1)}{\omega(\sigma_1)}$$

Compte tenu de (3.49), l'équation (3.48) pourra encore s'écrire :

$$(3.50) \quad W = \frac{\pi h T^2}{4 E} \left[6 + [4 A_1 - 4 \beta_1 - 8 \alpha_1] \left(\frac{1+l}{\omega(1)} \right)^2 C^2 \right]$$

équation que l'on peut mettre sous la forme :

$$W = \frac{2 \pi T^2}{E} g(l)$$

$$(3.51) \quad g(l) = 3 + \frac{1}{2} [A_1 - \beta_1 - 2 \alpha_1] \left(\frac{1+l}{\omega(1)} \right)^2 C^2$$

β_1 étant déterminé à partir de la condition limite (3.27) par identification des coefficients du terme en ζ^{-1}

$$\beta_1 = \frac{A_1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \sum_{n=1}^N \alpha_n A_n (1 - Kn)$$

L'énergie disponible pour faire avancer la fissure d'une longueur l sera donc, d'après 3.31 :

$$(3.52) \quad G = \frac{2 \pi T}{KE} g'(L)$$

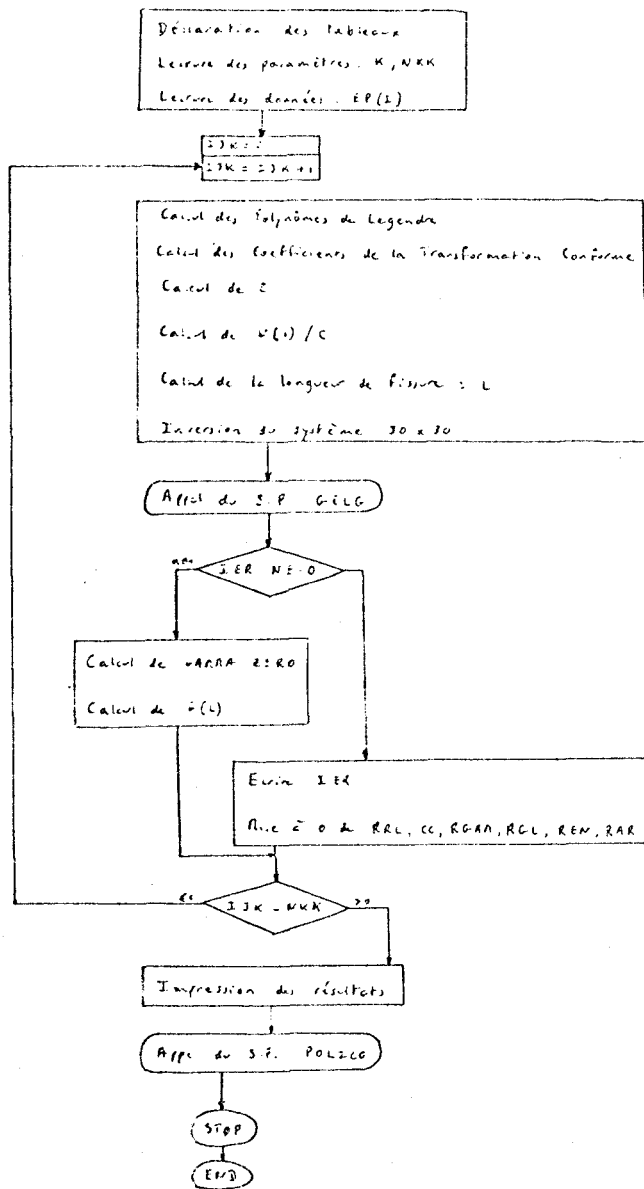
3.2.5. PROGRAMME DE CALCUL

L'ordinateur utilisé est un T 1600 (Télémechanique) de 32 K mots.

Le calcul a été effectué pour le cas de deux fissures radiales (fig. 3.02). Afin d'obtenir des résultats précis, nous avons utilisé un développement de la transformation conforme de trente termes.

ORGANIGRAMME

PLAQUE SOLICITEE A UNE COMPRESSION A L'INFINI SELON LA DIRECTION X



Le listing du programme se trouve en Annexe 1.

3.2.6. RÉSULTATS

Les résultats sont donnés dans les tableaux suivants :
tableau 3.01 - tableau 3.02 - tableau 3.03.

***** ÉCOLE UNIVERSITAIRE D'INGENILURS DE LILLE *****

EPSILON	L	GAM O	C	EN(1)	R(1)	B(L)
-0.99900	0.01398	0.49966	1.00005	0.00050	0.50022	0.00013
-0.99800	0.02509	0.49915	1.00019	0.00100	0.50059	0.00004
-0.99600	0.04562	0.49768	1.00066	0.00200	0.50174	-0.00057
-0.99300	0.06610	0.49507	1.00164	0.00350	0.50381	-0.00208
-0.99100	0.07565	0.49375	1.00234	0.00450	0.50478	-0.00292
-0.99000	0.07956	0.49328	1.00269	0.00500	0.50508	-0.00326
-0.98500	0.09391	0.49185	1.00427	0.00750	0.50775	-0.00433
-0.98000	0.10429	0.49016	1.00550	0.01000	0.50864	-0.00495
-0.97500	0.11464	0.48801	1.00647	0.01250	0.50790	-0.00535
-0.97000	0.12604	0.48595	1.00737	0.01500	0.50907	-0.00557
-0.96500	0.13840	0.48405	1.00834	0.01750	0.51010	-0.00594
-0.96000	0.15115	0.48193	1.00949	0.02000	0.51125	-0.00640
-0.95500	0.16364	0.47953	1.01082	0.02250	0.51269	-0.00734
-0.95000	0.17536	0.47682	1.01231	0.02500	0.51431	-0.00857
-0.94500	0.18601	0.47435	1.01391	0.02750	0.51572	-0.00986
-0.94000	0.19550	0.47257	1.01554	0.03000	0.51655	-0.01095
-0.93300	0.20701	0.47102	1.01777	0.03350	0.51694	-0.01207
-0.93000	0.21143	0.47043	1.01867	0.03500	0.51704	-0.01245
-0.92500	0.21933	0.46932	1.02008	0.03750	0.51731	-0.01297
-0.92000	0.22484	0.46777	1.02138	0.04000	0.51776	-0.01337
-0.91500	0.23128	0.46643	1.02257	0.04250	0.51834	-0.01365
-0.91000	0.23779	0.46481	1.02368	0.04500	0.51898	-0.01382
-0.90500	0.24452	0.46324	1.02474	0.04750	0.51957	-0.01389
-0.90000	0.25155	0.46178	1.02579	0.05000	0.52009	-0.01391
-0.89500	0.25890	0.46042	1.02687	0.05250	0.52052	-0.01394
-0.89000	0.26654	0.45910	1.02800	0.05500	0.52092	-0.01402
-0.88500	0.27441	0.45774	1.02920	0.05750	0.52134	-0.01422
-0.88000	0.28241	0.45627	1.03050	0.06000	0.52184	-0.01457
-0.87500	0.29044	0.45465	1.03189	0.06250	0.52243	-0.01508
-0.87000	0.29841	0.45290	1.03338	0.06500	0.52311	-0.01574

Tableau 3.01

EPSILON	L	GAM O	C	EN(1)	R(1)	B(L)
-0.86500	0.30522	0.45109	1.03494	0.06750	0.52383	-0.01652
-0.86000	0.31379	0.44934	1.03657	0.07000	0.52448	-0.01736
-0.85500	0.32107	0.44780	1.03824	0.07250	0.52498	-0.01819
-0.85300	0.32390	0.44727	1.03891	0.07350	0.52512	-0.01850
-0.84500	0.33465	0.44564	1.04160	0.07750	0.52531	-0.01964
-0.84000	0.34094	0.44488	1.04325	0.08000	0.52524	-0.02023
-0.83500	0.34694	0.44415	1.04486	0.08250	0.52515	-0.02074
-0.83000	0.35268	0.44337	1.04641	0.08500	0.52509	-0.02117
-0.82500	0.35921	0.44250	1.04789	0.08750	0.52509	-0.02151
-0.82000	0.36361	0.44152	1.04931	0.09000	0.52516	-0.02176
-0.81500	0.36892	0.44045	1.05066	0.09250	0.52527	-0.02192
-0.81000	0.37422	0.43933	1.05195	0.09500	0.52544	-0.02199
-0.80500	0.37956	0.43819	1.05320	0.09750	0.52560	-0.02198
-0.80000	0.38497	0.43707	1.05442	0.10000	0.52575	-0.02192
-0.79500	0.39029	0.43590	1.05562	0.10250	0.52594	-0.02169
-0.79000	0.39560	0.43462	1.05682	0.10500	0.52600	-0.02150
-0.78000	0.40098	0.43312	1.05828	0.11000	0.52602	-0.02153
-0.77000	0.42059	0.43128	1.06192	0.11500	0.52614	-0.02191
-0.76000	0.43358	0.42928	1.06482	0.12000	0.52640	-0.02266
-0.75000	0.44680	0.42702	1.06798	0.12500	0.52673	-0.02374
-0.74000	0.45996	0.42462	1.07139	0.13000	0.52692	-0.02498
-0.73000	0.47279	0.42241	1.07498	0.13500	0.52674	-0.02619
-0.72000	0.48510	0.42077	1.07864	0.14000	0.52623	-0.02725
-0.71000	0.49677	0.41963	1.08229	0.14500	0.52564	-0.02809
-0.70000	0.50792	0.41861	1.08582	0.15000	0.52513	-0.02867
-0.69000	0.51832	0.41745	1.08918	0.15500	0.52473	-0.02891
-0.68000	0.52846	0.41609	1.09235	0.16000	0.52439	-0.02887
-0.67000	0.53843	0.41460	1.09533	0.16500	0.52405	-0.02859
-0.66000	0.54847	0.41309	1.09818	0.17000	0.52366	-0.02818
-0.65000	0.55875	0.41168	1.10096	0.17500	0.52319	-0.02775
-0.64000	0.56944	0.41040	1.10376	0.18000		

Tableau 3.02



```

*****
* EPSILON * L * GAM O * C * EN(1) * R(1) * K * G(L) *
*
* -0.63000 * 0.58050 * 0.40970 * 1.10667 * 0.18500 * 0.52269 * -0.02744 *
* -0.62000 * 0.59225 * 0.40801 * 1.10975 * 0.19000 * 0.52217 * -0.02733 *
* -0.61000 * 0.60434 * 0.40673 * 1.11306 * 0.19500 * 0.52169 * -0.02749 *
* -0.60000 * 0.61674 * 0.40533 * 1.11661 * 0.20000 * 0.52127 * -0.02793 *
* -0.59000 * 0.62933 * 0.40382 * 1.12039 * 0.20500 * 0.52089 * -0.02865 *
* -0.58000 * 0.64193 * 0.40232 * 1.12437 * 0.21000 * 0.52049 * -0.02958 *
* -0.57000 * 0.65438 * 0.40101 * 1.12849 * 0.21500 * 0.51998 * -0.03064 *
* -0.56000 * 0.66656 * 0.40002 * 1.13268 * 0.22000 * 0.51928 * -0.03170 *
* -0.55000 * 0.67837 * 0.39932 * 1.13686 * 0.22500 * 0.51842 * -0.03269 *
* -0.54000 * 0.68977 * 0.39871 * 1.14096 * 0.23000 * 0.51750 * -0.03351 *
* -0.53000 * 0.70074 * 0.39806 * 1.14494 * 0.23500 * 0.51640 * -0.03410 *
* -0.52000 * 0.71140 * 0.39731 * 1.14876 * 0.24000 * 0.51515 * -0.03441 *
* -0.51000 * 0.72180 * 0.39646 * 1.15241 * 0.24500 * 0.51493 * -0.03442 *
* -0.50000 * 0.73203 * 0.39557 * 1.15590 * 0.25000 * 0.51412 * -0.03417 *
* -0.49000 * 0.74241 * 0.39476 * 1.15924 * 0.25500 * 0.50978 * -0.03367 *
* -0.48000 * 0.85039 * 0.39393 * 1.16240 * 0.30000 * 0.50533 * -0.03334 *
* -0.47000 * 0.91528 * 0.39309 * 1.21902 * 0.32500 * 0.49939 * -0.03302 *
* -0.46000 * 0.97356 * 0.39240 * 1.24139 * 0.35000 * 0.49405 * -0.03262 *
* -0.45000 * 1.03480 * 0.39180 * 1.26278 * 0.37500 * 0.48803 * -0.03244 *
* -0.44000 * 1.10745 * 0.39133 * 1.28971 * 0.40000 * 0.48185 * -0.03213 *
* -0.43000 * 1.18376 * 0.39147 * 1.32109 * 0.42500 * 0.47505 * -0.04112 *
* -0.42000 * 1.25393 * 0.39187 * 1.35013 * 0.45000 * 0.46789 * -0.04080 *
* -0.41000 * 1.32554 * 0.39258 * 1.37767 * 0.47500 * 0.46058 * -0.03648 *
* -0.40000 * 1.41185 * 0.39352 * 1.41185 * 0.50000 * 0.45309 * -0.03707 *
* -0.39000 * 1.42894 * 0.39370 * 1.41898 * 0.50450 * 0.45171 * -0.03791 *
* -0.38000 * 1.50845 * 0.39513 * 1.45445 * 0.52500 * 0.44523 * -0.04282 *
* -0.37000 * 1.60028 * 0.39739 * 1.49394 * 0.55000 * 0.43701 * -0.04379 *
* -0.36000 * 1.69051 * 0.39986 * 1.53141 * 0.57500 * 0.42852 * -0.03812 *
* -0.35000 * 1.80003 * 0.39270 * 1.57715 * 0.60000 * 0.42007 * -0.03714 *
* -0.34000 * 1.93096 * 0.39596 * 1.63567 * 0.62500 * 0.41124 * -0.04385 *
*
*****

```

Tableau 3.03

Pour obtenir la valeur de l'énergie disponible pour faire avancer la fissure d'une longueur l , il est indispensable de calculer la valeur de la dérivée $g'(l)$ (équation 3.52). Or, le calcul numérique ne donne la valeur de $g(l)$ que pour un certain nombre de longueur l .

Il a donc été nécessaire de lisser cette courbe. Nous avons donc établi une approximation polynomiale ; pour ce faire, un programme basé sur la méthode des moindres carrés a été mis au point.

Ce programme de lissage de courbe par un polynôme de degré cinq permet de plus de calculer la dérivée en un point quelconque.

Les résultats de ce calcul sont répertoriés dans le tableau 3.04.

1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
G'(1)	0,0643	0,0545	0,0456	0,0375	0,0302	0,0239	0,0184
1	0,9	0,1	1,1	1,2	1,3	1,4	
G'(1)	0,0137	0,0097	0,0066	0,0043	0,0028	0,0021	

Tableau 3.04

Les valeurs de $G(l)$ étant calculées dans le programme principal pour un rayon de cercle unité. La valeur de l est identique à celle de l/R et peut ainsi être reportée directement sur la fig. 3.09.

Connaissant la valeur de $G'(l)$, nous avons trouvé la courbe

$$\frac{GE}{T^2\pi R} = f(l/R) \quad (\text{fig. 3.09}).$$

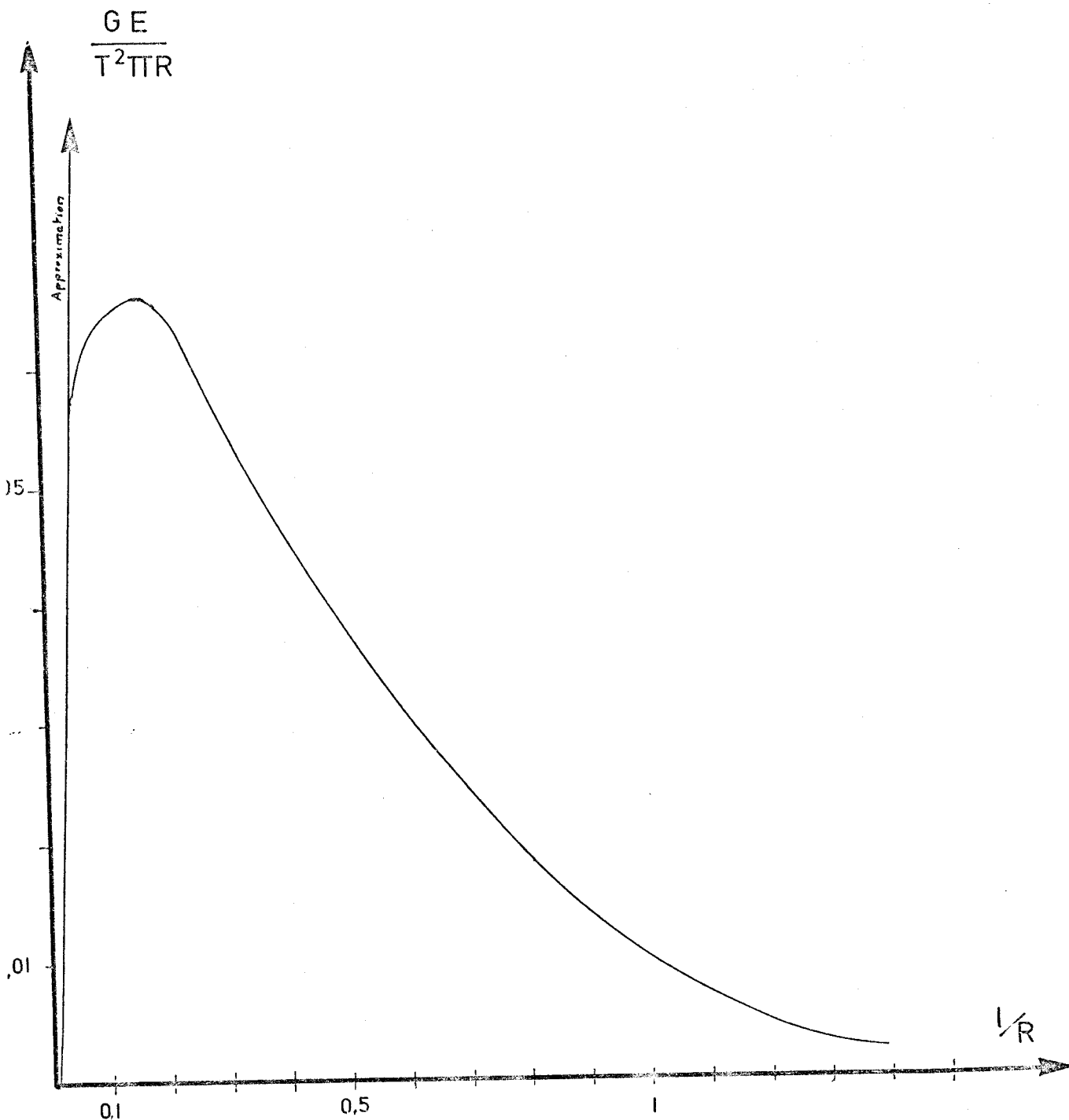


Fig. 3.09

Pour les petites longueurs de fissures, il est préférable de prendre l'approximation suivante | 18 |.

$$G = 1,25 T^2\pi l/E$$

ce qui donne comme équation dans le cas de notre graphique :

$$(3.53) \quad \frac{GE}{T^2\pi R} = 1,25 \frac{l}{R}$$



3.3. ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis [19] est une technique d'analyse numérique utilisant, dans le cas de l'élasticité linéaire, les principes variationnels à partir de l'énergie potentielle. Elle suppose une décomposition de la structure en un nombre fini de polygones réguliers de dimensions finies, appelés éléments, assemblés entre eux en certains points particuliers appelés noeuds. Le déplacement d'un point M à l'intérieur d'un polygone est représenté par une fonction d'interpolation, dont les paramètres sont les valeurs des déplacements aux noeuds. Cette fonction d'interpolation doit vérifier certains critères pour que la méthode converge ; le champ de déplacement ainsi défini doit être, entre autre cinématiquement admissible. Les déformations et les contraintes s'expriment alors en fonction des déplacements par l'utilisation des équations de la mécanique des milieux continus.

La dérivation de l'énergie potentielle totale par rapport aux déplacements des noeuds permet de calculer la matrice de rigidité élémentaire caractérisant le comportement de chaque élément.

L'assemblage de ces matrices de rigidité élémentaires conduit à l'établissement d'un système linéaire, symétrique, défini positif dont la résolution fournit la valeur des déplacements aux noeuds des éléments.

La fonction d'interpolation précédemment définie permet alors d'obtenir les déplacements en tout point du domaine ainsi que les déformations et contraintes.

Dans le cas particulier de fissure traversant l'épaisseur d'une plaque et émanant d'un trou circulaire, la première difficulté réside dans le choix du découpage de la structure au voisinage de la tête de fissure. Près de celle-ci se développe une zone à fort gradient de contrainte, ce qui nécessite d'avoir des éléments très petits qui puissent tenir compte des variations rapides de contraintes. Afin de limiter l'ordre du système, il est cependant indispensable d'imaginer un moyen de passer à des éléments plus grands dans le reste de la structure.

Nous avons utilisé un maillage dit en "toile d'araignée", ce découpage classique donne une bonne précision, mais il nécessite un nouveau "maillage" pour passer d'une longueur de fissure à une autre.

Notre but a été d'utiliser la méthode des éléments finis pour vérifier la valeur du facteur d'intensité de contrainte en mode I, trouvée par la méthode des potentiels complexes, en essayant d'affiner le plus possible le maillage.

3.3.1. PRÉSENTATION

Pour calculer le facteur d'intensité de contrainte dans le cas d'une plaque infinie percée d'un trou circulaire, nous avons choisi les dimensions de plaque suivantes (Fig.3.10 a.).

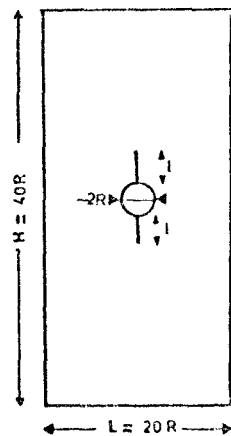


Figure 3.10 a.

modèle schématisant la plaque infinie utilisée dans ce paragraphe.

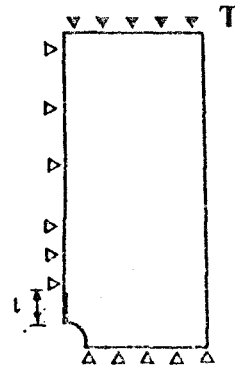


Figure 3.10 b.

simplification du modèle par raison de symétrie.

ce qui se réduit pour raison de symétrie au système de la fig.3.10 b. Chaque appui correspondant au blocage d'un noeud.

L'élément choisi est le triangle à trois noeuds avec deux variables nodales par noeud. Dans le maillage en "toile d'araignée", nous avons imposé un maillage très fin près de la fissure, zone qui est soumise à fort gradient de contrainte.

3.3.2. MÉTHODE

Triangulation

La triangulation joue un rôle très important ; c'est elle qui déterminera la précision des résultats ainsi que le temps de calcul.

A partir de ces remarques, nous nous sommes fixés comme objectif d'obtenir :

- des triangles les plus équilatéraux possibles,
- assurer une progression régulière du maillage,
- éviter la concentration de triangles dans une zone non intéressante, pour diminuer le nombre de noeuds et ainsi la taille de la matrice de rigidité.

Il nous a donc été indispensable de dessiner l'ensemble de la triangulation (fig. 3.11, page suivante).

Dans certaines zones où la triangulation est très petite pour être discernée, un agrandissement a été effectué (fig.3.12).

Pour assurer une progression du maillage ou obtenir des zones à caractéristiques mécaniques différentes, l'objet étudié est divisé en sous domaines ; un sous domaine se décrit par un ensemble de droites et de cercles devant former un domaine connexe. Ces droites et ces cercles sont déterminés par les noeuds extrêmes. Au voisinage de la fissure, les sous domaines ont été définis de la manière suivante (fig. 3.13).

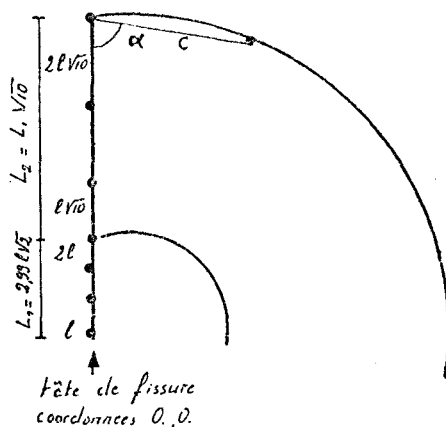


Fig. 3.13

Les sous domaines sont des couronnes dont les limites sont déterminées par du premier domaine.

La longueur du segment C a été choisie (dans la mesure du possible) de telle manière à obtenir un nombre de segments sur un demi-cercle supérieur à 9 car alors l'angle sera supérieur à 80° , ce qui entraîne une triangulation plus harmonieuse.

L'optimisation de la triangulation se fait par calcul de la bissectrice et de centre de gravité .

Organigramme général

Le calculateur utilisé a été un P 88 0 de 48 kmots ainsi que trois

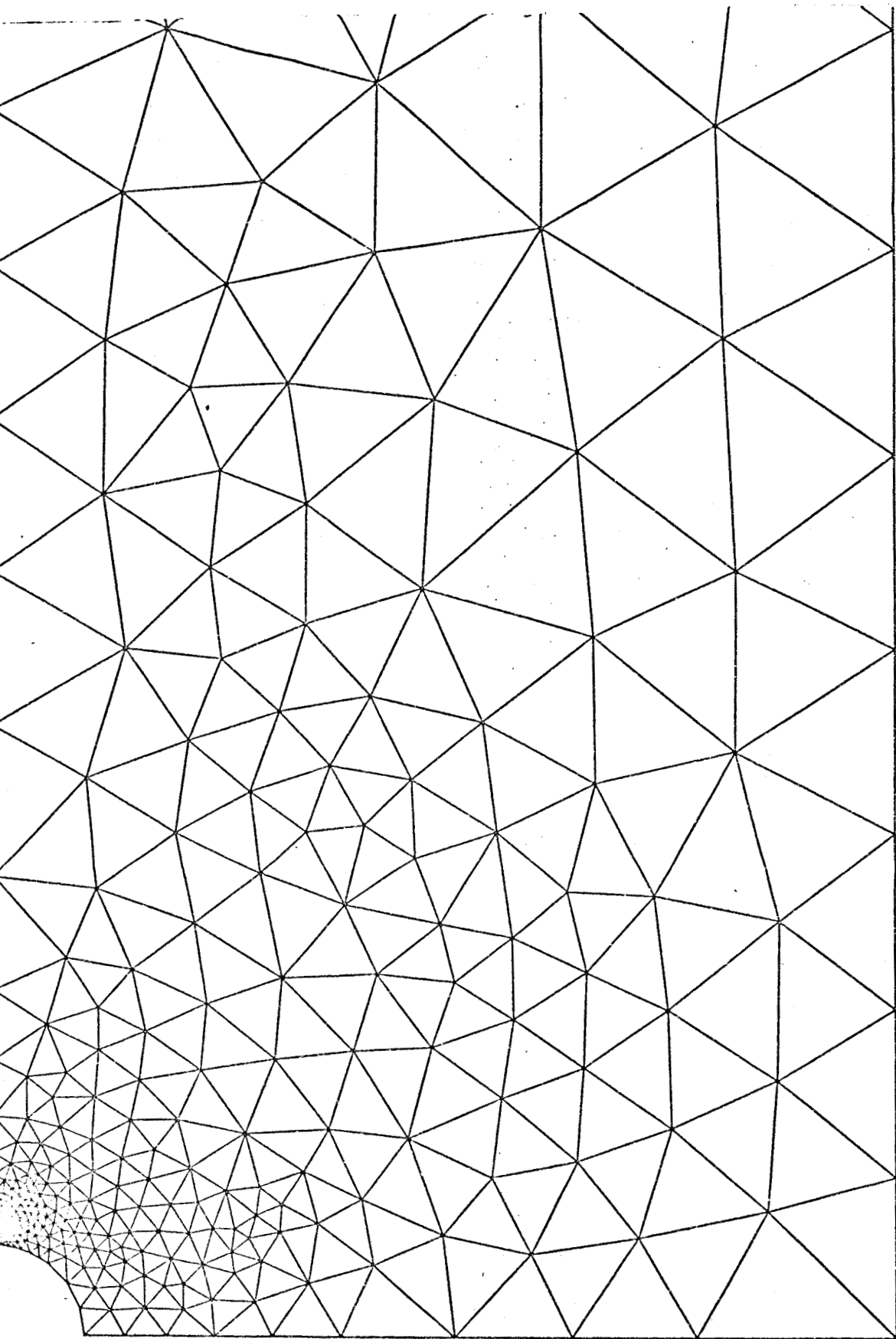


Figure 3.11.

$\gamma/C = 0.2$
63 NOEUDS 1042 TRIANGLES



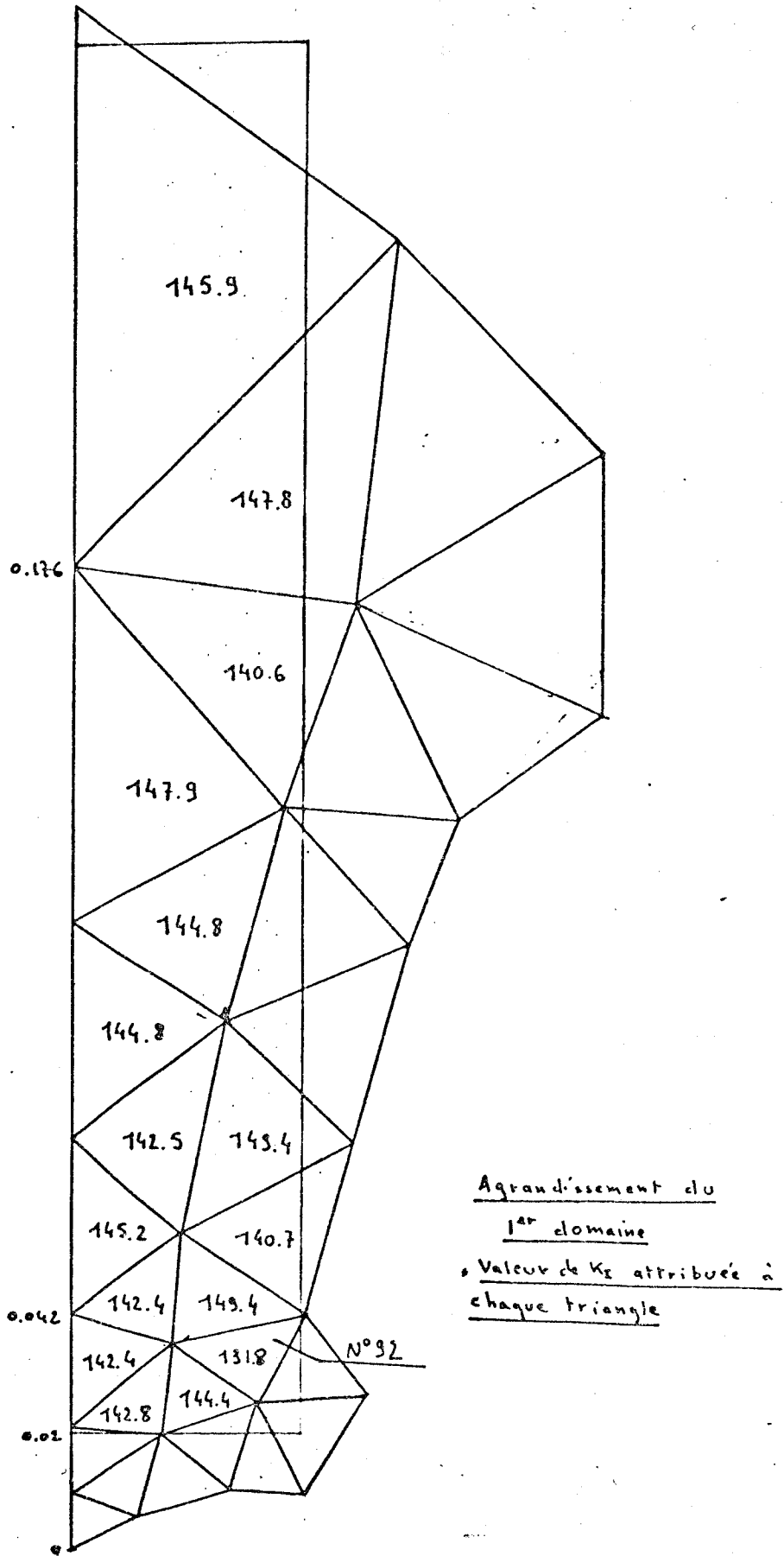
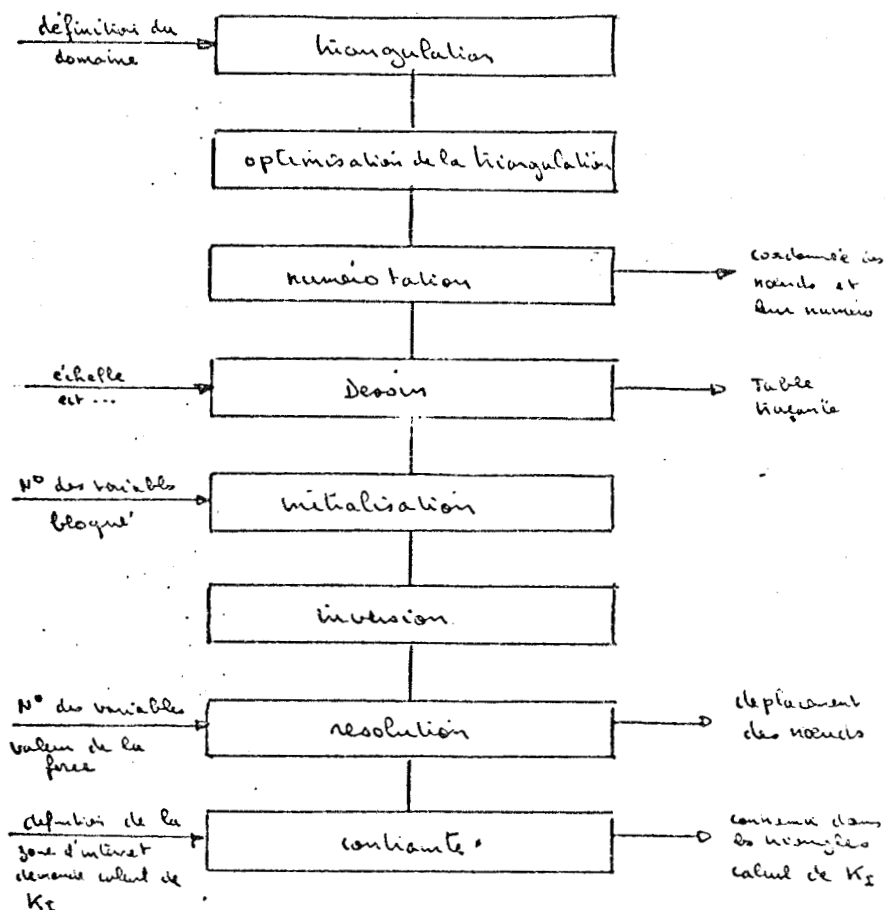


Figure 3.12.



unités à disques de 7,25 millions d'octets.

Pour des raisons de place en mémoire centrale et d'entrée des données, le calcul complet des déplacements et des contraintes s'effectue à l'aide de plusieurs programmes.



Calcul de K_1

Le calcul de K_1 nous est directement donné par le rapport $\sigma_x/f(r,\theta)$ (r, θ coordonnées du centre de gravité du triangle) avec

$$(3.54) \quad f(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos 2\theta \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

Le programme calcule également la moyenne de K_1 ainsi que son écart type dans le domaine : l'emploi de l'écart type se justifie par le fait que la contrainte est prise constante à l'intérieur du triangle, la valeur de K_1 sera calculée au centre de ce triangle.

3.3.3. RÉSULTATS

Les valeurs numériques introduites dans le programme (fig. 3.10)

sont :

$$\begin{aligned} R &= 50 \text{ m} & T &= 1 \text{ T/m}^2 \\ e &= 1 \text{ m} & E &= 20 \cdot 10^5 \text{ T/m}^2 \\ \nu &= 0,3 \end{aligned}$$

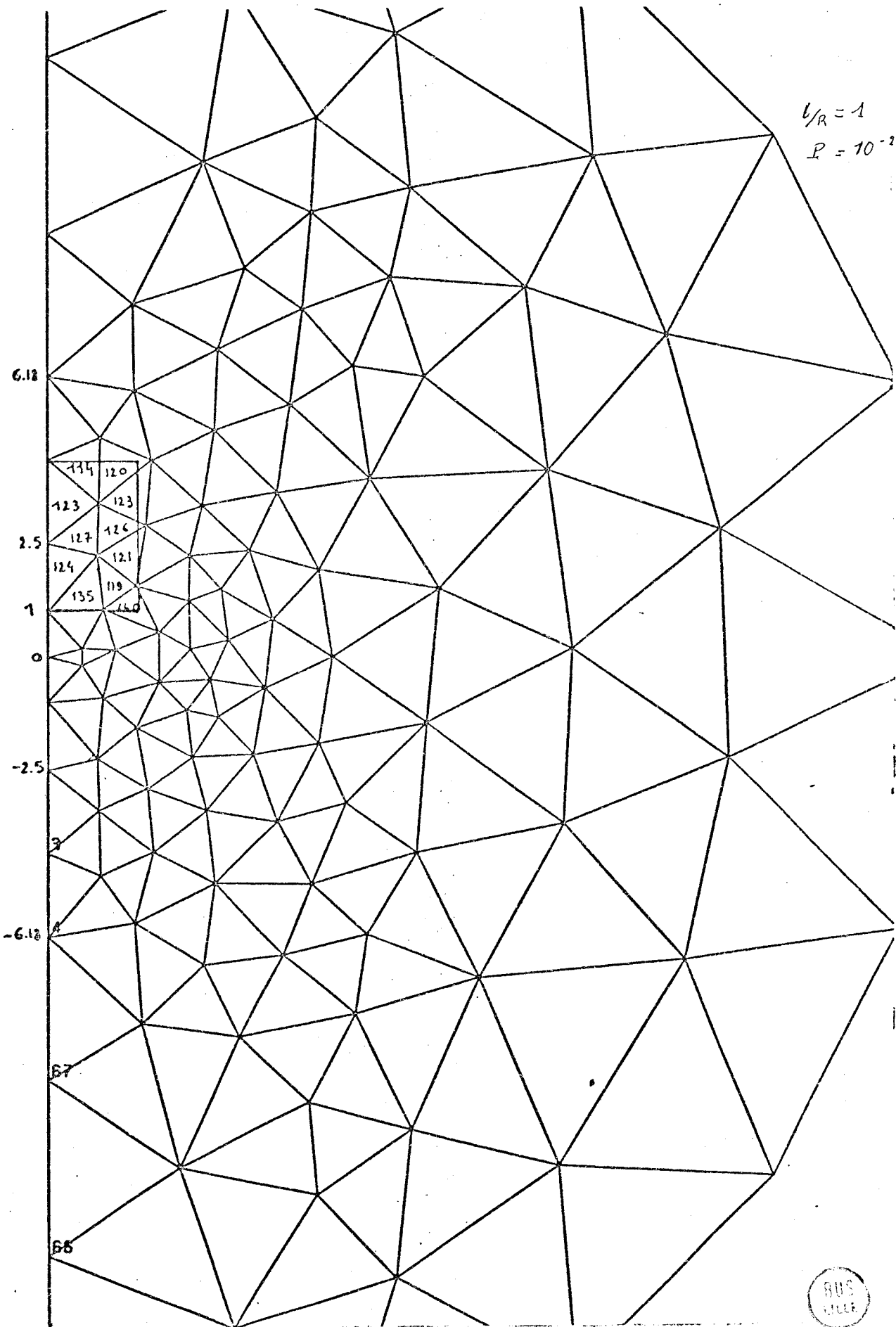


Figure 3.14.

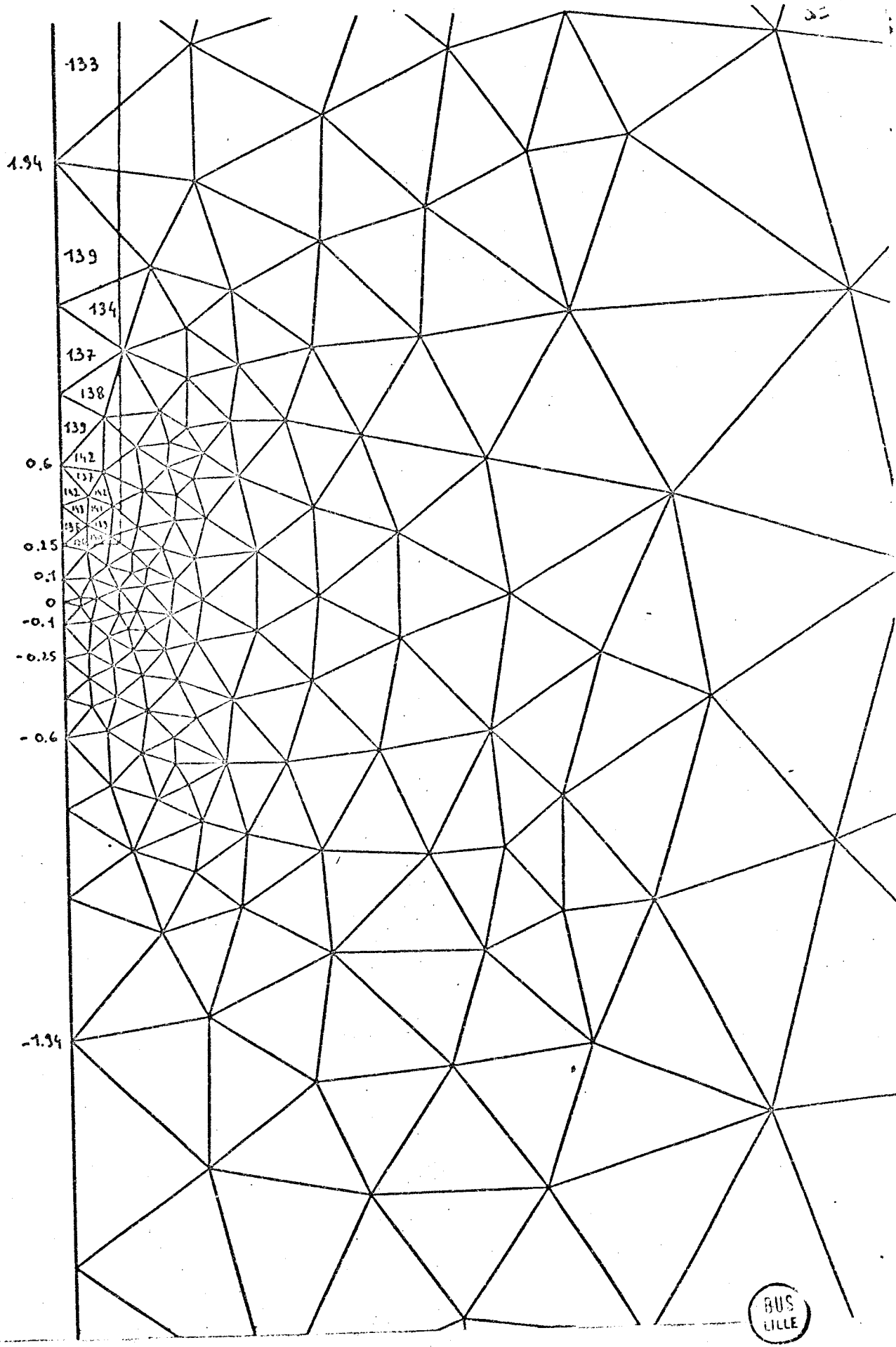


Figure 3.15

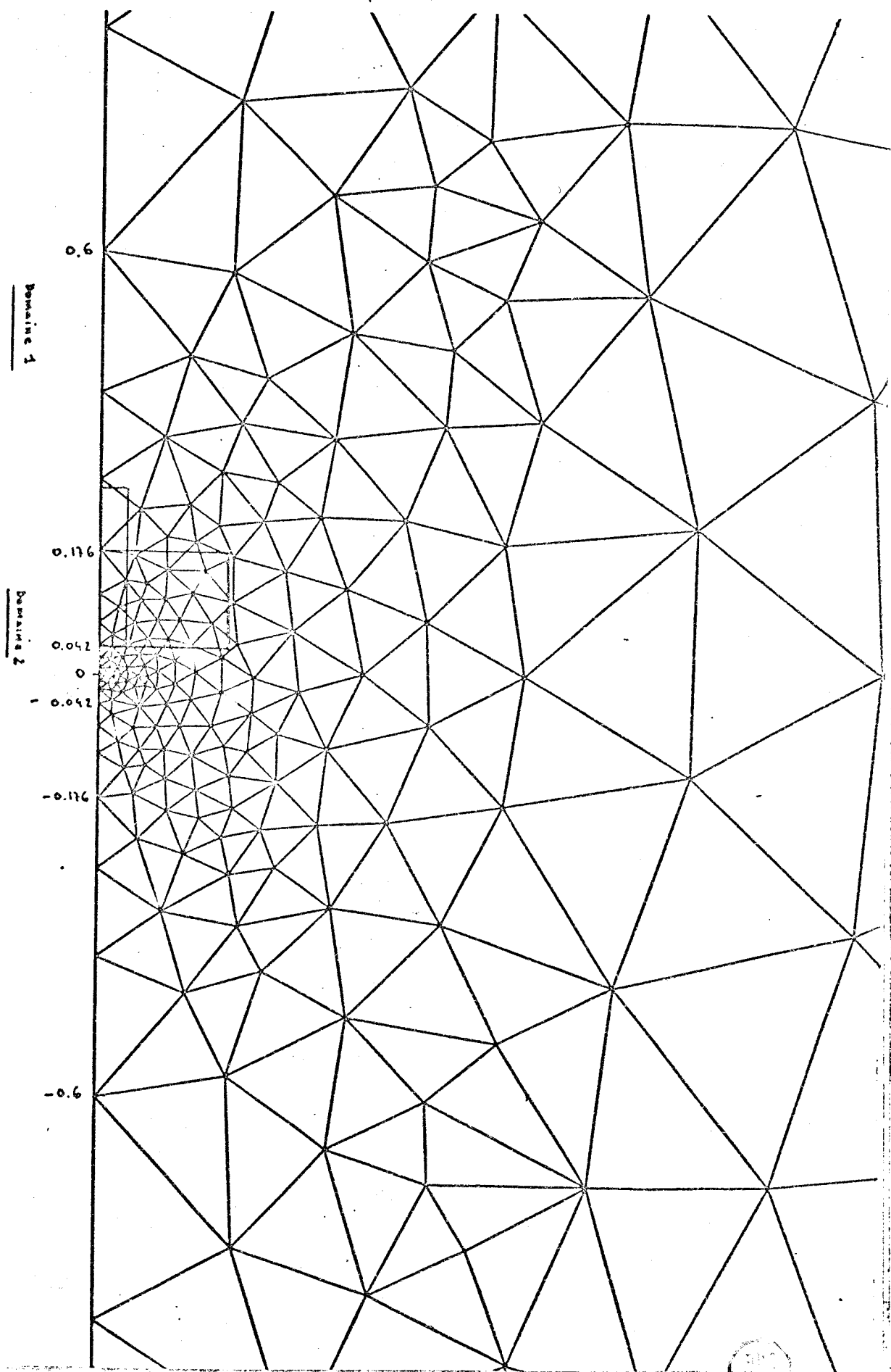


Figure 3.16.



Deux domaines ont été étudiés pour le calcul de K_1 (Fig. 3.16)

1er domaine $0 < x < 0,04$ $0,02 < z < 0,27$
ce qui donne $K_1 = 143,8 \pm 4,3$ $Tm^{-3/2}$ $\frac{\Delta K_1}{K_1} = 2,9 \%$

2ème domaine $0 < x < 0,18$ $0,04 < z < 0,18$
 $K_1 = 145,2 \pm 6,3$ $Tm^{-3/2}$ $\frac{\Delta K_1}{K_1} = 4,4 \%$

Tableau récapitulatif des résultats pour $l/R = 1$









$P = \frac{\alpha}{1+R}$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	
Domaine	4,34 	2,94 	0,27 	0,18 
	1 	0,25 	0,02 	0,04 
$K_1 T.m^{-3/2}$	1,25	1,388	1,43 8	1,45 2
$\Delta K_1 T.m^{-3/2}$	0,073	0,029	0,043	0,063
$\frac{\Delta K_1}{K_1}$	5,8 %	2,1 %	2,9 %	4,4 %

Tableau 3.05

La valeur de K_1 reportée correspond à une charge $T \approx 1 T/m^2$

De cette première étude, il en ressort que la valeur de K_1 définie à 3 % près, nous paraît satisfaisante.

Dans la suite, pour les différents rapports de l/R étudiés, nous avons utilisé la triangulation dont le côté du plus petit triangle est égal à 0,01 m pour un domaine défini par $0 < x < 0,04$ et $0,02 < z < 0,27$.

* Dans une seconde étude, nous avons fait varier le rapport l/R .

Les résultats obtenus de K_1 sont reportés dans le tableau suivant :

l/c	1	0,5	0,2	0,1
$K_1 T.m^{-3/2}$	1,44	2,42	3,24	3,15
$\Delta K_1 T.m^{-3/2}$	0,04	0,07	0,09	0,09
$\frac{\Delta K_1}{K_1}$	2,9 %	2,9 %	2,9 %	2,9 %
$\frac{K_1^2}{Q^2.mC}$	0,0132	0,0373	0,0668	0,0632

Tableau 3.06

Valeur de K_1 ramené à une charge de $T = 1 \text{ T/m}^2$

Domaine étudié $0 < x < 0,04$ $0,02 < z < 0,27$

Ces résultats permettent ainsi de tracer le graphe $\frac{GE}{T^2 \pi R} = f(1/R)$
(fig. 3.17)

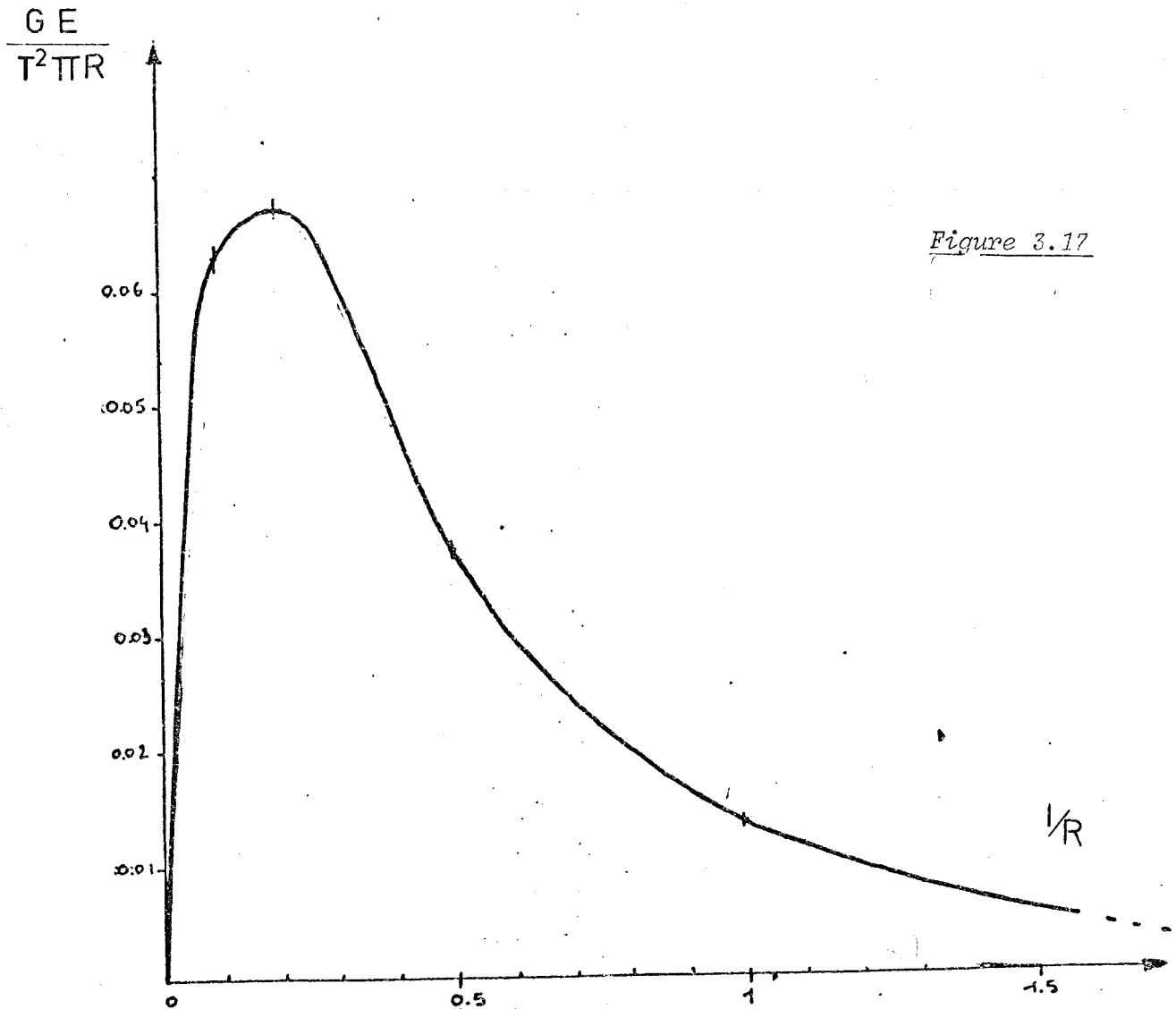


Figure 3.17

Cette courbe sera comparée aux résultats obtenus par la méthode des potentiels complexes et celle des discontinuités de déplacements au paragraphe 3.5.



3.4 MÉTHODE DES DISCONTINUITÉS DE DÉPLACEMENT

3.4.1. RAPPEL DE LA MÉTHODE

Les résultats par différences finies et éléments finis souvent utilisés en élasticité, impliquent une discrétisation complète du domaine en mailles le long desquelles les équations de l'élasticité sont approximées par un système d'équations algébriques linéaires.

Il s'en suit que :

- i) la taille du système d'équations algébriques à résoudre est, en général, très grande.
- ii) le maillage est spécifique à chaque configuration du domaine étudié.

Toute modification d'une portion de domaine nécessite la définition intégrale de la discrétisation.

L'intérêt de ces méthodes est donc souvent limité par le coût d'exploitation et par une certaine rigidité de leur mise en place ; elles sont donc assez mal adaptées pour l'étude d'une évolution de fissuration.

La méthode des discontinuités de déplacements [20] s'inspire des méthodes des équations intégrales. Celle-ci est en effet basée sur l'utilisation de fonctions d'influence pour construire un système d'équations dépendant uniquement des conditions imposées sur le contour.

Cette construction s'appuie sur la présentation de la solution d'un problème élastique linéaire, de Neuber-Papkovitch

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{B} - \frac{1}{4(1-\nu)} \text{grad}(\vec{OM} \cdot \vec{B} + B_0)$$

avec dans le cas où les forces volumiques sont négligées $\vec{u}_0 = \vec{0}$ $\vec{\Delta B} = \vec{0}$ et $AB_0 = 0$. La recherche de deux types de solution pour \vec{B} et B_0 en milieu infini s'effectuera en satisfaisant aux conditions pas de contrainte normale sur le plan $z = 0$ pour l'une et pas de contrainte tangentielle sur le plan $z = 0$ pour l'autre ; ces deux solutions sont alors combinées pour construire la solution du problème qui passe alors par la détermination de discontinuité de déplacement \hat{u} qui seront uniformes le long d'un segment discrétisant la frontière. Ces discontinuités de déplacement peuvent être considérées comme étant le déplacement relatif des deux lèvres d'une fissure placée sur le contour en milieu infini.

Les contraintes normales et tangentielles agissant au centre d'un segment quelconque discrétisant la frontière sont reliées aux discontinuités de déplacement par :

$$\begin{pmatrix} \{\sigma_t\} \\ \{\sigma_n\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{tt} & A_{tn} \\ A_{nt} & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\hat{u}_t\} \\ \{\hat{u}_n\} \end{pmatrix}$$

où $\{\sigma_t\}$, $\{\sigma_n\}$, $\{\hat{u}_t\}$, $\{\hat{u}_n\}$ sont respectivement les vecteurs colonnes de la contrainte tangentielle, de la contrainte normale agissant sur les N segments de discrétisation du contour et des discontinuités de déplacements tangentielles et normales des N segments.

De la même façon, les déplacements normaux et tangentiels d'un segment quelconque seront donnés par :

$$\begin{pmatrix} \{u_t\} \\ \{u_n\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{tt} & B_{tn} \\ B_{nt} & B_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\hat{u}_t\} \\ \{\hat{u}_n\} \end{pmatrix}$$

avec $\{u_t\}$, $\{u_n\}$ les vecteurs colonnes des déplacements normaux et tangentiels des N segments (A et B sont des sous matrices $N \times N$).

La connaissance des $2N$ conditions aux limites sur les N segments permet, par inversion du système, de déterminer les discontinuités de déplacement $\{\hat{u}_t\}$ et $\{\hat{u}_n\}$. Le champ de déplacement et de contrainte en tout point du domaine est alors parfaitement connu (Annexe 2).

3.4.2. CALCUL DE L'ÉNERGIE G

Pour accéder à l'énergie G , l'on peut, soit appliquer la définition (2.13) de cette énergie, soit calculer le facteur d'intensité de contrainte K_1 par les relations 2.06 ou 2.08 et revenir à l'énergie G par :

$$G = \frac{K_1^2}{E} \quad \text{en contrainte plane}$$

La méthode de discontinuités de déplacement permet, comme nous l'avons vu précédemment, le calcul du vecteur déplacement et la contrainte en tout point du matériau, et notamment en tête de fissure. L'on peut donc penser déterminer le facteur d'intensité de contrainte par application des relations 2.06 ou 2.08.

Cependant, lorsque la contrainte ou le déplacement varie très rapidement, en tête de fissure par exemple, la méthode numérique précédente donne des erreurs importantes puisqu'elle calcule des valeurs moyennes de ces fonctions qu'elle applique au centre du segment considéré. Il est alors nécessaire d'avoir recours à des corrections.

Nous avons préféré utiliser la méthode directe de calcul en énergie. A partir de la définition 2.6, nous aurons, en problème plan, en supposant l'épaisseur unitaire :

$$G = -\frac{\partial}{\partial l} (W_{\text{elast}} + W_{\text{ext}})$$

où l représente la longueur de fissure.

En appliquant le théorème des travaux virtuels, on démontre aisément que | 21 |

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_T} \vec{T}_i^d \frac{du_i}{dl} ds - \frac{1}{2} \int_{S_u} U_i^d \frac{dT_i}{dl} ds$$

où \vec{T}^d représente le vecteur contrainte imposé sur la frontière S_T , et \vec{u}^d le vecteur déplacement imposé sur la frontière S_u .

Dans le problème qui nous intéresse, la surface S_u n'existe pas, puisque sur la frontière ne sont imposées que des contraintes, ainsi : ($S = S_T$, frontière latérale de la plaque, du trou et de la fissure).

$$G = \frac{1}{2} \int_S T_i \frac{du_i}{dl} ds$$

Pour calculer cette intégrale par la méthode des discontinuités de déplacement pour une longueur de fissure donnée, considérons deux états très proches : (fig. 3.17), le premier avec une longueur l de fissure et le second avec

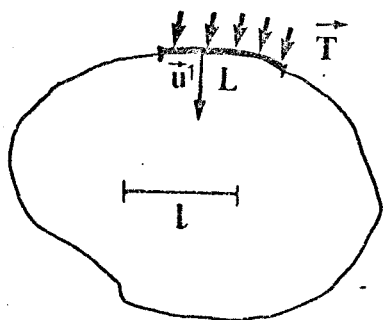
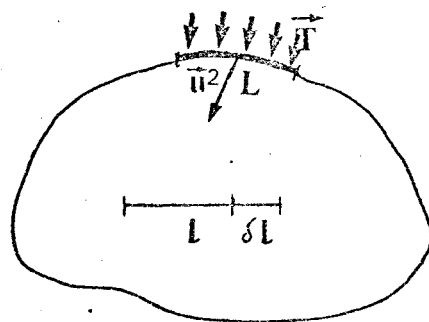


Fig. 3.17



énergie potentielle W^1

énergie potentielle W^2

une longueur $l + \delta l$. La méthode permet le calcul des champs de déplacement u^1 et u^2 . Alors, si δl est suffisamment petit :

$$G = \frac{1}{\delta l} \frac{1}{2} \int_S \vec{T} (\vec{u}^2 - \vec{u}^1) dS$$

$$= \frac{1}{\delta l} \frac{1}{2} \sum_{\substack{\Sigma \\ \text{segments} \\ \text{frontières}}} \vec{T} (\vec{u}^2 - \vec{u}^1) L$$

car \vec{T} et \vec{u} sont uniformes, dans la méthode, sur un segment de longueur L . CORNET a montré [22] que pour obtenir une précision de l'ordre du pourcent, il suffit de choisir δl inférieur à $1/100$.

3.4.3. INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

L'introduction des conditions aux limites a été menée à partir du principe de superposition des champs de contraintes et de déplacement, principe que l'on peut appliquer dans le cas de l'élasticité linéaire.

L'état de contrainte qui s'établit dans la plaque infinie percée d'un trou et possédant deux fissures radiales et soumise à un champ de contrainte uniforme à l'infini (fig. 3.18. a)) est égale à la somme du champ solution dans la plaque sans trou ni fissure (fig. 3.18. b)) et du champ solution du problème avec contrainte à l'infini ou au contour nulle et dans laquelle on soumet le trou et la fissure à une contrainte telle que la somme des contraintes sur le trou et la fissure des états b et c soit nulle.

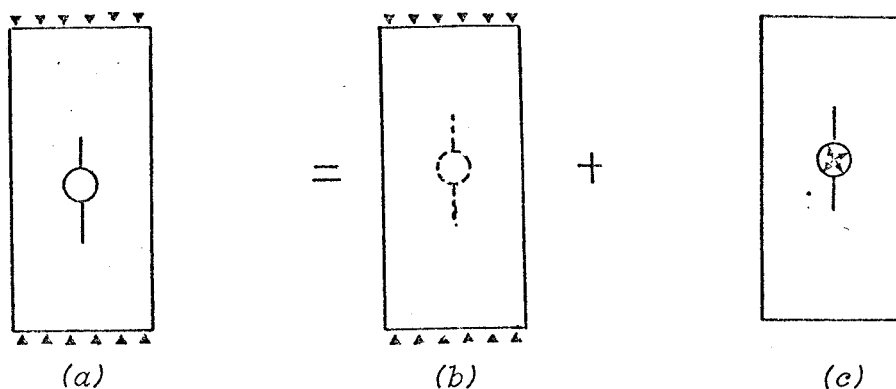


Fig. 3.18

a) Calcul des contraintes sur le cercle

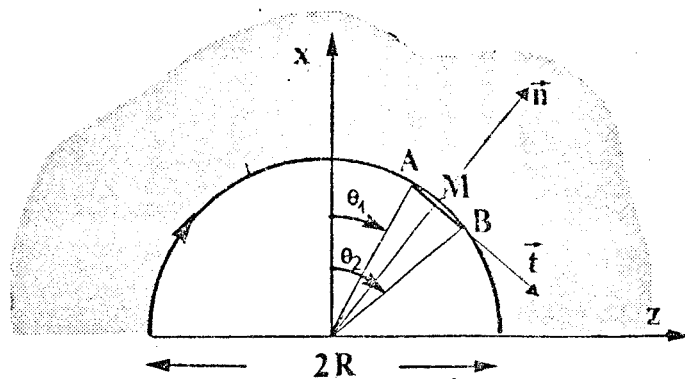


Fig. 3.19

Soit l'arc AB, discrétisé par le segment AB (fig. 3.19). Il faut recherche, dans l'état (b) la contrainte moyenne appliquée sur le segment AB en fonction de θ_1 et θ_2 , pour l'introduire dans le programme de la méthode des discontinuités de déplacement. Le tenseur des contraintes dans le cas (b) a la forme :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} -T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(0/x,z)

donc en un point M quelconque, la contrainte appliquée est :

$$\vec{T} = (T \cos \theta, 0)$$

La résultante sur l'arc AB est donc

$$\vec{R}_{AB} = (1 TR(\sin \theta_2 - \sin \theta_1), 0)$$

La contrainte moyenne sur le segment AB s'en déduit :

$$\vec{T}_{AB} = \left(\frac{T(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)}{2 \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}, 0 \right)$$

En définitive, les contraintes normales et tangentielles moyennes à introduire dans l'état C seront :

$$(3.55) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_n = - \frac{T(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)}{2 \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)} \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \\ \sigma_t = \frac{T(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)}{2 \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)} \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \end{array} \right.$$

b) contraintes sur les lèvres de la fissure

Le tenseur de l'état (b) étant un tenseur de compression uniforme, la contrainte le long des lèvres de la fissure dans l'axe de compression est nulle.

3.4.4. PLAQUE INFINIE - RÉSULTATS

3.4.4.1. DISCRETISATION DU CONTOUR (Figure 3.20)

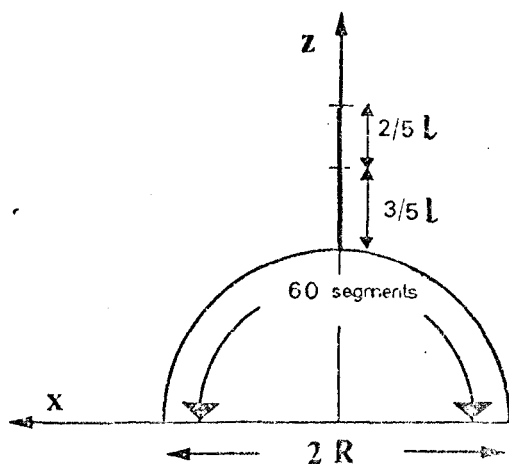


Fig. 3.20

Le problème est étudié en simple symétrie (axe de symétrie $z = 0$) Le demi-cercle est divisé en 60 segments égaux et les contraintes moyennes calculées par les relations (3.55) seront appliquées au centre de chaque segment.

La fissure est partagée en deux zones : une zone près de la tête, de longueur $2/5 l$, découpée en 21 segments et une zone près du trou de longueur $3/5 l$ découpée en 18 segments. La fissure n'étant pas chargée, les contraintes appliquées seront nulles.

3.4.4.2. RESULTATS

Tous les calculs sont effectués avec les valeurs suivantes $R = 50$, $T = 100$. La détermination de l'énergie G est obtenue selon la méthode exposée précédemment avec $\delta l = 0,05$, donc constant, quelle que soit la longueur de fissure. Le programme de calcul utilisé est celui mis au point par Leblanc | 23 |

Les résultats pour les différentes valeurs de longueurs de fissure sont reportés dans le tableau 3.07 et la figure 3.21 ci-après.

REMARQUE D'autres schémas de discrétisation ont également été testés, en affinant par exemple le découpage de la tête de fissure. Les résultats obtenus sont très proches de ceux présentés.

$\frac{1}{R}$	$w^1 \cdot 10^3$	$w^2 \cdot 10^3$	$\frac{GE}{T^2 \pi R} \cdot 10^{-3}$
0,1	175,610531	175,628794	46,5
0,2	178,607651	178,630315	58,7
0,3	181,080519	181,100585	51,1
0,4	183,042546	183,058621	40,9
0,5	184,562427	184,574968	31,9
0,6	185,733189	185,742902	24,7
0,8	187,337116	187,342972	14,9
1	188,304841	188,308448	9,28
1,2	188,873105	188,875397	5,84

Tableau 3.07

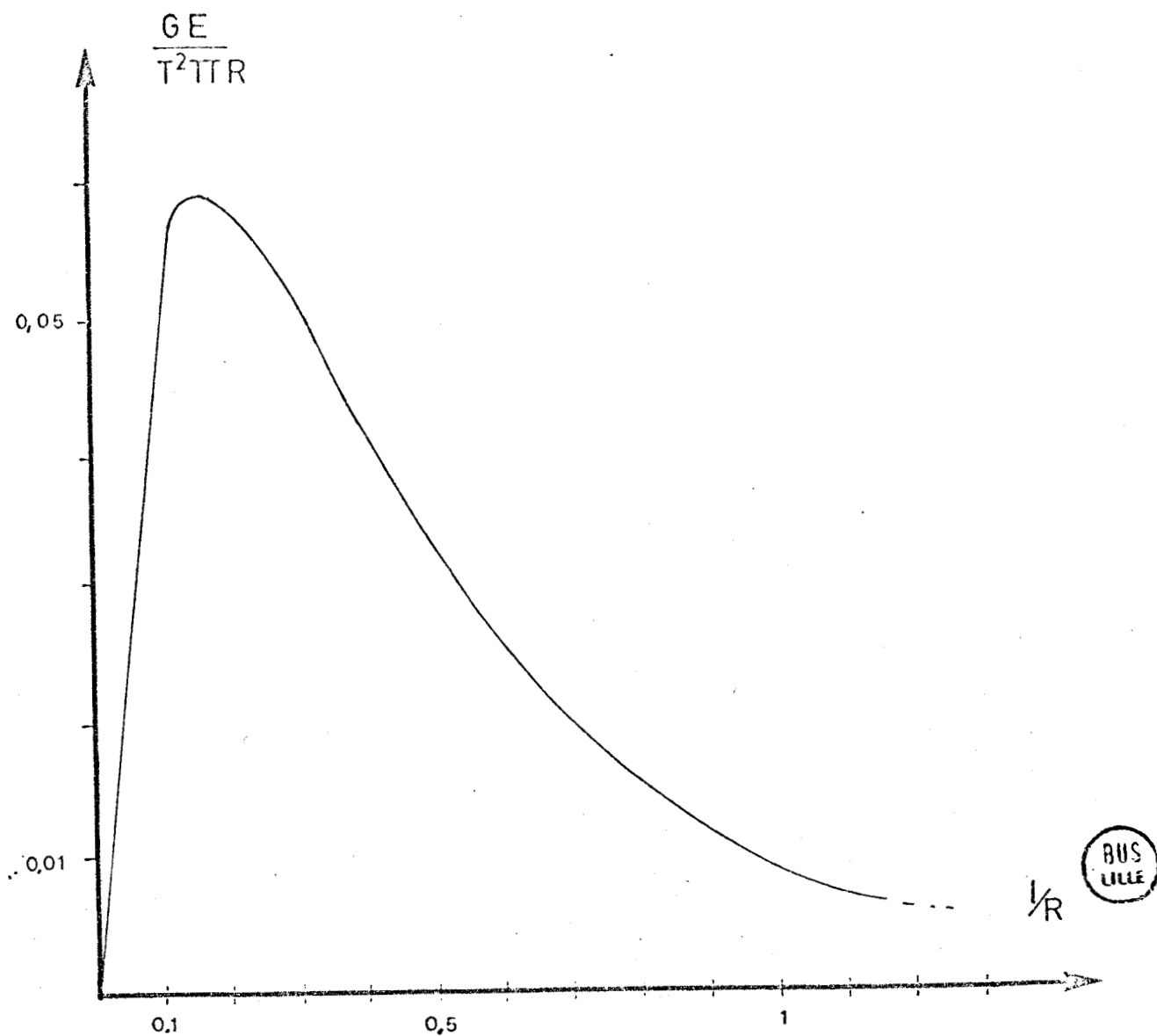


Figure 3.21

3.4.5. INFLUENCE DE LA TAILLE DE LA PLAQUE

L'étude précédente étant menée dans le cas d'une plaque infinie, nous avons étudié, dans un second temps, l'influence de la taille de la plaque sur l'énergie G .

Trois cas ont été envisagés (fig. 3.22 - tableau 3.08).

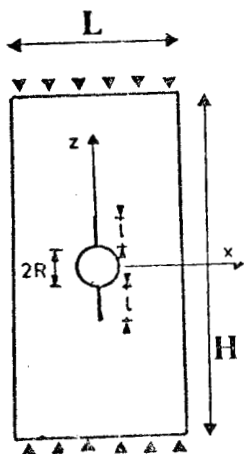


Fig. 3.22

$H=L$	L/R
1 ^{re} étude	20
2 ^{me} étude	10
3 ^e étude	6

Tableau 3.08.

3.4.5.1. DISCRETISATION DU CONTOUR (Fig. 3.23)

Le problème est étudié en simple symétrie (axe de symétrie $z = 0$)

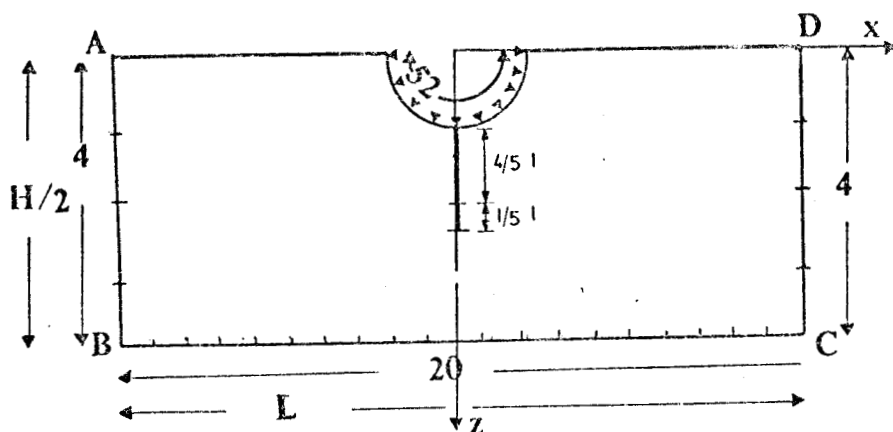


Fig. 3.23

- Le demi-cercle est divisé en 52 segments égaux, les contraintes moyennes appliquées au centre de chaque segment seront calculées par les relations (3.55).

- La fissure est partagée en deux zones :

- . une zone près de la tête de longueur $1/5 l$ découpée en 8 segments,
- . une zone près du trou de longueur $4/5 l$ découpée en 10 segments.

La fissure n'étant pas chargée, les contraintes appliquées seront nulles.

- Le contour : les éléments de contour AB et CD sont divisés chacun en 4 segments, le contour BC est divisé en 20 segments. Les charges appliquées sont nulles.

3.4.5.2. RESULTATS

Tous les calculs sont effectués avec les valeurs suivantes $R = 50$, $T = 100$, $E = 0,210^3$.

La détermination de l'énergie G est obtenue selon la méthode exposée au chapitre 3.4.3. avec $\delta l_1 = 0,05$ le programme de calcul étant celui mis au point par LEBLANC | 23 |

Les résultats pour les divers cas étudiés sont reportés dans les tableaux 3.09, 3.10, 3.11.

$$\frac{H}{R} = 20$$

$\frac{1}{R}$	w^1 10^3	w^2 10^3	$\frac{GE}{T^2 \pi R}$ 10^{-2}
0,1	183,172097	183,197 628	6,50
0,2	186,437954	186,465751	7,08
0,3	189,329149	189,353473	6,19
0,4	191,707657	191,727587	5,07
0,5	193,603094	193,619041	4,06
0,6	195,012120	195,024942	3,26
0,7	196,125818	196,136244	2,65
0,8	196,984241	196,992778	2,17
0,9	197,660553	197,667631	1,80
1	198,202502	198,208447	1,51
1,2	199,008992	199,013348	1,11
1,4	199,573649	199,576997	0,85

Tableau 3.09

$$\frac{H}{R} = 10$$

$\frac{1}{R}$	$w^1 \cdot 10^3$	$w^2 \cdot 10^3$	$\frac{GE}{T^2 \pi R} \cdot 10^3$
0,1	206,985699	206,956463	74,4
0,2	211,893978	211,937945	111,96
0,3	216,552708	216,594004	105,1
0,4	220,680707	220,717346	93,3
0,5	224,242608	224,274581	81,4
0,6	227,191711	227,219870	71,7
0,7	229,773906	229,799067	64,1
0,8	232,008382	232,031069	57,8
0,9	233,995569	234,016295	52,8
1	235,796435	235,815604	48,8
1,2	239,002512	239,019432	43,1

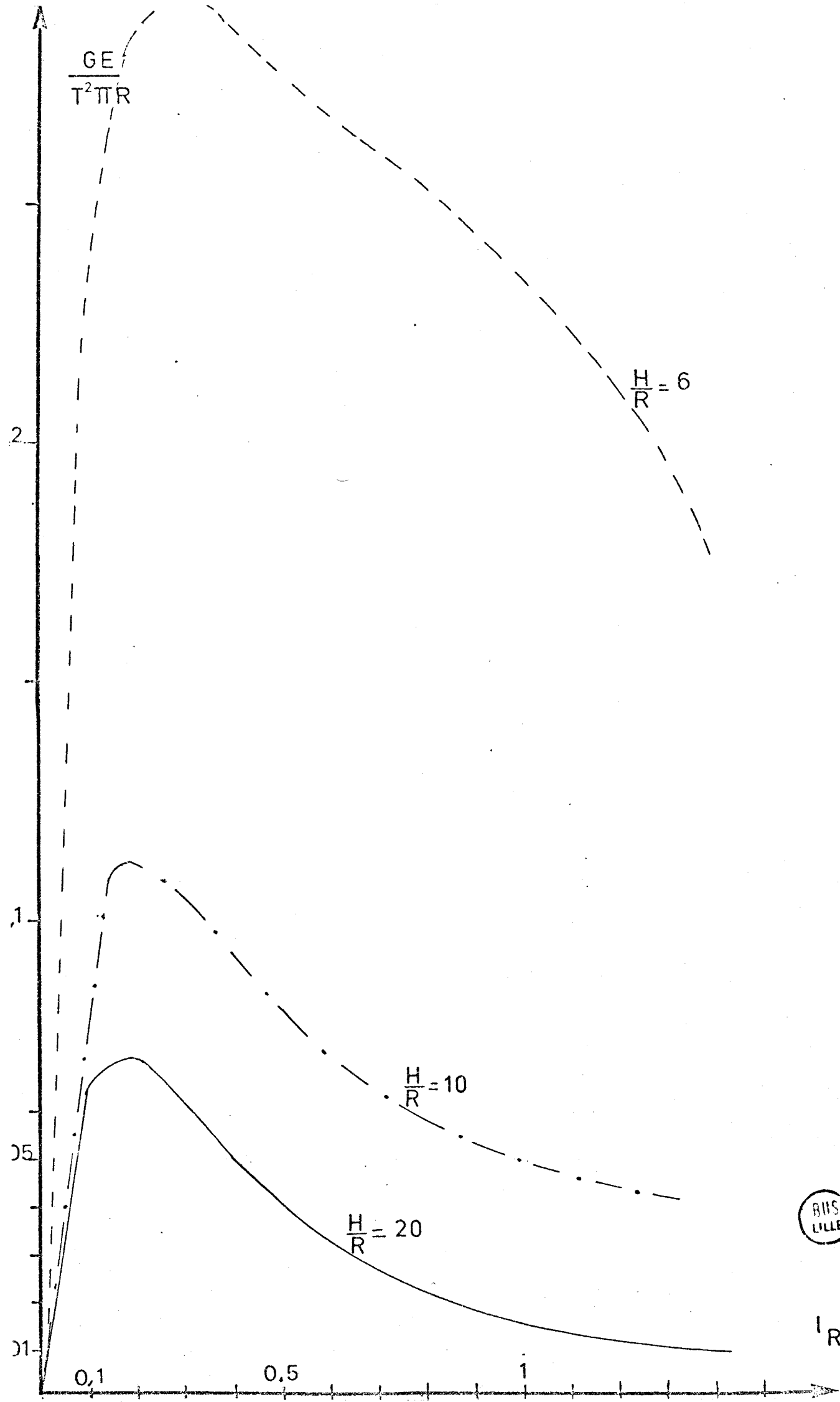
Tableau 3.10

$$\frac{H}{R} = 6$$

$\frac{1}{R}$	$w^1 \cdot 10^3$	$w^2 \cdot 10^2$	$\frac{GE}{T^2 \pi R} \cdot 10^{-2}$
0,1	277,310817	277,397593	22,09
0,2	288,746810	288,856881	28,03
0,3	300,811542	300,926226	29,20
0,4	312,695144	312,808327	28,82
0,5	324,050774	324,160269	27,88
0,6	334,581553	334,687536	26,98
0,7	344,720762	344,823767	26,23
0,8	354,242183	354,341845	25,38
0,9	363,292321	363,388541	24,50
1	371,884305	371,976747	23,54
1,2	387,543531	387,626451	21,12
1,4	400,593919	400,663228	17,65

Tableau 3.11

RMS
LILLE



Les trois courbes ont été reportées sur un même graphique (fig. 3.24).

REMARQUE Tout comme dans le cas de plaque infinie, d'autres schémas de discrétisation ont été étudiés. Les résultats obtenus sont identiques à ceux présentés dans les tableaux 3.09, 3.10 et 3.11.

3.5 COMPARAISON DES RÉSULTATS OBTENUS PAR LES DIFFÉRENTES MÉTHODES.

STABILITÉ DE LA PROPAGATION.

3.5.1. PLAQUE INFINIE

La figure 3.25 compare les résultats obtenus par les méthodes de potentiels complexes et de discontinuités de déplacement. Elle permet de montrer que les résultats sont en bon accord et que l'erreur relative entre ces deux méthodes reste toujours nettement inférieure à 10 %. Nous ferons cependant remarquer que les résultats déduits de la méthode des discontinuités de déplacement restent quasiment toujours inférieures à ceux des autres méthodes, alors que CROUCH | 22 | semble dire que la méthode des discontinuités de déplacement est une approche des déplacements par excès, ce qui devrait conduire à des valeurs de G par excès.

La figure 3.26 reporte ces mêmes résultats en terme de facteur de forme $Y = \frac{K_I}{T\sqrt{l.\pi}}$

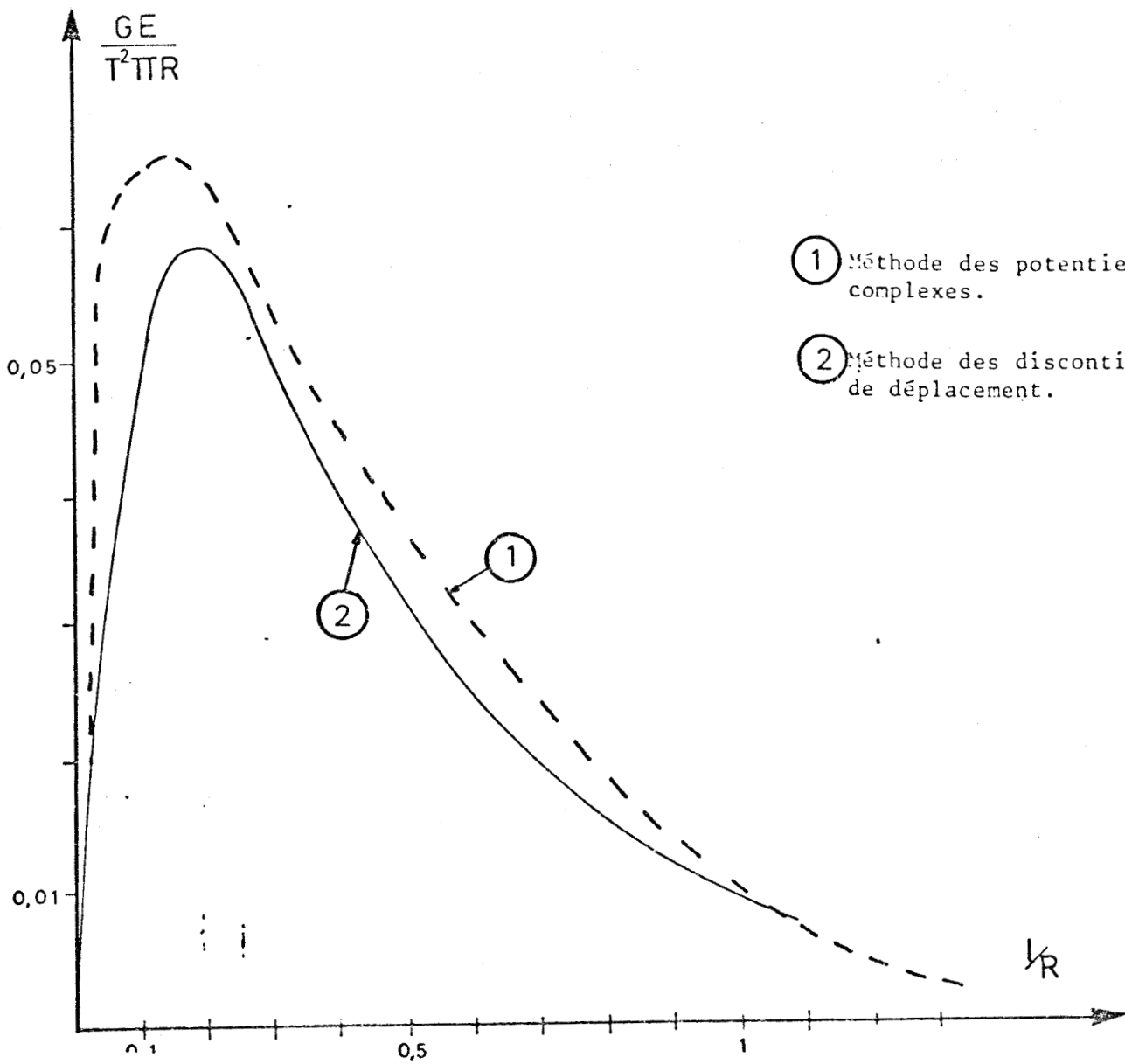
3.5.2. INFLUENCE DE LA TAILLE DE LA PLAQUE

Les résultats pour les différents rapports de H/R (fig. 3.26) obtenus par la méthode de discontinuités de déplacement sont reportés dans la figure 3.27.

Cette figure permet de montrer l'influence de la dimension de la plaque sur les résultats.

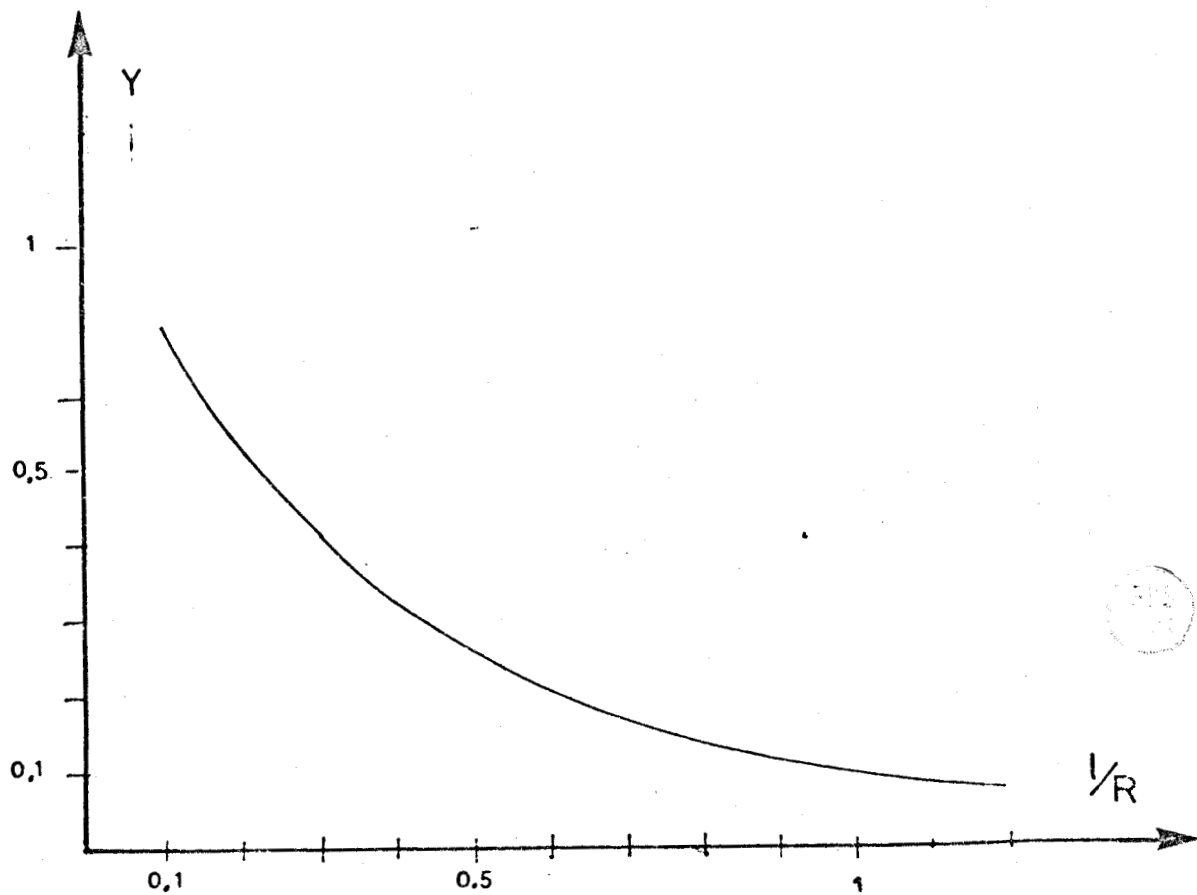
Cependant, il est à noter que le démarrage des différentes courbes sont pratiquement identiques, ce qui conduit à dire que la dimension n'a pas une grande influence sur la détermination des énergies d'initiation γ_i . Il en est tout à fait autrement pour des longueurs de fissure $l/R > 0,05$ où la dimension de la plaque agit énormément sur les résultats.

Les résultats obtenus à partir de la plaque $H/R = 20$ sont en accord avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis.



① Méthode des potentiels complexes.

② Méthode des discontinuités de déplacement.



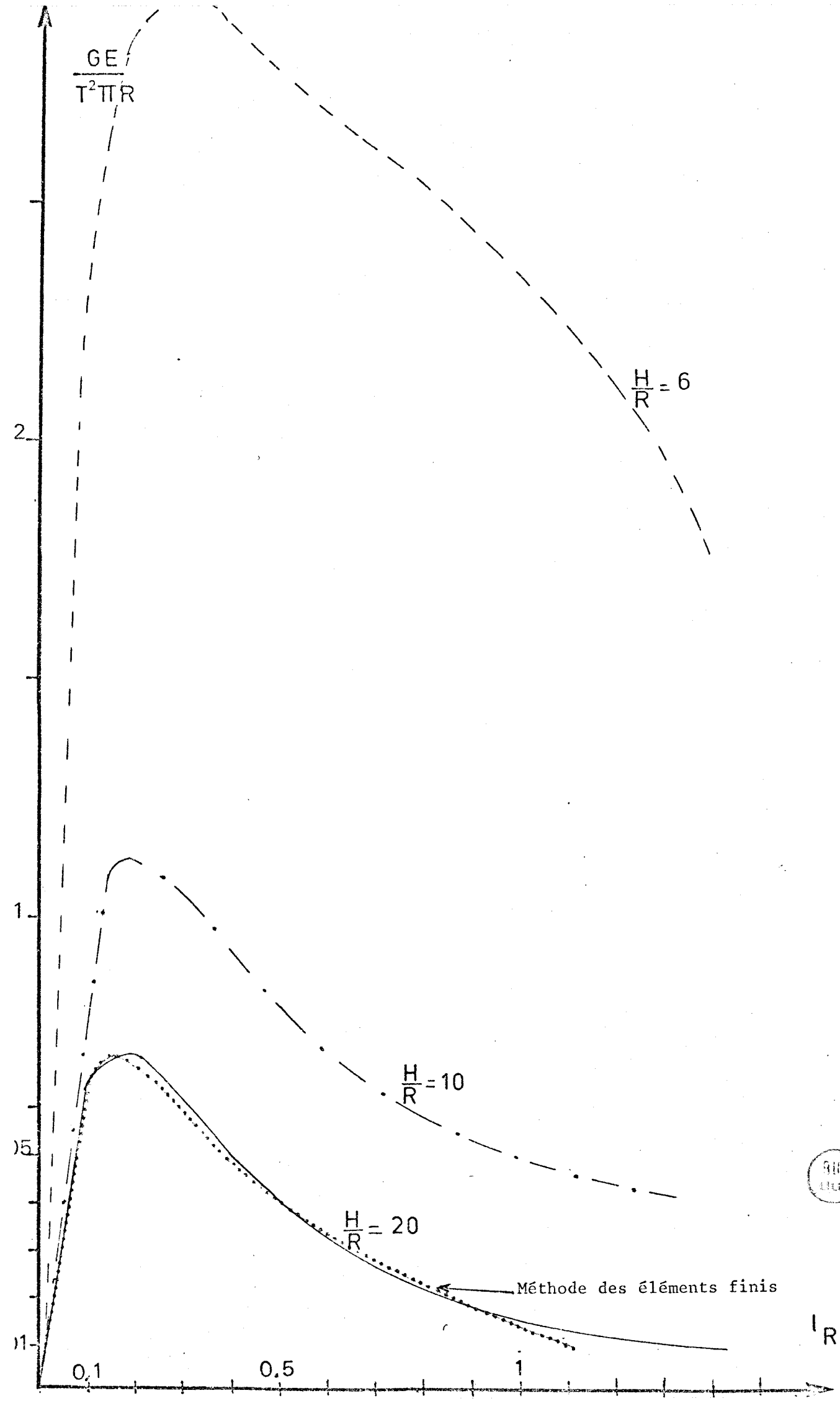
Un point important est à relever quant à l'observation de ces courbes. Si l'on reporte tous les résultats obtenus sur un même graphique (figure 3.28), on remarque que ces derniers, déterminés à partir de la plaque $H/R = 20$ sont très proches des résultats obtenus dans le cas de la plaque infinie (paragraphe 3.51) ; il s'en suit que l'on pourra considérer que l'on se place dans le cas de la plaque infinie dès que les essais seront effectués sur des plaques de rapport $H/R = 20$, sous cette condition, le principe de SAINT VENANT peut être considéré comme vérifié.

Dans le cas où l'on désire dépouiller les résultats en terme de facteur d'intensité de contrainte, il est intéressant de faire apparaître le facteur de forme :

$$Y = \frac{K_1}{\sqrt{l\pi}}$$

celui-ci est représenté :

- . en fonction de la longueur l/R de fissure par la figure 3.29.
- . en fonction du rapport H/R de la plaque par la figure 3.30.



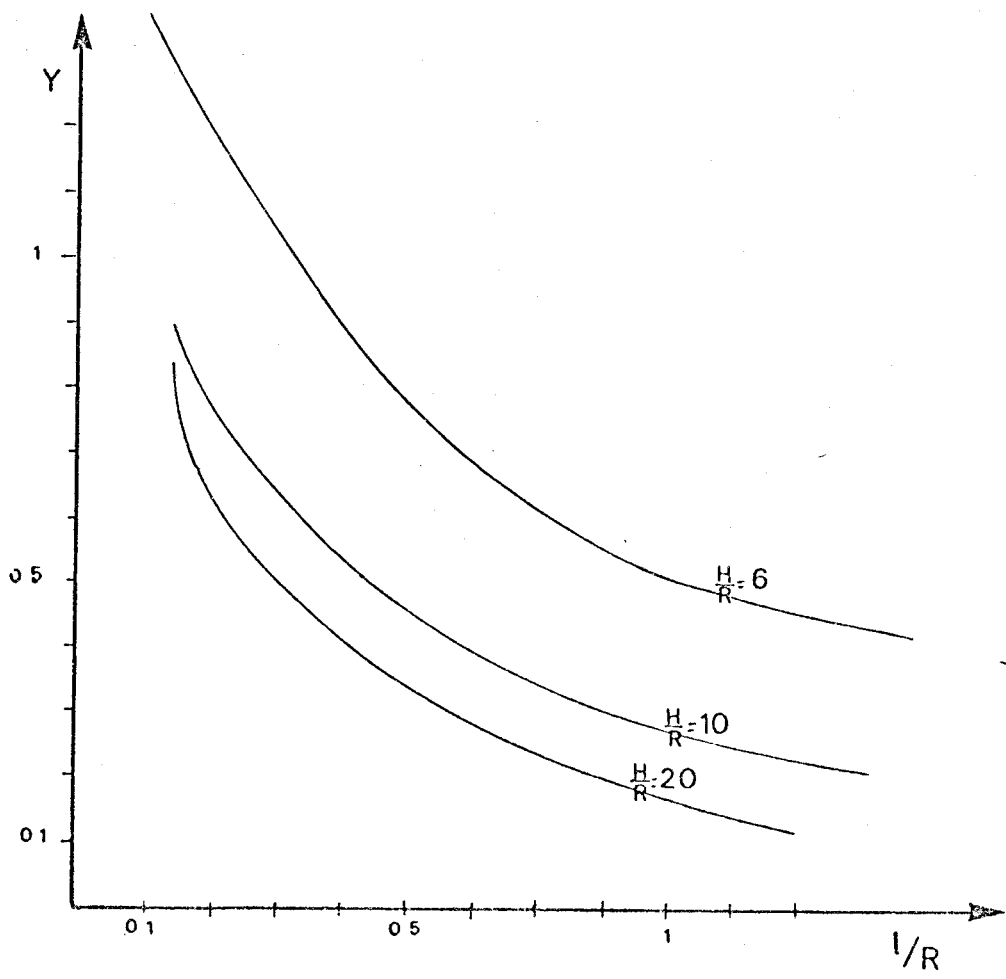


Figure 3.29

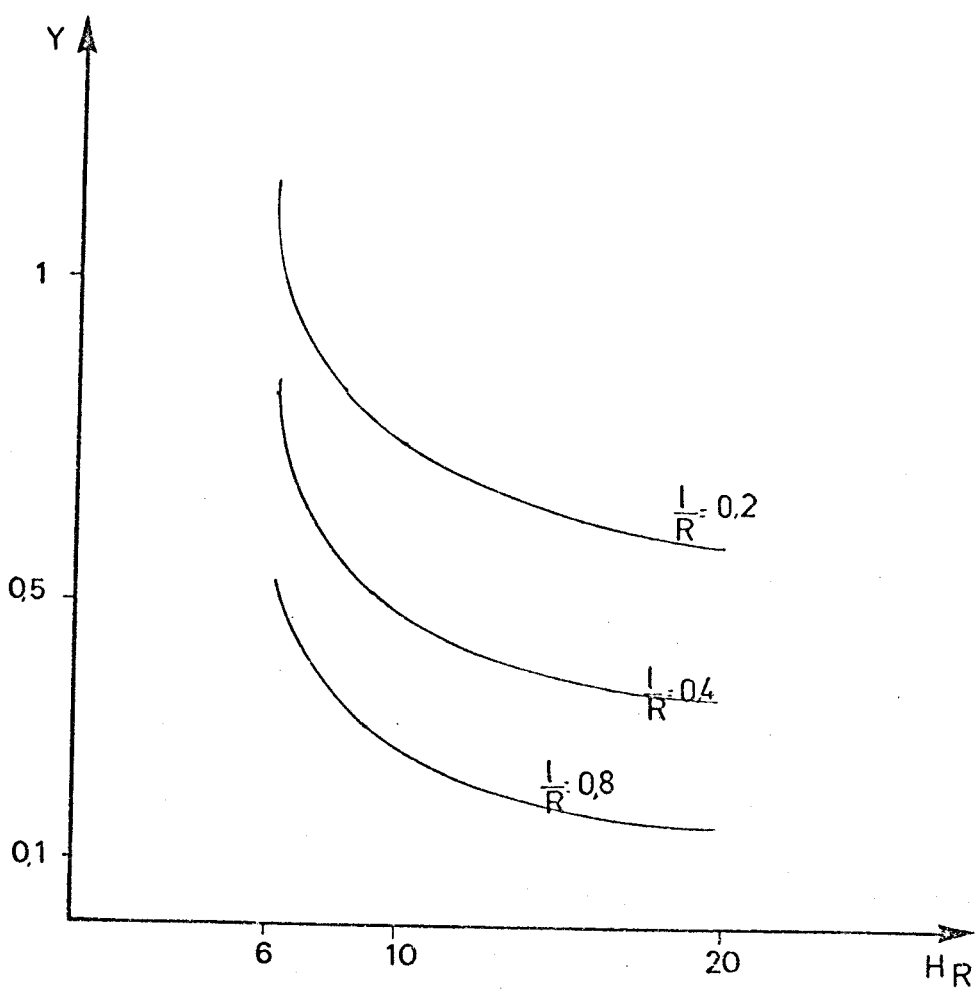


Figure 3.30



Chapitre 4.

Etude expérimentale

Dans le cadre de la mécanique de la rupture, l'étude envisagée a pour objet la caractérisation pour différents matériaux de la propagation des fissures, ainsi que l'influence de la microstructure sur cette propagation. Pour mener à bien cette analyse des phénomènes de rupture, nous nous sommes intéressés à une catégorie de roches très simple du point de vue structural, car monominérales de taille de grains assez homogènes : il s'agit des roches calcaires à haute teneur en carbonate de calcium : en effet, ces roches présentent l'avantage d'offrir une gamme étendue de matériaux de taille de grains très variable allant du micron (micrite) au millimètre (marbres).

Les conditions de propagation des fissures ont été examinées selon le critère de GRIFFITH (Chap.2222). Nous avons distingué l'énergie γ_i nécessaire pour faire démarrer la fissure, et l'énergie γ_F nécessaire pour obtenir la fracture complète, c'est à dire l'énergie pour propager les fissures sur de grandes distances. Ces résultats seront commutés et comparés avec ceux trouvés par HENRY | 24 | à partir d'essais de flexion trois points sur éprouvettes préentaillées.

4.1 DESCRIPTION GÉOMORPHOLOGIQUE DES ROCHES ÉTUDIÉES.

L'étude expérimentale a été menée sur trois types de roches calcaires dont les principales caractéristiques sont reportées dans le tableau 4.1.

Roches calcaires étudiées	Provenance	Position Stratigraphique	Teneur en CaCO ₄ (%)	Porosité (%)
micrite	Fallerans (Jura)	Kimméridgien	94	3,7
	St Pons (Hérault)	Gothlandien	98	2,5
marbres	St Léon (Allier)	Frasnien	95	0,9

Tableau 4.1. Définition et caractéristiques principales des roches.

.) *La micrite de Falherans* est caractérisée par une faible porosité, une granulométrie très fine, de l'ordre du micron, (photo 1, planche 1) et d'une grande homogénéité structurale. Elle ne présente quasiment pas de microfissures de la taille des grains. Par contre, cette micrite possède de nombreuses microcavités subsphériques de l'ordre de 10 à 15 μm de diamètre (photo 2, planche 1).

.) *Marbre de St Pons* : de granulométrie assez homogène, les grains du marbre de St Pons sont de l'ordre de 250 μm (photo 3, planche 1). Ils sont finement et intensément mâclés, et présentent également de nombreuses bandes de glissement.

En outre, le marbre de St Pons possède une anisotropie due à la foliation ; cette anisotropie se traduit essentiellement par des microfissures (photo 4, planche 1).

Dans le marbre de St Pons, deux types de faciès ont été testés : un premier ne présentant aucune macrofissure et un second possédant un réseau important de macrofissures de l'ordre de quelques centimètres, macrofissures soulignées en rouge par la présence d'oxyde de fer, et toujours alignées dans le plan de foliation.

.) *Marbre de St Léon* : ce marbre a une granulométrie très hétérogène : de gros grains de 1000 μm de diamètre sont entourés de petits grains de 80 à 100 μm de diamètre (photo 5, planche 1). Les grains présentent de larges mâcles, le plus souvent courbes et discontinues (photo 6, planche 1).

4.2. DÉTERMINATION DES ÉNERGIES DE PROPAGATION DE FISSURE PAR FLEXION 3 POINTS | 24 |

Les éprouvettes (fig. 4.1) de côte de référence 15 mm ont été réalisées par sciage puis polissage. Les entailles sont obtenues par sciage. Leur fond est affiné par une scie de 0,1 mm d'épaisseur, le rayon de courbure en tête d'entaille est diminué par un passage à la lame à rasoir.

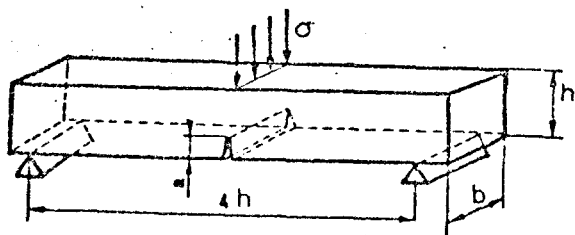


Fig. 4.1

Éprouvette de flexion 3 point préentaillée mesure de K_{1C} .

PLANCHE 1

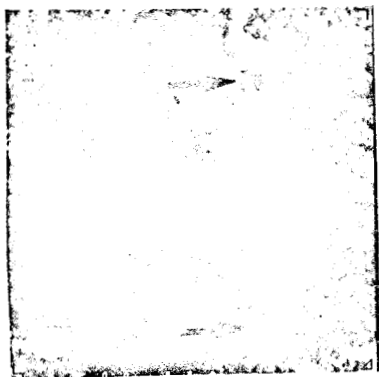


Photo 1
micrite
scanning
Grossissement 300

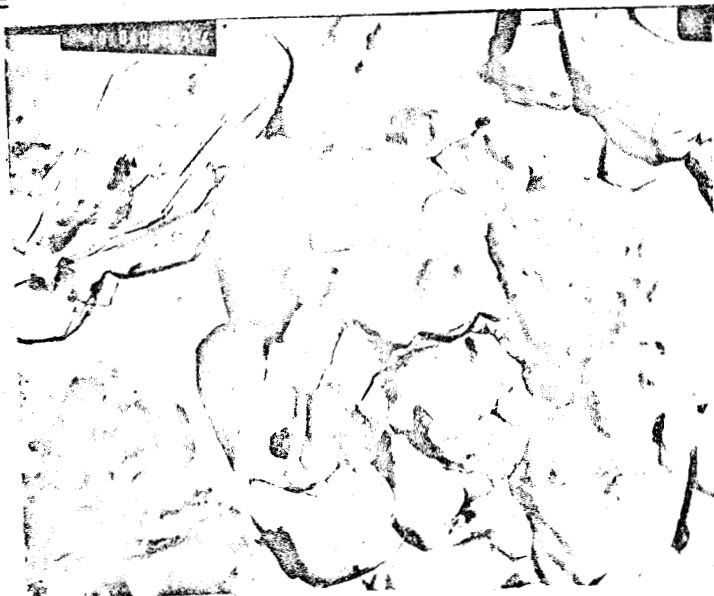


Photo 2
micrite
scanning
Grossissement 1500

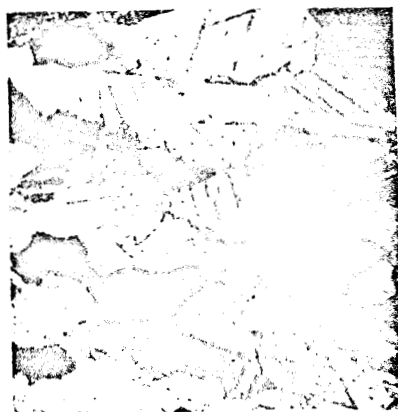


Photo 3
marbre de St Pons
microscope optique lumière polarisée
Grossissement 52

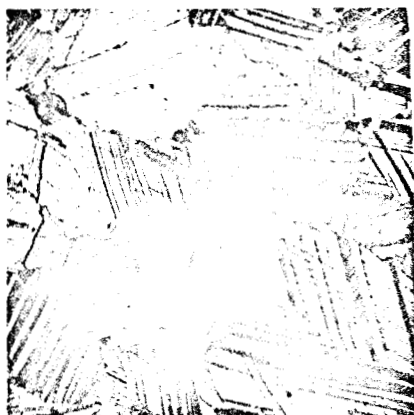


Photo 6
Marbre de St Léon
Microscope optique lumière polarisée
Grossissement 180.

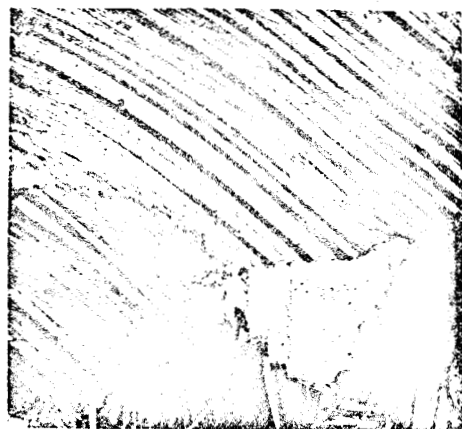


Photo 5
Marbre de St Léon
Microscope optique lumière polarisée
Grossissement 60.

La mesure de la longueur a d'entaille est réalisée par visée optique au microscope, sur les 2 faces de l'éprouvette, la valeur moyenne est prise en compte. La vitesse de traverse (Presse Instron 1115) est choisie constante et telle que la fissure se propage de façon instable. En pratique, on a adopté, compte tenu du matériel utilisé, une vitesse de traverse de 0,2 à 0,5 cm/mn.

Connaissant la longueur a de la fissure et σ_i la charge à l'instabilité, le facteur d'intensité de contrainte critique K_{1C} , est déterminé à partir de la théorie de l'élasticité linéaire .

$$(4.01) \quad K_{1C} = \frac{\sigma_c}{b h} Y$$

avec :

$$(4.01) \quad Y = \left| 11,58 \left(\frac{a}{h}\right)^{12} - 18,42 \left(\frac{a}{h}\right)^{32} + 87,18 \left(\frac{a}{h}\right)^{52} - 150,66 \left(\frac{a}{h}\right)^{72} \right. \\ \left. + 154,30 \left(\frac{a}{h}\right)^{92} \right|$$

Les valeurs de K_{1C} sont reportées dans le tableau 4.2.

K_{1C} (daN-mm ^{-3/2})		micrite 07	marbre 16(//)	marbre 16(⊥)	marbre 10
Flexion	i	3,4	2,2	3,4	2,6
trois points	F	3,4(?)		7,9	6,6

Tableau 4.2

Détermination du module d'Young

Le module d'Young est déterminé à partir d'essais de compression sur des éprouvettes cylindriques de diamètre 12 mm et d'éclatement 2,5 pour les marbres et sur des éprouvettes parallélépipédiques de 7 x 7 x 25 mm dans le cas des micrites. Les déformations longitudinales de l'échantillon ont été enregistrées par capteur de déplacement.

4.3. DESCRIPTION DES PLAQUES ET DE L'ESSAI

4.3.1. DESCRIPTION DES PLAQUES

Les plaques (fig. 4.2, planche 2) utilisées lors des essais ont été découpées à la scie diamantée et le trou réalisé à l'aide d'un carottier diamanté ; les surfaces sont rendues parallèles par polissage.

L'échantillon est choisi de telle sorte qu'il ne comporte aucune fissure ou discontinuité majeure (excepté pour le marbre de St Pons avec les fissures centimétriques), ce qui ne nous a pas permis d'avoir une dimension constante des plaques.

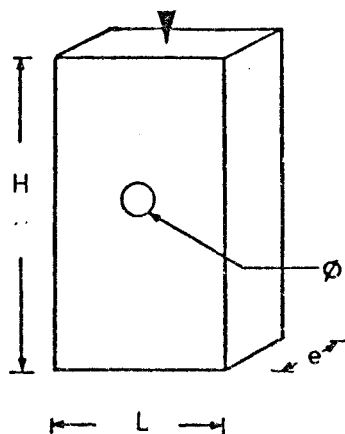


Fig. 4.2

Plaque utilisée lors des essais.

Les côtes ont été relevées au pied à coulisse, le diamètre du trou est déterminé par mesure optique.

Dans le cas du marbre de St Pons, ces essais ont été menés de façon à ce que le plan de foliation soit, ou perpendiculaire (I), ou parallèle (II), ou incliné (/) par rapport à la foliation.

* Caractéristiques géométriques des plaques et numérotation.

Micrite (photo 1, planche 2)

essai	ϕ (mm)	l (mm)	e (mm)	(mm)
07/01	16,2	71	13,8	96
07/02	16,6	73	14	96
07/03	16,4	71,57	13,4	95
07/04	16,4	73	14	94
07/05	17	72,8	14	99,5

Tableau 4.3. Caractéristiques géométriques des plaques de micrite de Fallérans.



Photo 1
Micrite.

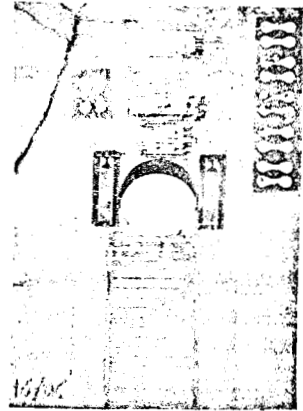


Photo 2
Marbre de St Pons
Foliation perpendiculaire à
l'axe de compression.

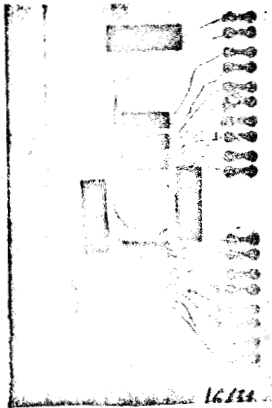


Photo 3
Marbre de St Pons
Foliation parallèle à
l'axe de compression.

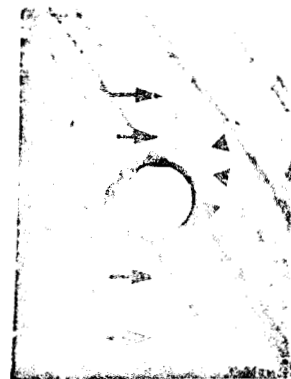


Photo 4
Marbre de St Pons
Foliation à 45° par rapport
à l'axe de compression.

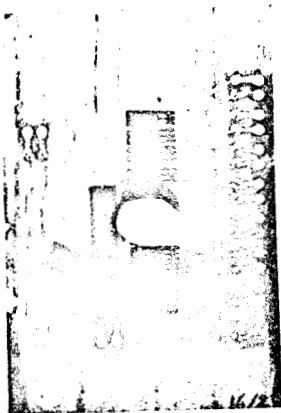


Photo 5
Marbre de St Pons.
Avec microfissure dans le
sens de l'axe de compression.

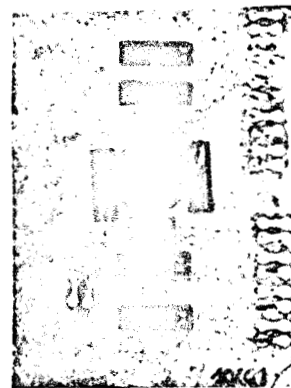


Photo 6
Marbre de St Léon.



Marbre de St Pons : sans macrofissure, foliation perpendiculaire à l'axe de compression (photo 2, planche 2).

essai	ϕ (mm)	L (mm)	e (mm)	H (mm)
16/01	16,2	62,3	12,3	87,3
16/02	16	65	12,8	51,8
16/03	16,6	63	12,7	88,5
16/04	16,3	59,8	12,8	87
16/05	16	62	12	81
16/06	16,3	62,3	12,6	85,8

Tableau 4.4

Marbre de St Pons : sans macrofissures, foliation parallèle à l'axe de compression (photo 3, planche 2).

essai	ϕ (mm)	L (mm)	e (mm)	H (mm)
16/30	13,5	58,4	12	81
16/31	14,3	58,5	12	81

Marbre de St Pons : sans macrofissures, foliation à 45° par rapport à l'axe de compression selon figure 4.3 et photo 4, planche 2.

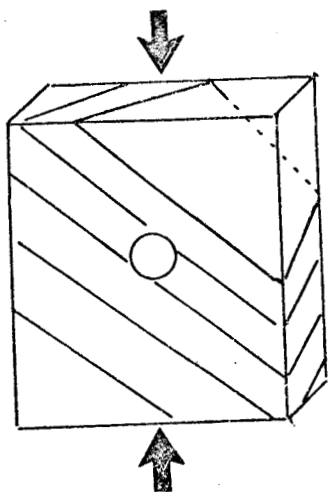


Fig. 4.3

essai	ϕ	L(mm)	e(mm)	H (mm)
16/11	14,3	62	12	78
16/12	14,2	59	11,6	81
16/13	14	57,5	12,2	78

Marbre de St Pons : avec macrofissures dans le sens de l'axe de compression (photo 5, planche 2).

essai	ϕ (mm)	L (mm)	e (mm)	H (mm)
16/21	14	59,7	14	88
16/22	14	59,4	11,4	88
16/23	14	61	12,7	90

Marbre de St Léon : (photo 6, planche 2).

essai	ϕ (mm)	L (mm)	e (mm)	H (mm)
10/01	16,4	63,5	14	83,1
10/02	16,4	65	11,5	87
10/03	16,2	67	14	81
10/04	16,4	65	12	82

4.3.2. ENREGISTREMENT DE LA PROPAGATION

a) Description des divers techniques employées.

L'un des objectifs de l'étude expérimentale est de pouvoir préciser l'évolution du critère de propagation en fonction de la longueur de fissure.

Il a donc été nécessaire de mettre au point une technique permettant de déterminer à un instant donné, c'est à dire pour une charge donnée, la longueur de fissure. Plusieurs solutions ont été envisagées. Nous allons brièvement les passer en revue.



. Méthode optique

Un cathétomètre a été placé perpendiculairement à la plaque. En fonction de la charge appliquée, le déplacement de la fissure de traction aura pu être mesuré par la vis micrométrique. Cette méthode n'a conduit à aucun résultat dans le cas des roches car il a été impossible de détecter cette fissure de traction et encore moins la tête de fissure car les ouvertures restent toujours très faibles.

. Méthode optique et visualisation par vernis craquelant

Afin de préciser la fissure de traction dans la méthode optique, nous avons procédé à un recouvrement des surfaces de l'échantillon par un vernis craquelant type "Tenslac" de Vishay Micromesures. Ce vernis a la propriété de se rompre pour un allongement relativement constant, les craquelures étant orientées perpendiculaire à la contrainte principale de traction.

Si cette technique donne de bons résultats, elle n'est pas simple du point de vue pratique, et surtout ne permet pas de suivre les deux fissures réparties de part et d'autre du trou.

. Utilisation de détecteur de propagation de fissure.

Le principe de ces indicateurs de propagation de fissure est très simple : une telle jauge comprend des brins résistifs accouplés en parallèle.* On la colle à l'enduit où doit se produire une fissure, à mesure que celle-ci progresse, les brins successifs sont détruits. Une mesure de la résistance à chaque instant indique la position de front de fissure.

Cette technique n'a donné aucun résultat : le support et les brins ne sont pas assez fragiles, et la détection de la fissure ne se fait que bien après que le front soit passé.

. Jauges à fils résistants

Les fissures étant extrêmement fines, nous avons été amenés à utiliser une méthode automatique plus sensible, basée sur la non linéarité des déformations, lors du passage du front de fissure.

Sur le chemin présumé de fissuration, on colle une jauge d'extensométrie (fig. 4.4). Dans un premier temps, nous supposons que la jauge se réduit à un brin ponctuel. Lorsque la fissure se rapproche, l'état de contrainte en M est de l'ordre de :

* photo 2, planche 2.

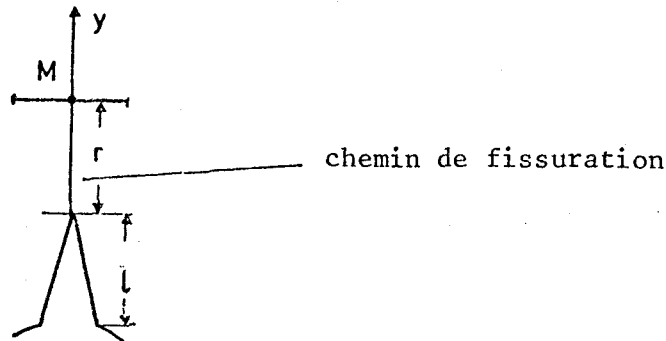


Fig. 4.4.

$$\sigma_{xx} \approx \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$\sigma_{yy} \approx \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} - T$$

Ainsi, la déformation de la jauge est :

$$E \varepsilon \approx \frac{K_1 (1-\nu)}{\sqrt{2\pi r}} + \nu T$$

Une première remarque s'impose : K_1 n'est pas lié uniquement à la charge, mais dépend de la longueur de fissure selon les lois déjà établies :

$$\frac{GE}{T^2 \pi R} = \frac{K_1^2}{T^2 \pi R} = f(l) \quad \text{ou} \quad K_1 = T \sqrt{\pi R \cdot f(l)}$$

Si la fissure se propage, alors la jauge aura une réponse non linéaire par le fait que la fonction $f(l)$ n'est pas linéaire. Ainsi, la jauge enregistre deux termes : un dû à la déformation élastique de la matière sous l'effet de la charge T , et un dû à l'avancement de la fissure. Afin d'éclaircir les ordres de grandeur, plaçons-nous dans le cas des roches calcaires ($K_{1C} \approx 3,2 \text{ daN/mm}^{3/2}$, $\nu = 0,3$) et déterminons, en condition de propagation à charge constante, le défaut de linéarité par rapport au matériau sans fissure ; ce défaut est exprimé par le nombre sans dimension $E\varepsilon/\nu T$ et est représenté par la figure 4.5, en fonction de la charge T .

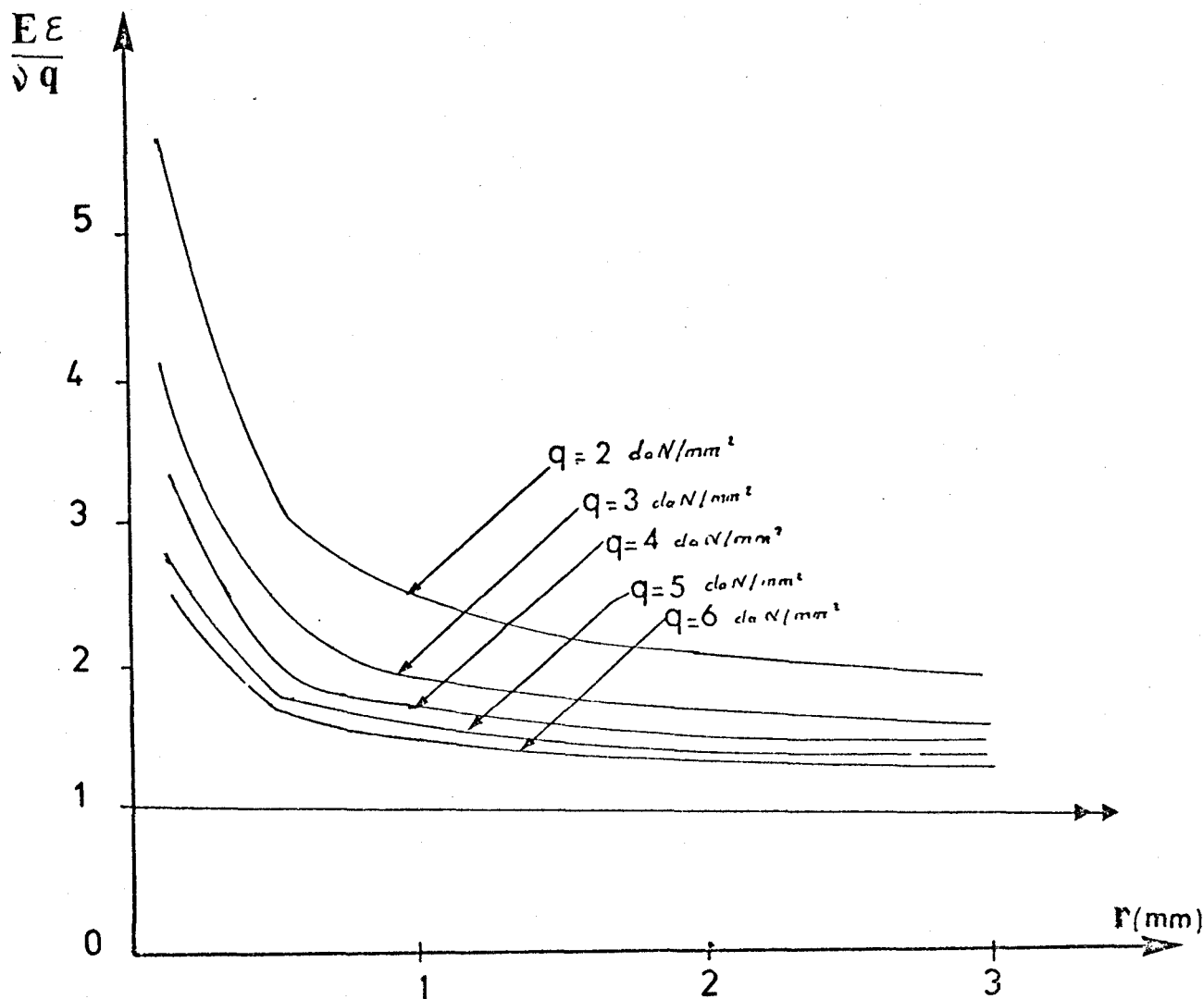


Fig. 4.5

Plusieurs remarques s'imposent :

1) Pour une distance r inférieure à 1 mm, le défaut de linéarité devient très important,

2) La jauge d'extensométrie ne fait pas une mesure ponctuelle. Elle possède une certaine largeur (≈ 3 mm) et une certaine longueur (5 mm ou 10 mm), ce qui donne en réponse une moyenne sur une surface où le gradient de contrainte est important.

3) Pour des charges appliquées de l'ordre de 3 à 6 daN/mm^2 relevée expérimentalement, la valeur de $\frac{E\varepsilon}{\partial q}$ est de l'ordre de 1,5 si r est supérieur ou égal à 1 mm.

Un exemple de dépouillement de courbe $T = T(\epsilon)$ est donnée p. 76.

La figure 4.6. représente le diagramme $T=T(\epsilon)$. enregistré par la jauge d'extensométrie. On détecte près de l'origine une portion linéaire OA correspondant au comportement élastique lorsque la fissure se trouve très éloignée du lieu de mesure, puis une partie non linéaire représentant l'approche de la figure et le passage de la fissure à travers la jauge. Cette dernière partie s'incurve très rapidement en fonction de T .

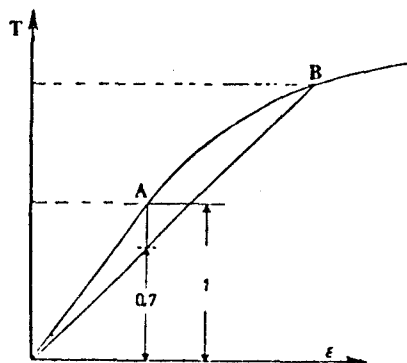
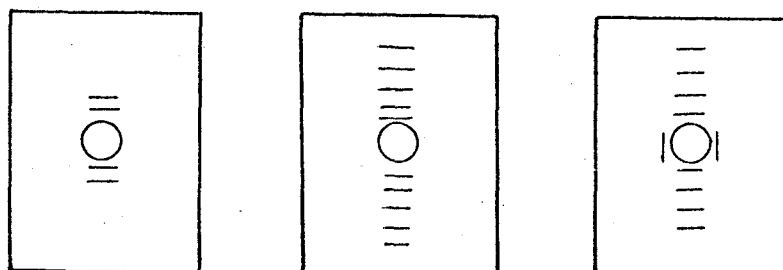


Fig. 4.6

Si l'on accepte le fait que lorsque la fissure est proche du premier brin de la jauge d'extensométrie, la valeur de $\sqrt{T/E\epsilon}$ est égale en moyenne (voir remarques précédentes) à $1/1,5 \approx 0,7$ alors, du point de vue pratique, nous déterminerons la charge pour laquelle la fissure atteint le premier brin en traçant une droite OB de pente égale à 0,7 fois celle de OA. La remarque 1 permet d'affirmer que l'erreur commise reste inférieure à 1 mm, ce qui a été vérifié expérimentalement par vernis craquelant.

b) Description de l'enregistrement de la propagation.

Les jauges sont collées sur l'échantillon suivant trois modèles.



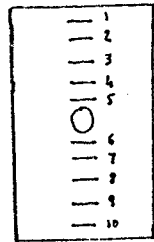
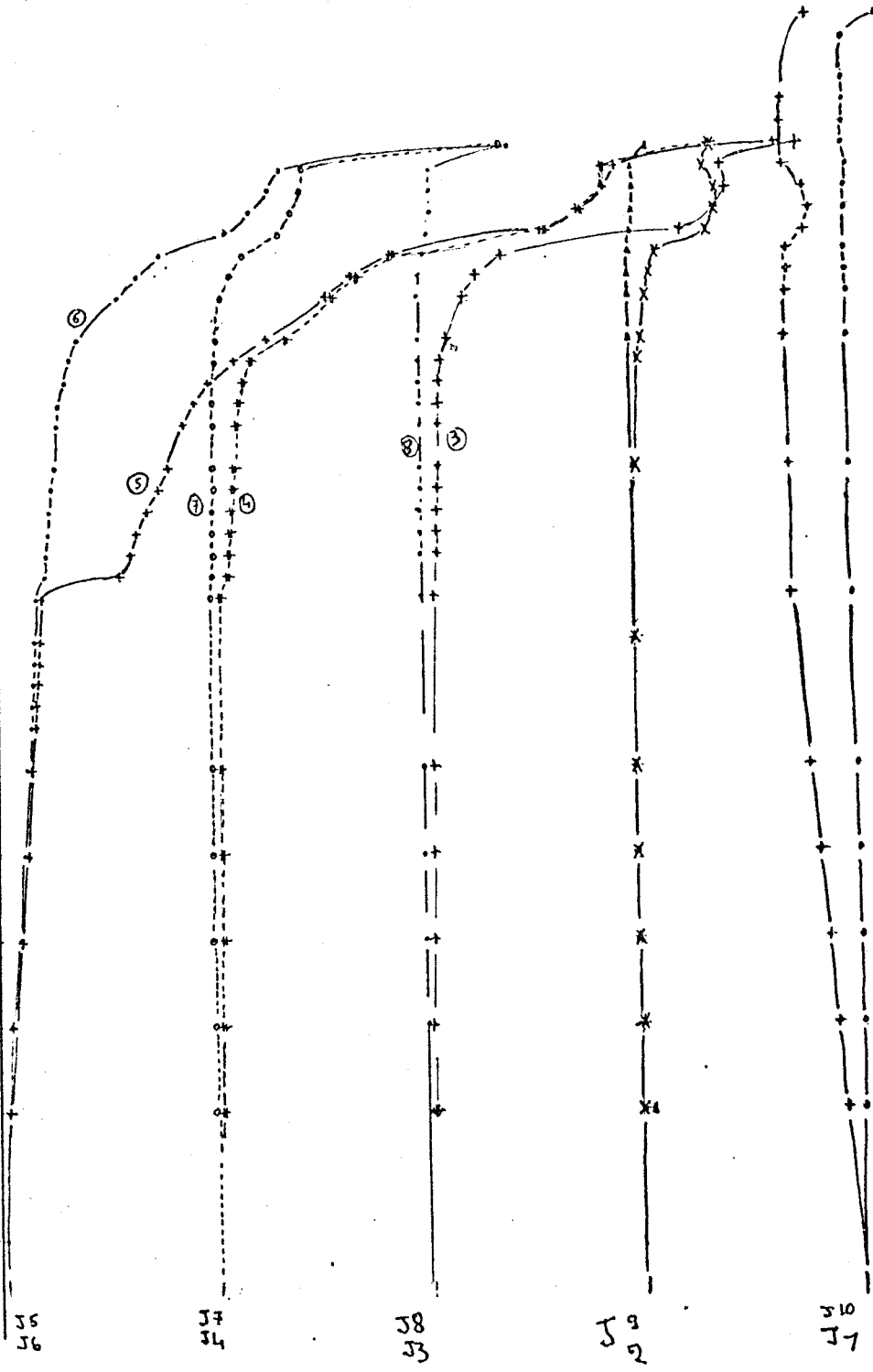
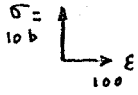
(a)

(b)

(c)

Fig. 4.7

0702



BUS LILLE

* Le premier type d'échantillon (Fig. 4.7 a)) permet d'arrêter la fissure à un certain niveau de propagation et ainsi de pouvoir analyser le mécanisme de fissuration.

* Le deuxième type (Fig. 4.7 b)) permet de détecter la fissure de traction principale tout au long de sa propagation.

* Le troisième type (Fig. 4.7 c)) permet de détecter le démarrage de la fissure de cisaillement, c'est à dire l'instant juste avant la rupture globale de l'échantillon.

Les côtes de positionnement des premiers brins des jauges à fils résistants par rapport au bord du trou ont été relevées au cathétomètre.

Les déformations des jauges sont mesurées à l'aide d'une chaîne de mesures automatiques (Vishay-Micromesures VE 20). Les mesures sont données directement en $\mu\text{m}/\text{m}$ et imprimées sur commande manuelle.

4.3.3. TECHNIQUE DE L'ESSAI

Les essais ont été menés sur une presse à vis de 10 t (Instron 1115). Pour tous les essais, la vitesse de traverse a été choisie égale à 0,002 cm/mm. L'échantillon est posé sur un plateau à rotule afin de rattrapper les défauts de parallélisme des faces. Une feuille de téflon est glissée entre l'échantillon et chaque plateau pour se rapprocher le plus possible de la distribution uniforme de pression.

Au fur et à mesure de la montée en charge, la chaîne automatique enregistre les déformations des jauges d'extensométrie.

4.3.4. IMPRÉGNATION

Il est nécessaire d'imprégner les échantillons, cela afin de pouvoir exécuter des lames minces.

L'imprégnation doit être faite à une température de polymérisation aussi proche que possible de la température ambiante, de façon à ne pas créer de contraintes thermiques lors du refroidissement, contraintes néfastes à la réalisation de lames minces correctes.

La technique utilisée consiste en une imprégnation sous pression, technique mise au point par TANCREZ | 25 |.

Le mélange est le suivant :

Araldite GY 250	70 % en poids
Durcisseur HY 951	20 %
Diluant DU 021	10 %
Colorant bleu	quelques gouttes

ora

Le colorant permet de visualiser, après sciage, les fissures par pénétration de la résine au coeur de l'échantillon.

- Matériel employé (Fig. 4.8)

Le moule contenant l'échantillon à injecter est enfermé dans une cellule à haute pression.

Les conditions de polymérisation sont surveillées grâce au manomètre et au thermomètre ; la source de chaleur est une simple plaque chauffante réglée sur laquelle est posée la cellule.

Cette technique d'imprégnation a donné des résultats très satisfaisants, ce qui a permis de faire une étude de la fissuration à partir de lames minces de la dimension des échantillons imprégnés.

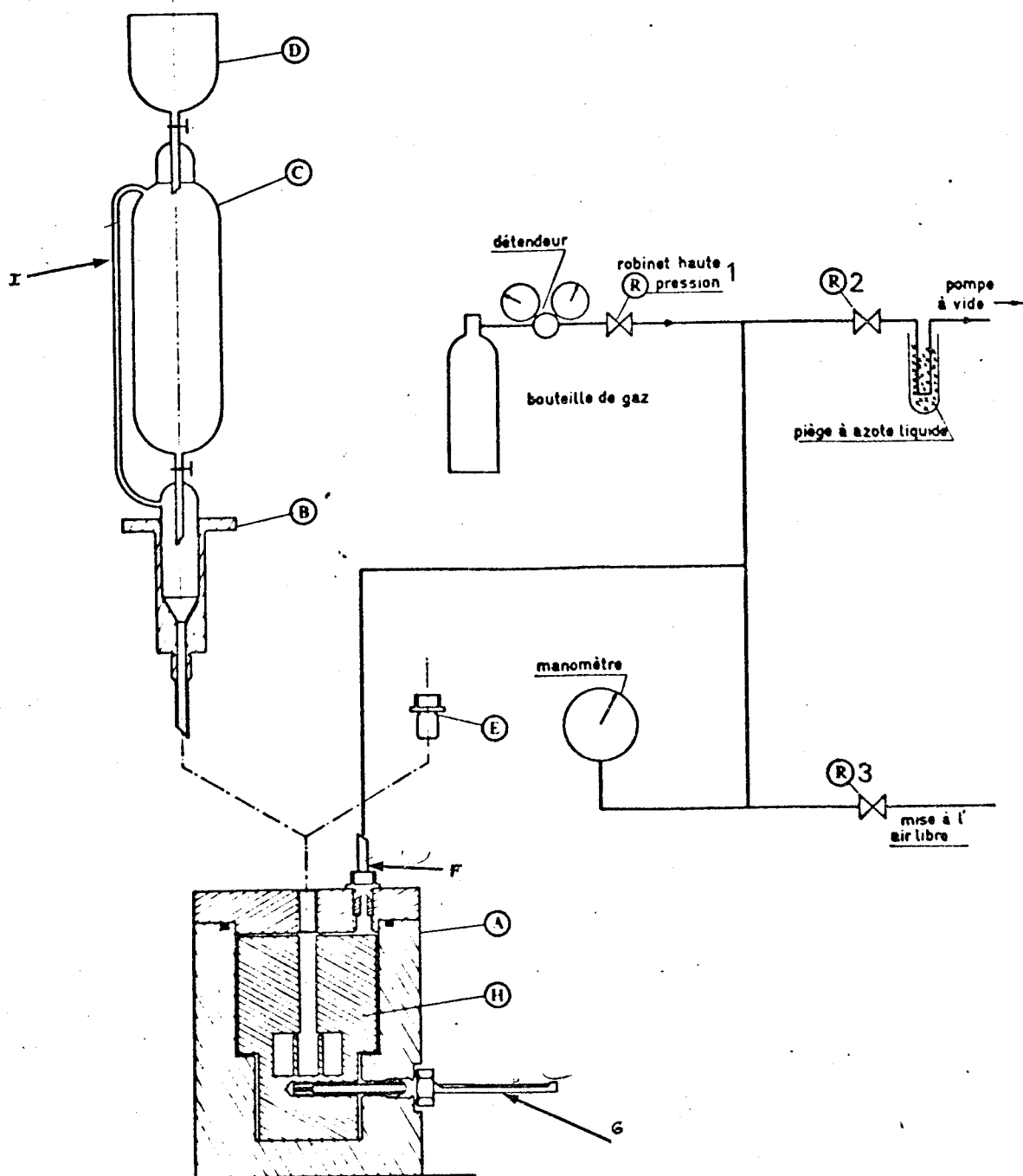


Fig. 4.8 Schéma de fonctionnement de cellule d'imprégnation sous pression, d'après TANCREZ.

- | | |
|-------------------------|---------------------------------------|
| A : corps de la cellule | E : bouchon haute pression |
| B : embase | F : Tuyauterie vide et haute pression |
| C : ampoule de dégazage | G : Thermomètre |
| D : ampoule réservoir. | H : Moule |
| I : tube de pression. | |

4.4.1. DÉTERMINATION DES COURBES $G_C(L)$

Le dépouillement a été effectué à partir de deux types de plaques (chapitre 3) :

- en utilisant les résultats obtenus au moyen de la plaque infinie,
- en utilisant les résultats de la plaque telle que $L/R = 10$ (cas n° 2 - paragraphe 3.4).

La plaque de 500 m de côte a l'avantage de présenter sensiblement le même rapport L/R que les échantillons utilisés lors de nos essais. Ce qui permettra un dépouillement plus exact et ainsi de pouvoir faire une meilleure comparaison de nos résultats par rapport à d'autres types d'essais ; cette comparaison sera effectuée au paragraphe suivant.

Pour déterminer les courbes K_{IC} en fonction de l (ou G_C en fonction de l), il est nécessaire de connaître pour une configuration donnée, la longueur de fissure atteinte, la charge correspondante T et la relation $K_I = K_I(l, T)$ (ou $G = G(l, T)$).

Pour une longueur de fissure l on en déduit la charge T à partir des courbes $T = T(\epsilon)$ des jauges d'extensométrie, selon la méthode exposée au paragraphe 4.3.2.

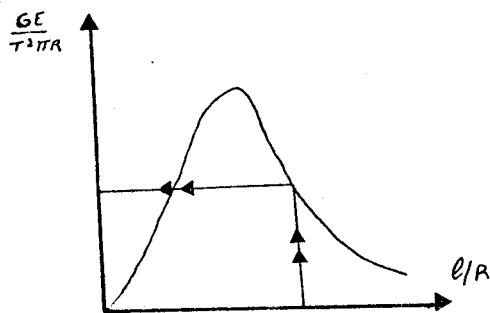


Fig. 4.09

L'utilisation des courbes $G(l, T)$ déterminées au chapitre 3 permet, pour une valeur de l donnée, de connaître la valeur du rapport sans dimension $\frac{G_C}{T^2 \pi R}$, et de remonter ainsi à la $T^2 \pi R$ valeur de G_C ou de K_{IC} nécessaire pour faire avancer la fissure de longueur l .

4.4.1.1. DEPOUILLEMENT A PARTIR DE LA PLAQUE INFINIE.

Les dépouillements à partir de la plaque infini, c'est à dire à partir de la courbe $GE/T^2 \pi R$ de la figure 3, sont reportés dans les figures 4.10 à 4.19.

Nous remarquons que l'allure générale de ces courbes par ce type de dépouillement peut se décomposer en deux parties (figure 4.14) : une partie ascendante AB pour des valeurs de l/R comprises entre 0 et 0,2, et une partie horizontale ou descendante BC.

Figure 4.10

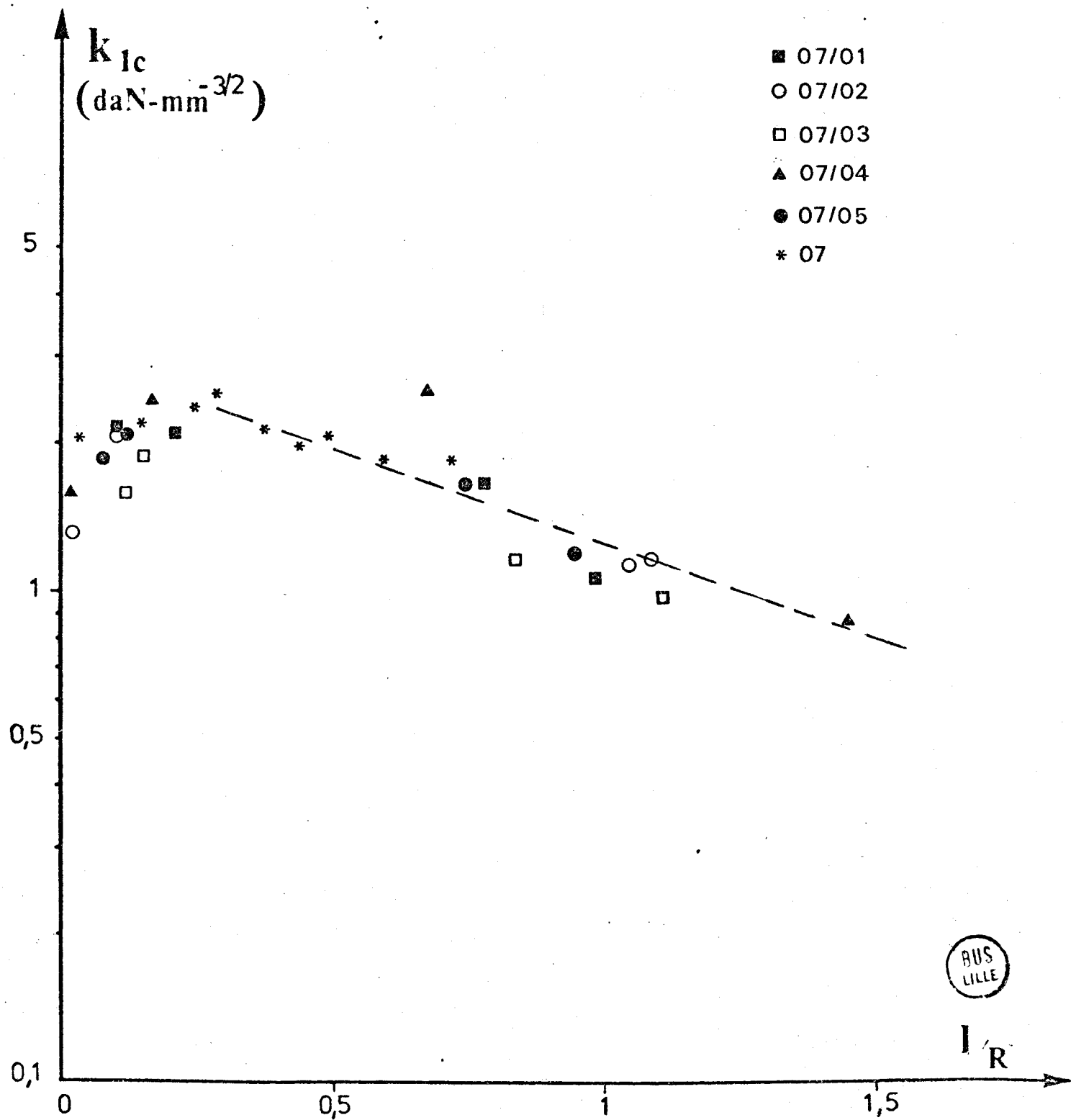
BUS
LILLE

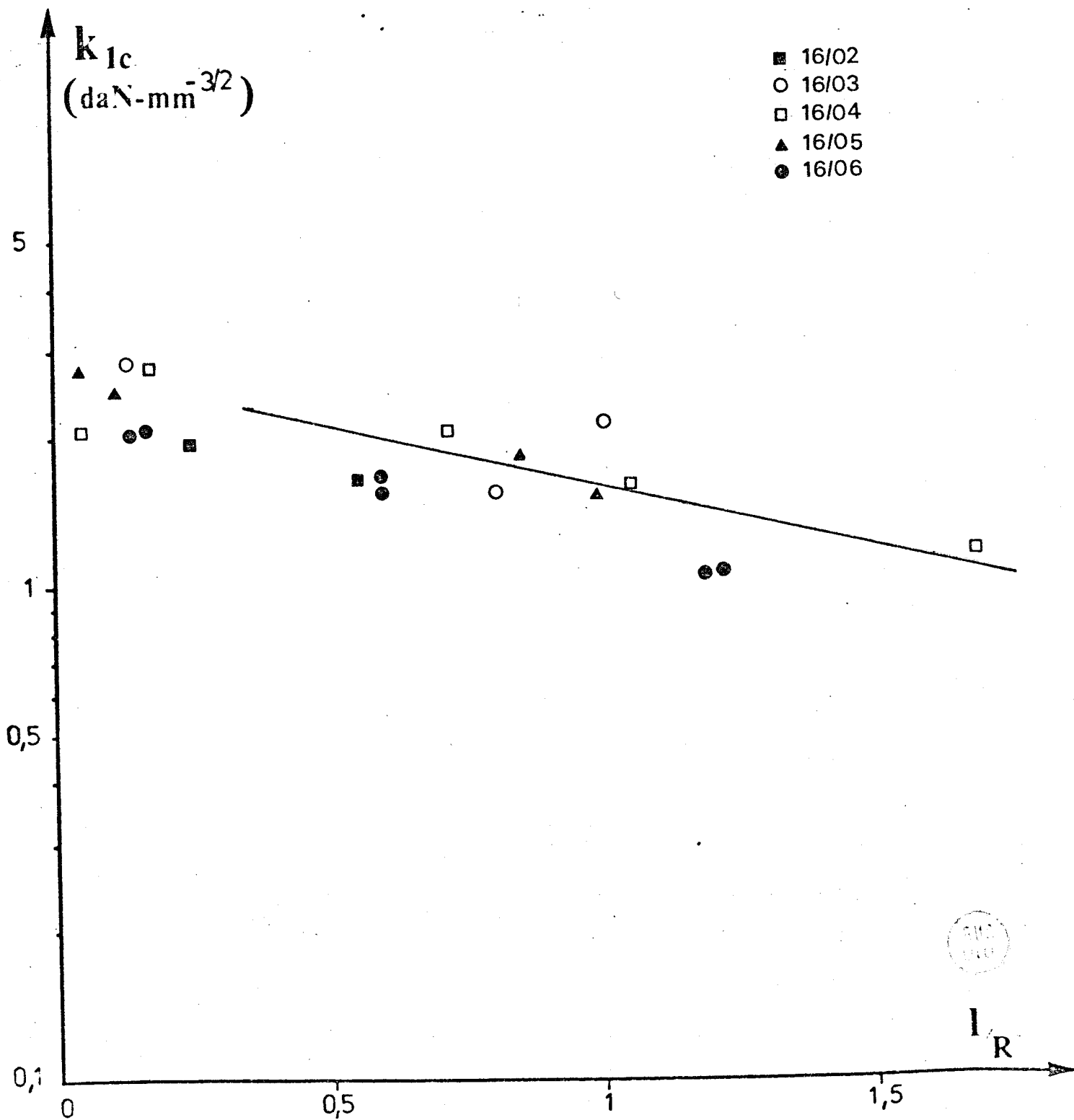
Figure 4.11

Figure 4.12

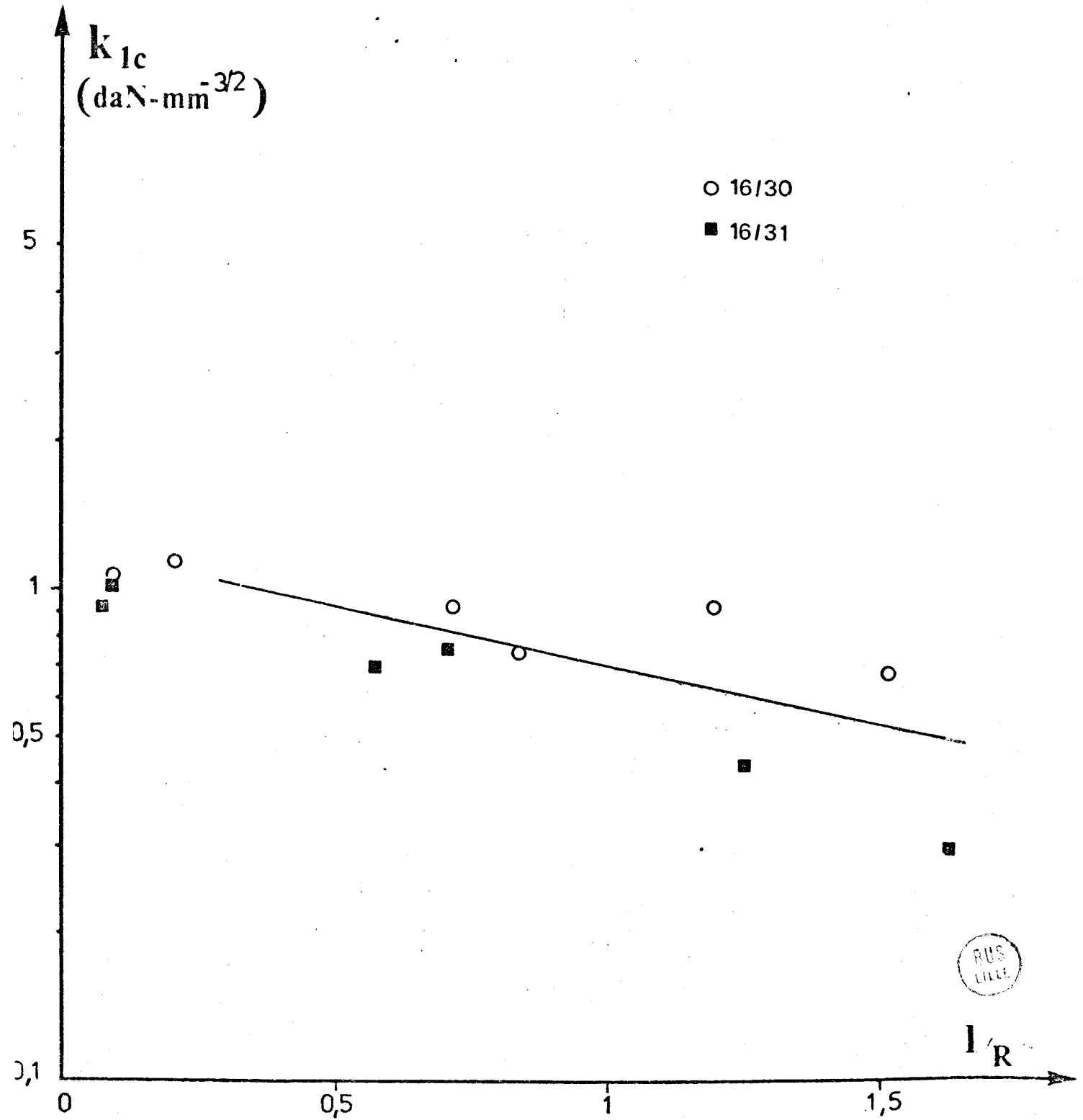
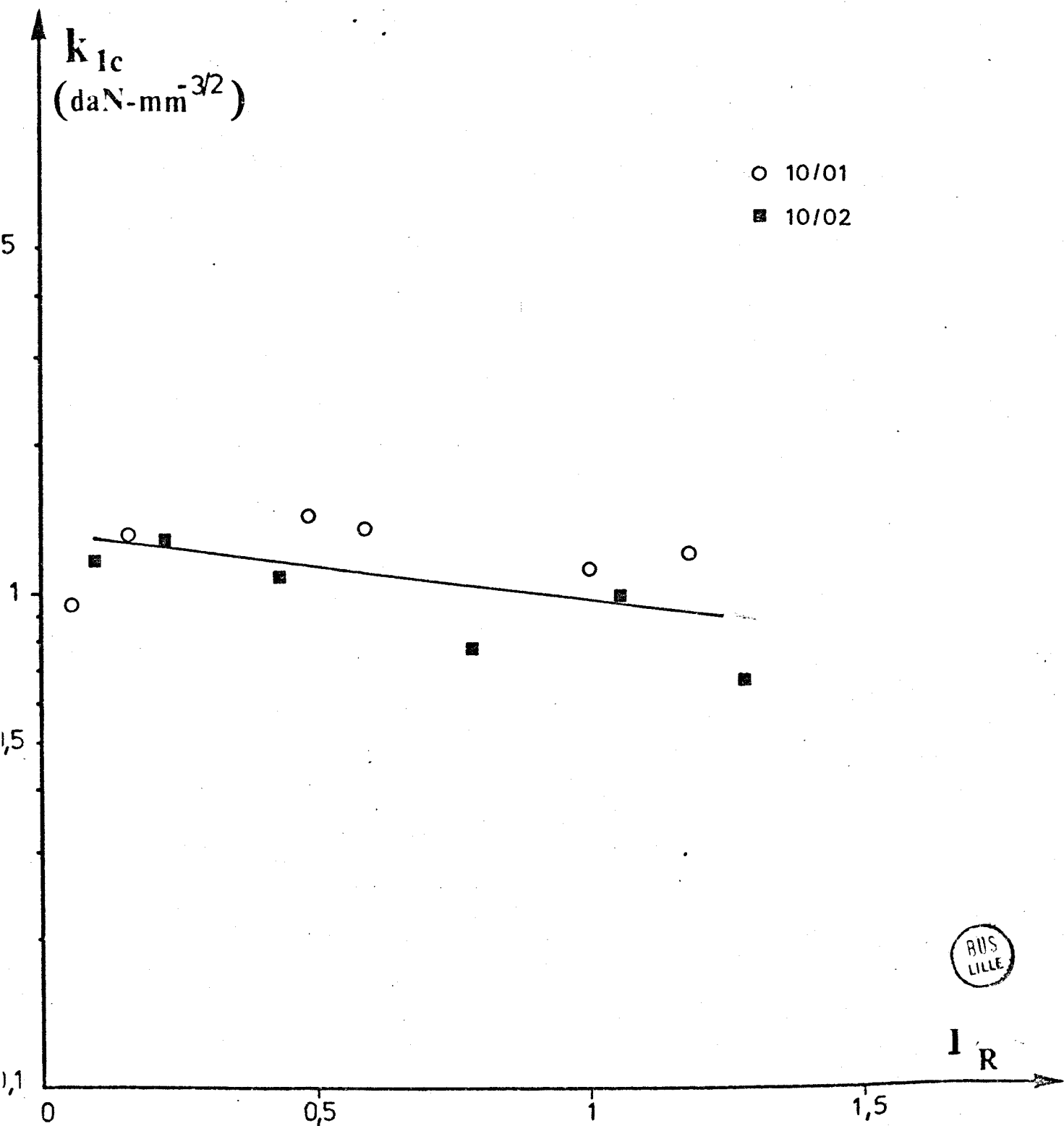


Figure 4.13



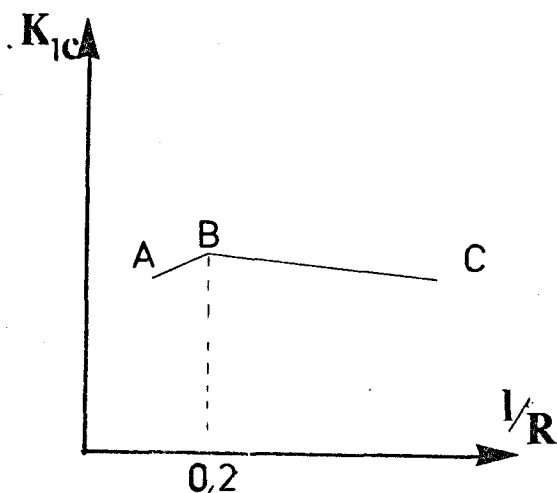


Fig. 4.14

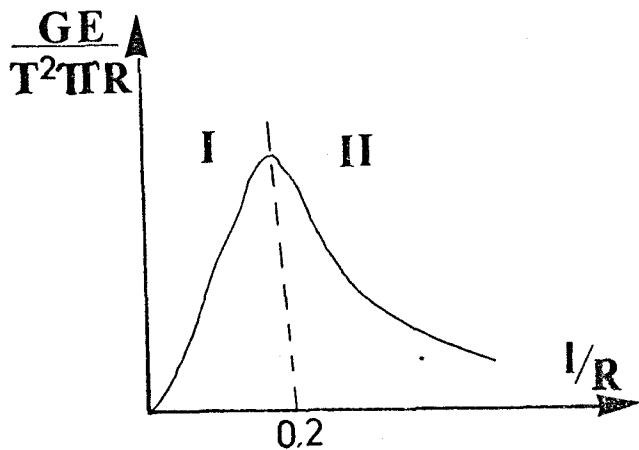


Fig. 4.15

La partie AB doit être discutée et mise en doute pour deux raisons :

1) Dans l'essai de fissuration en compression à partir du trou, l'énergie d'avancement de fissure G est représentée schématiquement par la figure 4.15. Si l'on suppose le critère indépendant de la longueur de fissure, la région I représente une instabilité dans la propagation de la fissure.

Par conséquent, pour des longueurs l/R inférieures à 0,2 la propagation est instable et les jauges d'extensométrie donne une mauvaise corrélation entre la charge appliquée et la longueur de fissure.

2) Dans le paragraphe 4.3.2. nous avons déjà observé que la détection de la longueur de fissure par jauge conduisait à de fortes erreurs relatives, lorsque la longueur de fissure était faible

Ces deux raisons font que nous ne nous intéresserons pas à la zone AB. Avant de discuter la zone BC et les valeurs obtenues, présentons les résultats en dépouillement de plaque non infinie.

4.4.1.2. DEPOUILLEMENT A PARTIR DE LA PLAQUE NON INFINIE

Nous avons choisi de dépouiller les résultats expérimentaux à partir des courbes $GE/T^2\pi R$ obtenues pour un rapport $L/R = H/R = 1,0$ qui correspond sensiblement aux plaques utilisées.

Les résultats sont alors donnés par les figures 4.16 à 4.19. On remarquera que la zone AB de la figure 4.14 existe toujours pour les mêmes raisons, mais que la zone BC présente une droite quasiment horizontale, légèrement descendante pour la micrite ou légèrement montante pour le marbre 10.

4.4.2. DISCUSSION DES RÉSULTATS - INFLUENCE DU GRADIENT DE CONTRAINTE EN TÊTE DE FISSURE.

Les remarques sur les résultats porteront sur les deux points :

Figure 4.16

- 16/02
- ▲ 16/06
- 16/04
- 16/05

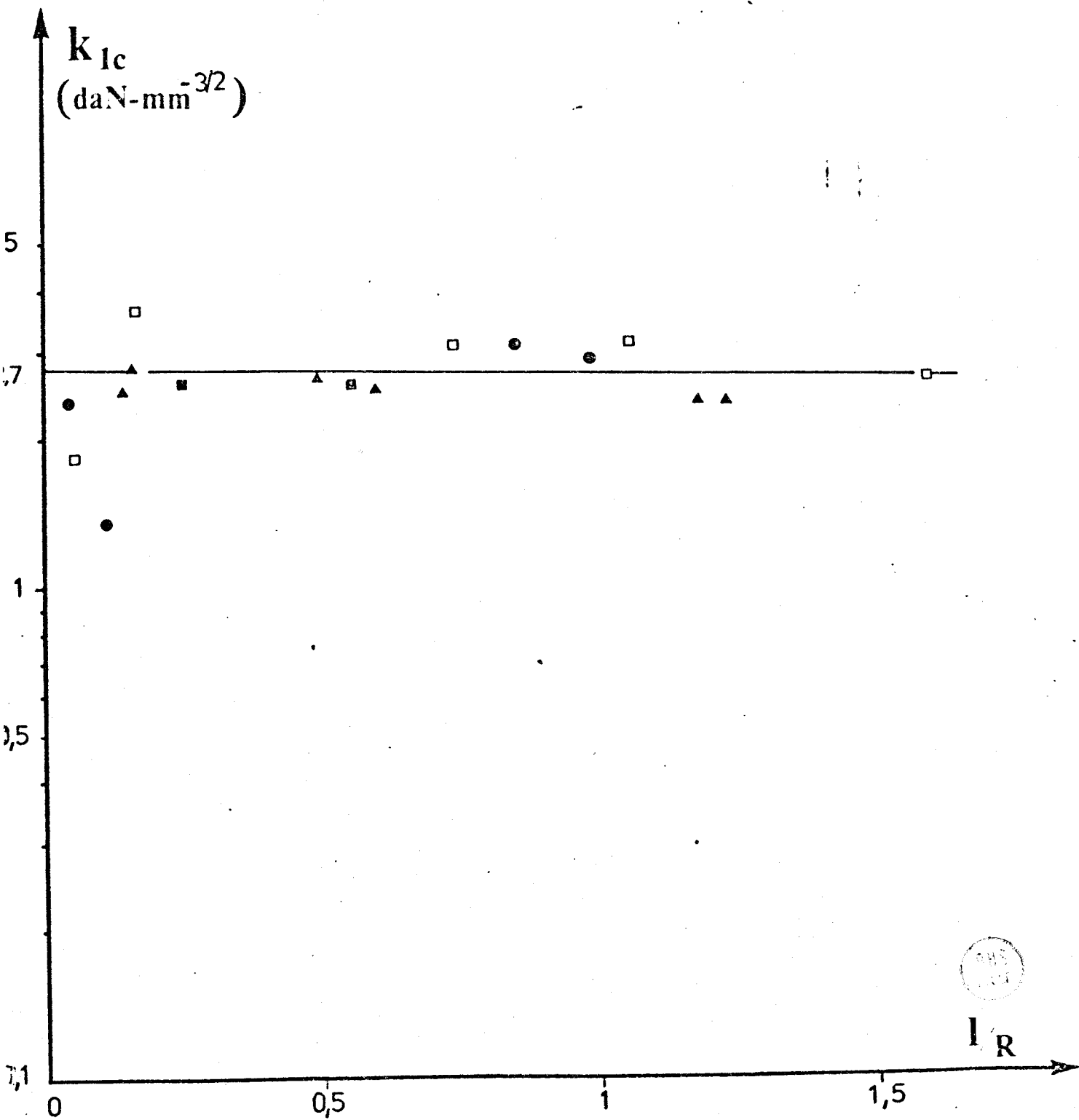


Figure 4.17

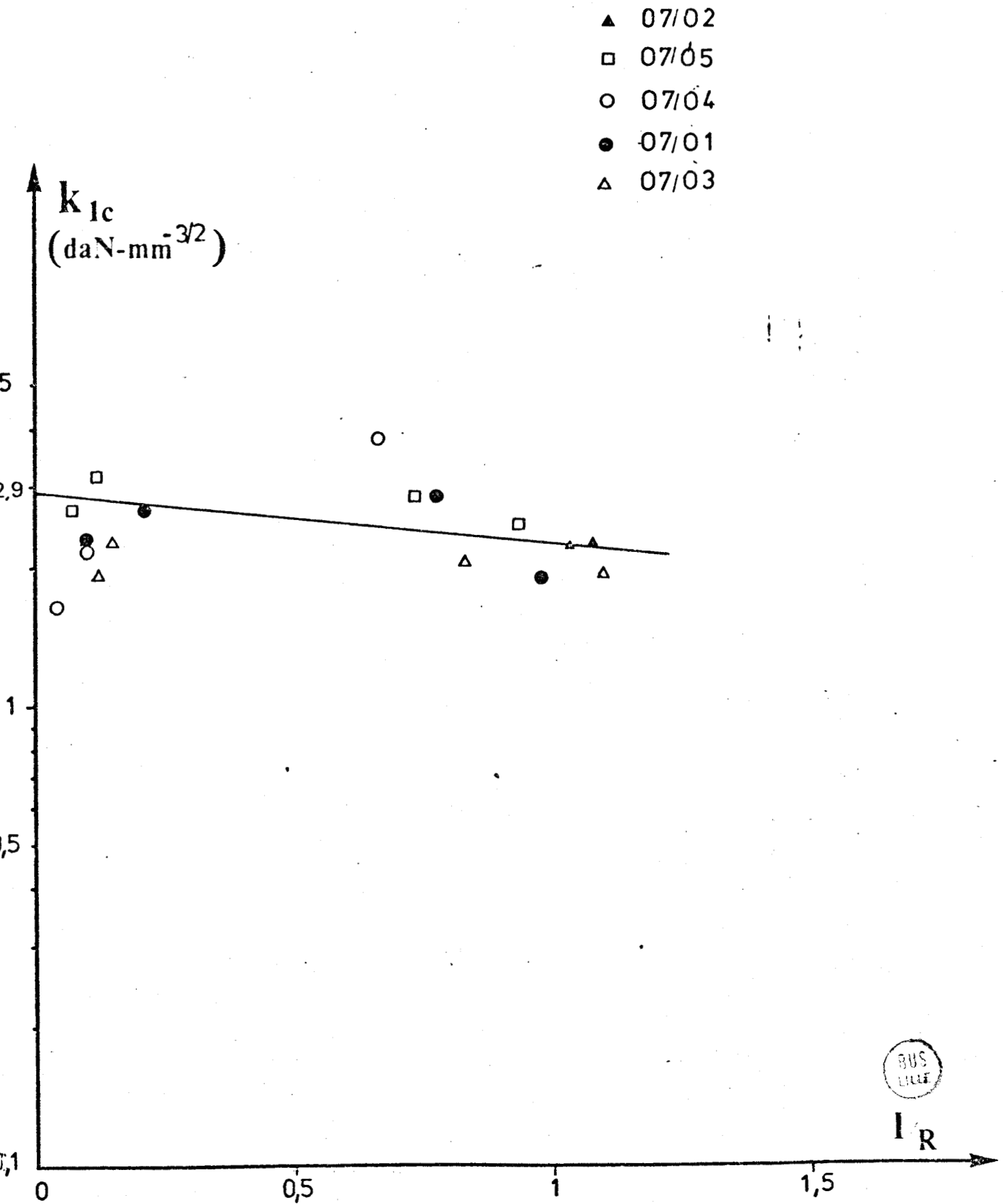


Figure 4.18

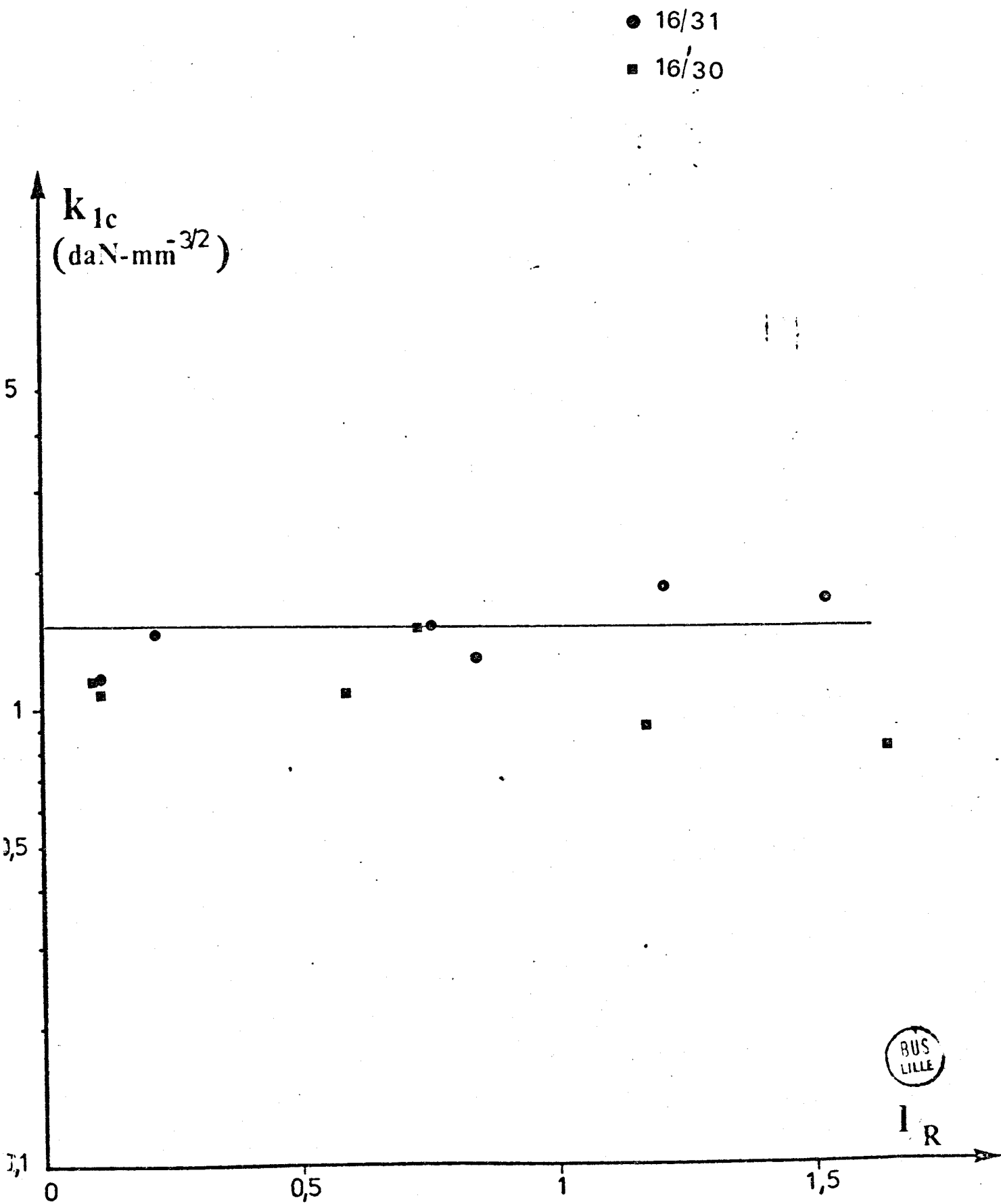
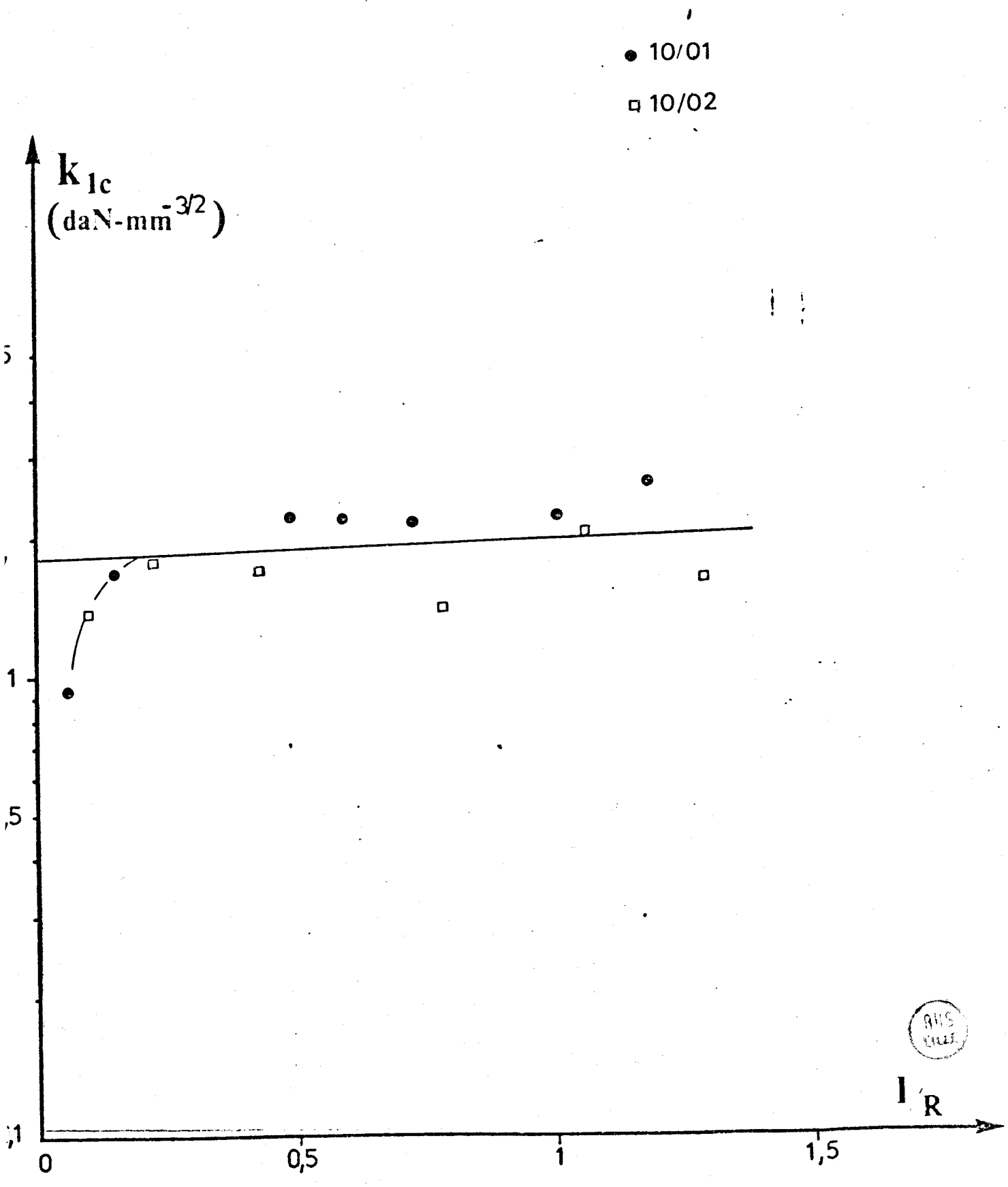


Figure 4.19



- conditions de démarrage de la fissuration,
- allure des courbes $K_{IC} = K_{IC} \left(\frac{1}{R}\right)$

4.4.2.1. CONDITIONS DE DEMARRAGE DE LA FISSURATION

Les conditions de démarrage de la fissuration à partir du trou ont été déterminées en prolongeant la droite BC (fig. 4.14), jusqu'à la valeur $1/R = 0$, en utilisant le dépouillement de la plaque finie. les résultats sont reportés dans le tableau 4.5. On remarquera alors que les valeurs ainsi obtenues

$K_{IC} (\text{daN}\cdot\text{mm}^{-3/2})$		micrite 07	marbre 16(//)	marbre 16(⊥)	marbre 10
Flexion trois points	i	3,4	2,2	3,4	2,6
	F	3,4(?)		7,9	6,6
plaque	i	2,9	1,3	2,7	1,7
trouée	F (1/R=1,2)	2,2	1,3	2,7	2,0

Tableau 4.5.

Tableau comparatif des valeurs de K_{IC} en début de propagation (i) et en fin de propagation (F) pour les deux techniques expérimentales.

sont du même ordre que celles obtenues à partir de l'essai de flexion trois points mais qu'elles restent cependant toujours inférieure. L'erreur, faible, devrait provenir du mode de détection de la longueur de fissure.

4.3.2.2. ALLURE DES COURBES $K_{IC} = K_{IC}(1)$.

Rappelons brièvement les résultats obtenus, à partir d'essais de flexion trois points sur les matériaux utilisés dans cette étude | 24 |

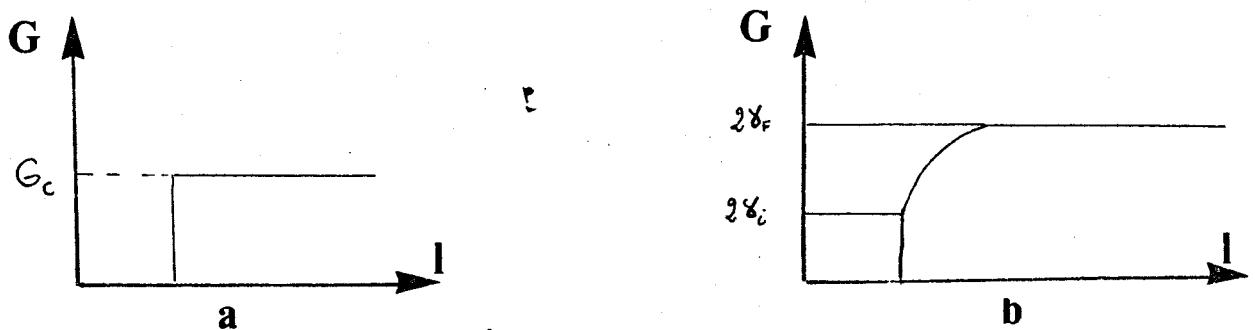


Fig. 4.20

Courbes obtenues d'après les résultats de HENRY | 24 |

dans le cas des micrites (roche calcaire à grains fins, très faiblement poreuse et microfissurée), l'énergie G_C nécessaire pour propager la fissure semble être indépendante de la longueur de fissure atteinte (fig. 4.20 a)).

- dans le cas des marbres (fig. 4.20 b)), l'énergie G_C varie d'une énergie $2\gamma_i$ pour démarrer la propagation à une énergie $2\gamma_F$ pour propager la fissure sur de plus grandes distances. La différence entre γ_F et γ_i serait liée à une importante ramification en tête de fissure, provoquée par l'existence d'une microfissuration naturelle.

La propagation de fissure à partir de trou dans une plaque soumise en compression s'effectue sous un champ de contrainte nettement différent de celui imposé par l'essai de flexion trois points. Nous allons en examiner les conséquences sur les énergies γ_i , γ_F ou plus exactement sur les courbes $K_{1C} = K_{1C}(1/R)$.

micrite Dans le cas HENRY | 24 | avait supposé l'énergie G_C ou K_{1C} indépendant de la propagation. Nous trouvons que K_{1C} diminue dans les deux types de dépouillement.

Marbre 16 Dans les deux types de propagation, (soit parallèlement, soit perpendiculairement au plan de foliation), les résultats sont :

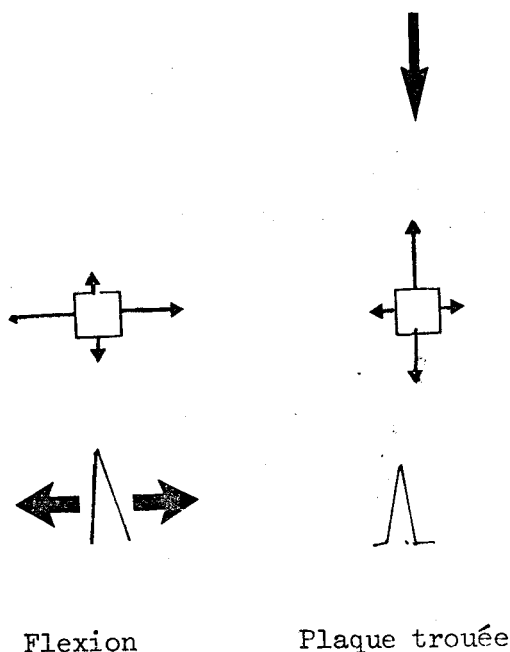
- une légère diminution de K_{1C} dans le cas du dépouillement par la plaque infinie,

- une valeur de K_{1C} constante dans l'autre cas.

Dans le cas de la flexion trois points, K_{1C} était multiplié par environ 2,3 pour une propagation sur une longueur de 10 mm.

Marbre 10 Dans ce dernier cas, en dépouillement de plaque infinie, nous trouvons que K_{1C} est multiplié par 1,2 pour une propagation de 10 mm alors que le facteur multiplicatif était de 2,6 environ en flexion trois points.

En conclusion, quelle que soit la méthode de dépouillement, les énergies mises en oeuvre dans la propagation en essai de plaque en compression, diffèrent nettement de celles nécessaires en flexion. Ceci met bien en lumière l'importance fondamentale de la microfissuration naturelle dans le mécanisme de propagation comme HENRY | 24 | en avait fait l'hypothèse : "la microfissuration naturelle facilite le démarrage de la fracture. Comme elle est généralisée à toute la roche, elle stabilise son évolution. En effet, une fissuration secondaire se développe au voisinage de la fissure principale augmentant considérablement l'aire des surfaces créées et par conséquent l'énergie totale dépensée. La fracture complète de l'échantillon nécessite des énergies plus importantes que celles requises pour faire démarrer cette fracture". En effet (fig. 4.21), dans l'état de flexion, en tête de fissure, l'état est de traction et par conséquent les fissures naturelles



peuvent se propager dans toutes les directions dès que les conditions sont requises. Il apparaît alors un important branchement. Dans le présent essai, il se crée une importante composante de compression dans l'axe de compression devant bloquer toute propagation latérale des fissures naturelles. Les modèles d'initiation et de propagation resteraient alors très proches et les énergies indépendantes de la propagation.

Fig. 4.21

4.4.3. AUTRES ESSAIS

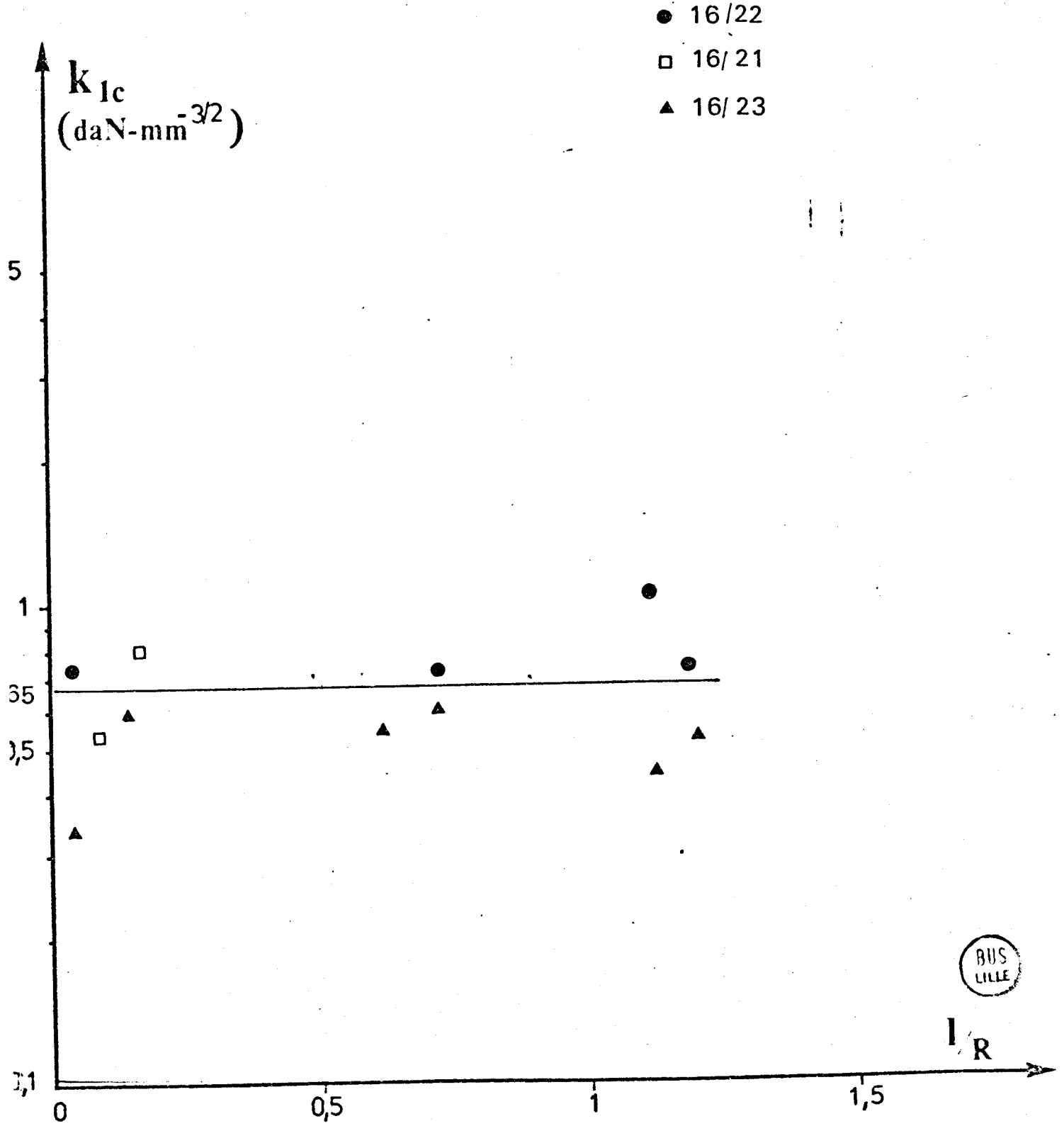
4.4.3.1. MARBRE 16 AVEC MICROFISSURES NATURELLES DANS L'AXE DE COMPRESSION.

Cet essai a été effectué pour montrer l'importance de la fissuration naturelle, dans les résultats obtenus. Ceux-ci sont présentés en dépouillement de plaque finie par la figure 4.22 et se résument à :

- une valeur de K_{IC} indépendante de la propagation, ce qui corrobore l'hypothèse faite précédemment sur le mécanisme de propagation ; en effet, dans ces essais, le branchement est fortement diminué, car le cheminement est quasi imposé par la présence de macrofissures alignées dans l'axe de compression.

- une valeur de K_{IC} nettement plus faible ($0,65 \text{ daN}\cdot\text{mm}^{-3/2}$) que dans l'essai correspondant sans macrofissures ($1,3 \text{ daN}\cdot\text{mm}^{-3/2}$) et illustré par la figure 4.11. L'interprétation que nous donnons de cette variation importante de K_{IC} passe par la surface réellement créée en cours de propagation. Si l'on suppose que les macrofissures n'ont pas d'influence dans le mécanisme de propagation en dehors d'un guidage du cheminement, en d'autres termes, si l'on suppose que le modèle reste identique et que les courbes $G(T, l)$ restent inchangées, tout se passe comme si l'aire réellement créée dans un accroissement δl était égale à l'aire apparente $e\delta l$ diminuée de l'aire déjà ouverte par fissuration naturelle $e_f\delta l$ (fig. 4.23 b)).

Figure 4.22



BUS
LILLE

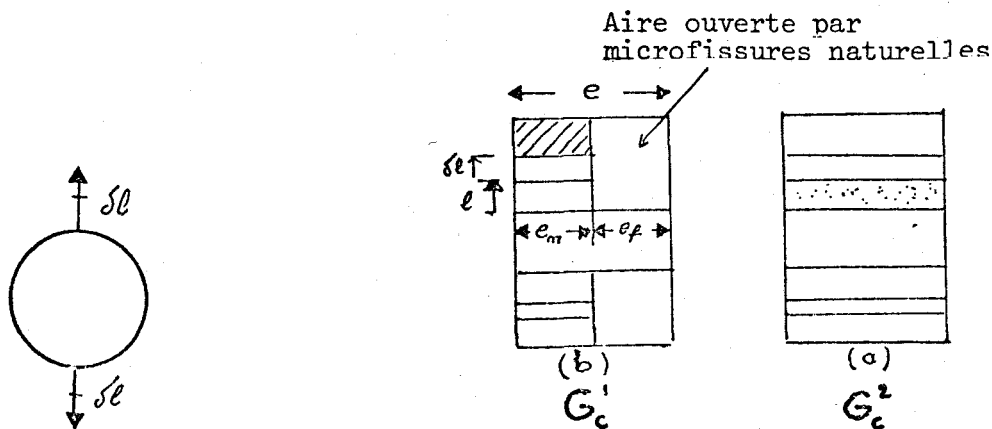


Figure 4.23

Notons G_C^1 l'énergie pour propager la fissure dans le modèle exact (déterminée par la plaque sans macrofissure) et G_C^2 l'énergie déterminée dans le modèle inexact (présent essai) ; alors :

$$G_C^1 e_m \delta a = G_C^2 e \delta a$$

ou

$$e_m = \frac{G_C^2}{G_C^1} e \approx \frac{(K_{1C}^2)^2}{(K_{1C}^1)^2} e \approx \frac{e}{4}$$

Les macrofissures occuperaient donc les 3/4 de la section parcourue par la fissurée créée mécaniquement. Ceci n'est vrai qu'en première approximation car l'on a supposé que le module d'Young était le même et que le mécanisme de propagation dans les deux cas restait identique, ce qui reste à vérifier.

4.4.3.2. MARBRE 16 AVEC PLAN DE FOLIATION INCLINE A 45°.

Le but de cet essai est d'essayer de tester la validité du modèle de fissures de traction lorsque le matériau possède une microfissuration inclinée par rapport à l'axe de compression. Les résultats sont donnés par la figure 4.24. et montrent une très grande dispersion dans les valeurs de K_{1C} initial, ce qui prouve que le modèle choisi est incorrect et que la fissuration initiale est inclinée. On remarquera cependant que pour des valeurs de $1/R$ grandes, la dispersion diminue.

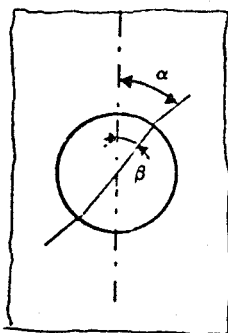
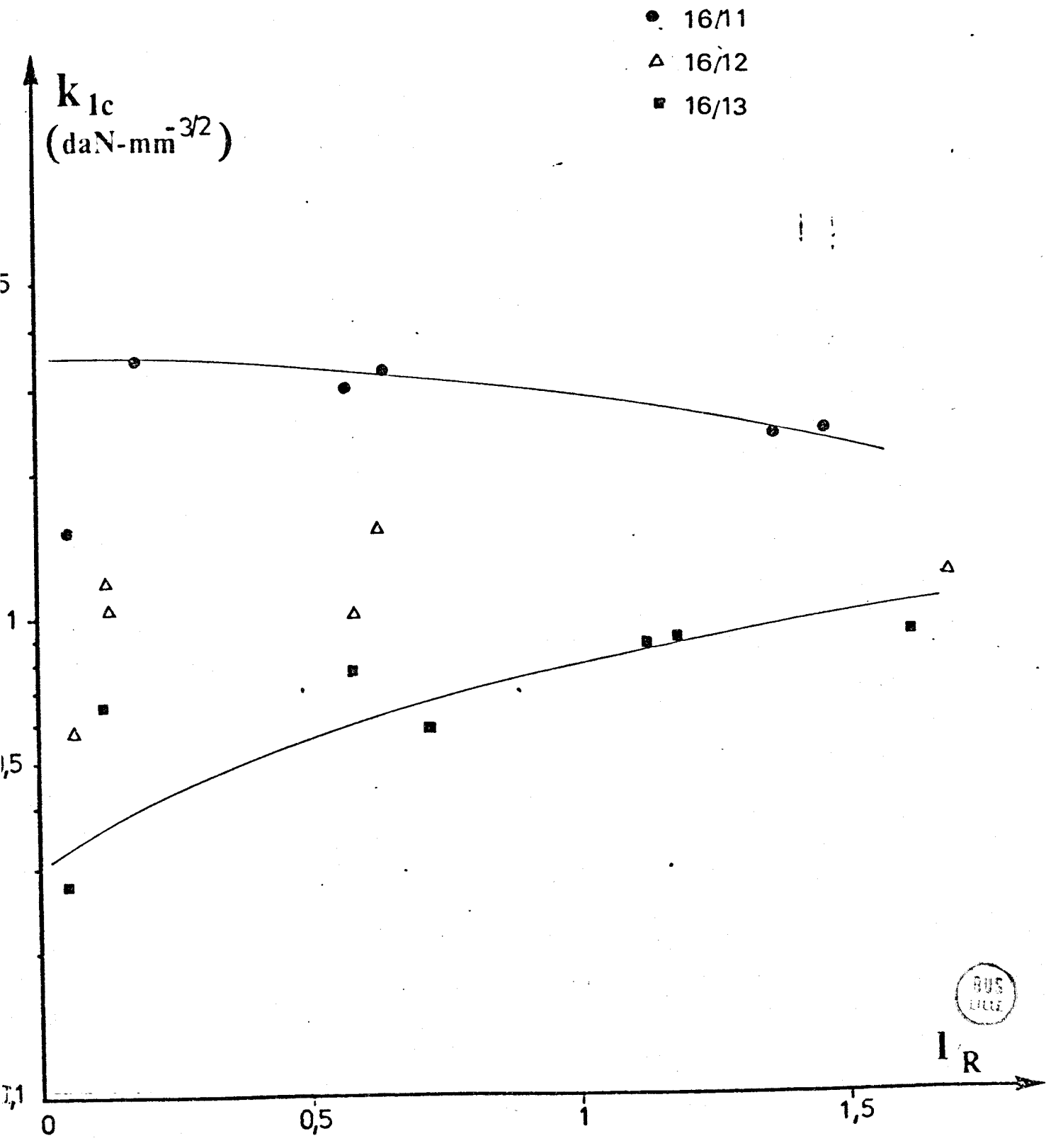


Fig. 4.25.

Une étude théorique complémentaire est donc nécessaire en choisissant un modèle à deux paramètres de fissure α et β (fig. 4.25).

Figure 4.24



4.5 ETUDE DU MÉCANISME DE PROPAGATION

L'étude microscopique du mécanisme de propagation a été effectuée après imprégnation de la roche, soit sur lame mince au microscope optique en transmission, soit sur surface polie au microscope électronique à balayage.

4.5.1. MICRITE 07 (PLANCHE 3).

Dans le cas de la micrite, on notera que la fissure est très fine et est toujours quasiment unique au cours de la propagation. Vers la tête de fissure, le cheminement passe par les petits trous subsphériques les plus alignés (flèches). Ces trous semblent jouer un rôle primordial dans le mécanisme de propagation par le fait qu'ils créent des microzones de traction, et cette influence est d'autant plus importante que l'influence de la zone de traction du trou de la plaque diminue. Ceci pourrait expliquer en partie la diminution apparente de l'énergie nécessaire pour propager la fissure lorsque la tête s'éloigne du trou, par ce que le champ de contrainte est plus de traction que celui pris en compte dans les calculs. Il serait nécessaire de changer le modèle de propagation.

4.5.2. MARBRE 10 (PLANCHE 4).

Comme dans le cas de la flexion 3 points | 24 |, la fracture est plus souvent intragranulaire dans les gros grains, mais que le cheminement est beaucoup plus rectiligne. La fracturation a lieu le plus souvent par clivage (détail A) et par utilisation de deux plans de clivage (détail B).

Il a pu être noté (planche 5, photo 1), une zone de microfissuration intragranulaire près de la fissure principale, avec naissance de fissures de cisaillement se transformant rapidement, ou s'alignant pour donner une fissure de traction.

4.5.3. MARBRE 16 (PHOTO 2, PLANCHE 5).

Nous avons pu noter, dans le cas de ce marbre, une grande différence par rapport au cas de la flexion trois points : la fissuration est nettement intragranulaire alors qu'elle était intergranulaire. On n'observe pas, comme pour le marbre 10, de zone de microfissuration près de la fissure principale, mais un développement d'une fissuration secondaire de traction (flèches) très parallèle à la fissure principale. Contrairement au cas de la flexion 3 points, nous n'avons jamais noté de développement de fissuration perpendiculaire à la fissure de traction (figure 4), ce qui corrobore les hypothèses faites au paragraphe précédent sur les énergies de propagation et le mécanisme mis en jeu.

PLANCHE 3

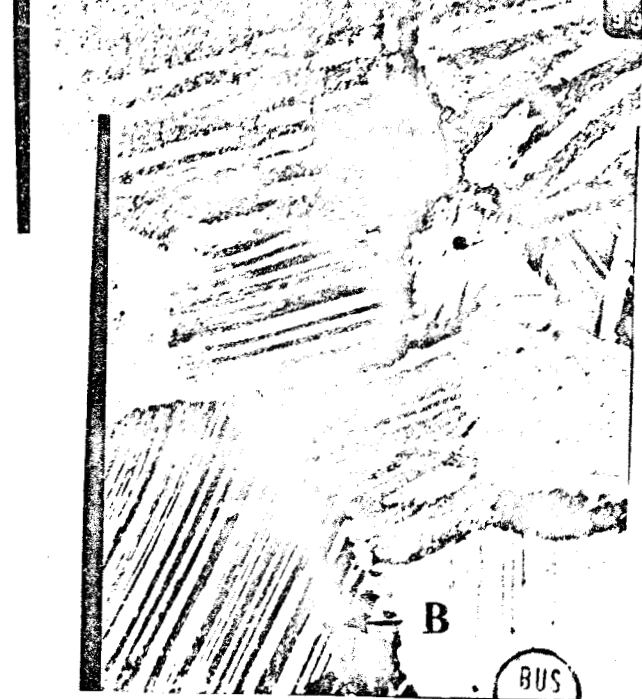


PLANCHE 4

Marbre de St Léon
Microscope optique.
Grossissement 64.



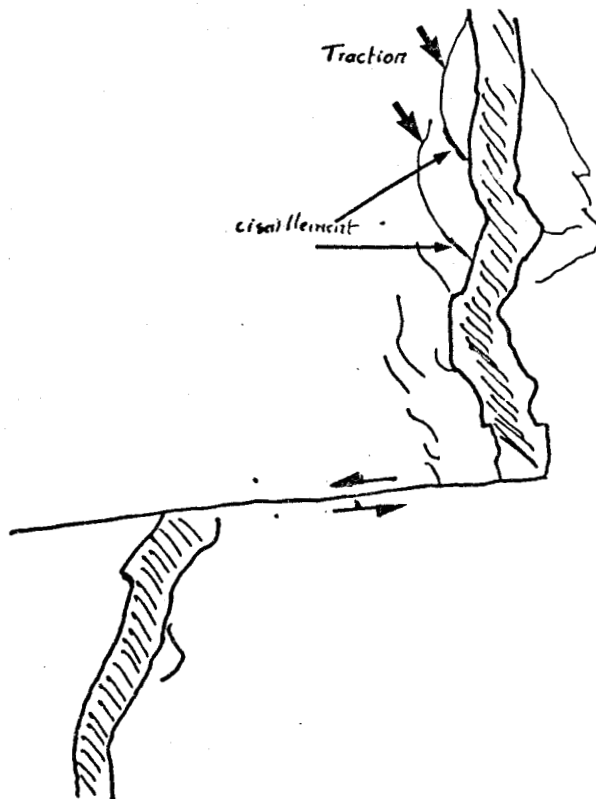
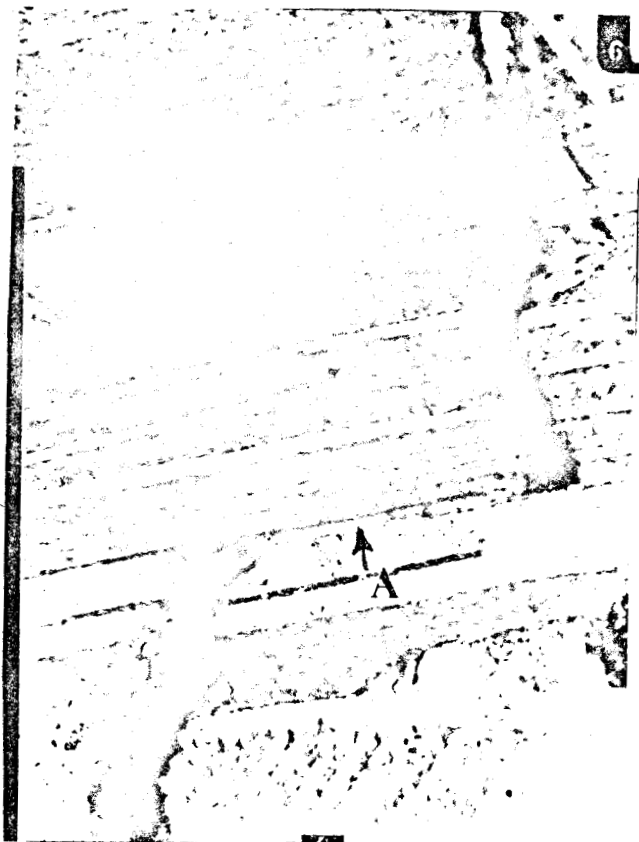
A →



→ B



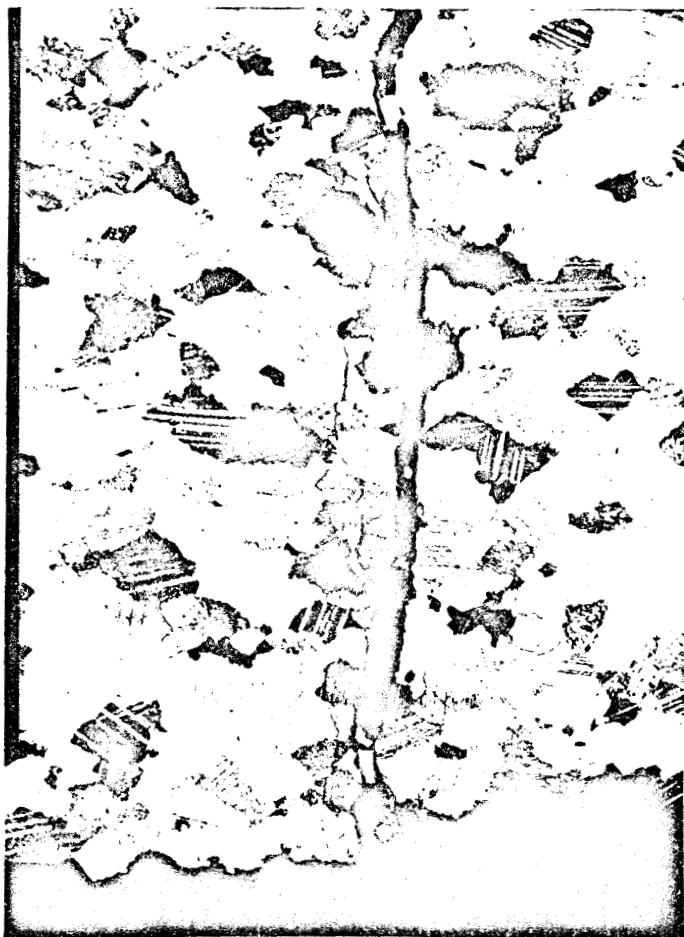
PLANCHE 5



Microscope optique - Marbre de St Léon



Photo 1
Grossissement 256



Microscope optique - Marbre de St Pons.

Photo 2
Grossissement 45



Chapitre 6.

CONCLUSION

L'étude théorique de la détermination de l'énergie d'avancement de fissure dans le cas d'une plaque percée d'un trou, soumise à une compression monoaxiale et possédant deux fissures radiales symétriques, a permis, dans un premier temps, de comparer plusieurs méthodes numériques.

Dans le cas d'une plaque infinie, les calculs menés par la méthode des discontinuités de déplacement et la méthode des potentiels complexes et de la transformation conforme avec prolongement analytique, donnent des résultats identiques.

Dans le cas de la plaque de dimension finie, la méthode des éléments finis donne des résultats semblables à ceux obtenus pour le même rapport H/R par la méthode de discontinuités de déplacement. Cette dernière méthode a permis de mettre en évidence l'influence prépondérante de la dimension de la plaque (donc du rapport H/R) sur la détermination des courbes $K_1(T, 1/R)$. Cette étude, il en ressort qu'une plaque pourra être modélisée par une plaque infinie lorsque le rapport H/R est supérieur à 20.

- L'étude expérimentale a porté sur le comportement de plaques de roches calcaires de natures différentes (micrite, marbres microfissurés).

Une première étape a consisté à mettre au point une technique d'enregistrement automatique de la longueur de fissure en fonction de la contrainte appliquée, car les fissures restent très fines et sont imperceptibles par des moyens optiques classiques. Dans un second temps, l'analyse des résultats expérimentaux dans le cadre de la théorie de GRIFFITH a permis de montrer que :

1° Les énergies d'initiation de la fissuration sont pratiquement identiques à celles obtenues en flexion trois points.

2° Le critère de propagation G_c est quasiment indépendant de la longueur de fissure, ce qui n'est pas le cas en flexion.

L'importance fondamentale du gradient de contrainte en tête de fissure sur les conditions de propagation, et notamment sur le branchement, a donc été mis en évidence. Une analyse réalisée sur lame mince et au microscope

électronique à balayage, à partir de nos échantillons, a permis de confirmer que le réseau de microfissure, en tête de fissure de traction, est nettement moins important que pour des états de flexion.

Le présent travail devrait être poursuivi et complété sur les points suivants :

1 - influence de hauteur de plaque par rapport à la largeur sur l'énergie ; les résultats devraient être obtenus rapidement par la méthode des discontinuités de déplacement, faute de temps, ils n'ont pu être inclus dans ce travail.

2 - mise au point d'une technique expérimentale permettant de distinguer plus nettement que les jauges d'extensométrie et de façon moins coûteuse, le passage de la fissure.

3 - étude des conditions de propagation et de stabilité de la fissure de cisaillement conduisant à la rupture et vérification expérimentale.

4 - étude fine du mécanisme de propagation de la fissure de traction et de cisaillement.

Annexe 1.

```

C *****
C PLAQUE SOUMISE A UNE COMPRESSION A L'INFINI SELON LA
C DIRECTION X
C *****
DIMENSION TAB (2,30,3)
DIMENSION DGL (30),DF (30),AG (30),BG (30)
DIMENSION P (31),EN (30),A (30,30),R (30),EP (30),IIEK (30),R1C (30),
SRFL (30),RGAM (30),RC (30),RRI (30),V (30),U (30),CC (30),
SRGL (30),REN (30),RAR (30)
C EN(I) = EPSILON (I)
C EP(I)=EPSILON
C K=K , C=C ,RL=L , GAM=GAMMA ZERO
C FL=F(L) , TC=TC
C HOC=W(1)/C
C EP=E
REAL KO
KZ=0
333 READ (7,100,END=222) K,NKK
READ (7,200) (EP(I),I=1,NKK)
200 FORMAT (10F7.3)
100 FORMAT (2I2)
KZ=KZ+1
DO 99 IJK=1,NKK
C
C *****
C * CALCUL DES POLYNOMES DE LEGENDRE *
C *****
P(1)=1.
P(2)=-EP(IJK)
DO 360 NOX=1,29
KLO = NOX+2
LDJ = NOX +1
P(KLO)=-((-2*(NOX )+1)*P(2)*P(LDJ)+(NOX )*P(NOX))/LDJ
360 CONTINUE
C
C *****
C COEFFICIENTS DE LA TRANSFORMATION CONFORME *
C *****
EN(1)=(P(1)-P(2))/2.
DO 1 I=2,30
X=0.
KK=I+1
II=1-1
DO 2 J=1,II
IK=I-J
IJ=J+1
2 X=EN(IK)*(P(IJ)-P(J))+X
1 EN(I)=(P(I)-P(KK)-X)/I /K
C
C *****
C * CALCUL DE .... C.... *
C *****
DO 12 I=1,30

```



```

V(I)=0
12 U(I)=0
DO 11 I=2,14
  IP=2*I
  II=2*I+1
  T=I-1
  U(I)=U(T)+EN(IP)
11 V(I)=V(T)+EN(II)
VV=V (14)+EN(1)+EN(3)
UU=U(14)+EN(30)+EN(2)
D=1.+UU-VV
C=1./D
C
C *****
C *CALCUL DE W(1)/C.... *
C *****
H=0
DO 8 I=1,30
8 H =H +EN(I)
HOC=H+1
C
C *****
C *CALCUL DE .....L... LONGUEUR DE FISSURE *
C *****
RL=C*HOC-1
C
C *****
C *INVERSION DU SYSTEME 30,30 *
C *****
DO 3 I=1,30
R(I)=-EN(I)/4.
DO 3 J=1,30
3 A(I,J)=0.
R(1)=R(1)+0.5
A(30,30)=1.
DO 5 I=1,29
KI=I+1
NN=30-I
DO 5 J=1,30
KJ=J-I
IF (J.GE.KI) A(I,J)=A(I,J)+EN(KJ)*(1.-KJ*K)
KT=I+J
IF (J.LE.NN) A(I,J)=A(I,J)+EN(KT)*(1.-J*K)
5 IF (I.EQ.J) A(I,J) =A(I,J) +1.
EPS=1.E-6
CALL GELG(R,A,30,1,EPS,IER)
IF (IER.NE.0) GOTO 7
C
C *****
C *..CALCUL DE GAMMA ZERO ... ..=GAM... *
C *****
GAM=0.
DO 9 I=1,30

```

```

9 GAM=GAM+EN(I)*R(I)*(1.-2.*I)
  GAM=+2*GAM+EN(1)/2.+0.5
C
C *****
C .. CALCUL DE G(L) ...=GL.... *
C *****
GL=0
GL=(EN(1)-GAM-2.*R(1))*(((RL+1.)/HOC)**2)/2.+3./4.
C
  IIER(IJK)=0
  RTC(IJK)=TC
  RRL(IJK)=RL
  CC(IJK)=C
  RGL(IJK)=GL
  RGAM(IJK)=GAM
  REN(IJK)=EN(1)
  RAR(IJK)=R(1)
  CC(IJK)=C
C
C
  GOTO 99
7 WRITE (8,111) IER
111 FORMAT (50X,'IER=',I3)
  RRL(IJK)=0.
  CC(IJK)=0.
  RGAM(IJK)=0.
  RGL(IJK)=0.
  REN(IJK)=0
  RAR(IJK)=0
  IIER(IJK)=IER
99 CONTINUE
  WRITE (8,400)
  WRITE (8,401)
  WRITE (8,402)
  WRITE (8,401)
  WRITE (8,400)
  WRITE (8,401)
  WRITE (8,403) ((EP(I),RRL(I),RGAM(I),CC(I),REN(I),RAR(I),RGL(I),
SDGL(I)),I=1,NKK)

  WRITE (8,401)
  WRITE (8,400)
400 FORMAT (1H ,102(1H*))
401 FORMAT (2H *,100(1X),1H*)
402 FORMAT (2H *,11H EPSILON ,1H*,11H L ,1H*,11H GAM O ,
S1H*,11H C ,1H*,11H EN(1) ,1H*,11H R(1) ,1H*,
S11H G(L) ,1H*,11H G'(L) ,1H*)
403 FORMAT (8(' ',2X,F8.5,1X) '**')
  DO 33I=1,30
  TAB(1,I,KZ)=RRL(I)
33 TAB(2,I,KZ)=RGL(I)
  GOTO 333
C*****
222 CALL POLICO (1,30,100,TAB,1,3,IRET)
  STOP
  END

```



Annexe 2.

Dans le cas particulier de la déformation plane, en milieu isotrope homogène (forces de volume nulles), et en repère cartésien (x, z) , la solution de Neuber Papkovitch s'écrit :

$$(1) \quad \begin{cases} U_x = B_x - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} [x B_x + z B_z + B_0] \\ U_z = B_z - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} [x B_x + z B_z + B_0] \end{cases}$$

La détermination des déplacements est liée à la définition de \vec{B} et B_0 choisie pour respecter les conditions aux limites que l'on impose.

I - INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Reprenons l'exemple de la fissure de longueur $2a$ (fig. 1)

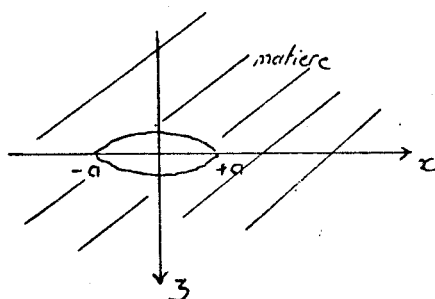


Figure 1.

Nous avons vu (ch. 2, paragraphe 22) que les deux modes fondamentaux de propagations de fissures sont le mode I et le mode II.

i) Mode I ou de traction (fig. 2)

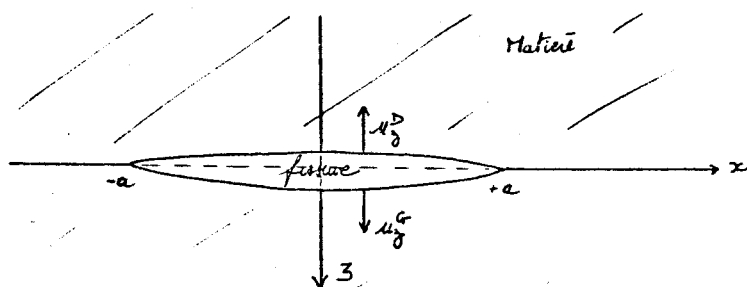


Figure 2.

Dans ce cas, les conditions aux limites décriront :

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_{xz}(x, 0) = 0 & -a < x < +a \\ \sigma_{zz}(x, 0) \neq 0 & \text{quel que soit } x \text{ appartenant à l'axe } x'x \\ & \text{nul à la limite sur } |-a, +a| \end{cases}$$

Si l'on appelle :

$$\hat{U}_z = U_z^G - U_z^D \quad \text{on aura} \quad U_z^G - U_z^D = \hat{U}_D \quad - a < x < a \\ |x| > a$$

Le choix de ces conditions aux limites pour la détermination de \vec{B} et B_0 conduit, compte tenu des relations contraintes - déformations et (1) aux définitions des potentiels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = 0 \\ B_z = 4(1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ B_0 = 4(1-\nu)(1-2\nu)\phi \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \Delta \phi = 0$$

Les composantes du vecteur déplacement en fonction de ϕ seront données par :

$$U_x = -(1-2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}$$

$$U_z = 2(1-2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

et les composantes du tenseur de contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + z \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \right) \\ \sigma_{zz} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - z \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \right) \\ \sigma_{xz} = -\frac{E}{1+\nu} z \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial z^2} \end{array} \right.$$

ce qui donne lorsque $z = 0$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xz} = 0 \\ \sigma_{zz} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ U_x = -(1-2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ U_y = 2(1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right.$$

La condition de contrainte est toujours vérifiée. La solution ϕ permettant de vérifier la condition de déplacement est une solution dite discontinue.

Elle est construite en remarquant que :

$$\lim_{z \rightarrow \partial 0^+} \text{Artg} \frac{x}{z} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim \text{Arctg} \frac{x}{z} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

ces fonctions sont harmoniques.

A partir de ces résultats, la fonction ϕ est obtenue par intégration.

$$(4) \quad \phi(x,y) = \frac{\hat{U}_z}{4\pi(1-\nu)} z \left[\text{Arctg} \left(\frac{x+a}{z} \right) - z \text{Arctg} \left(\frac{x-a}{z} \right) + (x+a) \text{Ln} \sqrt{(x+a)^2 + z^2} - (x-a) \text{Ln} \sqrt{(x-a)^2 + z^2} \right]$$

Cette solution fait intervenir une discontinuité de déplacement \hat{U}_z , supposée constante dans l'intégration.

ii) Mode II ou cisaillement (fig. 3)

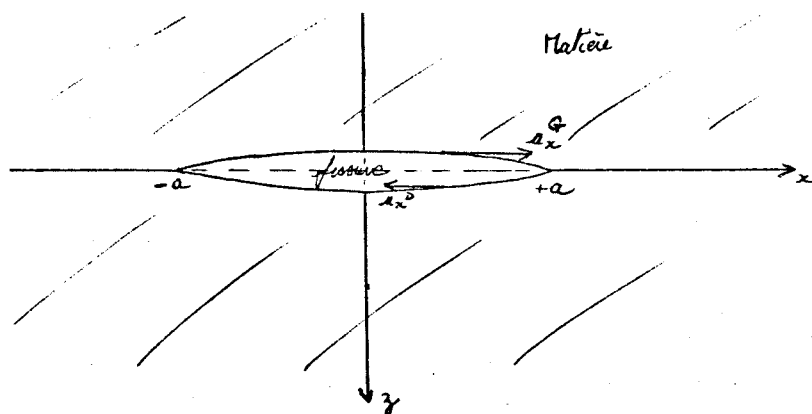


Figure 3.

Les conditions aux limites du problème sont :

$$\sigma_{zz}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\sigma_{xz}(x, 0) \neq 0$$

avec

$$U_x^G - U_x^D = \hat{U}_x \quad \begin{cases} \text{si } -a < x < a \\ \text{si } |x| > a \end{cases}$$

Tout comme dans le cas du mode I, le choix de ces conditions aux limites pour la détermination de B et B₀ conduit, compte tenu des relations contraintes déformation et (4) aux définitions des potentiels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = 0 \\ B_z = 4 (1 - \nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ B_0 = 8 (1 - \nu)^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} dz \end{array} \right.$$

avec $D\psi = 0$

Le vecteur déplacement sera obtenu par les formules suivantes :

$$U_x = + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 (1 - \nu) \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$U_y = (1 - 2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}$$

et le vecteur contrainte

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = - \frac{E}{1-\nu} z \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z} \\ \sigma_{zz} = - \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} \\ \sigma_{xz} = \frac{E}{1-\nu} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + z \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right] \end{array} \right.$$

ce qui donne comme solution ($z = 0$)

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} U_x = 2 (1 - \nu) \frac{\partial \psi}{\partial z} & \sigma_{xz} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ U_z = (1 - 2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} & \sigma_{zz} = 0 \end{array} \right.$$

La formule (5) a la même forme que la formule (z). La solution sera construite de la même façon, et l'on aura :

$$(7) \quad \psi(x,y) = \frac{\hat{U}_x}{\pi 4(1-\nu)} \left[z \operatorname{Artg} \frac{x+a}{z} - z \operatorname{Artg} \frac{x-a}{z} + (x+a) \operatorname{Ln} \sqrt{(x+a)^2 + z^2} - (x-a) \operatorname{Ln} \sqrt{(x-a)^2 + z^2} \right]$$

2 - CAS GÉNÉRAL D'UN MATÉRIAU POSSÉDANT N FISSURES INCLINÉES

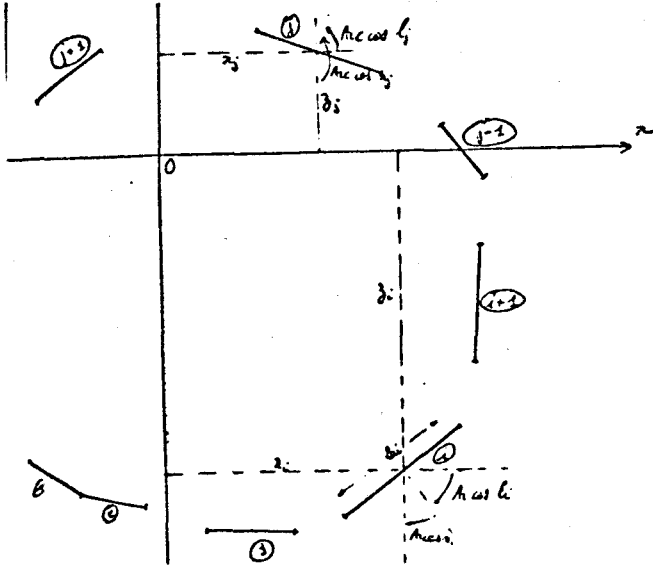


Figure 4.

Le calcul sera effectué de la manière suivante : dans un premier temps, on procède sur une fissure inclinée (Fig. 5), les contraintes et déplacements seront obtenus dans le repère fixe. Puis, dans la seconde étape, nous allons analyser l'influence de la lère fissure sur la j^{ème} précédemment étudiée, et par simple superposition, nous obtenons les déplacements normaux et tangentiels ainsi que les contraintes normales et tangentielles au centre de la i^{ème} fissure.

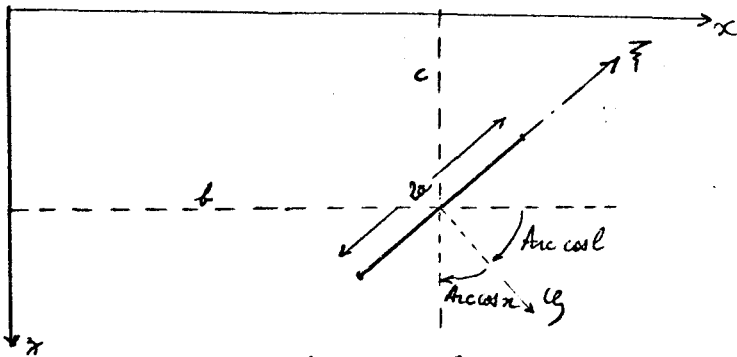


Figure 5.

contrainte et déplacement sur une fissure inclinée.

Le problème est étudié dans le repère local défini par :

$$\xi = x(x - b) - 1(z - c)$$

$$\zeta = 1(x - b) + x(z - c)$$

Les déplacements, dans ce repère local, seront donnés par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} U_{\xi} &= - (1-2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + 2 (1-\nu) \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ U_{\zeta} &= 2 (1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + (1-2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{aligned} \right.$$

Compte tenu des équations (4) et (7), on obtient les fonctions harmoniques (associé à \hat{U}_ζ) et (associé à \hat{U}_ξ) suivants :

$$\phi(\xi, \zeta) = \frac{\hat{U}_\zeta}{4(1-\nu)} \left[\zeta \operatorname{Artg} \left(\frac{\xi+a}{\zeta} \right) - \xi \operatorname{Artg} \left(\frac{\xi-a}{\zeta} \right) + (\xi+a) \operatorname{Ln} \sqrt{(\xi+a)^2 + \zeta^2} - (\xi-a) \operatorname{Ln} \sqrt{(\xi-a)^2 + \zeta^2} \right]$$

$$\psi(\xi, \zeta) = \frac{\hat{U}_\xi}{4(1-\nu)} \left[\zeta \operatorname{Artg} \left(\frac{\xi+a}{\zeta} \right) - \zeta \operatorname{Artg} \left(\frac{\xi-a}{\zeta} \right) + (\xi+a) \operatorname{Ln} \sqrt{(\xi+a)^2 + \zeta^2} - (\xi-a) \operatorname{Ln} \sqrt{(\xi-a)^2 + \zeta^2} \right]$$

Relations qui peuvent se mettre sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(\xi, \zeta) = \hat{U}_\zeta f(\xi, \zeta) / 4 \pi(1-\nu) \\ \psi(\xi, \zeta) = \hat{U}_\xi f(\xi, \zeta) / 4 \pi(1-\nu) \end{array} \right.$$

On trie les fonctions :

$$F_1(\xi, \zeta) = \frac{\partial f}{\partial x} = n \frac{\partial f}{\partial \xi} + l \frac{\partial f}{\partial z} = l \left[\tan^{-1} \left(\frac{\xi+a}{\zeta} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\xi-a}{\zeta} \right) \right] + n [\log_e [(\xi+a)^2 + \zeta^2] - \log_e [(\xi-a)^2 + \zeta^2]]$$

$$F_2(\xi, \zeta) = \frac{\partial f}{\partial z} = -l \frac{\partial f}{\partial \xi} + n \frac{\partial f}{\partial \zeta} = n \left[\tan^{-1} \left(\frac{\xi+a}{\zeta} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\xi-a}{\zeta} \right) \right] - l [\log_e [(\xi+a)^2 + \zeta^2] - \log_e [(\xi-a)^2 + \zeta^2]]$$

$$F_3(\xi, \zeta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{(n^2 - l^2)\zeta - 2nl(\xi+a)}{(\xi+a)^2 + \zeta^2} - \frac{(n^2 - l^2)\zeta - 2nl(\xi-a)}{(\xi-a)^2 + \zeta^2}$$

$$F_4(\xi, \zeta) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{2nl\zeta + (n^2 - l^2)(\xi+a)}{(\xi+a)^2 + \zeta^2} + \frac{2nl\zeta + (n^2 - l^2)(\xi-a)}{(\xi-a)^2 + \zeta^2}$$

$$F_5(\xi, \zeta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z^2} = \frac{n(n^2 - 3l^2)[(\xi+a)^2 - \zeta^2] + 2l(3n^2 - l^2)(\xi+a)\zeta}{[(\xi+a)^2 + \zeta^2]^2}$$

$$- \frac{n(n^2 - 3l^2)[(\xi-a)^2 - \zeta^2] + 2l(3n^2 - l^2)(\xi-a)\zeta}{[(\xi-a)^2 + \zeta^2]^2}$$

$$F_6(\xi, \zeta) = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = \frac{2n(n^2 - 3l^2)(\xi+a)\zeta - l(3n^2 - l^2)[(\xi+a)^2 - \zeta^2]}{[(\xi+a)^2 + \zeta^2]^2}$$

$$- \frac{2n(n^2 - 3l^2)(\xi-a)\zeta - l(3n^2 - l^2)[(\xi-a)^2 - \zeta^2]}{[(\xi-a)^2 + \zeta^2]^2}$$

Revenons au repère (x, z), pour cela l'on pose :

$$U_x = n U_\xi + l U_\zeta$$

$$U_z = -l U_\xi + n U_\zeta$$

Ce qui donne comme solution

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{\theta_\zeta}{4\pi(1-\nu)} \{ [l^2 + (l^2 - n^2)(1 - 2\nu)] F_1(\xi, \zeta) + nl(3 - 4\nu) F_2(\xi, \zeta) - \zeta \{ nF_3(\xi, \zeta) - lF_4(\xi, \zeta) \} \} \\
 &\quad + \frac{\theta_\zeta}{4\pi(1-\nu)} \{ nl(3 - 4\nu) F_1(\xi, \zeta) + \{ n^2 + (n^2 - l^2)(1 - 2\nu) \} F_2(\xi, \zeta) + \zeta \{ lF_3(\xi, \zeta) + nF_4(\xi, \zeta) \} \} \\
 u_z &= \frac{\theta_\zeta}{4\pi(1-\nu)} \{ nl(3 - 4\nu) F_1(\xi, \zeta) + \{ n^2 + (n^2 - l^2)(1 - 2\nu) \} F_2(\xi, \zeta) - \zeta \{ lF_3(\xi, \zeta) + nF_4(\xi, \zeta) \} \} \\
 &\quad - \frac{\theta_\zeta}{4\pi(1-\nu)} \{ [l^2 + (l^2 - n^2)(1 - 2\nu)] F_1(\xi, \zeta) + nl(3 - 4\nu) F_2(\xi, \zeta) + \zeta \{ nF_3(\xi, \zeta) - lF_4(\xi, \zeta) \} \} \\
 \sigma_{xx} &= \frac{G\theta_\zeta}{2\pi(1-\nu)} \{ 2nlF_3(\xi, \zeta) + (n^2 - l^2)F_4(\xi, \zeta) + \zeta \{ lF_3(\xi, \zeta) + nF_6(\xi, \zeta) \} \} \\
 &\quad + \frac{G\theta_\zeta}{2\pi(1-\nu)} \{ 2n^2F_3(\xi, \zeta) - 2nlF_4(\xi, \zeta) + \zeta \{ nF_3(\xi, \zeta) - lF_6(\xi, \zeta) \} \} \\
 \sigma_{zz} &= \frac{G\theta_\zeta}{2\pi(1-\nu)} \{ 2nlF_3(\xi, \zeta) + (n^2 - l^2)F_4(\xi, \zeta) - \zeta \{ lF_3(\xi, \zeta) + nF_6(\xi, \zeta) \} \} \\
 &\quad - \frac{G\theta_\zeta}{2\pi(1-\nu)} \{ 2l^2F_3(\xi, \zeta) + 2nlF_4(\xi, \zeta) + \zeta \{ nF_3(\xi, \zeta) - lF_6(\xi, \zeta) \} \} \\
 \sigma_{xz} &= \frac{G\theta_\zeta}{2\pi(1-\nu)} \zeta \{ lF_6(\xi, \zeta) - nF_3(\xi, \zeta) \} \\
 &\quad + \frac{G\theta_\zeta}{2\pi(1-\nu)} \{ F_4(\xi, \zeta) + \zeta \{ lF_3(\xi, \zeta) + nF_6(\xi, \zeta) \} \}
 \end{aligned}$$

* Influence de la jème fissure sur la ième (fig. 4) :

L'influence de la jème discontinuité de déplacement sur la ième peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned}
 (\sigma_t)_i &= n_i l_i | (\sigma_{xx})_i - (\sigma_{zz})_i | + (n_i^2 - l_i^2) (\sigma_{xz})_i \\
 (\sigma_n)_i &= l_i^2 (\sigma_{xx})_i + n_i^2 (\sigma_{zz})_i + 2 n_i l_i (\sigma_{xz})_i
 \end{aligned} \right.$$

En faisant la somme de toutes les influences des discontinuités sur celle d'indice i , on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned}
 (\sigma_t)_i &= \sum_{j=1}^N (A_{tt})_{ij} (\hat{U}_t)_j + \sum_{j=1}^N (A_{tn})_{ij} (\hat{U}_n)_j \\
 (\sigma_n)_i &= \sum_{j=1}^N (A_{nt})_{ij} (\hat{U}_t)_j + \sum_{j=1}^N (A_{nn})_{ij} (\hat{U}_n)_j
 \end{aligned} \right.$$

De la même manière, en regroupant toutes les discontinuités de déplacement :

$$\left\{ \begin{array}{l} (U_t)_i = \sum_{j=1}^N (B_{tt})_{ij} (\hat{U}_t)_j + \sum_{j=1}^N (B_{tn})_{ij} (\hat{U}_n)_j \\ (U_n)_i = \sum_{j=1}^N (B_{nt})_{ij} (\hat{U}_t)_j + \sum_{j=1}^N (B_{nx})_{ij} (\hat{U}_n)_j \end{array} \right.$$

La connaissance des $2N$ conditions aux limites sur les N discontinuités permet, par inversion du système, de déterminer les discontinuités de déplacement \hat{U}_n et \hat{U}_t . Le champ de déplacement et de contrainte en tout point du domaine est alors parfaitement connu.

BIBLIOGRAPHIE

- | 1 | CALVET (1969) - Etude sur modèle plan des déformations sous charge autour d'un granulat. - *Colloque Géotechnique*, Toulouse.
- | 2 | LAJTAI E.Z., LAJTAI N. (1976) - The collapse of cavities. - *Int. J. Rock. Mech. min. et geomech.*, Vol. 12, p. 81-86.
- | 3 | LAJTAI E.Z. (1975) - The evolution of brittle fracture in rocks. - *Q.J. geol. Soc. Lond.*
- | 4 | LORRAIN (1974) - Contribution à l'étude de la micromécanique des matériaux granulaires cohérents, application aux bétons. - *Thèse Docteur ès-sciences physique*, Toulon.
- | 5 | GRIFFITH (1924) - Theory of rupture preceding of the first international congress for applied mechanics., p. 53-64. Delf.
- | 6 | BIENAWSKI Z.T. (1967) - Mechanism of brittle fracture of rocks - Theory of the fracture process. - *Int. J. Rock. Mech. min. Sci.*, 4, p. 393-406.
- | 7 | LAJTAI E.Z. (1972) - Effect of tensile stress gradient on brittle fracture initiation. - *Int. J. Rock Mech. min. Sci.*, Vol. 9, p. 569-578.
- | 8 | GAIGNAERT G., HENRY J.P. (1978) - Exercices d'élasticité - Dunod éd.
- | 9 | NESETOVA V., LAJTAI E.Z. (1973) - Fracture from compression stress concentrations around elastic flaw. - *Int. J. Rock. Mech. min. Sci.*, Vol. 10, p. 265-284.
- | 10 | Mac CLINTOCK WALSH (1962) - Friction and Griffith cracks under pressure Proc. 4th Nat. Congress App. mech. Berkeley. California., Vol. 2, p. 1015-1021.
- | 11 | TIMOSHENKO et GOODIER - Theory of elasticity. - *Librairie polytechnique Ch. Béranger.*
- | 12 | GRIFFITH A.A. (1921) - The phenomenon of rupture and flaw in solids. - *Phil. Trans. Royal. Soc.*, London.
- | 13 | MALKINS (1972) - Mécanique linéaire de la Rupture dans Rupture des métaux. Masson Ed.
- | 14 | BOWIE O.L. (1956) - Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating of the boundary of an internal circular hole. - *J. Maths Phys.*, 35 p. 60.
- | 15 | KOLOSOV-MUKHELISHVILI (1953) - Some Basic problems of mathematical theory of elasticity Groningen., P. Noordhoff Ltd.
- | 16 | MILNE - THOMSON L.M. - Système élastiques plans (Dunod ed.).
- | 17 | SOKOLNIKOFF (1956) - Mathematical theory of elasticity.
- | 18 | L.A. WIGGLESWORTH (1957) - *Mathematica* 4.
- | 19 | ZIEVKIEWICZ O.C. (1973) - La méthode des éléments finis (Ediscience).
- | 20 | CROUCH S.L. - Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. - *Int. J. num. Math. in Eng.*, 10, p. 301-343.

- | 21 | BUI (1978) - Mécanique de la rupture fragile, Masson éd.
- | 22 | CORNET (1977) - Comparative analysis by the displacement discontinuity method of two energy criteria of fracture. - *Int. Journal of Fracture Mechanics*.
- | 23 | LEBLANC A. - Calcul de facteur d'intensité de contrainte dans un disque et un anneau chargés diamétralement avec fissures symétriques dans le plan de chargement. - *Thèse non soutenue*.
- | 24 | HENRY J.P. (1978) - Mécanique linéaire de la rupture appliquée à l'étude de la fissuration et de la fracture des roches calcaires. - *Thèse de Doctorat d'état.*, UST Lille.
- | 25 | TANCREZ J.P. - Fluage de marbres à haute température., *Thèse non soutenue*.

