N° d'ORDRE 874

THESE

présentée

à l'Université des Sciences et Techniques
- Lille I -

et à l'Université de Valenciennes
et du Hainaut Cambrésis

par

Michèle PLAISANT

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Spécialité : MATHEMATIQUES PURES

Sur l'INTEGRABILITE des ALGEBRES de LIE BANACHIQUES dans le cadre des Q-VARIETES

SOUTENUE LE 16 Décembre 1980 DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

M. D. LEHMANN	President
M. R. BARRE	Rapporteur
M. W.T. VAN EST	Examinateur

Monsieur VAN-EST et Monsieur BARRE sont à l'origine de cette étude ; je suis heureuse de leur exprimer ici toute ma gratitude.

Les conseils et encouragements de Monsieur BARRE m'ont soutenue au cours de l'élaboration de ce travail, et je lui en suis très reconnaissante.

Monsieur LEHMANN m'a fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse, qu'il en soit ici vivement remercié.

J'adresse mes sincères remerciements à Madame MEUNIER, qui a dactylographié avec compétence et rapidité le manuscrit, et à tous les membres du service de reprographie de l'Université de Valenciennes, pour la qualité de leur travail et pour leur diligence.

INTRODUCTION

On connaît sous le nom de 3ème théorème de Lie, le résultat suivant dû à Elie Cartan (6-7) :

Toute algèbre de Lie de dimension finie est intégrable, c'est à dire est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie.

E. Cartan (7) et Smith (16-17) ont trouvé l'obstruction à l'intégrabilité d'une algèbre de Lie de dimension infinie, et des exemples d'algèbres de Lie non intégrables ont été construits par Van-Est et Korthagen (9), ainsi que Douady et Lazard (8).

L'objet de la première partie de ce travail est de répondre à une question de Bouma et Van-Est (3) :

Les Q-variétés au sens de Barre (1) permettent-elles de résoudre le problème de l'intégrabilité des algèbres de Lie banachiques ?

En généralisant la théorie des Q-variétés au cas banachique, on donne une réponse partielle à cette question :

Si l'algèbre de Lie banachique est séparable, alors elle est l'algèbre de Lie d'un Q-groupe de Lie banachique (14).

La seconde partie de ce travail est consacrée aux classes caractéristiques des fibrés principaux sur une Q-variété.

Si (P,M,G) est un fibré principal de classe C^{∞} , à base paracompacte, on sait qu'il existe une connexion globale sur P, et l'on peut construire les classes caractéristiques du fibré.

Bott (2), Shulman et Stasheff (15), ainsi que Kamber et Tondeur (10), ont construit un homomorphisme caractéristique de l'algèbre des polynômes invariants sur l'algèbre de Lie de G, $I(\mathfrak{g})$, dans l'homologie $H^{*}(\check{C}(\mathcal{U},A), \mathbb{R})$ du bicomplexe de Čech-de Rham, relatif à un recouvrement $\mathcal{U}$ de la variété de base M, sans supposer l'existence d'une connexion globale à l'aide d'une famille de connexions locales.

On construit les classes caractéristiques des fibrés principaux sur les Q-variétés, successivement par la méthode de Kamber et Tondeur, en utilisant la première algèbre de Weil semi-simpliciale, puis celle de Bott-Shulman-Stasheff, à partir des fonctions de transition.

CHAPITRE I

Q-VARIETES BANACHIQUES

Dans ce chapitre, on généralise au cas banachique, la notion de Q-variété introduite par Barre, et le théorème sur les quotients.

I.1. Q-VARIETES ; MORPHISMES.

I.1.1. DEFINITIONS.

Soient X une variété différentielle ou analytique modelée sur un espace de Banach, S un ensemble et π une application surjective de X sur S. On pose :

$$R = X \underset{S}{\times} X = \{(x,x') \in X \times X \ / \ \pi(x) = \pi(x')\}$$

Le couple (X,π) est un <u>Q-atlas</u> de S si et seulement si, il existe sur R une structure de variété banachique telle que :

a) Les deux projections p_1 et p_2 de R sur X sont étales.

b) R est une sous-variété banachique immergée de X x X c'est à dire que :

b_1) L'injection canonique $j : R \to X \times X$ est une immersion : pour tout $a \in R$, l'application linéaire $T_a(j)$ est injective, et son image est un sous-espace fermé de $T_a(X \times X)$ admettant un supplémentaire topologique.

b_2) Une application $\phi : Y \to R$ est un morphisme de variétés banachiques, si et seulement si, le composé $j \circ \phi$ en est un.

On appelle Q-variété banachique la donnée d'un ensemble S et d'une classe d'équivalence de Q-atlas de S, suivant la relation :

$$(X,\pi) \sim (X', \pi') \quad \text{si} \quad (X \amalg X', \pi \amalg \pi') \text{ est un Q-atlas de S.}$$

I.1.2. PROPOSITION.

Le couple (X,π) est un Q-atlas si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

A) Si x et x' dans X ont même image par π, il existe un voisinage ouvert U de x (resp. U' de x') et un difféomorphisme $f : U \to U'$, tel que $f(x) = x'$ et $\pi(f(t)) = \pi(t)$, pour tout t dans U.

B) Si T est une variété et f,f' deux morphismes de T dans X tels que $\pi f = \pi f'$, l'ensemble $T_o = \{t \in T \ / \ f(t) = f'(t)\}$ est ouvert dans T.

DEMONSTRATION.

Si (X,π) est un Q-atlas, les deux projections p_1 et p_2 sont étales, d'où l'existence des difféomorphismes locaux.

Dans la condition B), puisque $j \circ (f \times f')$ est un morphisme de T dans XxX, d'après b_2), l'application $f \times f'$ est un morphisme de T dans R.

Comme l'ensemble T_o est l'image réciproque de la diagonale Δ de $X \times X$ par $f \times f'$, pour vérifier que T_o est ouvert, il suffit de montrer que Δ est un ouvert de R. Or d'après b_2), l'application diagonale $x \mapsto (x,x)$ est un morphisme de X dans R, c'est une section de la projection p_1 qui est étale, donc son image est ouverte dans R.

Réciproquement, si les conditions A) et B) sont vérifiées, on considère les graphes de difféomorphismes locaux déterminés par la condition A). L'intersection de deux tels graphes est encore un graphe de difféomorphisme local d'après la condition B). On peut donc définir la topologie de R en prenant comme base d'ouverts ces graphes ; la première projection p_1 est alors un homéomorphisme local en chaque point de R, et il existe une unique structure de variété sur R telle que p_1 soit étale. La seconde projection est aussi étale.

Soit (x,x') un point de R et $\Gamma = \{(t,f(t))/t \in U\}$ un graphe de difféomorphisme compatible avec π, tel que $f(x) = x'$. L'application p_1 induit un isomorphisme de Γ sur U. On considère l'injection J de U dans $X \times X$ définie par $J(t) = (t,f(t))$. L'application linéaire continue $T_x(J)$ est injective, son graphe est un sous-espace vectoriel fermé du produit $T_x(X) \times T_{f(x)}(X)$, qui admet un supplémentaire topologique, donc l'injection canonique j de R dans $X \times X$ est une immersion.

Enfin, si ϕ est une application d'une variété Y dans R telle que $(p_1 \times p_2) \circ \phi$ soit un morphisme, puisque p_1 est étale, ϕ est un morphisme.

I.1.3. EXEMPLES.

a) Les variétés banachiques.

b) Soit X une variété différentiable de dimension n ; le quotient X/G de X sous l'action libre d'un groupe discret dénombrable G, est une Q-variété et X muni de la projection canonique sur son quotient est un Q-atlas de X/G.

En particulier, l'espace des feuilles du feuilletage ergodique du tore, qui est isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$ est une Q-variété. Dans ce cas, on a : $X = \mathbb{R}$, $R = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^2$, et le groupe $\mathbb{Z}^2$ opère sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante : si $g = (m,n) \in \mathbb{Z}^2$ et $x \in \mathbb{R}$, $gx = x + m + n\alpha$ où α est un nombre irrationnel.
$j(x,g) = (x,gx)$, $p_1(x,g) = x$, $p_2(x,g) = gx$.

c) Le quotient d'une variété différentiable de dimension n , par un feuilletage transversalement complet, est une Q-variété (13). En particulier si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Lie sur une variété compacte V , $\mathcal{F}$ est transversalement complet, donc le quotient $V/\mathcal{F}$ est encore une Q-variété.

I.1.4. MORPHISMES - Q-VARIETES EN GROUPES BANACHIQUES.

Soient S et S' deux Q-variétés banachiques de Q-atlas (X,π) et (X',π') respectivement. Une application $f : S \to S'$ est un morphisme de Q-variétés banachiques si, pour tout point $x \in X$, et tout point $x' \in X'$ tels que $\pi'(x') = f(\pi(x))$, on peut trouver un voisinage ouvert U de x dans X(resp. U' de x' dans X') et un morphisme $\hat{f} : U \to U'$, tels que $\hat{f}(x) = x'$ et $\pi'(\hat{f}(t)) = f(\pi(t))$ pour tout $t \in U$. (Cette définition s'applique en particulier au cas où S est une variété banachique avec comme Q-atlas (S,id).)

Si l'on impose à $\hat{f}$ d'être submersive, c'est à dire : pour tout $a \in U$, l'application $T_a(\hat{f})$ est surjective et son noyau admet un supplémentaire topologique dans $T_a(U)$, le morphisme f est dit Q-submersif.

Une Q-variété en groupe banachique (ou Q-groupe de Lie banachique) est une paire (S,G) formée d'une Q-variété banachique analytique S et d'un groupe G satisfaisant à :

(i) Les ensembles sous-jacents à S et G coïncident.

(ii) L'application $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ de SxS dans S est un morphisme de Q-variétés banachiques analytiques.

I.1.5. Q-VARIETE TANGENTE.

Soient S une Q-variété banachique de Q-atlas (X,π) et $s \in S$. On considère les couples (x,ξ) où x est un relèvement de s dans X , et $\xi \in T_x(X)$. Deux tels couples (x,ξ) et (x',ξ') sont dits équivalents si la dérivée en x du germe unique de difféomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de x' compatible avec π, transforme ξ en ξ' . On obtient effectivement une relation d'équivalence entre couples (x,ξ) et on appelle vecteur tangent en s à S une classe de couples (x,ξ) équivalents. Les vecteurs tangents en s à S forment un ensemble noté $T_s(S)$ et la structure d'espace vectoriel de $T_x(X)$ se transporte à $T_s(S)$.

Comme dans le cas des Q-variétés de Barre, on vérifie que l'ensemble TS des vecteurs tangents admet une structure de Q-variété banachique, et si G est une Q-variété en groupe banachique, que TG peut être muni d'une structure de Q-variété en groupe banachique.

On généralise immédiatement au cas banachique la notion de champ de vecteurs, la définition du crochet de deux champs de vecteurs et de l'algèbre de Lie d'une Q-variété en groupe.

Dans toute la suite de ce chapitre, les variétés et Q-variétés sont banachiques.

I.1.6. PROPOSITION.

Soit p un morphisme submersif d'une variété X dans une variété X', et soit S une Q-variété de Q-atlas (X',π'), le morphisme $\pi' \circ p$ est Q-submersif

Ceci résulte immédiatement de l'existence des difféomorphismes locaux de la proposition (I.1.2).

I.1.7. PROPOSITION.

Soient f une surjection Q-submersive d'une variété S' dans une Q-variété S, et λ une application de S dans une Q-variété T, si λ o f est un morphisme, alors λ est un morphisme.

DEMONSTRATION.

Soient (X,π) et (X',π') des Q-atlas de S et T respectivement, et soit $(x,x') \in X \times X'$ tel que $\pi'(x') = (\lambda \circ \pi)(x)$. L'application f étant surjective, il existe $y \in S'$ tel que $f(y) = \pi(x)$. L'application f étant Q-submersive, il existe un voisinage ouvert U'_y de y dans S', un voisinage ouvert U_x de x dans X et un morphisme submersif $\hat{f}$ de U'_y dans U_x, tels que $\hat{f}(y) = x$ et $\pi(\hat{f}(u)) = f(u)$ pour tout $u \in U'_y$.

Puisque l'application $\hat{f}$ est submersive, il existe un voisinage ouvert V_x de x dans X et un morphisme s de V_x dans U'_y tels que $s(x) = y$ et $\hat{f}(s(t)) = t$ pour tout $t \in V_x$.

On a $\lambda(f(y)) = \lambda(\pi(x)) = \pi'(x')$; puisque $\lambda \circ f$ est un morphisme, il existe un voisinage ouvert W_y de y dans S', un voisinage ouvert $\Omega_{x'}$ de x' dans X' et un morphisme $\hat{g}$ de W_y dans $\Omega_{x'}$, tels que $\hat{g}(y) = x'$ et $\pi'(\hat{g}(u)) = \lambda(f(u))$ pour tout $u \in W_y$.

Alors $s^{-1}(U'_y \cap W_y)$ est un voisinage ouvert O_x de x dans X et $\hat{\lambda} = \hat{g} \circ s/O_x$ est un relèvement de λ. Enfin $\hat{\lambda}(x) = x'$ et pour tout $t \in O_x$, on a $\pi'(\hat{\lambda}(t)) = (\pi' \circ \hat{g} \circ s)(t) = (\lambda \circ \pi \circ \hat{f} \circ s)(t) = \lambda(\pi(t))$.

I.1.8. PROPOSITION.

Soient $f : Z \to X$ un morphisme de variétés et $i : Y \to X$ l'injection canonique d'une sous-variété immergée de X, si f est transversal à Y, $f^{-1}(Y)$ est une sous-variété immergée de Z .

DEMONSTRATION.

Le couple (f,i) étant transversal, le produit fibré d'ensembles $Z \times_X Y$ est muni d'une structure de variété (11). L'application $x \mapsto (x,f(x))$ est un isomorphisme de variétés de $f^{-1}(Y)$ sur le produit fibré $Z \times_X Y$.

L'application i étant une immersion, il en est de même de l'application $f^*(i) : Z \times_X Y \to Z$ (5).

Une application h d'une variété T dans $f^{-1}(Y)$ est un morphisme de variétés, si et seulement si, $f^*(i) \circ h$ en est un. En effet si $f^*(i) \circ h$ est un morphisme, il en est de même de $f \circ f^*(i) \circ h$ donc de $i \circ \pi \circ h$, si π désigne la projection de $Z \times_X Y$ sur Y . Comme Y est une sous-variété immergée, on en déduit que $\pi \circ h$ est un morphisme. De la propriété universelle des produits fibrés, il résulte que h est un morphisme.

I.2. QUOTIENT D'UNE VARIETE BANACHIQUE.

I.2.1. THEOREME.

Soit R le graphe d'une relation d'équivalence sur une variété X . On suppose que R est muni d'une structure de variété telle que :

(i) Les deux projections p_1 et p_2 de R dans X sont submersives,

(ii) R est une sous-variété immergée de $X \times X$

alors il existe une variété Y et un morphisme de variétés $f : Y \to X$ tels que :

a) $p \circ f : Y \to X \to X/R$ est surjectif, où $p : X \to X/R$ est la projection canonique.

b) Le morphisme $f \times f : Y \times Y \to X \times X$ est transversal à R et l'image réciproque R_Y de R par $f \times f$ est étale sur Y par chaque projection.

c) Le morphisme $f \times id : Y \times X \to X \times X$ est transversal à R et l'image réciproque R' de R par $f \times id$ est étale sur X et submersive dans Y .

d) X/R est une Q-variété admettant $(Y, p \circ f)$ comme Q-atlas, et la projection $p : X \to X/R$ est Q-submersive.

DEMONSTRATION.

Remarquons avant de montrer l'existence de Y que les conditions a), b), c) impliquent d). En effet, d'après la proposition (I.1.8), R_Y est une sous-variété immergée de Y x Y ; les deux projections π_1 et π_2 de R_Y sur Y étant étales, on en déduit que Y est un Q-atlas de Y/R_Y , avec la projection canonique. D'autre part, on a une bijection de Y/R_Y sur X/R puisque $y \, R_Y \, y' \Leftrightarrow p(f(y)) = p(f(y'))$ et $p \circ f$ est surjective. Donc $(Y, p \circ f)$ est un Q-atlas de X/R .

On note q_1 et q_2 les projections de R' sur Y et X respectivement, $(p \circ f) \circ q_1 : R' \to Y \to X/R$ est Q-submersive d'après la proposition (I.1.6). On en déduit que $p \circ q_2 : R' \to X \to X/R$ est Q-submersive, puis, que p est un morphisme Q-submersif de la Q-variété X, d'atlas (R', q_2) dans la Q-variété X/R d'atlas $(Y, p \circ f)$.

Montrons l'existence de Y. On note $\bar{x}$ la classe d'un élément x de X modulo R. La seconde projection $p_2 : R \to X$ étant submersive, on a pour tout $(x,y) \in R$:

$T_{(x,y)}(X \times X) = T_{(x,y)} R + T_{(x,y)}(X \times \{y\})$

et $T_{(x,y)} R \cap T_{(x,y)}(X \times \{y\})$ a un supplémentaire topologique, c'est à dire que R est transversal à X x {y}, (d'où en particulier sur la diagonale $T_{(y,y)}(R \cap (X \times \{y\})) = T_{(y,y)} R \cap T_{(y,y)}(X \times \{y\})$).

Comme $T_{(y,y)} p_1$ est surjective, on en déduit que :

$$T_y \bar{y} = \{\xi \in T_y X \ / \ (\xi, o) \in T_{(y,y)} R\} .$$

Les classes d'équivalence sont les intégrales du champ de plans, image sur X par la première projection du noyau Ker Tp_2, induit sur la diagonale par la seconde projection. On a un feuilletage de X ; pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x, et une sous-variété Y_x de X transverse au feuilletage dans U.

On pose $Y = \coprod_{x \in X} Y_x$. Un élément de Y est donc un couple (y,x) où $y \in Y_x$, on note un tel élément y_x et on pose $f(y_x) = y$.

$p \circ f$ est surjective de Y sur X/R.

Pour tout $(x,x') \in R$, les applications tangentes $T_{(x,x')}p_1$ et $T_{(x,x')}p_2$ de $T_{(x,x')}R$ sur T_xX sont surjectives, on en déduit la même propriété pour π_1 et π_2 en remarquant que :

$$T_{(x,x')}R = T_{(x_t,x'_{t'})}R_Y \oplus T_x\bar{x} \oplus T_{x'}\bar{x}'$$

Cette décomposition de l'espace tangent au graphe s'obtient à partir de la décomposition :

$$T_{(x,x')}(X \times X) = T_xY_t \oplus T_x\,\bar{x} \oplus T_{x'}\,Y_{t'} \oplus T_{x'}\,\bar{x}'$$

en utilisant les propriétés suivantes :

a) R étant une sous-variété immergée de X x X, $T_{(x,x')}R$ a un supplémentaire topologique $S_{(x,x')}$ dans $T_{(x,x')}(X \times X)$.

b) $f \times f : Y \times Y \to X \times X$ étant transversal à R, on a

$T_{(x_t,x'_{t'})}R_Y = T_{(x,x')}R \cap T_{(x_t,x'_{t'})}(Y \times Y)$ et $T_{(x_t,x'_{t'})}R_Y$ a un supplémentaire topologique $S^Y_{(x_t,x'_{t'})}$ dans $T_{(x_t,x'_{t'})}(Y \times Y)$.

enfin $T_{(x,x')}R + T_{(x_t,x'_{t'})}(Y \times Y) = T_{(x,x')}(X \times X)$

On en déduit :

$$\begin{aligned} T_{(x,x')}(X \times X) &= T_{(x,x')}R \oplus S_{(x,x')} = T_{(x,x')}R + (S^Y_{(x_t,x'_{t'})} \oplus T_{(x_t,x'_{t'})}R_Y) \\ &= T_{(x,x')}R + (S^Y_{(x_t,x'_{t'})} \oplus (T_{(x,x')}R \cap T_{(x_t,x'_{t'})}(Y \times Y))) = T_{(x,x')}R \oplus S^Y_{(x_t,x'_{t'})} \end{aligned}$$

d'où $S_{(x,x')} \simeq S^Y_{(x_t,x'_{t'})}$ et

$$T_{(x,x')}(X \times X) = T_{(x_t,x'_{t'})}R_Y \oplus S_{(x,x')} \oplus T_x\bar{x} \oplus T_{x'}\bar{x}' = T_{(x,x')}R \oplus S_{(x,x')}$$

Les propriétés a) et b') $f \times id : Y \times X \to X \times X$ est transversal à R, permettent de montrer de la même manière que :

$$T_{(x,x')}R = T_{(x_t,x')} R' \oplus T_x \bar{x}$$

La surjectivité de $T_{(x_t,x')}q_1$ se déduit alors de celle de $T_{(x,x')}p_1$ et la surjectivité de $T_{(x_t,x')}q_2$ de celle de $T_{(x,x')}p_2$, en remarquant que $T_{(x,x')}p_2$ est nulle sur $T_x \bar{x}$.

L'application $T_{(x_t,x'_{t'})}\pi_1$ est injective. En effet, si $x_t \in Y$, on a $\pi_1^{-1}(x_t) = (\{x\} \times Y) \cap R_Y$.

Un vecteur ξ appartient à l'espace tangent en (x_t,x_t) à $\pi_1^{-1}(x_t)$ si $T_{(x_t,x_t)} \pi_1(\xi) = o$, $T_{(x_t,x_t)} \pi_2(\xi) \in T_xY_t$ et $\xi \in T_{(x_t,x_t)}R_Y$ donc $T_{(x_t,x_t)} \pi_2(\xi) \in T_xY_t \cap T_x\bar{x}$ et $T_{(x_t,x_t)} \pi_2(\xi) = o$.

On vérifie de la même manière que $T_{(x_t,x'_{t'})} \pi_2$ et $T_{(x_t,x')}q_2$ sont injectives, ce qui montre finalement que les trois projections π_1, π_2 et q_2 sont étales.

On déduit des deux décompositions de l'espace tangent $T_{(x,x')} R$, la relation :

$$T_{(x_t,x')}R' = T_{(x_t,x'_{t'})}R_Y \oplus T_{x'} \bar{x}'$$

L'application $T_{(x_t,x'_{t'})} \pi_1$ étant injective, il en résulte que $\operatorname{Ker} T_{(x_t,x')}q_1 = T_{x'}\bar{x}'$, et ce sous-espace admet un supplémentaire topologique dans $T_{(x_t,x')}R'$, donc q_1 est submersive.

CHAPITRE II

INTEGRABILITE DES ALGEBRES DE LIE BANACHIQUES

Il s'agit, dans ce chapitre, d'algèbres et de groupes de Lie banachiques.

II.1. RAPPELS SUR LES SOUS-GROUPES INTEGRAUX (4).

II.1.1. DEFINITION.

Soit G un groupe de Lie. On appelle sous-groupe intégral de G un sous-groupe H muni d'une structure de groupe de Lie connexe telle que l'injection canonique de H dans G soit une immersion.

II.1.2. THEOREME.

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{L}(G)$. L'application $H \mapsto \mathcal{L}(H)$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes intégraux de G sur l'ensemble des sous-algèbres de Lie de $\mathcal{L}(G)$ admettant un supplémentaire topologique.

II.1.3. PROPOSITION.

Soient G un groupe de Lie connexe, H un sous-groupe intégral dont la topologie admet une base dénombrable ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H est distingué dans G.

(ii) $\mathcal{L}(H)$ est un idéal de $\mathcal{L}(G)$.

II.2. ESPACES SEPARABLES.

II.2.1. Un espace topologique vérifie le second axiome de dénombrabilité si sa topologie a une base dénombrable. Pour un espace métrisable X, cette propriété est équivalente à l'existence d'un sous-ensemble dénombrable dense dans X, c'est-à-dire à la séparabilité de X.

II.2.2. LEMME(12).

Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie connexe G est séparable, alors G est séparable.

DEMONSTRATION.

L'application exponentielle est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de $0 \in \mathfrak{g}$ sur un voisinage ouvert de l'élément neutre du groupe G. Dans un groupe topologique connexe, tout voisinage de l'élément neutre engendre G, donc l'image de l'application exponentielle engendre G. Tout élément de G peut s'écrire comme un mot en éléments exp x, $x \in \mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{g}$ est séparable, on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans $\mathfrak{g}$. L'ensemble des mots en exp x_n est encore dénombrable et leurs valeurs constituent une partie dénombrable dense dans G, puisque chaque mot en exp. x, $x \in \mathfrak{g}$ est limite d'une suite de mots en exp x_n, $n \in \mathbb{N}$.

II.3. L'ALGEBRE DES CHEMINS D'UNE ALGEBRE DE LIE, PARTANT DE L'ORIGINE.

II.3.1. Soit L une algèbre de Lie ; on note $\lambda(L)$ l'algèbre des chemins dans L, partant del'origine. L'algèbre $\lambda(L)$ est munie de la norme définie par $||f|| = \sup_t ||f(t)||$ et du crochet défini par $[f,g]\,(t) = [f(t),g(t)]$.

II.3.2. THEOREME (18).

L'algèbre des chemins d'origine O d'une algèbre de Lie est intégrable.

On suppose L séparable. Comme l'a montré Van-Est, on a :

II.3.3. LEMME.

Si L est une algèbre de Lie séparable, l'algèbre des chemins d'origine O dans L, munie de la norme définie par $||f|| = \sup_t ||f(t)||$, est séparable.

DEMONSTRATION.

On note $\lambda_\ell(L)$ le sous-espace de $\lambda(L)$ composé des applications linéaires par morceaux. Ce sous-espace est dense dans $\lambda(L)$; ceci résulte immédiatement de la continuité uniforme des éléments de $\lambda(L)$. On désigne par A un sous-ensemble dénombrable dense dans L ; on peut supposer que A contient O . Soit $\lambda_\ell(A)$ le sous-ensemble de $\lambda_\ell(L)$ constitué des applications linéaires par morceaux à valeurs dans A. L'ensemble $\lambda_\ell(A)$ est dénombrable. D'autre part, puisque $\bar{A} = L$, pour toute application ϕ de $\lambda_\ell(L)$, et pour tout $\varepsilon > o$, il existe ϕ' dans $\lambda_\ell(A)$ telle que $||\phi - \phi'|| < \varepsilon$. L'ensemble $\lambda_\ell(A)$ est dense dans $\lambda_\ell(L)$ lui même dense dans $\lambda(L)$, ce qui montre la séparabilité de $\lambda(L)$.

II.4. INTEGRABILITE DES ALGEBRES DE LIE SEPARABLES.

II.4.1. Soit L une algèbre de Lie séparable ; l'algèbre $\lambda(L)$ étant intégrable d'après (II.3.2), on note Λ le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\lambda(L)$. Soit $\omega(L)$ l'algèbre des lacets d'origine 0 ; c'est une sous-algèbre de Lie de $\lambda(L)$ qui admet un supplémentaire topologique dans $\lambda(L)$, puisque c'est le noyau de la projection $f \mapsto f(1)$, qui admet une section linéaire continue. D'après(II.1.2) il existe donc un sous-groupe intégral Ω de Λ unique, dont l'algèbre de Lie est $\omega(L)$.

II.4.2. THEOREME.

A toute algèbre de Lie séparable L est associée une Q-variété en groupe Λ/Ω dont l'algèbre de Lie est isomorphe à L.

DEMONSTRATION.

Le sous-groupe intégral Ω est muni d'une structure de groupe de Lie connexe telle que l'injection canonique $j : \Omega \to \Lambda$ soit une immersion.

L'algèbre $\lambda(L)$ est séparable (II.3.3), il en est de même de $\omega(L)$ et donc aussi du groupe connexe Ω, d'après (II.2.2). Comme Ω est séparable et métrisable, il vérifie le second axiome de dénombrabilité. D'autre part, en remarquant que $\omega(L)$ est un idéal de $\lambda(L)$, on déduit de (II.1.3) que le sous-groupe Ω est distingué dans Λ . On considère le feuilletage gauche de Λ associé à $\omega(L)$ (4) dont les feuilles connexes maximales sont les classes à gauche de Λ modulo Ω . La topologie de Ω admettant une base dénombrable, on peut en déduire que si Z est une variété, et f une application de Z dans Ω, pour que f soit un morphisme de variétés de Z dans Ω, il faut et il suffit que le composé de f et de l'injection canonique j de Ω dans Λ soit un morphisme de variétés de Z dans Λ(5). Donc Ω est un sous-groupe distingué immergé de Λ.

La relation d'équivalence modulo Ω a pour graphe l'image de $\Lambda \times \Omega$ par l'application $(g,g') \mapsto (g,gg')$ de $\Lambda \times \Omega$ dans $\Lambda \times \Lambda$. Puisque Ω est une sous-variété immergée de Λ, $\Lambda \times \Omega$ est une sous-variété immergée de $\Lambda \times \Lambda$ et le graphe aussi. Les deux projections de $\Lambda \times \Omega$ sur Λ et Ω sont submersives. D'après le théorème (I.2.1), on peut munir Λ/Ω d'une structure de Q-variété de sorte que $\pi : \Lambda \to \Lambda/\Omega$ soit Q-submersive.

Enfin Λ/Ω est une Q-variété en groupe. En effet, soit m l'application de $\Lambda/\Omega \times \Lambda/\Omega$ dans Λ/Ω définie par $m(\pi(x), \pi(y)) = \pi(x)\ \pi(y)^{-1}$.

On a $(m\ o(\pi \times \pi))\ (x,y) = \pi(xy^{-1})$.

Les applications π et $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ sont des morphismes, il en est de même de $m\ o(\pi \times \pi)$, et comme $\pi \times \pi$ est une Q-submersion surjective, on déduit de la proposition (I.1.7), que m est un morphisme de Q-variétés, donc que Λ/Ω est une Q-variété en groupe.

D'après le théorème (I.2.1), pour tout $x \in \Lambda$, il existe un voisinage ouvert U de x, et une sous-variété Y_x de Λ transverse au feuilletage dans U. Alors $x\Omega$ étant la feuille connexe qui passe par x, l'espace tangent $T_x(Y_x)$ est un supplémentaire topologique de $T_x(x\Omega)$ dans $T_x(\Lambda)$. En particulier, pour l'élément neutre de Λ, on obtient $T_{\bar{e}}(\Lambda/\Omega) \simeq T_e(\Lambda)/T_e(\Omega)$, c'est-à-dire que l'algèbre de Lie de la Q-variété en groupe Λ/Ω est isomorphe à $\lambda(L)/\ \omega(L)$. Comme la projection de $\lambda(L)$ sur L, qui à un chemin f associe f(1), est un homomorphisme d'algèbres de Lie de noyau $\omega(L)$, on a un isomorphisme de $\lambda(L)/\omega(L)$ sur L.

CHAPITRE III

CLASSES CARACTERISTIQUES DES FIBRES PRINCIPAUX SUR LES Q-VARIETES

Dans ce chapitre, toutes les variétés considérées sont de dimension finie, et on revient à la théorie des Q-variétés de Barre.

Après avoir rappelé la définition de la cohomologie d'une Q-variété, on introduit la notion de G-fibré principal sur une Q-variété, et on donne une construction des classes caractéristiques de ces fibrés par la méthode de Kamber et Tondeur, puis celle de Bott-Shulman-Stasheff.

III.1. RAPPELS SUR LA COHOMOLOGIE DES Q-VARIETES.

III.1.1. DEFINITION.

Soit S une Q-variété ; on note VE/S la catégorie des variétés Q-étales au dessus de S.

Un Q-faisceau $\mathcal{F}$ sur S est un foncteur contravariant de la catégorie VE/S dans celle des ensembles, exact à gauche, transformant les sommes en produits.

Une échelle sur S est la donnée d'un système semi-simplicial augmenté dans VE/S , $E = \left[E_n , (\partial_{k,n})_{o \leq k \leq n} , \varepsilon\right]_{n \geq o}$ tel que l'augmentation $\varepsilon : E_o \to S$ soit surjective, et pour tout $n \geq o$, le morphisme de E_{n+1} dans E_n^{n+2} défini par $(\partial_{k,n+1})_{o \leq k \leq n+1}$ se factorise en un morphisme étale surjectif sur la sous-variété immergée des solutions du système.

$$\partial'_{k,n}(x_\ell) = \partial_{\ell-1,n}(x_k) \qquad o \leq k < \ell \leq n+1 \quad \text{si } n > o$$
$$\varepsilon(x_1) = \varepsilon(x_o) \qquad \text{si } n = o$$

III.1.2. EXEMPLE D'ECHELLE.

L'échelle de Koszul KX d'un Q-atlas (X,ε) de S .

$(KX)_n = \{(x_o, \ldots x_n) \in X^{n+1} / \varepsilon(x_o) = \varepsilon(x_1) = \ldots = \varepsilon(x_n)\}$.

$\partial_{k,n}(x_o, \ldots x_n) = (x_o, \ldots, \hat{x}_k, \ldots, x_n)$ où $\hat{x}_k$ signifie qu'on omet x_k .

III.1.3. DEFINITION.

Soient $E = (E_n)_{n \geq o}$ une échelle et $\mathcal{F}$ un Q-préfaisceau sur une Q-variété S ; on note $C^*(E,\mathcal{F})$ le complexe $\mathcal{F}(E_n)_{n \geq o}$ muni des différentielles $d_n : \mathcal{F}(E_n) \to \mathcal{F}(E_{n+1})$ définies par :

$$d_n = \sum_{k=o}^{n+1} (-1)^k \mathcal{F}(\partial_{k,n+1})$$

et on désigne par $H^*(E,\mathcal{F})$ sa cohomologie.

On note $H^*(S,\mathcal{F})$ la limite inductive des groupes $H^*(E,\mathcal{F})$ quand E parcourt un ensemble cofinal d'échelles sur S , qu'on appelle la cohomologie de S à coefficients dans $\mathcal{F}$.

Si l'on considère le Q-faisceau constant sur S de fibre $\mathbb{R}$, et si Ω^{*} désigne le Q-faisceau sur S des germes de formes différentielles, on a :

III.1.4. THEOREME.

Soient S une Q-variété différentielle, et E une échelle sur S, la cohomologie à valeurs réelles $\bar{H}^{*}(S, \mathbb{R})$ s'obtient comme cohomologie totale du bicomplexe $C^{*}(E,\Omega^{*})$.

III.2. NOTION DE G-FIBRE PRINCIPAL SUR UNE Q-VARIETE.

III.2.1. DEFINITIONS.

Soit G un groupe de Lie ; un G-fibré principal sur une Q-variété S est la donnée d'une Q-variété E et d'une action de G sur E , vérifiant les propriétés suivantes :

1) G opère librement sur E, c'est-à-dire que l'égalité $t\alpha = t$,pour t dans E α dans G, implique $\alpha = e$;
2) $S = E/G$ et $p : E \to E/G$ est un morphisme de Q-variétés ;
3) Il existe un Q-atlas $X \underset{\varepsilon}{\to} S$ et un difféomorphisme $\psi : X \times_S E \to X \times G$ tels que :
   a) $\psi(x,t) = (x, f(x,t))$ où f est un morphisme de $X \times_S E$ dans G satisfaisant à $f((x,t).\alpha) = f(x,t).\alpha$ pour tout $\alpha \in G$, G opérant par $(x,t).\alpha = (x,t\,\alpha)$;
   b)si $\bar{\varepsilon}$ est définie sur $X \times G$ par $\bar{\varepsilon}(x,f(x,t)) = t$, $(X \times G, \bar{\varepsilon})$ est un Q-atlas de E.

On définit alors une fonction de transition $g : X \times_S X \to G$: en ayant remarqué que si (x, x', t), (x, x', t') sont deux éléments de $X \times_S X \times_S E$ $f(x,t')\, f(x',t')^{-1} = f(x,t) f(x',t)^{-1}$, on pose pour $(x,x') \in X \times_S X$, $g(x,x') = f(x,t)\, f(x',t)^{-1}$, où t est un élément de E tel que $(x, x',t) \in X \times_S X \times_S E$.

La fonction g a les propriétés suivantes :

$$\text{(c)}\quad \begin{aligned} &\forall x \in X, && g(x,x) = e \\ &\forall (x,y) \in X \times_S X, && g(y,x) = g(x,y)^{-1} \\ &\forall (x,y,z) \in X \times_S X \times_S X, && g(x,z) = g(x,y)\, g(y,z). \end{aligned}$$

III.2.2. PROPOSITION.

G désignant un groupe de Lie, on considère une Q-variété S avec un Q-atlas $X \xrightarrow{\varepsilon} S$, et une fonction g de classe C^∞ : $X \times_S X \to G$ satisfaisant aux conditions (c) ; on peut construire un G-fibré principal admettant g comme fonction de transition.

DEMONSTRATION.

On définit une relation d'équivalence ρ sur X x G par : $(x, \gamma)\rho(x',\gamma') \Leftrightarrow \varepsilon(x) = \varepsilon(x')$ et $g(x,x')\, \gamma' = \gamma$. Soit E l'ensemble quotient et $\bar{\varepsilon}$ la projection canonique ; on note $\overline{(x,\gamma)}$ la classe de (x,γ).

Le groupe G opère sur E librement par $\overline{(x,\gamma)}\alpha = \overline{(x,\gamma\, \alpha)}$.

On pose $p\overline{(x, \gamma)} = \varepsilon(x)$ qui ne dépend pas du choix du représentant. On utilise la deuxième définition des Q-atlas donnée par la proposition (I.1.2) pour montrer que $(X\times G, \bar{\varepsilon})$ est un Q-atlas de E.

(i) si (x,γ) et (x',γ') ont même image par $\bar{\varepsilon}$, on a $\varepsilon(x) = \varepsilon(x')$ et $g(x, x')\, \gamma' = \gamma$. Comme $X \xrightarrow{\varepsilon} S$ est un Q-atlas, il existe un voisinage ouvert U de x (resp. U' de x') et un difféomorphisme h $h : U \to U'$ tels que $h(x) = x'$, $\varepsilon(h(t)) = \varepsilon(t)$, $\forall t \in U$. On en déduit deux voisinages ouverts U x G de (x,γ) et U' x G de (x', γ'). On pose pour $(t, \lambda) \in U \times G$: $H(t,\lambda) = (h(t),g(h(t),t)\, \lambda)$, alors H est un difféomorphisme tel que $H(x,\gamma) = (x',\gamma')$ et $\bar{\varepsilon}\, H(t,\lambda) = \bar{\varepsilon}\, (t,\lambda)$.

(ii) Soient T une variété et F, F' deux morphismes de T dans X x G tels que le diagramme ci-dessous commute

$$T \underset{F'}{\overset{F}{\rightrightarrows}} X \times G \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} E .$$

On considère $p_1 \circ F$ et $p_1 \circ F' : T \to X$; d'après l'égalité $\bar{\varepsilon} F = \bar{\varepsilon} F'$, on a $\varepsilon p_1 F = \varepsilon p_1 F'$, donc $T_1 = \{t \in T : p_1 F(t) = p_1 F'(t)\}$ étant ouvert dans T , $T_o = \{t \in T : F(t) = F'(t)\}$ qui coïncide avec T_1 est ouvert.

L'application p est un morphisme de Q-variétés : soient $(x,\gamma) \in X \times G$ et $x' \in X$ tels que $\varepsilon(x') = p\,\bar{\varepsilon}(x,\gamma) = \varepsilon(x)$; il existe U_x et $U'_{x'}$ voisinages ouverts de x et x' respectivement et ϕ difféomorphisme de U_x sur $U'_{x'}$, tels que $\phi(x) = x'$, $\varepsilon\phi(t) = \varepsilon(t)$ pour tout $t \in U_x$. On considère $U_x \times G$ et $\hat{\phi}$: $(t,\alpha) \in U \times G \mapsto \phi(t) \in U'$; c'est un morphisme tel que $\hat{\phi}(x,\gamma) = x'$, $\varepsilon\,\hat{\phi}(t,\alpha) = \varepsilon(t)$, $\forall\, t \in U$.

On peut définir $\psi : X \times_S E \to X \times G$ par :

$\psi(x', \overline{(x,\gamma)}) = (x', g(x',x)\gamma)$ indépendant du choix de (x,γ); c'est un isomorphisme. On pose $f(x', \overline{(x,\gamma)}) = g(x',x)\gamma$.

III.2.3. EXEMPLE.

On considère un groupe de Lie connexe et abélien G, H un sous-groupe de G non fermé, S = G/H est une Q-variété en groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. La projection p : G → G/H est un morphisme de Q-variétés, H opère librement sur G . On obtient un H-fibré principal sur la Q-variété en groupe G/H. On va construire un Q-atlas vérifiant la condition 3).

Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$; il existe des voisinages ouverts V de 0 dans $\mathfrak{m}$, W de 0 dans $\mathfrak{h}$ et U de e dans G, tels que μ: $(A,B) \mapsto \exp. A. \exp B$ soit un difféomorphisme de V x W sur U.

On obtient un difféomorphisme $\alpha : V \times_s G \to V \times H$ défini par $\alpha(x,t) = (x,(\exp x)^{-1}t)$ et par translation, on en déduit un recouvrement trivialisant $(V_a)_{a\in\mathfrak{m}}$ de $\mathfrak{m}$. La somme topologique $\coprod_{a\in\mathfrak{m}} V_a$ est un Q-atlas de G/H.

III.3. CLASSES CARACTERISTIQUES.

III.3.1. DEFINITION DE LA 1ère ALGEBRE DE WEIL SEMI-SIMPLICIALE.

Pour $q \geq o$, on note $\mathfrak{g}^{q+1}$ le produit de q+1 facteurs $\mathfrak{g}$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie. On définit un objet semi-simplicial dans la catégorie des algèbres de Lie par les objets $\mathfrak{g}^{q+1}$ et les opérateurs de face et de dégénérescence

$$\varepsilon_i^q : \mathfrak{g}^{q+2} \to \mathfrak{g}^{q+1} \quad , \quad \varepsilon_i^q (x_o,\dots, x_{q+1}) = (x_o,\dots,x_{i-1}, x_{i+1},\dots, x_{q+1})_{\ o \leq i \leq q+1}$$

$$\eta_j^q : \mathfrak{g}^{q+1} \to \mathfrak{g}^{q+2} \quad , \quad \eta_j^q (x_o,\dots, x_q) = (x_o,\dots,x_j, x_j,x_{j+1},\dots,x_q) \quad o \leq j \leq q$$

Ils satisfont aux relations usuelles.

On considère l'algèbre de Weil comme un foncteur contravariant de la catégorie des algèbres de Lie dans celle des $\mathfrak{g}$-algèbres différentielles graduées, d'où un objet co-semi-simplicial $W_1(\mathfrak{g})$ dans la catégorie des $\mathfrak{g}$-A.D.G. défini par $W_1^q (\mathfrak{g}) = W (\mathfrak{g}^{q+1})$ avec les opérateurs de face $W(\varepsilon_i^q)$ et de dégénérescence $W(\eta_j^q)$. On munit $W_1(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{q\geq o} W(\mathfrak{g}^{q+1})$ de la multiplication d'Alexander-Whitney et de la différentielle $\delta \pm d$, où δ désigne la différentielle simpliciale et d la différentielle induite par celle de $W(\mathfrak{g})$.

On note $W_1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ l'algèbre des éléments basiques de $W_1(\mathfrak{g})$. Si l'algèbre $\mathfrak{g}$ est réductive, $W_1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ a même cohomologie que $W(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, c'est à dire que $H^*(W_1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}))$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{g}$.

Dans la suite de ce chapitre, G désigne un groupe de Lie connexe.

III.3.2. Soit $E \underset{p}{\rightarrow} S$ un G-fibré principal défini par un Q-atlas $X \underset{\varepsilon}{\rightarrow} S$ et un difféomorphisme $\psi : X \times_S E \rightarrow X \times G$. On utilise l'échelle de Koszul KX, et on construit un homomorphisme de la première algèbre de Weil semi-simpliciale $W_1(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{q \geq o} W_1^q(\mathfrak{g})$ dans le bicomplexe de de Rham $A^p((KX)_q \times_S E)$, à partir d'une connexion sur le fibré $X \times_S E \rightarrow X$.

L'application $f : X \times_S E \rightarrow G$ est équivariante, on peut considérer la forme de connexion $\theta \in A^1(X \times_S E ; \mathfrak{g})$ induite par la connexion canonique sur $G \rightarrow *$; On note $\delta_i = \partial_o \cdots \hat{\partial}_i \cdots \partial_q \times id$, l'application de $(KX)_q \times_S E \rightarrow X \times_S E$ qui à $(x_o, \ldots, x_q, t)$ associe (x_i, t).

Soit $\chi : (\mathfrak{g}^{q+1})^* \rightarrow A^1((KX)_q \times_S E)$ définie par :

$$\chi(h)\ (y ; \xi) = \langle h , \theta(\delta_o y , \delta_{o_*} \xi), \ldots, \theta(\delta_q y, \delta_{q_*} \xi) \rangle, \text{ où}$$

$h \in (\mathfrak{g}^{q+1})^*$, $y \in (KX)_q \times_S E$, $\xi \in T_y((KX)_q \times_S E)$; alors χ s'étend en un homomorphisme de $\mathfrak{g}$-algèbres différentielles graduées de $W_1^q(\mathfrak{g}) \simeq W(\mathfrak{g}^{q+1}) \rightarrow A((KX)_q \times_S E)$, qui induit un homomorphisme sur les sous-algèbres basiques correspondantes, et d'après le théorème (III.1.4) la cohomologie $H^*(S, \mathbb{R})$ s'obtient comme cohomologie totale du bicomplexe A(KX). On peut donc énoncer le résultat suivant :

III.3.3. THEOREME.

L'application $H^* (W_1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \xrightarrow{\chi^\#} H^*(A(KX)) \simeq H^*(S, \mathbb{R})$ induite en cohomologie donne les classes caractéristiques du fibré.

III.3.4. DEFINITION DU G-FIBRE UNIVERSEL.

On désigne par $PG \underset{\pi}{\rightarrow} NG$ le G-fibré universel.

PG est la variété semi-simpliciale définie par :

$PG(q) = G^{q+1}$ où les opérateurs de face $\partial_i : G^{q+1} \to G^q$

et les opérateurs de dégénérescence $\varepsilon_i : G^{q+1} \to G^{q+2}$

sont donnés par :

$$\partial_i(y_o,\ldots,y_q) = (y_o,\ldots,\hat{y}_i,\ldots,y_q) \qquad o \leq i \leq q$$
$$\varepsilon_i(y_o,\ldots,y_q) = (y_o,\ldots,y_i,y_i,\ldots y_q)$$

NG est la variété semi-simpliciale définie par :

$NG(q) = G^q$ où les opérateurs de face $\partial_i : G^q \to G^{q-1}$

et les opérateurs de dégénérescence $\varepsilon_i : G^{q-1} \to G^q$

sont donnés par :

$$\partial_o(y_1,\ldots,y_q) = (y_2,\ldots y_q)$$
$$\partial_q(y_1,\ldots,y_q) = (y_1,\ldots,y_{q-1})$$
$$\partial_i(y_1,\ldots,y_q) = (y_1,\ldots,y_i y_{i+1},\ldots,y_q) \qquad 1 \leq i \leq q-1$$
$$\varepsilon_o(y_1,\ldots,y_{q-1}) = (1,y_1,\ldots,y_{q-1})$$
$$\varepsilon_i(y_1,\ldots,y_{q-1}) = (y_1,\ldots y_i,1,y_{i+1}\ldots,y_{q-1}) \qquad 1 \leq i \leq q-1$$

L'application $\pi : PG \to NG$ est définie par :

$$\pi(y_o,\ldots,y_q) = (y_o y_1^{-1},\ y_1 y_2^{-1},\ldots,\ y_{q-1}y_q^{-1})$$

On note A(NG) le bicomplexe des formes différentielles sur NG .

III.3.5. Soit $E \underset{p}{\to} S$ un G-fibré principal défini par la donnée d'un Q-atlas $X \underset{\varepsilon}{\to} S$ et d'une fonction de transition $g : X \times_S X \to G$.

L'application g s'étend en un morphisme de G-fibrés principaux semi-simpliciaux. On définit g au rang q de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
(KX)_q \times_S E \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[d, "p_1"'] & G^{q+1} \arrow[d, "\pi"] \\
(KX)_q \arrow[r, "\bar{g}"'] & G^q
\end{tikzcd}$$

$$\hat{g} = (f\ \delta_o\ ,\ \ldots\ f\ \delta_q)$$
$$\bar{g} = (g\ \partial_2 \ldots \partial_q\ ,\ldots,\ g\ \partial_2 \ldots \partial_{q-i}\ \partial_o^i\ ,\ldots,\ g\ \partial_o^{q-1})$$

On a $\pi\hat{g} = \bar{g}\ p_1$, et $\hat{g}$ et $\bar{g}$ commutent aux opérateurs de face. L'homomorphisme $\bar{g}^* : A(NG) \to A(KX)$ induit un homomorphisme $g^{\#}$ en cohomologie.

III.3.6. THEOREME.

Si l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G est réductive, l'application $H^{*}(A(NG)) \xrightarrow{g^{\#}} H^{*}(A(KX)) \simeq H^{*}(S, \mathbb{R})$ donne les classes caractéristiques du fibré.

En effet, les connexions plates évidentes sur $G^{q+1} \rightarrow *$ donnent une application de $\mathcal{G}$-algèbres différentielles graduées $\phi : W_1^q(\mathcal{G}) \rightarrow A(G^{q+1})$ qui induit un isomorphisme $\phi^{\#} : H^{*}(W_1(\mathcal{G},\mathcal{G})) \rightarrow H^{*}(A(PG)_{G\text{-basiques}})$ (15) .

Donc $\hat{g}^{*} \circ \phi$ et χ coïncident sur $(\mathcal{G}^{q+1})^{*}$ et elles induisent la même application en cohomologie.

BIBLIOGRAPHIE

(1) R. BARRE. De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23.3, p. 227-312 (1973).

(2) R. BOTT. On the Chern-Weil homomorphism and the continuous cohomology of Lie-groups. Advances in Mathematics, 11, p. 289-303 (1973).

(3) L.G. BOUMA, W.T. VAN EST. Manifolds schemes and foliations on the 2-torus and the Klein bottle I, II, III. Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., 40, n°3, p. 313-347 (1978).

(4) N. BOURBAKI. Groupes et algèbres de Lie, Chap. 2-3. Paris(1972).

(5) N. BOURBAKI. Variétés différentielles et analytiques, fascicule de résultats. Paris (1967). 2 Volumes.

(6) E. CARTAN. Le troisième théorème fondamental de Lie. C.R. Acad. Sc. 190, p. 914-1005 (1930).

(7) E. CARTAN. La topologie des groupes de Lie. Paris, Hermann (1936).

(8) A. DOUADY, M. LAZARD. Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes. Invent. Math. 1, p. 133-151 (1966).

(9) W.T. VAN EST, Th. J. KORTHAGEN. Non elargible Lie algebras. Konink. Nederl. Akad. van Wet (Amsterdam), ser. A, 67, n°1, et Indag. Math. 26, n°1 (1964).

(10) F. KAMBER, P. TONDEUR. Foliated bundles and characteristic classes. L.N. in Math. 493, Springer, Berlin (1975).

(11) S. LANG. Introduction to differentiable manifolds. Interscience, John Wiley and Sons, New York (1962).

(12) M. LAZARD. Variétés différentiables, 9ème leçon, groupes différentiables.

(13) P. MOLINO. Etude des feuilletages transversalement complets et applications. Ann. Scient. ENS, 4ème Série, t. 10, p. 289-307 (1977).

(14) M. PLAISANT. Q-variétés banachiques. Application à l'intégrabilité des algèbres de Lie. C.R. Acad. Sc. 290, p. 185-188 (1980).

(15) H. SHULMAN, J. STASHEFF. De Rham theory for $B\Gamma$, Differential topology, foliations and Gelfand-Fuks cohomology. L.N. in Math. 652, Springer, Berlin, p. 62-74 (1978).

(16) P.A. SMITH. Some topological notions connected with a set of generators. Proc. Int. Congr. Vol. 2, p. 436-441 (1950).

(17) P.A. SMITH. The complex of a group relative to a set of generators. Ann. of Math. 54, p. 371-424 (1951).

(18) S. SWIERCZKOWSKI. The path-functor on Banach Lie algebras. Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.,33, n°3, p.235-239 (1971).