

50376
1980
184-1

N° d'ordre : 253

50376
1980
184-1

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

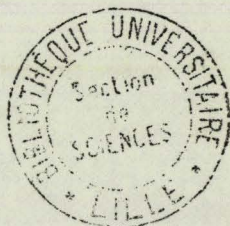
DOCTEUR INGÉNIEUR

EN MECANIQUE

PAR

Alain LEBLANC

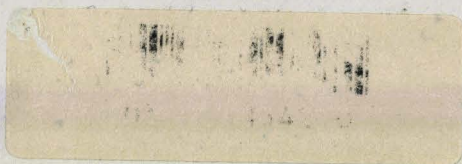
CALCUL DE FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTES
DANS UN DISQUE ET UN ANNEAU CHARGES DIAMETRALEMENT
AVEC FISSURES SYMETRIQUES DANS LE PLAN DE CHARGEMENT



Soutenu le 14 Novembre 1980.

JURY

MM. ESCAIG	UST Lille	Président
HENRY	UST Lille	Rapporteur
CORNET	I.P.G.	Examineur
PARSY	UST Lille	Examineur
DUFFAUT	B.R.G.M.	Examineur



A Myriam,

Sylvie et Frédéric,

*pour toutes les heures volées
au sablier de leur vie.*

REMERCIEMENTS

L'ensemble des pages qui constituent cette thèse représente l'expression d'une recherche effectuée dans le cadre du laboratoire "Structures et Propriétés de l'état solide", laboratoire associé au CNRS n° 234.

Que Monsieur le Professeur ESCAIG, qui en assure la direction, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de ce travail et en en acceptant la présidence.

Que ces quelques lignes me permettent d'exprimer à Monsieur HENRY, qui a bien voulu accepter de diriger cette thèse, ma profonde et amicale reconnaissance pour les conseils et encouragements qu'il m'a toujours apportés au cours des innombrables heures qu'il m'a consacrées.

Qu'il me soit permis ici de remercier Monsieur le Professeur PAQUET pour la contribution qu'il a apportée à la naissance de cet ouvrage.

Je tiens à remercier tout particulièrement Messieurs les Professeurs PARSY et CORNET pour les discussions fructueuses qu'il m'ont permis d'entretenir avec eux me permettant ainsi d'éclairer des parties importantes de ce travail.

J'exprime à leur égard, ainsi qu'à Monsieur DUFFAUT toute ma reconnaissance pour avoir bien voulu accepter d'être membre du Jury.

Enfin, l'existence de cette thèse n'aurait pu être telle sans la collaboration dévouée et efficace de nombreuses personnes à qui je tiens à rendre hommage, et tout particulièrement,

Messieurs DUTHILLEUL, FRANCOIS, TINEL et l'équipe d'opérateurs du C.I.T.I. grâce auxquels la mise au point des programmes informatiques a pu être réalisée.

Madame CORNILLE, patiente et dévouée, qui a bien voulu accepter la tâche ingrate et délicate de la mise en forme définitive de ce manuscrit, ce dont je ne saurai trop la remercier.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I : INTRODUCTION	p. 1
1.1. OBJECTIF INITIAL DU TRAVAIL	p. 1
1.2. INTERPRETATION PAR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE	p. 2
1.3. CONSIDERATIONS RELATIVES AU CRITERE DE GRIFFITH	p. 9
1.4. BUT ET PRESENTATION DE LA THESE	p.10
CHAPITRE 2 : POTENTIELS COMPLEXES ; METHODE DE SUPERPOSITION	p.12
2.1. PRESENTATION DE LA METHODE UTILISEE	p.12
2.1.1. Relations de Kolosov-Muskhelislivili.	p.12
2.1.2. Exposé de la méthode de superposition	p.13
2.1.3. Facteur d'intensité de contrainte	p.15
2.2. CAS DU DISQUE COMPORTANT UNE FISSURE CENTRALE	p.16
2.2.1. Définition du problème	p.16
2.2.2. Etude de l'état B	p.16
2.2.2.1. Définition des contraintes	p.17
2.2.2.2. Définition des potentiels complexes	p.18
2.2.3. Etude de l'état C	p.23
2.2.4. Expression du facteur d'intensité de contrainte	p.25
2.2.5. Application numérique	p.25
2.3. DISQUE COMPORTANT DES FISSURES DIAMETRALES SYMETRIQUES	p.28
2.3.1. Définition du problème.	p.28
2.3.2. Etude de l'état B	p.28
2.3.2.1. Définition des potentiels complexes	p.29
2.3.2.2. Définition des résultantes sur le contour	p.37
2.3.3. Etude de l'état C	p.40
2.3.3.1. Détermination des potentiels complexes	p.41
2.3.3.2. Détermination des résultantes sur le contour	p.43
2.3.4. Facteurs d'intensité de contrainte.	p.45
2.3.5. Application numérique	p. 46

CHAPITRE 3 : POTENTIELS COMPLEXES - TRANSFORMATION CONFORME	p.56
3.1. PRESENTATION ET PARTICULARITES DE LA METHODE	p.56
3.2. ETUDE DU DISQUE A FISSURE CENTRALE	p.57
3.2.1. Influence sur les relations de Kolosov- Muskhelishvili.	p.57
3.2.2. Prolongement analytique	p.59
3.2.3. Analyse du problème	p.60
3.2.3.1. Expression de la résultante	p.61
3.2.3.2. Facteur d'intensité de contrainte.	p.63
3.2.4. Résolution numérique et résultats	p.63
3.3. ETUDE DE L'ANNEAU	p.69
3.3.1. Transformation conforme	p.69
3.3.2. Prolongement analytique	p.72
3.3.3. Influence du partitionnement sur l'expression du potentiel complexe	p.74
3.3.4. Détermination des coefficients des séries	p.76
3.3.5. Facteur d'intensité de contrainte	p.77
3.3.6. Mise en équation du problème	p.79
3.3.7. Résultats et conclusions.	p.88
 CHAPITRE 4 : METHODE DES DISCONTINUITÉS DE DÉPLACEMENT	 p.89
4.1. PRESENTATION DE LA METHODE	p.89
4.2. EXPOSE DE LA METHODE ; RELATIONS FONDAMENTALES	p.89
4.2.1. Solutions particulières de base	p.89
4.2.2. Solution générale dans le cas d'un milieu fini ou infini	p.92
4.3. APPLICATION DE LA METHODE	p.95
4.3.1. Exploitations	p.95
4.3.2. Discrétisations et résultats	p.96
 CONCLUSION	 p.104
 ANNEXES	
Annexe A1	p. 1
Annexe A2	p. 6
Annexe A3	p.12
Annexe A4	p.20
Annexe A5	p.24
Annexe A6	p.36

INTRODUCTION

1-1 OBJECTIF INITIAL DU TRAVAIL

Les essais indirects de mesure de la résistance à la traction des matériaux fragiles ont été envisagés afin de pouvoir définir un procédé de mise en oeuvre simple, rapide, peu coûteux et fiable, l'essai de traction directe imposant, en effet, une procédure longue et délicate.

Leur principe repose sur l'existence d'un champ de traction induit par la compression diamétrale d'un disque (essai brésilien) ou d'un anneau (fig. 1.1) provoquant une rupture par fissuration de traction.

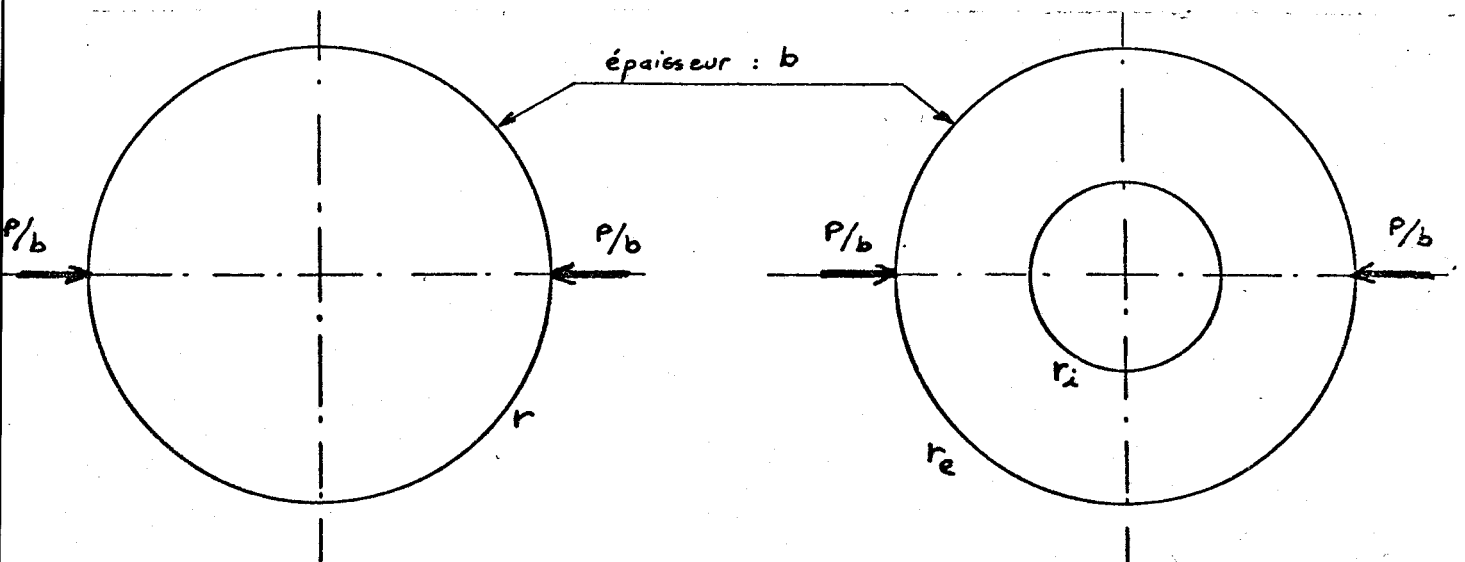


Fig. 1.1

La résistance à la traction σ_T est alors recherchée en fonction de la charge de rupture P_R .

La théorie de l'élasticité linéaire appliquée au comportement d'un matériau homogène et isotrope permet de déterminer l'expression des contraintes induites en tout point du plan diamétral de chargement.

Dans le cas de l'essai sur disque, soumis à des charges théoriques diamétrales concentrées, la répartition des contraintes $\sigma_\theta(x, 0)$ (fig. 1.1), est donnée par la relation | 14 |.

$$(1.1) \quad \sigma_\theta(r, 0) = \frac{P}{\pi b R}$$

les contraintes de traction étant comptées positivement.

Expérimentalement, l'application effective de charges purement concentrées étant impossible compte tenu de la compressibilité du matériau, l'adoption d'un arc de chargement d'ouverture α fut envisagée.

La solution en contraintes, valable en déformations planes (cylindre) et en contraintes planes (disque), est donnée par HONDROS | |

$$\sigma_{\theta}(r, 0) = \frac{P}{\pi b R \alpha} \left[\frac{[1 - (r/R)^2] \sin 2\alpha}{1 - 2(r/R)^2 \cos 2\alpha + (r/R)^4} - \text{Arctg} \left(\frac{1 + (r/R)^2}{1 - (r/R)^2} \text{tg } \alpha \right) \right]$$

$$\sigma_r(r, 0) = \frac{P}{\pi b R \alpha} \left[\frac{[1 - (r/R)^2] \sin 2\alpha}{1 - 2(r/R)^2 \cos 2\alpha + (r/R)^4} + \text{Arctg} \left(\frac{1 + (r/R)^2}{1 - (r/R)^2} \text{tg } \alpha \right) \right]$$

Pour les faibles valeurs de α , lorsque x tend vers 0, l'expression des contraintes devient :

$$(1.2) \quad \sigma_{\theta}(r, 0) \approx \frac{P}{\pi b R}$$

$$\sigma_r(r, 0) \approx -\frac{3P}{\pi b R}$$

L'étude théorique du problème de l'anneau soumis à l'action de 2 charges concentrées diamétrales et opposées a été abordée par TIMOSHENKO au moyen d'une méthode de superposition. JAEGER et HOSKINS | 10 | puis NEVEL | 11 | ont déterminé les relations de définition des contraintes. Pour les points situés à l'intersection du bord intérieur et du plan de chargement, la valeur de la contrainte de traction induite peut s'exprimer par :

$$(1.3) \quad \sigma_{\theta}(r_i, 0) = K \frac{P}{\pi b r_e}$$

K étant le facteur de concentration de contraintes qui dépend du rapport des rayons

$$\rho = \frac{r_i}{r_e}$$

De nombreuses études ont été menées pour définir la relation :

$$K = K(\rho).$$

La figure 1.2 donne une représentation graphique de la fonction selon HIRAMATSU et OKA | 7 | .

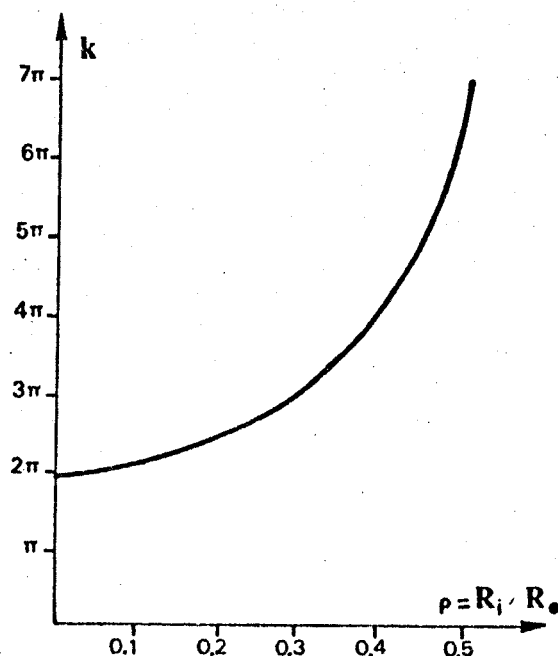


Fig. 1.2.

Ces résultats montrent, à rayon extérieur constant, que si le rayon intérieur de l'anneau tend vers 0 (configuration analogue à celle du disque), la charge de rupture P_c doit être environ 6 fois plus faible que celle conduisant à la rupture du disque. Ces données théoriques sont en parfaite contradiction avec l'expérience comme le montrent les résultats obtenus par HAWKES et MELLOR | 5 | et HENRY | 6 |.

L'interprétation au moyen de la seule théorie de l'élasticité linéaire n'est donc pas compatible avec les mécanismes de rupture mis en jeu par ces types d'essais.

Le but initial du travail présenté a donc été au moyen d'une interprétation par la mécanique linéaire de la rupture appliquée au comportement de matériaux fissurés, de déterminer les conditions de propagation d'une fissure critique conduisant à la rupture.

1-2 INTERPRÉTATION PAR LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE

La prise en compte au moyen de la mécanique de la rupture d'un matériau pourvu de fissures est établie par l'intermédiaire du critère de Griffith en énergie. Cette approche du problème a pour but de déterminer les conditions d'évolution du défaut le plus défavorable et d'étudier la stabilité ou l'instabilité du phénomène.

1.2.1. MODES DE PROPAGATION D'UNE FISSURE ; FACTEURS D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES.

La modélisation d'une fissure nécessaire pour effectuer les calculs consiste à prendre une discontinuité de matière infiniment fine. IRWIN | 8 |

a décomposé les sollicitations extérieures en trois sollicitations fondamentales définies par rapport au plan et au front de fissure. Ce sont :

a) une sollicitation de traction perpendiculaire au plan de la fissure (mode 1 ou mode de traction) (fig. 1.3. A),

b) une sollicitation de cisaillement dans le plan de la fissure et dont l'action est perpendiculaire au front de fissure (mode 2 ou mode de cisaillement) (fig. 1.3. B),

c) une sollicitation de cisaillement parallèle au plan de fissure et dont l'action est parallèle au front de la fissure (mode 3 ou mode de torsion) (fig. 1.3. C).

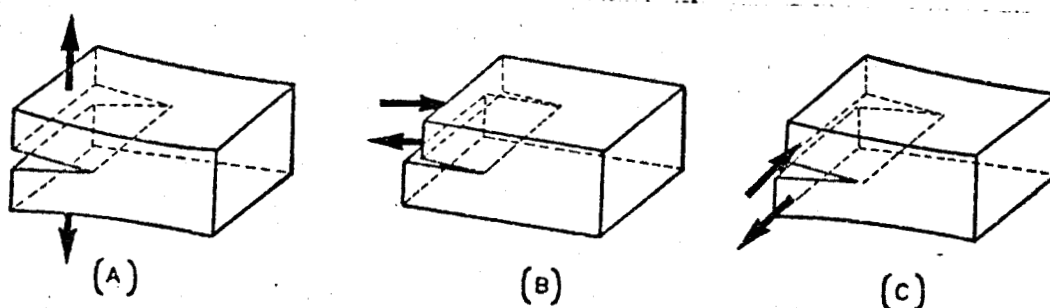


Fig. 1.3.

Dans le repère orthonormé $M/\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ défini en un point M de la tête de fissure et représenté à la figure 1.4, les composantes du tenseur élastique des contraintes en un point P du plan (x, y) situé à une distance r petite du point M et tel que $(Mx, MP) = \theta$ sont données par les relations [1.4.]

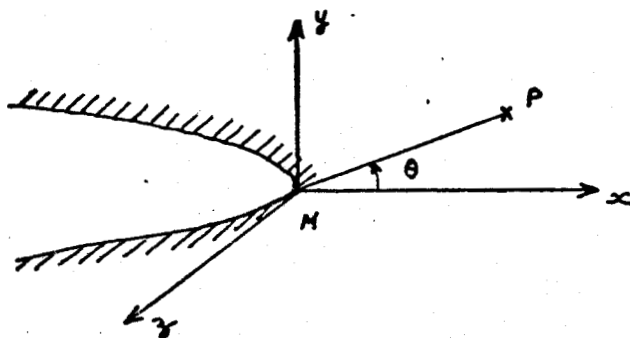


Fig. 1.4

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ (1.4) \quad \sigma_{xy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{xz} &= \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{yz} &= \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Les coefficients K_i sont appelés facteurs d'intensité de contrainte en mode i déterminés par la théorie de l'élasticité linéaire en fonction de la géométrie de la fissure, de l'éprouvette et des charges appliquées.

Dans le cas des essais sur disque ou anneau, les relations de définition des contraintes (1.1) à (1.3) montrent l'existence d'un champ de traction perpendiculaire au plan de chargement. D'autre part, les expérimentations réalisées sur ces deux types d'éprouvettes ont toujours montré que la rupture intervient par la propagation instable d'une fissure située dans le plan des charges. | 16 |.

En conséquence, le mode de sollicitation fondamentale intervenant dans les essais brésiliens est le mode 1, appliqué à un défaut structural proche ou appartenant au plan de chargement.

Le facteur d'intensité de contrainte K_1 alors mis en jeu est relié à la contrainte de traction σ appliquée au matériau perpendiculairement à la fissure et à la demi-longueur de fissure : a par une relation qui peut toujours se mettre sous la forme :

$$(1.5) \quad K_1 = Y \sigma \sqrt{a}$$

Y étant un facteur de forme qui dépend de la géométrie de l'éprouvette et de la configuration éprouvette-fissure.

La relation (1.5) permet de montrer que la contrainte de rupture par traction du matériau étudié est liée à une valeur particulière du facteur d'intensité de contrainte : K_{1C} dénommé : facteur d'intensité de contrainte critique.

K_{1C} est une caractéristique physique du matériau déterminée par deux types principaux d'expérimentations : la méthode de la compliance et la méthode énergétique basée sur le travail dépensé pendant toute la propagation de la fissure.

1.2.2. CRITERE DE GRIFFITH EN ENERGIE | 4 |

L'étude de la rupture des matériaux fissurés a été abordée par GRIFFITH à partir du bilan énergétique du système au moyen des propositions suivantes :

Pour un solide élastique soumis à un chargement extérieur et comportant une fissure de longueur a , la conservation de l'énergie totale du système écrite pour un accroissement infinitésimal du défaut d'une longueur da établit la relation :

$$(1.6) \quad dW_{\text{tot}} = dW_{\text{elas}} + dW_{\text{ext}} + dW_{\text{S}} + dW_{\text{cin}} = 0$$

dans laquelle :

dW_{elas} : variation de l'énergie élastique $\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$

dW_{ext} : variation du potentiel des forces extérieures

dW_{cin} : variation d'énergie cinétique

dW_{S} : énergie dépensée pour la création des nouvelles surfaces de fissure.

GRIFFITH postule que l'énergie nécessaire à la création de surfaces dans un matériau est une constante physique : γ analogue à la constante tensioactive des liquides.

En conséquence, dS étant la surface projetée relative à da , l'expression définissant dW_{S} s'écrit :

$$dW_{\text{S}} = 2\gamma dS$$

La part de l'énergie totale relative à la progression de la fissure est donc constituée de dW_{S} et dW_{cin} .

Le chargement extérieur étant maintenu constant, deux questions se posent :

a) quelles sont les conditions nécessaires au démarrage de la fissure ?

b) Ces conditions étant requises, l'évolution du processus est-elle stable ou instable ?

La fissure se propagera si la variation d'énergie cinétique est positive. Dans ce cas, la relation (1.6) s'écrit :

$$(1.7) \quad \frac{\partial}{\partial S} (W_{\text{elas}} + W_{\text{ext}}) + 2\gamma < 0$$

On pose par définition

$$(1.8) \quad G = - \frac{\partial}{\partial S} (W_{\text{elas}} + W_{\text{ext}}) = - \frac{\partial \psi}{\partial S}$$

G est appelé taux de restitution d'énergie ou énergie disponible à la progression de la fissure.

Le critère de Griffith en énergie s'énonce alors :

la condition nécessaire au démarrage de la propagation d'une fissure appartenant à un milieu élastique est telle que :

$$G > 2\gamma = G_c$$

Si à tout moment le chargement extérieur est tel que $G = 2\gamma$, la variation d'énergie cinétique étant nulle au cours de l'évolution, l'accroissement de la fissure sera fini, traduisant un processus de propagation stable.

Si, dans le cas contraire G est toujours supérieur à 2γ l'énergie disponible $(G - 2\gamma) dS$ est transformée en énergie cinétique créatrice potentielle de nouvelles surfaces de discontinuité. Le processus peut alors évoluer de manière instable.

1.2.3. RELATION ENTRE G ET K_1

IRWIN [8], par l'étude du champ de contraintes et de déplacements autour du défaut, a établi la relation entre G et les facteurs d'intensité de contraintes, soit :

$$G = \frac{\alpha}{E} (K_1^2 + K_2^2) + \frac{1+\nu}{E} K_3^2 \quad \begin{array}{l} \alpha = 1 - \nu^2 \text{ en déformation plane} \\ \alpha = 1 \quad \text{en contrainte plane} \end{array}$$

Dans le cas particulier où la fissure se déplace dans son plan sous l'action de charge appliquées perpendiculaires à ce plan, l'équation précédente devient :

$$(1.9) \quad G = \frac{\alpha}{E} K_1^2$$

permettant d'écrire le critère de Griffith sous la forme :

$$K_1 = K_{1C} = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\alpha}}$$

1.2.4. INTERPRETATION DU CRITERE DE GRIFFITH

Compte tenu de sa définition, le taux de restitution d'énergie, pour un solide donné, est une fonction des charges extérieures appliquées et de la lon-

gueur de fissure, soit :

$$G = G(P, a).$$

La condition nécessaire d'extension d'une fissure s'écrit, compte tenu du critère :

$$G = G_c = - \frac{\partial \psi}{\partial S}$$

L'évolution ultérieure de la fissure dépend des variations de $\frac{\partial \psi}{\partial S}$, c'est à dire de $\frac{\partial^2 \psi}{\partial S^2}$

P_c , valeur du chargement tel que $G = G_c$, étant maintenu constant, deux possibilités se présentent :

a) on est dans le cas où : $\frac{\partial G}{\partial S} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial S^2} < 0$

et le critère de Griffith n'est plus satisfait dès l'accroissement infinitésimal de la fissure ; la progression ne peut avoir lieu sans une augmentation de la sollicitation. La propagation de fissure est alors contrôlée (Fig. 1.5)

b) on se situe dans le cas où :

$$\frac{\partial G}{\partial S} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial S^2} > 0$$

le critère de Griffith est encore satisfait après la progression de fissure et la propagation se poursuit sans accroissement de la sollicitation. Le mécanisme de rupture est alors instable (Fig. 1.6).

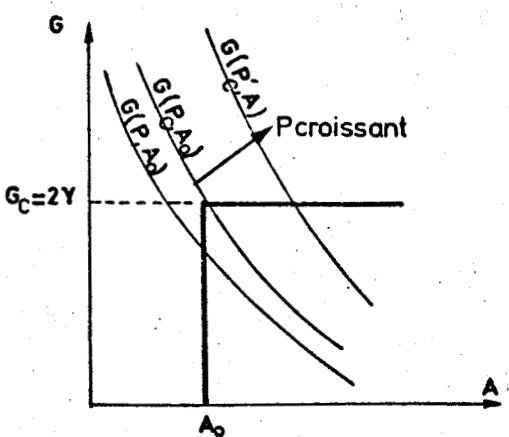


Fig. 1.5.

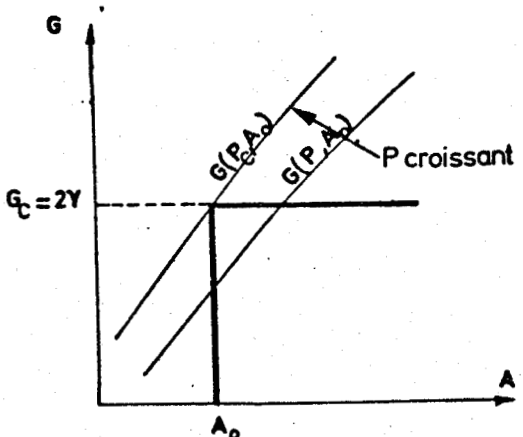


Fig. 1.6.

1-3 CONSIDÉRATIONS RELATIVES AU CRITÈRE DE GRIFFITH

Pour formuler son critère, GRIFFITH suppose que l'énergie de surface du matériau fragile étudié est une constante physique intrinsèque, indépendante de l'état du milieu et du chargement qu'il supporte.

Cette hypothèse est vérifiée dans les cas purement élastiques et dans ceux où la zone perturbée en tête de fissure est très petite.

Dans beaucoup d'autres cas, la valeur de G_c apparaît comme une fonction de la longueur dont s'est propagée la fissure, ce qui permet de formuler l'hypothèse d'un critère évolutif pouvant s'exprimer sous la forme

$$G_c = G_c(\Delta S)$$

S étant l'aire apparente de la fissure.

Dans le cas des matériaux fragiles, la déformation plastique en tête de fissure intervient pour une faible part dans l'évolution du critère. Par contre, l'existence d'une zone de microfissuration en tête de fissure constitue un facteur non négligeable de modification du critère dans la mesure où sa configuration peut être fonction de l'état de contrainte existant dans le matériau. | 3 |

La comparaison des solutions analytiques entre l'essai sur disque et l'essai sur anneau précise les résultats suivants :

a) Pour l'anneau, le champ de contrainte au point d'intersection du plan de chargement avec le rayon intérieur est uniaxial.

$$\sigma_\theta = K \frac{P}{\pi br} \quad ; \quad \sigma_r = \sigma_z = 0$$

Dans le cas du disque, le champ de contrainte au centre de l'éprouvette est de type biaxial, la compression radiale étant d'intensité 3 fois supérieure à la traction.

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\pi br} \quad ; \quad \sigma_r = -\frac{3P}{\pi br}$$

b) Au moment de l'initiation de la fissure critique, le plan de chargement, dans le cas du disque, supporte un état de contraintes normales constantes :

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\pi br}$$

Dans le cas de l'anneau, seule une faible portion de ce plan supporte une contrainte normale σ_θ proche de la contrainte maximale obtenue en bord de trou.

En ce qui concerne les contraintes radiales, les deux configurations d'essais conduisent nécessairement à l'existence de contraintes de compression différentes en un même point du diamètre de chargement.

Pour les trois types d'essais de traction mis en oeuvre pour les matériaux fragiles - essai de traction directe ; essai de compression sur disque et sur anneau - la diversité des champs de contrainte parcourus par la fissure de rupture au cours de son évolution pose la question de leur incidence sur le critère de propagation de fissure.

En d'autres termes, quelle sera l'allure de la courbe $G_c = G_c(S)$ pour chacun des essais envisagés ?

Ce problème constitue l'objectif global de l'étude en cours. La rupture des éprouvettes circulaires à l'aide d'une presse conventionnelle se produit toujours de manière brutale et donc par propagation instable de fissure | |. Ces essais ne fournissent aucun renseignement sur la phase d'évolution stable éventuelle et sur la taille critique du défaut atteinte au moment de la rupture.

La détermination expérimentale de la courbe d'évolution du critère en fonction de la taille du défaut nécessite un équipement permettant de contrôler la propagation de la fissure. L'utilisation d'une presse asservie en déplacement, par rapport à l'ouverture de fissure, doit permettre de définir, à partir d'une éprouvette préentaillée, la courbe $S = S(P)$ par une propagation contrôlée du défaut. La connaissance des courbes $K_1 = K_1(P, S)$ permet alors, au moyen de la relation (1.9), de définir, pour chaque valeur de P , la valeur du taux de restitution d'énergie G et d'accéder ainsi à la représentation du critère de propagation en fonction de la surface du défaut.

1-4 BUT ET PRÉSENTATION DE LA THÈSE

Dans l'optique du dépouillement des essais expérimentaux, la détermination des courbes $K_1 = K_1(P, S)$ constitue l'objet de ce présent travail.

L'étude proposée se rapporte aux essais brésiliens sur disque et sur anneau et correspond à la détermination du facteur d'intensité de contrainte K_1 en tête de fissure pour les cas suivants :

- a) disque soumis à l'action de deux charges concentrées P diamétralement opposées et comportant une fissure centrale de longueur initiale variable dans le plan de chargement,
- b) anneau soumis à l'action de deux charges concentrées P diamétralement opposées et comportant deux fissures symétriques de longueur initiale variable issues du rayon intérieur dans le plan de chargement.

Trois méthodes de résolution sont envisagées afin d'établir la comparaison entre les précisions obtenues eu égard à la difficulté de mise en place de chacune d'elles. Ce sont :

- i) Deux méthodes d'étude dans le plan complexe basées sur la détermination des potentiels complexes | 13 | relatifs à chaque configuration, à savoir :
 - a) une méthode de superposition des états de contraintes, appelée *méthode de superposition*.
 - b) une méthode basée sur la résolution par transformation conforme du domaine initial, dénommée *méthode des transformations conformes*.

Dans les deux cas, la détermination de la solution analytique est établie à partir de la vérification des conditions aux frontières exprimées en termes de résultante.

- ii) Une méthode d'étude dans le plan réel basée sur la détermination du champ de déplacement, relatif à chaque domaine étudié, à partir des conditions aux limites imposées, en contrainte ou déplacement, sur la frontière : *méthode des discontinuités de déplacements.*

II - POTENTIELS COMPLEXES ; MÉTHODE DE SUPERPOSITION

2.1 PRESENTATION DE LA METHODE UTILISEE

Les équations fondamentales de l'élasticité linéaire plane exprimées dans le champ réel peuvent être résolues par l'intermédiaire de la fonction de contraintes d'Airy ψ . L'introduction du champ complexe défini par la variable $z = x + i y$ et sa conjuguée $\bar{z} = x - i y$ permet de montrer (théorème de Goursat) qu'il existe 2 fonctions analytiques $\phi(z)$ et $g(z)$ telles que $\psi(x,y) = \text{Re} [z \phi(z) + g(z)]$.

Les relations fondamentales de l'élasticité linéaire plane sont exprimées au moyen des potentiels complexes $\phi'(z)$ et $g''(z)$ [13] dont les valeurs, en tout point du domaine étudié, sont définies par intégrale dans le champ complexe le long du contour sur lequel les conditions aux limites sont connues.

2.1.1. Relations de Kolosov-Muskhelishvili

Dans le plan complexe défini par la variable $z = x + i y$ l'état de la matière, en tout point, s'exprime au moyen des fonctions $\phi'(z)$ et $g''(z)$.

a) Définition des contraintes

$$(21.1) \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \left[\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z}) \right] = 4 \text{Re} \left[\phi'(z) \right]$$

$$(21.2) \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i \sigma_{xy} = 2 \left[\bar{z} \phi''(z) + g''(z) \right]$$

b) Définition du vecteur déplacement $D = (u + iv)$

$$(21.3) \quad 2\mu (u + iv) = \chi \phi(z) - z \bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{g}'(\bar{z})$$

avec $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ E étant le module d'Young et ν le coefficient de Poisson

et $\chi = 3 - 4\nu$ en déformation plane

$\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ en contrainte plane.

c) Etant donné un arc C continu et rectifiable appartenant au domaine multiplement connexe D U ∂D , le choix du sens de parcours de C sera défini de telle façon que C appartenant à ∂D la progression dans le sens des abscisses curvilignes croissantes laisse la matière sur la gauche.

∂D représente la frontière du domaine D .

Le choix du sens de parcours est tel que si ∂D représente le contour extérieur fermé de D , il sera décrit dans le sens direct et inversement pour toute autre courbe frontière.

La résultante des actions de la partie droite sur la partie gauche d'un arc orienté (j, k) s'exprime par la relation :

$$(21.4) \quad \left[R_x + i R_y \right]_j^k = -i \left[\phi(z) + \bar{g}'(\bar{z}) + z \bar{\phi}'(\bar{z}) \right]_j^k$$

Le moment par rapport à l'origine 0 des mêmes actions sur l'arc précité est donné par :

$$(21.5) \quad M = R_e \left[g(z) - z g'(z) - z\bar{z} \phi'(z) \right]_j^k$$

d) Potentiel complexe $\Omega'(z)$

Par combinaison de (21.1) et (21.2) nous tirons :

$$(\sigma_{yy} - i \sigma_{xy}) = \phi'(z) + \Omega'(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \bar{\phi}''(\bar{z})$$

dans laquelle

$$(21.6) \quad \Omega'(z) = \bar{\phi}'(z) + z \bar{\phi}''(z) + \bar{g}''(z)$$

Le potentiel complexe $\Omega'(z)$ est une combinaison des potentiels $\phi'(z)$ et $\bar{g}''(z)$ permettant d'exprimer les relations de bases précédentes sous une forme plus pratique dans le cas des domaines possédant un élément de contour superposé à l'axe des réels.

Les relations (21.2) à (21.5) s'écrivent en terme de $\Omega'(z)$:

$$(21.7) \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i \sigma_{xy} = -2 \left[\phi'(z) - \bar{\Omega}'(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \phi''(z) \right]$$

$$(21.8) \quad 2\mu (u + iv) = \chi \phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \bar{\phi}'(\bar{z})$$

$$(21.9) \quad \left[R_x + i R_y \right]_j^k = -i \left[\phi(z) + \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \bar{\phi}'(\bar{z}) \right]_j^k$$

$$(21.10) \quad M = R_e \left[\Omega(z) - \phi(z) - z\bar{z} \phi'(z) + \frac{z^3}{3} \phi''(z) \right]$$

2.1.2. Exposé de la méthode de superposition ; application à l'exemple du disque soumis à 2 charges centrées diamétralement opposées comportant des fissures dans le plan des charges.

Dans le cas général, la définition du problème à résoudre ne permet pas la détermination des potentiels complexes. L'état correspondant est décomposé en autant d'états intermédiaires simples que nécessaires pour lesquels les potentiels respectifs sont déterminés à partir des conditions aux limites connues sur le contour des domaines définis pour chacun d'eux.

La superposition de l'ensemble des m sous états de décomposition conduit à redéfinir l'état initial dont les potentiels complexes s'expriment par les relations :

$$\phi'(z) = \sum_{q=1}^m \phi'^q(z)$$

$$\Omega'(z) = \sum_{q=1}^m \Omega'^q(z)$$

Dans le cas du disque d'épaisseur b et de rayon R , soumis à 2 charges concentrées diamétralement opposées et comportant n fissures dans le plan des charges, la méthode de superposition nécessitera la définition de 3 sous-états.

a) un état A

qui correspond au domaine simplement connexe matérialisé par le contour circulaire du disque soumis à l'action de 2 charges concentrées linéaires d'intensité P/b dans le plan diamétral contenant $x'x$.

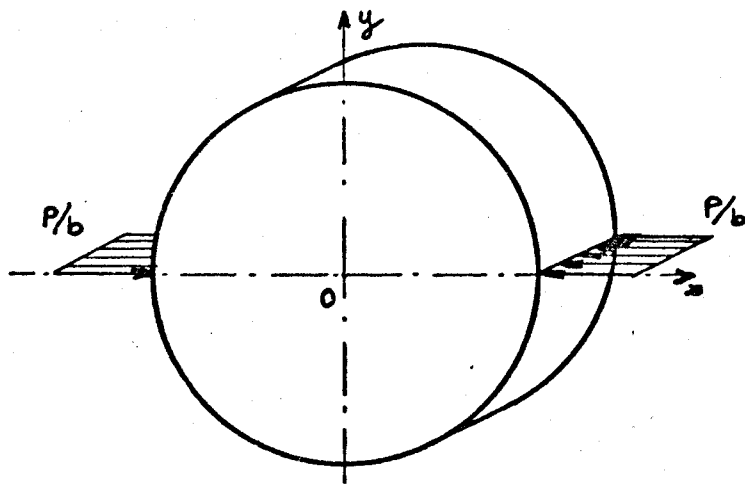


Figure 2 .1

dans le champ réel, la solution du problème en élasticité linéaire est donnée par Timoshenko et Goodier |

Le principal résultat est le calcul des contraintes en tout point de l'axe $x'x$.

$$\sigma_{yy}(x,0) = + \frac{P}{\pi br} \quad -R \leq x \leq R$$

$$\sigma_{xy}(x,0) = 0$$

b) un état B

relatif au domaine défini par le plan complexe infini comportant un nombre n de segments $[a_j, b_j]$ superposés aux fissures sur lesquels on impose les contraintes opposées à celles définies par l'état A.

$$\sigma_{yy}(x,0) = - \frac{P}{\pi br} \quad x \in [a_j, b_j] \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\sigma_{xy}(x,0) = 0$$

Les potentiels complexes étant déterminés en tout point du plan complexe, il existe le long du contour orienté identique à celui du disque une action de la partie droite sur la partie gauche définie en terme de résultante par la relation (21.9). La connaissance de ces résultantes est nécessaire pour l'expression des conditions aux limites des états superposés.

c) un état C

relatif au plan complexe limité par le contour du disque et comportant n segments de discontinuités superposés aux fissures suivant l'axe $x'x$.

Les conditions aux limites sur le contour généralisé imposées dans ce cas se divisent en 2 groupes par identité avec le problème initial :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= 0 \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad \text{sur chacun des segments de discontinuité.}$$

L'action du milieu extérieur sur le contour du disque exprimée en termes de résultante doit être telle que, pour un arc $[j, k]$ appartenant au cercle de rayon R , nous ayons la relation :

$$(21.11) \quad \left[R_x^c + i R_y^c \right]_j^k = \left[R_x + i R_y \right]_j^k - \left[R_x^{A+B} + i R_y^{A+B} \right]_j^k$$

dans laquelle :

$\left[R_x^c + i R_y^c \right]$ représente la résultante complexe à imposer dans l'état C.

$\left[R_x + i R_y \right]$ la résultante des forces extérieures effectivement appliquée dans le problème

$\left[R_x^{A+B} + i R_y^{A+B} \right]$ la résultante des forces induites par les états A et B.

Dans le cas du problème traité, les résultantes induites dans l'état A sont opposées aux forces effectivement appliquées dans l'état initial. En conséquence, la relation (21.11) s'écrira :

$$(21.12) \quad \left[R_x^c + i R_y^c \right]_j^k = - \left[R_x^B + i R_y^B \right]_j^k$$

2.1.3. Facteur d'intensité de contrainte

a) Définition

Sih et al [17] ont montré que les facteurs d'intensité de contraintes K_1 de traction et K_2 de cisaillement sont liés par la relation

$$K_1 - i K_2 = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow b_j} \left[\sqrt{z - b_j} \phi'(z) \right]$$

Dans le cas du disque soumis à l'action de 2 forces concentrées diamétralement opposées suivant l'axe des réels, la double symétrie du problème induit que $K_2 = 0$.

En conséquence, le facteur d'intensité de contraintes en mode I ou de traction K_1 sera donné par :

$$(21.13) \quad K_1 = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow b_j} \left[\sqrt{z - b_j} \phi'(z) \right]$$

b_j représentant l'abscisse de la tête de fissure.

Il est remarquable que seul le potentiel $\phi'(z)$ intervienne dans la relation de définition de K_1 et, par conséquent, $\phi'^A(z)$, $\phi'^B(z)$ et $\phi'^C(z)$.

b) Incidence de l'état A dans le calcul de K_1

La définition de l'état A correspond à un cas particulier du problème étudié par Milne-Thomson | par lequel l'expression du potentiel complexe $\phi'^A(z)$ s'écrit :

$$\phi'^A(z) = \frac{P}{\pi b} \left[\frac{1}{z+R} - \frac{1}{z-R} - \frac{1}{R} \right]$$

Il est facile de voir que la limite lorsque z tend vers b_j de l'expression $\sqrt{z - b_j} \phi'^A(z)$ est nulle quel que soit z .

En conséquence, la définition du facteur d'intensité de contrainte s'écrit :

$$(21.14) \quad K_1 = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow b_j} \left[\sqrt{z - b_j} (\phi'^B(z) + \phi'^C(z)) \right]$$

2.2 CAS DU DISQUE COMPORTANT UNE FISSURE CENTRALE

2.2.1. Définition du problème

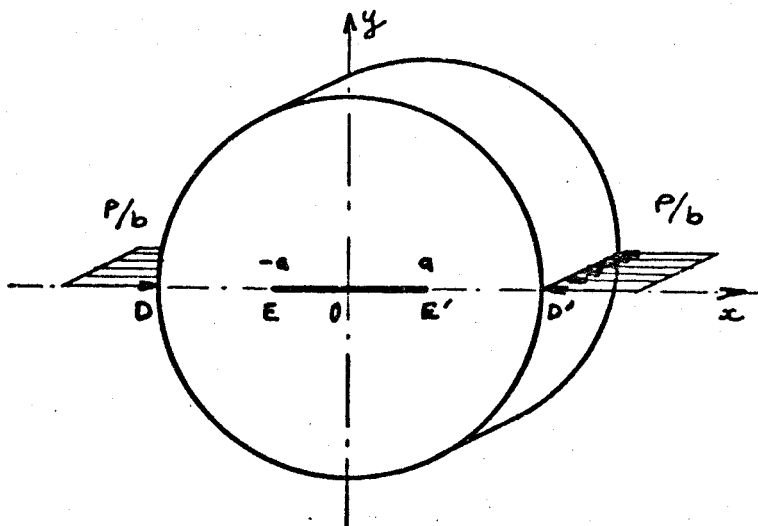


Figure 22.1

Un disque d'épaisseur b et de rayon r est soumis, dans le plan $(O/\vec{x}, \vec{y})$ à l'action de 2 charges concentrées linéaires P/b diamétralement opposées.

Il comporte une fissure centrale de longueur $2a$ soumise à un état de contraintes nulles sur les lèvres.

L'inconnue recherchée est le facteur d'intensité de contraintes K_1 en mode I de traction aux points E et E' têtes de la fissure.

2.2.2. Etude de l'état B

La définition de l'état B se réduit dans le cas du problème étudié au plan complexe comportant un segment de discontinuité de longueur $2a$ appartenant à l'axe des réels et centré par rapport à l'origine 0.

Les contraintes imposées sur le segment $[-a, +a]$ sont telles que :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= -\frac{P}{\pi b R} \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} -a \leq x \leq a$$

De plus, un certain nombre d'hypothèses précisent les conditions aux limites :

- . les forces de pesanteur sont négligées,
- . les contraintes appliquées sont nulles à l'infini,
- . les déplacements sont nuls à l'infini
- . la déformée de tout contour fermé γ appartenant au domaine est continue.

2.2.2.1. Définition des contraintes dans le champ complexe

Le sens de parcours du segment de discontinuité ou coupure $[-a, +a]$ est choisi comme étant celui de l'axe $x'x$. Cette détermination divise le plan complexe en 2 régions dénommées gauche (G) pour $y > 0$, et droite (D) pour $y < 0$.

Soit $M(x,0)$ un point de la coupure et soit P un point du plan complexe appartenant à la région G (respectivement D). On désigne par $\sigma_{yy}^G(x, 0)$ et $\sigma_{xy}^G(x, 0)$ les composantes du vecteur contrainte en M lorsqu'un déplacement virtuel tend à déplacer P vers le bord de la coupure (respectivement $\sigma_{yy}^D(x, 0)$ et $\sigma_{xy}^D(x, 0)$).

La combinaison des relations (21.1) et (21.7) établit :

$$(22.1) \quad \sigma_{yy} - i \sigma_{xy} = \phi'(z) + \Omega'(\bar{z}) + 2 i y \phi''(z)$$

Cette relation s'écrit si P est un point du plan tendant vers M à gauche ou à droite :

$$(22.2) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{yy}^G - i \sigma_{xy}^G &= \phi'^G(x) + \Omega'^D(x) \\ \sigma_{yy}^D - i \sigma_{xy}^D &= \phi'^D(x) + \Omega'^G(x) \end{aligned} \right\} - a \leq x \leq a$$

Les conditions de chargement sur la coupure étant :

$$\sigma_{xy}^G = \sigma_{xy}^D = 0$$

$$\sigma_{yy}^G = \sigma_{yy}^D = -\frac{P}{\pi b R}$$

Les relations (22.2) et (22.3) deviennent par combinaison :

$$(22.4) \quad 2\sigma_{yy}^G = \left[\phi'^G(x) + \Omega'^G(x) \right] + \left[\phi'^D(x) + \Omega'^D(x) \right]$$

$$(22.5) \quad 0 = \left[\phi'^G(x) - \Omega'^G(x) \right] - \left[\phi'^D(x) - \Omega'^D(x) \right]$$

2.2.2.2. Définition des potentiels complexes

a) Etude de la relation (22.5)

La relation (22.5) est du type :

$$F^G(x) - F^D(x) = f(x)$$

identique à la première formule de Plemelj.

La solution générale de cette équation est :

$$(22.6) \quad F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{[-a,+a]} \frac{f(x) dx}{x-z} + P_n(z) + \sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(z-a_j)^i}$$

dans laquelle $P_n(z)$ est un polynôme d'ordre n .

Pour l'état B, les conditions particulières sont les suivantes :

(i) $f(x) = 0$ induisant que le 1er terme du membre de droite de (22.6) est nul.

(ii) Les contraintes appliquées sont nulles à l'infini.

Les relations (21.1), (21.2) et (21.6) impliquent lorsque z tend vers l'infini, que $\phi'(z) = \Omega'(z) = 0$.

En conséquence, le polynôme $P_n(z)$ caractéristique du comportement de $F(z)$ à l'infini se réduit à une constante nulle.

(iii) Aucun point du plan complexe n'est le point d'application de charges concentrées.

En conséquence, le terme $\sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(z-a_j)^i}$ est également nul dans l'état B.

Dans ces conditions, (22.6) s'écrit :

$$F(z) = 0, \text{ soit :}$$

$$(22.7) \quad \phi'(z) = \Omega'(z)$$

b) Etude de la relation (22.4)

Cette relation est identique à une équation non homogène de Hilbert $G^G(x) - c G^D(x) = g(x)$ dont la solution est | |

$$(22.8) \quad G(z) = \frac{\chi(z)}{2i\pi} \int_{[-a,+a]} \frac{g(x) dx}{\chi^G(x)(x-z)} + \chi(z) P_m(z)$$

dans laquelle $\chi(z)$ représente la fonction de Plemelj, solution de l'équation homogène de Hilbert et $P_m(z)$ un polynôme d'ordre m .

Dans le cas du problème, la fonction $\chi(z)$ s'écrit :

(22.9)
$$\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

$\chi(z)$ est une fonction multiforme dont on déterminera une branche uniforme telle que :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \chi(z) = 1$$

Pour l'état B, $g(x) = 2 \sigma_{yy}^G(x, 0)$, terme constant sur $[-a, +a]$

Le premier terme du membre de droite de la relation (22.8) fait apparaître l'intégrale

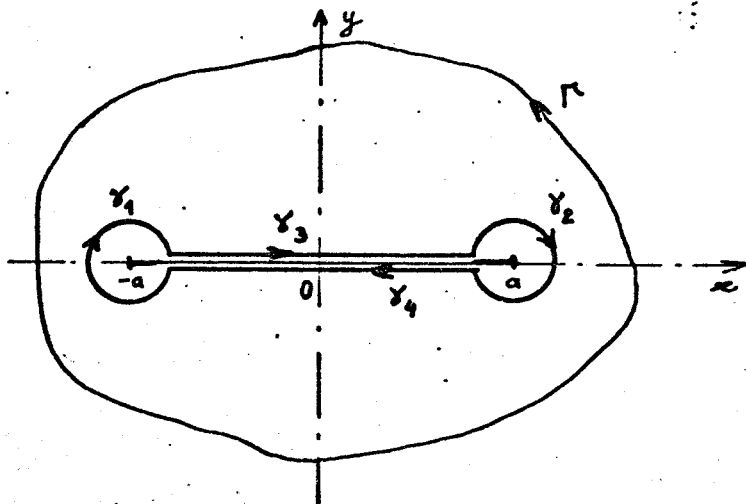
$$\int_{[-a, +a]} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)}$$

Sa détermination est réalisée par le calcul, le long du contour fermé $\gamma^- + \gamma^+$ représenté à la figure 22.2 de l'intégrale associée

$$I = \int_{\gamma^- + \gamma^+} \frac{du}{\chi(u)(u-z)}$$

avec $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

γ_1 et γ_2 étant deux arcs de cercles de centres E et E' et de rayons ϵ_1 et ϵ_2 .



z étant pôle d'ordre 1 de la fonction intégrée le théorème des résidus nous donne la valeur de l'intégrale à condition que z soit à l'intérieur du domaine :

$$I = \frac{2i\pi}{\chi(z)}$$

Le lemme de Jordan appliqué aux intégrales prises sur les contours γ_1 et γ_2 montrent que ces intégrales tendent vers 0 lorsque ϵ_1 (respectivement ϵ_2) tend vers 0.

Figure 22.2

A la limite

$$I = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)} + \int_a^{-a} \frac{dx}{\chi^D(x)(x-z)} + \int_{\Gamma^+} \frac{du}{\chi^G(u)(u-z)}$$

relation $\chi^G(z)$ étant solution de l'équation homogène de Hilbert, vérifie la relation $\chi^G(x) - C \chi^D(x) = 0$, soit puisque $C = -1$ dans le cas du problème :

$$\chi^G(x) = -\chi^D(x)$$

En conséquence

$$I = 2 \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)} + \int_{\Gamma^+} \frac{du}{\chi^G(u)(u-z)}$$

Le calcul de l'intégrale $\int_{\Gamma^+} \frac{du}{\chi^G(u)(u-z)}$ pour laquelle le lemme

de Jordan ne s'applique pas lorsque z tend vers l'infini, est effectué en posant le changement de variable $y = \frac{1}{u}$. La fonction présentant un pôle d'ordre 2 à l'origine, le théorème des résidus exprime la valeur de l'intégrale :

$$\int_{\Gamma^+} \frac{du}{\chi^G(u)(u-z)} = 2 i \pi z$$

En définitive :

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)} = i \pi \left(\frac{1}{\chi(z)} - z \right)$$

L'expression de (22.8) s'écrit alors

$$G(z) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] + \frac{P_m(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

d'où nous déduisons que le terme $\frac{P_m(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}}$ traduit le comportement de $G(z)$ lorsque z tend vers l'infini.

Les contraintes à l'infini étant nulles et $\chi(z)$ étant de l'ordre de $\frac{1}{z}$ à l'infini, $P_m(z)$ ne peut que se réduire à une constante α .

$\chi(z) P_m(z) \sim \frac{\alpha}{z}$ lorsque z tend vers l'infini représente la résultante des forces appliquées sur le contour intérieur.

Les actions sur les deux bords de la coupure étant opposées, la résultante des forces appliquées sur le contour intérieur est nulle et, en conséquence :

$$\frac{P_m(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} = 0$$

En regroupant les résultats précédents, l'expression finale des potentiels complexes de l'état B est :

$$(22.10) \quad \phi'^B(z) = \Omega'^B(z) = \frac{-P}{2\pi bR} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right)$$

2.2.2.3. Expressions des résultantes appliquées sur le contour circulaire de rayon R.

a) Détermination d'une branche uniforme de $\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}$

La détermination choisie pour la fonction est telle que :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \chi(z) = 1$$

Considérons le plan complexe pourvu de la coupure $[-a, +a]$ et introduisons les coordonnées polaires dont la définition correspond à la figure 22.3.

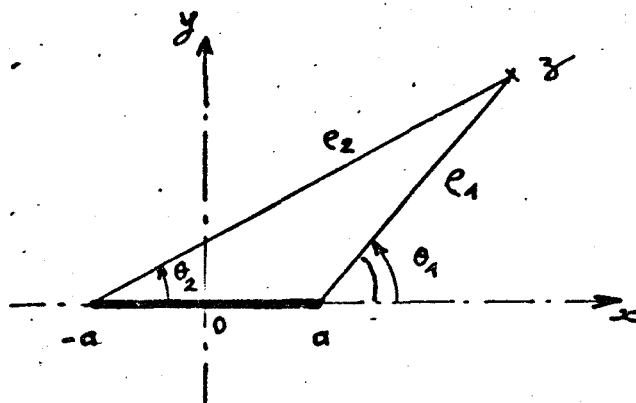


Figure 22.3

La branche uniforme retenue pour $\chi(z)$ s'exprime alors :

$$(22.11) \quad \chi(z) = \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} e^{-\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2)}$$

b) Détermination des résultantes

Soit j, k un arc orienté dans le sens direct du repère appartenant au contour. L'action de la partie droite sur la partie gauche, définie en terme de résultante, s'écrit en fonction de (22.9) :

$$\left[R_y + i R_x \right]_j^k = - \left[\overline{\phi(z)} \right]_j^k - \left[\overline{\Omega(z)} \right]_j^k + 2i \left[y \phi'(z) \right]_j^k$$

Pour l'état B les relations (22.7) d'une part et (22.10) d'autre part, montrent que les coefficients des potentiels complexes sont réels, ce qui induit :

$$\left[R_y^B + i R_x^B \right]_j^k = -2 R_e \left[\phi^B(z) \right]_j^k + 2 i \left[y \phi'^B(z) \right]_j^k$$

dans laquelle :

$$\phi^B(z) = \frac{-P}{2 \pi b R} (z - \sqrt{z^2 - a^2})$$

Afin de faciliter la programmation informatique, l'expression de la résultante est exprimée en coordonnées polaires au moyen des variables fixées par la figure 22.4.

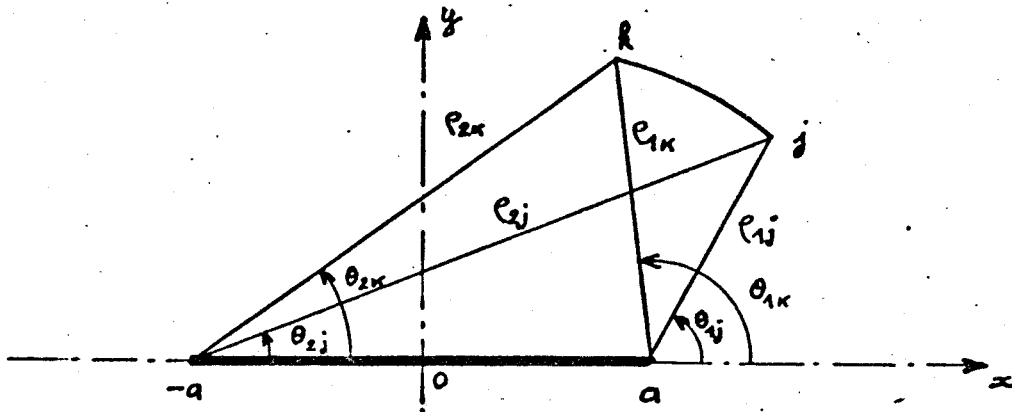


Figure 22.4

La branche uniforme de $\chi(z)$ ayant été définie précédemment, il s'en suit que :

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} e^{i \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires de l'expression de la résultante nous obtenons, en posant $C = \frac{P}{2 \pi b R}$

$$(22.12) \left[R_y^B \right]_j^k = 2C \left[x_j - x_k + (\rho_{1k} \rho_{2k})^{1/2} \cos\left(\frac{\theta_{1k} + \theta_{2k}}{2}\right) - (\rho_{1j} \rho_{2j})^{1/2} \cos\left(\frac{\theta_{1j} + \theta_{2j}}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{y_k \rho_k}{(\rho_{1k} \rho_{2k})^{1/2}} \sin\left[\theta_k - \frac{\theta_{1k} + \theta_{2k}}{2}\right] - \frac{y_j \rho_j}{(\rho_{1j} \rho_{2j})^{1/2}} \sin\left[\theta_j - \frac{\theta_{1j} + \theta_{2j}}{2}\right] \right]$$

$$(22.13) \quad \begin{bmatrix} R^B \\ R^x \end{bmatrix}_j^k = 2C \begin{bmatrix} y_k - y_j + \frac{y_j \rho_j}{(\rho_{1j} \rho_{2j})^{1/2}} \cos \left[\theta_j - \frac{\theta_{1j} + \theta_{2j}}{2} \right] \\ - \frac{y_k \rho_k}{(\rho_{1k} \rho_{2k})^{1/2}} \cos \left[\theta_k - \frac{\theta_{1k} + \theta_{2k}}{2} \right] \end{bmatrix}$$

2.2.3. Etude de l'état C

a) Forme générale des potentiels

En accord avec la relation (21.11), la définition de l'état C est la suivante :

Le plan complexe limité par le cercle de rayon R pourvu d'une coupure $[-a, +a]$ sur laquelle on impose un champ de contraintes nulles, supportant sur son contour extérieur un ensemble de charges opposées à celles résultant des états A et B.

Les potentiels $\phi'(z)$ et $\Omega'(z)$ doivent donc vérifier la relation intégrale issue de (21.9) sur tout arc du contour extérieur :

$$-\begin{bmatrix} R^B \\ R^y + i R^x \end{bmatrix}_j^k = - \int_j^k \phi'(\bar{z}) dz - \int_j^k \bar{\Omega}'(z) dz + 2i \left[y \phi'(z) \right]_j^k$$

Les potentiels $\phi'(z)$ et $\Omega'(z)$ sont recherchés au moyen d'un développement en série sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi'(z) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n = \phi'_1(z) + \phi'_2(z) \\ \Omega'(z) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^n = \Omega'_1(z) + \Omega'_2(z) \end{aligned}$$

expressions dans lesquelles $\phi'_1(z)$ et $\Omega'_1(z)$ sont relatifs à la présence de la coupure $[-a, +a]$, alors que $\phi'_2(z)$ et $\Omega'_2(z)$ se rapportent à la limite circulaire.

Les hypothèses relatives :

- (i) à la double symétrie du problème,
- (ii) à la continuité du vecteur déplacement D le long de toute courbe fermée appartenant au domaine,
- (iii) aux conditions aux limites imposées sur l'axe $x'x$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = 0 \quad - R \leq x \leq R$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = 0 \quad - a \leq x \leq a$$

imposent aux potentiels les expressions suivantes :

$$(22.14) \quad \phi_1^C(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{2n-1}}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{2n-2}$$

$$(22.15) \quad \Omega_1^C(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{2n-1}}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{2n-2}$$

α_n et β_n étant des constantes réelles.

Les coefficients inconnus α_n et β_n sont déterminés par la méthode de fixation des conditions aux limites sur le contour circulaire.

Si N est le nombre de terme des séries retenu, N arcs $|j, k|$ sont nécessaires à la résolution du système d'équations linéaires défini par la condition :

$$\left[R_y^C + i R_x^C \right]_j^k = - \left[R_y^B + i R_x^B \right]_j^k$$

b) Expression de la résultante des forces extérieures sur tout arc du contour.

En posant $\phi_1^C(z) = \phi_1^C(z) + \phi_2^C(z)$

$$\Omega_1^C(z) = \phi_1^C(z) - \phi_2^C(z)$$

la relation (21.9) s'écrit :

$$(22.16) \quad \left[R_y + i R_x \right]_j^k = - 2 \operatorname{Re} \left[\phi_1^C(z) \right]_j^k + 2i \operatorname{Im} \left[\phi_2^C(z) \right]_j^k + 2i \left[y \phi'(z) \right]_j^k$$

Le calcul du terme $\operatorname{Re} \left[\phi_1^C(z) \right]_j^k$ dans lequel

$$\left[\phi_1^C(z) \right]_j^k = \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_j^k \frac{z^{2n-1}}{\sqrt{z^2 - a^2}} dz \quad \text{est effectué en posant}$$

le changement de variable $u = \sqrt{z^2 - a^2}$ permettant d'aboutir à l'expression

$$2 \operatorname{Re} \left[\phi_1^C(z) \right]_j^k = 2 \sum_{n=1}^N \alpha_n \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{a^{2(n-1-p)}}{2^{p+1}} \operatorname{Re} \left[(z^2 - a^2)^{\frac{2p+1}{2}} \right]_j^k$$

dont l'explicitation en coordonnées polaire s'écrit :

$$(22.17) \quad 2 \operatorname{Re} \left[\phi_1^C(z) \right]_j^k = 2 \sum_{n=1}^N \alpha_n \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{a^{2(n-1-p)}}{2^{p+1}} (\rho_1 \rho_2)^{\frac{2p+1}{2}} \cos \left[(2p+1) \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right]_j^k$$

Le calcul des deux derniers termes de (22.16) étant effectué en coordonnées polaires, l'expression générale de la résultante traduite par ces composantes réelles et imaginaires s'écrit :

$$(22.18) \quad \left[R_y \right]_j^k = -2 \sum_{n=1}^N \alpha_n \left[\begin{array}{l} \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{a^{2(n-1-p)}}{2^{p+1}} (\rho_1 \rho_2)^{\frac{2p+1}{2}} \cos \left[(2p+1) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right] \\ + \rho \sin \theta \frac{\rho^{2n-1}}{(\rho_1 \rho_2)^{1/2}} \sin \left[(2n-1) \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] \\ + \beta_n \sin \theta \rho^{2n-2} \sin (2n-2) \theta \end{array} \right]_j^k$$

$$(22.19) \quad \left[R_x \right]_j^k = 2 \sum_{n=1}^N \left[\begin{array}{l} \alpha_n \rho \sin \theta \frac{\rho^{2n-1}}{(\rho_1 \rho_2)^{1/2}} \cos \left[(2n-1) \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] \\ + \beta_n \left[\frac{\rho^{2n-1}}{2n-1} \sin (2n-1) \theta + \rho \sin \theta \rho^{2n-2} \cos (2n-2) \theta \right] \end{array} \right]_j^k$$

2.2.4. Expression du facteur d'intensité de contrainte K_1

Le facteur d'intensité de contrainte en mode I de traction K_1 est donné par la relation (21.14) qui s'exprime pour le problème traité par :

$$K_1 = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} \left[\sqrt{z-a} (\phi'^B(z) + \phi'^C(z)) \right]$$

à la limite, K_1 est défini par la relation

$$(22.20) \quad K_1 = 2\sqrt{2\pi} \left[\frac{P}{2\pi bR} \sqrt{\frac{a}{2}} + \sum_{n=1}^N \alpha_n \sqrt{\frac{a}{2}} a^{2n-2} \right]$$

Conjointement à K_1 , le facteur de forme Y est défini par la relation :

$$Y = \frac{K_1}{\frac{P}{bR} \sqrt{\frac{a}{\pi}}}$$

dont l'expression déduite de (22.20) s'écrit :

$$(22.21) \quad Y = 1 + \frac{2\pi bR}{p} \sum_{n=1}^N \alpha_n a^{2n-2}$$

2.2.5. Application numérique

Le traitement informatique du problème est effectué pour les données suivantes :

Rayon du disque = $R = 1$

$b = 1$

$P = 1$

La rapidité de convergence a été étudiée en choisissant deux valeurs de discrétisation du contour de calcul :

$N = 5$ et $N = 10$

Les résultats obtenus, au moyen du programme de calcul figurant à l'annexe 1, sont exposés dans le tableau 2.1.

$\frac{a}{R}$	N	Y	N	Y
0,1		1,01500		1,01500
0,2		1,06004		1,06004
0,3		1,13555		1,13555
0,4	5	1,24313	10	1,24313
0,5		1,38722		1,38723
0,6		1,57782		1,57825
0,7		1,83404		1,84030
0,8		2,17961		

Tableau 2.1

La courbe représentative du facteur de forme Y en fonction du rapport $\frac{a}{R}$ est illustrée à la figure 22.5

La comparaison des valeurs de Y obtenues avec les deux discrétisations montre la bonne convergence de la série.

Les valeurs déterminées sont en parfait accord avec les résultats publiés par ISIDA | 9 |.

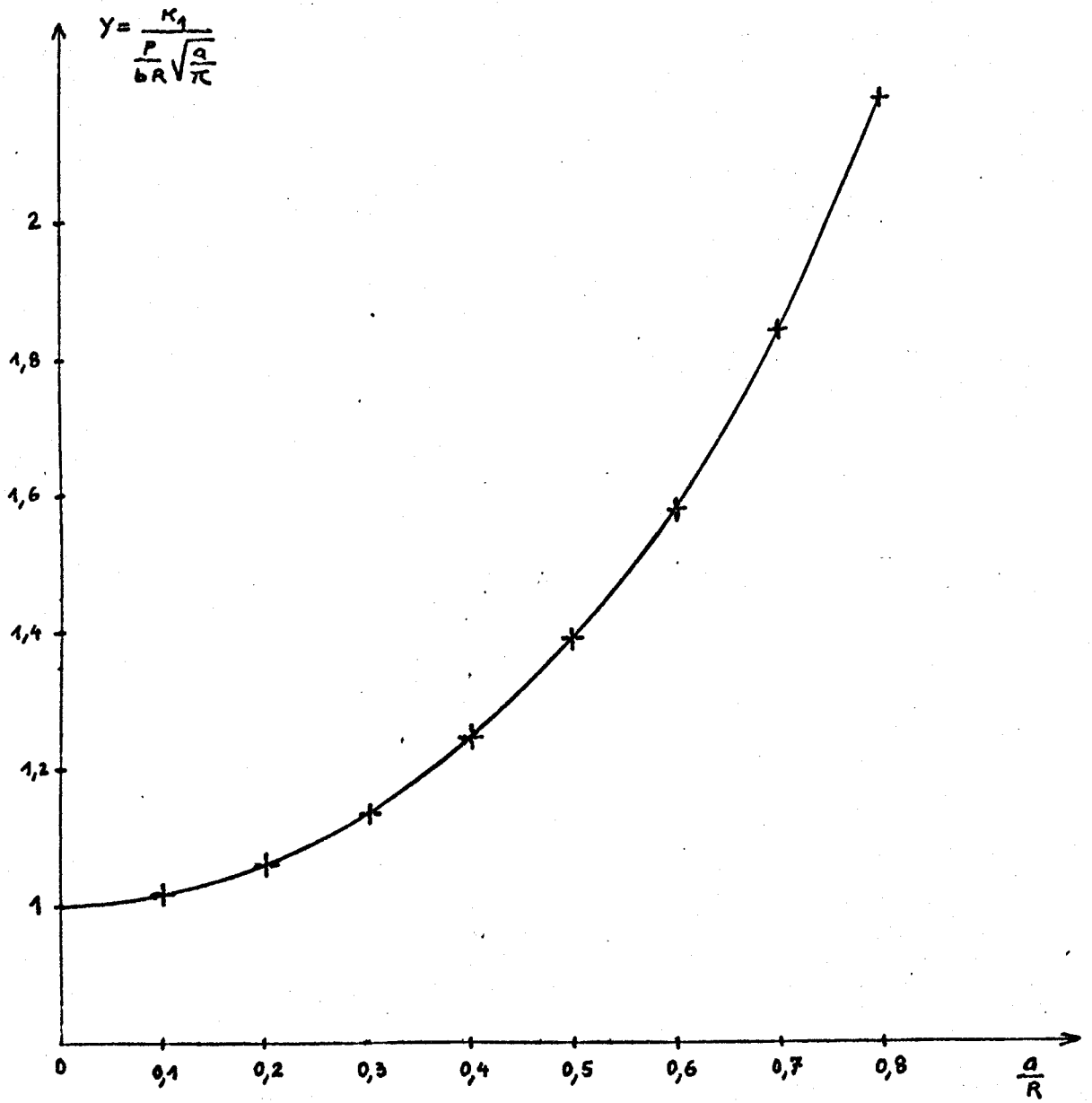


Figure 22.5

2.3. DISQUE COMPORTANT DES FISSURES DIAMETRALES SYMETRIQUES

2.3.1. Définition du problème

Dans la suite de l'étude, il sera envisagé uniquement l'application aux cas d'un nombre de fissures égal à 2 et 3.

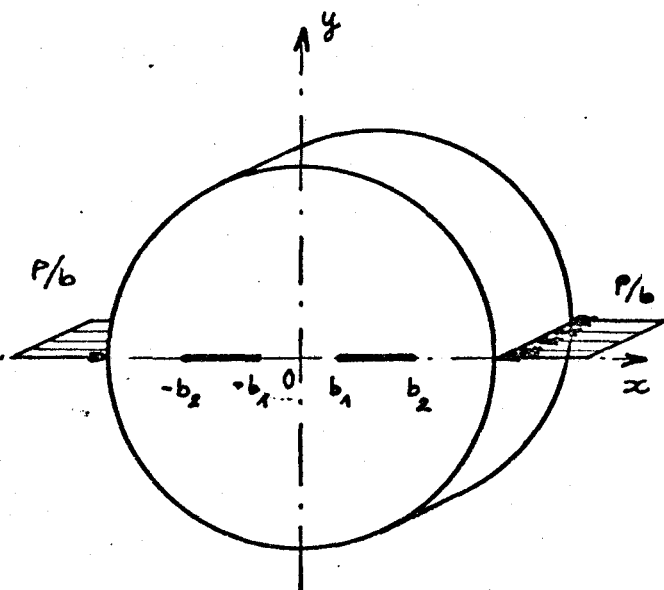


Figure 23.1

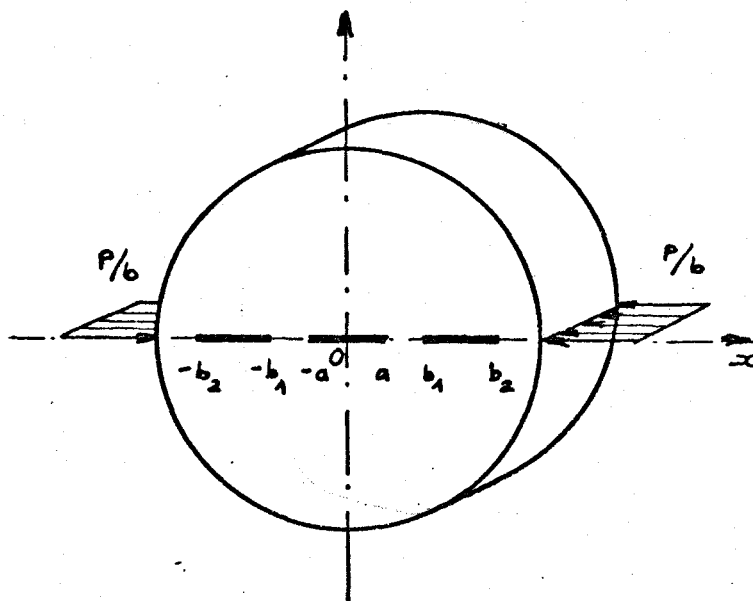


Figure 23.2

Le disque envisagé est de dimensions identiques à celui de l'étude précédente et supporte le même état de chargement.

Il comporte, dans le plan des charges, deux (resp. trois) fissures, symétriques par rapport à l'axe Oy soumises à un état de contraintes nulles.

L'étude envisage de rechercher l'effet d'une configuration de ce type sur la valeur respective des facteurs d'intensité de contrainte K_I en tête de fissure afin de mettre en évidence le sens probable et possible de propagation de fissure à partir de l'état donné.

La méthode de superposition conduit à utiliser les trois états A, B et C présentés précédemment, les caractéristiques de l'état A étant identiques au cas déjà traité.

2.3.2. Etude de l'Etat B

L'état B se définit comme étant le plan complexe coupé suivant les segments de discontinuité superposés aux fissures sur les lèvres desquelles sont appliquées les conditions suivantes :

$$\sigma_{yy}(x,0) = -\frac{P}{\pi br} \quad \text{opposées à celles résultant de l'état A.}$$

$$\sigma_{xy}(x,0) = 0$$

Les hypothèses générales définies lors de l'étude précédente sont conservées dans leur intégralité.

Le sens de parcours des segments de discontinuité est conservé comme étant celui de l'axe x' , définissant ainsi les parties gauche et droite du domaine de part et d'autre des coupures.

La vérification des conditions aux limites sur chaque segment de discontinuité exprimée à partir de la relation (22.1) implique aux potentiels complexes de vérifier les relations (22.4) et (22.5) soit :

$$(23.1) \quad 2 \sigma_{yy}^G(x) = \left[\phi'^G(x) + \Omega'^G(x) \right] + \left[\phi'^D(x) + \Omega'^D(x) \right]$$

$$(23.2) \quad 0 = \left[\phi'^G(x) - \Omega'^G(x) \right] - \left[\phi'^D(x) - \Omega'^D(x) \right]$$

2.3.2.1. Définition des potentiels complexes

L'équation (23.2) eu égard aux hypothèses et conditions aux limites fixées possède pour solution :

$$(23.3) \quad \phi'(z) = \Omega'(z)$$

La solution générale de l'équation (23.1) s'écrit de même :

$$(23.4) \quad \phi'(z) + \Omega'(z) = \frac{\chi(z)}{2i\pi} \int_{\text{coupures}} \frac{-\frac{2P}{\pi br} dx}{\chi^G(x)(x-z)} + \chi(z) P_m(z)$$

expression dans laquelle $\chi(z)$, la fonction de Plemelj, s'écrit :

$$(23.5) \quad \chi_2(z) = \frac{1}{\sqrt{(z^2 - b_1^2)(z^2 - b_2^2)}} \quad \text{dans le problème à 2 fissures.}$$

$$(23.6) \quad \chi_3(z) = \frac{1}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b_1^2)(z^2 - b_2^2)}} \quad \text{dans le problème à 3 fissures.}$$

et $P_m(z)$ est un polynôme d'ordre n .

a) Calcul de l'intégrale $\int_{\text{coupures}} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)}$

Pour chacun des problèmes étudiés, la valeur de l'intégrale est déterminée par le calcul, le long des contours précisés par les figures 23.3 et 23.4, de l'intégrale :

$$I = \int_{\gamma^-} \frac{du}{\chi(u)(u-z)} + \int_{\Gamma^+} \frac{du}{\chi(u)(u-z)}$$

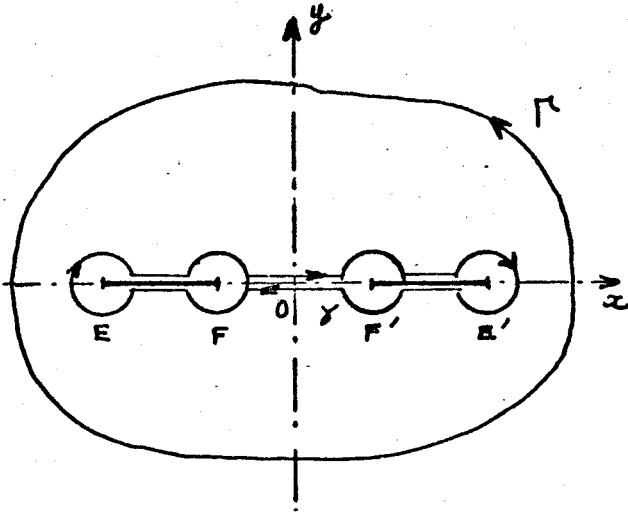


Figure 23.3

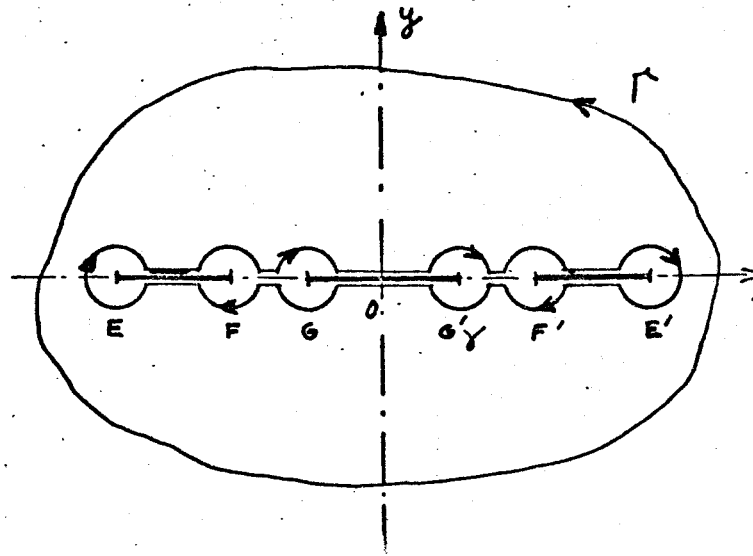


Figure 23.4

z étant pôle d'ordre 1 de la fonction intégrée, le théorème des résidus nous donne la valeur de l'intégrale à condition que z soit à l'intérieur du domaine défini par γ et Γ, soit :

$$I = \frac{2i\pi}{\chi(z)}$$

Le lemme de Jordan appliqué aux intégrales prises sur les contours circulaires entourant les points de ramification montre que ces intégrales tendent vers 0 lorsque leurs rayons tendent vers 0.

A la limite, sachant que $\chi^G(x) = -\chi^D(x)$ l'intégrale I s'exprime par la relation :

$$I = 2 \int_{-b_2}^{-b_1} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)} + 2 \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)} + \int_{\Gamma} \frac{du}{\chi(u)(u-z)} \left. \vphantom{I} \right\} \frac{2}{\text{fissures}}$$

$$\text{et } I = 2 \int_{-b_2}^{-b_1} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)} + 2 \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)} + 2 \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)} + \int_{\Gamma^+} \frac{du}{\chi(u)(u-z)} \left. \vphantom{I} \right\} \frac{3}{\text{fissures}}$$

Pour les deux problèmes envisagés, le calcul de l'intégrale

$$\oint_{\Gamma} \frac{du}{\chi(u)(u-z)} \text{ est effectué en posant le changement de variable } u = \frac{1}{X}$$

et en recherchant, par l'intermédiaire des développements limités au voisinage de $X = 0$, la valeur du résidu de la fonction en ce point.

L'expression de l'intégrale s'écrit alors pour chacun des problèmes :

$$\oint_{\Gamma} \frac{du}{\chi(u)(u-z)} = 2i\pi \left[z^2 - \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2) \right] \quad \underline{2 \text{ fissures.}}$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{du}{\chi(u)(u-z)} = 2i\pi \left[z^3 - \frac{1}{2} z (a^2 + b_1^2 + b_2^2) \right] \quad \underline{3 \text{ fissures.}}$$

Par application des résultats précédents, la valeur de l'intégrale

$$\int_{\text{coupures}} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)} \text{ est formulée par :}$$

$$\int_{\text{coupures}} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)} = i\pi \left[\frac{1}{\chi(z)} - z^2 + \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2) \right] \quad \underline{2 \text{ fissures.}}$$

$$\int_{\text{coupures}} \frac{dx}{\chi^G(x)(x-z)} = i\pi \left[\frac{1}{\chi(z)} - z^3 + \frac{1}{2} z (a^2 + b_1^2 + b_2^2) \right] \quad \underline{3 \text{ fissures.}}$$

Il en résulte, par combinaison des relations (23.3) et (23.4), que l'expression des potentiels complexes de l'état B s'écrit :

$$(23.7) \quad \phi^B(z) = \Omega^B(z) = -\frac{P}{2\pi br} \left[1 - \left[z^2 - \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2) - P_m(z) \right] \chi(z) \right] \quad \underline{2 \text{ fissures}}$$

$$(23.8) \quad \phi^B(z) = \Omega^B(z) = -\frac{P}{2\pi br} \left[1 - \left[z^3 - \frac{1}{2} z (a^2 + b_1^2 + b_2^2) - P_m(z) \right] \chi(z) \right] \quad \underline{3 \text{ fissures}}$$

Les polynômes $P_m(z)$ sont déterminés en exprimant l'uniformité du vecteur déplacement \vec{D} le long m de toute courbe fermée appartenant au domaine.

Toutefois, $\chi(z)$ étant de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$ (resp. $\frac{1}{z^3}$) à l'infini, la condition de contraintes nulles à l'infini impose à $^z P_m(z)$ un développement du type :

$$P_m(z) = \beta x + \gamma \quad \underline{2 \text{ fissures}}$$

$$P_m(z) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \underline{3 \text{ fissures}}$$

b) Uniformité du vecteur déplacement

Dans le champ complexe, le vecteur déplacement $\vec{D} = (\vec{u} + i\vec{v})$ est lié aux potentiels complexes par la relation (21.8) :

$$2\mu (u + iv) = \chi \phi(z) - \Omega(\bar{z}) - 2iy \bar{\phi}'(\bar{z})$$

On exprime la continuité de toute courbe fermée γ intérieure au domaine par la relation :

$$(23.9) \quad \int_{\gamma} \frac{dD}{dz} dz = 0.$$

γ étant prise, pour les problèmes traités, comme indiqué aux figures 23.5 et 23.6.

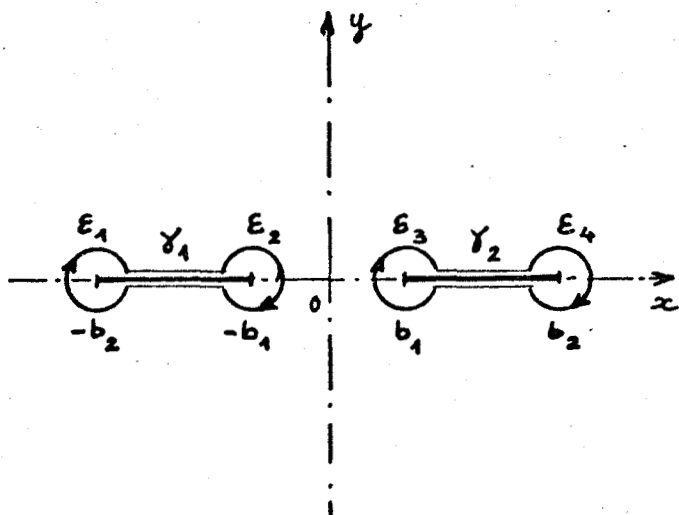


Figure 23.5

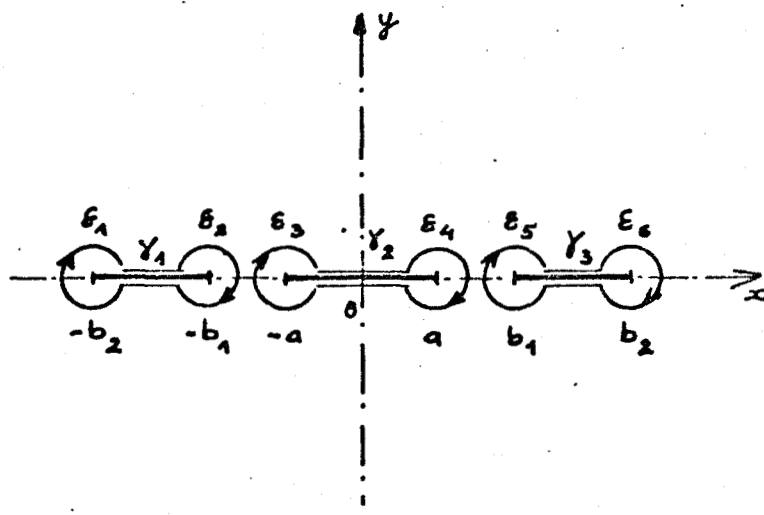


Figure 23.6

Le lemme de Jordan appliqué aux intégrales prises le long des parties circulaires des courbes γ entourant les points de ramification montre que leur valeur est nulle lorsque les rayons respectifs de ces secteurs tendent vers zéro.

A la limite et compte tenu de (23.3), la relation (23.9) s'écrit pour chaque courbe γ .

$$(23.10) \quad \left. \begin{aligned} \int_{-b_2}^{-b_1} [\phi'^G(x) - \phi'^D(x)] dx &= 0 \\ \int_{b_1}^{b_2} [\phi'^G(x) - \phi'^D(x)] dx &= 0 \end{aligned} \right\} \underline{2 \text{ fissures.}}$$

$$(23.11) \quad \left. \begin{aligned} \int_{-b_2}^{-b_1} [\phi',^G(x) - \phi',^D(x)] dx &= 0 \\ \int_{-a}^{+a} [\phi',^G(x) - \phi',^D(x)] dx &= 0 \\ \int_{b_1}^{b_2} [\phi',^G(x) - \phi',^D(x)] dx &= 0 \end{aligned} \right\} \underline{3 \text{ fissures}}$$

Le potentiel complexe $\phi'(z)$ est fonction de $\chi(z)$ dont il faudra déterminer, pour chaque problème, une branche uniforme.

. Cas du problème à 2 fissures

$$\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{(z^2 - b_1^2)(z^2 - b_2^2)}}$$

La branche uniforme est définie telle que :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \chi(z) = 1$$

soit :

$$\chi(z) = \pi \prod_{j=1}^4 \rho_j^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{2} \sum_{j=1}^4 \theta_j}$$

impliquant les valeurs suivantes à $\chi^G(x)$ sur chacune des coupures :

$$\chi^G(x) = \frac{i}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(x^2 - b_1^2)}} \quad -b_2 \leq x \leq -b_1$$

$$\chi^G(x) = \frac{-i}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(x^2 - b_1^2)}} \quad b_1 \leq x \leq b_2$$

$\chi(z)$ solution de l'équation homogène de Hilbert satisfait à la relation :

$$\chi^G(x) = -\chi^D(x)$$

$\phi'(z)$ étant défini par la relation (23.7) les équations (23.10) peuvent alors s'écrire :

$$(23.12) \quad i \int_{-b_2}^{-b_1} \left[\frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2) - x^2 + P_m(x) \right] \frac{dx}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(x^2 - b_1^2)}} = 0.$$

$$(23.13) \quad -i \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2) - x^2 + P_m(x) \right] \frac{dx}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(x^2 - b_1^2)}} = 0$$

dans lesquelles $P_m(x) = \beta x + \gamma$

En effectuant le changement de variable $X = -x$ dans (23.12), on ramène le calcul à une intégration sur la coupure (b_1, b_2) ce qui permet en posant les définitions suivantes :

$$I = \int_{b_1}^{b_2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(x^2 - b_1^2)}} ; J = \int_{b_1}^{b_2} \frac{x dx}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(x^2 - b_1^2)}} ; K = \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(x^2 - b_1^2)}}$$

d'exprimer (23.12) et (23.13) par un système de deux équations linéaires à deux inconnues (β et γ) :

$$\begin{cases} I + \beta J - \left[\frac{b_1^2 + b_2^2}{2} + \gamma \right] K = 0 \\ I - \beta J - \left[\frac{b_1^2 + b_2^2}{2} + \gamma \right] K = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système fournit la solution :

$$\beta = 0$$

$$\gamma = \frac{I}{K} - \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2)$$

Les expressions des intégrales I et K sont données par :

$$I = b_2 E(\lambda, q)$$

$$K = \frac{1}{b_2} F(\lambda, q)$$

E et F étant les intégrales elliptiques de définition :

$$E(\lambda, q) = \int_0^\lambda \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = \int_0^{\sin \lambda} \frac{\sqrt{1 - q^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$F(\lambda, q) = \int_0^\lambda \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\sin \lambda} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - q^2 x^2)}}$$

La valeur des paramètres λ et q associées au problème est :

$$\lambda = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad q = \frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_2} \quad \text{ce qui induit une expression du polynôme}$$

$P_m(z)$, telle que :

$$(23.14) \quad P_m(z) = b_2^2 \frac{E\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} - \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2)$$

Et, en conséquence, les potentiels complexes de l'état B dans le cas de 2 fissures s'écrivent :

$$(23.15) \quad \phi^{,B}(z) = \Omega^{,B}(z) = - \frac{P}{2\pi br} \left[1 - \left[z^2 - b_2^2 \frac{E\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \right] \frac{1}{\sqrt{(z^2 - b_1^2)(z^2 - b_2^2)}} \right]$$

Cas du problème à 3 fissures

$$\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b_1^2)(z^2 - b_2^2)}}$$

La branche uniforme est choisie telle que :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \chi(z) = 1$$

soit

$$\chi(x) = \frac{6}{\pi} \prod_{j=1}^3 \rho_j^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{2} \sum_{j=1}^3 \theta_j}$$

La valeur de $\chi^G(x)$ sur chacune des coupures est alors :

$$\chi^G(x) = \frac{-i}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(x^2 - a^2)(x^2 - b_1^2)}} \quad -b_2 \leq x \leq -b_1$$

$$\chi^G(x) = \frac{i}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(a^2 - x^2)(b_1^2 - x^2)}} \quad -a \leq x \leq a$$

$$\chi^G(x) = \frac{-i}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(x^2 - b_1^2)(x^2 - a^2)}} \quad b_1 \leq x \leq b_2$$

Soit :

$$\chi^G(x)_{[-b_2, -b_1]} = \chi^G(x)_{[b_1, b_2]} = -\chi^G(x)_{[-a, +a]} = \frac{-i}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(x^2 - a^2)(x^2 - b_1^2)}}$$

Comme pour l'étude relative à 2 fissures, les équations (23.11) s'écrivent alors en vertu du développement de $P_m(z)$ dans ce cas :

$$(23.16) \quad -i \int_{[a_j, b_j]} \left[-x^3 + \alpha x^2 + \left(\frac{a^2 + b_1^2 + b_2^2}{2} + \beta \right) x + \gamma \right] \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b_1^2)(b_2^2 - x^2)}} = 0$$

a_j et b_j prenant les valeurs des abscisses relatives aux trois segments parcourus dans le j sens positif défini.

En ramenant par le changement de variable $X = -x$ l'intégrale sur le segment $[b_1, b_2]$ à son expression sur $[-b_2, -b_1]$ et en posant :

$$I = \int_{-b_2}^{-b_1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b_1^2)(b_2^2 - x^2)}} \quad ; \quad J = \int_{-b_2}^{-b_1} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b_1^2)(b_2^2 - x^2)}}$$

$$K = \int_{-b_2}^{-b_1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b_1^2)(b_2^2 - x^2)}} \quad ; \quad L = \int_{-b_2}^{-b_1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b_1^2)(b_2^2 - x^2)}}$$

$$M = \int_{-a}^{+a} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b_1^2)(b_2^2 - x^2)}} \quad ; \quad N = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b_1^2)(b_2^2 - x^2)}}$$

l'ensemble des équations (23.16) se réduit au système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \alpha I + \beta J + \gamma K = L - \frac{1}{2} (a^2 + b_1^2 + b_2^2) J & (1) \\ \alpha I - \beta J + \gamma K = - \left[L - \frac{1}{2} (a^2 + b_1^2 + b_2^2) J \right] & (2) \\ \alpha M + \gamma N = 0 & (3) \end{cases}$$

La somme des équations (1) et (2) associée à l'équation (3) montrent que $\alpha = \gamma = 0$.

La différence (1) - (2) permet d'exprimer β sous la forme :

$$\beta = \frac{L}{J} - \frac{1}{2} (a^2 + b_1^2 + b_2^2)$$

Le calcul des intégrales L et J est conduit en posant le changement de variable $u = \sqrt{x^2 - a^2}$ et en définissant les bornes modifiées par :

$$l = \sqrt{b_1^2 - a^2}$$

$$m = \sqrt{b_2^2 - a^2}$$

Les valeurs des intégrales L et J sont alors données par :

$$J = -\frac{1}{m} F(\chi, q)$$

$$L = -m E(\chi, q) - \frac{a^2}{m} F(\chi, q)$$

dans lesquelles :

$F(\chi, q)$ et $E(\chi, q)$ représentent les intégrales elliptiques précédemment définies dont les paramètres sont dans le cas du problème :

$$\chi = \arcsin \frac{m}{m} \sqrt{\frac{m^2 - l^2}{m^2 - l^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$q = \frac{m^2 - l^2}{m} = \sqrt{\frac{b_2^2 - b_1^2}{b_2^2 - a^2}}$$

En conséquence

$$(23.17) \quad \beta = (b_2^2 - a^2) \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} + \frac{a^2 - b_1^2 - b_2^2}{2}$$

et l'expression des potentiels complexes s'écrit dans le cas de 3 fissures :

$$(23.18) \quad \phi^B(z) = \Omega^B(z) = -\frac{P}{2\pi br} \left[1 - \frac{z^3 - \left[(b_2^2 - a^2) \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} + a^2 \right] z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b_1^2)(z^2 - b_2^2)}} \right] \quad \underline{\underline{3 fissures}}$$

2.3.2.2. Définition des résultantes sur le contour circulaire de rayon R.

Pour tout arc orienté j, k appartenant au contour, l'action de la partie droite sur la partie gauche, définie en termes de résultantes, s'écrit (22.9) :

$$\left[R_y + i R_x \right]_j^k = - \left[\bar{\phi}(z) \right]_j^k - \left[\bar{\Omega}(z) \right]_j^k + 2i \left[y \phi'(z) \right]_j^k$$

Soit, puisque les coefficients de $\phi'(z)$ et donc $\Omega'(z)$ sont réels :

$$\left[R_y + i R_x \right]_j^k = -2 \operatorname{Re} \left[\phi(z) \right]_j^k + 2 i \left[y \phi'(z) \right]_j^k$$

Les potentiels $\phi'(z)$ et $\Omega'(z)$ sont définis par les relations (23.15) et (23.18)

$$\phi'(z) = \Omega'(z) = -\frac{P}{2\pi bR} \left[1 - \left[z^2 - b_2^2 \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} \right] \frac{1}{\sqrt{(z^2 - b_1^2)(z^2 - b_2^2)}} \right] \frac{2}{\text{fissures}}$$

$$\phi'(z) = \Omega'(z) = -\frac{P}{2\pi bR} \left[1 - \frac{z^3 - \left[(b^2 - a^2) \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} + a^2 \right] z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b_1^2)(z^2 - b_2^2)}} \right] \frac{3}{\text{fissures}}$$

Pour les deux problèmes, l'expression du terme $\operatorname{Re} [\phi(z)]$ impose le calcul d'intégrales de fractions irrationnelles dont la partie réelle sera déterminée, après introduction des coordonnées polaires (fig. 23.7 et 23.8), par intégration numérique au moyen de la méthode de Simpson.

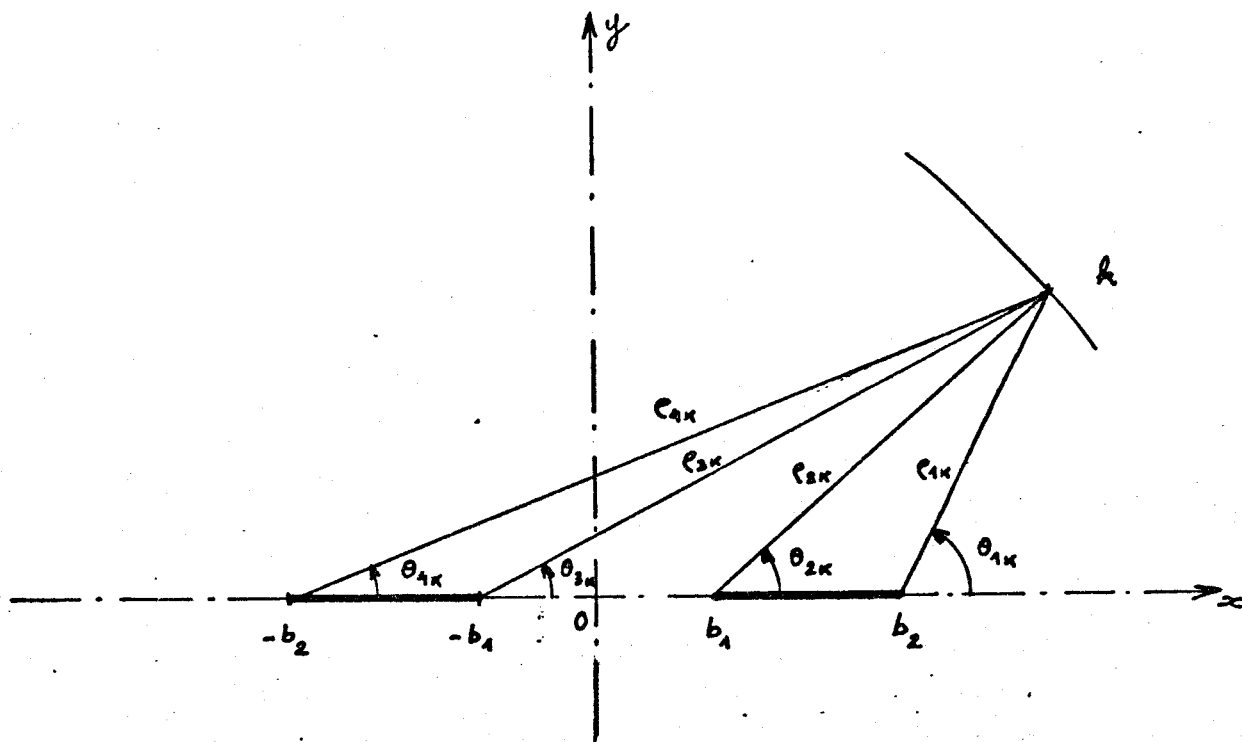


Figure 23.7 : 2 fissures

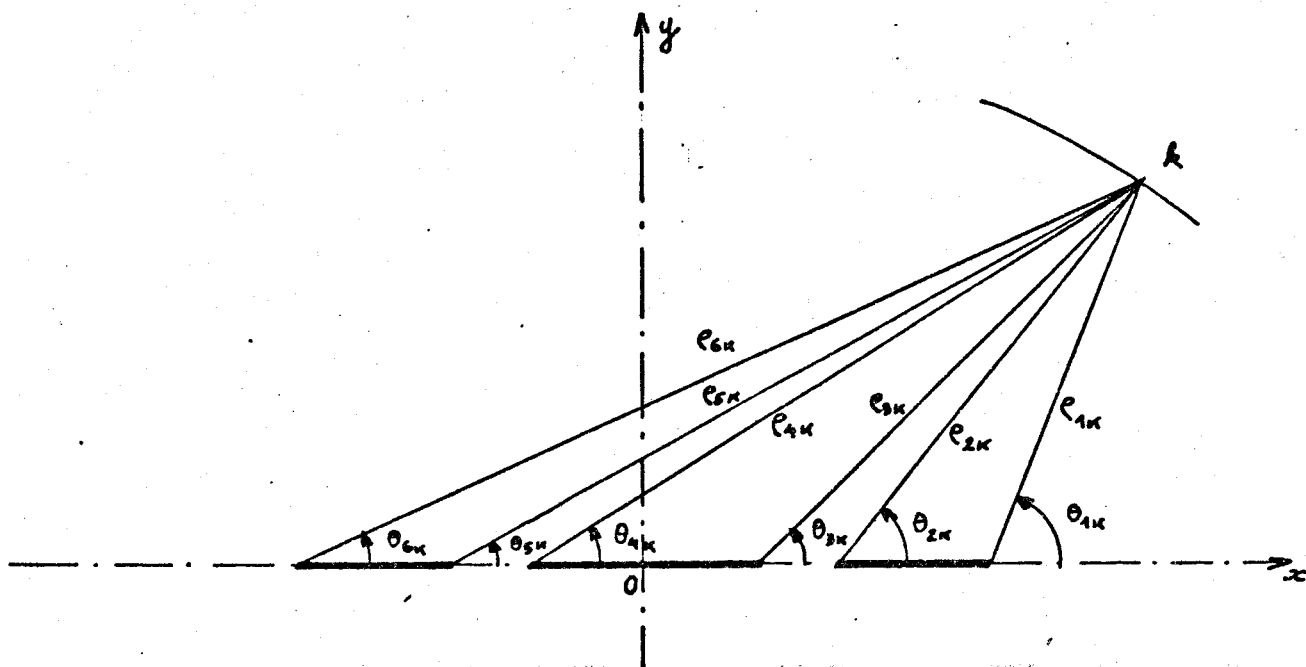


Figure 23.8 : 3 fissures.

Par soucis de clarification des expressions, on posera

$$(23.19) \quad \text{ANUM} (1, k) = \text{Re} \left[\int_k^{k+1} z^{1-1} \chi(z) dz \right]$$

$$(23.20) \quad \text{AR} (m, k) = \text{Re} \left[z_k^m \chi(z_k) \right] = \frac{\rho_k^m}{\prod_{j=1}^n \rho_{jk}^{1/2}} \cos \left[m\theta_k - \sum_{j=1}^n \frac{\theta_{jk}}{2} \right]$$

} 2 fissures : n = 4
} 3 fissures : n = 6

$$(23.21) \quad \text{AI} (m, k) = \text{Im} \left[z_k^m \chi(z_k) \right] = \frac{\rho_k^m}{\prod_{j=1}^n \rho_{jk}^{1/2}} \sin \left[m\theta_k - \sum_{j=1}^n \frac{\theta_{jk}}{2} \right]$$

Ce qui permet d'écrire les résultantes sous la forme :

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} R \\ y \end{matrix} \right]_k^{k+1} &= \frac{P}{\pi b R} \left[(x_{k+1} - x_k) \text{ANUM} (3, k) + b_2^2 \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} \text{ANUM} (1, k) \right] \\ &- \frac{P}{\pi b R} y_{k+1} \left[\text{AI}(2, k+1) - b_2^2 \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} \text{AI} (0, k+1) \right] \\ &+ \frac{P}{\pi b R} y_k \left[\text{AI}(2, k) - b_2^2 \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} \text{AI} (0, k) \right] \end{aligned}$$

} 2 fissures

$$\left[\begin{matrix} R \\ x \end{matrix} \right]_k^{k+1} = -\frac{P}{\pi b R} y_{k+1} \left[1 - AR(2, k+1) + b_2^2 \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} AR(0, k+1) \right] \\ + \frac{P}{\pi b R} y_k \left[1 - AR(2, k) + b_2^2 \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} AR(0, k) \right]$$

} 2 fissures

$$\left[\begin{matrix} R \\ y \end{matrix} \right]_k^{k+1} = \frac{P}{\pi b R} \left[(x_{k+1} - x_k) - ANUM(4, k) + \left[(b^2 - a^2) \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} + a^2 \right] ANUM(2, k) \right]$$

$$- \frac{P}{\pi b R} y_{k+1} \left[AI(3, k+1) - \left[(b^2 - a^2) \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} + a^2 \right] AI(1, k+1) \right]$$

$$+ \frac{P}{\pi b R} y_k \left[AI(3, k) - \left[(b^2 - a^2) \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} + a^2 \right] AI(1, k) \right]$$

} 3
fissures

$$\left[\begin{matrix} R \\ x \end{matrix} \right]_k^{k+1} = -\frac{P}{\pi b R} y_{k+1} \left[1 - AR(3, k+1) + \left[(b^2 - a^2) \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} + a^2 \right] AR(1, k+1) \right]$$

$$+ \frac{P}{\pi b R} y_k \left[1 - AR(3, k) + \left[(b^2 - a^2) \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} + a^2 \right] AR(1, k) \right]$$

2.3.3. Etude de l'état C

Pour chacun des cas traités dans le chapitre 2.3, la définition de l'état C prend en compte les domaines suivants :

le plan complexe limité au cercle de rayon R pourvu de 2 segments de discontinuité (resp. 3) superposés aux fissures,

les conditions aux limites associées à cet état sont les suivantes :

a) sur le contour extérieur des domaines est appliqué un ensemble de charges vérifiant la relation (21.11).

b) sur chacun des segments de discontinuité $[a_j, b_j]$ les contraintes appliquées sont telles que :

$$\sigma_{yy}(x, 0) = 0 \quad a_j \leq x \leq b_j$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = 0$$

Enfin, les hypothèses générales intervenant dans la définition du problème sont telles que :

c) la double symétrie, qui permet de conduire l'étude sur un quart de disque, impose sur chacun des axes du repère :

$$\sigma_{xy}(x, 0) = 0 \quad -R \leq x \leq R$$

$$\sigma_{yx}(0, y) = 0 \quad -R \leq y \leq R$$

qui, en terme de résultante, peuvent aussi s'exprimer par :

$$R_x^C = 0 \quad -R \leq x \leq R$$

$$R_y^C = 0 \quad -R \leq y \leq R$$

d) le vecteur déplacement \vec{D} est continu le long de toute courbe fermée appartenant au domaine.

2.3.3.1. Détermination des potentiels complexes

De manière analogue à l'étude du problème relatif à une fissure, les potentiels complexes sont recherchés sous la forme d'un développement en série, prenant en compte les discontinuités introduites par les fissures ainsi que la limite circulaire du domaine.

d'où :

$$(23.22) \quad \left. \begin{aligned} \phi^C(z) &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n}{\sqrt{(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)}} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n \\ \Omega^C(z) &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n}{\sqrt{(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)}} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n z^n \end{aligned} \right\} \quad \underline{2 \text{ fissures}}$$

$$(23.23) \quad \left. \begin{aligned} \phi^C(z) &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)}} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n \\ \Omega^C(z) &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)}} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n z^n \end{aligned} \right\} \quad \underline{3 \text{ fissures}}$$

a) Cas de 2 fissures

$$\text{soit } \phi'^C(z) = \phi'_1(z) + \phi'_2(z)$$

$$\Omega'^C(z) = \Omega'_1(z) + \Omega'_2(z)$$

La vérification des conditions aux limites impose des propriétés particulières aux coefficients et aux puissances des termes des séries.

- i) La double symétrie impose que les potentiels soient des fonctions paires.
 ii) La valeur des contraintes imposées le long de l'axe x'x impose aux coefficients les relations suivantes :

$$I_m (\alpha_n - \gamma_n) = 0$$

$$I_m (\alpha_n + \gamma_n) = 0$$

$$I_m (\beta_n + \delta_n) = 0$$

$$R_e (\alpha_n - \gamma_n) = 0$$

$$R_e (\beta_n + \delta_n) = 0$$

- iii) L'expression de la résultante des actions extérieures sur tout segment de l'axe y'y impose :

$$I_m (\alpha_n) = 0$$

$$I_m (\beta_n) = 0$$

En tenant compte des relations précédentes, l'expression des potentiels complexes s'écrit alors :

$$\phi'^C(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{2n-2}}{\sqrt{(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)}} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{2n-2}$$

(23.24)

$$\Omega'^C(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{2n-2}}{\sqrt{(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)}} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{2n-2}$$

α_n et β_n étant réelles.

b) Cas de 3 fissures

D'une manière identique au cas relatif à 2 fissures, il est facile de montrer que les potentiels complexes se définissent alors par les relations :

$$\phi'^C(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{2n-1}}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)}} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{2n-2}$$

(23.25)

$$\Omega'^C(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{2n-1}}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)}} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{2n-2}$$

α_n et β_n étant réelles.

c). Remarque

L'étude de la continuité du vecteur déplacement \vec{D} le long de courbes fermées γ superposées, à la limite, aux lèvres des coupures $[-b_2, -b_1]$ et $[b_1, b_2]$ impose aux constantes α_n de vérifier la condition supplémentaire :

$$(23.26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_{b_1}^{b_2} \frac{x^{2n-2} dx}{\sqrt{(x^2-b_1^2)(b_2^2-x^2)}} = 0 \quad \underline{2 \text{ fissures}}$$

$$(23.27) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_{b_1}^{b_2} \frac{x^{2n-1} dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b_1^2)(b_2^2-x^2)}} = 0 \quad \underline{3 \text{ fissures}}$$

2.3.3.2. Détermination de la résultante des forces extérieures sur tout arc du contour.

Les potentiels complexes définis par les relations (23.24) et (23.25) étant exprimés sous la forme :

$$\phi^C(z) = \phi'_1(z) + \phi'_2(z)$$

$$\Omega^C(z) = \phi'_1(z) - \phi'_2(z)$$

La relation (21.9) s'écrit :

$$(23.28) \quad \left[R_y + i R_x \right]_k^{k+1} = -2\text{Re} \left[\phi_1(z) \right]_k^{k+1} + 2i \text{Im} \left[\phi_2(z) \right]_k^{k+1} + 2i \left[y \phi'(z) \right]_k^{k+1}$$

expression dans laquelle le premier terme du membre de droite sera calculé par intégration numérique au moyen de la méthode de Simpson.

En vertu de l'expression de $\phi'_1(z)$, l'intégration porte sur des termes de type :

$$\frac{z^{2n-2} dz}{\sqrt{(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)}} \quad \text{ou} \quad \frac{z^{2n-1} dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)}}$$

selon le nombre de fissures. La valeur numérique de l'intégrale sera repérée dans les expressions générales, au moyen de la définition précédente (23.19).

Par souci de clarification de l'écriture, l'expression des termes faisant intervenir $\phi'(z)$ sera formulée en fonction des relations (23.20) et (23.21)

L'introduction des coordonnées polaires (figures 23.7 et 23.8), permet d'expliciter chacun des termes de la résultante des forces extérieures appliquée sur l'arc $|k, k+1|$ du contour circulaire.

Si N représente le nombre d'arcs choisis pour définir le contour extérieur du disque, la condition supplémentaire (23.26) ou (23.27) impose de retenir les $(N+1)$ premiers termes de la série relative à $\phi'_1(z)$.

L'expression des conditions aux limites sur le contour circulaire traduite par la relation (21.12) définit un système de $(2N+1)$ équations linéaires à $(2N+1)$ inconnues dont les coefficients dépendent de l'expression des résultantes définies par (23.28).

Ce sont :

$$(23.29) \quad \begin{bmatrix} R^C \\ x \end{bmatrix}_k^{k+1} = 2 \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n \rho (AR(2n-2, k+1) \sin \theta_{k+1} - AR(2n-2, k) \sin \theta_k) + \\ \sum_{n=1}^N \beta_n \left[\frac{\rho^{2n-1}}{2n-1} (\sin(2n-1)\theta_{k+1} - \sin(2n-1)\theta_k) + \right. \\ \left. \rho^{2n-1} (\sin \theta_{k+1} \cos(2n-2)\theta_{k+1} - \sin \theta_k \cos(2n-2)\theta_k) \right] \end{bmatrix}$$

} 2 fissures

$$(23.30) \quad \begin{bmatrix} R^C \\ y \end{bmatrix}_k^{k+1} = -2 \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n \left[ANUM(2n-1, k) + AI(2n-2, k+1) \rho \sin \theta_{k+1} - \right. \\ \left. - AI(2n-2, k) \rho \sin \theta_k \right] \\ + \sum_{n=1}^N \beta_n \rho^{2n-1} (\sin \theta_{k+1} \sin(2n-2)\theta_{k+1} - \sin \theta_k \sin(2n-2)\theta_k) \end{bmatrix}$$

$$(23.31) \quad \begin{bmatrix} R^C \\ x \end{bmatrix}_k^{k+1} = 2 \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n \rho (AR(2n-1, k+1) \sin \theta_{k+1} - AR(2n-1, k) \sin \theta_k) + \\ + \sum_{n=1}^N \beta_n \left[\frac{\rho^{2n-1}}{2n-1} (\sin(2n-1)\theta_{k+1} - \sin(2n-1)\theta_k) + \right. \\ \left. \rho^{2n-1} (\sin \theta_{k+1} \cos(2n-2)\theta_{k+1} - \sin \theta_k \cos(2n-2)\theta_k) \right] \end{bmatrix}$$

$$(23.32) \quad \begin{bmatrix} R^C \\ y \end{bmatrix}_k^{k+1} = -2 \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n \left[ANUM(2n, k) + \rho AI(2n-1, k+1) \sin \theta_{k+1} - \right. \\ \left. - \rho AI(2n-1, k) \sin \theta_k \right] \\ + \sum_{n=1}^N \beta_n \rho^{2n-1} (\sin \theta_{k+1} \sin(2n-2)\theta_{k+1} - \sin \theta_k \sin(2n-2)\theta_k) \end{bmatrix}$$

} 3 fissures

2.3.4. Détermination des facteur d'intensité de contraintes K_1 en tête des fissures

La présentation du problème général nous a permis de montrer que le facteur d'intensité de contrainte s'exprime uniquement à partir des potentiels $\phi'(z)$ par la relation (21.14) soit :

$$K_1 = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow b_j} \left[\sqrt{z - b_j} (\phi'^B(z) + \phi'^C(z)) \right]$$

2.3.4.1. Cas de 2 fissures

Le calcul porte dans ce cas sur la détermination des facteurs d'intensité de contraintes dénommés K_{1B_1} et K_{1B_2} en têtes du segment $[b_1, b_2]$ dont la définition, compte tenu de (21.14) s'écrit :

$$K_{1B_1} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow b_1} \left[\sqrt{b_1 - z} (\phi'^B(z) + \phi'^C(z)) \right]$$

$$K_{1B_2} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow b_2} \left[\sqrt{z - b_2} (\phi'^B(z) + \phi'^C(z)) \right]$$

expressions dans lesquelles :

$$\begin{aligned} \phi'^B(z) + \phi'^C(z) = & -\frac{P}{2\pi bR} \left[1 - \left[z^2 - \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2) - \gamma \right] \chi(z) \right] + \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n z^{2n-1} \chi(z) \\ & + \sum_{n=1}^N \beta_n z^{2n-2} \end{aligned}$$

La valeur de la fonction de Plemelj $\chi(z)$ se déduit de la détermination uniforme définie précédemment. Ceci implique que pour tout x appartenant à l'axe des réels en dehors du segment $[b_1, b_2]$ nous avons

$$x < b_1 \quad \chi(x) = -\frac{1}{\sqrt{(b_2^2 - x^2)(b_1^2 - x^2)}}$$

$$x > b_2 \quad \chi(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - b_2^2)(x^2 - b_1^2)}}$$

L'expression des facteurs d'intensité de contraintes s'écrit alors :

$$(23.33) \quad K_{1B_1} = \frac{P}{bR} \sqrt{\frac{b_1}{\pi}} \left[\frac{\frac{b_2^2}{b_1} \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} - b_1}{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}} \right] + 2\sqrt{\pi b_1} \frac{\sum_{n=1}^{n+1} \alpha_n b_1^{2n-3}}{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}$$

$$(23.34) \quad K_{1B_2} = \frac{P}{bR} \sqrt{\frac{b_2}{\pi}} b_2 \left[\frac{1 - \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)}}{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}} \right] + 2\sqrt{\pi b_2} \frac{\sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n b_2^{2n-3}}{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}$$

2.3.4.2. Cas de 3 fissures

En conduisant le calcul de manière identique à celui effectué dans le cas précédent, l'expression des facteurs d'intensité de contraintes K_{1A} , K_{1B_1} et K_{1B_2} s'écrit pour chacune des têtes de fissure :

$$(23.35) \quad K_{1A} = + \frac{P}{bR} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left(\sqrt{\frac{b_2^2 - a^2}{b_1^2 - a^2}} \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} \right) - 2\sqrt{\pi a} \frac{\sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n a^{2n-2}}{\sqrt{(b_2^2 - a^2)(b_1^2 - a^2)}}$$

$$(23.36) \quad K_{1B_1} = + \frac{P}{bR} \sqrt{\frac{b_1}{\pi}} \left[\frac{a^2 + (b_2^2 - a^2) \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} - b_1^2}{(b_1^2 - a^2)(b_2^2 - b_1^2)} \right] - 2\sqrt{\pi b_1} \frac{\sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n b_1^{2n-2}}{\sqrt{(b_1^2 - a^2)(b_2^2 - b_1^2)}}$$

$$(23.37) \quad K_{1B_2} = + \frac{P}{bR} \sqrt{\frac{b_2}{\pi}} \left(\sqrt{\frac{b_2^2 - a^2}{b_2^2 - b_1^2}} \left(1 - \frac{E(\frac{\pi}{2}, q)}{F(\frac{\pi}{2}, q)} \right) \right) + 2\sqrt{\pi b_2} \frac{\sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n b_2^{2n-2}}{\sqrt{(b_2^2 - a^2)(b_2^2 - b_1^2)}}$$

2.3.5. Application numérique

Les données prises en compte dans l'exploitation du programme de calcul sont identiques à celles adoptées dans le cas d'une seule fissure, en ce qui concerne les dimensions physiques et les charges appliquées.

Les caractéristiques géométriques liées aux fissures sont définies par les figures 23.9 et 23.10.

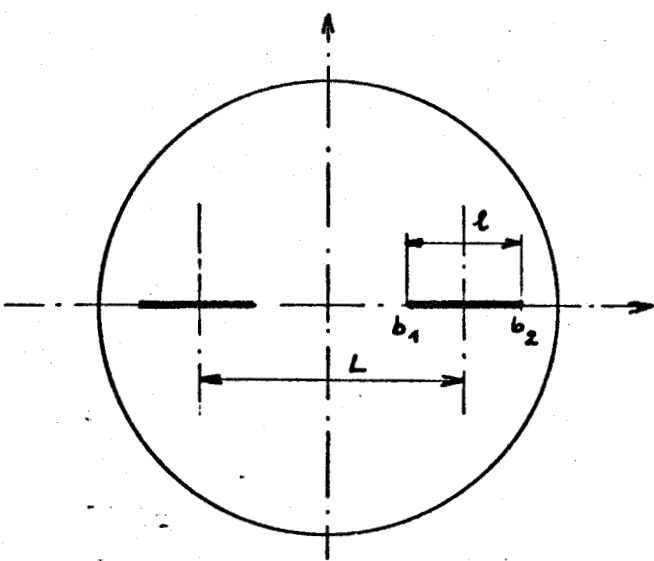


Figure 23.9

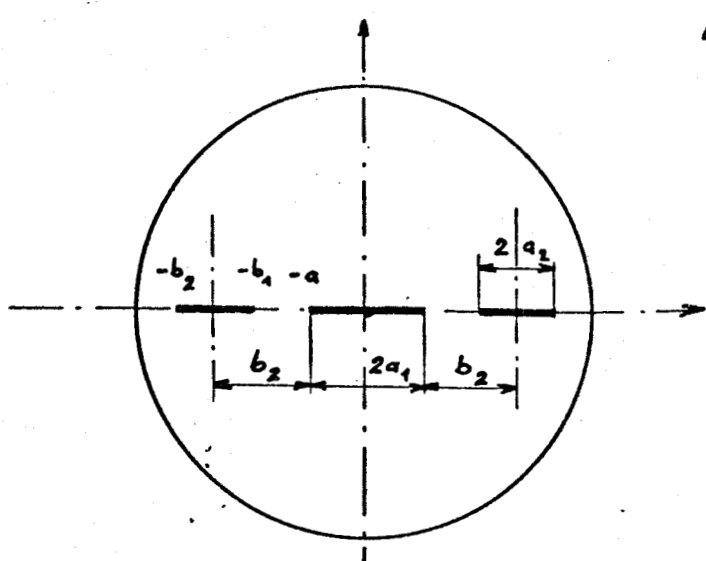


Figure 23.10

Pour les deux problèmes étudiés, l'exploitation numérique des programmes de calcul figurant aux annexes A₂ et A₃, a été conduite sur les bases suivantes (rayon extérieur unité) :

- a) pas de variation des abscisses des têtes de fissures : 0,05,
- b) distance minimale entre têtes de fissures concomittantes :
 - 0,10 dans le cas de 2 fissures,
 - 0,05 dans le cas de 3 fissures.
- c) abscisse maximale de la tête de fissure extérieure :
 - $b_2 = 0,8$

2.3.5.1. Cas de 2 fissures

Les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes K_1B_1 et K_1B_2 sont représentées en fonction du rapport $\frac{1}{L}$ aux figures 23.11 et 23.12.

Tous les résultats sont regroupés au moyen de 3 faisceaux de courbes correspondant aux critères suivants :

$$b_2 = c^{te}$$

$$b_1 = c^{te}$$

$$l = c^{te}$$

La superposition des faisceaux permet d'effectuer les commentaires suivants en rappelant que K_1B_1 se rapporte à la tête de fissure intérieure et K_2B_2 à la tête de fissure extérieure.

a) courbes $b = c^{te}$

* On note que K_1B_1 est toujours supérieur à K_1B_2 pour un rapport $\frac{1}{L}$ supérieur à 0,4.

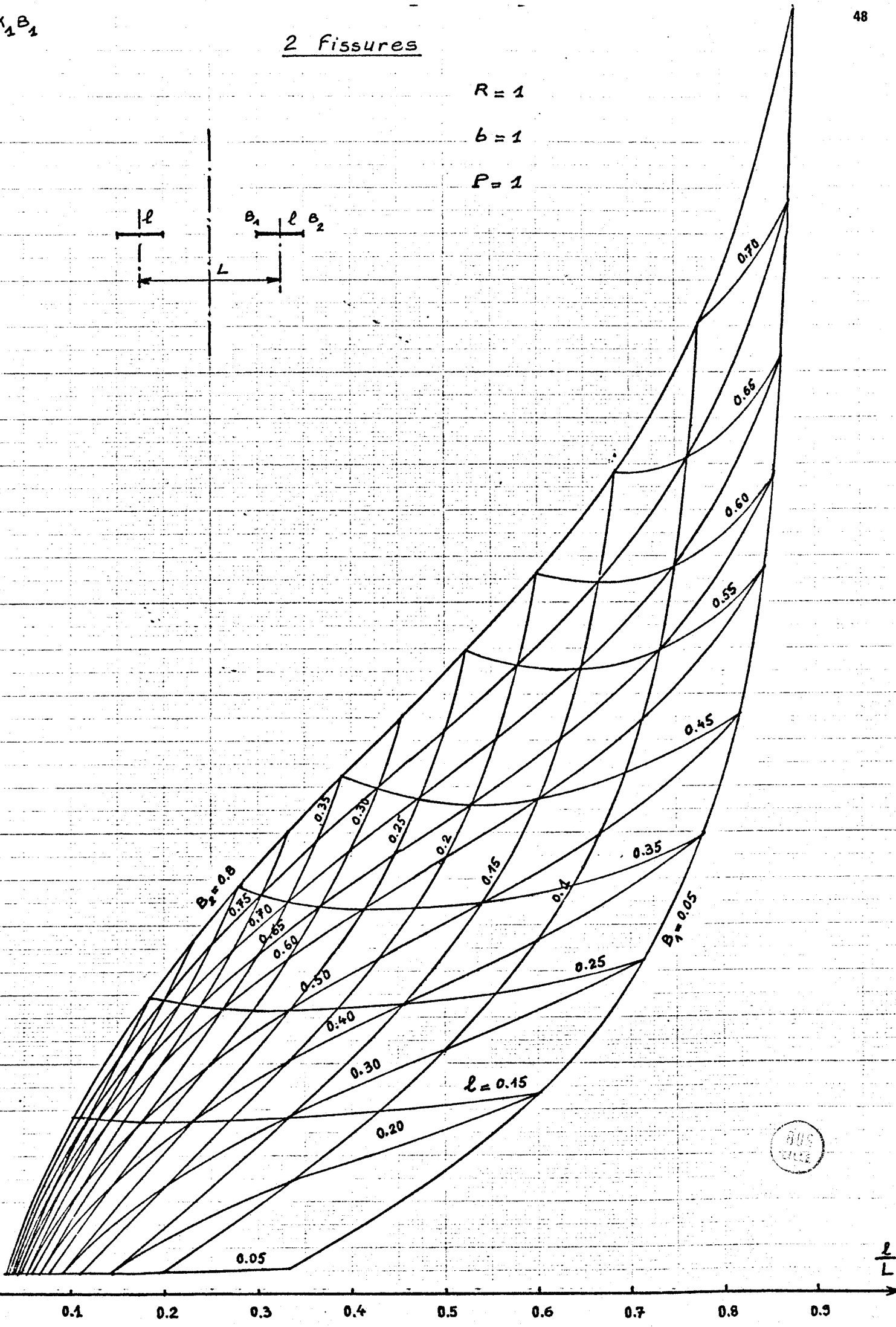
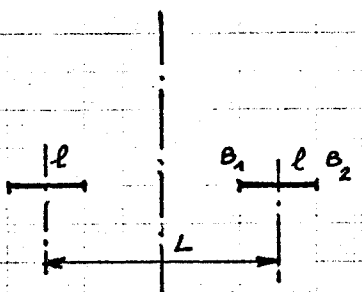
$K_1 B_1$

2 fissures

$R = 1$

$b = 1$

$P = 1$

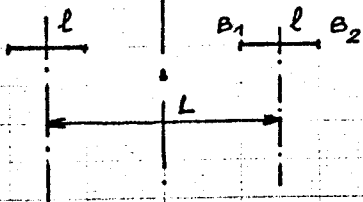


$\frac{l}{L}$

0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9

$K_1 B_2$

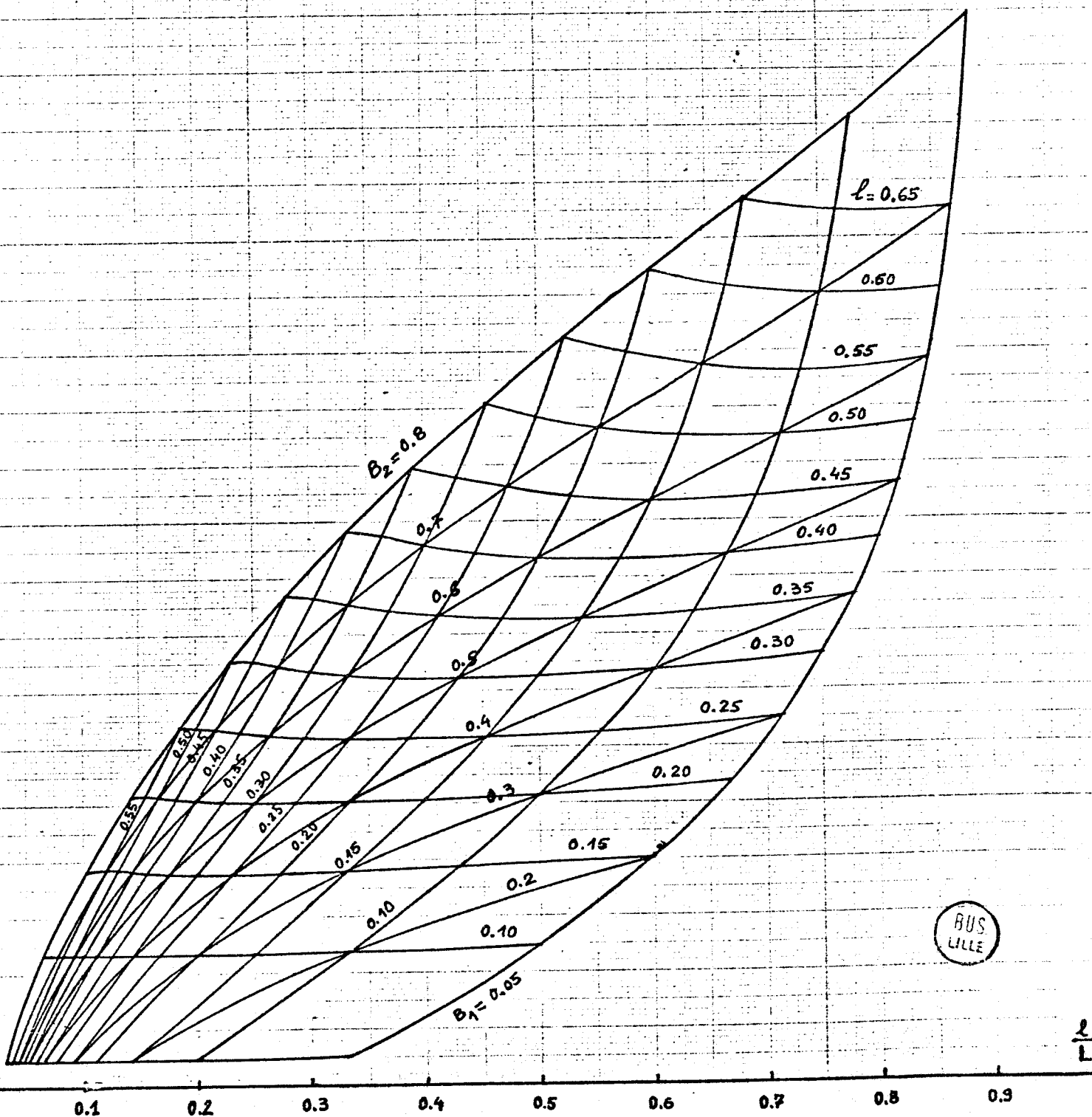
2 fissures



$R = 1$

$b = 1$

$P = 1$



$\frac{l}{L}$

* la valeur $\frac{1}{L}$ à partir de laquelle la relation $K_{1B_1} > K_{1B_2}$ est vérifiée varie avec l'abscisse de la tête de fissure extérieure B_2 variant de $\frac{1}{L} \approx 0,4$ pour $B_2 = 0,2$ à $\frac{1}{L} \approx 0,15$ pour $B_2 = 0,8$.

b) courbes $b_1 = c^{te}$

* pour $b_1 = 0,05$, c'est à dire lorsque les deux fissures sont proches l'une de l'autre la relation $K_{1B_1} > K_{1B_2}$ est toujours vérifiée. Dans ce cas, les deux fissures commencent par se réunir

* pour les autres valeurs de b_1 , $K_{1B_1} \approx K_{1B_2}$ est vérifiée pour une plage de variation de $\frac{1}{L}$ variable avec la valeur de b_1 , K_{1B_1} finissant par être toujours supérieur à K_{1B_2} .

c) courbes $l = c^{te}$

* pour $l > 0,40$ la valeur de K_{1B_1} est toujours supérieure à celle de K_{1B_2}

* pour les faibles valeurs de l , K_{1B_2} peut devenir légèrement supérieur à K_{1B_1} .

En conclusion, les résultats obtenus montrent que les fissures ont, dans la grande majorité des cas, tendance à se réunir avant de conduire à la rupture.

2.3.5.2. Cas de 3 fissures

Les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes K_{1B_1} et K_{1B_2} sont représentées en fonction du rapport $\frac{a_2}{b_2}$ (figure 23.10), pour deux valeurs de la demi-longueur de fissure centrale : b_2

$$a_1 = 0,05$$

$$a_1 = 0,2$$

Les courbes obtenues sont représentées aux figures 23.13 à 23.16. La superposition des faisceaux permet une nouvelle fois d'effectuer les commentaires suivants :

a) pour $a_1 = 0,2$

Quelle que soit la valeur du rapport $\frac{a_2}{b_2}$ envisagée la relation $K_{1B_1} > K_{1B_2}$ est toujours vérifiée.

Il faut noter toutefois que pour les grandes valeurs de B_2 , $K_{1B_1} \approx K_{1B_2}$ lorsque a_2 est faible (0,05)

b) pour $a_1 = 0,05$

i) $b_2 = c^{te}$

- * Pour des valeurs de B_2 supérieures ou égales à 0,7, le facteur d'intensité de contrainte K_{1B_2} est supérieur à K_{1B_1} tant que la tête intérieure (B_1)² de la fissure externe reste suffisamment éloignée de la fissure centrale ($B_1 = 0,12$ pour $B = 0,8$; $B_2 = 0,2$ pour $B_1 = 0,7$).
- * Pour des valeurs de B_2 inférieures à 0,7, la relation $K_{1B_1} \geq K_{1B_2}$ est toujours vérifiée.

ii) $b_1 = c^{te}$

- * K_{1B_1} reste supérieure à K_{1B_2} tant que B_1 reste inférieur ou égal à 0,2.
- * Pour les valeurs de B_1 supérieures à 0,2, les facteurs d'intensité de contrainte restent sensiblement égaux tant que B_2 est inférieur à 0,7.

iii) $l = c^{te}$

- * Pour les valeurs de $l < 0,2$, la relation $K_{1B_1} \geq K_{1B_2}$ est vérifiée.
- * Pour les valeurs de $l > 0,2$, K_{1B_1} reste supérieur à K_{1B_2} tant que B_2 reste inférieur à 0,65.
- * Les courbes $l = c^{te}$ possèdent toujours un point à tangente horizontale dans le faisceau relatif à K_{1B_2} .

En conclusion, la présence d'une fissure centrale de faible longueur (0,05) entraîne que le facteur d'intensité de contrainte K_{1B_2} relatif à la tête extérieure des fissures externes est supérieur à K_{1B_1} lorsque B_2 appartient à l'intervalle : $\left[\frac{2}{3} R, R \right]$

Dès que la fissure centrale possède une longueur suffisante (inférieure à 0,2), K_{1B_1} devient alors supérieur à K_{1B_2} .

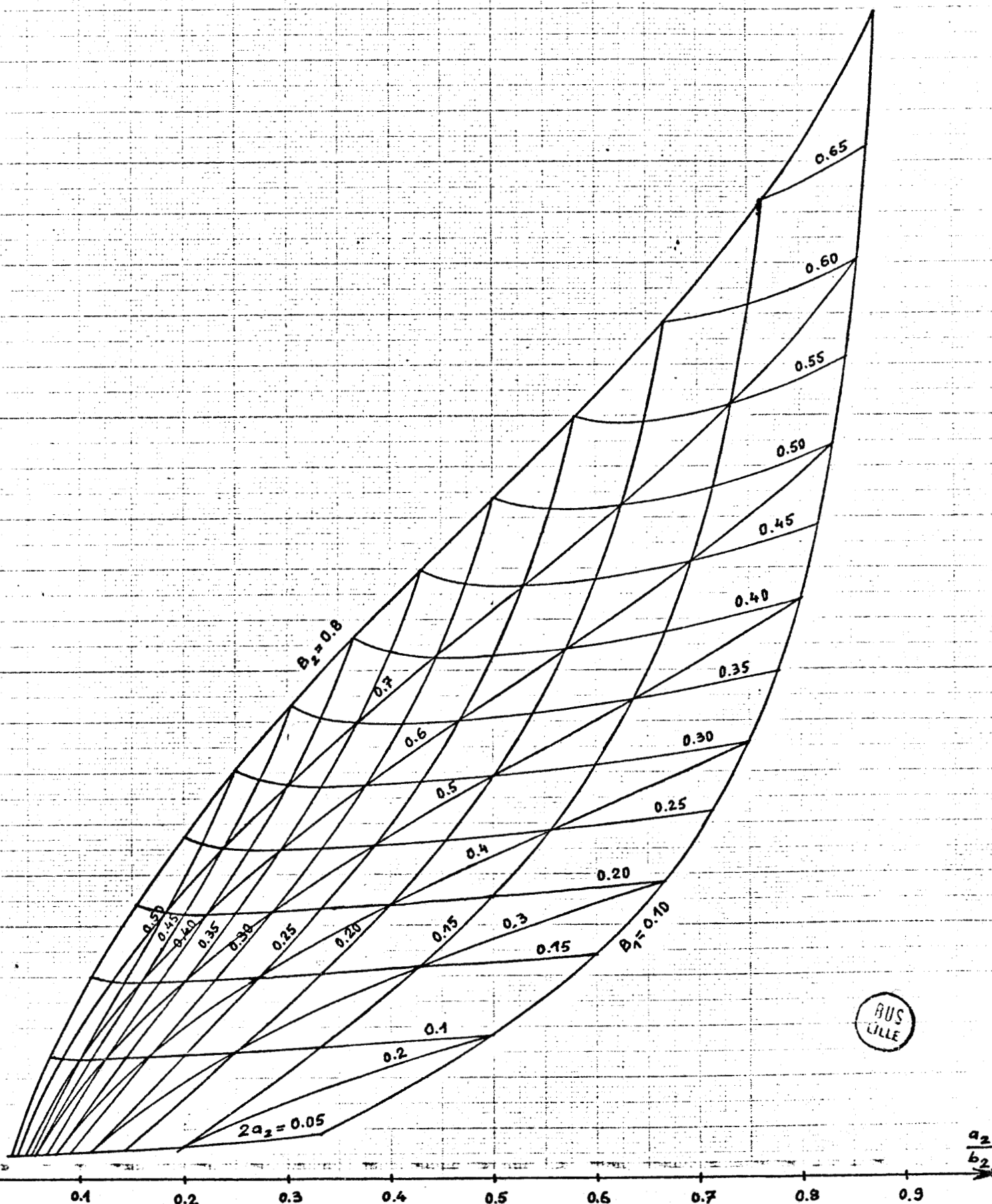
3 Fissures $a_1 = 0,05$

$K_1 B_2$

$$R = 1$$

$$b = 1$$

$$P = 1$$



3 Fissures

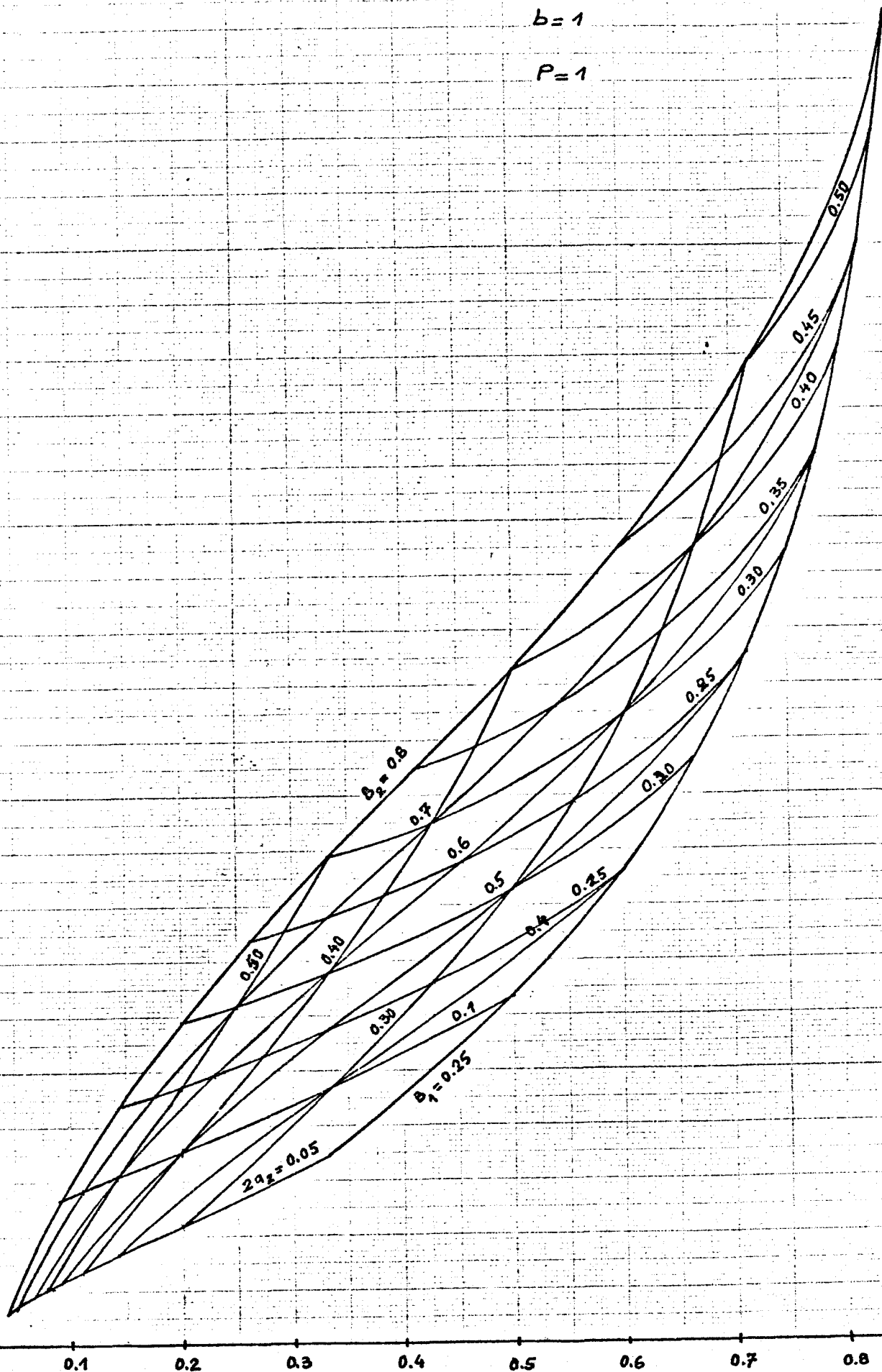
$a_1 = 0.20$

$K_1 \theta_1$

$R = 1$

$b = 1$

$P = 1$



a_2
 b_2

$K_1 B_2$

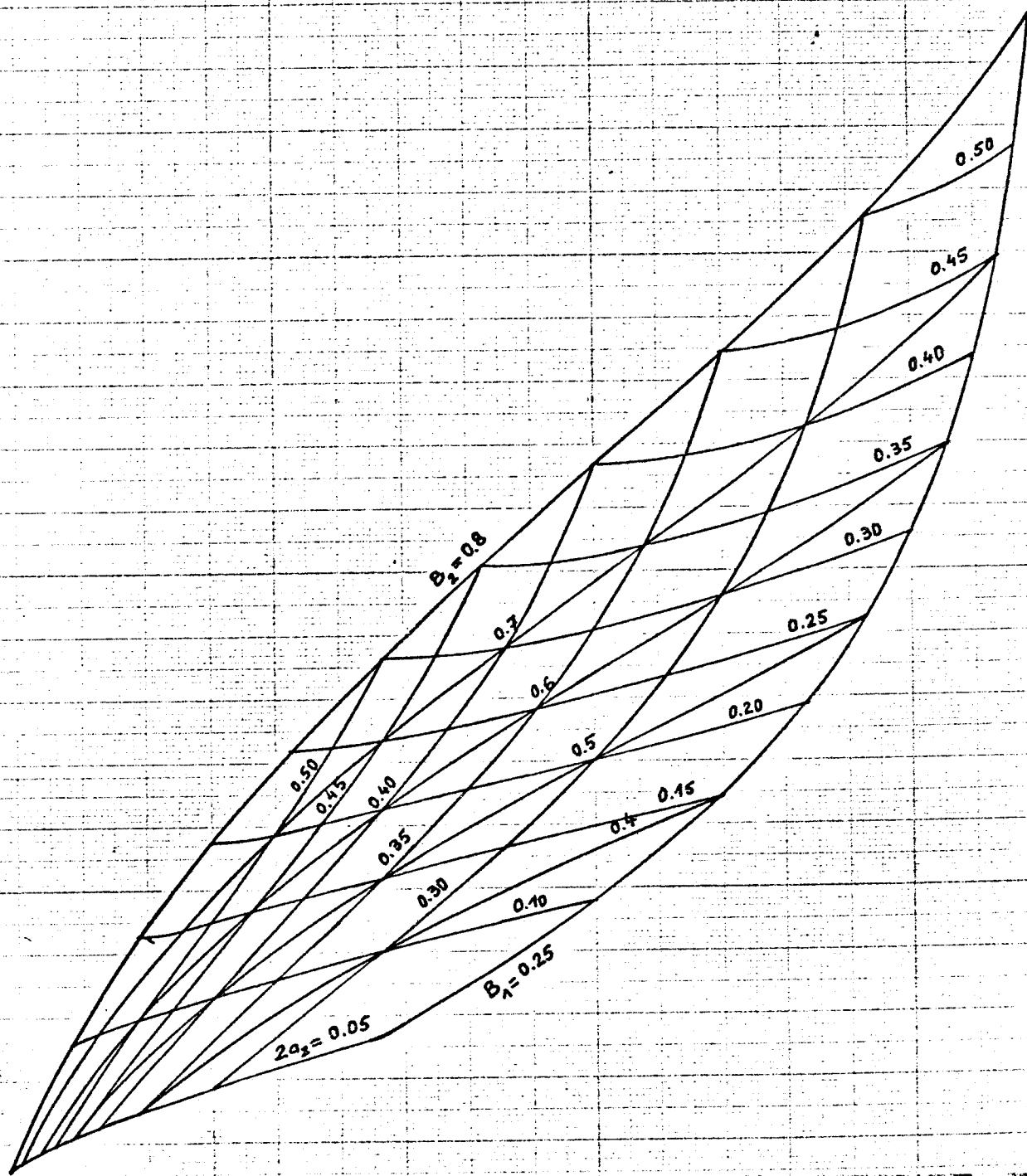
3 Fissures

$a_1 = 0,20$

$R = 1$

$b = 1$

$P = 1$



a_2
 b_2

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9

III - POTENTIELS COMPLEXES - TRANSFORMATION CONFORME

3.1 PRESENTATION ET PARTICULARITES DE LA MEHTODE

L'étude en champ complexe des problèmes liés à la présence de fissures dans un milieu donné est envisageable par la théorie des potentiels complexes introduits par Muskhelishvili.

Pour chaque problème, les conditions aux limites imposées à la fois sur les bords des fissures et sur le reste du contour impliquent l'existence de deux fonctions analytiques uniques définissant les potentiels recherchés.

L'expression mathématique de cette solution exacte est délicate à déterminer, notamment dans le cas des problèmes en milieu fini. La solution approchée est alors recherchée au moyen d'un développement en série de chacun des potentiels dont il suffit alors de rechercher l'expression des coefficients inconnus au moyen des conditions aux limites imposées.

Cette méthode, traitée numériquement par ordinateur, impose une troncature des séries ainsi que la discrétisation du contour en un nombre de segments proportionnel au nombre de termes des séries retenus, l'ajustement étant fonction du type et du nombre des conditions aux limites vérifiées en chaque point.

La méthode de superposition des états exposée précédemment présente les particularités suivantes :

- i) nécessité de déterminer deux développements en série relatif à chacun des potentiels $\phi'(z)$ et $\Omega'(z)$.
- ii) Le nombre des termes de chacune des séries est limité par la taille du système d'équations linéaires que l'on s'est fixé, compte tenu de la capacité et du temps d'exécution de la chaîne de traitement utilisée.
- iii) Les conditions aux limites ne sont vérifiées qu'en un certain nombre de points du contour.

La présence d'une fissure, introduite en tant que discontinuité mathématique dans le champ complexe, peut être traitée de manière différente si l'on envisage l'utilisation d'une transformation conforme.

Cette méthode mathématique permet, par l'introduction d'un plan auxiliaire, de transformer la discontinuité en un contour simplifié rendant possible la définition d'un prolongement analytique des fonctions potentiels.

Ce prolongement analytique, en accord avec les conditions aux limites imposées sur le contour correspondant, permet, tout en assurant la continuité des fonctions potentiels de part et d'autre de celui-ci, de définir une relation entre ces derniers, ramenant le problème à la détermination d'une seule fonction inconnue.

L'expression de la transformation peut être recherchée à partir de la définition d'un domaine image pour lequel la fonction potentiel exacte serait aisée à déterminer. Cette procédure conduit le plus souvent à des problèmes d'inversion difficiles à établir et à une transformation conforme très délicate.

Aussi est-il plus simple de choisir une fonction adaptée à la transformation d'une partie du contour seule, en l'occurrence, pour les problèmes traités ici, à celui de la fissure ou du contour intérieur de l'anneau.

Le potentiel à déterminer est alors recherché sous la forme d'un développement en série de Laurent dont les coefficients inconnus seront déterminés à partir de la vérification des conditions aux limites imposées sur le contour autre que celui relatif au prolongement analytique.

La méthode envisagée est donc la combinaison d'une transformation conforme et de la méthode de fixation des conditions de contour.

Il s'agit, tout comme pour la méthode de superposition des états, d'une méthode approchée dont la précision dépend du nombre et du type de conditions aux limites respectées.

La méthode présentée ici est appliquée à l'étude de deux problèmes :

a) Cas du disque soumis à l'action de 2 forces égales diamétralement opposées et contenant une fissure centrale non chargée dans le plan de sollicitation (fig. 3.1).

b) Cas de l'anneau soumis au même chargement et comportant deux fissures diamétrales égales issues du bord intérieur situées dans le plan de sollicitation (fig. 3.2).

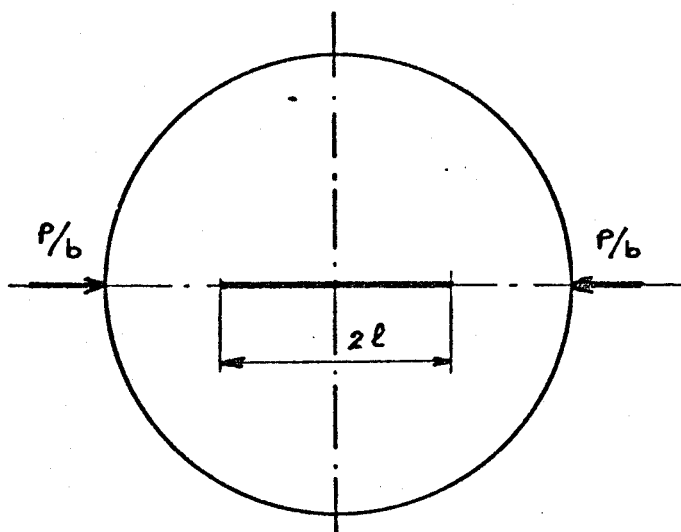


Fig. 3.1

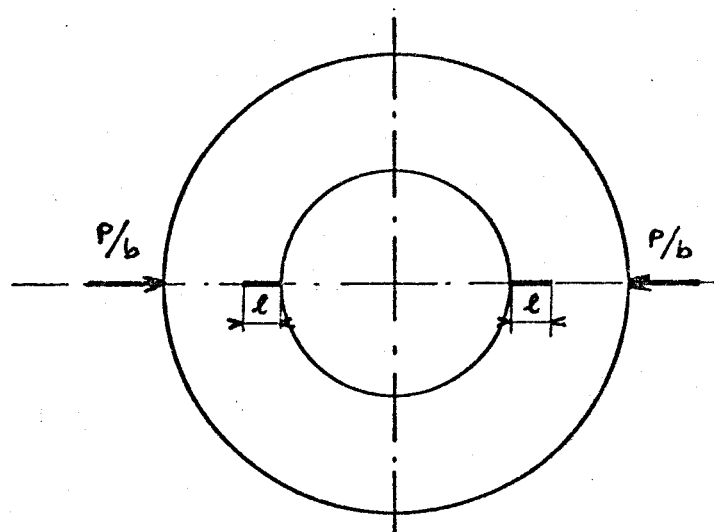


Fig. 3.2

3.2 ETUDE DU DISQUE A FISSURE CENTRALE.

3.2.1. Transformation conforme ; influence sur les relations de Kolosov-Muskhelishvili

Soit $z = x + i y$ la variable complexe associée au plan physique, ζ étant la variable associée au plan auxiliaire de représentation.

Considérons la transformation :

$$(3.1) \quad z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = \omega(\zeta)$$

Le cercle de rayon unité $\zeta = e^{i\alpha}$ et son domaine extérieur sont transformés, dans le plan physique, en la fissure et son extérieur (fig. 3.3)

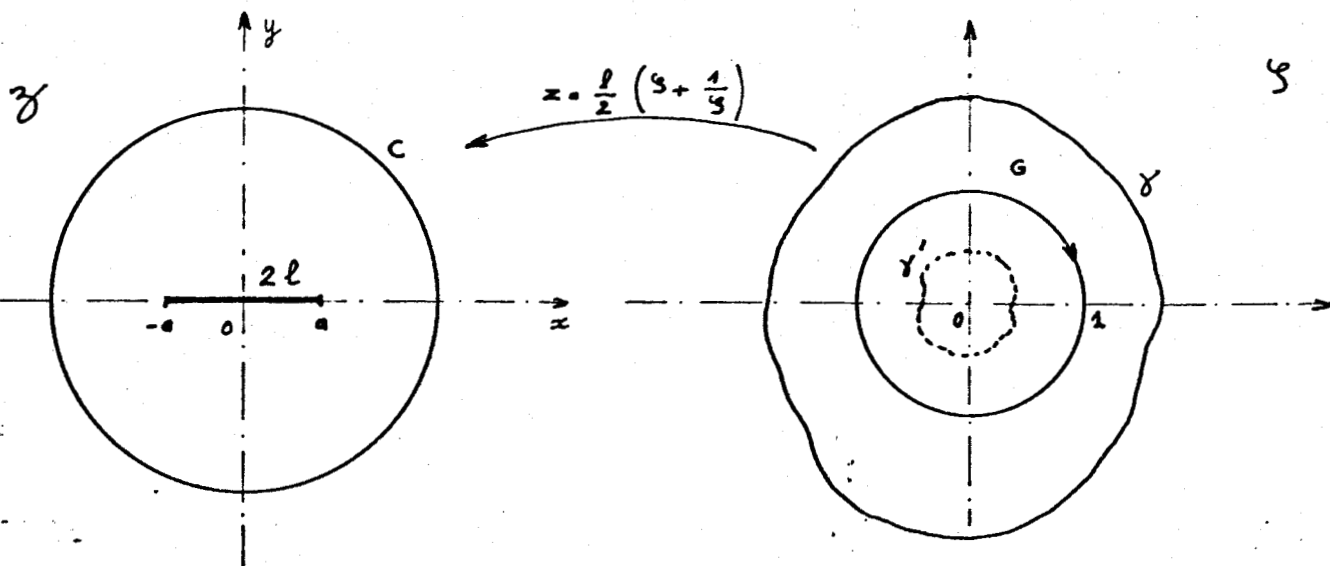


Fig. 3.3

La transformation inverse est définie par le relation :

$$(3.2) \quad \zeta = \frac{z}{l} + \left[\left(\frac{z}{l} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

Elle montre que la transformée du contour extérieur C du disque est une courbe fermée continue γ du plan ζ extérieure au cercle de rayon unité.

Les potentiels complexes $\phi(z)$ et $g'(z)$ recherchés peuvent être considérés dans le domaine image, comme des fonctions analytiques de la variable ζ . On pose :

$$\phi(z) = \phi[\omega(\zeta)]$$

$$g'(z) = g'[\omega(\zeta)]$$

En conséquence, les relations de base (21.1)   (21.4) exprimées dans le domaine image s'écriront en repère cartésien

- contraintes

$$(3.3) \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]$$

$$(3.4) \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i \sigma_{xy} = 2 \left[\overline{\omega(\zeta)} \frac{1}{\omega'(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] + \frac{g''(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]$$

- Résultante des forces sur un contour donné :

$$(3.5) \quad i \int_s (x_n + iy_n) ds = \left[\phi(\zeta) + \omega(\zeta) \frac{\overline{\phi'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} + \overline{g'(\zeta)} \right]_s$$

- Déplacements d'un point du domaine

$$(3.6) \quad 2G(u + iv) = \eta \phi(\zeta) - \omega(\zeta) \frac{\overline{\phi'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} - \overline{g'(\zeta)}$$

3.2.2. Prolongement analytique des potentiels complexes.

Etant donné le type de sollicitation imposé au domaine, l'étude se rapporte au mode 1 de propagation correspondant à un état de charges nulles sur le contour relatif à la fissure.

Cette particularité permet de choisir, dans le plan de paramétrage ζ , le cercle de rayon unité comme contour de prolongement analytique de façon à assurer la continuité des fonctions potentiels, à travers ce contour, dans un domaine limité par la courbe fermée γ' , intérieure au cercle de rayon $|\zeta| = 1$.

Il est alors intéressant de remplacer la condition de contraintes nulles en tout point des lèvres de la fissure par la condition équivalente exprimée en termes de résultante.

Le cercle de rayon unité étant orienté de façon à laisser le domaine image sur la gauche soient G et D les régions extérieure et intérieure au cercle de rayon unité (Fig 3.3).

$$(3.7) \quad \phi(\zeta) = -\omega(\zeta) \frac{\overline{\phi'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} - \overline{g'(\zeta)} \quad \zeta \in G$$

Le prolongement analytique est choisi par la détermination de $\phi(\zeta)$ obtenue en remplaçant ζ par $\frac{1}{\bar{\zeta}}$ dans l'expression précédente. Nous obtenons :

$$(3.8) \quad \phi(\zeta) = -\omega(\zeta) \frac{\phi'(\frac{1}{\bar{\zeta}})}{\omega'(\frac{1}{\bar{\zeta}})} - \overline{g'(\frac{1}{\bar{\zeta}})} \quad \zeta \in D$$

expression dans laquelle

$$\overline{f'(\frac{1}{\bar{\zeta}})} = \overline{f'(\frac{1}{\bar{\zeta}})}$$

En conséquence $g'(\zeta)$ est lié à $\phi(\zeta)$ par la relation

$$(3.9) \quad g'(\zeta) = -\overline{\phi(\frac{1}{\bar{\zeta}})} - \overline{\omega(\frac{1}{\bar{\zeta}})} \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad \zeta \in G$$

Le prolongement analytique définit un domaine D limité par le contour γ' pour lequel la relation (3.8) exprime la continuité de $\phi(\zeta)$ à l'intérieur du cercle de rayon unité.

Si $\phi(\zeta)$ est analytique dans le domaine délimité par γ et γ' , la condition de contraintes nulles sur les lèvres de la fissure est automatiquement vérifiée.

3.2.3. Analyse du problème

L'expression du potentiel $\phi(\zeta)$ définie dans le domaine G est recherchée sous la forme d'un développement en série de Laurent autour de l'origine, soit :

$$\phi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n \zeta^n \quad \zeta \text{ en } G$$

La fixation des conditions aux limites sur le contour extérieur γ impose une troncature de la série qui peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\phi(\zeta) = \sum_{-M}^N \alpha_n \zeta^n$$

La prise en compte des propriétés de symétrie est définie à partir de la considération de la résultante complexe (3.5).

Dans le repère cartésien $O/\vec{x}, \vec{y}$, la symétrie par rapport à l'axe Oy est traduite par la condition $Ry = 0$ pour tout segment appartenant à cet axe alors que la symétrie par rapport à Ox s'exprime par $Rx = 0$ pour tout segment de cet axe.

La relation (3.5) traduite au moyen des expressions de $\phi(\zeta)$ et $\omega(\zeta)$ conduit alors à la condition telle que les termes en puissances paires du développement de $\phi(\zeta)$ soient nuls. D'où :

$$(3.10) \quad \phi(\zeta) = \sum_{-M}^N \alpha_{2n+1} \zeta^{2n+1}$$

Compte tenu de cette double symétrie, l'étude sera menée sur un quart du domaine, soit pour un argument θ_ζ de ζ tel que :

$$0 \leq \theta_\zeta \leq \frac{\pi}{2}$$

La troncature de la série implique l'existence de $(M + N + 1)$ coefficients inconnus.

La détermination de ces coefficients sera réalisée par l'étude des conditions aux limites imposées sur le contour extérieur γ exprimées en termes de résultante.

La discrétisation du contour sera établie en fonction du nombre de termes de la série retenus soit $(M + N + 1)$. Chaque résultante imposant deux conditions (R_x et R_y) l'écriture du système d'équations linéaires nécessitera donc $\frac{(M + N + 1)}{2}$ arcs de définition du contour γ .

3.2.3.1. Expression de la résultante

Pour rappel, l'expression de la résultante des forces appliquées sera un arc $(k, k+1)$ est donnée par le relation (3.5) :

$$i \left[R_x + i R_y \right]_k^{k+1} = \left[\phi(\zeta) + \omega(\zeta) \frac{\overline{\phi'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} + \overline{g'(\zeta)} \right]_k^{k+1}$$

soit compte tenu de (3.8)

$$(3.11) \quad i \left[R_x + i R_y \right]_k^{k+1} = \left[\phi(\zeta) - \phi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) + \left[\omega(\zeta) - \omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \right] \frac{\overline{\phi'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \right]_k^{k+1}$$

En posant $\zeta = \rho_\zeta e^{i\theta_\zeta}$ la relation devient :

$$i \left[R_x + R_y \right]_k^{k+1} = \left[\sum \alpha_{2n+1} \left[\rho_\zeta^{2n+1} - \frac{1}{\rho_\zeta^{2n+1}} \right] e^{(2n+1)i\theta_\zeta} + \frac{\sum (2n+1) \alpha_{2n+1} \rho_\zeta^{2n} e^{-2ni\theta_\zeta}}{\frac{1}{2} (1 - \frac{1}{\zeta^2})} \frac{1}{2} \left[(\zeta - \bar{\zeta}) + \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \right] \right]_k^{k+1}$$

qu'il est possible d'écrire :

$$i \left[R_x + i R_y \right]_k^{k+1} = \left[\sum \alpha_{2n+1} e^{(2n+1)i\theta_\zeta} \left(\rho_\zeta^{2n+1} - \frac{1}{\rho_\zeta^{2n+1}} \right) + \frac{2i \operatorname{Im}[\zeta] (\rho_\zeta^2 - 1)}{\rho_\zeta^2 - e^{2i\theta_\zeta}} \sum (2n+1) \alpha_{2n+1} \rho_\zeta^{2n} e^{-2ni\theta_\zeta} \right]_k^{k+1}$$

$$\text{soit : } \textcircled{A} = \rho_\zeta^{2n+1} - \frac{1}{\rho_\zeta^{2n+1}}$$

$$\textcircled{B} = \frac{\operatorname{Im}(\zeta) (\rho_\zeta^2 - 1)}{\rho_\zeta^2 - e^{2i\theta_\zeta}}$$

Le développement de (B) s'écrit :

$$(B) = \frac{\rho_{\zeta} \sin \theta_{\zeta} (\rho_{\zeta}^2 - 1) (\rho_{\zeta}^2 - \cos 2\theta_{\zeta} + i \sin 2\theta_{\zeta})}{(\rho_{\zeta}^2 - \cos 2\theta_{\zeta})^2 + \sin^2 2\theta_{\zeta}} = (C) + i (D)$$

Compte tenu de ces définitions, l'expression de la résultante sur l'arc (k, k+1), s'écrit après multiplication par - i :

(3.12)

$$\left[R_x + i R_y \right]_k^{k+1} = \sum \alpha_{2n+1} \left[\begin{array}{l} \sin(2n+1)\theta_{\zeta} (A) + 2(2n+1)\rho_{\zeta}^{2n} \left[\cos(2n\theta_{\zeta}) (C) \right. \\ \left. + \sin(2n\theta_{\zeta}) (D) \right] \\ -i \left[\cos(2n+1)\theta_{\zeta} (A) + 2(2n+1)\rho_{\zeta}^{2n} (\sin(2n\theta_{\zeta}) (C) - \right. \\ \left. - \cos(2n\theta_{\zeta}) (D) \right] \end{array} \right]_k^{k+1}$$

Dans cette expression, les coordonnées polaire de ζ sont définies à partir de la relation (3.2).

$$\zeta = \frac{z}{l} + \left[\left(\frac{z}{l} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

La vérification des conditions aux limites s'effectuant pour le cercle de rayon r du plan physique il s'en suit que l'expression de ζ utilisée dans les calculs sera :

$$\zeta = \frac{r e^{i\theta}}{l} + \left[\frac{r^2 e^{2i\theta}}{l^2} - 1 \right]^{1/2}$$

En posant :

$$\rho' = \left[(r^4 - 2l^2 r^2 \cos 2\theta + l^4) \right]^{1/2}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \text{arc tg} \left[\frac{r^2 \sin 2\theta}{r^2 \cos 2\theta - l^2} \right]$$

l'expression de ζ s'écrit :

$$\zeta = \frac{1}{l} \left[r \cos \theta + \rho' \cos \phi + i (r \sin \theta + \rho' \sin \phi) \right]$$

permettant de définir :

$$\rho_{\zeta} = \frac{1}{l} \left[(r \cos \theta + \rho' \cos \phi)^2 + (r \sin \theta + \rho' \sin \phi)^2 \right]^{1/2}$$

$$\theta_{\zeta} = \text{Arc cos} \left[\frac{r \cos \theta + \rho' \cos \phi}{l \rho_{\zeta}} \right]$$

3.2.3.2. Facteur d'intensité de contraintes en tête de la fissure.

Le facteur d'intensité de contraintes en mode 1 de traction K_1 est défini à partir des potentiels complexes par la relation :

$$K_1 = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sqrt{z-1} \phi'(z) \right]$$

En fonction de la transformation $z = \omega(\zeta)$ les termes entrant dans la définition de K_1 s'écrivent :

$$\sqrt{z-1} = (\zeta - 1) \sqrt{\frac{1}{2\zeta}}$$

$$\phi'(z) = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{\phi'(\zeta) \zeta^2}{\frac{1}{2}(\zeta^2 - 1)}$$

une détermination uniforme de la transformation inverse $\zeta = \omega^{-1}(z)$ étant choisie, ζ tend vers 1 lorsque z tend vers 1.

En conséquence :

$$K_1 = 2\sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \left[\frac{(\zeta - 1) \sqrt{\frac{1}{2\zeta}}}{\frac{1}{2}(\zeta^2 - 1)} \phi'(\zeta) \zeta^2 \right]$$

et ainsi :

$$(3.13) \quad K_1 = 2 \sqrt{\frac{\pi}{1}} \phi'(1)$$

3.2.4. Résolution numérique et résultats

Le traitement numérique de la recherche de K_1 a été effectué pour les données suivantes (fig. 3.4)

$$r = 1$$

$$P = 1$$

La charge $\frac{P}{2}$ est appliquée sur l'arc $[0, 1]$ de portée angulaire inférieure ou égale à $0,01 \pi$ de façon à pouvoir négliger la composante verticale des charges appliquées.

le secteur $[0, \frac{\pi}{2}]$ du contour extérieur est divisé en C arcs égaux à partir de l'arc d'application de la charge. En conséquence, le nombre de termes de la série pris en compte sera tel que :

$$(M+N+1) = 2(C+1)$$

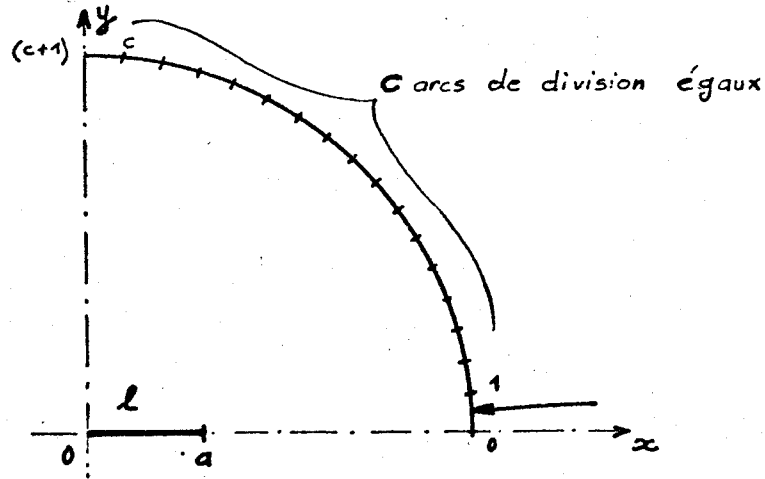


Figure 3.4

L'exploitation du programme de calcul a été effectuée pour 4 objectifs :

a) Pour une discrétisation du contour extérieur déterminée, calculer le facteur d'intensité de contraintes K_1 pour différentes longueurs de fissure, les bornes de la série étant telles que :

$$M = - (N - 1)$$

b) Pour une longueur de fissure donnée, faire varier le nombre de termes de série retenus en modifiant le nombre d'arc de discrétisation du contour C .

c) Pour une longueur de fissure donnée, faire varier l'étendue de l'arc de chargement.

d) Pour une longueur de fissure donnée et pour un nombre C d'arcs de contour fixés, faire varier les bornes de la série.

1 - Premier cas :

Les résultats obtenus figure dans le tableau 3.1, dans lequel :

C : est le nombre d'arc de division du contour extérieur au delà de l'arc de chargement,

M et N : les bornes inférieure et supérieure de la série,

L : le diviseur de π correspondant à l'arc de chargement.

Y : le facteur de forme avec :

$Y_{T.C.}$ celui relatif à la transformation conforme,

$Y_{sup.}$ celui relatif à la méthode de superposition.

a/R	C	M	N	L	$K_{1T.C.}$	$Y_{T.C.}$	$Y_{sup.}$
0,7	7	- 7	8	100	1,2700	2,6905	1,834
0,5	7	- 7	8	100	0,6088	1,5260	1,3872
0,3	7	- 7	8	100	0,3715	1,2022	1,1355

Tableau 3.1

La différence remarquable entre les résultats obtenus par les deux méthodes sera interprétée dans le chapitre final.

2 - Deuxième cas :

Les résultats obtenus figurent dans le tableau 3.2 et sont représentés à la figure 3.5.

a/R	C	M	N	L	$K_{1T.C.}$	$Y_{T.C.}$	$Y_{sup.}$
0,5	7	- 7	8	100	0,6088	1,5260	1,3872
	8	- 8	9		0,5959	1,4937	
	9	- 9	10		0,5862	1,4694	
	10	- 10	11		0,5793	1,4521	
	11	- 11	12		0,5740	1,4388	
	12	- 12	13		0,5700	1,4288	
	15	- 15	16		0,5623	1,4096	
	20	- 20	21		0,5570	1,3962	
	25	- 25	26		0,5548	1,3907	
	30	- 30	31		0,5538	1,3881	
	35	- 35	36		0,5532	1,3868	
	40	- 40	41		0,5529	1,3860	

Tableau 3.2

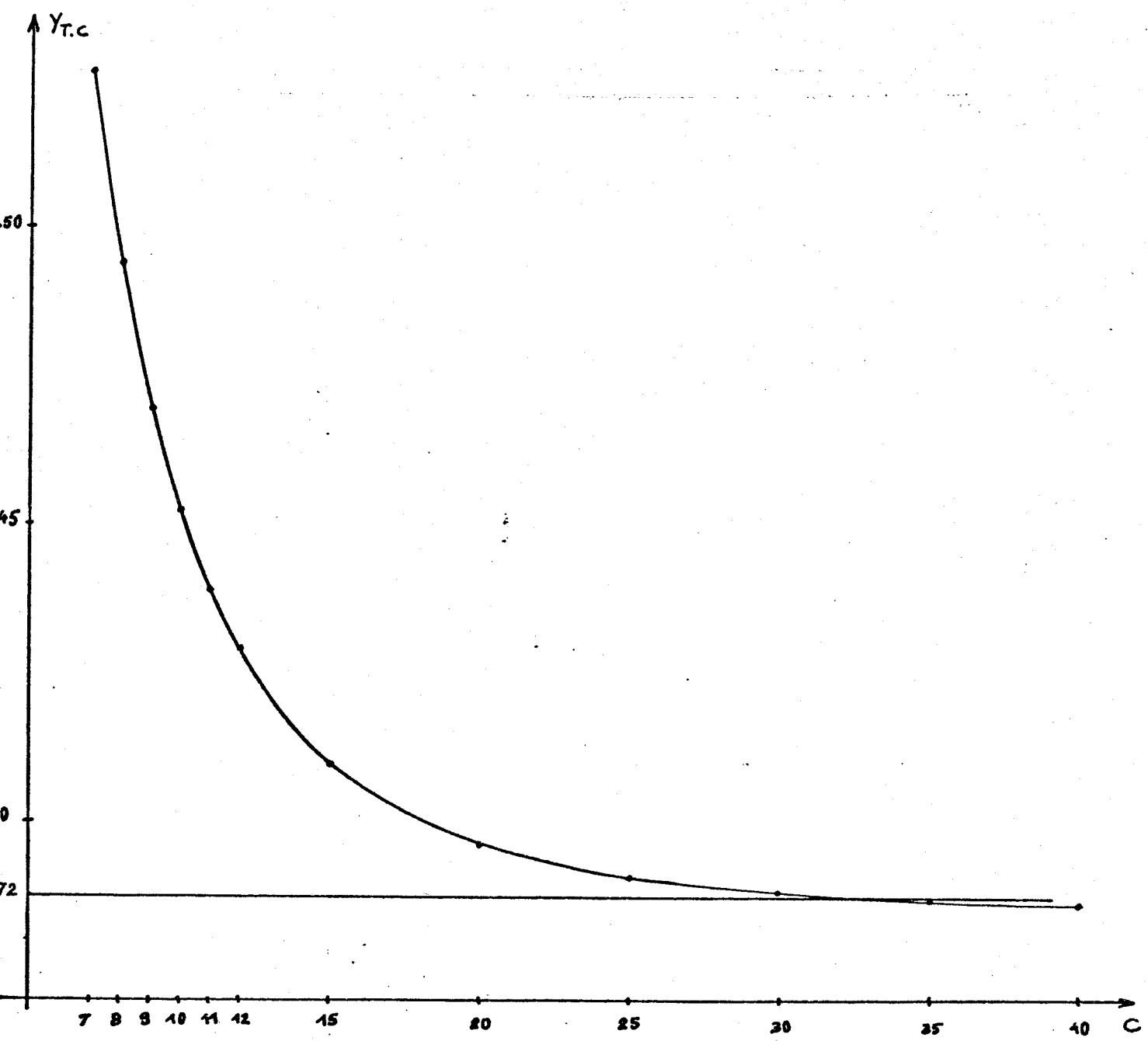


Figure 3.5

L'ensemble des résultats montre que la valeur obtenue par la méthode de transformation conforme converge vers celle de la méthode de superposition lorsque le nombre d'arcs de division du contour augmente.

L'ensemble des valeurs obtenues précise que la convergence de la série est lente, nécessitant la prise en compte d'un nombre de termes élevé. Cette particularité influe défavorablement sur les coefficients du système d'équations linéaires, de sorte qu'un conditionnement de la matrice est nécessaire pour résoudre avec une précision acceptable le système.



3 - Troisième cas :

Les résultats figurent au tableau 3.3

a/R	C	M	N	L	$K_{1T.C.}$	$Y_{T.C.}$	$Y_{sup.}$
0,5	7	- 7	8	50	0,5946	1,4904	1,3872
				100	0,6088	1,5260	
				200	0,6078	1,5235	

Tableau 3.3.

L'influence de la portée de l'arc de chargement est faible pour les valeurs $L = 100$ et $L = 200$.

La valeur obtenue pour $L = 50$, plus proche de la valeur de convergence de K_1 est due à l'influence de la composante verticale des charges appliquées qui n'est plus négligeable dans ce cas.

4 - Quatrième cas :

Les résultats sont regroupés dans le tableau 3.4 et sont représentés aux figures 3.6 et 3.7.

a/R	C	M	N	L	$K_{1T.C.}$	$Y_{T.C.}$	$Y_{sup.}$
0,5	7	- 4	11	100	0,08736	0,2190	1,3872
		- 5	10		0,3215	0,8059	
		- 6	9		0,5263	1,3192	
		- 7	8		0,6088	1,5260	
		- 8	7		0,6287	1,5759	
		- 9	6		0,6102	1,5295	

a/R	C	M	N	L	$K_{1T.C.}$	$Y_{T.C}$	$Y_{sup.}$
0,5	10	- 7	14	100	0,5107	1,2801	1,3872
		- 8	13		0,5538	1,3882	
		- 9	12		0,5720	1,4338	
		- 10	11		0,5793	1,4521	
		- 11	10		0,5812	1,4568	
		- 12	9		0,5794	1,4523	
		- 13	8		0,5724	1,4348	
		- 14	7		0,5556	1,3927	
		- 15	6		0,5137	1,2876	
		- 17	4		0,2718	0,6812	
0,5	20	- 20	21	100	0,5570	1,3962	1,3872
		- 22	19		0,5570	1,3962	
		- 24	17		0,5569	1,3959	
		- 26	15		0,5565	1,3950	
		- 28	13		0,5557	1,3930	
		- 30	11		0,5539	1,3885	

Tableau 3.4



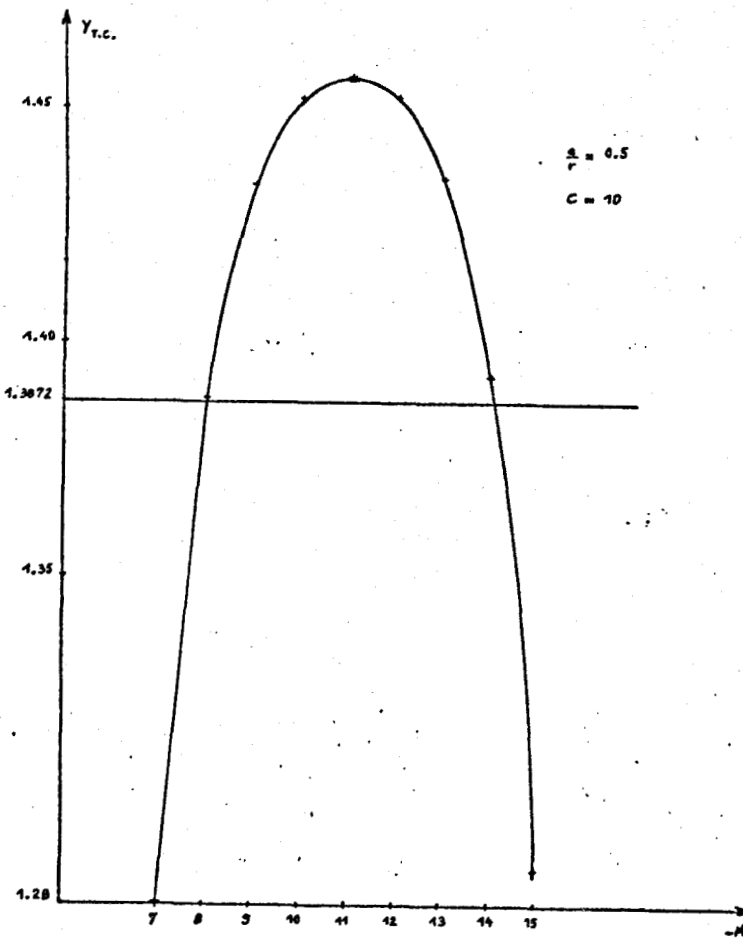


Figure 3.6

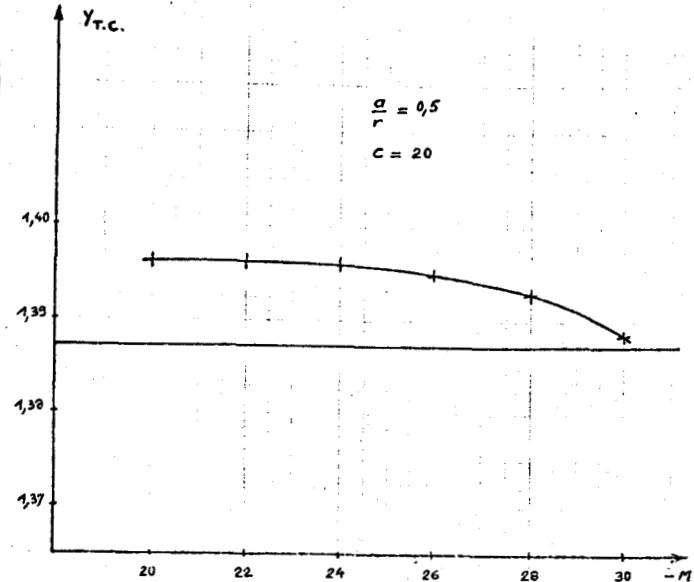


Figure 3.7

Les résultats obtenus montrent que le décentrement des bornes de la série par rapport à la valeur 0 possède une grande influence sur la valeur calculée.

Les figure (3.6) et (3.7) montrent qu'il n'est pas possible de définir une convergence vers une valeur finie lorsque les bornes de la série varient pour un nombre d'arcs de division du contour C fixé.

3.2.5. Conclusions

L'étude de l'influence des divers paramètres intervenant dans la résolution numérique montre que cette méthode ne peut être appliquée, dans sa forme actuelle, pour déterminer avec précision les facteurs d'intensité de contraintes recherchés.

L'intervention d'un développement en série de Laurent autour de l'origine, du à la transposition du domaine initial par la transformation conforme, impose la présence d'un certain nombre de degrés de liberté néfastes à la recherche de la solution finale.

Une étude approfondie des problèmes liés à la méthode utilisée est donc nécessaire.

3.3 ETUDE DE L'ANNEAU

Le problème étudié correspond à la détermination du facteur d'intensité de contraintes K_1 , en mode de traction, en tête de fissure relativement au domaine défini à la figure 3.5.

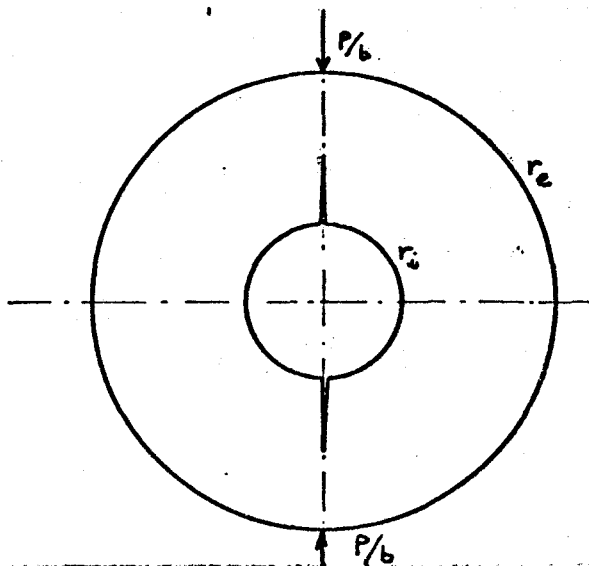


Figure 3.5

La symétrie évidente par rapport à l'axe Ox permet d'exposer la méthode envisagée pour le domaine défini par y positif. La symétrie par rapport à l'axe Oy sera introduite ultérieurement.

3.3.1. Transformation conforme ; partitionnement du domaine.

La présence du contour circulaire intérieur associé aux fissures, dans le cas de l'anneau, ne permet pas la recherche aisée de la transformation conforme unique définissant un contour géométriquement simple sur lequel les conditions aux limites sont vérifiées ou appliquées.

Toutefois, la configuration classique du domaine étudié permet d'envisager la combinaison de deux transformations ; l'une relative au cercle intérieur et l'autre, pour les sous-domaines comportant une fissure, relative à la fissure elle-même.

Le plan physique étant défini par la variable $z = x + iy$ introduisons le plan auxiliaire w relativement à la transformation :

$$(3.13) \quad z = \omega_1(w) = r_i e^{-i(w - \frac{\pi}{2})}$$

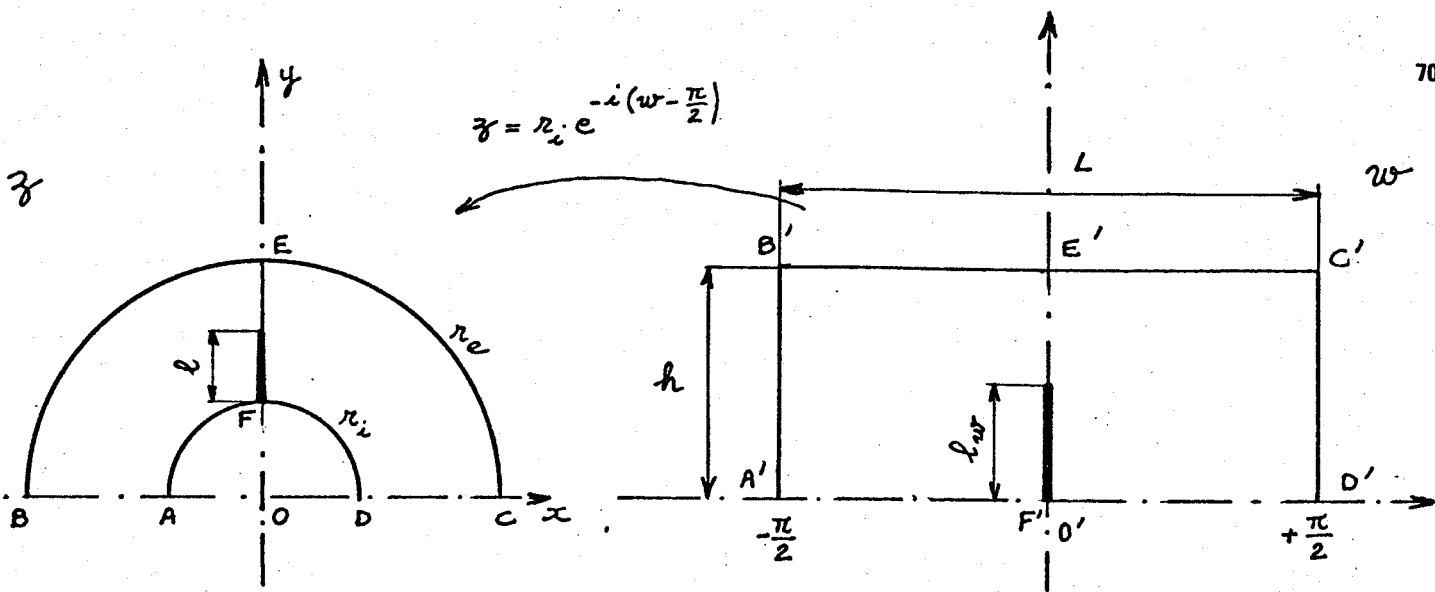


Fig. 3.6

La figure 3.6 illustre la correspondance établie entre le plan auxiliaire w et le plan physique z qui se traduit pour les contours par les remarques suivantes :

- i) Toute horizontale du plan w se transforme en un arc centré à l'origine du plan physique O .
 En particulier, tout point situé sur l'axe des réels du plan w se transforme en un point appartenant au cercle intérieur r_i .
- ii) Toute verticale du plan w se transforme en un rayon issu du cercle intérieur dans le plan z .

Les limites AB et CD du domaine dans le plan physique correspondent aux segments $A'B'$ et $C'D'$ du plan w .

La fissure de longueur l_w dans le plan image se transforme en celle de longueur l définie dans le plan physique.

La transformation inverse $w = \omega_1^{-1}(z)$ est définie à partir de (3.13) par la relation :

$$(3.14) \quad w = \omega_1^{-1}(z) = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_z\right) + i \ln \left(\frac{r_z}{r_i}\right)$$

Elle permet de préciser les limites du domaine image.

$$(3.15) \quad \begin{aligned} z \in AB &\rightarrow w = -\frac{\pi}{2} + i \ln \left(\frac{r_z}{r_i}\right) \\ z \in CD &\rightarrow w = \frac{\pi}{2} + i \ln \left(\frac{r_z}{r_i}\right) \end{aligned}$$

$$z \in BEC \rightarrow w = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_z\right) + i \ln \left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

$$z \in \text{fissure} \quad w = i \ln \left(\frac{r_z}{r_i}\right) \quad r_i \leq r_z \leq 1$$

La longueur de la fissure dans le plan image est donc définie par :

$$l_w = \ln \left(1 + \frac{1}{r_i} \right)$$

En appelant h et L la hauteur et la largeur du domaine image (fig. 3.6), il vient :

$$(3.15) \quad h = \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)$$

$$L = \pi$$

Les publications [1] [15] attirent l'attention sur les difficultés de convergence qui peuvent apparaître dans le cas de grandes fissures lorsque l'une des conditions suivantes est atteinte :

$$L > 4h$$

$$h > L$$

Pour cette raison, un partitionnement du domaine physique est réalisé, en accord avec ces conditions, partageant le domaine défini pour y positif en trois régions, la symétrie par rapport à l'axe des imaginaires étant conservée (fig. 3.7).

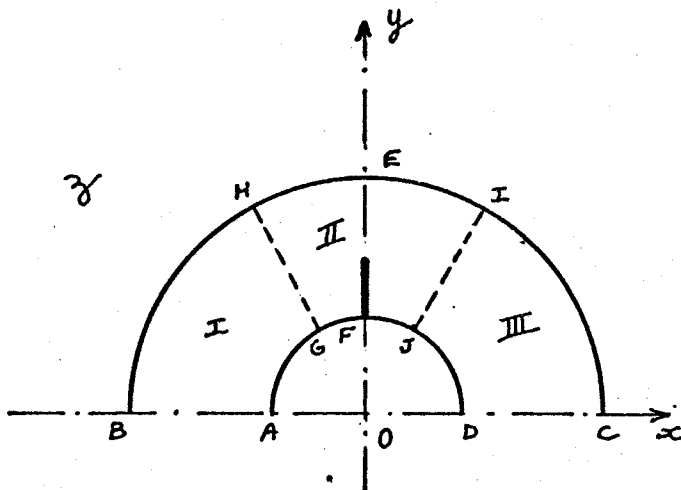


Figure 3.7

Il correspond, par la transformation $z = \omega_1(w)$, au domaine représenté à la fig. 3.8

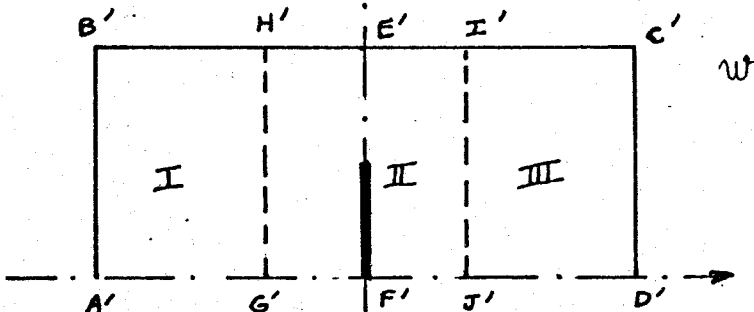


Figure 3.8

La fissure contenue dans le plan w restant une discontinuité du champ complexe, une seconde transformation conforme est appliquée à la région II afin de définir un contour géométrique simple lui correspondant.

Un second plan auxiliaire ζ est alors introduit relativement à la transformation :

$$(3.16) \quad w = \omega_2(\zeta) = \frac{l_w}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right)$$

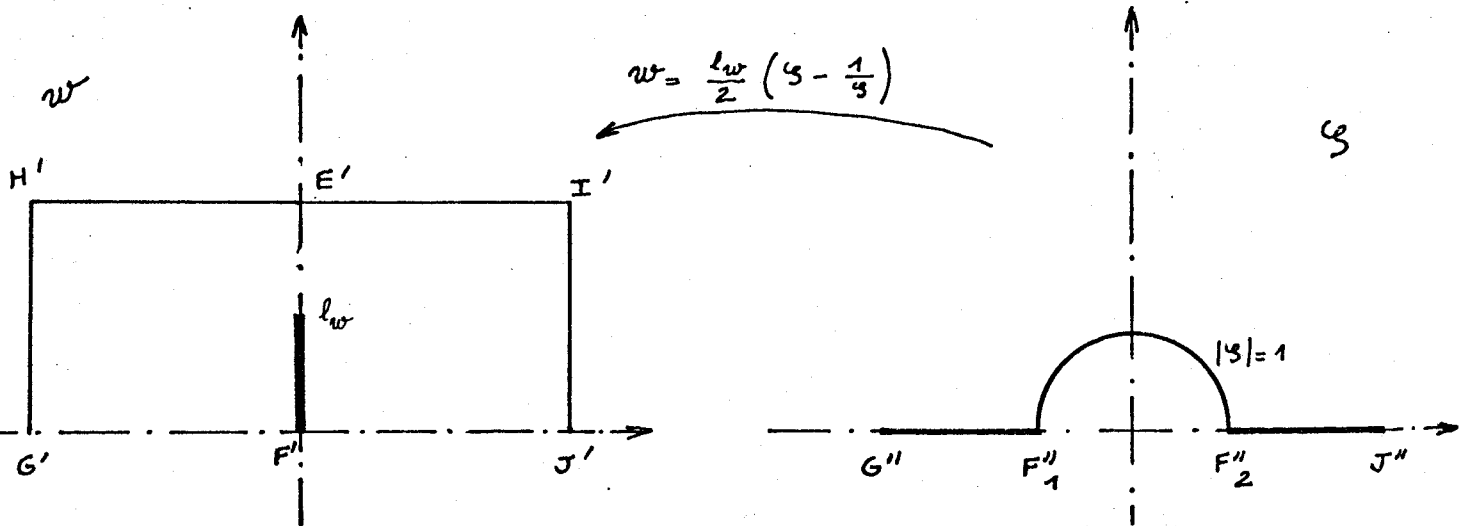


Figure 3.9

La correspondance entre les plans auxiliaires ζ et w établit que :

i) le demi cercle $|\zeta| = 1$ se transforme en la fissure l_w centrée à l'origine du plan w et située sur l'axe des imaginaires.

ii) un point du plan ζ de module supérieur à l'unité est transformé par $\omega_2(\zeta)$ puis $\omega_1(w)$ en un point situé à l'extérieur de la fissure.

En particulier, un point situé sur l'axe des réels du plan ζ est transformé en un point de l'axe des réels du plan w et donc en un point du contour intérieur de l'anneau dans le plan z .

Compte tenu de la décomposition du problème introduite par le partitionnement, les potentiels complexes recherchés vont être définis pour chacune des régions II et III, la région I étant identique à la région III de par la symétrie.

Pour chaque région, l'expression des potentiels doit être déterminée à partir des conditions aux limites imposées sur le contour.

Les fonctions recherchées étant définies pour tout le domaine, il est donc nécessaire d'introduire des conditions de raccordement entre les potentiels des régions II et III. Ces relations supplémentaires seront écrites en exprimant la continuité des déplacements et des contraintes le long du segment commun I J (ou I' J').

3.3.2. Prolongement analytique

Dans le but de vérifier automatiquement les conditions aux limites imposées sur certaines parties du contour et de réduire le nombre de fonctions potentiels inconnues, il est intéressant d'effectuer un prolongement analytique.

Le cercle intérieur de l'anneau ou son homologue dans le plan image apparaît comme un contour intéressant de prolongement pour les raisons suivantes :

- i) cette frontière s'étend à la fois sur les régions II et III,
- ii) les contraintes imposées sont nulles en tout point de ce contour.

En conséquence, la continuité des potentiels $\phi_I(z)$ à $\phi_{III}(z)$ est déterminée par rapport au contour A'F'D' du plan image w (fig. 3.8).

Le prolongement analytique étant effectué à partir de l'expression de la résultante (relation (3.5) dans laquelle ζ est remplacé par w), les expressions des potentiels $g'(z)$ en fonction des $\phi'(z)$ sont identiques quelle que soit la région considérée.

La continuité des $g'(z)$ entre eux est alors assurée par les conditions de raccordement imposées aux potentiels $\phi'(z)$.

Dans le plan auxiliaire w , le sens de parcours du segment A'D' choisi est celui de l'axe des réels, définissant ainsi le domaine dans la partie gauche G (y positif).

La relation (3.5) écrite dans le plan w permet d'écrire, pour tout segment quelconque, de l'axe des réels, compris entre A' et D' :

$$\phi(w) = -\overline{g'(w)} - \omega_1(w) \frac{\overline{\phi'(w)}}{\omega_1'(w)} \quad w \in G$$

$\omega(w)$ étant holomorphe dans tout le plan complexe, le prolongement analytique de $\phi(w)$ à travers A'D' est choisi tel que :

$$(3.17) \quad \phi(w) = -\overline{g'(w)} - \omega(w) \frac{\overline{\phi'(w)}}{\omega'(w)} \quad w \in D$$

en respectant la relation : $\overline{f(\overline{w})} = \overline{f(w)}$

w appartenant au domaine D, toutes les fonctions comprises dans le membre de droite sont définies puisqu'elles font intervenir \overline{w} qui appartient au domaine G.

Le domaine dans lequel $\phi(w)$ doit être analytique est alors étendu à celui représenté à la figure 3.10.

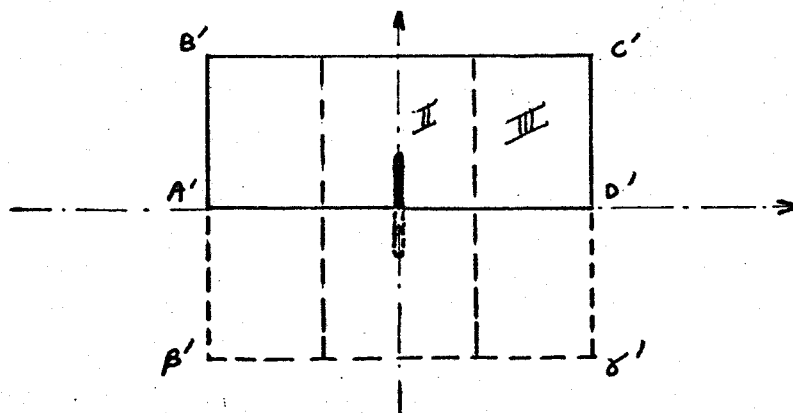


Figure 3.10.

Le potentiel complexe $g'(w)$ est clairement défini à partir de la relation (3.17) soit :

$$(3.18) \quad g'(w) = -\bar{\phi}(w) - \bar{\omega}_1(w) \frac{\phi'(w)}{\omega_1'(w)} \quad w \in G$$

La résultante des actions exercées par la partie droite sur la partie gauche d'un arc donné s'exprime alors par la relation :

$$(3.19) \quad i \int_s (x_n + y_n) ds = \left[\phi(w) - \phi(\bar{w}) + \left[\frac{(\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w}))}{\omega_1'(w)} \right] \frac{\phi'(w)}{\omega_1'(w)} \right]_s$$

La relation (3.6) écrite dans le plan w exprimant les déplacements d'un point du domaine devient :

$$(3.20) \quad 2G(u + iv) = \eta \phi(w) + \phi(\bar{w}) - \left[\frac{(\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w}))}{\omega_1'(w)} \right] \frac{\phi'(w)}{\omega_1'(w)}$$

Si (w) est analytique dans le domaine étendu $B'C'\gamma'\beta'$ alors les conditions de contraintes nulles sont automatiquement vérifiées le long du cercle intérieur de l'anneau.

3.3.3. Influence du partitionnement sur l'expression du potentiel complexe

a) région contenant la fissure :

Le domaine défini par la région II est analysé qu'au moyen de deux transformations conformes successives telles que :

$$(3.21) \quad z = \omega_1 \left[\omega_2(\zeta) \right] = r_i e^{-i \left[\frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{\pi}{2} \right]}$$

Les expressions de la résultante et du déplacement s'expriment alors en fonction de la variable ζ sous la forme :

$$(3.22) \quad i \int_s (x_n + i Y_n) ds = \left[\phi(\zeta) - \phi(\bar{\zeta}) + \left[\frac{(\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w}))}{\omega_1'(w)} \right] \frac{\phi'(\zeta)}{\omega_2'(\zeta)} \right]_s$$

$$(3.23) \quad 2G(u + i v) = \eta \phi(\zeta) + \phi(\bar{\zeta}) - \left[\frac{(\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w}))}{\omega_1'(w)} \right] \frac{\phi'(\zeta)}{\omega_2'(\zeta)}$$

La méthode de fixation des conditions au contour étant utilisée, l'expression du potentiel $\phi(\zeta)$ est recherchée sous la forme d'un développement en série de Laurent limité par le nombre de points de fixation retenus.

Le point $w = -i$, correspondant au point $\zeta = -i$ est un pôle des fonctions potentielles relatives à la région II, introduit par la transformation conforme.

En conséquence, le développement en série de $\phi(\zeta)$ doit tenir compte de cette singularité et donc se présenter sous la forme suivante :

$$(3.24) \quad \phi_2(\zeta) = \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n}{\zeta + i}$$

les a_n étant des constantes complexes.

Les conditions particulières sont imposées aux termes de $\phi(\zeta)$ pour respecter la symétrie par rapport à l'axe des imaginaires.

L'écriture de la résultante (3.22) à partir de (3.24) et pour laquelle $Y_n = 0$ quel que soit w et ζ imaginaires conduit à l'expression du potentiel :

$$(3.25) \quad \phi_2(\zeta) = \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{2n} \zeta^{2n} + i \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{2n+1} \zeta^{2n+1}}{\zeta + i}$$

α_{2n} et β_{2n+1} étant des coefficients réels.

b) Région sans fissure :

La transformation $z = \omega_1(w)$ est seule utilisée dans le cas de la région III.

Les expressions de la résultante et du déplacement sont alors données par les relations (3.19) et (3.20).

Le domaine pris en compte, étendu par l'intermédiaire de la transformation conforme, ne comporte pas de points singuliers.

Le potentiel $\phi_3(w)$ peut donc être recherché sous la forme d'un développement en série entière autour de tout point w_0 appartenant au domaine.

On pose :

$$(3.26) \quad \phi_3(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n \quad b_n \in \mathbb{C}$$

Le point w_0 retenu étant le centre géométrique de la région III étendue par le prolongement analytique.

Dans le plan physique, la région III est limitée à l'axe des réels en vertu de la symétrie du problème.

En conséquence, quel que soit z appartient à l'axe des réels la composante réelle de la résultante des charges appliquées (X_n) est nulle. Cette condition se traduit dans le plan w par :

$$w = + \frac{\pi}{2} + i \ln \left(\frac{r}{r_i} \right)$$

et puisque w_0 est réel, la condition de symétrie par rapport à l'axe des imaginaires, exprimée en termes de résultante, impose à $\phi_3(w)$ l'expression suivante :

$$(3.27) \quad \phi_3(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n-2} (w - w_0)^{2n-2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{2n-1} (w - w_0)^{2n-1}$$

γ_{2n-2} et δ_{2n-1} étant des coefficients réels.

3.3.4. Détermination des coefficients des séries

Compte tenu de la double symétrie respectée par les potentiels $\phi_2(\zeta)$ et $\phi_3(w)$ l'étude du problème peut être effectuée sur un quart de l'anneau (fig. 3.11).

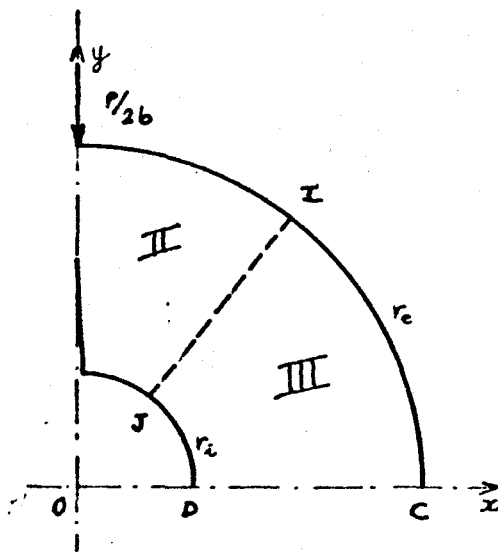


Fig. 3.11

Les conditions aux limites imposées sur le contour sont exprimées en termes de résultantes. Ce choix est justifié par le fait qu'il permet de conserver l'équilibre statique global de l'élément. Il est de plus possible de rendre le découpage du contour aussi fin que souhaité permettant, à la limite, de vérifier les conditions en contraintes.

Pour la région III les conditions de résultantes nulles sont imposées sur l'arc IC du contour extérieur.

A : arcs de division sont requis pour la discrétisation de cet élément.

Pour la région II, les conditions de résultantes sont imposées sur l'arc EI du contour extérieur et sur la fissure.

Soient :

B : le nombre d'arcs de division du contour EI,

C : le nombre d'arcs de division de la fissure.

Le segment IJ commun aux régions II et III est divisé en D parties égales sur chacune desquelles est exprimée la continuité des contraintes et des déplacements.

Le segment IJ commun aux régions II et III est divisé en D parties égales sur chacune desquelles est exprimée la continuité des résultantes imposant ainsi 2D relations de définition des coefficients de séries.

La continuité des déplacements est exprimée en chaque point de discrétisation, au nombre de D + 1. En conséquence, 2(D + 1) relations de définition des coefficients sont induites par cette condition.

Au total, l'ensemble du domaine étudié fournit $[2(A + B + C + 1) + 4D]$ relation de définition des coefficients de $\phi_2(\zeta)$ et $\phi_3(w)$, nécessitant la prise en compte d'un nombre de termes égal pour l'ensemble des deux séries.

Pour l'application numérique, la troncature des séries sera réalisée avec le soix suivant :

$$\phi_2(\zeta) = \frac{\sum_{n=-(N-1)}^N \alpha_{2n} \zeta^{2n} + i \sum_{n=-(N-1)}^N \beta_{2n+1} \zeta^{2n+1}}{\zeta + i}$$

$$\phi_3(w) = \sum_{n=1}^M \gamma_{2n-2} (w - w_0)^{2n-2} + i \sum_{n=1}^M \delta_{2n-1} (w - w_0)^{2n-1}$$

Le développement du potentiel $\phi_2(\zeta)$ est donc centré autour de la valeur $n = 0$

Cette détermination des potentiels impose aux limites N et M de respecter les conditions suivantes :

$$N = \frac{B + C + D}{2}$$

$$M = A + D + 1$$

3.3.5 Facteur d'intensité de contraintes

En mode 1 de traction et pour une fissure appartenant à l'axe des réels, le facteur d'intensité de contraintes est donné par la relation [17].

$$K_1 = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} \left[\sqrt{z-a} \phi'(z) \right]$$

a étant l'abscisse de la tête de fissure.

La configuration adoptée dans le cas de l'anneau (Fig. 3.5) comporte, pour le demi domaine étudié, une fissure portée par l'axe des imaginaires.

En conséquence, on effectue le changement de repère tel que z étant la variable rapportée au plan $O/\bar{x}, \bar{y}$ nous ayons :

$$Z = -i z$$

Ainsi la fissure appartenant à la région II, l'expression du facteur d'intensité de contrainte s'écrit :

$$(3.28) \quad K_1 = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow i(r_i+1)} \left[\sqrt{-i(z - i(r_i+1))} \phi'(z) \right]$$

La région II étant paramétrée dans le plan ζ l'application des deux transformations conformes définies par (3.13) et (3.16) conduit à exprimer $\phi'_2(z)$ sous la forme :

$$\phi'_2(z) = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'_1(w) \omega'_2(\zeta)}$$

avec :

$$\omega'_1(w) = r_i e^{-iw}$$

$$\omega'_2(\zeta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\zeta^2} \right)$$

Lorsque z tend vers $i(r_i+1)$ les paramètres de transformation w et ζ sont tels que :

$$w \rightarrow i L_n \left(1 + \frac{1}{r_i} \right) = i l_w$$

et $\zeta \rightarrow i$

conduisant à une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$ pour K_1 .

La levée de l'indétermination est obtenue en exprimant le rapport

$$\frac{\sqrt{-i(z - i(r_i+1))}}{\omega'_1(w) \omega'_2(\zeta)}$$

au moyen de la variable w puis à en recherche l'équivalent dans un développement limité autour de la valeur $w = -i l_w$.

La relation de définition du facteur d'intensité de contraintes K_1 est alors donnée par :

$$(3.29) \quad K_1 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{l_w r_i} e^{l_w}} \phi'_2(i)$$

a) Etude de la région II

Résultante

La vérification des conditions aux limites exprimées en termes de résultante conduit à expliciter la relation (3.22) au moyen du développement en série de $\phi_2(\zeta)$ soit (3.25). Pour un arc $(k, k+1)$, la résultante complexe sera écrite sous la forme :

$$\left[-R_y + i R_x \right]_k^{k+1} = \left[\phi(\zeta) - \phi(\bar{\zeta}) + \left[\frac{(\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w}))}{\omega_1'(w)} \right] \frac{\phi'(\zeta)}{\omega_2'(\zeta)} \right]_k^{k+1}$$

On pose $\zeta = \rho_\zeta e^{i\theta_\zeta}$, ρ_ζ et θ_ζ étant définis à partir de la détermination d'une branche uniforme de la transformation $\zeta = \omega_2^{-1}(w)$.

$$\phi(\zeta) = \frac{\sum \alpha_{2n} \rho_\zeta^{2n} e^{i2n\theta_\zeta} + i \sum \beta_{2n+1} \rho_\zeta^{2n+1} e^{i(2n+1)\theta_\zeta}}{\rho_\zeta e^{i\theta_\zeta} + i}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \frac{\sum \alpha_{2n} \rho_\zeta^{2n+1} e^{i(2n-1)\theta_\zeta} + \sum \beta_{2n+1} \rho_\zeta^{2n+1} e^{i(2n+1)\theta_\zeta}}{\rho_\zeta^2 + 2\rho_\zeta \sin\theta_\zeta + 1} + \\ &+ i \frac{\sum \beta_{2n+1} \rho_\zeta^{2n+2} e^{i2n\theta_\zeta} - \sum \alpha_{2n} \rho_\zeta^{2n} e^{i2n\theta_\zeta}}{\rho_\zeta^2 + 2\rho_\zeta \sin\theta_\zeta + 1} \end{aligned}$$

et en conséquence :

$$\textcircled{1} \quad \text{Re} [\phi(\zeta)] = \frac{1}{\rho_\zeta^2 + 2\rho_\zeta \sin\theta_\zeta + 1} \left[\begin{aligned} &\sum \alpha_{2n} (\rho_\zeta^{2n+1} \cos(2n-1)\theta_\zeta + \rho_\zeta^{2n} \sin 2n\theta_\zeta) + \\ &+ \sum \beta_{2n+1} (\rho_\zeta^{2n+1} \cos(2n+1)\theta_\zeta - \rho_\zeta^{2n+2} \sin 2n\theta_\zeta) \end{aligned} \right]$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Im} [\phi(\zeta)] = \frac{1}{\rho_\zeta^2 + 2\rho_\zeta \sin\theta_\zeta + 1} \left[\begin{aligned} &\sum \alpha_{2n} (\rho_\zeta^{2n+1} \sin(2n-1)\theta_\zeta - \rho_\zeta^{2n} \cos 2n\theta_\zeta) + \\ &+ \sum \beta_{2n+1} (\rho_\zeta^{2n+1} \sin(2n+1)\theta_\zeta + \rho_\zeta^{2n+2} \cos 2n\theta_\zeta) \end{aligned} \right]$$

L'expression de $\phi(\bar{\zeta})$ est obtenue à partir des relations précédentes en changeant le signe des fonctions trigonométriques impaires, soit :

$$\textcircled{3} \quad \operatorname{Re}[\phi(\bar{\zeta})] = \frac{1}{\rho_{\zeta}^2 - 2\rho_{\zeta} \sin \theta_{\zeta} + 1} \left[\begin{aligned} & \sum \alpha_{2n} (\rho_{\zeta}^{2n+1} \cos(2n-1)\theta_{\zeta} - \rho_{\zeta}^{2n} \sin 2n\theta_{\zeta}) + \\ & + \sum \beta_{2n+1} (\rho_{\zeta}^{2n+1} \cos(2n+1)\theta_{\zeta} + \rho_{\zeta}^{2n+2} \sin 2n\theta_{\zeta}) \end{aligned} \right]$$

$$\textcircled{4} \quad \operatorname{Im}[\phi(\bar{\zeta})] = \frac{1}{\rho_{\zeta}^2 - 2\rho_{\zeta} \sin \theta_{\zeta} + 1} \left[\begin{aligned} & -\sum \alpha_{2n} (\rho_{\zeta}^{2n+1} \sin(2n-1)\theta_{\zeta} + \rho_{\zeta}^{2n} \cos 2n\theta_{\zeta}) + \\ & + \sum \beta_{2n+1} (\rho_{\zeta}^{2n+2} \cos 2n\theta_{\zeta} - \rho_{\zeta}^{2n+1} \sin(2n+1)\theta_{\zeta}) \end{aligned} \right]$$

L'expression de $\overline{\phi'(\zeta)}$ s'écrit :

$$\overline{\phi'(\zeta)} = \frac{\sum_{2n} \alpha_{2n} \bar{\zeta}^{2n-1} - i \sum (2n+1) \beta_{2n+1} \bar{\zeta}^{2n}}{\bar{\zeta} - i} - \frac{\sum \alpha_{2n} \bar{\zeta}^{2n} - i \sum \beta_{2n+1} \bar{\zeta}^{2n+1}}{(\bar{\zeta} - i)^2}$$

soit encore

$$\overline{\phi'(\zeta)} = A - B$$

Après multiplication par les complexes conjugués de leur dénominateurs, les termes A et B deviennent :

$$A = \frac{\sum_{2n} \alpha_{2n} \rho_{\zeta}^{2n} e^{-i(2n-2)\theta_{\zeta}} + \sum (2n+1) \beta_{2n+1} \rho_{\zeta}^{2n} e^{-i2n\theta_{\zeta}}}{\rho_{\zeta}^2 + 2\rho_{\zeta} \sin \theta_{\zeta} + 1}$$

$$+ i \frac{\sum_{2n} \alpha_{2n} \rho_{\zeta}^{2n+1} e^{-i(2n-1)\theta_{\zeta}} - \sum (2n+1) \beta_{2n+1} \rho_{\zeta}^{2n+1} e^{-i(2n-1)\theta_{\zeta}}}{\rho_{\zeta}^2 + 2\rho_{\zeta} \sin \theta_{\zeta} + 1}$$

$$B = \frac{\sum \alpha_{2n} \rho_{\zeta}^{2n+2} e^{-i(2n-2)\theta_{\zeta}} + 2 \sum \beta_{2n+1} \rho_{\zeta}^{2n+2} e^{-i2n\theta_{\zeta}} - \sum \alpha_{2n} \rho_{\zeta}^{2n} e^{-i2n\theta_{\zeta}}}{\rho_{\zeta}^4 + 4 \rho_{\zeta}^3 \sin \theta_{\zeta} + 2 \rho_{\zeta}^2 (2 - \cos 2\theta_{\zeta}) + 4 \rho_{\zeta} \sin \theta_{\zeta} + 1} +$$

$$+ i \frac{\sum \beta_{2n+1} \rho_{\zeta}^{2n+1} e^{-i(2n+1)\theta_{\zeta}} + 2 \sum \alpha_{2n} \rho_{\zeta}^{2n+1} e^{-i(2n-1)\theta_{\zeta}} - \sum \beta_{2n+1} \rho_{\zeta}^{2n+3} e^{-i(2n-1)\theta_{\zeta}}}{\rho_{\zeta}^4 + 4 \rho_{\zeta}^3 \sin \theta_{\zeta} + 2 \rho_{\zeta}^2 (2 - \cos 2\theta_{\zeta}) + 4 \rho_{\zeta} \sin \theta_{\zeta} + 1}$$

En conséquence, les parties réelles et imaginaires de chacun des termes s'écrivent :

$$\textcircled{5} \quad \text{Re}[A] = \frac{1}{\rho_{\zeta}^2 + 2\rho_{\zeta} \sin \theta_{\zeta} + 1} \left[\begin{array}{l} \sum 2n \alpha_{2n} (\rho_{\zeta}^{2n} \cos(2n-2)\theta_{\zeta} + \rho_{\zeta}^{2n-1} \sin(2n-1)\theta_{\zeta}) + \\ + \sum (2n+1) \beta_{2n+1} (\rho_{\zeta}^{2n} \cos 2n\theta_{\zeta} - \rho_{\zeta}^{2n+1} \sin(2n-1)\theta_{\zeta}) \end{array} \right]$$

$$\textcircled{6} \quad \text{Im}[A] = \frac{1}{\rho_{\zeta}^2 + 2\rho_{\zeta} \sin \theta_{\zeta} + 1} \left[\begin{array}{l} \sum 2n \alpha_{2n} (\rho_{\zeta}^{2n-1} \cos(2n-1)\theta_{\zeta} - \rho_{\zeta}^{2n} \sin(2n-2)\theta_{\zeta}) - \\ - \sum (2n+1) \beta_{2n+1} (\rho_{\zeta}^{2n} \sin 2n\theta_{\zeta} + \rho_{\zeta}^{2n+1} \cos(2n-1)\theta_{\zeta}) \end{array} \right]$$

En posant :

$$\text{DEN} = \rho_{\zeta}^4 + 4 \rho_{\zeta}^3 \sin \theta_{\zeta} + 2 \rho_{\zeta}^2 (2 - \cos 2\theta_{\zeta}) + 4 \rho_{\zeta} \sin \theta_{\zeta} + 1$$

nous obtenons pour B :

$$\textcircled{7} \quad \text{Re}[B] = \frac{1}{\text{DEN}} \left[\begin{array}{l} \sum \alpha_{2n} (\rho_{\zeta}^{2n+2} \cos(2n-2)\theta_{\zeta} + 2 \rho_{\zeta}^{2n+1} \sin(2n-1)\theta_{\zeta} - \rho_{\zeta}^{2n} \cos 2n\theta_{\zeta}) + \\ + \sum \beta_{2n+1} (\rho_{\zeta}^{2n+1} \sin(2n+1)\theta_{\zeta} + 2 \rho_{\zeta}^{2n+2} \cos 2n\theta_{\zeta} - \rho_{\zeta}^{2n+3} \sin(2n-1)\theta_{\zeta}) \end{array} \right]$$

$$\textcircled{8} \quad \text{Im} [B] = \frac{1}{\text{DEN}} \left[\begin{aligned} & \sum \alpha_{2n} (-\rho_\zeta^{2n+2} \sin(2n-2)\theta_\zeta + 2\rho_\zeta^{2n+1} \cos(2n-1)\theta_\zeta + \rho_\zeta^{2n} \sin 2n\theta_\zeta) + \\ & + \sum \beta_{2n+1} (\rho_\zeta^{2n+1} \cos(2n+1)\theta_\zeta - 2\rho_\zeta^{2n+2} \sin 2n\theta_\zeta - \rho_\zeta^{2n+3} \cos(2n-1)\theta_\zeta) \end{aligned} \right]$$

Le terme $\overline{\omega'_2(\zeta)}$ s'écrit :

$$\overline{\omega'_2(\zeta)} = \frac{1}{2} \frac{\rho_\zeta^2 e^{-i2\theta_\zeta} + 1}{\rho_\zeta^2 e^{-i2\theta_\zeta}}$$

d'où il vient :

$$\textcircled{9} \quad \text{Re} [\overline{\omega'_2(\zeta)}] = \frac{1}{2\rho_\zeta^2} (\rho_\zeta^2 + \cos 2\theta_\zeta)$$

$$\textcircled{10} \quad \text{Im} [\overline{\omega'_2(\zeta)}] = \frac{1}{2\rho_\zeta^2} \sin 2\theta_\zeta$$

obtenons : Pour les termes relatifs à la première transformation $\omega_1(w)$ nous

$$\omega_1(w) = z \quad \text{par définition}$$

$$\omega_1(\bar{w}) = r_i e^{i\theta_z} e^{-\ln \frac{r_z}{r_i}}$$

d'où
$$\omega_1(\bar{w}) = \frac{r_i^2}{z}$$

enfin
$$\overline{\omega'_1(w)} = iz$$

L'ensemble de ces trois termes permet d'écrire :

$$\textcircled{11} \quad \text{Re} \left[\frac{\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w})}{\overline{\omega'_1(w)}} \right] = \left(1 - \frac{r_i^2}{r_z^2} \right) \sin 2\theta_z$$

$$\textcircled{12} \quad \text{Im} \left[\frac{\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w})}{\overline{\omega'_1(w)}} \right] = - \left(1 - \frac{r_i^2}{r_z^2} \right) \cos 2\theta_z$$

Dans le but d'alléger l'écriture, les expressions utilisées présentement seront écrites au moyen des nombres cerclés définis précédemment.

Ainsi :

$$\frac{\overline{\phi'(\zeta)}}{\omega'_2(\zeta)} = \frac{(\textcircled{5}-\textcircled{7})\textcircled{9} + (\textcircled{6}-\textcircled{8})\textcircled{10} + i[(\textcircled{6}-\textcircled{8})\textcircled{9} - (\textcircled{5}-\textcircled{7})\textcircled{10}]}{\|\textcircled{9} + i\textcircled{10}\|^2}$$

Avec :

$$\|\textcircled{9} + i\textcircled{10}\|^2 = \frac{l_w^2}{4\rho_\zeta^4} (\rho_\zeta^4 + 2\rho_\zeta^2 \cos 2\theta_\zeta + 1)$$

Compte tenu de ce calcul intermédiaire, les expressions des résultantes dans le repère cartésien lié au plan complexe paramétrés dans le plan ζ sont données par :

$$(3.30) \left[R_y \right]_k^{k+1} = - \left[\textcircled{1} - \textcircled{3} + \frac{(\textcircled{5}-\textcircled{7})\textcircled{9}\textcircled{11} + (\textcircled{6}-\textcircled{8})\textcircled{10}\textcircled{11} - (\textcircled{6}-\textcircled{8})\textcircled{9}\textcircled{12} + (\textcircled{5}-\textcircled{7})\textcircled{10}\textcircled{12}}{\|\textcircled{9} + i\textcircled{10}\|^2} \right]_k^{k+1}$$

$$(3.30) \left[R_x \right]_k^{k+1} = \left[\textcircled{2} - \textcircled{4} + \frac{(\textcircled{5}-\textcircled{7})\textcircled{9}\textcircled{12} + (\textcircled{6}-\textcircled{8})\textcircled{10}\textcircled{12} + (\textcircled{6}-\textcircled{8})\textcircled{9}\textcircled{11} - (\textcircled{5}-\textcircled{7})\textcircled{10}\textcircled{11}}{\|\textcircled{9} + i\textcircled{10}\|^2} \right]_k^{k+1}$$

Expressions du module et de l'argument de ζ :

Compte tenu de la transformation conforme utilisée pour passer du plan ζ au plan w , l'expression de ζ définissant la transformation inverse est une fonction multiforme puisque :

$$\zeta = \frac{w}{l_w} + \frac{1}{l_w} (w^2 + l_w^2)^{1/2}$$

La fonction $(w^2 + l_w^2)^{1/2}$ présente deux points de ramifications en $w = \pm i l_w$. En introduisant le segment $[-i l_w, i l_w]$ comme discontinuité et avec les notations de la figure 3.12, il vient :

$$(w^2 + l_w^2)^{1/2} = (\rho_1 \rho_2)^{1/2} e^{i \left[\frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} + (k_1 + k_2)\pi \right]}$$

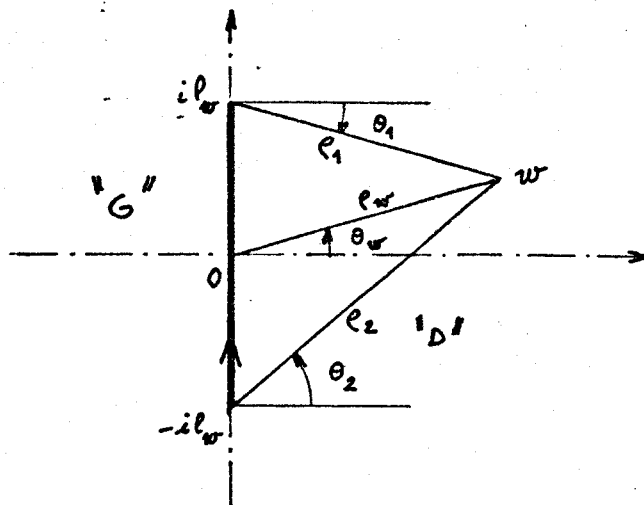


Fig. 3.12

Le sens de parcours de la discontinuité étant choisi comme celui de l'axe des imaginaires, il partage le plan en deux régions dénommées gauche G et droite D.

La détermination uniforme retenue est telle que pour tout w appartenant au bord droit de la discontinuité :

$$(w^2 + l^2)^{1/2} = (\rho_1 \rho_2)^{1/2}$$

En conséquence, l'expression de ζ s'écrit en posant $w = \rho_w e^{i\theta_w}$

$$(3.31) \quad \zeta = \frac{\rho_w}{l_w} e^{i\theta_w} + \frac{(\rho_1 \rho_2)^{1/2}}{l_w} e^{i\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}$$

Cette relation fournit pour le module et l'argument de

$$(3.32) \quad \rho_\zeta = \frac{1}{l_w} \left[\left(\rho_w \cos \theta_w + (\rho_1 \rho_2)^{1/2} \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right)^2 + \left(\rho_w \sin \theta_w + (\rho_1 \rho_2)^{1/2} \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\theta_\zeta = \text{Arctg} \left[\frac{\rho_w \sin \theta_w + (\rho_1 \rho_2)^{1/2} \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)}{\rho_w \cos \theta_w + (\rho_1 \rho_2)^{1/2} \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} \right]$$

La première transformation conforme $z = \omega_1(w)$ permet de définir les expressions de ρ_w et θ_w soit :

$$(3.33) \quad \rho_w = \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_z \right)^2 + \left(\ln \left(\frac{r_z}{r_i} \right) \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\theta_w = \text{Arctg} \left[\ln \left(\frac{r_z}{r_i} \right) / \left(\frac{\pi}{2} - \theta_z \right) \right]$$

Les modules et arguments ρ_1 , ρ_2 , θ_1 et θ_2 sont également définis à partir de l'expression de w soit :

$$(3.34) \left\{ \begin{aligned} \rho_1 &= \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_z \right)^2 + \left(\ln \left(\frac{r_z}{r_i} \right) - l_w \right)^2 \right]^{1/2} \\ \rho_2 &= \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_z \right)^2 + \left(\ln \left(\frac{r_z}{r_i} \right) + l_w \right)^2 \right]^{1/2} \\ \theta_1 &= \text{Arctg} \left[\frac{\ln \left(\frac{r_z}{r_i} \right) - l_w}{\frac{\pi}{2} - \theta_z} \right] \\ \theta_2 &= \text{Arctg} \left[\frac{\ln \left(\frac{r_z}{r_i} \right) + l_w}{\frac{\pi}{2} - \theta_z} \right] \end{aligned} \right.$$

La connaissance de tous ces paramètres est nécessaire pour définir le contour extérieur dans le plan ζ .

Déplacements

L'expression du déplacement d'un point de la région II est donné par la relation (3.23) soit :

$$2 G(u + iv) = \eta \phi(\zeta) + \phi(\bar{\zeta}) - \left[\frac{[\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w})]}{\omega'_1(w)} \right] \frac{\overline{\phi'_1(\zeta)}}{\omega'_2(\zeta)}$$

Cette relation est constituée de termes identiques à ceux intervenant dans le calcul de la résultante sur un élément de contour, ce qui permet d'explicitier facilement les relations de définition de u et v en fonction des expressions 1 à 12 définies précédemment sous la forme :

$$(3.35) \left\{ \begin{aligned} 2Gu &= \eta \textcircled{1} + \textcircled{3} - \frac{(\textcircled{5}-\textcircled{7}) \textcircled{9} \textcircled{11} + (\textcircled{6}-\textcircled{8}) \textcircled{10} \textcircled{11} - (\textcircled{6}-\textcircled{8}) \textcircled{9} \textcircled{12} + (\textcircled{5}-\textcircled{7}) \textcircled{10} \textcircled{12}}{\| \textcircled{9} + i \textcircled{10} \|^2} \\ 2Gv &= \eta \textcircled{2} + \textcircled{4} - \frac{(\textcircled{5}-\textcircled{7}) \textcircled{9} \textcircled{12} + (\textcircled{6}-\textcircled{8}) \textcircled{10} \textcircled{12} + (\textcircled{6}-\textcircled{8}) \textcircled{9} \textcircled{11} - (\textcircled{5}-\textcircled{7}) \textcircled{10} \textcircled{11}}{\| \textcircled{9} + i \textcircled{10} \|^2} \end{aligned} \right.$$

b) Etude de la région III

Résultante

L'expression de la résultante utilisée dans ce cas correspond à la relation (3.19) écrite dans le repère cartésien lié au plan z paramétré en fonction de w :

$$i \left[R_x + i R_y \right]_k^{k+1} = \left[\phi_3(w) - \phi_3(\bar{w}) + \left[\frac{(\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w}))}{\omega'_1(w)} \right] \phi'_3(w) \right]_k^{k+1}$$

L'explicitation de cette relation est effectuée au moyen de la relation (3.27) dans laquelle la valeur $w_0 = \frac{\pi}{2}$.

La relation (3.14) conduit à :

$$w - w_0 = -\theta_z + i \ln\left(\frac{r_z}{r_i}\right)$$

En posant $(w-w_0) = \rho' e^{i\theta'}$, il vient :

$$(3.36) \quad \rho' = \left[\theta_z^2 + \left(\ln\left(\frac{r_z}{r_i}\right) \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\theta' = \text{Arctg} \left[\frac{\ln\left(\frac{r_z}{r_i}\right)}{-\theta_z} \right]$$

Compte tenu de ces définitions, chaque terme du membre de droite de la résultante peut s'écrire :

$$\phi_3(w) = \sum \gamma_{2n-2} \rho'^{2n-2} e^{i(2n-2)\theta'} + i \sum \delta_{2n-1} \rho'^{2n-1} e^{i(2n-1)\theta'}$$

$$\phi_3(\bar{w}) = \sum \gamma_{2n-2} \rho'^{2n-2} e^{-i(2n-2)\theta'} + i \sum \delta_{2n-1} \rho'^{2n-1} e^{-i(2n-1)\theta'}$$

d'où l'expression

$$\phi_3(w) - \phi_3(\bar{w}) = -2 \sum \delta_{2n-1} \rho'^{2n-1} \sin(2n-1)\theta' + 2i \sum \gamma_{2n-2} \rho'^{2n-2} \sin(2n-2)\theta'$$

Pour l'expression de $\overline{\phi'(w)}$ il vient :

$$\overline{\phi'(w)} = \sum (2n-2) \gamma_{2n-2} \rho'^{2n-3} e^{-i(2n-3)\theta'} - i \sum (2n-1) \delta_{2n-1} \rho'^{2n-2} e^{-i(2n-2)\theta'}$$

L'expression du terme $\frac{\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w})}{\omega_1'(w)}$ déjà définie dans l'étude de la région II reste :

$$\frac{\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w})}{\omega_1'(w)} = -i \left(1 - \frac{r_i^2}{r_z} \right) e^{i2\theta_z}$$

Compte tenu de ces expressions, chaque composante de la résultante complexe s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \left[R_x \right]_r^{k+1} &= \Sigma \gamma_{2n-2} \left[2\rho'^{2n-2} \sin(2n-2)\theta' - \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] (2n-2)\rho'^{2n-3} \cos \left[(2n-3)\theta' + 2\theta_z \right] \right]_k^{k+1} \\
 &\quad - \Sigma (2n-1) \delta_{2n-1} \left[\left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] \rho'^{2n-2} \sin \left[2\theta_z - (2n-2)\theta' \right] \right]_k^{k+1} \\
 \left[R_y \right]_k^{k+1} &= - \Sigma (2n-2) \gamma_{2n-2} \left[\left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] \rho'^{2n-3} \sin \left[(2n-3)\theta' + 2\theta_z \right] \right]_k^{k+1} \\
 &\quad + \Sigma \delta_{2n-1} \left[2\rho'^{2n-1} \sin(2n-1)\theta' + \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] (2n-1)\rho'^{2n-2} \cos \left[2\theta_z - (2n-2)\theta' \right] \right]_k^{k+1}
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

Déplacements

L'expression qui fournit le déplacement d'un point de la région III est donnée par la relation (3.20) soit :

$$2 G(u + iv) = \eta \phi(w) + \phi(\bar{w}) - \frac{[\omega_1(w) - \omega_1(\bar{w})]}{\omega_1'(w)} \phi'(w)$$

L'explicitation de chacun des termes de cette relation, réalisée lors de la recherche de l'expression de la résultante permet alors de définir chacune des composantes du déplacement sous la forme :

$$\begin{aligned}
 2Gu &= \Sigma \gamma_{2n-2} \left[\rho'^{2n-2} \cos(2n-2)\theta' (\eta+1) + \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] (2n-2)\rho'^{2n-3} \sin \left[(2n-3)\theta' + 2\theta_z \right] \right] \\
 &\quad + \Sigma \delta_{2n-1} \left[\rho'^{2n-1} \sin(2n-1)\theta' (1-\eta) - \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] (2n-1)\rho'^{2n-2} \cos \left[2\theta_z - (2n-2)\theta' \right] \right] \\
 2Gv &= \Sigma \gamma_{2n-2} \left[\rho'^{2n-2} \sin(2n-2)\theta' (\eta-1) - \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] (2n-2)\rho'^{2n-3} \cos \left[(2n-3)\theta' + 2\theta_z \right] \right] \\
 &\quad + \Sigma \delta_{2n-1} \left[\rho'^{2n-1} \cos(2n-1)\theta' (\eta+1) - \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] (2n-1)\rho'^{2n-2} \sin \left[2\theta_z - (2n-2)\theta' \right] \right]
 \end{aligned}$$

c) Continuité entre les régions II et III.

Pour tout segment $[k, k+1]$ du rayon I J séparant les régions II et III, il suffit d'écrire deux conditions :

i) l'égalité des résultantes déterminées pour chacune des régions par les relations (3.29) et (3.35) soit :

$$\left(\left[R_x + i R_y \right]_k^{k+1} \right)_{II} = \left(\left[R_x + i R_y \right]_k^{k+1} \right)_{III}$$

ii) l'égalité des déplacements déterminés par les relations (3.20) et (3.23) explicitées au moyen des relations (3.25) et (3.27) sont :

$$\left(\left[u + iv \right]_k \right)_{II} = \left(\left[u + iv \right]_k \right)_{III}$$

Le programme informatique de résolution numérique figure à l'annexe A 5.

Son exploitation n'a pas permis, à ce jour, d'obtenir des résultats comparatifs.

Aucune conclusion ne peut donc être apportée sur la précision de la méthode des transformations conformes ; une mise au point définitive étant nécessaire.

IV - MÉTHODE DES DISCONTINUITÉS DE DÉPLACEMENTS

4.1 PRESENTATION DE LA METHODE

Les méthodes des différences finies ou des éléments finis utilisées en élasticité, basées sur les lois de comportement du matériau définies en chacun de ses points nécessitent, dans leur application, une discrétisation entière du domaine étudié. Il s'en suit que :

i) la taille des systèmes d'équations algébriques à résoudre est en général très grande.

ii) un maillage est spécifique à chaque configuration du domaine étudié. Toute modification, aussi petite soit-elle, d'une portion du domaine, nécessite la redéfinition intégrale de la discrétisation.

L'intérêt de ces méthodes est donc limité par le coût d'exploitation relatif à une certaine rigidité de leur mise en place ; elles sont donc mal adaptées pour l'étude de la fissuration.

La méthode des discontinuités de déplacements [2] s'apparente aux méthodes des équations intégrales en ce sens qu'elle est basée également sur l'utilisation des fonctions d'influences pour construire un système d'équations dépendant uniquement des conditions imposées sur le contour.

Toutefois, elle diffère de ces dernières par le type d'inconnues en fonction desquelles sont exprimées les grandeurs élastiques.

La méthode proposée est basée sur la connaissance des déplacements dans un milieu homogène, isotrope, linéairement élastique en état de déformation plane. Elle possède pour point de départ les relations de Neuber Papkovitch.

La résolution numérique repose sur l'écriture d'un système d'équations algébriques formulées en déplacement nécessitant, dans le cas présent, la rectification du contour.

On considère alors que le contour est soumis à un déplacement uniforme du plan infini sur chaque segment de discrétisation. Les composantes du déplacement sont alors déterminées de façon à vérifier les conditions aux limites, en contraintes et déplacements, imposées sur l'ensemble du contour.

Les relations de Neuber Papkovitch ainsi que les équations du champ élastique permettent alors de définir les contraintes et les déplacements en tout point du domaine.

4.2 EXPOSE DE LA METHODE ; RELATIONS FONDAMENTALES

4.2.1. Solutions particulières de base

Dans le cas d'un milieu homogène, isotrope et linéairement élastique en état de déformation plane, la relation de Neuber Papkovitch s'écrit :

$$(4.1) \quad \vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{B} - \frac{1}{4(1-\nu)} \text{grad} \left[\vec{OM} \cdot \vec{B} + B_0 \right]$$

avec :

\vec{u}_0 le vecteur déplacement, solution élastique particulière avec le champ de pesanteur.

\vec{B} le potentiel vecteur dont dépendent les déplacements.

B_0 une fonction scalaire harmonique.

L'hypothèse de l'absence de forces de pesanteur étant retenue, la condition imposée est alors :

$$\vec{u}_0 = 0 ;$$

En conséquence, la relation (4.1) s'écrit en repère cartésien $O/\vec{x}, \vec{z}$:

$$(4.2) \left\{ \begin{array}{l} u_x = B_x - \frac{1}{4(1-\nu)} \left[x B_x + z B_z + B_0 \right] \\ u_z = B_z - \frac{1}{4(1-\nu)} \left[x B_x + z B_z + B_0 \right] \end{array} \right.$$

La détermination des déplacements est donc liée à la définition de \vec{B} et B_0 choisie pour respecter les conditions aux limites que l'on s'est imposées.

La méthode des discontinuités de déplacement a initialement été introduite dans l'étude des champs de contraintes liés à la présence de fissure en milieu infini.

En état de déformation plane rapportée au plan (x,z) les deux modes fondamentaux de chargement de fissure qui se présentent sont (fig. 4.1).

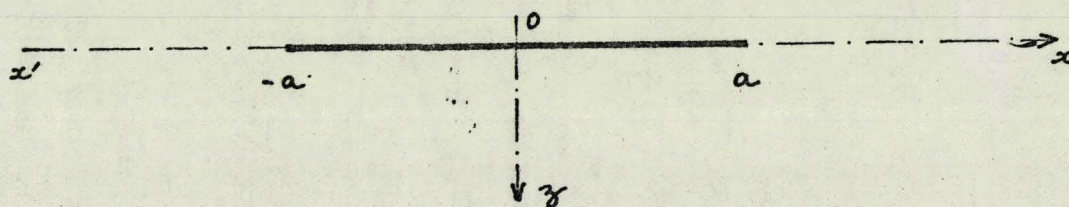


Figure 4.1.

a) le mode 1 ou de traction pour lequel les conditions aux limites s'écrivent :

$$\sigma_{xz}(x,0) = 0 \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$\sigma_{zz}(x,0) \neq 0 \quad \text{quel que soit } x \text{ appartenant à l'axe } \vec{x}'x \text{ nulle à la limite sur } [-a, +a]$$

b) le mode 2 ou de cisaillement relatif aux conditions :

$$\sigma_{zz}(x,0) = 0 \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$\sigma_{zx}(x,0) \neq 0 \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad \text{sauf éventuellement sur le segment } [-a, +a]$$

Le choix de ces conditions aux limites pour la détermination de \vec{B} et B_0 conduit, compte tenu des relations contraintes déformations et [4.2], aux définitions suivantes :

$$\text{* pour } \sigma_{xz}(x,0) = 0 \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_x &= 4(1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ B_0 &= 4(1-\nu)(1-2\nu) \phi \end{aligned}$$

$$\text{* pour } \sigma_{zz}(x,0) = 0 \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_x &= 4(1-\nu) \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ B_0 &= 8(1-\nu)^2 \int \frac{\partial \chi}{\partial x} dz \end{aligned}$$

ϕ et χ étant deux fonctions harmoniques telles que $\Delta\phi = \Delta\chi = 0$ et ν le coefficient de Poisson du milieu étudié.

L'existence d'une fissure dans un milieu homogène introduit une discontinuité dans le champ des déplacements. Il est donc possible de préciser les fonctions ϕ et χ à partir de conditions aux limites en déplacements écrites pour tout élément appartenant à la fissure.

Une solution particulièrement intéressante correspond au cas d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment fini de la fissure.

Deux possibilités se présentent pour l'élément présenté à la figure 4.1.

i) une discontinuité de déplacement normale \hat{u}_z telle que :

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} u_z(x,z) - \lim_{z \rightarrow 0^-} u_z(x,z) = \hat{u}_z \quad |x| < a$$

qui associée aux conditions :

$$\sigma_{xz}(x,0) = 0 \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$u_z(x,0) = 0 \quad |x| > a$$

fournit pour la fonction ϕ la relation :

$$(4.5) \quad \phi(x, z) = \frac{\hat{u}_z}{4\pi(1-\nu)} \left[\begin{array}{l} z \operatorname{Arctg}\left(\frac{x+a}{z}\right) - z \operatorname{Arctg}\left(\frac{x-a}{z}\right) + (x+a) \operatorname{Log} \left[(x+a)^2 + z^2 \right]^{1/2} - \\ - (x-a) \operatorname{Log} \left[(x-a)^2 + z^2 \right]^{1/2} \end{array} \right]$$

ii) une discontinuité de déplacement tangentielle \hat{u}_x telle que :

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} u_x(x, z) - \lim_{z \rightarrow 0^-} u_x(x, z) = \hat{u}_x \quad |x| < a$$

qui associée aux conditions :

$$\sigma_{zz}(x, 0) = 0 \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$u_x(x, 0) = 0 \quad |x| > a$$

fournit pour la fonction χ la relation :

$$(4.6) \quad \chi(x, z) = \frac{\hat{u}_x}{4\pi(1-\nu)} \left[\begin{array}{l} z \operatorname{Arctg}\left(\frac{x+a}{z}\right) - z \operatorname{Arctg}\left(\frac{x-a}{z}\right) + (x+a) \operatorname{Log} \left[(x+a)^2 + z^2 \right]^{1/2} - \\ - (x-a) \operatorname{Log} \left[(x-a)^2 + z^2 \right]^{1/2} \end{array} \right]$$

L'ensemble de ces solutions particulières, prises seules ou combinées, permet de déterminer les solutions correspondantes aux conditions aux limites imposées par l'étude de problèmes spécifiques.

4.2.2. Solution générale dans le cas d'un milieu fini ou infini.

D'une façon générale, l'analyse d'un problème par la méthode des discontinuités de déplacements conduit à considérer N segments de discontinuité orientés arbitrairement dans le plan relatif au repère $O/\vec{x}, \vec{z}$.

Le choix d'un repère local $I/\vec{\xi}, \vec{\zeta}$ associé à l'élément i (fig. 4.2) permet d'exprimer dans ce repère les relations (4.3) à (4.6) en termes de fonctions $\phi(\xi, \zeta)$ et $\chi(\xi, \zeta)$, la procédure étant identique pour chaque segment.

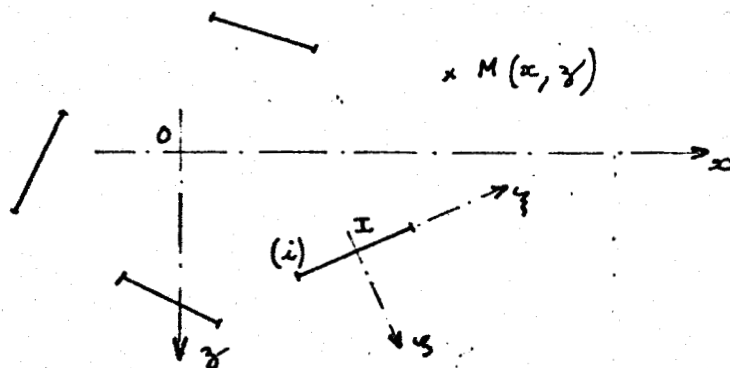


Fig. 4.2

Les déplacements d'un point $M(\xi, \zeta)$ quelconque du plan dus au $i^{\text{ème}}$ segment, sont alors donnés par les relations (4.2) explicitées au moyen des relations (4.3) et (4.4) combinées soit, :

$$u_{\xi} = - (1-2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + 2(1-\nu) \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right)$$

$$u_{\zeta} = 2(1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + (1-2\nu) \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right)$$

Les déplacements u_x et u_y exprimés dans le repère général $O/\vec{x}, \vec{y}$ s'obtiennent alors facilement au moyen des formules de transformations de changement de repère permettant ensuite, par les relations de l'élasticité linéaire, de déterminer les contraintes et déplacements au point M .

Les contraintes et déplacements au point M dues à l'action de l'ensemble des N segments s'obtiennent donc par la somme de N termes relatifs à chaque discontinuité.

En particulier, les fonctions ϕ et χ étant linéaires en \hat{u}_t et \hat{u}_n les contraintes et déplacements du milieu I du $i^{\text{ème}}$ segment dues à la présence des N discontinuités peuvent s'écrire sous la forme

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_t)_i = \sum_{j=1}^N (A_{tt})_{ij} (\hat{u}_t)_j + \sum_{j=1}^N (A_{tn})_{ij} (\hat{u}_n)_j \\ (\sigma_n)_i = \sum_{j=1}^N (A_{nt})_{ij} (\hat{u}_t)_j + \sum_{j=1}^N (A_{nn})_{ij} (\hat{u}_n)_j \end{array} \right.$$

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u_t)_i = \sum_{j=1}^N (B_{tt})_{ij} (\hat{u}_t)_j + \sum_{j=1}^N (B_{tn})_{ij} (\hat{u}_n)_j \\ (u_n)_i = \sum_{j=1}^N (B_{nt})_{ij} (\hat{u}_t)_j + \sum_{j=1}^N (B_{nn})_{ij} (\hat{u}_n)_j \end{array} \right.$$

σ_t, σ_n, u_t et u_n étant les contraintes et déplacements tangents et normaux du point I milieu du $i^{\text{ème}}$ segment obtenus après passage des expressions du repère général au repère local.

Les conditions aux limites appliquées sur le contour d'un domaine, en l'occurrence sur chaque discontinuité de déplacement, étant définies en contraintes, en déplacements ou en mode mixte, il est possible, par l'intermédiaire des systèmes d'équations algébriques (4.7) et (4.8) de déterminer les discontinuités de déplacement \hat{u}_n et \hat{u}_t répondant au problème.

La détermination des contraintes, déplacements et déformations en tout point du domaine étudié est alors possible au moyen des relations générales.

$$u_x = \frac{\hat{u}_\zeta}{4\pi(1-\nu)} \left[\{l^2 + (l^2 - n^2)(1 - 2\nu)\} F_1(\xi, \zeta) + nl(3 - 4\nu) F_2(\xi, \zeta) - \zeta \{nF_3(\xi, \zeta) - lF_4(\xi, \zeta)\} \right] \\ + \frac{\hat{u}_\xi}{4\pi(1-\nu)} \left[nl(3 - 4\nu) F_1(\xi, \zeta) + \{n^2 + (n^2 - l^2)(1 - 2\nu)\} F_2(\xi, \zeta) + \zeta \{lF_3(\xi, \zeta) + nF_4(\xi, \zeta)\} \right]$$

$$u_z = \frac{\hat{u}_\zeta}{4\pi(1-\nu)} \left[nl(3 - 4\nu) F_1(\xi, \zeta) + \{n^2 + (n^2 - l^2)(1 - 2\nu)\} F_2(\xi, \zeta) - \zeta \{lF_3(\xi, \zeta) + nF_4(\xi, \zeta)\} \right] \\ - \frac{\hat{u}_\xi}{4\pi(1-\nu)} \left[\{l^2 + (l^2 - n^2)(1 - 2\nu)\} F_1(\xi, \zeta) + nl(3 - 4\nu) F_2(\xi, \zeta) + \zeta \{nF_3(\xi, \zeta) - lF_4(\xi, \zeta)\} \right]$$

$$\sigma_{xx} = \frac{G\hat{u}_\zeta}{2\pi(1-\nu)} \left[2nlF_3(\xi, \zeta) + (n^2 - l^2)F_4(\xi, \zeta) + \zeta \{lF_5(\xi, \zeta) + nF_6(\xi, \zeta)\} \right] \\ + \frac{G\hat{u}_\xi}{2\pi(1-\nu)} \left[2n^2F_3(\xi, \zeta) - 2nlF_4(\xi, \zeta) + \zeta \{nF_5(\xi, \zeta) - lF_6(\xi, \zeta)\} \right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{G\hat{u}_\zeta}{2\pi(1-\nu)} \left[2nlF_3(\xi, \zeta) + (n^2 - l^2)F_4(\xi, \zeta) - \zeta \{lF_5(\xi, \zeta) + nF_6(\xi, \zeta)\} \right] \\ - \frac{G\hat{u}_\xi}{2\pi(1-\nu)} \left[2l^2F_3(\xi, \zeta) + 2nlF_4(\xi, \zeta) + \zeta \{nF_5(\xi, \zeta) - lF_6(\xi, \zeta)\} \right]$$

$$\sigma_{xz} = \frac{G\hat{u}_\zeta}{2\pi(1-\nu)} \zeta \{lF_6(\xi, \zeta) - nF_5(\xi, \zeta)\} \\ + \frac{G\hat{u}_\xi}{2\pi(1-\nu)} \left[F_4(\xi, \zeta) + \zeta \{lF_5(\xi, \zeta) + nF_6(\xi, \zeta)\} \right]$$

avec :

$$F_1(\xi, \zeta) = \frac{\partial f}{\partial x} = n \frac{\partial f}{\partial \xi} + l \frac{\partial f}{\partial z} = l \left[\tan^{-1} \left(\frac{\xi + a}{\zeta} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\xi - a}{\zeta} \right) \right] \\ + n [\log_e [(\xi + a)^2 + \zeta^2]^{\frac{1}{2}} - \log_e [(\xi - a)^2 + \zeta^2]^{\frac{1}{2}}]$$

$$F_2(\xi, \zeta) = \frac{\partial f}{\partial z} = -l \frac{\partial f}{\partial \xi} + n \frac{\partial f}{\partial z} = n \left[\tan^{-1} \left(\frac{\xi + a}{\zeta} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\xi - a}{\zeta} \right) \right] \\ - l [\log_e [(\xi + a)^2 + \zeta^2]^{\frac{1}{2}} - \log_e [(\xi - a)^2 + \zeta^2]^{\frac{1}{2}}]$$

$$F_3(\xi, \zeta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{(n^2 - l^2)\zeta - 2nl(\xi + a)}{(\xi + a)^2 + \zeta^2} - \frac{(n^2 - l^2)\zeta - 2nl(\xi - a)}{(\xi - a)^2 + \zeta^2}$$

$$F_4(\xi, \zeta) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{2nl\zeta + (n^2 - l^2)(\xi + a)}{(\xi + a)^2 + \zeta^2} + \frac{2nl\zeta + (n^2 - l^2)(\xi - a)}{(\xi - a)^2 + \zeta^2}$$

$$F_5(\xi, \zeta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} = \frac{n(n^2 - 3l^2)[(\xi + a)^2 - \zeta^2] + 2l(3n^2 - l^2)(\xi + a)\zeta}{[(\xi + a)^2 + \zeta^2]^2} \\ - \frac{n(n^2 - 3l^2)[(\xi - a)^2 - \zeta^2] + 2l(3n^2 - l^2)(\xi - a)\zeta}{[(\xi - a)^2 + \zeta^2]^2}$$

$$F_6(\xi, \zeta) = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = \frac{2n(n^2 - 3l^2)(\xi + a)\zeta - l(3n^2 - l^2)[(\xi + a)^2 - \zeta^2]}{[(\xi + a)^2 + \zeta^2]^2} \\ - \frac{2n(n^2 - 3l^2)(\xi - a)\zeta - l(3n^2 - l^2)[(\xi - a)^2 - \zeta^2]}{[(\xi - a)^2 + \zeta^2]^2}$$

Chaque discontinuité possédant deux degrés de liberté en condition aux limites, la taille du système à résoudre sera alors $2 N \times 2 N$.

4.3 APPLICATION DE LA METHODE

4.3.1. Exploitations

La méthode des discontinuités de déplacement est utilisée présentement afin de déterminer le facteur d'intensité de contrainte K_1 (mode 1), en tête de fissure pour les deux problèmes envisagés précédemment, à savoir :

i) le cas du disque soumis à l'action de deux charges diamétrales concentrées comportant une fissure centrale dans le plan de chargement,

ii) le cas de l'anneau, supportant le même chargement et comportant deux fissures issues du contour intérieurement diamétralement opposées dans le plan des forces.

Les résultats obtenus par la méthode permettent d'envisager deux procédés de calcul du K_1 :

a) Le plan étant rapporté au repère $A/\vec{x}, \vec{z}$ défini en tête de fissure (fig. 4.3) la connaissance des contraintes en un ensemble de point M du segment A, x situés au voisinage immédiat de la tête de fissure est possible. Sachant que dans ce cas l'expression (1.4) définit la relation entre K_1 et les contraintes normales, la valeur de K_1 est facilement obtenue à partir de la courbe représentative de $\sigma_{zz}(x, 0) = f(x)$.

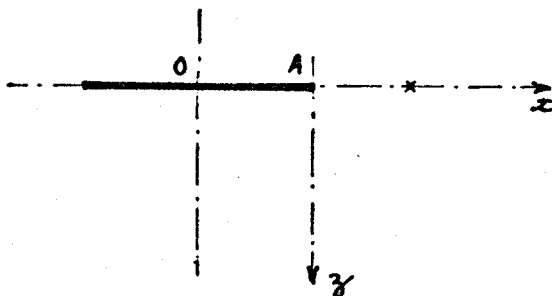


Figure 4.3

Cette exploitation de la méthode conduit à une valeur erronée de K_1 pour la raison suivante :

La répartition réelle des contraintes $\sigma_{zz}(x, 0) = g(x)$ croît très vite au voisinage de la tête de fissure. Il en résulte que, pour un segment de calcul proche de la discontinuité, la valeur de la contrainte moyennée réellement appliquée ne correspond pas à celle existant au milieu de ce segment dont la valeur est calculée par le programme.

En conséquence, le tracé de la $\sigma_{zz}(x, 0) = f(x)$ à partir des résultats nécessite la prise en compte d'un coefficient correcteur propre à chaque segment, notamment au voisinage immédiat de la fissure.

De ce fait, ce procédé de calcul du K_1 n'a pas été envisagé.

b) Une détermination basée sur le calcul de l'énergie disponible à l'avancement de la fissure : G .

D'après la théorie de Griffith, nous avons vu (chapitre 1) que, pour une propagation infinitésimale de fissure δl , l'énergie G disponible pour la création de nouvelles surfaces de discontinuité provient de la variation globale $\partial\psi$ de l'énergie élastique emmagasinée dans le corps et du potentiel des charges extérieures appliquées (1.8).

Pour un milieu linéairement élastique en état quasi statique, soumis à un ensemble de charges concentrées F_i , l'expression de $\partial\psi$ est donnée par le théorème de Clapeyron :

$$\partial\psi = \frac{1}{2} \sum F_i \partial U_i$$

U_i étant le déplacement du point d'application de la charge F_i dans sa propre direction.

L'expression de G déduite de la théorie de Griffith s'écrit donc :

$$G = - \frac{\partial\psi}{\partial l}$$

IRWIN | | a établi, par l'étude du champ de contraintes et de déplacements autour d'un défaut, la relation entre G et les facteurs d'intensité de contraintes. Dans le cas particulier d'une fissure sollicitée par des contraintes de traction perpendiculairement à son plan, cette relation s'écrit (1.9)

$$G = \frac{\alpha}{E} K_1^2$$

avec $\alpha = 1 - \nu^2$ en déformations planes

$\alpha = 1$ en contraintes planes

4.3.2. Discrétisations et résultats

L'exploitation de la méthode des discontinuités de déplacement a été réalisée par le calcul du taux de restitution d'énergie G .

a) Cas du disque

L'application numérique a été exécutée avec les données suivantes :

$$R = 2 \text{ cm}$$

$$b = 1 \text{ cm}$$

$$E = 30 \text{ bars}$$

$$\nu = 0,20$$

Discrétisation du contour

Deux discrétisations du contour extérieur ont été mises en oeuvre. La prise en compte par le programme de calcul des conditions de symétrie et la présence de la discontinuité sur l'axe Ox justifie le choix des domaines de calcul représentés aux figures 4.4. et 4.5.

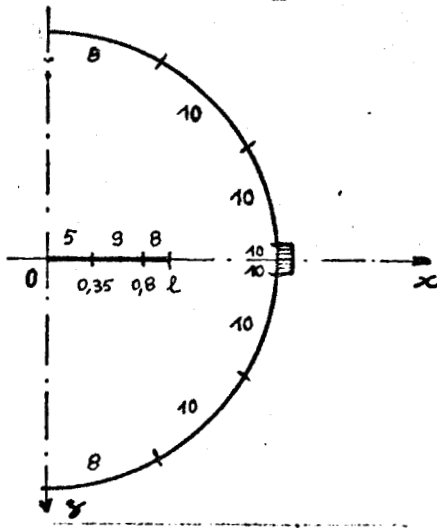


Figure 4.4

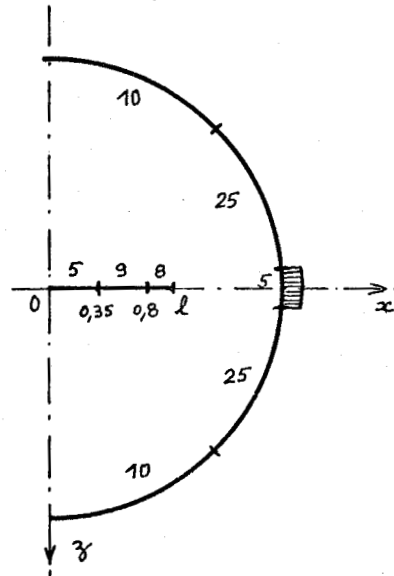


Figure 4.5

La présence de la fissure sur l'axe de symétrie \vec{Ox} ne permet pas au programme de calcul d'exploiter les conditions de double symétrie.

Chargement

Les discrétisations correspondant aux figures (4.4) et (4.5) seront repérées respectivement par les symboles D_1 et D_2 .

Deux types de chargement ont été appliqués au système D_1 :

i) Dans un premier cas, une contrainte normale $\sigma_n = 10^4$ bars est appliquée sur l'arc d'angle $\frac{\pi}{50}$ divisé en 20 parties égales, représenté à la figure 4.6.

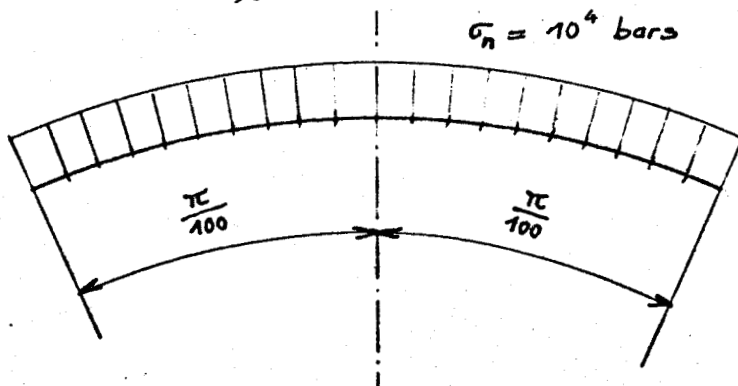


Figure 4.6

Les facteurs de forme calculés dans ce cas seront repérés par le symbole $(Y_{D_1})_1$.

ii) Dans un deuxième cas, la résolution du problème a été envisagée au moyen de la méthode de superposition des états de contraintes.

Le problème est alors résolu de manière équivalente en considérant la fissure supportant un état de contraintes normales d'intensité égale à $\frac{P}{\pi b R}$.

Dans ce sens, un chargement tel que $\sigma_n = 10^4$ bars a été appliqué sur tous les segments de décomposition de la fissure.

Les facteurs de forme calculés dans ce cas seront repérés par le symbole $(Y_{D_1})_2$.

Pour le système D_2 une contrainte normale $\sigma_n = 10^4$ bars est appliquée sur l'arc d'angle $\frac{\pi}{25}$ divisé en 5 parties égales σ_n représenté à la figure 4.7.

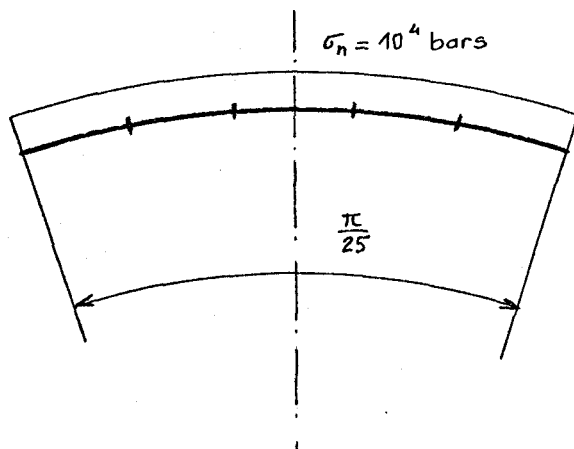


Figure 4.7.

Les facteurs de forme calculés dans ce cas seront repérés par le symbole Y_{D_2} .

La détermination du δU_1 relatif à chaque charge F_i a été calculée à partir d'un accroissement virtuel $\delta l = 0,01 l$ de la fissure dans sa propre direction.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.1.

1/R	Y_{sup}	$(Y_{D_1})_1$	$\epsilon \%$	$(Y_{D_1})_2$	$\epsilon \%$	Y_{D_2}	$\epsilon \%$
0,1	1,015	0,8032	20,8	1,0194	0,4	1,0034	1,14
0,3	1,1355	0,9015	20,6	1,1458	0,9	1,1302	0,5
0,6	1,5778	1,2665	19,7			1,5936	1
0,8	2,1796			2,3357	7,2	2,2587	3,6

Tableau 4.1

L'erreur relative calculée par comparaison avec la méthode de superposition en champ complexe est définie pour chaque cas de chargement par ϵ .

La lecture du tableau apporte les commentaires suivants :

1) Les valeurs de (Y_{D_1}) , inférieures à l'unité pour les petites fissures, soulèvent un problème d'application numérique de la méthode dont la cause peut être relative à :

- i) la discrétisation du contour non suffisamment uniforme,
- ii) la discrétisation de l'arc d'application des charges telles que l'extrémité commune de deux segments de rectification appartient à l'axe de symétrie $O\bar{x}$.
- iii) la valeur de la contrainte normale appliquée trop élevée produisant des discontinuités de déplacement des segments de chargement trop importantes relativement à leur longueur.

2) Les valeurs de $(Y_{D_1})_2$ sont proches de celles relatives à Y_{sup} .

Ces résultats montrent que lorsque le chargement est appliqué perpendiculairement aux lèvres de la fissure, les résultats obtenus sont corrects avec la même discrétisation que précédemment.

En conséquence, ces valeurs confirment l'influence de la discrétisation du contour extérieur, diminuant celle de l'intensité des charges appliquées.

3) La seconde discrétisation (D_2) conduit à des résultats en bon accord avec ceux trouvés par la méthode de superposition comme le montrent les précisions calculées.

Il faut noter cependant que pour les deux premiers cas ($\frac{l}{R} = 0,1$ et $0,3$) les valeurs du facteur de forme sont approchées par défaut, contrairement aux deux derniers cas.

La méthode des discontinuités de déplacement ne conduit donc pas nécessairement à des résultats approchés par excès, l'influence de la discrétisation du domaine étudié jouant un rôle non négligeable à ce sujet.

BUS
LILLE

b) Cas de l'anneau

Pour tous les cas étudiés, les données suivantes ont été conservées :

$$\begin{aligned} \text{rayon extérieur } r_e &= 2 \text{ cm} \\ b &= 1 \text{ cm} \\ E &= 30 \text{ bars} \\ \nu &= 0,20 \end{aligned}$$

Les résultats sont recherchés pour la variation des paramètres

$$\rho = \frac{R_i}{R_e} \text{ et } 1$$

Comme pour l'étude du disque, deux discrétisations différentes, représentées aux figures 4.8 et 4.9, ont été utilisées. Elles sont repérées respectivement par les symboles D_3 et D_4 .

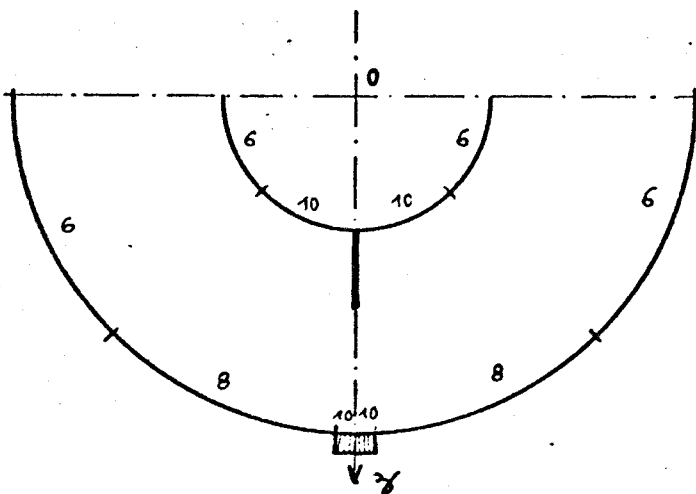


Figure 4.8

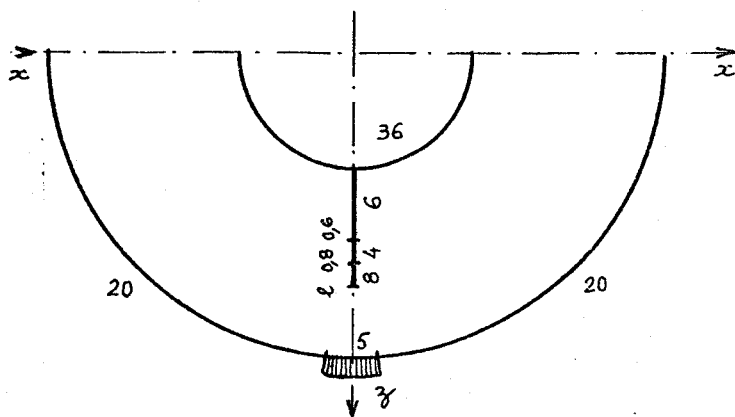


Figure 4.9

Les chargements utilisés sont différents dans chacun des cas.

Pour le domaine relatif à D_3 , une contrainte normale $\sigma_n = 10^4$ bars est appliquée sur un arc d'angle $\frac{\pi}{50}$ divisé en 20 parties égalesⁿ (fig. 4.6).

Les facteurs de formes calculés dans ce cas sont représentés par le symbole Y_{A_1} .

Pour le domaine relatif à D_4 , une contrainte normale $\sigma_n = 100$ bars est appliquée sur un arc d'angle $\frac{\pi}{25}$ divisé en 5 parties égales (fig. 4.10).

Les facteurs de forme calculés dans ce cas sont repérés par le symbole Y_{A_2} .

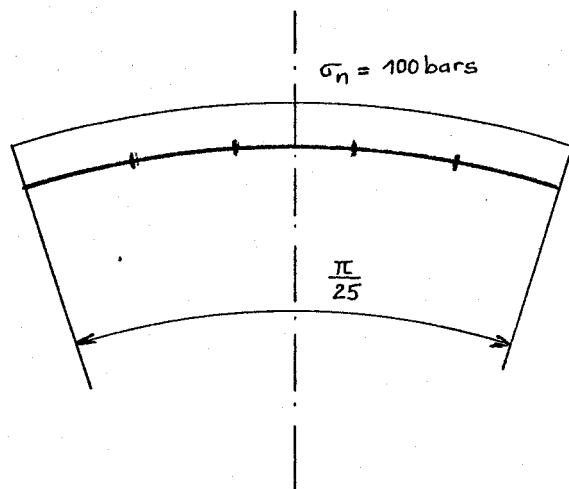


Figure 4.10

L'accroissement virtuel de la fissure est également pris tel que $\delta l = 0,01 l$.

Les résultats sont représentés dans le tableau 4.2., dans lequel les facteurs de forme Y_{A_1} et Y_{A_2} sont définis par la relation :

$$Y_A = \frac{K_1}{\frac{P}{b\pi e} \sqrt{\frac{l}{\pi}}}$$

$\frac{r_i}{r_e}$	$\frac{l}{r_i}$	Y_{A_1}	Y_{A_2}
0,5	0,1	11,25	13,736
	0,3	8,84	10,525
	0,6	7,45	8,273
0,4	0,25	6,10	7,557
	0,5	5,01	6,096
	1	4,18	4,752
0,2	0,4	2,67	
	1,2	1,74	
	2,4	1,81	
0,1	0,5	1,92	2,421
	2	1,09	1,343
	3	1,08	1,328
0,05	0,5	1,81	2,282
	2	0,94	1,166
	3,5	0,86	1,068

Tableau 4.2



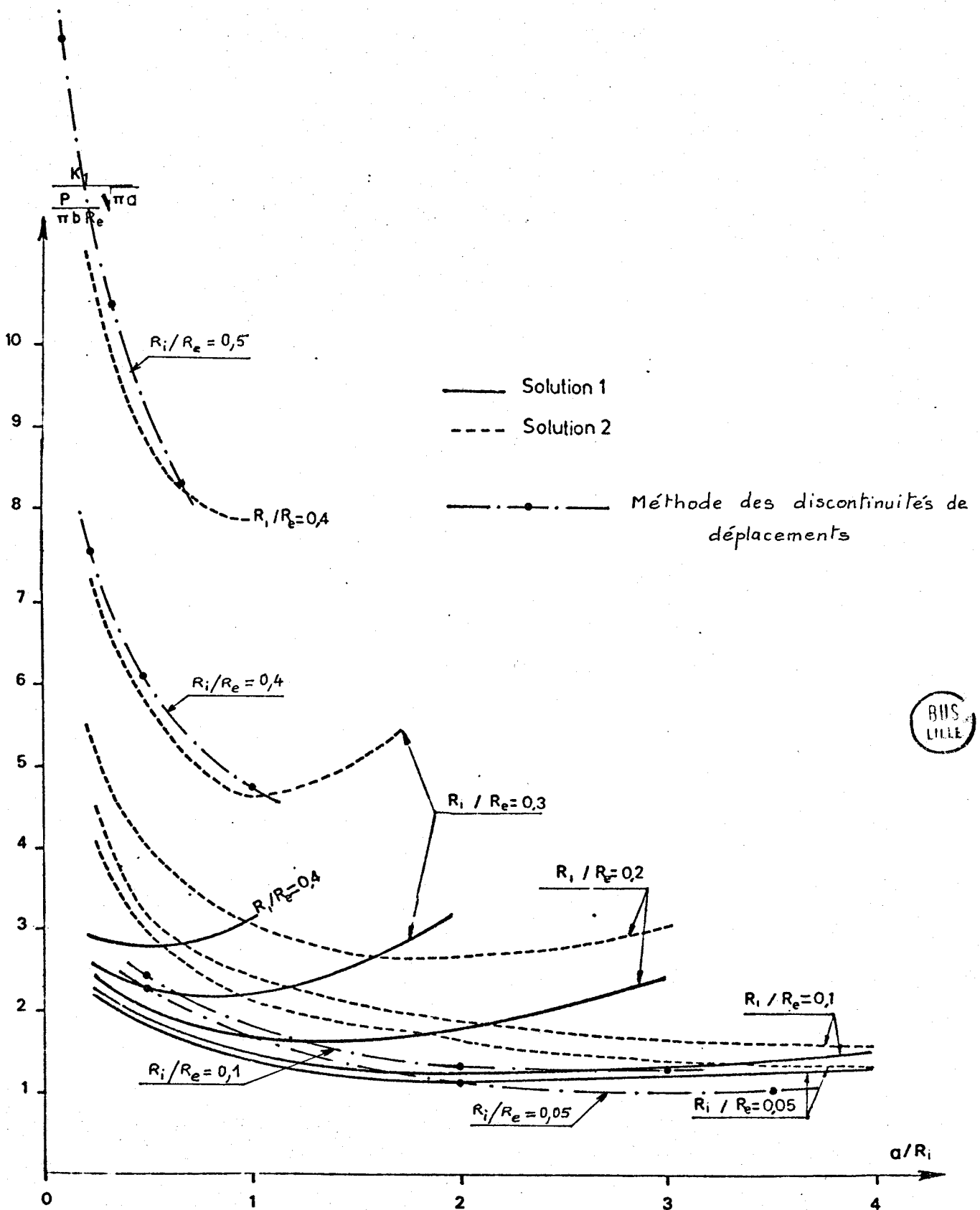


Figure 5.8
 Valeur du facteur de forme $\frac{K_1}{\frac{P}{\pi b R_e} \sqrt{\pi a}}$ en fonction de a/R_i

Par comparaison avec les résultats relatifs aux travaux de HENRY, les valeurs du facteur de forme obtenues avec la deuxième discrétisation (Y_{A2}) sont reportées sur la figure 5.8.

Les valeurs obtenues avec la première discrétisation (Y_{A1}) sont inférieures en tout point à celles de Y_{A2} , certaines valeurs étant inférieures à l'unité dans le cas où le rapport des rayons est égal à 0,05. La comparaison avec le cas du disque permet de supposer une nouvelle fois que la discrétisation utilisée conduit à des solutions erronées.

CONCLUSION

Le présent travail, malgré certaines difficultés de résolution numérique posées par le problème de l'anneau, a permis, du moins dans le cas du disque, de comparer trois méthodes de détermination des facteurs d'intensité de contraintes K_1 en tête de fissure.

5.1. ESSAI BRÉSILIEN SUR DISQUE PLEIN.

a) En ce qui concerne les difficultés de mise en place du traitement informatique des solutions, la méthode de superposition établie comparativement aux travaux d'ISIDA | 9 | demeure la plus simple.

La méthode des discontinuités de déplacement, mise au point par CROUCH | 2 |, ne peut être comparée puisque l'auteur a complaisamment édité son programme complet de résolution.

b) En ce qui concerne l'implantation des programmes au niveau de l'ordinateur les tailles requises par chaque méthode vont croissantes depuis la méthode de superposition jusqu'à la méthode des discontinuités de déplacement.

Pour les méthodes d'étude en champ complexe, la capacité mémoire nécessaire est évidemment fonction de la rapidité de convergence des séries introduites dans le calcul.

Eu égard aux résultats présentés, la méthode de superposition est de loin la plus performante puisqu'une discrétisation de contour égale à 5 suffit pour obtenir un résultat en accord avec les publications. Rappelons que dans le cas de la transformation conforme, une discrétisation de contour au moins égale à 35 est nécessaire.

c) La précision obtenue par la méthode de superposition est excellente par comparaison aux valeurs publiées par ISIDA | 9 |.

En prenant comme base ces résultats, on constate :

i) que dans l'utilisation de la transformation conforme, la précision ne peut être parfaitement définie puisqu'elle dépend :

- * de la convergence de la série par le nombre de termes retenus,
- * du "centrage" de la série par rapport à la valeur $n = 0$.
- * du respect des conditions aux limites réelles appliquées ici en termes de résultantes des forces extérieures.

ii) que dans le cas de la méthode des discontinuités de déplacement la précision est liée :

- * à la répartition du chargement utilisé sur le contour extérieur,
- * à la discrétisation utilisée pour matérialiser ce contour.
- * à la position des segments de discrétisation par rapport aux axes de symétrie du problème.

En conséquence, un approfondissement des méthodes de résolution numérique est nécessaire pour ces deux traitements à partir :

i) du respect d'un nombre accru de conditions aux limites dans le cas de la transformation conforme,

ii) d'une étude de l'influence des paramètres de définition de la méthode : discrétisation, chargement, dans le cas des discontinuités de déplacement.

5.2. ESSAI SUR ANNEAU

Le programme de résolution numérique du problème lié à l'anneau à partir de la méthode des transformations conformes est rédigé. Sa forme actuelle ne permet pas d'obtenir les résultats attendus permettant d'établir une comparaison.

Toutefois, compte tenu de la méthode utilisée, on peut, avec peu de doutes, affirmer que les résultats obtenus seront très sensibles, comme dans le cas du disque :

i) au choix nécessaire de la discrétisation du contour composé de la fissure, du quart de cercle extérieur et du rayon de séparation des zones,

ii) au nombre de conditions aux limites vérifiées.

Le nombre de segments le long desquels les conditions en résultantes sont exprimées est important. En conséquence, la taille mémoire nécessaire au traitement informatique s'en trouve accrue.

En ce qui concerne la méthode des discontinuités de déplacement, les résultats (Y_{A1}) établis à partir de la discrétisation D_3 semblent erronés puisque pour un A_1 rayon intérieur r_i petit ($\frac{r_i}{r_e} = 0,05$) certaines valeurs sont inférieures à l'unité.

Les valeurs cohérentes établies à partir de la discrétisation D_4 nécessitent d'être comparées avec celles établies par la méthode des transformations conformes.

5.3. PROLONGEMENT DU MEMOIRE.

Au-delà des points d'amélioration nécessaires précédemment présentés et qui seront abordés dans l'immédiat, le présent travail constitue une étape nécessaire de l'étude liée à l'évolution du critère de Griffith.

La possibilité d'utilisation d'une presse asservie va permettre de réaliser des essais sur disques et anneaux pré-fissurés au cours desquels la propagation de la fissure pourra être contrôlée. L'établissement des courbes $G_c = f(S)$ en constituera le dépouillement permettant d'apprécier les valeurs de γ propres aux matériaux testés.

BIBLIOGRAPHIE

- | 1 | BOWIE D.L., FREESE C.E. et NEAL D.M. (1973) - Solution of plane problems of elasticity utilizing partitioning concepts. - *J. Appl. Mech.*
- | 2 | CROUCH S.L. (1976) - Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. - *Int. J. num. Meth. in Eng.*, 10, p. 301-343.
- | 3 | EVANS A.G. (1976) - On the Formation of a crack tip microcrack zone. - *Scripta Metallurgica.*, 10, p. 93-97.
- | 4 | GRIFFITH A.A. (1921) - The phenomena of rupture and flow in solids. - *Phil. Trans. Royal. Soc. A.*, 221, p. 163.
- | 5 | HAWKES I., et MELLOR M. (1971) - Measurement of tensile strength by diametral compression of discs and annuli. - *Eng. Geol.*, 5, p. 173-225.
- | 6 | HENRY J.P. (1978) - Mécanique linéaire de la rupture appliquée à l'étude de la fissuration et de la fracture des roches calcaires. - *Thèse de Doctorat d'Etat*, UST Lille.
- | 7 | HIRAMATSU Y. et OKA Y. (1970) - Oisic test, ring test, rectangular plate test and irregular test for determining the tensile strength of rocks. - *Proc. 2. nd Cong. Int. Soc. Rock. Mech. Belgrade.*, Vol. 2, p. 199-206.
- | 8 | IRWIN G.R. (1957) - Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plane. - *J. Appl. Mech.*, 24, p. 361-364.
- | 9 | ISIDA M. (1975) - Arbitrary loading problems of doubly symmetric regions containing a central crack. - *Eng. Fract. Mech.* 7, p. 505-514.
- | 10 | JAEGER J.C. et HOSKINS E.R. (1966) - Stresses and failure ins sings of rock loaded in diametral tension or compression.- *Brit. J. Appl. Phys.*, 17, p. 685-692.
- | 11 | NEVEL D.E. - The ring test, Brazil test and strength of sea ice. - *U.S. Army cold Reg. Res. Eng. Lab. Tech. Note.*
- | 12 | MILNE - THOMSON L.M. (1967) - Systemes élastiques plans - Dunod (ed.).
- | 13 | MUSKHELISHVILI N.I. (1963) - Some Basic problems of the mathematical theory of Elasticity - ERVEN.P. Noordhoff, NV, Groningen.
- | 14 | TIMOSHENKO S. et GOODIER J.N. (1961) - Theory of elasticity - *Librairie polytechnique.* - Ch. BERANGER, p. 116.
- | 15 | TRACY PETER G. (1978) - Elastic analysis of radial cracks emanating from the outer and inner surfaces of a circular ring. - *Eng. Fract. Mech.*, 11, p. 291-300.
- | 16 | YANAGIDANI T., SANO O., TERADA M. et ITO I. (1978) - The observation of cracks propagating in diametrically - compressed rock discs - *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. and Geomech.*, 15, p. 225-235.
- | 17 | SIH G.C., PARIS P.C. et ERDOGAN F. (1962) - Crack tip stress - intensity Factors for plane extension and plate bending problems. - *J. Appl. Mech.* 29, p. 306.