

50376
1980
243

- T H E S E -
présentée

50376
1980
243

N° d'ordre 765 bis A L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET
TECHNIQUES DE LILLE

Pour obtenir
LE TITRE DE DOCTEUR 3e CYCLE
Spécialité : MECANIQUE DES FLUIDES

par
Germain BILLET

SIMULATION NUMERIQUE D'UN DECOLLEMENT
TRIDIMENSIONNEL PARIETAL

Soutenue le 10 Janvier 1980 devant la Commission d'Examen

MM. R. Kh. ZEYTOUNIAN

Président

A. DYMENT

F. PARSY

Examineurs

C. REHBACH

P. LAVAL

Invité



Je tiens à remercier tout particulièrement :

Monsieur le Professeur R. Kh. ZEYTOUNIAN qui a bien voulu me faire l'honneur d'accepter la présidence de mon jury de thèse.

Monsieur C. REHBACH, Ingénieur Chef de Groupe à l'ONERA qui m'a guidé dans ce travail et qui m'a fait bénéficier de ses précieux conseils.

Messieurs les Professeurs A. DYMENT et F. PERSY, ainsi que Monsieur P. LAVAL, Ingénieur Chef de Groupe à l'ONERA qui ont accepté de faire partie du jury.

SIMULATION NUMERIQUE
D'UN DECOLLEMENT TRIDIMENSIONNEL PARIETAL

R E S U M E

Un écoulement tridimensionnel instationnaire décollé sur une marche en chevron située dans un canal est étudié à l'aide d'une méthode numérique [27] qui représente les parois par un réseau d'anneaux tourbillonnaires et la nappe par une distribution volumique tourbillonnaire discrète.

Diverses améliorations apportées à la méthode (choix du tourbillon émis, interaction nappe-paroi) permettent de suivre correctement l'évolution de la nappe au cours du temps et de présenter des résultats numériques comparables aux résultats expérimentaux.

NUMERICAL SIMULATION
OF A THREE-DIMENSIONAL PARIETAL SEPARATION

S U M M A R Y

A three-dimensional unsteady separated flow over a step, having a chevron planform, bounded by vertical walls is studied using a numerical approach [27] in which the walls are replaced by a surface distribution of quadrilateral vortex rings and the vortex sheet by a discrete vortex volume distribution.

It is shown that various improvements carried to the method (choice of vorticity emission, interaction sheet-walls) allow to follow suitably the time-evolution of the sheet and to obtain numerical results in good agreement with experience.

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION	4
CHAPITRE I - FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME	6
1.1 - Champ tourbillonnaire	6
1.2 - Champ des vitesses	8
1.2.a - Cas général d'un domaine interne (Ω_i) entouré d'un domaine externe (Ω_e)	9
1.2.b - Application au canal avec marche en chevron	11
CHAPITRE 2 - RESOLUTION NUMERIQUE	13
2.1 - Méthodes des singularités	13
2.2 - Représentation des parois à l'aide d'anneaux tourbillonnaires	14
2.3 - Détermination des circulations à l'instant initial	15
2.4 - Calcul de la distribution tourbillonnaire à partir des circulations	15
2.5 - Quadrillage des parois d'un canal avec marche en chevron ..	16
2.6 - Cas test de la marche droite	17
2.7 - Etude du décollement	19
2.7.a - Position de la ligne de décollement	19
2.7.b - Direction du décollement	20
2.7.c - Intensité tourbillonnaire émise le long de la ligne de décollement	22
2.7.d - Application au cas de la marche	23
2.8 - Technique du lâché de tourbillons	24
2.9 - Variation de la circulation au cours du temps	24
2.10- Evolution du champ tourbillonnaire	25
2.11- Comportement asymptotique des relations vectorielles	26
2.11.a - Particule près d'un segment	26
2.11.b - Particules voisines	26
2.11.c - Comportement du vecteur tourbillon	28
2.12- Convection des particules	29
2.13- Pression à la paroi	30
2.13.a - En écoulement stationnaire	30
2.13.b - En écoulement instationnaire	30
CHAPITRE 3 - EVOLUTION D'UNE PARTICULE FLUIDE CHARGEE D'UN VECTEUR TOURBILLON PRES D'UNE PAROI	31
3.1 - Approche analytique	31
3.2 - Approche numérique	35

	<u>Pages</u>
3.2.a - Comportement singulier du champ des vitesses près des parois	35
3.2.b - Présentation succincte de quelques approches utilisées actuellement	36
3.2.c - Traitement numérique du champ des vitesses à partir d'une déformation locale du maillage	39
3.2.d - Traitement numérique à partir d'un raffinement local du maillage	42
3.3 - Vérification numérique du procédé de déformation locale .	43
3.3.a - Ecoulement potentiel - Lignes de courant	43
3.3.b - Ecoulement potentiel - Composantes de la vitesse	44
3.3.c - Ecoulement rotationnel	45
3.3.d - Conclusion	46
 CHAPITRE 4 - RESULTATS DES CALCULS	 50
4.1 - Généralités	50
4.2 - Comparaison visuelle : expérience - calcul numérique	51
4.3 - Evolution de la nappe au cours du temps	51
4.4 - Surface de séparation à $\tau = 1$	52
4.5 - Evolution de l'intensité tourbillonnaire émise sur l'arête	52
4.6 - Répartition de la pression à la paroi	53
 CONCLUSION	 59
 ANNEXE 1 : Identité analogue à l'identité de Green	 60
 ANNEXE 2 : Relation entre distribution surfacique tourbillonnaire et distribution surfacique de doublets	 63
Approximation d'une distribution tourbillonnaire surfacique par un ensemble d'anneaux tourbillonnaires.....	64
 ANNEXE 3 : Définition analytique du terme de déformation dans le cas de deux particules	 65
Déformation du champ tourbillonnaire induite par un segment tourbillonnaire	66
 REFERENCES	 69

INTRODUCTION -

Les problèmes d'écoulements subsoniques tridimensionnels instationnaires décollés à grand nombre de Reynolds sont d'une grande importance pratique car ils se rencontrent aussi bien dans l'aérodynamique des véhicules aériens et terrestres [6] que dans diverses applications industrielles (plate-forme de forage en mer, par exemple). Leur approche par des modélisations mathématiques d'écoulement de fluide parfait incompressible a suscité de nombreux travaux depuis quelques années.

Ces modèles mathématiques sont basés sur une représentation de l'obstacle à l'aide de distributions surfaciques de singularités du type source, doublet, anneau tourbillonnaire ou tourbillon en fer à cheval [11] , [22] , [29] . Ces deux derniers types de singularités permettent de satisfaire directement les théorèmes de conservation liés aux écoulements tourbillonnaires. BELOTSERKOVSKII [2] [3] est l'un des premiers à avoir utilisé les tourbillons en fer à cheval, liés pour représenter l'obstacle et libres pour représenter la nappe tourbillonnaire, afin de respecter les théorèmes de conservation. Ces théorèmes peuvent aussi être respectés en remplaçant la nappe par une distribution volumique tourbillonnaire discrète et en suivant, à l'aide de l'équation d'Helmholtz, les différents tourbillons composant la nappe. C'est ce principe qui est utilisé dans cette étude et qui a été mis au point à l'ONERA par C. REHBACH [25] [26] .

Dans la présente étude la méthode est appliquée à un écoulement dans un canal où surgit une dépression verticale en forme de flèche à la paroi inférieure. Cette brusque dénivellation crée le long de l'arête un décollement et une zone tourbillonnaire dont on suit l'évolution. Ce type d'écoulement n'ayant à notre connaissance jamais fait l'objet d'études théoriques, aucune comparaison n'est possible avec d'autres travaux basés sur des modèles numériques différents ; cependant, des essais expérimentaux [24] et des visualisations ont été réalisés à l'ONERA et permettent des comparaisons qualitatives et quantitatives avec nos propres résultats. Cette configuration met en évidence des phénomènes fortement tridimensionnels de nappes enroulées avec interaction importante des parois ; c'est donc un cas particulièrement sévère pour toute méthode numérique et il nous a conduit à rechercher diverses améliorations concernant la méthode d'origine.

La formulation intégral-différentielle lagrangienne (chapitre 1), que nous utilisons ici, permet de suivre à l'aide du couple vitesse-tourbillon (\vec{u} , $\vec{\omega}$) l'évolution du champ tourbillonnaire dans l'espace temps entre un état initial au repos et un état final stationnaire ou quasi-stationnaire en passant par une phase instationnaire plus ou moins longue. Le nombre de pas de temps nécessaire dans la phase intermédiaire paraît dans ce cas particulier assez élevé et la représentation discrète des équations doit être assez précise pour aboutir à un état stationnaire cohérent. On a donc cherché au chapitre 2 à améliorer les méthodes de base existantes, soit en utilisant des schémas d'intégration en temps d'ordre plus élevé, comme par exemple le schéma du second ordre "prédicteur-correcteur" permettant une définition plus précise des trajectoires, soit en utilisant des formulations analytiques du terme de déformation du tourbillon en remplacement des schémas numériques basés sur les différences finies.

On verra également au chapitre 2 que la formation de la nappe libre à partir du bord de l'arête est un autre problème délicat qu'on a tenté de résoudre en considérant la distribution tourbillonnaire surfacique comme une représentation de couche limite infiniment mince [30] . La nappe s'échappant de l'arête est alors formée du mélange de deux couches limites issues des parois ayant l'arête en commun.

Contrairement à ce qui se passe en général en aérodynamique externe, les nappes tourbillonnaires, en aérodynamique interne, ont tendance à effleurer les parois sur des distances plus ou moins grandes et de fortes interactions entre la nappe et les parois apparaissent qui prédisposent le schéma numérique à des instabilités notoires. En particulier il convient d'éviter la traversée des parois par des particules tourbillonnaires. Ce problème a été étudié analytiquement et numériquement au chapitre 3 et résolu par un procédé de déformation locale du maillage tapissant les parois qui permet d'aboutir à un champ de vitesses et à un champ tourbillonnaire mieux représentés à proximité et sur les parois.

Les résultats présentés au chapitre 4 font apparaître le bon comportement de la méthode numérique même pour des configurations d'obstacle assez difficiles à étudier, comme c'est le cas ici, et montrent la capacité de la méthode à simuler les écoulements décollés à viscosité évanescence.

C H A P I T R E 1

FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

On cherche à exprimer le champ des vitesses dans un domaine (Ω_i) limité par une frontière (S) et baigné par un fluide homogène incompressible à viscosité évanescente à partir des conditions limites sur (S) et du champ tourbillonnaire existant dans (Ω_i). L'identité de Green apparaît bien adaptée à ce type de problème. Elle montre que la frontière peut être assimilée à une distribution tourbillonnaire surfacique $\vec{\mu}$ qui, associée à la distribution tourbillonnaire volumique $\vec{\omega}$ dans (Ω_i), permet d'exprimer le champ des vitesses \vec{u} dans ce domaine.

1.1 - CHAMP TOURBILLONNAIRE -

On obtient une équation pour le champ tourbillonnaire $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$ en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation de conservation de la quantité de mouvement d'un fluide réel,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } \vec{u} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F} + \nu \Delta \vec{u}$$

où ρ , $p(\vec{x}, t)$, $\vec{F}(\vec{x}, t)$ et ν représentent respectivement la masse volumique, la pression, le champ des forces extérieures qu'on considère conservatif et la viscosité cinématique du fluide.

On en tire l'équation du tourbillon

$$(1) \quad \frac{D \vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \text{grad } \vec{u} + \nu \Delta \vec{\omega}$$

où $\frac{D}{Dt}$ représente la dérivée particulaire. Dans le cas d'un fluide à viscosité évanescente, le dernier terme du membre de droite de (1) peut être négligé. Ceci nous permet, dans le cas limite où ν tend vers zéro, de représenter les écoulements à grand nombre de Reynolds à partir de l'équation d'Helmholtz :

$$(2) \quad \frac{D \vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \text{grad } \vec{u} .$$

On associe (2) à l'équation :

$$\text{div } \vec{\omega} = 0$$

qui se déduit directement de la définition du rotationnel et qui permet d'énoncer que tout vecteur tourbillon ne peut ni se créer ni se détruire à l'intérieur d'un fluide et qu'il est produit ou absorbé uniquement aux frontières. L'équation d'Helmholtz permet de suivre l'évolution dans le temps du vecteur tourbillon associé à un élément matériel fluide. Elle a aussi l'avantage de décrire l'écoulement sans faire apparaître la pression. Le membre de droite de (2) est appelé

"terme de déformation" du vecteur tourbillon. Une étude un peu plus détaillée du terme de déformation va permettre de mieux comprendre le processus évolutif du vecteur tourbillon.

Si on utilise un schéma aux différences finies, on peut écrire :

$$\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} = |\vec{\omega}| \lim_{P \rightarrow Q} \frac{\vec{u}_Q - \vec{u}_P}{|\overline{PQ}|}$$

où les points P et Q font partie d'une même ligne tourbillon. Et de là :

$$\frac{1}{|\vec{\omega}|} \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \lim_{P \rightarrow Q} \frac{1}{|\overline{PQ}|} \frac{D(\overline{PQ})}{Dt}$$

c'est-à-dire que l'évolution du vecteur tourbillon s'apparente à l'évolution d'un élément vectoriel \overline{PQ} de ligne matérielle qui coïncide à chaque instant avec une partie de la ligne tourbillon à laquelle $\vec{\omega}$ appartient. Un champ de vitesses non uniforme provoque une déformation de l'élément vectoriel qui peut se décomposer en une dilatation ou une contraction dans sa proche direction et en une rotation pure qui vont se répercuter sur l'évolution de $\vec{\omega}$.

On remarquera qu'en écoulement plan le vecteur tourbillon reste constamment perpendiculaire à la direction de l'écoulement, ce qui annule le terme de déformation et rend constant le vecteur tourbillon attaché à une particule.

Cette évolution de $\vec{\omega}$ gouvernée par l'équation d'Helmholtz implique la conservation de la circulation d'un tube tourbillon. Une rapide démonstration que l'on trouvera dans [27] et qu'on reprend ici le prouve en considérant la variation dans le temps de la circulation C associée à une ligne fermée tracée sur la surface d'un tube tourbillon élémentaire limitant une surface (S) :

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$$

Ecrivons cette relation sous forme indicielle, en sommant sur i :

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \omega_i \cdot \delta S_i = \iint_S \delta S_i \cdot \frac{D\omega_i}{Dt} + \omega_i \frac{d \delta S_i}{dt}$$

La relation $\frac{d \delta S_i}{dt} = \delta S_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \delta S_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ tirée de [1]

(avec sommation sur j) permet d'écrire en définitive, en y associant l'équation d'Helmholtz $\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$:

$$\frac{dC}{dt} = \iint_S \delta S_i \cdot \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta S_i \cdot \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \delta S_j \cdot \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

On arrive bien au résultat escompté vu que les premier et dernier termes sous l'intégrale s'annulent mutuellement et que $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ (conservation de la masse).

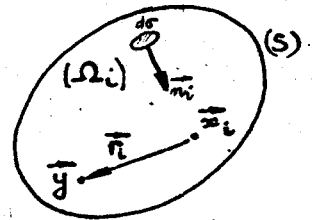
L'évolution temporelle du vecteur tourbillon $\vec{\omega}$ attaché à une particule fluide est telle que la circulation du filet tourbillon dont il fait partie se conserve.

L'utilisation des variables lagrangiennes apparait bien adaptée à une équation du type d'Helmholtz. Elle évite la diffusion numérique du vecteur tourbillon inhérente aux schémas aux différences finies, ce qui est essentiel à la représentation convenable de nappes tourbillonnaires infiniment minces. Tout domaine fluide peut être considéré comme constitué d'une certaine quantité de particules de matière fluide de dimensions suffisamment petites pour que chacune d'elles puisse être remplacée à tout instant par un point situé en son centre de gravité et auquel sont liées différentes grandeurs dynamiques et physiques. Ces valeurs sont définies en fonction du temps et de la position des cellules fluides et décrivent l'histoire dynamique de chaque particule dont la position à chaque instant s'exprime à partir de sa situation spatiale à l'instant initial et du temps écoulé. Dans notre cas et comme le laisse supposer l'équation (2) on suit les variations dans le temps et l'espace de $\vec{\omega}$ lié à chaque élément volumique émis de la frontière du domaine. Cette connaissance à chaque instant du champ tourbillonnaire (lié à la connaissance à chaque instant de la distribution surfacique $\vec{\mu}$ qu'on explicitera par la suite) détermine le champ des vitesses \vec{u} .

1.2 - CHAMP DES VITESSES -

Une identité analogue à l'identité de Green [8] et appliquée à un domaine simplement connexe limité extérieurement par une frontière (S) permet d'exprimer, sous forme intégrale, la vitesse en tout point du domaine (Ω_i) quand on connaît sa divergence et son rotationnel en tout point de (Ω_i), ainsi que sa propre valeur en tout point de la frontière (S).

En un point \vec{y} de (Ω_i) la vitesse s'exprime sous la forme suivante (voir Annexe 1) :



$$(3) \vec{u}(\vec{y}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_i} \vec{\omega} \wedge \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_i} \right) dv + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_i} \text{div } \vec{u} \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_i} \right) dv + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\vec{n}_i \wedge \vec{u}) \wedge \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_i} \right) ds + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\vec{n}_i \cdot \vec{u}) \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_i} \right) ds$$

où les valeurs et les dérivations se trouvant sous les intégrales sont prises par rapport au point courant \vec{x}_i se trouvant dans (Ω_i) ou sur (S).

$r_i = |\vec{y} - \vec{x}_i|$ est la distance séparant le point \vec{y} du point \vec{x}_i et \vec{n}_i représente le vecteur normal unitaire à la surface (S) et dirigé vers l'intérieur du domaine (Ω_i).

En ce qui concerne les répartitions surfaciques des composantes normale et tangentielle de la vitesse figurant dans l'identité (3), on montre [29] qu'une telle représentation n'est pas unique et qu'un moyen d'en assurer l'unicité est de prendre en compte le comportement des composantes normale et tangentielle de la vitesse à travers la surface frontière (S) [18]. C'est ce que l'on fait en considérant un domaine (Ω_e) entourant (Ω_i), limité extérieurement par une frontière (S_e) et intérieurement par (S).

1.2.a - Cas général d'un domaine interne (Ω_i) entouré d'un domaine externe (Ω_e) -

On définit dans (Ω_e) un champ de vitesse \vec{u}_e et on écrit l'identité précédente toujours au point \vec{y} de (Ω_i) mais maintenant en fonction de tout point \vec{x}_e appartenant au domaine (Ω_e).

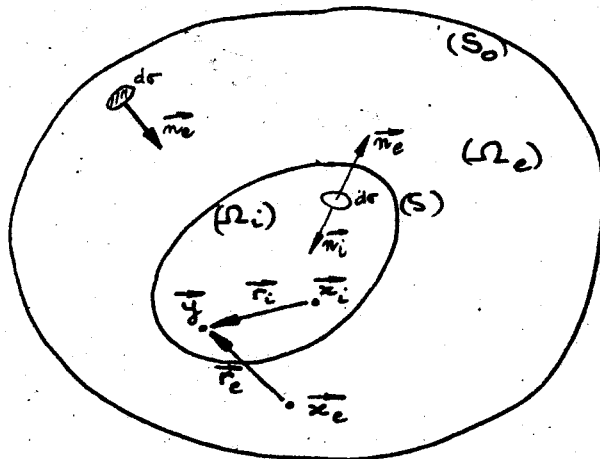


figure 1

$$\begin{aligned}
 \vec{0} = & \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_e} \vec{\omega}_e \wedge \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) d\tau + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_i} \text{div } \vec{u}_e \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) d\tau \\
 (4) \quad & + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\vec{n}_e \wedge \vec{u}_e) \wedge \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\vec{n}_e \cdot \vec{u}_e) \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) d\sigma \\
 & + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} (\vec{n}_e \wedge \vec{u}_e) \wedge \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} (\vec{n}_e \cdot \vec{u}_e) \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) d\sigma
 \end{aligned}$$

où $r_e = |\vec{y} - \vec{x}_e|$; \vec{n}_e représente le vecteur normal unitaire aux frontières (S) et (S_0) et dirigé vers l'intérieur de (Ω_e) et $\vec{\omega}_e = \text{rot } \vec{u}_e$.

L'identité vectorielle suivante appliquée à deux vecteurs quelconques \vec{A} et \vec{B} (par ex. [8])

$$\iint_{S_0} \left[(\vec{n} \wedge \vec{A}) \wedge \vec{B} + (\vec{n} \cdot \vec{A}) \vec{B} \right] d\sigma = \iint_{S_0} \left[(\vec{n} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{A} + (\vec{n} \cdot \vec{B}) \vec{A} \right] d\sigma$$

permet d'écrire les deux dernières intégrales de (4) sous une forme différente. La relation précédente s'exprime alors :

$$\begin{aligned}
 \vec{0} = & \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_e} \vec{\omega}_e \wedge \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) d\tau + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_i} \text{div } \vec{u}_e \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) d\tau \\
 (5) \quad & + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\vec{n}_e \wedge \vec{u}_e) \wedge \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\vec{n}_e \cdot \vec{u}_e) \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) d\sigma \\
 & + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \left[\vec{n}_e \wedge \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) \right] \wedge \vec{u}_e d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \left[\vec{n}_e \cdot \vec{\text{grad}}_x \left(\frac{1}{r_e} \right) \right] \vec{u}_e d\sigma
 \end{aligned}$$

Lorsque la frontière (S_0) est rejetée à l'infini et remplacée par une sphère de rayon infini, la vitesse \vec{u}_e en tout point de cette sphère par hypothèse tend vers une vitesse \vec{u}_∞ uniforme, qui peut être sortie des intégrales sur (S_0). A l'infini la normale \vec{n}_e et le vecteur $\text{grad} \left(\frac{1}{r_e} \right)$ sont alignés, et on peut montrer que la première intégrale sur (S_0) s'annule. Quant à la seconde intégrale, elle représente l'angle solide sous-tendant la sphère et vu d'un point intérieur à la sphère. Dans ce cas particulier il prend la valeur 4π . Les deux derniers termes du second membre de (5) sont remplacés par la valeur de la vitesse à l'infini qu'on appellera \vec{u}_∞ et qui peut être dépendante du temps.

La vitesse s'exprime alors à partir des valeurs en tout point de (Ω_i) et de la frontière (S). Le fluide étant incompressible dans (Ω_i) et (Ω_e) et l'écoulement supposé irrotationnel dans (Ω_e), le regroupement de (3) et (5) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{y}, t) &= \vec{u}_\infty(t) + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_i} \vec{\omega} \wedge \text{grad}_x \left(\frac{1}{r_i} \right) dv \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_S [(\vec{n}_i \wedge \vec{u}) + (\vec{n}_e \wedge \vec{u}_e)] \wedge \text{grad}_x \left(\frac{1}{r_i} \right) do \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_S [(\vec{n}_i \cdot \vec{u}) + (\vec{n}_e \cdot \vec{u}_e)] \text{grad}_x \left(\frac{1}{r_i} \right) do \end{aligned}$$

comme $\vec{n}_e = -\vec{n}_i$ en tout point de (S)

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{y}, t) &= \vec{u}_\infty(t) + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_i} \vec{\omega} \wedge \text{grad}_x \left(\frac{1}{r} \right) dv \\ (6) \quad &+ \frac{1}{4\pi} \iint_S [\vec{n}_i \wedge (\vec{u} - \vec{u}_e)] \wedge \text{grad}_x \left(\frac{1}{r} \right) do \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_S [\vec{n}_i \cdot (\vec{u} - \vec{u}_e)] \text{grad}_x \left(\frac{1}{r} \right) do \end{aligned}$$

On remarquera que l'intégrale triple se réduit à la partie du domaine (Ω_i) où le vecteur tourbillon est non nul.

Cette équation intégrale est employée de diverses manières. J.C. WU et J.F. THOMPSON [32] n'utilisent que la partie intégrale volumique pour résoudre les problèmes propres aux équations de Navier-Stokes tridimensionnelles, les intégrales surfaciques s'éliminant par l'imposition de la condition d'adhérence sur les parois. D'autres auteurs [11], [22], [29], étudiant des écoulements à nombre de Reynolds très élevé (le domaine tourbillonnaire se restreignant alors à des nappes surfaciques) obtiennent, par passage à la limite sur l'épaisseur de la couche tourbillonnaire, une relation ne faisant plus intervenir que des intégrales doubles ; mais la représentation des zones tourbillonnaires par des surfaces implique que la structure tourbillonnaire est stable et bien organisée, alors que la représentation volumique à l'aide de la relation (6) ne nécessite pas cette hypothèse.

1.2.b - Application au canal avec marche en chevron -

Cette étude a pour objet l'écoulement, à très grand nombre de Reynolds, d'un fluide incompressible dans un canal où une brusque dénivellation de la paroi inférieure engendre à son sommet une nappe tourbillonnaire qui s'étend vers l'aval. On tente de suivre l'évolution au cours du temps de cette nappe et de discerner les effets qu'elle produit sur le champ des vitesses et sur la répartition de pression le long des parois.

Un schéma de ce canal est présenté sur la figure 2. Il a une section rectangulaire à l'amont et une section en forme d'auge à l'aval. La variation de forme de la section est due à la présence le long de la paroi inférieure d'une marche descendante en flèche de 45° et dont la hauteur, maximale au centre, s'atténue progressivement pour devenir nulle au contact des bords latéraux.

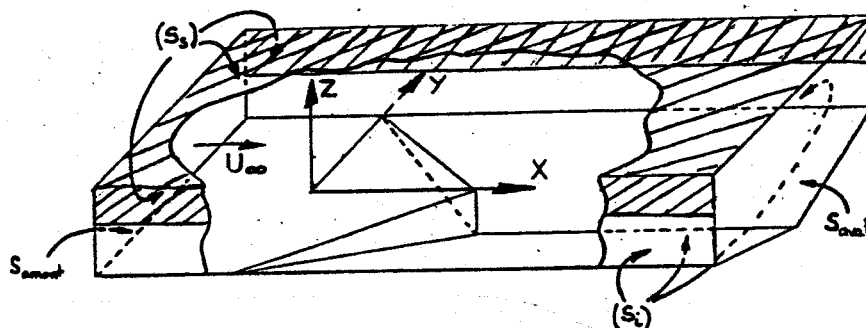


figure 2

Soient (S_s) la moitié supérieure des parois du canal et (S_i) la moitié inférieure, (S_{amont}) la section d'entrée et (S_{aval}) la section de sortie du canal. Supposons que les champs de vitesse \vec{u}_e et \vec{u} satisfont aux conditions limites suivantes :

$$\text{sur } (S_s) \text{ et } (S_i) \quad \vec{u}_e \cdot \vec{n}_e = \vec{u} \cdot \vec{n}_i = 0$$

$$\text{sur } (S_{amont}) \text{ et } (S_{aval}) \quad \vec{u}_e \cdot \vec{n}_e = -\vec{u} \cdot \vec{n}_i$$

En toute rigueur, la paroi supérieure plane peut être éliminée et remplacée par une surface de courant en réfléchissant par rapport à cette paroi le profil du canal. Dans notre étude on a évité ce procédé séduisant car il augmente sensiblement le temps de calcul qui, comme on le verra, est déjà conséquent vu le nombre assez important d'inconnues rentrant dans le problème discret. La hauteur du canal beaucoup plus importante que la hauteur moyenne de la marche permet d'introduire l'approximation suivante :

$$\vec{u}_e \approx \vec{u} \quad \text{sur } (S_s)$$

De même on supposera que (S_{amont}) et (S_{aval}) sont assez éloignées de la marche de manière que les perturbations engendrées par celle-ci y soient minimales et en particulier que le calcul s'arrête à un temps tel que la nappe n'a pas encore atteint (S_{aval}) .

(Les calculs numériques effectués à l'instant initial sur le champ des vitesses en divers endroits viendront prouver le bien-fondé de ces hypothèses).

La vitesse se réduit alors à l'expression :

$$\vec{u}(\vec{y}, t) = \vec{u}_\infty(t) + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_i} \vec{\omega} \wedge \vec{grad}_x \left(\frac{1}{r} \right) dv \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_i} [\vec{n}_i \wedge (\vec{u} - \vec{u}_e)] \wedge \vec{grad}_x \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma$$

Dans le canal il existe des discontinuités de pente lorsqu'on passe d'une paroi à une autre et où la normale \vec{n}_i n'est pas définie. Pour éviter ce problème, on découpe (S_i) en plusieurs surfaces distinctes comprenant les deux parois latérales, la paroi horizontale amont, les deux parois de l'auge et les deux parois verticales de la marche. (S_i) se subdivise en sept nouvelles frontières (S_q) sur lesquelles la normale unitaire existe partout et la vitesse est alors bien définie et s'écrit :

$$(7) \quad \vec{u}(\vec{y}, t) = \vec{u}_\infty(t) + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_i} \vec{\omega} \wedge \vec{grad}_x \left(\frac{1}{r} \right) dv \\ + \frac{1}{4\pi} \sum_{q=1}^7 \iint_{S_q} \vec{\mu} \wedge \vec{grad}_x \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma$$

où $\vec{\mu} = \vec{n}_i \wedge (\vec{u} - \vec{u}_e)$ représente une distribution tourbillonnaire surfacique.

On s'aperçoit que la connaissance de $\vec{\mu}$ sur chaque (S_q) et du tourbillon $\vec{\omega}$ dans (Ω_i) nous donne la valeur du champ des vitesses en tout point de (Ω_i) et de (S_i). Au chapitre 2 on verra comment obtenir $\vec{\mu}$ en appliquant la condition limite sur les parois (S_q).

C H A P I T R E 2

RESOLUTION NUMERIQUE

2.1 - METHODES DES SINGULARITES -

La pose de la condition limite de vitesse normale nulle sur les (S_q) nous donne, pour la fonction inconnue $\vec{\mu}$, l'équation intégrale suivante :

$$(8) \quad \sum_{q=1}^7 \iint_{S_q} \left[\vec{\mu} \wedge \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \vec{n}_i \, d\sigma = \vec{K} \cdot \vec{n}_i$$

avec $\vec{K} = -\vec{u}_\infty - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_i} \vec{\omega} \wedge \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \, d\tau$

La résolution analytique de (8) n'apparaît pas possible vu la forme assez complexe du domaine (Ω_i) et on est alors astreint à chercher des solutions approchées à l'aide de méthodes numériques qui transforment la relation intégrale (8) en un système linéaire d'équations algébriques. Les méthodes numériques basées sur une discrétisation d'une formulation intégrale du type de la relation (8) sont connues sous le nom de "méthodes des singularités". Elles apparaissent bien adaptées à l'écoulement présent puisqu'elles concentrent toutes les inconnues uniquement sur les frontières, ce qui réduit l'ordre du problème d'une dimension et permet de conserver dans le cas de géométries complexes un nombre d'inconnues relativement faible.

Les conditions limites qui, dans le problème exact, sont satisfaites partout sur la frontière, ne sont pour le problème discret satisfaites qu'en un certain nombre de points convenablement disposés sur la frontière et appelés "point de contrôle". On associe à chaque point de contrôle une facette entourant ce point et délimitant une certaine partie de la frontière de manière que la réunion de tous ces panneaux recouvre toute la frontière du domaine.

La précision de la solution numérique finale est directement liée à la finesse de la discrétisation. Plus le nombre de points de contrôle sera élevé, plus l'approche de la géométrie réelle à l'aide de facettes sera précise et plus la possibilité d'obtenir une solution correcte sera grande. Mais les capacités de mémoire et les vitesses d'exécution actuelles des ordinateurs, même des plus puissants, empêchent l'emploi d'une représentation très fine dans le cas d'un obstacle de forme compliquée.

Dans le cadre de cette étude la vitesse est définie à partir de distributions tourbillonnaires volumiques et surfaciques (relation (7)). W.R. SEARS [30] montre que la distribution tourbillonnaire surfacique peut être interprétée comme représentant la couche limite sur la surface de l'obstacle et rappelle que ce modèle d'écoulement non visqueux est le cas limite d'un écoulement de fluide à viscosité évanescence.

C'est cette constatation de SEARS qui nous a fait préférer les distributions tourbillonnaires aux distributions surfaciques de sources également envisageables pour la représentation de l'obstacle mais qui, elles, ne font pas apparaître cette analogie avec la couche limite.

2.2 - REPRESENTATION DES PAROIS A L'AIDE D'ANNEAUX TOURBILLONNAIRES -

Une manière de représenter l'obstacle de façon discrète consiste à remplacer la distribution surfacique tourbillonnaire continue par une distribution discontinue concentrée le long d'un réseau formé de segments tourbillonnaires reliés les uns aux autres par leurs extrémités (voir Annexe 2). Chaque association de quatre segments définit un anneau quadrilatère se confondant avec le contour de la facette délimitée par ces quatre segments. La circulation le long de chaque anneau est constante à chaque instant et est reliée algébriquement aux circulations autour de chaque segment. Les circulations concentrées sur les anneaux peuvent être considérées comme les inconnues du problème qui sont en nombre égal au nombre de points de contrôle, c'est-à-dire que le nombre d'inconnues est identique au nombre d'équations algébriques à résoudre. Le problème apparaît bien posé et il possède une solution dont la validité, comme précédemment, dépendra de la plus ou moins grande finesse d'approche de la distribution tourbillonnaire.

Cette discrétisation permet de remplacer dans l'équation (7) les intégrales doubles par des intégrales simples déduites de la loi de Biot et Savart et que l'on sait calculer explicitement dans le cas simple d'un anneau quadrilatère.

A l'instant initial $t = t_0$ où le fluide est mis impulsivement en mouvement à une vitesse \vec{u}_∞ , la nappe tourbillonnaire n'existe pas et toute l'intensité tourbillonnaire est encore concentrée sur la surface. La vitesse s'écrit à cet instant en tout point P :

$$\vec{u}(P, t_0) = \vec{u}_\infty + \frac{1}{4\pi} \sum_{q=1}^7 \iint_{S_q} \vec{\mu} \wedge \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma$$

et sous forme numérique :

$$(9) \quad \vec{u}(P, t_0) = \vec{u}_\infty + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^m \delta_j \sum_{k=1}^4 \int_{l_{j,k}} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{|\vec{PM}|^3}$$

où :

P est un point fixe de l'espace

m représente le nombre total d'anneaux tourbillonnaires s'appuyant sur les (S_q)

δ_j définit la circulation de l'anneau j .

$l_{j,k}$ est la longueur du segment k de l'anneau j

M est un point courant du segment k

$d\vec{l}$ est l'élément d'intégration du segment $l_{j,k}$ dirigé de manière que $d\vec{l} \wedge \vec{n}_j$ soit orienté vers l'extérieur de la facette enserrée par l'anneau j (\vec{n}_j représente la normale unitaire de la facette dirigée vers le domaine (Ω_i)).

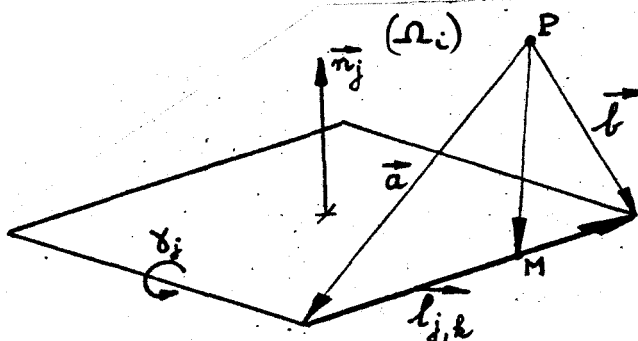


figure 3

On peut substituer une forme analytique à l'expression de l'intégrale curviligne [20]

$$(10) \quad \int_{l_{j,k}} \gamma_j \frac{d\vec{l} \cdot \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3}} = \gamma_j \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2} \left[\vec{l}_{j,k} \cdot \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} - \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) \right]$$

où \vec{a} et \vec{b} représentent les valeurs reliant le point P aux extrémités du segment $l_{j,k}$ (figure 3). Il faut remarquer que la vitesse obtenue à partir d'un segment isolé ne dérive pas d'une fonction potentielle. Cela n'est vérifié que lorsque les segments de circulation identique sont associés en anneaux.

2.3 - DETERMINATION DES CIRCULATIONS A L'INSTANT INITIAL -

La satisfaction à tout instant, et en particulier au temps t_0 , des conditions limites sur les parois conduit à imposer en chaque point contrôle C_i ($i = 1, 2, \dots, m$) la condition de vitesse normale nulle. Il en ressort un système linéaire de m équations algébriques à m inconnues γ_j :

$$(11) \quad \vec{u} \cdot \vec{n}_i = 0 = \vec{u}_\infty \cdot \vec{n}_i + \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{j=1}^m \gamma_j \sum_{k=1}^4 \int_{l_{j,k}} \frac{d\vec{l} \cdot \frac{\vec{C}_i M}{|\vec{C}_i M|^3}} \right] \cdot \vec{n}_i$$

avec les notations identiques à la relation (9) et où \vec{n}_i représente la normale unitaire de la facette i dirigée vers $(-\Omega_i)$.

$$\frac{\vec{n}_i}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \int_{l_{j,k}} \frac{d\vec{l} \cdot \frac{\vec{C}_i M}{|\vec{C}_i M|^3}}$$

représente le terme général a_{ij} d'une matrice carrée appelée matrice des coefficients d'influence $[A_{ij}]$: a_{ij} est la vitesse normale induite au i ème point de contrôle par le j ème anneau tourbillonnaire de circulation unitaire. On remarque que ces coefficients ne dépendent que de la géométrie de l'obstacle et sont indépendants du type d'écoulement étudié.

Le système d'équations s'écrit sous forme condensée avec sommation sur j :

$$[A_{ij}] \cdot [\gamma_j] = [-\vec{u}_\infty \cdot \vec{n}_i]$$

L'utilisation de la matrice inverse de $[A_{ij}]$ permet de résoudre le système en isolant les inconnues γ_j ,

$$(12) \quad [\gamma_j] = [A_{ij}]^{-1} \cdot [-\vec{u}_\infty \cdot \vec{n}_i]$$

La connaissance des γ_j va permettre, par l'intermédiaire des valeurs approchées de la distribution tourbillonnaire surfacique $\vec{\mu}$, de calculer l'intensité tourbillonnaire émise le long de la ligne de décollement (paragraphe 2.7).

2.4 - CALCUL DE LA DISTRIBUTION TOURBILLONNAIRE A PARTIR DES CIRCULATIONS -

On peut obtenir une valeur approchée de $\vec{\mu}^{(n)}$ sur chaque facette n en passant des circulations concentrées sur les segments tourbillonnaires formant les côtés de la facette de superficie S_n à une distribution continue équivalente. Les vecteurs tourbillons linéiques $\vec{\Gamma}_k^{(n)}$ associés

aux segments k de la facette n peuvent s'écrire (figure 4) :

$$\vec{\Gamma}_k^{(n)} = \gamma_k^{(n)} \frac{\vec{l}_k}{|\vec{l}_k|}$$

où $\gamma_k^{(n)}$ représente la différence des circulations liées aux deux anneaux ayant le côté k en commun. A partir de là on peut former les composantes $\vec{\mu}_y^{(n)}$ et $\vec{\mu}_z^{(n)}$ de $\vec{\mu}$ de la manière suivante :

$$(13) \quad \vec{\mu}_y^{(n)} = \left(\frac{\vec{\Gamma}_2^{(n)}}{2} + \frac{\vec{\Gamma}_4^{(n)}}{2} \right) \cdot \frac{l_n}{S_n} \quad \text{et} \quad \vec{\mu}_z^{(n)} = \left(\frac{\vec{\Gamma}_1^{(n)}}{2} + \frac{\vec{\Gamma}_3^{(n)}}{2} \right) \cdot \frac{L_n}{S_n}$$

en étalant sur la facette n la moitié de chaque valeur $\vec{\Gamma}_k^{(n)}$, l'autre moitié étant réservée à la facette voisine ayant le segment k en commun. l_n est la distance moyenne séparant les côtés 1 et 3 et L_n la distance moyenne séparant les côtés 2 et 4.

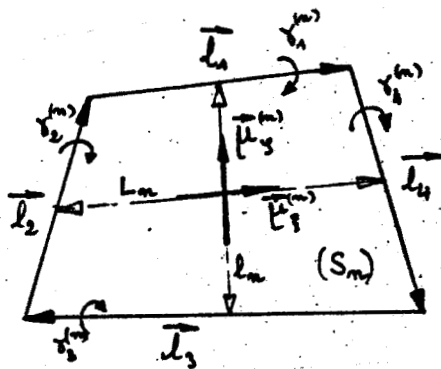
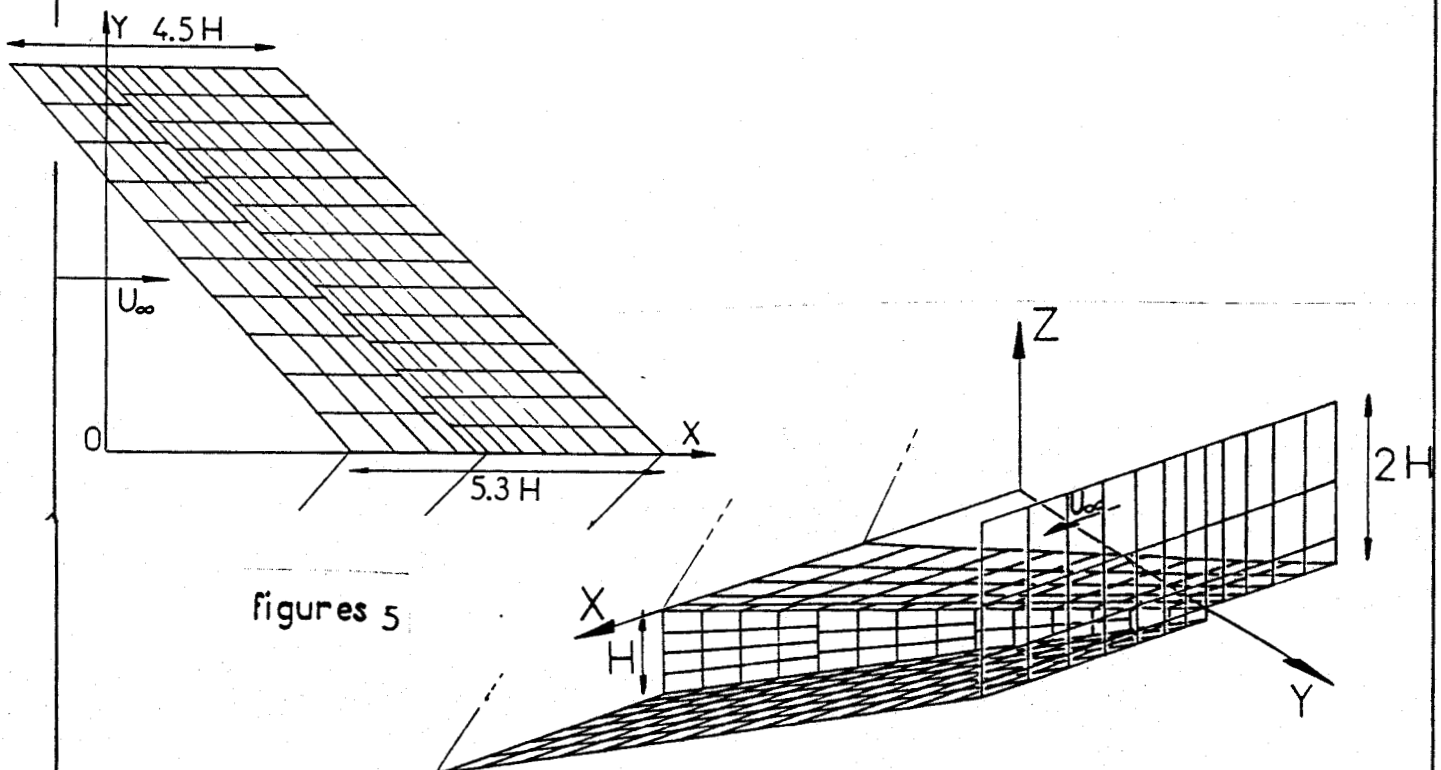


figure 4

2.5 - QUADRILLAGE DES PAROIS D'UN CANAL AVEC MARCHE EN CHEVRON -

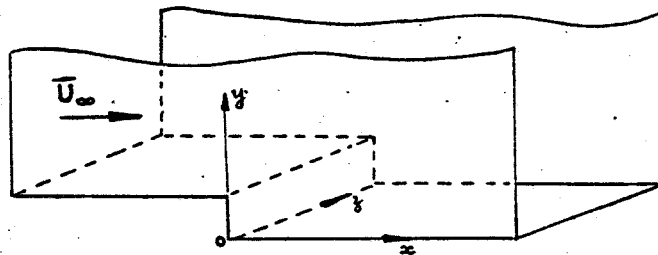
La symétrie par rapport à son plan médian (figure 2) permet de ne quadriller que la moitié du canal, l'autre moitié étant prise en compte par réflexion par rapport au plan de symétrie. Les figures 5 présentent le maillage adopté sur les parois du canal et qui découle de la discussion au paragraphe 2.2.b.



figures 5

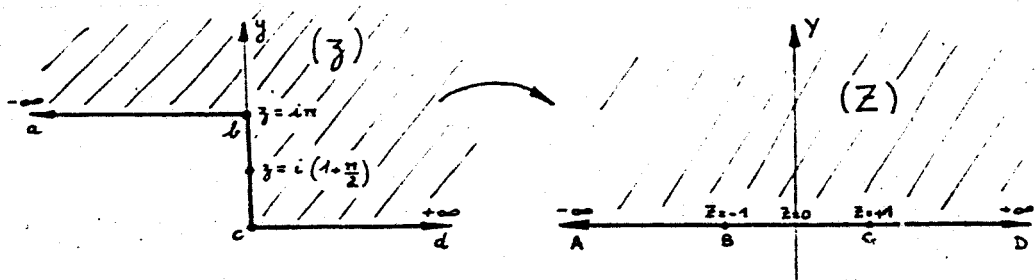
L'apex qui risque d'engendrer certains ennuis au niveau des calculs numériques a été éliminé et remplacé par une petite dénivellation le long de la paroi latérale de façon que la pente de l'auge reste identique. Le maillage regroupe 233 facettes quadrilatères jointives de forme variée (rectangle, losange, trapèze) mais régulière. Leur surface varie le long des parois de façon progressive. Un soin particulier a été apporté à la paroi de l'auge et à la paroi verticale de la marche puisque par la suite elles risquent d'être effleurées par la nappe tourbillonnaire et sujettes à des gradients de vitesse importants et à des interactions nappe-paroi assez fortes. Les points contrôles sont situés au centre géométrique (généralement appelé dans la littérature anglo-saxonne "centroïd") de chaque facette.

2.6 - CAS TEST DE LA MARCHÉ DROITE -



On a éprouvé la bonne aptitude de ce procédé à traiter des cas d'écoulements sans décollement de fluide parfait le long d'une marche droite limitée de chaque côté par des parois verticales de hauteur infinie. Ce type d'écoulement peut se comparer à un écoulement bidimensionnel, et les résultats numériques obtenus à l'aide d'un réseau d'anneaux tourbillonnaires peuvent être comparés aux valeurs théoriques du cas bidimensionnel que l'on trouve par transformation conforme.

La transformation de Schwarz-Christoffel $\frac{dz}{dZ} = \sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}}$ fait correspondre au domaine hachuré (z) le demi-plan supérieur (Z) [16].



L'intégration de la transformation de Schwarz-Christoffel fait apparaître une relation entre z et Z :

$$z = \sqrt{Z^2 - 1} + \text{Log} \left(Z + \sqrt{Z^2 - 1} \right)$$

avec les correspondances suivantes entre les points

{	$Z = -1$	\longleftrightarrow	$z = i\pi$
	$Z = 0$	\longleftrightarrow	$z = i\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$
	$Z = 1$	\longleftrightarrow	$z = 0$

Un écoulement dont la vitesse à l'infini est parallèle à l'axe des x dans le plan (z) correspond à la présence d'une source à l'infini amont et d'un puit de même intensité à l'infini aval. Dans le plan (Z) cette source et ce puit se retrouvent aux points correspondants avec la même intensité que dans le plan (z). Ces propriétés nous permettent de tracer des lignes de courant dans le plan (z) en cherchant l'image de toute ligne de courant parallèle à l'axe X dans le plan (Z). On en a disposé quatre sur la figure 6 passant à des hauteurs différentes à l'amont. On a superposé sur la même figure en différents points de ces lignes de courant les directions du vecteur vitesse calculées numériquement. On remarque que les vecteurs vitesse ont dans la majeure partie du domaine des directions convenables, ce qui laisse augurer d'une bonne tenue du champ des vitesses, à part peut-être près de la paroi (mais ceci est inhérent à ce genre de méthode et on verra au chapitre 3 comment élucider en partie ce problème) et surtout près du bord de l'arête où la présence d'un anneau tourbillonnaire à forte circulation perturbe les calculs numériques.

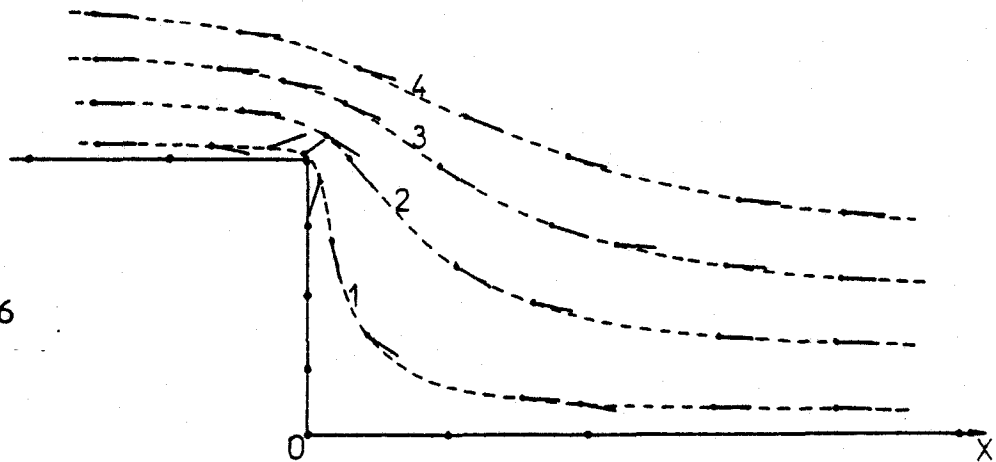
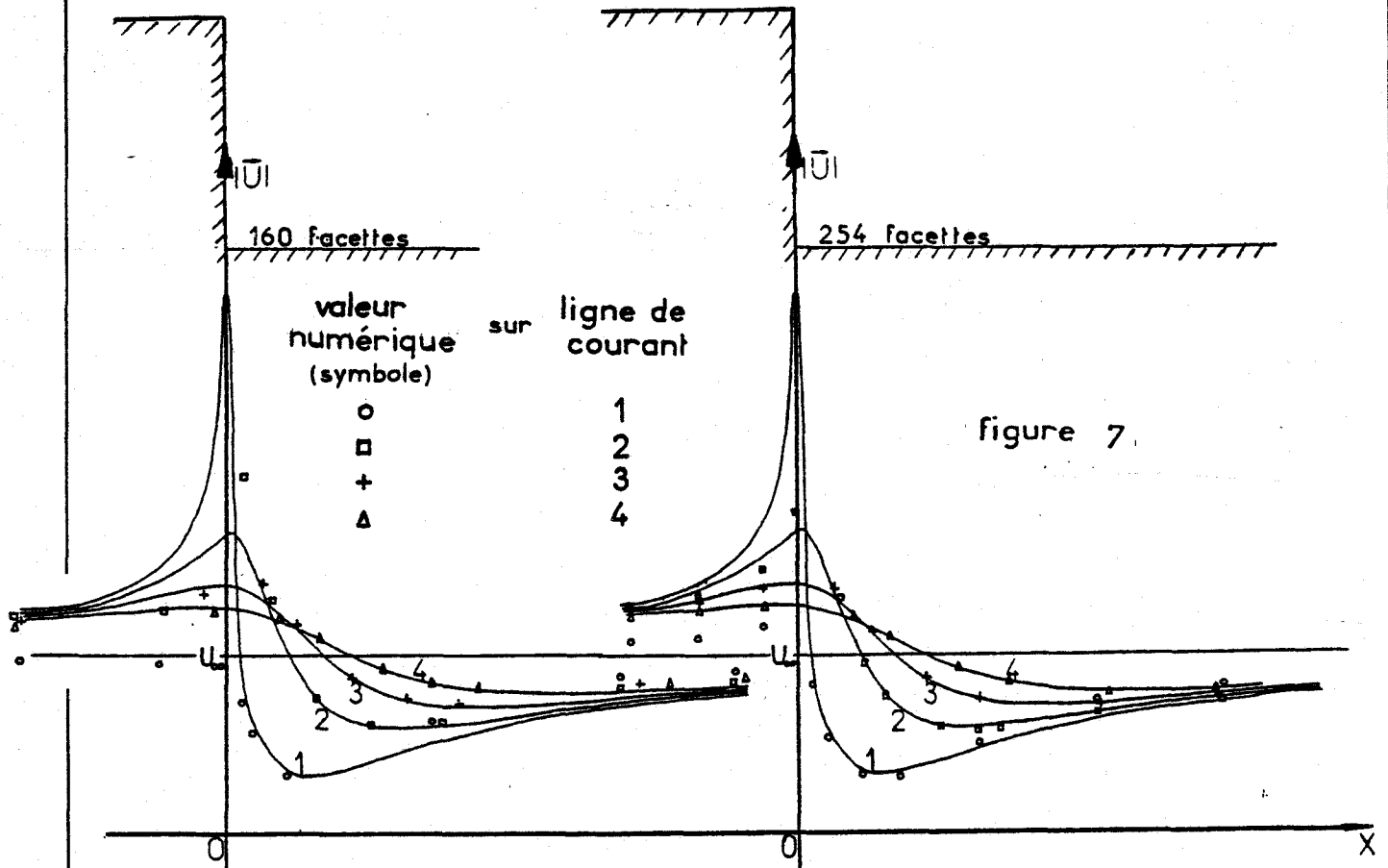


Figure 6

La vitesse complexe v dans (z) s'exprime à partir du potentiel $f(z)$ qui, lui-même est identique au potentiel $F(Z)$

$$v = \frac{df(z)}{dz} = \frac{dF(Z)}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dz} = u_\infty \sqrt{\frac{Z-1}{Z+1}}$$

la vitesse a une valeur infinie au point b et une valeur nulle au point c . Cette relation va permettre de tracer les courbes représentant la variation du module de la vitesse le long des différentes lignes de courant précédentes et de comparer les valeurs numériques obtenues avec ces courbes (figure 7). Deux comparaisons sont faites. Dans l'une le canal est tapissé de 160 facettes et dans l'autre il est recouvert de 254 facettes.



La représentation du canal par un nombre de facettes plus élevé se traduit par une meilleure approximation du champ des vitesses et laisse entrevoir que ce genre d'écoulement ne peut être convenablement étudié qu'avec un maillage assez fin surtout près de l'arête.

2.7 - ETUDE DU DECOLLEMENT -

2.7.a - Position de la ligne de décollement -

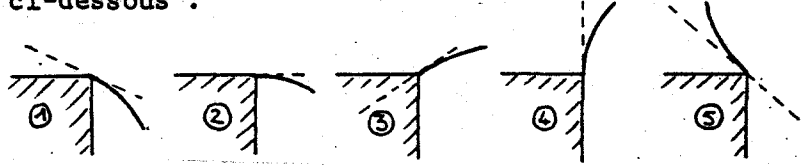
Si le fluide est au repos aux temps précédant l'instant initial où l'on met impulsivement le fluide en mouvement il se produit à l'instant initial et dans le cas d'un écoulement réel une discontinuité de vitesse tangentielle près de la paroi de l'obstacle. Dans le cas limite d'une viscosité évanescence traité ici cette zone de rapide variation de la vitesse tangentielle est remplacée par une couche tourbillonnaire infiniment mince. Les tourbillons restent concentrés le long de la paroi et sont convectés par l'écoulement à l'intérieur d'une fine pellicule ceinturant l'obstacle.

Pour un fluide à très faible viscosité, des discontinuités de courbure de l'obstacle peuvent perturber ce phénomène, comme par exemple une arête vive que ne peut physiquement contourner une couche limite. La présence de ce bord pointu va obliger cette couche tourbillonnaire à quitter l'obstacle et la position du décollement sur l'arête est imposée par la condition de vitesse finie partout dans l'écoulement.

2.7.b - Direction du décollement -

L'approche du problème à partir d'un écoulement de fluide parfait ne permet pas de trouver la direction du décollement et seules des constatations physiques et des visualisations expérimentales permettent de considérer que la direction du décollement est parallèle au bord supérieur de la marche. L'étude suivante basée en partie sur les travaux de K.W. MANGLER et J.H.B. SMITH [21] et R. LEGENDRE [19] vient appuyer cette hypothèse.

D'un point de vue purement géométrique il existe cinq cas de décollement illustrés ci-dessous :

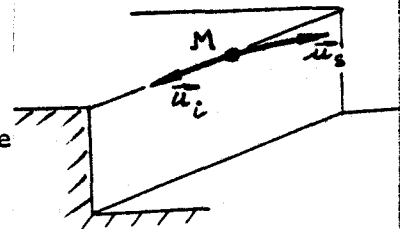


- 1) le plan tangent à la nappe forme un angle aigu avec la paroi verticale ;
- 2) le plan tangent à la nappe se trouve dans le prolongement du bord supérieur de la marche ;
- 3) le plan tangent à la nappe forme deux angles obtus avec les deux parois de la marche ;
- 4) le plan tangent à la nappe se trouve dans le prolongement de la paroi verticale de la marche ;
- 5) le plan tangent à la nappe forme un angle aigu avec la face horizontale de la marche.

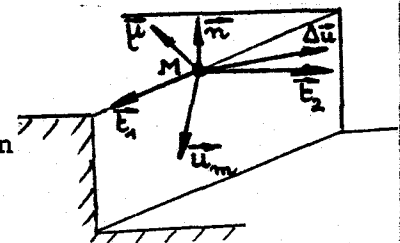
Les cas 1) et 5) sont rejetés puisqu'ils définissent un écoulement passant un coin convexe qui implique une vitesse infinie sur l'arête.

Pour les cas 2), 3), et 4) où la vitesse est finie, une étude plus fine du décollement doit être envisagée.

Il existe en tout point M de l'arête deux vitesses, l'une \vec{u}_s contenue dans le plan du bord supérieur de la marche et l'autre \vec{u}_i contenue dans le plan du bord vertical de la marche. Par ailleurs ces vitesses doivent être aussi contenues dans le plan tangent à la nappe, issu du bord de la marche. En conséquence cela suppose que l'une des deux vitesses soit confondue avec l'arête et que la nappe s'échappe tangentiellement au bord correspondant à l'autre vitesse (cas 2) et 4)). Lorsque les deux vitesses sont tangentes à l'arête, cela correspond à une émission tourbillonnaire nulle et ne peut se produire qu'en certains points particuliers (cas 3)).



Il y a sur l'arête un ensemble de variables dont \vec{u}_s la distribution tourbillonnaire surfacique issue du bord supérieur, \vec{u}_i la distribution tourbillonnaire surfacique issue du bord vertical, \vec{u}_s et \vec{u}_i définies précédemment, \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , et \vec{n} définissent respectivement la tangente au bord de l'arête, la normale au bord de l'arête, parallèle à la direction de la nappe et dirigée extérieurement aux parois et la normale au plan tangent à la nappe au bord de l'arête. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$ forme un trièdre direct.



$$(14) \quad \vec{u}_m = \frac{1}{2} (\vec{u}_s + \vec{u}_i) = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2$$

représente la vitesse de déplacement de la nappe et

$$(15) \quad \Delta \vec{u} = \vec{u}_s - \vec{u}_i = (\vec{\mu}_s \wedge \vec{n}_s) - (\vec{\mu}_i \wedge \vec{n}_i) = \Delta u_1 \vec{e}_1 + \Delta u_2 \vec{e}_2$$

le saut de vitesse à travers la nappe, avec \vec{n}_s la normale en M au bord horizontal de la marche et \vec{n}_i la normale en M au bord vertical de la marche.

En associant (14) et (15) :

$$\vec{u}_s = \vec{u}_m + \frac{1}{2} \Delta \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{u}_i = \vec{u}_m - \frac{1}{2} \Delta \vec{u}$$

et donc

$$\begin{cases} \vec{u}_s \vec{e}_2 = u_2 + \frac{1}{2} \Delta u_2 \\ \vec{u}_i \vec{e}_2 = u_2 - \frac{1}{2} \Delta u_2 \end{cases} .$$

Pour qu'il y ait émission tourbillonnaire u_2 doit être strictement positif.

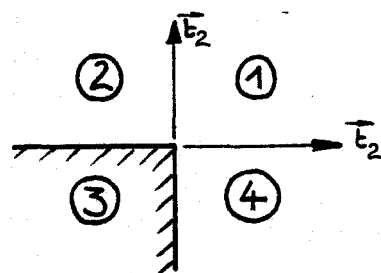
Sachant de plus que soit $\vec{u}_i \vec{e}_2$ soit $\vec{u}_s \vec{e}_2$ est nul, on a :

$$\begin{cases} \vec{u}_s \vec{e}_2 > 0 & \text{si } \Delta u_2 > 0 \\ \vec{u}_i \vec{e}_2 > 0 & \text{si } \Delta u_2 < 0 \end{cases}$$

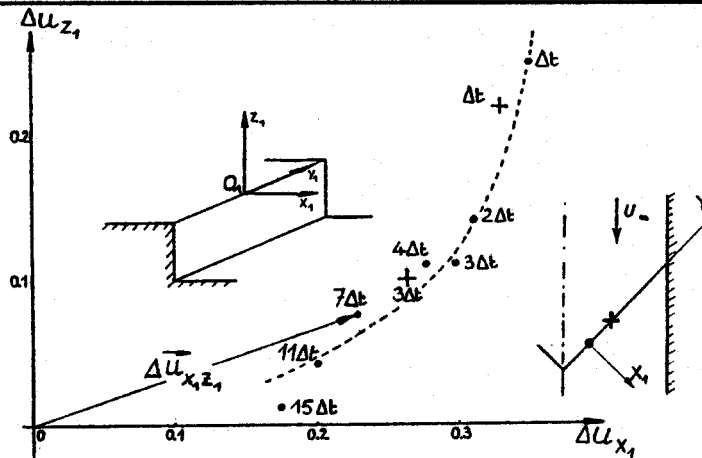
et la direction du décollement se fera tangentiellement au bord horizontal.
et la direction du décollement se fera tangentiellement au bord vertical.

Ce sont les valeurs des composantes de $\vec{\mu}_s$ et $\vec{\mu}_i$ qui déterminent le signe de Δu_2 (relation (15)).

Si la projection de $\Delta \vec{u}$ dans le plan perpendiculaire à l'arête se trouve dans le quadrant ①, Δu_2 sera toujours positif quelle que soit la direction de \vec{e}_2 (figure ci-contre). De même, si la projection de $\Delta \vec{u}$ se trouve dans le quadrant ③, Δu_2 sera toujours négatif quelle que soit la direction de \vec{e}_2 . On ne pourra rien dire si celle-ci se trouve dans les quadrants ② et ④.



La vérification numérique, si elle ne peut se faire à l'instant initial puisque la vitesse a une valeur infinie sur l'arête, a été réalisée aux instants suivants en 2 points de l'arête. On a tracé sur cette figure la projection $\Delta \vec{u}_{x_1 z_1}$ de $\Delta \vec{u}$ sur le plan $O_1 x_1 z_1$ à l'instant $T \Delta t$ correspondant à la septième émission de particules le long de l'arête. La valeur de Δu_2 s'en déduit en projetant $\Delta \vec{u}_{x_1 z_1}$ soit sur l'axe vertical, soit sur l'axe horizontal, ce qui montre bien que Δu_2 est toujours positif à tous ces instants (figure ci-dessous).



DIRECTION DU DÉCOLLEMENT

Par extrapolation on peut supposer que Δu_z est encore positif à des instants très proches de l'instant initial.

2.7.c - Intensité tourbillonnaire émise le long de la ligne de décollement -

L'équation de Bernoulli appliquée en A et B en sachant que la nappe est une surface en équilibre se réduit à :

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \bar{u}_m \cdot \Delta \bar{u} = 0.$$

Le saut de potentiel $\Delta \varphi$ représente au signe près la circulation $-\Gamma$ et $\Delta \bar{u}$ est équivalent au produit vectoriel $\bar{\mu} \wedge \bar{n}$ d'où :

$$(16) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = (\bar{\mu} \wedge \bar{n}) \cdot \bar{u}_m$$

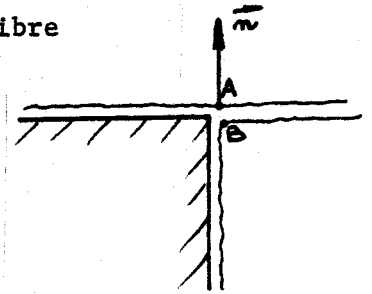
La variation de circulation en un point du bord de fuite pendant un intervalle de temps Δt a la forme suivante :

$$\Delta \Gamma \approx (\bar{\mu} \wedge \bar{n}) \cdot \bar{u}_m \Delta t$$

si on suppose que pendant la durée Δt , la vitesse moyenne \bar{u}_m de la nappe s'échappant de l'arête et le saut de vitesse $\Delta \bar{u}$ restent pratiquement constants (la dernière hypothèse revient à dire que $\bar{\mu} \wedge \bar{n}$ est constant sur la longueur $|\bar{u}_m| \Delta t$), et que $\bar{\mu} \wedge \bar{n}$ et \bar{u}_m gardent les mêmes valeurs sur une certaine distance Δl le long de l'arête, le module du tourbillon $\bar{\Omega}$ s'échappant du bord sur une largeur Δl et durant le laps de temps Δt s'explicité ainsi :

$$(17) \quad \Omega \approx |(\bar{\mu} \wedge \bar{n}) \cdot \bar{u}_m \Delta t \Delta l|.$$

La connaissance de la répartition tourbillonnaire surfacique $\bar{\mu}$ le long de la ligne de décollement donne la direction du vecteur tourbillon s'échappant du bord et la valeur de l'intensité tourbillonnaire émise à chaque pas de temps Δt à l'aide de (17).



2.7.d - Application au cas de la marche -

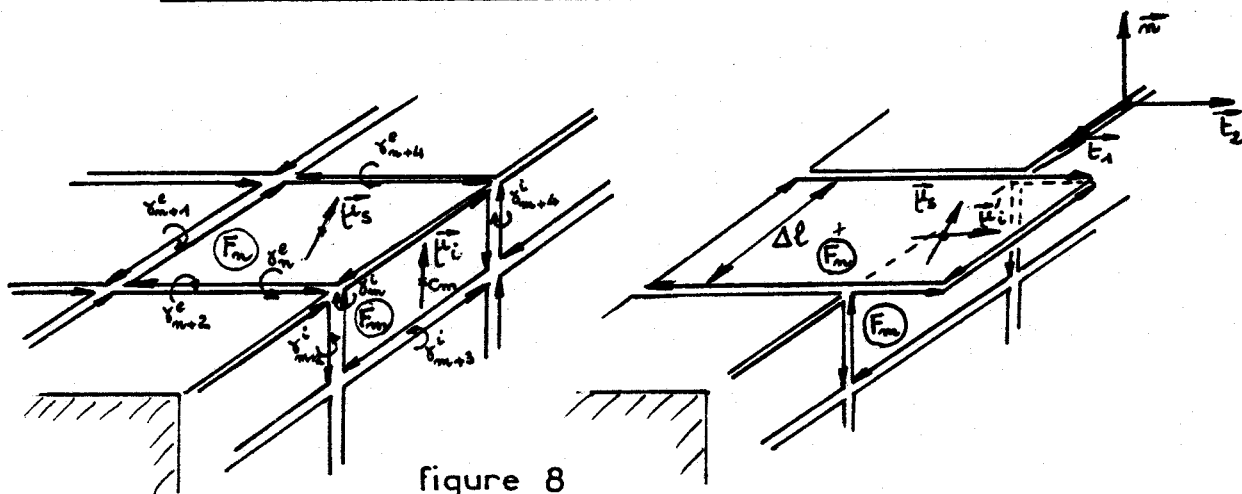


figure 8

On considère les deux facettes F_n et F_m ayant le bord de l'arête en commun et associées respectivement aux points de contrôle C_n et C_m . On vient de supposer que lors de l'éjection tourbillonnaire le long du bord $\vec{\mu}$ est constant sur une surface de longueur $|\vec{u}_m|/\Delta t$ et de largeur Δl que l'on prend égale à la largeur de chaque facette bordant l'arête. Etant donné la finesse de discrétisation du canal en facettes près de l'arête et la valeur du pas de temps Δt qu'on utilise, la valeur $|\vec{u}_m|/\Delta t$ est toujours supérieure à la distance séparant les points C_n et C_m du bord. Les valeurs de $\vec{\mu}_s$ et $\vec{\mu}_i$ au bord sont donc les mêmes qu'aux points C_n et C_m . Elles se calculent de la manière présentée au paragraphe 2.4.

La direction de l'échappement se fait tangentiellement au bord supérieur. La couche limite inférieure va subir un brusque changement de direction afin de s'aligner avec la couche limite supérieure. Le vecteur $\vec{\mu}_i$ va, le long de la ligne de séparation, être contraint à une rotation instantanée autour du vecteur \vec{E}_1 (figure 8). On obtient une valeur $\vec{\mu}_i'$ qui a même module que $\vec{\mu}_i$, mais dont la direction se déduit de celle de $\vec{\mu}_i$ par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de \vec{E}_1 , et qui va composer avec $\vec{\mu}_s$ le vecteur $\vec{\mu}$ au bord de l'arête.

La connaissance de $\vec{\mu}$ nous donne le module (relation (17)) et la direction de $\vec{\Omega}$:

$$(18) \quad \vec{\Omega} = \Omega \frac{\vec{\mu}}{|\vec{\mu}|} = \left| (\vec{\mu} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{u}_m \Delta t \Delta l \right| \frac{\vec{\mu}}{|\vec{\mu}|}$$

$\vec{\Omega}$ peut également se traduire en termes de circulations. Dans notre cas particulier on a (voir figure 4, figure 8 et les figures 5) :

$$\vec{\mu}_s \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2S_m} \left[L_n(\gamma_{n+2}^e - \gamma_{n+4}^e) + \frac{\sqrt{2}}{2} L_n(\gamma_{n+1}^e - \gamma_m^i) \right] \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{L_n}{S_n} [\gamma_m^i - \gamma_{n+1}^e] \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \text{Oxyz} \end{array}$$

$$\vec{\mu}_i \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2S_m} \left[l_m (\gamma_{m+4}^i - \gamma_{m+2}^i) - L_m (\gamma_{m+3}^i - \gamma_m^e) \right] \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2S_m} \left[l_m (\gamma_{m+4}^i - \gamma_{m+2}^i) + L_m (\gamma_{m+3}^i - \gamma_m^e) \right] \\ 0 \end{array} \right.$$

2.8 - TECHNIQUE DU LACHE DE TOURBILLONS -

Les différents tourbillons $\vec{\Omega}$ débités le long de l'arête sont concentrés en des points situés chacun au milieu des différents segments bordant l'arête. On les laisse alors s'échapper de ces points d'émission sous forme de cellules fluides enfermant un certain volume δV et porteuses d'une intensité tourbillonnaire volumique $\vec{\omega}$ tels que $\vec{\Omega} = \vec{\omega} \delta V$. Bien que pouvant changer de forme au cours du temps la particule fluide gardera dans le cas d'un écoulement incompressible le même volume au cours de son évolution [27]. Ensuite on suit l'histoire de ces particules tourbillonnaires qui forment les lignes d'émission (une ligne d'émission est composée de toutes les particules émises d'une même source. Elle ne se superpose avec la ligne de courant, la trajectoire et la ligne tourbillon qu'en écoulement stationnaire). L'utilisation des lignes d'émission permet d'observer l'enroulement de la nappe et de comparer avec certaines vues expérimentales. A chaque pas de temps et en chaque point d'émission on crée une nouvelle particule associée à un nouveau tourbillon $\vec{\Omega}$ dont l'évolution va être gouvernée par l'équation d'Helmholtz.

2.9 - VARIATION DE LA CIRCULATION AU COURS DU TEMPS -

L'existence d'un échappement tourbillonnaire à partir d'une surface entraîne une variation dans le temps de la circulation autour de l'obstacle (relation (16)). La circulation de chaque anneau varie en fonction du temps et on est contraint à chaque pas de temps de recalculer les nouvelles circulations γ_j' à partir des conditions limites qui doivent être respectées à chaque instant en chaque point de contrôle. On voit alors apparaître un nouveau terme dans la relation (12) :

$$(19) \quad \begin{aligned} [\gamma_j'] &= [A_{ij}]^{-1} \cdot [(-\vec{u}_{\infty} + \vec{u}_i^T) \cdot \vec{n}_i] \\ &= [\gamma_j] + [A_{ij}]^{-1} \cdot [\vec{u}_i^T \cdot \vec{n}_i] \end{aligned}$$

où \vec{u}_i^T représente la vitesse induite au point de contrôle C_i par la nappe tourbillonnaire et dont l'expression analytique est représentée par l'intégrale volumique :

$$\frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{\omega} \wedge \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv$$

où (V) est le domaine dans lequel $\vec{\omega}$ est non nul.

La méthode présente remplace le domaine (V) par un ensemble de cellules fluides chargées chacune d'une intensité tourbillonnaire volumique $\vec{\omega}$ et permet de passer au problème discret en remplaçant l'intégrale par une somme sur un certain nombre de particules P_k auxquelles sont liés les tourbillons $\vec{\Omega}_k$.

L'expression discrétisée de la vitesse \vec{u}_i^T induite par un nuage tourbillonnaire formé de N particules s'exprime ainsi au point C_i :

$$(20) \quad \vec{u}_i^T = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\vec{P}_k \vec{C}_i}{|\vec{P}_k \vec{C}_i|^3} \wedge \vec{\Omega}_k$$

2.10 - EVOLUTION DU CHAMP TOURBILLONNAIRE -

L'intensité tourbillonnaire $\vec{\Omega}_i$ liée à la particule P_i obéit à l'équation :

$$\frac{D\vec{\Omega}_i}{Dt} = \vec{\Omega}_i \cdot \text{grad} (\vec{u}_i^T + \vec{u}_i^S)$$

où \vec{u}_i^T et \vec{u}_i^S sont les composantes de la vitesse de la particule P_i induites respectivement par les autres particules tourbillonnaires et par la distribution tourbillonnaire $\vec{\mu}$ s'étalant sur les parois et représentée par un système d'anneaux tourbillonnaires.

A l'aide de la relation (20) et de l'annexe 3.1 on peut déterminer l'évolution de l'intensité $\vec{\Omega}_i$ influencée par la présence des $N-1$ autres particules tourbillonnaires et peut être décrite par l'équation suivante :

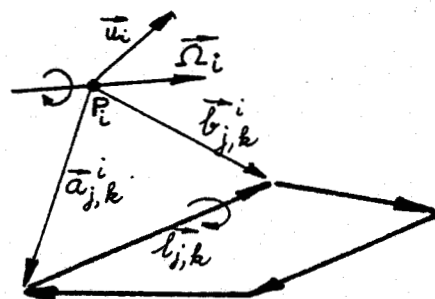
$$\left[\frac{D\vec{\Omega}_i}{Dt} \right]_1 = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{r_{ij}^3} \left[-\frac{3}{r_{ij}^2} (\vec{\Omega}_i \cdot \vec{r}_{ij}) (\vec{r}_{ij} \wedge \vec{\Omega}_j) + \vec{\Omega}_i \wedge \vec{\Omega}_j \right]$$

Cette évolution dépend aussi de l'intensité tourbillonnaire liée à la paroi. Pour connaître ses effets sur $\vec{\Omega}_i$ on utilise la formule (10) qu'on introduit dans le terme de déformation. On en déduit alors également une forme analytique du terme de déformation de $\vec{\Omega}_i$ induit par un segment tourbillonnaire (Annexe 3), et a fortiori par un anneau tourbillonnaire. L'évolution de $\vec{\Omega}_i$ influencée par M anneaux tourbillonnaires peut se définir comme suit :

$$(21) \quad \left[\frac{D\vec{\Omega}_i}{Dt} \right]_2 = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^4 \left[\frac{\vec{u}_i}{k_1 - k_2} \left\{ 2 \left[\frac{k_1 \vec{\Omega}_i \cdot \vec{b}_{j,k}^i}{|\vec{b}_{j,k}^i|^2} - \frac{k_2 \vec{\Omega}_i \cdot \vec{a}_{j,k}^i}{|\vec{a}_{j,k}^i|^2} \right] + \left[\frac{1}{|\vec{a}_{j,k}^i|^2} - \frac{1}{|\vec{b}_{j,k}^i|^2} \right] \vec{\Omega}_i \cdot \vec{l}_{j,k}^i \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{|\vec{a}_{j,k}^i \wedge \vec{b}_{j,k}^i|^2} \left\{ 2 \vec{u}_i \left[(\vec{a}_{j,k}^i \wedge \vec{b}_{j,k}^i) (\vec{\Omega}_i \cdot \vec{l}_{j,k}^i) \right] - \left[\vec{u}_i \cdot (\vec{a}_{j,k}^i \wedge \vec{b}_{j,k}^i) \right] (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{l}_{j,k}^i) \right\} \right]$$

avec

$$k_1 = \frac{\vec{l}_{j,k}^i \cdot \vec{b}_{j,k}^i}{|\vec{b}_{j,k}^i|} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{\vec{l}_{j,k}^i \cdot \vec{a}_{j,k}^i}{|\vec{a}_{j,k}^i|}$$



Cette formulation semble à première vue lourde et complexe mais si l'on s'aperçoit que la plupart des termes qui la composent sont déjà calculés au moment de la détermination de la vitesse \vec{u}_i , elle apparaît simple à appliquer et rapide si on couple son calcul avec celui de \vec{u}_i (le temps de calcul est moins élevé que dans le cas d'une détermination du terme de déformation au moyen d'un schéma aux différences finies et le résultat est plus précis).

L'évolution globale de chaque $\vec{\Omega}_i$ associée à chaque particule P_i dans notre problème où coexistent un nuage de particules tourbillonnaires et un réseau d'anneaux tourbillonnaires s'écrit :

$$\frac{D\vec{\Omega}_i}{Dt} = \left[\frac{D\vec{\Omega}_i}{Dt} \right]_1 + \left[\frac{D\vec{\Omega}_i}{Dt} \right]_2$$

2.11 - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES RELATIONS VECTORIELLES -

Les relations définissant le champ des vitesses et le champ tourbillonnaire sont à manipuler avec précaution puisqu'elles se comportent comme des fonctions en $r^{-\alpha}$ où α est soit égal à -2 (pour la vitesse) soit égal à -3 (pour le terme de déformation). Lorsque deux particules sont proches l'une de l'autre ou lorsqu'une particule effleure un anneau tourbillonnaire, ces fonctions ont tendance à prendre des valeurs élevées qui ont pour conséquence de désorganiser le bon déroulement du calcul.

2.11.a - Particule près d'un segment -

Le cas de la particule passant à proximité d'un segment tourbillonnaire a été résolu en utilisant un procédé de déformation locale du maillage (voir chapitre 3).

La particule initialement près d'un segment se retrouve après déformation du maillage au-dessus d'un point de contrôle, ce qui a pour effet d'éloigner de façon optimale la particule de tout segment tourbillonnaire et d'éviter de surévaluer l'influence de tel segment par rapport à tel autre.

2.11.b - Particules voisines -

Pour deux particules voisines on utilise le procédé classique du noyau visqueux [7] [17] qui est l'un des traitements les plus simples pour éviter le comportement singulier du champ des vitesses. Chaque particule devient le centre d'une sphère de rayon R séparant deux domaines. La vitesse ne subit aucune modification dans le domaine externe mais est limitée dans le domaine interne. On peut utiliser différents schémas pour représenter cette "viscosité numérique" (figure 9).

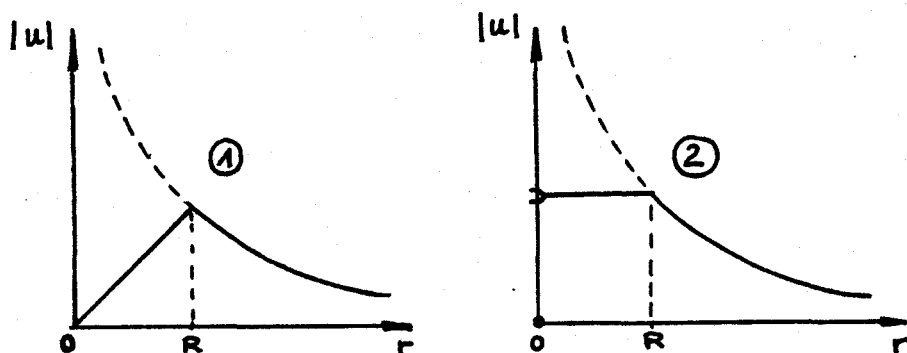


figure 9

La représentation lagrangienne convectée avec chaque particule P_i les erreurs sur \bar{u}_i et $\bar{\Omega}_i$ commises aux pas précédents et qui sont dues aux procédés de calcul employés. L'équation d'Helmholtz ne contient aucun terme pouvant atténuer ces erreurs et le bon comportement observé pour certaines nappes tourbillonnaires réelles est souvent difficile à obtenir à l'aide de notre modèle "fluide parfait", l'effet amortissant du terme de viscosité de l'équation (1) étant négligé ici.

Pour atténuer les perturbations dues au traitement numérique, on tronque comme indiqué sur la figure 9 le champ des vitesses. Son effet ressemble à celui d'une viscosité réelle. Cette "viscosité numérique" ne sert pas comme dans les écoulements réels à réaliser une certaine diffusion mais permet plutôt sur un certain nombre de pas de temps aux erreurs de se compenser en moyenne afin que l'erreur résultante reste dans des limites raisonnables. Les positions des particules à chaque instant ne sont donc que des positions moyennes qui fluctuent autour d'une position réelle a priori inconnue. Lorsque deux particules sont très proches l'une de l'autre le cas (1) a tendance à annuler leur action réciproque, ce qui risque d'aller à l'encontre du but recherché puisqu'on perturbe le mouvement de chacune de ces particules en minimisant exagérément l'effet primordial de la particule avoisinante.

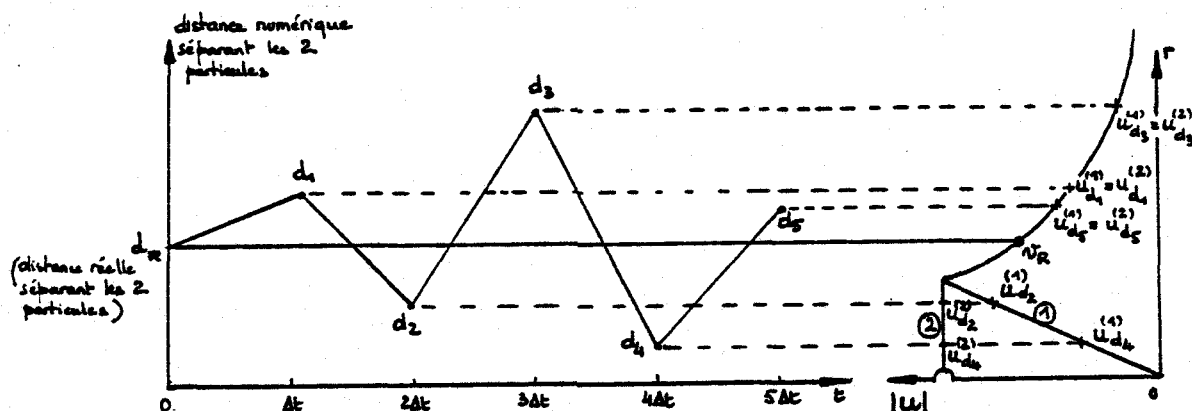


figure 10

Pour rendre les explications plus claires, supposons que sur une durée $n \Delta t$ la distance réelle d_R des deux particules (faisant partie du système tourbillonnaire global) ainsi que les vitesses qu'elles s'induisent mutuellement, ne varient pas. A chaque pas de temps une erreur s'insinue sur leur position respective et la distance entre ces points oscille au cours du temps autour de la valeur réelle (figure 10). Si au bout des n pas de temps on cherche la valeur moyenne u_m de la vitesse, on devrait obtenir une quantité qui s'approche de la valeur exacte u_R . Le schéma ①, atténuant trop fortement les vitesses quand la distance tend à s'annuler, ne permet pas d'obtenir une vitesse moyenne de l'ordre de u_R . Par contre, si on utilise le schéma ② de la figure 9 qui garde une vitesse constante à l'intérieur du noyau, la valeur moyenne s'approchera plus de la valeur exacte u_R .

$$u_m^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{d_i}^{(2)}$$

Apparemment ce second procédé est mieux adapté à la représentation lagrangienne et aux fluctuations qui en découlent. Les noyaux servent simplement à lisser les valeurs trop élevées et à obtenir des grandeurs moyennes de la vitesse proche de la vitesse réelle, plutôt qu'à approcher les propriétés visqueuses à l'intérieur de la nappe.

Le rayon R_i de chaque noyau varie en fonction de l'intensité $\bar{\Omega}_i$ liée à chaque particule R_i . Plus l'intensité est élevée, plus le rayon est grand et vice-versa. Cette adaptation permet d'utiliser ce procédé de manière plus souple en évitant aux particules possédant une faible intensité tourbillonnaire d'être entourées d'un noyau trop important et aux particules ayant une intensité plus forte d'induire des vitesses trop élevées à cause d'un rayon mal adapté.

La vitesse en tout point Q , induite par une intensité tourbillonnaire $\bar{\Omega}_i$ peut se représenter ainsi :

(avec troncature du champ de vitesse induite)

$$\left\{ \begin{array}{l} r \geq R_i \quad \bar{u}_Q = \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{r}}{r^3} \wedge \bar{\Omega}_i \\ r \leq R_i \quad \bar{u}_Q = \frac{1}{4\pi R_i^2} \frac{\bar{r}}{r} \wedge \bar{\Omega}_i \end{array} \right.$$

avec

$$R_i^2 = \frac{|\bar{\Omega}_i|}{\Omega_{max}} R_1^2$$

Ω_{max} est une constante qu'on choisit égale au maximum des différentes valeurs de $|\bar{\Omega}_i|$ aux points d'émission et au temps initial. R_1 est le paramètre qui reste à déterminer.

On peut rapidement montrer que la représentation de la vitesse à l'intérieur de la sphère correspond bien au schéma ② de la figure 9, en choisissant un repère sphérique de manière que $\bar{\Omega}_i$ soit dirigé suivant l'axe z . La vitesse s'écrit alors à l'intérieur de la sphère :

$$\bar{u}_Q = \frac{1}{4\pi R_i^2} \Omega_z \sin \varphi \vec{e}_\theta$$

Et comme le long d'un rayon $\sin \varphi$ est constant la vitesse l'est aussi.

2.11.c - Comportement du vecteur tourbillon -

Les variations importantes qui peuvent se produire sur le terme de déformation de $\bar{\Omega}_i$ ont été résolues d'une autre manière à partir de constatations physiques. Un filet tourbillon dans un écoulement continu ne peut s'allonger ou se contracter brusquement. Durant le laps de temps Δt la

variation de la section d'une même portion de filet est donc limitée et a fortiori les variations du module de l'intensité tourbillonnaire aussi. Une limitation sur le taux de variation de $\overline{\Omega}_i$ permet d'éviter certaines distorsions sur $\overline{\Omega}_i$ qui peuvent apparaître dans le cas de deux particules voisines par exemple.

2.12 - CONVECTION DES PARTICULES -

On utilise un schéma d'intégration en temps du second ordre. Soit $\overline{x}_i(t)$ la position d'une particule P_i au temps t , en première approximation la nouvelle position appelée "prédicteur" au temps $t + \Delta t$ sera :

$$\overline{x}_i^{(1)}(t + \Delta t) \approx \overline{x}_i(t) + \Delta t \overline{u}_i(t)$$

où $\overline{u}_i(t)$ est la vitesse au temps t de la particule P_i .

Le calcul de la vitesse $\overline{u}_i^{(1)}(t + \Delta t)$ au prédicteur va permettre de corriger la trajectoire et de réajuster la position à l'instant $t + \Delta t$ comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{x}_i(t + \Delta t) &\approx \overline{x}_i(t) + \frac{\Delta t}{2} \left[\overline{u}_i(t) + \overline{u}_i^{(1)}(t + \Delta t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\overline{x}_i(t) + \overline{x}_i^{(1)}(t + \Delta t) + \Delta t \overline{u}_i^{(1)}(t + \Delta t) \right] \end{aligned}$$

La variation de l'intensité tourbillonnaire est traitée de manière analogue. Soit $\overline{\Omega}_i(t)$ l'intensité tourbillonnaire associée à la particule P_i au temps t , on obtient une valeur intermédiaire au temps $t + \Delta t$ à partir de l'équation d'Helmholtz discrétisée :

$$\overline{\Omega}_i^{(1)}(t + \Delta t) \approx \overline{\Omega}_i(t) + \Delta t \left[\overline{\Omega}_i(t) \cdot \overline{\text{grad}} \overline{u}_i(t) \right]$$

L'intensité tourbillonnaire associée à la position définitive s'obtient à partir d'une valeur moyenne du terme de déformation entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_i(t + \Delta t) &\approx \overline{\Omega}_i(t) + \frac{\Delta t}{2} \left[\overline{\Omega}_i(t) \cdot \overline{\text{grad}} \overline{u}_i(t) + \overline{\Omega}_i^{(1)}(t + \Delta t) \cdot \overline{\text{grad}} \overline{u}_i^{(1)}(t + \Delta t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\overline{\Omega}_i(t) + \overline{\Omega}_i^{(1)}(t) + \Delta t \left(\overline{\Omega}_i^{(1)}(t + \Delta t) \cdot \overline{\text{grad}} \overline{u}_i^{(1)}(t + \Delta t) \right) \right] \end{aligned}$$

La méthode "prédicteur-correcteur" a été comparée dans le cas de la marche droite dans un canal à une méthode du premier ordre (figure 11). La nappe s'enroule mieux sur elle-même, sa courbure, sa position, sa répartition tourbillonnaire sont mieux représentées. Ces résultats incitent à préférer la méthode du second ordre plus coûteuse mais qui reproduit avec plus de fidélité les nappes à enroulement conique.

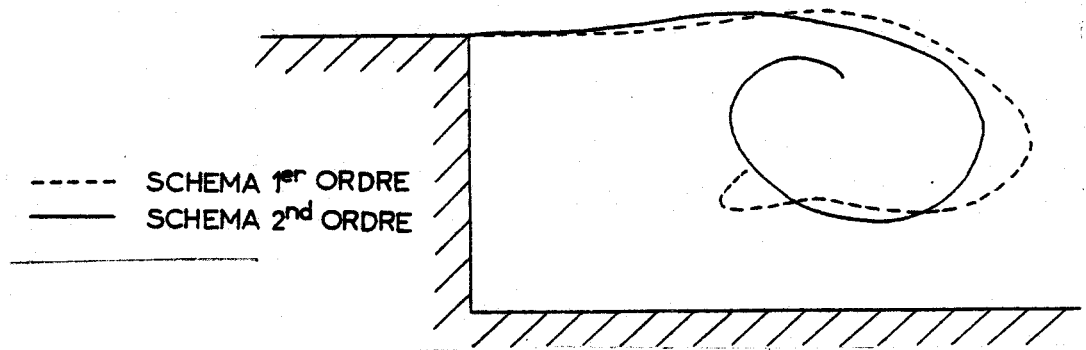


figure 11

2.13 - PRESSION A LA PAROI -

2.13.a - En écoulement stationnaire -

Le k_p stationnaire peut s'obtenir directement à partir de la vitesse \bar{u}_p à la paroi :

$$k_p = 1 - \frac{u_p^2}{u_\infty^2} ,$$

où la vitesse \bar{u}_p est directement reliée à la distribution tourbillonnaire surfacique locale par la relation suivante :

$$(22) \quad \bar{u}_p = -\frac{1}{2} \pi i \Gamma \bar{\mu} + \bar{u} + \bar{u}_\infty$$

$\bar{\mu}$ s'obtient par application du procédé décrit au paragraphe 2.4.

2.13.b - En écoulement instationnaire -

Il apparaît en écoulement instationnaire un terme supplémentaire faisant intervenir le potentiel φ :

$$k_p = 1 - \frac{u_p^2}{u_\infty^2} - \frac{2}{u_\infty^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} .$$

Le potentiel en un point Q de la paroi peut se décomposer en trois autres termes :

$$\varphi(Q) = \varphi_a(Q) + \varphi_t(Q) + \varphi_l(Q)$$

où $\varphi_a(Q)$ représente le potentiel au point Q induit par les anneaux tourbillonnaires tapissant la paroi [11] ,

$\varphi_t(Q)$ représente le potentiel au point Q induit par un nuage de particules tourbillonnaires et qui a été récemment explicité par J.P. GUIRAUD [10] ;

et $\varphi_l(Q)$ représente le potentiel local au point Q situé dans le domaine (Ω_i) et que l'on peut exprimer à l'aide de l'intensité bipolaire locale [14] et qui dans notre cas peut être remplacée par la circulation de l'anneau entourant le point Q :

$$\varphi_l(Q) = -2\pi \delta .$$

C H A P I T R E 3

EVOLUTION D'UNE PARTICULE FLUIDECHARGEE D'UN VECTEUR TOURBILLON PRES D'UNE PAROI3.1 - APPROCHE ANALYTIQUE -

L'approximation d'une distribution tourbillonnaire continue à l'aide d'anneaux tourbillonnaires, c'est-à-dire d'un enchevêtrement de fonctions en escalier représentant la circulation le long des différents segments rectilignes du réseau, rend son utilisation d'autant plus délicate que la discontinuité est bidirectionnelle (figure 12).

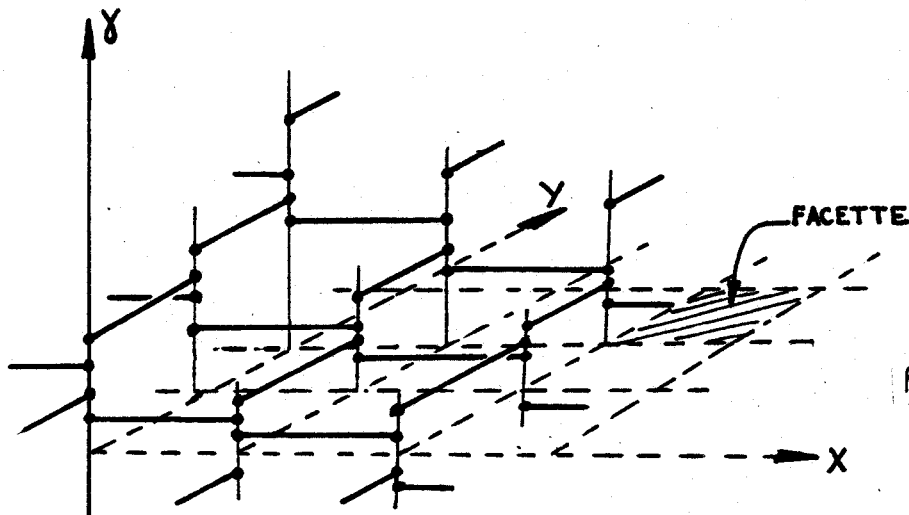


figure 12

Cette concentration d'intensité tourbillonnaire sur des segments a des effets néfastes sur le champ de vitesse donc sur le transport des particules passant à proximité d'une paroi, mais aussi sur l'évolution du tourbillon transporté puisque la relation (20) fait intervenir le vecteur vitesse. Pour éviter ces inconvénients on peut utiliser localement la propriété des "images hydrodynamiques". On remplace une partie de la paroi par une surface de courant en faisant simplement intervenir l'image d'une seule particule tourbillonnaire P . Soit (S) la partie de la paroi située à proximité de P qui est traitée localement comme une surface de courant (figure 13). On peut considérer que dans un domaine (D) s'appuyant sur (S) le champ de vitesse sera mieux représenté. La condition restrictive à l'emploi de ce procédé se trouve dans la distance de la particule P à son image P_i qui doit être sensiblement inférieure aux distances séparant P des autres particules afin que l'influence de P_i prédomine. Le domaine (Ω) extérieur à (D) induit sur (D) un champ de vitesse $\vec{v}_e(\vec{x}, t)$. On suppose que dans l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ la vitesse \vec{v}_e induite sur P est indépendante du temps. Ecrivons les composantes des divers éléments intéressants dans le repère $Oxyz$:

$$\vec{v}_e \begin{cases} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{cases} \quad \vec{r} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -2z(t) \end{cases} \quad \vec{\Omega}_P \begin{cases} \Omega_1(\vec{x}, t) \\ \Omega_2(\vec{x}, t) \\ \Omega_3(\vec{x}, t) \end{cases} \quad \vec{\Omega}_i \begin{cases} -\Omega_1(\vec{x}, t) \\ -\Omega_2(\vec{x}, t) \\ \Omega_3(\vec{x}, t) \end{cases}$$

où $\vec{r} = \overline{P P_i}$, $\overline{\Omega_P}$ représente l'intensité tourbillonnaire transportée par la particule P et $\overline{\Omega_i}$ celle transportée par la particule image P_i . La paroi est plane et dans le plan xOy (figure 13).

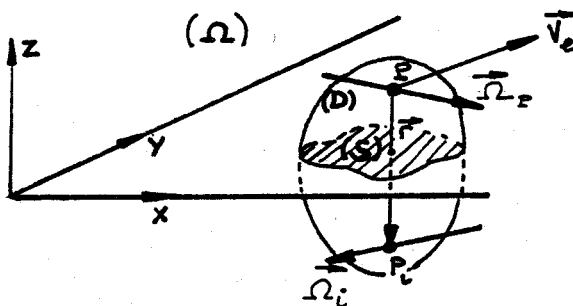


figure 13

L'évolution de l'intensité $\overline{\Omega_P}$ est dictée par l'équation de Helmholtz que l'on peut développer de la manière suivante en décomposant la vitesse totale de P en la vitesse $\overline{v_i}$ induite par sa particule image P_i et la vitesse $\overline{v_e}$:

$$\frac{d\overline{\Omega_P}}{dt} = \overline{\Omega_P} \cdot \text{grad } \overline{v_i} + \overline{\Omega_P} \cdot \text{grad } \overline{v_e}$$

Si nous utilisons la relation obtenue dans l'annexe 3.1 l'équation se transforme en :

$$\frac{d\overline{\Omega_P}}{dt} = \frac{1}{4\pi r^3} \left[\frac{3}{r^2} (\vec{r} \wedge \overline{\Omega_i}) \cdot (\overline{\Omega_P} \cdot \vec{r}) + \overline{\Omega_i} \wedge \overline{\Omega_P} \right] + \overline{\Omega_P} \cdot \text{grad } \overline{v_e}$$

Cette équation différentielle est équivalente au système suivant où l'on fait apparaître les composantes de $\overline{\Omega_P}$ et celles de $\text{grad } \overline{v_e}$:

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_2 \Omega_3}{8z^3} + a_1 \Omega_1 + a_2 \Omega_2 + a_3 \Omega_3 \\ \frac{d\Omega_2}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_1 \Omega_3}{8z^3} + b_1 \Omega_1 + b_2 \Omega_2 + b_3 \Omega_3 \\ \frac{d\Omega_3}{dt} = c_1 \Omega_1 + c_2 \Omega_2 + c_3 \Omega_3 \end{cases}$$

On a pu intégrer ce système analytiquement dans le cas particulier où :

$$a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$$

$$a_1 = b_2 = a(\vec{x}) \text{ et } c_3 = c(\vec{x})$$

On peut alors représenter le tableau exprimant $\text{grad } \overline{v_e}$ sous la forme suivante :

$$\text{grad } \overline{v_e}(P) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Le système particulier est associé aux conditions initiales suivantes :

$$\text{à } t = t_0 = 0 \quad \begin{cases} \Omega_1 = \Omega_1^0 \neq 0 \\ \Omega_2 = \Omega_2^0 \neq 0 \\ \Omega_3 = \Omega_3^0 \\ z = z_0 > 0 \end{cases}$$

La particule P_i induit sur P une vitesse qui est toujours parallèle à la paroi. Le déplacement de P suivant la direction Oz peut s'interpréter ainsi :

$$z(t) = v_3 t + z_0 .$$

On obtient une solution immédiate pour Ω_3 :

$$\Omega_3 = \Omega_3^0 e^{ct} ,$$

et un système reliant Ω_1 et Ω_2 :

$$(24) \quad \begin{cases} (a) \quad \Omega_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + \Omega_2 \frac{d\Omega_2}{dt} = a (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \\ (b) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_3}{8z^3} \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \right) \end{cases} .$$

On voit apparaître de (24a) une première relation entre Ω_1 et Ω_2

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = C_0 e^{2at} \quad \text{avec } C_0 = \Omega_1^{02} + \Omega_2^{02} .$$

La relation (24b), en remplaçant Ω_3 et z^3 par leur valeur en fonction du temps et en égalant le rapport $\frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ à une autre variable appelée Φ , peut s'écrire :

$$\frac{d\Phi}{1+\Phi^2} = b \frac{e^{ct} dt}{(z_0 + v_3 t)^3} \quad \text{avec } b = \frac{\Omega_3^0}{32\pi} .$$

Une intégrale du second membre existe [9] mais la formulation est complexe et inadaptée à notre résolution.

Si nous posons comme condition restrictive que ct doit rester petit devant l'unité, nous pouvons alors faire un développement limité sur la fonction exponentielle et écrire en première approximation que :

$$e^{ct} \approx 1 + ct ,$$

et on cherche à approcher la solution exacte en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{d\Phi}{1+\Phi^2} = \frac{b(1+ct)}{(z_0 + v_3 t)^3} dt .$$

Si nous posons :

$$\theta = \frac{\Omega_1^0}{\Omega_2^0} - \frac{t_0}{z_0} \frac{b}{2v_3^2} \left(\frac{v_3 - ct_0}{z_0^2} \right)$$

Une solution de l'équation précédente peut s'écrire :

$$\Phi = \theta + \operatorname{tg} \frac{b}{2v_3^2} \left(\frac{v_3 - c(z_0 + 2v_3 t)}{(v_3 t + z_0)^2} \right)$$

En définitive nous obtenons un système d'équations liant Ω_1 et Ω_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \Omega_2 \left[\theta + \operatorname{tg} \frac{b}{2v_3^2} \left(\frac{v_3 - c(z_0 + 2v_3 t)}{(v_3 t + z_0)^2} \right) \right] \\ \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = C_0 e^{2at} \end{array} \right.$$

duquel nous tirons deux solutions différentes suivant la valeur initiale de Ω_2 .

Posons : $f = f(\bar{x}, t) = \theta + \operatorname{tg} \frac{b}{2v_3^2} \left(\frac{v_3 - c(z_0 + 2v_3 t)}{(v_3 t + z_0)^2} \right)$

si $\Omega_2^0 > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \Omega_2 = \sqrt{\frac{C_0}{1+f^2}} e^{at} = g(\bar{x}, t) = g \\ \Omega_1 = fg \end{array} \right.$

si $\Omega_2^0 < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \Omega_2 = -g \\ \Omega_1 = -f.g \end{array} \right.$

Les composantes (u, v, w) de la vitesse globale du point P s'écrivent de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = v_1 + u_1 \\ v = v_2 + u_2 \\ w = v_3 + u_3 \end{array} \right.$$

où (u_1, u_2, u_3) sont les composantes de la vitesse \bar{v}_i . L'utilisation de la loi de Biot et Savart nous permet de calculer ces composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_2}{4(v_3 t + z_0)^2} \\ u_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_1}{4(v_3 t + z_0)^2} \\ u_3 = 0 \end{array} \right.$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = v_1 \pm \frac{g}{16\pi (v_3 t + z_0)^2} \quad (\text{suivant la valeur de } \Omega_2^0) \\ v(t) = v_2 \pm \frac{f}{16\pi (v_3 t + z_0)^2} \quad (\text{suivant la valeur de } \Omega_2^0) \\ w = v_3 \end{array} \right.$$

L'approche du terme exponentiel à un ordre supérieur fait apparaître des termes logarithmiques dans la formulation des composantes de $\bar{\Omega}_P$.

La composante Ω_3 varie indépendamment des deux autres alors qu'il existe une relation entre elles. Les solutions du couple (Ω_1, Ω_2) dépendent de la condition sur Ω_2 au temps t_0 et elles ne sont valables que pour un intervalle de temps limité qui est fonction de la valeur c . Plus c est petit, plus l'intervalle de temps pourra être choisi grand et réciproquement.

Cette méthode calcule étape par étape l'évolution de l'intensité tourbillonnaire attachée à P . A chaque fois on redétermine les valeurs de c et des composantes de \vec{v}_c et on reprend comme valeurs initiales des composantes de $\vec{\Omega}_P$, celles trouvées à la fin de l'étape précédente. De plus on peut déterminer la trajectoire de la particule P durant chaque intervalle de temps $[t_0, t_1]$.

L'utilisation de la propriété "des images hydrodynamiques" est idéale mais son application trop restrictive empêche d'en tirer le meilleur parti et bien souvent des méthodes numériques moins précises mais d'utilisation plus souple lui sont préférées.

3.2 - APPROCHE NUMERIQUE -

Les méthodes numériques utilisant des distributions continues surfaciques de singularités telles que sources ou doublets nécessitent l'utilisation de procédés sophistiqués pour obtenir des résultats précis sur le champ des vitesses dès que l'on s'approche assez près d'une telle distribution. Mais leur application est assez complexe et demande des calculs fort longs et coûteux, aussi sont-ils peu utilisés.

3.2.a - Comportement singulier du champ des vitesses le long des parois -

Dans le cas simple de l'écoulement bidimensionnel on s'aperçoit qu'une répartition uniforme de singularités étalée sur un segment isolé, par exemple, donne lieu à des répartitions de vitesse d'un traitement numérique délicat. Sur la figure 14 (extraite de [5]) on relève, pour un point se déplaçant le long du segment, des valeurs infinies sur les bords pour la composante u_n dans les deux modèles de singularités utilisées.

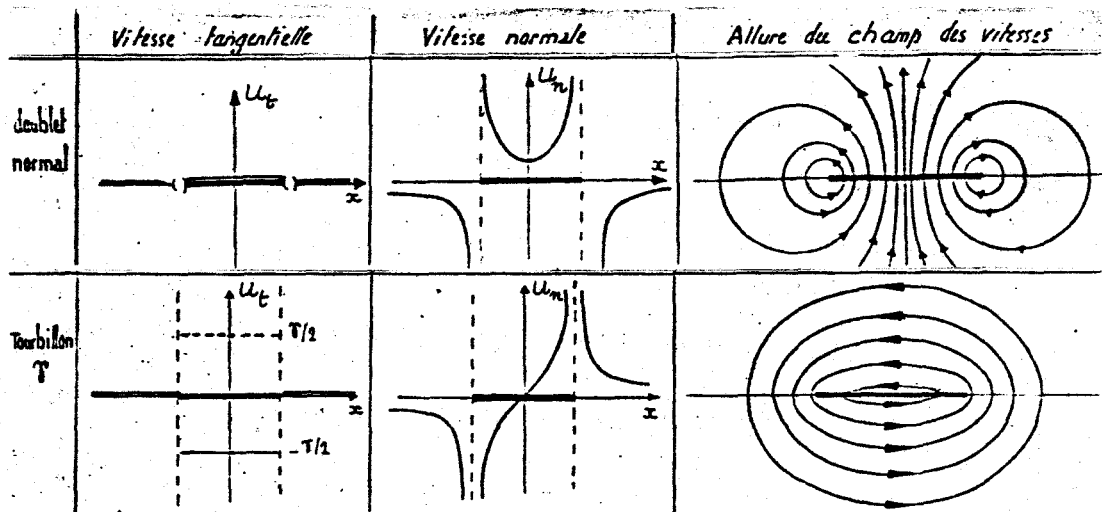
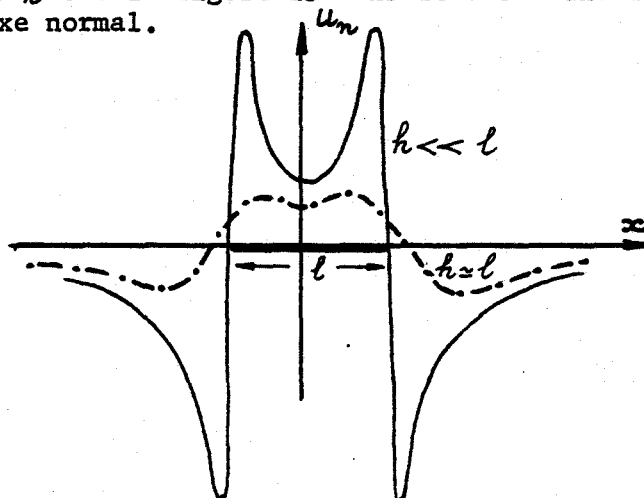


figure 14

Si maintenant le déplacement se produit non plus sur le segment mais le long d'une droite parallèle à celui-ci, la composante u_n évolue continuellement mais est encore soumise près des bords à de fortes variations s'atténuant avec l'éloignement. On en présente un exemple pour la composante u_n sur la figure 15 dans le cas d'une distribution uniforme de doublets à axe normal.

figure 15



En tridimensionnel ces valeurs infinies de u_n sur les bords ainsi que les pics près de ceux-ci sont dus à l'existence d'un anneau tourbillonnaire. Tout ceci nous permet de voir que l'exactitude des valeurs numériques quant au champ des vitesses dépend étroitement de la précision avec laquelle on représente la variation, en fonction de l'abscisse curviligne, de l'intensité attachée aux singularités remplaçant la paroi.

3.2.b - Présentation succincte de quelques approches utilisées actuellement -

Diverses approches ont été proposées en tridimensionnel afin de traiter numériquement les répartitions de doublets. Parmi les plus sophistiqués et les plus précises on peut citer celles de ROBERTS [28], de JOHNSON et RUBBERT [15] et de HESS [13]. Ils utilisent des formes polynomiales de haut degré (supérieur ou égal à deux) qui permettent, si l'utilisateur le désire, d'avoir des variations de l'intensité des doublets et de son gradient continues partout. Ces continuités évitent la formation d'un tourbillon local mais en général elles ne sont observées qu'au bord de fuite, là où la condition de Joukowski doit être respectée ; ailleurs l'influence néfaste des discontinuités leur apparaît moins importante. Malgré tout ROBERTS utilise une intensité continue partout, ce qui lui permet de calculer la vitesse dans tout le domaine aussi bien sur qu'en dehors de la surface sans que celle-ci présente de valeurs infinies. Par ailleurs HESS [12] montre que l'utilisation d'un polynôme du second degré pour représenter l'intensité des doublets n'est possible qu'associé à des facettes de forme trapézoïdale. Si de plus elles ont une forme rectangulaire et les axes représentant les coordonnées sont choisis correctement, c'est-à-dire parallèlement aux côtés des facettes, l'intensité bipolaire peut être continue partout.

Si ces méthodes très élaborées permettent de calculer correctement la vitesse presque partout, aussi bien sur les parois qu'en dehors, par contre elles sont très coûteuses en temps de calcul et la formation de la matrice des coefficients d'influence apparaît complexe. Ces inconvénients limitent la portée de ces méthodes qui, dans la plupart des cas, sont délaissées au profit d'autres moins précises mais plus simples et plus rapides. Pour des répartitions continues de doublets nous avons le choix entre les deux possibilités, soit utiliser une distribution de doublets

d'intensité linéaire par morceaux suivant deux directions différentes, soit utiliser une distribution de doublets d'intensité constante par morceaux, la valeur de l'intensité sur chaque facette étant égale à la valeur de l'intensité continue passant au point contrôle de la facette.

La première possibilité employée par HUNT [14] et qui fait intervenir le gradient de l'intensité a l'avantage d'approcher la courbe exacte par une fonction linéaire par morceaux et d'éviter des sauts d'intensité trop importants. Ce gradient est calculé de manière à avoir une valeur correcte en chaque point contrôle. Pour ce faire, HUNT utilise une forme quadratique passant par les valeurs de l'intensité de doublets au point contrôle considéré ainsi qu'aux points contrôle voisins. Il en déduit la valeur du gradient de l'intensité en chaque point de contrôle et de là la valeur des pentes de chaque segment constituant la fonction en dents de scie. Mais l'établissement de la matrice des coefficients d'influence reste encore assez délicat.

Dans cette étude nous utilisons l'une des distributions les plus simples qui fait intervenir une intensité de doublets constante sur les surfaces de chaque facette et à laquelle on peut substituer un réseau d'anneaux tourbillonnaires. Le calcul de la vitesse lorsqu'on longe une paroi soumise à une telle discrétisation est à traiter avec prudence. On peut s'en apercevoir dans le cas d'une distribution surfacique de doublets continue d'intensité constante dans la direction de l'axe Oz et linéaire dans le sens de l'axe Ox et que l'on discrétise à l'aide d'une suite de bandes de doublets de longueur infinie, d'intensité constante, de même largeur a et dont le saut d'intensité γ entre deux bandes consécutives est identique partout. Ce système est équivalent à une suite infinie de segments tourbillonnaires de longueur infinie, d'intensité identique γ et espacées également d'un même intervalle a le long de l'axe x . La fonction de courant s'écrit alors [4] :

$$\psi = \frac{\gamma}{2} \operatorname{Log} \frac{1}{2} \left[\cosh \frac{2\pi y}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a} \right]$$

Si nous traçons des lignes de courant situées près des segments tourbillonnaires (figure 16), celles-ci subissent de fortes oscillations, certaines traversent l'axe des x et délimitent des domaines internes où le fluide

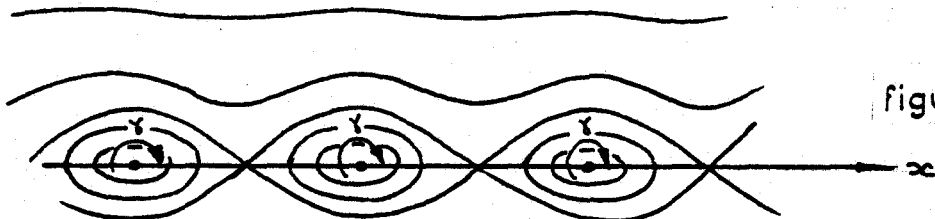


figure 16

tourne sur lui-même. Ce n'est qu'à quelque distance de la répartition tourbillonnaire discrète que celle-ci constitue une approche valable de la distribution de doublets continue.

Cependant dans le cas d'une discrétisation de paroi sous forme d'anneaux tourbillonnaires il existe, comme le montre MASKEW [23] en bidimensionnel, des lignes privilégiées (en pointillé sur la figure 17) partant de la paroi où les composantes normale et tangentielle de la vitesse ont des valeurs correctes. Pour la composante tangentielle, ce sont des courbes émanant des points de contrôle tangentiellement à la paroi et remontant rapidement pour former grossièrement une ellipse mais dont la forme exacte est difficile à apprécier. Pour la composante normale ces lignes sont beaucoup plus facile à définir puisqu'elles se confondent

approximativement avec les normales à la paroi aux points de contrôle. En dehors de ces zones très restreintes les erreurs sur les composantes de la vitesse deviennent importantes surtout si l'on s'approche de la paroi.

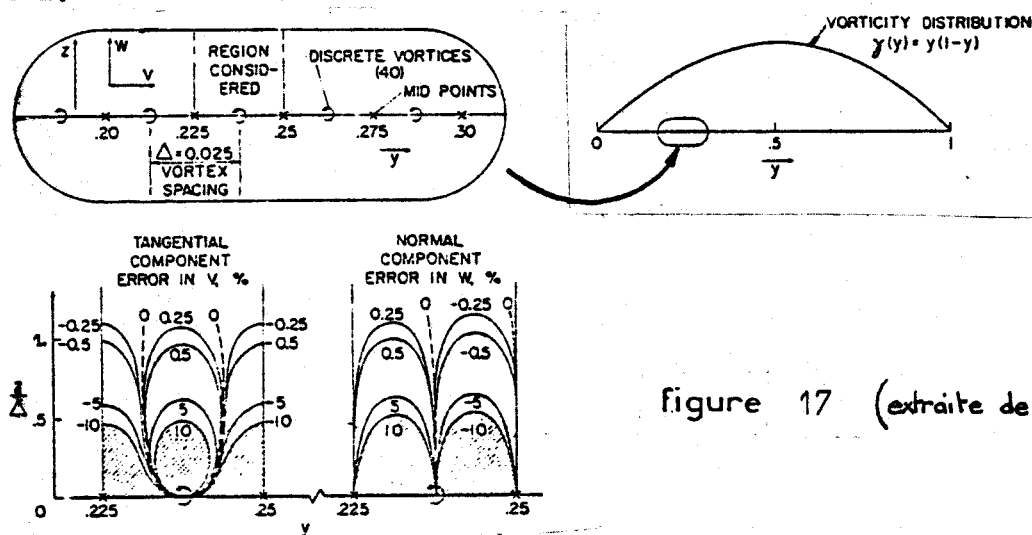


figure 17 (extraite de [23])

La hauteur critique, à partir de laquelle une étude particulière doit être envisagée afin que les valeurs obtenues aient un certain crédit, varie avec la discrétisation plus ou moins grossière de la paroi et avec les variations plus ou moins fortes de la circulation le long de la paroi. L'étude de MASKEW confirmée par nos propres résultats dans le cas tridimensionnel indique qu'en général cette hauteur peut être prise comme égale à la demi-longueur de la diagonale de la facette située sous le point où l'on désire calculer la vitesse (point qu'on appellera désormais P).

Pour pallier les inconvénients du réseau tourbillonnaire cités plus haut, divers procédés sont utilisés. Par exemple la vitesse en P peut se calculer en recherchant les valeurs des vitesses en quatre points M_i situés à la même hauteur que P mais se trouvant au-dessus des points contrôle des quatre facettes les plus proches de P (figure 18). Ensuite une moyenne pondérée entre les valeurs trouvées nous donne la vitesse en P . Mais cette méthode n'est utilisable que lorsque les M_i sont proches de P , ce qui sous-entend une discrétisation assez fine de la paroi.

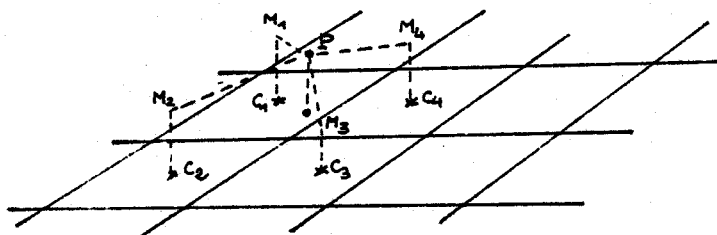


figure 18

Quand les gradients de vitesse sont faibles, cette méthode donne de bons résultats. En présence d'une concentration tourbillonnaire (nappe tourbillonnaire par exemple), les gradients de vitesse peuvent être élevés et ce procédé ne peut plus s'appliquer.

MASKEW [23] présente en bidimensionnel une autre solution qui s'apparente à un raffinement de maillage mais qui a l'avantage de ne faire intervenir qu'une partie restreinte du maillage. Elle consiste à remplacer localement l'espace libre entre les points tourbillons représentant la paroi par un sous-maillage tourbillonnaire. L'intensité tourbillonnaire, au lieu d'être concentrée en quelques points, est alors répartie entre tous les points nouvellement créés. Le nombre d'éléments formant ce sous-réseau est inversement proportionnel à la distance de P à la paroi. Ce procédé séduisant en bidimensionnel paraît demander en tridimensionnel des temps de calcul assez longs, surtout lorsque P effleure la paroi.

3.2.c - Traitement numérique du champ des vitesses à partir d'une déformation locale du maillage -

Une paroi solide est en toute rigueur imperméable mais lors de la discrétisation du problème où elle est remplacée par un ensemble d'anneaux tourbillonnaires, les particules fluides n'ont aucune difficulté à percer ce quadrillage. Les seuls endroits où le réseau est imperméable sont les segments eux-mêmes mais aussi les points de contrôle où la vitesse normale est, de par les conditions imposées, nulle. On va utiliser la propriété des normales à la paroi aux points de contrôle, sur lesquelles en tout point la composante normale de la vitesse est calculée correctement, pour rendre à la paroi discrète la même imperméabilité qu'une paroi réelle.

Un maillage ne reste pas nécessairement figé mais peut se déformer au cours du calcul sans que la solution du problème en soit affectée pourvu que certaines conditions soient respectées. Cette déformation va permettre à tout point du domaine, sans qu'il y ait besoin de bouger, de se trouver sur une normale issue d'un point de contrôle et de lui associer une valeur correcte de la composante normale de la vitesse.

On considère en premier lieu une paroi plane infinie mise en présence d'un écoulement engendrant une distribution tourbillonnaire sur sa surface qu'on représente sous forme discrète par un ensemble d'anneaux tourbillonnaires. On désire calculer la vitesse au point P situé au-dessus de la paroi (figure 19).

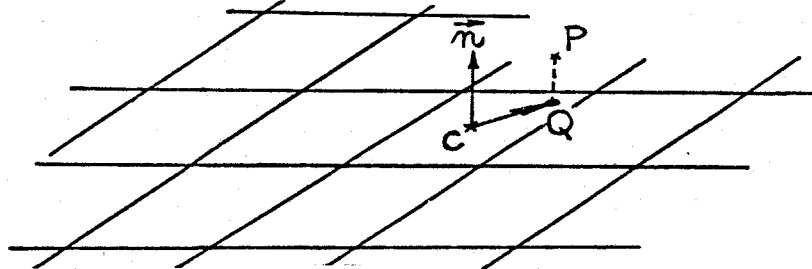


figure 19

Si on fait subir au réseau tout entier une translation $\vec{\lambda}$ dans son propre plan de façon que P se trouve sur la normale \vec{n} passant par le point de contrôle C , la vitesse normale en P sera calculée correctement. Mais il faut auparavant recalculer toute la matrice des coefficients d'influence vu la variation des données géométriques lors de la translation. Les calculs comportant alors une nouvelle inversion de matrice risquent d'être longs dès que le nombre de facettes est important.

L'un des soucis majeurs étant d'obtenir des résultats corrects sans que le temps de calcul en soit affecté, on va s'inspirer de l'idée précédente

tout en limitant le nombre de facette à translater. En réalité la seule facette à être translaturée est celle se trouvant sous le point P (que nous appellerons F_P). Les facettes en contact direct avec F_P , étant quant à elles, déformées de façon que le reste du réseau ne soit pas touché (figure 20).

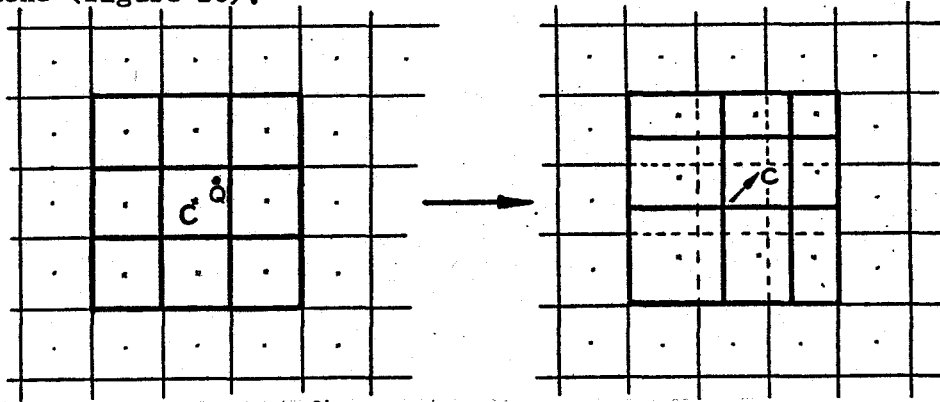


figure 20

Au total, seuls neuf anneaux tourbillonnaires subissent soit une translation, soit une déformation. Ecrivons la matrice des coefficients d'influence $[A]$ avant toute opération sur le maillage :

$$[A] = \begin{array}{cccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & \dots & a_{1,p+8} & \dots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} & \dots & a_{p,p+8} & \dots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{p+8,1} & \dots & a_{p+8,p} & \dots & a_{p+8,p+8} & \dots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{M,1} & \dots & & \dots & & \dots & a_{M,M} \end{array}$$

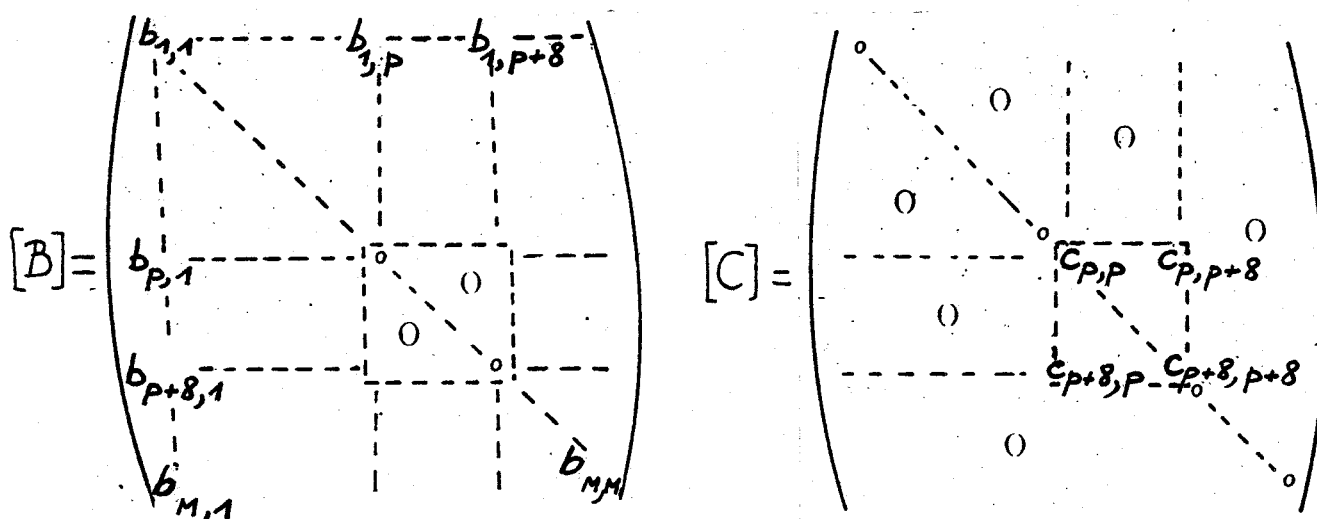
La déformation locale du maillage va entraîner des variations sur les valeurs de certains coefficients d'influence. Supposons que cette déformation ait lieu sur les facettes F_P, \dots, F_{P+8} . Les coefficients d'influence appartenant aux colonnes allant de p à $p+8$, et ceux appartenant aux lignes allant des indices p à $p+8$ vont voir leur valeur se modifier, tous les autres coefficients ne variant pas. Soit $[A']$ la nouvelle matrice formée des éléments a'_{ij} tels que :

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} + \varepsilon & \text{pour les éléments faisant partie des colonnes } p \\ & \text{à } p+8 \text{ et des lignes allant de } p \text{ à } p+8 \\ a'_{ij} = a_{ij} & \text{pour les autres éléments.} \end{cases}$$

La valeur de ε est plus ou moins importante suivant les positions respectives des facettes prises deux à deux. Le ε est d'autant plus petit qu'une des facettes intervenant dans le calcul d'un des coefficients d'influence est plus éloignée du domaine déformé. Cette déformation du réseau étant toujours assez faible on peut supposer que le ε est petit dès que le calcul des coefficients d'influence fait intervenir une facette

différente des F_i ($i=p, \dots, p+8$). On le prendra nul. Dans le cas où le calcul des coefficients prend en compte deux facettes appartenant aux F_i ($i=p, \dots, p+8$), ε ne pourra être négligé et le nouveau coefficient $a'_{i,j}$ sera calculé.

Après déformation du maillage la matrice $[A']$ peut être décomposée en deux matrices $[B]$ et $[C]$ de même dimension que $[A']$. En fait $[C]$ peut être considérée de dimension (9×9) .



$$\left. \begin{array}{l} b_{i,j} = a_{i,j} \\ c_{i,j} = 0 \end{array} \right\} \forall (i,j) \in [1,n] \times [1,n] \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} i \neq p, \dots, p+8 \\ j \neq p, \dots, p+8 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} b_{i,j} = 0 \\ c_{i,j} = a'_{i,j} \end{array} \right\} \forall (i,j) \in [p,p+8] \times [p,p+8]$$

Les $c_{i,j}$ non nuls sont calculés à partir des nouvelles données géométriques entrant dans l'ensemble $\{DEF\}$ formé des facettes F_i ($i=p, \dots, p+8$).

Après avoir calculé la matrice $[C]$ les nouvelles circulations liées aux anneaux tourbillonnaires de $\{DEF\}$ sont obtenues en imposant la condition de vitesse normale nulle aux nouveaux points de contrôle de $\{DEF\}$. Les circulations des anneaux tourbillonnaires n'appartenant pas à $\{DEF\}$ ne variant pas, on limite le problème à un système linéaire de neuf équations à neuf inconnues :

$$\vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = \sum_{j=1}^n b_{i,j} \gamma_j + \sum_{k=p}^{p+8} c_{i,k} \gamma_k + \vec{u}_\infty \cdot \vec{n}_i$$

avec $i = p, \dots, p+8$

que l'on met sous forme condensée :

$$[u_{m_i}] = [B_{ij}][\gamma_j] + [C_{ik}][\gamma_k] + [u_{\infty m_i}] .$$

Les γ_k sont les inconnues du système, qu'on résoud en appliquant les conditions en chaque point de contrôle de $\{DEF\}$.

$$[\gamma_k] = - [C_{ik}]^{-1} [B_{ij}][\gamma_j] - [C_{ik}]^{-1} [u_{\infty m_i}] .$$

Toutes les circulations du réseau étant alors connues, il est facile de calculer la vitesse au point P .

Dans le cas où la particule P transporte une intensité tourbillonnaire $\bar{\omega}_P$, on profite de cette déformation locale pour calculer la déformation de $\bar{\omega}_P$ produite par les segments tourbillonnaires de la paroi en utilisant la relation (20).

Cette formule fait intervenir les circulations des segments tourbillonnaires, or comme le montre MASKEW [23] les valeurs de ces circulations approchent le mieux les valeurs exactes lorsque la particule tourbillonnaire se situe au-dessus d'un point contrôle.

Il faut remarquer que ce procédé de déformation locale n'est que momentané en ce sens que sa durée de vie est limitée au calcul des différentes valeurs qui nous intéressent au point P . Dès que l'on quitte cette particule, le maillage reprend sa forme initiale jusqu'à ce qu'une autre particule trop proche de la paroi oblige à renouveler le procédé.

Cette technique connaît certaines limitations. En particulier le maillage doit être assez régulier. Des différences trop importantes quant aux dimensions des facettes voisines empêchent l'application de ce procédé (mais en général ce problème ne se pose pas puisque l'on sait que la justesse des résultats numériques est liée à l'utilisation d'un maillage régulier). Les bords des parois (bord de fuite, bord d'attaque...) sont plus délicats à traiter et les valeurs de u_n comprises entre le bord et une ligne passant par les points de contrôle les plus près du bord ne sont pas prises en considération car le procédé n'est pas utilisable dans cette bande. Ceci est dû aux variations importantes de la circulation près des bords anguleux associés à une discrétisation trop grossière (voir par exemple la figure 21).

3.2.d - Traitement numérique à partir d'un raffinement local du maillage -

Une autre méthode pour calculer le champ des vitesses près d'une paroi a été utilisée. Cette méthode, basée sur un raffinement local du maillage, n'a pas donné les résultats escomptés (figure 26b) et a été abandonnée. Malgré tout on parlera brièvement de la démarche suivie. Les neuf facettes au lieu d'être translattées ou déformées sont chacune subdivisée en quatre nouvelles facette. La matrice $[A]$ se décompose encore en deux matrices $[B]$ et $[C]$. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, les coefficients de $[B]$ sont identiques à ceux de $[A]$ sauf pour ceux qui sont nuls. Seuls les coefficients de $[C]$ de dimension (36 x 36) sont recalculés et en définitive on se ramène à un système linéaire de 36 équations à 36 inconnues qu'on résoud de la même manière que ci-dessus.

3.3 - VERIFICATION NUMERIQUE DU PROCEDE DE DEFORMATION LOCALE -

3.3.a - Ecoulement potentiel - Lignes de courant -

Le premier test est un écoulement potentiel autour d'une plaque plane carrée infiniment mince et soumise à un vent infini constant et perpendiculaire à son plan. Cette étude va permettre de vérifier les bonnes performances de cette méthode étant donné les difficultés que l'on peut rencontrer dans cette expérience où le centre de la plaque est un point d'arrêt et les bords des lignes de contournement, ce qui laisse présager des croissances ou décroissances rapides de l'intensité tourbillonnaire surfacique s'étalant sur l'obstacle. La plaque est représentée sous forme discrète par un ensemble d'anneaux tourbillonnaires. Les valeurs des intensités tourbillonnaires linéiques concentrées sur les différents segments coupant le plan $y = 0$ sont représentées sur la figure 21.

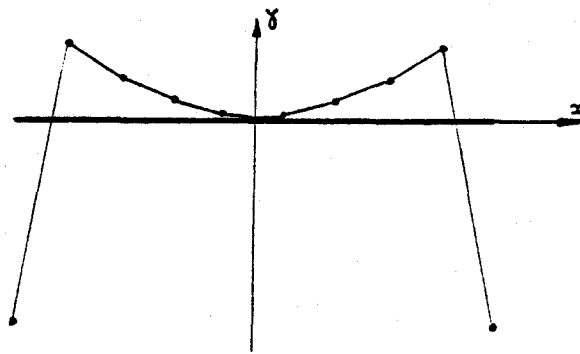


figure 21

Sur la figure 24 on a tracé différentes lignes de courant qui ont été calculées à l'aide d'une méthode du premier ordre. Quand on n'utilise aucun procédé particulier permettant d'améliorer la représentation du champ des vitesses, les lignes de courant les plus proches du point d'arrêt traversent la plaque tandis que les autres oscillent fortement au-dessus d'elle (figure 24a). Une méthode dérivée de celle de MASKEW et qui fait intervenir un raffinement local du maillage dès que la ligne de courant se trouve près de la plaque est utilisée pour calculer les lignes de courant sur la figure 24b. Elles ne traversent plus la paroi mais les oscillations persistent. Il apparaît au vu de ces calculs que même une discrétisation de cette plaque par un nombre élevé de facettes ($> 1\ 000$) ne pourrait donner d'aussi bons résultats que ceux obtenus par la déformation locale du maillage qui, elle, permet une discrétisation grossière de l'obstacle (dans notre exemple la plaque entière est recouverte de 81 facettes). La figure 24c où la déformation locale est utilisée montre la précision dans le tracé des lignes de courant qui effleurent la paroi.

On a dans cet exemple relevé les valeurs des vitesses normales aux points de contrôle avant et pendant la déformation.

- . Avant déformation :
pour tous les points de contrôle $10^{-12} < |u_n| < 10^{-15}$
- . Pendant la déformation :
pour les facettes appartenant à $\{DEF\}$ $10^{-13} < |u_n| < 10^{-15}$
pour les facettes immédiatement en contact avec
celles de $\{DEF\}$ $10^{-3} < |u_n| < 10^{-4}$
pour les autres facettes $10^{-4} < |u_n| < 10^{-7}$

Il existe une relation entre le terme $\frac{1}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2}$, qui fait tendre la vitesse vers l'infini quand P s'approche du segment, et la distance de ce point P au segment AB . On choisit alors un rayon R_0 et pour toute valeur de h inférieure à R_0 , nous remplaçons $|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2$ par $R_0^2 l^2$.

$$h \geq R_0 \quad \vec{u}(P) = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2} \left(\vec{l} \cdot \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} - \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) \right)$$

$$h \leq R_0 \quad \vec{u}(P) = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{R_0^2 l^2} \left(\vec{l} \cdot \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} - \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) \right)$$

Cette procédure permet de passer à travers la surface cylindrique de manière continue et de faire tendre progressivement la valeur de la vitesse vers zéro quand on s'approche du centre (figure 23).

La seule chose restant à faire étant de déterminer correctement R_0 .

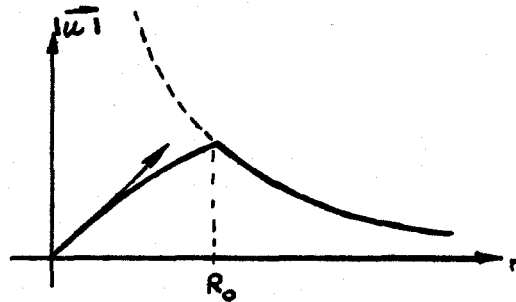


figure 23

Si nous examinons attentivement les figures 26 et en particulier la courbe représentant U_x induite par des anneaux tourbillonnaires, nous nous apercevons que les oscillations sur la vitesse tangentielle apparaissent à partir d'une hauteur $h \approx \frac{L}{2}$ où L représente la largeur des facettes. C'est cette valeur qui a été retenue pour R_0 dans les calculs avec déformation de maillage (figures 26).

3.3.c - Écoulement rotationnel -

Les exemples précédents traitent des écoulements potentiels sans présence tourbillonnaire. On s'intéresse maintenant à un écoulement rotationnel autour d'un profil en incidence (30°) laissent échapper le long de son bord de fuite une nappe tourbillonnaire et mis en présence d'une paroi imperméable, plane et parallèle à l'écoulement infini amont.

Le profil est représenté par une aile rectangulaire plane infiniment mince et dont l'envergure est trois fois plus importante que la corde (figure 27a). On approche cette plaque de la paroi à une hauteur égale à sa corde au niveau du bord de fuite. Trois points d'émission de chaque côté de l'axe de symétrie débitent le long du bord de fuite des tourbillons ponctuels. La paroi est remplacée par un ensemble d'anneaux tourbillonnaires de forme carrée dont le côté L est unitaire. Dans les figures 27 on a représenté les trajectoires des secondes particules fluides porteuses d'une intensité tourbillonnaire et émises au même instant par les trois points d'émission situés à droite du plan de symétrie oxz .

Avant toute opération sur le maillage les conditions limites sont bien respectées aux points de contrôle. Durant l'utilisation du procédé les conditions limites sont bien respectées aux points de contrôle des facettes de $\{DEF\}$ c'est-à-dire sur le domaine le plus proche de P . Ailleurs les valeurs de $|u_n|$ sont sensiblement plus importantes (ceci est dû aux approximations faites sur ε) mais toujours assez petites pour considérer les conditions limites comme remplies.

3.3.b - Ecoulement potentiel - Composantes de la vitesse -

Le cas d'une plaque plane rectangulaire dont l'envergure est dix fois plus longue que la corde va permettre de comparer les valeurs des composantes de la vitesse, calculées dans le plan $y = 0$ le long de lignes de courant passant près de la paroi discrétisée comme la précédente, avec les valeurs théoriques bidimensionnelles obtenues par transformation conforme. On a les mêmes hypothèses que dans l'exemple précédent pour l'écoulement, seules les dimensions de la plaque changent.

Les valeurs discrètes oscillent fortement autour des courbes théoriques et d'autant plus que l'on se rapproche des bords de la plaque (figure 25 et figure 26). En dessous d'une certaine distance à la plaque, il n'est plus raisonnable de se servir des valeurs obtenues sauf pour les composantes normales, par exemple, le long des normales passant par les points de contrôle où la courbe numérique croise la courbe théorique ou au-dessus des segments tourbillonnaires mais dans ce cas les valeurs numériques oscillent fortement et cette observation n'est à utiliser qu'avec prudence.

Pour la composante normale, l'utilisation de la déformation locale fait pratiquement confondre la nouvelle courbe numérique avec la courbe théorique. On voit apparaître de petites discontinuités lorsque le procédé fait intervenir une série de facettes différente de la précédente (elles se produisent au passage d'un segment tourbillonnaire) (figure 25).

Le procédé utilisé pour calculer les valeurs de la composante tangentielle au-dessus d'un point de contrôle donne des résultats assez décevants dès qu'on s'approche de la paroi. Mais la déformation locale peut être utilisée différemment. On peut obtenir des valeurs numériques s'approchant plus des valeurs théoriques en déformant le maillage de façon que la projection sur la paroi du point P soit confondue avec le noeud du maillage le plus proche de P (figures 26). Afin d'atténuer les vitesses induites par les quatre segments tourbillonnaires aboutissant au noeud on fait appel à la méthode classique des noyaux visqueux (dans le cas de particules) qui, ici, sont remplacés par des cylindres visqueux qui s'adaptent autour de chaque segment.

La vitesse est donnée par la relation (10). Elle tend vers une valeur infinie quand le point P se rapproche indéfiniment du segment. Pour limiter les effets singuliers du segment on peut l'enfermer dans un cylindre où on établit une viscosité artificielle de la manière suivante, si on remarque que $|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 = h^2 l^2$ (figure 22).

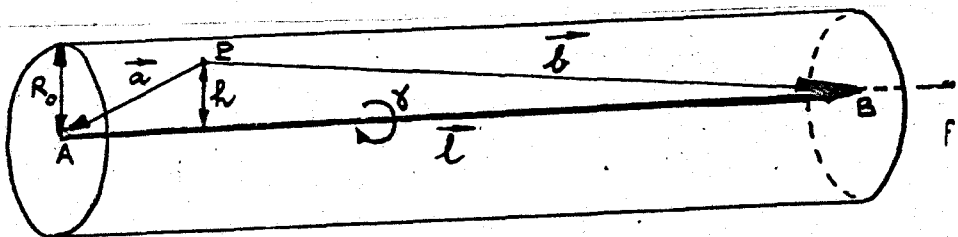


figure 22

La figure 27b montre à quel point les trajectoires sont mal représentées, certaines allant jusqu'à traverser la paroi. On peut rigoureusement éviter cet inconvénient en utilisant dans le cas d'un effet de sol la propriété des "images hydrodynamiques" qui élimine les anneaux tourbillonnaires et prend en compte l'image de la plaque et des particules tourbillonnaires par rapport au plan de la paroi qui est alors remplacée par une surface de courant.

Cette propriété est utilisée et présente sur la figure 27c les trajectoires idéales accomplies par les particules. Malheureusement cette propriété ne peut s'utiliser que dans certains cas particuliers. L'utilisation plus simple de la déformation locale permet de reproduire convenablement les trajectoires (figure 27d) même lorsqu'elles effleurent la paroi (la trajectoire la plus basse se trouve à certains endroits à 0.02L de la paroi), sans pour autant s'encombrer d'hypothèses supplémentaires.

3.3.d - Conclusion -

L'emploi simple de cette méthode allié à des résultats qu'on peut juger acceptables et à des temps de calcul convenables résoud le fâcheux problème de la paroi théoriquement imperméable et numériquement perméable. De surcroît, elle donne de bonnes indications sur le champ des vitesses et le champ tourbillonnaire près d'une paroi, ce qui est primordial lorsque les nappes tourbillonnaires passent à proximité et que le besoin se fait sentir de connaître la forme des lignes d'émission ou des trajectoires de particules fluides tourbillonnaires.

On peut aussi remarquer la liberté de mouvement du maillage. Alors qu'auparavant il restait toujours figé et défini une fois pour toutes, ce qui empêchait de faire varier toute donnée géométrique, maintenant il peut se déformer et s'adapter aux circonstances. Un point important à retenir est que ce procédé permet à tout point d'un profil de devenir point de contrôle. Les différentes valeurs (vitesse à la paroi, pression, ...) peuvent être dans ce cas et à l'extrême calculées partout sur la paroi (sauf dans certaines zones abordées précédemment). Au lieu d'extrapoler ces valeurs parfois de manière incertaine lorsque les points de contrôle sont assez éloignés, il est possible maintenant de calculer les valeurs de façon quasi-continue dans toutes les directions. HUNT [14] précise que l'un des handicaps des "méthodes des singularités" réside dans la manière d'imposer les conditions limites (elles ne sont imposées qu'en certains points de la paroi) qui ne permet pas d'obtenir une solution finale, sur le champ des vitesses ou sur les répartitions de pression, correcte partout dans le domaine ou sur les parois. Il semble que le procédé de déformation locale réponde à cette préoccupation en se donnant la possibilité de calculer ce champ ou ces répartitions de manière convenable aussi bien sur les parois que dans tout le domaine.

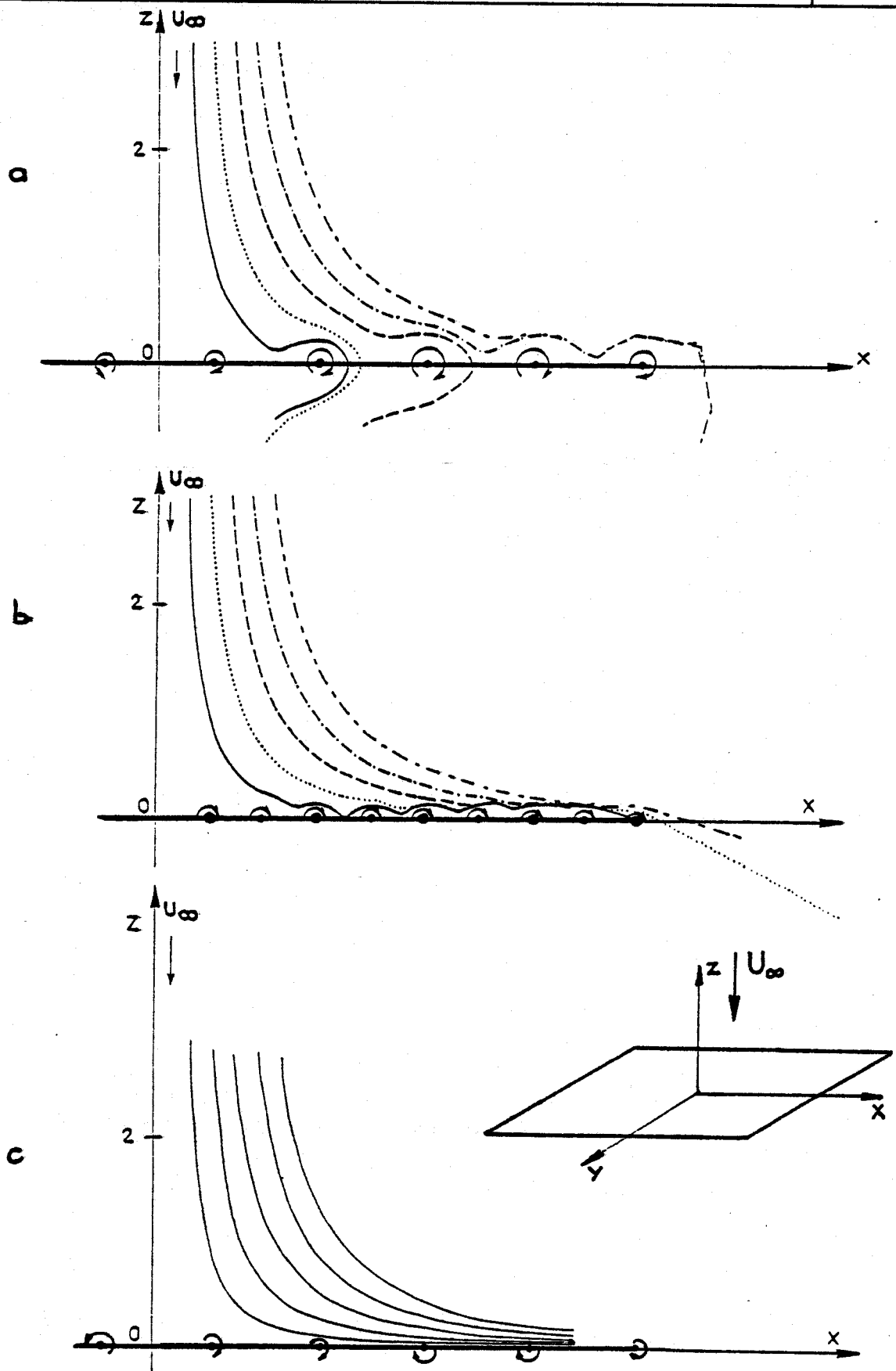


figure 24

Effet de la représentation de la paroi sur les lignes de courant près d'une plaque plane.

(Ecoulement potentiel sans particules tourbillonnaires)



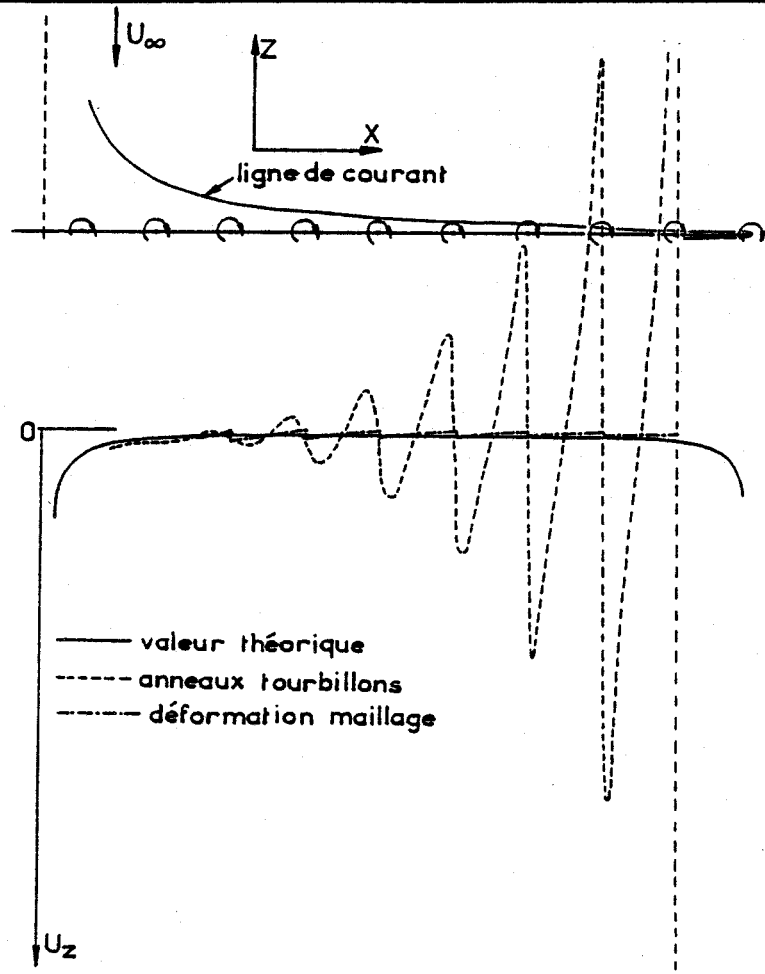


figure 25. variation de la composante normale le long d'une ligne de courant effleurant une paroi.

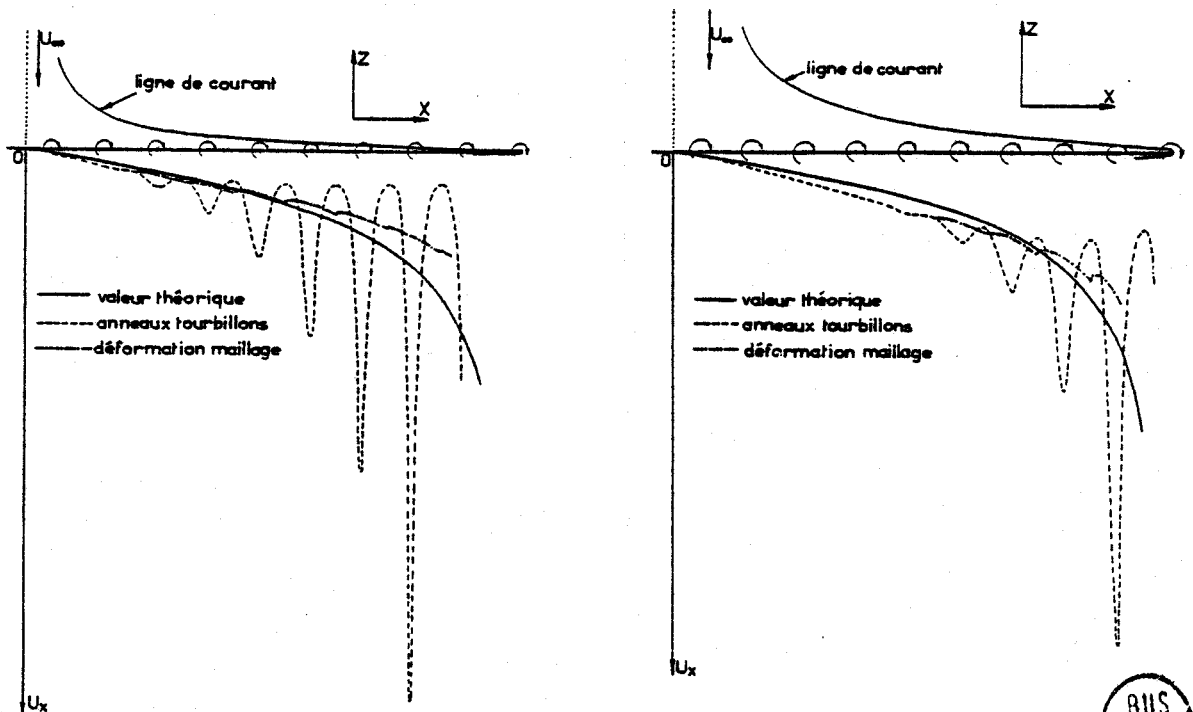


figure 26. variation de la composante tangentielle le long de lignes de courant effleurant une paroi.

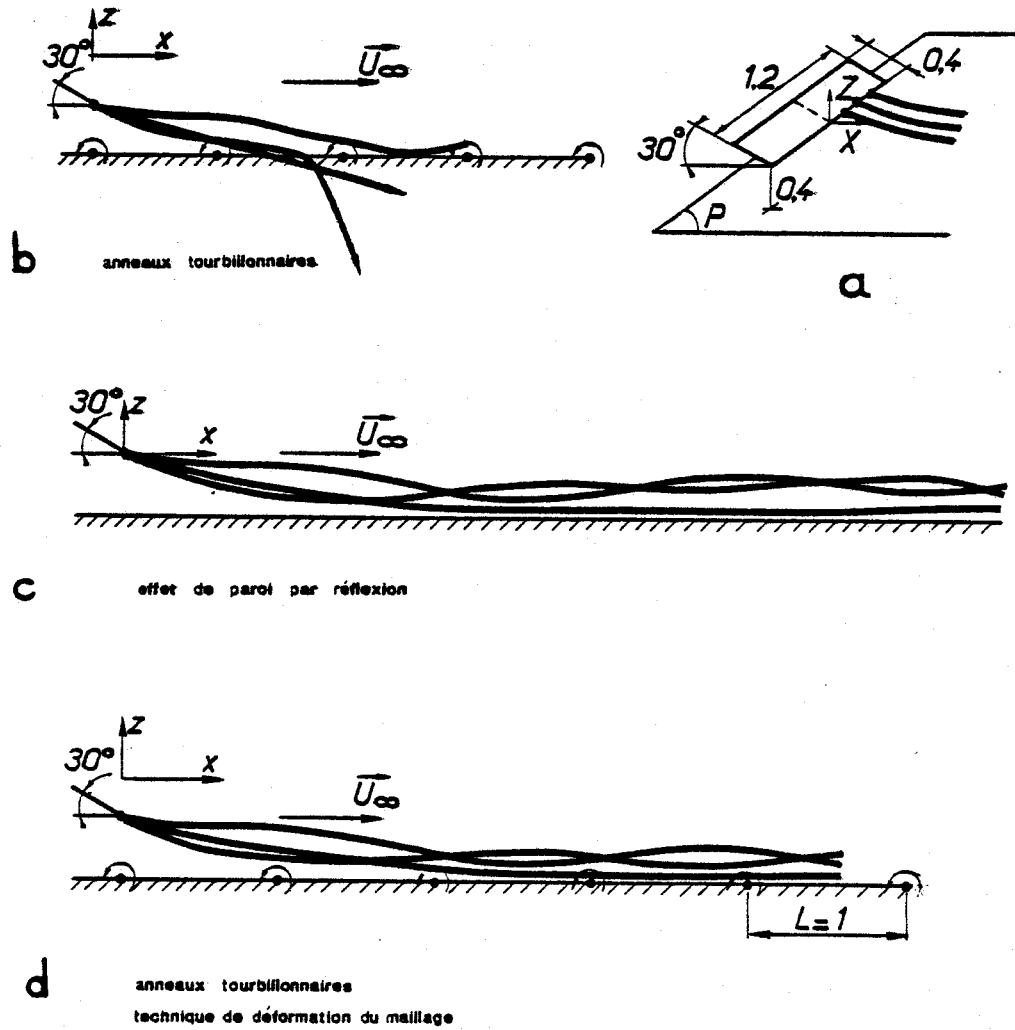


figure 27

Interaction entre une nappe tourbillonnaire émise par
une aile rectangulaire et une paroi proche.

C H A P I T R E 4

R E S U L T A T S D E S C A L C U L S

4.1 - GENERALITES -

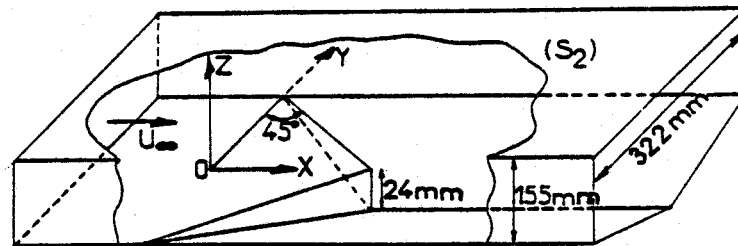


figure 28. représentation du canal.

La figure 28 représente le canal qui a fait l'objet d'études en soufflerie [24] .

Nous nous sommes basés pour nos propres calculs sur les mêmes cotes afin que la comparaison avec les résultats expérimentaux se fasse en toute rigueur.

Le tableau suivant regroupe les différentes valeurs des paramètres utilisés lors des calculs qui ont été réalisés sur CDC 7600. La durée du calcul pour passer du temps $\tau = 0$, au temps $\tau = 1$. (21 itérations) est approximativement de 10 minutes. τ représente un temps adimensionné défini comme suit :

$$\tau = \frac{U_{\infty} t}{B}$$

où B représente la demi-largeur du canal.

Nombre de facettes recouvrant les parois du canal	233
Nombre de points d'émission	13
Demi-largeur du canal (B)	0.98
Module de la vitesse infinie aval	1.
Valeur du pas de temps (Δt)	0.05
Rayon visqueux entourant une particule tourbillonnaire porteuse d'une intensité tourbillonnaire étalon de 0.3	0.015
Taux de déformation maximal autorisé sur le module de l'intensité tourbillonnaire à chaque pas de temps	0.15
Rayon visqueux entourant les segments tourbillonnaires	0.012

4.2 - COMPARAISON VISUELLE : EXPERIENCE-CALCUL NUMERIQUE -

Les lignes d'émissions ont l'avantage de faciliter certaines comparaisons de résultats numériques avec des visualisations expérimentales qui ont été réalisées au tunnel hydrodynamique par H. WERLE. On remarque (figure 29) grâce à cette approche qualitative la ressemblance entre la forme globale de la nappe obtenue numériquement et celle de la nappe expérimentale. La concordance est aussi satisfaisante quand on observe les détails d'enroulement dans les deux cas. A gauche l'expérience s'est faite avec trois filets colorés émis d'orifices situés près de l'arête. La photographie a été prise à un temps approximatif $\tau = 2.$, c'est-à-dire à un état quasi-stationnaire où l'on aperçoit deux parties de la nappe bien distinctes, l'une bien structurée à la partie supérieure et l'autre où l'écoulement est devenu désorganisé. Cette vue prouve bien les difficultés d'application du schéma numérique dans ce cas particulier et montre que la marche en flèche de 45° n'est certainement pas le cas le plus facile à étudier. Des visualisations expérimentales dans le cas d'une marche en flèche de 60° par exemple [31] présentent des nappes enroulées stables qui auraient sûrement posé moins de problèmes de mise au point numérique. La vue de droite (à $\tau = 1.$) tend à prouver le bon comportement de la méthode puisqu'elle est capable de représenter de manière assez fidèle des nappes quelque peu difficiles à étudier.

4.3 - EVOLUTION DE LA NAPPE AU COURS DU TEMPS -

A $\tau = 0.35$ (figure 30) le phénomène est encore bidimensionnel, toutes les lignes d'émission ayant pratiquement la même forme. La nappe peut être incluse grossièrement dans un cylindre de section constante. Les effets transversaux dus à la forme des parois commencent à se faire sentir dès la visualisation suivante à $\tau = 0.55$ où l'on distingue un étirement des lignes d'émission les plus proches de la paroi latérale du canal et une compression des lignes situées près de la zone centrale du canal. Les lignes qui servent à matérialiser la nappe commencent à s'enrouler mais la forme globale de la nappe n'est pas encore bien nette. La forme conique de la nappe devient visible à partir de $\tau = 0.8$. Elle s'évase au centre du canal sous l'effet de l'aspiration de l'écoulement vers l'aval et a tendance à se soulever dans cette même zone, représentant ainsi le cas réel de deux écoulements symétriques se rencontrant dans leur plan de symétrie et formant un phénomène de "bouchon" qui a la faculté de relever les couches fluides dans la zone centrale du canal. A $\tau = 0.8$ on remarque la formation d'un noyau central constitué des deux lignes les plus proches de la paroi latérale du canal qui s'engouffrent dans la zone interne limitée par les autres lignes (c'est ce phénomène d'enroulement interne encore mal maîtrisé qui n'a pas permis de continuer les calculs jusqu'à l'état stationnaire). On s'aperçoit, en observant les lignes qui se déplacent vers l'aval tout en s'approchant de la paroi verticale de la marche, que les particules tourbillonnaires cherchent à remplir tout le domaine interne de l'écoulement. Certaines lignes subissent une compression de leur forme de plus en plus accentuée dans la zone centrale qui va par la suite désagréger la nappe. A

$\tau = 1.$ cette désagrégation commence à apparaître et annonce la désorganisation de la nappe que l'on observe sur la photographie (figure 29) quelques instants plus tard.

Sur la figure 31 on a représenté la trace de la nappe à $\tau = 0.8$ sur quatre plans perpendiculaires à la marche. On a disposé sur chaque plan les points d'intersection de ce plan avec les lignes d'émission qui le traversent (symbole \bullet). On a aussi déterminé des points intermédiaires situés sur l'intersection de ce plan avec la portion de nappe délimitée par

deux lignes d'émission consécutives. Cette portion de nappe a été définie numériquement par un ensemble de segments de droite reliant deux à deux les particules homologues des deux lignes (symbole+). Près de l'apex l'enroulement n'est pas encore très prononcé (plan 1) mais on remarque un début d'enroulement dès la seconde vue sur le plan 2. Les enroulements sont plus accentués sur les plans 3 et 4 et on peut y distinguer un effet d'aplatissement de l'enroulement. La paroi inférieure fait écran à l'évolution de la nappe et lui fait subir un brusque changement de direction lorsque celle-ci s'approche de la paroi. La nappe continue alors à se développer, sur une certaine distance, parallèlement à la paroi pour ensuite remonter et former l'enroulement interne.

4.4 - SURFACE DE SEPARATION A $\tau = 1$. -

L'écoulement est constitué de deux zones distinctes [31], l'une interne enferme la nappe tourbillonnaire et l'autre externe est régie par un écoulement irrotationnel. Ces deux domaines ont une frontière commune appelée surface de séparation et que l'on peut retrouver à partir des lignes de courant qui passent à proximité de cette surface. On approche les courbes (\mathcal{C}) s'appuyant sur la surface de séparation en recherchant une série de lignes de courant passant à l'amont par des points se situant sur une même normale mais à des hauteurs différentes. Les unes font partie du domaine interne et les autres du domaine externe, ce qui permet d'extrapoler les courbes (\mathcal{C}) emprises entre ces deux types de lignes de courant (figure 32). La détermination de la position de la surface de séparation donne une idée de l'étendue du domaine interne.

La ligne de recollement [31] sur la paroi de l'auge peut être mise en évidence d'une autre manière. Avec le procédé de déformation locale du maillage (chapitre 3) on peut tracer à un temps donné toute ligne de courant s'appuyant sur la paroi à partir du calcul de la vitesse tangentielle à la paroi en n'importe quel point. Ces tracés de lignes de courant permettent de retrouver numériquement la ligne de recollement sur la paroi de l'auge (figure 33). On remarquera la bonne précision du tracé des lignes de courant qui permet une intéressante comparaison avec l'expérience et la similitude quant aux positions expérimentale et numérique de la ligne de recollement. Dans le cas expérimental on distingue une seconde ligne de recollement plus proche de la paroi verticale de la marche et qui est due à l'existence dans l'écoulement réel d'un domaine tourbillonnaire secondaire [24] [31] situé près de l'angle formé par la paroi verticale de la marche et par la paroi horizontale de l'auge. Il est bien entendu qu'on ne peut retrouver ce phénomène dans nos résultats numériques puisqu'on ne l'a pas fait intervenir dans notre modèle théorique.

4.5 - EVOLUTION DE L'INTENSITE TOURBILLONNAIRE EMISE SUR L'ARETE -

On a tracé sur la figure 34 l'évolution de la valeur du module de la composante suivant \vec{t}_s (suivant le bord de l'arête) de l'intensité tourbillonnaire $\vec{\Omega}$ en fonction de la position des différents points d'émission et en fonction du temps τ . La forte décroissance du départ s'atténue pour faire place à une décroissance progressive et on remarque que l'état stationnaire n'est pas encore atteint à $\tau = 1$.

4.6 - REPARTITION DE LA PRESSION A LA PAROI -

On a représenté sur la figure 35 la valeur expérimentale du k_p à la paroi [24] et les valeurs numériques du k_p calculées le long d'une même droite mais à des instants différents. Cette droite est dans l'axe de l'écoulement infini amont et située approximativement vers le milieu du demi-canal. Le calcul numérique n'a pas tenu compte du terme faisant intervenir la dérivée du potentiel par rapport au temps, c'est-à-dire que l'on a tracé que le terme stationnaire. Les résultats montrent que le k_p numérique a tendance avec le temps à tendre vers le k_p stationnaire expérimental. On retrouve bien l'allure générale de la courbe expérimentale mais légèrement décalée.

Ces résultats sont encourageants compte tenu du fait qu'ils sont calculés en des points très proches de la zone tourbillonnaire et donc soumis à des gradients de vitesse élevés. On remarquera que les courbes numériques sont tracées de manière précise puisqu'il est possible, à partir du procédé de déformation locale, de calculer le k_p en n'importe quel point.

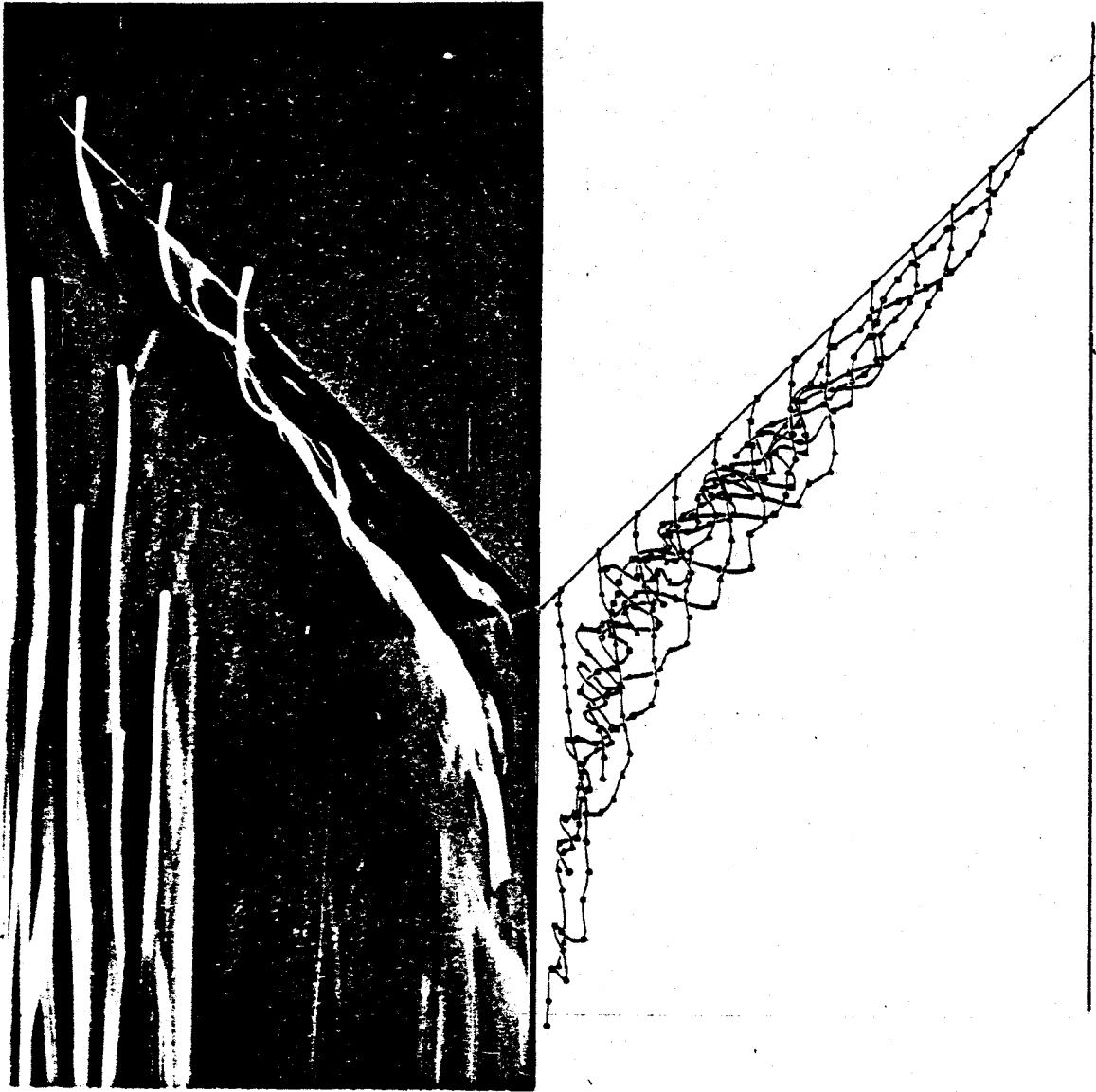
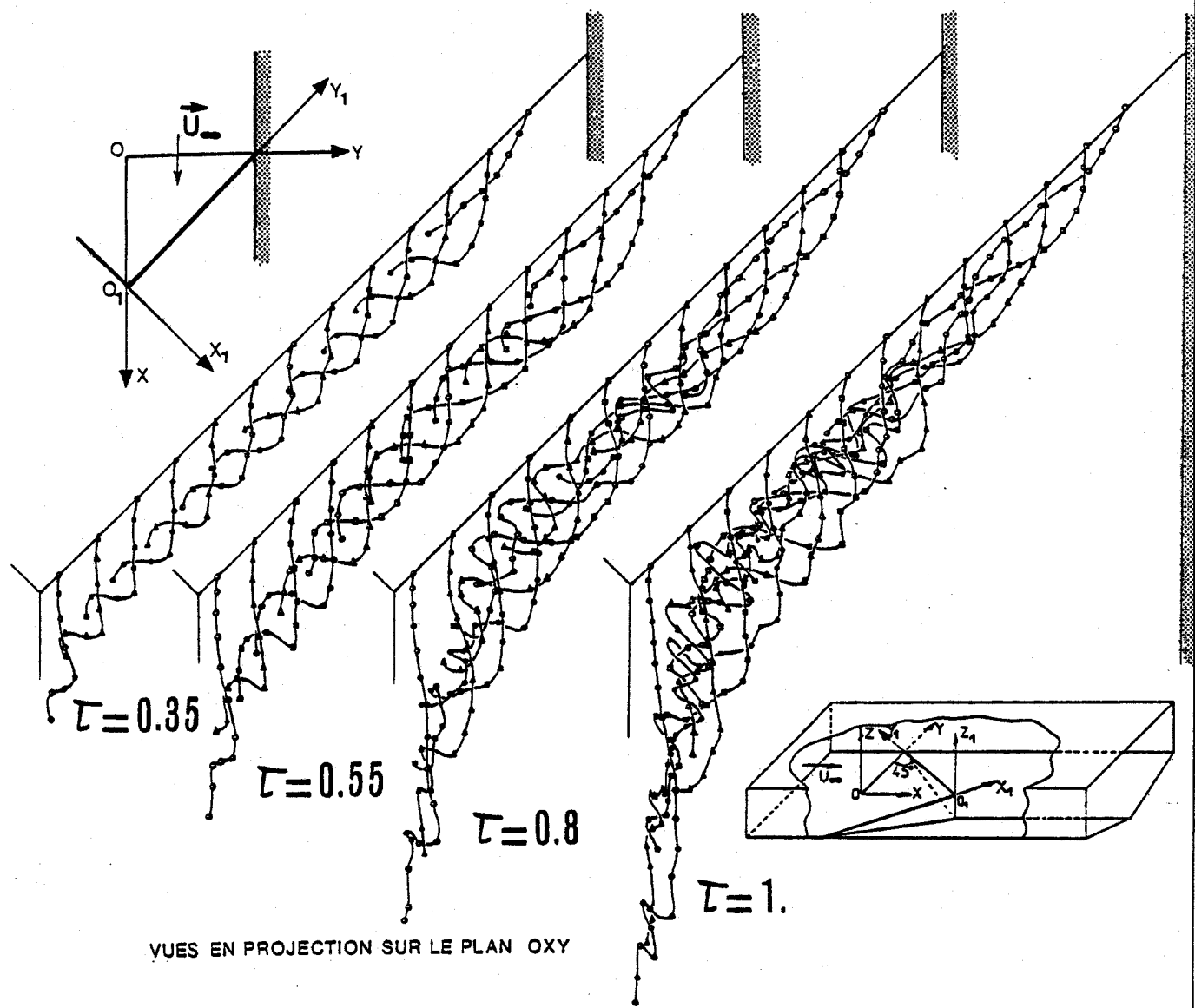
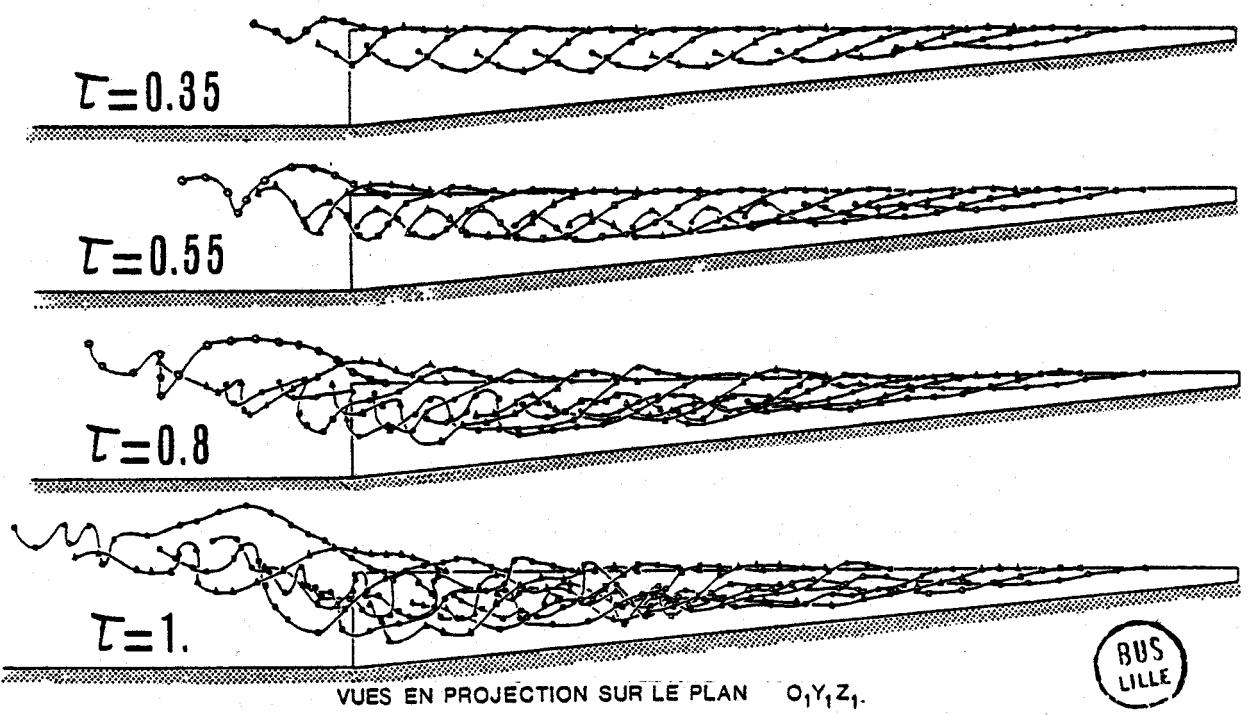


Figure 29
comparaison visuelle des lignes d'émission
tunnel hydrodynamique - calcul numérique



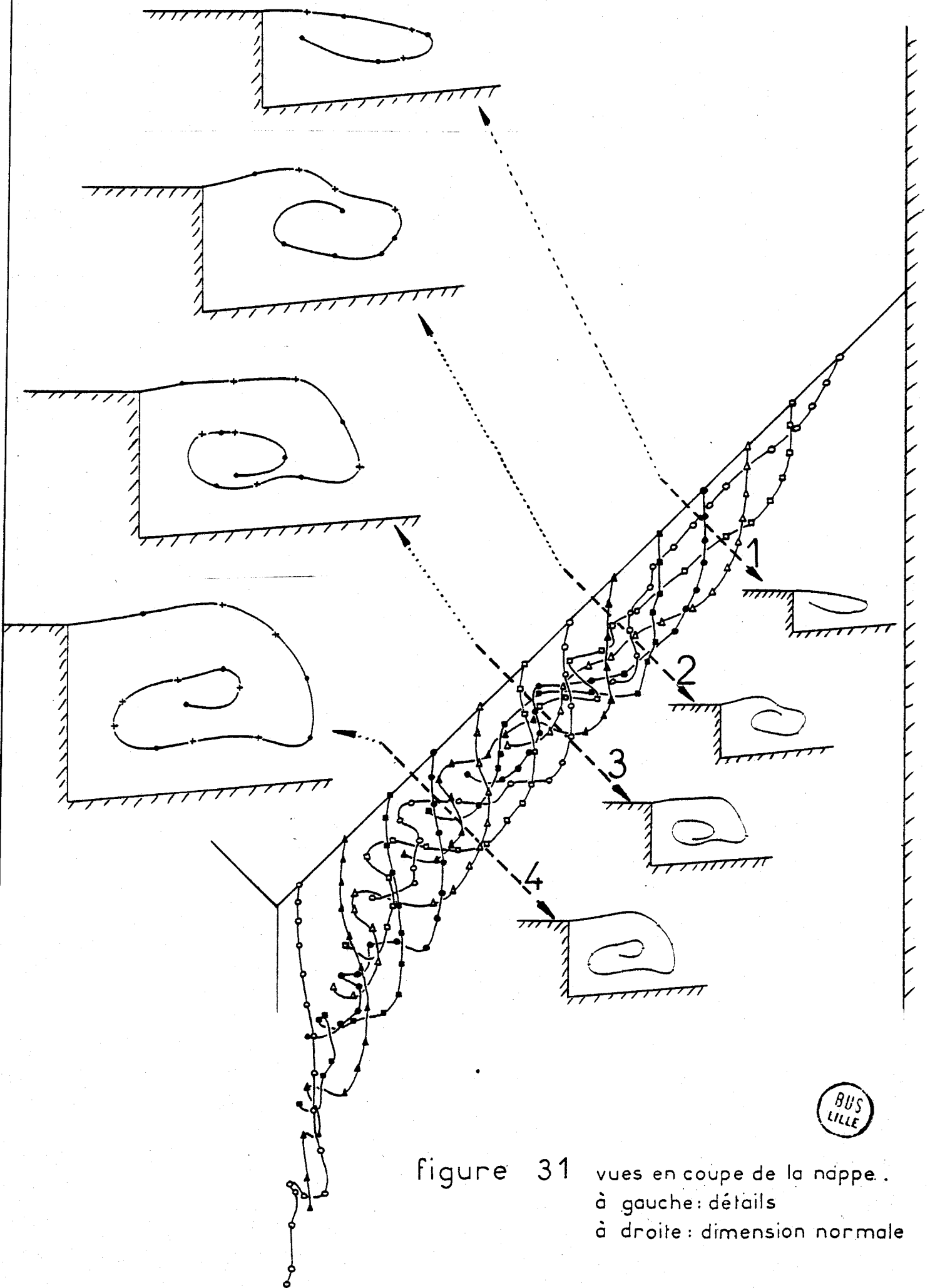
VUES EN PROJECTION SUR LE PLAN OXY



VUES EN PROJECTION SUR LE PLAN O₁y₁z₁



Figure 30 LIGNES D'EMISSION



BUS
LILLE

figure 31 vues en coupe de la nappe .
à gauche: détails
à droite: dimension normale

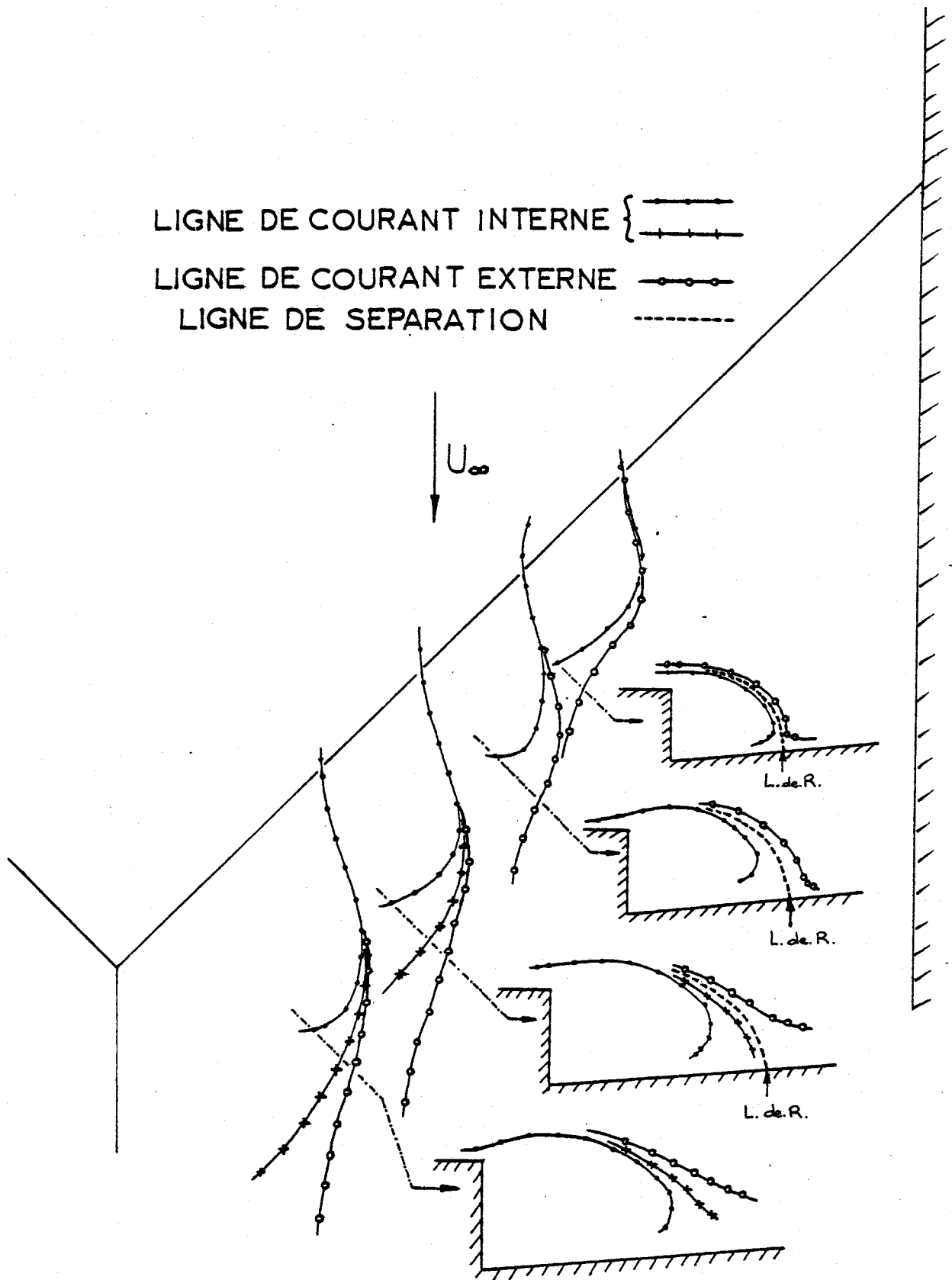


figure 32 détermination du domaine interne



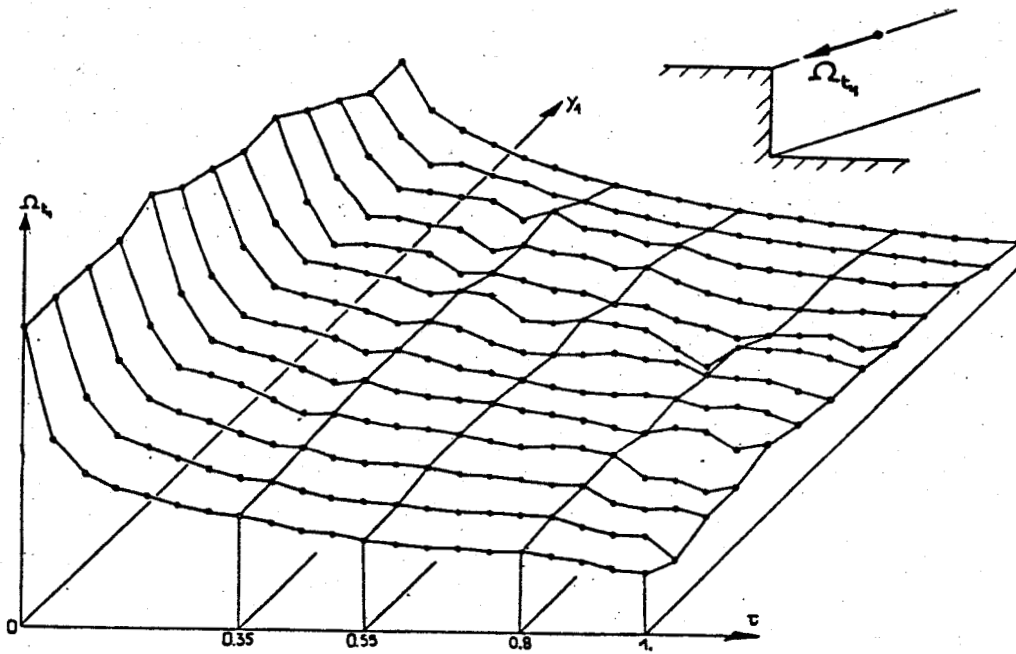


figure 34. évolution de la composante Ω_t en fonction du temps et de sa position sur l'arête.

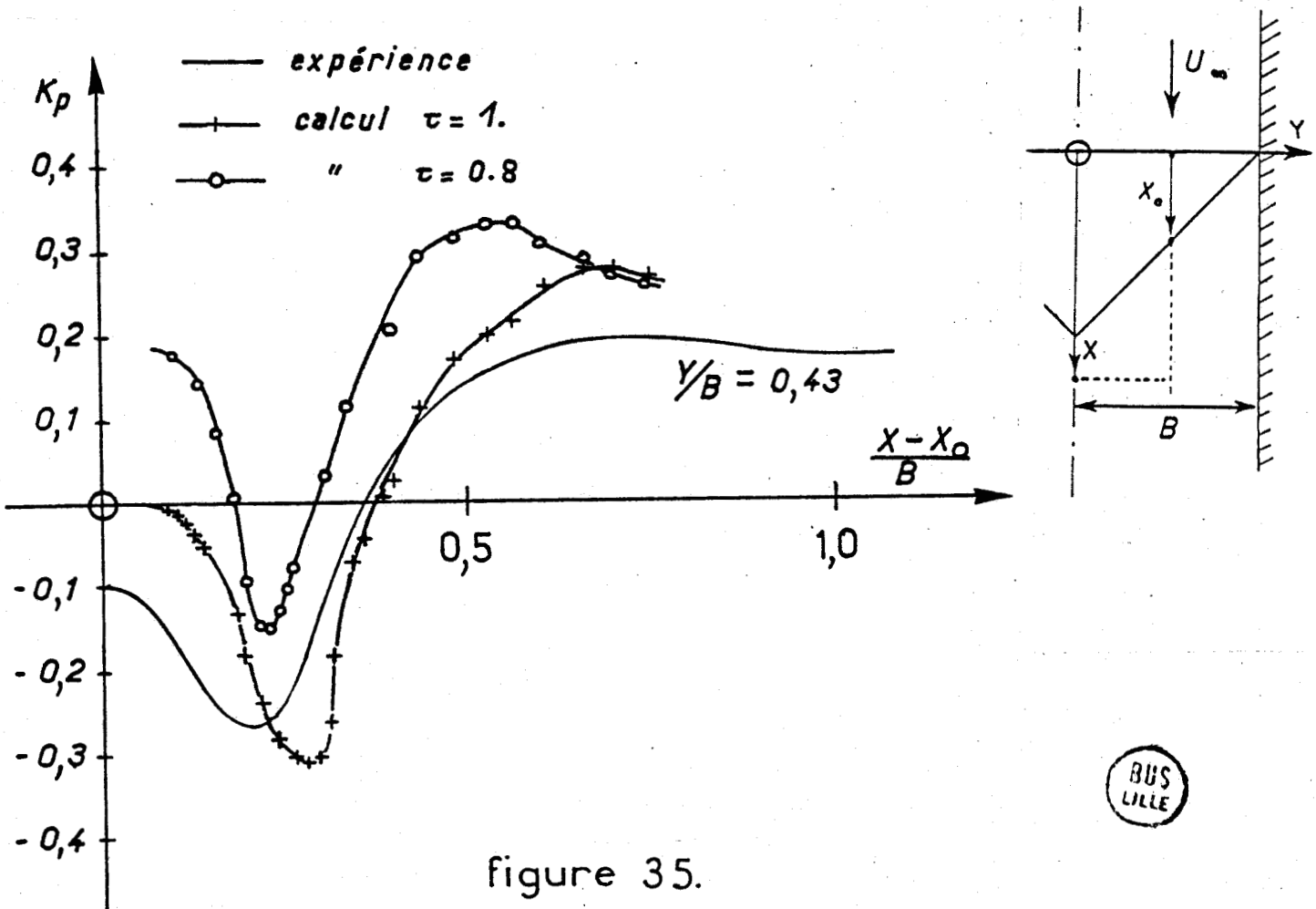


figure 35.

DECOLLEMENT SUR UNE MARCHE EN CHEVRON
Répartition de pression



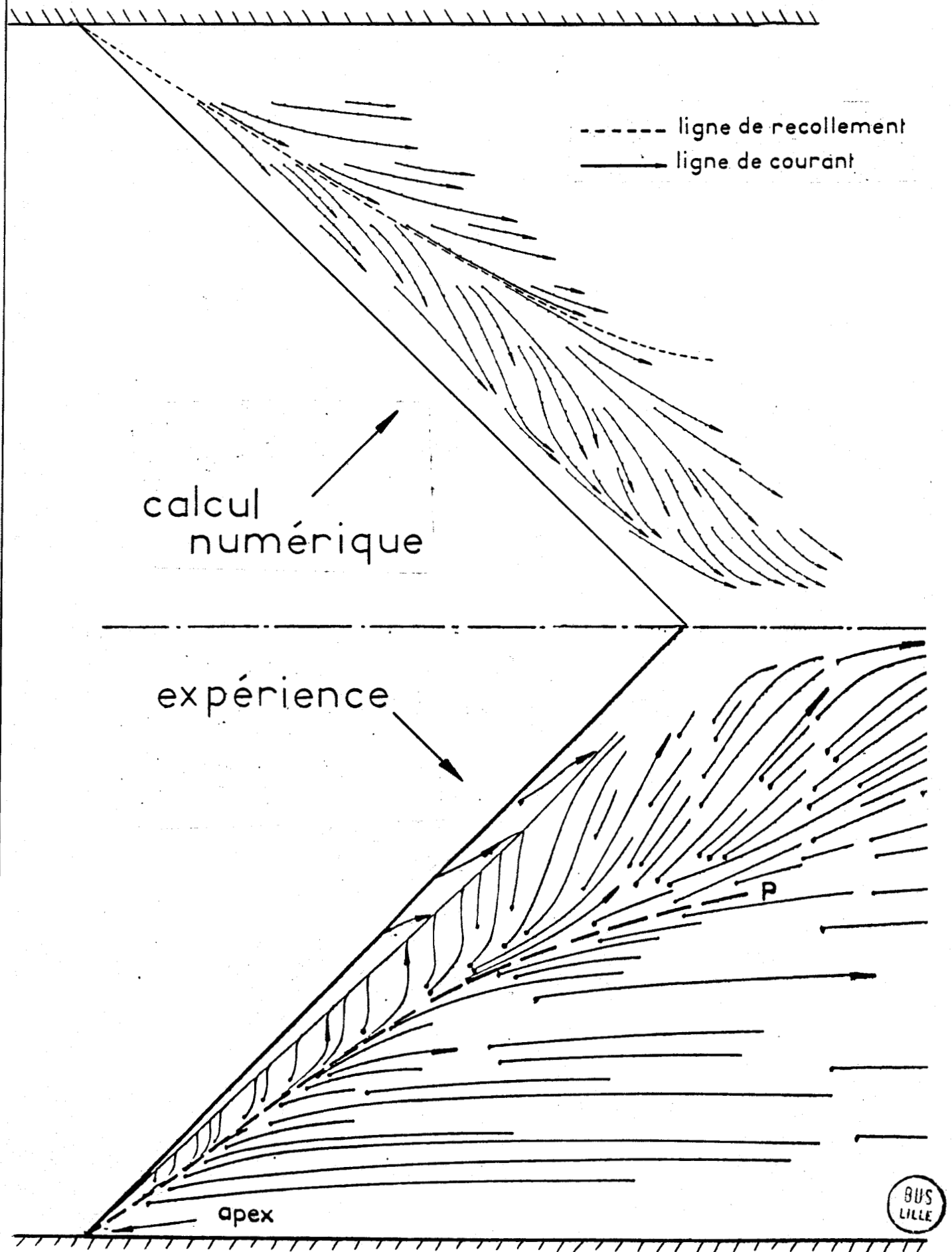


figure 33 Visualisation pariétale

CONCLUSION -

Cette étude qui s'est avérée délicate du fait de la forme de l'obstacle a permis d'éprouver la méthode utilisée et a montré qu'elle est capable de simuler des décollements pariétaux issus de corps épais. On a cherché à rendre cette méthode plus performante en insistant sur la recherche de précision quant à la représentation des parois, la convection des particules tourbillonnaires et l'évolution de l'intensité tourbillonnaire.

Mais elle a aussi montré ses propres limites lorsque les zones à traiter sont influencées par des effets visqueux que l'on ne peut pas négliger comme c'est le cas d'un noyau de nappe enroulée. Un schéma numérique se basant sur des équations d'écoulement de fluide parfait ne peut reproduire des écoulements dans des domaines à prédominance visqueuse et si l'on désire repousser ses limites d'application, il apparaît que la prise en compte des effets visqueux devient nécessaire.

ANNEXE 1

IDENTITE ANALOGUE A L'IDENTITE DE GREEN

On trouvera une autre démonstration de l'identité de Green dans [8].

a) Cas où P appartient à (Ω) .

On considère un domaine (Ω) de \mathbb{R}^3 simplement connexe limité extérieurement par une surface fermée (S) . La normale unitaire \vec{n} est dirigée vers le domaine (Ω) .

Soient P un point de (Ω) fixe et Q un point courant de (Ω) toujours différent de P.

Soit \vec{u}_Q la vitesse au point Q, définie dans (Ω) . On suppose que les dérivées de \vec{u} sont définies dans (Ω) .

r représente la longueur du vecteur $\vec{r} = \vec{QP}$. Dans ce cas le vecteur

$$\vec{A}_P = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{u}_Q}{r} dv_Q$$

est défini en tout point P et est lié au champ de vitesses par les relations :

$$\vec{u}_P = -\Delta \vec{A}_P \quad \text{si } P \in (\Omega)$$

$$\vec{0} = -\Delta \vec{A}_P \quad \text{si } P \notin (\Omega)$$

Toutes les dérivations se font par rapport à P et le calcul de la divergence de \vec{A} nous donne :

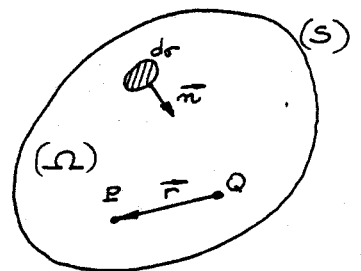
$$(I1) \quad \frac{\partial \vec{A}_P}{\partial P} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{u}_Q \cdot \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{r} \right) dv_Q = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{u}_Q \cdot \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{r} \right) dv_Q$$

Si on utilise la relation vectorielle $\text{div}_Q \left(\frac{\vec{u}_Q}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{div}_Q \vec{u}_Q + \vec{u}_Q \cdot \text{grad}_Q \frac{1}{r}$ on a :

$$(I2) \quad \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{\vec{u}_Q}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{u}_Q}{\partial Q} + \vec{u}_Q \cdot \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{r} \right)$$

L'insertion de (I2) dans (I1) donne :

$$\frac{\partial \vec{A}_P}{\partial P} = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{\vec{u}_Q}{r} \right) dv_Q + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{u}_Q}{\partial Q} dv_Q$$



et en utilisant la relation de Gauss :

$$\frac{\partial \vec{A}_P}{\partial P} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}_Q}{r} d\sigma_Q + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{u}_Q}{\partial Q} dV_Q$$

or :

$$\begin{aligned} \vec{u}_P &= -\Delta \vec{A} = -\text{grad}(\text{div} \vec{A}) + \text{rot rot} \vec{A} \\ &= -\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial \vec{A}_P}{\partial P} \right) + \frac{\partial}{\partial P} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial P} \wedge \vec{A}_P \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 4\pi \vec{u}_P &= -\frac{\partial}{\partial P} \left(\iint_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}_Q}{r} d\sigma_Q + \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{u}_Q}{\partial Q} dV_Q \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial P} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial P} \wedge \iiint_{\Omega} \frac{\vec{u}_Q}{r} dV_Q \right) \end{aligned}$$

Utilisons pour le dernier terme du second membre la relation vectorielle suivante :

$$\text{rot}_P \left(\frac{\vec{u}_Q}{r} \right) = \text{grad}_P \frac{1}{r} \wedge \vec{u}_Q + \frac{1}{r} \text{rot}_P \vec{u}_Q$$

En remarquant que $\text{rot}_P \vec{u}_Q$ s'annule on obtient :

$$\begin{aligned} (I3) \quad 4\pi \vec{u}_P &= -\frac{\partial}{\partial P} \left(\iint_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}_Q}{r} d\sigma_Q + \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{u}_Q}{\partial Q} dV_Q \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial P} \wedge \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \vec{u}_Q dV_Q \end{aligned}$$

En utilisant toujours sur le dernier terme du second membre la même relation vectorielle mais cette fois par rapport à Q :

$$\text{rot}_Q \left(\frac{\vec{u}_Q}{r} \right) = \text{grad}_Q \frac{1}{r} \wedge \vec{u}_Q + \frac{1}{r} \text{rot}_Q \vec{u}_Q$$

et en intervertissant dérivation et intégration dans le premier terme du second membre de (I3) on obtient :

$$\begin{aligned} 4\pi \vec{u}_P &= -\iint_S (\vec{n} \cdot \vec{u}_Q) \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma_Q - \iiint_{\Omega} \frac{\partial \vec{u}_Q}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{r} \right) dV_Q \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial P} \wedge \left(-\iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial Q} \wedge \frac{\vec{u}_Q}{r} dV_Q + \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial Q} \wedge \vec{u}_Q \right) dV_Q \right) \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned} 4\pi \vec{\mu}_p = & \iint_S (\vec{n} \cdot \vec{u}_q) \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma_q + \iiint_{\Omega} \frac{\partial \vec{u}_q}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{r} \right) dV_q \\ & + \frac{\partial}{\partial P} \left(\iint_S \frac{\vec{n}_q \wedge \vec{u}_q}{r} d\sigma_q + \iiint_{\Omega} \frac{\vec{\omega}_q}{r} dV_q \right) \end{aligned}$$

En définitive :

$$\begin{aligned} 4\pi \vec{\mu}_p = & \iint_S (\vec{n} \cdot \vec{u}_q) \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma_q + \iiint_{\Omega} \frac{\partial \vec{u}_q}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{r} \right) dV_q \\ & + \iint_S (\vec{n}_q \wedge \vec{u}_q) \wedge \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma_q + \iiint_{\Omega} \vec{\omega}_q \wedge \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{r} \right) dV_q \end{aligned}$$

et sous forme d'opérateurs :

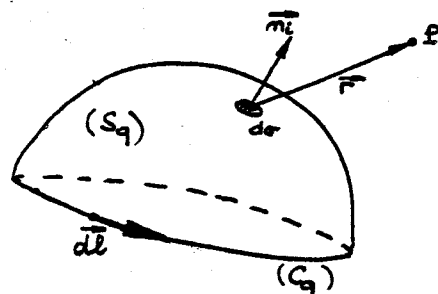
$$\begin{aligned} 4\pi \vec{\mu}_p = & \iiint_{\Omega} \left\{ \vec{\omega} \wedge \vec{\text{grad}}_q \left(\frac{1}{r} \right) + \text{div } \vec{u} \vec{\text{grad}}_q \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dV \\ & + \iint_S \left\{ (\vec{n} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{\text{grad}}_q \left(\frac{1}{r} \right) + (\vec{n} \cdot \vec{u}) \vec{\text{grad}}_q \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\sigma \end{aligned}$$

ANNEXE 2

RELATION ENTRE DISTRIBUTION SURFACIQUE TOURBILLONNAIRE
ET DISTRIBUTION SURFACIQUE DE DOUBLETS

Rappelons le théorème de J.L. HESS [12] et appliquons le aux surfaces (S_q) .

Soient une surface limitée par une courbe (C_q) et \vec{n}_i le vecteur unitaire normal à la surface (S_q) . On recouvre (S_q) d'une distribution de doublets d'intensité surfacique ρ variable et continue et où l'axe du doublet est partout dirigé suivant la normale \vec{n}_i . Le champ de vitesse induit par cette distribution est identique à la somme de deux autres champs :



- l'un est produit par une distribution tourbillonnaire sur (S_q) dont le vecteur tourbillon surfacique est $\vec{\mu} = -\vec{n}_i \wedge \text{grad} \rho$;
- l'autre est dû à un filament tourbillonnaire concentré le long de (C_q) et dont le vecteur tourbillon linéique variable $\vec{\Gamma} = \rho_b \vec{E}$, où ρ_b représente la valeur locale de ρ le long de (C_q) et où \vec{E} est le vecteur unitaire local tangent à (C_q) , est orienté de telle manière que le vecteur $\vec{E} \wedge \vec{n}_i$ pointe vers l'extérieur de (S_q) .

$$(II 1) \iint_{S_q} \rho \text{grad} \left(\frac{\vec{n}_i \cdot \vec{r}}{r^3} \right) d\sigma = \iint_{S_q} (-\vec{n}_i \wedge \text{grad} \rho) \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} d\sigma + \oint_{C_q} \rho_b \vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

que l'on peut écrire de la manière suivante, en définissant $\vec{dl}' = \vec{dl}$ et en sachant que $-\text{grad} \rho = \vec{u}_i - \vec{u}_e$ (où \vec{u}_i représente la vitesse du côté de la frontière où \vec{n}_i se situe, \vec{u}_e est la vitesse de l'autre côté de la frontière).

$$4\pi \vec{u} = \iint_{S_q} [\vec{n}_i \wedge (\vec{u}_i - \vec{u}_e)] \wedge \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = \iint_{S_q} \rho \text{grad} \left(\frac{\vec{n}_i \cdot \vec{r}}{r^3} \right) d\sigma$$

(II 2)

$$+ \oint_{C_q} \rho_b \vec{dl}' \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

C'est-à-dire qu'inversement une distribution surfacique de doublets et un filament tourbillonnaire, identique au précédent mais dirigé dans le sens inverse, induisent ensemble la même vitesse qu'une distribution tourbillonnaire surfacique.

APPROXIMATION D'UNE DISTRIBUTION TOURBILLONNAIRE SURFACIQUE PAR UN ENSEMBLE D'ANNEAUX TOURBILLONNAIRES -

Approchons (comme c'est le cas dans cette étude) la distribution de doublets ρ par un ensemble de distributions $\{\rho_i\}$ chacune constante sur une certaine partie (S_i) de la surface (S_q) .

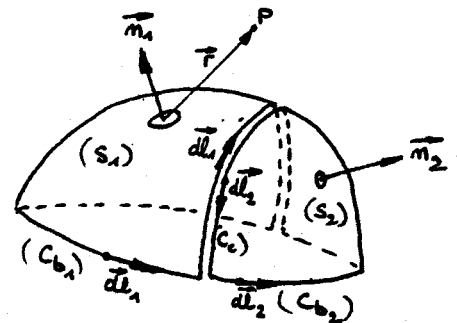
Prenons le cas simple où (S_q) est scindée en deux parties de surfaces (S_1) et (S_2) (cette démonstration serait généralisable à un nombre quelconque de facettes). (S_1) et (S_2) ont un bord commun (C_c) et la courbe (C_q) se divise en deux parties (C_{b_1}) et (C_{b_2}) .

Soient (C_1) le contour limitant (S_1) et (C_2) celui limitant (S_2) :

$$\text{on a } \begin{cases} C_1 = C_{b_1} \cup C_c \\ C_2 = C_{b_2} \cup C_c \end{cases}$$

Soient ρ_1 et ρ_2 les valeurs constantes de la distribution respectivement sur (S_1) et (S_2) .

On remarque à partir de (II.1) que dans ce cas la vitesse induite par une distribution constante ρ de doublets sur une surface est équivalente à celle induite par un anneau tourbillonnaire de circulation ρ et entourant la surface.



Alors (II.2) s'écrit :

$$\begin{aligned} 4 \pi \vec{u} &\approx \oint_{C_q} \rho_b \vec{dl}' \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} + \int_{C_{b_1}} \rho_1 \vec{dl}_1 \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \\ &+ \int_{C_{b_2}} \rho_2 \vec{dl}_2 \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} + \int_{C_c} (\rho_2 - \rho_1) \vec{dl}_2 \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \\ &= \int_{C_{b_1}} (\rho_1 - \rho_b) \vec{dl}_1 \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} + \int_{C_{b_2}} (\rho_2 - \rho_b) \vec{dl}_2 \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \\ &+ \int_{C_c} [(\rho_2 - \rho_b) + (\rho_b - \rho_1)] \vec{dl}_2 \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \\ &= \oint_{C_1} (\rho_1 - \rho_b) \vec{dl}_1 \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} + \oint_{C_2} (\rho_2 - \rho_b) \vec{dl}_2 \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

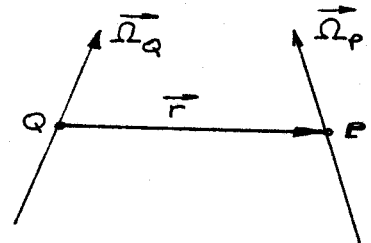
Si ρ_b est aussi considéré comme constant le long du contour C_q , le champ de vitesse peut être approché par un ensemble d'anneaux tourbillonnaires qui satisfont les théorèmes de conservation de la circulation.

A N N E X E 3

1 - DEFINITION ANALYTIQUE DU TERME DE DEFORMATION DANS LE CAS DE DEUX PARTICULES -

La vitesse au point P se déduit de la loi de Biot et Savart

$$(3.1) \quad \vec{u}_P = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \wedge \vec{\Omega}_Q$$



Soient $\left\{ \begin{array}{l} u_i \\ u_{i,j} \\ \Omega_k \\ r_l \end{array} \right.$ les composantes de \vec{u}_P
 les composantes de $\text{grad } \vec{u}_P$
 les composantes de $\vec{\Omega}_Q$
 les composantes de \vec{r}

Par définition il y aura dérivation par rapport par exemple à la variable x_j si l'indice j est précédé d'une virgule. Si l'indice j n'est pas précédé d'une virgule il repère la j ème composante d'un vecteur.

Ecrivons (3.1) à l'aide des composantes :

$$4\pi u_i = \frac{1}{r^3} \varepsilon_{ilk} r_l \Omega_k$$

où $\varepsilon_{ilk} \left\{ \begin{array}{l} = 1 \text{ si } i, j, k \text{ est une permutation paire de } 1, 2, 3 \\ = -1 \text{ si } i, j, k \text{ est une permutation impaire de } 1, 2, 3 \\ = 0 \text{ si } i, j, k \text{ n'est pas une permutation de } 1, 2, 3, \end{array} \right.$

et donc :

$$4\pi u_{i,j} = \left[\frac{1}{r^3} \varepsilon_{ilk} r_l \Omega_k \right]_{,j}$$

En sommant sur j , écrivons les composantes de $4\pi \vec{\Omega} \cdot \text{grad } \vec{u}_P$

$$4\pi \Omega_j u_{i,j} = \Omega_j \left[\frac{1}{r^3} \varepsilon_{ilk} r_l \Omega_k \right]_{,j} = \varepsilon_{ilk} \Omega_j \left[\frac{1}{r^3} r_l \Omega_k \right]_{,j}$$

$$\left\{ \left[\frac{1}{r^3} \right]_{,j} = -\frac{3}{r^3} \cdot \frac{r_j}{r^2} \right.$$

$\Omega_{k,j} = 0$ puisque $\vec{\Omega}_Q$ est indépendant de P

$$r_{l,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } l=j \\ 0 & \text{si } l \neq j \end{cases}$$

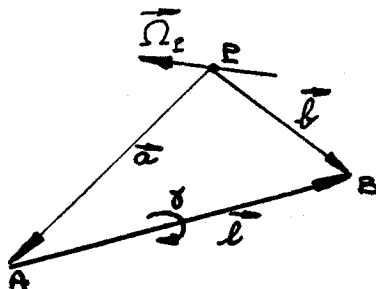
et donc :

$$\begin{aligned}
 4 \pi \Omega_j u_{ij} &= \frac{\varepsilon_{ilk} \Omega_j}{r^3} \left[-\frac{3}{r^2} r_j r_l \Omega_k + \Omega_k r_{l,j} \right] \\
 &= \frac{1}{r^3} \varepsilon_{ilk} \left[-\frac{3}{r^2} (\Omega_j r_j) r_l \Omega_k + \Omega_j \Omega_k r_{l,j} \right] \\
 &= \frac{1}{r^3} \left[-\frac{3}{r^2} (\Omega_j r_j) (\varepsilon_{ilk} r_l \Omega_k) + \varepsilon_{ilk} \Omega_j \Omega_k r_{l,j} \right] \\
 &= \frac{1}{r^3} \left[-\frac{3}{r^2} (\Omega_j r_j) (\varepsilon_{ilk} r_l \Omega_k) + \varepsilon_{ijk} \Omega_j \Omega_k \right]
 \end{aligned}$$

on en déduit le terme de déformation de $\bar{\Omega}_p$ au point P :

$$(3.2) \quad \bar{\Omega} \cdot \text{grad } \bar{u}_p = \frac{1}{4\pi r^3} \left[-\frac{3}{r^2} (\bar{\Omega}_p \cdot \bar{r}) (\bar{r} \wedge \bar{\Omega}_p) + \bar{\Omega}_p \wedge \bar{\Omega}_p \right]$$

2 - DEFORMATION DU CHAMP TOURBILLONNAIRE INDUITE PAR UN SEGMENT TOURBILLONNAIRE -



Le segment \overline{AB} induit au point P une vitesse :

$$\bar{u}_p = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{1}{|\bar{a} \wedge \bar{b}|^2} \left(\frac{\bar{l} \bar{b}}{|\bar{b}|} - \frac{\bar{l} \bar{a}}{|\bar{a}|} \right) \cdot (\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\gamma}{4\pi} \alpha (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{1}{|\bar{a} \wedge \bar{b}|^2} \left(\frac{\bar{l} \bar{b}}{|\bar{b}|} - \frac{\bar{l} \bar{a}}{|\bar{a}|} \right) \cdot$$

chaque composante u_i de \bar{u}_p s'écrit en la multipliant par $\frac{4\pi}{\gamma}$:

$$\frac{4\pi}{\gamma} u_{ij} = \alpha (\varepsilon_{ilk} a_l b_k),$$

et les différents éléments u_{ij} du tenseur $\text{grad } \bar{u}_p$ s'expriment (avec un coefficient multiplicatif $\frac{4\pi}{\gamma}$)

$$\frac{4\pi}{\gamma} u_{ij} = \alpha_{,j} \varepsilon_{ilk} a_l b_k + \alpha \left[\varepsilon_{ilk} a_l b_k \right]_{,j}$$

avec :

$$\alpha_{,j} = \left[\frac{1}{|\bar{a} \wedge \bar{b}|^2} \right]_{,j} \cdot \left(\frac{\bar{l} \bar{b}}{|\bar{b}|} - \frac{\bar{l} \bar{a}}{|\bar{a}|} \right) + \frac{1}{|\bar{a} \wedge \bar{b}|^2} \cdot \left(\frac{\bar{l} \bar{b}}{|\bar{b}|} - \frac{\bar{l} \bar{a}}{|\bar{a}|} \right)_{,j}$$

Les relations suivantes :

$$\left[\frac{1}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2} \right]_{,j} = - \frac{[|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2]_{,j}}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^4} = \frac{2 [(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a}]_{,j}}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^4} = \frac{2 (\varepsilon_{jlk} \varepsilon_{lmn} a_m b_n l_k)}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^4}$$

$$\left[\frac{\vec{l} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right]_{,j} = \frac{(l_p b_r)_{,j} |\vec{b}| - l_p b_r [|\vec{b}|]_{,j}}{|\vec{b}|^2} = \frac{l_p b_{r,j}}{|\vec{b}|} + \frac{2 b_j l_p b_p}{|\vec{b}|^3}$$

$$\left[\frac{\vec{l} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \right]_{,j} = \frac{l_p a_{p,j}}{|\vec{a}|} + \frac{2 a_j l_p a_p}{|\vec{a}|^3}$$

$$(\varepsilon_{ilk} a_l b_k)_{,j} = \varepsilon_{ilk} (a_l b_k)_{,j} = \varepsilon_{ilk} (a_{l,j} b_k + a_l b_{k,j})$$

permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\gamma} \Omega_j \mu_{i,j} &= \frac{1}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2} \left[\frac{\Omega_j l_p b_{r,j}}{|\vec{b}|} - \frac{\Omega_j l_p a_{r,j}}{|\vec{a}|} + \frac{2 \Omega_j b_j l_p b_p}{|\vec{b}|^3} - \frac{2 \Omega_j a_j l_p a_p}{|\vec{a}|^3} \right] (\varepsilon_{ilk} a_l b_k) \\ &\quad - \frac{2\alpha}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2} (\varepsilon_{jlk} \varepsilon_{lmn} \Omega_j a_m b_n l_k) (\varepsilon_{ilk} a_l b_k) \\ &\quad + \alpha (\varepsilon_{ilk} \Omega_j b_k a_{l,j} + \varepsilon_{ilk} \Omega_j a_l b_{k,j}) \\ &= \frac{1}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2} \left[- \frac{\Omega_j l_j}{|\vec{b}|} + \frac{\Omega_j l_j}{|\vec{a}|} + \frac{2 (\Omega_j b_j) (l_p b_p)}{|\vec{b}|^3} - \frac{2 (\Omega_j a_j) (l_p a_p)}{|\vec{a}|^3} \right] (\vec{a} \wedge \vec{b})_i \\ &\quad - \frac{2\alpha}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2} \left[- \varepsilon_{ljk} \varepsilon_{lmn} (\Omega_j l_k) (a_m b_n) \right] (\vec{a} \wedge \vec{b})_i \\ &\quad + \alpha (- \varepsilon_{ilk} \Omega_l b_k - \varepsilon_{ilk} \Omega_k a_l) \\ &= \frac{1}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2} \left[\left(\frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b}|} \right) (\vec{\Omega} \cdot \vec{l}) + \frac{2 (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}) (\vec{l} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2 |\vec{b}|} - \frac{2 (\vec{\Omega} \cdot \vec{a}) (\vec{l} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}|^2 |\vec{a}|} \right] (\vec{a} \wedge \vec{b})_i \\ &\quad + \frac{2\alpha}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2} \left[(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{l}) \right] (\vec{a} \wedge \vec{b})_i \\ &\quad - \alpha \left[(\vec{\Omega} \wedge \vec{a})_i + (\vec{\Omega} \wedge \vec{b})_i \right] \end{aligned}$$

En définitive le terme de déformation se définit comme suit :

$$\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u}_P = \frac{\delta}{4\pi |\vec{a}_1 \vec{b}|^2} \left\{ (\vec{a}_1 \vec{b}) \left[2 \left(\frac{\vec{b}\vec{b}}{|\vec{b}|} \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} - \frac{\vec{a}\vec{a}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \right) + \left(\frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b}|} \right) \vec{\Omega} \cdot \vec{b} \right] \right. \\ \left. + \frac{2}{|\vec{a}_1 \vec{b}|^2} \left(\frac{\vec{b}\vec{b}}{|\vec{b}|} - \frac{\vec{a}\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) \left((\vec{a}_1 \vec{b}) \cdot (\vec{\Omega}_1 \vec{b}) \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{\vec{b}\vec{b}}{|\vec{b}|} - \frac{\vec{a}\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) (\vec{\Omega}_1 \vec{b}) \right\} ,$$

et peut s'écrire d'une manière différente en faisant intervenir la vitesse \vec{u}_P et en posant :

$$k_1 = \frac{\vec{b}\vec{b}}{|\vec{b}|} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{\vec{a}\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u}_P = \frac{\vec{u}_P}{k_1 - k_2} \left\{ 2 \left(k_1 \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} - k_2 \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \right) + \left(\frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b}|} \right) \vec{\Omega} \cdot \vec{b} \right\} \\ + \frac{1}{|\vec{a}_1 \vec{b}|^2} \left\{ 2 \vec{u}_P \left[(\vec{a}_1 \vec{b}) \cdot (\vec{\Omega}_1 \vec{b}) \right] - \left[\vec{u}_P \cdot (\vec{a}_1 \vec{b}) \right] (\vec{\Omega}_1 \vec{b}) \right\}$$

REFERENCES

- [1] G.K. BATCHELOR
An introduction to fluid dynamics (page 132)
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
- [2] S.M. BELOTSEKOVSKII - M.I. NISHT
"Non stationary non linear theory of a thin wing of arbitrary
planform"
Mekhanika Zhidkosti I Gaza (1974) n° 4, p. 100-108.
- [3] S.M. BELOTSEKOVSKII
"Study of the unsteady aerodynamics of lifting surfaces using
the computer"
Ann. Rev. Fluid Mech. (1977-9), p. 469-494
- [4] MILNE - THOMSON
Theoretical Hydrodynamics (Mac Millan et Co LTD), 1968
- [5] J. BOUSQUET
"Sur les méthodes des singularités"
Cours Sup-Aéro.
- [6] F. CHOMETON - P. FONTANET
"Ecoulements tridimensionnels décollés autour de véhicules
terrestres"
16e Colloque d'Aérodynamique Appliquée, Lille (Nov. 1979).
- [7] A.J. CHORIN - P.S. BERNARD
"Discretization of a vortex sheet, with an example of roll-up"
Journal of Computational Physics 13 (1973), p. 423-429
- [8] F. DURAND
Electrostatique et Magnétostatique (1953)
Ed. MASSON, page 752.
- [9] W. GROBNER - N. HOFREITER
Integraltafel - Unbestimmte integrale
SPRINGER-VERLAG (1961), WIEN
- [10] J.P. GUIRAUD
"Potentiel des vitesses créées par une distribution localisée
de tourbillons"
Recherche Aérospatiale n° 6 (1978), p. 365-366.
- [11] J.L. HESS, A.M.O. SMITH
"Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary
3-dimensional bodies"
Report ES 40622 Douglas Aircraft (1962)
- [12] J.L. HESS
"Calculation of potential flow about arbitrary three-dimensional
lifting bodies"
DOUGLAS AIRCRAFT COMPANY (Déc. 1969).

- [13] J.L. HESS
"The use of higher-order surface singularity distributions to obtain improved potential flow solutions for two-dimensional lifting airfoils"
Computer Methods in Applied Mechnaics and Engineering 5 (1975) 11.35.
- [14] B. HUNT
"The panel method for subsonic aerodynamic flows : a survey of mathematical formulation and numerical models and an outline of the new British Aerospace scheme"
Computational Fluid Dynamics, V.K.I. Lecture Series (Mars 1978).
- [15] F.T. JOHNSON - P.E. RUBBERT
"Advanced panel-type influence coefficient methods applied to subsonic flows"
AIAA Paper n° 75-50 (Jan. 1975).
- [16] H. KOBER
Dictionary of conformal representations
DOVER PUBLICATIONS INC.
- [17] K. KUWAHARA - H. TAKAMI
"Numerical studies of two-dimensional vortex motion by a system of point vortices"
Journal of the Physical Society of Japan (vol 34 n° 1) (Jan. 1973).
- [18] H. LAMB
Hydrodynamics
Dover Publications, Inc. , N.Y. 6e édition (1963), p. 60.
- [19] R. LEGENDRE
"La condition de Joukowski en écoulement tridimensionnel"
La Recherche Aérospatiale n° 5 (1972) p. 241-247
- [20] LUU
"Sur la technique des singularités en hydro et aérodynamique"
C.N.R.S.
- [21] K.W. MANGLER - J.H.B. SMITH
"Behaviour of the vortex sheet at the trailing-edge of a 'lifting wing"
RAE Report 69049 (Mars 1969)
- [22] B. MASKEW
"Calculation of the three-dimensional potential flow around lifting non-planar wings and wing-bodies using a surface distribution of quadrilateral vortex rings"
Loughborough University of Technology, Leics, England, TT 7009 (Sept. 1970).
- [23] B. MASKEW
"Subvortex technique for the close approach to a discretized vortex sheet"
Journal Aircraft, vol 14 n° 2 (1975)
- [24] J. MIRANDE - C. QUELIN
"Analyse détaillée de la structure d'un écoulement tridimensionnel"
Rapport Technique 07-1977 - ONERA

- [25] C. REHBACH
"Calcul d'écoulement autour d'ailes sans épaisseur avec nappes tourbillonnaires évolutives"
Recherche Aéronautique (1973-2), p. 53-61.
- [26] C. REHBACH
"Numerical calculation of three-dimensional unsteady flows with vortex sheet"
AIAA Paper 78-111, Huntsville (1978).
- [27] C. REHBACH
"Calcul numérique d'écoulements tridimensionnels instationnaires avec nappes évolutives"
Recherche Aéronautique (1977-5), p. 289-298
- [28] A. ROBERTS
"Computation of incompressible flow about bodies and thick wings using the spline mode system"
BAC Report Aero MA 19 (1972).
- [29] P.E. RUBBERT and al.
"A general method for determining the aerodynamic characteristics of fan-in-wing configuration"
Vol. 1 Theory and Application
Technical Report 67-61 A, USAA VLABS (1967).
- [30] W.R. SEARS
"Unsteady motion of airfoils with boundary layer separation"
AIAA Journal Vol. 14 n° 2".
- [31] H. WERLE
"Écoulements décollés, étude phénoménologique à partir de visualisations hydrodynamiques"
Réunion AGARD sur les écoulements décollés, Göttingen (27-30 Mai 1975).
- [32] J.C. WU - J.F. THOMPSON
"Numerical solution of the unsteady, three-dimensional Navier-Stokes equations".
Proceedings of project squid workshop of fluid dynamics of unsteady three-dimensional and separated flows .
Purdue University, Lafayette, Ind. (1971).

