

N° d'ordre : 821

50376
1980
29

50376
1980
29

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

par

Gérard COURBET

Ingénieur E.N.S.E.R.B.

**RECHERCHE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE SUR
LA PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE LE LONG
D'UN FIL PARALLELE A LA SURFACE DU SOL
APPLICATION A L'ETUDE DU SOUS-SOL PROCHE.**



030 035579 7

Soutenue le 22 avril 1980 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	MM. P. GRIVET	Président
	P. DEGAUQUE	Rapporteur
	R. GABILLARD	Examineur
	J. FONTAINE	Examineur
	M. CAUTERMAN	Examineur
	A. NOTEBART	Invité
	B. GUILLEMINOT	Invité
	B. KNAFF	Invité

Ce travail a été effectué au LABORATOIRE DE RADIOPROPAGATION ET ELECTRONIQUE de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, sous la direction de Monsieur le Professeur GABILLARD.

Monsieur le Professeur GABILLARD a apporté l'idée de base qui fut à l'origine de ce travail. Qu'il me soit permis de lui exprimer mes sentiments de profonde gratitude pour les nombreux conseils qu'il m'a accordés au long de cette étude.

Je remercie Monsieur le Professeur GRIVET, Membre de l'Institut, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférente gratitude.

Pendant toute la durée de cette étude, j'ai travaillé en étroite collaboration avec Monsieur le Professeur DEGAUQUE. Les nombreux encouragements et conseils précieux qu'il m'a apportés ont été déterminants pour la réalisation de ce travail. Je tiens à lui exprimer l'expression de ma reconnaissance pour cette aide amicale et efficace.

Je remercie Monsieur NOTEBART, Président de la Communauté Urbaine de Lille, de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury. Je lui suis vivement reconnaissant de m'avoir autorisé à mener à bien cette thèse.

Mes remerciements vont également à Messieurs GUILLEMINOT et KNAFF, respectivement Directeur et Directeur Adjoint à la Communauté Urbaine de Lille. Sans leur compréhension et les facilités qu'ils m'ont accordées je n'aurais jamais pu mener à bien mon travail de thèse. Je leur suis également reconnaissant d'avoir bien voulu accepter de faire partie de mon jury.

Messieurs FONTAINE et CAUTERMAN ont bien voulu examiner ce travail. Je tiens à leur exprimer ma reconnaissance.

Une partie de ce travail a été effectuée sous contrat de la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique. Je remercie cet organisme pour le soutien qu'il m'a apporté.

Je tiens également à remercier Monsieur DEMOULIN, Membre du Laboratoire, de l'aide efficace qu'il m'a apportée tout au long de ce travail. Tous les autres membres de l'équipe m'ont également apporté leur collaboration sympathique. Que tous soient ici remerciés.

Je ne terminerai pas cet avant propos sans exprimer mes remerciements aux personnes qui ont contribué à l'élaboration de ce document, et notamment Melle BUSCÔT, MM VALEMBERG, DEHORTER et PLUQUET.

S O M M A I R E

=====

INTRODUCTION

CHAPITRE I : PRINCIPE ET MISE EN EVIDENCE EXPERIMENTALE DE LA DETECTION ELECTROMAGNETIQUE PAR ONDE DE CHOC

- Introduction
- 1.1 : Généralités sur l'onde de choc
- 1.2 : Utilisation de l'onde de choc électromagnétique dans les méthodes de détection
- 1.3 : Etude expérimentale de la détection par l'utilisation de l'onde de choc électromagnétique
- Conclusion.

CHAPITRE II : CONSTANTES DE PROPAGATION DISCRETES POUR UNE ONDE SINUSOIDALE

- Introduction
- 2.1 : Position du problème
- 2.2 : Equation modale
- 2.3 : Expressions simplifiées de $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$
- 2.4 : Solutions de l'équation modale
- 2.5 : Validité des hypothèses faites dans les paragraphes précédents
- 2.6 : Variation des constantes de propagation
- 2.7 : Calcul des champs électriques et magnétiques associés aux modes de propagation
- Conclusion.

CHAPITRE III : CALCUL DE LA REPARTITION DE COURANT LE LONG D'UN FIL ALIMENTE PAR UN GENERATEUR DE TENSION SYMETRIQUE

- Introduction
- 3.1 : Calcul du champ électrique émis par un dipôle électrique horizontal au-dessus du sol
- 3.2 : Champ électrique émis par un fil tendu au-dessus du sol
- 3.3 : Expression du courant parcourant la ligne dans le cas où l'excitation est faite sur une zone infinitésimale
- 3.4 : Calcul de la répartition du courant le long du fil par les expressions approchées
- 3.5 : Calcul de la répartition du courant le long du fil par les expressions exactes

- 3.6 : Mesure de la répartition de courant le long du fil
- 3.7 : Etude expérimentale en régime impulsionnel
- Conclusion.

CONCLUSION GENERALE

ANNEXES

I N T R O D U C T I O N

La plupart des méthodes électromagnétiques de prospection géophysique utilisent des ondes basses fréquences produites soit par des sources lointaines non contrôlées (utilisées en magnétotellurique), soit par des générateurs mis en place au voisinage immédiat de la zone à prospecter.

Cependant, pour détecter des interfaces situés à faible profondeur ou si la couche de recouvrement est très résistive, l'utilisation d'ondes hautes fréquences est justifiée.

Dans tous les cas, il faut effectuer un traitement sur ordinateur pour extraire de l'amplitude et de la phase du signal reçu les informations utiles concernant notamment l'épaisseur des premières couches de terrain. Des méthodes qui utilisent le principe classique du radar ont donc fait peu à peu leur apparition.

Les premières études traitant ce sujet ont été menées dès 1960 ; il s'agissait à l'origine de sonder par un moyen aéroporté l'épaisseur de la glace sur les grands lacs américains, afin de découvrir les chenaux pouvant être le plus facilement ouverts à la navigation hivernale par les brise-glaces. Le fonctionnement de ces appareils repose sur le fait que la glace est un bon diélectrique qui n'absorbe que très peu le rayonnement électromagnétique. On peut ainsi détecter l'interface entre la glace et l'eau, caractérisée par des constantes électriques différentes.

D'autres types de radar sont mis en oeuvre à la surface du sol. Ces radars sondent verticalement avec une portée qui dépend de la conductivité des terrains, elle-même fonction de leur humidité. En montant l'antenne sur un véhicule qui se déplace lentement et dont on enregistre le mouvement, on peut espérer obtenir une coupe des divers terrains qui constituent le sous-sol.

Dans ce domaine, un type de radar particulier utilisant des impulsions très brèves, de l'ordre de la nanoseconde, avec une portée de l'ordre du mètre, est actuellement en cours d'étude aux ETATS UNIS. Ce procédé peut s'appliquer à l'auscultation des chaussées (mesure de l'épaisseur de la bande de roulement par exemple), à la détermination de l'épaisseur de la maçonnerie des tunnels où à la détection de vides derrière celle-ci.

C'est une mesure qui intéresse plus particulièrement, dans un but de contrôle ou de maintenance, les services de voirie des administrations gestionnaires des routes et autoroutes.

Le dispositif d'émission et de réception utilisé dans ces différents types de radar est un cornet délivrant un train de sinusoides ou une onde plane impulsive non modulée. Dès 1963, le professeur GABILLARD a proposé une nouvelle méthode de prospection géophysique utilisant le rayonnement d'une impulsion de courant qui se propage le long d'une ligne placée parallèlement à la surface du sol. Comme la vitesse de propagation de l'impulsion sur le fil est supérieure à la vitesse de propagation de l'onde dans le sol, on peut s'attendre à la naissance d'une "onde de choc électromagnétique", dénommée ainsi par analogie avec le "bang sonore" produit par un avion supersonique. Cette onde se réfléchit sur l'interface à détecter et induit sur la ligne un écho qui se propage à la suite de l'impulsion de courant incidente. Cette idée fut le point de départ de notre travail qui consiste en une étude théorique et expérimentale de ce dispositif de prospection.

Le premier chapitre décrit une phase expérimentale où nous montrons la faisabilité de la méthode. Nous essayons notamment de déterminer la configuration géométrique optimum de la ligne, de façon à distinguer le mieux possible l'écho dû à la présence d'un interface. Comme la profondeur d'investigation souhaitée est inférieure au mètre, nous avons utilisé un générateur délivrant des impulsions de 750 ps à mi-hauteur. Chaque élément de la ligne se comportant successivement comme un émetteur et un récepteur, l'effet d'intégration est d'autant plus important que la distance de propagation de l'impulsion sur la ligne est grande. Cependant, le sol étant un milieu dispersif, l'impulsion va subir un affaiblissement et un élargissement. La configuration optimum résulte donc d'un compromis entre ces deux effets.

La déformation de l'impulsion lors de sa propagation sur la ligne peut être calculée théoriquement. Pour cela, nous avons d'abord envisagé l'hypothèse du courant sinusoidal ; l'utilisation des procédures de transformées de FOURIER rapides nous permet ensuite de passer au domaine temporel.

Dans le deuxième chapitre, nous déterminons les constantes de propagation associées aux modes qui peuvent se propager sur une ligne de longueur infinie.

Nous mettons en évidence l'influence des paramètres électriques et géométriques de la configuration sur l'affaiblissement et la vitesse de phase de chacun des modes guidés.

Dans le troisième chapitre, nous tenons compte des conditions d'excitation de la ligne en supposant que le fil est alimenté d'une façon symétrique par un générateur imposant un champ électrique sur une zone très petite de l'antenne. Cela permet de calculer la répartition réelle du courant le long de la ligne et de voir l'importance des courants associés aux modes guidés. Une comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux est également donnée. Enfin, nous en déduisons dans le domaine temporel la déformation de l'impulsion se propageant sur le fil.

CHAPITRE I : PRINCIPE ET MISE EN EVIDENCE EXPERIMENTALE DE LA DETECTION
ELECTROMAGNETIQUE PAR ONDE DE CHOC

Dans ce premier chapitre, nous rappelons d'abord quelques généralités sur "l'onde de choc électromagnétique".

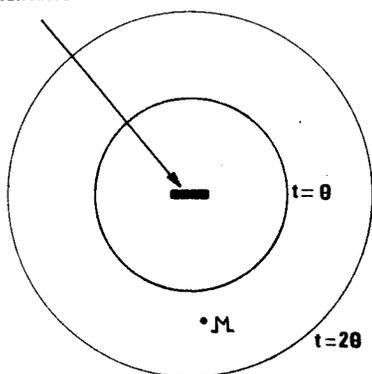
Nous définissons la façon dont elle peut être utilisée dans les méthodes de détection électromagnétique et notamment pour la mesure de l'épaisseur d'un mur ou d'une couche de revêtement du sol.

Nous présentons ensuite quelques résultats de mesures montrant la faisabilité de cette méthode de détection électromagnétique.

1.1 Généralités sur l'onde de choc

Supposons un dipôle électrique élémentaire placé dans un milieu homogène infini (voir fig. 1.1). Ce dipôle est parcouru par un échelon de courant tel que :

Dipôle élémentaire



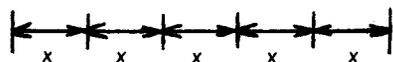
F. 1.1

$$\begin{aligned} \text{pour } t \leq 0 & \quad I(t) = 0 \\ \text{pour } t > 0 & \quad I(t) = 1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

L'espace environnant le dipôle devient alors le siège d'un rayonnement électromagnétique qui s'effectue de manière sphérique en fonction du temps t . Un point M de l'espace est donc atteint au bout du temps θ_M par un front d'onde qui instantanément fait passer le champ électrique d'une valeur nulle à une valeur finie. Ensuite la valeur du champ électrique en ce point tend vers celle obtenue

dans le cas du régime statique.

Nous considérons maintenant le cas d'une suite discrète de dipôles élémentaires séparés par une distance x (voir fig. 1.2). Chacun de ces dipôles d'indice n est parcouru par un échelon de courant identique à celui



F. 1.2

défini par la formule (1.1) mais retardé d'un temps $t = n\delta$.

Cela revient à considérer un échelon de courant qui se propage par bonds le long de l'axe formé par les dipôles élémentaires, à une vitesse apparente $v = x/\delta$.

Nous avons représenté sur les figures 1.3 et 1.4 la position dans l'espace des fronts d'onde aux instants $t = n\delta$ pour n variant de 1 à 3.

Dans le premier cas de figure, la vitesse v' de propagation de l'onde dans le milieu est supérieure à la vitesse de propagation v ou vitesse apparente de l'échelon de courant. Dans le second cas, c'est la vitesse v qui est supérieure à la vitesse v' . Dans ce dernier cas et seulement dans celui-là, le schéma met en évidence l'existence d'un cône enveloppant l'ensemble des sphères de propagation de chaque dipôle.

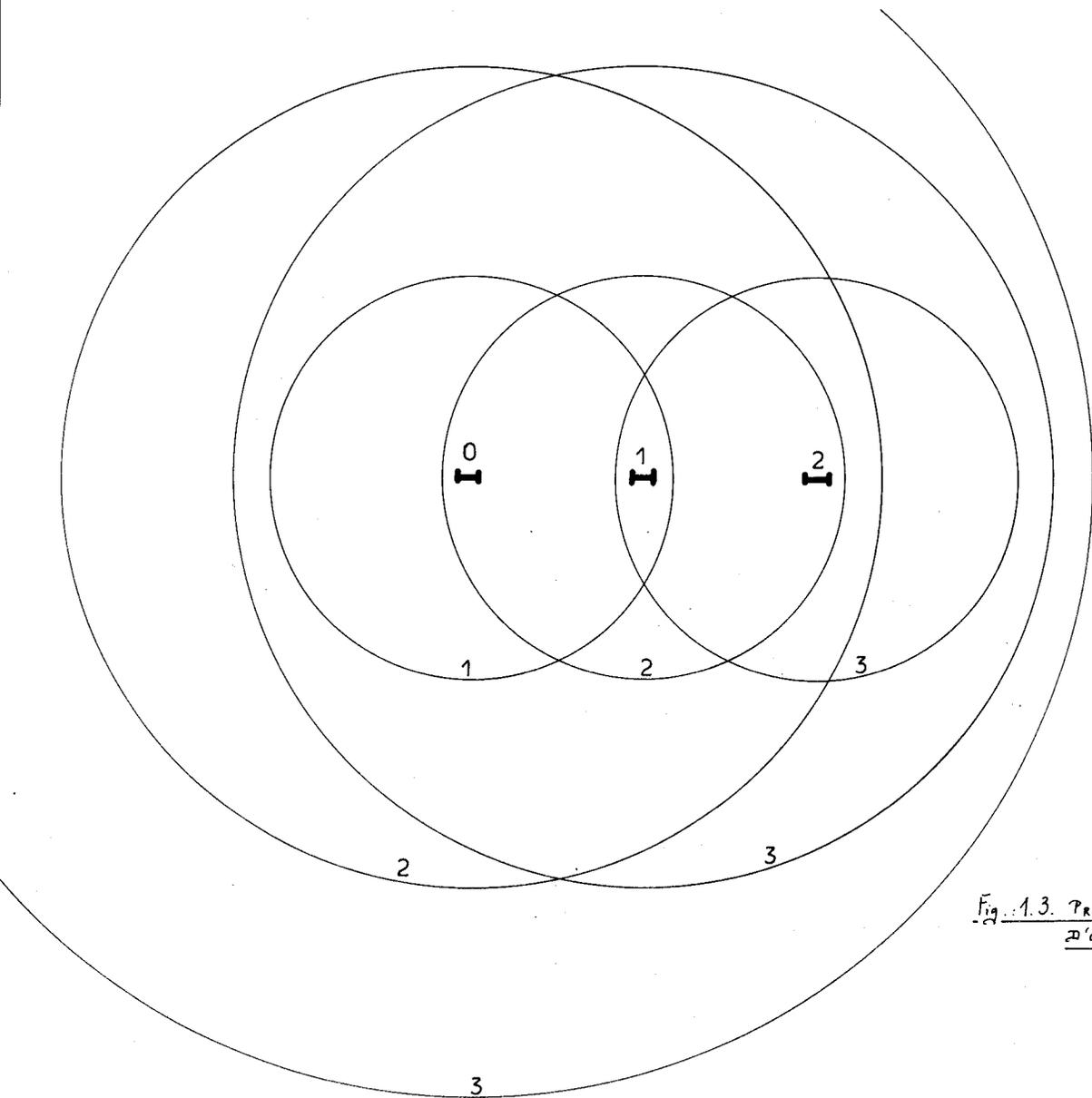


Fig. 1.3. PROPAGATION D'UN FRONT D'ONDE POUR $v' > v$

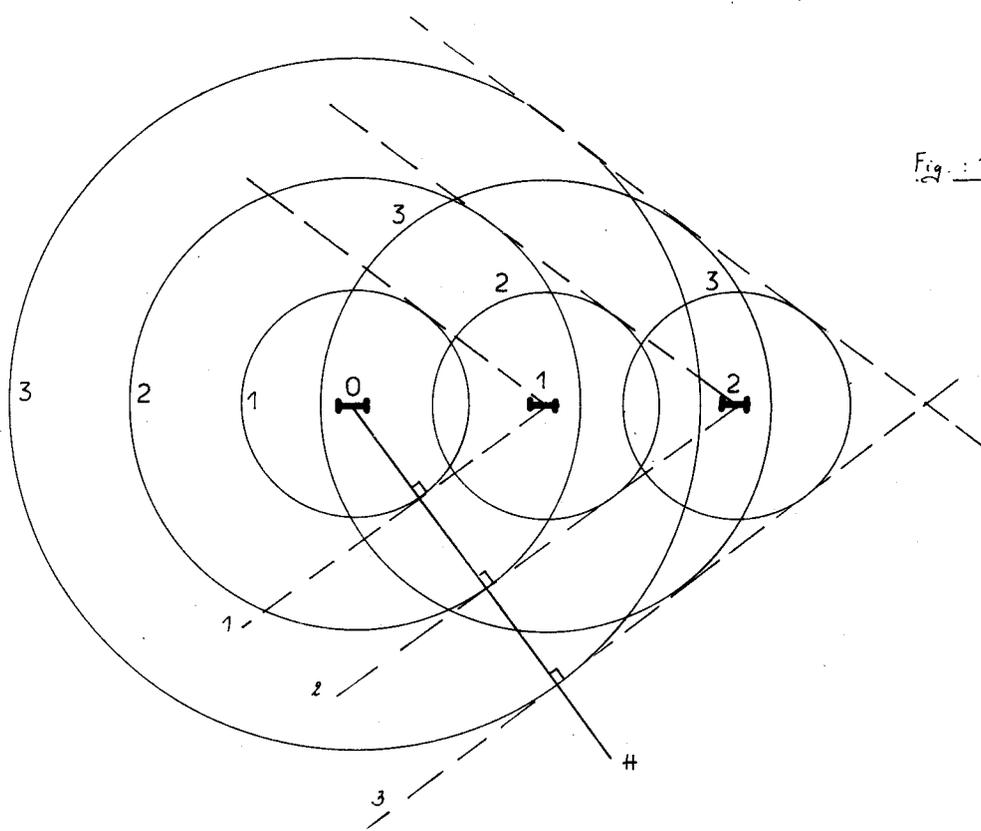


Fig. 1.4. PROPAGATION D'UN FRONT D'ONDE POUR $v' < v$

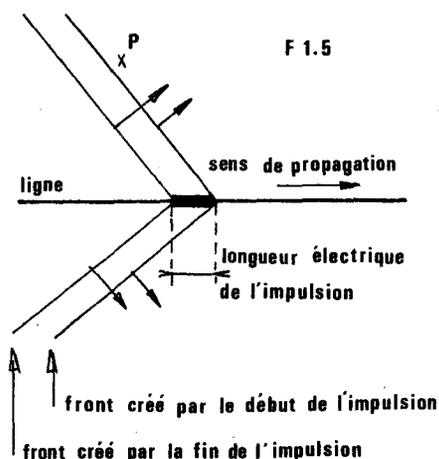


Toute l'énergie se trouve répartie dans le volume du cône et sa surface constitue le front de l'onde se propageant dans le milieu, dans la direction OH. Pour un point M de l'espace, le champ reste nul tant que le front n'y est pas parvenu. Lorsque le front atteint ce point, le champ est celui créé par un seul dipôle élémentaire de la ligne. Lorsque le front dépasse le point M, le champ en ce point résulte alors du rayonnement de plusieurs dipôles et son amplitude augmente. Elle continue à croître avec l'augmentation du nombre de dipôles rayonnants, la limite étant évidemment le régime statique, c'est-à-dire lorsque tous les dipôles sont parcourus par un courant continu.

On peut étendre ces propriétés au cas d'une ligne en considérant que la distance x qui sépare les dipôles élémentaires est très petite et que la ligne est parcourue par un front de courant qui se propage de façon continue le long de celle-ci. De la même façon, le phénomène du front d'onde n'apparaîtra que si la vitesse de propagation dans le milieu est plus faible que la vitesse de propagation du front de courant le long de la ligne.

Nous envisageons maintenant de remplacer le générateur d'échelon par un générateur d'impulsions. Les fronts montant et descendant de l'impulsion se propagent le long de la ligne et à un moment donné, il n'y a que l'élément compris entre les points atteints par ces deux fronts qui soit parcouru par un courant différent de zéro. Cette portion de ligne définit la longueur électrique de l'impulsion que nous supposerons faible par rapport à la longueur totale de la ligne.

Dans ce cas, l'impulsion peut être considérée comme la différence de deux échelons de courant décalés dans le temps. La propagation de l'impulsion sur la ligne donne donc naissance à deux cônes, selon le schéma de la figure 1.5. En un point P de l'espace, le champ commence à croître au passage



du premier front d'onde. Après le passage du deuxième front d'onde, la valeur du champ diminue progressivement pour atteindre une valeur rigoureusement nulle au bout d'un temps infini. Il se propage donc dans le milieu un champ électromagnétique de forme impulsive. Ce phénomène caractéristique fut signalé dès 1963 par GABILLARD [1].

En 1977, DELMOTTE [2] a entrepris une approche théorique et expérimentale de cette propriété du rayonnement d'un fil, appelée "Onde de choc électromagnétique", par analogie avec l'onde de choc engendrée par le vol d'un avion supersonique.

1.2 Utilisation de l'onde de choc électromagnétique dans les méthodes de détection

Nous supposons maintenant qu'au lieu de se trouver dans un milieu homogène, le fil se trouve au-dessus d'un sol où est située, à une profondeur h , une couche de nature différente (voir fig. 1.6).

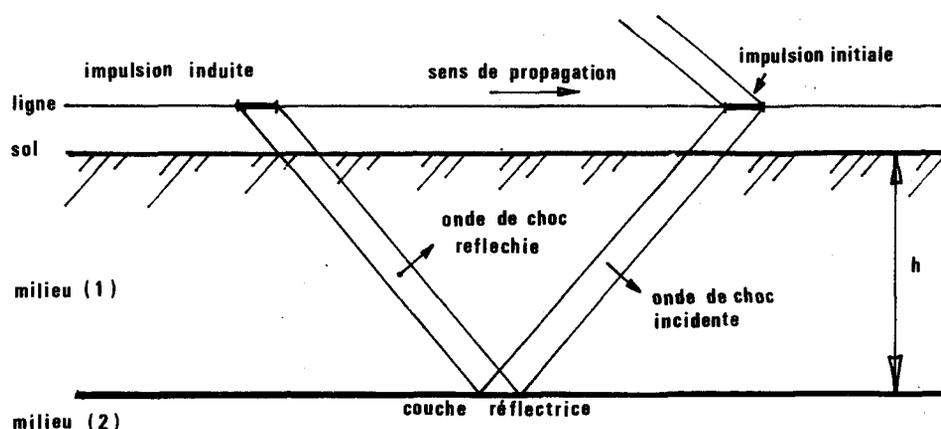


Fig. 1.6

Dans un premier temps, nous supposerons que la transmission à travers l'interface air-sol se fait sans atténuation. La vitesse de propagation dans le milieu (1) étant inférieure à la vitesse de propagation de l'impulsion de courant le long du fil, il apparaît une onde de choc incidente liée à l'impulsion initiale. Au niveau de l'interface avec le milieu (2), cette onde de choc électromagnétique est réfléchie et induit alors sur le fil une impulsion de courant qui se propage à la suite de l'impulsion initiale. L'écart de temps entre ces deux impulsions permet de détecter la présence de la couche réfléchissante et d'évaluer sa profondeur.

En 1963, des essais ont été effectués par l'équipe du professeur GABILLARD [1] au-dessus d'un terrain dont la structure a pu être connue par un sondage mécanique. Le dispositif expérimental se composait d'un générateur d'impulsions du type P 201 Férisol. La sortie était constituée d'un fil isolé tendu au-dessus du sol.

La figure 1.7 représente une coupe verticale du terrain d'essai et l'oscillogramme associé nous montre les impulsions recueillies sur le fil. A la suite de l'impulsion du générateur, on observe deux échos d'amplitudes beaucoup plus faibles, l'un de signe positif à 55 ns, l'autre négatif à 95 ns. Les signes opposés peuvent être attribués respectivement au passage d'une couche à ϵ_R élevé, à une couche à ϵ_R faible et inversement.

Plusieurs essais ont permis de s'assurer qu'il s'agissait bien d'échos provenant des couches géologiques et un calcul simple permettait d'établir une correspondance entre l'emplacement des échos par rapport à l'impulsion et la profondeur des couches du terrain.

En 1977, DELMOTTE [2] a repris ce type d'essai pour tenter de mesurer l'épaisseur d'un mur de briques. Il a notamment réalisé et utilisé un générateur d'impulsions brèves permettant d'obtenir une impulsion d'une largeur de 1,6 ns à mi-hauteur. La figure 1.8 montre l'oscillogramme obtenu pour un mur de 55 cm d'épaisseur. L'anomalie décelée dans le front de descente de l'impulsion initiale est due à l'onde réfléchie par la face arrière du mur. Cela apparaît d'autant mieux que cette anomalie est ensuite modifiée par la présence d'une plaque métallique derrière le mur. Pour une meilleure exploitation de ce procédé de mesure, nous avons fait de nouveaux essais en utilisant une impulsion de largeur plus étroite. Le premier objectif est d'arriver à séparer de façon plus nette l'impulsion initiale de l'écho provoqué par la face arrière du mur. Cela permet également de détecter des épaisseurs plus fines telles que les premières couches de roulement sur les routes et autoroutes.

1.3 Etude expérimentale de la détection par l'utilisation de l'onde de choc électromagnétique

Le dispositif de mesure utilisé est celui représenté sur la figure 1.9. Nous utilisons le générateur de DELMOTTE [2] qui, légèrement modifié, permet de délivrer des impulsions d'une largeur de 750 ps à mi-hauteur. Dans l'exemple schématisé sur la figure, le fil est tendu au-dessus d'une couche de sable fin par deux supports en bois. Le dispositif sera le même pour la mesure de l'épaisseur des murs. La longueur utile de fil est de 6 à 7 m ; cela permet d'éliminer l'effet de l'écho provoqué par l'extrémité de la ligne. La forme de l'impulsion est relevée par l'intermédiaire d'une sonde de courant reliée à un oscilloscope à échantillonnage.

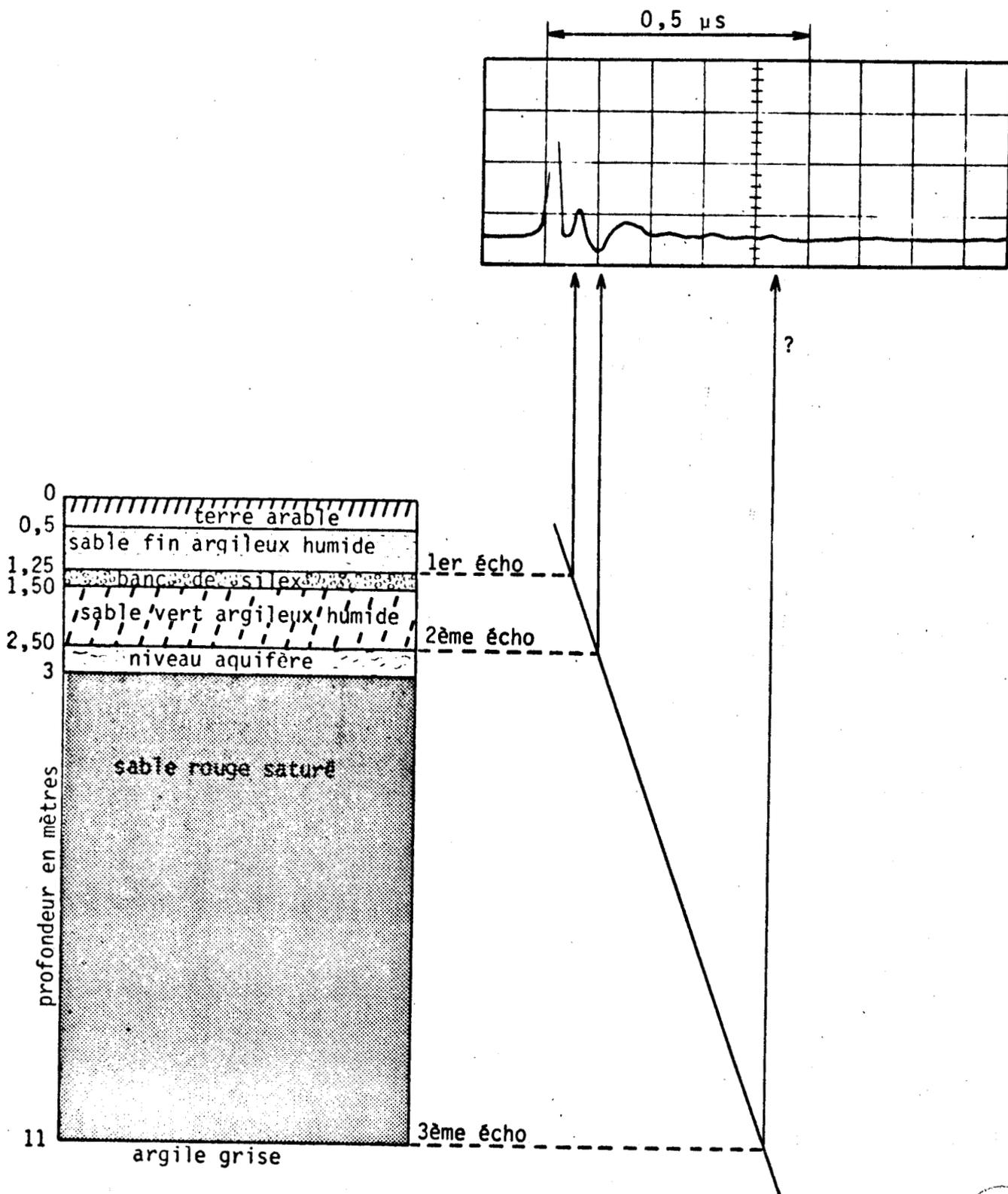


Fig. I.7. : Premier essai de sondage par onde de choc électromagnétique (1963)

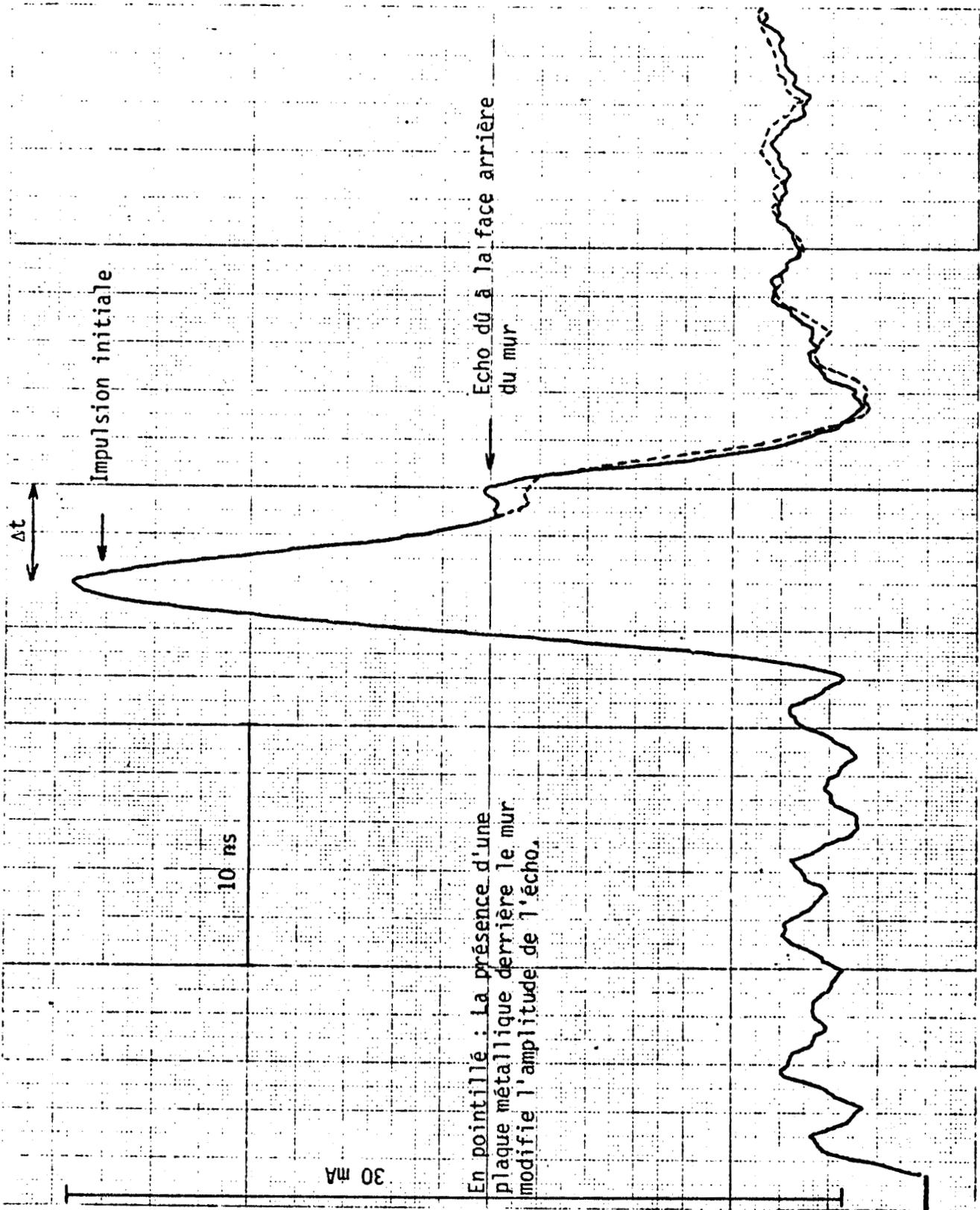


Fig. 1.8 : Propagation d'une impulsion de courant sur un fil placé à 7 mm d'un mur de 55 cm d'épaisseur

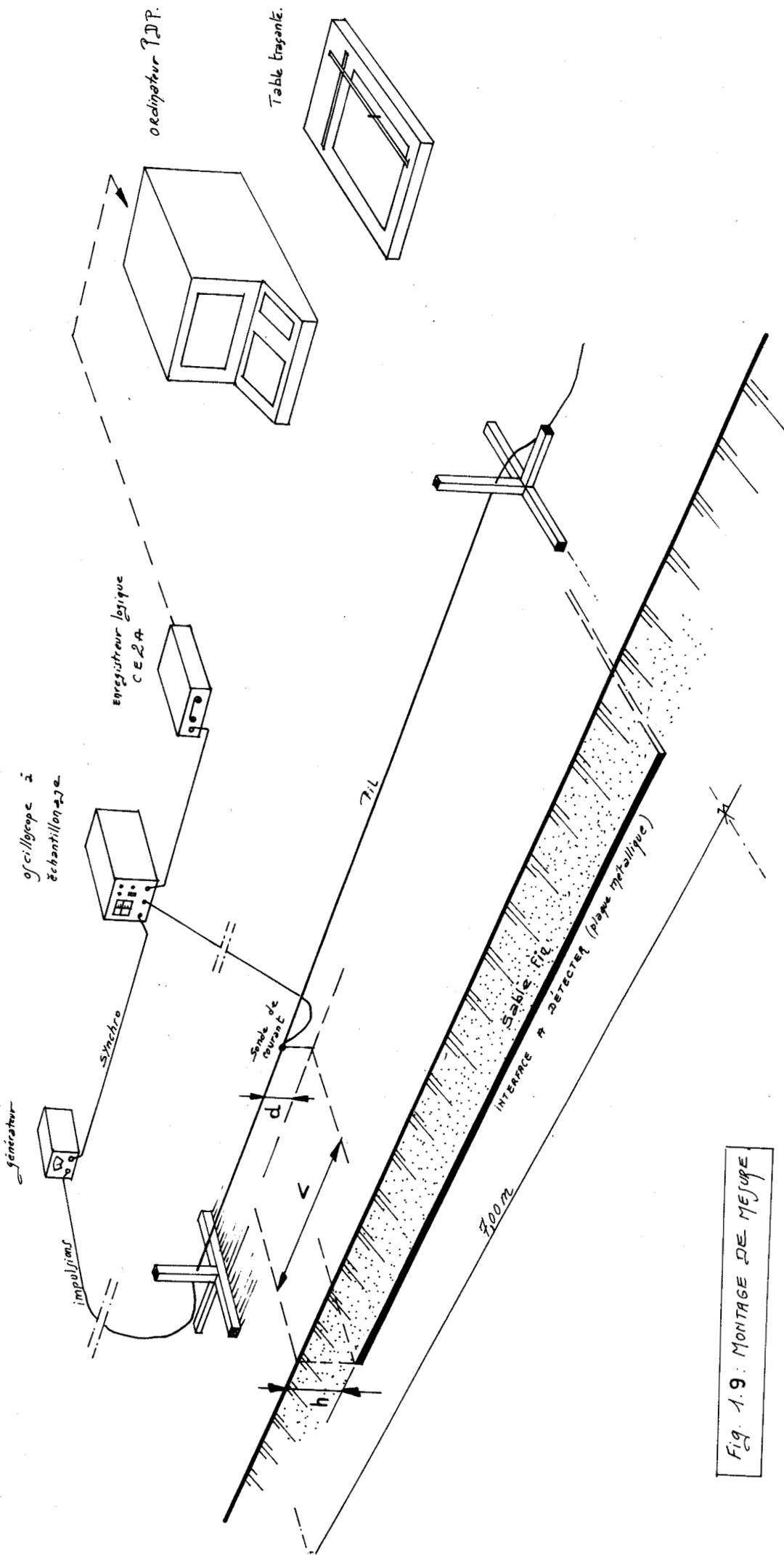


Fig. 1.9: MONTAGE DE MESURE.

Les courbes relevées sur l'oscilloscope peuvent être enregistrées sur le terrain, à l'aide de cassettes magnétiques, par l'intermédiaire d'une interface réalisé au laboratoire par MAYEUR [3]. Ces cassettes magnétiques sont relues en laboratoire puis traitées sur ordinateur (PDP11).

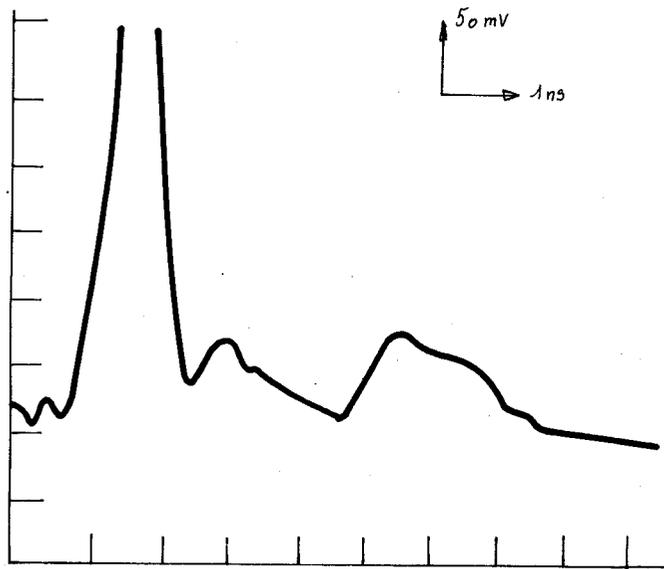
1.3.1 : Mise en évidence de la présence d'un écho

Les résultats que nous présentons dans ce premier paragraphe sont purement qualitatifs et ont pour but de montrer l'existence d'un écho qui apparaît derrière une impulsion incidente se propageant au-dessus d'une interface enterrée dans le sol à une profondeur h . Les oscillogrammes que nous présentons dans ce paragraphe, ainsi que tous les oscillogrammes relevés au-dessus d'une couche de sable, sont des oscillogrammes moyennés. En effet, pour ces manipulations, le dispositif de mesure était alimenté par un groupe électrogène et les oscillogrammes effectivement relevés sur le terrain présentent des perturbations dues à un mauvais anti-parasitage du moteur. Les courbes que nous présentons sont les moyennes de plusieurs oscillogrammes relevés à des instants différents.

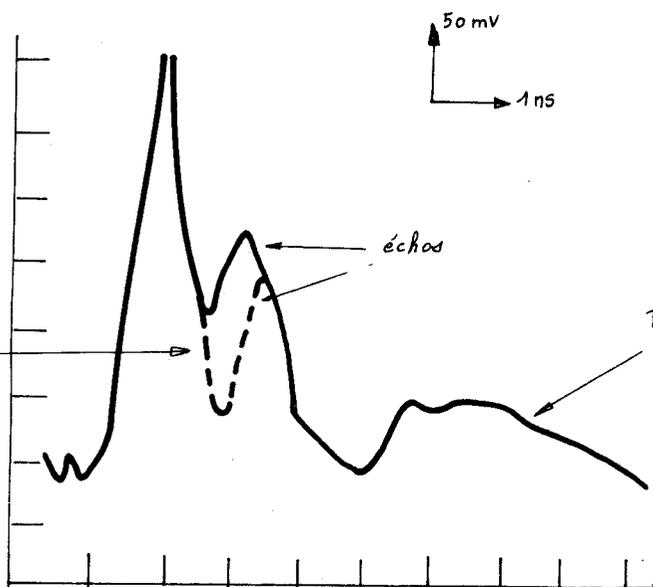
Les trois oscillogrammes portés sur la planche PL1.1 ont été relevés à l'aplomb d'une plaque métallique enterrée dans le sable dans les conditions suivantes :

- PL1.1.a : la plaque est placée au fond du trou destiné à la recevoir mais elle n'est pas recouverte de sable.
- PL1.1.b : la plaque est recouverte de sable sur toute sa surface par une couche de sable fin uniforme.
- PL1.1.c : la couche de sable est plus importante que dans le cas précédent (représentation en pointillés).

La comparaison de ces trois oscillogrammes montre bien que l'écho n'apparaît que si la plaque métallique est surmontée d'un milieu de nature différente de celui de l'air. Il est également possible de vérifier sur les deux derniers oscillogrammes que le retard entre l'impulsion incidente et l'écho est d'autant plus grand que la couche de sable est importante.



PL1.1a : Plaque sans sable



PL1.1c : Couche de sable
d'épaisseur $h_2 > h_1$

PL1.1b : Couche de sable
d'épaisseur h_1 .

PL1.1. = MISE EN EVIDENCE DE LA PRESENCE D'UN ECHO.



1.3.2. : Evolution de l'écho en fonction de la position de la sonde de réception

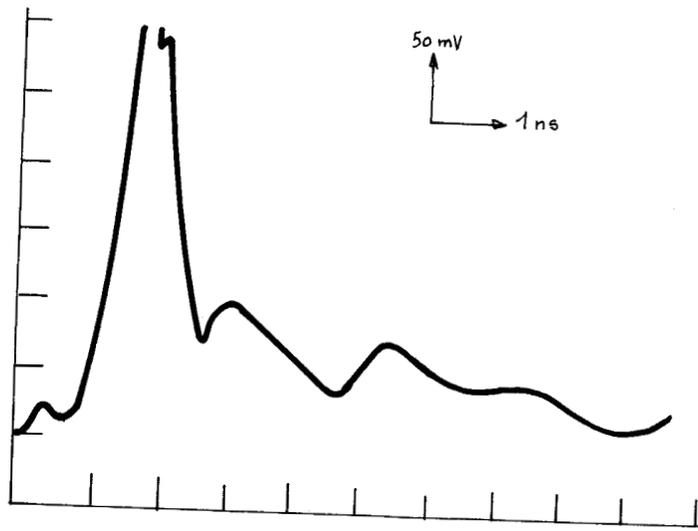
La plaque métallique est enterrée dans le sable à une profondeur de 0,15 m. Le fil est situé à l'aplomb de la plaque à une hauteur de 9 cm au-dessus du sol. La distance utilisée comme paramètre dans ce paragraphe est la distance L entre le début de la couche réfléchissante et la sonde de courant (voir fig. 1.9). Sur la planche PL1.2, nous avons porté les oscillogrammes moyens obtenus pour différentes valeurs de L comprises entre 0 et 3 m. Nous avons également porté en référence un oscillogramme obtenu pour une distance L de 2 m en l'absence de plaque métallique. Si la sonde est placée avant la plaque ou au voisinage immédiat de son extrémité ($L = 0$), il n'existe évidemment aucun phénomène d'écho. Il apparaît lorsque la distance L augmente et que l'impulsion a pu se propager sur une longueur suffisante au-dessus de la plaque.

On remarque de plus que l'amplitude relative de l'écho augmente avec la distance. Cependant pour une distance de 3 m, la dispersion sur l'impulsion incidente augmente sa largeur et l'écho se discerne moins bien.

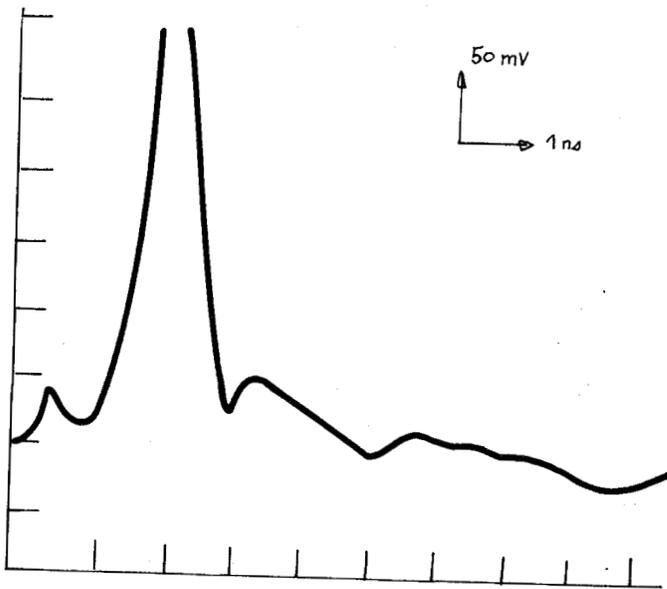
On peut également vérifier sur ces oscillogrammes que l'écart de temps de l'ordre de 2 ns entre l'impulsion incidente et l'écho n'est pas fonction de la position de la sonde de mesure le long du fil.

1.3.3. : Evolution de l'écho en fonction de la hauteur du fil au-dessus du sable

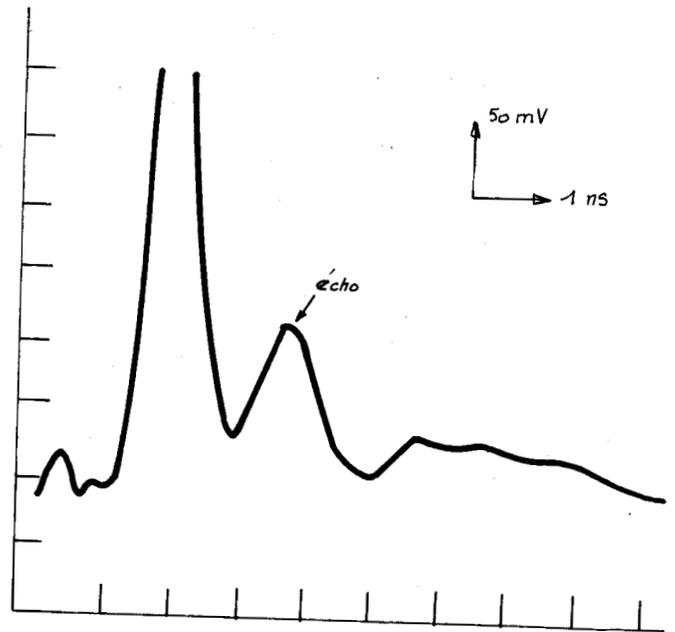
Pour une plaque située à la même profondeur que précédemment et pour une distance L de 2 m, nous avons porté sur la planche PL1.3 les oscillogrammes moyens obtenus pour plusieurs hauteurs d du fil au-dessus du sol. Alors que l'amplitude de l'écho reste pratiquement constante, l'amplitude de l'onde incidente devient d'autant plus faible qu'on se rapproche du sol. Comme précédemment la largeur de l'impulsion incidente augmente quand la hauteur d diminue et l'écho se discerne moins bien. Nous vérifions également que le retard de l'écho par rapport à l'onde incidente reste constant et légèrement inférieur à 2 ns.



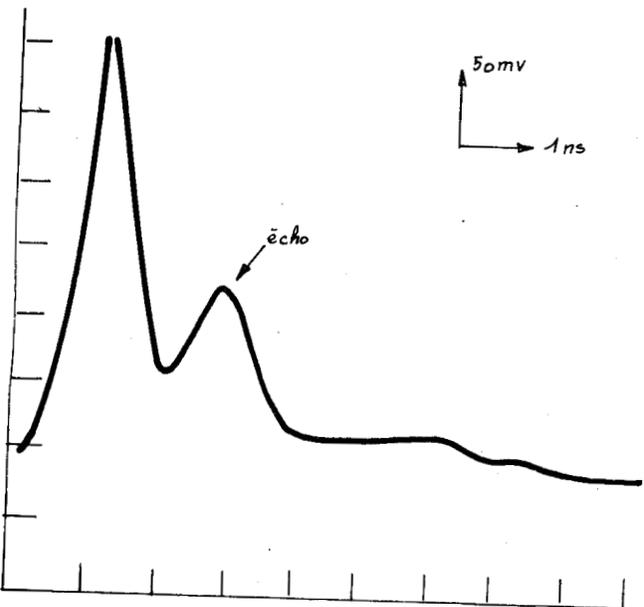
PL 1.2a : oscillogramme relevé sans plaque métallique ($L = 2\text{ m}$).



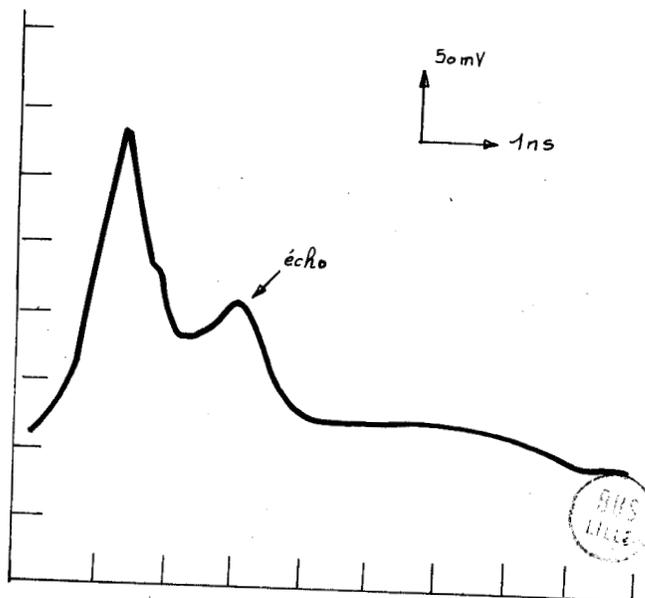
PL 1.2b : $L = 0\text{ m}$



PL 1.2c : $L = 1\text{ m}$

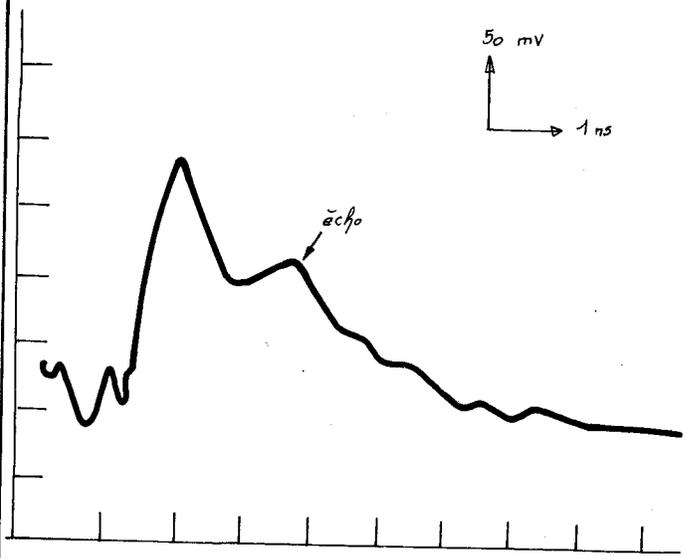


PL 1.2d : $L = 2\text{ m}$

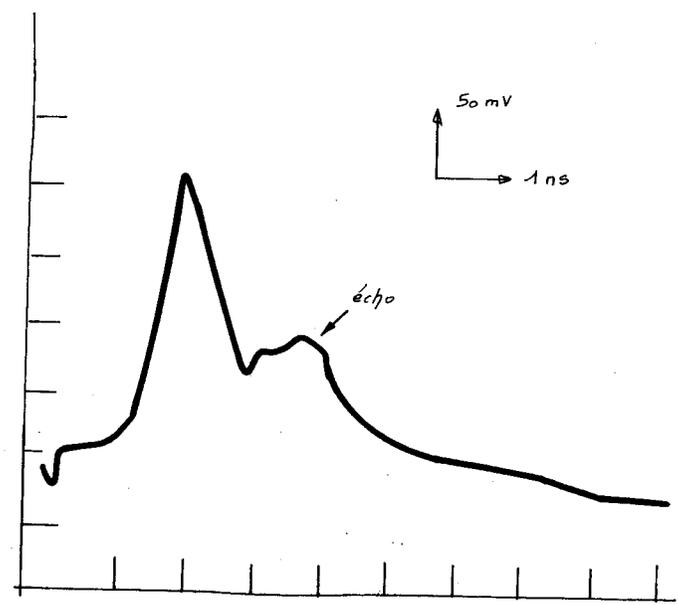


PL 1.2e : $L = 3\text{ m}$

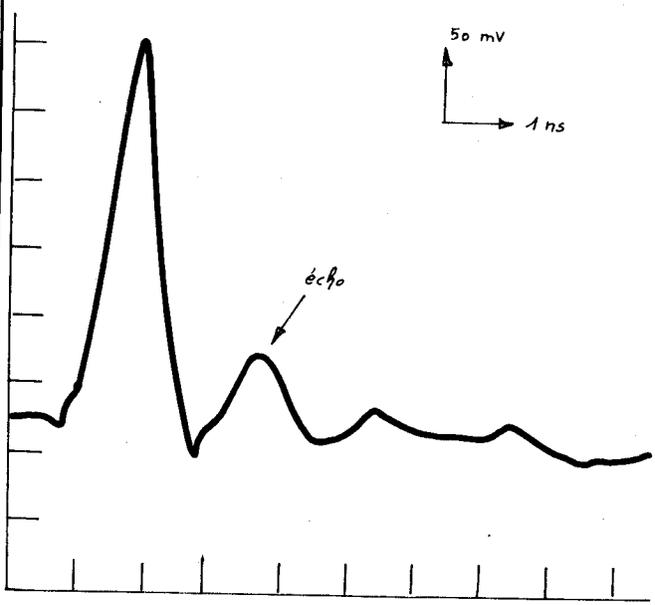
PL 1.2 : EVOLUTION DE L'ECHO EN FONCTION DE LA DISTANCE AU GENERATEUR



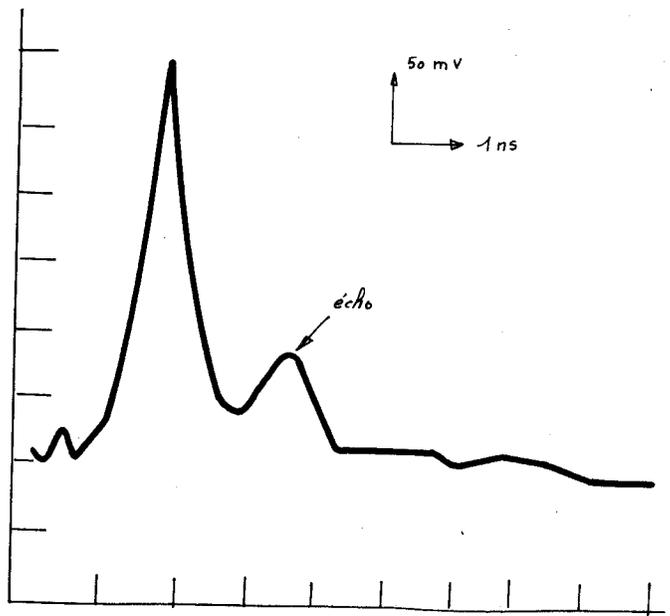
PL 1.3a: $d = 0,04 \text{ m}$



PL 1.3b: $d = 0,06 \text{ m}$



PL 1.3c: $d = 0,1 \text{ m}$



PL 1.3d: $d = 0,15 \text{ m}$



PL 1.3: EVOLUTION DE L'ECHO EN FONCTION DE LA HAUTEUR DU FIL AU DESSUS DU SABLE

Au vu de ces résultats, il apparaît que la hauteur d qui semble donner les meilleurs résultats se trouve aux environs de 0,1 m.

1.3.4. : Evolution de l'écho en fonction de la profondeur de la couche réfléchissante

Sur la planche PL1.4, nous avons porté les oscillogrammes obtenus pour plusieurs profondeurs de la couche réfléchissante. La hauteur d et la distance L restent constantes et égales respectivement à 9 cm et 4 m.

Pour une plaque enterrée à 50 cm de profondeur, le phénomène d'écho n'apparaît pas clairement. Nous pouvons supposer que dans ce cas, la distance à franchir par l'onde électromagnétique est telle qu'elle est trop atténuée pour générer un écho non noyé dans le bruit.

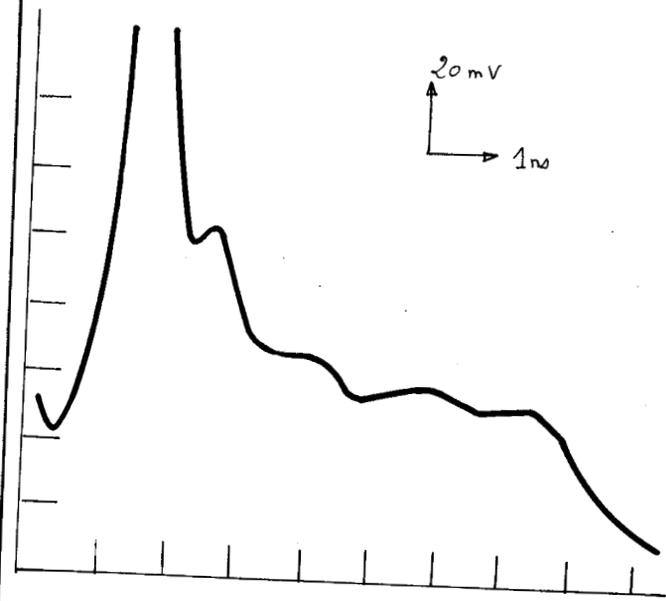
Le phénomène d'écho commence à apparaître pour une plaque enterrée à 30 cm du sol, le retard entre les deux impulsions étant de l'ordre de grandeur de 4 ns. Ce retard correspond bien à un retard double de celui mesuré au paragraphe 1.3.2 pour une profondeur de 15 cm.

Sur les trois dernières figures de cette planche, on peut vérifier que le retard de l'écho sur l'impulsion incidente est proportionnel à la profondeur de l'interface.

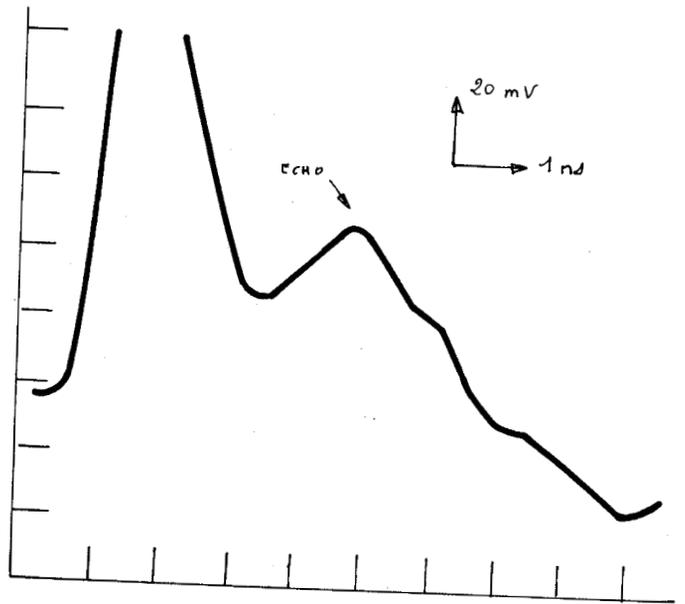
1.3.5. : Evolution de l'écho en fonction du coefficient de réflexion sur l'interface

Dans ce paragraphe nous présentons des oscillogrammes obtenus pour un fil tendu le long d'un mur de briques. Pour cet exemple, nous avons pu alimenter les appareils de mesure directement sur le secteur et nous affranchir ainsi des parasites liés à l'utilisation du groupe électrogène. Les oscillogrammes que nous présentons sont obtenus directement sur la table traçante reliée à l'ordinateur PDP11.

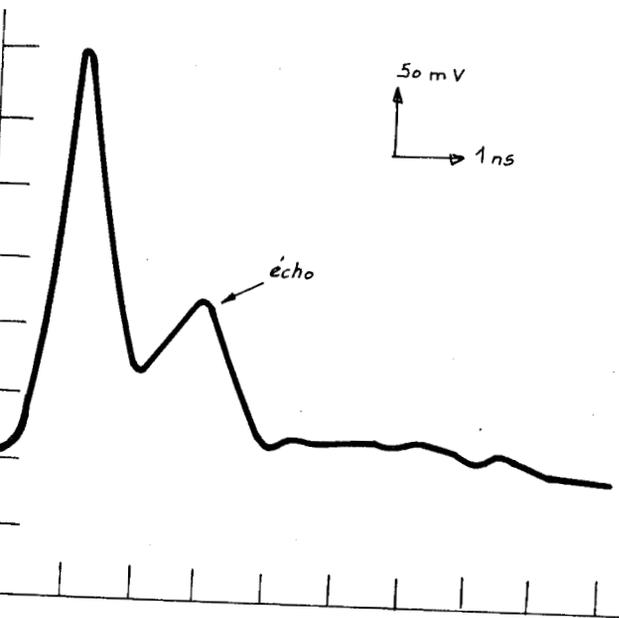
Le mur devant lequel est placé le fil a une épaisseur de 30 cm ; le fil est placé à une distance de 5 cm. Les deux premiers oscillogrammes de la planche PL1.5. ont été relevés lorsque la sonde de courant est placée à une distance de 2,5 m du début de la ligne. La première courbe fait apparaître un écho retardé de 5 ns par rapport à l'onde incidente.



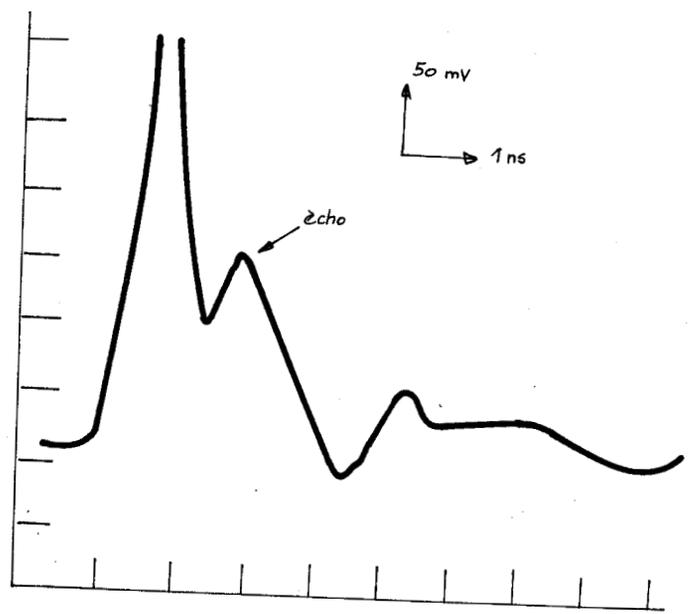
PL 1.4a : $h = 0,5 m$



PL 1.4b : $h = 0,3 m$



PL 1.4c : $h = 0,15 m$

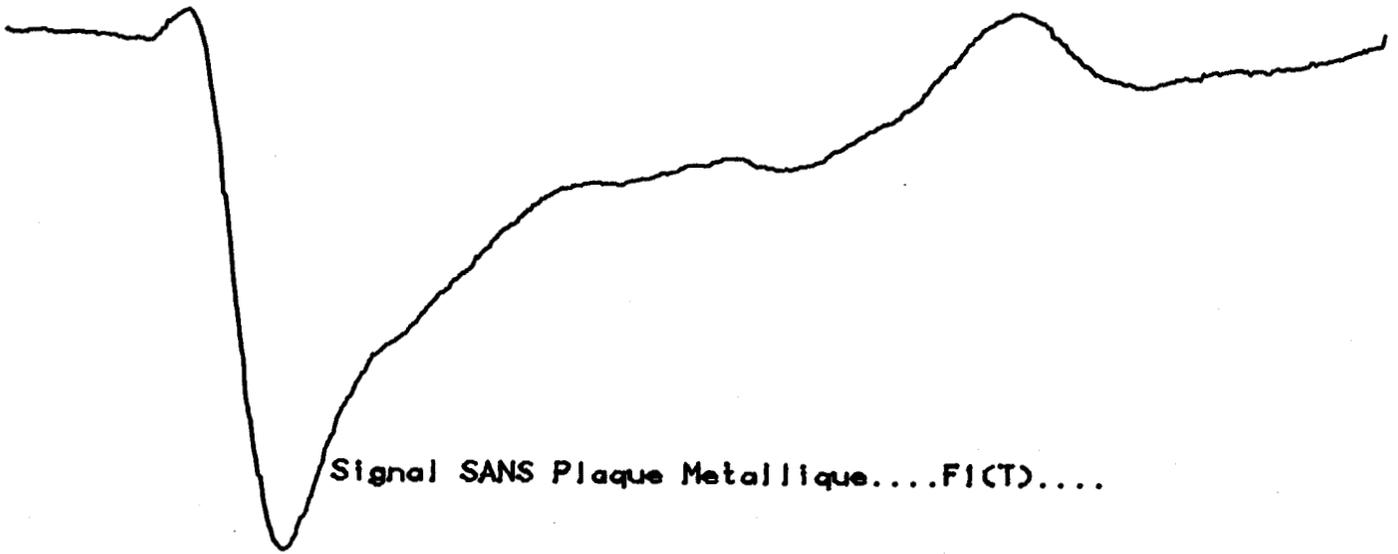


PL 1.4d : $h = 0,075 m$

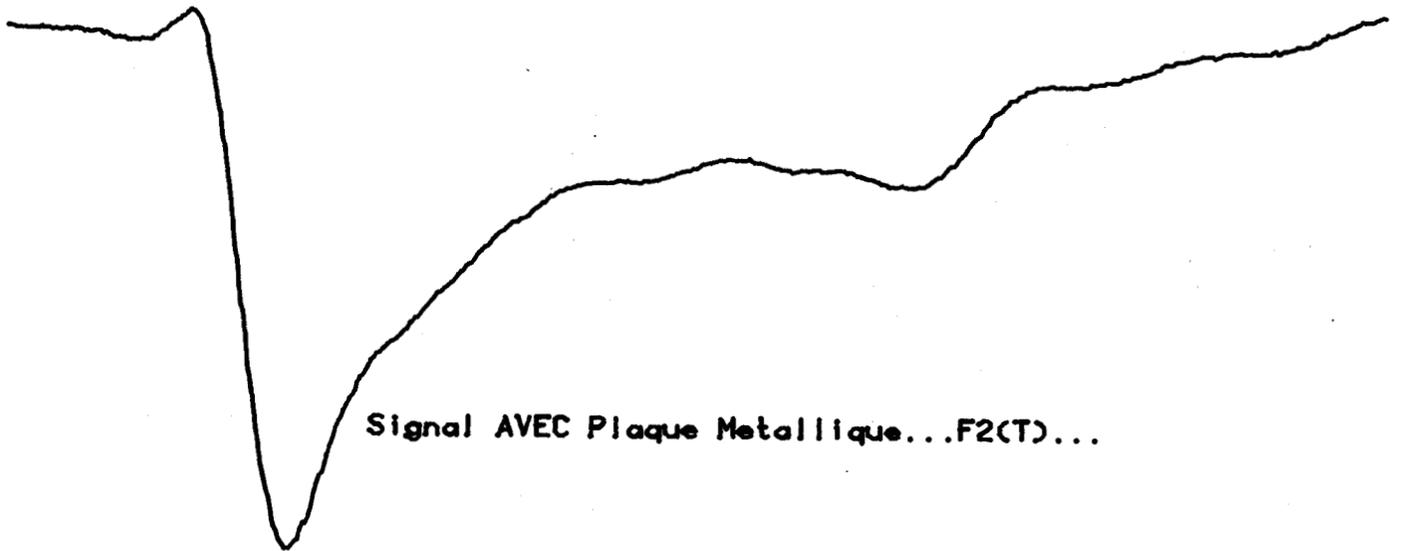


PL 1.4 : EVOLUTION DE L'ECHO EN FONCTION DE LA PROFONDEUR DE LA COUCHE REFLECTRICE.

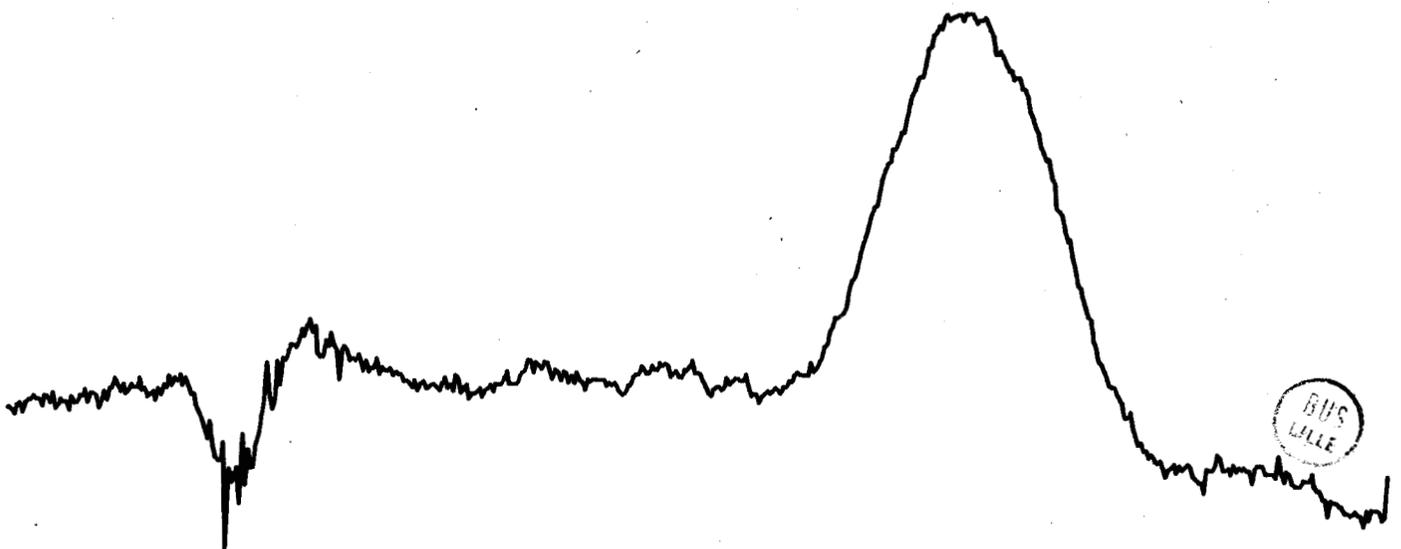
PL 1.5 EVOLUTION DE L'ECHO EN FONCTION DU COEFFICIENT DE REFLEXION
SUR L'INTERFACE



: : 100mV: 1nS: : -- ENREGISTREMENT 0 1 EN A --



: : 100mV: 1nS: : -- ENREGISTREMENT 0 2 EN B --



Pour tracer le second oscillogramme, nous avons placé une plaque métallique sur la face arrière du mur, dans la zone comprise entre le générateur et la sonde de courant. Il apparaît comme précédemment un écho retardé de 5 ns mais de signe inverse à celui relevé sans la présence de la plaque. C'est un résultat classique que l'on peut rapprocher du phénomène de réflexion d'une impulsion à l'extrémité d'un câble coaxial à sortie ouverte ou court-circuitée.

Sur le troisième oscillogramme de la planche PL1.5 nous avons porté le résultat obtenu sur la table traçante en faisant effectuer au calculateur la différence point par point des signaux précédents. Ce calcul simple montre surtout l'intérêt du traitement en différé de ces courbes relevées sur le terrain.

C O N C L U S I O N

oooooooooooooooooooooooooooo

Les quelques oscillogrammes que nous avons présenté démontrent la faisabilité de la méthode de détection électromagnétique par l'utilisation du phénomène d'écho.

Les différentes courbes enregistrées au cours de l'ensablement progressif d'une plaque métallique ont bien montré que le phénomène d'écho qui apparaît derrière l'impulsion incidente ne peut exister que si le fil et l'interface à détecter sont séparés par un milieu de nature différente de celle de l'air.

D'autres mesures ont permis de vérifier que le retard entre l'impulsion incidente et l'écho n'est fonction ni de la hauteur du fil au-dessus du sol, ni de la distance entre la sonde de mesure et le début de la ligne. Tous les échos réfléchis par l'interface se présentant en phase, l'amplitude de l'écho relevé sur les oscillogrammes augmente quand on s'éloigne du générateur. Cependant, en raison du phénomène de dispersion observé sur l'onde incidente, il apparaît qu'il existe une valeur optimale de la hauteur, située dans notre cas aux environs de 10 cm, et qui permet de discerner au mieux l'écho de l'impulsion incidente.

Pour les mêmes raisons que précédemment, la valeur de la distance entre la sonde de mesure et le début de la ligne doit se situer, dans notre exemple, aux environs de 2 m pour obtenir les meilleures conditions de mesure.

Enfin, nous avons vérifié que le retard entre l'écho et l'impulsion incidente est directement proportionnel à l'épaisseur de la couche recouvrant l'interface à détecter.

Il faut remarquer, à propos des oscillogrammes qu'il est parfois difficile de distinguer l'écho provoqué par l'interface des autres échos parasites provoqués, par exemple, par de mauvaises connexions dans le montage de mesure.

On aura donc intérêt, dans ce genre de montage, à apporter le plus grand soin dans la réalisation du dispositif d'émission-réception de manière à éviter les réflexions parasites au niveau des connecteurs.

Dans ce premier chapitre, les traitements numériques effectués ont été limités à de simples différences de signaux. Le procédé d'acquisition de données permettra, par la suite, des traitements plus élaborés qui pourraient faciliter la reconnaissance de l'écho.

On peut, en effet, envisager à partir de l'impulsion émise au niveau du générateur, de calculer la déformation théorique obtenue après propagation sur une longueur L au-dessus d'un demi-milieu homogène. La différence entre cette courbe théorique et la courbe relevée pour une impulsion qui s'est propagée sur la même longueur au-dessus d'un milieu à deux couches, fera apparaître l'effet d'écho provoqué par les réflexions sur l'interface.

L'étude de la déformation d'une impulsion électrique se propageant le long d'un fil placé au-dessus d'un demi-milieu homogène est abordée dans le chapitre suivant.

CHAPITRE II : CONSTANTES DE PROPAGATION DISCRETES POUR UNE ONDE SINUSOIDALE

L'étude théorique de la propagation d'une impulsion de courant peut être abordée par l'utilisation de la transformée de FOURIER. Il est donc utile, dans un premier temps, de faire l'étude, en fonction de la fréquence, de la propagation d'une onde sinusoïdale. C'est cette première étape qui fait l'objet de ce chapitre.

Nous supposons donc que le courant qui se propage le long du fil peut se mettre sous la forme suivante :

$$I = \sum_m \left\{ I_0 \cdot \exp(\Gamma_m x) \cdot \exp(-i\omega t) \right\}$$

L'expression Γ_m est la constante de propagation que nous nous proposons de calculer. En 1972, WAIT^[4] a établi l'expression de l'équation modale qui régit la valeur de la constante de propagation. En 1973, OLSEN et CHANG^[5] ont montré qu'en plus du mode "ligne de transmission" classique, il existait pour cette structure un autre mode dit "mode rapide". Nous adopterons la même démarche que OLSEN et CHANG pour effectuer le calcul des constantes de propagation qui sont solutions de l'équation modale. Au cours de cette étude, nous verrons que la sommation sur l'indice m peut être continue et correspondre à des modes dits rayonnés, par opposition aux modes guidés, caractérisés par des valeurs discrètes de m .

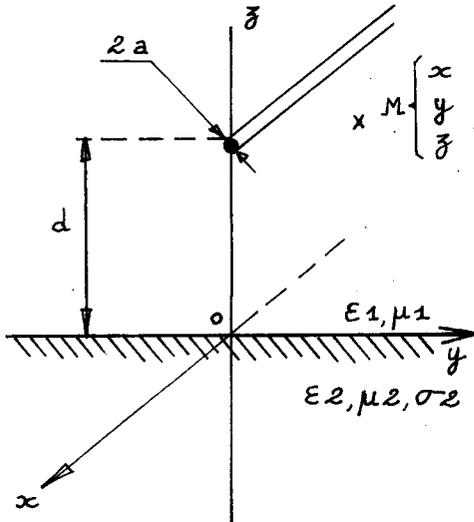
Dans ce chapitre nous ne nous intéressons qu'aux constantes de propagation discrètes. Quelques hypothèses simplificatrices nous permettent dans un premier temps d'obtenir une expression analytique approchée de l'équation modale en mettant en évidence l'existence de deux solutions distinctes. Nous généralisons ensuite ces résultats en traitant le problème numériquement. Pour illustrer ces calculs, nous étudions les variations des constantes de propagation en fonction des paramètres géométriques et électriques de la configuration formée par le fil et le sol.

Enfin, nous calculons pour chaque constante de propagation, la répartition de la densité d'énergie qui se propage le long de l'axe du fil.

2.1 Position du problème

Le fil conducteur de rayon a est placé parallèlement à l'interface air-sol à une hauteur d (voir fig. 2.1). L'air et le sol sont caractérisés respectivement par leurs constantes électriques ϵ_1, μ_1 et $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. Le fil de longueur infinie est supposé parcouru par un ou plusieurs courants longitudinaux dont l'expression générale peut se mettre sous la forme :

F 2.1



$$I = I_0 \cdot \exp(\Gamma_m x - i\omega t) \quad (2.1)$$

où Γ_m est la constante de propagation d'indice m . Il est intéressant d'introduire une constante de propagation réduite α_m , définie par rapport à la constante de propagation dans

l'air par : $\alpha_m = \Gamma_m / i k_1$, avec $k_1^2 = \epsilon_1 \mu_1 \omega^2$. Pour des raisons de facilité de notation, α_m sera notée par la suite α .

2.2. Equation modale

En tout point M situé dans l'air, le champ électrique longitudinal créé par un fil infiniment fin s'écrit [5,6]:

$$E_{1x} = k_1^2 \cdot \bar{r}^2 \cdot \Pi_1 \quad (2.2)$$

où $\bar{r}^2 = 1 - \alpha^2$; Π_1 est la composante selon x du potentiel vecteur de HERTZ qui se calcule en exprimant les conditions aux limites au niveau de l'interface air-sol. On peut montrer [5,6] que Π_1 est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & - \frac{Z_0 I_0}{4 k_1} \cdot \exp(i k_1 \alpha x) \left\{ H_0^{(1)} \left(k_1 \bar{r} \left[(z-d)^2 + y^2 \right]^{1/2} - \right. \right. \\ & H_0^{(4)} \left(k_1 \bar{r} \left[(z+d)^2 + y^2 \right]^{1/2} + \frac{2}{i \pi \bar{r}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\alpha^2}{\mu_2 + n^2 \mu_1} \right] \cdot \right. \\ & \left. \left. \exp[-(z+d) k_1 \mu_1] \cdot \exp(-i \lambda k_1 y) \cdot d \lambda \right\} \quad (2.3) \end{aligned}$$

I_0 est l'amplitude du courant au point choisi comme origine.

$H_0^{(1)}(x)$ est la fonction de HANKEL de première espèce et d'ordre zéro.

Pour assurer la nullité des champs électriques rayonnés à l'infini, $\bar{\gamma}$ est choisie telle que : $0 \leq \arg \bar{\gamma} < \pi$.

Les expressions μ_1 et μ_2 sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\lambda^2 - \bar{\gamma}^2)^{1/2} \\ \mu_2 &= (\lambda^2 + \alpha^2 - n^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

où $\operatorname{Re} \{ \mu_1 \}$, $\operatorname{Re} \{ \mu_2 \} \geq 0$ pour assurer la convergence de l'intégrale dans le plan complexe .

n est le coefficient de réflexion du milieu 2, ou rapport des constantes de propagation, donné par :

$$n = \left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \left(1 + i \frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2} \right) \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

D'une manière générale, la constante de propagation d'un milieu homogène d'indice q est donnée par :

$$k_q^2 = \omega^2 \mu_q \epsilon_q + i \omega \mu_q \sigma_q$$

Pour lever l'indétermination sur le signe de k_1 , constante de propagation dans le vide, nous supposons que la conductivité du milieu 1 possède une valeur finie aussi petite que l'on veut. La constante k_1 a donc une valeur réelle positive avec une partie imaginaire positive et très petite. Le signe de la constante de propagation du milieu 2 étant choisi de la même façon, la phase du rapport des constantes de propagation k_2/k_1 est définie par :

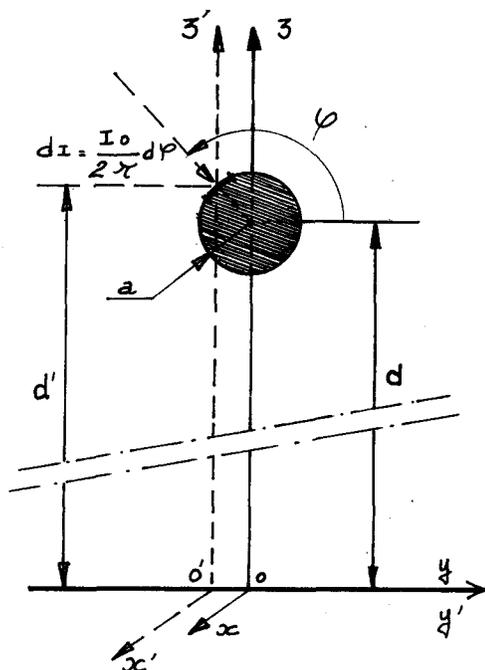
$$0 < \arg n < \pi/4$$

Le sol et l'air sont supposés avoir une perméabilité magnétique égale à celle du vide, c'est-à-dire : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. De plus, si le milieu 1 est l'air, on a également $\epsilon_1 = \epsilon_0$.

Z_0 est l'impédance du vide, soit $Z_0 = (\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2}$.

Dans l'expression (2.3), les deux premiers termes correspondent respectivement aux potentiels de HERTZ créés par le fil et son image électrique par rapport à l'interface air-sol. Le terme intégral complémentaire caractérise l'influence de la conductivité finie du milieu 2.

Dans le cas d'un fil de rayon fini a (voir fig. 2.2), le premier problème qui se pose est le calcul de la valeur du courant I_0 à introduire



F 2.2

dans la formule du potentiel exprimée en (2.3). En effet, en un point M de l'espace proche du fil, le champ électrique sera fonction de la répartition du courant sur la surface de la section du fil. Le premier paramètre qui va influencer cette fonction de répartition est la valeur de la conductivité du matériau, dans la mesure où elle modifie la profondeur de pénétration dans le fil. Nous supposerons que le fil est parfaitement conducteur et donc que le courant est réparti uniquement sur sa surface. Nous supposerons d'autre part que la hauteur d est suffisamment grande par rapport au rayon du fil a , pour qu'on puisse considérer que le courant est réparti uniformément à la surface du fil. On néglige ainsi l'effet

de proximité du sol sur la répartition du courant dans un plan transversal. Le champ électrique induit en un point M est donc la somme des champs électriques élémentaires créés par chacun des éléments de courant $(I_0 \cdot d\phi / 2\pi)$ (voir fig. 2.2).

La condition aux limites au niveau du fil s'exprime par l'annulation de la composante E_x du champ électrique à sa surface. Cela nous mènera à une équation où ne subsiste qu'une seule inconnue, la constante de propagation réduite α . Toujours dans le cas du fil de rayon fini a , le deuxième problème qui se pose est le choix du point d'application de cette condition. La fonction de répartition de courant que nous avons choisie, étant une fonction approchée, il apparaît a priori que les résultats obtenus seront différents selon le point choisi le long de la circonférence du fil.

Pour résoudre ce problème, OLSEN et CHANG^[5] ont proposé une solution approchée qui consiste à assurer la nullité de la valeur moyenne du champ électrique le long du périmètre de la section. Nous donnerons a posteriori les écarts entre les résultats obtenus par cette méthode et les résultats obtenus par l'annulation du champ électrique en plusieurs points différents.

Le potentiel de HERTZ $d\Pi_1$, créé en M par un élément de courant dI s'écrit donc :

$$d\Pi_1 = - \frac{Z_0 I_0}{4 k_1 \cdot 2\pi} \cdot \exp(i k_1 \alpha x') \cdot \left\{ H_0^{(4)} [k_1 \bar{r} [(z' - d')^2 + y'^2]^{1/2}] - H_0^{(4)} [k_1 \bar{r} [(z' + d')^2 + y'^2]^{1/2}] + \frac{2}{i \pi \bar{r}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\alpha^2}{\mu_2 + n^2 \mu_1} \right] \cdot \exp(- (z' + d') k_1 \mu_1) \cdot \exp(-i \lambda k_1 y') \cdot d\lambda \right\} \cdot d\varphi \quad (2.6)$$

où x' , y' et z' sont les coordonnées du point M dans le nouveau repère (x', y', z') passant par l'élément de courant dI (voir fig. 2.2).

Dans le système de coordonnées initiales x , y et z , le potentiel élémentaire s'exprime par :

$$d\Pi_1 = - \frac{Z_0 I_0}{4 k_1 \cdot 2\pi} \cdot \exp(i k_1 \alpha x) \cdot \left\{ H_0^{(4)} [k_1 \bar{r} [(z - d - a \sin \varphi)^2 + (y - a \cos \varphi)^2]^{1/2}] - H_0^{(4)} [k_1 \bar{r} [(z + d + a \sin \varphi)^2 + (y - a \cos \varphi)^2]^{1/2}] + \frac{2}{i \pi \bar{r}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\alpha^2}{\mu_2 + n^2 \mu_1} \right] \cdot \exp[- (z + d + a \sin \varphi) k_1 \mu_1] \cdot \exp(-i \lambda k_1 (y - a \cos \varphi)) \cdot d\lambda \right\} \cdot d\varphi \quad (2.7)$$

Le potentiel π_1 sera donné par :

$$\pi_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} \pi_1(\varphi) d\varphi \quad (2.8)$$

L'application de la représentation intégrale de la fonction de HANKEL au formalisme utilisé dans ce chapitre conduit à la relation suivante [5]:

$$H_0^{(1)}(\bar{\gamma} \sqrt{C^2 + B^2}) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-C\mu_1) \cdot \exp(-iB\lambda) \cdot \frac{d\lambda}{\mu_1} \quad (2.9)$$

où $\bar{\gamma}$ et μ_1 sont des variables complexes déjà utilisées et définies par :

$$\bar{\gamma} = (1 - \alpha)^{1/2}, \quad \text{Im} \{ \bar{\gamma} \} > 0$$

$$\mu_1 = (\lambda^2 - \bar{\gamma}^2)^{1/2}, \quad \text{Re} \{ \mu_1 \} \geq 0$$

Les termes C et B sont des nombres réels, C est choisi positif pour assurer la convergence de l'intégrale ; le signe de B peut être choisi positif ou négatif.

L'expression du potentiel devient :

$$\begin{aligned} \pi_1 = & - \frac{Z_0 I_0}{4 k_1 \cdot 2\pi} \cdot \exp(i k_1 \alpha x) \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\pm(z-d - \right. \\ & a \sin\varphi) k_1 \mu_1] \cdot \exp(-i \lambda k_1 (y - a \cos\varphi)) \cdot d\lambda - \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(z+d + \\ & a \sin\varphi) k_1 \mu_1] \cdot \exp(-i \lambda k_1 (y - a \cos\varphi)) \cdot d\lambda + \frac{2}{i\pi \bar{\gamma}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} - \right. \\ & \left. \frac{\alpha^2}{\mu_2 + \eta^2 \mu_1} \right] \cdot \exp[-(z+d + a \sin\varphi) k_1 \mu_1] \cdot \exp(-i \lambda k_1 (y - \\ & a \cos\varphi)) \cdot d\lambda \left. \right\} \cdot d\varphi \quad (2.10) \end{aligned}$$

L'indétermination sur le signe de la fonction contenue dans la première intégrale est due au choix du signe du nombre C décrit précédemment. On prendra le signe + si $z > (d + a \sin \varphi)$, le signe - si $z < (d + a \sin \varphi)$.

Il apparaît dans cette expression un terme π_{1c} commun aux trois fonctions qui la constituent ; il s'écrit :

$$\pi_{1c} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(\pm a \sin \varphi k_1 \mu_1) \cdot \exp(i \lambda k_1 a \cos \varphi) \cdot d\varphi \quad (2.11)$$

On peut montrer [7] que la formule (2.11) est la représentation intégrale de la fonction de BESSEL du premier ordre J_0 et d'argument $A \bar{r}$ avec $A = k_1 \cdot a$. Nous en déduisons la valeur du potentiel π_1 :

$$\pi_1 = - \frac{Z_0 I}{4 k_1} \cdot \exp(i k_1 \alpha x) \cdot J_0(A \bar{r}) \cdot \left\{ H_0^{(1)} [k_1 \bar{r} [(z-d)^2 + y^2]^{1/2}] - H_0^{(1)} [k_1 \bar{r} [(z+d)^2 + y^2]^{1/2}] + \frac{2}{i \pi \bar{r}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\alpha^2}{\mu_2 + \eta^2 \mu_1} \right] \cdot \exp(- (z+d) \cdot k_1 \mu_1) \cdot \exp(-i \lambda k_1 y) \cdot d\lambda \right\} \quad (2.12)$$

Comme nous l'avons dit précédemment, pour appliquer la condition aux limites au niveau du fil nous supposons que la valeur moyenne du champ électrique longitudinal est nulle sur la surface du fil, soit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Pi_1(\varphi, a) \cdot d\varphi = 0 \quad (2.13)$$

Le long du chemin d'intégration, l'argument de la première fonction de HANKEL reste constant et égal à $(k_1 \bar{r} a)$.

L'argument de la deuxième fonction de HANKEL peut se décomposer de la façon suivante :

$$k_1 \bar{r} [(z+d)^2 + y^2]^{1/2} = k_1 \bar{r} [(2d + a \sin \varphi)^2 + (a \cos \varphi)^2]^{1/2}$$

Les arguments des exponentielles du terme complémentaire peuvent également se décomposer :

$$-(z+d)k_1 u_1 - i \lambda k_1 y = -(2d + a \sin \varphi) k_1 u_1 - i \lambda k_1 a \cos \varphi$$

Il apparaît donc dans le calcul de la valeur moyenne du champ, des intégrales de la forme déjà rencontrée en (2.11) et qui sont la représentation de la fonction de BESSEL du premier ordre J_0 et d'argument $A \bar{r}$.

L'équation aux limites s'écrit finalement :

$$M(\alpha) = 0$$

$$\text{avec } M(\alpha) = J_0(A \bar{r}) \cdot \left\{ \bar{r}^2 \left\{ H_0^{(4)}(A \bar{r}) - H_0^{(4)}(2D \bar{r}) \cdot J_0(A \bar{r}) \right\} + J_0(A \bar{r}) \cdot \left\{ P(\alpha) - Q(\alpha) \right\} \right\}$$

$$\text{et } A = k_1 a$$

$$D = k_1 d$$

$$P(\alpha) = \frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_1 + \mu_2} d\lambda$$

$$Q(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_2 + n^2\mu_1} d\lambda$$

(2.14)

L'équation implicite que nous avons obtenue est dite équation modale ; elle ne comporte qu'une seule inconnue, la constante de propagation réduite α .

2.3 Expressions simplifiées de $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$

Avant de débiter la recherche des solutions de cette équation modale, nous allons reprendre les étapes de calcul faites par CHANG et OLSEN pour montrer que sous certaines approximations, les expressions intégrales de P et Q données en (2.14) peuvent se mettre sous une forme analytique. Il faut noter que la démarche mathématique que nous allons suivre dans ce paragraphe est relativement laborieuse. Les résultats qui permettront de mettre en évidence l'existence de deux modes de propagation guidés sont donnés dans le paragraphe 2.4.

2.3.1. : Calcul de $P(\alpha)$

En multipliant par $(\mu_1 - \mu_2)$ le numérateur et le dénominateur de la fonction contenue dans $P(\alpha)$, on obtient :

$$P(\alpha) = \frac{2}{i\pi(n^2-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_1 - \mu_2) \cdot \exp(-2D\mu_1) \cdot d\lambda \quad (2.15)$$

La fonction à intégrer ayant un comportement en exponentielle décroissante, la plus importante contribution à l'intégrale sera obtenue pour des faibles valeurs de λ , inférieures à une valeur λ_c pour laquelle la fonction à intégrer devient négligeable. La valeur de λ_c peut être choisie telle qu'elle rende la contribution de l'exponentielle dix fois plus petite que pour $\lambda = 0$, ce qui mène à :

$$\lambda_c = \ln 10 / 2D \quad (2.16)$$

Pour établir cette formule, nous avons supposé que la hauteur du fil au-dessus du sol est inférieure à la longueur d'onde dans le vide, soit $2D < 4\pi$. Nous avons également admis deux autres hypothèses dont la validité ne pourra être vérifiée qu'a posteriori :

- la constante de propagation α est proche de la constante de propagation dans le vide, soit $|\bar{\Gamma}^2| \ll 1$.
- le module de $\bar{\Gamma}$ est négligeable par rapport à la valeur de λ_c , $\lambda_c^2 \gg |\bar{\Gamma}^2|$.

L'ensemble de ces hypothèses définit le domaine de validité de la simplification.

L'expression μ_2 définie en (2.4) peut s'écrire :

$$\mu_2 = \left\{ -n^2 \left(1 - \frac{\lambda_c^2 + \alpha^2}{n^2} \right) \right\}^{1/2}$$

Dans la mesure où on peut considérer que $|(\lambda_c^2 + \alpha^2)/n^2| \ll 1$, le second terme du développement limité de μ_2 peut être négligé dans le calcul de $P(\alpha)$. Comme nous l'avons dit précédemment, α est généralement proche de 1, la valeur de n qui permet de respecter la condition précédente dépend de la valeur de D et s'écrit :

‡ si $2D > \ln 10$, l'approximation est valable pour $|1/n^2| \ll 1$.

Cela correspond à un contraste important entre l'air et le sol qui physiquement peut être le résultat soit d'une conductivité élevée, soit d'une permittivité diélectrique du sol élevée.

‡ si $2D < \ln 10$, l'approximation est valable pour $|D^2 n^2| \gg 1$.

Si l'ensemble des inégalités précédentes est vérifié l'expression $P(\alpha)$ peut donc s'écrire :

$$P(\alpha) = \frac{2}{i\pi(n^2-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_1 + in) \cdot \exp(-2D\mu_1) \cdot d\lambda$$

qui peut encore se mettre sous la forme suivante :

$$P(\alpha) = \frac{2}{i\pi(n^2-1)} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial W^2} - in \frac{\partial}{\partial W} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-W\mu_1)}{\mu_1} d\lambda \right\}$$

Cette formule peut être explicitée sous forme de fonction de HANKEL en utilisant à nouveau la relation (2.9) dans laquelle nous posons $C = W$, $B = 0$
soit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-W\mu_1)}{\mu_1} d\lambda = i\pi \cdot H_0^{(4)}(W\bar{\tau})$$

En calculant les dérivées premières et secondes de l'équation précédente, l'expression de $P(\alpha)$ devient :

$$P(\alpha) = \frac{2}{(n^2-1)} \left\{ \bar{\tau} \cdot H_1^{(4)}(2D\bar{\tau}) \cdot \left[\frac{1}{2D} + in \right] - \bar{\tau}^2 H_0^{(4)}(2D\bar{\tau}) \right\} \quad (2.17)$$

2.3.2. : Calcul de $Q(\alpha)$

Avec les mêmes approximations que précédemment, $Q(\alpha)$ peut s'écrire :

$$Q(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{i\pi n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_1 - i/n} d\lambda$$

ou :

$$Q(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{i\pi n^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_1} d\lambda + \frac{i}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_1(\mu_1 - i/n)} d\lambda \right\}$$

En utilisant à nouveau la relation (2.9), l'expression de $Q(\alpha)$ devient :

$$Q(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{n^2} H_0^{(4)}(2D\bar{\Gamma}) + \frac{2\alpha^2}{\pi n^3} \cdot \exp(-i2D/n) \cdot [W_d(\alpha) + W_o(\alpha)]$$

avec :

$$W_d(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D(\mu_1 - i/n)) - 1}{\mu_1(\mu_1 - i/n)} \cdot d\lambda$$

$$W_o(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu_1(\mu_1 - i/n)} \cdot d\lambda \quad (2.18)$$

a) Calcul de $W_o(\alpha)$

Dans un premier temps, nous allons faire le calcul de $W_o(\alpha)$ par la méthode des résidus dans le demi-plan complexe supérieur λ .

Les coordonnées des points singuliers de ce demi-plan d'intégration vont être exprimées en fonction de l'inconnue α et il faut donc étudier l'incidence du déplacement de α dans le plan complexe sur la position de ces points singuliers dans le plan complexe λ .

- lieu des points singuliers dans le plan complexe α

Il existe dans un premier temps, dans le plan complexe λ , une paire de pôles définis par :

$$\mu_1 - i/n = 0$$

Cette relation est vérifiée pour la valeur $\lambda = \lambda_p$ définie par :

$$\lambda_p = \pm (1 - \alpha^2 - 1/n^2)^{1/2}$$

Supposons que α décrive le plan complexe selon une loi définie par :

$$\alpha = 1 + Sl \exp(i\phi) \tag{2.19}$$

où Sl est un nombre réel positif

ϕ est un angle compris entre $-\pi$ et $+\pi$

Nous avons tracé sur les figures (2.3 a) à (2.3 d) les différents chemins parcourus par λ_p dans le plan complexe λ , quand Sl et ϕ varient.

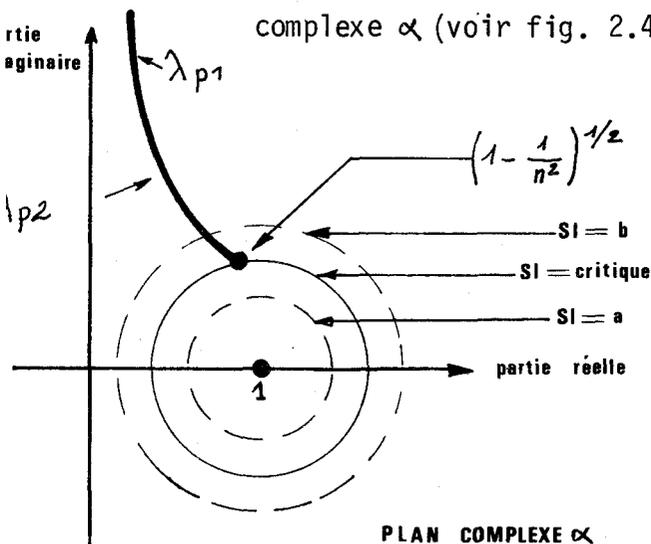
Pour tracer ces courbes, nous avons choisi $n = 5,52 + i 4,53$. L'examen de ces quatre configurations montre qu'il existe une valeur critique de Sl . Pour une valeur "a" de Sl inférieure à cette valeur critique, les chemins parcourus par les pôles λ_p ne coupent pas l'axe réel ; le choix d'une détermination unique suffit pour trouver le pôle qui reste dans le demi-plan λ supérieur, quelque soit la valeur de α (fig. 2.3 a).

Pour une valeur "b" de Sl , supérieure à la valeur critique, le lieu des pôles coupe l'axe réel (fig. 2.3 b à 2.3 d). La figure 2.3 b montre que pour un angle ϕ supérieur à 70° , le chemin parcouru par le pôle λ_p passe de façon continue par les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 . Pour un angle ϕ situé aux environs de 120° , le lieu parcouru par λ_p coupe le demi-axe réel négatif en un point compris entre A_2 et A_3 ; nous appellerons ce point particulier λ_{p2} . Etant donné que la partie imaginaire de la valeur de λ_p doit rester positive, il faut changer de détermination au niveau du point λ_{p2} et choisir les points dont la partie imaginaire satisfait cette condition. Le chemin parcouru par λ_p sera donc celui décrit par les points $A_0, A_1, A_2, \lambda_{p2}, \lambda_{p1}, A_3, A_4$. Au passage de λ_{p2} en λ_{p1} , il y a changement de détermination et discontinuité dans la valeur de λ_p . Dans le plan complexe α (voir fig. 2.4) cette discontinuité est définie par :

$$\alpha = \pm (1 - 1/n^2 - s^2)^{1/2} \text{ où } s \text{ est un nombre réel.}$$

Le long de la branche de discontinuité dans le plan α , le signe de l'expression λ_p définie par $\lambda_p = \pm (1 - \alpha^2 - 1/n^2)^{1/2}$ est déduite de la fig. 2.3 b. Sur les côtés des branches de discontinuité repérés par λ_{p2} , λ_p est un réel négatif ; sur les côtés repérés par λ_{p1} , λ_p est un réel positif.

F. 2.4



PLAN COMPLEXE α

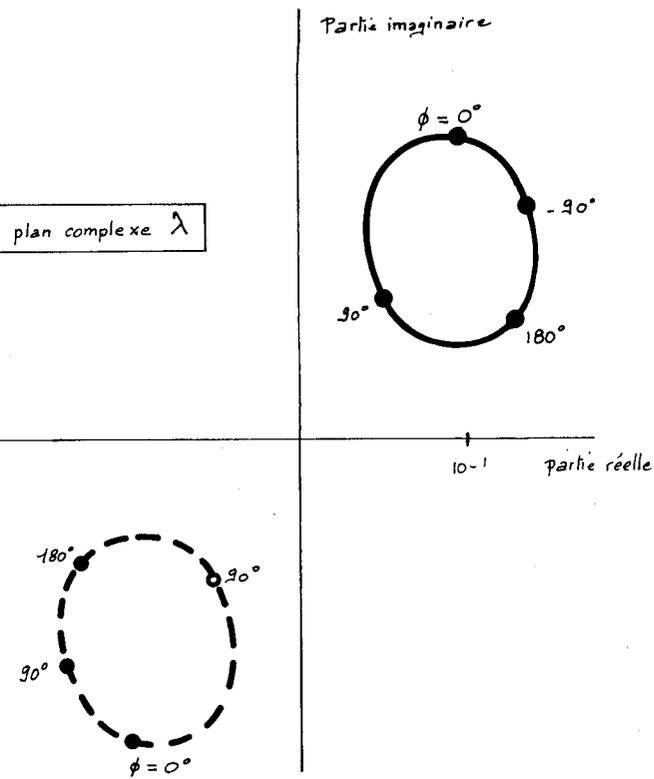


Fig. 2.3a : $Sl = 0,005$

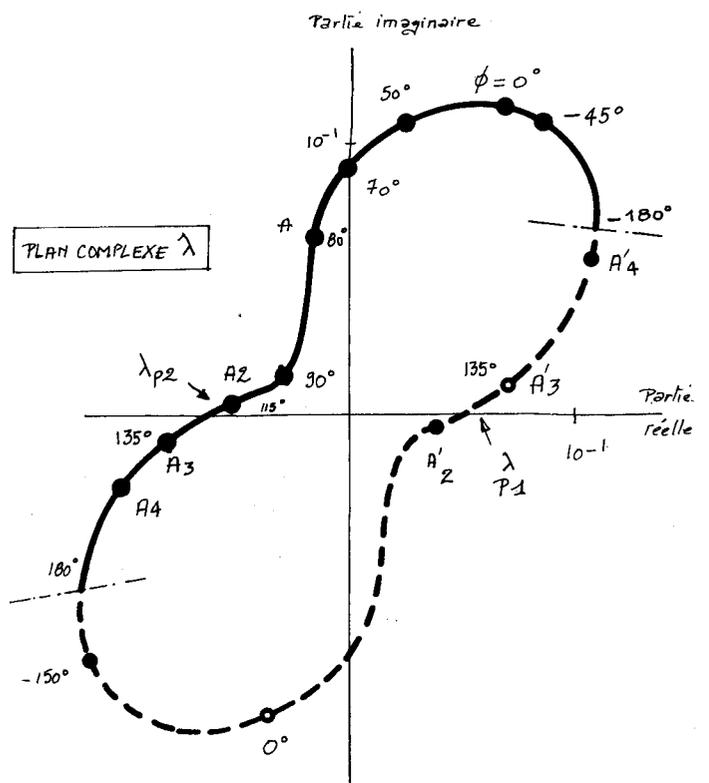


Fig. 2.3b : $Sl = 0,01$

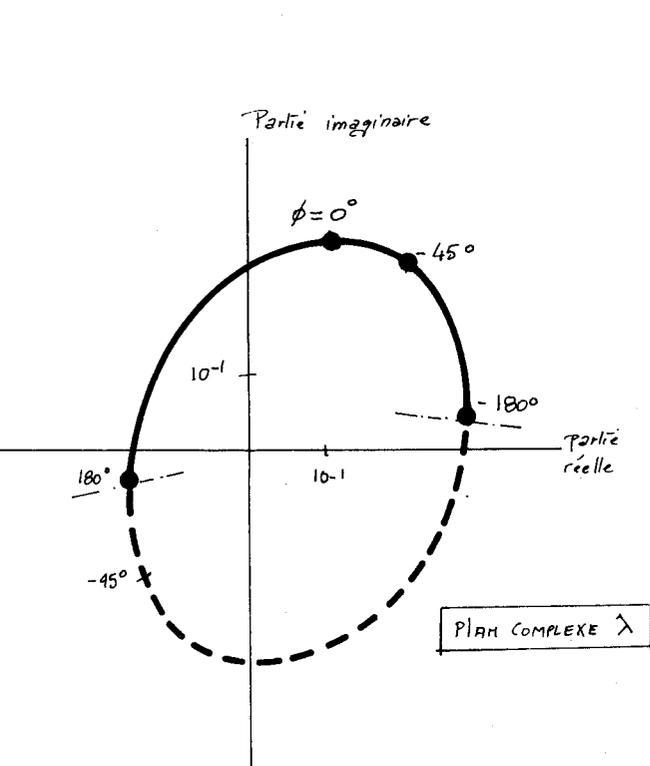


Fig. 2.3c : $Sl = 0,05$

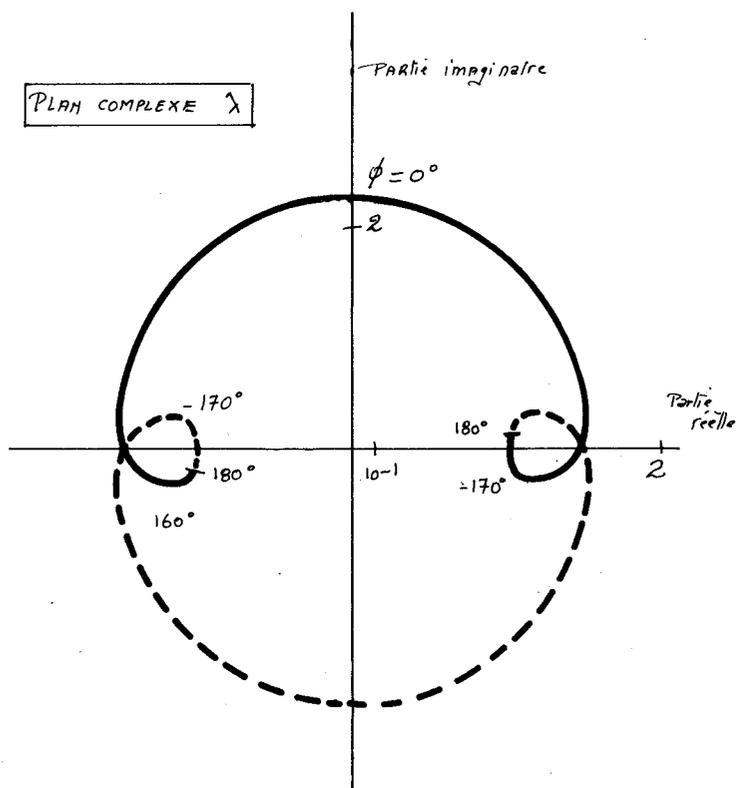
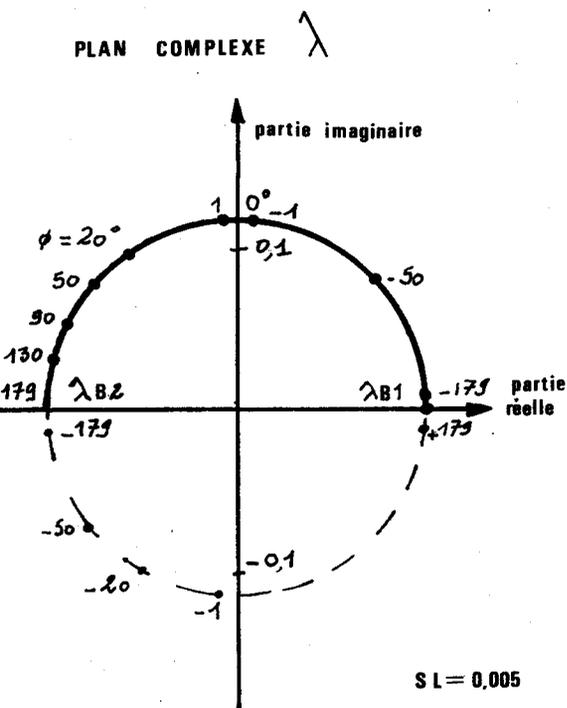


Fig. 2.3d : $Sl = 1,5$

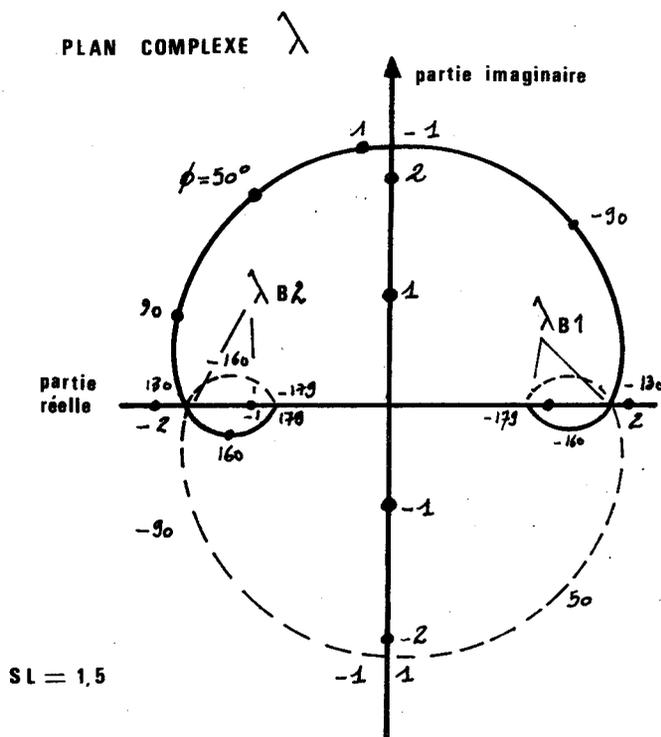
L'autre terme μ_{\perp} du dénominateur de l'intégrant de $W_0(\alpha)$ possède dans le plan complexe λ , une paire de points de branchement définis par $\mu_{\perp} = 0$ et qui s'écrivent :

$$\lambda_B = \pm \bar{\zeta}$$

Si α décrit le plan complexe selon la formule (2.19), λ_B décrit dans le plan complexe λ les lieux représentés sur les figures 2.5 a et 2.5 b.



F. 2.5 a



F. 2.5 b

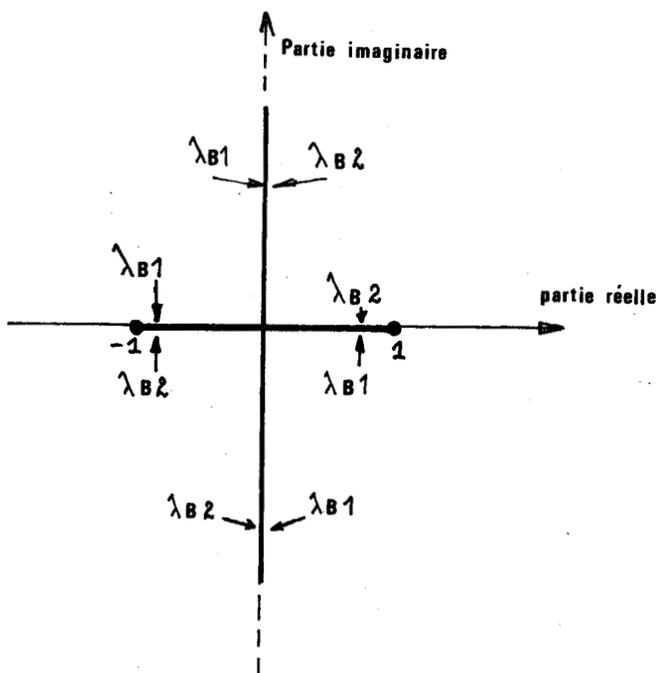
Ces courbes montrent que quelque soit la valeur de SL , les chemins parcourus par λ_B coupent l'axe réel quand l'angle ϕ varie. Pour respecter la condition sur la partie imaginaire de λ_B il y a donc, au niveau de cette intersection, un changement de détermination, donc une discontinuité dans la valeur de λ_B .

Dans le plan complexe α (voir fig. 2.6), cette discontinuité est définie par :

$$\alpha = (1 - t^2)^{4/2}$$

où t est un nombre réel.

PLAN COMPLEXE α



F. 2.6

Le long de la branche de discontinuité dans le plan α , le signe de l'expression λ_B définie par $\lambda_B = \pm (1 - \alpha^2)^{1/2}$ est déduit des figures 2.5 a et 2.5 b. Sur les côtés des branches de discontinuité repérés par λ_{B2} , λ_B est un réel négatif ; sur les côtés repérés par λ_{B1} , λ_B est un réel positif.

- choix du contour d'intégration

Dans le calcul de $W_0(\alpha)$, le choix du contour d'intégration dans le demi-plan complexe supérieur λ , devra donc dépendre de la position de α dans le plan complexe. L'expression de $W_0(\alpha)$ écrite en (2.18) peut se décomposer de la façon suivante :

$$W_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_1 + i/n}{\mu_1(\mu_1^2 + 1/n^2)} \cdot d\lambda$$

soit :

$$W_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_p^2} + \frac{i}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\mu_1(\lambda^2 - \lambda_p^2)}$$

ou :

$$(2.20)$$

$$W_0(\alpha) = W_{01} + i/n W_{02}$$

Dans l'expression de W_{01} , le terme μ_1 n'apparaît plus au dénominateur et il n'y a donc pas de point de branchement en λ_B . Nous choisissons comme contour d'intégration, le contour défini sur la fig. (2.7). On peut

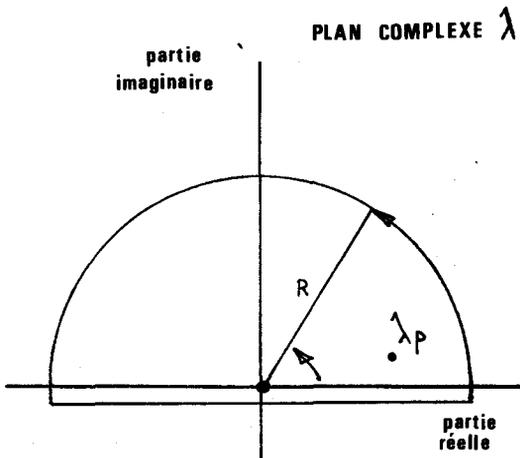
montrer facilement que l'intégrale le long de la demi-circonférence supérieure est nulle lorsque le rayon R tend vers l'infini. Le résultat de l'intégrale s'écrit donc :

$$W_{01}(\alpha) = \frac{i\pi}{\lambda_p} \quad (2.21)$$

Il faut remarquer que cette formulation est valable quelque soit la position de α dans le plan complexe. Pour calculer l'intégrale W_{02} , il faut un contour qui évite le point

de branchement λ_B et entoure le pôle λ_p . Dans un premier temps, nous supposons que n est un nombre complexe possédant une partie imaginaire très faible, c'est-à-dire que dans le sol, $\sigma_2 \ll \omega \epsilon_2$.

Dans ce cas, les lieux des discontinuités dans le plan complexe α , définis par les fig. 2.4 et fig. 2.6 prennent l'allure représentée sur la fig. 2.8.



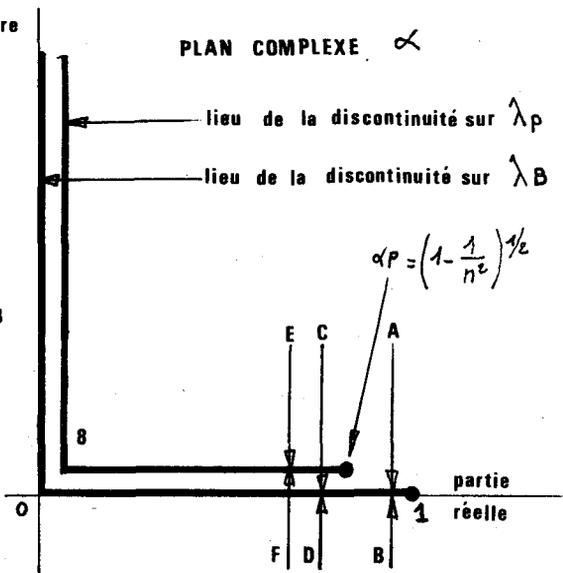
F. 2.7

Nous n'avons représenté sur cette figure que les variations de α définies par :

$$\alpha = 1 + S l \exp(i\phi)$$

avec $0 \leq \phi < \pi$

L'expression α n'apparaissant que par son carré dans le calcul de W_{02} , les résultats seront identiques pour l'autre demi-plan défini par $-\pi \leq \phi < 0$, obtenu à partir du premier demi-plan par symétrie par rapport à l'origine 0.



F. 2.8

Le point + 1 est situé dans le demi-plan supérieur α car il représente en valeur réduite, la constante de propagation dans l'air ; comme nous l'avons dit dans le paragraphe 2.2, celle-ci possède une partie imaginaire très faible et positive. Chacun des six points A à F caractérise une partie du plan définie par rapport aux discontinuités relatives à λ_P et λ_B . Nous allons montrer que pour ces six points, l'expression W_{02} se calcule différemment, mais qu'il existe une formule unique qui peut représenter l'ensemble de ces résultats. Cette expression sera étendue par la suite à tout le plan complexe α .

- calcul de $W_0(\alpha)$ au point A

Pour la valeur de α correspondant au point A, le contour d'intégration dans le plan complexe λ est celui représenté sur la fig. 2.9. Nous

avons choisi comme branche de coupure la courbe définie par : $\Re\{\mu_1\} = 0$.

La partie imaginaire de μ_1 change de signe quand λ traverse la branche de coupure.

L'intégrale le long du demi-cercle supérieur est nulle quand le rayon R tend vers l'infini et $W_{02}(\alpha)$ peut se diviser en deux parties :

$$W_{02}(\alpha_A) = R(\alpha_A) - B(\alpha_A)$$

où : $R(\alpha_A)$ est le résidu au pôle λ_P .

$B(\alpha_A)$ est l'intégrale le long de la branche de coupure

F.2.9

Le résidu $R(\alpha_A)$ s'exprime par :

$$R(\alpha_A) = \frac{2i\pi}{\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} [\mu_1(\lambda^2 - \lambda_P^2)] \right\}_{\lambda = \lambda_P}}$$

soit :

$$R(\alpha_A) = \pi n / \lambda_P$$

Pour calculer l'intégrale le long de la branche de coupure, nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\mathcal{S} = -i u_1$$

La transformée de la branche de coupure du plan complexe λ se trouve donc être l'axe réel dans le plan complexe \mathcal{S} . En effet, le long de la branche de coupure, nous avons $\text{Re}\{u_1\} = 0$, donc $\mathcal{S} = \text{Im}\{u_1\}$.

Le changement de variable conduit aux relations suivantes :

$$d\lambda = i \frac{u_1}{\lambda} d\mathcal{S} \quad ; \quad \lambda = \pm (\bar{\tau}^2 - \mathcal{S}^2)^{1/2} = \pm i (\mathcal{S}^2 - \bar{\tau}^2)^{1/2}$$

$B(\alpha_A)$ s'écrit donc :

$$B(\alpha_A) = -2i \int_0^{\infty} \frac{d\mathcal{S}}{(1/n^2 - \mathcal{S}^2) \left\{ \pm (\bar{\tau}^2 - \mathcal{S}^2)^{1/2} \right\}}$$

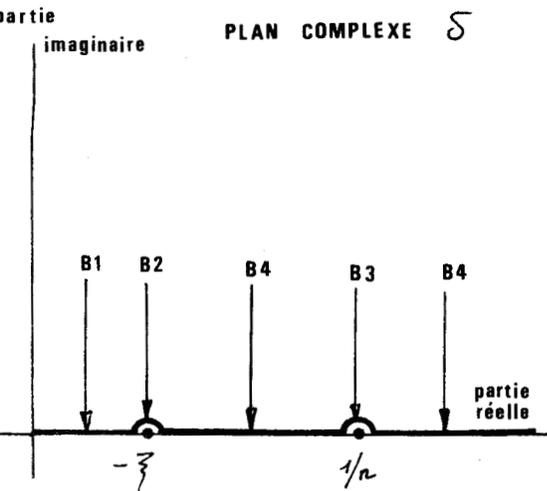
Le signe de la racine carrée est donné par la valeur de λ le long de la branche de coupure dans le plan complexe λ .

On a vu que la figure 2.5a représentait les variations de $\lambda_B = \bar{\tau}$ quand α décrit le plan complexe selon la formule $\alpha = 1 + S l \exp(i\vartheta)$ et pour $S l < 1$. Cette figure montre que dans le cas du point A où ϑ est un angle qui atteint 180° par valeur inférieure, la valeur de $\bar{\tau}$ qui vérifie la relation $\text{Im}(\bar{\tau}) > 0$, est un réel négatif représenté par λ_{B2} .

Le point singulier appartenant au demi-axe réel positif du plan complexe \mathcal{S} est donc le point $(-\bar{\tau})$. Le point A est situé dans le plan complexe α de façon telle que : $\alpha > (1 - 1/n^2)^{1/2}$, d'où nous pouvons facilement tirer la relation : $|n\bar{\tau}| < 1$.

Le point $(-\bar{\tau})$ se trouve donc sur le demi-axe réel positif à gauche du point $1/n$. Dans ces conditions, l'intégrale $B(\alpha_A)$ peut se décomposer en quatre parties B_1, B_2, B_3 et B_4 définies sur la fig. 2.10.

- B_1 représente l'intégrale sur la portion du demi-axe réel positif comprise entre 0 et $(-\bar{\tau})$, à l'exclusion du point $(-\bar{\tau})$.



F. 2.10

- B2 représente l'intégrale le long du demi-cercle supérieur de rayon infiniment petit et entourant le pôle $(-\xī)$.
- B3 représente l'intégrale analogue au contour B2 mais pour le pôle $(1/n)$.
- B4 représente l'intégrale sur la portion du demi-axe réel positif comprise entre $(-\xī)$ et $+\infty$, à l'exclusion du point $(-\xī)$ et du parcours défini par B3.

On peut montrer que le résidu de la fonction au point $(-\xī)$ est nul et donc que l'intégrale B2 est nulle.

L'intégrale B1 s'écrit :

$$B1 = -2i \int_0^{(-\xī)^-} \frac{d\delta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2\right) \{-\sqrt{\xī^2 - \delta^2}\}} = 2i \int_0^{(-\xī)^-} \frac{d\delta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2\right) \sqrt{\xī^2 - \delta^2}}$$

Pour résoudre cette intégrale, nous utilisons l'identité suivante [8] :

$$\int \frac{dx}{(c^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{c\sqrt{c^2 - a^2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{c^2 - a^2}}{c\sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

où C est une constante et $c^2 > a^2$

En posant $x = \delta$, $a = \xī$ et $c = 1/n$

nous obtenons :

$$\int \frac{d\delta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2\right) \sqrt{\xī^2 - \delta^2}} = \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \xī^2}} \operatorname{arctg} \frac{\delta \sqrt{\frac{1}{n^2} - \xī^2}}{\frac{1}{n} \sqrt{\xī^2 - \delta^2}} + C$$

soit :
$$B1 = \frac{\pi i n}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \xī^2}} \quad (2.22)$$

L'intégrale B3 est égale au demi-résidu de la fonction pour le pôle $1/n$, où :

$$B3 = -i\pi \left\{ -2i \cdot \frac{1}{\left[\frac{\partial}{\partial \delta} \left\{ \left(\frac{1}{n^2} - \delta^2 \right) \cdot \left[+i \sqrt{\delta^2 - \tau^2} \right] \right\} \right]} \right\}_{\delta=1/n}$$

$$\text{soit : } B3 = \frac{-\pi i n}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \tau^2}} \quad (2.23)$$

L'intégrale B4 s'écrit :

$$B4 = -2i \int_{(-\tau)^+}^{\infty} \frac{d\delta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2 \right) \left\{ i \sqrt{\delta^2 - \tau^2} \right\}}$$

$$B4 = -2 \int_{(-\tau)^+}^{\infty} \frac{d\delta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2 \right) \sqrt{\delta^2 - \tau^2}}$$

où le point $1/n$ est exclu du contour d'intégration.

Nous posons $\delta = -\tau \cdot \text{ch } \zeta$ avec $\zeta > 0$, ce qui conduit aux relations suivantes :

$$d\delta = -\tau \cdot \text{sh } \zeta \cdot d\zeta$$

$$\sqrt{\delta^2 - \tau^2} = -\tau \cdot \text{sh } \zeta$$

L'intégrale B4 devient :

$$B4 = -2 \int_0^{\infty} \frac{-\tau \text{sh } \zeta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2 \right) (-\tau \text{sh } \zeta)} d\zeta$$

$$B4 = -2 \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{\left(\frac{1}{n} + \delta \right) \left(\frac{1}{n} - \delta \right)}$$

$$\text{soit } B4 = -n^2 \left\{ \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{1+n\bar{\gamma}\text{ch}\zeta} + \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{1-n\bar{\gamma}\text{ch}\zeta} \right\}$$

Dans la première intégrale, le point exclu du contour d'intégration est le point ζ_c tel que: $\text{ch}\zeta_c = \frac{-1}{n\bar{\gamma}}$ et B4 peut s'écrire :

$$B4 = -n^2 \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\zeta_c - \epsilon} \frac{d\zeta}{1+n\bar{\gamma}\text{ch}\zeta} + \int_{\zeta_c + \epsilon}^{\infty} \frac{d\zeta}{1+n\bar{\gamma}\text{ch}\zeta} \right] + \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{1-n\bar{\gamma}\text{ch}\zeta} \right\}$$

Pour résoudre ce calcul, nous utilisons l'identité suivante [8]

$$\int \frac{dx}{a+b\text{ch}x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \log C \frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}\text{th}(x/2)}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}\text{th}(x/2)}$$

où C est une constante et $a^2 > b^2$

En posant : $a = 1$, $x = \zeta$ et $b = \pm n\bar{\gamma}$ nous obtenons :

$$\int \frac{d\zeta}{1 \pm n\bar{\gamma}\text{ch}\zeta} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2\bar{\gamma}^2}} \log C \frac{1 \pm n\bar{\gamma} + \sqrt{1-n^2\bar{\gamma}^2}\text{th}(\zeta/2)}{1 \pm n\bar{\gamma} - \sqrt{1-n^2\bar{\gamma}^2}\text{th}(\zeta/2)}$$

soit pour B4 :

$$B4 = \frac{-n^2}{\sqrt{1-n^2\bar{\gamma}^2}} \log \frac{1 + \sqrt{1-n^2\bar{\gamma}^2}}{1 - \sqrt{1-n^2\bar{\gamma}^2}} \quad (2.24)$$

Les équations (2.21) à (2.24) permettent maintenant de donner la valeur de $W_0(\alpha)$ au point A :

$$W_0(\alpha_A) = \frac{2\pi i}{\lambda_P} + \frac{i}{\sqrt{1/n^2 - \bar{\Gamma}^2}} \log \frac{1/n + \sqrt{1/n^2 - \bar{\Gamma}^2}}{1/n - \sqrt{1/n^2 - \bar{\Gamma}^2}} \quad (2.25)$$

ou encore :

$$W_0(\alpha_A) = \frac{2\pi i}{\lambda_P} + \frac{2i}{\sqrt{1/n^2 - \bar{\Gamma}^2}} \log \frac{1/n + \sqrt{1/n^2 - \bar{\Gamma}^2}}{|\bar{\Gamma}|} \quad (2.26)$$

où :

$$\lambda_P = +i\sqrt{1/n^2 - \bar{\Gamma}^2}, \quad \bar{\Gamma} = -\sqrt{1 - \alpha^2}$$

- expression générale de $W_0(\alpha)$

La détermination de l'expression $W_0(\alpha)$ en chacun des points B, C, D, E et F de la figure 2.8, se fait d'une manière analogue ; les détails du calcul sont décrits dans l'annexe A1. Les expressions obtenues sont données ci-dessous :

$$W_0(\alpha_B) = + \frac{2i}{\sqrt{1/n^2 - \bar{\Gamma}^2}} \log \frac{1/n + \sqrt{1/n^2 - \bar{\Gamma}^2}}{|\bar{\Gamma}|}$$

$$W_0(\alpha_C) = \frac{2\pi i}{\lambda_P} - \frac{2}{\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}} \log \frac{1/n - i\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}}{|\bar{\Gamma}|}$$

$$W_0(\alpha_D) = - \frac{2}{\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}} \log \frac{1/n - i\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}}{|\bar{\Gamma}|}$$

Les formules exprimant $W_0(\alpha)$ pour les points E et F sont identiques à la formule de $W_0(\alpha_c)$ mais l'expression de λ_p sera différente selon qu'on se trouve d'un côté ou l'autre de la branche de discontinuité. Ces expressions peuvent s'écrire sous une forme unique valable pour ces six points :

$$W_0(\alpha) = \frac{2\pi i}{\lambda_p} - \frac{2}{(\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2}} \left\{ \log[1/n - i(\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2}] - \log \bar{\Gamma} + i\pi \right\}$$

avec $\text{Im} \left\{ (\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2} \right\} \geq 0$ (2.27)

$$\text{Im} \left\{ \bar{\Gamma} \right\} \geq 0$$

Pour les points A à F, les expressions $(\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2}$ et $\bar{\Gamma}$ sont des nombres réels où nous avons supposé que n possède une partie imaginaire très petite. Ces expressions s'écrivent :

en A : $(\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2} = i\sqrt{1/n^2 - \bar{\Gamma}^2}$; $\bar{\Gamma} = -\sqrt{1 - \alpha^2}$

en B : $(\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2} = i\sqrt{1/n^2 - \bar{\Gamma}^2}$; $\bar{\Gamma} = +\sqrt{1 - \alpha^2}$

en C : $(\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2} = \sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}$; $\bar{\Gamma} = -\sqrt{1 - \alpha^2}$

en D : $(\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2} = \sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}$; $\bar{\Gamma} = +\sqrt{1 - \alpha^2}$

en E : $(\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2} = -\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}$; $\bar{\Gamma} = -\sqrt{1 - \alpha^2}$

en F : idem C

Etant donné qu'il n'y a pas d'autres points singuliers dans le demi-plan α supérieur, la formule écrite en (2.27) sera supposée valable dans tout ce demi-plan et sera utilisée même si le coefficient de réflexion η possède une partie imaginaire non nulle. La validité de ces hypothèses sera vérifiée a posteriori lors des applications numériques, en comparant ces résultats approchés aux valeurs exactes obtenues en intégrant numériquement la fonction.

b) Calcul de $W_d(\alpha)$

Nous pouvons maintenant faire le calcul de $W_d(\alpha)$ définie dans l'équation (2.18) :

$$W_d(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2\mathcal{D}(\mu_1 - i/n)) - 1}{\mu_1 (\mu_1 - i/n)} d\lambda$$

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$W_d(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\epsilon}^{2\mathcal{D}} \frac{\exp(-W(\mu_1 - i/n))}{\mu_1} dW d\lambda \right\}$$

La valeur limite écrite pour la borne basse de l'intégrale sur la variable W est imposée par la divergence qui apparaît lors de l'intégration de la fonction $\exp. (-W(\mu_1 - i/n))/\mu_1$ pour $W = 0$.

$$\text{soit } W_d(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\epsilon}^{2\mathcal{D}} \exp(iW/n) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-W\mu_1)}{\mu_1} d\lambda dW \right\}$$

En utilisant la représentation de la fonction de HANKEL, donnée par l'équation (2.9), cette expression devient :

$$W_d(\alpha) = -i\pi \int_{\epsilon}^{2\mathcal{D}} \exp(iW/n) \cdot H_0^{(4)}(\sqrt{W}) \cdot dW \tag{2.28}$$

Le terme exponentiel peut s'écrire sous la forme du développement en série suivant :

$$\exp. (i W / n) = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(iW)^M}{(n)^M \cdot M!}$$

d'où la valeur de $Wd(\alpha)$:

$$Wd(\alpha) = -i\pi \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(i)^M}{(n)^M M!} \int_{\epsilon}^{2D} W^M \cdot H_0^{(1)}(W\bar{\tau}) \cdot dW \quad (2.29)$$

ou encore :

$$Wd(\alpha) = -i\pi \sum_{M=0}^{\infty} \left\{ \frac{(i)^M}{(n)^M M!} \cdot I_M(2D, \bar{\tau}) \right\}$$

$$\text{avec } I_M = \int_{\epsilon}^{2D} W^M \cdot H_0^{(1)}(W\bar{\tau}) \cdot dW \quad (2.30)$$

Cette intégrale I_M peut se calculer en intégrant deux fois par parties. Nous utilisons la formule liant la fonction de HANKEL et sa dérivée [9] :

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left\{ z H_1^{(1)}(z) \right\} = H_0^{(1)}(z) \quad (2.31)$$

I_M s'écrit :

$$I_M = \frac{1}{\bar{\tau}^2} \int_{\epsilon}^{2D} W^{M-1} \cdot (W\bar{\tau}) \cdot H_0^{(1)}(W\bar{\tau}) \cdot d(W\bar{\tau})$$

$$I_M = \frac{1}{\bar{\tau}^2} \left[W^{M-1} \cdot W\bar{\tau} \cdot H_1^{(1)}(W\bar{\tau}) \right]_{\epsilon}^{2D} - \frac{M-1}{\bar{\tau}^2} \int_{\epsilon}^{2D} (W\bar{\tau}) \cdot H_1^{(1)}(W\bar{\tau}) \cdot W^{M-2} dW$$

$$I_M = \frac{(2D)^M}{\Gamma} \cdot H_1^{(4)}(2D\bar{\Gamma}) + \frac{M-1}{\Gamma^2} \left[W^{M-1} \cdot \bar{\Gamma} \cdot \frac{1}{\Gamma} \cdot H_0^{(4)}(W\bar{\Gamma}) \right]_{\epsilon}^{2D} -$$

$$\frac{(M-1)^2}{\Gamma^2} \int_{\epsilon}^{2D} W^{M-2} \cdot H_0^{(4)}(W\bar{\Gamma}) \cdot dW$$

soit la relation de récurrence :

$$I_M = \frac{(2D)^M}{\Gamma} \cdot H_1^{(4)}(2D\bar{\Gamma}) + \frac{M-1}{\Gamma^2} \cdot (2D)^{M-1} \cdot H_0^{(4)}(2D\bar{\Gamma}) - \frac{(M-1)^2}{\Gamma^2} I_{M-2} \quad (2.32)$$

A l'exception des termes d'indice 0 et 1, tous les termes M peuvent se calculer à partir des termes d'indices M-1, M-2. Le calcul des deux premiers termes doit se faire de façon différente et pour cela, nous utilisons l'identité suivante [10] :

$$\int_0^x C_0(t) dt = x C_0(x) + \frac{1}{2} \pi x \left\{ ST_0(x) \cdot C_1(x) - ST_1(x) \cdot C_0(x) \right\}$$

$$C_y(x) = A J_y(x) + B Y_y(x) ; \quad y = 0, 1$$

A et B sont des constantes

$ST_0(x)$ et $ST_1(x)$ sont respectivement les fonctions de STRLVE d'ordre 0 et d'ordre 1 de la variable x.

En posant $A = 1$, $B = i$, $D = 0$, $x = 2D$ et $t = W$

nous obtenons :

$$I_0 = \frac{1}{\Gamma} \int_{\epsilon}^{2D\bar{\Gamma}} H_0^{(4)}(W\bar{\Gamma}) dW\bar{\Gamma}$$

soit :

$$I_0 = 2D H_0^{(4)}(2D\bar{\Gamma}) + \pi D \left\{ ST_0(2D\bar{\Gamma}) \cdot H_1^{(4)}(2D\bar{\Gamma}) - ST_1(2D\bar{\Gamma}) \cdot H_0^{(4)}(2D\bar{\Gamma}) \right\}$$

Et pour le terme I_4 :

$$I_4 = \int_{\mathcal{E}}^{2D} W \cdot H_0^{(4)}(W\bar{\gamma}) \cdot dW$$

$$I_4 = \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \int_{\mathcal{E}}^{2D\bar{\gamma}} (W\bar{\gamma}) \cdot H_0^{(4)}(W\bar{\gamma}) \cdot d(W\bar{\gamma})$$

Soit en utilisant à nouveau la formule (2.31)

$$I_4 = \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \left[(W\bar{\gamma}) \cdot H_1^{(4)}(W\bar{\gamma}) \right]_{\mathcal{E}\bar{\gamma}}^{2D\bar{\gamma}}$$

ou

$$I_4 = \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \left[2D\bar{\gamma} H_1^{(4)}(2D\bar{\gamma}) + \frac{2i}{\pi} \right]$$

où nous avons tenu compte pour le calcul de la borne $W\bar{\gamma} = \mathcal{E}$, de l'identité suivante :

si ν fixe et différent de 0 et $z \rightarrow 0$

$$H_\nu^{(4)}(z) = \frac{-i}{\pi} \cdot \Gamma(\nu) \cdot \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu}$$

L'expression simplifiée de $Q(\alpha)$ s'écrit donc :

$$Q(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{n^2} \cdot H_0^{(4)}(2D\bar{\gamma}) + \frac{2\alpha^2}{\pi n^3} \exp(-i2D/n) \cdot [W_d(\alpha) + W_0(\alpha)]$$

$$\text{avec } W_0(\alpha) = \frac{2\pi i}{\lambda_p} - \frac{2}{(\bar{\gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2}} \left\{ \log[1/n - i(\bar{\gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2}] - \log\bar{\gamma} + i\pi \right\}$$

$$\Im \left\{ (\bar{\gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2} \right\} \geq 0, \quad \Im \{ \bar{\gamma} \} \geq 0$$

$$\text{Wd}(\alpha) = -i\pi \sum_{M=0}^{\infty} \left\{ \frac{(i)^M}{(n)^M M!} \cdot I_M(2D, \bar{\tau}) \right\}$$

$$I_M = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{2D} W^M \cdot H_0^{(1)}(W\bar{\tau}) \cdot dW \right\} \quad (2.33)$$

2.4 Solutions de l'équation modale

L'expression des conditions aux limites sur les valeurs des champs électriques et magnétiques à la surface du fil, nous a amené à poser l'équation modale suivante :

$$M(\alpha) = \bar{\tau}^2 \left\{ H_0^{(1)}(A\bar{\tau}) - H_0^{(1)}(2D\bar{\tau}) \cdot J_0(A\bar{\tau}) \right\} + J_0(A\bar{\tau}) \left\{ P(\alpha) - Q(\alpha) \right\} = 0.$$

Les solutions de cette équation sont les constantes de propagation associées aux modes qui peuvent se propager le long de la ligne posée au-dessus du sol. Nous allons mettre en évidence, dans un cas particulier, l'existence de deux solutions distinctes α_1 et α_2 . Nous montrerons ensuite, grâce à l'utilisation de procédés numériques, que dans le cas général, il existe également deux solutions différentes pour l'équation écrite ci-dessus.

L'expression de $Q(\alpha)$ présente, dans le plan complexe α , un point singulier en $\alpha_p = (1-1/n^2)^{1/2}$. Autour de ce point particulier, c'est la valeur de $Q(\alpha)$ qui sera prépondérante dans l'expression de $M(\alpha)$. Dans le domaine des basses fréquences et en dehors de ce point particulier, la valeur de $Q(\alpha)$ peut être négligée par rapport à celle de $P(\alpha)$. Dans le domaine des fréquences qui nous intéresse et qui peut s'étendre jusque quelques GHz, cette approximation reste discutable. Nous verrons d'ailleurs par la suite que le rapport des modules des expressions P et Q reste inférieur à trois. Cependant, dans un premier temps, nous allons quand même négliger la valeur de $Q(\alpha)$, en gardant à l'esprit le fait que le résultat recherché n'est pas le résultat définitif ; il s'agit, pour l'instant de trouver une valeur qui servira de départ aux processus d'itération numérique qui donneront la valeur exacte de la solution.

Dans le cas particulier où la hauteur d est faible par rapport à la longueur d'onde et le module du coefficient n grand par rapport à 1, l'expression de $P(\alpha)$ se résume aux termes prépondérants de son développement limité ; l'équation modale s'écrit :

$$\frac{2i}{\pi} \gamma^2 \cdot \log(2D/A) - \frac{2}{D\pi n} = 0 \quad (2.34)$$

ce qui donne pour la valeur de la constante de propagation :

$$\alpha_1 \approx 1 + \frac{i}{2nD \log(2D/A)} \quad (2.35)$$

Dans le cas où, dans le plan complexe α , l'inconnue est proche de α_p , c'est le terme $Q(\alpha)$ qui est prépondérant sur le terme $P(\alpha)$. Toujours dans le cas particulier d'une hauteur d faible et d'un coefficient n grand, l'expression $Q(\alpha)$ se réduit aux premiers termes de son développement limité autour de α_p et s'écrit :

$$Q(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{\pi n^3} \left[\frac{2i\pi}{\lambda_p} \right]$$

L'équation modale devient :

$$\frac{2i}{\pi} \gamma^2 \log(2D/A) - \frac{2}{D\pi n} + \frac{4i}{n^3 \lambda_p} = 0$$

Il apparaît dans cette zone une deuxième solution α_2 définie par :

$$\alpha_2 = \left[\alpha_p^2 + \frac{1}{n^4 \left[\frac{i \log(2D/A)}{n\pi} - \frac{1}{\pi D} \right]^2} \right]^{1/2} \quad (2.36)$$

Nous faisons une application numérique pour les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} d &= 0,04 \text{ m} & a &= 0,001 \text{ m} & F &= 1 \text{ GHz} \\ \epsilon_2 &= 5 \epsilon_1 & \sigma_2 &= 3 \text{ } \Omega/\text{m} \end{aligned}$$

$$d'où \quad n = 5,442 + i 4,961$$

Cela donne pour α_1 et α_2 les résultats écrits ci-dessous :

$$\alpha_1 = 1,0125 + i 0,0136$$

$$\alpha_2 = 0,9987 + i 0,0087$$

Nous pouvons vérifier que l'application numérique utilisée ci-dessus vérifie point par point les conditions de validité des expressions simplifiées de $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ (voir paragraphe 2.3.1).

‡ la hauteur du fil au-dessus du sol est inférieure à la longueur d'onde dans le vide, soit $2D < 4\pi$: $2D = 1,67$

‡ si $2D < \lambda_m(10)$ il faut $\left| \frac{\lambda_m^2 10}{4D^2 n^2} \right| \ll 1$: $\left| \frac{\lambda_m^2 10}{4D^2 n^2} \right| = 0,035$

En utilisant les résultats approchés α_1 et α_2 nous pouvons également vérifier les approximations faites en fonction des résultats sur $\bar{\gamma}$:

‡ la constante de propagation α est proche de la constante de propagation dans le vide, soit $|\bar{\gamma}^2| \ll 1$: $|\bar{\gamma}^2| = 0,04$.

‡ le module de $\bar{\gamma}$ est négligeable par rapport à la valeur de λ_c , soit $\lambda_c \gg |\bar{\gamma}^2|$: $\lambda_c = 1,37$.

Pour généraliser la recherche dans le plan complexe α de ces constantes de propagation α_1 et α_2 , nous avons mis au point un programme d'itération numérique basé sur la méthode de NEWTON^[44]. Ce programme permet, à partir d'une valeur α imposée, d'approcher par pas successifs la valeur qui tend à annuler l'équation modale. Dans un premier temps, nous avons programmé pour le calcul de $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ les expressions approchées écrites en (2.17) et (2.33). Des détails sur ce programme sont donnés dans l'annexe A2.

Nous avons noté ci-dessous les résultats obtenus par le programme d'itération numérique en utilisant pour $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ les expressions approchées (2.17) et (2.33) et en introduisant comme valeurs de départ les valeurs trouvées précédemment :

	solution α_1	solution α_2
valeur de départ	1,0125 + i 0,0136	0,9987 + i 0,0087
résultat obtenu	1,0119 + i 0,0189	0,9976 + i 0,0069

Il faut noter que quelque soit la précision absolue du test d'arrêt dans le programme d'itération, les résultats convergent vers les mêmes valeurs numériques. Cela tend à prouver que les expressions α_1 et α_2 sont des solutions vraies de l'équation modale simplifiée, et non des minimums de cette expression.

Pour trouver la valeur des constantes de propagation en dehors du domaine de validité des approximations définies au paragraphe 2.3.1, il est nécessaire de calculer les expressions exactes de $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ par un programme d'intégration numérique. La recherche des zéros de l'équation modale se fait toujours par la méthode de NEWTON. Les détails du programme correspondant sont développés dans l'annexe A3. En prenant comme valeurs de départ les solutions de l'équation modale approchée, nous obtenons deux nouvelles valeurs α_1 et α_2 que nous avons portées dans le tableau suivant en comparaison avec les valeurs déjà trouvées :

	solution α_1	solution α_2
valeur de départ (formulation analytique)	1,0125 + i 0,0136	0,9987 + i 0,0087
résultat obtenu par itération en utilisant les expressions approchées de P et Q	1,0119 + i 0,0189	0,9976 + i 0,0069
résultat obtenu par itération en utilisant les expression exactes de P et Q	1,0118 + i 0,0191	0,9974 + i 0,0069

De la même façon que précédemment, nous avons vérifié que quelque soit la précision absolue du test d'arrêt dans le programme d'itération, les résultats convergent vers les mêmes valeurs numériques.

Il apparaît dans ce tableau que dans le cas particulier où les conditions de validité des approximations sont respectées, les résultats obtenus avec l'équation modale simplifiée ou avec l'équation modale exacte sont très proches les uns des autres.

Nous verrons, dans l'exemple numérique qui suit, que si les conditions de validité ne sont plus respectées, il devient nécessaire d'utiliser l'équation exacte.

Application numérique : $d = 0,04 \text{ m}$ $a = 0,001 \text{ m}$ $F = 1 \text{ GHz}$
 $\epsilon_2 = 5 \epsilon_1$ $\sigma_2 = 10^{-2} \text{ } \omega / \text{m}$

d'où : $n = 2,2364 + i 0,04024$

$\left| \frac{\ln^2 10 / 4 D^2 n^2}{1} \right| = 0,38$ et la condition $\left| \frac{\ln^2 10 / 4 D^2 n^2}{1} \right| \ll 1$ n'est pas respectée.

Les résultats numériques sont les suivants :

équation approchée : $\alpha_1 = 0,918 + i 0,021$

$$\alpha_2 = 0,995 + i 0,046$$

équation modale exacte : $\alpha_1 = 0,943 + i 0,035$

$$\alpha_2 = 0,982 + i 0,023$$

2.5 Validité des hypothèses faites dans les paragraphes précédents

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de vérifier a posteriori la validité des hypothèses qui nous ont permis d'établir d'une part l'expression de l'équation modale, d'autre part, les expressions de $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$.

Dans un premier temps, nous avons comparé les résultats obtenus pour les expressions approchées et exactes de $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ quand α décrit le demi-plan complexe supérieur selon l'expression : $\alpha = 1 + Sl \exp(i \varnothing)$.

Nous avons donc fait ces calculs, dans une configuration physique et géométrique donnée, pour plusieurs valeurs de Sl et \varnothing ; nous avons notamment choisi des points proches du point singulier α_p défini par :

$$\alpha_p = \left(1 - \frac{1}{n^2 + 1} \right)^{1/2}$$

Nous commentons ci-dessous les résultats obtenus pour chacune des configurations considérées

$$1) \quad d = 0,04 \text{ m} \quad a = 0,001 \text{ m} \quad \sigma_2 = 0,01 \text{ m} \quad F = 1 \text{ GHz} \\ \epsilon_2 = 5 \epsilon_0$$

$$\text{d'où : } n = 2,2364 + i 0,04024 \quad \alpha_p = 0,913 + i 0,0027$$

Ces données numériques sont telles que les conditions d'approximation ne sont pas respectées et il apparaît effectivement que les résultats des expressions approchées et exactes sont différents. Les erreurs relatives sont de l'ordre de 25% pour les points situés dans la zone proche de α_p et du point 1, elles peuvent atteindre 50% pour des plus grandes valeurs de S_1 (autour de 0,5). Le module de $P(\alpha)$ reste supérieur au module de $Q(\alpha)$ sans que leur rapport ne dépasse quelques unités.

$$2) \quad d = 0,04 \text{ m} \quad a = 0,001 \text{ m} \quad \sigma_2 = 7 \text{ } \tau / \text{m} \quad \epsilon_2 = 5 \epsilon_0 \quad F = 1 \text{ GHz} \\ \text{d'où : } n = 8,0964 + i 7,781 \quad \alpha_p = 0,9998 + i 0,004$$

Dans ce cas les conditions d'approximation sont respectées. Nous avons constaté que les résultats exacts et approchés étaient identiques, à mieux que 1% près dans le pire des cas. Nous avons également constaté que généralement la valeur de $P(\alpha)$ est supérieure à la valeur de $Q(\alpha)$ sauf dans la région proche du point singulier α_p où $Q(\alpha)$ devient plus grand que $P(\alpha)$. Pour cette valeur de la fréquence, le rapport des modules des expressions $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ ne dépasse cependant pas la valeur 2 à 3.

$$3) \quad d = 0,04 \text{ m} \quad a = 0,01 \text{ m} \quad \sigma_2 = 0,01 \text{ } \tau / \text{m} \quad F = 1 \text{ MHz} \\ \epsilon_2 = 5 \epsilon_0$$

$$\text{d'où } n = 9,6162 + i 9,359 \quad \alpha_p = 0,99991 + i 0,0028$$

C'est dans ce domaine de fréquences qu'apparaît le plus nettement la différence entre les modules de $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$. Pour les différents points que nous avons calculé, le module de $P(\alpha)$ reste pratiquement constant et au moins cinquante fois plus grand que $Q(\alpha)$. Il n'y a que dans la zone proche de α_p où les modules des deux expressions ont les mêmes ordres de grandeur. C'est cette remarque qui nous a permis de trouver la première solution de l'équation modale en supprimant l'expression de $Q(\alpha)$.

Dans le paragraphe 2.2, pour écrire la condition de nullité du champ à la surface du fil, nous avons choisi de calculer la valeur moyenne du champ à la surface du fil puis d'appliquer la condition de nullité sur cette valeur moyenne. Pour évaluer les erreurs causées par cette hypothèse, nous avons fait plusieurs calculs en utilisant les conditions aux limites suivantes :

- 1°) la valeur moyenne du champ électrique à la surface du fil est nulle
- 2°) la champ électrique est nul au point supérieur de la section du fil :
 $y = 0, z = d+a.$
- 3°) le champ électrique est nul à l'intersection de la circonférence de la section et de l'axe horizontal : $y = \pm a, z = d.$

Ces calculs ont été faits pour plusieurs hauteurs du fil au-dessus du sol et il est apparu, comme on pouvait s'y attendre, que les cas les plus défavorables correspondent à ceux obtenus pour des faibles hauteurs au-dessus du sol.

C'est un résultat logique puisque dans ce cas, l'hypothèse du courant uniformément réparti n'est plus valable. Dans le cas le plus défavorable que nous avons envisagé, c'est-à-dire pour un fil de rayon 1 mm situé à 2 cm au-dessus du sol, les résultats obtenus pour un point particulier de la circonférence différent des résultats moyennés de moins de 2% pour la partie réelle et de moins de 3% pour la partie imaginaire. Dans tous les cas, la valeur moyenne des résultats ponctuels est égale au résultat obtenu par l'annulation de la valeur moyenne du champ.

2.6 Variation des constantes de propagation

Pour caractériser ces deux constantes de propagation discrètes α_1 et α_2 , nous avons représenté sur les planches PL2.1 à PL2.6, les lieux qu'elles décrivent dans le plan complexe α lorsque les paramètres géométriques et électriques de la structure varient ^[12].

Pour calculer les valeurs représentées sur ces planches, nous avons utilisé l'équation modale approchée quand les valeurs des paramètres sont telles que les conditions d'approximation sont respectées. Dans les autres cas, nous avons utilisé l'équation modale exacte ; le calcul a été fait soit, en prenant comme valeur de départ le résultat de l'équation modale approchée soit, de proche en proche à partir d'une valeur connue.

Les planches PL2.1 à PL2.3 représentent, à des fréquences différentes, les lieux décrits par les constantes de propagation quand la hauteur d varie.

On rappelle que l'expression α représente une quantité réduite par rapport à la constante de propagation dans le vide. Dans le plan complexe, le point 1 caractérise donc une onde qui se propage sans atténuation à la vitesse de la lumière. La partie réelle de α est inversement proportionnelle à la vitesse de propagation ; le point représentatif dans le plan α correspond à des vitesses supérieures à la vitesse de la lumière lorsqu'il se situe dans le demi-plan à gauche du point 1, inférieures à la vitesse de la lumière à droite du point 1. La partie imaginaire de α est directement proportionnelle à l'affaiblissement de l'onde.

Sur ces trois planches, nous avons porté en pointillé les résultats obtenus dans l'approximation quasi-TEM.

Cette approximation est valable en basse fréquence et pour des hauteurs d faibles par rapport à la longueur d'onde. Dans cette hypothèse, on peut considérer que la valeur de la constante de propagation est proche de celle de l'air. On peut donc envisager de remplacer α par 1 dans les expressions des fonctions à intégrer car dans ce cas, l'équation modale devient une équation explicite simple dont nous donnons ci-dessous l'expression :

$$M(\alpha) = (1 - \alpha^2) \log(a/2d) + \frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D|\lambda|)}{|\lambda| + \mu_2} d\lambda - \frac{2\alpha^2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D|\lambda|)}{n^2|\lambda| + \mu_2} d\lambda \quad (2.37)$$

avec

$$\mu_2 = (\lambda^2 + 1 - n^2)^{1/2} \quad \text{Re}\{\mu_2\} \geq 0$$

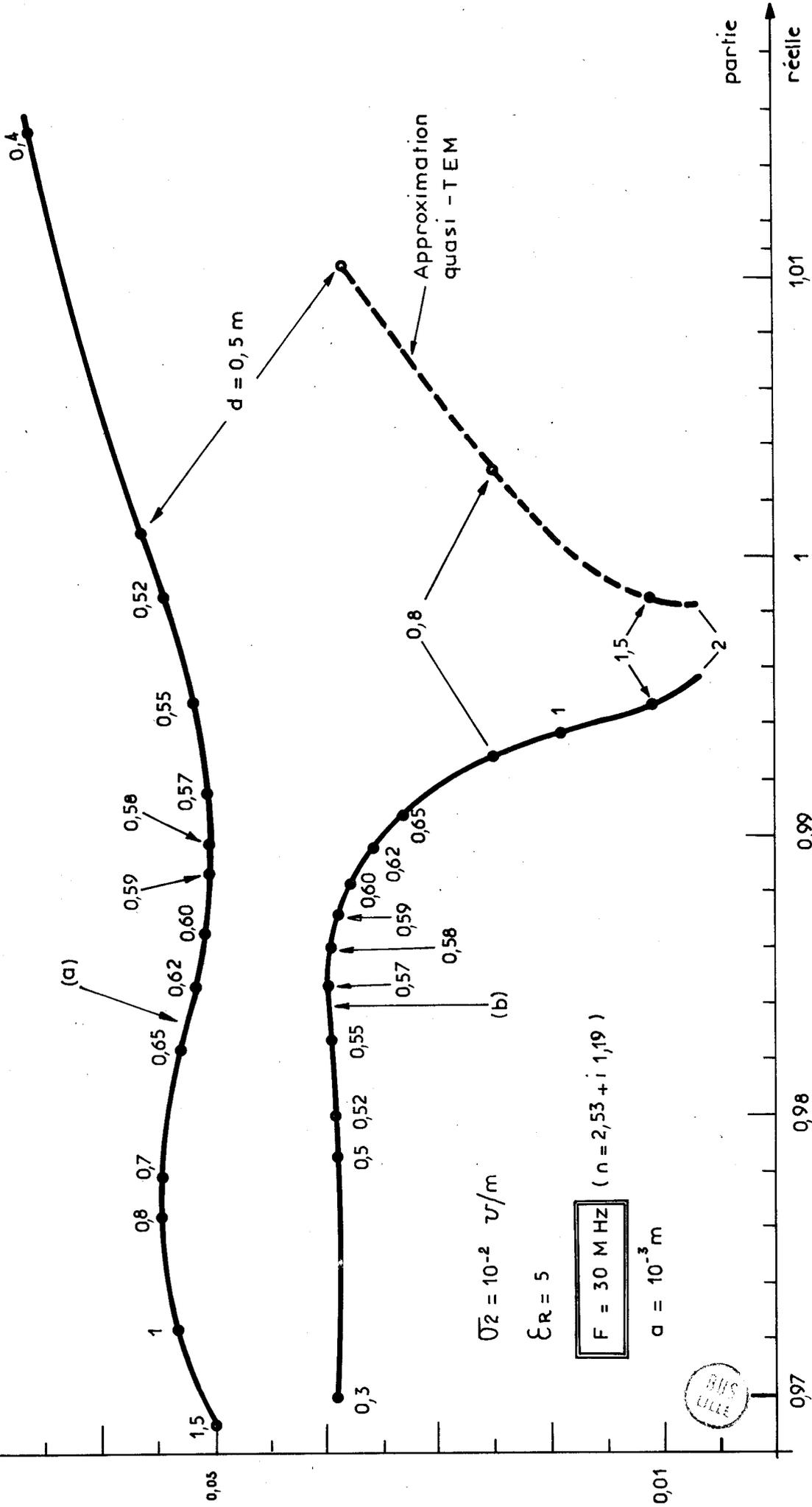
$$n = \left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left(1 + i \frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2} \right) \right]^{1/2} \quad 0 < \arg n < \pi/4$$

Les résultats que nous donnons ont été établis en calculant les intégrales par un programme d'intégration numérique développé par DEMOULIN^[33].

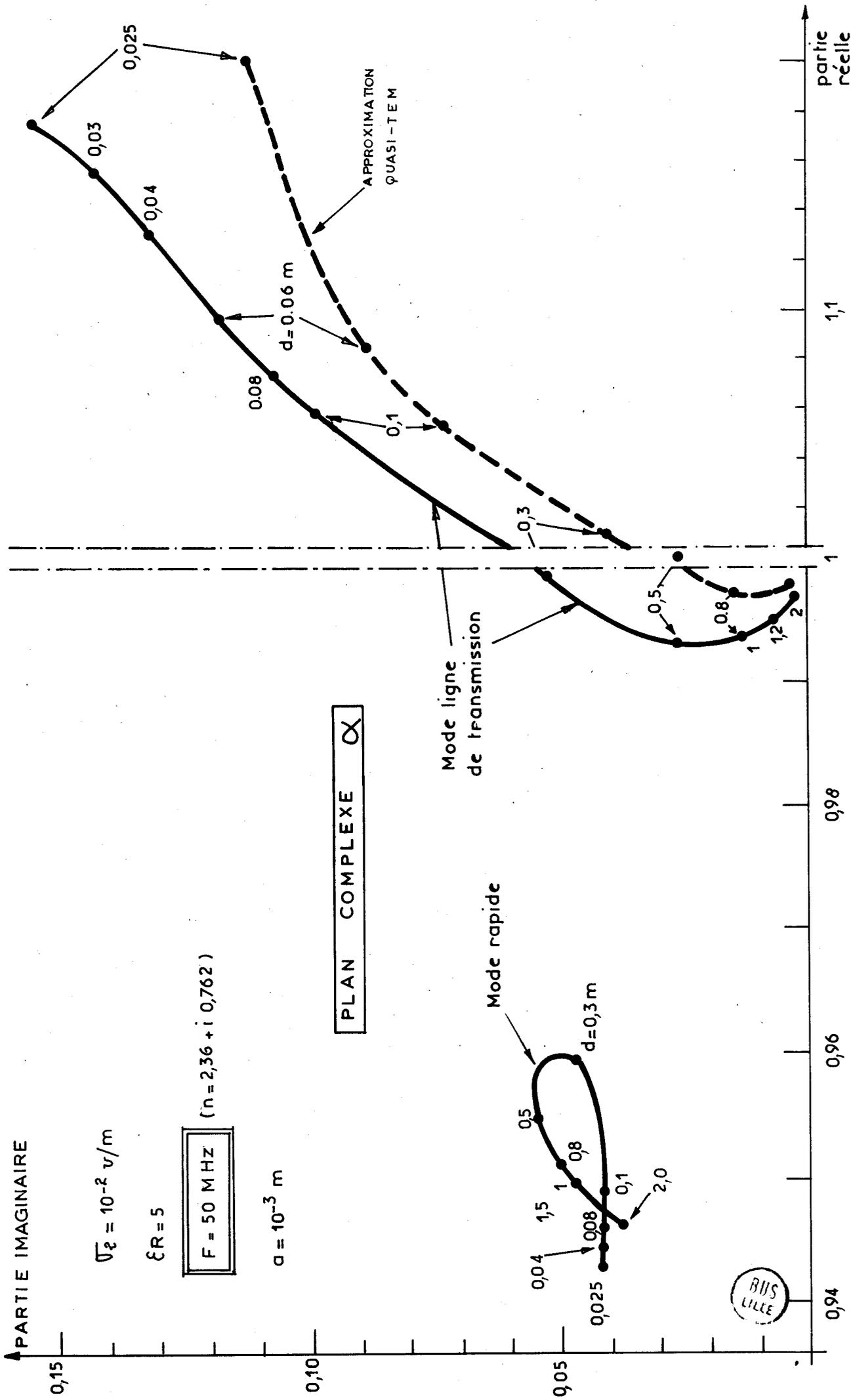
Par définition, nous appellerons "mode ligne de transmission", le mode associé aux constantes de propagation les plus proches dans le plan complexe des résultats obtenus dans l'approximation quasi-TEM.

Partie imaginaire

PLAN COMPLEXE α



PL 2.1 : Variations des constantes de propagation en fonction de la hauteur



PL 2.2 : Variations des constantes de propagation en fonction de la hauteur

partie imaginaire

PLAN COMPLEXE α

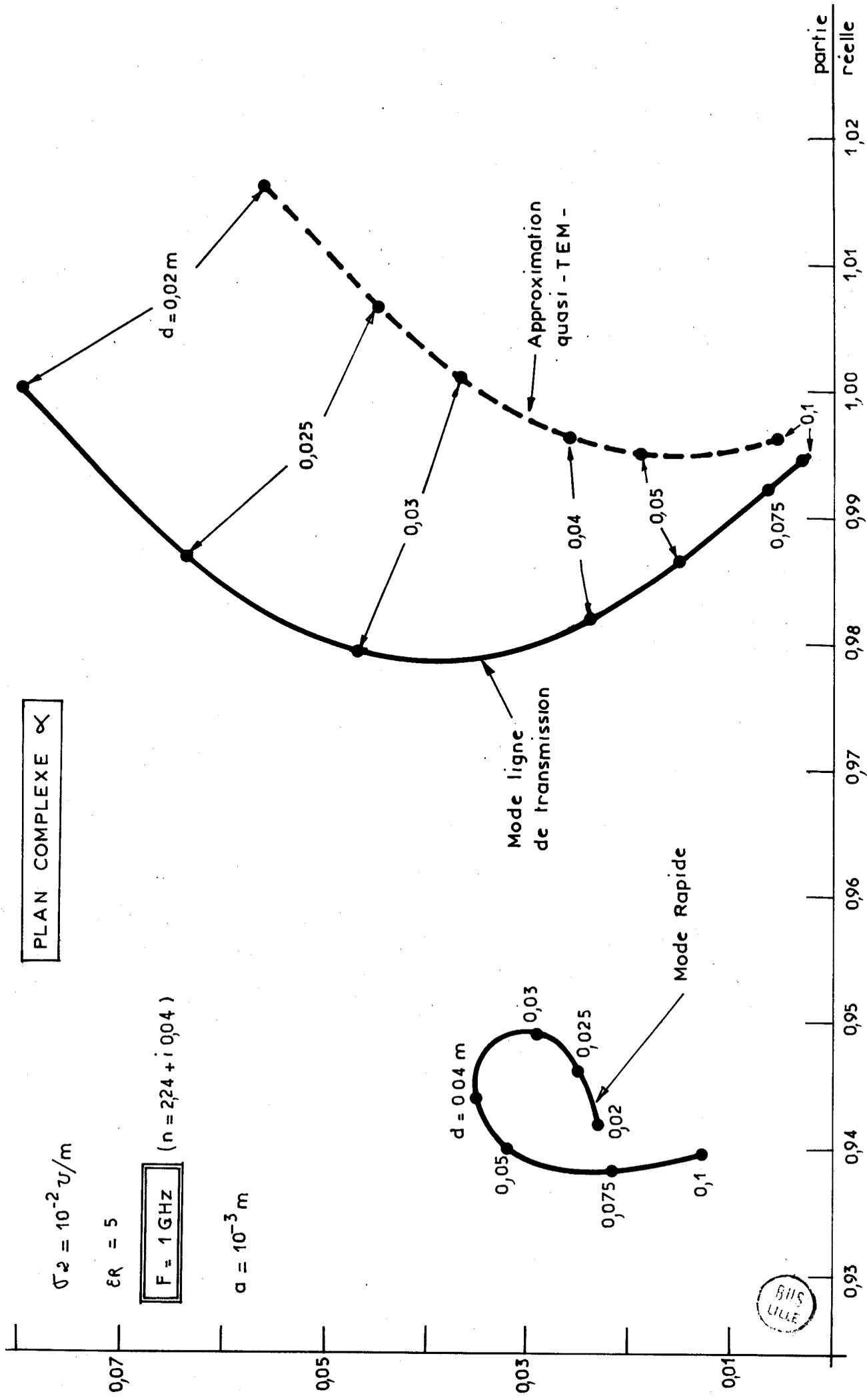
$$\sigma_2 = 10^{-2} \nu/m$$

$$\epsilon_R = 5$$

$$F = 1 \text{ GHz}$$

$$(n = 224 + i0,04)$$

$$a = 10^{-3} \text{ m}$$



PL. 2.3 VARIATIONS DES CONSTANTES DE PROPAGATION EN FONCTION DE LA HAUTEUR

L'autre mode sera appelé "mode rapide", car la vitesse de phase qui lui est associée est en général supérieure à la vitesse de phase du mode "ligne de transmission".

La première remarque que l'on peut faire à propos de la planche PL2.1 est que le lieu obtenu à partir d'une variation continue du paramètre d n'est pas toujours caractéristique du même mode. Pour les faibles hauteurs, c'est la courbe (a) qui présente les résultats les plus proches de ceux de l'approximation quasi-TEM. (par exemple pour $d = 0,5$ m) ; quand la hauteur augmente, c'est la courbe (b) qui peut être associée au mode ligne de transmission (environ pour $d > 0,6$ m).

La comparaison des planches PL2.1 et PL2.2 montre qu'il est possible que pour une valeur de fréquence comprise entre 30 MHz et 50 MHz, les deux lieux des constantes de propagation aient un point commun pour la même valeur de d . C'est le phénomène de dégénérescence modale déjà observé par KUESTER et CHANG^[14] dans les représentations des lieux des constantes de propagation quand la hauteur d et le rayon a du fil varient .

L'observation des trois planches montre qu'à partir d'une fréquence de 50 MHz, le mode rapide est moins sensible aux variations de hauteur que le mode lent. De façon générale, pour des hauteurs faibles, c'est le mode ligne de transmission qui est plus atténué que le mode rapide, alors que pour les grandes hauteurs, c'est le mode rapide qui est plus atténué.

Sur la planche PL2.4, nous avons représenté, toujours dans le plan complexe α , les lieux décrits par les deux constantes de propagation quand la conductivité du sol varie. Nous avons également porté en pointillé les résultats obtenus dans l'approximation quasi-TEM. Comme pour les trois premières planches, on peut remarquer que le lieu obtenu à partir d'une variation continue du paramètre σ n'est pas toujours caractéristique du même mode.

Pour les fortes conductivités, c'est la courbe (a) qui présente les résultats les plus proches de ceux de l'approximation quasi-TEM ; quand la conductivité diminue, c'est la courbe (b) qui peut être associée au mode ligne de transmission. Nous notons également que c'est dans la région où la conductivité du sol est égale à $\omega \epsilon$ que les constantes de propagation sont les plus sensibles aux variations du paramètre σ_2 .

Quand la conductivité du sol augmente, les deux constantes de propagation tendent vers la valeur de la constante de propagation dans le vide. En effet, dans ce cas, la structure peut être ramenée par la théorie des images électriques à une ligne bifilaire placée dans un milieu homogène qui est l'air.

Sur la planche PL2.5, la permittivité diélectrique du sol a été introduite en paramètre par sa valeur relative ϵ_r .

Comme pour les autres courbes, nous avons tracé en pointillé les résultats obtenus dans l'approximation quasi-TEM. De la même façon que pour le cas précédent, il apparaît, sur cette planche, que le lieu obtenu à partir d'une variation continue du paramètre ϵ_r n'est pas toujours caractéristique du même mode. Pour des valeurs de la permittivité relative supérieures à 8, c'est la courbe (a) qui présente les résultats les plus proches de ceux de l'approximation quasi-TEM ; quand la permittivité relative diminue, c'est la courbe (b) qui est associée au mode ligne de transmission. Avec cette définition, la vitesse de phase du mode rapide reste toujours supérieure à la vitesse de phase du mode de ligne de transmission. Il apparaît également sur cette planche que la constante de propagation du mode rapide, et plus précisément sa partie réelle, est plus sensible que la constante de propagation du mode ligne de transmission lorsque la permittivité diélectrique du sol varie.

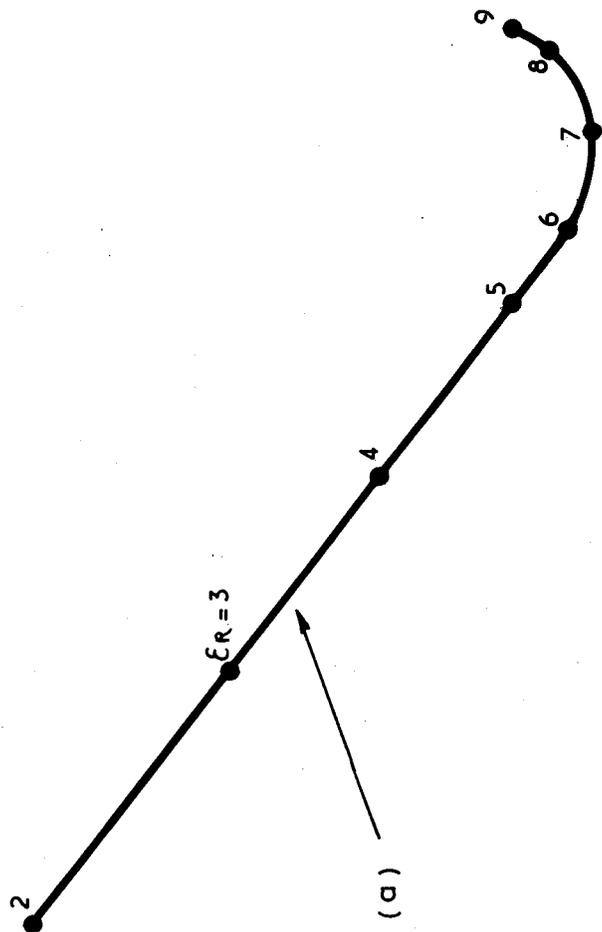
BUS
LILLE

La planche PL2.6 représente les variations des deux constantes de propagation en fonction de la fréquence. Le calcul des valeurs réduites α_1 et α_2 faisant intervenir la valeur de la fréquence par l'intermédiaire de la constante de propagation dans l'air k_1 , nous avons choisi pour ce cas particulier une autre représentation dans le plan complexe.

La partie réelle du point représentatif traduit le rapport entre la vitesse de phase de l'onde et la vitesse de la lumière. La partie imaginaire du point représentatif traduit l'affaiblissement associé à l'onde qui se propage ; il s'exprime en Nepers/m. Le point 1 représente toujours la constante de propagation dans l'air. La courbe en pointillé représente, comme pour les autres planches, les résultats obtenus dans l'approximation quasi-TEM.

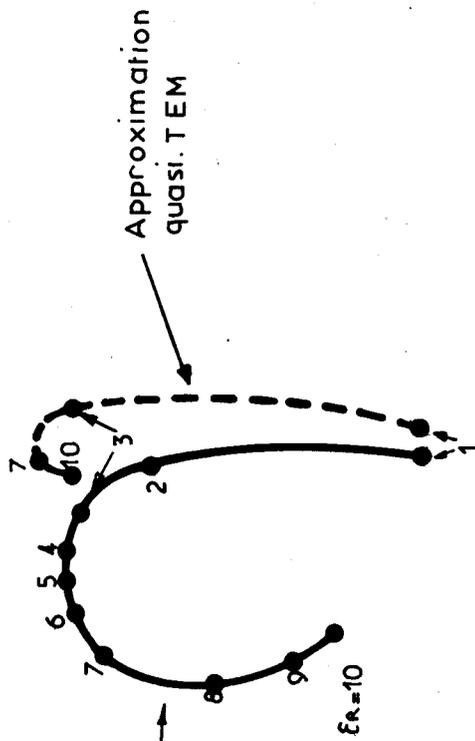
partie imaginaire

PLAN COMPLEXE α



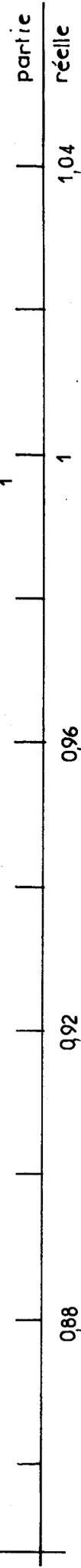
(a)

$d = 0,04 \text{ m}$
 $\sqrt{\epsilon_r} = 0,01 \text{ V/m}$
 $F = 1 \text{ GHz}$
 $\sigma = 10^{-3} \text{ m}$



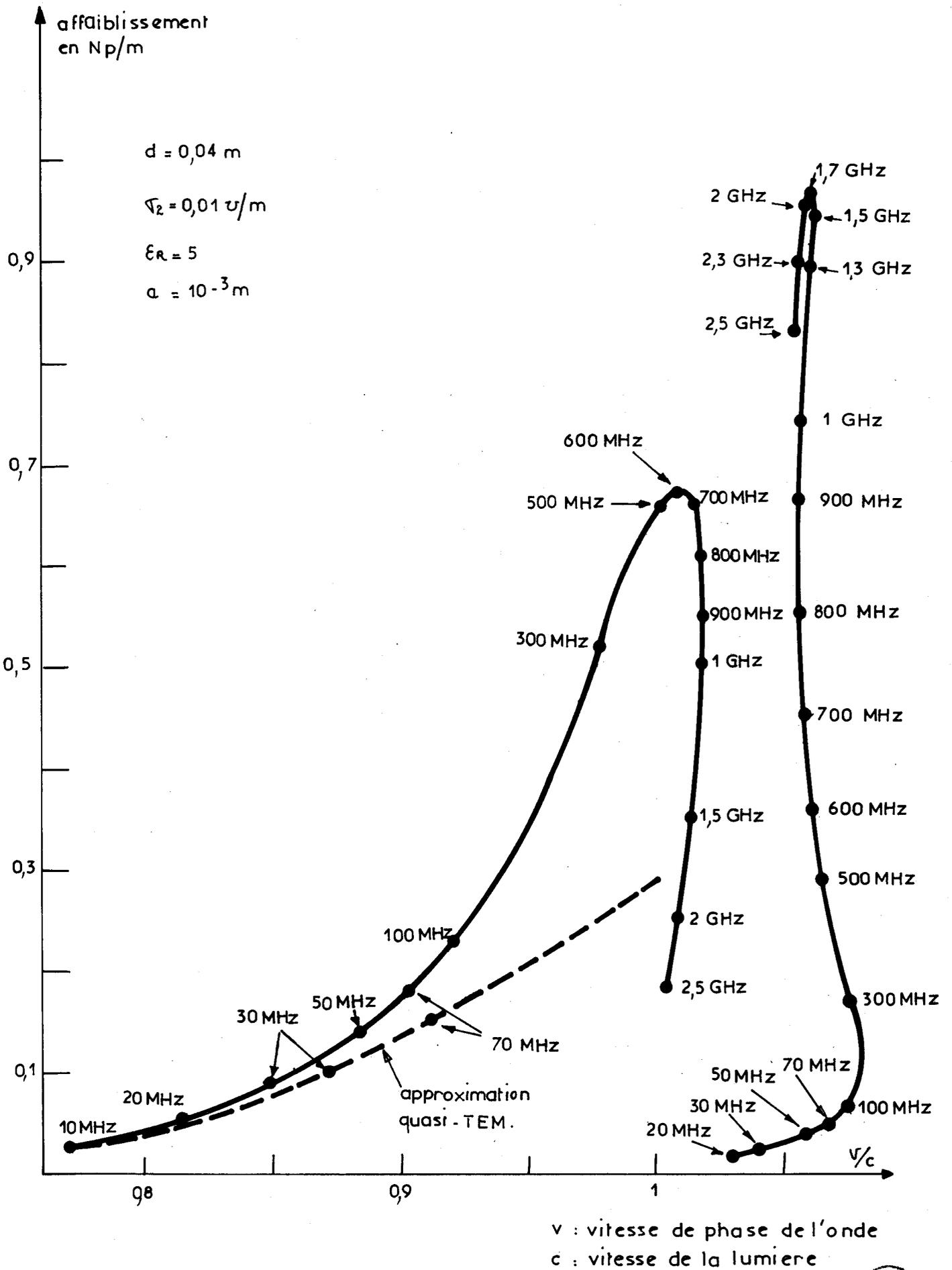
(b)

Approximation quasi-TEM



PL 2.5 : VARIATIONS DES CONSTANTES DE PROPAGATION EN FONCTION DE LA PERMITTIVITÉ DIELECTRIQUE DU SOL





PL 2.6 : VARIATIONS DES CONSTANTES DE PROPAGATION EN FONCTION DE LA FREQUENCE



Cette approximation est surtout valable dans le domaine des basses fréquences où la longueur d'onde dans le vide est grande ; nous pouvons constater que jusqu'à une fréquence de 70 MHz, la courbe des résultats du mode ligne de transmission reste proche de la courbe en pointillés. Lorsque la fréquence augmente, la constante de propagation du mode ligne de transmission passe par un maximum en valeur d'affaiblissement puis par un maximum en vitesse de propagation et enfin tend vers le point représentatif 1. En effet, pour les très hautes fréquences, la longueur d'onde dans le vide est suffisamment petite pour qu'on puisse supposer comme négligeable l'influence de l'interface air-sol. On peut donc considérer que l'onde se propage dans un milieu homogène qui est l'air, le long d'un cylindre parfaitement conducteur ; dans ce cas, la valeur limite de la constante de propagation est bien celle de l'air^[45]. Il faut également noter que la vitesse de propagation associée au mode rapide est pratiquement indépendante de la fréquence. Nous avons vu au paragraphe 2.4 que le point représentatif du mode rapide était, moyennant certaines conditions sur la valeur de n , lié au point singulier de l'expression $Q(\alpha)$ défini par :

$$\alpha_p = \left(1 - \frac{1}{n^2 + 1}\right)^{1/2} \quad \text{avec } n = \left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left(1 + i \frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2}\right) \right]^{1/2}$$

Dans la mesure où le rapport $\sigma_2/\omega\epsilon_2$ est faible par rapport à 1, le point représentatif de α_p dans le plan complexe α reste pratiquement indépendant de la fréquence. Un point immobile dans la représentation en α donnera une droite verticale dans la représentation adoptée sur la planche PL2.6 ; c'est bien ce que l'on constate sur une partie de la courbe caractérisant le mode rapide.

Dans l'exemple choisi, le rapport $\sigma_2/\omega\epsilon_2$ est égal à 1 pour une fréquence de 36 MHz. Pour des valeurs de fréquence très supérieures à 36 MHz, la valeur de n restera pratiquement constante. Dans ce cas, la valeur de la partie réelle du point singulier α_p est de 0,913. Cette valeur ramenée à la représentation de la planche PL2.6 devient 1,095, ce qui correspond bien à l'ordre de grandeur trouvé pour des valeurs de la fréquence supérieures à 36 MHz.

2.7 Calcul des champs électriques et magnétiques associés aux modes de propagation

En considérant séparément les deux modes de propagation nous allons calculer la valeur des champs électriques et magnétiques en chacun des points de l'espace. Nous tracerons ensuite pour chaque mode les courbes iso-énergie dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

2.7.1. Expressions des champs électriques et magnétiques

Le calcul des potentiels de Hertz induits par un fil infini placé au-dessus du sol et parcouru par un courant de la forme $I = I_0 \exp(ik_1 \alpha x - i \omega t)$ a déjà été fait par SOIRON^[6], et nous n'en rappellerons ici que les principaux résultats.

Potentiel vecteur électrique dans l'air : (2.38)

$$\begin{aligned} \pi_{x1} = & \frac{-Z_0 I_0}{4 k_1} \exp(ik_1 \alpha x) \left\{ H_0^{(1)}(k_1 \sqrt{(z-d)^2 + y^2})^{1/2} - H_0^{(2)}(k_1 \sqrt{(z+d)^2 + y^2})^{1/2} \right. \\ & \left. + \frac{2}{i \pi \sqrt{\epsilon_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\alpha^2}{\mu_2 + n^2 \mu_1} \right] \cdot \exp[-(z+d)k_1 \mu_1] \cdot \exp(-i \lambda k_1 y) \cdot d \lambda \right\} \end{aligned}$$

$$\text{où: } \mu_1 = (\lambda^2 - \sqrt{\epsilon_2})^{1/2} ; \mu_2 = (\lambda^2 + \alpha^2 - n^2)^{1/2} ; \operatorname{Re}\{\mu_1\}, \operatorname{Re}\{\mu_2\} \geq 0$$

$$n = \left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left(1 + i \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\omega \epsilon_2} \right) \right]^{1/2} \quad 0 < \arg n < \pi/4$$

Potentiel vecteur magnétique dans l'air :

$$\pi_{x1}^* = \frac{I_0 \alpha (n^2 - 1)}{2 \pi \sqrt{\epsilon_2} k_1} \exp(ik_1 \alpha x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-k_1 \mu_1 (z+h)] \cdot \exp(-i k_1 \lambda y)}{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + n^2 \mu_1)} \cdot \lambda d \lambda \quad (2.39)$$

Potentiel vecteur électrique dans le sol :

$$\pi_{x2} = - \frac{i Z_0 I_0 \exp(ik_1 \alpha x)}{2 \pi k_1 (\alpha^2 - n^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\alpha^2}{\mu_2 + n^2 \mu_1} \right] \cdot \quad (2.40)$$

$$\exp(-k_1 \mu_1 h) \cdot \exp(k_1 \mu_2 z) \cdot \exp(-i \lambda k_1 y) \cdot d \lambda$$

Potentiel vecteur magnétique dans le sol :

$$\vec{\Pi}_{x2}^* = - \frac{\alpha I_0 \exp(ik_1 \alpha x)}{2\pi(\alpha^2 - n^2)k_1} \cdot (n^2 - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \cdot \frac{\exp(-k_1 \mu_1 h)}{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + n^2 \mu_1)} \cdot \exp(k_1 \mu_2 z) \cdot \exp(-i k_1 \lambda y) \cdot d\lambda \quad (2.41)$$

$$\cdot \exp(k_1 \mu_2 z) \cdot \exp(-i k_1 \lambda y) \cdot d\lambda$$

Les formules des champs électriques et magnétiques s'en déduisent par les relations suivantes :

$$\vec{E} = \text{rot rot } \vec{\Pi} + i\omega\mu \text{ rot } \vec{\Pi}^*$$

$$\vec{H} = (\sigma - i\omega\epsilon) \text{ rot } \vec{\Pi} + \text{rot rot } \vec{\Pi}^*$$

2.7.2. Courbes iso-énergie dans le plan transversal

Pour caractériser la densité d'énergie associée à chacun des deux modes nous utilisons le vecteur complexe de Poynting défini par STRATTON^[45].

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*)$$

où \vec{H}^* est le conjugué de \vec{H}

La partie réelle de ce vecteur représente l'intensité moyenne du flux d'énergie, chacune des composantes caractérisant plus particulièrement l'énergie propagée selon son axe directeur.

Nous avons représenté sur les planches PL2.7 et PL2.8 les courbes dans le plan transversal choisi comme origine ($x=0$).

Les données numériques sont les suivantes :

- hauteur du fil $d = 0,04$ m
- fréquence : $F = 1$ GHz
- conductivité du sol : $\sigma_2 = 10^{-2}$ mho/m
- permittivité diélectrique du sol : $\epsilon_2 = 5 \epsilon_0$

$$a = 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 0,04 \text{ m}$$

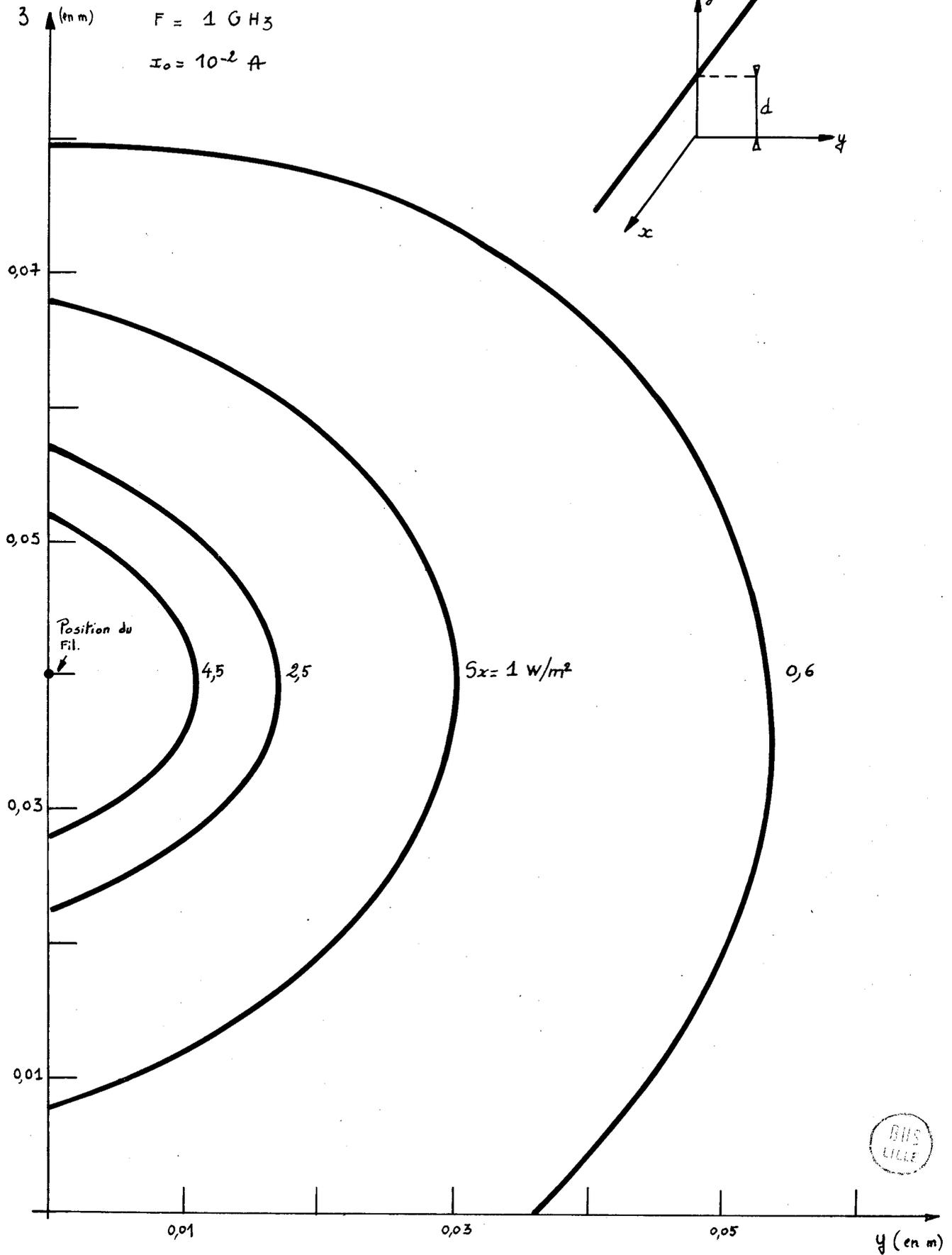
$$\epsilon_R = 5$$

$$\nabla_2 = 10^{-2} \text{ V/m}$$

$$F = 1 \text{ GHz}$$

$$I_0 = 10^{-2} \text{ A}$$

$$\alpha = 0,944 + i 0,035$$



BHS
LILLE

PL.2.7 : Courbes $iso-S_x$ pour le mode rapide

$$a = 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 0,04 \text{ m}$$

$$\epsilon_r = 5$$

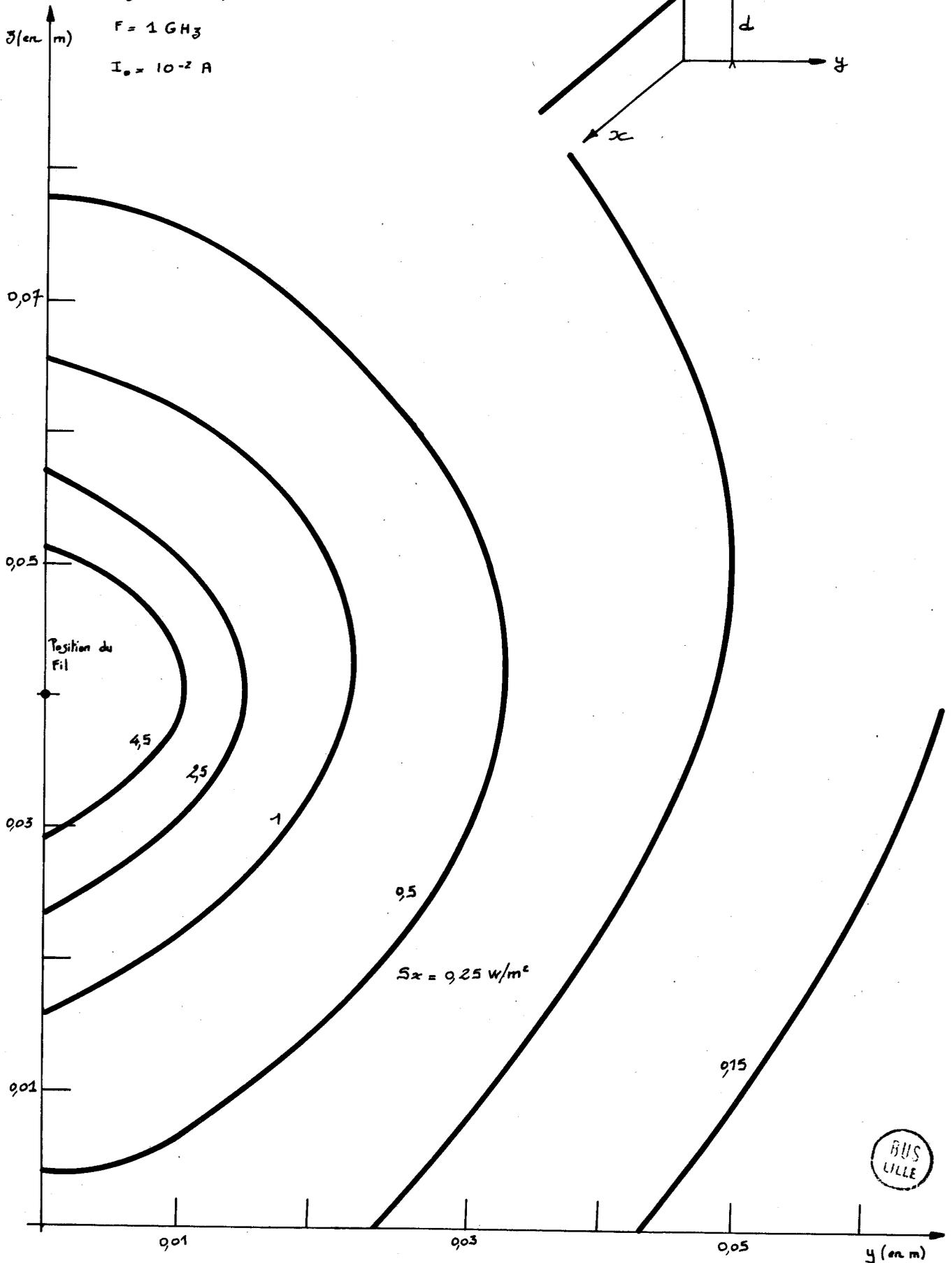
$$V_0 = 10^{-2} \text{ V/m}$$

$$F = 1 \text{ GHz}$$

$$I_0 = 10^{-2} \text{ A}$$

$$\alpha = 0,982 + i 0,024$$

z (en m)

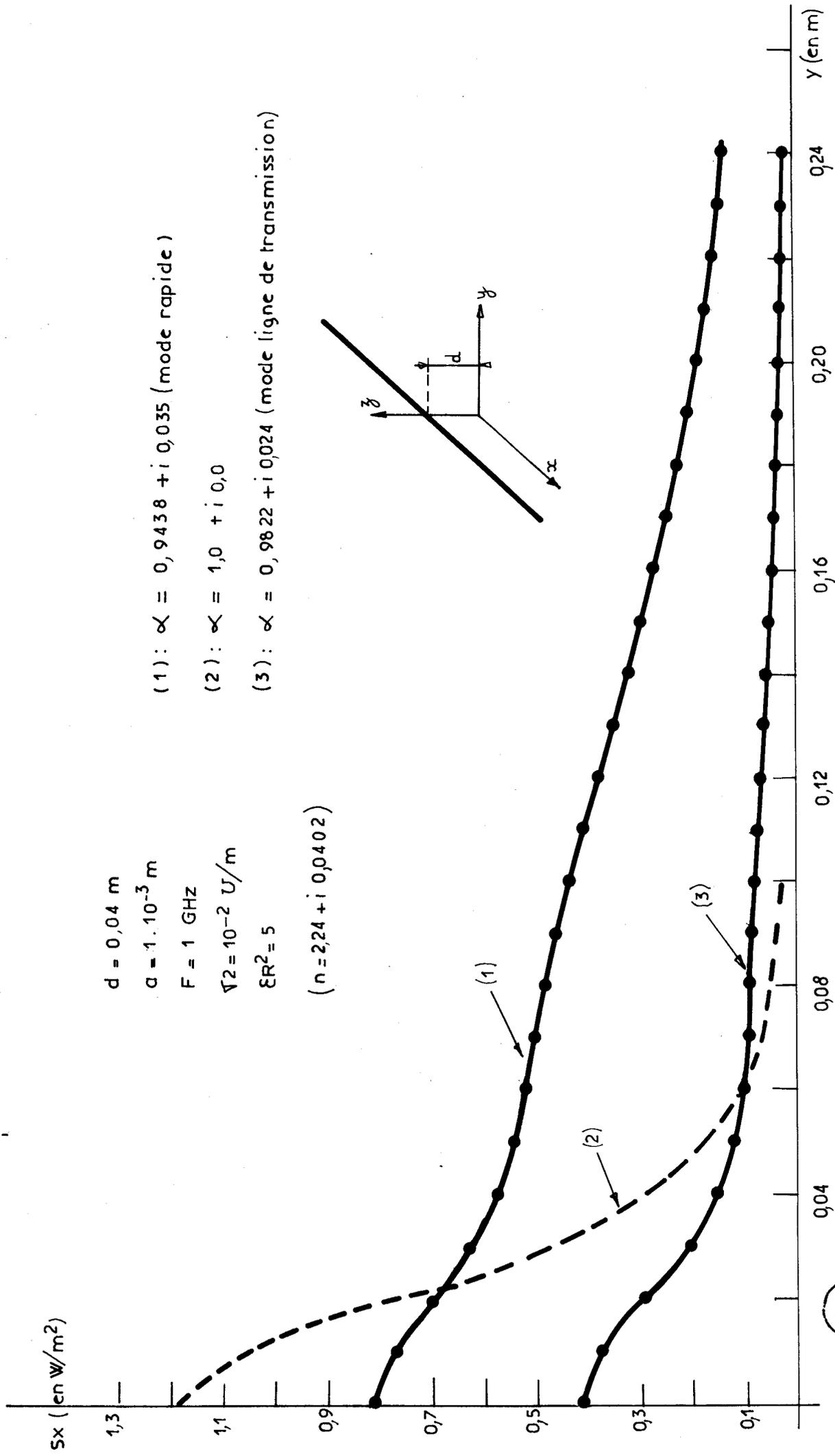


PL. 2.8 : Courbes $10 - S_x$ pour le mode ligne de transmission

La planche PL2.7 est tracée pour le mode rapide, l'autre pour le mode ligne de transmission. Nous constatons que pour ce dernier mode, l'énergie est concentrée autour du fil. Par contre, pour le mode rapide l'énergie est plus répartie entre le fil et le sol, elle diminue moins rapidement quand on s'éloigne du fil. Cette particularité apparaît mieux sur la planche PL2.9 où nous avons tracé dans le plan transversal, la valeur de S_x en fonction de la position du point d'observation par rapport au fil ; ce point est supposé être situé à la surface du sol. La courbe repérée par l'indice 1 correspond au mode rapide, la courbe repérée par l'indice 3 correspond au mode ligne de transmission. La courbe repérée par l'indice 2 correspond au cas limite d'une onde qui se propage sans atténuation à la vitesse de la lumière.

Les planches PL2.10 et PL2.11 représentent les mêmes courbes iso- S_x mais pour une hauteur de 3 cm au-dessus du sol. Ceci correspond par rapport au cas précédent à une inversion du rapport des affaiblissements de chacun des modes (voir planche PL2.3).

Nous constatons cependant la même particularité que précédemment : pour le mode ligne de transmission, l'énergie est plus concentrée autour du fil que pour le mode rapide. Cette remarque semble d'ailleurs être caractéristique du comportement des deux modes.



PL.2.9 : VARIATIONS DE S_x EN FONCTION DE Y , POUR $Z = 0$



$$d = 0,03 \text{ m}$$

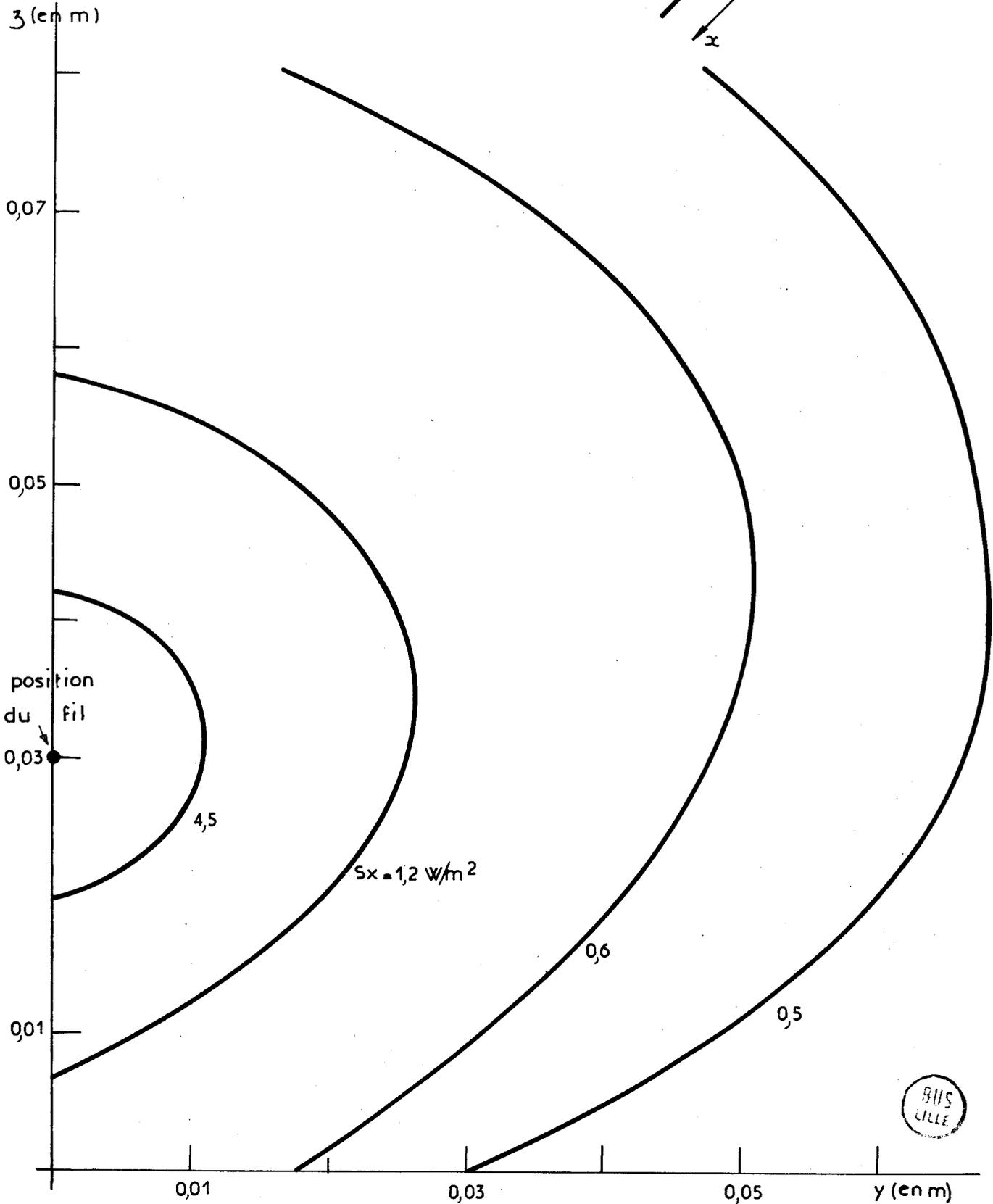
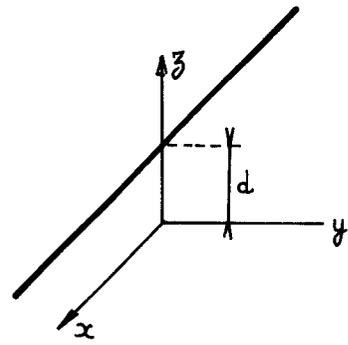
$$a = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$F = 1 \text{ GHz}$$

$$\sigma_2 = 10^{-2} \text{ u/m}$$

$$\epsilon R^2 = 5 \quad (n = 224 + i 0,0402)$$

$$\alpha = 0,9494 + i 0,029$$



PL 2.10: COURBES ISO- S_x pour le mode rapide

$$d = 0,03 \text{ m}$$

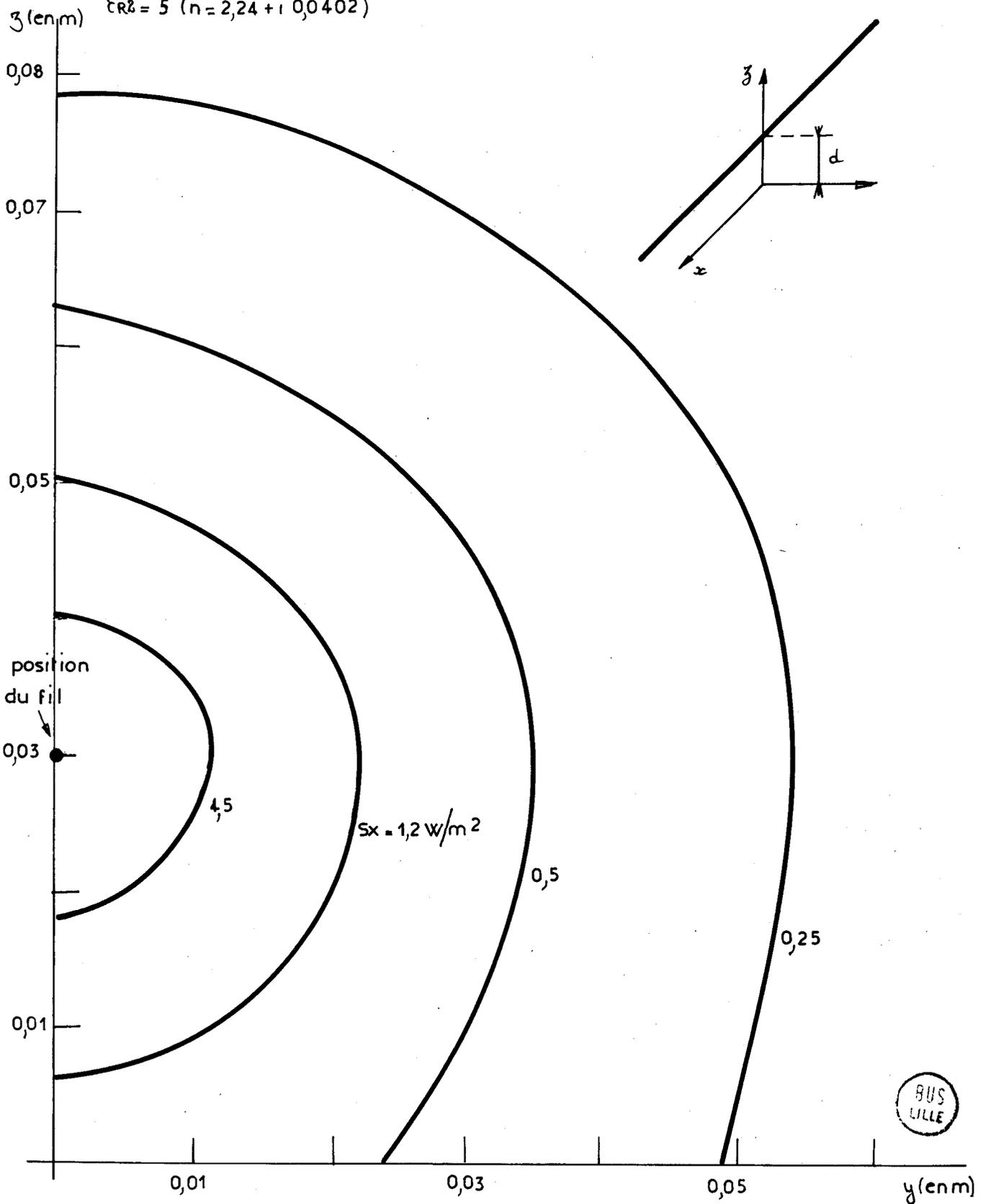
$$a = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$F = 1 \text{ GHz}$$

$$\sqrt{\epsilon_2} = 10^{-2} \text{ V/m}$$

$$\alpha = 0,9797 + i 0,047$$

$$\epsilon_{R2} = 5 \quad (n = 2,24 + i 0,0402)$$



BUS
LILLE

PL 2.11 = COURBES ISO-Sx POUR LE MODE LIGNE DE TRANSMISSION

C O N C L U S I O N

oooooooooooooooooooooooooooo

Dans ce chapitre, nous avons repris le détail de la démarche théorique proposée par OLESEN et CHANG pour calculer les valeurs de deux constantes de propagation différentes pour une onde qui se propage le long d'un fil tendu au-dessus du sol.

A partir de ces résultats théoriques, nous avons développé un programme numérique qui permet de calculer ces deux constantes de propagation pour les cas pratiques qui nous intéressent. Il s'agit, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, d'une ligne tendue à proximité d'un milieu à faible conductivité, comme par exemple le sable ou un mur de briques. Le domaine des fréquences qui nous intéresse s'étend de 50 MHz à quelques GHz.

L'étude du déplacement des points représentatifs des constantes de propagation en fonction de la hauteur du fil au-dessus du sol, a montré qu'en général c'est le mode ligne de transmission qui est le plus sensible aux variations de ce paramètre. Pour des hauteurs faibles par rapport au dixième de la longueur d'onde, c'est également ce mode qui est le plus atténué.

Par contre, pour des hauteurs importantes par rapport au dixième de la longueur d'onde, c'est le mode rapide qui a la plus forte atténuation. Dans tous les cas, il semble que l'énergie liée au mode ligne de transmission soit plus concentrée autour du fil, alors que l'énergie liée au mode rapide est plus répartie entre le fil et le sol.

La comparaison des courbes tracées pour 30 MHz et 50 MHz nous permet de supposer qu'entre ces deux valeurs, il peut exister une fréquence pour laquelle se produit une dégénérescence des deux modes, c'est-à-dire, une valeur de la hauteur telle qu'il y a une solution commune pour les deux constantes de propagation.

Pour des sols de conductivité ou de permittivité différentes, il apparaît que les courbes obtenues à partir d'une variation continue du paramètre ne sont pas toujours caractéristiques d'un mode au sens où nous l'avons défini. Ceci se produit également pour des variations de la hauteur d à une fréquence de 30 MHz. Les solutions associées au mode ligne de transmission correspondent aux solutions de l'approximation quasi-TEM, uniquement pour les basses fréquences et plus précisément pour des valeurs inférieures à la fréquence caractéristique du milieu F_c , définie par ^[46] :

$$\sigma_2 = \omega_c \epsilon_2 \quad (F_c = 36 \text{ MHz}).$$

Il faut noter que dans les cas pratiques que nous avons étudié, on ne peut conclure de façon définitive que l'un des deux modes est toujours caractérisé par un affaiblissement beaucoup plus important que l'autre. Selon les valeurs des différents paramètres physiques ou électriques, c'est l'un ou l'autre des affaiblissements qui est prépondérant et qui rend donc négligeable, après une certaine distance de propagation, le courant qui lui est associé.

Cependant, cela n'est vrai que si l'amplitude des courants modaux n'est pas telle que, dès l'origine, c'est-à-dire au niveau du générateur, l'un des deux courants soit nettement prépondérant par rapport à l'autre. La valeur de chacun d'eux doit également être comparée aux courants associés aux solutions à spectre continu.

Cette étude paramétrique doit donc être complétée par le calcul des amplitudes de chacun des courants qui composent le courant total, c'est ce qui fait l'objet du troisième chapitre.

CHAPITRE III : CALCUL DE LA REPARTITION DE COURANT LE LONG D'UN FIL
ALIMENTE PAR UN GENERATEUR DE TENSION SYMETRIQUE

Le but de ce chapitre est de déterminer, pour un cas d'excitation particulier, la contribution relative des courants modaux dans la valeur totale du courant qui parcourt le fil. Pour aboutir à ce résultat, nous adopterons la même démarche que OLSEN et CHANG^[17].

Dans ce chapitre, pour établir l'expression de courant le long de la ligne, nous utiliserons le formalisme des antennes qui consiste à calculer l'amplitude du champ électrique rayonné par le fil et à égaler sur sa surface, le champ rayonné et le champ imposé par le générateur.

Nous comparerons ensuite ces résultats théoriques aux résultats pratiques obtenus à l'aide d'un montage expérimental.

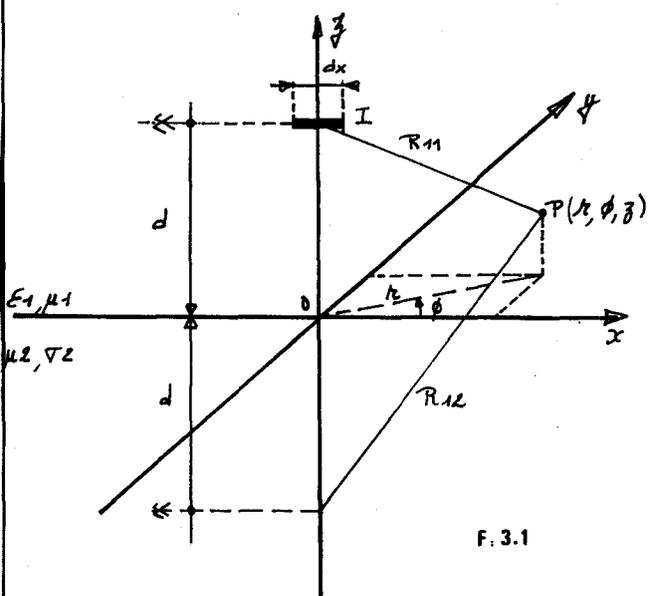
3.1 Calcul du champ électrique émis par un dipôle électrique horizontal au-dessus du sol

Dans un premier temps, nous nous attacherons à calculer le champ électrique émis par un dipôle électrique horizontal au-dessus du sol. (voir fig. 3.1)

Le dipôle de longueur dx est parcouru par un courant I . Il est situé à une hauteur d au-dessus du sol et un point de l'espace P est représenté par ses coordonnées cylindriques r, θ et z ou par ses coordonnées cartésiennes x, y et z . La distance entre ce point et le centre de l'élément

de courant est R_{11} , la distance avec le centre de l'image de l'élément de courant par rapport à l'interface air-sol est R_{12} . Le calcul du champ électrique élémentaire émis par ce dipôle a été développé par BANOS^[13,18] et nous rappelons ici le résultat obtenu pour la composante longitudinale :

$$dE_{1z} = \frac{i Z_0}{4 \pi k_1} \cdot \cos \phi \cdot I dx \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} [G_{11} - G_{12} + k_1^2 V_{11}] + k_1^2 [G_{11} - G_{12} + U_{11}] \right\} \quad (3.1)$$



F. 3.1

où G_{ij} , V_{ij} et U_{ij} sont les fonctions de Green définies par :

$$G_{11} = \frac{\exp(i k_1 R_{11})}{R_{11}}$$

$$G_{12} = \frac{\exp(i k_1 R_{12})}{R_{12}}$$

$$V_{11} = \frac{1}{\pi k_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu_2 + n^2 \mu_1} \cdot \exp[-k_1 \mu_1 (d+z)] \cdot \exp(i k_1 \alpha x + i k_1 \lambda y) \cdot d\alpha \cdot d\lambda$$

$$U_{11} = \frac{k_1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \exp[-k_1 \mu_1 (d+z)] \cdot \exp(i k_1 \alpha x + i k_1 \lambda y) \cdot d\alpha \cdot d\lambda$$

$$R_{11} = [r^2 + (d-z)^2]^{1/2}$$

$$R_{12} = [r^2 + (d+z)^2]^{1/2}$$

Les expressions α , k_1 , μ_1 , μ_2 et Z_0 sont les mêmes que celles définies au chapitre II et nous en rappelons les formules ci-dessous :

$$k_1^2 = \epsilon_1 \mu_1 \omega^2$$

$$\mu_1 = (\lambda^2 - \gamma^2)^{1/2}$$

$$\mu_2 = (\lambda^2 + \alpha^2 - \eta^2)^{1/2}$$

$$Z_0 = (\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2}$$

$$\operatorname{Re} \{ \mu_1 \}, \operatorname{Re} \{ \mu_2 \} \gg 0$$

La fonction G_{11} peut également s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$G_{11} = \frac{k_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu_1} \cdot \exp(-k_1 \mu_1 |d-z|) \cdot \exp(ik_1 \alpha x + ik_1 \lambda y) \cdot d\alpha \cdot d\lambda$$

soit en utilisant la formule (2.9) :

$$G_{11} = \frac{ik_1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)} \left[k_1 \sqrt{y^2 + (d-z)^2} \right] \cdot \exp(ik_1 \alpha x) \cdot d\alpha \quad (3.2)$$

De la même façon, G_{12} peut s'écrire :

$$G_{12} = \frac{ik_1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)} \left[k_1 \sqrt{y^2 + (d+z)^2} \right] \cdot \exp(ik_1 \alpha x) \cdot d\alpha \quad (3.3)$$

Comme nous serons amenés à exprimer la condition aux limites à la surface du fil, les points d'observation se situeront à proximité immédiate du plan (xOz). Nous supposons que nous pouvons confondre la coordonnée cylindrique suivant l'axe des r avec la coordonnée cartésienne suivant l'axe Ox. Dans ce cas particulier, l'expression du champ électrique élémentaire écrite en (3.1) devient :

$$dE_{1x} = \frac{i Z_0}{4\pi k_1} \cdot I \cdot dx \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[G_{11} - G_{12} + k_1^2 V_{11} \right] + K_1^2 \left[G_{11} - G_{12} + U_{11} \right] \right\} \quad (3.4)$$

ou encore en remplaçant G, U et V par leurs valeurs :

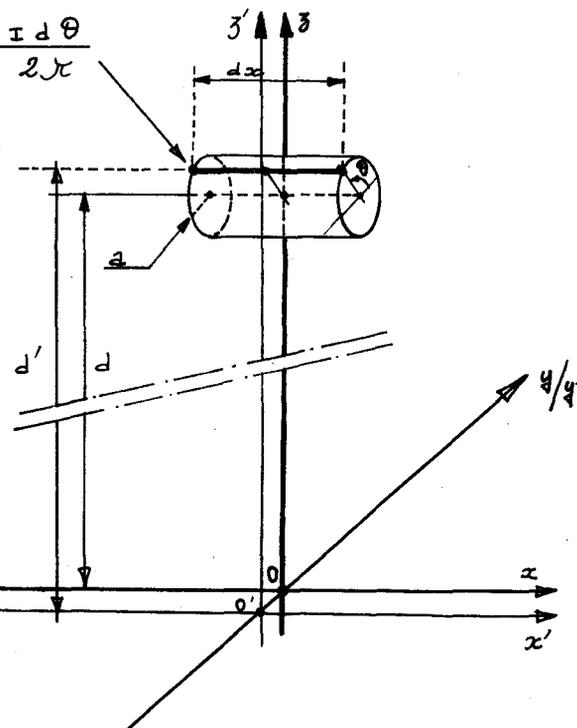
$$dE_{1x} = \frac{-Z_0 k_1^2}{8\pi} \cdot I \cdot dx \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ T^2 \left[H_0^{(4)} \left[k_1 \sqrt{y^2 + (d-z)^2} \right] - H_0^{(4)} \left[k_1 \sqrt{y^2 + (d+z)^2} \right] \right] + P(y, z, \alpha) - Q(y, z, \alpha) \right\} \exp(i k_1 \alpha x) \cdot d\alpha \quad (3.5)$$

$$\text{où : } P(y, z, \alpha) = 2/i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} (1/(\mu_1 + \mu_2)) \cdot \exp[-k_1 \mu_1 (d+z)] \cdot \exp(i k_1 \lambda y) \cdot d\lambda$$

$$Q(y, z, \alpha) = 2\alpha^2/i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} (1/(\mu_2 + n^2 \mu_1)) \cdot \exp[-k_1 \mu_1 (d+z)] \cdot \exp(i k_1 \lambda y) \cdot d\lambda.$$

Il faut rappeler que cette formule n'est valable que si y et z sont suffisamment petits pour pouvoir considérer que l'amplitude de la composante radiale du champ Er, est très voisine de Ex.

Dans le cas du fil, la section de l'élément de courant n'est pas ponctuelle, elle est constituée par un cercle de rayon a (voir fig. 3.2). Si ce rayon a est faible par rapport à la hauteur du fil au-dessus du sol, nous pouvons supposer que dans un plan de section droite, le courant est uniformément réparti le long de la circonférence du fil. Le champ créé en un point proche du plan (xOz) est la somme des champs créés par chacun des éléments de courant élémentaires parcourus par un courant $\frac{I}{2\pi} d\Theta$.



F.3.2

Pour calculer ce champ électrique élémentaire nous appliquons la formule (3.5) au nouveau repère (x', y', z') défini de façon telle que l'élément de courant considéré soit contenu dans le plan $(x'0'z')$. Pour écrire cette formule dans l'ancien repère (x, y, z) nous utilisons les changements de variables suivants :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - a \cos \Theta \\ z' = z \\ d' = d + a \sin \Theta \end{cases}$$

D'où la formule du champ électrique créé par un élément de courant ponctuel :

$$d(dE_{1x}) = \frac{-Z_0 k_i^2}{8\pi} \cdot \frac{I dx' d\Theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \Gamma^2 H_0^{(1)} \left[k_1 \Gamma \sqrt{(y - a \cos \Theta)^2 + (d - a \sin \Theta + z)^2} \right] - H_0^{(1)} \left[k_1 \Gamma \sqrt{(y - a \cos \Theta)^2 + (d + a \sin \Theta - z)^2} \right] + P(y - a \cos \Theta, z, \alpha) - Q(y - a \cos \Theta, z, \alpha) \right\} \exp(i k_1 \alpha x) \cdot d\alpha \quad (3.6)$$

où

$$P(y - a \cos \Theta, z, \alpha) = \frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \exp[-k_1 \mu_1 (d + a \sin \Theta + z)] \cdot \exp(i k_1 \lambda (y - a \cos \Theta)) \cdot d\lambda$$

$$Q(y - a \cos \Theta, z, \alpha) = \frac{2\alpha^2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu_2 + n^2 \mu_1} \cdot \exp[-k_1 \mu_1 (d + a \sin \Theta + z)] \cdot \exp(i k_1 \lambda (y - a \cos \Theta)) \cdot d\lambda$$

Le champ créé en un point de l'espace par le tronçon de fil de rayon a et de longueur dx sera la somme des champs créés par chacun des éléments de courant ponctuels, soit :

$$dE_{1x} = \int_{-\pi}^{+\pi} dE_{1x}(\Theta) d\Theta \quad (3.7)$$

Nous avons déjà effectué une intégrale analogue à celle-ci dans le chapitre II, pour le calcul des formules (2.7) à (2.12). Nous en déduisons directement que la valeur du champ électrique rayonné par un dipôle élémentaire de longueur dx et de section πa^2 est le résultat de la multiplication de la formule (3.5) par l'expression $J_0(A\bar{\zeta})$ avec $A = k_1 a$.

3.2 Champ électrique émis par un fil tendu au-dessus du sol

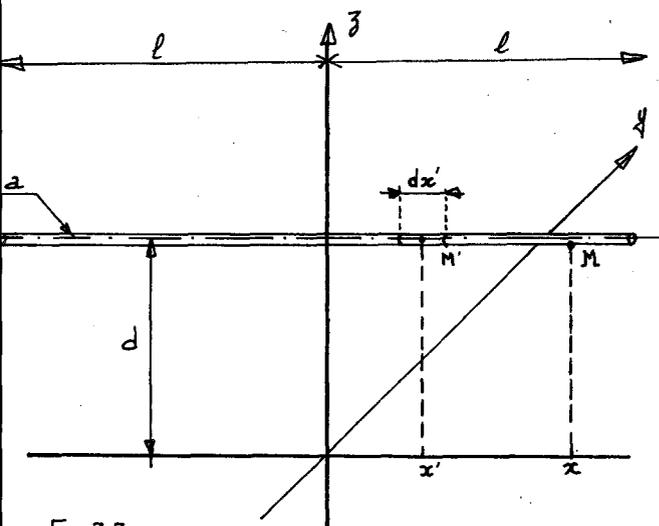
Nous nous intéressons maintenant au cas d'un fil dirigé selon l'axe des x et de longueur finie $2l$ (voir fig. 3.3). Pour un point M situé à une abscisse x sur la circonférence du fil, le champ électrique élémentaire créé par un tronçon de ligne de longueur dx' , s'écrit :

$$dE_1(x, x') = \frac{-Z_0 k_1^2}{8\pi} \cdot I(x') \cdot dx' \cdot J_0(A\bar{\zeta}) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \bar{T}^2 \left[H_0^{(1)} \left[k_1 \bar{\zeta} \sqrt{y^2 + (d-z)^2} \right] - H_0^{(1)} \left[k_1 \bar{\zeta} \sqrt{y^2 + (d+z)^2} \right] \right] + P(y, z, \alpha) - Q(y, z, \alpha) \right\} \cdot \exp(ik_1 \alpha(x-x')) \cdot d\alpha \quad (3.8)$$

Le champ total au point M s'écrit :

$$E_{1x} = \int_{-l}^{+l} E_1(x, x') \cdot dx' \quad (3.9)$$

De la même façon que dans le paragraphe 2.2, il se pose un problème au niveau de l'application de la condition aux limites, qui consiste ici à annuler le champ électrique longitudinal partout le long de la ligne, sauf au niveau de la zone d'excitation de l'antenne où le champ électrique longitudinal est celui imposé par le générateur. Les résultats dépendront du point choisi sur la circonférence. Pour résoudre ce problème, nous pouvons comme dans le paragraphe 2.2, utiliser la valeur moyenne du champ électrique le long de la circonférence.



F: 3.3

L'application de cette méthode nous permet d'écrire la valeur moyenne du champ électrique longitudinal à la surface du fil :

$$E_{1xm} = \frac{-Z_0 k_1^2}{8\pi} \int_{-\ell}^{+\ell} \mathcal{M}(x-x') \cdot I(x') \cdot dx' \quad (3.10)$$

où $I(x')$ est la valeur du courant au point d'abscisse x'

$$\mathcal{M}(x-x') = \int_{-\infty}^{+\infty} M(\alpha) \cdot \exp[i k_1 \alpha (x-x')] \cdot d\alpha$$

$M(\alpha)$ est l'équation modale écrite en (2.14) et dont nous rappelons l'expression ci-dessous :

$$M(\alpha) = J_0(A\bar{T}) \left\{ \bar{T}^2 \left[H_0^{(4)}(A\bar{T}) - H_0^{(4)}(2D\bar{T}) \cdot J_0(A\bar{T}) \right] + J_0(A\bar{T}) \left[P(\alpha) - Q(\alpha) \right] \right\}$$

$$\text{avec } P(\alpha) = \frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_1 + \mu_2} \cdot d\lambda$$

$$Q(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_2 + \eta^2 \mu_1} \cdot d\lambda$$

3.3 Expression du courant parcourant la ligne dans le cas où l'excitation est faite sur une zone infinitésimale

Nous supposons maintenant qu'il existe au centre de l'antenne un générateur de tension tel que la valeur moyenne du champ électrique tangentiel à la surface du fil vérifie la relation :

$$E_{1xm}(x) = \mathcal{S}(x) \quad (3.11)$$

où $\mathcal{S}(x)$ est la fonction de Dirac de surface unité. Dans le cas particulier d'un fil de longueur infinie, le courant $I(x)$ est solution de l'équation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}(x-x') \cdot I(x') \cdot dx' = -\frac{8\pi}{k_1^2 Z_0} \cdot \mathcal{S}(x) \quad (3.12)$$

Pour calculer la répartition de courant $I(x)$ à partir de cette formule, nous utilisons les propriétés de la transformée de Fourier et du produit de convolution.

Si nous définissons la transformée de Fourier d'une fonction $f(z)$ par :

$$F(\alpha) = \frac{k_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cdot \exp(-ik_1\alpha z) \cdot dz \quad (3.13)$$

il en résulte que la transformée de Fourier inverse est définie par :

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \cdot \exp(ik_1\alpha z) \cdot d\alpha \quad (3.14)$$

Nous appliquons maintenant le théorème de convolution pour cette transformée. Le produit de convolution de deux fonctions f et g est défini par la relation :

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cdot g(t-s) \cdot ds$$

ce qui donne pour les transformées des fonctions $y(t)$, $f(t)$ et $g(t)$, la relation suivante :

$$Y(\alpha) = \frac{2\pi}{k_1} \cdot F(\alpha) \cdot G(\alpha) \quad (3.15)$$

Dans le cadre de cette définition, la transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au produit des transformées de Fourier des deux fonctions, multiplié par $2\pi/k_1$.

Le terme de gauche de l'équation (3.12) est le produit de convolution des fonctions $M(x)$ et $I(x)$. Si nous appliquons la transformée de Fourier à chacun des termes de cette équation, nous obtenons donc :

$$\frac{2\pi}{k_1} \cdot M(\alpha) \cdot \tilde{I}(\alpha) = - \frac{8\pi}{k_1^2 Z_0} \cdot \frac{k_1}{2\pi} \quad (3.16)$$

où $M(\alpha)$ et $\tilde{I}(\alpha)$ sont respectivement les transformées de Fourier des fonctions $M(x)$ et $I(x)$.

De la formule (3.16), nous tirons l'expression du courant $I(x)$ en utilisant la transformée inverse :

$$I(x) = - \frac{2}{\pi Z_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i k_1 \alpha x)}{M(\alpha)} \cdot d\alpha \quad (3.17)$$

$$\text{avec } M(\alpha) = J_0(A\bar{\gamma}) \cdot \left\{ \bar{\gamma}^2 \left[H_0^{(4)}(A\bar{\gamma}) - H_0^{(4)}(2D\bar{\gamma}) \cdot J_0(A\bar{\gamma}) \right] + J_0(A\bar{\gamma}) \left[P(\alpha) - Q(\alpha) \right] \right\}$$

$$P(\alpha) = \frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_1 + \mu_2} \cdot d\lambda \quad Q(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_2 + n^2\mu_1} \cdot d\lambda$$

$$A = k_1 a$$

$$D = k_1 d$$

3.4 Calcul de la répartition du courant le long du fil par les expressions approchées

Dans un premier temps, nous supposons que les conditions d'approximation exprimées dans le paragraphe 2.3 sont vérifiées. Les expressions intégrales $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ peuvent donc être remplacées par leurs formules simplifiées que nous rappelons ci-dessous :

$$P(\alpha) = \frac{2}{(n^2 - 1)} \left\{ \bar{\gamma} \cdot H_1^{(4)}(2D\bar{\gamma}) \cdot \left[\frac{1}{2D} + i n \right] - \bar{\gamma}^2 H_0^{(4)}(2D\bar{\gamma}) \right\}$$

$$Q(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{n^2} H_0^{(4)}(2D\bar{\gamma}) + \frac{2\alpha^2}{\pi n^3} \exp(-i 2D/n) [Wd(\alpha) + Wo(\alpha)]$$

avec:

$$W_0(\alpha) = \frac{2\pi i}{\lambda_p} - \frac{2}{(\bar{\gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2}} \left\{ \log[1/n - i(\bar{\gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2}] - \log \bar{\gamma} + i\pi \right\}$$

$$\operatorname{Im} \left\{ (\bar{\gamma}^2 - 1/n^2)^{1/2} \right\} \geq 0, \quad \operatorname{Im} \{ \bar{\gamma} \} \geq 0$$

$$W_d(\alpha) = -i\pi \sum_{M=0}^{\infty} \left\{ \frac{(i)^M}{(n)^M \cdot M!} \cdot I_M(2D, \bar{\gamma}) \right\}$$

$$I_M = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{2D} W^M \cdot H_0^{(1)}(W\bar{\gamma}) \cdot dW \right\}$$

Pour effectuer le calcul de la répartition de courant exprimée en (3.17), nous choisissons d'intégrer par la méthode des résidus dans le demi-plan complexe supérieur α . En premier lieu, il apparaît que les deux zéros α_1 et α_2 précédemment décrits deviennent des pôles de la fonction à intégrer.

Le calcul de $W_0(\alpha)$ par la méthode des résidus a montré qu'il existait dans le plan complexe α deux ensembles de points de discontinuité. Le premier ensemble est lié à l'expression de λ_p que nous rappelons ci-dessous :

$$\lambda_p = (1 - \alpha^2 - 1/n^2)^{1/2}$$

$$\text{avec } \operatorname{Im}(\lambda_p) \geq 0$$

Il y a indétermination sur le choix du signe quand λ_p est un réel pur, cette discontinuité est définie dans le plan complexe α par la formule :

$$\alpha = (1 - 1/n^2 - s^2)^{1/2}$$

où s est un nombre réel.

Nous avons déjà étudié ce problème et défini deux valeurs λ_{p1} et λ_{p2} , correspondant à des nombres réels positif et négatif. Le choix entre ces deux valeurs est défini par la position de α par rapport à la branche de coupure ; ceci est explicité sur la figure 2.4.

Le deuxième ensemble de points de discontinuité est lié au calcul de λ_B dont nous rappelons également la formule :

$$\lambda_B = (1 - \alpha^2)^{1/2}$$

avec $\text{Im}(\lambda_B) \geq 0$

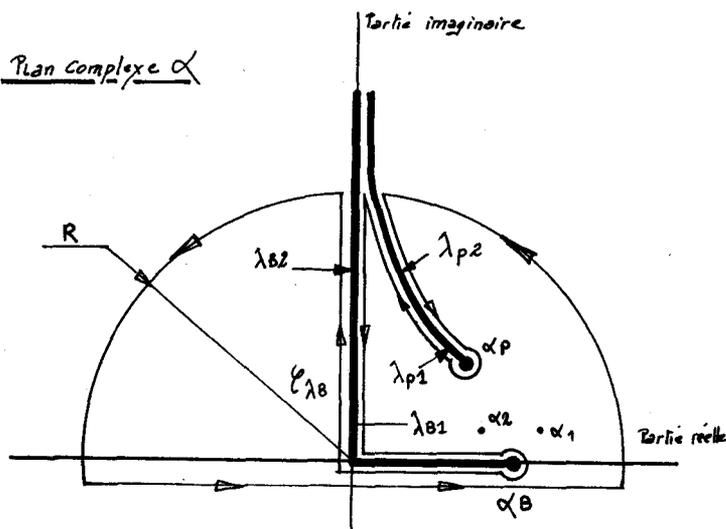
De la même façon que précédemment, cette définition génère dans le plan complexe α un ensemble de points de discontinuité défini par :

$$\alpha = (1 - t^2)^{1/2} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Il existe également deux valeurs λ_{B1} et λ_{B2} correspondant à des nombres réels positif et négatif. Leur choix est indiqué sur la figure 2.6.

Il faut noter que ce deuxième ensemble de points de discontinuité tient lieu de branche de coupure pour le point de branchement $\alpha = 1$, ce point de branchement étant dû à la définition de $\bar{\gamma}$ dans $M(\alpha)$: $\bar{\gamma} = (1 - \alpha^2)^{1/2}$ avec $\text{Im}(\bar{\gamma}) \geq 0$.

Nous choisissons donc comme contour d'intégration le contour \mathcal{C} défini sur la figure 3.4. Si le rayon R tend vers l'infini, l'intégrale le long du demi-cercle supérieur est négligeable et l'intégrale de la fonction le long de l'axe réel peut se décomposer de la façon suivante :



F. 3.4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik_1 \alpha x)}{M(\alpha)} d\alpha = 2i\pi \frac{\exp(ik_1 \alpha x)}{\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} [M(\alpha)] \right\}_{\alpha=\alpha_1}} + 2i\pi \frac{\exp(ik_1 \alpha x)}{\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} [M(\alpha)] \right\}_{\alpha=\alpha_2}} - \int_{\mathcal{C}_{\lambda_B}} \frac{\exp(ik_1 \alpha x)}{M(\alpha)} d\alpha - \int_{\mathcal{C}_{\lambda_P}} \frac{\exp(ik_1 \alpha x)}{M(\alpha)} d\alpha \quad (3.18)$$

Les deux premiers termes sont les contributions dues aux résidus en α_1 et α_2 , les deux derniers termes sont les contributions le long des contours évitant les lieux de discontinuité. Le courant total $I(x)$ peut donc se décomposer en la somme de quatre courants ; les deux premiers associés aux pôles de la fonction à intégrer seront appelés les courants polaires I_{p1} et I_{p2} , les deux autres sont les courants I_{B1} et I_{B2} associés aux lieux de discontinuité.

$$I(x) = I_{p1} + I_{p2} + I_{B1} + I_{B2} \quad (3.19)$$

Nous nous intéressons d'abord au calcul des deux courants polaires dont les expressions sont :

$$I_{p1}(x) = - \frac{4i}{Z_0} \cdot \frac{\exp(ik_1 \alpha_1 x)}{\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} M(\alpha) \right\}_{\alpha = \alpha_1}} \quad (3.20)$$

$$I_{p2}(x) = - \frac{4i}{Z_0} \cdot \frac{\exp(ik_1 \alpha_2 x)}{\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} M(\alpha) \right\}_{\alpha = \alpha_2}} \quad (3.21)$$

Il apparaît bien, sur ces formules, que ces deux termes représentent des courants qui se propagent le long de l'axe des x avec respectivement comme constantes de propagation réduites α_1 et α_2 , c'est-à-dire les zéros de l'équation modale. Le calcul de la dérivée de l'équation modale a déjà été fait dans l'annexe A2 à propos du développement de l'algorithme de NEWTON.

Il faut noter que dans les formules (3.20) et (3.21), l'expression $M(\alpha)$ intervient globalement ; le résultat obtenu serait identique si on n'avait pas supposé que les approximations exprimées dans le paragraphe 2.3 étaient vérifiées.

Donc, dans la mesure où on prend pour α_1 et α_2 les résultats obtenus au chapitre précédent par la résolution de l'équation modale exacte, les courants polaires I_{p1} et I_{p2} sont donnés, dans tous les cas, par les formules (3.20) et (3.21), la dérivée de $M(\alpha)$ est celle donnée dans l'annexe A3.

Pour ce cas particulier d'excitation de la ligne, nous connaissons donc les amplitudes respectives de chacun des deux courants polaires et nous pouvons calculer les importances relatives de l'un par rapport à l'autre.

Sur le tableau 3.1, nous avons porté le rapport des amplitudes des courants $|I_{p1}| / |I_{p2}|$ en fonction de la hauteur d du fil au-dessus du sol et de la distance réduite x/λ , où λ est la longueur d'onde dans le vide. Le courant I_{p1} est le courant lié au mode ligne de transmission, le courant I_{p2} est celui lié au mode rapide.

d(m)	x/λ			
	0	10	20	40
0,025	2,1	0,2	0,02	10 ⁻⁴
0,04	1,4	3	6,2	26
0,1	2,1	3,8	6,7	22

F = 1GHz ; λ = 0,3 m

Tableau 3.1 : Rapport des amplitudes des courants modaux $|I_{p1}| / |I_{p2}|$

d(m)	x/λ			
	0	2	5	10
0,04	17	5,5	1	0,06
0,1	7,9	3,8	1,3	0,2
0,3	2,2	2,1	1,9	1,6
0,5	2,0	2,9	4,9	11,8
0,8	2,7	4,4	8,7	28,2
1,0	3,1	5,0	10,0	37

F = 50MHz ; λ = 6 m

Dans cet exemple, la conductivité du sol est $\sigma_2 = 10^{-2} \text{ mho/m}$ et sa permittivité relative $\epsilon_{r2} = 5$.

Pour les deux fréquences choisies (50 MHz et 1GHz), le courant I_{p1} est toujours plus grand que le courant I_{p2} au niveau du générateur.

Dans les deux cas, tant que la hauteur d reste inférieure à environ le dixième de la longueur d'onde, le courant associé au mode rapide redevient prépondérant sur l'autre courant polaire I_{p1} ; cela se produit pour une distance x située approximativement à une dizaine de longueurs d'onde.

Pour des hauteurs d plus grandes que le dixième de la longueur d'onde, le rapport $|I_{p1}| / |I_{p2}|$ est une fonction croissante de la distance x/λ : c'est le courant associé au mode ligne de transmission qui reste prépondérant sur le courant associé au mode rapide. On remarque de plus que pour une fréquence de 50 MHz, le courant I_{p2} peut être négligé à partir d'une hauteur d égale à 0,5 m, pour une distance x supérieure à une dizaine de longueurs d'onde.

Dans le deuxième chapitre, lors de l'étude de la variation des constantes de propagation (planche PL2.2), nous avons vu qu'à une fréquence de 50 MHz et pour des hauteurs supérieures à 0,5 m, les résultats obtenus pour le mode ligne de transmission sont très proches de ceux obtenus dans le cadre de l'approximation quasi-TEM.

On peut donc considérer qu'à une fréquence de 50 MHz, l'approximation quasi-TEM est valable à 10% près pour des hauteurs d supérieures à 0,5 m et pour des distances x supérieures à 60 m.

Il ne faut cependant pas perdre de vue que cette approximation ne restera valable que si de façon générale la hauteur reste inférieure à la longueur d'onde dans le vide.

Pour évaluer la contribution de ces deux courants polaires dans la valeur du courant total, il est nécessaire de connaître les courants I_{B1} et I_{B2} écrits en (3.19).

Le courant I_{B1} s'écrit :

$$I_{B1} = \frac{2}{\pi Z_0} \int_{\varphi_{\lambda B}} \frac{\exp(i k_{1d} x)}{M(\alpha)} \cdot d\alpha \quad (3.22)$$

où \mathcal{C}_{λ_B} est le contour de la figure 3.4 issu du point 1.

Si $M_0(\alpha)$ et $M_\pi(\alpha)$ désignent la valeur de l'équation modale le long du contour \mathcal{C}_{λ_B} ($\text{Im}\{\lambda_B\}=0$) et dans laquelle on impose respectivement $\text{Re}(\lambda_B) > 0$ et $\text{Re}(\lambda_B) < 0$, alors IB1 peut s'écrire :

$$I_{B1} = \frac{2}{\pi Z_0} \left\{ \int_{i\infty}^{i0} \frac{\exp(i k_1 \alpha x)}{M_\pi(\alpha)} \cdot d\alpha + \int_{i0}^{-i\infty} \frac{\exp(i k_1 \alpha x)}{M_0(\alpha)} \cdot d\alpha + \int_0^1 \frac{\exp(i k_1 \alpha x)}{M_\pi(\alpha)} \cdot d\alpha + \int_1^0 \frac{\exp(i k_1 \alpha x)}{M_0(\alpha)} \cdot d\alpha \right\} \quad (3.23)$$

$$\text{soit. } I_{B1} = \frac{2}{\pi Z_0} \left\{ \int_0^1 \frac{M_0(\alpha) - M_\pi(\alpha)}{M_0(\alpha) \cdot M_\pi(\alpha)} \cdot \exp(i k_1 \alpha x) \cdot d\alpha - i \int_0^\infty \frac{M_0(i\alpha) - M_\pi(i\alpha)}{M_0(\alpha) \cdot M_\pi(\alpha)} \cdot \exp(-k_1 \alpha x) \cdot d\alpha \right\}$$

Le courant IB2 s'écrit :

$$I_{B2} = \frac{2}{\pi Z_0} \int_{\mathcal{C}_{\lambda_P}} \frac{\exp(i k_1 \alpha x)}{M(\alpha)} \cdot d\alpha \quad (3.24)$$

Nous faisons le changement de variable suivant :

$$W = \left(1 - \alpha^2 - \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}$$

Le long du contour \mathcal{C}_{λ_P} , W est un réel négatif en λ_{P2} , positif en λ_{P1} (voir fig.3.4).

De la même façon que précédemment, nous appellerons :

- $M_0(\alpha)$ la valeur de l'expression $M(\alpha)$ le long de \mathcal{C}_{λ_P} ($\text{Im}\{\lambda_P\}=0$) et pour $\text{Re}(\lambda_P) > 0$

- $M_{\pi}(\alpha)$ la valeur de l'expression $M(\alpha)$ le long de $\mathcal{C}_{\lambda\rho}$ ($\text{Im}\{\lambda\rho\} = c$) et pour $\text{Re}\{\lambda\rho\} < 0$.

Le courant I_{B2} s'écrit alors :

$$I_{B2} = \frac{2}{\pi Z_0} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{\exp(i k_1 x x)}{M_{\pi}(\alpha)} \cdot \left(\frac{-W}{\alpha} \right) \cdot dW + \int_0^{\infty} \frac{\exp(i k_1 x x)}{M_0(\alpha)} \cdot \left(\frac{-W}{\alpha} \right) \cdot dW \right\}$$

soit :

$$I_{B2} = \frac{2}{\pi Z_0} \int_0^{\infty} \frac{M_0(\alpha) - M_{\pi}(\alpha)}{M_0(\alpha) \cdot M_{\pi}(\alpha)} \cdot \exp(i k_1 x x) \cdot \frac{W}{\alpha} \cdot dW \quad (3.25)$$

où α est défini à partir de W par les formules :

$$\alpha = \left(1 - W^2 - \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \text{Im}\{\alpha\} > 0$$

Nous avons appliqué notre programme d'intégration numérique au calcul de ces formules et nous donnons ci-dessous les résultats obtenus dans un cas particulier permettant d'utiliser les expressions approchées de $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$.

Application numérique :

$$\begin{aligned} F &= 1,8 \text{ GHz} & d &= 0,0416 \text{ m } (0,25 \lambda) & a &= 0,00166 \text{ m } (0,01 \lambda) \\ \mathcal{T}_2 &= 10 \text{ mho/m} & \epsilon_{r2} &= 10 & (n &= 7,43 + i 6,73) \\ \alpha_1 &= 1,005 + i 0,0094 \\ \alpha_2 &= 0,998 + i 0,0032 \end{aligned}$$

Il est possible de montrer que les conditions de validité des simplifications, rappelées ci-dessous, sont vérifiées :

- $\lambda_c^2 \gg |\bar{\Gamma}|$
- $2D > \log 10$
- $\left| \frac{1}{n^2} \right| \ll 1$

Pour une distance $x = 0,1$ m nous trouvons :

$$I_{p1} = (0,25 + i 0,57) \times 10^{-3}$$

$$I_{p2} = (1,54 + i 0,59) \times 10^{-3}$$

$$I_{B1} = (0,40 - i 0,052) \times 10^{-3}$$

$$I_{B2} = (-0,27 - i 0,067) \times 10^{-3}$$

Pour vérifier la validité de ces résultats, nous avons appliqué le programme d'intégration numérique directement sur la fonction à intégrer définie dans la formule 3.17, en remplaçant toutefois $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ par leurs expressions simplifiées rappelées au début de ce paragraphe. Le calcul de $M(\alpha)$ pose un problème dans les zones proches de $\alpha = 1$ (pour $\bar{\gamma} = 0$) à cause de la présence du logarithme et des fonctions de Hankel. Nous avons résolu ce problème en remplaçant ces fonctions par leur développement limité autour de 0 ; le résultat obtenu est le suivant :

$$M(1 \pm \epsilon) = \frac{2i}{\pi} \bar{\gamma}^2 \log(A/2D) + P - Q$$

$$P(1 \pm \epsilon) = \frac{-2i}{\pi D(n^2 - 1)} \left[\frac{1}{2D} + in \right] \quad (3.26)$$

$$Q(1 \pm \epsilon) = \frac{-4i}{\pi n^2} \left[\exp(-i 2D/n) \right] \cdot E_1(-i 2D/n)$$

Nous rappelons que $E_1(x)$ est l'exponentielle intégrale d'ordre 1 de la variable x .

Pour la même application numérique que précédemment, nous obtenons :

$$I = (1,90 + i 1,06) \times 10^{-3}$$

ce qui est en accord avec la somme des courants trouvés par la première méthode :

$$I_{p1} + I_{p2} + I_{B1} + I_{B2} = (1,92 + i 1,04) \times 10^{-3}$$

3.5. Calcul de la répartition du courant le long du fil par les expressions exactes

Nous étudions maintenant le cas plus général où les fonctions $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ ne peuvent plus être simplifiées et écrites explicitement.

Nous avons vu précédemment que pour le calcul de I_{p1} et I_{p2} , il suffisait de remplacer dans les relations (3.20) et (3.21) l'expression de $M(\alpha)$ par sa formulation exacte. Il en est de même dans le calcul de I_{B1} où la détermination porte sur le signe de $\tilde{\gamma}$. Nous utilisons le programme qui calcule P et Q sous leur forme intégrale, en choisissant le signe de $\tilde{\gamma}$ en fonction de la détermination imposée pour λ_B (λ_{B1} ou λ_{B2}).

Le problème ne peut se résoudre de la même façon pour le courant I_{B2} . Dans ce cas l'indétermination porte sur le signe de λ_p qui est un pôle de la fonction à intégrer dans le calcul de $Q(\alpha)$. Pour l'expression simplifiée, ce pôle est défini par :

$$\mu_1 - i/n = 0 \text{ soit } \lambda_p = (1 - \alpha^2 - 1/n^2)^{1/2} \text{ avec } \Im\{\lambda_p\} > 0$$

Dans le plan complexe α , cette définition reste indéterminée pour des valeurs réelles de λ_p , c'est-à-dire pour tous les points α situés sur la branche de coupure issue du point α_p (voir figure 3.5). Ce problème est résolu en contournant cette branche de coupure par le contour \mathcal{C}_{λ_p} , ce qui revient à déplacer les pôles λ_p à proximité de l'axe réel et de part et d'autre de celui-ci. Les conséquences de cette remarque sur le calcul de $Q(\alpha)$ par la méthode des résidus ont été étudiées dans le deuxième chapitre.

Dans le cas général où les conditions de l'approximation ne sont pas vérifiées, ce pôle λ_p est défini par l'annulation du dénominateur de la fonction exacte à intégrer dans $Q(\alpha)$, soit :

$$\mu_2 + n^2 \mu_1 = 0$$

$$\text{d'où } \lambda_p = \left(1 - \alpha^2 - \frac{1}{n^2 + 1}\right)^{1/2} \text{ avec } \Im\{\lambda_p\} > 0. \quad (3.27)$$

Dans le plan complexe α , le lieu de discontinuité de cette définition, c'est-à-dire le lieu des points α qui donnent un λ_p réel, est une courbe analogue à celle de la figure 3.5 et issue du point α_p tel que :

$$\alpha_p = \left(1 - \frac{1}{n^2 + 1}\right)^{1/2} \quad (3.28)$$

Si on contourne cette branche de coupure par un chemin du type $\mathcal{C}_{\lambda p}$, les pôles de la fonction à intégrer dans le calcul de $Q(\alpha)$ seront situés à une distance aussi petite que l'on veut de l'axe réel. Pour les points de l'axe réel situés à proximité de ces pôles, il est impossible d'intégrer numériquement.

Nous avons donc adopté dans ce cas une autre méthode qui consiste à calculer le courant total en intégrant directement la formule écrite en (3.17) par un procédé numérique. Des détails sur ce calcul et la méthode employée sont donnés dans l'annexe A4.

Avec la même application numérique que dans le paragraphe précédent, nous trouvons, pour la valeur du courant, le résultat suivant :

$$I = (1,90 + i 1,09) \times 10^{-3}$$

Le programme a été testé dans un cas où il est possible de comparer les résultats à ceux obtenus précédemment, c'est-à-dire dans un cas où les conditions de validité des expressions P et Q sont remplies ; nous vérifions bien que les résultats correspondent avec ceux obtenus au paragraphe précédent par une autre méthode ($I = (1,92 + i 1,04) \times 10^{-3}$).

Le temps calcul obtenu en intégrant les expressions exactes est évidemment plus long, puisque chaque point de la fonction à intégrer est lui-même le résultat d'une intégrale.

Pour évaluer la contribution des courants polaires dans la valeur totale du courant, nous avons calculé les amplitudes respectives de chacun de ces courants pour plusieurs points situés le long de la ligne [20].

Dans cette application, nous avons choisi les mêmes paramètres que dans le calcul des courants modaux :

$$d = 0,04 \text{ m} \quad \sigma_2 = 10^{-2} \text{ mho/m} \quad \epsilon_2 = 5 \epsilon_1 \quad a = 0,01 \text{ m}$$

Les deux tableaux 3.2 et 3.3 représentent, pour deux fréquences différentes, les amplitudes des courants modaux, de leur somme et l'amplitude du courant total calculé par la méthode d'intégration numérique.

Tableau 3.2

F = 50 MHz	x(m)		
	0	0,1	0,6
$ I_{p1} $	1,588	1,566	1,461
$ I_{p2} $	0,091	0,089	0,087
$ I_{p1} + I_{p2} $	1,499	1,478	1,375
$ I_T $	/	1,462	1,368

Tableau 3.3

F = 1GHz	x(m)					
	0	0,2	0,5	5	10	15
$ I_{p1} $	3,258	2,948	2,539	0,267	0,022	0,0018
$ I_{p2} $	2,243	1,934	1,549	0,0055	----	----
$ I_{p1} + I_{p2} $	1,640	1,267	1,002	0,319	0,022	0,0018
$ I_T $	/	1,731	1,370	0,118	0,020	0,0061

Le calcul du courant total pour une valeur nulle de la distance x n'a pas été effectué, car dans le cas du générateur que nous avons choisi, le champ électrique est de valeur infinie en ce point particulier.

Sur le premier de ces deux tableaux , calculé pour une fréquence de 50 MHz, il apparaît que le courant total est pratiquement égal à la somme des courants modaux dès que x est plus grand que le 1/10ème de la longueur d'onde. Dans ce cas, les courants modaux suffisent à définir le courant total, à condition de tenir compte du mode rapide qui deviendra d'ailleurs prépondérant pour des distances x plus grandes que dix fois la longueur d'onde (voir tableau 3.1).

Par contre, dans les mêmes conditions physiques mais pour une fréquence de 1 GHz (tableau 3.3), on peut constater que la somme des courants de propagation ne traduit plus le comportement du courant total.

3.6. Mesure de la répartition de courant le long du fil

Nous avons effectué quelques mesures de l'affaiblissement du courant le long d'un fil parallèle à la surface du sol [24].

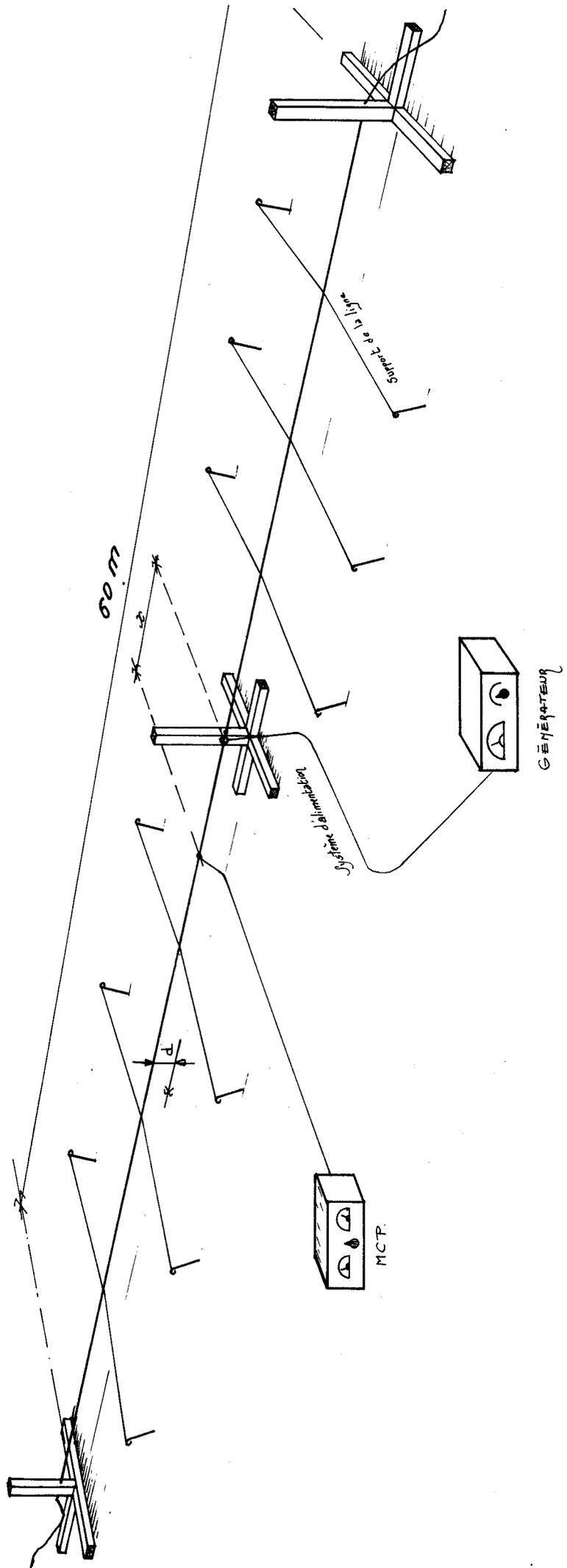
Pour une structure telle que celle que nous étudions, la valeur la plus facilement mesurable est l'amplitude du courant en fonction de la position de la sonde de mesure le long du fil. Nous pourrions comparer cette amplitude à celle du courant total calculé théoriquement ainsi qu'à celle de chacun des courants modaux.

Le dispositif de mesure utilisé est schématisé sur la planche PL3.1. La ligne est tendue au-dessus du sol par trois supports en bois et la hauteur d est maintenue constante par des cordes tendues à intervalles réguliers.

L'amplitude du courant le long du fil est mesurée par l'intermédiaire d'une sonde de courant reliée à un voltmètre accordé (mesureur de champ). Le générateur est éloigné au maximum pour éviter les effets parasites dus au rayonnement.

La distance entre les deux supports extrêmes est de 60 m ; au-delà de chacun d'eux, la hauteur du fil diminue progressivement et le fil pose finalement sur le sol sur une dizaine de mètres de long. De cette façon, nous limitons les réflexions sur les extrémités du fil et les phénomènes d'ondes stationnaires qui en découlent.

P.L. 3.1. Mesure de l'amplitude du courant



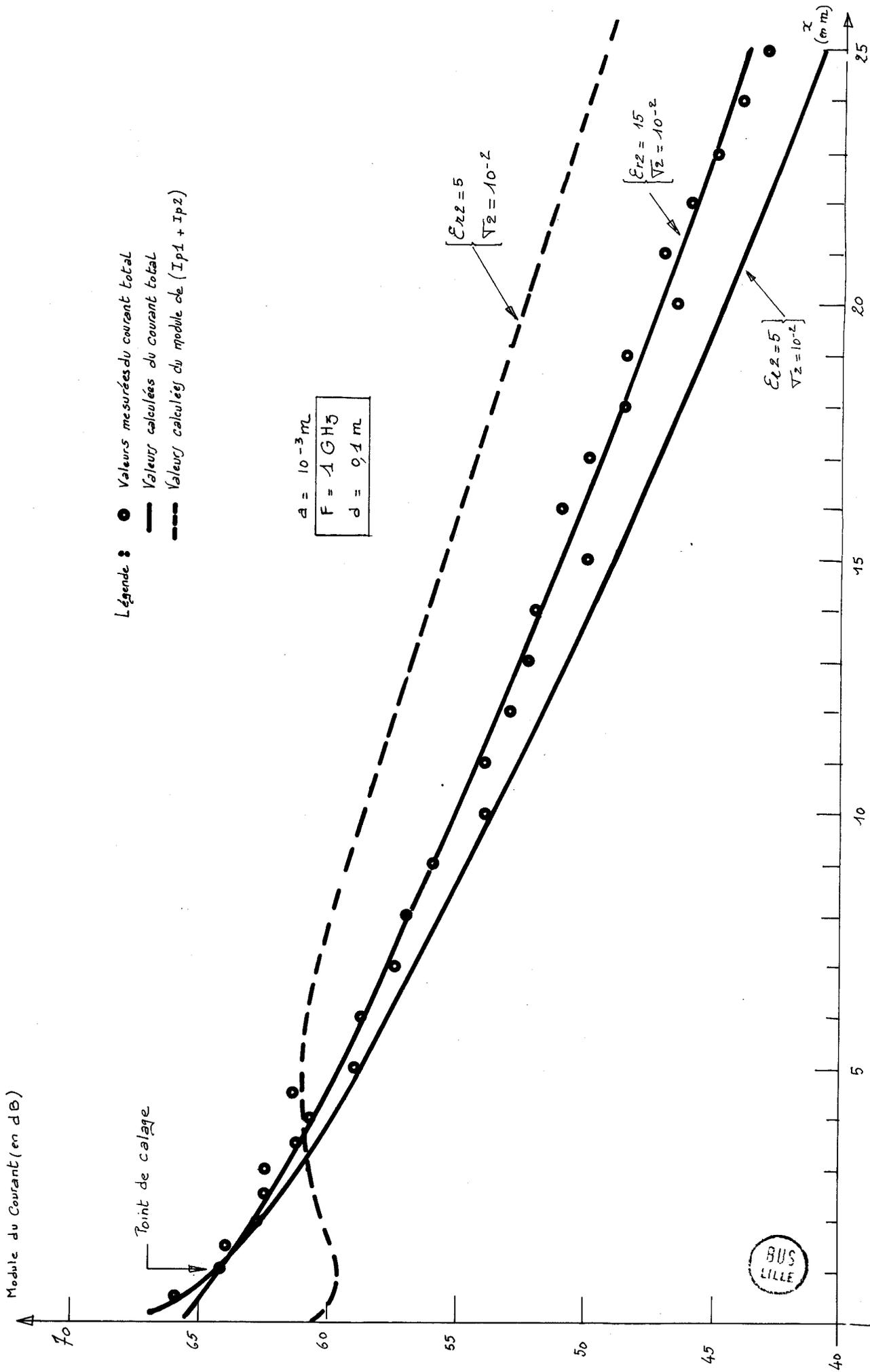
Nous avons reproduit sur les planches PL3.2 et PL3.6, la répartition des amplitudes des courants le long de la ligne pour différentes valeurs de la hauteur d et de la fréquence F . Sur la première de ces planches, la hauteur d est égale à 0,10 m et la fréquence F à 1 GHz. Sur les quatre autres planches, la hauteur reste constante et égale à 0,04 m ; les fréquences sont respectivement de 1 GHz, 750 MHz, 500 MHz et 50 MHz.

Sur toutes ces planches, nous avons reporté la valeur exprimée en dB du courant mesuré en différents points de la ligne. Les courbes en trait plein et en pointillé, représentent respectivement l'amplitude théorique du courant total et l'amplitude théorique de la somme des courants modaux.

Compte tenu de la difficulté de définir expérimentalement la zone d'excitation de l'antenne et de déterminer l'amplitude du champ électrique dans cette zone, la courbe théorique du courant total a été translatée pour que les valeurs théoriques et expérimentales du courant soient les mêmes en un point donné. Ce point est noté sur les planches "point de calage", nous avons évité de le choisir à proximité immédiate du générateur car la zone d'excitation réalisée pratiquement n'est pas aussi bien définie que dans la théorie.

Sur la planche PL3.2, nous constatons que les courbes théoriques du courant total, tracées pour des permittivités relatives ϵ_{r2} égales à 5 et 15, encadrent bien les résultats de mesure. Pour faire ces calculs, nous avons choisi une conductivité du sol égale à 10^{-2} mho/m mais nous avons pu vérifier qu'à cette fréquence, les valeurs du courant étaient très peu sensibles aux variations de σ_2 ; en effet, dans ce domaine le courant de déplacement est beaucoup plus important que le courant de conduction.

La courbe du module exprimé en dB de la somme des courants modaux, a été tracée dans l'hypothèse d'une permittivité $\epsilon_{r2} = 5$. On remarque que sa variation devient linéaire pour des distances supérieures à 6 m, ce qui traduit dans cette zone la prépondérance d'un des deux courants modaux (I_{p1} dans ce cas). Elle se différencie nettement de la courbe de variation du courant total et les courants associés aux modes rayonnés ne peuvent pas être négligés dans cette configuration.



PL 3.2 AMPLITUDE DU COURANT LE LONG DE LA LIGNE

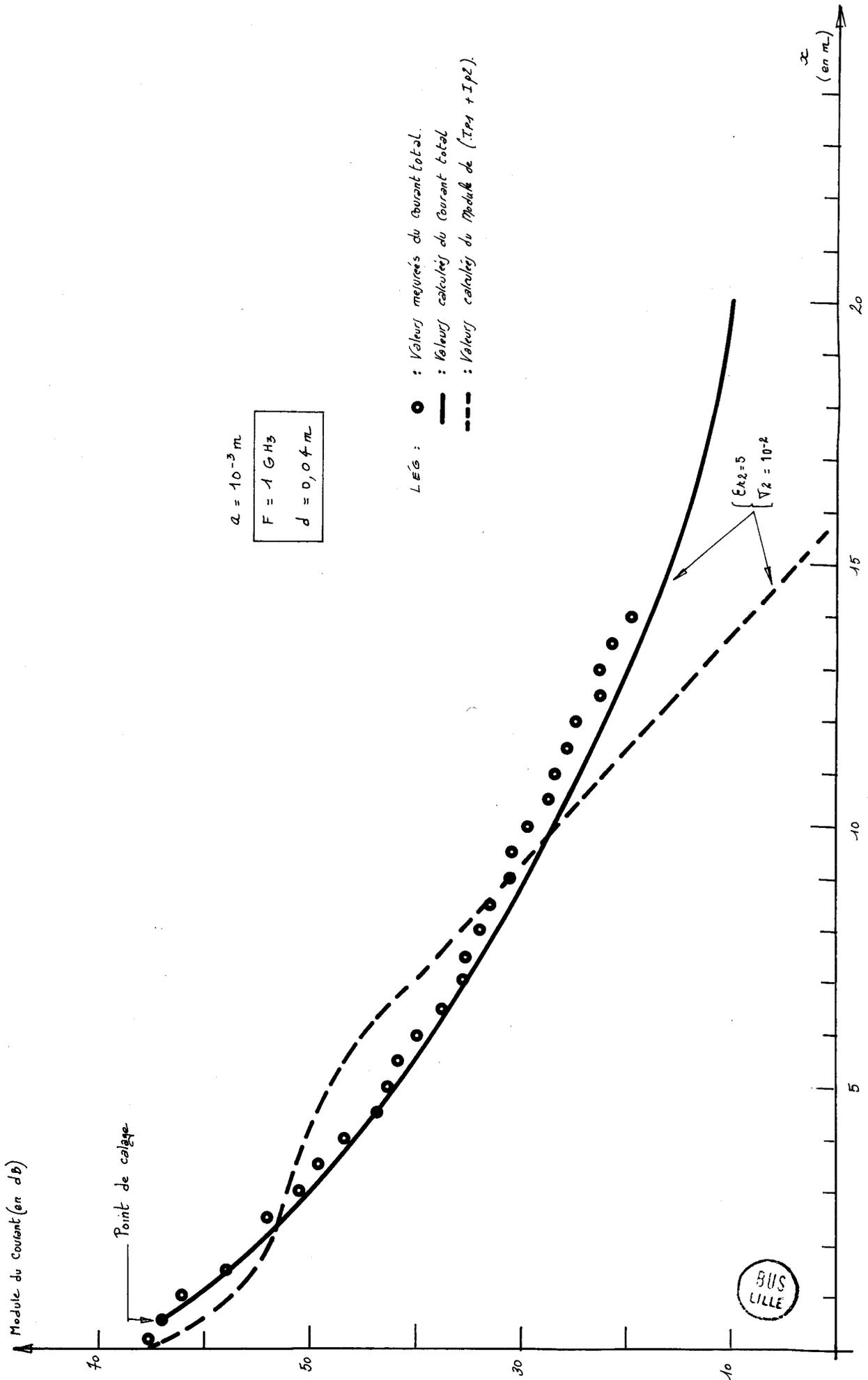
Sur les planches PL3.3 à PL3.5, les courbes théoriques ont été tracées en supposant pour le sol une conductivité $\sigma_2 = 10^{-2}$ mho/m et une permittivité relative $\epsilon_{r2} = 5$. Comme précédemment, nous constatons une bonne correspondance entre les valeurs théoriques et expérimentales du module du courant total. Cependant, les valeurs théoriques sont en général légèrement inférieures aux valeurs mesurées. En effet, la valeur de la permittivité est comprise entre 5 et 15 et dans cette gamme, une meilleure correspondance entre les valeurs théoriques et expérimentales serait possible. En aucun cas, on ne peut considérer que dans la zone où nous avons effectué ces mesures, le courant se comporte comme la somme des courants polaires tracée en pointillé sur ces courbes.

Sur la planche PL3.6 correspondant à une excitation de la ligne en basse fréquence (50 MHz), on remarque que la valeur du courant exprimée en dB décroît linéairement. L'étude de l'amplitude relative des deux courants de propagation montrerait dans ce cas la prépondérance du mode type "ligne de transmission". Dans cette zone de fréquence, l'affaiblissement est surtout sensible aux variations de la conductivité du sol. Les courbes théoriques tracées pour des conductivités de 10^{-2} mho/m et 10^{-3} mho/m encadrent bien les résultats expérimentaux.

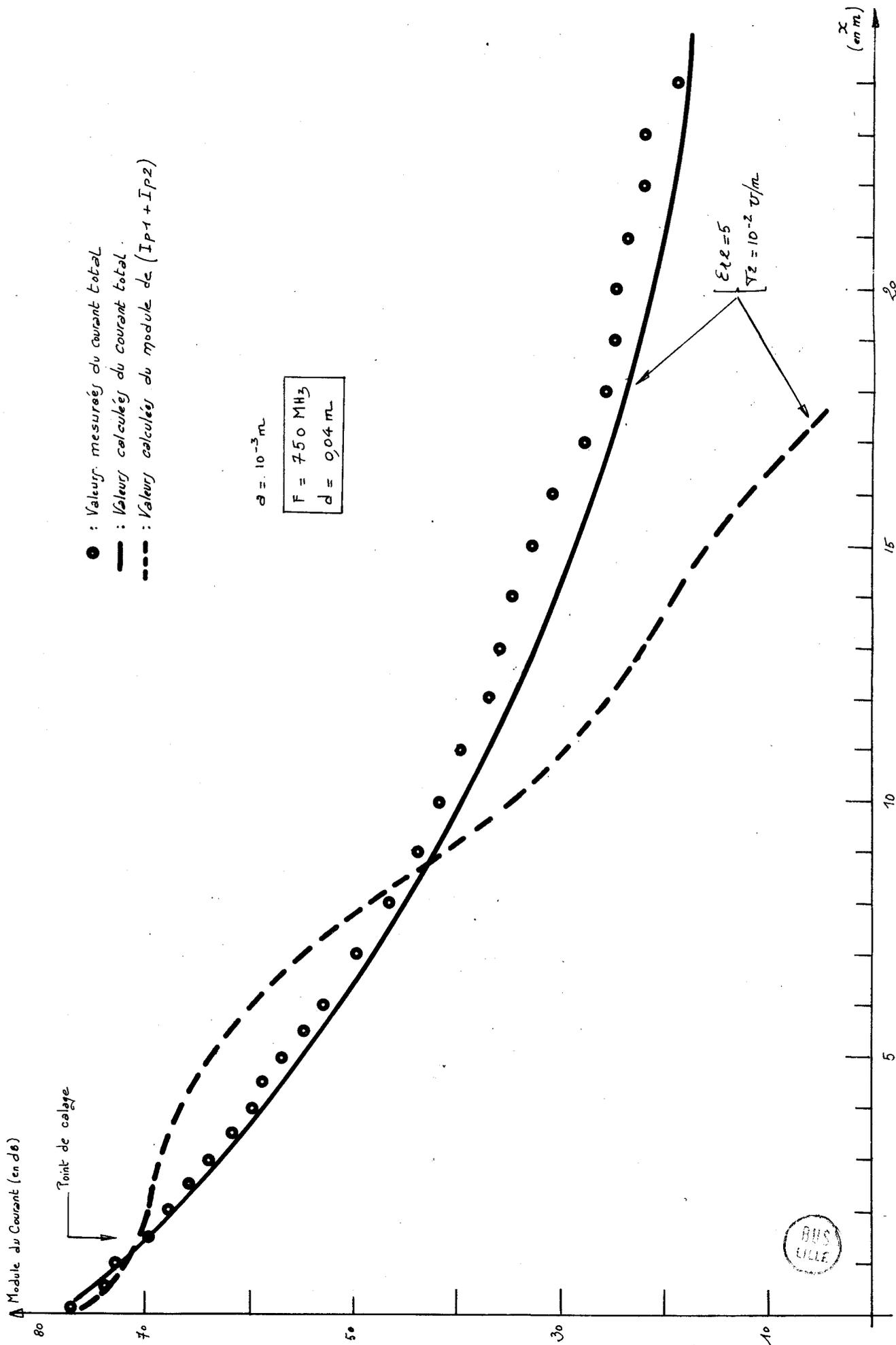
3.7. Etude expérimentale en régime impulsionnel

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au problème de la déformation d'une impulsion de courant se propageant le long de la ligne [22]. Le banc de mesure utilisé est celui déjà décrit au premier chapitre et schématisé sur la figure 1.9. Le générateur utilisé est un générateur d'impulsions HEWLETT PACKARD qui délivre dans ce cas des impulsions d'une durée de 5 ns. Les oscillogrammes sont relevés sur le terrain par l'intermédiaire d'un oscilloscope à échantillonnage et d'un enregistreur à cassettes magnétiques. L'enregistrement est ensuite traité en laboratoire sur un mini-ordinateur PDP11, et les résultats sont directement sortis sur table traçante.

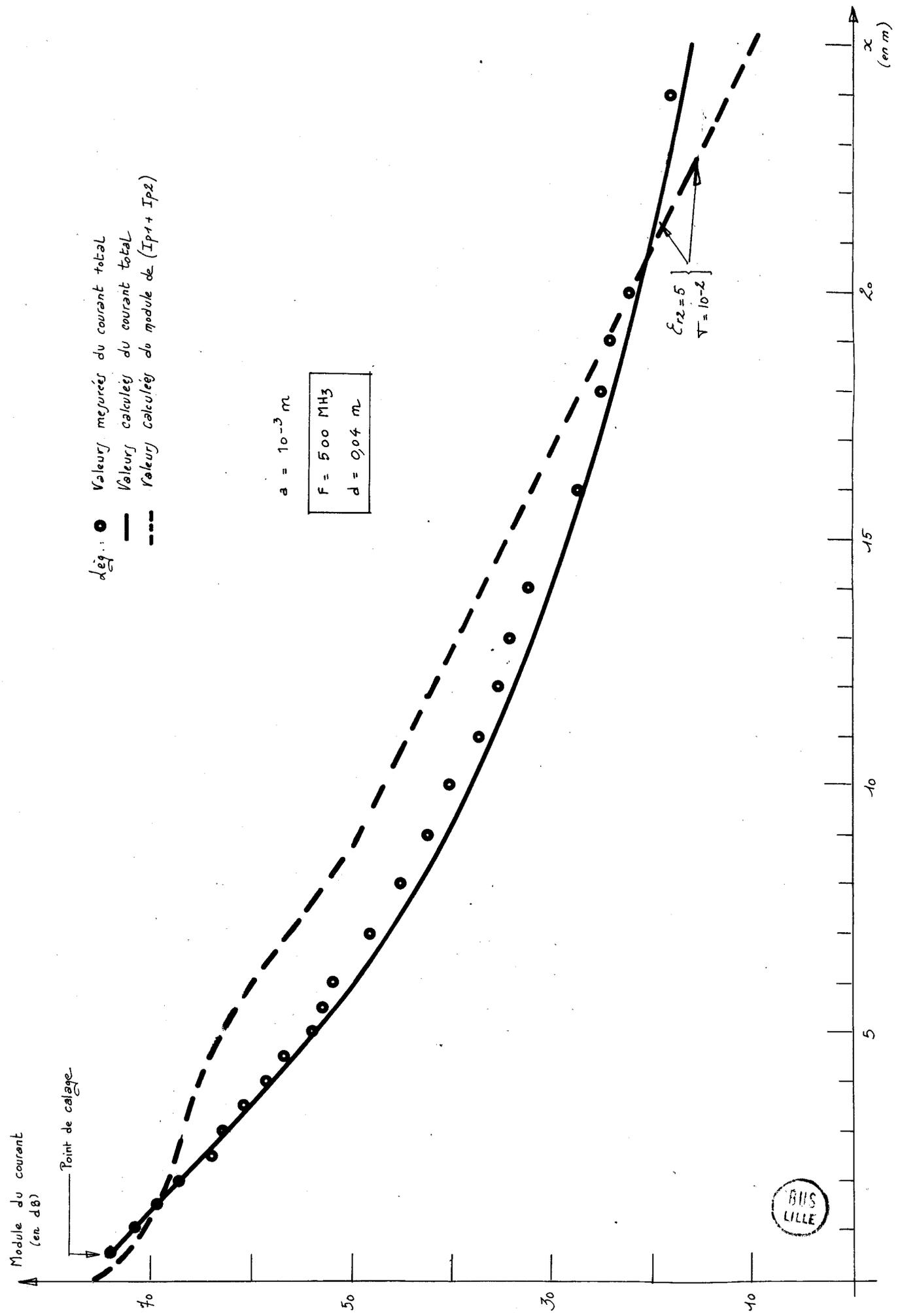
Le traitement sur ordinateur est basé sur un programme de transformée rapide de FOURIER, mis au point par DEMOULIN [23].



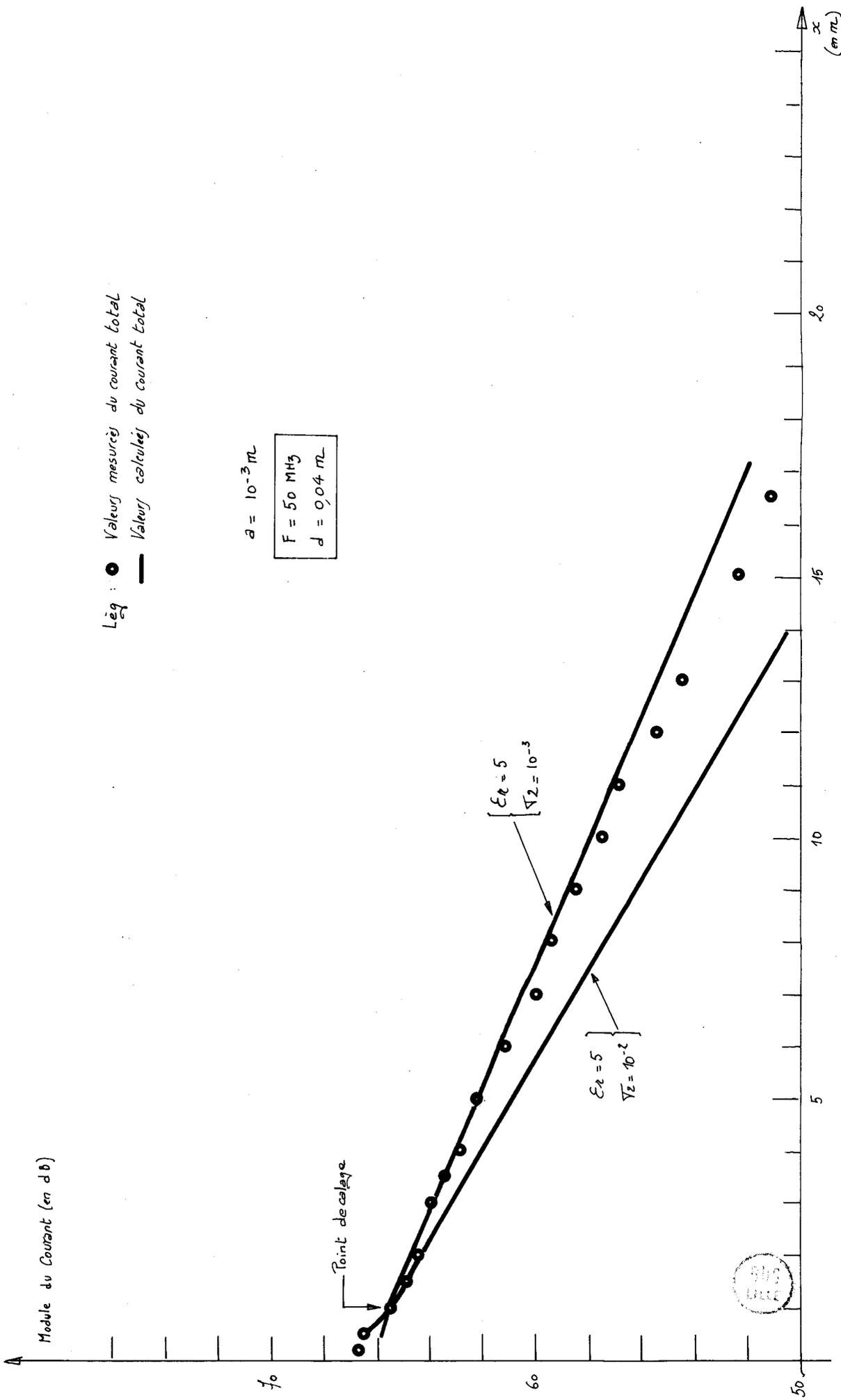
PL 33 : AMPLITUDE DU COURANT LE LONG DE LA LIGNE



PL 34 : AMPLITUDE DU COURANT LE LONG DE LA LIGNE



PL 35. AMPLITUDE DU COURANT LE LONG DE LA LIGNE



Lég : ● Valeurs mesurées du courant total
 — Valeurs calculées du courant total

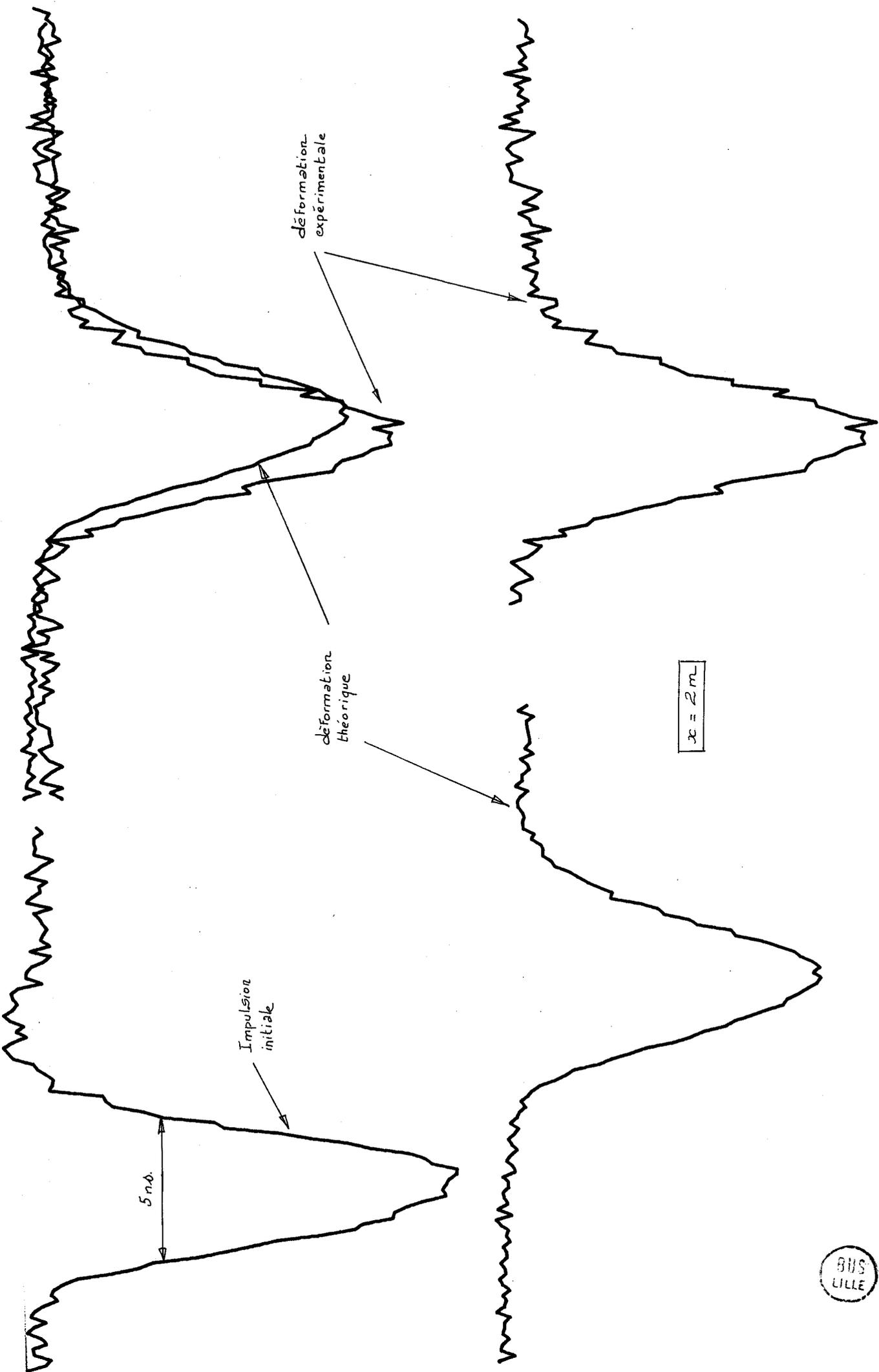
$a = 10^{-3} m$
 $F = 50 \text{ MHz}$
 $d = 0,04 m$

PL 36 : AMPLITUDE DU COURANT LE LONG DE LA LIGNE

Nous avons relevé les formes de l'impulsion de courant pour différentes distances x entre le point d'alimentation de la ligne et la sonde de courant. Le fil est tendu à 4 cm au-dessus du sol et x est compris entre 0 et 6 m.

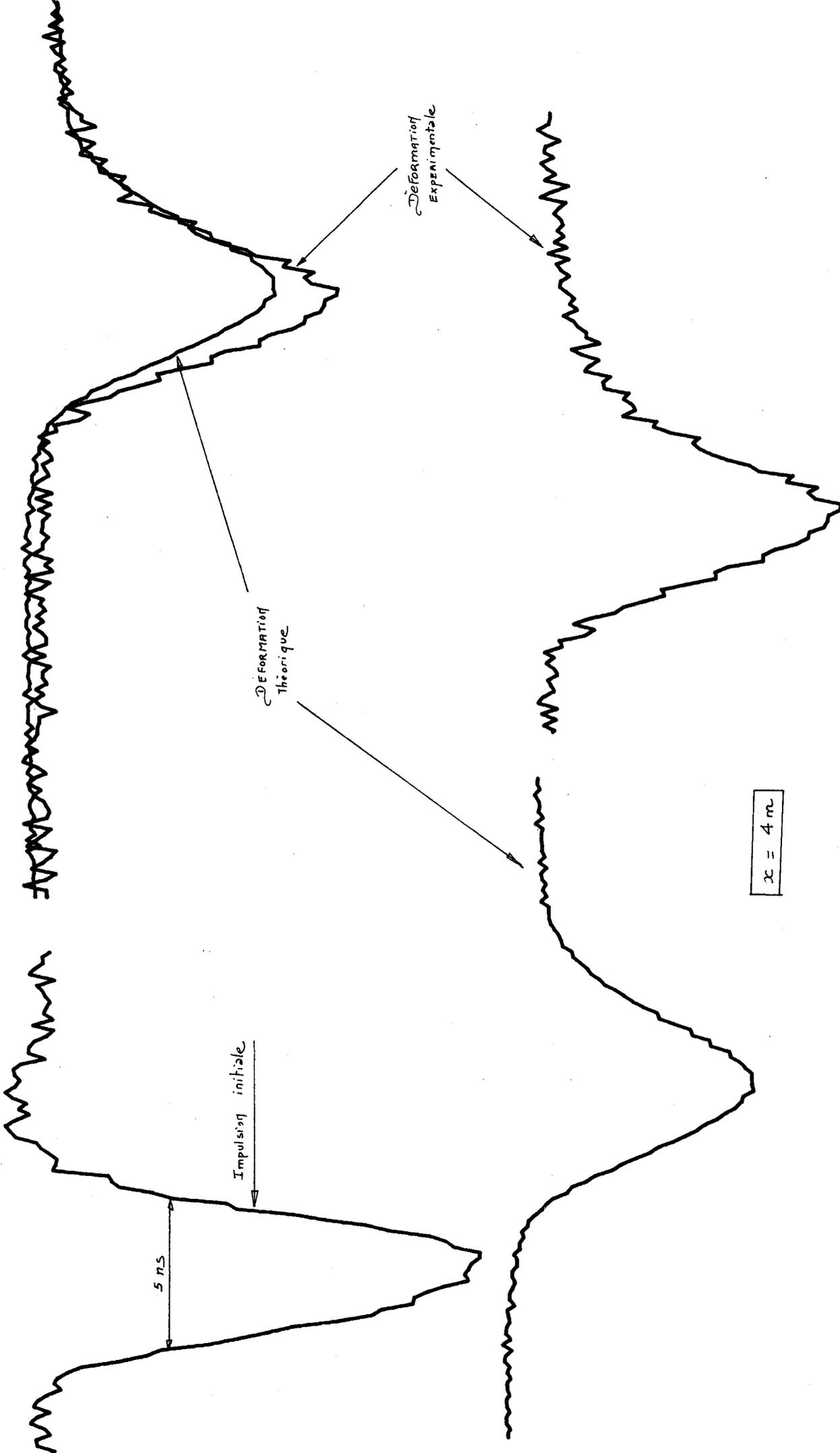
Nous avons appliqué à chaque composante spectrale de l'impulsion initiale (en $x = 0$) l'affaiblissement et le déphasage calculés théoriquement en supposant $\sigma_2 = 10^{-2}$ c/m et $\epsilon_{r2} = 5$. Pour diminuer le temps de calcul, nous n'avons tenu compte que du mode ligne de transmission qui est prépondérant pour des fréquences inférieures à quelques centaines de MHz. Les spectres ainsi transformés sont ensuite recomposés pour donner la forme théorique de l'impulsion après propagation sur des distances de 2,4 et 6 m (PL3.7 à PL3.9). Sur ces mêmes planches, nous avons porté les résultats expérimentaux^[24].

L'allure générale des impulsions théoriques correspond bien à celle des signaux expérimentaux, avec cependant un affaiblissement théorique qui semble a priori plus important que l'affaiblissement réel. C'est une remarque qui va dans le même sens que celle que nous avons faite dans le cas de l'étude en régime sinusoïdal ; un ajustement des paramètres électriques du sol donnerait de meilleurs résultats. Il faut également noter que dans cette première étude, nous n'avons pris en compte que le mode de propagation type "ligne de transmission", qui ne traduit pas dans toute la gamme des fréquences le comportement exact du courant total.



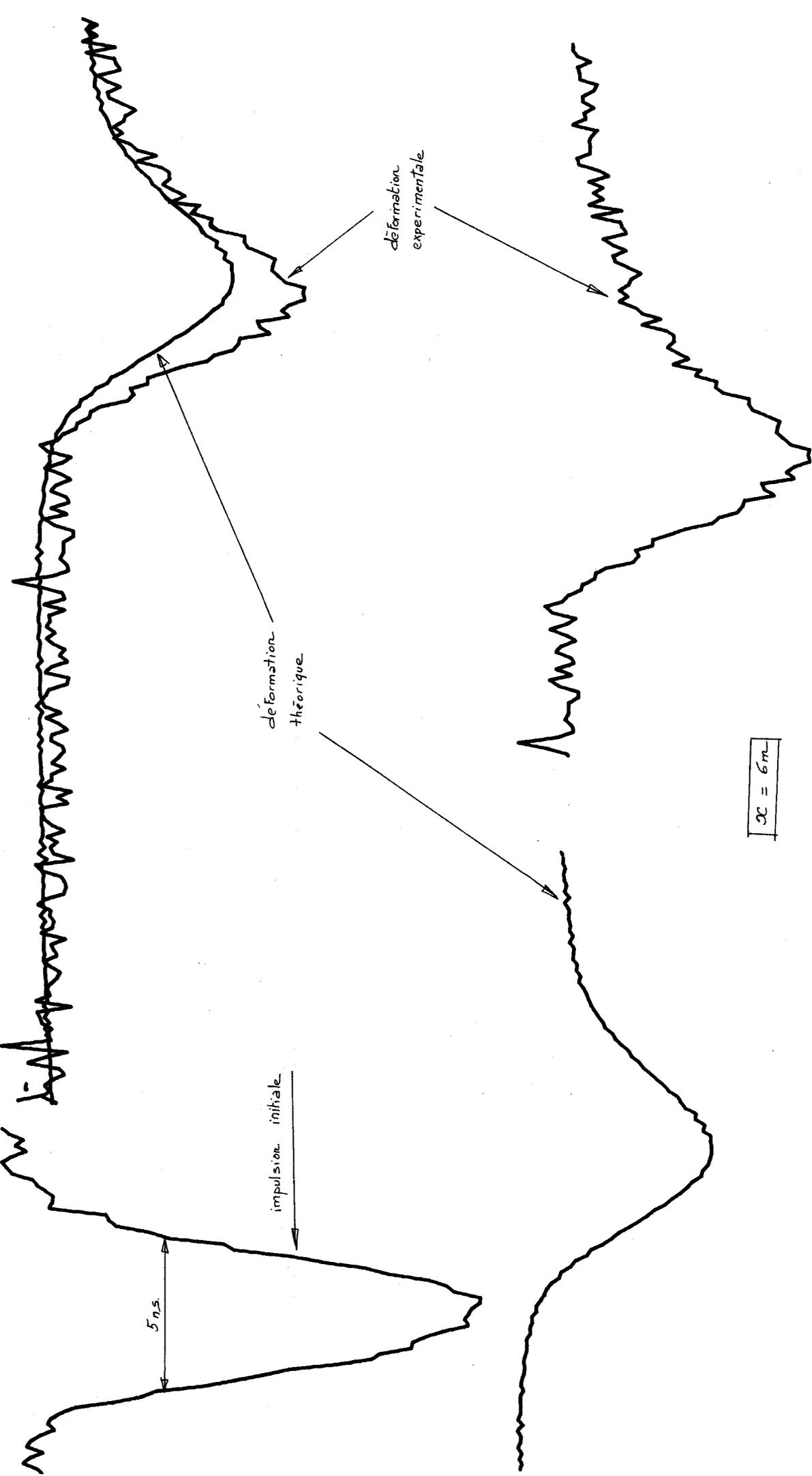
PL 3.7 DEFORMATIONS THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE L'IMPULSION

BUS
LILLE



PL.38 DEFORMATIONS THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE L'IMPULSION





PL 3.9 DEFORMATIONS THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE L'IMPULSION

C O N C L U S I O N

Dans ce chapitre, nous avons établi l'expression du courant dans le cas où l'excitation de la ligne est faite sur une zone infinitésimale. Il est apparu que ce courant pouvait être divisé en quatre composantes distinctes.

Les deux premières composantes sont les courants polaires I_{p1} et I_{p2} . Ce sont des courants associés aux constantes de propagation discrètes α_1 et α_2 des modes de propagation "ligne de transmission" et "rapide".

Les deux autres composantes du courant total sont des courants associés à des constantes de propagation à spectre continu dans le plan complexe α .

Pour une fréquence de 50 MHz et une hauteur d du fil au-dessus du sol égale à 0,04 m, ces composantes deviennent négligeables devant les courants polaires dès que l'onde s'est propagée sur le fil d'une distance supérieure au dixième de la longueur d'onde.

Dans tous les exemples que nous avons donnés, le courant I_{p1} est toujours plus grand que le courant I_{p2} au niveau du générateur. Pour des hauteurs d inférieures au dixième de la longueur d'onde, le courant I_{p2} devient supérieur au courant I_{p1} quand la distance atteint approximativement une dizaine de longueurs d'onde. Pour des hauteurs d supérieures au dixième de la longueur d'onde, le courant I_{p1} reste toujours plus grand que le courant I_{p2} .

Quand la fréquence atteint 1 GHz, le courant total ne peut plus être considéré comme simplement la somme de deux courants polaires.

En régime sinusoïdal, nous avons vérifié expérimentalement pour plusieurs valeurs de la fréquence et de la hauteur d le bon accord entre les valeurs théoriques et expérimentales de la distribution de courant sur la ligne.

Dans le domaine temporel, nous avons étudié la déformation d'une impulsion lors de sa propagation sur le fil. Afin de faciliter les calculs, la durée de l'impulsion a été choisie suffisamment importante (5 ns) pour ne devoir tenir compte, en première approche, que du mode "ligne de transmission".

Les courbes tracées pour différentes distances de propagation, montrent que l'accord entre les précisions théoriques et les résultats expérimentaux est satisfaisant.

Le principe de calcul peut être généralisé à des impulsions beaucoup plus étroites à condition de tenir compte de tous les modes de propagation pour chaque raie du spectre des fréquences.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons montré la faisabilité de la méthode de détection d'interfaces utilisant le phénomène d'onde de choc créée par une impulsion brève de courant se propageant sur un fil. La nature physique du dispositif d'excitation étant constituée à la fois par le fil et la surface du sol, il n'y a pas d'écho sur l'interface air-sol, comme nous l'avons montré expérimentalement.

Une étude paramétrique a fait apparaître que la hauteur optimum de la ligne par rapport au sol est de 5 à 10 cm et que la distance entre le point d'alimentation du fil et la sonde de réception doit être de l'ordre de 2 à 3 m. Ces valeurs résultent d'un compromis entre l'effet d'intégration que donne chaque élément de la ligne et l'élargissement de l'impulsion due au milieu dispersif que constitue le sol. Pour une largeur de l'impulsion à la sortie du générateur de 750 ps à mi-hauteur, la profondeur d'investigation obtenue est de l'ordre de 50 cm.

Nous envisageons d'utiliser par la suite des générateurs délivrant des impulsions de différentes largeurs, adaptées aux profondeurs des interfaces à détecter.

La chaîne d'acquisition que nous utilisons permettra ultérieurement la mise en oeuvre des procédures de traitement de signaux pour permettre une meilleure détection de l'écho.

Parallèlement à cette partie expérimentale, nous avons étudié théoriquement la propagation d'une onde électromagnétique sur une ligne tendue à faible hauteur au-dessus du sol.

L'approche en régime sinusoïdal a permis de mettre en évidence les modes de propagation guidés et rayonnés, et de calculer la contribution de chacun d'eux au courant total. Nous avons également déterminé la distribution de courant sur le fil et montré le bon accord entre les résultats de mesure et les prévisions théoriques.

L'exploitation de ce modèle, associée à une méthode de transformation rapide de FOURIER, permet de reconstruire l'impulsion et d'en suivre la déformation lors de sa propagation.

Il serait intéressant de poursuivre cette étude, tant du point de vue théorique qu'expérimental pour aboutir à la réalisation d'un système opérationnel.

Sur le plan théorique, cette nouvelle étape consisterait d'abord à exploiter les modèles existants pour différentes configurations et serait également destinée à faire apparaître l'écho prenant naissance sur un plan réflecteur interne à la structure (transition brutale de conductivité pour les revêtements, présence d'une armature métallique dans une structure quelconque...).

De nombreux essais expérimentaux seront ensuite indispensables pour la mise au point des procédures de traitement de signaux les plus appropriées.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) R. GABILLARD : "Prospection électromagnétique par onde de choc", Rapport Institut Français du Pétrole (IFP), Mars 1963.
- (2) J.C. DELMOTTE : "Etude de la faisabilité d'un système de détection électromagnétique par onde de choc", Mémoire CNAM, LILLE, Décembre 1977.
- (3) A. MAYEUR : "Etude et réalisation d'une conversion entre un oscilloscope à échantillonnage programmable et un enregistreur magnétique en vue du traitement de signaux en impulsion", DEA Electronique, LILLE, Septembre 1978.
- (4) J.R. WAIT : "Theory of propagation along a thin wire parallel to an interface", Radio Science, 1972, 7, pp 675 - 680.
- (5) G. OLSEN, D.C. CHANG : "Electromagnetic characteristics of a horizontal wire above a dissipative earth - Part I : Propagation of Transmission - Line and Fast - Wave modes.", Scientific Report N° 3, University of Colorado, October 1973.
- (6) M. SOIRON : "Contribution à l'étude de propagation d'une onde électromagnétique sur une ligne multifilaire au dessus d'un sol conducteur et en galerie souterraine.", Thèse de 3ème cycle, Juillet 1973.
- (7) G.N. WATSON : "Theory of Bessel Functions.", Cambridge U. Press, 1944.
- (8) W. GRÖBNER, N. HOFRETTNER : "Integraltafel - Unbestimmte Integrale.", Springer Verlag, 1949.
- (9) N.W. Mc. LACHLAN : "Bessel functions for Engineers.", Oxford at the Clarendon Press.
- (10) M. ABRAMOWITZ, I.A. SEGUN : "Handbook of mathematical functions.", Dover Publications, Inc., New York.
- (11) C.N.R.S : "Procédures algol en analyse numérique.", Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, 1967.
- (12) G. COURBET, P. DEGAUQUE, B. DEMOULIN, R. GABILLARD : "Contribution of the discrete modes to the current propagating along a wire parallel to a moderate conducting earth.", Electronic Letters, Vol 15, N° 6, Mars 1979.

- (13) B. DEMOULIN : *Thèse d'état, à paraître.*
- (14) E.F. KUESTER, D.C. CHANG : "Modal representation of a horizontal wire above a finitely conducting earth.", *Scientific Report, University of Colorado, September 1976.*
- (15) J.A. STRATTON : "Théorie de l'électromagnétisme.", Traduit par J. HEBENSTREIT, DUNOD, Paris 1961.
- (16) R. GABILLARD, P. DEGAUQUE, J.R. WAIT : "Subsurface Electromagnetic telecommunication. A review", *I.E.E.E, Trans. on Comm. Tech., vol. COM 19, N° 6, pp 1217 - 1228, Dec. 1971.*
- (17) D.C. CHANG, R.G. OLSEN : "Excitation of an infinite antenna above a dissipative earth", *Radio Sci., 1975, 8 - 9, pp 823 - 831.*
- (18) A. BANOS : "Dipole Radiation in the presence of a conducting half - space", Pergamon Press, 1966.
- (19) R. GABILLARD, J. FONTAINE, P. DEGAUQUE : "Méthode d'optimisation d'une liaison électromagnétique entre terminaux souterrains.", *Annales des télécommunications, Tome 25, N° 7 - 8, Juillet - Août 1970;*
- (20) P. DEGAUQUE, G. COURBET, B. DEMOULIN : "Propagation d'une onde électromagnétique le long d'une ligne parallèle à la surface du sol. "Journées Nationales Microondes et colloque OHD, Lille, Juin 1979, compte-rendu pp 83 - 86.
- (21) P. DEGAUQUE, G. COURBET, A. ZEDDAM, R. GABILLARD : "Etude théorique et expérimentale d'un radar électromagnétique pour l'exploration des terrains de subsurface". *Compte - rendu de fin d'études DGRST, Janvier 1980.*
- (22) P. GRIVET : "Physique des lignes de haute-fréquence et d'ultra-haute fréquence. Tome I : Paramètres primaires et secondaires, ondes progressives, impulsions." *Masson et Cie, 1969.*
- (23) B. DEMOULIN : "La transformation de Fourier - Application à l'analyse de signaux dans le domaine temporel.", *Journée d'étude sur la transformée de Fourier, CNET, Issy - les - Moulineaux, Novembre 1979.*
- (24) G. COURBET, P. DEGAUQUE, B. DEMOULIN, R. GABILLARD : "Propagation of a short pulse of current along a wire parallel tho the air-ground interface." *Accepté pour présentation à "International URSI Symposium on Electromagnetic Waves, Munich, 25 - 29 August 1980".*

Ouvrages consultés :

SCHELKUNOFF S.A : "Electromagnetic waves, D. VAN NOSTRAND Company Inc., New York, 1943.

DOS SANTOS : "Electromagnetic wave propagation along a horizontal wire above ground." *Proc. I.E.E.*, vol. 119, N° 8, Aug. 1972.

KIKUCHI : "Wave propagation along infinite wire above ground at high frequencies," *Electrotech. J. Japan*, 1956.

ANGOT : "Compléments de mathématiques.", Editions de la Revue d'Optique, Paris, 1965.

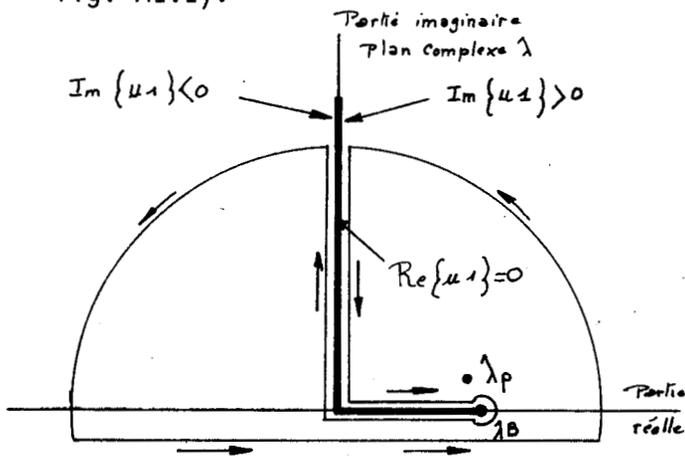
WAIT J.R. : "Electromagnetic radiations from cylindrical structures.", Pergamon Press, 1959.

J.L MARTIN : "Etude théorique de l'influence d'une hétérogénéité de conductivité et de forme quelconque sur le champ électromagnétique rayonné par un dipôle magnétique vertical en milieu stratifié.", thèse de troisième cycle, Juin 1978.

ANNEXE A1

CALCUL DE L'EXPRESSION $W_0(\alpha)$ POUR CHACUN DES POINTS B, C et D

Pour une valeur de α placée dans le plan complexe au point B, la position de la branche de coupure dans le plan complexe λ est différente (voir fig. A1.1).



La seule différence avec le calcul de $W_0(\alpha)$ au point A est dans l'expression de B_1 qui s'écrit dans ce cas :

$$B_1 = -2i \int_0^{(-\bar{\gamma})^-} \frac{d\delta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2\right) \left\{ +\sqrt{\bar{\gamma}^2 - \delta^2} \right\}}$$

Fig. A1.1

$$B_1 = \frac{-\pi i n}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \bar{\gamma}^2}} \quad (A1.1)$$

L'expression de $W_0(\alpha)$ au point B s'écrit donc :

$$W_0(\alpha_B) = + \frac{2i}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \bar{\gamma}^2}} \log \frac{1/n + \sqrt{\frac{1}{n^2} - \bar{\gamma}^2}}{|\bar{\gamma}|} \quad (A1.2)$$

$$\text{où } \lambda_p = +i \sqrt{\frac{1}{n^2} - \bar{\gamma}^2}, \quad \bar{\gamma} = +\sqrt{1 - \alpha^2}$$

Pour une valeur de α placée dans le plan complexe au point C, la branche de coupure dans le plan complexe λ est la même que pour le point A (voir fig.2.9).

Par contre, dans le plan complexe \mathcal{D} , le pôle en $1/n$ se trouve sur le demi axe réel négatif, avant le point $-\bar{\gamma}$. L'expression B_1 s'écrit :

$$B_1 = -2i \int_0^{(-\bar{\gamma})^-} \frac{d\delta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2\right) \left\{-\sqrt{\bar{\gamma}^2 - \delta^2}\right\}} = 2i \int_0^{(-\bar{\gamma})^-} \frac{d\delta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2\right) \sqrt{\bar{\gamma}^2 - \delta^2}}$$

où le point $\frac{1}{n}$ est exclu du contour d'intégration.

Pour résoudre cette intégrale, nous utilisons l'identité suivante [8] :

$$\int \frac{dx}{(c^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2c\sqrt{a^2 - c^2}} \log C_1 \frac{c\sqrt{a^2 - x^2} + x\sqrt{a^2 - c^2}}{c\sqrt{a^2 - x^2} - x\sqrt{a^2 - c^2}} \quad (a^2 > c^2)$$

en posant $x = \delta$, $c = \frac{1}{n}$ et $a = -\bar{\gamma}$ nous obtenons :

$$\int \frac{d\delta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2\right) \sqrt{\bar{\gamma}^2 - \delta^2}} = \frac{n}{2\sqrt{\bar{\gamma}^2 - \frac{1}{n^2}}} \log C_1 \frac{1/n\sqrt{\bar{\gamma}^2 - \delta^2} + \delta\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1/n^2}}{1/n\sqrt{\bar{\gamma}^2 - \delta^2} - \delta\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1/n^2}}$$

d'où nous déduisons : $B_1 = 0$ (A1.3)

Dans ce cas B_3 s'écrit :

$$B_3 = -i\pi \left\{ -2i \frac{1}{\left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left(\frac{1}{n^2} - \delta^2 \right) \cdot \left\{ -\sqrt{\bar{\gamma}^2 - \delta^2} \right\} \right\} \right]_{\delta=1/n}} \right\}$$

soit $B_3 = \frac{-\pi n}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - \frac{1}{n^2}}}$ (A1.4)

Pour B_4 nous obtenons :

$$B_4 = -2i \int_{-\bar{\gamma}}^{\infty} \frac{d\delta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2\right) \left\{ +i\sqrt{\delta^2 - \bar{\gamma}^2} \right\}} = -2 \int_{-\bar{\gamma}}^{\infty} \frac{d\delta}{\left(\frac{1}{n^2} - \delta^2\right) \sqrt{\delta^2 - \bar{\gamma}^2}} \quad (\text{A1.5})$$

Comme pour le point A nous faisons le changement de variable suivant :

$\delta = -\bar{\gamma} \cosh \zeta$ avec $\zeta \geq 0$, d'où l'expression de B_4

$$B_4 = -n^2 \left\{ \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{1 + n\bar{\gamma} \cosh \zeta} + \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{1 - n\bar{\gamma} \cosh \zeta} \right\} \quad (\text{A1.6})$$

Dans ce cas nous utilisons l'identité [8] :

$$\int \frac{dx}{a + b \cosh x} = \frac{\pm 1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arcsin \frac{b + a \cosh x}{a + b \cosh x} + C_1 \quad \text{pour } b^2 > a^2$$

où la fonction arcsin est définie par sa détermination principale,

soit $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$

En posant : $a = 1$, $x = \tau$ et $b = \pm n\bar{\gamma}$ nous obtenons :

$$\int \frac{d\zeta}{1 + n\bar{\gamma} \cosh \zeta} = \frac{+1}{\sqrt{n^2 \bar{\gamma}^2 - 1}} \arcsin \frac{n\bar{\gamma} + \cosh \zeta}{1 + n\bar{\gamma} \cosh \zeta} + C_1$$

$$\int \frac{d\zeta}{1 - n\bar{\gamma} \cosh \zeta} = \frac{-1}{\sqrt{n^2 \bar{\gamma}^2 - 1}} \arcsin \frac{-n\bar{\gamma} + \cosh \zeta}{1 - n\bar{\gamma} \cosh \zeta} + C_1$$

D'où la valeur de B_4 :

$$B_4 = \frac{-n^2}{\sqrt{n^2 \bar{\gamma}^2 - 1}} \left\{ \arcsin \frac{1}{n\bar{\gamma}} - \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{-1}{n\bar{\gamma}} + \frac{\pi}{2} \right\} \quad (\text{A1.7})$$

$$\text{soit } B_4 = \frac{-2n^2}{\sqrt{n^2\bar{\Gamma}^2 - 1}} \arcsin \frac{1}{n\bar{\Gamma}}$$

ou encore en utilisant la représentation logarithme de la fonction arcsin :

$$B_4 = \frac{2in^2}{\sqrt{n^2\bar{\Gamma}^2 - 1}} \log \left\{ \frac{i}{n\bar{\Gamma}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2\bar{\Gamma}^2}} \right\} \quad (\text{A1.8})$$

Les équations (A1.3) à (A1.8) permettent d'écrire l'expression de $W_0(\alpha)$ au point C :

$$W_0(\alpha_C) = \frac{2\pi i}{\lambda_p} - \frac{2}{\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}} \log \left\{ \frac{1/n - i\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}}{-\bar{\Gamma}} \right\} \quad (\text{A1.9})$$

$$\text{où } \lambda_p = \sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}, \quad \bar{\Gamma} = -\sqrt{1 - \alpha^2}$$

Dans le cas du point D, la branche de coupure dans le plan complexe λ est celle de la fig. A1.1. L'expression B_3 s'écrit :

$$B_3 = \frac{\pi n}{\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}} \quad (\text{A1.10})$$

La valeur de B_1 reste nulle et B_4 s'écrit :

$$B_4 = \frac{-2in}{\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}} \log \left\{ \frac{1/n - i\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}}{-i\bar{\Gamma}} \right\}$$

D'où la valeur de $W_0(\alpha_D)$:

$$W_0(\alpha_D) = -\frac{2}{\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}} \log \left\{ \frac{1/n - i\sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}}{\bar{\Gamma}} \right\} \quad (\text{A1.11})$$

$$\text{où } \lambda_p = \sqrt{\bar{\Gamma}^2 - 1/n^2}, \quad \bar{\Gamma} = \sqrt{1 - \alpha^2}$$

A N N E X E A2

RECHERCHE D'UNE SOLUTION DE L'EQUATION MODALE PAR LA METHODE DE NEWTON

Le problème consiste à trouver dans le plan complexe α , la valeur qui annule l'équation complexe et non linéaire $M(\alpha)$.

Si nous posons $\alpha = a + ib$ où a et b sont des valeurs réelles, l'équation modale peut s'écrire :

$$M(a, b) = F_1(a, b) + i F_2(a, b) = 0$$

$$\text{où } F_1(a, b) = \operatorname{Re} \{ M(\alpha) \}$$

$$F_2(a, b) = \operatorname{Im} \{ M(\alpha) \}$$

F_1 et F_2 sont des fonctions réelles des variables réelles a et b .

L'équation modale peut donc se mettre sous la forme d'un système non linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} F_1(a, b) = 0 \\ F_2(a, b) = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore } [F] = 0 \text{ sous la forme matricielle}$$

La linéarisation du système conduit à une formule itérative qui s'écrit :

$$[X_{k+1}] = [X_k] - [DF_k]^{-1} \cdot [F_k]$$

où

$$[X_k] = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad [F_k] = \begin{bmatrix} F_1(a, b) \\ F_2(a, b) \end{bmatrix} \quad [DF_k] = (A_{ij}) \text{ avec } A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(a, b)$$

D'une opération à la suivante, pour que les nouvelles valeurs soient meilleures

que les précédentes, il faut que la relation suivante soit satisfaite :

$$\sum_{i=1}^2 F_i^2 (X_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^2 F_i^2 (X_k)$$

Sinon nous effectuons une opération de bipartition définie par

$$[X_{k+1}] = \frac{1}{2} ([X_k] + [X_{k+1}])$$

Dans le programme, un test permet de limiter le nombre de bipartitions à une valeur fixée par l'utilisateur. Le test d'arrêt est défini par :

$$\sum_{i=1}^2 F_i^2 (X_{k+1}) \leq \varepsilon$$

où ε est également une valeur fixée par l'opérateur.

Dans le programme, il est apparu plus intéressant de calculer la valeur de $\bar{\gamma}$ qui présente un plus grand équilibre entre les valeurs des parties imaginaires et réelles que la valeur de α . Nous avons programmé pour le calcul de $M(\bar{\gamma})$ les formules écrites en (2.17) et (2.33). Les fonctions de Hankel sont programmées selon la valeur de leur argument soit par leur développement limité en série, soit par leur développement asymptotique.

Dans le calcul de $W_d(\alpha)$ nous nous sommes limités aux quatre premiers termes du développement ; l'exemple numérique donné ci-dessous montre que les termes suivants sont négligeables :

pour $d = 0,108$, $a = 1,6 \cdot 10^{-3}$, $n = 7,43 + j6,73$ et $F = 1,8 \text{ GHz}$

nous trouvons : $|I_0| = 11,4$

$$|I_1| = 3,8$$

$$|I_2| = 0,94$$

$$|I_3| = 0,18$$

Les fonctions F_1 et F_2 sont respectivement les parties réelles et imaginaires du résultat ainsi trouvé.

Le calcul des coefficients A_{ij} est programmé grâce aux formules écrites ci-dessous :

$$M(a, b) = F_1(a, b) + i F_2(a, b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial M(a, b)}{\partial a} = \frac{\partial F_1(a, b)}{\partial a} + i \frac{\partial F_2(a, b)}{\partial a} \\ \frac{\partial M(a, b)}{\partial b} = \frac{\partial F_1(a, b)}{\partial b} + i \frac{\partial F_2(a, b)}{\partial b} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1(a, b)}{\partial a} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial M(a, b)}{\partial a} \right\} \\ \frac{\partial F_2(a, b)}{\partial a} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial M(a, b)}{\partial a} \right\} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1(a, b)}{\partial b} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial M(a, b)}{\partial b} \right\} \\ \frac{\partial F_2(a, b)}{\partial b} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial M(a, b)}{\partial b} \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial M(a, b)}{\partial a} = \frac{\partial M(a, b)}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial M(a, b)}{\partial z} \\ \frac{\partial M(a, b)}{\partial b} = \frac{\partial M(a, b)}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial b} = i \frac{\partial M(a, b)}{\partial z} \end{cases}$$

Comme nous faisons la recherche de $\bar{\tau}$, c'est la dérivée de $M(\bar{\tau})$ par rapport à $\bar{\tau}$ qui nous intéresse.

$$\frac{\partial M(\bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} = \bar{\tau}^2 \left\{ -A \cdot H_0^{(4)}(A\bar{\tau}) \cdot J_1(A\bar{\tau}) - A \cdot H_1^{(4)}(A\bar{\tau}) \cdot J_0(A\bar{\tau}) + 2D H_1^{(4)}(2D\bar{\tau}) \right\} \\ + 2\bar{\tau} \left\{ H_0^{(4)}(A\bar{\tau}) \cdot J_0(A\bar{\tau}) - H_0^{(4)}(2D\bar{\tau}) \right\} + \frac{\partial P(\bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} - \frac{\partial Q(\bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}}$$

$$\frac{\partial P(\bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} = \frac{2}{n^2 - 1} \left\{ \bar{\tau} \cdot \left[\frac{1}{2D} + in \right] \cdot \left[-\frac{1}{\bar{\tau}} \cdot H_1^{(4)}(2D\bar{\tau}) + 2D H_0^{(4)}(2D\bar{\tau}) \right] + \right.$$

$$\left. \left[\frac{1}{2D} + in \right] H_1^{(4)}(2D\bar{\tau}) + 2D \bar{\tau}^2 H_1^{(4)}(2D\bar{\tau}) - 2\bar{\tau} H_0^{(4)}(2D\bar{\tau}) \right\}$$

$$\frac{\partial Q(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = -4\bar{\gamma} \frac{H_0^{(4)}(2D\bar{\gamma})}{n^2} - \frac{4D(1-\bar{\gamma}^2)}{n^2} H_1^{(4)}(2D\bar{\gamma}) - \frac{4\bar{\gamma}}{\pi n^3} W(\bar{\gamma})$$

$$+ \frac{2(1-\bar{\gamma}^2)}{\pi n^3} \frac{\partial W(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}}$$

$$\frac{\partial W(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = \exp(-i2D/n) \cdot \left[\frac{\partial W_d(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} + \frac{\partial W_o(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} \right]$$

$$\frac{\partial W_o(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = -\frac{2\pi i \bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}^2 - \frac{1}{n^2})(\bar{\gamma}^2 - \frac{1}{n^2})^{1/2}} + \frac{2\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}^2 - \frac{1}{n^2})(\bar{\gamma}^2 - \frac{1}{n^2})^{1/2}} \left\{ \log \left[\frac{1}{n} - i(\bar{\gamma}^2 - \frac{1}{n^2})^{1/2} \right] \right.$$

$$\left. - \log \bar{\gamma} + i\pi \right\} + \frac{2}{(\bar{\gamma}^2 - \frac{1}{n^2})^{1/2}} \left\{ \frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{i\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}^2 - \frac{1}{n^2})^{1/2} \left[\frac{1}{n} - i(\bar{\gamma}^2 - \frac{1}{n^2})^{1/2} \right]} \right\}$$

$$\frac{\partial W_d(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = -i\pi \left\{ \frac{\partial I_0(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} + \frac{i}{n} \frac{\partial I_1(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} - \frac{1}{2n^2} \frac{\partial I_2(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} - \frac{i}{6n^3} \frac{\partial I_3(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} \right\}$$

$$\frac{\partial I_0(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = -4D^2 H_1^{(4)}(2D\bar{\gamma}) + \frac{D\pi}{\bar{\gamma}} \left[H_0^{(4)}(2D\bar{\gamma}) \cdot \mathcal{Y}_1(2D\bar{\gamma}) - \mathcal{Y}_0(2D\bar{\gamma}) \cdot H_1^{(4)}(2D\bar{\gamma}) \right.$$

$$\left. + \frac{4D}{\pi} H_1^{(4)}(2D\bar{\gamma}) \right]$$

$$\frac{\partial I_1(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = \frac{4D^2}{\bar{\gamma}} H_0^{(4)}(2D\bar{\gamma}) - \frac{4D}{\bar{\gamma}^2} H_1^{(4)}(2D\bar{\gamma}) - \frac{4i}{\pi \bar{\gamma}^3}$$

$$\frac{\partial I_2(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = -\frac{12D^2}{\bar{\gamma}^2} H_1^{(4)}(2D\bar{\gamma}) + \frac{8D^3}{\bar{\gamma}} H_0^{(4)}(2D\bar{\gamma}) - \frac{4D}{\bar{\gamma}^3} H_0^{(4)}(2D\bar{\gamma})$$

$$- \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \frac{\partial I_0}{\partial \bar{\gamma}} + \frac{2}{\bar{\gamma}^3} I_0$$

$$\frac{\partial I_3(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = -4 \cdot \frac{(2D)^3}{\bar{\gamma}^2} \cdot H_1^{(4)}(2D\bar{\gamma}) + \frac{(2D)^4}{\bar{\gamma}} \cdot H_0^{(4)}(2D\bar{\gamma}) - \frac{4}{\bar{\gamma}^3} (4D^2) \cdot H_0^{(4)}(2D\bar{\gamma})$$

$$- \frac{4}{\bar{\gamma}^2} \frac{\partial I_1}{\partial \bar{\gamma}} + \frac{8}{\bar{\gamma}^3} I_1$$

Pour illustrer le fonctionnement de ce programme nous donnons ci-dessous les résultats obtenus dans le cas d'une application numérique particulière.

$$d = 0,04 \text{ m} \quad a = 0,001 \text{ m} \quad \sigma_2 = 10^{-2} \text{ v/m} \quad \epsilon_2 = 5 \epsilon_1 \quad F = 1,3\text{GHz}$$
$$(n = 2,24 + i 0,0402)$$

Valeur de départ : $\alpha = 0,9438 + i 0,0353$

Valeur de l'équation modale : $M(\alpha) = - 0,013 - i 0,13$

Solution trouvée : $\alpha = 0,9198 + i 0,0202$

Valeur de l'équation modale : $M(\alpha) = 0,25 \cdot 10^{-13} + i 0,38 \cdot 10^{-13}$

Nombre d'itérations : 10

ANNEXE A3

CALCUL DES EXPRESSIONS P (α) ET Q (α) PAR INTEGRATION NUMERIQUE

Les expressions P et Q sont définies par :

$$P(\alpha) = \frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_1 + \mu_2} d\lambda$$

$$Q(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_2 + n^2\mu_1} d\lambda$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\lambda^2 - \bar{\gamma}^2)^{1/2} \\ \mu_2 &= (\lambda^2 + \alpha^2 - n^2)^{1/2} \\ \bar{\gamma} &= (1 - \alpha^2)^{1/2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}\{\mu_1\}, \operatorname{Re}\{\mu_2\} &\geq 0 \\ \operatorname{Im}\{\bar{\gamma}\} &\geq 0 \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu dans l'annexe A, il est nécessaire pour appliquer la méthode de Newton de calculer les dérivées par rapport à $\bar{\gamma}$ des expressions P et Q.

$$\frac{\partial P(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = \frac{4}{i\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\gamma}}{\mu_1 \mu_2} [2D\mu_2 + 1] \cdot \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_1 + \mu_2} d\lambda$$

$$\frac{\partial Q(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = \frac{4(1-\bar{\gamma}^2)}{i\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\gamma}}{\mu_1 \mu_2} \left[2D\mu_2 + \frac{\mu_1 + n^2\mu_2}{\mu_2 + n^2\mu_1} \right] \cdot \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_2 + n^2\mu_1} d\lambda - \frac{8\bar{\gamma}}{i\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-2D\mu_1)}{\mu_2 + n^2\mu_1} d\lambda$$

Nous avons tracé en fonction de λ , les valeurs des parties réelles et imaginaires des fonctions à intégrer pour plusieurs valeurs des paramètres électriques et géométriques.

Pour effectuer cette intégration numérique, nous divisons le domaine d'intégration en intervalles discrets au pas d'intégration. Sur chacun des intervalles élémentaires ainsi définis nous appliquons séparément l'algorithme de Simpson pour les parties réelles et imaginaires de la fonction à intégrer. Le processus s'arrête quand la contribution fournie par le résultat de l'intégrale sur un pas est négligeable par rapport à la somme des résultats déjà obtenus. L'examen des allures des fonctions à intégrer montre que dans certains cas, la fonction peut passer par zéro pour une valeur de λ comprise entre les deux bornes du pas d'intégration. Le résultat obtenu sur cet intervalle peut alors être négligeable uniquement parce que les valeurs positives compensent les valeurs négatives. Pour éviter que dans ce cas, le processus d'intégration s'arrête alors que la contribution des pas suivants n'est pas négligeable, nous avons imposé dans le programme que le test soit satisfait sur deux intervalles successifs.

Il apparaît également que le pas d'intégration doit être constant en fonction de λ pour les faibles valeurs de λ . Cependant pour les fonctions P et Q, la valeur du pas doit varier de façon inversement proportionnelle au paramètre d. Pour les fonctions $\frac{\partial P}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial Q}{\partial \tau}$, le pas peut rester constant quand d ou les autres paramètres varient.

Enfin la décroissance exponentielle des fonctions montre que pour les plus grandes valeurs de λ , il est intéressant par exemple de doubler le pas d'intégration à chaque nouvelle itération ; les résultats trouvés pour chaque intervalle gardent alors des ordres de grandeur comparables.

Pour illustrer le fonctionnement de ce programme, nous donnons les résultats obtenus pour la même application numérique que dans l'annexe A :

$$d = 0,04 \text{ m} \quad a = 0,001 \text{ m} \quad \sigma_2 = 10^{-2} \sigma/m \quad \epsilon_2 = 5\epsilon_1 \quad F = 1,3 \text{ GHz}$$

$$(n = 2,24 + i 0,0402)$$

$$\text{Valeur de départ : } \alpha = 0,9438 + i 0,0353$$

$$\text{Valeur de l'équation modale : } M(\alpha) = -5,5 \cdot 10^{-3} - i 1,77 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{Solution trouvée : } \alpha = 0,9419 + i 0,0327$$

$$\text{Valeur de l'équation modale : } M(\alpha) = -4,64 \cdot 10^{-13} + i 5,83 \cdot 10^{-14}$$

$$\text{Nombre d'itérations : } 4$$

A N N E X E A4

CALCUL DE LA VALEUR DU COURANT PAR INTEGRATION
NUMERIQUE DE LA FORMULE EXACTE

Comme dans le cas des formules approchées, nous remplaçons dans les zones proches de $\alpha = 1$ ($\gamma = 0$), les expressions de $M(\alpha)$, $Q(\alpha)$ et $P(\alpha)$ par leur développement limité.

Le calcul de $M(\alpha)$ pour une valeur de α réelle pose un problème dû à la définition de μ_1 que nous rappelons ci-dessous :

$$\mu_1 = (\lambda^2 - 1 + \alpha^2)^{1/2} \quad \text{avec} \quad \text{Re}\{\mu_1\} \geq 0$$

Pour une valeur de α telle que $\alpha^2 + \lambda^2 > 1$, μ_1 est un réel pur qui doit donc être positif. Dans cette zone les fonctions à intégrer dans $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ auront donc un comportement en exponentielle décroissante.

Pour une valeur de α telle que $\alpha^2 + \lambda^2 < 1$, μ_1 est un imaginaire pur et la détermination par la partie réelle ne peut plus se faire. Il faut tenir compte dans ce cas du fait que le nombre 1 représente la constante de propagation réduite dans l'air qui comme nous l'avons vu au paragraphe 2.2 est un nombre complexe possédant une partie imaginaire positive très petite. On peut alors montrer que pour avoir $\text{Re}\{\mu_1\} > 0$, il faut choisir $\text{Im}\{\mu_1\} < 0$. Nous avons tracé sur les planches A4.1 à A4.4. les valeurs des parties réelles et imaginaires des fonctions à intégrer pour le calcul de $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$. La variable portée en abscisse est λ , le paramètre est la valeur de α . Les constantes que nous avons choisies pour cette application sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll} d = 0,108 \text{ m } (0,65 \lambda) & a = 0,00166 \text{ m } (0,01 \lambda) & F = 1,8 \text{ GHz} \\ n = 7,43 + i 6,73 & x = 0,1 \text{ m} & \end{array}$$

Pour une valeur de α donnée, la fonction présente bien un comportement de type sinusoïdal (u_1 imaginaire pur) jusqu'au moment où $\alpha^2 + \lambda^2 = 1$. Au delà de cette valeur critique, le comportement de la fonction se rapproche d'une fonction décroissant exponentiellement. Nous vérifions également que la position du point critique varie selon la loi $\lambda_c = \sqrt{1 - \alpha^2}$. Pour résoudre le problème posé dans l'intégration numérique par l'existence de cette irrégularité, nous avons défini deux pas d'intégration différents :

* pour $\lambda < \sqrt{1 - \alpha^2}$, le pas $\Delta\lambda$ est tel que $\frac{\lambda_c}{\Delta\lambda} = N$ où N est un nombre. nombre entier.

* pour $\lambda > \sqrt{1 - \alpha^2}$, le pas $\Delta\lambda$ est tel que :

$$\begin{aligned} f(\lambda_c + (\Delta\lambda)_1) &= f(\lambda_c) / 2 \\ (\Delta\lambda)_i &= (\Delta\lambda)_{i-1} \times 2 \end{aligned}$$

Avant d'appliquer le programme d'intégration numérique, il est intéressant d'étudier les variations de la fonction dans le cas limite où la valeur de α prend des valeurs importantes.

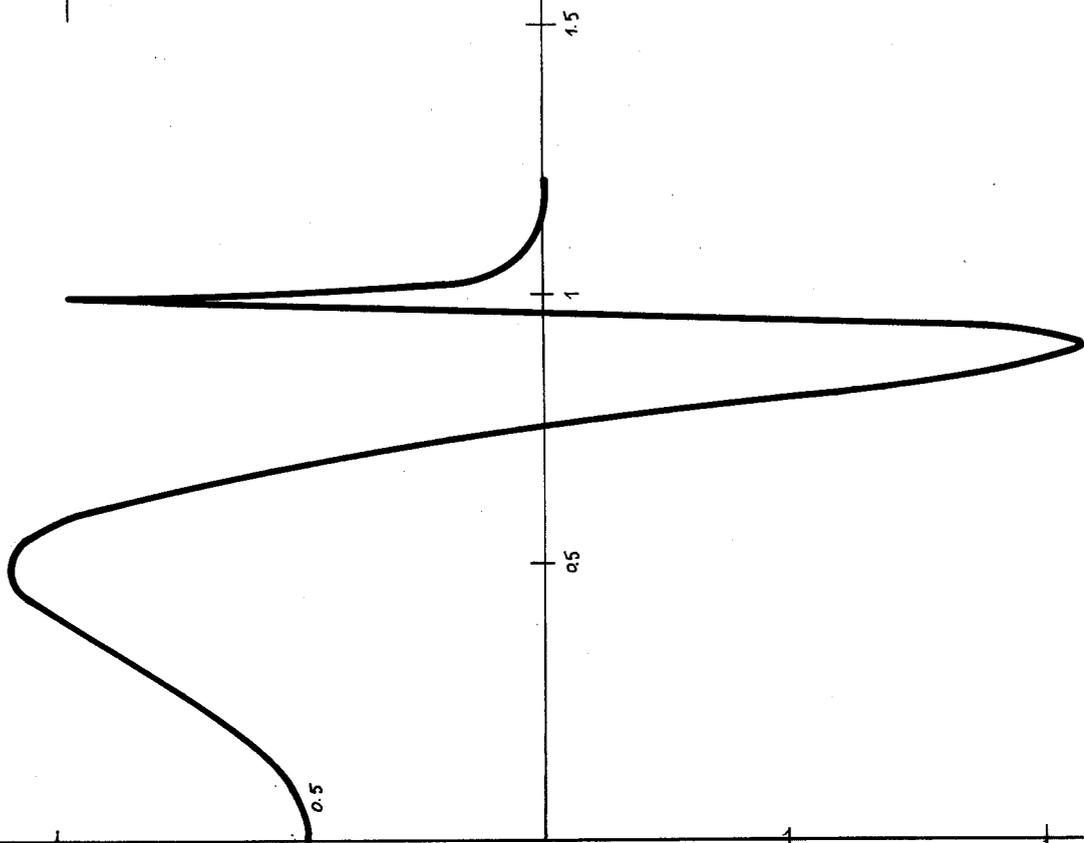
L'expression du développement limité de $M(\alpha)$ quand α est grand, montre qu'elle varie comme $\sqrt{\alpha}$, soit une variation en $\{ [\exp(i k_1 \alpha x)] / \sqrt{\alpha} \}$ pour la fonction à intégrer. Ce type de variation se prête particulièrement bien à l'utilisation d'algorithmes d'accélération de convergence dans les programmes d'intégration numérique. Afin d'optimiser les valeurs des paramètres utilisés dans ce programme, nous l'avons dans un premier temps appliqué à un calcul du même genre mais de résultat connu :

$$\int_0^{\infty} e^{i\mu\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} e^{i\pi/4} \quad \text{avec } \mu > 0$$

Nous avons cherché, pour ce genre de fonctions, la valeur des paramètres qui permettent d'obtenir le résultat exact (avec la précision demandée) pour un nombre minimum d'appels de la fonction à intégrer.

Compte tenu de l'ensemble de ces remarques, nous avons développé un programme qui calcule le courant total par intégration directe de la formule écrite en (3.17).

PLA 4-1 : VARIATIONS DE LA PARTIE RÉELLE DE $P(\infty)$

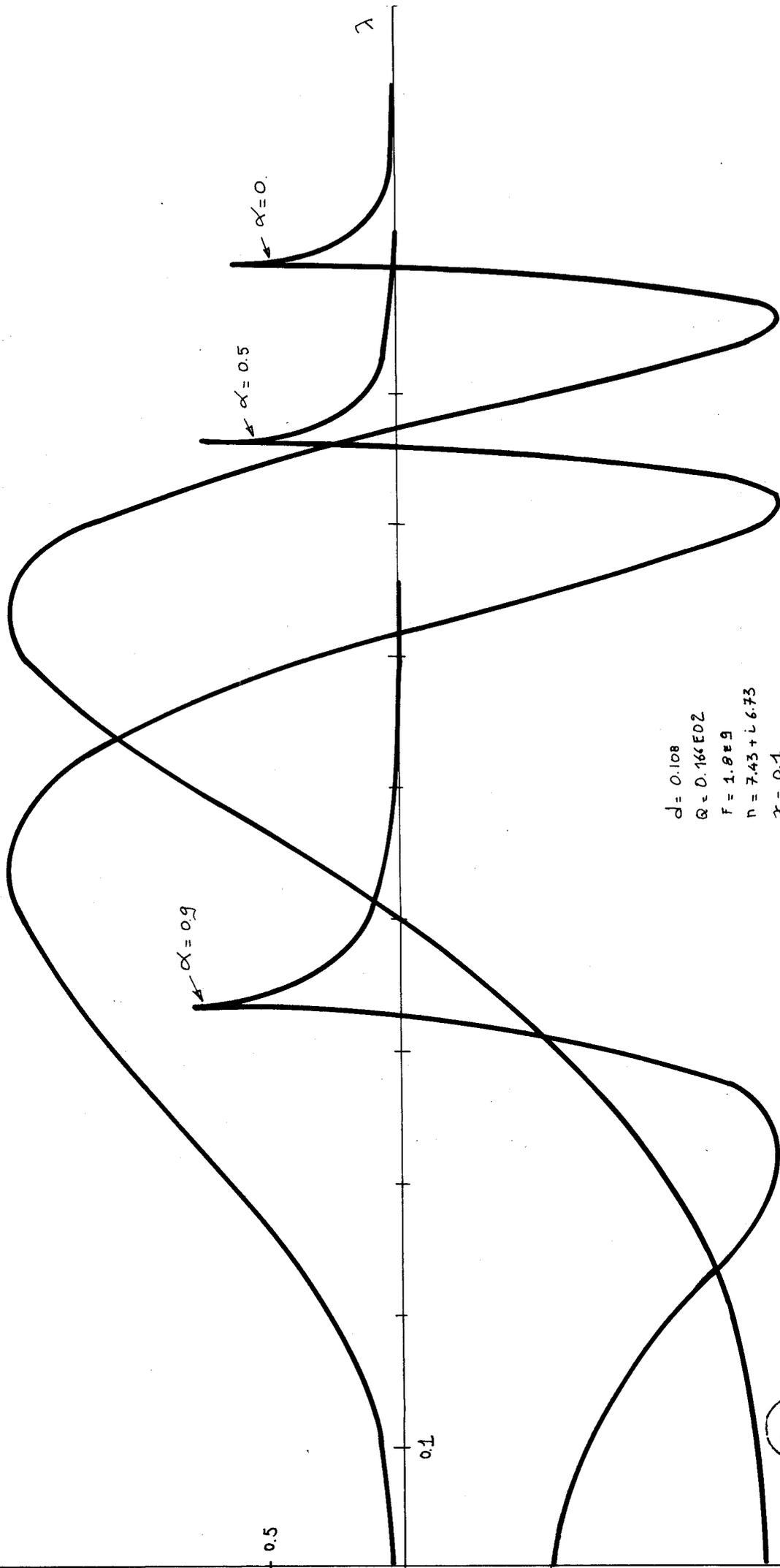


$d = 0.108$
 $\theta = 0.166 E - 02$
 $F = 1.8 E 9$
 $n = 7.43 + i 6.73$
 $\alpha = 0.1$
 $\mathcal{A} = 0.$



PL A4.2: VARIATIONS DE LA PARTIE IMAGINAIRE DE $P(\alpha)$

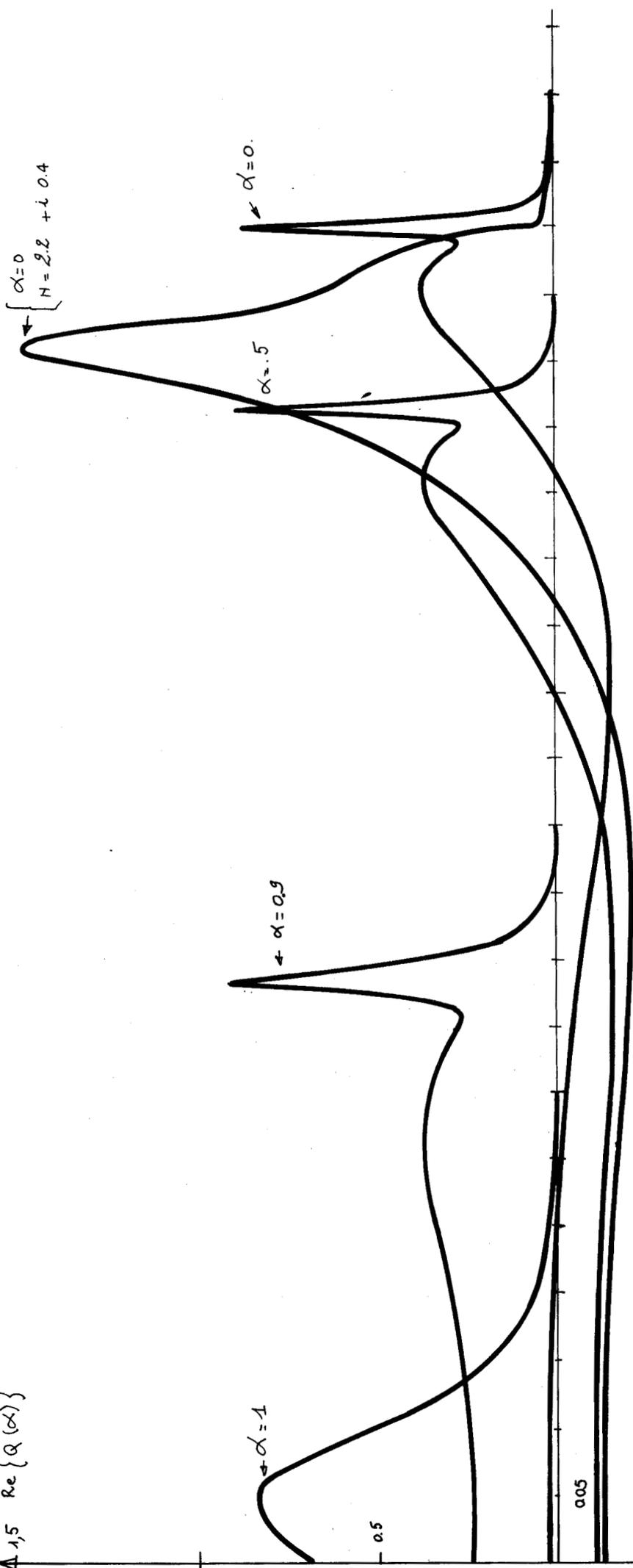
$Im\{P(\alpha)\}$



$d = 0.108$
 $Q = 0.166E02$
 $F = 1.8E9$
 $n = 7.43 + i 6.73$
 $x = 0.1$

BUS LILLE

$\Delta_{1,5} \operatorname{Re}\{Q(\alpha)\}$



$d = 0.108$
 $a = 0.1666E-02$
 $F = 1.8E9$
 $n = 7.43 + i6.73$
 $x = 0.1$

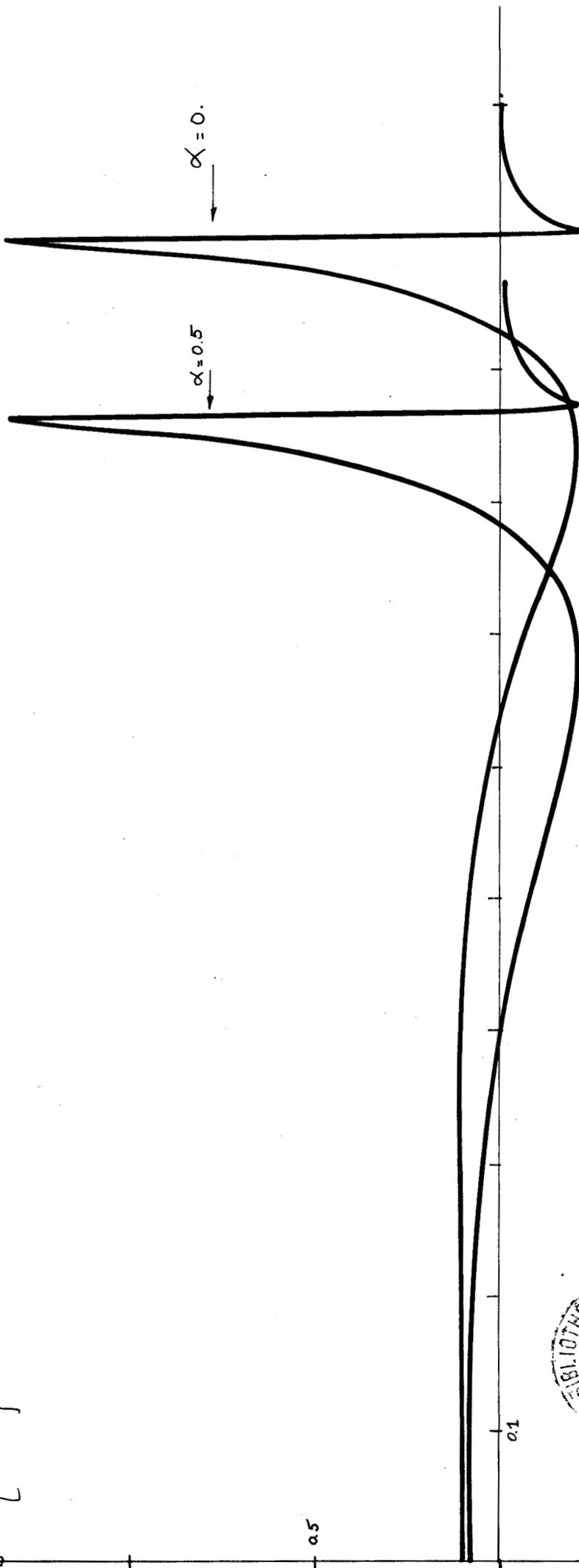


PL A 4.3. VARIATIONS DE LA PARTIE RÉELLE DE $Q(\alpha)$.

$\Delta \text{Im} \{ Q(\alpha) \}$

0.5

0.1



$\alpha = 0.$

$\alpha = 0.5$

$d = 0.108$
 $a = 0.166 E - 02$
 $F = 1.829$
 $n = 743 + i673$
 $x = 0.1$



PL. A-4. 4. VARIATIONS DE LA PARTIE IMAGINAIRE DE $Q(\alpha)$.