UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

NAJIB CHERFAOUI

RAYON DE BORNOLOGIE DES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES SUR LES ESPACES DE BANACH

MEMBRES DU JURY : M. PARREAU, PRÉSIDENT
G. CŒURÉ, RAPPORTEUR
PH. ANTOINE,
P. LELONG, UNIVERSITÉ PARIS VI
M. ROGALSKI
} EXAMINATEURS

SOUTENUE LE 12 JUIN 1980

Monsieur le Professeur G. Coeuré m'a initié aux techniques et méthodes de l'analyse complexe et a dirigé ce travail qui, sans ses conseils généreux n'aurait pas vu le jour. Qu'il trouve donc ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je suis très honoré que Monsieur le Professeur P. Lelong ait bien voulu faire partie du jury de cette thèse ; je l'en remercie vivement.

Je remercie Monsieur le Professeur M. Parreau d'avoir bien voulu présider cette thèse, ainsi que Messieurs les Professeurs Ph. Antoine et M. Rogalski qui ont accepté de se joindre au jury.

Que Mesdames R. Bérat et A. Lengaigne qui ont assuré la réalisation matérielle de cette thèse avec soin et compétence, ainsi que les services de l'imprimerie de l'Université de Lille I, trouvent ici mes sincères remerciements.

TABLE DES MATIERES.

INTRODUCTION.

Etant donnée une fonction holomorphe f, sur un ouvert ω d'un espace de Banach E, le rayon de convergence du développement taylorien de f en un point x de ω, noté $R_f(x)$, peut être strictement inférieur à la distance de x à la frontière de ω. Plus précisément on trouvera dans [1] la construction d'une fonction f telle que R_f prenne des valeurs arbitrairement petites dans une boule donnée ; la démonstration de Aron affine un argument de Dineen [3] et utilise une hypothèse sur le dual de E qui d'après Josefson [4] est toujours réalisée.

Soit u une fonction localement bornée supérieurement sur un espace de Banach complexe E.

Le rayon de bornologie de u est défini par :
$R_u(x) = \sup\{r > 0 \text{ , } u(x + rB) < \infty\}$ où B désignera la boule unité de E.

Si la fonction u est plurisousharmonique sur E, les propriétés suivantes de R_u sont bien connues [6] :

i) $|R_u(x) - R_u(y)| \leq ||x - y||$

ii) $- \text{Log } R_u \in$ p.s.h.(E) où p.s.h.(E) désignera dans la suite, le cône des fonctions plurisousharmoniques sur E.

En particulier, si $u = |f|$ où f est dans $\mathcal{O}(E)$, espace des fonctions holomorphes sur E, on sait que u est dans p.s.h. (E) et que $R_{|f|}(x)$ est le rayon de convergence du développement taylorien de f au point x.

On note (R) la classe des rayons de bornologie sur E et pour $\alpha \in [0,1]$ on pose $L_\alpha = \exp(-\text{p.s.h.}(E)) \cap \text{Lip}^+_\alpha(E)$ où $\text{Lip}^+_\alpha(E)$ désigne l'espace des fonctions strictement positives Lipschitziennes et de constante de Lipschitz α.

C.O. Kiselman montre dans [5] que sur ℓ^p, $p > 1$, la fonction $S(x) = (1 + c||x||)^{-a}$, (a et $c > 0$), n'est pas dans (R), mais est dans L_{ac} pour $ac < 1$.

G. Coeuré montre, dans [2], que sur ℓ^1 : $(R) = L_1$, et plus généralement exhibe une classe d'espaces de Banach (espaces $\ell_\emptyset$) pour lesquels, à un isomorphisme près, toute fonction $S \in L_\alpha$, $\alpha \in [0,1[$ qui vérifie $S(x) \leq d(x, \complement\, \omega)$, est le rayon de bornologie d'une fonction holomorphe sur l'ouvert ω, lorsque ω est polynomialement convexe.

On se propose, dans une première partie, d'exhiber des conditions suffisantes sur E permettant d'étendre le champ de validité du contre-exemple de Kiselman aux espaces de Banach dont la boule unité vérifie une propriété métrique faisant intervenir une topologie moins fine que la topologie affaiblie. Ces conditions nous permettent de montrer qu'on peut renormer de façon équivalente tout espace de Banach E de telle sorte que (R) ne contienne pas L_α, quel que soit $\alpha > 0$.

On montre que sur une large classe d'espaces d'Orlicz, la même conclusion a lieu pour la norme naturelle de ces espaces.

Dans une seconde partie, on cherche, à renormer l'espace de telle sorte que $(R) = L_1$; cette question est partiellement résolue sur les espaces d'Orlicz.

La notion de module de contraction, λ_E introduit par G. Coeuré dans [2] ; permet de réaliser un encadrement de S par le rayon de bornologie d'une fonction holomorphe :

$$\forall S \in L_\alpha , \exists\, f \in \mathcal{O}(E) \ : \ \lambda_E(\alpha) \,.\, S \leq R_f \leq S$$

ce qui nous a conduit, dans le cadre des espaces d'Orlicz, à chercher une estimation de λ_E , que nous avons explicitée en faisant des hypothèses de monotonie sur les espaces en question.

Par ailleurs, on montre que la classe des espaces ℓ_ψ est isomorphe à la classe des espaces d'Orlicz ℓ_M ; on en déduit alors que toute fonction $S \in L_\alpha$, $\alpha \in [0,1[$ est, après renormage équivalent, le rayon de bornologie d'une fonction holomorphe sur l'espace renormé.

Dans toute la suite, on appellera problème (I) l'étude de l'inclusion $L_1 \subset (R)$ on dira que le problème (I) admet une réponse positive (resp. négative) si $L_1 \subset (R)$ (resp. $L_1 \not\subset (R)$).

CHAPITRE I

MODULES INTERIEUR ET EXTERIEUR

APPLICATION AU RAYON DE BORNOLOGIE.

==========

I - τ-MODULES INTERIEUR ET EXTERIEUR (D'APRES KISELMAN).

Soit E un espace de Banach complexe de dimension infinie et E' son dual. Dans la suite on note B la boule unité ouverte de E et τ désignera une topologie d'espace vectoriel, moins fine que la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$. En particulier tout τ-voisinage de l'origine contient une droite vectorielle.

On note B' le complémentaire de B dans E.

Pour $x \in B$, W_x désigne un τ-voisinage de x ; W un τ-voisinage de l'origine , $y \xrightarrow[B]{\tau} x$ (resp. $y \xrightarrow[B']{\tau} x$) le filtre des intersections des τ-voisinages de x avec B (resp. B').

Définition et proposition 1.1.-

On appelle τ-module intérieur et τ-module extérieur les deux nombres définis, sur B, respectivement par :

(a) $$m_\tau(x) = \sup\{m \,,\, \exists\, W_x : (x + m\,B) \cap W_x \subset B\} = \varliminf_{y \xrightarrow[B']{\tau} x} \|y-x\|$$

(b) $$M_\tau(x) = \inf\{M \,,\, \exists\, W_x : B \cap W_x \subset x + M\,.\,B\} = \varlimsup_{y \xrightarrow[B]{\tau} x} \|y-x\|$$

<u>*Preuve*</u> : (a) Soit W_x un τ-voisinage de x , posons :

$$m = \inf\{||y-x||,\ y \in B' \cap W_x\},$$

alors : $[y \in W_x \text{ et } y \in B'] \Longrightarrow ||y-x|| \geq m$,

ce qui est équivalent à :

$$[y \in W_x \text{ et } ||y-x|| < m] \Longrightarrow y \in B$$

ainsi $(x + mB) \cap W_x \subset B$ et donc : $m \leq m_\tau(x)$

d'où : $$\sup_{W_x} \inf\{||y-x||,\ y \in B' \cap W_x\} \leq m_\tau(x) .$$

Soit maintenant $0 < \lambda < 1$; $\exists\ W_x$: $(x + \lambda\, m_\tau(x) . B) \cap W_x \subset B$

ainsi $[y \in W_x \text{ et } ||y-x|| < \lambda . m_\tau(x)] \Longrightarrow y \in B$

ce qui est équivalent à :

$$[y \in W_x \text{ et } y \in B'] \Longrightarrow ||y-x|| \geq \lambda . m_\tau(x) ,$$

d'où : $$\lambda . m_\tau(x) \leq \inf\{||y-x||,\ y \in B' \cap W_x\} ,$$

et alors : $$\lambda . m_\tau(x) \leq \sup_{W_x} \inf\{||y-x||,\ y \in B' \cap W_x\} ,$$

et en faisant tendre λ vers 1, on obtient donc :

$$m_\tau(x) \leq \sup_{W_x} \inf\{||y-x||,\ y \in B' \cap W_x\} ,$$

en récapitulant on a bien $m_\tau(x) = \underline{\lim}_{y \xrightarrow[B']{\tau} x} ||y-x||$ ■

b) $$M_\tau(x) = \overline{\lim_{y \xrightarrow[B]{\tau} x}} \, ||y-x||.$$

Soit W_x un τ-voisinage de x,

posons $$M = \sup\{||y-x||, \ y \in B \cap W_x\} \ .$$

Ainsi $y \in B \cap W_x \Longrightarrow ||y-x|| \leqslant M$; et donc : $B \cap W_x \subset x + M.B$

d'où : $M_\tau(x) \leqslant M$, et ainsi : $\inf\limits_{W_x} \sup\{||y-x||, \ y \in B \cap W_x\} \geqslant M_\tau(x)$

Soit maintenant $\lambda > 1$, $\exists \ W_x : B \cap W_x \subset x + \lambda \, M_\tau(x) \ . \ B$

$$y \in B \cap W_x \Longrightarrow ||y-x|| < \lambda \ . \ M_\tau(x) \ ; \quad \text{et donc :}$$

$$\sup\{||y-x||, \ y \in B \cap W_x\} \leqslant \lambda \ . \ M_\tau(x)$$

d'où : $$\inf_{W_x} \sup\{||y-x||, \ y \in B \cap W_x\} \leqslant \lambda \ . \ M_\tau(x)$$

et en faisant tendre λ vers 1, on obtient :

$$M_\tau(x) \geqslant \inf_{W_x} \sup\{||y-x|| \ , \ y \in B \cap W_x\}$$

en récapitulant on a bien : $M_\tau(x) = \overline{\lim_{y \xrightarrow[B]{\tau} x}} \, ||y-x||.$ ■

Proposition 1.2. ([5]).- Les τ-modules intérieur et extérieur vérifient les propriétés suivantes :

a) $m_\tau(0) = 1$ et $m_\tau(x) \leqslant 1$

b) $m_\tau(-x) = m_\tau(x)$

c) m_τ est concave .

d) $m_\tau(t.x)$ est une fonction décroissante de $t > 0$

e) $1 - ||x|| \leqslant m_\tau(x) \leqslant M_\tau(x) \leqslant 1 + ||x||$

f) si la boule unité de E est uniformément convexe : $\lim_{||x|| \to 1} m_\tau(x) = 0$.

<u>*Preuve*</u> :

a) Soient $m > 0$ et W un τ-voisinage de l'origine tels que : $x + (mB) \cap W \subset B$, comme W contient une droite vectorielle de vecteur directeur unitaire b , $x + m.b$ et $x - mb$ sont dans B et alors $2mb$ est dans $2.B$, d'où $m \leqslant 1$.

Lorsque $x = 0$, il est clair que $m_\tau(0) = 1$.

b) Résulte immédiatement du fait que $- W_x$ est un τ-voisinage de $- x$.

c) Soit $j = 1,2$; $x_j \in B$; $0 < m_j < m(x_j)$; $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$; posons $m = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2$ et $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ et soit W tel que : $x_j + m_j(B \cap W) \subset B$.

En multipliant ces deux inclusions par λ_j et en additionnant on obtient : $x + m(B \cap W) = \lambda_1[x_1 + m_1(B \cap W)] + \lambda_2[x_2 + m_2(B \cap W)]$ $\subset \lambda_1 B + \lambda_2 B = B$; donc $m_\tau(x) \geqslant \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2$; puis en faisant tendre m_j vers $m(x_j)$ on obtient le résultat cherché.

d) Une fonction concave, atteignant son maximum en $t = 0$, est nécessairement décroissante.

e) $1 - ||x|| \leq m_\tau(x)$ est conséquence immédiate de $x + (1 - ||x||)\, B \subset B$, de même $M_\tau(x) \leq 1 + ||x||$ découle de $B \subset x + (1 + ||x||)\, B$, il reste $m_\tau(x) \leq M_\tau(x)$; cette inégalité provient essentiellement du fait que tout τ-voisinage de l'origine contient une droite vectorielle ; en effet, soient $m < m_\tau(x)$ et $M > M_\tau(x)$, on va montrer que $m \leq M$, ce qui entraîne alors : $m_\tau(x) \leq M_\tau(x)$.

$$\exists\ W'_x : B \cap W'_x \subset x + M.B \qquad \text{car} \qquad M_\tau(x) < M$$

$$\exists\ W''_x : (x + m.B) \cap W''_x \subset B \qquad \text{car} \qquad m < m_\tau(x)$$

on pose $$W_x = W'_x \cap W''_x \quad ,$$

on a : $$B \cap W_x \subset x + M.B \quad \text{et} \quad (x + m.B) \cap W_x \subset B \ ,$$

$\exists b$, $||b|| = 1$, tel que W_x contient la droite affine $\{x + tb\}_{t\in\mathbb{C}}$ en particulier $x + mb \in (x + mB) \cap W_x$, d'où $x + mb \in B$ et donc $x + m.b \in B \cap W_x$, ce qui entraîne alors : $x + mb \in x + M.B$ d'où $m \leq M$.

f) Soit σ la topologie affaiblie sur E, $\sigma = \sigma(E,E')$, il est clair que $m_\tau(x) \leq m_\sigma(x) \leq M_\sigma(x) \leq M_\tau(x)$.

Ainsi il suffit de montrer que $\lim\limits_{||x||\to 1} m_\sigma(x) = 0$;

d'après l'uniforme convexité, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists \alpha > 0 \ , \forall ||w|| = 1 \ , \forall ||v|| = 1 : 1 - \alpha \leq \left|\left|\frac{v+w}{2}\right|\right| \implies ||w-v|| \leq 2\varepsilon$$

soit donc ε positif donné voisin de 0, soit x, $||x|| < 1$ et $\alpha > 0$ tel que : $1 > ||x|| > 1 - \alpha$.

Soit W_x un σ-voisinage symétrique de x, disjoint de la boule centrée à l'origine et de rayon $1 - \alpha$.

Il existe u de norme unité et t tel que :
$y = x + tu \in W_x$ et $||y|| = 1$ un tel t est choisi de sorte que $x - tu \in W_x \cap \bar{B}$. Soit y' un vecteur de norme unité tel que le segment d'extrémités y, y' soit de direction u et contienne $x - tu$.
Alors par construction : $||\frac{y + y'}{2}|| \geq 1 - \alpha$, donc : $||y - y'|| \leq 2\varepsilon$ et en particulier : $||x + tu - (x - tu)|| = 2|t| \leq 2\varepsilon$ ainsi $||y - x|| = |t| \leq \varepsilon$, donc $\inf\limits_{y \in B' \cap W_x} \{||y - x||\} \leq \varepsilon$ et ceci pour tout σ-voisinage symétrique x ; or dans $m_\sigma(x) = \lim\limits_{y \xrightarrow[B']{\sigma} x} ||y - x||$ on peut se restreindre aux σ-voisinages symétriques de x. ∎

Par la suite nous aurons à supposer que $M_\tau(x) \leq 1$.

Nous discutons maintenant cette propriété qui n'a pas toujours lieu ; ainsi C.O. Kiselman démontre que sur $E = L^1(]0,1[)$, $M_\sigma(x) = 1 + ||x||$; par ailleurs si $C(K)$ désigne l'espace des fonctions, continues sur un compact K et à valeurs complexes on a :

<u>*Proposition*</u> *1.3.-* Pour tout $x \in C(K)$, tel que $|x|$ atteint son maximum en un point d'accumulation de K , on a :

$$M_\sigma(x) = 1 + ||x||$$

<u>*Preuve*</u> : On sait déjà (proposition 1.2) que de façon générale :

$$M_\sigma(x) \leq 1 + ||x|| .$$

On va montrer que pour tout W, σ-voisinage de l'origine, et pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $M \geqslant 1 + \|x\| - 2\varepsilon$ tel que $B \cap (x + W) \not\subset x + M.B$.

Pour cela, il suffit de montrer que :

$$\forall W \ \sigma\text{-voisinage de } 0, \ \exists\, u \in W : \|u\| = 1 + \|x\| - \varepsilon \quad \text{et} \quad \|x-u\| < 1$$

soit donc $W = \{u \in C(K) : |\int u \, d\mu_i| < \alpha \, , \ i = 1,\dots,N\}$ où μ_i sont des mesures sur K ; par ailleurs soit $\varepsilon > 0$ fixé.

On pose $\|x\| = |x(t_o)|$, $V(t_o) = \{t \in K : |x(t)| > |x(t_o)| - \varepsilon\}$ puisque t_o est un point d'accumulation, il existe $t_1 \in V(t_o)$ tel que : $\mu_i\{t_1\} < \gamma$, $(i = 1,\dots,N)$, γ est un réel positif à choisir ; soit alors ω un voisinage de t_1 tel que : $\mu_i(\omega) < \gamma$ pour $i = 1,\dots,N$ et $\omega \subset \bar{\omega} \subset V(t_o)$.

Soit $\rho \in C(K)$ tel que

$$\rho : \begin{cases} \rho(t_1) = 1 + |x(t_o)| - \varepsilon \\ \varepsilon \leqslant \rho(t) \leqslant 1 + |x(t_o)| - \varepsilon \quad \text{sur } \omega \\ \rho(t) = \varepsilon \quad \text{sur } \complement\omega . \end{cases}$$

Ensuite on prend $u(t) = \dfrac{x(t)}{|x(t)|} \rho(t)$; on a $\|u\| = 1 + \|x\| - \varepsilon$ et $\|u-x\| < 1$.

De plus : $|\int u \, d\mu_i| \leqslant |\int_\omega u \, d\mu_i| + \varepsilon \, \mu_i(K) < \gamma \, [1 + \|x\| - \varepsilon] + \varepsilon.\mu_i(K)$ et pour avoir $u \in W$ il suffit de choisir γ tel que $\varepsilon \, \mu_i(K) + \gamma(1 + \|x\| - \varepsilon) < \alpha$. ■

Corollaire 1.1.- Si K est un compact parfait, alors :

$$M_\sigma(x) = 1 + ||x|| \ , \quad \forall x \in B$$

A l'inverse dégageons quelques critères permettant d'assurer $M_\tau(x) \leq 1$.

Proposition 1.4.- Soit π_λ une famille d'endomorphismes de E, indexés par un filtre Λ, tel que : $\lim\limits_{\Lambda} ||\pi_\lambda(x) - x|| = 0$ et la restriction de π_λ à B est τ-continue pour tout λ ; on a alors :

a) $$m_\tau(x) = \lim_{\Lambda} \ \underline{\lim}_{y \xrightarrow[B']{\tau} x} ||y - \pi_\lambda(y)|| \ .$$

b) $$M_\tau(x) = \lim_{\Lambda} \ \overline{\lim}_{y \xrightarrow[B]{\tau} x} ||y - \pi_\lambda(y)|| \ .$$

Preuve :

a) On a : $||y-x|| = ||y-\pi_\lambda(x)|| + O(\lambda)$, avec $\lim\limits_{\Lambda} O(\lambda) = 0$.

Il en résulte alors, d'après la proposition 1.1., que :

$$m_\tau(x) = \underline{\lim}_{y \xrightarrow[\tau]{B'} x} ||y-x|| = \underline{\lim}_{y \xrightarrow[\tau]{B'} x} ||y-\pi_\lambda(x)|| + O(\lambda) \ ,$$ d'autre part

on peut supposer dans le calcul de cette $\underline{\lim}$ que y reste dans une partie bornée dans laquelle $\underline{\lim}_{y \xrightarrow[\tau]{} x} ||\pi_\lambda(y)-\pi_\lambda(x)|| = 0$, et donc a fortiori si l'on se restreint à B' (ici $y \xrightarrow[\tau]{} x$ désigne le filtre des τ-voisinages de x).

Ainsi $m_\tau(x) = \underset{y \xrightarrow[\tau]{B'} x}{\underline{\lim}} ||y-\pi_\lambda(y)|| + O(\lambda)$; il suffit de passer à la limite suivant le filtre Λ pour obtenir le résultat cherché.

b) $M_\tau(x) = \lim_\Lambda \underset{y \xrightarrow[\tau]{B} x}{\overline{\lim}} ||y-\pi_\lambda(y)||$

On a : $||y-x|| = ||y-\pi_\lambda(y)|| + O(\lambda)$ avec $\lim_\Lambda O(\lambda) = 0$

Il en résulte alors, d'après la proposition (1.1) que :

$$M_\tau(x) = \underset{y \xrightarrow[\tau]{B} x}{\overline{\lim}} ||y-x|| = \underset{y \xrightarrow[\tau]{B} x}{\overline{\lim}} ||y-\pi_\lambda(x)|| + O(\lambda)$$

d'autre part la τ-continuité de π_λ entraîne : $\underset{y \xrightarrow[\tau]{B} x}{\overline{\lim}} ||\pi_\lambda(y)-\pi_\lambda(x)|| = 0$

donc : $M_\tau(x) = \underset{y \xrightarrow[\tau]{B} x}{\overline{\lim}} ||y-\pi_\lambda(y)|| + O(\lambda)$,

il suffit de passer à la limite suivant le filtre Λ pour obtenir le résultat cherché. ■

Corollaire 1.2.- Sous les hypothèses de la proposition (1.4) si $\overline{\lim}_\Lambda ||id-\pi_\lambda|| \leq 1$, alors : $M_\tau(x) \leq 1$, $\forall x \in B$.

Proposition 1.5.- Si x n'appartient pas à l'enveloppe convexe fermée de $B \setminus (x + B)$ alors $M_\sigma(x) \leq 1$.

Preuve : D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut séparer $\{x\}$ et l'enveloppe convexe fermée de $B\setminus(x + B)$ notée Γ, par un hyperplan affine de E. Il existe donc W_x , σ-voisinage de x tel que : $\Gamma \cap W_x = \phi$, alors $B \cap W_x \subset x + B$, d'où $M_\sigma(x) \leq 1$. ■

Dans le prochain paragraphe, on va introduire la notion de τ-rayon de bornologie, $R_{\tau,u}(x)$, associé à la fonction u définie sur E, à valeurs réelles et localement bornée supérieurement.

C'est alors qu'apparaîtra l'intérêt des τ-modules intérieur et extérieur qui permettent d'obtenir des estimations de $R_u(x)$ à l'aide de $R_{\tau,u}(x)$.

II - τ-RAYON DE BORNOLOGIE.

Définition 1.2.- Soit u une fonction définie sur E, à valeurs réelles et localement bornée supérieurement.

Le τ-rayon de bornologie de u au point x de E est le nombre

$$R_{\tau,u}(x) = \sup\{r > 0 , \exists\ W : u(x + (rB) \cap W) < \infty\} .$$

Remarque : Si τ est la topologie grossière, on obtient la notion bien connue de rayon de bornologie, noté alors $R_u(x)$.

De façon générale on a : $R_u(x) \leq R_{\tau,u}(x)$.

Définition 1.3.- Soit τ, une topologie vectorielle moins fine que la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$. Soit $\pi \in L(E)$, on dira que (τ,π) est adapté si :

a) $||\pi|| = 1$ et π est une projection ,

b) B est τ-quasicompacte,

c) $W = \pi^{-1}(\pi(W))$ pour tout τ-ouvert W.

Exemples 1.2.-

a) Si E est un dual F', alors $(\sigma(E,F), id)$ est adapté ; si de plus F est à base de Schaüder et si τ est la topologie des coordonnées sur la base duale dans F', alors (τ, id_E) est adapté.

b) Si π est un projecteur de rang fini, de norme 1, le couple (τ_π, π) est adapté.

Proposition 1.6.- Si (τ,π) est un couple adapté, alors :

$$\forall x \in \pi(E)\ ,\ \forall \lambda > R_u(x)\ :\quad \inf_{y\in\pi(E)\cap B} R_{\tau,u}(x+\lambda y) \leq \lambda \,.\, M_{\tau,\pi}$$

où on a posé : $\quad M_{\tau,\pi} = \sup\limits_{y\in\pi(E)\cap B} M_\tau(y)$.

Preuve : Soit $x \in \pi(E)$ et $\lambda > R_u(x)$; raisonnons par l'absurde ; alors il existe r_1 , r_2 tel que :

$$\inf_{y\in\pi(E)\cap B} \frac{R_{\tau,u}(x+\lambda y)}{M_\tau(y)} > r_2 > \lambda > r_1 > R_u(x)$$

nous montrons que u est bornée supérieurement dans $x + r_1 \,.\, B$, ce qui contredit $r_1 > R_u(x)$.

Puisque $x + r_1 \,.\, B$ est τ-relativement compacte, il suffit de montrer que u est τ-localement bornée supérieurement dans $x + r_1 \,.\, B$; soit $b \in x + r_1 \,.\, B$ et $a = \pi(b) \in x + r_1 \,.\, \pi(B)$ on pose $a = x + \lambda.y$, avec $y \in \pi(E)$ et $||y|| \leq \dfrac{r_1}{\lambda}$; par hypothèse : $\dfrac{R_{\tau,u}(a)}{M_\tau(y)} > r_2$; par définition de $R_{\tau,u}(a)$, il existe W_1 tel que u est bornée supérieurement sur $a + (r_2\, M_\tau(y) \,.\, B) \cap W_1$;

par définition de $M_\tau(y)$ et puisque $\frac{r_2}{\lambda} > 1$ $\exists$ W_2 tel que :

(1) $$B \cap (y + W_2) \subset (y + \frac{r_2}{\lambda} M_\tau(y) B) \cap (y + W_2)$$

et, on peut toujours supposer $\lambda . W_2 \subset W_1$, en multipliant (1) par λ et en ajoutant x, on obtient :

$$(x + \lambda.B) \cap (a + \lambda W_2) \subset (a + r_2 .M_\tau(y).B) \cap (a + \lambda W_2) \subset a + (r_2 M_\tau(y) B) \cap$$

λW_2 ; en posant $\lambda W_2 = W_3$, on en déduit :

$$(x + r_1.B) \cap (a + W_3) \subset a + (r_2 M_\tau(y) . B) \cap W_3 ,$$

ainsi u est borné sur $(a + W_3) \cap (x + r_1.B)$, qui, puisque $\pi^{-1}(\pi(W_3)) = W_3$ est un τ-voisinage de b dans $x + r_1.B$. ■

Proposition 1.7. ([5]).- Pour toute fonction u localement bornée supérieurement sur E, on a :

$$R_u(0) \leq \inf_{||y||<1} \frac{R_{\tau,u}(R_u(0) . y)}{m_\tau(y)} .$$

Preuve : En substituant à la fonction u, la fonction $\tilde{u}$ définie par $\tilde{u}(x) = u(x.R_u(0))$, on peut supposer que $R_u(0) = 1$. Soit $(y,r) \in B \times \mathbb{R}^+$ tel que : $r < m_\tau(y)$; puisque $m_\tau(\lambda y)$ est continue en λ, on peut trouver $\lambda_o > 1$; tel que : $r < m_\tau(\lambda.y)$ pour tout $\lambda \in]1,\lambda_o]$; pour un tel λ, il existe W τ-voisinage de l'origine tel que : $\lambda.y + (rB) \cap W \subset B$. Ainsi u est borné sur $y + (\frac{r}{\lambda} B) \cap (\frac{1}{\lambda} W)$. Il en résulte que $R_{\tau,u}(y) \geq \frac{r}{\lambda}$. En faisant tendre r vers $m_\tau(y)$ et λ vers 1, on obtient le résultat cherché. ■

Proposition 1.8. ([5]).- Soit ω un ouvert pseudo-convexe de E. Si $u \in$ p.s.h.(ω) , alors $- \operatorname{Log} R_{\tau,u}(x) \in$ p.s.h. (ω).

Preuve : Si A est un sous-ensemble de E, A^o désignera l'intérieur de A.

On pose : $\Omega_{k,y} = \{(x,t) \in \omega \times \mathbb{C} \ , \ u(x + t.y) < k\}$ pour tout $y \in B$ et $k \in \mathbb{R}$.

$$\Omega_{W,k} = \left(\bigcap_{y \in W \cap B} \Omega_{k,y} \right)^o \quad \text{pour tout } W \ \ \tau\text{-voisinage de } 0.$$

$$\Omega = \bigcup_{W,k} \Omega_{W,k}$$

$u \in$ p.s.h. (ω) entraîne $\Omega_{k,y}$ pseudo-convexe, et par suite $\Omega_{W,k}$ possède la même propriété.

Ω est alors réunion croissante des $\Omega_{W,k}$ lorsque W décroît au sens de l'inclusion et k croît ; donc Ω est pseudo-convexe.

Soit $\delta(x,t)$ la distance de (x,t) à la frontière de Ω dans la direction $(0,1)$, i.e. : $\delta(x,t) = \sup\{r < 0 \ , \ \forall |s| < r : (x,t+s) \in \Omega\}$.

α) $\delta(x,0) \leq R_{\tau,u}(x)$.

Soit $|t| < \delta(x,0)$, alors $(x,t) \in \Omega$ et il existe donc W,k tel que : $u(x + t(B \cap W)) < k$. Ainsi $|t|$ minore $R_{\tau,u}(x)$.

β) $\delta(x,0) \geq R_{\tau,u}(x)$.

Pour cela, on montre que : $0 < s < R_{\tau,u}(x) \Longrightarrow \forall |t| < s : (x,t) \in \Omega$. Il existe W , τ-voisinage de 0 , a et δ_1 tels que : $u(x + s(B \cap W)) < a$ et $\delta_1 B \subset \delta.W$, avec $\delta = \frac{1}{2}\left[s - |t|\right]$ et $\delta_1 < \delta$.

Ainsi $x + \delta_1 B + (t+\theta)B \cap W$ est contenu dans $x + s(B \cap W)$ pour $|\theta| < \delta_1$, ce qui établit l'appartenance de (x,t) à $\left(\bigcap_{y \in B \cap W} \Omega_{a,y}\right)^o$ et par conséquent à Ω. ∎

Proposition 1.9.- Si $w \in$ p.s.h. (E), alors $\tilde{w}(t) = \sup_{||x||=1} w(tx)$ est une fonction sous-harmonique sur le disque de rayon $R_w(0)$, qui ne dépend que de $|t|$, et,est donc une fonction convexe croissante de $\mathrm{Log}|t|$ sur l'intervalle $[0,R_w(0)[$.

Preuve : Il est clair que $\tilde{w}(t) = \tilde{w}(|t|)$ pour $t \in B(0,R_w(0))$ pour $\theta \in [0,2\pi]$, on pose $w_x(t,\theta) = w(e^{i\theta}.t.x)$ et $w_x(t) = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} w_x(t,\theta)$; alors on a : $\tilde{w}(t) = \sup_{||x||=1} w_x(t)$.

Pour x fixé, $\{w_x(t,\theta),\ \theta \in [0,2\pi]\}$ est :

- ou bien une famille de fonctions sous-harmoniques sur $\mathbb{C}$.
- ou bien $\forall\theta \in [0,2\pi]$, $\forall t \in \mathbb{C}$: $w_x(t,\theta) \equiv -\infty$.

La définition de $\tilde{w}(t)$ montre qu'il suffit de considérer les x pour lesquels $w_x(t,\theta)$ est une famille de fonctions sousharmoniques. Pour de tels x, $w_x(t)$ est enveloppe supérieure de fonctions sousharmoniques, pour avoir la sous-harmonicité de $w_x(t)$ il suffit de vérifier que cette fonction est semi-continue supérieurement ; or il est bien connu que si la fonction $w_x(t,\theta)$ est s.c.s. sur $\mathbb{C} \times [0,2\pi]$, son enveloppe supérieure lorsque θ décrit $[0,2\pi]$ est s.c.s.. Ainsi $w_x(t)$ est une fonction sousharmonique sur le disque ouvert de rayon $R_w(0)$, ne dépend que de $|t|$ et est donc une fonction convexe croissante de $\mathrm{Log}|t|$. Par suite $w(t)$ est enveloppe supérieure de fonctions convexes croissantes de $\mathrm{Log}|t|$ et vérifie la même propriété. ∎

CHAPITRE II

SUR L'EXISTENCE D'UNE FONCTION PLURISOUSHARMONIQUE AYANT UN RAYON DE BORNOLOGIE DONNE.

I - PRELIMINAIRES.

Considérons l'intervalle I de $[0,1]$ formé par les α tel que l'équation $R_u = S$ ait une solution u dans p.s.h. (E), quel que soit S dans exp(- p.s.h.(E)) $\cap$ $\mathrm{Lip}_\alpha(E)$.

On se propose de trouver une majoration de la borne supérieure $\alpha(E)$ de I, en fonction des constantes liées à la boule unité de E, étudiées dans le chapitre précédent ; au préalable, établissons le résultat suivant :

Proposition 2.1.- L'intervalle I défini, ci-dessus, contient au moins 0.

Preuve : E étant un espace de Banach, il existe, selon Josefson [4], une suite de formes linéaires sur E, de norme unité, qui converge faiblement vers 0 ; on note $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite ; soit u la fonction définie sur E par : $u(y) = \sum_{n\geq 1} [f_n(y)]^n$, cette série converge normalement dans toute boule de rayon strictement inférieur à 1 car : $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{||a||\leq r<1} |f_n(y+a)| = r$ du fait que $f_n(y)$ tend vers 0 , lorsque n tend vers l'infini.

Ainsi, u est clairement holomorphe et $R_u \geq 1$. Admettons pour un instant que $R_u(0) = 1$; d'après la proposition (1.8),

$-\operatorname{Log} R_u$ est dans p.s.h. (E) ; ici $-\operatorname{Log} R_u \leqslant 0$ sur E et $-\operatorname{Log} R_u(0) = 0$; le principe du maximum pour les fonctions plurisous-harmoniques implique alors que $R_u = 1$ sur E.

Il reste à vérifier que $R_u(0) = 1$; raisonnons par l'absurde et supposons $R_u(0) > 1$.

Posons $r = R_u(0)$; soit $1 < r' < r$, $u(y) = \sum\limits_{n \geqslant 1} [f_n(y)]^n$ est normalement convergente dans la boule de centre 0 et de rayon r' que l'on notera $B(r')$ alors on a :

$$[f_n(y)]^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(y \,.\, e^{-i\theta}) \,.\, e^{in\theta}\, d\theta$$

si on pose $M = \sup\limits_{x \in B(r')} |u(x)|$, on a : $|[f_n(y)]| \leqslant M^{1/n}$, ainsi pour $y \in B(r)$, n assez grand : $|f_n(y)| \leqslant 1 + \varepsilon$, où ε est choisi de sorte que : $\frac{1+\varepsilon}{r'} < 1 - \varepsilon$, donc, pour $y \in B(r')$ et n assez grand :

$$|f_n(\frac{y}{r'})| \leqslant \frac{(1+\varepsilon)}{r'} < (1-\varepsilon) \quad ; \quad \text{d'où} \quad ||f_n|| \leqslant 1 - \varepsilon.$$

ce qui est en contradiction avec $||f_n|| = 1$. ■

Remarque : On ne sait pas en général si cet intervalle est fermé.

II - CONDITIONS SUFFISANTES CONDUISANT A UNE REPONSE NEGATIVE AU PROBLEME I.

Définition 2.1.- Pour tout $\pi \in L(E)$ posons :

$$\chi_\tau^\pi(t) = \sup_{x\in\pi(E)\cap B} - \operatorname{Log} m_\tau(tx) \ , \quad \text{avec} \quad t \in [0,1] .$$

Si π est l'identité on notera cette fonction χ_τ, ou si π est un opérateur de rang fini et $\tau = \tau_\pi$ on la notera χ_{τ_π}.

Proposition 2.2.- χ_τ^π est une fonction convexe croissante sur $[0,1]$, nulle à l'origine.

Preuve : résulte immédiatement de la proposition [1.2 ; (c)]. ■

Théorème 2.1.- Soit (τ,π) un couple adapté sur un espace de Banach E, alors pour tout $u \in$ p.s.h.(E) et $a > 0$:

$$\varliminf_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} ||x||^a R_u(x) > 0 \Longrightarrow \varliminf_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} ||x||^a R_u(x) \geq$$

$$\frac{[R_u(0)]^{a+1}}{M_{\tau,\pi}} \max_{0\leq t<1} t^a \exp(-\chi_\tau^\pi(t)) .$$

Démonstration : Soit $u \in$ p.s.h.(E) tel que

$$\varliminf_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} ||x||^a R_u(x) > 0 \qquad \text{supposons d'abord que } R_u(0) = 1 .$$

1ère étape. Soit $t_o \in [0,1[$, on pose : $B = t_o^a \exp(-\chi_\tau^\pi(t_o))$, montrons que :

α) $\forall x \in \pi(E)$, $||x|| \geq t_o$: $R_{\tau,u}(x) \geq \dfrac{B}{||x||^a}$;

d'après la proposition (1.8) la fonction $-\operatorname{Log} R_{\tau,u}$ est dans p.s.h. (E) et, est majorée par $-\operatorname{Log} R_u$, de par l'hypothèse faîte sur R_u $-\operatorname{Log} R_{\tau,u}$ est majorée par $K + a \operatorname{Log} r$ pour $||x|| = r$ assez grand, $x \in \pi(E)$ et K convenable. La fonction $-\operatorname{Log} R_{\tau,u}$ est donc bornée supérieurement sur toute boule de rayon r, d'après le principe du maximum.

Il résulte alors de la proposition [1.9] que

$v(t) = \sup\limits_{\substack{||x||=t \\ x\in\pi(E)}} -\operatorname{Log} R_{\tau,u}(x)$ est une fonction convexe croissante

de $\operatorname{Log} t$, et majorée par $K + a \operatorname{Log} t$ pour $t > 0$, assez grand.

D'autre part, on sait d'après la proposition [1.7] que pour $||x|| < 1$ on a : $m_\tau(x) \leq R_{\tau,u}(x)$, d'où :

$$v(t) \leq \chi_\tau^\pi(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,1[$$

ainsi $v(t_o) \leq + \chi_\tau^\pi(t_o) = -\operatorname{Log} B + a \operatorname{Log} t_o$

Récapitulons :

$$\begin{cases} v(t_o) \leq -\operatorname{Log} B + a \operatorname{Log} t_o \\ v(t) \leq K + a \operatorname{Log} t \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{assez grand} \\ v(t) \quad \text{est une fonction convexe croissante de} \quad \operatorname{Log} t. \end{cases}$$

L'ensemble de ces trois propriétés, entraîne alors :

$$v(t) \leq -\operatorname{Log} B + a \operatorname{Log} t \quad , \quad \forall t \geq t_o \, .$$

<u>$2^{ème}$ *étape*</u> : soit A tel que $B > A$.

La contraposée de la proposition [1.6], s'écrit pour $x \in \pi(E)$

$$\inf_{\substack{||y||<1 \\ y\in\pi(E)}} \{R_{\tau,u}(x + ky)\} > k \, . \, \mathcal{M}_{\tau,\pi} \Longrightarrow k \leq R_u(x) \, .$$

On va déterminer k_o, vérifiant l'implication ci-dessus ; d'après (α) il suffit que pour tout $y \in \pi(E)$, $||y|| < 1$ on ait :

$$\frac{A}{||x+k_o y||^a} \geq k_o \, \mathcal{M}_{\tau,\pi} \text{ et } ||x + k_o y|| \geq t_o \quad , \quad \text{avec } x \in \pi(E)$$

cela est réalisé si : $\dfrac{A}{(||x||+k_o)^a} = k_o \, . \, \mathcal{M}_{\tau,\pi}$ et $k_o \leq ||x|| - t_o$

ainsi : $||x|| = \left(\dfrac{A}{k_o \, \mathcal{M}_{\tau,\pi}}\right)^{1/a} - k_o$, ce qui montre que : $\lim\limits_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} k_o(x) = 0$

donc pour $||x||$ assez grand : $\dfrac{A}{\mathcal{M}_{\tau,\pi}(||x||+k_o)^a} = k_o \leq R_u(x)$, $x \in \pi(E)$;

d'où $\underline{\lim}_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} ||x||^a \, R_u(x) \geq \dfrac{A}{\mathcal{M}_{\tau,\pi}}$.

<u>$3^{ème}$ *étape*</u> : en faisant tendre A vers B , on obtient donc :

$$\underline{\lim}_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} ||x||^a \, R_u(x) \geq \frac{B}{\mathcal{M}_{\tau,\pi}} = \frac{1}{\mathcal{M}_{\tau,\pi}} \, . \, t_o^a \exp(-\chi_\tau^\pi(t_o))$$

et ceci pour tout $t_o \in [0,1[$; donc :

$$\underline{\lim}_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} ||x||^a \, R_u(x) \geq \frac{1}{\mathcal{M}_{\tau,\pi}} \, . \, \max_{0\leq t<1} t^a \exp(-\chi_\tau^\pi(t))$$

le théorème est ainsi démontré pour les u tel que $R_u(0) = 1$.

Enfin en considérant la fonction $\tilde{u}(x) = u(R_u(0).x)$,

alors on a :

$$R_{\tilde{u}}(x) = \frac{1}{R_u(0)} . R_u(x.R_u(0)) \quad , \quad \text{d'où} \quad R_{\tilde{u}}(0) = 1$$

et : $$\lim_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} ||x||^a R_{\tilde{u}}(x) = \frac{1}{[R_u(0)]^{a+1}} \lim_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} ||x||^a R_u(x)$$

entraîne :

$$\lim_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} ||x||^a R_u(x) > 0 \Longrightarrow \lim_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} ||x||^a R_u(x) \geqslant \frac{[R_u(0)]^{a+1}}{M_{\tau,\pi}}$$

$$\max_{0\leqslant t<1} t^a \exp(-\chi_\tau^\pi(t))$$

ce qui achève la preuve du théorème [2.1.]. ■

Théorème 2.2.- On a la majoration suivante de $\alpha(E)$.

$$\alpha(E) \leqslant e . \inf_{0<t<1} \frac{1}{t} (\operatorname{Log} M_{\tau,\pi} + \chi_\tau^\pi(t))$$

pour tout couple (τ,π) adapté sur E ; plus précisément la fonction $S(x) = [1 + \frac{\alpha}{a} ||\pi(x)||]^{-a}$ est dans $\exp(-\text{p.s.h.}(E)) \cap \operatorname{Lip}_\alpha(E)$ pour tout $a > 0$ et $\alpha \geqslant 0$; si α est strictement supérieur à la majoration annoncée, il existe $a > 0$ tel que cette fonction S soit différente de R_u pour tout u dans p.s.h.(E).

Démonstration : Vérifions d'abord que S est dans $\exp(-\text{ p.s.h.}(E)) \cap \operatorname{Lip}_\alpha(E)$. La condition de Lipschitz résulte immédiatement de la propriété analogue pour la fonction $(1 + \frac{\alpha}{a} t)^{-a}$ et de $||\pi|| = 1$.

Il reste à vérifier la plurisousharmonicité de $-\operatorname{Log} S$; il s'agit de vérifier que $t \longmapsto \operatorname{Log}(1 + \frac{\alpha}{a} ||\pi(x + ty)||)$ est sousharmonique quels que soient x et y dans E ; d'après un résultat classique de Rado [9 ; p. 15], il suffit de montrer que $t \longmapsto |e^{kt}| \, . \, ||\pi(x+ty)||$ est sousharmonique quel que soit k dans $\mathbb{C}$, or $|e^{kt}| \, . \, ||\pi(x+ty)|| = ||\pi(e^{kt}x + te^{kt}y)||$ est la semi-norme d'une fonction holomorphe à valeur dans E. On sait qu'une telle composition est sousharmonique.

Supposons l'existence de u dans p.s.h.(E) tel que $R_u = S$. D'après le théorème 2.1, on aurait :

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)^a = \lim_{\substack{||x||\to\infty \\ x\in\pi(E)}} ||x||^a R_u(x) \geq \frac{1}{M_{\tau,\pi}} \sup_{t\in[0,1[} \left[t^a \exp(-\chi_\tau^\pi(t))\right]$$

ainsi $\alpha \leq \inf_{t\in]0,1[} \left[\frac{M_{\tau,\pi}^{1/a} \times a}{t} \exp \frac{\chi_\tau^\pi(t)}{a}\right]$.

Lorsque α est strictement supérieur à l'infimum sur $a > 0$ de la majoration ci-dessus, il existe $a > 0$ tel que R_u soit différent de S quel que soit u dans p.s.h.(E) . Pour t fixé, l'infimum sur a est obtenu pour $a = \operatorname{Log} M_{\tau,\pi} + \chi_\tau^\pi(t)$, ce qui fournit la majoration annoncée. ■

<u>*Corollaire*</u> *2.1.*- Pour tout couple (τ,π) adapté tel que $M_{\tau,\pi} = 1$, c'est en particulier le cas si τ est la topologie τ_π engendrée par la semi-norme associée à un projecteur de rang fini de norme 1 et tel que $||id - \pi|| \leq 1$, on a : $\alpha(E) \leq e(\chi_\tau^\pi)'(0)$ et la fonction $\left[1 + \frac{\alpha}{a} ||\pi(x)||\right]^{-a}$ est, pour $\alpha > e(\chi_\tau^\pi)'(0)$ et a assez petit, différente de R_u pour tout u dans p.s.h.(E) .

Démonstration : La précision sur la majoration résulte de la convexité de la fonction χ_τ^π. De plus si α est strictement supérieur $e(\chi_\tau^\pi)'(0)$ et si $a = \chi_\tau^\pi(t_o)$, l'infimum sur t de $\frac{a}{t} \exp \frac{\chi_\tau^\pi(t)}{a}$ est inférieur ou égal à $e . \frac{\chi_\tau^\pi(t_o)}{t_o}$, et est donc inférieur à α pour t_o assez voisin de la plus grande valeur de t qui annule χ_τ^π , (lorsque $\chi_\tau^\pi \equiv 0$, un raisonnement direct conduit au même résultat). ■

Corollaire 2.2.- Soit F un Banach à base de Schaüder et E son dual on suppose que la base duale, de celle de F, est une base de Schaüder de E ; on sait [10] que ces hypothèses sont réalisées si E est réfléxif et possède une base de Schaüder. On suppose de plus que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|id_E - \pi_n\| \leq 1$, avec (π_n) pour les projections sur les vecteurs de base dans E. Si τ désigne la topologie de la convergence des coordonnées sur la base de E , on a : $\alpha(E) \leq e . \chi_\tau'(0)$ et la même conclusion que le corollaire précédent a lieu pour la fonction $(1 + \frac{\alpha}{a} \|x\|)^{-a}$.

Preuve : D'après l'exemple 1.2. (a), (τ, id_E) est adapté et du corollaire [1.2] on tire $M_{\tau, id_E} = 1$.

Le corollaire précédent permet alors de conclure. ■

Théorème 2.3.- Etant donné un espace de Banach E , on peut le renormer par une norme équivalente telle que pour cette nouvelle norme $\alpha(E) = 0$; ainsi pour cette nouvelle norme, quel que soit $\alpha > 0$, il existe S dans $\exp(-\text{p.s.h.}(E)) \cap Lip_\alpha(E)$ tel que $S \neq R_u$ pour tout u dans p.s.h.(E).

Démonstration : Soit p un projecteur de rang fini de E, posons

$$|||x||| = \left[||p(x)||^2 + ||x - p(x)||^2\right]^{1/2} ,$$

cette nouvelle norme est équivalente à la norme initiale et $|||p||| = 1 = |||id-p|||$. D'après le corollaire [2.1.], il suffit de montrer que : $\chi'_{\tau_p}(0) = 0$. D'après la proposition [1.1.], pour tout $x \in p(E)$:

$$m_{\tau_p}(x) = \underset{\substack{p(y)\to x \\ |||y|||\geq 1}}{\underline{\lim}} |||y-x||| = \underline{\lim} \left[||p(y) - x||^2+||y-p(y)||^2\right]^{1/2}$$

lorsque $p(y) \to x$ et $||p(y)||^2 + ||y-p(y)||^2 \geq 1$.

donc : $m_{\tau_p}(x) = (1-||x||^2)^{1/2} = (1-|||x|||^2)^{1/2}$ car

si $x \in p(E)$: $||x|| = |||x|||$.

On obtient ainsi : $\chi_{\tau_p}(t) = -\operatorname{Log}(1-t^2)^{1/2}$ et $\chi'_{\tau_p}(0) = 0$. ∎

CHAPITRE III

ETUDE DU RAYON DE BORNOLOGIE D'UNE FONCTION PLURISOUSHARMONIQUE SUR LES ESPACES D'ORLICZ.

============

I - ESPACES D'ORLICZ (*Rappel des définitions et propriétés*).

Définition 3.1.- Une fonction d'Orlicz est une fonction définie sur $[0,+\infty[$, convexe positive, non identiquement nulle et nulle à l'origine.

Si $M(x)$ est une fonction d'Orlicz ℓ_M est l'espace des suites complexes défini par :

$$\ell_M = \{x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}},\ \exists\ r > 0 : \sum_1^\infty M(\frac{|x_i|}{r}) < \infty\} ;$$

ℓ_M est muni de la norme $||x||_M = \inf\{r > 0 : \sum_1^\infty M(\frac{|x_i|}{r}) < 1\}$.
$(\ell_M, ||\cdot||_M)$ est appelé espace d'Orlicz ; ℓ_M est un Banach.

Remarque : Il est aisé de voir que si M est nulle sur un voisinage de l'origine alors ℓ_M est isomorphe à ℓ_∞ ; dorénavant on écartera ce cas. On montre aussi que pour $M'(0) \neq 0$, ℓ_M est isomorphe à ℓ^1.

Définition 3.2.- Soit M une fonction d'Orlicz non identiquement nulle au voisinage de l'origine. On dit que M vérifie la condition Δ_2 lorsque : $\overline{\lim\limits_{x\to 0}} \frac{M(2x)}{M(x)} < \infty$; on montre que cette condition est équivalente à $\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{xM'(x)}{M(x)} < \infty$, où $M'(x)$ désigne la dérivée à droite de M.

Les résultats suivants sont classiques [7] :

- Soit M une fonction d'Orlicz non identiquement nulle au voisinage de l'origine.

Alors ℓ_M est séparable si et seulement si M vérifie la condition Δ_2 ; ℓ_M admet alors la base canonique de $\mathbb{C}^{[\mathbb{N}]}$ comme base de Schaüder.

- Soit ℓ_M un espace d'Orlicz séparable, alors ℓ_M est réflexif si et seulement si $\underline{\lim}_{x\to 0} \frac{xM'(x)}{M(x)} > 1$.

- On note $h_M = \{x \in \mathbb{C}^{[\mathbb{N}]} : \forall \lambda > 0 , \sum_{i=1}^{\infty} M(\frac{|x_i|}{\lambda}) < \infty\}$, h_M est un sous-espace fermé de ℓ_M admettant pour base de Schaüder la base canonique de $\mathbb{C}^{[\mathbb{N}]}$, et donc $\ell_M = h_M$ équivaut à M vérifie la condition Δ_2.

- Dorénavant si $x \in \mathbb{C}$, on notera $M(x) = M(|x|)$.

II - MODULES INTERIEUR ET EXTERIEUR SUR LES ESPACES D'ORLICZ.

Proposition 3.1.- Les modules intérieur et extérieur, calculés, relativement à la topologie de la convergence des coordonnées dans le sous-espace h_M d'Orlicz, sont donnés par les formules :

$$M_\tau(x) = \sup\{||y||,\ \sum_1^\infty M(y_i) = 1 - \sum_1^\infty M(x_i)\}$$

$$m_\tau(x) = \inf\{||y||,\ \sum_1^\infty M(y_i) = 1 - \sum_1^\infty M(x_i)\}$$

<u>*Preuve*</u> : ① *Calcul de* $M_\tau(x)$.

On note τ, la topologie de la convergence des coordonnées restreinte à h_M ; soit $x \in B$, boule unité de h_M ; on va définir une classe particulière de τ-voisinages de x qui permet d'obtenir pour $M_\tau(x)$ et $m_\tau(x)$ une formule plus agréable que celle de la proposition (1.1).

Soit :

$$W_{N,\varepsilon} = \{y \in h_M ;\ 1 \leq i \leq N,\ |M(y_i) - M(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{N}\} \quad \text{où} \quad N \in \mathbb{N}^*,\ \varepsilon > 0,$$

pour simplifier on écrira $m(x)$ (resp. $M(x)$) au lieu de $m_\tau(x)$ (resp. $M_\tau(x)$).

La convexité de M montre que les $W_{N,\varepsilon}$ constituent une base de voisinages convexes de x pour la topologie τ.

Il est clair, alors, que la formule de la proposition (1.4) devient ici :

$$M(x) = \inf_{W_{N,\varepsilon}} \sup\{||y - \Pi_N(y)||, y \in B \cap W_{N,\varepsilon}\}.$$

Précisons quelques notations ; on pose $y' = y - \Pi_N(y)$ et $\rho'_{N,\varepsilon} = \sup\{||y'||, y \in B \cap W_{N,\varepsilon}\}$ pour $A \in \mathbb{R}^+$, $\Gamma_A = \{y, \sum_1^\infty M(y_i) \leq A\}$.
Si S est un sous-ensemble de ℓ_M : $\rho_1(S) = \sup\{||y||, y \in S\}$
$a = 1 - \sum_1^\infty M(x_i)$, $\alpha_{N,\varepsilon} = 1 - \sum_1^N M(x_i) + \varepsilon$ et si il n'y a pas de confusion on écrira α au lieu de $\alpha_{N,\varepsilon}$.

(a) $M(x) < \rho_1(\Gamma_a)$.
$y \in B \cap W_{N,\varepsilon}$ entraîne : $||y|| < 1$ et $-\sum_1^N M(y_i) < -\sum_1^N M(x_i) + \varepsilon$ (1)

or $||y|| < 1$ équivaut à $\sum_1^\infty M(y_i) < 1$; et en utilisant (1) on en déduit $\sum_{N+1}^\infty M(y_i) < 1 - \sum_1^N M(x_i) + \varepsilon$; d'où $y' \in \Gamma_\alpha$, et donc $\rho'_{N,\varepsilon} \leqslant \rho_1(\Gamma_\alpha)$ ainsi $\mathcal{M}(x) \leqslant \rho_1(\Gamma_\alpha)$.

Maintenant, étant donné $\lambda > 1$, on va montrer l'existence de N et $\varepsilon > 0$ tels que : $\Gamma_\alpha \subset \lambda.\Gamma_a$.

Il s'agit de trouver N et ε tels que :

$$\sum_1^\infty M(y_i) < 1 - \sum_1^N M(x_i) + \varepsilon \quad \text{entraîne} \quad \sum_1^\infty M\left(\frac{y_i}{\lambda}\right) < 1 - \sum_1^\infty M(x_i)$$

or $$\sum_1^\infty M\left(\frac{y_i}{\lambda}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}\left[\sum_1^\infty M(y_i)\right] \leqslant \frac{1}{\lambda}\left[1 - \sum_1^N M(x_i) + \varepsilon\right].$$

Il suffit donc de choisir ε et N tels que :

$\frac{1}{\lambda}(1 - \sum_1^N M(x_i) + \varepsilon) < 1 - \sum_1^\infty M(x_i)$ c'est-à-dire :

$(1-\lambda)\left[1 - \sum_1^\infty M(x_i)\right] + \varepsilon + \lambda . \sum_{N+1}^\infty M(x_i) < 0$ et sur cette expression on voit que le choix de N et ε est toujours possible. Ainsi : $\rho_1(\Gamma_\alpha) \leqslant \lambda\rho_1(\Gamma_a)$; d'où $\mathcal{M}(x) \leqslant \lambda\, \rho_1(\Gamma_a)$ puis en faisant tendre λ vers 1 on obtient le résultat cherché.

(b) $\mathcal{M}(x) \geqslant \rho_1(\Gamma_a)$.

Soit $y \in \Gamma_a$, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon > 0$, on pose $y^N = \Pi_N(x) + \sum_1^\infty y_i\, e_{N+i}$

on a : $\sum_1^\infty M(y_i^N) = \sum_1^N M(x_i) + \sum_1^\infty M(y_i) \leqslant \sum_1^N M(x_i) + 1 - \sum_1^\infty M(x_i) = 1 - \sum_{N+1}^\infty M(x_i)$

donc : $||y^N|| \leqslant 1$; de plus, $y^N \in W_{N,\varepsilon}$, d'où $y^N \in \bar{B} \cap W_{N,\varepsilon}$.

Remarquons aussi que $||(y^N)'|| = ||y||$; par suite $\rho_1(\Gamma_a) \leqslant \rho'_{N,\varepsilon}$ et finalement : $\rho_1(\Gamma_a) \leqslant \mathcal{M}(x)$. ∎

② *Calcul de* $m(x)$.

La formule de la proposition (1.4) devient ici :

$$m(x) = \sup_{W_{N,\varepsilon}} \inf\{\|y - \pi_N(y)\|,\ y \in W_{N,\varepsilon} \cap B'\} \quad \text{avec} \quad B' = \{y, \|y\| > 1\}.$$

Précisons quelques notations : pour $A \in \mathbb{R}^+$, on pose $\Gamma'_A = \{y, \sum_1^\infty M(y_i) > A\}$ et $\Gamma''_A = \{y', \sum_{n+1}^\infty M(y_i) > A\}$, si S est un sous-ensemble de ℓ_M on note $\rho_2(S) = \inf\{\|y\|, y \in S\}$; $\beta_{N,\varepsilon} = 1 - \sum_1^N M(x_i) - \varepsilon$ et si il n'y a pas de confusions on écrira $\beta = \beta_{N,\varepsilon}$.

En posant $\sigma'_{N,\varepsilon} = \inf\{\|y'\|,\ y \in W_{N,\varepsilon} \cap B'\}$ on a : $m(x) = \sup \sigma'_{N,\varepsilon}$. Montrons que : $\sigma'_{N,\varepsilon} = \rho_2(\Gamma''_\beta)$

$$y \in W_{N,\varepsilon} \cap B' \implies \sum_1^N M(y_i) < \sum_1^N M(x_i) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty M(y_i) > 1,$$

et alors : $\sum_{N+1}^\infty M(y_i) > 1 - \sum_1^N M(x_i) - \varepsilon$, donc : $\rho_2(\Gamma''_\beta) \leq \sigma'_{N,\varepsilon}$.

Récriproquement, soit y' tel que $\sum_{N+1}^\infty M(y_i) > 1 - \sum_1^N M(x_i) - \varepsilon$, il est clair qu'il existe $z \in W_{N,\varepsilon} \cap B'$ tel que : $z' = y'$ et $\sum_1^\infty M(z_i) = \varepsilon + \sum_1^N M(x_i) + \sum_{N+1}^\infty M(y_i)$; donc : $\sigma'_{N,\varepsilon} \leq \rho_2(\Gamma''_\beta)$.

Par ailleurs, il est clair que $\rho_2(\Gamma'_\beta) = \rho_2(\Gamma''_\beta)$, et par conséquent : $m(x) = \sup . \rho_2(\Gamma'_\beta)$.

(a) $m(x) \leq \rho_2(\Gamma'_a)$.

$$y \in \Gamma'_a \implies \sum_1^\infty M(y_i) > 1 - \sum_1^\infty M(x_i) = 1 - \sum_1^N M(x_i) - \sum_{N+1}^\infty M(x_i) \ ;$$

donc, pour $\varepsilon > 0$ donné et N assez grand on a : $y \in \Gamma'_\beta$.

On en déduit $\Gamma'_a \subset \Gamma'_\beta$ et $\rho_2(\Gamma'_\beta) \leq \rho_2(\Gamma'_a)$ et finalement : $m(x) \leq \rho_2(\Gamma'_a)$.

(b) $m(x) \geq \rho_2(\Gamma'_a)$.

On va montrer que $\forall\lambda < 1$, $\exists N,\varepsilon$ tel que $\Gamma'_\beta \subset \lambda.\Gamma'_a$. Ainsi on aura : $\lambda\, \rho_2(\Gamma'_a) \leq m(x)$, et en faisant tendre λ vers 1, on obtient le résultat cherché.

$y \in \Gamma'_\beta$ entraîne : $\sum_1^\infty M(y_i) \geq 1 - \sum_1^N M(x_i) - \varepsilon$, d'où

$$\sum_1^\infty M(\frac{y_i}{\lambda}) \geq \frac{1}{\lambda}\, [\sum_1^\infty M(y_i)] \geq \frac{1}{\lambda}\, (1 - \sum_1^N M(x_i) - \varepsilon)$$

donc on aura $\sum_1^\infty M(\frac{y_i}{\lambda}) > 1 - \sum_1^\infty M(x_i)$ dès que :

$1 - \sum_1^N M(x_i) - \varepsilon \geq \lambda(1 - \sum_1^\infty M(x_i))$; c'est-à-dire que :

$(1 - \lambda)[1 - \sum_1^\infty M(x_i)] - \varepsilon + \lambda \sum_{N+1}^\infty M(x_i) > 0$ inégalité qui est réalisée pour un choix convenable de ϵ et N. ■

Corollaire 3.1.- Les modules intérieur et extérieur de h_M, calculés relativement à la topologie de la convergence des coordonnées vérifient les inégalités : $1 - \sum_{i=1}^\infty M(x_i) \leq m(x) \leq \mathcal{M}(x) \leq 1$.

Preuve : Seule l'inégalité de gauche n'est pas évidente. Soit $A = 1 - \sum_1^\infty M(x_i)$; puisque x est dans B, on a : $A \in]0,1]$.
Soit y tel que $\sum_1^\infty M(y_i) = A$, alors : $\sum_1^\infty M(\frac{y_i}{A}) \geq \frac{1}{A}\sum_1^\infty M(y_i) \geq 1$; un tel y vérifie donc $||y|| \geq A$, ce qui démontre l'inégalité cherchée. ■

③ *Estimation de* $\alpha(E)$ *sur les espaces d'Orlicz.*

Le résultat énoncé ci-après étend aux espaces d'Orlicz la situation étudiée par C.O. Kiselman sur les espaces ℓ^p.

Posons $\vartheta_M(t) = \overline{\lim_{x\to 0}} \frac{M(xt)}{M(x)}$; c'est une fonction convexe, croissante majorée par t sur $[0,1]$.

Théorème 3.1.- Supposons ℓ_M non isomorphe à ℓ^1, c'est-à-dire $M'(0) = 0$

(a) La fonction $S(x) = \left[1 + \frac{\alpha}{a} ||\pi_N(x)||\right]^{-a}$ est dans $Lip_\alpha(\ell_M) \cap \exp(-p.s.h.(\ell_M))$ elle diffère de R_u, quel que soit u dans $p.s.h.(\ell_M)$, $\alpha > 0$ et $a > 0$ assez voisin de 0.

(b) Si ℓ_M est séparable et lorsque $\vartheta'_M(0) = 0$, cette dernière condition étant réalisée en particulier lorsque ℓ_M est réflexif, la fonction $S(x) = (1 + \frac{\alpha}{a} ||x||)^{-a}$ vérifie la même propriété.

Démonstration : Les projecteurs π_N et $id-\pi_N$ sont unitaires. On sait, d'autre part, [7, p. 18] que ℓ_M est isomorphe à h'_N, où N est la fonction complémentaire de M définie par $N(x) = \int_0^x q(t)dt$, $q(t) = \sup_{p(s)\leq t} s$, $M(x) = \int_0^x p(t)dt$.

Cet isomorphisme est donné par l'application définie comme suit : à $y \in \ell_M$, on associe la forme linéaire sur h_N notée $f_y : x \to \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$; ceci montre que nous avons : $f_{e_i} = \varepsilon'_i$ où (ε'_i) désigne la base duale de la base de h_N. Ainsi la base duale de h_N est la base canonique de h_M ; on peut donc appliquer les corollaires (2-1) et (2-2) ; les conclusions (a) et (b) résulteront des estimations suivantes de $\chi'_{\tau_{\pi_N}}(0)$ et $\chi'_\tau(0)$.

- on a $\chi'_{\tau_{\pi_N}}(0) \leq N.M'(0).M^{-1}(1)$; en effet : puisque $\pi_N(x) \in h_M$, d'après le corollaire (3-3) : $1 - \sum_{i=1}^{N} M(x_i) \leq m_{\tau_{\pi_N}}(\pi_N(x))$; d'où : $\chi_{\tau_{\pi_N}}(t) \leq \sup_{||\pi_N(x)||=1} - Log(1 - \sum_{i=1}^{N} M(tx_i))$; pour $||\pi_N(x)|| = 1$, on a :

$|x_i| \leq M^{-1}(1)$, d'où $1 - \sum_1^N M(tx_i) \geq 1 - NM(t.M^{-1}(1))$

ainsi : $\chi_{\tau_{\pi_N}}(t) \leq -\mathrm{Log}(1 - N.M(t.M^{-1}(1)))$ et par suite :

$\chi'_{\tau_{\pi_N}}(0) \leq N.M'(0).M^{-1}(1)$.

- on a $\chi'_\tau(0) \leq \psi'_M(0)$; en effet :

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon M^{-1}(1) < \frac{1}{2}$; posons $\psi_\varepsilon(t) = \sup\limits_{0<x\leq\varepsilon} \frac{M(tx)}{M(x)}$;

lorsque $||x|| \leq 1$, le nombre de coordonnées qui vérifient $|x_i| \geq \varepsilon$

est au plus $\frac{1}{M(\varepsilon)}$; ainsi : $\sum_1^\infty M(tx_i) \leq \frac{M(tM^{-1}(1))}{M(\varepsilon)} + \psi_\varepsilon(t)$,

quel que soit $\varepsilon > 0$ et $||x|| \leq 1$; on pose

$\theta_\varepsilon(t) = \frac{M(tM^{-1}(1))}{M(\varepsilon)} + \psi_\varepsilon(t)$. Pour $t \leq \varepsilon^2$, t assez voisin de zéro, on a :

$\psi_\varepsilon(t) < \frac{1}{2}$ et : $\frac{M(tM^{-1}(1))}{M(\varepsilon)} \leq \frac{M(\varepsilon^2 M^{-1}(1))}{M(\varepsilon)} < \varepsilon\, M^{-1}(1).\frac{M(\varepsilon)}{M(\varepsilon)} = \varepsilon.M^{-1}(1) < \frac{1}{2}$.

ainsi pour $t \leq \varepsilon^2$, t assez voisin de zéro, on a :

$$\chi_\tau(t) \leq -\mathrm{Log}(1 - \theta_\varepsilon(t)) = \sum_1^\infty \frac{[\theta_\varepsilon(t)]^n}{n} \leq \theta_\varepsilon(t)\left[1 + \frac{\theta_\varepsilon(t)}{1-\theta_\varepsilon(t)}\right]$$

$\theta_\varepsilon(t)$ est croissante, donc $\chi_\tau(t) \leq \theta_\varepsilon(t)\left[1 + \frac{\theta_\varepsilon(\varepsilon^2)}{1 - \theta_\varepsilon(\varepsilon^2)}\right]$

or : $\theta_\varepsilon(\varepsilon^2) \leq \varepsilon.M^{-1}(1) + \varepsilon^2$ montre que : $\chi_\tau(t) \leq (1 + O(\varepsilon))\theta_\varepsilon(t)$

ainsi pour $t \leq \varepsilon^2$, t assez petit on a :

$$\frac{\chi_\tau(t)}{t} \leq [1 + O(\varepsilon)]\left[\frac{M(t.M^{-1}(1))}{t.M(\varepsilon)} + \frac{\psi_\varepsilon(t)}{t}\right]$$

maintenant soit $t_1 > \varepsilon > \varepsilon^2 \geq t$; alors, en vertu de la croissance de

$\frac{\psi_\varepsilon(t)}{t}$ on a : $\frac{\chi_\tau(t)}{t} \leq (1 + O(\varepsilon))\left[\frac{M(t.M^{-1}(1))}{t.M(\varepsilon)} + \frac{\psi_\varepsilon(t_1)}{t_1}\right]$.

Faisons tendre t, puis ε, et enfin t_1 vers 0, on obtient : $\chi'_T(0) \leqslant \vartheta'_M(0)$.

– Le fait que la réfléxivité de ℓ_M entraîne $\vartheta'_M(0) = 0$, résulte du lemme suivant. ∎

Lemme.- Soit M une fonction de Orlicz telle que :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{xM'(x)}{M(x)} > 1$, alors $\exists \varepsilon > 0$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall x \in]0,1]$:

$$\frac{M(t.x)}{M(x)} \leqslant t^{1+\varepsilon}.$$

Preuve : Il existe ε_1 et α positifs tel que pour tout $t \in]0,\alpha]$: $1 + \varepsilon_1 \leqslant \frac{tM'(t)}{M(t)}$; ensuite $\exists \varepsilon_2 > 0$: $1 + \varepsilon_2 \leqslant \frac{tM'(t)}{M(t)}$ sur $[\alpha,1]$. Posons $\varepsilon = \inf\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$. On a : $1 + \varepsilon \leqslant \frac{tM'(t)}{M(t)}$ sur $]0,1]$ d'où $\frac{1+\varepsilon}{t} \leqslant \frac{M'(t)}{M(t)}$; et par intégration sur $[tx,x]$, on obtient :

$$(1 + \varepsilon)\mathrm{Log}\,\frac{1}{t} \leqslant \mathrm{Log}\,\frac{M(x)}{M(tx)}. \ \blacksquare$$

Remarque : Lorsque $M'(0) < \frac{1}{e.M^{-1}(1)}$, on obtient encore un résultat significatif ; le rapport de Lipschitz α de la fonction $S(x) = (1 + \frac{\alpha}{a}\,||\pi_1(x)||)^{-a}$ peut être choisi inférieur à 1 de telle sorte que $R_u \neq S$, $\forall u \in$ p.s.h.(E).

III - MODULE DE CONTRACTION SUR LES ESPACES D'ORLICZ.

Le chapitre II a montré que l'on pouvait renormer tout espace de Banach E de telle sorte que $\alpha(E) = 0$; l'étude du cas particulier des espaces d'Orlicz a montré de plus que pour leur norme naturelle, on avait aussi $\alpha(E) = 0$ pour ceux qui ne sont pas isomorphes à ℓ^1.

A l'inverse, il est démontré dans [2] que sur l'espace ℓ^1 muni de la norme naturelle, l'équation $R_u = S$ avait une solution parmi les fonctions holomorphes sur ℓ^1 pour tout S dans $\exp(-\text{p.s.h.}(\ell^1)) \cap \text{Lip}_\alpha(\ell^1)$ et pour tout α dans $[0,1]$. Plus généralement, si E est un espace de Banach à base de Schaüder, normé de telle sorte que les projecteurs (π_n) sur les vecteurs de base soient unitaires ; on définit l'ouvert ω_{n+1} de $[e_1,\ldots,e_{n+1}] = E_{n+1}$ formé par les vecteurs $x + t\, e_{n+1}$ lorsque $|t| < S(x)$ et x décrit E_n ; on pose $\tilde{S}(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} d[\pi_n(x), \complement\omega_{n+1}]$ et il est démontré dans [2] qu'il existe une fonction holomorphe sur E tel que : $\tilde{S} \leqslant R_{|f|} \leqslant S$. Si on introduit $\lambda_E(\alpha)$, l'infimum des quotients $\dfrac{\tilde{S}(x)}{S(x)}$ lorsque x décrit E et S décrit $\text{Lip}_\alpha(E)$, λ_E est appelé le module de contraction de E et il est démontré dans [2] que $\lambda_E \geqslant \frac{1}{3}$; ainsi pour tout S dans $\text{Lip}_\alpha(E) \cap \exp(-\text{p.s.h.}(E))$, il existe f holomorphe sur E tel que : $\frac{1}{3} \cdot S \leqslant R_f \leqslant S$. On se propose de préciser ces résultats sur les espaces d'Orlicz.

Notations : Soit $A \in \,]0,+\infty[$; et ℓ_M un espace d'Orlicz.

$$\Gamma_A = \{y \in \ell_M : \sum_{i=1}^{\infty} M(y_i) > A\} \qquad \Gamma_A^n = \{y \in \mathbb{C}^n : \sum_{1}^{n} M(y_i) > A\}$$

$$\sigma(A) = \inf\{||y||,\ y \in \Gamma_A\} \qquad \sigma_n(A) = \inf\{||y||,\ y \in \Gamma_A^n\}$$

$$\rho(A) = \sup\{||y||,\ y \in \Gamma'_A\} \qquad \rho_n(A) = \sup\{||y||,\ y \in \Gamma'^n_A\}$$

où Γ'_A, Γ'^n_A désignent l'intérieur des complémentaires de Γ_A, Γ^n_A.

Proposition 3.2.- Soit ℓ_M un espace d'Orlicz, alors on a :

(a) pour tout $x \in \ell_M$: $\lim\limits_{n\to\infty} ||\pi_n(x)|| = ||x||$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n(A) = \rho(A)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(A) = \sigma(A)$.

Preuve :

a) pour $x \in \ell_M$, on pose : $q_n = ||\pi_n(x)||$ et $q = ||x||$.

q_n est une suite croissante majorée par q ; soit donc $p = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$, on a donc : $p \leq q$; de plus, $q_n \leq p$ et, par définition, de q_n, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} M\left(\frac{x_i}{p}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} M\left(\frac{x_i}{q_n}\right) = 1 \text{ ; d'où } \sum_{1}^{\infty} M\left(\frac{x_i}{p}\right) \leq 1.$$

Ceci entraîne par définition de q : $q \leq p$; donc : $q = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

b) . $\rho(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n(A)$; remarquons que la suite $\rho_n(A)$ est croissante.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \Gamma'_A$ tel que :

$\rho(A) - \frac{\varepsilon}{2} \leq ||y|| \leq \rho(A)$; d'après (a) pour n assez grand :
$\rho(A) - \varepsilon \leq ||\pi_n(y)|| \leq \rho(A)$, donc : $\rho(A) - \varepsilon \leq \rho_n(A) \leq \rho(A)$, car $\pi_n(y) \in \Gamma'^{n}_A$. □

. $\sigma(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(A)$; remarquons que la suite $\sigma_n(A)$ est décroissante. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \Gamma_A$ tel que :
$\sigma(A) < ||y|| \leq \sigma(A) + \varepsilon$, il est clair que pour n assez grand :
$\pi_n(y) \in \Gamma^n_A$ et $\sigma(A) \leq ||\pi_n(y)|| \leq \sigma(A) + \varepsilon$ d'après (a). Ainsi
$\sigma(A) \leq \sigma_n(A) \leq \sigma(A) + \varepsilon$; d'où le résultat cherché. ■

Proposition 3.3.- Le module de contraction d'un espace d'Orlicz h_M normalisé par $M(1) = 1$; vérifie l'inégalité

$$\lambda_M(\alpha) \geq \inf_{0\leq A\leq 1} \frac{1}{[M^{-1}(1-A)+\alpha\rho(A)]} .$$

Preuve : Par définition, $\lambda_M(\alpha) = \inf\limits_{a\in E} \lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{d(\pi_{n-1}(a), [\omega_n)}{S(a)}\right]$,

il s'agit de déterminer $\lambda \in]0,1[$ tel que :

$$\exists\, N_\lambda,\ \forall n \geq N_\lambda,\ \forall a \in E : \lambda.S(a) < d(\pi_{n-1}(a), \complement\omega_n)$$

c'est-à-dire : $B(\pi_{n-1}(a), \lambda.S(a)) \cap E_n \subset \omega_n$ pour n assez grand,

ou encore : (1) $\|t\, e_{n+1} + x' - \pi_n(a)\| < \lambda.S(a) \implies |t| < S(x')$.

Posons $y' = x' - \pi_n(a)$; la lipschtzité de S entraîne :

$S(\pi_n(a)) - \alpha\|y'\| \leq S(y' + \pi_n(a))$; donc pour avoir (1), il suffit de choisir λ tel que pour n assez grand :

$$\|t\, e_{n+1} + y'\| < \lambda.S(a) \implies |t| < S(\pi_n(a)) - \alpha\|y'\| ;$$

en divisant par $\lambda.S(a)$, et en remarquant que : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S(\pi_n(a))}{\lambda S(a)} = \dfrac{1}{\lambda}$,

on est ramené à : $\|t\, e_{n+1} + y'\| < 1 \implies |t| < \dfrac{1}{\lambda} - \alpha\|y'\|$ pour n assez grand. Or $\|t\, e_{n+1} + y'\| < 1$ équivaut à $\sum\limits_1^n M(y_i) + M(t) < 1$,

donc on est ramené à : $\sum\limits_1^n M(y_i) + M(t) < 1 \implies |t| < \dfrac{1}{\lambda} - \alpha\|y'\|$

pour n assez grand ; ou encore en posant $|t| = M^{-1}(1-A)$, $0 \leq A \leq 1$,

à :

$$\sum_1^n M(y_i) < A \implies M^{-1}(1-A) + \alpha\|y'\| < \frac{1}{\lambda}.$$

Il suffit pour cela de réaliser $\max\limits_{0\leq A\leq 1} \left[M^{-1}(1-A) + \alpha\rho_n(A)\right] < \dfrac{1}{\lambda}$.

On obtient ainsi la minoration annoncée pour $\lambda_M(\alpha)$. ∎

On retrouve comme cas particulier l'encadrement par $R_{|f|}$, prouvé dans [2], sur les espaces ℓ^p.

Corollaire 3.2.-

(a) si λ_p désigne le module de contraction des espaces ℓ^p, $p \geq 1$ on a : si $p = 1$, $\lambda_1 = 1$; si $p > 1$ $\lambda_p \geq \dfrac{1}{(1+\alpha^q)^{1/q}}$, avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On retrouve ainsi comme cas particulier les estimations annoncées dans [2].

(b) $\lambda_{h_M}(\alpha) \geq \dfrac{1}{1+\alpha}$, améliorant ainsi sur les espaces d'Orlicz l'estimation générale rappelée dans l'introduction.

Preuve :

(a) dans le cas $\ell^{p\geq 1}$ on a : $M(t) = t^p$; on a : $||y||^p = \sum_1^\infty |y_i|^p$, $\rho(A) = \sup\{||y||, \sum_1^\infty |y_i|^p = A\}$ d'où $\rho(A) = A^{1/p}$, on est ainsi ramené au calcul du maximum de $(1-A)^{1/p} + \alpha A^{1/p}$ sur $[0,1]$.

(b) pour A dans $[0,1]$, on a : $\rho(A) \leq 1$ et $M^{-1}(1-A) \leq M^{-1}(1) = 1$. D'où l'estimation annoncée sur h_M normalisé par $M(1) = 1$. □

Maintenant, on se propose sous certaines hypothèses de monotonie de donner une formule explicite de $\rho(A)$ et de $\sigma(A)$, ce qui nous permettra de préciser l'estimation de $\lambda_M(\alpha)$. ■

Définition 3.3.- On dit que la fonction d'Orlicz M vérifie (H) (resp. H_+, H_-) si $\forall k > 1$: $\vartheta_k(t) = \dfrac{M'(kt)}{M'(t)}$ est strictement monotone (resp. strictement croissante, décroissante) sur $]0,1]$.

Exemples :

(1) $M(t) = t - \text{Arctg}t$, $M \in H_-$ et $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{tM'(t)}{M(t)} = 3$.

(2) $M(t) = \displaystyle\int_0^t p(t)dt$ avec $\begin{cases} p(t) = \dfrac{t^p}{1+|\text{Log } t|}, & t \in [0,1] \quad p > 0. \\ p(t) = t^p & t \in [1,+\infty[. \end{cases}$

$M \in H_+$ et $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{tM'(t)}{M(t)} = p+1$

(3) $M(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-\frac{1}{\theta}} d\theta$, $M \in H_-$ et $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{tM'(t)}{M(t)} = +\infty$.

Proposition 3.4.- Soit M vérifiant H, alors :

(a) M vérifie H_+ ou H_-.

(b) Il existe une suite croissante de fonctions d'Orlicz de classe C^∞, appartenant à la même classe H_+ ou H_- que M et convergente vers M uniformément sur tout compact.

(c) Soit $a_M = \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{tM'(t)}{M(t)}$; alors quelque soit $A \in]0,1[$ la fonction $\Psi_A(t) = \frac{M^{-1}(At)}{M^{-1}(t)}$ est strictement monotone dans le même sens que ϑ_k et de plus $\lim_{t\to 0} \Psi_A(t) = A^{1/a_M}$ (que a_M soit fini ou non).

(d) Si M vérifie H_+, alors M vérifie Δ_2, la réciproque étant fausse.

Preuve :

(a) On raisonne par connexité ; pour fixer les idées, supposons l'existence de k_o tel que $\vartheta_{k_o} \in H_+$; soit alors $E = \{k > 1, \vartheta_k \in H_+\}$; montrons que E est ouvert : on raisonne par l'absurde ; soit $k \in E$, $a < b$ tel que ka et kb soient des points de continuité de M'. Il existe k_n convergeant vers k et $\vartheta_{k_n} \in H_-$, ainsi $\vartheta_{k_n}(b) < \vartheta_{k_n}(a)$, d'où par passage à la limite : $\vartheta_k(b) = \lim_{n\to\infty} \vartheta_{k_n}(b) \leq \lim_{n\to\infty} \vartheta_{k_n}(a) = \vartheta_k(a)$, c'est-à-dire : $\vartheta_k(b) \leq \vartheta_k(a)$ ce qui contredit $\vartheta_k \in H_+$. Par ailleurs, il est clair que E est fermé. ∎

(b) Soit $M \in H_+$ (pour fixer les idées), soit alors G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $M'(t) = p(t) = \exp[G(\text{Log } t)]$. La stricte monotonie de $\vartheta_k(t)$ entraîne celle de $H_k(t) = G(\text{Log}kt) - G(\text{Log } t)$. Soit $\rho > 0$, à support compact dans $[0,1]$ et de classe C^∞ ; pour $\varepsilon > 0$, on pose $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$; $G_\varepsilon = G * \rho_\varepsilon$ et $H_k^\varepsilon(t) = G_\varepsilon(\text{Log}kt) - G_\varepsilon(\text{Log } t)$.

On a : $H_k^\varepsilon(t) = H_k * \rho_\varepsilon(t)$ et donc la stricte monotonie de H_k entraîne celle de H_k^ε.

A G_ε, on associe la fonction d'Orlicz, dont la dérivée est donnée par $M'_\varepsilon(t) = p_\varepsilon(t) = \exp(G_\varepsilon(\text{Log } t))$.

On a : $\dfrac{M'_\varepsilon(kt)}{M'_\varepsilon(t)} = \exp(H_k^\varepsilon(t))$ donc $M_\varepsilon \in H^+$; M est absolument continue donc $M' = p(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et par suite : $G \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et comme $\rho_\varepsilon \in C^\infty$ on en déduit que $G_\varepsilon = G * \rho_\varepsilon \in C^\infty$.

Ainsi $M_\varepsilon \in C^\infty$; d'autre part, la croissance de M' entraîne celle de G_ε ; on en déduit alors la convergence croissante de $G_\varepsilon(t)$ vers $G(t)$ lorsque $\varepsilon \to 0$; qui entraîne à son tour la convergence croissante de $M'_\varepsilon(t)$ vers $M'(t)$, et en utilisant le théorème de la convergence dominée on en déduit la convergence croissante de $M_\varepsilon(x)$ vers $M(x)$. Enfin, en utilisant le théorème de Dini, on en déduit la convergence uniforme de M_ε vers M sur tout compact. ■

ⓒ On pose $u = M^{-1}(t)$, $v = M^{-1}(At)$; $u = kv$; $p(t) = M'(t)$; $(k > 1$; $0 < A < 1)$ alors $v < u$; $t = M(u)$, $At = M(v)$, $A = \dfrac{M(v)}{M(u)}$; un calcul immédiat montre que :

$$\Psi'_A(t) = \frac{kv}{u^2.M(u).p(v)} \left\{\int_0^v p(t)dt - \frac{1}{\theta_k(v)} \int_0^v \theta_k(t).p(t)dt\right\}$$

avec $\theta_k(t) = \dfrac{p(kt)}{p(t)}$; il est alors aisé de constater que $\Psi'_A(t)$ est positif ou négatif suivant que M vérifie H_+ ou H_- ; on pose $f_M(t) = \dfrac{tM'(t)}{M(t)}$; alors $\Psi'_A(t) = \dfrac{v}{u.M.(u)}\left[\dfrac{1}{f_M(v)} - \dfrac{1}{f_M(u)}\right]$ donc f_M est strictement monotone ; on pose, $a = a_M = \lim\limits_{x\to 0} f_M(x)$; soit $\varepsilon > 0$, pour t assez voisin de 0^+ on a : $a - \varepsilon \leqslant \dfrac{M^{-1}(t)p(M^{-1}(t))}{M.(M^{-1}(t))} \leqslant a + \varepsilon$; d'où $\dfrac{1}{(a+\varepsilon)t} \leqslant \dfrac{(M^{-1})'(t)}{M^{-1}(t)} \leqslant \dfrac{1}{(a-\varepsilon)t}$ et par intégration entre At et t on en déduit : $A^{\frac{1}{a-\varepsilon}} \leqslant \Psi_A(t) \leqslant A^{\frac{1}{a+\varepsilon}}$; en faisant tendre t vers zéro puis ε vers zéro, on obtient le résultat cherché dans le cas où a_M est fini ; dans le cas où $a_M = \infty$, remarquons que l'on a toujours

$\Psi_A(t) \leqslant 1$; soit $B > 0$, pour t assez voisin de zéro, on a :

$\frac{(M^{-1})'(t)}{M^{-1}(t)} \leqslant \frac{1}{t.B}$, et par intrégration, on en déduit : $\Psi_A(t) \geqslant A^{1/B}$

d'où le résultat cherché en faisant tendre t vers zéro, puis B vers l'infini. ∎

ⓓ Soit $M \in H_+$; alors : $p(2t) \leqslant \frac{p(2)}{p(1)} . p(t)$, $t \in [0,1]$;
et par intégration :

$$\frac{M(2t)}{M(t)} \leqslant \frac{2M'(2)}{M'(1)} \text{ ; donc } M \text{ vérifie la condition } \Delta_2.$$

La réciproque est fausse : un contre-exemple est fourni par la fonction

$$M(x) = x - \text{Arctg}x \text{ ; } \forall k > 1 : \frac{M'(kx)}{M'(x)} = k^2 \frac{1 + x^2}{1 + k^2x^2}$$

est strictement décroissante alors que M vérifie la condition Δ_2. ∎

Proposition 3.5.- Soit M une fonction d'Orlicz vérifiant (H) et normalisée par $M(1) = 1$, alors :

(a) si $M \in H_+$: $\rho(A) = M^{-1}(A)$ et $\sigma(A) = A^{1/a}$

(b) si $M \in H_-$: $\rho(A) = A^{1/a}$ et $\sigma(A) = M^{-1}(A)$.

(On a posé $a = \overline{\lim_{x \to 0}} \frac{xM'(x)}{M(x)}$).

Preuve : On procède par régularisation.

1ère étape : on suppose M de classe C^1.

$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(A)$ et $\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(A)$ montrent que l'on est ramené à un calcul d'extrémas liés en dimension finie ; pour $y \in \mathbb{R}^n$, on pose $\lambda(y) = ||y||$; $\lambda(y)$ est implicitement donné par la formule :
$\sum_{i=1}^{n} M(\frac{y_i}{\lambda}) = 1$; alors en vertu de la différentiabilité de M et du

théorème des fonctions implicites, on en déduit que λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$; on utilise alors la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On note k_o le multiplicateur associé à ce problème.

$$\forall j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y_j} - k_o \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sum_1^n M(y_i) - A\right) = 0$$

or $\dfrac{\partial\lambda}{\partial y_j} = \dfrac{M'(\frac{y_j}{\lambda})}{\sum_1^n \frac{y_i}{\lambda} M'(\frac{y_i}{\lambda})}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_1^n M(y_i) - A\right) = M'(y_j)$.

Ainsi : $\dfrac{M'(\frac{y_j}{\lambda})}{M'(y_j)} = k_o \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{y_i}{\lambda} M'(\dfrac{y_i}{\lambda})$; par ailleurs

$\sum_1^n M(y_i) = A < 1$ entraîne $\dfrac{1}{\lambda} > 1$. Et en utilisant l'hypothèse $\mathcal{H}$ on en déduit l'extréma cherché : $\lambda_n = \dfrac{M^{-1}(\frac{A}{n})}{M^{-1}(\frac{1}{n})}$; d'après la proposition précédente la suite λ_n est strictement décroissante ou strictement croissante suivant que M vérifie $\mathcal{H}_+$ ou $\mathcal{H}_-$. Et on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = A^{1/a}$, ce qui achève la preuve du cas régulier.

<u>2ème étape</u> : soit M, une fonction d'Orlicz vérifiant $\mathcal{H}$; d'après la proposition précédente M est limite croissante de fonctions d'Orlicz de classe C^∞ et vérifiant $\mathcal{H}$.

Pour fixer les idées, supposons que $M \in \mathcal{H}_+$; alors $M_\varepsilon \in \mathcal{H}_+$ et pour $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ on a : $M_\varepsilon \leqslant M_{\varepsilon'} \leqslant M$.

Soit $\Gamma_{A,\varepsilon} = \{y \in \ell_M : \sum\limits_{i=1}^\infty M_\varepsilon(y_i) \leqslant A\}$ et

$$\rho_\varepsilon(A) = \sup\{||y||, \ y \in \Gamma_{A,\varepsilon}\}$$

on a : $\Gamma_{A,\varepsilon} \supset \Gamma_{A,\varepsilon'} \supset \Gamma_A$; donc $\rho(A) \leqslant \rho_{\varepsilon'}(A) \leqslant \rho_\varepsilon(A)$ ainsi $\rho_\varepsilon(A)$ est décroissante minorée par $\rho(A)$, d'où $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon(A) \geqslant \rho(A)$; d'après la première étape : $\rho_\varepsilon(A) = M_\varepsilon^{-1}(A)$ et par passage à la limite : $\rho(A) \leqslant M^{-1}(A)$. Or il est clair que $\rho(A) \geqslant M^{-1}(A)$. ∎

Par un procédé analogue, on établit que $\sigma(A) = A^{1/a}$. ■

Corollaire 3.2.- Soit M une fonction d'Orlicz vérifiant H et normalisée par $M(1) = 1$:

(a) si $M \in H_+$: $\lambda_M(\alpha) \geq \inf\limits_{0 \leq A \leq 1} \left[\dfrac{1}{M^{-1}(1-A)+\alpha M^{-1}(A)}\right]$;

en particulier, on aura : $\lambda_M(1) \geq \dfrac{1/2}{M^{-1}(1/2)}$.

(b) si $M \in H_-$: $\lambda_M(\alpha) \geq \inf\limits_{0 \leq A \leq 1} \left[\dfrac{1}{M^{-1}(1-A)+\alpha A^{1/a}}\right]$;

Corollaire 3.3.- Soit M une fonction d'Orlicz vérifiant H, alors sur h_M (normalisé par $M(1) = 1$)

(a) si $M \in H_+$: $M_\tau(x) = M^{-1}\left[1 - \sum\limits_1^\infty M(x_i)\right]$; $m_\tau(x) = \left[1 - \sum\limits_1^\infty M(x_i)\right]^{1/a}$.

(b) si $M \in H_-$: $M_\tau(x) = \left[1 - \sum\limits_1^\infty M(x_i)\right]^{1/a}$; $m_\tau(x) = M^{-1}\left[1 - \sum\limits_1^\infty M(x_i)\right]$.

Preuve : d'après la proposition 3.1., on a :
$M_\tau(x) = \rho(A)$ et $m_\tau(x) = \sigma(A)$ avec $A = 1 - \sum\limits_1^\infty M(x_i)$; la proposition 3.5. permet alors de conclure. On retrouve comme cas particulier les valeurs trouvées par C.O. Kiselman dans [5] pour les espaces ℓ^p.

IV - UN ISOMORPHISME REMARQUABLE SUR LES ESPACES D'ORLICZ.

Après le théorème 3.1., on est amené à poser les problèmes suivants :

(a) S étant donné sur ℓ_M, chercher un espace E isomorphe à ℓ_M tel que l'équation $R_u = S$ ait une solution sur E.

(b) Chercher E isomorphe à ℓ_M tel que S étant donné sur E l'équation $R_u = S$ ait une solution sur E.

Espaces $\ell_{\emptyset}$ [2]

Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{C}^{[\mathbb{N}]}$; on note E_n l'espace vectoriel engendré par $\{e_1,\ldots,e_n\}$ et π_n la projection canonique de $\mathbb{C}^{[\mathbb{N}]}$ sur E_n.

Soit $\emptyset$, une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant :

$$\emptyset(0) = 1, \quad u\,\emptyset(\frac{1}{u}) \text{ croissante et } \lim_{u\to 0} u\,\emptyset(\frac{1}{u}) = 1.$$

On notera : $\bar{\emptyset}(u) = u\,\emptyset(\frac{1}{u})$.

Les relations $p_{n+1}(x) = |x_{n+1}|.\emptyset(\frac{p_n(x)}{|x_{n+1}|})$ que l'on convient de prolonger par continuité en $p_{n+1}(x) = p_n(x)$ lorsque $x_{n+1} = 0$ et $p_1(x) = |x_1|$, définissent par récurrence une norme notée $||\cdot||_{\emptyset}$ ou si il n'y a pas de confusion $||\cdot||$; on a : $p_{n+1}(x) \geq p_n(x)$, ainsi pour $x \in \mathbb{C}^{[\mathbb{N}]}$:

$$p_n(x) \leq ||x||_{\emptyset} = \lim_{n\to\infty} p_n(x) \leq +\infty .$$

Proposition - *Définition* 3.6.- Soit $x \in C^{[\mathbb{N}]}$, les deux conditions suivantes (a) et (b) sont équivalentes :

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) < \infty$

(b) $\exists\, r > 0 : \prod\limits_{i=1}^{\infty} \bar{\emptyset}(\frac{|x_i|}{r}) < \infty$

On considère alors les espaces $\ell_{\emptyset}$ définis par :

$$\ell_{\emptyset} = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} p_n(x) < \infty\} = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \exists r > 0 : \prod_{i=1}^{\infty} \bar{\emptyset}(\frac{|x_i|}{r}) < \infty\}.$$

D'après [2], $\ell_{\emptyset}$ est un Banach, mais on retrouvera cette propriété dans la proposition 3.7.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, tel que : $\lim_{n\to\infty} p_n(x) < \infty$.
On a : $||x||_{\vartheta} \geqslant p_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$||x||_{\vartheta} \geqslant p_{n+1}(x) = p_n(x).\bar{\vartheta}\left(\frac{|x_{n+1}|}{p_n(x)}\right) \geqslant p_n(x).\bar{\vartheta}\left(\frac{|x_{n+1}|}{||x||_{\vartheta}}\right)$$

et par récurrence : $||x||_{\vartheta} \geqslant |x_{k_o}| . \prod_{k_o+1}^{n+1} \bar{\vartheta}\left(\frac{|x_k|}{||x||_{\vartheta}}\right)$ où k_o est le premier indice tel que $x_k \neq 0$, ainsi $\prod_{k_o+1}^{\infty} \bar{\vartheta}\left(\frac{|x_k|}{||x||_{\vartheta}}\right) < \infty$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $r > 0$ tels que : $\prod_{1}^{\infty} \bar{\vartheta}\left(\frac{|x_k|}{r}\right) < \infty$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $||x||_{\vartheta} = \lim_{n\to\infty} p_n(x) = +\infty$ alors : $\exists\, N, \forall\, n \geqslant N$: $p_n(x) \geqslant r$;
ainsi pour $n \geqslant N$, on a successivement :

$$p_{n+1}(x) = \bar{\vartheta}\left(\frac{|x_{n+1}|}{p_n(x)}\right).p_n(x) \leqslant \bar{\vartheta}\left(\frac{|x_{n+1}|}{r}\right).p_n(x) \leqslant p_N(x).\prod_{N+1}^{\infty} \bar{\vartheta}\left(\frac{|x_k|}{r}\right)$$

d'où $p_n(x)$ est borné, on aboutit donc à une contradiction. ■

Proposition 3.7.- Pour tout espace d'Orlicz ℓ_M, il existe un espace ℓ_{ϑ} tel que $\ell_M = \ell_{\vartheta}$ et réciproquement. De plus, les normes $||\cdot||_M$ et $||\cdot||_{\vartheta}$ sont équivalentes.

Preuve : Etant donné une fonction d'Orlicz M vérifiant $M'(0) = 0$, il existe $x_o > 0$ tel que : la fonction $M_1(x)$, définie par : $M_1(x) = y_o + x$ si $x \geqslant x_o$ et $M_1(x) = M(x)$ si $x \leqslant x_o$, est une fonction d'Orlicz. On voit facilement que $\ell_M = \ell_{M_1}$ et que $||\cdot||_M$ est équivalente à $||\cdot||_{M_1}$; on définit alors ϑ, par $\vartheta(u) = u\left[1 + M_1(\frac{1}{u})\right]$; cette fonction ϑ est convexe, croissante et vérifie $\vartheta(0) = 1$.

De plus : $\bar{\phi}(u) = u.\phi(\frac{1}{u}) = 1 + M_1(u)$ est croissante et $\bar{\phi}(0) = 1$.

Par ailleurs : $x \in \ell_M$ équivaut à : $\exists \lambda > 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} M_1(\frac{|x_i|}{\lambda}) < \infty$

ce qui équivaut à : $\exists \lambda > 0$: $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Log}(1 + M_1(\frac{|x_i|}{\lambda})) < +\infty$

ce qui équivaut à : $\exists \lambda > 0$: $\prod_{1}^{\infty} \bar{\phi}(\frac{|x_i|}{\lambda}) < \infty$, c'est-à-dire $x \in \ell_{\phi}$.

Vérifions maintenant l'équivalence des normes :

on note $p_n = p_n(x)$ et $q_n = ||\pi_n(x)||_{M_1}$; on a : $p_1 = |x_1|$

et $q_1 = \frac{|x_1|}{M^{-1}(1)}$. Comme $M_1^{-1}(1) > 1$, on a : $q_1 < p_1$;

démontrons que $q_n \leqslant p_n$ par récurrence. Supposons $q_n \leqslant p_n$,

alors : $\sum_{i=1}^{n} M_1(\frac{|x_i|}{q_n}) = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} M_1(\frac{|x_i|}{q_{n+1}}) + M_1(\frac{|x_{n+1}|}{q_{n+1}}) = 1$

$p_{n+1} = p_n[1 + M_1(\frac{|x_{n+1}|}{p_n})] = p_n \cdot \bar{\phi}(\frac{|x_{n+1}|}{p_n})$.

On a : $|x_{n+1}| = q_{n+1} \cdot M_1^{-1}[1 - \sum_{i=1}^{n} M_1(\frac{|x_i|}{q_{n+1}})]$, d'où

$p_{n+1} = p_n[1 + M_1 (\frac{q_{n+1}}{p_n} \cdot M_1^{-1} (1 - \sum_{1}^{n} M_1(\frac{|x_i|}{q_{n+1}})))]$; posons

$K = q_{n+1} \cdot M_1^{-1}(1 - \sum_{i=1}^{n} M_1(\frac{|x_i|}{q_{n+1}}))$ et $\Psi_a(u) = u(1 + M_1(\frac{a}{u}))$ avec a réel

positif ; on vérifie aisément que Ψ_a est croissante ; par récurrence

$p_n \geqslant q_n$, et d'après la croissance de Ψ_K : $\Psi_K(q_n) \leqslant \Psi_K(p_n) = p_{n+1}$,

c'est-à-dire : $p_{n+1} \geqslant q_n + q_n M_1 [\frac{q_{n+1}}{q_n} M_1^{-1} (1 - \sum_{i=1}^{n} M_1(\frac{x_i}{q_{n+1}}))]$

comme $\frac{q_{n+1}}{q_n} \geqslant 1$: $p_{n+1} \geqslant q_n + q_n \cdot \frac{q_{n+1}}{q_n} \cdot M_1 [M_1^{-1}(1 - \sum_{i=1}^{n} M_1(\frac{|x_i|}{q_{n+1}}))]$

d'où $p_{n+1} \geqslant q_n - q_{n+1} \sum_{i=1}^{n} M_1(\frac{|x_i|}{q_{n+1}}) + q_{n+1}$.

or $q_n - q_{n+1} \sum_{i=1}^{n} M_1(\frac{|x_i|}{q_{n+1}}) = q_n \sum_{i=1}^{n} M_1(\frac{x_i}{q_n}) - q_{n+1} \sum_{i=1}^{n} M_1(\frac{x_i}{q_{n+1}})$

$= \sum_{i=1}^{n} [q_n M_1(\frac{|x_i|}{q_n}) - q_{n+1} M_1(\frac{|x_i|}{q_{n+1}})] \geq 0$ car $tM_1(\frac{1}{t})$ est décroissante

donc : $p_{n+1} \geq q_{n+1}$; ainsi pour tout n : $q_n \leq p_n \leq p$,

or $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = ||x||_{M_1}$ et finalement : $||x||_{M_1} \leq ||x||_{\phi}$.

A ce niveau on peut déjà conclure, à l'équivalence des normes, à l'aide du théorème de l'inverse continue appliquée à l'identité.

Toutefois nous allons donner une estimation de la deuxième constante d'équivalence ce qui permettra, sachant que ℓ_M est un Banach, de retrouver le fait que les espaces ℓ_ϕ sont des Banach.

Soit $x \in \ell_M$ tel que $||x||_{M_1} = 1$.

Il existe $n_o \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n \leq n_o : p_n \leq M_1^{-1}(1)$

$\forall n > n_o : p_n > M_1^{-1}(1)$

pour $n > n_o$: $p_{n+1} = p_n \bar{\phi}(\frac{|x_{n+1}|}{p_n}) < p_n \cdot \bar{\phi}(\frac{|x_{n+1}|}{M_1^{-1}(1)})$, car $\bar{\phi}$ est croissante, par récurrence : $p_{n+1} < p_{n_o+1} \prod_{n_o+1}^{n} \bar{\phi}(\frac{|x_{i+1}|}{M^{-1}(1)})$

$$p_{n_o+1} = p_{n_o} \cdot \bar{\phi}\left(\frac{|x_{n_o+1}|}{p_{n_o}}\right) \leq M^{-1}(1) \cdot \bar{\phi}\left(\frac{|x_{n_o+1}|}{M^{-1}(1)}\right)$$

donc : $p_{n+1} \leq M_1^{-1}(1) \cdot \prod_{i=n_o+1}^{\infty} \bar{\phi}\left(\frac{|x_{i+1}|}{M_1^{-1}(1)}\right) \leq M_1^{-1}(1) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \bar{\phi}\left(\frac{|x_i|}{M_1^{-1}(1)}\right)$

Par ailleurs : $\mathrm{Log}\left[M_1^{-1}(1) \prod_{i=1}^{\infty} \bar{\varphi}\left(\frac{|x_i|}{M_1^{-1}(1)}\right)\right] = \mathrm{Log}\, M_1^{-1}(1) +$

$$\sum_1^{\infty} \mathrm{Log}\left(1 + M_1\left(\frac{|x_i|}{M_1^{-1}(1)}\right)\right) \leq \mathrm{Log}\, M_1^{-1}(1) + \sum_1^{\infty} M_1\left(\frac{|x_i|}{M_1^{-1}(1)}\right) \leq \mathrm{Log}\, M_1^{-1}(1) + \frac{1}{M_1^{-1}(1)} \sum_1^{\infty} M_1(|x_i|)$$

ainsi $\forall n : p_n(x) \leq M_1^{-1}(1) \exp(\frac{1}{M_1^{-1}(1)})$ d'où l'équivalence des normes : $||x||_{M_1} \leq ||x||_{\varphi} \leq (M_1^{-1}(1) \exp \frac{1}{M_1^{-1}(1)}) \cdot ||x||_{M_1}$.

La norme des espaces ℓ_{φ} se prête à une bonne estimation du module de contraction ; on a en effet le résultat suivant :

Proposition 3.8. [2] : le module de contraction d'un espace ℓ_{φ} à base de Schaüder tel que $\varphi'(0) \in]0,1[$ vérifie :

$$\lambda_{\varphi}(\alpha) \geq \frac{\varphi'(0)}{\alpha} \quad , \quad \forall \alpha \geq \varphi'(0) .$$

Preuve : Il s'agit de trouver λ tel que pour n assez grand , $||x_n e_n + x' - \pi_{n-1}(a)|| < \lambda . S(a)$ entraîne : $|x_n| < S(x')$

D'autre part de l'inégalité $\varphi(u) \geq 1 + \varphi'(0) . u$, on déduit :

$$|x_n| + \varphi'(0)\, ||x' - \pi_{n-1}(a)|| \leq |x_n| . \varphi(\frac{||x' - \pi_{n-1}(a)||}{|x_n|}) = ||x_n e_n + x' - \pi_{n-1}(a)|| < \lambda . S(a)$$

puisque S est dans $\mathrm{Lip}^+_{\alpha}(\ell_{\varphi})$, on a aussi :

$$S(x') \geq S(\pi_{n-1}(a)) - \alpha||x' - \pi_{n-1}(a)|| \geq S(\pi_{n-1}(a)) - \frac{\alpha}{\varphi'(0)} [\lambda . S(a) - |x_n|]$$

en passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on constate que la condition cherchée sur λ est réalisée pour $\lambda \leq \frac{\varphi'(0)}{\alpha}$ et $\alpha \geq \varphi'(0)$,

donc $\lambda_{\varphi}(\alpha) \geq \frac{\varphi'(0)}{\alpha}$ ■

Théorème 3.2.- Soit ℓ_M un espace d'Orlicz séparable non isomorphe à ℓ^1.

a) quel que soit $\alpha \in [0,1[$ il existe un espace (ℓ_ψ) isomorphe à ℓ_M tel que pour tout $S \in \mathrm{Lip}_\alpha(\ell_\psi) \cap \exp(-\mathrm{p.s.h.}(\ell_M))$, l'équation $R_u = S$ admet une solution u dans $\mathrm{p.s.h.}(\ell_\psi)$.

b) quel que soit $\alpha \in [0,1[$, il existe un espace (ℓ_ψ) isomorphe à ℓ_M et une constante K_α tel que pour tout $S \in \mathrm{Lip}_\alpha(\ell_M) \cap \exp(-\mathrm{p.s.h.}(\ell_M))$ l'équation $R_u = K_\alpha . S$ admet une solution dans $\mathrm{p.s.h.}(\ell_\psi)$; de plus si $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} M'(x) < 1$ alors $K_\alpha = 1$.

Preuve :

a) Soit ℓ_M un espace d'Orlicz, $\alpha \in [0,1[$ et M_1 une fonction d'Orlicz tel que :

$$M_1 \begin{cases} M_1(x) = M(x) & \text{pour } x \text{ voisin de l'origine} \\ \\ M_1(x) = x + \alpha - 1 & \text{pour } x \text{ assez grand .} \end{cases}$$

Puisque M et M_1 coïncident au voisinage de l'origine les normes associés sont équivalentes. On a : $\psi(u) = u\left[1 + M_1\left(\frac{1}{u}\right)\right]$, d'où $\psi'(0) = \alpha$ et d'après la proposition (3.8) : $\lambda_\psi(\alpha) \geq \frac{\alpha}{\alpha} = 1$; ainsi $\lambda_\psi(\alpha) = 1$, donc : $\forall S \in \mathrm{Lip}_\alpha(\ell_\psi) \cap \exp(-\mathrm{p.s.h.}(\ell_M))$, $\exists f \in \mathcal{O}(\ell_\psi)$: $S = R_{|f|}$, de plus les normes $||.||_\psi$ et $||.||_{M_1}$ sont équivalentes d'après la proposition (3.7).

b) Les normes $||.||_M$ et $||.||_{M_1}$ sont équivalentes. Soit alors la constante K_α telle que : $||.||_M \leq K_\alpha . ||.||_{M_1}$; pour $S \in \mathrm{Lip}_\alpha(\ell_M) \cap \exp(-\mathrm{p.s.h.}(\ell_M))$ on a :

$$|S(x)-S(y)| \leqslant \alpha \ . \ ||x-y||_M \leqslant \alpha \ . \ K_\alpha \ . \ ||x-y||_{M_1} \leqslant \alpha \ . \ K_\alpha \ . \ ||x-y||_\psi$$

d'où : $\dfrac{S}{K_\alpha} \in \mathrm{Lip}_\alpha(\ell_\psi) \cap \exp(-\text{p.s.h.}(\ell_M))$ et par un raisonnement analogue à (a) on en déduit l'existence de f dans $\mathcal{O}(\ell_\psi)$ tel que : $\dfrac{S}{K_\alpha} = R_{|f|}$, dans le cas où $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} M'(x) < 1$, il est possible de choisir la fonction d'Orlicz M_1 telle que :

$$M_1(x) = M(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0$$

$$M_1(x) = x + \alpha - 1 \geqslant M(x) \quad \text{pour} \quad x \geqslant x_0 \ .$$

Or $M(x) \leqslant M_1(x)$ entraîne $||.||_M \leqslant ||.||_{M_1}$ et donc $K_\alpha = 1$. ∎

<u>Remarque</u>.- Etant donné un espace d'Orlicz ℓ_M , (avec $M'(0) = 0$), il est aisé de voir que l'on peut toujours modifier la fonction d'Orlicz pour x assez grand de façon à réaliser $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} M'(x) < 1$.

CONCLUSION

Ce travail suscite plusieurs problèmes.

Etant donné un espace de Banach E, au chapitre II, on a montré qu'il existe E' isomorphe à E tel que $\alpha(E') = 0$; au chapitre III, lorsque E est un espace d'Orlicz séparable, on a montré l'existence de E'_α isomorphe à E tel que $\alpha(E'_\alpha) \geqslant \alpha$, pour tout $\alpha < 1$. Cette construction se généralise-t-elle à tout espace de Banach séparable et se prolonge-t-elle à $\alpha = 1$?

Dans le cadre des espaces d'Orlicz, on a vu que $\alpha(E) = 0$ pour une large classe de ces espaces ; dans [2] il est démontré que $\alpha(\ell^1) = 1$; dans ces deux cas $\alpha(E)$ est atteint : il serait bon de savoir si $\alpha(E)$ est en général atteint.

Soit $\lambda > 0$ et $v \in$ p.s.h.(E) peut-on trouver $u \in$ p.s.h.(E) tel que : $\lambda R_v = R_u$. Si u et $v \in$ p.s.h.(E) a-t-on l'existence de $w \in$ p.s.h.(E) tel que :

$$\frac{1}{2}(R_u + R_v) = R_w, \quad \text{ou} \quad R_w = \mathrm{Max}(R_u, R_v), \ldots$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.M. ARON - *Entire functions of unbounded type on a Banach space,* Boll. Un. Mat. Ital. 9 (1974), p. 28-31.

[2] G. COEURÉ - *Sur le rayon de bornologie,*
* Lecture notes in math. Séminaire P. Lelong ; 1975-76 ; Springer-Verlag.
* Ann. Inst. Fourier, Grenoble ; 20,1 (1969), 361-432.

[3] S. DINEEN - *Unbounded holomorphic functions on a Banach space,* J. London Math. Soc. (2) 4 (1972), p. 461-465.

[4] B. JOSEFSON - *Conterexamples to the radius of convergence problem,* Manuscritpt, Uppsala 1971.
* Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence, Ark. Mat. 13 (1975), p. 79-89.

[5] C.O. KISELMAN - Annales polinici Mathematici, 1976-1977.

[6] P. LELONG - *Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques,* Lecture Notes Math. 71 (1968) ; p. 167-190.

[7] K.J. LINDBERG, Ph. D. Thesis - *Contractive Projections in Orlicz sequences spaces and continuous functions spaces,* University of California, Berkeley (1971).

[8] LINDENSTRAUSS - Classical Banach spaces. Springer-Verlag.

[9] T. RADO - *Subharmonic functions,* Chelsea. Publishing Company, 1949.

[10] I. SINGER - *Bases in Banach spaces I.* Springer-Verlag - 197 .