

50376
1980
HH

50376
1980
44

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

JEAN-CLAUDE THOMAS

HOMOTOPIE RATIONNELLE DES FIBRES DE SERRE.



Thèse soutenue le 25 février 1980 devant la commission d'examen :

Président : G. HECTOR, *Professeur à l'Université de Lille I*

Rapporteurs : S. HALPERIN, *Professeur à l'Université de Toronto*

J.M. LEMAIRE, *Professeur à l'Université de Nice*

D. LEHMANN, *Professeur à l'Université de Lille I*

Rapporteur 2ème thèse : M. ROGALSKI, *Professeur à l'Université de Lille I*

Invité : Y. FELIX, *Professeur associé à l'Université d'Amiens*

*A la mémoire de
Christian Guilbart.*

INTRODUCTION.

Le présent mémoire est consacré à l'étude de l'homotopie rationnelle des fibrations de Serre. Plus précisément, étant donné une fibration de Serre

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (*)$$

On suppose que F, M, E sont des espaces topologiques nilpotents, de cohomologie rationnelle de type fini et $\pi_1(M)$ opère de façon nilpotente sur chaque $H^k(F, \mathbb{Q})$. Par localisation, on associe à $(*)$ une fibration rationnelle (I.4)

$$F_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{j_{\mathbb{Q}}} E_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{Q}}} M_{\mathbb{Q}} \quad (**)$$

L'étude de l'homotopie rationnelle de $(*)$ est l'étude de la fibration rationnelle $(**)$.

Tout d'abord (chap. I) nous rappelons comment la fibration rationnelle $(**)$ est entièrement décrite par la donnée de son KS modèle minimal E .

$$E : (B, d_B) \xrightarrow{\iota} (B \otimes L(X), d) \xrightarrow{\rho} (L(X), d_A)$$

où ρ et ι sont des homomorphismes d'algèbres différentielles graduées commutatives, $L(X)$ est une algèbre libre commutative graduée, et la différentielle d vérifie certaines propriétés de nilpotence et de compatibilité avec le degré (I.3). Le chapitre II est consacré à quelques compléments et exemples sur les fibrations T.N.C.Z. (i.e. j^* surjectif)

Dans la première partie de la thèse (chap. III - IV - V) nous nous intéressons aux fibrations pures. C'est à dire les fibrations (*) dont un KS modèle E vérifie.

$$d(X^{\text{pair}}) = 0 \quad d(X^{\text{impair}}) \subset B \otimes L(X^{\text{pair}})$$

La notion de fibration pure, généralise au niveau algébrique, la notion classique de complexe de Koszul et la géométrie nous en fournit de nombreux exemples (ex. les fibrés de fibre un espace homogène G/H associé à un G -fibré principal - cf. appendice). Comme premier résultat nous obtenons (Th. III.3.(1)).

Si la fibre F vérifie,

$$\dim H(F, \mathbb{Q}) < +\infty$$

$$\dim (\pi_{\text{pair}}(F) \otimes \mathbb{Q}) = \dim (\pi_{\text{impair}}(F) \otimes \mathbb{Q}) < +\infty$$

alors

(*) est T.N.C.Z. ssi (*) est une fibration pure.

Ce résultat est lié à une conjecture de S. Halperin :

Si F vérifie les hypothèses ci-dessus alors (*) est T.N.C.Z.

Le second résultat de cette première partie est la démonstration de la conjecture lorsque $\dim(\pi_{\text{impair}}(F) \otimes \mathbb{Q}) \leq 2$ (Th. III.3.(2)).

De ces deux résultats nous déduisons des théorèmes d'impossibilité de fibrer certains espaces (III.5). D'autre part en considérant l'action d'un groupe de Lie compact connexe G sur un espace X tel que :

$$\dim H(X, \mathbb{Q}) < +\infty, \quad \dim(\pi_{\text{pair}}(X) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\pi_{\text{impair}}(X) \otimes \mathbb{Q})$$

nous démontrons que (III.4.)

- a) Le fibré de Borel $X \longrightarrow X_G \longrightarrow B_G$ est pur
- b) L'espace total X_G est intrinsèquement formel
- c) $\text{Krulldim } H^*(X_G, \mathbb{Q}) = \text{prof. } H^*(X_G, \mathbb{Q}) = \text{rg } G$.

Dans la deuxième partie (chap. VI) nous étudions le degré de trivialité des fibrations de Serre en considérant

- les fibrations homotopiquement triviales (H.T)

(i.e.) $(**)$ est une fibration triviale

- les fibrations cohomologiquement triviales (C.T)

$$(i.e.) \quad H^*(E, \mathbb{Q}) \underset{\text{alg}}{\cong} H^*(M, \mathbb{Q}) \otimes H^*(F, \mathbb{Q})$$

- les fibrations faiblement homotopiquement triviales (F.H.T.)

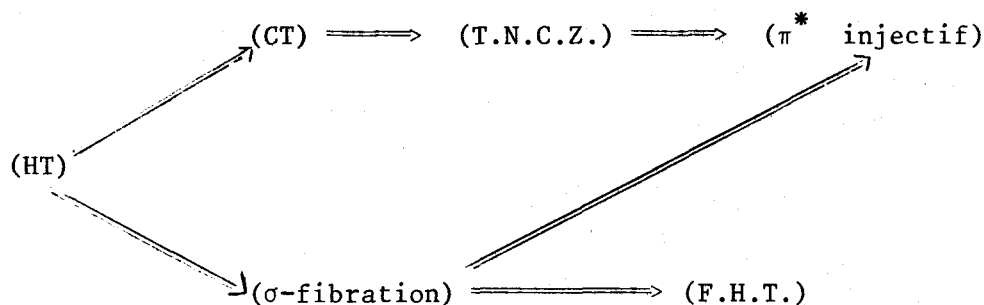
(i.e.) le connectant de la suite exacte d'homotopie de $(**)$

est nul

- les σ -fibrations

(i.e.) $(**)$ admet une section.

Nous obtenons évidemment le schéma suivant :



Nous obtenons ensuite diverses conditions pour qu'une fibration soit C.T, H.T ... Par exemple,

$$\left((C.T) + \begin{cases} \dim H(F, \mathbb{Q}) < +\infty \\ \dim(\pi_{\text{pair}}(F) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\pi_{\text{imp}}(F) \otimes \mathbb{Q}) \end{cases} \right) \Longrightarrow (H.T) \quad (VI.3.(3))$$

$$((C.T) + (*) \text{ pure}) \Longrightarrow (F.H.T.) \quad (VI.6.(6))$$

$$(T.N.C.Z. + F \text{ est } H \text{ espace}) \Longrightarrow (H.T) \quad (VI.3.(2))$$

Dans la dernière partie (chap. VII - VIII et IX), nous construisons un nouvel invariant de l'homotopie rationnelle d'une fibration (*) que nous appelons le E.M. modèle (Eilenberg - Moore). C'est un KS modèle (non minimal)

$$F : (B, d_B) \xrightarrow{1} (B \otimes L(Y), D) \xrightarrow{\rho} (L(Y), \bar{D})$$

où $B \otimes L(Y)$ est munie d'une filtration naturelle $(F_p)_{p \geq 0}$ compatible avec D , qui induit une filtration naturelle $\bar{F}_p$ sur $L(Y)$, compatible avec $\bar{D}$. Le niveau E_1 des suites spectrales associées définit ce que nous appelons le modèle formel sous jacent de (*)

$$(H^*(B, \mathbb{Q}), 0) \xrightarrow{1_1} (H^*(B, \mathbb{Q}) \otimes L(Y), D_1^*) \xrightarrow{\rho_1} (L(Y), \bar{D}_1)$$

La réalisation géométrique de $(L(Y), \bar{D}_1)$ est appelée la fibre formelle, qui n'est pas en général un espace formel. Le complexe $(H(B) \otimes L(Y), D_1^*)$ est une résolution libre de $H(E)$ et la suite spectrale définie par $\bar{F}_p$ coïncide avec la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de (*) en cohomologie rationnelle.

Dans le cas où $M = \text{point}$, on retrouve les modèles filtrés au sens de [H.S.]. Les modèles de M. Vigué sont des cas particuliers de E.M. modèle. Nous donnons un algorithme pour le calcul du E.M. modèle,

que nous appliquons à de nombreux exemples et qui nous permet de calculer les E.M. modèles des fibrations de base une sphère. D'autre part nous obtenons les résultats suivants :

- 1 $((*) \text{ est T.N.C.Z.}) \iff (\text{La fibre formelle est un espace formel})$
- 2 $((*) \text{ est C.T}) \iff (\text{Le modèle formel est trivial})$
- 3 $((*) \text{ est H.T}) \iff (\text{Le E.M. modèle est trivial})$
- 4 $(E \text{ formel} + (*) \text{ C.T}) \implies ((*) \text{ est F.H.T. , } M \text{ et } F \text{ faiblement formels})$
- 5 $(E \text{ et } F \text{ formels, } (*) \text{ C.T}) \implies ((*) \text{ H.T})$

Ensuite nous utilisons les E-M modèles pour construire des obstructions à la réalisation d'une équivalence d'homotopie fibrée. Par exemple, nous démontrons que $(*)$ est T.N.C.Z. et si $H^r(F, \mathbb{Q}) = 0 \quad 1 \leq r \leq \ell$ et $H^s(E, \mathbb{Q}) = 0, \quad s \geq 3\ell + 1$, alors il n'y a pas d'obstruction non nulle à la réalisation d'une c-équivalence.

Les obstructions sont indépendantes du corps de base et permettent d'étudier les fibrations formelles c'est-à-dire les fibrations déterminées par la seule donnée de π^* . Nous obtenons alors la suite d'implications strictes

$$((*) \text{ formelle}) \implies (F \text{ a même type d'homotopie rationnelle que la fibre formelle})$$



(La suite spectrale d'E.M. de la fibration $(*)$ collapse au niveau E_2).

Finalement, nous construisons une suite d'obstructions à ce que F et la fibre formelle aient même type d'homotopie rationnelle. Ces obstructions habitent dans le H^1 de la cohomologie filtrée du complexe des dérivations de degré ≤ 0 sur $L(Y)$. Le cas particulier des fibrations dont la cohomologie de la base est libre est traité complètement.

Pour terminer la présentation de ce travail, je dirai tout ce que celui-ci doit à D. Lehmann et S. Halperin dont l'amitié, l'expérience les conseils, les exigences, la patience, m'ont accompagné tout au long de son élaboration. Si certaines démonstrations sont rédigées avec soin je le dois aux remarques pertinentes de B. Callenaere. Si ce texte est émaillé d'exemples, je le dois à Y. Félix et à ses nombreuses questions. Les échanges oraux et épistolaires que j'ai eu avec D. Tanré et M. Vigué m'ont permis de préciser de nombreux points.

Je dois dire aussi que la franche camaraderie, la disponibilité, la curiosité des choses mathématiques que j'ai rencontrées auprès de ces six personnes ont été déterminantes pour l'élaboration de ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à J.M. Lemaire d'avoir bien voulu s'intéresser à mes travaux et faire partie du jury.

Que les professeurs G. Hector, qui a bien voulu présider le jury et M. Rogalski qui m'a posé un second sujet soient également remerciés pour leur intérêt.

Enfin que R. Bérat et A. Lengaigne qui ont assuré la dactylographie du manuscrit trouvent ici l'expression de ma gratitude.

PLAN

====

CHAPITRE I - MODELE MINIMAL D'UNE FIBRATION DE SERRE.

I.1 - Notations - Conventions.	7
I.2 - KS extensions.	10
I.3 - Existence et Unicité du modèle minimal.	13
I.4 - Fibrations rationnelles.	14
I.5 - Conditions suffisantes pour qu'une fibration de Serre soit rationnelle.	17
I.6 - Ψ -homotopie et caractéristique d'Euler homotopique.	18
I.7 - Espaces simples - espaces nilpotents.	20
I.8 - Suite exacte de Ψ -homotopie.	22

CHAPITRE II - FIBRATIONS TOTALEMENT NON COHOMOLOGUES A ZERO.

II.1 - Rappels et Compléments.	25
II.2 - G-fibrés T.N.C.Z.	27
II.3 - Suite spectrale d'Eilenberg-Moore.	30

CHAPITRE III - FIBRATIONS RATIONNELLES PURES (F.R.P.).

III.1 - KS-extensions pures.	33
III.2 - Fibrations rationnelles pures.	40
III.3 - Deux théorèmes et une conjecture.	43
III.4 - Application au fibré de Borel.	47
III.5 - Conséquences du théorème III.3.(2).	52

CHAPITRE IV - DEMONSTRATION DU THEOREME III.3.(1).

IV.1 - Version algébrique du théorème III.3.(1).	55
IV.2 - $P_3 \Rightarrow P_1$.	56
IV.3 - $P_1 \Rightarrow P_2$.	57
IV.4 - $P_2 \Rightarrow P_3$.	62
IV.5 - Preuve du lemme IV.4.(10).	72

.../...

CHAPITRE V - DEMONSTRATION DU THEOREME III.3.(2).

V.1 - Cas où $\dim \Pi_{\Psi}(F) = 2$.	75
V.2 - Cas où $\dim \Pi_{\Psi}(F) = 4$.	76
V.3 - Dérivations dans une algèbre de dualité de Poincaré.	89

CHAPITRE VI - FIBRATIONS H.T., C.T., F.H.T. et σ -FIBRATIONS.

VI.1 - Définitions et exemples de fibrations H.T. et C.T.	96
VI.2 - Conditions nécessaires et suffisantes.	104
VI.3 - Applications, exemples.	107
VI.4 - σ -fibrations et fibrations F.H.T.	112
VI.5 - Tableau comparatif.	116
VI.6 - Compléments.	117

CHAPITRE VII - LE MODELE D'EILENBERG-MOORE D'UN MORPHISME D'A.D.G.C.

VII.1 - E.M.-algèbre.	127
VII.2 - Modèle d'Eilenberg-Moore d'un morphisme d'a.d.g.c.	132
VII.3 - Unicité du modèle formel sous-jacent.	136
VII.4 - Théorème d'unicité du E.M.-modèle - Conséquences.	141
VII.5 - Théorème d'existence du E.M.-modèle.	151

CHAPITRE VIII - E.M.-MODELE D'UNE FIBRATION RATIONNELLE ET APPLICATIONS.

VIII.1 - E.M.-modèle d'une application continue.	160
VIII.2 - E.M.-modèle d'une fibration rationnelle - Exemples.	161
VIII.3 - E.M.-modèle d'une fibration T.N.C.Z.	173
VIII.4 - Fibrations cohomologiquement ou homotopiquement triviales.	176
VIII.5 - Filtrations et suites spectrales d'Eilenberg-Moore.	184

CHAPITRE IX - THEORIE DE L'OBSTRUCTION A LA REALISATION D'UNE c-EQUIVALENCE ENTRE DEUX FIBRATIONS RATIONNELLES.

IX.1 - Rappels et Notations.	191
IX.2 - h -équivalence et c -équivalence.	195
IX.3 - Théorie de l'obstruction.	198
IX.4 - Démonstration des résultats IX.3. (8), (9), (10) et (11).	205

IX.5 - Exemples.	209
IX.6 - Fibrations formelles.	212
<u>APPENDICE - KS-MODELE D'UN FIBRE DE FIBRE TYPE G/H ASSOCIE A UN</u> <u>G-FIBRE PRINCIPAL.</u>	223
<u>INDEX TERMINOLOGIQUE.</u>	235
<u>REFERENCES.</u>	237

CHAPITRE I

MODELE MINIMAL D'UNE FIBRATION DE SERRE.

Initialement [S-1-] la théorie de Sullivan fut introduite pour l'étude du type d'homotopie rationnelle des espaces topologiques, peu après [S-2], D. Sullivan étendit ses travaux aux "fibrations algébriques". S. Halperin [H-1-], [H-2-] a précisé et redéfini ces fibrations algébriques qu'il appelle KS-extension (K pour Koszul, S pour Sullivan). Nous suivrons la terminologie de [H-1-] et nous rappelons brièvement dans ce chapitre les définitions et résultats de [H-1-].

I-1 - NOTATIONS - CONVENTIONS.

I.1.(1) k désigne un corps commutatif de caractéristique zéro (dans la pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$). Tous les espaces vectoriels, algèbres, applications linéaires, ... sont définis pour le corps k .

I.1.(2) Les algèbres sont associatives avec élément unité. Les homomorphismes d'algèbres conservent l'unité.

I.1.(3) Un espace vectoriel gradué est une somme directe

$$V = \bigoplus_{p \geq 0} V^p$$

Les éléments de V^p sont homogènes de degré p . Si $x \in V^p$, nous notons son degré par

$$|x| = p$$

I.1.(4) Une algèbre graduée (a.g)

$$A = \bigoplus_{p \geq 0} A^p$$

vérifie la relation,

$$A^p \cdot A^q \subset A^{p+q}$$

pour tout couple d'entiers (p, q) .

I.1.(5) Une augmentation de A est un homomorphisme d'algèbre

$$\epsilon : A \longrightarrow \mathbb{k}$$

tel que
$$A^+ = \bigoplus_{p > 0} A^p \subset \ker \epsilon$$

(ϵ est surjectif d'après I.1.(2)). Le couple (A, ϵ) est appelé une algèbre augmentée (a.a) ou (a.g.a)

I.1.(6) Une a.g. A est dite n-connexe si

$$A^0 = \mathbb{k} \quad A^p = 0 \quad , \quad 1 \leq p \leq n$$

Lorsque $n = 0$, on dit que A est connexe.

I.1.(7) Une algèbre commutative graduée (a.g.c.) A vérifie

$$a.b = (-1)^{|a||b|} b.a$$

pour tout élément $(a, b) \in A \times A$.

I.1.(8) Une dérivation de degré $p \in \mathbb{Z}$, de A est une application linéaire

$$\theta : A \longrightarrow A$$

de degré p , telle que

$$\theta(a.b) = \theta(a).b + (-1)^{|a|} \cdot p \ a \ \theta(b)$$

I.1.(9) Une algèbre différentielle graduée (a.d.g) est une (a.g). A munie d'une dérivation de degré $+1$

$$d_A : A \longrightarrow A$$

de carré nul ($d_A \circ d_A = 0$).

Nous notons (A, d_A) un tel objet et $H(A, d_A)$ son a.g.c. de cohomologie ($H(.)$ est en fait un foncteur homologie !).

I.1.(10) Si $X = \bigoplus_{n \geq 0} X^n$ désigne un espace vectoriel gradué, on note

$$P = X^{\text{imp}} = \bigoplus_{p \geq 0} X^{2p+1}$$

$$Q = X^{\text{pair}} = \bigoplus_{q \geq 0} X^{2q}$$

$L(X)$ désigne l'a.g.c. libre engendrée par l'espace vectoriel X .

$$L(X) = L(P \oplus Q) = \Lambda P \oplus SQ$$

ΛP désigne l'algèbre extérieure engendrée par P ,

SQ désigne l'algèbre symétrique engendrée par Q .

I.1.(11) Si $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ désigne une base homogène de X , on note

$$A = L(X) = L((e_\alpha)_{\alpha \in K})$$

l'algèbre libre engendrée par les e_α .

Si K est un ensemble totalement ordonné par la relation $\leq$,
on pose pour tout $\beta \in K$

$$A_{\leq \beta} = L(X_{\leq \beta}) = L((e_{\alpha})_{\alpha \leq \beta})$$

$$A_{< \beta} = L(X_{< \beta}) = L((e_{\alpha})_{\alpha < \beta})$$

I.1.(12) Une a.g. A est dite de type fini si pour tout
 $p \in \mathbb{N}$

$$\dim A^p < +\infty$$

I-2 - K.S-EXTENSIONS.

I.2.(1) Soient (B, d_B) , (C, d_C) , (A, d_A) trois a.d.g.
augmentées, la suite

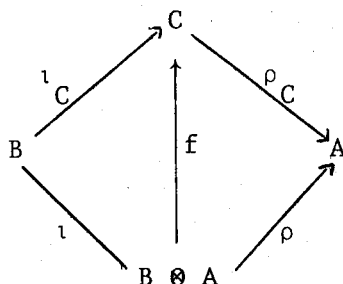
$$E : (B, d_B) \xrightarrow{\iota_C} (C, d_C) \xrightarrow{\rho_C} (A, d_A)$$

est appelée une KS-extension si

- i) ι_C et ρ_C sont deux homomorphismes d'a.d.g.c. augmentées.
- ii) Il existe un espace vectoriel gradué X tel que

$$A = L(X)$$

iii) Il existe un isomorphisme d'a.g.c. augmentées f , rendant
le diagramme suivant commutatif



où ι désigne l'inclusion naturelle et $\rho = \epsilon \otimes \text{Id}_A$ avec ϵ l'augmentation de B .

On note $d = f^{-1} \circ d_C \circ f$ la différentielle induite par f .

iv) Il existe une base homogène $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ de X et une relation de bon ordre sur K , notée $\geq$, telle que pour tout $\alpha \in K$

$$d e_\alpha \in B \otimes L(X_{<\alpha})$$

1.2.(2) Le couple $((e_\alpha)_{\alpha \in K}, f)$ est appelé une structure KS de E et la base $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ une d-base KS

1.2.(3) Si en outre la KS-extension E vérifie

$$|e_\alpha| < |e_\beta| \implies \alpha < \beta$$

pour tout couple $(\alpha, \beta) \in K \times K$, on dit que E est une KS-extension minimale.

Le couple $((e_\alpha)_{\alpha \in K}, f)$ est alors appelé une structure KS minimale et la base $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ une d-base KS minimale.

1.2.(4) Par définition, dans le cas particulier où $(B, d_B) = (k, 0)$, nous obtenons la transcription suivante

$(E \text{ est une KS-extension}) \iff ((C, d_C) = (A, d_A) \text{ est une algèbre KS nilpotente ou KS complexe})$

$(E \text{ est une KS-extension minimale}) \iff ((C, d_C) = (A, d_A) \text{ est une algèbre KS-minimale}).$

1.2.(5) Changement de base.

Soient $E : (B, d_B) \longrightarrow (C, d_C) \longrightarrow (A, d_A)$ une KS-extension,

$(e_\alpha)_\alpha$ une KS base et $m : (B', d_{B'}) \longrightarrow (B, d_B)$ un quasi-isomorphisme (m^* est un isomorphisme), alors il existe une KS-extension

$$E' : (B', d_{B'}) \longrightarrow (C', d_{C'}) \longrightarrow (A, d_A)$$

et un morphisme de KS-extension

$$(m, \psi, I_{d_A}) : E' \longrightarrow E$$

tels que

- 1) $(e_\alpha)_\alpha$ est une base KS de E'
- 2) $\psi(1 \otimes e_\alpha) - 1 \otimes e_\alpha \in B \otimes L(X_{<\alpha})$
- 3) ψ^* est un isomorphisme.

E' est unique à isomorphisme près, E' est appelé KS-extension image réciproque de E par m

$$E' = m^{-1}(E)$$

Exemple : Si $H^0(B, \mathbb{k}) = \mathbb{k}$ et B non connexe, on définit B' en posant

$$(B')^0 = \mathbb{k} \quad (B')^1 \oplus d_{B^0} = B^1, \quad (B')^i = B^i \quad i \geq 2$$

et l'inclusion $m : B' \rightarrow B$ est un quasi-isomorphisme, alors $m^{-1}(E)$ a une base connexe.

I.2.(6) E est KS minimale ssi la différentielle d_A est décomposable (i.e. $d_A X \subset L^+(X) \cdot L^+(X)$) ce qui équivaut à dire que (A, d_A) est minimale au sens de Sullivan. En particulier, pour tout KS complexe minimal connexe est une algèbre minimale au sens de Sullivan.

I-3 - EXISTENCE ET UNICITE DU MODELE MINIMAL.

I.3.(1) Soit γ un homomorphisme d'a.d.g.c. augmentées

$$\gamma : (B, d_B, \varepsilon_B) \longrightarrow (D, d_D, \varepsilon_D) .$$

Par définition, le couple (E, Ψ) formé par la KS-extension

$$E : (B, d_B) \xrightarrow{l_C} (C, d_C) \xrightarrow{p_C} (A, d_A)$$

et par l'homomorphisme d'a.d.g.c. augmentées

$$\Psi : (C, d_C, \varepsilon_C) \longrightarrow (D, d_D, \varepsilon_D)$$

est un KS-modèle de γ si

i) $\Psi \circ l_C = \gamma$

ii) Ψ est un quasi-isomorphisme (i.e. induit un isomorphisme en cohomologie).

I.3.(2) Si en outre E est une KS-extension minimale,
 (E, Ψ) est un modèle KS minimal.

I.3.(3) Par abus de langage on dit que E est un modèle de γ . En particulier si γ désigne l'inclusion naturelle de $\mathbb{k}$ dans D , l'a.d.g.c.

$$(C, d_C) = (L(X), d_A)$$

est un modèle de l'a.d.g.c. (D, d_D) .

I.3.(4) Dans [H-1] th. 6.1 et th. 6.2 il est démontré
 que :

Tout homomorphisme γ entre deux a.d.g.c. augmentées et cohomologiquement connexes admet un modèle KS minimal E , unique à isomorphisme près.

Ce résultat justifie en partie, l'abus qui consiste à parler du modèle minimal de γ .

I.3.(5) Avec les notations de I.2.(5), si E est un modèle de base B alors E' est un modèle de base B' ($[H_1]$ Th. 5.1.9).

I-4 - FIBRATIONS RATIONNELLES.

Dans cette section, nous rappelons le lien entre la topologie et les considérations algébriques précédentes.

I.4.(1) On note A le foncteur de Sullivan $[\S-2-]$, des formes simpliciales à coefficients polynomiaux, qui envoie la catégorie des espaces topologiques pointés, dans la catégorie des a.d.g.c. augmentées. Une construction explicite de ce foncteur est donnée dans $[L]$ et $[W]$ (cf. aussi $[B.G]$ et $[C-1-]$). Nous en retiendrons les propriétés suivantes :

i) $A(pt) = \mathbb{k}$

ii) Il existe un isomorphisme naturel d'a.g.c.

$$H(A(H), d_H) \cong H^*(M, \mathbb{k})$$

($H^*(M, \mathbb{k})$ désignant la cohomologie singulière de M à coefficients dans $\mathbb{k}$).

iii) Si $i : N \longrightarrow M$ est une cofibration, alors $A(i)$ est surjectif et on pose $A(M, N) = \ker A(i)$.

Il existe un isomorphisme canonique d'a.g.c.

$$H(A(M,N),d) \cong H^*(M,N;\mathbb{k})$$

1.4.(2) Par définition, si f est une application continue

$$f : (N, n_0) \longrightarrow (M, m_0)$$

le modèle minimal de l'homomorphisme d'a.d.g.c. augmentée

$$A(f) : (A(M), d_M, \varepsilon_M) \longrightarrow (A(N), d_N, \varepsilon_N)$$

est appelé le modèle minimal de f .

1.4.(3) Cas absolu, si f désigne l'application constante

$$f : (M, m_0) \longrightarrow (\{m_0\}, m_0)$$

le modèle minimal de f est appelé le modèle minimal de (M, m_0) .

1.4.(4) D'après I.3.(5), pour tout modèle B de M

$$m : (B, d_B) \longrightarrow (A(M), d_M)$$

il existe un KS modèle minimal de f , de base B , pourvu que

$H^0(N, \mathbb{k}) = H^0(M, \mathbb{k}) = \mathbb{k}$. En particulier il existe toujours un modèle KS minimal de f de base B , une a.d.g.c. connexe.

1.4.(5) Considérons une suite d'applications continues entre espaces pointés

$$1.4.(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \\ F, E, M \text{ connexes par arcs} \\ \pi \circ j(F) = \text{point base de } M. \end{array} \right.$$

1.4.(7) Nous obtenons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 (A(M), d_M) & \xrightarrow{A(\pi)} & (A(E), d_E) & \xrightarrow{A(j)} & (A(F), d_F) \\
 \parallel & & \uparrow \psi & & \uparrow \psi_A \\
 I.4.(8) \quad E : (A(M), d_M) & \xrightarrow{l_C} & (C, d_C) & \xrightarrow{\rho_C} & (A, d_A)
 \end{array}$$

(L'existence de ψ_A est assurée par la relation $A(j) \circ A(\pi) = \epsilon_B$)
 où (E, ψ) est un KS modèle minimal de $A(\pi)$.

ψ est un quasi-isomorphisme, mais en général ψ_A n'est pas un quasi-isomorphisme.

I.4.(9) Par définition, I.4.(6) est appelée une fibration rationnelle lorsque ψ_A est un quasi-isomorphisme.

I.4.(10) Remarques

1) Si I.4.(6) est une fibration rationnelle et M, E, F des espaces nilpotents alors la suite localisée $[Hi \text{ et } a\ell]$

$$F_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{j_{\mathbb{Q}}} E_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{Q}}} M_{\mathbb{Q}}$$

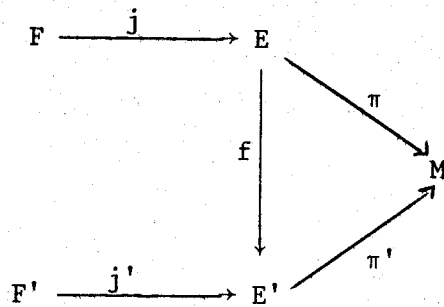
est aussi une fibration rationnelle.

2) Si I.4.(6) est une fibration rationnelle, F est la "fibre homotopique rationnelle" de π .

3) Si I.4.(6) est une fibration rationnelle, il existe une fibration de Serre

$$F' \xrightarrow{j'} E' \xrightarrow{\pi'} M$$

et une équivalence d'homotopie f rendant le diagramme suivant commutatif :



Il est facile de vérifier que la fibration de Serre

$$F' \xrightarrow{j'} E' \xrightarrow{\pi'} M$$

est aussi une fibration rationnelle par suite F et F' ont même type d'homotopie rationnelle. Grâce à cette remarque on peut définir une suite exacte longue d'homotopie rationnelle, une suite spectrale de cohomologie ,..., d'une fibration rationnelle.

1-5 - CONDITIONS SUFFISANTES POUR QU'UNE FIBRATION DE SERRE SOIT RATIONNELLE.

1.5.(1) Soient G un groupe et M un G module, on pose :

$\Gamma_G(M)$ le sous module de M engendré par les éléments de la forme $gx - x$ avec $g \in G$, $x \in M$

$$\Gamma_G^i(M) = \Gamma_G(\Gamma_G^{i-1}(M))$$

1.5.(2) On dit qu'un G -module est nilpotent s'il existe un entier m tel que la suite centrale

$$M \supsetneq \Gamma_G(M) \supsetneq \Gamma_G^2(M) \supsetneq \dots \supsetneq \Gamma_G^m(M) \supsetneq \dots$$

s'annule au rang $m+1$.

I.5.(3) Rappelons que pour toute fibration de Serre (I.4.(6)) il existe une opération canonique du π_1 de la base sur la cohomologie de la fibre

$$h^* : \pi_1(M, m_0) \longrightarrow \text{Aut}(H^*(F, \mathbb{k}))$$

I.5.(4) On doit à S. Halperin [H-1-] le résultat suivant :

Si chaque $H^p(F, \mathbb{k})$ est un $\pi_1(M, m)$ module nilpotent et si l'une ou l'autre des conditions suivantes est réalisée :

- i) $H^*(F, \mathbb{k})$ est de type fini.
- ii) $H^*(M, \mathbb{k})$ est de type fini

alors la fibration de Serre I.4.(6) est une fibration rationnelle.

I.5.(5) Si le fibré (localement trivial)

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$$

possède un groupe structural connexe par arcs, alors $H^*(F, \mathbb{k})$ est un $\pi_1(M)$ module trivial ([Se] p. 445), donc si $H^*(F, \mathbb{k})$ ou $H^*(M, \mathbb{k})$ sont de type fini, c'est une fibration rationnelle.

I.5.(6) Toute fibration principale ([F]) est une fibration rationnelle.

I-6 - Ψ -HOMOTOPIE ET CARACTERISTIQUE D'EULER HOMOTOPIQUE.

I.6.(1) Soit (A, d_A) une algèbre différentielle graduée commutative augmentée (a.d.g.c.a) cohomologiquement connexe ($H^0(A, d_A) = \mathbb{k}$). On considère (C_1, ψ_1) et (C_2, ψ_2) deux KS-modèles de A , alors il existe un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\psi : (C_1, d_1) \longrightarrow (C_2, d_2)$$

tel que $\psi^* : H(C_1, d_1) \longrightarrow H(C_2, d_2)$

soit un isomorphisme (i.e. ψ est un quasi-isomorphisme), (cf. [H-1-] th. 5.20.).

Si on note

$$Q(C) = C/C^+C^+$$

l'espace des indécomposables, alors d'après [H-1], lemme 8.3,

$$(Q(\psi))^* : H(Q(C_1), Q(d_1)) \longrightarrow H(Q(C_2), Q(d_2))$$

est un isomorphisme d'a.g.c., indépendant du choix de ψ .

I.6.(2) L'espace vectoriel gradué $H(Q(C_i), Q(d_i))$ est appelé l'espace de ψ -homotopie de A et noté

$$\pi_\psi(A)$$

I.6.(3) Dans le cas particulier où (A, d_A) est KS minimale si $A = L(X)$ alors

$$Q(A) \simeq X \quad Q(d_A) = 0$$

$$\pi_\psi^i(A) \simeq X^i, \quad i \geq 1$$

I.6.(4) Soit M un espace topologique pointé, cohomologiquement connexe ($H^0(M, \mathbb{k}) = \mathbb{k}$). On appelle ψ -homotopie de l'espace M , l'espace vectoriel gradué $\pi_\psi(A(M))$ où A désigne le foncteur de Sullivan (I.4.(1)). On note $\pi_\psi(M)$, cet espace.

I.6.(5) Lorsque $\dim \pi_\psi(A) < +\infty$, on définit la caractéristique d'Euler homotopique et le rang en posant

$$\chi_{\pi}(A) = \sum_{i \geq 1} (-1)^i \dim \pi_{\psi}^i(A) , \text{ rg}(A) = \dim \pi_{\psi}^{\text{imp}}(A)$$

Si $\dim \pi_{\psi}(M) < +\infty$, on pose

$$\chi_{\pi}(M) = \sum_{i \geq 1} (-1)^i \dim \pi_{\psi}^i(M) , \text{ rg}(M) = \dim \pi_{\psi}^{\text{imp}}(X) .$$

1.6.(6) Par définition, un espace topologique M est de type f si $\dim H(M, k) < +\infty$ et $\dim \pi_{\psi}(M) < +\infty$.

1-7 - ESPACES SIMPLES - ESPACES NILPOTENTS.

1.7.(1) Soit G un groupe, on définit G_i en posant

G_i est le sous groupe engendré par les éléments de la forme

$$g x g^{-1} x^{-1}$$

avec $g \in G$ et $x \in G_{i-1}$

$$G_0 = G .$$

On dit que G est un groupe nilpotent lorsque la suite

$$G \supset G_1 \supset \dots \supset G_p \supset \dots$$

s'annule pour un entier $p + 1$.

Supposons que $G_p \neq \{1\}$ et $G_{p+1} = \{1\}$, on obtient alors p extensions centrales

$$0 \longrightarrow G_i/G_{i+1} \longrightarrow G/G_{i+1} \longrightarrow G/G_i \longrightarrow 1$$

où les groupes G_i/G_{i+1} sont abéliens.

1.7.(2) Tout groupe abélien est nilpotent. Un groupe fini est nilpotent si et seulement si ses sous groupes maximaux sont distingués.

1.7.(3) Par définition, un espace topologique M , connexe, est un espace nilpotent $([H_i])$ si

- i) $\pi_1(M)$ est un groupe nilpotent
- ii) $\pi_n(M)$ est un $\pi_1(M)$ module nilpotent pour l'action naturelle de $\pi_1(M)$ sur $\pi_n(M)$, $n \geq 2$ (I.5.(2)).

1.7.(4) Tout espace simple (i.e. $\pi_1(M)$ abélien et opère trivialement sur $\pi_n(M)$) est un espace nilpotent. En particulier les espaces simplement connexes sont nilpotents.

1.7.(5) Puisque l'application antipodale de S^n est homotope à l'identité ssi n est impair, on vérifie directement que RP^n est un espace simple si n impair et que RP^n n'est pas nilpotent si n est pair, dans ce cas la suite centrale du $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -module $\pi_n(RP^n)$ est strictement décroissante

$$\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset \dots$$

La bouteille de Klein n'est pas un espace nilpotent.

1.7.(6) Le théorème fondamental de D. Sullivan s'énonce :
([S-2-] et [F]).

- i) Il existe une équivalence de catégorie entre la catégorie homotopique des espaces rationnels nilpotents et de cohomologie rationnelle de type fini et la catégorie homotopique des $\mathbb{Q}$ a.d.g.c. dont le modèle minimal est de type fini.

ii) Dans cette équivalence, pour tout $i \geq 2$,

$$\pi_{\psi}^i(M) \cong \text{Hom}(\pi_i(M), \mathbb{k})$$

et il existe sur $\pi_{\psi}^1(M)$, une filtration naturelle

$$0 = (\pi_{\psi}^1)_0 \subset (\pi_{\psi}^1)_1 \subset \dots \subset (\pi_{\psi}^1)_j \subset \dots \subset \pi_{\psi}^1$$

telle que si

$$G = \pi_1(M)$$

on ait pour chaque $j \geq 1$

$$(\pi_{\psi}^1)_j / (\pi_{\psi}^1)_{j-1} \cong \text{Hom}(G_j / G_{j+1}, \mathbb{k})$$

avec les notations de I.7.(1).

I.7.(7) Si M est un espace simple, alors

$$\pi_{\psi}^i(M) = \text{Hom}(\pi_i(M), \mathbb{k})$$

pour tout $i \geq 1$.

I-8 - SUITE EXACTE DE ψ -HOMOTOPIE.

I.8.(1) Soient une fibration rationnelle

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (\text{I.4.}(6))$$

et $((L(Z), d_B, \phi_B))$ un modèle KS de M . Du diagramme I.4.(8) et de la remarque I.4.(4), on déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 (A(M), d_M) & \xrightarrow{A(\pi)} & (A(E), d_E) & \xrightarrow{A(j)} & (A(F), d_F) \\
 \uparrow \psi_B & & \uparrow \psi & & \uparrow \psi_A \\
 (L(Z), d_B) & \xrightarrow{i} & (L(Z) \otimes L(X), d) & \xrightarrow{\rho} & (L(X), d_A)
 \end{array}$$

où ψ_B , ψ et ψ_A sont des quasi-isomorphismes.

$(L(Z) \otimes L(X), d)$ est un modèle KS nilpotent et en général non minimal de E .

En considérant, la suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte courte (I.6.(1)).

$$0 \longrightarrow (Q(L(Z)), Q(d_B)) \longrightarrow (Q(L(Z \otimes X)), Q(d)) \longrightarrow (Q(L(X)), Q(d_A)) \longrightarrow 0$$

on obtient la suite exacte de pseudo-homotopie de la fibration rationnelle

$[H-1-]$ et $[S-2-]$

$$\xrightarrow{\partial^\#} \pi_\psi^p(M) \xrightarrow{\pi^\#} \pi_\psi^p(E) \xrightarrow{j^\#} \pi_\psi^p(F) \xrightarrow{\partial^\#} \pi_\psi^{p+1}(M) \xrightarrow{\pi^\#}$$

I.8.(3) Lorsque les espaces M , E , F sont nilpotents la suite exacte de ψ -homotopie s'interprète comme "duale" de la suite exacte d'homotopie rationnelle de la fibration I.4.(6).

I.8.(4) On retrouve en particulier que

$$\chi_\pi(E) = \chi_\pi(M) + \chi_\pi(F)$$

pourvu que

$$\dim \pi_\psi(M) < +\infty \text{ et } \dim \pi_\psi(F) < +\infty.$$

I.8.(5) Si G est un groupe de Lie compact et H un sous groupe fermé, on obtient

$$\chi_{\pi}(G/H) = \operatorname{rg} G - \operatorname{rg} H .$$

CHAPITRE II

FIBRATIONS TOTALEMENT NON COHOMOLOGUES A ZERO (T.N.C.Z.).

II-1 - RAPPELS ET COMPLEMENTS.

II.1.(1) On considère la fibration de Serre

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (\text{I.4.(6)})$$

et on rappelle que suivant la terminologie de Samelson, Koszul et Serre, une telle fibration est dite totalement non cohomologue à zéro (T.N.C.Z.) relativement au corps $\mathbb{k}$ si l'homomorphisme

$$j^* : H^*(E, \mathbb{k}) \longrightarrow H^*(F, \mathbb{k})$$

est surjectif.

II.1.(2) Remarques :

1) Cette définition s'étend de façon évidente aux fibrations rationnelles.

2) La définition classique est donnée en homologie (i.e.)

$$j_* : H_*(F) \longrightarrow H_*(E)$$

injective.

II.1.(3) Proposition.-

Si $H^*(M, \mathbb{k})$ ou $H^*(F, \mathbb{k})$ sont de type fini.

a) Si la fibration de Serre I.4.6. est T.N.C.Z., alors c'est une fibration rationnelle.

b) Les propositions suivantes sont équivalentes

i) I.4.(6) est une fibration rationnelle T.N.C.Z.

ii) La suite spectrale de Serre collapse au niveau E_2 et $E_2 = H^*(B, \mathbb{k}) \otimes H^*(F, \mathbb{k})$.

iii) Il existe un isomorphisme d'e.v.g. rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^*(E, \mathbb{k}) & & \\
 & \nearrow \pi^* & & \nwarrow i^* & \\
 H^*(M, \mathbb{k}) & & & & H^*(F, \mathbb{k}) \\
 & \searrow i & & \nearrow p & \\
 & & H^*(M, \mathbb{k}) \otimes H^*(F, \mathbb{k}) & &
 \end{array}$$

$\uparrow f$

lorsque i et p désignent les applications canoniques.

II.1.(4) Corollaire.-

Si I.4.(6) est T.N.C.Z., $H^*(E, \mathbb{k})$ est un $H^*(M, \mathbb{k})$ module libre et π^* est injectif.

II.1.(5) Preuve :

a) De [Se] page 456, il résulte que si I.4.(6) est T.N.C.Z. alors $\pi_1(M)$ opère trivialement sur $H^*(F, \mathbb{k})$ et alors de I.5.(4) il résulte que I.4.(6) est une fibration rationnelle.

b) On a évidemment la suite d'implications

$$(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i)$$

II.1.(6) Remarques : Pour toute fibration rationnelle T.N.C.Z.

(I.4.(6)), si $H^*(M, \mathbb{k})$ et $H^*(F, \mathbb{k})$ sont de type fini alors $H^*(E, \mathbb{k})$ est de type fini et

$$f_{H^*(E)}(t) = f_{H^*(M)}(t) \cdot f_{H^*(F)}(t)$$

lorsque $f_{H^*(X)}(t)$ désigne la série de Poincaré de $H^*(X)$. Si

$H^*(M, \mathbb{k})$ et $H^*(F, \mathbb{k})$ sont de dimension finie alors $H^*(E, \mathbb{k})$ est de dimension finie et

$$\dim H^*(E, \mathbb{k}) = \dim H^*(M, \mathbb{k}) + \dim H^*(F, \mathbb{k})$$

II-2 - G-FIBRE T.N.C.Z.

II.2.(1) Proposition.-

Si F est un espace connexe tel que

$$H^{\text{imp}}(F, \mathbb{k}) = 0$$

et si

$$(*) \quad F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$$

est un fibré (localement trivial) de groupe structural G connexe et compact alors $(*)$ est T.N.C.Z.

II.2.(2) Corollaire.-

Tout fibré (localement trivial) de groupe structural G compact connexe et de fibre un espace connexe, de type f et de χ_{π} nul est T.N.C.Z.

II.2.(3) Exemples d'espaces de type f et de $\chi_\pi = 0$.

- Les espaces contractiles.
- S^{2n} , sphères de dimensions paires.
- $\tilde{G}(2p+q, 2p)$: grassmanniennes orientées des $2p$ -plans de $\mathbb{R}^{2p+q}$.
- $G_{\mathbb{C}}(n, k)$, (resp. $G_{\mathbb{H}}(n, k)$) grassmanniennes complexes (resp. quaternioniques) des k -plans complexes (resp. quaternioniques) de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{H}^n$).
- G/T où G est un groupe de Lie compact connexe et T un tore maximal.

- Les produits finis d'espaces de type f et de $\chi_\pi = 0$.

II.2.(4) Fibré de Borel.

Soit G un groupe de Lie compact connexe opérant sur un espace topologique connexe par arcs X . On considère le G -fibré universel

$$G \xrightarrow{j_0} E_G \xrightarrow{\pi_0} B_G$$

et le fibré associé de fibre type X

$$II.2.(5) \left\{ \begin{array}{l} X \xrightarrow{j} X_G \xrightarrow{\pi} B_G \\ X_G = E_G \times_G X \end{array} \right.$$

Le fibré (localement trivial) II.2.(5) est appelé le fibré de l'opération G sur X ou fibré de Borel.

II.2.(6) Remarques :

- 1) G opère trivialement sur X ssi le fibré de Borel est trivial.

2) Si X est tel que $H^{\text{imp}}(X, \mathbb{k}) = 0$ alors le fibré de Borel est T.N.C.Z.

3) Si X est de type f et de $\chi_\pi = 0$ alors le fibré de Borel est T.N.C.Z.

II.2.(7) Preuve de II.2.(1)

Considérons une application classifiante f du fibré $(*)$, d'où le diagramme,

$$\begin{array}{ccc} F & \xlongequal{\quad} & F \\ j \downarrow & & \downarrow j_o \\ E & \xrightarrow{\quad} & E_G \times_G F = F_G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_o \\ M & \xrightarrow{\quad f \quad} & B_G \end{array}$$

Il est clair qu'une condition suffisante pour que j^* soit surjectif est que j_o^* soit surjectif.

Comme B_G est simplement connexe (G supposé connexe) le terme E_2 de la suite spectrale de la fibration

$$F \xrightarrow{j_o} E_G \times_G F \xrightarrow{\pi_o} B_G$$

est isomorphe à

$$H^*(B_G, \mathbb{k}) \otimes H^*(F, \mathbb{k})$$

Comme

$$H^{\text{imp}}(B_G, \mathbb{k}) = 0$$

$$H^{\text{imp}}(F, \mathbb{k}) = 0$$

on a $E_2^{p,q} = 0$ si p ou q impair et par suite $d_2 \equiv 0$. Une induction sur r termine la démonstration (cf. II.1.(3) (b)).

II.2.(8) Preuve de II.2.(2)

Ceci résulte directement d'un théorème de S. Halperin rappelé en III.1.(6) et de II.2.(1).

II-3 - SUITE SPECTRALE D'EILENBERG-MOORE.

II.3.(1) Supposons que la base de la fibration rationnelle I.4.(6) soit simplement connexe, notons $f: M' \rightarrow M$ une application continue et

$$F' \xrightarrow{j'} E' \xrightarrow{\pi'} M'$$

la fibration image réciproque de I.4.(6) par f .

Par définition $[Sm]$, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du "diagramme image réciproque", vérifie

$$\begin{cases} E_2^{-p,q} = \text{Tor}_{H^*(M, \mathbb{k})}^{-p,q} (H^*(M', \mathbb{k}), H^*(E, \mathbb{k})) , & p, q \geq 0 \\ E_r \implies H^*(E', \mathbb{k}) \end{cases}$$

En particulier si $M' = \{\text{pt}\}$

$$\begin{cases} E_2^{-p,q} = \text{Tor}_{H^*(M, \mathbb{k})}^{-p,q} (\mathbb{k}, H^*(E, \mathbb{k})) , & p, q \geq 0 \\ E_r \implies H^*(F, \mathbb{k}) \end{cases}$$

II.3.(3) Proposition. - M est supposée simplement connexe.

Si la fibration I.4.(6) est T.N.C.Z. et si $H^*(M, \mathbb{k})$ ou $H^*(F, \mathbb{k})$ est de type fini alors le morphisme naturel

$$H^*(M', \mathbb{k}) \otimes_{H^*(M, \mathbb{k})} H^*(E, \mathbb{k}) \longrightarrow H(E', \mathbb{k})$$

est un isomorphisme d'algèbre.

En particulier, les algèbres

$$H^*(F, \mathbb{k}) \text{ et } \mathbb{k} \otimes_{H^*(M, \mathbb{k})} H^*(E, \mathbb{k})$$

sont isomorphes.

II.3.(4) Preuve : D'après II.1.(3) iii) $H^*(E, \mathbb{k})$ est un $H^*(M, \mathbb{k})$ module libre, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_{H^*(M, \mathbb{k})}^{0, *}(H^*(M', \mathbb{k}), H^*(E, \mathbb{k})) &= H^*(M', \mathbb{k}) \otimes_{H^*(M, \mathbb{k})} H^*(E, \mathbb{k}) \\ &\simeq H^*(M', \mathbb{k}) \otimes H^*(F, \mathbb{k}) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Tor}_{H^*(M, \mathbb{k})}^{-p, *}(H^*(M', \mathbb{k}), H^*(E, \mathbb{k})) = 0, \text{ si } p > 0$$

Le support de la suite spectrale d'E.M. est réduit à l'axe des $q \geq 0$, donc la suite spectrale dégénère au niveau E_2 et les algèbres

$$H^*(E, \mathbb{k}) \text{ et } H^*(M') \otimes_{H(M)} H^*(E)$$

sont isomorphes.

II.3.(5) En particulier si $H^*(E, \mathbb{k})$ est isomorphe à $H^*(M, \mathbb{k}) \otimes H^*(F, \mathbb{k})$ en tant qu'algèbre (cf. fibration cohomologiquement triviale) alors $H^*(E', \mathbb{k})$ est isomorphe en tant qu'algèbre à $H^*(M', \mathbb{k}) \otimes H^*(F, \mathbb{k})$. Ceci sera redémontré, plus généralement dans VI.3.(1).

CHAPITRE III

FIBRATIONS RATIONNELLES PURES (F.R.P.).

III-1 - KS-EXTENSIONS PURES.

III.1.(1) Nous dirons que la KS-extension E (cf. I.2.(1)) est pure s'il existe une structure KS de E , (X,f) telle que

$$dQ = 0$$

$$dP \subset B \otimes S(Q)$$

avec les notations de I.1.(10).

Le couple (X,f) est alors appelé une structure pure.

III.1.(2) Remarque : S'il existe une structure pure, les autres structures ne sont pas forcément pures.

Par exemple, considérons la KS extension minimale E ;

$$E : (\Lambda b, 0) \xrightarrow{l} (\Lambda b \otimes L(y_1, y_2, x_1, x_2), d) \xrightarrow{\rho} (L(y_1, y_2, x_1, x_2), d_A)$$

$$\text{où } |y_1| = 2, |y_2| = 4, |x_1| = 3, |x_2| = 7, |b| = 1$$

$$db = 0$$

$$dx_1 = y_1^2, \quad dx_2 = y_2^2 + 2b x_1 y_2$$

$$dy_1 = 0, \quad dy_2 = b y_1^2$$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad d_A x_1 &= y_1^2 & d_A x_2 &= y_2^2 \\ d_A y_1 &= 0 & d_A y_2 &= 0 \end{aligned}$$

En remarquant que

$$dx_2 = (y_2 + bx_1)^2$$

on définit un homomorphisme d'a.g.c.

$$g : \Lambda b \otimes L(y_1, y_2, x_1, x_2) \longrightarrow \Lambda b \otimes L(y_1, y_2, x_1, x_2)$$

en posant

$$g(b) = b$$

$$g(y_1) = y_1 \quad g(y_2) = y_2 + b x_1$$

$$g(x_1) = x_1 \quad g(x_2) = x_2$$

Or

$$g = \text{Id} - \Psi$$

où

$$\Psi(b) = \Psi(y_1) = \Psi(x_1) = \Psi(x_2) = 0$$

$$\Psi(y_2) = bx_1$$

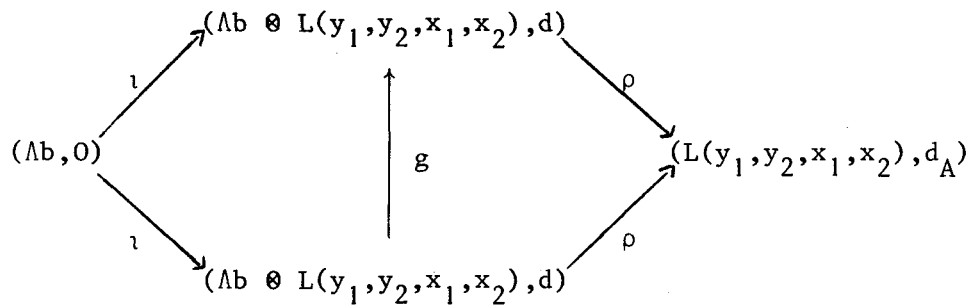
c'est-à-dire que $\Psi^2 = 0$ et

$$g^{-1} = \text{Id} + \Psi$$

ce qui prouve que g est un isomorphisme. En posant :

$$d' = g^{-1} \circ d \circ g$$

g devient un isomorphisme d'a.d.g.c. qui rend commutatif le diagramme suivant :



et on vérifie que

$$\begin{aligned} d'b &= 0 \\ d'x_1 &= y_1^2 & d'x_2 &= y_2^2 \\ d'y_1 &= 0 & d'y_2 &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que E est une extension pure.

III.1.(3) En particulier, lorsque $(B, d_B) = (k, 0)$, on retrouve la notion d'algèbre pure introduite par S. Halperin dans [H-3-] : A est une a.d.g.c. pure si,

$$\begin{aligned} A &= L(X) = \Lambda P \otimes SQ \\ d_A P &\subset SQ \\ d_A Q &= 0 \end{aligned}$$

III.1.(4) Sur une algèbre libre quelconque

$$A = L(X) = \Lambda P \otimes SQ$$

nous distinguerons deux graduations.

La graduation supérieure $A = \bigoplus_{p \geq 0} A^p$ induite par la graduation de X .

La graduation inférieure $A = \bigoplus_{q \geq 0} A_q$ où l'on pose

$$A_q = \Lambda^q P \otimes SQ$$

Exemple : $A_0 = S(Q)$, $A_1 = P \otimes SQ$

$\mathbb{Z}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ne pas confondre} \\ \Lambda^q P \text{ et } (\Lambda P)^q \end{array} \right.$

III.1.(5) Lorsque (A, d_A) est pure, la différentielle d_A est de degré -1 pour la graduation inférieure, ce qui permet de définir le p-ième groupe d'homologie

$$H_p(A, d_A)$$

du complexe de chaînes

$$\dots \longrightarrow A_{p+1} \longrightarrow A_p \longrightarrow A_{p-1} \longrightarrow \dots$$

En particulier,

$$H_0(A, d_A) = SQ / d_A P.SQ$$

III.1.(6) Proposition ([H-3-] Th. 1)

Soit (A, d_A) une a.d.g.c. connexe, de type f et minimale, alors

A) Pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ KS minimale et tout $p \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{|e_i|} \leq 0$$

en particulier, $\chi_\pi(A) \leq 0$.

B) Si $\chi_\pi(A) = 0$, alors (A, d_A) est pure et

$$H(A, d_A) = H_0(A, d_A) = S(Q) / d_A P.SQ$$

C) $(H^{\text{imp}}(A, d_A) = 0) \iff (\chi_\pi(A) = 0) \iff (H_+(A, d_A) = 0)$

III.1.(7) Les a.d.g.c. pures munies de leur graduation inférieure sont des complexes de Koszul. On rappelle qu'un complexe de Koszul est un complexe de chaînes (C_*, d) défini par

$$C_i = A \otimes \Lambda^i(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

où A est une a.g.c. connexe et la différentielle est définie par

$$d(a \otimes 1) = 0$$

$$d(1 \otimes x_i) = f_i \otimes 1$$

où f_i est un élément de A de degré pair et d de degré inférieur -1 .

III.1.(8) Une suite $(f_i)_i$ est régulière si

f_1 n'est pas diviseur de zéro dans A

f_2 n'est pas diviseur de zéro dans $A/f_1 A$

f_n n'est pas diviseur de zéro dans $A/(f_1 \dots f_{n-1})A$

III.1.(9) Le théorème suivant rassemble des résultats de Koszul [K]

Les propositions suivantes sont équivalentes

i) $H_*(A \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_n, \dots), d) = A/(f_1 \dots f_n \dots)A$

ii) La suite $(f_1, \dots, f_n, \dots)$ est régulière.

iii) A est un $k[f_1, \dots, f_n, \dots]$ module libre.

III.1.(10) Ce résultat entraîne en particulier que les f_i sont algébriquement indépendants dans A et que toute suite $(f_{\pi(1)}, \dots, f_{\pi(n)}, \dots)$ déduite de la suite $(f_1, \dots, f_n, \dots)$ par permutation est aussi régulière.

III.1.(11) Proposition.- Si E est une KS extension pure
et

$$m : (B', d_{B'}) \longrightarrow (B, d_B)$$

un quasi isomorphisme, alors la KS extension image réciproque
 $E' = m^{-1}(E)$ est aussi une KS extension pure.

III.1.(12) Preuve : Posons

$$E : (B, d_B) \xrightarrow{1} (B \otimes L(X), d) \xrightarrow{\rho} (L(X), d_A)$$

et considérons une base KS de E , $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ telle que

$$\begin{aligned} d e_\alpha &= 0 & , & \text{ si } |e_\alpha| \text{ pair} \\ d e_\alpha &\in B \otimes S(Q_{<\alpha}) & , & \text{ si } |e_\alpha| \text{ impair.} \end{aligned}$$

Construisons E' et un quasi isomorphisme ψ tels que
 (m, ψ, Id) soit un homomorphisme de KS extension.

On procède par récurrence sur α .

On pose

$$\psi|_{B'} = m \quad d'|_{B'} = d_{B'}$$

Supposons avoir construit ψ et d' dans $B \otimes L(X_{<\alpha})$
tels que

- i) $d' e_\beta = 0$ si $|e_\beta|$ pair
 $d' e_\beta \in B' \otimes S(Q_{<\beta})$ si $|e_\beta|$ impair
- ii) $\psi(1 \otimes e_\beta) - 1 \otimes e_\beta \in B'^+ \otimes L(X_{<\alpha})$ si $|e_\beta|$ impair
 $\psi(1 \otimes e_\beta) = 1 \otimes e_\beta$ si $|e_\beta|$ pair

lorsque B'^+ désigne l'idéal d'augmentation de B' . De ii) nous déduisons que

$$\psi^* : H(B' \otimes L(X_{<\alpha})) \longrightarrow H(B \otimes L(X_{<\alpha}))$$

est un isomorphisme. On applique pour cela les théorèmes d'isomorphismes de [H-1-] au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (B' \otimes S(Q_{<\alpha}), d_B \otimes 1) & \xrightarrow{i'} & (B' \otimes L(X_{<\alpha}), d') & \xrightarrow{r'} & (\Lambda P_{<\alpha}, 0) \\ \downarrow m^* \otimes \text{Id} & & \downarrow \psi & & \parallel \\ (B \otimes S(Q_{<\alpha}), d_B \otimes 1) & \xrightarrow{i} & (B \otimes L(X_{<\alpha}), d) & \xrightarrow{r} & (\Lambda P_{<\alpha}, 0) \end{array}$$

Si $e_\alpha \in Q$ on pose $d'e_\alpha = 0$ $\psi(e_\alpha) = e_\alpha$

Si $e_\alpha \in P$, puisque

$$de_\alpha \in B \otimes S(Q_{<\alpha}) \cap \ker d$$

$$(d_B \otimes 1)(de_\alpha) = 0 \text{ et il existe } \phi_\alpha \in (B' \otimes S(Q_{<\alpha})) \cap \ker(d_B \otimes 1)$$

$$\text{tel que } (m \otimes \text{Id})^*([\phi_\alpha]) = de_\alpha$$

$$\text{d'où la relation } \psi(\phi_\alpha) = de_\alpha + d\Omega_\alpha$$

$$\text{avec } \Omega_\alpha \in B \otimes L(X_{<\alpha}).$$

On voit que nécessairement $\Omega_\alpha \in (B \otimes S Q_{<\alpha})^+ \otimes \Lambda^{\leq 1} P_{<\alpha}$
et donc on peut supposer que

$$\Omega_\alpha \in (B \otimes S(Q_{<\alpha}))^+ \otimes \Lambda^1(P_{<\alpha})$$

On pose alors

$$d'(1 \otimes e_\alpha) = \phi_\alpha - d'(1 \otimes \rho(\Omega_\alpha)) \in B \otimes S(Q_{<\alpha})$$

$$\psi(1 \otimes e_\alpha) = 1 \otimes e_\alpha - \Omega_\alpha + 1 \otimes \rho(\Omega_\alpha)$$

et on vérifie que ψ s'étend en un homomorphisme d'a.d.g.c. possédant les propriétés voulues.

III-2 - FIBRATIONS RATIONNELLES PURES.

III.2.(1) Par définition, une fibration rationnelle

$$I.4.(6) : F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$$

est dite pure, si elle admet un KS modèle minimal (E, ξ) où la KS extension E est pure.

III.2.(2) Exemples :

1) Si G est un groupe de Lie connexe, H un sous-groupe fermé de G , le fibré, de fibre G/H associé à un G fibré principal (lorsque G opère par translation à gauche sur G/H) est une fibration rationnelle pure (cf. appendice A).

En particulier tous les G fibrés principaux sont des fibrations rationnelles pures.

2) Un espace topologique est dit pur s'il admet un modèle KS minimal pur. Tout fibré trivial, de fibre un espace pur est une fibration pure. La fibre d'une fibration rationnelle pure est nécessairement un espace pur.

3) La pureté de la fibre, n'entraîne pas celle de la fibration.

Considérons la fibration

$$(*) \quad T^2 \xrightarrow{j} P_2 \xrightarrow{\pi} T^2$$

définie de la manière suivante : π_1 est un S^1 fibré principal défini par

$$\begin{array}{ccc} P_1 & & \\ \pi_1 \downarrow & & \\ T^2 & \xrightarrow{f_1} & BS^1 \end{array}$$

$$f_1^* : H(BS^1, \mathbb{Z}) \longrightarrow H(T^2, \mathbb{Z}) \simeq H(S^1, \mathbb{Z}) \otimes H(S^1, \mathbb{Z})$$

$$f_1^*(e) = [b_1] \cdot [b'_1]$$

Alors P_1 admet pour modèle

$$(\Lambda(b_1, b'_1), 0) \longrightarrow (\Lambda(b_1, b'_1) \otimes \Lambda(x_1, d) \longrightarrow (\Lambda x_1, 0)$$

avec

$$dx_1 = b_1 b'_1.$$

On considère alors le fibré principal de base P_1 défini par

$$\begin{array}{ccc} P_2 & & \\ \pi_2 \downarrow & & \\ P_1 & \xrightarrow{f_2} & BS^1 \end{array}$$

tel que $f_2^*(e) = x_1 b_1 :$

Finalement on pose $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, d'où la fibration (*) de fibre T^2 .

T^2 est un espace pur, mais (*) n'est pas une fibration pure (par suite non associée à une fibration principale) puisque le modèle KS minimal de (*) est de la forme

$$(\Lambda(b_1, b'_1), 0) \longrightarrow (\Lambda(b_1, b'_1) \otimes \Lambda(x_1, x'_1), d) \longrightarrow (\Lambda(x_1, x'_1), 0)$$

avec $dx = b_1 b'_1$, $dx_2 = b_1 x_1$, $db_1 = db_2 = 0$.

4) Les deux théorèmes de la section suivante fournissent, en particulier, d'autres exemples de fibrations pures.

III.2.(3) Remarques :

1) La notion de pureté d'une fibration est un invariant en homotopie rationnelle.

2) Si une fibration I.4.(6) est pure nous avons en particulier les conséquences suivantes pour les invariants classiques :

a) La cohomologie paire de la fibre est sphériquement engendrée.

b) La transgression de tout générateur d'homotopie de la fibre, en degré pair est nulle

c) La suite exacte longue de Ψ -homotopie se scinde en suites exactes ($n \geq 1$).

$$0 \leftarrow \pi_{\Psi}^{2n}(F) \xleftarrow{j^{\#}} \pi_{\Psi}^{2n}(E) \xleftarrow{\pi^{\#}} \pi_{\Psi}^{2n}(M) \xleftarrow{\partial^{\#}} \pi_{\Psi}^{2n-1}(F) \xleftarrow{j^{\#}} \pi_{\Psi}^{2n-1}(E) \xleftarrow{\pi^{\#}} \pi_{\Psi}^{2n-1}(M) \leftarrow 0$$

D'où on déduit, si E, F, M sont des espaces nilpotents dont la cohomologie est de type fini, que

$$\text{rg}(\pi_{2n}(F)) \leq \text{rg}(\pi_{2n}(E)) \quad , \quad n \geq 1$$

$$\text{rg}(\pi_{2n+1}(M)) \leq \text{rg}(\pi_{2n+1}(E)) \quad , \quad n \geq 1$$

3) Les fibrations pures semblent être le cadre naturel, pour l'étude de l'homotopie rationnelle des fibrés en espaces homogènes, associés à un fibré principal. Il existe des fibrations pures qui ne sont pas de ce type. (cf. les différents exemples des sections suivantes).

III-3 - DEUX THEOREMES ET UNE CONJECTURE.

III.3.(1) Théorème.-

Etant donné une fibration rationnelle

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (\text{I.4.}(6))$$

dont la fibre est de type f et de $\chi_{\pi} = 0$ alors les propositions suivantes sont équivalentes

- i) I.4.(6) est T.N.C.Z.,
- ii) I.4.(6) est pure.

III.3.(2) Théorème.-

Toute fibration rationnelle

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (\text{I.4.}(6))$$

dont la fibre est de type f , de rang ≤ 2 et de $\chi_{\pi} = 0$ est pure (et par suite T.N.C.Z.).

III.3.(3) Remarques :

1) Des exemples d'espaces de $\chi_\pi = 0$ et de type f sont donnés en II.2.(3).

2) Le premier théorème nous permet de mettre en évidence une propriété homotopique i.e. la pureté de la fibration, à partir d'une propriété cohomologique de cette fibration.

3) Le deuxième théorème est un cas particulier d'une conjecture énoncée par S. Halperin :

III.3.(4) Conjecture.- Toute fibration rationnelle

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (I.4.(6))$$

dont la fibre est de type f et de $\chi_\pi = 0$ est T.N.C.Z.

III.3.(5) Le premier théorème donne une forme équivalente de cette conjecture. Le deuxième théorème montre que la conjecture est vraie si on ajoute l'hypothèse $\text{rg}(F) \leq 2$, par exemple si F est l'un des espaces suivants (liste non exhaustive)

$$- S^{2n}, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n, S^{2n} \times \mathbb{C}P^h, S^{2n} \times S^{2p}, \dots$$

$$- SO(4)/SO(2) \times SO(2), \quad SO(4)/U(2)$$

$$- SO(5)/SO(1) \times SO(3), \quad U(2)/U(1) \times U(1)$$

$$- Sp(2)/Sp(1) \times Sp(1), \quad Sp(2)/U(2), \dots$$

III.3.(6) La démonstration très technique de ces deux résultats est reportée aux chapitres IV et V.

III.3.(7) L'hypothèse $\chi_\pi(F) = 0$ est nécessaire,

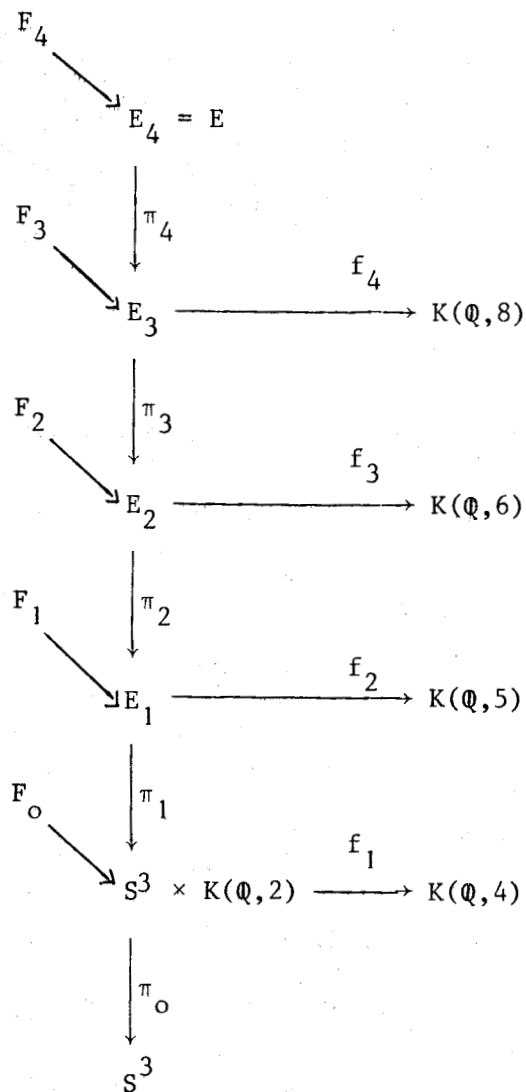
a) Considérons en effet la fibration rationnelle

$$(*) \quad F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} S^3$$

avec $F = (S^2 \vee S^4)_7 \cup e^7$

où $(S^2 \vee S^4)_7$ désigne le 7-ème étage de la tour de Posnikov de $S^2 \vee S^4$ et $\varphi = [S^4, [S^2, S^2]] - [S^2[S^2, S^4]]$.

(*) est définie comme la composée de cinq fibrations principales, de la manière suivante ($\pi = \pi_0 \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_4$)



$$H(K(Q, i), \mathbb{K}) = L(\xi_i)$$

$$H(S^3, \mathbb{Q}) = \Lambda(b_3)$$

$$H(F_0, \mathbb{Q}) = S(y_2)$$

$$f_1^*(\xi_4) = y_2^2$$

$$H(F_1, \mathbb{Q}) = \Lambda(x_3)$$

$$f_2^*(\xi_5) = b_3 y_2$$

$$H(F_2, \mathbb{Q}) = S(y_4)$$

$$f_3^*(\xi_6) = [y_2 y_4 + b_3 x_3]$$

$$H(F_3, \mathbb{Q}) = \Lambda(x_5)$$

$$f_4^*(\xi_8) = [y_4^2 + 2 b_3 x_5]$$

$$H(F_4, \mathbb{Q}) = \Lambda(x_7)$$

Alors (*) a pour modèle KS minimal

$$E : (\Lambda b_3, 0) \longrightarrow (\Lambda b_3 \otimes L(y_2, y_4, x_3, x_4, x_2), d) \longrightarrow (L(y_i, x_j), d_A)$$

avec $db_3 = 0$

$$dy_2 = 0 \quad dy_4 = b_3 y_2$$

$$dx_3 = y_2^2, \quad dx_5 = y_2 y_4 + b_3 x_3, \quad dx_7 = y_4^2 + 2 b_3 x_5.$$

On vérifie que

a) $\chi_\pi(F) = -1$

b) F de type f

c) $H^4(E, \mathbb{k}) = 0$.

La dernière condition entraîne que (*) n'est ni une fibration pure, ni T.N.C.Z.

b) Dans cet exemple $\chi_\pi(F) = -1$ et F n'est pas un espace pur. Or on sait que

$$(\chi_\pi = 0 + \text{type } f) \implies (\text{espace pur}).$$

L'exemple III.2.(2)-3-, montre que l'hypothèse

espace pur + type f

n'est pas suffisante pour montrer les théorèmes ou la conjecture.

III.3.(8) L'hypothèse "type f" est nécessaire.

Considérons un espace de rang nul M simplement connexe
alors $\Omega(M)$ est aussi un espace de rang nul, mais rarement de type
 f , puisque sa cohomologie est libre. Il est clair que si $M \neq \text{pt}$,
la fibration canonique

$$M \longleftarrow PM \longleftarrow \Omega(M)$$

n'est pas T.N.C.Z., ni pure.

III.4. - APPLICATION DU THEOREME III.3.(1), AU FIBRE DE BOREL.

III.4.(1) On reprend les notations de II.2.(4), puisque
 G est un groupe de Lie compact connexe,

$$H^*(B_G, \mathbb{k}) = S(Z)$$

où Z est un espace vectoriel de dimension finie et gradué uniquement
en degré pair

$(S(Z), 0)$ est le modèle minimal de B_G .

Comme en I.8.(2) on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (A(B_G), d_{B_G}) & \xrightarrow{A(\pi)} & (A(X_G), d_{X_G}) & \xrightarrow{A(j)} & (A(X), d_X) \\ \uparrow \varphi' & & \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi_A \\ (S(Z), 0) & \xrightarrow{l} & (S(Z) \otimes A, d) & \xrightarrow{\rho} & (A, d_A) \end{array}$$

où ψ' , ψ , ψ_A sont des quasi-isomorphismes

$$A = \Lambda P \otimes SQ$$

III.4.(2) Si l'on suppose que X est connexe par arcs, de type F et que $\chi_\pi(X) = 0$ (i.e. $\dim P = \dim Q$) alors de II.2.(2) et III.3.(1), il résulte que le fibré de Borel,

$$X \xrightarrow{j} X_G \xrightarrow{\pi} B_G$$

est une fibration rationnelle pure. Cette propriété sert de point de départ pour établir le résultat plus précis :

III.4.(3) Théorème.-

Soient X un espace connexe par arcs, de type f tel que $\chi_\pi(X) = 0$ et G un groupe de Lie compact connexe opérant sur X , alors

a) Il existe une suite régulière $(g_1, \dots, g_n)$ de $S(Z \otimes Q)$ telle que

$$H(X_G, k) = S(Z \otimes Q) / (g_1, \dots, g_n)$$

b) L'espace X_G est intrinsèquement formel.

III.4.(4) Corollaire.-

a) $\text{Krull dim } H^*(X_G, k) = \text{profondeur de } H^*(X_G, k) = \text{rg } G$.

b) Il est sans espoir d'obtenir une amélioration des résultats de Borel, grâce au type d'homotopie rationnelle de X_G .

III.4.(5) L'a.d.g.c. $(S(Z \otimes Q) \otimes \Lambda P, d)$ avec $dx_i = g_i$ est un KS modèle pur de X_G , qui en général n'est pas minimal, comme on le voit en considérant l'opération de S^3 (par translation à gauche) sur $S^3/S^1 = X \simeq S^2$.

Dans ce cas ,

$$(S(Z \otimes Q) \otimes \Lambda P, d) = (S(z, y) \otimes \Lambda(x), d)$$

avec
$$dx = y^2 + z$$

est un KS modèle pur (non minimal !) de $X_G = B_{S^1}$.

III.4.(6) Démonstration de III.4.(3) :

a) Comme on l'a déjà remarqué en III.4.(2), on peut supposer que la KS extension

$$E : (S(Z), 0) \xrightarrow{l} (S(Z) \otimes (SQ \otimes \Lambda P), d) \xrightarrow{\rho} (SQ \otimes \Lambda P, d_A)$$

est pure et puisque la différentielle sur la base est nulle, l'a.d.g.c. libre $(S(Z \otimes Q) \otimes \Lambda P, d)$ est aussi pure. Ceci nous permet de considérer la graduation inférieure (III.1.(4)) sur les groupes d'homologie :

$$H(S(Z \otimes Q) \otimes \Lambda P, d) = \bigoplus_{i \geq 0} H_i(S(Z \otimes Q) \otimes \Lambda P, d)$$

Vérifions que

$$H_+(S(Z \otimes Q) \otimes \Lambda P, d) = 0 ,$$

pour cela on considère l'espace vectoriel $\bar{Z}$ tel que

$$(\bar{Z})^{n-1} \simeq Z^n$$

$$\bar{z} \in \bar{Z} \quad |\bar{z}| = |z| - 1$$

et l'a.d.g.c.

$$(S(Z \oplus Q) \otimes \Lambda(\bar{Z} \oplus P), D)$$

avec
$$D|_{S(Z \oplus Q) \otimes \Lambda P} = d$$

$$D(\bar{z}) = z, \quad \forall \bar{z} \in \bar{Z}$$

Il est clair que

$$H_+(S(Z \oplus Q) \otimes \Lambda(\bar{Z} \oplus P), D) = H_+(S(Q) \otimes \Lambda P, d_A)$$

ce qui d'après III.1.(6)-B, entraîne que

$$H_+(S(Z \oplus Q) \otimes \Lambda(\bar{Z} \oplus P), D) = 0$$

alors d'après le lemme 2 de [H-3], ceci entraîne que

$$H_+(S(Z \oplus Q) \otimes \Lambda P, d) = 0$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} H(S(Z \oplus Q) \otimes \Lambda P, d) &= H_0(S(Z \oplus Q) \otimes \Lambda P, d) \\ &= S(Z \oplus Q) \otimes \Lambda P / (g_1, \dots, g_n) \end{aligned}$$

où l'on pose
$$dx_i = g_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$(x_i)_{i=1, \dots, n} \quad \text{base homogène de } P.$$

Il résulte alors du théorème III.1.(9) que la suite $(g_1, \dots, g_n)$ est régulière dans $S(Z \oplus Q)$.

b) L'a.d.g.c. libre

$$(S(Z \oplus Q) \otimes \Lambda P, d)$$

est d'après ce qui précède, un modèle (non minimal) et bigradué de $(H^*(X_G, \mathbb{k}), 0)$ (cf. [H-S]).

La bigraduation est donnée par

$$Y_0 = \bigoplus_{n \geq 0} Y_0^n = \bigoplus_{n \geq 0} (Z^n \oplus Q^n)$$

$$Y_1 = \bigoplus_{n \geq 0} Y_1^n = \bigoplus_{n \geq 0} P^n$$

En rendant $(S(Y_0) \otimes \Lambda(Y_1), d)$ minimal ; (i.e. en divisant par une sous a.d.g.c. contractile) on obtient alors le modèle bigradué de X_G .

$$(S(\hat{Y}_0) \otimes \Lambda(\hat{Y}_1), \hat{d})$$

qui est "two stage", par suite il ne peut y avoir de déformations de la différentielle $\hat{d}$, de la forme

$$D = \hat{d} + d_2 + d_3 + \dots$$

où d_i baisse la graduation inférieure d'exactly i -unités. Ceci entraîne qu'il n'existe qu'un seul type d'homotopie rationnelle réalisant $H^*(X_G, \mathbb{Q})$, c'est-à-dire que X_G est intrinsèquement formel.

III.4.(7) Preuve de III.4.(4)

$S(Z \oplus Q)$ est un anneau de polynômes sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique 0 et $(g_1, \dots, g_n)$ est une suite régulière. On déduit ([Mat.] chap. 6) que $H^*(X_G, \mathbb{k})$ est un anneau de Cohen Macaulay et que

$$\begin{aligned} \text{Krull dim } H^*(X_G, \mathbb{k}) &= \text{Krull dim } S(Z \oplus Q) - n \\ &= \dim Z \\ &= \text{rg } G. \end{aligned}$$

III-5 - CONSEQUENCES DU THEOREME III.3.(2).

III.5.(1) Proposition.-

F désignant un espace connexe par arcs, non contractile, de type f, de $\chi_\pi = 0$ et de rang ≤ 2 , il n'existe pas de fibration de Serre

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (\text{I.4.(6)})$$

si

- i) $H^{\text{pair}}(E, \mathbb{k}) = 0$.
- ii) E est un groupe de Lie connexe.
- iii) $E = S_{\mathbb{Q}}^{2n}$ (sauf si $F \sim S_{\mathbb{Q}}^{2n}$),

III.5.(2) Proposition.-

F désignant un espace connexe par arc, de type f, de $\chi_\pi = 0$ et de rang ≤ 2 , alors pour toute fibration de Serre

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (\text{I.4.(6)})$$

on a

$$\text{rg } \pi_2(E) = \text{rg } \pi_2(M) + \text{rg } \pi_2(F) .$$

III,5.3. La proposition III.5.(1) améliore en particulier des résultats de [B-S] et [H-2] sur "l'impossibilité de fibrer $\mathbb{R}^n$ ou S^n ..." , car nous n'utilisons pas l'hypothèse $\dim H(M) < +\infty$.

III,5.4. Preuve des propositions :

F vérifiant les hypothèses du théorème III.3.(2), la fibration I,4,(6) est pure.

a) En particulier, $H^{\text{pair}}(F) \neq 0$ et $H^{\text{pair}}(E) = 0$ est impossible, puisque d'après III.3.(1) j^* est surjective d'où (i).

b) En utilisant la remarque III.2.(3)-2c- on a nécessairement

$$\forall n \geq 1, \quad \text{rg}(\pi_{2n}(F)) \leq \text{rg}(\pi_{2n}(E))$$

ce qui est impossible puisque si F non contractile il existe des n pour lesquels $\text{rg} \pi_{2n}(F) \neq 0$ tandis que $\text{rg} \pi_{2n}(E) = 0$ pour tout n d'où (ii).

c) Considérons une fibration rationnelle pure

$$(*) \quad F \xrightarrow{j} S^{2n} \xrightarrow{\pi} M$$

Il existe un modèle de (*) de la forme

$$(B, d_B) \longrightarrow (B \otimes L(X), d) \longrightarrow (L(X), d_A)$$

$$\text{avec} \quad L(X) = \Lambda P \otimes SQ, \quad dQ = 0 \quad dP \subset B \otimes SQ.$$

La condition

$$H(B \otimes L(X), d) = H^*(S^{2n}, \mathbb{k})$$

entraîne alors que

$$\dim Q = 1$$

Posons

$$Q = \mathbb{k}y \quad P = \mathbb{k}x$$

$$\text{alors} \quad dy = 0 \quad dx = y^p + b_1 y^{p-1} + \dots + b_p$$

$$\text{Or} \quad j^* : H^*(S^{2n}, \mathbb{k}) \longrightarrow H(F, \mathbb{k}) = S(y) / (y^p)$$

est surjective, on a nécessairement $p = 2$, d'où iii).

d) F est un espace pur de type f , donc d'après III.1.(6)A, F admet un modèle minimal

$$\begin{array}{c} L(e_1, e_2, e_3, e_4) \\ \text{tel que} \quad \sum_{i=1}^4 (-1)^{|e_i|} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=2}^4 (-1)^{|e_i|} \leq 0 \end{array}$$

ceci entraîne que

$$2 \leq |e_1| \leq |e_2| \leq |e_3| \leq |e_4|$$

$$\text{donc que} \quad \pi_{\psi}^1(F) = 0.$$

De la remarque III.2.(3)-2c il résulte que la suite

$$0 \longrightarrow \pi_{\psi}^2(M) \longrightarrow \pi_{\psi}^2(E) \longrightarrow \pi_{\psi}^2(F) \longrightarrow 0$$

est exacte, d'où la proposition III.5.(2).

CHAPITRE IV

DEMONSTRATION DU THEOREME III.3.(1)

IV-1 - VERSION ALGEBRIQUE DU THEOREME III.3.(1).

IV.1.(1) De la définition d'une KS extension pure, de III.1.(11) et de la remarque I.2.(5) en utilisant la connexité de M , il résulte que le théorème III.3.(1) est équivalent à

IV.1.(2) Théorème.-

Soit E une KS extension minimale

$$E : (B, d_B) \xrightarrow{l_C} (C, d_C) \xrightarrow{\rho_C} (A, d_A)$$

de base B connexe et de fibre A de type f et de $\chi_\pi = 0$

alors les propositions suivantes sont équivalentes

- i) ρ_C^* surjective ;
- ii) E est pure.

IV.1.(3) Dans tout ce chapitre, B est supposée connexe et $A \neq \mathbb{k}$. Nous allons établir ce théorème en montrant successivement les implications : $P_3 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3$

$P_1)$ ρ_C^* surjective

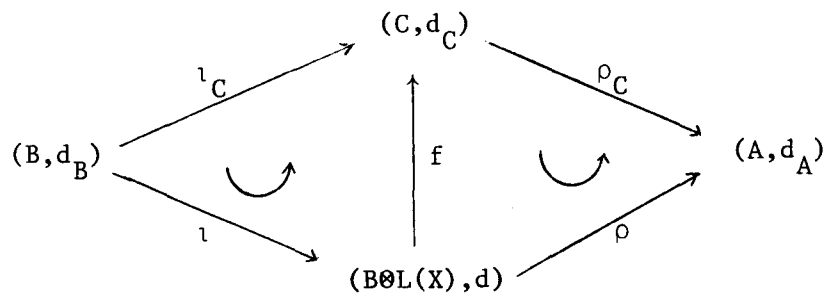
$P_2)$ E admet une structure KS minimale (X, f) telle que si
 $d = f^{-1} d_C f$ on ait :

$$d(X^{\text{pair}}) = 0.$$

P_3) E est pure.

$$\text{IV-2} - \underline{(P_3) \Rightarrow (P_1)}.$$

Supposons que la KS extension E soit pure alors il existe une structure KS minimale (X, f)



avec

$$A = L(X), \quad X = P \otimes Q$$

$$d = f^{-1} d_C f$$

telle que $dQ = 0$ et $dP \subset B \otimes SQ$ (cf. III.1.(1)).

D'après III.1.(6) - B, nous avons

$$H(A, d_A) = S(Q) / (d_A P)SQ$$

d'où nous déduisons immédiatement que ρ^* est surjectif, par suite

$\rho_C^* = (\rho \circ f^{-1})^*$ est surjectif.

$$\text{IV-3} \quad \underline{(P_1) \Rightarrow (P_2)}.$$

IV.3.(1) Lemme technique.

Soient B une a.g.c. connexe et $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ $K = \{1, 2, \dots, m\}$,
une base de l'espace vectoriel X

Si $g : B \otimes L(X) \rightarrow B \otimes L(X)$ est un homomorphisme d'a.g.c.
vérifiant

$$a) \quad g(e_\alpha) - e_\alpha \in B^+ \otimes L(e_1, \dots, e_{\alpha-1})$$

$$b) \quad g|_B = \text{Id}_B$$

alors g est un isomorphisme d'a.g.c. qui rend commutatif le
diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & B \otimes L(X) & & \\ & \nearrow l & & \searrow \rho & \\ B & & & & L(X) \\ & \searrow l & & \nearrow \rho & \\ & & B \otimes L(X) & & \end{array}$$

$\uparrow g$

l et ρ définis comme en I.2.(1).

De plus si $(e_\alpha)_\alpha$ est une d-base KS minimale de

$$E : (B, d_B) \xrightarrow{l} (B \otimes L(X), d) \xrightarrow{\rho} (L(X), d_A)$$

en posant

$$d' = g^{-1} \circ d \circ g$$

alors $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ est aussi une d' -base KS minimale et g un iso-
morphisme de KS extension.

IV.3.(2) Preuve.

On pose

$$g = \text{Id} - \psi$$

et d'après (a), il existe m tel que

$$\psi^{m+1} = 0$$

d'où g est inversible puisque

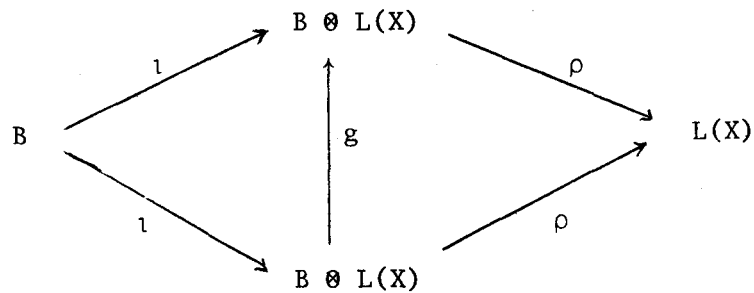
$$g^{-1} = \text{Id} + \psi + \dots + \psi^m.$$

Par suite g est un isomorphisme d'a.g.c.

D'autre part, puisque

$$\rho(g(e_\alpha) - e_\alpha) = 0 \text{ et } g|_B = \text{Id}_B$$

le diagramme suivant est commutatif



On suppose que $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une d-base KS minimale, alors pour tout $\alpha \in K$

$$\begin{aligned}
 \rho \circ d'(e_\alpha) &= \rho \circ g^{-1} \circ dg(e_\alpha) \\
 &= \rho \circ d \circ g(e_\alpha) \\
 &= \rho \circ d(e_\alpha + u_\alpha), u_\alpha \in B^+ \otimes L(e_1, \dots, e_{\alpha-1}) \\
 &= \rho \circ de_\alpha + \rho \circ du_\alpha \\
 &= \rho \circ de_\alpha \\
 &= d_A e_\alpha
 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\rho \circ d' = d_A$.

De plus,

$$\begin{aligned} d'e_\alpha &= g^{-1} \circ d \circ g(e_\alpha) \\ &= g^{-1} \circ d(e_\alpha + u_\alpha), \quad u_\alpha \in B^+ \otimes L(e_1, \dots, e_{\alpha-1}) \\ &= g^{-1} \circ d(e_\alpha) + g^{-1} \circ d(u_\alpha). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} de_\alpha &\in B \otimes L(e_1, \dots, e_{\alpha-1}) \\ du_\alpha &\in B^+ \otimes L(e_1, \dots, e_{\alpha-1}) \end{aligned}$$

nous obtenons

$$d'e_\alpha \in B \otimes L(e_1, \dots, e_{\alpha-1})$$

ce qui démontre que $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une d' -base KS minimale.

Par définition, g est alors un isomorphisme de KS extension.

IV.3.(3) Nous supposons désormais que la KS extension minimale E vérifie les hypothèses

- i') B est connexe
- ii) $A = L(X)$, $\dim H(A, d_A) < +\infty$,
- iii) $\dim P = \dim Q = n$ ($X = P \oplus Q$)

et on supposera que toutes les bases KS minimales $\{e_\alpha\}_{\alpha \in K}$ sont indicées par l'ensemble

$$K = \{1, 2, \dots, 2n\}.$$

IV.3.(4) Lemme. -

$$(P_1) \Rightarrow (P_2)$$

IV.3.(5) Preuve :

Considérons une KS-structure minimale

$$((e_\alpha)_{\alpha \in K}, g_0)$$

de E et notons

$$K'' = \{\alpha \in K, |e_\alpha| \text{ pair}\}$$

d'après (iii), (ii) et III.1.(6) - B, on peut choisir g_0 de manière à ce que si

$$d_A = \rho \circ d_0, \quad d_0 = g_0^{-1} \circ d_C \circ g$$

l'a.d.g.c. libre (A, d_A) soit pure et on a alors le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (C, d_C) & & \\
 & \nearrow \rho_C & \uparrow \text{si } g_0 & \searrow \rho_C & \\
 (B, d_B) & & & & (A, d_A) \\
 & \searrow l & \downarrow & \nearrow \rho & \\
 & & (B \otimes L(X), d_0) & &
 \end{array}$$

De la surjectivité de ρ_C^* , on déduit que pour tout $\alpha \in K''$, il existe $\Phi_\alpha \in (B \otimes L(X)) \cap \ker d_0$ tel que

$$\rho^*([\Phi_\alpha]) = [e_\alpha]$$

ce qui entraîne

$$\rho(\Phi_\alpha) = e_\alpha + d_A \theta_\alpha$$

avec $\theta_\alpha \in SQ \otimes P$.

De plus, de la surjectivité de ρ , on déduit qu'il existe $\Psi_\alpha \in B \otimes L(X)$ tel que

$$\rho(\Psi_\alpha) = \theta_\alpha$$

par suite

$$\rho(\Phi_\alpha - d_o \Psi_\alpha) = e_\alpha$$

ce qui entraîne que

$$\Phi_\alpha - d_o \Psi_\alpha = e_\alpha + \Omega_\alpha$$

avec

$$\Omega_\alpha \in B^+ \otimes L(X) \quad .$$

L'application linéaire

$$g : X \rightarrow B \otimes L(X)$$

définie par :

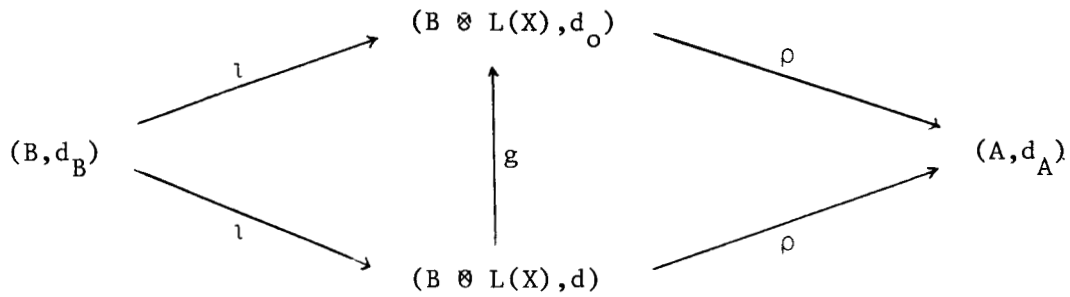
$$\begin{aligned} g(e_\alpha) &= e_\alpha + \Omega_\alpha & \text{si } \alpha \in K'' \\ g(e_\alpha) &= e_\alpha & \text{si } \alpha \in K' = K - K'' \end{aligned}$$

se prolonge de manière unique en un homomorphisme d'a.g.c., B-linéaire

$$g : B \otimes L(X) \rightarrow B \otimes L(X).$$

D'après le lemme technique, g est un isomorphisme de KS extension lorsque l'on pose

$$d = g^{-1} d_o g$$



de plus

$$\begin{aligned}
 d(e_\alpha) &= g^{-1} d_o(e_\alpha + \Omega_\alpha) \\
 &= g^{-1} (d_o(\Phi_\alpha - d_o \Psi_\alpha)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ceci pour tout $\alpha \in K''$. En posant $f = g \circ g_o$, on voit que la structure (X, f) est celle cherchée dans le lemme III.3.(4).

$$IV-4 \quad \underline{(P_2) \implies (P_3)}.$$

La KS extension E vérifiant les hypothèses IV.3.(3),

on dira que E vérifie la condition H_ℓ si

$$(H_\ell) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe sur } E \text{ une structure KS minimale} \\ \\ ((e_\alpha)_{\alpha \in K}, f) \\ \\ \text{telle que si} \\ \\ d = f^{-1} \circ d_C \circ f, \text{ on ait} \\ \\ de_\alpha = 0 \quad \quad \quad \text{si } |e_\alpha| \text{ pair} \\ de_\alpha \in (B \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) \quad \text{si } |e_\alpha| \text{ impair.} \end{array} \right.$$

Evidemment, montrer que (H_ℓ) est vraie pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, entraîne que le théorème IV.1.(2) est vrai .

IV.4.(1) Lemme.-

H_1 est vraie.

IV.4.(2) Preuve : Ceci résulte immédiatement du lemme IV.3.(4) et du fait que les hypothèses (ii) et (iii) entraînent que

$$d_A P \subset SQ \quad (\text{cf. III.1-(6) - B}).$$

IV.4.(3) Dans la suite de la démonstration, nous utilisons l'a.d.g.c.

$$(\bar{B}_\ell \otimes L(X), \bar{d})$$

définie comme le quotient de l'a.g.c. $B \otimes L(X)$ par l'idéal $B^{\geq \ell+1} \otimes L(X)$, fermé pour la différentielle d . On remarque que $\bar{B}_\ell$ est isomorphe en tant que e.v.g. à

$$k \otimes B^1 \otimes \dots \otimes B^\ell .$$

On fera couramment cette identification et on écrira par exemple

$$\bar{d}(B^\ell) = 0.$$

IV.4.(4) Lemme.-

Dans l'a.d.g.c. quotient $(\bar{B}_\ell \otimes L(X), \bar{d})$ on a les relations :

$$a) \quad (\ker \bar{d}) \cap (B^\ell \otimes L(X)) = (B^\ell \otimes SQ) + (\bar{d}(B^\ell \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ))$$

$$b) \quad (\ker \bar{d}) \cap (B^\ell \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) \subset \bar{d}(B^\ell \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) .$$

IV.4.(5) - Preuve :

1) Puisque $\bar{d}(B^\ell) = 0$ et que (A, d_A) est pure, on a la relation

$$\bar{d}(B^\ell \otimes SQ) = 0$$

ce qui entraîne l'inclusion

$$B^\ell \otimes SQ + \bar{d}(B^\ell \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) \subset (\ker \bar{d}) \cap (B^\ell \otimes L(X)).$$

2) Soit $\psi \in B^\ell \otimes L(X)$, ψ s'écrit de manière unique

$$\psi = \sum_{i=0}^m \psi_i$$

où

$$\psi_i \in B^\ell \otimes \Lambda^i P \otimes SQ.$$

Puisque

$$\bar{d}(1 \otimes \phi) = 1 \otimes d_A \phi \in \text{Ker } \rho = B^+ \otimes L(X)$$

$$\bar{d}|_{B^\ell \otimes L(X)} = 1 \otimes d_A|_{B^\ell \otimes L(X)}$$

ceci entraîne

$$\bar{d}\psi_i = (1 \otimes d_A)\psi_i \in B^\ell \otimes \Lambda^{i-1} P \otimes SQ.$$

Par suite, la relation

$$\bar{d}\psi = 0$$

entraîne que pour $i = 0, 1, \dots, m$

$$(1 \otimes d_A)(\psi_i) = 0.$$

De la relation

$$H(B \otimes L(X), 1 \otimes d_A) = B \otimes H(A, d_A)$$

et puisque d'après III.1.(6) $- B$,

$$H_+(A, d_A) = 0$$

on déduit que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, il existe $\psi_i \in B^\ell \otimes \Lambda^{i+1} P \otimes SQ$
tel que

$$\psi_i = (1 \otimes d_A)\psi_i = \bar{d}\psi_i$$

Ce qui implique que

$$\psi = \psi_0 + \sum_{i=1}^m \bar{d}(\psi_i)$$

et démontre l'inclusion

$$(\ker \bar{d}) \cap (B^\ell \otimes L(X)) \subset B^\ell \otimes SQ + \bar{d}(B^\ell \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ).$$

La relation (b) se déduit immédiatement de (a).

IV.4.(6) Lemme.-

$$H_\ell \Rightarrow H_{\ell+1}.$$

IV.4.(7) Preuve :

Soit $((e_\alpha)_{\alpha \in K}, g)$ une structure de E satisfaisant à la condition H_ℓ .

Dans l'algèbre quotient

$$(\bar{B}_\ell \otimes L(X), \bar{d}) \quad (d = g^{-1} d_C g)$$

l'hypothèse H_ℓ implique

$$\bar{H}_\ell \begin{cases} \bar{d}e_\alpha = 0 & \text{si } |e_\alpha| \text{ pair} \\ \bar{d}e_\alpha \in (\bar{B}_\ell^{\text{pair}} \otimes SQ) \oplus (B^\ell \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) & \text{si } |e_\alpha| \text{ impair} \end{cases}$$

Posons $K' \subset K$ tel que $\alpha \in K'$ ssi $|e_\alpha|$ impair.

1er cas : Supposons que ℓ est pair : $\ell = 2\ell'$

alors si $\alpha \in K'$

$$de_\alpha = \phi_\alpha + \sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha, 2s}$$

avec

$$\psi_{\alpha, 2s} \in B^\ell \otimes \Lambda^{2s} P \otimes SQ$$

$$\phi_\alpha \in \bar{B}_\ell \otimes SQ.$$

Des relations $\bar{d} \circ \bar{d}(e_\alpha) = 0, \alpha \in K',$

on déduit

$$\bar{d}\phi_\alpha = 0$$

$$\bar{d}\psi_{\alpha, 2s} = (1 \otimes d_A)\psi_{\alpha, 2s} = 0, s \geq 1$$

Le lemme IV.4.(4) entraîne alors que pour chaque $\alpha \in K'$ et chaque $s \geq 1$ il existe $\psi_{\alpha, 2s+1} \in B^\ell \otimes \Lambda^{2s+1} P \otimes SQ$ tel que

$$\psi_{\alpha, 2s} = \bar{d}\psi_{\alpha, 2s+1}$$

ce qui permet d'écrire

$$\bar{d}e_\alpha = \phi_\alpha + \sum_{s \geq 1} \bar{d}\psi_{\alpha, 2s+1}, \quad \alpha \in K'.$$

Cette dernière relation entraîne que dans l'a.d.g.c.,

$(B \otimes L(X), d)$ on ait :

$$d(e_\alpha - \sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha, 2s+1}) = \phi_\alpha + \Omega_\alpha$$

pour tout $\alpha \in K'$, avec

$$\Omega_\alpha \in B^{\geq \ell+1} \otimes L(X)$$

$$\phi_\alpha \in B^{\leq \ell} \otimes SQ$$

$$\psi_{\alpha, 2s+1} \in B^\ell \otimes \Lambda^{2s+1} P \otimes SQ.$$

L'application linéaire

$$g : X \rightarrow B \otimes L(X)$$

définie par

$$\begin{aligned} g(e_\alpha) &= e_\alpha \quad \text{si } |e_\alpha| \text{ pair} \\ g(e_\alpha) &= e_\alpha - \sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha, 2s+1} \quad \text{si } |e_\alpha| \text{ impair} \end{aligned}$$

se prolonge de manière unique en un homomorphisme d'a.g.c. tel que

$$g|_B = \text{Id}_B$$

$$g : B \otimes L(X) \rightarrow B \otimes L(X).$$

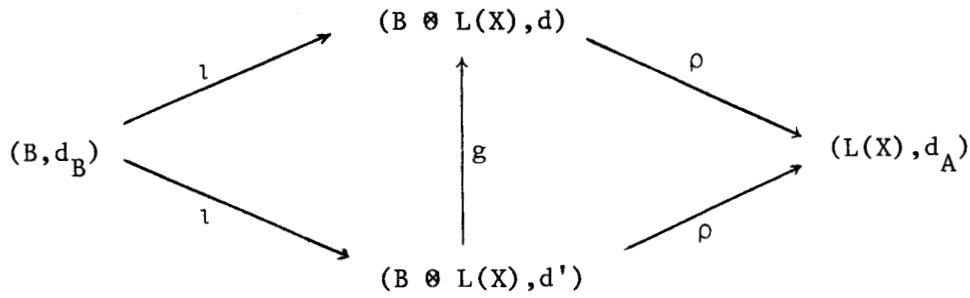
Des relations

$$|\psi_{\alpha, 2s+1}| = |e_\alpha|, \quad s \geq 1$$

et de l'hypothèse de KS minimalité, nous déduisons

$$\psi_{\alpha, 2s+1} \in B^+ \otimes L(e_1, \dots, e_{\alpha-1}).$$

Le lemme technique IV.3.(1) entraîne alors que g est un isomorphisme de KS extension



lorsque l'on pose

$$d' = g^{-1} \circ d \circ g.$$

D'après la définition de g , on montre que

$$(g^{-1} - \text{Id})(B^+ \otimes L(X)) \subset B^{\geq \ell+1} \otimes L(X)$$

$$(g^{-1} - \text{Id})(e_\alpha) = 0 \quad \text{si } |e_\alpha| \text{ pair}$$

$$(g^{-1} - \text{Id})(e_\alpha) \in B^\ell \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ \quad \text{si } |e_\alpha| \text{ pair.}$$

Il est clair que

$$d'e_\alpha = 0 \quad \text{si } |e_\alpha| \text{ pair}$$

Si $|e_\alpha|$ est impair,

$$\begin{aligned} d'e_\alpha &= g^{-1} \left(d(e_\alpha - \sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha, 2s+1}) \right) \\ &= g^{-1} (\phi_\alpha + \Omega_\alpha) \end{aligned}$$

d'où

$$d'e_\alpha \in (B \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell+1} \otimes L(X)).$$

Nous avons donc démontré le lemme IV.4.(6) lorsque ℓ est pair.

2ème cas : Supposons ℓ impair.

Pour tout $\alpha \in K'$

$$\bar{d}e_\alpha \in (\bar{B}_\ell^{\text{pair}} \otimes SQ) \oplus (B^\ell \otimes \Lambda^{\text{imp}} P \otimes SQ)$$

d'où l'écriture

$$\bar{d}e_\alpha = \phi_\alpha + \sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha, 2s-1}$$

avec

$$\phi_\alpha \in \bar{B}_\ell^{\text{pair}} \otimes SQ$$

$$\psi_{\alpha, 2s-1} \in B^\ell \otimes \Lambda^{2s-1} P \otimes SQ.$$

La relation

$$0 = \bar{d} \circ \bar{d}e_\alpha = \bar{d}\phi_\alpha + \sum_{s \geq 1} \bar{d}\psi_{\alpha, 2s-1}$$

entraîne

$$\bar{d}\phi_\alpha + \bar{d}\psi_{\alpha, 1} = 0$$

$$\bar{d}\psi_{\alpha, 2s-1} = 0 \quad \text{si } s \geq 2.$$

Le lemme IV.4.(4) entraîne l'existence pour tout $\alpha \in K'$ et pour tout $s \geq 2$ des $\psi_{\alpha, 2s}$ tels que

$$\psi_{\alpha, 2s-1} = \bar{d}(\psi_{\alpha, 2s})$$

$$\psi_{\alpha, 2s} \in B^\ell \otimes \Lambda^{2s} P \otimes SQ.$$

Dans l'a.d.g.c. $(B \otimes L(X), d)$ nous obtenons les relations

$$d(e_\alpha - \sum_{s \geq 2} \psi_{\alpha, 2s}) = \phi_\alpha + \psi_{\alpha, 1} + \Omega_\alpha$$

avec

$$\Omega_\alpha \in B^{\geq \ell+1} \otimes L(X)$$

$$\phi_\alpha \in B \otimes S(Q)$$

$$\psi_{\alpha, 1} \in B^\ell \otimes \Lambda^1 P \otimes SQ$$

$$\psi_{\alpha, 2s} \in B^\ell \otimes \Lambda^{2s} P \otimes SQ, \quad s \geq 2.$$

Le lemme technique permet, comme dans le cas pair, de montrer qu'il existe une structure KS minimale $((e_\alpha)_{\alpha \in K}, f_1)$ telle que si l'on

pose $d_1 = f_1^{-1} \circ d \circ f_1$ alors on a les relations

$$II.4.(8) \begin{cases} d_1(e_\alpha) = 0 & \text{si } |e_\alpha| \text{ pair} \\ d_1(e_\alpha) \in (B^{\text{pair}} \otimes SQ) \oplus (B^\ell \otimes \Lambda^1 P \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell+1} \otimes L(X)) & \text{si } |e_\alpha| \text{ impair} \end{cases}$$

IV.4.(9) On continue la démonstration de IV.4.(6) dans le cas ℓ impair en posant

$$\begin{aligned} B^\ell &= K^\ell \oplus dB^{\ell-1} & \text{si } \ell \geq 2 \\ B^1 &= K^1 & \text{si } \ell = 1 \end{aligned}$$

et en utilisant le lemme suivant, qui sera démontré en IV.5.

IV.4.(10) Lemme.-

Il existe une structure KS minimale

$$((e_\alpha)_{\alpha \in K}, f)$$

vérifiant pour $d = f^{-1} \circ d_C \circ f$

$$\begin{aligned} de_\alpha &= 0 & \text{si } |e_\alpha| \text{ pair} \\ de_\alpha &\in (B \otimes SQ) \oplus (K^\ell \otimes P \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell+1} \otimes \Lambda^1 P \otimes SQ) & \text{si } |e_\alpha| \text{ impair} \end{aligned}$$

IV.4.(11) Si $\alpha \in K'$, d'après les relations IV.4.(8) dans l'algèbre quotient $\bar{B}_\ell \otimes L(X)$, nous avons l'écriture

$$\bar{d}e_\alpha = d_A e_\alpha + \sum_{r \geq 1} \phi_{\alpha, 2r} + \sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha, s} x_s$$

avec

$$\phi_{\alpha, 2r} \in B^{2r} \otimes SQ, \quad r \geq 1$$

$$\psi_{\alpha, s} \in K^{\ell} \otimes SQ$$

$$x_s = e_{\alpha_s}, \quad \alpha_s \in K', \quad \alpha_s < \alpha.$$

$$\text{Comme } \bar{d}\phi_{\alpha, 2r} = (d_B \otimes 1)\phi_{\alpha, 2r} \in \bar{d}B^{2r} \otimes SQ$$

$$\bar{d}(d_A e_{\alpha}) = 0$$

$$\bar{d}(\psi_{\alpha, s} x_s) = -\psi_{\alpha, s} d_A x_s \in K^{\ell} \otimes SQ$$

des relations

$$\bar{d} \circ \bar{d}(e_{\alpha}) = 0$$

on tire

$$\sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha, s} d_A x_s = 0$$

par suite

$$\bar{d}(\sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha, s} x_s) = 0.$$

D'après le lemme IV.4.(4), il existe pour chaque $\alpha \in K'$, un élément θ_{α} de $B^{\ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ$ tel que

$$\sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha, s} x_s = \bar{d}\theta_{\alpha}$$

d'où les relations dans l'a.d.g.c. $(B \otimes L(X), d)$

$$d(e_{\alpha} - \theta_{\alpha}) = d_A e_{\alpha} + \sum_{r \geq 1} \phi_{\alpha, 2r} + \Omega_{\alpha}, \quad \alpha \in K'$$

avec

$$\Omega_{\alpha} \in B^{\geq \ell+1} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ$$

$$\phi_{\alpha, 2r} \in B^{2r} \otimes SQ, \quad r \geq 1$$

$$\theta_{\alpha} \in B^{\ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ.$$

De la relation $|\theta_\alpha| = |e_\alpha|$ et de l'hypothèse de KS minimalité, on déduit que

$$\theta_\alpha \in B^\ell \otimes L(e_1, \dots, e_{\alpha-1})$$

ce qui nous permet d'appliquer le lemme technique à l'unique homomorphisme d'algèbre

$$g : B \otimes L(X) \rightarrow B \otimes L(X)$$

défini par

$$\begin{aligned} g|_B &= \text{Id}_B \\ g(e_\alpha) &= e_\alpha \quad \text{si } |e_\alpha| \text{ pair} \\ g(e_\alpha) &= e_\alpha - \theta_\alpha \quad \text{si } |e_\alpha| \text{ impair.} \end{aligned}$$

Une simple vérification, permet de voir, que si l'on pose

$$d' = g^{-1} d g$$

alors

$$\begin{aligned} d'e_\alpha &= 0 \quad \text{si } |e_\alpha| \text{ est pair} \\ d'e_\alpha &\in (B \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell+1} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) \quad \text{si } |e_\alpha| \text{ impair} \end{aligned}$$

ce qui démontre complètement le lemme IV.4.(6).

IV-5 - PREUVE DU LEMME IV.4.(10).

IV.5.(1) Dans le cas $\ell = 1$, le résultat est évident.

IV.5.(2) Supposons $\ell > 1$, alors pour tout $\alpha \in K'$

$$de_\alpha \in (B \otimes SQ) \oplus (dB^{\ell-1} \otimes P \otimes SQ) \oplus (K^\ell \otimes P \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell+1} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ)$$

d'où l'écriture

$$de_{\alpha} = \mu_{\alpha} + \sum_{s \geq 1} d\psi_{\alpha,s} \otimes x_s + \sum_{s \geq 1} \bar{\psi}_{\alpha,s} \otimes x_s + \Omega_{\alpha}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mu_{\alpha} \in B \otimes SQ \\ \psi_{\alpha,s} \in B^{\ell-1} \otimes SQ \\ \bar{\psi}_{\alpha,s} \in K^{\ell} \otimes SQ \\ \Omega_{\alpha} \in B^{\geq \ell+1} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ \end{cases} \quad \begin{cases} x_s = e_{\alpha_s} \\ \alpha_s \in K' \\ \alpha_s < \alpha \end{cases} .$$

Il en résulte que

$$d(e_{\alpha} - \sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha,s} \otimes x_s) = \mu_{\alpha} + \sum_{s \geq 1} \bar{\psi}_{\alpha,s} \otimes x_s + \Omega_{\alpha} - \sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha,s} dx_s .$$

Or,

$$dx_s \in (SQ) \otimes (B^{\text{pair}} \otimes SQ) \otimes B^{\geq \ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ$$

$$\text{et } \ell \geq 2, \text{ d'où } dx_s = d_A x_s + \Gamma_s$$

$$\text{avec } \Gamma_s \in B^{\geq 2} \otimes L(X), \text{ par suite}$$

$$\sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha,s} dx_s = \sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha,s} d_A x_s + \sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha,s} \Gamma_s$$

est un élément de

$$(B^{\text{pair}} \otimes SQ) \otimes (B^{\geq \ell+1} \otimes L(X))$$

d'où l'écriture

$$d(e_{\alpha} - \sum_{s \geq 1} \psi_{\alpha,s} \otimes x_s) = \mu'_{\alpha} + \sum_{s \geq 1} \bar{\psi}_{\alpha,s} \otimes x_s + \Omega'_{\alpha}$$

avec

$$\begin{aligned}\mu'_\alpha &\in B^{\text{pair}} \otimes SQ \\ \Omega'_\alpha &\in B^{\geq \ell+1} \otimes L(X).\end{aligned}$$

L'application linéaire

$$g : X \rightarrow B \otimes L(X)$$

$$\begin{aligned}\text{définie par} \quad g(e_\alpha) &= e_\alpha & \text{si } |e_\alpha| \text{ pair} \\ g(e_\alpha) &= e_\alpha - \sum_{s \geq 1} \Psi_{\alpha,s} \otimes x_s & \text{si } |e_\alpha| \text{ impair}\end{aligned}$$

se prolonge de manière unique en un homomorphisme B linéaire

$$g : B \otimes L(X) \rightarrow B \otimes L(X).$$

Par un calcul, sans difficultés en utilisant le fait que $\ell \geq 2$ et lemme technique, on montre le lemme IV.4.(10).

CHAPITRE V

DEMONSTRATION DU THEOREME III.3.(2)

V-1 - CAS où $\dim \Pi_\psi(F) = 2$.

V.1.(1) Dans le cas où $\dim \Pi_\psi(F) = 2$ ($\text{rg } F = 1$) alors le théorème III.3.(2) équivaut à :

V.1.(2) Théorème.-

Soit E une KS extension minimale

$$E : (B, d_B) \xrightarrow{l_C} (C, d_C) \xrightarrow{\rho_C} (A, d_A)$$

telle que

- i) B connexe ;
- ii) A connexe $\dim H^*(A, \mathbb{k}) < +\infty$
- iii) $\dim \Pi_\psi^*(A) = 2$, $\chi_\Pi(A) = 0$

alors

ρ_C^* est surjective.

V.1.(3) Démonstration : Considérons une KS structure minimale

$$((y, x), f)$$

de E telle que

$|y|$ pair

$|x|$ impair

(A, d_A) pure .

Le dernier point étant possible d'après III.1.(6) de plus,
nous avons nécessairement l'inégalité

$$|y| < |x|$$

ce qui entraîne

$$dy = c \in B$$

$$dx = d_A x + \text{polynôme en } y \text{ à coefficients dans } B.$$

Posons

$$d_A x = \lambda y^m \quad \lambda \in k - \{0\}, \quad m \geq 2$$

alors
$$dx = \lambda y^m + b_1 y^{m-1} + \dots + b_m$$

avec
$$|b_i| = i|y|.$$

De la relation $d \circ dx = 0$, on déduit

$$m \lambda dy + db_1 = 0$$

par suite,

$$d(y + \frac{1}{m\lambda} b_1) = 0.$$

Comme $\rho(y + \frac{1}{m\lambda} b_1) = y$ et que $H(A, d_A) = S(y) / (y^m)$

ρ^* est surjective.

$$V-2 - \underline{CAS} \text{ où } \dim \Pi_\Psi(F) = 4.$$

V.2.(1) Lorsque $\text{rg}(F) = 2$, i.e. $\dim \Pi_\Psi(F) = 4$ le
théorème III.3.(2) est équivalent au suivant.

V.2.(2) Théorème.-

Soit E une KS extension minimale

$$E : (B, d_B) \xrightarrow{l_C} (C, d_C) \xrightarrow{\rho_C} (A, d_A)$$

telle que

- i) B connexe
- ii) $\dim H^*(A, k) < +\infty$
- iii) $\dim \Pi_{\Psi}^*(A) = 4, \chi_{\Pi}(A) = 0$

alors E est pure.

V.2.(3) Ce qui équivaut évidemment à dire que ρ_C^* est surjective (th. III.3.(1)).

V.2.(4) Plan de la démonstration.

Il résulte de III.1.(6) - B que l'hypothèse H_1^1 ci-dessous définie, est vraie, le théorème V.2.(3) résultera donc de la suite d'implications

$$H_{\ell}^1 \Rightarrow H_{\ell}^2 \Rightarrow H_{\ell}^3 \Rightarrow H_{\ell+1}^1$$

où les conditions H_{ℓ}^i sont définies par :

$$H_{\ell}^1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe sur } E \text{ une structure KS minimale} \\ \\ (\{y_1, y_2, x_1, x_2\}, f_1) \\ \\ \text{telle que si } d^1 = f_1^{-1} \circ d_C \circ f_1, \text{ on ait} \\ \\ d_1 y_i \in B^{\geq \ell} \otimes L(X), \quad i = 1, 2. \\ \\ d_1 x_j \in (B \otimes SQ) \otimes (B^{\geq \ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ), \quad j = 1, 2. \end{array} \right.$$

$$H_{\ell}^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe sur } E \text{ une structure KS minimale} \\ \\ (\{y_1, y_2, x_1, x_2\}, f_2) \\ \\ \text{telle que si } d_2 = f_2^{-1} \circ d_C \circ f_2, \text{ on ait :} \\ \\ d_2 y_i \in (B^{\geq \ell} \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell+1} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) \quad i = 1, 2. \\ \\ d_2 x_j \in (B \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) \quad j = 1, 2. \end{array} \right.$$

$$H_{\ell}^3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe sur } E \text{ une structure KS minimale} \\ \\ (\{y_1, y_2, x_1, x_2\}, f_3) \\ \\ \text{telle que si } d_3 = f_3^{-1} \circ d_C \circ f_3, \text{ on ait} \\ \\ d_3 y_i \in (B^{\geq \ell} \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell+1} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) \quad i = 1, 2. \\ \\ d_3 x_j \in (B \otimes SQ) \oplus (B^{\ell} \otimes \Lambda^1 P \otimes SQ) \quad j = 1, 2. \end{array} \right.$$

V.2.(5) Lemme. -

$$H_{\ell}^1 \implies H_{\ell}^2 .$$

V.2.(6) Preuve :

Dans l'algèbre quotient (IV.4.(4))

$$(\bar{B}_{\ell} \otimes L(X), \bar{d})$$

l'hypothèse H_{ℓ}^1 devient

$$\bar{d}_1 Q \subset B^{\ell} \otimes L(X)$$

$$\bar{d}_1 P \subset (\bar{B}_{\ell} \otimes SQ) \oplus (B^{\ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) .$$

En particulier,

$$\bar{d}_1 y_i \in (B^{\ell} \otimes L(X)) \cap \ker \bar{d}_1 \quad i = 1, 2$$

et d'après le lemme IV.4.(4), il existe θ_i et ψ_i tels que :

$$\bar{d}_1 y_i = \theta_i + \bar{d}\psi_i \quad i = 1, 2$$

$$\theta_i \in B^{\ell} \otimes SQ$$

$$\psi_i \in B^{\ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ.$$

Ceci entraîne que dans l'a.d.g.c. $(B \otimes L(X), d_1)$, on a les relations

$$d_1(y_i - \psi_i) = \theta_i + \Omega_i \quad i = 1, 2$$

$$\theta_i \in B^{\ell} \otimes SQ$$

$$\psi_i \in B^{\ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ$$

$$\Omega_i \in B^{\geq \ell+1} \otimes L(X).$$

L'application linéaire

$$g : X \rightarrow B \otimes L(X)$$

définie en posant :

$$g(y_i) = 1 \otimes y_i - \psi_i \quad i = 1, 2$$

$$g(x_j) = x_j \quad j = 1, 2$$

se prolonge de manière unique en un homomorphisme d'a.g.c.

$$g : B \otimes L(X) \rightarrow B \otimes L(X)$$

tel que

$$g|_B = \text{Id}_B.$$

D'autre part, des relations

$$\begin{aligned} |\psi_i| &= |y_i| & i &= 1, 2 \\ \psi_i &\in B^+ \otimes L(X) \end{aligned}$$

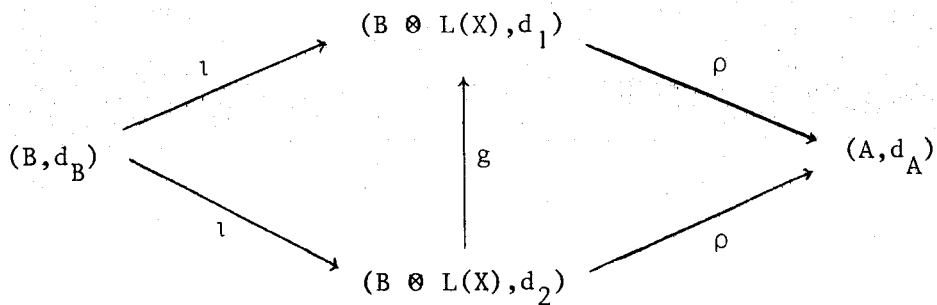
on déduit que

$$\psi_i \in B^+ \otimes L(e_1, \dots, e_{\alpha_i-1})$$

en posant

$$e_{\alpha_i} = y_i.$$

D'après le lemme technique IV.3.(1), g est un isomorphisme de KS extension lorsque l'on pose $d_2 = g^{-1} \circ d_1 \circ g$



D'après la définition de g on a les relations

$$\begin{aligned} (g^{-1} - \text{Id})(B^+ \otimes L(X)) &\subset B^{\geq \ell+1} \otimes L(X) \\ (g^{-1} - \text{Id})(x_j) &= 0 & j &= 1, 2 \\ (g^{-1} - \text{Id})(y_i) &\in B^{\geq \ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ \end{aligned}$$

$$d_2(x_j) = g^{-1} d_1 g(x_j) = g^{-1}(d_1 x_j)$$

et

$$d_1 x_j \in (\mathbb{K} \otimes SQ) \oplus (B^+ \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ)$$

d'où

$$d_2(x_j) \in (B \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ)$$

$$d_2(y_i) = g^{-1} d_1 g(y_i) = g^{-1} d_1 (y_i - \psi_i) = g^{-1}(\theta_i + \Omega_i)$$

d'où

$$d_2(y_i) \in (B^{\ell} \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell+1} \otimes L(X)).$$

Ceci prouve que la structure

$$(\{y_1, y_2, x_1, x_2\}, f_1 \circ g)$$

vérifie H_ℓ^2 .

V.2.(7) Lemme. -

$$H_\ell^2 \Rightarrow H_\ell^3$$

V.2.(8) Preuve :

Dans l'algèbre quotient (IV.4.(4))

$$(\bar{B}_\ell \otimes L(X), \bar{d}_2)$$

l'hypothèse H_ℓ^2 devient

$$\bar{H}_\ell^2 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{d}_2 y_i \in B^\ell \otimes SQ & i = 1, 2 \\ \bar{d}_2 x_j \in (\bar{B}^\ell \otimes SQ) \oplus (B^\ell \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) & j = 1, 2 \end{array} \right.$$

1er cas : Si ℓ est pair, alors

$$\bar{d}_2 y_i = 0$$

et on fait la même démonstration que dans IV.4.(7), 1er cas et

$$H_\ell^2 \Rightarrow H_{\ell+1}.$$

2ème cas : Si ℓ est impair :

$$\bar{H}_\ell^2 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{d}_2 y_i \in B^\ell \otimes SQ & i = 1, 2 \\ \bar{d}_2 x_j \in (\bar{B}_\ell^{\text{pair}} \otimes SQ) \oplus (B^\ell \otimes \Lambda^{\text{imp}} P \otimes SQ) & j = 1, 2 \end{array} \right.$$

d'où en particulier l'écriture

$$\bar{d}_2 x_j = \phi_j + \sum_{s \geq 1} \psi_{j,2s-1}$$

avec $\phi_j \in \bar{B}^{\text{pair}} \otimes SQ$

$$\psi_{j,2s-1} \in B^\ell \otimes \Lambda^{2s-1} P \otimes SQ.$$

La relation

$$0 = \bar{d}_2 \circ \bar{d}_2(x_j) = \bar{d}\phi_j + \sum_{s \geq 1} \bar{d}\psi_{j,2s-1}$$

entraîne pour $j = 1, 2$

$$\bar{d}_2 \phi_j + \bar{d}_2 \psi_{j,1} = 0$$

$$\bar{d}_2 \psi_{j,2s-1} = 0 \quad \text{si } s \geq 2$$

puisque,

$$\bar{d}_2|_{B^\ell \otimes L(X)} = 1 \otimes d_A|_{B^\ell \otimes L(X)}.$$

Le lemme IV.3.(9) entraîne l'existence pour $j = 1, 2$ et pour tout $s \geq 2$ des $\psi_{j,2s}$ tels que

$$\psi_{j,2s-1} = \bar{d}(\psi_{j,2s})$$

$$\psi_{j,2s} \in B^\ell \otimes \Lambda^{2s} P \otimes SQ.$$

Dans l'a.d.g.c. $(B \otimes L(X), d)$ nous obtenons les relations :

$$d_2 y_i \in (B^\ell \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell+1} \otimes L(X)) \quad i = 1, 2$$

$$d_2(x_j - \sum_{s \geq 2} \psi_{j,2s}) = \phi_j + \psi_{j,1} + \Omega_j \quad j = 1, 2$$

avec

$$\begin{aligned}\Omega_j &\in B^{\geq \ell+1} \otimes L(X) \\ \Phi_j &\in B^{\leq \ell} \otimes SQ \\ \psi_{j,1} &\in B^{\ell} \otimes \Lambda^1 P \otimes SQ \\ \psi_{i,2s} &\in B^{\ell} \otimes \Lambda^{2s} P \otimes SQ, \quad s \geq 2.\end{aligned}$$

L'application linéaire

$$g : X \rightarrow B \otimes L(X)$$

définie en posant :

$$g(y_i) = y_i \quad i = 1, 2$$

$$g(x_j) = x_j - \sum_{s \geq 2} \psi_{j,2s}$$

se prolonge de manière unique en un homomorphisme d'a.g.c. B-linéaire,

$$g : B \otimes L(X) \rightarrow B \otimes L(X) .$$

Des relations

$$|\psi_{j,2s}| = |x_j|$$

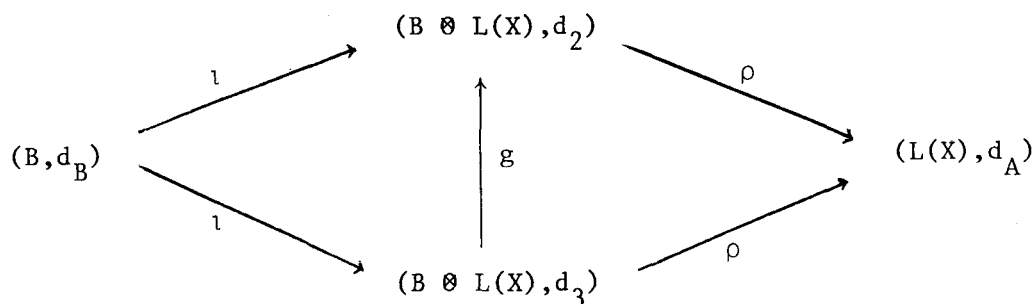
$$\psi_{j,2s} \in B^+ \otimes L(X)$$

et de l'hypothèse de KS minimalité, nous déduisons

$$\psi_{j,2s} \in B^+ \otimes L(e_1, \dots, e_{\alpha_j-1})$$

si $x_j = e_{\alpha_j}$.

Le lemme technique IV.3.(1) entraîne alors que g est un isomorphisme de KS extension.



lorsque l'on pose

$$d_3 = g^{-1} d_2 g .$$

Vérifions que la structure

$$(\{y_1, y_2, x_1, x_2\}, f_3 = f_2 \circ g)$$

satisfait l'hypothèse H_ℓ^3 .

$$\begin{aligned} d_3 x_j &= g^{-1} \circ d \circ g(x_j) \\ &= g^{-1} \circ d(x_j - \sum_{s \geq 2} \psi_{j, 2s}) \\ &= g^{-1}(\phi_j + \psi_{j, 1} + \Omega_j) . \end{aligned}$$

Or, d'après la définition de g , on obtient les relations

$$\begin{aligned} (g^{-1} - \text{Id})(B^+ \otimes L(X)) &\subset B^{\geq \ell+1} \otimes L(X) \\ (g^{-1} - \text{Id})(y_i) &= 0 \\ (g^{-1} - \text{Id})(x_j) &\in B^\ell \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ \end{aligned}$$

$$\text{d'où } d_3 x_j \in (B^{\leq \ell} \otimes SQ) \oplus (B^\ell \otimes P \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell+1} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ) .$$

De même, on vérifie que

$$d_3 y_i \in (B^\ell \otimes SQ) \oplus (B^{\geq \ell+1} \otimes L(X))$$

ce qui termine la démonstration de V.2.(7).

V.2.(9) Lemme.-

$$H_{\ell}^3 \Rightarrow H_{\ell+1}^1$$

V.2.(10) Preuve :

1) 1er cas : ℓ pair.

Le lemme est démontré en vertu de V.2.(8), 1er cas.

2) 2ème cas : ℓ impair. $\ell = 2q + 1$.

On verra facilement, en généralisant la démonstration de IV.4.(10) que la condition H_{ℓ}^3 se réduit à

$$\begin{cases} d_3 y_i \in (K^{\ell} \otimes SQ) \otimes (B^{\geq \ell+1} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ), & i = 1, 2 \\ d_3 x_j \in (B \otimes SQ) \otimes (K^{\ell} \otimes P \otimes SQ) \otimes (B^{\geq \ell+1} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ), & j = 1, 2 \end{cases}$$

alors, dans l'algèbre quotient (IV.3.(8))

$$(\bar{B}^{\ell} \otimes L(X), \bar{d}_3)$$

on obtient les formules

$$V.2.(11) \quad \begin{cases} \bar{d}_3 y_i = \psi_i & i = 1, 2 \\ \bar{d}_3 x_j = d_A x_j + \sum_{r=1}^q \phi_{j, 2r} + \sum_{s=1}^{j-1} \psi_{j, s} x_s, & j = 1, 2 \end{cases}$$

avec

$$\psi_1 \in K^{\ell}, \quad \psi_2 \in K^{\ell} \otimes S(y_1)$$

$$\phi_{j, 2r} \in B^{2r} \otimes SQ$$

$$\psi_{j, s} \in K^{\ell} \otimes SQ$$

et puisque $K^{\ell} \cap dB^{2q} = \{0\}$, de la relation

$$0 = \bar{d}_3 \circ \bar{d}_3 x_j$$

on déduit la formule

$$V.2.(12) \quad \bar{d}_3(d_A x_j) = \sum_{s=1}^{j-1} \psi_{j,s} d_A x_s.$$

Considérons une base (b_ϵ) de K^ℓ et écrivons pour tout

$\Phi \in S(Q)$

$$\bar{d}\Phi = \sum_{\epsilon} b_{\epsilon} \otimes \theta^{\epsilon}(\Phi).$$

Puisque $\bar{d}$ est une dérivation de degré +1, les applications

$$\theta^{\epsilon} : SQ \rightarrow SQ$$

sont des $\mathbb{k}$ -dérivations de degré 1- ℓ . De la relation V.2.(12), on déduit que

$$\sum_{\epsilon} b_{\epsilon} \otimes \theta^{\epsilon}(d_A x_j) = \sum_{s=1}^{j-1} \psi_{j,s} d_A x_s$$

par suite

$$\theta^{\epsilon}(d_A x_1) = 0 \quad \text{et} \quad \theta^{\epsilon}(d_A x_2)$$

appartient à l'idéal engendré par $d_A x_1$ dans SQ c'est-à-dire que pour chaque ϵ , θ^{ϵ} induit une dérivation $\widetilde{\theta^{\epsilon}}$ sur $S(y_1, y_2)/(d_A x_1, d_A x_2) = H(A, d_A)$.

On montrera en V.3., que nécessairement

$$\widetilde{\theta^{\epsilon}} \equiv 0$$

ce qui implique

$$\theta^{\epsilon}(y_1) = 0 \quad \text{et} \quad \theta^{\epsilon}(y_2) = d_A \Phi^{\epsilon}$$

avec $\Phi^{\epsilon} \in SQ \otimes P$. En posant :

$$\Psi_2 = \sum_{\epsilon} b^{\epsilon} \otimes \Psi_2^{\epsilon}$$

on trouve

$$\theta^{\epsilon}(y_2) = \Psi_2^{\epsilon} = d_A \Phi^{\epsilon}$$

d'où

$$\begin{aligned}\bar{d}_3 y_2 &= \psi_2 = \sum_{\epsilon} b^{\epsilon} \otimes \psi_2^{\epsilon} \\ &= \sum_{\epsilon} b^{\epsilon} \otimes d_A \phi^{\epsilon} \\ &= -\bar{d}'_3 \left(\sum_{\epsilon} b^{\epsilon} \otimes \phi^{\epsilon} \right)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\bar{d}_3 (y_2 + \sum_{\epsilon} b^{\epsilon} \otimes \phi^{\epsilon}) = 0 .$$

Dans l'a.d.g.c.

$$(B \otimes L(X), d_3)$$

nous obtenons les relations

$$V.2.(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_3 y_1 = \Omega_1 \\ d_3 (y_2 + \sum_{\epsilon} b^{\epsilon} \otimes \phi^{\epsilon}) = \Omega_2 \in B^{\geq \ell} \otimes L(X) \\ d_3 x_j = d_A x_j + \sum_{r=1}^q \phi_{j,2r} + \sum_{s=1}^{j-1} \psi_{j,s} x_s + \Omega'_j . \end{array} \right.$$

L'application linéaire g

$$g : X \longrightarrow B \otimes L(X)$$

définie par

$$g(y_1) = y_1$$

$$g(y_2) = y_2 + \sum_{\epsilon} b^{\epsilon} \otimes \phi^{\epsilon}$$

$$g(x_j) = x_j$$

se prolonge de manière unique en un homomorphisme d'a.g.c. Le lemme technique IV.3.(1) et quelques vérifications immédiates entraînent l'existence d'une structure KS minimale

$$(\{y_1, y_2, x_1, x_2\}, f_3'')$$

telle que si $d_3'' = (f_3'')^{-1} \circ d_3 \circ f_3''$, on ait dans l'a.d.g.c. quotient

$(\bar{B}_\ell \otimes L(X), \bar{d}_3'')$ les relations suivantes :

$$V.2.(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{d}_3'' y_1 = 0 \quad , \quad \bar{d}_3'' y_2 = 0 \\ d_3'' x_1 = d_A x_1 + \sum_{r=1}^q \Phi_{1,2r}'' \\ d_3'' x_2 = d_A x_2 + \sum_{r=1}^q \Phi_{2,2r}'' \psi'' x_1 \\ \Phi_{j,2r}'' \in B^{2r} \otimes SQ, \quad \psi'' \in K^\ell \otimes SQ . \end{array} \right.$$

De la relation $\bar{d}_3'' \circ \bar{d}_3'' = 0$, on tire

$$d(\psi'' x_1) = 0$$

ce qui d'après le lemme IV.3.(9) entraîne la relation

$$V.2.(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi'' x_1 = \bar{d}_3'' \theta \\ \theta \in B^\ell \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ \end{array} \right.$$

d'où les formules dans l'a.d.g.c. $(B \otimes L(X), d_3'')$

$$V.2.(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_3'' y_1 = \Omega_1 \\ d_3'' y_2 = \Omega_2 \\ d_3''(x_1) = d_A x_1 + \sum_{r=1}^q \Phi_{1,2r}'' + \Omega_3 \\ d_3''(x_2 - \theta) = d_A x_2 + \sum_{r=1}^q \Phi_{2,2r}'' + \Omega_4 \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned}\Omega_1, \Omega_2 &\in B^{\geq \ell+1} \otimes L(X) \\ \Omega_3, \Omega_4 &\in B^{\geq \ell+1} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ \\ \Phi''_{j, 2r} &\in B^{2r} \otimes SQ \\ \theta &\in B^{\ell} \otimes \Lambda^+ P \otimes SQ.\end{aligned}$$

L'application linéaire

$$g : X \rightarrow B \otimes L(X)$$

définie par

$$\begin{aligned}g(y_1) &= y_1, & g(y_2) &= y_2 \\ g(x_1) &= x_1 \\ g(x_2) &= x_2 - \theta\end{aligned}$$

se prolonge de manière unique en un homomorphisme d'a.g.c.

Le lemme technique IV.3.(1) et quelques vérifications immédiates entraînent que

$$(\{y_1, y_2, x_1, x_2\}, f_4 = f''_3 \circ g)$$

est une structure KS minimale qui vérifie l'hypothèse $H^1_{\ell+1}$. Ce qui termine la démonstration de V.2.(9).

V-3 - DÉRIVATIONS DANS UNE ALGÈBRE DE DUALITÉ DE POINCARÉ.

V.3.(1) Considérons une algèbre libre connexe (A, d_A)

KS minimale de type f et telle que $\chi_{\Pi}(A) = 0$.

On suppose que l'ensemble ordonné

$$\{y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n\}$$

est une base KS minimale pure de l'a.d.g.c. libre (A, d_A) telle que

$$|y_1| \leq |y_2| \leq \dots \leq |y_n|$$

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \dots \leq |x_n|$$

lorsque l'on désigne par y_i les éléments de degré pair et par x_j les éléments de degré impair.

Par définition, d'une KS-base pure, on a

$$d_A y_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$d_A x_j = f_j \in S(y_1, \dots, y_n) \quad j = 1, \dots, n.$$

D'après [H-3-]

$$H(A, d_A) = S(y_1, \dots, y_n) / (f_1, \dots, f_n)$$

est une algèbre de dualité de Poincaré de dimension formelle

$$N = |f_1| + \dots + |f_n| - |y_1| - \dots - |y_n|$$

c'est-à-dire que :

- i) $H^i(A, d_A) = 0$ si $i > N$
- ii) $H^N(A, d_A) = \mathbb{k}e$
- iii) La forme bilinéaire

$$\langle \ , \ \rangle : H^P \times H^{N-P} \rightarrow \mathbb{k}$$

définie en posant, $\langle a, b \rangle e = a \cup b$ est non dégénérée.

V.3.(2) Lemme.- Sous les hypothèses V.3.(1),

Pour toute dérivation $\tilde{\theta}$, de degré négatif ou nul, sur $H(A, d_A)$,
on a :

$$(\text{Im } \tilde{\theta}) \cap H^0(A) = 0$$

V.3.(3) Preuve :

Supposons qu'il existe $a \in H(A, d_A)$ tel que

$$\tilde{\theta}(a) = \lambda \in k - \{0\}.$$

Puisque $\tilde{\theta}$ est une dérivation, nécessairement

$$\tilde{\theta}|_k \equiv 0$$

et puisque $H(A, d_A)$ est connexe, nécessairement

$$a \in H^+(A, d_A)$$

Comme, $H(A, d_A)$ est de dimension finie il existe $\ell \geq 1$

tel que

$$a^\ell \neq 0 \text{ et } a^{\ell+1} = 0$$

d'où

$$\theta(a^{\ell+1}) = 0 = (\ell + 1)a^\ell \theta(a)$$

ce qui entraîne que

$$\theta(a) = \lambda = 0.$$

V.3.(4) On note $\bar{y}_i$, la classe de y_i modulo l'idéal

$(f_1, \dots, f_n)$ et on dit que la dérivation $\tilde{\theta}$ est nilpotente, relativement
à la famille ordonnée $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ si $\tilde{\theta}(\bar{y}_i)$ est un polynôme en
 $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{i-1}$.

On note

$$\tilde{\text{Der}}_{\leq 0}(H(A, d_A))$$

le sous-espace de

$$\text{Der}_{\leq 0}(H(A, d_A))$$

des dérivations nilpotentes relativement à $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$.

V.3.(5) Remarques.

a) Si $i < 0$, $\tilde{\text{Der}}_i(H(A, d_A)) = \text{Der}_i(H(A, d_A))$

b) D'après V.3.(2), pour toute dérivation $\tilde{\theta} \in \tilde{\text{Der}}_{\leq 0}(H(A, d_A))$
on a $\tilde{\theta}(\bar{y}_1) = 0$.

V.3.(6) Lemme. - Sous les hypothèses V.3.(1),

Pour toute dérivation $\tilde{\theta} \in \tilde{\text{Der}}_{\leq 0}(H(A, d_A))$, on a :

$$\tilde{\theta}(H^N(A, d_A)) = 0.$$

V.3.(7) Preuve :

Soit m_1 le plus grand entier tel que

$$\bar{y}_1^{m_1} \neq 0 \quad \text{et} \quad \bar{y}_1^{m_1+1} = 0.$$

Soit m_i le plus grand entier tel que

$$(\bar{y}_1^{m_1}, \dots, \bar{y}_{i-1}^{m_{i-1}}) \bar{y}_i^{m_i} \neq 0$$

et

$$(\bar{y}_1^{m_1}, \dots, \bar{y}_{i-1}^{m_{i-1}}) \bar{y}_i^{m_i+1} = 0.$$

On construit ainsi un élément non nul, de degré > 0 ,

$$\Phi = \frac{-m_1}{y_1} \frac{-m_2}{y_2}, \dots, \frac{-m_n}{y_n}$$

tel que pour tout $a \in H^+(A, d_A)$, $a \cdot \Phi = 0$.

Si on suppose que $|\Phi| < N$ alors pour tout $a \in H^{N-|\Phi|}$
 $\langle a, \Phi \rangle = 0$ ce qui est impossible puisque $H(A, d_A)$ est une algèbre de
 dualité de Poincaré, d'où nécessairement $|\Phi| = N$.

$$\text{On pose alors } e = \frac{-m_1}{y_1} \frac{-m_2}{y_2}, \dots, \frac{-m_n}{y_n}$$

$$\tilde{\theta}(e) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{-m_i}{y_i}, \dots, \frac{-m_{i-1}}{y_{i-1}}, \dots, \frac{-m_n}{y_n} \tilde{\theta}(\frac{-m_i}{y_i})$$

$$= 0$$

puisque, d'après V.3.(2), $\tilde{\theta}(\frac{-m_i}{y_i}) \in S^+(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{i-1})$.

V.3.(8) Corollaire. - Sous les hypothèses de V.3.(1),
 pour tout élément $\tilde{\theta}$ de $\text{Der}_{\leq 0}(H(A, d_A))$, on a

$$\text{i) } \langle \tilde{\theta}(a), b \rangle = -\langle a, \tilde{\theta}(b) \rangle$$

$$\text{ii) } \text{Im } \tilde{\theta} \subset \bigoplus_{i=1}^{N-1} H^i.$$

V.3.(9) Preuve :

$$\begin{aligned} \text{i) } \langle \tilde{\theta}(a), b \rangle e &= \tilde{\theta}(a) \cdot b \\ &= \tilde{\theta}(a \cdot b) - a \tilde{\theta}(b) = -a \tilde{\theta}(b) \quad \text{d'après V.3.(7)} \\ &= -\langle a, \tilde{\theta}(b) \rangle e. \end{aligned}$$

ii) Si $\deg \tilde{\theta} < 0$, on a évidemment ii) compte tenu du
 lemme V.3.(2), si $\deg \tilde{\theta} = 0$ on utilise V.3.(6).

V.3.(10) Lemme.-

Sous les hypothèses de V.3.(1), pour tout élément $\tilde{\theta}$ de $\tilde{\text{Der}}_{\leq 0}(H(A, d_A))$, on a l'implication suivante

$$(\tilde{\theta}(\bar{y}_1) = \tilde{\theta}(\bar{y}_2) = \dots = \tilde{\theta}(\bar{y}_{n-1}) = 0) \implies (\tilde{\theta}(\bar{y}_n) = 0).$$

V.3.(11) Preuve :

Supposons que

$$\theta(\bar{y}_n) = \Phi' \neq 0.$$

Soit

p_1 le plus grand entier tel que $\Phi' \bar{y}_1^{-p_1} \neq 0$ et $\Phi' \bar{y}_1^{-p_1+1} = 0$

 p_i le plus grand entier tel que $\Phi' \bar{y}_1^{-p_1} \dots \bar{y}_i^{-p_i} \neq 0$ et $\Phi' \bar{y}_1^{-p_1} \dots \bar{y}_i^{-p_i+1} = 0$.

Notons Ψ l'élément ainsi obtenu

$$\Psi = \Phi' \bar{y}_1^{-p_1} \dots \bar{y}_n^{-p_n}$$

alors $\Psi \in H^N(A, d_A)$ et

$$\tilde{\theta}\left(\frac{1}{\bar{y}_n^{m_n+1}} \bar{y}_1^{-p_1} \dots \bar{y}_{n-1}^{-p_{n-1}} \bar{y}_n^{-p_n+1}\right) = \Psi \neq 0$$

ce qui contredit V.3.(8) (ii).

V.3.(12) Corollaire.- Sous les hypothèses de V.3.(1) et si $n = 2$ pour tout élément $\tilde{\theta}$ de $\text{Der}(S(y_1, y_2)/(f_1, f_2))$, on a :

$$\tilde{\theta}(\bar{y}_1) = \tilde{\theta}(\bar{y}_2) = 0.$$

V.3.(13) En effet d'après V.3.(5), b) , $\tilde{\theta}(\bar{y}_1) = 0$ et d'après V.3.(10), $\tilde{\theta}(\bar{y}_2) = 0$.

CHAPITRE VI

FIBRATIONS H.T., C.T, F.H.T ET ∇ -FIBRATIONS.

VI-1 - DEFINITIONS ET EXEMPLES DE FIBRATIONS H.T ET C.T.

VI.1.(1) Une fibration rationnelle (I.4.(6))

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$$

est cohomologiquement triviale (C.T), relativement au corps k , s'il existe un isomorphisme d'a.g.c., ψ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^*(E, k) & & \\
 & \nearrow \pi^* & \uparrow \psi & \searrow j^* & \\
 H^*(M, k) & & & & H^*(F, k) \\
 & \searrow i & & \nearrow p & \\
 & & H^*(M, k) \otimes H^*(F, k) & &
 \end{array}$$

où i désigne l'injection canonique définie par

$$i(\beta) = \beta \otimes 1$$

et p désigne la projection naturelle définie par

$$p(1 \otimes \alpha) = \alpha$$

$$p(\beta \otimes \alpha) = 0 \quad \text{si } |\beta| > 0$$

VI.1.(2) Une fibration rationnelle (I.4.(6))

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$$

est homotopiquement triviale (H.T), relativement au corps k , s'il existe un isomorphisme d'a.d.g.c, f rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & (A(M) \otimes L(X), d) & & \\ & \nearrow l & \uparrow f & \searrow \rho & \\ (A(M), d_M) & & & & (L(X), d_A) \\ & \searrow l & & \nearrow \rho & \\ & & (A(M) \otimes L(X), d_M \otimes d_A) & & \end{array}$$

où la KS extension minimale.

$$E : (A(M), d_M) \xrightarrow{l} (A(M) \otimes L(X), d) \xrightarrow{\rho} (L(X), d_A)$$

est un modèle KS minimal de I.4.(6)).

VI.1.(3) Remarques :

1) Si I.4.(6) est H.T, alors pour tout modèle

$$m : (B, d_B) \longrightarrow (A(M), d_M)$$

de la base, la KS extension image réciproque $m^{-1}(E)$ est isomorphe à la KS extension triviale de base B .

$$(B, d_B) \longrightarrow (B \otimes L(X), d_B \otimes d_A) \longrightarrow (L(X), d_A)$$

2) On vérifiera en IX.1.(8) que si F, E, M sont nilpotents, de cohomologie rationnelle de type fini, la fibration I.4.(6) est H.T ssi la fibration rationnelle localisée

$$F_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{j_{\mathbb{Q}}} E_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{Q}}} M_{\mathbb{Q}}$$

est triviale.

VI.1.(4) Il va de soi qu'une fibration peut être H.T sans être triviale. (cf. si nécessaire le fibré en sphère du fibré tangent à la sphère S^{2n+1} , $n \neq 0, 1, 3$).

VI.1.(5) Il résulte des définitions (VI.1.(1) et (2)) que toute fibration rationnelle homotopiquement triviale est cohomologiquement triviale :

$$(H.T) \implies (C.T)$$

Dans l'exemple suivant, nous vérifions que la réciproque de l'implication précédente est fausse.

VI.1.(6) Exemple :

D'après [H-S], il existe un et un seul type d'homotopie rationnelle simplement connexe X tel que

$$H^*(X, \mathbb{Q}) = H^*(S^3, \mathbb{Q}) \oplus H^*(S^2 \vee S^2, \mathbb{Q})$$

$$X \neq S_{\mathbb{Q}}^3 \times (S_{\mathbb{Q}}^2 \times S_{\mathbb{Q}}^2)$$

X a pour modèle minimal

$$(L(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, \dots), d)$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad dx_1 &= dx_2 = dx_3 = 0, & |x_1| &= |x_2| = 2, & |x_3| &= 3 \\ dy_1 &= x_1^2, & dy_2 &= x_2^2, & dy_3 &= x_1 x_2 \\ dz_1 &= x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_1 x_3 \\ dz_2 &= x_1 y_2 - x_2 y_3, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On peut interpréter X , comme la tour de Posnikov suivante,
dont les premiers invariants k_i sont donnés par

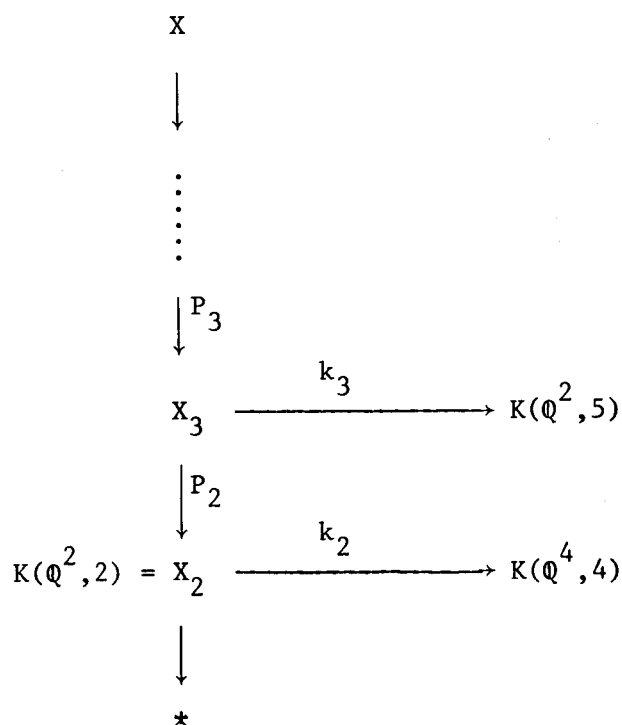
$$k_2 = (k_2^1, \dots, k_2^4) \quad k_2^i \in H^4(K(\mathbb{Q}^2, 2))$$

$$k_2^1 = 0, \quad k_2^2 = x_1^2, \quad k_2^3 = x_2^2, \quad k_2^4 = x_1 x_2$$

$$k_3 = (k_3^1, k_3^2) \quad k_3^i \in H^5(X_3, \mathbb{Q})$$

$$k_3^1 = x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_1 x_3$$

$$k_3^2 = x_1 y_2 - x_2 y_3$$



On vérifie facilement que

$$X_3 = S_{\mathbb{Q}}^3 \times (S^2 \vee S^2)_2$$

où $(S^2 \vee S^2)_2$ désigne le deuxième étage de la tour de Posnikov
de $(S^2 \vee S^2)_{\mathbb{Q}}$.

Alors,

$$X = \varprojlim X_i$$

et on pose

$$\pi = (\varprojlim p_i \circ p_{i-1} \circ \dots \circ p_3) \circ q$$

où $q : X_3 \rightarrow S_{\mathbb{Q}}^3$ désigne la projection naturelle.

L'application

$$\pi : X \longrightarrow S_{\mathbb{Q}}^3$$

est une fibration rationnelle, dont la fibre a pour modèle minimal le modèle minimal de $S^2 \vee S^2$, ce qui entraîne que

$$(*) \quad (S^2 \vee S^2)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{j} X \xrightarrow{\pi} S_{\mathbb{Q}}^3$$

est une fibration rationnelle où $j = \varprojlim j_i$ et

$$j_i : (S^2 \vee S^2)_i \longrightarrow X_i$$

Or, puisque

$$X \text{ et } S^3 \times (S^2 \vee S^2)$$

n'ont pas le même type d'homotopie et que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(X) & & \\
 \pi^* \nearrow & & \uparrow \text{Id} & & \searrow j^* \\
 H(S^3) & & & & H(S^2 \vee S^2) \\
 \downarrow i & & & & \uparrow p \\
 & H(S^3) \oplus H(S^2 \vee S^2) & & &
 \end{array}$$

(*) nous fournit un exemple de fibration rationnelle non homotopiquement triviale et cohomologiquement triviale.

VI.1.(7) De II.1.(3) (iii), il résulte que si la fibration de Serre

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$$

est T.N.C.Z. relativement à $\mathbb{k}$, il existe un isomorphisme de $\mathbb{k}$ -espace vectoriel rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & H^*(E, \mathbb{k}) & & \\ & \nearrow \pi^* & \uparrow \psi & \searrow i^* & \\ H^*(M, \mathbb{k}) & & & & H^*(F, \mathbb{k}) \\ & \searrow i & & \nearrow p & \\ & & H^*(M, \mathbb{k}) \oplus H^*(F, \mathbb{k}) & & \end{array}$$

ce qui entraîne que tout fibré cohomologiquement trivial est non totalement cohomologue à zéro

$$(C.T) \implies (N.T.C.Z.)$$

La réciproque de cette implication est fausse, comme le montrent les exemples suivants.

VI.1.(8) Exemple :

Considérons, le fibré universel

$$E_{SO(2n+1)} \longrightarrow B_{SO(2n+1)}$$

et le fibré associé de fibre type $S^{2n} = SO(2n+1)/SO(2n)$

$$(*) \quad S^{2n} \longrightarrow B_{SO(2n)} \longrightarrow B_{SO(2n+1)}$$

D'après II.2.(4) (*) est T.N.C.Z. or

$$H(B_{SO(2n)}) = S(p_1, \dots, p_{n-1}, e)$$

est une algèbre symétrique, qui ne peut, par conséquent, être isomorphe en tant qu'algèbre à l'a.g.c.

$$S(p_1, \dots, p_n) \otimes S(y) / (y^2)$$

VI.1.(9) Autres exemples :

Considérons un G -fibré principal, dont les classes caractéristiques ne sont pas toutes nulles, de groupe G compact connexe et de base M connexe par arcs. Soit T un tore maximal de G .

Le fibré associé de fibre type G/T et d'espace total

$$P/T = P \times_G G/T$$

est T.N.C.Z. (cf. Appendice ou II.3.(1)) et d'après [G et al] th. X et XI chap. XII, ce fibré n'est jamais cohomologiquement trivial.

VI.1.(10) Proposition.-

Soit un fibré vectoriel

$$\eta : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow E \longrightarrow M$$

et $p_n(\eta)$ sa n -ième classe de Pontrjagin

$$\eta_S : S^{2n} \longrightarrow E_S \longrightarrow M$$

son fibré en sphères associé. On suppose que η_S est T.N.C.Z.

alors

$$(p_n(\eta) = 0) \iff (\eta_S \text{ H.T.})$$

VI.1.(11) Preuve : Supposons que η_S est T.N.C.Z. alors

$$H(E_S) \text{ et } H(M) \otimes H(S^{2n})$$

sont isomorphes en tant que e.v.g. et posons

$$H(S^{2n}) = S(y)/(y^2)$$

Dans la structure d'a.g.c. de $H(E_S)$, on a la relation

$$\begin{aligned} (1 \otimes y)^2 &= 1 \otimes y^2 + \alpha \otimes y + \beta \otimes 1 \\ &= (1 \otimes y + \frac{\alpha}{2} \otimes 1)^2 - (\frac{\alpha^2}{4} \otimes 1 - \beta \otimes 1) \end{aligned}$$

où $\alpha, \beta \in H(B)$.

Il est donc clair que l'obstruction à ce que la structure de $H(M)$ -a.g.c. de $H(E_S)$ coïncide avec celle de $H(M) \otimes H(S^{2n})$ est que

$$\gamma = 0$$

lorsque l'on pose

$$\pi^*(\gamma) = \frac{\alpha^2}{4} \otimes 1 - \beta \otimes 1.$$

La classe γ étant bien définie, une fois choisi le générateur y , dans $H(E_S)$ pour interpréter la classe γ considérons le fibré tangent aux fibres de η_S .

$$\xi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow V \longrightarrow E_S$$

alors,

$$\xi \Big|_{S_x^{2n}} = T(S_x^{2n})$$

et

$$\xi \otimes (E_S \times \mathbb{R}) = \pi^* \eta$$

Si on considère la classe d'Euler $e(\xi)$ du fibré ξ alors

$$j^* e(\xi) \in H^{2n}(S^{2n})$$

Si on choisit pour générateur $y = j^* e(\xi)$, alors

$$\begin{aligned} (1 \otimes y)^2 &= (e(\xi))^2 = p_n(\xi) \\ &= p_n(\xi \otimes E_S \times \mathbb{R}) \\ &= \pi^* p_n(\eta) \end{aligned}$$

puisque π^* est injective on obtient

$$\gamma = p_n(\eta)$$

Ce qui précède démontre que la n -ième classe de Pontrjagin de η est l'obstruction à ce que

$$(\eta_S \text{ T.N.C.Z.}) \implies (\eta_S \text{ C.T})$$

Pour terminer la démonstration de VI.1.(10), il reste à montrer que

$$(\eta_S \text{ C.T}) \iff (\eta_S \text{ H.T})$$

ce qui sera démontré en VI.3.(3).

VI-2 - CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES.

VI.2.(1) Proposition

Pour toute fibration rationnelle

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (\text{I.4.(6)})$$

telle que

$$H^*(M, \mathbb{k}) \quad \text{ou} \quad H^*(F, \mathbb{k})$$

sont de type fini, une condition nécessaire et suffisante pour que I.4.(6) soit T.N.C.Z. (resp. C.T) est qu'il existe un homomorphisme d'e.v.g. (resp. d'a.g.c.)

$$\sigma : H^*(F, \mathbb{k}) \longrightarrow H^*(E, \mathbb{k})$$

tel que

$$j^* \circ \sigma = \text{Id}_{H^*(F, \mathbb{k})}$$

VI.2.(2) Proposition

Pour toute fibration rationnelle

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (\text{I.4.(6)})$$

une condition nécessaire et suffisante pour que I.4.(6) soit H.T est qu'il existe un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\sigma : (L(X), d_A) \longrightarrow (A(M) \otimes L(X), d)$$

tel que

$$\rho \circ \sigma = \text{Id}_{L(X)}$$

ceci avec les notations de VI.1.(2).

VI.2.(3) Preuve de VI.2.(1) ([Se] p. 473).

i) La condition est évidemment nécessaire.

ii) Etant donné une section linéaire σ de j^* , alors

$$\varnothing : H^*(M, \mathbb{k}) \otimes H^*(F, \mathbb{k}) \longrightarrow H^*(E, \mathbb{k})$$

définie par

$$\psi(\beta \otimes \alpha) = \pi^*(\beta) \cdot \sigma(\alpha)$$

est un isomorphisme linéaire. Dans le cas particulier où σ est un homomorphisme d'a.g.c., ψ est un isomorphisme d'a.g.c.

VI.2.(4) Preuve de VI.2.(2)

- i) La condition est évidemment nécessaire.
- ii) Supposons qu'il existe un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\sigma : (L(X), d_A) \longrightarrow (A(M) \otimes L(X), d)$$

tel que

$$\rho \circ \sigma = \text{Id}_{L(X)}$$

Puisque nous supposons toujours que

$$H^0(M, \mathbb{k}) = \mathbb{k}$$

posons $B^i = A^i(M) \quad i \geq 2$

$$B^0 = \mathbb{k}$$

$$B^1 \oplus d(A^0(M)) = A^1(M)$$

alors d'après [H-1-] prop. 1.11, il existe sur la KS extension minimale

$$(A(M), d_M) \xrightarrow{1} (A(M) \otimes L(X), d) \xrightarrow{\rho} (L(X), d_A)$$

une structure KS minimale

$$((e_\alpha)_{\alpha \in K}, f)$$

telle que

$$d'e_\alpha \in B \otimes L(X_{<\alpha})$$

lorsque l'on pose $d' = f^{-1} d \circ f$.

Or puisque $L(X)$ est connexe on a :

$$\sigma : (L(X), d_A) \longrightarrow (B \otimes L(X), d')$$

et on définit

$$f : B \otimes L(X) \longrightarrow B \otimes L(X)$$

en posant $f(b \otimes 1) = b \otimes 1$

$$f(1 \otimes e_\alpha) = \sigma(e_\alpha) = 1 \otimes e_\alpha + \phi_\alpha$$

où $\phi_\alpha \in B^+ \otimes L(X_{<\alpha})$ (puisque $|e_\alpha| = |\phi_\alpha|$ et que $\rho(\phi_\alpha) = 0$).

Alors le lemme technique IV.3.(1) entraîne que f est isomorphisme d'a.d.g.c. et f définit un isomorphisme

$$\hat{f} : (A(M) \otimes L(X), d_M \otimes d_A) \longrightarrow (A(M) \otimes L(X), d')$$

tel que $\hat{f} \circ 1 = 1$ et $\rho \circ \hat{f} = \rho$

Ceci termine la preuve de VI.2.(2).

VI-3 - APPLICATIONS, EXEMPLES.

VI.3.(1) Proposition

Les notions de fibrations H.T, C.T, T.N.C.Z. sont invariantes par "pull back".

VI.3.(2) Proposition

Toute fibration rationnelle T.N.C.Z. dont la cohomologie de la fibre est libre est H.T.

VI.3.(3) Proposition

Toute fibration rationnelle C.T dont la fibre est un espace de type f et de $\chi_\pi = 0$ est H.T.

VI.3.(4) Exemples

1 - Un fibré orienté en sphères impaires dont la classe d'Euler est nulle est homotopiquement trivial.

2 - Un G -fibré principal dont les classes caractéristiques sont nulles est homotopiquement trivial.

3 - Toute fibration C.T, de fibre une grassmannienne complexe ou quaternionique ou un produit de sphères paires est H.T.

4 - Si T est un tore maximal du groupe de Lie G , alors toute fibration C.T de fibre G/T est H.T.

5 - Si X est un espace de type f et de $\chi_\pi = 0$ alors le fibré de Borel

$$X \longrightarrow X_G \longrightarrow B_G$$

est H.T si il est C.T : (i.e.). L'opération du groupe G sur X est rationnellement triviale si le fibré de Borel est C.T.

VI.3.(5) Preuve de VI.3.(1)

On utilise avec les bonnes hypothèses les propositions VI.2.(1) et VI.2.(2).

VI.3.(6) Preuve de VI.3.(2)

On considère la KS extension associée

$$(A(M), d_M) \xrightarrow{1} (A(M) \otimes L(X), d) \xrightarrow{\rho} (L(X), d_A)$$

Puisque $H^*(F, \mathbb{k})$ est libre, on peut supposer que

$$H^*(F, \mathbb{k}) = L(X) \quad \text{et} \quad d_A = 0$$

Soit $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ une base homogène de X , puisque ρ^* est surjectif, il existe un cocycle C_α , pour tout $\alpha \in K$, tel que

$$\rho^*([C_\alpha]) = e_\alpha$$

On pose $\sigma(e_\alpha) = C_\alpha$, σ se prolonge de manière unique en un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\sigma : (L(X), 0) \longrightarrow (A(M) \otimes L(X), d)$$

tels que $\rho \circ \sigma = \text{Id}$. D'après VI.2.(2), I.4.(6) est homotopiquement triviale.

VI.3.(7) Preuve de VI.3.(3)

Considérons un KS modèle minimal de la fibration rationnelle

I.4.(6)

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$$

notée $E : (B, d_B) \longrightarrow (B \otimes L(X), d) \longrightarrow (L(X), d_A)$

avec $L(X) = \Lambda P \otimes SQ$, $d_A Q = 0$, $d_A P \subset S(Q)$

$$\dim P = \dim Q$$

et d'après III.1.(6), $H(L(X), d_A) = S(Q) / d_A P \cdot S(Q)$

D'après VI.2.(1), il existe un homomorphisme d'a.g.c.

$$\sigma : H(L(X), d_A) \longrightarrow H(B \otimes L(X), d)$$

tel que $\rho \circ \sigma = \text{Id}_{H(L(X), d_A)}$.

Soit $y \in Q$, alors il existe α_y tel que

$$\sigma([y]_A) = [\alpha_y]$$

et $\rho^*([\alpha_y]) = y$

avec $\alpha_y \in B \otimes L(X) \cap \ker d$, d'où

$$|\rho(\alpha_y)| \text{ est pair}$$

$$d_A \rho(\alpha_y) = 0$$

Par suite

$$\rho(\alpha_y) = \alpha_y^0 + \alpha_y^2 + \dots + \alpha_y^{2p}$$

$$\alpha_y^{2i} \in (SQ \otimes \Lambda^{2i} P) \cap \ker d_A$$

$$\text{d'où } \rho(\alpha_y) = \alpha_y^0 + d_A \beta_y^{++} \quad \text{avec } \beta_y^{++} \in SQ \otimes \Lambda^{\geq 3} P$$

$$\text{et } \alpha_y^0 = y + d \cdot \theta_y \quad \text{avec } \theta_y \in SQ \otimes \Lambda^1 P$$

$$\text{finalement } \rho(\alpha_y) = y + d_A \beta_y^+, \quad \beta_y^+ \in SQ \otimes \Lambda^{\geq 1} P$$

$$\begin{aligned} \text{et } \alpha_y &= y + d_A \beta_y^+ + \Omega_y', \quad \Omega_y' \in B^+ \otimes L(X) \\ &= y + d\beta_y^+ + \Omega_y, \quad \Omega_y \in B^+ \otimes L(X) \end{aligned}$$

$$\text{On pose } \tau(y) = \alpha_y - d\beta_y^+$$

alors

$$\begin{aligned}\rho \tau(y) &= \rho(\alpha_y) - \rho d \beta_y^+ \\ &= y + d_A \beta_y^+ - d_A \rho \beta_y^+ = y.\end{aligned}$$

Ceci définit un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\tau : (S(Q), 0) \longrightarrow (B \otimes L(X), d)$$

tel que

$$\begin{aligned}\tau^* &= \sigma^* \big|_{SQ} \\ \rho \circ \tau &= \text{Id}_{SQ}\end{aligned}$$

D'autre part des formules

$$[\tau(d_A x)] = 0 \quad \text{et} \quad \rho(\tau(d_A x)) = d_A x$$

on déduit que

$$\tau(d_A x) = d_A x + \Omega_x^+ = d\beta_x$$

avec

$$\Omega_x^+ \in B^+ \otimes L(X)$$

$$\beta_x \in B \otimes L(X)$$

or

$$\rho(\beta_x) = x + d_A \gamma_x \quad \text{avec} \quad \gamma_x \in SQ \otimes \Lambda^2 P$$

d'où

$$\begin{aligned}\beta_x &= x + d_A \gamma_x + \hat{\Omega}_x^+ & \hat{\Omega}_x^+ &\in B^+ \otimes L(X) \\ &= x + d \gamma_x + \hat{\Omega}_x^+ & \hat{\Omega}_x^+ &\in B^+ \otimes L(X)\end{aligned}$$

Par suite

$$d\beta_x = dx + d \hat{\Omega}_x^+ = d_A x + \Omega_x^+$$

Ce qui implique que

$$\tau(d_A x) = dx + d \hat{\Omega}_x^+$$

On pose alors

$$\tau(x) = x + \hat{\Omega}_x^+$$

ce qui définit

$$\tau : (L(X), d_A) \longrightarrow (B \otimes L(X), d)$$

tel que

$$\rho \circ \tau = \text{Id}_{L(X)}$$

D'après VI.2.(2), la fibration I.4.(6) est H.T.

VI-4 - ∇-FIBRATIONS ET FIBRATIONS F.H.T.

VI.4.(1) Définitions

a) Une fibration rationnelle

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad \text{I.4.(6)}$$

est une σ-fibration, s'il existe un modèle KS minimal de I.4.(6)

$$(B, d_B) \xrightarrow{i_C} (C, d_C) \xrightarrow{\rho_C} (A, d_A)$$

et un morphisme d'a.d.g.c. $\sigma : (C, d_C) \longrightarrow (B, d_B)$ tel que $\sigma \circ i_C = \text{Id}_B$.

b) Une fibration rationnelle I.4.(6) est faiblement homotopiquement triviale (F.H.T.) si le connectant $\partial^\#$ de la longue suite de ψ -homotopie est identiquement nul.

VI.4.(2) Remarques :

1) Si I.4.(6) admet une section alors I.4.(6) est une σ -fibration mais la réciproque est fausse comme on le voit dans l'exemple (1).

2) Si I.4.(6) est une σ -fibration,

$$\pi^{\#} : \pi_{\psi}^i(M) \longrightarrow \pi_{\psi}^i(E)$$

est surjective, par suite $\partial^{\#} \equiv 0$ et I.4.(6) est F.H.T. La réciproque est fausse comme on le voit dans l'exemple (2).

3) Si, F, E, M sont des espaces simples dont la cohomologie est de type fini la condition F.H.T. équivaut à dire que les suites exactes courtes, $i \geq 1$.

$$0 \longrightarrow \pi_i(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_i(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_i(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

sont exactes.

4) I.4.(6) est F.H.T. ssi

$$\pi^{\#} : \pi_{\psi}^i(M) \longrightarrow \pi_{\psi}^i(E)$$

est injectif ou ssi

$$j^{\#} : \pi_{\psi}^i(E) \longrightarrow \pi_{\psi}^i(F)$$

est surjectif.

5) Toute fibration H.T est une σ -fibration mais la réciproque est fausse (cf. ex. 3).

6) Pour toute σ -fibration, π^* est injectif mais la réciproque est fausse (cf. ex. 4).

VI.4.(3) Exemples :

1) Considérons le fibré des deux-repères orthonormés directs sur S^5

$$(*) \quad S^4 \longrightarrow SO(6)/SO(4) \longrightarrow S^5$$

Il admet pour modèle KS minimal

$$(\Lambda b_5, 0) \longrightarrow (\Lambda b_5 \otimes \Lambda(x_7, y_4), d) \longrightarrow (\Lambda(x_7, y_4), d_A)$$

de III.3.(2) il résulte que (*) est HT, donc une σ -fibration.

Pourtant (*) n'admet pas de section puisque d'après le théorème classique de Adams il n'existe pas $2(= \rho(6))$, champs de vecteurs orthonormés sur S^5 (cf. Husemoller - Fibre Bundle Th. 8.2. chap. 11).

2) Considérons la fibration principale (*)

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{Q}, 3) & & \\ \downarrow & & \\ S^2 & & \\ \downarrow & & \\ K(\mathbb{Q}, 2) & \longrightarrow & K(\mathbb{Q}, 4) \end{array}$$

Son modèle KS minimal est donné par

$$(S(b_2), 0) \longrightarrow (S(b_2) \otimes \Lambda x_3, d) \longrightarrow (\Lambda x_3, 0)$$

avec $dx_3 = b_2^2$. Alors (*) est F.H.T. mais n'est pas une σ -fibration, en effet nécessairement

$$\sigma(b_2) = b_2$$

et $\sigma(x_3) = 0$

d'où $\sigma(dx_3) = 0 = b_2^2$, ce qui ne se peut pas !

3) Considérons la fibration principale

$$(*) \quad K(\mathbb{Q}, 2) \times K(\mathbb{Q}, 3) \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} K(\mathbb{Q}, 2)$$

où $E = (K(\mathbb{Q}, 2) \vee K(\mathbb{Q}, 2))_3$ est le troisième étage de la tour de Posnikov de $K(\mathbb{Q}, 2) \vee K(\mathbb{Q}, 2)$. Son modèle minimal est de la forme

$$(S(b_2), 0) \rightarrow (S(b_2) \otimes L(y_2, x_3), d) \rightarrow (L(y_2, x_3), \bar{d})$$

avec

$$dy_2 = 0, \quad dx_3 = b_2 y_2$$

(*) n'est pas HT pourtant (*) est une σ -fibration

$$(\sigma(b_2) = b_2, \sigma(y_2) = \sigma(x_3) = 0).$$

4) Considérons la fibration rationnelle

$$(*) \quad S^2 \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^2$$

réalisation géométrique du modèle KS minimal

$$L(b_2, b_5) \rightarrow (L(b_2, b_5) \otimes L(y_2, x_3), d) \rightarrow (L(y_2, x_3), \bar{d})$$

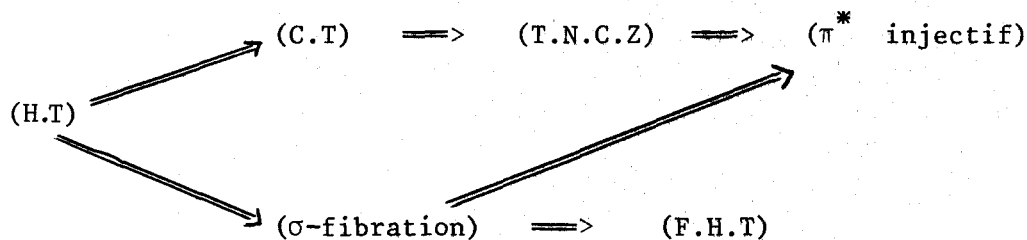
avec

$$\begin{aligned} db_2 &= 0 & db_5 &= b_2^3 \\ dy_2 &= 0 & dx_3 &= y_2^2 + b_2^2. \end{aligned}$$

Alors il est clair que Π^* est injectif mais que (*) n'est pas une σ -fibration.

VI-5 - TABLEAU COMPARATIF.

VI.5.(1) Des sections VI.1. et VI.4., on déduit le schéma suivant, où les implications réciproques sont toutes fausses



VI.5.(2) Remarques :

1) Si on considère l'unique étage de la tour de Posnikov du rationalisé de S^2

$$K(\mathbb{Q}, 3) \xrightarrow{j} S_{\mathbb{Q}}^2 \longrightarrow K(\mathbb{Q}, 2)$$

on obtient un exemple de fibration F.H.T dont le π^* n'est pas injectif.

2) Conjecture : il existe une fibration C.T qui n'est pas F.H.T .

Les propositions VI.6.(5) et VI.6.(6) énoncent des conditions suffisantes pour qu'une fibration C.T soit F.H.T .

3) L'étude des relations entre les différents degré de trivialité H.T, C.T, F.H.T, sera complétée en VII.4.(8).

VI-6 - COMPLEMENTS.

VI.6.(1) Proposition.

Etant donné une fibration rationnelle

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (I.4.(6))$$

et (B, d_B) un modèle connexe de M . Une condition nécessaire et suffisante pour que I.4.(6) soit une σ -fibration est qu'il existe un KS modèle minimal.

$$(B, d_B) \xrightarrow{1} (B \otimes L(X), d) \xrightarrow{\rho} (L(X), d_A)$$

tel que

$$\forall x \in X, \quad dx - d_A x \in B^+ \otimes L^+(X).$$

VI.6.(2) Proposition.

Etant donné une fibration rationnelle

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (I.4.(6))$$

et $(L(Z), d_B)$ un modèle minimal de M . Une condition nécessaire et suffisante pour que I.4.(6) soit F.H.T est qu'il existe un KS modèle minimal

$$(L(Z), d_B) \xrightarrow{1} (L(Z) \otimes L(X), d) \xrightarrow{\rho} (L(X), d_A)$$

tel que

$$\forall x \in X, \quad dx - d_A x \in (L^+(Z) \cdot L^+(Z)) \otimes (L^+(Z) \otimes L^+(X)).$$

VI.6.(3) Corollaire.

Les notions de fibrations F.H.T et de σ -fibrations sont invariantes par "pull back".

VI.6.(4) Corollaire.

Toute σ -fibration vérifiant, M est ℓ -connexe et $\Pi_{\Psi}^i(F) = 0$
 $i < r$ $i \geq r+\ell$, est H.T. .

VI.6.(5) Proposition.

Toute fibration rationnelle (I.4.(6)) vérifiant

1) $\dim H(F, k) < +\infty$

2) M est un espace coformel dont la cohomologie sphérique

est nulle en dimension $2p$, $0 \leq 2p < \sup\{2k+1 \mid \Pi_{\Psi}^{2k+1}(F) \neq 0\}$

est F.H.T.

VI.6.(6) Proposition.

Toute fibration rationnelle pure et C.T est F.H.T.

VI.6.(7) Remarques.

1) Un espace M est coformel si son modèle de Quillen-Lemaire [Le] est une conséquence de la structure d'algèbre de Lie graduée de son homotopie rationnelle (ex. tout co-H espace est coformel). Il résulte des définitions que le modèle minimal de M $(L(Z), d)$ a une différentielle quadratique $(dZ \subset L^2(Z))$.

2) Dans le cas où F est de type f et $\chi_{\Pi} = 0$, d'après VI.3.(3) et III.3.(1), on obtient

$$(CT) \implies (HT) \implies (FHT)$$

d'où en particulier la proposition VI.6.(5)

VI.6.(8) Démonstration de VI.6.(1).

a) Soit s un homomorphisme d'a.d.g.c. tel que $s \circ i = \text{Id}_B$.

$$s : (B \otimes L(X), d) \rightarrow (B, d_B)$$

et $(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ une base KS minimale alors

$$de_1 = b_1 \in B$$

$$\text{et} \quad s(de_1) = d_B s(e_1) = b_1$$

$$\text{d'où} \quad d(e_1 - s(e_1)) = 0.$$

Posons

$$\psi(e_i) = e_i \quad i \neq 1$$

$$\psi(e_1) = e_1 - s(e_1)$$

et d'après le lemme technique, on obtient un KS modèle minimal de

I.4.(6)

$$(B, d_B) \xrightarrow{1} (B \otimes L(X), d_1) \xrightarrow{\rho} (L(X), d_A)$$

$$\text{avec} \quad d_1(e_1) = 0.$$

On pose

$$s_1 = s \circ \psi$$

$$s_1(e_1) = 0 \quad \text{et} \quad s_1(e_i) = s(e_i) \quad i \neq 1$$

et une induction sur l'ordre des générateurs permet de conclure.

b) Réciproquement, si

$$de_i = d_A e_i + \Omega_i, \quad \Omega_i \in B^+ \otimes L^+(X)$$

$$\text{on pose} \quad \sigma|_B = \text{Id}_B, \quad \sigma|_X = 0$$

alors

$$\sigma(de_i) = \sigma(\Omega_i) = 0 = d\sigma(e_i).$$

VI.6.(9) Démonstration de VI.6.(2), VI.6.(3) et (4).

a) Ceci résulte de la définition de $\partial^\#$ (I.8.(1)) et de la remarque I.6.(3).

b) VI.6.(3) résulte directement du calcul du KS modèle d'un "pull back" d'une fibration rationnelle $[H-1]$, ou en considérant la longue suite exacte de ψ -homotopie.

c) VI.6.(4) est trivial.

VI.6.(10) Preuve de VI.6.(5).

Soit $(L(Z), d_B)$ un modèle KS minimal de M et E un KS modèle minimal de I.4.(6)

$$E : (L(Z), d_B) \xrightarrow{l} (L(Z) \otimes L(X), d) \xrightarrow{p} (L(X), d_A).$$

Puisque M est coformel

$$d_B Z \subset \Lambda^2 Z$$

et puisque $\dim H(F) < +\infty$, d'après $[H-2]$ th. 5.16

$\partial^\#(X^{\text{pair}}) = 0$. Il nous reste donc à montrer que $\partial^\#(X^{\text{impair}}) = 0$.

Supposons qu'il existe $x \in P = X^{\text{impair}}$ tel que

$$\partial^\# x = b.$$

Alors

$$dx \in (L^0(Z) \otimes L(X)) \oplus (L^1(Z) \otimes L(X)) \oplus (L^{\geq 2}(Z) \otimes L(X))$$

$$dx = d_A x + (b + \phi) + \Omega$$

avec

$$b \in L^1(Z) \quad \phi \in L^1(Z) \otimes L^+(X).$$

On peut supposer que $x = e_{\alpha_0}$ où α_0 est le plus petit

indice tel que $\partial^\# e_\alpha \neq 0$, $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ désignant une base KS de E .

Comme,

$$d \circ dx = 0 = d(d_A x) + db + d\phi + d\Omega$$

avec $d(d_A x) \in (\mathbb{k} \otimes L^+(X)) \otimes L^{\geq 2}(Z) \otimes L^+(X)$

$$db \in L^2(Z)$$

$$d\phi \in L^{\geq 2}(Z) \otimes L^+(X)$$

$$d\Omega \in L^{\geq 3}(Z) \otimes L(X)$$

nous avons

$$db = 0$$

c'est-à-dire que $[b]$ habite dans la cohomologie sphérique de dimension $2p$ avec

$$4 \leq 2p \leq (\sup |x_i|) + 1$$

lorsque l'on note $(x_i)_{i \in K}$, les éléments de $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ de degré impair.

D'après notre hypothèse, $[b] = 0$ ce qui entraîne que $b = 0$, puisque b est indécomposable. Finalement $\partial^\# P = 0$.

VI.6.(11) Démonstration de VI.6.(6).

Considérons la KS extension minimale

$$I.8.(2) \quad E : (L(Z), d_B) \xrightarrow{1} (L(Z) \otimes L(X), d) \xrightarrow{\rho} (L(X), d_A)$$

d'après III.2.(1), on peut supposer que :

$$dQ = 0 \quad dP \subset L(Z) \otimes SQ$$

ce qui entraîne en particulier

$$\partial^{\#} Q = 0$$

$$dP \subset (L(Z))^{\text{pair}} \otimes SQ.$$

Si on considère une base linéaire homogène de SQ ,

$$\phi_0 = 1, \phi_1, \dots, \phi_\alpha, \dots$$

et $x_1, \dots, x_i, \dots$, $i \in I$, les éléments de degré impair d'une base KS minimale pure de E , nous obtenons les relations

$$dx_i = \sum_{\alpha} b_i^{\alpha} \otimes \phi_{\alpha}$$

avec

$$b_i^{\alpha} \in (L(Z))^{\text{pair}}.$$

Par suite de la relation

$$d \circ d(x_i) = 0$$

nous déduisons que $db_{\alpha}^i = 0$

ceci pour tout i et tout α . En particulier,

$$\begin{cases} \partial^{\#} x_i = b_i^0 \\ db_i^0 = 0 \end{cases}.$$

On suppose que

$$\{i \in I, \partial^{\#} x_i \neq 0\} \neq \emptyset$$

et on pose

$$i_0 = \inf\{i \in I \mid \partial^{\#} x_i \neq 0\}$$

On considère alors une base KS minimale de $(L(Z), d_B)$

$$(z_v)_{v \in V}$$

telle que

$$(*) \quad z_{v_0} = -b_{i_0}^0.$$

On considère l'idéal $J = (L(v < v_0)).L(Z) \otimes L(X)$, engendré par la sous-algèbre $L(v < v_0)$ dans $L(Z) \otimes L(X)$. J est stable par d et notons

$$f : L(Z) \otimes L(X) \rightarrow L(Z) \otimes L(X)/J$$

la projection canonique, $\bar{d}$ la différentielle induite par d sur $L(Z) \otimes L(X)/J$.

En tant qu'espace vectoriel gradué différentiel l'a.d.g.c. $(L(Z) \otimes L(X)/J, \bar{d})$ s'identifie à $(L(z_{v_0}, z_{v_0+1}, \dots, \dots) \otimes L(X), \bar{d})$.

Alors, on vérifie que

$$E_0 : (L(v \geq v_0), \bar{d}_B) \xrightarrow{l_0} (L(v \geq v_0) \otimes L(X), \bar{d}) \xrightarrow{\rho_0} (L(X), d_A)$$

est une KS extension minimale pure et que

$$(*, *) \quad \bar{d}x_i = d_A x_i - z_{v_0}.$$

D'autre part, nous avons le diagramme commutatif, dans la catégorie des a.d.g.c.

$$\begin{array}{ccc} L(X), d_A & \xlongequal{\quad} & L(X), d_A \\ \uparrow \rho & & \uparrow \rho_0 \\ (L(Z) \otimes L(X), d) & \xrightarrow{\bar{f}} & (L(v \geq v_0) \otimes L(X), \bar{d}) \\ \uparrow l & & \uparrow l_0 \\ (L(Z), d_B) & \xrightarrow{f} & (L(v \geq v_1), \bar{d}_B) \end{array}$$

Comme la fibration

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$$

est cohomologiquement triviale, il existe un homomorphisme d'a.g.c. (VI.2.(1))

$$\sigma : H^*(L(X), d_A) \longrightarrow H^*(L(Z) \otimes L(X), d) .$$

En posant

$$\psi(\beta \circ \alpha) = i_0^*(\beta) \cdot \bar{f}^* \circ \sigma(\alpha) \quad (\text{cf. VI.2.4})$$

on obtient un isomorphisme d'a.g.c. ψ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & H^*(L(v \geq v_0) \otimes L(X), \bar{d}) & & \\ & \nearrow i_0^* & \uparrow \psi & \searrow \rho_0^* & \\ H^*(L(v \geq v_0), \bar{d}) & & & & H^*(L(X), d_A) \\ & \searrow i & & \nearrow p & \\ & & H^*(L(v \geq v_0), \bar{d}) \otimes H^*(L(X), d_A) & & \end{array}$$

Comme

$$[z_{v_0}] = [d_A x_i] \quad (*, *)$$

dans $H^*(L(v \geq v_0) \otimes L(X), \bar{d})$, nous obtenons la relation

$$(*, *, *) \quad \psi^{-1}([z_{v_0}]) = \psi^{-1}([d_A x_i])$$

dans l'a.g.c. $H^*(L(v \geq v_0)) \otimes H^*(L(X), d_A)$.

Or $d_A x_{i_0} \in S(y_1, \dots, y_\beta)$

avec

$$|y_1| \leq |y_2| \leq \dots \leq |y_\beta| < |x_{i_0}|$$

lorsque l'on désigne par y_j les éléments de degré pair de la base KS minimale pure de E choisie, en début de démonstration.

Alors pour tout $j \in \{1, \dots, \beta\}$

$$\sigma([y_j]_A) = [\phi_j]_{B \otimes A}$$

où

$$\phi_j \in (L(Z) \otimes L(X)) \cap \ker d$$

tel que

$$\rho^*([\phi_j]_{B \otimes A}) = [y_j]_A$$

d'où

$$\rho(\phi_j) = y_j + d_A \theta_j, \quad \theta_j \in SQ \otimes \Lambda P^{\text{impair}}$$

et

$$\phi_j = y_j + d_A \theta_j + \psi_j, \quad \psi_j \in B^+ \otimes L(X).$$

Puisque,

$$|\phi_j| < |x_{i_0}|$$

$$\psi_j \in L^+(z_1, \dots, z_{v_0-1}) \otimes L(X)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{f}^* \circ \sigma([y_j]_A) &= \bar{f}^*([y_j + d_A \theta_j + \psi_j]_{B \otimes A}) \\ &= \bar{f}^*([y_j]_{B \otimes A}) + \bar{f}^*([d_A \theta_j + \psi_j]_{B \otimes A}) \\ &= [y_j]_{\bar{B} \otimes A} + [d_A \theta_j]_{\bar{B} \otimes A}. \end{aligned}$$

Or, dans $\bar{B} \otimes A = L(v \geq v_0) \otimes L(X)$, on a nécessairement

$d_A \theta_j = \bar{d} \theta_j$ ce qui entraîne que pour tout $j \in \{1, \dots, \beta\}$

$$\psi([y_j]) = [y_j]$$

et donc que

$$\psi^{-1}([d_A x_i]) = [d_A x_i] = 0$$

(car ψ^{-1} est un homomorphisme d'a.g.c.) par suite,

$$[z_{\nu_o}] = 0 \quad (\text{d'après } *, *, *)$$

et

$$0 = b_{i_o} = z_{\nu_o} = \partial^{\#} x_{i_o} \quad (*)$$

puisque z_{ν_o} est indécomposable.

Ceci contredit l'hypothèse

$$\{i \in I, \quad \partial^{\#} x_i \neq 0\} \neq \emptyset$$

et termine la démonstration de VI.6.(6).

CHAPITRE VII

LE MODELE D'EILENBERG-MOORE D'UN MORPHISME D'A.D.G.C.

VII-1 - E.M. ALGEBRES.

VII.1.(1) Soient (B, d_B) une a.d.g.c.

$$B = \bigoplus_{i \geq 0} B^i$$

et $Y = \bigoplus_{j \geq 0} Y^j$ un espace vectoriel gradué

$(B \otimes L(Y), D)$ une a.d.g.c.

On suppose qu'il existe sur Y une deuxième graduation

$$Y = \bigoplus_{k \geq 0} Y_k$$

d'où

$$Y = \bigoplus_{\substack{j \geq 0 \\ k \geq 0}} Y_k^j$$

$j = \text{degré}, \quad y \in Y^j, \quad |y| = j.$

$k = \text{degré filtrant}, \quad y \in Y_k, \quad ||y|| = k.$

On définit une bigraduation sur $B \otimes L(Y)$ en posant :

$$(B \otimes L(Y))^{-k, n} = (B \otimes (L(Y))_k)^{n-k}$$

$$L(Y) = \bigoplus_{k \geq 0} (L(Y))_k.$$

On définit une filtration, (E.M. filtration) en posant

$$\begin{cases} F_k = F^{-k} = B \otimes (L(Y))_{\leq k} = B \otimes \left(\bigoplus_{0 \leq i \leq k} (L(Y))_i \right) \\ F_{-1} = F^{+1} = 0 \end{cases}$$

$$0 \subset F_0 = B \otimes L(Y_0) \subset F_1 \subset \dots \subset F_p \subset \dots \subset B \otimes L(Y)$$

VII.1.(2) Nous dirons que $D|_Y$ baisse strictement la filtration si pour tout $p \geq 0$

$$D(Y_p) \subset F_{p-1}.$$

Dans ce cas, nous écrirons

$$D = D_0 + D_1 + D_2 + \dots$$

où

$$D_0 = d_B \otimes 1$$

D_i une application B-linéaire telle que

pour tout $p \geq 0$,
$$D_i(Y_p) \subset B \otimes (L(Y))_{p-i}.$$

VII.1.(3) L'a.d.g.c. $(B \otimes L(Y), D)$, munie d'une E.M. filtration (F_p) telle $D|_Y$ baisse strictement la filtration est appelée une E.M. algèbre. Dans le cas particulier où $B = k$ une E.M. algèbre est une algèbre libre filtrée.

Pour toute E.M. algèbre, on considère la suite spectrale,

$$\begin{aligned} E_0^{-p,q} &= F^{-p}(B \otimes L(Y))^{-p+q} / F^{-p+1}(B \otimes L(Y))^{-p+q} \\ &= (B \otimes (L(Y))_p)^{-p+q} = (B \otimes L(Y))^{-p,q} \end{aligned}$$

et

$$d_0 = D_0 = d_B.$$

$$\begin{cases} E_1^{-p,q} = (H(B) \otimes (L(Y))_p)^{-p+q} \\ d_1 = D_1^* \text{ est de bidegré } (1,0) \end{cases}$$

ce qui induit une bigraduation sur E_2

$$E_2^{-p,q} = (E_2)_p^q = H_p^{q-p}(H(B) \otimes L(Y), D_1^*)$$

VII.1.(4) Lemme.-

Pour toute E.M. algèbre les conditions suivantes sont équivalentes

- i) $E_2^{-p,q} = 0$ si $p > 0$
- ii) Pour tout entier $k > 0$, et tout $\phi \in \ker D \cap F_k$, il existe $w \in F_{k+1}$ tel que

$$\phi - Dw \in F_0.$$

De plus, si (i) ou (ii) est vérifiée, on obtient :

$$E_2^{0,q} = H^q(B \otimes L(Y), D)$$

VII.1.(5) Preuve :

a) Soit $\phi \in F_k$, $\phi = \phi_k + \phi_{k-1} + \dots + \phi_0$
avec $\phi_i \in B \otimes (L(Y))_i$. La relation $D\phi = 0$ entraîne en particulier

$$\begin{cases} D_0 \phi_k = 0 \\ D_1 \phi_k + D_0 \phi_{k-1} = 0 \end{cases}$$

d'où

$$[\phi_k]_1 \in E_1, \quad D_1^*([\phi_k]_1) = 0.$$

Par suite (i) entraîne que

$$[\Phi_k]_1 = D_1^* \Psi_{k+1}$$

avec $\Psi_{k+1} \in H(B) \otimes (L(Y))_{k+1}$

et $\Phi_k = D_1 w_{k+1} + D_0 \Omega_k$

avec $w_{k+1} \in F_{k+1} \cap \ker D_0$, $[w_{k+1}] = \Psi_{k+1}$

$\Omega_k \in B \otimes (L(Y))_k$

d'où $\Phi = D(w_{k+1} + \Omega_k) + \Phi'_{k-1} + \Phi'_{k-2} + \dots + \Phi'_0$

et une induction sur k permet de conclure.

b) Réciproquement,

Soit $z \in H(B) \otimes (L(Y))_k$, $k \geq 1$, tel que

$D_1^* z = 0$, alors

$$z = \sum_i \beta_i \otimes \Phi_i$$

$\beta_i = [b_i] \in H(B, d_B)$

$\Phi_i \in (L(Y))_k$.

On pose

$$\gamma = \sum_i b_i \otimes \Phi_i \in \ker d_B \otimes (L(Y))_k$$

tel que $[\gamma]_1 = z$.

La condition $D_1^* z = 0$ entraîne alors que

$$D\gamma \in (D_0(B \otimes (L(Y))_{k-1})) \otimes (B \otimes (L(Y))_{\leq k-2})$$

d'où l'écriture

$$\begin{aligned} D\gamma &= D_0 \phi + \Omega \\ &= D\phi + \Omega' \end{aligned}$$

avec $\phi \in B \otimes (L(Y))_{k-1}$, $\Omega, \Omega' \in B \otimes L(Y)_{\leq k-2}$
(si $k = 1$, $\Omega = \Omega' = 0$).

Ω' est un D cocycle de F_{k-2} , d'où d'après (ii)

$$\Omega' = Dw' + \alpha'$$

$$w' \in F_{k-1}, \quad \alpha' \in F_0$$

(si $k = 2$, $w' = 0$, $\alpha' = \Omega'$).

Nécessairement, α' est un cobord, $\alpha' = Dv'$, par suite,

$\gamma - \phi - w' - v'$ est un D cocycle de F_k et d'après (ii),

il existe $w \in F_{k+1}$ et $\alpha \in F_0$ tels que

$$\gamma - \phi - w' - v' = Dw + \alpha.$$

Or

$$w = w_{k+1} + w_k + \dots + w_0, \quad w_i \in B \otimes (L(Y))_i.$$

En identifiant, on trouve donc

$$D_0 w_{k+1} = 0$$

$$D_1 w_{k+1} + D_0 w_k = \gamma$$

ce qui entraîne

$$z = [\gamma]_1 = [D_1 w_{k+1}]_1 = D_1^* [w_{k+1}]_1$$

d'où

$$[z]_2 = 0.$$

c) La dernière partie du lemme résulte évidemment du fait que la suite spectrale E_r a son support pour $r \geq 2$ sur l'axe des q .

VII.1.(5) Lorsqu'une suite spectrale (E_i) vérifie

$$E_2^{p,q} = 0 \quad \text{si } p \neq 0$$

on dira qu'elle dégénère complètement.

VII-2 - MODELE D'EILENBERG-MOORE D'UN MORPHISME D'A.D.G.C.

VII.2.(1) Soient (B, d_B) et (C, d_C) deux a.d.g.c. augmentées c -connexes (i.e $H^0(B, d_B) = H^0(C, d_C) = \mathbb{k}$) et un homomorphisme γ d'a.d.g.c. augmentées. Soit

$$m : (B', d_{B'}) \rightarrow (B, d_B)$$

un modèle quelconque de (B, d_B) . (B' peut toujours être choisi connexe).

VII.2.(2) On appelle modèle d'Eilenberg-Moore (E.M. modèle) de γ , de base $(B', d_{B'})$ un couple (F, η) où

1) (F, η) est un KS modèle de base $(B', d_{B'})$

$$\begin{array}{ccccc} (B, d_B) & \xrightarrow{\gamma} & (C, d_C) & & \\ \uparrow m & & \uparrow \eta & & \\ F : (B', d_{B'}) & \xrightarrow{l} & (B' \otimes L(Y), D) & \xrightarrow{\rho} & (L(Y), \bar{D}). \end{array}$$

2) Il existe sur Y une graduation $Y = \bigoplus_{k \geq 0} Y_k$ telle que

.) $(B' \otimes L(Y), D)$ est une E.M. algèbre ;

..) $E_2^{-p,q} = 0$ si $p > 0$;

3) La différentielle $\bar{D}_1 = \rho D_1$ est décomposable
(i.e. $\bar{D}_1(Y) \subset L^+(Y) \cdot L^+(Y)$).

VII.2.(3) Remarques.

1) La condition 2(..) exprime que la suite spectrale associée à la filtration canonique

$$F_p = B \otimes (L(Y))_{\leq p}$$

dégénère complètement, d'où en particulier

$$E_2^{0,q} = H^q(H(B) \otimes L(Y_0)) = H^q(B \otimes L(Y), D).$$

De (1), il résulte que

$$\eta^* : E_2^{0,q} \rightarrow H(C, d)$$

est un isomorphisme.

2) $\bar{D}$ désigne la différentielle induite par D sur $L(Y)$:
($\rho = \varepsilon_B$, $\otimes 1$, $\bar{D}y = \rho Dy$). De la condition 2(.), on déduit que

$$\bar{D} = \bar{D}_1 + \bar{D}_2 + \bar{D}_3 + \dots$$

On définit une filtration sur $L(Y)$ en posant

$$\begin{cases} \bar{F}_p = (L(Y))_{\leq p}, & p \geq 0 \\ \bar{F}_{-1} = 0 \end{cases}$$

et avec la notation introduite en VII.1.(3)

$$\bar{D}_1^* = \bar{D}_1$$

et $(L(Y), \bar{D})$ est une E.M. algèbre.

3) La suite spectrale définie par la filtration $\bar{F}$ coïncide avec la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'une fibration (cf. VIII.5), ce qui justifie le nom donné au modèle défini précédemment.

VII.2.(4) Modèle formel sous-jacent.

On définit sur (B, d_B) (resp. $(B', d_{B'})$, (C, d_C)) une filtration décroissante triviale

$$F^{-p} = B, \quad p \geq 0, \quad F^{+1} = 0$$

(resp. idem mutatis mutandis).

On obtient ainsi trois suites spectrales complètement dégénérées.

En considérant sur $B \otimes L(Y)$ et $L(Y)$ les E.M. filtrations

$$\begin{aligned} F^{-p} &= B \otimes (L(Y))_{\leq p} & F^{+1} &= 0 \\ \bar{F}^{-p} &= L(Y)_{\leq p} & \bar{F}^{+1} &= 0 \end{aligned}$$

les morphismes $m, \gamma, \iota, \eta, \rho$ respectent ces filtrations, d'où le diagramme commutatif au niveau $E_1^{0,*}$ des suites spectrales.

$$\begin{array}{ccccc} H(B, d_B) & \xrightarrow{\gamma^* = \gamma_1^{0,*}} & H(C, d_C) & & \\ \uparrow m^* = m_1^{0,*} & & \uparrow \eta_1^{0,*} & & \\ H(B', d_{B'}) & \xrightarrow{\iota_1^{0,*}} & (H(B', d_{B'}) \otimes L(Y_0)) & \xrightarrow{\rho_1^{0,*}} & (L(Y_0)) \end{array}$$

et au niveau $E_1^{p,*}$, $p > 0$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xlongequal{\quad} & 0 & & \\ \parallel & & \uparrow \eta_1^{p,*} & & \\ 0 & \longrightarrow & (H(B', d_{B'}) \otimes L(Y)_p) & \xrightarrow{\rho_1^{p,*}} & L(Y)_p \end{array}$$

D'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 H(B, d_B) & \xrightarrow{\gamma^*} & H(C, d_C) & & \\
 \uparrow m^* & & \uparrow \zeta & & \\
 G : H'(B', d_{B'}) & \xrightarrow{l_1} & (H(B', d_{B'}) \otimes L(Y), D_1^*) & \xrightarrow{\rho_1} & (L(Y), \bar{D}_1)
 \end{array}$$

lorsque l'on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta \circ l_1 = \gamma^* m^* \quad (l_1 = l_1^{o,*}) \\ \zeta|_{L(Y_0)} = \eta_1^{o,*}|_{L(Y_0)} \\ \zeta|_{(L(Y))_{\geq 1}} = 0 \end{array} \right.$$

Du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 H(H(B', d_{B'}) \otimes L(Y), D_1^*) & \xrightarrow{\zeta^*} & H(C, d_C) \\
 \parallel & \nearrow \eta_2^{o,*} = (\eta_1^{o,*})^* & \\
 E_2^{o,*} & & \\
 \parallel & \nearrow \eta^* & \\
 H(B' \otimes L(Y), D) & &
 \end{array}$$

on déduit que ζ est un quasi-isomorphisme ce qui entraîne puisque $\bar{D}_1$ est décomposable que (G, ζ) est un modèle KS minimal de γ^* de base $H(B', d_{B'})$.

VII.2.(5) Par définition, le couple (G, ζ) est appelé, le modèle formel sous-jacent à (F, η) .

VII.2.(6) Remarques.

1) $(L(Y), \bar{D}_1)$ est une a.d.g.c. bigraduée qui ne vérifie pas en général

$$H_+(L(Y), \bar{D}_1) = 0.$$

Il est clair que si $\rho_1^* = \rho_2$ est surjectif on a $H_+(L(Y), \bar{D}_1) = 0$. On montrera en VIII.3 que si ρ^* est surjectif alors $H_+(L(Y), \bar{D}_1) = 0$.

2) Le complexe (E_1, D_1^*) est une résolution libre de $H(E)$ par des $H(B)$ modules (cf. VIII.5).

$$\dots \longrightarrow H(B) \otimes L(Y)_1 \xrightarrow{D_1^*} H(B) \otimes (L(Y))_0 \xrightarrow{D_1^*} H(E) \rightarrow 0$$

VII-3 - UNICITE DU MODELE FORMEL SOUS-JACENT.

VII.3.(1) Les notations sont celles de VII.2.

VII.3.(2) Proposition.-

Si (F', η') et (F'', η'') sont deux E.M. modèles, de même base $((B', d_B), m)$ d'un morphisme γ . (G', ζ') et (G'', ζ'') désignent leur modèle formel sous-jacent respectif, alors il existe un isomorphisme de KS extensions $(Id_{H(B', d_B)}, \psi, \bar{\psi})$ entre G' et G'' tel que

- a) ψ et $\bar{\psi}$ sont de bidegré $(0,0)$
- b) $\zeta'' \circ \psi = \zeta'$.

VII.3.(3) La propriété (b) implique que (G', ζ') et (G'', ζ'') sont isomorphes en tant que modèle.

VII.3.(4) Corollaire.

Sous les hypothèses de VII.3.(2), il existe un E.M. modèle (F, η) de γ , de base $((B', d_B), m)$ isomorphe à (F'', η'') , en tant que E.M. modèle et admettant (G', ζ') comme modèle formel sous-jacent.

VII.3.(5) Preuve de VII.3.(2).

Pour fixer les notations, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & (H(B') \otimes L(Y'), D_1'^*) & \xrightarrow{\rho_1'} & (L(Y'), \bar{D}_1') \\
 & \nearrow l_1' & & \downarrow \zeta' & & \\
 H(B', d_{B'}) & \xrightarrow[\cong]{m^*} & H(B, d_B) & \xrightarrow{\gamma^*} & H(C, d_C) & \\
 & \searrow l_1'' & & \uparrow \zeta'' & & \\
 & & & (H(B') \otimes L(Y''), D_1''^*) & \xrightarrow{\rho_1''} & (L(Y''), \bar{D}_1'')
 \end{array}$$

On construit

$$\psi : (H(B') \otimes L(Y'), D_1'^*) \longrightarrow (H(B') \otimes L(Y''), D_1''^*)$$

par récurrence sur le degré filtrant.

$$a) \quad k = 0, \quad \psi(\beta \otimes 1) = \beta \otimes 1 \quad \beta \in H(B', d_B)$$

$y_0 \in Y_0$, il existe $\alpha_{y_0} \in H(B') \otimes L(Y_0)$ tel que

$$\zeta'(y_0) = \zeta''(\alpha_{y_0})$$

$$\text{on pose } \psi(y_0) = \alpha_{y_0}.$$

Ceci définit un homomorphisme d'a.d.g.c., de bidegré $(0,0)$

$$\psi : (H(B') \otimes L(Y_0), 0) \rightarrow (H(B') \otimes L(Y_0), 0)$$

tel que $\zeta'' \circ \psi = \zeta'$.

b) $k = 1$,

$$\begin{aligned} y_1 \in Y_1 & \quad \psi(D_1' y_1) \in H(B') \otimes L(Y_0) \\ \text{et} & \quad \zeta'' \circ \psi(D_1'^* y_1) = \zeta' D_1'^* y_1 = 0 \end{aligned}$$

d'où l'existence d'un $\alpha_{y_1} \in H(B) \otimes (L(Y''))_1$ tel que

$$\psi(D_1'^* y_1) = D_1''^*(\alpha_{y_1}).$$

On pose

$$\psi(y_1) = \alpha_{y_1}.$$

Ceci définit, un homomorphisme d'a.d.g.c., de bidegré (0,0)

$$\psi : (H(B') \otimes L(Y'_1), D_1'^*) \rightarrow (H(B') \otimes L(Y''_1), D_1''^*)$$

tel que $\zeta'' \circ \psi = \zeta'$.

c) $k \geq 2$,

$$y_k \in Y_k, \quad \psi(D_1'^* y_k) \in (H(B') \otimes (L(Y''))_{k-1}) \cap \ker D_1''^*$$

comme $E_2^{k-1,0} = 0$, il existe $\alpha_{y_k} \in H(B') \otimes (L(Y''))_k$ tel que

$$\psi(D_1'^* y_k) = D_1''^* \alpha_{y_k}.$$

D'où le morphisme d'a.d.g.c.

$$\psi : (H(B') \otimes L(Y'), D_1'^*) \rightarrow (H(B') \otimes L(Y''), D_1''^*)$$

de bidegré (0,0).

On obtient alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (H(B') \otimes L(Y'), D_1^*) & \xrightarrow{\rho_1'} & (L(Y'), \bar{D}_1') \\
 & \nearrow \iota_1' & \downarrow \psi & & \downarrow \bar{\psi} \\
 H(B', d_{B'}) & & & & \\
 & \searrow \iota_1'' & (H(B') \otimes L(Y''), D_1^*) & \xrightarrow{\rho_1''} & (L(Y''), \bar{D}_1'')
 \end{array}$$

De la relation $\zeta'' \circ \psi = \zeta'$, on déduit que ψ est un quasi-isomorphisme et de la minimalité des extensions que ψ est un isomorphisme.

VII.3.(6) Preuve de VII.3.(4).

D'après VII.3.(3), il existe deux isomorphismes de bidegré (0,0), ψ et $\bar{\psi}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (H(B', d_{B'}) \otimes L(Y'), d_1') & \rightarrow & (L(Y'), \bar{d}_1') \\
 & \nearrow & \downarrow \psi & & \downarrow \bar{\psi} \\
 H(B', d_{B'}) & & & & \\
 & \searrow & (H(B', d_{B'}) \otimes L(Y''), d_1'') & \rightarrow & (L(Y''), \bar{d}_1'')
 \end{array}$$

On considère une section linéaire σ de la projection canonique

$$B' \cap \ker d' \longrightarrow H(B', d_{B'})$$

telle que $\sigma(1) = 1$. On pose

$$\phi(b \otimes 1) = b \otimes 1, \quad b \in B'$$

$$\phi(1 \otimes y) = (\sigma \otimes 1)(\psi(y))$$

lorsque y parcourt une base de Y . Ceci définit un unique homomorphisme de bidegré $(0,0)$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (B' \otimes L(Y'), d_{B'} \otimes 1) & \xrightarrow{\rho'} & (L(Y'), 0) \\
 & \nearrow l' & \downarrow \Phi & & \downarrow \bar{\Phi} = \bar{\psi} \\
 (B', d_{B'}) & & & & \\
 & \searrow l'' & (B' \otimes L(Y''), d_{B''} \otimes 1) & \xrightarrow{\rho''} & (L(Y''), 0)
 \end{array}$$

d'où on déduit que Φ est un isomorphisme. En posant $D = \Phi^{-1} D'' \Phi$, $\bar{D} = \bar{\Phi}^{-1} \bar{D}'' \bar{\Phi}$ on obtient alors le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (B' \otimes L(Y'), D) & \xrightarrow{\rho'} & (L(Y'), \bar{D}) \\
 & \nearrow l' & \downarrow \Phi & & \downarrow \bar{\Phi} = \bar{\psi} \\
 (B', d_{B'}) & & & & \\
 & \searrow l'' & (B' \otimes L(Y''), D'') & \xrightarrow{\rho''} & (L(Y''), \bar{D}'') \\
 & & \downarrow \eta'' & & \\
 (B, d_B) & \xrightarrow{\gamma} & (C, d_C) & &
 \end{array}$$

On pose :

$$F : (B', d_{B'}) \xrightarrow{l'} (B' \otimes L(Y'), D) \xrightarrow{\rho'} (L(Y'), \bar{D})$$

et $\eta = \Phi \circ \eta''$.

On vérifie alors facilement que F est un E.M. modèle de γ , de modèle formel sous-jacent (G, ζ') puisque d'après VII.3.(4) $\zeta'' \circ \bar{\psi} = \zeta'$.

VII-4 - THEOREME D'UNICITE DU E.M.-MODELE - CONSEQUENCES.

VII.4.(1) Théorème.-

Soient (F', η') et (F'', η'') deux E.M.-modèles d'un homomorphisme d'a.d.g.c. γ . On suppose que (F', η') et (F'', η'') ont la même base $((B', d_B), m)$. Alors il existe deux isomorphismes Ψ et $\bar{\Psi}$ qui conservent les filtrations $(\Psi(F'_p) \simeq F''_p, \bar{\Psi}(\bar{F}'_p) \simeq \bar{F}''_p)$ tels que $(Id_B, \Psi, \bar{\Psi})$ soit un isomorphisme entre F' et F'' .
De plus, $\eta'' \circ \Psi \sim \eta'$, rel B.

Dans le théorème ci-dessus les KS extensions F' et F'' sont isomorphes (par un isomorphisme qui conserve la filtration) mais les E.M. modèles (F', η') et (F'', η'') ne sont pas isomorphes car on a seulement $\eta'' \circ \Psi \sim \eta'$ rel B.

VII.4.(2) Cas absolu.

Si $(B', d_B) = (k, 0)$, alors on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (k, 0) & \longrightarrow & (k \otimes L(Y), D) & \xrightarrow{\cong} & (L(Y), \bar{D}) \\ \parallel & & \eta \downarrow & \swarrow \eta & \\ (k, 0) & \longrightarrow & (C, d_C) & & \end{array}$$

Par définition, $(L(Y), \bar{D})$ est un E.M. modèle de (C, d_C) .
Si on considère le modèle filtré de (C, d_C) au sens de Halperin et Stasheff [H-S]

$$v : (L(Z), D) \longrightarrow (C, d_C)$$

alors $(L(Z), D)$ est un E.M. modèle de (C, d_C) , à savoir

- 1) $(L(Z), D)$ est un KS complexe.
- 2) ν est un quasi-isomorphisme.
- 3) Il existe une graduation $Z = \bigoplus_{n \geq 0} Z_n$ telle que
 .) D baisse la filtration strictement
 ..) $E_2^{-p,q} = \begin{cases} H^q(L(Z), D) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- 4) $(L(Z), d)$ avec $(d = D_1^*)$ est a.d.g.c. minimale.

Alors le théorème d'unicité des E.M. modèles, appliqué au cas absolu, entraîne l'existence d'un isomorphisme Ψ qui conserve la filtration de $L(Z)$ et qui rend le diagramme suivant commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc}
 (L(Y), \bar{D}) & \xrightarrow{\eta} & (C, d_C) \\
 \Psi \downarrow & \textcircled{H} & \nearrow \nu \\
 (L(Z), D) & &
 \end{array}$$

Conclusion : Dans le cas absolu le E.M. modèle coïncide avec le modèle filtré au sens de Halperin Stasheff et le E.M. modèle formel sous-jacent $((L(Y), \bar{D}_1), \zeta)$ est isomorphe au modèle bigradué $((L(Z), d), \rho)$, ceci d'après VII.3.(2).

VII.4.(3) Modèle filtré au sens de M. Vigué [Vi].

Etant donné, un morphisme d'a.d.g.c.

$$\gamma : (B, d_B) \rightarrow (C, d_C)$$

un modèle filtré de (B, d_B)

$$v : (L(Z), D) \rightarrow (B, d_B)$$

de modèle bigradué sous-jacent

$$\mu : (L(Z), d) \rightarrow H(B, d_B)$$

il existe un KS modèle minimal de γ^* , noté (G^V, μ') et un KS modèle (F^V, v') de γ ;

$$\begin{array}{ccccc} H(B, d_B) & \xrightarrow{\gamma^*} & H(C, d_C) & & \\ \uparrow \mu & & \uparrow \mu' & & \\ G^V : (L(Z), d) & \longrightarrow & (L(Z \oplus X), d') & \longrightarrow & (L(X), d'') \\ \\ (B, d_B) & \xrightarrow{\gamma} & (C, d_C) & & \\ \uparrow v & & \uparrow v' & & \\ F^V : (L(Z), D) & \longrightarrow & (L(Z \oplus X), D') & \longrightarrow & (L(X), D'') \end{array}$$

tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} .) \quad L(Z \oplus X) = \bigoplus_{p, q \geq 0} (L(Z \oplus X))_p^{q-p}, \quad d'X_n \subset (Z_{n-1}) \oplus (L^+(Z \oplus X) \cdot L^+(Z \oplus X))_{n-1} \\ ..) \quad H_0^V(L(Z \oplus X), d') \cong H(C, d_C) \\ \quad \quad H_+^V(L(Z \oplus X), d') = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} .) \quad F_{n-2}^V = (L(Z \oplus X))_{\leq n-2}, \quad D' - d'(X_n) \subset F_{n-2}^V \\ ..) \quad [v'(\phi)] = \mu'(\phi), \quad \phi \in L(Z_0). \end{array} \right.$$

Lemme. -

F^V est un E.M. modèle de γ

G^V est un E.M. modèle de γ^*

F^V et G^V ont même modèle formel sous-jacent

G^V a la même "fibre" que le modèle formel sous-jacent de F^V .

Preuve :

On considère sur $L(Z \otimes X) = L(Z) \otimes L(X)$ la filtration F_p définie par

$$F_p = L(Z) \otimes (L(X))_{\leq p}$$

alors,

$$F_p^V \subset F_p, \quad p \geq 0.$$

On pose

$$D' = D'_0 + D'_1 + \dots$$

$$d' = d'_0 + d'_1 + \dots$$

avec

$$D'_i(X_n) \subset L(Z) \otimes (L(X))_{n-i}$$

$$d'_i(X_n) \subset L(Z) \otimes (L(X))_{n-i}.$$

De la définition de D' et d' on déduit

$$d'_0 = d \quad D'_0 = D$$

$$D'_1 = d'_1$$

$$d'_1(X_n) \subset \begin{cases} (Z_0 \otimes L^+(Z_0) \cdot L^+(Z_0)) \otimes (L^+(Z_0) \otimes L^+(X_0)) \otimes (L^+(X_0) \cdot L^+(X_0)) & \text{si } n = 1 \\ (L^+(Z_0) \otimes L^+(X))_{n-1} + (L^+(X) \cdot L^+(X))_{n-1} & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

$$d'_i(X_n) \subset (L^+(Z))_{i-1} \otimes (L^+(X))_{n-i} \quad i \neq 1, n$$

$$d'_n(X_n) \subset (Z_{n-1}) \otimes ((L^+(Z) \cdot L^+(Z))_{n-1}) \otimes (L^+(Z)_{n-1} \otimes L^+(X_0)) \quad n \neq 1$$

Par suite, en remarquant qu'avec nos notations

$$D'' = \bar{D}' \quad \text{et} \quad d'' = \bar{d}'$$

on obtient

$$\bar{D}'_1 = \bar{d}'_1 = d''.$$

ce qui entraîne d'une part que G^V à même fibre que le modèle formel sous-jacent de F^V ($d'' = \bar{D}'_1$), d'autre part, que G^V et F^V ont même modèle formel sous-jacent ($D_1^{*'} = d_1^{*'}\prime$) et enfin

.) $\bar{D}'_1$ et $\bar{d}'_1$ sont décomposables ;

$$\begin{aligned} \text{..)} \quad E_2^{-p,q} &= H_p^{q-p}(H(L(Z)) \otimes L(X), d_1^{*'}) \\ &= H_p^{p-q}(H(L(Z)) \otimes L(X), D_1^{*'}).$$

Or d'après [Vi] th. 4.2.1, il existe un isomorphisme entre $E_2^{-p,q}$ et $\text{Tor}_{H(L(Z))}^{-p,q}(H(L(Z)), H(L(Z \otimes X), d))$, d'où

$$E_2^{-p,q} = 0, \quad \text{si} \quad p > 0.$$

VII.4.(4) Démonstration du théorème VII.4.(1).

D'après le corollaire VII.3.(4), nous pouvons supposer que (F', η') et (F'', η'') ont le même modèle formel sous-jacent.

Ainsi le théorème VII.4.(1) résulte évidemment de la proposition suivante :

VII.4.(5) Proposition.

Soient (F', η') et (F'', η'') deux E.M. modèles d'un homomorphisme d'a.d.g.c. γ . On suppose que (F', η') et (F'', η'') ont même base $((B', d_B,), m)$ et même modèle formel sous-jacent.

Alors, il existe deux isomorphismes d'a.d.g.c. Ψ et $\bar{\Psi}$

- i) $(\Psi - \text{Id})(Y_p) \subset F_{p-1} \quad (p \geq 0)$
 $(\bar{\Psi} - \text{Id})(Y_p) \subset \bar{F}_{p-1} \quad (p \geq 0)$
- ii) $(\text{Id}_{B'}, \Psi, \bar{\Psi})$ est un isomorphisme entre les KS extensions F' et F'' .
- iii) $\eta''\Psi \sim \eta' \quad (\text{rel. } B')$.

VII.4.(6) Démonstration.

On construit par récurrence sur le degré filtrant un homomorphisme Ψ et une homotopie Φ .

Fixons les notations,

Pour tout $k \geq 0$, notons

$$(B' \otimes L(Y_{\leq k}))^I = (B' \otimes L(Y_{\leq k}) \otimes L(\bar{Y}_{\leq k}) \otimes L(D'\bar{Y}_{\leq k}), D')$$

où
$$D' \Big|_{B' \otimes L(Y'_{\leq k})} = D', \quad \bar{Y}_n^i \simeq Y_n^{i+1}, \quad \bar{Y}_n^i \xrightarrow[\simeq]{D'} (D\bar{Y})_n^{i+1}$$

$$\lambda_o : B' \otimes L(Y'_{\leq k}) \hookrightarrow (B \otimes L(Y'_{\leq k}))^I$$

l'inclusion canonique, i dérivation de degré -1 telle que

$$i(B') = i(\bar{Y}) = i(D\bar{Y}) = 0, \quad \forall y \in Y, \quad i(y) = \bar{y}$$

θ dérivation de degré 0 telle que $iD' + D'i = \theta$

$$e^\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\theta^n}{n!} \text{ un automorphisme de } (B' \otimes L(Y_{\leq k}))^I,$$

$$\lambda_1 = e^\theta \circ \lambda_o : B' \otimes L(Y_{\leq k}) \rightarrow (B' \otimes L(Y_{\leq k}))^I.$$

Les deux applications

$$(B' \otimes L(Y_{\leq k}), D') \begin{array}{c} \xrightarrow{\zeta'} \\ \xrightarrow{\zeta''} \end{array} (C, d_C)$$

sont homotopes (rel. B') s'il existe Φ

$$\Phi : (B' \otimes L(Y_{\leq k}))^I \longrightarrow (C, d_C)$$

telle que

$$\zeta' = \Phi \circ \lambda_0 \quad \zeta'' \circ \Psi = \Phi \circ \lambda_1.$$

Remarquons que,

$$(F_1) \quad \text{Si on pose } \delta(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (iD')^n(y)$$

alors $\delta(y_n) \subset B \otimes L(Y_{\leq n-1}) \otimes L(\bar{Y}_{\leq n-1}) \otimes L(D'\bar{Y}_{\leq n-1})$.

$$(F_2) \quad \begin{aligned} \lambda_1(y) &= y + D'(\bar{y}) + \delta(y) \\ \lambda_1(D'y) &= D'y + D'(\delta(y)). \end{aligned}$$

Pour construire Ψ et Φ , on procède par récurrence sur le degré filtrant.

a) $k = 0$.

On pose évidemment $\Psi_0 = \text{Id}$

$$\begin{array}{ccc} & & (B' \otimes L(Y_0), D'_0) \\ & \nearrow & \downarrow \Psi_0 \\ B' & & \\ & \searrow & (B' \otimes L(Y_0), D''_0) \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} [\eta''\Psi_0(y) - \eta'(y)]_C &= \eta^{*''}([\Psi_0(y)]) - \eta^{*'}([y]) \\ &= \zeta''([\Psi_0(y)]_1) - \zeta'([y]_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $\zeta'' = \zeta'$ et $\Psi_0 = \text{Id}$, d'où

$$\eta''\Psi_0(y) - \eta'(y) = d_C a, \quad a \in C$$

ce qui s'écrit encore

$$\Phi\lambda_1(y) - \Phi\lambda_0(y) = d_C a$$

et d'après F_2

$$\Phi(D\bar{y}) = d_C a.$$

On pose donc

$$\Phi(\bar{y}) = a$$

ce qui permet de définir de façon satisfaisante Ψ et Φ , pour $k = 0$.

b) $k = 1$.

$$\begin{aligned} y \in Y_1, \quad d_C(\eta''(y) - \eta'(y)) \\ = \eta''(D''y) - \eta'(D'y). \end{aligned}$$

Or $\Psi_0 D'y - D''y = D'_1 y - D''_1 y$ et des relations

$$D_0 D'_1 + D'_1 D_0 = 0 \quad \text{et} \quad D_0 D''_1 + D''_1 D_0 = 0$$

on déduit que

$$D_0(D'_1 y - D''_1 y) = 0$$

de plus

$$[D'_1 y - D''_1 y]_0 = D_1^{*'} y - D_1^{*''} y = 0$$

car $D_1^{*'} = D_1^{*''}$, d'où on déduit que

$$\Psi_0 D'y - D''y = D_0 w_0 = D w_0, \quad w_0 \in B' \otimes L(Y_0).$$

Par suite

$$\begin{aligned} d_C(\eta''(y) - \eta'(y)) &= \eta''' \Psi_0 D'y - \eta' D'y - \eta''(D\omega_0) \\ &= \Phi \lambda_1(D'y) - \Phi \lambda_0(D'y) - \eta''(D\omega_0) \end{aligned}$$

et d'après F_2 ,

$$= \Phi(D'y) + \Phi(D'\delta y) - \Phi \lambda_0 D'y - \eta''(D\omega_0)$$

ceci entraîne que (en utilisant F_1)

$$d_C(\eta''(y) - \eta'(y) - \Phi(\delta y) + \eta''(\omega_0)) = 0.$$

D'où

$$\eta''(y + \omega_0 - \bar{\omega}_0) - \eta'(y) - \Phi(\delta y) = d_C a$$

et en comparant avec la formule

$$\eta'' \circ \Psi(y) = \Phi \circ \lambda_1(y) = \Phi(y) + \Phi(D'\bar{y}) + \Phi(\delta y)$$

on voit que l'on définit Φ et Ψ de manière satisfaisante en posant :

$$\begin{cases} \Psi_1(y) = y + \omega_0 - \bar{\omega}_0 \\ \Phi_1(\bar{y}) = a. \end{cases}$$

c) $k \geq 2$.

Supposons Ψ_{k-1} et Φ_{k-1} définis sur $B' \otimes L(Y_{\leq k-1})$ et soit $y \in Y_k$.

Puisque $D_1^{*'} = D_1^{*''}$, il existe $\omega_0 \in B \otimes L(Y_0)$ tel que

$$D'y - D''y - D''\omega_0 \in F_{k-2}$$

par suite,

$$\Psi_{k-1}(D'(y) - D''(y+\omega_0)) \in F_{k-2} \cap \ker D''$$

donc d'après le lemme VII.1.(4), il existe $w \in F_{k-1}$ et $\bar{\omega}_0 \in F_0$ tel que

$$\Psi_{k-1}(D'y) - D''(y+\omega_0) = D''w + \bar{\omega}_0.$$

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad \eta''\Psi_{k-1}(D'y) &= \Phi \circ \lambda_1(D'y) \\ &= \Phi(D'y) + \Phi(D'(\delta y)) \quad (\text{d'après } F_2) \\ &= \eta'(D'y) + d_C(\Phi(\delta y)) \\ &= d_C(\eta'(y) + \Phi(\delta y)). \end{aligned}$$

Il en résulte que $\bar{\omega}_0 = D''(\bar{\omega})$ ce qui entraîne finalement la formule

$$\Psi_{k-1}(D'y) = D''y + D''\bar{w}$$

avec $\bar{w} \in F_{k-1}$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} d_C(\eta''(y) - \eta'(y)) &= \eta''(D''y) - \eta'(D'y) \\ &= \eta''(\Psi_{k-1}(D'y)) - \eta''(D''\bar{w}) - \eta'(D'y) \\ &= \Phi(D'(\delta y)) - \eta''(D''\bar{w}) \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$d_C(\eta''(y) - \eta'(y) - \Phi(\delta y) + \eta''(\bar{w})) = 0$$

et donc que

$$\eta''(y) - \eta'(y) - \Phi(\delta y) + \eta''(\bar{w}) = \eta''(\omega_0) + d_C a$$

avec $\omega_0 \in B' \otimes L(Y_0)$.

En comparant avec la formule

$$\eta''\Psi(y) = \Phi \circ \lambda_1(y) = \Phi(y) + \Phi(D\bar{y}) + \Phi(\delta(y))$$

on en déduit qu'en posant

$$\Psi_k(y) = y + \bar{w} - \omega_0$$

$$\Phi_k(\bar{y}) = a$$

on obtient un prolongement satisfaisant de Ψ_{k-1} et Φ_{k-1} .

Conclusion : On a construit un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\Psi : (B' \otimes L(Y), D') \rightarrow (B' \otimes L(Y), D'')$$

tel que :

- i) $\Psi - \text{Id}$ baisse strictement la filtration
- ii) $\eta'' \circ \Psi \sim \eta$ (rel. B).

La condition (i) entraîne évidemment que Ψ est un isomorphisme de F_p dans F_p , pour tout $p \geq 0$ et par suite que Ψ est un isomorphisme. De plus, Ψ induit $\bar{\Psi}$ ayant les propriétés souhaitées.

VII-5 - THEOREME D'EXISTENCE DU E.M. MODELE.

On suppose que

$$H^0(B, \mathbb{k}) = H^0(C, \mathbb{k}) = \mathbb{k}$$

et soit $\gamma : (B, d_B) \rightarrow (C, d_C)$ un homomorphisme d'a.d.g.c., alors on peut énoncer le théorème.

alors $Y_o = \bigoplus_{i \geq 1} Y_o^i$.

On pose $D = D_o = d_B, \bigoplus 1$
 $\eta_o(b \otimes 1) = \gamma \circ m(b)$
 $\eta_o(1 \otimes y) = s(y).$

On notera, dans la suite H_o^+ pour $H^+(B \otimes L(Y_o), D_o)$

b) $k = 1$.

On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow K_o \longrightarrow H(B \otimes L(Y_o), D) \xrightarrow{\eta_o^*} H(C, d_C) \longrightarrow 0$$

et les sections σ_1 et s_1 des applications canoniques suivantes (L_o image réciproque de K_o par la projection canonique).

$$\begin{array}{ccc} L_o & \hookrightarrow & (B \otimes L(Y_o)) \cap \ker D_o \\ \downarrow & & \\ s_1 \uparrow & & K_o \\ \downarrow & \nearrow \sigma_1 & \\ & K_o / K_o \cdot H_o^+ & \end{array}$$

On remarque que $K_o^o = 0$ et que

$$K_o = \text{Im } \sigma_1 \oplus K_o \cdot H_o^+$$

d'où on déduit que

$$K_o = H_o \cdot \text{Im } \sigma_1.$$

On pose $Y_1 = K_o / K_o.H_o^+$, avec la convention suivante le même élément est noté y s'il appartient à Y_1 et $\bar{y}$ s'il appartient à $K_o / K_o.H_o^+$ et $|y| = |\bar{y}| - 1$

$$D(1 \otimes y) = s_1(\bar{y}) \in B \otimes L(Y_o)$$

par suite

$$\eta_o(D(1 \otimes y)) = \eta_o(s_1(\bar{y})) = d_C a$$

alors il est naturel de poser

$$\eta_1(y) = a \quad (a \neq 0 \text{ si } y \neq 0).$$

c) Supposons avoir défini $Y_{\leq k}$, D et η_k tels que

$$\begin{array}{ccc} (B, d_B) & \xrightarrow{\gamma} & (C, d_C) \\ \uparrow m & \curvearrowright & \uparrow \eta_k \\ (B', d_{B'}) & \longrightarrow & (B' \otimes L(Y_{\leq k}), D) \end{array}$$

$$\cdot) \quad \eta_k|_{B' \otimes L(Y_{\leq k-1})} = \eta_{k-1}.$$

..) $D = D_o$ baisse strictement la filtration

alors on considère la suite exacte

$$0 \rightarrow K_k \rightarrow F_k(H(B' \otimes L(Y_{\leq k}))) \xrightarrow{\eta_k^*} H(C, d_C) \rightarrow 0$$

où

$$F_p(H(B' \otimes L(Y_{\leq k}))) = \frac{B' \otimes (L(Y_{\leq k}))_{\leq p} \cap \ker D}{D(B' \otimes L(Y_{\leq k})) \cap B' \otimes (L(Y_{\leq k}))_{\leq p}} = \text{Im } j_p^*$$

où j_p désigne l'inclusion canonique

$$B \otimes (L(Y_{\leq k}))_{\leq p} \hookrightarrow B \otimes L(Y_{\leq k}).$$

D'autre part, on définit les sections σ_{k+1} et s_{k+1} aux projections canoniques (L_k image réciproque de K_k par la projection canonique)

$$\begin{array}{ccc} L_k & \longrightarrow & B \otimes (L(Y_{\leq k}))_{\leq k} \cap \ker D \\ \downarrow & & \\ s_{k+1} \nearrow & & K_k \longrightarrow F_k H(B \otimes L(Y_{\leq k})) \\ \downarrow & \nearrow \sigma_{k+1} & \\ & & K_k / K_k \cdot H_O^+ \end{array}$$

$$K_k = \text{Im } \sigma_{k+1} \oplus K_k \cdot H_O^+ = H_O \cdot \text{Im } \sigma_{k+1}$$

On pose

$$Y_{k+1} = K_k / K_k \cdot H_O^+$$

en notant le même élément, y s'il est dans Y_{k+1} et $\bar{y}$ s'il est dans $K_k / K_k \cdot H_O^+$ avec $|\bar{y}| - 1 = |y|$,

$$\text{et } D(1 \otimes y) = s_{k+1}(\bar{y}) \in (B \otimes L(Y_{\leq k}))_{\leq k} \cap \ker D.$$

On en déduit,

$$\eta_k(D(1 \otimes y)) = \eta_k(s(\bar{y})) = d_C a$$

et alors on pose $\eta_{k+1}(y) = a$.

Cette construction nous donne, une KS extension F qui est un modèle de γ (η^* est un iso) tel que $D - D_O$ baisse strictement la filtration.

$$\begin{array}{ccccc}
 (B, d_B) & \longrightarrow & (C, d_C) & & \\
 \uparrow m & & \uparrow \eta & & \\
 (B', d_{B'}) & \longrightarrow & (B' \otimes L(Y), D) & \longrightarrow & (L(Y), \bar{D}).
 \end{array}$$

(La filtration étant définie comme en VII.1.(1)).

Pour montrer que (F, η) est un E.M. modèle, nous allons établir une série de lemmes.

VII.5.(3) Lemme. -

(F, η) désignant le KS modèle de γ construit ci-dessus, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $\Phi \in F_k \cap \ker D$ il existe $w \in F_{k+1}$ tel que $\Phi - Dw \in F_0$ (donc d'après VII.1.(4), $E_2^{-p,*} = 0$ si $p > 0$).

Soit $\Phi \in F_k$, $D\Phi = 0$, alors $[\Phi] \in F_k H(B \otimes L(Y_{\leq k}))$.

Or, par construction

$$\begin{array}{ccc}
 F_k(H(B \otimes L(Y_{\leq k}))) & \xrightarrow{\eta_k^*} & H(C, d_C) \\
 & \nearrow \eta_0^* & \\
 & H(B \otimes L(Y_0)) &
 \end{array}$$

donc si $k \geq 1$, il existe $\alpha \in B \otimes L(Y_0)$ tel que

$$\eta_0^*([\alpha]) = \eta_k^*([\Phi])$$

ce qui entraîne que

$$[\Phi - \alpha] \in K_k = H_0 \cdot \text{Im } \sigma_{k+1}$$

d'où l'écriture

$$[\Phi - \alpha] = \sum_i \lambda_i \sigma(\gamma_i)$$

avec $\lambda_i \in H_0$ et $\gamma_i \in Y_{k+1}$, d'où par définition de D

$$\Phi - \alpha = \sum_i \omega_i D\gamma_i = D\left(\sum_i \omega_i \gamma_i\right)$$

avec $\omega_i \in B \otimes L(Y_0)$, en posant

$$w = \sum_i \omega_i \gamma_i \in F_{k+1}$$

on a démontré le lemme.

VII.5.(4) Lemme. -

$\bar{D}_1$ est décomposable.

Ceci équivaut à dire que la KS extension

$$H(B', d_B) \rightarrow (H(B', d_B) \otimes L(Y), D_1^*) \rightarrow (L(Y), \bar{D}_1^*)$$

est minimale.

Preuve :

Supposons qu'il existe $y \in Y_{k+1}$ tel que $\bar{D}_1 y$ ne soit pas décomposable.

$$Dy \in F_k = (H \otimes Y_k) \oplus ((B \otimes L(Y_0))^+ \otimes Y_k) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i+j=k \\ i,j>0}} (B \otimes (L(Y))_i) \cdot (B \otimes (L(Y))_j) \right)$$

alors $Dy = x - \sum_i \omega_o^i z_i - \Omega$

par suite $Dx = \sum_i D_o \omega_o^i z_i + \sum_i (-1)^{|\omega_o^i|} \omega_o^i D z_i + D\Omega$.

Puisque $D - D_0$ baisse strictement la filtration, nécessairement $D_0 \omega_0^i = 0$, de plus $\Omega \in B \otimes L(Y_{\leq k-1})$. En projetant sur $F_{k-1}(H(B' \otimes L(Y_{\leq k-1})))$ on obtient la relation

$$\begin{aligned} [Dx] &= \left[\sum_i (-1)^{|\omega_0^i|} \omega_0^i D z_i \right] \\ &= \sum_i (-1)^{|\omega_0^i|} [\omega_0^i] [D z_i] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_k(x) &= \sum (-1)^{|\omega_0^i|} [\omega_0^i] \sigma_k(z_i) \in \text{Im } \sigma_k \cap H_0^+ \cdot \text{Im } \sigma_k \\ &\subset \text{Im } \sigma_k \cap H_0^+ \cdot K_k = 0 \end{aligned}$$

ce qui est impossible si $x \neq 0$.

Ceci termine la démonstration du théorème VII.5.(1).

VII.5.(5) Remarque.

Il peut se faire que dans le E.M. modèle d'un morphisme d'a.d.g.c., l'espace vectoriel Y contienne des éléments de degré nul.

Exemple :

$$\gamma : (\Lambda(b_1, b_2, b_3), 0) \rightarrow (\Lambda(x), 0)$$

$$|b_1| = |b_2| = |b_3| = |x| = 1 \quad \gamma(b_1) = x \quad \gamma(b_2) = \gamma(b_3) = 0.$$

Dans ce cas $Y_0 = 0$, $Y_1 = (u_2, u_3)$, $Y_i = 0$ si $i \geq 2$

$$D(u_2) = b_2, \quad D(u_3) = b_3, \quad |u_2| = 0 = |u_3|.$$

On montre facilement, que ceci ne peut pas se produire si

$$\gamma^* : H^1(B) \rightarrow H^1(C)$$

est injective et plus généralement.

VII.5.(6) Proposition.

Si $\gamma^* : H(B, d_B) \rightarrow H(C, d_C)$ est n -régulier (γ^* isomorphisme jusqu'en degré n et injectif en degré $n+1$) alors $L(Y)$ est n -connexe.

VII.5.(7) On rappelle qu'une algèbre graduée H est noethérienne si elle admet un nombre fini de générateurs en tant qu'algèbre ; et alors tous ses sous-modules sont de type fini (th. de Hilbert gradué).

Il est clair que toute algèbre graduée noethérienne est de type fini (i.e de dimension finie en chaque degré).

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer le résultat suivant (cf. [H.S] 3.8).

VII.5.(8) Proposition.

Deux des trois conditions suivantes entraînent la troisième

- 1) $H(C, d_C)$ est noethérienne (resp. type fini).
- 2) $H(B, d_B)$ est noethérienne (resp. type fini).
- 3) Pour tout k , Y_k est de dimension finie (resp. Y est de type fini).

CHAPITRE VIII

E.M.-MODELE D'UNE FIBRATION RATIONNELLE ET APPLICATIONS.

VIII-1. E.M. MODELE D'UNE APPLICATION CONTINUE.

Soient M et E deux espaces topologiques pointés, connexes par arcs et $\pi : E \rightarrow M$ une application continue qui respecte le pointage. Alors en utilisant le foncteur de Sullivan (I.4.(1)), on obtient :

$$A(\pi) = \gamma : (A(M), d_B) \longrightarrow (A(E), d_E),$$

qui est un homomorphisme d'a.d.g.c. augmentée.

Soit (B, d_B) un modèle quelconque de M

$$m : (B, d_B) \rightarrow (A(M), d_M).$$

VIII.1.(1) Définitions.

Un E.M.-modèle (F, η) de γ est appelé un E.M. modèle de π .

Le E.M.-modèle formel sous-jacent à (F, η) est appelé le E.M. modèle formel de π .

On a alors les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccc} \text{VIII.1.(2)} & (A(M), d_M) & \xrightarrow{A(\pi)} & (A(E), d_E) & \\ & \uparrow m & & \uparrow \eta & \\ F : & (B, d_B) & \xrightarrow{l} & B \otimes L(Y), D & \xrightarrow{\rho} (L(Y), \bar{D}) \end{array}$$

où m et η sont des quasi-isomorphismes.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{VIII.1.(4)} & H(M, \mathbb{k}) & \xrightarrow{\pi^*} & H(E, \mathbb{k}) & \\
 & \uparrow m^* & & \uparrow \zeta & \\
 G : & H(B, d_B) & \xrightarrow{l_1} & (H(B) \otimes L(Y), D_1^*) & \xrightarrow{\rho_1} (L(Y), \bar{D}_1)
 \end{array}$$

où m^* est un isomorphisme et ζ un quasi-isomorphisme.

VIII.1.(5) Définitions.

$(L(Y), \bar{D})$ est appelée la E.M. fibre de π .

$(L(Y), \bar{D}_1)$ est appelée la fibre formelle de π .

VIII.1.(6) Du théorème d'existence et d'unicité des E.M.-modèles, il résulte que $L(Y)$ est une algèbre bigraduée, dont la bigraduation ne dépend que de π .

$\bar{D}_1$ est homogène de degré $(1,0)$.

$(L(Y), \bar{D})$ est une a.d.g.c. filtrée.

VIII-2. E.M. MODELE D'UNE FIBRATION RATIONNELLE.

VIII.2.(1) On considère une fibration rationnelle

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad \text{I.4.(6)}$$

(F, E, M sont toujours supposées connexes par arcs).

On appelle E.M.-modèle de la fibration I.4.(6) tout E.M.-modèle de l'application continue π .

On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{VIII.2.(2)} & (A(M), d_M) & \xrightarrow{A(\pi)} & (A(E), d_E) & \xrightarrow{A(j)} & (A(F), d_F) \\
 & \uparrow m & & \uparrow \eta & & \uparrow \bar{\eta} \\
 & (B, d_B) & \xrightarrow{l} & (B \otimes L(Y), D) & \xrightarrow{\rho} & (L(Y), \bar{D})
 \end{array}$$

où m et η sont des quasi-isomorphismes et $\bar{\eta}$ un homomorphisme d'a.d.g.c.

Du théorème 2.2. de [H-1-], et puisque la fibration I.4.(6) est supposée rationnelle, on déduit que $\bar{\eta}$ est aussi un quasi-isomorphisme ce que nous énonçons de la manière suivante :

VIII.2.(3) La E.M.-fibre d'une fibration rationnelle est un KS modèle de la fibre.

VIII.2.(4) En général la E.M. fibre n'est pas un modèle minimal, ni un modèle filtré (au sens H.S.) de la fibre, (Cf. exemple VIII.2.(7) b).

VIII.2.(5) Pour le modèle formel sous-jacent, nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 H(M, \mathbb{k}) & \xrightarrow{\pi^*} & H(E, \mathbb{k}) & \xrightarrow{j^*} & H(F, \mathbb{k}) \\
 \uparrow m^* & & \uparrow \zeta & & \nwarrow \bar{\zeta} \\
 H(B, d_B) & \xrightarrow{l_1} & (H(B, d_B) \otimes L(Y), D_1^*) & \xrightarrow{\rho_1} & (L(Y), \bar{D}_1)
 \end{array}$$

où m^* est un isomorphisme, ζ un quasi-isomorphisme et $\bar{\zeta}$ un homomorphisme d'a.g.c.

En général, $\bar{\zeta}$ n'est pas un quasi-isomorphisme (cf. exemple VIII.2.(7).b).

VIII.2.(6) Remarques.

a) Si I.4.(6) est une fibration de Serre, on a nécessairement :

$$\pi_{\#} : \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(M) \text{ est surjective.}$$

Ceci entraîne via Hurewicz et le théorème des coefficients universels que

$$\pi^* : H^1(M, \mathbb{k}) \rightarrow H^1(E, \mathbb{k})$$

est injective et d'après VII.5.(6), que la E.M. fibre et la fibre formelle sont connexes.

b) Soient $\pi : E \rightarrow M$ une application continue et $m : (L(X), d_B) \rightarrow (A(M), d_M)$ un modèle minimal de M . Considérons le modèle KS minimal de π de base $(L(X), d_B)$

$$\begin{array}{ccccc} (A(M), d_M) & \xrightarrow{A(\pi)} & (A(E), d_E) & & \\ \uparrow m & & \uparrow \xi & & \\ (L(X), d_B) & \xrightarrow{l} & (L(X) \otimes L(X'), d) & \xrightarrow{\rho} & (L(X'), \bar{d}) \end{array}$$

Or

$(L(X) \otimes L(X'), d)$ est un KS modèle de E ,

par suite :

$$(L(X) \otimes L(X'), d) = (L(X) \otimes L(\hat{X}'), \delta) \otimes (L(Y), d)$$

où $(L(Y), d)$ est une sous-algèbre contractile de $(L(X) \otimes L(X'), d)$ et $(L(X) \otimes L(\hat{X}'), \delta)$ est minimale.

On note p la projection

$$p : (L(X) \otimes L(X'), d) \rightarrow (L(X) \otimes L(\hat{X}'), \delta) = M$$

et

$$f = \iota \circ p$$

- . p est un quasi-isomorphisme ;
- . M est un modèle minimal de E ;
- . f est l'application induite par π au niveau des modèles minimaux.

Du théorème d'unicité des E.M. modèles, il résulte :

- b_1) Tout E.M.-modèle de ι est un E.M.-modèle de π .
- b_2) Tout E.M.-modèle de f est un E.M.-modèle de π .
- b_3) La E.M. algèbre $(L(Y), \bar{D})$ ne dépend que du type d'homotopie de π .

VIII.2.(7) Exemples.

a) Considérons la fibration triviale

$$F \xrightarrow{j} F \times M \longrightarrow M \quad (*)$$

Si (B, d_B) est un modèle quelconque de M et $(L(Z), \bar{D})$ un modèle filtré de F alors

$$(B, d_B) \longrightarrow (B \otimes L(Z), d_B \otimes \bar{D}) \longrightarrow (L(Z), \bar{D})$$

est un E.M.-modèle de $(*)$.

b) Considérons les fibrations de Hopf

$$S^1 \xrightarrow{j} S^{2n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n$$

π induit au niveau des modèles minimaux, l'homomorphisme

$$f : (L(b, b'), d_B) \longrightarrow (\Lambda x, 0)$$

avec

$$|b| = 2 \quad |b'| = |x| = 2n+1$$

$$f(b) = 0 \quad f(b') = x$$

$$d_B(b) = 0, \quad d_B b' = b^{n+1}.$$

Le E.M.-modèle de f (par conséquent de la fibration de Hopf) se décrit de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} (L(b, b'), d_B) & \xrightarrow{f} & (\Lambda x, 0) \\ & \searrow \iota & \uparrow \eta \\ & & (L(b, b') \otimes L(Y), D) \xrightarrow{\rho} (L(Y), \bar{D}) \end{array}$$

avec

$$Y = Y_0 \oplus Y_1 \oplus Y_2$$

$$Y_0 = \mathbb{k}y_0, \quad Y_1 = \mathbb{k}y_1, \quad Y_2 = \mathbb{k}y_2, \quad Y_i = 0 \quad i \geq 3,$$

$$|y_0| = 2n+1, \quad |y_1| = 1, \quad |y_2| = 2n,$$

$$Dy_0 = 0, \quad Dy_1 = b, \quad Dy_2 = y_0 - b' + b^n y_1,$$

$$\eta(y_0) = x, \quad \eta(y_1) = 0, \quad \eta(y_2) = 0.$$

d'où on déduit

$$\bar{D}y_0 = 0, \quad \bar{D}y_1 = 0, \quad \bar{D}y_2 = y_0,$$

$$\bar{D}_1 y_0 = 0, \quad \bar{D}_1 y_1 = 0, \quad \bar{D}_1 y_2 = 0,$$

$$D_1^* y_0 = 0, \quad D_1^* y_1 = [b], \quad D_1^* y_2 = 0,$$

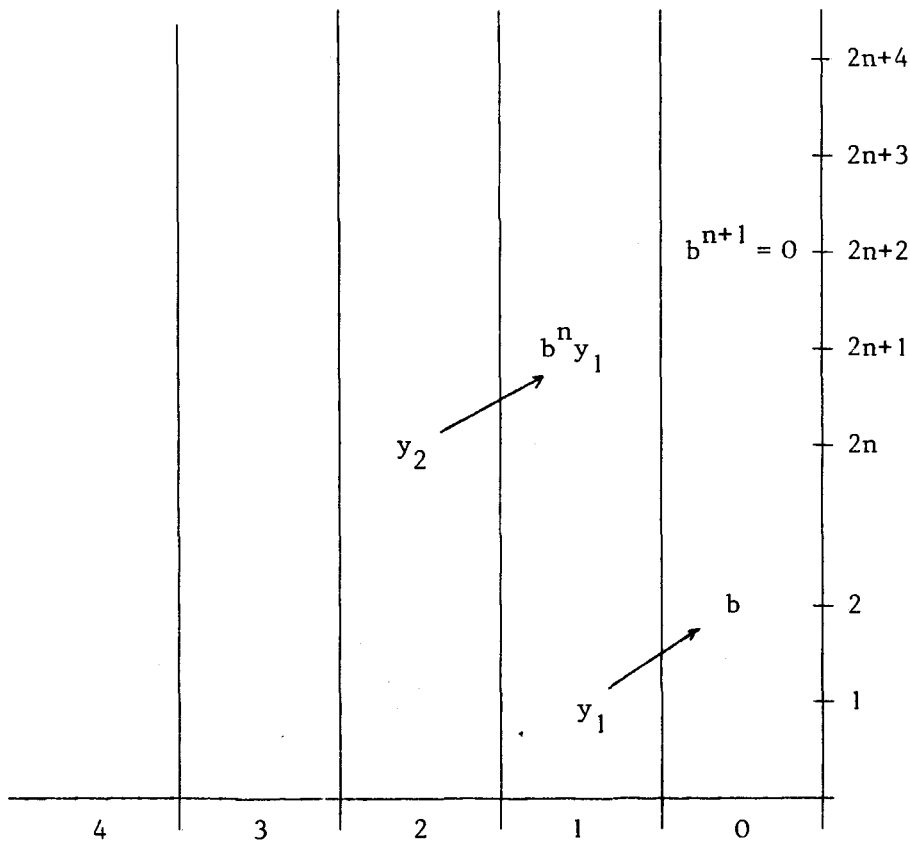
et le modèle formel sous-jacent est de la forme

$$S(b)/(b^{n+1}) \xrightarrow{l_1} (S(b)/(b^{n+1}) \otimes L(Y), D_1^*) \xrightarrow{\rho_1} L(Y), \bar{D})$$

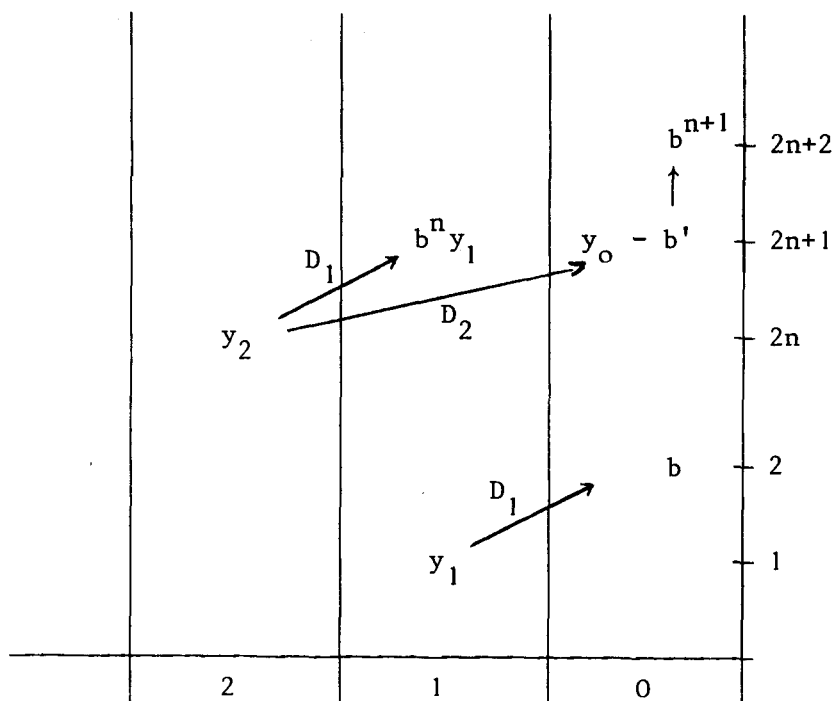
ce qui permet de vérifier que la fibre formelle n'est pas quasi-isomorphe à $H(S^1, \mathbb{k})$ et que la E.M. fibre n'est pas minimale.

c) Pour calculer le E.M.-modèle, il est souvent pratique de calculer d'abord le E.M.-modèle formel sous-jacent (ce qui détermine $L(Y)$) en utilisant un tableau où l'on représente les générateurs et les relations.

Par exemple, pour les fibrations de Hopf, on obtient :



Le E.M.-modèle se représente de la manière suivante :



VIII.2.(8) Réalisation géométrique.

Si on note R , le foncteur réalisation géométrique (cf. IX.1.(2), d'après VIII.2.(2), $R((L(Y), D))$ a le même type d'homotopie rationnelle que F .

On note

$$F_f = R((L(Y), \bar{D}_1)).$$

F_f est aussi appelée fibre formelle.

Si (*) n'est pas T.N.C.Z., alors F_f ne coïncide pas avec l'espace formel $R((L(Z), d))$ où $(L(Z), d)$ est un modèle bigradué de F .

Dans l'exemple VIII.2.(7), (b),

$$F \underset{\mathbb{Q}}{\sim} S^1$$

et

$$F_f \underset{\mathbb{Q}}{\sim} (K(\mathbb{Z}, 2n+1) \times K(\mathbb{Z}, 1)).$$

VIII.2.(9) E.M.-modèle des fibrations de base une sphère.

Considérons la fibration rationnelle

$$(*) \quad S \xleftarrow{\pi} E \xleftarrow{j} F$$

où S est une sphère, et un modèle filtré de E

$$v : (L(Z), \delta) \longrightarrow (A(E), d_E)$$

de modèle bigradué sous-jacent.

1) Supposons que $S = S^{2n+1}$, et notons

$$m : (\Lambda b, 0) \longrightarrow (A(S^{2n+1}), d_S)$$

un modèle de S^{2n+1} .

Nous obtenons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda b, 0) & \xrightarrow{A(\pi) \cdot m} & (A(E), d_E) & \xrightarrow{A(j)} & (A(F), d_F) \\ & \searrow 1 & \uparrow v & & \\ & & (L(Z), \delta) & & \\ & & \uparrow s & & \\ & & (\Lambda b \otimes S\bar{b} \otimes L(Z), D) & \xrightarrow{\rho} & (S\bar{b} \otimes L(Z), \bar{D}) \end{array}$$

avec $|\bar{b}| = 2n$

$$\left\{ \begin{array}{l} D\bar{b} = 0 \quad D\bar{b} = b - \Phi_0 \\ \Phi_0 \in L(Z_0) \text{ tel que } v(\Phi_0) = A(\pi) \circ m(b) \\ D|_{L(Z)} = \delta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s(b) = \Phi \quad s(\bar{b}) = 0 \\ s|_{L(Z)} = \text{Id}_{L(Z)}. \end{array} \right.$$

Alors s est un quasi-isomorphisme.

1 - (a) Supposons que $\pi^*([b])$ est décomposable (ou nul) dans $H^*(E)$ alors ϕ_0 est décomposable dans ΛZ_0 (ou nul) d'où on déduit que $\bar{D}_1$ est décomposable.

On pose

$$\begin{aligned} Y_0 &= Z_0 \\ Y_1 &= k\bar{b} \oplus Z_1 \\ Y_i &= Z_i \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

alors

$$E_2^{-p,q} = H_p^{q-p}(\Lambda b \otimes L(Y), D_1^*) \cong H_p^{q-p}(L(Z), d) = 0$$

si $p > 0$.

D'où on déduit que (F, η) est un E.M. modèle de (*) lorsque $\eta = v \circ s$ et

$$F : (\Lambda b, 0) \xrightarrow{l} (\Lambda b \otimes L(Y), D) \xrightarrow{\phi} (L(Y), \bar{D})$$

1 - (b) Supposons $\pi^*([b])$ indécomposable dans $H(E)$, alors $\phi_0 \in Z_0$ et nous avons le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda b, 0) & \xrightarrow{\quad} & A(E) & & \\ \uparrow & & \uparrow v & & \\ F : (\Lambda \phi_0, 0) & \xrightarrow{l} & (\Lambda \phi_0 \otimes L(Y), D) & \xrightarrow{\quad} & (L(Y), \bar{D}) \end{array}$$

avec $D = \delta$.

Il est alors facile de vérifier que (F, ν) est un E.M. modèle de $(*)$, lorsque l'on pose

$$\begin{aligned} Z_0 &= Y_0 \oplus \mathbb{K}\phi_0 \\ Y_i &= Z_i \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

2 - Supposons que $S = S^{2n}$ et notons

$$m : (L(b, b'), d_S) \longrightarrow (A(S^{2n}), d_S)$$

un modèle de S^{2n} .

Il existe un cocycle $\phi \in (L(Z_0), \delta)$ tel que

$$A(\pi) \circ m(b) = \nu(\phi)$$

et nécessairement

$$[\tilde{\phi}]^2 = 0$$

d'où l'existence de $\phi' \in L(Z)$ tel que

$$\delta\phi' = \phi^2$$

en fait $\phi' \in (\Lambda(Z_{\leq 1}))$.

Nous avons donc les éventualités suivantes :

- a) ϕ' décomposable, (dans ce cas $\delta(\phi') = d\phi'$ est de wedge degré ≥ 3 , ce qui entraîne que ϕ est décomposable).
- b) ϕ' indécomposable et ϕ décomposable.
- c) ϕ' indécomposable et ϕ indécomposable.

2 - (a) ϕ' décomposable.

On considère alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 (L(b, b'), d_S) & \xrightarrow{A(\pi) \cdot m} & (A(E), d_E) \\
 & \searrow \scriptstyle 1 & \uparrow \scriptstyle v \\
 & & (L(Z), \delta) \\
 & & \uparrow \scriptstyle s \\
 & & (L(b, b') \otimes L(\bar{b}, \bar{b}') \otimes L(Z), D) \xrightarrow{\rho} (L(\bar{b}, \bar{b}') \otimes L(Z), \bar{D})
 \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned}
 |\bar{b}| &= n-2 & |\bar{b}'| &= 2n-2 \\
 \left\{ \begin{array}{ll} Db = 0 & Db' = b^2 \\ D\bar{b} = b - \phi & D\bar{b}' = (\phi' - b') + (b + \phi)\bar{b} \\ D|_{L(Z)} = \delta \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{ll} s(b) = \phi & s(b') = \phi' \\ s(\bar{b}) = 0 & s(\bar{b}') = 0 \\ s|_{L(Z)} = \text{Id} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

alors s est un quasi-isomorphisme, $\bar{D}_1$ est décomposable (car $\bar{D}_1 \bar{b} = -\phi$, $\bar{D}_1 \bar{b}' = \phi' + \phi \bar{b}$, $\bar{D}_1|_{L(Z)} = d$) et en posant

$$\left\{ \begin{array}{ll} Y_0 = Z_0 \\ Y_1 = Z_1 \oplus \mathbb{k} \bar{b} \\ Y_2 = Z_2 \oplus \mathbb{k} \bar{b}' \\ Y_i = Z_i & i \geq 3 \end{array} \right.$$

on vérifie facilement que

$$H_+(S(b)/_b 2 \otimes L(Y), D_1^*) = 0$$

d'où un E.M. modèle de (*).

2 - (b) Φ' indécomposable et Φ décomposable.

$$\begin{array}{ccccc}
 L(b, b') & \xrightarrow{A(\pi)_{om}} & (A(E), d_E) & & \\
 \uparrow \eta & & \uparrow \eta & & \\
 F : L(b, \Phi') & \xrightarrow{1} & (L(b, \Phi') \otimes L(Y), D) & \xrightarrow{\quad} & L(Y, \bar{D})
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_0 = Z_0 \\ Y_1 = Z_1 + k\bar{b} \\ Z_2 = Y_2 \oplus k\Phi' \\ Y_i = Z_i \quad i \geq 3 \end{array} \right.$$

$$Db = 0, \quad D\bar{b} = b - \Phi, \quad D|_{L(Z)} = \delta$$

$$\eta(b) = A(\pi) \cdot m(b), \quad \eta|_{L(Z)} = \nu.$$

η est un quasi-isomorphisme et on vérifie facilement que F est un E.M.-modèle de (*).

2 - (c) Φ' indécomposable et Φ indécomposable

$$\begin{array}{ccccc}
 L(b, b') & \xrightarrow{A(\pi)_{om}} & (A(E), d_E) & & \\
 \uparrow \eta & & \uparrow \eta & & \\
 F : L(\Phi, \Phi') & \xrightarrow{1} & L(\Phi, \Phi') \otimes L(Y), D) & \xrightarrow{\rho} & (L(Y), \bar{D})
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_0 = Y_0 + k\Phi \\ Z_1 = Y_1 + k\Phi_1 \\ Y_i = Z_i \quad i \geq 2 \end{array} \right.$$

$$D = \delta, \quad \eta = \nu.$$

On vérifie alors que F est un E.M.-modèle de (*).

VIII-3. E.M. MODELE D'UNE FIBRATION T.N.C.Z.

Les notations sont celles de VIII.2.

Dans cette section, nous démontrons les résultats suivants :

VIII.3.(1) Théorème.-

a) Si la fibre formelle est le modèle bigradué de la fibre alors la fibration est T.N.C.Z.

b) Sous les hypothèses suivantes

- i) La fibration est T.N.C.Z.
- ii) $H(M, k)$ ou $H(F, k)$ est de type fini.
- iii) $D_1^* - \bar{D}(Y) \subset H^{\geq 2}(B, d_B) \oplus L(Y)$

la fibre formelle est le modèle bigradué de la fibre.

VIII.3.(2) Corollaire.-

a) Si la E.M. fibre est le modèle filtré de la fibre alors la fibration est T.N.C.Z.

b) Sous les hypothèses suivantes

- i) La fibration est T.N.C.Z.
- ii) $H(M, k)$ ou $H(F, k)$ est de type fini.
- iii) $D_1^* - \bar{D}_1(Y) \subset H^{\geq 2}(B, d_B) \oplus L(Y).$

la E.M. fibre est le modèle filtré de la fibre.

VIII.3.(3) Corollaire.-

Si $H^1(M, k) = 0$ et $H(M, k)$ ou $H(F, k)$ sont de type fini les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) La fibration I.4.(6) est T.N.C.Z.
- ii) La fibre formelle est un modèle bigradué de la fibre F .
- iii) La E.M. fibre est un modèle filtré de la fibre F .

VIII.3.(4) Preuve des corollaires.

a) Le premier corollaire résulte immédiatement du théorème VIII.3.(1), une fois que l'on remarque que $(L(Y), D)$ est un modèle filtré de F ssi $(L(Y), \bar{D}_1)$ est un modèle bigradué de F (cf. VII.4.(2)).

b) Le second résulte des deux résultats précédents puisque si $H^1(M, k) = 0$ alors la condition $D_1^* - \bar{D}_1(Y) \subset H^{\geq 2}(B) \otimes L(Y)$ est vérifiée.

VIII.3.(5) Démonstration du théorème VIII.3.(1).

a) Supposons que $((L(Y), \bar{D}_1), \bar{\zeta})$ soit un modèle bigradué de la fibre F , alors

- i) $H_0(L(Y), \bar{D}_1) \xrightarrow[\zeta^*]{\cong} H(F, k) \quad (\cong \bar{E}_2^{0,*})$
- ii) $H_p(L(Y), \bar{D}_1) = 0 \quad (= \bar{E}_2^{-p,*}) \quad \text{si } p > 0.$

L'homomorphisme $\rho : (B \otimes L(Y), D) \rightarrow (L(Y), \bar{D})$

induit l'homomorphisme

$$\rho_1 : (E_1 = H(B) \otimes L(Y), D_1^*) \rightarrow (\bar{E}_1 = L(Y), \bar{D}_1)$$

et les conditions i) et ii) entraînent que :

$$\rho_1^* (= \rho_2 = \rho^*) : E_2 \rightarrow \bar{E}_2 \text{ est surjectif.}$$

De la relation

$$j^* \circ \zeta^* = \bar{\zeta}^* \circ \rho_1^*$$

on déduit que j^* est surjectif.

b) Supposons que la fibration soit T.N.C.Z. alors d'après II.1.(3), $H(E, k)$ est un $H(B)$ module libre. Du diagramme commutatif suivant, on déduit que $H(B) \otimes L(Y_0)/D_1^*(H(B) \otimes (L(Y))_1)$ est aussi un $H(B)$ module libre.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(E) & & \\
 & \nearrow \pi^* \cdot m^* & \uparrow \xi & \nwarrow \zeta_0 & \\
 H(B) & & & & \\
 & \searrow l^* & & & \\
 & (H(B) \otimes L(Y), D_1^*) & \longleftarrow & (H(B) \otimes L(Y_0), 0)
 \end{array}$$

Par suite, il existe un sous-espace vectoriel V de $L(Y_0)$, tel que l'inclusion naturelle

$$\psi : (H(B) \otimes V, 0) \longrightarrow (H(B) \otimes L(Y), D_1^*)$$

soit un quasi-isomorphisme.

Filtrons les a.d.g.c. $(H(B) \otimes V, 0)$ resp. $(H(B) \otimes L(Y), D_1^*)$ par le degré de $H(B)$. Nous obtenons deux suites spectrales de premier quadrant $\check{E}$ (resp. $\check{\check{E}}$) telles que :

$$\check{E}_0^{p,q} = \check{E}_1^{p,q} = \check{E}_2^{p,q} = (H^p(B) \otimes V^q, 0)$$

$$\check{\check{E}}_0^{p,q} = (H^p(B) \otimes (L(Y))^q, \bar{D}_1)$$

$$\check{\check{E}}_1^{p,q} = (H^p(B) \otimes H^q(L(Y)), (D_1^* - \bar{D}_1)^*)$$

et de la relation $D_1^* - \bar{D}_1(Y) \subset H^{\geq 2}(B, d_B) \otimes L(Y)$, on déduit que

$$\check{\check{E}}_2^{p,q} = \check{\check{E}}_1^{p,q}.$$

ψ induit un homomorphisme $\psi_i : \check{E}_i \rightarrow \check{\check{E}}_i$, $i \geq 0$ tel que :

- i) ψ^* est un isomorphisme ;
- ii) $\psi_2^{p,0} : \check{E}_2^{p,0} = H^p(B) \rightarrow H^p(B) = \check{E}^{p,0}$ est un isomorphisme pour tout $p \geq 0$.

D'après le théorème de Moore (Séminaire Cartan 54-55, p. 3-04)

$$\psi_2^{0,*} : V \rightarrow H(L(Y), \bar{D}_1)$$

est un isomorphisme de bidegré (0,0) (puisque ψ est l'inclusion), ce qui entraîne que

$$\begin{cases} H_+(L(Y), \bar{D}_1) = 0 \\ H_0(L(Y), \bar{D}_1) = H(L(Y), \bar{D}_1) \quad (\cong V). \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\bar{\zeta}$ qui est défini par les formules

$$\bar{\zeta}(y) = \begin{cases} j^* \zeta(y) & \text{si } y \in Y_0 \\ 0 & \text{si } y \in Y_i, \quad i > 0 \end{cases}$$

est un quasi-isomorphisme

$$(\bar{\zeta} = \bar{\eta}_1)$$

ce qui prouve que $((L(Y), \bar{D}_1), \bar{\zeta})$ est un modèle bigradué de F .

VIII-4. FIBRATIONS COHOMOLOGIQUEMENT OU HOMOTOPIQUEMENT TRIVIALES.

Les notations sont celles de VIII.2.

VIII.4.(1) L'exemple VIII.2.(7) (a) nous suggère les définitions suivantes :

Le E.M.-modèle d'une fibration est dit trivial si

- i) La E.M. fibre $((L(Y), \bar{D}), \bar{\eta})$ est un modèle filtré de F .

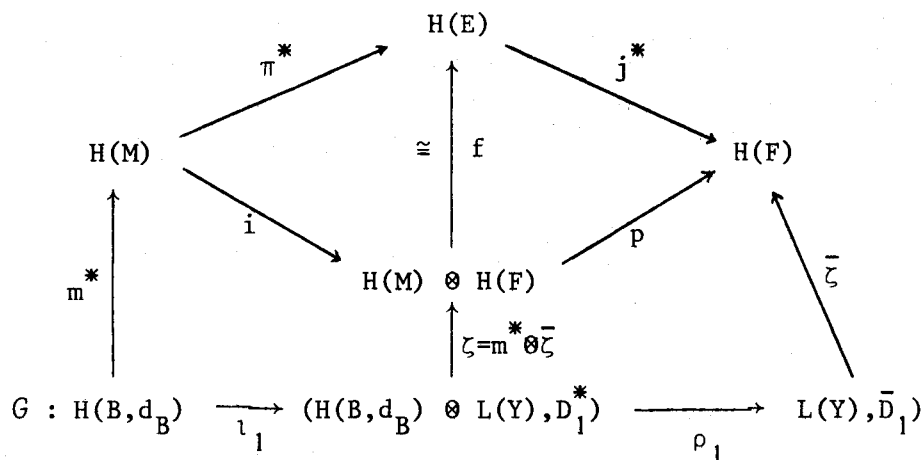
ii) La différentielle D_1^* est triviale i.e. $D_1^* = d_B \otimes \bar{D}_1 = D_0 + 1 \otimes \bar{D}_1$.

VIII.4.(2) Théorème.-

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fibration rationnelle soit homotopiquement triviale (resp. cohomologiquement triviale) est qu'il existe un E.M. modèle (resp. un modèle formel) trivial.

VIII.4.(3) Démonstration.

a) Supposons la fibration C.T, alors nous avons le diagramme suivant commutatif.



où f est un isomorphisme d'a.g.c. et $((L(Y), \bar{D}_1), \bar{\zeta})$ un modèle bigradué de F .

$(G, f \circ \zeta)$ est un modèle formel de la fibration C.T.

Réciproque évidente.

b) Supposons la fibration H.T, alors nous avons le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A(M) \otimes L(X), d & & \\
 & \nearrow \iota & \uparrow \psi & \searrow \rho & \\
 (A(M), d_M) & & & & (L(X), \bar{d}) \\
 & \searrow \iota & & \nearrow \rho & \\
 & & (A(M) \otimes L(X), d_M \otimes \bar{d}) & & \\
 & & \uparrow m \otimes \bar{\eta} = \eta & & \\
 F : (B, d_B) & \xrightarrow{\iota} & (B \otimes L(Y), d_B \otimes \bar{D}) & \xrightarrow{\rho} & (L(Y), \bar{D})
 \end{array}$$

$\uparrow m$ $\uparrow \bar{\eta}$

où $(A(M), d_M) \longrightarrow (A(M) \otimes L(X), d) \longrightarrow (L(X), \bar{d})$ est un modèle KS minimal de la fibration.

ψ est un isomorphisme d'a.d.g.c.

$(L(Y), \bar{D})$ est un modèle filtré de $(L(X), \bar{d})$ donc de F .

$$((L(Y), \bar{D}) \xrightarrow{\bar{\eta}} (L(X), \bar{d}) \xrightarrow{\nu} (A(F), d_F)).$$

De la définition d'un E.M.-modèle, il résulte que F est un E.M. modèle de la fibration.

Remarquons que si $f = \psi^*$, alors $(G, f \circ \zeta)$ est le modèle formel sous-jacent à $(F, \psi \circ \eta)$.

La réciproque est évidente.

VIII.4.(4) Remarques.

a) Si une fibration rationnelle est H.T (resp. C.T) tous ses E.M. modèles sont isomorphes au E.M. modèle trivial (resp. au modèle formel trivial) et toutes les E.M. fibres (resp. fibres formelles) sont des modèles filtrés (resp. modèles bigradués) de la fibre F .

b) Si on considère un modèle filtré au sens de M. Vigué, d'une fibration C.T, alors le modèle bigradué sous-jacent est isomorphe (en tant que modèle bigradué) au modèle trivial de base $(L(Z), d)$.

$$G^V : (L(Z), d) \longrightarrow (L(Z \oplus X), d') \longrightarrow (L(X), d'').$$

Il en résulte que

$$\mu' : (L(Z \oplus X), d') \rightarrow H(E, k)$$

est un modèle bigradué de E .

$$F^V : (L(Z), D) \longrightarrow (L(Z \oplus X), D') \longrightarrow (L(X), D'')$$

$$\nu' : (L(Z \oplus X), D') \rightarrow (A(E), d_E)$$

est un modèle filtré de E .

c) Cette propriété ne s'étend pas à tout E.M.-modèle, de base $(L(Z), D)$, d'une fibration C.T.

VIII.4.(5) Proposition.-

Pour toute fibration rationnelle I.4.(6) cohomologiquement triviale les conditions suivantes sont équivalentes

- i) E est faiblement formel ;
- ii) I.4.(6) est F.H.T. et M et F sont faiblement formels.

VIII.4.(6) On rappelle qu'un espace topologique M est faiblement formel si la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de M (i.e. la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de la fibration canonique $M \leftarrow P(M) \leftarrow \Omega(M)$) collapse au niveau E_2 . Ce qui équivaut encore

à dire (cf. [H-S] 7.20) que le modèle filtré de M est minimal. D'où en particulier l'implication

$$(M \text{ formel} \implies M \text{ faiblement formel}) .$$

VIII.3.(7) Preuve :

Ceci résulte immédiatement de VIII.3.4.(b), VIII.3.(6) et VI.4.(5).

VIII.3.(8) Remarques :

Les hypothèses

$$E \text{ formel}, F \text{ formel}, M \text{ formel}$$

et $(*)$ H.T, $(*)$ C.T, $(*)$ F.H.T où $(*)$ désigne une fibration rationnelle.

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M \quad (\text{I.4.(6)})$$

sont reliées entre elles de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} M, F \text{ formels} \\ (*) \text{ H.T} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E \text{ formel} \\ (*) \text{ H.T} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M, F \text{ formels} \\ (*) \text{ C.T} + \text{F.H.T} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{l} E \text{ faiblement formel} \\ (*) \text{ H.T} \quad (1) \\ E \text{ formel} \quad (1) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E \text{ formel} \\ (*) \text{ C.T} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{l} (*) \text{ F.H.T et } M \text{ et } F \text{ faiblement} \\ \text{formels} \\ (*) \text{ H.T} \quad (2) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E \text{ et } F \text{ formels} \\ (*) \text{ C.T} \end{array} \right\} \implies (*) \text{ H.T} \quad (3)$$

(1) Les contre-exemples sont décrits en VIII.3.(10).

(2) Nous ne disposons pas de contre-exemple pour cette relation.

VIII.4.(9) Preuve de (3).

Puisque (*) est C.T, d'après VI.2.(1), il existe

$$\sigma : H^*(F, k) \rightarrow H^*(E, k)$$

telle que $j^* \cdot \sigma = \text{Id}_{H(F, k)}$.

D'autre part, considérons, un modèle filtré au sens de M. Vigué de (*)

$$F : (L(Z), D_B) \xrightarrow{1} (L(Z \otimes X), D) \xrightarrow{\rho} (L(X), \bar{D}).$$

D'après VIII.4.(4) (b),

$(L(X), \bar{D})$ est un modèle filtré de F .

$(L(Z \otimes X), D)$ est un modèle filtré de E .

Or puisque E et F sont formels

$(L(X), \bar{D})$ est un modèle bigradué de F .

$(L(Z \otimes X), D)$ est un modèle bigradué de E .

Ce qui entraîne :

- i) F est un KS modèle minimal de (*) (car $(L(X), \bar{D})$ minimal) ;
- ii) il existe un homomorphisme d'a.d.g.c. τ tel que le diagramme suivant commute ([T] , Corollaire 14)

$$\begin{array}{ccc} (H(F, k), 0) & \xrightarrow{\sigma} & (H(E, k), 0) \\ \uparrow \bar{\zeta} & & \uparrow \zeta \\ (L(X), \bar{D}) & \xrightarrow{\tau} & (L(Z \otimes X), D) \end{array}$$

De la relation $j^* \circ \zeta = \bar{\zeta} \circ \rho$, on déduit que

$$\bar{\zeta} = \zeta \circ \rho \circ \tau$$

par suite

$$\rho^* \circ \tau^* = \text{Id}_{H(L(X), \bar{D})}$$

Puisque $(L(X), \bar{D})$ est minimale,

$\rho \circ \tau$ est un automorphisme de $(L(X), \bar{D})$. Posons α cet automorphisme, alors

$$\rho \circ (\tau \circ \alpha^{-1}) = \text{Id}_{L(X)}$$

et d'après VI.2.(2), (*) est H.T.

VIII.3.(10) Exemple.

Nous donnons ici un exemple de fibration de base et fibre biformelle qui n'est pas H.T, qui est F.H.T et C.T, mais dont l'espace total E n'est pas formel.

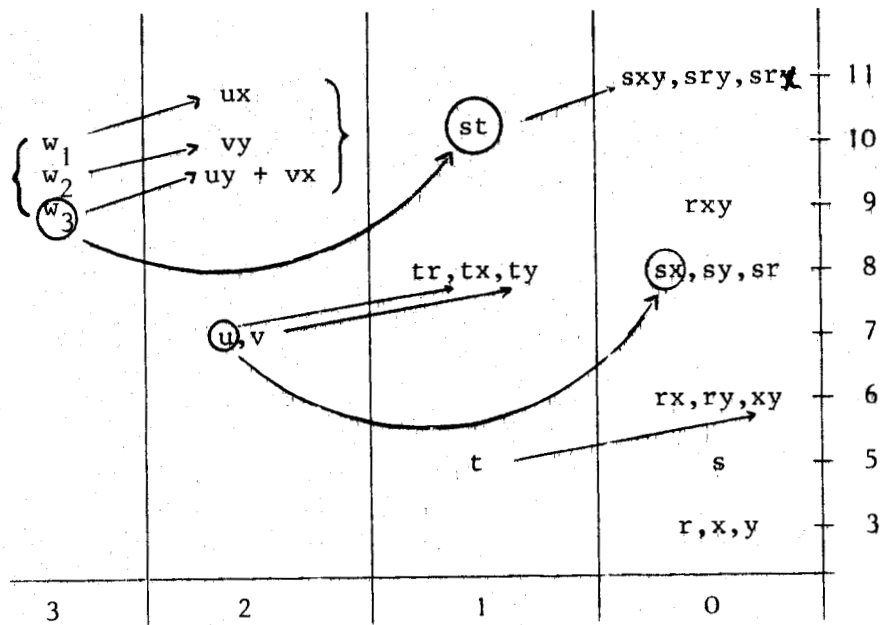
Pour cela, posons

$$M = S^3 \times S^5$$

$$F = S^3 \vee S^3$$

et considérons E obtenu par la déformation au sens de H.S décrite ci-dessous, du produit

$$(S^2 \times S^5) \times (S^3 \vee S^3)$$



$$Z = rQ \oplus sQ$$

$$X = xQ \oplus yQ \oplus tQ \oplus uQ \oplus vQ \oplus w_1Q \oplus \dots$$

$$Dr = Ds = 0$$

$$D = d$$

$$\bar{D} = \bar{d}$$

$$D' = d' + d'_2$$

$$d' = d \otimes \bar{d}$$

$$d'_2 u = sx$$

$$d'_2 w_2 = 0$$

$$d'_2 v = 0$$

$$d'_2 w_3 = st$$

$$d'_2 w_1 = 0$$

$$d'_2 | (Z \otimes X)_{>3} = 0$$

Remarque 1.-

L'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle $\pi_*(E) \otimes Q$

est isomorphe à

$$L_{(x,y,s)} \oplus Q^r / ([s,y]=0, [s,x]=[x,y], x)$$

par suite elle n'est pas isomorphe à la somme directe de $(\pi_*(M) \otimes Q)$

et $\pi_*(F) \otimes Q$ en tant qu'algèbre de Lie (mais seulement en tant

qu'espace vectoriel puisque la fibration est F.H.T). On déduit de ceci que la fibration ainsi construite n'est pas H.T.

Remarque 2.-

La classe de cohomologie $[sx]$ est égale au produit de Massey $\langle x, x, y \rangle$ dans $H^*(E, \mathbb{Q})$ ($[tx] = [sx] = \langle x, x, y \rangle$). Or le produit de Massey $\langle x, x, y \rangle$ est nul dans $H^*(F, \mathbb{Q})$, ce qui entraîne en particulier que la fibration n'est pas H.T.

VIII-5. FILTRATION ET SUITE SPECTRALE D'EILENBERG-MOORE.

Les notations sont celles de VIII.2.

VIII.5.(1) Si on considère le E.M. modèle d'une fibration rationnelle I.4.(6), la E.M. fibre $(L(Y), D)$ est munie d'une filtration canonique (th. VII.4.(1))

$$\bar{F}_{-1} = 0, \quad \bar{F}_p = (L(Y))_{\leq p} \quad \text{si } p \geq 0.$$

On note (cf. VII.1.(1))

$$(L(Y))_p^n = (L(Y)_p)^{n-p} = (L(Y))^{-p, n}$$

$$0 \subset \bar{F}_0 = L(Y_0) \subset \bar{F}_1 \subset \dots \subset \bar{F}_p \dots \subset L(Y).$$

Pour respecter les conventions usuelles de la théorie des suites spectrales, on pose

$$F_p = F^{-p}.$$

Par suite

$$(F^{-p})_{p \geq 0}$$

est une filtration décroissante, convergente supérieurement (i.e $L(Y) = \bigcup_{p \geq 0} F_p$) et bornée inférieurement.

Cette filtration donne naissance à une suite spectrale, notée $(\bar{E}_i, \bar{d}_i)$, dans le second quadrant,

$$\bar{E}_0^{-p,q} = (L(Y))^{-p,q}, \quad \bar{d}_0 = 0$$

$$\bar{E}_1^{-p,q} = (L(Y))^{-p,q} \quad d_1 = \bar{D}_1$$

$$\bar{E}_2^{-p,q} = H_p^{q-p}(L(Y), \bar{D}_1)$$

$$(E_2 \cong H(F_f, k))$$

VIII.5.(2) Théorème ([Vi], th. 4.2.(6))

Si $(*) \quad F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$ est une fibration rationnelle de base simplement connexe alors la suite spectrale

$$(\bar{E}_i, \bar{d}_i)$$

définie ci-dessus, converge et coïncide à partir du terme $\bar{E}_2$ avec la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de $(*)$.

VIII.5.(3) Ceci résulte directement de VII.4.(3) et de VIII.3.(3).

VIII.5.(4) Corollaire.

Si $(*) \quad F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$ est une fibration rationnelle de base simplement connexe alors les propositions suivantes sont équivalentes

- i) La E.M. fibre est modèle filtré de F ;
- ii) La fibre formelle est un modèle bigradué de F ;

- iii) (*) est N.T.C.Z. ;
- iv) La suite spectrale d'Eilenberg-Moore de (*) dégénère complètement ;
- v) La suite spectrale de Serre collapse au niveau E_2 .

Si l'une des propriétés précédentes est vérifiée, on a évidemment :

$$f_{H(F)}(t) = \prod_{n \geq 0} \prod_{p \geq 0} \frac{(1 + t^{2n+1})^{\dim Y_p^{2n+1}}}{(1 - t^{2n})^{\dim Y_p^{2n}}}$$

(cf. [H-S] 3.10).

VIII.5.(5) Exemple : La fibration canonique.

Soient M un espace 1-connexe,

$$\Omega(M) \longrightarrow P(M) \xrightarrow{\pi} M$$

désigne la fibration canonique et $(\Lambda Z, D)$ un modèle filtré au sens de [H-S] de M , dont le modèle bigradué sous-jacent est $(\Lambda Z, d)$.

$$\text{On pose, } \bar{Z}_p^n = Z_{p-1}^{n+1}, \quad \bar{Z}_0 = 0$$

et on définit une dérivation s sur $L(Z) \otimes L(\bar{Z})$ en posant

$$s(z) = \bar{z}, \quad s(\bar{z}) = 0$$

s est de degré -1 et augmente le degré filtrant de $+1$. On définit une différentielle D' sur $L(Z) \otimes L(\bar{Z})$ en posant :

$$D' \Big|_{L(Z)} = D, \quad D' \bar{z} = z - \Delta^{-1}(s Dz)$$

d'où

$$D's + sD' = \Delta$$

avec Δ un automorphisme linéaire (et une dérivation) qui vérifie

$$\Delta|_{L(Z)} = \text{Id}_{L(Z)}$$

$$\Delta|_{L^q(\bar{Z})} = q \text{Id}_{L(\bar{Z})}$$

$$\Delta|_{L^+(Z) \otimes L^q(\bar{Z})} = (q+1) \text{Id}_{L^+(Z) \otimes L^q(\bar{Z})}.$$

Alors (F, η) est un KS modèle de π lorsque l'on pose

$$F : (L(Z), D) \longrightarrow (L(Z) \otimes L(\bar{Z}), D') \longrightarrow (L(\bar{Z}), \bar{D}')$$

$$\eta|_{L(Z)} = A(\pi) \cdot v, \quad \eta(\bar{z}) = \alpha_{\bar{z}} \quad \text{tel que} \quad d_E \alpha_{\bar{z}} = A(\pi) \cdot v(z).$$

On définit d' en posant

$$d'|_{L(Z)} = d, \quad d'\bar{z} = z - \Delta^{-1}(sdz)$$

et on vérifie que (F, η) est un modèle filtré au sens de M. Vigué, de modèle bigradué sous-jacent G

$$G : (L(Z), d) \longrightarrow (L(Z) \otimes L(\bar{Z}), d') \longrightarrow (L(\bar{Z}), 0).$$

Si on note,

$$\begin{array}{llll} \delta' & \text{la partie linéaire de} & D' & \\ \delta & " & " & D \\ \bar{\delta}' & " & " & \bar{D}' \end{array}$$

alors

$$Dz = \delta z + D_+ z \quad \text{avec} \quad D_+ z \in L^+(Z) \cdot L^+(Z)$$

d'où

$$D'\bar{z} = z - \Delta^{-1}(s\delta z) - \Delta^{-1}(sD_+ z)$$

et

$$\bar{D}'\bar{z} = -s(\delta z).$$

La E.M. fibre est donc obtenue en translatant les générateurs du modèle filtré et en munissant $L(\bar{Z})$ de la différentielle δ obtenue en prolongeant à $L(\bar{Z})$ la partie linéaire de D .

En particulier, ceci démontre que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'un espace M introduite dans $[H-S]$ est précisément la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de la fibration canonique $M \longleftarrow P(M) \longleftarrow \Omega(M)$.

La suite spectrale d'Eilenberg-Moore de la fibration canonique collapse au niveau E_2 ssi M est faiblement formel ($[H-S]$. Th. 7.20).

VIII.5.(6) Exemple.

On donne ici un exemple de fibration

$$(*) \quad F \longrightarrow \mathbb{C}P_2 \xrightarrow{\pi} S^4$$

telle que

- i) la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de la fibration $(*)$ collapse mais ne dégénère pas totalement.
- ii) la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de l'espace F ne collapse jamais.

Pour cela, considérons l'application cellulaire

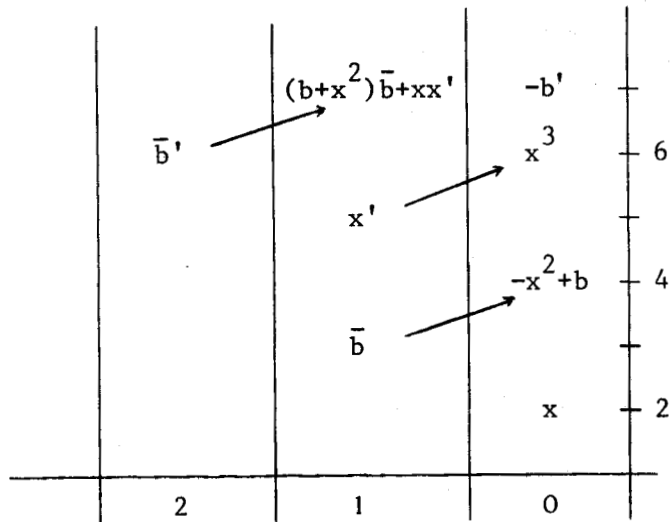
$$\pi : \mathbb{C}P^2 = \mathbb{C}P^1 \underset{\psi}{\cup} D^4 \longrightarrow S^4$$

qui envoie le 2-squelette de $\mathbb{C}P^2$ sur le point base de S^4 . π induit au niveau des modèles minimaux l'application :

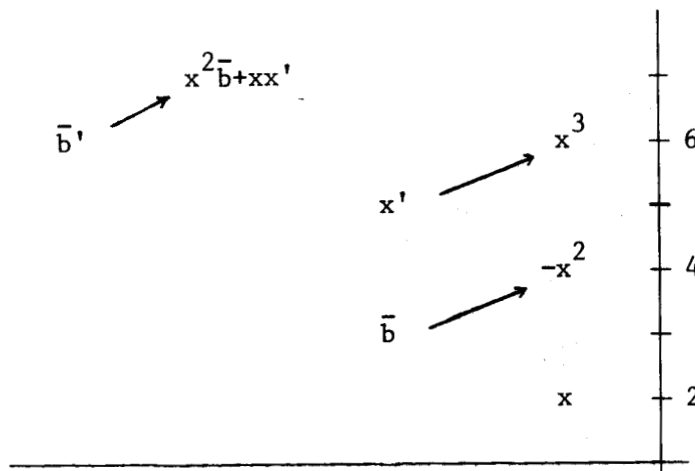
$$\gamma : L(b, b') \longrightarrow L(x, x')$$

$$\begin{aligned} |b| &= 4 & |b'| &= 7 & db' &= b^2 \\ |x| &= 2 & |x'| &= 5 & dx' &= x^3 \\ \gamma(b) &= x^2 & \gamma(b') &= xx'. \end{aligned}$$

Le E.M. modèle de γ est décrit par le tableau suivant
(cf : VIII.2.(9)) :



La E.M. fibre $(L(Y), \bar{D})$ est décrite par le tableau suivant :



Puisque $\bar{D} = \bar{D}_1$, $F = F_f$, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de la fibration (*) collapse au niveau E_2 , mais ne dégénère pas complètement puisque

$$[\bar{x}\bar{b} + x'] \neq 0 \in E_2^{1,5}$$

La fibre F peut se définir géométriquement comme l'espace total d'une fibration principale

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{Q}, G) & & \\ \downarrow & & \\ F & & \\ \downarrow & & \\ S^2 \times S^5 & \longrightarrow & K(\mathbb{Q}, 7) \end{array}$$

d'invariant de Posnikov le produit des classes fondamentales τ_{S^2} et τ_{S^5} . Un modèle minimal de F est donné par

$$(L(x, \bar{b}, u, \bar{b}'), d)$$

avec

$$\begin{cases} dx = 0, & d\bar{b} = -x^2 \\ du = 0, & d\bar{b}' = xu. \end{cases}$$

En calculant le modèle filtré de F , on voit facilement que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de F ne collapse jamais ce qui prouve que $F = F_f$ est loin d'être un espace formel au sens de [H-S].

CHAPITRE IX

THEORIE DE L'OBSTRUCTION A LA REALISATION D'UNE C-EQUIVALENCE ENTRE DEUX FIBRATIONS .

IX-1. RAPPELS ET NOTATIONS.

IX.1.(1) On note

Top : la catégorie des espaces topologiques connexes par arcs, pointés.

C.W.T.F.N. : la sous-catégorie de Top des C.W. complexes de type fini, nilpotents.

k-A.D.G.C. : la catégorie des a.d.g.c., cohomologiquement connexes, augmentées.

k-K.S.T.F. : la sous-catégorie des A.D.G.C. des KS complexes de type fini.

IX.1.(2) On considère les deux foncteurs contravariants
adjoints

$$\text{Top} \begin{array}{c} \xrightarrow{A} \\ \xleftarrow{R} \end{array} \text{A.D.G.C.}$$

A foncteur de Sullivan (I.4.(1))

R foncteur réalisation géométrique

On note

$$\begin{aligned} \psi_X : X &\longrightarrow R \circ A(X) & X \in \underline{\text{Top}} \\ f_c : C &\longrightarrow A \circ R(C) & C \in \underline{\text{A.D.G.C.}} \end{aligned}$$

les applications canoniques qui définissent des transformations naturelles

$$\begin{aligned} \psi &: \text{Id}_{\underline{\text{Top}}} \xrightarrow{\cong} R \circ A \\ f &: \text{Id}_{\underline{\text{ADGC}}} \xrightarrow{\cong} A \circ R. \end{aligned}$$

Lorsque l'on restreint A et R aux catégories

$$\underline{\text{C.W.T.F.N.}} \quad \text{et} \quad \underline{\text{Q-K.S.T.F.}}$$

alors A et R induisent des équivalences de catégories homotopiques.

Dans ce cas :

$$f_C : C \longrightarrow A \circ R(C)$$

est une équivalence d'homotopie et

$$\psi_X : X \longrightarrow R \circ A(X) \cong X_Q$$

est une localisation de X (cf. [Hi]). .

IX.1.(3) On considère des fibrations rationnelles de même

base

$$\begin{aligned} (*^v) \quad F^v &\xrightarrow{j^v} E^v \xrightarrow{\pi^v} M, & v = ', " , " , \dots \\ M, F^v, E^v, j^v, \pi^v &\in \underline{\text{Top}}. \end{aligned}$$

IX.1.(4) On note $(E^\vee, \xi^\vee, \bar{\xi}^\vee)$ un modèle KS minimal de $(*)^\vee$, de base $((B, d_B), m)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 (A(M), d_M) & \xrightarrow{A(\pi^\vee)} & (A(E^\vee), d_{E^\vee}) & \xrightarrow{A(j^\vee)} & (A(F^\vee), d_{F^\vee}) \\
 \uparrow m & \curvearrowright & \uparrow \xi^\vee & \curvearrowright & \uparrow \bar{\xi}^\vee \\
 E^\vee : (B, d_B) & \xrightarrow{i^\vee} & (B \otimes L(X^\vee), d^\vee) & \xrightarrow{\rho^\vee} & (L(X^\vee), \bar{d}^\vee)
 \end{array}$$

où $((B, d_B), m)$ est un modèle de M , que l'on supposera connexe ($B^0 = \mathbb{k}$).

IX.1.(5) On note $(F^\vee, \eta^\vee, \bar{\eta}^\vee)$ un E.M.-modèle de $(*)^\vee$ de base $((B, d_B), m)$

$$\begin{array}{ccccc}
 (A(M), d_M) & \xrightarrow{A(\pi^\vee)} & (A(E^\vee), d_{E^\vee}) & \xrightarrow{A(j^\vee)} & (A(F^\vee), d_{F^\vee}) \\
 \uparrow m & \curvearrowright & \uparrow \eta^\vee & \curvearrowright & \uparrow \bar{\eta}^\vee \\
 F^\vee : (B, d_B) & \xrightarrow{i^\vee} & (B \otimes L(Y^\vee), D^\vee) & \xrightarrow{\rho^\vee} & (L(Y^\vee), \bar{D}^\vee)
 \end{array}$$

On note $(G^\vee, \zeta^\vee, \bar{\zeta}^\vee)$ le E.M.-modèle formel sous-jacent à $(F^\vee, \eta^\vee, \bar{\eta}^\vee)$

$$\begin{array}{ccccc}
 H(M, \mathbb{k}) & \xrightarrow{(\pi^\vee)^*} & H(E^\vee, \mathbb{k}) & \xrightarrow{(j^\vee)^*} & H(F^\vee, \mathbb{k}) \\
 \uparrow m^* & \curvearrowright & \uparrow \zeta^\vee & \curvearrowright & \uparrow \bar{\zeta}^\vee \\
 G^\vee : H(B, d_B) & \xrightarrow{i^\vee} & (H(B, d_B) \otimes L(Y^\vee), D_1^*) & \xrightarrow{\rho^\vee} & L(Y^\vee), \bar{D}_1)
 \end{array}$$

IX.1.(6) Proposition.-

Soit f une équivalence d'homotopie

$$f : E' \rightarrow E''$$

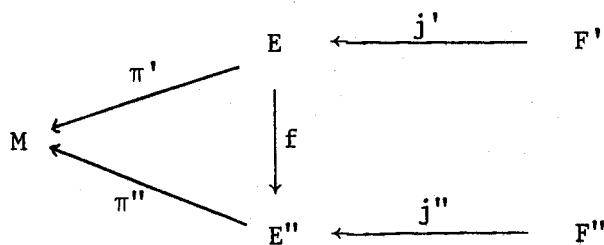
telle que

$$\pi'' \circ f = \pi'$$

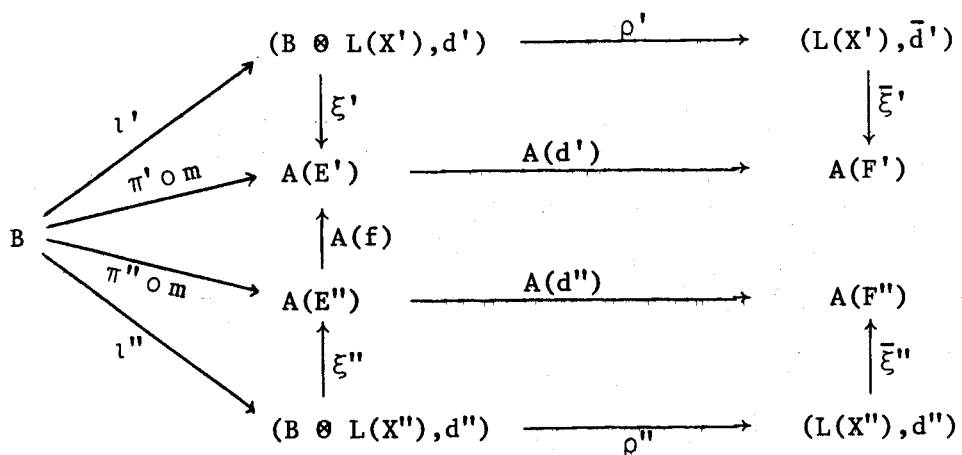
alors les KS extensions minimales E' et E'' sont isomorphes.

IX.1.(7) Preuve :

On a le diagramme suivant commutatif :



d'où on déduit le diagramme commutatif :



Le théorème d'unicité des modèles KS minimaux entraîne

l'existence d'un isomorphisme $(Id_B, \psi, \bar{\psi})$ entre E' et E'' .

IX.1.(8) Proposition.-

Si $E', E'', M, F', F'' \in \text{C.W.T.F.N.}$ et s'il existe un isomorphisme $(\text{Id}_B, \Psi, \bar{\Psi})$ entre les modèles KS minimaux E' et E'' , alors il existe deux équivalences d'homotopie f et $\bar{f}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E'_Q & \xleftarrow{\quad} & F_Q \\
 & \swarrow & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\
 M_Q & & & & F''_Q \\
 & \searrow & E''_Q & \xleftarrow{\quad} &
 \end{array}$$

IX.1.(9) Preuve :

On peut toujours supposer que $B \in \text{K.S.T.F.}$ alors $B \otimes L(X')$ et $B \otimes L(X'') \in \text{K.S.T.F.}$ et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (B \otimes L(X'), d') & \xrightarrow{\rho'} & (L(X'), \bar{d}') \\
 & \nearrow l' & \uparrow \Psi & & \uparrow \bar{\Psi} \\
 (B, d_B) & & & & \\
 & \searrow l'' & (B \otimes L(X''), d'') & \xrightarrow{\rho''} & (L(X''), \bar{d}')
 \end{array}$$

En appliquant le foncteur R , compte tenu de IX.1.(2), on obtient le diagramme désiré.

IX-2. h-EQUIVALENCE, c-EQUIVALENCE.

IX.2.(1) Définition.-

Les fibrations rationnelles $(*)'$ et $(*)''$ sont h -équivalentes (resp. strictement h -équivalentes s'il existe un isomorphisme $(\text{Id}_B, \psi, \bar{\psi})$ (resp. $(F' = F'', \bar{\psi} = \text{Id}_{L(X)})$) entre les KS extensions minimales E' et E'' .

$(\psi, \bar{\psi})$ est appelée une h-équivalence (resp. une h-équivalence stricte).

IX.2.(2) Remarques.

a) D'après IX.1.(8) et (6), dans la catégorie C.W.T.F.N., les fibrations $(*)'$ et $(*)''$ sont h-équivalentes ssi il existe deux équivalences d'homotopie f et $\bar{f}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E'_Q & \xleftarrow{\quad} & F'_Q \\
 & \swarrow & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\
 M_Q & & E''_Q & \xleftarrow{\quad} & F''_Q
 \end{array}$$

b) Si $(*)'$ est h-équivalente à la fibration triviale, alors elle est strictement h-équivalente à la fibration triviale, c'est-à-dire homotopiquement triviale (H.T, cf. VI.1.(2)).

c) Deux fibrations h-équivalentes ont leur fibre qui ont même type d'homotopie rationnelle.

IX.2.(3) Définition.-

Les fibrations rationnelles $(*)'$ et $(*)''$ sont c-équivalentes (resp. strictement c-équivalentes) s'il existe deux isomorphismes d'a.g.c. f et $\bar{f}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(E', k) & \xrightarrow{(j')^*} & H(F', k) \\
 & \nearrow (\pi')^* & \downarrow f & & \downarrow f \\
 H(M, k) & & H(E'', k) & \xrightarrow{(j'')^*} & H(F'', k)
 \end{array}$$

(resp. $F' = F''$, $\bar{f} = \text{id}_{H(F, \mathbb{k})}$) ;

$(f, \bar{f})$ est appelée une c -équivalence.

IX.2.(4) Remarques.

a) Il est clair que si deux fibrations sont h -équivalentes alors elles sont c -équivalentes. La réciproque à cette proposition est fausse comme on le verra en (c).

b) Si la fibration $(*)$ est c -équivalente à la fibration triviale, alors elle est strictement c -équivalente à la fibration triviale, c'est-à-dire cohomologiquement triviale (C.T cf. VI.1.(1)).

c) Les exemples VI.1.(6) et VIII.4.(10) montrent qu'il existe des fibrations c -équivalentes qui ne sont pas h -équivalentes.

IX.2.(5) Cas absolu.

Si M est un point, de la définition IX.2.(1) (resp. IX.2.(3)), on déduit la notion d'espace topologique h -équivalent (resp. c -équivalent) et de h -équivalence entre deux espaces topologiques (resp. de c -équivalence).

Dans $[H-S]$ sont étudiées, les obstructions à la réalisation d'un c -équivalence entre deux espaces topologiques par une h -équivalence.

Le reste de ce chapitre est une version relative de $[H.S]$ à savoir : étudier les obstructions à la réalisation d'une c -équivalence entre deux fibrations par une h -équivalence.

IX.2.(6) Définition.-

Une c -équivalence $(f, \bar{f})$ est réalisable par une h -équivalence $(\psi, \bar{\psi})$ si

$$f = (\xi'')^* \circ \psi^* \circ ((\xi')^*)^{-1}.$$

IX.2.(7) Remarque très importante :

Si la c -équivalence $(f, \bar{f})$ est réalisée par $(\psi, \bar{\psi})$, alors sur $Im(j')^*$, on a :

$$\bar{f} = (\xi'')^* \circ \bar{\psi}^* \circ ((\xi')^*)^{-1}$$

par suite, la c -équivalence $\bar{f}$ entre F' et F'' est réalisable par $\bar{\psi}$ si et seulement si $(*)'$ est T.N.C.Z.

La réalisation d'une c -équivalence $(f, \bar{f})$ n'entraîne pas nécessairement la réalisation de $\bar{f}$.

IX-3 - THEORIE DE L'OBSTRUCTION.

IX.3.(1) Considérons une c -équivalence $(f, \bar{f})$ entre $(*)'$ et $(*)''$, nous avons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (H(B, d_B) \otimes L(Y'), (D'_1)) & \xrightarrow{\rho'_1} & (L(Y'), \bar{D}'_1) \\
 & \nearrow \iota'_1 & \downarrow \zeta' & & \downarrow \bar{\zeta}' \\
 H(B, d_B) & \xrightarrow[\cong]{m^*} & H(M, k) & \xrightarrow{(\pi')^*} & H(E', k) & \xrightarrow{(j')^*} & H(F', k) \\
 & \searrow \iota''_2 & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\
 & & H(E'', k) & \xrightarrow{(j'')^*} & H(F'', k) \\
 & & \uparrow \zeta'' & & \uparrow \bar{\zeta}'' \\
 & & (H(B, d_B) \otimes L(Y''), (D''_1)^*) & \xrightarrow{\rho''_1} & (L(Y''), \bar{D}''_1)
 \end{array}$$

et d'après VII.3.(2), les E.M.-modèles formels $(G', \zeta', \bar{\zeta}')$ et $(G'', \zeta'', \bar{\zeta}'')$ sont isomorphes.

Notons $(\text{Id}_{H(B,d_B)}, \psi, \bar{\psi})$, cet isomorphisme. $\mathcal{Q}$ et $\bar{\mathcal{Q}}$ sont de bidegré $(0,0)$. De la même manière qu'en VII.3.(5), on déduit l'existence d'un E.M.-modèle $(F''', \eta''', \bar{\eta}''')$ de $(*)$ isomorphe à $(F'', \eta'', \bar{\eta}'')$ en tant que E.M.-modèle et admettant $(G', f \circ \zeta', \bar{f} \circ \bar{\zeta}')$ comme E.M.-modèle formel sous-jacent.

IX.3.(2) Pour simplifier les notations, on note $(G, \zeta, \bar{\zeta})$ le E.M.-modèle formel de $(*)$:

$$G : H(B, d_B) \xrightarrow{l_1} (H(B, d_B) \otimes L(Y), D_1^*) \xrightarrow{\rho_1} (L(Y), \bar{D}_1)$$

$(F', \eta', \bar{\eta}')$ un E.M.-modèle de $(*)$ de modèle formel sous-jacent $(G, \zeta, \bar{\zeta})$.

$$F' : (B, d_B) \xrightarrow{l} (B \otimes L(Y), D') \xrightarrow{\rho} (L(Y), \bar{D}')$$

$(F'', \eta'', \bar{\eta}'')$ un E.M. modèle de $(*)$ de modèle formel sous-jacent $(G, f \circ \zeta, \bar{f} \circ \bar{\zeta})$

$$F'' : (B, d_B) \xrightarrow{l} (B \otimes L(Y), D'') \xrightarrow{\rho} (L(Y), \bar{D}'').$$

Un tel modèle existe d'après IX.3.(1) et on a les relations

$$\begin{aligned} (D_1')^* &= (D_1'')^* = D_1^* \\ \bar{D}_1 &= \bar{D}_1'' = \bar{D}_1. \end{aligned}$$

IX.3.(3) Théorème.-

Avec les notations de IX.3.(2), une condition nécessaire et suffisante pour qu'une c-équivalence $(f, \bar{f})$ soit réalisable est qu'il existe un isomorphisme d'a.d.g.c.

$$\Psi : (B \otimes L(Y), D') \rightarrow (B \otimes L(Y), D'')$$



tel que

$$.) \Psi \circ 1 = 1$$

$$..) (\Psi - \text{Id})(Y_p) \subset F_{p-1}, \quad \forall p \geq 0,$$

IX.3.(4) Remarques.

a) En choisissant pour F'' un E.M.-modèle de modèle formel sous-jacent $(G, \zeta, \bar{\zeta})$ la réalisation de f équivaut à la réalisation de $\text{Id}_{H(E', k)}$.

b) La condition ..) et la dégénérescence de la suite spectrale associée à la filtration F_p entraîne que $\Psi^* = \text{Id}$.

c) Ψ induit un isomorphisme

$$\bar{\Psi} : (L(Y), \bar{D}') \rightarrow (L(Y), \bar{D}'')$$

tel que

$$(\Psi - \text{Id})(Y_p) \subset \bar{F}_{p-1}.$$

Comme la suite spectrale associée à $\bar{F}_p$, ne dégénère pas forcément, en général $\Psi^* \neq \text{Id}$. A l'aide de VII.3.(1), on retrouve la remarque IX.2.(7).

XI.3.(5) Démonstration du théorème IX.3.(3).

1) Supposons qu'il existe un tel Ψ , alors il existe un isomorphisme $\bar{\Psi}$ et nous avons le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 (L(X'), \bar{d}) & \xrightarrow{\bar{\xi}'} & A(F') & \xrightarrow{\bar{\eta}'} & L(Y, \bar{D}') & \xrightarrow{\bar{\psi}} & L(Y, D'') & \xrightarrow{\bar{\eta}''} & A(F'') & \xleftarrow{\bar{\xi}''} & (L(X''), d'') \\
 \uparrow \rho' & & \uparrow A(j') & & \uparrow \rho & & \uparrow \rho & & \uparrow A(j'') & & \uparrow \rho'' \\
 (B \otimes L(X'), d') & \xrightarrow{\xi'} & A(E') & \xleftarrow{\eta'} & (B \otimes L(Y), D') & \xrightarrow{\psi} & (B \otimes L(Y), D'') & \xrightarrow{\eta''} & A(E'') & \xleftarrow{\xi''} & (B \otimes L(X''), d'') \\
 & & \nwarrow A(\pi') \circ m & \nearrow l & & \nwarrow A(\pi'') \circ m & \nearrow l'' & & & & \\
 & & & (B, d_B) & & & & & & &
 \end{array}$$

D'après la propriété de "relèvement des homotopies" (cf. [H-1-], th. 5.19) il existe un homomorphisme

$$\alpha : (B \otimes L(X'), d') \rightarrow (B \otimes L(Y), D')$$

tel que

$$\alpha \circ l' = l \quad \text{et} \quad \eta' \circ \alpha \sim \xi' \quad (\text{rel. } B).$$

Alors α est un quasi-isomorphisme qui induit un quasi-isomorphisme

$$\bar{\alpha} : (L(X'), \bar{d}') \rightarrow (L(Y), \bar{D}').$$

$(E', \eta' \circ \psi \circ \alpha, \bar{\eta}' \circ \bar{\psi} \circ \bar{\alpha})$ est alors un modèle KS minimal de $(*)'$ et le théorème d'unicité des modèles KS minimaux entraîne l'existence d'une h-équivalence $(\psi, \bar{\psi})$ telle que :

$$\xi'' \circ \psi = \eta'' \circ \psi \circ \alpha$$

$$\bar{\xi}'' \circ \bar{\psi} = \bar{\eta}'' \circ \bar{\psi} \circ \bar{\alpha}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Or} \quad (\xi'')^* \circ \psi^* \circ ((\xi')^*)^{-1} &= (\eta'')^* \circ \psi^* \circ \alpha^* \circ ((\xi')^*)^{-1} \\
 &= (\eta'')^* \circ \psi^* \circ \alpha^* \circ (\alpha^*)^{-1} \circ ((\eta')^*)^{-1} \\
 &= (\eta'')^* \circ \psi^* \circ ((\eta')^*)^{-1} \\
 &= (\eta'')^* \circ ((\eta')^*)^{-1}
 \end{aligned}$$

or pour tout $\Phi \in \ker D' \cap B \otimes L(Y)$ il existe $\Phi_0 \in B \otimes L(Y_0)$
tel que

$$\begin{aligned} (\eta')^*([\Phi]) &= (\zeta')^*[\Phi_0], \text{ par suite} \\ (\eta'')^* \circ ((\eta')^*)^{-1}(\Phi) &= (\zeta'')^* \circ ((\zeta')^*)^{-1}[\Phi_0] = f^* \circ (\zeta')^* \circ (\zeta')^{*-1}[\Phi_0] = \\ &= f^*([\Phi_0]) = f^*([\Phi]). \end{aligned}$$

On a donc démontré qu'il existe une h-équivalence $(\psi, \bar{\psi})$
qui réalise $(f, \bar{f})$.

2) Réciproquement, supposons que la h-équivalence $(\psi, \bar{\psi})$
réalise la c-équivalence $(f, \bar{f})$, on obtient le diagramme suivant
commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & (B \otimes L(Y), D') & \xrightarrow{\rho} & (L(Y), \bar{D}') \\ & \nearrow l & \downarrow \eta' & & \downarrow \bar{\eta}' \\ & \nearrow A(\pi') \circ m & (A(E'), d_{E'}) & \xrightarrow{A(d')} & (A(F'), d_{F'}) \\ & \nearrow l' & \uparrow \xi' & & \uparrow \bar{\xi}' \\ & \nearrow l'' & (B \otimes L(X'), d') & \xrightarrow{\rho'} & (L(X'), \bar{d}') \\ & \nearrow A(\pi'') & \downarrow \psi & & \downarrow \bar{\psi} \\ & \nearrow l & (B \otimes L(X''), d'') & \xrightarrow{\rho''} & (L(X''), \bar{d}'') \\ & & \downarrow \xi'' & & \downarrow \bar{\xi}'' \\ & & (A(E''), d_{E''}) & \xrightarrow{A(d'')} & (A(F''), d_{F''}) \\ & & \uparrow \eta'' & & \uparrow \bar{\eta}'' \\ & & (B \otimes L(Y), D'') & \xrightarrow{\rho} & (L(Y), \bar{D}'') \end{array}$$

En appliquant le théorème de relèvement des homotopies
(T. 5.19, [H-1-]), il existe un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\alpha : (B \otimes L(Y), D') \rightarrow (B \otimes L(X'), d')$$

tel que $\alpha \circ 1 = 1'$ et $\xi' \circ \alpha \sim \eta'$ (rel, B)

alors

$(F', \xi'' \circ \psi \circ \alpha, \bar{\xi}'' \circ \bar{\psi} \circ \bar{\alpha})$ est un E.M.-modèle de $(*)$ et le théorème VII.4.(5), entraîne l'existence d'un Ψ tel que

$$.) \Psi \circ 1 = 1$$

$$..) (\Psi - \text{Id})(Y_p) \subset F_{p-1}, \quad \forall p \geq 0.$$

IX.3.(5) Définitions.

Un couple $(f, \bar{f})$ est n -réalisable s'il existe un isomorphisme

$$\psi : (B \otimes L(Y_{\leq n+1}), D') \rightarrow (B \otimes L(Y_{\leq n+1}), D'')$$

tel que i) $\psi \circ 1 = 1$

$$\text{ii) } (\psi - \text{Id})(Y_p) \subset F_{p-1} \quad \forall p \in \{0, 1, \dots, n+1\}.$$

Un tel ψ est appelé un n -réalisateur pour $(f, \bar{f})$.

Si ψ est un n -réalisateur pour $(f, \bar{f})$, l'application linéaire de degré $+1$

$$O(\psi) : Y_{n+2} \longrightarrow H(E'', k)$$

définie par $O(\psi).y = [\eta'' \psi D'y]$

est appelé élément d'obstruction.

Notons

$$O_n(f, \bar{f}) = \{O(\psi) \mid \psi \text{ est un } n\text{-réalisateur de } f\}.$$

IX.3.(6) Remarques.

a) D'après le théorème IX.3.(3), si $(f, \bar{f})$ est réalisable par une h -équivalence, alors f est n -réalisable, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous démontrons dans la suite que si $(f, \bar{f})$ est n réalisable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(f, \bar{f})$ est réalisable (Th. IX.3.(11)), lorsque $H(M, k)$ et $H(E', k)$ sont de type fini.

b) Une c -équivalence $(f, \bar{f})$ est toujours 0-réalisable, par l'identité.

c) $O_n(f, \bar{f})$ est une partie de $\text{Hom}^1(Y_{n+1}, H(E'', k))$. Si $H(M, k)$ et $H(E'', k)$ sont de type fini, il en est de même de Y (VII.5.(8)) et

$$O_n(f, \bar{f}) \subset Y_{n+1}^* \otimes H(E'', k) \simeq H(E'', Y_{n+1})$$

Si $(*)'$ est T.N.C.Z. (cf. VIII.3.(1))

$$Y_{n+1} \cong \pi_{\Psi}^{n+1}(F'_f) \cong \pi_{\Psi}^{n+1}(F''_f)$$

et si F'_f est un espace topologique simple

$$\pi_{\Psi}(F''_f) \cong \pi_*(F''_f) \otimes k$$

sous ses conditions $O_n(f, \bar{f})$ apparaît comme un sous-ensemble de

$$H(E'', \pi_{n+1}(F''_f) \otimes k).$$

IX.3.(7) Notons Δ_n , l'ensemble des dérivations θ de degré 0 de $B \otimes L(Y_{\leq n})$ qui vérifient :

$$.) D''\theta = \theta D''$$

$$..) \theta|_B = 0$$

$$...) \theta(Y_p) \subset B \otimes (L(Y_{\leq n}))_{\leq p-1}, \quad \forall p \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

On considère alors l'application linéaire

$$\gamma : \Delta_n \rightarrow \text{Hom}^1(Y_{n+1}, H(E'', k))$$

définie par

$$\gamma(\theta).y = [\eta'' \theta D'' y].$$

Notons $\hat{O}_n(f, \bar{f})$ l'image de $O_n(f, \bar{f})$ dans l'espace quotient

$$\text{Hom}^1(Y_{n+1}, H(E'', k)) / \gamma(\Delta_n).$$

Dans la section IX.4., nous établirons les résultats suivants :

IX.3.(8) Proposition.-

Supposons que ψ est un $(n-1)$ réalisateur pour $(f, \bar{f})$,

alors

$$O_n(f, \bar{f}) = O(\gamma) + \gamma(\Delta_n).$$

IX.3.(9) Proposition.-

Un $(n-1)$ réalisateur pour $(f, \bar{f})$ s'étend en un n -réalisateur ssi $O(\psi) = 0$.

IX.3.(10) Corollaire.-

Si $(f, \bar{f})$ est $(n-1)$ réalisable, alors $(f, \bar{f})$ est n -réalisable ssi $O_n(f, \bar{f}) = \gamma(\Delta_n)$.

IX.3.(11) Théorème.-

Si $H(M, k)$ et $H(E', k)$ sont de type fini, alors $(f, \bar{f})$ est réalisable ssi

$$\hat{O}_n(f, \bar{f}) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

IX-4. DEMONSTRATION DES RESULTATS IX.3.(8), (9), (10), (11).

IX.4.(1) Lemme.-

Tout n -réalisateur de $(f, \bar{f})$ est de la forme $e^\theta \cdot \psi$ où ψ est un n -réalisateur arbitraire et $\theta \in \Delta_n$.

IX.4.(2) Preuve :

Soient ψ_1 et ψ deux n -réalisateurs de $(f, \bar{f})$, alors

$\Psi = \psi_1 \circ \psi^{-1}$ est un automorphisme de $(B \otimes L(Y_{\leq n+1}), D'')$

tel que

$$.) \Psi \circ 1 = 1$$

$$..) (\Psi - \text{Id})(Y_p) \subset B \otimes (L(Y_{\leq n+1}))_{\leq p-1}.$$

La condition ..) entraîne que Ψ est localement unipotent et on peut définir :

$$\theta = \text{Log } \Psi = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} (\Psi - \text{Id})^p.$$

On vérifie aisément que $\theta \in \Delta_n$, d'où le lemme.

IX.4.(3) Lemme.-

Si ψ est un $n-1$ -réalisateur, alors pour tout $\theta \in \Delta_n$,

$$O(e^\theta \psi) = O(\psi) + \gamma(\theta)$$

IX.4.(4) Preuve :

On remarque que si $y \in Y_{n+1}$,

$$\psi D'y - D''y$$

est un D'' cocycle de $B \otimes L(Y)_{\leq n-1}$. D'après le lemme VII.1.(4), il existe $w \in F_n$ et $\alpha \in F_0$ tels que

$$\psi D'y - D''y = D''w + \alpha.$$

Il résulte de la définition de $O(\psi)$ que

$$(n'') [\alpha] = O(\psi) \cdot x \in H(E'', k).$$

D'autre part, on remarque que $\theta(D''y)$ est un D'' cocycle de F_{n-1} , alors toujours d'après le lemme VII.1.(4), il existe $v \in F_n$ et $\beta \in F_0$ tels que :

$$\theta(D''y) = D''v + \beta$$

Alors,

$$\begin{aligned} e^\theta . D''y &= D''y + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{(k+1)!} \theta D''y \\ &= D''y + D'' \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{(k+1)!} v \right) + \beta \end{aligned}$$

et $(\eta'')^*([\beta]) = (\eta'')^*([\theta D''y]) = \gamma(\theta).y.$

De tout ceci, on déduit :

$$\begin{aligned} e^\theta \psi D'y &= e^\theta D''y + e^\theta D''w + e^\theta \alpha \\ &= D''y + D'' \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{(k+1)!} v \right) + \beta + D''(e^\theta w) + \alpha \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 0(e^\theta \psi).y &= (\eta'')^*[e^\theta \psi D'y] = (\eta'')^*[\beta] + (\eta'')^*([\alpha]) \\ &= 0(\psi).y + \gamma(\theta).y. \end{aligned}$$

IX.4.(5) La proposition IX.3.(8) résulte directement des deux lemmes précédents.

Les propositions (9) et (10) sont très faciles à vérifier.

IX.4.(6) Démonstration du théorème IX.3.(11).

a) Si on suppose que $(f, \bar{f})$ est réalisable, alors nous avons déjà remarqué que $(f, \bar{f})$ est n -réalisable pour tout n , donc $\hat{O}_n(f, \bar{f}) = 0$, pour tout n .

b) Supposons que $\hat{O}_n(f, \bar{f}) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(f, \bar{f})$ est n -réalisable pour tout n .

Posons,

$$\bar{\Delta}_{n, n+m}^p \subset \text{Hom}^0(Y_{\leq n}^{\leq p}, B \otimes L(Y_{\leq n}))$$

le sous-espace des applications linéaires de degré 0 qui s'étendent en une dérivation θ appartenant à Δ_{m+n} . De façon évidente, pour chaque $p \geq 0$, on a la suite $s(p, n)$,

$$\bar{\Delta}_{n, n}^p \supset \bar{\Delta}_{n, n+1}^p \supset \dots \supset \bar{\Delta}_{n, n+m}^p \supset \dots$$

De VII.5.(10), il résulte que, chaque $\bar{\Delta}_{n, n+m}^p$ est de dimension finie, donc chaque suite $s(p, n)$ stationne. Notons $N(p, m)$ le plus petit entier tel que

$$\bar{\Delta}_{n, n+m}^p = \bar{\Delta}_{n, n+N(p)}^p, \quad \forall m \geq N(p)$$

Lemme [H.S]. -

Supposons que ψ soit un $N(p, n)$ -réalisateur pour $(f, \bar{f})$, alors pour tout $\ell \geq N(p, n)$, il existe un ℓ -réalisateur $\bar{\psi}$ tel que

$$\bar{\psi}|_{B\otimes L(Y_{\leq n}^{\leq p})} = \psi|_{B\otimes L(Y_{\leq n}^{\leq p})}$$

En particulier, pour tout $\ell \geq N(n, n)$, on obtient une suite $(\psi_\ell)_\ell$ de ℓ -réalisateurs telle que

$$\psi_{\ell+1}|_{B\otimes L(Y_{\leq \ell}^{\leq \ell})} = \psi_\ell|_{B\otimes L(Y_{\leq \ell}^{\leq \ell})}$$

En posant,

$$\psi = \lim_{\ell \geq N(n, n)} \psi_\ell$$

on définit alors une h -équivalence.

IX-5. EXEMPLES - CHANGEMENT DE CORPS DE BASE.

IX.5.(1) Vérifions à l'aide de la théorie de l'obstruction que la fibration (*) définie en VIII.3.(10) n'est pas h-équivalente à la fibration triviale.

On considère la c-équivalence stricte

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(E) & & \\
 & \nearrow & \uparrow \text{Id} & \searrow & \\
 H(S^3 \times S^5) & & & & H(S^3 \vee S^3) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & H(S^3 \times S^5) \times H(S^3 \vee S^3) & &
 \end{array}$$

avec les notations de VIII.3.(10), le E.M.-modèle de (*) a pour "espace total" $(L(r,s) \otimes L(X), D')$ tandis que le E.M.-modèle de la fibration triviale a pour espace total $(L(r,s) \otimes L(X), D)$.

$\psi = \text{Id}$ est une 0-réalisation et

$$\psi(Du) = \psi(tx) = tx$$

n'est pas un cobord pour D' , par suite $O_1(\text{Id}) \neq 0$.

IX.5.(2) Puisque $O_n(f, \bar{f}) \subset \text{Hom}^1(Y_{n+1}, H(E'', k))$, il est clair que les conditions

- i) $Y_p^n = 0$ si $n \leq (p+1)\ell$ ($\ell \geq 1$)
- ii) $H^s(E'', k) = 0$ si $s > N$

entraînent, qu'il existe au plus un nombre fini d'obstructions non nulles, puisque

$$\text{Hom}^1(Y_{n+1}, H(E'', k)) = 0, \quad \text{si } n > \frac{N-2}{\ell} - 2.$$

IX.5.(3) Cas particulier.

i) Si (*) est T.N.C.Z. et si

$$H^r(F, \mathbb{k}) = 0 \quad 1 \leq r \leq \ell$$

$$H^s(E, \mathbb{k}) = 0 \quad s > N = 3\ell + 1$$

alors il n'existe pas d'obstructions non nulles (cf. [H-S] rq.3.8 et VIII.3.(1)).

ii) De ce qui précède, il résulte que si (*) est C.T et vérifie

$$H^r(E, \mathbb{k}) = 0, \quad 1 \leq r \leq \ell \quad \text{et} \quad r > 3\ell + 1$$

alors (*) est H.T.

iii) Si (*) vérifie

$$H^s(M, \mathbb{k}) = 0 \quad 1 \leq s \leq 2\ell + 1$$

$$H^s(E, \mathbb{k}) = 0 \quad 1 \leq s \leq \ell$$

il résulte de VII.4.(3) et de la formule

$$d^1 X_{n+1} \subset Z_n \oplus (L^+(Z \oplus X).L^+(Z \oplus X))_n$$

que $Y_p^n = 0$ si $n \leq (p+1)\ell$ (car $Y \cong X$).

IX.5.(4) Changement de corps de base.

Considérons une c-équivalence $(f, \bar{f})$, relativement au corps $\mathbb{k}$, entre (*)' et (*)'' et $\mathbb{K}$ une extension de $\mathbb{k}$.

$$f \otimes 1_{\mathbb{K}} : H(E', \mathbb{k}) \longrightarrow H(E'', \mathbb{k})$$

$$\bar{f} \otimes 1_{\mathbb{K}} : H(F', \mathbb{k}) \longrightarrow H(F'', \mathbb{k})$$

$(f \otimes 1_K, \bar{f} \otimes 1_K)$ est une c -équivalence relativement au corps K .

Si on suppose que $(f \otimes 1_K, \bar{f} \otimes 1_K)$ est réalisable par une h -équivalence $(\psi, \bar{\psi})$,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (B \otimes L(X') \otimes K, d' \otimes 1_K) & \longrightarrow & (L(X') \otimes K, \bar{d}' \otimes 1_K) \\
 & \nearrow & \uparrow \psi & & \uparrow \bar{\psi} \\
 (B \otimes K, d_B \otimes 1_K) & & & & \\
 & \searrow & (B \otimes L(X'') \otimes K, d'' \otimes 1_K) & \longrightarrow & (L(X'') \otimes K, \bar{d}'' \otimes 1_K)
 \end{array}$$

alors toutes les obstructions $\hat{O}_n(f \otimes 1_K, \bar{f} \otimes 1_K)$ sont nulles.

$$\begin{aligned}
 \text{Avec} \quad O_n(f \otimes 1_K, \bar{f} \otimes 1_K) &\subset \text{Hom}^1(Y_{n+1} \otimes K, H(E'') \otimes K) \\
 \text{et} \quad O_n(f \otimes 1_K, \bar{f} \otimes 1_K) &= \gamma(\bar{\Delta}_n)
 \end{aligned}$$

où $\bar{\Delta}_n$ = l'ensemble des dérivations θ de degré 0 de $B \otimes L(Y_{\leq n}) \otimes K$ qui vérifient $\cdot$), $\cdot\cdot$) et $\dots$) de IX.3.(7).

Si on note i l'inclusion de

$$\text{Hom}^1(Y_n, H(E''), K) \hookrightarrow \text{Hom}^1(Y_n \otimes K, H(E''), K)$$

on vérifie que

$$i(\gamma(\Delta_n)) = \text{Im } i \cap \gamma(\bar{\Delta}_n)$$

et une récurrence comme dans [H.S] permet de montrer que

$$O_n(f, \bar{f}) = \gamma(\Delta_n)$$

pour tout n , c'est-à-dire que $(f, \bar{f})$ est réalisable par une h -équivalence (relativement à K).

Essentiellement, c'est la propriété pour les obstructions $O_n(f, \bar{f})$ d'être des variétés affines de direction $\gamma(\Delta_n)$, qui fait que la réalisation d'une c -équivalence est indépendante du corps de base.

IX-6 - FIBRATIONS FORMELLES.

IX.6.(1) Une fibration rationnelle

$$(*) \quad F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$$

est dite formelle s'il existe un E.M.-modèle de $(*)$ qui soit aussi un E.M.-modèle de π^* .

IX.6.(2) Si (F, η) désigne un E.M.-modèle de $(*)$ et si $(*)$ est formelle, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & (H(M, \mathbb{k}), 0) & \xrightarrow{\pi^*} & (H(E, \mathbb{k}), 0) & \\
 \uparrow \mu & & & & \uparrow \nu \\
 F : & (B, d_B) & \xrightarrow{l} & (B\otimes(L(Y), D)) & \xrightarrow{\rho} (L(Y), \bar{D}) \\
 \downarrow m & & & \downarrow \eta & \downarrow \bar{\eta} \\
 & A(M) & \xrightarrow{A(\pi)} & A(E) & \xrightarrow{A(j)} A(F)
 \end{array}$$

où toutes les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes. Il en résulte que :

- 1) M et E sont nécessairement des espaces formels ;
- 2) Si $M = \text{pt}$, $(*)$ est une fibration formelles ssi $F = E$ est un espace formel au sens de $[H-S]$.
- 3) Si $(*)$ est formelle, tout E.M.-modèle de $(*)$ est un E.M.-modèle de π^* .

IX.6.(3) On note (G, ζ) le modèle formel sous-jacent de (F, η) , on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & H(M, k) & \xrightarrow{\pi^*} & H(E, k) & \\
 & \uparrow m^* & & \uparrow \zeta & \\
 G : & H(B, d_B) & \xrightarrow{\iota_1} & (H(B) \otimes L(Y), D_1^*) & \xrightarrow{\rho_1} & (L(Y), \bar{D}_1) \\
 & \uparrow \theta & & \uparrow \hat{\theta} & & \uparrow \bar{\theta} \\
 \bar{\theta}^1 G : & B & \xrightarrow{\iota} & (B \otimes (L(Y), d) & \xrightarrow{\rho} & (L(Y), \bar{d})
 \end{array}$$

où θ est un quasi-isomorphisme tel que

$$m^* \circ \theta = \mu$$

où $\theta^{-1}G$ désigne un E.M.-modèle de ι_1 (donc de π^*) tel que $\theta^{-1}G$ admette G comme modèle formel sous-jacent (VII.3.(4)), alors d'après VII.4.(5), nous obtenons le résultat suivant :

IX.6.(4) Proposition. -

Une condition nécessaire et suffisante pour que (*) soit formelle est qu'il existe un automorphisme d'a.g.c.

$$\psi : B \otimes L(Y) \rightarrow B \otimes L(Y)$$

tel que

- i) $\psi \circ \iota = \iota \quad (\psi - \text{Id})(Y_p) \subset F_{p-1}.$
- ii) $d\psi = \psi D.$

IX.6.(5) Remarques :

Si (*) est formelle, il existe un quasi-isomorphisme entre $(L(Y), \bar{D}_1)$ et $(L(Y), \bar{D})$, c'est-à-dire que F et F_f ont même type

d'homotopie rationnelle d'où la suite d'implications suivantes :

$$((*) \text{ formelle}) \implies (F \underset{\mathbb{Q}}{\sim} F_f) \implies (H(F, \mathbb{k}) \underset{\text{alg}}{\cong} H(F_f, \mathbb{k}))$$

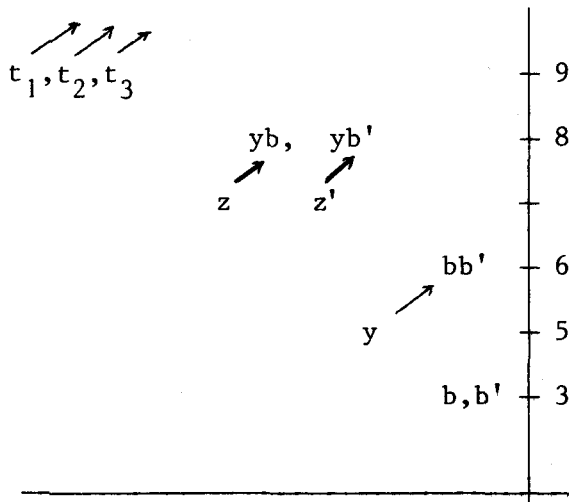
$\Downarrow$
 (La suite spectrale
 d'Eilenberg-Moore
 collapse au niveau E_2)

IX.6.(6) Exemples :

1) On voit directement, en construisant le E.M.-modèle de l'inclusion de $S^3 \vee S^3$ dans $S^3 \times S^3$, et en notant F la fibre homotopique, que la fibration rationnelle

$$F \rightarrow S^3 \vee S^3 \rightarrow S^3 \times S^3$$

est formelle puisque $D = D_0 + D_1$



2) De VIII.5.(5), on déduit que M est formel ssi la fibration canonique $\Omega(M) \rightarrow P(M) \rightarrow M$ est formelle.

3) La réciproque de la première implication de IX.6.(5) est fausse.

Considérons la fibration

$$S^3 \vee S^3 \xrightarrow{j} E \longrightarrow S^3 \times S^5$$

définie en VIII.4.(10), cette fibration est C.T donc en particulier $F = F_f = S^3 \vee S^3$, mais elle n'est pas formelle. Comme on le voit directement en supposant l'existence d'un automorphisme ψ de

$$(L(r,s) \otimes L(x,y,t,u,v\dots))$$

tel que

$$\psi = \text{Id} + \psi_1 + \psi_2 + \dots$$

$$\psi D = D_1 \psi \quad (\text{ici } d_B = 0 \text{ et } d_1 = D_1 = D_1^*).$$

On a nécessairement :

$$\psi(s) = s, \quad \psi(r) = r$$

$$\psi(x) = x, \quad \psi(y) = y, \quad \psi(u) = u, \quad \psi(v) = v$$

$$\psi(t) = t + \lambda s, \dots$$

et la relation

$$\psi(Du) = D_1 \psi(u)$$

entraîne que $\lambda = -1$, tandis que la relation

$$\psi(Dv) = D_1 \psi(v)$$

implique que $\lambda = 0$.

4) La réciproque de la deuxième implication de IX.6.(5) est fausse comme on le voit en considérant la fibration de base un point

$$e_4 \bigcup_{\psi} (S^2 \vee S^2) \xrightarrow{\pi} *$$

où $\psi : \partial e^4 = S^3 \rightarrow S^2 \vee S^2$ désigne l'application canonique.

Dans ce cas, $F = e_4 \bigcup_{\emptyset} (S^2 \vee S^2)$ tandis que $F_f = S^3 \vee (S^2 \vee S^2)$, pourtant $H(F, \mathbb{k}) = H(F_f, \mathbb{k})$.

IX.6.(7) Obstructions à la formalité.

Définir les obstructions à la formalité est un cas particulier du problème de la réalisation d'une c-équivalence par une h-équivalence, étudié en IX.3. Il s'agit ici de réaliser $(\text{Id}_{H(M)}, \text{Id}_{H(E)}, \text{Id}_{H(F)})$ par une h-équivalence entre F et $\mu^{-1}G$.

On retrouve en particulier les résultats suivants :

i) Si $H^p(E, \mathbb{k}) = 0$ $1 \leq p \leq \ell$ et $p > 3\ell + 1$

$H^p(M, \mathbb{k}) = 0$ $1 \leq q \leq 2\ell + 1$

alors (*) est formelle.

ii) Si (*) est T.N.C.Z. et si $H^r(F, \mathbb{k}) = 0$, $1 \leq r \leq \ell$

et $H^s(E, \mathbb{k}) = 0$, $s > 3\ell + 1$ alors (*) est formelle.

IX.6.(8) Obstruction à ce que F et F_f aient même type d'homotopie.

En adaptant la théorie des déformations de Gerstenhaber et en s'inspirant du travail de Félix [Fe] on construit une suite d'obstructions à ce que F et F_f aient même type d'homotopie rationnelle.

Rappelons que F et F_f ont même type d'homotopie rationnelle ssi il existe un automorphisme ψ de $L(Y)$ tel que $\psi \circ \bar{D} = \bar{D}_1 \circ \psi$. Si on écrit

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots$$

alors $\psi \circ \bar{D}_1 = \bar{D}_1 \psi_0$, on peut donc toujours supposer que

$$\psi = \text{Id} + \psi_1 + \psi_2 + \dots$$

Notons $\hat{A}ut$ le groupe des automorphismes de $L(Y)$ de la forme $Id + \psi_1 + \psi_2 + \dots$

Der_p^s l'espace des dérivations sur $L(Y)$ de degré s qui baissent la filtration de p .

$$\delta : Der_p^s \rightarrow Der_{p+1}^{s+1}$$

$$\delta(\theta) = [\bar{D}_1, \theta].$$

$H_p^s(\bar{D}_1)$ les groupes de cohomologie définis par δ .

Ceci étant posé, pour qu'il existe un $\psi \in \hat{A}ut$ tel que :

$$\psi \circ D = \bar{D}_1 \psi$$

c'est-à-dire

$$(Id + \psi_1 + \psi_2 + \dots)(\bar{D}_1 + \bar{D}_2 + \dots) = D_1(Id + \psi_1 + \psi_2 + \dots)$$

il est nécessaire que

$$\bar{D}_2 = \bar{D}_1 \psi_1 - \psi_1 \bar{D}_1 = [\bar{D}_1, \psi_1] = \delta(\psi_1)$$

ce qui équivaut à

$$\{\bar{D}_2\} = 0 \in H_2^1(\bar{D}_1).$$

On pose $O_1(\bar{D}) = \bar{D}_2$. Supposons que $O_1(D) = 0$, alors il existe $\psi_1 \in Der_1^0$ tel que $\bar{D}_2 = [\bar{D}_1, \psi_1]$ et $\bar{D}' = e^{\psi_1} \bar{D} e^{-\psi_1} = \bar{D}_1 + \bar{D}'_3 + \bar{D}'_4 + \dots$

De la relation $\bar{D}' \circ \bar{D}' = 0$, il résulte que

$$\bar{D}_1 \bar{D}' + \bar{D}'_3 \bar{D}_1 = 0$$

c'est-à-dire que $\{\bar{D}'_3\} \in H_3^1(\bar{D}_1)$.

Plus généralement, si $\psi \in \hat{A}ut$ tel que

$$D' = \psi^{-1} D \psi = \bar{D}_1 + \bar{D}'_{n+1} + \bar{D}'_{n+2} + \dots$$

alors on peut définir une classe $\{\bar{D}_{n+1}\} \in H^1_{n+1}(\bar{D}_1)$.

Soit $\Psi \in \hat{A}ut$, tel que

$$D'' = \Psi^{-1} D \Psi = \bar{D}_1 + \bar{D}''_n + \bar{D}''_{n+1} + \dots$$

alors on vérifie que en posant

$$\begin{aligned} \theta &= \psi^{-1} \Psi = Id + \theta_1 + \theta_2 + \dots \\ \theta^{(1)} &= \theta e^{-\theta_1} = Id + \theta_2^{(1)} + \dots \\ \theta^{(2)} &= \theta^{(1)} e^{-\theta_2^{(1)}} = Id + \theta_3^{(2)} + \dots \\ &\dots \dots \dots \theta^{(n-1)} = \theta^{(n-2)} e^{-\theta_{n-3}^{(n-2)}} = Id + \theta_n^{(n-1)} + \dots \end{aligned}$$

on obtient une relation de la forme

$$(\theta^{(n-1)})^{-1} D' (\theta^{(n-1)}) = \bar{D}_1 + \bar{D}''_n + \bar{D}_1 \theta_n^{(n-1)} - \theta_n^{(n-1)} \bar{D}_1 + \dots$$

d'où la relation

$$\bar{D}''_n = [\bar{D}_1, \theta_n^{(n-1)}]$$

ce qui entraîne

$$\{\bar{D}''_n\} = 0.$$

Ceci définit une suite d'obstructions naturelles

$$O_n(D) \in H^1_{n+1}(D_0)$$

$O_n(D)$ étant bien définie dès que $O_1(D) = O_2(D) = \dots = O_{n-1}(D) = 0$.

IX.6.(9) Exemple.

Les obstructions précédentes permettent de voir rapidement sur le tableau de la différentielle $\bar{D}$ si une fibration est non formelle.

Considérons par exemple la fibration rationnelle

$$S^3 \longrightarrow S^2 \times S^5 \longrightarrow \mathbb{CP}^2$$

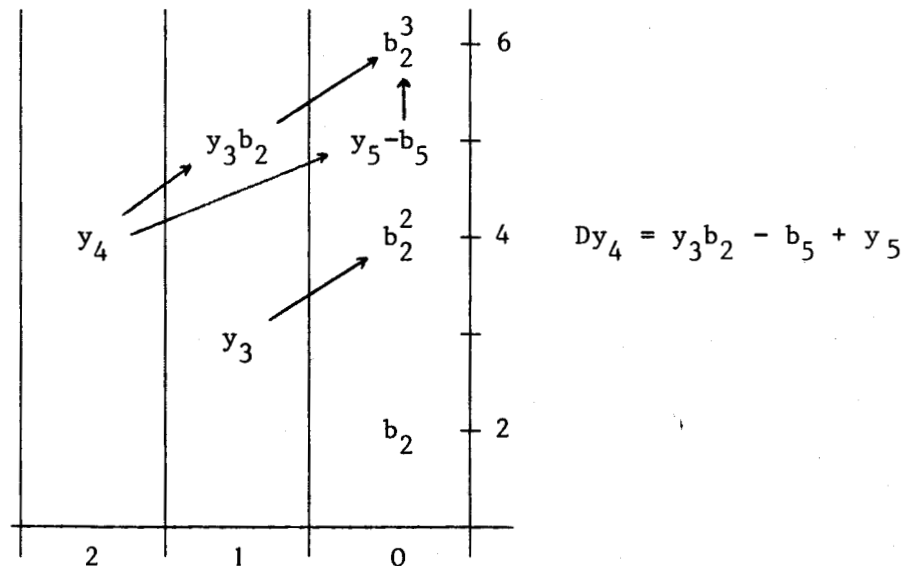
définie par son modèle KS minimal

$$L(b_2, b_5) \longrightarrow (L(b_2, b_5) \otimes \Lambda y_3, d) \longrightarrow (\Lambda y_3, 0)$$

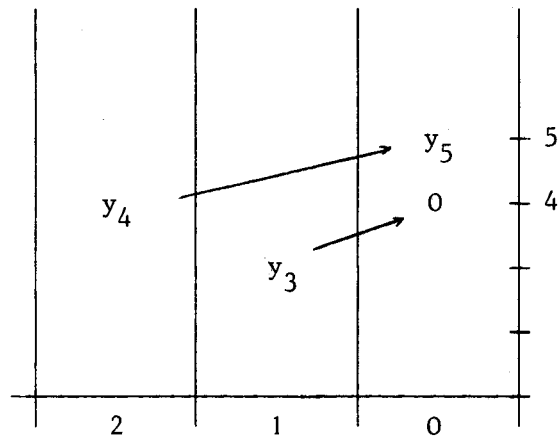
avec $db_5 = b_2^3$
 $dy_3 = b_2^2$.

Son E.M.-modèle, a pour espace total $(L(b_2 \otimes b_5) \otimes L(Y), D)$

avec $Y_{\geq 3} = 0$ et D représentée par le tableau suivant



D'où $\bar{D}$ est représenté par le tableau :



Puisque tout élément $\theta \in \text{Der}_1^0$ est nul, on ne peut pas avoir $D_2 = D_1\theta - \theta D_1$, ce qui entraîne que F et F_f n'ont pas même type d'homotopie et par suite que (*) n'est pas formelle. (Remarque, on pouvait ici vérifier directement que la suite spectrale d'E.M. ne collapse pas au niveau E_2).

IX.6.(10) Fibrations dont la cohomologie de la base est libre.

Soit M tel que $H(M) = L(Z)$ alors il existe un E.M.-modèle de base $(L(Z), 0)$ tel que

$$D_0 = 0, \quad D_1^* = D_1 \\ d = D_1.$$

De la même façon qu'en IX.6.(8), on obtient une suite d'obstructions naturelles.

$$O_n(D) \in \hat{H}_{n+1}^1(D_1)$$

en définissant $\hat{H}_i^s$ comme l'homologie du complexe

$$\longrightarrow \hat{\text{Der}}_i^s \xrightarrow{\delta} \hat{\text{Der}}_{i+1}^{s+1} \longrightarrow$$

où $\hat{\text{Der}}_i^s$ désigne l'espace des dérivations sur $B \otimes L(Y)$, nulles sur B , de degré s et qui baissent la filtration de i .

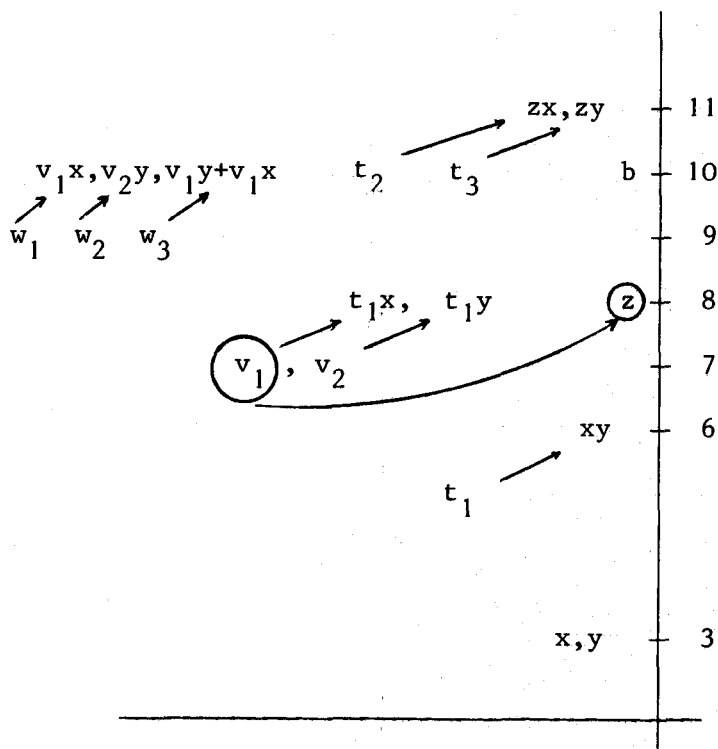
Ces obstructions permettent de visualiser sur le tableau représentant D , la formalité ou la non formalité de D .

IX.6.(11) Exemples.

1) Considérons la fibration triviale

$$\begin{array}{c} S_a^3 \vee S_b^3 \cup e^8 \longrightarrow E \longrightarrow S^{10} \\ [S_a^3 [S_a^3 S_b^3]] \end{array}$$

dont le E.M.-modèle peut être représenté, en basse dimension par le tableau suivant :



de IX.6.(10), il résulte que cette fibration n'est pas formelle ($O_1(D) \neq 0$). On pouvait aussi déduire ce résultat de IX.6.(5) et de VIII.3.(1) en remarquant qu'une condition nécessaire pour qu'une fibration T.N.C.Z. soit formelle est que sa fibre soit un espace formel.

2) Toute fibration rationnelle de base une sphère impaire

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} S^{2p+1}$$

telle que l'image par π^* du générateur de $H^*(S^{2p+1})$ soit indécomposable dans $H^*(E, \mathbb{k})$ est formelle ssi l'espace total E est formel.

Ceci résulte de IX.6.(10) et VIII.2.(9), 1-b.

APPENDICE

KS-MODÈLE D'UN FIBRÉ, DE FIBRE TYPE G/H ASSOCIÉ À UN G -FIBRÉ PRINCIPAL

Soit G un groupe de Lie compact ⁽¹⁾ connexe et H un sous-groupe fermé de G , alors G opère à gauche par translations sur G/H et on obtient le fibré de fibre type G/H

$$(*) \quad G/H \longrightarrow E \times_G G/H \longrightarrow M$$

associé au G fibré principal

$$G \rightarrow E \rightarrow M.$$

Nous désirons, en utilisant uniquement la théorie de Sullivan, calculer le modèle KS du fibré $(*)$. Pour cela, nous suivrons la progression suivante :

- 1) Calcul du modèle minimal d'un groupe de Lie connexe ;
- 2) Calcul du KS modèle du fibré universel $E_G \rightarrow B_G$;
- 3) Calcul du KS modèle d'un fibré principal ;
- 4) Calcul du KS modèle d'un espace homogène G/H ;
- 5) Calcul du KS modèle de $(*)$.

(1) L'hypothèse G compacte peut être omise en remarquant suivant les cas que :

- i) D'après le théorème d'Iwasawa G a même type d'homotopie qu'un sous-groupe compact maximal G_c .
- ii) Le groupe structural d'un G fibré principal différentiable, de base paracompacte peut-être réduit à un sous-groupe compact.

1) Calcul du modèle minimal d'un groupe de Lie connexe.

La multiplication du groupe de Lie G

$$G \times G \rightarrow G$$

induit une comultiplication

$$\Delta_k : H^*(G, k) \rightarrow H^*(G, k) \otimes H^*(G, k)$$

qui fait de $H^*(G, k)$ une algèbre de Hopf.

Par définition, un élément $x \in H^*(G, k)$ est primitif (rel. k) si

$$\Delta_k x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

et un théorème classique de E. Cartan, Pontrjagin et Koszul affirme que lorsque G est réductif

$$H^*(G, \mathbb{R}) = \Lambda P_{\mathbb{R}}$$

où $P_{\mathbb{R}}$ est l'espace vectoriel des primitifs (rel. $\mathbb{R}$).

$P_{\mathbb{R}}$ est gradué uniquement en degré impair.

En notant :

$$\Delta_k^0 : H^*(G, k) \longrightarrow H^*(G, k) \otimes H^*(G, k)$$

la comultiplication canonique définie par

$$\Delta_k^0(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$$

alors $P_k = \ker(\Delta_k - \Delta_k^0)$

et puisque,

$$\Delta_{\mathbb{R}} = \Delta_{\mathbb{Q}} \otimes 1, \quad \Delta_{\mathbb{R}}^0 = \Delta_{\mathbb{Q}}^0 \otimes 1$$

nécessairement,

$$\dim_{\mathbb{Q}} P_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{R}} P_{\mathbb{R}}.$$

D'autre part, l'application induite par l'inclusion de $P_{\mathbb{Q}}$ dans $H(G, \mathbb{Q})$, $j : \Lambda P_{\mathbb{Q}} \rightarrow H(G, \mathbb{Q})$ est injective et puisque $H(G, \mathbb{R}) = H(G, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$, nécessairement j est bijective.

Conclusion :

$$H(G; \mathbb{Q}) = \Lambda P_{\mathbb{Q}}.$$

Il en résulte que le $\mathbb{Q}$ -modèle minimal de G est de la forme :

$$(\Lambda P_G, 0)$$

lorsque l'on note P_G les primitifs de G relativement à $\mathbb{Q}$. (P_G est gradué uniquement en degré impair).

2) KS-modèle du fibré universel $E_G \rightarrow B_G$.

Puisque G est connexe, B_G est 1-connexe et le fibré universel

$$G \rightarrow E_G \rightarrow B_G$$

est une fibration rationnelle qui admet un KS modèle minimal

$$E : (L(Z), d_B) \xrightarrow{1} (L(Z) \otimes \Lambda P_G, d) \xrightarrow{\rho} (\Lambda P_G, 0)$$

où $(L(Z), d_B)$ est un modèle minimal de B_G .

De la suite exacte longue de Ψ -homotopie et de l'acyclicité de E_G , on déduit que

$$\pi_{\Psi}^i(G) \xrightarrow{\partial^{\#}} \pi_{\Psi}^{i+1}(B_G) \quad (\text{cf. I.8.(3)})$$

est un isomorphisme pour tout i .

Modulo, l'isomorphisme

$$\pi_{\Psi}^*(G) \simeq P$$

posons, $\partial^{\#}(P_G) = Q_G$

par suite un modèle minimal de B_G est de la forme

$$(S(Q_G), 0)$$

et la KS extension minimale E de la forme

$$(S(Q_G), 0) \xrightarrow{1} (S(Q_G) \otimes \Lambda P_G, d) \xrightarrow{\rho} (\Lambda P_G, 0)$$

où $dy = 0$, si $y \in Q_G$

$$dx = \partial^{\#}x + \Phi(x), \quad \text{si } x \in P_G$$

avec $\Phi(x) \in (S^{++}(Q_G)) \otimes (S^+(Q_G) \otimes \Lambda^+ P_G)$

Comme

$$d \circ dx = 0$$

nécessairement

$$d \Phi(x) = 0$$

et puisque E_G est acyclique, il existe $\psi(x) \in S^+(Q) \otimes \Lambda P$ tel que

$$\Phi(x) = d\psi(x).$$

Il résulte de ceci qu'il existe un isomorphisme g tel que si on pose $d' = g^{-1}dg$, on ait le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & (SQ_G \otimes \Lambda P_G, d) & & \\ & \nearrow l & \downarrow g & \searrow \rho & \\ (SQ_G, 0) & & & & (\Lambda P_G, 0) \\ & \searrow l & \downarrow g & \nearrow \rho & \\ & & (SQ_G \otimes \Lambda P_G, d') & & \end{array}$$

et tel que : $d'x = \partial^\# x, \quad \forall x \in P_G$ (cf. lemme IV.3.(1)).

Conclusion :

Le fibré universel

$$G \longrightarrow E_G \longrightarrow B_G$$

admet un modèle KS-minimal de la forme

$$(SQ_G, 0) \xrightarrow{l} (SQ_G \otimes \Lambda P_G, d) \xrightarrow{\rho} (\Lambda P_G, 0)$$

tel que

- i) $\partial^\# : P_G \rightarrow Q_G$ est un isomorphisme de degré +1
- ii) $d|_{Q_G} = 0, \quad d|_{P_G} = \partial^\#$
- iii) $(SQ_G, 0)$ est un modèle minimal de B_G .

3) Modèle d'un G-fibré principal.

Soit $E \xrightarrow{P} M$ un G-fibré principal, il existe une application classifiante $\psi : M \rightarrow B_G$

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xlongequal{\quad} & G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E & \xrightarrow{\quad \bar{\psi} \quad} & E_G \\
 \downarrow P & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & B_G
 \end{array}$$

Remarquons, que puisque G est connexe les deux fibrés sont des fibrations rationnelles et puisque $E \xrightarrow{P} M$ est le "pull back" du fibré universel dont on connaît le KS modèle, d'après [H-1] th. 20.6 un modèle KS de $E \xrightarrow{P} M$ est de la forme

$$(A(M), d_M) \xrightarrow{l} (A(M) \otimes \Lambda P, d) \xrightarrow{\rho} (\Lambda P, 0)$$

où $A(M)$ est un modèle quelconque de M (non forcément KS) et

$$\begin{aligned}
 d|_{A(M)} &= d_M \\
 dx &= \hat{\psi}(\partial^\#_x)
 \end{aligned}$$

lorsque l'on désigne par $\hat{\psi}$, un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\hat{\psi} : (SQ, 0) \longrightarrow (A(M), d_M)$$

tel que $(\hat{\psi})^* = \psi^* : H(B_G, Q) \longrightarrow H(M, Q)$.

4) KS modèle d'un espace homogène.

Si on note, F_p la fibre homotopique d'une application continue

$$p : B_H \longrightarrow B_G .$$

Alors on construit un modèle du morphisme d'a.g.c.,

$$p^* : H^*(B_G, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(B_H, \mathbb{Q})$$

en définissant g et d , de manière à ce que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (S(Q_G), 0) & \xrightarrow{p^*} & (S(Q_H), 0) \\ & \searrow l & \uparrow g \\ & & (SQ_G \otimes SQ_H \otimes \Lambda P_G, d) . \end{array}$$

Pour cela, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{ll} g(y) = y & \text{si } y \in Q_H \\ g(z) = p^*(z) & \text{si } z \in Q_G \\ g(x) = 0 & \text{si } x \in P_G \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} dy = dz = 0 & \text{si } y \in Q_H, \quad z \in Q_G \\ dx = \partial^\# x - p^* \partial^\# x & x \in P_G . \end{array} \right.$$

Pour montrer que g est un quasi-isomorphisme, on vérifie, en filtrant par :

$$F_p(SQ_G \otimes SQ_H \otimes \Lambda P_G) \cong (SQ_H)^{\geq p} \otimes (SQ_G \otimes \Lambda P_G)$$

que l'inclusion

$$j : (SQ_H, 0) \hookrightarrow (SQ_G \otimes SQ_H \otimes \Lambda P_G, d)$$

est un quasi-isomorphisme, ensuite on remarque que

$$j \circ g = \text{Id}_{SQ_H}.$$

Ceci prouve, que la KS extension

$$(SQ_G, 0) \xleftarrow{l} (SQ_G \otimes SQ_H \otimes \Lambda P_G, d) \xrightarrow{p} (SQ_H \otimes \Lambda P_G, \bar{d})$$

est un KS modèle de la fibration rationnelle

$$F_p \longrightarrow B_H \xrightarrow{p} B_G.$$

Par suite,

$$(SQ_H \otimes \Lambda P_G, \bar{d})$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{d}y &= 0, \quad y \in Q_H \\ \bar{d}x &= -p^* \partial^\# x, \quad x \in P_G \end{aligned}$$

est un KS modèle (non nécessairement minimal) de F_p que l'on rend facilement minimal en le "divisant" par une algèbre contractile cf. [H-1-] th. 2.2.

Cas particulier :

Si H est un sous-groupe fermé connexe de G , considérons une application B_1 classifiante pour le G -fibré obtenu à partir de E_H , par extension du groupe structural

$$\begin{array}{ccc}
 E_H \times G & \xrightarrow{\quad} & E_G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B_H & \xrightarrow{B_i} & B_G
 \end{array}$$

Alors, il est facile de vérifier que B_i admet pour fibre homotopique

$$F_{B_i} = G/H .$$

Conclusion :

Un modèle KS de l'espace homogène G/H est donné par l'a.d.g.c. libre

$$(SQ_H \otimes \Lambda^P_G, d)$$

avec

$$d|_{Q_H} = 0 \quad , \quad d|_{P_G} = + (B_i)^* \circ \partial^\# .$$

5) KS modèle de (*).

Considérons le fibré

$$(*) \quad G/H \longrightarrow E_G \times_G G/H \longrightarrow M$$

associé au G -fibré principal

$$G \longrightarrow E \longrightarrow M$$

alors il existe une application Ψ .

$$\begin{array}{ccc}
 G/H & \xlongequal{\quad} & G/H \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E \times_{G/H} G & \xrightarrow{\quad \bar{\psi} \quad} & E_G \times_{G/H} G = B_H \\
 \downarrow & & \downarrow B_i \\
 M & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & B_G
 \end{array}$$

telle que (*) soit le "pull back" de

$$G/H \longrightarrow B_H \xrightarrow{B_i} B_G$$

alors d'après [H-1] th. 20.6, (*) admet un modèle de la forme

$$E : (A(M), d_M) \xrightarrow{l} (A(M) \otimes SQ_H \otimes \Lambda P_G, d) \xrightarrow{\rho} (SQ_H \otimes \Lambda P_G, \bar{d})$$

où i) $(A(M), d_M)$ est un modèle quelconque de M ;

$$ii) \quad d|_{A(M)} = d_M, \quad d|_{Q_H} = 0, \quad d|_{P_G} = \hat{\psi} \circ \partial^{\#} - (B_i)^* \circ \partial^{\#}$$

lorsque

$$\hat{\psi} : (SQ_G, 0) \rightarrow (A(M), d_M)$$

désigne un morphisme d'a.d.g.c. tel que

$$(\hat{\psi})^* = \psi^* : H(B_G, Q) \rightarrow H(M, Q).$$

Alors du th. 2.2. de [H-1], il résulte qu'en "divisant" par une sous-algèbre contractile de $SQ_H \otimes \Lambda P_G$ on rend le modèle E minimal en gardant une structure pure, ce qui entraîne que

$$(*) \quad G/H \longrightarrow E \times_{G/H} G \longrightarrow M$$

est une fibration pure.

6) Exemples :

1) Considérons le fibré en sphères associé au fibré tangent à la sphère S^{2n-1} ($n \geq 2$)

$$S^{2n-2} \xrightarrow{j} E \longrightarrow S^{2n-1} \quad (*)$$

(*) est une fibration rationnelle pure (cf. 5)) car c'est un fibré de fibre type S^{2n-2} associé à un $SO(2n-1)$ fibré principal, il admet donc un modèle KS de la forme

$$E : (\Lambda x, 0) \xrightarrow{1} (\Lambda x \otimes L(y, z), d) \xrightarrow{\rho} (L(y, z), d_A)$$

et nécessairement

$$dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = y^2$$

En remarquant que $E \cong SO(2n)/SO(2n-2)$, on obtient un modèle minimal de $SO(2n)/SO(2n-2)$.

2) En notant

$$H(B_{SO(2n)}, k) = S(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, e)$$

$$H(B_{SO(2n+1)}, k) = S(p_1, \dots, p_n)$$

où p_i désigne la i -ème classe de Pontrjagin universelle et e la classe d'Euler universelle ($e^2 = p_n$), on obtient les modèles minimaux des variétés de Stiefel

a) $SO(2n)/SO(2n-2s)$

$$(S(e) \otimes \Lambda(\bar{p}_{n-s}, \bar{p}_{n-s+1}, \dots, \bar{p}_{n-1}, \bar{e}), d)$$

$$de = 0, \quad d\bar{e} = 0, \quad d\bar{p}_{n-s} = e^2,$$

$$d\bar{p}_j = 0, \quad j \neq n-s.$$

b) $SO(2n)/SO(2n-2s+1)$

$$(\Lambda(\bar{p}_{n-s+1}, \bar{p}_{n-s}, \dots, \bar{p}_{n-1}, \bar{e}), 0).$$

c) $SO(2n+1)/SO(2n-2s)$

$$(S(e) \otimes \Lambda(\bar{p}_{n-s}, \dots, \bar{p}_n), d)$$

$$de = 0, \quad d\bar{p}_{n-s} = e^2$$

$$d_A \bar{p}_j = 0, \quad j \neq n-s.$$

d) $SO(2n+1)/SO(2n-2s+1)$

$$(\Lambda(\bar{p}_{n-s+1}, \dots, \bar{p}_n), 0).$$

On remarque qu'une variété de Stiefel a le type d'homotopie rationnelle d'un produit de sphères impaires et d'au plus une sphère paire.

INDEX TERMINOLOGIQUE

algèbre commutative graduée (a.g.c.) - I.1.(7).

algèbre connexe - I.1.(6).

algèbre différentielle graduée (a.d.g.) - I.1.(9).

algèbre graduée (a.g.) - I.1.(4).

algèbre libre - I.1.(10).

algèbre (KS) minimale - I.2.(4).

algèbre pure - III.1.(3).

algèbre quotient $\bar{B}_\ell \otimes L(X)$ - IX.3.(5).

augmentation - I.1.(5).

caractéristique d'Euler (cohomologique) - II.2.(7).

caractéristique d'Euler homotopique - I.6.(5).

complexe de Koszul - III.1.(7).

dérivation - I.1.(8).

élément homogène - I.1.(3).

E.M.-fibre - VIII.1.(5).

espace nilpotent - I.7.(3).

espace simple - I.7.(4).

espace vectoriel gradué - I.1.(3).

extension KS - I.2.(1).

extension KS minimale - I.2.(3).

extension KS pure - III.1.(1).

fibration de Serre - I.4.(6).

fibration cohomologiquement triviale (C.T) - VI.1.(1).

fibration formelle - IX.6.(1).

fibration homotopiquement triviale (H.T) - VI.1.(2).

fibration rationnelle - I.4.(9) (pure III.2.(1)).

fibration non totalement cohomologue à zéro (N.T.C.Z.) - II.1.(1).

fibré de Borel - II.2.(4).

fibre formelle - VIII.1.(5).

graduation, supérieure, inférieure - III.1.(4).

groupe nilpotent - I.7.(1).

modèle d'Eilenberg-Moore - VII.2.(2).

modèle formel - VII.2.(5).

modèle minimal - I.3.(2) - I.4.(2).

module nilpotent - I.5.(2).

Ψ - homotopie (π_{Ψ}^*) - I.6.(2).

rang d'un espace (rg X) - I.6.(5).

série de Poincaré - II.2.(7).

structure (KS, minimale) - I.2.(2) - I.2.(4).

structure pure - III.1.(1).

suite exacte de Ψ -homotopie - I.8.(2).

suite régulière - III.1.(8).

suite spectrale d'Eilenberg-Moore - II.4.(1). - VIII.5.

type f - I.6.(6).

type fini (algèbre graduée de ...) - I.1.(11).

REFERENCES

=====

- [B-S] A. BOREL et J.P. SERRE,
Impossibilité de fibrer... C.R.A.S. 26 juin 1950,
pp. 2258-2260 et C.R.A.S. 6 nov. 1950, pp. 943-945.
- [B-G] A.K. BOUSFIELD and W.K.A.M. GUGENHEIM,
On the PL de Rham theory and rational homotopy type.
Memoirs of A.M.S. 179 (1976).
- [B-L] H.J. BAUES et J.M. LEMAIRE,
Minimal Model in Homotopy theory, Math. Ann. 225, pp. 219-242, 1977.
- [C] H. CARTAN,
Théories cohomologiques - Inv. Math. 35 (1976), pp. 261-271.
- [F et Al] E. FRIEDLANDER, P.A. GRIFFITH, J. MORGAN,
Homotopy theory and differentials forms.
Seminario di Geometria - Firenze (1972).
- [Fe] Y. FELIX,
Classification homotopique des espaces rationnels à cohomologie
donnée, Thèse Université de Louvain-la-Neuve (1979).
- [G et Al] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE,
Connection, curvature and cohomology - Vol. III - Academic Press
(1976).
- [H-1-] S. HALPERIN,
Lecture notes on minimal models - Preprint n° 111,
Université de Lille I (1977).
- [H-2-] S. HALPERIN,
Rational fibration, minimal models and fibring of homogeneous
spaces - Trans. of the A.M.S., Volume 244 (oct. 1978).

- [H-3-] S. HALPERIN,
Finiteness in the minimal models of Sullivan -
Trans. of the A.M.S., Volume 230 (1977).
- [H-S] S. HALPERIN and J. STASHEFF,
Obstruction to homotopy equivalences - Preprint (1976).
- [Hi et Al] P. HILTON - G. MISLIN and J. ROITBERG,
Localisation of nilpotent groups and spaces.
- [Hs] W.Y. HSIANG,
Cohomology theory of topological transformation groups.
Ergebniss des Math. und ihrer Greuzgebiet. Band 85.
- [K] J.L. KOSZUL,
Homologie et cohomologie des algèbres de Lie,
Bull. Soc. Math. de France - 78 - 1950.
- [L] D. LEHMANN,
Théorie homotopique des formes différentielles,
S.M.F. Astérisque 45 (1977).
- [Le] J.M. LEMAIRE,
Autopsie d'un meurtre dans l'homologie d'une algèbre de chaînes
Ann. Scient. Eco. Norm. Sup. 4ème Série, t. 11, 1978, pp. 93-100.
- [Mat] H. MATSUMURA,
Commutative algebra - Math. Lect. Notes series - Benjamin (1970).
- [Se] J.P. SERRE,
Homologie singulière des espaces fibrés,
Ann. of Math., Vol. 54, n° 3, 1951, pp. 425-505.
- [Sm] L. SMITH,
Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence.
Trans. of A.M.S. 129, (1967), pp. 58-93.

- [S-1-] D. SULLIVAN,
Differential forms and the topology of manifolds -
Proceedings of the conf. on manifolds - Tokyo (1973).
- [S-2-] D. SULLIVAN,
Infinitesimal computations in topology -
Publication de l'I.H.E.S., n° 47, (1977)
- [T] J.C. THOMAS,
Fibration algébrique et transgression -
Preprint (1976), n° 72, Université de Lille I (U.E.R. de Math.).
- [Vi] M. VIGUÉ,
Quelques problèmes d'homotopie rationnelle -
Thèse n° 435 - Université des Sciences et Techniques de Lille I.
- [W] C. WATKISS,
Cochâînes commutatives sur les ensembles simpliciaux -
Preprint (1977), n° 107, Université de Lille I (U.E.R. de Math.).

