

50376
1980
5

N° d'ordre : 820

50376
1980
5

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

par

Alain GOURNAY

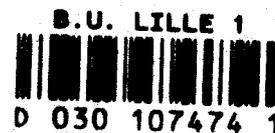
Maître-es-Sciences

**ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA
DEFORMATION D'UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE
PROVOQUEE PAR UNE PIECE CONDUCTRICE EN MOUVEMENT.
APPLICATION A LA MESURE DE VITESSE SANS CONTACT.**



Soutenu le 31 mars 1980 devant la commission d'Examen

MM. A. LEBRUN	Président
Y. CROSNIER	Rapporteur
J.P. DUBUS	Rapporteur
G. SEGUIER	Examineur
P. THERY	Examineur
A. WIART	Invité



Ce travail a été effectué dans le cadre d'une part, du laboratoire de Mesures Automatiques de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE et, d'autre part, du Département Génie Electrique de l'I.U.T. du Littoral CALAIS-DUNKERQUE.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur LEBRUN, Directeur du L.M.A., d'avoir accepté de présider le jury auquel nous soumettons ce mémoire.

A Monsieur le Professeur SEGUIER, dont les recherches sont à l'origine de cette étude et qui nous a confié ce sujet, nous exprimons notre profonde gratitude.

Monsieur WIART, Directeur Scientifique de la société Jeumont Schneider, nous a fait l'honneur d'examiner ce travail et de participer à ce jury, nous l'en remercions vivement.

Nous sommes profondément reconnaissant à Monsieur Y. CROSNIER de l'aide efficace et permanente qui a été la sienne tout au long de ce travail. Son amicale collaboration tant à CALAIS qu'à LILLE nous a été particulièrement précieuse et grâce à lui, nous avons toujours trouvé au Centre Hyperfréquences et Semiconducteurs un excellent accueil et tous les conseils que nous sollicitons.

Monsieur J.P. DUBUS nous a fait bénéficier de son expérience dans le domaine de l'électromagnétisme et nous a judicieusement conseillé et orienté ; qu'il reçoive tous nos remerciements.

Lorsqu'il était à CALAIS, Monsieur P. THERY nous avait guidé dans le début de ce travail. Nous sommes heureux qu'il soit présent au moment où nous exposons les résultats obtenus.

Nous adressons tous nos remerciements à nos camarades et collègues du Département de CALAIS et des laboratoires de LILLE pour l'ambiance sympathique dans laquelle ils nous ont permis de travailler et pour les conseils qui ont été les leurs.

Que le personnel administratif et technique, à CALAIS comme à LILLE, soit assuré de toute notre reconnaissance et nos remerciements, particulièrement :

- Messieurs VERCUCQUE et MIGNIEN pour leur aide dans le domaine mécanique
- Monsieur TINEL pour la programmation
- Messieurs PLUQUET et DEHORTER pour la reproduction de ce mémoire.

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA DEFORMATION D'UN CHAMP
ELECTROMAGNETIQUE PROVOQUEE PAR UNE PIECE CONDUCTRICE EN
MOUVEMENT. APPLICATION A LA MESURE DE VITESSE SANS CONTACT.

S O M M A I R E

INTRODUCTION	p 4
CHAPITRE 1 : MODELISATION	
I - Description du système étudié.	6
II - Mise en équation et conditions de passage.	
II.1 - Equations dans le repère fixe du laboratoire (R) et dans le repère attaché à l'induit (R')	6
II.2 - Etablissement des équations de l'induction magnétique \vec{B} dans le repère R.	9
II.3 - Conditions de passage du milieu au vide, dans le repère R.	11
III - Résolution dans le cas d'un matériau non magnétique. Méthode des différences finies.	
III.1 - Limites de l'étude.	12
III.2 - Présentation de la méthode de résolution.	13
III.3 - Modélisation du système et conditions aux limites.	
III.3.1 - Etude de l'émetteur seul.	14
III.3.2 - Influence de l'induit.	15
III.3.3 - Choix du maillage.	16
III.4 - Etablissement du système d'équations linéaires.	
III.4.1 - Cas d'un courant d'excitation continu.	17
III.4.2 - Cas d'un courant d'excitation alternatif.	22
CHAPITRE 2 : ETUDE DANS LE CAS D'UN INDUIT NON MAGNETIQUE.	
I - Introduction.	25
II - Etude en courant continu.	
II.1 - Conditions d'étude.	
II.1.1 - Conditions expérimentales.	25
II.1.2 - Conditions théoriques.	27
II.1.3 - Remarques.	
II.2 - Analyse et confrontation expérience - théorie.	28
II.3 - Aspect physique du phénomène.	29
III - Etude en courant alternatif 50 Hz.	
II.1 - Conditions d'étude.	
III.1.1 - Conditions expérimentales.	30
III.1.2 - Conditions théoriques.	33

III.2 - Comparaison des mesures à 50 Hz aux mesures en continu.	33
III.3 - Confrontation des mesures de B_1 avec les résultats théoriques.	34
III.4 - Interprétation.	35
IV - Etude en courant alternatif 400 Hz.	
IV - Conditions d'étude.	37
IV.1.1 - Conditions expérimentales.	
IV.1.2 - Conditions théoriques.	
IV.2 - Comparaison des mesures à 400 Hz aux mesures à 50 Hz.	37
IV.3 - Confrontation avec les résultats théoriques.	39
V - Conclusion.	40
CHAPITRE 3 : ETUDE DANS LE CAS D'UN INDUIT MAGNETIQUE.	
I - Conditions générales d'étude.	41
II - Résultats expérimentaux.	
II.1 - Résultats expérimentaux en courant continu.	
II.1.1 - Dans la zone III, devant l'émetteur.	41
II.1.2 - Dans la zone I et II de part et d'autre de l'émetteur	42
II.2 - Résultats expérimentaux en courant alternatif 50 Hz.	
II.2.1 - Dans la zone III, devant l'émetteur.	44
II.2.2 - Dans les zones I et II, de part de d'autre de l'émetteur.	44 46
II.2.3 - Phénomènes parasites.	46
III - Essai de modélisation.	48
III.1 - Choix du modèle.	
III.2 - Résultats théoriques.	49
III.2.1 - Résultats dans la zone III devant l'émetteur.	50
III.2.2 - Résultats de part et d'autre de l'émetteur (zone I et II).	
IV - Conclusion.	
CHAPITRE 4 : APPLICATION A LA REALISATION D'UN CAPTEUR DE VITESSE.	
I - Introduction.	52
II - Capteur de type "récepteur simple" (pour induit non magnétique).	
II.1 - Description et principe.	52
II.2 - Résultats et analyse.	53
II.3 - Délimitation des possibilités.	53

III - Capteur constitué d'une carcasse en E.	
III.1 - Description.	53
III.2 - Etude avec un induit non magnétique.	
III.2.1 - Etude à 50 Hz.	54
III.2.2 - Etude en fonction de la fréquence.	57
III.3 - Etude avec un induit magnétique, à la fréquence 50 Hz.	59
III.3.1 - Résultats expérimentaux.	59
III.3.2 - Analyse et interprétation.	59
III.3.3 - Délimitation des possibilités.	61
IV - Conclusion.	61
 CONCLUSION	62
 ANNEXE : ELECTROMAGNETISME EN PRESENCE DE CORPS EN MOUVEMENT.	64
 BIBLIOGRAPHIE.	80

CHAPITRE 1

MODELISATION

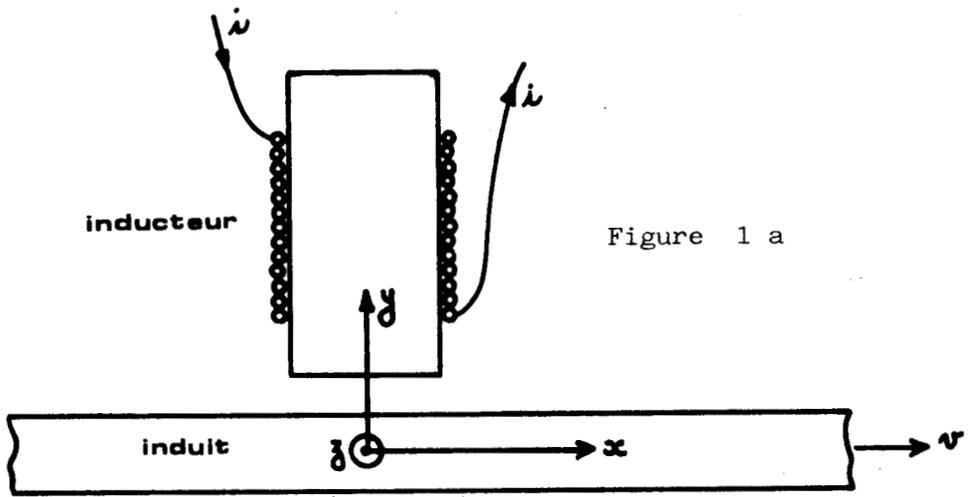


Figure 1 a

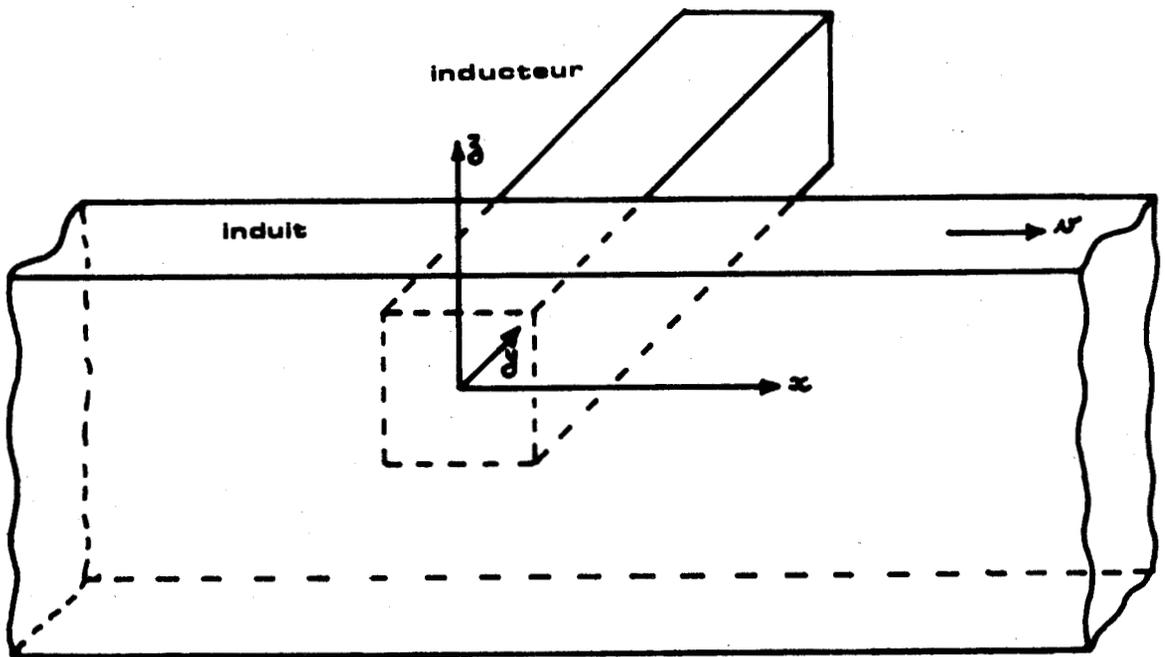


Figure 1 b

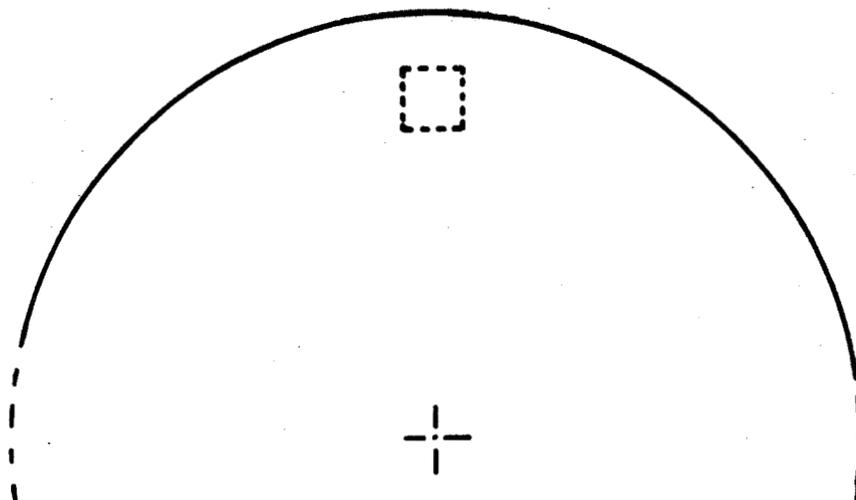


Figure 2



* I N T R O D U C T I O N *

=====

Les études effectuées par la Société JEUMONT-SCHNEIDER sur le moteur linéaire ont permis de mettre en évidence certains aspects des phénomènes secondaires propres à ce moteur. En particulier, il s'est avéré que le déplacement de l'induit est la cause d'une déformation du champ électromagnétique qui, dans certaines conditions, peut devenir très importante. Cette déformation, liée étroitement à la vitesse de déplacement des parties mobiles, en apparaît directement représentative. L'étude théorique de ce phénomène et son application éventuelle à la mesure sans contact de la vitesse de pièces conductrices en mouvement sont les objets du présent travail.

Tant pour l'amélioration de ses performances que pour la compréhension de son fonctionnement, de nombreux auteurs ont entrepris des recherches sur les mécanismes mis en jeu dans les différentes versions du moteur linéaire. Celui-ci se distingue du moteur rotatif par l'existence de plusieurs phénomènes parasites tels que les effets de bord (ou de largeur finie), les effets d'extrémités (ou de longueur finie) et, plus rarement étudiés les effets de pénétration. Cependant la complexité des phénomènes sur le plan théorique et les difficultés expérimentales de mise en évidence sur le moteur lui-même ont amené certains auteurs à s'intéresser à des dispositifs plus simples où ces effets deviennent alors prépondérants et leurs conséquences apparaissent mieux.

Gashus et Ranade [1] , De Fleury, Poloujadoff et Robert [2] , notamment, ont étudié les courants de Foucault développés dans une feuille conductrice mince en translation dans l'entrefer d'un électroaimant. Ces auteurs se sont surtout intéressés aux effets d'extrémités et aux forces de freinage liées à ces effets. Sur le plan théorique, ils ont simplifié le problème en se donnant, à priori, une configuration du champ magnétique sous la pièce polaire et à ses extrémités et en déterminant par approximations successives la perturbation apportée par le déplacement (réaction magnétique d'induit).

L'étude que nous exposons dans ce mémoire est à rapprocher de ces publications ; le dispositif expérimental est fondamentalement du même type : plaque conductrice en mouvement devant une pièce polaire. Elle s'en différencie cependant sur plusieurs points : tout d'abord la plaque ne se déplace pas dans un entrefer mais devant un inducteur "simple" ; par ailleurs, elle n'est pas très mince et son épaisseur n'est donc pas négligeable devant la profondeur de pénétration du champ magnétique. Ensuite, et surtout, nous sommes essentiellement attachés à étudier non les courants induits et les forces de freinage mais la modification apportée au champ magnétique par le déplacement de l'induit.

Nous avons limité ce travail aux deux cas de matériau d'induit les plus fréquents : conducteur non magnétique et conducteur magnétique.

. Dans le chapitre **1** , après avoir idéalisé le dispositif d'étude, nous établissons les équations générales définissant le comportement de l'induction magnétique dans l'induit et hors de l'induit. Puis, dans le cas d'un induit conducteur non magnétique, nous développons une modélisation basée sur la résolution des équations par la méthode des différences finies.

. Dans le chapitre **2** , utilisant la modélisation précédemment établie, nous confrontons les résultats théoriques aux résultats expérimentaux dans le cas particulier d'un induit conducteur non magnétique en aluminium, pour une excitation en courant continu et alternatif aux fréquences 50 et 400 Hz et dans une gamme de vitesse de 0 à 40 m/s.

. Le chapitre **3** aborde le cas particulier d'un induit conducteur magnétique en fer. Après l'étude expérimentale effectuée avec une excitation en courant continu et alternatif 50 Hz, nous confrontons ces mesures aux résultats théoriques obtenus à partir d'une modélisation voisine de celle du chapitre **1**, remaniée pour permettre l'étude de l'induction magnétique de part et d'autre de l'inducteur.

. Enfin, dans le chapitre **4** , l'utilisation possible de l'effet observé à des fins de mesure de vitesse, nous conduit à proposer deux structures de capteurs : l'une destinée aux bandes conductrices minces et l'autre aux bandes plus épaisses.

: - : - : - : - :

I - DESCRIPTION DU SYSTEME ETUDIE

Le dispositif comprend (fig. 1a et 1b) :

- Un inducteur ou "émetteur" source de champ magnétique et fixe dans le repère lié au laboratoire. Analogue à une pièce polaire de moteur, il est constitué d'un empilage de tôles rectangulaires et d'un bobinage parcouru par le courant d'excitation.

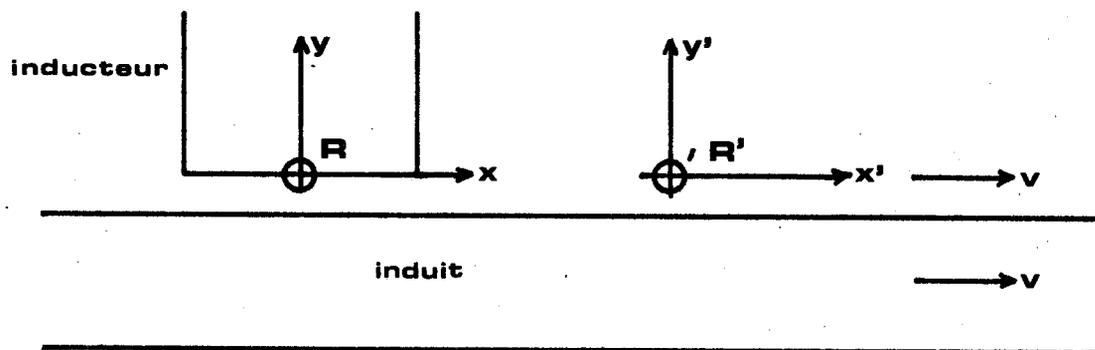
- Un induit constitué d'une bande métallique magnétique ou amagnétique. Repéré dans le trièdre $oxyz$, il déborde largement de la surface de la pièce polaire dans la direction z ; dans la direction x , il est supposé infini et mobile avec la vitesse constante v . En pratique (fig. 2), cette bande infinie est simulée par un disque de rayon suffisamment grand pour pouvoir négliger, dans la zone du champ magnétique, la composante de la vitesse suivant Oz .

Les conditions expérimentales précédentes sont telles que l'on ne restreint pas la généralité de l'étude si l'on admet le problème indéfini dans la direction z - pour l'inducteur et pour l'induit - afin de se ramener aux deux seules composantes x et y .

II - MISE EN EQUATION ET CONDITIONS DE PASSAGE

La formulation des lois de l'électromagnétisme dans le cas d'un corps en mouvement a fait l'objet de travaux approfondis de la part de nombreux auteurs [12] [13] [15]. Nous en utilisons ici les principaux résultats ; pour avoir des indications concernant la justification des équations utilisées ci-après, le lecteur pourra se reporter à l' Annexe de ce mémoire.

II.1 - EQUATIONS DANS LES REPERES R' et R



Soient : x 0 y le repère fixe (repère du laboratoire) : R
 et $x'0'y'$ le repère mobile attaché à l'induit (repère de repos du corps): R'

Dans le repère R' et dans le corps on peut écrire :

- Les équations de MAXWELL :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot } \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} & \text{div } \vec{B}' = 0 \\ \text{rot } \vec{H}' = \vec{j}' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} & \text{div } \vec{D}' = \rho' = 0 \end{array} \right.$$

Si l'on suppose le corps non chargé.

- La loi d'OHM :

$$\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$$

- Les relations des milieux (linéaires, homogènes, isotropes) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}' = \mu \vec{H}' \\ \vec{D}' = \epsilon \vec{E}' \end{array} \right.$$

Dans le repère R et dans le corps, les formules de transformation exposées en ANNEXE ... permettent d'écrire :

- Les équations de MAXWELL :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (1) \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (3) \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (2) \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad (4) \end{array} \right.$$

- La loi d'OHM (au deuxième ordre près) :

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (5)$$

- Les relations des milieux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E} = \mu (\vec{H} - \vec{v} \wedge \vec{D}) \quad (6) \\ \vec{D} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{H} = \epsilon (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (7) \end{array} \right.$$

Remarques et approximations:

- La densité de charge ρ qui apparaît dans le repère R est liée à la densité de courant \vec{j}' dans le repère R' par la relation (voir ANNEXE).

$$\rho = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}'}{c^2} \quad (\text{au second ordre près})$$

Avec les ordres de grandeur usuels de v et j' la valeur de ρ est très faible et on peut poser dans R

$$\text{div } \vec{D} \approx 0 \quad (4')$$

- Il est d'autre part possible, aux fréquences (400 Hz au maximum) et avec les matériaux conducteurs utilisés ici, de négliger à priori le courant de déplacement $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ devant le courant de conduction \vec{j} et d'écrire :

$$\text{rot } \vec{H} \approx \vec{j} \quad (2')$$

- En ce qui concerne les relations des milieux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu (\vec{H} - \vec{v} \wedge \vec{D}) + \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E} \\ \vec{D} = \epsilon (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{H} \end{array} \right. \quad (6)$$

$$(7)$$

Il est préférable d'exprimer \vec{B} et \vec{D} uniquement en fonction de \vec{H} et \vec{E} .

En utilisant le symbole \perp qui indique les composantes des vecteurs perpendiculaires à la vitesse \vec{v} , ϵ_r et μ_r les permittivité et perméabilité relatives, et $\beta = \frac{v}{c}$, l'élimination à partir des équations (6) et (7) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} - \epsilon_r \mu_r \beta^2 \vec{B}_\perp = \mu (\vec{H} - \beta^2 \vec{H}_\perp) - (\epsilon_\mu - \epsilon_0 \mu_0) \vec{v} \wedge \vec{E} \\ \vec{D} - \epsilon_r \mu_r \beta^2 \vec{D}_\perp = \epsilon (\vec{E} - \beta^2 \vec{E}_\perp) + (\epsilon_\mu - \epsilon_0 \mu_0) \vec{v} \wedge \vec{H} \end{array} \right. \quad (8)$$

$$(9)$$

et en se limitant au premier ordre ($\beta^2 \ll 1$) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu \vec{H} - (\epsilon_\mu - \epsilon_0 \mu_0) \cdot \vec{v} \wedge \vec{E} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} + (\epsilon_\mu - \epsilon_0 \mu_0) \cdot \vec{v} \wedge \vec{H} \end{array} \right. \quad (8') \quad \text{relations des milieux}$$

$$(9') \quad \text{dans le repère R}$$

Il apparait que pour un corps non magnétique ($\mu = \mu_0$) et non polarisable ($\epsilon = \epsilon_0$) elles deviennent simplement les mêmes que dans le repère R' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (8'') \\ \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (9'') \end{array} \right.$$

Dans le cas plus général d'un matériau magnétique ou polarisable, il est a priori nécessaire de les laisser sous la forme (8') et (9') pour la suite du calcul.

II.2 - ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DE L'INDUCTION MAGNETIQUE \vec{B}

DANS LE REPERE R.

A partir de (8') il vient :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \text{ rot } \vec{H} - (\epsilon_\mu - \epsilon_0 \mu_0) \cdot \text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{E})$$

l'utilisation de (2') et (5) conduit à :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \nabla \vec{E} + \mu \nabla (\vec{v} \wedge \vec{B}) - (\epsilon_\mu - \epsilon_0 \mu_0) \text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{E})$$

et

$$\text{rot rot } \vec{B} = \mu \nabla \text{rot } \vec{E} + \mu \nabla \text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B}) - (\epsilon_\mu - \epsilon_0 \mu_0) \text{rot rot}(\vec{v} \wedge \vec{E})$$

Avec $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (1), soit en régime sinusoïdal : $\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B}$ (1')

et d'autre part : $\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$ (d'après (3))

il vient :

$$\Delta \vec{B} = j\omega \mu \nabla \vec{B} - \mu \nabla \text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B}) + (\epsilon_\mu - \epsilon_0 \mu_0) \text{rot rot}(\vec{v} \wedge \vec{E}) \quad (10)$$

Le passage aux composantes se fait en explicitant $\Delta \vec{B}$, $\text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B})$, et $\text{rot rot}(\vec{v} \wedge \vec{E})$. Il conduit aux équations :

. suivant x

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} - j\omega \mu \nabla B_x + \mu \nabla v \frac{\partial B_y}{\partial y} + v (\epsilon_\mu - \epsilon_0 \mu_0) \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} = 0$$

. suivant y

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} - j\omega \mu \nabla B_y - \mu \nabla v \frac{\partial B_y}{\partial x} - v (\epsilon_\mu - \epsilon_0 \mu_0) \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0$$

. suivant z

$$v (\epsilon_\mu - \epsilon_0 \mu_0) \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} \right) = 0$$

Le fait que le problème soit indéfini dans la direction z permet ici de découpler les équations ($B_z = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z} = 0$)

$$(3) \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ soit } \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial x}$$

$$(I') \operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\omega B_x \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} = -j\omega \frac{\partial B_x}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = j\omega B_y \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = j\omega \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{array} \right.$$

On obtient finalement pour \vec{B} deux équations analogues suivant x et y :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} - j\omega \mu \sigma B_x - v \left[\mu \sigma + j\omega (\epsilon \mu - \epsilon_0 \mu_0) \right] \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad (11) \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} - j\omega \mu \sigma B_y - v \left[\mu \sigma + j\omega (\epsilon \mu - \epsilon_0 \mu_0) \right] \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \quad (12) \end{array} \right.$$

Si l'on considère le cas d'un matériau fortement magnétique même non polarisable

alors $\epsilon \mu \gg \epsilon_0 \mu_0$

et le terme $\mu \sigma + j\omega (\epsilon \mu - \epsilon_0 \mu_0) \simeq \mu (\sigma + j\omega \epsilon)$

En basse fréquence et pour les bons conducteurs, il se réduit simplement à $\mu \sigma$

L'approximation est donc identique à celle qui consiste à négliger le courant de déplacement et elle revient en fait à poser dès le départ

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array} \right.$$

dans le repère R

Dans les conditions définies ci-dessus on a en définitive, dans le repère R et à l'intérieur du corps, les équations sur l'induction magnétique \vec{B} :

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} - j\omega\mu\epsilon B_x - \mu\epsilon v \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

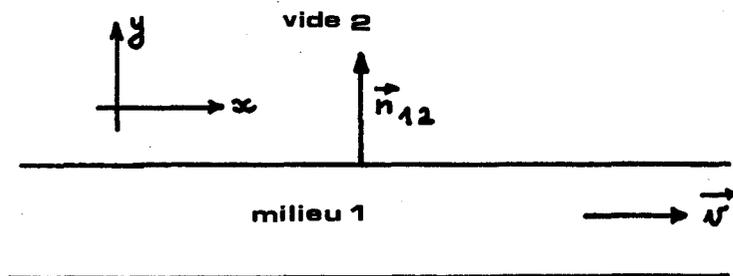
$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} - j\omega\mu\epsilon B_y - \mu\epsilon v \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

Dans ce même repère, à l'extérieur du corps avec $\epsilon = 0$ et $v = 0$, elles se réduisent simplement à :

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} = 0 \quad (16)$$

II.3 - CONDITIONS DE PASSAGE DU MILIEU AU VIDE, DANS LE REPERE R



Les intersurfaces séparant le milieu mobile du vide sont ici parallèles à la vitesse \vec{v} et les conditions de passage dans le repère R ont même forme que dans le repère R' (ANNEXE) . On a en particulier :

- conservation de la composante normale (à l'intersurface) de l'induction

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad B_{y1} = B_{y2} \quad (17)$$

- conservation de la composante tangentielle du vecteur \vec{H} si les courants superficiels peuvent être négligés soit : $H_{x1} = H_{x2}$ (18) dans le cas

général on a :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_s \quad (19)$$

III-RESOLUTION DANS LE CAS D'UN MATERIAU NON
MAGNETIQUE - METHODE DES DIFFERENCES FINIES -

III.1 - LIMITES DE L'ETUDE

Ainsi qu'il vient d'être établi en II.2, pourvu que les conditions portant sur la fréquence et la conductivité soient vérifiées, les équations (13) (14) (15) (16) s'appliquent aux milieux magnétiques comme amagnétiques. Leur résolution sous cette forme générale est cependant délicate et nous avons restreint notre étude en ne nous intéressant qu'à la seule composante B_y . Nous avons par ailleurs considéré essentiellement le cas d'un matériau non magnétique. Ces limites se sont imposées pour plusieurs raisons :

- comme l'indiquent les conditions de passage du II 3, la composante B_y ne subit pas de discontinuité aux intersurfaces air-métal. Si l'on veut par contre étudier la composante tangentielle B_x , il est alors préférable de raisonner sur le champ magnétique H_x ; celui est également continu à condition que l'on néglige les courants superficiels.

- Dans le cas d'un métal non magnétique, la résolution des équations (14) (16) en utilisant la méthode des différences finies à pu être faite à partir d'un "modèle" d'émetteur et de conditions aux limites particulièrement simples et en obtenant une bonne concordance avec les résultats expérimentaux en courant continu et aux fréquences 50 Hz et 400 Hz. L'étude de la composante B_x nécessite par contre un modèle beaucoup plus évolué et les conditions aux limites sont plus difficiles à établir.

- Dans la perspective d'utiliser le phénomène à des fins de détermination de la vitesse, c'est essentiellement la composante normale qui présente un intérêt si on mesure la perturbation du champ magnétique par un capteur placé lui-même perpendiculairement au métal en mouvement, disposition technologiquement la plus simple.

- Enfin le cas des matériaux magnétiques pose des difficultés théoriques et expérimentales très particulières, celles-ci font l'objet du chapitre **3**.

III.2 - PRESENTATION DE LA METHODE DE RESOLUTION

Pour un induit constitué d'un matériau non magnétique, les équations concernant la composante B_y sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} - j\omega\mu_0\sigma B_y - \mu_0\sigma\nu \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \quad \text{dans le métal} \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans le vide} \end{array} \right.$$

Ce système d'équations scalaires a été résolu par la méthode des différences finies. Cette méthode numérique est basée sur les principes suivants :

- le domaine étudié est divisé en mailles régulières ou irrégulières.
- En chacun des noeuds du réseau ainsi établi, on utilise un développement en série de Taylor de la fonction cherchée. Cela nécessite la continuité de la fonction dans les deux directions x et y et permet de lier la valeur en un point à celles des points environnants.
- C'est la connaissance des valeurs de la fonction sur la frontière du domaine (conditions aux limites) qui permet la détermination des valeurs en chaque point. Etant donné la discrétisation du domaine, la précision obtenue dépend du nombre de points choisi (dimension de la maille élémentaire) et on est limité sous cet aspect par les capacités de traitement numérique, elle dépend également directement des approximations faites en ce qui concerne les conditions aux limites. Dans le cas présent, pour la composante B_y et avec un induit amagnétique, il a été possible d'établir une modélisation qui rende compte correctement de la modification du champ magnétique devant l'émetteur.

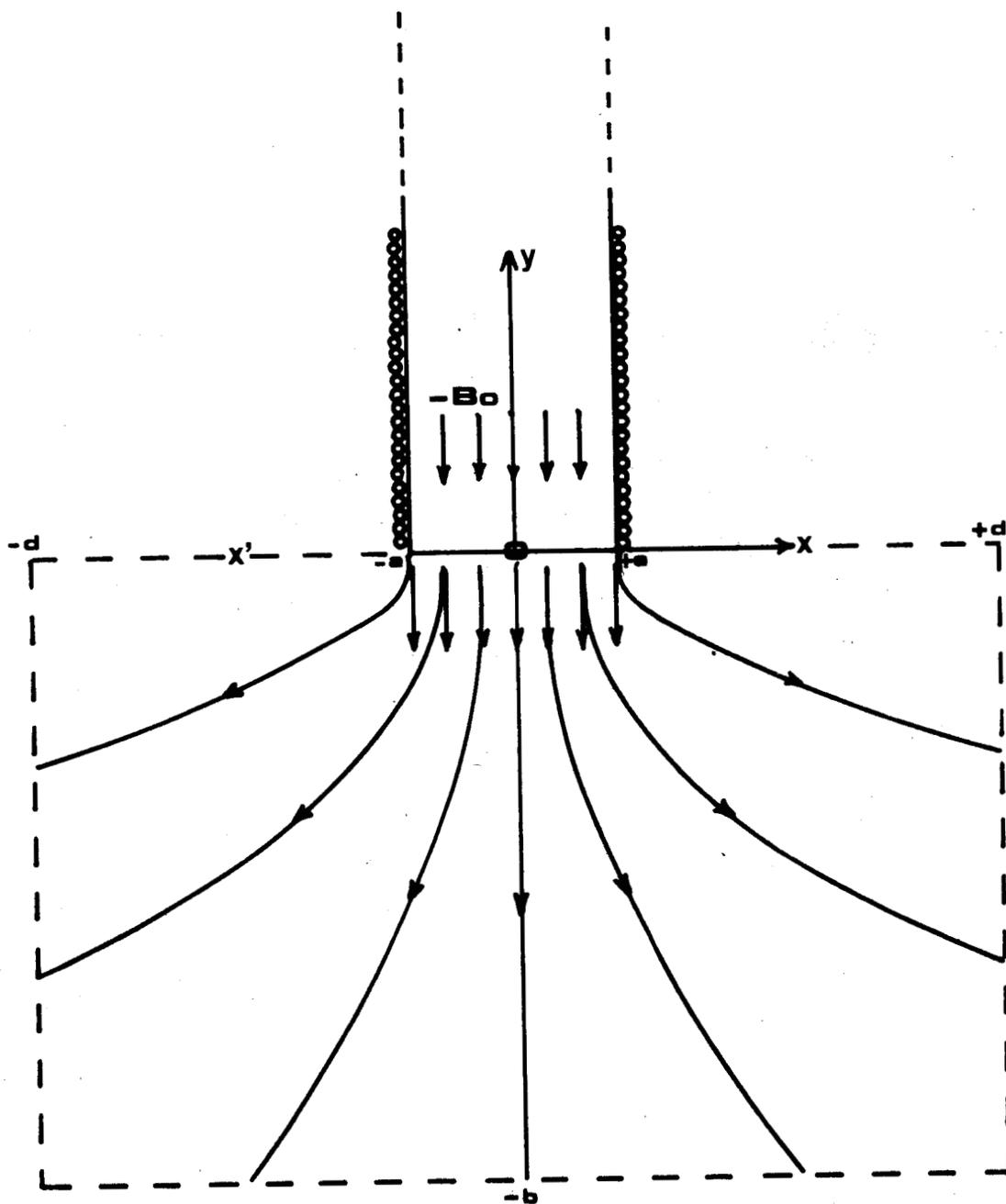


Figure 3

III.3 - MODELISATION DU SYSTEME ET CONDITIONS AUX LIMITES

La modélisation proposée ici concerne le cas du système "émetteur" plaque "induit" non magnétique. Nous donnons ci-dessous les considérations qui nous ont permis de définir de manière simple mais représentative le domaine dans lequel la méthode des différences finies a pu être appliquée.

III.3.1 - Etude de l'émetteur seul (en l'absence d'induit)

L'émetteur peut-être représenté par un modèle simple en l'assimilant à un solénoïde semi-infini dans la direction y , bobiné sur un matériau magnétique de perméabilité "infinie".

Ce modèle (fig.3) a les caractéristiques suivantes :

- à l'intérieur de l'émetteur, le champ magnétique est uniforme ; supposé dirigé suivant l'axe y négatif, nous appellerons $-B_0$ sa valeur.

- à l'extérieur et devant l'émetteur :

Pour $-a < x < +a$ et $y \approx 0$, les conditions de passage font que l'induction est également normale à la face de sortie et possède encore la valeur $-B_0$.

Au delà, vers les valeurs $y < 0$, la composante B_x apparaît et les lignes de champ s'écartent les unes des autres ; les hypothèses précédentes (barreau semi-infini et perméabilité infinie) impliquent qu'elles se referment à l'infini sans jamais couper l'axe x ' x .

Si on définit un domaine rectangulaire :

$$-d \leq x \leq +d \quad 0 \geq y \geq -b$$

On obtient les conditions aux limites suivantes :

- pour $y = 0$ et $-a < x < +a$ on a $B = -B_0$

- pour $y = 0$ et $x < -a$, $x > +a$ on a $B = 0$

- pour $y = -b$ quel que soit x , et pour $x = \pm d$ quel que soit y , on a $B \approx 0$, si les distances b et d sont suffisamment grandes, (affaiblissement de l'induction avec l'éloignement).

Le relevé expérimental des composantes B_x et B_y de l'induction, pour l'émetteur utilisé, permet de chiffrer les longueurs b et d . Ces relevés sont donnés sur la figure (4) qui montre l'évolution de B_y et B_x sur un axe x ' x pour différents éloignements y . On peut remarquer qu'aux faibles valeurs de y (de quelques mm à 10 mm), la composante de B_y est sensiblement constante juste en face de l'inducteur ; elle diminue rapidement sur les cotés pour atteindre à partir d'une distance de l'ordre de 13 cm des valeurs représentant $\frac{1}{100}$ de sa valeur au centre ; nous prendrons donc $d = 13$ cm.

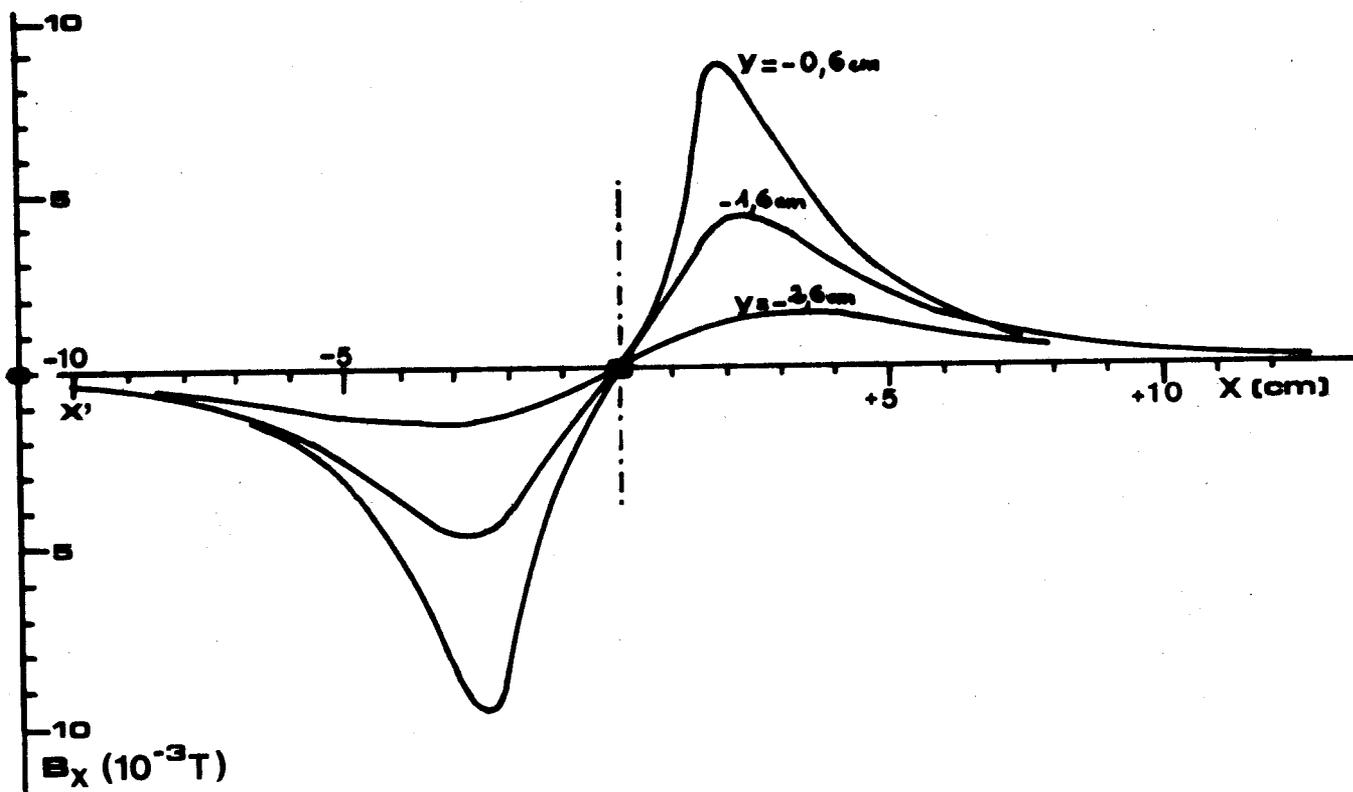
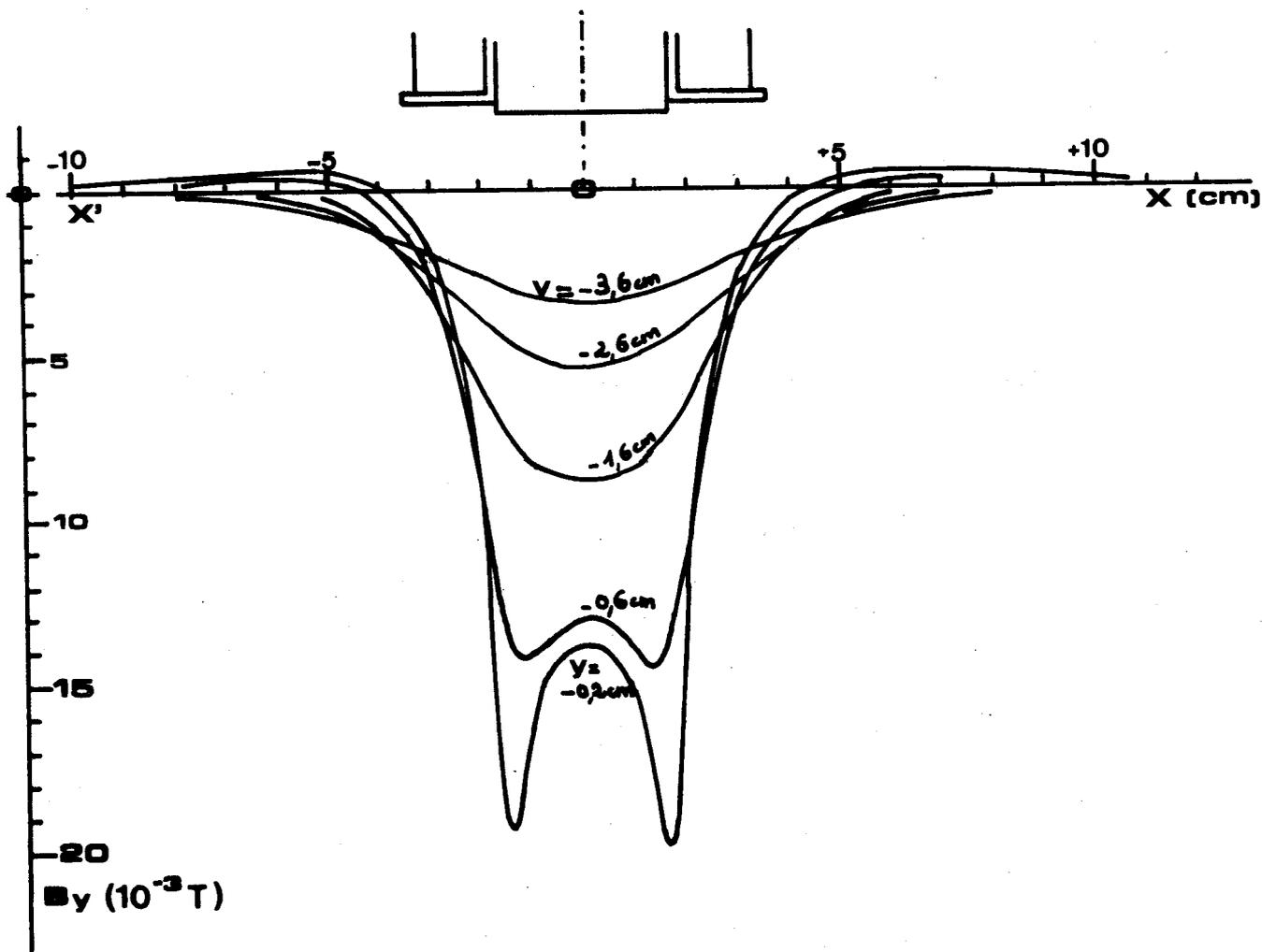


Figure 4

DMS
 FILE

Dans la direction y , il faut s'éloigner de 10 cm pour que cette condition soit vérifiée et nous choisirons $b = 10$ cm. Les courbes expérimentales font apparaître de plus, un retournement des lignes de champ caractérisé par le passage de B_y par une valeur nulle. Nous n'en tiendrons pas compte avec la modélisation choisie; ce retournement est d'autant plus rapide que l'on est proche de l'émetteur (faibles valeurs de y) mais dans ces zones la valeur de la composante reste relativement faible (10%) devant sa valeur centrale.

III.3.2 - Influence de l'induit

Celui-ci est constitué par une plaque d'aluminium de 8 mm d'épaisseur et en excitation par un courant continu, sa présence ne modifie pas, à l'arrêt, le champ magnétique de l'inducteur. En régime alternatif par contre, les courants de Foucault qui y prennent naissance perturbent le champ principal et ce d'autant plus que l'entrefer est réduit; les conditions aux limites restent cependant sensiblement les mêmes si on prend pour B_0 une valeur tenant compte de cet effet.

Lorsque la plaque est mobile, en courant continu comme en alternatif, les courants induits par le mouvement modifient le champ initial en grandeur et en direction. Pour tenir compte de cette réaction d'induit, nous devrions normalement transformer les conditions aux limites en particulier sur l'axe $y = 0$ où le retournement des lignes de champ et la valeur de l'induction à la sortie même de l'émetteur peuvent subir d'importantes modifications surtout si l'entrefer est faible. Afin de conserver au modèle sa simplicité, nous garderons néanmoins sur l'axe $y = 0$ les conditions établies avec l'émetteur seul; l'influence des modifications évoquées ci-dessus sera discutée au chapitre 2 en même temps que les résultats.

En ce qui concerne les conditions aux limites sur les frontières du domaine autres que l'axe $y = 0$, il suffit de prendre b et d suffisamment grands pour qu'elles demeurent valables même avec une évolution importante de l'induction sous l'effet du mouvement.

inducteur

**noyau
110x32x32
mm**

**bobinage
4000 spires**

entrefer 2mm

Induit Al. 8mm

Figure 5

III.3.3 -- Choix du maillage

Le dispositif expérimental (inducteur et induit) est représenté sur la figure (5).

Les limites du domaine étudié étant celles précédemment définies ($d = 13 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$), le pas du maillage fixe le nombre de points à considérer et d'équations à résoudre. Dans un premier temps nous avons utilisé une maille carrée de côté $h = 1 \text{ cm}$, ce qui correspond à 243 points. L'émetteur, en pratique large de 3,4 cm, est simulé seulement par 3 points où nous admettons selon les hypothèses du II.3.1 que la valeur de B_y et $-B_x$. La plaque d'aluminium, d'épaisseur 8 mm, est représentée par les deux premières lignes de points, son épaisseur "théorique" est ainsi comprise entre 1 et 2 cm ; l'entrefer réel de 2 mm n'apparaît pas dans le modèle, la plaque étant supposée en contact avec l'émetteur.

Les résultats théoriques obtenus à partir de ce modèle nous ont conduits, pour nous rapprocher des résultats expérimentaux, à choisir une résolution plus fine au niveau de la plaque et à adopter pour les trois premières lignes une maille rectangulaire de largeur $h = 1 \text{ cm}$ et de hauteur $\frac{h}{2} = 0,5 \text{ cm}$. . Le métal, encore symbolisé par les deux premières lignes, possède alors une épaisseur théorique comprise entre 5 mm et 1 cm, plus proche de la réalité.

L'émetteur reste inchangé et l'entrefer est toujours négligé.

Le modèle retenu est représenté figure (6) : toutes les lignes comportent 27 points écartés (suivant la direction x) de 1 cm.

Dans la direction y les 3 premières lignes sont distantes entre elles de 5 mm, et les 7 suivantes sont séparées de 1 cm.

Le nombre de points à l'intérieur de la frontière est 270.

III.4 - ETABLISSEMENT DU SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

III.4.1 - Cas d'un courant d'excitation continu

Si l'on convient de poser $\text{By} = \Psi(x,y)$, fonction inconnue en chaque point sauf sur la frontière du domaine défini précédemment, les équations à résoudre sont avec $\omega = 0$

- dans le métal $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \mu_0 \sigma v \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$ (I)

- dans l'air $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$ (II)

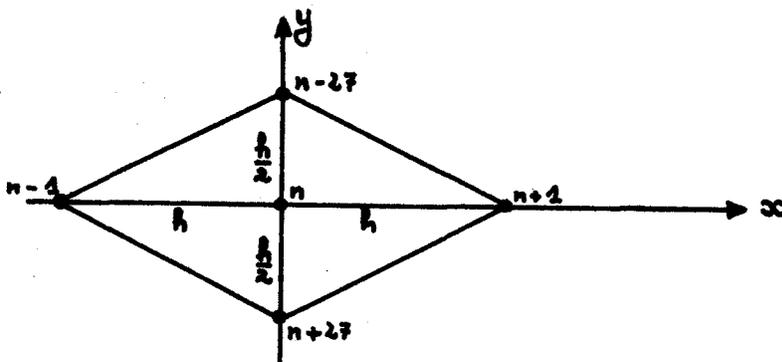
Suivant la position du point considéré (dans le métal ou dans l'air) et selon la forme du maillage 3 cas sont à envisager : (fig.6)

- pour les 2 premières lignes : points dans le métal et maille en losange
- pour la troisième ligne : points dans l'air et maille irrégulière
- pour les autres lignes : points dans l'air et maille carrée

A ces trois cas correspondent 3 types d'équations ; les points étant numérotés suivant les indications de la figure (6), nous établirons ces équations sous une forme générale ; des remarques s'appliquant aux points particuliers situés à proximité immédiate de la frontière seront faites ensuite.

1°) pour les deux premières lignes

Un point numéroté n est environné des quatre points $n - 27$, $n - 1$, $n + 1$, $n + 27$, suivant le schéma :



L'équation I s'écrit, au point n :

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)_n + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)_n - \mu_0 \sigma v \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_n = 0$$
 (I)

Le développement en série de Taylor de la fonction Ψ dans les deux directions donne au voisinage du point n :

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + h \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)_n \quad (1)$$

$$\Psi_{n-1} = \Psi_n - h \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)_n \quad (2)$$

$$\Psi_{n-2\tau} = \Psi_n + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_n + \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right)_n \quad (3)$$

$$\Psi_{n+2\tau} = \Psi_n - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_n + \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right)_n \quad (4)$$

La différence des équations (1) et (2) permet de déterminer :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_n = \frac{\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}}{2h}$$

La somme de (1) et (3) donne :

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)_n = \frac{\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2\Psi_n}{h^2}$$

et la somme de (1) et (4) conduit à :

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right)_n = \frac{4\Psi_{n-2\tau} + 4\Psi_{n+2\tau} - 8\Psi_n}{h^2}$$

En reportant ces valeurs dans l'équation (I) et en ordonnant par rapport à n il vient :

$$4\Psi_{n-2\tau} + \left(1 + \frac{\mu_0 \sigma \omega h}{2}\right) \Psi_{n-1} - 10\Psi_n + \left(1 - \frac{\mu_0 \sigma \omega h}{2}\right) \Psi_{n+1} + 4\Psi_{n+2\tau} = 0$$

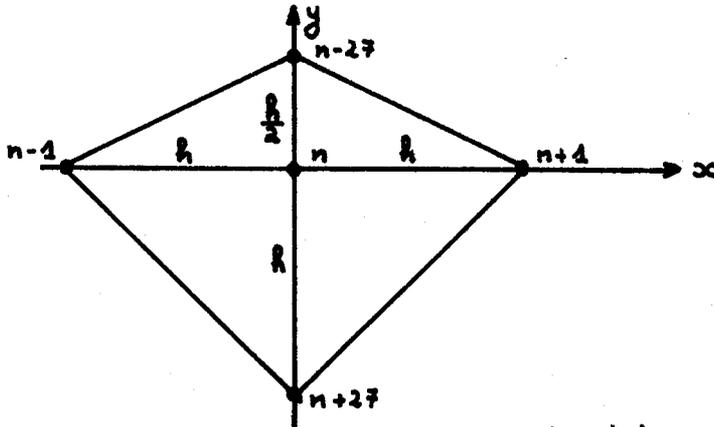
soit en posant $\epsilon = \frac{\mu_0 \sigma \omega h}{2}$

et $\alpha = 1 - \epsilon$, $\beta = 1 + \epsilon$

$$4\Psi_{n-2\tau} + \beta\Psi_{n-1} - 10\Psi_n + \alpha\Psi_{n+1} + 4\Psi_{n+2\tau} = 0$$

Equation type pour les deux premières lignes de points.

2°) pour la troisième ligne ; on a le maillage :



et au point n l'équation est du type II : $\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)_n + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)_n = 0$ (II)

Le développement en série de Taylor donne au voisinage de n :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{n+1} = \Psi_n + h \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)_n \quad (1) \\ \Psi_{n-1} = \Psi_n - h \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)_n \quad (2) \\ \Psi_{n-27} = \Psi_n + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_n + \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)_n \quad (3) \\ \Psi_{n+27} = \Psi_n - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)_n \quad (4) \end{array} \right.$$

Comme précédemment les combinaisons linéaires de ces équations permettent de déterminer successivement :

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)_n = \frac{\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2\Psi_n}{h^2}$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)_n = \frac{8}{3h^2} \left[\Psi_{n-27} + \frac{\Psi_{n+27}}{2} - \frac{3}{2} \Psi_n \right]$$

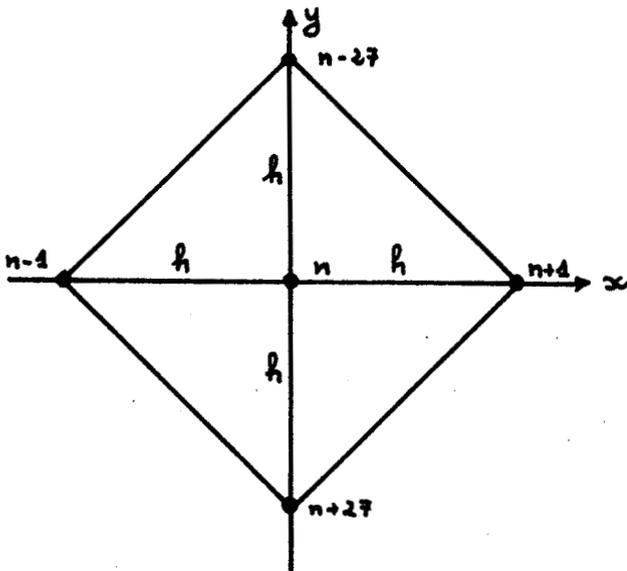
En reportant dans II et en ordonnant par rapport à n il vient :

$$\frac{8}{3} \Psi_{n-27} + \Psi_{n-1} - 6\Psi_n + \Psi_{n+1} + \frac{4}{3} \Psi_{n+27} = 0$$

Equation type pour la 3ème ligne de points.

3°) Pour les autres lignes

Le maillage est donné par la figure :



et l'équation au point n est du type (II)

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_n + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)_n = 0$$

Dans le développement en série de Taylor les équations (1), (2) et (4) sont identiques à celles du 2°, seule l'équation (3) devient :

$$\psi_{n-27} = \psi_n + h \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)_n$$

On détermine de la même manière :

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_n = \frac{\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)_n = \frac{\psi_{n-27} + \psi_{n+27} - 2\psi_n}{h^2}$$

Et en reportant dans (II)

$$\psi_{n-27} + \psi_{n-1} - 4\psi_n + \psi_{n+1} + \psi_{n+27} = 0$$

Equation type pour les 7 dernières lignes.

Remarques :

La prise en considération des valeurs de Ψ connues sur la frontière amène les remarques suivantes :

- pour les points de la première ligne, les termes du type $\Psi (n-27)$ sont nuls sauf pour les points $n = 13, 14$ et 15 où ils valent alors $- B_0$.

- pour tous les points de la dernière ligne ce sont les termes du type $\Psi (n+27)$ qui sont nuls.

- pour les points $n = 1, n = 1 + 27, n = 1 + 2 \times 27 \dots$ du début de chaque ligne, les termes $\Psi (n-1)$ sont nuls.

- pour les points $n = 27, n = 2 \times 27, n = 3 \times 27 \dots$ à la fin de chaque ligne les termes en $\Psi (n+1)$ sont nuls.

Résolution :

On obtient un système de 270 équations linéaires à 270 inconnues qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \end{pmatrix}$$

(B) est la matrice colonne des données, elle n'est composée que de zéros sauf en 13, 14, 15 où les valeurs sont $+ 4 B_0$.

(Ψ) est la matrice colonne des 270 inconnues

(A) est la matrice des coefficients. Elle est donnée par le tableau de la figure (7). C'est une matrice symétrique de type "bande" qu'il faut inverser pour déterminer les valeurs Ψ cherchées. Un programme R E B A N d'inversion de ce type de matrice, disponible au Centre de Calcul de l'Université de LILLE I et ne nécessitant qu'un simple programme d'introduction de la matrice considérée ici a permis cette résolution.

III.4.2 - Cas d'un courant d'excitation alternatif

En utilisant la notation $\tilde{\Psi} = \psi e^{j(\omega t - \varphi)}$ pour la grandeur complexe associée au champ magnétique, les équations à résoudre s'écrivent en notation complexe :

dans le métal :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial y^2} - j\omega\mu_0\sigma \tilde{\Psi} - \mu_0\sigma\nu \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x} = 0 \quad (\text{I})$$

dans l'air :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II})$$

Le principe du calcul reste le même qu'au III.4.1.

1°) Pour les points des deux premières lignes : la décomposition en série Taylor permet de déterminer successivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x}\right)_n = \frac{\tilde{\Psi}_{n+1} - \tilde{\Psi}_{n-1}}{2h} \\ \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial x^2}\right)_n = \frac{\tilde{\Psi}_{n+1} + \tilde{\Psi}_{n-1} - 2\tilde{\Psi}_n}{h^2} \\ \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial y^2}\right)_n = \frac{4\tilde{\Psi}_{n-2\tau} + 4\tilde{\Psi}_{n+2\tau} - 8\tilde{\Psi}_n}{h^2} \end{array} \right.$$

soit en reportant dans l'équation (I) au point (n) :

$$4\tilde{\Psi}_{n-2\tau} + \tilde{\Psi}_{n-1} \left[1 + \frac{\mu_0\sigma\nu h}{2}\right] - \left[10 + j\omega\mu_0\sigma h^2\right]\tilde{\Psi}_n + \tilde{\Psi}_{n+1} \left[1 - \frac{\mu_0\sigma\nu h}{2}\right] + 4\tilde{\Psi}_{n+2\tau} = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{En posant } \alpha = 1 - \varepsilon \quad \text{où } \varepsilon = \frac{\mu_0\sigma\nu h}{2} \\ \beta = 1 + \varepsilon \\ \text{et } \Delta = 10 + j\delta \quad \text{où } \delta = \omega\mu_0\sigma h^2 \end{array}$$

il vient :

$$4\tilde{\Psi}_{n-2\tau} + \beta\tilde{\Psi}_{n-1} - \Delta\tilde{\Psi}_n + \alpha\tilde{\Psi}_{n+1} + 4\tilde{\Psi}_{n+2\tau} = 0$$

2°) Pour les autres lignes les équations restent inchangées par rapport au cas du courant continu, Ψ est simplement remplacée par sa valeur complexe $\tilde{\Psi}$.

Pour la 3^{ème} ligne on a :

$$\frac{8}{3} \tilde{\Psi}_{n-27} + \tilde{\Psi}_{n-1} - 6 \tilde{\Psi}_n + \tilde{\Psi}_{n+1} + \frac{4}{3} \tilde{\Psi}_{n+27} = 0$$

pour les autres lignes :

$$\tilde{\Psi}_{n-27} + \tilde{\Psi}_{n-1} - 4 \tilde{\Psi}_n + \tilde{\Psi}_{n+1} + \tilde{\Psi}_{n+27} = 0$$

Les remarques concernant les points à proximité de la frontière restent les mêmes qu'au III.4.1.

On obtient encore un système de 270 équations linéaires mais ici les données, les inconnues et les coefficients (plus particulièrement Δ), sont des grandeurs complexes. Le problème se ramène à la résolution de deux systèmes de 270 équations :

- un premier portant sur la partie réelle des équations précédentes
- un second portant sur la partie imaginaire de ces mêmes équations

Il se trouve compliqué par le fait que les coefficients (Δ) étant complexes les parties réelles et imaginaires des inconnues interviennent dans les deux systèmes qui sont ainsi couplés.

Sous forme matricielle et en notation complexe on peut encore écrire :

$$(\tilde{A})(\tilde{\Psi}) = (\tilde{B})$$

La matrice (\tilde{A}) est donnée par le tableau de la figure (7) c'est encore une matrice "bande", et les difficultés précédentes ont pu être levées par la possibilité d'utiliser dans le programme REBAN une sous routine de résolution en notation complexe, les différentes grandeurs étant introduites par partie réelle et imaginaire.

CHAPITRE 2

ETUDE DANS LE CAS D'UN INDUIT NON MAGNETIQUE

I - INTRODUCTION

L'équation fondamentale qui régit le comportement de la composante perpendiculaire de l'induction dans le disque métallique est :

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} - j\omega\mu\sigma B_y - \mu\sigma v \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

Dans cette expression, il apparaît que deux formes de réaction d'induit sont à considérer :

- d'une part un effet bien connu de pénétration lié au terme $j\omega\mu\sigma B_y$
- d'autre part, un effet lié au gradient d'induction par le terme $\mu\sigma v \frac{\partial B_y}{\partial x}$ caractéristique du déplacement à la vitesse v .

Le présent chapitre a pour but essentiel de permettre une analyse des principaux aspects de ces deux effets. Pour nous affranchir de l'influence de la perméabilité μ , et parce que, sur le plan théorique, il se prête à une modélisation simple établie au chapitre précédent, nous examinons ici le cas d'un métal non magnétique (Aluminium). Par ailleurs, pour dégager progressivement les importances relatives des deux effets signalés, nous avons effectué l'étude d'abord en continu, puis en alternatif et pour deux fréquences notablement différentes 50 Hz et 400 Hz.

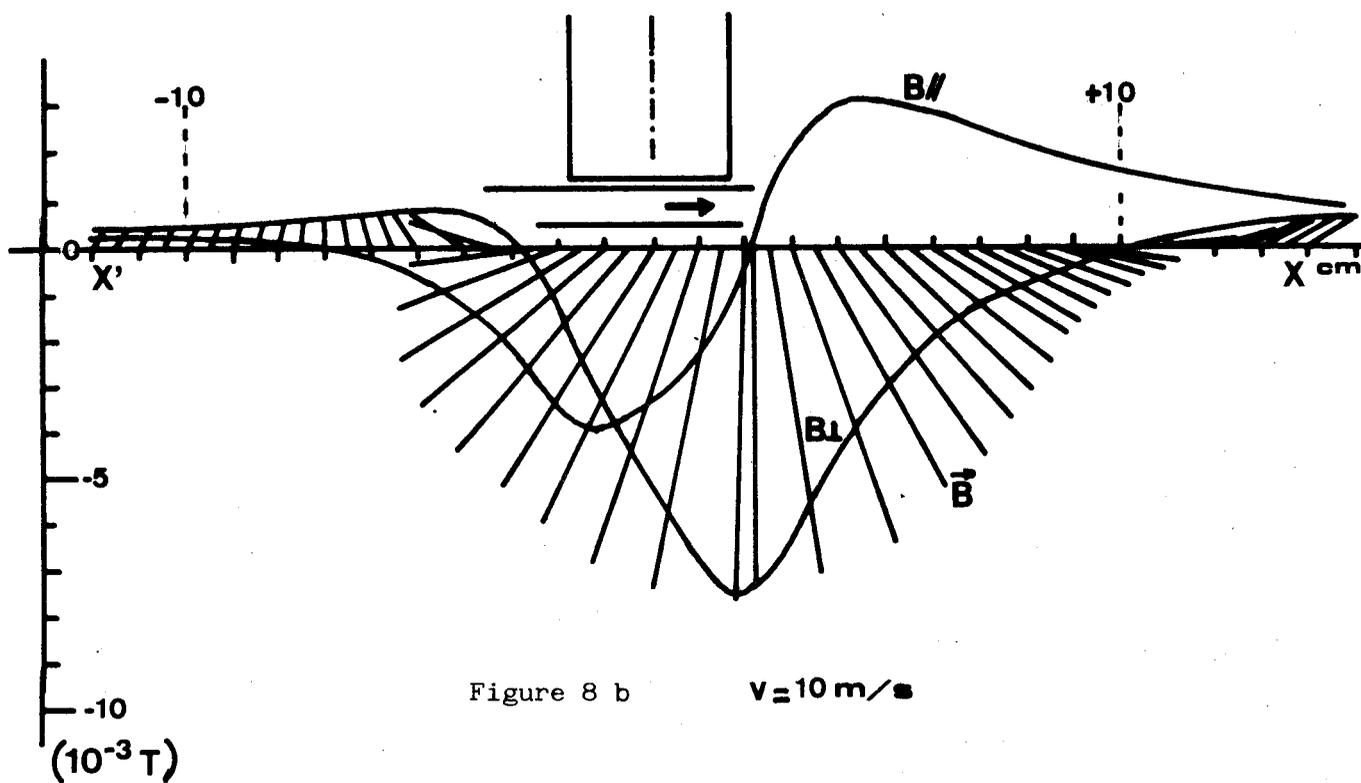
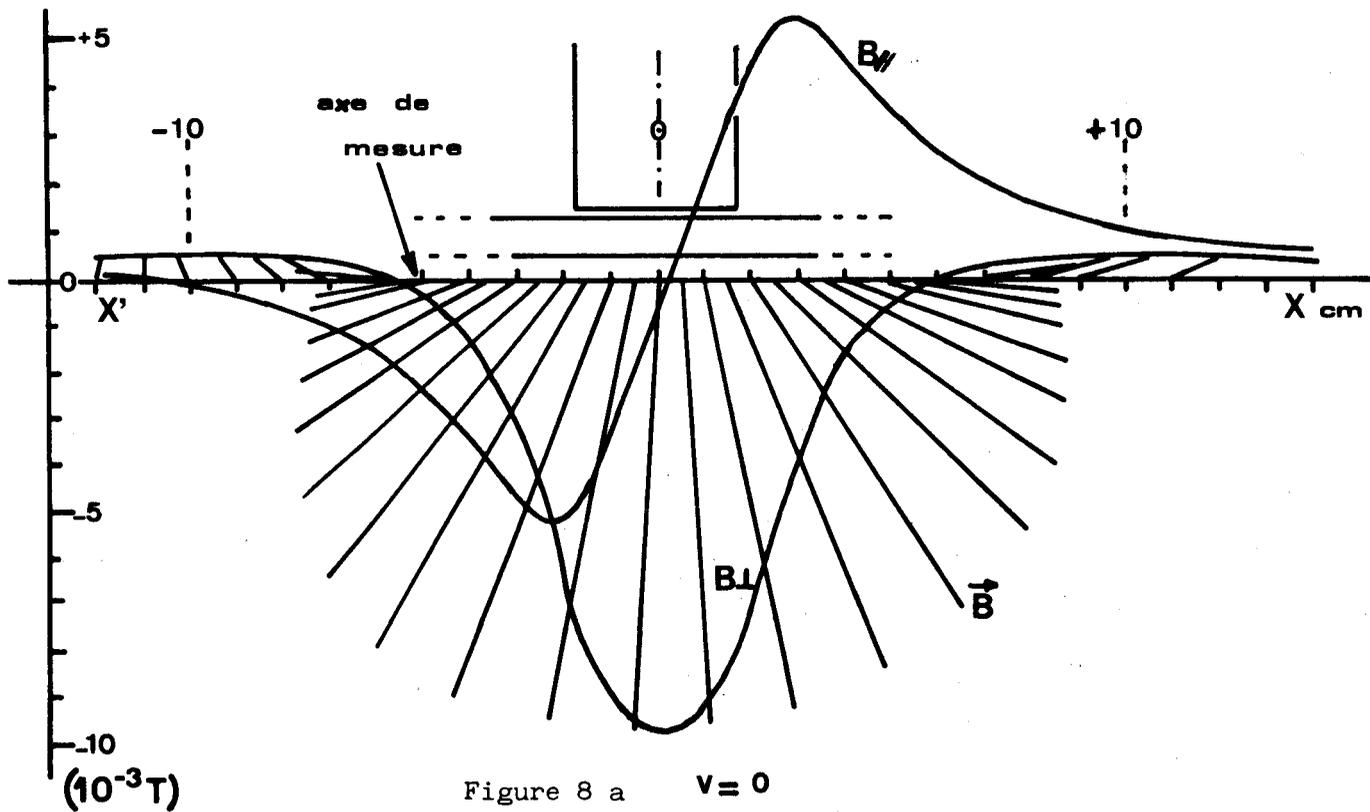
II - ETUDE EN COURANT CONTINU

II.1 - CONDITIONS D'ETUDES

II.1.1 - Conditions expérimentales

Les courbes expérimentales de la figure (8) donnent les composantes de l'induction perpendiculaire (B_{\perp}) et parallèle (B_{\parallel}) au disque ainsi que le vecteur résultant \vec{B} , pour des vitesses linéaires égales à : 0 , 10 , 20 , 45 m/s (le rayon moyen étant pris au milieu de l'émetteur).

Les relevés ont été effectués avec une sonde à effet Hall, sur une ligne x'x située à 5 mm du disque (fig. 8) et dans un plan passant par le milieu de l'émetteur. L'entrefer émetteur-disque était de 2 mm et le courant d'excitation 140 mA.



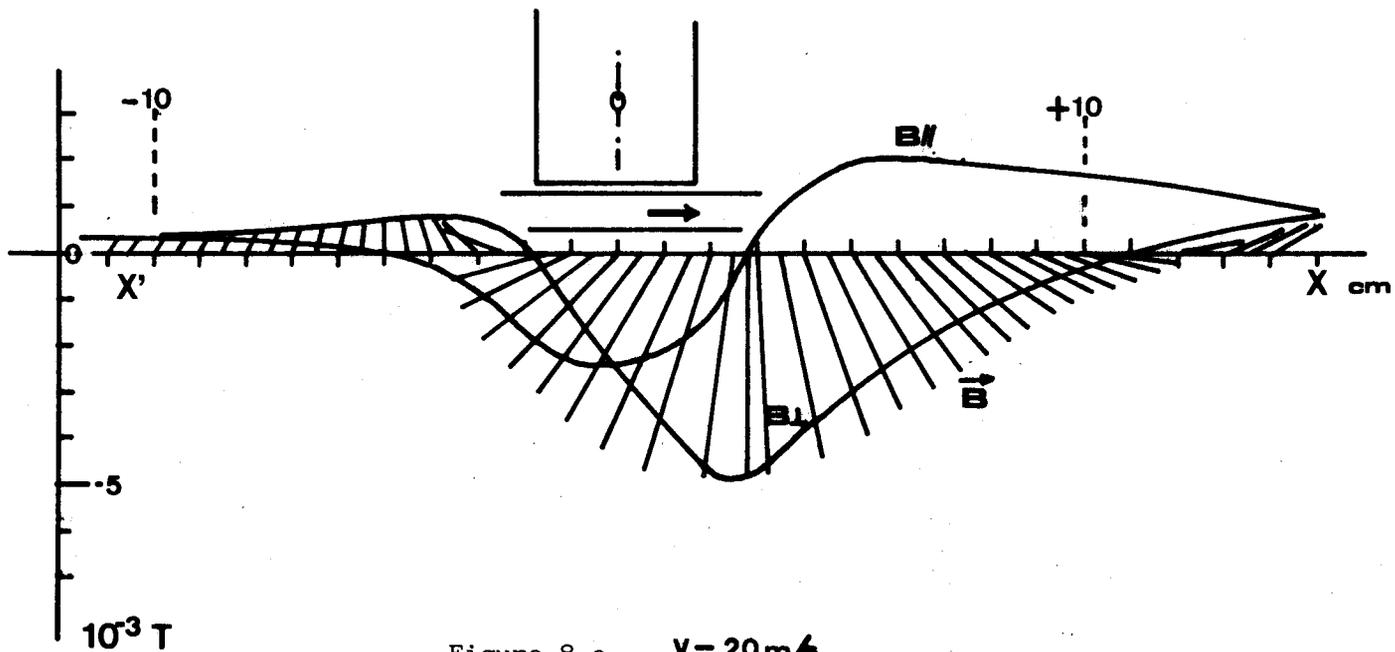


Figure 8 c $V = 20 \text{ m/s}$

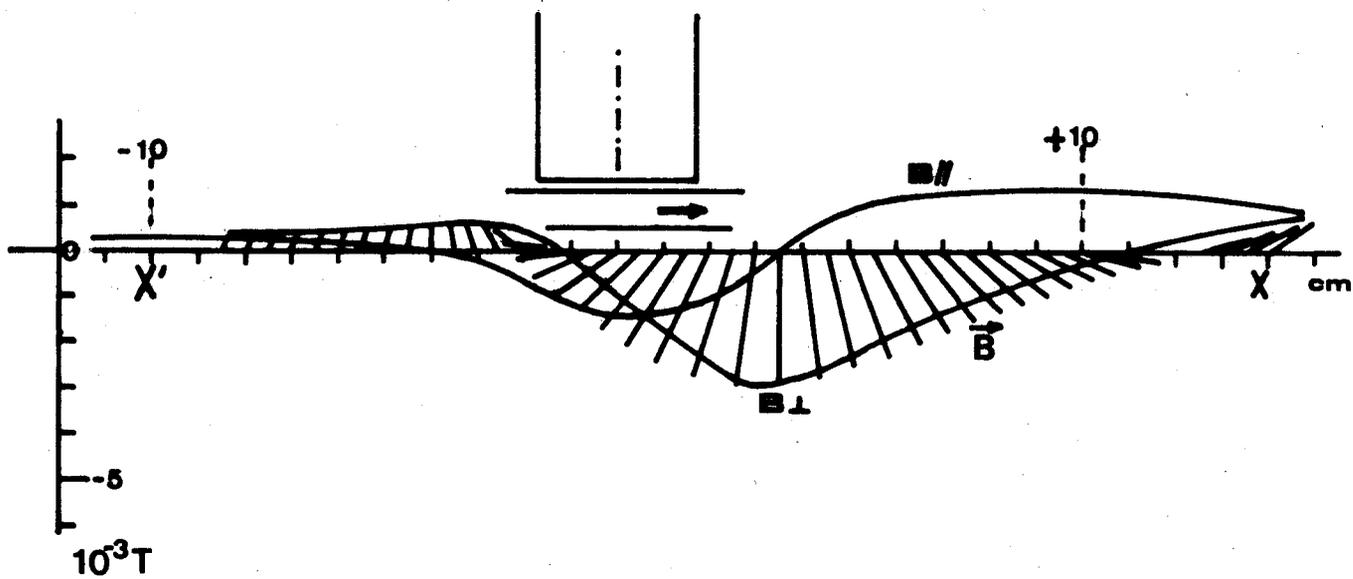
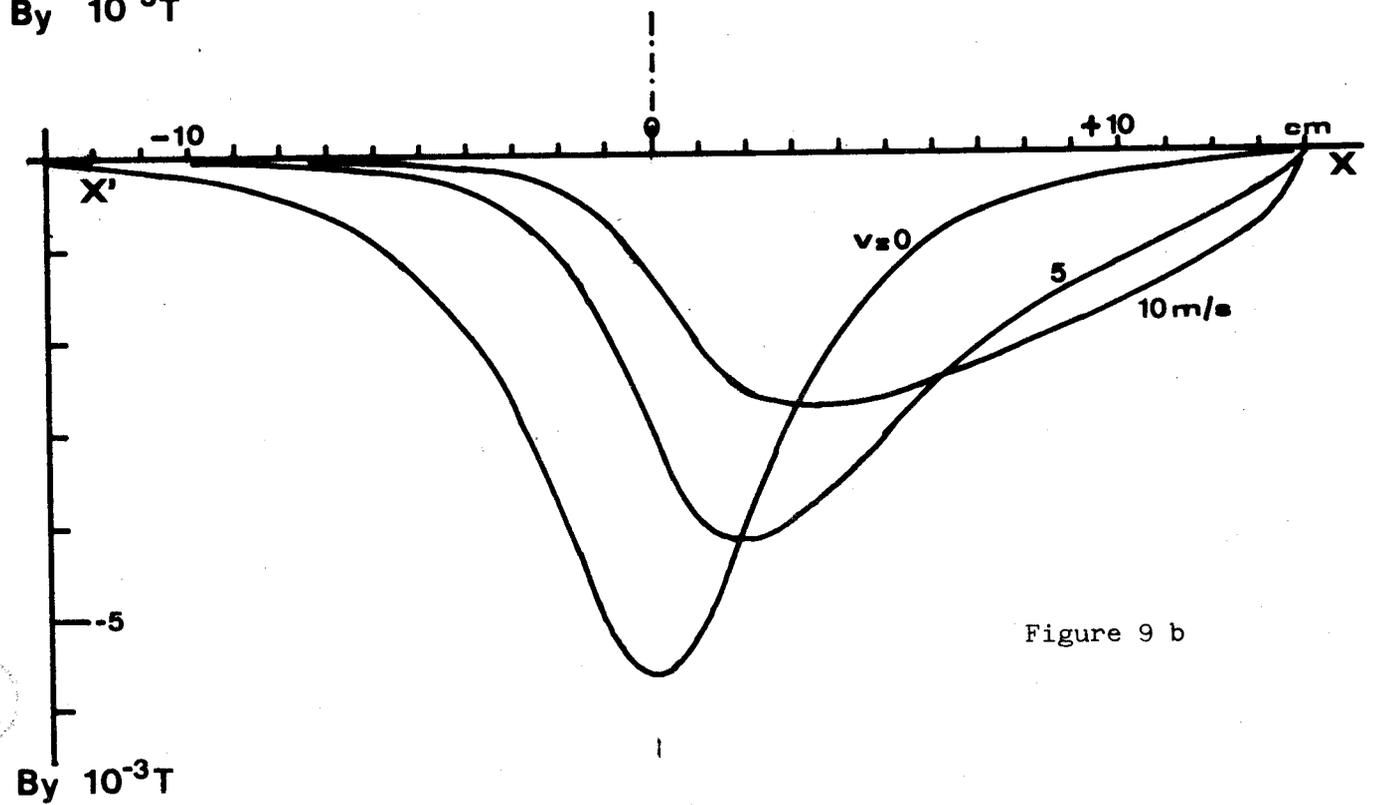
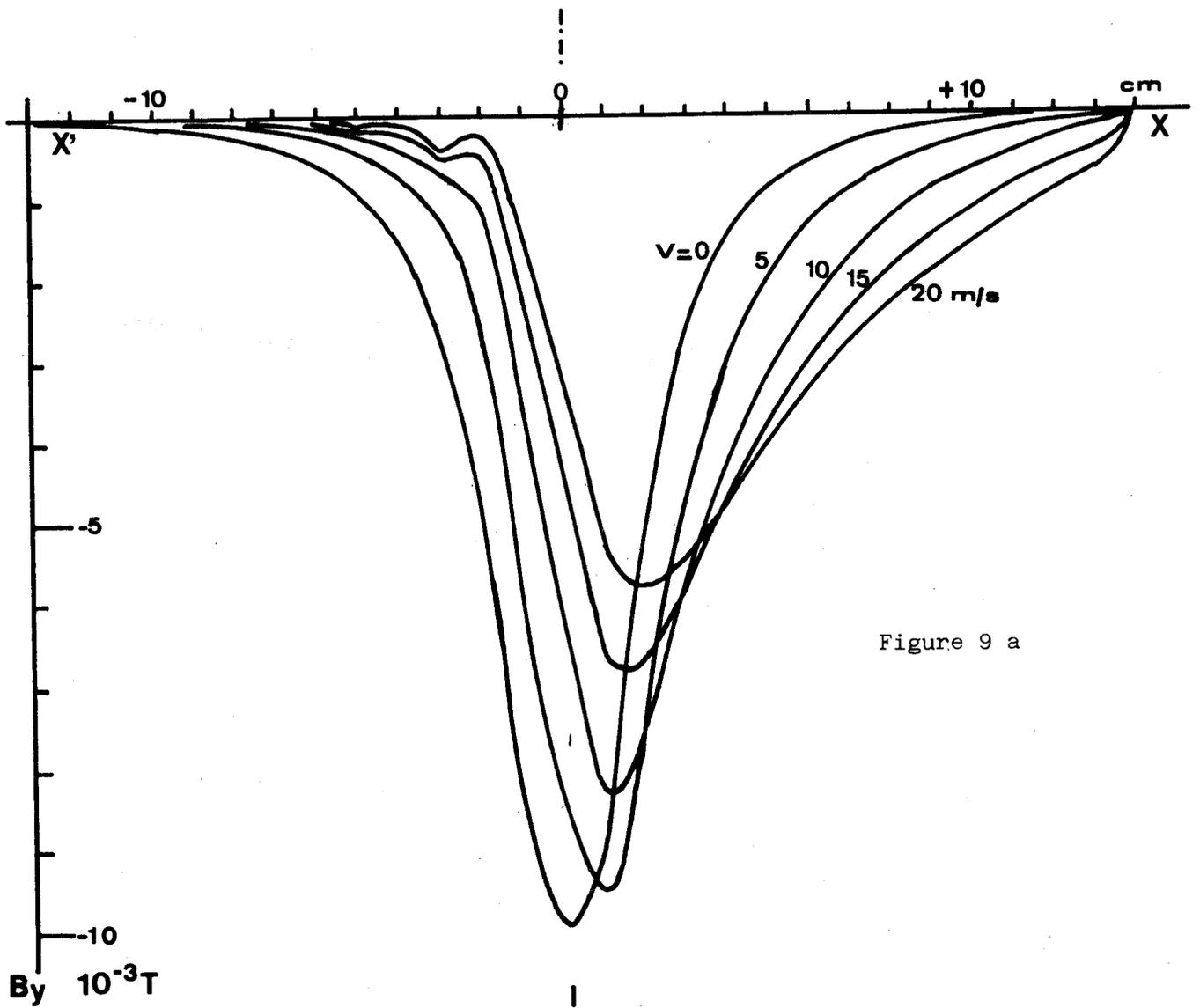


Figure 8 d $V = 45 \text{ m/s}$





II.1.2 - Conditions théoriques

Les valeurs utilisées pour la perméabilité magnétique et la conductivité de l'aluminium sont respectivement :

$$\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \quad \text{et} \quad \sigma = 3,4 \cdot 10^7 \quad (\Omega \text{ m})^{-1}$$

la dimension de la maille élémentaire est $h = 10^{-2}$ m,

il en résulte que le coefficient $\epsilon = \frac{h \mu_0 \sigma v}{2}$ des équations est égal à 0,213 v

pour les vitesses envisagées, les trois coefficients ϵ , α et β ont les valeurs données ci-dessous :

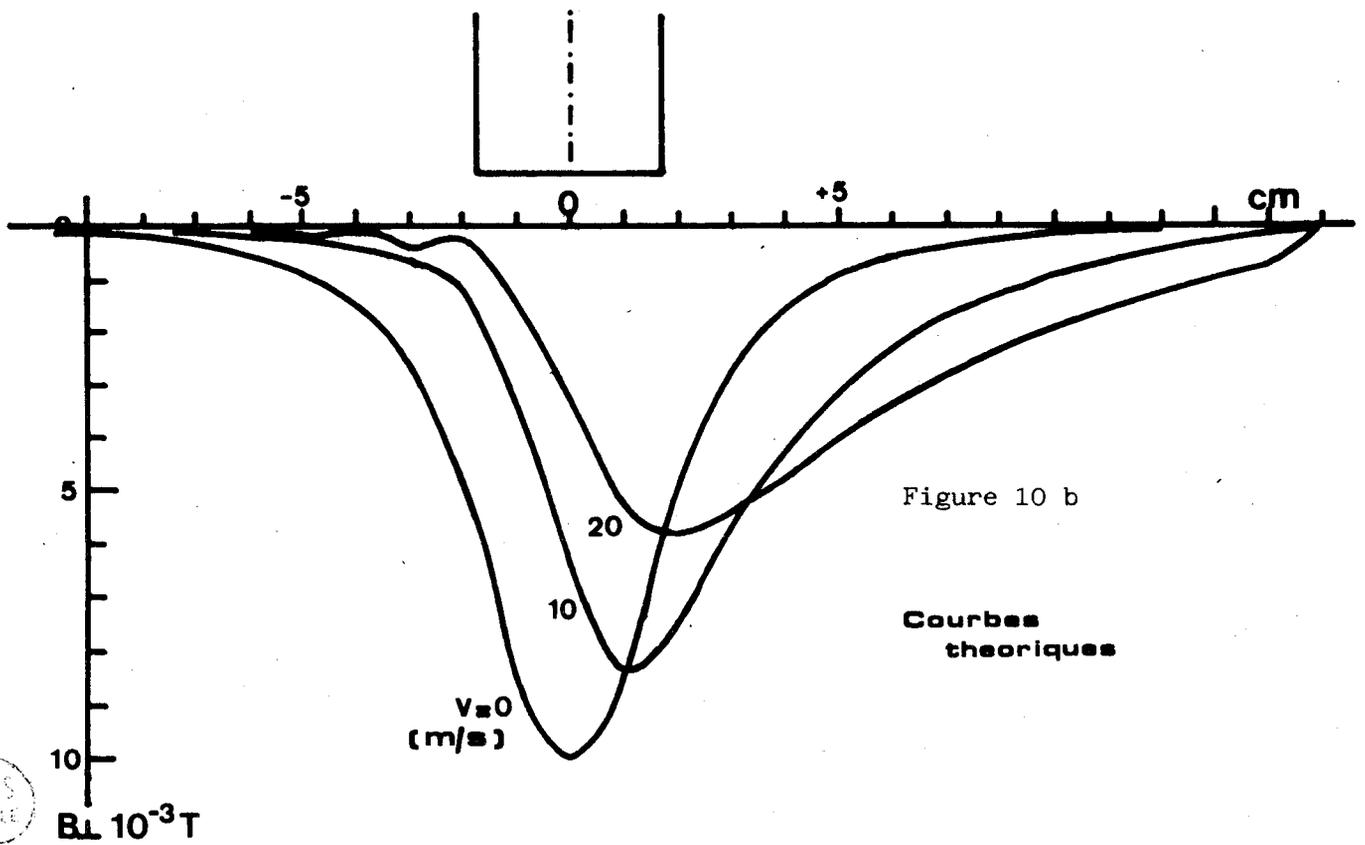
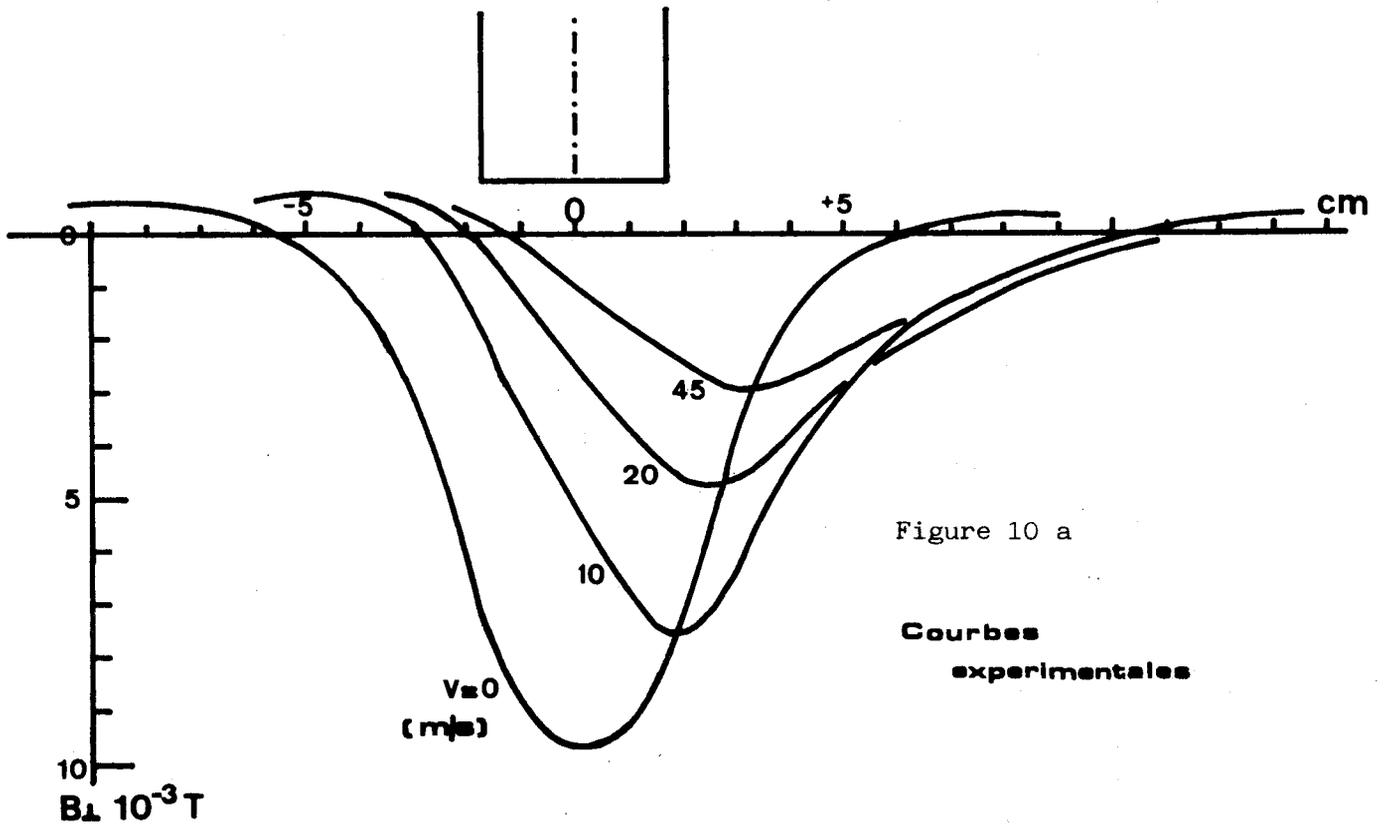
pour $v = 0$	$\epsilon = 0$	$\alpha = \beta = 1$	
$v = 5$ m/s	$\epsilon \approx 1$	$\alpha = 0$	$\beta = + 2$
$v = 10$ m/s	$\epsilon \approx 2$	$\alpha \approx -1$	$\beta \approx + 3$
$v = 15$ m/s	$\epsilon \approx 3$	$\alpha \approx -2$	$\beta \approx + 4$
$v = 20$ m/s	$\epsilon \approx 4$	$\alpha \approx -3$	$\beta \approx + 5$

La figure (9a) montre les courbes théoriques de B_{\perp} (ou B_y), obtenues à partir du modèle à mailles "irrégulières" et 270 points établi au précédent chapitre, pour les vitesses 0, 5, 10, 15, 20 m/s et sur la première ligne de points dans l'air. Cette ligne est située à 1,5 cm de l'émetteur, distance du même ordre de grandeur que la distance expérimentale.

A titre de comparaison, nous avons également représenté sur la figure (9b) les résultats théoriques obtenus avec la modélisation à maillage régulier (carré de 1 cm de coté et 243 points) étudiée dans un premier temps. Dans ce deuxième cas, les courbes de B_{\perp} correspondent aux vitesses 0, 5, 10 m/s et aux points de la première ligne dans l'air qui se trouve alors à une distance de 3 cm de l'émetteur. La valeur de B_0 introduite dans les calculs est la valeur expérimentale 0,02 T mesurée à l'arrêt en plaçant la sonde à effet Hall tout contre l'émetteur.

II.1.3 - Remarque

Nous n'avons pas reproduit les résultats expérimentaux et théoriques relatifs à des éloignements supérieurs à ceux utilisés ci-dessus. Pour des distances de plusieurs centimètres par rapport au disque, ils montrent, aux amplitudes près, une évolution identique à celle que nous venons de rapporter.



II.2 - ANALYSE ET CONFRONTATION EXPERIENCE - THEORIE

Analyse

Expérimentalement, on observe, sur les relevés de B_{\perp} comme sur ceux de $B_{//}$ deux effets très marqués et s'accroissant avec la vitesse :

- d'une part un important affaiblissement des grandeurs considérées.
- d'autre part un décalage très net des courbes dans le sens du mouvement accompagné d'une dissymétrie par rapport aux répartitions à l'arrêt.

Le tracé des vecteurs \vec{B} permet de manière approchée de rendre compte localement de la distorsion du champ magnétique.

Les relevés théoriques montrent les mêmes déformations pour B_{\perp} la seule composante calculée. Les courbes correspondant aux vitesses de 45 m/s pour le modèle à 270 points, et 10 m/s pour le modèle à 243 points, n'ont pas été représentées. Elles font apparaître un phénomène d'oscillation des valeurs de B provoqué par les "réflexions" sur les bords du domaine dont les dimensions sont alors insuffisantes à l'égard du décalage qu'imposent ces vitesses.

Comparaison

Nous avons reporté sur une même figure (fig. (10)) les courbes expérimentales et théoriques (modèle à 270 points) comparables.

Le tableau ci-dessous résume d'autre part les caractéristiques essentielles des relevés : valeur maximale de B_{\perp} , affaiblissement et décalage de ce maximum.

		v = 0	v = 10 m/s	v = 20 m/s	v = 45 m/s
Expérience B_{\perp} max	Valeur (mT)	9,8	7,6	4,8	2,9
	Affaiblissement (%)	0	22	51	70
	Décalage (cm)	0	1,8	2,5	3,3

Théorie B_{\perp} max modèle 270 pts	Valeur (mT)	9,97	8,34	5,79	
	Affaiblissement (%)	0	16	42	-
	Décalage (cm)	0	1	2	-

Théorie B_{\perp} max modèle 243 pts	Valeur (mT)	5,62	2,75		
	Affaiblissement (%)	0	51	-	-
	Décalage (cm)	0	3,5	-	-

Les allures générales des courbes théoriques et expérimentales sont assez similaires. L'affaiblissement et le décalage donnés par le modèle à maillage irrégulier (à 270 points), aux vitesses où il est représentatif, sont un peu moindres qu'en réalité.

Par contre, dans le cas du modèle à maillage régulier (à 243 points) les valeurs de l'induction sont nettement plus faibles et, surtout, le décalage et l'affaiblissement beaucoup plus importants qu'en pratique. La cause de ces désaccords vient très probablement de l'épaisseur "théorique" de métal - entre 1 et 2 cm - très supérieure à la réalité (8 mm) et d'ailleurs ce modèle cesse d'être significatif à partir de vitesses beaucoup plus basses (20 m/s).

De toute évidence les résultats théoriques sont particulièrement sensibles à l'épaisseur que la modélisation confère à l'induit et il apparaît que celle comportant le maillage irrégulier peut-être considérée comme la plus apte à simuler l'expérience. Dans toute la suite de ce chapitre c'est exclusivement ce type de maillage qui sera utilisé.

Si cette modélisation est globalement satisfaisante, elle présente, néanmoins certaines insuffisances : elle ne permet pas de rendre compte du retournement de l'induction que l'on observe expérimentalement (changement de signe de B_L) et par ailleurs l'hypothèse consistant à donner à l'induction B_0 à la sortie de l'émetteur une valeur qui est celle à l'arrêt est loin d'être rigoureusement vérifiée en pratique. Sur ce point, des mesures effectuées sur la face même de sortie de l'émetteur montrent, en effet, qu'avec le faible entrefer utilisé ici, la perturbation provoquée par le mouvement, s'observe aussi à ce niveau : non uniforme sur toute la surface, l'induction peut subir une diminution moyenne de l'ordre de 30 % aux vitesses les plus élevées.

Sans changer fondamentalement le phénomène, cet effet est une des causes de l'écart existant entre les résultats expérimentaux et théoriques.

En définitive, tenter d'améliorer la modélisation en prenant une définition plus fine et un nombre de points plus élevé serait assez illusoire en regard des simplifications admises.

II.3 - ASPECT PHYSIQUE DU PHENOMENE

La modification du champ magnétique peut, en partie, s'expliquer qualitativement par une détermination approchée des parcours des courants induits.

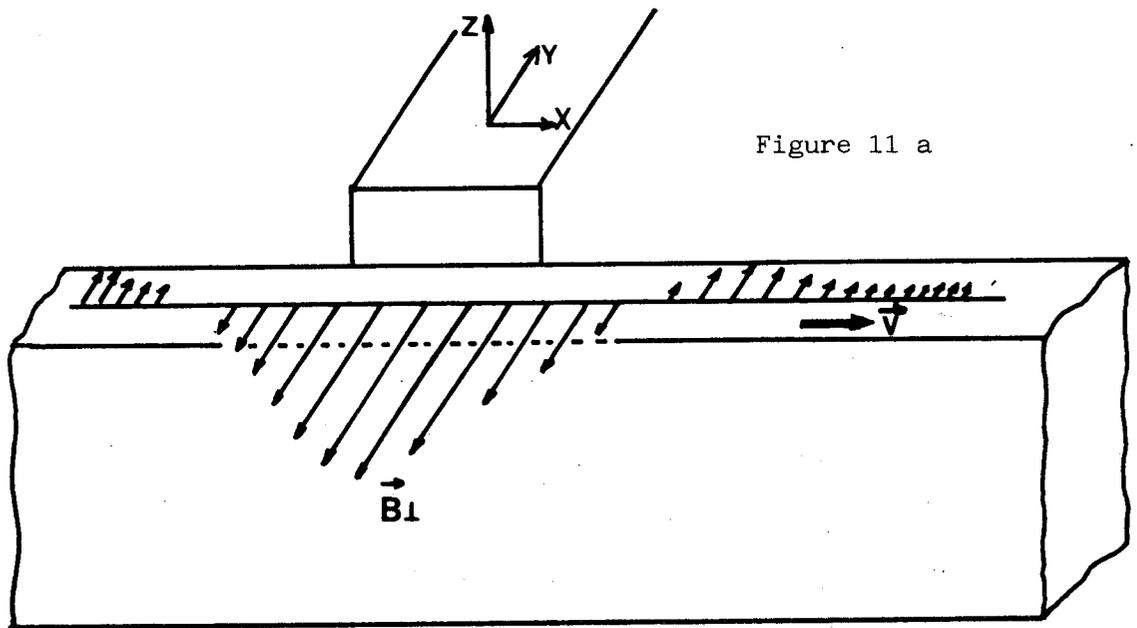


Figure 11 a

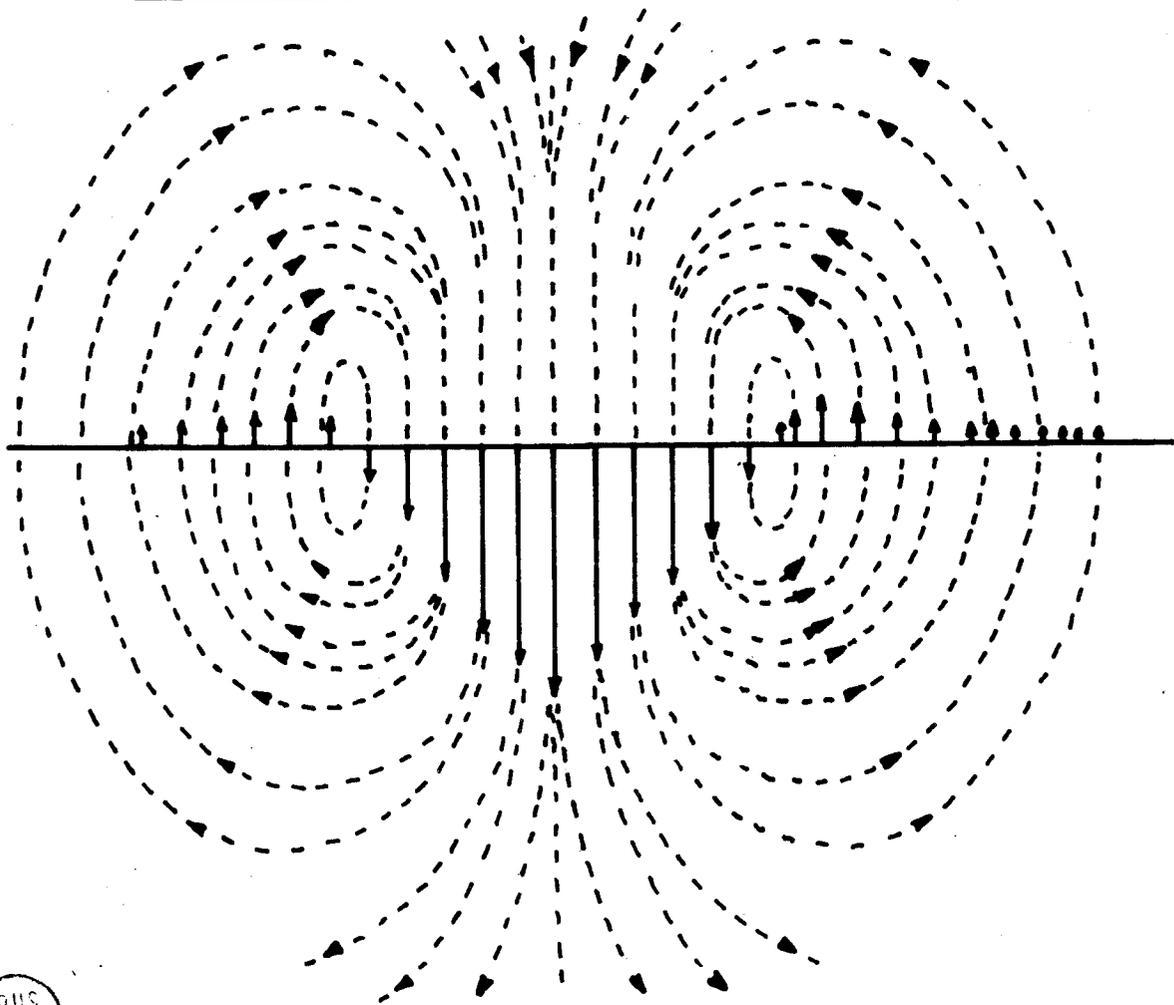


Figure 11 b

$$\vec{v} \wedge \vec{B}_1$$



Sur la figure 11, nous avons schématisé :

- figure 11a : la répartition à l'arrêt de B_{\perp} à l'intérieur du disque.

Située dans un plan horizontal xoy, l'induction est maximale et sortante dans une zone centrale assez étroite, devant l'émetteur ; après retournement, elle est rentrante et de valeur beaucoup plus faible, mais occupe des zones plus étalées de chaque côté.

- à cette répartition correspondent des forces et des champs électromoteurs de type $\vec{v} \wedge \vec{B}$ agissant sur les charges mobiles. Situés dans le plan vertical zox (fig.11 b), ils donnent naissance à des courants induits descendants et intenses dans la partie centrale, qui se referment, avec des valeurs plus faibles, en remontant sur les côtés. L'induction qu'ils créent, tend donc, dans la zone centrale, à diminuer l'induction initiale pour la partie gauche, et à l'augmenter pour la partie droite.

Pour une vitesse dirigée en sens contraire le phénomène est inversé ; par contre il ne l'est pas si on inverse le sens de \vec{B} , comme on peut le vérifier expérimentalement. Une étude plus précise des courants de Foucault a été faite avec un dispositif analogue par De Fleury, Poloujadoff, Robert [2] qui ont constaté une perturbation du même type.

Le raisonnement précédent est très simplifié, les courants induits sont en fait liés à l'induction résultante et non à l'induction initiale dont la répartition même est détruite. Il ne permet de justifier que la dissymétrie de l'induction mais n'explique pas son affaiblissement général. Il fait de plus abstraction de l'épaisseur du métal, et seule la prise en considération de cette dimension supplémentaire permettrait de justifier la modification de la composante parallèle et de l'orientation des vecteurs.

III - E T U D E E N C O U R A N T A L T E R N A T I F 50 Hz

III.1 - CONDITIONS D'ETUDE

III.1.1. - Conditions expérimentales

Les conditions relatives à l'émetteur sont les mêmes qu'en courant continu (intensité efficace 140 mA, entrefer 2 mm), les vitesses d'étude sont également les mêmes (0, 10, 20, 45 m/s).

Nous avons représenté :

- fig.12 a et 13 a : les valeurs efficaces des composantes $B_{//}$ et B_{\perp} . Ces valeurs ont été affectées de signes (arbitraires) opposés lorsqu'elles passent par des minimas presque nuls correspondant à un changement du sens de la composante.

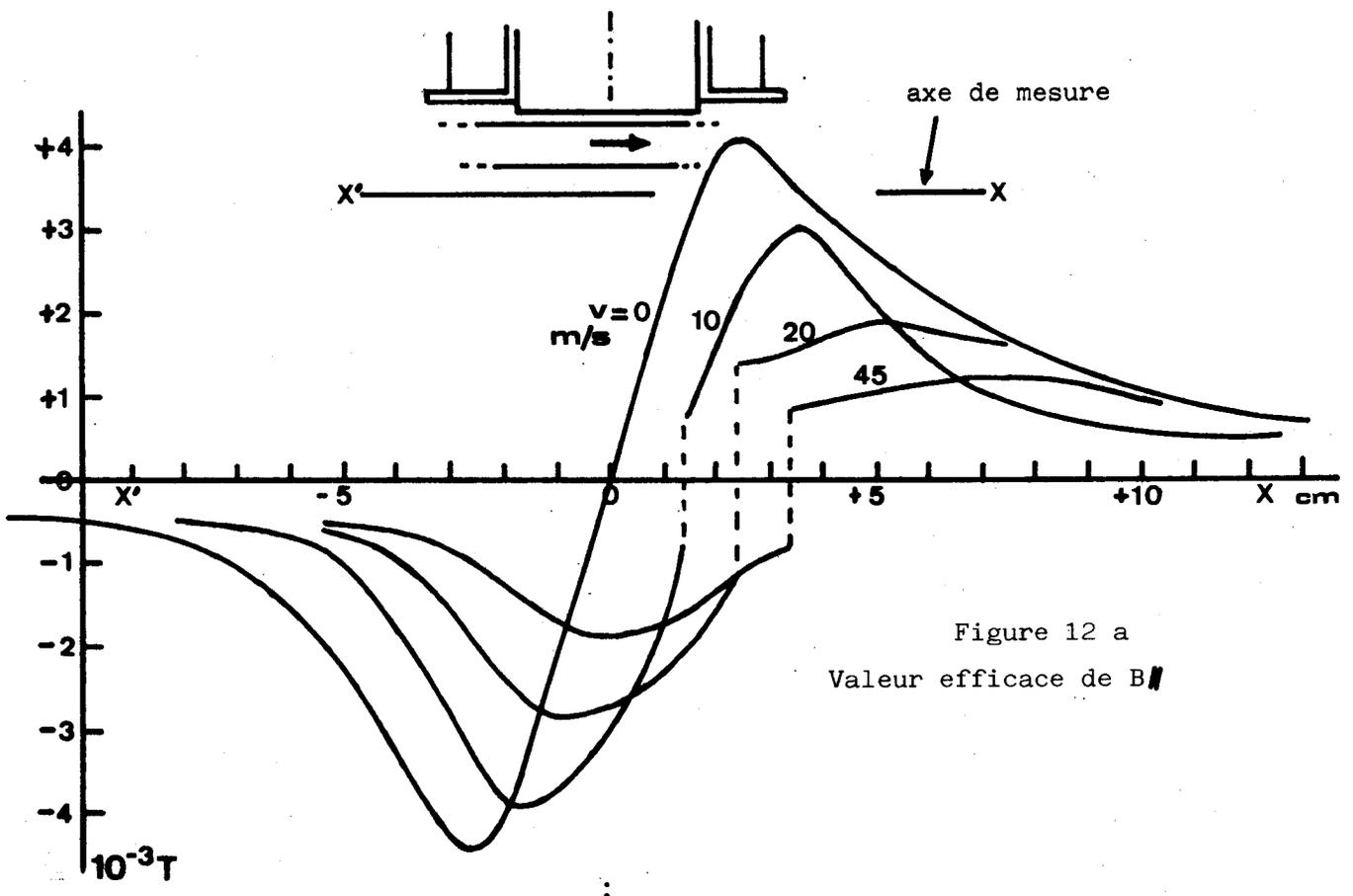


Figure 12 a
Valeur efficace de $B_{//}$

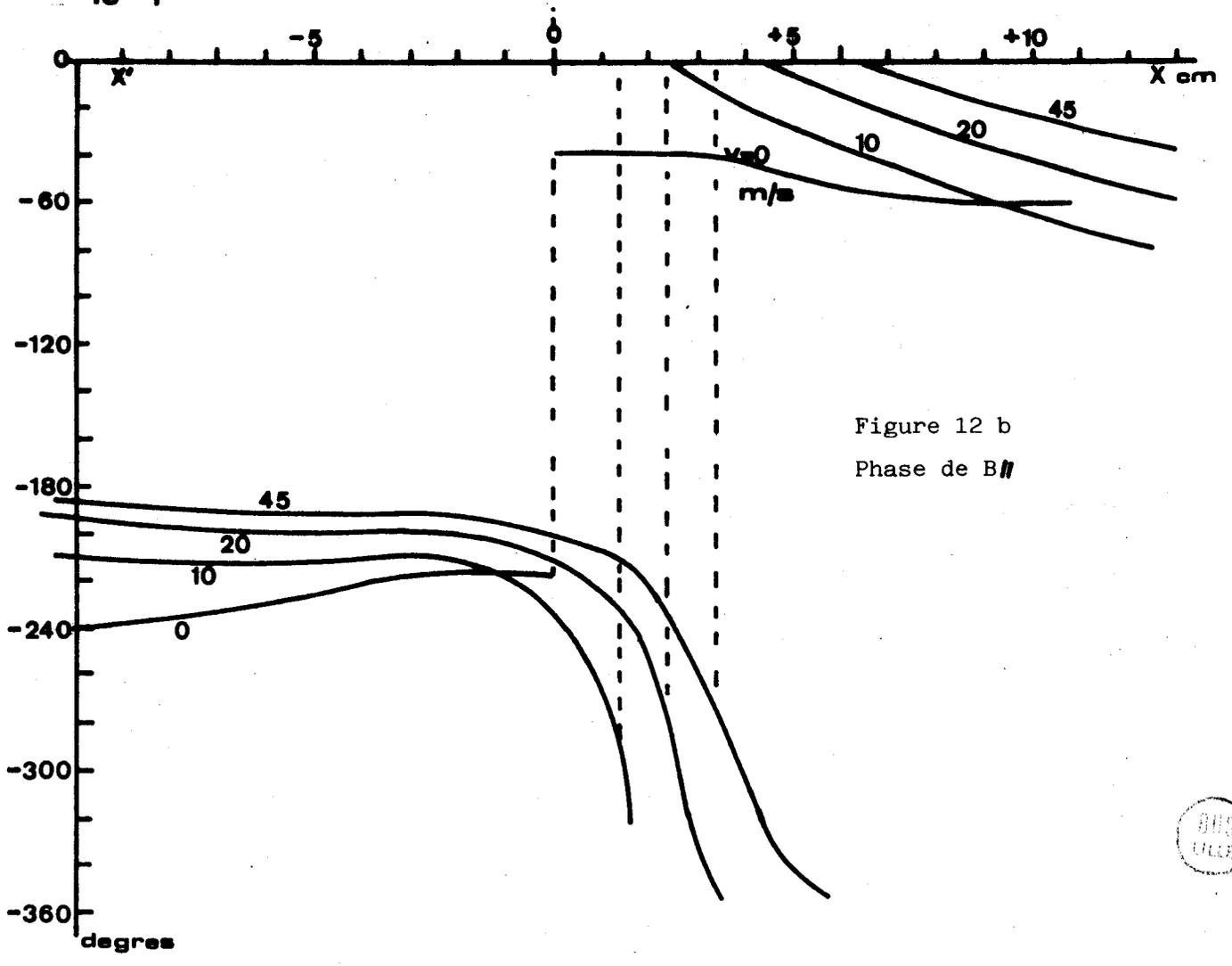
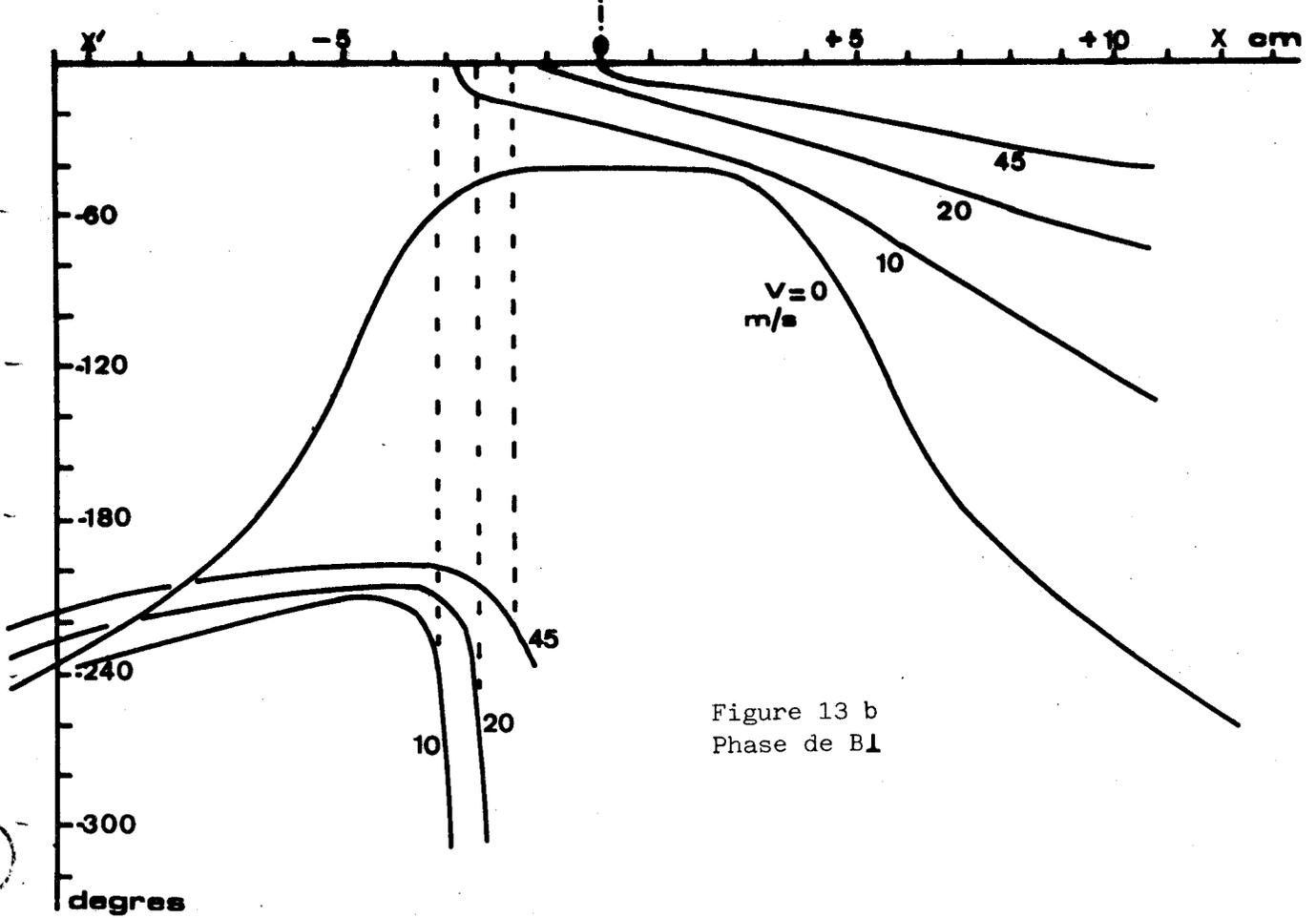
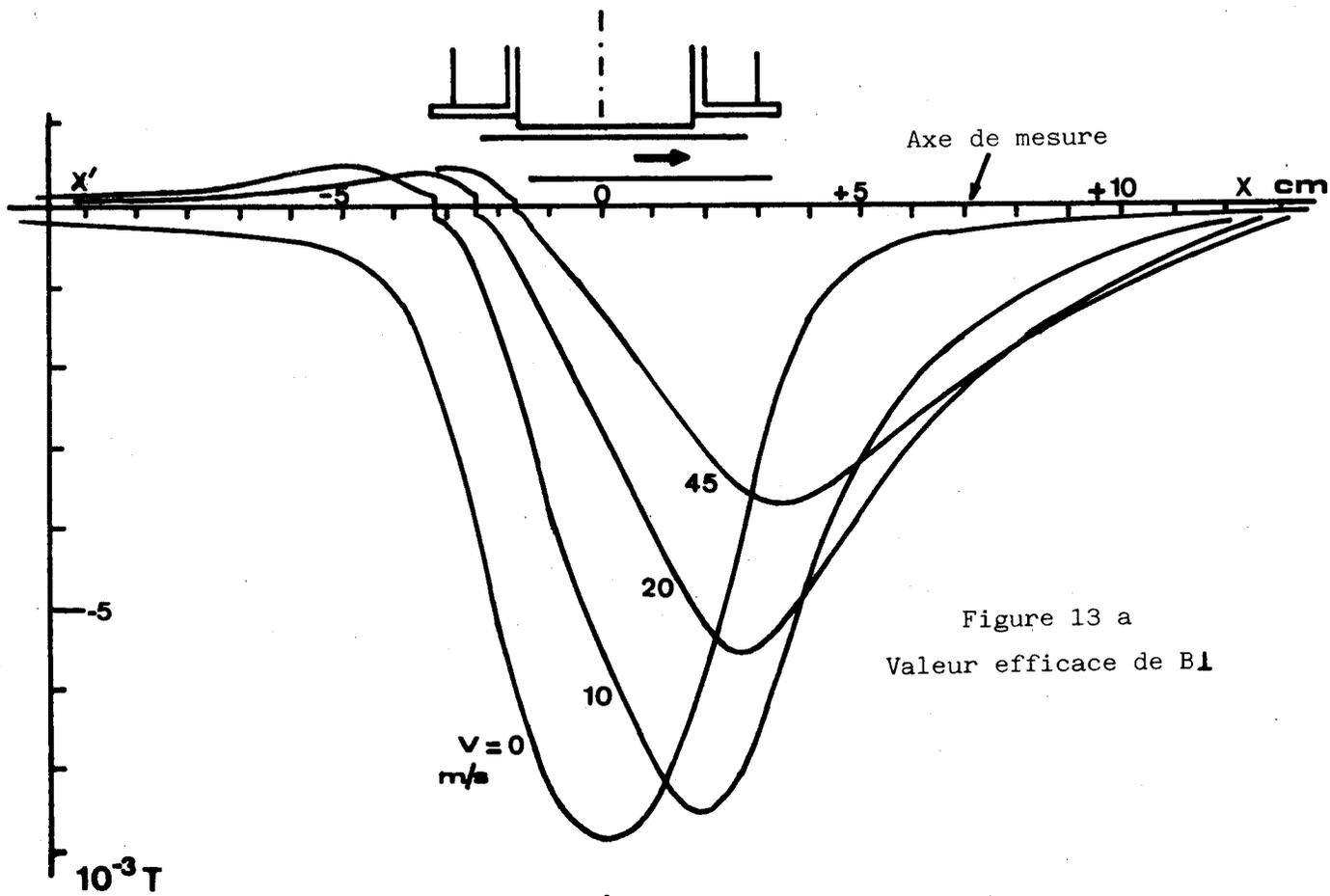


Figure 12 b
Phase de $B_{//}$





COURBES EXPERIMENTALES



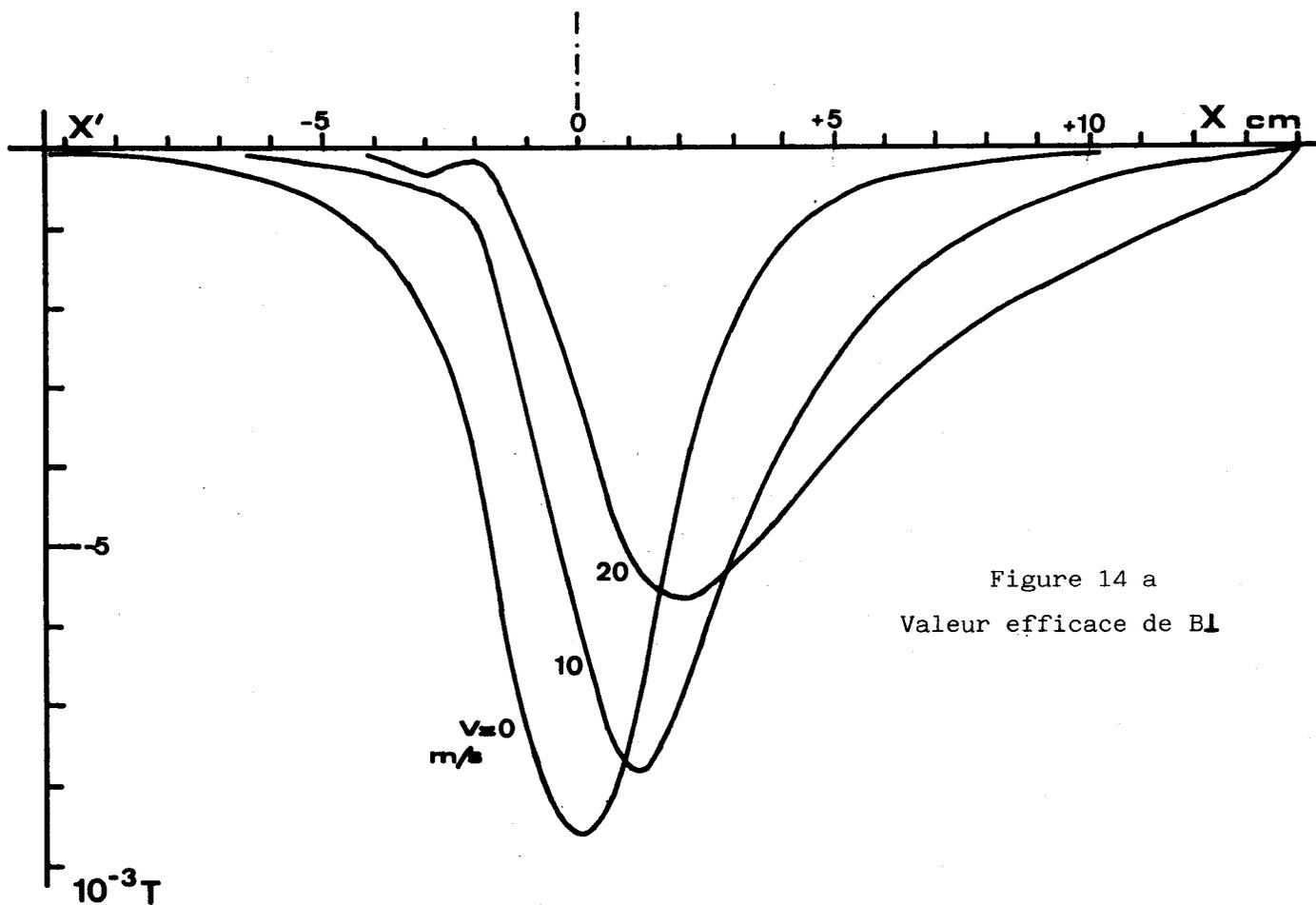


Figure 14 a
Valeur efficace de B_1

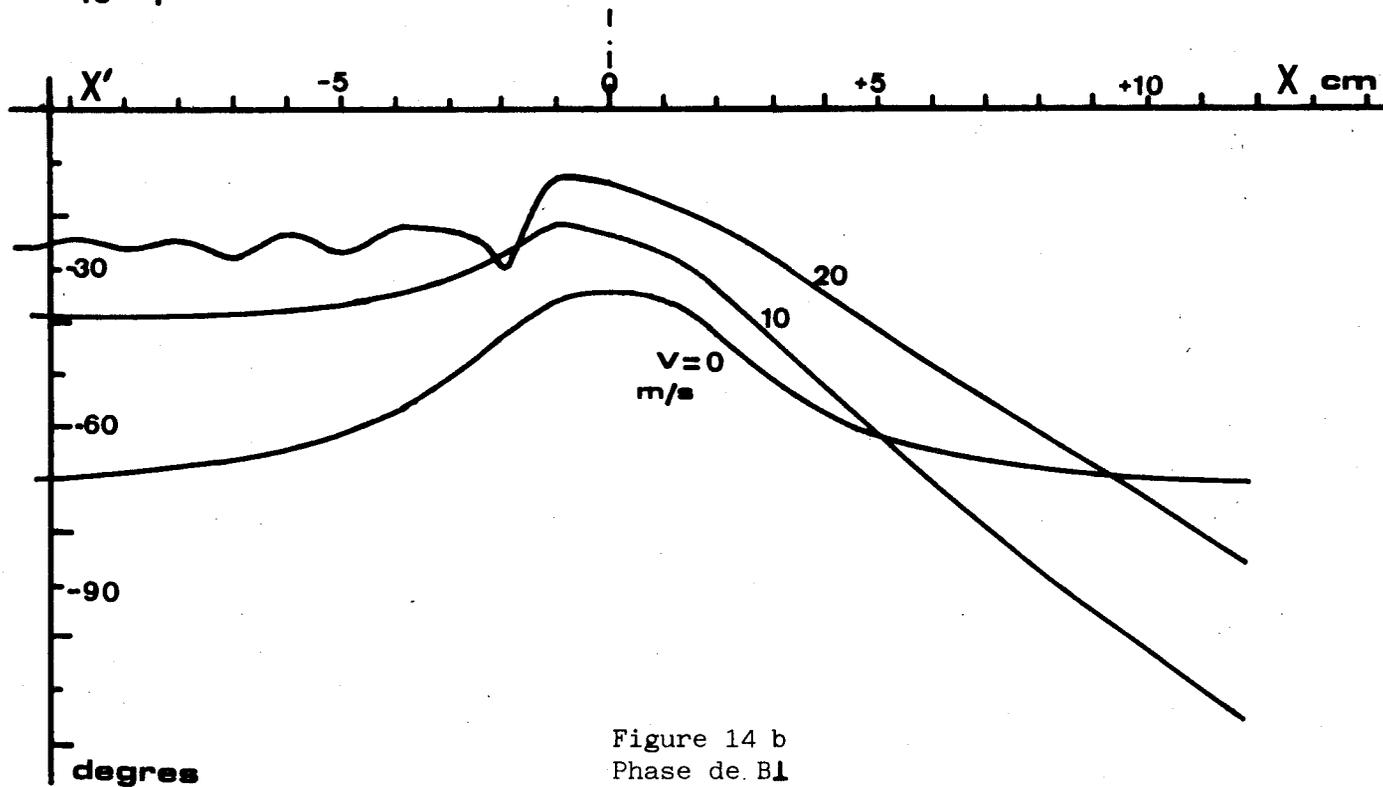


Figure 14 b
Phase de B_1

COURBES THEORIQUES



- fig.12 b et 13 b : les déphasages de $B_{//}$ et B_{\perp} par rapport au courant d'excitation.

Comme en continu ces mesures correspondent à un axe x'x situé à une distance de 5 mm du disque, c'est à dire à 1,5 cm devant l'émetteur. Elles ont été effectuées avec une petite bobine plate sans noyau ayant quelques mm de diamètre. Plus sensible que la sonde à effet Hall, ce capteur est par contre moins ponctuel ; ses dimensions et la difficulté plus grande à la positionner avec précision expliquent les différences qu'on peut constater, surtout à l'arrêt, entre les phases de $B_{//}$ et B_{\perp} (abstraction faite, pour $B_{//}$, du décalage de 180° au centre, lié à l'inversion de son sens).

III.1.2 - Conditions théoriques

En ce qui concerne les paramètres de la modélisation, à la fréquence 50 Hz on a :

$$\delta = \omega \mu_0 \sigma R^2 = 1,35$$

$$\text{et } \Delta = 10 - j.1,35$$

Les coefficients α et β restent réels et, à vitesses identiques, ont mêmes valeurs qu'en continu.

En négligeant la réaction magnétique d'induit à l'arrêt, nous supposons qu'à la sortie de l'émetteur l'induction est en phase avec le courant d'excitation ; la grandeur B_0 est donc réelle et nous avons repris la même valeur qu'en courant continu (0,02 T efficaces). Ces approximations ne sont pas exactement vérifiées en pratique mais ne changent pas fondamentalement les résultats.

A partir des parties réelles et imaginaires de $\tilde{\Psi}$ (grandeur complexe associée à la composante B_{\perp}) données par le calcul, nous avons déterminé et tracé :

- en prenant le module : la valeur efficace de B_{\perp} (fig. 14 a)
- en prenant l'argument : son déphasage par rapport à B_0 donc par rapport au courant excitateur (fig.14 b).

III.2 - COMPARAISON DES MESURES A 50 HZ AUX MESURES EN CONTINU

Les figures 12 a et 13 a sont à rapprocher de la figure 8 . Globalement le phénomène n'apparaît pas, à 50 Hz, nettement différent de ce qu'on observe en continu.

A l'arrêt :

. Pour les amplitudes * : l'effet de la fréquence est perceptible par l'atténuation que provoque le disque, les valeurs à l'arrêt des deux composantes B_{\perp} et $B_{//}$ sont à 50 Hz inférieures d'environ 20 % aux valeurs en continu.

* le terme amplitude est utilisé dans son sens général. Dans toute la suite du texte il sera assimilé aux " valeurs efficaces " des composantes de l'induction et non à leurs valeurs " crête ".

. Pour le déphasage de la composante B_L : la courbe à l'arrêt de la fig. 13 b montre une zone centrale où celui-ci est quasiment constant puis une augmentation rapide mais progressive pour des points s'écartant de l'axe de symétrie. Le fait qu'il n'y ait ni variation brutale de 180° pour la phase, ni inversion de signe pour l'amplitude de cette composante (B_L), traduit l'absence du retournement des lignes de champ qui existait en courant continu.

En mouvement :

L'effet "d'entraînement" est semblable à celui déjà observé, les décalages des maxima et des zéros sont comparables à ceux du continu. Par contre, sur les deux composantes, l'affaiblissement provoqué par le mouvement est, pour les mêmes vitesses, plus faible de 20% environ. Le phénomène est donc moins "sensible" à la vitesse mais la "distorsion" du champ magnétique reste très nette avec l'apparition, comme en continu, d'un retournement des lignes sur le coté gauche (rotation de phase de 180° sur la fig. 13b et changement de signe sur la fig. 13a).

III.3 - CONFRONTATION DES MESURES DE B_L AVEC LES RESULTATS THEORIQUES

Pour les amplitudes (fig. 13 a et 14 a)

- à l'arrêt : les courbes théoriques donnent, comme les courbes expérimentales, une répartition semblable à celle du continu mais d'amplitude plus faible. L'écart entre les deux courbes théoriques n'est cependant que de 13 % alors qu'expérimentalement il est de 20 % (cf. III.2).

- avec la vitesse : comparés aux résultats théoriques en continu, les résultats théoriques à 50 Hz montrent un décalage identique mais des affaiblissements avec la vitesse plus réduits. Les évolutions données par le modèle sont donc dans le même sens que l'expérience avec toutefois, quelques différences : les décalages sont un peu plus faibles et les affaiblissements un peu plus importants qu'en pratique.

Le tableau ci-dessous concernant B_L max, résume cette double comparaison (continu - 50 Hz et expérience - théorie)

		v = 0	v = 10 m/s	v = 20 m/s	v = 45 m/s
Continu	Exp. Valeur (mT)	9,80	7,60	4,80	2,90
	Affaiblissement (%)	0	22	51	70
	Décalage (cm)	0	1,8	2,5	3,3
	Théorie Valeur (mT)	9,97	8,34	5,79	-
	Affaiblissement (%)	0	16	42	-
	Décalage (cm)	0	1	2	-
Alternatif 50 Hz	Exp. Valeur (mT)	7,85	7,53	5,51	3,67
	Affaiblissement (%)	0	4	30	53
	Décalage (cm)	0	1,8	2,6	3,3
	Théorie Valeur (mT)	8,63	7,80	5,64	-
	Affaiblissement (%)	0	10	35	-
	Décalage (cm)	0	1	2	-

Pour les déphasages (fig.13b et 14b)

- à l'arrêt : les calculs donnent une courbe de même forme que la répartition expérimentale mais montrant une variation beaucoup plus restreinte. Le déphasage est, au milieu, de 35° (41° expérimental) et augmente jusque 75° sur chaque bord (250° expérimental).

- avec la vitesse : l'évolution se fait dans le même sens qu'en pratique ; diminution générale du déphasage en valeur absolue.

Sur le coté droit de l'émetteur les variations sont très comparables : ainsi pour le point $x = +3\text{cm}$

	$v = 0$	$v = 10 \text{ m/s}$	$v = 20 \text{ m/s}$
Expérience	48°	40° ($- 8^\circ$)	24° ($- 24^\circ$)
Théorie	54°	44° ($- 10^\circ$)	22° ($- 32^\circ$)

Les écarts deviennent plus importants lorsqu'on se rapproche des limites du modèle.

Sur le coté gauche la comparaison est plus délicate. L'expérience fait apparaître une variation rapide de 180° qu'on ne retrouve pas en théorie. Avec les hypothèses qui ont été faites le modèle ne peut rendre compte du retournement des lignes de champ ; peu caractéristique sur les amplitudes, cette restriction devient très nette sur les déphasages. Pour ceux-ci les courbes théoriques seraient donc à comparer aux courbes expérimentales en faisant abstraction du "saut" de 180° mais la correspondance reste plus approximative sur la partie gauche. La courbe théorique à 20 m/s présente déjà des "oscillations" caractéristiques des difficultés du modèle à refléter la réalité dans cette zone.

La conclusion que l'on peut tirer est identique à celle faite au II.2 : plus que la dimension du maillage, ce sont les conditions aux limites, et surtout sur l'axe $y = 0$, qui déterminent les insuffisances du modèle. L'impossibilité de renversement de \vec{B} sur les cotés, d'une part, la non conservation à la sortie de l'émetteur de B_0 - en module et phase- avec la vitesse d'autre part, sont les causes essentielles de divergence entre la théorie et les faits.

III.4 - INTERPRETATION

Pour les amplitudes, les phénomènes étant similaires à ceux en courant continu, les explications sommaires du I.3 peuvent être reprises et il est plus intéressant ici d'essayer d'interpréter l'allure des courbes de phase.

Il est possible, à partir des théories habituelles de propagation des ondes électromagnétiques dans les métaux, de justifier partiellement les résultats obtenus.

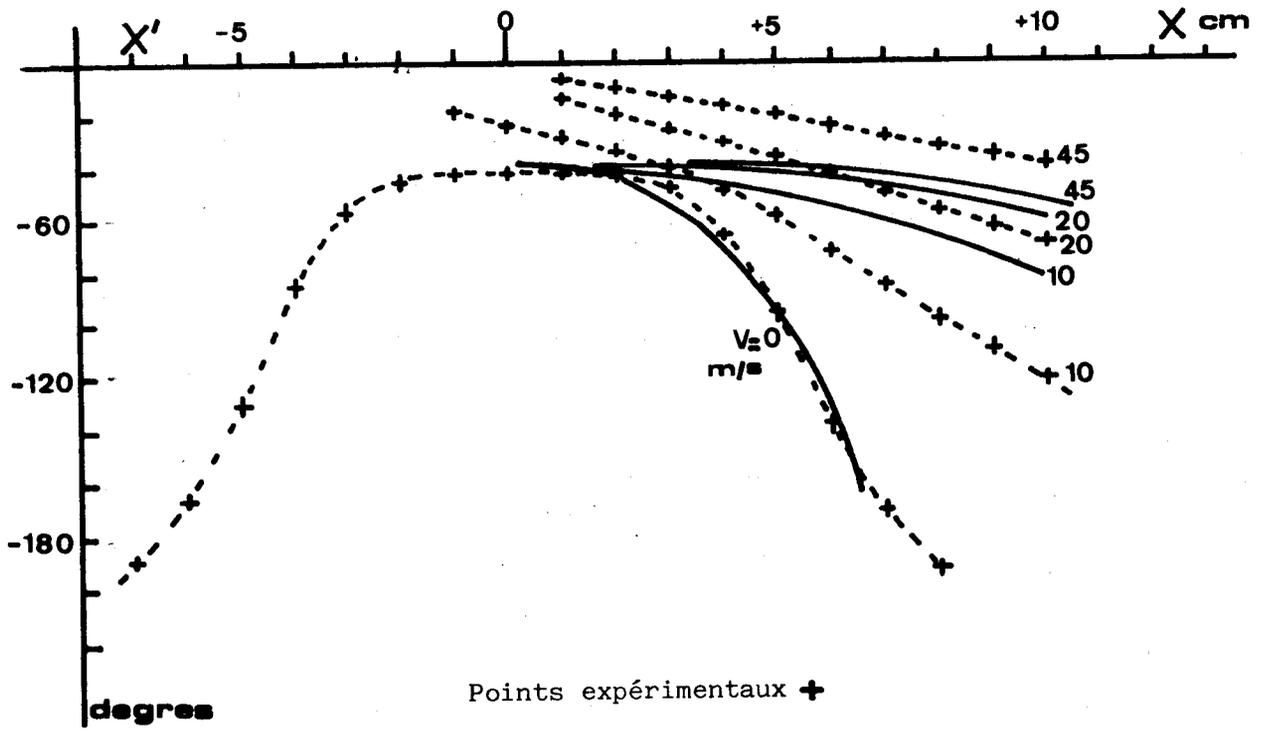


Figure 15



A l'arrêt, l'équation qui intervient :

$$\Delta \vec{B} - j\omega\mu\sigma\vec{B} = 0$$

est l'équation classique de pénétration du champ dans un conducteur.

Pour une onde plane, la propagation à une distance r dans une direction donnée s'effectue suivant la loi :

$$\vec{B} = B_0 e^{-r/\delta} e^{-j r/\delta}$$

où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$ est la profondeur de pénétration.

Le déphasage $\varphi = -r/\delta$ introduit par les courants est donc proportionnel à la distance parcourue dans le métal.

Si l'on admet que la direction du vecteur \vec{B} - déterminée à partir de la mesure des deux composantes B_{\perp} et B_{\parallel} près du disque - est sensiblement celle de la ligne de champ à l'intérieur du métal, on peut en déduire approximativement le parcours effectué et le déphasage.

La figure 15 représente les phases ainsi obtenues et, pour mémoire, les valeurs expérimentales.

Pour les points au voisinage du centre, le déphasage théoriquement produit par une épaisseur d'aluminium égale à 8 mm et de 39° (à 50 Hz), à comparer avec les 42° mesurés et les 35° de la modélisation. Ce déphasage augmente progressivement lorsqu'on s'écarte de l'axe central car les traversées sont de plus en plus obliques.

Avec la vitesse :

L'utilisation de cette même méthode conduit à des résultats acceptables dans la zone située à droite de l'émetteur mais par contre incohérents au centre et du côté gauche.

L'équation à utiliser est alors :

$$\Delta \vec{B} - j\omega\mu\sigma\vec{B} - \mu\sigma v \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = 0$$

Par rapport au cas du disque à l'arrêt, elle comporte en plus un terme lié au gradient du champ suivant x . Comme on peut le constater, à posteriori, (courbes de la fig. 13 a), avec la vitesse, ce gradient est nettement plus faible sur le côté droit et le terme supplémentaire n'a qu'une influence limitée. En dehors de cette zone ceci n'est plus vérifié ; le fort gradient et le terme de vitesse interviennent directement et font apparaître des déphasages très différents puisqu'inférieurs à ceux créés par la plus faible épaisseur de métal traversé. La complexité des phénomènes dans cette région ne permet plus une interprétation immédiate.

IV - E T U D E E N C O U R A N T A L T E R N A T I F - 4 0 0 H z

IV.1 - CONDITIONS D'ETUDE

Préalablement aux études avec le disque, nous avons mesuré les composantes du champ magnétique créé, à la fréquence 400 Hz, par l'émetteur seul. Ces mesures ne diffèrent pas de celles obtenues à la fréquence 50 Hz, avec un courant de même valeur efficace. Les tôles utilisées pour le noyau de l'émetteur (tôles 50 Hz) ne jouent donc, aux faibles niveaux d'induction utilisés ici, qu'un rôle secondaire sur la répartition du champ magnétique.

IV.1.1 - Conditions expérimentales

Avec le même entrefer de 2 mm, mais avec un courant d'excitation de valeur efficace 6,5 mA les courbes de la figure (16) donnent :

- la valeur efficace de la composante B_L (fig. (16 a))
- sa phase par rapport au courant d'excitation (fig. (16 b)), sur une ligne x'x distante de 5 mm du disque ; pour les vitesses 0, 10, 20 et 45 m/s.

IV.1.2 - Conditions théoriques

En conservant la modélisation employée à 50 Hz ; les coefficients α et β , indépendants de la fréquence, gardent pour les mêmes vitesses les mêmes valeurs qu'à 50 Hz ; le coefficient δ , proportionnel à la fréquence, prend la valeur 10,8.

Les courbes de la figure (17) donnent :

- la valeur efficace de la composante B_L (fig. (17 a))
- son déphasage par rapport à l'induction B_0 (supposée en phase avec le courant excitateur). (fig. (17 b)).

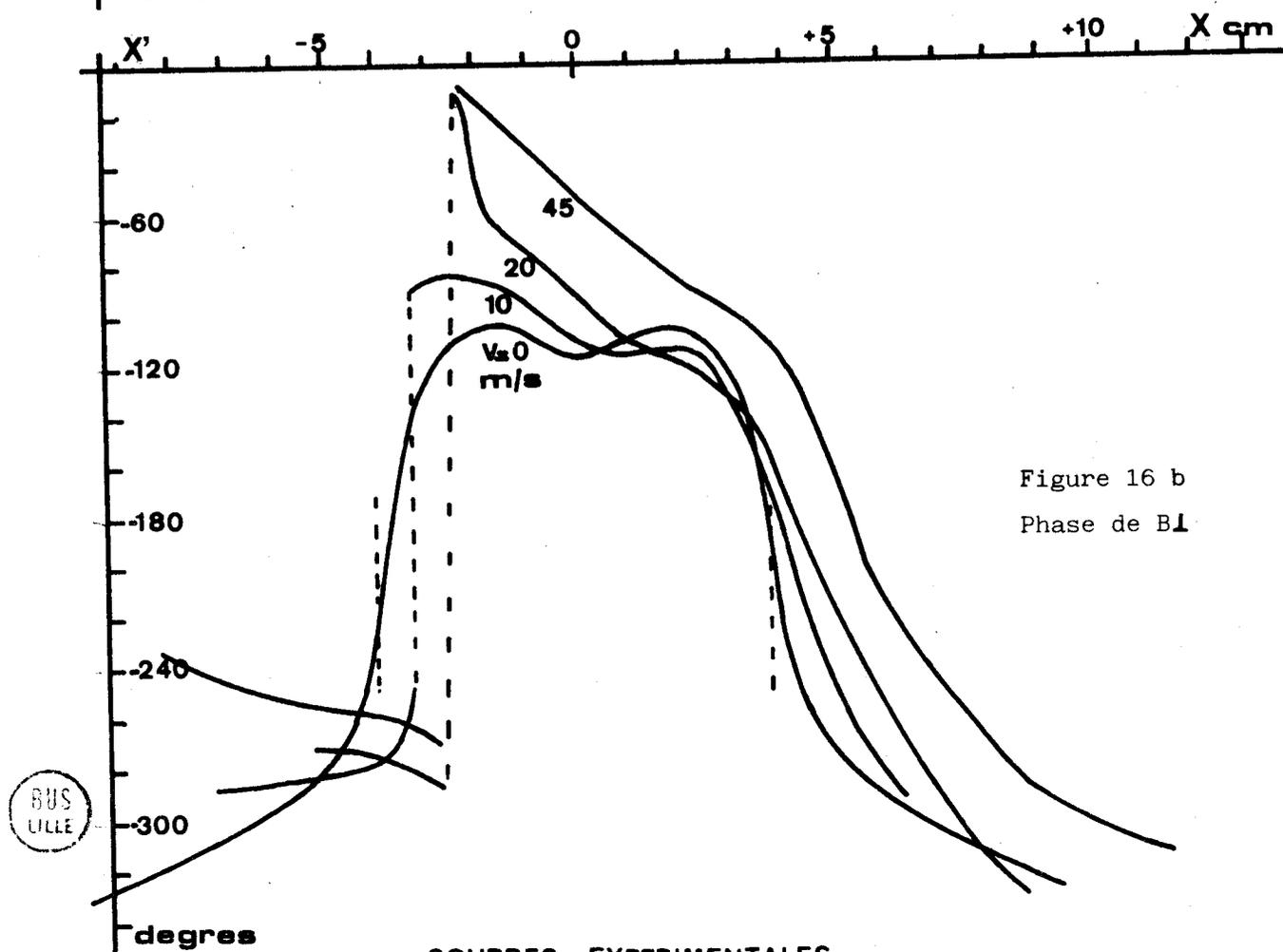
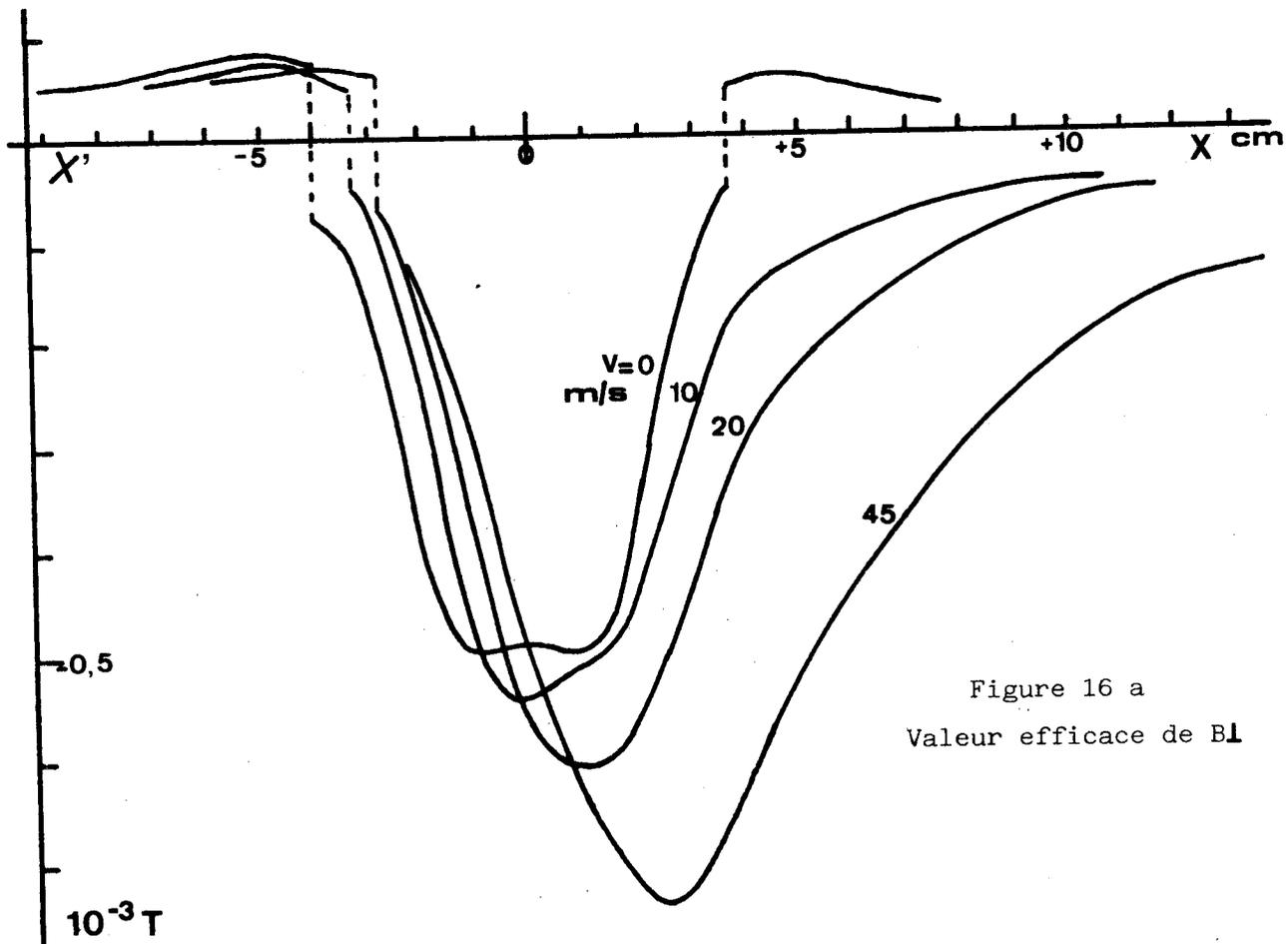
Elles se rapportent à la première ligne de points dans l'air et aux vitesses 0, 10, 20 m/s.

IV.2 - COMPARAISON DES MESURES A 400 Hz AUX MESURES A 50 Hz

- A l'arrêt

Si on la compare à la répartition à 50 Hz - ramenée à un courant d'excitation de même valeur - la répartition d'induction à 400 Hz en diffère sur plusieurs points :

- elle est plus uniforme dans la zone centrale.



COURBES EXPERIMENTALES

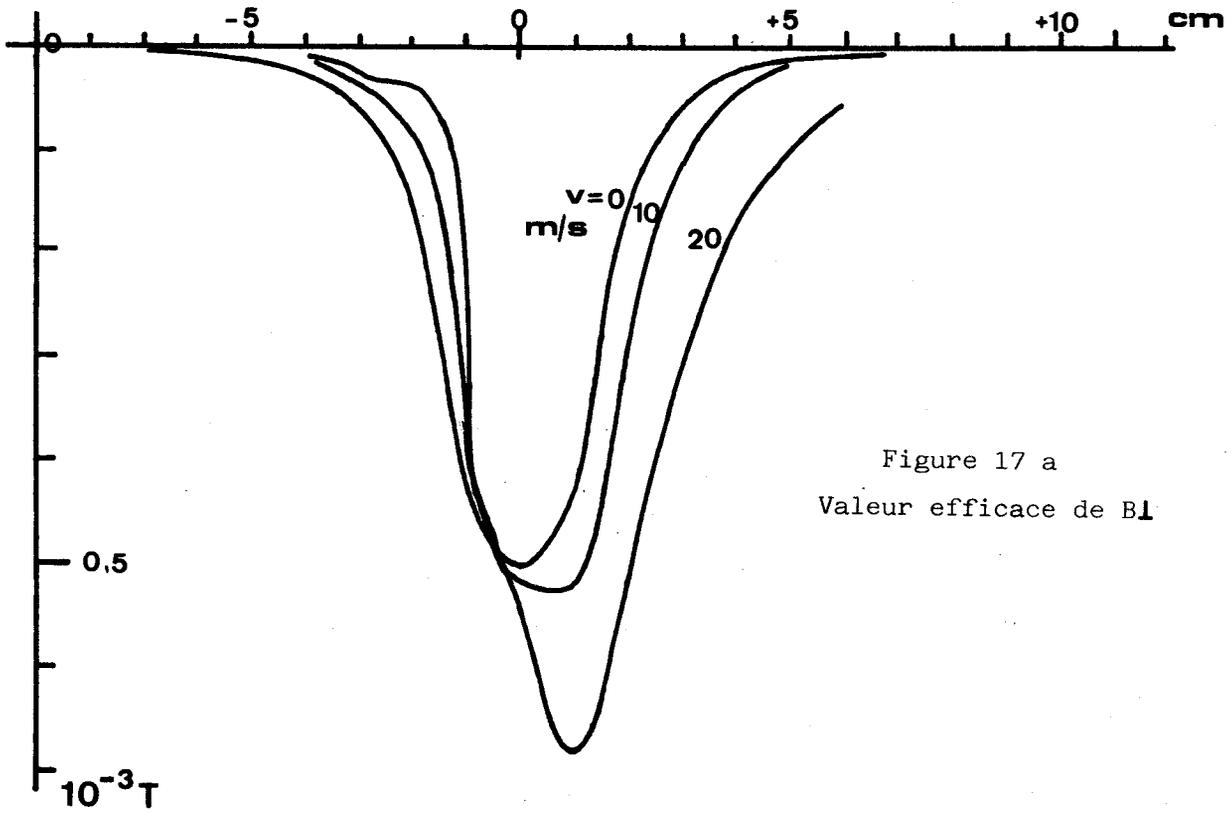


Figure 17 a
Valeur efficace de BI

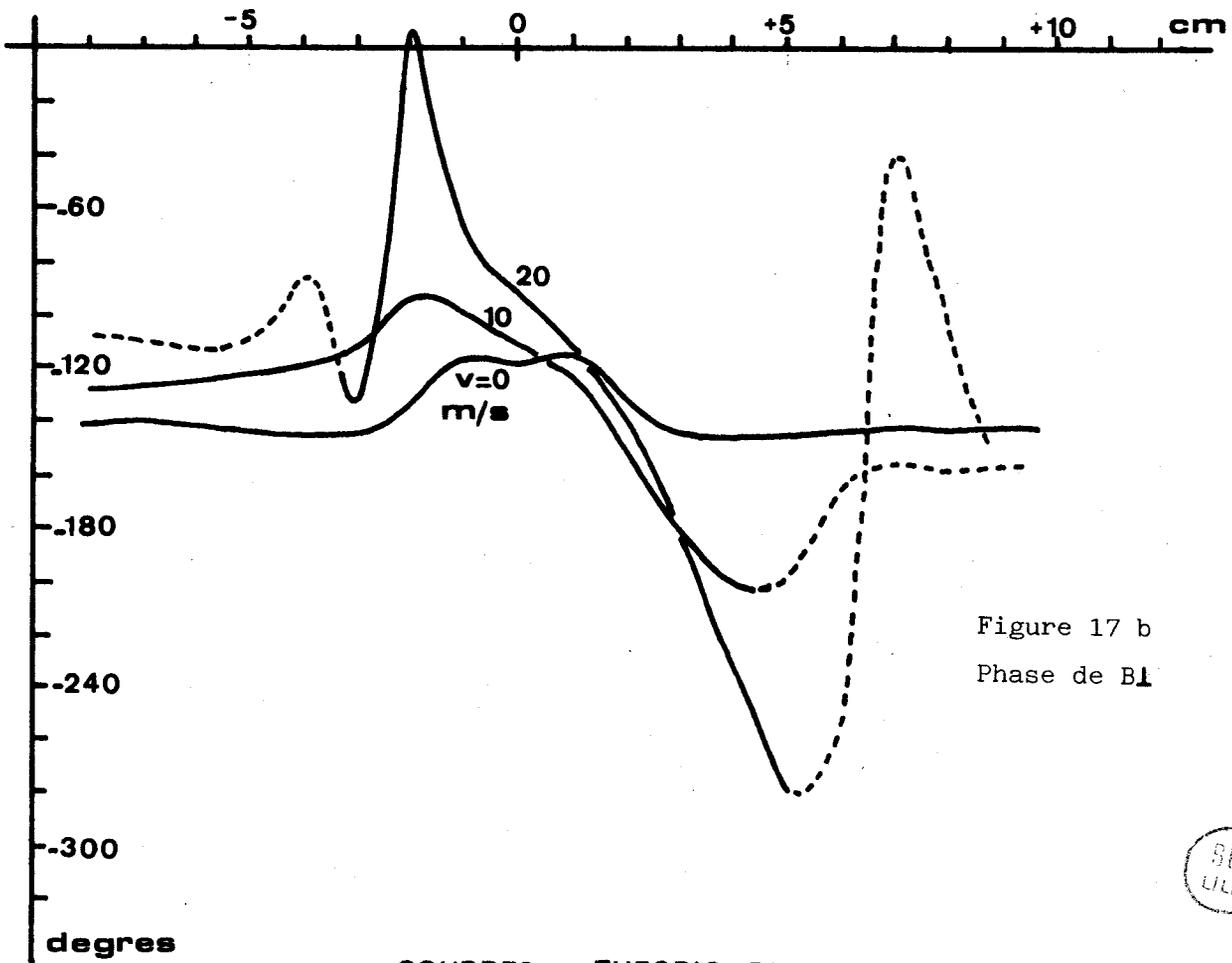


Figure 17 b
Phase de BI

COURBES THEORIQUES



- son amplitude est beaucoup plus faible : le signal transmis représente environ 17 % du signal transmis à 50 Hz. Ce rapport est d'ailleurs plus faible que celui prévu (28 %) par une pénétration en $e^{-y/\delta}$ sur l'axe médian.

- pour les déphasages observés, 118° au centre, ils sont évidemment très différents du 50 Hz (42°), mais ici assez proches d'une évolution en y/δ qui donne 111° pour 8 mm d'aluminium.

- Avec la vitesse

Le phénomène se distingue considérablement des études antécédentes, surtout pour les amplitudes. Si on retrouve encore un décalage dans le sens de la vitesse, accompagné de la même dissymétrie sur le gradient, cette fois l'amplitude générale croît quand la vitesse augmente : le décalage est un peu moins prononcé qu'à 50 Hz, l'augmentation est par contre beaucoup plus sensible.

Pour les phases l'évolution générale est qualitativement semblable au 50 Hz, elles tendent en moyenne à diminuer en valeur absolue.

IV.3 - CONFRONTATION AVEC LES RESULTATS THEORIQUES

Les courbes théoriques (fig. 17 a) font apparaître pour les amplitudes un effet similaire à l'expérience. Le tableau établit la comparaison pour la valeur maximale de B_L

		v = 0	v = 10 m/s	v = 20 m/s
Expérience	Valeur (mT)	0,48	0,53	0,61
	Augmentation (%)	0	11	27
	Décalage (cm)	0	0,5	1,6
Théorie	Valeur (mT)	0,48	0,50	0,65
	Augmentation (%)	0	5	36
	Décalage (cm)	0	0,5	1,2

En ce qui concerne la phase :

- dans la zone centrale : à l'arrêt, la théorie donne une valeur de 115° à 118°, l'expérience 104° à 118° et, avec la vitesse, l'évolution se fait qualitativement dans le même sens.

- dans les zones latérales, la comparaison n'est pas significative.

On retrouve, encore plus accusées et apparaissant à des vitesses plus faibles, les limitations de la modélisation déjà signalées à 50 Hz.

V - C O N C L U S I O N

Ce chapitre a permis de mettre en évidence les modifications apportées par un induit non magnétique en mouvement au champ magnétique dans lequel il est placé.

De manière très caractéristique on observe essentiellement un effet d'entraînement de ce champ dans le sens de la vitesse.

En ce qui concerne l'amplitude de l'induction transmise à travers l'induit, il apparait que celle-ci s'affaiblit quand la vitesse augmente dans le cas d'une excitation en continu ou à 50 Hz, mais qu'elle augmente dans le cas d'une excitation à 400 Hz. Ces comportements contradictoires ne doivent cependant pas surprendre outre-mesure ; des effets un peu similaires ont été rencontrés dans des problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques à l'intersurface entre un milieu conducteur et le vide ou l'air [11] .

Il reste à souligner la concordance, qu'on peut estimer acceptable, entre les mesures fournies par le dispositif expérimental et la modélisation, malgré la relative simplicité de celle-ci. Ceci peut se justifier par le fait que pour le disque d'aluminium étudié, la profondeur de pénétration est du même ordre de grandeur que son épaisseur et la partie la plus importante du champ magnétique est celle qui est transmise.

Le cas d'un matériau magnétique pose, à cet égard, des difficultés très spécifiques ; elles sont abordées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 3

ETUDE DANS LE CAS D'UN INDUIT MAGNETIQUE

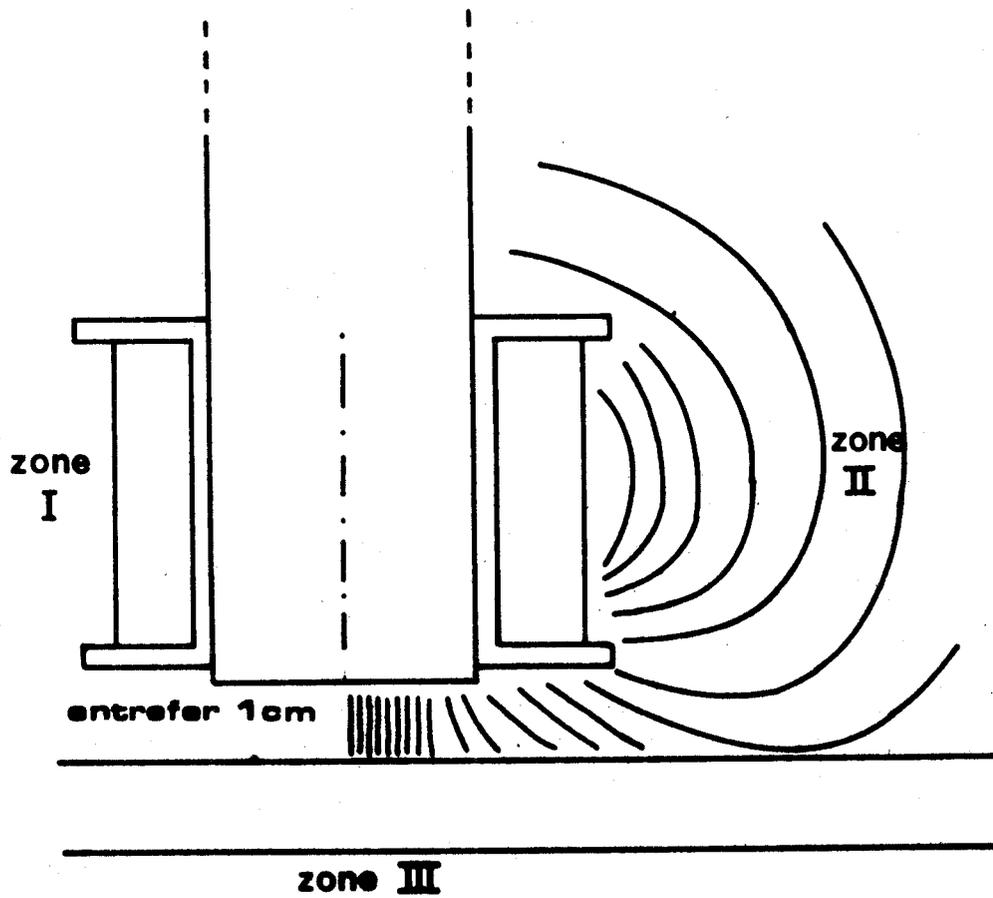
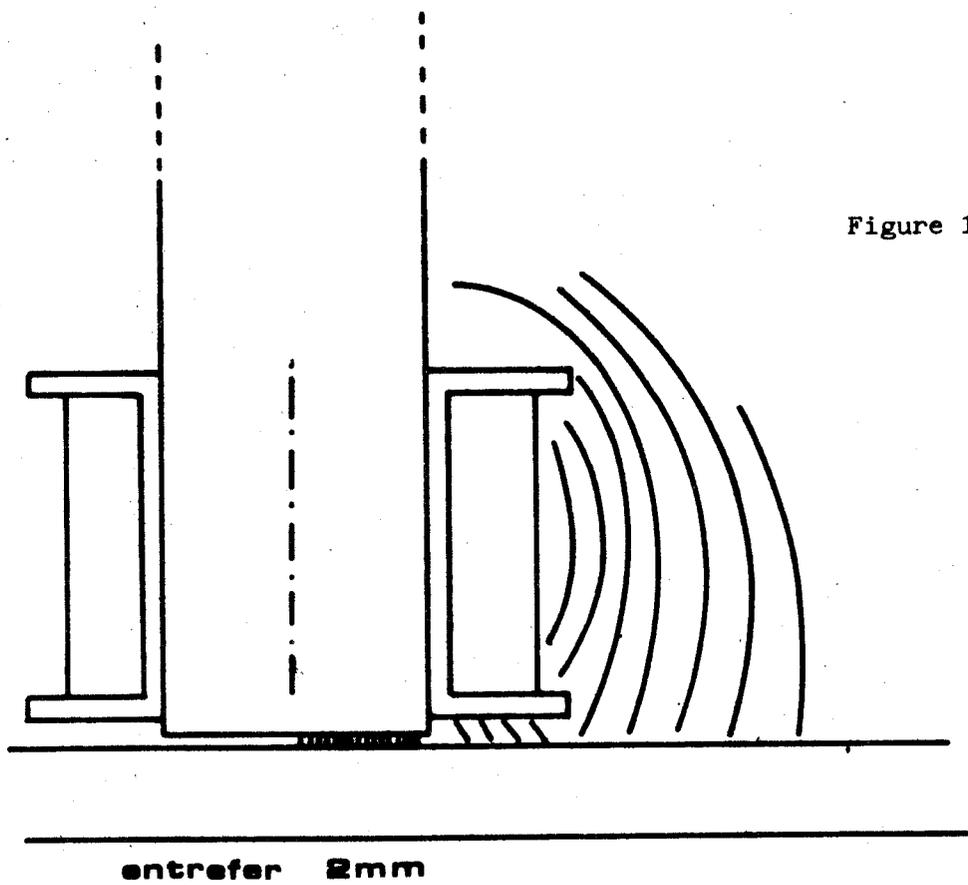


Figure 18



I - CONDITIONS GENERALES D'ETUDE

Si l'on convient, aux faibles niveaux d'induction mis en jeu, de négliger l'hystérésis et la non linéarité de la courbe d'aimantation, on peut tenir compte des propriétés du matériau magnétique de l'induit en considérant sa perméabilité μ réelle et constante, et l'équation fondamentale relative au comportement de la composante perpendiculaire B_y de l'induction demeure :

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} - j\omega\mu\sigma B_y - \mu\sigma v \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

L'étude, dans ce cas, se différencie cependant de celle d'un matériau non magnétique compte tenu des remarques suivantes :

- en courant continu ($\omega = 0$), il apparait qu'une augmentation de la perméabilité doit avoir le même effet qu'une augmentation de la vitesse.

Pour nous assurer de cette équivalence, nous avons été amenés à considérer le cas de vitesses très faibles (quelques m/s), puisque la perméabilité est élevée.

- réalisé avec un matériau magnétique, l'induit tend à constituer avec l'inducteur un "circuit magnétique" et la distribution du champ diffère notablement de celle rencontrée précédemment. A titre d'illustration, nous donnons sur la fig. (18) la représentation expérimentale des lignes de champ de part et d'autre de l'émetteur (zones I et II), pour deux valeurs d'entrefer : 1 cm et 2 mm ; on y constate que leur retournement se produit à proximité immédiate du corps de l'émetteur. Par ailleurs, l'effet "d'écran" magnétique créé par l'induit fait que la transmission de l'induction, dans la zone III devant l'émetteur, s'effectue avec un important affaiblissement. Il est donc important, dans ce cas, de faire l'étude dans les trois zones considérées (I, II, III).

II - RESULTATS EXPERIMENTAUX

Toutes les mesures ont été effectuées avec un disque d'acier doux de 12 mm d'épaisseur et un entrefer inducteur-induit de 2 mm ; le courant d'excitation ayant, en continu comme en alternatif, une valeur (efficace) de 140 mA.

II.1 - RESULTATS EXPERIMENTAUX EN COURANT CONTINU

II.1.1 - Dans la zone III, devant l'émetteur :

- Conditions de mesure :

Les mesures ont été effectuées sur un axe xx' parallèle au disque et distant de 5 mm, à l'arrêt, pour des vitesses très faibles : 0,75 ; 1,5 ; 3 ; 4,5 m/s et pour les vitesses déjà utilisées antérieurement : 10, 20, 45 m/s. La figure (19) donne la composante perpendiculaire B_{\perp} ainsi relevée.

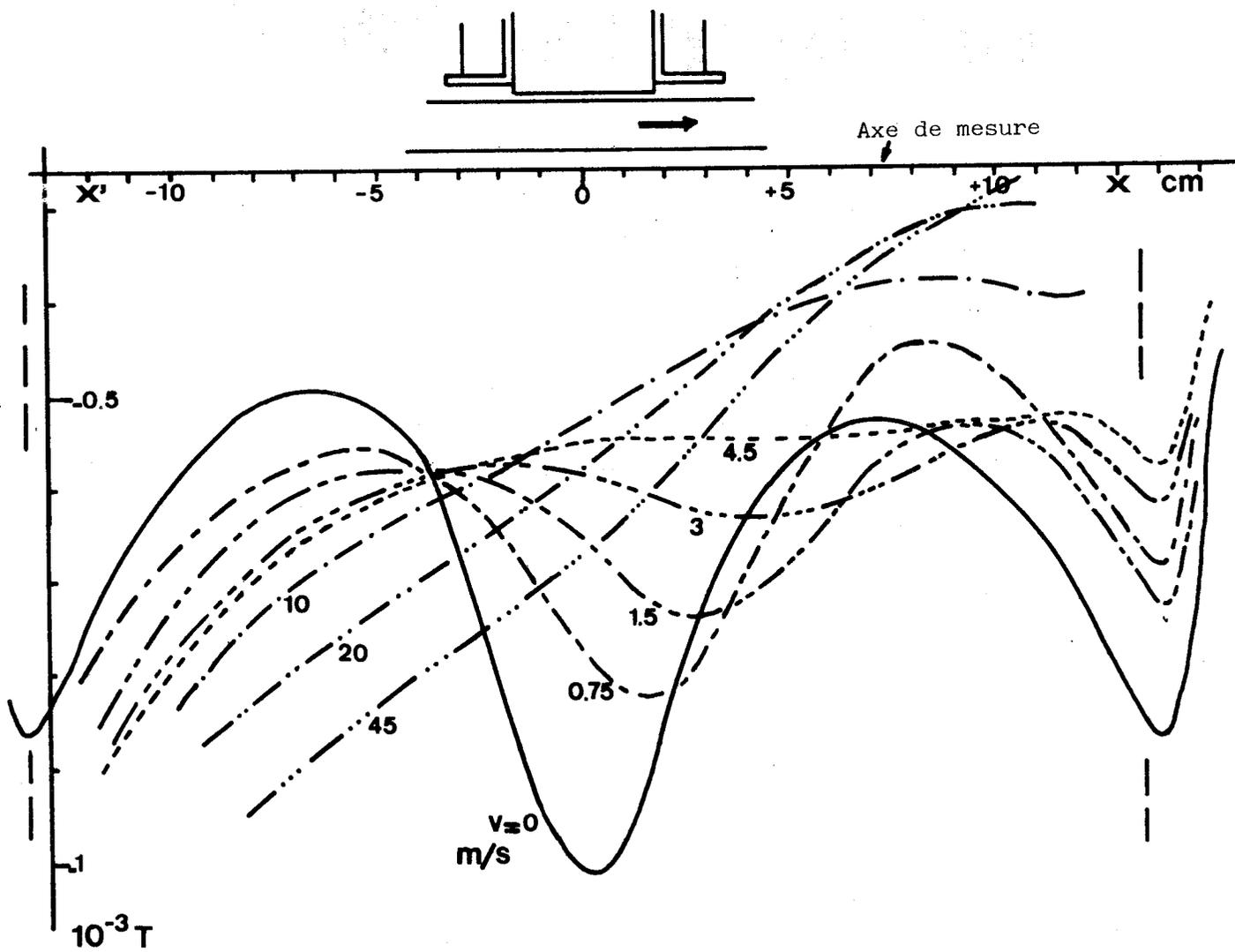


Figure 19

Composante B_1 dans la zone III
en courant continu



- Analyse et comparaison au cas du disque d'Aluminium

- à l'arrêt : on peut d'abord constater une très forte atténuation de l'induction transmise. Quoique la comparaison soit difficile, les épaisseurs des disques étant différentes, l'induction au centre ne représente plus qu'environ 15 % de celle qu'on obtenait avec l'aluminium. La courbe présente encore un maximum central mais le gradient est plus faible et surtout on observe ici un très net effet de "bord" : lorsqu'on s'écarte de l'axe médian la valeur de l'induction remonte d'abord pour ensuite diminuer brutalement. Ces effets sont liés à l'aspect canalisant du matériau. Les remontées de l'induction sur les cotés correspondent approximativement aux bords du disque ; au delà, à droite et à gauche, la sonde de mesure se trouve alors en dehors de celui-ci (limites figurées en pointillés sur les figures).

- avec la vitesse : On retrouve, aux très faibles vitesses et pour le maximum, le phénomène déjà observé à des vitesses plus grandes avec l'aluminium : décalage dans le sens du déplacement et affaiblissement. Ceci confirme donc l'équivalence des rôles de μ et v que nous avons remarquée sur l'équation décrivant B_L .

Pour les vitesses supérieures, la déformation change par contre totalement d'aspect : le maximum disparaît complètement et l'induction augmente sur le coté gauche et diminue sur le coté droit. Cet effet est vraisemblablement provoqué par le gradient très important sur les bord du disque. Il montre bien les limites du dispositif expérimental utilisé : le disque n'est plus du tout représentatif d'un induit qui serait linéaire et, aux grandes vitesses, les effets d'extrémités liés à sa courbure masquent le phénomène étudié.

II.1.2 - De part et d'autre de l'émetteur (zones I et II)

- Conditions de mesure :

A l'arrêt et pour les mêmes vitesses qu'en II.1.1. (0,75 ; 1,5 ; 3 ; 4,5 ; 7,5 ; 10 ; 20 ; 45 m/s) les courbes de la fig. (20) donnent la composante

B_L sur un axe $x'x$ parallèle au disque et distant de 5 mm. Sur la fig. (21) elles correspondent à une distance de 3,5 cm du disque et aux seules vitesses élevées 10, 20, 45 m/s.

- Analyse

- à l'arrêt : l'induction obtenue de part et d'autre de l'émetteur est, surtout pour les points les plus centraux, beaucoup plus forte (rapport 5) que celle, qui est transmise à travers le disque. Ces zones correspondent au retour vers l'inducteur des lignes de champ qui tendent à être "canalisées" jusqu'aux limites du disque par le matériau magnétique.

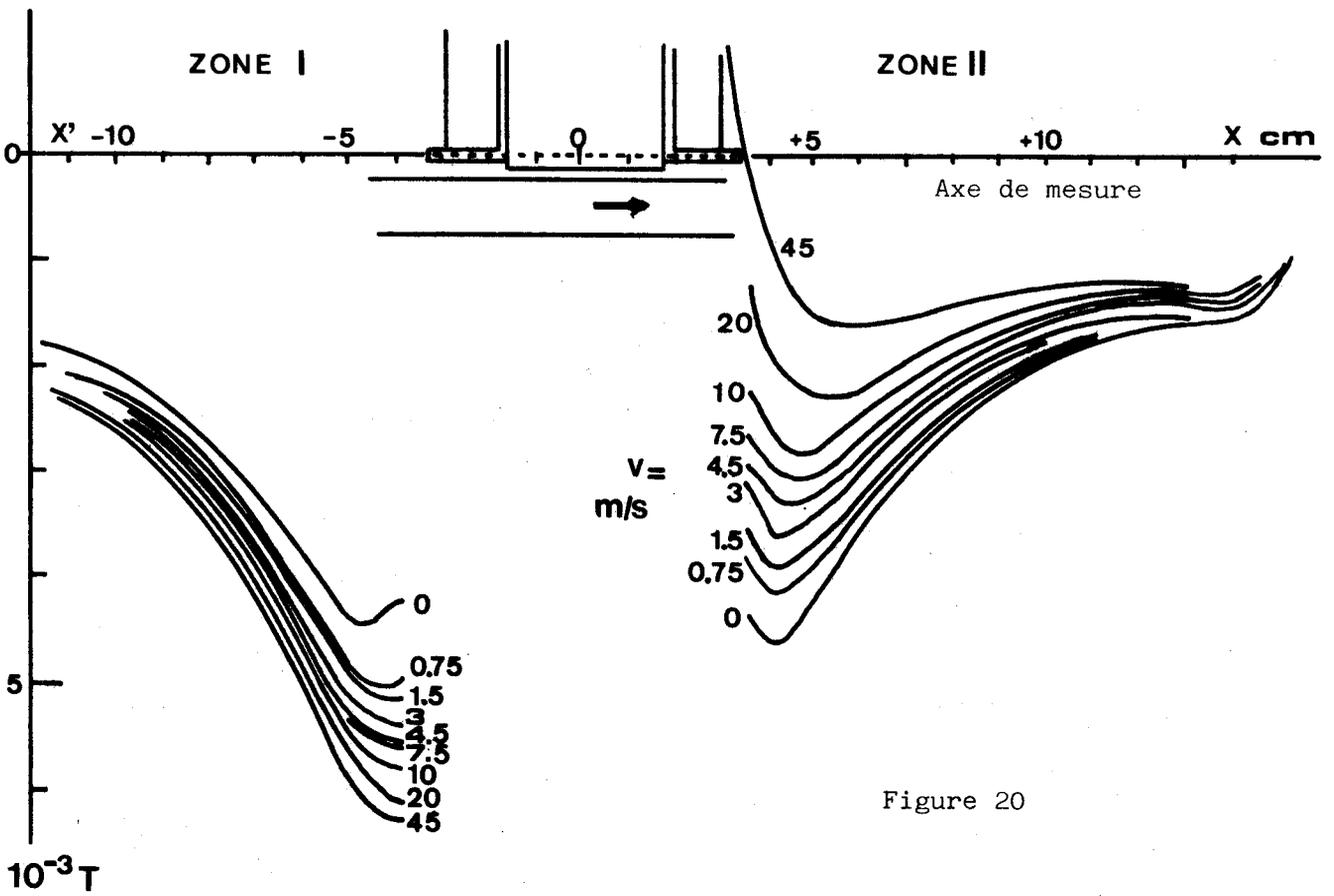


Figure 20

Composante B_1 dans les zones I et II
en courant continu

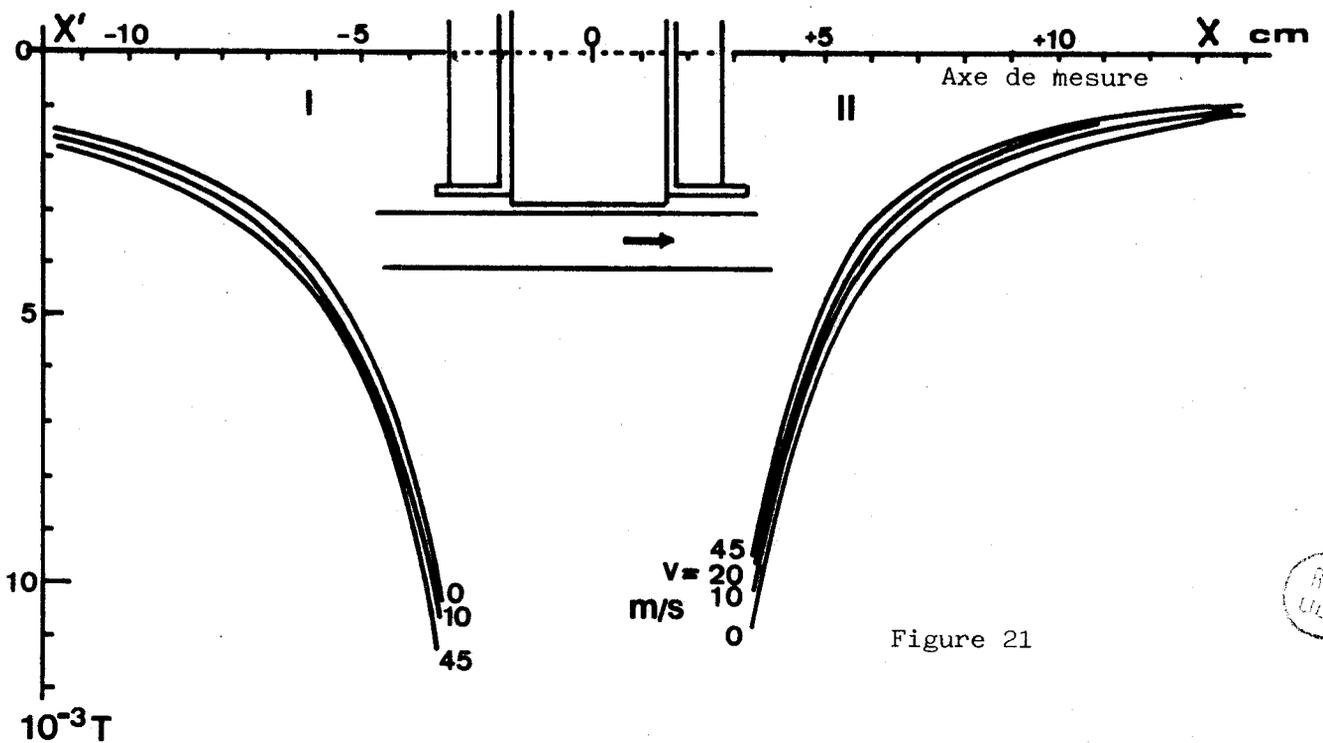


Figure 21



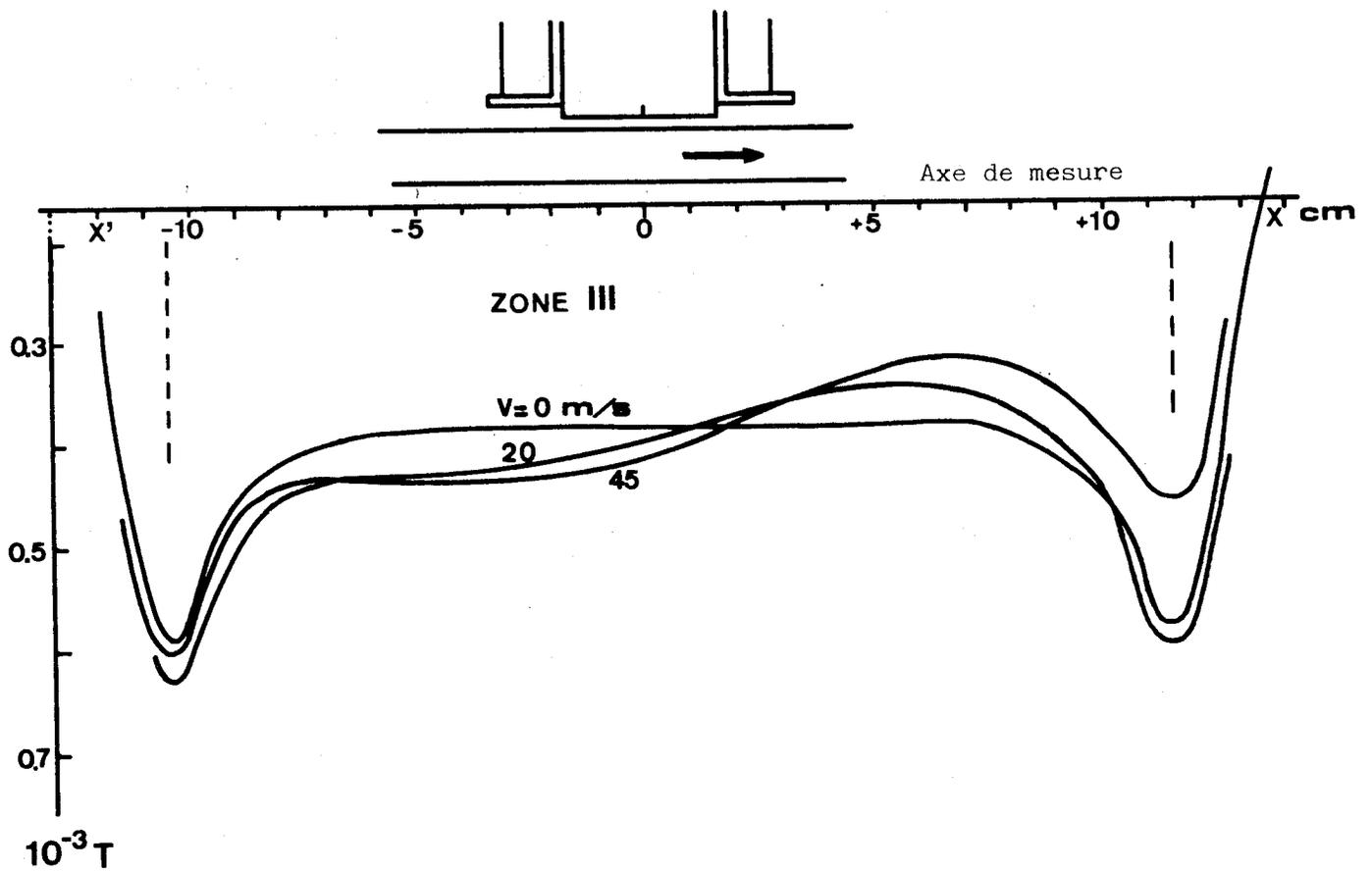


Figure 22

Composante B_1 dans la zone III
 en courant alternatif 50 Hz

- avec la vitesse : les phénomènes (fig. (20)) apparaissent plus clairement dans ces zones que devant l'émetteur (zone III) : dans toute la gamme de vitesses l'induction augmente du côté de l'émetteur qui voit arriver le disque (zone I) ; elle diminue du côté de l'émetteur qui voit s'éloigner le disque (zone II). Le phénomène n'est pas symétrique la diminution étant beaucoup plus forte que l'augmentation.

Une perturbation de même type, est encore décelable, quoique plus réduite, à 3,5 cm du disque (fig. (21)).

II.2 - RESULTATS EXPERIMENTAUX EN COURANT ALTERNATIF 50 Hz

II.2.1 - Dans la zone III devant l'émetteur

- Conditions de mesure :

Les courbes de la fig. (22) donnent la composante perpendiculaire B_z sur un axe $x'x$ écarté du disque de 5 mm, pour les vitesses 0, 20 et 45 m/s.

- Analyse

L'effet d'"écran" provoqué par le matériau est évidemment encore plus prononcé qu'en courant continu. L'induction transmise à 50 Hz ne représente plus qu'environ 5 % de celle obtenue avec l'aluminium. Avec la sonde de mesure utilisée, le maximum central n'est même plus décelable ; on obtient, à l'arrêt, une courbe en "plateau" où apparaissent encore nettement d'importantes variations d'induction aux limites du disque.

L'effet de la vitesse est peu marqué de ce côté, il est qualitativement semblable à celui observé en courant continu (pour les fortes valeurs de v) et semble essentiellement lié aux effets de bords du disque.

II.2.2 - Dans les zones I et II de part et d'autre de l'émetteur

- Conditions de mesure :

Pour les vitesses 0, 10, 20, et 45 m/s, nous avons relevé la composante sur un axe $x'x$ à 5 mm et à 1 cm du disque (fig.(23) et fig. (24)).

- Analyse

On retrouve, comme en courant continu, et avec une amplitude sensiblement équivalente le même effet dissymétrique de faible augmentation du côté gauche (zone I) et de diminution plus forte du côté droit (zone II).

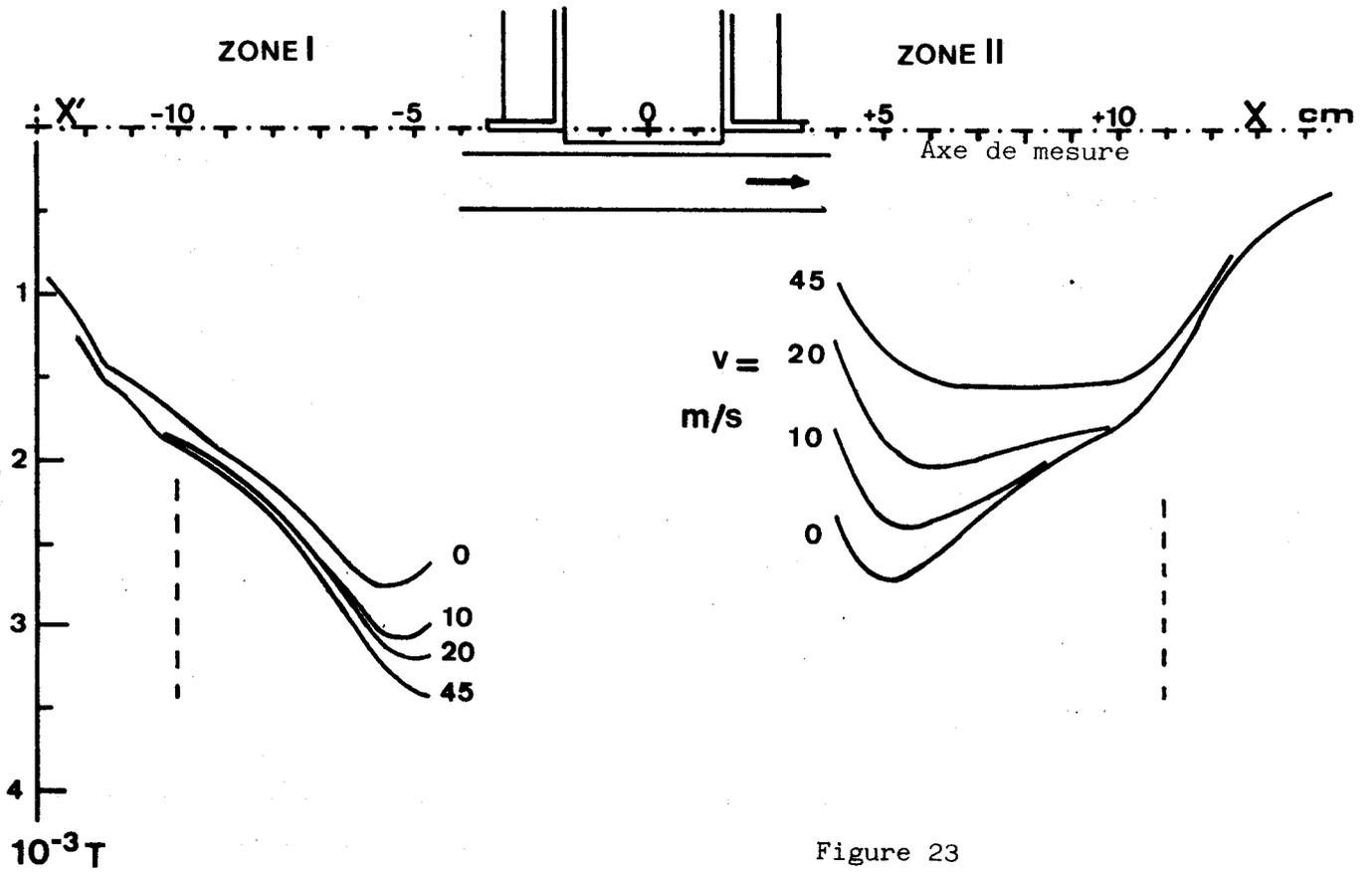


Figure 23

Composante B_1 dans les zones I et II
en courant alternatif 50 Hz

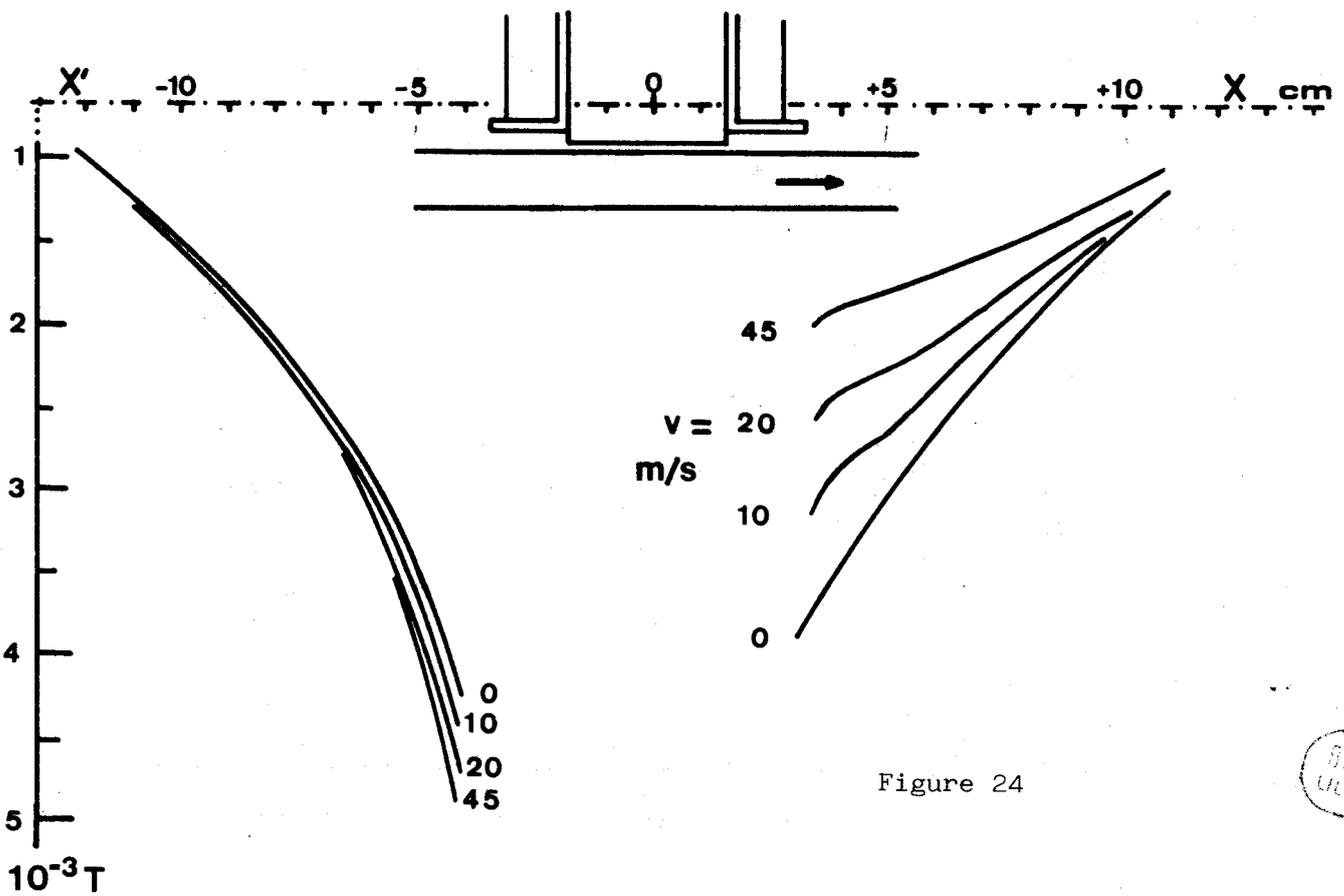


Figure 24



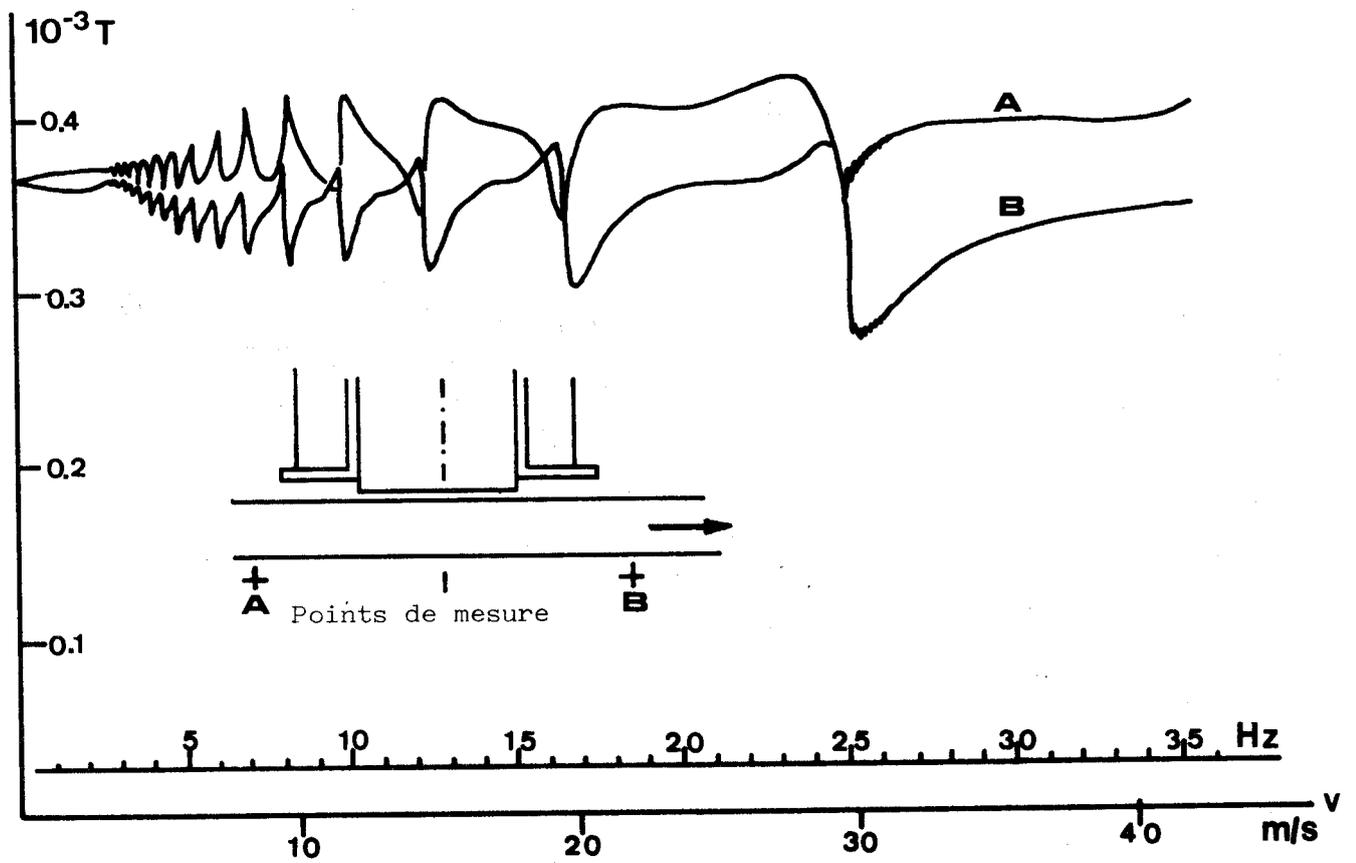


Figure 25

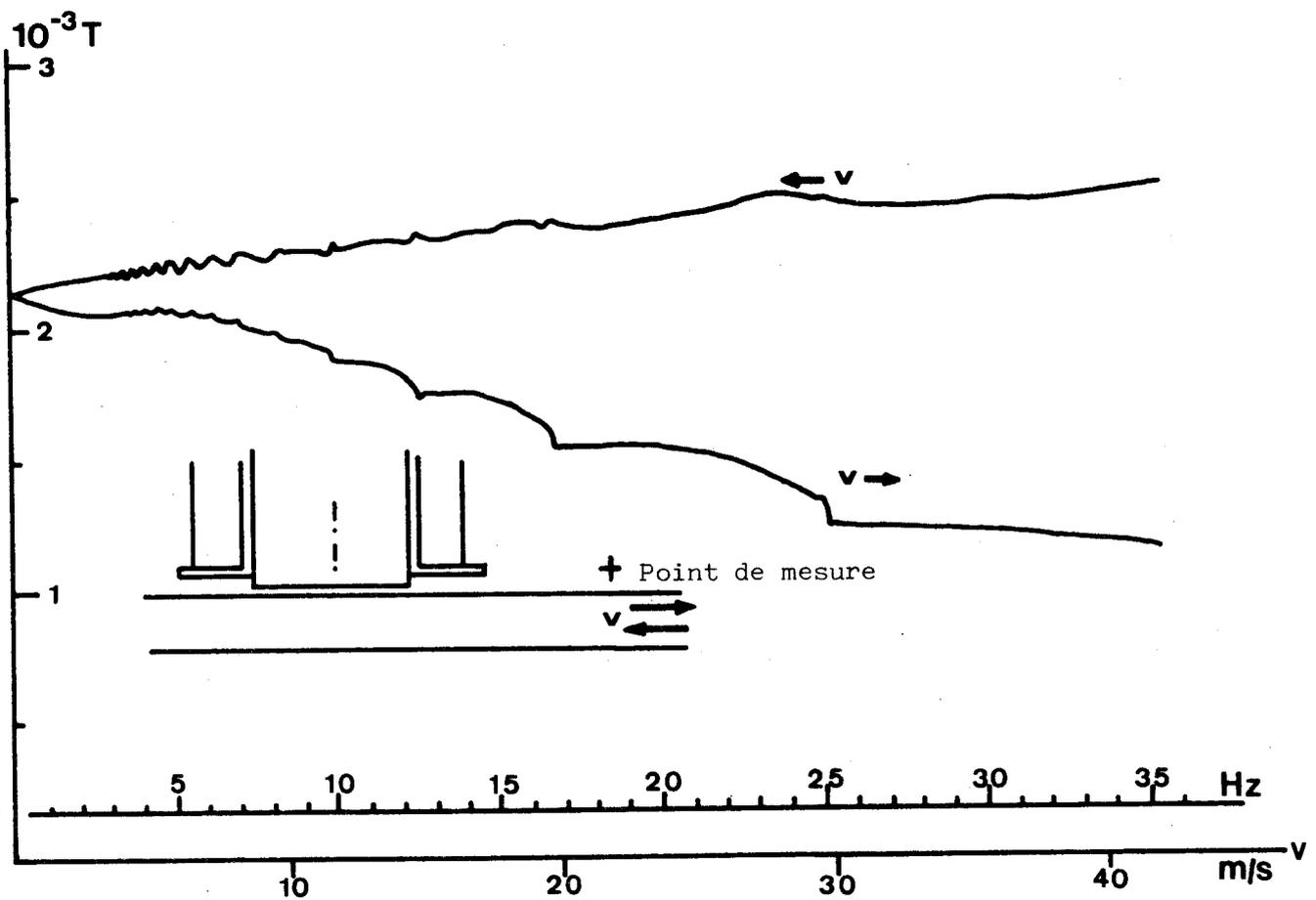


Figure 26

II. 2. 3 - Phénomènes parasites

Outre les effets de bord du disque signalés ci-dessus, il est apparu au cours des mesures en courant alternatif d'autres phénomènes parasites, dépendant étroitement des propriétés magnétiques du matériau, d'une part, et du dispositif expérimental utilisé d'autre part.

Ces phénomènes supplémentaires, non apparents pour des relevés effectués avec des valeurs discrètes de vitesse, se révèlent de manière très caractéristique si, en un point donné, on fait la mesure de l'induction pour des vitesses continûment croissantes jusque 45 m/s. A titre d'exemple, nous donnons sur la figure (25), la composante B_{\perp} en fonction de v , pour deux points dans la zone III, à 5 mm du disque et à 4 cm de part et d'autre de l'axe central.

Si l'on retrouve bien une courbe d'allure générale décroissante pour le point à droite et faiblement croissante pour le point à gauche, on constate surtout que l'évolution de l'induction, loin d'être une fonction monotone de la vitesse, est affectée de variations importantes et brutales dès que cette dernière atteint quelques m/s. Les "pointes" sont liées à des valeurs de vitesse très précises : ce sont les fréquences de rotation du disque (en tours/seconde) qui correspondent exactement à des sous-multiples de la fréquence de la tension d'alimentation (50 Hz).

Ainsi on les observe pour $\frac{50}{13} = 3,84$ Hz ou 3,84 t/s (230,7 t/mn)

50/12, 50/11 etc... jusque $\frac{50}{2} = 25$ Hz ou 25 t/s (1500t/mn)

Tout à fait indépendantes de la phase à l'origine, elles se produisent donc quand un point du disque effectue une rotation complète en un temps égal à un nombre entier de périodes du secteur et, par conséquent, retrouve l'émetteur avec la même valeur de champ magnétique.

Sur la fig. (26) nous avons reporté les mesures analogues mais effectuées à côté de l'émetteur, dans la zone II. Elles donnent $B_{\perp} = f(v)$ en un point distant de 5 mm du disque et 6 cm du centre pour des vitesses positives et négatives, ce qui est équivalent à des mesures effectuées en deux points symétriques par rapport au centre pour des vitesses seulement positives. Ces courbes reproduisent l'évolution générale déjà signalée en II.2.2 mais on y distingue aussi, bien qu'avec une amplitude plus faible, des variations du même type que précédemment, pour les mêmes vitesses.

Nous n'avons pas trouvé d'interprétation simple à ce phénomène ; il semble vraisemblablement en rapport avec l'hystérésis et la rémanence du matériau magnétique. Pour information, nous donnons (fig.(27)) les mêmes mesures qu'à la figure (26) mais en excitation continue : les courbes sont alors exemptes de ce phénomène et évoluent de façon monotone.

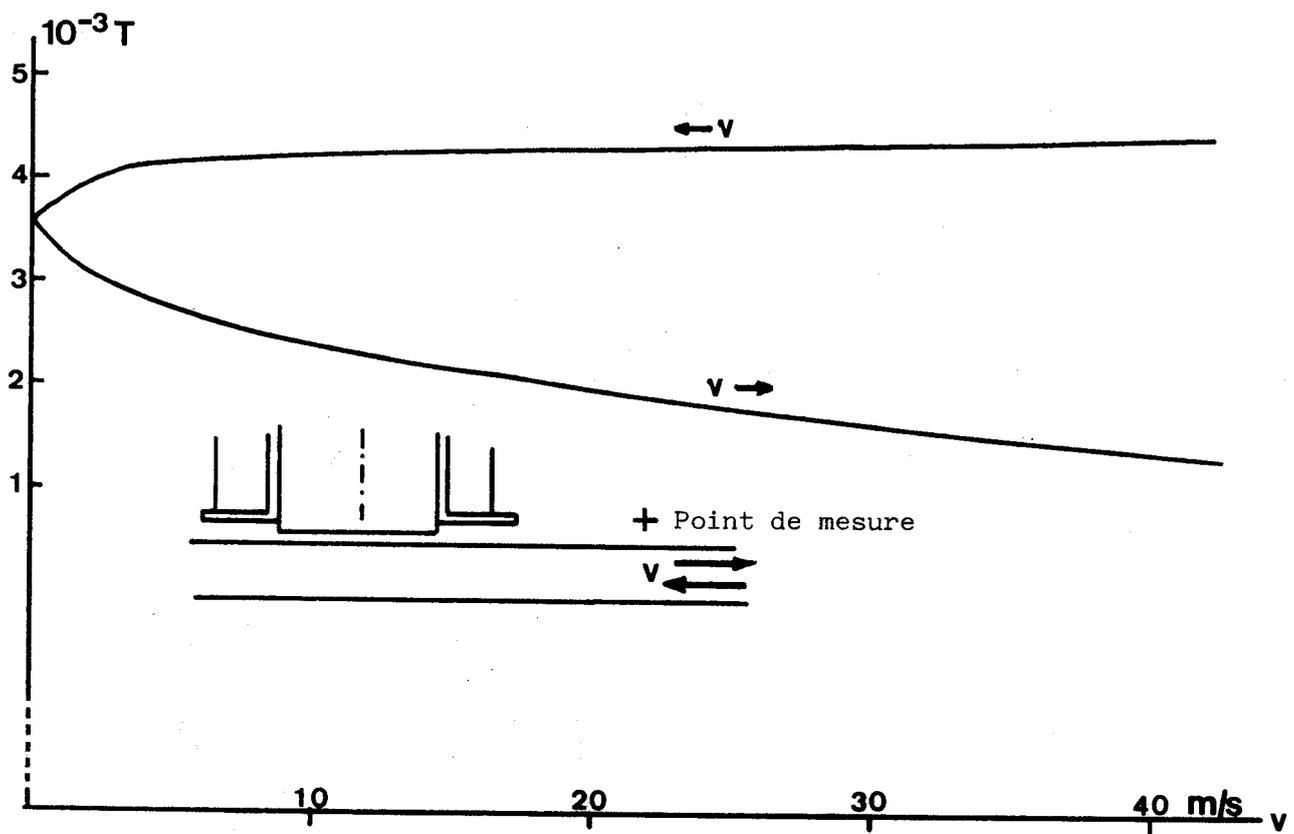


Figure 27



SIS
DATE

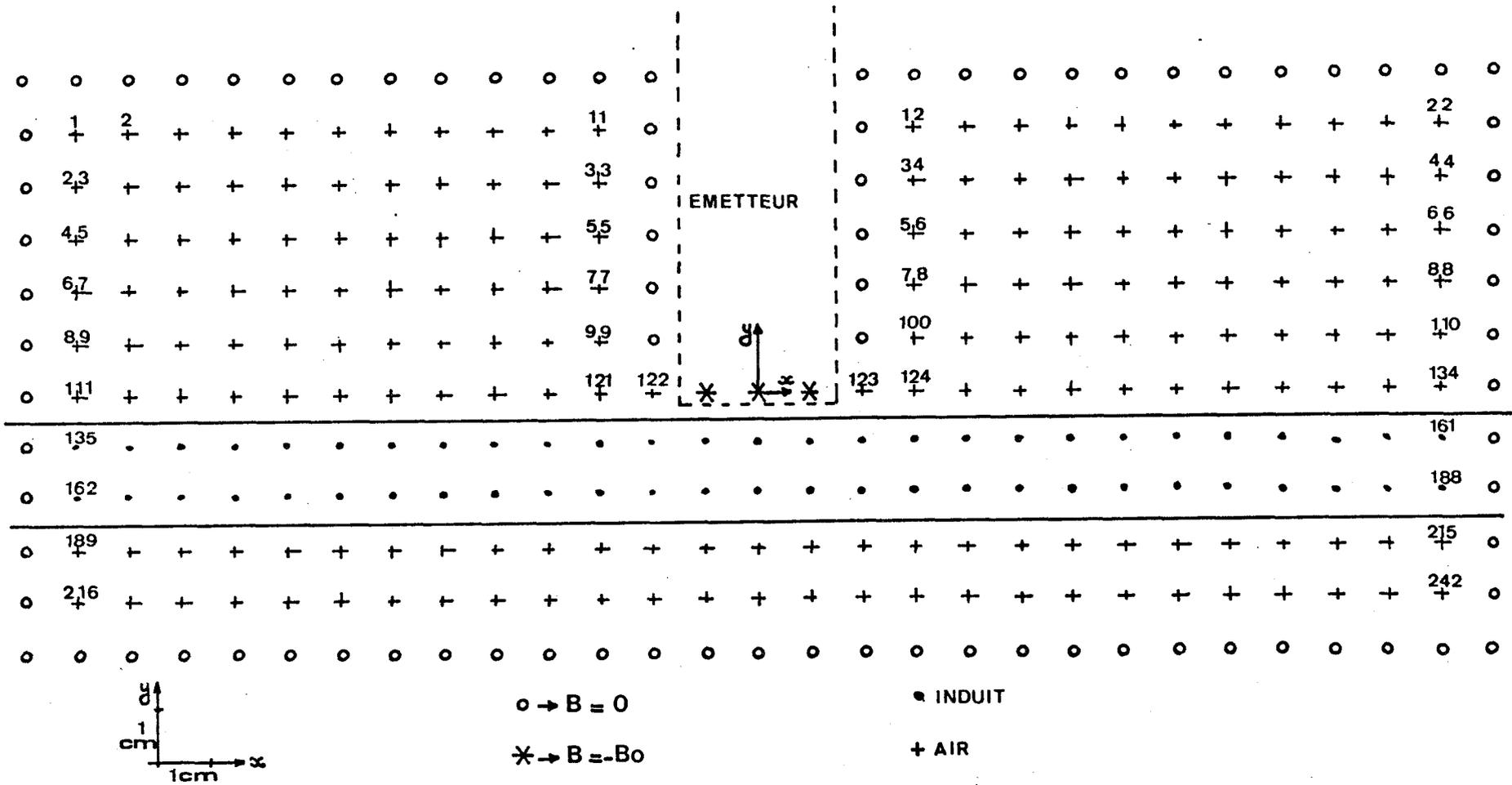


Figure 28

Enfin, dans l'étude à 50 Hz, un autre effet, sûrement lié au précédent, est à signaler concernant la forme d'onde du signal représentatif de l'induction. Sensiblement sinusoïdal aux faibles vitesses, il apparaît ensuite entaché d'une distorsion importante (présence entr'autres d'harmoniques d'ordre 3) qui semble plus accusée au voisinage des vitesses particulières évoquées ci-avant.

III - E S S A I D E M O D E L I S A T I O N

Les observations précédentes montrent qu'il n'est plus possible de reconduire pour le matériau magnétique les conditions aux limites utilisées pour l'aluminium. La partie la plus importante du champ magnétique n'est plus la partie transmise à travers l'induit, mais c'est dans les zones latérales que les amplitudes sont les plus grandes et les variations les plus nettes. Nous avons donc tenté d'utiliser un modèle très simplifié mais permettant cette fois le retournement des lignes de champ de part et d'autre de l'émetteur.

III.1 - CHOIX DU MODELE

Il est schématisé sur la figure (28) et comporte un maillage carré de coté $h = 1$ cm.

- L'émetteur est représenté par le rectangle central large de 3 cm et long de 6 cm. Il est supposé constitué d'un matériau de perméabilité "infinie" et l'induction à l'intérieur est uniforme, dirigée suivant l'axe $y < 0$, et de valeur $-B_0$.

- L'induit est symbolisé par les 2 premières lignes de points immédiatement devant l'émetteur. Son épaisseur est donc comprise entre 1 et 2 cm (12 mm en pratique). L'entrefer est nul.

- Conditions aux limites :

- dans la direction $y < 0$, l'atténuation très importante à la traversée de l'induit permet de rapprocher la limite en admettant que l'induction devient nulle à 3 cm du disque.

- dans les directions $x > 0$ et $x < 0$, nous conservons les limites du modèle antérieur et posons $B_x = 0$ pour $|x| = 13$ cm. La largeur du modèle est ainsi de 27 cm également.

- de part et d'autre de l'émetteur ($y > 0$) les conditions sont beaucoup plus délicates à établir. Dans le but de conserver au modèle une relative simplicité, nous admettrons que la composante B_y est nulle tout le long de l'émetteur immédiatement à l'extérieur (lignes verticales $x = \pm 2$ cm pour $0 < y < 6$ cm), sauf aux angles de la face de sortie où nous laissons les valeurs inconnues.

Nous considérerons aussi qu'elle devient nulle sur la ligne horizontale $y = 6$ cm (pour $|x| > 2$ cm) qui est suffisamment éloignée des valeurs B_0 . Ces conditions sont discutables ; si, expérimentalement, les mesures de la composante B_y tout le long du bobinage excitateur montrent effectivement que ces valeurs sont très faibles comparées à celles à la sortie même de l'émetteur, son évolution de part et d'autre de celui-ci (zones I et II) est par contre très complexe suivant x comme suivant y ; les courbes à l'arrêt des figures (20) et (21) sont significatives sur ce point. Il semble difficile de faire ici abstraction du bobinage excitateur et de réduire l'émetteur à un simple noyau de perméabilité infinie. Le modèle adopté apparaît donc assez sommaire.

- Le système d'équations linéaires s'obtient, comme au chapitre 1, par des développements en série de Taylor de la fonction cherchée, au voisinage des 242 points du domaine. Il conduit, avec la numérotation indiquée sur la figure (28), à une matrice des coefficients qui est encore de type "bande" mais n'est plus symétrique.

III.2 - RESULTATS THEORIQUES

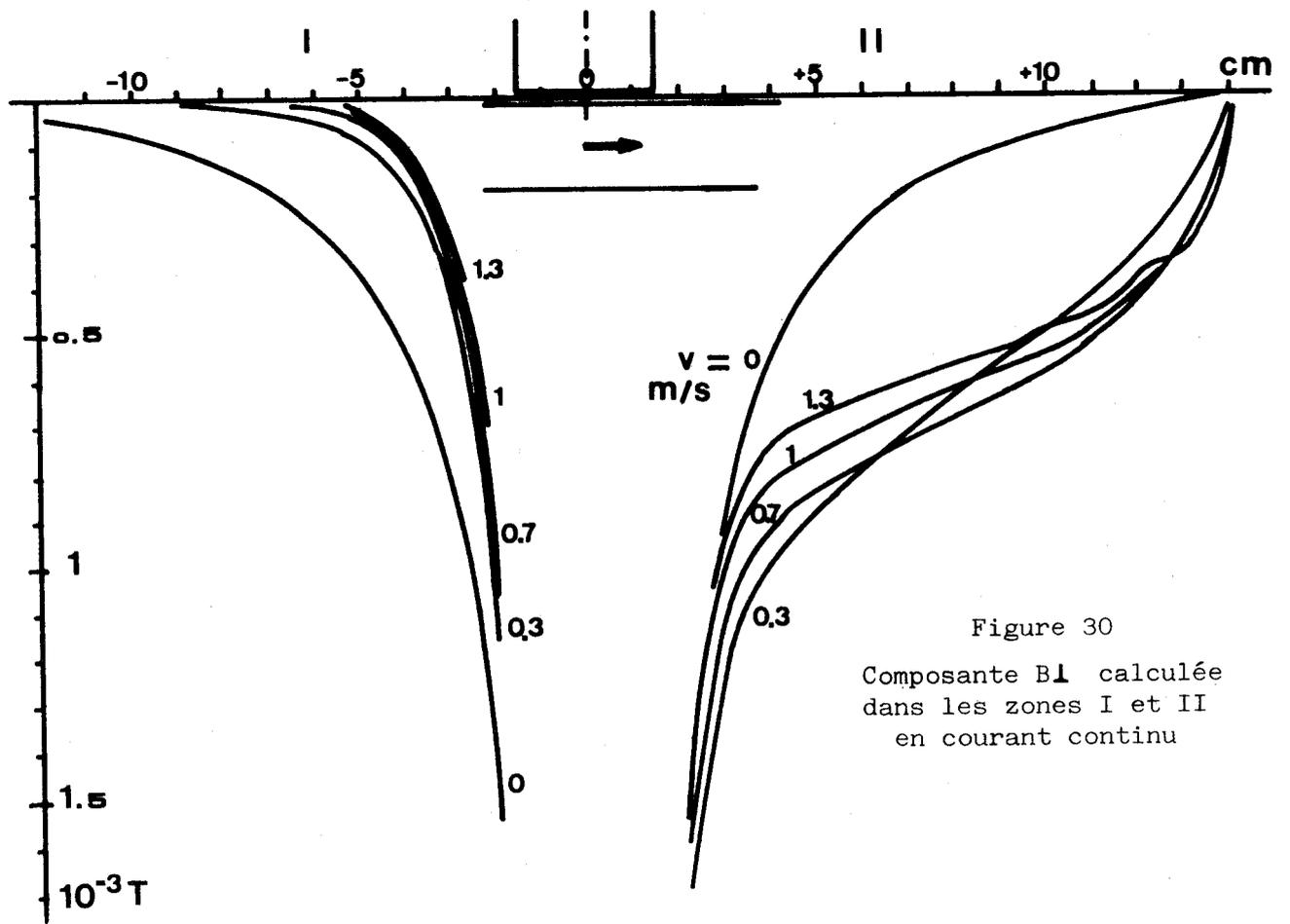
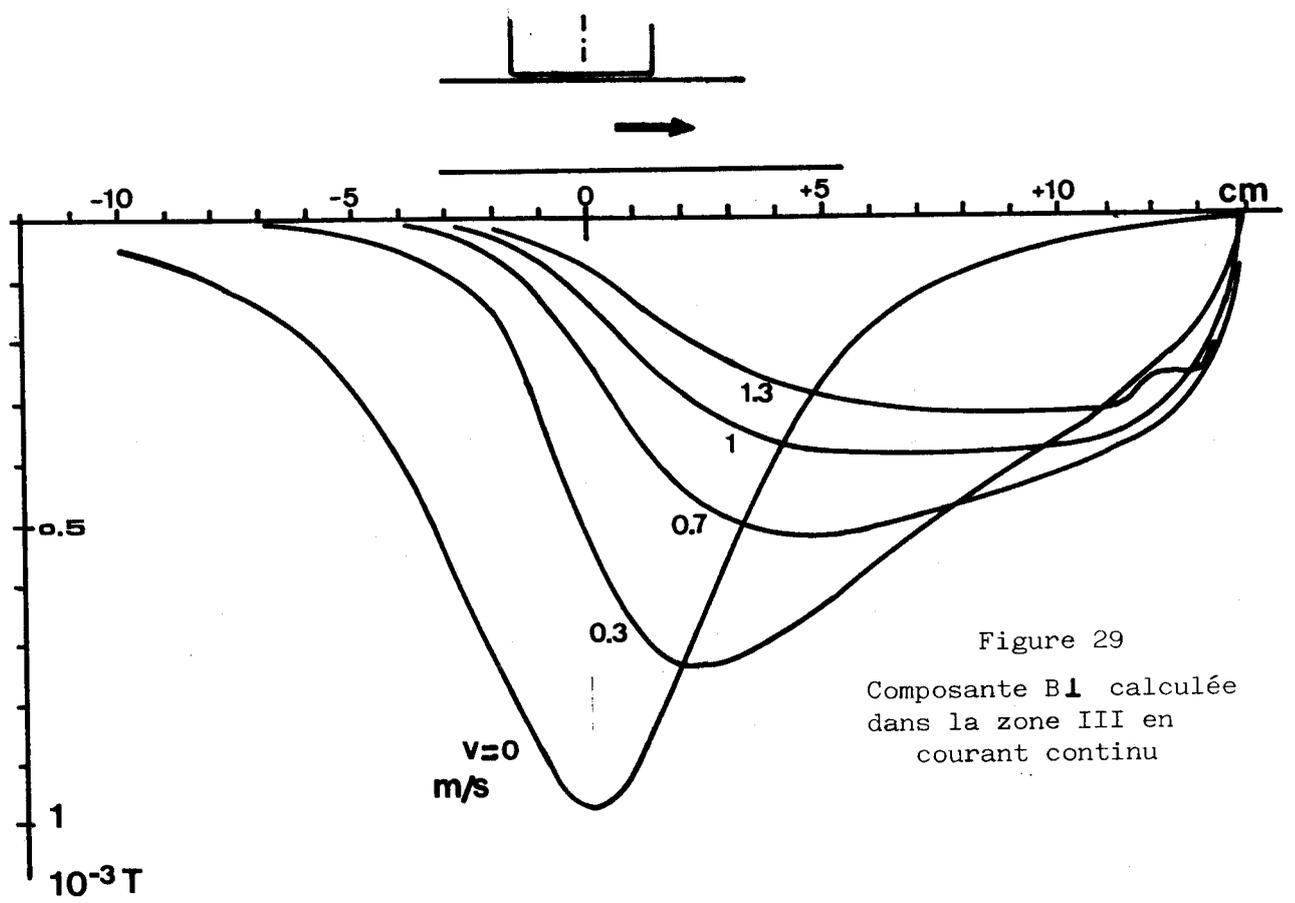
Le modèle théorique n'a été testé qu'en courant continu (coefficient $\delta = 0$ dans la matrice) ; ce cas est en effet le seul pour lequel une confrontation avec les résultats expérimentaux est possible ; dans le cas du 50 Hz, ces résultats sont trop affectés par les différents phénomènes parasites signalés au II.

En prenant, pour l'acier utilisé, une perméabilité $\mu = 50 \mu_0$ déduite de mesures d'atténuation, et une conductivité $\sigma = 10^{-7} (\text{e.m})^{-1}$, on obtient pour le coefficient $\epsilon = \frac{\mu \sigma \nu h}{2}$ une valeur sensiblement égale à 3ν .

Les calculs ont été effectués avec les valeurs de α et β déjà considérées pour l'aluminium. Elles correspondent ici à des vitesses beaucoup plus faibles :

$\alpha = 1$	$\beta = 1$	$\epsilon = 0$	$\nu = 0$
$\alpha = 0$	$\beta = + 2$	$\epsilon = 1$	$\nu = 0,3$ m/s
$\alpha = - 1$	$\beta = + 3$	$\epsilon = 2$	$\nu = 0,7$ m/s
$\alpha = - 2$	$\beta = + 4$	$\epsilon = 3$	$\nu = 1$ m/s
$\alpha = - 3$	$\beta = + 5$	$\epsilon = 4$	$\nu = 1,3$ m/s

Ces valeurs sont comparables aux vitesses expérimentales du II.1.



III.2.1 - Résultats dans la zone III devant l'émetteur

La figure (29) donne les valeurs de la composante perpendiculaire B_L transmise, pour les points de la première ligne dans l'air, c'est à dire à 1 cm du disque et à 3 cm de l'émetteur. Les courbes sont à rapprocher des courbes expérimentales de la figure (19) correspondant aux très faibles vitesses. Elles mettent en évidence le même phénomène : décalage et affaiblissement, phénomène analogue à celui de l'aluminium aux vitesses plus élevées ; ceci confirme encore l'équivalence entre la perméabilité μ et la vitesse v , en courant continu. Les courbes théoriques montrent un effet plus accusé que les courbes expérimentales et le modèle donne des résultats rapidement incohérents dès que l'on utilise des vitesses importantes (10, 20, 45 m/s) ; cette incohérence a sûrement pour origine, la contrainte imposée ($B = 0$) par la limite du domaine sur le bord droit.

III.2.2 - Résultats théoriques de part et d'autre de l'émetteur (zones I et II).

Nous donnons, figure (30), les courbes relatives à B_L sur une ligne distante de 0,5cm du disque.

Comme dans la pratique (fig.(20) et (21)), on observe une dissymétrie marquée entre le coté gauche et le coté droit ; pour ce dernier la perturbation étant beaucoup plus sensible. Par contre, l'évolution en fonction de la vitesse de déplacement est presque inversée entre la pratique et la théorie : dans la zone II l'induction augmente d'abord et diminue ensuite ; dans la zone I elle décroît constamment. Ceci semble curieusement plus proche de l'effet observé dans les mêmes zones avec le disque d'aluminium (figure (37) au chapitre 4).

IV - CONCLUSION DE L'ETUDE DANS LE CAS D'UN INDUIT MAGNETIQUE

L'utilisation d'un induit magnétique fait apparaitre des difficultés d'ordre à la fois expérimental et théorique.

Sur le plan expérimental, l'induit linéaire n'est que partiellement simulé par le disque en rotation. En courant continu, le phénomène "d'entraînement" du champ, provoqué dès les faibles vitesses, par la perméabilité élevée, est semble-t-il rapidement masqué par les effets de "bord" du disque. En courant alternatif, ces effets s'accompagnent d'autres effets parasites liés à la rotation et vraisemblablement à l'hystérésis du matériau ; ils devraient disparaître dans le cas d'un induit à déplacement linéaire.

Sur le plan théorique, la difficulté est de trouver un modèle simple qui permette à l'effet très marqué, du à l'induit magnétique, de se développer sans être trop rapidement contraint par les conditions aux limites.

En courant continu et aux très faibles vitesses, le modèle utilisé rend compte correctement de l'évolution de l'induction devant l'émetteur, prouvant ainsi l'équivalence des paramètres "perméabilité"- "vitesse" établie dans les équations de départ ; dans cette zone, aux facteurs d'atténuation et de vitesse près, les phénomènes ne se différencient pas fondamentalement de ceux d'un métal non magnétique. Le modèle est par contre insuffisant pour traduire les phénomènes de part et d'autre de l'inducteur.

En alternatif, il est inadapté compte tenu de la complexité apportée par les phénomènes parasites tels que les effets de bord et les effets liés au comportement magnétique du matériau et non exprimés par la simple augmentation de perméabilité.

Seule l'élimination de ces effets autoriserait une confrontation théorie-expérience plus complète. A cette fin, il serait souhaitable de pouvoir utiliser un induit linéaire ou tout au moins un disque de rayon beaucoup plus grand. Dans ce dernier cas l'existence d'une "tête" de désaimantation, par exemple diamétralement opposée à l'inducteur, permettrait d'éliminer l'aimantation acquise devant celui-ci ; pour être efficace aux vitesses les plus élevées un tel dispositif devrait fonctionner au moins à quelques kHz avec une amplitude égale à celle de l'inducteur. De telles réalisations sont envisageables dans le cadre d'une étude ultérieure plus approfondie.

CHAPITRE 4

APPLICATION A LA REALISATION D'UN CAPTEUR DE VITESSE

I - INTRODUCTION

Les études réalisées précédemment ont montré de manière très caractéristique la perturbation du champ magnétique engendrée par le déplacement de l'induit et il semble intéressant de l'utiliser pour la détermination de la vitesse (de rotation ou de translation) à laquelle elle est étroitement liée.

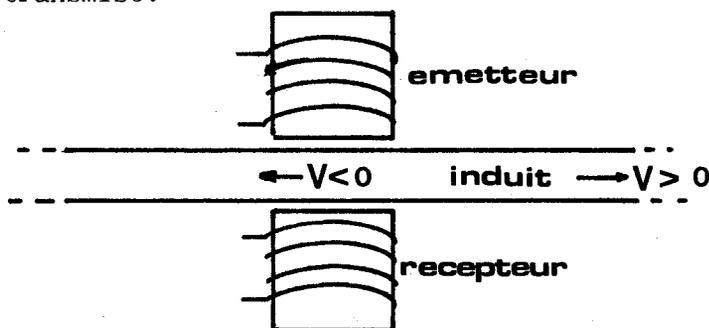
Etant donné les multiples aspects du phénomène, de nombreuses configurations de capteurs, semblent à priori concevables. On peut ainsi faire la mesure en continu ou en alternatif, devant l'émetteur ou de part et d'autre de l'émetteur, utiliser la composante B_{\perp} ou B_{\parallel} , opérer sur l'amplitude ou sur le déphasage... Pratiquement le choix se trouve en fait limité, si l'on s'impose des critères essentiels de simplicité, de sensibilité et, si possible, de linéarité. Nous ne retiendrons ainsi que des dispositifs utilisant la mesure de la composante B_{\perp} , technologiquement plus simples, et fonctionnant en courant alternatif. Deux configurations sont étudiées dans ce chapitre :

- un récepteur simple disposé en face de l'émetteur
- un capteur à carcasse en E utilisant une méthode différentielle.

II - CAPTEUR DE TYPE "RECEPTEUR SIMPLE" (pour induit non magnétique)

II.1 - DESCRIPTION ET PRINCIPE

Dans le cas d'un induit non magnétique d'épaisseur acceptable, il est possible d'utiliser directement l'importante diminution avec la vitesse de la composante B_{\perp} transmise.



Le récepteur, de constitution semblable à l'émetteur (bobinage sur noyau) est placé face à ce dernier de l'autre côté de l'induit. Dans la mesure où le couplage magnétique entre les deux noyaux n'est pas trop "serré", le capteur n'apporte qu'une modification légère aux phénomènes liés à l'émetteur et à l'induit et se comporte approximativement comme la sonde de mesure sans noyau utilisée pour les mesures décrites dans les chapitres précédents. Moins ponctuel, il permet toutefois d'obtenir des tensions plus importantes en "intégrant" l'induction sur une surface plus grande.

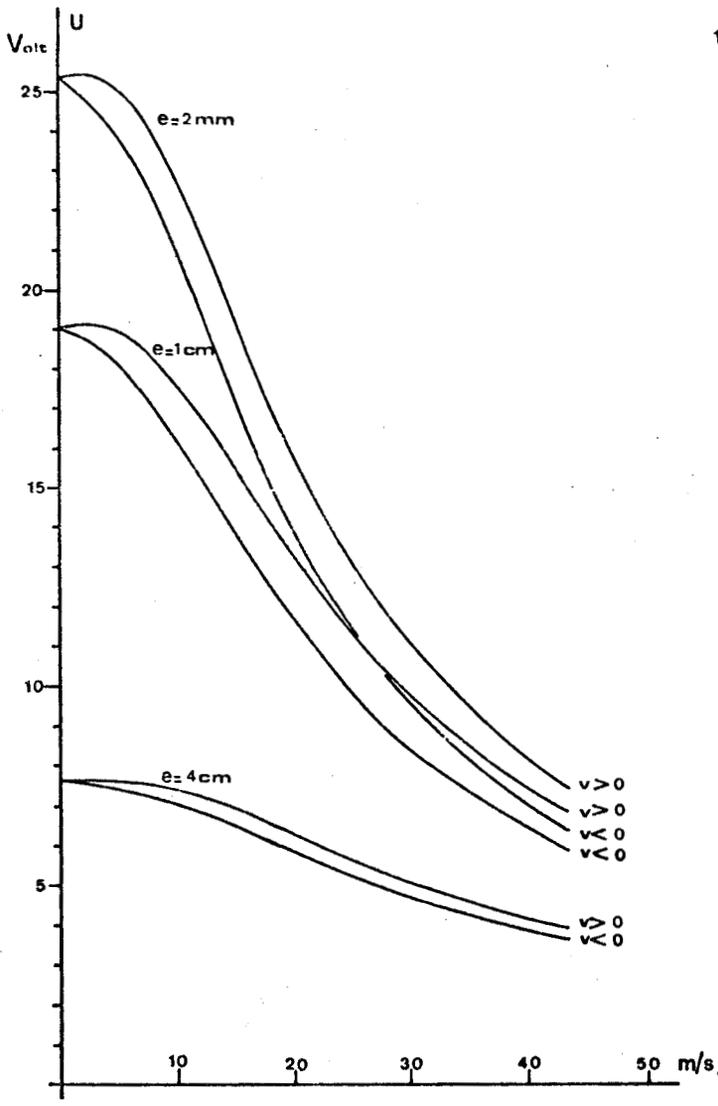


Figure 31

Tension recueillie avec le récepteur simple.

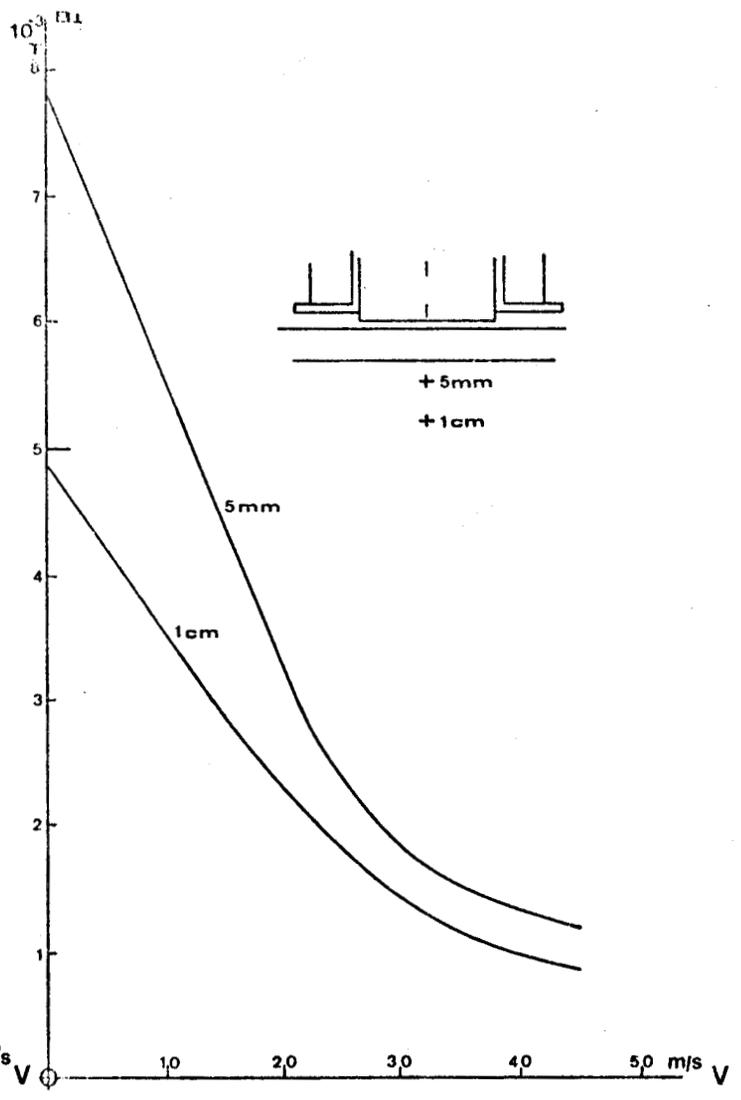


Figure 32

Induction relevée avec la sonde de mesure (chapitre II).



II.2 - RESULTATS ET ANALYSE

La figure (31) montre, en fonction de la vitesse, la tension récepteur recueillie pour différents entrefers récepteur-disque, l'émetteur étant alimenté sous tension constante 120 V - 50 Hz et distant du disque de 2 mm.

Les courbes montrent une évolution assez proche de celle des mesures du chapitre 2 concernant l'induction en un point sur l'axe central (fig. 32). La variation globale est évidemment la plus forte pour l'entrefer le plus faible : 70 % à pleine vitesse. Elle est encore importante (50%) pour des entrefers plus grands (4 cm). Il faut également remarquer :

- l'existence, aux très faibles vitesses, d'un "palier" qui s'accroît avec l'entrefer.

- la partie de décroissance rapide n'est pas linéaire. La sensibilité, importante dans la zone des "moyennes" vitesses, diminue notablement aux vitesses élevées où le phénomène se stabilise.

- l'existence d'un léger phénomène d'hystérésis suivant le sens de la vitesse. Il doit pouvoir s'éliminer par une conception plus soignée des bobinages et par un meilleur positionnement de l'émetteur et du récepteur. (l'un par rapport à l'autre, et par rapport à l'induit).

L'utilisation du même dispositif à 400 Hz ne semble pas devoir être retenue : l'induction se décalant mais en augmentant, la variation serait beaucoup plus faible.

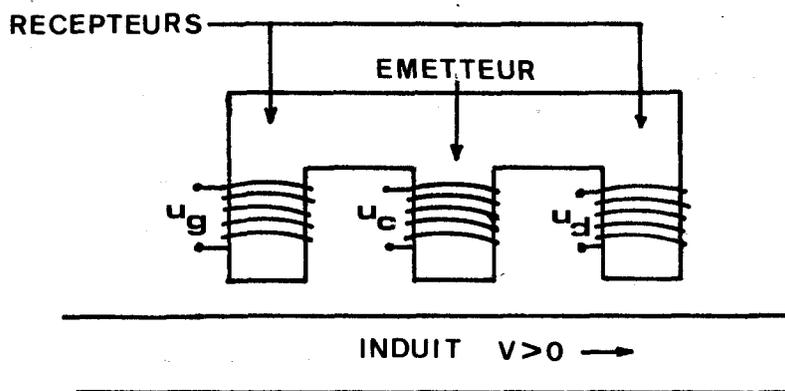
II.3 - DELIMITATION DES POSSIBILITES

Le dispositif a les avantages de la simplicité et de la sensibilité. Il présente par contre des limites liées, d'une part à la sujétion de devoir insérer la partie mobile entre l'émetteur et le récepteur, et, d'autre part à l'épaisseur de la partie mobile, laquelle doit être compatible avec la profondeur de pénétration. Enfin, il n'est pas linéaire, un étalonnage est nécessaire, essentiellement fonction du matériau qui constitue l'induit.

III - CAPTEUR CONSTITUE D'UNE CARCASSE EN E

III. 1 - DESCRIPTION

Nous reprenons ici une configuration de capteur déjà étudiée par Séguier ([16] Essais sur la tachymétrie linéaire) et utilisant un demi-circuit triphasé. Les trois noyaux, disposés d'un même côté du disque, jouent le rôle d'émetteur (noyau central) et récepteurs (noyaux latéraux) et une mesure différentielle des tensions récupérées permet d'obtenir l'information sur la vitesse.



Nous donnons, ci-après, les résultats expérimentaux dans le cas d'un induit amagnétique puis magnétique, et tentons d'en justifier le comportement à la lumière des études précédentes.

III.2 - ETUDE AVEC UN INDUIT NON MAGNETIQUE (Aluminium)

III.2.1 - Etude à 50 Hz

- Résultats expérimentaux

Pour une tension $U_c = 120$ V et un entrefer de 2,5 mm, les courbes donnent en fonction de la vitesse v (> 0 et < 0)
ou

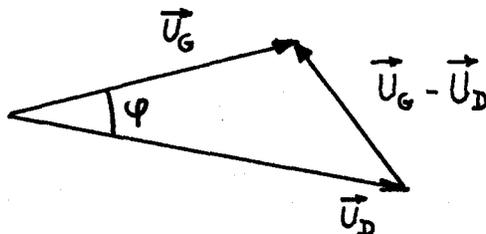
. fig. (33) : la valeur efficace des tensions u_g et u_d .

. fig. (34) : le déphasage de ces tensions par rapport à la tension centrale u_c avec $v > 0$

. fig. (35) : le déphasage φ entre u_g et u_d mesuré directement et calculé (+) à partir des résultats de la figure (34). ($v > 0$)

. fig. (36) : la valeur efficace de la tension différentielle $u_g - u_d$ obtenue par la mesure et confirmée (points +) par le calcul à partir des résultats précédents en utilisant la formule :

$$|u_g - u_d| = \left(|u_g|^2 + |u_d|^2 - 2|u_g||u_d|\cos\varphi \right)^{\frac{1}{2}}$$



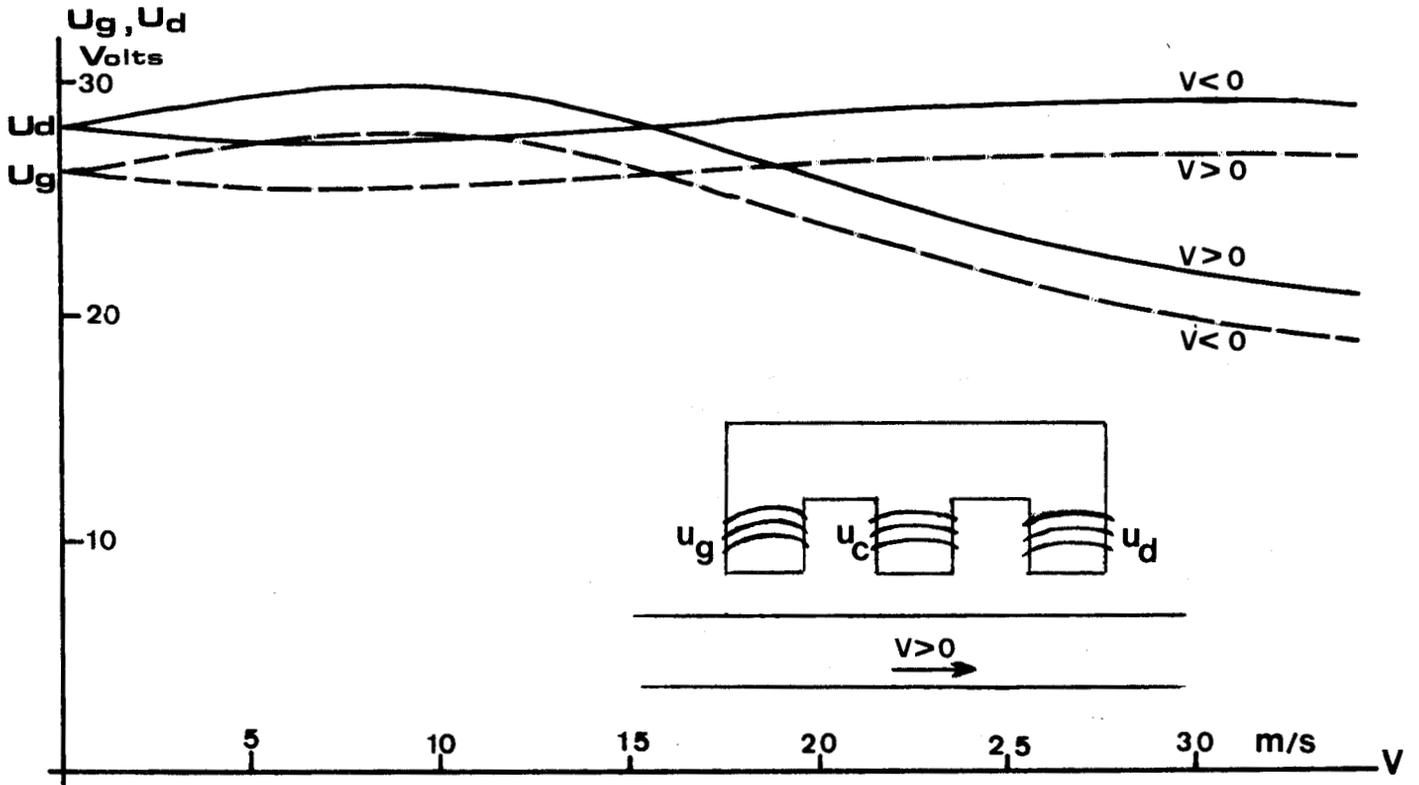


Figure 33

Valeurs efficaces des tensions u_g et u_d

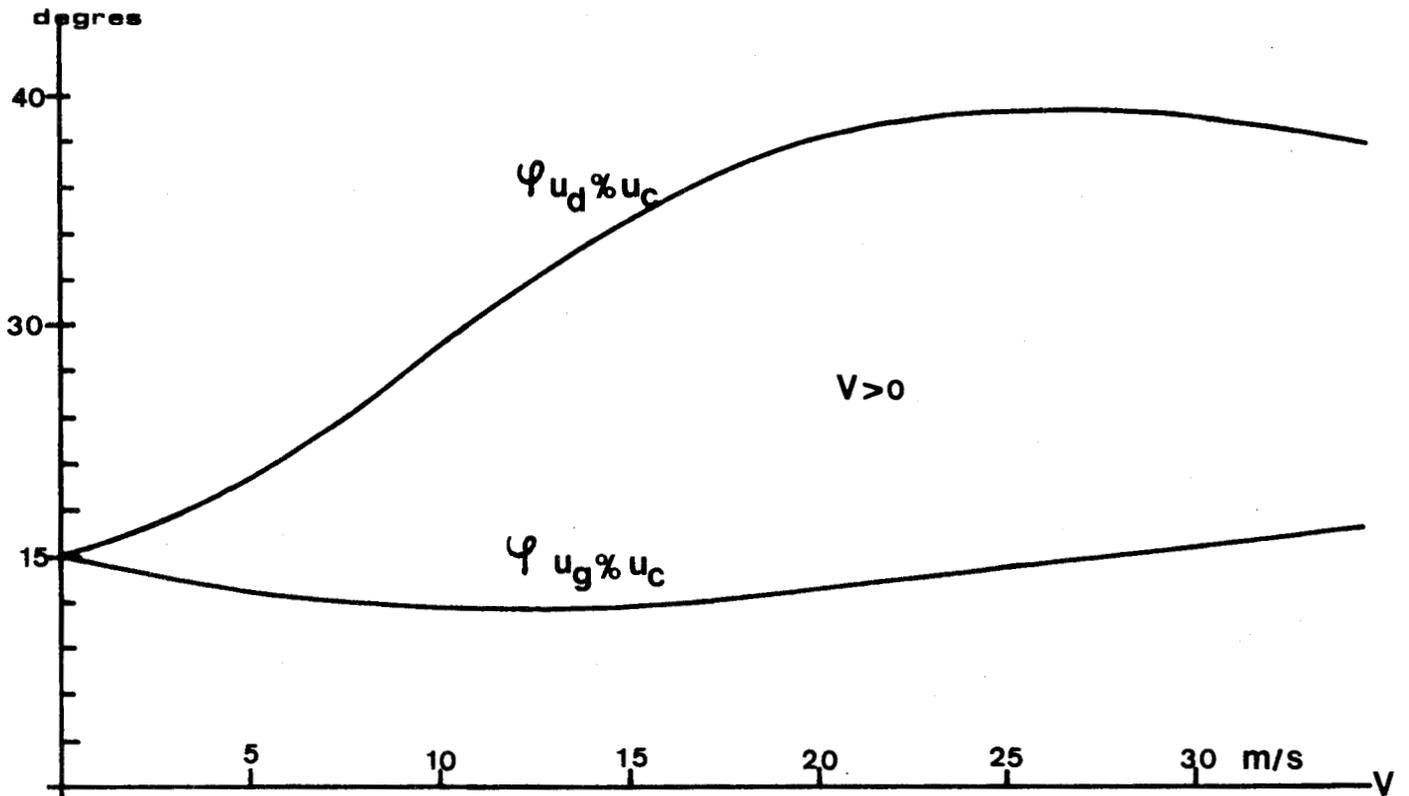


Figure 34

Déphasage des tensions u_g et u_d par rapport à u_c



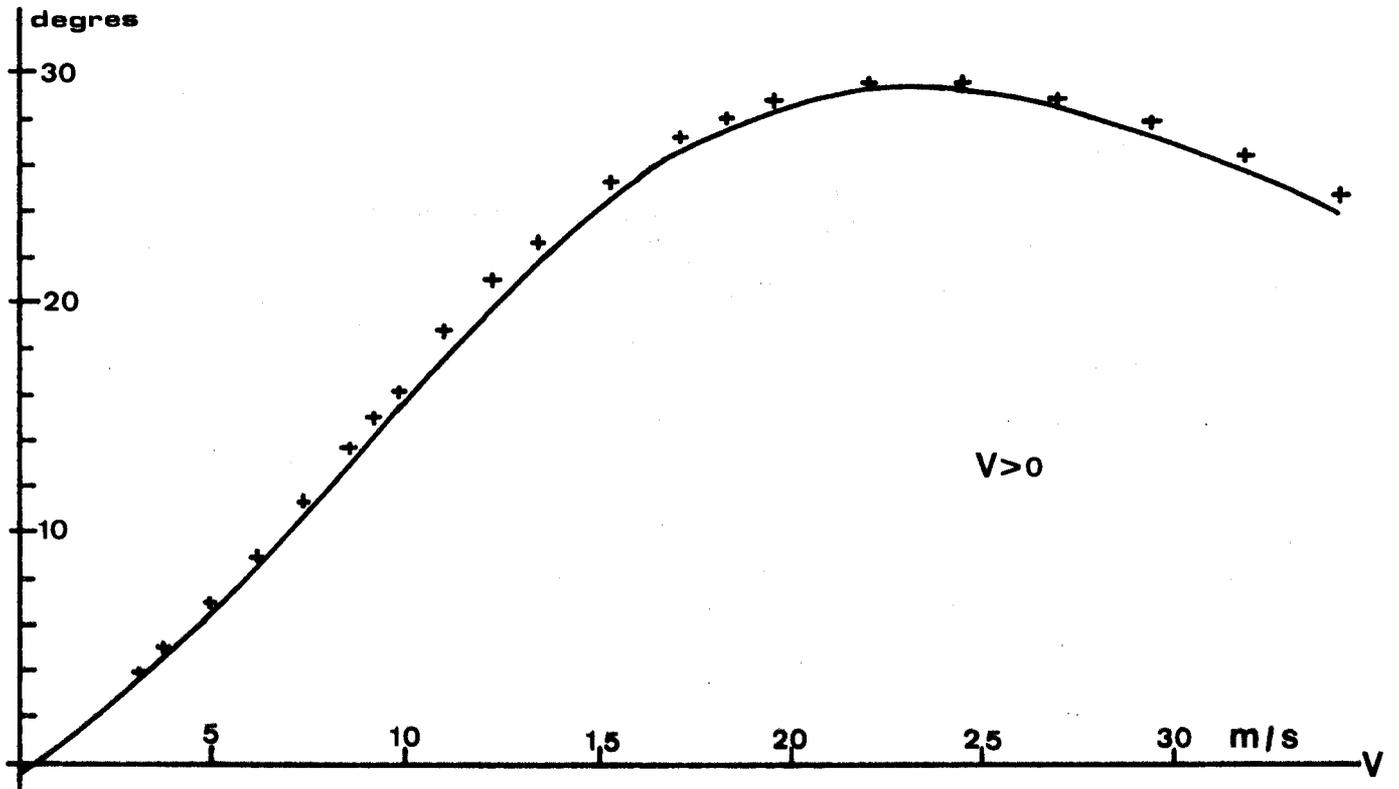


Figure 35
Déphasage de u_d par rapport à u_g

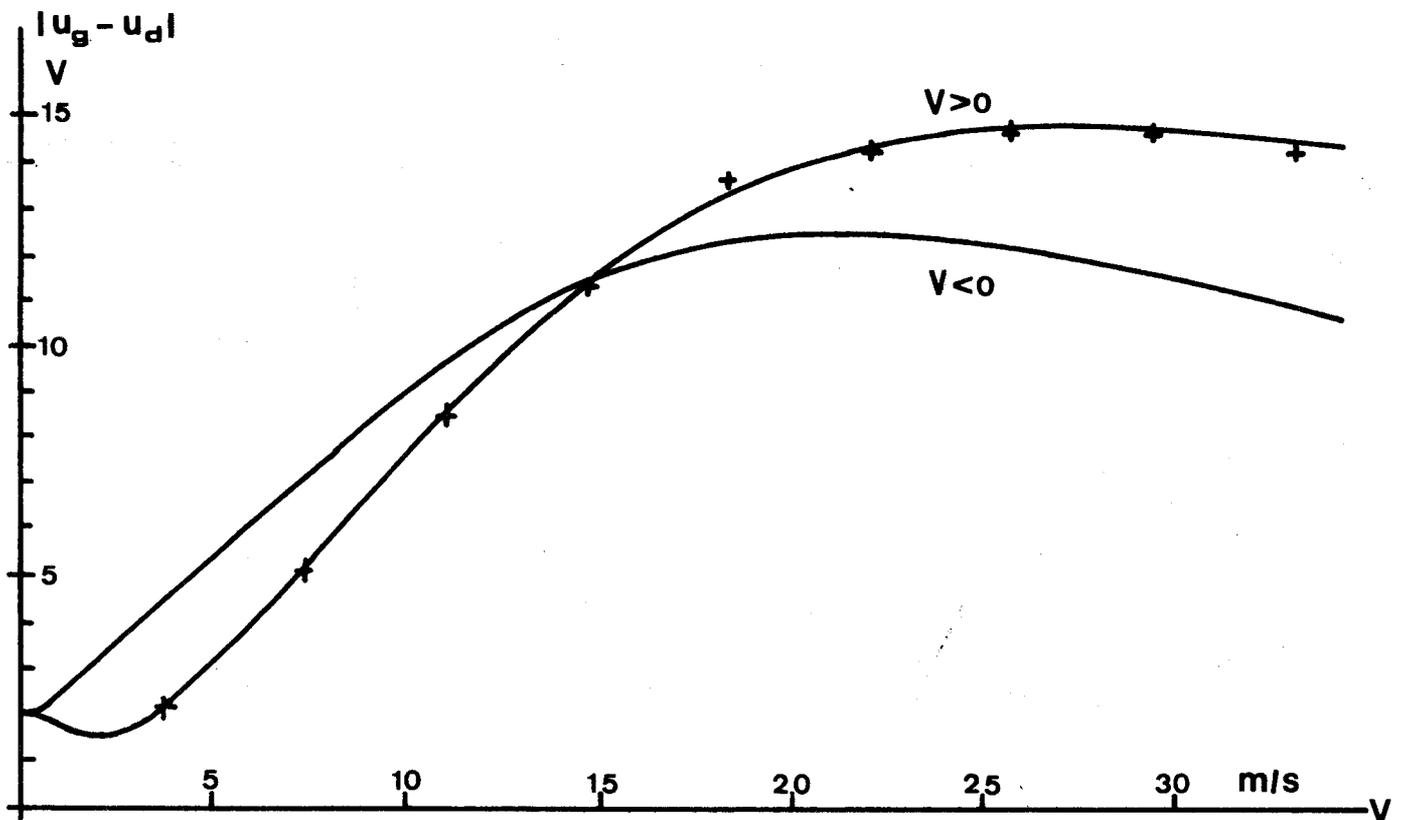


Figure 36
Valeur efficace de la tension différentielle $u_g - u_d$



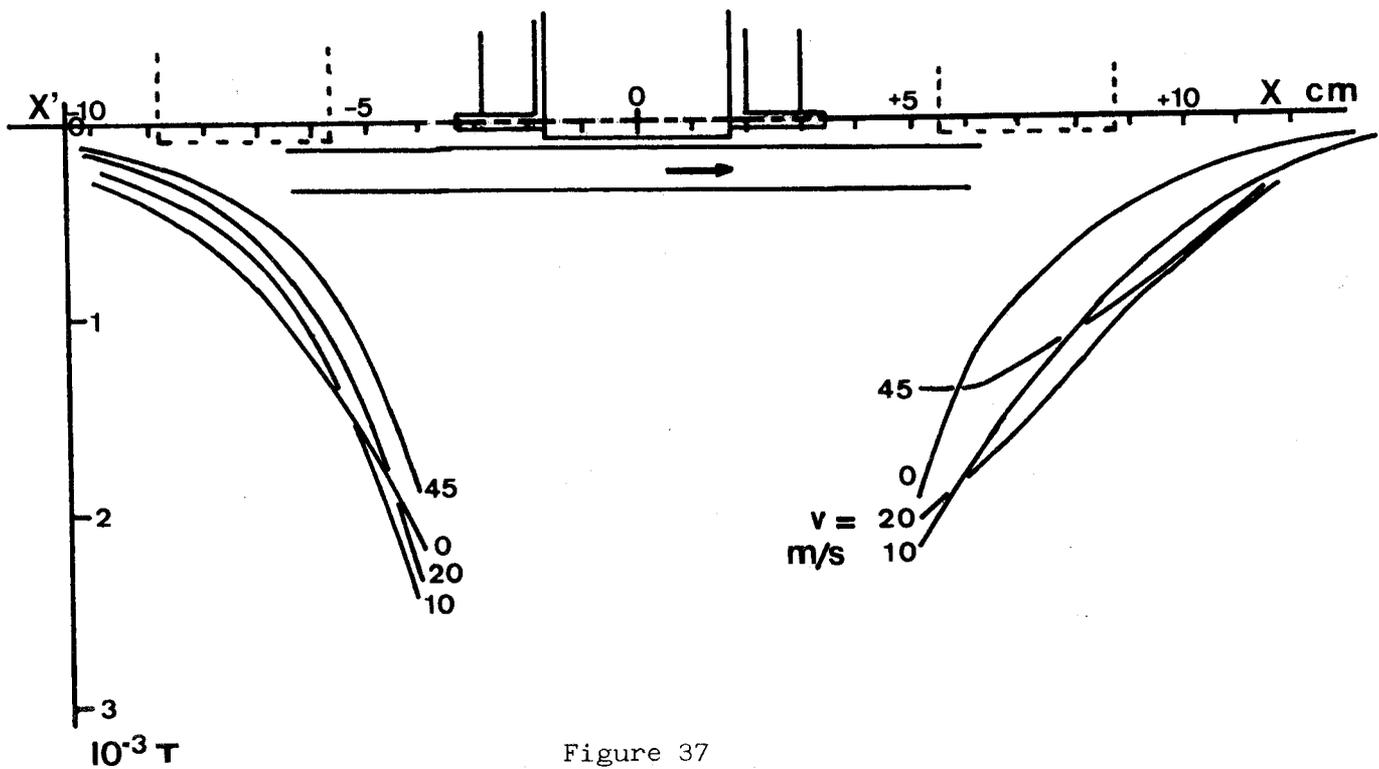
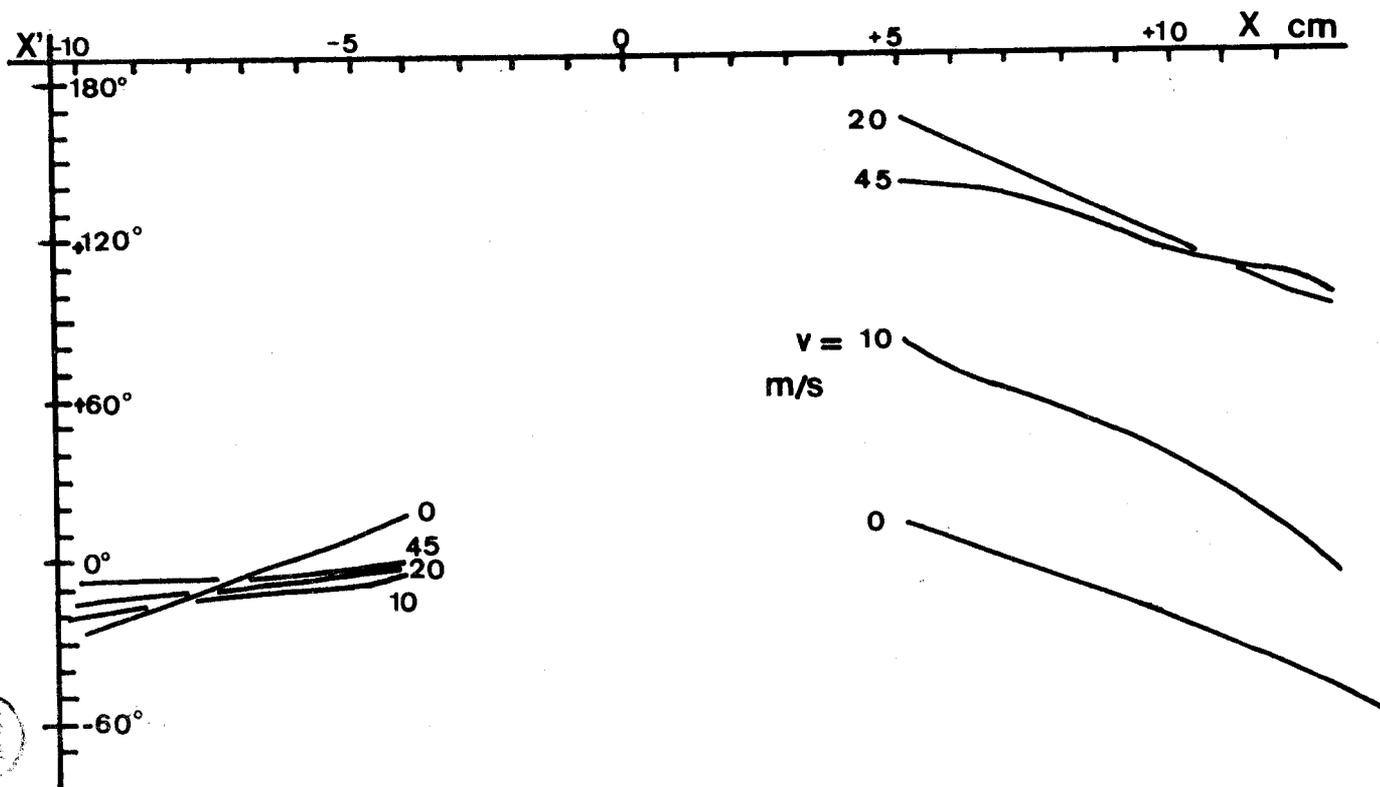


Figure 37

Valeur efficace et phase de la composante B_1 de part et d'autre d'un émetteur simple (disque d'Alu.)

Figure 38



Par ailleurs, lors de mesures complémentaires non rapportées dans ce mémoire, nous avons constaté :

- que le courant d'émetteur i_c (115 mA à l'arrêt) augmente légèrement avec la vitesse (+ 20%) et que son déphasage par rapport à u_c ne change que de quelques degrés (de $- 59^\circ$ à $- 63^\circ$).
- que les valeurs efficaces des tensions u_g et u_d sont liées linéairement à la valeur de u_c ; les déphasages en étant, eux , indépendants.
- que l'augmentation de l'entrefer diminue sensiblement et non linéairement les variations des valeurs efficaces et des déphasages. Les évolutions conservent cependant la même allure et sont encore détectables pour des entrefers de plusieurs centimètres (3 à 4).

- Analyse

La perturbation que subit le champ magnétique se manifeste sur toutes les grandeurs mises en jeu. Son influence n'est pas très notable sur la valeur efficace du courant et des tensions induites qui ne varient que de 20 à 30 % ; par contre, le déphasage entre u_g et u_d présente une évolution beaucoup plus caractéristique. Les tensions u_g et u_d étant sensiblement constantes, la détermination de la valeur efficace de la tension différentielle $u_g - u_d$ revient indirectement à faire la mesure de ce déphasage. L'allure similaire des courbes (35) et (36) est significative à ce sujet.

- Interprétation du fonctionnement

Le modèle établi au chapitre 2 ne rendant pas compte du champ magnétique dans les zones situées de part et d'autre de l'émetteur, il n'est pas possible de rattacher les résultats présents à ceux d'une étude théorique. Il est cependant intéressant de les comparer aux résultats expérimentaux décrivant l'évolution de l'induction B_{\perp} dans ces mêmes zones avec un émetteur simple. Les courbes des figures (37) et (38) montrent ainsi l'amplitude et la phase (par rapport au courant d'excitation) de cette composante, relevées avec la sonde sans noyau sur une ligne distante de 0,5 cm du disque de part et d'autre d'un émetteur simple. La comparaison entre ces mesures ponctuelles et les mesures intégrées sur une plus grande surface données par le capteur ne peut être que qualitative. On peut cependant remarquer que dans les deux cas :

- du côté qui voit venir le disque : en valeur efficace et en phase, l'induction n'est que faiblement perturbée.
- du côté qui voit s'éloigner le disque les variations sont beaucoup plus nettes :
l'amplitude de l'induction commence par augmenter puis ensuite diminue.

. les phases (ramenées à la même référence du courant excitateur i_c) sont équivalentes à l'arrêt, et leur évolution avec la vitesse, quoique plus importante pour l'émetteur simple, est qualitativement similaire.

- Conclusion

Le couplage établi entre l'émetteur et les récepteurs par le circuit en n'a pas un effet prépondérant. Ce couplage est en fait assez "lâche" : la valeur des tensions induites à l'arrêt indique que plus de la moitié du flux central n'est pas repris par les noyaux latéraux. Des mesures ont été faites avec un émetteur et deux récepteurs à noyaux magnétiques totalement indépendants, elles ont montré, avec des amplitudes plus réduites, les mêmes phénomènes. Il apparaît en définitive que la présence du circuit magnétique n'a qu'un rôle secondaire et que le comportement du dispositif n'est pas fondamentalement différent de celui d'un émetteur simple.

III.2.2 - Etude en fonction de la fréquence

- Résultats expérimentaux

Pour un entrefer de 2,5 mm et des tensions u_c de mêmes valeurs (10 V) mais de fréquences différentes, on a tracé en fonction de v (> 0)

- fig. (39) : la valeur efficace de u_g
- fig. (40) : la valeur efficace de u_d
- fig. (41) : le déphasage de ces deux tensions
- fig. (42) : la valeur efficace de $u_g - u_d$

- Analyse

Pour les valeurs efficaces, l'effet est, comme à 50 Hz, très dissymétrique.

La tension u_g qui voit arriver le disque n'est que peu modifiée, la tension u_d qui voit s'éloigner le disque est par contre beaucoup plus affectée.

Strictement décroissante pour les faibles fréquences (< 35 Hz), elle est croissante puis décroissante avec v pour les fréquences supérieures à 35 Hz et son maximum est atteint pour des vitesses de plus en plus élevées. Pour les plus hautes fréquences (300 à 400 Hz) ce maximum n'apparaît plus et la tension reste sensiblement constante.

En ce qui concerne les déphasages et la tension différentielle $u_g - u_d$ leur évolution peut se décrire en des termes assez semblables : passage par un maximum qui se décale quand la fréquence augmente.

La variation de la fréquence ne permet donc pas d'obtenir une courbe idéale. Pour les faibles fréquences la sensibilité est élevée et la linéarité acceptable mais dans une gamme de vitesses très réduite. Quand on augmente la fréquence, la gamme de vitesses utile s'élargit mais la sensibilité diminue.

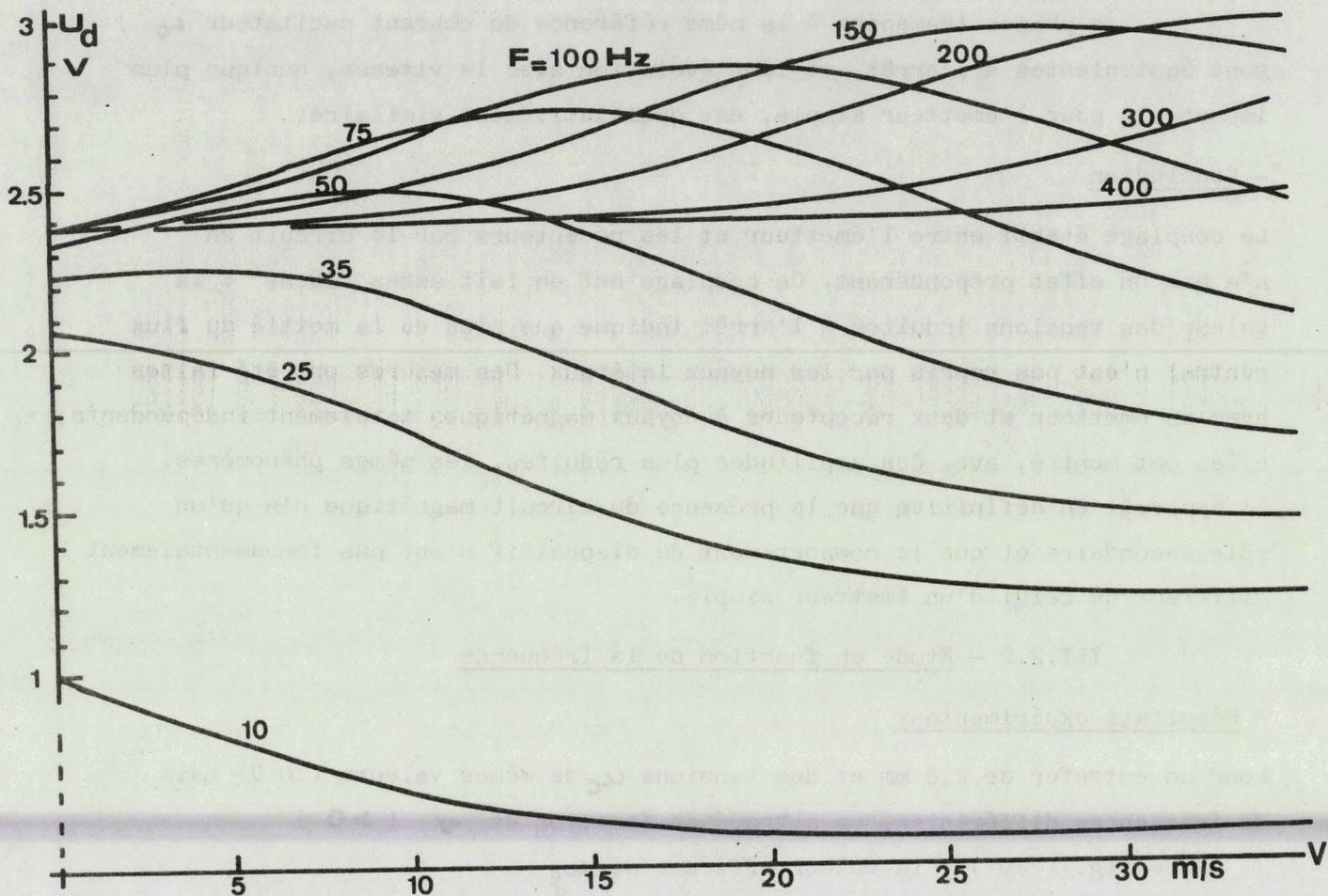


Figure 39

Valeur efficace de la tension u_d

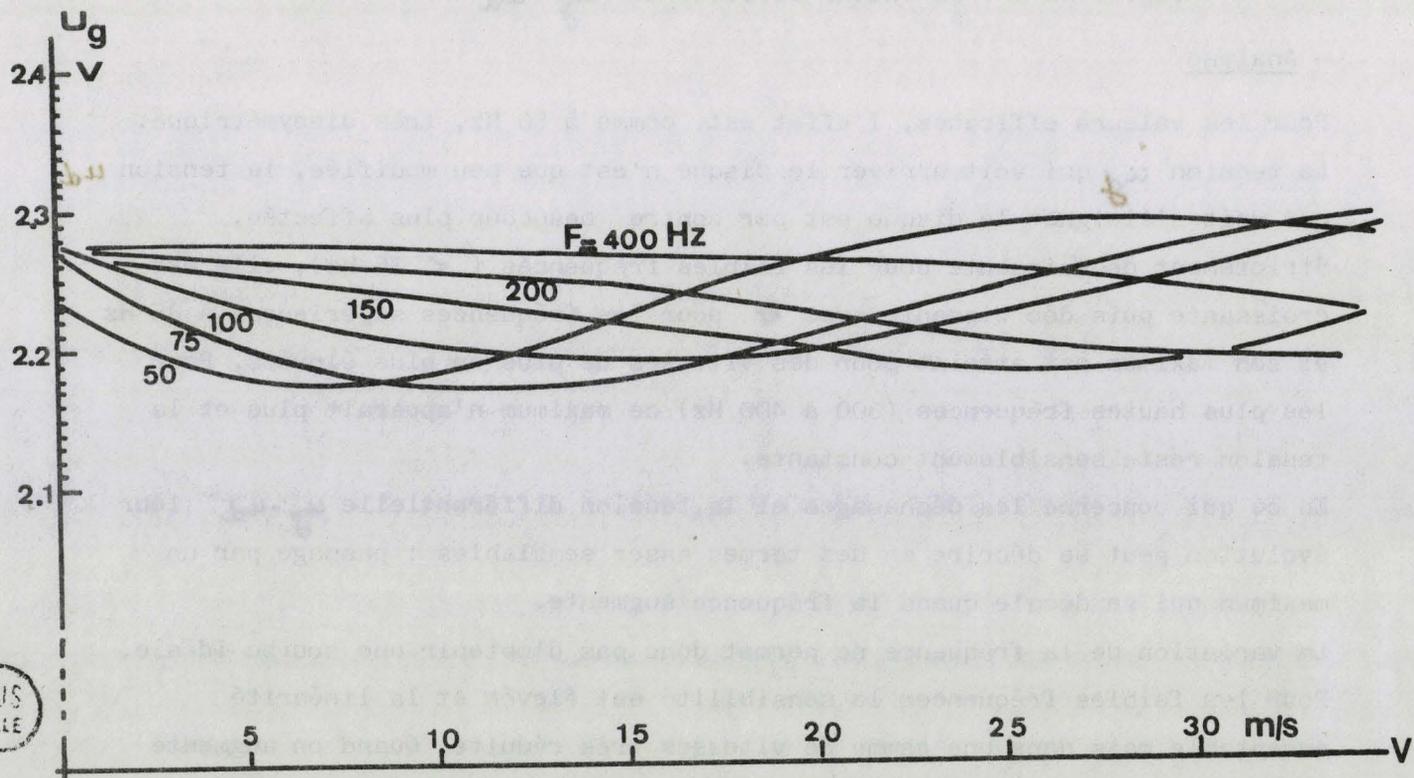


Figure 40

Valeur efficace de la tension u_g



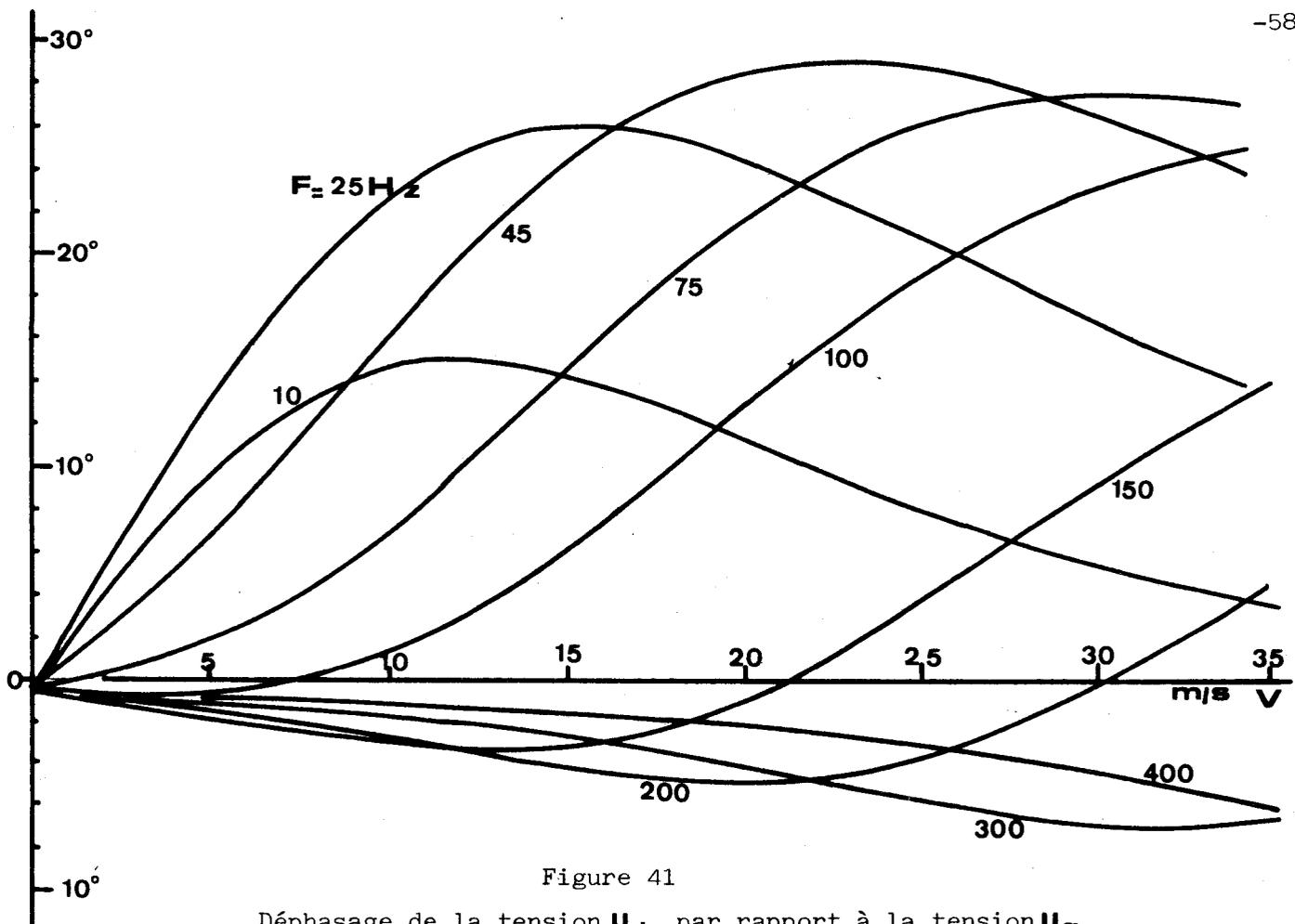


Figure 41
Déphasage de la tension u_d par rapport à la tension u_g

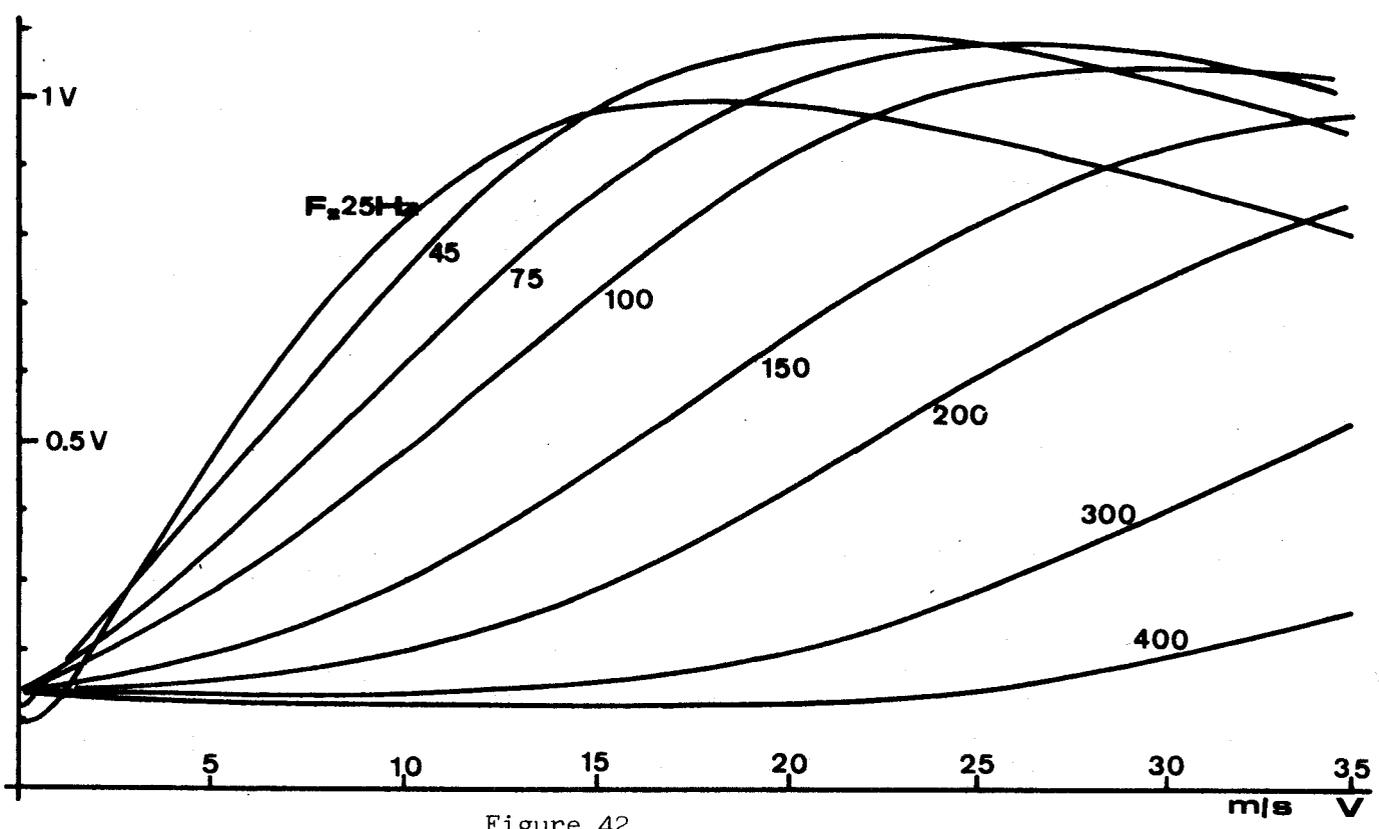


Figure 42
Valeur efficace de la tension différentielle $u_g - u_d$



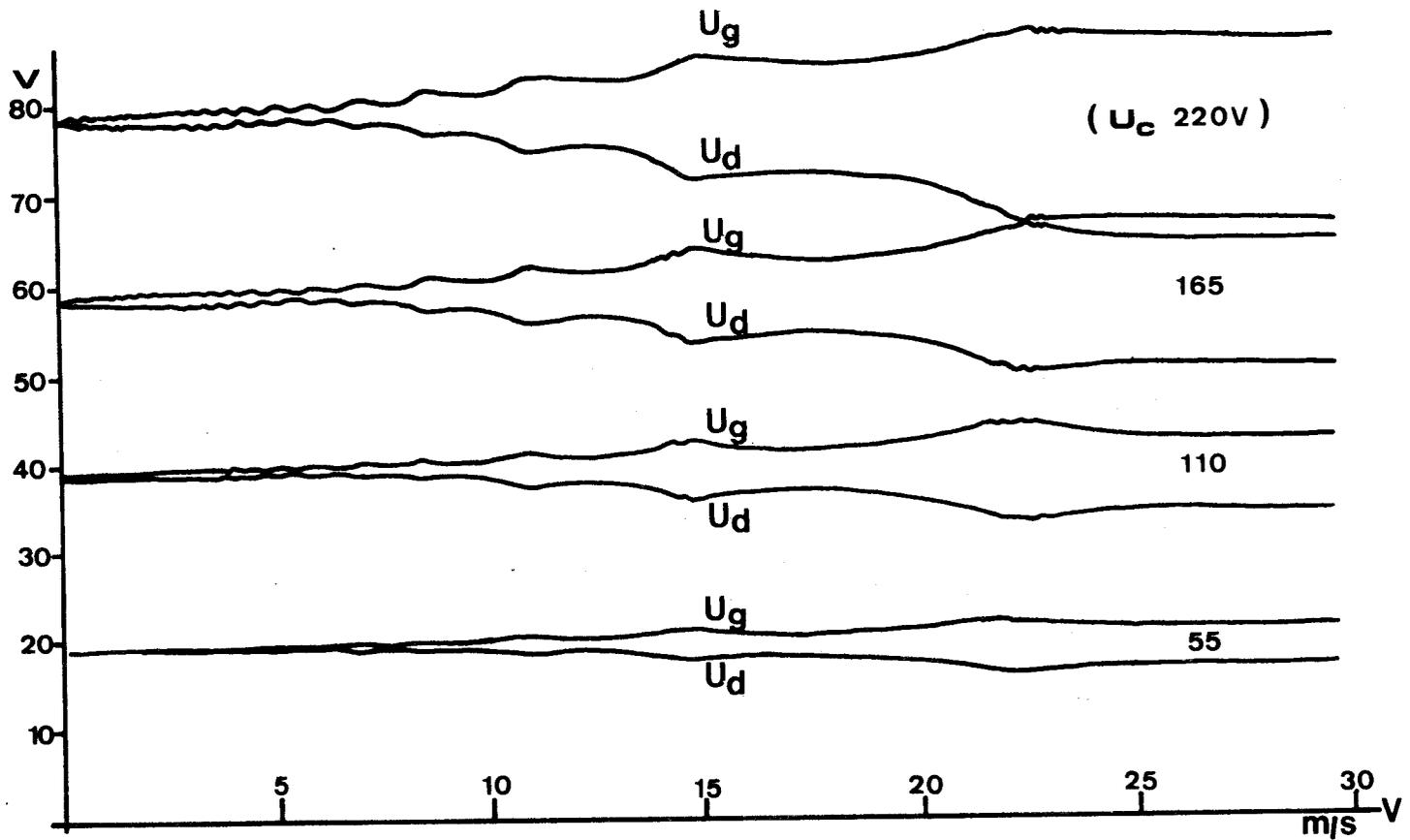


Figure 43 $V > 0$
Valeur efficace des tensions u_g et u_d

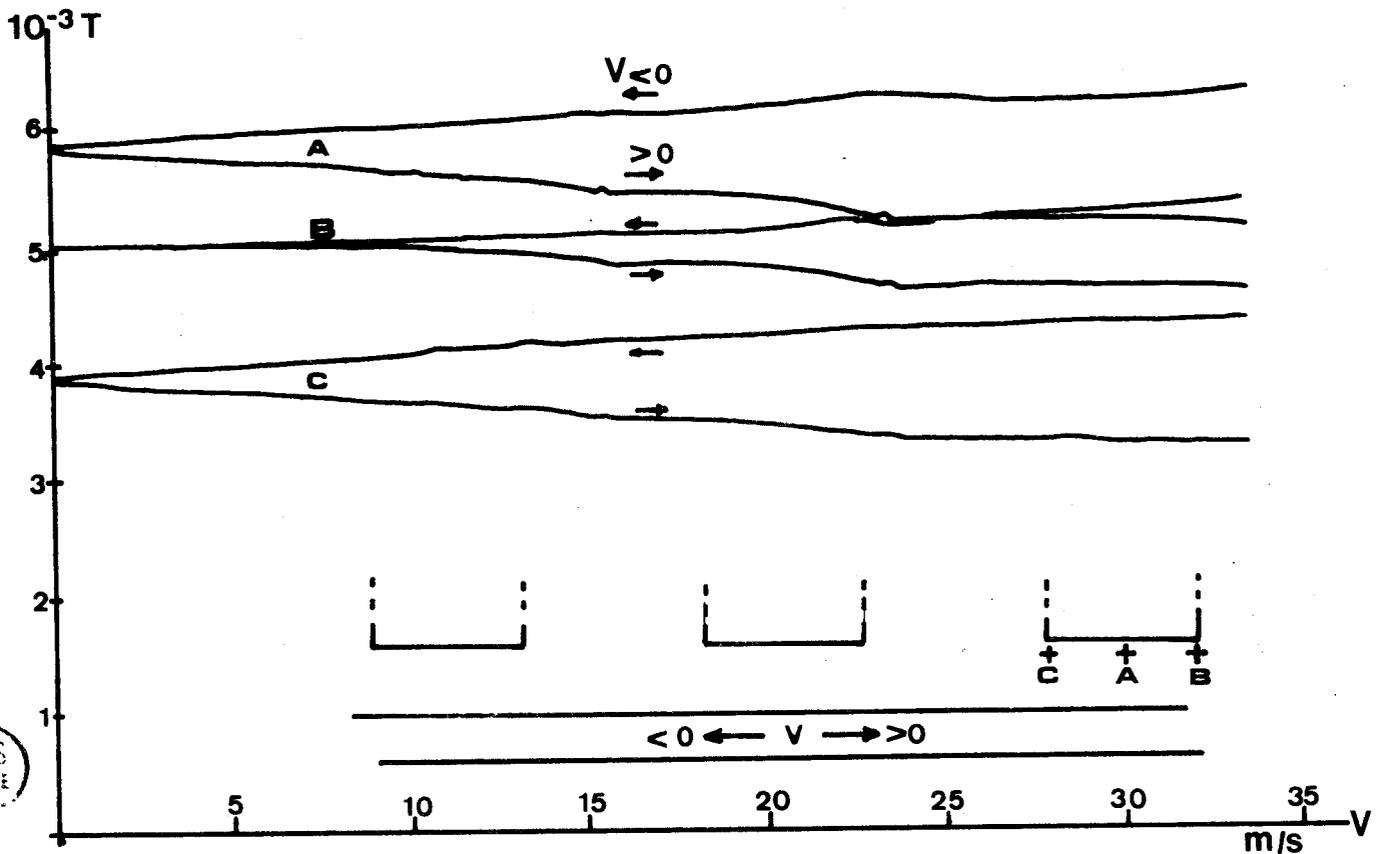


Figure 43'
Induction B_1 devant le récepteur droit



III.3 - ETUDE AVEC UN INDUIT MAGNETIQUE A LA FREQUENCE 50 Hz

III.3.1 - Résultats expérimentaux

En fonction de la vitesse v , on a reporté :

- fig. (43) : la valeur efficace de u_g et u_d , pour un entrefer $E = 2,5$ mm.

- fig. (44 a) : la valeur efficace de la tension $u_g - u_d$, pour $E = 2,5$ mm.

- fig. (44 b) : " " " " , pour $E = 10$ mm.

- fig. (45) : " " " " , pour $E = 10$ mm.

- fig. (46) : la valeur efficace de $u_g - u_d$ et la différence des valeurs efficaces de u_g et de u_d , pour $E = 7,5$ mm.

Ces deux dernières figures concernant la gamme des faibles vitesses ($v < 5$ m/s)

- sur la fig. (43'), nous donnons les mesures de l'induction B_1 effectuées en disposant une sonde dans l'entrefer à différentes positions devant un des noyaux récepteurs.

III.3.2 - Analyse et interprétation

Ces résultats peuvent être rapprochés de l'étude expérimentale du champ magnétique de part et d'autre d'un émetteur simple faite au chapitre 3. La tension u_g augmente d'un côté et diminue de l'autre, comme l'induction B_1 sur la fig. (26), mais les variations sont ici moins dissymétriques et plus réduites. L'évolution des tensions u_g et u_d n'est pas monotone et on retrouve pour les vitesses de rotation déjà évoquées au II.2.3. chap. 3 des déformations caractéristiques. Ces phénomènes parasites, liés au dispositif expérimental "rotatif" et aux propriétés magnétiques de l'induit, sont également la cause d'une distorsion des tensions induites qui s'accroît dès que la vitesse dépasse 10 m/s. Ces effets sont encore plus critiques sur la tension $u_g - u_d$ (fig. (44)). La fig. (46) montre que l'amplitude de la tension $u_g - u_d$ ne s'explique pas simplement par la seule modification des valeurs efficaces de u_g et u_d mais que leur "déphasage" joue encore un rôle important.

L'utilisation du circuit en E et d'un disque magnétique augmente certes le couplage entre émetteur et récepteurs mais le flux de fuite reste important (30% pour un entrefer de 2,5 mm). Le phénomène, ici aussi, demeure qualitativement semblable à ce qu'on observe avec un émetteur simple ; le champ magnétique est fortement modifié dans des zones étendues et comme on peut le voir sur fig. (43') les tensions récupérées au niveau des noyaux récepteurs reflètent bien l'induction dans l'entrefer.

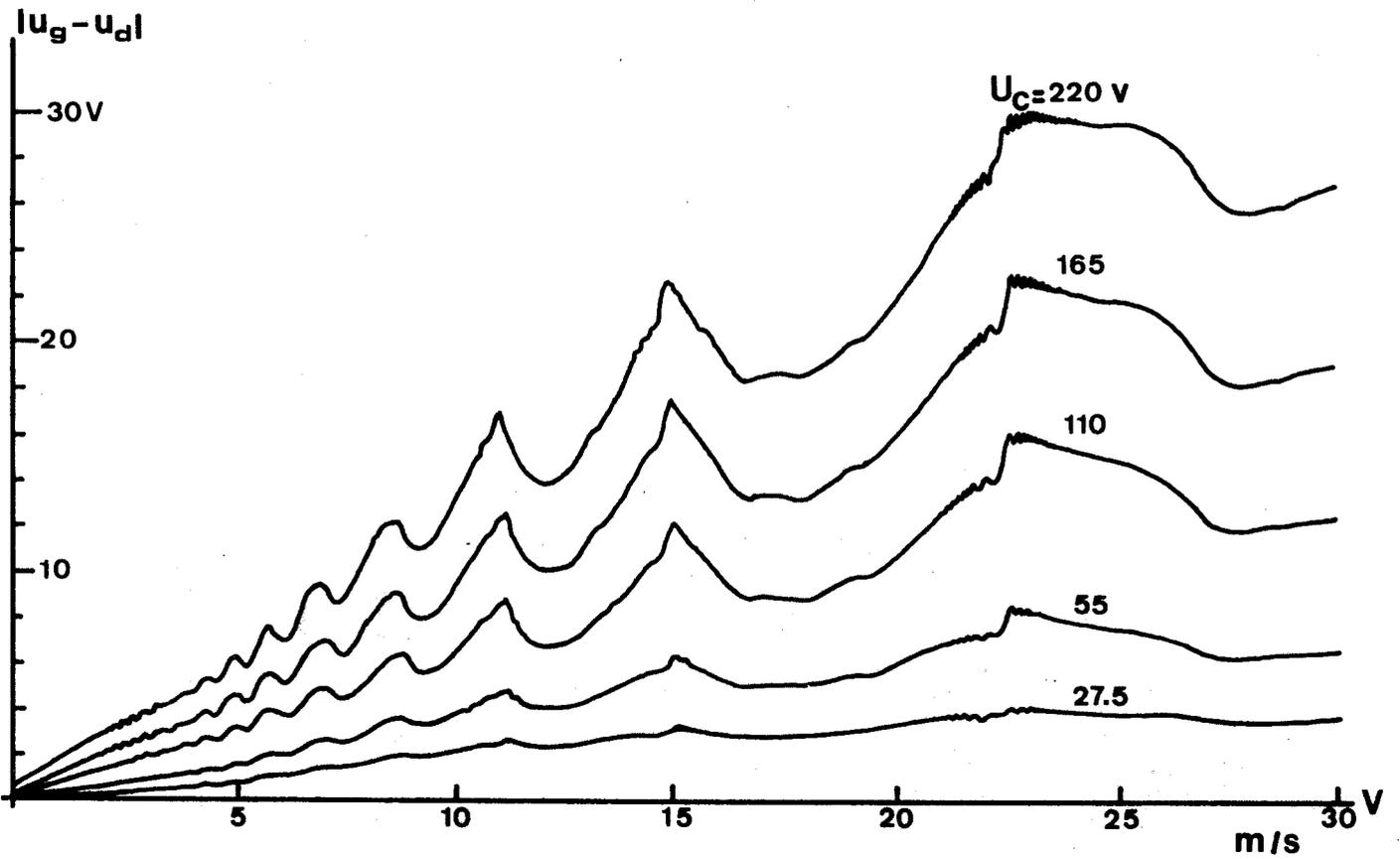


Figure 44 a

Valeur efficace de la tension différentielle $u_g - u_d$ (entrefer 2,5 mm)

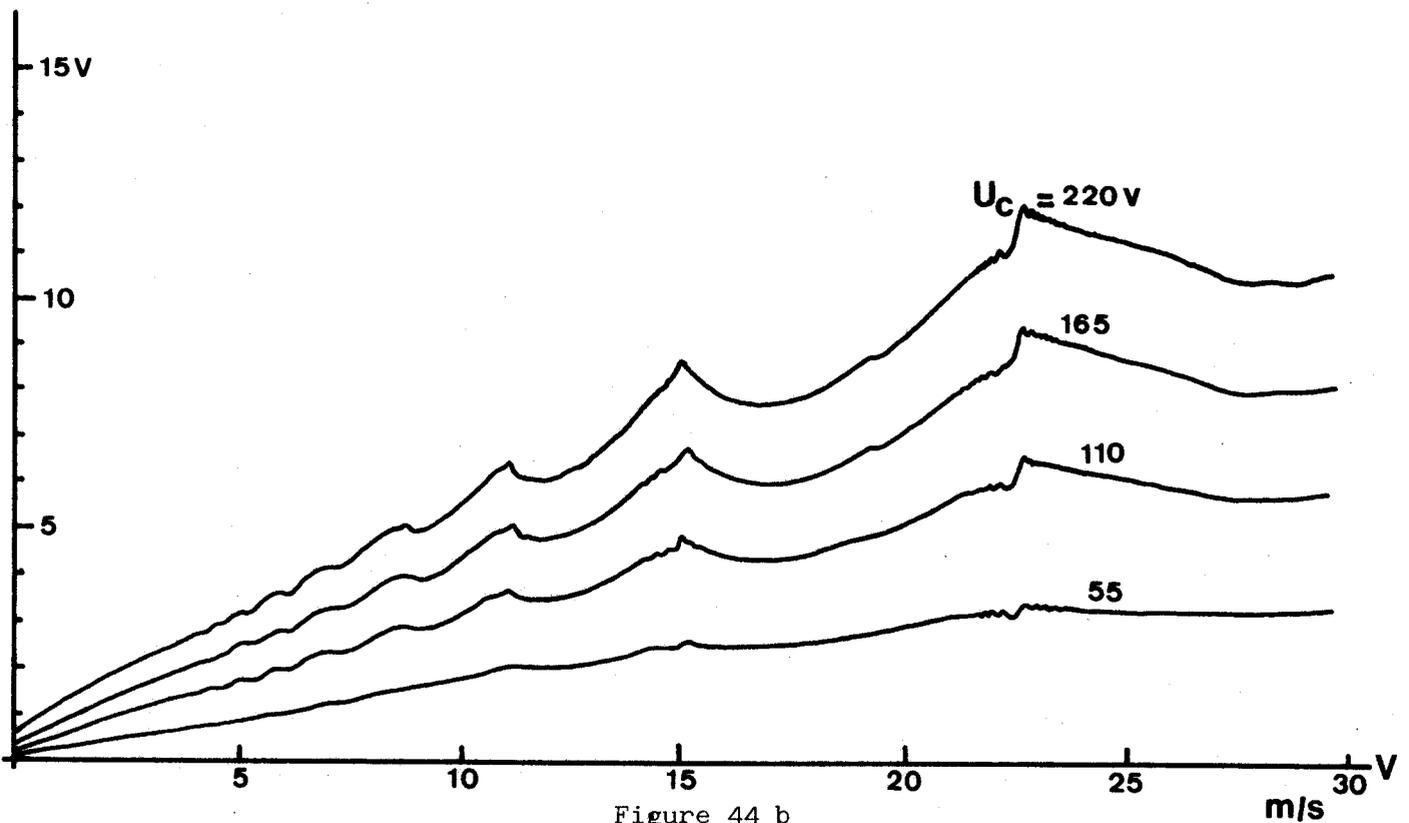


Figure 44 b

Valeur efficace de la tension différentielle $u_g - u_d$ (entrefer 10 mm)



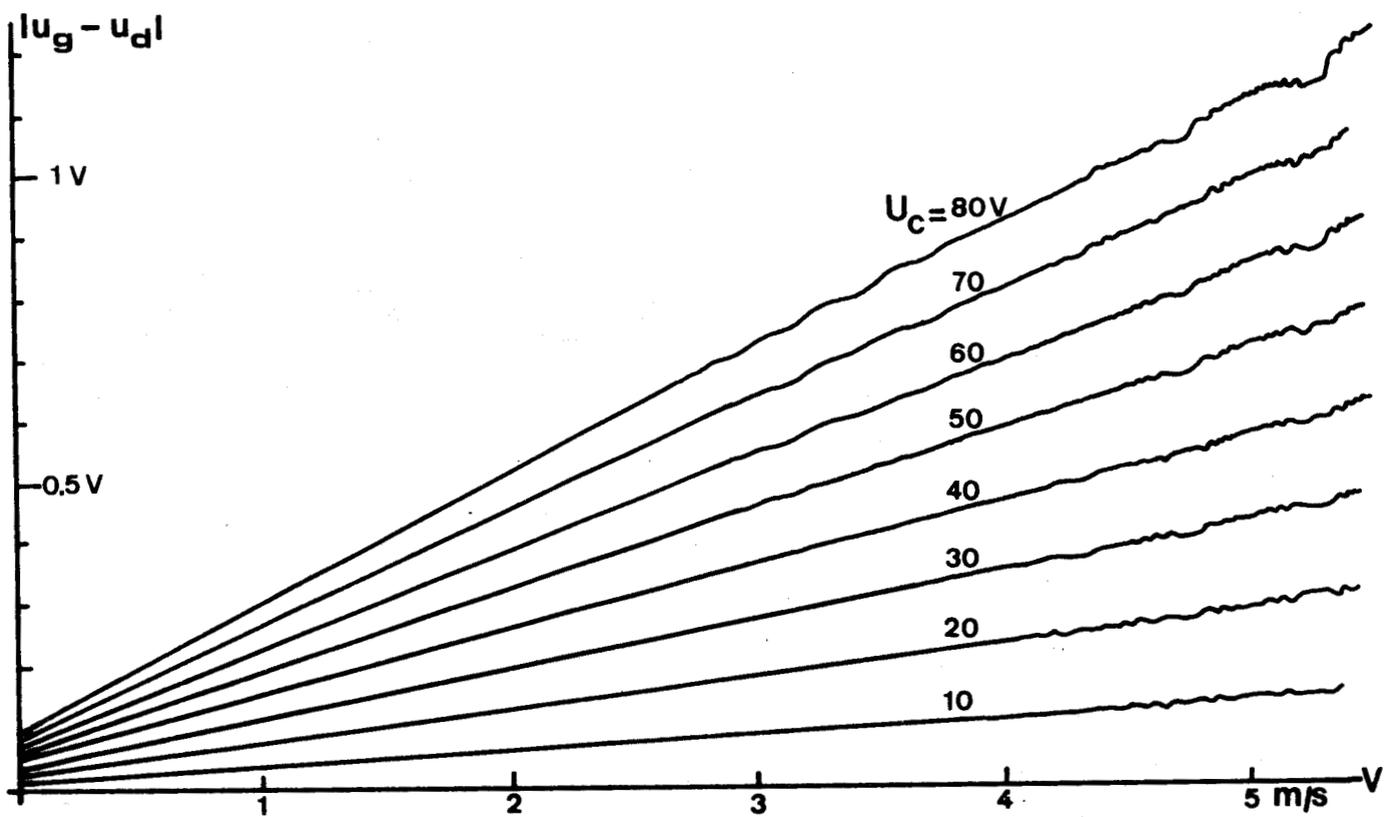


Figure 45 : aux faibles vitesses

Valeur efficace de la tension différentielle $u_g - u_d$ (entrefer 10 mm)

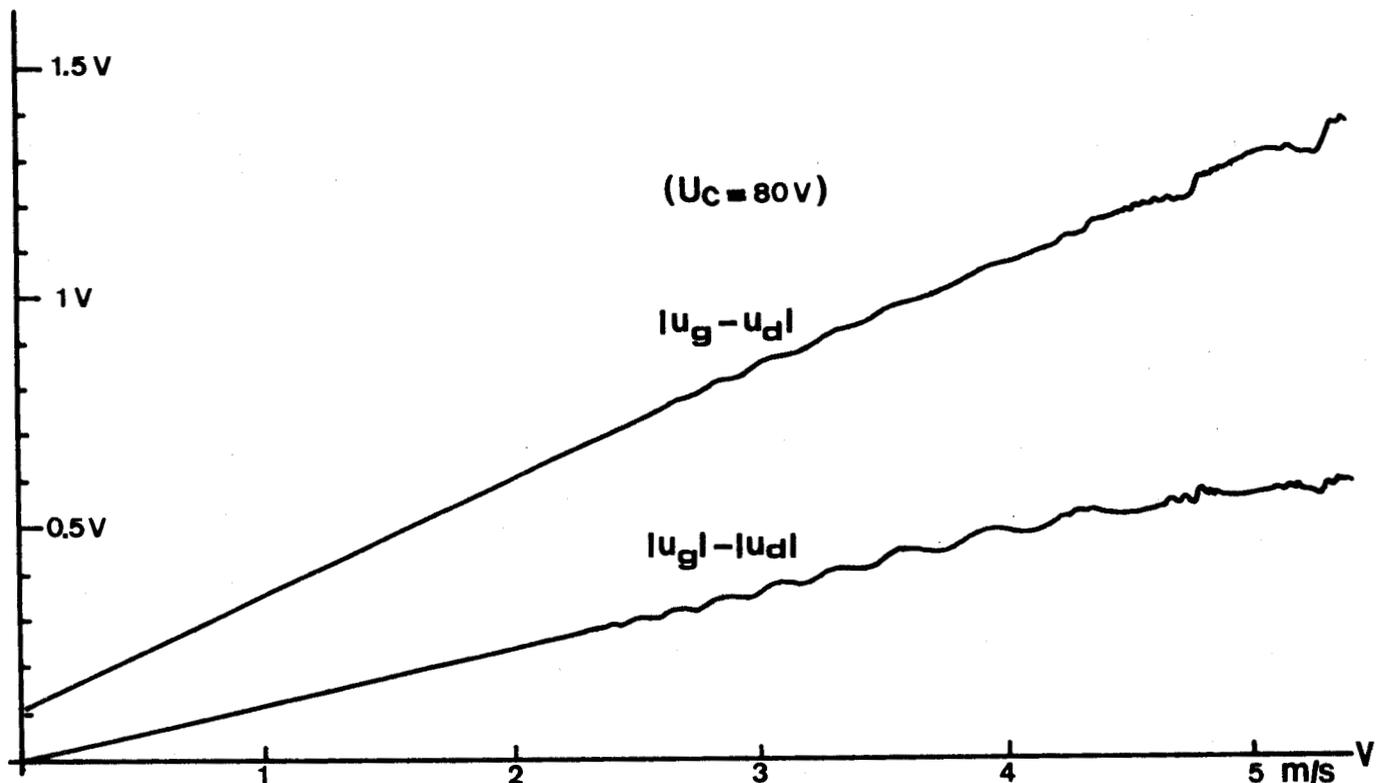


Figure 46 : aux faibles vitesses

Valeur efficace de la tension différentielle $u_g - u_d$ et différence des valeurs efficaces de u_g et u_d (entrefer 7,5 mm)

La présence du circuit en **E** se traduit néanmoins par l'effet de modération et de symétrisation de la perturbation mais, par ailleurs, celle-ci se trouvant intégrée sur une plus grande surface, elle reste aisément détectable.

III.3.3 - Délimitation des possibilités

D'un point de vue pratique les courbes de $U_g - U_d$ montrent une linéarité acceptable pour les faibles vitesses ($v < 5$ m/s) et une valeur d'entrefer importante permet, au détriment de la sensibilité, de réduire l'influence des effets parasites. Pour les vitesses plus grandes le dispositif utilisé n'est plus significatif et ne permet pas de présager des résultats avec un induit linéaire que seuls un modèle théorique plus complet et un dispositif expérimental plus adapté révéleraient.

IV - C O N C L U S I O N

De ce chapitre concernant la réalisation éventuelle d'un capteur de vitesse se dégagent les remarques qui suivent :

- dans le cas où la partie en mouvement est un métal non magnétique, par exemple l'aluminium, il apparait que :

- les paramètres exploitables sont l'amplitude de la tension induite pour le récepteur simple et la tension ou le déphasage recueillis entre les deux enroulements récepteurs pour le capteur en **E** .

- les sensibilités sont équivalentes pour les deux types de capteurs : de l'ordre d'une quinzaine de volts pleine échelle avec les conditions opératoires de notre étude. Pour les mesures de déphasage une sensibilité de quelques dizaines de degrés pleine échelle est possible avec le capteurs en **E** .

- à 50 Hz, la variation des principales grandeurs tendant à se réduire et à marquer une saturation, il est difficile d'utiliser ces deux capteurs pour des vitesses supérieures à 30 m/s. Comme il a été démontré, cet inconvénient peut être évité, dans le cas du capteur en **E** , en opérant à fréquence plus élevée à condition de tolérer une légère baisse de sensibilité sur l'ensemble de l'échelle de mesure.

- Dans le cas où la partie en mouvement est un métal magnétique, par exemple un acier, il apparait que :

- l'importante atténuation à la transmission ne permet plus l'utilisation d'un récepteur simple.

- pour le capteur en **E** , c'est également la mesure de la tension différentielle qui donne la meilleure sensibilité (quelques dizaines de Volts) dans la détermination de la vitesse.

La linéarité qui ne parait acceptable que jusque 5 m/s, l'est probablement au-delà sous réserve que les phénomènes parasites se trouvent éliminés par l'emploi d'un induit linéaire.

C O N C L U S I O N

=====

La réaction magnétique d'induit ne constitue dans la plupart des convertisseurs électromécaniques qu'un phénomène secondaire que l'on s'efforce généralement de réduire au maximum. Dans le cas du moteur linéaire, elle se manifeste par des effets parasites qui ont été l'objet de nombreuses recherches. Le présent travail a permis, en utilisant un système inducteur - induit simplifié à l'extrême, de mettre en évidence à la fois expérimentalement et théoriquement certains aspects particuliers de ce phénomène.

Des travaux déjà effectués par d'autres auteurs, sur des dispositifs assez proches, portaient essentiellement sur les courants induits et les forces de freinage. Notre étude s'en distingue par l'optique très différente dans laquelle nous l'avons faite : nous nous sommes exclusivement intéressés au champ magnétique ; nous avons pu montrer que celui-ci se trouve fortement perturbé dans des zones étendues et que l'action du mouvement de l'induit se caractérise principalement par un effet d'entraînement de ce champ dans le sens de la vitesse.

Dans le cas d'un induit non magnétique, l'étude théorique, basée sur la méthode des différences finies, a confirmé en grande partie les résultats expérimentaux du continu au 400 Hz. Ce bon accord doit être attribué au fait que dans ce cas il est relativement aisé de fixer les états magnétiques aux frontières du domaine utilisé dans la modélisation.

Par contre dans le cas d'un induit magnétique, la confrontation entre le modèle et la réalité s'est avérée moins probante. Il apparaît que les désaccords sont dus :

- d'une part : à une insuffisante représentativité de la modélisation, les conditions magnétiques aux limites du domaine étant, dans ce cas, plus difficiles à fixer en raison de la forte canalisation du champ produite par l'induit.

- d'autre part : au dispositif expérimental employé ; le mouvement de rotation de l'induit complique le phénomène étudié en faisant intervenir des effets d'hystérésis et de rémanence qui ne se manifesteraient sûrement pas dans le cas d'un mouvement linéaire.

.../...

Des possibilités de réalisation d'un capteur de vitesse sans contact avec le mobile ont pu être entrevues. Ce type de capteur devrait permettre des mesures avec une sensibilité raisonnable pour des vitesses allant de 0 à 30 m/s. Cependant une étude théorique et expérimentale plus complète, tenant compte plus rigoureusement de la nature du matériau de l'induit et de la géométrie du système, serait nécessaire pour déterminer une configuration permettant d'obtenir une réponse plus linéaire et dans une gamme de vitesse plus étendue.

: - : - : - : - :

A N N E X E

=====

La modélisation de notre dispositif expérimental nécessitant l'utilisation des équations de Maxwell en présence d'un corps conducteur en mouvement, nous avons été conduit à expliciter la formulation des différentes grandeurs que ces équations font intervenir.

Les formules de transformation des vecteurs \vec{E} et \vec{B} permettant de passer d'un référentiel lié au corps en mouvement à un référentiel fixe sont classiques et figurent dans tout traité général l'Electromagnétisme et d'Electricité. Par contre sont plus rarement abordées :

- les relations liées aux propriétés de polarisabilité électrique ou magnétique.
- les relations concernant les densités de charge et de courant.
- les conditions de passage aux intersurfaces séparant le corps en mouvement du milieu environnant.

A notre connaissance ces problèmes sont traités exclusivement dans quelques ouvrages et articles plus spécialisés de Arzeliès, [12] Jouguet [13] Panofsky [14] Van Bladel [15] ... Il nous a paru utile de rassembler dans cette annexe les démonstrations essentielles à la formulation des lois dans les différents référentiels. Cette formulation est faite, ici, dans le système MKSA.

I - LOIS DE L'ELECTROMAGNETISME EN L'ABSENCE DE MOUVEMENT

I.1 - EQUATIONS DE MAXWELL

Ces équations lient les vecteurs

- \vec{E} champ électrique
- \vec{D} excitation (ou induction) électrique
- \vec{B} induction magnétique
- \vec{H} excitation (ou champ) magnétique.

Elles ont la forme générale :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(a) } \text{div } \vec{D} = \rho \quad \text{(b)} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{(c) } \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{(d)} \end{array} \right.$$

L'équation (a) exprime la loi de Faraday, \vec{E} est le champ électrique total (somme du champ électromoteur d'induction, créé par la variation temporelle de \vec{B} , et éventuellement du champ électrostatique).

L'équation (b) traduit le théorème de Gauss.

L'équation (c), où $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ représente le courant de déplacement de Maxwell, constitue le théorème d'Ampère généralisé.

L'équation (d) exprime que le (pseudo) vecteur \vec{B} est à flux conservatif (ou encore l'inexistence de charges magnétiques).

Les densités (macroscopiques) de charge, ρ , et de courant, \vec{j} , qui sont à considérer dans les équations sont uniquement les densités "vraies",

c'est à dire du type : $\rho = \frac{dq}{dv}$

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (\text{avec } \rho \text{ densité des charges mobiles})$$

Les autres types, densités de charge et de courant liées à l'état de la matière (variations temporelles ou spatiales de polarisation ou d'aimantation), interviennent par l'intermédiaire des relations des milieux "polarisables".

I.2 - RELATIONS DANS LES MILIEUX

Les équations précédentes se complètent par les relations des milieux polarisables

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} & \text{(e) } \vec{P} \text{ polarisation électrique} \\ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} & \text{(f) } \vec{M} \text{ polarisation magnétique ou} \\ & \text{aimantation} \end{array} \right.$$

Pour les milieux linéaires, homogènes, isotropes, elles deviennent simplement :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{(g)} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad \text{(h)}$$

où ϵ et μ sont respectivement la permittivité et la perméabilité "absolues" du milieu.

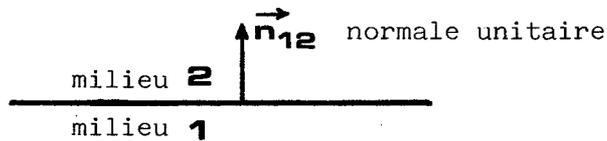
Enfin, dans les milieux conducteurs, les équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{j} = \sigma \vec{E} & \text{(i) } (\sigma \text{ conductivité}) \\ \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 & \text{(j)} \end{array} \right.$$

expriment respectivement la loi d'Ohm et la conservation de la charge électrique en régime variable.

L'équation (i) suppose que l'on néglige l'influence du champ magnétique sur les charges mobiles (effet Hall). Elle est en général vérifiée pour les conducteurs usuels où la vitesse des porteurs par rapport au milieu est faible.

I.3 - RELATIONS DE PASSAGE D'UN MILIEU A UN AUTRE



Pour \vec{E} on a $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ soit $\vec{E}_{t_2} = \vec{E}_{t_1}$

continuité de la composante tangentielle

Pour \vec{D} on a $\vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s$

continuité de la composante normale en l'absence des charges superficielles ($\rho_s = 0$)

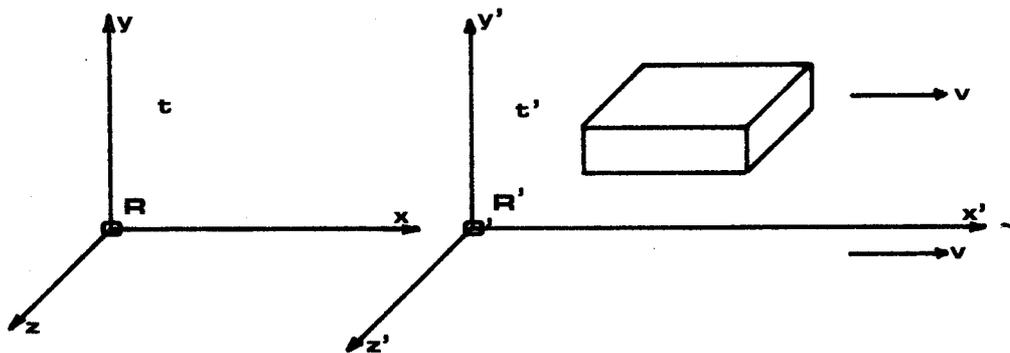
Pour \vec{B} on a $\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$ soit $\vec{B}_{n_1} = \vec{B}_{n_2}$

continuité de la composante normale

Pour \vec{H} on a $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_s$

continuité de la composante tangentielle en l'absence de courants superficiels ($\vec{j}_s = 0$)

II - ELECTROMAGNETISME EN PRESENCE DE CORPS EN MOUVEMENT



Soient R et R' deux repères galiléens

- R est le repère "fixe" (repère lié au laboratoire)
- R' est en mouvement rectiligne par rapport à R avec la vitesse constante v suivant l'axe Ox.
- le corps est immobile dans le repère R' qui constitue pour lui son système de "repos", il est mobile avec la vitesse v dans R.

Toutes les grandeurs "primées" seront relatives au repère R'.

Toutes les grandeurs "non primées" seront relatives au repère R.

II.1 - EQUATIONS DE MAXWELL DANS LES REPERES R' ET R

Dans le repère R' les équations de Maxwell prennent la forme classique indiquée en I :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E}' = - \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \quad (a) \quad \text{div } \vec{D}' = \rho' \quad (b) \\ \text{rot } \vec{H}' = \vec{j}' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} \quad (c) \quad \text{div } \vec{B}' = 0 \quad (d) \end{array} \right.$$

ρ' et \vec{j}' sont les densités de charge et de courant dans le corps, mesurées dans le repère R'.

A l'extérieur du corps, si l'on suppose l'absence de charges et de courants dans le vide, des équations s'obtiennent en faisant ρ' et $\vec{j}' = 0$

On a d'autre part dans R' les relations des milieux (linéaires)

$$\text{dans le corps} \left\{ \begin{array}{l} \vec{D}' = \epsilon \vec{E}' \quad (g) \\ \vec{H}' = \frac{1}{\mu} \vec{B}' \quad (h) \\ \vec{j}' = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{E}' \quad (i) \end{array} \right. \text{ dans le vide} \left\{ \begin{array}{l} \vec{D}' = \epsilon_0 \vec{E}' \quad (g') \\ \vec{H}' = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}' \quad (h') \\ \vec{j}' = 0 \quad (i') \end{array} \right.$$

Enfin dans ce repère les conditions de passage sont celles établies au I.3.

Dans le repère R, le caractère tensoriel des équations de Maxwell fait qu'elles conservent la même écriture :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (k) \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad (l) \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (m) \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (n) \end{array} \right.$$

Par contre les relations des milieux et les conditions de passage d'un milieu à un autre sont, dans le repère R, plus compliquées. Pour les établir et résoudre le problème dans ce repère, il est nécessaire d'exprimer les différentes grandeurs $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \rho, \vec{j}$, en fonction de leurs homologues dans R'. Ceci se fait par l'utilisation de formules de transformation qui résultent de l'application aux deux repères des principes suivants :

- le postulat de la relativité restreinte : la vitesse c de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens.
- le principe d'invariance de la charge électrique q dans ces mêmes référentiels

Nous commencerons par rappeler les formules de transformation des grandeurs "mécaniques" nécessaires à l'obtention des formules de transformation des grandeurs "électriques".

II.2 - FORMULES DE TRANSFORMATION DES GRANDEURS "MECANIQUES"

II.2.1 - Transformation des coordonnées : groupe de Lorentz

L'invariance de C s'obtient par l'application, aux coordonnées d'espace et de temps, du groupe de transformation de Lorentz.

Un point x, y, z, t , de l'espace-temps de R est lié à un point x', y', z', t' , de l'espace-temps de R' par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{\alpha} (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\alpha} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{array} \right. \quad \text{et leurs "inverses"} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\alpha} (x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{1}{\alpha} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \end{array} \right.$$

avec $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2}$ et $\beta = \frac{v}{c}$

Dans le cas où $v \ll c$, au second ordre près $\alpha \approx 1$ et on retrouve les transformations classiques de Galilée.

II.2.2 - Transformation des autres grandeurs "mécaniques"

Les transformations des coordonnées impliquent les transformations des autres grandeurs "mécaniques" :

a) transformation des distances

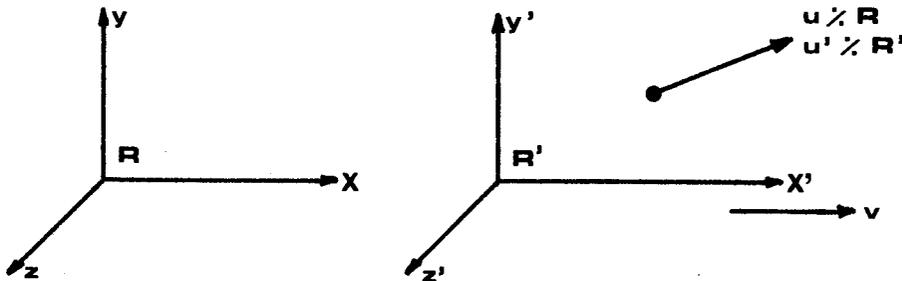
Un élément de longueur $\Delta l'$ immobile dans R' présente une longueur Δl dans R.

dans R' $\Delta l' : \Delta x' ; \Delta y' ; \Delta z'$

R $\Delta l : \Delta x = \alpha \Delta x' ; \Delta y = \Delta y' ; \Delta z = \Delta z'$

Il y a contraction des longueurs dans le sens du mouvement ($\Delta x < \Delta x'$)

b) transformation des vitesses



Dans R' le point possède la vitesse

$$\vec{u}' : u'_x, u'_y, u'_z$$

Dans R le point possède la vitesse

$$\vec{u} : u_x, u_y, u_z$$

et on a :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \quad u_y = \frac{\alpha u'_y}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \quad u_z = \frac{\alpha u'_z}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

(formules "inverses" en permutant grandeurs primées et non primées et en changeant v en $-v$)

Dans le cas particulier où \vec{u}' n'a qu'une composante parallèle à la vitesse \vec{v}

alors

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}' + \vec{v}}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}}$$

c) transformation des forces

Une particule immobile dans R', soumise à une force $\vec{F}' : F'_x, F'_y, F'_z$
est soumise dans R à une force $\vec{F} : F_x, F_y, F_z$

avec

$$F_x = F'_x \quad F_y = \alpha F'_y \quad F_z = \alpha F'_z$$

Inversement une particule immobile dans R et soumise à \vec{F} , est soumise dans R' à une force \vec{F}' avec :

$$F'_x = F_x \quad F'_y = \alpha F_y \quad F'_z = \alpha F_z$$

II.3 - TRANSFORMATION DES GRANDEURS ELECTRIQUES

II.3.1 - Transformation des vecteurs \vec{E} et \vec{B}

Ces transformations sont "classiques", nous n'en rappellerons que le principe.

Soient \vec{E}' et \vec{B}' les champs électrique et magnétique dans le repère R', et une charge électrique q immobile dans ce repère.

Dans ce repère R' la charge n'est soumise qu'à la seule force "électrique"

$$\vec{F}' = q \vec{E}'$$

Soient \vec{E} et \vec{B} les champs électrique et magnétique dans le repère R, transformés des vecteurs \vec{E}' et \vec{B}' .

Dans le repère R, la charge se déplace avec la vitesse \vec{v} et subit la force

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

somme de la force électrique et de la force Laplace.

Inversement, si on considère une charge électrique q immobile dans R

elle subit dans R une force

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

R' une force

$$\vec{F}' = q (\vec{E}' - \vec{v} \wedge \vec{B}')$$

En utilisant, pour ces deux cas, les formules de transformation s'appliquant aux forces (II,2,2c) on en déduit les transformations des champs :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E'_x \\ E_y = \frac{1}{\alpha} (E'_y + v B'_z) \\ E_z = \frac{1}{\alpha} (E'_z - v B'_y) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = B'_x \\ B_y = \frac{1}{\alpha} (B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z) \\ B_z = \frac{1}{\alpha} (B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y) \end{array} \right.$$

soit pour les résultantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \frac{\vec{E}'}{\alpha} + \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E}') \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \vec{v} \wedge \vec{B}' \\ \vec{B} = \frac{\vec{B}'}{\alpha} + \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{B}') \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} \vec{v} \wedge \vec{E}' \end{array} \right.$$

(les formules inverses s'obtiennent en permutant grandeurs primées et non primées et en changeant \vec{v} en $-\vec{v}$)

Au deuxième ordre près les équations deviennent avec $\alpha = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}' - \vec{v} \wedge \vec{B}' \\ \vec{B} = \vec{B}' + \vec{v} \wedge \vec{E}' \end{array} \right.$$

II.3.2 - Transformation des vecteurs \vec{P} et \vec{M} (en fonction de leurs homologues \vec{P}' et \vec{M}')

Comme \vec{E} et \vec{B} , ils constituent un tenseur et sont de ce fait, susceptibles des mêmes transformations.

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \frac{\vec{P}'}{\alpha} + \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{P}') \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} \vec{v} \wedge \vec{M}' \\ \vec{M} = \frac{\vec{M}'}{\alpha} + \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{M}') \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \vec{v} \wedge \vec{P}' \end{array} \right.$$

Au deuxième ordre près :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \vec{P}' + \vec{v} \wedge \vec{M}' \\ \vec{M} = \vec{M}' - \vec{v} \wedge \vec{P}' \end{array} \right.$$

Les polarisations électrique et magnétique sont donc des quantités relatives à l'état de mouvement.

II.3.3 - Transformation des vecteurs \vec{D} et \vec{H} (en fonction de \vec{D}' et \vec{H}')

Si pour les milieux en mouvement, on conserve aux expressions définissant les vecteurs \vec{D} et \vec{H} à partir des champs \vec{E} et \vec{B} et des polarisations \vec{P} et \vec{M} , la même forme que dans les milieux immobiles, on a encore dans le repère R :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

En remplaçant \vec{E} , \vec{P} , \vec{B} , \vec{M} , définis dans R par leurs expressions en fonction de \vec{E}' , \vec{P}' , \vec{B}' , \vec{M}' , définis dans R' (c.f II.3.1. et II.3.2) il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \frac{\vec{D}'}{\alpha} + \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{D}') \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \vec{v} \wedge \vec{H}' \\ \vec{H} = \frac{\vec{H}'}{\alpha} + \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{H}') \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} \vec{v} \wedge \vec{D}' \end{array} \right.$$

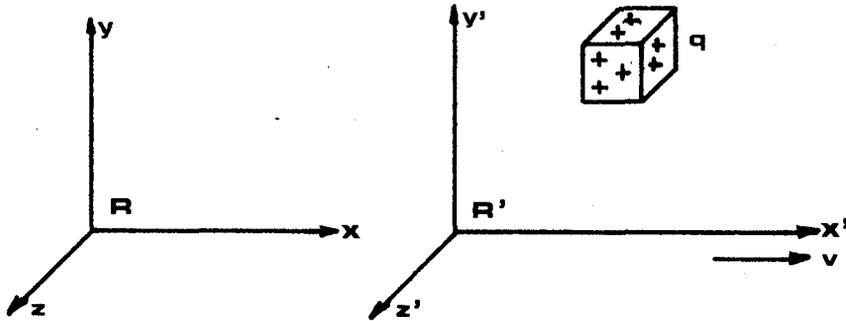
soit au deuxième ordre près

$$\begin{cases} \vec{D} = \vec{D}' - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{H}' \\ \vec{H} = \vec{H}' + \vec{v} \wedge \vec{D}' \end{cases}$$

Ces formules auraient pu s'établir immédiatement en appliquant directement au tenseur \vec{D}, \vec{H} des transformations de même type que pour \vec{E} et \vec{B} .

II.3.4. - Transformation des densités de charge ρ et de courant \vec{j}

a) densité de charge fixe



Dans R' q est immobile et occupe le volume

$$dV' = dx' dy' dz'$$

Il en résulte une densité de charge ρ' telle que $q = \rho' dx' dy' dz'$

Dans R la même charge q (invariance de la charge) occupe le volume $dV = dx dy dz$ avec la densité ρ telle que $q = \rho dx dy dz$

D'après le II.2.2 a :

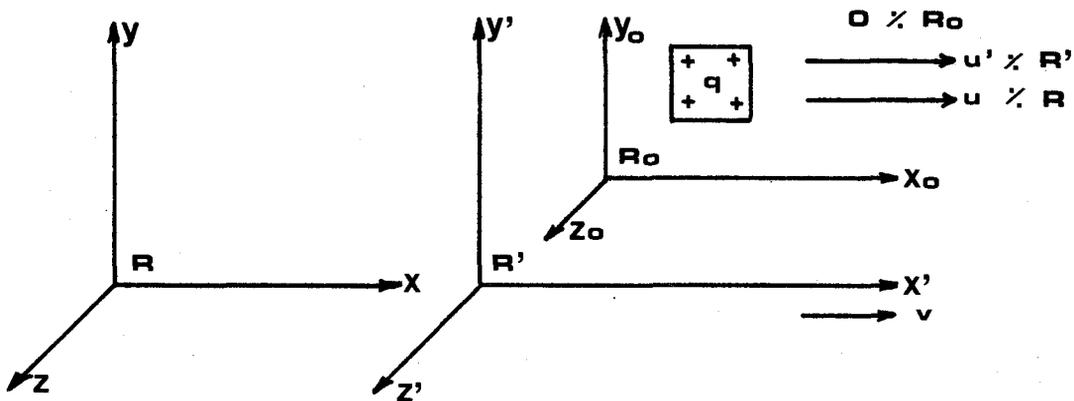
$$dx = \alpha dx' \quad (\text{contraction des longueurs}) \quad dy = dy' \quad dz = dz'$$

d'où
$$q = \rho \alpha dx' dy' dz' = \rho' dx' dy' dz'$$

donc
$$\rho = \frac{1}{\alpha} \rho' \quad (\text{au deuxième ordre } \rho = \rho')$$

Il y a de plus dans R une densité de courant $\vec{j} = \rho \vec{v}$ (car q est mobile dans ce repère)

b) Densité de charge mobile, densité de courant



Dans R' la charge q est mobile avec la vitesse \vec{u}' . Elle présente dans ce repère une densité ρ' et il lui correspond une densité de courant $\vec{j}' = \rho' \vec{u}'$

Dans R la charge q est mobile avec la vitesse \vec{u} . Elle présente dans ce repère une densité ρ et il lui correspond une densité de courant $\vec{j} = \rho \vec{u}$

On cherche à établir les relations liant ρ et \vec{j} à ρ' et \vec{j}'
 Pour simplifier, nous avons supposé \vec{u}' et \vec{u} parallèles à \vec{v}

Soit R_0 le repère dans lequel la charge est immobile et présente la densité ρ_0

D'après ce qui précède (I.3.4.a) on a :

$$\rho = \frac{1}{\alpha} \rho_0 \quad \text{et} \quad \rho' = \frac{1}{\alpha'} \rho_0$$

(avec $\alpha = \sqrt{1 - b^2}$, $\vec{b} = \frac{\vec{u}}{c}$ et $\alpha' = \sqrt{1 - b'^2}$, $\vec{b}' = \frac{\vec{u}'}{c}$ idem α et β)

D'où
$$\rho = \rho' \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Les formules de transformation des vitesses du II.2.2.B donnent :

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}' + \vec{v}}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}} \quad \text{soit} \quad \vec{b} = \frac{\vec{u}}{c} = \frac{\vec{b}' + \vec{\beta}}{1 + \beta b'}$$

$$\text{et} \quad \alpha = \sqrt{1 - b^2} = \frac{\alpha \alpha'}{1 + \beta b'}$$

En reportant il vient :

$$\rho = \rho' \cdot \frac{1 + \beta b'}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} (\rho' + \beta b' \rho')$$

soit encore, puisque $\vec{j}' = \rho' \vec{u}'$,
$$\rho = \frac{1}{\alpha} (\rho' + \frac{v}{c^2} \cdot \vec{j}')$$

Cette densité ρ est mobile avec la vitesse \vec{u} dans le repère R, il lui correspond la densité de courant $\vec{j} = \rho \vec{u}$, en remplaçant ρ et \vec{u} par leurs expressions en fonction ρ' , \vec{j}' et \vec{u}' , il vient :

$$\vec{j} = \frac{1}{\alpha} (\vec{j}' + \rho' \vec{v})$$

en résumé on a dans R'.

dans R

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= \rho' \\ \vec{j}' &= \rho' \vec{u}' \\ \rho &= \frac{1}{\alpha} (\rho' + \frac{v}{c^2} \cdot \vec{j}') \\ \vec{j} &= \rho \vec{u} = \frac{1}{\alpha} (\vec{j}' + \rho' \vec{v}) \end{aligned} \right\}$$

* Généralisation : si la charge possède une vitesse \vec{u}' (et \vec{u}) de direction quelconque dans le trièdre, on montre aisément que les formules donnant ρ et la composante de \vec{j} parallèle à la vitesse \vec{v} sont celles qu'on vient d'établir alors que les composantes de \vec{j} perpendiculaires à \vec{v} sont invariantes :

$$\begin{cases} j_x &= \frac{1}{\alpha} (j'_x + \rho' v) \\ j_y &= j'_y \\ j_z &= j'_z \end{cases}$$

soit pour les résultantes

$$\vec{j} = \vec{j}' - \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}'}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} \vec{v} \rho' \quad \text{(A)}$$

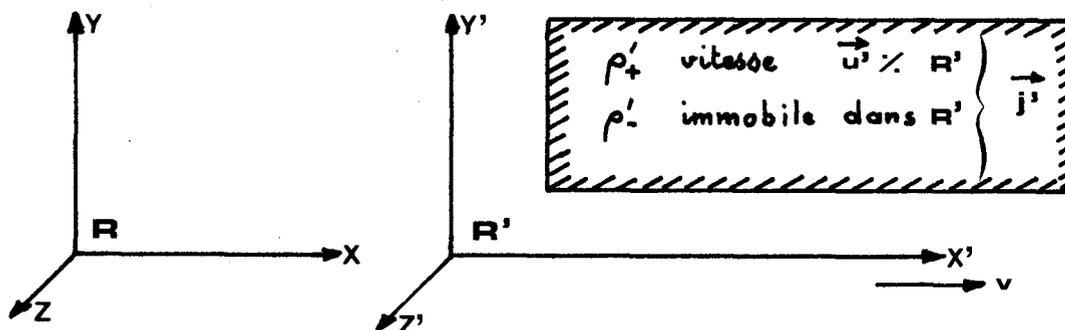
et encore

$$\rho = \frac{1}{\alpha} \left(\rho' + \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}'}{c^2} \right) \quad \text{(B)}$$

Au second ordre près

$$\begin{cases} \vec{j} &= \vec{j}' + \frac{\vec{v}}{c^2} \rho' \\ \rho &= \rho' + \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}'}{c^2} \end{cases}$$

II.3.5 - Cas particulier des conducteurs non chargés



C'est le cas des conducteurs usuels, il n'y a pas, pour eux, de liaison entre la densité de charge et la densité de courant : il peut y avoir densité de courant avec une densité de charge globalement nulle. Examinons ce qui se passe lorsqu'ils sont en mouvement.

Dans le repère R' où le conducteur est immobile on a :

une densité ρ'_- immobile et une densité ρ'_+ se déplaçant à la vitesse \vec{u}'

soient une densité de charge totale

$$\rho' = \rho'_+ - \rho'_- = 0$$

une densité de courant

$$\vec{j}' = \rho'_+ \vec{u}'$$

A la densité ρ'_- correspond dans R la densité $\rho_- = \frac{1}{\alpha} \rho'_-$ (c.f II.3.4.a. transformation des densités de charges fixes)

à la densité ρ'_+ correspond dans R la densité $\rho_+ = \frac{1}{\alpha} \left(\rho'_+ + \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}'}{c^2} \right)$ (c.f II.3.4 b transformation des densités de charges mobiles)

Dans R ρ_- se déplace avec la vitesse \vec{u}
 ρ_+ se déplace avec la vitesse \vec{v} (transformée dans R de \vec{u}')

on a finalement dans R :

une densité de charge globale $\rho = \rho_+ - \rho_- = \frac{1}{\alpha} \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}'}{c^2}$ (non nulle)
 une densité de courant globale $\vec{j} = \rho_+ \vec{u} - \rho_- \vec{v}$

On peut faire apparaître dans ce courant le courant de conduction dans le corps, qui existe dans le repère R (càd faisant intervenir la vitesse des porteurs par rapport au corps, vitesse mesurée dans R)

Ce courant sera noté \vec{j}_c : il est uniquement créé par ρ_+ dont la vitesse relative par rapport au corps est égale, dans R, à $\vec{u} - \vec{v}$ (\vec{u} et \vec{v} étant tous deux mesurés dans R, il est inutile d'utiliser des formules de transformation)

on a $\vec{j}_c = \rho_+ (\vec{u} - \vec{v})$

Le courant total, dans R, est :

soit
$$\vec{j} = \rho_+ (\vec{u} - \vec{v}) + \rho_+ \vec{v} - \rho_- \vec{v}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_c + \rho \vec{v}$$

Il apparaît comme la somme de deux termes :

- le courant de conduction $\vec{j}_c = \rho_+ (\vec{u} - \vec{v})$

ses composantes sont

$$\begin{cases} j_{cx} = \alpha j'_x \\ j_{cy} = j'_y \\ j_{cz} = j'_z \end{cases}$$

et sa résultante

$$\vec{j}_c = \vec{j}' + \frac{\vec{v}}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{j}') (\alpha - 1)$$

(il est légèrement différent du courant de conduction dans R')

- le courant de convection

$$\rho \vec{v} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \vec{j}' \right) \cdot \vec{v}$$

du au fait que dans R le conducteur (mobile) apparaît avec une charge globale non nulle.

Finalement dans le repère R on a :

- une densité de charge globale $\rho = \frac{1}{\alpha} \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}'}{c^2}$ non nulle

- une densité de courant totale

$$\vec{j} = \vec{j}_c + \rho \vec{v} = \vec{j}' + \frac{\vec{v}}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{j}') (\alpha - 1) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \vec{j}' \right) \cdot \vec{v}$$

soit après regroupement

$$\vec{j} = \vec{j}' - \frac{\vec{v}}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{j}') \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)$$

Remarques :

1) on aurait pu obtenir immédiatement, sans tous ces calculs, les expressions de ρ et \vec{j} par l'utilisation des formules **A** et **B** du II.3.4.b, en y faisant simplement $\rho' = 0$. Bien qu'elles aient été démontrées en supposant dans les deux repères une liaison entre \vec{j} et ρ , elles conduisent donc dans le cas d'un conducteur (où cette liaison n'existe pas) aux résultats corrects.

2) si l'on veut calculer rigoureusement le champ magnétique dans le repère R c'est le courant total qu'il faut considérer et pas seulement le courant de conduction \vec{j}_c . On aura dans ce repère :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{avec } \vec{j} = \vec{j}_c + \rho \vec{v}$$

$$\text{et } \text{div } \vec{D} = \rho \quad \text{avec } \rho \text{ non nulle.}$$

3) au second ordre près $\alpha^2 = 1$

on a alors

$$\vec{j} = \vec{j}_c = \vec{j}'$$

Le courant de convection est négligeable, le courant total dans R se limite au courant de conduction (dans R) d'ailleurs égal dans ce cas au courant de conduction dans R'

$$\text{et } \rho = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}'}{c^2}$$

la densité de charge n'est pas nulle ; même au second ordre près le corps apparaît chargé, mais en pratique sa valeur reste faible et on n'en tient jamais compte.

II.4 - FORMULES DE TRANSFORMATION DES RELATIONS DES MILIEUX

Les formules de transformation des différentes grandeurs du II.3 permettent d'établir les formules de transformation des relations des milieux.

II.4.1 - Loi d'Ohm

Dans le système de repos R' du corps on a (en négligeant l'effet Hall)

$$\vec{j}' = \sigma \vec{E}' \quad \text{et} \quad \vec{j}' = \rho'_+ \vec{u}'$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} j'_{x'} = \rho'_+ u'_{x'} = \sigma E'_{x'} = \sigma E_x \\ j'_{y'} = \rho'_+ u'_{y'} = \sigma E'_{y'} = \sigma \frac{1}{\alpha} (E_y - v B_z) \\ j'_{z'} = \rho'_+ u'_{z'} = \sigma E'_{z'} = \sigma \frac{1}{\alpha} (E_z + v B_y) \end{array} \right.$$

(σ étant considéré comme un invariant)

Dans le repère R, on a pour le courant de conduction défini précédemment

(II.3.5) :
$$\vec{j}_\sigma = \rho_+ (\vec{u} - \vec{v})$$

soit

$$\begin{cases} j_{\sigma x} = \rho_+ (u_x - v) \\ j_{\sigma y} = \rho_+ u_y \\ j_{\sigma z} = \rho_+ u_z \end{cases}$$

Les relations entre \vec{j}_σ et \vec{j}' ont été établies au II.3.5

$$j_{\sigma x} = \alpha j'_{x'} \quad j_{\sigma y} = j'_{y'} \quad j_{\sigma z} = j'_{z'}$$

En identifiant il vient :

$$\begin{cases} j_{\sigma x} = \sigma \alpha E_x \\ j_{\sigma y} = \sigma \frac{1}{\alpha} (E_y - v B_z) \\ j_{\sigma z} = \sigma \frac{1}{\alpha} (E_z + v B_y) \end{cases}$$

soit pour les résultantes

$$\vec{j}_\sigma = \sigma \cdot \frac{1}{\alpha} \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E}) \right]$$

au second ordre près

$$\begin{aligned} \vec{j}_\sigma &= \sigma \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right] \\ \text{soit } \vec{j}_\sigma &= \sigma \vec{\mathcal{E}} \quad \text{en posant} \quad \vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

II.4.2 - Relations des milieux polarisables

Relations entre \vec{B} et \vec{H} et \vec{D} et \vec{E} pour les milieux en mouvement.

a) relation entre \vec{D} et \vec{E}

Dans le référentiel de repos R' on a (milieux l.h.i.)

$$\vec{D}' = \epsilon \vec{E}'$$

soit $D'_{x'} = \epsilon E'_{x'} \quad D'_{y'} = \epsilon E'_{y'} \quad D'_{z'} = \epsilon E'_{z'}$

En utilisant les formules de transformation inverses du II.3.3. et II.3.1.

exprimant \vec{D}' en fonction de \vec{D} et \vec{H} ainsi que \vec{E}' en fonction de \vec{E} et \vec{B}

et en considérant ϵ comme un invariant, il vient :

$$\vec{D} + \frac{1}{c^2} (\vec{v} \wedge \vec{H}) = \epsilon \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right]$$

Donc en mouvement \vec{D} ne dépend plus seulement de \vec{E} mais aussi de \vec{B} et \vec{H}

On ne peut évidemment plus définir une permittivité dans R pour le milieu en mouvement. Cependant en posant :

$$\vec{\mathcal{D}} = \vec{D} + \frac{1}{c^2} (\vec{v} \wedge \vec{H})$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{on peut écrire} \quad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}$$

b) relation entre \vec{B} et \vec{H}

De la même manière qu'en (a) on peut établir la relation

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{\vec{\mathcal{B}}}{\mu}$$

avec

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{H} - \vec{v} \wedge \vec{D} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{B}} = \vec{B} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2}$$

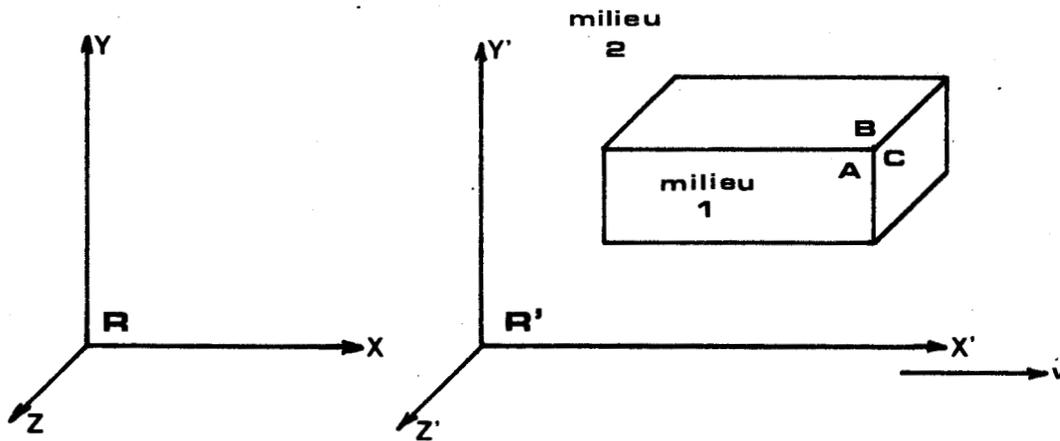
ainsi que les relations

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}} \quad \text{avec} \quad \vec{\mathcal{M}} = \vec{M} + \vec{v} \wedge \vec{P}$$

et

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}} \quad \text{avec} \quad \vec{\mathcal{P}} = \vec{P} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{M}}{c^2}$$

II.5 - FORMULES DE TRANSFORMATION DES CONDITIONS DE PASSAGE



Nous exposerons le principe pour une intersurface parallèle puis perpendiculaire à la vitesse.

Pour simplifier, nous supposerons que le corps ne possède dans son repère de repos R', ni charges superficielles, ni courants superficiels.

II.5.1 - Cas d'une intersurface parallèle à la vitesse et au plan xoy
(face A)

Dans le repère R', les conditions de passage sont classiques.

- 1) conservation des composantes tangentes de \vec{E}' : $E'_{x'2} = E'_{x'1}$ (1a) $E'_{y'2} = E'_{y'1}$ (1b)
- 2) conservation des composantes tangentes de \vec{H}' : $H'_{x'2} = H'_{x'1}$ (2a) $H'_{y'2} = H'_{y'1}$ (2b)
- 3) conservation de la composante normale de \vec{B}' : $B'_{z'2} = B'_{z'1}$ (3)
- 4) conservation de la composante normale de \vec{D}' : $D'_{z'2} = D'_{z'1}$ (4)

En transformant toutes ces grandeurs dans le repère R :

$$\begin{aligned}
 (1a) \rightarrow E_{x_2} &= E_{x_1} & (1b) \rightarrow \frac{1}{\alpha} (E_{y_2} - v B_{z_2}) &= \frac{1}{\alpha} (E_{y_1} - v B_{z_1}) \\
 (2a) \rightarrow H_{x_2} &= H_{x_1} & (2b) \rightarrow \frac{1}{\alpha} (H_{y_2} + v D_{z_2}) &= \frac{1}{\alpha} (H_{y_1} + v D_{z_1}) \\
 (3) \rightarrow \frac{1}{\alpha} (B_{z_2} - \frac{v}{c^2} E_{y_2}) &= \frac{1}{\alpha} (B_{z_1} - \frac{v}{c^2} E_{y_1}) \\
 (4) \rightarrow \frac{1}{\alpha} (D_{z_2} + \frac{v}{c^2} H_{y_2}) &= \frac{1}{\alpha} (D_{z_1} + \frac{v}{c^2} H_{y_1})
 \end{aligned}$$

De 1 (b) on tire (par exemple) E_{y_2} qu'on reporte dans (3)

il vient $B_{z_2} = B_{z_1}$

et par suite $E_{y_2} = E_{y_1}$

De même de 2 (b) on tire H_{y_2} qu'on reporte dans (4)

il vient $D_{z_2} = D_{z_1}$ d'où $H_{y_2} = H_{y_1}$

Finalement dans le repère R, pour cette intersurface // à \vec{v} (avec \vec{j}_s et $\rho'_s = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_{x_2} = E_{x_1} & E_{y_2} = E_{y_1} & \text{conservation des composantes tangentielles de } \vec{E} \\ H_{x_2} = H_{x_1} & H_{y_2} = H_{y_1} & \text{conservation des composantes tangentielles de } \vec{H} \\ B_{z_2} = B_{z_1} & & \text{conservation de la composante normale de } \vec{B} \\ D_{z_2} = D_{z_1} & & \text{conservation de la composante normale de } \vec{D} \end{array} \right.$$

Les conditions sont les mêmes que dans R'.

On montrerait qu'il en est de même pour l'intersurface xoz (face B) également parallèle à la vitesse.

II.5.2 - Cas d'une intersurface perpendiculaire à la vitesse (plan yoz face C)

Dans R' on a :

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ conservation des composantes tangentielles de } \vec{E}' &: E'_{y_2} = E'_{y_1} \text{ (1a)} & E'_{z_2} = E'_{z_1} \text{ (1b)} \\
 (2) \text{ conservation des composantes tangentielles de } \vec{H}' &: H'_{y_2} = H'_{y_1} \text{ (2a)} & H'_{z_2} = H'_{z_1} \text{ (2b)} \\
 (3) \text{ conservation de la composante normale de } \vec{B}' &: B'_{x_2} = B'_{x_1} \text{ (3)} \\
 (4) \text{ conservation de la composante normale de } \vec{D}' &: D'_{x_2} = D'_{x_1} \text{ (4)}
 \end{aligned}$$

En transformant dans R :

$$\begin{aligned}
 (1a) \rightarrow E_{y_2} - v B_{z_2} &= E_{y_1} - v B_{z_1} & (1b) \rightarrow E_{z_2} + v B_{y_2} &= E_{z_1} + v B_{y_1} \\
 (2a) \rightarrow H_{y_2} + v D_{z_2} &= H_{y_1} + v D_{z_1} & (2b) \rightarrow H_{z_2} - v D_{y_2} &= H_{z_1} - v D_{y_1} \\
 (3) \rightarrow B_{x_2} &= B_{x_1} \\
 (4) \rightarrow D_{x_2} &= D_{x_1}
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, s'il y a encore continuité pour les composantes normales de \vec{B} et \vec{D} , par contre pour les composantes tangentielles la relation de passage est plus compliquée.

II.5.3 - Formules générales des conditions de passage

(cas où les densités ρ'_s et \vec{j}'_s ne sont pas nulles)

Dans R' elles sont classiques :

Avec \vec{n}_{12} vecteur normal unitaire dirigé du milieu 1 vers le milieu 2 on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}'_2 - \vec{E}'_1) = 0 \\ \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}'_2 - \vec{B}'_1) = 0 \\ \vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}'_2 - \vec{D}'_1) = \rho'_s \\ \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}'_2 - \vec{H}'_1) = \vec{j}'_s \end{array} \right.$$

Dans R elles deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) - (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v})(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \\ \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) + (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v})(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \vec{j}_s \end{array} \right.$$

Pour les composantes normales de \vec{B} et \vec{D} la forme est la même que dans R' , par contre pour les composantes tangentielles de \vec{E} et \vec{H} , la forme est différente sauf dans le cas où $\vec{n}_{12} \cdot \vec{v} = 0$ c'est à dire pour les intersurfaces parallèles à la vitesse.

B I B L I O G R A P H I E

- 1 O.K GASHUS , S.B RANADE.
Courants de Foucault dans une feuille conductrice mince.
R.G.E Tome 80 n° 2 Février 1971 p. 95 - 98.

- 2 B. de FLEURY , M. POLOUJADOFF , J. ROBERT.
Contribution à l'étude de l'effet d'extrémité dans les machines
linéaires à induction et au calcul du freinage par un aimant.
R.G.E Tome 80 n° 2 Février 1971 p. 83 - 89.

- 3 J.C. SABONNADIÈRE , M. POLOUJADOFF.
Détermination des lignes de courant et caractérisation de l'effet
de bord.
R.G.E Tome 80 n° 1 Janvier 1971 p. 34 - 38.

- 4 A. WIART.
Séparation des variables dans l'étude des courants de moteurs
linéaires ou rotatifs à courants de Foucault.
R.G.E Tome 80 n° 1 Janvier 1971 p. 20 - 28.

- 5 A. WIART , Y. MACHEFERT - TASSIN.
Freins linéaires à courant de Foucault sur rail.
R.G.E Tome 82 n° 5 Mai 1973 p. 356 - 359.

- 6 M. POLOUJADOFF , Ph. REYX.
Méthode intermédiaire pour l'analyse d'un moteur à induction linéaire.
R.G.E Tome 80 n° 2 Février 1971 p. 100 - 104.

- 7 M. KANT , A. MOUILLET , J.M. SCHEUER.
Etude théorique et expérimentale des enroulements des moteurs
linéaires à induction.
R.G.E Tome 80 n° 1 Janvier 1971 p. 14 - 19.

- 8 M. KANT , R. BONNEFILLE.
Moteur linéaire à induction.
Techniques de l'Ingénieur - D 551 p. 1 - 11.

- 9 E. DURAND.
Magnétostatique - Masson et Cie PARIS 1968.
- 10 J. CITERNE.
Méthodes des différences finies. Cours D.E.A. 1976. UNIVERSITE LILLE I.
- 11 R. GABILLARD.
Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs.
Cours photocopié - Institut Radiotechnique de LILLE.
- 12 H. ARZELIES.
Milieux conducteurs ou polarisables en mouvement.
Gauthiers - Villars PARIS 1959.
- 13 M. JOUGUET.
Traité d'Electricité théorique.
Gauthiers - Villars PARIS 1968.
- 14 PANOFSKY - PHILLIPS.
Classical electricity and magnetism.
Addison - Wesley Publishing Company INC.
- 15 J. VAN BLADEL.
Electromagnetic fields in the Presence of Rotating Bodies.
Proceedings of the I E E E, Vol. 64, N° 3, March 1976 p. 301 - 317.
- 16 G. SEGUIER.
Nouveaux essais sur la tachymétrie linéaire. Rapport interne
UNIVERSITE LILLE I.

