N° d'ordre : 837

50376
1980
74

50376
1980
74

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

par

Jacques PHILIPP

CALCUL PAR UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS DE L'INFLUENCE D'UNE CAVITÉ SUR UN ÉCOULEMENT DE FLUIDE VISQUEUX AU VOISINAGE D'UN POINT D'ARRÊT

Membres du Jury : M. PARSY, Président

MM. DYMENT, MIGNOT — Rapporteurs

MM. THOMAS, DEBUS — Examinateurs

Soutenue le 30 Juin 1980

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur PARSY qui me fait l'honneur de présider le jury, ainsi que Messieurs THOMAS et DEBUS qui ont accepté d'en faire partie.

Ma reconnaissance va à Monsieur DYMENT, qui m'a proposé ce sujet de recherche et à Monsieur MIGNOT, pour l'aide morale et les conseils qu'ils n'ont cessés de me prodiguer.

Je remercie particulièrement Monsieur Y. TINEL du C.I.T.I (Centre Universitaire de Traitement et de l'Information) qui m'a aidé à résoudre bien des problèmes informatiques, les opératrices et opérateurs du C.I.T.I. pour la gentillesse et la compétence dont ils ont toujours fait preuve.

Mes remerciements vont également à Madame TATTI et Madame GOUTHIER qui ont assuré la frappre du manuscrit, ainsi qu'au personnel de l'imprimerie.

Enfin, je remercie mes parents pour les encouragements qu'ils m'ont toujours apportés.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 : MODELE MATHEMATIQUE ET MISE EN EQUATIONS.

1.1. Les équations adimensionnelles du problème I-1

1.2. Formulation (ω,ψ) et équation de la pression..... I-2

1.3. L'écoulement de base (Hiemenz). I-4

1.4. Conditions aux frontières et formulation définitive du problème I-7

1.4.1. Formulation définitive du problème en (ω,ψ). I-7

1.4.2. Première approche du problème en (ω,ψ) I-8

1.4.3. Formulation du problème pour la pression I-9

CHAPITRE 2 : FORMULATIONS VARIATIONNELLES ET RESOLUTION DES PROBLEMES VARIATIONNELS.

INTRODUCTION AU CHAPITRE 2. ..... II-1

INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS. II-3

A] CALCUL DE (ω,ψ) II-7

2.1. Cadre fonctionnel. Existence et unicité de la solution des équations de Navier-Stokes II-7

2.2. Méthodes itératives de linéarisation. II-8

2.2.1. Conditions aux limites homogènes. II-8

2.2.2. Conditions aux limites non homogènes. II-10

2.2.3. Description de la méthode itérative de linéarisation... II-10

2.3. Résolution par dualisation du problème interne. II-11

2.3.1. Le problème continu. II-11

2.3.2. Algorithme de résolution au problème continu. II-13

2.4. Le problème discret. II-14

2.5. Justification de l'emploi de la méthode. II-15

B] LE CALCUL DE LA PRESSION. II-17

2.6. Le problème abstrait. II-17

2.7. Le problème continu. II-18

2.8. Le problème discret. II-19

CHAPITRE 3 - MISE EN OEUVRE NUMERIQUE

INTRODUCTION AU CHAPITRE 3 ..... III-1

NOTATIONS..... III-2

A] GENERALITES SUR LA METHODE D'ELEMENTS FINIS UTILISES. III-3

3.1. La méthode d'éléments finis associée au problème. III-4

3.1.1. Construction de la base de V_h III-4

3.1.2. Formation du système. III-7

3.1.2.1. Formation de la matrice élémentaire de rigidité. III-11

3.1.2.2. Formation du second membre élémentaire. ... III-12

3.1.3. Prise en compte des conditions aux limites. III-14

3.1.4. Résolution du système linéaire. III-15

B] LE CALCUL DE (ω_h, ψ_h) et de P_h et estimation d'erreur. III-18

3.2. Le calcul de (ω_h, ψ_h) III-18

3.2.1. (ω_h, ψ_h). III-18

3.2.2. Estimation d'erreur. III-19

3.3. Le calcul de la pression. III-20

3.3.1. La pression. III-20

3.3.2. Estimation d'erreur. III-23

C] MISE EN OEUVRE SUR ORDINATEUR III-24

3.4. La géométrie. III-24

3.5. Description des différentes structures de données à fournir pour le calcul. .....

CHAPITRE 4 : RESULTATS NUMERIQUES.

INTRODUCTION. IV-1

NOTATIONS. IV-2

A] LES RESULTATS AVEC SCHEMATISATION DE LA CAVITE. IV-4

4.1. La fonction de courant et le vecteur tourbillon. IV-4

4.1.1. Résultats numériques. IV-4

4.1.2. Contrôle de NSPSOM. IV-4

4.2. La pression. IV-7

4.2.1. Contrôle de la crédibilité de la méthode. IV-7

4.2.2. Etude de l'écoulement perturbé. IV-10

B] LES RESULTATS AVEC LA CAVITE. IV-11

4.3. La fonction de courant et le vecteur tourbillon. IV-11

4.3.1. Paramètres numériques utilisés. IV-11

4.3.2. Occupation de la mémoire centrale et temps de calcul. IV-12

4.4. La pression. IV-14

C] VISUALISATION IV-15

Lignes de courant. IV-16

Lignes isotourbillons. IV-27

Champ des vecteurs vitesses. IV-39

Lignes isobares. IV-52

D] CONCLUSIONS. IV-70

4.5. Conclusions numériques. IV-70

4.5.1. Le module NSPSOM. IV-70

4.5.2. Le module NSPROP IV-70

4.6. Conclusions mécaniques. IV-70

4.6.1. Etude avec schématisation de la cavité. IV-70

4.6.1.1. Les lignes de courant. IV-70

4.6.1.2. Les isotourbillons. IV-71

4.6.1.3. Le champ des vecteurs vitesses. IV-72

4.5.1.4. Les isobares. IV-72

4.6.2. Etude avec la cavité. IV-72

4.6.2.1. Les lignes de courant. IV-72

4.6.2.2. Les isotourbillons. IV-72

4.6.2.3. Champ des vecteurs vitesses. IV-73

4.6.2.4. Modélisation de la cavité par une fonction porte de vitesse IV-73

4.5.2.5. Les isobares. IV-75

4.5.2.6. Nombre de Reynolds caractéristique. IV-77

4.7. Perspectives ouvertes. IV-79

BIBLIOGRAPHIE IV-80

ANNEXE 1 : La table de Hiemenz IV-82

ANNEXE 2 : Le maillage. IV-83

ANNEXE 3 : BROCHURE D'UTILISATION DU MODULE NSPSOM IV-88

"RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES - FORMULATION (ω,ψ)"

1ère Partie : BUTS ET LIMITES D'UTILISATION. 4

2ème Partie : MISE EN OEUVRE 10

3ème Partie : PARAMETRES IMPORTANTS ET RESULTATS NUMERIQUES. 22

4ème Partie : EXEMPLES D'UTILISATION. 28

Bibliographie. 84

Table des matières. 86

ANNEXE 4 : BROCHURE D'UTILISATION DU MODULE NSPROP .....

"*Calcul de la pression à partir de* (ω, ψ) 1

Bibliographie. 29

AVANT PROPOS

Cette recherche en mécanique a été faite par des méthodes numériques. Pour que cet ouvrage puisse être lu par les mécaniciens et les numériciens, on a rappelé, à chaque fois que c'était nécessaire, des notions qui sont triviales pour les uns et non triviales pour les autres.

On trouvera au chapitre 1 et à la fin du chapitre 4 les résultats mécaniques.

On donne au chapitre 2 une justification théorique des méthodes numériques employée.

On décrit au chapitre 3 leur mise en oeuvre sur ordinateur.

Les résultats numériques figurent au chapitre 4.

Les brochures d'utilisations des programmes utilisés (NSPSOM et NSPROP) figurent annexe 3 et 4. Celles-ci forment un tout et peuvent être lues séparément.

NOTATIONS

Ω le domaine de calcul de frontière $\Gamma = \partial\Omega$

(x,y) ou (x_1,x_2) suivant le cas les coordonnées

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ le vecteur vitesse

Ψ la fonction de courant

$\vec{\omega}$ le vecteur tourbillon

U_o la vitesse caractéristique du problème

ν la viscosité cinématique, μ la viscosité du fluide

L une longueur caractéristique du problème

$Re = \frac{U_o L}{\nu}$ un nombre de Reynolds caractéristique

p la pression

ρ la masse volumique

γ l'accélération

$\vec{\nabla}p$ le gradient de la fonction p

$\text{div}\ \vec{u}$ la divergence du vecteur $\vec{u}$

$\text{rot}\ \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ le rotationnel de $\vec{u}$

Δ l'opérateur Laplacien

Les variables non adimensionnées sont surmontées d'un astérisque.

L'indice zéro se rapportera aux valeurs sur la frontière Γ.

INTRODUCTION

POSITION DU PROBLEME

But de l'étude.

Il s'agit de l'étude de la perturbation produite par une cavité percée dans une paroi sur l'écoulement autour d'un obstacle donné.

On sait que la mesure de la pression sur un obstacle solide plongé dans un écoulement s'effectue par l'intermédiaire d'un orifice percé à la paroi.

L'objectif général est de déterminer la différence entre la pression cherchée qui existerait en absence d'orifice, et la pression mesurée effectivement.

L'approche théorique du problème posé est extrémement difficile. Nous nous proposons de l'aborder par le calcul, en nous limitant au mouvement plan.

Le cas choisi est celui de l'écoulement au voisinage d'un point d'arrêt. Il y a plusieurs raisons à cela :

1) la solution exacte existe : elle a été obtenue par Hiemenz ([1] p. 71) ; on part donc d'un écoulement de base connu que l'on va perturber en aménageant une cavité qui sera rectangulaire, de longueur ℓ, et placée à une distance X du point d'arrêt O. Si D est le rayon de courbure du bord d'attaque, on prendra :

$$D >> X >> \ell$$

de manière qu'à l'échelle des dimensions de la cavité, l'écoulement soit bien celui de Hiemenz et qu'à l'échelle de X, la paroi puisse être considérée comme plane (fig. 1).

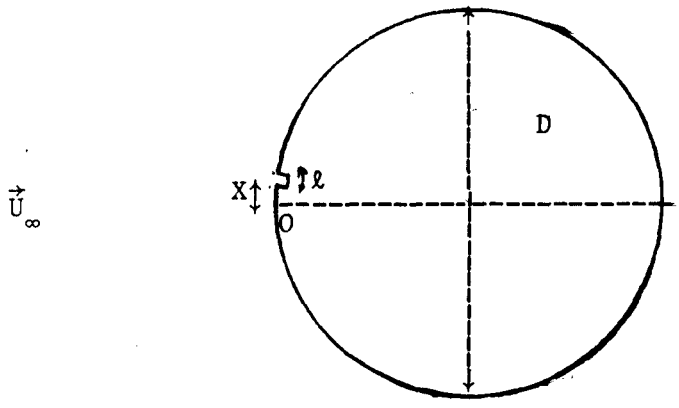


figure 1.

2) L'écoulement considéré est laminaire et stationnaire ce qui correspond à la réalité ; le même calcul effectué sur toute autre portion de l'obstacle serait sans application physique car l'écoulement y est toujours turbulent .

3) Ce sont les erreurs sur la mesure de la pression faites au voisinage d'un point d'arrêt qui ont la plus grande répercussion sur la détermination de la trainée de forme d'un obstacle.

Localement, le problème se présente de la manière suivante :

On va calculer l'écoulement plan, permanent d'un fluide visqueux, incompressible, représenté sur la figure 2.

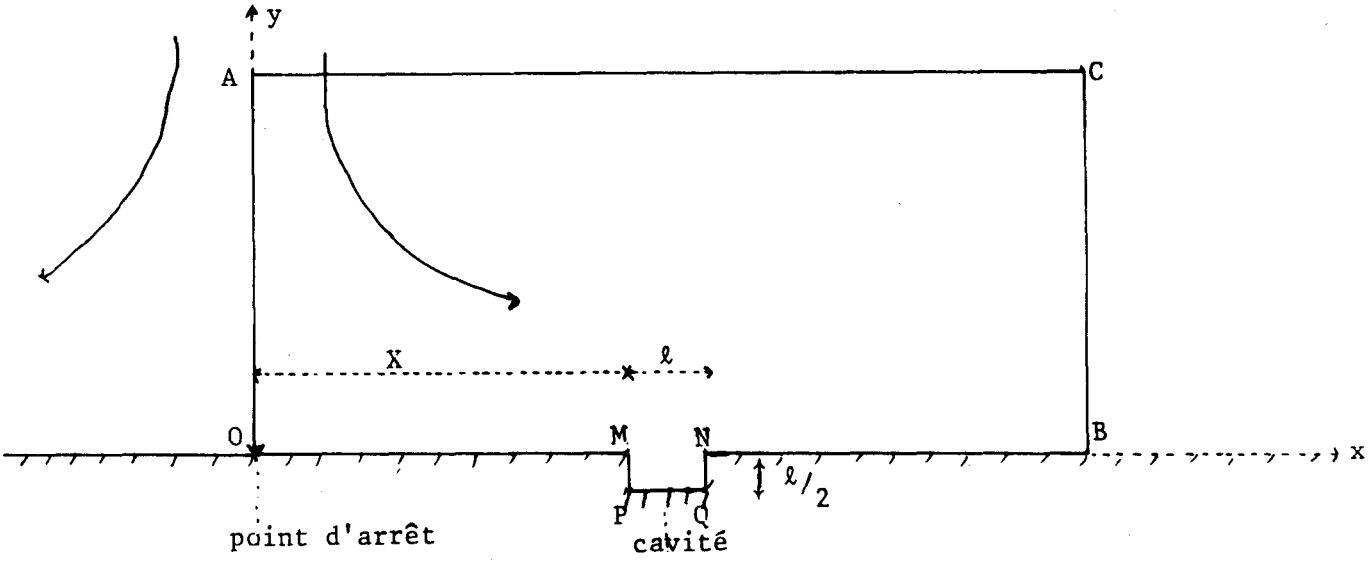


figure 2.

En fait le calcul est fait dans le domaine borné OACBNQPMO comprenant la cavité. Celle-ci est prise suffisamment loin du point O et le rectangle OACB est suffisamment grand pour que l'on puisse afficher le long de OACB les valeurs fournies par la solution non perturbée de Hiemenz.

Dans un premier stade, pour simplifier le calcul, la cavité sera schématisée par une fonction porte de vitesse en $y = 0$, $X \leqslant x \leqslant X+\ell$ où X est l'abcisse du point M.

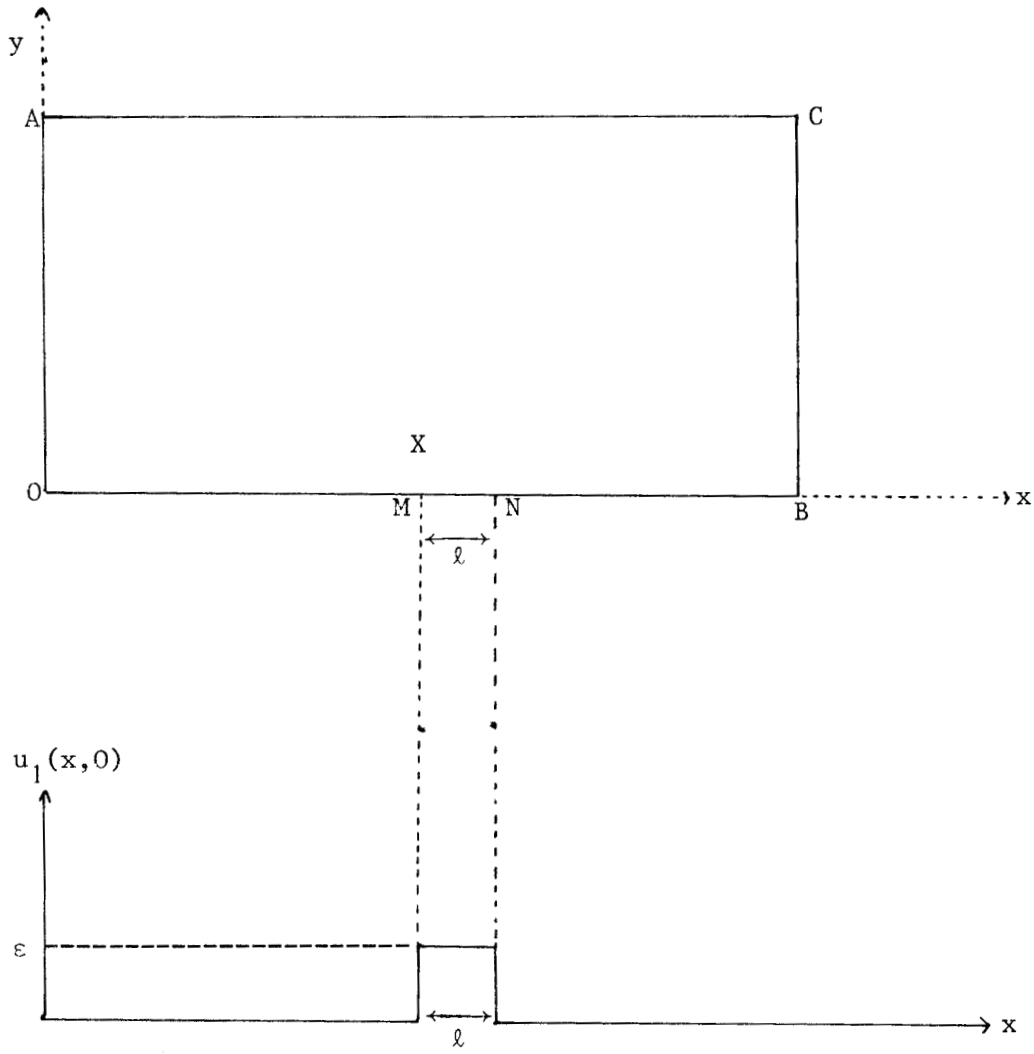


figure 3

Graphe de $u_1(x,0)$

Soient :

* $R = \frac{U_\infty D}{\nu}$ un nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement autour du nez de l'obstacle

* U_o une vitesse et L une longueur caractéristiques de l'écoulement local d'Hiemenz

* $Re = \frac{U_o L}{\nu}$ le nombre de Reynolds caractéristique du problème local.

Remarques.

1) L a été introduite pour donner une image physique du problème étudié. Mais, l'écoulement de Hiemenz ne contenant pas de longueur de référence, L est en fait arbitraire.

2) comme on le verra plus tard (§.1.3 - relation 1.24), R et Re sont liés ; ainsi les calculs faits avec des valeurs modérées de Re peuvent s'appliquer pour R très grand.

Soient x, y, u_1, u_2, ψ et ω les coordonnées, les vitesses, la fonction de courant et le tourbillon adimensionnalisés par L et U_o.

Le problème consiste à résoudre le système :

$$\begin{cases} u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega & (I.1) \\ \omega = -\Delta \psi & (I.2) \\ u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} & (I.3) \end{cases}$$

avec ψ et ω donnés sur OACB par la solution de Hiemenz.

Dans le cas de la figure 3, on se donne de plus :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \qquad \text{sur} \qquad OM \quad \text{et} \quad NB$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\varepsilon \qquad \text{sur} \qquad MN$$

Dans le problème complet (fig. 2) on prend $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ sur toute la paroi OMPQNB.

Les paramètres caractéristiques du problème sont ε, Re, X, ℓ.

Précisons l'interprétation physique du problème (fig. 4).

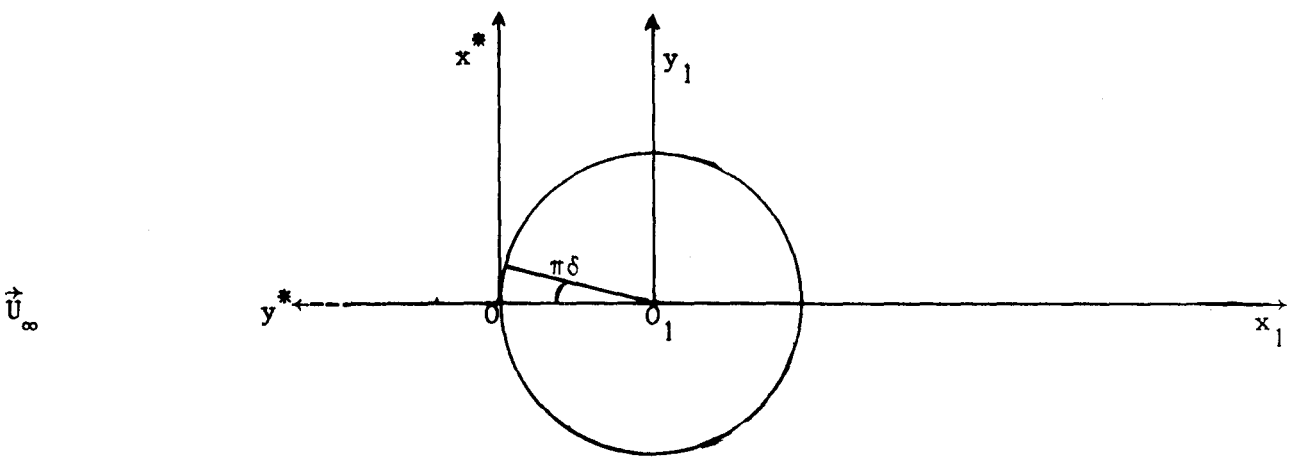


figure 4.

Considérons un fluide parfait, en écoulement irrotationnel au voisinage du point d'arrêt O. On se place dans le système d'axes (x^*, y^*) et on désigne par f (resp. f') le potentiel complexe (resp. la vitesse complexe) de cet écoulement. On a :

$$z^* = x^* + iy^* \ .$$
$$f'(z) = u^* - iv^*$$

Alors :

$$f(z^*) = A_o\, z^{*2} \quad \text{et} \quad f'(z) = 2A_o z^*$$

d'où :

$$u^* \simeq 2A_o x^* \qquad \text{pour} \quad y^* \simeq 0.$$

Considérons, maintenant l'écoulement sans circulation autour du cercle de centre O_1, de diamètre D ; on se place ici dans le système (x_1^*, y_1^*) et F désigne le potentiel complexe. On a donc, si $z_1^* = x_1^* + iy_1^*$

$$F(z_1^*) = U_\infty (z_1^* + \frac{D^2}{4z_1^*})$$

Posons : $z_1^* = \frac{D}{2} e^{i\theta}$.

Au voisinage du point d'arrêt O, les composantes de la vitesse sont

$$U^* = U_\infty (1-\cos 2\Pi\delta) \simeq 2\Pi^2\, U_\infty\, \delta^2$$

$$V^* = -U_\infty \sin 2\Pi(1-\delta) \simeq 2\Pi\, U_\infty\, \delta$$

$\Pi\delta$ étant la distance angulaire au point d'arrêt. Comme δ est petit, la vitesse est voisine de V^*.

De l'identification de u^* et de V^*, on tire :

$$A_o \frac{D}{2} \Pi\delta = 2\Pi\, U_\infty\, \delta$$

soit :

$$A_o = \frac{2U_\infty}{D} \quad .$$

Pour notre calcul, on prendra :

1) $\ell << X$

de façon que la cavité apparaisse comme une perturbation petite de l'écoulement d'Hiemenz. On pourra donc afficher les valeurs de Hiemenz sur $OACB$. Plus précisément, on choisira ici :

$X \simeq 10\ell$, $OM = NB$ et $OA = OM$.

2) $X << D$

de sorte qu'à l'échelle de la distance de la cavité à 0 la paroi apparaisse plane.

On fera varier ε entre 0 et 0,1 et Re entre 1 et 1000. Cela fait, on considérera le problème complet, avec la cavité.

La pression dans tout le maillage sera calculée à partir de ψ et de ω. Pour cela, on formulera le problème sous forme variationnelle en utilisant les fonctions ω et ψ pour pouvoir le résoudre à l'aide de la méthode d'Eléments finis élaborée par M. BORREL dans sa thèse [4].

Trois maillages seront utilisés :

- un maillage à 37 noeuds d'interpolation pour tester les différents modules utilisés.

- un maillage représentatif du problème physique de la figure 3 (sans cavité) à 539 noeuds d'interpolation.

- un maillage représentatif du problème physique avec la cavité à 599 noeuds d'interpolations.

CHAPITRE 1

MODELE MATHEMATIQUE ET MISE EN EQUATIONS

1.1. Les équations adimensionnelles du problème

Dans tout ce qui suit, les variables physiques seront notées avec un astérisque.

Les équations à résoudre dans le domaine Ω occupé par le fluide sont les équations de Navier-Stokes pour un fluide non pesant, visqueux et incompressible (voir par exemple [2], p. 177).

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} p^* + \mu \, \Delta \vec{u}^* = \rho^* \, \vec{\gamma}^* & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \vec{u}^* = 0 \\ \text{conditions aux limites sur } u^* \text{ sur la frontière } \partial\Omega \text{ de } \Omega. \end{cases}$$

L'écoulement étant supposé permanent et plan, on a donc (en utilisant les conventions habituelles de la dérivation et de l'indice répété) :

$$u^*_{i,i} = 0 \qquad (1.1)$$

$$-p^*_{,i} + \mu \, u_{i,jj} = \rho^* \, u^*_{i,j} \, u^*_j \qquad i=1,2 \qquad (1.2)$$

La formulation adimensionnelle est classique (voir par exemple [2] p. 281).

Posons :

$$x^*_i = L \, x_i \qquad i=1,2 \qquad (1.2.1)$$

$$u^*_i(x^*_1, x^*_2) = U_o \, u_i(x_1, x_2) \qquad i=1,2 \qquad (1.2.2)$$

$$p^*(x^*_1, x^*_2) = p_o \, p(x_1, x_2) \qquad (1.2.3)$$

$$\rho^* = \rho_o = \text{cte} \qquad (1.2.4)$$

Les grandeurs U_o, L sont les grandeurs caractéristiques du problème définies précédemment.

On remplace dans (1.2) les variables physiques par les variables adimensionnées et on obtient :

$$-\frac{p_o}{L} p_{,i} + \frac{\mu U_o}{L^2} u_{i,jj} = \frac{\rho_o U_o^2}{L} u_{i,j} u_j, \quad i=1,2 \qquad (1.3)$$

D'où :

$$-\frac{p_o}{\rho_o U_o^2} p_{,i} + \frac{\mu}{\rho_o L U_o} u_{i,jj} = u_{i,j} u_j , \quad i=1,2 \qquad (1.4)$$

On peut choisir p_o tel que $\frac{p_o}{\rho_o U^2} = 1$, de manière à ce que les forces de pression soient de l'ordre des forces d'inertie. On introduit alors le nombre de Reynolds Re et on en déduit l'équation classique de Navier (voir par exemple [2] p. 177) :

$$-\vec{\nabla}p + \frac{1}{Re} \Delta\vec{u} = \frac{\vec{\nabla}u^2}{2} + (\vec{\nabla} \Lambda \vec{u}) \Lambda \vec{u} . \qquad (1.5)$$

1.2. *Formulation* (ω,ψ) *et équation de la pression*

On va formuler le problème avec les inconnues (ω,ψ). On calculera ensuite la pression par intégration.

On a choisi cette méthode car, quand on a commencé cette recherche, seul, le calcul de (ω,ψ) était programmé [4]. A l'heure actuelle, il existe d'autre formulations (voir introduction du chapitre 2) pour calculer la pression.

Prenons le rotationnel de (1.5), on obtient :

$$\frac{1}{Re} \Delta\omega = \overrightarrow{rot}(\vec{\omega} \Lambda \vec{u}) . \qquad (1.6)$$

On calcule ensuite $\vec{\omega}$, $\vec{\omega} \wedge \vec{u}$ en fonction de ψ. Compte tenu de (I.3), on obtient (en utilisant les variables (x,y)) le système suivant :

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = -\Delta\psi \\ &\Delta(-\Delta\psi) = Re\left(\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\psi \frac{\partial\psi}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\psi \frac{\partial\psi}{\partial y})\right). \end{aligned}} \qquad (1.7)$$

Dans le cas d'un fluide visqueux, incompressible, on trouve la pression en résolvant le problème

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta p = 2\left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}\right)^2\right) \\ p = p_o, \quad \text{donné sur } \Gamma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = g, \quad \text{donné sur } \Gamma_1 \end{cases} \qquad (1.8)$$

avec : $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

L'établissement de cette équation est classique. Rappelons le : prenant la divergence de (1.5), on obtient :

$$-p_{,ii} + \frac{1}{Re} u_{i,jji} = u_{i,ji}u_j + u_{i,j}u_{j,i}$$

équation que l'on peut réécrire de la manière suivante :

$$-p_{,ii} + \frac{1}{Re}(u_{i,i})_{,jj} = (u_{i,i})_{ij}\, u_j + u_{i,j}u_{j,i} .$$

Compte tenu de (1.1), cette dernière relation devient :

$$-p_{,ii} + 0 = 0 + u_{i,j}u_{j,i} .$$

Il suffit alors de remplacer $(u_i)_{i=1}^2$ par leurs valeurs en fonction de ψ et de sommer.

1.3. *L'écoulement de base (Hiemenz)*

Nous allons décrire l'écoulement non perturbé. Pour cela, nous revenons à la solution de Hiemenz [1] qu'il nous faut rappeler ici. Introduisons les quantités η, α, a, A reliées par :

$$\begin{cases} \eta = \alpha y^* & (1.9) \\ \alpha^2 A^2 = \nu A \alpha^3 = a^2 & (1.10) \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{cases} u_1^*(x^*,y^*) = a\, x^* \phi_\eta(\eta) & (1.11) \\ u_2^*(x^*,y^*) = -\, A\, \phi(\eta) & (1.12) \end{cases}$$

ce qui satisfait à (1.1). On substitue dans (1.5), d'où :

$$\phi_{\eta\eta\eta} + \phi\phi_{\eta\eta} - \phi_\eta^2 + 1 = 0 \ . \qquad (1.13)$$

La condition d'adhérence donne :

$$\phi(0) = \phi_\eta(0) = 0 \ . \qquad (1.14)$$

Au loin, on doit retrouver la solution de fluide non visqueux considéré sur la figure 4. On aura donc

$$\lim_{\eta\to\infty} \phi_\eta(\eta) = 1 \qquad (1.15)$$

à condition toutefois de choisir

$$a = 2A_o \qquad \text{soit} \qquad a = \frac{4U_\infty}{D} \ . \qquad (1.16)$$

Le problème (1.13), (1.14), (1.15) a été résolu par Hiemenz [1] qui a tabulé les valeurs de ϕ, ϕ_η, $\phi_{\eta\eta}$ [annexe 1].

De (1.9) et (1.10), on tire :

$$\alpha^2 = \frac{a}{\nu} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{a}{\alpha} \quad .$$

D'où, d'après (1.16) et en introduisant le nombre de Reynolds R

$$\alpha = 2\,\frac{\sqrt{R}}{D} \qquad \text{et} \qquad A = 2\,\frac{U_\infty}{\sqrt{R}} \, .$$

On reporte ces expressions dans (1.9),(1.11), (1.12) en introduisant

$$\lambda = \sqrt{\frac{U_\infty L}{U_o D}} \tag{1.17}$$

On obtient alors :

$$\eta = 2\lambda \sqrt{Re}\; y \tag{1.18}$$

$$u_1 = \frac{u_1^*}{U_o} = 4\lambda^2 \times \phi_\eta \tag{1.19}$$

$$u_2 = \frac{u_2^*}{U_o} = -2\,\frac{\lambda}{\sqrt{Re}}\,\phi \quad . \tag{1.20}$$

On en déduit ω et ψ :

$$\omega(x,y) = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = -8\lambda^3 \sqrt{Re} \times \phi_{\eta\eta}(\eta) \tag{1.21}$$

et comme

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_2 \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_1$$

on a :

$$\psi(x,y) = \frac{2\lambda}{\sqrt{Re}} \times \phi(\eta) \tag{1.22}$$

Calculons p. En remplaçant u_1 et u_2 dans les équations de Navier-Stokes adimensionnalisées, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -16\lambda^4 \times \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\,\frac{4\lambda^2}{Re}\,(\phi_{\eta\eta} + \phi\phi_\eta) \, .$$

De là :

$$p(x,\eta) - p(0,0) = -8\lambda^4 x^2 - \frac{2\lambda^2}{Re}(2\phi_\eta(\eta)+\phi^2(\eta)) \quad . \quad (1.23)$$

Jusqu'ici, λ reste arbitraire. Pour utiliser la solution de Hiemenz, nous devons maintenant fixer λ. Le plus simple est de prendre $\lambda = 1$, soit

$$U_\infty L = U_o D$$

ce qui fourni entre R et Re la relation

$$\frac{R}{Re} = \left(\frac{D}{L}\right)^2 \quad (1.24)$$

et les relations essentielles :

$$\eta = 2\sqrt{Re}\, y \quad (1.25)$$

$$\omega(x,y) = -8x\sqrt{Re}\,\phi_{\eta\eta}(\eta) \quad (1.26)$$

$$\psi(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{Re}}\,\phi(\eta) \quad (1.27)$$

$$p(x,y)-p(0,0) = -\frac{4}{Re}(2Re\, x^2+\phi_\eta(\eta)+\frac{1}{2}\phi^2(\eta)) \quad (1.28)$$

Il faut se rappeler que nous considérons ici trois séries de variables différentes :

- les variables physiques $(x^*,y^*,\ldots)$
- les variables adimensionnelles du maillage (x,y)
- les variables adimensionnelles de Hiemenz (x,η).

Les variables (x,y) sont fixées, une fois pour toutes par le maillage choisi ; d'autre part, η est fixée une fois pour toutes par la table de Hiemenz.

Pour définir les valeurs numériques à utiliser et en particulier les conditions aux limites, on procède de la manière suivante : comme dans notre étude

$$1 \leq Re \leq 1000$$

On suppose η maximum pour $Re = 1000$. Or, η_{max} correspond au point A, d'ordonnée y_{max}, de la figure 3. Compte tenu de (1.25) on déduit d'après l'annexe 1 que :

$$2\sqrt{1000}\, y_{max} = \eta_{max} = 4.2$$

ce qui fixe une fois pour toute y_{max} donc tout le maillage.

Pour chaque nombre de Reynolds Re, on calculera η par la formule (1.25) puis les valeurs des fonctions

$$\phi,\ \phi_\eta,\ \phi_{\eta\eta}$$

à l'aide de la table de Hiemenz pour en déduire :

$$u_1(x,y),\quad u_2(x,y),\ \omega(x,y),\quad \psi(x,y),\quad p(x,y).$$

1.4. *Conditions aux frontières et formulation définitive du problème*

Les grandeurs au bord seront notées par l'indice zéro.

Sur la partie OACB , nous considérons que l'écoulement n'est pas perturbé donc que ω_o, ψ_o, p_o sont données par les équations (1.26), (1.27) (1.28).

1.4.1. Formulation définitive du problème en (ω,ψ).

Le problème posé est donc le suivant : on cherche (ω,ψ) tel que :

$$(P_1)\quad \begin{cases} \psi \text{ vérifie (1.7) dans } \Omega \\ \omega = -\Delta\psi \text{ dans } \Omega \\ \psi = \begin{cases} 0 & \text{sur OMPQNB} \\ \psi_o & \text{sur BCAO} \end{cases} \\ \omega = \omega_o \quad \text{sur BCAO} \end{cases}$$

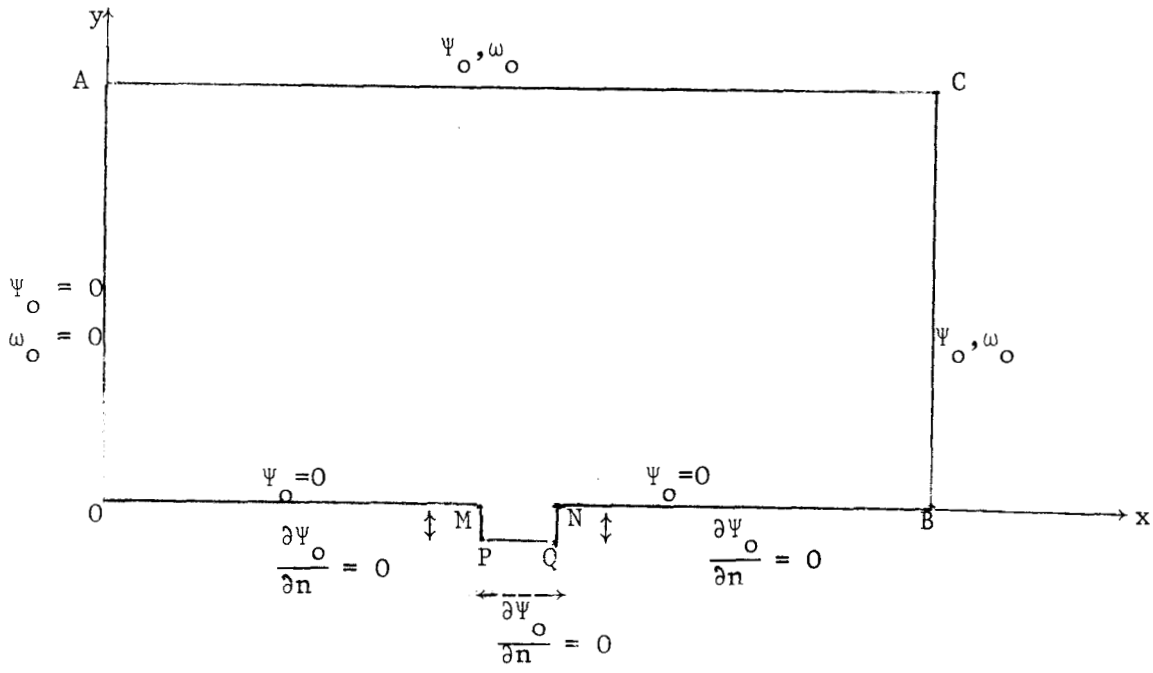


figure 5.

Pour que le problème soit bien posé, il faut une condition aux limites supplémentaire. On va se donner $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ sur OMPQNB . La formulation variationnelle montrera que le problème est bien posé pour des petits nombres de Reynolds et des seconds membres petits (Théorème d'unicité). Nous admettrons que le problème est également bien posé pour des grands nombres de Reynolds, ce qui a été justifié par la stabilité des calculs numériques.

1.4.2. Première approche du problème en (ω, ψ)

Dans un premier temps, nous allons admettre pour schématiser la cavité que cette dernière peut être remplacée par la condition :

$$u_1 = \varepsilon \quad \text{le long de MN .}$$

Les conditions pour $y = 0$ s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 & \text{sur OM } \cup \text{ NB} \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = -\varepsilon & \text{sur MN} \end{cases}$$

le problème se formule donc comme suit : on cherche (ω,ψ) tels que :

$$(P_2)\quad \begin{cases} \Delta(\Delta\psi) + Re\left(\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\psi\ \frac{\partial\psi}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\psi\ \frac{\partial\psi}{\partial y})\right) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \\ \omega = -\Delta\psi \\ \psi = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad OB \cup AD \\ \psi_o & \text{sur} \quad BC \cup CA \end{cases} \\ \omega = \begin{cases} \omega_o & \text{sur} \quad AC \cup CB \\ 0 & \text{sur} \quad AO \end{cases} \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad OM \cup NB \\ -\varepsilon & \text{sur} \quad MN \end{cases} \end{cases}$$

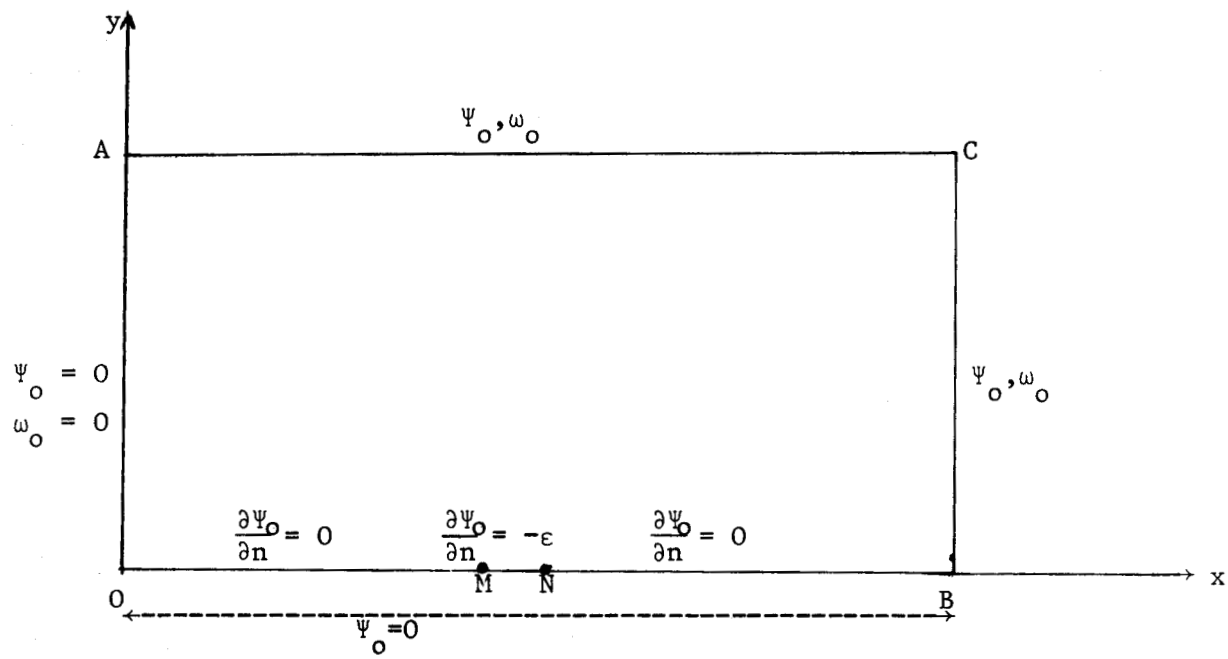


figure 6.

1.4.3. Formulation du problème pour la pression

On va résoudre le problème :

$$(P_3)\quad \begin{cases} -\Delta p = f & \text{dans} \quad \Omega \\ p = p_o & \text{sur} \quad OACB \\ \frac{\partial p}{\partial n} = g & \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{cases}$$

avec Γ_2 = OMNB ou OMPQNB suivant que l'on résout le problème simplifié (fig. 5) ou le problème avec cavité (fig. 6).

Les fonctions f et p_o sont données par (1.8) et (1.28) et g est définie comme suit : désignons par θ l'angle de la normale extérieure avec l'axe Ox (frontière Γ_2), il est clair que :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} = \frac{\partial p}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial p}{\partial y} \sin\theta \quad . \qquad (1.29)$$

Exprimons maintenant $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ en fonction de (ω,ψ).

Des équations (1.5), (I.3), puis (I.2) et compte tenu du fait que l'on peut permuter les opérateurs Δ et $\frac{\partial}{\partial y}$, on obtient les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial \omega}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} & (1.30) \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial \omega}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} & (1.31) \end{cases}$$

On en tire $\frac{\partial p}{\partial n}$.

Remarque. 1) En fait, il aurait été préférable de se donner p_o sur une portion de OA seulement et $\frac{\partial p}{\partial n}$ sur le reste de la frontière pour voir si on retrouvait p_o sur toute la frontière. Mais la perte de précision a été telle (§.4.2.1) que cette idée a été abandonnée.

2) On a supposé que toutes les fonctions considérées avaient la régularité nécessaire pour que les calculs effectués soient justifiés.

CHAPITRE II

FORMULATIONS VARIATIONNELLES DU PROBLEME ET RESOLUTION DES PROBLEMES VARIATIONNELS.

Introduction au chapitre 2.

On fera un bref rappel de la méthode des éléments finis. Pour plus de détails sur cette méthode, on consultera [3] ou [5]. On l'appliquera ensuite aux équations de Navier-Stokes (partie A). La méthode développée ici est due à Michel BORREL dont on pourra consulter la thèse [4] pour les démonstrations. D'autres études ont été effectuées : méthodes de pénalisation [11], [12], méthode d'éléments finis en formulation vitesse-pression et utilisant des pressions discontinues [13] pour des éléments finis triangulaires ou non conformes ; d'autres méthodes utilisant des pressions continues ont été introduites par [14]. On se reportera à [15], [16] pour des résultats plus généraux d'approximation des solutions non singulières de problèmes non linéaires. Pour des méthodes itératives couplées avec des méthodes de pénalisation où de dualité (type Arrow-Hurwiez ou Uzawa) permettant le découplage de la vitesse et de la pression, voir [12] et [17]. L'analyse des méthodes mixtes est donné dans [18]. Une discrétisation des termes convectifs a été introduite dans [19]. Pour une mise en oeuvre de ces méthodes, se reporter à [6], [7], [20], [21]. Pour plus de précisions sur toutes ces méthodes, voir [22].

Dans la partie B, on donnera le détail du calcul de la pression.

Dans tout ce qui suit, le lecteur non familiarisé avec l'analyse fonctionnelle remplacera tous les espaces utilisés par "espaces de fonctions suffisamment régulières".

Notations spécifiques à la 2ème partie :

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\begin{cases}\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset\end{cases}$

$$L^2(\Omega) = \{f,\ |f|_2^2 = \int_\Omega f^2(x)dx < +\infty\}.$$

$$H^m(\Omega) = \{f,\ \partial^\alpha f \in L^2(\Omega),\ \forall\alpha = (\alpha_1,\alpha_2),\ |\alpha_1+\alpha_2| \leq m,\ m \in \mathbb{N},\ (\alpha_i)_{i=1}^2 \in \mathbb{N}\}$$

(les dérivées sont prises au sens des distributions).

$$|\psi|_{m,2,\Omega} = \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha\psi|_{2,\Omega} \quad : \text{c'est une semi-norme sur } H^m(\Omega).$$

$$\|\psi\|_{m,2,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} |\partial^\alpha\psi|_{2,\Omega} \quad : \text{c'est une norme sur } H^m(\Omega)$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f. On a

$$\hat{f}(\xi) = \int_\Omega e^{-2i\Pi<x,\xi>} f(x)dx$$

avec :

$$<x,\xi> = <(x_1,x_2)\ .\ (\xi_1,\xi_2)> = x_1\xi_1 + x_2\xi_2\ .$$

On définit pour $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^m)$ par :

$$H^s(\mathbb{R}^m) = \{f / \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^s\ (\hat{f}(\xi))^2\ d\xi < +\infty\}$$

Pour Ω quelconque, et $s > 0$, on définit $H^s(\Omega)$ par interpolation ou régularisation.

V' = {formes linéaires continues sur V}.

$L(V,V')$ = {applications linéaires continues de V dans V'}.

$(\ ,\ )$ désigne un produit scalaire sur $H^1(\Omega)$.

$<\ ,\ >$ désigne la dualité entre V et V'.

$\|f\|^* = \sup_{\substack{v\in V \\ v\neq 0}} \frac{|<f,v>|}{\|v\|}$, la norme de V'.

Introduction à la méthode des éléments finis.

But de la méthode : résoudre des équations aux dérivées partielles. On utilise la méthode de Galerkin pour former le système.

Position du problème :

Nous allons raisonner sur un exemple.

On se donne deux "fonctions" f, g que l'on suppose suffisamment régulières pour que tous les calculs qui suivent soient possibles.

Supposons que l'on veuille résoudre le problème mixte (P_4) suivant :

(P_4) On cherche une fonction u telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

On montre [3] ou [5] que moyennant certaines hypothèses, ce problème est équivalent au problème (P_4') suivant :

(P_4') On cherche une fonction $u \in V$ telle que

$$\int_\Omega (\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v)\, d\Omega = \int_\Omega fv\, d\Omega + \int_{\Gamma_1} g\, v\, d\Gamma \quad , \forall v \in V$$

où V est un "certain" espace vectoriel de dimension infinie. C'est en fait ce dernier problème que l'on va résoudre par une discrétisation appropriée.

Résolution du problème (P_4').

Notations : posons (pour cet exemple)

$$V = \{v \text{ tq. } v \in H^1(\Omega),\ v_{/\Gamma_2} = 0\}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega (\overrightarrow{\nabla u}\ ,\ \overrightarrow{\nabla v})d\Omega \qquad (2.0.1)$$

$$L(v) = \int_\Omega fv\ d\Omega + \int_{\Gamma_1} gv\ d\gamma\ . \qquad (2.0.2)$$

L'application $a : (u,v) \to a(u,v)$ est une forme bilinéaire, continue, symétrique sur V et l'application $L : v \to L(v)$ est une forme linéaire continue sur V.

Soit (P_4') le problème suivant :

$$(P_4') \quad \begin{cases} \text{on cherche } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Le problème (P_4'), posé sous cette forme est la <u>formulation variationnelle</u> du problème (P_4).

Dans tout ce qui suit, on notera par l'indice h les problèmes et les équations discrétisées.

La méthode des éléments finis est basée sur le principe suivant. On approche :

* V { espace vectoriel de dimension infinie } par V_h { espace vectoriel de dimension finie $\tilde{N}$

* $u \in V$ par $u_h \in V_h$

On cherche alors à résoudre, le problème discrétisé :

$$(P_4')_h \quad \begin{cases} \text{on cherche } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h,v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

En fait $(P_4')_h$ n'est qu'un système de Cramer.

En effet : soit $(\omega_i)_{i=1}^{\tilde{N}}$ une base de V_h.

On peut alors écrire $(P_4')_h$ de la manière suivante :

$$(P_4')_h \begin{cases} \text{On cherche } u_h \in v_h \text{ tel que :} \\ \\ a(u_h,\omega_i) = L(\omega_i) \ , \ \forall i = 1,\ldots,\tilde{N}. \end{cases}$$

Soit

$$u_h = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} u_{h_j} \omega_j$$

le développement de u_h sur la base $(\omega_i)_{i=1}^{\tilde{N}}$. Compte tenu du fait que $a(.,.)$ est bilinéaire et symétrique, nous avons :

$$a(u_h,\omega_i) = a\Big(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} u_{hj}\omega_j,\omega_i\Big) = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} a(\omega_j,\omega_i)u_{hj}$$

$$= a(u_i,\omega_j)u_{hj} \ .$$

Posons :

$$A = (a_{ij}) = (a(\omega_i,\omega_j)) \quad , \quad (b_i) = (L(\omega_i))$$

$$X = \begin{pmatrix} u_{h_1} \\ \vdots \\ u_{h\tilde{N}} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{\tilde{N}} \end{pmatrix}$$

(P_4') s'écrit alors :

On cherche

$$\begin{cases} X \in V_h \\ \\ AX = B. \end{cases}$$

Dans la pratique, V_h est un espace de fonctions polynominales par morceaux.

Schématiquement, la méthode est la suivante :

- on pose le problème physique (P_4)
- on cherche sa formulation variationnelle (problème (P_4'))
- on discrétise le problème (P_4'). (cf. 3ème partie - A)

C'est ce que nous allons faire pour notre problème.

A] Calcul de (ω,ψ)

2.1. *Cadre fonctionnel - existence et unicité de la solution des équations de Navier-Stokes.*

Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, $g_o \in H^{3/2}(\Gamma)$, $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $g_2 \in L^2(\Gamma_2)$ le problème de Navier-Stokes peut se formuler de la manière suivante :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \psi \text{ tel que :} \\ \\ \Delta^2\psi + Re\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\Delta\psi\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\Delta\psi\right)\right) = f\ . \\ \\ \psi_{/\Gamma} = g_o\ . \\ \frac{\partial\psi}{\partial n}\,/_{\Gamma_1} = g_1\ . \\ \\ -\Delta\psi/\Gamma_2 = g_2\ . \end{array} \right.$$

On pose :

$$V = \{\vartheta \in H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega),\ \frac{\partial\vartheta}{\partial n}\,/_{\Gamma_1} = 0\}.$$

On suppose de plus qu'il existe un relèvement G de (g_o,g_1) dans $H^2(\Omega)$, c'est-à-dire une fonction G de $H^2(\Omega)$ telle que :

$$G_{/\Gamma} = g_o \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial G}{\partial n}\,/_{\Gamma_1} = g_1\ .$$

On montre (voir [4] pour la démonstration et [5] pour plus de détails) que le problème (P) s'écrit sous forme faible de la manière suivante :

$$(P') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Psi, \text{ tel que } \Psi - G \in V, \text{ satisfaisant à :} \\ \\ \forall\vartheta \in V,\ \int_\Omega \Delta\Psi\ \Delta\vartheta\ d\Omega + Re\ b(\Psi,\Psi,\vartheta) = \int_\Omega f\vartheta\ d\Omega - \int_{\Gamma_2} g_2\ \frac{\partial\vartheta}{\partial n}\ d\Gamma \end{array} \right.$$

où :

$$b(\Psi,\theta,\phi) = \int_\Omega \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\Delta\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\Delta\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)d\Omega \quad .$$

On a [4] les

Théorème 2.1.1. Le problème (P') admet toujours au moins une solution dans l'un ou l'autre des situations suivantes :

(i) conditions aux limites homogènes (c'est-à-dire $g_{0/\Gamma} = g_{1/\Gamma_1} = 0$),

(ii) conditions aux limites non homogènes mais $\Gamma_2 = \emptyset$,

Théorème 2.1.2. Soit $f_1 \in V'$ définie par

$$\langle f_1,\phi\rangle = \int_\Omega f\phi\, d\Omega - \int_{\Gamma_2} g_2\,\frac{\partial\phi}{\partial n}\,d\Gamma \quad , \qquad \forall\phi \in V.$$

Alors, si

$$\|f_1\|^*_V \leq \frac{1}{Re\ N} \text{ , où } \quad N = \|b\| = \sup_{\Psi,\theta,\phi\in V} \frac{b(\Psi,\theta,\phi)}{\|\Psi\|_V\|\theta\|_V\|\phi\|_V}$$

le problème (P') admet au plus une solution.

2.2. *Méthodes itératives de linéarisation.*

2.2.1. Conditions aux limites homogènes (G = 0).

Soit $\Psi \in V$, on considère l'opérateur

$$A : V \to L(V,V')$$

$$\Psi \mapsto A(\Psi) \quad \text{où } A \text{ est tel que}$$

$$\langle A(\Psi)\theta,\phi\rangle_{V',V} = \int_\Omega \Delta\theta\,\Delta\phi\, d\Omega + Re\ b(\Psi,\theta,\phi) \quad , \qquad \forall(\theta,\phi) \in V\times V \ .$$

Le problème (P') peut alors se mettre sous la forme :

$$(P')_1 \begin{cases} \text{On cherche } \Psi \in V \text{ tel que :} \\ A(\Psi)\Psi = f_1 \cdot \end{cases}$$

Le théorème suivant reprend le problème, déjà étudié sur le plan général au paragraphe 2.1, de l'existence et de l'unicité de la solution, mais permet de situer le cadre du présent exposé.

Théorème 2.2.1.1. Sous la condition :

$$\|f_1\|_V^* < \min\left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{Re\ N}\ ,\ \frac{\alpha^2}{Re\ N}\right) \qquad (2.2.1)$$

le problème $(P')_1$ admet une solution unique $\Psi \in B_r(\alpha)$ avec

$$B_{r(\alpha)} = \{\Psi \in V\ ;\ \|\Psi\|_V \leq r(\alpha) = \frac{1-\alpha}{Re\ N}\}.$$

Description de la méthode itérative exacte.

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma < 2$, on définit la méthode suivante :

Soient $\begin{cases} \Psi^o \text{ arbitrairement choisi dans } B_r(\alpha) \\ \Psi^n \text{ calculé, on calcule } \Psi^{n+1} \text{ par la résolution du problème :} \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{On cherche } \bar{\Psi}^{n+1} \in V \text{ tel que } A(\Psi^n)\bar{\Psi}^{n+1} = f_1 \qquad (2.2.2) \\ \text{puis} \\ \Psi^{n+1} = \Psi^n + \gamma(\bar{\Psi}^{n+1} - \Psi^n)\ . \qquad (2.2.3) \end{cases}$$

A condition de se placer sous des conditions donnant un sens à (2.2.2), la résolution du problème $(P')_1$ est ramenée à une suite de résolution de problèmes linéaires.

On pose :

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \gamma \leq 1 \\ \frac{2-\gamma}{2} & \text{si } 1 < \gamma < 2 \end{cases}$$

Théorème 2.2.1.2. Sous la condition (2.2.4),

$$\frac{\|f_1\|_V^*}{\theta} < \min\left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{Re\ N}, \frac{\alpha^2}{Re\ N}\right) \qquad (2.2.4)$$

La méthode itérative est bien définie et la suite $\{\Psi^n\}$ ainsi définie converge fortement vers Ψ, solution du problème (P), lorsque n tend vers l'infini.

2.2.2. Conditions aux limites non homogènes

On montre [4] qu'il est facile de transposer les deux théorèmes précédents au cas non homogène.

2.2.3. Description de la méthode itérative de linéarisation.

On se donne Ψ^o tel que : $\Psi^o - G \in V$.

(P') On suppose Ψ^n connu, $\Psi^n - G$ étant calculé, on détermine alors $\bar{\Psi}^{n+1}$ solution de :

$$\bar{\Psi}^{n+1} - G \in V$$

$$\int_\Omega \Delta\Psi^{n+1}\Delta\phi d\Omega + Re\ b(\Psi^n, \bar{\Psi}^{n+1}, \phi) = \int_\Omega f\phi d\Omega - \int_{\Gamma_2} g_2 \frac{\partial\phi}{\partial n} d\Gamma \ , \quad \forall\phi \in V$$

puis

$$\Psi^{n+1} = \Psi^n + \gamma(\bar{\Psi}^{n+1} - \Psi^n)$$

2.3. *Résolution par dualisation du problème interne* (P').

On définit le problème continu de départ puis on décrit le processus permettant de formuler un problème équivalent que l'on résout effectivement.

2.3.1. Le problème continu.

$$V^G = \{\psi \in H^2(\Omega) \ ; \ \psi_{/\Gamma} = g_o \ ; \ \frac{\partial \psi}{\partial n}_{/\Gamma_1} = g_1\} \ .$$

On considère le problème

(2.3.1) $\left\{ \right.$ On suppose donné $\bar{\Psi} \in V^G$, on cherche $\psi \in V^G$ tel que :

$$\int_\Omega \Delta\Psi\Delta\psi d\Omega + Re\ b(\bar{\Psi},\Psi,\psi) = \int_\Omega f\psi d\Omega - \int_{\Gamma_2} g_2 \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad , \qquad \forall \psi \in V$$

C'est le problème interne (par définition).

Posons

$$V^G = \{(\psi,\theta) \in H^1(\Omega)\times L^2(\Omega) \ ; \ \psi_{/\Gamma} = g_o \ ; \ \forall \mu \in H^1_{o,\Gamma_2}(\Omega) \ ; \ \beta((\psi,\theta),\mu) = \int_{\Gamma_1} g_1 \mu d\Gamma\}$$

avec $\beta((\psi,\theta),\mu) = \int_\Omega (\vec{\nabla}\psi,\vec{\nabla}\mu)d\Omega - \int_\Omega \theta\ \mu\ d\Omega.$

$$V = \{(\psi,\theta) \in H^1_o(\Omega)\times L^2(\Omega) \ ; \ \forall \mu \in H^1_{o,\Gamma_2}(\Omega), \ \beta((\psi,\theta),\mu) = 0\}$$

où :

$$H^1_{o,\Gamma_2} = \{\mu \in H^1(\Omega) \ ; \ \mu_{/\Gamma_2} = 0\}.$$

On a le

Théorème 2.3.1. Le problème (2.3.1) peut être décrit de la manière suivante :

$$(2.3.2)\quad \begin{cases} \text{Trouver} \quad (\Psi,\omega) \in V^G \quad \text{tel que} \\ \forall (\psi,\theta) \in V\ , \ \displaystyle\int_\Omega \omega\theta \, d\Omega + Re\ b_1(\bar{\Psi},\omega,\psi) + \int_{\Gamma_2} g_2 \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\Omega = \int_\Omega f\psi \, d\Omega \end{cases}$$

où

$$b_1(\bar{\Psi},\omega,\psi) = b(\bar{\Psi},\Psi,\psi).$$

Posons maintenant :

$$H^1_{o,\Gamma_2}(\Omega) = H^1_o(\Omega) \oplus M$$

$$M^G = g_2 + M$$

$$W = \{(\psi,\theta) \in H^1_o(\Omega) \times L^2(\Omega) \ ; \ \forall \mu \in H^1_o(\Omega), \quad \beta((\psi,\theta),\mu) = 0\}$$

$$W^G = \{(\psi,\theta) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \ ; \ \psi_{/\Gamma} = g_o \ ; \ \forall \mu \in H^1_o(\Omega), \quad \beta((\psi,\theta),\mu) = 0\}$$

On a le

Théorème 2.3.2. 1) Le problème (2.3.2) est équivalent au problème suivant

$$(2.3.3)\quad \begin{cases} \text{Trouver} \quad (\Psi,\omega),\ \lambda^* \in W^G \times M \quad \text{tel que :} \\ \forall (\psi,\theta) \in W, \quad \displaystyle\int_\Omega \omega\theta \, d\Omega + Re\ b_1(\bar{\Psi},\omega,\psi) + \beta((\psi,\theta),\lambda^*) = \int_\Omega f\psi \, d\Omega \\ \forall \lambda \in M, \quad \beta((\psi,\omega),\lambda) = \displaystyle\int_{\Gamma_1} g_1 \, \lambda \, d\Gamma. \end{cases}$$

2) Le problème (2.3.3) admet une solution unique $((\Psi,\omega),\lambda^*)$ dont le premier argument (Ψ,ω) est également la solution du problème (2.3.2) et dont le deuxième argument λ^* est l'unique fonction de M^G tel que $\omega-\lambda^* \in H_o^1(\Omega)$.

2.3.2. Algorithme de résolution du problème (2.3.3)

On itère sur λ^*

$$(2.3.4)\quad \begin{cases} \lambda^o \in M^G \text{ donné, } \lambda^n \text{ calculé, on trouve :} \\ (\Psi^n,\omega^n) \in W^G,\ \lambda^{n+1} \in M^G \text{ en résolvant successivement les 2 équations :} \\ \forall(\psi,\theta) \in W\ ,\ \int_\Omega \omega^n\theta d\Omega + Re\ b_1(\bar{\Psi},\omega^n,\psi) + \beta((\psi,\theta),\lambda^n) = \int_\Omega f\psi d\Omega \\ \forall\mu \in M,\ (\lambda^{n+1}-\lambda^n,\mu)_M = \rho\{\beta((\Psi^n,\omega^n),\mu) - \int_{\Gamma_1} g_1\mu d\Gamma\} \end{cases}$$

où ρ est la constante d'Uzawa et où $(.,.)_M$ désigne un produit scalaire sur M.

Théorème 2.3.3. Chaque étape de l'algorithme (2.3.4) revient à résoudre les problèmes suivants :

$$(2.3.4.1)\quad \begin{cases} \text{Trouver } \omega^n \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \omega^n/\Gamma_1 = \lambda^n/\Gamma_1\ ;\ \omega^n/\Gamma_2 = g_2 \text{ et} \\ \forall\psi \in H_o^1(\Omega)\ ,\ \int_\Omega (\vec{\nabla}\omega^n,\vec{\nabla}\psi)d\Omega + Re\ b_1(\bar{\Psi},\omega^n,\psi) = \int_\Omega f\psi d\Omega \end{cases}$$

puis :

$$(2.3.4.2)\quad \begin{cases} \text{Trouver } \Psi^n \in H^1(\Omega) \text{ avec } \Psi^n/\Gamma = g_o \text{ tel que :} \\ \forall\psi \in H_o^1(\Omega), \int_\Omega (\vec{\nabla}\Psi^n,\vec{\nabla}\psi)d\Omega = \int_\Omega \omega^n\psi d\Omega \end{cases}$$

puis :

$$(2.3.4.3)\begin{cases}\text{Trouver} \quad \lambda^{n+1} \in M^G \quad \text{tel que} \\ \forall \mu \in M, \quad (\lambda^{n+1}-\lambda^n,\mu)_M = \rho\{\beta((\Psi^n,\omega^n),\mu) - \int_{\Gamma_1} g_1 \mu d\Gamma\}\end{cases}$$

$$\text{et on a :} \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^n = \Psi \quad \text{dans} \quad H_o^1(\Omega) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \omega^n = -\Delta\Psi \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).\end{cases}$$

$$\text{à condition que} \begin{cases} 0 < \rho < 2(1-Re\ N\|\bar{\Psi}\|_V)\, k^2\sigma^2 \\ \text{avec} \quad \sigma = \inf\limits_{\psi\in H^1(\Omega)\ \cap\ H_o^1(\Omega)} \dfrac{\|\Delta\psi\|_{0,2,\Omega}}{\|\frac{\partial\psi}{\partial n}\|_{0,2,\Gamma_2}}\end{cases}$$

et où k est tel que :

$$\forall \mu \in H^1(\Omega) \ ; \quad k\|\mu\|_{0,2,\Gamma_2} \leq \sqrt{(\mu,\mu)_M}$$

On a donc décomposé le problème (2.3.1) par une résolution, à chaque itération, de deux problèmes de Poisson. Pour la résolution numérique, voir le chapitre 3, partie A.

2.4. *Le problème discret*.

Soit V_h, espace d'approximation de $H^1(\Omega)$. (cf. §.3.2). On remplace les problèmes du théorème (2.3.2) par les problèmes discrétisés.

$$(2.3.4.1)_h \begin{cases} \text{Trouver} \quad \omega_h^n \in V_h \quad \text{tel que :} \\ \omega^n_{h/\Gamma_1} = \lambda^n_{h/\Gamma_1} \ ; \quad \omega^n_{h/\Gamma_2} = g_2 \quad \text{et} \\ \int_\Omega (\vec{\nabla}\omega_h^n, \vec{\nabla} v_h)d\Omega + Re\ b_1(\bar{\Psi}_h^n, \omega_h^n, v_h) = \int_\Omega f v_h d\Omega \ , \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

puis :

$$(2.3.4.2)_h \quad \begin{cases} \text{Trouver } \psi_h^n \in V_{oh} \text{ (cf. §.3.2) tel que } \psi^n{}_{/\Gamma} = g_o \text{ et tel que :} \\ \int_\Omega (\vec{\nabla}\psi_h^n, \vec{\nabla} v_h) d\Omega = \int_\Omega \omega_h^n \, v_h \, d\Omega \quad , \quad \forall v_h \in V_{oh} \end{cases}$$

puis :

$$(2.3.4.3)_h \quad \begin{cases} \text{Trouver } \lambda_h^{n+1} \in M_h^G \quad \text{(cf. §.3.2) tel que :} \\ \lambda_h^{n+1} = \lambda_h^n + \sigma \left(\frac{\partial \psi_h^n}{\partial n}\right)_{/\Gamma_1} \end{cases}$$

Pour les détails sur la résolution numérique et les estimations d'erreurs, voir la troisième partie.

2.5. *Justification de l'emploi de la méthode.*

Montrons que les hypothèses du problème (P) p. II-7 sont réalisés, c'est-à-dire que les données sont suffisemment régulières . Il faut vérifier que :

$$\begin{cases} f \in L^2(\Omega) \quad \text{où} \quad \Omega =]0, x_{max}[\times]0, y_{max}[& (2.5.1) \\ \psi_{o/\Gamma} = g_o \in H^{3/2}(\Gamma) & (2.5.2) \\ \frac{\partial \psi}{\partial n}{}_{/\Gamma_1} = g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1) \text{ où } \Gamma_1 = [OB] & (2.5.3) \\ \omega_o = -\Delta\psi = g_2 \in L^2(\Gamma_2) \quad \text{où} \quad \Gamma_2 = [OACB] & (2.5.4) \end{cases}$$

Remarque. Le cas général (fig. 2)

$$\Omega =]0, x_{max}[\times]0, y_{max}[\cup]X, X+\ell[\times]-\ell, 0[$$

ne pose aucune difficulté supplémentaire.

• $f \equiv 0$ donc (2.5.1) est trivialement vérifié.

• Montrons (2.5.2). Rappelons que :

$$H^{3/2}(\Gamma) = \{v / \int_{\Gamma} (1+|\xi|^2)^{3/2}\ \hat{v}^2(\xi)d\xi < +\infty\}.$$

La fonction ϕ (annexe 1) étant C^3, il est clair que $\Psi_{o/\Gamma}$ est C^3, donc $\phi \in H^{3/2}(\Gamma)$.

Montrons (2.5.3).

Dans le cas de la solution de Hiemenz, $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$, donc il n'y a pas de problème.

Dans le cas où

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 & \text{sur } OM \cup NB \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = -\varepsilon & \text{sur } MN \end{cases}$$

$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \notin H^{1/2}(\Gamma_1)$; néanmoins, pour le calcul numérique, on peut supposer que $\frac{\partial \Psi}{\partial n} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ en régularisant $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ au voisinage des points M et N.

Montrons (2.5.4). D'après (1.26), il est évident que

$$|\omega_o^2(x,y)| = |8x\ \phi_{\eta^2}(\eta)\ \sqrt{Re}|^2 \leq 64x_{max}^2\ Re \sup_{0\leq\eta\leq\eta_{max}} |\phi^2_{\eta^2}(\eta)| \quad .$$

Donc, 2.5.4 est vérifiée.

B] Calcul de la pression.

2.6. *Le problème abstrait.*

Théorème 2.6. Soient $f \in L^2(\Omega)$, $p_o \in H^1(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_1)$ alors le problème

$$(P_4) \quad \begin{cases} -\Delta p = f, \\ p = p_o \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \end{cases}$$

a une solution et une seule.

Démonstration : Soit $V^1 = \{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2\}$ et soit (P_4') le problème :

$$(P_4') \quad \begin{cases} \text{on cherche} \quad p - p_o \in V^1 \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega (\vec{\nabla} p, \vec{\nabla} v)\, d\Omega = \int_\Omega fv\, d\Omega + \int_{\Gamma_1} gv\, d\gamma\,, \quad \forall v \in V^1 \end{cases}$$

Posons :

$$a(u,v) = \int_\Omega (\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v)\, d\Omega\,, \qquad , \quad \forall (u,v) \in V^1$$

$$L(v) = \int_\Omega fv\, d\Omega + \int_{\Gamma_1} gv\, d\gamma\,, \quad \forall v \in V^1.$$

Munissons V^1 de la norme induite par $H^1(\Omega)$.

Il est clair que :

- a est une forme bilinéaire, symétrique, continue sur V^1
- L est une forme linéaire continue sur V^1.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de p, nous allons utiliser le lemme de Lax-Milgram (voir par exemple [5]). Pour appliquer ce dernier, il faut que $a(\ ,\ )$ soit V^1-elliptique. La V^1-ellipticité résulte du

Lemme. Soit Ω un ouvert connexe. Soit Γ_1 une partie $d\gamma$ mesurable de Γ, de mesure non nulle.

(i) V^1 est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.

(ii) Si $d\gamma$ est une mesure positive sur $L^2(\Gamma_1)$, la semie-norme $|v|_{1,\Omega} = (\int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\Omega)^{1/2}$ est une norme équivalente à la norme induite par $H^1(\Omega)$ sur V^1.

Démonstration : (lemme) : (cf. [5], théorème 1.2.1).

La V^1-ellipticité résulte trivialement du lemme. En effet :

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 = |v|^2_{1,\Omega} \geq \alpha \|v\|^2_{1,\Omega}$$

2.7. *Le problème continu*.

Il a été défini aux §.1.2

Rappelons qu'on obtient la pression en résolvant le problème (P_4) suivant (fig. 6 et 5) :

$$(P_4) \quad \begin{cases} \text{On cherche } p \text{ tel que :} \\ -\Delta p = f \quad \text{dans } \Omega \\ p = p_o \quad \text{sur } OACB = \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = g \quad \text{sur } OMNB \text{ (resp. } OMPANB) = \Gamma_1 \end{cases}$$

où f, p_o, g sont données par (1.8), (1.28), (1.29). On ne donnera pas de résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème P_4 car

$$\Psi \in H^2(\Omega) \Rightarrow f \in L^1(\Omega).$$

Toutefois, on ne connaît pas les valeurs exactes de (ω,Ψ) mais seulement les valeurs approchées (ω_h,Ψ_h) ; et ces fonctions sont polynomiales par morceaux (voir Chapitre 3. A).

. En fait, on a :

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (\omega_{h/T}, \Psi_{h/T}) \in P_T^2 = P_2^2(T).$$

si $\mathcal{T}_h$ est la triangulation de $\bar{\Omega}$ choisie (voir chapitre 3. A) et $P_2(T)$ l'espace des polynômes de degré 2 sur le triangle T.

Notant maintenant :

$$f_h = 2\left(\left(\frac{\partial^2 \Psi_h}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \Psi_h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi_h}{\partial y^2}\right) \qquad (2.7.1)$$

Il est clair que f_h est constante sur chaque triangle. Donc,

$$f_h \in L^2(\Omega).$$

Considérons maintenant $g = \frac{\partial p}{\partial n}$ (cf. 1.29). En remplaçant de nouveau (ω, Ψ) par (ω_h, Ψ_h), on approxime g par une fonction polynomiale g_h. On obtiendra alors la pression en résolvant le problème approché suivant :

(P_5)

On cherche p tel que :

$-\Delta p = f_h$ dans Ω

$p = p_o$ sur Γ_2

$\frac{\partial p}{\partial n} = g_h$ sur Γ_1

Comme $f_h \in L^2(\Omega)$ et que $g_h \in L^2(\Gamma_1)$, le théorème (2.6) assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (P_5).

2.8. *Le problème discret.*

On est pratiquement dans la situation décrite dans l'introduction de la deuxième partie. On montre (voir par exemple [5]) que le problème discret $(P_5')_h$ est le problème suivant :

$(P_5')_h$

On cherche $p_h - p_o \in V_h^1$, approximation de V^1 (cf. §.3.3) tel que

$$\int_\Omega (\vec{\nabla} p_h \, , \, \vec{\nabla} v_h) \, d\Omega = \int_\Omega f_h \, v_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} g_h \, v_h \, d\gamma \quad , \quad \forall v_h \in V_h^1 .$$

CHAPITRE 3

MISE EN OEUVRE NUMERIQUE

Introduction du chapitre 3

La méthode utilisée pour calculer (ω_h, Ψ_h) puis p_h est basée sur la résolution de problèmes de Poisson (cf. théorème. 2.3.2 et §.1.4.3). C'est pourquoi on l'a rappelée dans la partie A .

Dans la partie B , on décrit succintement la mise en oeuvre numérique du calcul de (ω_h, Ψ_h) : en effet, Borrel en a donné la description détaillée dans sa thèse [4], c'est pourquoi on s'est borné à en rappeler les idées essentielles.

On décrit ensuite la mise en oeuvre du calcul de p_h.

Dans la partie C , on précise l'implantation des calculs de (ω_h, Ψ_h) puis de p_h.

Notations de la troisième partie

$\bar{\Omega}$ désigne la fermeture de l'ouvert Ω

T_h une triangulation de $\bar{\Omega}$

$\overset{o}{T}$ désigne l'intérieur du triangle T

$P_k(R^2)$ désigne l'espace des polynômes de degré k par rapport à l'ensemble des variables (x,y)

$C^o(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$

Supp(f) désigne le support de la fonction f soit :

$$\text{Supp } f = \{x/f(x) \neq 0\}$$

Σ_T = {ensemble des degrés de libertés du triangle T}

Les indices $\sim$ représenteront la numérotation globale, l'absence d'indice la numérotation locale.

$\tilde{N}$ désigne l'ensemble des numérots des noeuds de la triangulation.

A] Généralités sur la méthode d'éléments finis utilisés.

La méthode est basée sur la résolution du problème de Poisson discrétisé

$$(P_4')_h \quad \begin{cases} \text{On cherche } u_h - u_o \in V_h \text{ tel que :} \\ \int_\Omega \vec{\nabla} u_h \, \vec{\nabla} v_h \, d\Omega = \int_\Omega f \, v_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} g \, v_h \, d\gamma \quad , \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

Rappelons les trois aspects essentiels de la méthode des éléments finis que nous noterons $(MEFi)_{i=1}^{3}$.

MEF1 : on fait une "triangulation", notée $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$. Plus précisément, on a :

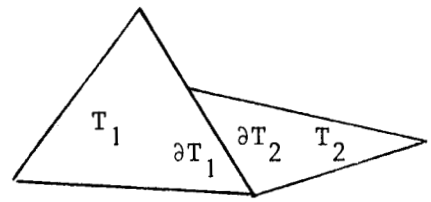
$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T \quad ,$$

avec T triangles et/ou rectangles tels que :

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \overset{\circ}{T} \neq \emptyset$$

$$\forall T_1, T_2 \ , \ T_1 \neq T_2 \Rightarrow \begin{cases} T_1 \cap T_2 = \emptyset \\ \text{ou} \\ T_1 \cap T_2 = \text{l'arête commune de } T_1 \text{ et } T_2 \end{cases}$$

$\forall T \in \mathcal{T}_h$, ∂T est Lipschitz-continue, ce qui signifie que les triangles sont non dégénérés et que la situation suivante



est interdite.

MEF2 : définition de l'espace d'approximation V_h.

On note par h le plus grand côté de tous les triangles de $\mathcal{T}_h$. Formellement, h tend vers 0. On pose :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \quad / \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad v_{h/T} \in P_k(T), v_{h/\Gamma_2} = 0\}$$

où $C^0(\bar{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, P_k l'espace des polynômes de degré k, à 2 variables réelles.

MEF3 : définition d'une base de V_h.

Elle est basée sur la constatation suivante : si $(\omega_i)_{i=1}^N$ est une base de V_h, alors

$$a_{ij} = a(\omega_i,\omega_j) = \int_\Omega (\vec{\nabla}\omega_i,\vec{\nabla}\omega_j)\,dxdy = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int (\vec{\nabla}\omega_i,\vec{\nabla}\omega_j)dxdy$$

et

$$a(\omega_i,\omega_j) = 0 \quad \text{dès que} \quad Supp(\omega_i) \cap Supp(T_j) = \emptyset .$$

On construit une base canonique de V_h dont les fonctions de base ont des supports aussi "petits", que possible.

Tous les calculs sont effectués sur un "triangle de référence" $\hat{T}$

3.1. *La méthode des éléments finis associée au problème* $(P'_4)_h$.

L'espace V (voir p. II.3) est approché par l'espace vectoriel de dimension finie suivant :

$$V_h = \{v_h / v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \quad \text{et} \quad v_{h/T} \in P_2(T), v_{h/\Gamma_2} = 0\}$$

3.1.1. Construction de la base de V_h.

Elle est basée sur la propriété suivante : pour tout triangle T de $\mathcal{T}_h$, on caractérise un polynôme de degré 2 sur T par ses valeurs aux trois sommets et aux milieux des trois côtés par la relation :

$$v_{h/T}(x,y) = \sum_{i=1}^{6} v_h(x_i,y_i)\, p_i(x,y) \quad , \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

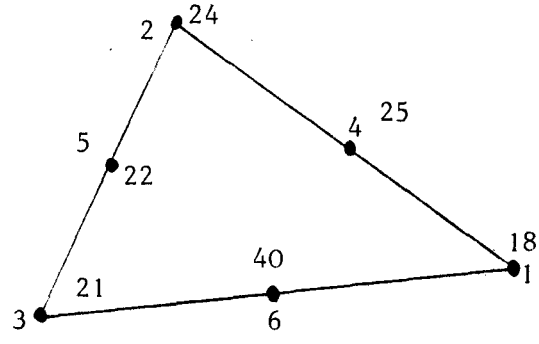


figure 3.1.

avec :

$a_i = (x_i,y_i)$ le i-ème noeud du triangle T

$$p_i(x,y) = \begin{cases} \lambda_i(x,y)(2\lambda_i(x,y) - 1) & i = 1,2,3. \\ 4\,\lambda_{i-3}(x,y)\,\lambda_{i-2}(x,y) & i = 4,5,6. \end{cases}$$

où $(\lambda_i)_{i=1}^{6}$ désigne la i-ème coordonnée barycentrique de T.

On a donc :

$$\forall 1 \leq i,j \leq 6, \qquad p_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{(Symbole de Kronecker)} .$$

Pour différencier la numérotation locale (sur chaque triangle) de la numérotation globale, on introduit les notations suivantes.

Soient :

$\tilde{N}$ l'ensemble des noeuds (sommets et milieux des triangles) numérotés de 1 à $\tilde{N}$.

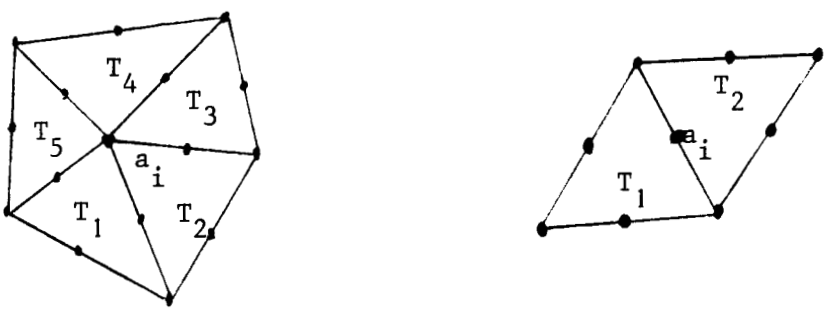
$\tilde{i}_T : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,\ldots,\tilde{N}\}$, l'application qui, au numéro local d'un noeud de T associe son numéro global (par abus de notation, on suprimera i_T). Sur la figure 3.1 on a : $\tilde{1} = 18$, $\tilde{2} = 24$ etc...

On définit $(\omega_i)_{i=1}^{\tilde{N}}$, base de V_h par :

$\omega_i(a_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker), $1 \leq i,j \leq \tilde{N}$.

Avec cette définition, il est clair que :

- MEF3 est vérifié : en effet, le support de (ω_i) est la réunion des triangles contenant a_i



a) b)

Fig. 3.2. Support des fonctions de base ω_i lorsque le noeud a_i est

a) un sommet

b) le milieu d'un côté

et on a la relation :

$$\omega_{\tilde{i}}(x,y)_{/T} = p_i(x,y).$$

On en déduit les définitions locales (resp. globales) suivantes :

$$v_h(x,y)_{/T} = \sum_{i=1}^{6} v_h(a_i)\ \omega_i(x,y)_{/T} \qquad (3.1)$$

$$v_h(x,y) = \sum_{\tilde{i}=1}^{\tilde{N}} v_h(a_{\tilde{i}})\ \omega_{\tilde{i}}(x,y) \qquad (3.2)$$

3.1.2. Formation du système

Avec les notations utilisées dans l'introduction de la 2ème partie, rappelons que le système à résoudre est le suivant :

$$(P_4')_h \quad \begin{cases} \text{On cherche } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \sum_{i=1}^{\tilde{N}} a(\omega_i,\omega_j)\, u_{hj} = L(\omega_i) \qquad \forall i = 1,\ldots,\tilde{N} . \end{cases}$$

Remarque. Comme $a(\omega_i,\omega_j) = 0$ dès que i,j n'appartiennent pas au même élément, la matrice de rigidité $(a(\omega_i,\omega_j))$ est creuse. On cherchera donc à optimiser la numérotation des noeuds de manière à minimiser la taille de la matrice à stocker.

Notations : les matrices seront notée [ ], les vecteurs { }.

On assemble la matrice et le second membre élément par élément. Plus précisément, on a :

$$a(u_h,v_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \vec{\nabla}u_h \vec{\nabla}v_h \,dxdy = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T f\, v_h \,dxdy + \sum_{T\in\Gamma_1} \int_{\partial T} g\, v_h \,d\gamma \quad (3.3)$$

Avec les notations matricielles, (3.3) devient :

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T {}^t\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v_h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_h}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial x} \end{Bmatrix} dxdy = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T f\, v_h \,dxdy + \sum_{T\in\Gamma_1} \int_{\partial T} g\, v_h \,d\gamma \quad (3.4)$$

Posons :

$$[P] = [P(x,y)] = [p_1(x,y),\ p_2(x,y),\ldots,p_6(x,y)] \qquad (3.5)$$

$$\{v_T\} = \begin{Bmatrix} v_h(a_1) \\ \vdots \\ v_h(a_6) \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

Compte tenu de (3.5) et (3.6), (3.1) devient :

$$v_h(x,y)_{/T} = [P]\ \{v_T\} \tag{3.7}$$

D'où, avec la notation évidente :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v_h}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial v_h}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x} & \cdots\cdots & \frac{\partial p_6}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial p_1}{\partial y} & \cdots\cdots & \frac{\partial p_6}{\partial y} \end{bmatrix} \{v_T\} = [DP(x,y)]\{v_T\} \tag{3.8}$$

Compte tenu de (3.8) et comme $\{v_T\}$ ne dépend pas de $\int_T$, on obtient :

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^t\{v_T\} \int_T {}^t[DP]\,[DP]\{u_T\}dxdy = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^t\{v_T\} \left(\int_T {}^t[P] f\ dxdy + \int_{\partial T \cap \Gamma_1} {}^t[P] g\ d\gamma \right) \tag{3.9}$$

On va maintenant se ramener sur le triangle de référence $\hat{T}$, pour calculer les intégrales. Dans le plan $\hat{x}O\hat{y}$, on considère le triangle $(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{a}_3)$, pris dans le sens direct, les milieux des trois arêtes étant notés $(\hat{a}_4,\hat{a}_5,\hat{a}_6)$.

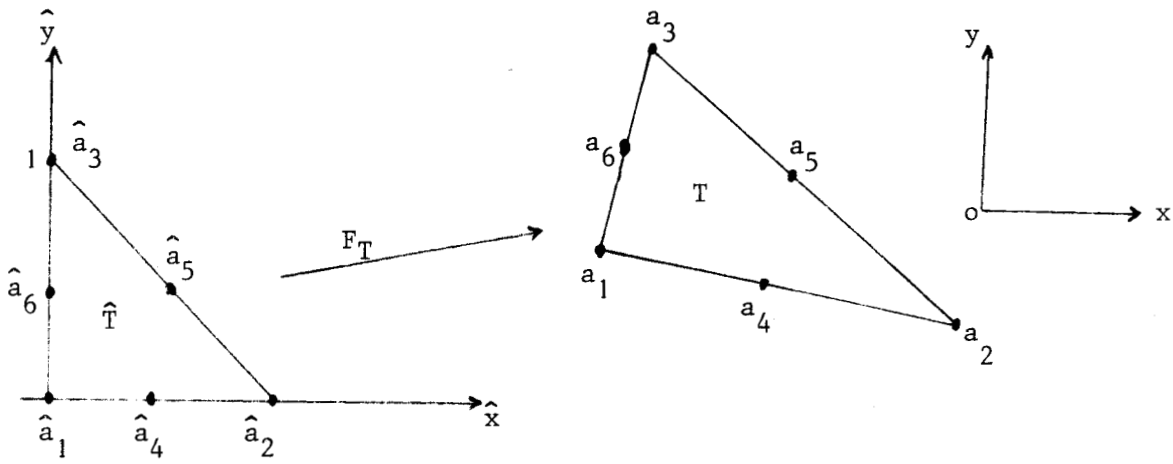


fig. 3.3 Définition du triangle $\hat{T}$ et de l'application F_T

On construit une base de P_2 en associant à chaque noeud $\hat{a}_i$ du triangle $\hat{T}$ le polynôme $\hat{p}_i \in P_2(\hat{T})$ tel que :

$$\forall i,j = 1,\ldots,6 \quad , \quad \hat{p}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij} \quad \text{(Symbole de Kronecker)} \qquad (3.10)$$

On obtient les six polynômes de base suivants :

$$\begin{cases} \hat{p}_1(\hat{x},\hat{y}) = (1-\hat{x}-\hat{y})(1-2\hat{x}-2\hat{y}) \\ \hat{p}_2(\hat{x},\hat{y}) = \hat{x}(2\hat{x}-1) \\ \hat{p}_3(\hat{x},\hat{y}) = \hat{y}(2\hat{y}-1) \\ \hat{p}_4(\hat{x},\hat{y}) = 4\hat{x}(1-\hat{x}-\hat{y}) \\ \hat{p}_5(\hat{x},\hat{y}) = 4\hat{x}\hat{y} \\ \hat{p}_6(\hat{x},\hat{y}) = 4\hat{y}(1-\hat{x}-\hat{y}) \end{cases}$$

Dans chaque triangles T de la triangulation, on considère le système de numérotation locale des noeuds pris dans le sens direct

(cf. fig. 3.2) qui est entièrement déterminée par le choix du premier sommet a_1 et qui définit de manière unique l'application affine F_T par :

$$F_T(\hat{a}_i) = a_i \qquad i = 1,2,3 \qquad (3.11)$$

cette relation étant valable pour $i = 4,5,6$.

On obtient alors la formule suivante :

$$F_T(\hat{x},\hat{y}) = \hat{x}\{a_2-a_1\} + \hat{y}\{a_3-a_1\} + \{a_1\} = [F_1(\hat{x},\hat{y}),F_2(\hat{x},\hat{y})].$$

Calculons maintenant $[DP(x,y)]$. De (3.11) on déduit que :

$$\hat{p}(\hat{x},\hat{y}) = p \circ F_T(\hat{x},\hat{y}) = p(x,y).$$

D'où, avec des notations évidentes :

$$\{\hat{D}\,\hat{P}(\hat{x},\hat{y})\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}}(\hat{x},\hat{y}) \\ \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}}(\hat{x},\hat{y}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x}(x,y) \\ \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) \end{Bmatrix} = [DF(\hat{x},\hat{y})]\{DP(x,y)\}$$

Donc :

$$\{DP(\hat{x},\hat{y})\} = [DF(\hat{x},\hat{y})]^{-1} \{\hat{D}\hat{P}(\hat{x},\hat{y})\} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix}^{-1} \{\hat{D}\hat{P}(\hat{x},\hat{y})\}$$

soit :

$$\{DP(x,y)\} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_{31} & y_{12} \\ \\ x_{31} & x_{21} \end{bmatrix} \{\hat{D}\hat{P}(\hat{x},\hat{y})\} \qquad (3.12)$$

avec $x_{ij} = x_i - x_j$; $y_{ij} = y_i - y_j$; $\Delta = x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21}$

3.1.2.1. Formation de la matrice élémentaire de rigidité.

Compte tenu de (3.12), le membre de gauche de (3.9) devient :

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^t\{v_T\}\,\frac{1}{|\Delta|}\int_{\hat{T}} {}^t\{\hat{D}\hat{P}\}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\{\hat{D}\hat{P}\}\,dxdy \qquad (3.13)$$

avec :

$$a_{11} = x_{31}^2 + y_{31}^2 \quad ; \quad a_{12} = y_{31}y_{12} + x_{31}x_{21}$$

$$a_{21} = a_{12} \quad ; \quad a_{22} = y_{12}^2 + x_{21}^2 \ .$$

Soit A_T la matrice élémentaire à 6 lignes, 6 colonnes telle que :

$$a(u_h,v_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^t\{v_T\}[A_T]\{u_h\} \ .$$

On a alors :

$$[A_T]_{ij} = \frac{1}{|\Delta|}\int_{\hat{T}} \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\hat{p}_i}{\partial\hat{x}_k}\sum_{\ell=1}^{2} a_{k\ell}\frac{\partial\hat{p}_i}{\partial\hat{x}_\ell}\,d\hat{x}\,d\hat{y}$$

$$[A_T]_{ij} = \frac{1}{|\Delta|}\sum_{k,\ell=1}^{2} a_{k\ell}\ c_{ikj\ell}$$

avec :

$$c_{ikj\ell} = \int_{\hat{T}}\frac{\partial\hat{p}_i}{\partial\hat{x}_k}\ \frac{\partial\hat{p}_i}{\partial\hat{x}_\ell}\,d\hat{x}\,d\hat{y} \qquad 1\leqslant i,j\leqslant 6 \qquad 1\leqslant k,\ell\leqslant 2$$

que l'on calcule une fois pour toute à l'aide de la formule

$$\int_{\hat{T}}\hat{x}^\alpha\,\hat{y}^\beta\,d\hat{x}d\hat{y} = \frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+2)!} \ .$$

3.1.2.2. Calcul du second membre élémentaire.

On va calculer séparément les termes de bord du membre de droite de la formule (3.9). Désignons par b_T^1 le premier terme, on a :

$$b_T^1 = \int_T^t [P] f \, dxdy = \int_{\hat{T}}^t [\hat{P}] \hat{f} \, |\Delta| \, d\hat{x}d\hat{y} = \int_{\hat{T}} \begin{Bmatrix} \hat{p}_1 \, \hat{f}|\Delta| \\ \vdots \\ \hat{p}_6 \, \hat{f}|\Delta| \end{Bmatrix} d\hat{x}d\hat{y}$$

On approxime l'intégrale par la formule d'intégration numérique qui intègre exactement les polynômes du second degré :

$$\int_{\hat{T}} \psi(\hat{x},\hat{y}) d\hat{x}d\hat{y} = \frac{1}{6} \sum_{i=4}^{6} \psi(\hat{a}_i) = \frac{1}{6} \sum_{i=4}^{6} \psi(a_i) \quad (3.14)$$

On introduit alors une erreur supplémentaire du même ordre que l'erreur d'interpolation.

Compte tenu de (3.14), puis de (3.10), b_T^1 devient :

$$b_T^1 = \frac{|\Delta|}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(a_4) \\ f(a_5) \\ f(a_6) \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Puis, on calcule b_T^2 de la manière suivante :

$$b_T^2 = \int_{\partial T} {}^t[P] g \, d\gamma = \int_{\partial T} \begin{Bmatrix} p_1 g \\ \vdots \\ p_6 g \end{Bmatrix} d\gamma$$

On intègre à partir de la formule de Simpson :

$$\int_{\partial T} (p_i g)(x,y)\,d\gamma \simeq \frac{h}{3}\left[g(a_j)p_i(a_j) + 4\, g(a_{j+3})p_i(a_{j+3}) + g(a_{j+1})p_i(a_{j+1})\right]$$

pour $j = 1,2,3$ [mod 3] avec : a_j —— a_{j+3} (sur ∂T) —— a_{j+1}

$$d = d(a_j, a_{j+1}).$$

On obtient alors (pour $j = 1$, resp. 2, resp. 3) suivant que $\partial T \cap \Gamma_1 = [a_1,a_2]$ resp $[a_2,a_3]$, $[a_3,a_1]$:

$$b_T^2 = \frac{d}{3}\begin{Bmatrix} g(a_1) \\ g(a_2) \\ 0 \\ 4g(a_4) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{resp. } \frac{d}{3}\begin{Bmatrix} 0 \\ g(a_2) \\ g(a_3) \\ 0 \\ 4g(a_5) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{resp. } \frac{d}{3}\begin{Bmatrix} g(a_1) \\ 0 \\ g(a_3) \\ 0 \\ 0 \\ 4g(a_6) \end{Bmatrix} \tag{3.16}$$

Posant

$$b_T = b_T^1 + b_T^2 \ ,$$

on obtient le système :

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^t\{v_T\}[A_T]\{u_T\} = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^t\{v_T\}\{b_T\} \quad , \quad \forall v_h \in V_h \ . \tag{3.17}$$

Soient maintenant $\{\tilde{u}_h\}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{\tilde{N}}$ de i-ème composante $u_h(x_i,y_i)$, $\mathcal{B}_T$ l'application de $\mathbb{R}^{\tilde{N}}$ dans $\mathbb{R}^6$ définie par :

$$\mathcal{B}_T\{\tilde{u}_h\} = \{u_T\}$$

ayant pour matrice associée $[B_T]$. On obtient alors

$$\{u_T\} = [B_T]\{\tilde{u}_h\}$$

et (3.17) devient :

$$ {}^t\{\tilde{v}_h\}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^t[B_T]\,[A_T]\,[B_T]\Big)\{\tilde{u}_h\} = {}^t\{\tilde{v}_h\}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^t[B_T]\{b_T\}\Big),\ \forall \tilde{v}_h \in V_h . $$

D'où, avec des notations évidentes, le système :

$$ [\tilde{A}]\{\tilde{u}_h\} = \{\tilde{b}\} \tag{3.18} $$

3.1.3. Prise en compte des conditions de Dirichlet.

Considérons la structure du système linéaire donné par (3.17). On décompose le vecteur $\{\tilde{b}\}$ en $\{\tilde{b}_\ell\}$ et $\{\tilde{b}_b\}$ correspondants respectivement aux degré de libertés libres (noeuds intérieurs de Ω) et aux degrés de libertés bloqués (une partie des noeuds frontières). La formule (3.18) s'écrit symboliquement :

$$ \begin{array}{c} \tilde{N} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} N_\ell \\ \\ N_b \end{array} \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{\ell\ell} & \tilde{A}_{\ell b} \\ \hline \tilde{A}_{b\ell} & \tilde{A}_{bb} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{h\ell} \\ \tilde{u}_{hb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{b}_\ell \\ \tilde{b}_b \end{Bmatrix} . $$

Soit encore :

$$ \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{\tilde{N}} a_{ij}\,\tilde{u}_{hj} = \tilde{b}_{\ell i} \quad , \qquad i=1,\dots,N_\ell & (3.19) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\tilde{N}} a_{ij}\,\tilde{u}_{hj} = \tilde{b}_{bi} \quad , \qquad i = N_{\ell+1},\tilde{N} & (3.20) \end{cases} $$

Remplaçons $(a_{ii})_{i=N_{\ell+1}}^{\tilde{N}}$ par α et $(b_{bi})_{i=N_{\ell+1}}^{\tilde{N}}$ par $(\overline{u_{hi}})_{i=1}^{N_b}$ dans (3.20), on obtient :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\tilde{N}} a_{ij}\, \tilde{u}_{hj} + \alpha\, \tilde{u}_{hi} = \alpha\, \bar{u}_{hi} \qquad i=1,\ldots,N_b \tag{3.21}$$

Numériquement, si α est "très grand" (par exemple e^{30}), de sorte que :

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\tilde{N}} a_{ij}\, \tilde{u}_{hj} \right| << \left| \alpha\, \tilde{u}_{hi} \right| \qquad i = 1,\ldots,N_b$$

On obtient alors l'égalité informatique :

$$\alpha\, \tilde{u}_{hi} = \alpha\, \bar{u}_{hi} \qquad i=1,\ldots,N_b$$

En effet, si A et B sont deux nombres machines :

A = a, bcdefg

B = 0,000000 hijkℓmn

alors :

A + B = a,bcdefghijkℓmn = A

car les six derniers chiffres sont tronqués par l'ordinateur. Ce procédé permet de prendre en compte les conditions aux limites de Dirichlet sur la frontière Γ_2 sans modifier la structure interne du système à résoudre, ce qui simplifie la programmation et minimise le nombre d'opérations à effectuer.

3.1.4. Résolution du système linéaire

Comme la matrice est symétrique, définie positive, on va utiliser la méthode de Cholesky pour résoudre le système.

On veut résoudre le système linéaire :

$$AX = B.$$

On factorise A sous la forme $L\,{}^tL$ avec L matrice triangulaire inférieure, ce qui permet de décomposer le système en deux systèmes triangulaires :

$$\begin{cases} LY = B & \text{(descente)} \\ {}^tLX = Y & \text{(remontée)} \end{cases}$$

Comme $[\tilde{A}]_{ij} = 0$ dès que i et j n'appartiennent au même élément, la matrice $[\tilde{A}]$ est une matrice bande. On stockera seulement le "profil" de la matrice. Plus précisément, soient

$$\lambda(i) = \min_{[\tilde{A}]_{ij} \neq 0} j$$

le numéro de la colonne du 1er coefficient non nul de la i-ème ligne de la matrice $[\tilde{A}]$

$$\mu(i) = \sum_{k=1}^{i} (k - \lambda(k) + 1)$$

le numéro du i-ème coefficient diagonal pour un stockage de haut en bas et de la gauche vers la droite : connaissant μ, on calcule λ par :

$$\lambda(i) = i - \mu(i) + \mu(i-1) + 1.$$

On appelle profil de $[\tilde{A}]$ l'ensemble des coefficients $\mu(1)$ à $\mu(\tilde{N})$. Le profil de $[\tilde{A}]$ étant conservé par la factorisation, $[L]$ peut écraser $[A]$ en mémoire centrale au cours du calcul. Les formules (optimisées) de cette factorisation sont les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \ell_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=\max(\lambda_{(i)},\lambda_{(j)})}^{i=1} \ell_{ik}\,\ell_{jk} / \ell_{jj} \ , \ \lambda(i) \leq j < i-1 \\ \\ \ell_{ii} = (a_{ii} - \sum_{k=\lambda(i)}^{i-1} \ell_{ik}^2)^{1/2} \end{array}\right\} 1 \leq i \leq n$$

à condition de ne pas effectuer de sommations si la plus petite valeur de k est supérieure, strictement, à $i-1$ ou $j-1$, ni si $\lambda(i) > i-1$. Celles de la descente sont :

$$y_i = (b_i - \sum_{k=\lambda(i)}^{i-1} \ell_{ik}\, y_k)/\ell_{ii} \qquad 1 \leq i \leq n$$

avec la même convention sur k, celles de la remontée sont :

$$\begin{cases} x_n = y_n/\ell_{nn} \\ \\ x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^{\lambda(i)} \ell_{ji}\, x_j)/\ell_{ii} \qquad i = n-1,\ldots,1 \ . \end{cases}$$

B] Le calcul de (ω_h, Ψ_h) et de p_h et estimations d'erreurs.

3.2. *Le calcul de* (ω_h, Ψ_h)

3.2.1. (ω_h, Ψ_h)

Soit T_h une triangulation régulière, définie sur $\bar{\Omega}$.

On a donc

$$\Omega = \bigcup_{K \in T_h} T$$

On construit l'espace V_h, approximation de $H^1(\Omega)$ par :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega) \ / \ \forall T \in T_h, \ v_{h/T} \in P_T\}$$

avec

$$p_T = \{p : T \to R, \ p = p \circ F_T^{-1}, \quad \forall \hat{p} \in P_2(\hat{T})\}$$

On définit ensuite les espaces :

$$V_{o,h} = \{v_h \in V_h \ / \ v_{h/\Gamma} = 0\}$$

$$V_{2,h} = \{v_h \in V_h \ / \ v_{h/\Gamma_2} = 0\}$$

$$M_h = \{v_h \in V_{2h} \ / \ v_h(n_i) = 0, \ \forall n_i, \text{ noeud de } \Omega\}$$

Les équations discrétisées ont été définies au §.2.4.

Le problème $(2.3.4.1)_h$ peut être résolu de deux manières :

(i) on met le terme convectif au second membre, on utilise alors une méthode de point fixe avec sous relaxation. La matrice formée est alors symétrique. Cette méthode est recommandée aux petits nombres de Reynolds ($Re \lesssim 100$). Si Re est trop grand, le terme convectif devient prépondérant et il faut fortement sous relaxer.

(ii) on met le terme convectif au premier membre. La méthode est directe mais la matrice obtenue n'est plus symétrique, d'où utilisation de beaucoup plus de place en mémoire centrale. En contre-partie, le système n'est résolu qu'une seule fois.

Pour calculer le terme convectif, on utilise la relation "d'invariance du terme convectif", démontrée dans [4] :

$$\forall T \in \mathcal{T}_h \; ; \; \int_T p_i \left(\frac{\partial \Psi_h}{\partial x}\frac{\partial \omega_h}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_h}{\partial y}\frac{\partial \omega_h}{\partial x}\right) dxdy = \int_{\hat{T}} \hat{p}_i \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_h}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{\omega}_h}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial \hat{\Psi}_h}{\partial \hat{y}}\frac{\partial \hat{\omega}_h}{\partial \hat{x}}\right) d\hat{x}d\hat{y}$$

Pour résoudre le problème $(2.3.4.2)_h$, on est amené à former la matrice de masse $\mathbb{M}$ de matrice élémentaire

$$\mathbb{M}_T = \int_T |\Delta| \; \hat{P}_i \; \hat{P}_j \; d\hat{x}d\hat{y}$$

pour le calcul du second membre que l'on obtient par la formule :

$$\{\tilde{b}^n\} = \mathbb{M}\{\tilde{\omega}^n\}$$

3.2.2. Estimation d'erreur.

Il nous faut définir les espaces :

$$V_h = \{(\psi_h, \theta_h) \in V_{o,h} \times V_h, \quad \forall \mu \in V_{2,h}, \quad \beta((\psi_h, \theta_h), \mu_h) = 0\}$$

$$W_h = \{(\psi_h, \theta_h) \in V_{o,h} \times V_h \; ; \; \forall \mu_h \in V_{o,h}, \quad \beta((\psi_h, \theta_h), \mu_h) = 0\}$$

On a le

Théorème 3.2. Il existe une constante C, indépendante de la discrétisation, telle que l'on ait la majoration suivante :

$$|\psi-\psi_h|_{1,2,\Omega} + (1-\varepsilon)\|\omega-\omega_h\|_{0,2,\Omega} \leq C\{ \inf_{(\vartheta_h,\theta_h)\in V_h} [|\psi-\vartheta_h|_{1,2,\Omega}+\|\omega-\theta_h\|_{0,2,\Omega}] +$$

$$+ \inf_{\mu_h\in V_{2h}} \|\omega+\mu_h\|_{1,2,\Omega}\}$$

avec :

$$\varepsilon = (1+\alpha)\ Re\ N\ \|\bar{\Psi}\|_V \qquad \text{où} \quad \alpha = \alpha(h) \quad \text{tel que :}$$

$$\forall(\vartheta_h,\theta_h) \in V_h\ , \quad |\vartheta_h|_{1,2,\Omega} \leq \alpha(h)\ \|\theta_h\|_{0,2,\Omega}$$

Démonstration : Voir le théorème 5 page 10 de Ciarlet-Raviart [9].

Remarque. Pour des grands nombres de Reynolds, le terme $(1-\varepsilon)$ devient "petit" et on peut s'attendre à ce que la précision sur ω soit moins bonne. En fait, les résultats numériques obtenus justifient a postériori l'emploi de la méthode pour des nombres de Reynolds élevés.

3.3. *Le calcul de la pression.*

Rappelons que l'on veut résoudre le problème discret suivant :

$(P_5)_h$

On cherche $p_h - p_o \in V_h^1$ tel que :

$$\int_\Omega \vec{\nabla} p_h \cdot \vec{\nabla} v_h\ d\Omega = \int_\Omega f_h\ v_h\ d\Omega + \int_{\Gamma_1} g_h\ v_h\ d\gamma \quad , \qquad \forall v_h \in V_h^1$$

où

$$f_h = 2\left(\left(\frac{\partial^2\psi_h}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\psi_h}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_h}{\partial y^2}\right) \tag{3.22}$$

g_h est obtenue à partir de (1.29), (1.30), (1.31) par les relations :

$$g_h = \frac{\partial P_h}{\partial n} = \frac{\partial P_h}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial P_h}{\partial y}\sin\theta \tag{1.29}_h$$

avec :

$$\frac{\partial P_h}{\partial x} = -\frac{1}{Re}\frac{\partial \omega_h}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_h}{\partial y}\frac{\partial^2 \Psi_h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Psi_h}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi_h}{\partial x^2} \qquad (1.30)_h$$

$$\frac{\partial P_h}{\partial y} = \frac{1}{Re}\frac{\partial \omega_h}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_h}{\partial y}\frac{\partial^2 \Psi_h}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \qquad (1.31)_h$$

On choisit d'une manière canonique $V_h^1 = V_h$ (§.3.1).

Le calcul de la matrice de rigidité ayant été développée dans la partie A, on se bornera au calcul de second membre.

Calcul de b_T^1 :

On a, d'après la formule (3.15) :

$$b_T^1 = \frac{|\Delta|}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{h/T}(a_4) \\ f_{h/T}(a_5) \\ f_{h/T}(a_6) \end{Bmatrix}$$

Or :

$\Psi_h \in P_2(T) \Rightarrow f_{h/T} = f_T$ = constante sur chaque triangle.

D'où :

$$b_T^1 = \frac{|\Delta|}{6} f_T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Calculons f_T. Pour cela, il nous faut évaluer les dérivées secondes de Ψ_h. On va utiliser pour cela la relation (3.1) qui nous permettra de calculer les dérivées secondes de Ψ_h dans le triangle T connaissant les six valeurs de Ψ_h aux noeuds. On a :

$$\Psi_h(x,y) = \sum_{i=1}^{6} \Psi_h(a_i)\, p_i(x,y) \quad , \quad \forall (x,y) \in T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

D'où :

$$\frac{\partial \Psi_h}{\partial x_j}(x,y) = \sum_{i=1}^{6} \Psi_h(a_i) \frac{\partial p_i}{\partial x_j}(x,y) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{k=1}^{2} \Psi_h(a_i) \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{x}_k}(\hat{x},\hat{y}) \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_j}, \quad \forall j = 1,2 \quad (3.23)$$

Et :

$$\frac{\partial^2 \Psi_h}{\partial x_j \partial x_\ell}(x,y) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{k,p=1}^{2} \Psi_h(a_i) \left[\frac{\partial^2 \hat{p}_i}{\partial \hat{x}_p \partial \hat{x}_k} \frac{\partial \hat{x}_p}{\partial x_\ell} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_j}(x,y) + \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial^2 \hat{x}_k}{\partial x_\ell \partial x_j} \right]$$

F_T étant affine, le deuxième terme est nul. Il reste à évaluer le premier terme. Posons :

$$a_{\ell p} = \frac{\partial \hat{x}_p}{\partial x_\ell} \quad \text{et} \quad b^i_{pk} = \frac{\partial^2 p_i}{\partial \hat{x}_p \partial \hat{x}_k}$$

On calculera b^i_{pk} une fois pour toutes et $a_{\ell p}$ sur chaque élément.

On obtiendra :

$$\frac{\partial^2 \Psi_h}{\partial x_j \partial x_\ell}(x,y) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{k,p=1}^{2} \Psi_h(a_i)\, b^i_{pk}\, a_{\ell p}\, a_{jk} \qquad 1 \leq j,\ell \leq 2$$

d'où f_T.

Calcul de b_T^2

Pour calculer g_h il nous faut, d'après les formules $(1.29)_h$, $(1.30)_h$, $(1.31)_h$ calculer les dérivées de ω_h et de ψ_h.

On utilise pour cela la formule (3.23) qui nous permet de calculer une approximation des dérivées premières d'une fonction $\Psi_h \in V_h$ connaissant ses six valeurs nodales.

3.3.2. Estimation d'erreur.

On note :

$$L^\infty(\Omega) = \{f \,/\, \sup_{x\in\Omega} \text{ess } |f(x)| < +\infty\}$$

$$W^{m,\infty}(\Omega) = \{f \,/\, \partial^\alpha f \in L^\infty(\Omega),\ \forall\alpha = (\alpha_1,\alpha_2),\ |\alpha_1+\alpha_2| \leq m\}$$

$|\varphi|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|=m} \{\sup_{x\in\Omega} \text{ess } |\partial^\alpha\varphi(x)|\}$: c'est une semi norme sur $W^{m,\infty}(\Omega)$.

$\|\varphi\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|\leq m} \{\sup_{x\in\Omega} \text{ess } |\partial^\alpha\varphi|\}$: c'est une norme sur $W^{m,\infty}(\Omega)$.

On va supposer que $p \in W^{3,\infty}(\Omega)$; ceci est justifié car la pression de Hiemenz est très régulière. On a alors le résultat (voir [10])

$$\exists C \quad |p-p_h|_{o,\infty,\Omega} \leq C\, h^3 \|p\|_{3,\infty,\Omega} \tag{3.24}$$

$$\exists C \quad \|p-p_h\|_{1,\infty,\Omega} \leq C\, h^2 \|p\|_{3,\infty,\Omega} \tag{3.25}$$

où C est une constante indépendante de la discrétisation.

C] Mise en oeuvre sur ordinateur.

Toutes les références de cette partie figurent annexe 3 p. 84-85.

Tous les calculs ont été effectués sur l'ordinateur IRIS 80 de l'Université de Lille 1.

On y a utilisé et implanté une partie de la bibliothèque MODULEF [14], version 3-0 pour résoudre ce problème.

Les programmes sont écrits en FORTRAN et divisés en grandes étapes autonomes, ou Modules ; le raccordement entre les différents modules se fait par l'intermédiaire de fichiers (disques, ou bandes magnétiques) dont la structure est codifiée sous la forme de "structures de données" (dans toute la suite, on écrira S.D.).

3.4. La géométrie.

La bibliothèque utilisée est la bibliothèque MEFMEFIBIBL [3]

Les modules suivants ont été utilisés :

TRIAUT : génère une triangulation (et/ou quadrangulation) d'un domaine à partir des sommets frontaliers (méthode de George [15]).

SYMDR : forme un maillage symétrique par rapport à une droite d'un autre maillage.

RECOL : forme un maillage unique à partir de deux maillages différents.

ADPOIN : permet l'adjoinction de noeuds, non sommets, support de degrés de liberté.

RENCMK : renumérote les noeuds, éventuellement les éléments, par la méthode de Curthill-Mac Kee [16].

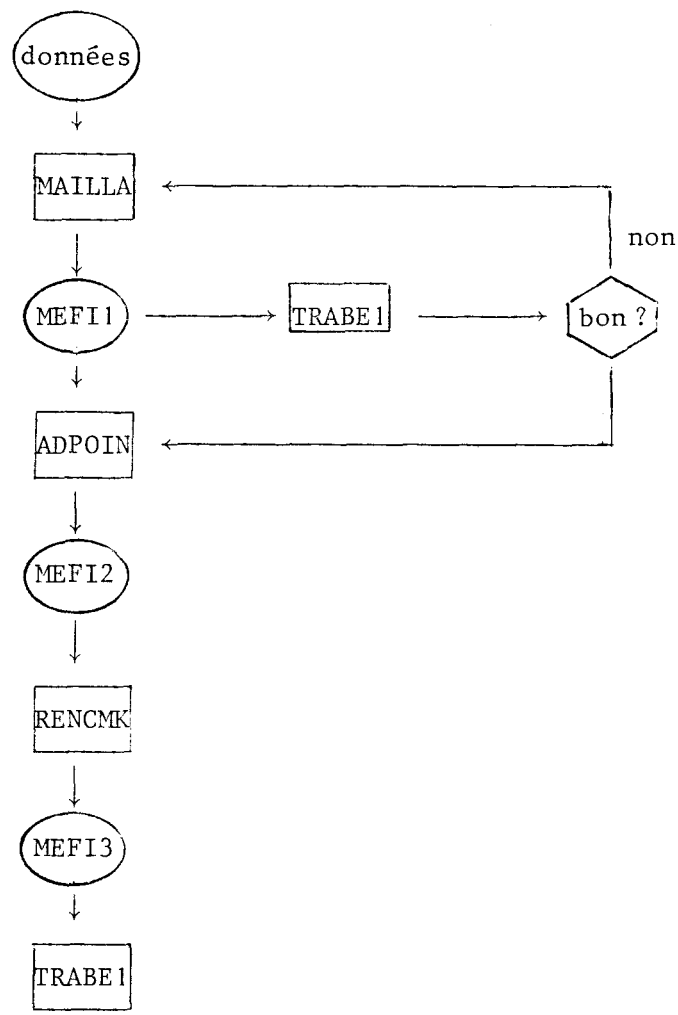
TRABE1 : effectue le tracé BENSON du maillage obtenu, élément par élément.

La description complète du maillage figure dans l'annexe 1.

Donnons l'organigramme de la partie géométrique :

MAILLA : désigne le programme permettant d'obtenir la première triangulation de Ω.

La S.D. créée est la S.D. MEFI



Organigramme de la partie géométrique.

La méthode de construction du maillage sans cavité est détaillée annexe 2.

Pour construire le maillage avec cavité, on a utilisé le maillage sans cavité auquel on a rajouté la cavité.

Voir figure 3.1 le maillage sans cavité et figure 3.2 le maillage avec la cavité.

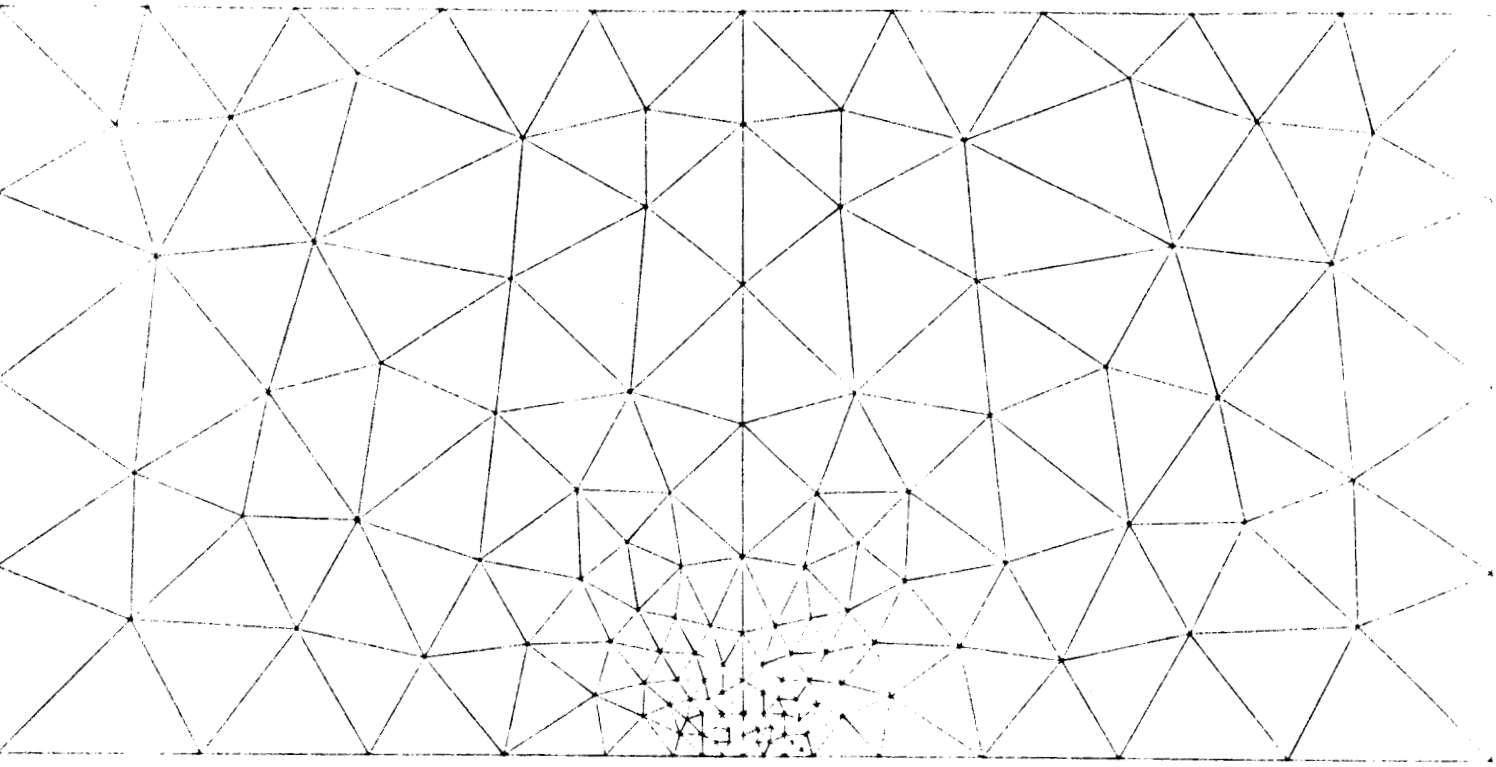


FIGURE 3.1

NAVIER STOKES
PREMIER MAILLAGE
. LE 29 MAI 1980
.

NOMBRE DE TRIANGLES= 252
NOMBRE DE QUADRILATERES= 0
NOMBRE D ELEMENTS FRONTALIERS= 70
NOMBRE DE SOMMETS= 144
NOMBRE DE NOEUDS= 539
LES SOMMETS SUPPORTENT DES DEGRES DE LIBERTE

ECHELLE: 1CM= 34.0E-4 . UNITE(S) REELLE(S)

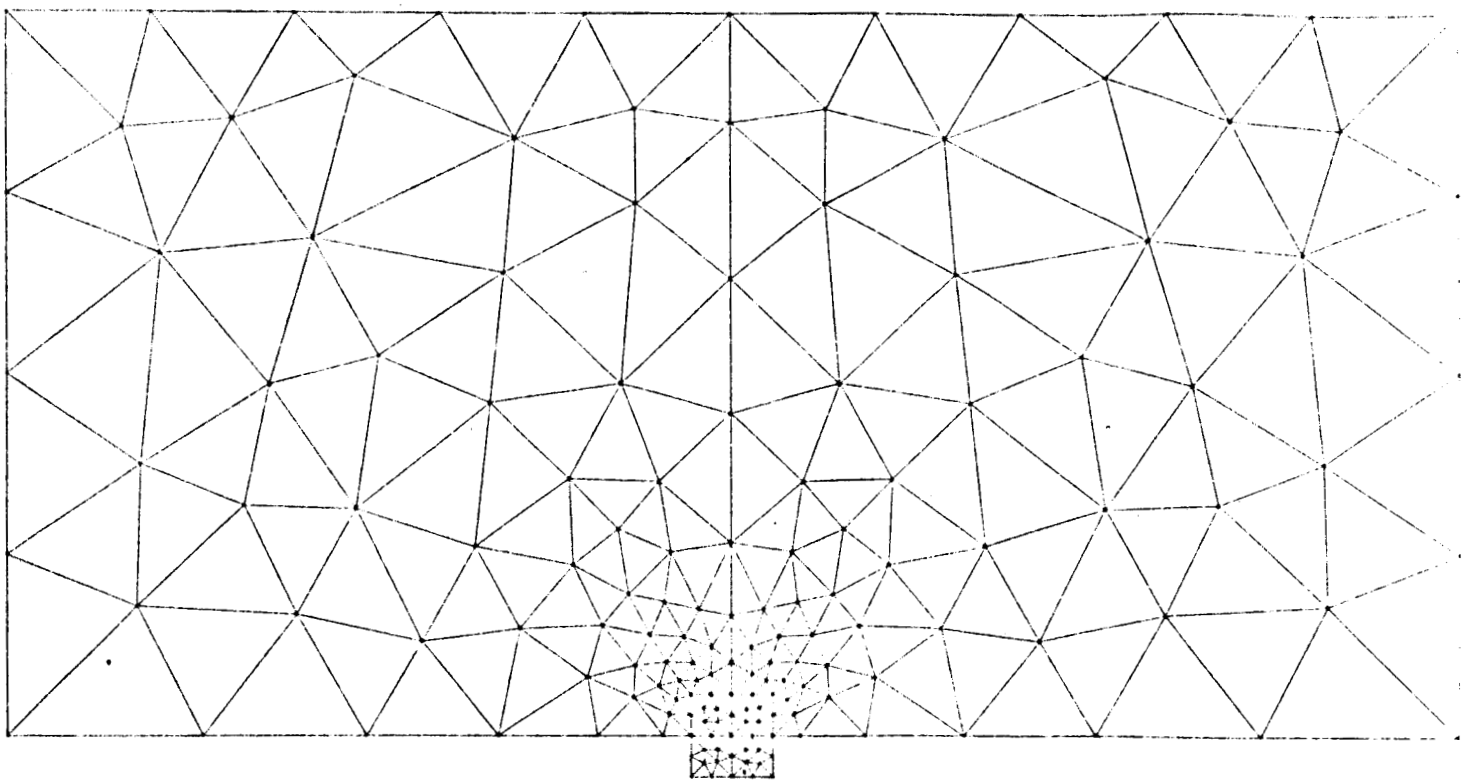


FIGURE 3.2

NAVIER STOKES
MAILLAGE DEFINITIF
LE 29 MAI 1980

NOMBRE DE TRIANGLES= 280
NOMBRE DE QUADRILATERES= 0
NOMBRE D ELEMENTS FRONTALIERS= 80
NOMBRE DE SOMMETS= 160
NOMBRE DE NOEUDS= 599
LES SOMMETS SUPPORTENT DES DEGRES DE LIBERTE

ECHELLE: 1CM= 35.0E-4 . UNITE(S) REELLE(S)

BUS LILLE

3.5. Description des différentes structures de données à fournir pour le calcul.

On consultera [13] pour la description des différentes structures de données utilisées.

Description des modules utilisés.

* MEFNOP [1] : ce module transforme la S.D. MEFI en la S.D. NOPO, utilisable par les bibliothèques MØDULEF.
* COMACO [4] : ce module permet de construire les S.D. MAIL (maillage) et CØØR (coordonnées).
* CALMAI : ce module permet de différencier les différents types de noeuds frontaliers : il construit la S.D. MPLR.
* DIRICH ou THELAS [8], [10] : ce module construit les matrices élémentaires Il construit les S.D. TAE.
* COBDCL [5], [9] : Ce module permet le calcul des conditions aux limites et il construit la S.D. BDCL.
* ACCMCA [6] : Ce module effectue l'assemblage des matrices élémentaires et construit la S.D. MUA1.
* ASMB [6] : Ce module effectue l'assemblage des seconds membres élémentaires et construit la S.D. B1.
* CLCHCR [6] : Ce module permet la prise en compte des conditions aux limites et construit les nouvelles S.D. MUA2 et B2.
* PREPAC [6] : Ce module permet de préparer la résolution du système linéaire par la méthode de Cholesky et construit la S.D. MUA3 (sans la matrice A).
* CHOLES [6] : Ce module factorise la matrice A et construit une structure de données MUA3 avec la matrice L.

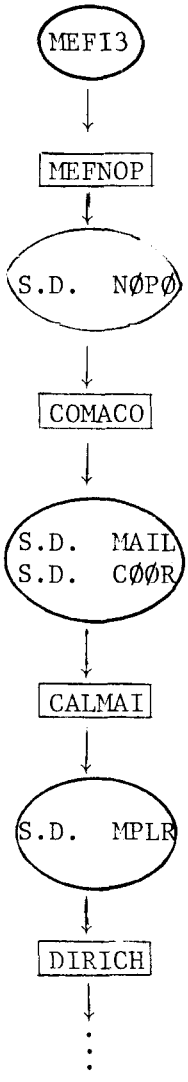
* NSPSOM (Annexe 3) : Ce module résout les équations de Navier-Stokes et construit des S.D. B.

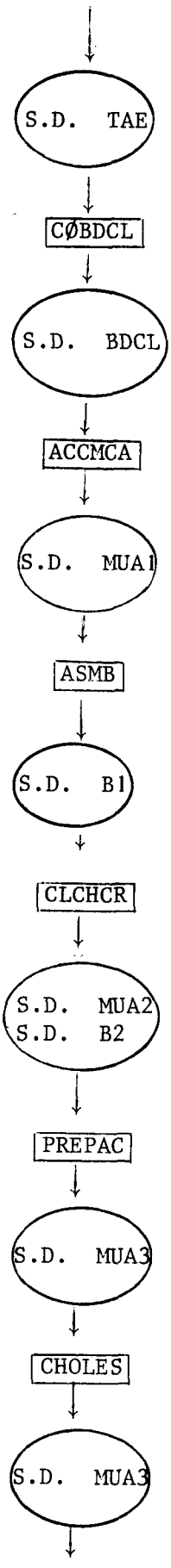
  Pour l'utilisation de ce module, on consultera l'annexe 3.

* NSPROP (Annexe 4) : Ce module écrit et programmé par l'auteur, calcule la pression à partir de (ω_h, Ψ_h) calculé à partir de NSPSOM. Il créé une S.D. B (voir annexe 4 pour l'utilisation de ce module.

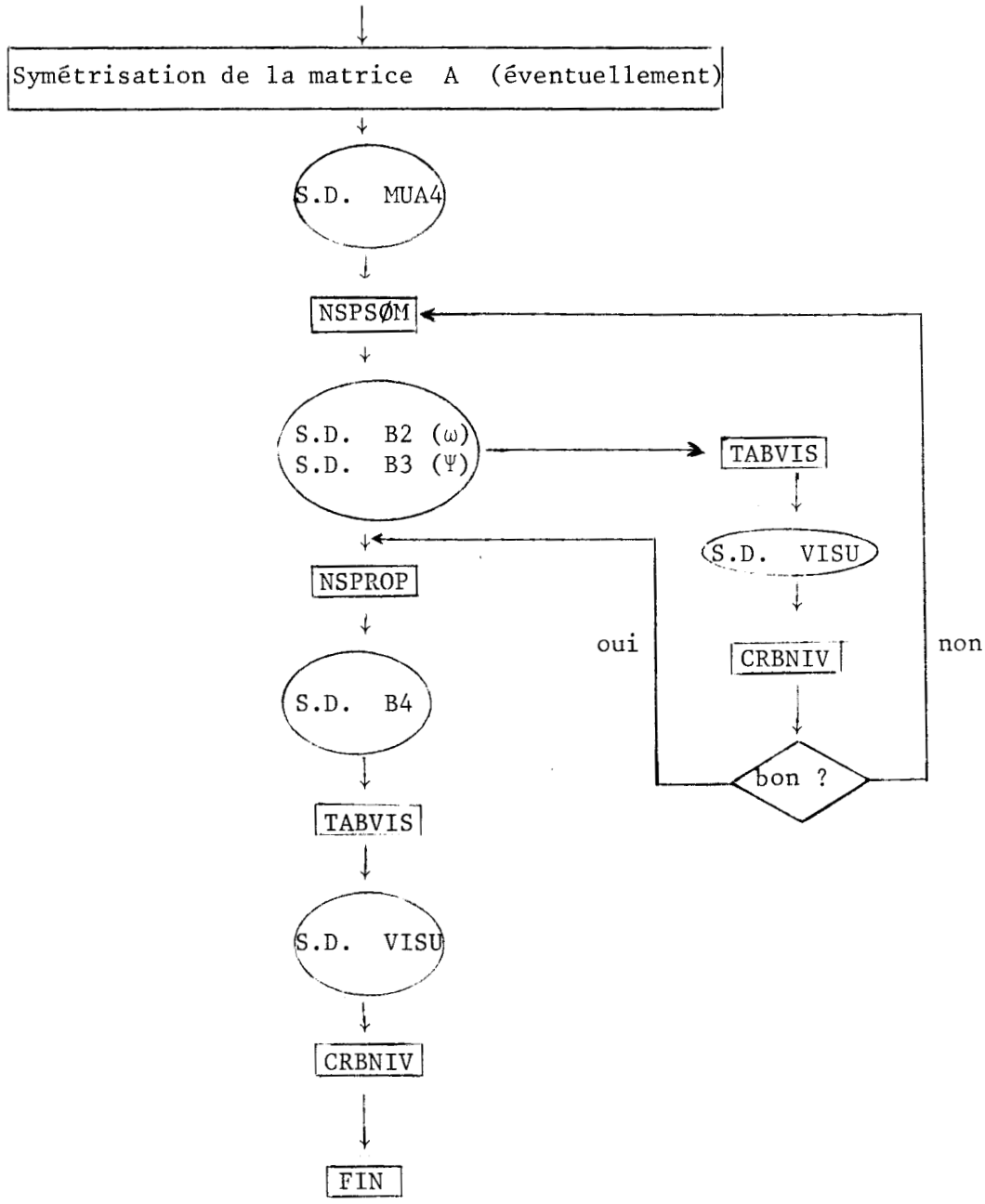
* TABVIS et CRBNIV [12] : Ces deux modules permettent la visualisation des lignes de niveau. On créé la structure de données VISU. On peut ainsi contrôler la validité des résultats obtenus.

Voici l'organigramme des calculs.




S.D. TAE
CØBDCL
S.D. BDCL
ACCMCA
S.D. MUA1
ASMB
S.D. B1
CLCHCR
S.D. MUA2
S.D. B2
PREPAC
S.D. MUA3
CHOLES
S.D. MUA3

BUS LILLE



Organigramme des calculs.

Chapitre 4

RESULTATS NUMERIQUES

Introduction au chapitre 4

On présente les résultats obtenus dans l'ordre où les calculs ont été effectués.

Les différents modules ont été testés et mis au point sur un maillage à 37 points qui a toutes les caractéristiques géométriques du maillage complet sans la cavité. On a ainsi implanté et testé :

le module NSPSOM (cf annexe 3 p. 70),

le module NSPROP (cf annexe 4 p. 19).

Dans la partie A, on donne les résultats obtenus pour le maillage effectif complet sans cavité (fig. 3.1).

Dans la partie B, on donne les résultats obtenus pour un maillage avec une cavité de profondeur $\ell/2$ (fig. 3.2).

Dans la partie C, on donne les tracés (effectués par nombre de Reynolds croissants (1, 10, 100, 400, 1000)) suivants :

- lignes de courant
- lignes isotourbillons
- champ des vecteurs vitesse
- lignes isobares

dans l'ordre suivant :

a) écoulement sans cavité :

- tracé de l'écoulement d'Hiemenz (exact)
- tracé de l'écoulement d'Hiemenz (calculé par NSPSOM ou NSPROP)
- tracé de l'écoulement perturbé.

b) écoulement avec cavité.

Notations du chapitre 4

NP le nombre de noeuds du maillage considéré

L'indice h désigne la solution obtenue par la méthode numérique du problème de Navier-Stokes dont les données au bord sont définies par la solution de Hiemenz ; ex : Ψ_h.

L'indice H désigne la solution de Hiemenz de la fonction considérée à l'exception de P_H ; P_H désigne la différence de la pression d'Hiemenz et de la pression au point d'arrêt.

$|\Psi|$ le module de la fonction Ψ.

Ψ_j la valeur Ψ au $j^{\text{ème}}$ noeud de la triangulation

$\tilde{\Delta\Psi}_i = \Psi_{iH} - \Psi_{ih}$

$$\|\Psi\|_\infty = \max_{1\leq j\leq NP} |\Psi_{hj}| \quad , \qquad \|\Psi_H\|_\infty = \max_{1\leq j\leq NP} |\Psi_{jH}|$$

$$\left\|\frac{\tilde{\Delta\Psi}}{\Psi}\right\|_\infty = \max_{1\leq j\leq NP} \left|\frac{\tilde{\Delta\Psi}_j}{\Psi_{Hj}}\right| \qquad \text{(erreur relative)}$$

$$\frac{\|\tilde{\Delta\Psi}\|_\infty}{\|\Psi_H\|_\infty} = \frac{\max_{1\leq j\leq NP} |\tilde{\Delta\Psi}_j|}{\max_{1\leq j\leq NP} |\Psi_{Hj}|} \qquad \text{(erreur relative "minimum")}$$

Remarque : en fait, l'erreur relative est peu significative : en effet, celle-ci n'est pas définie au voisinage du point d'arrêt ($\frac{0}{0}$!). C'est pourquoi on a calculé l'erreur relative "minimum" qui a beaucoup plus de signification physique.

$$\|\Psi\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{NP} \Psi_{jh}^2\right)^{1/2}$$

$\Psi_{jh}^{i,\ell}$ la valeur de la fonction Ψ_h, obtenue à la i-ème itération intérieure de la ℓ-ième itération extérieure au j-ième noeud

$V_{rel}(\Psi) = \dfrac{\|\Psi^{i,\ell} - \Psi^{i-1,\ell}\|_\infty}{\|\Psi^{i,\ell}\|_\infty}$: courbe représentative des variations relative de la fonction ψ en fonction du nombre d'itérations.

$V_{abs}(\lambda) = \max_{j\in\Gamma_S 1} |\lambda_{jh}^{i,\ell} - \lambda_{jh}^{i,\ell}|$: courbe représentative des variations absolue de la fonction λ en fonction du nombre d'itération si Γ_S représente la frontière solide de Ω.

δ : l'épaisseur de la couche limite.

A] Les résultats sans la cavité

4.1. *La fonction de courant, le vecteur tourbillon.*

4.1.1. Résultats numériques.

Les approximations numériques (ω_h, Ψ_h) de (ω, Ψ) ont été calculées à partir du module NSPSOM (annexe 3).

L'algorithme de résolution y figure p. 7, les résultats les plus significatifs et les paramètres numériques utilisés y figurent des pages 23 à 25 .

4.1.2. Contrôle de NSPSOM.

On a d'abord vérifié la validité des résultats obtenus par NSPSØM pour le problème P_2 p. I.9.

Pour cela, on a comparé la solution obtenue par NSPSOM pour $\varepsilon = 0$ (écoulement non perturbé) avec la solution de Hiemenz obtenue à partir des équations (1.26) et (1.27) et ce pour différents nombres de Reynolds. Les résultats numériques sont résumés dans le tableau 1.

Re	1	100	1000
$\|\|\tilde{\Delta}\Psi\|\|_\infty$	$0,133510^{-3}$	$0,134310^{-3}$	$0,146310^{-4}$
$\left\|\left\|\frac{\tilde{\Delta}\Psi}{\Psi_H}\right\|\right\|_\infty$	0,1975	0,1684	0,1044
$\frac{\|\|\tilde{\Delta}\Psi\|\|_\infty}{\|\|\Psi_H\|\|_\infty}$	$0,430510^{-1}$	$0,689610^{-2}$	$0,490410^{-3}$
$\|\|\tilde{\Delta}\Psi\|\|_2$	$0,606310^{-3}$	$0,110510^{-2}$	$0,672310^{-4}$
$\|\|\tilde{\Delta}\omega\|\|_\infty$	0,1529	2,558	3,226
$\left\|\left\|\frac{\tilde{\Delta}\omega}{\omega_H}\right\|\right\|_\infty$	1	1	1
$\frac{\|\|\tilde{\Delta}\omega\|\|_\infty}{\|\|\omega_H\|\|_\infty}$	0,1168	0,1953	$0,779010^{-1}$
$\|\|\tilde{\Delta}\omega\|\|_2$	1,827	8,457	7,575

Tableau 1

On a ensuite visualisé ces résultats. On a comparé les tracés des lignes de courants (fig. (4.1-4.2) et des lignes isotourbillons (fig. 4.16-4.17, 4.22-4.23, 4.26-4.27) obtenus à partir des équations de Hiemenz et à partir de NSPSOM.

Ces résultats étant satisfaisants, on a fait varier le paramètre ε. On a comparé la solution obtenue avec la solution de Hiemenz. Les résultats numériques figurent dans le tableau 2 et sont visualisés par les fig. 4.3,4.4,4.5,4.6,4.7,4.8,4.9,4.10 pour les lignes de courant, par les fig. 4.18,4.19,4.20,4.21,4.24,4.25 pour les isotourbillons, et par les fig. 4.38 à 4.51 pour les champs de vecteurs vitesse.

Re	1	10	10	400
ε	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{-2}
$\|\tilde{\Delta}\Psi\|_\infty$	$0,13410^{-3}$	$0,660210^{-4}$	$0,239910^{-3}$	$0,2134010^{-4}$
$\|\frac{\tilde{\Delta}\Psi}{\Psi_H}\|_\infty$	4,558	13,82	138	2,169
$\frac{\|\tilde{\Delta}\Psi\|_\infty}{\|\Psi_H\|_\infty}$	$0,432210^{-1}$	$0,80810^{-2}$	$0,29310^{-1}$	$0,82210^{-3}$
$\|\tilde{\Delta}\Psi\|_2$	$0,617010^{-3}$	$0,3810^{-3}$	$0,26110^{-2}$	$0,197810^{-3}$
$\|\tilde{\Delta}\omega\|_\infty$	0,7512	10,16	109,2	12,17
$\|\frac{\tilde{\Delta}\omega}{\omega_H}\|_\infty$	1,226	5,20	55,90	1
$\frac{\|\tilde{\Delta}\omega\|_\infty}{\|\omega_H\|_\infty}$	0,5782	2,453	26,37	0,464
$\|\tilde{\Delta}\omega\|_2$	2,663	30,55	316	32,92

Tableau 2

BUS LILLE

4.2. *La pression*

4.2.1. Contrôle de la crédibilité de la méthode.

Comme pour NSPSOM (annexe 3), on a d'abord vérifié la crédibilité de la méthode. Pour cela, on a procédé en trois étapes :

- 1ère étape : Contrôle de la géométrie, de la matrice de rigidité, de l'assemblage, du second membre, et de la mise en compte des conditions aux limites. Pour cela, on a résolu le problème :

$$\begin{cases} -\Delta p = -4 & \text{dans } \Omega \\ p = x^2+y^2 & \text{sur OACB} \quad \text{(fig. 5)} \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = 2y & \text{sur OB} \end{cases}$$

dont la solution exacte est :

$$p = x^2+y^2.$$

On a comparé cette dernière avec la solution calculée par le programme.

On a d'abord considéré le problème de Dirichlet ($\Gamma_1 = \emptyset$) puis le problème mixte. On a obtenu les résultats suivants pour le maillage sans cavité :

$$\|p-p_h\|_\infty = \begin{cases} 0{,}710^{-9} & \text{dans le premier cas} \\ 0{,}1510^{-7} & \text{dans le deuxieme cas} \end{cases}$$

- 2ème étape : contrôle du module (NSPROP)

On a résolu le problème $(P'_5)_h$ de la page II-19 en partant des solutions de Hiemenz de (ω,Ψ) (calculées par les formules (1.26) et (1.27) et on a comparé la pression obtenue p_h avec la pression de Hiemenz (1.28) pour Re = 1, 10, 100, 400, 1000. On a considéré le problème de Dirichlet puis le problème mixte. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 3.1.

Cas n°1 : Problème de Dirichlet

Cas n°2 : Problème mixte

cas n°	1	2	2	2	2	1	2
Re	1	1	10	100	400	1000	1000
$\|\|\tilde{\Delta p}\|\|_\infty$	$0,333110^{-2}$	$0,377410^{-2}$	$0,142610^{-2}$	$0,213410^{-2}$	$0,139110^{-1}$	$0,6910^{-3}$	$0,1910^{-2}$
$\|\|\frac{\tilde{\Delta p}}{p_H}\|\|_\infty$	$0,238810^{-1}$	4	0,6506	0,3855	0,1931	$0,1710^{-1}$	0,29
$\frac{\|\|\tilde{\Delta p}\|\|_\infty}{\|\|p_H\|\|_\infty}$	$0,440210^{-2}$	$0,497410^{-2}$	$0,452410^{-2}$	$0,114410^{-1}$	$0,814410^{-2}$	$0,4010^{-2}$	$0,1110^{-1}$
$\|\|\tilde{\Delta p}\|\|_2$	$0,433010^{-1}$	$0,44410^{-1}$	$0,179410^{-1}$	$0,31110^{-1}$	$0,174810^{-1}$		

Tableau 3.1

Voir les tracés numéros 4.62, 4.64, 4.65, 4.68, 4.69, 4.73, 4.74, 4.75, 4.76, 4.79, 4.80.

Ces résultats étant "satisfaisants", on a procédé à la

3ème étape : contrôle de la méthode.

On a résolu le même problème en partant des valeurs de (ω_H, Ψ_H) calculées par NSPSOM (avec $\varepsilon = 0$) et on a comparé avec la solution de Hiemenz pour $Re = 1$, 100, 1000. On a également considéré le problème de Dirichlet et le problème mixte. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.2.

cas n°	1	2	2	1	2
Re	1	1	100	1000	1000
$\|\tilde{\Delta p}\|_\infty$	$0,331810^{-2}$	$0,701710^{-1}$	$0,104610^{-1}$	$0,5210^{-4}$	$0,147010^{-2}$
$\|\frac{\tilde{\Delta p}}{p_H}\|_\infty$	$0,238510^{-1}$	53,28	1,588	$0,1310^{-1}$	$0,931810^{-1}$
$\frac{\|\tilde{\Delta p}\|_\infty}{\|p_H\|_\infty}$	$0,438510^{-2}$	$0,927310^{-1}$	$0,559110^{-1}$	$0,3110^{-3}$	$0,863\ 10^{-2}$
$\|\tilde{\Delta p}\|_2$	$0,431510^{-1}$	0,8538	$0,379810^{-1}$		$0,870910^{-2}$

Tableau 3.2

Remarque.

1) La résolution du problème de Dirichlet a donné dans tous les cas de meilleurs résultats que la résolution du problème mixte.

2) La précision obtenue est dans tous les cas meilleure à grands nombre de Reynolds.

Dans le cas du problème mixte, ceci provient du fait que les dérivées partielles $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ sont prépondérantes à petits nombres de Reynolds et que c'est sur ω que la précision est la plus mauvaise. Comparer à ce propos les figures 4.62, 4.63, 4.63 bis, 4.80, 4.81.

-On en retiendra la règle suivante : Pour $Re \leq 10$, il y a une "couche limite d'erreur" au voisinage de la frontière type Neuman ($\frac{\partial p}{\partial n} = g$ ..)

Il faut donc minimiser la longueur de la frontière type NEUMANN.

4.2.2. Etude de l'écoulement perturbé.

Les résultats sont résumés dans le tableau 4 ci-dessous et visualisés par les figures 4.66, 4.67, 4.70, 4.71, 4.72, 4.77, 4.78.

	1	10	10	400
ε	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{-2}
$\|\tilde{\Delta p}\|_\infty$	0,9988	1,052	10,89	$0{,}280610^{-1}$
$\|\frac{\tilde{\Delta p}}{p_H}\|_\infty$	53,59	33,21	346,5	0,87
$\frac{\|\tilde{\Delta p}\|_\infty}{\|p_H\|_\infty}$	13,2	3,337	34,55	0,163
$\|\tilde{\Delta p}\|_2$	2,518	2,52	25,62	$0{,}6410^{-1}$

Tableau 4

Il résulte des tracés que les perturbations sont également localisées au voisinage de la cavité et qu'elles semblent être minimales vers le "milieu" de la cavité.

B] Les résultats avec la cavité

4.3. *La fonction de courant et le vecteur tourbillon.*

4.3.1. Paramètres numériques

Les résultats obtenus avec NSPSOM confirment les résultats obtenus par Borrel [4]. Les paramètres suivant ont été utilisés (pour leurs signification, voir annexe 3) :

ε = seuil = 10^{-7} (à cause de la cavité)

σ = 65 ; IOPT = 2 ; Relax = Rolax = 1

Posons :

N_ℓ le nombre d'itérations extérieures

N_i le nombre d'itérations intérieures pour une itération extérieure

N_t le nombre total d'itérations : $N_t = \Sigma N_i \times N_\ell$

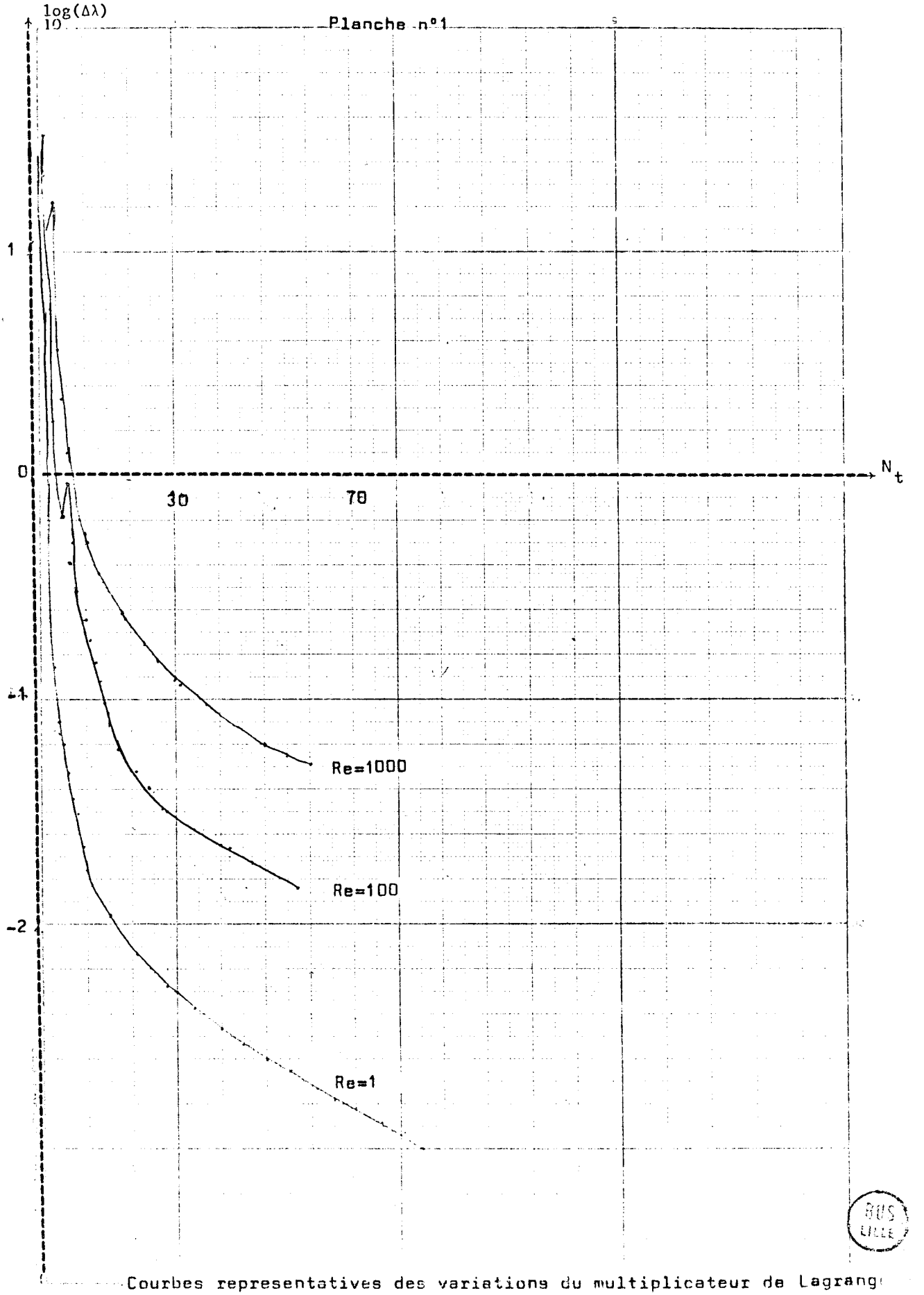
Re	1		10		100		400		1000	
	N_ℓ	N_i	N_ℓ	N_i	N_ℓ	N_i	N_ℓ	N_i	N_ℓ	N_i
	1	8	1	8	1	5	3	2	3	2
	2	12	2	12	2	10	3	4	3	4
	2	15	1	15	2	12	3	7	3	7
			1	20	2	16	1	9	1	9
							2	12	2	12
N_t	67		67		65		72		72	

La convergence a été obtenue au bout de N_t itérations.

On a représenté les courbes : (voir les notations p. 4.1).

$\log_{10}(V_{abs}(\lambda)) = f(N_t)$ et $\log_{10}(V_{rel}(\omega)) = g(N_t)$ sur les planches 1 et 2.

λ est le multiplicateur de Lagrange (cf. annexe 3 p. 7).



Courbes representatives des variations du multiplicateur de Lagrang

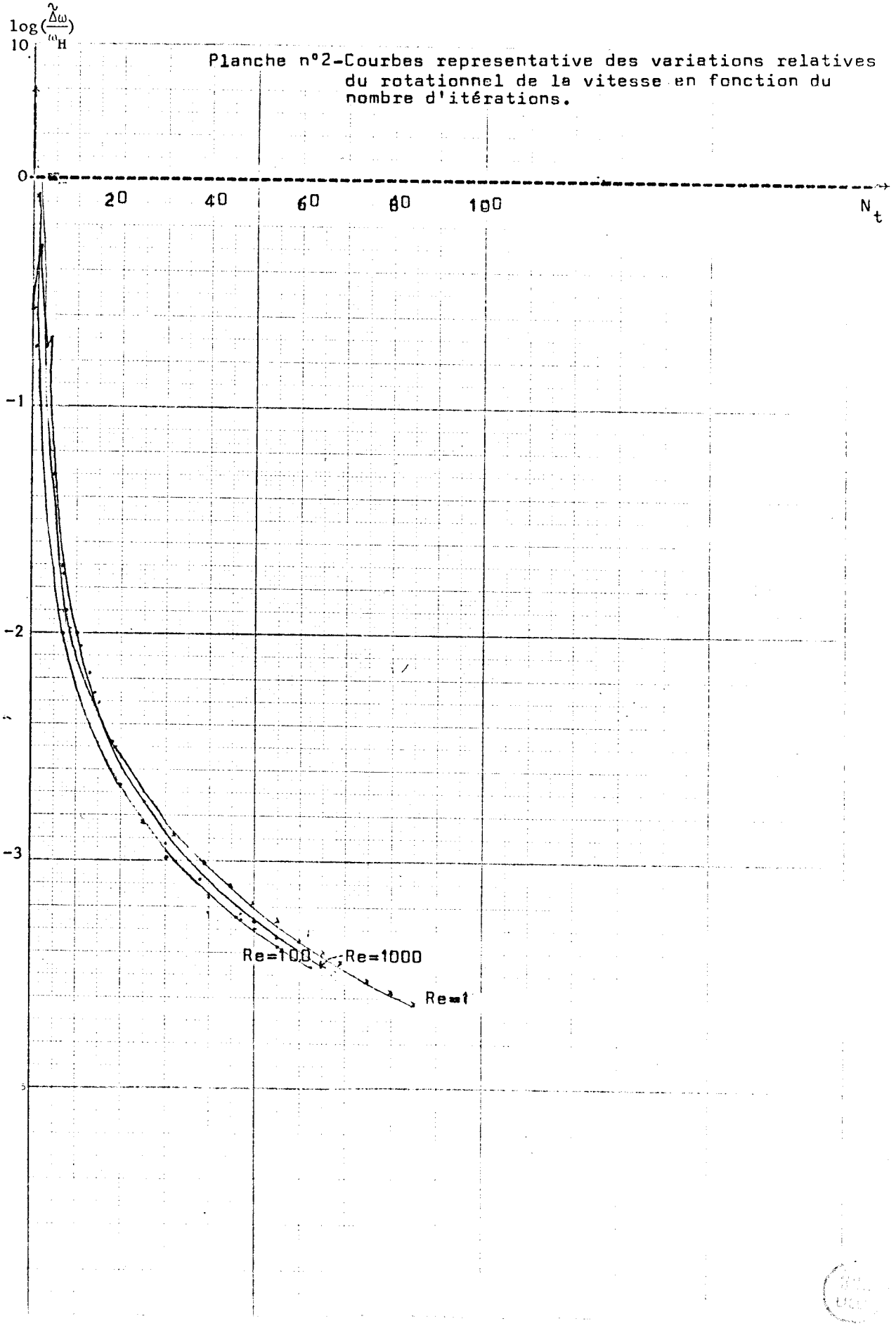


Planche n°2-Courbes representative des variations relatives du rotationnel de la vitesse en fonction du nombre d'itérations.

4.3.2. Occupation de la mémoire centrale et temps de calcul.

Le système linéaire en ω a été résolu à chaque itération, directement par CROUT.

Toutes les matrices (S.D MUAi , i = 1,4) ont été stockées simultanément dans la mémoire centrale et dans la mémoire virtuelle, ce qui a nécessité le stockage de 169 912 mots.

Les temps nécessaires à la convergence ont été les suivants :

Re	1	10	100	400	1000
t(mn)	25	24	25	30	30

En fait, la convergence aurait pu être deux fois plus rapide si les seuils de précisions avaient été moins importants (10^{-4} au lieu de 10^{-7}).

4.3.3. Résultats numériques

On a comparé les valeurs obtenues à celles de la solution d'Hiemenz (Tableau 5).

Re	1	10	100	400	1000
$\|\|\tilde{\Delta}\Psi\|\|_\infty$	$0,133710^{-3}$	$0,67410^{-4}$	$0,234710^{-4}$	$0,170210^{-4}$	$0,269210^{-4}$
$\|\|\frac{\tilde{\Delta}\Psi}{\Psi_H}\|\|_\infty$	4,4775	3,705	3,711	3,8434	4,006
$\frac{\|\|\tilde{\Delta}\Psi\|\|_\infty}{\|\|\Psi_H\|\|_\infty}$	$0,43010^{-1}$	$0,826110^{-2}$	$0,120510^{-2}$	$0,637510^{-3}$	$0,902210^{-3}$
$\|\|\tilde{\Delta}\Psi\|\|_2$	$0,610410^{-3}$	$0,383710^{-3}$	$0,14210^{-3}$	$0,144310^{-3}$	$0,249310^{-2}$
$\|\|\tilde{\Delta}\omega\|\|_\infty$	0,9024	2,695	8,4	16,43	25,52
$\|\|\frac{\tilde{\Delta}\omega}{\omega_H}\|\|_\infty$	1,306	1,232	1,214	1,187	1,167
$\frac{\|\|\tilde{\Delta}\omega\|\|_\infty}{\|\|\omega_H\|\|_\infty}$	0,6851	0,6506	0,6414	0,6271	0,6163
$\|\|\tilde{\Delta}\omega\|\|_2$	5,127	15,59	49,31	98,54	155,8

Tableau 5

Les résultats sont visualisés de la fig. 4.28 à 4.37 et de la fig. 4.11 à 4.15bis.

4.4. La pression.

Comme pour (ω_h, Ψ_h), on a comparé les valeurs obtenues aux valeurs de l'écoulement non perturbé. Les résultats sont résumés dans le tableau 6 suivant :

Re	1	10	100	400	1000
$\|\|\tilde{\Delta}p\|\|_\infty$	0,9038	0,2387	$0{,}758\,10^{-1}$	$0{,}397\,10^{-1}$	$0{,}266\,10^{-1}$
$\|\|\frac{\tilde{\Delta}p}{p_H}\|\|_\infty$	50,97	6,996	2,291	1,182	0,7623
$\frac{\|\|\tilde{\Delta}p\|\|_\infty}{\|\|p_H\|\|_\infty}$	1,194	0,7573	0,4052	0,2320	0,1564
$\|\|\tilde{\Delta}p\|\|_2$	2,984	0,7964	0,2556	0,1337	$0{,}889\,10^{-1}$

Tableau 6

Ils sont aussi visualisés sur les fig. 4.82 à 4.91.

Remarque.

1) Comme p_H n'est pas définie dans la cavité (pour $y < 0$) On prolonge P_H pour $y < 0$ de la manière suivante :

$$P_H(x, y < 0) = P_H(x, 0) = -8x^2 \qquad \text{(d'après 1.28)}$$

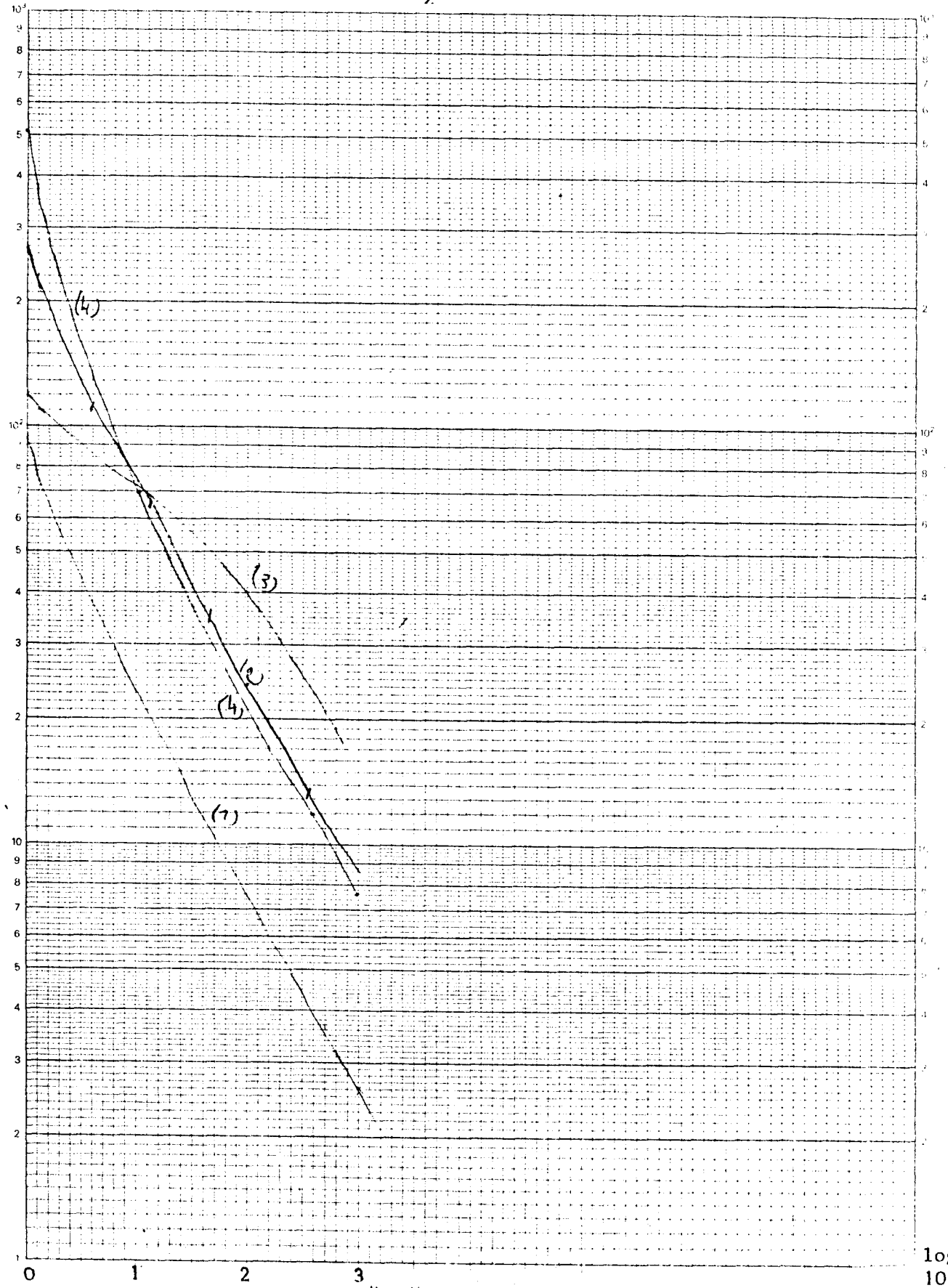
2) De ce tableau, il résulte que plus Re augmente, moins la pression est perturbée ce que les tracés ont confirmé. (fig. 4.62, 4.63). Voir également la planche n°3.

PLANCHE 3

Evolution des variations de la pression dans le maillage avec la cavité.

courbe n°1 : Evolution de $10^2 \|\Delta p\|_\infty$

n°2 : Evolution de $10^2 \|\Delta p\|_2$



Courbe n°3 : Evolution de $10^2 \dfrac{\|\Delta p\|_\infty}{\|P_H\|_\infty}$; courbe n°4 : Evolution de $10 \left\|\dfrac{\Delta p}{P_H}\right\|_\infty$

BUS LILLE

C] Visualisations

LIGNES DE COURANTS

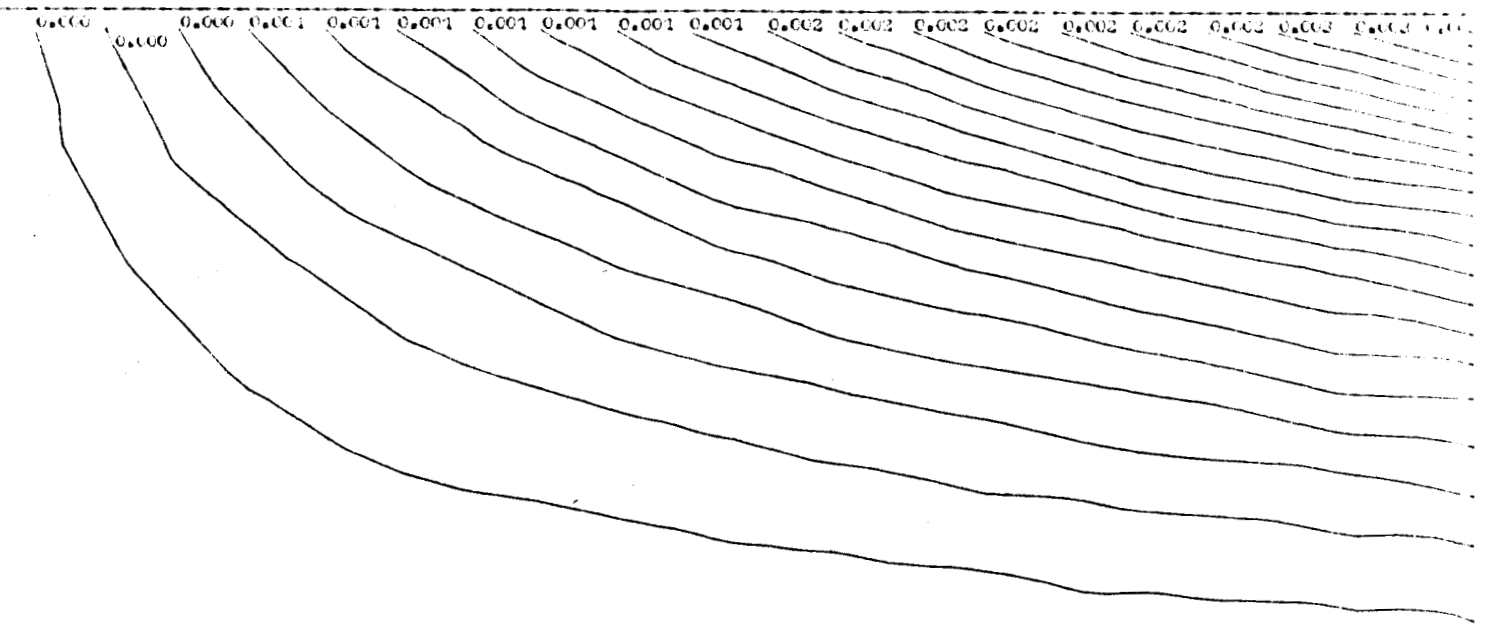
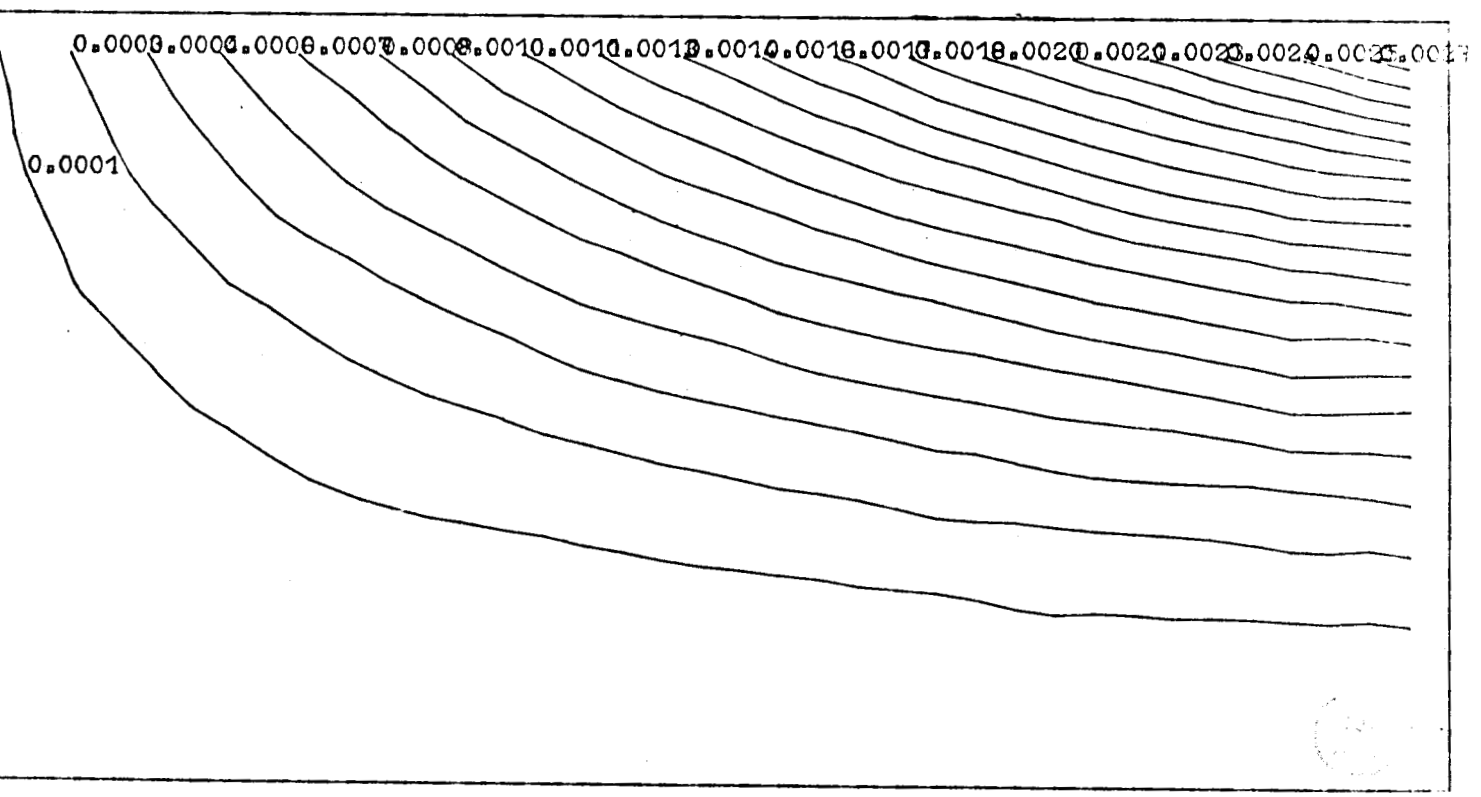


Fig. 4.1.

$Re = 1$ - Solution d'Hiemenz - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.2.

$Re = 1$, $\varepsilon = 0$ - Hiemenz calculé par NSPSOM - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



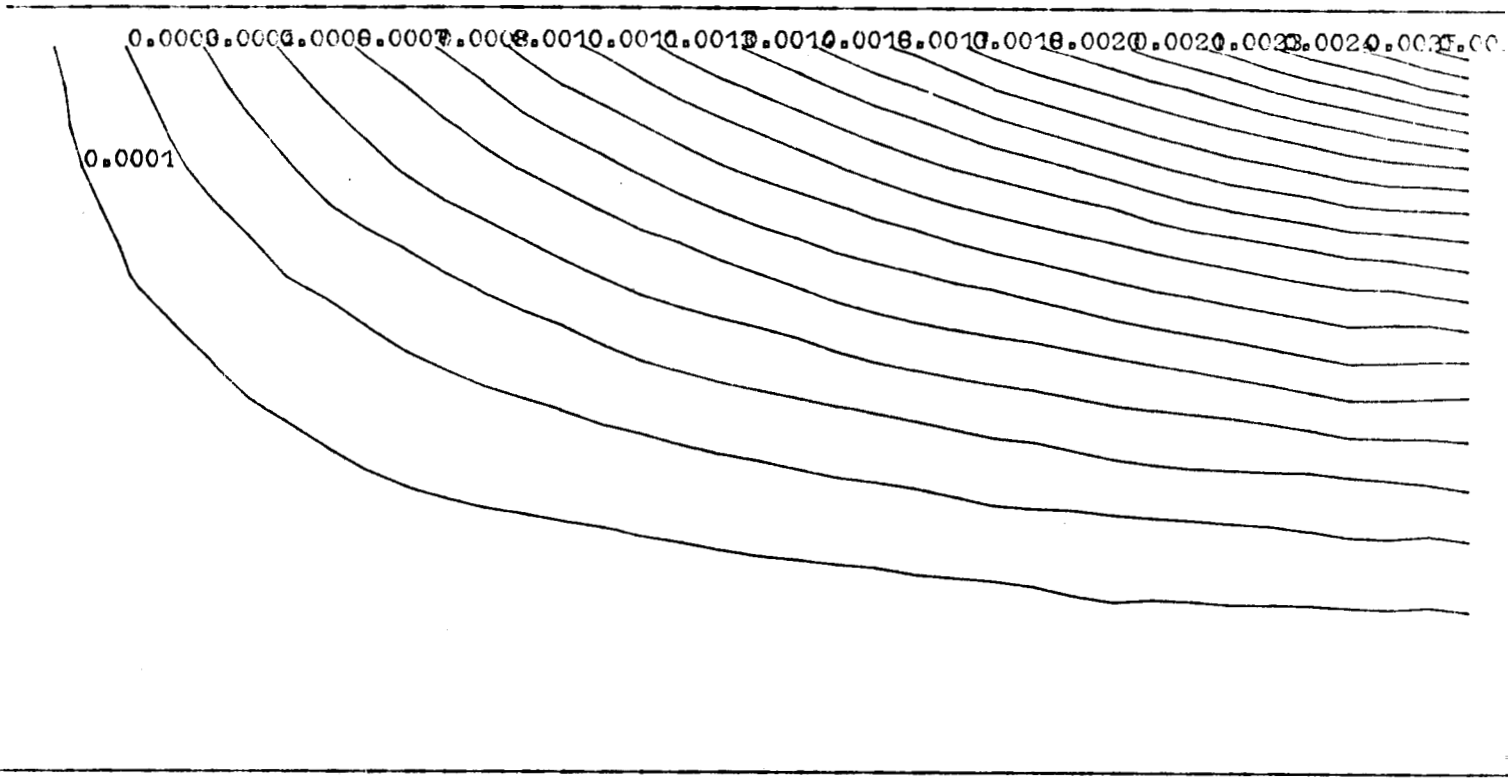
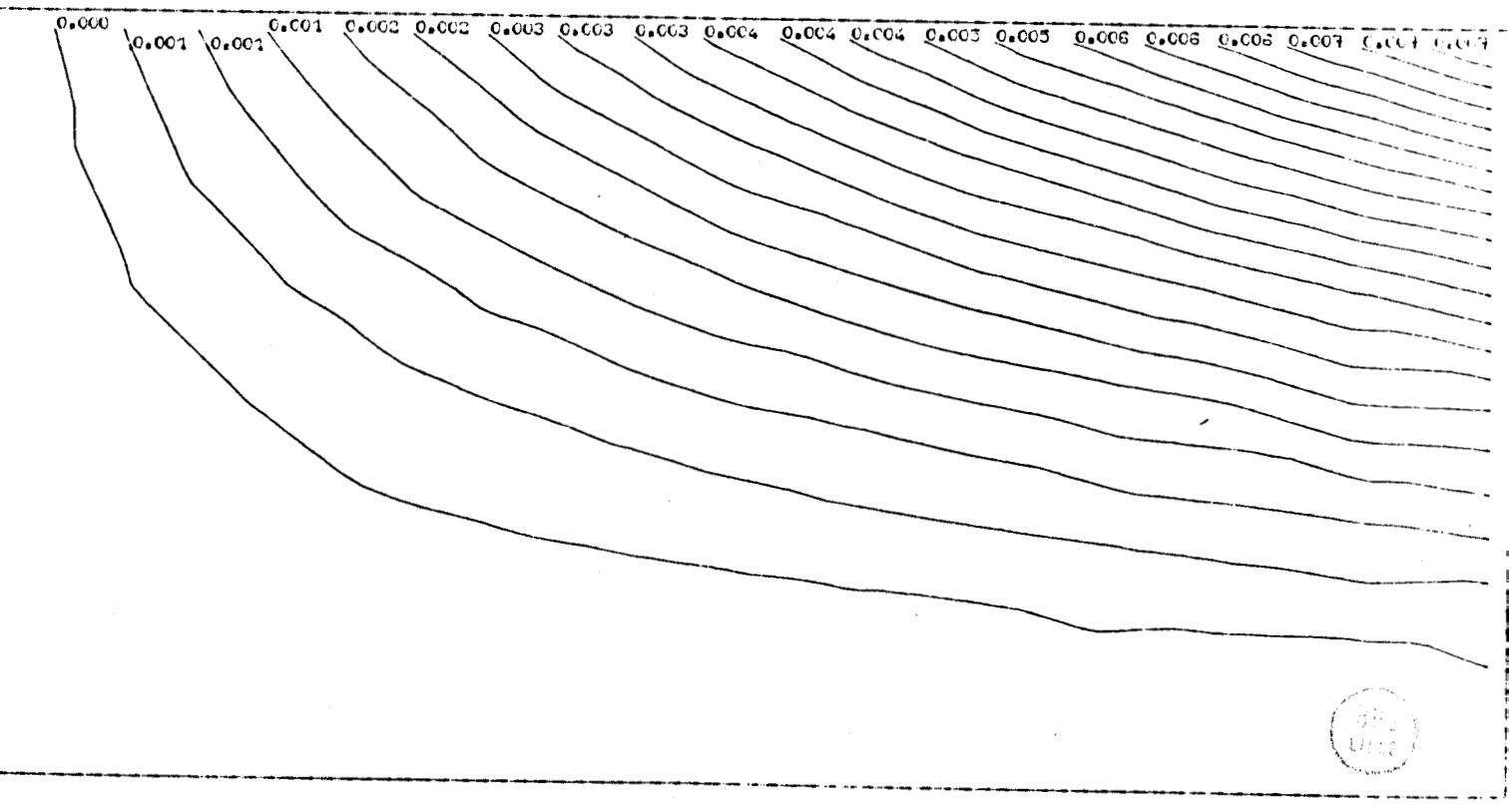


Fig. 4.3.
Re = 1, $\varepsilon = 10^{-3}$ - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.4.

Re = 10 - Hiemenz exact - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



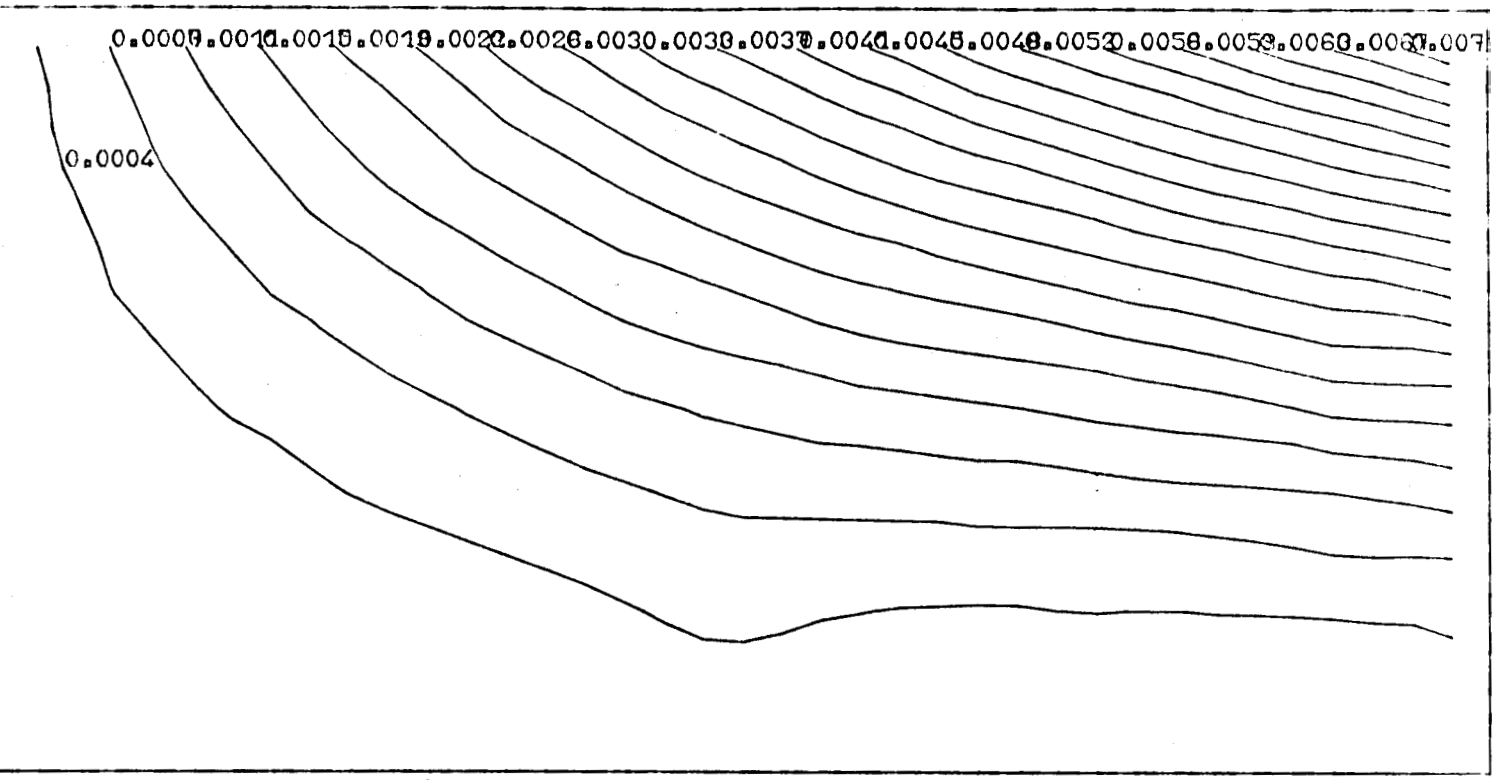
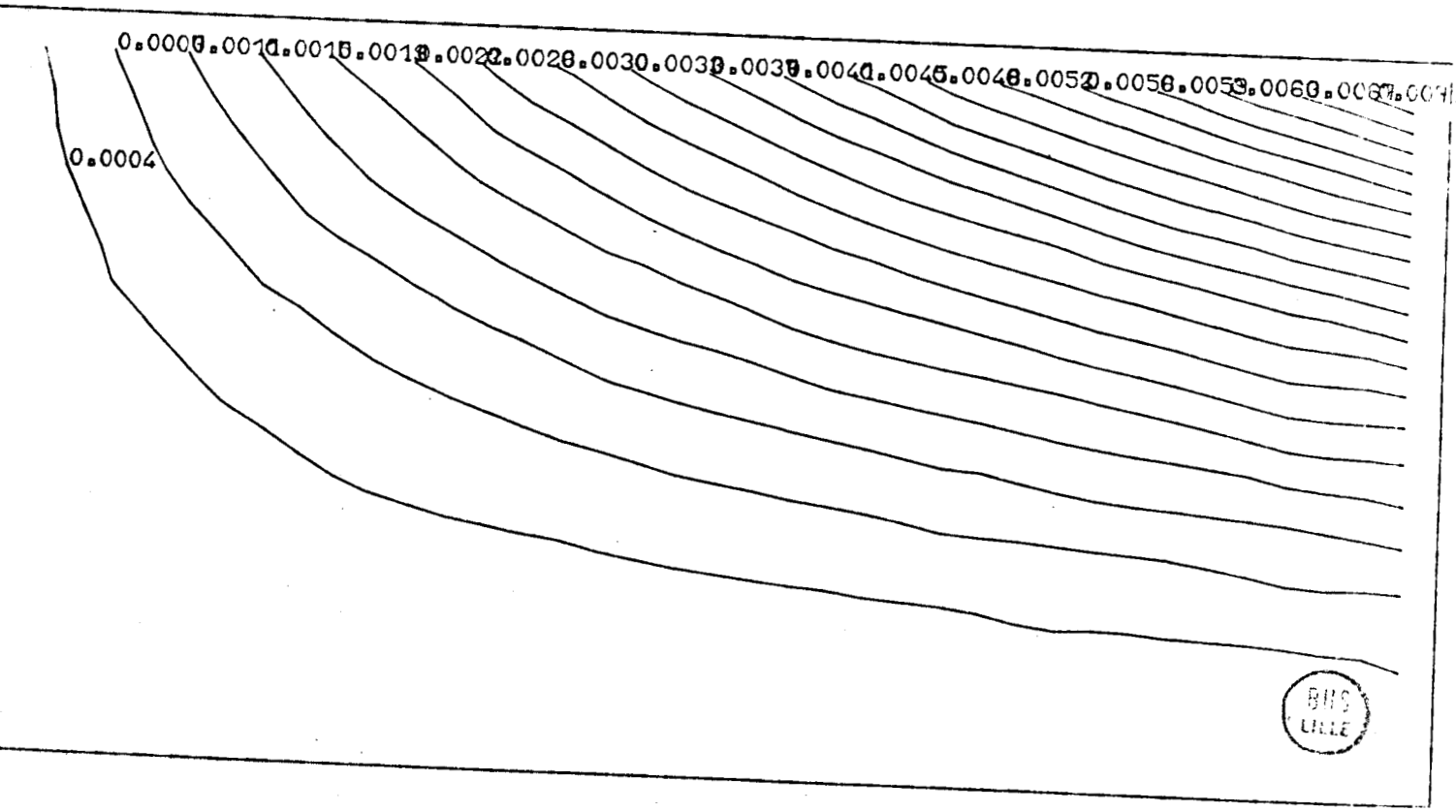


Fig. 4.5.

$Re = 10$, $\varepsilon = 10^{-1}$ - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.6.

$Re = 10$, $\varepsilon = 10^{-2}$ - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



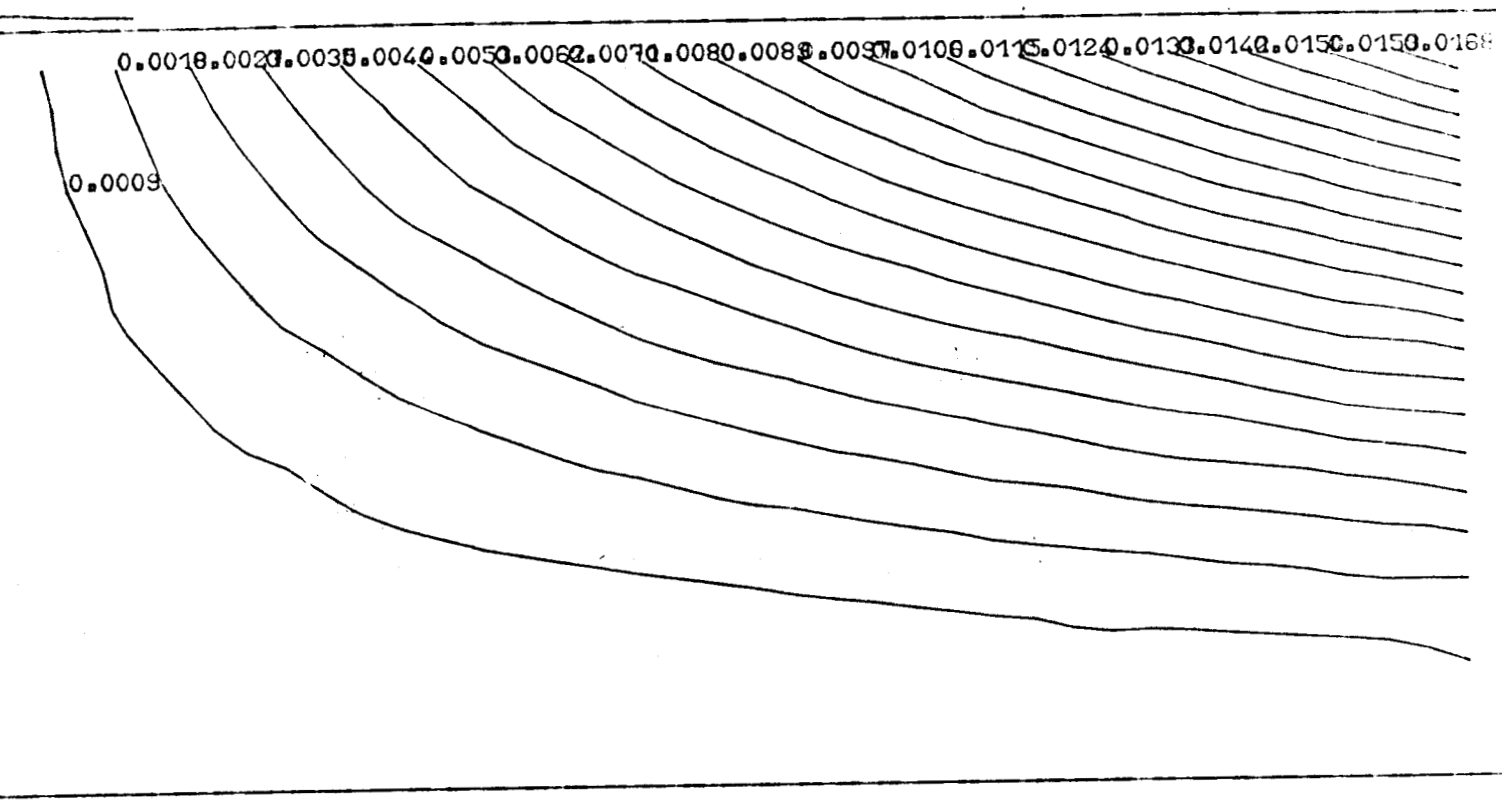
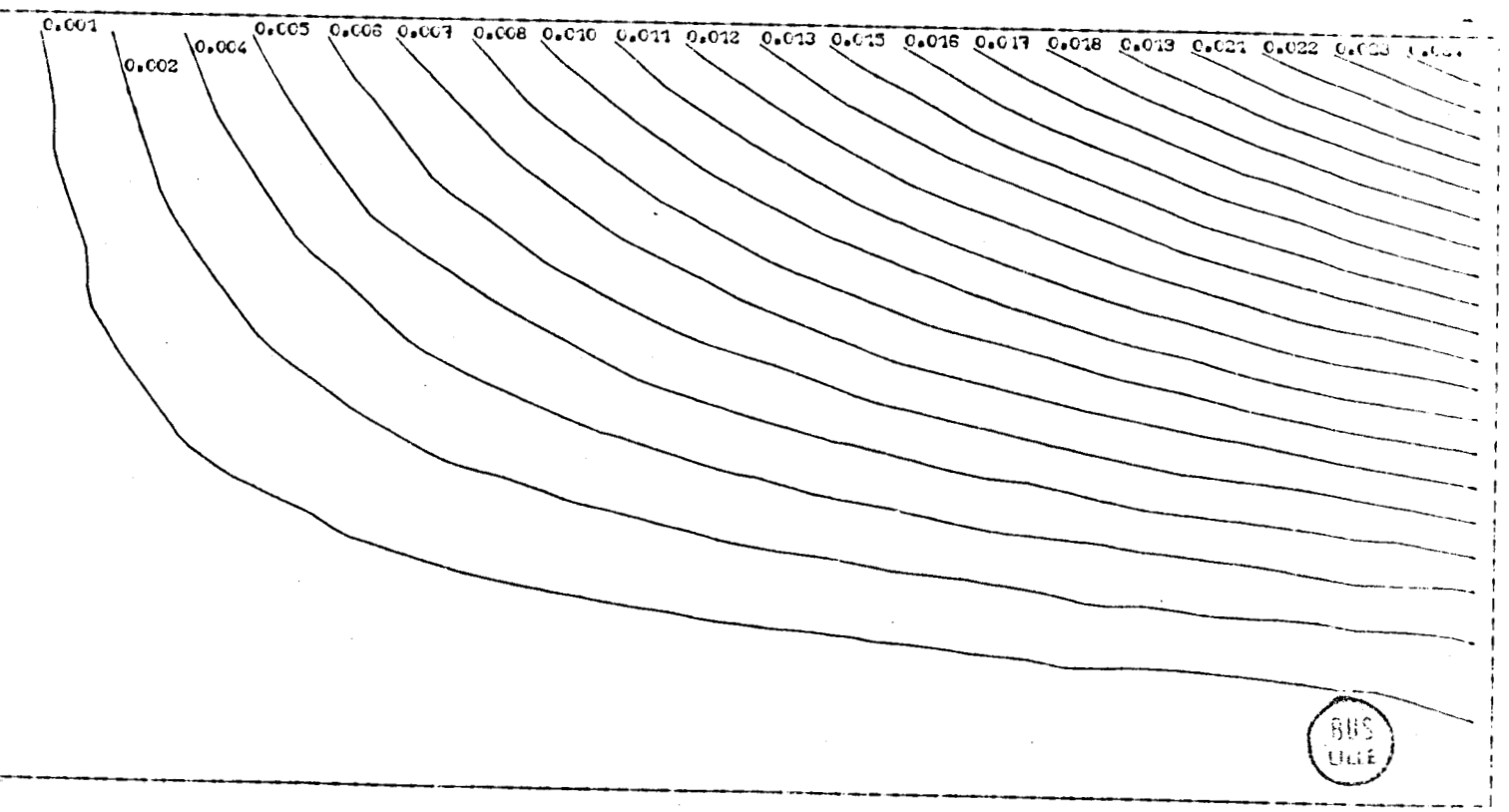


Fig. 4.7.

Re = 100, ε = 0 - Hiemenz calculé par NSPSOM - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.8.

Re = 400 - Hiemenz exact - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



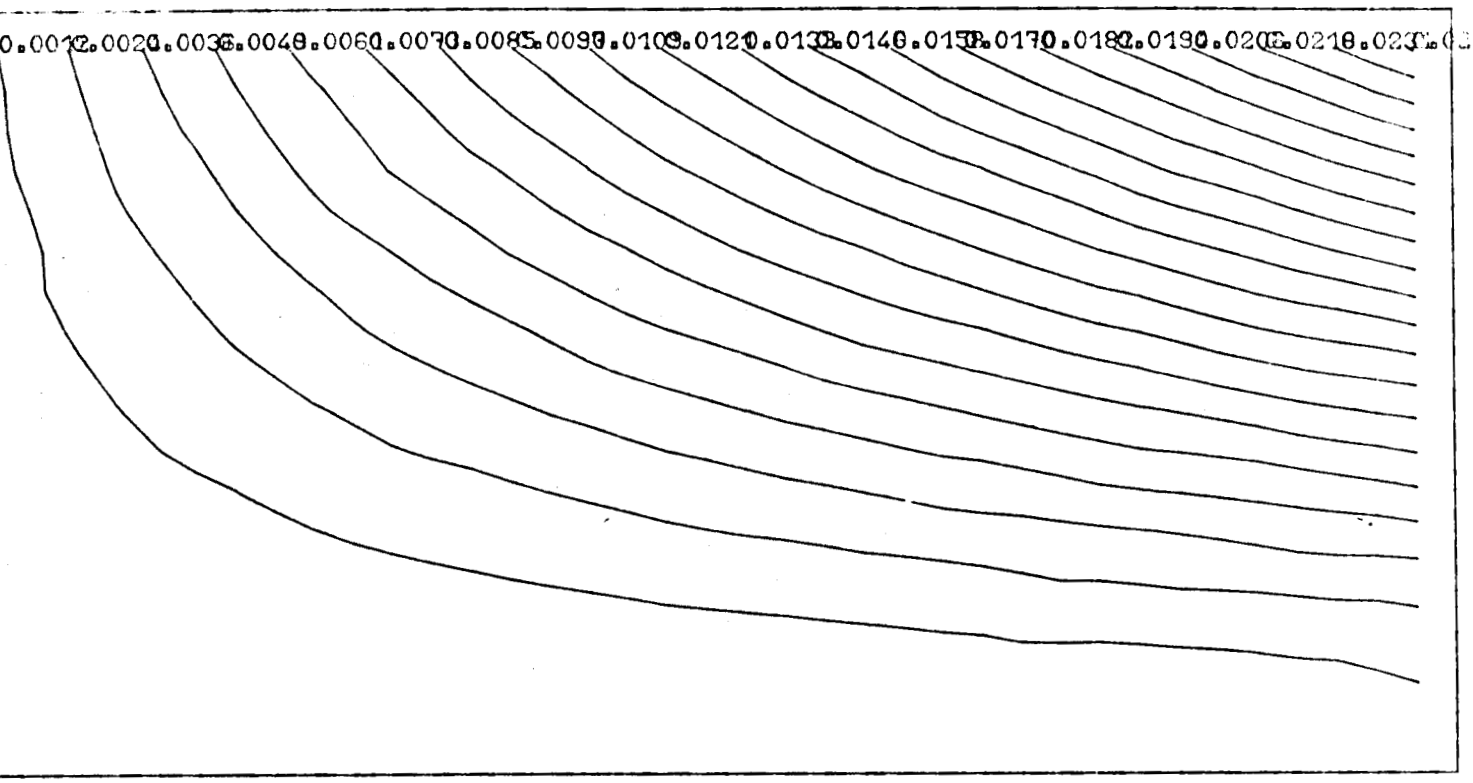
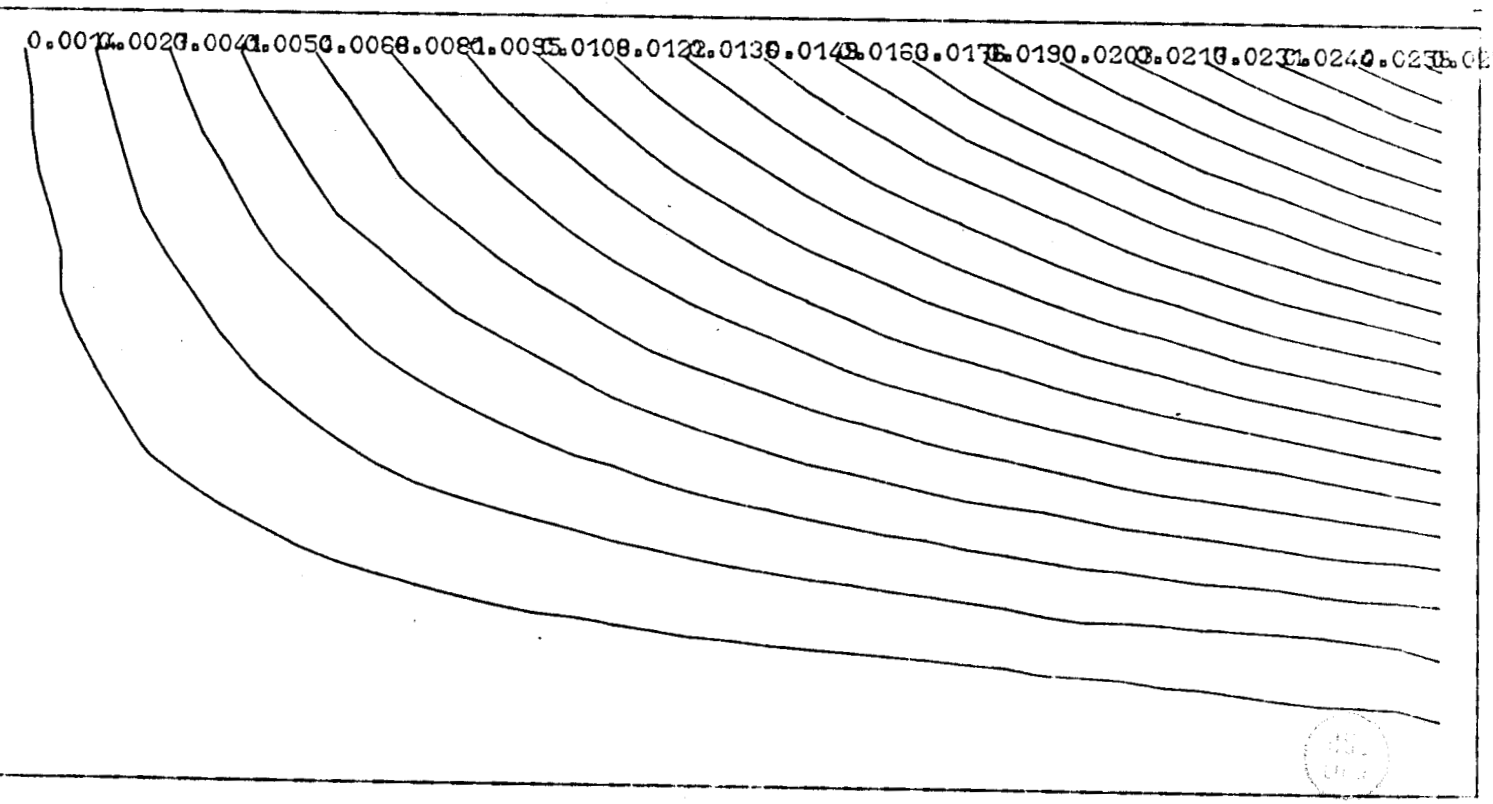


Fig. 4.9.

$Re = 400$, $\varepsilon = 10^{-2}$ - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.10.

$Re = 1000$, $\varepsilon = 0$ - Hiemenz calculé par NSPSOM - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



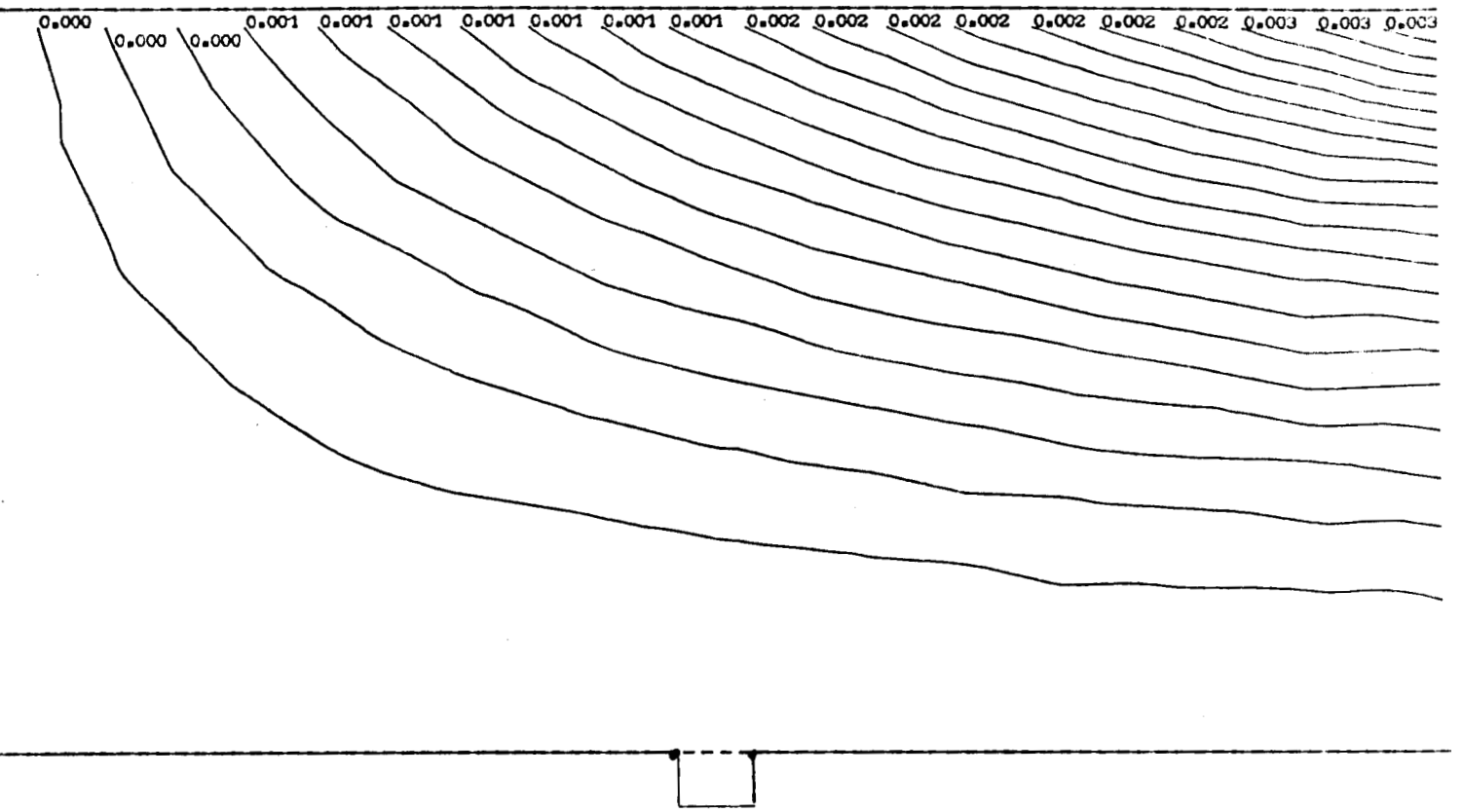
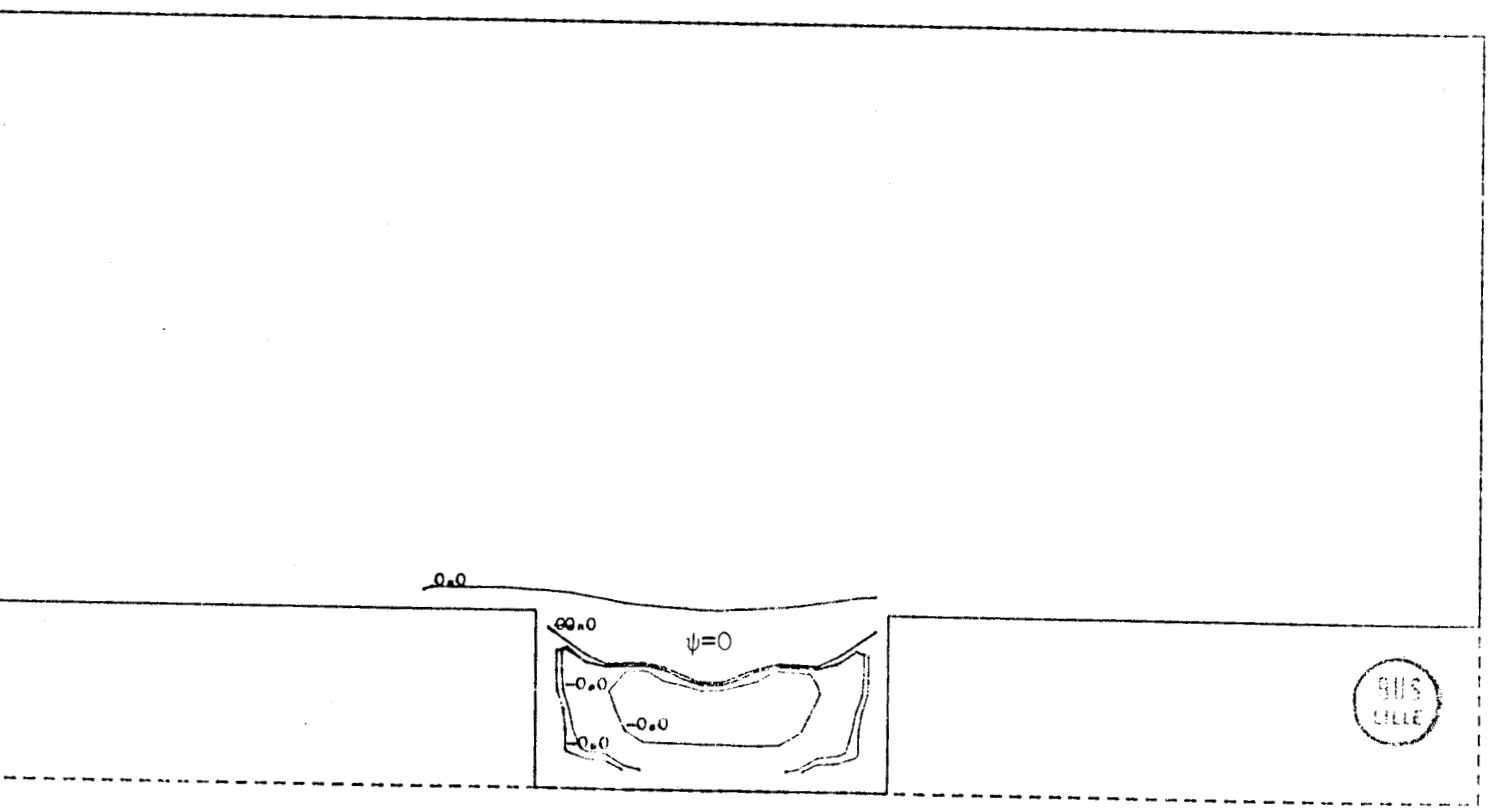


Fig. 4.11.

$Re = 1$ - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.11 bis.

$Re = 1$ - Echelle $1/16210^{-3}$



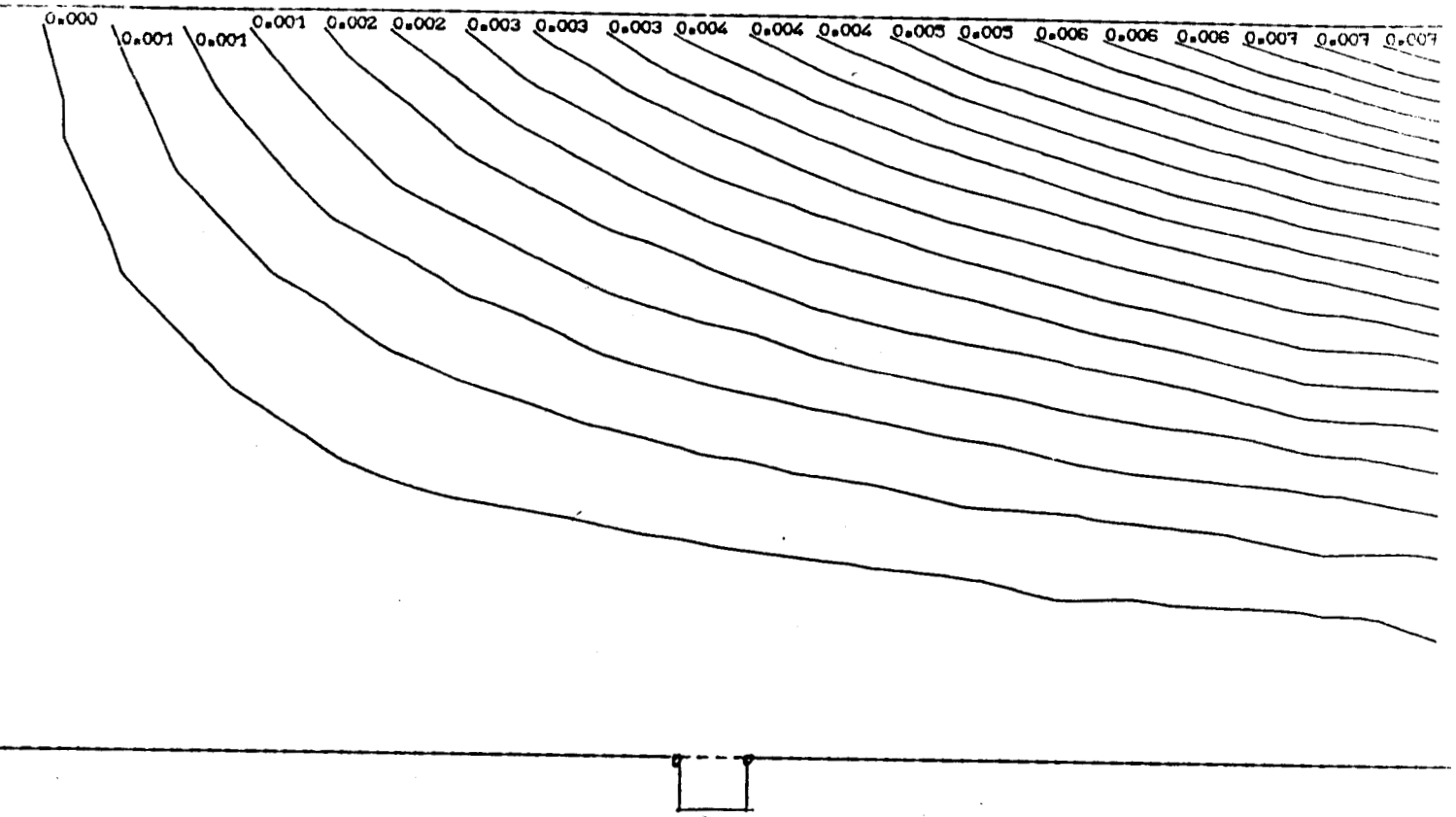
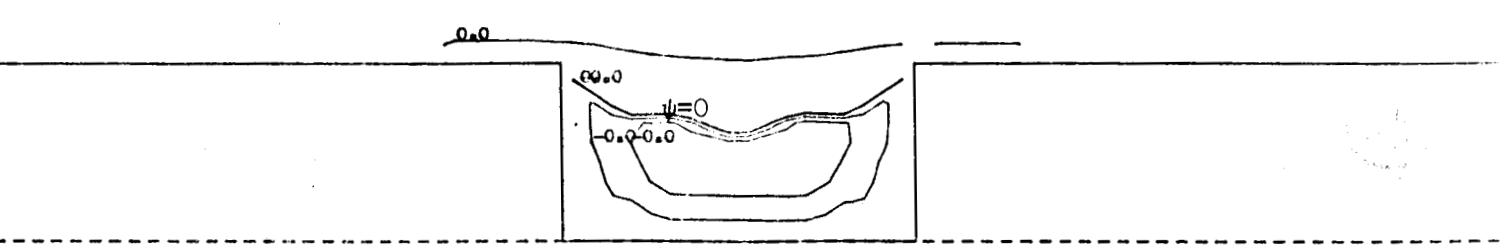


Fig. 4.12.

Re = 10 - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.12 bis.

Re = 10 - Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



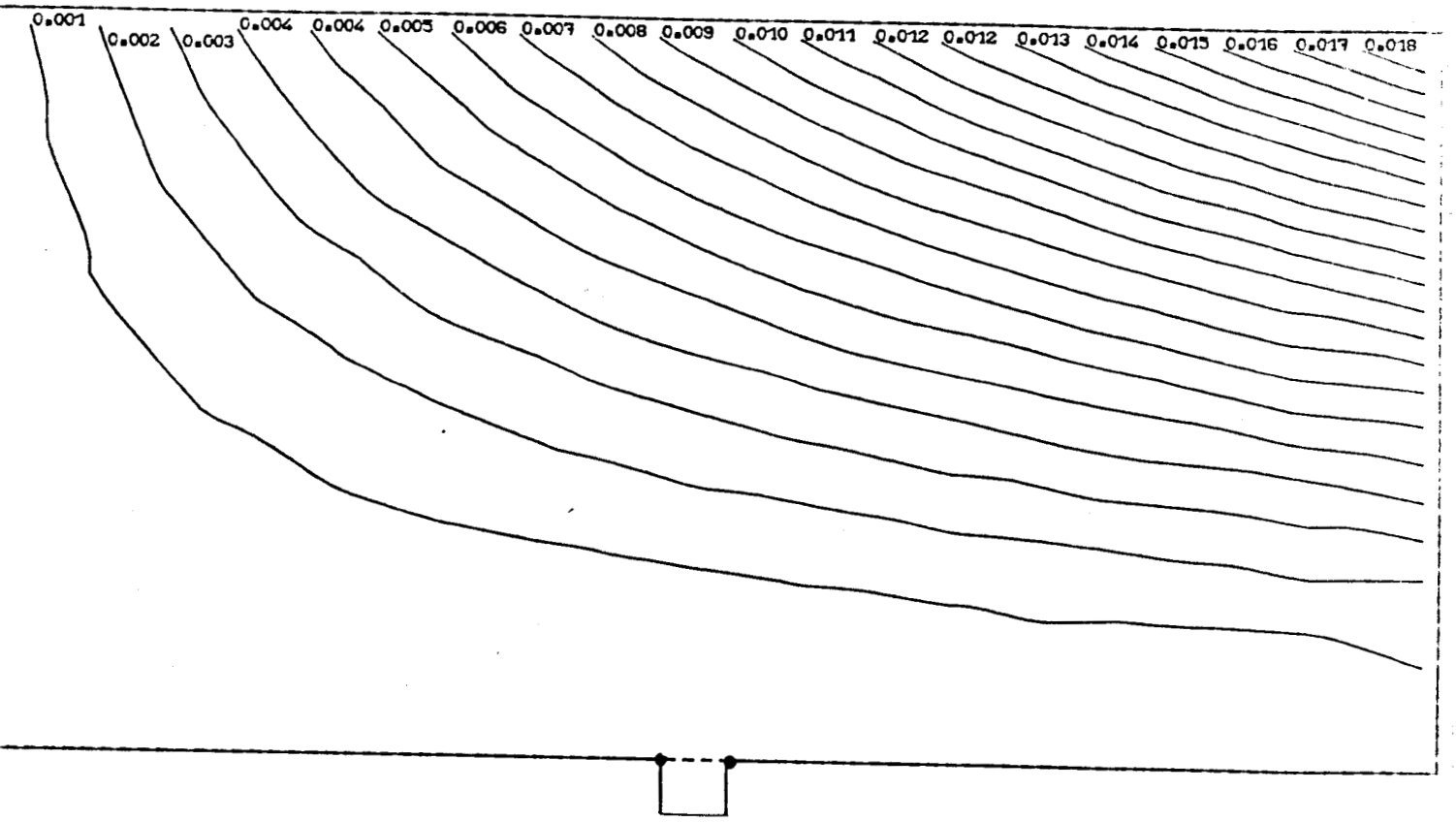
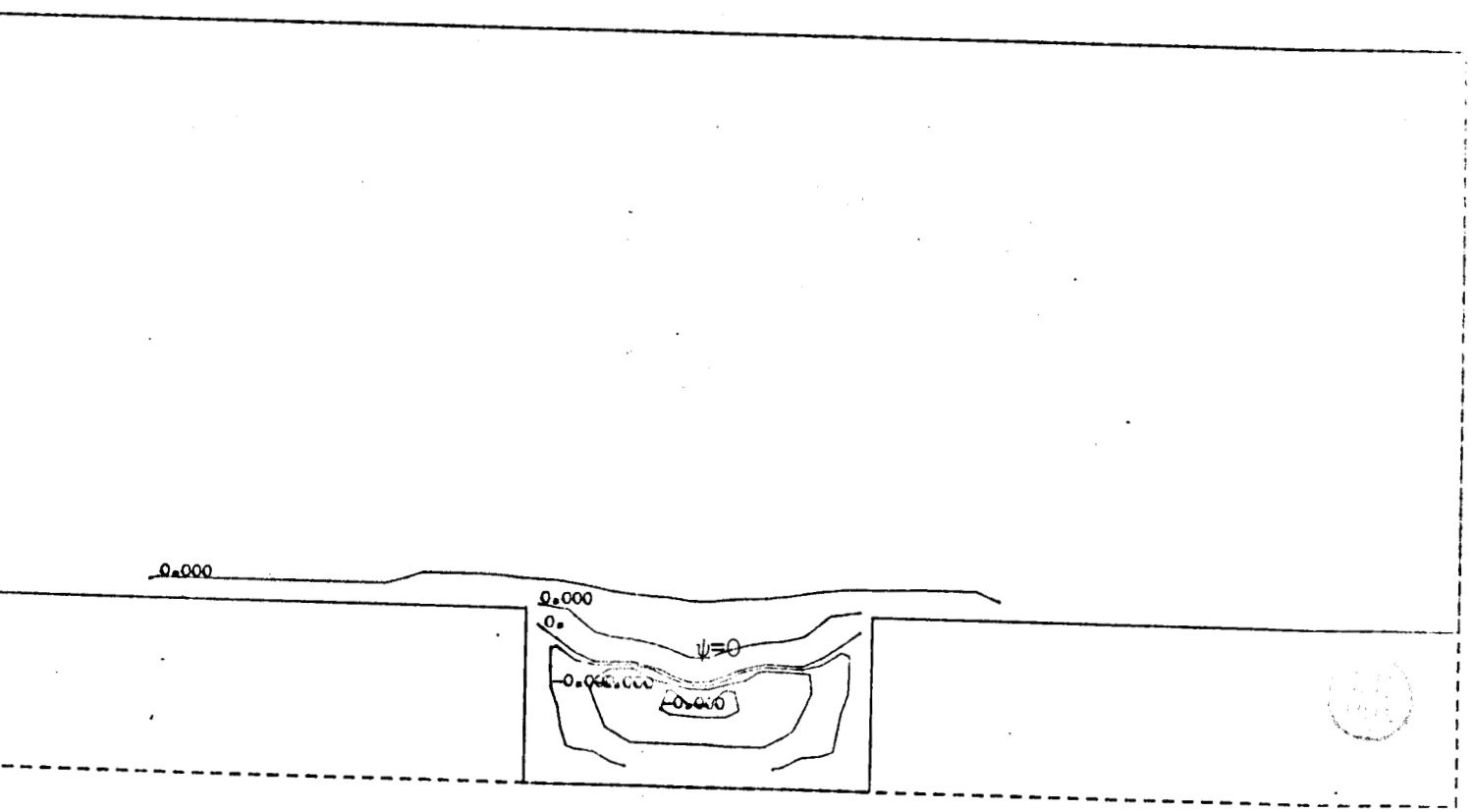


Fig. 4.13.

Re = 100 - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.13 bis.

Re = 100 - Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



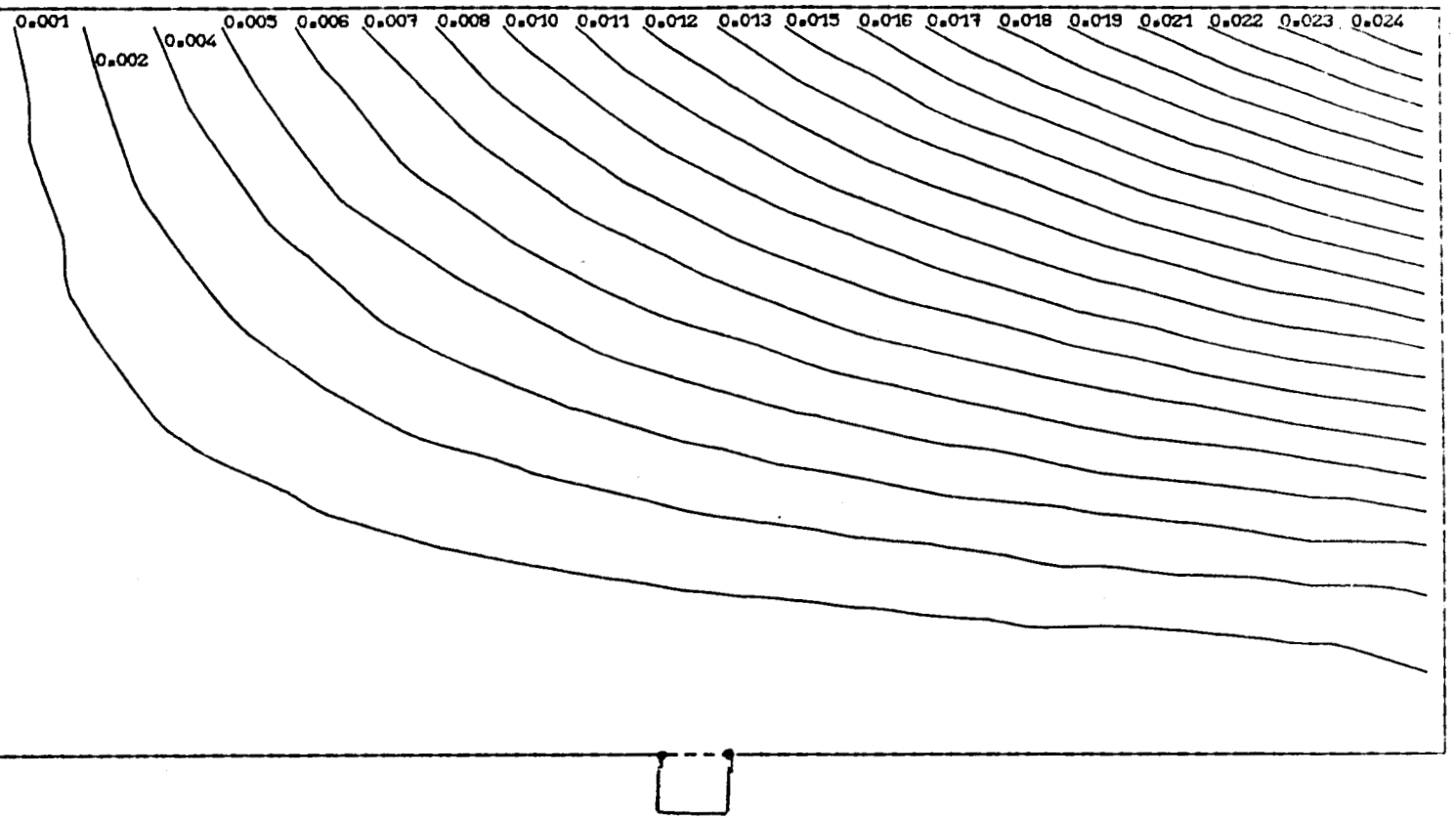
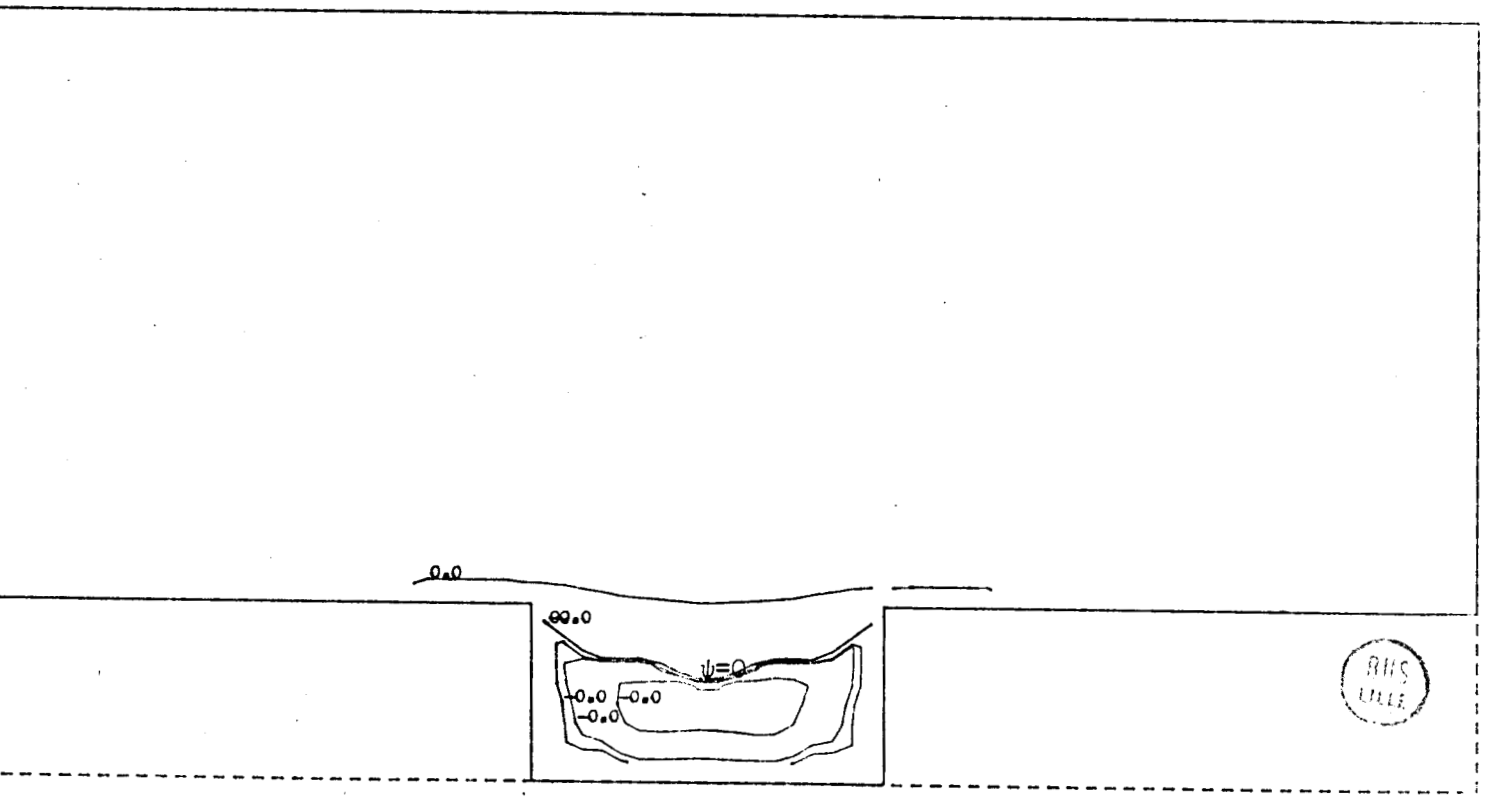


Fig. 4.14.

Re = 400 - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.14 bis.

Re = 400 - Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



BUS LILLE

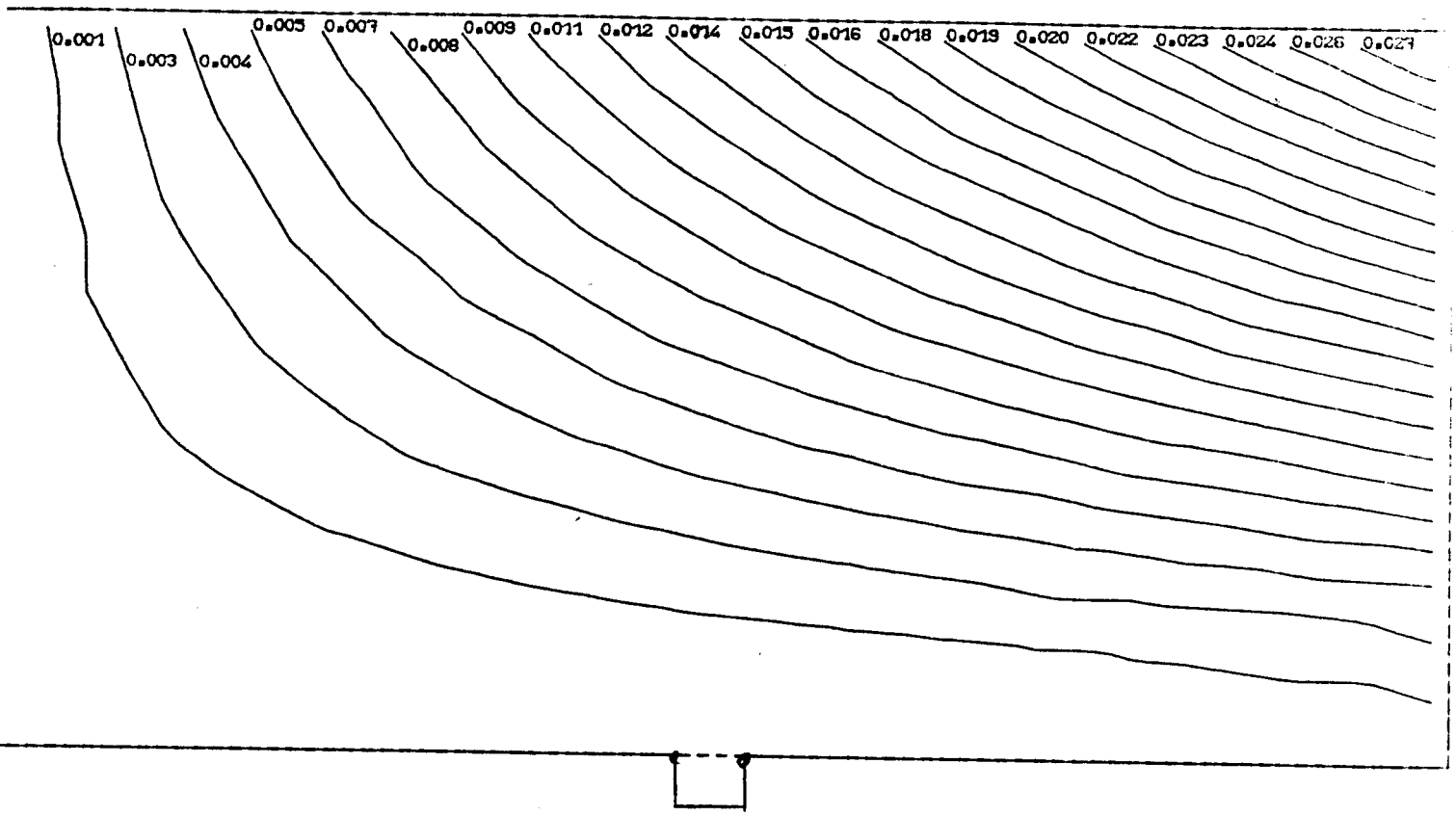
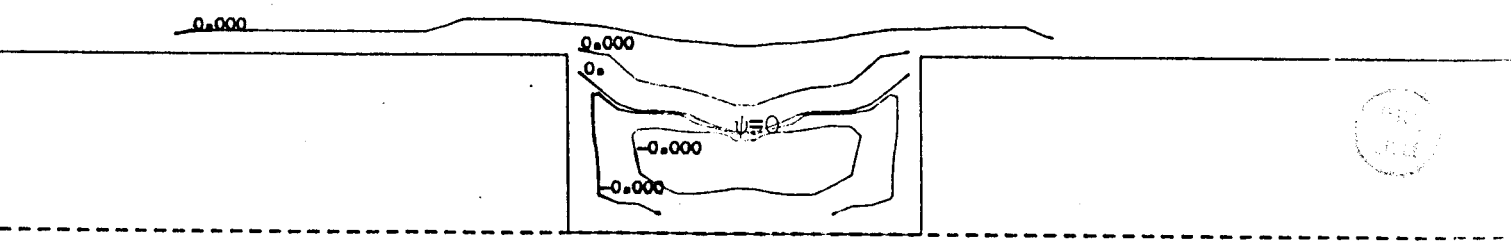


Fig. 4.15

Re = 1000 - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.15 bis.

Re = 1000 - Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



LIGNES ISOTOURBILLONS

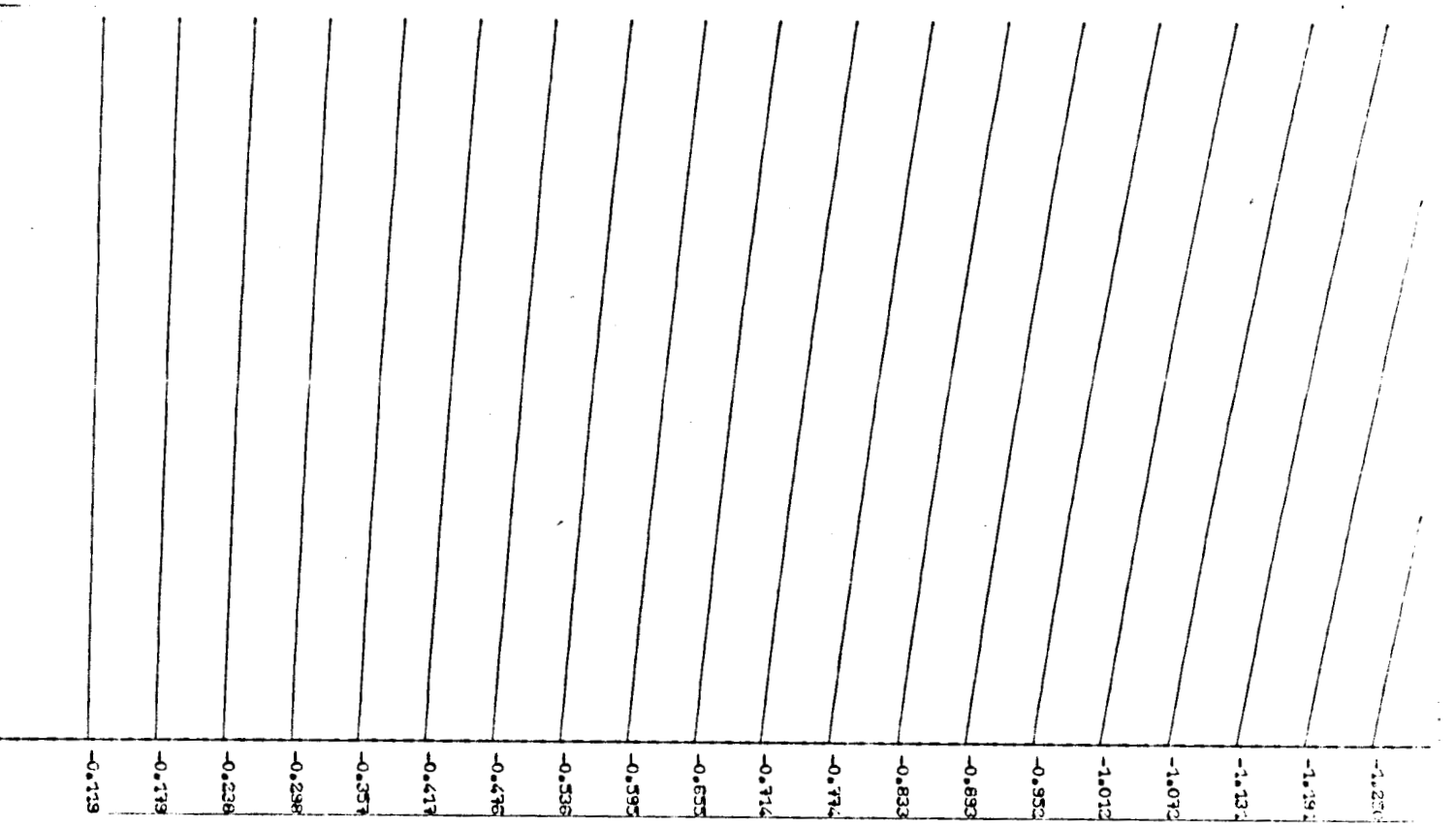
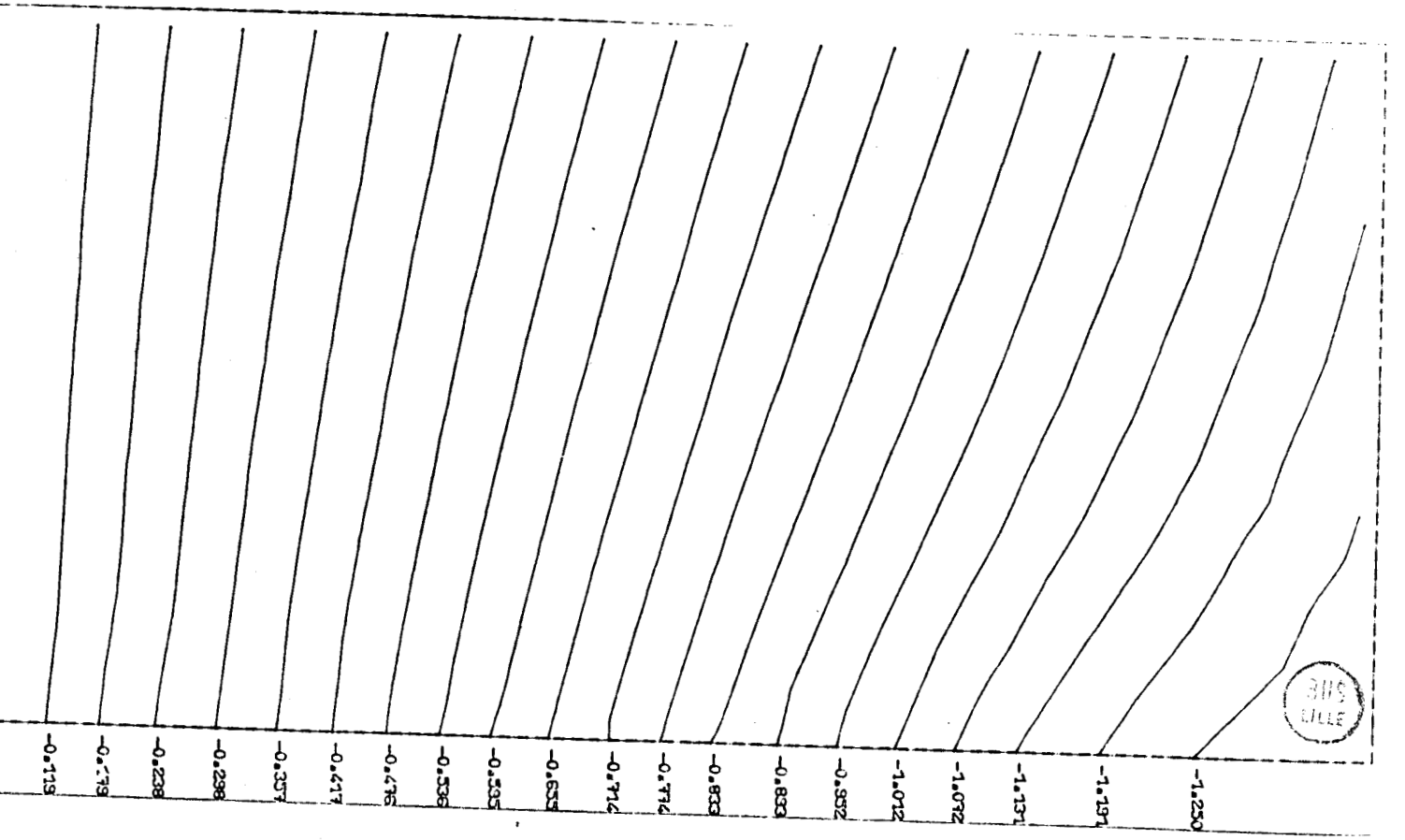


Fig. 4.16.

$Re = 1$ - Solution de Hiemenz - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.17.

$Re = 1$, $\varepsilon = 0$ - Hiemenz calculé par NSPSOM - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



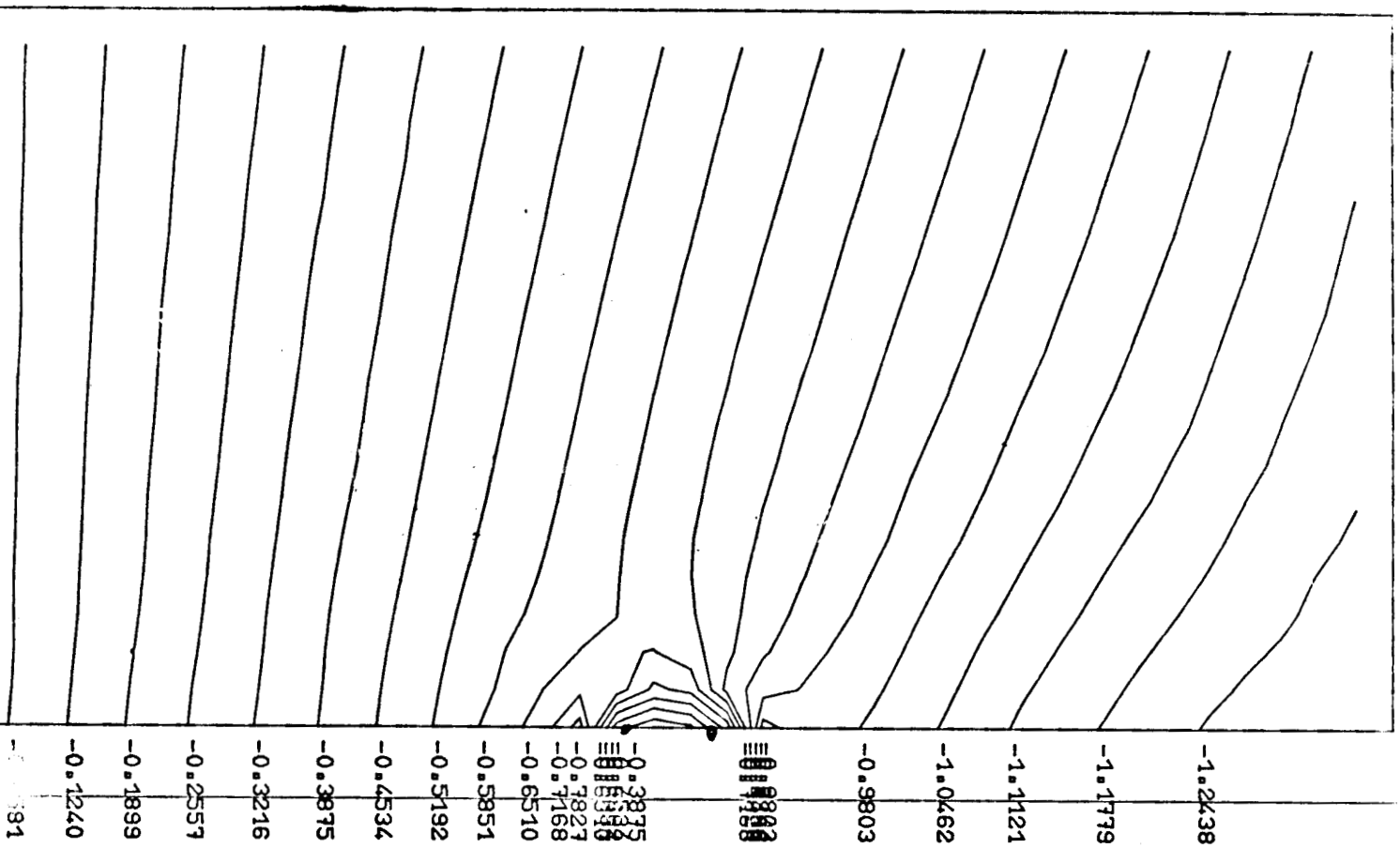
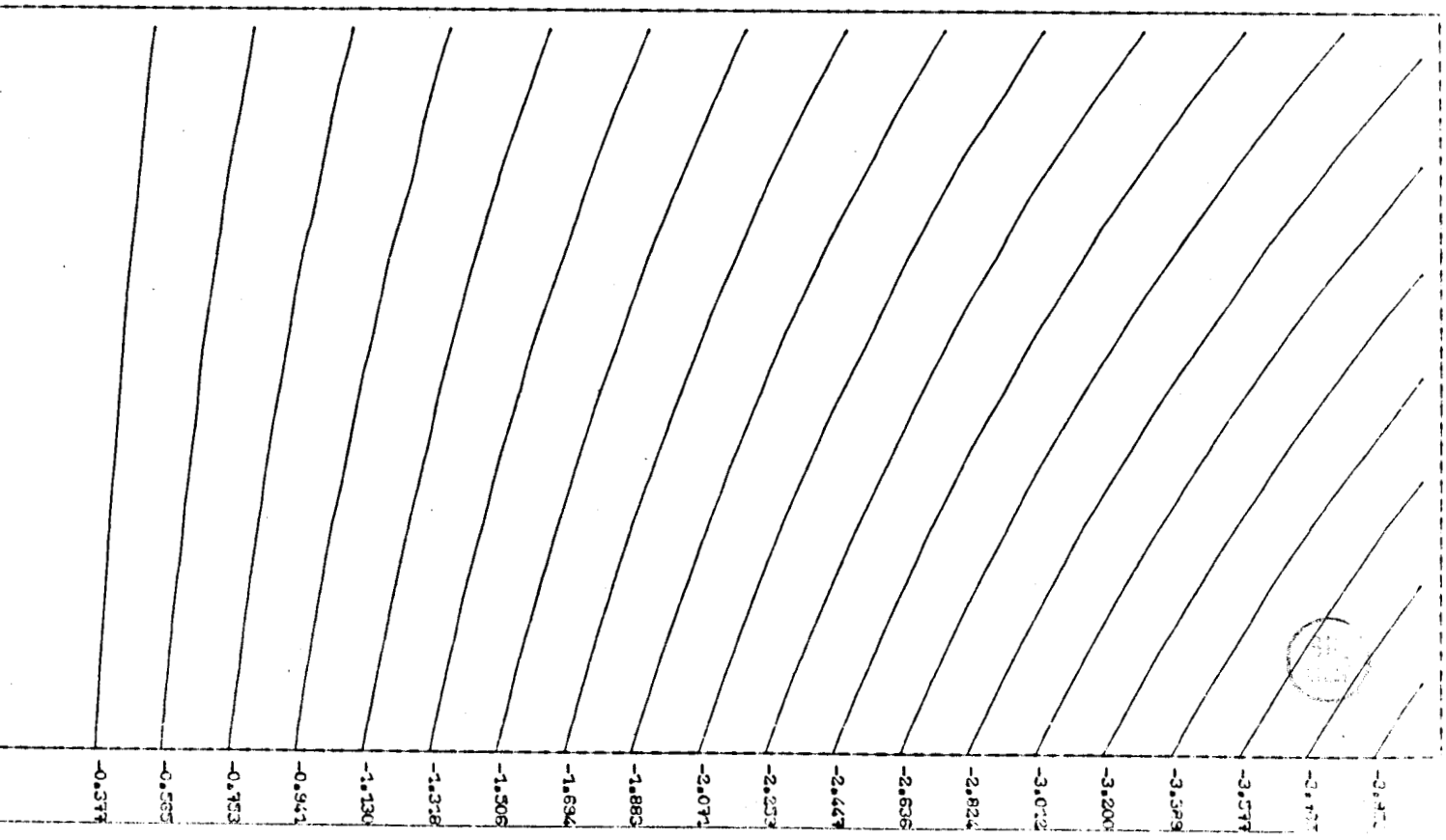


Fig. 4.18.
$Re = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$ - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.19.

$Re = 10$ - Solution d'Hiemenz - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



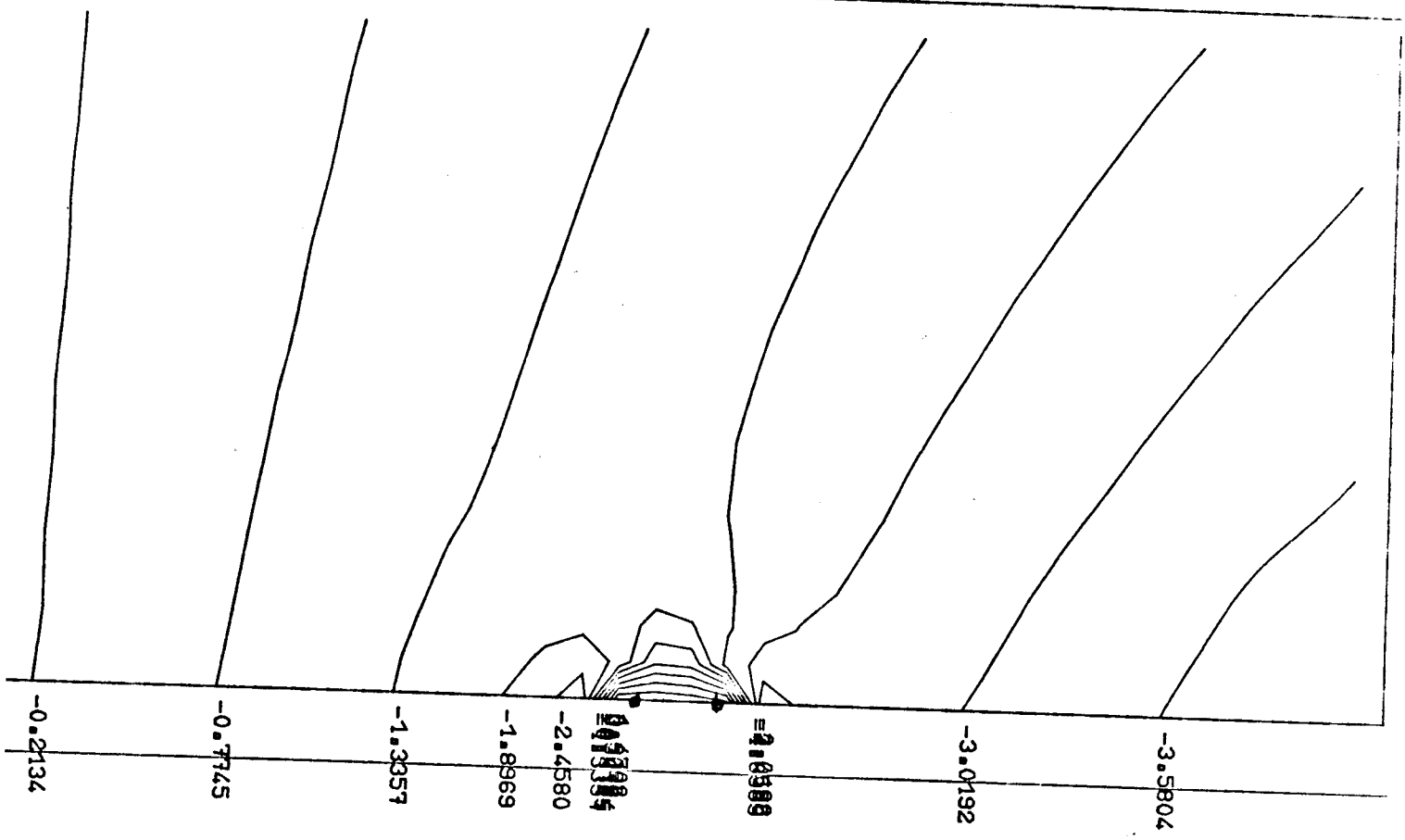
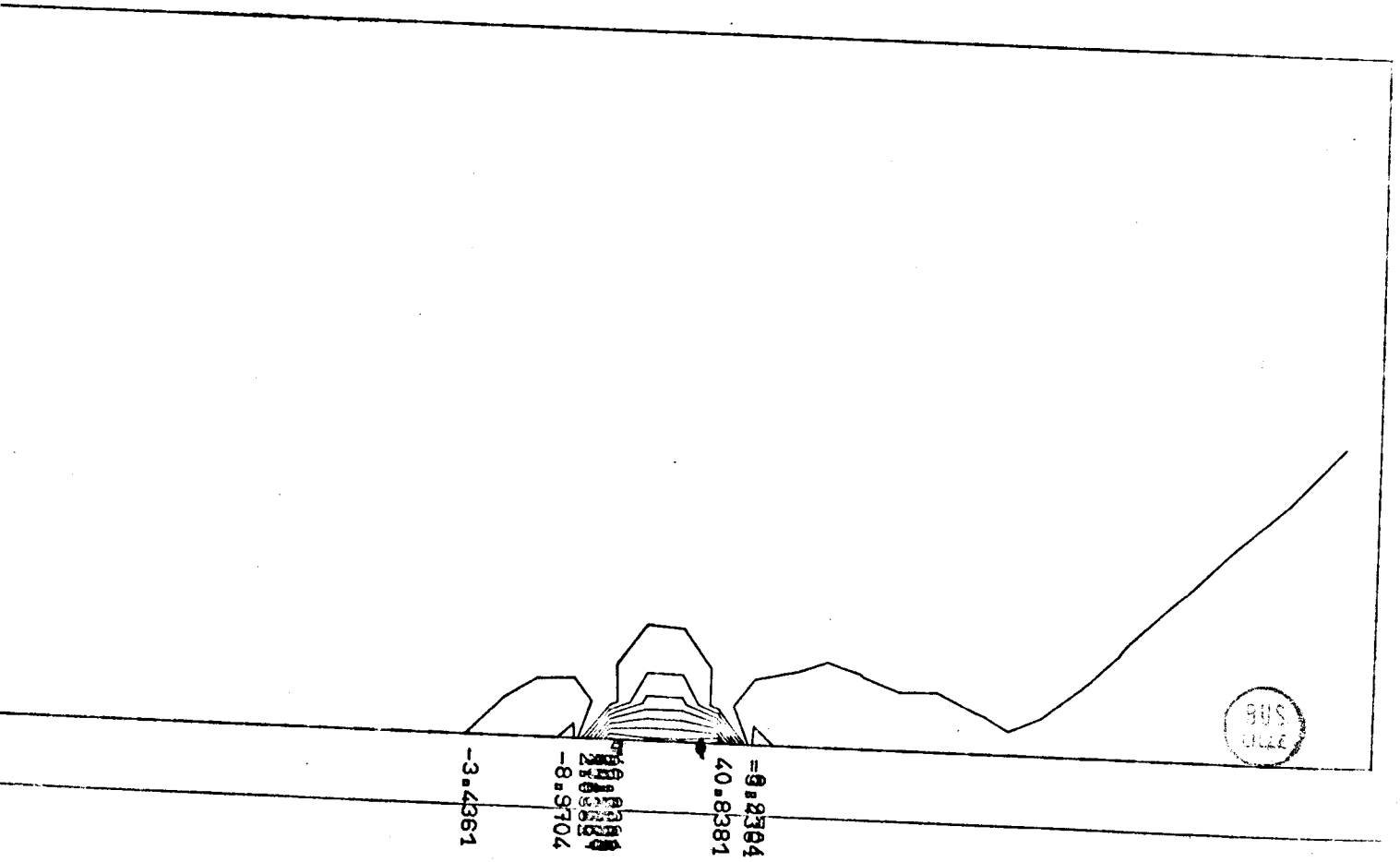


Fig. 4.20.

$Re = 10$, $\varepsilon = 10^{-2}$ - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.21.

$Re = 10$, $\varepsilon = 10^{-1}$ - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



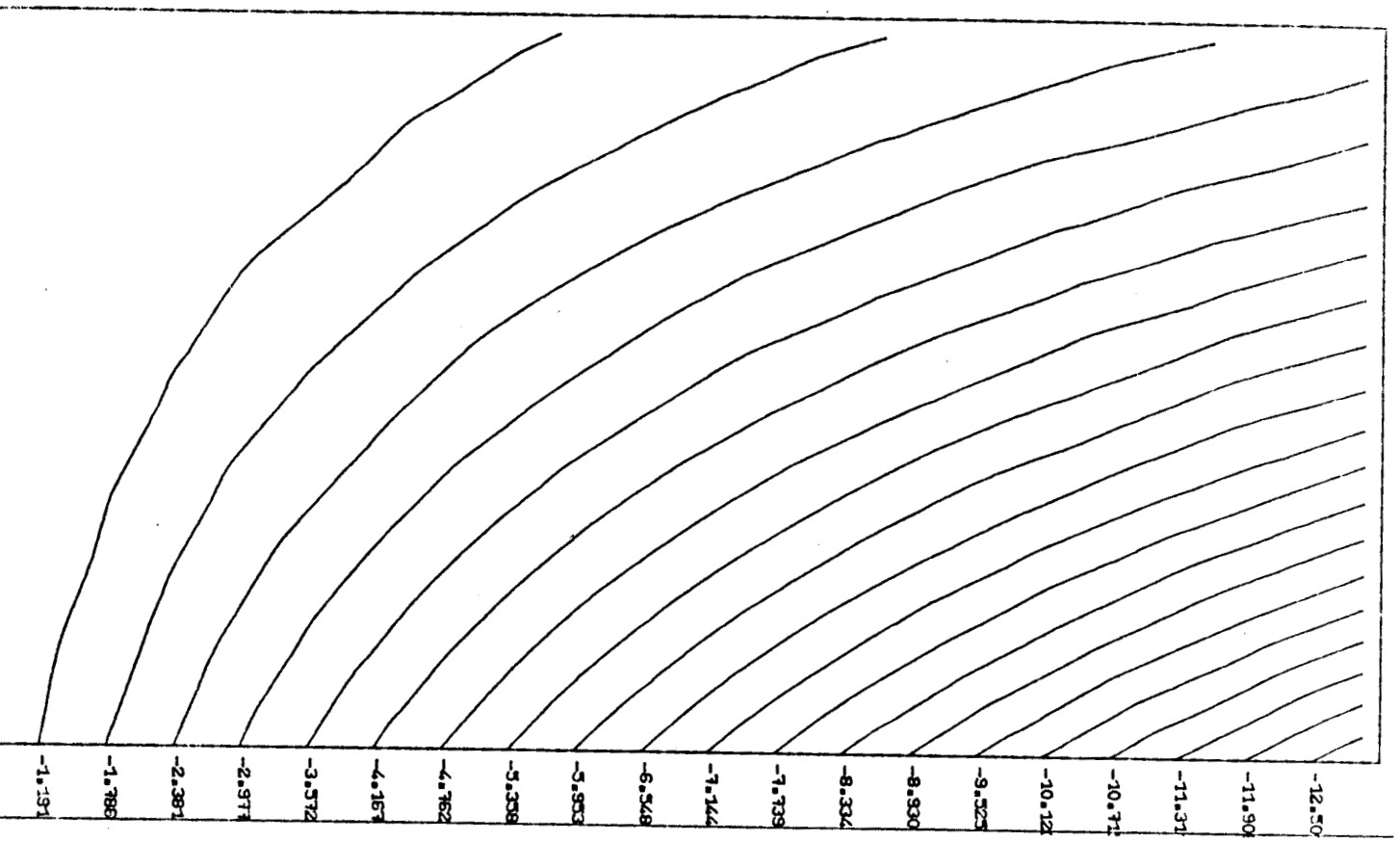
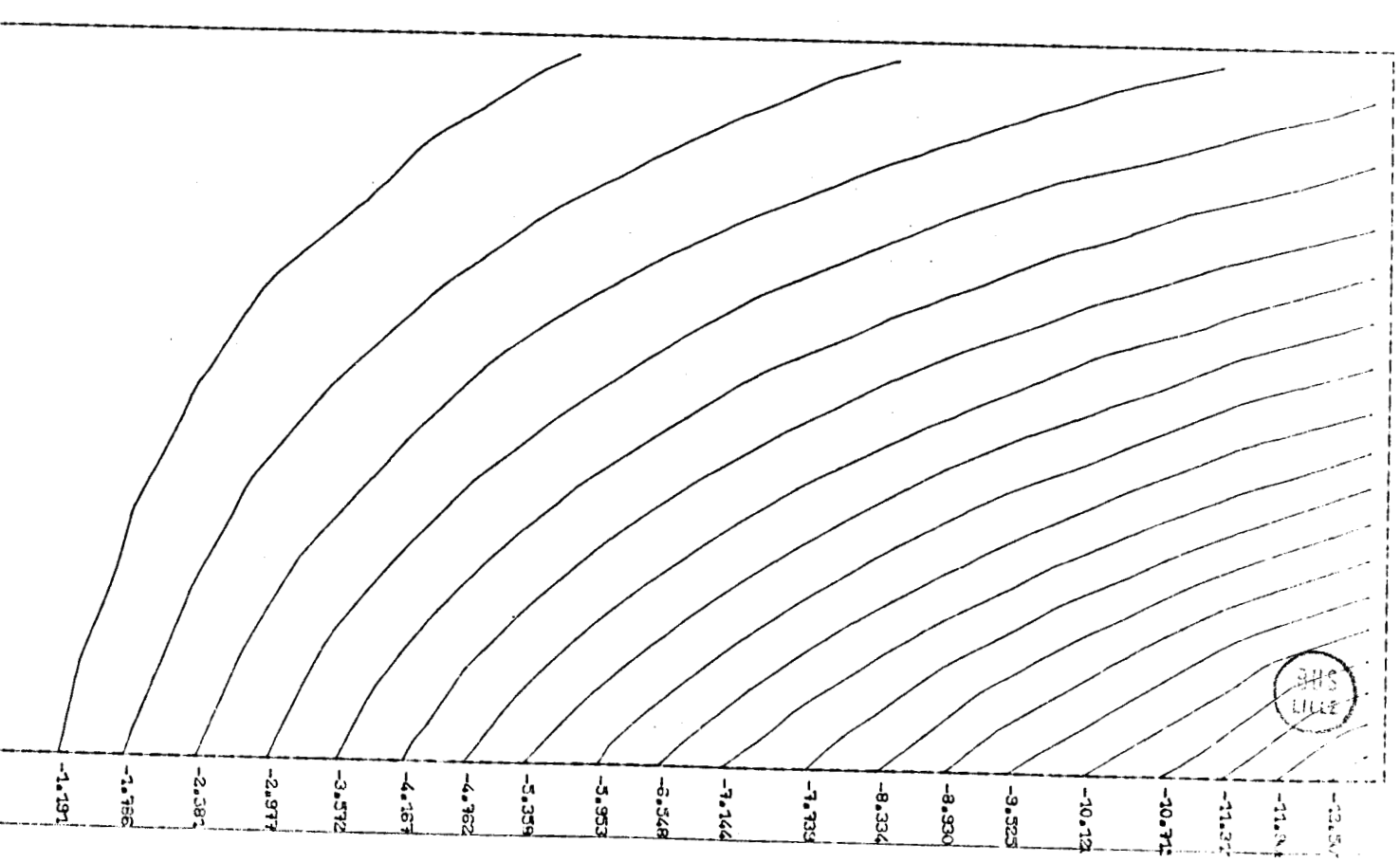


Fig. 4.22.

Re = 100 - Solution d'Hiemenz - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.23.

Re = 100, ε = 0 - Hiemenz calculé par NSPSOM - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



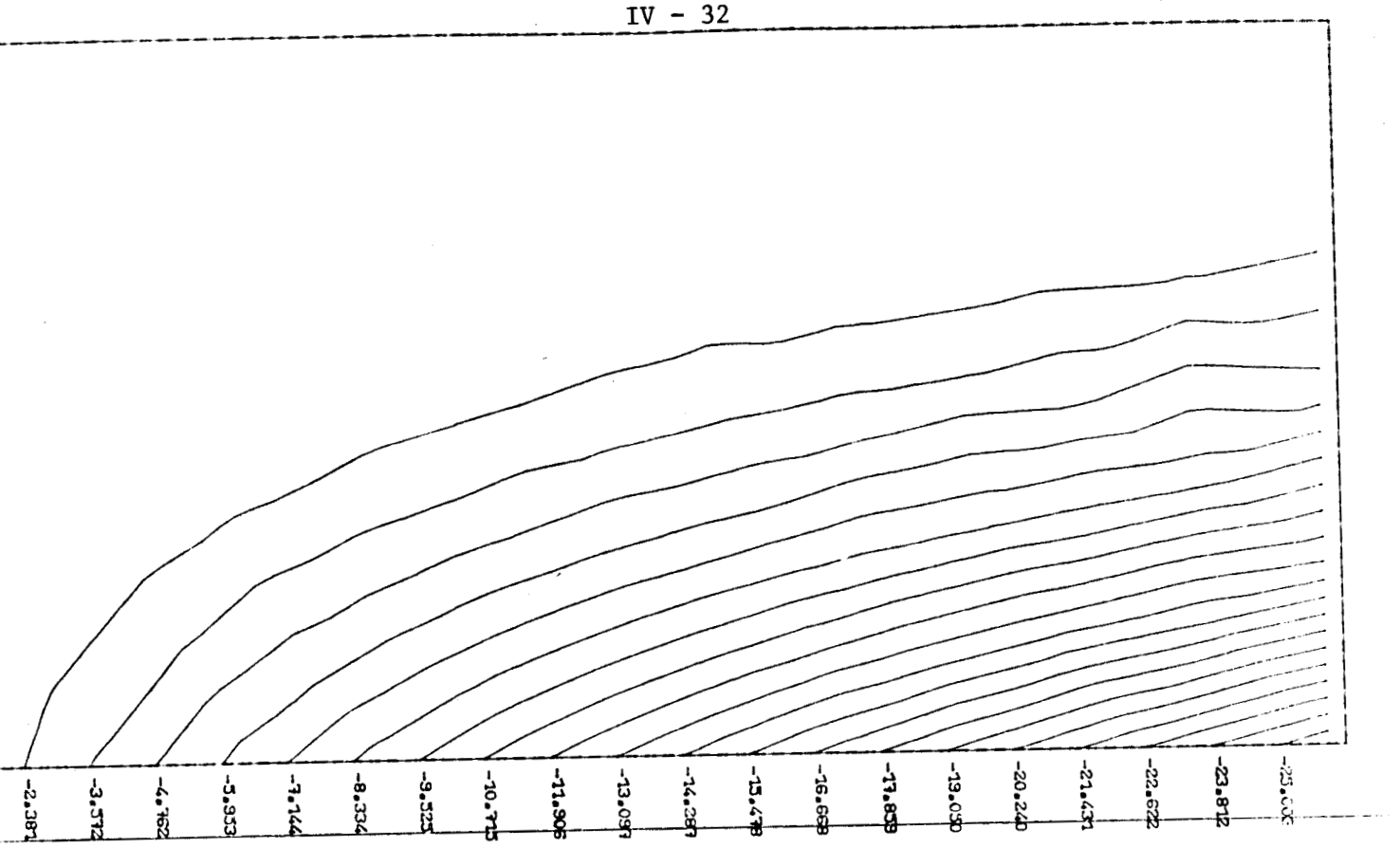
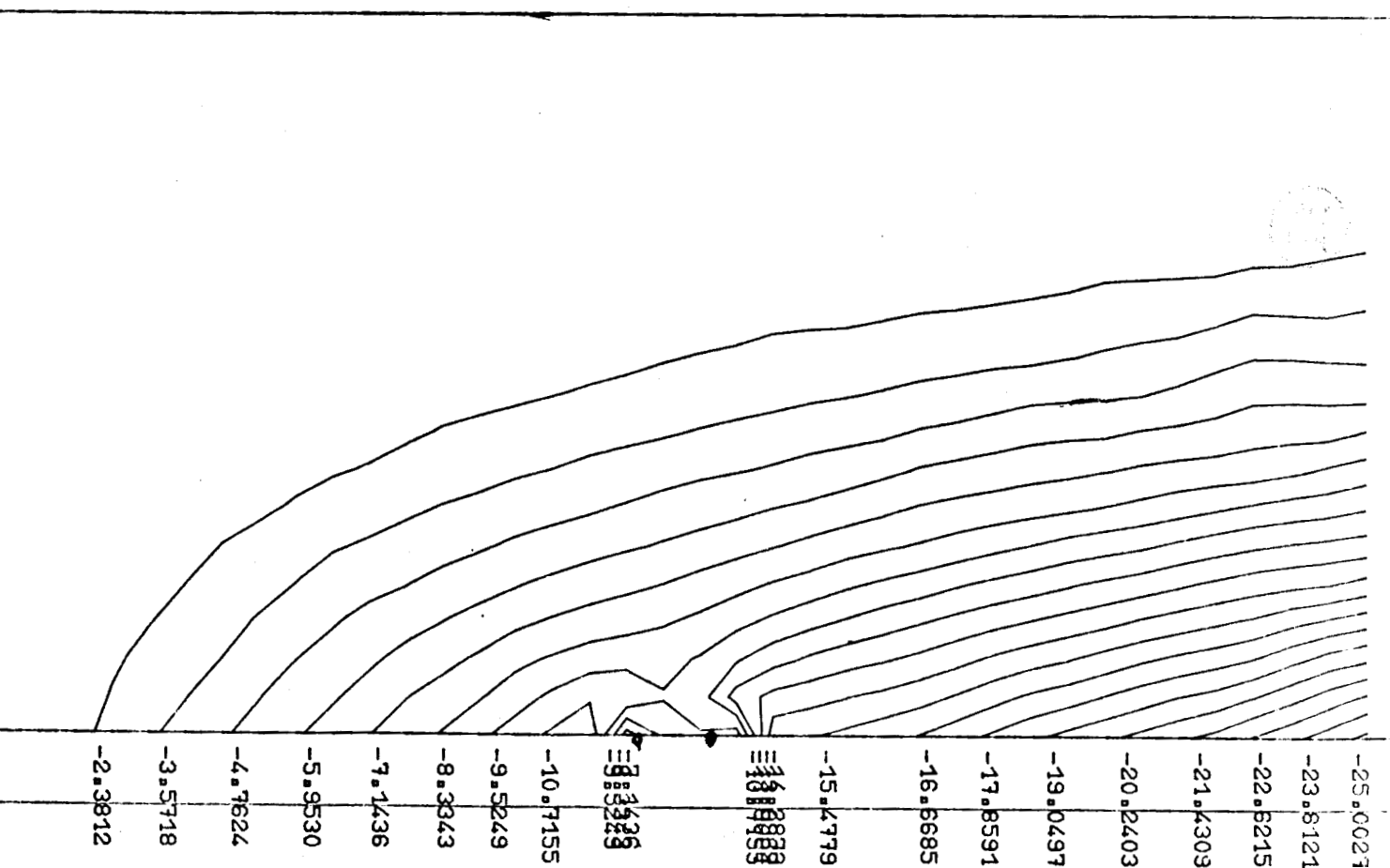


Fig. 4.24.

Re = 400 - Solution d'Hiemenz - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.25.

Re = 400, $\varepsilon = 10^{-2}$ - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



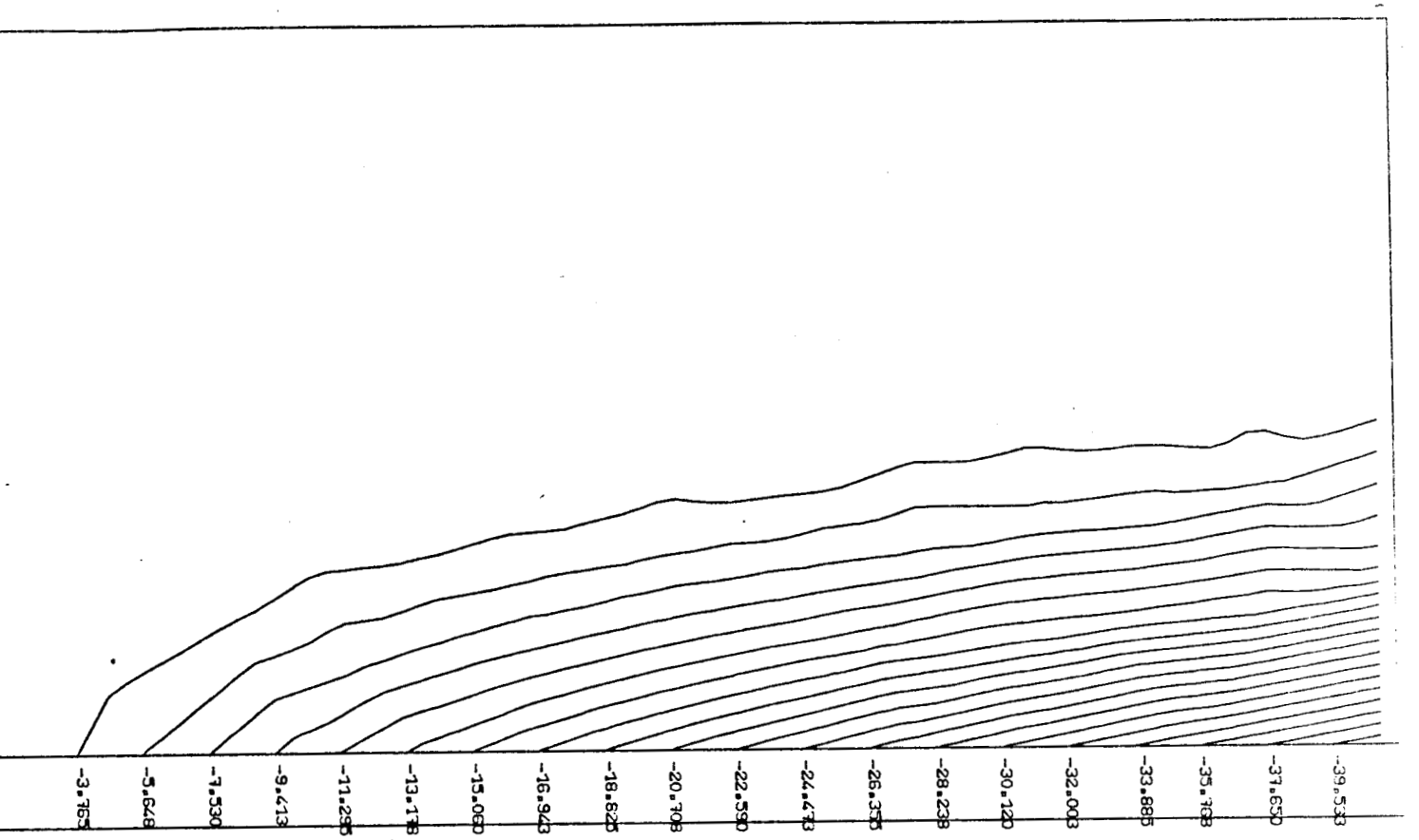
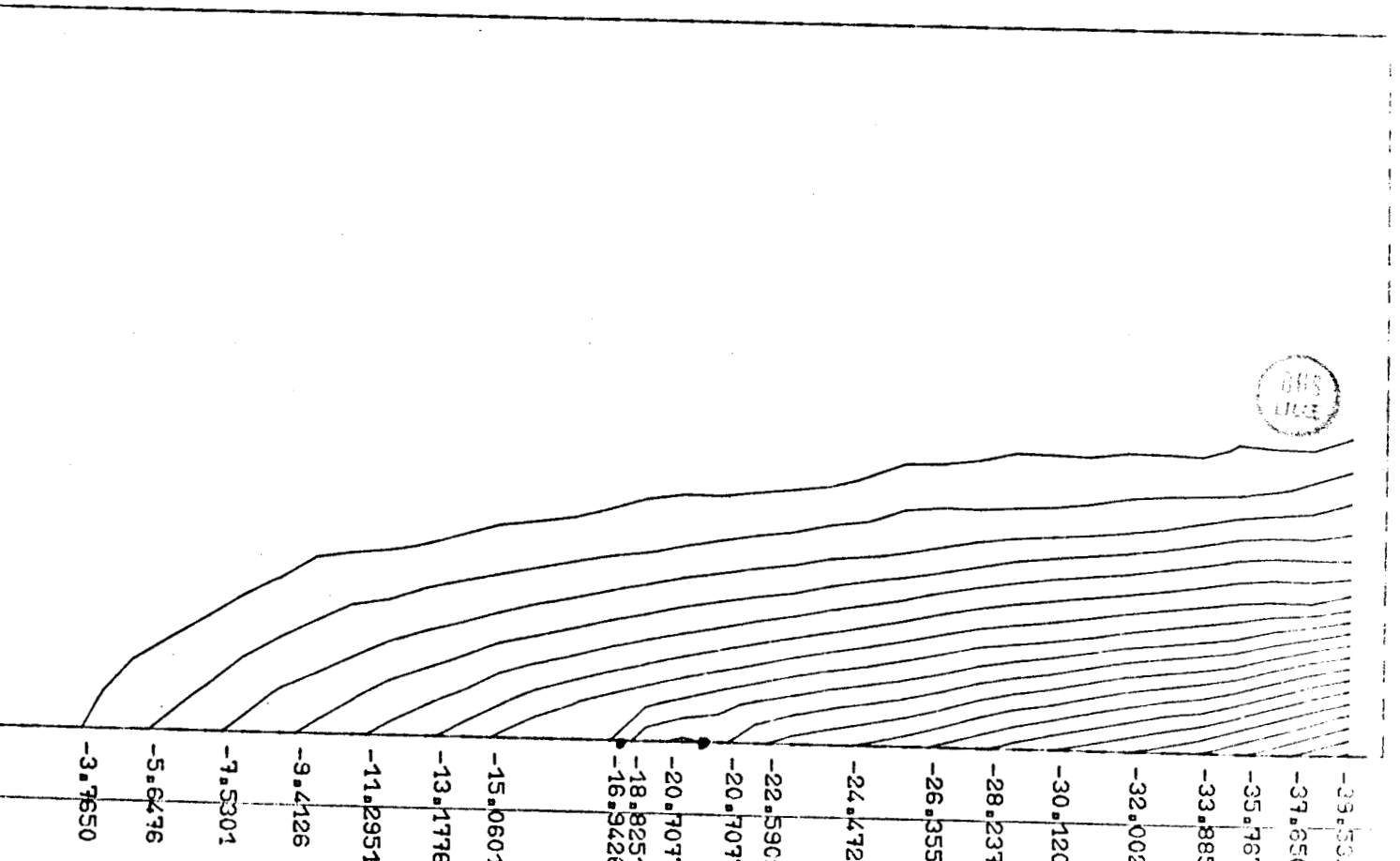


Fig. 4.26.

Re = 1000 - Solution d'Hiemenz - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.27.

Re = 1000 - Hiemenz obtenu par NSPSOM



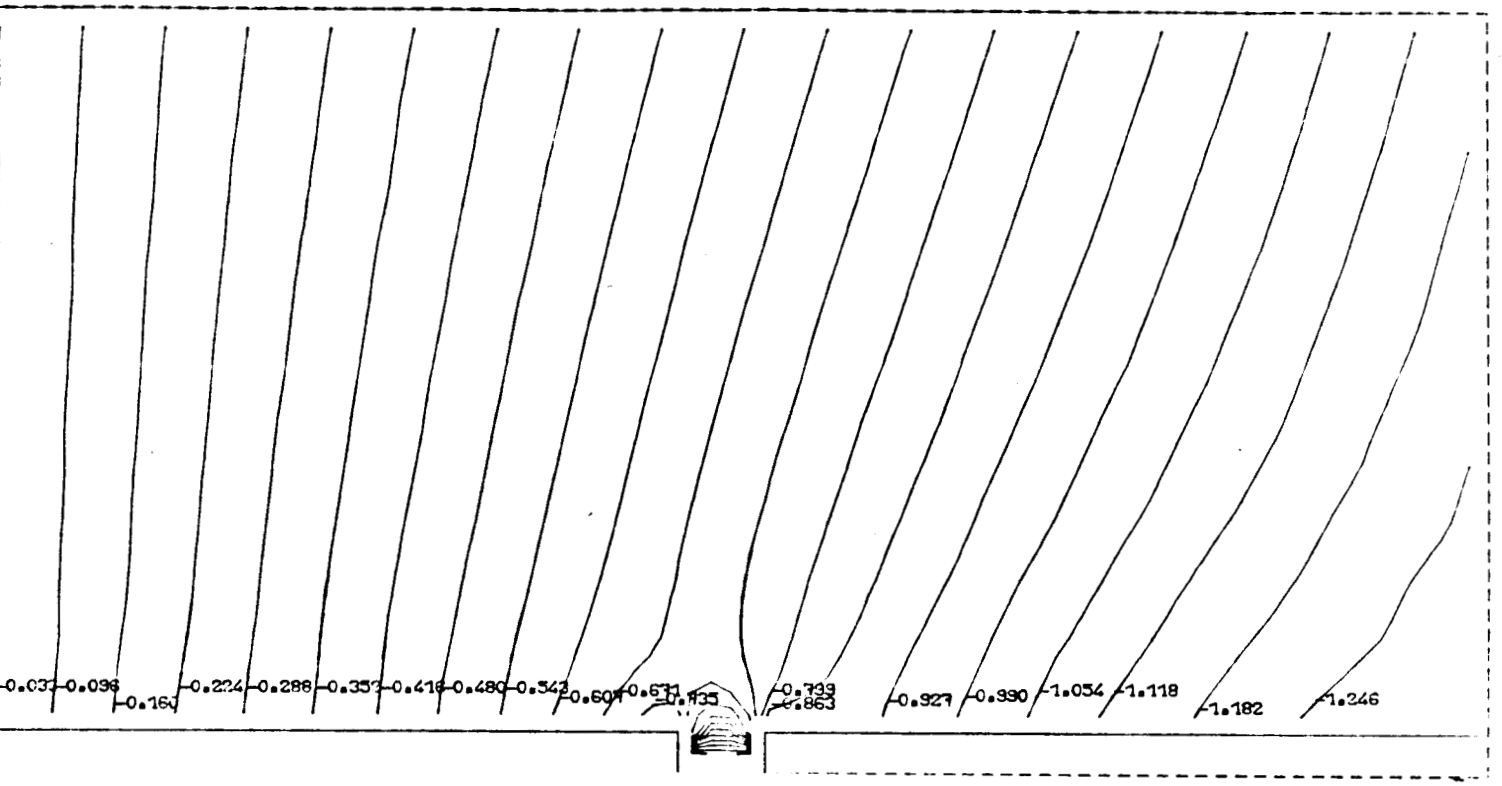
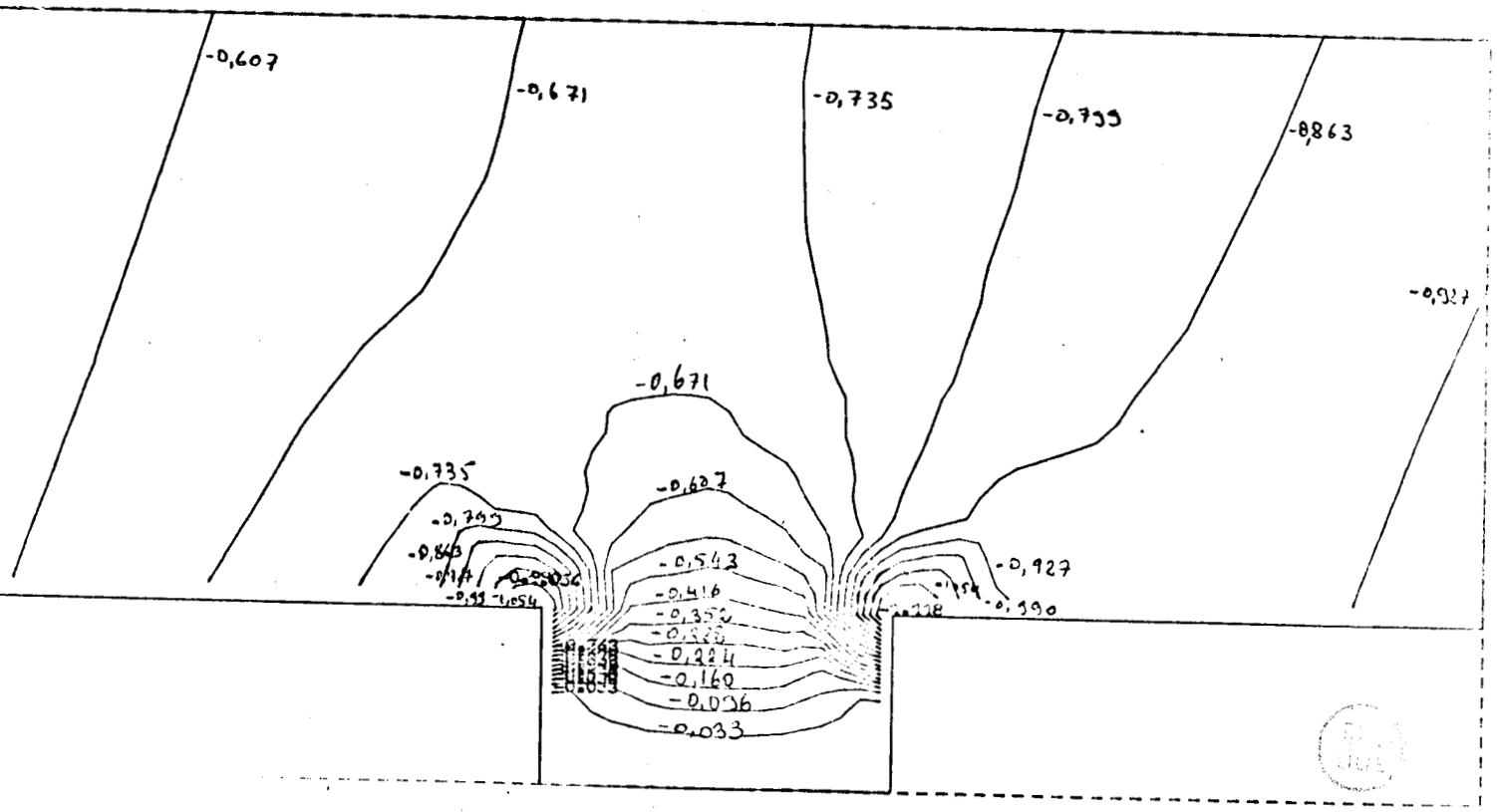


Fig. 4.28.

Re = 1 - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.29.

Re = 1 - Echelle $1/1{,}610^{-3}$



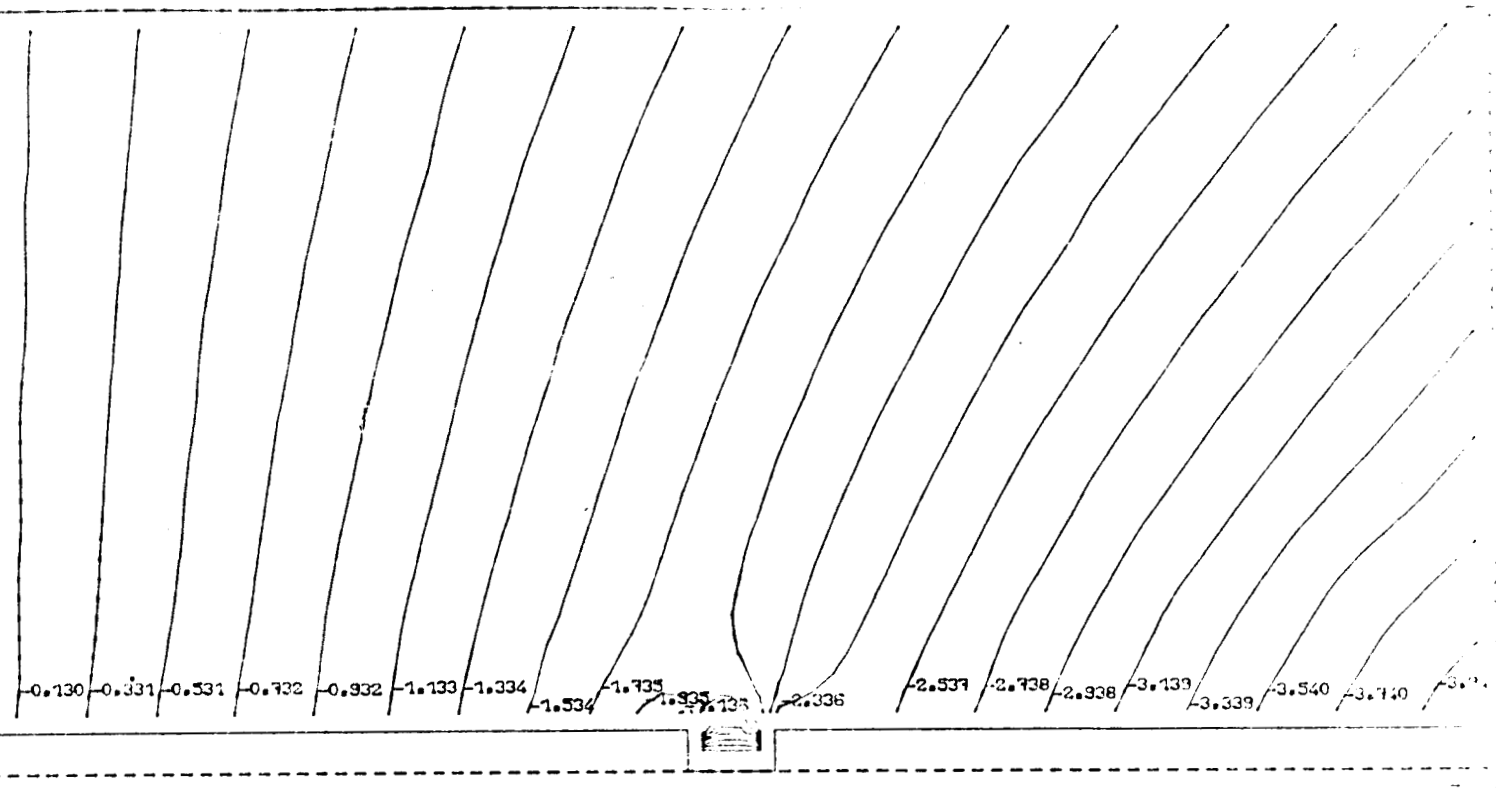
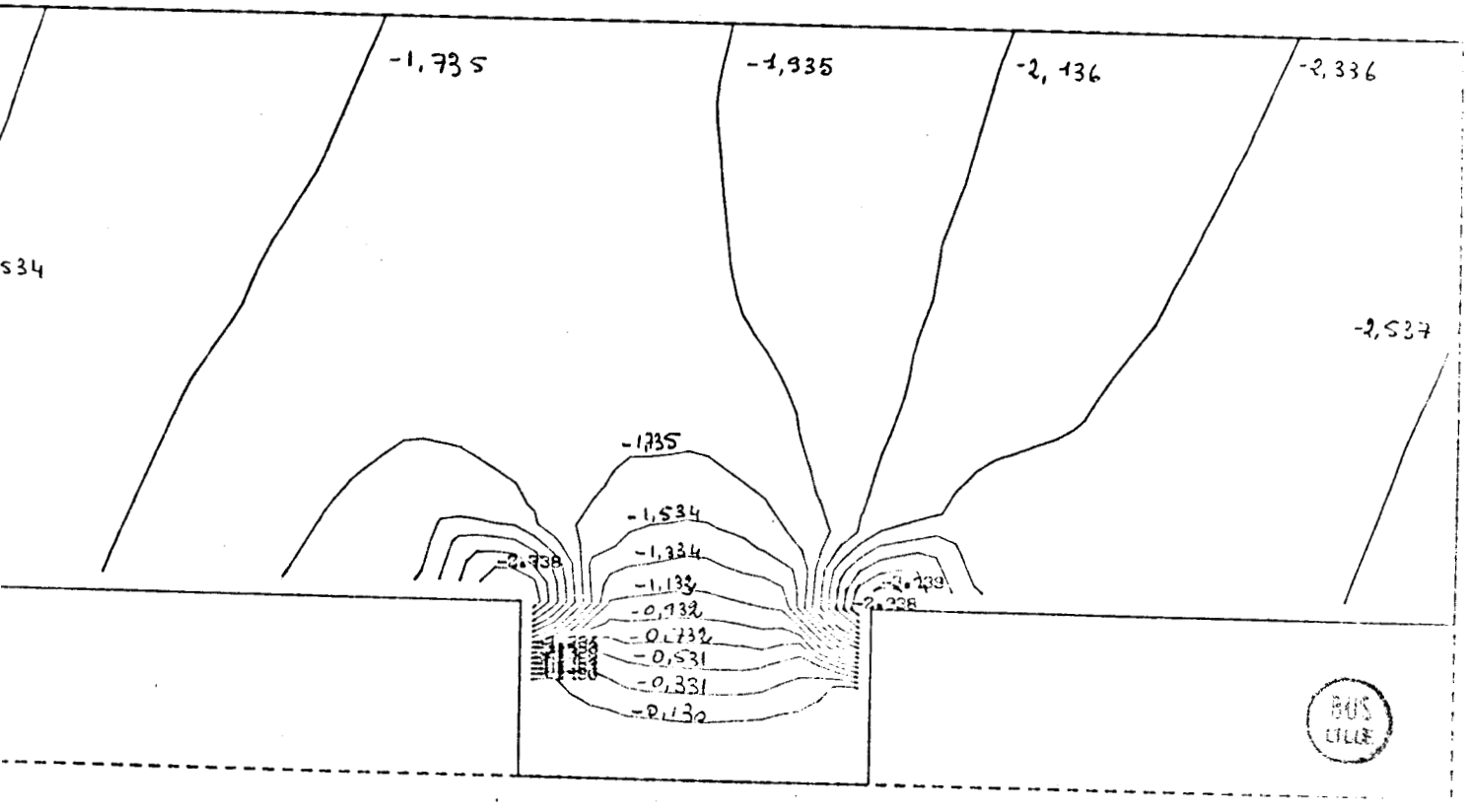


Fig. 4.30.

Re = 10 - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.31.

Re = 10 - Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



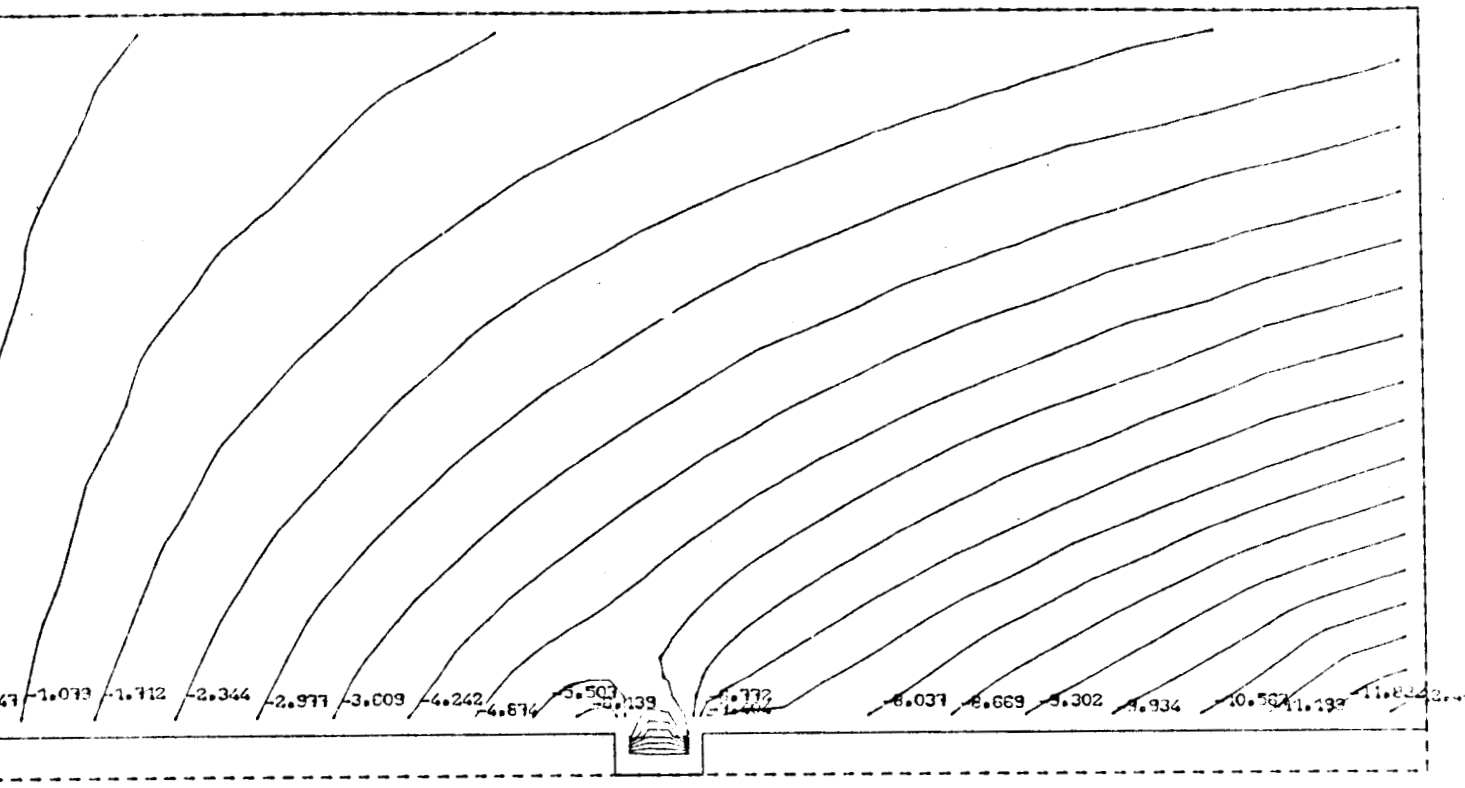
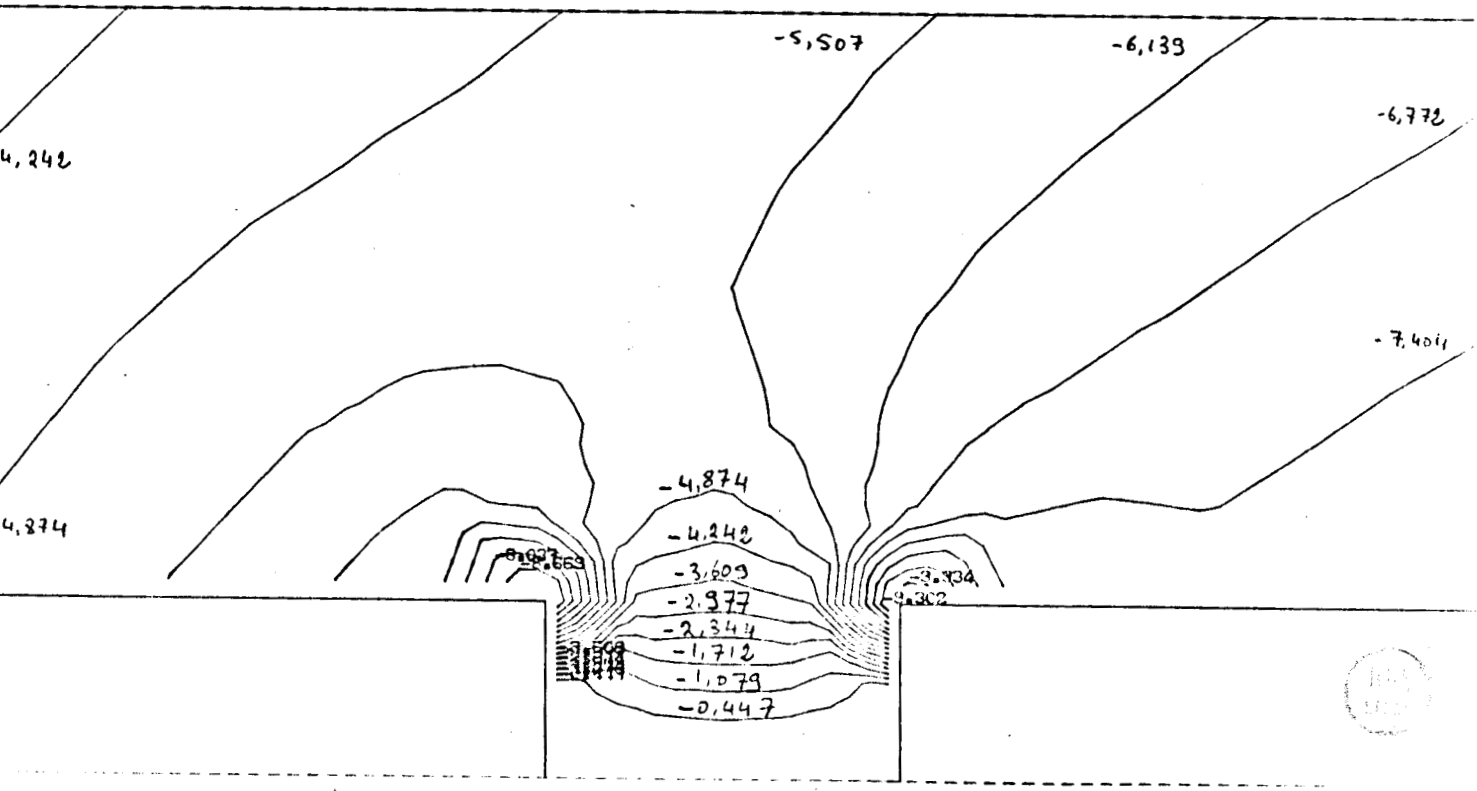


Fig. 4.32.

Re = 100 - Echelle $1/1{,}6410^{-3}$

Fig. 4.33.

Re = 100 - Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



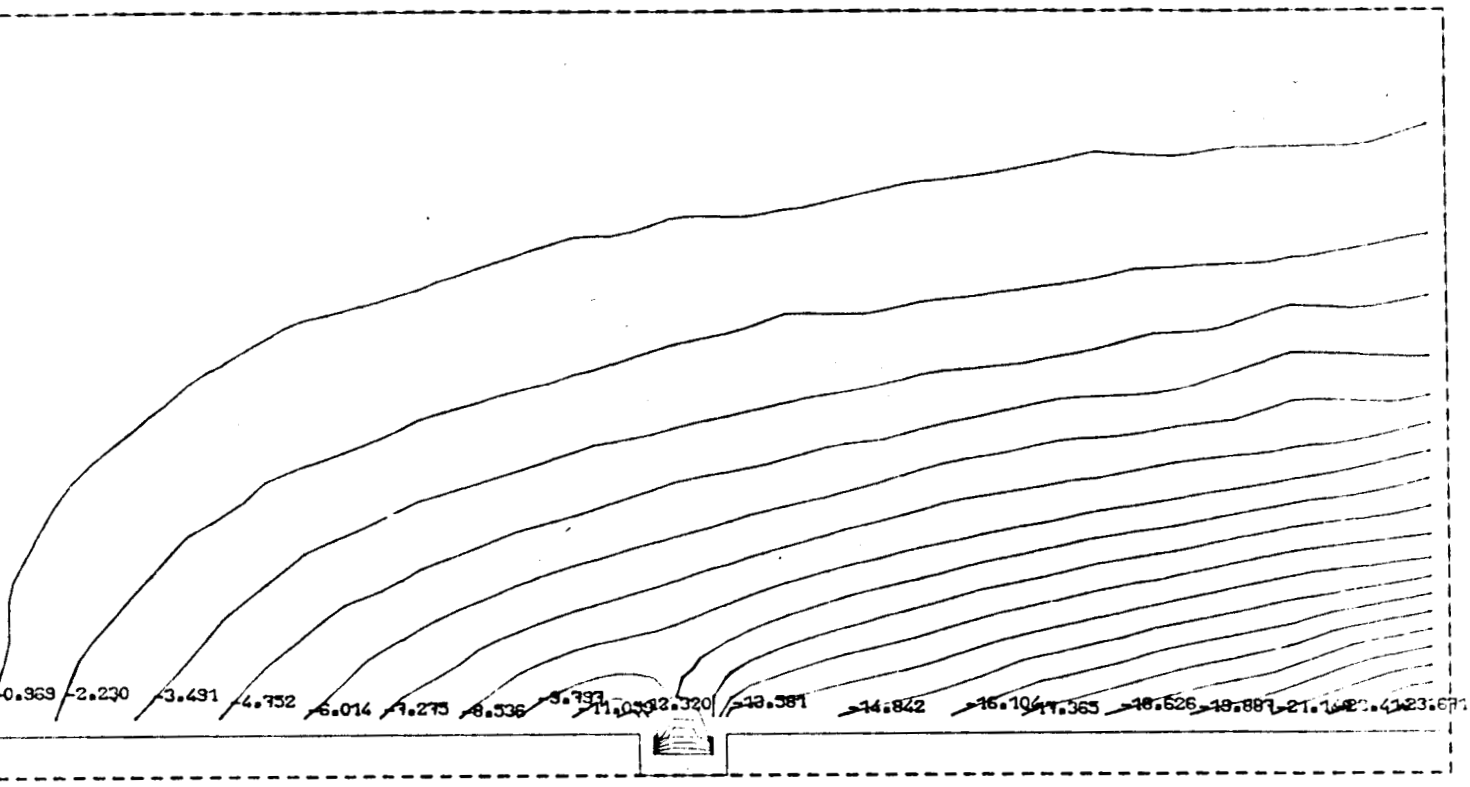
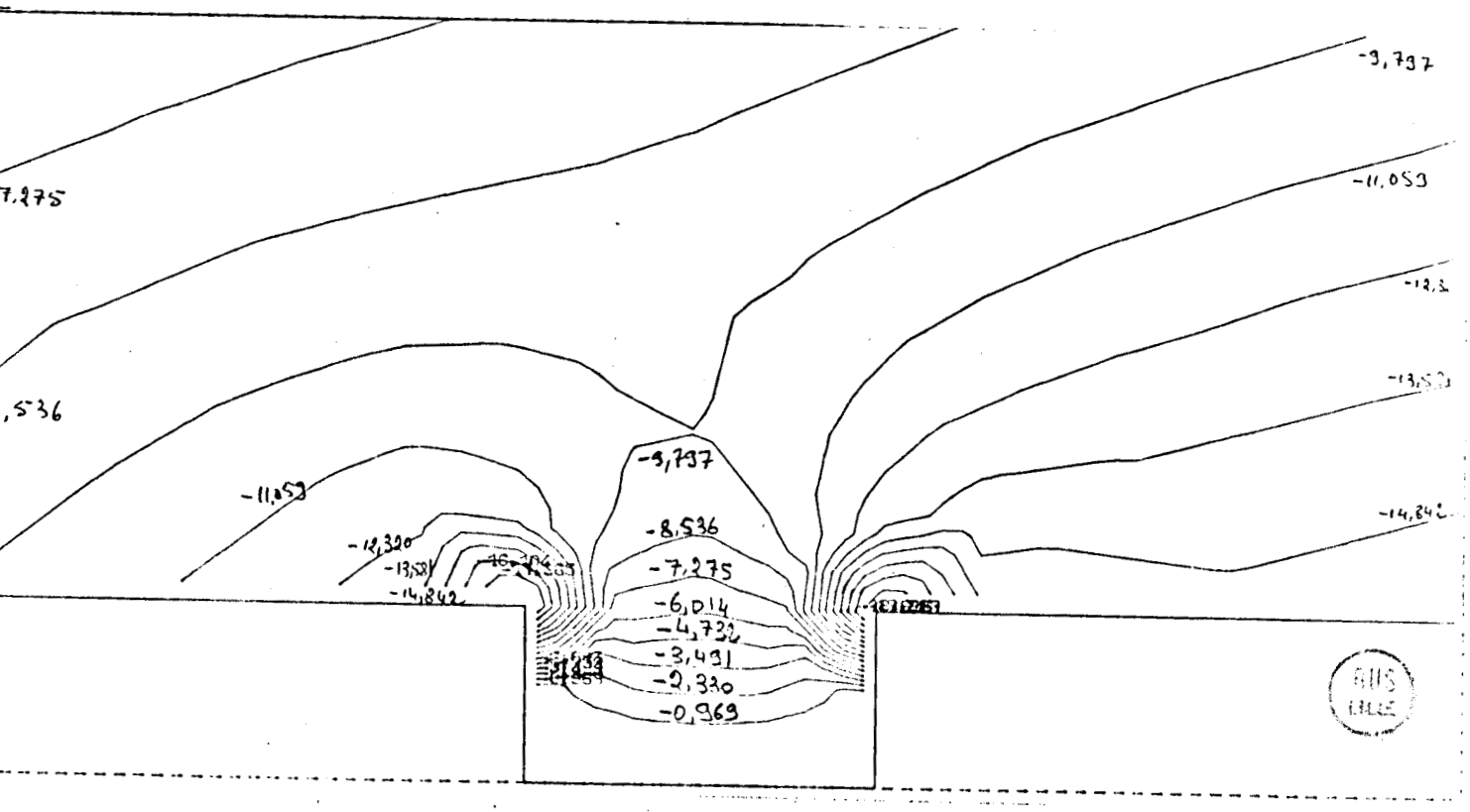


Fig. 4.34.

Re = 400 - Echelle $1/6,6410^{-3}$

Fig. 4.35.

Re = 400 - Echelle $1/1,1610^{-3}$



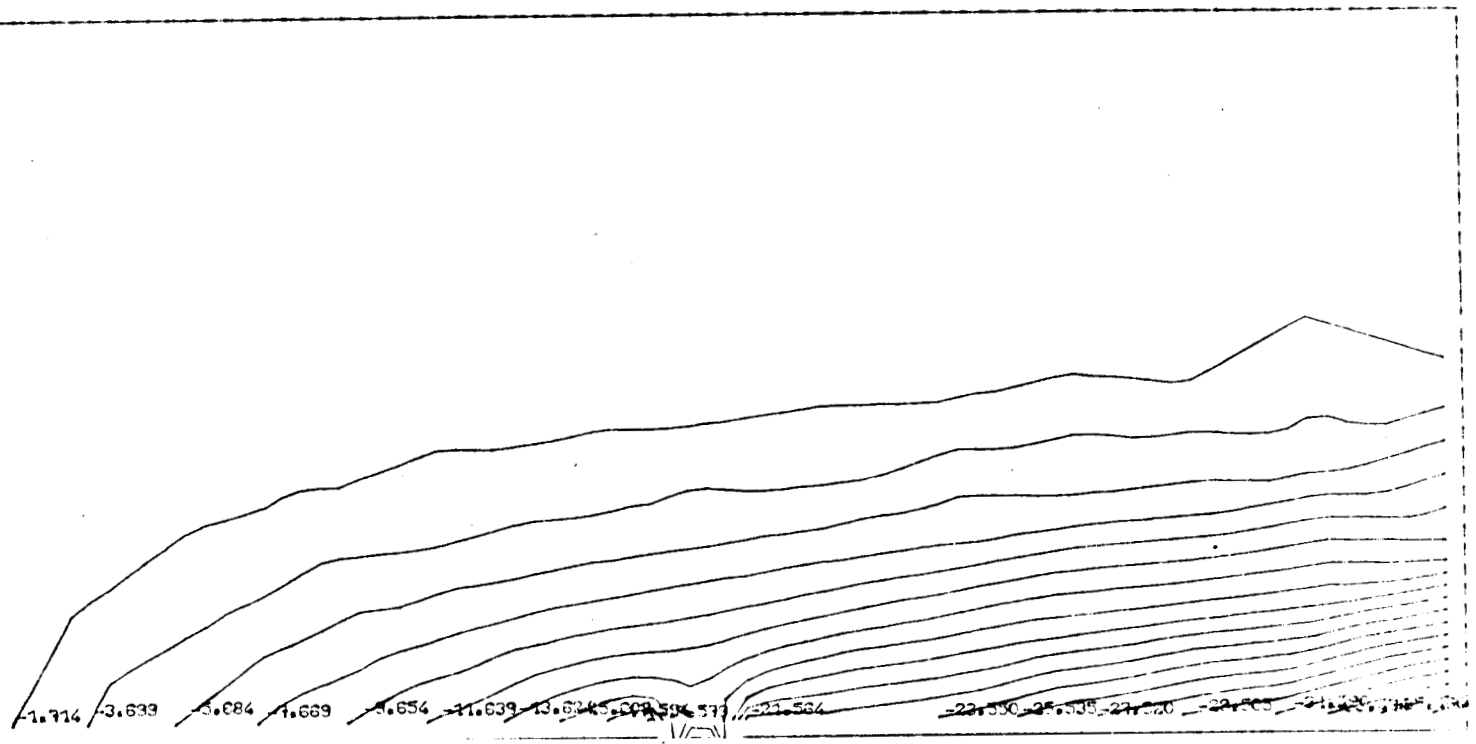
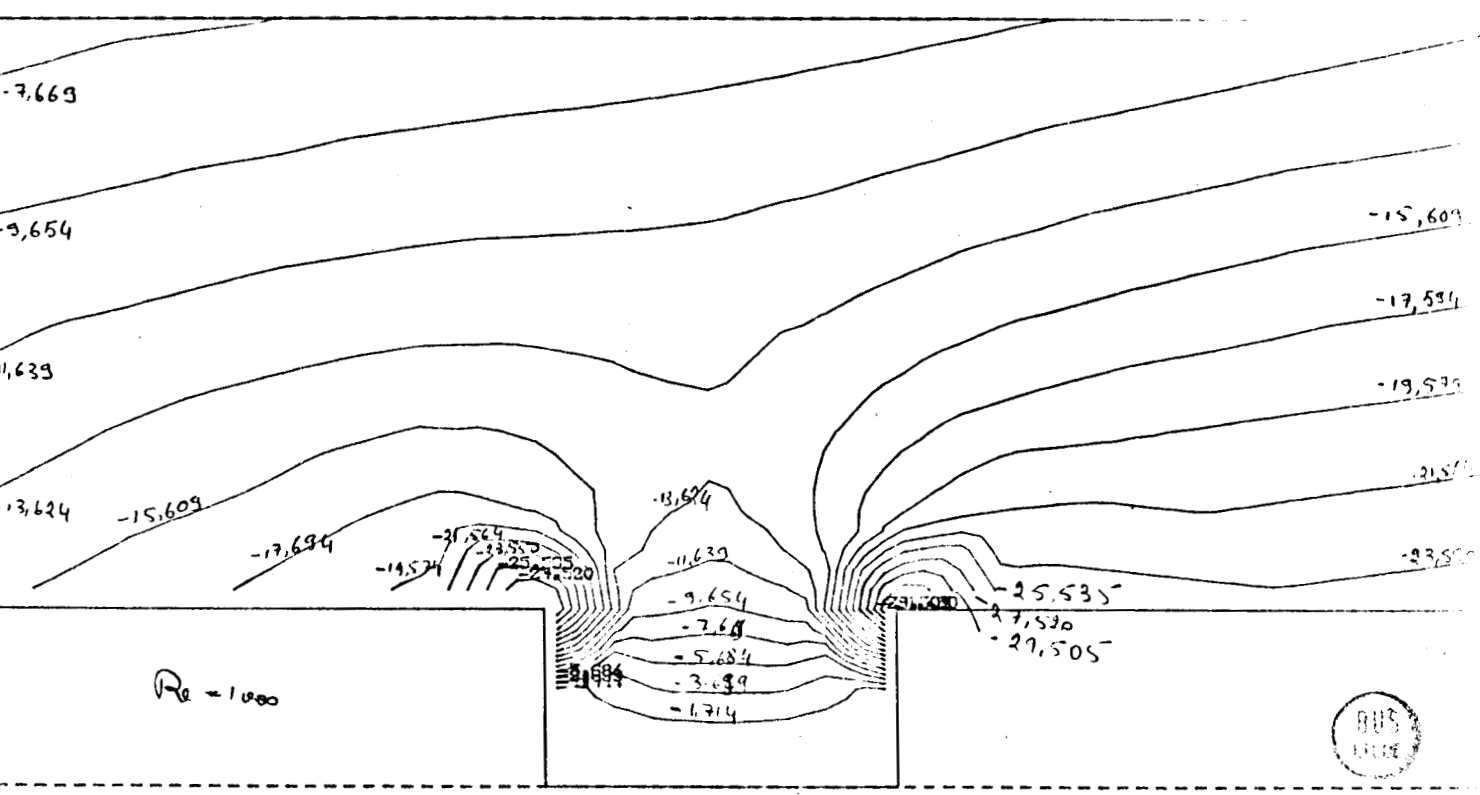


Fig. 4.36.

Re = 1000 - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.37.

Re = 1000 - Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



CHAMP DE VECTEURS VITESSE

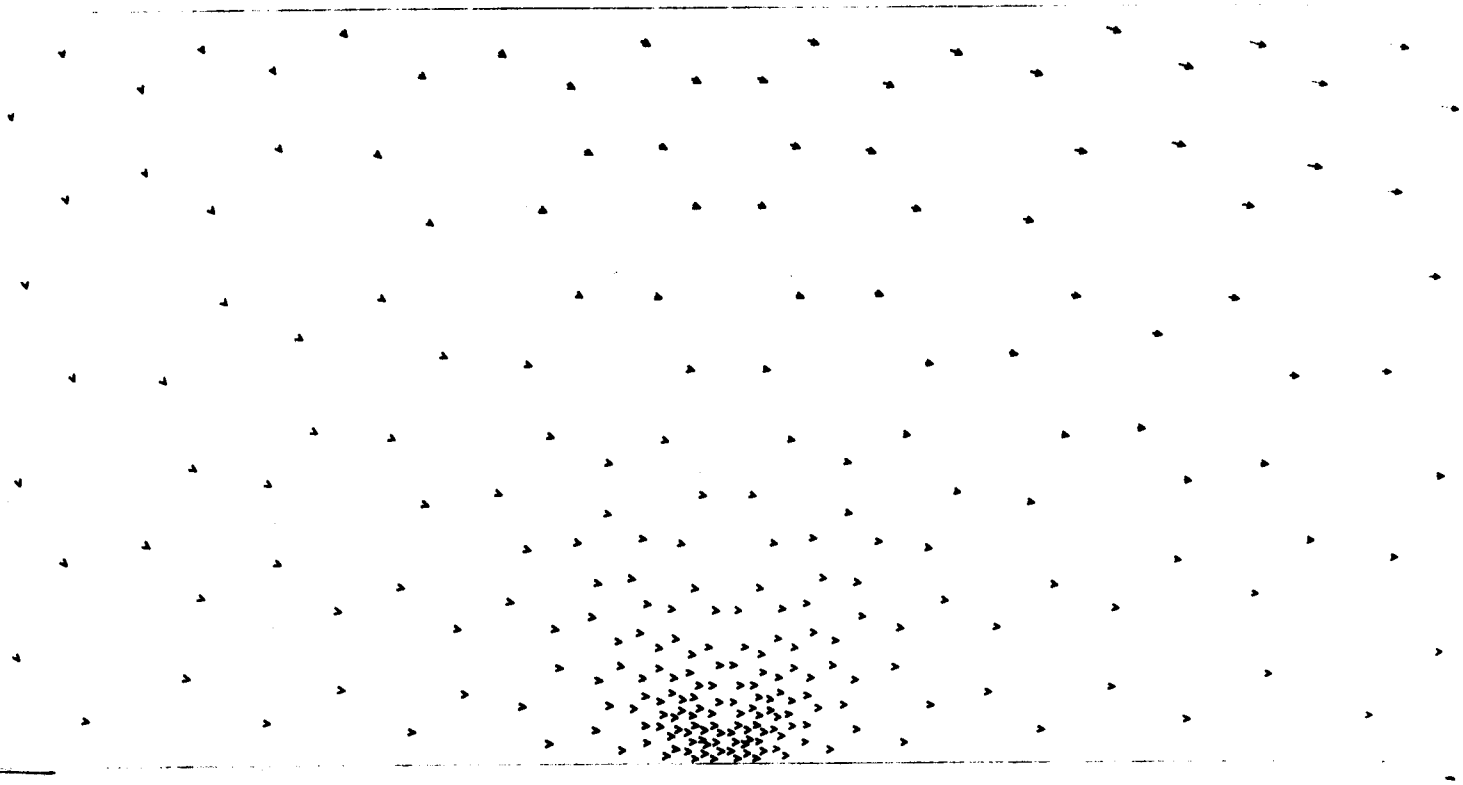
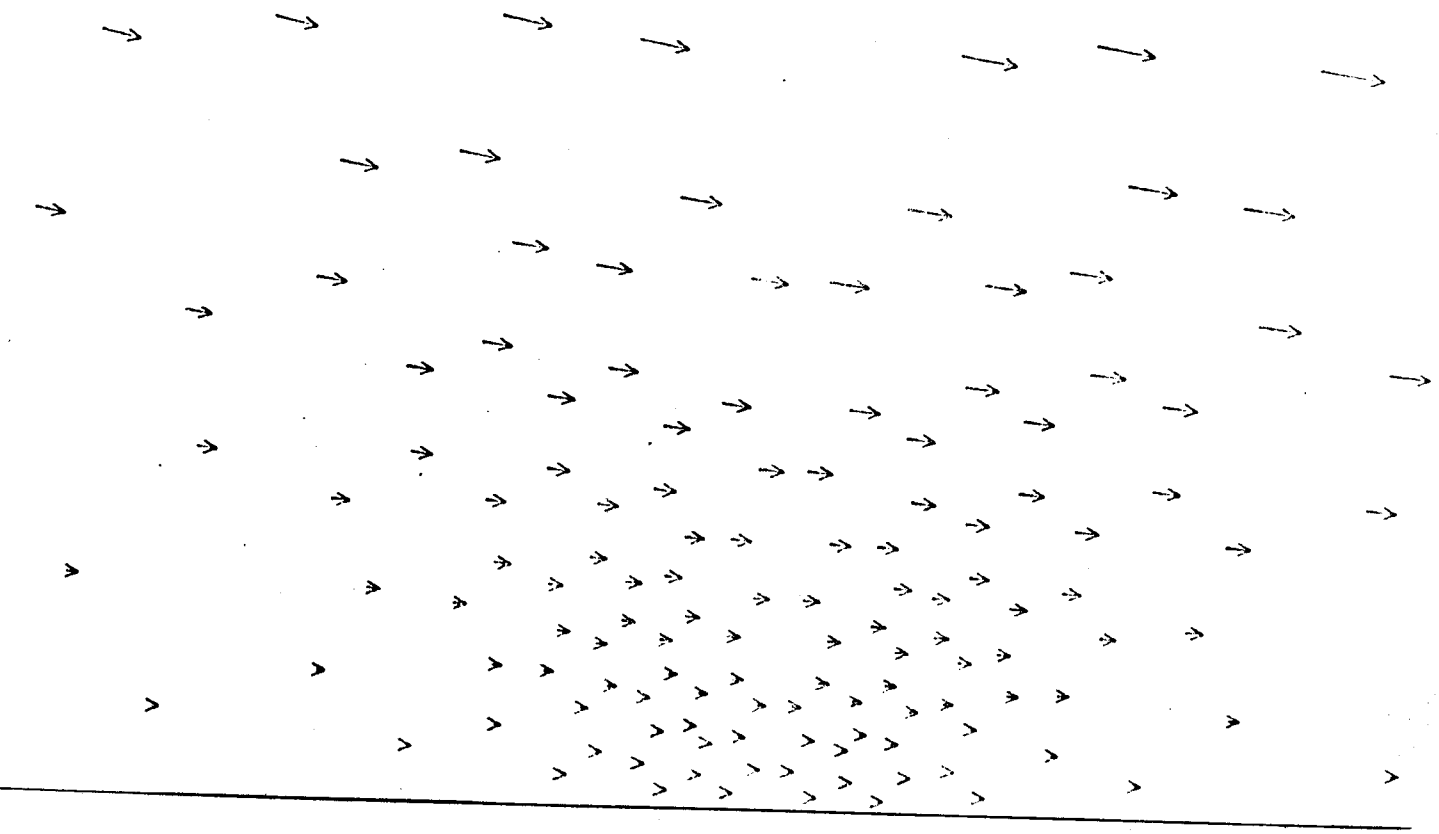


Fig. 4.38

$Re = 1, \quad \varepsilon = 0$

Fig. 4.39.

$Re = 1, \quad \varepsilon = 0$



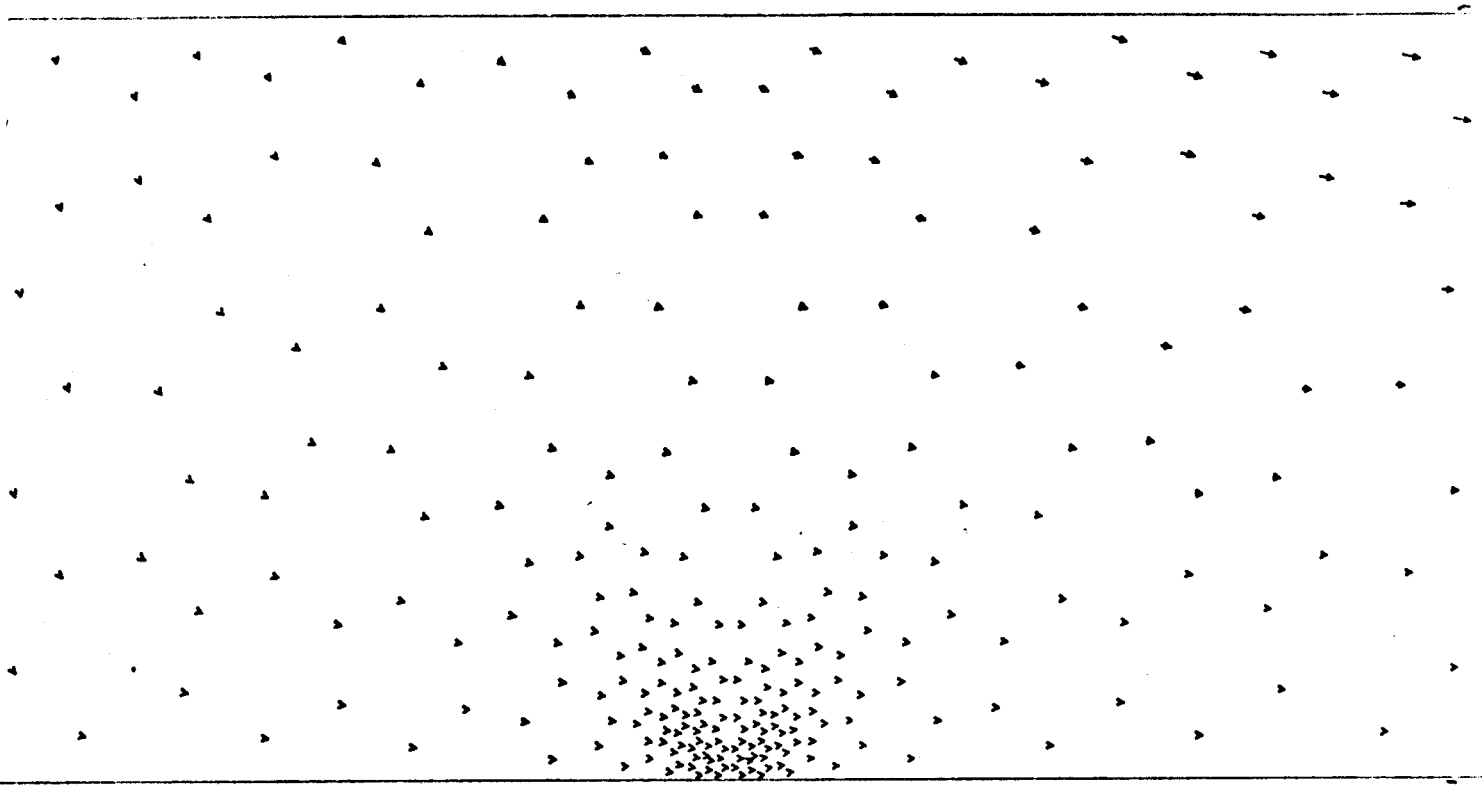
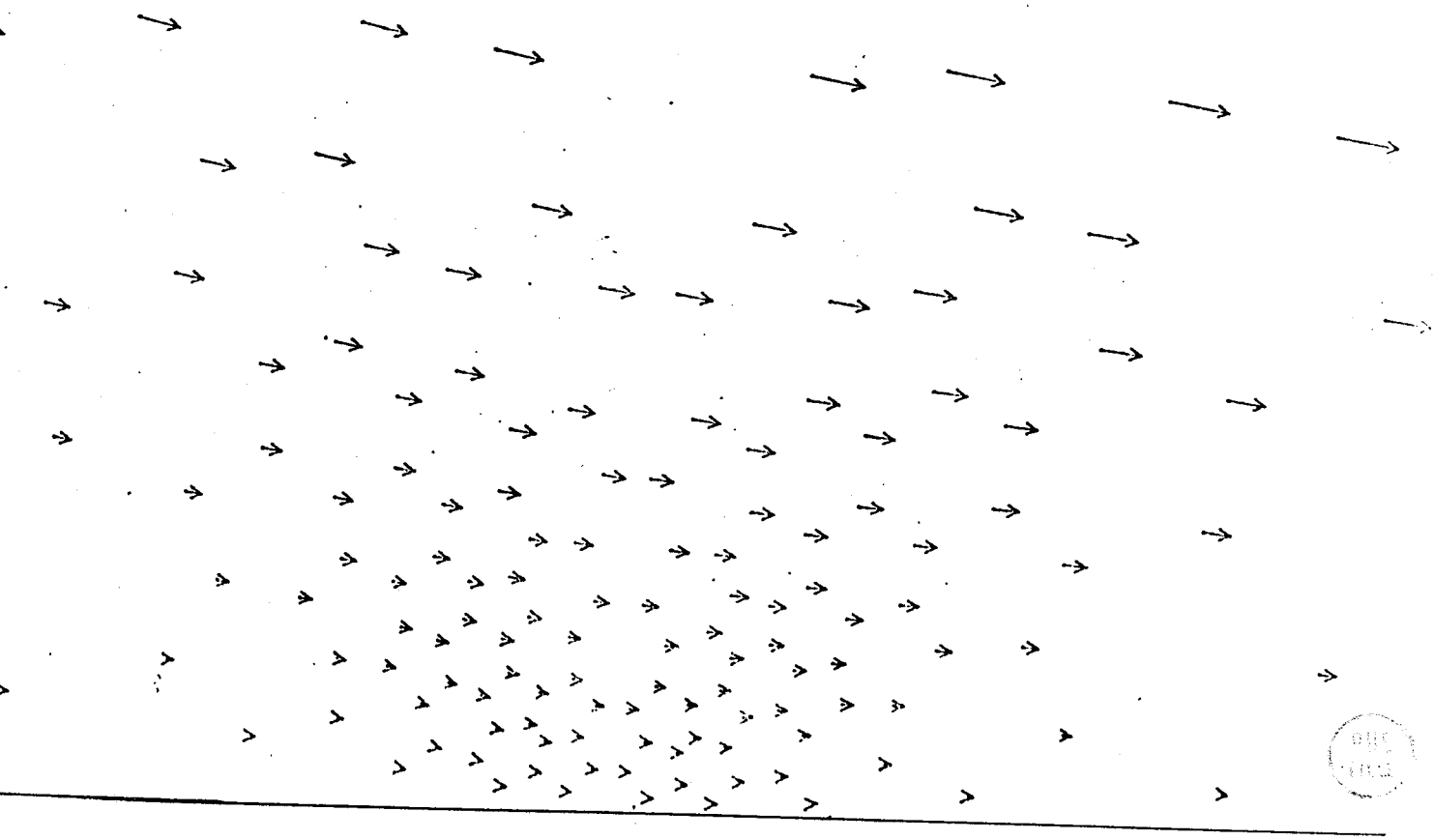


Fig. 4.40.

$Re = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Fig. 4.41.

$Re = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$



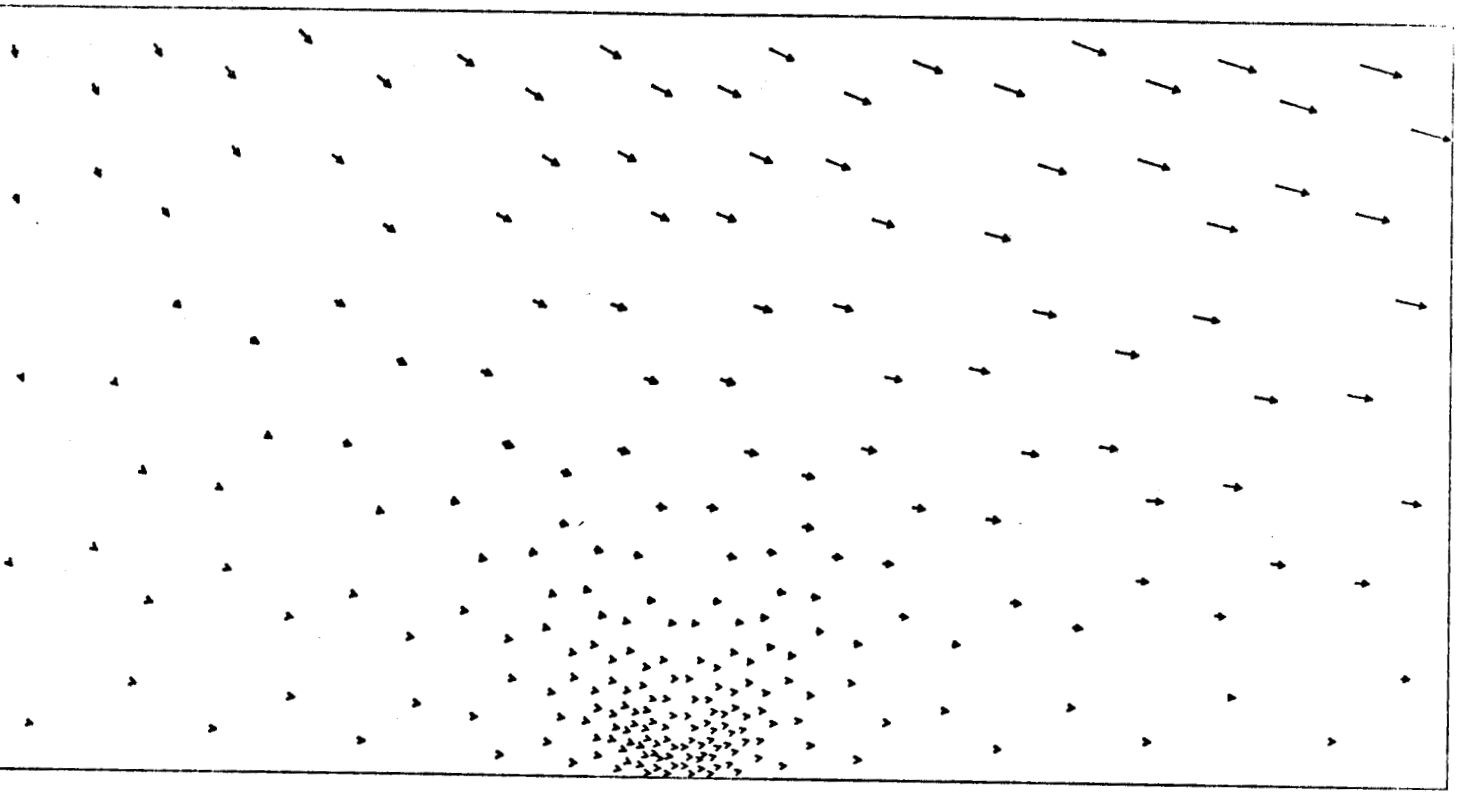
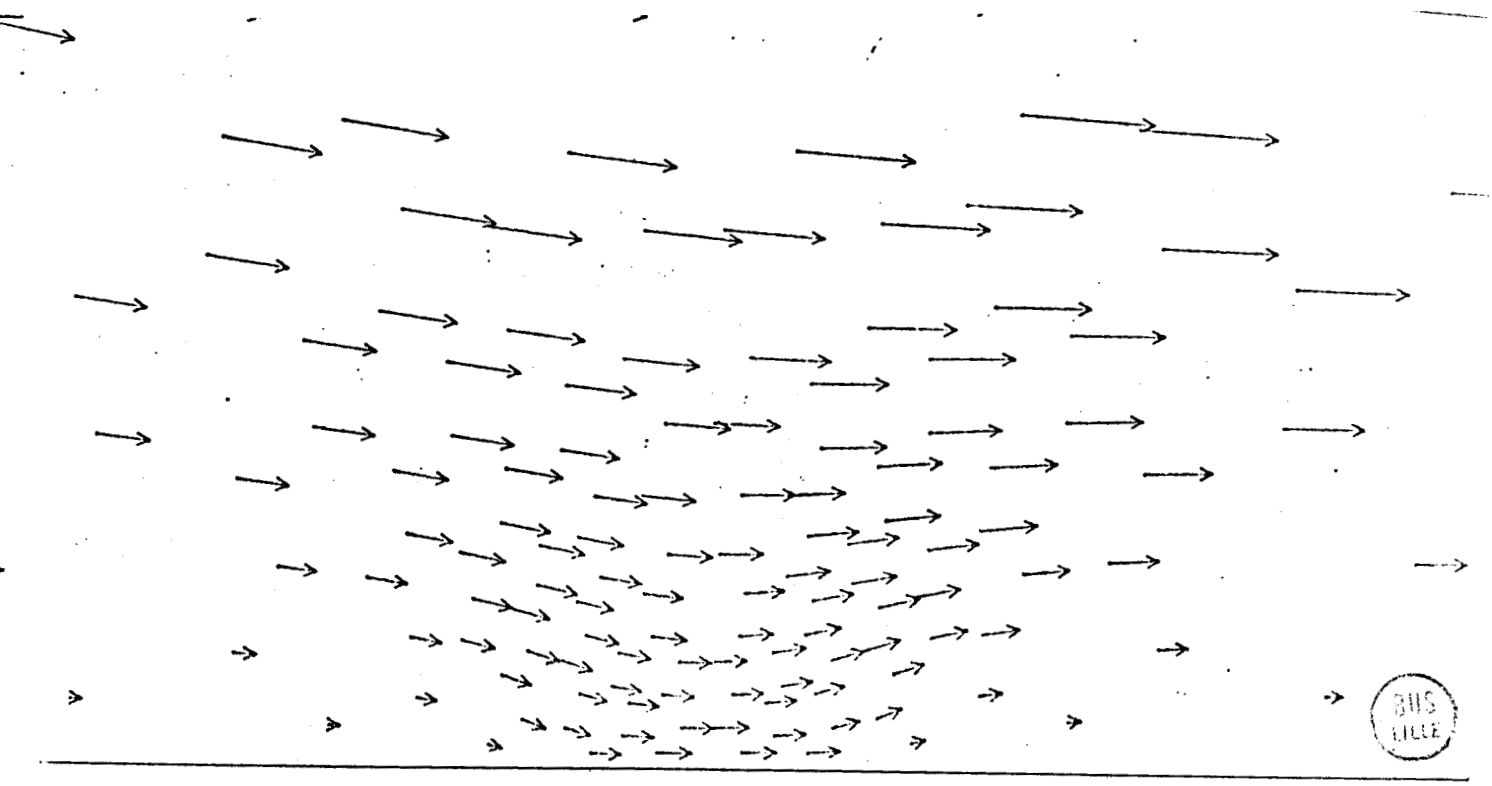


Fig. 4.42.

$Re = 10, \quad \varepsilon = 10^{-2}$

Fig. 4.43.

$Re = 10, \quad \varepsilon = 10^{-2}$



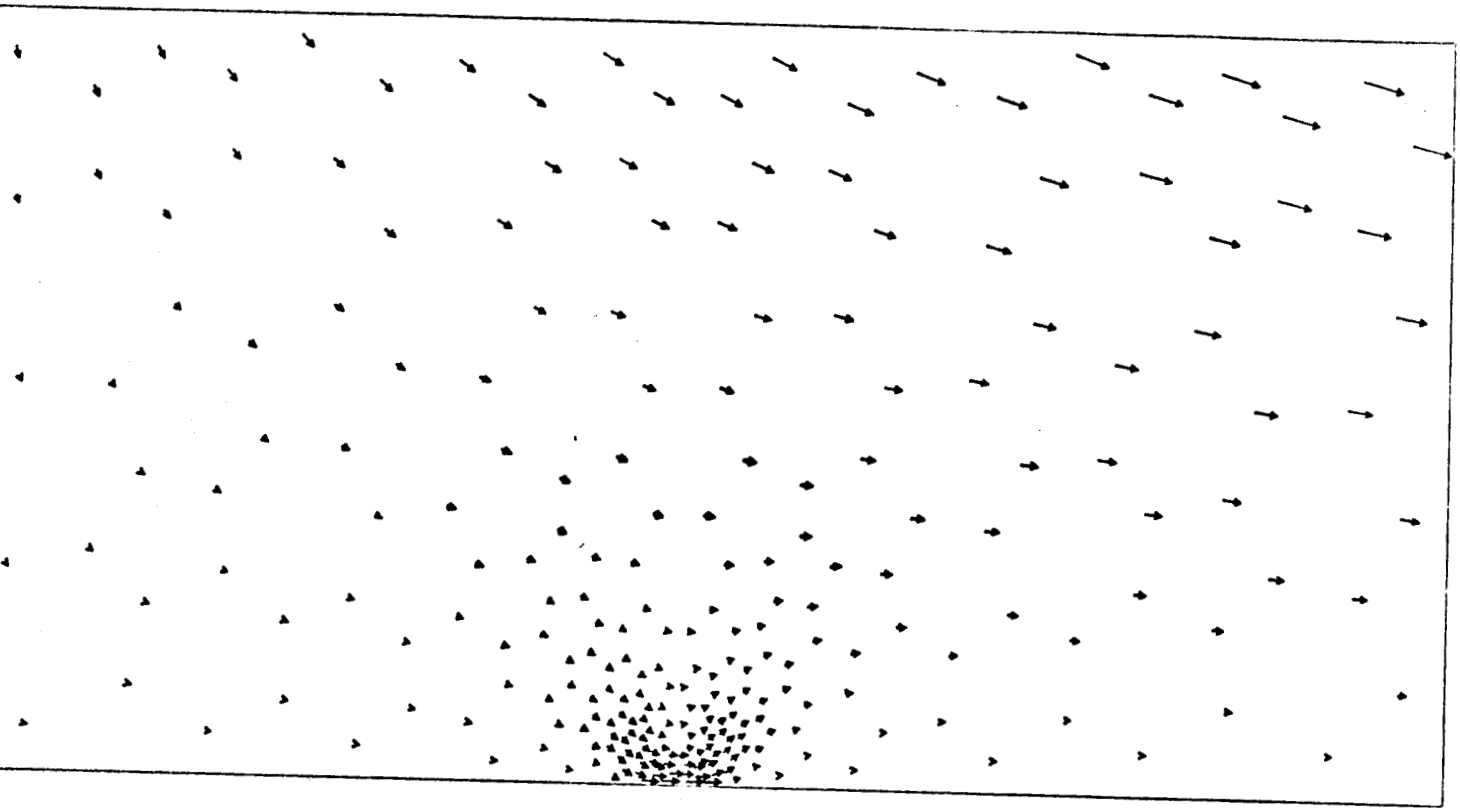
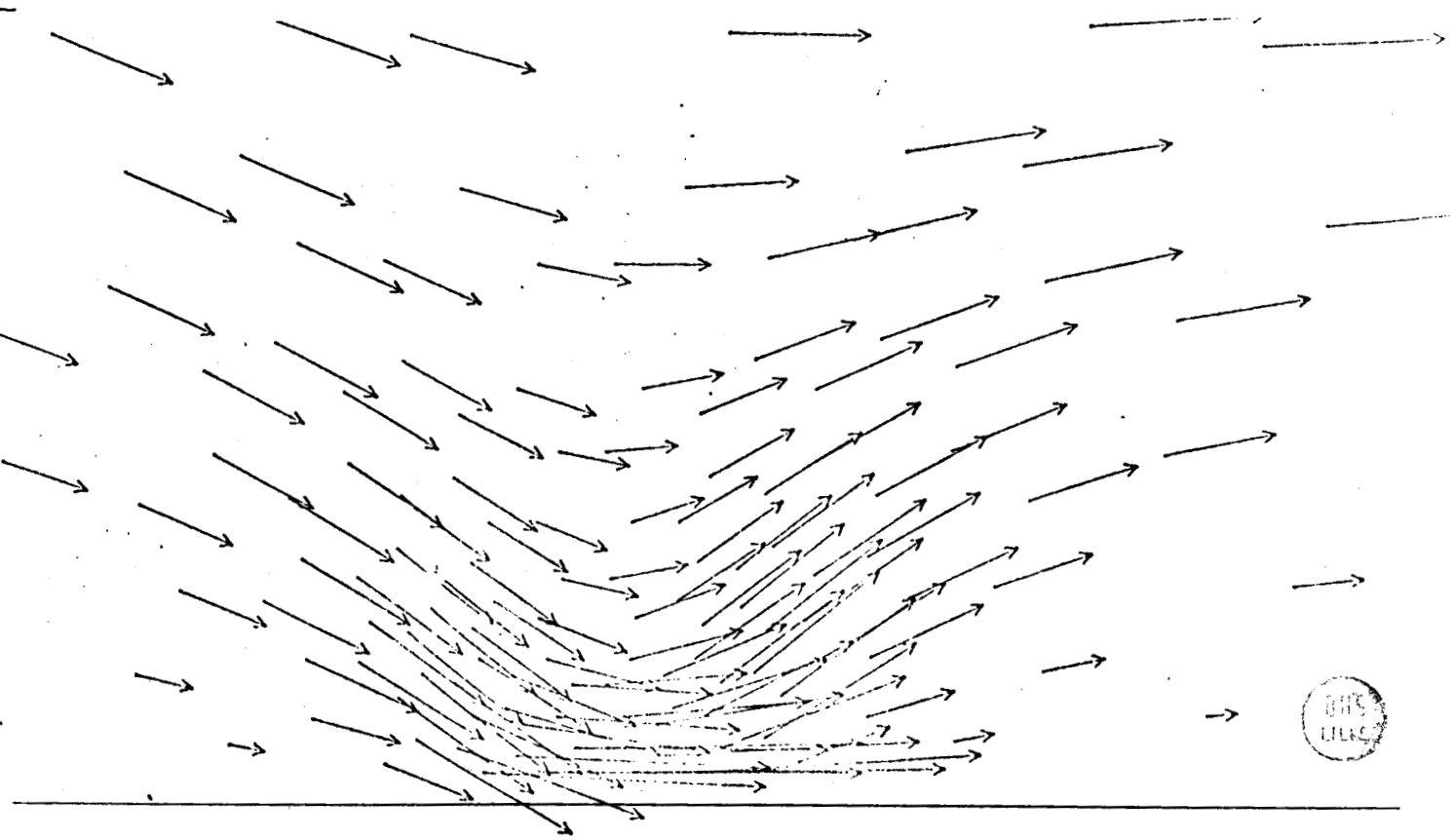


Fig. 4.44.

$Re = 10$, $\varepsilon = 10^{-1}$

Fig. 4.45.

$Re = 10$, $\varepsilon = 10^{-1}$



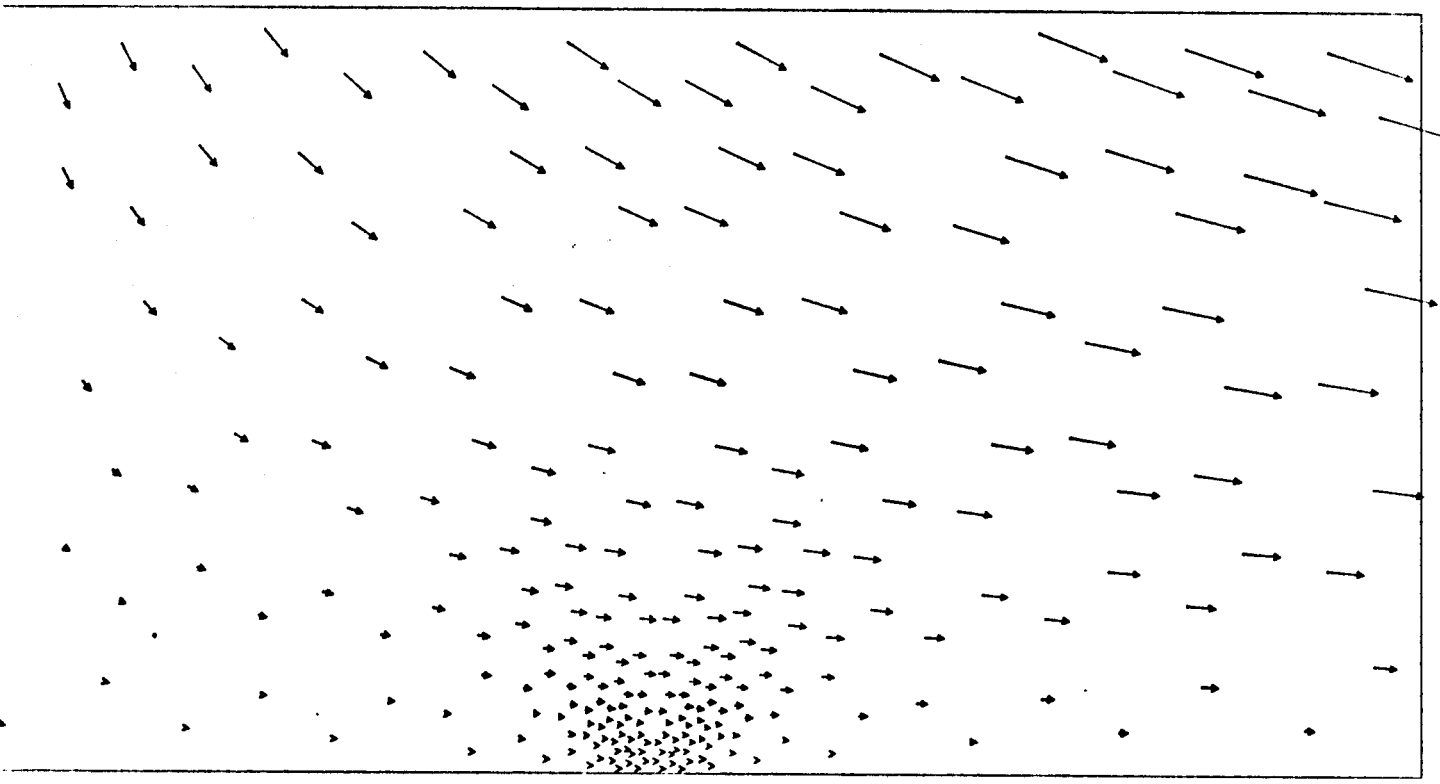
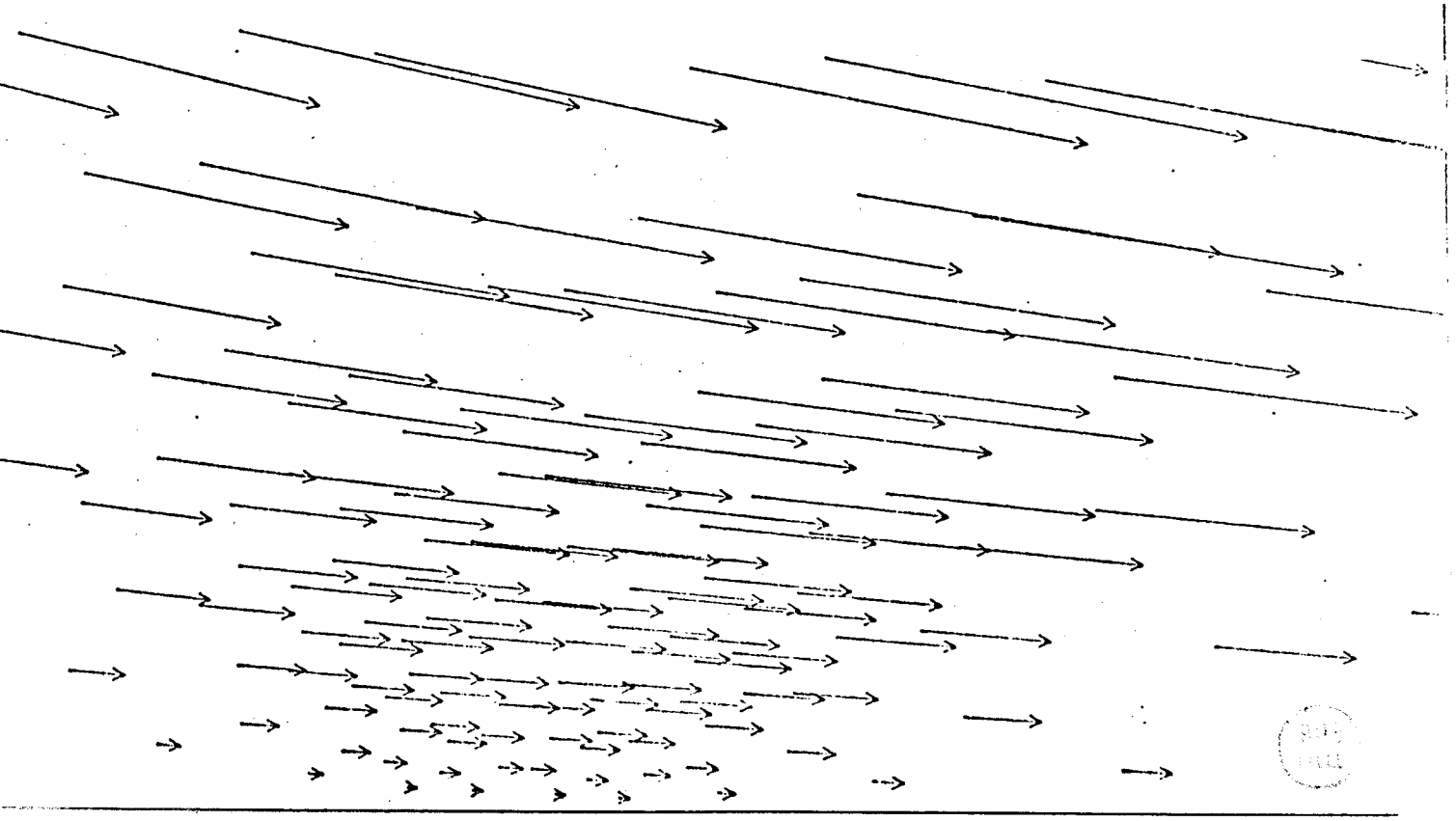


Fig. 4.46.

$Re = 100$, $\varepsilon = 0$

Fig. 4.47.

$Re = 100$, $\varepsilon = 0$



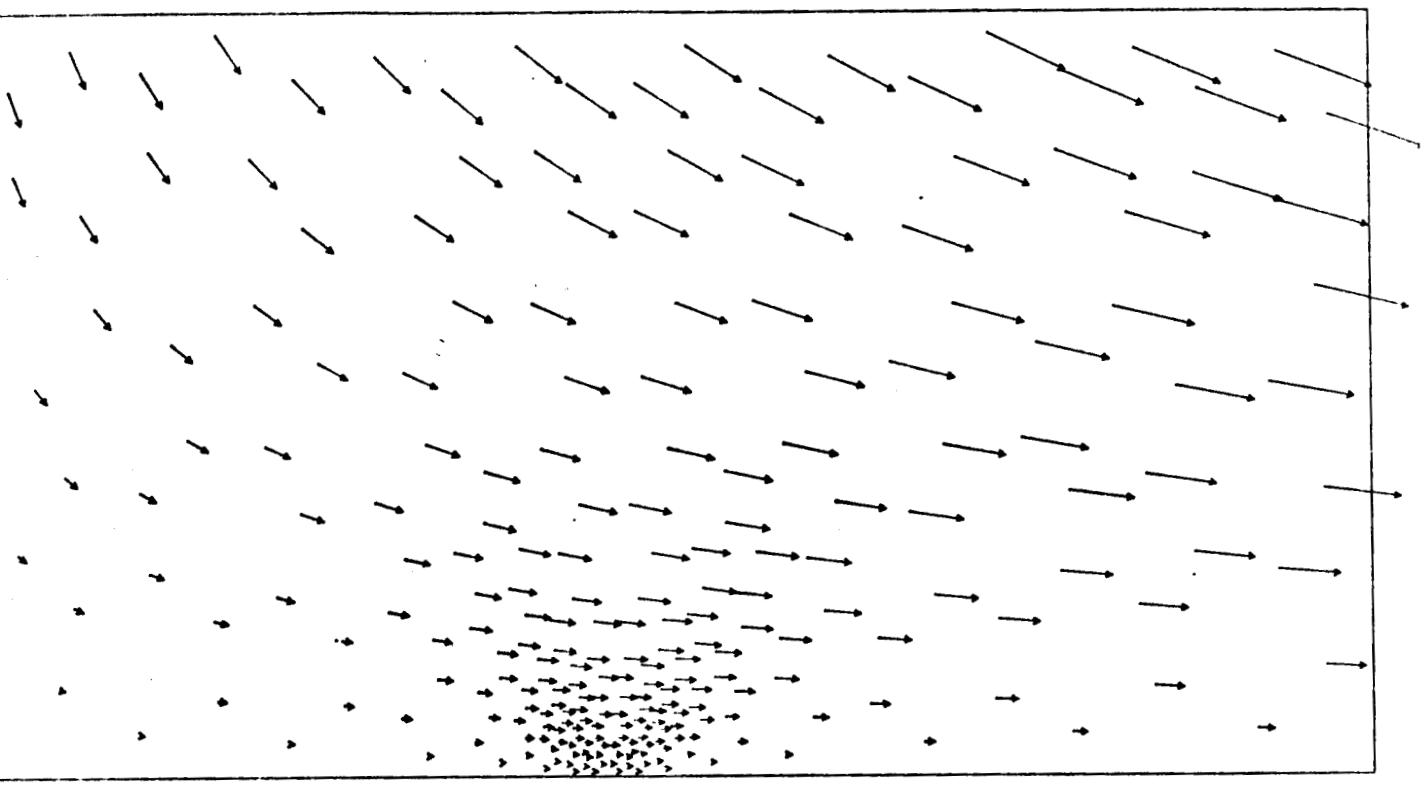
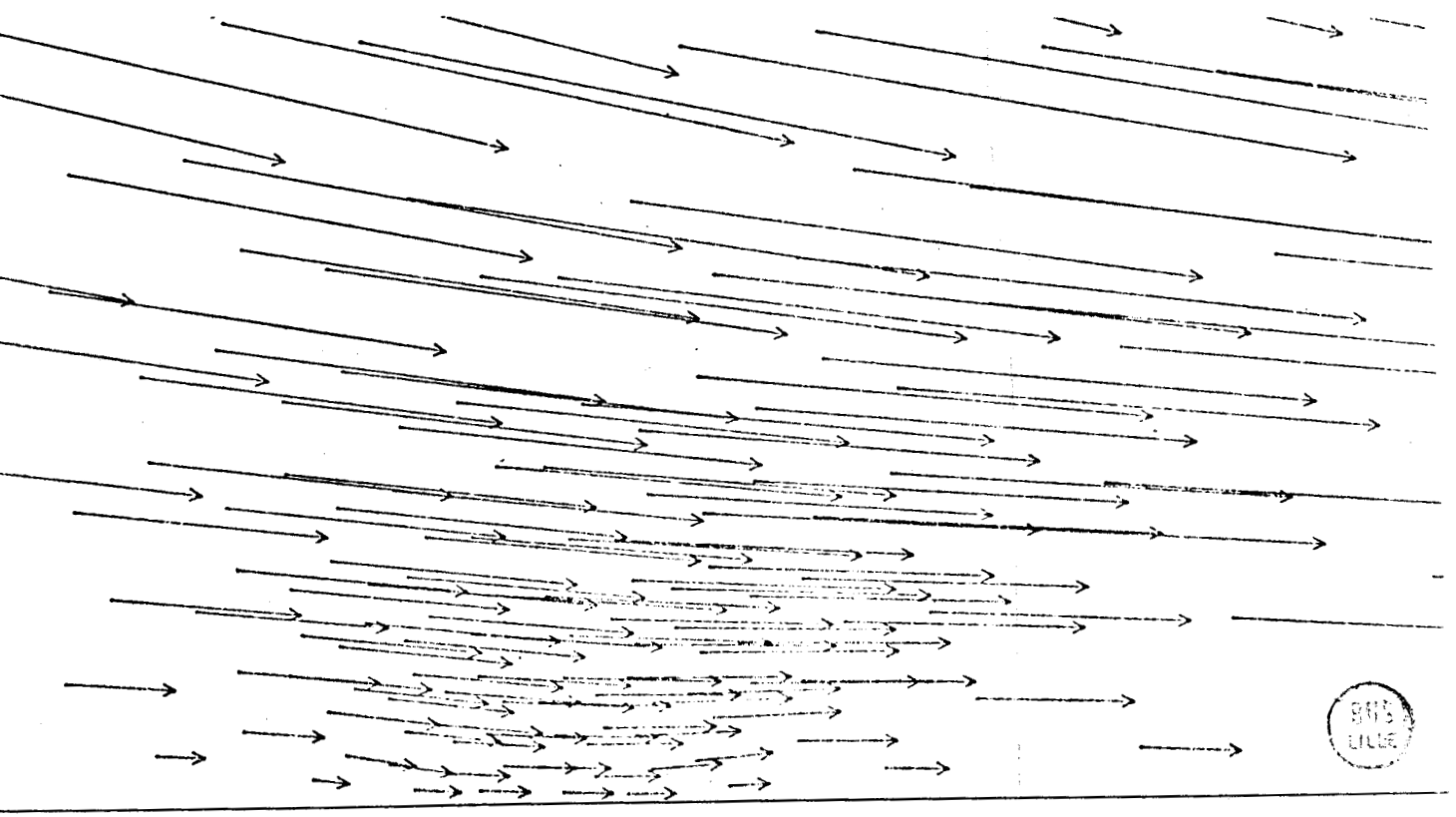


Fig. 4.48.

$Re = 400, \quad \varepsilon = 10^{-2}$

Fig. 4.49.

$Re = 400 , \varepsilon = 10^{-2}$



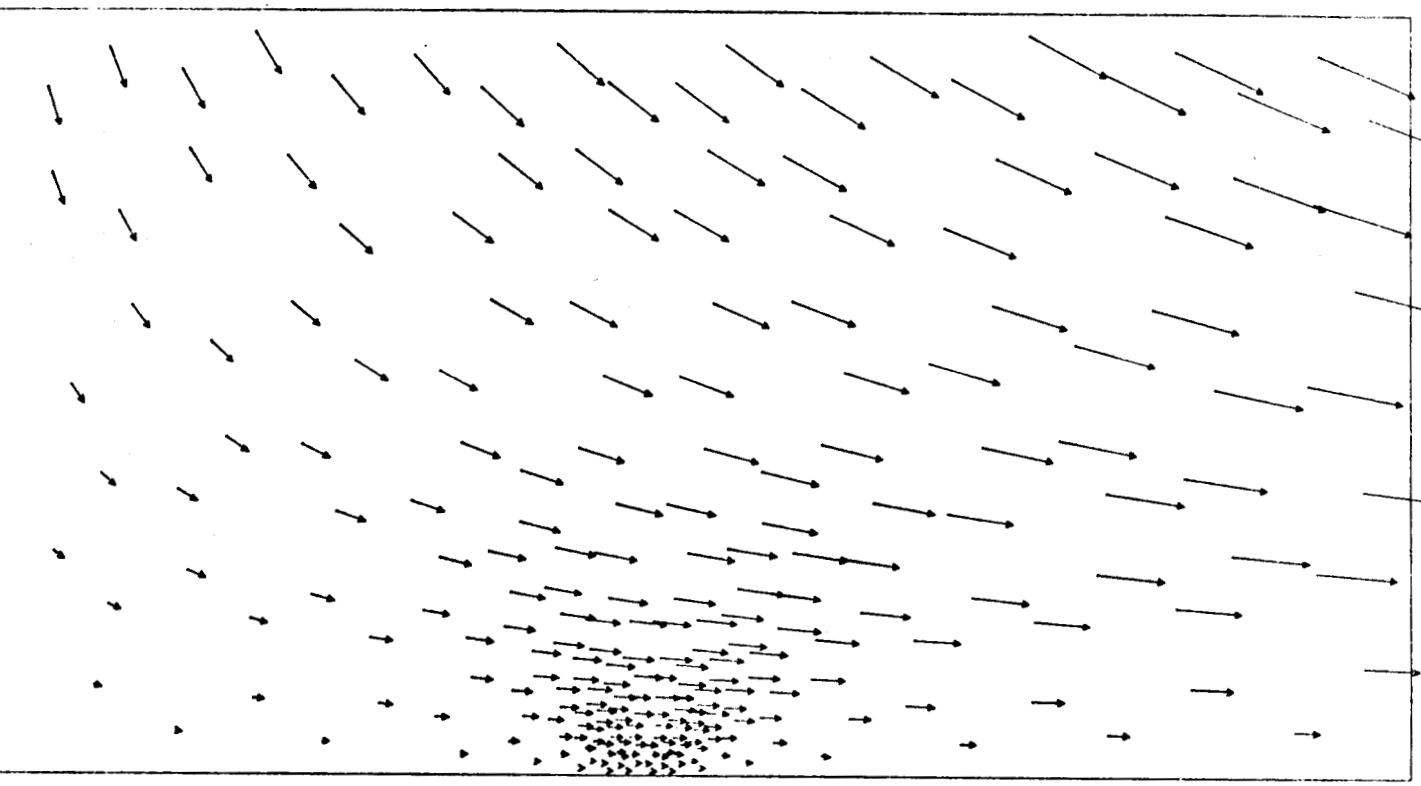
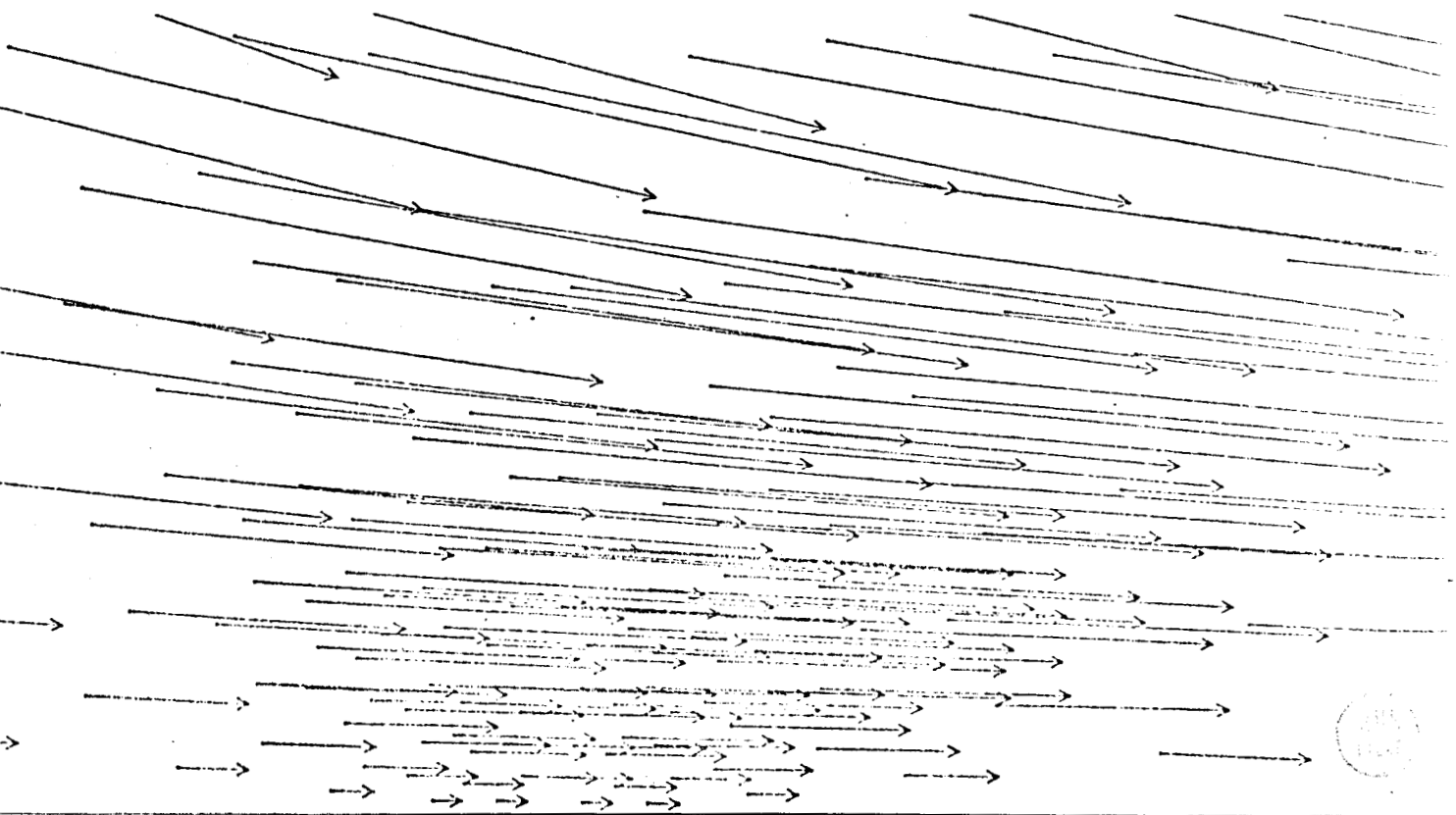


Fig. 4.50.

$Re = 1000$, $\varepsilon = 0$

Fig. 4.51.

$Re = 1000$, $\varepsilon = 0$



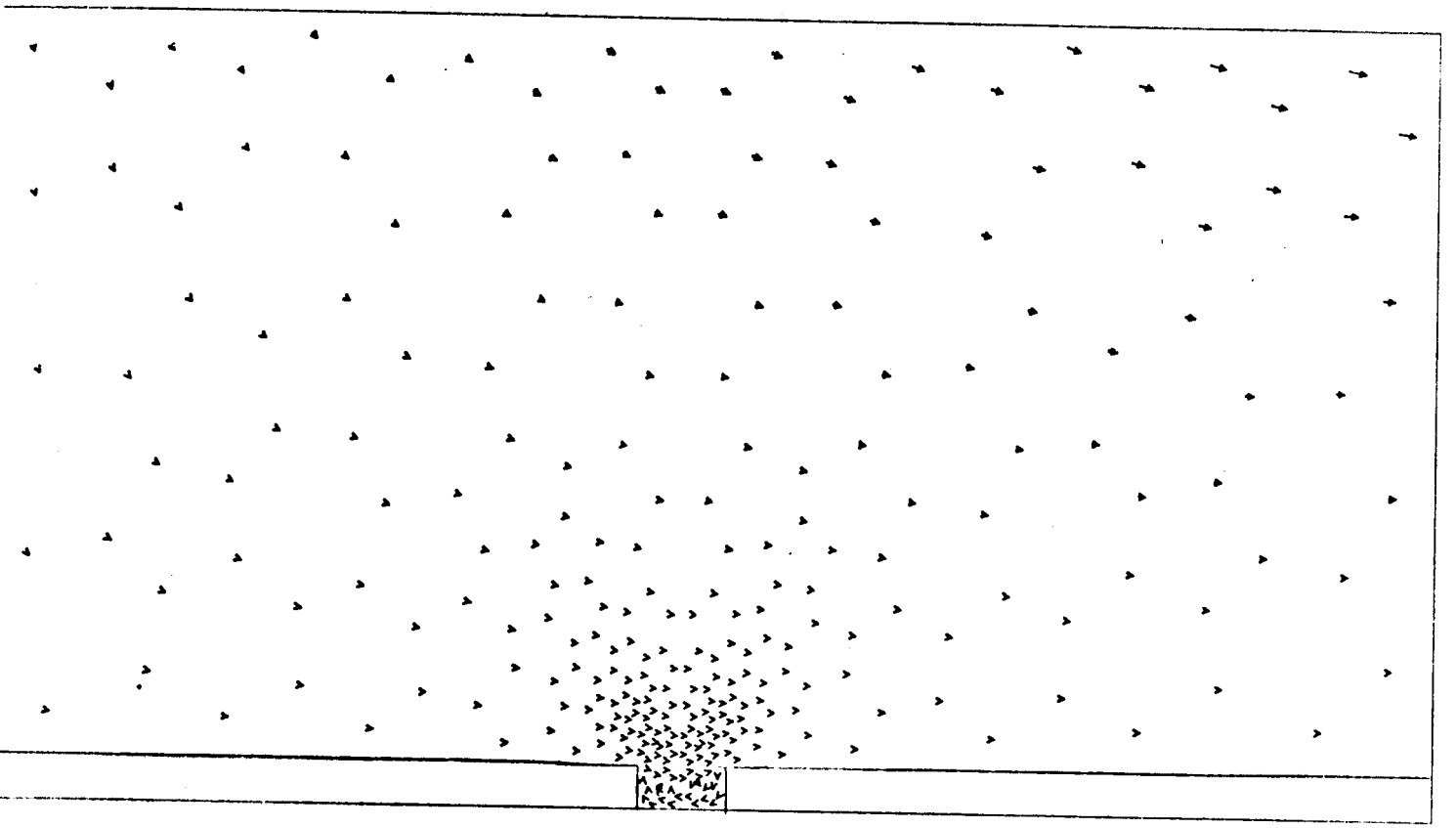


Fig. 4.52
$Re = 1$

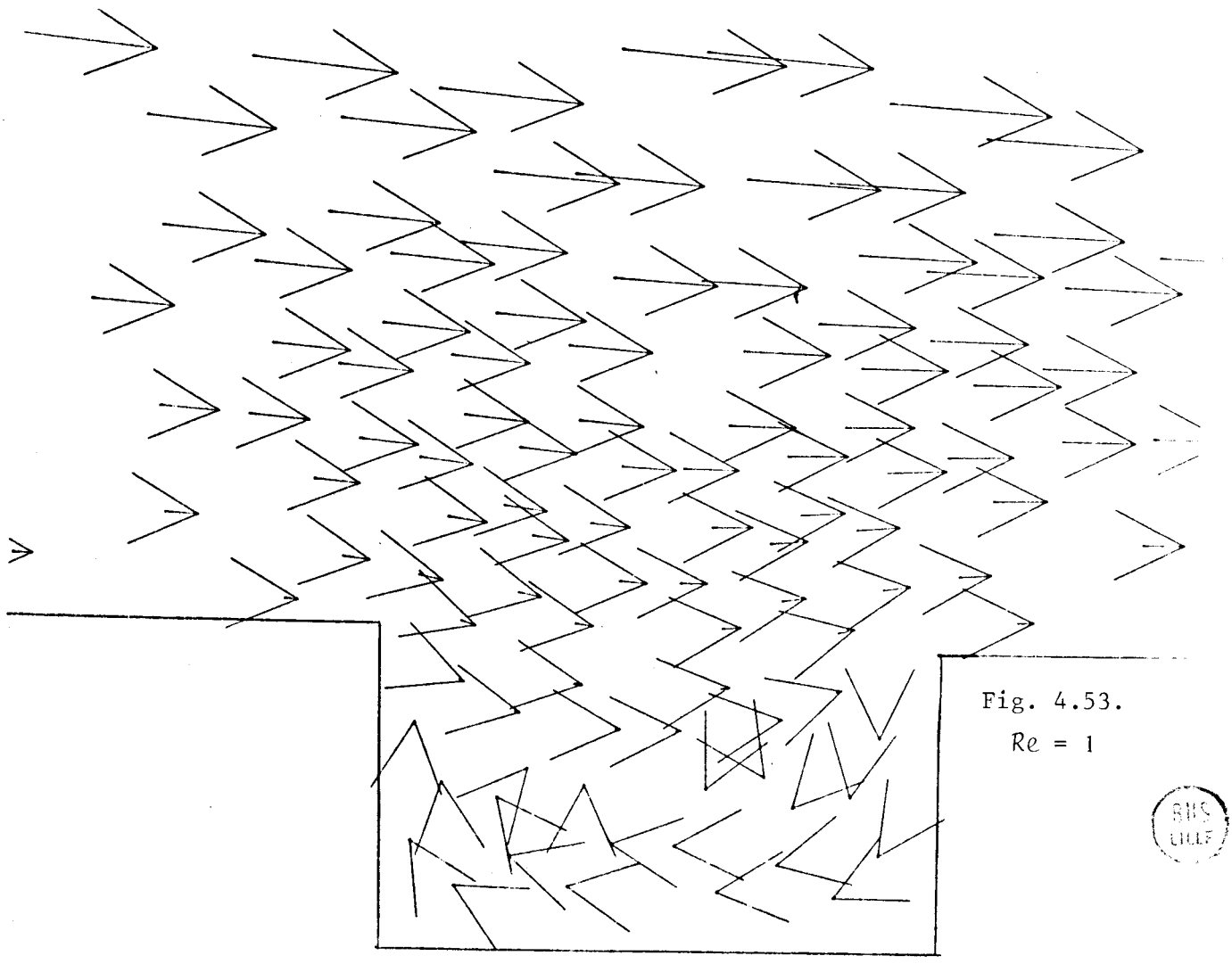


Fig. 4.53.
$Re = 1$

BIBS LILLE

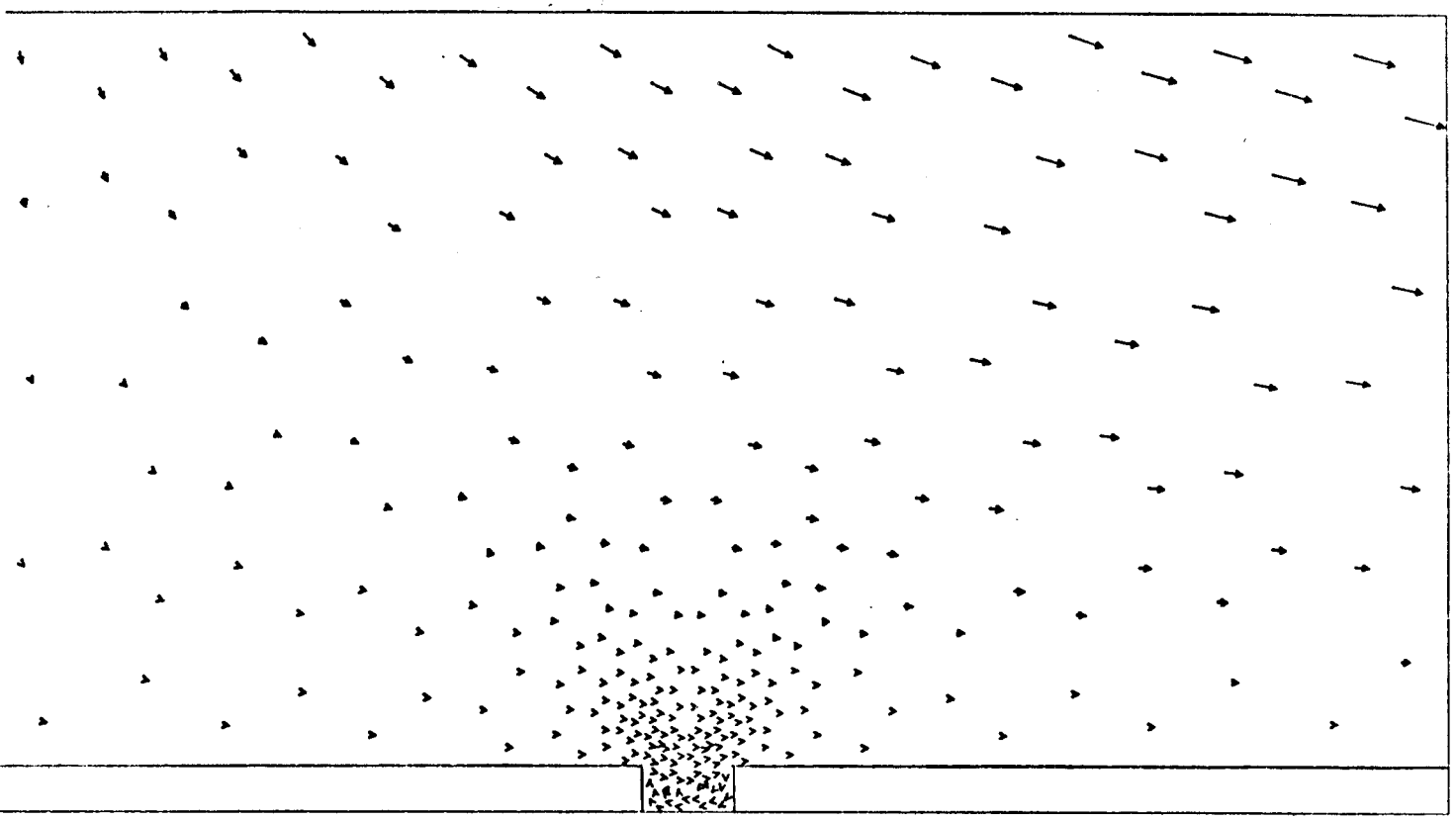


Fig. 4.54
Re = 10

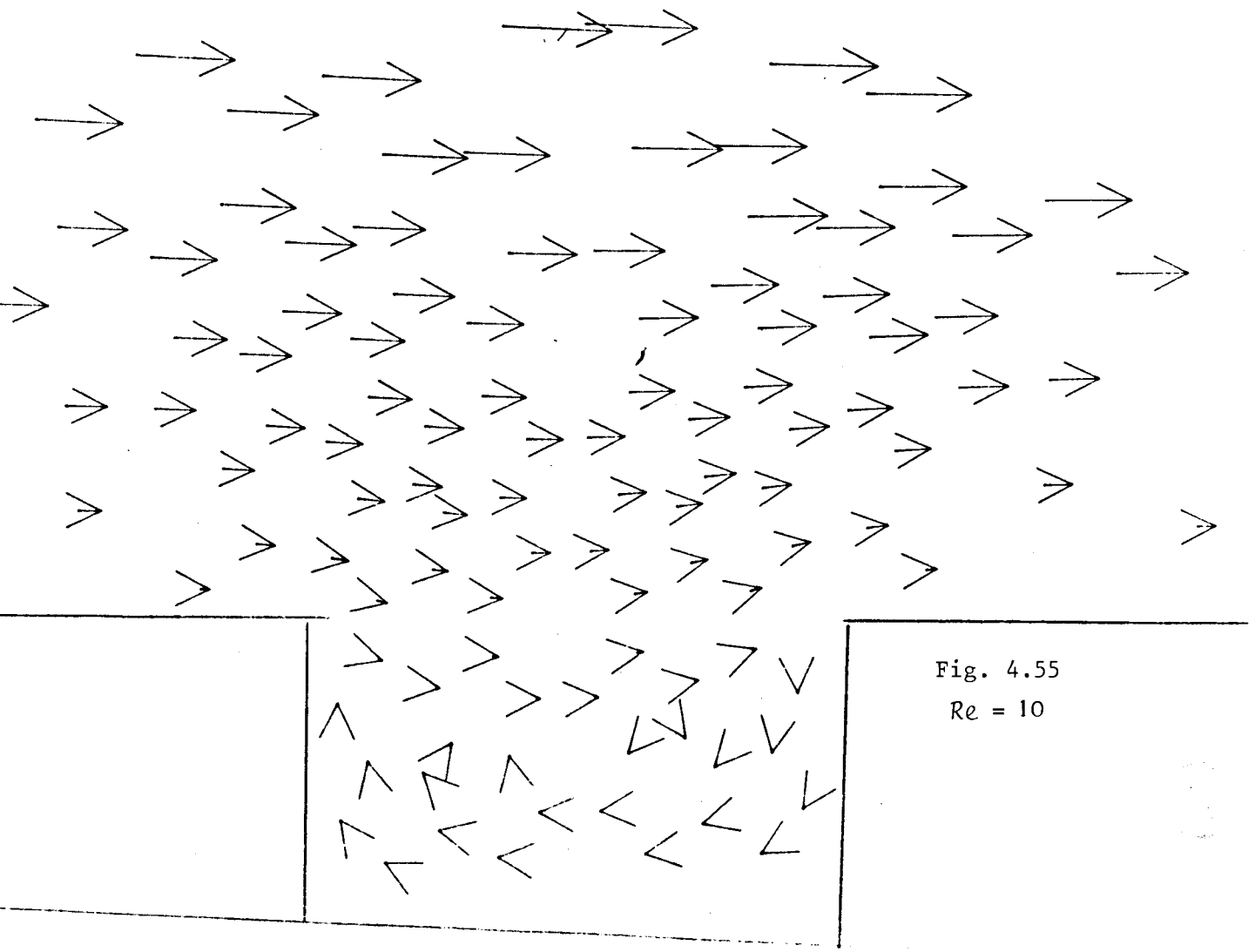


Fig. 4.55
Re = 10

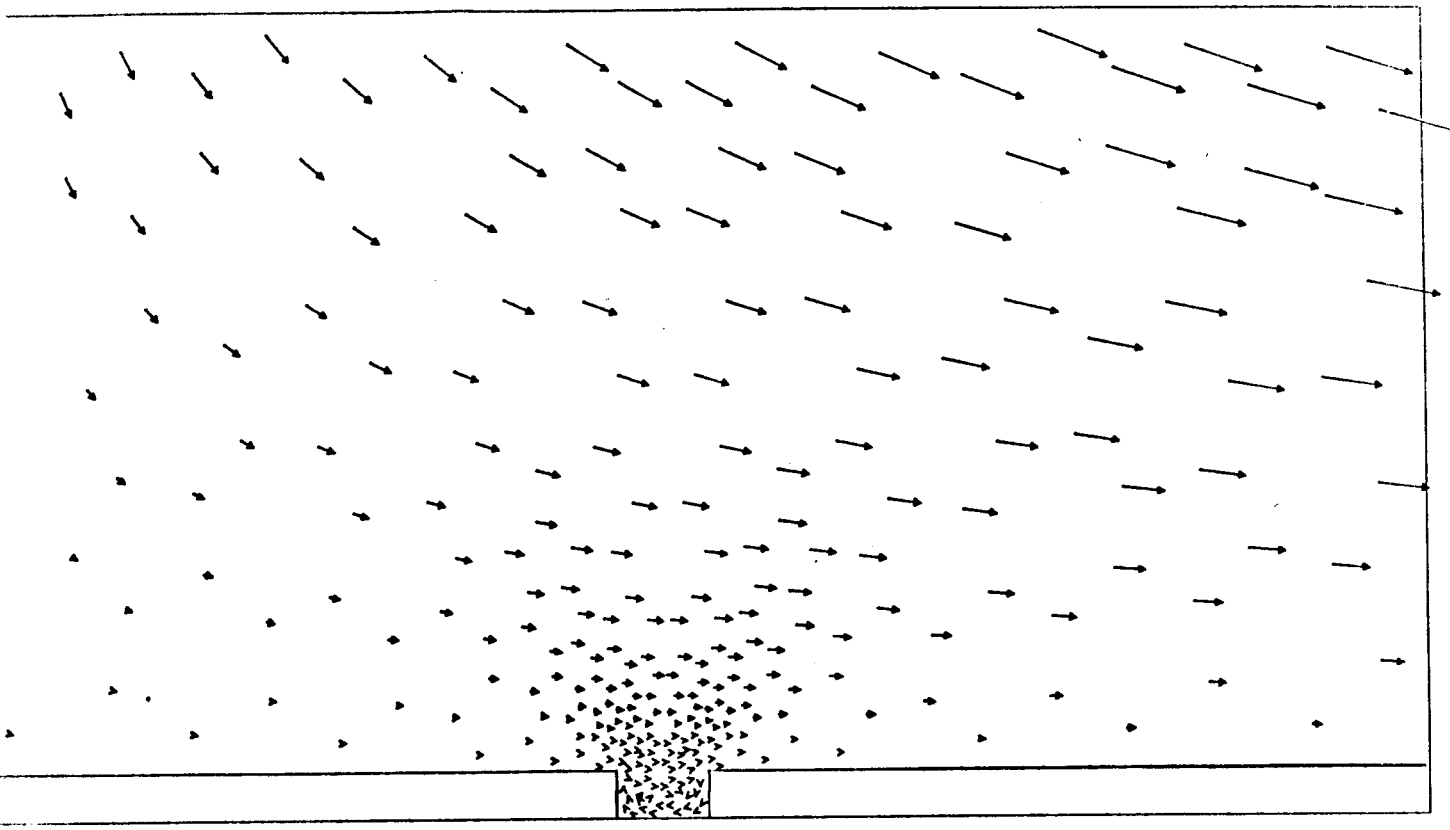


Fig. 4.56.
Re = 100

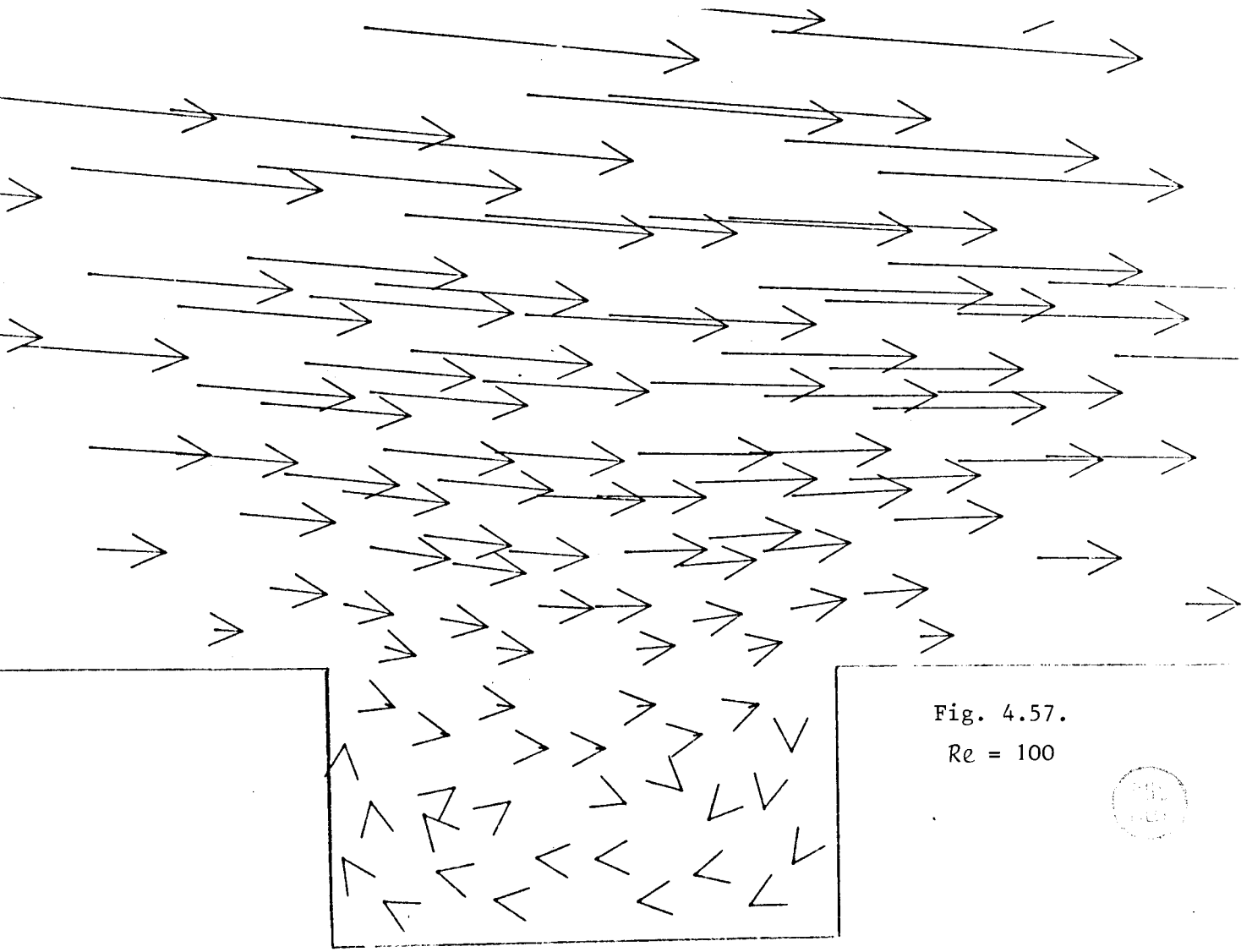


Fig. 4.57.
Re = 100

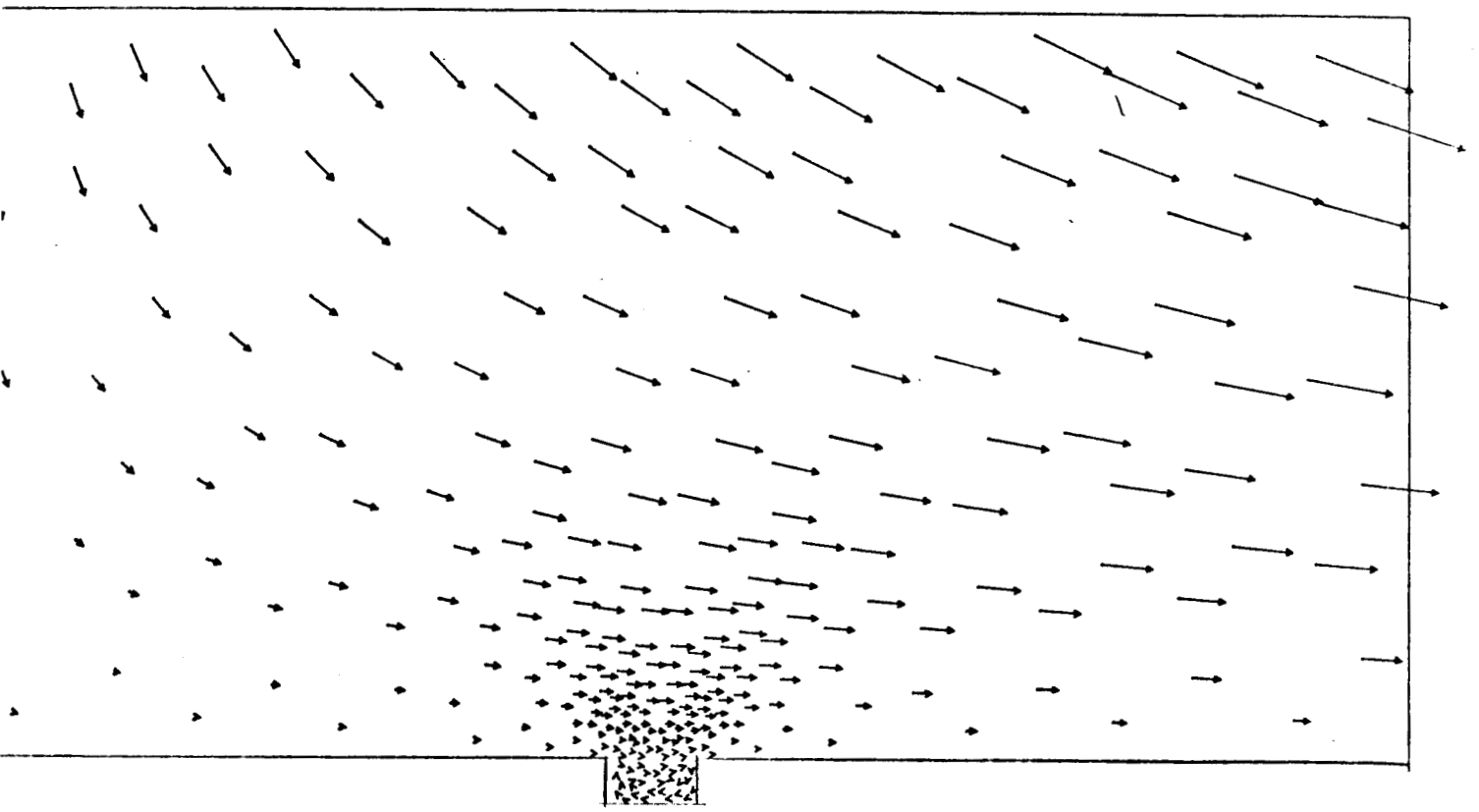


Fig. 4.58.
Re = 400

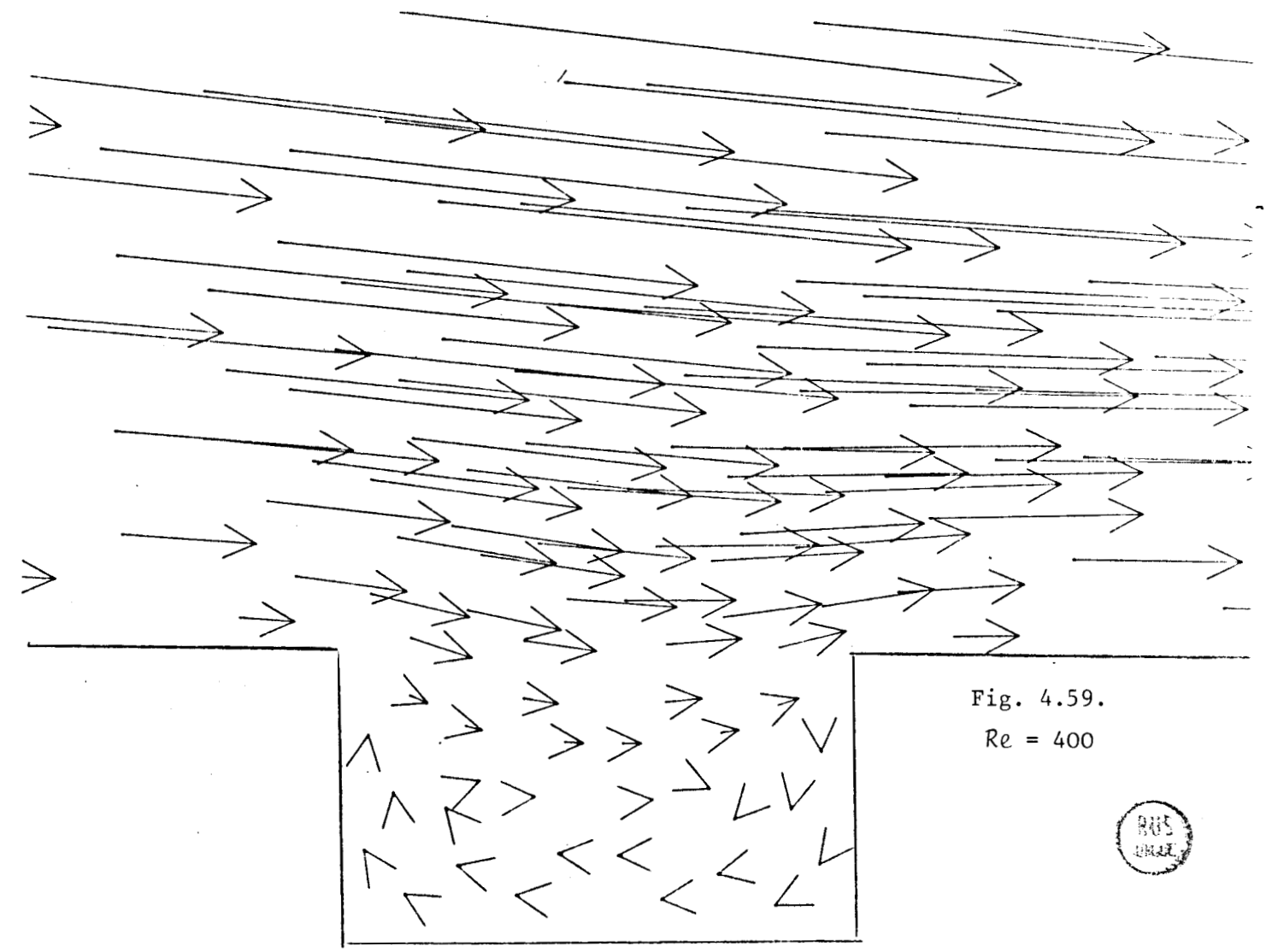


Fig. 4.59.
Re = 400

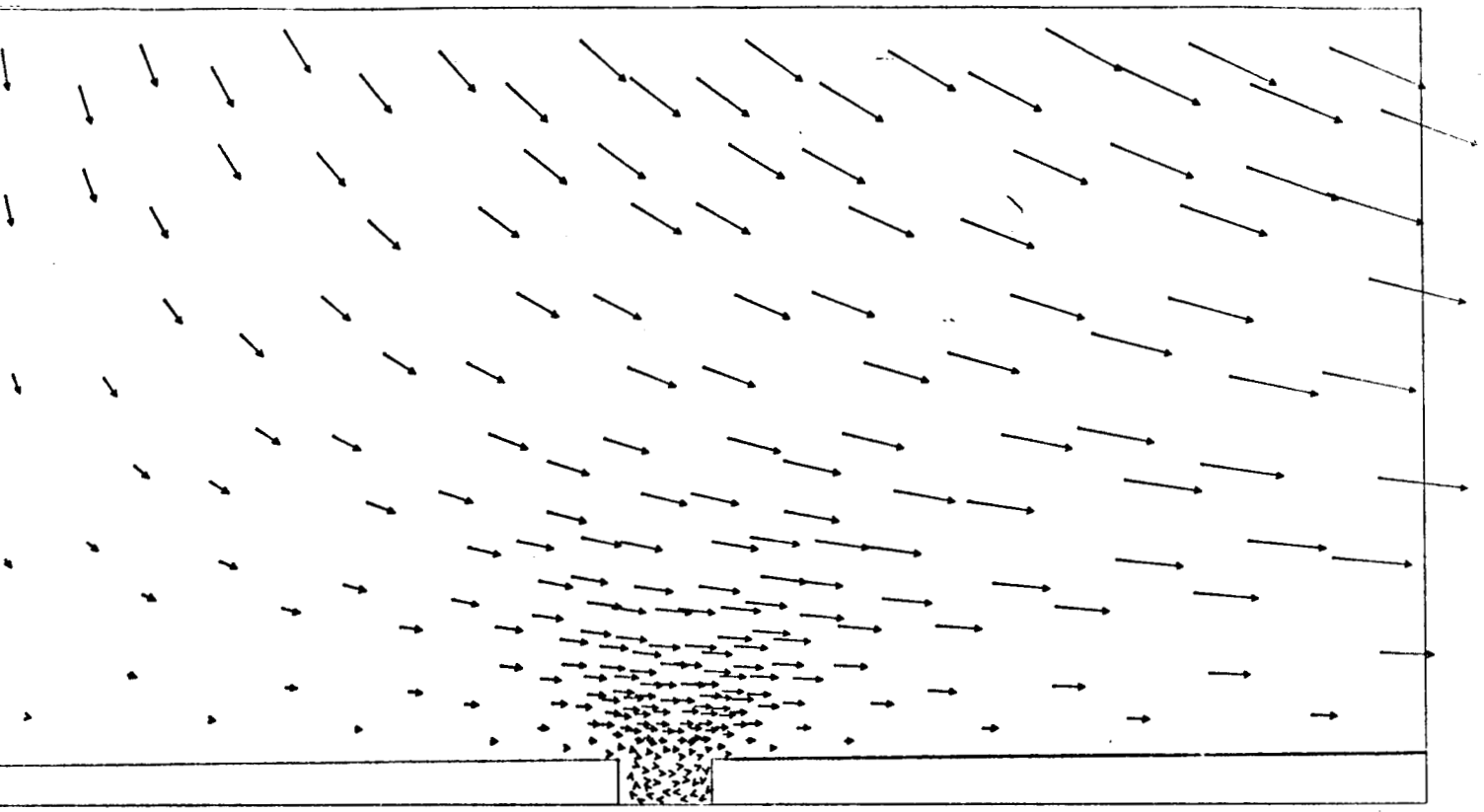


Fig. 4.60
Re = 1000

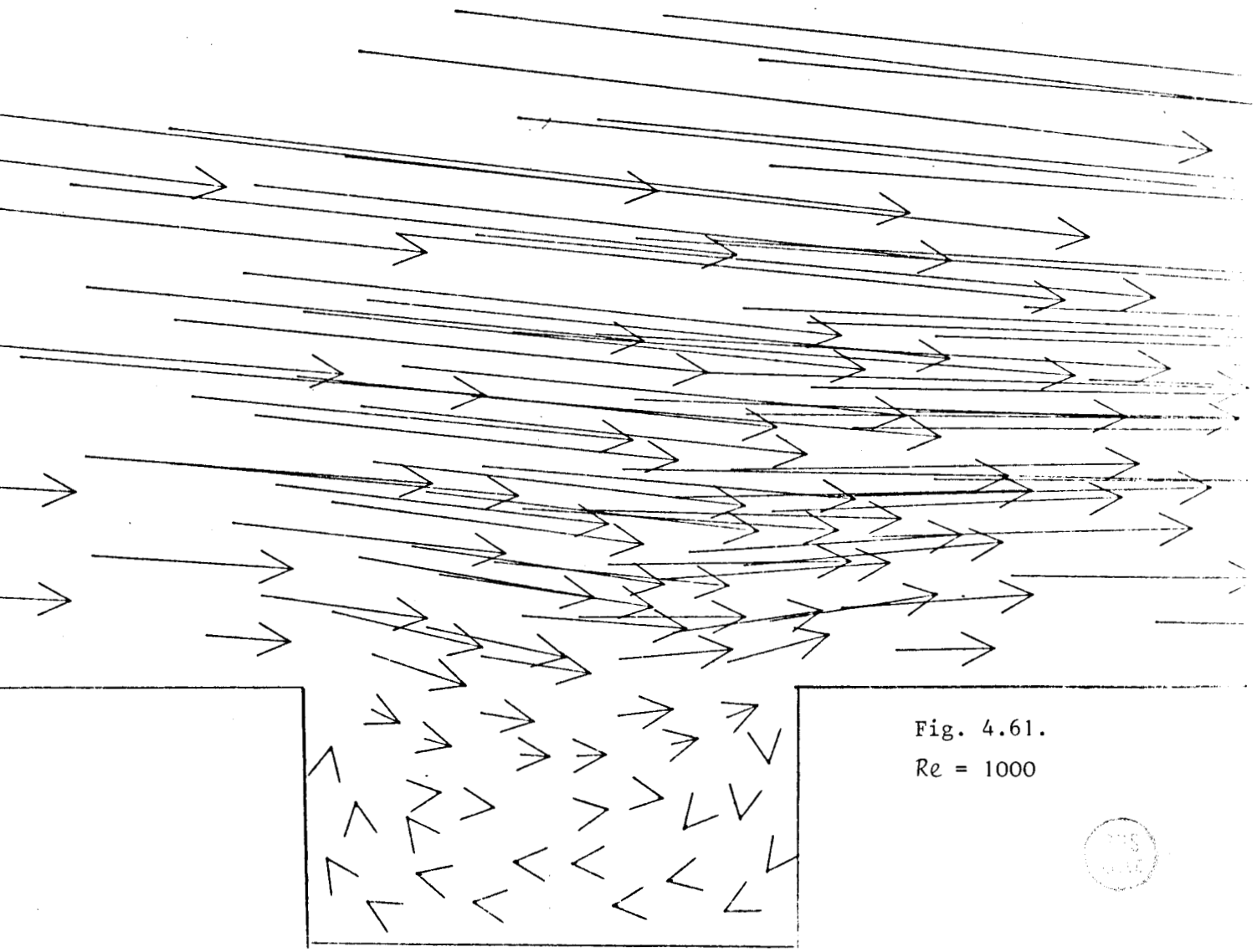


Fig. 4.61.
Re = 1000

LIGNES ISOBARES

Fig. 4.62.

Re = 1 - Solution de Hiemenz - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

BUS LILLE

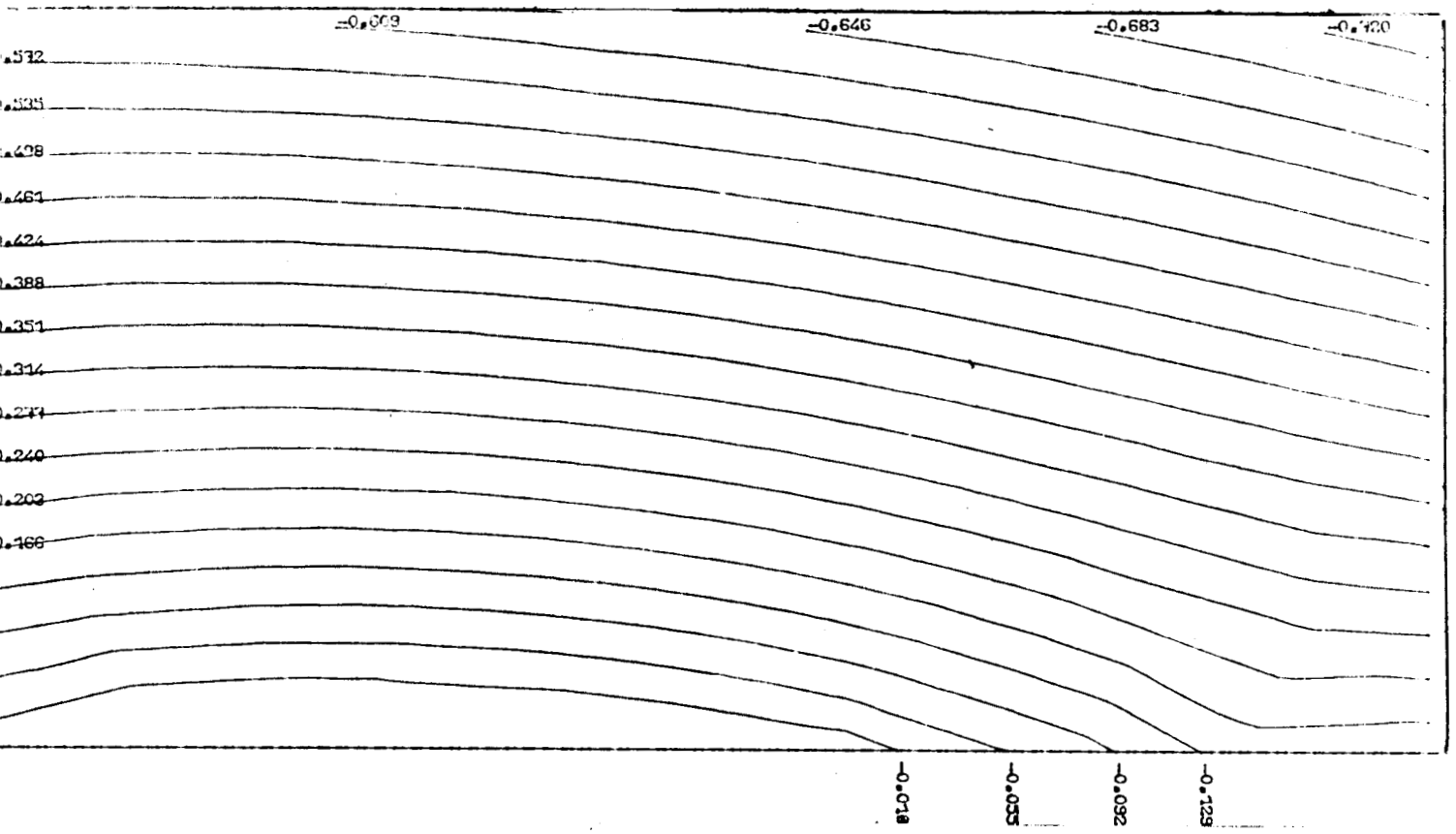
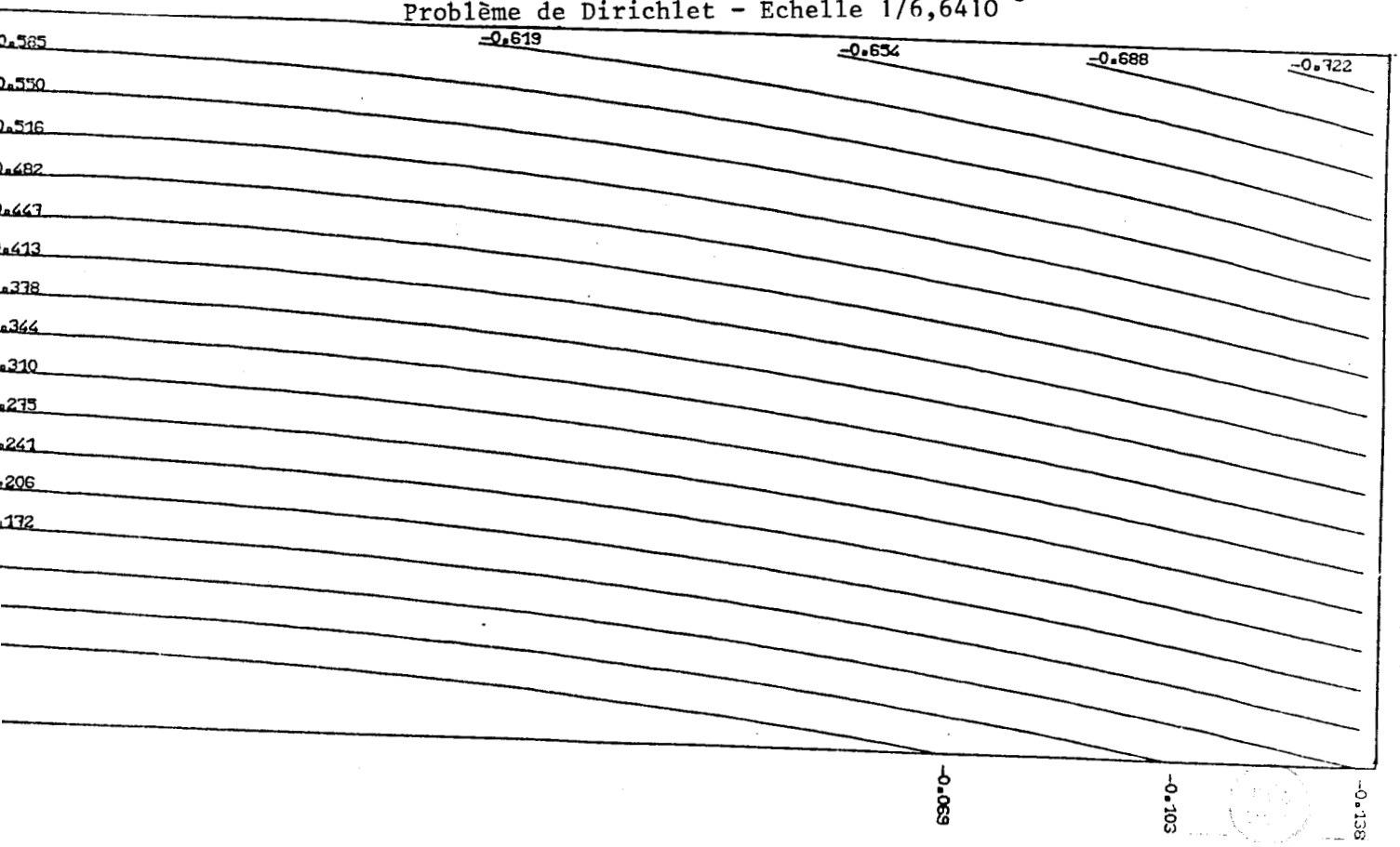


Fig. 4.63.

Re = 1 - Calcul de P_H à partir de (ω,ψ) calculés par NSPSOM - Problème mixte - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.63 bis.

Re = 1 - Calcul de P_H à partir de (ω,ψ) calculés par NSPSOM - Problème de Dirichlet - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



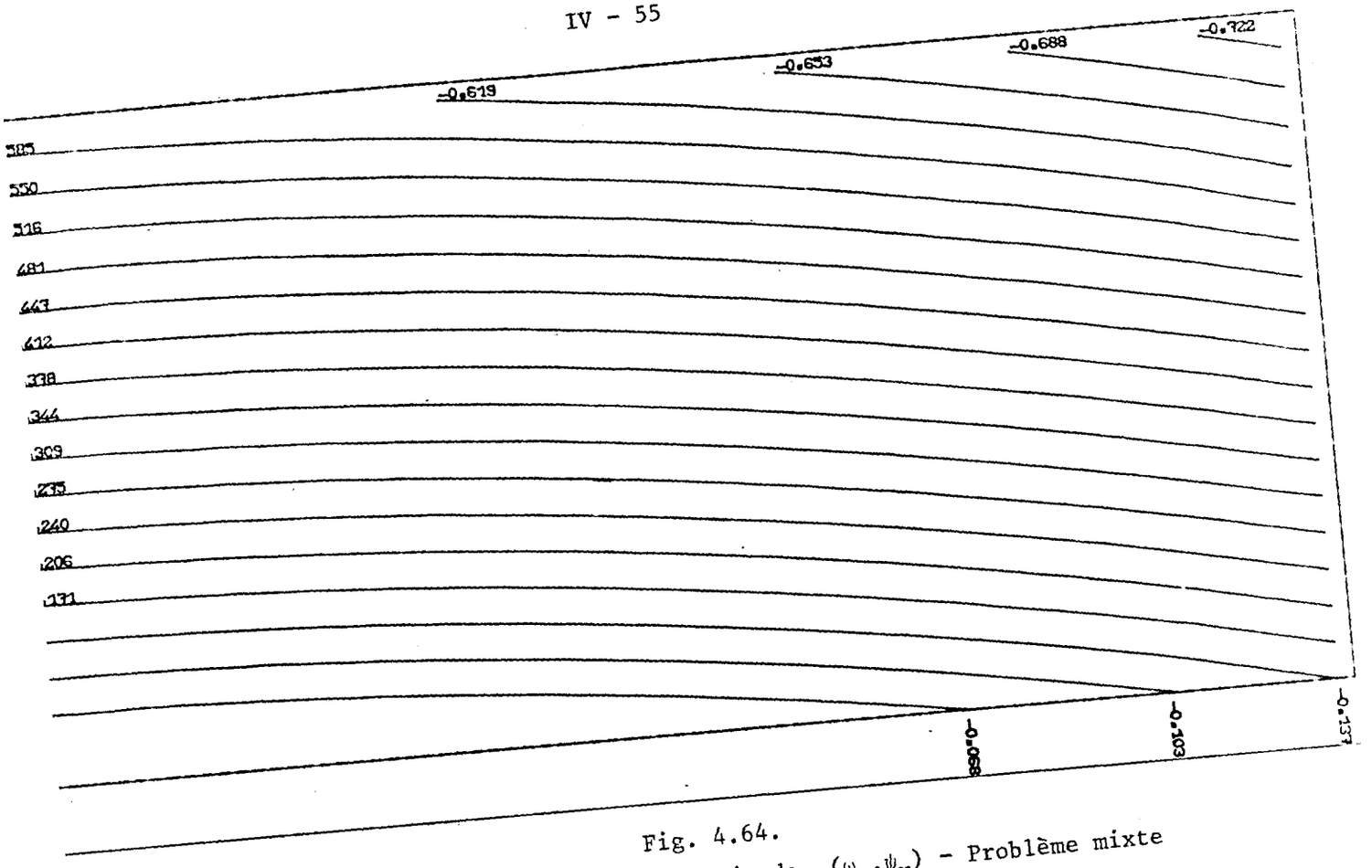
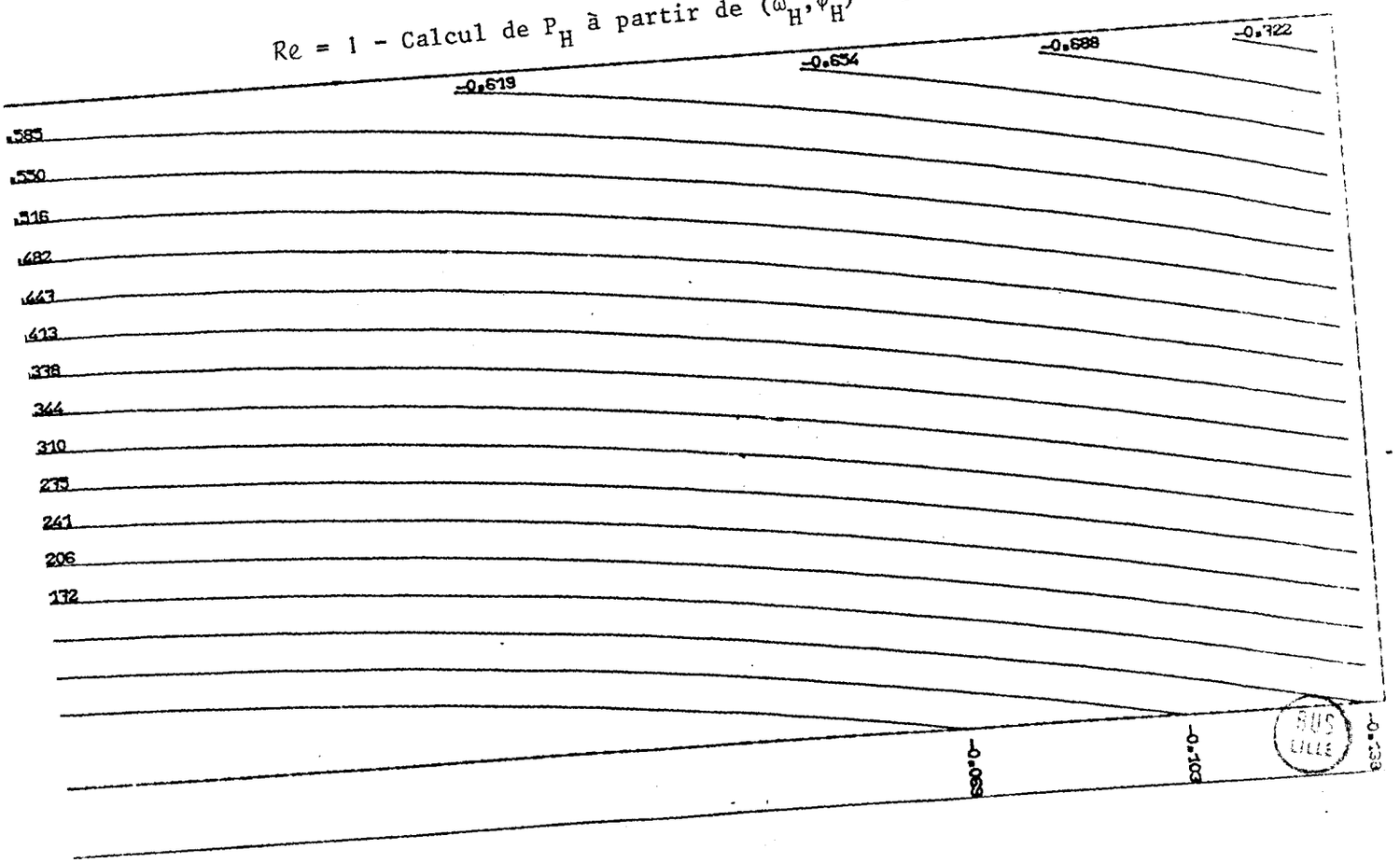


Fig. 4.64.

Re = 1 - Calcul de P_H à partir de (ω_H, ψ_H) - Problème mixte

Fig. 4.65.

Re = 1 - Calcul de P_H à partir de (ω_H, ψ_H) - Problème de Dirichlet



BUS LILLE

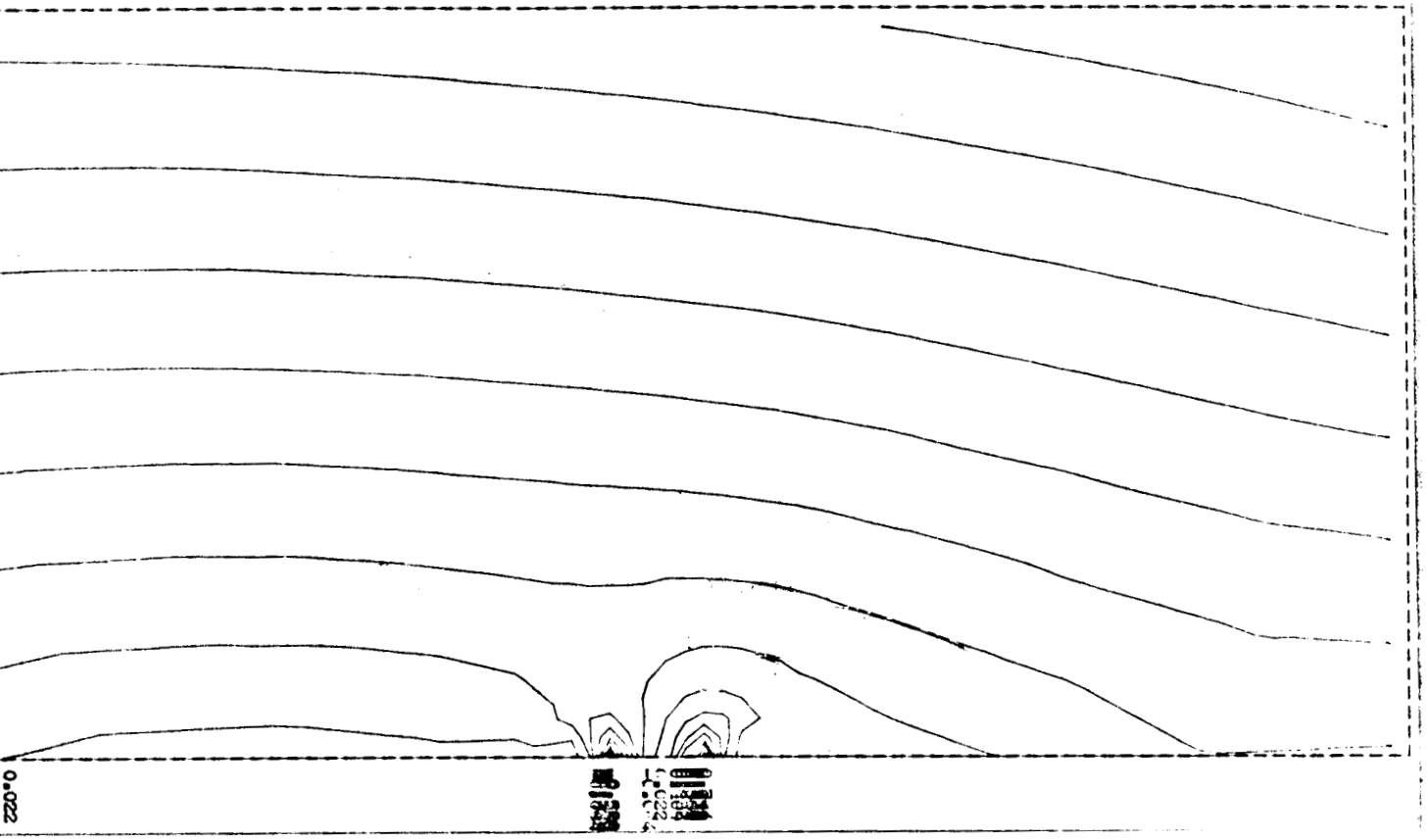
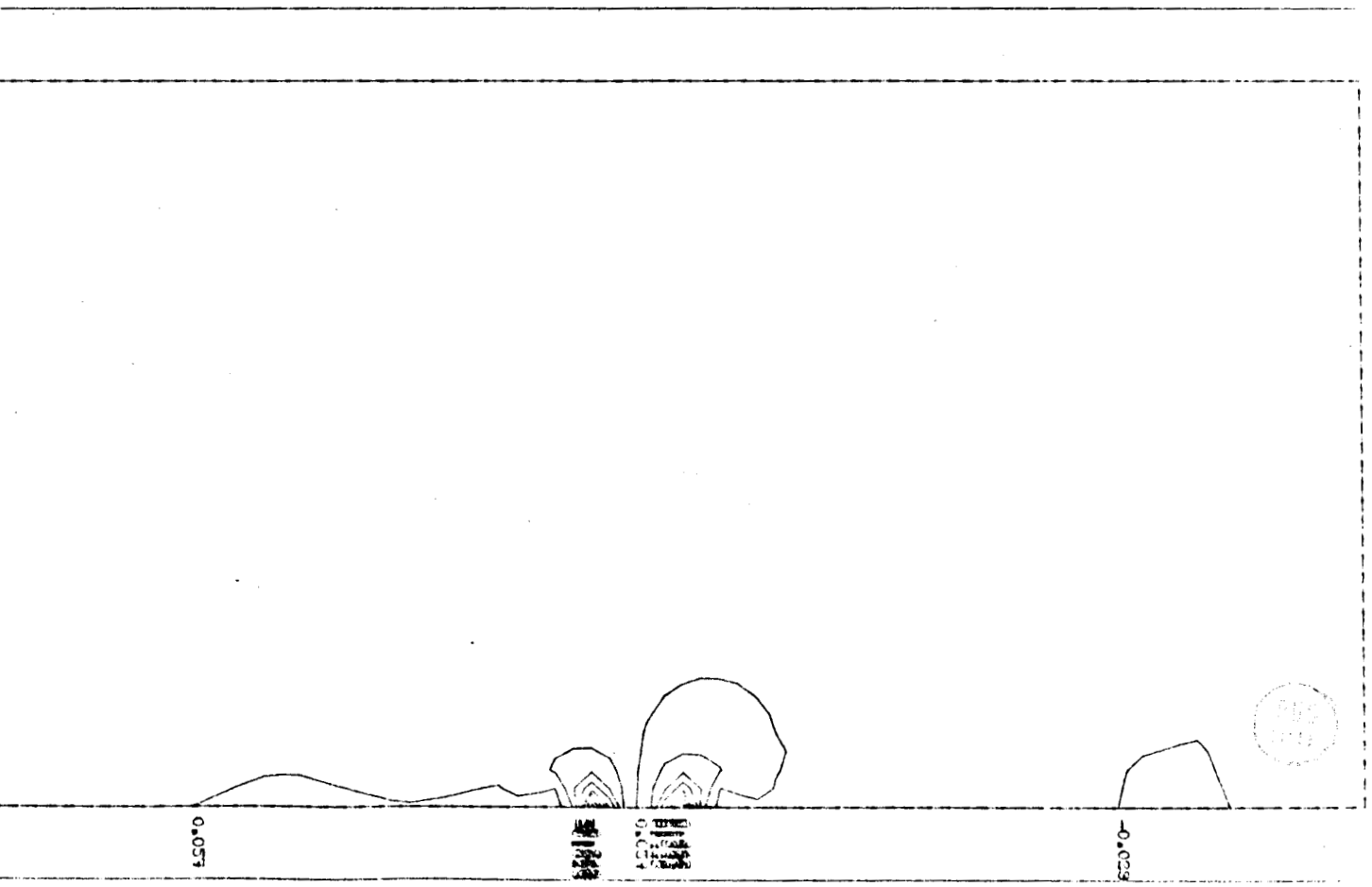


Fig. 4.66.

$Re = 1$, p : $\varepsilon = 10^{-3}$ - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.67.

$P - P_H$, $Re = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$



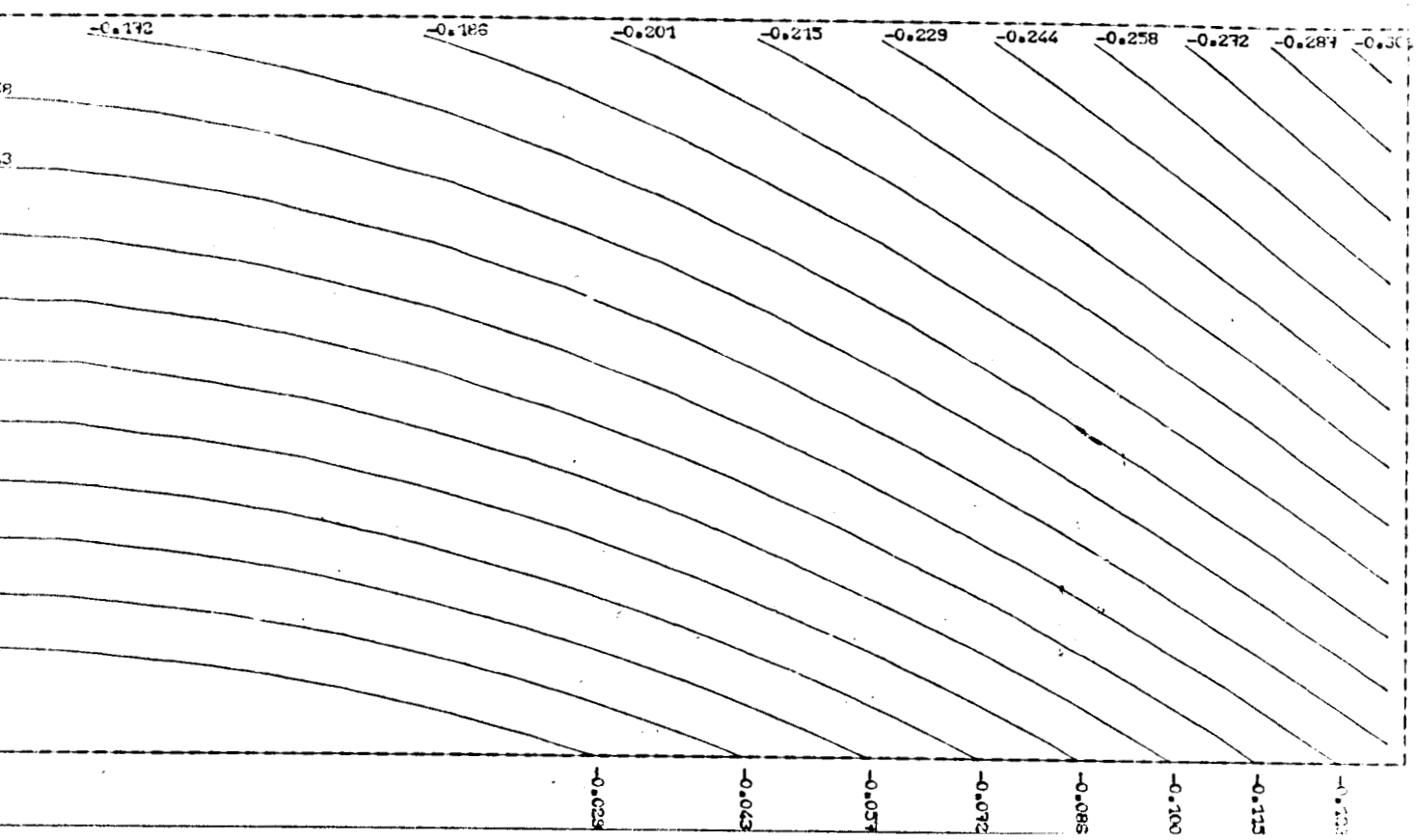
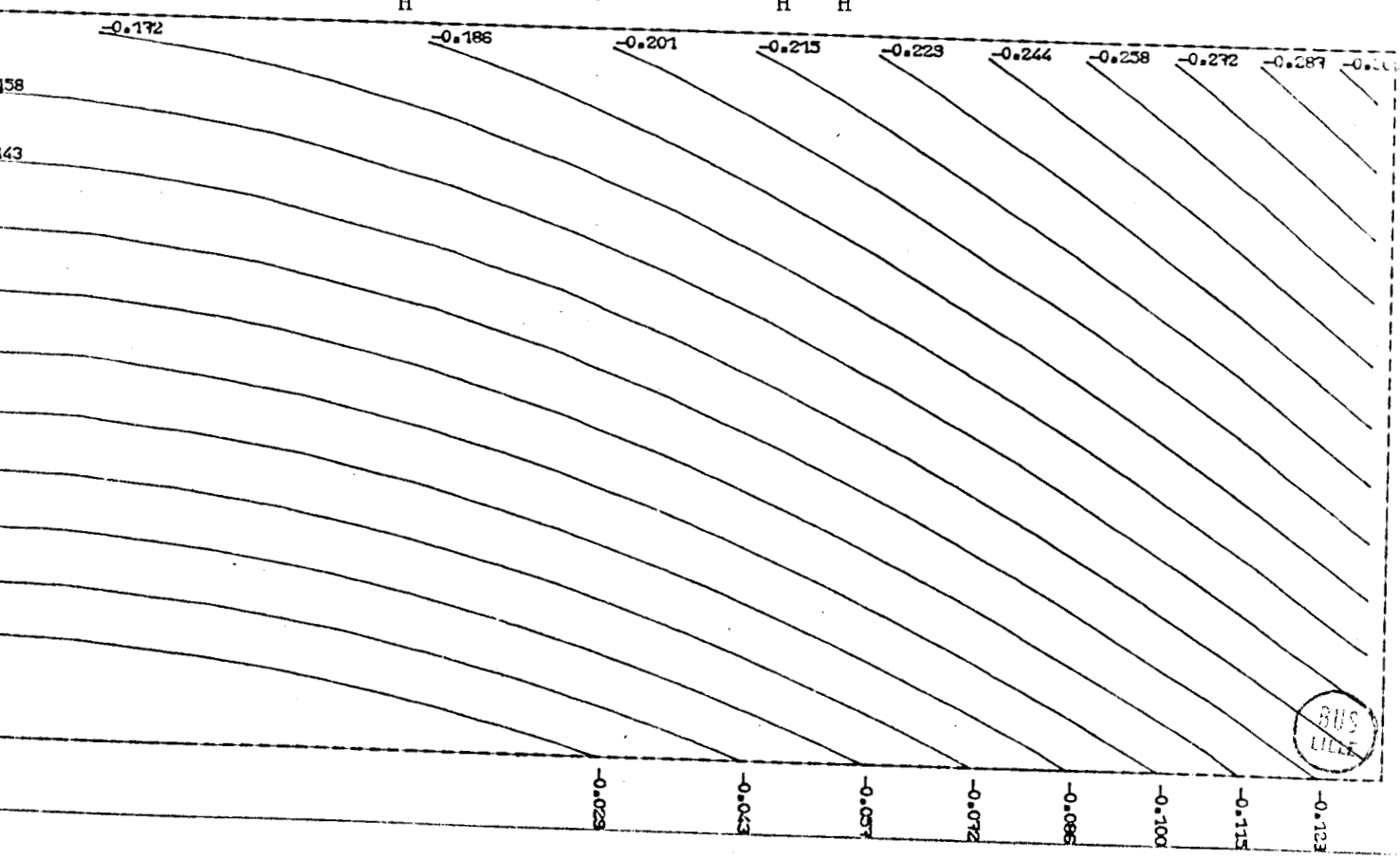


Fig. 4.68

Re = 10 - Solution de Hiemenz - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.69.

Re = ω, P_H calculé à partir de ω_H, ψ_H



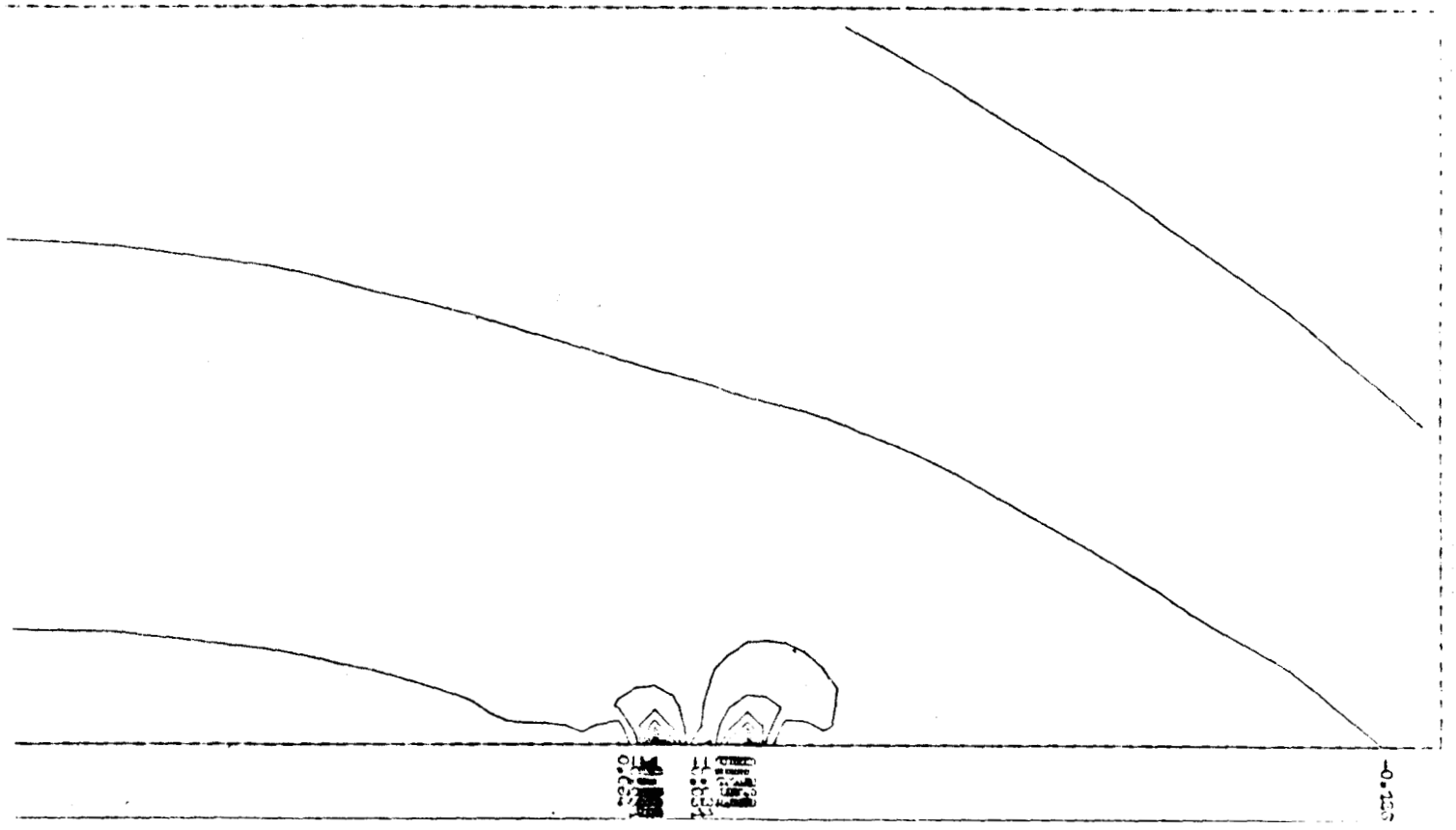
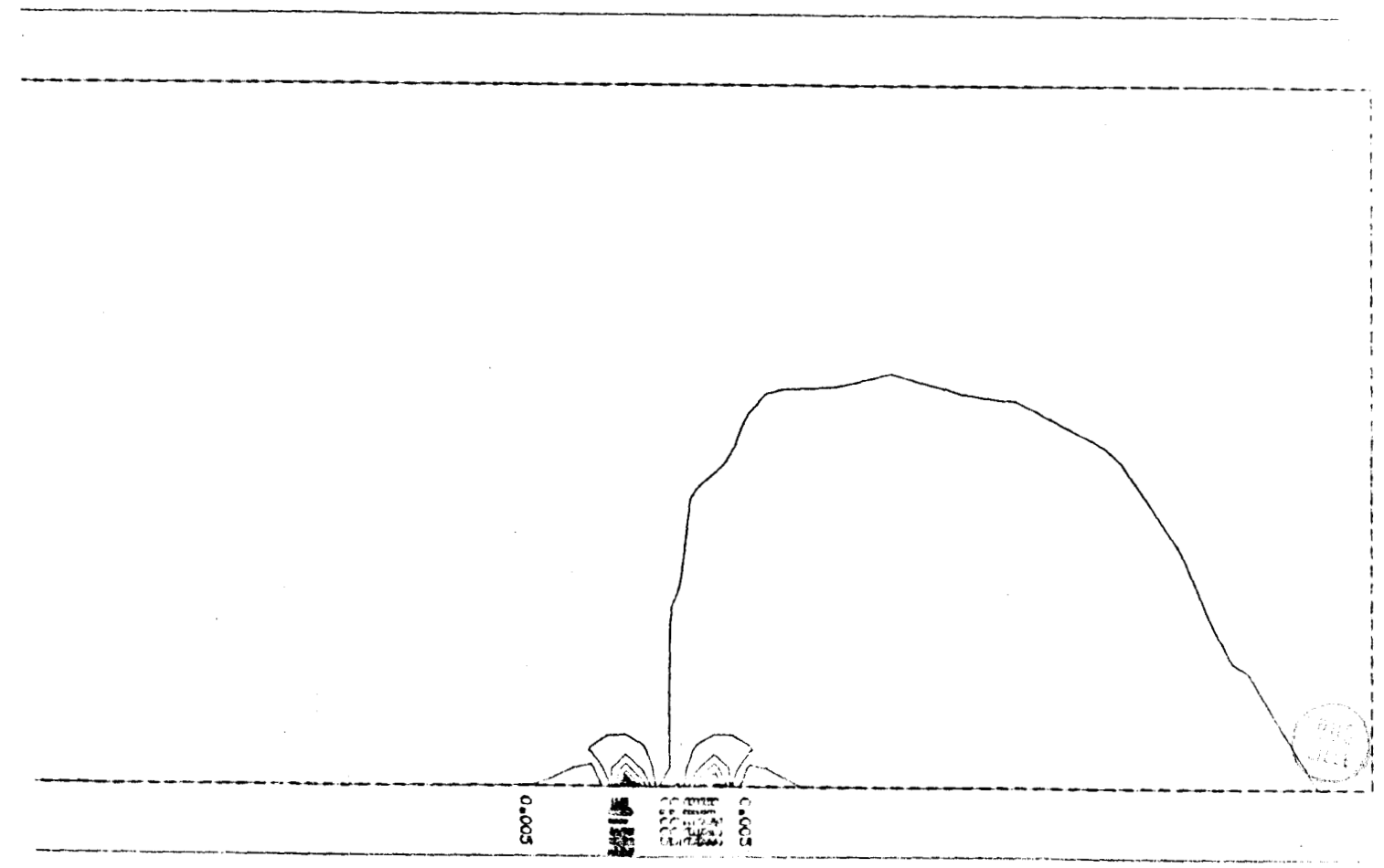


Fig. 4.70.

$Re = 10$, $\varepsilon = 10^{-2}$ - P - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.71.

$Re = 10$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $P-P_H$ - Echelle $1/6{,}6410^{-2}$



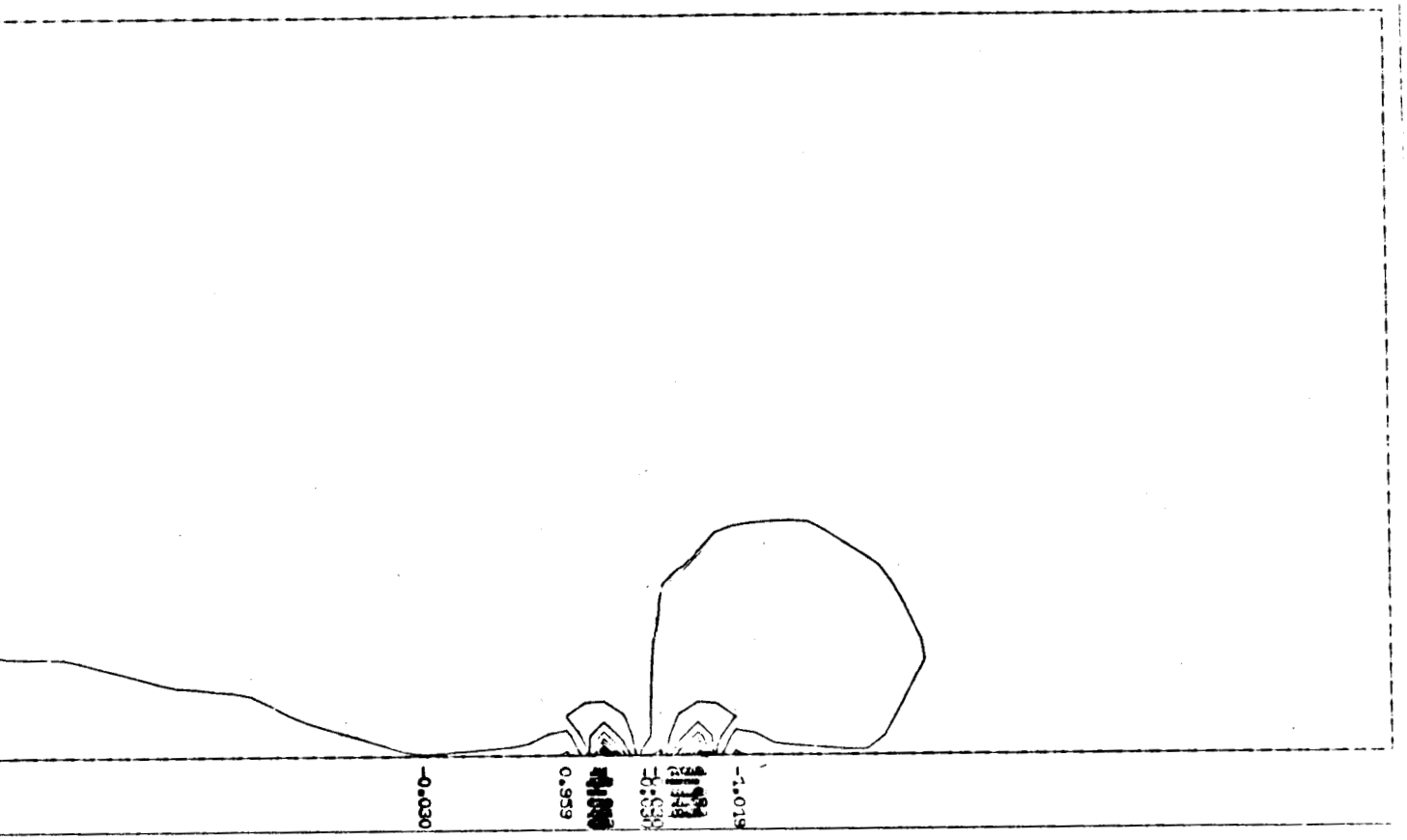


Fig. 4.72.

$Re = 10$, $\varepsilon = 10^{-1}$, $P-P_H$

BUS LILLE

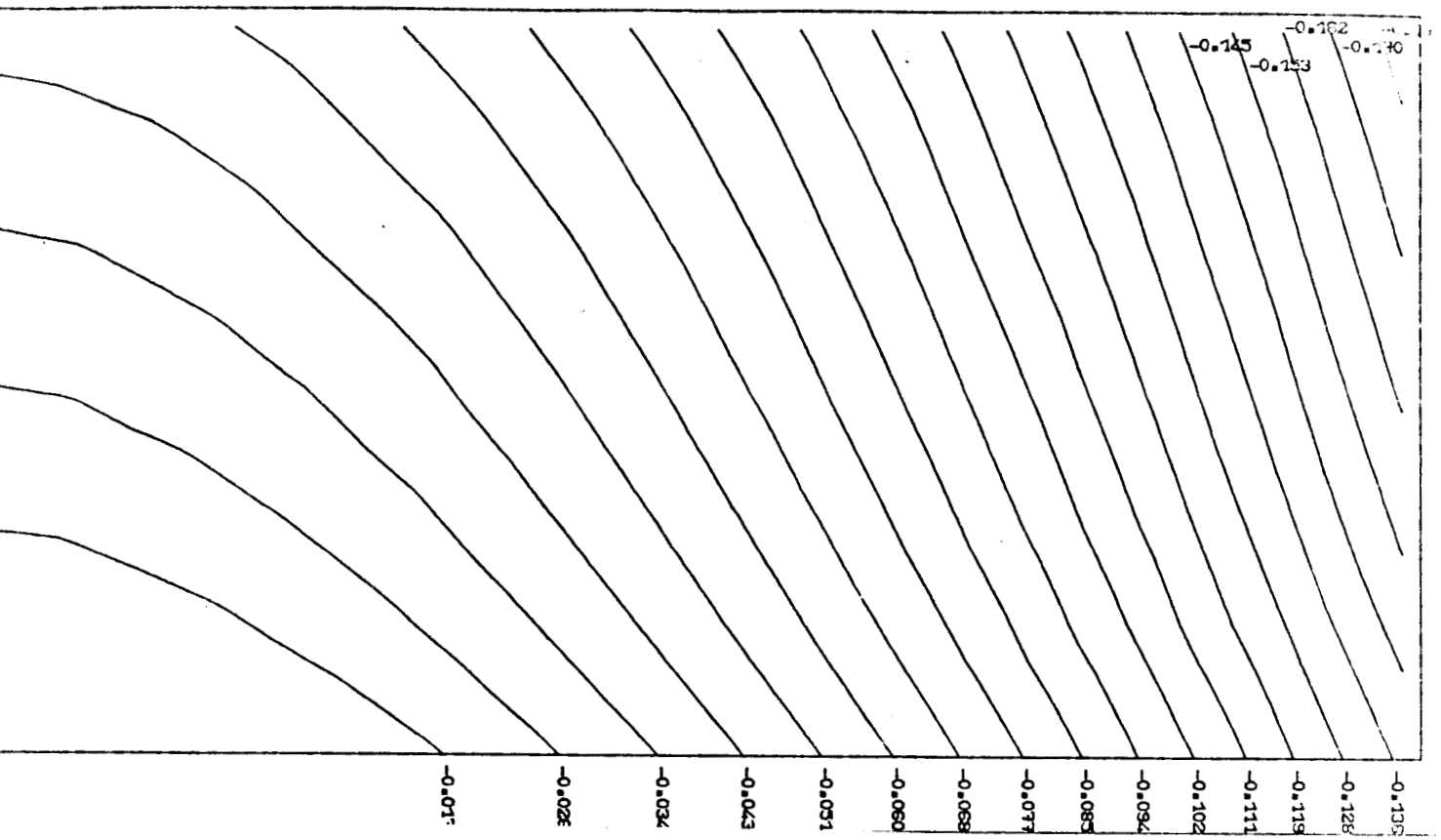
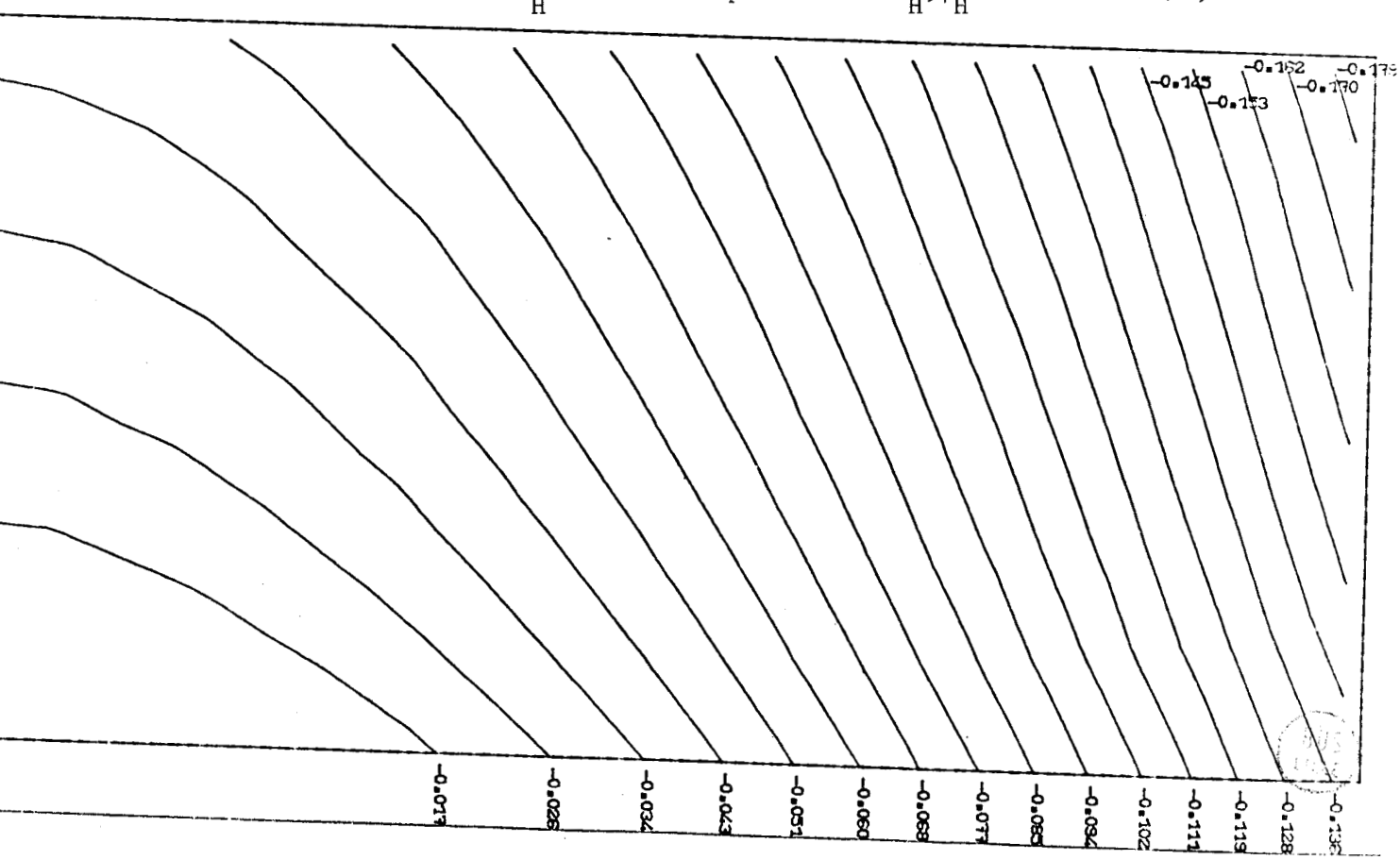


Fig. 4.73.

Re = 100 - Solution de Hiemenz - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.74.

Re = 100 - P_H calculé à partir de ω_H, ψ_H - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



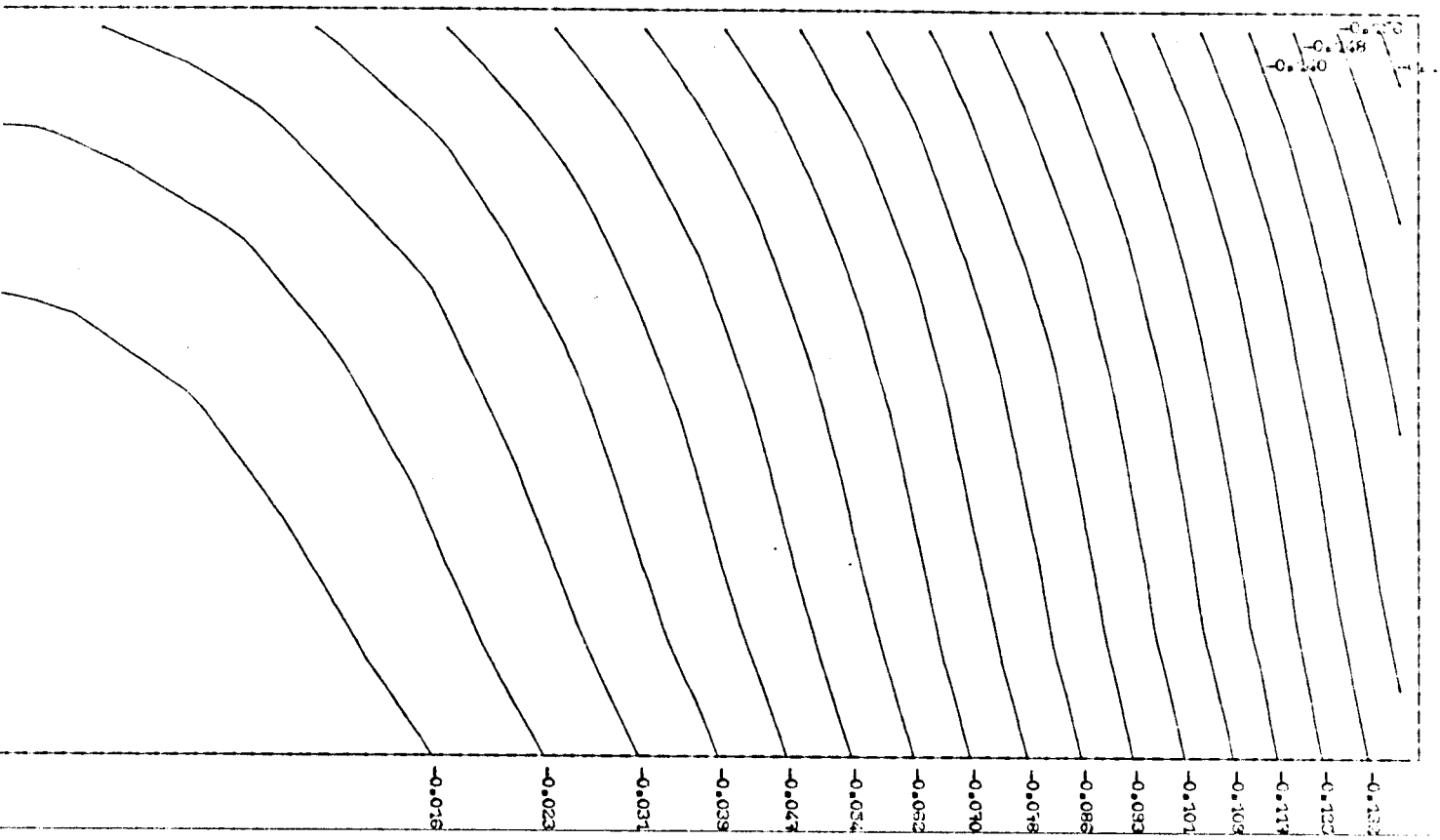
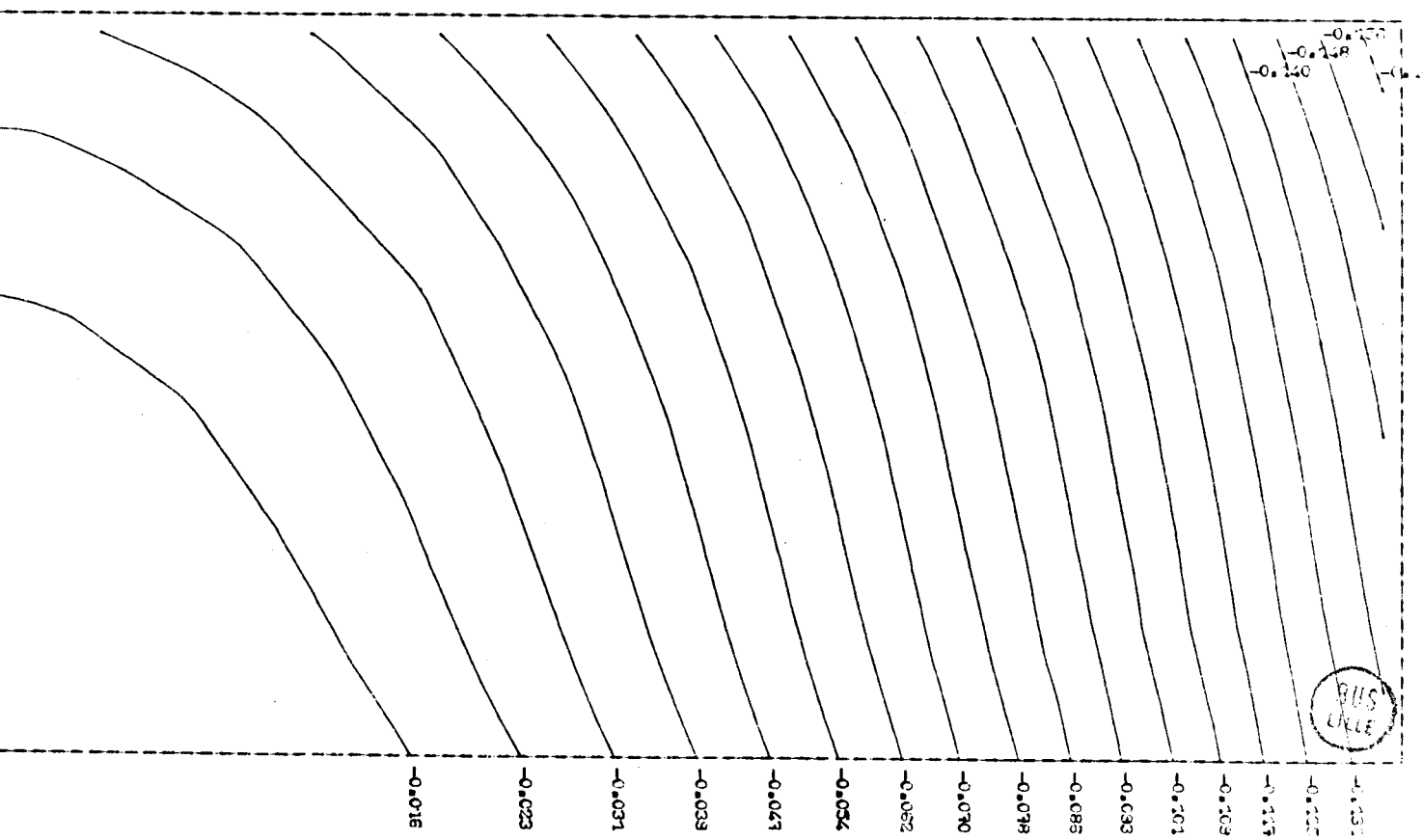


Fig. 4.75.

Re = 400 - P_H obtenu à partir de ω_H, ψ_H - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig 4.76

Re = 400 - Solution de Hiemenz - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



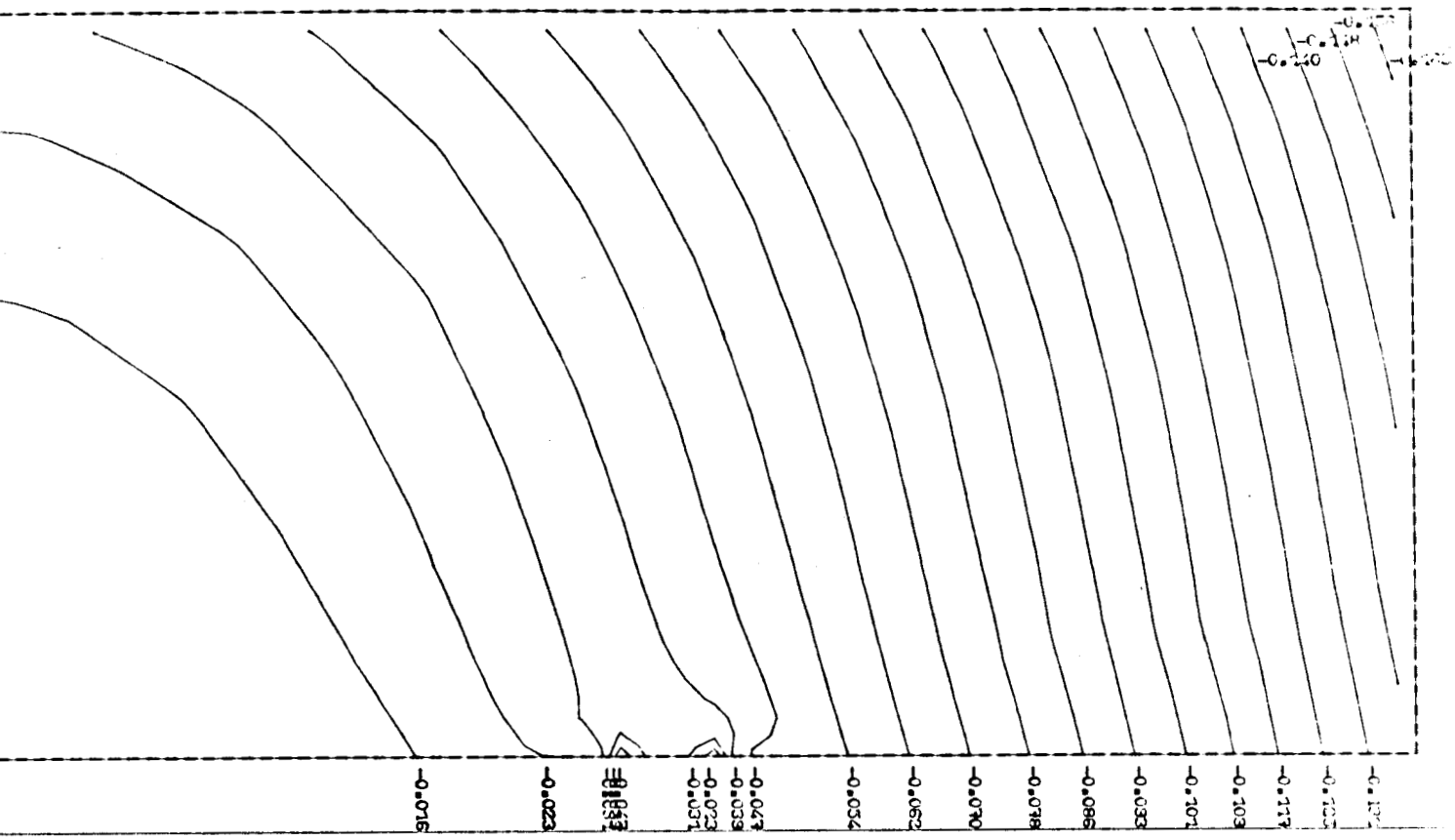
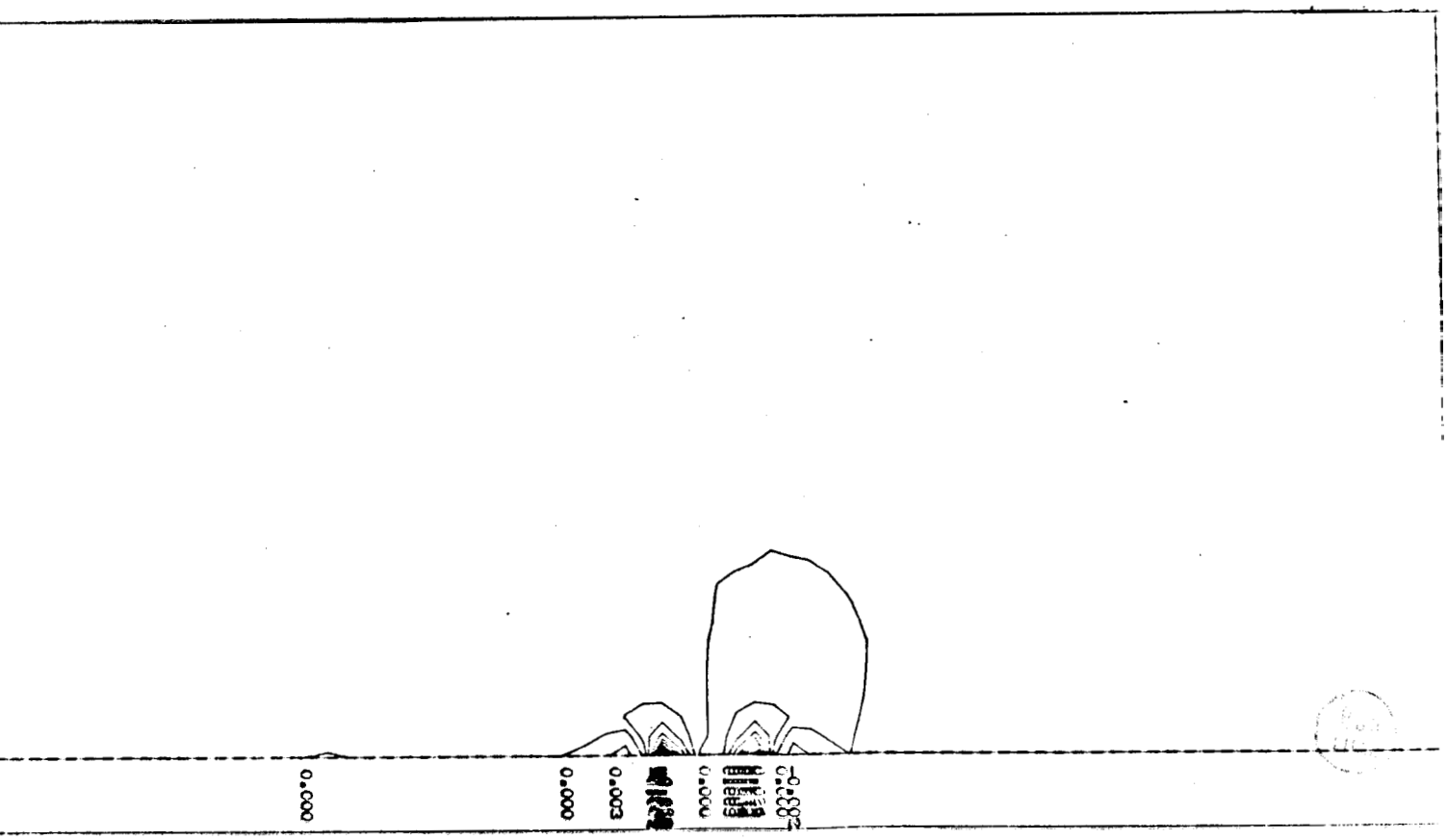


Fig. 4.77.

p - Re = 400 - ε = 10^{-2} - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.78.

P-P_H - Re = 400 - ε = 10^{-2} - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



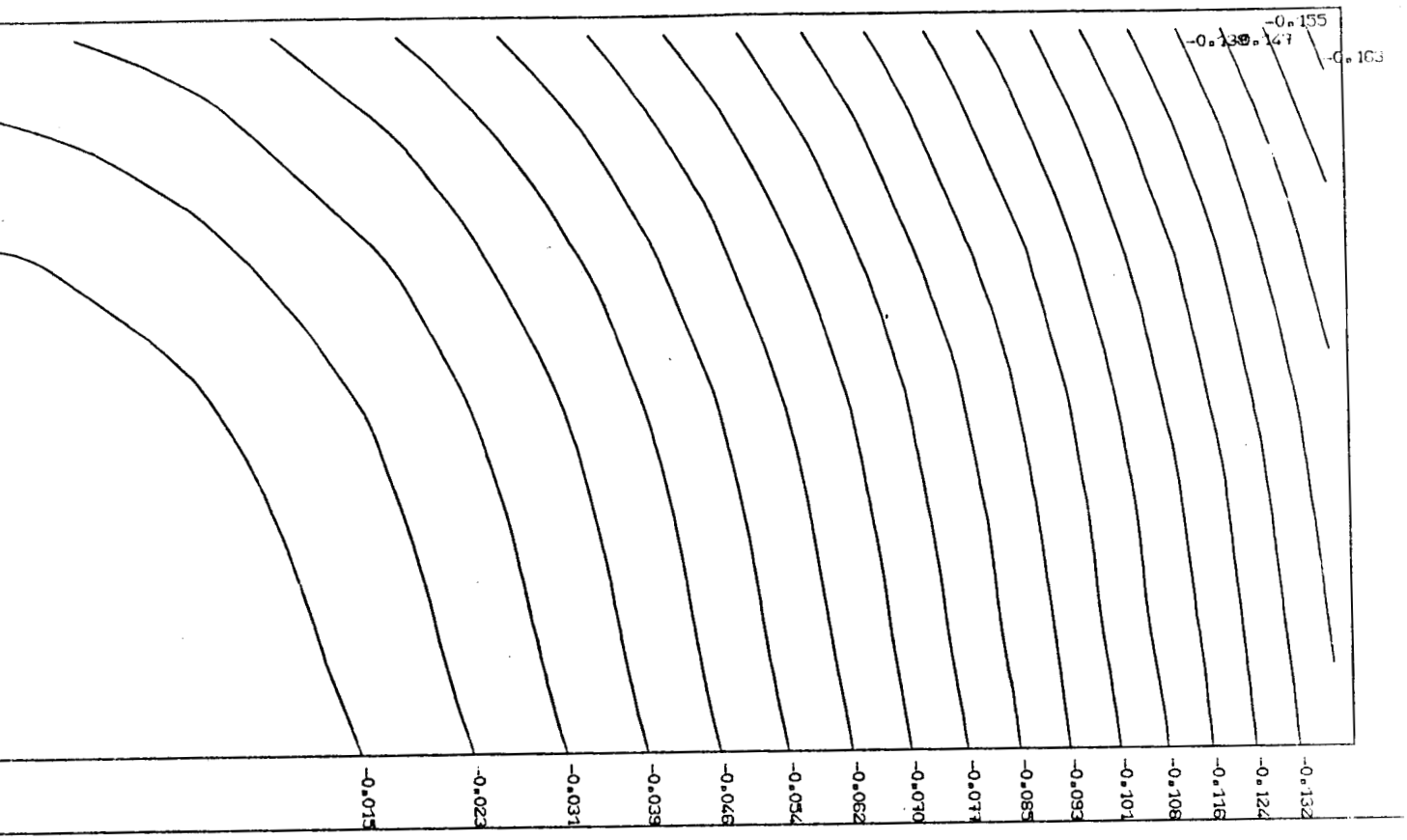
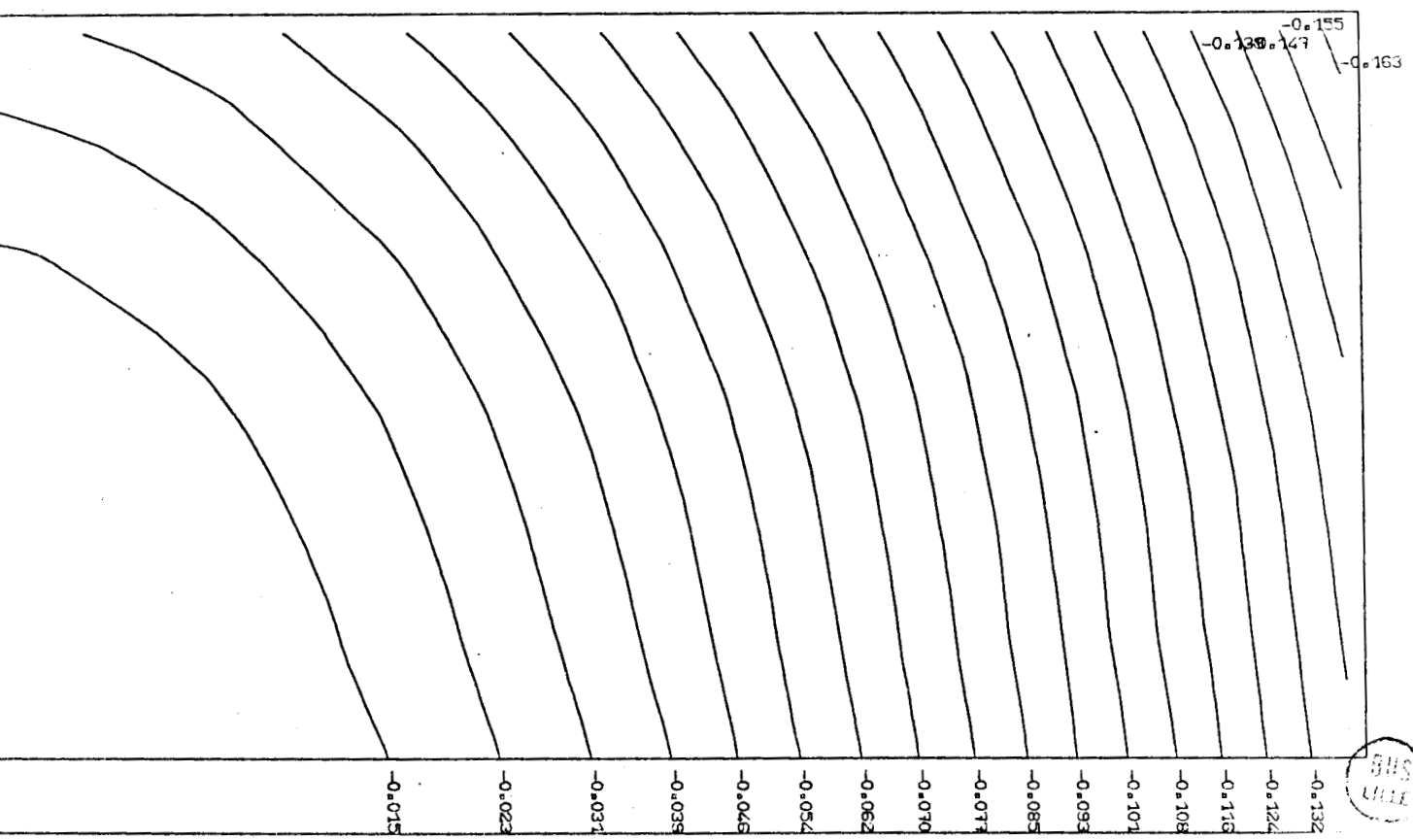


Fig. 4.79.

Re = 1000 - Solution de Hiemenz - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.80.

Re = 1000 - P_H obtenu à partir de ω_H, ψ_H - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$



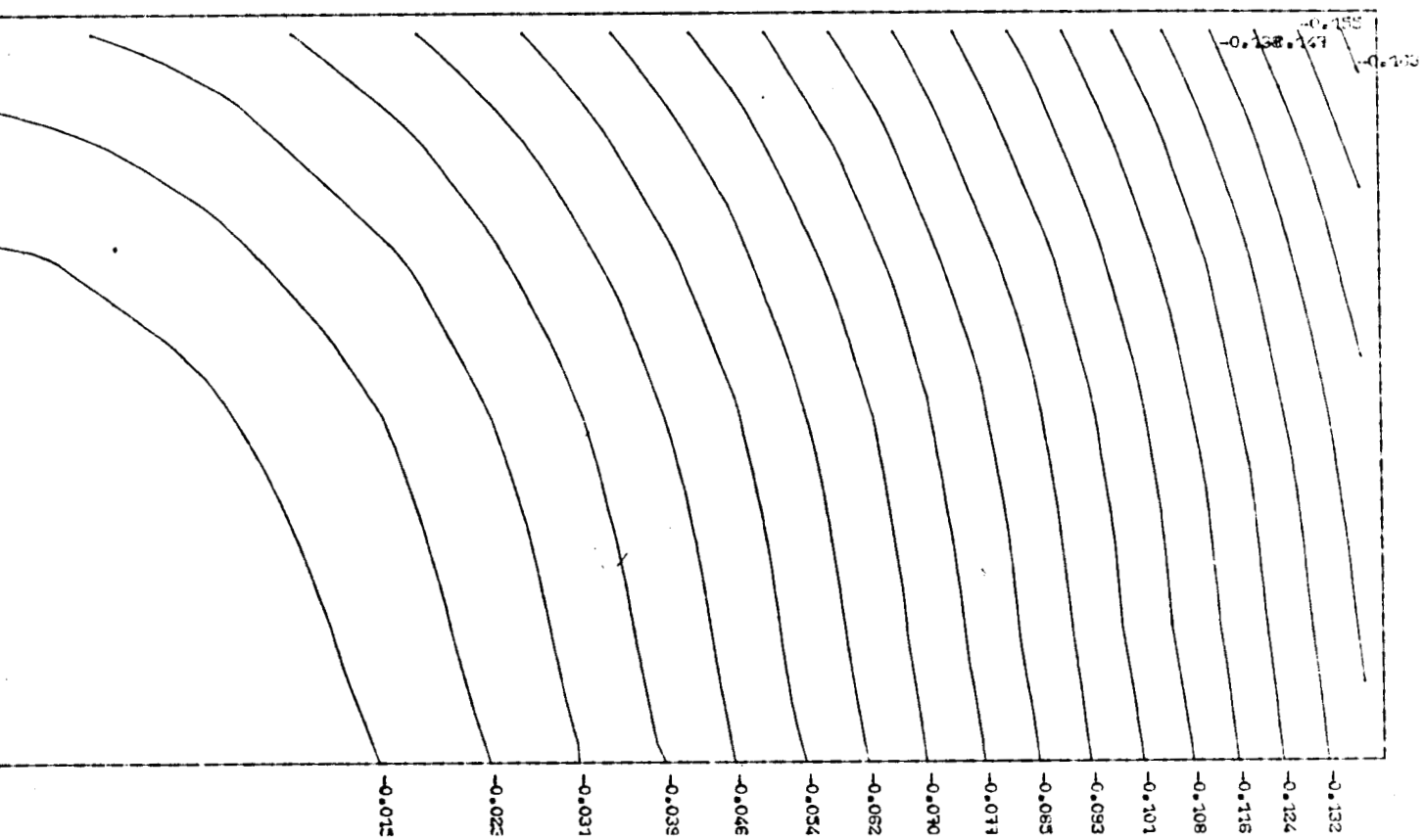


Fig. 4.81.

P_H obtenu à partir de NSPSOM

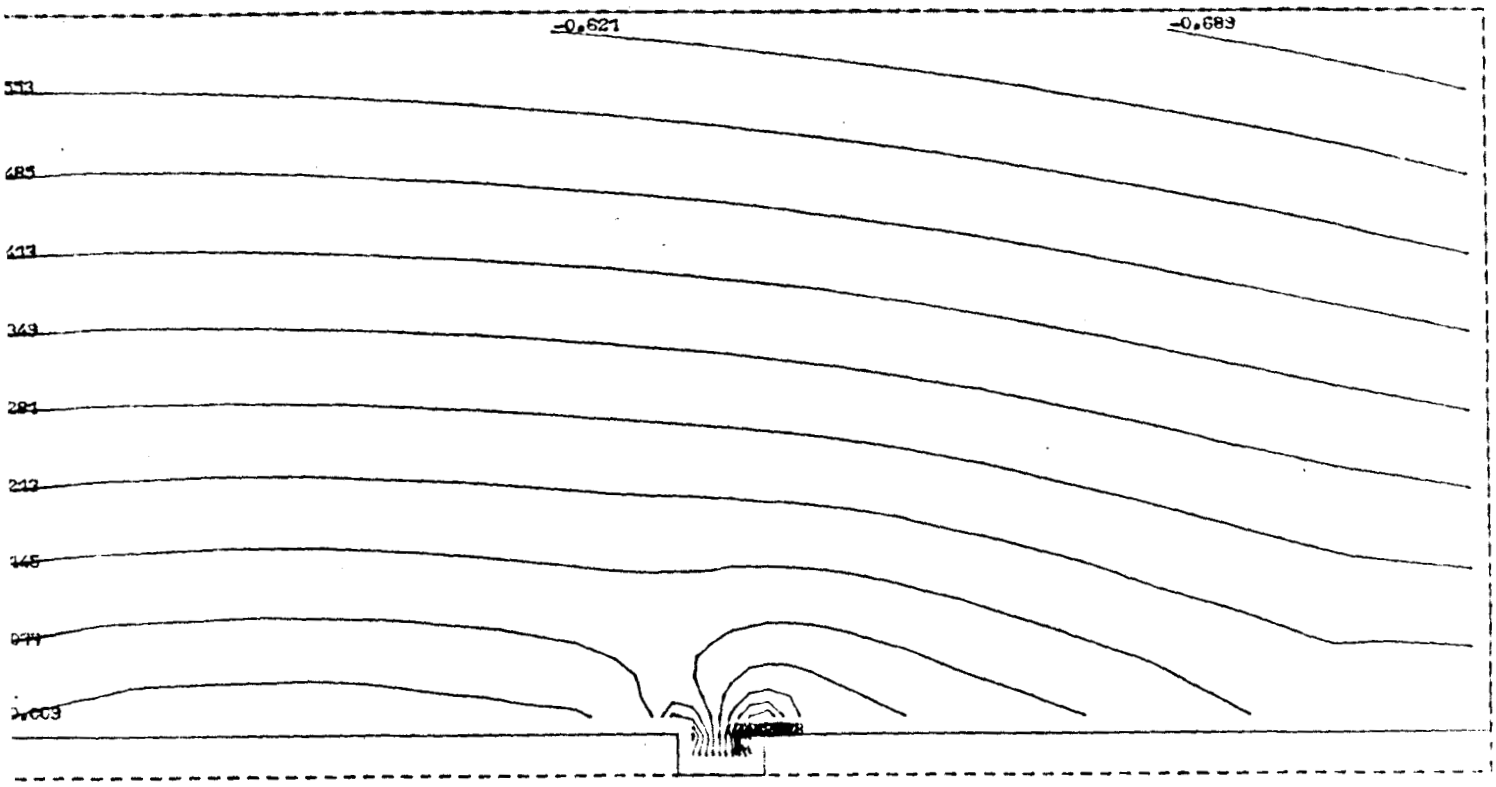
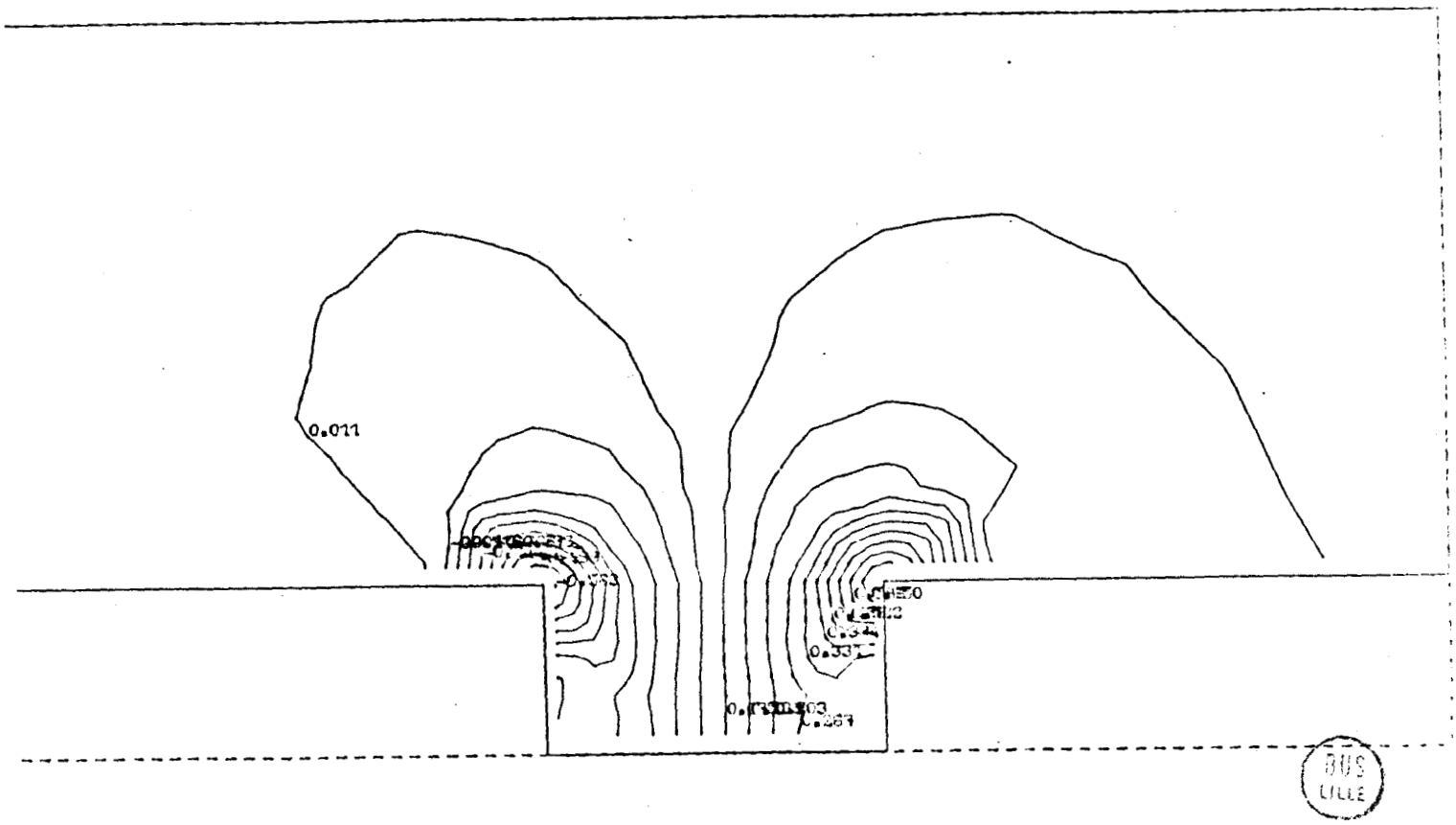


Fig. 4.82.

Re = 1 - p - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.83.

Re = 1 - $P-P_H$ - Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



BUS LILLE

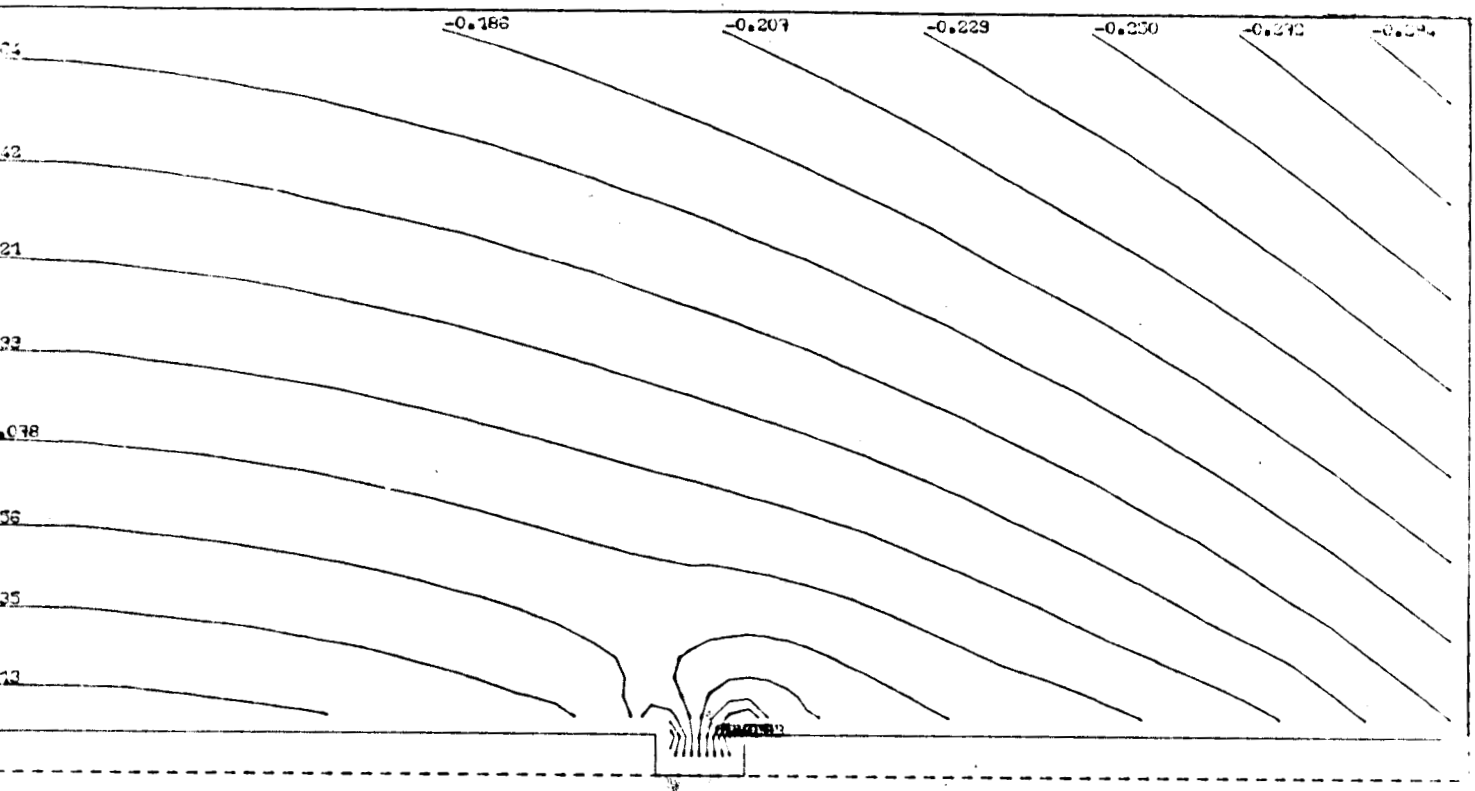
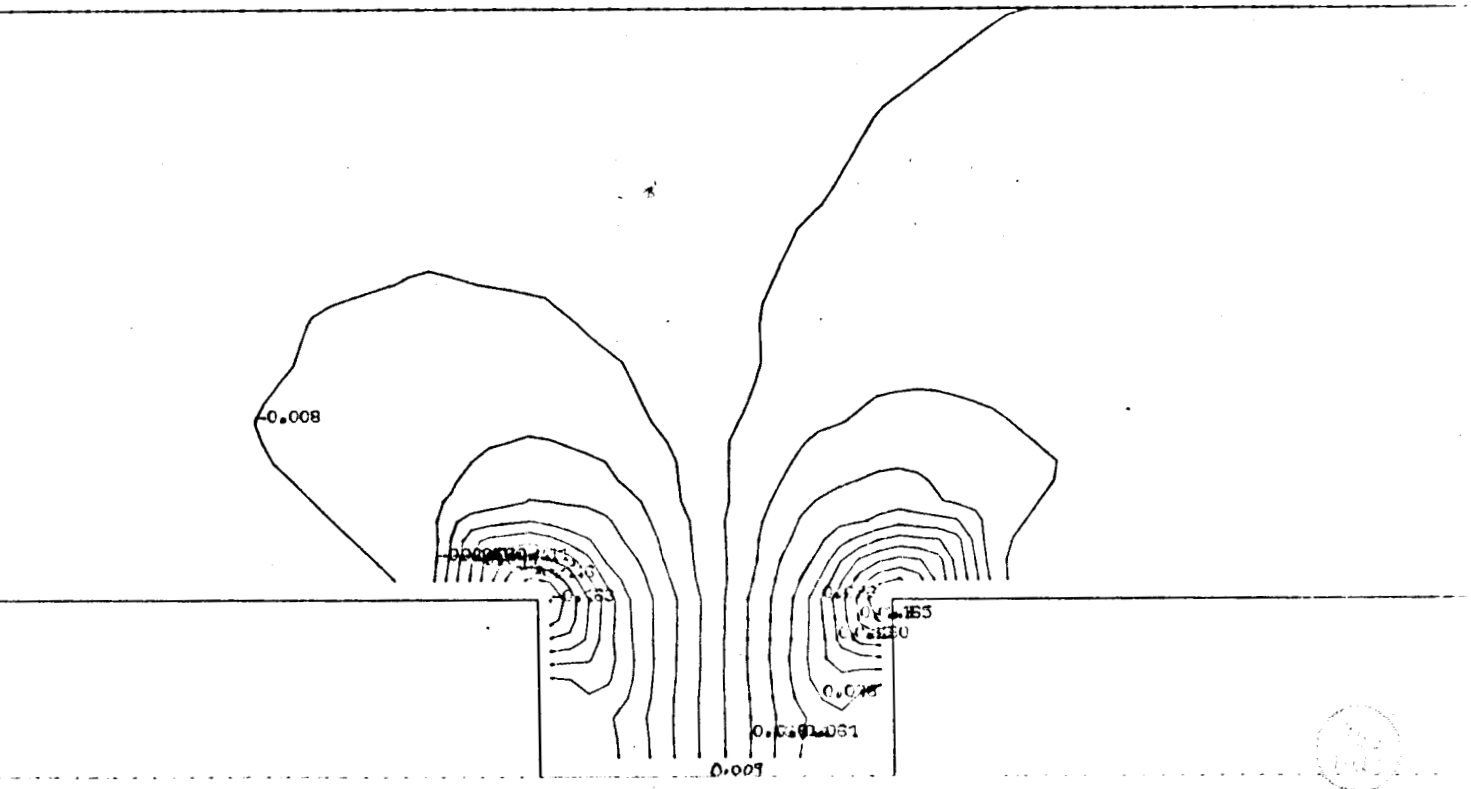


Fig. 4.84.

Re = 10 - p - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.85.

Re = 10 - $P-P_H$ - Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



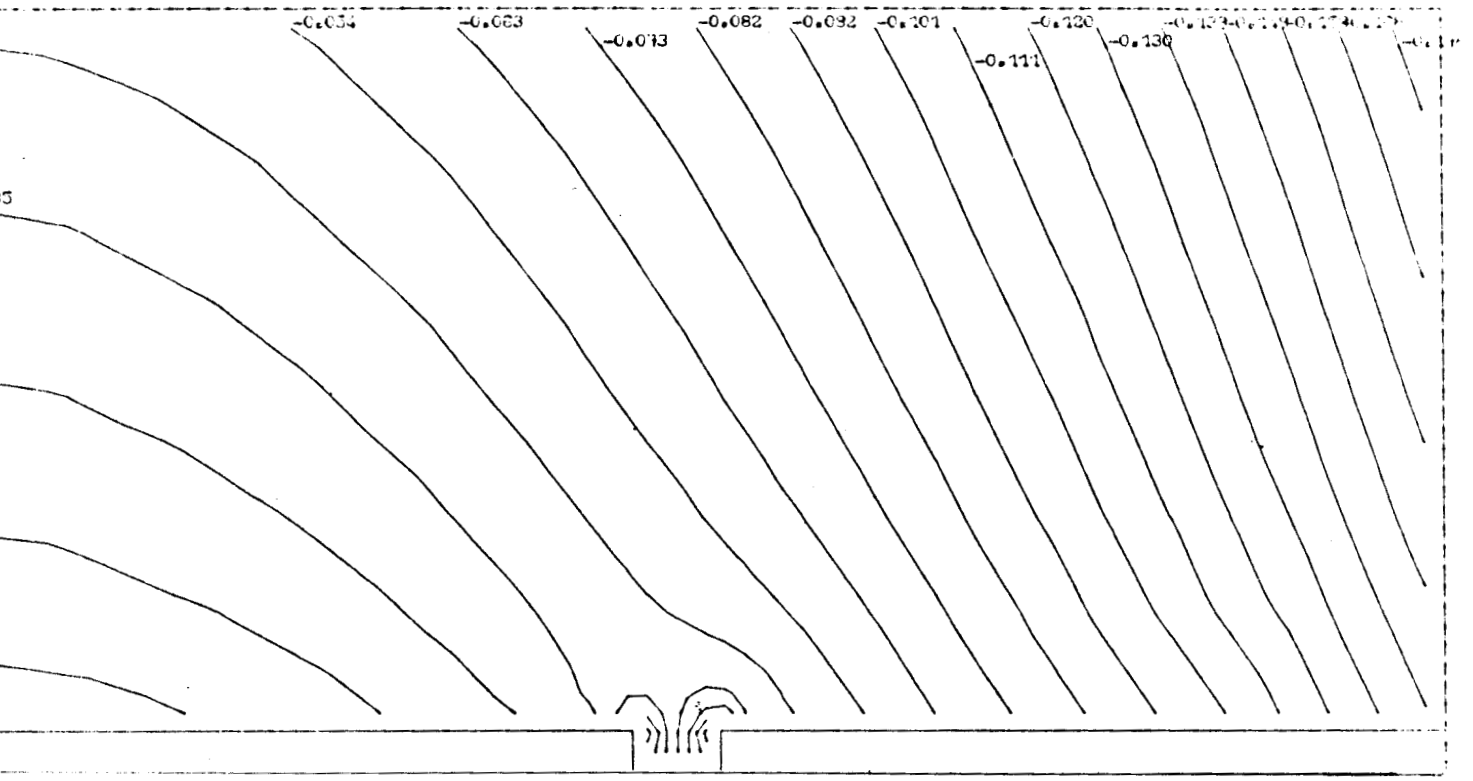
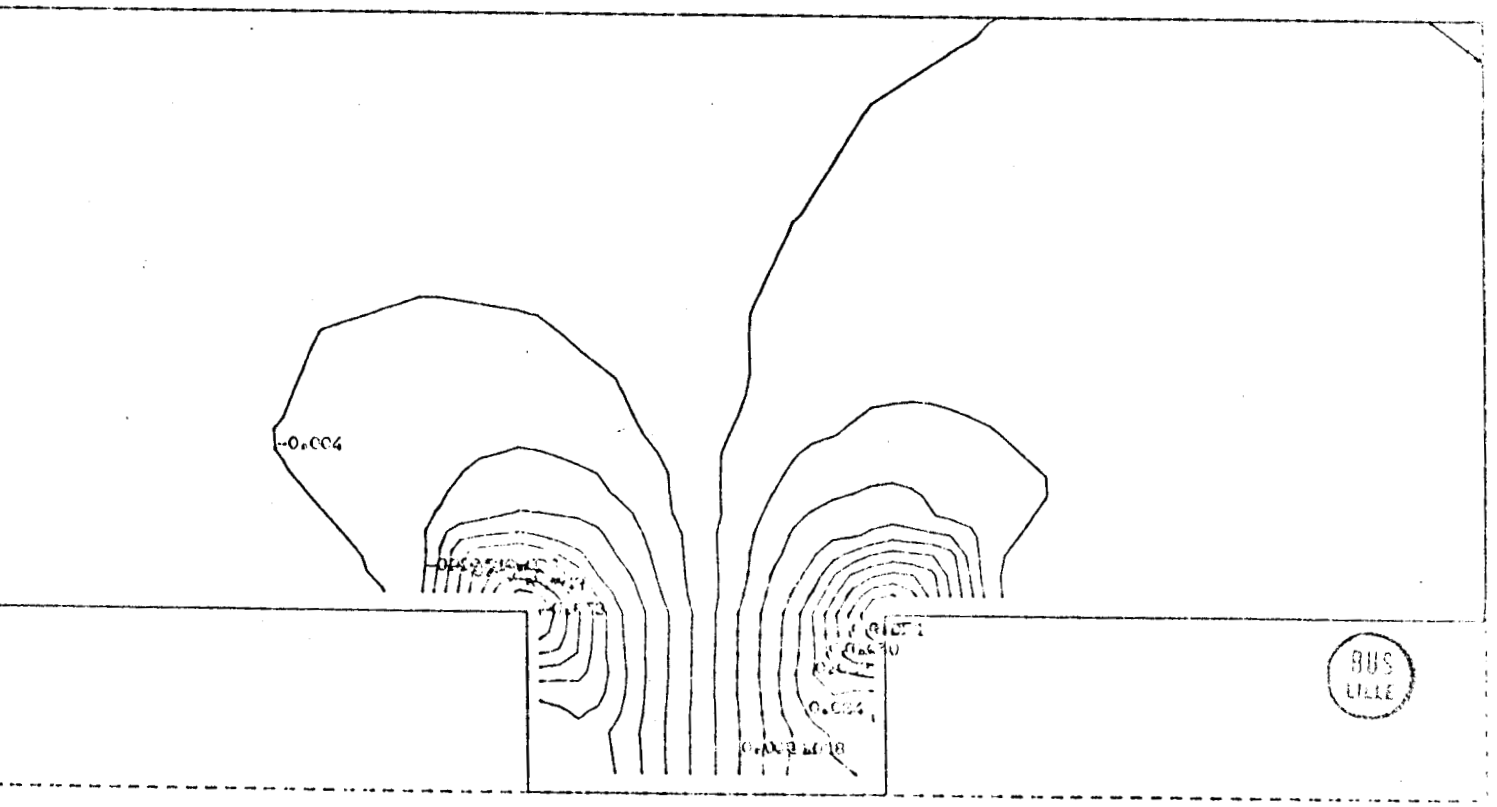


Fig. 4.86.

Re = 100 - p - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.87.

Re = 100 - $P-P_H$ - Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



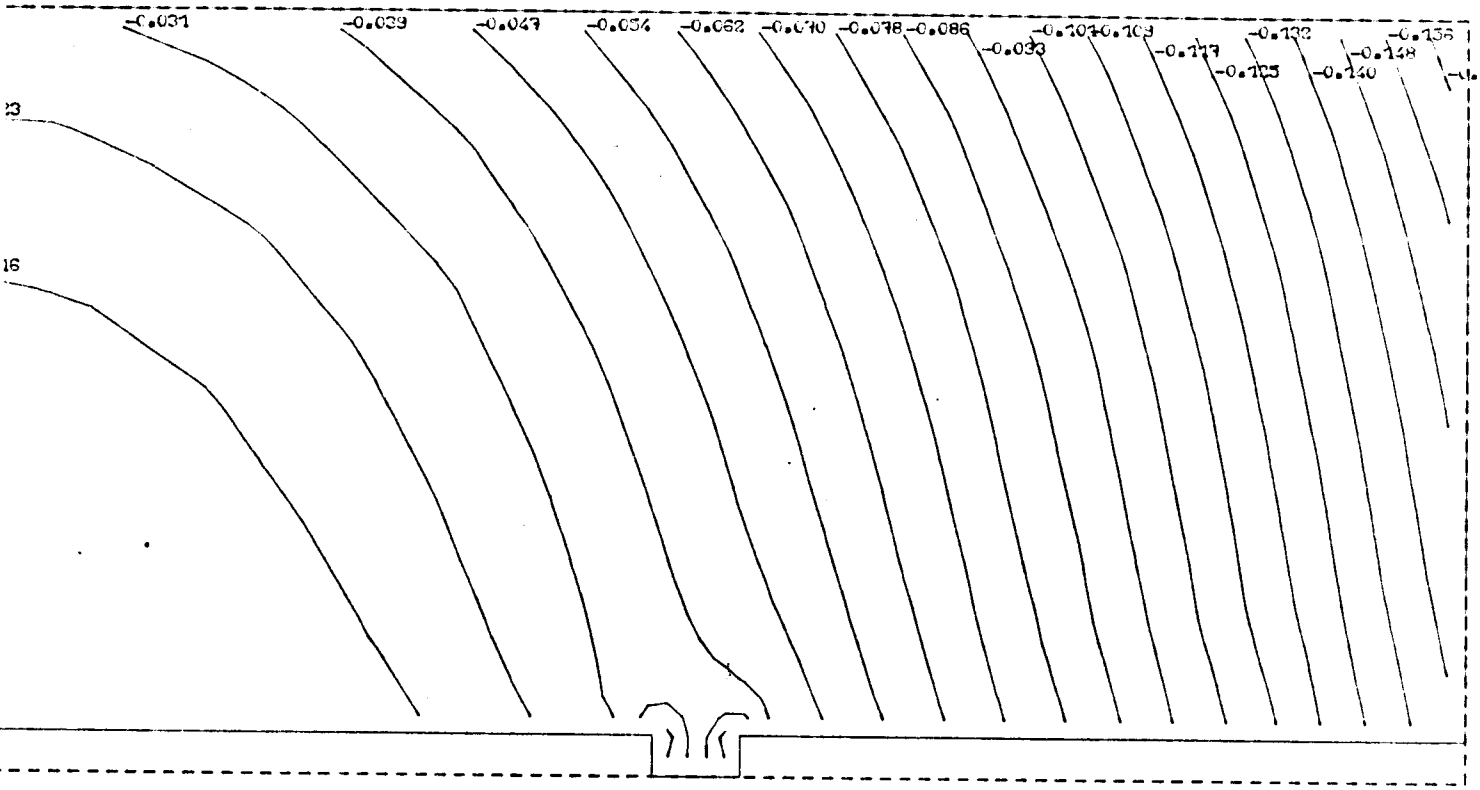
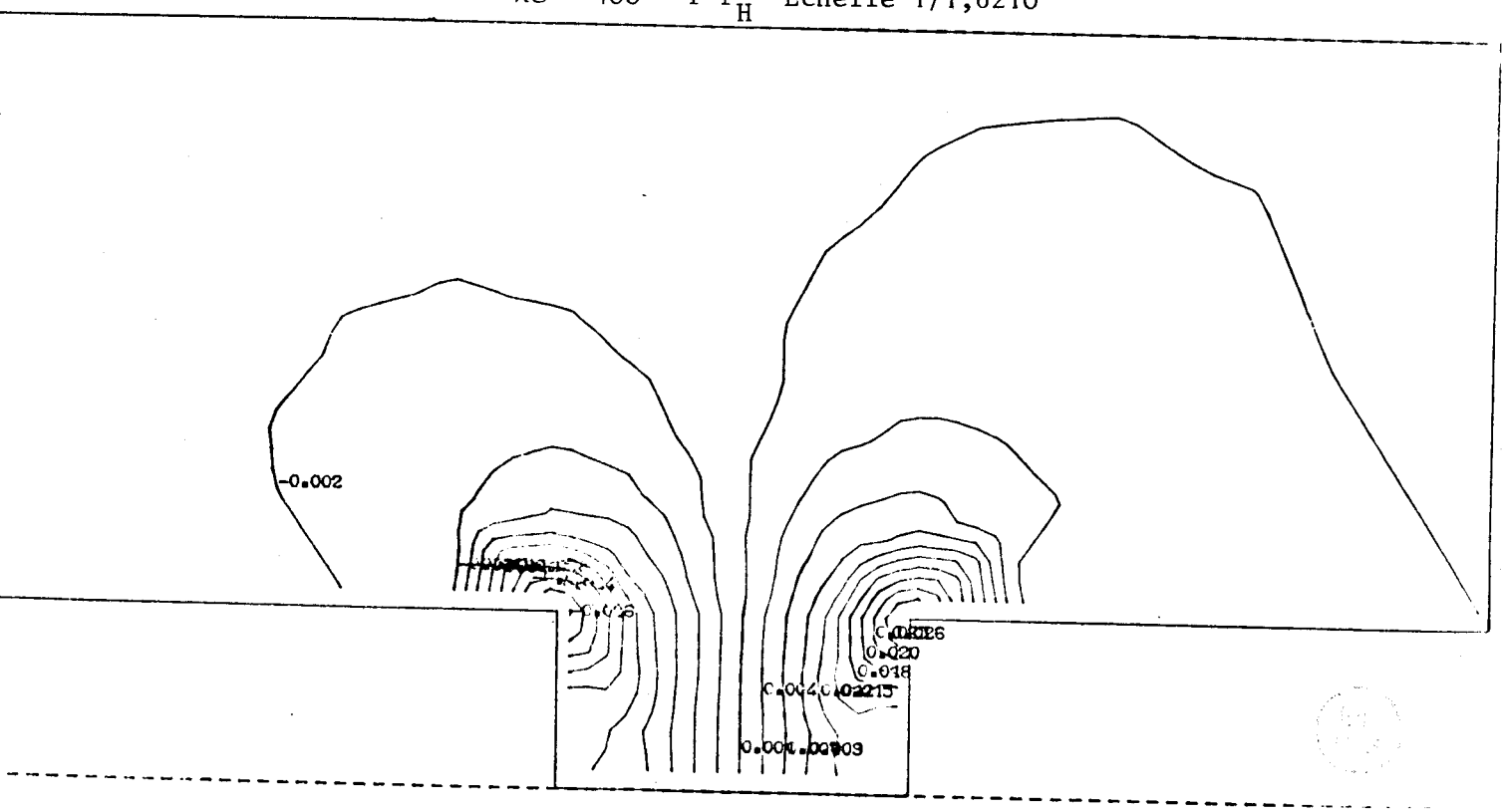


Fig. 4.88.

Re = 400 - p - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.89.

Re = 400 - P-P_H -Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



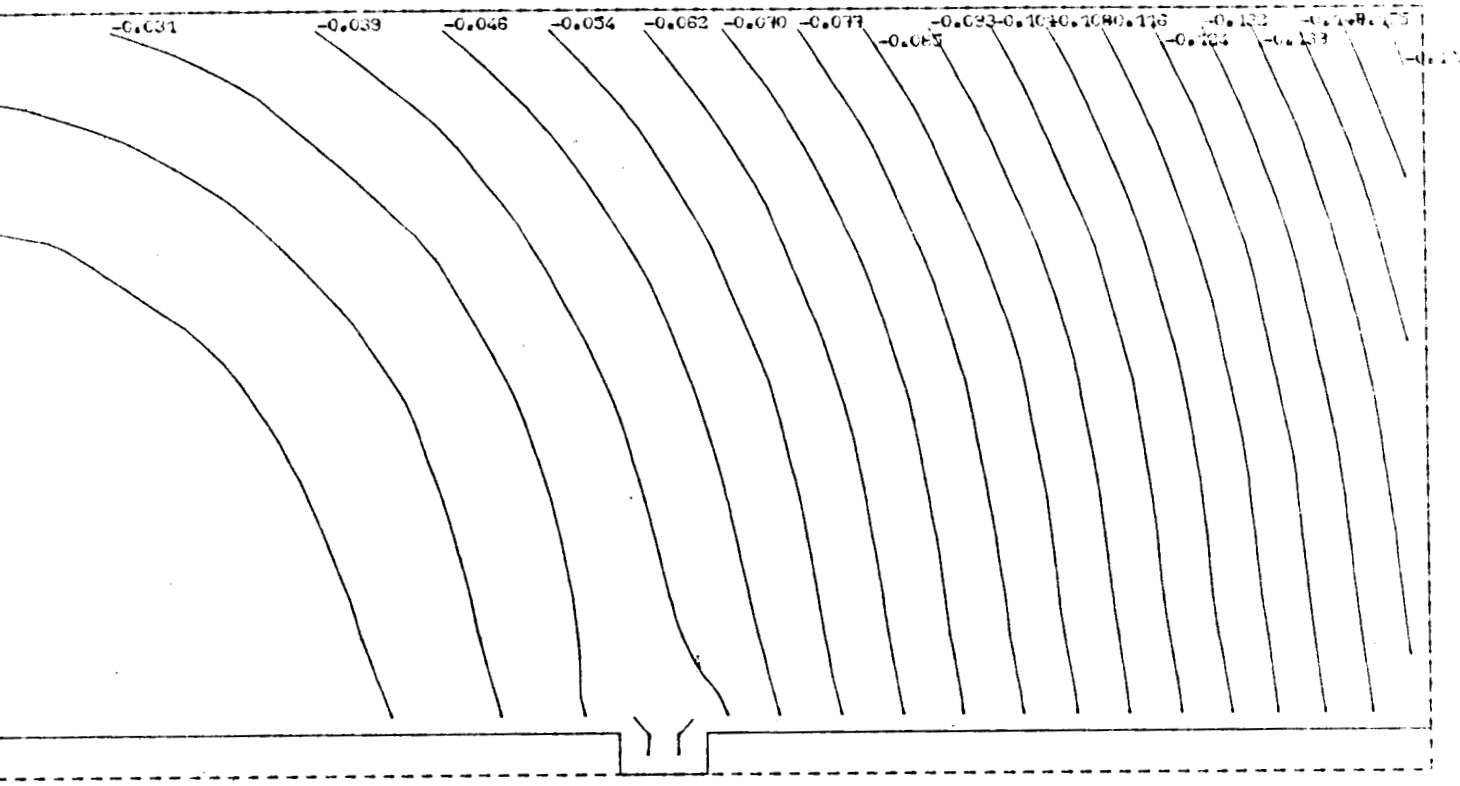
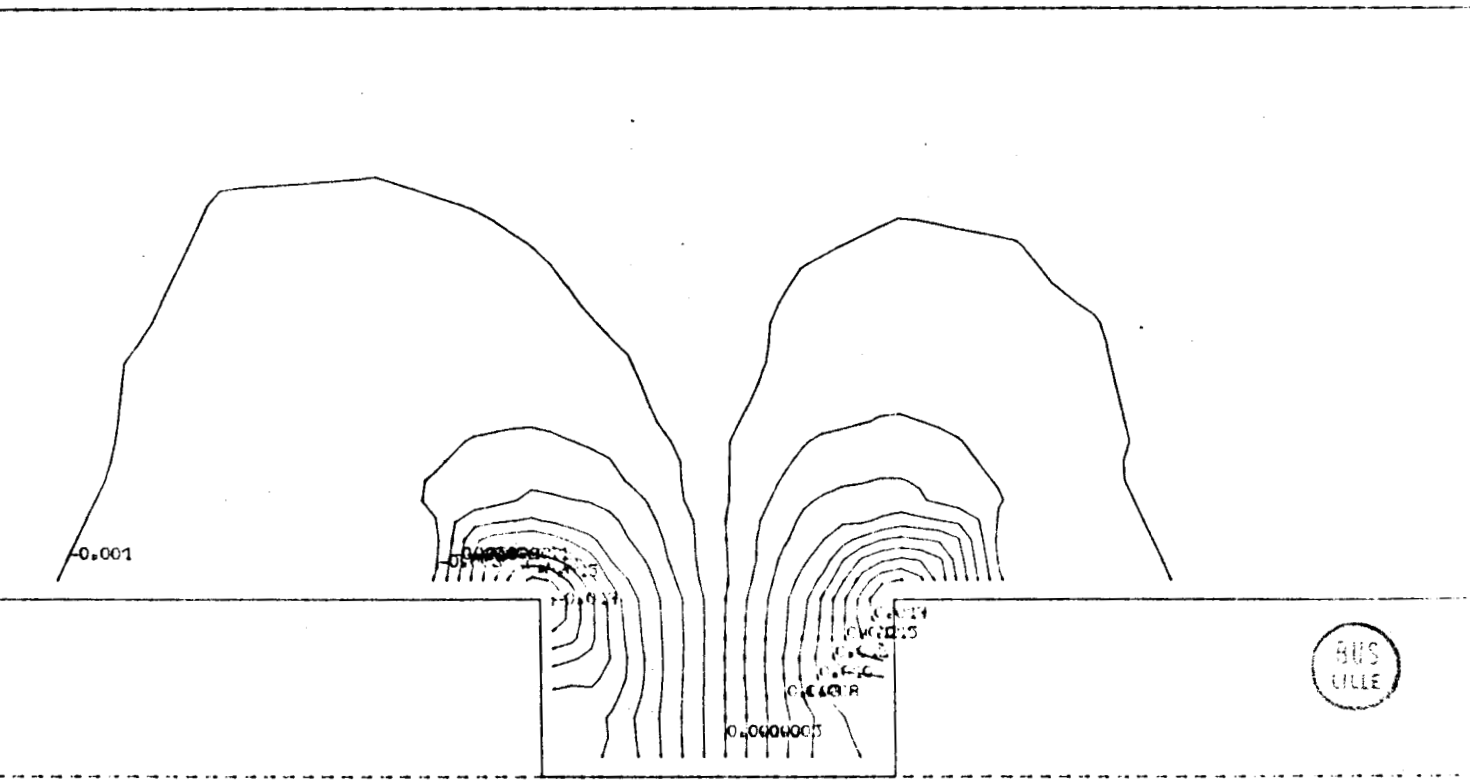


Fig. 4.90.

Re = 1000 - p - Echelle $1/6{,}6410^{-3}$

Fig. 4.91.

Re = 1000 - $P-P_H$ - Echelle $1/1{,}6210^{-3}$



D] Conclusions.

4.5. *Conclusions numériques.*

4.5.1. Le module NSPSOM.

Les résultats obtenus ont confirmé la fiabilité de ce module. Les temps de calculs sont inférieurs à ceux qu'à obtenu BORREL [4]. Ceci provient probablement de l'implantation du progamme RIGEL [4], (devenu NSPSOM) dans MØDULEF.

4.5.2. Le module NSPROP.

a) Une justification théorique complète reste à faire.

En effet, on a seulement montré l'existence et l'unicité du problème approché (§.2.7). On pourra peut être utiliser des idées de Strang [23] : en régularisant le second membre par convolution, et en estimant l'erreur entre le second membre exact et le second membre convolé, il est probable que l'on trouvera une erreur au moins en $O(h)$.

b) Plus le nombre de Reynolds augmente, meilleurs sont les résultats. Pour $Re \leq 10$, il y a une perte de précision certaine au voisinage de la frontière de type Neumann (comparer les fig. 4.62 et 4.63).

c) Les résultats numériques obtenus justifient l'emploi de cette méthode pour $Re \geq 10$.

4.6. *Conclusions mécaniques.*

4.6.1. Etude avec schématisation de la cavité.

4.6.1.1. Les lignes de courant.

Les lignes de courant tracées sont peu perturbées car elles sont éloignées de la cavité.

Il n'y a pratiquement pas de débit au voisinage de la cavité.

4.6.1.2. Les isotourbillons.

Les perturbations de la solution de Hiemenz sont localisées au voisinage de la cavité (fig. 4.18, 4.20, 4.21, 4.25). Les lignes isotourbillons sont symétriques par rapport au milieu de MN. En particulier, l'allure des isotourbillons de la figure 4.21 suggère que la valeur $\varepsilon = 10^{-1}$ est trop élevée ce qui sera confirmé au §. 4.6.2.4 et par la planche 4.

L'évolution des lignes isotourbillon met nettement en évidence la diminution de l'épaisseur du domaine de couche limite où la viscosité a de l'importance (comparer les figures 4.16, 4.22, 4.24, 4.26). Hiemenz a donné une estimation de l'épaisseur δ de la couche limite en fonction des paramètres ν et a (voir (1.16)) :

$$\delta = 2.4 \sqrt{\frac{\nu}{a}} .$$

Compte tenu de (1.16) et de (1.24), on a ici :

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1,2}{\sqrt{Re}} .$$

Exprimons L en fonction de y_{max}, ordonnée du point A (fig. 5) on obtient alors :

$$\frac{\delta}{y_A^*} = \frac{1,2}{y_{max}\sqrt{Re}}$$

On déduit de là le tableau 4.7 suivant :

Re	1	10	100	400	1000
$\frac{\delta}{y_A^*}$	18,07	5,71	1,80	0,90	0,57

Tableau 4.7

qui donne l'épaisseur de la couche limite en fonction du nombre de Reynolds Re. Ce tableau confirme les résultats mis en évidence par les tracés.

4.6.1.3. Le champ des vecteurs vitesses.

Tous les tracés ont été effectués à la même échelle.

Les vecteurs vitesses sont tracés à partir de Ψ (formules I.2 et I.3). Les éléments finis utilisés étant seulement de classe C^o, on a représenté les vecteurs vitesse au centre de gravité de chaque triangle pour avoir une détermination continue de ceux-ci.

Comme précédemment, les perturbations sont très localisées. On voit apparaître l'effet de la mise en vitesse due à ε au voisinage de l'emplacement de la cavité. Cet effet est surtout marqué pour les valeurs les plus élevées :

$$\varepsilon = 10^{-2} \quad \text{et} \quad \varepsilon = 10^{-1} \qquad \text{(voir fig. 4.43 et 4.45)}$$

4.6.1.4. Les isobares

Les perturbations sont localisées dans un voisinage des points M et N (voir fig. 4.70, 4.71, 4.72, 4.77 et 4.78).

4.6.2. Etude avec cavité.

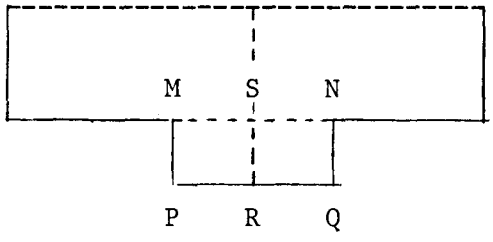
4.6.2.1. Les lignes de courant.

Les lignes de couant qui sont éloignées de la cavité sont peu perturbées par celle-ci : les figures 4.11 bis, 4.12 bis, 4.13 bis, 4.14 bis, 4.15 bis, qui montrent des lignes de courant dans la cavité indiquent l'existence d'un domaine de recirculation dans celle-ci. On remarque que l'écoulement extérieur pénètre dans la cavité sur environ 1/3 de sa profondeur (considérer la ligne $\Psi = 0$) pour tous les nombres de Reynolds considérés. Les vitesses dans la cavité sont très faibles comme le montrent les valeurs de la fonction Ψ sur les tracés 4.11 à 4.15bis.

4.6.2.2. Les isotourbillons.

Le rotationnel de la vitesse est concentré dans les coins M et N qui sont contournés par le fluide, phénomène déjà observé quand la cavité était schématisée par une fonction porte de vitesse. De plus, ces lignes sont

pratiquement symétriques par rapport à l'axe RS de la cavité (figure ci-dessous). Les perturbations sont localisées dans un domaine ayant des dimensions d'ordre ℓ de part et d'autre de la cavité (fig. 4.28 à 4.37).

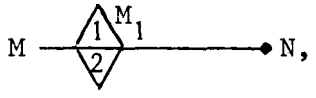


4.6.2.3. Champ des vecteurs vitesse.

Tous les tracés ont été effectués à la même échelle. Comme il a déjà été noté en 4.6.2.1, les vitesses dans le domaine de recirculation sont très petites. Par exemple, pour $Re = 1000$, le maximum de la vitesse dans le domaine de recirculation est de l'ordre du centième de la vitesse le long de MN. On voit donc qu'il est tout à fait légitime de supposer que le fluide est sensiblement au repos dans la cavité.

4.6.2.4. Modélisation de la cavité par une fonction porte de vitesse.

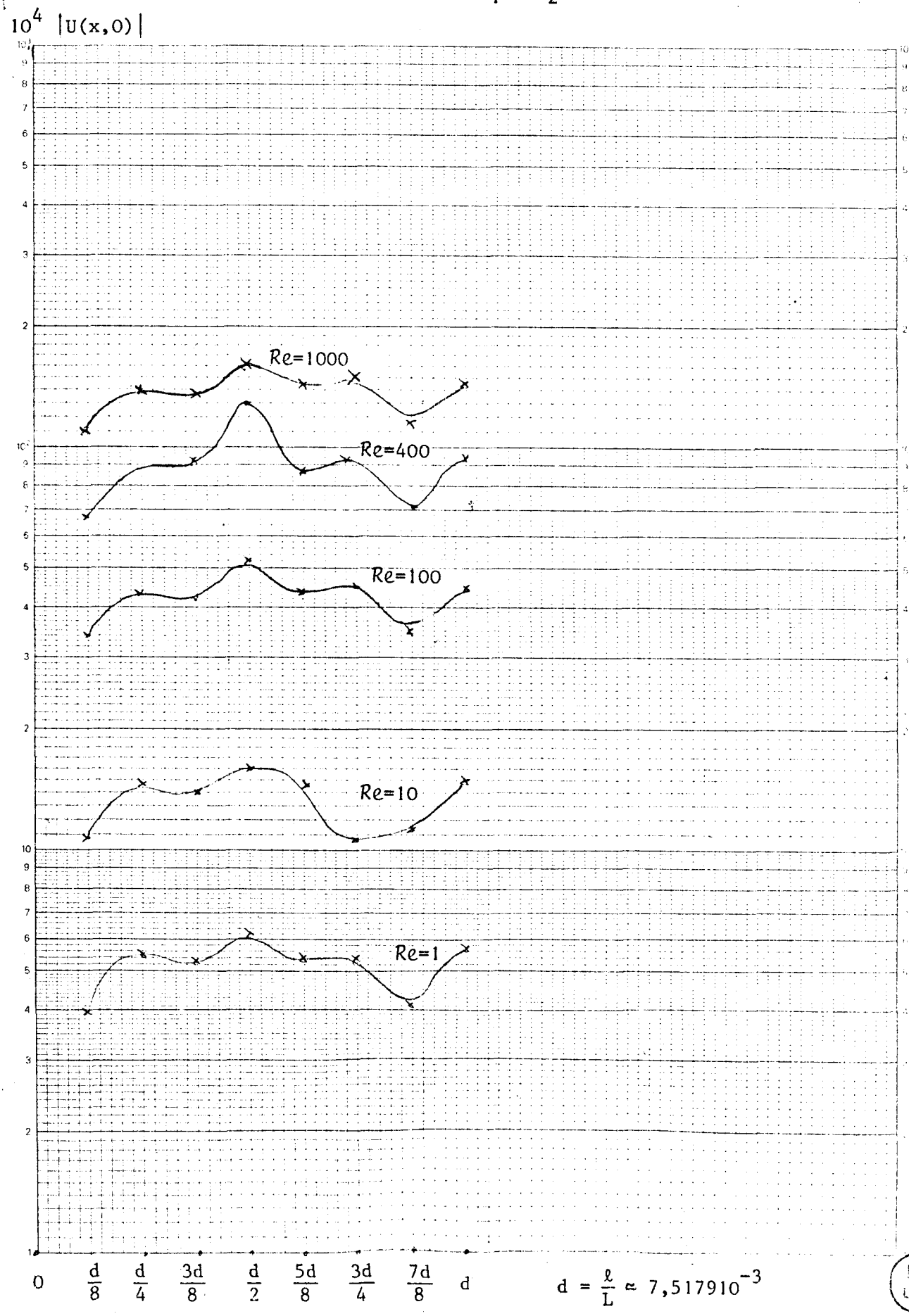
Si on vérifie que, dans l'écoulement avec cavité, le long de MN la vitesse u_2 est très petite à l'égard de u_1, et que, de plus, u_1 est sensiblement constant, alors la modélisation de la cavité par la fonction porte de vitesse sera justifiée. On a donc évalué $\sqrt{u_1^2+u_2^2}$ le long de MN en présence de la cavité (voir planche n°4). Pour cela, comme la vitesse n'est pas définie aux noeuds de la triangulation, on a calculé celle-ci au centre de gravité de chaque triangle. Pour avoir une approximation de la vitesse sur le segment MN, on a considéré les triangles qui sont de part et d'autre de cette ligne, on y a calculé la vitesse au centre de gravité et on a fait la moyenne arithmétique. Par exemple



, par exemple $v_{MM_1} = \frac{1}{2}(v_1+v_2)$

PLANCHE 4

Graphe de $|U| = (u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}}$ le long de MN



$d = \frac{\ell}{L} \simeq 7{,}517910^{-3}$

BIS LILLE

On a constaté que u_2 est tout au plus de l'ordre de 10 % de u_1, ce qui justifie l'approximation $\sqrt{u_1^2+u_2^2} = u_1$. De plus, la planche 4 indique que $\sqrt{u_1^2+u_2^2}$ varie peu le long de MN.

Se trouve ainsi justifiée la modélisation proposée.

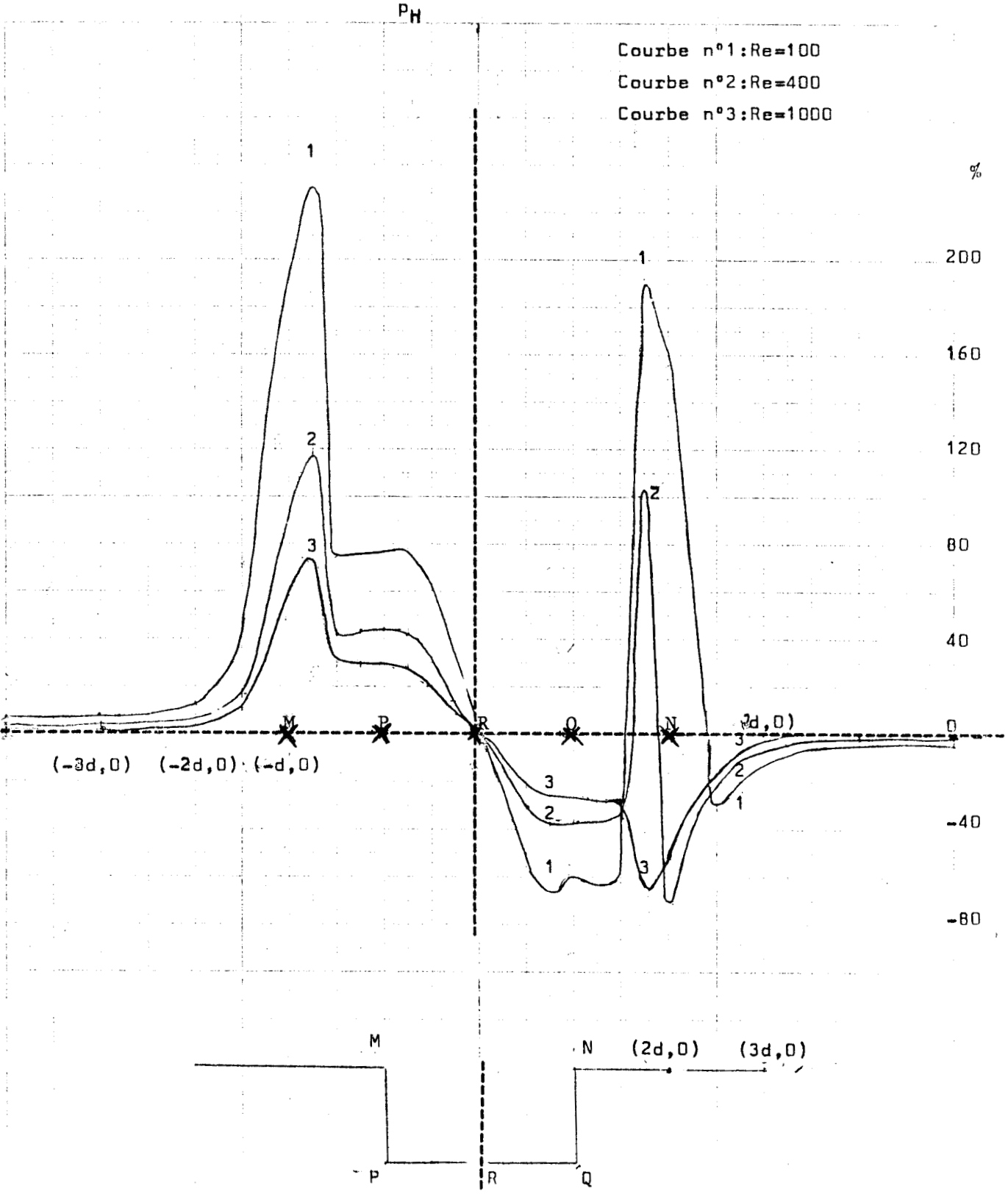
On constate que les valeurs qui ont été utilisées dans les calculs sont trop élevées pour Re = 1 ou 10. Pour Re = 400, la valeur choisie correspont à peu près à celle donnée par la planche n°4. On peut donc comparer les figures 4.8 et 4.14 pour les lignes de courant, 4.25 et 4.34 pour les lignes isotourbillons, 4.49 et 4.59 pour les champs de vecteurs vitesses, 4.77 et 4.88 pour les isobares. Toutes ces courbes sont très voisines, ce qui montre que la modélisation de la cavité par la fonction porte de vitesse est une bonne première approche du problème.

4.6.2.5. Les isobares.

Comme pour les isotourbillons, on constate que les perturbations apportées par la cavité sont sensibles dans un voisinage de la cavité, de longueur d'ordre ℓ en amont et en aval. On remarque des variations très brutales près des coins. Dans une optique expérimentale, on a représenté sur la planche n°5 l'évolution de la variation relative de la pression le long de la paroi. Il apparaît que la perturbation minimale se trouve localisée au voisinage du point R, au milieu de la cavité. En fait, il a été vérifié numériquement que la pression est minimale le long de SR. On observe de plus qu'il y a une dépression en amont de R et une compression en aval, à l'exception toutefois du voisinage du point N.

On en conclut que c'est en R qu'il faut brancher un manomètre pour mesurer la pression la plus voisine de la pression qui existe en S en l'absence de cavité.

Planche n°5: Variations de $\frac{p-p_H}{p_H}$ sur la frontière solide.



On remarque enfin que les variations relatives de la pression diminuent quand le nombre de Reynolds augmente. Du point de vue physique, il s'agit d'une propriété très intéressante car cela signifie que la mesure de pression par l'intermédiaire d'une cavité est d'autant plus précise que le Reynolds est grand. La question est maintenant de savoir si cette propriété subsiste avec des nombres de Reynolds plus grands que ceux considérés ici.

4.6.2.6. Nombres de Reynolds caractéristiques.

Comme L et U_o ne sont pas fixés a priori, le Reynolds Re n'a pas de signification précise pour l'écoulement dans le domaine ABCD considéré. Il est intéressant de donner les valeurs d'un nombre de Reynolds formé avec une longueur et une vitesse caractéristique de l'écoulement, par exemple celles du point A (fig. 5 p. I.8) U_A^* et y_A^*.

D'après la formule (1.20), nous avons :

$$U_A(0,y_{max}) = \frac{U_A^*}{U_o}(0,y^*_{max}) = \frac{-2}{\sqrt{Re}}\,\phi(2\sqrt{Re}\,y_{max}).$$

Soit :

$$R_A = \frac{|U_A^*|\ y_A^*}{\nu} \quad .$$

En combinant les deux égalités précédentes, compte tenu de la définition de Re et ce celle de y_{max} (§.1.3), on obtient :

$$R_A = 2\sqrt{Re}\ \phi\ (4.2\ (\frac{Re}{1000})^{\frac{1}{2}})y_{max} \qquad (4.7.1)$$

D'autre part, l'allure symétrique de l'écoulement (voir par exemple fig. 4.37) suggère que le nombre de Reynolds caractéristique de la cavité R_c est petit. Nous l'avons donc calculé. Pour R_c, on a pris :

$$R_c = \max_{\frac{X}{L} \leq x \leq \frac{X}{L} + \frac{\ell}{L}} |U(x,0)| \; U_o \frac{\ell}{\nu} = Re \max |U| \frac{\ell}{L} \qquad (4.7.2)$$

De la planche 4 et des formules (4.7.1) et (4.7.2), on déduit le tableau 4.8 suivant :

Re	1	10	100	400	1000
max|U|	$6,1110^{-4}$	$1,6610^{-3}$	$5,2310^{-3}$	$1,0410^{-2}$	$1,6410^{-2}$
R_c	$4,5910^{-6}$	$1,2510^{-4}$	$3,9310^{-3}$	$3,1310^{-2}$	$1,2310^{-1}$
R_A	$1,3010^{-3}$	$3,710^{-2}$	0,95	5,29	14,95

Tableau 4.8

Il faut remarquer de plus que les valeurs du rapport $\frac{\ell}{\delta}$ donné ci-dessous montrent que l'on a toujours, dans les cas traités ici, ℓ petit devant δ. Il n'est donc pas étonnant que l'écoulement soit relativement peu perturbé par la cavité.

Comme :

$$\frac{\ell}{\delta} = \frac{\frac{\ell}{y_A^*}}{\frac{\delta}{y_A^*}} = \frac{\frac{1.2}{10.6}}{\frac{\delta}{y_A^*}}$$ (on trouvera page IV.84 les valeurs à donner à ℓ et y_A^*).

du tableau 4.7. on déduit :

Re	1	10	100	400	1000
$\frac{\ell}{\delta}$	$7,510^{-3}$	$1,9810^{-2}$	$6,2810^{-2}$	$1,2510^{-1}$	$1,9810^{-1}$

Tableau 4.9

4.7. Perspectives ouvertes.

Le problème de la prise de pression dans une cavité est très vaste et nous n'avons fait que l'effleurer en commençant par considérer des nombres de Reynolds modérés et le cas de petites cavités, peu perturbatrices. Les enseignements de notre étude ont été développés ci-dessus. La suite de cette recherche pourrait être à court terme :

- Ajuster le paramètre λ(§1.3) pour que U_A^* et U_o coïncident : on pourra ainsi augmenter le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement R_A.
- Faire varier X et ℓ .
- Faire varier le rapport de la profondeur sur la longueur de la cavité.
- Augmenter le nombre de Reynolds Re pour se rapprocher des conditions expérimentales.

Ces objectifs peuvent être abordés immédiatement à la suite de la présente étude. Mais il ne faut pas dissimuler qu'ils vont introduire très probablement des difficultés nouvelles. Ainsi, si ℓ cesse d'être petit à l'égard de X, il faudra modifier le domaine de calcul. Par ailleurs, à nombre de Reynolds plus élevés, l'écoulement au voisinage de la cavité peut devenir instable. De plus le schéma numérique utilisé n'est probablement pas adapté pour des nombres de Reynolds Re plus grands [4].

A plus long terme, on pourra envisager de

- Vérifier ces calculs avec d'autres éléments finis (maillage rectangulaire, maillage non symétrique par rapport à l'axe du maillage, éléments finis décentrés) et avec d'autres inconnues variationnelles (u,v,p...)
- Etudier d'autres géométries
  - . trou circulaire
  - . plusieurs trous successifs
  - . obstacle plan quelconque
  - . obstacle de révolution.

* *

*

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. SCHLICHTING : Boundary Layer Theory,
London - Pergamon Press Ltd (1955)

[2] P. GERMAIN : Mécanique des milieux continus,
Masson - 1962

[3] O.C. ZIENKIEWICS : La méthode des éléments finis,
Edi. science - Paris

[4] M. BORREL : Etude et mise en oeuvre d'une méthode d'éléments finis de résolution des équations de Navier-Stokes.
Thèse de 3ème cycle. Université Pierre et Marie Curie (Paris 1977).

[5] P.G. CIARLET : The Finite Element Method for Elliptic Problems
North Holland - 1978.

[6] J.C. BENAZETH : Thèse de 3ème cycle, Université Pierre et Marie Curie (1978)

[7] BREDIF : Thèse de 3ècme cycle (à paraître sept. 1980).

[8] P.G. CIARLET, R. GLOWINSKI : Dual iterative techniques for solbing a finite element approximation of the biharmonic equation.
Rapport de recherche IRIA - Laboria n°81 - septembre 1974.

[9] P.G. CIARLET, P.A. RAVIART : A mixed finite element method for the biharmonic equation. Proceedings du symposium : Mathematical aspects of Finite elements in Partial Differential Equations,
Mathematics Research Center, University of Visconsin, Madison, April 1.3.1974.

[10] J.A. NITSCHE : L^{∞} convergence of finite Element approximation conference,
Conference sur les éléments finis - Rennes 1975.

[11] V. GIRAULT et P.A. RAVIART : Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations,
Lecture notes in Mathematiques - Springer-Verlag.

[12] R. TEMAM : Navier-Stokes equations,
North Holland, Amsterdam (1977).

[13] M. CROUSEIX et P.A. RAVIART : Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations,
R.A.I. R.O, Anal. Numeri. R - 3 (1973), 33-76.

[14] C. TAYLOR et P. HOOD : A numerical solution of the Navier Stokes equations using the finite element technique,
Comp. Fluids 1 (1973), 73-100.

[15] F. BREZZI, J. RAPPAS et P.A. RAVIART : Finite Element approximation of non linear problems,
Branches of non singular solutions (à paraître).

[16] P.A. RAVIART : On the finite element approximation of non linear problems,
Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Methods in Non Linear Mechanics, Austin, March 26-29, 1979.

[17] M. CROUZEIX : *Etude d'une méthode de linéarisation. Résolution des équations de Stokes stationnaires. Applications aux équations de Navier-Stokes stationnaires,* Cahier de l'IRIA 12 (1974), 131-144.

[18] V. GIRAULT, P.A. RAVIART : *An analysis of a mixed finite element method for the Navier-Stokes equations,* Rapport L.A.N. 189 n°78022

[19] M. FORTIN : *Calcul numérique des écoulements de fluides de Bingham et des fluides newtoniens incompressibles par la méthode des éléments finis,* Thèse - Paris (1972).

[20] OUHAMOU EL MANOUZI : *Certaines méthodes d'éléments finis mixtes pour les écoulements visqueux incompressibles,* Thèse - Paris 1979.

[21] M. VIDRASCOU : Thèse - Paris 1978.

[22] P.A. RAVIART : Cours de l'Ecole d'Eté d'Analyse numérique C.E.A., I.R.I.A, E.D.F, 1979.

[23] G. STRANG : *Approximation in the Finite Element Mehtod* Numerical Mathematics, 19, 81-98 (1972) - Springer-Verlag (1972).

* *

*

ANNEXE 1

TABLE DE HIEMENZ

(tirée de [1]).

$\eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}}\, y$	ϕ	$\frac{d\phi}{d\eta} = \frac{u}{U}$	$\frac{d^2\phi}{d\eta^2}$
0	0	0	1·2326
0·1	0·0060	0·1183	1·1328
0·2	0·0233	0·2266	1·0345
0·3	0·0510	0·3252	0·9386
0·4	0·0881	0·4144	0·8463
0·5	0·1336	0·4946	0·7583
0·6	0·1867	0·5662	0·6751
0·7	0·2466	0·6298	0·5973
0·8	0·3124	0·6859	0·5251
0·9	0·3835	0·7350	0·4586
1·0	0·4592	0·7778	0·3980
1·1	0·5389	0·8149	0·3431
1·2	0·6220	0·8467	0·2937
1·3	0·7081	0·8739	0·2498
1·4	0·7966	0·8968	0·2109
1·5	0·8873	0·9161	0·1769
1·6	0·9798	0·9324	0·1473
1·7	1·0738	0·9457	0·1218
1·8	1·1688	0·9569	0·0999
1·9	1·2650	0·9659	0·0814
2·0	1·3619	0·9732	0·0658
2·2	1·5577	0·9841	0·0420
2·4	1·7552	0·9905	0·0260
2·6	1·9537	0·9946	0·0156
2·8	2·1529	0·9971	0·0091
3·0	2·3525	0·9985	0·0051
3·2	2·5522	0·9992	0·0027
3·4	2·7521	0·9996	0·0019
3·6	2·9520	0·9998	0·0010
3·8	3·1518	0·9999	0·0004
4·0	3·3518	1·0000	0·0002
4·2	3·5518	1·0000	0·0001

BUS LILLE

ANNEXE 2

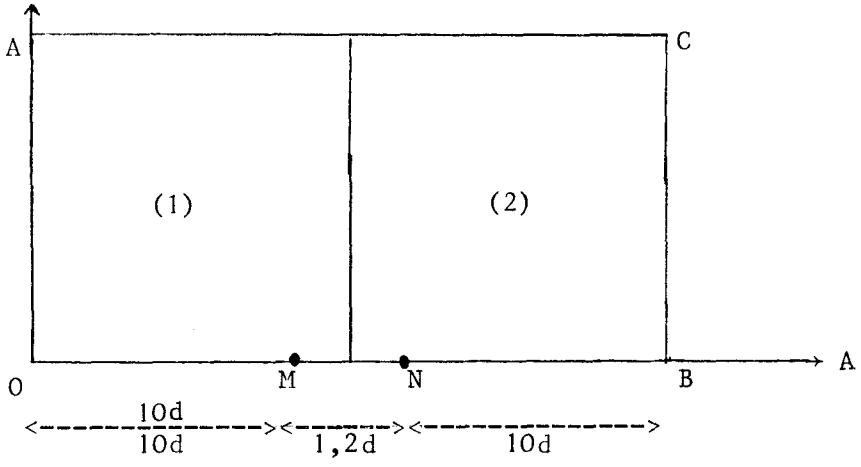
MAILLAGE DU DOMAINE Ω

On désire avoir des résultats précis au voisinage de la cavité. On fera donc un maillage "fin" près de celle-ci. De plus, le maillage sera symétrique par rapport à la droite

$$x = 10{,}6\ d$$

si d est une longueur de référence.

Rappelons que le domaine à mailler est le suivant :



On maille d'abord le sous domaine (2) puis on obtient le maillage complet par symétrie par rapport à la droite

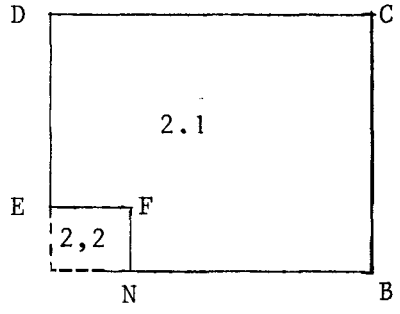
$$x = 10{,}6\ d$$

et par recollement.

Maillage du sous domaine (2).

On va utiliser les modules

- TRIAUT
- RECØL.



Sur (2.1), on choisit les coordonnées des sommets des triangles frontaliers

- équidistantes sur EF, FN, BC, CD
- non équidistantes sur NB, DE

ceci pour pouvoir passer d'une manière "régulière" de petits triangles (près de la cavité) à de grands triangles (loin de la cavité).

Pour cela, on a écrit le programme CØCØI, qui permet de calculer des coordonnées de sommets de triangles frontaliers, équidistantes ou non, sur n'importe quel domaine connexe, possédant une frontière formée de segments de droites perpendiculaires.

Sur (2.2), on choisit des coordonnées de triangles frontaliers équidistantes et on utilise TRIAUT. On utilise ensuite le module RECØL pour recoller (2.1) et (2.2). On obtient ainsi la moitié du maillage. On utilise ensuite SYMDR pour obtenir l'autre partie du maillage et RECOL pour l'obtention du maillage complet.

La S.D. MEFI.

Les fichiers $(MEFIi)_{i=1}^{3}$ ont la même structure (cf. code MEFISTO). Le fichier, créé sur disque ou bande magnétique comprend 2 enregistrements logiques :

- Le premier contient en variables entières ou logiques de longueur 4 octets, les caractéristiques de la triangulation :

TITRE du travail en 80 caractères au plus, cadrés sur les multiples de 20,+ 1.

NCI nombre de courbes internes sur lesquelles le maillage doit s'appuyer

NFC nombre total de courbes internes et frontalières

NDI nombre de droites ou lignes brisées sur lesquelles le maillage doit s'appuyer, cumulé à NFC

NF nombre de "frontières informatiques" (cf. remarque 1)

NCCF nombre de composantes connexes de la frontière du domaine

NE nombre d'éléments

NEF nombre d'éléments frontaliers

NTRI nombre de triangles

NQUA nombre de quadrilatères

NDSD nombre de sous-domaines (0 évite le stockage d'un tableau de NE mots)

NS nombre de sommets

NSF nombre de sommets frontaliers

NP nombre total de points d'interpolation ou noeuds

N1 nombre de noeuds entre les sommets de chaque arête

ISET nombre de noeuds intérieurs à chaque triangle

ISEQ nombre de noeuds intérieurs à chaque quadrilatère

SANSOM est. TRUE. si les sommets ne sont pas des points d'interpolation, .FALSE. dans le cas contraire

NONIPL est . TRUE. si les points n'ont pas été renumérotés,.FALSE. dans le cas contraire.

Un noeud est un point support de degrés de liberté généralisés c'est-à-dire un point où une interpolation est partiellement définie. Par suite, un sommet est un noeud ou non.

Le CØMMØN / MAILLA / TITRE, NCI, ..., NØNIPL, présent dans tous les modules permet de récupérer ces valeurs au niveau du programme principal.

- Le second comprend 3 ou 4 tableaux :

ITQ décrit la numérotation globale des noeuds, ainsi que la numérotation locale pour chaque élément (triangle ou quadrilatère) et les valeurs des injections i_T ; sa longueur est égale à :

(3(N1+1) + ISET) NTRI + (4(N1+1) + ISEQ)NQUA.

Le numéro n du premier sommet, de chaque élément est codé comme suit :

n si 1'élément est un quadrilatère interne

n + 1073741824 si 1'élément est un quadrilatère frontalier

- n si 1'élément est un triangle interne

- n-1073741824 si 1'élément est un triangle frontalier.

Un élément est dit frontalier dès que 1'un de ses sommets 1'est.

Le décodage du numéro du premier sommet de chaque élément détermine son type et sa position. Nous n'avons pas utilisé cette possibilité de mélanger triangles et quadrilatères.

Si 1'élément est frontalier, deux mots-mémoire lui sont associés, constituant le tableau :

NFAS Chaque couple de mots contenant, en base 256 (= 2^8) le numéro des frontières des 4 arêtes puis des 4 sommets.

Le tableau NFAS nécessite 2 * NEF mots-mémoire.

CØØRD Comprend pour chaque sommet son abscisse et son ordonnée ; sa dimension est de 2 * NS mots-mémoire.

IPLACE existe seulement après renumérotation des noeuds d'interpolation (NONIPL = .FALSE.) et si les sommets supportent des degrés de liberté (SANSØM, .FALSE.).

Ce tableau permet de retrouver les coordonnées des sommets ; sa longueur est égale à NP mots-mémoire.

ANNEXE 3

BROCHURE D'UTILISATION DU MODULE NSPSOM(*)

(version : 31/12/1979)

par

Jacques PHILIPP

(*) Ecrit et programmé par Michel BORREL (O.N.E.R.A)

et modifié pour son utilisation par l'auteur.

S O M M A I R E

Cette brochure comprend

- Une introduction.

1ère partie : BUT ET LIMITES D'UTILISATION.

1.1. BUT.

1.2. LIMITES D'UTILISATION.

2ème partie : MISE EN OEUVRE.

3ème partie : PARAMETRES IMPORTANTS ET RESULTATS NUMERIQUES.

4ème partie : EXEMPLES D'UTILISATION

- Une bibliographie.
- Une table des matières.

INTRODUCTION

Le but de cette brochure est d'expliquer comment utiliser le module NSPSOM, programmé par M. BORREL. Ce module, compatible avec la bibliothèque MODULEF, *) en utilise quelques sous-programmes. Il résoud les équations de Navier-Stokes, dans le plan. On suppose le fluide visqueux et incompressible. L'écoulement est plan, stationnaire. La formulation utilisée est la formulation (ω,ψ). Ce problème est un problème difficile à résoudre. De même, le module NSPSOM peut paraître difficile d'utilisation. En fait, il n'en est rien;il "suffit" d'ajuster correctement les deux ou trois paramètres essentiels à la convergence (voir partie 3).

Cette brochure est divisée en quatre parties.

1. But et limites d'utilisation du Module NSPSOM.
2. Mise en oeuvre.
3. Les paramètres importants.
4. Exemples d'utilisations.

Il faut souligner que si le module NSPSOM est compatible avec MODULEF, il n'en respecte pas toujours les règles. Ce fait sera signalé à chaque fois par (**).

Rem. : La version présentée dans cette brochure diffère un peu, dans la forme de la version originale : différents modes d'initialisation ont été introduits Toutefois, seul, le sous programme NSPSOM a été modifié; tous les autres sous programmes restent inchangés.

*) Version 3.0. - IRIS 80.

1ère partie

BUT ET LIMITES D'UTILISATION.

NOTATIONS

$p = p(x,y)$ est la pression en tout point du fluide.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x,y) \\ u_2(x,y) \end{pmatrix}$ est le vecteur vitesse en tout point du fluide.

Re est le nombre sans dimension :

$$\frac{U_o L}{\nu} \quad \text{(nombre de Reynolds)}$$

avec :

U_o, la vitesse de référence,

L, la longueur de référence,

ν, la viscosité cinématique du fluide.

Δ désigne l'opérateur Laplacien.

1.1. BUT

Il s'agit de résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes mises sous forme adimensionnelle . On considère un fluide visqueux, isovolume. L'écoulement est plan, laminaire, stationnaire. On a donc :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{Re}\,\Delta u_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \cdot u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \cdot u_2 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{1}{Re}\,\Delta u_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \cdot u_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial y} \cdot u_2 \end{cases}$$

On se place dans un domaine borné, $\Omega \subset R^2$, de frontière $\partial\Omega = \Gamma$.

Pour la résolution du système (1.1), on utilise la formulation (ω,ψ). Plus précisément, posons :

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{u} \quad .$$

Le fluide étant isovolume, on sait que :

$\exists\ \psi(x,y)$ fonction de courant telle que :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_2 = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \end{cases}$$

On rappelle que les variables physiques (avec un astérisque) sont reliées aux variables adimensionnées par les formules :

$$\begin{cases} x^* = Lx \ ; \ y^* = L\,y \ ; \\ u_i^* = U_o\, u_i \qquad i = 1,\ 2 \\ \psi^* = U_o\, L\, \psi \\ \omega^* = \dfrac{U_o}{L}\,\omega \end{cases}$$

On montre (voir [1] p. 273) que l'on peut écrire (1.1) sous la forme :

$$\begin{cases} -\Delta\,\omega + Re\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\,\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\,\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\right) = 0 \\ -\Delta\,\psi = \omega \end{cases}$$

On suppose que :

$$\Gamma = \Gamma_o \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

et que :

$$\begin{cases} \psi \text{ et } \dfrac{\partial \psi}{\partial n} \text{ sont connues sur } \Gamma_o \\ \psi \text{ et } \omega_x \text{ sont connues sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial n} \text{et } \dfrac{\partial \omega}{\partial n} \text{ sont connues sur } \Gamma_2 \text{ (non programmé actuellement)} \end{cases}$$

L'algorithme de résolution est le suivant :

ITEMAX

ITRMAX (IOPT=1)

ITMAX

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \omega_h^n + Re\left(\dfrac{\partial \psi_h^{\ell}}{\partial y}\dfrac{\partial \omega_h^n}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi_h^{\ell}}{\partial x}\dfrac{\partial \omega_h^n}{\partial y}\right) = 0 \\ \omega_h^n / \Gamma = \lambda_h^n \; ; \quad \omega_h^n / \Gamma_1 \text{ et } \dfrac{\partial \omega_h^n}{\partial n} / \Gamma_2 \text{ imposés} \end{array} \right. \quad \text{itération d'Uzawa}$$

$$\omega_h^n = \alpha\, \omega_h^n + (1-\alpha)\, \omega_h^{n-1} \quad \text{(relaxation)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \psi_h^n = \omega_h^n \; . \\ \psi_h^n / \Gamma_o \cup \Gamma_1 \; ; \quad \dfrac{\partial \psi_h^n}{\partial n} / \Gamma_2 \text{ imposés} \end{array} \right.$$

$$\lambda_h^{n+1} = \lambda_h^n + \sigma \frac{\partial \psi_h^n}{\partial n} / \Gamma_o$$

$$\psi_h^{\ell+1} = \gamma\, \psi_h^n + (1-\gamma)\, \psi_h^{\ell} \quad \text{itération linéaire}$$

où $(\omega_h, \tilde{\psi}_h)$ sont les P_2-interpolés de Lagrange de (ω, ψ).

Il est basé :

a) Sur une linéarisation par une méthode de point fixe avec relaxation (itération externe).

b) Sur une méthode de dualisation (de la condition aux limites portant sur $\dfrac{\partial \psi}{\partial n}$) pour la résolution de l'itération interne d'UZAWA.

c) Pour la résolution du système linéaire en ω,

- soit sur des itérations de points fixes avec sous relaxation si on met le terme convectif au second membre; on n'inverse alors que des Laplaciens (IOPT = 1).
- Soit sur une résolution directe avec CROUT (IOPT=2).

Cette méthode et sa justification sont détaillées dans [2].

1.2. LIMITES D'UTILISATION

1.2.1. Eléments finis.

Actuellement, on utilise des éléments finis P_2 (droits ou courbes). On utilise pour cela la "propriété d'invariance du terme convectif". Plus précisément, on a :

$$\int_T P_i \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial x} \frac{\partial \omega_h}{\partial y} - \frac{\partial \psi_h}{\partial y} \frac{\partial \omega_h}{\partial x} \right) dx\, dy = \int_{\hat{T}} \hat{P}_i \left(\frac{\partial \hat{\psi}_h}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\omega}_h}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial \hat{\psi}_h}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\omega}_h}{\partial \hat{x}} \right) d\hat{x}\, d\hat{y}$$

(voir [2] p. 63)

avec :

T : élément courant (P_2)

$\hat{T}$: élément de référence (P_2) $\quad T = F_T(\hat{T})$, F_T , affine

$(P_i)_{i=1}^{6}$: polynômes de base de $V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) / \forall T \in \mathcal{T}_h ; v_h/_T \in P_2(T)\}$

(ψ_h, ω_h) les interpolés de Lagrange de (ψ, ω).

Il est clair que l'on pourrait utiliser d'autres éléments finis en changeant les sous-programmes correspondants :

- CONVP2 (calcul du terme convectif).
- P2RLAG (interpolation P_2-Lagrange).
- INIVPO (initialisation de ω, ψ, $\frac{\partial \psi}{\partial n}$)

. Une étude pour adjoindre un décentrement est faite actuellement (cf. M. BREDIF, Thèse à venir et Université de Lille).

1.2.2. NOMBRE DE REYNOLDS

Actuellement

$$0 \lesssim Re \lesssim 1000$$

Plus le nombre de Reynolds augmente, plus la convergence est lente. Il semble qu'une étude d'accélération de convergence s'impose. A ce propos, il est important de souligner qu'avant de lancer un programme, une étude détaillée des paramètres numériques est indispensable (en particulier pour σ , constante type Uzawa); en effet, si les constantes sont "mauvaises" la vitesse de convergence peut être divisée par ... 100 (ou plus) (voir 3e partie pour les détails).

1.2.3. ENCOMBREMENT EN MEMOIRE CENTRALE ET TEMPS DE CALCUL.

L'encombrement est important si toutes les matrices sont en mémoire centrale. On gagne alors sur le temps C.P.U. (beaucoup moins d'"I.O. calls"). Par contre, si une seule des matrices est en mémoire centrale, le temps C.P.U. est beaucoup plus grand (voir 2e partie).

2e partie :

MISE EN OEUVRE

2.1. DESCRIPTION DES DIFFERENTES ETAPES DU CALCUL ET STRUCTURES DE DONNEES A FOURNIR POUR LE CALCUL.

2.1.1. Maillage du domaine Ω .

On l'effectue à partir de la bibliothèque MEFMEFI [3]

2.1.2. Formation des matrices.

2.1.2.1. Méthode mathématique de formation des matrices, (voir [2]) chapitre 2 p. 51).

2.1.2.2. Description des différentes structures de données (S.D.)à fournir pour le calcul. Voir [7], puis

Appel du module COMACO [4] [11],	S.D.	MAIL et COOR	voir	partie	4-listing	n°1
Appel du module CALMAI	S.D.	MPLR	"	"	"	n°2
Appel du module DIRICH	S.D.	TAE	"	"	"	n°3

(on peut aussi utiliser le module THELAS [8], [10].

Appel du module COBDCL [5], [9]	S.D.	BDCL	"	"	"	n°4
Appel du module ACCMCA [6]	S.D.	MUA (niveau 1)	"	"	"	n°5
Appel du module ASMB [6]	S.D.	B (niveau 1)	"	"	"	n°6
Appel du module CLCHCR [6]	S.D.	MUA (niveau 2)	"	"	"	n°7
	S.D.	B (niveau 2)	"	"	"	n°8
Appel du module PREPAC [6]	S.D.	MUA (niveau 3)	"	"	"	n°9
Appel du module CHOLES [6]	S.D.	MUA (niveau 3)	"	"	"	n°10

Eventuellement (et pour l'utilisation de CROUT [6]) il faut symétriser la matrice et construire la S.D. MUA (niveau 4). listing n° 11.

Eventuellement, on peut utiliser les modules TABVIS et CRBNIV [12] pour visualiser les résultats obtenus.(Lignes iso...).

2.2. LE PROGRAMME D'APPEL.

2.2.1. Le Programme principal.

Les variables précisées des communs suivants doivent, si ce n'est déjà fait, être initialisées.

* COMMON/TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,N(1020)

* COMMON/TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),

% LONREE,IMPRE,IMPLEC,INILEC,FILLER

IM première adresse libre derrière les tableaux actifs dans M, super tableau.

LM nombre de mots mémoire du super tableau M .

NOMTAB nombre de tableaux actifs dans M .

NNN = { 0 pas d'impression des adressages des tableaux dans M .
      { 1 impression de ces adressages.

NTITRE titre en 20 mots de 4 caractères.

NDATE date du jour en 2 mots de 4 caractères.

NOMCRE nom de l'utilisateur en 6 mots de 4 caractères.

LONREE = { 1 version simple précision
         { 2 version double précision (non programmée actuellemment

IMPRE, paramètre d'impression

= 0 aucune impression

= 1 . impression du nom du module.

. - des valeurs d'initialisations de (ω_o, ψ_o) et des résultats (ω,ψ) pour les 15 premiers noeuds.

. - des valeurs des poids.

= 2 . On imprime les 60 premières valeurs de (ω_o,ψ_o) et de (ω,ψ) .

= 3 . On imprime les 150 premières valeurs de (ω_o,ψ_o) et de (ω,ψ).

≥ 4 . On imprime tous les résultats obtenus.

* DIMENSION M (LM), XM (LM)

si ce n'est déjà fait.

M super tableau de LM mots

LM ≥ MMAIL + MCOOR + MMPLR + MMUA + MB + ε

où :

MMAIL et MCOOR sont majorés dans COMACO et imprimés à la suite de son exécution

MMPLR est majoré dans CALMAI

$$MMUA = \begin{cases} = MMUA1 \text{ si } TMC=F \ ; \ IOPT=1 \\ = MMUA1 + MMUA2 + MMUA3 \text{ si } TMC = T \ ; \ IOPT = 1 \\ = MMUA1 + MMUA4 \text{ si } TMC = F; \ I\phi PT = 2 \\ = MMUA1 + MMUA2 + MMUA3 + MMUA4 \text{ si } TMC=T, \ IOPT = 2 \end{cases}$$

où : . MMUAI, I = 1,4 est la longueur de la matrice A de niveau I.

. TMC : variable logique indiquant si les S.D. MUA sont simultanément en M.C.(*)(TMC=T) ou non (TMC=F).

. $IOPT = \begin{cases} 1 & \text{si résolution itérative en } \omega \text{ (cf. 1.1.c)} \\ 2 & \text{si résolution directe par CROUT en } \omega \end{cases}$

Rem. Dans le cas où IOPT = 2, il faut construire la S.D. MUA de niveau 4.

MB est majoré dans le module ASMB et imprimé à la suite de son exécution.

$$\varepsilon = 2 * LNGAA + 3* (LNGA + NOE) + LNDIR$$

où : . LNGA = nombre total de points sur la frontière solide (frontière UZAWA)

. LNGAA ($\leq$LNGA) = nombre total de points de la frontière solide où $\frac{\partial \psi}{\partial n} \neq 0$

. LNDIR = NSF-LNGA = nombre de points sur la frontière de type DIRICHLET (NSF = nombre total de noeuds frontaliers).

. NOE = nombre de noeuds du maillage complet.

Rem. Pour la signification "informatique" de LNGA,LNGAA,LNDIR, voir le listing du sous programme INIPO.

* DIMENSION NFPSIE(NPR),NIVPSIE(NPR),NFOME(NPR),NIVOME(NPR)

* DIMENSION NFPSS(NPR),NIVPSS(NPR),NFOMS(NPR),NIVOMS(NPR)

(*) Mémoire centrale.

où . NPR : nombre d'appel successif du sous programme de résolution des équations de Navier Stokes.

(voir §3.3,partie 3).

. NFPSIE(I): numéro du fichier d'entrée PSI(I), I=I,NPR

. NIVPSIE(I) : son numéro de niveau.

. NFOME(I) : numéro du fichier d'entrée OMEGA(I), I = 1,NPR

. NIVOM(I) : son numéro de niveau

. NFPSS(I) : numéro du fichier de sortie PSI(I), I = 1,NPR

. NIVPSS(I) : son numéro de niveau

. NFOMS(I) : numéro du fichier de sortie OMEGA(I), I = 1,NPR

. NIVOMS(I) : son numéro de niveau.

Rem.: pour bien comprendre la signification de ces huit tableaux, voir ci-dessous l'utilisation des tableaux INIT, INIP

* DIMENSION RE(NPR), UPS(LNGAA*NPR), P(LNGA)

où . RE : tableau où se trouvent les différentes valeurs du nombre de Reynolds

(RE(I), I = 1,NPR).

. UPS : tableau où se trouvent les différentes valeurs de $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ (voir le listing d'appel de NSPSOM : les valeurs sont rentrées colonnes par colonnes).

. P : tableaux des valeurs des poids pour l'étape d'Uzawa : dans la version actuelle, les valeurs sont rentrées directement. On peut aussi utiliser DIRICH pour les calculer.

* LOGICAL TMC,INIT(NPR),INIP(NPR)

2.2.1.1. Utilisation de (INIT(I), I=1,NPR),(INIP(I), I=1, NPR)

. INIT, INIP tableaux de logique indiquant le mode d'initialisation de $(\omega, \bar{\psi})$.

A] Cas particulier : I = 1.

3 cas :

1°) INIT(1) = T; INIP(1) = T

On aura : $\omega = \psi = 0$ sauf sur le bord où on aura $\omega = \omega_o$; $\psi = \psi_o$; $\frac{\partial \psi}{\partial n} = g$ (ω_o, ψ_o , g sont calculés pour le sous programme INIVPO cf. § 2.3).

2°) INIT(1) = T; INIP(1) = F

On initialise (ω,ψ) par les valeurs trouvées à un calcul précédent (avec un nombre de Reynolds différent par exemple) sauf sur le bord (appel de INIVPO). Dans ce cas, on lit les valeurs de (ω,ψ) sur les fichiers de numéro NFPSIE(I), NIVPSIE(I) ($\neq$0).

3°) INIT(1) = F; INIP(1) = T

Initialisation de (ω,ψ) par les valeurs trouvée à un calcul précédent.

4°) INIT(I) = INIP(I) = F

Même cas que le 2°.

B) Pour $2 \leq I \leq NPR$

2 cas :

1°) INIT(I) = T : réinitialisation de (ω,ψ) on a 3 options possibles.

1.1. On réinitialise avec les valeurs trouvées par I = 1.

On utilise cette option quand on veut déterminer la constante σ d'Uzawa (voir 3e partie, § 3.1). Tous les paramètres sont inchangés sauf σ . Dans ce cas-ci, INIP(I) est inopérant.

1.2. On change $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ et/ ou Re

Rem.: si Re(I+1) $\neq$ Re(I), l'initialisation se fait par INIVPO (§ 2.3).

On a encore 2 options : INIP(I) = $\begin{cases} T & \text{voir A1°)} \\ F & \text{voir A2°)} \end{cases}$

2°) INIT(I) = F

2 options

2.1. NFPSS(I) = NFPSIE(I+1)

On itère directement avec les valeurs que l'on vient de trouver (INIP(I) est inopérant).

2.2. Relecture sur les fichiers de numéros NFOME(I+1) et NIVOME(I+1) des valeurs trouvées à un calcul précédent. (INIP(I) inopérant)

2.2.1.2. Les fichiers de sortie (S.D.B) (**)

Ces fichiers sont des fichiers de sauvegarde des résultats. Il faut comprendre qu'à priori, on ne connait pas la vitesse de convergence de la méthode, donc le nombre d'itérations nécessaires à la convergence. Pour éviter de perdre les résultats (par manque de temps), il est judicieux de stocker sur fichiers les résultats intermédiaires; si on a manqué de temps (à l'étape J par exemple on pert ainsi seulement le résultat des itérations comprise entre J-1 et J . Si on ne veut pas stoker de résultats intermédiaires, il suffit d'écrire que NFPSS(I) = NFOMS(I) = 0 .

Rem.: 1°) On peut très bien avoir : NFPSIE(I)=NFPSS(I) I=1.NPR

* NFOME(I)=NFOMS(I) I=1,NPR

Ces fichiers d'entrée seront écrasés.

2°) Les fichiers (ω_h, ψ_h) sont des S.D.B.

$\forall$ I, I = 1,NPR, ces structures sont initialisées, lues (ou non en entrée, copiées (ou non) en sortie et tuées. (Traitement interdit dans MODULEF).

* EQUIVALENCE (M(1), XM(1)), (M(1),D)

* Instructions d'appel des modules antérieurs.

* CALL NSPSOM(M,XM,VTG,INIT,NPR,TMC,NFMAIL,NIVMAI,

% NFCOOR,NIVCOO,NFMPLR,NIVMPL,NFP,NIVP,NFPSIE,

% NIVPSIE,NFOME,NIVOME,NFMAT1,NIMAT1,NFMAT2,NIMAT2,

% NFMAT3,NIMAT3,IOPT,NFMAT4,NIMAT4,ITEX,NFPSS,

% NIVPSS,NFOMS,NIVOMS,NFIC1,RE,UPS,P,LNGAA,INIP)

avec les paramètres d'entrée :

. M,XM, supers tableaux de travail

. VTG, valeur très grande de blocage

. INIT voir ci-dessus

. NPR, nombre d'appels successifs au programme de résolution des équations de Navier Stokes (NSIT2R).

. TMC voir ci-dessus

. NFMAIL > 0 numéro du fichier de la S.D. MAIL

. NIVMAI > 0 " de niveau " " " "

. NFCOOR > 0 " du fichier " " " COOR

. NIVCOO > 0 " de niveau " " " "

. NFMPLR " du fichier " " " MPLR

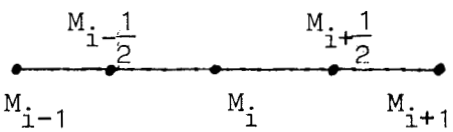
. NIVMPL " de niveau " " " "

. NFP " du fichier " " " B(poids)

Si NFP > 0 lecture des poids sur fichiers.

NFP = 0 on les rentre directement dans le programme.

Rem.: on rappelle que les poids sont donnés par les formules suivantes :



Ces points M_i et $M_{i+\frac{1}{2}}$ décrivent tous les noeuds de la triangulation relatifs à la frontière solide. On a les relations :

$$\text{Poids}(i) = \frac{6}{|M_{i-1}\,M_i| + |M_i M_{i+1}|} \qquad \forall\, i = 1, \text{LNGA}$$

$$\text{Poids}\,(i+\tfrac{1}{2}) = \frac{1.5}{|M_i\,M_{i+1}|} \qquad \forall\, i = 1, \text{LNGA}$$

avec $|M_i\,M_{i+1}|^2 = (X_{i+1}-X_i)^2 + (Y_{i+1}-Y_i)^2$.

Si (X_i, Y_i) sont les coordonnées du point M_i.

. NIVP numéro de niveau de la S.D.B. (poids)

. NFPSIE voir ci-dessus

. NIVPSIE " " "

. NFOME " " "

. NIVOME voir ci-dessus

. NFMAT1 numéro du fichier de la S.D. MUA1

. NIMAT1 " de niveau " " " "

. NFMAT2 " du fichier " " " MUA2

. NIMAT2 " de niveau " " " "

. NFMAT3 " du fichier " " " MUA3

. NIMAT3 " de niveau " " " "

. IOPT voir ci-dessus

. NFMAT4 numéro du fichier de la S.D. MUA4

. NIMAT4 numéro de niveau " " " "

. ITEX numéro de la première itération extérieure

. NFPSS voir ci-dessus

. NIVPSS " " "

. NFOMS voir ci-dessus

. NIVOMS " " "

(**) . NFIC1 : numéro du fichier contenant en 2 enregistrements

LNGA,LNDIR (1er enregistrement)

(M(IANGA+K-I), K=1,LNGA),(M(IANDIR+K-1),K=1,LNDIR))

Les numéros des noeuds de la frontière solide.

Les numéros des noeuds de la frontière type Dirichlet (ordre quelconque).

Pour plus de précision sur les type de frontière, voir listing INIPO (§ 2.3)

. RE voir ci-dessus

. UPS voir ci-dessus

. P voir ci-dessus

. LNGAA voir ci-dessus

. INIP voir ci-dessus

* STOP

* END

```
      SUBROUTINE INIPO(NO,NOFR,NREF,X,Y,M1,IANGAA,LNGAA,RE,UPS,PSI,VTOM)
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C  SP A FOURNIR PAR L'UTILISATEUR :
C  -------------------------------
C  BUT :
C  -----
C      INITIALISATION SELON LE TYPE DE FRONTIERE
C  ---------------------------------
C          PARAMETRES D'ENTREE :
C                  NO    : NUMERO DU NOEUD FRONTIERE
C                  NOFR : NUMERO DU TYPE DE FRONTIERE (1,2,3,4)
C                  NREF : NUMERO DE REFERENCE DE LA FRNTIERE
C                  X,Y : COORDONNEES DU NOEUD
C                  M1   : SUPER TABLEAU DE TRAVAIL
C                  IANGAA:ADRESSE DES POINTS OU DPSI/DN NE 0
C                  LNGAA:LEURS NOMBRE
C                  RE   :NOMBRE DE REYNOLDS
C                  UPS : VALEURS DE DPSI/DN QUAND DPSI/DN NE 0
C          PARAMETRES DE SORTIE :
C                  PSI,VTOM : VALEURS QUE L'ON VEUX ATTRIBUEES
C                  POUR LE NOEUD DEFINI CI-DESSUS ,AUX QUANTITES :
C                    : PSI=? (OMEGA=0,DPSI/DN=0)          (NOFR=1)
C                    : PSI=? ; DPSI/DN=? (OMEGA=0)        (NOFR=2)
C                    : PSI=? ; OMEGA=?                    (NOFR=3)
C                    : (DPSI/DN=0 ; DOMEGA/DN=0)          (NOFR=4)
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C---------------------------------------------------------------------------
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C  PROGRAMMEUR : J. PHILIPP                    FAC LILLE (JUIN 1979)
C---------------------------------------------------------------------------
      COMMON /TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NX(1020)
      DIMENSION M1(1)
      DIMENSION UPS(1)
C---------------------------------------------------------------------------
C
C  CAS NREF=1,NOFR=2
C
 8    PSI=0.
      VTOM=UPS(I)
      NOFR=NOF
      RETURN
C---------------------------------------------------------------------------
C
C  CAS:(NREF=1,NOFR=1) OU(NREF=4,NOFR=3)
C
 4    IF(NREF.EQ.1) GO TO 20
      NOF=3
      IF (NOF.NE.NOFR) CALL STOPNIP(NOF,NOFR,NREF)
 20   PSI=0.
      VTOM=0.
      NOFR=NOF
      RETURN
C---------------------------------------------------------------------------
257   PRINT 258
258   FORMAT(' ETA ETANT SUPERIEUR A 4,2,L'EXECUTION DE INIPO EST STOPPE
     %E')
      STOP
 1    PRINT 100
 100  FORMAT(' CALCUL IMPOSSIBLE AVEC REYNOLDS EGAL A ZERO,REVOIR LE CAL
     1CUL AVEC UN NOUVEAU NOMBRE DE REYNOLDS')
      STOP
      END
NB CARTES :     00145
***SYSTEM MESSAGE ALP ** OPL LI  *** DEVICE CR01 *** VOLUME   NONE * I/OCALL      146
```

2.3. SOUS-PROGRAMMES SUPPLEMENTAIRE A FOURNIR PAR L'UTILISATEUR

SUBROUTINE INIPO(NQ,NOFR,NREF,XY, M1, IANGAA, LNGAA, RE,
% UPS, PSI, VTOM).

Voir ci-contre. Exemple de sous programme INIPO pour les valeurs des différents paramètres d'appel.

2.4. LES CARTES DONNEES A FOURNIR POUR LE CALCUL.

1ère carte Format I6

. N = nombre de points où $\frac{\partial \psi}{\partial n} \neq 0$ (N = LNGAA)

2ème carte (Format (13 I6))

. (NUM(I), I = 1,N) = les numéros des points correspondants.

Boucle 1 à NPR

3ème carte(s) Format (EI5.7)

. SIGMA = constante d'Uzawa (cf. § 3.1).

4ème carte(s) Format (5 E15.7)

. DIVRG = paramètre de divergence, agissant si :

$$\max_{1 \leq I \leq NP} \text{ABS(PSI(I))} > \text{DIVRG}$$ (voir § 3.4)

. EPS = paramètre limitant le nombre d'itérations externes, si variation externe en PSI ≤ EPS (convergence) . Voir § 3.4.

. SEUIL = paramètre limitant le nombre d'itérations d'Uzawa, si variation absolue en GAMA ≤ SEUIL (convergence) (étape d'Uzawa) (§ 3.4).

. RELAX = paramètres de relaxation en PSI externe (§ 3.5).

. ROLAX = paramètres de relaxation en OMEGA (§ 3.5).

Si IOPT = 2, aller en (1).

5ème carte(s) Format(6I12)

. ITEX = paramètre limitant le nombre d'itérations externes si nombre d'Iterations externes ≥ ITEX (cf. § 3.3)

. ITIMAX = paramètre limitant le nombre d'itérations interne si nombre d'itération d'Uzawa ≥ ITIMAX (cf. § 3.3)

. ITRMAX = paramètre limitant le nombre d'itérations de point fixe du problème en OMEGA (cf. § 3.3).

Fin de la boucle.

Fin des cartes données.

(1) 5ème carte(s) Format (E 15.7)

. PIVOT = paramètre de CROUT= 1 E-6 en général voir [6].

6ème carte(s) Format (6 I12)

. ITEX = cf. ci-dessus.

. ITIMAX = cf. ci-dessus.

. NENTRE = paramètre de CROUT voir [6]

. IMPRE = " " " " "

Fin de la boucle

Fin des cartes données.

Pour les autres données, voir le listing du programme d'appel de NSPSOM, p. 67).

2.5. LISTE DES BIBLIOTHEQUES NECESSAIRES ET DES SOUS PROGRAMMES APPELES

. Les bibliothèques

- . RIGEL (contenant les S.P. nécessaires à NSPSOM)
- . MEFTAELBIBL
- . MEFRESRBIBL
- . MEFUTSDBIBL
- . MEFUTILBIBL

. Les sous programmes

ADRESS, APBEBR, CONVP2, COPISD, CRMC3R, DRCH1R, ECB,

INIPO, INIVPO, NSIT2R, NSPSOM, RSTSDE, TUERSD.

3ème partie

PARAMETRES IMPORTANTS

ET

RESULTATS NUMERIQUES

3.1. LA CONSTANTE D'UZAWA

Une bonne détermination de cette constante est essentielle à une bonne convergence de la méthode. Elle est fonction du maillage, du nombre de Reynolds. Il est à priori impossible de cerner une bonne valeur de cette constante; il faut donc procéder par tatonnement. Le mieux est de faire une suite d'essais avec :

$$Re = 1 \; ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

ITEMAX = 3; ITIMAX = 10

σ = 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, ...

La constante optimale est la plus "grande" possible (mais pas trop grande, sinon la méthode diverge (voir figure 1). Elle peut diminuer un peu quand Re augmente. Il est clair sur la figure 1 que la constante optimale vaut à peu près 60. Si $\sigma > 60$, des oscillations apparaissent.

3.2. LE PARAMETRE IOPT

Pour

$$RE \leq 50$$

Il est conseillé de prendre :

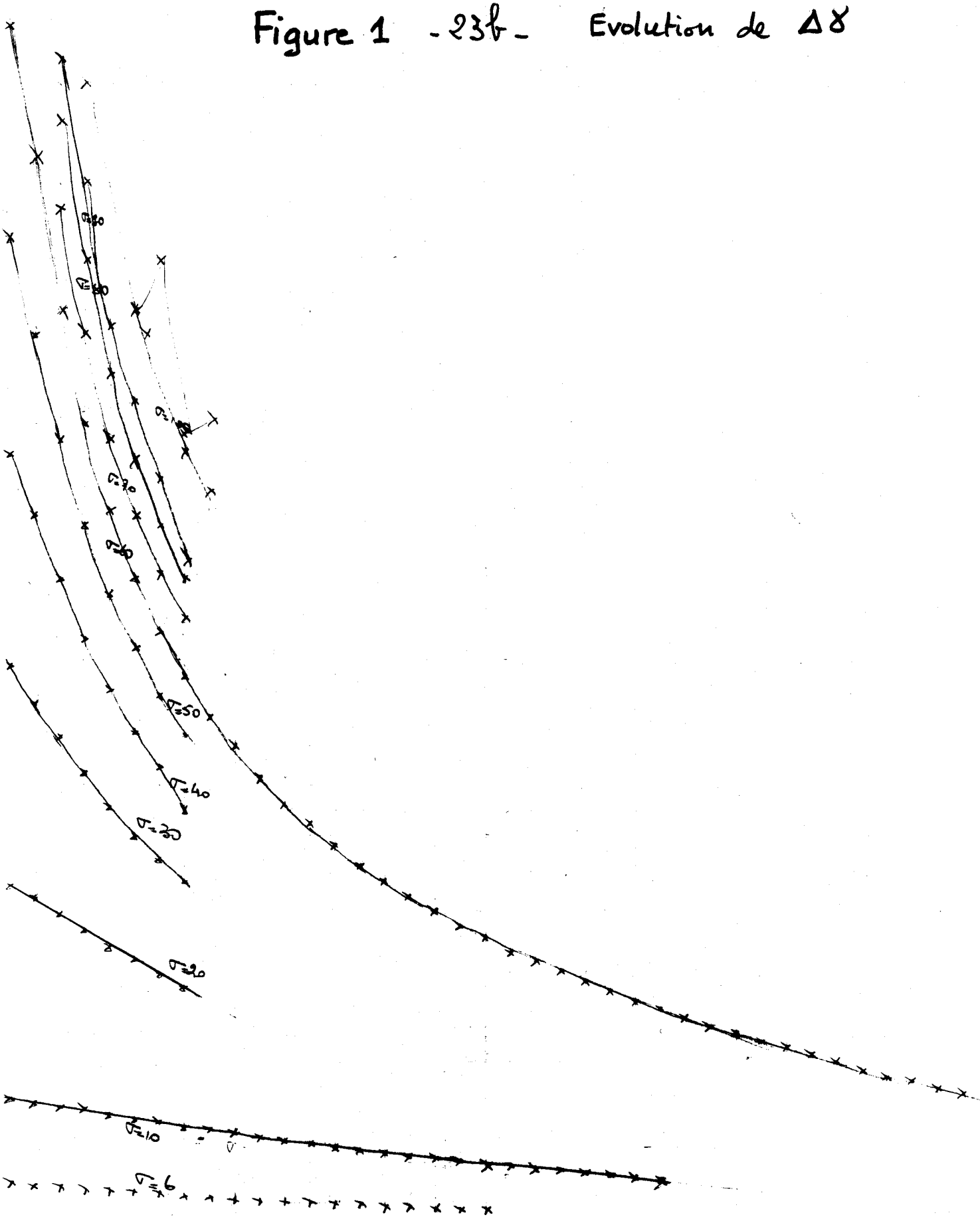
$$\begin{cases} I\phi PT = 1 \\ ITRMAX = 1 \quad \text{(gain de temps C.P.U.)} \end{cases}$$

et de prendre :

$I\phi PT = 2$ dès que $Re > 50$.

En effet, dès que Re est "grand", on est obligé de prendre ITRMAX >> 1. Alors que si on résoud le problème en ω par CROUT, on a une résolution exacte. D'où gain de temps C.P.U.

Figure 1 -23b- Evolution de $\Delta\delta$



3.3. LES PARAMETRES ITEX, ITEMAX, ITIMAX, NPR

ITEX = nombre total d'itérations extérieures à l'étape I

ITEMAX = nombre d'itérations extérieures effectuées à l'étape I.

On a donc la relation :

ITEX(I) = ITEX(I-1)+ITEMAX(I) I = 1, ..., NPR

ITIMAX = nombre d'itérations intérieures, effectuées pour chaque boule extérieure à l'étape I.

L'utilisation de ITEMAX et ITIMAX dépend du nombre de Reynolds.

Voici quelques résultats obtenus pour un maillage à 539 points.

Soient :

$$\Delta\psi_h = \psi_h^I - \psi_h^{I-1} \quad (= \psi_h^{\ell+1} - \psi_h^{\ell}) \quad \text{(voir introduction)}$$

$$\Delta\gamma = \gamma^{I,ITIMAX(I)} - \gamma^{I,ITIMAX(I)-1} \quad (=\lambda_h^{n+1} - \lambda_h^n)$$

Initialisation	RE	$\frac{\partial\psi}{\partial n}(=\varepsilon)$	I	ITEX	ITEMAX	ITIMAX	$\Delta\gamma$	$\Delta\psi_h$
$\omega,\psi=0$	1	0	1	1	1	2	0.216	0.810
			2	2	1	4	$0.858\ 10^{-1}$	0.58010^{-2}
			3	3	1	5	$0.338\ 10^{-1}$	$0.535\ 10^{-3}$
			4	4	1	8	$0.780\ 10^{-2}$	$0.159\ 10^{-3}$
			5	5	1	12	$0.913\ 10^{-3}$	$0.298\ 10^{-4}$

Nombre total d'itérations : $\sum_{i=1}^{NPR}$ ITEMAX(i)*ITIMAX(i) = 31

Re=1 ε=0	1	10^{-3}	1	1	1	4	$0.352\ 10^{-1}$	$0.643\ 10^{-3}$
			2	2	1	5	$0.239\ 10^{-1}$	$0.149\ 10^{-3}$
			3	3	1	8	$0.166\ 10^{-1}$	$0.739\ 10^{-4}$
			4	4	1	20	$0.934\ 10^{-2}$	$0.391\ 0^{-4}$

Nombre total d'itérations : 37

Initialisation	RE	$\frac{\partial\psi}{\partial n}$ (=ε)	I	ITEX	ITEMAX	ITIMAX	Δγ	$\Delta\psi_h$
Re = 1 ε = 0.00	10	001	1	1	1	4	0.353	0.516
			2	2	1	5	0.221	$0.122\ 10^{-2}$
			3	3	1	8	0.155	$0.250\ 10^{-3}$
	Nombre total d'itération : 17							
Re=10; $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ =0,01	10	0,1	1	1	1	4	3,21	$0.220\ 10^{-1}$
			2	2	1	5	2,19	$0.509\ 10^{-2}$
			3	3	1	8	1,53	$0.253\ 10^{-2}$
			4	6	3	20	0,22	$0.631\ 10^{-4}$
	Nombre total d'itérations : 77							
Re =10; $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ =0,01	100	0.01	1	3	3	3	0.197	$0.23\ 10^{-2}$
			2	6	3	6	0.965	$0.463\ 10^{-3}$
			3	9	3	10	0.453	$0.105\ 10^{-3}$
			4	11	2	20	0.182	$0.559\ 10^{-4}$
	Nombre total d'itérations : 117							
Re=100; $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ =10^{-2}	400	10^{-2}	1	4	4	10	$0.353\ 10^{-1}$	$0.237\ 10^{-4}$
	Nombre total d'itérations: 40							
Re=400; $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ =10^{-2}	1000	0	1	3	3	1	1.78	$0.809\ 10^{-2}$
			2	6	3	2	0.432	$0.242\ 10^{-3}$
			3	8	2	4	0.179	$0.943\ 10^{-4}$
			4	10	2	8	0.112	$0.147\ 10^{-4}$
	Nombre total d'itérations : 33							

RUS LILLE

Rem.: 1°) Pour les grands nombres de Reynolds, il faut, en commençant le calcul, prendre ITIMAX = 1; si on ne le fait pas, on risque de converger vers une mauvaise solution (convergence ayant la forme de la figure 2).

En fait, il faut que la convergence aie la forme de la fig. 3.

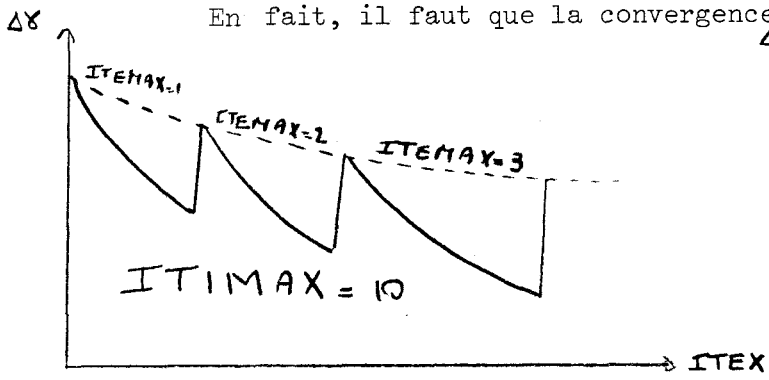


Figure 2.

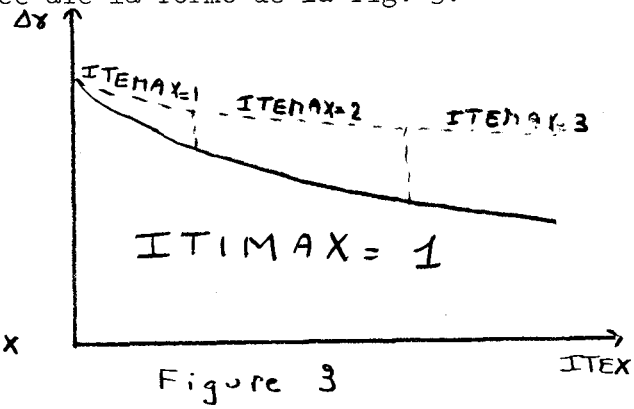


Figure 3

2°) Il est difficile d'énoncer une théorie pour les paramètres ITEMAX et ITIMAX. J'ai toutefois fait la constatation suivante :

Si Re est petit, on prend :

ITIMAX "petit" et ITRMAX "grand" car la convergence de l'algorithme est rapide.

Si Re est "grand", on prend

ITEMAX "grand" et ITRMAX "petit" car le risque de convergence vers une mauvaise solution est très grand.

3.4. LES PARAMETRES DIVRG, EPS, SEUIL

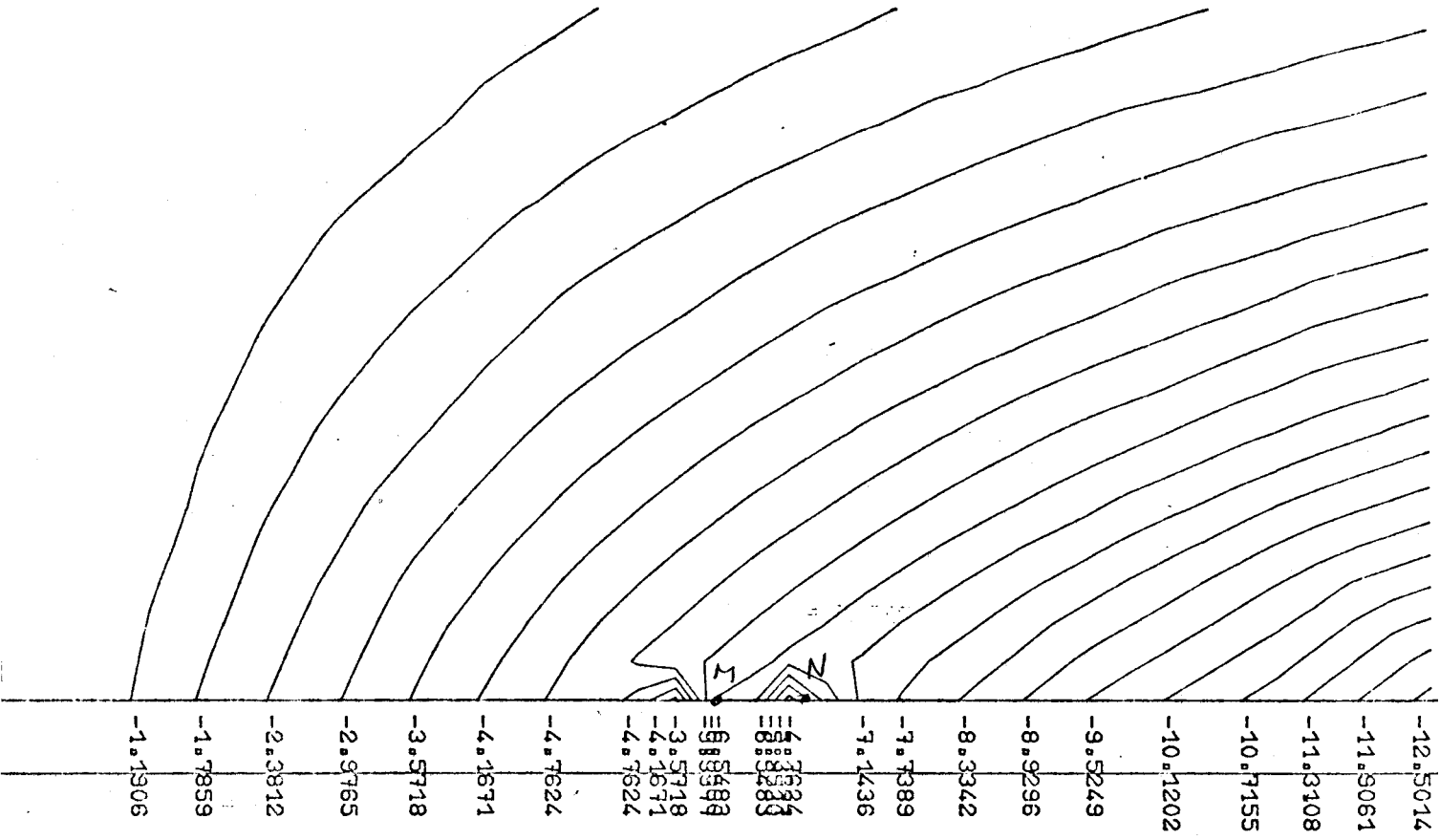
3.4.1. DIVRG

Prendre DIVRG $\geq$ 5

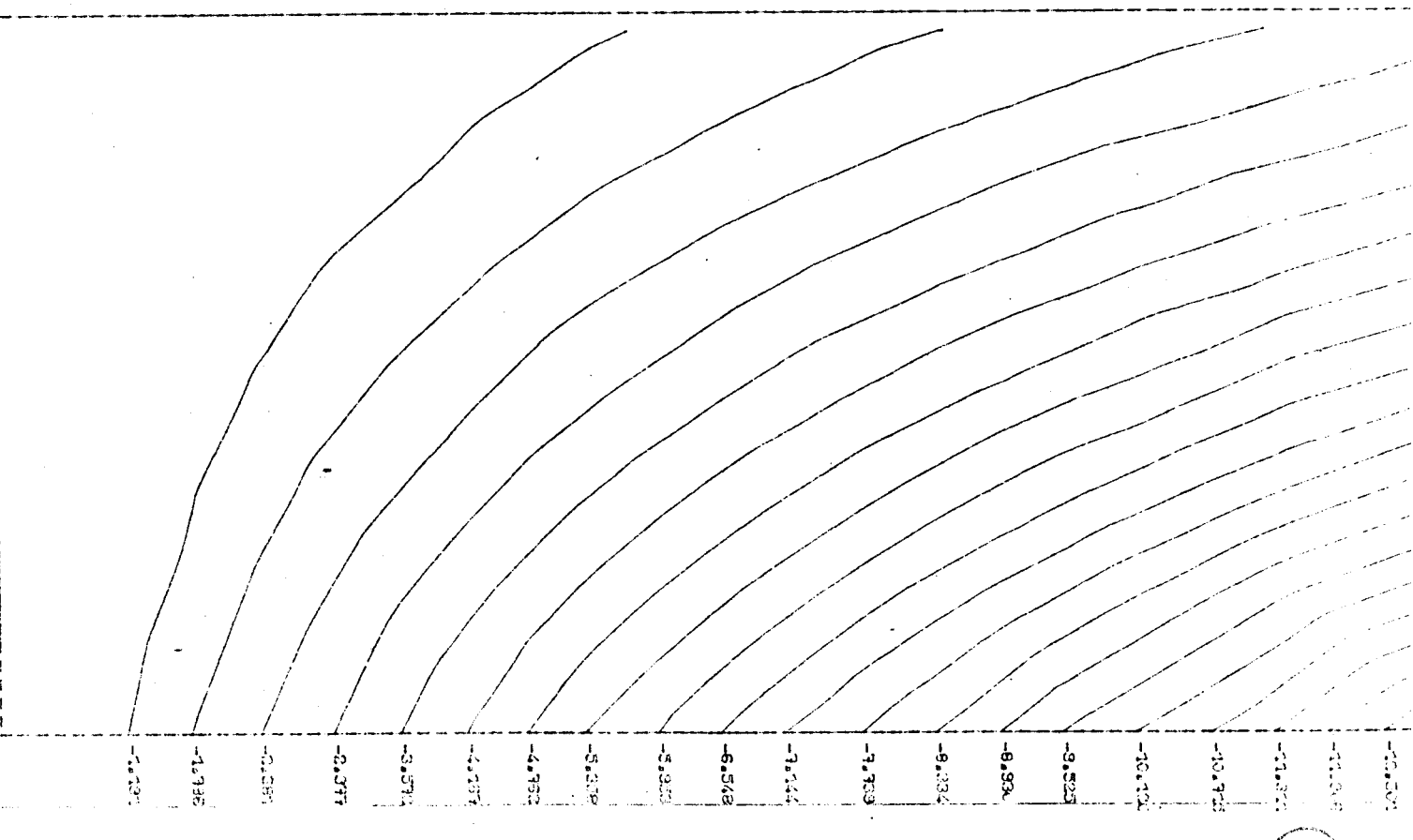
3.4.2. EPS, SEUIL

La convergence est définie par ces deux paramètres. Pour une précision "acceptable", on peut prendre ε = seuil = 10^{-4} . On aura déjà une bonne idée de la solution. Il faut toutefois souligner que le meilleur critère de convergence est la convergence graphique (ligne iso...). Si on pousse la précision, on risque de faire beaucoup d'itérations supplémentaires pour .... pas grand chose (40 itérations pour .... 1 décimale).

Figure 4 - Départ Re = 100 $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 10^{-2}$



Lignes isotourbillons. Figure 5 - Départ Re = 100 $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$



3.5. LES PARAMETRES RELAX, ROLAX

Ces deux paramètres sont des paramètres de relaxation.

ROLAX est utilisé quand IOPT = 1 : c'est le paramètre de relaxation de la boucle interne en oméga.

RELAX est le paramètre de relaxation linéaire, pour la boucle externe.

Jusqu'à présent, les meilleurs résultats ont été obtenus pour

$$RELAX = ROLAX = 1 \ .$$

3.6. LES VALEURS INITIALES

Celles-ci sont théoriquement arbitraire (méthode de point fixe). Toutefois, de "mauvaises" valeurs initiales ont une répercussion certaine sur la convergence.

Voici, par les résultats obtenus pour des lignes isotroubillons avec comme conditions aux limites :

$$Re = 100 \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad MN$$

et avec, comme valeurs de départs

$$Re = 100 \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 10^{-2} \quad \text{(fig. 4)}.$$

Les résultats exacts sont figure 5.

4ème Partie

EXEMPLES D'UTILISATION (*)

(*) : SUR IRIS - 80

```
)JOB,A MEFNOP,000C,PHILIPP
)LIMIT (CORE,100),(TIME,2),(PAGES,1000)
)FORTRAN SI,LS,GO,CLR
      DIMENSION M(10000)
      DIMENSION ITQ(1512),NFAS(0140),COORD(0288),IPLACE(0540),MU(0540)
      LOGICAL SANSOM,NONIPL
      COMMON/TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NTYTAB(204),NTAB(204),IATAB(204)
     % ,LTAB(204),NPERMU(204)
      COMMON/MAILLA/TITRE(20),NCI,NFC,NDI,NF,NCCF,NE,NEF,NTRI,NQUA,NDS
     S  D,NS,NSF,NP,N1,ISET,ISEQ,SANSOM,NONIPL
      COMMON /TRAVA1/ NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
     % ,IMPLEC,INILEC,FILLER
      IMPLEC=0
      INILEC=0
      LONREE=1
      IMPRE=7
      IM=1
      LM=10000
      NOMTAB=0
      NNN=1
      READ 1,NTITRE,NDATE,NOMCRE
 1    FORMAT(20A4)
C  CREATION DU FICHIER NOPO2 D'ETIQUETTE LOGIQUE 13
C  LE FICHIER NOPO2 EST ISSU DE SFACE2 D'ETIQUETTE LOGIQUE 21
      NFIC1=21
      READ (NFIC1) TITRE,NCI,NFC,NDI,NF,NCCF,NE,NEF,NTRI,NQUA,NDSD,NS
     % ,NSF,NP,N1,ISET,ISEQ,SANSOM,NONIPL
      I1=NTRI*(3*(N1+1)+ISET)+NQUA*(4*(N1+1)+ISEQ)
      I2=2*NEF
      I3=2*NS
      READ(NFIC1)(ITQ(I),I=1,I1),(NFAS(I),I=1,I2),(COORD(I),I=1,I3),
     %(IPLACE(I),I=1,NP)
      REWIND NFIC1
      WRITE(13) NCI
      REWIND 13
      RE=1000.
      AL=2.1/(5.3*SQRT(RE))
      DO 2 I=1,I3
      COORD(I)=AL*COORD(I)
 2    CONTINUE
      NFIC2=20
      WRITE(NFIC2) TITRE,NCI,NFC,NDI,NF,NCCF,NE,NEF,NTRI,NQUA,NDSD,NS
     % ,NSF,NP,N1,ISET,ISEQ,SANSOM,NONIPL
      WRITE(NFIC2)(ITQ(I),I=1,I1),(NFAS(I),I=1,I2),(COORD(I),I=1,I3),
     %(IPLACE(I),I=1,NP)
      REWIND NFIC2
      CALL MEFNOP(M,20,1,13,1.0,4HNOPA)
      STOP
      END
)ASSIGN C,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFMEFIBIBL)
)ASSIGN A,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFUTSDBIBL),(UNT,AC,000B)
)ASSIGN F,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFUTDEBIBL),(UNT,AC,000B)
)ASSIGN B,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFUTILBIBL),(UNT,AC,000B)
)ASSIGN E,FIL,(STS,OLD),(NAM,F4LIB),(UNT,AC,:BIB)
)LINK (UNSAT,C,A,F,B,E),(NOSYSLIB)
)ASSIGN 13,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,NOPOP),(SIZ,(RST),5,1)
)ASSIGN 20,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,FIMAILP),(SIZ,(RST),5,1)
)ASSIGN 21,FIL,(STS,OLD),(NAM,TRTAUT)
)ASSIGN 108,DEV,OUT,DCB,VFC
)RUN
NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
03/10//9 PHILIPP JACQUES LILLE
NB CARTES :    00062
***SYSTEM MESSAGE ALP ** OPL EI  *** DEVICE CR01 *** VOLUME   NONE * I/OCALL      63

P731     STEP  WAIT  CORE      END      DISC      TIME     START  CODE  PROGRAM
           01   00.13   06   10*38*05    00      00.00 10*37*52 TERM PIC
**********************************************************************************
**********************************************************************************
      TIME        TIME*CORE        CORE-USE     TIME*DISC      DISC-USE
      00.00         00.03             86%         00.10           00%

        DS          DS              SHR          SHR            CR          CP          LP
   I/O-BYTES I/O-CALLS      I/O-BYTES I/O-CALLS      CARDS       CARDS       PAGES
     15276         17             00          00          00          00          03
K 1             CR
                01
```

LISTING NUMERO 1 - MODULE COMACO

```
]JOB,C COMAC,000C,PHILIPP
]LIMIT (CORE,224),(TIME,10),(PAGES,1000)
]ASSIGN EI,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFMEFIBIBL)
]FMGE DELETE
]FORTRAN SI,LS,GO,CLR
      COMMON /TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NX(1020)
      COMMON /TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
     % ,IMPLEC,INILEC,FILLER
      DIMENSION M(20000),ICODEL(4)
      INTEGER TITRE(1)
      DOUBLE PRECISION DM
      EQUIVALENCE (M(1),DM)
C
C    INITIALISER LES COMMONS DE TRAVAIL
      IM=1
      LM=20000
      NOMTAB=0
      NNN=1
      IMPLEC=0
      INILEC=0
      READ 1000,NTITRE,NDATE,NOMCRE
 1000 FORMAT (20A4)
      LONREE=1
      IMPRE=10
      NNR=3
      IDTECA=1
      NDSD=0
      NDIM=2
      ICODEL(1)=1
      ICODEL(2)=NOMAFF(4HTRIA)
      ICODEL(3)=NOMAFF(4H2P2D)
      ICODEL(4)=0
      NOMBIB=NOMAFF(4HTHER)
      NBSC=0
      NOSC=0
      NBSDC=0
      NOSDC=0
      NBLC=0
      NOLC=0
C
C    APPEL DU MODULE COMACO  =>  S.D. MAIL ET COOR
C    ---------------------------------------------
C
C   APPEL DE COMACO POUR LE MINI MAILLAGE TEST
C
C
C   FICHIER DE DEPART:FICHIER NOPOT D'ETIQUETTE LOGIQUE 10
C
      NFNOPO=10
      READ(NFNOPO) TITRE(1)
      REWIND NFNOPO
      NINOPO=1
      NOPOEX=1
C
C   FICHIERS RESULTATS
C   PREMIER FICHIER RESULTATS:FICHIER MAILLAGE NFMAI D'ETIQUETTE LOGIQUE 11
C
```

```
      WRITE(NFMAIL) TITRE(1)
      REWIND NFMAIL
      NIMAIL=1
      NTMAIL=0
      NOPTFI=0

  DEUXIEME FICHIER RESULTATS:FICHIER NFCOOR D'ETIQUETTE LOGIQUE 12

      NFCOOR=12
      WRITE(NFCOOR) TITRE(1)
      REWIND NFCOOR
      NICOOR=1
      NTCOOR=0
      NPACD=1000
      NDCSMC=1000
      CALL COMACO(M,NDIM,NDSD,NBSCD,NOSDC,NNR,NBSC,NOSC,NBLC,NOLC,
     %  IDTECA,NOMBIB,ICODEI,NOPDEX,NFNOPO,NINOPO,NFMAIL,NIMAIL,NTMAIL,
     %  NOPTFI,NFCOOR,NICOOR,NTCOOR,NPACD,NDCSMC)
      REWIND NFNOPO
      REWIND NFMAIL
      REWIND NFCOOR
      STOP
      END
)ASSIGN A,FIL,(STS,OLD),(NAM,NEFCOSDBIBL)
)ASSIGN B,FIL,(STS,OLD),(NAM,NEFUTSDBIBL),(UNT,AC,000B)
)ASSIGN C,FIL,(STS,OLD),(NAM,NEFUTDEBIBL),(UNT,AC,000B)
)ASSIGN D,FIL,(STS,OLD),(NAM,NEFUTIIBIBL),(UNT,AC,000B)
)ASSIGN E,FIL,(STS,OLD),(NAM,F4LYB),(UNT,AC,:BIB)
)LINK (UNSAT,A,B,C,D,E),(NOSYSLIB)
)ASSIGN 10,FIL,(STS,OLD),(NAM,NODOP)
)ASSIGN 11,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,NFMAIP),(SIZ,(RST),15,1)
)ASSIGN 12,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,NFCOORP),(SIZ,(RST),15,1)
)ASSIGN 108,DEV,OUT,DCB,VFC
)RUN
NAVIER STOKES MINI MAILLAGE TEST
04/07/79 PHILIPP JACQUES LILLE
     2     1     1     1     1     0     0
' FONCTION PSI'
     1
     1     1
     1
     6     3
'THER' 'TRIA' '2P2D'    1     3     6     3     0
     1     0.          0.
     1     1.          0.
     1     0.          1.
     1     0.5         0.
     1     0.5         0.5
     1     0.          0.5
     1      0.            0.
     1      1.            0.
     1      0.            1.
NB CARTES :    00110
***SYSTEM MESSAGE ALP ** OPL EI  *** DEVICE CR01 *** VOLUME   NONE * I/OCALL      111 * I/OB

P732     STEP  WAIT  CORE      END     DISC      TIME     START  CODE  PROGRAM
          01   00.11   06   10*38*39    00      00.00 10*38*26 TERM PIC
*******************************************************************************
*******************************************************************************
     TIME        TIME*CORE        CORE-USE    TIME*DISC      DISC-USE
```

BUS LILLE

LISTING NUMERO 2

```
]JOB,A MPLRD,000C,PHILIPP
]LIMIT (CORE,100),(TIME,2)
]FORTRAN SI,LS,GO,CLR
C ********************************************************************** 00000010
C             ESSAI  MODULEF  NO 1
C-------------------------------------------------------------------
C-------------------------------------------------------------------
C
      COMMON/ALMPLR/NEMPLR,NMPL0,IAMPL0,LMPL0,
     %                     NMPL1,IAMPL1,LMPL1,
     %                     NMPL2,IAMPL2,LMPL2,
     %                     NMPL3,IAMPL3,LMPL3,
     %                     NMPL4,IAMPL4,LMPL4,
     %                     NMPLR,IAMPLR,LMPLR
      COMMON /TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NX(1020)
      COMMON /TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
     % ,IMPLEC,INILEC,FILLER
      DIMENSION M(13000),XM(13000)
      INTEGER TITRE(1)
      DOUBLE PRECISION DM
      EQUIVALENCE (M(1),DM)
C
C   INITIALISER LES COMMONS DE TRAVAIL
      IM=1
      IMPLEC=2
      INILEC=0
      LM=13000
      NOMTAB=0
      NNN=1
      READ 1000,NTITRE,NDATE,NOMCRE
 1000 FORMAT (20A4)
      LONREE=1
      IMPRE=-10
C
C   APPEL DU MODULE CALMAI  =>  S.D. MPLE
C   -------------------------------------
C
C  LE FICHIER MAILLAGE EST ISSU DE COMACO
C  ETIQUETTE LOGIQUE 11
C
      NFMAIL=11
      NIVMAI=1
      NBFR=4
      IANOFR=0
      NOFR=NOMAFF(4HNOFR)
      CALL ADRESS(1,NOFR,IANOFR,NBFR,M)
      OUTPUT IANOFR
      DO 1 I=1,NBFR
      M(IANOFR+I-1)=I
    1 CONTINUE
      NTY=0
C
C  FICHIER DE LA S.D MPLR D'ETIQUETTE LOGIQUE 13
C
      NFMPLR=13
      NTMPLR=1
      NIMPLR=1
      CALL CMAIL(1,TITRE(1)
```

```
      REWIND NFMAIL
      WRITE(NFMPLR) TITRE(1)
      REWIND(NFMPLR)
      NFNDL1=0
      NINDL1=0
C
C  NNOP EST LE NOM DU TABLEAU NOPO
C
      NNOP=NOMAFF(4HNOPA)
      CALL CALMAI(M,XM,M(IANOFR),NBFR,NTY,NNOP,NFMAIL,NIVMAI,NFNDL1,
     % NINDL1,NFMPLR,NIMPLR,NIMPLR)
      STOP
      END
]ASSIGN F,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFCOSDBIBL)
]ASSIGN A,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFUTSDBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN C,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFUTDEBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN B,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFUTIIBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN E,FIL,(STS,OLD),(NAM,F4LTB),(UNT,AC,:BIB)
]LINK (UNSAT,F,A,C,B,E),(NOSYSLIB)
]ASSIGN 11,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFMAIP)
]ASSIGN 13,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,NFMPLRP)
]ASSIGN 108,DEV,OUT,DCB,VFC
]RUN
NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
05/10/79 PHILIPP JACQUES LILLE
$ NOM DU TABLEAU$ '/NOF' $DE TYPE $ 1 $DE $ 4 $MOTS$
2  3  3  3      $ LA I-EME FRONTIERE EST DE TYPE I $
' TYPE DES FRONTIERES '  1 $UZWA$ 2 $UZWA ET V.NE.0$ 3 $DIRICHLET$ 4 $NEUMANN H
NB CARTES :     00086
***SYSTEM MESSAGE ALP ** OPL EI  *** DEVICE CR01 *** VOLUME   NONE * I/OCALL     11889

P727     STEP  WAIT  CORE     END     DISC     TIME    START  CODE  PROGRAM
           01   00.08   06   10*36*30   00      00.00 10*36*15 TERM PIC
*******************************************************************************
*******************************************************************************
      TIME        TIME*CORE       CORE-USE    TIME*DISC      DISC-USE
      00.00         00.03            87%        00.12           00%

        DS          DS              SHR         SHR           CR          CP          LP
     I/O-BYTES  I/O-CALLS       I/O-BYTES  I/O-CALLS       CARDS       CARDS       PAGES
       16300         18              00          00          00          00          03
K 1             CR
                01
                01
              00.00
               8400
              11889
      JOB TERMINATED      CARTLIST      0016  10*36*30*

P727 SIRIS8  C10C07    :MON01 ********** 05/03/80  10*37    ****  SLP2  ****  P727 SIRIS
P727 SIRIS8  C10C07    :MON01 ********** 05/03/80  10*37    ****  SLP2  ****  P727 SIRIS
P727 SIRIS8  C10C07    :MON01 ********** 05/03/80  10*37    ****  SLP2  ****  P727 SIRIS
P727 SIRIS8  C10C07    :MON01 ********** 05/03/80  10*37    ****  SLP2  ****  P727 SIRIS
P727 SIRIS8  C10C07    :MON01 ********** 05/03/80  10*37    ****  SLP2  ****  P727 SIRIS
```

BUS LILLE

LISTING NUMERO 3

```
]JOB,A DIRICHT,0016,PHILIPP
]LIMIT (CORE,100),(TIME,2),(PAGES,1000)
]FORTRAN SI,LS,GO,CLR
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      ESSAI  MODULEF  POUR  UN  LAPLACIEN
C-----------------------------------------------------------------------
C-----------------------------------------------------------------------
      COMMON /TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NX(1020)
      COMMON /TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
     % ,IMPLEC,INILEC,FILLER
      COMMON /ALMPLR/NEMPLR,NMPL0,IAMPL0,LMPL0,  NMPL1,IAMPL1,LMPL1,
     1                      NMPL2,IAMPL2,LMPL2,  NMPL3,IAMPL3,LMPL3,
     2                      NMPL4,IAMPL4,LMPL4,  NMPLR,IAMPLR,LMPLR
      COMMON/ALB/NEB,NB1,IAB1,LB1,NB0,IAB0,LB0,NB2,IAB2,LB2,
     1           NB3,IAB3,LB3,NB,IAB,LB
      COMMON /ALMUA/NEMUA,  NMUA0,IAMUA0,LMUA0,  NMUA1,IAMUA1,LMUA1,
     1                      NMUA2,IAMUA2,LMUA2,  NMUA3,IAMUA3,LMUA3,
     2                      NMUA4,IAMUA4,LMUA4,  NMUA5,IAMUA5,LMUA5
      DIMENSION M(5000),XM(3000),IPREC(4),NOFR(1),NZMUA(19),NZB(16)
      INTEGER TITRE(1)
      EQUIVALENCE (M(1),XM(1)),(NEB,NZB(1)),(NEMUA,NZMUA(1))
      DOUBLE PRECISION D
      EQUIVALENCE (M(1),D)
      EXTERNAL LEB,REB,LEMUA,REMUA
C
C   INITIALISER LES COMMONS DE TRAVAIL
      IM=1
      IMPLEC=0
      INILEC=0
      LM=5000
      NNN=0
      NOMTAB=0
      READ 1000,NTITRE,NDATE,NOMCRE
 1000 FORMAT (20A4)
      LONREE=1
      IMPRE=3
C
C
C   INITIALISATION ET PREPARATION DES DONNEES DU MODULE CBDCL
C   ---------------------------------------------------------
      NFMAIL=11
      NIVMAI=1
      NFCOOR=12
      NIVCOO=1
      NFMPLR=13
      NIVMPR=1
      KLE=1
      READ(NFMAIL) TITRE(1)
      READ(NFCOOR) TITRE(1)
      READ(NFMPLR) TITRE(1)
      REWIND NFCOOR
      REWIND NFMAIL
      REWIND NFMPLR
      CALL PSIOMEGA(M,XM,KLE,NFMAIL,NIVMAI,NFCOOR,NIVCOO,
     %              NFMPLR,NIVMPR,IAPSI,IAOME)
      NOE=M(IAMPL2+3)
```

```
      NFIC=19
      WRITE(NFIC)NOE
      WRITE(NFIC) (XM(IAPSI+I-1),I=1,NOE),(XM(IAOME+I-1),I=1,NOE)
      REWIND NFIC

   APPEL DU MODULE DIRICH  =>  S.D. TAE
   ------------------------------------

1     DO 1 I=1,4
      IPREC(I)=-1
      NTACE=4
      NFTAE=20
      NIVTAE=1
      NTATAE=0
      IF=1
      IG=1
      NBFR=1
      NOFR(1)=1
      NFMAIL=11
      NIVMAI=1
      NFCOOR=12
      NIVCOO=1
      NDCC=1
      WRITE(NFTAE)TITRE(1)
      REWIND NFTAE
      CALL DIRICH(M,XM,NFMAIL,NIVMAI,NFCOOR,NIVCOO,NTACE,IPREC,
     %    NFF,NIVF,IF,NFG,NIVG,IG,NOFR,NBFR,NDCC,NFTAE,NIVTAE,NTATAE)
      NFIC=10
      NDL1=1
      NOEFF=M(IAMPL2+4)
      NTYB=1
100   FORMAT(I6,I3,21X,E15.7)
      OUTPUT NOEFF
      DO 2 I=1,NOEFF
      NODL=M(IAMPL4+I-1)
      WRITE (NFIC,100) NTYB
      WRITE (NFIC,100) NODL,NDL1,XM(IAPSI+NODL-1)
      WRITE(108,100) NTYB
      WRITE(108,100) NODL,NDL1,XM(IAPSI+NODL-1)
2     CONTINUE
      REWIND NFIC
      STOP
      END
ASSIGN F,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFCOSDBIBL)
ASSIGN C,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFTAELBIBL)
ASSIGN A,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFUTSDBIBL),(UNT,AC,000B)
ASSIGN B,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFUTILBIBL),(UNT,AC,000B)
ASSIGN E,FIL,(STS,OLD),(NAM,F4LYB),(UNT,AC,:BIB)
LINK (UNSAT,F,C,A,B,E),(NOSYSLIB)
ASSIGN 10,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,OMEPSI),(SIZ,(RST),5,1)
ASSIGN 19,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,OMPSBD),(SIZ,(RST),5,1)
ASSIGN 11,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFMAIP)
ASSIGN 12,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFCOORP)
ASSIGN 13,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFMPLRP)
ASSIGN 20,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,TAEP),(SIZ,(RST),10,1)
ASSIGN 108,DEV,OUT,DCB,VFC
RUN
AVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
0/10/79 PHILIPP JACQUES LILLE
B CARTES :    00116
**SYSTEM MESSAGE ALP ** OPL EI  *** DEVICE CR01 *** VOLUME   NONE * I/OCALL      117 * I/OBY
```

BUS LILLE

LISTING NUMERO 4

```
]JOB,A COBDCLP,0016,PHILIPP
]LIMIT (CORE,100),(TIME,2),(PAGES,1000),(SPDISC,100)
]FORTRAN SI,LS,GO,CLR
C
C
C      ESSAI  MODULEF  POUR  UN  LAPLACIEN
       COMMON /TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NX(1020)
       COMMON /TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
      %  ,IMPLEC,INILEC,FILLER
       COMMON /ALMUA/NEMUA,  NMUA0,IAMUA0,LMUA0,  NMUA1,IAMUA1,LMUA1,
      1                      NMUA2,IAMUA2,LMUA2,  NMUA3,IAMUA3,LMUA3,
      2                      NMUA4,IAMUA4,LMUA4,  NMUA5,IAMUA5,LMUA5
       COMMON/ALB/NEB,NB0,IAB0,LB0,NB1,IAB1,LB1,
      1           NB2,IAB2,LB2,NB3,IAB3,LB3,
      2           NB,IAB,LB
       COMMON/ALNDL1/NENDL1,NNDL1,IANDL1,LNDL1,NNPSEG
       DIMENSION M(10000),XM(2000),IPREC(4),NOFR(1),NZMUA(19),NZB(16)
       INTEGER TITRE(1)
       DOUBLE PRECISION D
       EQUIVALENCE (M(1),XM(1)),(NEB,NZB(1)),(NEMUA,NZMUA(1))
       EQUIVALENCE(M(1),D)
       EXTERNAL LEB,REB,LEMUA,REMUA
C
C    INITIALISER LES COMMONS DE TRAVAIL
       IM=1
       LM=10000
       NOMTAB=0
       NNN=1
       IMPLEC=0
       INILEC=0
       READ 1000,NTITRE,NDATE,NOMCRE
 1000  FORMAT (20A4)
       LONREE=1
       IMPRE=10
C
C  APPEL DU MODULE CONDL1  =>  S.D. NDL1
C-----------------------------------------------------------------------
C
       NENDL1=0
       NNDL1=0
       IANDL1=0
       LNDL1=0
       NFMAIL=11
       NIVMAI=1
       READ(NFMAIL) TITRE(1)
       NFNDL1=0
       NINDL1=1
       NNPSEG=37
       CALL CONDL1(M,NNPSEG,NFMAIL,NIVMAI,NFNDL1,NINDL1,LNOET,NNOMAX,
      %  ND,NDLMAX)
C
C
C  APPEL DU MODULE COBDCL  => S.D. BDCL
C-----------------------------------------------------------------------
C
       NTYB=2
       NCART=16
       NCLBL=0
```

```
      NCLRL=0
      NMTRL=0
      NOPTFI=0
      NFBDCL=2
      NIBDCL=1
      WRITE(NFBDCL) TITRE(1)
      NTBDCL=0
      CALL COBDCL(M,NTYB,NCART,NCLRL,NMTRL,NOPTFI,NFBDCL,NIBDCL,NTBDCL)
C
C  APPEL DU MODULE PREPAC => S.D. MUA SANS LA MATRICE A
C-----------------------------------------------------------------------
C
      NDSM=1
      NCODST=1
      NFMUA=21
      NTY=2
      NIMUA=1
      NTMUA=0
      WRITE(NFMUA) TITRE(1)
      CALL PREPAC(M,NNOMAX,ND,NDSM,NCLRL,NCODST,NTY,NFMAIL,NIVMAI,
     %  NFNDL1,NINDL1,NFBDCL,NIBDCL,NFMUA,NIMUA,NTMUA,LBDP,LBDPDL,
     %  LNDLMU,LLA,LLB)
      STOP
      END
]ASSIGN F,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFRESRBIBL)
]ASSIGN C,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFNTDEBIBL),(UNT,AC,0008)
]ASSIGN A,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFNTSDBIBL),(UNT,AC,0008)
]ASSIGN B,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFNTIIBIBL),(UNT,AC,0008)
]ASSIGN E,FIL,(STS,OLD),(NAM,F4LYB),(UNT,AC,:BIB)
]LINK (UNSAT,F,A,C,B,E),(NOSYSLIB)
]ASSIGN 2,FIL,(SIZ,1)
]ASSIGN 11,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFMAIP)
]ASSIGN 21,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,NFPMAT1),(SIZ,(RST),5,1)
]RUN
NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
14/11/79 PHILIPP JACQUES LILLE
      1
      1  1                                  .0000000E+00
      1
      2  1                                  .9627938E-06
      1
      3  1                                  .9627938E-06
      1
      7  1                                  .1540467E-04
      1
      8  1                                  .1540467E-04
      1
     16  1                                  .7798632E-04
      1
     17  1                                  .2464752E-03
      1
     19  1                                  .7798632E-04
      1
     21  1                                  .2464752E-03
      1
     26  1                                  .2474380E-03
      1
     29  1                                  .2618798E-03
      1
     30  1                                  .2474380E-03
      1
     33  1                                  .2618798E-03
      1
     34  1                                  .3244614E-03
      1
     35  1                                  .3244614E-03
      1
```

BIBS LILLE

```
   37  1                                  .4929504E-03
    1
NB CARTES :     00126
***SYSTEM MESSAGE ALP ** OPL EI  *** DEVICE CR01 *** VOLUME   NONE * I/OCALL      1976

P808     STEP  WAIT  CORE     END     DISC     TIME    START  CODE  PROGRAM
          01   00.11   06   12*15*39   00      00.00 12*15*27 TERM PIC
*******************************************************************************
*******************************************************************************
     TIME        TIME*CORE        CORE-USE    TIME*DISC      DISC-USE
     00.00          00.04              85%       00.16            00%

       DS          DS              SHR        SHR          CR          CP          LP
    I/O-BYTES I/O-CALLS       I/O-BYTES I/O-CALLS      CARDS       CARDS       PAGES
      17324         19              00         00         00          00          04
K 1            CR
               01
               01
            00,00
            10160
             1976
     JOB TERMINATED      CARTLIST      0016  12*15*39*
```

```
P808 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*15   ****  SLP2  ****  P808 SIRIS
P808 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*15   ****  SLP2  ****  P808 SIRIS
P808 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*15   ****  SLP2  ****  P808 SIRIS
P808 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*15   ****  SLP2  ****  P808 SIRIS
P808 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*15   ****  SLP2  ****  P808 SIRIS
```

LISTING NUMERO 5 - 6

```
]JOB,C ASSEMBG,000C,PHILIPP
]LIMIT (CORE,150),(TIME,5),(PAGES,1000)
      DIMENSION M(30000),XM(30000),IPREC(4),NOFR(1),NZMUA(19),NZB(16)
      LM=30000
      NNPSEG=539
]ASSIGN 20,FIL,(STS,OLD),(NAM,TAE)
]ASSIGN 21,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFGMAT1)
]ASSIGN 22,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,NFSDB1G),(SIZ,(RST),2,1)
]ASSIGN 23,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,NFPMAT2G),(SIZ,(RST),2,1)
NAVIER STOCKES PREMIER MAILLAGE
]JOB,$ ASSEMBP,0016,PHILIPP
]LIMIT (CORE,100),(TIME,2),(PAGES,1000)
]FORTRAN SI,LS,GO,CLR
C     ESSAI  MODULEF  POUR  UN  LAPLACIEN
      DOUBLE PRECISION D
      COMMON /TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NX(1020)
      COMMON /TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
     % ,IMPLEC,INILEC,FILLER
      COMMON /ALMUA/NEMUA,  NMUA0,IAMUA0,LMUA0,  NMUA1,IAMUA1,LMUA1,
     1              NMUA2,IAMUA2,LMUA2,  NMUA3,IAMUA3,LMUA3,
     2              NMUA4,IAMUA4,LMUA4,  NMUA5,IAMUA5,LMUA5
      COMMON/ALB/NEB,NB1,IAB1,LB1,NB0,IAB0,LB0,
     1           NB2,IAB2,LB2,NB3,IAB3,LB3,
     2           NB,IAB,LB
      COMMON/ALNDL1/NENDL1,NNDL1,IANDL1,LNDL1,NNPSEG
      DIMENSION M(10000),XM(10000),IPREC(4),NOFR(1),NZMUA(19),NZB(16)
      INTEGER TITRE(1)
      EQUIVALENCE (M(1),XM(1)),(NEB,NZB(1)),(NEMUA,NZMUA(1))
      EQUIVALENCE(M(1),D)
      EXTERNAL LEB,REB,LEMUA,REMUA
C
C   INITIALISER LES COMMONS DE TRAVAIL
      IM=1
      LM=10000
      READ 1000,NTITRE,NDATE,NOMCRE
 1000 FORMAT (20A4)
      NOMTAB=0
      NNN=1
      IMPLEC=0
      INILEC=0
      LONREE=1
      IMPRE=3
      NENDL1=0
      NINDL1=0
      NENDL1=0
      IANDL1=0
      LNDL1=0
      NNDL1=0
      IOPT=2
      IF(IOPT.EQ.3) GO TO 12
      READ(20) TITRE(1)
      READ(21) TITRE(1)
C  APPEL DU MODULE ACCMCA  =>  S'D, MUA AVEC LA MATRICE A
C-------------------------------------------------------
      NFTAE=20
      NIVTAE=1
      NFMUA=21
      NIMUA=1
```

```
      NCT=1
      NFMUAS=21
      NIMUAS=1
      NMPSEG=37
      CALL ACCMCA(M,NOT,NFTAE,NIVTAE,NFNDL1,NINDL1,NFMUA,NIMUA,
     %  NFMUAS,NIMUAS)
C
 12   CONTINUE
      WRITE(22)TITRE(1)
      WRITE(23)TITRE(1)
C  APPEL DU MODULE ASMB  =>  S.D.  B
C-----------------------------------
      NOT=2
      NCODSB=-1
      NFB=22
      NIVB=1
      NTB=0
      NDSM=1
      CALL ASMB(M,NOT,NDSM,NCODSB,NFTAE,NIVTAE,NFNDL1,NINDL1,
     %  NFB,NIVB,NTB)
      STOP
      END
]ASSIGN F,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFRESRBIBL)
]ASSIGN A,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFHTSDBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN C,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFHTDFBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN B,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFHTILBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN E,FIL,(STS,OLD),(NAM,F4LTB),(UNT,AC,:BIB)
]LINK (UNSAT,F,A,C,B,E),(NOSYSLIB)
]ASSIGN 20,FIL,(STS,OLD),(NAM,TAEP)
]ASSIGN 21,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFPMAT1)
]ASSIGN 22,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,NFSDB1P),(SIZ,(RST),2,1)
]ASSIGN 23,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,NFPMA12),(SIZ,(RST),2,1)
]ASSIGN 108,DEV,OUT,DCB,VFC
]RUN
NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
14/11/79 PHILIPP JACQUES LILLE
NB CARTES :    00094
***SYSTEM MESSAGE ALP ** OPL EI  *** DEVICE CR01 *** VOLUME   NONE * I/OCALL        95

P811     STEP  WAIT  CORE      END     DISC      TIME     START  CODE  PROGRAM
          01   00.09   06   12*18*32    00     00.00  12*18*01 TERM PIC
**************************************************************************************
**************************************************************************************
      TIME        TIME*CORE        CORE-USE     TIME*DISC      DISC-USE
      00.00         00.03             85%         00.12           00%

        DS          DS              SHR          SHR           CR          CP          LP
   I/O-BYTES  I/O-CALLS       I/O-BYTES  I/O-CALLS       CARDS       CARDS       PAGES
       16300          18              00          00          00          00          03
K 1             CR
                01
                01
              00,00
               7600
                 95
      JOB TERMINATED      CARTLIST      0016  12*18*32*



P811 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*18   ****  SLP2  ****  P811 SIR
P811 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*18   ****  SLP2  ****  P811 SIR
P811 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*18   ****  SLP2  ****  P811 SIR
P811 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*18   ****  SLP2  ****  P811 SIR
P811 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*18   ****  SLP2  ****  P811 SIR
```

BUS LILLE

LISTING NUMERO 7 - 8

```
]JOB,A RESOL,000C,PHILIPP
]LIMIT (CORE,100),(TIME,2)
]FORTRAN SI,LS,GO,CLR
C      ESSAI  MODULEF  POUR  UN  LAPLACIEN
       DOUBLE PRECISION D
       COMMON /TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NX(1020)
       COMMON /TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
      %  ,IMPLEC,INILEC,FILLER
       COMMON /ALMUA/NEMUA,  NMUA0,IAMUA0,LMUA0,  NMUA1,IAMUA1,LMUA1,
      1                      NMUA2,IAMUA2,LMUA2,  NMUA3,IAMUA3,LMUA3,
      2                      NMUA4,IAMUA4,LMUA4,  NMUA5,IAMUA5,LMUA5
       COMMON/ALB/NEB,NB1,IAB1,LB1,NB0,IAB0,LB0,
      1           NB2,IAB2,LB2,NB3,IAB3,LB3,
      2           NB,IAB,LB
       COMMON/ALNDL1/NENDL1,NNDL1,IANDL1,LNDL1,NNPSEG
       DIMENSION M(10000),XM(10000),IPREC(4),NOFR(1),NZMUA(19),NZB(16)
       INTEGER TITRE(1)
       EQUIVALENCE (M(1),XM(1)),(NEB,NZB(1)),(NEMUA,NZMUA(1))
       EQUIVALENCE(M(1),D)
       EXTERNAL LEB,REB,LEMUA,REMUA
C
C    INITIALISER LES COMMONS DE TRAVAIL
       IM=1
       LM=10000
       NOMTAB=0
       NNN=1
       IMPLEC=0
       INILEC=0
       READ 1000,NTITRE,NDATE,NOMCRE
 1000  FORMAT (20A4)
       LONREE=1
       IMPRE=3
       NENDL1=0
       NINDL1=0
       NENDL1=0
       IANDL1=0
       LNDL1=0
       NNDL1=0
       IOPT=2
       IF(IOPT.EQ.3) GO TO 12
       READ(2) TITRE(1)
       READ(20) TITRE(1)
       READ(21) TITRE(1)
       READ (22)TITRE(1)
       READ (23)TITRE(1)
       NETAE=20
       NIVTAE=1
       NEMUA=21
       NIMUA=1
       NOT=1
       NEMUAS=21
       NIMUAS=1
       NNPSEG=37
       NOT=2
       NCODSB=-1
       NEB=22
       NIVB=1
       NTB=0
```

```
      NDSM=1
C
C    APPEL DU MODULE CLCHCR  =>  S.D. MUA ET B AVEC C.L.D.L. BLOQUES
C    ---------------------------------------------------------------
      NIVO=0
      VTG=1.E+30
      NFMUAE=21
      NFMUAS=23
      NFBDCL=2
      NIBDCL=1
      CALL CLCHCR(M,NIVO,VTG,NFNDL1,NINDL1,NFMUAE,NIMUAS,NFB,NIVB,
     %   NFBDCL,NIBDCL,NFMUAS,NIMUAS,NFB,NIVB)
      NIVO=1
      CALL CLCHCR(M,NIVO,VTG,NFNDL1,NINDL1,NFMUAE,NIMUAS,NFB,NIVB,
     %   NFBDCL,NIBDCL,NFMUAS,NIMUAS,NFB,NIVB)
      CALL IMMUA(M,NFMUAS,NIMUAS,IMPRE)
C
C    APPEL DU MODULE CHOLES  =>  S.D. MUA AVEC LA MATRICE L
C    ------------------------------------------------------
      EPS=1.E-6
      NEUTRE=0
      CALL CHOLES(M,EPS,NEUTRE,NFNDL1,NINDL1,NFMUAS,NIMUAS,NFMUAS,NIMUAS
     %   ,NRETOU)
      IF (NRETOU.EQ.1) PRINT 1005
 1005 FORMAT (1HO,'ATTENTION PIVOT INFERIEUR A LA PRECISION DEMANDEE')
      CALL IMMUA(M,NFMUAS,NIMUAS,IMPRE)
C
C    APPEL DU MODULE DERECH  =>  S.D. B CONTIENT LA SOLUTION CALCULEE
C    ---------------------------------------------------------------
      NCLRL=0
      NIVEAU=3
      CALL DERECH(M,NIVEAU,NCLRL,NFNDL1,NINDL1,NFMUAS,NIMUAS,NFB,NIVB,
     %   NFBDCL,NIBDCL,NFB,NIVB)
C
 12   CONTINUE
      NFIC=1
      READ(NFIC)NOE
      NOMT=NOMAFF(4H/PSI)
      IAPSI=0
      CALL ADRESS(2,NOMT,IAPSI,NOE,M)
      NOMT=NOMAFF(4H/OME)
      IAOME=0
      CALL ADRESS(2,NOMT,IAOME,NOE,M)
      READ(NFIC)(XM(IAPSI+I-1),I=1,NOE),(XM(IAOME+I-1),I=1,NOE)
C
C    CALCUL DE L'ERREUR
      PRINT 801
      ERREUR=0.
      DO 51 I=1,NOE
      Z=XM(IAPSI+I-1)
      ZZ=ABS(Z-XM(IAB+I-1))
      Z1=XM(IAB+I-1)/Z
      ERREUR=AMAX1(ERREUR,ZZ)
      PRINT 800,I,XM(IAB+I-1),Z,ZZ,Z1
 51   CONTINUE
      PRINT 900,ERREUR
 800  FORMAT (T10,I5,T20,E14.7,T40,E14.7,T60,E14.7,T80,E14.7,T100,E14.7)
 801  FORMAT(//,1HO,47(1H*)/1H ,18(1H*),11H RESULTATS ,18(1H*)/1H ,
     %47(1H*)/T10,'POINT',T20,'VAL.CAL.',T40,'VAL.EXACT.',T59,'DIFF.',
     %T80,'ERREUR RELATIVE')
 900  FORMAT(//,1HO,48(1H*)/1H ,11(1H*),' ERREUR ABSOLUE =',E8.2,1X,
     %11(1H*)/1H ,48(1H*))
 901  FORMAT (//1HO,15(1H*),' DIFFERENCE =',E8.2,1X,15(1H*))
      STOP
      END
/ASSIGN C,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFDESPBIBL)
```

```
]ASSIGN A,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFHTSDBIPL),(UNT,AC,C00B)
]ASSIGN C,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFHTDFBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN B,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFHTIIBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN E,FIL,(STS,OLD),(NAM,F4LTB),(UNT,AC,:BIB)
]LINK (UNSAT,F,A,C,B,E),(NOSYSLIB)
]ASSIGN 1,FIL,(STS,OLD),(NAM,OMPSBDP)
]ASSIGN 2,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFBDCLP)
]ASSIGN 20,FIL,(STS,OLD),(NAM,TAEP)
]ASSIGN 21,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFDMAT1)
]ASSIGN 22,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFSDB1P)
]ASSIGN 23,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFDMAT2)
]ASSIGN 108,DEV,OUT,DCB,VFC
]RUN
NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
04/09/79 PHILIPP JACQUES LILLE
NB CARTES :    00139
***SYSTEM MESSAGE ALP ** OPL EI  *** DEVICE CR01 *** VOLUME   NONE * I/OCALL      140

P810     STEP  WAIT  CORE      END     DISC      TIME     START  CODE  PROGRAM
          01   00.13   06   12*18*01    00      00.00 12*17*29 TERM PIC
**********************************************************************************
**********************************************************************************
     TIME        TIME*CORE        CORE-USE     TIME*DISC      DISC-USE
     00.00         00.05             85%         00.17           00%

       DS          DS              SHR          SHR           CR          CP          LP
   I/O-BYTES  I/O-CALLS       I/O-BYTES  I/O-CALLS       CARDS       CARDS       PAGES
       18348         20              00          00          00          00          04
K 1             CR
                01
                01
              00.00
              11200
                140
     JOB TERMINATED      CARTLIST      0016  12*18*01*

P810 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*18    ****  SLP2  ****  P810 SIRIS
P810 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*18    ****  SLP2  ****  P810 SIRIS
P810 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*18    ****  SLP2  ****  P810 SIRIS
P810 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*18    ****  SLP2  ****  P810 SIRIS
P810 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*18    ****  SLP2  ****  P810 SIRIS
```

LISTING NUMERO 9 - 10

```
//JOB,$ FIRESG,0016,PHILIPP

//FORTRAN SI,LS,GO,CLR
C      ESSAI  MODULEF  POUR  UN  LAPLACIEN
       DOUBLE PRECISION D
       COMMON /TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NX(1020)
       COMMON /TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
      %  ,IMPLEC,INILEC,FILLER
       COMMON /ALMUA/NEMUA,  NMUA0,IAMUA0,LMUA0,  NMUA1,IAMUA1,LMUA1,
      1                      NMUA2,IAMUA2,LMUA2,  NMUA3,IAMUA3,LMUA3,
      2                      NMUA4,IAMUA4,LMUA4,  NMUA5,IAMUA5,LMUA5
       COMMON/ALB/NEB,NB1,IAB1,LB1,NB0,IAB0,LB0,
      1           NB2,IAB2,LB2,NB3,IAB3,LB3,
      2           NB,IAB,LB
       COMMON/ALNDL1/NENDL1,NNDL1,IANDL1,LNDL1,NNPSEG
       DIMENSION M(5000),XM(5000),IPREC(4),NOFR(1),NZMUA(19),NZB(16)
       INTEGER TITRE(1)
       EQUIVALENCE (M(1),XM(1)),(NEB,NZB(1)),(NEMUA,NZMUA(1))
       EQUIVALENCE(M(1),D)
       EXTERNAL LEB,REB,LEMUA,REMUA
C
C   INITIALISER LES COMMONS DE TRAVAIL
       IM=1
       LM=5000
       NOMTAB=0
       NNN=1
       IMPLEC=0
       INILEC=0
       READ 1000,NTITRE,NDATE,NOMCRE
 1000  FORMAT (20A4)
       LONREE=1
       IMPRE=3
       NENDL1=0
       NINDL1=0
       NENDL1=0
       IANDL1=0
       LNDL1=0
       NNDL1=0
       IOPT=2
       IF(IOPT.EQ.3) GO TO 12
       READ(20) TITRE(1)
       READ(21) TITRE(1)
       READ(22) TITRE(1)
       READ(23) TITRE(1)
C-------------------------------------------------------------------
C  DONNEES SPECIFIQUES AU MAILLAGE
       NNPSEG=37
C-------------------------------------------------------------------
```

BUS LILLE

```
      NIMUAS=1
      NFB=22
      NIVB=1
      NTB=0
      NCODST=1
      NDCC=1
      NCODSB=-1
      NFIC=4
      READ(NFIC)NOE
      NOMT=NOMAFF(4H/PSI)
      IAPSI=0
      CALL ADRESS(2,NOMT,IAPSI,NOE,M)
      NOMT=NOMAFF(4H/OME)
      IAOME=0
      CALL ADRESS(2,NOMT,IAOME,NOE,M)
      READ(NFIC)(XM(IAPSI+I-1),I=1,NOE),(XM(IAOME+I-1),I=1,NOE)
      NFTAE=20
      NIVTAE=1
      NFMUAE=21
      NIMUA=1
C
C     APPEL DU MODULE ACCMCA  =>  S.D. MUA AVEC LA MATRICE DE MASSE
C     RESOLUTION DU MEME PROBLEME EN UTILISANT LA MATRICE DE MASSE
C     POUR CALCULER LE SECOND MEMBRE
C     ------------------------------------------------------------
      NOT=3
      NIMUAS=1
      NFMUAS=24
      WRITE(24)TITRE(1)
      CALL ACCMCA(M,NOT,NFTAE,NIVTAE,NFNDL1,NINDL1,NFMUAE,NIMUA,
     $    NFMUAS,NIMUAS)
      GO TO 15
 12   CONTINUE
      NFMUA=24
      NIMUA=1
      CALL RSTSDE(M,4HMUA  ,NFMUA,NIMUA,NZMUA,19,LEMUA,REMUA,NCMUA,ICMUA)
      IF (NFMUA) 14,15,16
 14   NFMUA=-NFMUA
 16   READ (NFMUA) LE,(XM(IAMUA5+I-1),I=1,LE)
 15   NFB=22
      NIVB=1
      CALL RSTSDE(M,4HB    ,NFB,NIVB,NZB,16,LEB,REB,NCB,IACB)
      NDCC=1
      NCODST=1
      NOE=M(IAMUA2+9)
C
 13   CALL APBEBR(NCODST,M(IAMUA4),XM(IAMUA5),XM(IAOME),NDCC,NOE,
     %  XM(IAB))
C
C     FORMATION DES TABLEAUX DES NUMEROS DES FRONTIERES 1,2,3
C
      NGA0=NOMAFF(4HNGA0)
      NGAA=NOMAFF(4HNGAA)
      NDIR=NOMAFF(4HNDIR)
      IANGA0=0
      IANDIR=0
      NFIC=10
      READ (NFIC) LNGA,LNDIR
      CALL ADRESS(1,NGA0,IANGA0,LNGA,M)
      CALL ADRESS(1,NDIR,IANDIR,LNDIR,M)
      READ (NFIC) (M(IANGA0+I-1),I=1,LNGA),(M(IANDIR+I-1),I=1,LNDIR)
      VTG=1.E+30
      DO 60 I=1,LNGA
      IJ=M(IANGA0+I-1)-1
 60   XM(IAB+IJ)=VTG*XM(IAPSI+IJ)
      DO 61 I=1,LNDIR
```

```
      DO 61 I=1,LNDIR
      IJ=M(IANDIR+I-1)-1
 61   XM(IAB+IJ)=VTG*XM(IAPSI+IJ)
      NFMUA=23
      CALL RSTSDE(M,4HMUA ,NFMUA,NIMUA,NZMUA,19,LEMUA,REMUA,NCMUA,ICMUA)
      IF (NFMUA) 62,63,64
 62   NFMUA=-NFMUA
 64   READ (NFMUA) LE,(XM(IAMUA5+I-1),I=1,LE)
 63   CONTINUE
      CALL IMMUA(M,NFMUA,NIMUA,IMPRE)
      NIVO=2
      NDCC=1
      CALL DRCH1R(M(IAMUA4),XM(IAMUA5),XM(IAB),NOE,NDCC,NIVO,XM(IAB))
C
C    CALCUL DE L'ERREUR
      PRINT 801
      ERREUR=0.
      DO 51 I=1,NOE
      Z=XM(IAPSI+I-1)
      ZZ=ABS(Z-XM(IAB+I-1))
      ERREUR=AMAX1(ERREUR,ZZ)
      Z1=ZZ/Z
      PRINT 800,I,XM(IAB+I-1),Z,ZZ,Z1
 51   CONTINUE
      PRINT 900,ERREUR
C
C    CALCUL DES POIDS POUR LA FORMULE DE SIMPSON
      NOT=4
      NCODSB=-1
      NF3=25
      NIVB=1
      NTB=0
      IF(IOPT.EQ.2) GOTO 17
      NFMAIL=11
      NIVMAI=1
      NFCOOR=12
      NIVCOO=1
      NNPSEG=10000
      NFNDL1=0
      NINDL1=0
      CALL CONDL1(M,NNPSEG,NFMAIL,NIVMAI,NFNDL1,NINDL1,LNOET,NNOMAX,
     %   ND,NDLMAX)
      NFTAE=20
      NIVTAE=1
      NDSM=1
 17   NDSM=1
      WRITE(25)(M(K),K=1,61)
      CALL ASMB(M,NOT,NDSM,NCODSB,NFTAE,NIVTAE,NFNDL1,NINDL1,
     %   NFB,NIVB,NTB)
      PRINT 1006,(XM(IAB+M(IANGAO+I-1)-1),I=1,LNGA)
 1006 FORMAT (1HO,'CALCUL DES POIDS POUR UZAWA',/(9(4X,E10.4)))
 800  FORMAT (T10,I5,T20,E14.7,T40,E14.7,T60,E14.7,T80,E14.7,T100,E14.7)
 801  FORMAT(//,1HO,47(1H*)/1H ,18(1H*),11H RESULTATS ,18(1H*)/1H ,
     %47(1H*)/T10,'POINT',T20,'VAL.CAL.',T40,'VAL.EXACT.',T59,'DIFF.',
     %T80,'ERREUR RELATIVE')
 900  FORMAT(//,1HO,48(1H*)/1H ,11(1H*),' ERREUR ABSOLUE =',E8.2,1X,
     %11(1H*)/1H ,48(1H*))
 901  FORMAT (//1HO,15(1H*),' DIFFERENCE =',E8.2,1X,15(1H*))
      STOP
      END
]ASSIGN F,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFRESRBIBL)
]ASSIGN A,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFUTSDBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN C,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFUTDEBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN B,FIL,(STS,OLD),(NAM,MEFUTILBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN E,FIL,(STS,OLD),(NAM,F4LTB),(UNT,AC,,8IB)
]LINK (UNSAT,F,A,C,B,E),(NOSYSLIB)
]ASSIGN 1,FIL,(STS,OLD),(NAM,OMPORD)
```

```
]ASSIGN 10,FIL,(STS,OLD),(NAM,TABIG)
]ASSIGN  20,FIL,(STS,OLD),(NAM,TAEP)
]ASSIGN 21,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFPMAT1)
]ASSIGN 22,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFSDB1P)
]ASSIGN 23,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFPMAT2)
]ASSIGN 24,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,NFMAT3P)
]ASSIGN 25,MTN,FIL,(STS,NEW),(NAM,NFUZB2P)
]ASSIGN 108,DEV,OUT,DCB,VFC
]RUN
NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
10/10/79 PHILIPP JACQUES LILLE
NB CARTES :     00201
***SYSTEM MESSAGE ALP ** OPL EI  *** DEVICE CR01 *** VOLUME   NONE * I/OCALL       202

P809     STEP  WAIT  CORE     END     DISC     TIME    START  CODE  PROGRAM
          01   00.35   06   12*17*29   00     00.01 12*15*52 TERM PIC
*****************************************************************************
*****************************************************************************
     TIME        TIME*CORE        CORE-USE    TIME*DISC      DISC-USE
     00.01          00.06              84%       00.22            00%

       DS          DS              SHR        SHR          CR         CP         LP
    I/O-BYTES I/O-CALLS      I/O-BYTES I/O-CALLS      CARDS      CARDS      PAGES
      20396         22             00         00         00         00         05
K 1            CR
               01
               01
            00,01
            16160
              202
     JOB TERMINATED      CARTLIST      0016  12*17*29*
```

```
P809 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*17   ****  SLP2  ****  P809 SIRIS
P809 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*17   ****  SLP2  ****  P809 SIRIS
P809 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*17   ****  SLP2  ****  P809 SIRIS
P809 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*17   ****  SLP2  ****  P809 SIRIS
P809 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*17   ****  SLP2  ****  P809 SIRIS
```

LISTING NUMERO 11

```
]JOB,A MATSYM,0016,PHILIPP
]LIMIT (CORE,100),(TIME,2),(SPDISC,500)
]FORTRAN SI.LS,GO,CLR
C-----------------------------------------------------------------------
C      ESSAI  MODULEF  POUR  UN  IAPLACIEN
C-----------------------------------------------------------------------
C-----------------------------------------------------------------------
C
       COMMON /TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NX(1020)
       COMMON /TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
      %  ,IMPLEC,INILEC,FILLER
       COMMON /ALMUA/NEMUA,  NMUA0,IAMUA0,LMUA0,  NMUA1,IAMUA1,LMUA1,
      1                      NMUA3,IAMUA2,LMUA2,  NMUA3,IAMUA3,LMUA3,
      2                      NMUA4,IAMUA4,LMUA4,  NMUA5,IAMUA5,LMUA5
       DIMENSION M(1000),XM(1000),NZMUA(19)
       EQUIVALENCE (M(1),XM(1)),(NEMUA,NZMUA(1))
       EXTERNAL LEMUA,REMUA,ECMUA
C
C    INITIALISER LES COMMONS DE TRAVAIL
       IM=1
       LM=1000
       NOMTAB=0
       NNN=1
       IMPLEC=0
       INILEC=0
       READ 1000,NTITRE,NDATE,NOMCRE
 1000  FORMAT (20A4)
       LONREE=1
       IMPRE=3
C
C
C    RECUPERATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE SYMETRIQUE
C    -------------------------------------------------
       READ(11)NCI
       READ(22)NCI
       WRITE(21)NCI
       REWIND 21
       NFMAT1=22
       NIMAT1=1
       CALL RSTSDE(M,4HMUA ,NFMAT1,NIMAT1,NZMUA,19,LEMUA,REMUA,NCMUA,
      %      ICMUA)
       IF(NFMAT1.GT.0) READ(NFMAT1) LE,(XM(IAMUA5+I-1),I=1,LE)
       IAMU=IAMUA4
       IAMAT=IAMUA5
C
       NFMAIL=11
       NIVMAI=1
C
C    APPEL DU MODULE CONDL1  =>  S.D. NDL1
C    -------------------------------------
       NNPSEG=10000
       NFNDL1=0
       NINDL1=0
       CALL CONDL1(M,NNPSEG,NFMAIL,NIVMAI,NFNDL1,NINDL1,LNOET,NNOMAX,
      %   ND,NDLMAX)
C
C    APPEL DU MODULE CORDCL  =>  S.D. BDCL
C    -------------------------------------
```

```
      NTYB=2
      NCART=0
      NCLRL=0
      NMTRL=0
      NOPTFI=0
      NFBDCL=0
      NIBDCL=1
      NTBDCL=0
      CALL COBDCL(M,NTYB,NCART,NCLRL,NMTRL,NOPTFI,NFBDCL,NIBDCL,NTBDCL)
C
C     APPEL DU MODULE PREPAC  =>  S.D. MUA SANS LA MATRICE A
C     ------------------------------------------------------
      NDSM=1
      NCODST=-1
      NFMUA=21
      NTY=2
      NIMUA=4
      NTMUA=0
      CALL PREPAC(M,NNOMAX,ND,NDSM,NCLRL,NCODST,NTY,NFMAIL,NIVMAI,
     %    NFNDL1,NINDL1,NFBDCL,NIBDCL,NFMUA,NIMUA,NTMUA,LBDP,LBDPDL,
     %    LNDLMU,LLA,LLB)
C
C     CREATION ET REMPLISSAGE DU TABLEAU MUA5 PAR SYMETRIE
C     ----------------------------------------------------
      NOE=M(IAMUA3+1)
      LMUA5=AMAX0(M(IAMUA2+3),LMUA5)
      CALL READRE(2,NMUA5,IAMUA5,LMUA5,M,N)
      CALL IMATAB
      M(IAMUA0+30)=1
      M(IAMUA2+11)=1
C
      DO 10 I=1,NOE
      M1=M(IAMUA4+I)
      M2=M(IAMUA4+I-1)
      M3=M(IAMU+I)
      XM(IAMUA5+M1-1)=XM(IAMAT+M3-1)
      IH=(M1-M2-1)/2
      IF(IH.EQ.0) GOTO 10
      DO 11 IJ=1,IH
      XT=XM(IAMAT+M3-IJ-1)
      XM(IAMUA5+M1-IH-IJ-1)=XT
      XM(IAMUA5+M1-IJ-1)=XT
 11   CONTINUE
 10   CONTINUE
C
      IMPRE=0
      CALL IMMUA(M,NFMUA,NIMUA,IMPRE)
      CALL SAUSDS(M,4HMUA ,NFMUA,NIMUA,NZMUA,19,NCMUA,ICMUA,ECMUA,0,N)
      WRITE (NFMUA) LMUA5,(XM(IAMUA5+I-1),I=1,LMUA5)
      IMPRE=6
      CALL IMMUA(M,NFMUA,NIMUA,IMPRE)
      PRINT 100,NIMUA,NFMUA
 100  FORMAT(1HO,'LA S.D. MUA DE NIVEAU',I3,' SE TROUVE SUR LE FICHIER',
     %       I4)
C
      STOP
      END
]SLIMIT (CORE,500,100)
]ASSIGN F,FIL,(STS,OLD),(NAM,NEFRESRBIBL)
]ASSIGN C,FIL,(STS,OLD),(NAM,NEFMTDFBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN A,FIL,(STS,OLD),(NAM,NEFMTSDBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN B,FIL,(STS,OLD),(NAM,NEFMTIIBIBL),(UNT,AC,000B)
]ASSIGN E,FIL,(STS,OLD),(NAM,F4LIB),(UNT,AC,:BIB)
]LINK (UNSAT,F,A,C,B,E),(NOSYSLIB),(CMOD)
]ASSIGN 11,FIL,(STS,OLD),(NAM,NEFMAIP)
]ASSIGN 21,FIL,(STS,NEW),(NAM,NEFMAT4)
```

```
]ASSIGN 21,FIL,(STS,NEW),(NAM,NFDMAT4)
]ASSIGN 22,FIL,(STS,OLD),(NAM,NFDMAT1)
]ASSIGN 108,DEV,OUT,DCB,VFC
]RUN
NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
15/11/79PHILIPP JACQUES LILLE
NB CARTES :     00129
***SYSTEM MESSAGE ALP ** OPL EI  *** DEVICE CR01 *** VOLUME   NONE * I/OCALL      130

P812    STEP  WAIT  CORE     END     DISC     TIME    START  CODE  PROGRAM
         01   00.12   06   12*19*05   00      00.00 12*18*32 TERM PIC
*******************************************************************************
*******************************************************************************
     TIME        TIME*CORE        CORE-USE     TIME*DISC      DISC-USE
     00.00          00.04              85%        00.16            00%

       DS          DS              SHR         SHR          CR          CP          LP
    I/O-BYTES I/O-CALLS       I/O-BYTES I/O-CALLS      CARDS       CARDS       PAGES
       17324         19              00          00         00          00          04
K 1            CR
               01
               01
            00.00
            10400
              130
     JOB TERMINATED      CARTLIST      0016  12*19*06*
```

```
P812 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*20   ****  SLP2  ****  P812 SIRIS
P812 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*20   ****  SLP2  ****  P812 SIRIS
P812 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*20   ****  SLP2  ****  P812 SIRIS
P812 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*20   ****  SLP2  ****  P812 SIRIS
P812 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 05/03/80  12*20   ****  SLP2  ****  P812 SIRIS
```

```
      C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      C                        MODULE NSPSOM
      C  BUT :
      C  -----
      C       RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRES
      C       POUR UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE , EN FORMULATION PSI-OMEGA ,
      C       PAR LINERISATION DU TERME CONVECTIF ET DUALISATION
      C       MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE = TOURBILLON PAROI ET ALGORITHME D'UZAWA
      C  PARAMETRES D'ENTREE
      C  ------------------
      C       M       : SUPER TABLEAU DE TRAVAIL
      C       VTG     : VALEUR TRES GRANDE DE BLOCAGE
      C       INITI(I): LOGIQUE  .TRUE.  SI INITIALISATION AVEC LE SP INIVPO
      C       (I=1,NDCC)         .FALSE. SI LECTURE DES VALEURS DE PSI,OMEGA
      C                                  SUR LES S.D.B (NFPSI,NIVPSI;NFOM,NIVOM)
      C       NDCC    : NOMBRE DE PROBLEMES A RESOUDRE
      C       TMC     : LOGIQUE INDIQUANT SI L'ON VEUX QUE TOUTES LES S.D.MUA
      C                 (? SI IOPT=1,4 SINON) SOIENT EN M.C.
      C                 (INOPERANT POUR 1 S.D.MUA DEJA EN M.C.)
      C       NFMAIL,NIVMAI : S.D. MAIL (CONTRUITE AVEC L'OPTION NOPFI=0)
      C       NFCOOR,NIVCOO : S.D. COOR (A DONNER QUE SI INIT,REINIT=.TRUE.)
      C       NFMPLR,NIVMPL : S.D. MPLR (CONSTUITE AVEC LE TABLEAU ASSOCIE ,
      C                       DONNANT POUR LE NUMERO DE REFERENCE I=1,NNR ,
      C                       NOFR(I)=TYPE DE CONDITIONS AUX LIMITES DU PROBLEME
      C                       AVEC LA CONVENTION DE CODAGE SUIVANTE:
      C                       NOFR=1  DIRICHLET EN PSI,NEUMANN HOMOGENE EN OMEGA
      C                                       (FRONTIERE SOLIDE)
      C                       NOFR=2  DIRICHLET EN PSI,NEUMANN EN OMEGA
      C                                       (VITESSE TANGENTIELLE NON NULLE)
      C                       NOFR=3  DIRICHLET EN PSI ET EN OMEGA
      C                                       (FRONTIERE FLUIDE)
      C                       NOFR=4  NEUMANN HOMOGENE EN PSI ET EN OMEGA
      C                                       (FRONTIERE A L'AVAL)
      C       NFP,NIVP        : S.D. B (POIDS POUR LA FORMULE DE SIMPSON)
      C       NFPSIE(I) ET    : S.D. B (PSI SIMPLE PRECISION;A INITIALISER SI INIT=.F.
      C       NIVPSIE(I)      : SI INIT=.TRUE.,PEUT COINCIDER AVEC LA S.D. POIDS)
      C       NFOME(I) ET     : S.D. B (OMEGA SIMPLE PRECISION;A INITIALISER SI INIT=.F.
      C       NIVOME(I)       : SI INIT=.TRUE.,PEUT COINCIDER AVEC LA S.D. POIDS)
      C       NFMAT1,NIMAT1 : S.D. MUA (MATRICE DE RAIDEUR NON DECOMPOSEE)
      C       NFMAT2,NIMAT2 : S.D. MUA (MATRICE DE RAIDEUR DECOMPOSEE)
      C       NFMAT3,NIMAT3 : S.D. MUA (MATRICE DE MASSE)
      C       NFMAT4,NIMAT4 : S.D. MUA (MATRICE DE RAIDEUR NON DECOMPOSEE
      C                       STOCKEE PAR LE PROFIL SYMETRIQUE);
      C                       A FOURNIR QUE SI IOPT.NE.1 ET ALORS IL FAUT QUE
      C                       NFMAT4 > 0 ET NIMAT3.NE.NIMAT4
      C       *** ATTENTION *** NFMAT1,NFMAT2,NFMAT3 .GE. 0
      C       ITEX    : NUMERO DE LA 1ERE ITERATION EXTERNE (POUR MEMOIRE)
      C      NFIC:NUMEROT DU FICHIER CONTENANT LES NUMEROTS DE FRONTIERES NGA,NGAA,NDIR
      C      RA(I)           : LES DIFFERENTES VALEURS DU NOMBRE DE REYNOLDS (I=1,NDCC)
      C       UP             :  TABLEAU CONTENANT LES VALEURS DE DPSI/DN.
```

```
C                       : LES VALEURS SONT ADRESSEES DE LA MANIERE SUIVANTE:
C                       : POUR I=1,NDCC
C                       : DPSI/DN(K)=UP(K+(I-1)*LNGAA)
C       P(I) I=1,LNGA   :  LES VALEURS DES POIDS POUR UZAWA
C       LNGAA           : LE NOMBRE DE POINTS OU DPSI/DN ,NE.0
C       INIP            : LOGIQUE INDIQUANT,SI INIT(I)=.TRUE L'OPTION D'APPEL DE
C                       : INIVPO POUR LE CALCUL DES CONDITIONS AUX LIMITES.
C                       : INIP=.TRUE.
C                       :  OMEGA ET PSI SONT INITIALISE A ZERO SAUF SUR LE BORD
C                       : INIP=.FALSE.
C                       : DANS CE CAS,ON LIT LES VALEURS DE OMEGA ET PSI SUR
C                       : FICHIER ET ON CHANGE LEURS VALEURS AU BORD.
C                       : ON UTILISE CETTE PROCEDURE QUAND,POUR UN NOUVEAU NOMBRE
C                       : DE REYNOLDS,ON VEUT PARTIR DES VALEURS DE OMEGA ET PSI
C                       : TROUVEES A UN PRECEDENT CALCUL ET QUE LES CONDITIONS AUX
C                       : LIMITES DEPENDENT DU NOMBRE DE REYNOLDS.
C  EN SORTIE :
C  -----------
C       NFPSS(I),NIVPSS(I)   : S.D. B (VALEURS TROUVEES POUR PSI)
C       NFPOMS(I),NIVPOMS(I) : S.D. B (VALEURS TROUVEES POUR OMEGA)
C                       (I=1,NDCC)
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C  PROGRAMMEUR : M. BORREL                    ONERA  (FEV. 1979)
C...........................................................................
      SUBROUTINE NSPSOM(M,XM,VTG,INITI,NDCC,TMC,NFMAIL,NIVMAI,
     1 NFCCOR,NIVCCO,NFMPLR,NIVMPL,NFP,NIVP,NFPSIE,NIVPSIE,NFOME,NIV
     2 OME,NFMAT1,NIMAT1,NFMAT2,NIMAT2,NFMAT3,NIMAT3,IOPT,NFMAT4,NIMAT4,
     3   ITEX,NFPSS,NIVPSS,NFOMS,NIVOMS,NFIC1,RA,UP,P,LNGAA,INIPI)
C...........................................................................
C
      COMMON/TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
     %  ,IMPLEC,INILEC,FILLER
      COMMON/TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,
     %NTYTAB(204),NTAB(204),IATAB(204),LTAB(204),NPERMU(204)
C LES COMMONS DE TRAVAIL
C
C LES COMMONS DES S.D.
      COMMON/ALMAIL/NEMAIL,NMAI1,IAMAI1,LMAI1,   NMAI0,IAMAI0,LMAI0,
     1                     NMAI2,IAMAI2,LMAI2,   NMAI3,IAMAI3,LMAI3,
     2                     NTSIF,IATSIF,LTSIF,   NMAI4,IAMAI4,LMAI4,
     3                     NMAI5,IAMAI5,LMAI5,   NNDLA,IANDLA,LNDLA,
     4                     NMAI6,IAMAI6,LMAI6,   NMAI7,IAMAI7,LMAI7,
     5                     NMAI8,IAMAI8,LMAI8,   NNCTE,IANCTE,LNCTE,
     6                     NNCEL,IANCEL,LNCEL,   NNNOT,IANNOT,LNNOT,
     7                     NNPTE,IANPTE,LNPTE,   NNTAC,IANTAC,LNTAC,
     8                     NPTNO,IAPTNO,LPTNO,   NPTPO,IAPTPO,LPTPO,
     9                     NPTAA,IAPTAA,LPTAA,   NTYEL,IATYEL,LTYEL,
     A                     NCRNP,IACRNP,LCRNP,   NELEM,IAELEM,LELEM
      COMMON /ALMPLR/NEMPLR,NMPL0,IAMPL0,LMPL0,  NMPL1,IAMPL1,LMPL1,
     1                     NMPL2,IAMPL2,LMPL2,   NMPL3,IAMPL3,LMPL3,
     2                     NMPL4,IAMPL4,LMPL4,   NMPLR,IAMPLR,LMPLR
```

```
      COMMON/ALB/NEB,NB1,IAB1,LB1,NB0,IAB0,LB0,NB2,IAB2,LB2,
     1                  NB3,IAB3,LB3,NB,IAB,LB
      COMMON /ALMUA/NEMUA,  NMUA0,IAMUA0,LMUA0,  NMUA1,IAMUA1,LMUA1,
     1                      NMUA2,IAMUA2,LMUA2,  NMUA3,IAMUA3,LMUA3,
     2                      NMUA4,IAMUA4,LMUA4,  NMUA5,IAMUA5,LMUA5
C
      DIMENSION NZMUA(19),NZB(16),NZMAIL(67),NZMPLR(19)
      DIMENSION M(1),XM(1),NFPSS(1),NIVPSS(1),NFOMS(1),NIVOMS(1)
      DIMENSION NFPSIE(1),NIVPSIE(1),NFOME(1),NIVOME(1)
      DIMENSION RA(1),UP(1),P(1)
      EQUIVALENCE (NEMUA,NZMUA(1)),(NEMAIL,NZMAIL(1)),(NEB,NZB(1)),
     E            (NEMPLR,NZMPLR(1))
      LOGICAL INITI(1),INIPI(1)
      LOGICAL INIT,REINIT,TMC,INIP
      LOGICAL A,B
      EXTERNAL LEB,REB,LEMAIL,REMAIL,LEMUA,REMUA,LEMPLR,REMPLR
C
      IF(INPRE.EQ.0) GO TO 5
      PRINT 1000,NTITRE
 1000  FORMAT('1',130(1H$)/' M O D U L E  NSPSOM :',20A4/1H ,
     %       130(1H$)/)
    5 CONTINUE
C
      IF((NFMAT1.GE.0).AND.(NFMAT2.GE.0).AND.(NFMAT3.GE.0)) GOTO 1
      PRINT 400
  400 FORMAT(1HO,'ERREUR : LES FICHIERS DES S.D.MUA NE DOIVENT PAS '
     %'ETRE EN ACCES DIRECT ; LES RECONSTRUIRE'/)
      STOP
    1 IF((IOPT.EQ.1).OR.(NFMAT4.GT.0)) GOTO 2
      PRINT 401
  401 FORMAT(1HO,'ERREUR : NFMAT4 DOIT ETRE > 0 '/)
      STOP
    2 IF((IOPT.EQ.1).OR.(NIMAT3.NE.NIMAT4)) GO TO 50
      PRINT 500
  500 FORMAT(1HO,'ERREUR : LES NIVEAUX DES S.D. MUAMAT3 ET MUAMAT4 '
     %'NE DOIVENT PAS ETRE EGAUX')
C
C
C  ADRESSER  ET LIRE LA S.D. MAIL
   50 CALL RSTSDE(M,4HMAIL,NFMAIL,NIVMAI,NZMAIL,67,LEMAIL,REMAIL,
     C            NCMAIL,IACMAI)
      IF(INPRE.NE.0) PRINT 101,(M(IAMAI1+I-1),I=1,31)
  101 FORMAT(//45(1H$)/' TITRE DU TRAVAIL ',20A4/' JOUR DE CREATION ',
     1       2A4/' NOM DU CREATEUR ',6A4/' NOM DE LA STRUCTURE ',A4/
     2       ' NUMERO DE NIVEAU ',I5/' NUMERO D ETAT ',I5/45(1H$)/)
      NE=M(IAMAI3)
      NOE=M(IAMAI3+1)
      IF((NE.NE.0).AND.(NOE.NE.0)) GOTO 3
      PRINT 102,NE,NOE
  102 FORMAT(1HO,'ERREUR DANS LA S.D. MAIL : NE =',I5,'  NOE =',I5/)
      STOP
```

BUS LILLE

```
      3     NOPFI=M(IAMA+2+11)
            IF(NOPFI.EQ.0) GO TO 4
            PRINT 100
      100   FORMAT(1HO,'ERREUR ; RECONSTRUIRE LA S.D. MAIL AVEC NOPFI=0')
            STOP
      4     CONTINUE
      C
      C
      C     FORMATION DES TABLEAUX DES NUMEROS DES FRONTIERES 1,2,3
            NGA=NOMAFF(4H:NGA)
            NGAA=NOMAFF(4H:GAA)
            NDIR=NOMAFF(4H:DIR)
            IANGA=0
            IANDIR=0
            IF(NFIC1.GT.0) READ(NFIC1)LNGA,LNDIR
            CALL ADRESS(1,NGA,IANGA,LNGA,M)
            CALL ADRESS(1,NDIR,IANDIR,LNDIR,M)
            IF(NFIC1.GT.0)READ(NFIC1) (M(IANGA+I-1),I=1,LNGA),(M(IANDIR+I-1),I
           %=1,LNDIR)
            IANGAA=0
            IF(LNGAA.NE.0) CALL ADRESS(1,NGAA,IANGAA,LNGAA,M)
            IF(LNGAA.NE.0) READ(105,103) (M(IANGAA+I-1),I=1,LNGAA)
      103   FORMAT((13(I6)))
            IAGAMA=0
            NGMA=NOMAFF(4H:GMA)
            IF(LNGA.NE.0) CALL ADRESS(2,NGMA,IAGAMA,LNGA,M)
            IAGAMA=MAXO(1,IAGAMA)
      C
      C     ADRESSER ET LIRE LA S.D. POIDS
      C           CALL RSTSDE(M,4HB    ,NFP,NIVP,NZB,16,LEB,RLB,NCB,IACB)
      C           IF(IMPRE.NE.0) PRINT 101,(M(IAB1+I-1),I=1,31)
      C           IF(NFP.GT.0) READ (NFP) LE,(XM(IAB+I-1),I=1,LE)
      C
      C     ADRESSER ET LIRE LA S.D. NPLR
            CALL RSTSDE(M,4HMPLR,NFMPLR,NIVMPL,NZMPLR,19,LEMPLR,REMPLR,
           %           NCMPLR,IAMPL)
            IF(IMPRE.NE.0) PRINT 101,(M(IAMPL0+I-1),I=1,31)
      C     RESTITUTION DU TABLEAU NOFR
            IANOF=M(IAMPL1+1)
      C
            IF(IMPRE.LT.3) GOTO 49
            PRINT 1001,LNGA,(M(IANGA+I-1),I=1,LNGA)
            PRINT 1002,LNGAA,(M(IANGAA+I-1),I=1,LNGAA)
            PRINT 1003,LNDIR,(M(IANDIR+I-1),I=1,LNDIR)
      1001  FORMAT (7H0LNGA =,I4/(20I6))
      1002  FORMAT (8H LNGAA =,I4/(20I6))
      1003  FORMAT (8H LNDIR =,I4/(20I6))
      49    CONTINUE
      C
            CALL TUERSD(M,4HMPLR,NIVMPL,0)
      C
```

```
      IAPOID=0
      IF(LNGA.EQ.0) GOTO 8
      NPOI=NOMAFF(4H:POI)
      CALL ADRESS(2,NPOI,IAPOID,LNGA,M)
      DO 10 I=1,LNGA
C10   XM(IAPOID+I-1)=1./XM(IAB+M(IANGA+I-1)-1)
 10   XM(IAPOID+I-1)=P(I)
 8    IAPOID=MAX0(1,IAPOID)
      PRINT 1006,(XM(IAPOID+I-1),I=1,LNGA)
 1006 FORMAT(1HO,'POIDS POUR UZAWA'/(9(4X,E10.4)))
C
C     CALL TUERSD(M,4HB    ,NIVP,0)
C
C   INITIALISATION DE PSI ET DE OMEGA
      NFPSI=NFPSIE(1)
      NIVPSI=NIVPSIE(1)
      CALL RSTSDE(M,4HB    ,NFPSI,NIVPSI,NZB,16,LEB,REB,NCB,IACB)
      IAPSI=0
      NPSI=NOMAFF(4H:PSI)
      CALL ADRESS(2,NPSI,IAPSI,NOE,M)
      INIT=INITI(1)
      INIP=INIPI(1)
      A=(.NOT.INIT).AND.(NFPSI.GT.0)
      B=INIT.AND.(.NOT.INIP).AND.(NFPSI.GT.0)
      IF(A.OR.B) READ(NFPSI) LE,(XM(IAPSI+I-1),I=1,LE)
      CALL TUERSD(M,4HB    ,NIVPSI,0)
      NFOM=NFOME(1)
      NIVOM=NIVOME(1)
      CALL RSTSDE(M,4HB    ,NFOM,NIVOM,NZB,16,LEB,REB,NCB,IACB)
      IAOME=0
      NOME=NOMAFF(4H:OME)
      CALL ADRESS(2,NOME,IAOME,NOE,M)
      A=(.NOT.INIT).AND.(NFOM.GT.0)
      B=INIT.AND.(.NOT.INIP).AND.(NFOM.GT.0)
      IF(A.OR.B) READ(NFOM) LE,(XM(IAOME+I-1),I=1,LE)
      IAVGAA=0
      NVGA=NOMAFF(4H:VGA)
      IF(LNGAA.NE.0) CALL ADRESS(2,NVGA,IAVGAA,LNGAA,M)
      IAVGAA=MAX0(1,IAVGAA)
      DO 6 K=1,LNGAA
 6    XM(IAVGAA+K-1)=UP(K)
      RE=RA(1)
      A=INIT
      B=(.NOT.INIT).AND.(.NOT.INIP)
      IF(A.OR.B) CALL INIVPO(M,M,INIP,NFCOOR,NIVCOO,
     1  M(IANOF),IAPSI,IAOME,IANGA,LNGAA,IANGAA,IAVGAA,RE,UP(1))
      WRITE(NFIC1) NOE,(XM(IAPSI+I-1),I=1,NOE),(XM(IAOME+I-1),I=1,NOE)
      IMPRI=NOE
      IF(IMPRE.EQ.1) IMPRI=MIN0(15,NOE)
      IF(IMPRE.EQ.2) IMPRI=MIN0(60,NOE)
      IF(IMPRE.EQ.3) IMPRI=MIN0(150,NOE)
```

BUS LILLE

```
      IF(IMPRE.EQ.0) GOTO 9
      PRINT 201
      PRINT 300,(K,XM(IAPSI+K-1),XM(IAUME+K-1),K=1,IMPRI)
      IF(LNGAA.EQ.0) GOTO 9
      PRINT 301,(XM(IAVGAA+I-1),I=1,LNGAA)
 301  FORMAT(1HO,'VALEURS DE LA VITESSE TANGENTIELLE SUR LA FRONTIERE NO
     % 2'/(8(5X,F10.3)))
C
C     ADRESSAGE DES TABLEAUX AUXILLIAIRES
  9   CONTINUE
      IAAUX=0
      NAUX=NOMAFF(4H;AUX)
      CALL ADRESS(2,NAUX,IAAUX,NOE,M)
      IAPSU=0
      NPSU=NOMAFF(4H;PSU)
      CALL ADRESS(2,NPSU,IAPSU,NOE,M)
C
C
      CALL RSTSDE(M,4HMUA ,NFMAT1,NIMAT1,NZMUA,19,LEMUA,REMUA,NCMUA,
     %     ICMUA)
      IAMAT1=IAMUA5
      IF(TMC.OR.(NFMAT1.EQ.0)) GOTO 12
      CALL TUERSD(M,4HMUA ,NIMAT1,0)
      GOTO 13
 12   IF(NFMAT1.GT.0) READ(NFMAT1) LE,(XM(IAMUA5+I-1),I=1,LE)
C
 13   CONTINUE
      CALL RSTSDE(M,4HMUA ,NFMAT2,NIMAT2,NZMUA,19,LEMUA,REMUA,NCMUA,
     %     ICMUA)
      IAMAT2=IAMUA5
      IF(TMC.OR.(NFMAT2.EQ.0)) GOTO 14
      CALL TUERSD(M,4HMUA ,NIMAT2,0)
      GOTO 35
 14   IF(NFMAT2.GT.0) READ(NFMAT2) LE,(XM(IAMUA5+I-1),I=1,LE)
C
 35   CONTINUE
      CALL RSTSDE(M,4HMUA ,NFMAT3,NIMAT3,NZMUA,19,LEMUA,REMUA,NCMUA,
     %     ICMUA)
      IAMAT3=IAMUA5
      IAMU=IAMUA4
      IF((.NOT.TMC).OR.(NFMAT3.EQ.0)) GOTO 16
      READ(NFMAT3) LE,(XM(IAMUA5+I-1),I=1,LE)
 16   CONTINUE
C
      IF(IOPT.EQ.1) GOTO 36
      CALL RSTSDE(M,4HMUA ,NFMAT4,NIMAT4,NZMUA,19,LEMUA,REMUA,NCMUA,
     %     ICMUA)
      NCODST=M(IAMUA2+5)
      ND=M(IAMUA2+8)
      IF((ND.EQ.1).AND.(NCODST.EQ.-1)) GOTO 36
      PRINT 700
```

```
      700   FORMAT(1HO,'ERREUR DANS LA S.D. MUA DE LA MATRICE MAT4'//)
            STOP
       36   CONTINUE
      C
            IF(IMPRE.GE.3) CALL IMATAB
      C
            IF(NDCC.EQ.1) REINIT=.FALSE.
            NTB=0
            K1=0
            DO 17 I=1,NDCC
            IF(K1.EQ.1) GO TO 11
            CALL NSIT2D(M,RE,VTG,NOE,ITEX,M(IAPSI),M(IAOME),
           1     M(IAPSU),M(IAAUX),LNGA,M(IANGA),M(IAGAMA),M(IAPOID),
           2     LNGAA,M(IANGAA),M(IAVGAA),LNDIR,M(IANDIR),
           3     M(IAMU),NFMAT1,M(IAMAT1),NFMAT2,M(IAMAT2),NFMAT3,M(IAMAT3),
           4     IOPT,M(IAMUA4),NFMAT4,M(IAMUA5),NRETOU,TMC)
      C
            IF(NRETOU.EQ.0) PRINT 600
       600  FORMAT(//1HO,'****** L''ALGORITHME DIVERGE ******')
            IF(NRETOU.EQ.1) PRINT 601
       601  FORMAT(///'O****** L''ALGORITHME N''A PAS ENCORE CONVERGE ******')
            IF(NRETOU.EQ.2) PRINT 602
       602  FORMAT(//1HO,'****** L''ALGORITHME A CONVERGE ******')
            IF(IMPRE.EQ.0) GOTO 18
            PRINT 200,RE
            IF(NRETOU.EQ.2) IMPRI=NOE
            PRINT 300,(K,XM(IAPSI+K-1),XM(IAOME+K-1),K=1,IMPRI)
       18   IF(NRETOU.EQ.0) GOTO 19
      11    NFIC=NFPSS(I)
            IF(NFIC.EQ.0) GOTO 20
            NIVB=M(IAB1+29)
            NIVB1=NIVPSS(I)
            IF(NIVB.EQ.NIVB1) GOTO 21
            CALL COPISD(M,4HB   ,NTB,NIVB,NCB,IACB,NIVB1,NCB,IACB)
            CALL TUERSD(M,4HB   ,NIVB,0)
       21   NOPFI=0
            CALL ECB(M,NFIC,N,NOPFI)
            WRITE (NFIC) NOE,(XM(IAPSI+K-1),K=1,NOE)
            REWIND NFIC
            PRINT 1007,NIVB1,NFIC
       1007 FORMAT(1HO,'LES VALEURS DE PSI   SE TROUVENT DANS LA S.D. B ',
           4'DE NIVEAU ',I3,' SUR LE FICHIER',I4)
       20   NFIC=NFOMS(I)
            IF(NFIC.EQ.0) GOTO 19
            NIVB=M(IAB1+29)
            NIVB1=NIVOMS(I)
            IF(NIVB.EQ.NIVB1) GOTO 22
            CALL COPISD(M,4HB   ,NTB,NIVB,NCB,IACB,NIVB1,NCB,IACB)
            CALL TUERSD(M,4HB   ,NIVB,0)
       22   NOPFI=0
            CALL ECB(M,NFIC,N,NOPFI)
```

BUS LILLE

```
      WRITE (NFIC) NOE,(XM(IAOME+K-1),K=1,NOE)
      REWIND NFIC
      PRINT 1008,NAVB1,NFIC
 1008 FORMAT(1H ,'LES VALEURS DE OMEGA SE TROUVENT DANS LA S.D. B ',
     %'DE NIVEAU ',I3,' SUR LE FICHIER',I4)
   19 IF(I.EQ.NDCC) RETURN
C*************************************************************************
C
C
C  REINITIALISATION DE LA VITESSE SUR LA CAVITE
C
C
      IF(LNGAA.EQ.0) GO TO 701
      DO 24 K=1,LNGAA
   24 XM(IAVGAA+K-1)=UP(1*LNGAA+K)
      IF(IMPRE.NE.0) PRINT 301,(XM(IAVGAA+K-1),K=1,LNGAA)
C*************************************************************************
C
C   REINITIALISATION DE PSI ET DE OMEGA?
C  QUATRES CAS SONT POSSIBLES:
C  CAS 1:ON NE REINITIALISE PAS;ON REPART AVEC LES VALEURS QUE L'ON VIENT DE
C  TROUVER.
C  CAS 2: ON REPART AVEC LES VALEURS TROUVEES A UN CALCUL ANTERIEUR
C  CAS 3:ON REINITIALISE COMPLETEMENT;REYNOLDS CHANGE:APPEL DE INIVPO
C     2 OPTIONS: ON RELIT LES FICHIERS(INIP=FALSE) OU  ON INITIALISE A 0
C  CAS 4:ON NE CHANGE PAS DE NOMBRE DE REYNOLDS;;ON RELIT LES VALEURS
C  PRECEDEMMENT TROUVEES PAR INIVPO SUR LE FICHIER NFIC1
C
  701 REINIT=INITI(I+1)
      IF(REINIT) GO TO 27
      IF(NFPSS(I).NE.NFPSIE(I+1)) GO TO 23
C  CAS 1
      IF(NRETOU.EQ.0) GO TO 17
      IF(NRETOU.EQ.1) GO TO 25
      K1=1
      PRINT 1011
 1011 FORMAT(' ON A FAILLI ITERER AVEC LES VALEURS PRECEDENTES MAIS ON N
     %E L)A PAS FAIT CAR LA CONVERGENCE EST ATTEINTE')
   28 FORMAT(6I12)
   29 FORMAT(5E15.7)
      READ 29,SIGMA
      READ 29,DIVRG,EPS,SEUIL,RELAX,ROLAX
      IF(IOPT.NE.1) READ 29,PIVOT
      IF(IOPT.EQ.1) READ 28,ITEMAX,ITIMAX,ITRMAX
      IF(IOPT.NE.1) READ 28,ITEMAX,ITIMAX,NENTRE,IMPR
      GO TO 17
   25 PRINT 1010
 1010 FORMAT(' ON ITERE DIRECTEMENT AVEC LES VALEURS PRECEDENTES')
      GO TO 17
C*************************************************************************
C
```

BUS LILLE

```
C  CAS 2 ET TROIS
C  RELECTURE DES VALEURS DE PSI ET OMEGA TROUVEES A UN CALCUL PRECEDENT
C
25     NFPSI=NFPSIE(I+1)
       NIVPSI=NIVPSIE(I+1)
       IF(NFPSS(I).EQ.NFPSIE(I+1))GO TO 7
       CALL TUERSD(M,4HB    ,NIVOM,0)
       CALL RSTSDF(M,4HB    ,NFPSI,NIVPSI,NZB,16,LEB,REB,NCB,IACB)
       IF(NFPSI.GT.0) READ(NFPSI) LE,(XM(IAPSI+K-1),K=1,LE)
       CALL TUERSD(M,4HB    ,NIVPSI,0)
       NFOM=NFOME(I+1)
       NIVOM=NIVOME(I+1)
       CALL RSTSDF(M,4HB    ,NFOM,NIVOM,NZB,16,LEB,REB,NCB,IACB)
       IF(NFOM.GT.0) READ(NFOM) LE,(XM(IAOME+K-1),K=1,LE)
C
C  APPEL DE INIVPO? (REINIT=TRUE)
C
7      IF(REINIT) CALL INIVPO(M,M,INIP,NFCOOR,NIVCOO,
     1  M(IANOF),IAPSI,IAOME,IANGA,LNGAA,IANGAA,IAVGAA,RE,UP(1+I*LNGAA))
       GO TO 26
C*****************************************************************************
C
C
C  REINITIALISATION
C
C
C*****************************************************************************
27     IF(RA(I).EQ.RA(I+1))GO TO 15
C
C  CAS 3
C   REINITIALISATION PAR INIVPO
C
       RE=RA(I+1)
       INIP=INIPI(I+1)
       IF(.NOT.INIP) GO TO 23
       CALL INIVPO(M,M,INIP,NFCOOR,NIVCOO,M(IANOF),IAPSI,IAOME,IANGA,
     1 LNGAA,IANGAA,IAVGAA,RE,UP(1+I*LNGAA))
C*****************************************************************************
C
C
C  IMPRESSION DES VALEURS DE PSI ET OMEGA
C
C
C*****************************************************************************
26     IMPRI=NOE
       K1=0
       IF(IMPRE.EQ.1) IMPRI=MIN0(15,NOE)
       IF(IMPRE.EQ.2) IMPRI=MIN0(60,NOE)
       IF(IMPRE.EQ.3) IMPRI=MIN0(150,NOE)
       IF(IMPRE.EQ.0) GOTO 17
       PRINT 201
```

BUS LILLE

```
460.           PRINT 300,(K,XM(IAPSI+K-1),XM(IAOME+K-1),K=1,IMPRI)
461.      C
462.           GO TO 17
463.      C*****************************************************************************
464.      C
465.      C  CAS 4
466.      C   REINITIALISATION PAR LECTURE DU FICHIER NFIC1
467.      C
468.      15   IF(NFIC1.EQ.0) GO TO 17
469.           BACKSPACE NFIC1
470.           READ(NFIC1)  NOE,(XM(IAPSI+K-1),K=1,NOE),(XM(IAOME+K-1),K=1,NOE)
471.           K1=0
472.      17   INIT=REINIT
473.      C*****************************************************************************
474.      C
475.       200  FORMAT (//1HU,130(1H*)/1H ,T54,'REYNOLDS =',E8.2)
476.       300  FORMAT                (1H ,T50,'VALEURS DE PSI ET DE OMEGA'/1H ,
477.           %130(1H*)//1X,'POINT',2X,'PSI',13X,'OMEGA',12X,'POINT',2X,'PSI',
478.           %13X,'OMEGA',12X,'POINT',2X,'PSI',13X,'OMEGA'/
479.           %3(1X,I4,2X,E14.7,2X,E14.7,2X,'*'))
480.       201  FORMAT (///1HO,130(1H*)/1H ,T56,'INITIALISATION')
481.           RETURN
482.           END
```

BUS LILLE

```
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                  SP NSIT2R , APPELE PAR LE MODULE NSPSOM
C  BUT :
C  -----
C       ALGORITHME DE RESOLUTION
C                  BOUCLE EXTERNE : ITERATION DE LINEARISATION AVEC
C                                   RELAXATION (PARAMETRE : RELAX)
C                  BOUCLE INTERNE : ALGORITHME D'UZAWA
C                                   MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE : GAMA
C                                   CONSTANTE D'UZAWA : SIGMA
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C  PROGRAMMEUR : M. BORREL                    ONERA (FEV. 1979)
C.......................................................................
      SUBROUTINE NSIT2R(M,RE,VTG,NOE,ITEX,PSI,OMEGA,PSU,AUX,
     1     NGA,IGA,GAMA,POIDS,NGAA,IGAA,VGAA,MGA,JGA,
     2     MU,NFMAT1,MAT1,NFMAT2,MAT2,NFMAT3,MAT3,IOPT,MU4,NFMAT4,MAT4,
     3     NRETOU,TMC)
C.......................................................................
C
      DIMENSION PSI(1),OMEGA(1),PSU(1),AUX(1),IGA(1),GAMA(1),POIDS(1)
      DIMENSION IGAA(1),VGAA(1),JGA(1),MU(1),MAT1(1),MAT2(1),MAT3(1)
      DIMENSION M(1),C(2,2,21),CAC(2,6,6),CIC(21),MU4(1),MAT4(1)
      REAL MAT1,MAT2,MAT3,MAT4
      LOGICAL TMC
C
      NRETOU=0
C
  100 FORMAT(6I12)
  200 FORMAT(5E15.7)
      READ 200,SIGMA
      READ 200,DIVRG,EPS,SEUIL,RELAX,ROLAX
      IF(IOPT.NE.1) READ 200,PIVOT
      IF(IOPT.EQ.1) READ 100,ITEMAX,ITIMAX,ITRMAX
      IF(IOPT.NE.1) READ 100,ITEMAX,ITIMAX,NENTRE,IMPRE
      IF(RE.NE.0.) GOTO 44
      ITEMAX=1
      ITRMAX=1
      RELAX=1.
      ROLAX=1.
   44 CONTINUE
      IF(IOPT.EQ.1) PRINT 700,SIGMA,RELAX,ROLAX,EPS,SEUIL,ITRMAX,RE
  700 FORMAT (1H1,130(1H*)/1H ,T20,'SIGMA =',E8.2/1H ,T20,'RELAX =',E8.2
     %/1H ,T20,'ROLAX =',E8.2/1H ,T20,'EPS  =',E8.2/1H ,T20,'SEUIL =',
     %E8.2/1H ,T20,'ITRMAX=',I3/1H ,T20,'NOMBRE DE REYNOLDS =',E8.2/
     %1H ,130(1H*))
      IF(IOPT.NE.1) PRINT 701,SIGMA,RELAX,ROLAX,EPS,SEUIL,NENTRE,RE
  701 FORMAT (1H1,130(1H*)/1H ,T20,'SIGMA =',E8.2/1H ,T20,'RELAX =',E8.2
     %/1H ,T20,'ROLAX =',E8.2/1H ,T20,'EPS =',E8.2/1H ,T20,'SEUIL =',
     %E8.2/1H ,T20,'NENTRE =',I3/1H ,T20,'NOMBRE DE REYNOLDS =',E8.2/
     %1H ,130(1H*))
```

```
      C
            DO 47 I=1,NOE
       47   PSU(I)=PSI(I)
            IF(NGA.EQ.0) GOTO 43
            DO 41 I=1,NGA
       41   GAMA(I)=OMEGA(IGA(I))
       43   CONTINUE
      C
            IF(RE.GT.0.) CALL P2RLAG(2,C,CIC,CAC)
            NDCC=1
            NIVEAU=2
            ITIN=1
            RELAX1=RELAX
            ROLAX1=ROLAX
      C
      C*****************************************************************
      C   ETAPE 1 : CALCUL DE OMEGA
      C*****************************************************************
      C
       9    CONTINUE
            PRINT 401,ITEX,ITIN
       401  FORMAT (1H0,'****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO',I3,4X,
           %'**  ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO',I3)
      C
            IF(IOPT.NE.1) GOTO 5
      C
      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      CCCCCCCCC   IOPT=1   CCCCCCCCC
      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
            INCRE=1
            IF(TMC) GO TO 35
            READ(NFMAT2) LE,(MAT2(I),I=1,LE)
            BACKSPACE NFMAT2
       35   CONTINUE
      C
            ROLAX1=ROLAX
       7    CONTINUE
            DO 11 I=1,NOE
       11   AUX(I)=OMEGA(I)
            CALL CONVP2(M,RE,PSU,AUX,CAC,CIC,1,MU,OMEGA)
            IF(NGA.EQ.0) GOTO 12
            DO 13 I=1,NGA
       13   OMEGA(IGA(I))=VTG*GAMA(I)
       12   IF(MGA.EQ.0) GOTO 25
            DO 14 I=1,MGA
            I1=JGA(I)
            OMEGA(I1)=VTG*AUX(I1)
       14   CONTINUE
      C
       25   CALL DRCH1R(MU,MAT2,OMEGA,NOE,NDCC,NIVEAU,OMEGA)
      C


      C   CALCUL DE LA VARIATION EN OMEGA .
            VMAX=0.
            VM=0.
            DO 15 I=1,NOE
            VMAX=AMAX1(VMAX,ABS(AUX(I)-OMEGA(I)))
            VM=AMAX1(VM,ABS(OMEGA(I)))
```

BUS LILLE

```
108.              VM=AMAX1(VM,ABS(OMEGA(I)))
109.       15     CONTINUE
110.              IF(VM.LE.SEUIL) VM=1.
111.              VREL=VMAX/VM
112.              PRINT 410,VREL,INCRE
113.       410    FORMAT (1H ,18X,'VARIATION RELATIVE EN OMEGA =',E10.3,3X,I3)
114.      C
115.      C    RELAXATION
116.              IF(RELAX.EQ.1.) GO TO 3
117.              DO 30 I=1,NOE
118.       30     OMEGA(I)=ROLAX1*OMEGA(I)+(1.-ROLAX1)*AUX(I)
119.      C
120.      C    CONVERGENCE ?
121.      3       IF ((VMAX.LE.SEUIL).OR.(INCRE.GE.ITRMAX)) GOTO 10
122.              ROLAX1=1.+(ROLAX-1.)*AMIN1(1.,10.*SQRT(VREL))
123.              INCRE=INCRE+1
124.              GO TO 7
125.      C
126.      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
127.      CCCCCCCCC    IOPT=2    CCCCCCCCC
128.      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
129.       5      CONTINUE
130.              DO 29 I=1,NOE
131.              AUX(I)=OMEGA(I)
132.       29     OMEGA(I)=0.0
133.              IF(ITIN.NE.1) GOTO 51
134.              IF(NFMAT4.EQ.0) GO TO 901
135.              READ(NFMAT4) LE,(MAT4(I),I=1,LE)
136.              BACKSPACE NFMAT4
137.      901     CALL CONVP2(M,RE,PSU,AUX,CAC,CIC,2,MU4,MAT4)
138.       51     IF(NGA.EQ.0) GOTO 27
139.              DO 32 I=1,NGA
140.              I1=IGA(I)
141.              IF(ITIN.EQ.1) MAT4(MU4(I1+1))=VTG
142.       32     OMEGA(I1)=VTG*GAMA(I)
143.       27     IF(MGA.EQ.0) GOTO 28
144.              DO 48 I=1,MGA
145.              I1=JGA(I)
146.              IF(ITIN.EQ.1) MAT4(MU4(I1+1))=VTG
147.              OMEGA(I1)=VTG*AUX(I1)
148.       48     CONTINUE
149.      C
150.       28     IF(ITIN.NE.1) GOTO 33
151.              CALL CRMC3R(MU4,MAT4,NOE,PIVOT,NENTRE,IMPRE,MAT4,IRETOU)
152.              IF(IRETOU.EQ.0) GOTO 33
153.              PRINT 500,PIVOT
```

```
154.      500  FORMAT(1H0,'PIVOT INFERIEUR AU SEUIL',E8.2,'  DEMANDE')
155.           IF(NENTRE.EQ.0) RETURN
156.       33  CALL DRCR3R(MU4,MAT4,OMEGA,NOE,NDCC,NIVEAU,OMEGA)
157.      C
158.      C    CALCUL DE LA VARIATION EN OMEGA ,
159.           VMAX=0.
160.           VM=0.
161.           DO 49 I=1,NOE
162.           VMAX=AMAX1(VMAX,ABS(AUX(I)-OMEGA(I)))
163.           VM=AMAX1(VM,ABS(OMEGA(I)))
164.       49  CONTINUE
165.           IF(VM.LE.SEUIL) VM=1.
166.           VREL=VMAX/VM
167.           PRINT 410,VREL
168.      C
169.      C    RELAXATION
170.           IF(ROLAX1.EQ.1.) GO TO 10
171.           DO 50 I=1,NOE
172.       50  OMEGA(I)=ROLAX1*OMEGA(I)+(1.-ROLAX1)*AUX(I)
173.           ROLAX1=1.+(ROLAX-1.)*AMIN1(1.,10.*SQRT(VREL))
174.      C
175.      C*******************************************************************************
176.      C    ETAPE 2 : CALCUL DE PSI
177.      C*******************************************************************************
178.      C
179.       10  CONTINUE
180.           DO 16 I=1,NOE
181.       16  AUX(I)=PSI(I)
182.      C
183.           IF(TMC) GO TO 36
184.           READ(NFMAT3) LE,(MAT3(I),I=1,LE)
185.           BACKSPACE NFMAT3
186.       36  CONTINUE
187.           NCODST=1
188.           CALL APBE3R(NCODST,MU,MAT3,OMEGA,NDCC,NOE,PSI)
189.           IF(NGA.EQ.0) GOTO 45
190.           DO 17 I=1,NGA
191.           I1=IGA(I)
192.       17  PSI(I1)=VTG*AUX(I1)
193.       45  IF(MGA.EQ.0) GOTO 46
194.           DO 18 I=1,MGA
195.           I1=JGA(I)
196.           PSI(I1)=VTG*AUX(I1)
197.       18  CONTINUE
198.      C
199.       46  IF(TMC) GO TO 37
200.           READ(NFMAT2) LE,(MAT2(I),I=1,LE)
201.           BACKSPACE NFMAT2
202.       37  CONTINUE
203.      C
204.           CALL DRCH1R(MU,MAT2,PSI,NOE,NDCC,NIVEAU,PSI)

205.      C
206.      C    CALCUL DE LA VARIATION EN PSI ,
207.           VMAX=0.
208.           VM=0.
209.           DO 19 I=1,NOE
210.           VMAX=AMAX1(VMAX,ABS(AUX(I)-PSI(I)))
```

```
211.            VM=AMAX1(VM,ABS(PSI(I)))
212.       19   CONTINUE
213.            VREL=VMAX/VM
214.            PRINT 400,VREL
215.       400  FORMAT (1H ,T42,'VARIATION RELATIVE EN PSI =',E10.3)
216.            IF (VM.GE.DIVRG) GO TO 1
217.       C
218.       C*****************************************************************************
219.       C    ETAPE 3 (UZAWA) : CALCUL DE GAMA
220.       C*****************************************************************************
221.       C
222.        8      CONTINUE
223.       C
224.            IF(NGA.EQ.0) GOTO 21
225.            IF(TMC) GO TO 38
226.            READ(NFMAT1) LE,(MAT1(I),I=1,LE)
227.            BACKSPACE NFMAT1
228.       38   CONTINUE
229.            CALL APBEBR(NCODST,MU,MAT1,PSI,NDCC,NOE,AUX)
230.            DO 20 I=1,NGA
231.       20   GAMA(I)=GAMA(I)+SIGMA*POIDS(I)*AUX(IGA(I))
232.       C
233.       C
234.            IF(TMC) GO TO 39
235.            READ(NFMAT3) LE,(MAT3(I),I=1,LE)
236.            BACKSPACE NFMAT3
237.       39   CONTINUE
238.            CALL APBEBR(NCODST,MU,MAT3,OMEGA,NDCC,NOE,AUX)
239.            DO 23 I=1,NGA
240.       23   GAMA(I)=GAMA(I)-SIGMA*POIDS(I)*AUX(IGA(I))
241.            IF(NGAA.EQ.0) GOTO 40
242.            DO 42 I=1,NGA
243.            IF(IGA(I).NE.IGAA(1))GO TO 42
244.              K=I
245.              DO 2 J=1,NGAA
246.            GAMA(K)=GAMA(K)-SIGMA*VGAA(J)
247.            K=K+1
248.       2      CONTINUE
249.            GO TO 40
250.       42   CONTINUE
251.       40   CONTINUE
252.       C
253.       C    CALCUL DE LA VARIATION EN GAMA ,
254.            VMAX=0.
255.            DO 26 I=1,NGA
```

BUS LILLE

```
      26    VMAX=AMAX1(VMAX,ABS(OMEGA(IGA(I))-GAMA(I)))
C
      PRINT 301,VMAX
 301  FORMAT (1H ,T64,'VARIATION ABSOLUE EN GAMA =',E10.3)
C
C*****************************************************************************
C   TESTS DE CONVERGENCE
C*****************************************************************************
C
 6    CONTINUE
      DO 24 I=1,NGA
 24   OMEGA(IGA(I))=GAMA(I)
      IF ((VMAX.LE.SEUIL).OR.(ITIN.GE.ITIMAX)) GOTO 21
      ITIN=ITIN+1
      GO TO 9
 21   IF(RE.NE.0.) GOTO 31
      PRINT 905
      PRINT 900,(GAMA(I),I=1,NGA)
      NRETOU=1
      IF(VMAX.LE.SEUIL) NRETOU=2
      GO TO 1
 31   VMAX=0.
      DO 22 I=1,NOE
      VMAX=AMAX1(VMAX,ABS(PSI(I)-PSU(I)))
C   RELAXATION
      PSU(I)=RELAX1*PSI(I)+(1.-RELAX1)*PSU(I)
      PSI(I)=PSU(I)
 22   CONTINUE
      VREL=VMAX/VM
C
      PRINT 300,VREL
 300  FORMAT (1H ,T85,'VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI =',E10.3)
C
      PRINT 905
      PRINT 900,(GAMA(I),I=1,NGA)
 900  FORMAT (13(1X,E9.3))
 905  FORMAT (1H0,'VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE')
C
      IF (VMAX.GE.DIVRG) GO TO 1
      IF ((VREL.LE.EPS).OR.(ITEX.GE.ITEMAX)) GOTO 34
      RELAX1=1.+(RELAX-1.)*AMIN1(1.,10.*SQRT(VREL))
      ITEX=ITEX+1
      ITIN=1
      GO TO 9
 34   CONTINUE
      ITEX=ITEX+1
      NRETOU=1
      IF(VREL.LE.EPS) NRETOU=2
 1    RETURN
      END
```

NAME	TYPE	CLASS	HEX LOC	DEC WORDS	NAME	TYPE	CLASS	HEX LOC	DEC WORDS	NAME	TYPE	CLASS
ABS	R	SPROG	INTRIN		AMAX1	R	SPROG	INTRIN		AMIN1	R	SPROG
APBEBR		SPROG	EXTERN		AUX	R	ARRAY	*00006 V	DUMMY	C	R	ARRAY
CAC	R	ARRAY	00055 V	42	CIC	R	ARRAY	0009D V	21	CONVR2		SPROG

```
1.      C-----------------------------------------------------------------
2.      C    MISE DANS LES NORMES MODULEF DU PROGRAMME NSPSOM
3.      C-----------------------------------------------------------------
4.      C-----------------------------------------------------------------------
5.      C
6.            COMMON /TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NX(1020)
7.            COMMON /TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
8.           %  ,IMPLEC,INILEC,FILLER
9.            DIMENSION NFPSIE(10),NIVPSIE(10),NFOME(10),NIVOME(10)
10.           DIMENSION NFPSS(10),NIVPSS(10),NFOMS(10),NIVOMS(10)
11.           DIMENSION RE(10),UPS(150)
12.           LOGICAL OUV(10),INIT(10),TMC,INIP(10)
13.           COMMON M(160000)
14.           DIMENSION XM(160000)
15.           EQUIVALENCE (M(1),XM(1))
16.           INTEGER TITRE(1)
17.         * DIMENSION P(33),L(16)
18.           DATA L/32,31,26,25,24,23,22,29,30,33,28,27,21,20,19,18/
19.        ** DATA P/332.51,83,139,188,138,99,7563,221,6866,124,703,285,0355,
20.          1 166.2708,399.0495,249.4060,704.2063,598.5778,1368,1762,798,1018,
21.          2 1596,2074,798,1058,1586,1862/
22.           DO 7 I=1,16
23.    7      P(L(I))=P(I)
24.     C
25.     C    INITIALISER LES COMMONS DE TRAVAIL
26.           IMPLEC=0
27.           INILEC=0
28.           IM=1
29.           NOMTAB=0
30.           READ 1000,NTITRE,NDATE,NOMCRE
31.     1000  FORMAT (20A4)
32.           READ(105,100)NNN
33.           READ(105,100) LM,IMPRE,ITEX,TMC
34.     100   FORMAT(3(I6),L6)
35.           WRITE(108,101) LM,IMPRE,ITEX,TMC
36.     101   FORMAT(' LM=',I6,'IMPRE=',I6,'ITEX=',I6,'TMC=',L6)
37.           READ(105,102) NFMAIL,NIVMAI,NFCOOR,NIVCOO,NFMPLR,NIVMPL,NFP,NIVP,
38.          % NFMAT1,NIMAT,NFMAT2,NFMAT3,NFMAT4,NDCC,IOPT,NFIC,NIMAT4,NIMAT2,
39.          % NIMAT3
40.     102   FORMAT((13(Io)))
41.           WRITE(108,106)NFMAIL,NIVMAI,NFCOOR,NIVCOO,NFMPLR,NFP,NIVP,
42.          %NFMAT1,NIMAT,NFMAT2,NFMAT3,NFMAT4,NDCC,IOPT,NFIC,NIVMPL,NIMAT4,
43.          % NIMAT2,NIMAT3
44.     106   FORMAT(' NFMAIL=',I3,',NIVMAI=',I3,',NFCOOR=',I3,',NIVCO=',I3,',NF
45.          %MPLR=',I3,',NFP=',I3,',NIVP=',I3,',NFMAT1=',I3,',NIMAT=',I3,',NFMA
46.          %T2=',I3,',NFMAT3=',I3,'NFMAT4=',I3/',NDCC=',I3,',IOPT=',I3,',NFIC=
47.          %',I3,',NIVMPL=',I3,',NIMAT4=',I3,',NIMAT2=',I3,',NIMAT3=',I3)
48.           READ(105,120) (INIT(I),I=1,NDCC)
49.     120   FORMAT(13(L6))
50.           WRITE(108,121) (I,INIT(I),I=1,NDCC)
51.     121   FORMAT((6(' INIT(',I6,')=',L6)))
```

* L : Tableau des numéros des poids

** P : Tableau des valeurs des poids

BUS LILLE

```
      READ(105,120) (INIP(I),I=1,NDCC)
      WRITE(108,131) (I,INIP(I),I=1,NDCC)
131   FORMAT((6(' INIP(',I6,')=',L6)))
      READ(105,104) (NFPSIE(I),NIVPSIE(I),NFOME(I),NIVOME(I),I=1,NDCC)
104   FORMAT((4(I6)))
      WRITE(108,111)(I,NFPSIE(I),NIVPSIE(I),NFOME(I),NIVOME(I),I=1,NDCC)
111   FORMAT((' CAS DE CHARGE NO:',I3/',NFPSIE=',I3,',NIVPSIE=',I3,',NFO
     %ME=',I3,',NIVOME=',I3))
      READ(105,103) (NFPSS(I),NIVPSS(I),NFOMS(I),NIVOMS(I),OUV(I),I=1,ND
     %CC)
 103  FORMAT((4(I6),L6))
      WRITE(108,110)(I,NFPSS(I),NIVPSS(I),NFOMS(I),NIVOMS(I),OUV(I),I=1,
     %NDCC)
 110  FORMAT((' CAS DE CHARGE NO:',I3/' NFPSI=',I3,',NIVPSI=',I3,',NFOM=
     %',I3,',NIVOM=',I3,'LES FICHIERS SONT CREES?',L6))
      LONREE=1
C
      NIMAT4=4
      VTG=1.E+30
      READ (11)TITRE(1)
      READ (12)TITRE(1)
      READ (13)TITRE(1)
      READ (20)TITRE(1)
      READ (21)TITRE(1)
      READ (22)TITRE(1)
      READ (23)TITRE(1)
      READ (24)TITRE(1)
      READ (25)TITRE(1)
      REWIND NFP
      DO 6 I=1,NDCC
      IF(NFPSIE(I).EQ.0) GO TO 6
      READ(NFPSIE(I))I1
      REWIND NFPSIE(I)
      READ(NFOME(I))I1
      REWIND NFOME(I)
6     CONTINUE
      DO 1 I=1,NDCC
      IF(NFPSS(I).EQ.0) GO TO 1
      IF(OUV(I)) GO TO 2
      READ(NFPSS(I)) I1
      READ(NFOMS(I))I1
      GO TO 3
2     WRITE(NFPSS(I))I1
      WRITE(NFOMS(I))I1
3     REWIND NFPSS(I)
      REWIND NFOMS(I)
 1    CONTINUE
      READ(105,112) (RE(I),I=1,NDCC)
112   FORMAT((5(E15.7)))
      WRITE(108,115) (I,RE(I),I=1,NDCC)
115   FORMAT((' CAS DE CHARGE NO:',I3,' RE=',E15.7)/)
```

BUS LILLE

```
103.            READ(105,119) LNGAA
104.     119    FORMAT(I6)
105.            IF(LNGAA.EQ.0) GO TO 130
106.            DO 117 I=1,NDCC
107.            I2=1+(I-1)*LNGAA
108.            I3=I*LNGAA
109.            READ(105,112)(UPS(J),J=I2,I3)
110.            WRITE(108,118) I,(UPS(J),J=I2,I3)
111.     118    FORMAT(' CAS DE CHARGE NO:',I3/(' DPSI/DN=',8(5X,E10.3)/))
112.     117    CONTINUE
113.     130    CALL NSPSOM(M,XM,VTG,INIT,NDCC,TMC,NFMAIL,NIVMAI,NFCOOR,
114.           %     NIVCOO,NFMPLR,NIVMPL,NFP,NIVP,NFPSIE,NIVPSIE,NFOME,NIVOME,NF
115.           % MAT1,NIMAT,NFMAT2,NIMAT2,NFMAT3,NIMAT3,IOPT,NFMAT4,NIMAT4,ITEX,
116.           %     NFPSS,NIVPSS,NFOMS,NIVOMS,NFIC,RE,UPS,P,LNGAA,INIP)
117.            STOP
118.            END
```

```
 LM=  3500IMPRE=      CITEX=      11MC=      T
 NFMAIL= 11,NIVMAI=  1,NFCOOR= 12,NIVCO=  1,NFMPLR= 13,NFP= 25,NIVP=  1,NFMAT1= 21,NIMAT=  1,NFMAT2= 23,NFMAT3= 24NFMAT4= 20
,NDCC=  6,IOPT=  2,NFIC= 10,NIVMOL=  1,NIMAT4=  4,NIMAT2=  2,NIMAT3=  3
 INIT(     1)=      T INIT(     2)=      F INIT(     3)=      F INIT(     4)=      F INIT(     5)=      F INIT(     6)=      F
 INIP(     1)=      T INIP(     2)=      F INIP(     3)=      F INIP(     4)=      F INIP(     5)=      F INIP(     6)=      F
 CAS DE CHARGE NO:  1
,NFPSIE= 25,NIVPSIE=  1,NFOME= 25,NIVOME=  1
 CAS DE CHARGE NO:  2
,NFPSIE=  0,NIVPSIE=  1,NFOME=  0,NIVOME=  1
 CAS DE CHARGE NO:  3
,NFPSIE=  0,NIVPSIE=  1,NFOME=  0,NIVOME=  1
 CAS DE CHARGE NO:  4
,NFPSIE=  0,NIVPSIE=  1,NFOME=  0,NIVOME=  1
 CAS DE CHARGE NO:  5
,NFPSIE=  0,NIVPSIE=  1,NFOME=  0,NIVOME=  1
 CAS DE CHARGE NO:  6
,NFPSIE=  0,NIVPSIE=  1,NFOME=  0,NIVOME=  1
 CAS DE CHARGE NO:  1
 NFPSI=  0,NIVPSI=  1,NFOM=  0,NIVOM=  1LES FICHIERS SONT CREES?      F
 CAS DE CHARGE NO:  2
 NFPSI=  0,NIVPSI=  1,NFOM=  0,NIVOM=  1LES FICHIERS SONT CREES?      F
 CAS DE CHARGE NO:  3
 NFPSI=  0,NIVPSI=  1,NFOM=  0,NIVOM=  1LES FICHIERS SONT CREES?      F
 CAS DE CHARGE NO:  4
 NFPSI=  0,NIVPSI=  1,NFOM=  0,NIVOM=  1LES FICHIERS SONT CREES?      F
 CAS DE CHARGE NO:  5
 NFPSI=  0,NIVPSI=  1,NFOM=  0,NIVOM=  1LES FICHIERS SONT CREES?      F
 CAS DE CHARGE NO:  6
 NFPSI= 28,NIVPSI=  1,NFOM= 29,NIVOM=  1LES FICHIERS SONT CREES?      F
 CAS DE CHARGE NO:  1 RE=   .1000000E+03

 CAS DE CHARGE NO:  2 RE=   .1000000E+03

 CAS DE CHARGE NO:  3 RE=   .1000000E+03

 CAS DE CHARGE NO:  4 RE=   .1000000E+03

 CAS DE CHARGE NO:  5 RE=   .1000000E+03

 CAS DE CHARGE NO:  6 RE=   .1000000E+03

 CAS DE CHARGE NO:  1
 DPSI/DN=       .000E+00       .000E+00       .000E+00
 CAS DE CHARGE NO:  2
 DPSI/DN=       .000E+00       .000E+00       .000E+00
 CAS DE CHARGE NO:  3
 DPSI/DN=       .000E+00       .000E+00       .000E+00
 CAS DE CHARGE NO:  4
 DPSI/DN=       .000E+00       .000E+00       .000E+00
 CAS DE CHARGE NO:  5
 DPSI/DN=       .000E+00       .000E+00       .000E+00
```

LILLE SRC

```
CAS DE CHARGE NO:  6
DPSI/DN=        .000E+00        .000E+00        .000E+00
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
M O D U L E   NSPSOM :NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA10 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA10 TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=       1 L=      32 NOMTAB=       1 IM=      33 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA11 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA11 TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=      33 L=      22 NOMTAB=       2 IM=      55 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM NOPA NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=NOPA TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=      55 L=      18 NOMTAB=       3 IM=      73 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA12 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA12 TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=      73 L=      12 NOMTAB=       4 IM=      85 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA13 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA13 TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=      85 L=      36 NOMTAB=       5 IM=     121 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA14 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA14 TYPE CARACTER IA INITIAL =         0 IA=     121 L=       4 NOMTAB=       6 IM=     125 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA15 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA15 TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     125 L=       1 NOMTAB=       7 IM=     126 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA16 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA16 TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     126 L=       1 NOMTAB=       8 IM=     127 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA17 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA17 TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     127 L=       1 NOMTAB=       9 IM=     128 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA18 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA18 TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     128 L=       1 NOMTAB=      10 IM=     129 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1B NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1B TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     129 L=       4 NOMTAB=      11 IM=     133 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1C NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1C TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     133 L=       1 NOMTAB=      12 IM=     134 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1D NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1D TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     134 L=       1 NOMTAB=      13 IM=     135 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1E NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1E TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     135 L=       1 NOMTAB=      14 IM=     136 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1F NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1F TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     136 L=       1 NOMTAB=      15 IM=     137 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1G NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1G TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     137 L=       1 NOMTAB=      16 IM=     138 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1H NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1H TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     138 L=       1 NOMTAB=      17 IM=     139 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1I NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1I TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     139 L=       1 NOMTAB=      18 IM=     140 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1J NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1J TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     140 L=      14 NOMTAB=      19 IM=     154 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1K NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1K TYPE REEL1MOT IA INITIAL =         0 IA=     154 L=      18 NOMTAB=      20 IM=     172 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1L NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1L TYPE COMPLEX2 IA INITIAL =         0 IA=     177 L=     296 NOMTAB=      21 IM=     473 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MA1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MA1% TYPE ENTIER   IA INITIAL =         0 IA=     473 L=      67 NOMTAB=      22 IM=     540 LM=      3500
```


BUS LILLE

```
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
 TITRE DU TRAVAIL NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
 JOUR DE CREATION 03/07/79
 NOM DU CREATEUR  PHILIPP JACQUES LILLE
 NOM DE LA STRUCTURE MAIL
 NUMERO DE NIVEAU      1
 NUMERO D ETAT      0
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

DANS ADRESS J=:NGA TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       172 L=        5 NOMTAB=       23 IM=      540 LM=     3500
DANS ADRESS J=:DIR TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       540 L=       11 NOMTAB=       24 IM=      551 LM=     3500
DANS ADRESS J=:GAA TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       551 L=        3 NOMTAB=       25 IM=      554 LM=     3500
DANS ADRESS J=:GMA TYPE REFL1MOT IA INITIAL =          0 IA=       554 L=        5 NOMTAB=       26 IM=      559 LM=     3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MP1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MP10 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MP10 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       559 L=       32 NOMTAB=       27 IM=      591 LM=     3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MP11 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MP11 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       591 L=       22 NOMTAB=       28 IM=      613 LM=     3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM /NOF NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=/NOF TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       613 L=        4 NOMTAB=       29 IM=      617 LM=     3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MP12 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MP12 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       617 L=       10 NOMTAB=       30 IM=      627 LM=     3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MP13 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MP13 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       627 L=        4 NOMTAB=       31 IM=      631 LM=     3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MP14 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MP14 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       631 L=       32 NOMTAB=       32 IM=      663 LM=     3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MP1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MP1% TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       663 L=       19 NOMTAB=       33 IM=      682 LM=     3500

$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
TITRE DU TRAVAIL NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
JOUR DE CREATION 05/07/79
NOM DU CREATEUR  PHILIPP JACQUES LILLE
NOM DE LA STRUCTURE MPLR
NUMERO DE NIVEAU      1
NUMERO D ETAT      0
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

.NGA =    5
    1     3     7     16     17
.NGAA =   3
    3     7     16
.NDIR =   11
    2     8     19     21     26     29     30     33     34     35     37
*****************************************************************************************************
                         DESTRUCTION EN MEMOIRE CENTRALE DE LA S.D MPLR DE NIVEAU   1 AVEC OPTION  0
*****************************************************************************************************
LE TABLEAU MP10 TYPE   1 ADRESSE        559 NBRE DE MOTS        32 EST TUE
```

BUS LILLE

```
 LE TABLEAU MP11 TYPE    1 ADRESSE         591 NBRE DE MOTS         22 EST TUE
 LE TABLEAU MP12 TYPE    1 ADRESSE         617 NBRE DE MOTS         10 EST TUE
 LE TABLEAU MP13 TYPE    1 ADRESSE         627 NBRE DE MOTS          4 EST TUE
 LE TABLEAU MP14 TYPE    1 ADRESSE         631 NBRE DE MOTS         32 EST TUE
********** AVERTISSEMENT : LE TABLEAU MP1S N'EST PAS DANS LES TABLES **********
 LE TABLEAU MP1% TYPE    1 ADRESSE         663 NBRE DE MOTS         19 EST TUE
********************************************************************************************************************************


 DANS ADRESS J=:POI TYPE REEL1MOT IA INITIAL =          0 IA=       559 L=         5 NOMTAB=        28 IM=       617 LM=      3500
0POIDS POUR UZAWA
     .9584E+02      .2394E+02      .4789E+02      .2394E+02      .9584E+02
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 10 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 DANS ADRESS J=B 10 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       564 L=        32 NOMTAB=        29 IM=       617 LM=      3500
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 12 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 DANS ADRESS J=B 12 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       596 L=        11 NOMTAB=        30 IM=       617 LM=      3500
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 13 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 DANS ADRESS J=B 13 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       607 L=         2 NOMTAB=        31 IM=       617 LM=      3500
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 14 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 DANS ADRESS J=B 14 TYPE REEL1MOT IA INITIAL =          0 IA=       617 L=        37 NOMTAB=        32 IM=       654 LM=      3500
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 DANS ADRESS J=B 1% TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       654 L=        16 NOMTAB=        33 IM=       670 LM=      3500
 DANS ADRESS J=:PSI TYPE REEL1MOT IA INITIAL =          0 IA=       670 L=        37 NOMTAB=        34 IM=       707 LM=      3500
********************************************************************************************************************************
                          DESTRUCTION EN MEMOIRE CENTRALE DE LA S.D B     DE NIVEAU   1 AVEC OPTION  0
********************************************************************************************************************************
 LE TABLEAU B 10 TYPE    1 ADRESSE         564 NBRE DE MOTS         32 EST TUE
********** AVERTISSEMENT : LE TABLEAU B 11 N'EST PAS DANS LES TABLES **********
 LE TABLEAU B 12 TYPE    1 ADRESSE         596 NBRE DE MOTS         11 EST TUE
 LE TABLEAU B 13 TYPE    1 ADRESSE         607 NBRE DE MOTS          2 EST TUE
 LE TABLEAU B 14 TYPE    2 ADRESSE         617 NBRE DE MOTS         37 EST TUE
 LE TABLEAU B 1% TYPE    1 ADRESSE         654 NBRE DE MOTS         16 EST TUE
********************************************************************************************************************************


 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 10 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 DANS ADRESS J=B 10 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       564 L=        32 NOMTAB=        30 IM=       707 LM=      3500
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 12 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 DANS ADRESS J=B 12 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       596 L=        11 NOMTAB=        31 IM=       707 LM=      3500
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 13 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 DANS ADRESS J=B 13 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       607 L=         2 NOMTAB=        32 IM=       707 LM=      3500
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 14 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 DANS ADRESS J=B 14 TYPE REEL1MOT IA INITIAL =          0 IA=       617 L=        37 NOMTAB=        33 IM=       707 LM=      3500
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 DANS ADRESS J=B 1% TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       654 L=        16 NOMTAB=        34 IM=       707 LM=      3500
 DANS ADRESS J=:OME TYPE REEL1MOT IA INITIAL =          0 IA=       707 L=        37 NOMTAB=        35 IM=       744 LM=      3500
 DANS ADRESS J=:VGA TYPE REEL1MOT IA INITIAL =          0 IA=       609 L=         3 NOMTAB=        36 IM=       744 LM=      3500
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM C01% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
 AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM C010 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
```

```
DANS ADRESS J=C010 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       744 L=        32 NOMTAB=        37 IM=       776 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM C012 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=C012 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       776 L=         7 NOMTAB=        38 IM=       783 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM C013 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=C013 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       783 L=         2 NOMTAB=        39 IM=       785 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM C014 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=C014 TYPE REEL1MOT IA INITIAL =          0 IA=       785 L=        24 NOMTAB=        40 IM=       809 LM=      3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM C01% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=C01% TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=       809 L=        16 NOMTAB=        41 IM=       825 LM=      3500
 ELEMENT NO     2  NOEUD NO     7  VTOM =  .0000E+00
 ELEMENT NO     2  NOEUD NO     3  VTOM =  .0000E+00
 ELEMENT NO     5  NOEUD NO     7  VTOM =  .0000E+00
 ELEMENT NO     5  NOEUD NO    16  VTOM =  .0000E+00
**********************************************************************************************************************************
                          DESTRUCTION EN MEMOIRE CENTRALE DE LA S.D COOR DE NIVEAU   1 AVEC OPTION  0
**********************************************************************************************************************************
LE TABLEAU C010 TYPE   1 ADRESSE        744 NBRE DE MOTS         32 EST TUE
********** AVERTISSEMENT : LE TABLEAU C011 N'EST PAS DANS LES TABLES **********
LE TABLEAU C012 TYPE   1 ADRESSE        776 NBRE DE MOTS          7 EST TUE
LE TABLEAU C013 TYPE   1 ADRESSE        783 NBRE DE MOTS          2 EST TUE
LE TABLEAU C014 TYPE   2 ADRESSE        785 NBRE DE MOTS         24 EST TUE
LE TABLEAU C01% TYPE   1 ADRESSE        809 NBRE DE MOTS         16 EST TUE
**********************************************************************************************************************************
```



```
**********************************************************************************************************************************
                                                  INITIALISATION
                                              VALEURS DE PSI ET DE OMEGA
**********************************************************************************************************************************

POINT  PSI              OMEGA                POINT  PSI              OMEGA                POINT  PSI              OMEGA
   1    .0000000E+00    .0000000E+00  *       2    .0000000E+00    .0000000E+00  *       3    .0000000E+00    .0000000E+00  *
   4    .0000000E+00    .0000000E+00  *       5    .0000000E+00    .0000000E+00  *       6    .0000000E+00    .0000000E+00  *
   7    .0000000E+00    .0000000E+00  *       8    .0000000E+00    .0000000E+00  *       9    .0000000E+00    .0000000E+00  *
  10    .0000000E+00    .0000000E+00  *      11    .0000000E+00    .0000000E+00  *      12    .0000000E+00    .0000000E+00  *
  13    .0000000E+00    .0000000E+00  *      14    .0000000E+00    .0000000E+00  *      15    .0000000E+00    .0000000E+00  *
  16    .0000000E+00    .0000000E+00  *      17    .0000000E+00    .0000000E+00  *      18    .0000000E+00    .0000000E+00  *
  19    .0000000E+00    .0000000E+00  *      20    .0000000E+00    .0000000E+00  *      21    .0000000E+00    .0000000E+00  *
  22    .0000000E+00    .0000000E+00  *      23    .0000000E+00    .0000000E+00  *      24    .0000000E+00    .0000000E+00  *
  25    .0000000E+00    .0000000E+00  *      26    .1165495E-01   -.5134785E-01  *      27    .0000000E+00    .0000000E+00  *
  28    .0000000E+00    .0000000E+00  *      29    .2330991E-01   -.1026957E+00  *      30    .5076233E-02   -.6560507E+01  *
  31    .0000000E+00    .0000000E+00  *      32    .0000000E+00    .0000000E+00  *      33    .1673009E-01   -.2710870E+01  *
  34    .3120536E-01   -.8540158E+00  *      35    .3496486E-01   -.1540436E+00  *      36    .0000000E+00    .0000000E+00  *
  37    .4661982E-01   -.2053914E+00  *
VALEURS DE LA VITESSE TANGENTIELLE SUR LA FRONTIERE NO 2
      .000E+00        .000E+00        .000E+00
DANS ADRESS J=:AUX TYPE REEL1MOT IA INITIAL =          0 IA=       744 L=        37 NOMTAB=        37 IM=       781 LM=      3500
DANS ADRESS J=:PSU TYPE REEL1MOT IA INITIAL =          0 IA=       781 L=        37 NOMTAB=        38 IM=       818 LM=      3500
```

```
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU10 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU10 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=      818 L=     32 NOMTAB=     39 IM=     850 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU12 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU12 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=      850 L=     12 NOMTAB=     40 IM=     862 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU13 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU13 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=      862 L=      2 NOMTAB=     41 IM=     864 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU14 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU14 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=      864 L=     38 NOMTAB=     42 IM=     902 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU15 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU15 TYPE REEL1MOT IA INITIAL =        0 IA=      902 L=    409 NOMTAB=     43 IM=    1311 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU1% TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     1311 L=     19 NOMTAB=     44 IM=    1330 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU2% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU20 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU20 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     1330 L=     32 NOMTAB=     45 IM=    1362 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU22 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU22 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     1362 L=     12 NOMTAB=     46 IM=    1374 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU23 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU23 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     1374 L=      2 NOMTAB=     47 IM=    1376 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU24 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU24 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     1376 L=     38 NOMTAB=     48 IM=    1414 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU25 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU25 TYPE REEL1MOT IA INITIAL =        0 IA=     1414 L=    409 NOMTAB=     49 IM=    1823 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU2% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU2% TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     1823 L=     19 NOMTAB=     50 IM=    1842 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU3% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU30 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU30 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     1842 L=     32 NOMTAB=     51 IM=    1874 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU32 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU32 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     1874 L=     12 NOMTAB=     52 IM=    1886 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU33 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU33 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     1886 L=      2 NOMTAB=     53 IM=    1888 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU34 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU34 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     1888 L=     38 NOMTAB=     54 IM=    1926 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU35 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU35 TYPE REEL1MOT IA INITIAL =        0 IA=     1926 L=    409 NOMTAB=     55 IM=    2335 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU3% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU3% TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     2335 L=     19 NOMTAB=     56 IM=    2354 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU4% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU40 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU40 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     2354 L=     32 NOMTAB=     57 IM=    2386 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU42 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU42 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     2386 L=     12 NOMTAB=     58 IM=    2398 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU43 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU43 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     2398 L=      2 NOMTAB=     59 IM=    2400 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU44 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU44 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=     2400 L=     38 NOMTAB=     60 IM=    2438 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU45 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU45 TYPE REEL1MOT IA INITIAL =        0 IA=     2438 L=    781 NOMTAB=     61 IM=    3219 LM=    3500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU4% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
```

DANS ADRESS J=MU4% TYPE ENTIER IA INITIAL = 0 IA= 3219 L= 19 NOMTAB= 62 IN= 3238 LM= 3500

IMAGE DES TABLES DE GESTION DU SUPER-TABLEAU
LISTE DES 62 TABLEAUX D'ADRESSE DANS LE SUPER-TABLEAU DE 3500 MOTS

LE 1-EME TABLEAU, 1-EME DES TABLES : NOM MA10 TYPE 1 ADRESSE DANS M 1 TAILLE 32 MOTS
LE 2-EME TABLEAU, 2-EME DES TABLES : NOM MA11 TYPE 1 ADRESSE DANS M 33 TAILLE 22 MOTS
LE 3-EME TABLEAU, 3-EME DES TABLES : NOM NOPA TYPE 1 ADRESSE DANS M 55 TAILLE 18 MOTS
LE 4-EME TABLEAU, 4-EME DES TABLES : NOM MA12 TYPE 1 ADRESSE DANS M 73 TAILLE 12 MOTS
LE 5-EME TABLEAU, 5-EME DES TABLES : NOM MA13 TYPE 1 ADRESSE DANS M 85 TAILLE 36 MOTS
LE 6-EME TABLEAU, 6-EME DES TABLES : NOM MA14 TYPE 4 ADRESSE DANS M 121 TAILLE 4 MOTS
LE 7-EME TABLEAU, 7-EME DES TABLES : NOM MA15 TYPE 1 ADRESSE DANS M 125 TAILLE 1 MOTS
LE 8-EME TABLEAU, 8-EME DES TABLES : NOM MA16 TYPE 1 ADRESSE DANS M 126 TAILLE 1 MOTS
LE 9-EME TABLEAU, 9-EME DES TABLES : NOM MA17 TYPE 1 ADRESSE DANS M 127 TAILLE 1 MOTS
LE 10-EME TABLEAU, 10-EME DES TABLES : NOM MA18 TYPE 1 ADRESSE DANS M 128 TAILLE 1 MOTS
LE 11-EME TABLEAU, 11-EME DES TABLES : NOM MA1B TYPE 1 ADRESSE DANS M 129 TAILLE 4 MOTS
LE 12-EME TABLEAU, 12-EME DES TABLES : NOM MA1C TYPE 1 ADRESSE DANS M 133 TAILLE 1 MOTS
LE 13-EME TABLEAU, 13-EME DES TABLES : NOM MA1D TYPE 1 ADRESSE DANS M 134 TAILLE 1 MOTS
LE 14-EME TABLEAU, 14-EME DES TABLES : NOM MA1E TYPE 1 ADRESSE DANS M 135 TAILLE 1 MOTS
LE 15-EME TABLEAU, 15-EME DES TABLES : NOM MA1F TYPE 1 ADRESSE DANS M 136 TAILLE 1 MOTS
LE 16-EME TABLEAU, 16-EME DES TABLES : NOM MA1G TYPE 1 ADRESSE DANS M 137 TAILLE 1 MOTS
LE 17-EME TABLEAU, 17-EME DES TABLES : NOM MA1H TYPE 1 ADRESSE DANS M 138 TAILLE 1 MOTS
LE 18-EME TABLEAU, 18-EME DES TABLES : NOM MA1I TYPE 1 ADRESSE DANS M 139 TAILLE 1 MOTS
LE 19-EME TABLEAU, 19-EME DES TABLES : NOM MA1J TYPE 1 ADRESSE DANS M 140 TAILLE 14 MOTS
LE 20-EME TABLEAU, 20-EME DES TABLES : NOM MA1K TYPE 2 ADRESSE DANS M 154 TAILLE 18 MOTS
LE 21-EME TABLEAU, 23-EME DES TABLES : NOM :NGA TYPE 1 ADRESSE DANS M 172 TAILLE 5 MOTS
LE 22-EME TABLEAU, 21-EME DES TABLES : NOM MA1L TYPE 7 ADRESSE DANS M 177 TAILLE 296 MOTS
LE 23-EME TABLEAU, 22-EME DES TABLES : NOM MA1% TYPE 1 ADRESSE DANS M 473 TAILLE 67 MOTS
LE 24-EME TABLEAU, 24-EME DES TABLES : NOM :DIR TYPE 1 ADRESSE DANS M 540 TAILLE 11 MOTS
LE 25-EME TABLEAU, 25-EME DES TABLES : NOM :GAA TYPE 1 ADRESSE DANS M 551 TAILLE 3 MOTS
LE 26-EME TABLEAU, 26-EME DES TABLES : NOM :GMA TYPE 2 ADRESSE DANS M 554 TAILLE 5 MOTS
LE 27-EME TABLEAU, 28-EME DES TABLES : NOM :POI TYPE 2 ADRESSE DANS M 559 TAILLE 5 MOTS
LE 28-EME TABLEAU, 30-EME DES TABLES : NOM B 10 TYPE 1 ADRESSE DANS M 564 TAILLE 32 MOTS
LE 29-EME TABLEAU, 31-EME DES TABLES : NOM B 12 TYPE 1 ADRESSE DANS M 596 TAILLE 11 MOTS
LE 30-EME TABLEAU, 32-EME DES TABLES : NOM B 13 TYPE 1 ADRESSE DANS M 607 TAILLE 2 MOTS
LE 31-EME TABLEAU, 34-EME DES TABLES : NOM :VGA TYPE 2 ADRESSE DANS M 609 TAILLE 3 MOTS
LE 32-EME TABLEAU, 27-EME DES TABLES : NOM /NOF TYPE 1 ADRESSE DANS M 613 TAILLE 4 MOTS
LE 33-EME TABLEAU, 33-EME DES TABLES : NOM B 14 TYPE 2 ADRESSE DANS M 617 TAILLE 37 MOTS
LE 34-EME TABLEAU, 34-EME DES TABLES : NOM B 1% TYPE 1 ADRESSE DANS M 654 TAILLE 16 MOTS
LE 35-EME TABLEAU, 29-EME DES TABLES : NOM :PSI TYPE 2 ADRESSE DANS M 670 TAILLE 37 MOTS
LE 36-EME TABLEAU, 35-EME DES TABLES : NOM :OME TYPE 2 ADRESSE DANS M 707 TAILLE 37 MOTS
LE 37-EME TABLEAU, 37-EME DES TABLES : NOM :AUX TYPE 2 ADRESSE DANS M 744 TAILLE 37 MOTS
LE 38-EME TABLEAU, 38-EME DES TABLES : NOM :PSU TYPE 2 ADRESSE DANS M 781 TAILLE 37 MOTS
LE 39-EME TABLEAU, 39-EME DES TABLES : NOM MU10 TYPE 1 ADRESSE DANS M 818 TAILLE 32 MOTS
LE 40-EME TABLEAU, 40-EME DES TABLES : NOM MU12 TYPE 1 ADRESSE DANS M 850 TAILLE 12 MOTS
LE 41-EME TABLEAU, 41-EME DES TABLES : NOM MU13 TYPE 1 ADRESSE DANS M 862 TAILLE 2 MOTS
LE 42-EME TABLEAU, 42-EME DES TABLES : NOM MU14 TYPE 1 ADRESSE DANS M 864 TAILLE 38 MOTS
LE 43-EME TABLEAU, 43-EME DES TABLES : NOM MU15 TYPE 2 ADRESSE DANS M 902 TAILLE 409 MOTS
LE 44-EME TABLEAU, 44-EME DES TABLES : NOM MU1% TYPE 1 ADRESSE DANS M 1311 TAILLE 19 MOTS
LE 45-EME TABLEAU, 45-EME DES TABLES : NOM MU20 TYPE 1 ADRESSE DANS M 1330 TAILLE 32 MOTS

```
 LE  46-EME TABLEAU,  46-EME DES TABLES : NOM MU22 TYPE 1 ADRESSE DANS M        1362 TAILLE          12 MOTS
 LE  47-EME TABLEAU,  47-EME DES TABLES : NOM MU23 TYPE 1 ADRESSE DANS M        1374 TAILLE           2 MOTS
 LE  48-EME TABLEAU,  48-EME DES TABLES : NOM MU24 TYPE 1 ADRESSE DANS M        1376 TAILLE          38 MOTS
 LE  49-EME TABLEAU,  49-EME DES TABLES : NOM MU25 TYPE 2 ADRESSE DANS M        1414 TAILLE         409 MOTS
 LE  50-EME TABLEAU,  50-EME DES TABLES : NOM MU2% TYPE 1 ADRESSE DANS M        1823 TAILLE          19 MOTS
 LE  51-EME TABLEAU,  51-EME DES TABLES : NOM MU30 TYPE 1 ADRESSE DANS M        1842 TAILLE          32 MOTS
 LE  52-EME TABLEAU,  52-EME DES TABLES : NOM MU32 TYPE 1 ADRESSE DANS M        1874 TAILLE          12 MOTS
 LE  53-EME TABLEAU,  53-EME DES TABLES : NOM MU33 TYPE 1 ADRESSE DANS M        1886 TAILLE           2 MOTS
 LE  54-EME TABLEAU,  54-EME DES TABLES : NOM MU34 TYPE 1 ADRESSE DANS M        1888 TAILLE          38 MOTS
 LE  55-EME TABLEAU,  55-EME DES TABLES : NOM MU35 TYPE 2 ADRESSE DANS M        1926 TAILLE         409 MOTS
 LE  56-EME TABLEAU,  56-EME DES TABLES : NOM MU3% TYPE 1 ADRESSE DANS M        2335 TAILLE          19 MOTS
 LE  57-EME TABLEAU,  57-EME DES TABLES : NOM MU40 TYPE 1 ADRESSE DANS M        2354 TAILLE          32 MOTS
 LE  58-EME TABLEAU,  58-EME DES TABLES : NOM MU42 TYPE 1 ADRESSE DANS M        2386 TAILLE          12 MOTS
 LE  59-EME TABLEAU,  59-EME DES TABLES : NOM MU43 TYPE 1 ADRESSE DANS M        2398 TAILLE           2 MOTS
 LE  60-EME TABLEAU,  60-EME DES TABLES : NOM MU44 TYPE 1 ADRESSE DANS M        2400 TAILLE          38 MOTS
 LE  61-EME TABLEAU,  61-EME DES TABLES : NOM MU45 TYPE 2 ADRESSE DANS M        2438 TAILLE         781 MOTS
 LE  62-EME TABLEAU,  62-EME DES TABLES : NOM MU4% TYPE 1 ADRESSE DANS M        3219 TAILLE          19 MOTS
01-ERE ADRESSE LIBRE DERRIERE CES TABLEAUX =        3238

*****************************************************************************************************************************

1*****************************************************************************************************************************
                    SIGMA = .70E+02
                    RELAX = .10E+01
                    ROLAX = .10E+01
                    EPS = .10E-06
                    SEUIL = .10E-06
                    NENTRE =  0
                    NOMBRE DE REYNOLDS = .10E+03
*****************************************************************************************************************************
0****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  1    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  1
                    VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .332E+00
                                        VARIATION RELATIVE EN PSI =  .648E+00
                                                        VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .100E+02
                                                                        VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI =  .648E+00
)VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
 -.238E-01 -.467E+01 -.854E+01 -.100E+02 -.851E+01
)****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  2    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  1
                    VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .511E+00
                                        VARIATION RELATIVE EN PSI =  .428E-01
                                                        VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .303E+01
                                                                        VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI =  .428E-01
)VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
 .224E-01 -.270E+01 -.551E+01 -.906E+01 -.102E+02
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  3    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  1
                    VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .131E+00
                                        VARIATION RELATIVE EN PSI =  .127E-01
                                                        VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .836E+00
                                                                        VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI =  .127E-01
VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
```

```
-.310E-01 -.309E+01 -.609E+01 -.990E+01 -.107E+02

0****** L'ALGORITHME N'A PAS ENCORE CONVERGE ******

0*****************************************************************************************************************
                                                  REYNOLDS = .10E+03
                                              VALEURS DE PSI ET DE OMEGA
*****************************************************************************************************************

 POINT  PSI              OMEGA              POINT  PSI              OMEGA              POINT  PSI              OMEGA
   1   -.4627021E-33   -.3099346E-01  *    2    .6476692E-32   -.5180536E-29  *    3    .4948916E-32   -.3092194E+01  *
   4    .5314846E-03   -.1283385E+01  *    5    .2315083E-02   -.5818344E+00  *    6    .1256514E-02   -.3173971E+01  *
   7    .2514710E-32   -.6091173E+01  *    8    .8547551E-32   -.1163052E-29  *    9    .3401248E-02   -.1535363E+01  *
  10    .3536036E-02   -.2789897E+00  *   11    .6011456E-02   -.8059970E+00  *   12    .8723516E-02   -.3798991E+00  *
  13    .1507282E-02   -.4479263E+01  *   14    .4688211E-02   -.2280435E+01  *   15    .5877271E-02   -.3123770E+01  *
  16    .1332932E-31   -.9901127E+01  *   17    .2405886E-32   -.1073005E+02  *   18    .2178603E-02   -.6469181E+01  *
  19    .3160466E-31   -.8315887E-30  *   20    .5949043E-02   -.7868224E-01  *   21    .1161055E-31   -.5826446E-31  *
  22    .1114679E-01   -.1700113E+01  *   23    .8775685E-02   -.1254886E+01  *   24    .1302599E-01   -.5998858E+00  *
  25    .1717238E-01   -.8342034E+00  *   26    .1165495E-01   -.5134784E-01  *   27    .1510258E-01   -.2108595E+00  *
  28    .2100072E-01   -.3075812E+00  *   29    .2330991E-01   -.1026957E+00  *   30    .5076233E-02   -.6560507E+01  *
  31    .1045822E-01   -.2949001E+01  *   32    .1766825E-01   -.1544151E+01  *   33    .1673009E-01   -.2710869E+01  *
  34    .3120536E-01   -.8540156E+00  *   35    .3496486E-01   -.1540434E+00  *   36    .3001036E-01   -.4475253E+00  *
  37    .4661983E-01   -.2053913E+00  *
0VALEURS DE LA VITESSE TANGENTIELLE SUR LA FRONTIERE NO 2
      .000E+00        .000E+00        .000E+00
 ON ITERE DIRECTEMENT AVEC LES VALEURS PRECEDENTES
1*****************************************************************************************************************
                  SIGMA = .70E+02
                  RELAX = .10E+01
                  ROLAX = .10E+01
                  EPS = .10E-06
                  SEUIL = .10E-06
                  MENTRE =  0
                  NOMBRE DE REYNOLDS = .10E+03
*****************************************************************************************************************
0****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  4     **     ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  1
                  VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .392E-01
                                        VARIATION RELATIVE EN PSI =  .384E-02
                                                          VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .331E+00
0****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  4     **     ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  2
                  VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .135E-01
                                        VARIATION RELATIVE EN PSI =  .125E-02
                                                          VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .845E-01
                                                                          VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI =  .268E-02

0VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
 -.358E-01 -.299E+01 -.580E+01 -.988E+01 -.108E+02
0****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  5     **     ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  1
                  VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .402E-02
                                        VARIATION RELATIVE EN PSI =  .437E-03
```

BUS LILLE

```
                                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .568E-01
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  5     **     ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  2
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .207E-02
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .169E-03
                                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .152E-01
                                                                                VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI =  .268E-03
VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
-.246E-01 -.299E+01 -.574E+01 -.989E+01 -.108E+02
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  6     **     ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  1
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .405E-03
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .553E-04
                                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .118E-01
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  6     **     ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  2
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .341E-03
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .197E-04
                                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .331E-02
                                                                                VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI =  .359E-04
VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
-.189E-01 -.299E+01 -.573E+01 -.990E+01 -.108E+02

****** L'ALGORITHME N'A PAS ENCORE CONVERGE ******

*************************************************************************************************************************
                                                REYNOLDS = .10E+03
                                            VALEURS DE PSI ET DE OMEGA
*************************************************************************************************************************
```

POINT	PSI	OMEGA		POINT	PSI	OMEGA		POINT	PSI	OMEGA	
1	-.1608833E-32	-.1891327E-01	*	2	.1776932E-31	-.1799916E-28	*	3	.1254578E-31	-.2988201E+01	*
4	.4787156E-03	-.1389661E+01	*	5	.2260180E-02	-.6208992E+00	*	6	.1148257E-02	-.3353373E+01	*
7	.3947075E-32	-.5727674E+01	*	8	.2485191E-31	-.3840248E-29	*	9	.3293828E-02	-.1639905E+01	*
10	.3498362E-02	-.2966282E+00	*	11	.5927499E-02	-.8583665E+00	*	12	.8668881E-02	-.4026918E+00	*
13	.1373193E-02	-.4755166E+01	*	14	.4553013E-02	-.2425058E+01	*	15	.5739227E-02	-.3323570E+01	*
16	.3505827E-31	-.9896795E+01	*	17	.6093257E-32	-.1078785E+02	*	18	.2071676E-02	-.6865249E+01	*
19	.9413462E-31	-.2537849E-29	*	20	.5934440E-02	-.8220607E-01	*	21	.3483024E-31	-.1887743E-30	*
22	.1103629E-01	-.1803760E+01	*	23	.8666974E-02	-.1334472E+01	*	24	.1295427E-01	-.6356022E+00	*
25	.1710013E-01	-.8800541E+00	*	26	.1165495E-01	-.5134784E-01	*	27	.1507108E-01	-.2205908E+00	*
28	.2096438E-01	-.3218876E+00	*	29	.2330991E-01	-.1026957E+00	*	30	.5076233E-02	-.6560507E+01	*
31	.1037084E-01	-.3092716E+01	*	32	.1760805E-01	-.1610655E+01	*	33	.1673009E-01	-.2710869E+01	*
34	.3120536E-01	-.8540156E+00	*	35	.3496486E-01	-.1540434E+00	*	36	.2998847E-01	-.4598097E+00	*
37	.4661983E-01	-.2053913E+00	*								

```
ALEURS DE LA VITESSE TANGENTIELLE SUR LA FRONTIERE NO 2
     .000E+00        .000E+00        .000E+00
N ITERE DIRECTEMENT AVEC LES VALEURS PRECEDENTES
*************************************************************************************************************************
                SIGMA = .70E+02
                RELAX = .10E+01
                ROLAX = .10E+01
                EPS =  .10E-06
```

```
                SEUIL = .10E-06
                NENTRE =  0
                NOMBRE DE REYNOLDS = .10E+03
*****************************************************************************************************************
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  7    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  1
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .537E-04
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .711E-05
                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .330E-02
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  7    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  2
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .779E-04
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .247E-05
                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .153E-02
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  7    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  3
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .241E-04
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .120E-05
                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .108E-02
                                                                VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI =  .687E-05
VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
-.160E-01 -.299E+01 -.572E+01 -.990E+01 -.108E+02
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  8    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  1
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .208E-04
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .559E-06
                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .613E-03
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  8    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  2
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .116E-04
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .260E-06
                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .379E-03
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  8    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  3
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .752E-05
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .115E-06
                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .226E-03
                                                                VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI =  .594E-06
VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
-.153E-01 -.299E+01 -.572E+01 -.990E+01 -.108E+02
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  9    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  1
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .442E-05
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .175E-06
                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .140E-03
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  9    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  2
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .283E-05
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .160E-06
                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .820E-04
****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO  9    **    ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  3
                VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .159E-05
                                VARIATION RELATIVE EN PSI =  .400E-07
                                                VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .505E-04
                                                                VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI =  .175E-06
VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
-.152E-01 -.299E+01 -.572E+01 -.990E+01 -.108E+02
```

BUS LILLE

****** L'ALGORITHME N'A PAS ENCORE CONVERGE ******

****

REYNOLDS = .10E+03

VALEURS DE PSI ET DE OMEGA

****

POINT	PSI	OMEGA		POINT	PSI	OMEGA		POINT	PSI	OMEGA	
1	-.3323211E-32	-.1517868E-01	*	2	.3474433E-31	-.3713336E-28	*	3	.2399402E-31	-.2990327E+01	*
4	.4784500E-03	-.1390100E+01	*	5	.2259962E-02	-.6210610E+00	*	6	.1148083E-02	-.3351695E+01	*
7	.6165186E-32	-.5720271E+01	*	8	.4932675E-31	-.7852556E-29	*	9	.3293512E-02	-.1640441E+01	*
10	.3498250E-02	-.2966851E+00	*	11	.5927283E-02	-.8585334E+00	*	12	.8668758E-02	-.4027294E+00	*
13	.1372970E-02	-.4753380E+01	*	14	.4552763E-02	-.2424934E+01	*	15	.5738892E-02	-.3324088E+01	*
16	.6768717E-31	-.9899561E+01	*	17	.1162205E-31	-.1078254E+02	*	18	.2071347E-02	-.6865928E+01	*
19	.1879469E-30	-.5091714E-29	*	20	.5934406E-02	-.8221209E-01	*	21	.6966003E-31	-.3844136E-30	*
22	.1103608E-01	-.1803866E+01	*	23	.8666765E-02	-.1334535E+01	*	24	.1295413E-01	-.6356325E+00	*
25	.1710000E-01	-.8800547E+00	*	26	.1165495E-01	-.5134784E-01	*	27	.1507101E-01	-.2205999E+00	*
28	.2096432E-01	-.3218910E+00	*	29	.2330991E-01	-.1026957E+00	*	30	.5076233E-02	-.6560507E+01	*
31	.1037061E-01	-.3092763E+01	*	32	.1760794E-01	-.1610656E+01	*	33	.1673009E-01	-.2710869E+01	*
34	.3120536E-01	-.8540156E+00	*	35	.3496486E-01	-.1540434E+00	*	36	.2998844E-01	-.4598042E+00	*
37	.4661983E-01	-.2053913E+00	*								

VALEURS DE LA VITESSE TANGENTIELLE SUR LA FRONTIERE NO 2

.000E+00 .000E+00 .000E+00

ON ITERE DIRECTEMENT AVEC LES VALEURS PRECEDENTES

****

SIGMA = .70E+02
RELAX = .10E+01
ROLAX = .10E+01
EPS = .10E-06
SEUIL = .10E-06
NENTRE = 0
NOMBRE DE REYNOLDS = .10E+03

****

****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO 10 ** ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO 1
VARIATION RELATIVE EN OMEGA = .884E-06
VARIATION RELATIVE EN PSI = .559E-06
VARIATION ABSOLUE EN GAMA = .343E-04

****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO 10 ** ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO 2
VARIATION RELATIVE EN OMEGA = .973E-06
VARIATION RELATIVE EN PSI = .799E-07
VARIATION ABSOLUE EN GAMA = .134E-04

****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO 10 ** ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO 3
VARIATION RELATIVE EN OMEGA = .265E-06
VARIATION RELATIVE EN PSI = .799E-07
VARIATION ABSOLUE EN GAMA = .153E-04

****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO 10 ** ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO 4
VARIATION RELATIVE EN OMEGA = .354E-06
VARIATION RELATIVE EN PSI = .999E-08
VARIATION ABSOLUE EN GAMA = .763E-05
VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI = .559E-06

BUS LILLE

```
0VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
 -.151E-01 -.299E+01 -.572E+01 -.990E+01 -.108E+02
0****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO 11     **     ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  1
                  VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .442E-06
                                      VARIATION RELATIVE EN PSI =  .799E-07
                                                          VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .668E-05
0****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO 11     **     ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  2
                  VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .354E-06
                                      VARIATION RELATIVE EN PSI =  .799E-07
                                                          VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .668E-05
0****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO 11     **     ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  3
                  VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .265E-06
                                      VARIATION RELATIVE EN PSI =  .449E-07
                                                          VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .191E-05
0****** ITERATION EXTERIEURE (LINEAIRE) NO 11     **     ITERATION INTERIEURE (UZAWA) NO  4
                  VARIATION RELATIVE EN OMEGA =  .884E-07
                                      VARIATION RELATIVE EN PSI =  .224E-30
                                                          VARIATION ABSOLUE EN GAMA =  .191E-05
                                                                VARIATION EXTERNE RELATIVE EN PSI =  .499E-(

0VALEURS DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
 -.151E-01 -.299E+01 -.572E+01 -.990E+01 -.108E+02

0****** L'ALGORITHME A CONVERGE ******
```

0**********

REYNOLDS = .10E+03

VALEURS DE PSI ET DE OMEGA

****

POINT	PSI	OMEGA		POINT	PSI	OMEGA		POINT	PSI	OMEGA	
1	-.4847186E-32	-.1513386E-01	*	2	.4983297E-31	-.5413949E-28	*	3	.3417007E-31	-.2990351E+01	*
4	.4784481E-03	-.1390100E+01	*	5	.2259961E-02	-.6210613E+00	*	6	.1148083E-02	-.3351670E+01	*
7	.8137036E-32	-.5720188E+01	*	8	.7108214E-31	-.1141957E-28	*	9	.3293510E-02	-.1640444E+01	*
10	.3498249E-02	-.2966852E+00	*	11	.5927280E-02	-.8585341E+00	*	12	.8668751E-02	-.4027291E+00	*
13	.1372968E-02	-.4753353E+01	*	14	.4552759E-02	-.2424930E+01	*	15	.5738884E-02	-.3324091E+01	*
16	.9669005E-31	-.9899869E+01	*	17	.1653651E-31	-.1078249E+02	*	18	.2071344E-02	-.6865930E+01	*
19	.2713366E-30	-.7361821E-29	*	20	.5934406E-02	-.8221209E-01	*	21	.1006197E-30	-.5583158E-30	*
22	.1103607E-01	-.1803867E+01	*	23	.8666761E-02	-.1334535E+01	*	24	.1295413E-01	-.6356325E+00	*
25	.1710000E-01	-.8800553E+00	*	26	.1165495E-01	-.5134784E-01	*	27	.1507101E-01	-.2205999E+00	*
28	.2096431E-01	-.3218912E+00	*	29	.2330991E-01	-.1026957E+00	*	30	.5076233E-02	-.6560507E+01	*
31	.1037061E-01	-.3092764E+01	*	32	.1760794E-01	-.1610657E+01	*	33	.1673009E-01	-.2710869E+01	*
34	.3120536E-01	-.8540156E+00	*	35	.3496486E-01	-.1540434E+00	*	36	.2998842E-01	-.4598042E+00	*
37	.4661983E-01	-.2053913E+00	*								

```
0VALEURS DE LA VITESSE TANGENTIELLE SUR LA FRONTIERE NO 2
      .000E+00        .000E+00        .000E+00
 ON A FAILLI ITERER AVEC LES VALEURS PRECEDENTES MAIS ON NE LUA PAS FAIT CAR LA CONVERGENCE EST ATTEINTE
0VALEURS DE LA VITESSE TANGENTIELLE SUR LA FRONTIERE NO 2
      .000E+00        .000E+00        .000E+00
 ON A FAILLI ITERER AVEC LES VALEURS PRECEDENTES MAIS ON NE LUA PAS FAIT CAR LA CONVERGENCE EST ATTEINTE
0LES VALEURS DE PSI   SE TROUVENT DANS LA S.D. B DE NIVEAU   1 SUR LE FICHIER  28
```

```
 LES VALEURS DE OMEGA SE TROUVENT DANS LA S.D. B DE NIVEAU   1 SUR LE FICHIER  29
*STOP* 0
*************************************************************************
STPTIME VIRT REL ACT TRA CRM  FAULTS    INS   OUTS    RATE-P/S UC-E RL-E
  0.276  100  80  72  06  53     337     01     76       20.82 1.79 1.76


A005    STEP  WAIT  CORE     END    DISC     TIME    START  CODE  PROGRAM
         01   00.11   73   11*52*12   00     00.27 11*51*44 TERM STOKESP
*************************************************************************
*************************************************************************
     TIME       TIME*CORE       CORE-USE    TIME*DISC     DISC-USE
     00.27         22.49            66%       00.55          00%

       DS         DS            SHR        SHR          CR         CP         LP
    I/O-BYTES I/O-CALLS     I/O-BYTES I/O-CALLS      CARDS      CARDS      PAGES
      316072       228           00         00         74         00         15
     JOB TERMINATED     REYNOLDS     0016  11*52*13*
```

BUS LILLE

```
A005 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 26/02/80  11*52   ****  SLP2  ****  A005 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 26/02/80  11*
A005 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 26/02/80  11*52   ****  SLP2  ****  A005 SIRIS8  C10C07   :MON01 ********** 26/02/80  11*
```

REFERENCES

[1] GERMAIN P. Mécanique des milieux continus (1962). Masson Editeur.

[2] BORREL Michel. Thèse de 3e cycle : Etude et mise en oeuvre d'une méthode d'éléments finis de résolution des équations de Navier-Stokes. Thèse soutenue à l'Université Pierre et Marie Curie (passée le 29 Juin 1977). Spécialité Mathématiques Appliquées.

[3] O. KROUTCHMY, P. JOLY, A. PERRONNET. Les modules de maillage bidimensionnel du club MODULEF (version 2 du 1/10/1977). Publication IRIA.

[4] D. LEROY. Description du maillage. Interpolation module Comaco. Version 3. Publication IRIA.

[5] A. PERRONNET : Construction de la structure des données BDCL décrivant les conditions aux limites forcées. Module COBDCL . Publication IRIA.

[6] A. PERRONNET : Les modules de résolution des systèmes linéaires stokés sous forme profil. Mars 1978. Publication IRIA.

[7] A. PERRONNET : Normes d'Appel, Normes de programmation, Normes d'insertion des modules du Club MODULEF - Octobre 1977. Publication IRIA.

[8] A. PERRONNET : Fiches techniques "éléments finis". Version 300. Février 1979. Publication IRIA.

[9] M. VIDRASCU : Construction de la structure des données BDCL décrivant les conditions aux limites "forcées". Module COBDC1. Club Modulef. Février 1979. Publication IRIA.

[10] M. VIDRASCU. Modules de création des tableaux élémentaires associés aux éléments - Club Modulef - Novembre 1978 - Publication IRIA.

[11] P. LAUG. Construction et modification de la structure de données NOPO. Mai 1978. Publication IRIA.

[12] O. KROUTCHY. Notice d'utilisation des modules de visualisation. Version 3.0- Février 1979. Publication : Laboratoire d'Analyse numérique et fonctionnelle - Université Paris VI.

[13] Description des structures de données du club MODULEF. Février 1979. Publication IRIA.

[14] A. PERRONNET. The club MODULEF, A library of subroutines for finite element analysis, in Proceedings of the third IRIA Symposium or computing methods in applied sciences and engineering, Versailles, France, Dec. 5-9-1977.

[15] A. GEORGE. Computer implementation of the finite element method. STAN C.S. 71208, Feb. 1971. Stanford University, Computer Science département.

[16] CURTHILL-MAC KEE. Reducing the bandwith of sparce symetric matrices. Proc. 24 th National Conf. Assoc. Computer Mech p. 69, ACM Publication 1122, A^{ise} of th Americas. New York (1969)

TABLE DES MATIERES

	Pages
Introduction	2
1ère partie : But et limites d'utilisation	4
1.1. But	6
1.2. Limites d'utilisation	8
1.2.1. Eléments finis	8
1.2.2. Nombre de Reynolds	9
1.2.3. Encombrement en mémoire centrale et temps de calcul.	9
2ème partie : Mise en oeuvre	10
2.1. Descriptions des différentes étapes du calcul et structures de données à fournir pour le calcul.	11
2.1.1. Maillage du domaine Ω	
2.1.2. Formation des matrices	
2.1.2.1. Méthode mathématique de formation des matrices	
2.1.2.2. Description des différentes structures de données à fournir pour le calcul.	
2.2. Le programme d'appel	11
2.2.1. Le programme principal	11
2.2.1.1. Initialisation de (ω, ψ). Utilisation de : (INIT(I), INIP(I), I = 1, NPR)	14
2.2.1.2. Les fichiers résultats	16
2.3. Sous programmes supplémentaires à fournir par l'utilisateur.	19
2.4. Les cartes données à fournir pour le calcul	19
2.5. Liste des bibliothèques nécessaires et des sous programmes utilisés.	

3ème partie : Les paramètres importants. 22

3.1. La constante d'Uzawa 23

3.2. Le paramètre IOPT 23

3.3. Les paramètres, ITEX, ITEMAX, ITIMAX, NPR 24

3.4. Les paramètres DIVRG, EPS, SEUIL 26

3.5. Les paramètres de relaxation RELAX, ROLAX 27

3.6. Les valeurs initiales. 27

4ème partie : Exemples d'utilisation 28

4.1. Construction des différentes structures de données à fournir pour le calcul (c.f. § 2.1.2.2) 29

4.2. Le module NSPSOM 51

4.2.1. Listing du module NSPSOM

4.2.2. Listings des principaux sous programmes appelés par NSPSOM 61

4.3. Exemple d'utilisation de NSPSOM 67

4.3.1. Le programme d'appel de NSPSOM

4.3.2. Les résultats obtenus.

Références 84

ANNEXE 4

INTRODUCTION

BROCHURE D'UTILISATION DU MODULE NSPROP

(version 30/06(1980)

par

Jacques PHILIPP

1ère Partie

BUT ET LIMITES D'UTILISATION

1.1. But.

Il s'agit de calculer numériquement la pression en tout point du fluide à partir de l'équation :

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta p = 2\left(\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) & \text{dans } \Omega \\ p = p_o \quad \text{sur} \quad \Gamma_o \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \end{cases}$$

où $g = g(x,y,Re,\omega,\psi)$.

Le problème discret est le suivant :

$$(P_h) \quad \begin{cases} -\Delta p_h = 2\left(\left(\dfrac{\partial^2\psi_h}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2\psi_h}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2\psi_h}{\partial y^2}\right) & \text{dans } \Omega \\ p_h = p_o \quad \text{sur} \quad \Gamma_o \\ \dfrac{\partial p_h}{\partial x} = g_h \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \end{cases}$$

où $g = g_h(x,y,Re,\omega_h,\psi_h)$ voir §.1.2

(p_h,ω_h,ψ_h) sont les P_K interpolés de Lagrange de (p,ω,ψ).
Pour plus de détails sur cette méthode, voir [2].

1.2. Limites d'utilisation.

1.2.1 Eléments finis.

Le module NSPSOM [1] doit avoir été exécuté auparavant (en principe) car le module NSPROP utilise les mêmes éléments finis (P_2 droits) que ceux utilisés par NSPSOM.

Toutefois, on peut l'utiliser séparément, à condition d'utiliser des éléments finis P_2 droits. Utiliser d'autres éléments finis reviendrait à reprogrammer ce module.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{Re}\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \qquad (1.8)$$

Il est clair que plus Re augmente, moins les dérivées de ω sont prépondérantes dans le calcul de $\frac{\partial p}{\partial x}$. Or, c'est la convergence en ω qui est la plus difficile à obtenir (voir [2] §.4.2 et [3] p.77).

1.2.3. Précision de la méthode.

L'algorithme a convergé numériquement ([2], §.4.2.1).

Il est probable que l'approximation est au moins en $O(h)$.

1.2.4. Maillage.

Le module a été testé sur des maillages dont toutes les frontières sont perpendiculaires.

1.2.5. Longueur de Γ_1.

On a intérêt à minimiser la longueur de Γ_1, surtout pour des petits nombres de Reynolds ([2], §.4.2).

1.3. Possibilités du module.

Pour tester la matrice de rigidité, le second membre, et les numéros des noeuds frontaliers, il est recommandé de résoudre le problème test :

$$\begin{cases} -\Delta p = -4 \\ p = p_o \quad \text{sur} \quad \Gamma_o \\ \frac{\partial p}{\partial n} = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \end{cases}$$

CHAPITRE 2

MISE EN OEUVRE

NNN = { 0 pas d'impression des adressages des tableaux dans M.
      { 1 impression de ces adressages.

NTITRE titre en 20 mots de 4 caractères.

NDATE date du jour en 2 mots de 4 caractères.

NOMCRE nom de l'utilisateur en 6 mots de 4 caractères

LONREE = { 1 version simple précision
         { 2 version double précision (non programmée actuellement)

IMPRE paramètre d'impression

= 0 aucune impression

≠ 0 impression du nom du module, des 10 premières valeurs des S.D. B (ω_h, ψ_h)

DIMENSION M(LM), XM(LM). si ce n'est déjà fait

M Super tableau de LM mots où

LM ≥ LMUA+9*NOE+LITQ+LNFAS+LCØØRD+LIPLACE+LNOF

où

LMUA est le nombre de mots nécessaire au stockage de la S.D. MUA.

NOE le nombre de neouds de la triangulation

LITQ, LCØØRD,LNFAS,LIPLACE sont connus par la S.D. MEFI.

DIMENSIØN NFPSIT(20),NIVPSIT(20),NFØMT(20), NIVOM T (20)

DIMENSIØN NFBT(20),NIVBT(20),NFDT(20),NIVDT(20)

DOUBLE PRECISION D

EQUIVALENCE (M(1),XM(1)),(M(1),D)

Instructions d'appel des modules antérieurs

CALL NSPROP(M,XM,VTG,NFMEFI,NFMUA,NIMVA,

NPR le nombre de problèmes à résoudre (NPR ≤ 20)

Remarques.

1) Il faut que NPSIT(1) ≠ 0

(**) 2) Dans le cas de résolution de plusieurs problèmes, les S.D. PSI et OMEGA sont successivement lues puis tuées.

2.2. *Sous programmes supplémentaires à fournir par l'utilisateur.*

2.2.1 SUBROUTINE HIEMEN1 (X,Y,RE,NNØ,NREF,ØMEGAR,PSIR,PR)

Ce sous programme permet le calcul, noeud par noeud, éventuellement dans tous le maillage, de la pression de référence p_o ; on peut, si on le désire, (et si c'est possible) calculer $\omega_{référence}$ et $\psi_{référence}$, pour calculer p_h que l'on comparera avec p_o pour vérifier l'utilisation correcte du module (IØPT = 1 : voir §. 1.3). Dans le cas où IØPT ≠ 1, on peut mettre n'importe quoi pour ω_R, ψ_R. Voici un exemple d'utilisation de HIEMEN1.

```
      SUBROUTINE HIEMEN1(X,Y,RE,NREF,OMEGA,PSI,P)
C
C PROGRAMMEUR: PHILIP JACQUES UNIVERSITE DE LILLE
C
C PARAMETRES D'ENTREE
C X,Y COORDONNEES DU NOEUD CONSIDERE
C RE NOMBRE DE REYNOLDS
C NREF NUMERO DE REFERENCE DE LA FRONTIERE DU NOEUD CONSIDERE
C PARAMETRE DE SORTIE
C OMEGA ,PSI,P VALEUR QUE L'ON VEUT ATTRIBUEE A OMEGA,PSI,P

OMEGA = ?

PSI = ?

P = ?

RETURN

END
```

1.3. Les cartes données à fournir pour le calcul.

1ère carte(s) : Format (3I6, 2L6, F11.5, I6)

IP, IMPR, IØPT, TEST, DIR, RE,NP1

avec

IP = { 1 appel de HIEMEN1
     { 0 pas d'appel de HIEMEN1

IMPR paramètre d'impression

= 0 aucune impression

= 1 impression

- des valeurs des dérivées premières $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ avec 6 noeuds parmi les 20 premiers éléments frontaliers.

= 2 impression

- des tableaux suivants des 20 premiers éléments finis :

{ . Tableau du numéro des frontières des noeuds
{ . Tableau des numéros locaux des noeuds sur la frontière

= 3 IMPRE = 1 + IMPRE = 2

= 4 IMPRE = 3 +

. coordonnées des 6 noeuds

. valeurs de (ω,ψ) aux 6 noeuds

= 5 impressions de tous les résultats pour tous les éléments finis

2.4. *Liste des bibliothèques nécessaires et des sous programmes appelés.*

Les bibliothèques :

. RIGEL (contenant les sous-programmes nécessaires à NSTROP)

. MEFRESRBIBL

. MEFUTSDBIBL

. MEFUTILBIBL

Les sous programmes appelés

ADRESS, ADRESSA, ASM2, CHMC1R, CØPFICH, CØPISD, DECØD, DERD, DERP, DIFF, DRCH1R, ECB, ERREUR, F, HIEMEN1 , IMATAB, IMB, INTEG, INTP2LAG, LEB, LEMUA, NØMAFF, REB, REMUA, RSTSDE, SEMEF, SEMELE, TUERSD, TYPFRØNT.

```
      SUBROUTINE NSPROP(M,XM,ALEPH,NEMEFI,NEMUA,NIMUA,NEPSIT,NIVPSIT,
     %NEOMT,NIVOMT,NEBT,NIVBT,NEPDT,NIVPDT,EPS,NESSAI)
C**********************************************************************
C**********************************************************************
C**********************************************************************
C                       MODULE NSPROP
C
C BUT:
C
C      CALCUL DE LA PRESSION POUR UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE,VISQUEUX,EN
C     ECOULEMENT STATIONNAIRE,PLAN A PARTIR DE OMEGA,PSI CALCULES PAR NSPSOM.
C
C      ELEMENTS FINIS UTILISES:P2 LAGRANGE
C
C
C PARAMETRES D'ENTREE:
C                    : M,XM SUPERS TABLEAUX DE TRAVAIL
C                    :  VTG  VALEUR TRES GRANDE DE BLOCAGE
C                    : NEMEFI  NUMERO DE LA S.D. MEFI
C                    : NEMEFI  NUMERO DE LA S.D. MUA
C                    : NEPSIT  TABLEAU DES NUMEROS DES S.D. PSI(I=1,NPR)
C                    : NIVPSIT  TABLEAU DES NIVEAUX DES S.D. PSI(I=1,NPR)
C                    : NEOMT  TABLEAU DES NUMEROS DES S.D. OMEGA(I=1,NPR)
C                    : NIVOMT  TABLEAU DES NIVEAUX DES S.D. OMEGA(I=1,NPR)
C                    : NEBT  TABLEAU DES NUMEROS DES S.D. B(PRESSION)
C                    : NIVBT  TABLEAU DES NUMEROS DES NIVEAUX DES S.D. B(PRESSION)
C                    : NEDT  TABLEAU DES NUMEROS DES S.D. B(D-PO)
C                    : NIVDT  TABLEAU DES NUMEROS DES NIVEAUX DES S.D. B(D-PO)
C                    :  EPS  PARAMETRE D'IMPRESSION DES RESULTATS
C                    :  NESSAI LE NOMBRE DE PROBLEMES A RESOUDRE
C
C PROGRAMMEUR:J.PHILIPP  UNIVERSITE DE LILLE
      DIMENSION M(1),XM(1),NEPSIT(1),NIVPSIT(1),NEOMT(1),NIVOMT(1)
      DIMENSION NEPDT(1),NIVPDT(1),NEBT(1),NIVBT(1)
C
C
C LES COMMONS DE TRAVAIL
C
      COMMON /TRAVAI/IM,LM,NOMTAB,NNN,NX(1020)
      COMMON /TRAVA1/NTITRE(20),NDATE(2),NOMCRE(6),LONREE,IMPRE
     %  ,IMPLEC,INILEC,FILLER
C
C LES COMMONS DES S.D.
C
      COMMON /ALMUA/NEMUA,  NMUA0,IAMUA0,LMUA0,  NMUA1,IAMUA1,LMUA1,
     1                      NMUA2,IAMUA2,LMUA2,  NMUA3,IAMUA3,LMUA3,
     2                      NMUA4,IAMUA4,LMUA4,  NMUA5,IAMUA5,LMUA5
      COMMON/ALB/NEB,NB1,IAB1,LB1,NB0,IAB0,LB0,
     1           NB2,IAB2,LB2,NB3,IAB3,LB3,
     2           NB,IAB,LB
      DIMENSION NZB(16),NZMUA(19)
      EQUIVALENCE(NEB,NZB(1)),(NEMUA,NZMUA(1))
```

BUS LILLE

```
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
MODULE NSPROP :NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST




$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

DANS ADRESS J=:NOF TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=          1 L=          16 NOMTAB=          1 IM=          17 LM=          1500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU10 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU10 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=         17 L=          32 NOMTAB=          2 IM=          49 LM=          1500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU12 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU12 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=         49 L=          12 NOMTAB=          3 IM=          61 LM=          1500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU13 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU13 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=         61 L=           2 NOMTAB=          4 IM=          63 LM=          1500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU14 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU14 TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=         63 L=          38 NOMTAB=          5 IM=         101 LM=          1500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU15 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU15 TYPE REEL1MOT IA INITIAL =          0 IA=        101 L=         409 NOMTAB=          6 IM=         510 LM=          1500
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM MU1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=MU1% TYPE ENTIER   IA INITIAL =          0 IA=        510 L=          19 NOMTAB=          7 IM=         529 LM=          1500




$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
TITRE DU TRAVAIL NAVIER STOCKES MINI MAILLAGE TEST
JOUR DE CREATION 14/11/79
NOM DU CREATEUR  PHILIPP JACQUES LILLE
NOM DE LA STRUCTURE MUA
NUMERO DE NIVEAU     1
NUMERO D ETAT      1
```

BUS LILLE

```
*****************************************************************************************************************
                    DESTRUCTION EN MEMOIRE CENTRALE DE LA S.D B    DE NIVEAU   1 AVEC OPTION  0



*****************************************************************************************************************
LE TABLEAU B 10 TYPE   1 ADRESSE        529 NBRE DE MOTS        32 EST TUE



********* AVERTISSEMENT : LE TABLEAU B 11 N'EST PAS DANS LES TABLES **********
LE TABLEAU B 12 TYPE   1 ADRESSE        561 NBRE DE MOTS        11 EST TUE
LE TABLEAU B 13 TYPE   1 ADRESSE        572 NBRE DE MOTS         2 EST TUE
LE TABLEAU B 14 TYPE   2 ADRESSE        574 NBRE DE MOTS        37 EST TUE
LE TABLEAU B 1% TYPE   1 ADRESSE        611 NBRE DE MOTS        16 EST TUE



*****************************************************************************************************************

AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 1% NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
AVERTISSEMENT : LE TABLEAU DE NOM B 10 NE FAIT PAS PARTIE DES TABLEAUX ACTIFS
DANS ADRESS J=B 10 TYPE ENTIER   IA INITIAL =        0 IA=       529 L=        32 NOMTAB=        9 IM=       664 LM=      1500
```

```
**********************************************************************************************************************************
                    DESTRUCTION EN MEMOIRE CENTRALE DE LA S,D B     DE NIVEAU   1 AVEC OPTION  0

**********************************************************************************************************************************
LE TABLEAU B 10 TYPE    1 ADRESSE        529 NBRE DE MOTS        32 EST TUE

********* AVERTISSEMENT : LE TABLEAU B 11 N'EST PAS DANS LES TABLES **********
LE TABLEAU B 12 TYPE    1 ADRESSE        561 NBRE DE MOTS        11 EST TUE
LE TABLEAU B 13 TYPE    1 ADRESSE        572 NBRE DE MOTS         2 EST TUE
LE TABLEAU B 14 TYPE    2 ADRESSE        574 NBRE DE MOTS        37 EST TUE
LE TABLEAU B 15 TYPE    1 ADRESSE        611 NBRE DE MOTS        16 EST TUE

**********************************************************************************************************************************

DANS ADRESS J=:HOM TYPE REEL1MOT IA INITIAL =        0 IA=      529 L=       37 NOMTAB=       10 IM=      701 LM=      1500
DANS ADRESS J=:HPS TYPE REEL1MOT IA INITIAL =        0 IA=      566 L=       37 NOMTAB=       11 IM=      701 LM=      1500
DANS ADRESS J=:PRH TYPE REEL1MOT IA INITIAL =        0 IA=      701 L=       37 NOMTAB=       12 IM=      738 LM=      1500
```

BUS LILLE

```
 LE  16-EME TABLEAU,  15-EME DES TABLES : NOM BDIF TYPE 2 ADRESSE DANS M        812 TAILLE         37 MOTS
 LE  17-EME TABLEAU,  16-EME DES TABLES : NOM :ITQ TYPE 1 ADRESSE DANS M        849 TAILLE         84 MOTS
 LE  18-EME TABLEAU,  18-EME DES TABLES : NOM COOR TYPE 2 ADRESSE DANS M        933 TAILLE         24 MOTS
 LE  19-EME TABLEAU,  19-EME DES TABLES : NOM IPIA TYPE 1 ADRESSE DANS M        957 TAILLE         37 MOTS

 1-ERE ADRESSE LIBRE DERRIERE CES TABLEAUX =         994
```



```
 ESSAI NUMERO:      1
 IP=     1IMPRE=     0IOPT=     1TEST=     TDIR=     F RE=  .100000E+03 ER=     FNP=     13

 ***** CARACTERISTIQUES GENERALES DE LA TRIANGULATION *****

 NOMBRE DE FRONTIERES =     1
 NOMBRE DE FRONTIERES COURBES =     0
 NOMBRE D'ELEMENTS =    14
 NOMBRE D'ELEMENTS FRONTALIERS =    12
 NOMBRE DE TRIANGLES =    14
 NOMBRE DE QUADRILATERES =     0
 NOMBRE DE SOMMETS =    12
 NOMBRE DE SOMMETS FRONTALIERS =     8
 NOMBRE DE POINTS D'INTERPOLATION =    37
 NOMBRE DE POINTS NON SOMMETS SUR CHAQUE ARETE =     1
 NOMBRE DE POINTS INTERIEURS A CHAQUE TRIANGLE =     0
 NOMBRE DE POINTS INTERIEURS A CHAQUE QUADRILATERE =     0
 LES SOMMETS NE SONT PAS DES POINTS D'INTERPOLATION ?    F
 LES SOMMETS N'ONT PAS ETE RENUMEROTES ?    F
 MUA = F
 FAC = T


 ************************************************
 ****************** RESULTATS *******************
 ************************************************
        POINT     VAL.CAL.              VAL.EXACT.          DIFF.              ERREUR RELATIVE     ERREUR RELATIVE MINIMUM
           1      .8612781E-38          .0000000E+00        .8612781E-38       .0000000E+00        .2743006E-36
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. PHILIPP : Brochure d'utilisation du module NSPSØM.
Publication I.M.F.L. 5 bd Paul Painlevé - Lille

[2] J. PHILIPP : *Etude par une méthode d'éléments finis de l'influence d'une cavité sur un écoulement de fluide visqueux au voisinage d'un point d'arrêt.*
Thèse - Université de Lille 1 - Juin 1980.

[3] M. BORREL : *Etude et mise en oeuvre d'une méthode d'éléments finis de résolution des équations de Navier-Stokes.*
Thèse - Université Pierre et Marie Curie - Juin 1977.

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE LILLE 1
SECTION DE SCIENCES
LILLE