N° d'ordre : 840

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

Nour-Saïd MADI

PROBLÈME DE GOURSAT AVEC DES VARIABLES FUCHSIENNES

Membres du Jury : M. J. VAILLANT, Professeur à PARIS VI, Président
M. J.C. DE PARIS, Rapporteur
M. R. BERZIN
M. D. SCHILTZ
Examinateurs

Soutenue le 2 Juillet 1980

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J. VAILLANT, de l'Université de Paris VI, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le Jury de cette thèse et l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à mon travail.

Je remercie vivement Messieurs R. BERZIN et D. SCHILTZ d'avoir bien voulu faire partie de mon Jury de thèse ainsi que pour leur assistance et leurs remarques judicieuses.

J'exprime ma plus profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur J.C. DE-PARIS qui m'a initié à la théorie des équations aux dérivées partielles et qui m'a guidé tout au long de ce travail en me prodiguant conseils et encouragements jusqu'à sa réalisation.

Que toute l'équipe de recherche en équations aux dérivées partielles ainsi que tous mes amis trouvent ici l'expression de ma gratitude pour leur soutien permanent et leur présence chaleureuse.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement Madame C. TATTI qui a assuré avec soin et compréhension la tâche délicate qu'est la frappe de cette thèse et qui a travaillé avec la plus grande célérité afin de terminer ce travail dans le bref délai qui lui était imposé.

Mes vifs remerciements vont aussi à Madame M. LLORET qui acceptait gentiment de me photocopier tous les documents dont j'avais besoin.

Madame F. WDOWCZYK, Messieurs A. GOURNAY et M. PROVOST ont imprimé cette thèse avec rapidité et compétence, je tiens à les remercier pour l'aide matérielle précieuse qu'ils m'ont apportée.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I. *Notations et définitions* :

Soient

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{C}^p \quad ; \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_q) \in \mathbb{C}^q$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p \quad ; \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q) \in \mathbb{N}^q$$

$\alpha \leqslant \alpha'$ signifie : $\forall i \in \{1,2,\dots,p\} \quad \alpha_i \leqslant \alpha'_i$

$\alpha < \alpha'$ signifie : $\alpha \leqslant \alpha'$ et $\alpha \neq \alpha'$.

On note :

$$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_p}^{\alpha_p} \quad ; \quad D_y^\beta = D_{y_1}^{\beta_1} D_{y_2}^{\beta_2} \dots D_{y_q}^{\beta_q}$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p} \quad ; \quad y^\beta = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_q^{\beta_q}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p \quad ; \quad |\beta| = \beta_1 + \beta_2 \dots + \beta_q$$

$$\alpha! = (\alpha_1!)(\alpha_2!)\dots(\alpha_p!) \quad ; \quad \beta! = (\beta_1!)(\beta_2!)\dots(\beta_q!)$$

$$(x,y) = (x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots y_q) \in C^n$$

où $n = p+q$.

Considérons un opérateur différentiel $\mathcal{P}$ qui s'écrit sous la forme suivante :

$$
(\mathrm{I}) \quad \left[\begin{array}{ll}
P(u)(x,y) = \sum\limits_{\alpha \leq m} \; \sum\limits_{|\beta|+|\alpha| \leq |m|} a_{\alpha,\beta}(x,y)\, D_x^{\alpha}\, D_y^{\beta}\, u(x,y) & \\
\text{avec :} \quad a_{m,o}(x,y) = x^k\, \tilde{a}_{m,o}(x,y) & \\
\text{où} \quad m = (m_1, m_2, \dots, m_p) \in \mathbb{N}^p & \\
\qquad k = (k_1, k_2, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p & \\
\text{et} \quad \tilde{a}_{m,o}(0,0) \neq 0 &
\end{array} \right.
$$

Soit f une fonction holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$.

$f = \theta(x^\tau) \Longleftrightarrow \exists g$ holomorphe au voisinage de 0 tel que $f(x) = x^\tau g(x)$.

Définition 1.1. On dit qu'un monôme différentiel $a_{\alpha,\beta}(x,y) D_x^{\alpha} D_y^{\beta}$ est de p-poids par rapport à x, inférieur ou égal à $\alpha-\tau \in \mathbb{Z}^p$ si on a :

$$a_{\alpha,\beta}(x,y) = \theta(x^\tau)$$

Définition 1.2. Soit P un opérateur différentiel holomorphe, (respectivement analytique) sur un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ (respectivement dans $\mathbb{R}^n$).

On dit que P est un opérateur de type de Fuchs de p-poids $m-k \in \mathbb{Z}^p$ par rapport à x, si on a :

1) P est défini par (I)
2) Tous ses monômes sont de p-poids par rapport à x, inférieur ou égal à $m-k$.
3) Tous les monômes $a_{\alpha,\beta}(x,y)\, D_x^{\alpha}\, D_y^{\beta}$ pour $\beta \neq 0$, sont de p-poids par rapport à x inférieur ou égal à $m-k-1$

en convenant que : $m-k-1 = (m_1-k_1-1,\ m_2-k_2-1, \dots, m_p-k_p-1)$

Soit P un opérateur de Fuchs de p-poids $m-k \in \mathbb{N}^p$, par rapport à x.

Et prenons un monôme de la forme suivante :

$$a_{\alpha,0}(x,y)\ D_x^\alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha \geqslant m-k$$

on sait que :

$$a_{\alpha,0}(x,y) = \theta(x^\tau)$$

avec $\alpha-\tau \leqslant m-k$, donc on a :

$$\tau \geqslant \alpha - m+k \geqslant 0$$

par conséquent il existe $\hat{a}_{\alpha,0}$ holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ telle que :

$$a_{\alpha,0}(x,y) = x^{\alpha-m+k}\ \hat{a}_{\alpha,0}(x,y)$$

Définition 1.3. L'opérateur différentiel Q défini par la forme suivante

$$Q = \sum_{m-k\leqslant\alpha\leqslant m} \hat{a}_{\alpha,0}(0,y)\ x^{\alpha-(m-k)} D_x^\alpha = \sum_{\alpha\leqslant k} \hat{a}_{\alpha+m-k,0}(0,y) x^\alpha\ D_x^{\alpha+m-k}$$

est appelé "La partie principale Fuchsienne" de l'opérateur de Fuchs P.

Définition 1.4. A l'opérateur Q, on associe le polynôme à p-indéterminées $X_1,X_2,\dots,X_p$, suivant :

$$P(X_1,X_2,\dots,X_p,y) = P(X,y) = \sum_{m-k\leqslant\alpha\leqslant m} \hat{a}_{\alpha,0}(0,y)\quad C_\alpha(X)$$

où : $$C_\alpha(X) = \prod_{i=1}^{p} C_{\alpha_i}(X_i)$$

et $C_{\alpha_i}(X_i) = \prod_{j=0}^{\alpha_i - 1} (X_i - j)$ si $\alpha_i \neq 0$, et $C_o(X_i) = 1$ par convention

$P(X,y)$ est appelé le polynôme caractéristique fuchsien associé à l'opérateur P.

Théorème 1.1. Soit P un opérateur différentiel holomorphe de type de Fuchs de p-poids $m-k \in \mathbb{N}^p$, par rapport à x.

Si le polynôme caractéristique fuchsien de P vérifie :

$$\exists c > 0, \quad \forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{N}^p \quad ; \quad \lambda \geq m-k$$

on a :

$$|P(\lambda,0)| \geq c(\lambda_1+1)^{m_1}(\lambda_2+1)^{m_2} \dots (\lambda_p+1)^{m_p}$$

Alors pour toutes fonctions f et w holomorphes au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, il existe une fonction unique u holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ et qui est solution du problème de Goursat :

$$(*) \quad \begin{cases} Pu = f \\ u-w = \theta(x^{m-k}) \end{cases} .$$

Idée de la démonstration :

Nous allons dans une première étape ramener le problème (*) à un problème équivalent :

$$(**) \qquad P_1(u) = f$$

où P_1 est un opérateur de type de Fuchs de p-poids nul par rapport à x.

Puis nous allons décomposer l'opérateur P_1 sous la forme :

$$P_1 = Q_1 + A_1 + B_1$$

avec Q_1 sa partie principale fuchsienne.

Dans une 3ème étape nous allons chercher un inverse à l'opérateur Q_1, qu'on notera H, et en utilisant le théorème du point fixe nous allons montrer que $(1+H\,A_1)$ est inversible.

Ainsi le problème (**) devient équivalent à :

$$(***) \qquad \{u = (1+H\,A_1)^{-1} H\,f - (1+H\,A_1)^{-1} H\,B_1\,u$$

Finalement pour trouver la solution du problème (***), nous allons utiliser la méthode des approximations successives, en définissant une suite $(u_p)_{p\in N}$, par la relation de récurrence suivante :

$$u_o = (1+H\,A_1)^{-1} H\,f$$

$$u_{p+1} = u_o - (1+H\,A_1)^{-1} H\,B_1\,u_p\ .$$

Et en montrant qu'il existe un voisinage V de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ sur lequel on a :

i) u_p converge vers une fonction u holomorphe sur V

ii) u est solution sur V du problème (***)

On utilisera pour cela la technique du théorème d'Ovsjannikov.

II. *Résultats de Baouendi-Goulaouic* [1].

Les résultats de Baouendi-Goulaouic sont donnés dans le cas réel et pour $p = 1$.

Dans ce cas, on a l'opérateur "partie principale fuchsienne" qui est de la forme

$$Q = a_m(y)\,x^k\,D_x^m + a_{m-1}(y)\,x^{k-1}\,D_x^{m-1} + \dots + a_{m-k}(y)\,D_x^{m-k}$$

avec : $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ et $a_m(0) \neq 0$.

Et le polynôme caractéristique fuchsien est donnée par :

$$P(X,y) = a_m(y)\, C_m(X) + a_{m-1}(y)\, C_{m-1}(X) + \dots + a_{m-k}(y)\, C_{m-k}(X)$$

Proposition 1.1. Soit P un opérateur de type de Fuchs de poids $m-k \in \mathbb{N}$ par rapport à x.

Alors P s'écrit d'une façon unique sous la forme suivante :

$$Pu = Qu + \sum_{\alpha=0}^{m} x^{\mu(\alpha)}\, D_x^\alpha\Big[\sum_{|\beta|\leqslant m-\alpha} b_{\alpha,\beta}(x,y)\, D_y^\beta u\Big]$$

où $\mu(\alpha) = \max[0,\ \alpha+1-(m-k)]$

Théorème 1.2. Soit P un opérateur différentiel analytique de type de Fuchs de poids $m-k \in \mathbb{N}$, par rapport à x.

Alors on a équivalence entre les 2 propriétés suivantes :

i) $\forall\lambda \in \mathbb{N}$: $\quad \lambda \geqslant m-k \qquad P(\lambda,0) \neq 0$

ii) Pour toutes fonctions u_j : $0 \leqslant j \leqslant m-k-1$ analytiques au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et pour toute fonction f analytique au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} P(u)(x,y) = f(x,y) & \\ D_x^i\, u(0,y) = u_i(y) & 0 \leqslant i \leqslant m-k-1 \end{cases}$$

admet une solution unique u analytique au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$.

Idée de la démonstration :

Soient : Ω un borné de $\mathbb{R}^{n-1}$

et s un nombre réel strictement positif.

On note par :

$$\Omega_s = \bigcup_{a\in\Omega} B(a,s)$$

où $B(a,s)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon s dans $\mathbb{C}^{n-1}$ et par $E_s(\Omega)$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes qui sont continues sur $\bar{\Omega}_s$ et holomorphe sur Ω_s.

$E_s(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_s = \sup_{y\in\bar{\Omega}_s} |f(y)|$$

et pour $r \geqslant s$, on a :

$$E_r(\Omega) \hookrightarrow E_s(\Omega)$$

et cette injection a une norme égale à 1.

La formule intégrale de Cauchy nous donne le lemme suivant :

Lemme 1.1. Soit $P = \sum_{|\beta|\leqslant m} a_\beta(y)\, D_y^\beta$, un opérateur différentiel à coefficients dans $E_s(\Omega)$ alors pour tout $s_1 > s$, on a :

$$\forall u \in E_{s_1}(\Omega) : \qquad \|Pu\|_s \leqslant \left(\sum_{|\beta|\leqslant m} \frac{\beta!}{(s_1-s)^{|\beta|}} \|a_\beta\|_s\right) \|u\|_{s_1}$$

Soit maintenant $s_1 > 0$, fixé de manière convenable.

Notons par :

$$X_s = E_{s_1-s}(\Omega)$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, on considère l'espace $C_p^q([-T,T],X_s)$ qui est l'espace des fonctions $u \in C^q([-T,T],X_s)$ telles que :

$$\forall i \in \mathbb{N} : \; 0 \leqslant i \leqslant p \qquad t^i\, u(t) \in C^{q+i}([-T,T],X_s)$$

Proposition 1.2. Soit P un opérateur de Fuchs de poids nul par rapport à x, on suppose que les racines $(\lambda_j(y))_{1\leq j\leq m}$ du polynôme caractéristique fuchsien de P, vérifient :

$$\forall j \in \mathbb{N} : \quad 1 \leq j \leq m \qquad \forall y \in V \text{ voisinage de } 0 \quad \mathrm{Re}\lambda_j(y) < 0$$

Alors pour $0 < s < s_1$, il existe un nombre $\varepsilon \in \left]0,T\right[$ tel que pour tout f dans $C^0([-T,T],X_{s_1})$ il existe u dans $C^0_m([-\varepsilon,\varepsilon],X_s)$ unique telle que :

$$Pu = f \qquad \text{sur } \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[$$

Pour montrer cette proposition on vérifie d'abord que :

$$Qu = (x\,D_x-\lambda_1)(x\,D_x-\lambda_2)\ \ldots\ (x\,D_x-\lambda_m)u$$

Puis on cherche un opérateur inverse de Q qu'on notera par H_m.

Et pour trouver la solution de $Pu = f$, on utilise la méthode des approximations successives, en définissant la suite suivante :

$$u_o = H_m(f)$$
$$u_{p+1} = u_o - H_m\left[\sum_{\alpha=0}^{m} x^{\alpha+1}\ D_x^\alpha\left(\sum_{|\beta|\leq m-\alpha} b_{\alpha,\beta}(x,y)\ D_y^\beta\ u_p\right)\right].$$

Ensuite on montre qu'il existe ε un réel strictement positif tel que :

$$u_p \xrightarrow[p\to\infty]{} u$$

dans $C^0_m([-\varepsilon,\varepsilon],X_s)$ pour la norme de la convergence uniforme.

Et on a, u qui vérifie :

$$u = H_m(f) - H_m\left[\sum_{\alpha=0}^{m} x^{\alpha+1}\ D_x^\alpha\ (\sum_{|\beta|\leq m-\alpha} b_{\alpha,\beta}(x,y)\ D_y^\beta\ u)\right]$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathcal{P}u = f.$$

Théorème 1.3. Soit $\mathcal{P}$ un opérateur de Fuchs de poids $m-k \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall y \in V, \quad \forall j : \; 1 \leqslant j \leqslant m \qquad \operatorname{Re} \lambda_j(y) \leqslant m-k+h$$

(on peut supposer en fait que les coefficients de $\mathcal{P}$ sont seulement de classe C^{m+h} sur $[-T,T]$ à valeurs dans l'espace des fonctions analytiques sur V.)

Si le polynôme caractéristique fuchsien de $\mathcal{P}$ vérifie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{N} : \; \lambda \geqslant m-k \qquad \forall y \in V \qquad P(\lambda,y) \neq 0.$$

Alors il existe ε un nombre réel strictement positif et il existe une solution unique dans $C_k^{m-k+h}([-\varepsilon,\varepsilon],X_s)$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \mathcal{P}u = f \\ D_x^j\, u(0,y) = u_j(y) & 0 \leqslant j \leqslant m-k-1 \end{cases}$$

On cherche u dans $C_k^{m-k+h}([-\varepsilon,\varepsilon],X_s)$ donc u est de la forme suivante :

$$u(x) = \sum_{j=0}^{m-k+h-1} u^{(j)} \frac{x^j}{j!} + x^{m-k+h}\, u_{m-k+h}(x).$$

Pour toute fonction g de classe C^ℓ, on note par $x^\ell g_\ell$ le reste d'ordre ℓ du développement de Taylor de g en 0 par rapport à x.

Le calcul formel de $\mathcal{P}u = f$, nous donne :

i) $\forall \ell \in \mathbb{N} \quad : \quad m-k \leqslant \ell \leqslant m-k+h-1$

$$P(\ell,y)\,\frac{u^{(\ell)}}{\ell!} = \frac{f^{(\ell-m+k)}}{(\ell-m+k)!} + \sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{(B_{m-j}u)^{(\ell-m+k+j)}}{(\ell-m+k)!} + \sum_{j=m-k}^{\ell-1} \frac{(B_{m-j}u)^{(\ell-1)}}{(\ell-j-1)!}$$

où $B_j\, u = - \sum_{|\beta|\leqslant j} b_{j,\beta}(x,y)\, D_y^{\beta}\, u.$

ii) $x^{-h}\mathcal{P}(x^{h+m-k}\, u_{m-k+h}) = g(x,y,f_h, (u^{(j)})_{0\leqslant j\leqslant m-k-1})$

on pose :

$$\mathcal{P}_1(u) = x^{-h}\, \mathcal{P}(x^{h+m-k}\, u)$$

et on montre que $\mathcal{P}_1$ est un opérateur de type de Fuchs de poids nul et qu'il vérifie les hypothèses de la proposition 1.2 donc on peut définir u_{m-k+h}.

Remarque. Le théorème 1.2 est un cas particulier du théorème 1.3, il suffit de prendre $\Omega = \{0\}$.

III. Résultats de Terbèche [10].

Le travail de Terbèche consiste à donner une démonstration des résultats de Baouendi-Goulaouic dans le cas holomorphe.

Il donne une formulation géométrique du problème et utilise des fonctions majorantes dans la forme particulièrement élégante que leur a donné C. Wagschal [11].

Soit h un opérateur différentiel holomorphe sur une variété différentiable E holomorphe de dimension n.

On notera z l'élément générique de E

h est d'ordre m_o sur un voisinage de a dans E.

Et soit S une hypersurface de E contenant a, et d'équation locale $\psi(z) = 0$.

Pour $\sigma \in \mathbb{Z}$, Ω un voisinage ouvert de a dans E et Y une fonction holomorphe sur Ω, on note pour $z \in \Omega - S$, par :

$$h_m^\sigma(Y)(z) = \psi^{\sigma-m}(z)\ h(Y\ \psi^m)(z) \quad (\text{pour } m \geq m_o)$$

On note aussi par $H(z,\xi)$ le symbole principal de l'opérateur h.

Alors on a les 3 définitions suivantes :

$$\text{(i) } \tau_{h,S}(a) = \inf\left\{\sigma \in \mathbb{Z}/\forall\Omega,\ \forall Y,\ \forall b \in \Omega \cap S \quad \lim_{\substack{z\to b\\ z\notin S}} h_m^{\sigma+1}(Y)(z) = 0\right\}$$

$\tau_{h,S}(a)$ est le poids fuchsien de h en a par rapport à S.

$$\text{(ii) } \tau^*_{h,S}(a) = \inf\{\sigma \in \mathbb{Z}/\lim_{\substack{z\to a\\ z\notin S}} \psi^{\sigma+1-m_o}(z)H(z, \operatorname{grad} \psi(z)) = 0\}$$

$\tau^*_{h,S}(a)$ c'est la poids fuchsien principal de h en a par rapport à S.

$$\text{(iii) } \tilde{\tau}_{h,S}(a) = \inf\{\alpha \in Z/\forall\Omega,\ \forall Y,\ \forall b \in \Omega \cap S :$$
$$\lim_{\substack{z\to b\\ z\notin S}} [h_m^{\sigma+1}(Y)(z) - Y(z)\ h_m^{\sigma+1}(1)(z)]\} = 0$$

$\tilde{\tau}_{h,S}(a)$ est le poids fuschien réduit de h en a par rapport à S.

<u>*Définition*</u> *1.5.* Soit h un opérateur différentiel holomorphe sur E on dit que h est de type de Fuchs de poids $\tau \in \mathbb{Z}$ en a par rapport à S si et seulement si on a :

i) $\tau^*_{h,S}$ est finie, constante et égale à τ sur un voisinage de a dans S.

ii) $\tau_{h,S}(a) = \tau$

iii) $\tilde{\tau}_{h,S}(a) \leq \tau-1$

Définition 1.6. Soit h un opérateur différentiel de type de Fuchs de poids $\tau \in \mathbb{N}$ en a par rapport à S. On appelle polynôme caractéristique fuchsien de h, le polynôme en λ à coefficients holomorphes en $y \in S$ défini par :

$$C(\lambda,y) = \lim_{\substack{z\to y \\ z\notin S}} \left[\varphi^{\tau-\lambda}(z)\ h(\varphi^{\lambda})(x)\right]$$

Théorème 1.4. Soit h un opérateur différentiel holomorphe de type de Fuchs de poids τ en a par rapport à une hypersurface S de E passant par a, d'équation locale $\varphi(z) = 0$ au voisinage de a.

Alors on a équivalence entre les 2 propriétés suivantes :

i) $\forall\lambda \geq \tau \qquad C(\lambda,a) \neq 0$

ii) Pour toutes fonctions f et ω holomorphes au voisinage de a dans E, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} h(u) = f \\ u-w = \theta(\varphi^{\tau}) \end{cases}$$

admet une solution unique holomorphe au voisinage de a dans E.

Idée de démonstration :

On fait le changement de fonction inconnue suivant :

$$v = u - w$$

et on pose :

$$h_1(u) = h(\psi^\tau u).$$

Alors on a :

$$v = \psi^\tau v_1$$

et

$$h(u) = h(v+w) = h_1(v_1) + h(w) = f$$

donc le problème de Cauchy se ramène au problème suivant :

$$\begin{cases} \quad h_1(v_1) = g \\ \text{avec} \quad g = f - h(w). \end{cases}$$

On montre que h_1 est un opérateur de type de Fuchs de poids nul en a par rapport à S.

Et on cherche par la méthode des approximations successives une solution de

$$h_1(v_1) = g.$$

Pour cela, on utilise la méthode des fonctions majorantes sous la forme donnée par C. Wagschal.

Finalement la solution de :

$$\begin{cases} h(u) = f \\ u-w = \theta(\psi^{\tau}) \end{cases}$$

est donnée par :

$$u = \psi^{\tau}\, v_1 + w.$$

CHAPITRE II

PASSAGE D'UN OPERATEUR DE p-POIDS QUELCONQUE A UN OPERATEUR DE p-POIDS NUL

Soit P un opérateur de type de Fuchs de p-poids $\tau \in \mathbb{N}^p$ par rapport à x.

A P on associe l'opérateur différentiel P_1 défini par :

$$P_1(u) = P(x^\tau u)$$

Proposition 2.1. (Définition équivalente du polynôme caractéristique fuchsien).

Soit P un opérateur de Fuchs de p-poids $\tau \in \mathbb{N}^p$ par rapport à x, de polynôme caractéristique fuchsien $P(X,y)$.

Alors on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{C}^p \quad : \quad P(\ell,y) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x_i \neq 0 \\ \forall i=1,\ldots,p}} \left[x^{\tau-\ell} P(x^\ell)(x,y)\right]$$

Preuve :

Si $\ell = (\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_p) \in \mathbb{R}^p$, on notera :

$$[\ell_+] = ([\ell_1]_+,[\ell_2]_+,\ldots,[\ell_p]_+)$$

avec $[\ell_i]_+ = \max(\ell_i,0)$.

$$P(x^{\ell}) = \sum_{\alpha\leq m} \sum_{|\beta|+|\alpha|\leq|m|} a_{\alpha,\beta}(x,y)\, D_x^{\alpha}\, D_y^{\beta}(x^{\ell})$$

$$= \sum_{\alpha\leq m} a_{\alpha,0}(x,y)\, D_x^{\alpha}(x^{\ell}) = \sum_{\alpha\leq m} a_{\alpha,0}(x,y)\, C_{\alpha}(\ell)\, x^{\ell-\alpha}$$

avec $C_{\alpha}(\ell) = \prod_{i=1}^{p} C_{\alpha_i}(\ell_i)$

$$x^{\tau-\ell}P(x^{\ell}) = \sum_{\alpha\leq m} a_{\alpha,0}(x,y)\, C_{\alpha}(\ell)\, x^{\tau-\alpha}$$

Comme P est un opérateur de p-poids τ par rapport à x, on a :

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^p \;:\; \alpha \leq m \qquad a_{\alpha,0}(x,y) = \theta(x^{[\alpha-\tau]_+})$$

donc, si α ne vérifie pas $\alpha \geq \tau$, il existe i : $1 \leq i \leq p$ tel que $\alpha_i < \tau_i$ et on a :

$$\lim_{x\to 0} a_{\alpha,0}(x,y)\, x^{\tau-\alpha} = \lim_{x\to 0} \hat{a}_{\alpha,0}(x,y)\, x^{[\alpha-\tau]_+}\, x^{\tau-\alpha} = 0$$

car : $[\alpha-\tau]_+ + \tau-\alpha > 0$ par conséquent on a :

$$\lim_{x\to 0} x^{\tau-\ell}\, P(x^{\ell}) = \lim_{x\to 0} \sum_{\tau\leq\alpha\leq m} a_{\alpha,0}(x,y)\, C_{\alpha}(\ell)\, x^{\tau-\alpha}$$

$$= \lim_{x\to 0} \sum_{\tau\leq\alpha\leq m} \hat{a}_{\alpha,0}(x,y)\, C_{\ell}(\ell) = \sum_{\tau\leq\alpha\leq m} \hat{a}_{\alpha,0}(0,y)\, C_{\alpha}(\ell)$$

$$= P(\ell,y)$$

Proposition 2.2. L'opérateur P_1 associé à P est un opérateur de type de Fuchs de p-poids nul par rapport à x.

De plus, si on note par P (respectivement par P_1) le polynôme caractéristique fuchsien de P (respectivement de P_1).

Alors on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^p \quad , \quad \forall y \in V \text{ voisinage de } 0$$

$$P_1(\lambda, y) = P(\lambda+\tau, y)$$

Preuve :

Soit u une fonction holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$.

On a :

$$P_1(u) = P(x^\tau u) = \sum_{\alpha \leq m} \sum_{|\beta|+|\alpha| \leq |m|} a_{\alpha,\beta}(x,y) D_x^\alpha D_y^\beta (x^\tau u)$$

$$= \sum_{\alpha \leq m} \sum_{|\beta|+|\alpha| \leq |m|} a_{\alpha,\beta}(x,y) D_x^\alpha [x^\tau D_y^\beta u]$$

$$= \sum_{\alpha \leq m} \sum_{|\beta|+|\alpha| \leq |m|} a_{\alpha,\beta}(x,y) \sum_{\gamma \leq \alpha} C_\alpha^\gamma D_x^{\alpha-\gamma}(x^\tau) D_x^\gamma D_y^\beta u$$

$$= \sum_{\alpha \leq m} \sum_{|\beta|+|\alpha| \leq |m|} a_{\alpha,\beta}(x,y) \sum_{\gamma \leq \alpha} C_\alpha^\gamma C_{\alpha-\gamma}(\tau) x^{[\tau-\alpha+\gamma]_+} D_x^\gamma D_y^\beta u$$

Donc on a :

$$P_1(u) = \sum_{\gamma \leq m} \sum_{\gamma \leq \alpha \leq m} \sum_{|\beta|+|\alpha| \leq |m|} a_{\alpha,\beta}(x,y) C_\alpha^\gamma C_{\alpha-\gamma}(\tau) x^{[\tau-\alpha+\gamma]_+} D_x^\gamma D_y^\beta u$$

Le coefficient de $D_x^\gamma D_y^\beta u$ est :

$$C_{\gamma,\beta}(x,y) = \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha \leq m \\ |\alpha| \leq |m|-|\beta|}} C_\alpha^\gamma a_{\alpha,\beta}(x,y) C_{\alpha-\gamma}(\tau) x^{[\tau-\alpha+\gamma]_+}$$

Alors on a :

$$P_1(u) = \sum_{\gamma \leq m} \sum_{|\beta|+|\gamma| \leq |m|} C_{\gamma,\beta}(x,y) D_x^\gamma D_y^\beta u$$

et :

$$C_{m,0}(x,y) = a_{m,0}(x,y)\ x^{\tau} = \tilde{a}_{m,0}(x,y)\ x^{m-\tau}\ x^{\tau}$$

$$= x^{m}\ \tilde{a}_{m,0}(x,y)$$

Maintenant nous allons voir que :

$$C_{\gamma,0}(x,y) = \theta(x^{\gamma})$$

et que si $\beta \neq 0$

$$C_{\gamma,\beta}(x,y) = \theta(x^{\gamma+1})$$

$$a_{\alpha,\beta}(x,y)\ C_{\alpha-\gamma}(\tau)\ x^{[\tau-\alpha+\gamma]_{+}} = \begin{cases} a_{\alpha,\beta}(x,y)C_{\alpha-\gamma}(\tau)x^{\tau-\alpha+\gamma} & \text{si } \tau-\alpha+\gamma \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On sait que :

$$a_{\alpha,0}(x,y) = \theta(x^{[\alpha-\tau]_{+}})$$

et que si $\beta \neq 0$

$$a_{\alpha,\beta}(x,y) = \theta(x^{[\alpha-\tau+1]_{+}}$$

donc pour $\tau-\alpha+\gamma \geqslant 0$, on a :

$$a_{\alpha,0}(x,y)C_{\alpha-\gamma}(\tau)x^{\tau-\alpha+\gamma} = \hat{a}_{\alpha,0}(x,y)\ C_{\alpha-\gamma}(\tau)\ x^{[\alpha-\tau]_{+} + (\tau-\alpha+\gamma)} = \theta(x^{\gamma})$$

car $[\alpha-\tau]_{+} + \tau-\alpha \geqslant 0$, de même :

$$a_{\alpha,\beta}(x,y)C_{\alpha-\gamma}(\tau)x^{\tau-\alpha+\gamma} = \hat{a}_{\alpha,0}(x,y)C_{\alpha-\gamma}(\tau)\ x^{[\alpha-\tau+1]_{+}}\ x^{\tau-\alpha+\gamma} = \theta(x^{\gamma+1})$$

car : $[\alpha-\tau+1]_+ + \tau-\alpha+\gamma = [\alpha-\tau+1]_+ + (\tau-\alpha-1) + \gamma+1 \geq \gamma+1$.

Donc P_1 est bien un opérateur différentiel de Fuchs de p-poids 0.

Soient $\ell \in \mathbb{C}^p$ et $y \in V$, on a :

$$P_1(\ell,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x_i\neq 0\\ \forall i\in\{1,\dots,p\}}} [x^{-\ell}\, P_1(x^\ell)]$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x_i\neq 0\\ \forall i\in\{1,\dots,p\}}} [x^{-\ell}\, P(x^{\tau+\ell})]$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x_i\neq 0\\ \forall i\in\{1,\dots,p\}}} [x^{\tau-(\ell+\tau)}\quad (x^{\tau+\ell})]$$

$$= P(\ell+\tau,y)$$

donc : $\forall\lambda \in \mathbb{C}^p$, $\forall y \in V$:

$$P_1(\lambda,y) = P(\lambda+\tau,y)$$

Passage de P *à* P_1 :

Soit P un opérateur de Fuchs de p-poids $\tau \in \mathbb{N}^p$ par rapport à x.

Et considérons le problème de Goursat suivant :

$$(*)\quad \begin{cases} Pu = f \\ u-w = \theta(x^\tau) \end{cases}$$

où f et w sont deux fonctions holomorphes au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$.

Faisons le changement de fonction inconnue suivant :

$$u - w = v.$$

Alors on a :

$$v = x^{\tau} v_1$$

avec v_1 une fonction holomorphe au voisinage de l'origine dans C^n.

Et on a :

$$\begin{aligned} P(u) &= P(v+w) = P(v) + P(w) \\ &= P(x^{\tau} v_1) + P(w) = P_1(v_1) + P(w) \end{aligned}$$

Posons :

$$g = f - P(w)$$

Alors le problème de Goursat (*) devient équivalent au problème

$$(**) \qquad P_1(v_1) = g$$

Donc on constate que le problème de Goursat (*) pour un opérateur de Fuchs de p-poids $\tau \in \mathbb{N}^p$, se ramène au problème de Goursat (**) pour un opérateur de Fuchs de p-poids nul. Et si on note par u (respectivement par v_1) la solution de (*) (respectivement de (**)) alors on a :

$$u = w + x^{\tau} v_1 .$$

CHAPITRE III

CALCUL DE LA SOLUTION FORMELLE

Le calcul formel que nous allons faire dans ce chapitre montre l'existence et l'unicité de la solution série formelle du problème dans le cas du p-poids nul par rapport à x.

On se place, pour faire ce calcul, sur un voisinage V de l'origine dans $\mathbb{C}^q$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^p \quad , \quad \forall y \in V \qquad P(\lambda,y) \neq 0$$

I. *Décomposition de* P *en* $Q+A+B$:

Proposition 3.1. Soit P un opérateur différentiel de type de Fuchs de p-poids nul par rapport à x.

Alors P se décompose sous la forme suivante :

$$P = Q + A + B$$

où : Q est l'opérateur caractéristique fuchsien associé à P

A et B sont des opérateurs différentiels holomorphes qui s'écrivent sous la forme :

$$Au = \sum_{i=1}^{p} x_i \Big[\sum_{\alpha \leq m} x^\alpha D_x^\alpha (a_\alpha^{(i)}(x,y)u) \Big]$$

$$Bu = x_1 x_2 \ldots x_p \sum_{\alpha < m} x^\alpha D_x^\alpha \Big[\sum_{\substack{|\beta| \leq |m| - |\alpha| \\ \beta \neq 0}} b_{\alpha,\beta}(x,y)\, D_y^\beta u \Big]$$

Pour montrer cette proposition nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1. Soient $\tau \in \mathbb{N}^p$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage V de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, il existe des fonctions uniques holomorphes sur V qu'on notera : f_α pour $\alpha \in \mathbb{N}^p$ et $\alpha \leq \tau$, telles que :

$$\forall u \text{ holomorphe sur } V : \quad f(x,y)\, x^\tau D_x^\tau u(x,y) = \sum_{\alpha\leq\tau} x^\alpha D_x^\alpha [f_\alpha(x,y)\, u(x,y)]$$

Preuve :

$$\sum_{\alpha\leq\tau} x^\alpha D_x^\alpha [f_\alpha u] = \sum_{\alpha\leq\tau} x^\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} c_\alpha^\beta (D_x^{\alpha-\beta} f_\alpha)(D_x^\beta u)$$

$$= \sum_{\beta\leq\tau} \Big(\sum_{\beta\leq\alpha\leq\tau} c_\alpha^\beta x^\alpha D_x^{\alpha-\beta} f_\alpha \Big) D_x^\beta u = f\, x^\tau D_x^\tau u$$

Donc en identifiant les deux membres de l'égalité on a :

i) $f_\tau = f$

ii) $\displaystyle\sum_{\beta\leq\alpha\leq\tau} c_\alpha^\beta x^\alpha D_x^{\alpha-\beta} f_\alpha = 0$ si $\beta \neq \tau$

Donc si $\beta \neq \tau$ on a :

$$x^\beta f_\beta + \sum_{\beta<\alpha\leq\tau} c_\alpha^\beta x^\alpha D_x^{\alpha-\beta} f_\alpha = 0$$

ce qui nous donne :

$$f_\beta = - \sum_{\beta<\alpha\leq\tau} c_\alpha^\beta x^{\alpha-\beta} D_x^{\alpha-\beta} f_\alpha$$

par conséquent f_β est défini à partir des f_α pour $\alpha > \beta$. Donc on peut définir les f_β de façon unique.

Preuve de la proposition 3.1.

Nous avons :

1) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^p$: $\alpha \leq m$ $a_{\alpha,0}(x,y)\, D_x^\alpha$ qui est de p-poids inférieur ou égal à 0 donc on peut écrire :

$$a_{\alpha,0}(x,y) D_x^\alpha = \hat{a}_{\alpha,0}(x,y)\; x^\alpha\; D_x^\alpha$$

et

$$\hat{a}_{\alpha,0}(x,y) = \hat{a}_{\alpha,0}(0,y) + \sum_{i=1}^{p} x_i\; b_\alpha^{(i)}(x,y)$$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^p$: $\alpha \leq m$ et $\forall \beta \in \mathbb{N}^q$: $\beta \neq (0,\dots,0)$

$a_{\alpha,\beta}(x,y)\; D_x^\alpha\; D_y^\beta$ est de p-poids inférieur ou égal à $(-1,-1,\dots,-1)$

donc :

$$a_{\alpha,\beta}(x,y)\; D_x^\alpha\; D_y^\beta = x_1 x_2 \dots x_p\; \hat{a}_{\alpha,\beta}(x,y)\; x^\alpha\; D_x^\alpha\; D_y^\beta$$

Et par conséquent on a :

$$\begin{aligned}
Pu &= \sum_{\alpha\leq m}\; \sum_{|\beta|+|\alpha|\leq|m|} a_{\alpha,\beta}(x,y)\; D_x^\alpha\; D_y^\beta\; u \\
&= \sum_{\alpha\leq m} a_{\alpha,0}(x,y)\; D_x^\alpha\; u + \sum_{\alpha\leq m}\; \sum_{\substack{|\beta|\leq|m|-|\alpha| \\ \beta\neq 0}} a_{\alpha,\beta}(x,y)\; D_x^\alpha\; D_y^\beta\; u \\
&= \sum_{\alpha\leq m} \hat{a}_{\alpha,0}(x,y) x^\alpha D_x^\alpha\; u + x_1 x_2, \dots x_p \sum_{\alpha\leq m}\; \sum_{\substack{|\beta|\leq|m|-|\alpha| \\ \beta\neq 0}} \hat{a}_{\alpha,\beta}(x,y) x^\alpha D_x^\alpha D_y^\beta u \\
&= \sum_{\alpha\leq m} \hat{a}_{\alpha,0}(0,y) x^\alpha D_x^\alpha u + \sum_{\alpha\leq m} \Big(\sum_{i=1}^{p} x_i\; b_\alpha^{(i)}(x,y)\Big) x^\alpha D_x^\alpha\; u \\
&\quad + x_1 x_2 \dots x_p \sum_{\alpha\leq m}\; \sum_{\substack{|\beta|\leq|m|-|\alpha| \\ \beta\neq 0}} \hat{a}_{\alpha,\beta}(x,y)\; x^\alpha D_x^\alpha\; D_y^\beta\; u \quad .
\end{aligned}$$

Posons :

$$Au = \sum_{\alpha \leq m} \left(\sum_{i=1}^{p} x_i \; b_\alpha^{(i)}(x,y) \right) x^\alpha \; D_x^\alpha \; u$$

$$= \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{\alpha \leq m} b_\alpha^{(i)}(x,y) x^\alpha \; D_x^\alpha \; u$$

et :

$$Bu = x_1 x_2 \dots x_p \sum_{\alpha \leq m} \sum_{\substack{|\beta| \leq |m| - |\alpha| \\ \beta \neq 0}} \hat{a}_{\alpha,\beta}(x,y) x^\alpha \; D_x^\alpha \; D_y^\beta \; u$$

Donc, d'après le lemme 3.1, on a :

$$Au = \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{\alpha \leq m} \sum_{\gamma \leq \alpha} x^\gamma D_x^\gamma \left[b_{\alpha,\gamma}^{(i)} \; (x,y) u \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{\gamma \leq m} x^\gamma D_x^\gamma \left[\sum_{\gamma \leq \alpha \leq m} b_{\alpha,\gamma}^{(i)}(x,y) u \right]$$

si on prend :

$$a_\gamma^{(i)}(x,y) = \sum_{\gamma \leq \alpha \leq m} b_{\alpha,\gamma}^{(i)}(x,y)$$

on a :

$$Au = \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{\gamma \leq m} x^\gamma \; D_x^\gamma \left[a_\gamma^{(i)} u \right]$$

$$Bu = x_1 x_2 \dots x_p \sum_{\alpha < m} \sum_{\substack{|\beta| + |\alpha| \leq |m| \\ \beta \neq 0}} \sum_{\gamma \leq \alpha} x^\gamma D_x^\gamma \left[\hat{a}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y) \; D_y^\beta \; u \right]$$

$$= x_1 x_2 \dots x_p \sum_{\gamma < m} x^\gamma D_x^\gamma \left[\sum_{\gamma \leq \alpha < m} \sum_{\substack{|\beta| + |\alpha| \leq |m| \\ \beta \neq 0}} \hat{a}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y) \; D_y^\beta \; u \right]$$

$$= x_1 x_2 \dots x_p \sum_{\gamma < m} x^\gamma D_x^\gamma \left[\sum_{\substack{|\beta| + |\gamma| \leq |m| \\ \beta \neq 0}} b_{\gamma,\beta}(x,y) \; D_y^\beta \; u \right]$$

avec :
$$b_{\gamma,\beta}(x,y) = \sum_{\substack{\gamma\leq\alpha<m \\ |\alpha|\leq|m|-|\beta|}} \hat{a}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y)$$

II. *Calcul formel de* Qu :

Nous allons chercher une solution série formelle en x à coefficients fonctions holomorphes en y sur V.

Donc nous supposons que u s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x,y) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} u_\ell(y)\,\frac{x^\ell}{\ell!}$$

Lemme 3.2. Soient α et ℓ deux multi-indices de $\mathbb{N}^p$.

On a :

$$x^\alpha D_x^\alpha(x^\ell) = C_\alpha(\ell)\, x^\ell$$

avec

$$C_\alpha(\ell) = \prod_{i=1}^{p} C_{\alpha_i}(\ell_i)$$

Preuve :

1) si $\ell \geq \alpha$, alors on a :

$$x^\alpha D_x^\alpha(x^\ell) = x^\alpha D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2}\ldots D_{x_p}^{\alpha_p}(x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}\ldots x_p^{\ell_p})$$

$$= x^\alpha C_{\alpha_1}(\ell_1)x_1^{\ell_1-\alpha_1}\, C_{\alpha_2}(\ell_2)x_2^{\ell_2-\alpha_2}\ \ldots\ C_{\alpha_p}(\rho_p)x^{\ell_p-\alpha_p}$$

$$= C_\alpha(\ell)\, x^\ell$$

2) si ℓ ne vérifie pas : $\ell \geq \alpha$, alors il existe $i : 1 \leq i \leq p$ tel que on ait :

$$\ell_i \leq \alpha_i - 1$$

et à ce moment on a :

$$x^{\alpha} D_x^{\alpha}(x^{\ell}) = 0$$

et

$$C_{\alpha_i}(\ell_i) = 0 \qquad \text{donc} \qquad C_{\alpha}(\ell) = 0$$

Prenons $u(x,y)$ une série formelle en x à coefficients holomorphe en y.

Alors on a :

$$Q\, u(x,y) = \Big(\sum_{\alpha\leq m} \hat{a}_{\alpha,0}(0,y)\, x^{\alpha}D_x^{\alpha}\Big)\, u(x,y)$$

$$= \sum_{\alpha\leq m}\ \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} \hat{a}_{\alpha,0}(0,y)\ u_{\ell}(y)\ x^{\alpha}D_x^{\alpha}\Big(\frac{x^{\ell}}{\ell!}\Big)$$

$$= \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} u_{\ell}(y) \sum_{\alpha\leq m} \hat{a}_{\alpha,0}(0,y)\ C_{\alpha}(\ell)\ \frac{x^{\ell}}{\ell!}$$

$$= \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} P(\ell,y)\ u_{\ell}(y)\ \frac{x^{\ell}}{\ell!}$$

III. *<u>Calcul formel de</u>* $(A+B)u$.

$$A\, u(x,y) = \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{\alpha\leq m} x^{\alpha}D_x^{\alpha}\big[a_{\alpha}^{(i)}(x,y)\ u(x,y)\big]$$

$$= \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{\alpha\leq m} x^{\alpha}D_x^{\alpha}\Big[\sum_{\ell\in\mathbb{N}^p}(a_{\alpha}^{(i)}\ u)_{\ell}(y)\ \frac{x^{\ell}}{\ell!}\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{\alpha\leq m}\Big[\sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} C_{\alpha}(\ell)\ (a_{\alpha}^{(i)}\ u)_{\ell}(y)\ \frac{x^{\ell}}{\ell!}\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\ \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p}\Big[\sum_{\alpha\leq m} C_{\alpha}(\ell)\ (a_{\alpha}^{(i)}\ u)_{\ell}(y)\Big]\ \frac{x^{\ell}}{\ell!}\ x_i$$

$$B\,u = x_1x_2\dots x_p \sum_{\alpha<m} x^\alpha D_x^\alpha [B_\alpha(x,y,D_y)u]$$

avec $B_\alpha(x,y,D_y)\ u(x,y) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} (B_\alpha u)_\ell(y)\ \frac{x^\ell}{\ell!}$

$$B\,u(x,y) = x_1x_2\dots x_p \sum_{\alpha<m} x^\alpha D_x^\alpha \Big[\sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} (B_\alpha u)_\ell(y)\ \frac{x^\ell}{\ell!}\Big]$$

$$= x_1x_2\dots x_p \sum_{\alpha<m} \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} C_\alpha(\ell)(B_\alpha\ u)_\ell(y)\ \frac{x^\ell}{\ell!}$$

$$= \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} \Big[\sum_{\alpha<m} C_\alpha(\ell)(B_\alpha\ u)_\ell(y)\Big]\ \frac{x^{\ell+1}}{\ell!}$$

IV. *Expression de la solution formelle.*

Soit f une série formelle en x à coefficient holomorphes en y sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^q$:

$$f(x,y) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} f_\ell(y)\ \frac{x^\ell}{\ell!}$$

Et nous allons chercher une solution série formelle du problème

$$\mathcal{P}u = f$$

On a :

$$\mathcal{P}u = Qu + (A+B)u = f$$

Par conséquent :

$$\sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} P(\ell,y)u_\ell(y)\ \frac{x^\ell}{\ell!} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} \Big[\sum_{\alpha\leq m} C_\alpha(\ell)(a_\alpha^{(i)}u)_\ell(y)\Big]\ \frac{x^\ell}{\ell!}\ x_i$$

$$+ \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} \Big[\sum_{\alpha<m} C_\alpha(\ell)(B_\alpha\ u)_\ell(y)\Big]\ \frac{x^{\ell+1}}{\ell!} = \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} f_\ell(y)\ \frac{x^\ell}{\ell!}\ .$$

Remarquons d'abord que pour tout $\ell \in N^p$ on a :

i) $(a_\alpha^{(i)} u)_\ell(y)$ qui est définie par les fonctions :

$$u_k(y) \qquad \text{pour} \quad k \leqslant \ell$$

ii) De même, $(B_\alpha u)_\ell(y)$ est aussi définie à partir des fonctions $u_k(y)$ pour $k \leqslant \ell$.

Donc, en identifiant les deux membres de l'égalité, on trouve que $P(\ell,y)\ u_\ell(y)$ est une fonction qui est définie d'une façon unique à partir des $u_k(y)$ pour $k \in \mathbb{N}^p$: $k < \ell$.

Ainsi si on prend un voisinage V de l'origine dans C^q sur lequel on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^p \quad , \quad \forall y \in V \qquad P(\ell,y) \neq 0$$

On peut définir d'une façon unique la solution série formelle :

$$U(x,y) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^p} U_\ell(y) \frac{x^\ell}{\ell!} .$$

CHAPITRE IV

CALCUL D'UN INVERSE DE LA PARTIE PRINCIPALE FUCHSIENNE

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la partie principale fuchsienne d'un opérateur P de type de Fuchs de p-poids nul par rapport à x. Ainsi nous allons essayer de chercher une solution de $Qu = f$.

I. *Notion des fonctions majorantes.*

Définition 4.1. Soient u,U deux séries formelles à p-indéterminées : $X_1,X_2,\ldots,X_p$; et telles que :

$$u(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} u_\alpha X^\alpha$$

$$U(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} U_\alpha X^\alpha$$

où : $X = (X_1,X_2,\ldots,X_p)$

u_α sont des éléments d'une algèbre de Banach E et U_α sont des nombres réels positifs ou nuls.

On dit que $u(X)$ est majorée par $U(X)$ (ou $U(X)$ est une série majorante de $u(X)$) si et seulement si, on a :

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^p \quad : \quad \|u_\alpha\|_E \leq U_\alpha$$

ce qu'on note par :

$$u(X) << U(X)$$

Propriétés des séries majorantes.

1) Soient u,v,U,V des séries formelles telles que :

$$u(X) \ll U(X)$$
$$v(X) \ll V(X)$$

Alors on a :

$$u(X) + v(X) \ll U(X) + V(X)$$
$$u(X) \,.\, v(X) \ll U(X) \,.\, V(X)$$

2) Soit $u(x)$ une fonction holomorphe et bornée pour :

$$|x_j| < R_j \qquad 1 \leqslant j \leqslant p$$

Alors on a :

$$u(X) \ll \frac{M}{(1-\frac{X_1}{R_1})\dots(1-\frac{X_p}{R_p})} = M \sum_{\alpha\in N^p} \frac{X^\alpha}{R^\alpha}$$

où $u(X)$ est le développement en série entière de $u(x)$ au voisinage de 0.

Et

$$M = \sup_{\substack{|x_j|<R_j \\ 1\leqslant j\leqslant p}} |u(x)|$$

3) Soient u,U deux séries formelles telles que

$$u(X) \ll U(X)$$

Notons par :

$$\mathcal{D}(u) = \{x \in \mathbb{C}^p : \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} \|u_\alpha\|_E \, |x^\alpha| < +\infty\}$$

$$\mathcal{D}(U) = \{x \in \mathbb{C}^p : \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} |U_\alpha| |x^\alpha| < +\infty\}$$

Alors on a :

$$\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{D}(u)$$

II. Formulation des conditions d'existence de la solution de $Qu = f$.

Soit P un opérateur de type de Fuchs de p-poids nul par rapport à x.

Le polynôme caractéristique fuchsien de P s'écrit sous la forme suivante :

$$P(\ell,y) = \sum_{\alpha \leq m} \hat{a}_{\alpha,0}(0,y)\ C_\alpha(\ell)$$

Le calcul formel du chapitre III nous donne la solution formelle de $Qu = f$.

$$u(x,y) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^p} u_\ell(y) \frac{x^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^p} \frac{f_\ell(y)}{P(\ell,y)} \frac{x^\ell}{\ell!}$$

On va prouver qu'avec des hypothèses convenables sur le polynôme caractéristique fuchsien P, pour tout f holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, on peut trouver u holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ solution de l'équation différentielle $Qu = f$.

On remarque d'abord que la condition suivante :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^p \qquad P(\ell,0) \neq 0$$

est une condition nécessaire pour l'existence de la solution. Mais cette condition n'est pas suffisante, comme on peut le constater dans l'exemple suivant. (On sait cependant [1] que pour $p = 1$ elle est suffisante) :

Exemple. Considérons le cas où :

$$p = 2 \qquad \text{et} \qquad q = 1$$

Et prenons l'opérateur de Fuchs $\mathcal{P}$ suivant :

$$\mathcal{P}(u) = x_1 x_2 D_{x_1} D_{x_2} u + x_1 D_{x_1} u + x_2 y\, D_{x_2} u + (1+y)u$$

est un opérateur de Fuchs de bi-poids nul.

Son polynôme caractéristique fuchsien est

$$P(\ell_1, \ell_2, y) = (\ell_1 + y)(\ell_2 + 1) + 1$$

La solution formelle de $\mathcal{P}(u) = f$ est donnée par :

$$U(x_1, x_2, y) = \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \sum_{\ell_2=0}^{\infty} U_{\ell_1,\ell_2}(y) \frac{x_1^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{x_2^{\ell_2}}{\ell_2!} =$$

$$= \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \sum_{\ell_2=0}^{\infty} \frac{f_{\ell_1,\ell_2}(y)}{P(\ell_1, \ell_2, y)} \frac{x_1^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{x_2^{\ell_2}}{\ell_2!}$$

on a :

$$\forall \ell_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall \ell_2 \in \mathbb{N} \quad : \quad P(\ell_1, \ell_2, 0) = \ell_1(\ell_2 + 1) + 1 \neq 0$$

Mais

$$\forall M \in \mathbb{N} \qquad P(0, M, -\frac{1}{M+1}) = 0$$

Et tout voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}^3$ contient un élément $(0,0,y)$ avec $y = -\frac{1}{M+1}$ $M \in \mathbb{N}$.

Et sur ce voisinage on constate que $U_{0,M}(y)$ n'est pas définie car on devrait avoir sur V : $[y(M+1)+1]\, U_{0,M}(y) = f_{0,M}(y)$, ce qui est impossible si $f_{0,M}(-\frac{1}{M+1}) \neq 0$.

Maintenant nous allons trouver dans le cas où p est quelconque, des conditions suffisantes pour lesquelles le polynôme $P(\ell,y)$ ne s'annulle pas sur un voisinage de l'origine dans C^q.

On a le polynôme caractéristique fuchsien de l'opérateur P qui peut s'écrire comme suit :

$$(\text{II}) \qquad P(\ell,y) = \sum_{\alpha\leqslant m} a_\alpha(y)\, \ell^\alpha$$

Posons

. $I = \{1,2,\dots,p\}$

. $J_k = \{i_1,i_2,\dots,i_k\} \subset I$ tel que

$J_k \neq I, J_k \neq \emptyset \qquad 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 < \dots < i_k \leqslant p$

. $P_{J_k}(L,y)$, avec $L \in \mathbb{N}^{p-k}$, le coefficient dans $P(\ell,y)$ de $\prod_{j=1}^{k} \ell_{i_j}^{m_{i_j}}$.

Par convention on prend :

$$P_I(y) = a_m(y) \quad \text{et} \quad P_\phi(L,y) = P(L,y) \quad \text{pour} \quad L \in \mathbb{N}^p$$

<u>*Proposition*</u> *4.1.* Soit $P(\ell,y)$ un polynôme à p-indéterminées qui est de la forme (II), à coefficients continus sur un voisinage W de l'origine dans $\mathbb{C}^q$.

Alors on a équivalence entre les 2 propriétés suivantes :

i) $\forall J_k \subset I \qquad \forall L \in \mathbb{N}^{p-k} \qquad P_{J_k}(L,0) \neq 0$

ii) $\exists\, C > 0 \;:\; \forall \ell \in \mathbb{N}^p \qquad |P(\ell,0)| \geqslant C \prod_{i=1}^{p} (\ell_i+1)^{m_i}$

Nous allons d'abord montrer le lemme suivant qui implique la proposition 4.1 quand $p = 1$:

Lemme 4.1. Soit $P(\ell,y) = \sum_{i=0}^{m} a_i(y)\,\ell^i$ avec $a_m(0) \neq 0$, un polynôme à une seule variable, à coefficients continus sur un voisinage W de l'origine dans $\mathbb{C}^q$.

On a équivalence entre les 2 propriétés suivantes :

i) $\forall \ell \in \mathbb{N}$: $\qquad P(\ell,0) \neq 0$

ii) $\exists C > 0 \quad \exists V$ voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^q$ tels que :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \qquad \forall y \in V \qquad |P(\ell,y)| \geq C(\ell+1)^m$$

Preuve :

En divisant le polynôme P par $a_m(y)$ dans un voisinage de l'origine sur lequel on a :

$$a_m(y) \neq 0$$

on remarque qu'on peut se ramener au cas où :

$$a_m(y) = 1.$$

Posons :

$$\tilde{P}(\ell,y) = \frac{P(\ell,y)}{a_m(y)}$$

$$\tilde{P}(\ell,y) = \ell^m + \sum_{i=0}^{m-1} c_i(y)\,\ell^i$$

$\forall \ell \in \mathbb{N}$, on a :

$$|\tilde{P}(\ell,y)| \geq \ell^m - \sum_{i=0}^{m-1} |c_i(y)|\,\ell^i$$

Prenons

$$M = \sup_{\substack{y \in V' \\ 0 \leq i \leq m-1}} |c_i(y)|$$

où V' est un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{C}^q$, contenu dans W,

Alors on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \quad : \quad \ell > 1 \ , \quad \forall y \in V'$$

$$|\tilde{P}(\ell,y)| \geq \ell^m - M \sum_{i=0}^{m-1} \ell^i = \ell^m\left[1 - M \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\ell^{m-i}}\right]$$

$$\geq \ell^m\left[1 - \frac{M}{\ell-1}\right]$$

Donc si $\ell \geq M+2$, on a :

$$|\tilde{P}(\ell,y)| \geq \ell^m \frac{1}{M+1} = \frac{\ell^m}{(\ell+1)^m} \frac{1}{M+1} (\ell+1)^m \geq \left[\frac{M+2}{M+3}\right]^m \frac{1}{M+1} (\ell+1)^m \ .$$

Prenons maintenant ℓ : $0 \leq \ell \leq M+1$, on a :

$$\tilde{P}(\ell,0) \neq 0$$

donc par continuité il existe V_ℓ un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^q$ et il existe C_ℓ un nombre réel strictement positif tels que :

$$\forall y \in V_\ell \quad : \quad |\tilde{P}(\ell,y)| \geq C_\ell(\ell+1)^m$$

Donc si on prend :

$$V'' = V' \cap \left[\bigcap_{\ell=0}^{M+1} V_\ell\right] \quad \text{et} \quad c' = \inf_{0 \leq \ell \leq M+1} \left(c_\ell, \left[\frac{M+2}{M+3}\right]^m \frac{1}{M+1}\right)$$

on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall y \in V'' \qquad |\tilde{P}(\ell,y)| \geq c'(\ell+1)^m$$

Soit W' un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^q$ sur lequel on a :

$$\exists a > 0 \quad : \quad \forall y \in W' \qquad |a_m(y)| \geq a$$

Alors sur $V = V'' \cap W'$, on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \; , \; \forall y \in V \qquad |P(\ell,y)| \geq |a_m(y)| \; |\tilde{P}(\ell,y)| \geq a \; c'(\ell+1)^m$$

et on prend :

$$c = a \; c'$$

Démonstration de la proposition 4.1.

ii) => i)

Soit J_k quelconque contenu dans I tel que :

$$J_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$$

$\dfrac{|P(\ell,y)|}{\left|\prod_{j=1}^{k} (\ell_{i_j}+1)^{m_{i_j}}\right|}$ tend vers $|P_{J_k}(L,y)|$ quand tous les ℓ_{i_j} pour $i_j \in J_k$, tendent vers l'infini.

De plus, on a

$$\frac{|P(\ell,0)|}{\left|\prod_{j=1}^{k} (\ell_{i_j}+1)^{m_{i_j}}\right|} \geq c > 0$$

donc :

$$\forall L \in \mathbb{N}^{p-k} \qquad P_{J_k}(L,0) \neq 0$$

i) => ii)

Nous allons montrer cette implication par récurrence sur p pour $p = 1$, et d'après le lemme 4.1, c'est vrai.

Supposons que c'est vrai pour tout polynôme à $(p-1)$ variables et considérons P un polynôme à p-variables tel que :

$$P(\ell,y) = \sum_{\alpha\leq m} a_\alpha(y)\ \ell^\alpha = a_m(y)\ell^m + \sum_{\alpha<m} a_\alpha(y)\ \ell^\alpha$$

on a :

$$|P(\ell,0)| \geq |a_m(0)|\,|\ell^m| - \sum_{\alpha<m} |a_\alpha(0)|\ |\ell^\alpha|$$

posons :

$$M = \sup_{\alpha<m} |a_\alpha(0)|$$

Alors on a :

$$\forall \ell = (\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_p) \in \mathbb{N}^p \qquad \text{tel que} \quad \ell_i > 1 \quad \forall i \in \{1,2,\dots,p\} = I$$

$$|P(\ell,0)| \geq |a_m(0)|\ell^m - M \sum_{\alpha<m} \ell^\alpha = \ell^m[|a_m(0)| + M - M \sum_{\alpha\leq m} \frac{1}{\ell^{m-\alpha}}]$$

$$= \ell^m[|a_m(0)| + M - M \sum_{\alpha\leq m} \frac{1}{\ell^\alpha}]$$

$$\geq \ell^m[|a_m(0)| + M - M \prod_{i=1}^{p} \frac{\ell_i}{\ell_i - 1}]$$

donc on constate que :

$$\exists c' > 0, \quad \exists A > 0 \quad \text{tels que} \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^p : \ \ell_i \geq A \qquad \forall i \in I$$

On a :

$$|P(\ell,0)| \geq c'\ \ell^{m} = c'\ \frac{\ell^{m}}{(\ell+1)^{m}}\ (\ell+1)^{m}$$

où

$$(\ell+1)^{m} = \prod_{i=1}^{p} (\ell_i+1)^{m_i}$$

donc

$$|P(\ell,0)| \geq c' \left[\frac{A}{A+1}\right]^{|m|} (\ell+1)^{m}$$

Prenons maintenant ℓ_i un entier naturel fixé tel que :

$$0 \leq \ell_i \leq A$$

Notons

$$m' = (m_1,\dots,m_{i-1},m_{i+1},\dots,m_p)$$

$$\alpha' = (\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_p)$$

$$\ell' = (\ell_1,\dots,\ell_{i-1},\ell_{i+1},\dots,\ell_p)$$

$$I' = \{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots p\}$$

Et considérons le polynôme à $(p-1)$ variables, $P'(\ell',y)$ suivant

$$P'(\ell',y) = P(\ell,y)$$

$$P'(\ell',y) = \sum_{\alpha_i=0}^{m_i} \sum_{\alpha'\leq m'} a_\alpha(y)\ \ell_i^{\alpha_i}(\ell')^{\alpha'} = \sum_{\alpha'\leq m'} b_{\alpha'}(\ell_i,y)(\ell')^{\alpha'}$$

où $b_{\alpha'}(\ell_i,y) = \sum_{\alpha_i=0}^{m_i} a_{(\alpha_i,\alpha')}(y)\ \ell_i^{\alpha_i}.$

Soit $J_k = \{i_1,i_2,\dots,i_k\} \subset I'$ tel que :

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant p$$

$P'_{J_k}(L',y)$, avec $L' \in \mathbb{N}^{p-k-1}$, est le coefficient dans $P'(\ell',y)$ de $\prod_{j=1}^{k} \ell_{i_j}^{m_{i_j}}$, et on constate que c'est aussi le coefficient dans $P(\ell,y)$ de $\prod_{j=1}^{k} \ell_{i_j}^{m_{i_j}}$.

Donc on a :

$$\forall J_k \subset I' \qquad \forall L' \in \mathbb{N}^{p-k-1} \qquad P'_{J_k}(L',0) \neq 0$$

et d'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$\exists c_{\ell_i}^{(i)} > 0 \quad \forall \ell' \in \mathbb{N}^{p-1} \qquad |P'(\ell',0)| \geqslant c_{\ell_i}^{(i)} \prod_{j=1}^{p} (\ell_j+1)^{m_j}$$

par conséquent si on prend :

$$c = \inf_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 0 \leqslant j \leqslant A}} \left(c_j^{(i)},\ c' \left|\frac{A}{A+1}\right|^{|m|}\right)$$

on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^p \qquad |P(\ell,0)| \geqslant c \prod_{i=1}^{p} (\ell_i+1)^{m_i} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Proposition 4.2. Soit $P(X_1,X_2,\dots,X_p,y)$ un polynôme, à p-indéterminées, à coefficients continus sur un voisinage W de l'origine dans $\mathbb{C}^q$.

Soit m_i, pour $i \in \{1,2,\dots,p\}$, le degré de P par rapport à X_i.

Alors on a équivalence entre les 2 propriétés suivantes :

1) $\exists c_1 > 0 \quad : \quad \forall X = (X_1, X_2, \ldots, X_p) \in \mathbb{N}^p$ on a :

$$|P(X,0)| \geq c_1 \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i}$$

2) $\exists c_2 > 0 \quad : \quad \exists V$ voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^q$ tel que :

$$\forall X = (X_1, X_2, \ldots, X_p) \in \mathbb{N}^p, \quad \forall y \in V \quad : \quad |P(X,y)| \geq c_2 \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i}$$

Preuve :

Dans un sens la démonstration est évidente.

Dans l'autre sens nous allons la montrer par récurrence sur le nombre d'indéterminées p.

D'après le lemme 4.1, on constate que la proposition est vraie pour $p = 1$.

Supposons maintenant que l'équivalence soit vraie pour tout polynôme de $(p-1)$-variables.

Et prenons P un polynôme à p-indéterminées tel que :

$$\exists c_1 > 0 \quad : \quad \forall X \in \mathbb{N}^p \qquad |P(X,0)| \geq c_1 \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i}$$

$$P(X,y) = P_{m_1}(X_2, X_3, \ldots, X_p, y) X_1^{m_1} + P_{m_1-1}(X_2, X_3, \ldots, X_p, y) X_1^{m_1-1} + \ldots$$

$$\ldots + P_1(X_2, X_3, \ldots, X_p, y) X_1 + P_o(X_2, X_3, \ldots, X_p, y)$$

il est facile de voir que $\exists V'$ voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^q$, $\exists c' > 0$ tels que :

$$\forall y \in V', \quad \forall X' = (X_2, X_3, \ldots, X_p) \in \mathbb{N}^{p-1} \qquad \text{et} \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,m_1-1\}$$

on a :

$$|P_j(X',y)| \leq c' \prod_{i=2}^{p} (X_i+1)^{m_i}$$

Nous allons montrer d'abord que :

$$\exists c'_{m_1} > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall X' = (X_2, X_3, \ldots, X_p) \in \mathbb{N}^{p-1}$$

$$|P_{m_1}(X',0)| \geq c'_{m_1} \prod_{i=2}^{p} (X_i+1)^{m_i}$$

$$P_{m_1}(X',0)X_1^{m_1} = P(X,0) - \sum_{j=0}^{m_1-1} P_j(X',0)X_1^j$$

Donc $\forall X \in N^p$, on a :

$$|P_{m_1}(X',0)X_1^{m_1}| \geq |P(X,0)| - \sum_{j=0}^{m_1-1} |P_j(X',0)X_1^j|$$

$$\geq c_1 \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i} - c' \prod_{i=2}^{p} (X_i+1)^{m_i} \sum_{j=0}^{m_1-1} X_1^j$$

$$= \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i} \left[c_1 - c' \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{X_1^j}{(X_1+1)^{m_1}}\right]$$

$$\geq \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i} \left[c_1 - c' \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{1}{(X_1+1)^{m_1-j}}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i} \left[c_1 - \frac{c'}{X_1+1} \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{1}{(X_1+1)^j}\right]$$

Ce qui implique que pour X_1 assez grand

$$|P_{m_1}(X',0)| \geq \prod_{i=2}^{p} (X_i+1)^{m_i} \left[c_1 - \frac{c'}{X_1+1} \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{1}{(X_1+1)^j}\right]$$

$$\geq \prod_{i=2}^{p} (X_i+1)^{m_1} \left[c_1 - \frac{c'}{X_1}\right]$$

donc si on prend X_1 suffisemment grand on trouve que :

$$\exists c'_m > 0 \quad : \quad \forall X' \in \mathbb{N}^{p-1} \qquad |P_{m_1}(X',0)| \geq c'_{m_1} \prod_{i=2}^{p} (X_i+1)^{m_i}$$

Par conséquent et d'après l'hypothèse de récurrence :

$\exists c_{m_1} > 0 \quad \exists V_{m_1}$ voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^q$: $\forall X' \in \mathbb{N}^{p-1}, \quad \forall y \in V_{m_1}$

$$|P_{m_1}(X',y)| \geq c_{m_1} \prod_{i=2}^{p} (X_i+1)^{m_i}$$

$$|P(X,y)| \geq |P_{m_1}(X',y)X_1^{m_1}| - \sum_{j=2}^{m_1-1} |P_j(X',0)\, X_1^j|$$

Donc sur $V' \cap V_{m_1}$ on a :

$$|P(X,y)| \geq c_{m_1} X_1^{m_1} \prod_{i=2}^{p} (X_i+1)^{m_i} - c' \prod_{i=2}^{p} (X_i+1)^{m_i} \sum_{j=0}^{m_1-1} X_1^j$$

$$|P(X,y)| \geq \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i} \left[c_{m_1} \frac{X_1^{m_1}}{(X_1+1)^{m_1}} - c' \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{X_1^j}{(X_1+1)^{m_1}}\right]$$

$$\geq \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i} \left[c_{m_1} \frac{X_1^{m_1}}{(X_1+1)^{m_1}} - \frac{c'}{X_1+1} \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{1}{(X_1+1)^j}\right]$$

donc pour X_1 suffisamment grand on a : $\exists c > 0$ tel que :

$$|P(X,y)| \geq c \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i}$$

Et il ne nous reste qu'un nombre fini de X_1 (c'est-à-dire $0 \leq X_1 \leq M$) pour lesquels la relation n'est pas montrée.

Soit X_1 fixé tel que $0 \leq X_1 \leq M$ on a : $P(X,y)$ qui est un polynôme à $(p-1)$ indéterminées qui vérifie en plus des hypothèses de la proposition la propriété suivante :

$$|P(X,0)| \geq c_1 \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i} = c_{X_1} \prod_{i=2}^{p} (X_i+1)^{m_i}$$

où $c_{X_1} = c_1(X_1+1)^{m_1}$ donc d'après l'hypothèse de récurrence on a : $\exists c'_{X_1} > 0$ et $\exists V'_{X_1}$ voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^q$ tels que :

$$\forall X \in \mathbb{N}^{p-1}, \forall y \in V'_{X_1} \quad |P(X,y)| \geq c'_{X_1} \prod_{i=2}^{p} (X_i+1)^{m_i} = K_{X_1} \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i}$$

avec $K_{X_1} = \dfrac{c'_{X_1}}{(X_1+1)^{m_1}}$ donc si on prend :

$$V = V' \cap V_{m_1} \cap [\bigcap_{i=0}^{M} V'_i] \quad \text{et} \quad c_2 = \inf_{0 \leq i \leq M} (K_i, c)$$

on a :

$$\forall X \in \mathbb{N}^p, \quad \forall y \in V \quad : \quad |P(X,y)| \geq c_2 \prod_{i=1}^{p} (X_i+1)^{m_i}$$

Corollaire 4.2. Soit $P(X_1,X_2,\ldots,X_p,y)$ un polynôme à p-indéterminées et dont les coefficients sont des fonctions continues en y sur un voisinage d'un compact K de $\mathbb{C}^q$.

Soit m_i, pour $i = 1,2,\ldots,p$, le degré de P par rapport à X_i. Alors on a équivalence entre les 2 propriétés suivantes :

a) $\exists c_1 > 0$: $\forall y \in K$, $\forall X \in \mathbb{N}^p$ on a :

$$|P(X,y)| \geq c_1(X_1+1)^{m_1}(X_2+1)^{m_2}\ldots.(X_p+1)^{m_p}$$

b) $\exists c_2 > 0$: $\exists V$ voisinage de K dans $\mathbb{C}^q$ tels que :

$$\forall y \in V, \quad \forall X \in \mathbb{N}^p \qquad |P(X,y)| \geq c_2(X_1+1)^{m_1}(X_2+1)^{m_2}\ldots(X_p+1)^{m_p}$$

Preuve :

Soit $y \in K$, on a :

$$|P(X,y)| \geq c_1(X_1+1)^{m_1}(X_2+1)^{m_2}\dots(X_p+1)^{m_p}$$

d'après la proposition 4.2. $\exists c_y > 0$, $\exists V_y$ voisinage de y tels que :

$$\forall y' \in V_y \ , \ \forall X \in \mathbb{N}^p \ : \quad |P(X,y')| \geq c_y(X_1+1)^{m_1}\dots(X_p+1)^{m_p}$$

$K \subset \bigcup\limits_{u \in K} V_y$. Comme K est compact on a :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}$$

donc si on prend :

$$V = \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i} \qquad \text{et} \qquad c_2 = \inf_{1 \leq i \leq k} c_{y_i}$$

on a :

$$\forall y \in V \ , \ \forall X \in \mathbb{N}^p \ : \quad |P(X,y)| \geq c_2(X_1+1)^{m_1} \dots (X_p+1)^{m_p}$$

Théorème 4.1. Soit P un opérateur de type de Fuchs de p-poids nul par rapport à x, à coefficients holomorphes en y sur un voisinage d'un compact K de $\mathbb{C}^q$ contenant l'origine et en x au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^p$.

Si le polynôme caractéristique fuchsien de P vérifie :

$$\exists c > 0 : \forall \ell \in \mathbb{N}^p, \quad \forall y \in K \quad : |P(X,y)| \geq c(X_1+1)^{m_1}(X_2+1)^{m_2}\dots(X_p+1)^{m_p}$$

Alors pour tout f holomorphe sur un voisinage de $\{0\} \times K$ dans C^n, il existe une fonction u holomorphe sur un voisinage de $\{0\} \times K$ dans C^n telle que :

u est solution unique du problème : $Qu = f$, où (Q est la partie principale fuchsienne de P).

Preuve :

D'après le corollaire 4.2. on a : $\exists c' > 0$ $\exists V'_k$ voisinage de K tels que :

$$\forall X \in \mathbb{N}^p \quad , \quad \forall y \in V'_k \; : |P(X,y)| \geq c'(X_1+1)^{m_1} \ldots (X_p+1)^{m_p}$$

Il existe un voisinage V de $\{0\} \times K$ dans C^n sur lequel f est holomorphe et bornée.

Prenons V de la forme :

$$V = B(0,R) \times V''_K$$

où V''_K est un voisinage de K dans C^q

$$R = (R_1, R_2, \ldots, R_p) \in (R_+^*)^p$$

et

$$B(0,R) = B(0,R_1) \times B(0,R_2) \times \ldots \times B(0,R_p)$$

et posons :

$$V_K = V'_K \cap V''_K$$

$$M = \sup_{(x,y)\in B(0,R)\times V_K} |f(x,y)|$$

$$f(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} f_\alpha(y) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \quad .$$

La formule intégrale de Cauchy nous donne :

$$\sup_{y\in V_K} |f_\alpha(y)| \leq \frac{\alpha!}{R^\alpha} M \quad .$$

Et la solution formelle de $Qu = f$ est donnée par :

$$u(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} \frac{f_\alpha(y)}{P(\alpha,y)} \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} u_\alpha(y) \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

Donc :

$$\sup_{y\in V_k} |u_\alpha(y)| = \sup_{y\in V_k} \frac{|f_\alpha(y)|}{|P(\alpha,y)|} \leqslant \frac{\alpha!}{R^\alpha} \frac{M}{C'}$$

car : $\forall y \in V_k$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^p$: $|P(\alpha,y)| \geqslant c'$

donc on a

$$u(x,.) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} u_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} << \frac{M}{C'} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} \frac{x^\alpha}{R^\alpha}$$

où u_α, pour $\alpha \in \mathbb{N}^p$, est un élément de l'espace de Banach des fonctions holomorphes et bornées sur V_K, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Par conséquent $u(x,y)$ est une fonction holomorphe sur le voisinage $B(0,R) \times V_K$ et u est solution unique de $Qu = f$.

CHAPITRE V

CONVERGENCE DE LA SOLUTION

I. *Notations.*

Soient Ω un compact de $\mathbb{C}^q$ et a un nombre réel strictement positif.

On pose

$$\Omega_a = \bigcup_{y\in\Omega} B(y,a)$$

où $B(y,a)$ est la boule ouverte dans $\mathbb{C}^q$ de centre y et de rayon a.

On note par : $E(\Omega_a)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont continues sur $\bar{\Omega}_a$ et holomorphes sur Ω_a.

$E(\Omega_a)$ est une algèbre de Banach pour la norme suivante :

$$f \in E(\Omega_a) \quad : \qquad \| f \|_{E(\Omega_a)} = \sup_{y\in\bar{\Omega}_a} |f(y)|$$

Si $R = (R_1, R_2 \ldots, R_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ on pose :

$$\Phi_R(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} \frac{x^\alpha}{R^\alpha} = \prod_{j=1}^{p} \frac{R_j}{R_j - x_j}$$

On note $E_R(\Omega_a)$ l'ensemble des fonctions séries formelles en x à coefficients dans l'algèbre $E(\Omega_a)$ et qui vérifient :

$$\exists c > 0 \qquad F(x) << c\, \Phi_R(x)$$

$E_R(\Omega_a)$, ainsi défini est un espace de Banach pour la norme suivante : ([11])

$$F \in E_R(\Omega_a) \quad : \quad \| F\|_{R,a} = \inf\{c \,|\, F(x) << c\, \Phi_R(x)\}$$

Remarques.

a) Soient R, R' des éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^p$; a et a' des nombres réels positifs tels que :

$$R \leq R' \qquad \text{et} \qquad a \leq a'$$

Alors on a :

$$E_{R'}(\Omega_{a'}) \hookrightarrow E_R(\Omega_a)$$

Et cette injection a une norme inférieure ou égale à 1.

b) Soient $B(0,R)$ le polydisque de centre 0 et de rayon R et f une fonction continue sur $\overline{B(0,R)} \times \bar{\Omega}_a$ et holomorphe sur $B(0,R) \times \Omega_a$.

En posant : $F(x) = \sum_{\alpha \in N^p} \frac{x^\alpha}{\alpha!} D_x^\alpha f_{/x=0}$. On a :

$$F \in E_R(\Omega_a)$$

Preuves :

a) soit $f \in E(\Omega_{a'})$, on a :

$$f_{/\Omega_a} \in E(\Omega_a)$$

En identifiant f et $f_{/\Omega_a}$ grâce au théorème du prolongement analytique on peut dire que :

$$f \in E(\Omega_a) \qquad \text{et que} \quad \|f\|_{E(\Omega_a)} \leq \|f\|_{E(\Omega_{a'})}$$

et comme $R \leq R'$ on a :

$$\Phi_{R'}(x) << \Phi_R(x)$$

Donc

$$E_{R'}(\Omega_{a'}) \hookrightarrow E_R(\Omega_a)$$

et la norme de cette injection est inférieure ou égale à 1.

b) Soit f une fonction holomorphe sur $B(0,R) \times \Omega_a$ et continue sur $\overline{B(0,R)} \times \bar{\Omega}_a$, posons :

$$M = \sup_{(x,y)\in\overline{B(0,R)}\times\bar{\Omega}_a} |f(x,y)|$$

Si on identifie f et son développement en série de Taylor en 0 par rapport à x, on a :

$$f(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} D_x^\alpha f(0,y) \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

La formule intégrale de Cauchy nous donne :

$$\sup_{y\in\bar{\Omega}_a} |D_x^\alpha f(0,y)| \leq \frac{\alpha!}{R^\alpha} M$$

Donc on a :

$$F(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} \frac{x^\alpha}{\alpha!} D_x^\alpha f_{/x=0} << M\, \Phi_R(x)$$

Lemme 5.1. Soient :

$$R = (R_1, R_2, \dots, R_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p \qquad T = (T_1, T_2, \dots, T_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$$

a_o et a des nombres réels strictement positifs.

Si $\forall i \in \{1,2,\dots,p\}$ $\quad R_i < T_i$ et $a \leq a_o$, alors on a :

$$\forall u \in E_T(\Omega_{a_o}), \qquad \forall v \in E_R(\Omega_a) \qquad : \qquad u.v \in E_R(\Omega_a)$$

De plus :

$$\|u.v\|_{R,a} \leq \prod_{i=1}^{p} \frac{T_i}{T_i - R_i} \; \|u\|_{T,a_o} \cdot \|v\|_{R,a}$$

Preuve : On a :

$$u(x) \ll \|u\|_{T,a_o} \, \Phi_T(x)$$

et

$$v(x) \ll \|v\|_{R,a} \, \Phi_R(x)$$

on constate que pour montrer ce lemme il suffit de montrer que :

$$\Phi_T(x) \, \Phi_R(x) \ll \prod_{i=1}^{p} \frac{T_i}{T_i - R_i} \, \Phi_R(x)$$

Ce qui sera vrai en particulier si pour tout $i \in \{1,2,\dots,p\}$:

$$\frac{R_i}{R_i - x_i} \, \frac{T_i}{T_i - x_i} \ll \frac{T_i}{T_i - R_i} \, \frac{R_i}{R_i - x_i}$$

qui est une conséquence directe de : ([11]) si $\eta \in \,]0,1[$

$$\frac{1}{1-\eta t} \cdot \frac{1}{1-t} \ll \frac{1}{1-\eta} \times \frac{1}{1-t}$$

on prend $\eta = \frac{R_i}{T_i}$ et $t = \frac{x_i}{R_i}$.

Lemme 5.2. Soit $\beta \in \mathbb{N}^q$ et considérons l'application D_y^β suivante :

$$D_y^\beta : u(x) \in E_R(\Omega_a) \to D_y^\beta u(x) = \sum_{\alpha \in N^p} (D_y^\beta u_\alpha) \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

Pour tout b réel tel que $0 < b < a$, on a :

$$D_y^\beta \in L(E_R(\Omega_a), E_R(\Omega_b))$$

De plus :

$$\|D_y^\beta u\|_{R,b} \leq \frac{\beta!}{(a-b)^{|\beta|}} \|u\|_{R,a}$$

Preuve :

Soit $u \in E_R(\Omega_a)$

$$D_y^\beta u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} (D_y^\beta u_\alpha) \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

Nous savons que :

$$\|u_\alpha\|_{E(\Omega_a)} \leq \frac{\alpha!}{R^\alpha} \|u\|_{R,a}$$

Et il résulte de la formule intégrale de Cauchy que pour $b < a$, on a :

$$\|D_y^\beta u\|_{E(\Omega_b)} \leq \frac{\beta!}{(a-b)^{|\beta|}} \|u_\alpha\|_{E(\Omega_a)}$$

$$\leq \frac{\beta!}{(a-b)^{|\beta|}} \frac{\alpha!}{R^\alpha} \|u\|_{R,a}$$

Donc on a :

$$D_y^\beta u \in E_R(\Omega_b)$$

et

$$\|D_y^\beta u\|_{R,b} \leq \frac{\beta!}{(a-b)^{|\beta|}} \|u\|_{R,a}$$

Lemme 5.3. Pour tout $i \in \mathbb{N}$: $1 \leq i \leq p$, l'application

$$u(x) \to x_i\, u(x)$$

est une application linéaire continue de $E_R(\Omega_a)$ dans lui-même.

De plus sa norme est inférieure ou égale à R_i .

Preuve :

Soit $u \in E_R(\Omega_a)$

$$u(x) << \|u\|_{R,a}\, \Phi_R(x)$$

et on a :

$$x_i\, u(x) << \|u\|_{R,a}\, x_i\, \Phi_R(x)$$

$$x_i \frac{R_i}{R_i - x_i} = x_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_i^n}{R_i^n} = \sum_{n=0}^{\infty} R_i \frac{x_i^{n+1}}{R_i^{n+1}} << R_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_i^n}{R_i^n}$$

par conséquent :

$$x_i\, \Phi_R(x) << R_i\, \Phi_R(x)$$

donc :

$$x_i\, u(x) \in E_R(\Omega_a)$$

et

$$\|x_i\, u(x)\|_{R,a} \leq R_i \|u\|_{R,a}$$

Lemme 5.4. Soient $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_p) \in (]0,1])^p$ et $u \in E_R(\Omega_a)$ et considérons l'application g définie par :

$$g(x)=u(\sigma x)$$

où

$$\sigma x = (\sigma_1 x_1,\sigma_2 x_2,\ldots,\sigma_p x_p)$$

Alors on a :

$$g \in E_R(\Omega_a)$$

et

$$\|g\|_{R,a} = \|u\|_{\sigma R,a}$$

Preuve :

$$u \in E_R(\Omega_a)$$

$$g(x) = u(\sigma x) \ll \|u\|_{R,a}\, \Phi_R(\sigma x) \ll \|u\|_{R,a}\, \Phi_R(x)$$

car $\forall i = 1,2,\ldots, p : 0 < \sigma_i \leqslant 1$ donc $g \in E_R(\Omega_a)$

comme $\sigma R \leqslant R$, on a : $E_R(\Omega_a) \subset E_{\sigma R}(\Omega_a)$

donc :

$$u(x) \ll \|u\|_{\sigma R,a}\, \Phi_{\sigma R}(x)$$

et $g(x) = u(\sigma x) \ll \|u\|_{\sigma R,a}\, \Phi_{\sigma R}(\sigma x) = \|u\|_{R,a}\, \Phi_R(x)$ car $\Phi_{\sigma R}(\sigma x) = \Phi_R(x)$

et par conséquent :

$$\|g\|_{R,a} = \|u\|_{\sigma R,a}$$

II. Convergence de la solution de $\mathcal{P}u = f$.

Soit $\mathcal{P}$ un opérateur de type de Fuchs de p-poids nul par rapport à x.

Alors on a $\mathcal{P}$ qui se décompose sous la forme suivante :

$$\mathcal{P} = Q + A + B$$

où

$$Q\,u = x^m D_x^m u + \sum_{\alpha<m} \hat{a}_{\alpha,0}(0,y)\; x^\alpha D_x^\alpha u$$

$$A\,u = \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{\alpha\leqslant m} x^\alpha D_x^\alpha (a_\alpha^{(i)}\, u)$$

$$B\,u = x_1 x_2 \ldots x_p \sum_{\alpha<m} x^\alpha D_x^\alpha \left[B_\alpha(x,y,D_y)u\right]$$

avec $B_\alpha(x,y,D_y) = \sum_{\substack{|\beta|\leqslant|m|-|\alpha| \\ \beta\neq 0}} b_{\alpha,\beta}(x,y) D_y^\beta\, u$.

On suppose que les coefficients $\hat{a}_{\alpha,0}(0,y)$ pour $\alpha < m$, sont des éléments de $E(\Omega_{a_0})$, où a_0 est un nombre réel strictement positif fixé.

De même on suppose que tous les $a_\alpha^{(i)}$ et les $b_{\alpha,\beta}$ sont des éléments de $E_T(\Omega_{a_0})$ pour $T \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ fixé.

D'après les lemmes 5.1 et 5.2, on a la proposition suivante :

<u>*Proposition*</u> *5.1.* Soient $R \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall i = 1,2,\ldots,p \qquad R_i < T_i \qquad \text{et} \qquad a \leqslant a_0$$

Alors on a :

$$\forall b\ :\ 0 < b < a \qquad B_\alpha(x,y,D_y) \in \mathcal{L}(E_R(\Omega_a),\, E_R(\Omega_b))$$

De plus :

$$\exists M_\alpha > 0\ :\quad \| B_\alpha(x,y,D_y) \|_{\mathcal{L}(E_R(\Omega_a),E_R(\Omega_b))} \leqslant \frac{M_\alpha}{(a-b)^{|m|-|\alpha|}}$$

$(\mathcal{L}(E_R(\Omega_a), E_R(\Omega_b))$: l'ensemble des applications linéaires continues de $E_R(\Omega_a)$ dans $E_R(\Omega_b))$.

Preuve : Soit $u \in E_R(\Omega_a)$

$$B_\alpha(x,y,D_y)u = \sum_{\substack{|\beta|\leqslant|m|-|\alpha| \\ \beta\neq 0}} b_{\alpha,\beta}(x,y) D_y^\beta u$$

$$\|B_\alpha(x,y,D_y)u\|_{R,b} \leqslant \sum_{\substack{|\beta|\leqslant|m|-|\alpha| \\ \beta\neq 0}} \|b_{\alpha,\beta} \cdot D_y^\beta u\|_{R,b}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{|\beta|\leqslant|m|-|\alpha| \\ \beta\neq o}} \prod_{i=1}^{p} \frac{T_i}{T_i-R_i} \|b_{\alpha,\beta}\|_{T,a_o} \|D_y^\beta u\|_{R,b}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{|\beta|\leqslant|m|-|\alpha| \\ \beta\neq 0}} \prod_{i=1}^{p} \frac{T_i}{T_i-R_i} \|b_{\alpha,\beta}\|_{T,a_o} \frac{\beta!}{(a-b)^{|\beta|}} \|u\|_{R,a}$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{p} \frac{T_i}{T_i-R_i} \|u\|_{R,a} \frac{1}{(a-b)^{|m|-|\alpha|}} \sum_{\substack{|\beta|\leqslant|m|-|\alpha| \\ \beta\neq 0}} \beta! \, \|b_{\alpha,\beta}\|_{T,a_o} (a-b)^{|m|-|\alpha|-|\beta|}$$

$$\|B_\alpha(x,y,D_y)u\|_{R,b} \leqslant \prod_{i=1}^{p} \frac{T_i}{T_i-R_i} \frac{1}{(a-b)^{|m|-|\alpha|}} \|u\|_{R,a}$$

$$\sum_{\substack{|\beta|\leqslant|m|-|\alpha| \\ \beta\neq 0}} \beta! \, \|b_{\alpha,\beta}\|_{T,a_o} a_o^{|m|-|\alpha|-|\beta|}$$

donc il suffit de prendre

$$M_\alpha = \prod_{i=1}^{p} \frac{T_i}{T_i - R_i} \sum_{\substack{|\beta| \leq |m|-|\alpha| \\ \beta \neq 0}} \beta! \, \|b_{\alpha,\beta}\|_{T,a_o} \, a_o^{|m|-|\alpha|-|\beta|}$$

M_α ne dépend que de R et α.

Lemme 5.5. Soient $R \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Sur $E_R(\Omega_a)$ on a les 3 propriétés suivantes :

(P_1) $\forall u \in E_R(\Omega_a)$: $x_i D_{x_i} u = (D_{x_i} x_i - 1)u$

(P_2) $\forall u \in E_R(\Omega_a)$: $x^\alpha D_x^\alpha u = C_\alpha(x\, D_x)$

où :

$$C_\alpha(x\, D_x) = \prod_{i=1}^{p} C_{\alpha_i}(x_i\, D_{x_i}) = \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=0}^{\alpha_i - 1} (x_i\, D_{x_i} - j)$$

(P_3) $\forall u \in E_R(\Omega_a)$, $\forall i = 1,2,\dots,p$:

$$x_i(x_i\, D_{x_i} - \lambda_i)u = (x_i\, D_{x_i} - \lambda_i - 1)x_i\, u$$

<u>Preuve</u> :

(P_1) Soit $u \in E_R(\Omega_a)$, on a :

$$(D_{x_i} x_i)u = D_{x_i}(x_i\, u) = x_i\, D_{x_i} u + u = (x_i\, D_{x_i} + 1)u$$

donc :

$$x_i\, D_{x_i} = D_{x_i}\, x_i - 1$$

(P_2) Soit $u \in E_R(\Omega_a)$, on a :

$$u(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^p} u_\ell \frac{x^\ell}{\ell!}$$

donc pour montrer (P_3) il suffit de voir que :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^p \quad : \quad x^\alpha D_x^\alpha\, x^\ell = C_\alpha(x\, D_x)\; x^\ell$$

on sait que :

$$x^\alpha\, D_x^\alpha\, x^\ell = C_\alpha(\ell)\; x^\ell$$

$$C_\alpha(x\, D_x)x^\ell = \left[\prod_{i=1}^{p} C_{\alpha_i}(x_i\, D_{x_i})\right]x^\ell = \prod_{i=1}^{p} C_{\alpha_i}(x_i\, D_{x_i})x_i^{\ell_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=0}^{\alpha_i-1}(x_i\, D_{x_i}-j)x_i^{\ell_i} = \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=0}^{\alpha_i-1}(\ell_i-j)x_i^{\ell_i}$$

car : $(x_i\, D_{x_i} - j)x_i^{\ell_i} = (\ell_i - j)x_i^{\ell_i}$ donc :

$$C_\alpha(x\, D_x)x^\ell = \prod_{i=0}^{p} C_{\alpha_i}(\ell_i)x_i^{\ell_i} = C_\alpha(\ell)x^\ell$$

(P_3) comme $x_i\, D_{x_i} = (D_{x_i}x_i - 1)$, on a :

$$x_i(x_i\, D_{x_i} - \lambda_i)u = x_i(D_{x_i}x_i - 1 - \lambda_i)u = (x_i\, D_{x_i} - \lambda_i - 1)x_i u$$

Moyennant ces 3 propriétés on a :

$$\forall u \in E_R(\Omega_a)$$

$$Bu = x_1x_2\dots x_p \sum_{\alpha<m} C_\alpha(x\, D_x)\; \left[B_\alpha(x,y,D_y)u\right]$$

$$= \sum_{\alpha<m} C_\alpha(x\, D_x - 1)\; \left[x_1x_2\dots x_p\; B_\alpha(x,y,D_y)u\right]$$

$$= \sum_{\alpha<m} C_\alpha(D_x x - 2)\; \left[x_1x_2\dots x_p\; B_\alpha(x,y,D_y)u\right]$$

où $C_\alpha(D_x x - 2) = \prod_{i=1}^{p} C_{\alpha_i}(D_{x_i}x_i - 2)$

donc on peut écrire :

$$Bu = \sum_{\alpha<m} (D_x\, x)^{\alpha} [x_1 x_2 \ldots x_p\, \tilde{B}_{\alpha}(x,y,D_y)u]$$

où $(D_x x)^{\alpha} = \prod_{i=1}^{p} (D_{x_i} x_i)^{\alpha_i}$ et $\tilde{B}_{\alpha}(x,y,D_y)$ est une combinaison linéaire des $B_{\gamma}(x,y,D_y)$ pour $\gamma \geq \alpha$.

De même, on a :

$$Au = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\alpha\leq m} (D_x\, x)^{\alpha} (x_i\, \tilde{a}_{\alpha}^{(i)}\, u)$$

$$= \sum_{\alpha\leq m} (D_x\, x)^{\alpha} [\sum_{i=1}^{p} x_i\, \tilde{a}_{\alpha}^{(i)} u]$$

et les $\tilde{a}_{\alpha}^{(i)}$ sont tous dans $E_T(\Omega_{a_o})$.

<u>*Corollaire*</u> 5.1. Soient $R \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall i = 1,2,\ldots,p \qquad R_i < T_i \qquad \text{et} \quad a \leq a_o \quad .$$

Alors on a :

$$\forall b : \; 0 < b < a \qquad \tilde{B}_{\alpha}(x,y,D_y) \in L(E_R(\Omega_a),\, E_R(\Omega_b))$$

et il existe $M > 0$, ne dépendant pas de a et b, tel que

$$\forall \alpha < m \,, \qquad \|\tilde{B}_{\alpha}(x,y,D_y)\|_{L(E_R(\Omega_a),E_R(\Omega_b))} \leq \frac{M}{(a-b)^{|m|-|\alpha|}}$$

<u>Preuve</u> :

Nous avons :

$$\tilde{B}_{\alpha}(x,y,D_y) = \sum_{\gamma\geq\alpha} \lambda_{\alpha,\gamma}\, B_{\gamma}(x,y,D_y)$$

donc

$$\tilde{B}_{\alpha}(x,y,D_y) \in L(E_R(\Omega_a),\, E_R(\Omega_b))$$

Soit $u \in E_R(\Omega_a)$:

$$\|\tilde{B}_\alpha(x,y,D_y)u\|_{R,b} \leqslant \sum_{\gamma\geqslant\alpha} |\lambda_{\alpha,\gamma}| \, \|B_\gamma(x,y,D_y)u\|_{R,b}$$

$$\leqslant \sum_{\gamma\geqslant\alpha} |\lambda_{\alpha,\gamma}| \frac{M_\gamma}{(a-b)^{|m|-|\gamma|}} \|u\|_{R,a}$$

$$\leqslant \frac{\|u\|_{R,a}}{(a-b)^{|m|-|\alpha|}} \sum_{\gamma\geqslant\alpha} |\lambda_{\alpha,\gamma}| M_\gamma \, a_o^{|\gamma|-|\alpha|}$$

Donc si on pose :

$$M'_\alpha = \sum_{\gamma\geqslant\alpha} |\lambda_{\alpha,\gamma}| M_\gamma \, a_o^{|\gamma|-|\alpha|}$$

et

$$M = \sup_{\alpha<m} M'_\alpha$$

On a

$$\forall\alpha < m \quad : \quad \|\tilde{B}_\alpha(x,y,D_y)\|_{L(E_R(\Omega_a),E_R(\Omega_b))} \leqslant \frac{M}{(a-b)^{|m|-|\alpha|}}$$

Maintenant nous allons introduire d'autres opérateurs qui vont nous être très utiles pour la suite, et qui sont pour $i \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant i \leqslant p$, et $u \in E_R(\Omega_a)$:

$$H_{x_i}(u)(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}^p} \frac{U_\ell}{\ell_i+1} \frac{x^\ell}{\ell!}$$

Remarques.

1) $\forall i \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant i \leqslant p$ $\qquad H_{x_i} \in L(E_R(\Omega_a), E_R(\Omega_a))$

et

$$\|H_{x_i}\|_{L(E_R(\Omega_a), E_R(\Omega_a))} \leqslant 1$$

2) $\forall i \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant i \leqslant p$ et $\forall u \in E_R(\Omega_a)$:

$$(H_{x_i})(D_{x_i} x_i)u = (D_{x_i} x_i)(H_{x_i})u = u$$

3) $\forall i \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant i \leqslant p$, $\forall j \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant j \leqslant p$ et $\forall u \in E_R(\Omega_a)$:

$$(H_{x_i})(D_{x_j} x_j)u = (D_{x_j} x_j)(H_{x_i})u$$

Corollaire 5.2.

$\forall i \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant i \leqslant p$ $\forall u \in E_R(\Omega_a)$:

$$H_{x_i} u(x) = \int_0^1 u(x_1, \ldots x_{i-1}, \sigma x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) d\sigma$$

Preuve : Soit $u \in E_R(\Omega_a)$

$$\int_0^1 u(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sigma x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) d\sigma = \int_0^1 \sum_{\ell \in \mathbb{N}^p} u_\ell \, \sigma^{\ell_i} \frac{x^\ell}{\ell!} \, d\sigma$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{N}^p} u_\ell \frac{x^\ell}{\ell!} \int_0^1 \sigma^{\ell_i} d\sigma = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^p} \frac{u_\ell}{\ell_i + 1} \frac{x^\ell}{\ell!} = H_{x_i} u(x)$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^p$, posons :

$$H_x^\alpha = H_{x_1}^{\alpha_1} H_{x_2}^{\alpha_2} \ldots H_{x_p}^{\alpha_p} = \prod_{i=1}^{p} H_{x_i}^{\alpha_i}$$

Alors on a : $\forall u \in E_R(\Omega_a)$

$$Au = (D_x x)^m (H_x)^m \sum_{\alpha \leq m} (D_x x)^\alpha \left[\sum_{i=1}^{p} x_i \tilde{a}_\alpha^{(i)} u\right]$$

$$= (D_x x)^m \sum_{\alpha \leq m} H_x^m (D_x x)^\alpha \left[\sum_{i=1}^{p} x_i \tilde{a}_\alpha^{(i)} u\right]$$

$$= (D_x x)^m \sum_{\alpha \leq m} (H_x)^{m-\alpha} \left[\sum_{i=1}^{p} x_i \tilde{a}_\alpha^{(i)} u\right]$$

$$Bu = (D_x x)^m (H_x)^m \sum_{\alpha < m} (D_x x)^\alpha \left[x_1 x_2 \dots x_p \tilde{B}_\alpha(x,y,D_y) u\right]$$

$$= (D_x x)^m \sum_{\alpha < m} (H_x)^{m-\alpha} \left[x_1 x_2 \dots x_p \tilde{B}_\alpha(x,y,D_y) u\right]$$

Lemme 5.6. Soit P un opérateur de type de Fuchs de p-poids nul par rapport à x, tel que tous les coefficients de sa partie principale fuchsienne soient dans $E(\Omega_{a_o})$.

Si son polynôme caractéristique fuchsien vérifie : $\exists a > 0$: $a \leq a_o$, $\exists c > 0$ tels que :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^p, \qquad \forall y \in \Omega_a \qquad \prod_{i=1}^{p} (\ell_i + 1)^{m_i} \leq c\,|P(\ell,y)| \; .$$

Alors on a :

$$H(D_x x)^m \in L(E_R(\Omega_a))$$

et

$$\|H(D_x x)^m\|_{L(E_R(\Omega_a))} \leq c$$

H étant l'opérateur défini par

$$H\, u(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^p} \frac{u_\ell}{P(\ell,y)} \frac{x^\ell}{\ell!} \; .$$

Preuve :

Soit $u \in E_R(\Omega_a)$

$$u(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^p} u_\ell \frac{x^\ell}{\ell !}$$

$$H(D_x x)^m u(x) = H \sum_{\ell \in \mathbb{N}^p} \prod_{i=1}^{p} (\ell_i+1)^{m_i} u_\ell \frac{x^\ell}{\ell !}$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{N}^p} \frac{\prod_{i=1}^{p} (\ell_i+1)^{m_i}}{P(\ell,y)} u_\ell \frac{x^\ell}{\ell !}$$

$$\left\| \frac{\prod_{i=1}^{p} (\ell_i+1)^{m_i}}{P(\ell,y)} u_\ell \right\|_{E(\Omega_a)} \leq c \| u_\ell \|_{E(\Omega_a)} \leq c \frac{\ell !}{R^\ell} \| u \|_{R,a}$$

donc

$$\| H(D_x x)^m u \|_{R,a} \leq c \| u \|_{R,a}$$

Proposition 5.2. Soit P un opérateur de type de Fuchs de p-poids nul par rapport à x, tel que tous les coefficients $\hat{a}_{\alpha,0}(0,.)$ de sa partie principale fuchsienne soient dans $E(\Omega_{a_o})$ et que tous les coefficients $a_\alpha^{(i)}$ de A soient dans $E_T(\Omega_{a_o})$.

Si son polynôme caractéristique vérifie :

$$\exists a > 0 \ : \ a \leq a_o, \quad \exists c > 0 \ \text{ tels que : } \forall \ell \in \mathbb{N}^p \ , \quad \forall y \in \Omega_a$$

$$\prod_{i=1}^{p} (\ell_i+1)^{m_i} \leq c |P(\ell,y)|$$

Alors :

$$\forall R \in (\mathbb{R}_+^*)^p \ : \ \forall i = 1,2,\dots,p \quad R_i < T_i, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^* \ : \ a \leq a_o$$

$$HA \in L(E_R(\Omega_a))$$

et il existe $K_1, K_2, \ldots, K_p$ des constantes positives telles que :

$$\|\mathcal{H}A\|_{\mathcal{L}(E_R(\Omega_a))} \leq \sum_{i=1}^{p} K_i\ R_i$$

Preuve : Soit $u \in E_R(\Omega_a)$

$$\mathcal{H}Au = \mathcal{H}(D_x x)^m \sum_{\alpha \leq m} \mathcal{H}_x^{m-\alpha}\Big[\sum_{i=1}^{p} x_i\ \tilde{a}_\alpha^{(i)}\ u\Big]$$

donc

$$\|\mathcal{H}A\ u\|_{R,a} \leq c \sum_{\alpha \leq m} \Big\| \mathcal{H}_x^{m-\alpha}\Big(\sum_{i=1}^{p} x_i\ \tilde{a}_\alpha^{(i)}\ u\Big)\Big\|_{R,a}$$

$$\leq c \sum_{\alpha \leq m} \sum_{i=1}^{p} \|x_i\ \tilde{a}_\alpha^{(i)}\ u\|_{R,a}$$

$$\leq c \sum_{\alpha \leq m} \sum_{i=1}^{p} R_i\ \|\tilde{a}_\alpha^{(i)}\ u\|_{R,a}$$

comme les $\tilde{a}_\alpha^{(i)}$ sont des éléments de $E_T(\Omega_{a_o})$ on a :

$$\|\mathcal{H}A\ u\|_{R,a} \leq c \sum_{\alpha \leq m} \sum_{i=1}^{p} R_i \prod_{j=1}^{p} \frac{T_j}{T_j - R_j}\ \|\tilde{a}_\alpha^{(i)}\|_{T,a_o}\ \|u\|_{R,a}$$

$$\leq \|u\|_{R,a} \sum_{i=1}^{p} c\ R_i \prod_{j=1}^{p} \frac{T_j}{T_j - R_j} \sum_{\alpha \leq m} \|\tilde{a}_\alpha^{(i)}\|_{T,a_o}$$

donc si on prend :

$$K_i = c \prod_{j=1}^{p} \frac{T_j}{T_j - R_j} \sum_{\alpha \leq m} \|\tilde{a}_\alpha^{(i)}\|_{T,a_o}$$

on a :

$$\|\mathcal{H}A\ u\|_{R,a} \leq \sum_{i=1}^{p} R_i K_i\ \|u\|_{R,a}$$

Remarquons que $\sum_{i=1}^{p} K_i R_i$ tend vers 0 quand R tend vers $(0,\ldots,0)$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^+$

Théorème 5.1. Soit P un opérateur de type de Fuchs de p-poids nul par rapport à x, tel que tous les coefficients $\hat{a}_{\alpha,0}(0,.)$ de sa partie principale fuchsienne soient dans $E_T(\Omega_{a_o})$ et que tous les coefficients $a_\alpha^{(i)}$ et $b_{\alpha,\beta}$, des opérateurs différentiels A et B respectivement, soient dans $E_T(\Omega_{a_o})$.

Si le polynôme caractéristique fuchsien de P vérifie :

$\exists a > 0$: $a \leq a_o$, $\exists c > 0$ tels que : $\forall \ell \in \mathbb{N}^p$, $\forall y \in \Omega_a$

$$\prod_{i=1}^{p} (\ell_i+1)^{m_i} \leq c|P(\ell,y)|$$

Alors : $\forall R \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tel que $\forall i \in \{1,\ldots,p\}$ $R_i < T_i$ on a :

$\forall f \in E_R(\Omega_a)$ et $\forall b \in]0,a[$, $\exists R' \in (\mathbb{R}_+^*)^p$: $R' \leq R$, $\exists!\ u \in E_{R'}(\Omega_b)$

tels que

$$Pu = f.$$

<u>Preuve</u> :

Pour montrer ce théorème nous allons utiliser la méthode des approximations successives comme on le fait classiquement dans le théorème d'Ovsjannikov.

Soit $R'' \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{p} K_i R''_i < 1$$

Alors on a :

$$\|HA\|_{L(E_{R''}(\Omega_a))} \leq \sum_{i=1}^{p} K_i R''_i < 1$$

donc d'après le théorème du point fixe, on a : $(1 + HA)$ qui est inversible sur $E_{R''}(\Omega_a)$ et :

$$\|(1+HA)^{-1}\|_{L(E_{R''}(\Omega_a))} \leq \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{p} K_i R''_i}$$

Prenons $R \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tel que $R \leq R''$, et considérons la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$, définie par la relation de récurrence suivante

$$u_o = (1 + HA)^{-1}\, Hf$$

$$u_{p+1} = u_o - (1+HA)^{-1}\, HB\, u_p \qquad \text{pour } p \in \mathbb{N}.$$

A partir de la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ nous allons construire la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$v_o = u_o$$

$\forall p \in \mathbb{N}$: $v_{p+1} = u_{p+1} - u_p$.

Alors on a $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui vérifie :

i) $\forall p \in \mathbb{N} \quad v_{p+1} = -(1+HA)^{-1}\, HB\, v_p$

ii) $\forall b \in \left]0,a\right[,\ \forall p \in \mathbb{N} : v_p \in E_R(\Omega_b)$.

En effet : soit $b_o \in \left]0,a\right[$

$$v_o = u_o = (1+HA)^{-1}\, Hf \in E_R(\Omega_a) \subset E_R(\Omega_{b_o})$$

$$v_{p+1} = -(1+HA)^{-1}\, HB\, v_p$$

$$= -(1+HA)^{-1}\, H(D_x x)^m \sum_{\alpha<m} H^{m-\alpha}\left[x_1 x_2,\dots,x_p\, \tilde{B}_\alpha(v_p)\right]$$

Supposons que : $\forall b \in]0,a[\quad v_p \in E_R(\Omega_b)$ et prenons c tel que : $b_o < c < a$

$$v_p \in E_R(\Omega_c)$$

d'après le corollaire 5.1, on a :

$$\tilde{B}_\alpha(v_p) \in E_R(\Omega_{b_o})$$

$H_x^{m-\alpha}$, $H(D_x x)^m$ et $(1+HA)^{-1}$ étant des opérateurs qui vont de $E_R(\Omega_{b_o})$ dans lui même, on a :

$$v_{p+1} \in E_R(\Omega_{b_o})$$

Maintenant nous allons montrer qu'il existe des constantes M_1 et M_2 strictement positives telles que :

$$\forall b \in]0,a[\quad : \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|v_n\|_{R,b} \leqslant M_1 \left[\frac{M_2 \prod\limits_{j=1}^{p} R_j}{1-\sum\limits_{j=1}^{p} K_j R_j} \quad \frac{1}{(a-b)^{|m|}} \right]^n$$

comme $v_o \in E_R(\Omega_a)$, posons :

$$M_1 = \|v_o\|_{R,a}$$

$$\|v_{n+1}\|_{R,b} = \|(1+HA)^{-1} \; HB \; v_n\|_{R,b} \leqslant \frac{1}{1-\sum\limits_{j=1}^{p} K_j R''_j} \qquad \|HB \; v_n\|_{R,b}.$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\sum\limits_{j=1}^{p} K_j R_j} \; \|H(D_x x)^m \sum_{\alpha<m} H_x^{m-\alpha}[x_1 x_2 \ldots x_p \; \tilde{B}_\alpha(v_n)] \; \|_{R,b}$$

$$\leqslant \frac{c}{1-\sum\limits_{j=1}^{p} K_j R_j} \sum_{\alpha<m} \|H_x^{m-\alpha}[x_1 x_2 \ldots x_p \; \tilde{B}_\alpha(v_n)] \; \|_{R,b}$$

Posons :

$$w_{\alpha,n}(x) = x_1 x_2 \dots x_p \, \tilde{B}_\alpha(v_n)$$

Alors on a :

$$H^{m-\alpha}\left[x_1 x_2 \dots x_p \, \tilde{B}_\alpha(v_n)\right] = \int_{[0,1]^{|m|-|\alpha|}} w_{\alpha,n}(\sigma_\alpha x) \, d\sigma_\alpha$$

où : $\sigma_\alpha = \left(\prod_{i_1=1}^{m_1-\alpha_1} \sigma_{i_1,1} , \prod_{i_2=1}^{m_2-\alpha_2} \sigma_{i_2,2} , \dots , \prod_{i_p=1}^{m_p-\alpha_p} \sigma_{i_p,p} \right)$ et

$$d\sigma_\alpha = \prod_{j=1}^{p} \prod_{i_j=1}^{m_j-\alpha_j} d\sigma_{i_j,j}$$

$$\|H_x^{m-\alpha}\left[x_1 x_2 \dots x_p \, \tilde{B}_\alpha(v_n)\right]\|_{R,b} \leqslant \int_{[0,1]^{|m|-|\alpha|}} \|W_{\alpha,n}(\sigma_\alpha x)\|_{R,b} \, d\sigma_\alpha$$

$$= \int_{[0,1]^{|m|-|\alpha|}} \|W_{\alpha,n}\|_{\sigma_\alpha R,b} \, d\sigma_\alpha$$

$$= \int_{[0,1]^{|m|-|\alpha|}} \|x_1 x_2 \dots x_p \, \tilde{B}_\alpha(v_n)\|_{\sigma_\alpha R,b} \, d\sigma_\alpha$$

$$\leqslant \int_{[0,1]^{|m|-|\alpha|}} \prod_{j=1}^{p} \prod_{i_j=1}^{m_j-\alpha_j} \sigma_{i_j,j} R_j \, \|\tilde{B}_\alpha(v_n)\|_{\sigma_\alpha R,b} \, d\sigma_\alpha$$

$$\leqslant \int_{[0,1]^{|m|-|\alpha|}} \prod_{j=1}^{p} \prod_{i_j=1}^{m_j-\alpha_j} \sigma_{i_j,j} R_j \, \frac{M}{(c-b)^{|m|-|\alpha|}} \, \|v_n\|_{\sigma_\alpha R,c} \, d\sigma_\alpha$$

où : $c \in \left]b,a\right[$

$$\leqslant \int_{[0,1]^{|m|-|\alpha|}} \prod_{j=1}^{p} \prod_{i_j=1}^{m_j-\alpha_j} \sigma_{i_j,j} R_j \, \frac{M}{(c-b)^{|m|-|\alpha|}} \, M_1 \left[\frac{M_2 \prod_{j=1}^{p} \prod_{i_j=1}^{m_j-\alpha_j} \sigma_{i_j,j} R_j}{\left[1 - \sum_{j=1}^{p} \prod_{i_j=1}^{m_j-\alpha_j} \sigma_{i_j,j} R_j K_j\right]} \, \frac{1}{(a-c)^{|m|}} \right]^n d\sigma_\alpha$$

$$\leq \int_{[0,1]^{|m|-|\alpha|}} \frac{M_1 M}{(c-b)^{|m|-|\alpha|}} \frac{\left[\prod_{j=1}^{p} R_j\right]^{n+1}}{\left[1-\sum_{j=1}^{p} K_j R_j\right]^{n}} \frac{M_2^n}{(a-c)^{n|m|}} \left[\prod_{j=1}^{p} \prod_{i_j=1}^{m_j-\alpha_j} \sigma_{i_j,j}\right]^{n+1} d\sigma_\alpha$$

$$= \frac{M_1 M}{(c-b)^{|m|-|\alpha|}} \frac{\left[\prod_{j=1}^{p} R_j\right]^{n+1}}{\left[1-\sum_{j=1}^{p} K_j R_j\right]^{n}} \frac{M_2^n}{(a-c)^{n|m|}} \frac{1}{(n+2)^{|m|-|\alpha|}}$$

Choisissons c tel que

$$c - b = \frac{a-b}{n+2}$$

Alors on a :

$$a-c = (a-b)-(c-b) = (a-b)\left[1 - \frac{1}{n+2}\right] = \frac{n+1}{n+2}(a-b)$$

Donc :

$$\|H_x^{m-\alpha}[x_1 x_2 \ldots x_p \tilde{B}_\alpha(v_n)]\|_{R,b} \leq \frac{M_1 M}{(a-b)^{|m|-|\alpha|}} \frac{\left[\prod_{j=1}^{p} R_j\right]^{n+1}}{\left[1-\sum_{j=1}^{p} K_j R_j\right]^{n}} \frac{M_2^n}{(a-b)^{n|m|}} \left[\frac{n+2}{n+1}\right]^{n|m|}$$

$$\leq \frac{M_1 M}{(a-b)^{|m|-|\alpha|}} \frac{\left[\prod_{j=1}^{p} R_j\right]^{n+1}}{\left[1-\sum_{j=1}^{p} K_j R_j\right]^{n}} \frac{M_2^n}{(a-b)^{n|m|}} e^{|m|} .$$

Par conséquent :

$$\|v_{n+1}\|_{R,b} \leq \frac{c\, M_1 M}{(a-b)^{n|m|}} \left[\frac{\prod_{j=1}^{p} R_j}{1-\sum_{j=1}^{p} K_j R_j}\right]^{n+1} M_2^n e^{|m|} \sum_{\alpha<m} \frac{1}{(a-b)^{|m|-|\alpha|}}$$

$$= CM_1 M M_2^n e^{|m|} \left[\frac{\prod_{j=1}^{p} R_j}{1-\sum_{j=1}^{p} K_j R_j} \frac{1}{(a-b)^{|m|}}\right]^{n+1} \sum_{\alpha<m} (a-b)^{|\alpha|}$$

$$\leq CM_1 M\, M_2^n\, e^{|m|} \left[\frac{\prod_{j=1}^{p} R_j}{1-\sum_{j=1}^{p} K_j R_j} \; \frac{1}{(a-b)^{|m|}} \right]^{n+1} \sum_{\alpha<m} a_o^{|\alpha|}$$

donc si on prend :

$$M_2 = CM\, e^{|m|} \sum_{\alpha<m} a_o^{|\alpha|}$$

on a bien

$$\|v_{n+1}\|_{R,b} \leq M_1 \left[\frac{M_2 \prod_{j=1}^{p} R_j}{1-\sum_{j=1}^{p} K_j R_j} \; \frac{1}{(a-b)^{|m|}} \right]^{n+1}$$

C.Q.F.D.

Donc on constate que si on choisit $R' \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tel que :

$$\frac{M_2 \prod_{j=1}^{p} R'_j}{1-\sum_{j=1}^{p} K_j\, R'_j} \; \frac{1}{(a-b)^{|m|}} < 1$$

(ce qui est équivalent à :

$$\sum_{j=1}^{p} K_j\, R'_j + \frac{M_2}{(a-b)^{|m|}} \prod_{j=1}^{p} R'_j < 1)$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge normalement dans $E_{R'}(\Omega_b)$ et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément u de $E_{R'}(\Omega_b)$ qui est solution de $\mathcal{P}u = f$.

Car u vérifie :

$$u = (1+\mathcal{H}A)^{-1}\, \mathcal{H}f - (1+\mathcal{H}A)^{-1}\, \mathcal{H}Bu$$

$$\Longleftrightarrow \quad (1+\mathcal{H}A)u = \mathcal{H}f - \mathcal{H}Bu$$

$$\Longleftrightarrow \quad Q(1+\mathcal{H}A)u = f - Bu$$

$$\Longleftrightarrow \quad (Q+A+B)u = f.$$

L'unicité de la solution est donnée par le calcul formel du chapitre III.

Théorème 5.2. Soit P un opérateur de type de Fuchs de p-poids nul par rapport à x.

Si le polynôme caractéristique fuchsien de P vérifie :

$$\exists c > 0, \qquad \forall \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{N}^p \qquad |P(\lambda,0)| \geq c \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i+1)^{m_i}$$

Alors pour toute fonction f holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, il existe une fonction unique u, holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, solution de

$$Pu = f$$

Preuve :

Nous allons prendre : $\Omega = \{0\}$ d'après la proposition 4.2 : $\exists c_1 > 0$, $\exists V$ voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^q$ tels que :

$$\forall y \in V, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{N}^p \qquad |P(\lambda,y)| \geq c_1 \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i+1)^{m_i}$$

on va prendre V de la forme :

$$V = \Omega_{a_1} = B(0,a_1) .$$

Soient $T \in (\mathbb{R}_+^\star)^p$ et $a_2 \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que tous les coefficients de P soient holomorphes et bornés sur $B(0,T) \times \Omega_{a_2}$ où $B(0,T)$ est le polydisque de centre 0 et de rayon $T = (T_1,\dots,T_p)$.

Posons :

$$a_o = \inf(a_1,a_2).$$

Alors, en identifiant toutes les fonctions et leurs séries de Taylor en 0 par rapport à x, on peut appliquer le théorème 5.1., et on trouve une solution unique u de $\mathcal{P}u = f$ holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$.

Remarques.

1) Le théorème 1.1 découle immédiatement du théorème 5.2. et du passage d'un opérateur de p-poids quelconque à un opérateur de p-poids nul que nous avons vu dans le chapitre II.

2) On pourrait se demander si on peut prendre dans le 3°) de la définition 1.2. que : les monômes différentiels $a_{\alpha,\beta}(x,y)\, D_x^\alpha\, D_y^\beta$ pour $\beta \neq 0$ sont de p-poids par rapport à x strictement inférieur à $m-k$.

L'exemple suivant nous montre que la réponse est non.

Exemple.

Considérons le cas où $p = 2$ et $q = 1$, et prenons l'opérateur différentiel $\mathcal{P}$ suivant :

$$\mathcal{P}u = (x_1x_2\, D_{x_1}D_{x_2} + x_1D_{x_1} + x_2D_{x_2} + 1)u - x_1\, D_y^2\, u$$

Et cherchons une solution de :

$$\mathcal{P}u = \frac{1}{1-y}$$

Le polynôme caractéristique fuchsien de $\mathcal{P}$ est :

$$P(\ell_1,\ell_2,y) = (\ell_1+1)(\ell_2+1) .$$

Le calcul formel nous donne :

$$P(u)(x,y) = P\Big(\sum_{\ell_1=0}^{\infty}\sum_{\ell_2=0}^{\infty} u_{\ell_1,\ell_2}(y)\frac{x_1^{\ell_1}}{\ell_1!}\frac{x_2^{\ell_2}}{\ell_2!}\Big) =$$

$$= \sum_{\ell_1=0}^{\infty}\sum_{\ell_2=0}^{\infty} P(\ell_1,\ell_2,y)u_{\ell_1,\ell_2}(y)\frac{x_1^{\ell_1}}{\ell_1!}\frac{x_2^{\ell_2}}{\ell_2!} - x_1\sum_{\ell_1=0}^{\infty}\sum_{\ell_2=0}^{\infty} D_y^2 U_{\ell_1,\ell_2}(y)\frac{x_1^{\ell_1}}{\ell_1!}\frac{x_2^{\ell_2}}{\ell_2!}$$

$$= \sum_{\ell_1=0}^{\infty}\sum_{\ell_2=0}^{\infty} P(\ell_1,\ell_2,y)u_{\ell_1,\ell_2}(y)\frac{x_1^{\ell_1}}{\ell_1!}\frac{x_2^{\ell_2}}{\ell_2!} - \sum_{\ell_1=1}^{\infty}\sum_{\ell_2=0}^{\infty} \ell_1 D_y^2\, U_{\ell_1-1,\ell_2}(y)\frac{x_1^{\ell_1}}{\ell_1!}\frac{x_2^{\ell_2}}{\ell_2!}$$

Donc on a :

1) $u_{0,0}(y) = \dfrac{1}{1-y}$

2) $\forall \ell_2 \in \mathbb{N}^* \;:\; u_{0,\ell_2}(y) = 0$

3) $\forall \ell_1 \in \mathbb{N}^* \;:\; \forall \ell_2 \in \mathbb{N} \;:\; u_{\ell_1,\ell_2}(y) = \dfrac{\ell_1}{(\ell_1+1)(\ell_2+1)} D_y^2\, u_{\ell_1-1,\ell_2}(y)$

formellement on a :

$$u(x_1,0,y) = \sum_{\ell_1=0}^{\infty} u_{\ell_1,0}(y)\frac{x_1^{\ell_1}}{\ell_1!} = \frac{1}{1-y} + \sum_{\ell_1=1}^{\infty} u_{\ell_1,0}(y)\frac{x_1^{\ell_1}}{\ell_1!}$$

pour $\ell_1 \geqslant 1$:

$$u_{\ell_1,0}(y) = \frac{\ell_1}{\ell_1+1} D_y^2\, u_{\ell_1-1,0}(y) = \frac{1}{\ell_1+1} D_y^{2\ell_1}\, u_{0,0}(y) =$$

$$= \frac{1}{\ell_1+1}\;\frac{(2\ell_1)!}{(1-y)^{2\ell_1+1}}$$

et :

$$u(x_1,0,y) = \frac{1}{1-y}\left[1 + \sum_{\ell_1=1}^{\infty}\frac{(2\ell_1)!}{(1-y)^{2\ell_1}}\frac{x_1^{\ell_1}}{(\ell_1+1)!}\right] = \frac{1}{1-y}\sum_{\ell_1=0}^{\infty}\frac{(2\ell_1)!}{(1-y)^{2\ell_1}}\frac{x_1^{\ell_1}}{(\ell_1+1)!}$$

qui est une série qui ne converge sur aucun voisinage de 0.

3) La condition imposée au polynôme caractéristique fuchsien n'est pas une condition nécessaire, comme on peut le constater avec l'exemple suivant :

Exemple. Considérons le cas où :

$$p = 2 \qquad \text{et} \qquad q = 0$$

Et prenons l'opérateur de Fuchs $\mathcal{P}$ suivant :

$$\mathcal{P}(u) = x_1 x_2 D_{x_1} D_{x_2} + x_1 D_{x_1} u + u$$

$\mathcal{P}$ est un opérateur de Fuchs de bi-poids nul.

Son polynôme caractéristique fuchsien est :

$$P(\ell_1,\ell_2) = \ell_1(\ell_2+1) + 1.$$

La solution formelle de $\mathcal{P}u = f$ est :

$$u(x_1,x_2) = \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \sum_{\ell_2=0}^{\infty} u_{\ell_1,\ell_2} \frac{x_1^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{x_2^{\ell_2}}{\ell_2!} = \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \sum_{\ell_2=0}^{\infty} \frac{f_{\ell_1,\ell_2}}{P(\ell_1,\ell_2)} \frac{x_1^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{x_2^{\ell_2}}{\ell_2!}$$

on a :

$$\forall \ell_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall \ell_2 \in \mathbb{N} \quad : \|u_{\ell_1,\ell_2}\| \leq \|f_{\ell_1,\ell_2}\|$$

donc pour tout f holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$, il existe u holomorphe au voisinage de l'origine solution unique de $\mathcal{P}u = f$.

Et le polynôme $P(\ell_1,\ell_2)$ ne vérifie pas la condition que nous avons imposée car $P(0,\ell_2) = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAOUENDI-GOULAOUIC :

Cauchy problems with characteristic initial hypersurface.
comm. on pures and appl. math. 26 (1973) 455-475.

[2] BERG

Solution du problème de Goursat pour une équation aux dérivées partielles linéaire avec données holomorphes.
Complex. Analysis and its applications Nauka, Moscow (1978) 73-76.

[3] GERARD

Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe
J. Math pures et appl. 47 (1968) 322-404.

[4] GUILLEMIN-SCHAEFFER

On a class of fuchsian partiel differential equations.
Duke Math. Journal 44 n°1 (1977) 157-199.

[5] GRONAV

A global version of a linear Goursat problem.
Rend. Inst. Mat. univ. Trieste 10 (1978) 41-47.

[6] HAMADA-LERAY-WAGSCHAL

Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples, problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle.
J. Math pures et appl. 55 (1976) 297-352.

[7] HASEGAWA

On the C^∞-Goursat problem for equations with constant coefficients.
J. Maths Kyoto univ. 19 (1979) 125-152.

[8] TAHARA

Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic partiel differential equations.
Proc. Jap. Accad. 54 (1978) 92-96.

[9] TAHARA

The structure of local solution of P.D.E. of the Fuchsian type.
Publ. RIMS Kyoto univ. 12 (1977) 71-110.

[10] TERBECHE

Problème de Cauchy pour des opérateurs holomorphes de type de Fuchs.
Thèse de 3ème cycle présentée à Lille I le 18 mars 1980, n°818.

[11] WAGSCHAL

Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles ou partiellement holomorphes.
J. Maths. pures et appl. 53 (1974) 99-132.

[12] J.C. DE PARIS

Problème de Cauchy analytiques à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable.
J. math. pures et appl. 51, (1972) 465-488.

[13] HASEGAWA

On the initial value problems with data on a double characteristic.
J. Math. Kyoto univ. (JMKYAZ) 11-2 (1971) 357-372.

[14] OVSJANNIKOV

A singular operator in a scale of Banach spaces.
Doklady (1965) Tom. 163 n°4.

[15] TREVES

Ovsjannikov theorem and hyperdifferential operators.
IMPA - Rio de Janeiro (1968) Brazil.

* * *