

50376  
1980  
82

50376  
1980  
82

N° d'ordre : 250

T H E S E

présentée

à

l'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

POUR OBTENIR LE TITRE

DE

DOCTEUR-INGENIEUR

par

VANDROMME Dany

Sujet de la thèse :



MODELE DE TURBULENCE A DEUX EQUATIONS  
POUR ECOULEMENT PLAN CISAILLÉ  
A MASSE VOLUMIQUE VARIABLE.

Soutenue le 26 Septembre 1980

Membres du Jury :

Président : M. DYMENT, Professeur (Université de Lille 1)  
Rapporteur : M. KOLLMAN, Professeur Associé (Institut Von Karman, Belgique)  
Examineurs : M. PARSY, Professeur (Université de Lille 1)  
M. BORGHI, Maîtres de Recherches à l'O.N.E.R.A.  
M. HA MINH, Chargé de Recherches C.N.R.S., (I.N.P. Toulouse)

Je tiens à adresser mes remerciements  
à Monsieur le Professeur KOLLMAN de l'Institut Von Karman  
qui m'a guidé durant ces années et sans les conseils duquel  
ce travail n'aurait jamais pû aboutir.

Mes remerciements vont également à  
Messieurs les Professeurs DYMENT, BORGHI, HA-MINH, CHASSAING  
et PARSY qui me font l'honneur de participer au Jury.

Je tiens à remercier également  
Madame Françoise PETIAUX pour sa compétence et sa rapidité  
pour la frappe du mémoire ainsi que tout le personnel de  
reproduction de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées.

## SOMMAIRE

L'objet de ce travail est de prédire un certain type d'écoulement dans lequel apparaissent des fluctuations de masse volumique. Seules les fluctuations dues à des hétérogénéités de composition seront considérées. Un exemple de ce genre d'écoulement est le mélange isotherme d'hélium et d'azote dans un domaine bidimensionnel. Le niveau de fermeture des équations moyennes du mouvement est au premier ordre, ce qui signifie que les quantités du second ordre apparaissant dans ces équations telles que les contraintes de Reynolds ou les flux turbulents de masse sont exprimées en fonction des variables primitives (vitesse et concentration) et d'une viscosité turbulente, qui est fonction des échelles caractéristiques locales de la turbulence. Le modèle de turbulence ainsi obtenu, est utilisé pour décrire des écoulements à masses volumiques constantes ou variables. Dans tous les cas considérés la qualité des prédictions est satisfaisante. La valeur des constantes incluses dans ce modèle de turbulence est liée aux caractéristiques des composantes du mélange, probablement par une fonction plus ou moins complexe du rapport des masses moléculaires. Néanmoins, le mélange azote-hélium peut être considéré comme un cas extrême de mélange non-réactif et on peut s'attendre à ce que le mélange d'autres gaz soit décrit avec des valeurs intermédiaires entre celles utilisées pour les écoulements incompressibles et celles utilisées dans les prédictions exposées dans ce mémoire.

## TABLE DES MATIERES

### I.- INTRODUCTION.

- I.1.- TURBULENCE
- I.2.- PRINCIPALES TENDANCES DE LA RECHERCHE EN TURBULENCE.
- I.3.- APPLICATIONS.
- I.4.- PLAN DU MEMOIRE.

### II.- EQUATIONS DE LA TURBULENCE.

- II.1.- THERMODYNAMIQUE.
- II.2.- TRAITEMENTS STATISTIQUES.
- II.3.- EQUATIONS MOYENNES DE LA TURBULENCE.

### III.- HYPOTHESES DE FERMETURE.

- III.1.- FERMETURE DES EQUATIONS.
- III.2.- REALISABILITE DE LA FERMETURE.
- III.3.- INVARIANCE.

### IV.- TRAITEMENT NUMERIQUE.

- IV.1.- FORME GENERALE DES EQUATIONS.
- IV.2.- CHANGEMENT DE COORDONNEES.
- IV.3.- SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES.
- IV.4.- FORMULATION AUX DIFFERENCES FINIES.
- IV.5.- ALGORITHME DE THOMAS.
- IV.6.- CARACTERISTIQUES.
- IV.7.- CONCLUSIONS.

### V.- RESULTATS.

- V.1.- MODELE (k- $\epsilon$ ) POUR ECOULEMENT A MASSE VOLUMIQUE CONSTANTE (MODELE I).
- V.2.- MODELE (k- $\epsilon$ ) POUR ECOULEMENT A MASSE VOLUMIQUE VARIABLE (MODELE I).
- V.3.- MODELE (k- $\epsilon$ ) POUR ECOULEMENT A MASSE VOLUMIQUE VARIABLE (MODELE II).
- V.4.- MODELE (k- $\epsilon$ ) POUR MELANGE SUPERSONIQUE.

VI.- CONCLUSION.

VI.1.- TYPE D'ECOULEMENT CONSIDERE.

VI.2.- ANALYSE DES RESULTATS.

VI.3.- PERSPECTIVES.

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

1. TURBULENCE.
2. PRINCIPALES TENDANCES DE LA RECHERCHE EN TURBULENCE.
3. APPLICATIONS.
4. PLAN DU MEMOIRE.

## I-1. TURBULENCE

Déjà dans la première moitié du dix-neuvième siècle, l'existence de deux types d'écoulements différents, maintenant qualifiés de laminaire et de turbulent, fut mise en évidence par St Venant [1]. Cependant, c'est Osborne Reynolds [2] qui fonda la première théorie de la turbulence en considérant les conditions sous lesquelles l'écoulement laminaire dans un tuyau se transforme en écoulement turbulent. Cela amena Reynolds à formuler un critère général de similitude dynamique pour les écoulements des fluides visqueux incompressibles. Ce critère est fondé sur les valeurs du nombre de Reynolds, du nom de son créateur,

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1)$$

où U et L sont les échelles caractéristiques de vitesse et de longueur de l'écoulement et où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide. Ce nombre de Reynolds peut être interprété comme le rapport des valeurs caractéristiques des forces d'inertie aux forces visqueuses agissant dans le fluide. Les forces d'inertie qui produisent le mélange de différents volumes de fluide se déplaçant avec des vitesses différentes, produisent aussi un transfert d'énergie entre les composantes à grandes échelles du mouvement et celles à échelles plus petites. Elles assistent ainsi à la formation d'hétérogénéités de petites tailles dans l'écoulement qui sont caractéristiques de la turbulence. Ainsi, des valeurs suffisamment petites du nombre de Reynolds correspondront à un écoulement laminaire et des valeurs élevées à un écoulement turbulent. Ceci est un premier résultat fondamental établi par O. Reynolds. Une seconde contribution majeure est de représenter les valeurs de toutes les quantités hydrodynamiques d'un écoulement turbulent par la somme d'une composante moyenne et d'une composante fluctuante. Cela permet d'étudier seulement les valeurs moyennes qui varient lentement dans le temps et dans l'espace. Depuis Reynolds, le concept de "moyenne" est mieux compris

principalement grâce à la théorie des probabilités. Quoique Reynolds n'ait utilisé que quelques propriétés algébriques de l'opérateur "moyenne", ces propriétés produisent une réelle simplification des équations de la mécanique des fluides. Par ces contributions, Reynolds fonda la mécanique statistique des fluides qui fut à l'origine des travaux de Boussinesq, Taylor, Von Karman et beaucoup d'autres.

## 1.2. PRINCIPALES TENDANCES DE LA RECHERCHE.

A cause de l'étendue des échelles caractéristiques, qui sont nécessaires pour décrire un écoulement turbulent, il est irréaliste d'analyser ce type d'écoulement par la résolution des équations de Navier-Stokes, quoique ces dernières régissent le mouvement de toute particule fluide dans un écoulement laminaire ou turbulent. La raison est que la capacité de calcul requise excède de plusieurs ordres de grandeur ce qui est actuellement disponible. Un rapport de  $10^5$  ou  $10^6$  peut exister entre les valeurs extrêmes des échelles caractéristiques d'un écoulement turbulent. Une grille assez fine pour percevoir les mouvements à petite échelle de la turbulence exigerait donc un nombre considérable de noeuds. Toutefois il existe d'autres approches pour résoudre le problème des écoulements turbulents. Les principales d'entre elles sont brièvement exposées ici.

a) La première technique est la fermeture en un point (single-point closure) et est certainement la plus utilisée. La méthode consiste à moyennner les équations de Navier-Stokes. La non-linéarité du terme convectif introduit un terme inconnu  $\overline{\rho v'_\alpha v'_\beta}$  dans l'équation moyennnée de quantité de mouvement. Différentes techniques sont employées pour déterminer cette corrélation, par une relation algébrique ou avec une ou plusieurs équations aux dérivées partielles. Cette approche est retenue dans ce mémoire pour prédire le mélange turbulent de deux gaz.

b) La seconde approche consiste à considérer les équations différentielles régissant les corrélations en deux points ou les variables définies dans le plan spectral. Cette approche est la base de la méthode d'interaction directe envisagée par Kraichnan [3] et développée plus tard par Herring [4]. Elle fut aussi utilisée par Orszag [5] dans son article sur les théories analytiques de la turbulence. Ce type de méthode est limité aux écoulements à faible nombre de Reynolds pour permettre la prise en compte de toutes les échelles caractéristiques. Les valeurs moyennes des variables sont obtenues par le traitement statistique des résultats d'un nombre suffisamment grand de réalisations. Cela implique des coûts énormes et la nécessité de très importantes capacités de calcul.

c) Une troisième approche importante est la prise en compte des grandes structures de la turbulence (large eddy simulation). Cette technique consiste à moyenner les équations de Navier-Stokes sur un temps  $T$  plus petit que l'échelle de temps des grandes structures de turbulence de l'écoulement. Seuls les mouvements d'agitation ayant une échelle de temps plus petite que  $T$ , (ou une échelle de longueur inférieure au maillage utilisé) sont modélisés (subgrid-scale modelling). Deardorff [6] suggéra le premier cette approche et l'utilisa pour prédire des écoulements dans un tuyau et dans des couches limites atmosphériques. Mais, à nouveau, la principale restriction à l'utilisation de cette méthode est d'ordre matériel. Deardorff [7] a calculé un cycle diurne en occupant pendant une semaine un ordinateur CDC 7600. C'est pourquoi, l'avenir d'un tel traitement des problèmes de turbulence semble être surtout d'améliorer les hypothèses de modélisation des fermetures en un point.

### I-3. PERSPECTIVES.

#### A) Choix de la technique utilisée

Dans le paragraphe précédent, les principales tendances de la recherche en turbulence ont été exposées avec leurs limitations. Pour le travail qui est présenté dans ce mémoire, la première approche est retenue pour les raisons exposées ci-dessous.

##### a) Moyens de calcul limités.

La méthode de calcul doit pouvoir être utilisée par des bureaux d'études pour des applications industrielles ou de laboratoire. Donc il est indispensable que de très gros ordinateurs ne soient pas nécessaires pour obtenir des résultats (tous les calculs ont été effectués sur un ordinateur CII du type Mitra 15).

##### b) Caractère spécifique du problème du mélange.

Le type d'écoulement qui est étudié est le mélange de deux gaz qui ont des masses moléculaires différentes, tandis que les deux dernières approches exposées précédemment concernent seulement les écoulements incompressibles de fluides homogènes.

#### B) Applications.

Deux domaines de la recherche sont directement reliés à ces calculs.

##### a) La combustion turbulente.

Le système des équations de Navier-Stokes moyennées doit être utilisé pour prédire une grande variété de problèmes de combustion tels que les flammes turbulentes de diffusion, les flammes pré-mélangées, les écoulements dans les chambres de combustion, les foyers etc... De nombreuses équations doivent être fermées et résolues, qui sont nécessaires pour décrire les opérations thermochimiques et pour prédire les valeurs moyennes des variables thermodynamiques. Ces quantités peuvent être la fraction massique,

l'enthalpie, le flux de chaleur, les fluctuations de masse volumique etc...  
En général, une grande variété de covariances et de corrélations est rencontrée dans le cadre de cette approche.

b) Cavité laser à haute puissance.

Cette technique peut être utilisée aussi pour calculer les variables thermodynamiques d'un écoulement laser (laser chimique ou dynamique à gaz) où la description des paramètres du mélange est de première importance pour connaître le rendement ou la puissance qui peut être extraite d'une cavité laser.

#### 1.4. PLAN DU MEMOIRE

Dans l'optique de ces applications, un modèle de turbulence est utilisé pour prédire des écoulements à masses volumiques constante et variable. La première approche de la turbulence est adoptée, c'est-à-dire, la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées et fermées au premier ordre. Le mémoire est organisé comme suit :

Le chapitre II rappelle quelques définitions de base nécessaires à la description d'un mélange d'un point de vue thermodynamique. Puis deux différentes statistiques sont discutées et l'une d'elles est retenue parce que mieux adaptée aux écoulements à masse volumique variable. Après cela, les premières équations moyennées sont introduites pour différentes quantités qui sont nécessaires aux hypothèses de fermeture.

Le chapitre III donne toutes les hypothèses de modélisation et se termine avec l'écriture complète des équations pour les écoulements paraboliques bi-dimensionnels stationnaires.

Le chapitre IV contient un exposé de la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles qui sont établies dans le chapitre précédent.

La discussion des résultats et la comparaison avec les résultats expérimentaux est faite dans le chapitre V. Puis le chapitre VI résumera les résultats obtenus en soulignant les avantages et les inconvénients de la technique adoptée.

I - REFERENCES

1. St VENANT J.G., B. (1843). C.R.A.S. 17.
2. REYNOLDS O. "An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels".  
(1883) Phil. Trans. Roy. Soc. London, 174, pp. 935-982.  
  
"On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion".  
(1894) Phil. Trans. Roy. Soc. London, 186, pp. 123-161.
3. LESLIE D.C. "Developments in the theory of turbulence".  
Clarendon Press Oxford (1973).
4. HERRING J.R. "Approach of axisymmetric turbulence to isotropy".  
(1974) Phys. Fluids, Vol. 17, p. 859.
5. ORZAG S.A. "Analytical theories of turbulence"  
(1970) J. Fluid. Mech. 41-2, pp. 363-386.
6. DEARDORFF J.W. "A numerical study of three dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number"  
(1970) J. Fluid Mech., vol. 41, p. 453.

## CHAPITRE II

EQUATIONS DE LA TURBULENCE

1. THERMODYNAMIQUE.
2. TRAITEMENTS STATISTIQUES.
3. EQUATIONS MOYENNES.

## II-1. THERMODYNAMIQUE

- Ecoulement de fluide homogène.
  - Hypothèses restrictives du continuum.
  - Définition des variables internes d'un fluide.
    - 1 - Masse volumique.
    - 2 - Quantité de mouvement.
    - 3 - Energie interne.
  - Equations de bilan pour un écoulement de fluide homogène avec la loi de viscosité de Newton et la loi de conduction de chaleur de Fourier.
- Ecoulement de fluide non homogène.
  - Variables internes pour chaque espèce.
  - Définition d'un écoulement de mélange à partir des variables d'espèces.
  - Equations de bilan pour un écoulement de fluide non-homogène incluant la conservation d'espèce.

## II-1. FONDEMENTS THERMODYNAMIQUES.

Afin de donner une description réaliste du mélange de gaz de masses volumiques différentes, il est nécessaire d'étendre le concept conventionnel de fluide homogène pour considérer en un même point  $(\underline{x}, t)$  toutes les composantes qui constituent le mélange dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus. Pour avoir une définition claire des variables nécessaires, nous les définirons d'abord dans le cas de l'écoulement isotherme d'un fluide homogène, puis ces définitions seront étendues au cas non isotherme et finalement une éventuelle non-homogénéité du fluide sera envisagée.

Un milieu continu doit satisfaire les deux conditions suivantes :

1 - Le milieu est monophasique; il peut être liquide ou gazeux.

Des molécules d'espèces chimiques différentes peuvent être présentes, mais dans une même phase.

2 - Les effets de rarefaction sont exclus. En autres termes, le libre parcours moyen (m.f.p.) des molécules doit être plusieurs ordres de grandeur plus petit que n'importe quelle échelle de longueur  $(L)$  caractéristique de l'écoulement. Cette condition peut être formulée avec le nombre de Knudsen  $K_n$  par :

$$K_n = \frac{|\text{m.f.p.}|}{L} \ll 1 . \quad (1)$$

Si cette condition n'est pas remplie, l'écoulement d'un gaz ne peut pas être décrit par les équations aux dérivées partielles de la mécanique des fluides qui seront établies dans la suite. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, nous supposons qu'il est possible de définir un petit domaine  $\delta V$  dont les dimensions sont plus grandes que celles des molécules et sur lequel une moyenne spatiale de toute propriété moléculaire définit la valeur locale d'une quantité macroscopique  $\phi$ .

Soit  $\psi$  une propriété moléculaire de l'écoulement. La valeur locale correspondante  $\phi$  sera

$$\phi = \frac{\sum_{\delta V} \psi}{\delta V} \quad (2)$$

Dans cette relation,  $\sum_{\delta V} \psi$  signifie que la sommation est faite sur toutes les molécules qui sont à l'intérieur du domaine élémentaire  $\delta V$ . Deux sortes de variables sont nécessaires pour caractériser ce type d'écoulement.

1) Masse volumique.

Supposons que  $N$  molécules de masse  $M_A$  se trouvent dans le volume élémentaire  $\delta V$  entourant un point  $P$ . La valeur locale de la masse volumique en ce point est définie par

$$\rho = \frac{N \cdot M_A}{\delta V} \quad (3)$$

2) Quantité de mouvement.

Chaque molécule a sa propre quantité de mouvement  $\vec{Z}_\alpha$ . De même il est possible de définir la valeur locale de la quantité de mouvement au point  $P$  par

$$\rho \vec{v} = \frac{\sum_{\alpha} \vec{Z}_\alpha}{\delta V} \quad (4)$$

La sommation sur  $\alpha$  est équivalente à celle sur  $\delta V$ , mais chaque molécule peut avoir une quantité de mouvement différente de ses voisines.

A) Transport de quantité de mouvement.

Ces quatre variables (masse volumique et composantes de la vitesse) constituent les paramètres nécessaires pour caractériser le fluide au point  $P$  dans le cadre de l'écoulement isotherme d'un fluide homogène.

Pour exprimer la conservation de ces variables, il est tout d'abord nécessaire de faire un choix entre deux systèmes de référence possibles : les représentations eulérienne et lagrangienne. Dans la formulation eulérienne le mouvement du fluide est décrit par rapport à un système de référence donné  $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ , tandis que dans la formulation lagrangienne, la particule fluide est suivie dans son mouvement. Pour ce travail, la représentation eulérienne est adoptée, ce qui implique que les quatre variables définies précédemment (masse volumique et composantes de la vitesse) doivent satisfaire une équation de bilan dont la forme générale est

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k \phi) = \frac{\partial}{\partial x_k} (T_k^\phi) + S^\phi \quad (5)$$

$\rho$  est la masse volumique,  $v_k$  est la composante de vitesse correspondant à la direction  $\vec{x}_k$ . Pour chacune des quatre variables internes de l'écoulement, les contributions  $\phi$ ,  $T_k^\phi$  et  $S^\phi$  sont données dans la table 1.

équation de conservation de la masse	$\phi$	$T_k^\phi$	$S^\phi$
	1	0	0
équations de quantités de mouvement ( $\alpha = 1,2,3$ )	$v_\alpha$	$\tau_{\alpha k}$	$S^{v_\alpha}$

Table 1

La première équation ou équation de conservation de la masse fait état du bilan massique nul à travers un volume élémentaire. Les trois équations de quantité de mouvement correspondent à un bilan nul des flux de quantités de mouvement avec les éventuelles créations ou destructions de ces quantités.  $\tau_{\alpha k}$  est le flux de la composante  $\alpha$  de quantité de mouvement le long de la direction  $\vec{x}_k$ .  $S^{v_\alpha}$  représente les forces extérieures

qui s'exercent sur l'élément fluide. Ces forces peuvent avoir deux origines différentes : la pression qui règne dans le fluide et les forces volumiques extérieures (par ex. la gravitation).

L'équation d'état relie la pression  $p$  et la masse volumique  $\rho$ .

$$p = \rho R T \quad (6)$$

$R$  est la constante universelle des gaz divisée par la masse moléculaire du fluide et  $T$  est la température absolue.

En écrivant les trois équations de quantités de mouvement, neuf inconnues  $\tau_{\alpha k}$  ont été introduites. Ces quantités sont les neuf composantes de  $\tau_{\alpha\beta}^T$  connu comme le tenseur de contraintes. La loi de Newton de viscosité permet à ces composantes de contraintes d'être exprimées en fonction du gradient de vitesse et d'un coefficient appelé viscosité. A cause des propriétés du tenseur des contraintes (trace nulle et symétrie) les valeurs des six composantes indépendantes sont, pour les fluides newtoniens (réf. [1], p. 571-574)

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{zz} &= \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Les expressions pour les contraintes visqueuses sont des approximations valides si les gradients de vitesse ne sont pas trop importants [2].

Il est alors possible de montrer, à l'aide de la théorie cinétique des gaz, qu'une condition nécessaire est

$$\frac{|m.f.p|}{\bar{c}} \cdot \left| \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right| \ll 1 \quad (8)$$

où  $\bar{c}$  est une vitesse moléculaire caractéristique (par exemple  $\bar{c} = \sqrt{2RT}$ ). Aux conditions normales on a pour l'air  $(m.f.p) = 0.6 \cdot 10^{-7}$  m et  $\bar{c} = 400$  m/s. Ainsi cette condition est clairement satisfaite dans la plupart des applications. La structure d'une onde de choc est une exception bien connue.

L'équation de continuité (ou de conservation de la masse) et les équations de quantité de mouvement, en compagnie de l'équation d'état, les lois de contraintes et la loi de dépendance de la viscosité à l'égard de la masse volumique forment un système fermé d'équations.

Des conditions initiales et aux limites appropriées permettent la détermination de la pression, de la masse volumique et des composantes de la vitesse pour l'écoulement isotherme d'un fluide homogène.

Des équations générales de mouvement pour un fluide newtonien sont

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \rho g_x \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \rho g_y \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \rho g_z \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (12)$$

Ces équations sont rarement utilisées sous leur forme complète.

On se limite le plus souvent soit au cas d'un fluide idéal ( $\mu=0$ ) soit au cas d'un fluide incompressible ( $\rho = \text{cste}$ ).

Après avoir établi ce premier système fermé d'équations pour les écoulements isothermes homogènes, nous allons étendre maintenant ce formalisme aux écoulements non-isothermes.

### B) Transport de chaleur.

Quand, en addition au mouvement du fluide, un transfert de chaleur est présent, il devient nécessaire d'utiliser aussi la notion de bilan d'énergie, similairement aux concepts de bilan de quantité de mouvement et de conservation de la masse.

Considérons un élément de volume dans le cadre d'une description eulérienne. L'équation de conservation de l'énergie procède de la première loi de la thermodynamique appliquée à l'élément fluide et peut être écrite :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ v_k (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) \right] = -\nabla \cdot \vec{q} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{g}) - \nabla \cdot p \vec{u} - \nabla \cdot (\tau \cdot \vec{u}) \quad (13)$$

(I)            (II)   (III)   (IV)

Dans cette équation  $e$  est l'énergie interne du fluide par unité de masse et  $\frac{1}{2} u^2$  est l'énergie cinétique du fluide par unité de volume. L'énergie interne comprend la propre énergie des molécules elles-mêmes (mouvements de translation et de rotation et énergie interne des molécules) et l'énergie d'interaction entre les molécules. Les différentes contributions sont

(I)  $-\nabla \cdot \vec{q}$   $\rightarrow$  conduction.

(II)  $\rho (\vec{u} \cdot \vec{g})$   $\rightarrow$  puissance des forces de gravitation par unité de volume.

(III)  $-\nabla \cdot p \vec{u}$   $\rightarrow$  puissance de la pression par unité de volume.

(IV)  $-\nabla \cdot (\tau \cdot \vec{u})$   $\rightarrow$  puissance des forces visqueuses par unité de volume.

$\vec{q}$  est le vecteur flux de chaleur et  $\vec{g}$  le vecteur force de gravitation par unité de masse.

Il a été montré dans le paragraphe précédent que  $p$  et  $\tau$ , peuvent être déterminées pour un fluide newtonien mais ce n'est pas le cas du vecteur flux de chaleur  $\vec{q}$ .

Par analogie à la loi de Newton de viscosité, nous introduisons maintenant la loi de Fourier de conduction de chaleur qui relie le vecteur flux de chaleur au gradient de température :

$$\vec{q} = -k \cdot \vec{\nabla} T \quad (14)$$

De nouveau, la théorie cinétique des gaz indique que (14) est une expression valable tant que les gradients de température ne sont pas trop grands. Le critère de validité est similaire à (8).

$$\frac{(m.f.p)}{T} \left| \frac{\partial T}{\partial x_k} \right| \ll 1 \quad (15)$$

En utilisant les mêmes arguments que pour (8) il est possible de montrer que ce critère est satisfait dans la plupart des cas pratiques. L'équation (13) exprime la conservation de l'énergie totale par unité de volume. Pour certains problèmes de transfert de chaleur, il est plus commode de travailler avec l'équation d'enthalpie. Pour obtenir cette équation, il suffit de soustraire de (13) l'équation de l'énergie cinétique qui est obtenue en formant le produit scalaire de  $u$  avec les équations de quantités de mouvement (9), (10) et (11) (voir réf. [3]). L'équation de bilan de l'enthalpie est alors :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} h = -(\nabla \cdot \vec{q}) - \left( T \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V (\nabla \cdot \vec{u}) \right) + \theta \quad (16)$$

$$\text{avec } \theta = -\tau : \nabla \vec{u}, \quad (17)$$

$h$  étant l'enthalpie massique. Le symbole  $:$  signifie ici produit du tenseur  $\tau$  par le vecteur  $\nabla \vec{u}$ .

$\theta$  est la fonction de dissipation donnée par

$$\begin{aligned} \theta = & 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \\ & + \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \cdot \mu \end{aligned} \quad (18)$$

\* Le passage de l'énergie interne à l'enthalpie est obtenu en exprimant  $e$  en fonction de  $V$  et  $T$

$$d e = \left( \frac{\partial e}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_V dT .$$

En résumé, l'équation (16) montre que la température peut être modifiée par - conduction de chaleur

- effets de détente
- échauffement visqueux.

Il est remarquable que cette dernière contribution est toujours positive, ce qui met en évidence son caractère irréversible (réf. [3] p. 82 et p. 314).

### C) Transport d'espèces.

Une extension supplémentaire de ces hypothèses est de considérer des fluides non homogènes. Dans l'introduction nous avons supposé qu'il est possible de définir un petit domaine  $\delta V$  dont les dimensions sont supérieures aux dimensions moléculaires, et sur lequel une moyenne spatiale de toute propriété moléculaire définit la valeur locale d'une quantité macroscopique  $\phi$ . Cette hypothèse est encore valable si, à l'intérieur du volume  $\delta V$  des molécules de différentes espèces chimiques sont présentes. Ainsi la moyenne, définie précédemment, permet la définition de la valeur locale d'une grandeur macroscopique  $\phi_{\delta V}^I$  correspondant à l'espèce I dans  $\delta V$ . La valeur locale de  $\phi$  pour le volume  $\delta V$  est, en considérant toutes les espèces,

$$\phi_{\delta V} = \sum_I \phi_{\delta V}^I. \quad (19)$$

Il est alors aisé de redéfinir les variables internes du mélange.

#### 1 - Masse volumique

Supposons que  $N_I$  molécules de l'espèce I, ayant chacune une masse  $M_I$  sont présentes dans  $\delta V$ . La masse volumique partielle pour cette espèce est donc

$$\rho_I = \frac{\sum_K M_K N_K}{\delta V} \quad (20)$$

Pour un mélange à n composantes, I varie de 1 à n. La valeur locale de

la masse volumique du mélange sera donc

$$\rho = \sum_I \rho_I \quad (21)$$

## 2 - Quantité de mouvement

Les mêmes considérations s'appliquent à la quantité de mouvement

$$\rho \vec{v} = \sum_I \rho_I \vec{v}_I \quad (22)$$

$\rho_I \vec{v}_I$  est la valeur locale de la quantité de mouvement de l'espèce I.

## 3 - Energie interne

$$\rho e = \sum_I \rho_I e_I \quad (23)$$

$e_I$  est ici l'énergie interne de l'espèce I par unité de masse dans le volume  $\delta V$ . Les équations (20) à (23) définissent les valeurs locales des variables internes d'un mélange en fonction des valeurs des variables correspondantes pour chaque espèce. Ainsi le comportement thermodynamique est décrit par les équations (9), (10), (11), (12) et (16) où toutes les variables se réfèrent aux variables de mélange définies par les équations (20) à (23), auxquelles s'ajoutent des informations au sujet de la composition du mélange. La fraction massique est définie par

$$c_I = \frac{\rho_I}{\rho} \quad (24)$$

qui est le rapport de la masse volumique partielle  $\rho_I$  à la masse volumique du mélange. De nouveau, comme il a été fait pour le bilan d'énergie, nous pouvons écrire une équation de bilan pour la masse de l'espèce I dans un volume élémentaire. Il vient alors

$$\frac{\partial \rho_I}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_I \vec{v}_I) = S_I \quad (25)$$

Cette équation traduit que la modification de masse de l'espèce I en fonction du temps dans un volume élémentaire fixe dans l'espace résulte du mouvement de l'espèce I par convection et éventuellement de réactions chimiques produisant la composante I à un taux  $S_I$  par unité de volume. A priori nous ne connaissons pas la valeur du vecteur flux massique. Pour exprimer ce dernier en fonction des variables de mélange, une troisième loi de comportement est introduite : c'est la première loi de Fick. La loi de Newton de viscosité exprime le flux de quantité de mouvement comme étant linéairement relié au gradient de vitesse, la loi de Fourier de conduction de chaleur donne une relation linéaire entre le flux de chaleur et le gradient de température. Similairement, la première loi de Fick de diffusion exprime le flux massique comme étant relié linéairement au gradient de concentration [3].

En termes de fraction massique, cette loi peut être écrite pour un mélange binaire.

$$\rho_I \vec{v}_I = \rho_I \vec{v} - \rho D_{IJ} \nabla \left( \frac{\rho_I}{\rho} \right) \quad (26)$$

où  $D_{IJ}$  est le coefficient de diffusion binaire pour les composantes i et j. Avec l'aide de l'équation (26), nous pouvons reformuler l'équation (25) sachant que

$$c_I = 1 - c_J = \frac{\rho_I}{\rho} \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_I) + \nabla \cdot (\rho c_I \vec{v}) = \nabla \cdot (\rho D_{IJ} \nabla c_I) + S_I \quad (28)$$

L'équation (28) décrit le comportement de la concentration dans un système de diffusion binaire, en absence de diffusion thermique ou due à la pression. De même que pour les lois précédentes, la théorie cinétique des gaz restreint l'utilisation de la loi de Fick aux cas où les gradients de fraction massique ne sont pas trop importants. Un critère de validité ad hoc est donc :

$$\frac{(m.f.p)}{c_I} \left| \frac{\partial c_I}{\partial x_\alpha} \right| \ll 1 \quad (29)$$

Cette condition est satisfaite dans la plupart des cas pratiques.

Avec la définition de la fraction massique, l'équation d'état peut être réécrite :

$$P = \rho R T \sum_I \left( \frac{c_I}{M_I} \right) \quad (30)$$

Donc les six équations (9), (10), (11), (12), (28) et (30) permettent la détermination des variables  $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $\rho$  et  $c_I$  si le champ de température est constant et connu.

Si le champ de température doit également être décrit, l'équation de l'énergie (16) est ajoutée à ce système d'équations avec une équation thermique d'état.

$$h = \sum_I (c_{PI} T + H_I) \frac{c_I}{M_I} \quad (31)$$

$c_{PI}$  est le coefficient de chaleur spécifique à pression constante pour l'espèce I.

$H_I$  est la chaleur de formation de l'espèce I .

$M_I$  est la masse moléculaire de l'espèce I.

Donc le système d'équations (9), (10), (11), (12), (16), (28), (30) et (31) régit toutes les variables d'un écoulement classique.

Deux derniers détails doivent être remarqués : ni l'influence des gradients de température sur la diffusion massique, ni l'influence des gradients de concentration ou des contraintes mécaniques sur le flux de chaleur ne sont considérées dans cette thèse (effets Soret et Dufour) (voir réf. [3]).

**11-1. REFERENCES**

1. LAMB H. "Hydrodynamics". 6<sup>th</sup> edition.  
Cambridge University Press. 1932.
2. SMOLDEREN J. "Fundamental equations of fluid dynamics"  
Von Karman Institute CN 88. 1972.
3. BIRD R.B., Stewart W.E. and Lightfoot E.N.  
"Transport Phenomena". 1960.  
Wiley International Edition.

## II-2. TRAITEMENTS STATISTIQUES

Dans II.1, des équations ont été établies pour décrire l'écoulement d'un fluide compressible. Cette formulation ne nécessite pas d'hypothèses au sujet du type d'écoulement, autres que celles qui se rattachent à la définition d'un milieu continu. Ainsi un mouvement turbulent peut être décrit par ces équations aussi bien qu'un mouvement laminaire. Toutefois, l'étendue des échelles caractéristiques d'un mouvement turbulent est si grande qu'il est impossible d'utiliser la forme instantanée de ces équations parce que le nombre de noeuds du maillage nécessaire pour représenter les petites échelles d'un tel mouvement serait très supérieur à la capacité de mémoire des ordinateurs les plus récents et les plus puissants. De plus, les conditions aux limites ne peuvent pas être déterminées expérimentalement à de telles échelles avec une précision suffisante. Pour éviter ces difficultés il est nécessaire de travailler avec les formes moyennées de ces équations.

A) Considérons un fluide dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus. Ce fluide peut donc être décrit par des quantités qui sont continues et dérivables dans le temps et dans l'espace. Ces quantités forment un ensemble de variables dynamiques et thermodynamiques. Quand l'écoulement est turbulent, ces variables affichent un comportement aléatoire qui nécessite un traitement statistique.

Considérons une variable turbulente  $\phi$ , qui peut être n'importe laquelle des quantités utilisées pour décrire l'écoulement du fluide. Cette variable est donc une fonction aléatoire du temps  $t$  et de l'espace  $\underline{x}$  ( $\underline{x}$  est un vecteur à composantes  $x_1, x_2, x_3$  dans un espace cartésien) et peut être décomposée en deux parties

$$\phi = \langle \phi \rangle + \phi' \quad (1)$$

$\langle \phi \rangle$  est la valeur moyenne de  $\phi$  et  $\phi'$  est la fluctuation autour de cette valeur moyenne.

Nous allons discuter maintenant comment définir la valeur moyenne  $\langle \phi \rangle$  d'une variable aléatoire. Considérons la fonction densité de probabilité pour  $\phi$  d'être à l'intérieur de l'intervalle  $[a, b]$

$$\text{Prob} (a \leq \phi \leq b) = \int_a^b P(\phi) d\phi \quad (2)$$

Cette définition entraîne que la probabilité devient égale à 1 si les limites  $a$  et  $b$  sont rejetées à plus et moins l'infini respectivement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\phi) d\phi = 1 \quad (3)$$

et ainsi le premier moment de cette pdf donne la valeur moyenne de

$$\langle \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi P(\phi) d\phi \quad (4)$$

Les variations possibles de  $\langle \phi \rangle$  dans l'espace ou le temps dépendront de celles de  $P(\phi)$ . Pour des écoulements stationnaires, une moyenne temporelle peut être utilisée à la place de (4). La moyenne temporelle est définie par

$$\langle \phi \rangle_- = \bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(\underline{x}, t) dt \quad (5)$$

La principale restriction à l'utilisation de ce type de moyenne est que la durée  $T$  doit être grande par rapport à la plus grande échelle de temps de la turbulence pour que  $\bar{\phi}$  soit indépendant de  $t$ , l'origine de l'intervalle d'intégration. La définition (4) entraîne, que pour deux variables aléatoires  $f$  et  $g$ , les relations suivantes sont vérifiées

$$\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle \quad (6)$$

$$\langle f \cdot g \rangle = \langle f \rangle \cdot \langle g \rangle \neq \langle f \cdot g \rangle \quad (7)$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \eta} \langle f \rangle \quad \text{si } \eta \in [x_1, x_2, x_3, t] \quad (8)$$

Boussinesq [1] et Reynolds [2] établirent les équations pour les écoulements incompressibles en moyennant de la façon décrite ci-dessus les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement. Des quantités telles que la vitesse, la pression ou la masse volumique sont décomposées en une partie moyenne et une partie fluctuante. Cette méthode fut étendue aux écoulements compressibles par Schubauer et Tchen [3], Hinze [4] et plusieurs autres auteurs. Les équations établies initialement par Boussinesq et Reynolds ne sont pas linéaires. Pour les écoulements incompressibles, ces termes non linéaires sont des produits des composantes de vitesses avec leurs dérivées, et également des produits de vitesses avec la masse volumique pour le cas des écoulements compressibles. Les équations établies par Reynolds sont donc similaires aux équations de Navier-Stokes avec un tenseur de contraintes supplémentaires appelées contraintes de Reynolds. Ces contraintes caractérisent les effets du frottement turbulent et donnent aussi le taux de production de la turbulence, par leurs produits avec les gradients de vitesses moyennes. Pour les écoulements compressibles, ces termes sont plus complexes et ont des effets supplémentaires qui s'ajoutent à la production de turbulence [3]. Un premier aperçu peut être obtenu en examinant l'équation de conservation de la masse pour un écoulement compressible.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (9)$$

$\rho$  est la masse volumique et  $u, v, w$  sont les trois composantes de la vitesse dans un repère cartésien. Décomposons ces quantités en composantes moyennes ( $\bar{\phantom{x}}$ ) et fluctuante ( $\phantom{x}'$ ).

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{et } \bar{\rho}' = \bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = 0 \quad (11)$$

Il s'ensuit alors :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho' u') + \frac{\partial}{\partial x} (\rho' \bar{u} + \bar{\rho} u') + \frac{\partial}{\partial y} \dots + \frac{\partial}{\partial z} \dots = 0 \quad (12)$$

Après passage à la moyenne, il reste :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho' u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho' v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho' w'}) = 0 \quad (13)$$

Cette procédure introduit dans l'équation de continuité (sous sa forme moyenne) trois nouvelles variables qui sont les corrélations  $\overline{\rho' u'}$ ,  $\overline{\rho' v'}$  et  $\overline{\rho' w'}$ . La fermeture du plus simple système d'équations moyennes sera donc conditionnée, au moins par la connaissance de ces corrélations.

D'autres auteurs, tels Hesselberg [5], Dedebant et Wehrle [6], Van Mieghen et Dufour [7], Blackadar [8] et Favre [9] établirent des équations pour des écoulements turbulents compressibles en moyennant le produit de la vitesse et de la masse volumique et en divisant le résultat par la valeur moyenne de la masse volumique. Cette façon de moyenner rend les équations moyennes du mouvement plus simples qu'avec une moyenne temporelle conventionnelle. Plus tard, Favre [10] étendit ce principe à toute variable dépendante exceptées la masse volumique et la pression.

Ce type de moyenne peut être introduit statistiquement comme une moyenne ordinaire en utilisant la fonction de densité de probabilité pour les deux variables  $\rho$  et  $\phi$  (joint pdf) :  $P_{\rho\phi}(\rho, \phi)$  (ref [11]). Au sens de Favre, la pdf  $\tilde{P}(\phi)$  d'une variable  $\phi$  peut être définie de la façon suivante

$$\tilde{P}(\phi) = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_0^{\infty} \rho \cdot P_{\rho\phi}(\rho, \phi) d\rho$$

Ainsi, moyennes pondérées par la masse, variances et corrélations d'ordre supérieur suivront comme moments de cette pdf.

$$\bar{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} = \int_{\phi} \phi \cdot \tilde{p}(\phi) d\phi$$

$$\begin{aligned} \overline{\phi^2} &= \frac{\overline{\rho\phi^2}}{\bar{\rho}} = \int_{\phi} (\phi - \tilde{\phi})^2 \tilde{p}(\phi) d\phi \\ \overline{\phi^3} &= \frac{\overline{\rho\phi^3}}{\bar{\rho}} = \int_{\phi} (\phi - \tilde{\phi})^3 \tilde{p}(\phi) d\phi \end{aligned}$$

et  $\widetilde{f(\phi)} = \int_{\phi} f(\phi) \tilde{p}(\phi) \cdot d\phi$

Nous pouvons donc envisager deux types de moyennes possibles

{1} moyenne temporelle conventionnelle.

$$\begin{cases} \phi = \bar{\phi} + \phi' \\ \bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_T \phi(t) dt ; \quad \bar{\phi}' = 0 \end{cases} \quad (14)$$

{2} moyenne de Favre

$$\begin{cases} \phi = \tilde{\phi} + \phi'' \\ \tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} \quad \overline{\phi''} \text{ pas nécessairement nul.} \end{cases} \quad (15)$$

Désormais dans cette thèse, le qualificatif moyenne pondérée réfèrera à la définition {2} et moyenne conventionnelle à la définition {1}.

B) Relation entre moyennes conventionnelles et pondérées.

Les relations entre les différentes moyennes s'obtiennent directement à partir des définitions (14) et (15).

Multiplions (14) par la valeur instantanée de la masse volumique

$$\rho \phi = \rho \bar{\phi} + \rho \phi'$$

Puis après prise de moyenne et division par  $\bar{\rho}$  on obtient

$$\frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} = \tilde{\phi}$$

Dans le dernier terme,  $\rho$  peut être décomposée en composantes moyenne et fluctuante. Ainsi

$$\gamma = \bar{\phi} + \frac{\overline{\rho' \phi'}}{\bar{\rho}} \quad (16)$$

De même on peut déduire de la définition (15)

$$\overline{\rho \phi} = \overline{\rho \gamma} + \overline{\rho \phi''} = \bar{\rho} \bar{\gamma} + \overline{\rho \phi''} \quad (17)$$

Il s'ensuit immédiatement que

$$\overline{\rho \phi''} = 0. \quad (18)$$

Considérons maintenant l'équation (17). Selon la définition (14) on peut écrire

$$\overline{\rho \phi} = \bar{\rho} \bar{\phi} + \overline{\rho' \phi'} = \bar{\rho} \bar{\gamma} + \bar{\rho} \overline{\phi''} + \overline{\rho' \phi''}$$

et en tenant compte de l'équation (16)

$$\bar{\rho} \overline{\phi''} + \overline{\rho' \phi''} = 0$$

Nous obtenons ainsi la troisième relation

$$\overline{\phi''} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho' \phi''} \quad (19)$$

Si maintenant (15) est moyennée

$$\bar{\phi} = \bar{\gamma} + \overline{\phi''},$$

il s'ensuit grâce à (16)

$$\overline{\phi''} + \frac{\overline{\rho' \phi'}}{\bar{\rho}} = 0$$

Donc une quatrième relation est

$$\bar{\rho} \overline{\phi''} = -\overline{\rho' \phi'} \quad (20)$$

Comme exemple, considérons l'équation de continuité d'un écoulement compressible (9). L'utilisation de (14) pour la masse volumique et (15) pour la vitesse entraîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} u'' + \rho' u'') \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} v'' + \rho' v'') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w'' + \rho' w'') = 0 . \end{aligned}$$

De (20) et (19), il s'ensuit que les termes des trois dernières dérivées de cette équation sont nuls et l'équation moyenne de conservation de la masse peut être réécrite comme l'équation instantanée.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{w}) = 0 \quad (21)$$

Si nous considérons maintenant le produit de deux variables turbulentes, qui peuvent être moyennées selon (14) ou (15), on peut écrire :

$$\phi_1 = \bar{\phi}_1 + \phi_1' = \bar{\phi}_1 + \phi_1''$$

$$\phi_2 = \bar{\phi}_2 + \phi_2' = \bar{\phi}_2 + \phi_2''$$

et pour la masse volumique  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$

$$\phi_1 \phi_2 = \overbrace{(\phi_1 \phi_2)} + (\phi_1 \phi_2)''$$

Il s'ensuit alors, en appliquant les règles de la moyenne pondérée.

$$\phi_1'' \phi_2'' = \overbrace{\phi_1 \phi_2} - \bar{\phi}_1 \cdot \bar{\phi}_2$$

ou

$$\overbrace{\phi_1 \phi_2} = \overline{\phi_1' \phi_2'} + \frac{1}{\rho} \overline{\rho' (\phi_1 \phi_2)'} - \frac{1}{\rho^2} \overline{\rho' \phi_1'} \cdot \overline{\rho' \phi_2'} - \frac{\bar{\phi}_1}{\rho} \overline{\rho' \phi_2'} - \frac{\bar{\phi}_2}{\rho} \overline{\rho' \phi_1'}$$

Il est alors facile de montrer que

$$\overline{\rho' (\phi_1 \phi_2)'} = \bar{\phi}_1 \overline{\rho' \phi_2'} + \bar{\phi}_2 \overline{\rho' \phi_1'} + \overline{\rho' \phi_2' \phi_2'}$$

Une cinquième relation est donc .

$$\overbrace{\phi_1 \phi_2} = \overline{\phi_1' \phi_2'} - \frac{1}{\rho^2} \overline{\rho' \phi_1'} \overline{\rho' \phi_2'} + \frac{1}{\rho} \overline{\rho' \phi_1' \phi_2'} \quad (22)$$

## C) Sélection d'une combinaison de moyennes.

En accord avec les définitions (14) et (15) il serait inconsistant d'appliquer une moyenne pondérée au facteur de pondération lui-même car cela amènerait d'étranges relations entre les valeurs moyennes et les fluctuations d'une même espèce. Ainsi la moyenne pondérée ne sera pas appliquée à la masse volumique pour garder quelques signification physique à l'utilisation des équations moyennes. Néanmoins, dans cette partie seulement et pour évaluer toutes les possibilités, nous considérons comme possible la décomposition de  $\rho$  en  $\tilde{\rho}$  et  $\rho''$ , mais il doit être souligné, ici, que ce n'est qu'une décomposition formelle, susceptible de mener à des résultats inconsistants d'un point de vue physique.

Les trois tables suivantes résument les résultats de l'annexe I dans laquelle toutes les combinaisons possibles de moyennes sont appliquées aux différentes sortes de termes qui apparaissent dans les équations statistiques des écoulements compressibles qui ont été écrites dans le paragraphe précédent. En examinant le contenu de ces tables, il apparait que la meilleure combinaison de moyennes, ou autrement dit, celle entraînant le plus petit nombre de nouveaux termes, consiste en moyenne conventionnelle pour la masse volumique et moyennes pondérées pour les deux autres types de variable  $v_k$  et  $\phi$ .

Pourtant, même avec ce choix, nous pouvons voir que, si la dérivée temporelle est seulement transformée en valeur moyenne, différemment la dérivée spatiale du terme de convection introduit un nouveau terme

$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_k'' \phi''})$  qui peut être considéré comme un terme de flux et qui,

comme nous le verrons dans le chapitre suivant accroît considérablement la difficulté du problème de la résolution des équations moyennes du

mouvement turbulent. A cause de la présence d'une dérivée dans le terme

de diffusion, un nouveau terme apparait. Ce terme a la forme  $\frac{\partial}{\partial x_k} (\Gamma \rho' \frac{\partial \phi''}{\partial})$

et nous verrons dans le chapitre suivant comment en tenir compte.

Avec ce choix de moyennes, il faut encore ajouter que pour des raisons d'homogénéité, les variables qui sont présentes dans l'équation d'état doivent être moyennées de la même façon. Donc la pression et la température seront moyennées conventionnellement de même que l'est la masse volumique.

Toutefois, ce choix rend nécessaire de vérifier si les résultats des expériences correspondent aux définitions des variables définies pour la procédure numérique.

			moyenne		fluctuation	
			$\partial/\partial t$	$\partial/\partial x_k$	$\partial/\partial t$	$\partial/\partial x_k$
$\rho_1$	$\bar{v}_k$	$\phi$	2	4	4	9
		$\phi^2$	1	3	2	7
	$\bar{v}_k^2$	$\phi$	2	3	4	7
		$\phi^2$	1	2	2	5
$\rho_2$	$\bar{v}_k$	$\phi$	3	5	5	10
		$\phi^2$	2	5	3	8
	$\bar{v}_k^2$	$\phi$	3	4	5	8
		$\phi^2$	2	3	3	6

Table I nombre de termes de la partie convective dans l'équation de transport de  $\phi$ .

		moy.	fluc.
$\rho_1$	$\bar{v}_k$	2	4
	$\bar{v}_k^2$	1	2
$\rho_2$	$\bar{v}_k$	3	5
	$\bar{v}_k^2$	2	4

Table II

Nombre de termes dans l'équation de continuité.

		Diffusion		Source	
		moyenne	fluct.	moyenne	fluct.
$\rho_1$	$\phi$	2	3	2	4
	$\phi^2$	2	3	1	2
$\rho_2$	$\phi$	3	5	3	5
	$\phi^2$	3	4	2	3

Table III

Nombre de termes de diffusion et de source dans l'équation de transport de  $\phi$ .

## 11.2 - REFERENCES

1. FAVRE A. "Equations des gaz turbulents compressibles".  
Journal de Mécanique, vol. 4, n° 3. Sept. 1965.
2. REYNOLDS O. "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids  
and the determination of the criterion".  
Phil. Trans. Roy. Soc. London. A. vol. 186, pp. 123-164 (1894).
3. SCHUBAUER G.B. et TCHEN C.M. "Turbulent flows and heat transfer".  
C C Lin ed. Princeton University Press (1959).
4. HINZE J.O. "Turbulence".  
Mc Graw Hill Co., N.Y. (1959).
5. HESSELBERG "Die Gesetze der ausgeglichenen atmosphärischen Bewegungen".  
Beitz. Physik. forcien Atmosphäre. Vol. 12, pp. 141-160 (1925).
6. DEDEBANT G. et WEHRLE Ph. "Sur les équations aux valeurs probables  
d'un fluide turbulent".  
C.R.A.S. T. 206, pp. 1790-1791 (1938).
7. VAN MIEGHEEN et DUFOUR L. "Thermodynamique de l'atmosphère".  
Mem. Inst. Roy. Meteor. Belgium 30 (1948).
8. BLACKADAR A.K. "The transformation of energy by the large scale eddy  
stress in the atmosphère".  
Meteor. Papers vol. 1 n° 4. New York University (1950).
9. FAVRE A. "Equations statistiques des gaz turbulents".  
C.R.A.S. 246 (1958), pp. 2576-2579, pp. 2723-2725,  
pp. 2839-2842, pp. 3216-3219.

10. FAVRE A. "Equations des gaz turbulents compressibles".

Journal de Mécanique. Vol. 4, n° 4, Dec. 1965.

11. BILGER R.W. "A note en Favre averaging in variable density flows".

Combustion science and technology. 1975, vol. 11, pp. 215-217.

### II.3 - EQUATIONS MOYENNES DE LA TURBULENCE

- 1 - Quantité de mouvement.
- 2 - Fraction massique.
- 3 - Contraintes de Reynolds.
  - Contraintes de Reynolds.
  - Energie cinétique de turbulence.
- 4 - Dissipation.
- 5 - Fluctuations de masse volumique.

### II-3. EQUATIONS DE LA TURBULENCE

Les équations qui seront résolues par une technique numérique sont développées dans cette partie. Nous essaierons d'expliquer succinctement comment ces équations sont obtenues à partir des équations instantanées écrites dans la première partie de ce chapitre. Pour des raisons pratiques de clarté, toutes les considérations seront faites pour un écoulement plan bidimensionnel. De plus, les effets de gravité seront négligés. Avant d'entrer dans le détail des calculs, le choix des moyennes est rappelé ici :

$\rho$ → masse volumique	}	moyenne temporelle conventionnelle
$P$ → pression		
$T$ → température		
$v_{\alpha}$ → composantes de vitesse	}	moyenne temporelle pondérée par la masse volumique
$C_I$ → fraction massique		
$h$ → enthalpie		

#### 1 - Equation de continuité (conservation de la masse)

La forme instantanée de cette équation est

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho v_{\alpha}) = 0 \quad (1)$$

Le choix des moyennes utilisées entraîne

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (2)$$

$$v_{\alpha} = \tilde{v}_{\alpha} + v''_{\alpha} \quad (3)$$

selon la notation qui a été introduite précédemment. L'équation (1) peut être écrite :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{\rho} \tilde{v}_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho') + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho' \tilde{v}_{\alpha} + \bar{\rho} v''_{\alpha} + \rho' v''_{\alpha}) = 0 \quad (4)$$

Sachant que

$$\bar{\rho} \bar{\phi}'' = - \overline{\rho' \phi''} \quad (5)$$

après prise de moyenne, l'équation de continuité est

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha) = 0 \quad (6)$$

L'équation (6) est identique à (1) si les symboles de moyenne sont omis.

## 2 - Equation de quantité de mouvement

L'équation instantanée pour la composante  $v_\beta$  est

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho v_\alpha v_\beta) = \rho g_\beta - \frac{\partial p}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\tau_{\alpha\beta}) \quad (7)$$

$p$  est la pression,  $\tau_{\alpha\beta}$  est le tenseur des contraintes visqueuses et  $g_\beta$  est la composante  $\beta$  du vecteur champ de gravitation. En utilisant la même technique de moyenne, l'équation (7) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta) = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho v_\alpha'' v_\beta''}) + \bar{\rho} g_\beta - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\tau}_{\alpha\beta}) \quad (8)$$

Cette équation montre que le transport convectif de la quantité de mouvement est fonction de l'action du champ de gravitation, du gradient de pression moyenne, des forces de frottement visqueux et turbulent.

## 3 - Equation de conservation de l'espèce

De même, une équation de transport pour tout scalaire (la fraction massique  $C_I$  par exemple) peut être établie et moyennée :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_I) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho v_\alpha C_I) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (J_{\alpha I}) + S_{\alpha I} \quad (9)$$

En cas de scalaire passif comme la fraction massique en l'absence de réaction chimique,  $S_{\alpha I}$  est égal à zéro et il reste (sachant que  $C_I = \frac{\rho_I}{\rho}$ )

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} C_I) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha \tilde{C}_I) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (J_{\alpha I} - \overline{\rho v_\alpha'' C_I''}) \quad (10)$$

4 - Equation des contraintes de Reynolds

Une équation de transport peut également être écrite pour le terme de frottement turbulent (contraintes de Reynolds)  $\overline{v''_\gamma v''_\beta}$ . Considérons le produit de l'équation instantanée de quantité de mouvement  $\rho v_\beta$  par la fluctuation de la composante de vitesse  $v_\gamma$ .

$$v''_\gamma \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_\beta) + v''_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho v_\alpha v_\beta) = v''_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\tau_{\alpha\beta}) + \rho g_\beta v''_\gamma - v''_\gamma \frac{\partial P}{\partial x_\beta} \quad (11)$$

et celui obtenu en permutant les indices  $\beta$  et  $\gamma$

$$v''_\beta \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_\gamma) + v''_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho v_\alpha v_\gamma) = v''_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\tau_{\alpha\gamma}) + \rho g_\gamma v''_\beta - v''_\beta \frac{\partial P}{\partial x_\gamma} \quad (12)$$

Après prise de moyenne de la somme des équations (11) et (12) on obtient

l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial t} (\rho' \tilde{v}_\beta)} + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial t} (\rho' \tilde{v}_\gamma)} + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_\beta)} + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_\gamma)} \\ & + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} v''_\beta)} + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} v''_\gamma)} + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial t} (\rho' v''_\beta)} + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial t} (\rho' v''_\gamma)} \\ & + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta)} + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} v''_\alpha v''_\beta)} + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta)} + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} v''_\beta \tilde{v}_\alpha)} \\ & + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\gamma)} + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' v''_\alpha v''_\beta)} + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' v''_\alpha \tilde{v}_\beta)} + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' v''_\beta \tilde{v}_\alpha)} \\ & + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\gamma)} + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} v''_\alpha v''_\gamma)} + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} v''_\alpha \tilde{v}_\gamma)} + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} v''_\gamma \tilde{v}_\alpha)} \\ & + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\gamma)} + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' v''_\alpha v''_\gamma)} + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' v''_\alpha \tilde{v}_\gamma)} + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho' v''_\gamma \tilde{v}_\alpha)} \\ & = - \overline{v''_\gamma \frac{\partial P}{\partial x_\beta}} - \overline{v''_\beta \frac{\partial P}{\partial x_\gamma}} + \overline{v''_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\tau_{\alpha\beta})} + \overline{v''_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\tau_{\alpha\gamma})} \end{aligned} \quad (13)$$

La première ligne de l'équation (13) peut être ré-écrite :

$$\begin{aligned} \overline{v''_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{v}_{\beta})} + \overline{v''_{\beta} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{v}_{\gamma})} &= \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v''_{\gamma} \tilde{v}_{\beta}}) - \overline{\rho \tilde{v}_{\beta} \frac{\partial}{\partial t} (v''_{\gamma})} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v''_{\beta} \tilde{v}_{\gamma}}) - \overline{\rho \tilde{v}_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (v''_{\beta})} . \end{aligned}$$

Par définition  $\overline{\rho \phi''} = 0 \quad \forall \phi$ , il reste donc

$$\overline{v''_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{v}_{\beta})} + \overline{v''_{\beta} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{v}_{\gamma})} = \tilde{v}_{\beta} \overline{v''_{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \tilde{v}_{\gamma} \overline{v''_{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (14)$$

La seconde ligne de l'équation (13) donne

$$\overline{v''_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v''_{\beta})} + \overline{v''_{\beta} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v''_{\gamma})} = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v''_{\beta} v''_{\gamma}}) + \overline{v''_{\beta} v''_{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (15)$$

Les quatre lignes suivantes de (13) se transforment en

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{v}_{\gamma} v''_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho v_{\alpha})} + \overline{\rho v''_{\beta} v''_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tilde{v}_{\gamma})} + \overline{\tilde{v}_{\beta} v''_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho v_{\alpha})} + \overline{\rho v''_{\gamma} v''_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tilde{v}_{\beta})} \\ + \overline{v''_{\gamma} v''_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho v_{\alpha})} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho v''_{\alpha} v''_{\beta} v''_{\gamma}}) + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho v''_{\beta} v''_{\gamma} \tilde{v}_{\alpha}}) \end{aligned} \quad (16)$$

En utilisant les équations (1), (14), (15) et l'expression (16), l'équation (13) peut être reformulée en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \tilde{v}_{\gamma} v''_{\beta}}) + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho \tilde{v}_{\alpha} v''_{\gamma} v''_{\beta}}) &= - \overline{\rho v''_{\beta} v''_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tilde{v}_{\gamma})} - \overline{\rho v''_{\gamma} v''_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tilde{v}_{\beta})} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho v''_{\alpha} v''_{\beta} v''_{\gamma}}) \\ &- \overline{v''_{\gamma} \frac{\partial P}{\partial x_{\beta}}} - \overline{v''_{\beta} \frac{\partial P}{\partial x_{\gamma}}} \\ &+ \overline{v''_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tau_{\alpha\beta})} + \overline{v''_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tau_{\alpha\gamma})} \end{aligned} \quad (17)$$

La pression peut alors être décomposée en moyenne et fluctuation selon les règles de la moyenne temporelle conventionnelle :

$$\begin{aligned}
 - \overline{v''_{\gamma} \frac{\partial P}{\partial x_{\beta}}} &= - \overline{v''_{\gamma} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_{\beta}}} - \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \overline{(v''_{\gamma} P')} + P' \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} \\
 - \overline{v''_{\beta} \frac{\partial P}{\partial x_{\gamma}}} &= - \overline{v''_{\beta} \frac{\partial P}{\partial x_{\gamma}}} - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} \overline{(v''_{\beta} P')} + P' \frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}}
 \end{aligned}$$

L'équation exacte de transport pour les contraintes de Reynolds est donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v''_{\gamma} v''_{\beta}}) + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{\rho \tilde{v}_{\alpha} v''_{\gamma} v''_{\beta}}) =$$

$$\begin{aligned}
 \text{I} & \quad - \overline{\rho v''_{\beta} v''_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tilde{v}_{\gamma})} - \overline{\rho v''_{\gamma} v''_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\tilde{v}_{\beta})} \\
 \text{II} & \quad - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[ \overline{\rho v''_{\alpha} v''_{\beta} v''_{\gamma}} + \delta_{\alpha\beta} \overline{v''_{\gamma} P'} + \delta_{\alpha\gamma} \overline{v''_{\beta} P'} - \tau_{\alpha\beta} v''_{\gamma} - \tau_{\alpha\gamma} v''_{\beta} \right] \\
 \text{III} & \quad - \overline{v''_{\gamma} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_{\beta}}} - \overline{v''_{\beta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_{\gamma}}} + \text{IV} \quad P' \left( \frac{\partial v''_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} \right) \quad \text{V} \quad - \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v''_{\gamma}) - \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v''_{\beta}) \quad (18)
 \end{aligned}$$

Dans cette équation, nous pouvons reconnaître les différentes contributions au transport des contraintes de Reynolds. Donnons une interprétation des termes du second membre :

- le terme I est le taux de production des contraintes de Reynolds par interaction avec les gradients de vitesse moyenne;

- le groupe de termes II représente leur diffusion par la turbulence, les fluctuations de pression et le mouvement moléculaire;

- le groupe de termes III est la contribution du champ de pression moyenne avec les fluctuations de masse volumique;

- le terme IV est la contribution des fluctuations de pression à la création ou à la destruction de la turbulence;

- finalement le terme  $V$  est la dissipation mécanique des contraintes de Reynolds, ce qui signifie que, à cause du frottement visqueux, une partie des contraintes de Reynolds est transformée en chaleur. Ce dernier processus est irréversible selon le second principe de la thermodynamique.

Une nouvelle quantité peut être définie en prenant la moitié de la trace de ce tenseur. Cette quantité est l'énergie cinétique de la turbulence par unité de masse.

$$k = \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho v''_{\beta} v''_{\beta}}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{2} \overline{v''_{\beta} v''_{\beta}}$$

Ainsi une équation de transport pour  $k$  peut être déduite directement de l'équation de transport des contraintes de Reynolds (18).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} k) + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{\rho} \tilde{v}_{\alpha} k) &= - \bar{\rho} \overline{v''_{\beta} v''_{\alpha} \frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\alpha}}} - \overline{v''_{\beta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_{\beta}}} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[ \overline{\rho v''_{\alpha} k} + \delta_{\alpha\beta} \overline{v''_{\beta} P'} - \overline{\tau_{\alpha\beta} v''_{\beta}} \right] \\ &\quad + P' \overline{\frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\beta}}} - \overline{\tau_{\alpha\beta} \frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\alpha}}} \end{aligned} \quad (21)$$

Cette équation de transport pour l'énergie cinétique de la turbulence a évidemment une forme très similaire à l'équation (18) avec les mêmes types de contribution : production par déformation moyenne, diffusion, travail des fluctuations de pression et dissipation mécanique due au frottement visqueux.

##### 5 - Equation de dissipation

Aussi bien pour l'équation des contraintes de Reynolds que pour l'équation de l'énergie de turbulence, le terme de dissipation mécanique doit être connu. Il est donc nécessaire d'établir une équation de transport pour cette quantité.

Dans l'équation (18) le tenseur taux de dissipation  $\epsilon_{\gamma\beta}$  est défini par

$$\bar{\rho} \epsilon_{\gamma\beta} = \overline{\tau_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v''_{\gamma})} + \overline{\tau_{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v''_{\beta})} \quad (22)$$

tandis que pour l'équation (21) le taux de dissipation  $\epsilon$  est

$$\bar{\rho} \epsilon = \overline{\tau_{\alpha k} \frac{\partial v''_k}{\partial x_{\alpha}}} \quad (23)$$

Comme l'énergie cinétique de turbulence est liée à la trace du tenseur des contraintes de Reynolds, il s'ensuit la relation suivante :

$$\epsilon_{\gamma\beta} = \frac{2}{3} \delta_{\gamma\beta} \epsilon \quad (24)$$

La démonstration complète de l'équation de transport pour  $\epsilon$  ne sera pas reproduite ici, à cause de la longueur des manipulations nécessaires pour l'obtenir. Toutefois la procédure est quelque peu semblable à celle qui est utilisée pour obtenir l'équation des contraintes de Reynolds. Tennekes et Lumley [1] ont montré comment ce taux de dissipation est lié aux fluctuations du vecteur tourbillon.

Après Davidov [3] et Harlow et Nakayama [4], Hanyalic et Launder [2] rapportent une équation de transport pour  $\epsilon$  dans le cas des écoulements incompressibles. Dans son cours sur la modélisation de la turbulence Jones [5] utilise une équation identique à celle de Hanyalic et Launder.

Dans de récents travaux d'application, Munjee [6] pour les écoulements dans les lasers dynamiques à gaz et Sirignano [7] pour des écoulements turbulents réactifs utilisent aussi cette forme incompressible de l'équation du taux de dissipation. Dans cette thèse, nous nous référons au travail de Kollmann [8] pour l'établissement complet de l'équation en moyenne pondérée du taux de dissipation  $\epsilon$  pour les écoulements compressibles. Cette équation est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{v}_\alpha \varepsilon) = & - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \overline{v_\alpha'' \varepsilon} - \frac{1}{\rho} \overline{\tau_{\alpha\beta}'' \frac{\partial \tau_{\beta\delta}}{\partial x_\delta}} - \frac{1}{\rho} \overline{\tau_{\alpha\beta}' \frac{\partial \tau_{\beta\delta}}{\partial x_\delta}} + (\tau_{\alpha\beta}'' + \tau_{\alpha\beta}') \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_\beta} \right] \\
+ \mu & \left[ \frac{4}{3} \overline{D'' \frac{\partial v_\alpha''}{\partial x_\beta} \frac{\partial v_\beta''}{\partial x_\alpha}} + \frac{\partial v_\alpha''}{\partial x_\gamma} \cdot \frac{\partial v_\gamma''}{\partial x_\delta} \left( \frac{\partial v_\alpha''}{\partial x_\delta} - \frac{\partial v_\delta''}{\partial x_\alpha} \right) \right] - 2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \tau_{\alpha\delta}}{\partial x_\delta} \\
+ \frac{1}{3} \overline{D'' \varepsilon} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \tilde{D} \varepsilon + \frac{2}{3} \mu & \left\{ \overline{\tilde{D} \frac{\partial v_\alpha''}{\partial x_\beta} \frac{\partial v_\beta''}{\partial x_\alpha}} + 4 \frac{\partial \tilde{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \overline{D'' \frac{\partial v_\alpha''}{\partial x_\beta}} + 2 \tilde{D} \frac{\partial \tilde{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right. \\
+ 2 \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial \tilde{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \overline{D''} & \left. - \frac{4}{9} \mu \left[ \overline{D''^3} + 2 \overline{D''^2 \tilde{D}} + \overline{D'' \tilde{D}^2} \right] \right. \\
+ \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}''}{\partial x_\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}'}{\partial x_\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_\beta} - \tilde{\tau}_{\alpha\gamma} & \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial \tilde{v}_\beta}{\partial x_\gamma} \\
+ \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[ \tilde{\tau}_{\alpha\beta} + \bar{\tau}_{\alpha\beta} \right] \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} - \mu \frac{\partial v_\alpha''}{\partial x_\gamma} & \left( 3 \frac{\partial \tilde{v}_\gamma}{\partial x_\delta} \frac{\partial \tilde{v}_\delta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tilde{v}_\delta}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\delta} \right) \\
- \varepsilon_{\alpha\gamma} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\gamma} - v_\delta \tau_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} - \mu & \left\{ \frac{\partial v_\alpha''}{\partial x_\gamma} \frac{\partial v_\gamma''}{\partial x_\delta} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\delta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\delta} \right) \right. \\
+ 2 \frac{\partial v_\alpha''}{\partial x_\gamma} \frac{\partial v_\delta''}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \tilde{v}_\gamma}{\partial x_\delta} & \left. \right\} \tag{25}
\end{aligned}$$

Dans cette terrible équation, D est la divergence de la vitesse

$$D = \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} \tag{26}$$

et les symboles ( - , ' ) et ( ~ , '' ) réfèrent respectivement aux moyennes conventionnelles et pondérées. Une simple vue sur l'équation (25) montre que l'utilisation de moyennes pondérées pour  $\varepsilon$  n'apporte aucune simplification. En fait cette équation devient nettement plus complexe que dans le cas incompressible (réf. [2]-[4]).

6 - Equations pour les fluctuations de masse volumique

La qualité du mélange est décrite par les corrélations de masses volumiques définies par :

$$Q_{IJ} = \overline{(\rho C_I)'' (\rho C_J)''} \quad (27)$$

En termes de masses volumiques partielles, l'équation (27) est équivalente à

$$Q_{IJ} = \overline{\rho_I' \rho_J'} \quad (28)$$

De cette définition, il s'ensuit immédiatement :

$$\overline{\rho'^2} = \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N Q_{IJ} \quad (29)$$

ou pour un mélange binaire

$$\overline{\rho'^2} = Q_{11} + 2 \cdot Q_{12} + Q_{22} \quad (30)$$

$$\text{et } \overline{\rho_I' \rho_I'} = \sum_{J=1}^N Q_{IJ} \quad (31)$$

L'équation de transport pour  $Q_{IJ}$  peut être obtenue à partir de l'équation de transport pour un scalaire (7) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (Q_{IJ}) + \tilde{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (Q_{IJ}) = & - 2 \tilde{D} Q_{IJ} - \overline{Q_{IJ}'' D''} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\overline{v_\beta'' Q_{IJ}''}) \\ & - \overline{\bar{\rho} \tilde{C}_I (\rho C_J)'' D''} - \overline{\rho \tilde{C}_J (\rho C_I)'' D''} - \overline{v_\alpha'' (\rho C_I)'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{C}_J)} \\ & - \overline{v_\alpha'' (\rho C_J)'' \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{C}_I)} - \overline{(\rho C_I)'' \frac{\partial J_{\alpha I}}{\partial x_\alpha}} - \overline{(\rho C_J)'' \frac{\partial J_{\alpha J}}{\partial x_\alpha}} \end{aligned} \quad (32)$$

Dans cette équation  $J_{\alpha I}$  et  $J_{\alpha J}$  sont les flux des espèces I ou J dans la direction  $\alpha$ .

## 7 - Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi, à partir de considérations thermodynamiques, la définition de différentes quantités comme la quantité de mouvement, la fraction massique etc... nécessaires à la description des écoulements turbulents. Puis différentes statistiques ont été présentées, dont une fut retenue pour écrire les équations de mouvement sous leur forme moyenne. Ainsi des équations de transport ont été écrites pour la quantité de mouvement, la fraction massique, l'énergie cinétique de turbulence et son taux de dissipation et finalement pour les corrélations entre les densités partielles. Dans le chapitre suivant, nous verrons comment fermer un tel système d'équations pour décrire un écoulement turbulent.

### 11.3 - REFERENCES

1. H. TENNEKES et J.L. LUMLEY. "A first course in turbulence" M.I.T. Press - Cambridge. Massachussetts (1973).
2. HANJALIC K. et LAUNDER B.E. "A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows". J. Fluid Mech 52-4 (1972).
3. DAVIDOV B.I. 1961. "On the statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid".  
Dokl. Akad Vauk, U.R.S.S.136, pp. 47-50.
4. HARLOW F.H. et NAKAYAMA P.I. (1968) "Transport of turbulence energy decay zate".  
Los Alamos Sci. Lab. University of California Rep. LA-4086.
5. JONES W.P. "Models for turbulent flows with variable density and combustion".  
V.K.I. L.S. 1979-2.
6. MUNJEE, S.A., FOMIN N.A., SOLOUKHIN N.A. et GOLOVICHEV V.I.  
"Modelling of gasdynamic and relaxation phenomena in mixed flow laser". 7 th Int. Coll on gasdynamics of explosions and reactive systems. August 1979. Gottingen-Germany.
7. SIRIGNANO W.A. et PARKER S.F. "Comparison amongst various theories for turbulent reacting planar mixing layers".  
Project Squid N.R. 098-038.

8. KOLLMANN W. "Berechnung von turbulenten Verbrennungsvorgängen  
in Flammen und Brennkammern".

1979. Hab. Thesis R.W.T.H. Aachen.

## CHAPITRE III

HYPOTHESES DE FERMETURE

## 1. FERMETURE DES EQUATIONS.

-  $k - \epsilon$

-  $k - \epsilon$  avec effets de masse volumique variable.

## 2. REALISABILITE DE LA FERMETURE.

## 3. INVARIANCE.

### III-1. FERMETURE DES EQUATIONS.

Dans le développement des méthodes de prédiction pour les écoulements turbulents de fluides homogènes, le problème de base est de déterminer le flux de quantité de mouvement équivalent à une contrainte (contraintes de Reynolds) qui est produit par le mouvement irrégulier du fluide turbulent. De même, dans les cas inhomogènes ou non-isothermes, le flux de masse ou de chaleur est équivalent à une corrélation entre vitesse et concentration ou vitesse et température. Si les équations moyennes du mouvement doivent être résolues, il est nécessaire de relier ces quantités aux variables moyennes telles que vitesse, concentration ou température. Une première solution à ce problème fut avancée par Boussinesq [1], [2] qui suggéra de relier le terme de flux de l'équation de quantité de mouvement au gradient de vitesse moyenne multiplié par une viscosité tourbillonnaire (eddy viscosity).

Cela signifie, dans le cas d'un écoulement bidimensionnel :

$$\overline{\rho u_1' u_2'} = - \mu_t \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \quad (1)$$

L'équation (1) est tout-à-fait semblable à la loi de Newton de viscosité dans laquelle les composantes du tenseur des contraintes laminaires sont reliées aux gradients de vitesse et à la viscosité dynamique du fluide (voir chap. II). Tennekes et Lumley [3] discutent dans le détail des limitations de cette approximation. Pour résumer leurs arguments Lumley [4] écrit : "Le mouvement moléculaire a des échelles de temps et de longueur qui sont petites comparées aux échelles de temps et de longueur du mouvement moyen, la turbulence non. Les échelles de longueur et de temps de la turbulence sont déterminées par le mouvement moyen et sont du même ordre de grandeur que celles du mouvement moyen. Ainsi le flux local de quantité de mouvement n'est pas déterminé par des conditions locales, ce qui est une condition nécessaire pour l'équation (1). Toutefois, cette équation est adéquate

pour des écoulements presque parallèles se développant lentement, qui sont caractérisés par des échelles de longueur et de vitesse uniques dans chaque section. Nous pouvons donc nous attendre à ce que la relation (1) soit mise en défaut dans des situations évoluant rapidement le long des lignes de courant situations dans lesquelles la turbulence produite par un mécanisme est sujette à des distorsions d'une nature différente. De telles situations sont évidemment plus la règle que l'exception dans la réalité". Néanmoins cette approche est encore utilisée par de nombreux chercheurs à cause de sa simplicité. L'usage de l'approximation de Boussinesq requiert la détermination de  $\mu_t$ , la viscosité tourbillonnaire, en fonction des échelles caractéristiques de la turbulence. La première formulation de cette viscosité tourbillonnaire fut donnée par Prandtl [5]. Par analogie avec le mouvement moléculaire dans un gaz, Prandtl développa une expression pour le transfert de quantité de mouvement incluant une longueur de mélange. Cette longueur de mélange correspond au libre parcours moyen de la théorie cinétique des gaz. Aussi le flux de quantité de mouvement est selon Prandtl

$$\overline{u'_1 u'_2} = - \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \quad (2)$$

La valeur de cette longueur de mélange  $\ell$  est aussi fonction de la position dans l'écoulement. Prandtl obtient certains succès en rendant  $\ell$  proportionnelle à la distance  $y$  de la surface solide pour des calculs de couches limites turbulentes. Cinq ans plus tard, Von Karman [6], à partir de considérations dimensionnelles, donna une formulation différente du transfert de quantité de mouvement incluant une constante universelle à la place d'une longueur de mélange variable avec la géométrie de l'écoulement :

$$\overline{u'_1 u'_2} = - K^2 \frac{\left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right)^3}{\left( \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2} \right)^2} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \quad (3)$$

Dans l'équation (3) K tient lieu de constante universelle dont la valeur est 0,4 selon certains auteurs et 0,36 selon d'autres (les valeurs furent déterminées à partir de données de profils de vitesse des écoulements dans un tuyau). Prandtl et Von Karman furent les précurseurs en utilisant l'hypothèse de Boussinesq pour la prédiction d'écoulements turbulents. Depuis ces travaux, de nombreux chercheurs ont continué dans cette voie en développant des méthodes de plus en plus élaborées pour déterminer la viscosité tourbillonnaire. Pour avoir une vue d'ensemble sur toutes ces techniques le lecteur est renvoyé aux références [7] et [8]. Notre but ici est de fournir une description plus élaborée du mouvement turbulent que celle qui est obtenue avec les modèles de longueur de mélange de Prandtl [5] ou Taylor [9]. Dans cette optique, la viscosité tourbillonnaire est déterminée par deux propriétés scalaires de la turbulence, similairement à Ng et Spalding [10], Rodi et Spalding [11], Spalding [12], Harlow et Nakayama [13] et Jones et Launder [14]. Dans cette thèse une approche similaire à celles de Harlow et Nakayama [13] et Jones et Launder [14] est considérée, dans laquelle des équations de transport sont résolues pour l'énergie cinétique de turbulence et son taux de dissipation. Des échelles de vitesse et de longueur de la turbulence peuvent être déduites de ces deux paramètres ainsi que la viscosité tourbillonnaire. Une rapide analyse dimensionnelle montre que :

$$\mu_t = C' \rho k^{1/2} \ell \quad (4)$$

Dans cette équation,  $\mu_t$  est la viscosité tourbillonnaire apparaissant dans la relation de Boussinesq (1),  $\rho$  est la masse volumique,  $k$  est l'énergie cinétique de turbulence,  $\ell$  est l'échelle de longueur de cette turbulence et  $C$  est une constante. Suivant l'hypothèse de Hanjalic [15] pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, le taux de dissipation  $\epsilon$  de l'énergie de turbulence est

$$\epsilon = C \cdot k^{3/2} / \ell \quad (5)$$

où  $C$  est constant.

Ainsi dans le cadre d'une étude avec  $k$  et  $\epsilon$  nous obtenons la relation suivante pour la viscosité tourbillonnaire.

$$\text{Avec } C_D \text{ constant. } \mu_t = C_D \rho \cdot k^2 / \epsilon . \quad (6)$$

Toutefois il est nécessaire de rappeler que tous les modèles cités plus hauts sont basés sur l'approximation de Boussinesq qui n'est pas nécessairement valable. Corrsin [16] critique cette hypothèse : "Aucune condition d'homogénéité et de stationnarité, nécessaire à la validité d'une telle approximation à l'aide d'un gradient, dans un processus de transport particulièrement aléatoire n'est identifiée, une ou plusieurs conditions analogues sont violées dans la plupart des types d'écoulements turbulents traditionnels. Donc, le fait que des modèles de transport par gradient parfois "marchent" dans des problèmes de turbulence, peut souvent être fortuit".

Pour éviter l'usage de telles approximations de transport par gradient, une technique plus élaborée doit être considérée. Ce qui même à inclure des équations de bilan pour les flux turbulents de quantité de mouvement et d'autres quantités et de faire des hypothèses de fermeture sur les grandeurs du troisième ordre en termes de quantités du second ordre. L'idée de départ fut donnée en 1942 par Kolmogorov [17], qui suggéra de caractériser la turbulence entièrement par son intensité et une échelle, et utilisa cela pour simplifier les équations. Un système complet d'équations de transport pour les moments du second et troisième ordre fut initialement proposé par Chou [18] en 1945-1947 qui donna aussi quelques schémas de fermeture pour ces équations. Les contributions significatives suivantes à la modélisation au second ordre vinrent de Rotta [19] et Davidov [20] pour modéliser le terme de corrélation entre la pression et le taux de déformation. Ces chercheurs ont posé les bases de la modélisation avec fermeture au second ordre.

Dans cette thèse, nous nous restreindrons toutefois à une fermeture du premier ordre entraînant l'utilisation de l'approximation de Boussinesq pour décrire le mélange isotherme de deux gaz de masses moléculaires différentes. Dans cette optique, deux modèles légèrement différents seront considérés.

Le premier modèle (I) utilisera l'approximation de transport par gradient telle qu'elle est proposée par Boussinesq tandis que dans le second modèle (II), cette approximation sera supposée valable pour des moyennes conventionnelles uniquement, et donc sera reformulée pour les moyennes pondérées, ce qui fera apparaître un terme comportant le gradient de masse volumique.

A) Modèle I : modèle de turbulence à deux équations pour écoulements à masse volumique variable.

Dans le cadre de ce travail, l'ensemble le plus élaboré de résultats expérimentaux concerne le mélange isotherme d'hélium et d'azote, avec ou sans gradient de pression longitudinal dans un écoulement plan cisailé. Donc, pour décrire ce type d'écoulement, à l'équation de quantité de mouvement, il faut ajouter une équation pour le transport de la fraction massique dans l'écoulement.

Les équations écrites dans le chapitre précédent sont rappelées ici.

\* Equation de continuité :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \bar{v}_\alpha) = 0 \quad (7)$$

\* Equation de quantité de mouvement :

$$\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{v}_\beta) + \bar{\rho} \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{v}_\beta) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \widetilde{v_\alpha'' v_\beta''}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\tau}_{\alpha\beta}) \quad (8)$$

avec 
$$\bar{\tau}_{\alpha\beta} = \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} (\overline{\mu D}) \quad (9)$$

et 
$$D = \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \quad (10)$$

\* Equation de fraction massique  $\bar{C}_I = \frac{\bar{\rho}_I}{\bar{\rho}} \neq \left( \frac{\bar{\rho}_I}{\bar{\rho}} \right)$  :

$$\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{C}_I) + \bar{\rho} \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{C}_I) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \widetilde{v_\alpha'' C_I''}) + \bar{\rho} \mathcal{D}_I \frac{\partial \bar{C}_I}{\partial x_\alpha} + \mathcal{D}_I \bar{\rho} \frac{\partial \bar{C}_I''}{\partial x_\alpha} \quad (11)$$

\* Equation de l'énergie de turbulence  $k = \frac{1}{2} \overline{v''_{\alpha} v''_{\alpha}}$  :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (k) + \bar{\rho} \tilde{v}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (k) = & - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[ \bar{\rho} \overline{v''_{\alpha} k} + \delta_{\alpha k} \overline{v''_k p'} - v''_{\beta} \tau_{\alpha\beta} \right] \\ & + \overline{p' D''} - \bar{\rho} \varepsilon - \bar{\rho} \overline{v''_{\alpha} v''_{\beta} \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}} - \overline{v''_{\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_{\alpha}}} \end{aligned} \quad (12)$$

\* L'équation pour  $\varepsilon$  n'est pas rappelée ici à cause de sa longueur.

\* Equation pour les corrélations de densités partielles.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (Q_{IJ}) + \tilde{v}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (Q_{IJ}) = & - 2 \tilde{D} Q_{IJ} - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\overline{v''_{\alpha} Q_{IJ}}) - \overline{D'' Q_{IJ}} \\ & - \bar{\rho} \tilde{c}_I \overline{\rho'_J D''} - \bar{\rho} \tilde{c}_J \overline{\rho'_I D''} - \overline{v''_{\alpha} \rho'_J \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{\rho} \tilde{c}_I)} - \overline{v''_{\alpha} \rho'_I \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{\rho} \tilde{c}_J)} - \overline{\rho'_J \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} J_{\alpha I}} \\ & - \overline{\rho'_I \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} J_{\alpha J}} \end{aligned} \quad (13)$$

dans laquelle le terme de flux massique est défini par

$$J_{\alpha I} = - \rho \mathcal{D}_I \frac{\partial c_I}{\partial x_{\alpha}} \quad (14)$$

en accord avec la première loi de Fick de diffusion.

Pour un mélange de gaz parfaits, l'équation d'état est [21]

$$\bar{P} = \bar{\rho} R T \sum_I \frac{\tilde{c}_I}{M_I} \left( 1 + \frac{\rho'_I T'}{\bar{\rho} \bar{T}} \right) \quad (15)$$

Dans le cas d'écoulements isothermes, l'équation (15) se réduit à

$$\bar{P} = \bar{\rho} R T \sum_I \frac{\tilde{c}_I}{M_I} \quad (16)$$

L'ensemble des équations (7) à (16) contient en plus des variables moyennes conventionnelles, différentes corrélations inconnues.

1) Equation de la quantité de mouvement.

L'application de l'hypothèse de Boussinesq aux quantités moyennées avec pondération par la masse volumique donne la forme suivante pour le terme de diffusion turbulente (voir réf. [14], [22])

$$-\bar{\rho} \overline{v''_{\alpha} v''_{\beta}} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \bar{v}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mu_t \bar{D} + \bar{\rho} k) \quad (17)$$

avec la viscosité turbulente définie par

$$\mu_t = C_D \bar{\rho} \frac{k^2}{\epsilon} \quad (18)$$

$C_D$  est une constante empirique dont la valeur est 0.09 (voir [14])  $\delta_{\alpha\beta}$  est le symbole de Kronecker et  $D$  est la divergence de la vitesse

2) Equation de fraction massique.

Il n'y a aucune raison pour limiter cette formulation au seul flux turbulent de quantité de mouvement. Ainsi en utilisant le concept du nombre turbulent de Schmidt/Prandtl qui permet au scalaire transporté d'être diffusé par la turbulence du champ de vitesse à un taux différent de celui de la quantité de mouvement si ce nombre est différent de l'unité, nous obtenons pour le terme de diffusion massique

$$-\bar{\rho} \overline{v''_{\alpha} c''_I} = \frac{\mu_t}{\sigma_{CI}} \frac{\partial \bar{c}_I}{\partial x_{\alpha}} \quad (19)$$

$\sigma_{G_1}$  est le nombre de Schmidt turbulent associé à la variable  $C_I$ . Le terme  $\rho \frac{\partial C''_I}{\partial x_{\alpha}}$  est négligé.

### 3) Equation de l'énergie cinétique de la turbulence.

Dans cette équation, apparaissent les moments inconnus suivants :

$$\overline{p'D''}, \overline{v''_{\beta} \tau_{\alpha\beta}}, \overline{v''_{\beta} k}, \overline{v''_{\beta} p'} \text{ et } \overline{v''_{\alpha}}.$$

a) Considérons tout d'abord le terme  $\overline{p'D''}$ .

Aucune approximation autre que de négliger ce terme n'a été proposée jusqu'à ce jour, mais il semble que pour des écoulements avec fort gradient de pression et fluctuations de masse volumique ce terme peut être d'une certaine importance. Comme ce terme doit être nul si  $\rho = \text{cte}$  et si  $k = 0$ , l'approximation suivante sera utilisée.

$$\overline{p'D''} = C_{p1} \bar{\rho} k \bar{D} \quad (20)$$

On remarquera que la divergence de la vitesse  $D$  s'annule si l'écoulement est incompressible ( $\rho = \text{cte}$ ).

b) Terme  $\overline{v''_{\beta} k}$

Ce terme doit être considéré comme le terme de diffusion de  $k$  par la turbulence. Aussi, par analogie avec l'équation (19) nous pouvons écrire

$$-\bar{\rho} \overline{v''_{\beta} k} = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_{\beta}}$$

$\sigma_k$  est ici le nombre de "Schmidt" turbulent associé à la variable  $k$ .

c) Terme  $\overline{v''_{\beta} \tau_{\alpha\beta}}$

Ce terme a le caractère d'une diffusion moléculaire de  $k$  et est petit comparé au terme de diffusion turbulente. Il est donc négligé pour les écoulements à grand nombre de Reynolds.

d) Terme  $\overline{v''_k p'}$

Il existe très peu d'informations au sujet de ce terme de diffusion.

Le négliger est donc considéré comme une hypothèse acceptable pourvu que les fluctuations de pression et de masse volumique soient modérées. Néanmoins, une approximation possible pour un écoulement dans lequel la masse volumique peut varier fortement est de relier ce terme à une vitesse caractéristique de la turbulence  $\sqrt{k}$  et à une pression dynamique turbulente par

$$\overline{v''_k p'} = C_{p2} \bar{\rho}(k)^{3/2} \quad (22)$$

e) Terme  $\overline{v''_\alpha} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_\alpha}$

Dans le cadre d'un modèle turbulence à deux paramètres, la quantité  $\overline{v''_\alpha}$  n'est pas connue explicitement. Toutefois, dans le second chapitre, il a été montré que  $\overline{v''_\alpha}$  pouvait être reliée à la corrélation densité-vitesse correspondante par

$$\overline{v''_\alpha} = - \frac{\overline{\rho' v'_\alpha}}{\bar{\rho}} \quad (23)$$

L'usage de la formule de Schwarz permet d'avoir une limite pour cette dernière corrélation :

$$|\overline{\rho' v'_\alpha}| \leq [\overline{\rho'^2} \cdot \overline{v'^2}]^{1/2} \quad (24)$$

Cela permet de suggérer la relation suivante

$$\overline{v''_\alpha} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_\alpha} = - C_{p3} \frac{1}{\bar{\rho}} \left[ \overline{\rho'^2} \cdot k \right]^{1/2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_\alpha} \quad (25)$$

ce qui suppose que  $\rho'$  et  $v'_\alpha$  sont corrélés positivement partout dans l'écoulement. Cette faiblesse de l'hypothèse peut être supprimée par quelques arguments qualitatifs.

Considérons la corrélation  $\overline{\rho' v'_\alpha}$ . Une analogie est qualitativement possible avec l'approximation de transport par gradient qui est utilisée dans les équations pour les variables primitives ( $\hat{v}_\alpha$ ,  $\hat{C}_I$ ).

$$-\overline{\rho' v'_\alpha} = C \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_\alpha} \quad (26)$$

C joue le rôle d'une viscosité, c'est donc une quantité positive. Il s'ensuit donc que  $\overline{\rho'v'_\alpha}$  doit avoir un signe opposé à celui du gradient de masse volumique. Donc le modèle (25) peut être utilisé seulement si la constante  $C_{\rho 3}$  est donnée avec un signe en accord avec celui du gradient de masse volumique.

#### 4 - Equation de dissipation

En addition aux processus classiques de diffusion, production et destruction, tels qu'ils ont été mis en évidence par Jones et Launder [14] la forme compressible de l'équation pour le taux de dissipation  $\epsilon$  montre l'influence de la divergence de la vitesse, les fluctuations de masse volumique et les gradients de pression (voir le chapitre II). Pour éviter une notation trop lourde, l'équation de dissipation est ré-écrite ici sous une forme synoptique :

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = D_f + P-V + S_D + S_P + S_\rho + S_m \quad (27)$$

Le terme de gauche de cette égalité est la dérivée lagrangienne de  $\epsilon$ . La signification de tous les termes de droite et leurs hypothèses de modélisation sont données maintenant, suivant les idées de Jones et Launder [14], Kollmann [23] et Bray et al. [24] avec quelques sensibles modifications.

a) Terme  $D_f$  :

$$D_f = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \overline{v''_\alpha \epsilon} - \frac{1}{\rho} \overline{\tau''_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_{\alpha\delta}}{\partial x_\delta}} - \frac{1}{\rho} \overline{\tau'_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_{\alpha\delta}}{\partial x_\delta}} \right. \\ \left. + \overline{\tau_{\alpha\beta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_\beta}} + \overline{\tau_{\alpha\beta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_\beta}} \right]$$

Ce terme représente la diffusion de  $\epsilon$  due à la turbulence, ou plutôt aux fluctuations de vitesse, de viscosité, de pression et de masse volumique.

Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, tous les processus moléculaires peuvent être négligés devant les actions turbulentes. Ce terme  $D_f$  est donc modélisé en utilisant une approximation du type gradient moyen :

$$D_f = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] \quad (29)$$

b) Termes P-V :

$$P = -\mu \left[ \frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\gamma} \frac{\partial v''_\gamma}{\partial x_\delta} \left( \frac{\partial v''_\delta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\delta} \right) - \frac{4}{3} D'' \frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial v''}{\partial x_\alpha} \right] \quad (30)$$

Ce terme correspond à la production de  $\epsilon$  due à un mécanisme d'élongation des structures tourbillonnaires.

$$V = 2 \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \tau_{\alpha\delta}}{\partial x_\delta}} \quad (31)$$

V est la destruction de  $\epsilon$  due à la viscosité moléculaire. Dans ce travail de modélisation, il est nécessaire de considérer P et V ensemble car ses quantités dépendent toutes deux du nombre de Reynolds de la turbulence  $R_t = \frac{k^2}{\nu \epsilon}$  et tendent vers l'infini quand  $R_t \rightarrow \infty$ , tandis que leur différence reste finie. (voir réf. [15] et [25]). Le modèle suggéré pour ces termes est indépendant de  $R_t$ , suivant Hanjalic [15]:

$$P-V = -C_{\epsilon 1} \bar{\rho} \frac{\epsilon}{k} \overline{v''_\alpha v''_\beta} \frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\beta} - C_{\epsilon 2} \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (32)$$

Donc pour un écoulement de type couche limite dont les lignes de courant sont alignées avec l'axe des x, les contraintes de Reynolds peuvent être exprimées comme dans l'équation de quantité de mouvement et il vient alors :

$$P - V = C_{\epsilon 1} \mu_t \frac{\epsilon}{k} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 - C_{\epsilon 2} \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k}.$$

c) Terme  $S_D$  :

$$S_D = -\frac{2}{3} \tilde{D} \bar{\rho} \epsilon + \frac{1}{3} \overline{D'' \epsilon} - \frac{4}{9} \mu \left[ \overline{D''^3} + 2 \overline{D''^2 \tilde{D}} + \overline{D'' \tilde{D}^2} \right] \\ + \frac{2}{3} \mu \left[ \tilde{D} \left[ \frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial v''_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + 4 D'' \frac{\partial v''_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + 2 \tilde{D} \frac{\partial \tilde{v}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \overline{v''_{\beta}}}{\partial x_{\beta}} + 2 \frac{\partial \tilde{v}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \tilde{v}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \overline{D''} \right] \right] \quad (34)$$

$S_D$  est un terme de production-dissipation dont la principale composante est la divergence de la vitesse. Une approximation grossière consiste à ne considérer que le premier terme de l'équation (34) avec une constante différente de  $\frac{2}{3}$ . Ainsi

$$S_D = -C_{\epsilon 3} \bar{\rho} \epsilon \tilde{D} \quad (35)$$

qui est égal à zéro pour le cas incompressible ( $D = 0$ ).

d) Terme  $S_P$  :

$$S_P = \frac{\partial \tau''_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \tau'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha}} \quad (36)$$

$S_P$  est le terme source du au gradient de pression moyenne. Pour estimer l'influence de  $S_P$ , nous supposons que ses composantes sont statistiquement indépendantes :

$$S_P \sim \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\overline{\tau_{\alpha\beta}}) \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_{\alpha}} \quad (37)$$

Une analyse dimensionnelle de  $S_P$  suggère l'approximation suivante, par analogie avec l'équation pour l'énergie cinétique de la turbulence (voir réf. [26]) :

$$S_P = -C_{\epsilon 4} \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{\sqrt{\rho'{}^2}}{\bar{\rho}} \right) \frac{\epsilon}{k} (k \cdot \rho'{}^2)^{1/2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_{\alpha}} \quad (38)$$

Pour ce terme, Kollmann fait une suggestion quelque peu différente (réf. 23) pour un écoulement parabolique,

$$S_P = - C_{\epsilon 4} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \frac{1}{\rho} (\overline{k \cdot \rho'^2})^{1/2} \right] \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \quad (39)$$

mais l'expérience montre que le principal effet d'un tel terme est d'introduire des instabilités à cause de la présence d'une dérivée seconde de  $\left[ \frac{1}{\rho} (\overline{k \cdot \rho'^2})^{1/2} \right]$ .

e) Terme  $S_\rho$  :

$$S_\rho = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Lambda \left[ \tau_{\alpha\beta} + \bar{\tau}_{\alpha\beta} \right] \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\tau_{\alpha\beta}) - \mu \frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\gamma} \left( 3 \frac{\partial \tilde{v}_\gamma}{\partial x_\delta} \frac{\partial \tilde{v}_\delta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tilde{v}_\delta}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\delta} \right) - \tau_{\alpha\gamma} \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial \tilde{v}_\beta}{\partial x_\gamma} \quad (40)$$

$S_\rho$  est une collection de vitesses moyennes et de corrélations densité-vitesse qui est négligée ici [21] .

f) Terme  $S_m$  :

$$S_m = - \epsilon_{\alpha\gamma} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\gamma} - \frac{1}{v_\delta} f_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\delta \partial x_\gamma} - \mu \left[ \frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\gamma} \frac{\partial v''_\gamma}{\partial x_\delta} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\delta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\delta} \right) + 2 \frac{\partial v''_\alpha}{\partial x_\gamma} \frac{\partial v''_\delta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \tilde{v}_\gamma}{\partial x_\delta} \right] \quad (41)$$

Ce terme est essentiellement dû au tourbillon moyen :

$$S_m = C_{\epsilon 5} \mu \frac{\mu_t}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right)^2 \quad (42)$$

5. Equations pour les corrélations de densités partielles.

Les termes inconnus des équations pour  $Q_{IJ}$  ont l'une des formes suivantes  $\overline{Q_{IJ} D''}$ ,  $\overline{v''_{\alpha} Q_{IJ}}$ ,  $\overline{\rho'_I D''}$ ,  $\overline{\rho'_I v''_{\beta}}$  ou  $\overline{\rho'_I \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (J_{\alpha J})}$ .

Les approximations de modélisation suivantes sont utilisées [23].

a)  $\overline{Q_{IJ} D''} \rightarrow$  ce terme est négligé

b)  $\overline{\rho'_I D''} \rightarrow$  ce terme est négligé

c)  $\overline{v''_{\beta} Q_{IJ}} \rightarrow$  une approximation du type gradient moyen est utilisée :

$$-\overline{\rho v''_{\beta} Q_{IJ}} = \frac{\mu_t}{\sigma_Q} \frac{\partial Q_{IJ}}{\partial x_{\beta}} \quad (43)$$

d)  $\overline{v''_{\beta} \rho'_I} \rightarrow$  de même que pour le terme précédent

$$-\overline{\rho v''_{\beta} \rho'_I} = -\overline{\rho v''_{\beta} (\rho C_I)''} = \frac{\mu_t}{\sigma_I} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\overline{\rho} \chi_I) \quad (44)$$

e) une estimation des ordres de grandeur des différentes contributions mène à la relation suivante :

$$-\overline{(\rho C_I)'' \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (J_{\alpha J})} - \overline{(\rho C_J)'' \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (J_{\alpha I})} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[ (\mathcal{D}_I + \mathcal{D}_J) \frac{\partial Q_{IJ}}{\partial x_{\alpha}} \right]$$

$$- C_{Q1} \frac{\varepsilon}{k} Q_{IJ} + C_{Q2} \left[ \overline{\chi_I \rho' (\rho C_J)''} + \overline{\chi_J \rho' (\rho C_I)''} \right] \frac{\varepsilon}{k} \quad (45)$$

Les corrélations  $\overline{\rho' (\rho C_I)''}$  et  $\overline{\rho' (\rho C_J)''}$  sont définies dans le chapitre II par

$$\overline{\rho' (\rho C_I)''} = \sum_{J=1}^N Q_{IJ} \quad (46)$$

Dans le cas présent de mélange binaire  $N = 2$ .

## 6. Systeme fermé d'équations.

Pour résumer cette partie concernant le premier modèle de turbulence les équations pour un écoulement bidimensionnel parabolique stationnaire sont données dans le tableau I.

B) Modèle II - Modèle de turbulence à deux équations pour écoulements à masse volumique variable. Approximation de transport par gradient exprimée en moyenne pondérée.

Corsin (réf. [16]), à partir d'argument mathématiques provenant de la théorie cinétique des gaz, montra l'origine de ce qu'il appelle "Fourier/Fick transport" ou "simple gradient transport" et que nous qualifions de transport par gradient. Puis il assembla une liste de limitations à l'utilisation de telles approximations qui sont principalement :

1) pas de modification de la courbure du profil moyen sur une distance de l'ordre de l'échelle de longueur du mécanisme de transport.

2) pas de changement appréciable dans le temps, du gradient de la variable transportée à l'intérieur d'une période comparable à l'échelle de temps du mécanisme de transport.

3) l'échelle de longueur du mécanisme de transport doit être constante sur une distance égale à une longueur caractéristique de l'écoulement et sur une distance pour laquelle la valeur moyenne de la variable transportée change appréciablement.

4) la vitesse du mécanisme de transport doit être sensiblement plus uniforme que l'échelle de longueur.

Dans cette formulation, les valeurs moyennes sont temporelles et aucun facteur de pondération n'est pris en compte. Puisque l'approximation du transport par gradient est basée sur des moyennes conventionnelles, il peut être très imprécis de la transposer directement en moyenne de Favre sans aucune modification.

Tableau I - Equations du modèle I - modèle (k-ε)

PRODUCTION / DISSIPATION

DIFFUSION

CONVECTION

EQUATION

EQUATION	CONVECTION	DIFFUSION	PRODUCTION / DISSIPATION
CONTINUITÉ	$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v})$	0	0
QUANTITÉ DE MOUVEMENT	$\bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y} (\mu_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y})$	$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} k)$
FRACTION MASSIQUE	$\bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{c}_I}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{c}_I}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y} (\frac{\mu_t}{\sigma c_I} \frac{\partial \tilde{c}_I}{\partial y})$	0
ÉNERGIE CINÉTIQUE DE TURBULENCE	$\bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial k}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y} (\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y})$	$\mu_t (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y})^2 - \bar{\rho} \epsilon + c_{p1} \bar{\rho} k \tilde{D}$ $+ c_{p2} \frac{1}{\rho} [\bar{\rho}^2 - k]^{1/2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x}$
TAUX DE DISSIPATION	$\bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \epsilon}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y} (\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y})$	$c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \mu_t (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y})^2 - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} - c_{\epsilon 3} \bar{\rho} \epsilon \tilde{D}$ $- c_{\epsilon 4} \frac{1}{\rho} (1 - \frac{\sqrt{\rho^2}}{\rho}) \frac{\epsilon}{k} (\overline{k \cdot \rho^2})^{1/2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x}$ $+ c_{\epsilon 5} \mu \frac{\mu_t}{\rho} (\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2})^2$
CORRELATIONS DE DENSITÉS PARTIELLES	$\bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial Q'_{IJ}}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial Q'_{IJ}}{\partial y}$	$\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\nu_t}{\sigma_Q} \frac{\partial Q'_{IJ}}{\partial y})$	$- 2 \bar{\rho} \tilde{D} Q_{IJ} + \frac{\mu_t}{\rho} [\frac{1}{\sigma_I} + \frac{1}{\sigma_J}] \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{c}_I) \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{c}_J)$ $- c_{Q1} \bar{\rho} \frac{\epsilon}{k} Q_{IJ} + c_{Q2} \bar{\rho} [\tilde{c}_I \overline{\rho' \rho'_I} + \tilde{c}_J \overline{\rho' \rho'_J}]$



Considérons  $\phi = v \cdot \phi$ .

Selon les règles de la moyenne pondérée.

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' \quad \text{ou} \quad v \cdot \phi = \widetilde{(v \cdot \phi)} + (v \cdot \phi)'' \quad (47)$$

or

$$v \cdot \phi = \tilde{v} \cdot \phi'' + v'' \cdot \tilde{\phi} + v'' \cdot \phi'' + \tilde{v} \cdot \tilde{\phi} \quad (48)$$

Donc, après passage à la moyenne pondérée

$$\widetilde{v'' \cdot \phi''} = \widetilde{v \cdot \phi} - \tilde{v} \cdot \tilde{\phi} \quad (49)$$

et il s'ensuit alors en termes de moyennes conventionnelles

$$\widetilde{v'' \cdot \phi''} = -\frac{1}{\bar{\rho}^2} \overline{\rho' v' \cdot \rho' \phi'} + \overline{v' \phi'} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho' (v \phi)'} - \frac{\bar{v}}{\bar{\rho}} \overline{\rho' \phi'} - \frac{\bar{\phi}}{\bar{\rho}} \overline{\rho' v'} \quad (50)$$

$$\widetilde{v'' \phi''} = \overline{v' \phi'} - \frac{1}{\bar{\rho}^2} \overline{\rho' v' \rho' \phi'} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho' v' \phi'} \quad (51)$$

Le dernier terme de droite de l'équation (51) peut être reformulé comme

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho' v' \phi'} = \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{(\rho \phi)' v'} - \overline{\phi' v'} - \frac{\bar{\phi}}{\bar{\rho}} \overline{\rho' v'} \quad (52)$$

En combinant les équations (51) et (52) on obtient ainsi

$$-\bar{\rho} \widetilde{v'' \phi''} = -\overline{(\rho \phi)' v'} + \tilde{\phi} \overline{\rho' v'} \quad (53)$$

Considérons maintenant la nouvelle variable  $\eta = \frac{\rho \phi}{\bar{\rho}}$ . Cette définition

entraîne :

$$\bar{\eta} = \tilde{\phi} \quad ; \quad \eta' = \frac{(\rho \phi)'}{\bar{\rho}} \quad (54)$$

Selon l'approximation classique du transport par gradient pour  $\eta$  et  $\rho$  on peut donc écrire

$$-\bar{\rho} \widetilde{v'' \phi''} = \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} - \frac{\tilde{\phi}}{\bar{\rho}} \frac{\mu_t}{\sigma_\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} \quad (55)$$

Les constantes  $\sigma_\phi$  et  $\sigma_\rho$  jouent un rôle de nombre de Prandtl/Schmidt turbulent.  $\sigma_\phi$  est une façon de différencier la diffusion turbulente de  $\phi$  du flux turbulent de quantité de mouvement. Toutefois la signification de  $\sigma_\rho$  est moins claire parce que nous ne pouvons pas considérer la masse volumique

comme une réelle variable transportée. De plus, nous verrons dans le cinquième chapitre que la valeur de  $\sigma_\rho$  est tout à fait différente de celles des autres nombres de Prandtl/Schmidt turbulents. Néanmoins, nous gardons cette constante comme un nombre de Prandtl/Schmidt turbulent, au moins pour conserver une notation cohérente. L'équation (55) permet donc d'améliorer le système d'équations aux dérivées partielles établies dans le tableau I.

### 1 - Equation de quantité de mouvement.

Le terme de diffusion turbulente de cette équation pour un écoulement parabolique bidimensionnel correspond à la corrélation  $\widetilde{u''v''}$ . L'équation (55) peut donc être appliquée ici

$$-\bar{\rho} \widetilde{u''v''} = \mu_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\tilde{u}}{\bar{\rho}} \frac{\mu_t}{\sigma_\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} \quad (56)$$

### 2 - Equation de fraction massique.

Pareillement à l'équation de quantité de mouvement, le terme de flux turbulent est reformulé :

$$-\bar{\rho} \widetilde{v''C_I} = \frac{\mu_t}{\sigma_{CI}} \frac{\partial \tilde{C}_I}{\partial y} - \frac{\tilde{C}_I}{\bar{\rho}} \frac{\mu_t}{\sigma_\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} \quad (57)$$

### 3 - Equation de l'énergie cinétique de la turbulence.

Dans cette équation, l'approximation du transport par gradient est utilisée deux fois. Néanmoins, l'équation (55) ne doit pas être utilisée pour le terme de diffusion, à cause du caractère non pondéré de cette corrélation.

Il s'ensuit donc :

$$\text{diffusion : } -\bar{\rho} \widetilde{v''k} = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial y} \quad (58)$$

$$\text{production : } -\bar{\rho} \widetilde{u''v''} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 - \frac{\mu_t}{\sigma_\rho} \frac{\tilde{u}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad (59)$$

#### 4 - Equation de la dissipation.

Pour des raisons identiques, le terme de diffusion turbulente n'est pas affecté par la modification (55)

$$D_f = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \quad (60)$$

tandis que le terme de production est modifié.

$$P-V = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 - C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \frac{\mu_t}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - C_{\epsilon 2} \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (61)$$

#### 5 - Equations pour les corrélations de densités partielles.

Les termes apparaissant dans ces équations ne requièrent pas de nouvelle approximation parce que ce sont des corrélations non pondérées.

#### 6 - Système fermé d'équations.

Avec cette approximation du transport par gradient, les équations du mouvement turbulent sont données dans le tableau II.

### III-2. REALISABILITE DE LA FERMETURE

Une particularité des méthodes de modélisations fut mise en évidence quand les fermetures du second ordre furent utilisées de façon extensive pour décrire une grande variété d'écoulements turbulents. Il peut arriver que le résultat du travail mathématique qui consiste à modéliser certains termes des équations de la turbulence n'ait pas de sens physique. Un exemple typique est l'obtention de valeurs négatives pour l'énergie de turbulence. Une cause bien connue de ce phénomène dans une fermeture du second ordre est l'utilisation d'une approximation quasi normale pour représenter le terme du 4e ordre qui apparait dans le terme de diffusion des équations de transport correspondant

Tableau II - Equations du modèle II (k-ε avec gradient de masse volumique)

PRODUCTION/DISSIPATION

DIFFUSION

CONVECTION

EQUATION

EQUATION	CONVECTION	DIFFUSION	PRODUCTION/DISSIPATION
CONTINUITÉ	$\frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{v})$	0	0
QUANTITÉ DE MOUVEMENT	$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y} (\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y})$	$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} k) - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\bar{u} \mu_t}{\bar{\rho} \sigma_p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right]$
FRACTION MASSIQUE	$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial c_I}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial c_I}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_{CI}} \frac{\partial c_I}{\partial y} \right)$	$-\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{c_I}{\bar{\rho}} \frac{\mu_t}{\sigma_p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right]$
ÉNERGIE CINÉTIQUE DE LA TURBULENCE	$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right)$	$\mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \frac{\mu_t}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho} \epsilon + C_{P1} \bar{\rho} k \bar{D}$ $+ C_{P2} \frac{1}{\bar{\rho}} \left[ \bar{\rho}^2 k \right]^{1/2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$
DISSIPATION	$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \epsilon}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right)$	$C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \frac{\mu_t}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}$ $- C_{\epsilon 3} \bar{\rho} \epsilon \bar{D} - C_{\epsilon 4} \frac{1}{\bar{\rho}} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\rho}^2}{\bar{\rho}}} \right) \frac{\epsilon}{k} (k \rho')^2 \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ $+ C_{\epsilon 5} \mu_t \frac{\epsilon^2}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$
CORRELATIONS DE DENSITÉS PARTICIELLES	$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial Q_{IJ}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial Q_{IJ}}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_Q} \frac{\partial Q_{IJ}}{\partial y} \right)$	$-2 \bar{\rho} \bar{D} Q_{IJ} + \frac{\mu_t}{\bar{\rho}} \left[ \frac{1}{\sigma_I} + \frac{1}{\sigma_J} \right] \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} c_I) \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} c_J)$ $- C_{Q1} \bar{\rho} \frac{\epsilon}{k} Q_{IJ} + C_{Q2} \bar{\rho} (c_I \rho'_{I'} + c_J \rho'_{J'})$



aux termes du troisième ordre. Toutefois, même avec des fermetures du premier ordre, il est nécessaire d'assurer un sens physique aux variables durant la procédure de calcul. Les moyens les plus évidents pour cela sont de forcer les variables au-dessus ou au-dessous d'une limite connue. Le principe de covariance positive (énergie) est un critère; un autre critère est l'inégalité de Schwarz.

$$\widetilde{v''_{\alpha}} \widetilde{v''_{\alpha}} \geq 0 \quad (62)$$

$$\left[ \widetilde{v''_{\alpha}} \widetilde{v''_{\beta}} \right]^2 \leq \widetilde{v''_{\alpha}^2} \cdot \widetilde{v''_{\beta}^2} \quad (63)$$

Une description plus complète de ce problème, qui, il faut le souligner, apparaît principalement pour les fermetures du second ordre peut être trouvée dans la référence [27].

La condition (62) est très simple à mettre en oeuvre, tandis que, dans le cas d'une corrélation quelconque, l'utilisation de (63) est tributaire de la connaissance de la covariance de chaque terme. Les corrélations de densités partielles sont un exemple de termes avec lesquels, l'inégalité de Schwarz ne peut pas être utilisée. Il est donc nécessaire de développer une approche différente pour obtenir des conditions de réalisabilité. Considérons  $P(\rho, C_I)$ , fonction densité de probabilité moyennée conventionnellement pour les variables  $\rho$  et  $C_I$ , masse volumique et fraction massique. Cette pdf peut être utilisée pour définir la pdf de  $C_I$  en moyenne pondérée.

$$\bar{P}(C_I) = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} d\rho \cdot \rho \cdot P(\rho, C_I) \quad (64)$$

Il s'ensuit donc par définition

$$\int_0^1 C_I \bar{P}(C_I) dC_I = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \int_0^1 \rho C_I P(\rho, C_I) d\rho \cdot dC_I \quad (65)$$

$$\text{et } \bar{\rho} \bar{\chi}_I = \int_0^\infty \int_0^1 \rho C_I \cdot P(\rho, C_I) d\rho \cdot dC_I \quad (66)$$

La définition de la moyenne pondérée permet d'écrire

$$(\rho C_I)^{''2} = (\rho C_I)^2 - 2 \cdot \rho \cdot C_I \bar{\rho} \bar{\chi}_I + (\bar{\rho} \bar{\chi}_I)^2 \quad (67)$$

et celle de pdf.

$$\overline{(\rho C_I)^{''2}} = \int_0^\infty \int_0^1 d\rho dC_I P(\rho, C_I) (\rho^2 C_I^2 - 2\rho C_I \bar{\rho} \bar{\chi}_I + \bar{\rho}^2 \bar{\chi}_I^2) \quad (68)$$

$$\text{ou } \overline{(\rho C_I)^{''2}} = \int_0^\infty \int_0^1 d\rho dC_I P(\rho, C_I) \rho^2 C_I^2 - \bar{\rho}^2 \bar{\chi}_I^2 \quad (69)$$

En l'absence de réaction chimique, la masse volumique est limitée par l'une ou l'autre des valeurs limites.

$$\rho \leq \rho_0 = \text{Max}(\rho) \quad (70)$$

et dans tous les cas  $C_I \leq 1$ .

L'équation (69) devient donc

$$Q_{II} = \overline{(\rho C_I)^{1/2}} \leq \rho_0 \int_0^\infty \int_0^1 d\rho dC_I P(\rho, C_I) \rho \cdot C_I - \bar{\rho}^2 \bar{\chi}_I^2 \quad (71)$$

$$\text{ou } Q_{II} \leq \rho_0 \bar{\rho} \bar{\chi}_I \left[ 1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \bar{\chi}_I \right] \quad (72)$$

L'inégalité (72) est une première condition de réalisabilité pour les corrélations de densité partielles. Une seconde inégalité pour le mélange binaire est

$$Q_{IJ} \leq \rho_0 \bar{\rho} (1 - \bar{\chi}_I) \left[ 1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} (1 - \bar{\chi}_I) \right] \quad (73)$$

Pour la troisième corrélation l'inégalité de Schwarz peut maintenant être utilisée

$$(Q_{IJ})^2 \leq Q_{II} \cdot Q_{JJ} \quad (74)$$

Ces inégalités peuvent être donc utilisées pour limiter la valeur des corrélations si cela est nécessaire (l'expérience montre que de telles conditions le sont rarement); toutefois le principe des covariances positives s'applique également à  $Q_{II}$ ,  $Q_{JJ}$  pour la limite inférieure. Les inégalités (62), (63), (72), (73) et (74) sont donc un moyen de forcer les résultats de calcul à une signification physique, mais il faut admettre que durant un calcul ordinaire, ces conditions ne sont pratiquement pas utilisées, les inégalités étant rarement violées.

### III-3. INVARIANCE

La question de l'invariance dans les problèmes de modélisation est un domaine largement ouvert à la discussion. Récemment un article de Speziale [28] a donné une démonstration formelle que les équations de transport pour les contraintes de Reynolds ne sont pas invariantes dans un changement arbitraire de système de références tandis que les contraintes de Reynolds, et certaines équations de transport pour des grandeurs telles que l'énergie cinétique de turbulence ou des échelles de longueur le sont. Donaldson [29], argumentant pour l'invariance, a montré que l'expression de longueur de mélange de Prandtl pour les contraintes de Reynolds est satisfaite par tout changement de système de références. Les résultats de Speziale pour les deux équations de turbulence permettent donc de conclure que les modèles de turbulence à deux paramètres, qui utilisent l'approximation de Boussinesq sont invariants, quelle que soit la transformation du système de référence.

III - REFERENCES

- 1 BOUSSINESQ J. 1877 "Essai sur la théorie des eaux courantes".  
Mémoire présenté par divers savants à l'académie  
des Sciences Paris. Tome 23, n° 1, pp. 1-680.
- 2 BOUSSINESQ J. 1897 "Théorie de l'écoulement tourbillonnant et  
tumultueux des liquides dans les lits rectilignes  
à grande section". I-II Gauthier-Villars, Paris.
- 3 TENNEKES H. et LUMLEY J.L. "A first course in turbulence" 1973  
MIT Press. Cambridge - Massachussets.
- 4 LUMLEY J.L. "Prédiction methods for turbulent flows - Introduction"  
VKI Lecture Series 76 - 1975 Rhode St Genese - Belgique.
- 5 PRANDTL Z. Angew. Math. Mech. 5, 136-1925.
- 6 VON KARMAN Th. Nachr. ges. Wiss. Gottingen  
Math-Physik XI 1930 ou NACA-TM-611.
- 7 MONIN A.S. et YAGLOM A.M. (1971) Statistical fluid Mechanics,  
Vol. 1". J.L. Lumley Ed. MIT Press Cambridge-Massachussets.
- 8 LAUNDER B.E. et SPALDING D.B. "Lectures in mathematical models of  
turbulence". Academic Press, London. 1972.
- 9 TAYLOR G.I. "The transport of vorticity and heat through fluids in  
turbulent motion". 1932. Proc. Roy. Soc. A 135 n° 828  
pp. 685-706.

- 10 Ng. K.H. et SPALDING D.B. "Some applications of a model of turbulence for boundary layers near walls".  
1969. Imp. coll. Mech. Eng. Rep. BL/TN/A/14
- 11 RODI W. et SPALDING D.B. "A two parameter model of turbulence and its applications to free jets".  
(1970) Wärme und Stoffübertragung Bd 3-585-95.
- 12 SPALDING D.B. "Concentration fluctuations in a round jet" Chem. Eng. Sci. 26,95 (1971).
- 13 HARLOW F.H. et NAKAYAMA P.I. "Transport of turbulence energy decay rate". Los Alamos Scient. Lab. Rep. LA 3854 (1968).
- 14 JONES W.P. et LAUNDER B.E. "The prediction of laminarization with a two equation model of turbulence". Int. J. of Heat Mass transfer Vol. 15- pp. 301-314 (1972).
- 15 HANJALIK K. "Two dimensional asymmetrical turbulent flow in ducts".  
Ph. D. thesis U of London (1970).
- 16 CORRSIN S. "Limitations of gradient transport models in random walks and in turbulence". Advances in Geophysics.  
Academic Press (1973).
- 17 KOLMOGOROV A.M. "Equation of turbulent motion of an incompressible fluid". Izvestiya. A.N. URSS (1942). Ser. Fiz 6  
n° 1-2, pp. 56-58.
- 18 CHOU P.Y. a) "on velocity correlations and the solution of the equation of turbulent fluctuation".  
(1945) Quart. Appl. Math. 3, n° 1, pp. 38-54.

- CHOU P.Y. b) "Pressure flow of a turbulent fluid between parallel planes.  
(1945) Quart. Appl. Math. 3, n° 3, pp. 198-209.
- c) "Turbulent flow along a semi infinite plane"  
(1947) Quart. Appl. Math. 5, n° 3, pp. 346-353.
- 19 ROTTA J.C. "Statistiche Theorie Nichthomogener Turbulenz"  
(1951) Zeitsch für Physik 129 n° 5, pp. 547-572.  
132 n° 1, pp. 51-77.
- 20 DAVIDOV (1958) "Phenomenological equation of statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid".  
Zh. Eksp. Teor Fiz 35, n° 2 (8), pp. 527-529.  
(1959) "Statistical dynamic of an incompressible turbulent fluid".  
Doklady A.N. URSS 127, n° 4, pp. 768-771  
(1959) "Statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid".  
Doklady A.N. URSS 136, n° 1, pp. 47-50.
- 21 KOLLMANN W. "Berechnung von turbulenten Verbrennungsvorgängen in Flammen and Brennkammern".  
1979. Thèse d'Habilitation. RWTH Aachen
- 22 KOLLMANN W. et VANDROMME D. "The calculation of free turbulent shear flows with strong density fluctuations".  
1979. Int f. Heat Mass. transfer Vol. 22, pp. 1557-1565.
- 23 KOLLMANN W. "Analysis of the turbulent mixing process in downstream mixing gas dynamic lasers".  
1977- VKI IN 56. Rhode St Genèse. Belgique.

- 24 BRAY K.N.C., PRATT N.H. et HEWLEY D.J. "Review of modelling problems in turbulent mixing chemical lasers".  
1<sup>st</sup> Int. Symp. on Gasdynamic and Chemical Lasers  
Köln 1976, pp. 75-98.
- 25 HANJALIC K. et LAUNDER B.E. "Contribution towards a Reynolds stress closure for low Reynolds number turbulence".  
1976. J.F.M. 74, p. 593.
- 26 KOLLMANN W. et VANDROMME D. "Turbulent shear flow with fluctuating density".  
Paper 79-1485. AIAA 12<sup>th</sup> Fluid and Plasma dynamics conference July 1979. Williamsburg-Virginia.
- 27 VANDROMME D. "Turbulence Modelling in variable density flows".  
These de doctorat en Sciences Appliquées - 1980-  
Bruxelles.
- 28 SPEZIALE C.G. "Invariance of turbulent closure models" (1979).  
Physics of Fluids vol. 22, n° 6.
- 29 DONALDSON C. du P., SULLIVAN R.D. et ROSENBAUM H.  
"A theoretical study of the generation of  
atmosphère clear air turbulence".  
AIAA J. Vol. 10, n° 2 (1972).

## CHAPITRE IV

TRAITEMENT NUMERIQUE

## 1. FORME GENERALE DE L'EQUATION PARABOLIQUE DE TRANSPORT.

- Description globale de la procédure numérique.

## 2. CHANGEMENT DE COORDONNEES.

- Aspects théoriques.
- Transformation du système de coordonnées.
- Problème différentiel transformé.
- Conséquences des nouvelles coordonnées.

## 3. SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES.

## 4. FORMULATION AUX DIFFERENCES FINIES.

## 5. ALGORITHME DE THOMAS.

## 6. CARACTERISTIQUES.

- 1) Différences avec la méthode de Patankar-Spalding.
- 2) Procédure numérique.
- 3) Taille du programme.

## 7. CONCLUSIONS.

- Avantages du changement de coordonnées.
- Restrictions des problèmes paraboliques.

#### IV-1. LA PROCEDURE DE RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES PARABOLIQUES.

Une version modifiée de la méthode de Patankar et Spalding est décrite dans ce chapitre. La base est évidemment le livre [2] mais plusieurs caractéristiques ont été modifiées, comme le traitement des termes sources et des points de glissement. Partant de la forme générale des équations paraboliques de transport et après un changement approprié de coordonnées (§ 2), nous obtiendrons une forme commune pour toutes les équations :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + (A + B\omega) \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( C \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) + S_{\phi} \quad (1)$$

Puis cette équation sera mise sous forme de différences finies.

A cause de ses propriétés de type couche limite, cette équation peut être résolue par une procédure d'intégration pas à pas. C'est-à-dire que, à une position  $x$ , la variable  $\phi$  étant connue pour des valeurs discrètes de  $\omega$ , la tâche consistera à obtenir  $\phi$  aux mêmes valeurs de  $\omega$  à une position légèrement différente  $x + \Delta x$ . Ainsi, tout le domaine de l'écoulement peut être couvert par répétition, pas à pas, de cette opération de base.

Le moyen le plus commun d'obtenir une équation aux différences finies à partir d'une équation différentielle est le suivant : chaque terme est remplacé par son développement en série de Taylor et, après réarrangement, nous obtenons une relation entre une collection de valeurs de  $\phi$  à des noeuds adjacents du maillage et des expressions différentielles. Toutefois, dans le présent travail une méthode différente sera utilisée : chaque cellule élémentaire du maillage sera considérée comme un domaine d'intégration. Sur chaque cellule, une intégration sera effectuée. Ceci serait évidemment impossible sans une hypothèse sur la nature des variations de  $\phi$  entre deux noeuds adjacents dans le sens des  $\omega$  et dans le sens des  $x$ . En d'autres termes, l'équation aux différences finies est obtenue en remplaçant chaque terme de l'équation aux dérivées partielles par le résultat d'une intégration sur le

petit volume de contrôle. Ainsi, contrairement à la méthode de développement en série de Taylor, cette procédure assure que l'équation de continuité est satisfaite partout dans le domaine de l'écoulement.

En développant cette méthode avec plus de détails, nous verrons dans les paragraphes suivants comment mettre une équation standard de transport sous la forme (1) à l'aide d'un changement de coordonnées approprié et quel est l'intérêt d'un tel changement. Puis une courte description du maillage sera suivie par la transformation de l'équation aux dérivées partielles (1) en un système d'équations portant sur trois points (système tridiagonal) adjacents de maillage. Après une courte description de l'algorithme de Thomas des considérations générales, sur les conséquences d'une telle méthode, seront données avec quelques remarques au sujet de la précision et des temps de calcul nécessaires pour une exécution.

#### IV-2. CHANGEMENT DE COORDONNEES

##### I. Aspects théoriques

Considérons le système suivant d'équations paraboliques différentielles formulées en deux dimensions :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_u \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial y} \right) + S_{\phi^\alpha} \quad (2)$$

avec les conditions à l'entrée du domaine pour  $x = x_0$  que nous appellerons conditions initiales :

$$\begin{cases} u = u_0(y) \\ \phi^\alpha = \phi_0^\alpha(y) \quad ; \alpha \in [1, N] \end{cases} \quad (3)$$

et les conditions aux limites

$$y = y_E(x) \Rightarrow u = u_E(x, y_E(x)); \phi^\alpha = \phi_E^\alpha(x, y_E(x)) \quad (4)$$

$$y = y_I(x) \Rightarrow u = u_I(x, y_I(x)); \phi^\alpha = \phi_I^\alpha(x, y_I(x))$$

$y_E(x)$  et  $y_I(x)$  sont les frontières du domaine de calcul. Ces frontières peuvent être des lignes de courant, mais le transport moyen de masse à travers les limites inférieures et supérieures est possible pourvu que le caractère parabolique de l'écoulement ne soit pas détruit.

Le système (1), (2) doit être complété par l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (5)$$

Un système équivalent peut être écrit pour des problèmes axisymétriques :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu \frac{\partial u}{\partial r}) + S_u - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (6)$$

$$\rho u \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{D} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial r}) + S_{\phi^\alpha} \quad (7)$$

avec l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v) = 0 \quad (8)$$

et des conditions aux limites

$$x = x_0 \Rightarrow u = u_0(r); \phi^\alpha = \phi_0^\alpha(r), \alpha \in [1, N] \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = r_E(x) \Rightarrow u = u_E(x, r_E(x)); \phi^\alpha = \phi_E^\alpha(x, r_E(x)) \\ r = r_I(x) \Rightarrow u = u_I(x, r_I(x)); \phi^\alpha = \phi_I^\alpha(x, r_I(x)) \end{array} \right. \quad (10)$$

Le passage du cas axisymétrique au cas plan bidimensionnel est immédiat en remplaçant  $\frac{\partial}{\partial r}$  par  $\frac{\partial}{\partial y}$  et en posant  $r = 1$ .

Ainsi dans la suite, seul le cas axisymétrique sera considéré.

Ce système est écrit pour des valeurs instantanées des différentes variables. En fait, pour les problèmes d'écoulements turbulents, les équations qui sont résolues concernent les valeurs moyennes de ces variables. Comme le chapitre II l'a montré, deux statistiques différentes peuvent être considérées :

- moyenne non pondérée (moyenne temporelle conventionnelle)  
dénotée par  $\bar{\phi}$ .
- moyenne pondérée par la masse volumique (moyenne de Favre)  
dénotée par  $\tilde{\phi}$ .

Comme ce système d'équations est supposé valable pour les deux statistiques, elles seront représentées par le symbole commun  $\langle \rangle$ . Le système d'équations moyennes peut donc être écrit :

$$\langle \rho \cdot u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle \rho \cdot v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial r} \right) - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} + S_u \quad (11)$$

$$\langle \rho \cdot u \rangle \frac{\partial \langle \phi^\alpha \rangle}{\partial x} + \langle \rho \cdot v \rangle \frac{\partial \langle \phi^\alpha \rangle}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mathcal{D} \frac{\partial \langle \phi^\alpha \rangle}{\partial r} \right) + S_{\phi^\alpha} \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \rho \cdot u \rangle + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \langle \rho \cdot v \rangle) = 0 \quad (13)$$

avec un ensemble de conditions aux limites équivalentes à (10).

## II. Transformation du système de coordonnées

La fonction de courant  $\psi$  peut être définie par

$$d\psi = \langle \rho \cdot u \rangle r dr - \langle \rho \cdot v \rangle r dx \quad (14)$$

ce qui mène à

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_x = - \langle \rho \cdot v \rangle r \quad (15)$$

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_x = \langle \rho \cdot u \rangle r \quad (16)$$

Pour un écoulement turbulent, c'est une procédure purement formelle puisqu'il peut y avoir un écoulement transverse instantané sur les lignes moyennes de courant. Après dérivation de (15) par rapport à  $r$  et de (16) par rapport à  $x$ , il apparaît que l'utilisation d'une telle fonction de courant assure que l'équation de continuité (13) sera satisfaite automatiquement. Cette équation n'a donc plus besoin d'être considérée dans la suite. Le système de coordonnées  $(x,r)$  est transformé en deux étapes.

$$1) \quad \begin{array}{l} x = x(\xi, \psi) \\ r = r(\xi, \psi) \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \xi = x \\ d\psi = \langle \rho \cdot u \rangle r \, dr \end{array}$$

ce qui entraîne :

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_r = 1 \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)_x = 0$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_r = -\langle \rho v \rangle r \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_x = \langle \rho u \rangle r$$

Considérons maintenant une fonction  $\psi(x,r)$ ; ses dérivées partielles se transformeront en :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_r = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right) - \langle \rho u \rangle r \left(\frac{\partial \psi}{\partial \psi}\right)_\xi \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_x = \langle \rho u \rangle r \left(\frac{\partial \psi}{\partial \psi}\right)_\xi \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left[ K \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_x \right] \right)_x = \langle \rho u \rangle r \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \left[ K \langle \rho u \rangle r \left(\frac{\partial \psi}{\partial \psi}\right)_\xi \right] \right)_\xi \quad (19)$$

2) La seconde étape est

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \xi(x^*, \omega) \\ \psi = \psi(x^*, \omega) \end{array} \right\} \text{avec} \quad \left. \begin{array}{l} x^* = \xi \\ \omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I} \end{array} \right\}$$

$\psi_I$  est la valeur de  $\psi$  à la frontière intérieure

$\psi_E$  est la valeur de  $\psi$  à la frontière extérieure.

$\psi_I$  et  $\psi_E$  peuvent évidemment dépendre de  $x^*$ .

La définition de ces nouvelles coordonnées entraîne :

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial \xi}\right)_\psi = 1 ; \quad \left(\frac{\partial x^*}{\partial \psi}\right)_\xi = 0$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \psi}\right)_\xi = \frac{1}{\psi_E - \psi_I}$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)_\psi = - \frac{\psi - \psi_I}{(\psi_E - \psi_I)^2} \left[ \frac{\partial \psi_E}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_I}{\partial \xi} \right] - \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial \psi_I}{\partial \xi}$$

Considérons maintenant une fonction  $\psi(\xi, \psi)$ . Ses dérivées partielles se transformeront donc en :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_\psi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial}\right)_{x^*} - \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \left[ \frac{\partial \psi_I}{\partial \xi} + \omega \left( \frac{\partial \psi_E}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_I}{\partial \xi} \right) \right] \left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega}\right)_{x^*} \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \psi}\right)_\xi = \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega}\right)_{x^*} \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \psi} \left( K \left(\frac{\partial \phi}{\partial \psi}\right)_\xi \right)\right)_\xi = \frac{1}{(\psi_E - \psi_I)^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( K \left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega}\right)_{x^*} \right) \right]_{x^*} \quad (22)$$

3) La combinaison de ces deux étapes de transformation donne les relations finales suivantes

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_r = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*}\right)_\omega + \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \left[ r_I m_I'' - \omega (r_E m_E'' - r_I m_I'') - \langle \rho \cdot v \rangle r \right] \left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega}\right)_{x^*} \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_x = \frac{\langle \rho u \rangle r}{\psi_E - \psi_I} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega}\right)_{x^*} \quad (24)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \left( K \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_x \right)\right]_x = \frac{\langle \rho u \rangle r}{(\psi_E - \psi_I)^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( D \cdot \langle \rho u \rangle r \left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega}\right)_{x^*} \right) \right]_{x^*} \quad (25)$$

dans lesquelles  $\frac{\partial \psi_I}{\partial \xi}$  et  $\frac{\partial \psi_E}{\partial \xi}$  sont considérées comme des débits massiques à travers les limites intérieures et extérieures correspondant respectivement

$$\text{à : } \omega = 0$$

$$\omega = 1 .$$

Cette hypothèse permet donc d'écrire (par convention)

$$\frac{\partial \psi_I}{\partial \xi} = - r_I m_I'' ; \quad \frac{\partial \psi_E}{\partial \xi} = - r_E m_E'' \quad (26), (27)$$

### III. Problème différentiel transformé.

Le système d'équations paraboliques différentielles (11) à (13) doit être transformé avec les équations (23) à (25). Le résultat de cette reformulation est donc :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x^*} + \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \left[ r_I m_I'' + \omega (r_E m_E'' - r_I m_I'') \right] \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \omega} = \\ & \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{\langle \rho u \rangle r^2 \mu}{(\psi_E - \psi_I)^2} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \omega} \right] - \frac{1}{\langle \rho u \rangle} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x^*} + \frac{1}{\langle \rho u \rangle} S_u \quad (28) \\ & \frac{\partial \langle \phi^\alpha \rangle}{\partial x^*} + \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \left[ r_I m_I'' + \omega (r_E m_E'' - r_I m_I'') \right] \frac{\partial \langle \phi^\alpha \rangle}{\partial \omega} \\ & \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{\langle \rho u \rangle r^2 \mathcal{D}}{(\psi_E - \psi_I)^2} \frac{\partial \langle \phi^\alpha \rangle}{\partial \omega} \right] + \frac{1}{\langle \rho u \rangle} S \phi^\alpha \quad (29) \end{aligned}$$

Toutes les équations d'un tel système peuvent donc être écrites sous une forme commune.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (A + B\omega) \frac{d\Phi}{d\omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} (C \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}) + S \quad (30)$$

avec les coefficients suivants

$$A = \frac{r_I m_I''}{\psi_E - \psi_I} \quad (31)$$

$$B = \frac{r_E m_E'' - r_I m_I''}{\psi_E - \psi_I} \quad (32)$$

$$C = \frac{r^2 \langle \rho u \rangle}{(\psi_E - \psi_I)^2} \mu \quad \text{ou} \quad C = \frac{r^2 \langle \rho u \rangle D}{(\psi_E - \psi_I)^2} \quad (33)$$

$$S = \frac{S_u}{\langle \rho u \rangle} \quad \text{ou} \quad S = \frac{S_\phi^\alpha}{\langle \rho u \rangle} \quad (34)$$

$\mu$  doit être considérée comme une viscosité effective dans l'équation de quantité de mouvement. Pour l'équation de  $\phi^\alpha$ , la variable  $\mu$  caractérise le transport diffusif associé à  $\phi^\alpha$ . Dans le cas où  $\phi^\alpha$  est une fraction massique par exemple,  $\mu$  sera la diffusivité effective.

Le terme  $S$  contient tous les termes sources. Dans l'équation de quantité de mouvement, ces termes pourront être le gradient de pression ou les effets du champ de pesanteur. Pour toutes les autres équations de transport,  $S$  collectera tous les termes non linéaires tels que les termes de production/destruction de la variable  $\alpha$ . Pour tempérer les effets de la non linéarité de ces derniers termes, ils sont décomposés de la manière suivante :

$$S = S_N + \phi \cdot S_L$$

$S_N$  est la composante strictement non linéaire de  $S$  et de  $S_L$  est la grandeur  $\frac{\partial S}{\partial \phi}$ . Nous verrons dans la quatrième partie de ce chapitre, comment cette décomposition est prise en compte dans la procédure numérique.

#### IV. CONSEQUENCES DU CHANGEMENT DE COORDONNEES

Ce type de transformation qui fut proposé initialement par Von Mises puis utilisé extensivement dans la méthode de Patankar et Spalding mène aux conclusions suivantes :

- 1) L'utilisation de la fonction de courant pour déterminer la nouvelle coordonnée transverse satisfera toujours l'équation de continuité. Donc le nombre total d'équations sera réduit quelque soit le système d'équations.
- 2) Comme les calculs se feront sur des points à  $\omega$  constant, le plan physique sera représenté par un maillage évolutif sur la coordonnée  $y$ . La propriété d'une telle transformation est particulièrement intéressante pour traiter les problèmes à frontières libres.
- 3) Toutefois il faut mettre en évidence un inconvénient certain de cette méthode. Quand les frontières de l'écoulement ne sont pas des lignes de courant, les valeurs de  $\psi_I$  et  $\psi_E$  ne sont pas constantes le long de l'axe des  $x$ . Ces valeurs doivent donc être déterminées à partir des valeurs initiales et de caractéristiques de l'écoulement à chaque nouvelle position suivant  $x$ . Un soin très particulier doit donc être donné au calcul de ces valeurs.

#### IV-3. SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES

Les équations paraboliques différentielles ont une forme commune (voir paragraphe précédent).

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + (A + B\omega) \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( C \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \right) + S \quad (1)$$

Avant leur résolution numérique, ces équations doivent être discrétisées sur un maillage puis chaque terme doit être intégré sur une cellule élémentaire définie sur le maillage. Un exemple de cellule de maillage est montré dans la figure 1.

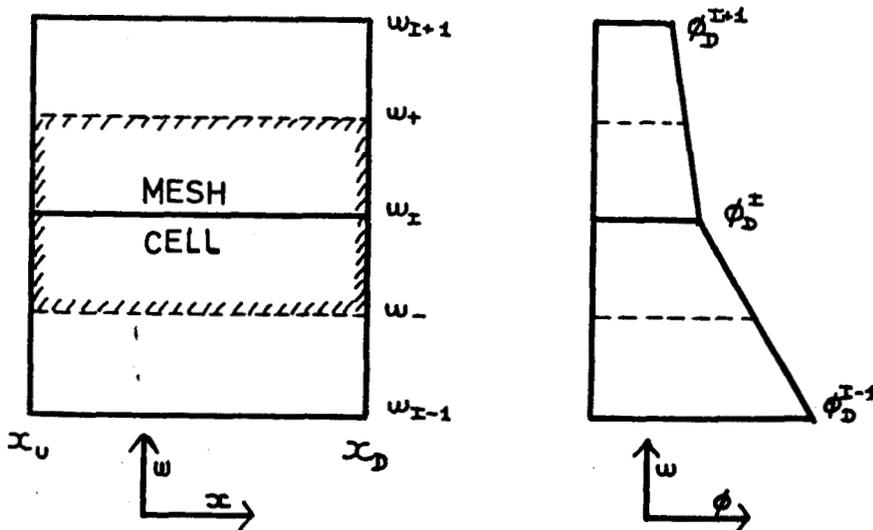


Fig. 1 - Cellule élémentaire du maillage.

Cette cellule élémentaire est limitée par les lignes pointillées dans le sens des  $\omega$  et par les valeurs amont et aval de  $x$ .

L'hypothèse de base pour l'intégration sur une telle cellule est que  $\phi$  varie linéairement entre deux lignes de courant adjacentes correspondant à  $\omega_I$  et  $\omega_{I+1}$  ou  $\omega_I$  et  $\omega_{I-1}$ . La variation dans la direction des  $x$  est en escalier. Les valeurs de  $\phi$  pour l'intervalle compris entre  $x_u$  (amont) et  $x_D$  (aval) sont uniformes et égales à la valeur en  $x_D$  excepté pour  $x = x_u$ . La procédure de Crank-Nicholson [1] prend pour différences en  $\omega$  la moyenne arithmétique des valeurs des termes en  $x_u$  et  $x_D$  et, est donc libre de toute limitation quant à la distance entre  $x_u$  et  $x_D$ , à cause des conditions de stabilité; mais selon Patankar et Spalding [2] ; "il peut être montré au moins dans des cas simples, que l'utilisation de la valeur correspondant à la position aval peut être beaucoup plus précise pour des grandes valeurs du pas d'avancée et est toujours stable; cela est aussi plus commode". Cette méthode est donc utilisée pour la discrétisation des équations. Dans le paragraphe suivant, tous les termes qui apparaissent dans l'équation (1) seront donc intégrés sur une cellule de maillage, telle qu'elle vient d'être définie, avec les hypothèses de comportement en  $\omega$  et  $x$  décrites ci-dessus.

#### IV. EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES

Chaque terme de la forme générale (1) doit donc être remplacé par la valeur de son intégration sur une cellule élémentaire

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + (A + B\omega) \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} (C \frac{\partial \phi}{\partial \omega}) + S \quad (1)$$

(1) Terme  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ .

L'intégration sur une cellule entraîne la définition d'une première quantité  $I_1$

$$I_1 = \frac{1}{(x_D - x_u)} \cdot \frac{1}{(\omega_+ - \omega_-)} \int_{x_u}^{x_D} \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\omega dx \quad (2)$$

or l'une des hypothèses de comportement est que  $\phi$  est constante et égale à  $\phi_D$  le long des lignes  $\omega = \text{cte}$  si  $x_u < x \leq x_D$ . Donc

$$I_1 = \frac{1}{(x_D - x_u)(\omega_+ - \omega_-)} \int_{\omega_-}^{\omega_+} (\phi_D - \phi_u) d\omega \quad (3)$$

et, en suivant la règle d'intégration du trapèze :

$$I_1 = \frac{1}{(x_D - x_u)(\omega_+ - \omega_-)} \left[ \frac{\phi_D^{I+1} - \phi_u^{I+1}}{4} \left( \frac{\omega_{I+1} - \omega_I}{2} \right) + \frac{\phi_D^{I-1} - \phi_u^{I-1}}{4} \left( \frac{\omega_I - \omega_{I-1}}{2} \right) + \frac{3\Delta\phi}{4} \left( \frac{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}}{2} \right) \right] \quad (4)$$

Si maintenant nous supposons que  $\omega$  varie linéairement entre deux noeuds adjacents.

$$(\omega_+ - \omega_-) = \frac{1}{2} (\omega_{I+1} - \omega_{I-1}) \quad (5)$$

Ainsi, après quelques manipulations, la première partie du terme de convection peut être écrite :

$$I_1 = \phi_D^I \left[ \frac{3}{4(x_D - x_u)} \right] - \frac{1}{4(x_D - x_u)} \left[ 3\phi_u^I + \phi_u^{I+1} \frac{\omega_{I+1} - \omega_I}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} + \phi_u^{I-1} \frac{\omega_I - \omega_{I-1}}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} \right] + \phi_D^{I+1} \left[ \frac{\omega_{I+1} - \omega_I}{4(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})(x_D - x_u)} \right] + \phi_D^{I-1} \left[ \frac{\omega_I - \omega_{I-1}}{4(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})(x_D - x_u)} \right] \quad (6)$$

2) Terme  $A \frac{\partial \phi}{\partial \omega}$ .

L'intégration de ce terme mène à la définition de  $I_2$

$$I_2 = \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \int_{\omega_-}^{\omega_+} A \frac{\partial \phi}{\partial \omega} d\omega \quad (7)$$

ou, en utilisant l'équation (5)

$$I_2 = A \left( \frac{\phi_D^{I+1} - \phi_D^{I-1}}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} \right) \quad (8)$$

3) Terme  $B \omega \frac{\partial \phi}{\partial \omega}$

De même que pour  $I_2$  nous obtenons

$$I_3 = \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \int_{\omega_-}^{\omega_+} B \omega \frac{\partial \phi}{\partial \omega} d\omega \quad (9)$$

ou encore

$$I_3 = \frac{B}{\omega_+ - \omega_-} \left[ \frac{\phi_D^{I+1} - \phi_D^I}{\omega_{I+1} - \omega_I} \int_{\omega_I}^{\omega_+} \omega d\omega + \frac{\phi_D^I - \phi_D^{I-1}}{\omega_I - \omega_{I-1}} \int_{\omega_-}^{\omega_I} \omega d\omega \right] \quad (10)$$

et après intégration

$$I_3 = \frac{B}{\omega_+ - \omega_-} \left[ \frac{\phi_D^{I+1} - \phi_D^I}{\omega_{I+1} - \omega_I} \frac{\omega_+^2 - \omega_I^2}{2} + \frac{\phi_D^I - \phi_D^{I-1}}{\omega_I - \omega_{I-1}} \frac{\omega_I^2 - \omega_-^2}{2} \right] \quad (11)$$

ce qui, après réarrangement s'écrit

$$I_3 = \frac{\phi_D^{I+1}}{D} \cdot \frac{B}{4} \cdot \frac{\omega_{I+1} + 3\omega_I}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} - \phi_D^I \frac{B}{4} - \phi_D^{I-1} \frac{B}{4} \frac{3\omega_I + \omega_{I-1}}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} \quad (12)$$

4) Terme  $\frac{\partial}{\partial \omega} \left( C \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)$

La grandeur  $I_4$  est définie par

$$I_4 = \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( C \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) d\omega \quad (13)$$

ou

$$I_4 = \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \left[ \left( C \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_{\omega_+} - \left( C \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_{\omega_-} \right] \quad (14)$$

Soient  $C_{u_+}$  et  $C_{u_-}$  les valeurs de  $C$  à la position amont et pour  $\omega = \omega_+$  et  $\omega = \omega_-$  respectivement

$$I_4 = \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \left[ C_{u_+} \frac{\phi_D^{I+1} - \phi_D^I}{\omega_{I+1} - \omega_I} - C_{u_-} \frac{\phi_D^I - \phi_D^{I-1}}{\omega_I - \omega_{I-1}} \right] \quad (15)$$

Ainsi, après quelques manipulations, la forme finale de ce terme de diffusion est

$$\begin{aligned} I_4 = & \phi_D^{I+1} \frac{2C_{u_+}}{(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})(\omega_{I+1} - \omega_I)} \\ & - \phi_D^I \frac{2}{(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})} \left[ \frac{C_{u_-}}{\omega_I - \omega_{I-1}} + \frac{C_{u_+}}{\omega_{I+1} - \omega_I} \right] \\ & + \phi_D^{I-1} \frac{2C_{u_-}}{(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})(\omega_I - \omega_{I-1})} \end{aligned} \quad (16)$$

5) Terme source.

Pour faire face à la non linéarité du terme source, seule la valeur amont est considérée pour le coefficient de la partie linéarisée.

$$I_5 = (S_N)_u^I + \phi_D^I (S_L)_u^I \quad (17)$$

## 6) Equation résultante

En reconstituant l'équation (1) avec les différents termes I1, I2, I3, I4 et I5 et après réarrangement, nous obtenons la forme suivante

$$\alpha_I \phi_D^I = A_I \phi_D^{I+1} + B_I \phi_D^{I-1} + C_I \quad (18)$$

dans laquelle  $\phi_D^I$ ,  $\phi_D^{I+1}$  et  $\phi_D^{I-1}$  sont les valeurs inconnues de la variable sur trois noeuds successifs à la position aval, et  $\alpha_I$ ,  $A_I$ ,  $B_I$  et  $C_I$  sont des coefficients calculés avec les valeurs correspondantes connues de la position amont. Les coefficients sont

$$\alpha_I = \frac{3}{4(x_D - x_u)} - \frac{B}{4} + \frac{2}{(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})} \left[ \frac{C_{u-}}{\omega_I - \omega_{I-1}} + \frac{C_{u+}}{\omega_{I+1} - \omega_I} \right] - (S_L)_u^I \quad (19)$$

$$A_I = \frac{1}{(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})} \left[ \frac{-(\omega_{I+1} - \omega_I)}{4(x_D - x_u)} - A + \frac{B}{4} (\omega_{I+1} + 3\omega_I) + \frac{2C_{u+}}{(\omega_{I+1} - \omega_I)} \right] \quad (20)$$

$$B_I = \frac{1}{(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})} \left[ \frac{-(\omega_I - \omega_{I-1})}{4(x_D - x_u)} + A + \frac{B}{4} (\omega_{I-1} + 3\omega_I) + \frac{2C_{u-}}{(\omega_I - \omega_{I-1})} \right] \quad (21)$$

$$C_I = \frac{1}{4(x_D - x_u)} \left[ 3 \phi_u^I + \frac{\omega_{I+1} - \omega_I}{(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})} \phi_u^{I+1} + \frac{\omega_I - \omega_{I-1}}{(\omega_{I+1} - \omega_{I-1})} \phi_u^{I-1} \right] + (S_N)_u^I \quad (22)$$

## IV-5. ALGORITHME DE THOMAS

Le paragraphe précédent a montré que toutes les équations paraboliques de transport peuvent être mises sous la forme

$$\alpha_I \phi^I = A_I \phi^{I+1} + B_I \phi^{I-1} + C_I \quad (1)$$



Postulons l'existence de deux vecteurs E et F tels que

$$\phi_I = E_I \phi_{I+1} + F_I \quad (4)$$

qui s'écrira, si I est transformé en I-1

$$\phi_{I-1} = E_{I-1} \phi_I + F_{I-1} \quad (5)$$

La combinaison de l'équation (1) avec l'équation (5) permet donc d'écrire

$$\phi_I = \frac{A_I}{\alpha_I - B_I \cdot E_{I-1}} \phi_{I+1} + \frac{C_I + B_I \cdot F_{I-1}}{\alpha_I - B_I \cdot E_{I-1}} \quad (6)$$

et en combinant (6) et (4)

$$E_I = \frac{A_I}{\alpha_I - B_I \cdot E_{I-1}} \quad (7)$$

$$F_I = \frac{C_I + B_I \cdot F_{I-1}}{\alpha_I - B_I \cdot E_{I-1}} \quad (8)$$

Basée sur ces relations, la procédure suivante sera donc utilisée :

La condition à la limite intérieure (I=1) permet la détermination des deux coefficients E et F de I = 2 à I = N-1 par les relations (7) et (8) E<sub>1</sub> et F<sub>1</sub> viennent de la condition à la limite. Puis  $\phi_N$ , qui est donnée par la condition à la limite extérieure est la valeur de départ de l'équation récurrente (4) revenant de I = N-1 à I = 1 .

## 2 - CONDITIONS AUX LIMITES

A | - Examinons tout d'abord la condition à la limite intérieure qui est nécessaire dans la première étape de l'algorithme pour déterminer les coefficients E<sub>1</sub> et F<sub>1</sub> . Deux types de conditions à la limite seront considérés.

- condition de Dirichlet  $\phi = \phi_0$  à la limite

- condition de Neumann  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_0$  à la limite.

A-1 Condition à la limite intérieure de type Dirichlet.

Cette condition fixe la valeur  $\phi_1 = a_1$  de la variable  $\phi$  au noeud  $I = 1$ . Pour cette valeur de  $I$ , l'équation (4) s'écrit :

$$\phi_1 = E_1 \phi_2 + F_1 \quad (9)$$

Cette relation doit être indépendante de  $\phi_2$ , donc

$$E_1 = 0 \quad (10)$$

$$F_1 = a_1 \quad (11)$$

A-2 Condition à la limite intérieure de type Neumann.

Supposons maintenant que  $\phi_0$  est la valeur prescrite de  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  à la limite ( $I = 1$ ). Ainsi avec un simple schéma de différences finies,

$$\phi_2 - \phi_1 = \phi_0 \cdot \Delta y \quad (12)$$

Après comparaison avec l'équation (14) il vient immédiatement

$$\begin{aligned} E_1 &= 1 \\ F_1 &= -\phi_0 \Delta y \end{aligned} \quad (14)$$

B | Après que  $E_1$  et  $F_1$  sont calculés, les vecteurs  $E_I$  et  $F_I$  peuvent être déterminés avec  $\alpha_I$ ,  $A_I$ ,  $B_I$  et  $C_I$ . La condition à la limite extérieure donne maintenant la valeur de départ  $\phi_N$  pour la rétro-substitution de  $\phi_I$  pour  $I = N - 1$  jusque  $I = 1$ .

B-1 Condition à la limite extérieure de type Dirichlet

Cette condition est évidente  $\phi_N = a_N$ .

B-2 Condition à la limite extérieure de type Neumann.

Cette condition ( $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \overset{\circ}{\phi}_N$ ) peut s'écrire sous forme de différence finie

$$\phi_N - \phi_{N-1} = \overset{\circ}{\phi}_N \Delta y \quad (16)$$

donc

$$\phi_{N-1} = E_{N-1} \phi_N + F_{N-1} \quad (17)$$

ce qui donne par comparaison

$$\phi_N = \frac{F_{N-1} + \overset{\circ}{\phi}_N \cdot \Delta y}{1 - E_{N-1}} \quad (18)$$

C] Suivant Roache, il est possible d'envisager un troisième type de condition à la limite. Cette condition est appelée condition mixte ou de Robin.

$$\phi + K \frac{\partial \phi}{\partial y} = L$$

qui combine les deux types de conditions décrits précédemment.

#### IV-6. PROPRIETES DE LA PROCEDURE NUMERIQUE

##### I - PRINCIPALES CARACTERISTIQUES DIFFERANT DE LA METHODE DE PATANKAR ET SPALDING

###### I-1. Traitement des termes sources

Dans la référence [2], le terme source est considéré comme étant uniforme sur le volume de contrôle défini précédemment et égal à sa valeur à la position aval. Comme ce terme peut ne pas être linéaire, en  $\phi$ , la valeur aval est représentée par

$$S_D = S_u + \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)_u (\phi_D - \phi_u) \quad (1)$$

Ce qui signifie que le terme  $\frac{\partial S}{\partial \phi}$  doit être déterminé avec la valeur amont. Ce terme, étant une dérivée par rapport à la variable dépendante  $\phi$ , est susceptible d'être la source d'instabilités du au caractère globalement non linéaire du terme source. Nous utiliserons donc une méthode modifiée qui donne de très bons résultats. Une décomposition similaire à (1) est utilisée

$$S_D = S_{NL} + S_L \cdot \phi_D \quad . \quad (2)$$

Dans ce cas  $\phi_D$  est la valeur de  $\phi$  à la position aval. Le terme source est décomposé en deux composantes, linéaire  $S_L$  et non linéaire  $S_{NL}$ . Dans la partie "linéaire", la variable  $\phi$  apparaît explicitement. Donc  $S_{NL}$  et  $S_L$  sont déterminées à la position amont, mais aucune dérivation par rapport à  $\phi$  n'est nécessaire ici.

### 1-2. Traitement des valeurs limites

A la différence de Patankar et Spalding, aucun point de glissement n'est utilisé pour les raisons suivantes :

- 1) Dans tous les problèmes d'écoulements libres cisailés, seules des petites variations des valeurs limites sont attendues dans la procédure de description pas à pas de l'écoulement.
- 2) Pour la même raison, la viscosité tourbillonnaire aux frontières est inférieure ou égale à la viscosité laminaire, ce qui implique aussi que tout gradient transverse sera proche de zéro dans ces régions.

Ainsi, exceptés les cas où un maillage trop grossier est utilisé, les points de glissement sont inutiles pour ces écoulements libres cisailés. Donc, les conditions aux limites présentées dans le paragraphe IV-5 peuvent être introduites telles quelles et utilisées sans autre manipulation spéciale.

### 1-3. Calcul de l'entraînement

Le calcul de l'entraînement qui gouverne le développement du maillage est une façon d'assurer que tout le domaine d'intérêt de l'écoulement est couvert par le maillage pour tout  $x > x_0$  ( $x_0$  est la valeur initiale de  $x$ ). Pour cela, nous utilisons une méthode purement artificielle pour contrôler les débits massiques au travers des lignes limites de courant. Dans un écoulement turbulent, le taux d'expansion est régi par le transfert de quantité de mouvement turbulente. Dans le cadre d'une modélisation à deux paramètres, la quantité appropriée pour ce contrôle est la viscosité tourbillonnaire  $u_t$ .

Le débit transverse moyen est déterminé par

$$m_u^N = -\frac{1}{2} (r_u^N + r_u^{N-1}) \frac{\mu_{tu}^N + \mu_{tu}^{N-1}}{r_u^N - r_u^{N-1}} \quad (3)$$

Pour éviter d'éventuelles instabilités dues à la division par  $\Delta r$ , nous introduisons un facteur d'amortissement qui moyenne la valeur actuelle et la valeur à la position précédente :

$$r_E m_E'' = \theta m_D^N + (1-\theta) m_u^N, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (4)$$

Par analogie, nous aurons pour l'autre limite

$$m_u^1 = -\frac{1}{2} (r_u^1 + r_u^2) \frac{\mu_{tu}^1 + \mu_{tu}^2}{r_u^1 - r_u^2} \quad (5)$$

$$\text{et } r_I m_I'' = \theta m_D^1 + (1-\theta) m_u^1, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (6)$$

Néanmoins, il faut remarquer que ceci est une méthode purement artificielle de calculer l'apport de quantité de mouvement qui est ajoutée à l'écoulement. En particulier, pour les écoulements avec transfert thermique, il peut être opportun d'utiliser, par exemple, une diffusivité thermique au lieu de la viscosité turbulente, pour prendre en compte le fait que la couche limite

est beaucoup plus épaisse que la couche limite dynamique [5].

## II - QUELQUES CONSEQUENCES A L'UTILISATION DE CETTE PROCEDURE NUMERIQUE.

### II-1. CALCUL DE LA DISTANCE RADIALE

L'exécution de cette procédure aux différences finies fournit les profils de  $\psi$  en fonction de la variable  $\omega$ . Mais, puisqu'il a été vu précédemment que les débits massiques transversaux peuvent être différents de zéro la distance dans le plan physique correspondant à chaque  $\Delta\omega$  du plan transformé, évolue durant l'intégration pas-à-pas d'amont en aval. Nous rappelons ici la relation par laquelle nous avons introduit la fonction de courant :

$$d\psi = \langle \rho u \rangle r dr - \langle \rho v \rangle r dx \quad (7)$$

Après intégration par rapport à  $r$ , nous obtenons

$$r^2 = r_I^2 + 2 \int_{\psi_I}^{\psi_E} \frac{d\psi}{\langle \rho u \rangle} \quad (8)$$

où  $r_I$  est la limite inférieure de la distance radiale.

Précédemment  $\omega$  fut défini par

$$\omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I} \quad (9)$$

$$\text{donc } d\omega (\psi_E - \psi_I) = d\psi \quad (10)$$

La combinaison de (10) et (8) entraîne

$$r^2 = r_I^2 + 2(\psi_E - \psi_I) \int_0^\omega \frac{d\omega'}{\langle \rho u \rangle_{\omega'}} \quad (11)$$

Sous forme de différences finies, le résultat est donné après l'application d'une simple règle d'intégration par trapèzes :

$$r_K = \left\{ r_I^2 + 2(\psi_E - \psi_I) \sum_{I=2}^K \frac{2(\omega_I - \omega_{I-1})}{\langle \rho u \rangle_I + \langle \rho u \rangle_{I-1}} \right\}^{1/2} \quad (12)$$

Pour un écoulement plan, l'équation (7) serait

$$\partial \psi = \langle \rho u \rangle dy - \langle \rho v \rangle dx \quad (13)$$

ce qui implique :

$$Y_K = Y_I + 2(\psi_E - \psi_I) \sum_{I=2}^K \frac{2(\omega_I - \omega_{I-1})}{\langle \rho u \rangle_I + \langle \rho u \rangle_{I-1}} \quad (14)$$

## II-2. Calcul de la divergence

Du changement de coordonnées, nous pouvons déduire une méthode rapide pour calculer la divergence de la vitesse. La transformation rappelée ici :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x^*} + \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \left[ r_I m_I'' - \omega(r_E m_E'' - r_I m_I'') - \rho v r \right] \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\rho u r}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \quad (2)$$

permet de passer du plan physique  $(x, r)$  au plan transformé  $(x^*, \omega)$ . L'équation de conservation de la masse pour un écoulement du type couche limite est

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v) = 0, \quad (3)$$

ce qui entraîne pour la divergence D

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) = -\frac{1}{\rho} \left[ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right], \quad (4)$$

et dans le plan transformé  $(x^*, \omega)$

$$D = -\frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x^*} - \frac{u}{\rho(\psi_E - \psi_I)} \left[ r_I m_I'' - \omega(r_E m_E'' - r_I m_I'') \right] \frac{\partial \rho}{\partial \omega} \quad (5)$$

Cela signifie qu'il n'est pas nécessaire de connaître la vitesse transversale pour obtenir la divergence. Les équations (1) à (5) sont écrites sous leur forme instantanée. Le passage aux formes moyennes est immédiat :

$$\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x} = \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x^*} + \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \left[ r_I m_I'' - \omega (r_E m_E'' - r_I m_I'') - r \langle \rho v \rangle \right] \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial \omega} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial r} = \frac{\langle \rho u \rangle}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial \omega} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \rho u \rangle + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle \rho v \rangle) = 0 . \quad (8)$$

Il a été montré dans le chapitre II que la statistique la mieux appropriée est obtenue en combinant des moyennes conventionnelles pour les variables d'état (pression, masse volumique et température) avec des moyennes pondérées pour toutes les autres variables dépendantes (vitesse, fraction massique etc...), ce qui a pour conséquence :

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle &= \overline{\rho \phi / \rho} \\ \langle \rho u \rangle &= \bar{\rho} \tilde{u} \\ \langle \rho \phi \rangle &= \rho \tilde{\phi} \end{aligned} \quad (9)$$

Donc dans l'équation (5),  $u$  et  $\rho$  peuvent être remplacées respectivement par  $\bar{\rho}$  et  $\tilde{u}$  et la forme moyenne de la divergence est déduite de la masse volumique moyenne et de la vitesse longitudinale moyenne.

### 11-3. Calcul de la vitesse transversale

Il est possible d'utiliser la fonction de courant pour calculer la vitesse normale à l'écoulement principal.

La fonction de courant est définie par :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \rho v r \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u r \quad (11)$$

ce qui entraîne :

$$v = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial x} \int_{r_0}^r \rho u r' dr' \quad (12)$$

Cette équation peut être mise sous sa forme moyenne, à l'aide des relations (9)

$$\bar{v} = \frac{1}{\bar{\rho} r} \frac{\partial}{\partial x} \int_{r_0}^r \bar{\rho} \bar{u} r' dr' \quad (13)$$

Voyons maintenant comment un tel calcul peut être effectué dans un maillage évolutif tel que celui qui est utilisé dans ce programme (fig. 2). De même que pour le calcul de la divergence, le développement qui suit est valable pour des grandeurs instantanées ou moyennes.

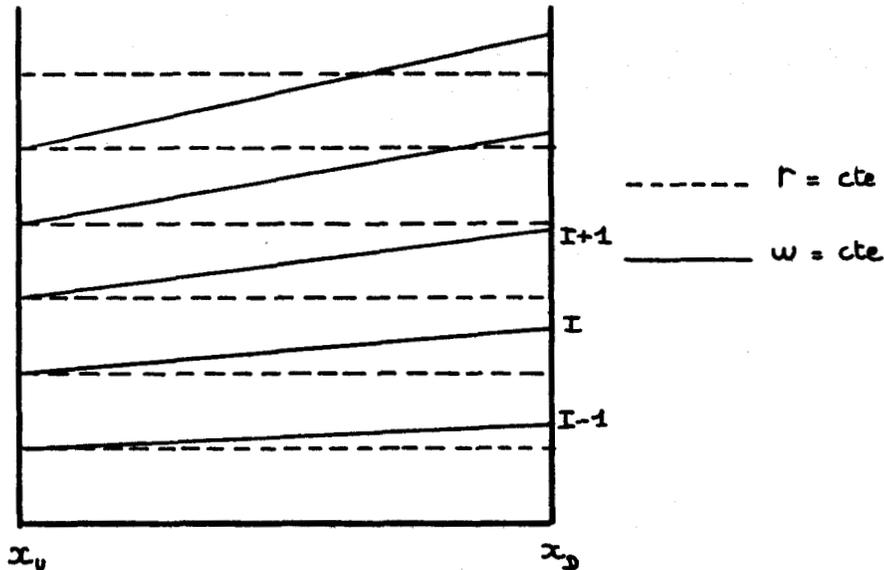


Fig. 2 Maillage évolutif entre  $x_u$  et  $x_D$ .

La quantité de mouvement à la position  $x_D$  pour  $r_0 \leq r' \leq r$  est

$$\psi_D = \left( \int_{r_0}^{r_E} \rho u r' dr' \right)_D \cdot \omega_I = \left( \int_{r_0}^r \rho u r' dr' \right)_D \cdot \omega_I$$

Dans la section amont, la quantité de mouvement pour la même valeur de  $r$  est :

$$\psi_u = \left( \int_{r_0}^{r_u^{I-1}} \rho u r' dr' \right)_u + \left( \int_{r_u^{I-1}}^{r_u^I} \rho u r' dr' \right) \frac{r_D^I - r_u^{I-1}}{r_u^I - r_u^{I-1}} \quad (15)$$

$$\text{avec } \left( \int_{r_0}^{r_u^{I-1}} \rho u r' dr' \right)_u = \left( \int_{r_0}^{r_u^N} \rho u r' dr' \right)_u \cdot \omega_{I-1} \quad (16)$$

$$\text{et } \left( \int_{r_u^{I-1}}^{r_u^I} \rho u r' dr' \right)_u = \left( \int_{r_0}^{r_u^N} \rho u r' dr' \right) \cdot (\omega_I - \omega_{I-1}) \quad (17)$$

La vitesse transverse est obtenue de la définition (10) par

$$v = - \frac{1}{\rho r} \frac{\psi_D - \psi_u}{x_D - x_u} \quad (18)$$

## II - CALCUL DES DERIVEES LONGITUDINALES

La première équation de transformation de coordonnées est

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x^*} + \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \left[ r_I m_I'' - \omega (r_E m_E'' - r_I m_I'') - \rho r v \right] \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \quad (19)$$

chaque terme de la partie droite peut être simplement discrétisé.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^*} = \frac{\psi_D^I - \psi_u^I}{x_D - x_u} \quad (20)$$

$$\omega = \omega_I \quad (21)$$

$$\rho = \rho_D^I \quad (22)$$

$$v = v_D^I \quad (23)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \omega} = \frac{\psi_D^{I+1} - \psi_D^{I-1}}{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}} \quad (24)$$

La substitution des équations (20) à (24) dans (19) donne donc la valeur de  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  dans le plan physique à partir de valeurs dans le plan transformé.

#### 11-5. Taille du programme et temps d'exécution

Une version standard du programme nécessite la mise en mémoire de  $(40 \times N)$  variables environ, N est le nombre de noeuds dans le sens des y . Cette dimension peut être optimisée et probablement réduite de 10 % . Le temps d'occupation d'unité centrale (CPU) est approximativement 6 mn sur un VAX 11 pour résoudre 7 équations sur 1000 pas de calcul pour 60 noeuds.

#### 7. CONCLUSIONS

Les différences majeures avec le programme développé par Patankar et Spalding sont :

- L'utilisation des points de glissement n'est pas nécessaire pour les écoulements libres cisailés si le maillage est assez fin et s'il n'existe pas de frontière rigide (paroi).

- Les termes sources sont linéarisés de façon à éviter d'éventuelles instabilités introduites par une dérivée longitudinale. Une partie de ces termes est évaluée à la position amont de la cellule du maillage. L'expérience a montré que cette procédure est stable.

- L'entraînement aux frontières n'est pas nul. Une quantité appropriée pour sa détermination est la viscosité turbulente qui transporte simultanément des informations venant des différents paramètres du modèle de turbulence.

La définition du changement de coordonnées et la fonction de courant permet, avec le type de moyenne choisi, de déterminer, dans le cadre de cette procédure numérique, la divergence de la vitesse, la vitesse normale et toutes les dérivées longitudinales.

#### IV-7. Conclusions sur la technique numérique.

La technique numérique, utilisée pour ce travail a été décrite en détail. Mais l'accent est mis sur le fait que cette partie ne constitue pas un développement original. La méthode de Patankar et Spalding a été modifiée pour faciliter le traitement de toute équation parabolique différentielle ayant la forme

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S \quad (1)$$

Les principales modifications concerne le traitement des termes sources et les points de glissement. Quoique la transformation semble compliquée, une fois établie, il est immédiat d'inclure toute équation de la forme (1) dans la procédure numérique. Pour chaque nouvelle équation, il suffit d'exprimer le terme de diffusion ( $\mu$ ) et de décomposer les termes sources en composantes linéarisées et non linéarisées, puis de fixer convenablement les conditions initiales et les conditions aux limites. Cela fait, une procédure commune peut s'appliquer à toutes les équations de transport.

Quelques inconvénients de cette méthode doivent toutefois être mentionnés :

- 1) Toutes les équations doivent être résolues successivement avec une procédure commune. Cela signifie que les termes d'une équations peuvent être déterminés pour une part par les valeurs aval des variables dont les équations ont déjà été résolues et d'autre part avec les valeurs amont des autres variables dont

les équations doivent encore être résolues dans l'actuelle procédure. Ceci peut être évité ou en utilisant un schéma de résolution par bloc ou plus simplement en assurant au maillage une taille assez petite à la fois dans les directions transverses et longitudinales.

- 2) La principale propriété de l'écoulement à décrire doit être son caractère parabolique. Cela a pour conséquence :
- La vitesse longitudinale doit toujours être, au minimum positive. Aucune zone de recirculation ne peut être considérée.
  - Les débits massiques à travers les lignes de courant limites doivent être modérés.

Néanmoins, cette procédure de résolution des équations paraboliques différentielles a aussi beaucoup de bons aspects :

- Une capacité mémoire raisonnable est nécessaire comparée à celle de tout problème elliptique.
- Cette procédure pas à pas est aussi très compétitive en temps de calcul. Comme certains points de la procédure de résolution sont communs à toutes les équations, seule une fraction du temps d'exécution est proportionnelle au nombre d'équations. Ce qui signifie que, par exemple résoudre 8 équations ne nécessitera pas 2 fois le temps requis pour résoudre 4 équations.
- Les limites évolutives sont particulièrement bien adaptées aux problèmes à frontières libres.

IV - REFERENCES

- 1 CRANK J. et NICHOLSON P. (1947) "A practical method for numerical solution of partial differential equations of the heat conduction type".  
Proc Cambridge Phil. Soc. 43, 50.
- 2 PATANKAR S.V. et SPALDING D.B. "Heat and mass transfer in boundary layer".  
Intertext. 1970. London.
- 3 RICHTMEYER et MORTON. "Difference methods for initial value problem".  
Second edition. Interscience Publishers. J. Wiley 2 sons  
New York.
- 4 ROACHE P.J. "Computational fluid dynamics".  
Hersmosa Publishers, 1972. Albuquerque - New Mexico.
- 5 CONSIGNY H. Ph. D Thesis. à paraître. Brussel (1980).

## CHAPITRE V

1. MODELE  $k-\epsilon$  POUR ECOULEMENT A MASSE VOLUMIQUE CONSTANTE -  
MODELE I .
2. MODELE  $k-\epsilon$  POUR ECOULEMENT A MASSE VOLUMIQUE VARIABLE -  
MODELE I .
3. MODELE  $k-\epsilon$  POUR ECOULEMENT A MASSE VOLUMIQUE VARIABLE -  
MODELE II .
4. MODELE  $k-\epsilon$  POUR MELANGE SUPERSONIQUE -  
MODELE I .

## V. RESULTATS

Après l'établissement des équations de la turbulence et la modélisation des termes inconnus, les modèles de turbulence ainsi formés sont confrontés aux données expérimentales pour vérifier leur capacité à prédire des écoulements réels.

Les différents tests concernent donc, un écoulement incompressible, un écoulement à vitesse modérée avec masse volumique variable et finalement un écoulement à vitesse élevée.

Pour chaque cas, les conditions expérimentales sont brièvement décrites. Puis les conditions initiales et les conditions aux limites sont données et les résultats des calculs sont comparés avec les mesures expérimentales.

### V-1. MODELE $k-\epsilon$ POUR ECOULEMENT A MASSE VOLUMIQUE CONSTANTE.

#### MODELE (I).

Une vérification préliminaire de ce modèle de turbulence est une tentative de prédiction d'un écoulement libre cisailé simple sans aucun effet de fluctuation de masse volumique ou de gradient de pression. Ce premier cas test est fourni par les travaux expérimentaux de Gutmark et Wygnanski [1] sur le jet plan turbulent.

#### A - Configuration de l'écoulement

Un croquis de ce simple écoulement de jet libre est donné sur la figure 1.

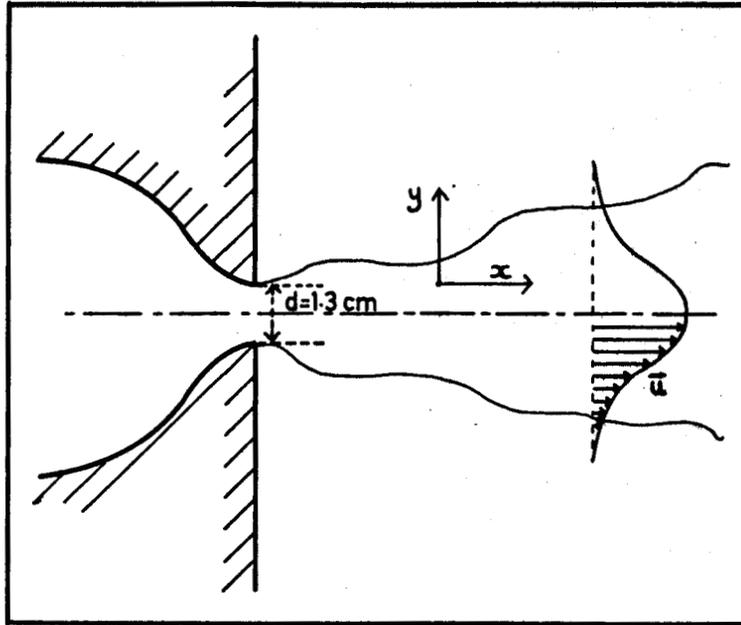


Fig. 1 Configuration de l'écoulement de jet plan turbulent.

Un jet d'air se décharge dans une atmosphère au repos avec une vitesse nominale de sortie égale à 35 m/s. Les dimensions de la fente d'injection sont 1,3 cm pour l'épaisseur et 50 cm pour l'envergure. La précision d'usinage de la fente est donnée comme étant de 0,001 cm. La bidimensionnalité de l'écoulement est obtenue dans la plus grande partie du jet (excepté dans le voisinage des parois latérales). Le nombre de Reynolds à la sortie, basé sur l'épaisseur de la fente est de  $3 \times 10^4$  et le niveau de turbulence est approximativement 0,2 %. Le lecteur est renvoyé à la référence [1] pour une description détaillée des techniques de mesure. Dans l'esprit d'une comparaison avec les résultats d'un modèle de turbulence à deux équations, les mesures suivantes sont disponibles :

- le taux de dispersion de l'écoulement,
- les vitesses moyennes longitudinale et normale,
- l'énergie cinétique de turbulence,
- les contraintes de Reynolds,
- le taux de dissipation de l'énergie de turbulence.

## B - Traitement numérique

Le premier modèle de turbulence qui a été présenté dans le chapitre III comme étant le modèle I, est utilisé pour prédire l'écoulement de laboratoire décrit ci-dessus. Cet écoulement étant incompressible et homogène, les équations pour la fraction massique et les corrélations de densités partielles ne sont pas résolues et, ainsi les équations incluses dans ce modèle sont :

- 1 - l'équation de continuité,
- 2 - l'équation de quantité de mouvement,
- 3 - l'équation de l'énergie cinétique de turbulence,
- 4 - l'équation du taux de dissipation.

L'équation de continuité est prise en compte implicitement par la technique numérique. Ainsi seulement trois équations de transport doivent être résolues. A cause du caractère parabolique de la méthode, les valeurs initiales et les conditions aux limites doivent être données pour la vitesse longitudinale moyenne  $\bar{u}$ , l'énergie cinétique de turbulence  $k$  et son taux de dissipation  $\epsilon$ . Il peut être noté que le caractère incompressible de l'écoulement enlève toute différence entre les moyennes pondérée et non pondérée.

### 1 - Conditions initiales

A cause de la forme particulière de la tuyère produisant le jet (partie fortement convergente avant le plan de sortie), il n'est pas acceptable de commencer le calcul avec un profil de vitesse semblable à celui d'un écoulement de tuyau établi. Le profil de vitesse initiale est un profil en marche d'escalier avec un léger arrondi pour prendre en compte l'effet d'une très fine couche limite. La vitesse dans le coeur de l'écoulement est 35 m/s tandis que la vitesse extérieure à la marche est égale au centième de cette valeur (cette vitesse non nulle est due au fait que le programme ne tolère

pas de vitesse longitudinale négative ou nulle). Il est certain qu'après de tels effets de courbure sur la couche limite de paroi, il est inutile de supposer un profil de vitesse de couche limite de plaque plane et que même si le profil de marche d'escalier n'est pas exact, il n'est probablement pas pire que n'importe quel profil calculé. Comme l'écoulement à la sortie a un niveau de turbulence très bas (0,2 %), il peut être raisonnablement espéré que les valeurs initiales de  $k$  et  $\epsilon$  n'ont pas grande importance sur le développement de l'écoulement. Pour des raisons similaires le niveau de turbulence dans l'écoulement de sortie est supposé constant et est fixé par le taux de turbulence mentionné par Gutmark et Wagnanski. Cette hypothèse de niveau constant de turbulence n'est physiquement pas précise. Très probablement, le profil de  $k$  n'est pas constant et comporte certainement un maximum au voisinage de la paroi de la tuyère à cause du cisaillement dans la couche limite. Néanmoins le frottement turbulent induit par un tel effet est négligeable comparé aux effets de la viscosité laminaire. De ce fait, la dissipation  $\epsilon$  est choisie constante et correspondant à une valeur de la viscosité turbulente égale ou même plusieurs ordres de grandeur plus petite que la viscosité laminaire. La viscosité tourbillonnaire est définie par :

$$\mu_t = C_D \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

$\rho$  est la masse volumique et  $C_D$  est une constante dont la valeur est donnée dans la table I .

## 2 - Conditions aux limites

Des conditions aux limites sont aussi nécessaires pour résoudre ces équations de transport paraboliques. A cause de la symétrie le calcul est effectué sur une moitié du domaine de l'écoulement. Le plan de symétrie de l'écoulement est considéré comme la frontière intérieure et l'atmosphère au repos (avec une petite vitesse non nulle) est la frontière extérieure.

Ces considérations impliquent que pour toutes les variables, la condition à la limite intérieure est du type Neumann :

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (2)$$

Comme le domaine de calcul évolue avec l'abscisse, la valeur extérieure de la vitesse longitudinale est gardée constante d'égale à sa valeur initiale. Pour les variables de la turbulence, les valeurs limites peuvent être calculées à partir des formes limites des équations de transport obtenues en prenant tous les gradients transverses égaux à zéro [2]. Il s'ensuit ainsi pour  $y = y_{\text{ext}}$  les équations pour les valeurs limites de  $k$  et  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} k &\longrightarrow u_{\text{ext}} \frac{\partial k_{\text{ext}}}{\partial x} = - \epsilon_{\text{ext}} \\ \epsilon &\longrightarrow u_{\text{ext}} \frac{\partial \epsilon_{\text{ext}}}{\partial x} = - C_2 \frac{\epsilon_{\text{ext}}^2}{k_{\text{ext}}} \end{aligned} \quad (3)$$

Mais l'expérience montre que, pour les variables de turbulence, la transformation de ces conditions de Dirichlet évolutives en conditions de Dirichlet constantes ou mêmes en conditions de Neumann (par exemple  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ) ne modifie pas la qualité de la prédiction de l'écoulement de façon significative.

### 3 - Constantes du modèle

Les constantes utilisées dans ce modèle sont données dans le tableau I. Elles ont des valeurs standard tirées de la littérature [4], [8].

$C_D$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$
0,09	1,0	1,3	1,45	2,0

Tableau I . Ensemble des constantes utilisées dans le modèle I pour les écoulements à masse volumique constante.

## C - Résultats

Après que les diverses conditions aux limites ont été établies, les résultats des calculs numériques sont analysés et comparés aux résultats expérimentaux.

### C-1. Taux de dispersion

Une caractéristique majeure d'un écoulement de jet est le taux de dispersion, défini comme le taux avec lequel une épaisseur caractéristique du jet augmente, ou le taux avec lequel la vitesse sur la ligne centrale diminue. L'importance d'un tel paramètre est due au fait que sa valeur est la conséquence du comportement de toutes les variables de l'écoulement. Comme nous l'avons mentionné précédemment, deux paramètres différents peuvent décrire le taux de dispersion. Une épaisseur caractéristique du jet peut être définie en prenant la distance  $y_{1/2}$  entre le plan de symétrie et les points où la vitesse est égale à la moitié de la vitesse sur l'axe. Le paramètre de décroissance de la vitesse sur l'axe est défini par le carré du rapport de la vitesse axiale initiale  $U_0$  à la vitesse axiale locale  $U_n$ , c'est-à-dire :  $(U_0/U_n)^2$ . Les résultats concernant ces deux paramètres sont rapportés par les figures 2 et 3 et comparées avec les résultats expérimentaux.

La prédiction de la croissance du jet n'est pas parfaite. Dans les résultats expérimentaux, le jet s'ouvre linéairement selon la relation

$$y_{1/2} \approx 0,1 (x-x_0) \quad (4)$$

avec  $x_0 = -2$  d tandis que le calcul numérique prédit effectivement la linéarité de la croissance mais avec des paramètres sensiblement différents.

$$y_{1/2} \approx 0,12 (x-x_0) \quad (5)$$

avec  $x_0 = 6$ .d. Ces résultats sont beaucoup plus proches des résultats expérimentaux de Heskestad [3] qui rapporte la même origine virtuelle avec

un taux de dispersion plus proche, de l'ordre de 0,11.

Mais, selon Gutmark et Wygnanski [1], les conditions initiales de Heskestad sont différentes, dans le sens que le profil de vitesse du jet émergeant est plus proche de celui d'un écoulement de tuyau et a aussi un taux de turbulence plus élevé (2 à 4 %).

Dans notre esprit, la différence entre nos prédictions et les résultats expérimentaux est surtout due à la grossière approximation du profil de vitesse initiale en marche d'escalier. Des tests furent faits en diminuant le niveau de turbulence jusqu'à 0,01 % sans changer notablement le taux de dispersion. A cause de la grande variété de taux de dispersion expérimentaux obtenus seulement en modifiant légèrement les conditions initiales (fil de transition, uniformité du champ de vitesse....) il semble qu'un état universel d'équilibre peut être atteint seulement à une distance amont relativement importante ( $x > 50d$ ).

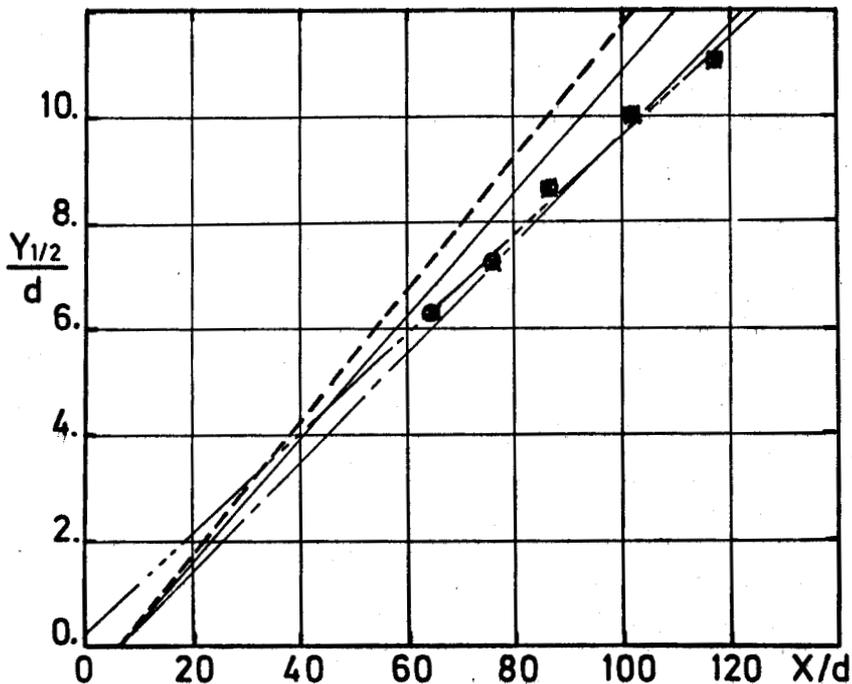


Fig. 2 - Croissance du jet avec la distance.

$\theta$ , — — — — — : exp [1]; ..... prédiction présente.

————— : Heskestad 3 ; - - - exp [1] (incluant l'origine virtuelle prédite).

La courbe de décroissance de la vitesse axiale (fig. 3) montre un accord meilleur avec les résultats expérimentaux. La loi générale de décroissance

$$U_m \sim x^{-1/2} \quad (6)$$

est bien prédite avec une pente légèrement différente mais avec la même origine virtuelle :

$$\text{expériences } \left(\frac{U_o}{U_m}\right)^2 \sim 0,190 \left(\frac{x}{d} - 6\right) \quad (7)$$

$$\text{prédictions } \left(\frac{U_o}{U_m}\right)^2 = 0,207 \left(\frac{x}{d} - 6\right) \quad (8)$$

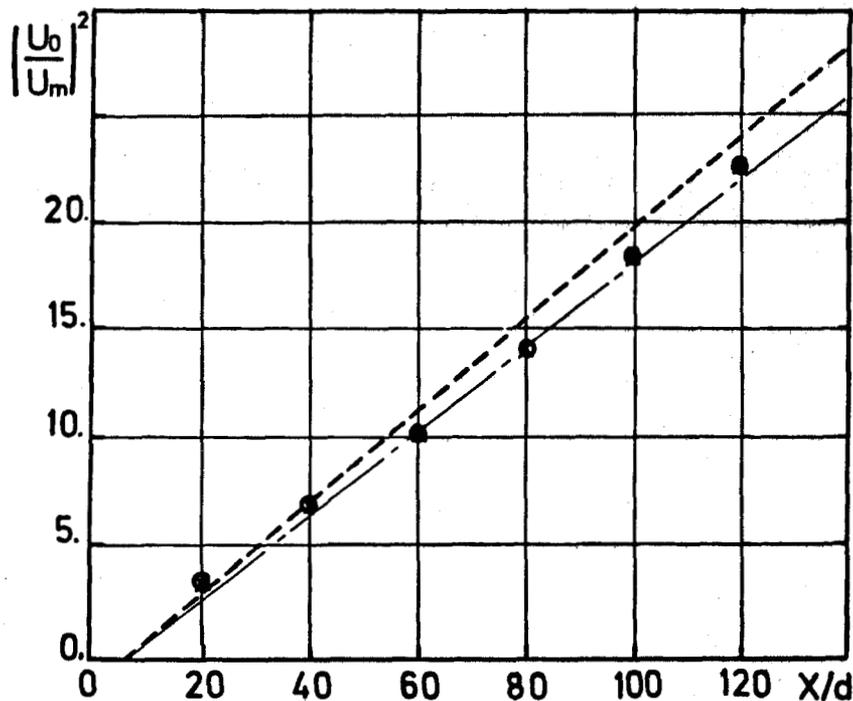


Fig. 3 - Décroissance de la vitesse axiale.

●, — — — : exp [1] ; ---- prédiction

### C-2. Profil de vitesse moyenne

Le profil de la vitesse longitudinale moyenne est comparé aux résultats expérimentaux de Gutmark et Wagnanski (fig. 4) et montre un très bon accord. La comparaison est montrée pour une position ( $\frac{x}{d} = 103$ ) mais le

mais le même accord est obtenu à différentes positions pourvu que les résultats soient pris dans la partie du jet où les profils moyens sont en équilibre. A cause du manque de données expérimentales, nous ne pouvons rien conclure au sujet de l'écoulement au coeur du jet. La vitesse moyenne est normalisée par sa valeur sur la ligne centrale et la variable d'abscisse est la distance sans dimension  $\eta$  du plan de symétrie.

$$\eta = y/(x-x_0) \quad (9)$$

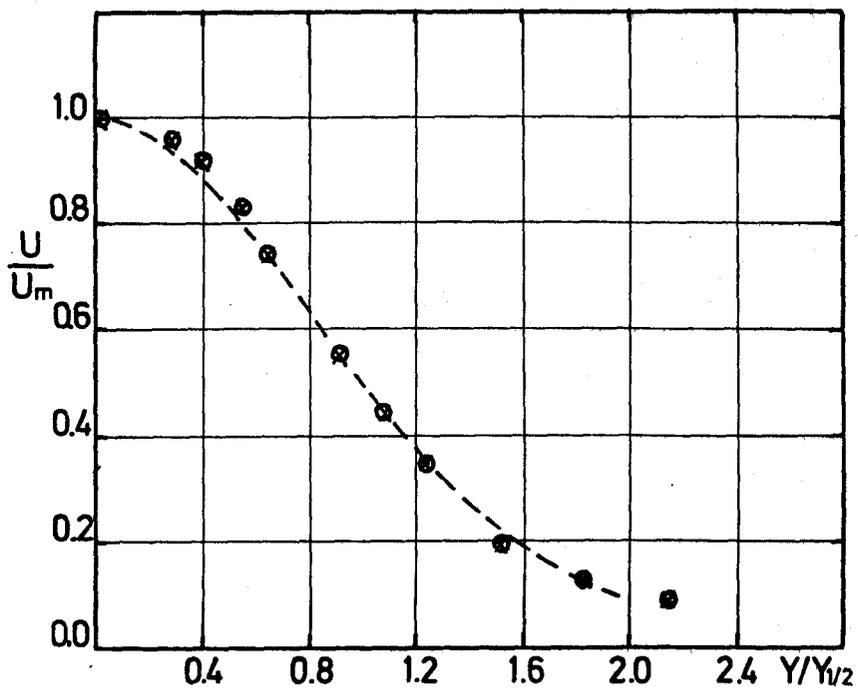


Fig. 4 - Profil de vitesse moyenne longitudinale ( $x/d = 103$ )

⊗ exp [1] ; ---- prédiction

### C-3. Variables de turbulence

Dans [1] les valeurs R.M.S. conventionnelles des trois composantes de vitesse sont rapportées. De telles quantités ne sont pas prédites par le présent modèle, aussi la comparaison ne peut être faite que pour l'énergie de turbulence  $k$ . Cette quantité est égale à la demi trace du tenseur des contraintes de Reynolds.

$$k = \frac{1}{2} \left[ \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right] \quad (10)$$

Avec l'équation (10), l'énergie de turbulence peut être calculée à partir des valeurs expérimentales. Les résultats sont rapportés sur la figure 5 et comparés avec les prédictions du modèle.

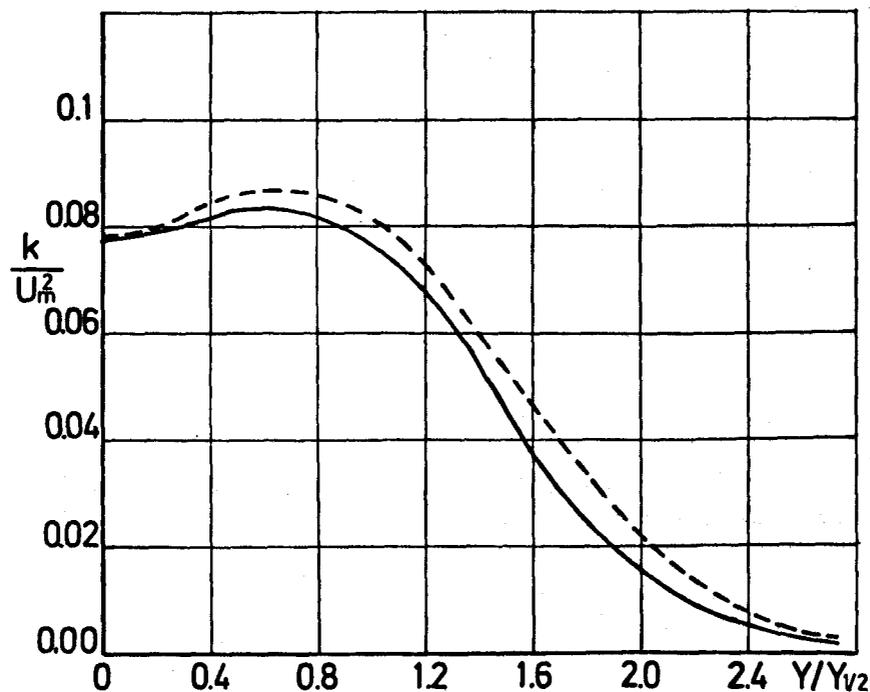


Fig. 5 - Distribution de l'énergie cinétique de turbulence à travers le jet :  $x/d = 106$ ; — : exp [1], ---- prédiction.

L'accord entre les résultats expérimentaux et les calculs est tout à fait satisfaisant. Comme le montrent les expériences, les intensités normalisées de turbulence dans le plan central du jet atteignent leur état d'équilibre à une distance approximative d'environ 30 épaisseurs de fente de la tuyère. Ce qui signifie aussi que après 30 d en aval du plan d'émergence, la différence entre la valeur de  $\frac{k}{U_M^2}$  dans le plan central et sa valeur aval asymptotique est inférieure à 10 % (fig. 6).

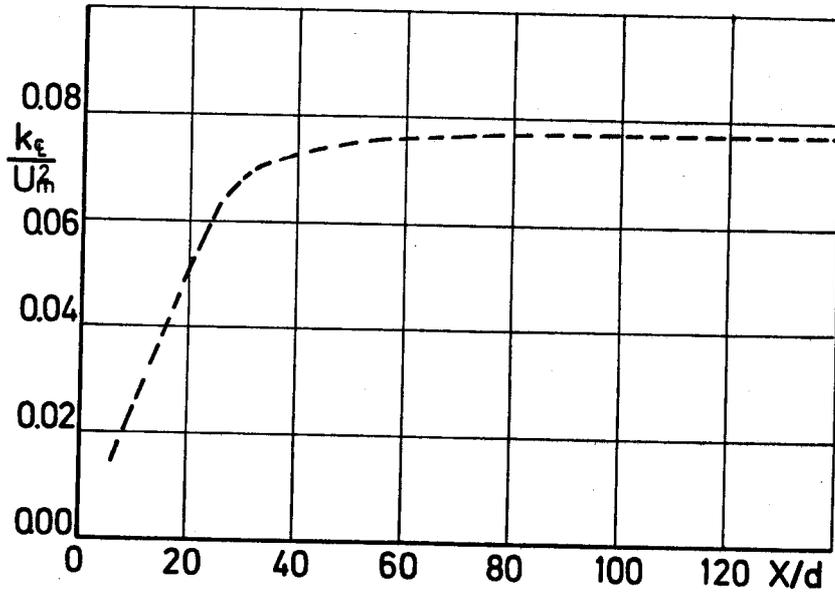


Fig. 6 - Décroissance prédite de l'énergie cinétique de turbulence normalisée sur la ligne central du jet.

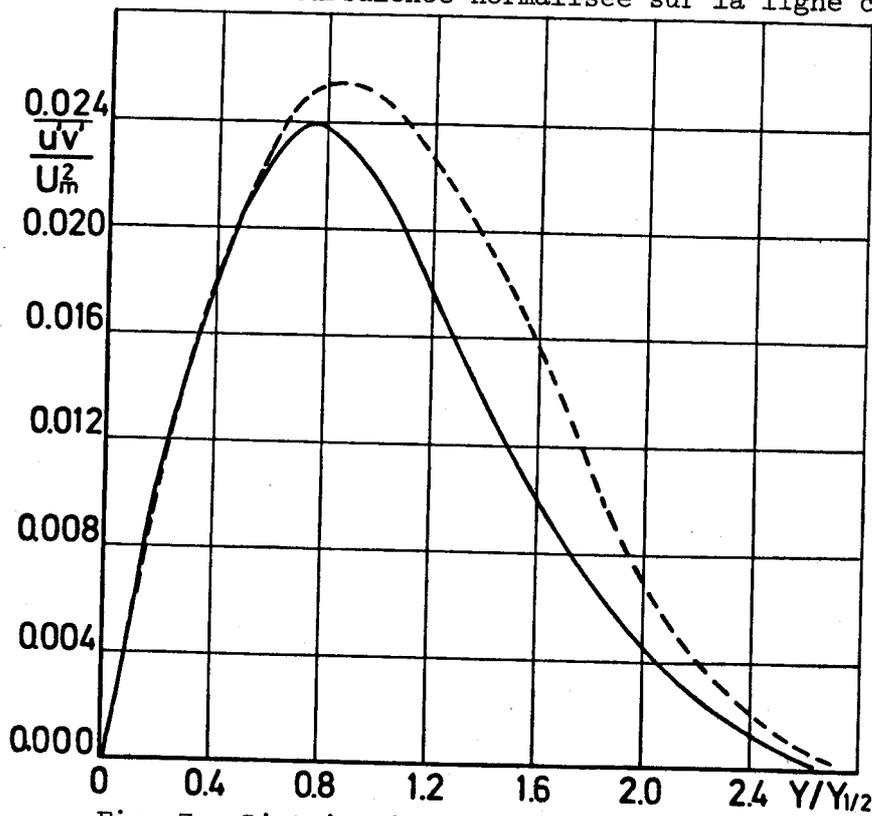


Fig. 7 - Distribution des contraintes de Reynolds à travers le jet.

x/d = 106

— exp [1] , - - - - - prédiction.



A partir des quantités de turbulence qui sont calculées dans ce modèle de turbulence, les contraintes de cisaillement turbulent peuvent être évaluées avec l'approximation de Boussinesq :

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (11)$$

$$\text{où } \nu_t = C_D \frac{k^2}{\epsilon} \quad (12)$$

$\epsilon$  est le taux de dissipation de  $k$ . La valeur de la constante  $C_D$  est donnée dans le tableau I. L'équation (11) permet donc une comparaison entre les contraintes de Reynolds calculées et mesurées. La prédiction est correcte excepté dans la partie intermittente de l'écoulement où le frottement turbulent est légèrement surestimé par le modèle  $k$ - $\epsilon$ .

## V-2. MODELE $k$ - $\epsilon$ POUR ECOULEMENT A MASSE VOLUMIQUE VARIABLE. MODELE I.

Après la prédiction réussie d'un écoulement à masse volumique constante, le modèle I est utilisé maintenant pour des calculs d'écoulement à masse volumique variable. Masse volumique variable ne signifie pas nécessairement qu'il y a des effets de compressibilité, mais c'est plutôt la conséquence du mélange de gaz ayant des masses moléculaires très différentes, même dans des écoulements à vitesse modérée. Des expériences correspondant à ce type d'écoulement furent rapportées en 1972 par Roskho [5] et en 1973 avec plus de détails par Rebollo [6].

### A - Configuration de l'écoulement.

Le type d'écoulement couvert par les expériences est un écoulement turbulent plan de cisaillement sous forme de couche de mélange. Deux gaz, ayant des masses volumiques différentes aux mêmes conditions de pression et température s'écoulent avec des vitesses parallèles de chaque côté d'une fine

plaque plane. Ainsi les deux composantes se mélangent dans la couche de cisaillement qui se développe en aval de la plaque qui les sépare. A cause des masses volumiques différentes des courants, des fluctuations dans la masse volumique du mélange sont présentes dans l'écoulement cisailé. Les expériences de Rebollo [6] concernent le mélange d'hélium et d'azote à une pression  $p = 4$  atm. Les vitesses et masses volumiques des écoulements de gaz pur donnent les valeurs limites (fig. 8)

$$\text{Helium} \quad \rho_E = 0.641 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$U_E = 10.9 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{Azote} \quad \rho_I = 4.49 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$U_I = 4.12 \text{ m s}^{-1}$$

Pour ces courants, les nombres de Reynolds respectifs par unité de longueur sont alors

$$Re_E = 3600 \text{ cm}^{-1} \quad (\text{Helium})$$

$$Re_I = 12000 \text{ cm}^{-1} \quad (\text{Azote}).$$

De plus l'écoulement satisfait la condition d'équilibre

$$\rho_I U^2 = \rho_E U_E^2. \quad (13)$$

Dans sa thèse, Rebollo a considéré deux configurations différentes d'écoulement. Tout d'abord, le gradient de pression longitudinal est égal à zéro. Ce qui signifie que les valeurs limites de la vitesse sont constantes. Le second cas correspond à un gradient de pression positif. Pour un écoulement en équilibre [6] le gradient de pression est caractérisé par la constance du paramètre de Falkner-Skan  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{x}{U} \frac{\partial U}{\partial x} = \text{cte} \quad (14)$$

Deux valeurs différentes de  $\alpha$  sont considérées correspondant respectivement à des gradients de pression positif et nul.

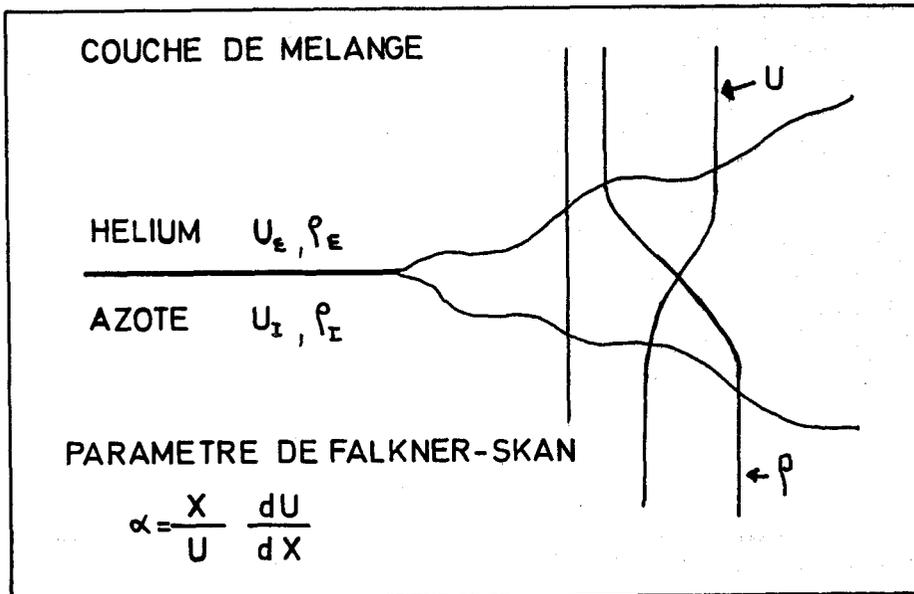


Fig. 8 Configuration de l'écoulement de couche de mélange à masse volumique variable.

B - Traitement numérique.

Ce type d'écoulement nécessite l'utilisation complète du modèle I. Donc, en addition aux équations de quantités de mouvement longitudinales et du modèle de turbulence lui-même, il est nécessaire de résoudre les équations de transport pour la fraction massique et les fluctuations de masse volumique afin de décrire correctement le processus de mélange avec ou sans gradient de pression. La liste des équations est : (tableau I, Chapitre III) :

- conservation de la masse.
- quantité de mouvement longitudinale.
- énergie cinétique de turbulence.
- taux de dissipation de l'énergie de turbulence.
- fraction massique.
- corrélations de densités partielles,

soit 8 équations. Comme l'équation de conservation de la masse est résolue implicitement, il reste 7 équations de transport qui sont résolues par la technique numérique décrite précédemment.

### B - 1 Conditions initiales

Des conditions initiales doivent être données pour toutes les équations de transport. De chaque côté de la plaque de séparation le profil de vitesse est constant en travers de l'écoulement et a la valeur nominale excepté au voisinage de la plaque de séparation où des profils de couche limite laminaire sont supposés des deux côtés. L'épaisseur de ses couches limites fut estimée par rapport au nombre de Reynolds par unité de longueur donné par les résultats expérimentaux. 60 points sont utilisés pour décrire l'écoulement dans la direction normale et leur espacement est plus aéré dans les zones où existent des gradients de vitesse. Puisque la procédure numérique ne tolère pas de vitesse moyenne longitudinale négative ou nulle, nous avons supposé, au bord de fuite de la plaque de séparation une vitesse égale à un centième de la vitesse nominale du courant d'azote. L'énergie cinétique de turbulence initiale suivant la direction normale à l'écoulement est, comme son taux de dissipation, constante et très faible, de telle façon que la viscosité tourbillonnaire correspondante soit du même ordre que la viscosité laminaire ( $\approx 2 \cdot 10^{-5}$ ).

Des résultats identiques furent obtenus avec une viscosité tourbillonnaire initiale comprise dans le domaine

$$10^{-9} \leq \mu_t \leq 2 \cdot 10^{-5} \quad (15)$$

La fraction massique moyenne est une fonction échelon au bord de fuite de la plaque. ( $\bar{C}_I = 1$  dans le courant d'azote,  $\bar{C}_I = 0$  dans le courant d'Helium).

Les corrélations de densités partielles sont initialement constantes et égales à zéro.

### B - 2 Conditions aux limites

Deux cas différents sont possibles.

- a)  $\alpha = 0$ . Le gradient de pression longitudinal est égal à zéro. Les conditions aux limites pour l'équation de quantité de mouvement sont de type Dirichlet

et les valeurs sont gardées constantes le long des bords de la couche de mélange. Evidemment l'équation de fraction massique exige des conditions aux limites identiques puisque les frontières du domaine de calcul évoluent avec les bords de la couche de mélange et restent dans des zones où l'écoulement est mono-constituant. Toutes les quantités d'ordre supérieur telles que  $k, \epsilon, Q_{II}, Q_{IJ}, Q_{JJ}$  ont des conditions aux limites du type Neumann.

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = 0 .$$

L'expérience montre que pour ce type d'écoulement, l'utilisation de conditions de Dirichlet comparables à celles décrites dans la partie précédente ne modifie pas les résultats de façon significative.

b)  $\alpha = -0,18$ . Le paramètre de Falkner-Skan  $\alpha$  est supposé constant pour produire des profils semblables dans la couche de mélange. Toutefois, il n'est pas possible d'envisager un tel critère dans la région de la couche de cisaillement qui est proche de l'origine parce que la condition  $\alpha = \text{cte} \neq 0$  impliquerait que le gradient de pression tend vers l'infini quand  $x$  tend vers zéro. Pour supprimer cette condition inutile et irréaliste pour les calculs, le gradient de pression dans le domaine initial ( $0 \leq x \leq 2,5$  cm) est décrit par un polynôme dont la valeur est nulle à l'origine ( $x = 0$ ) et qui rejoint la valeur théorique ainsi que sa dérivée pour  $x = 2,5$  cm. Les valeurs limites de la vitesse sont calculées en fonction de l'expression de  $\frac{dP}{dx}$  et des valeurs initiales.

Les conditions aux limites pour les autres variables sont identiques à celles décrites précédemment pour  $\alpha = 0$ .

### B - 3 Constantes du modèle

Le tableau II donne les valeurs des constantes qui sont utilisées dans ce modèle. Les cinq constantes qui furent utilisées dans le cas d'écoulements à masse volumique constante restent inchangées. Une propriété

de ce modèle est que pour  $\alpha = 0$ , les corrélations de masses volumiques partielles ne peuvent pas influencer les deux équations de la turbulence ( $k-\epsilon$ ). Donc, entre le cas incompressible et ce cas dans lequel la masse volumique peut varier, une seule nouvelle constante est introduite, qui est susceptible de modifier le profil de vitesse moyenne. Cette constante  $\sigma_{CI}$  est le nombre de Schmidt turbulent associé à la variable  $C_I$ . La valeur de  $C_I$  est obtenue par comparaison des profils de pression dynamique mesurée et calculée. En même temps les constantes  $C_{Q1}$  et  $C_{Q2}$  sont ajustées pour représenter correctement les fluctuations de masse volumique. Pour  $\alpha \neq 0$ , les équations de la turbulence sont couplées avec les équations de  $Q_{IJ}$  par l'intermédiaire des termes de gradient de pression. Donc, une fois que la constante,  $\sigma_{CI}$  est fixée dans le cas précédent ( $\alpha = 0$ ), ce cas ( $\alpha = -0,18$ ) est utile pour vérifier la validité des équations pour les fluctuations de masse volumique et permet de fixer la valeur des constantes qui apparaissent dans les termes de gradient de pression.

k - eq	$\sigma_k$	1,0	$\epsilon$ -eq	$\sigma_\epsilon$	1,3
	$C_{P1}$	0		$C_{\epsilon1}$	1,45
	$C_{P2}$	0,4		$C_{\epsilon2}$	2,0
$Q_{II}$	eq	$\sigma_P$	0,26	$C_{\epsilon3}$	0
$Q_{IJ}$		$C_{Q1}$	3,0	$C_{\epsilon4}$	0,4
$Q_{JJ}$			0,6	$C_{\epsilon5}$	0
			$C_I$ - eq	$\sigma_{CI}$	0,26

Tableau II Constantes du modèle I

Pour écoulements à masse volumique variable.

C - RésultatsC - 1 Taux de dispersion

Comme dans le cas du jet, un paramètre important décrivant le développement global de cette couche de mélange est le taux de dispersion. Pour la comparaison avec les résultats expérimentaux, l'épaisseur caractéristique  $\delta_c$  est définie par le profil de vitesse. Soit  $\Delta u$ , la différence de vitesse entre les deux courants de gaz pur ( $\Delta u = U_F - U_I$ ).  $\delta_c$  est la distance entre les points correspondant à  $u_I + 0,2 \Delta u$  et  $u_I + 0,8 \Delta u$ .

Les valeurs suivantes furent obtenues pour le taux de dispersion

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial x} \text{ (fig. 9)}$$

$\alpha = 0$  (gradient de pression nul)

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial x} = \begin{array}{|l} 0,1 \rightarrow \text{expériences} \\ 0,085 \rightarrow \text{calcul} \end{array}$$

= - 0,18 (gradient de pression positif)

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial x} = \begin{array}{|l} 0,128 \rightarrow \text{expériences} \\ 0,130 \rightarrow \text{calcul} \end{array}$$

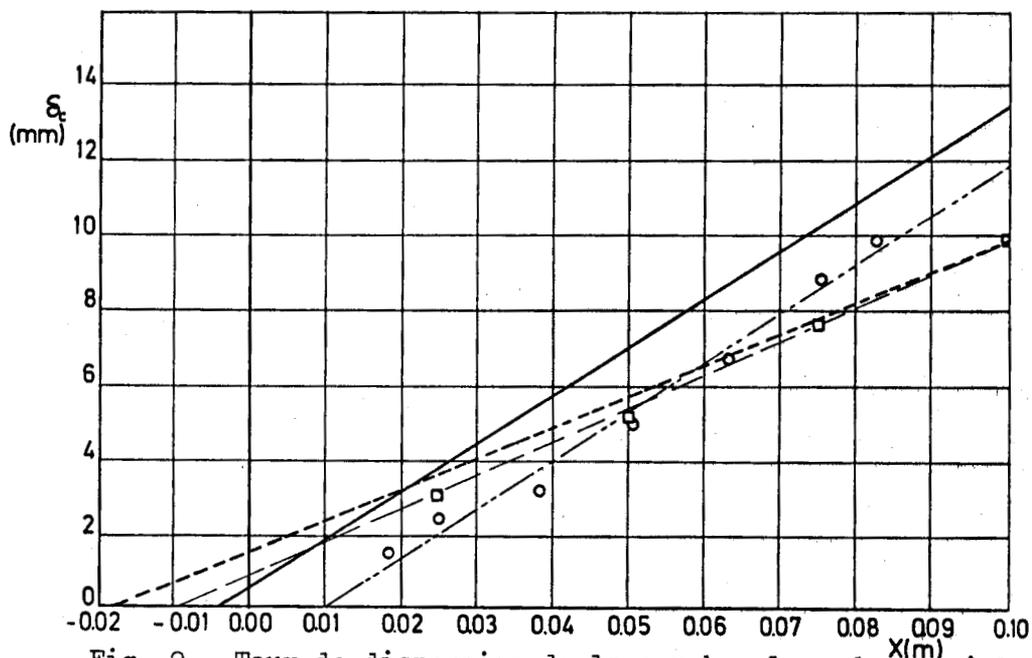


Fig. 9 Taux de dispersion de la couche plane de cisaillement

( $\alpha=0$ ) :  $\square$ , — — exp [6], - - - - prédiction

( $\alpha=-0,18$ )  $\circ$ , — — — exp [6], — — — prédiction

Un accord satisfaisant est obtenu dans le cas d'un gradient de pression nul, mais pour  $\alpha = -0,18$ , la courbe calculée est au-dessus des valeurs expérimentales tandis que sa pente est très bien prédite. La raison de cette différence est probablement le manque d'information au sujet du profil de vitesse initiale et de la distribution du gradient de pression dans le voisinage de la plaque de séparation. Des calculs furent faits avec des longueurs différentes sur lesquelles le gradient de pression est extrapolé à partir de l'origine du domaine de mélange. Des polynômes du troisième et du quatrième ordre furent également utilisés pour exprimer la valeur du gradient de pression dans cette zone, mais malheureusement tous ces essais n'améliorèrent pas la prédiction de la position de l'origine virtuelle de l'écoulement.

En accord avec les résultats expérimentaux, des profils d'équilibre sont prédits avec les conditions décrites dans (13) et (14). La similitude des profils commence après 5 cm approximativement.

#### C - 2 Profil de masse volumique

La figure 10 montre la différence entre les masses volumiques calculées et mesurées à  $x = 5,08$  cm. Une caractéristique majeure de cet écoulement est la partie plane de la courbe située du côté de la masse volumique la plus petite qui est due au terme de diffusion de l'équation de concentration. Sur toutes les courbes de profils moyens (exceptée la vitesse) une caractéristique analogue sera observée. Sur les figures suivantes, les deux cas  $\alpha = 0$  et  $\alpha = -0,18$  seront rapportés ensemble pour mettre en évidence l'influence importante du gradient de pression sur les profils moyens.

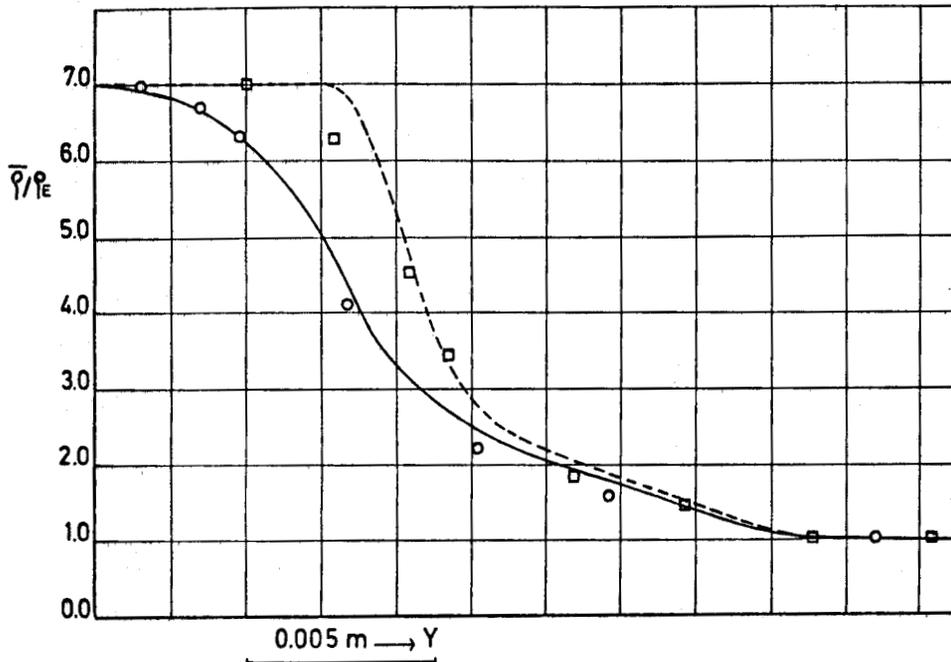


Fig. 10 Masse volumique moyenne à  $x = 5,08$  cm Modele I

$\alpha = 0$  :  $\square$  exp [6] , ---- prédiction

$\alpha = -0,18$  o exp [6], — prédiction

### C - 3 Profil de pression dynamique

Pour comparer correctement les résultats numériques et expérimentaux nous supposons que la pression dynamique mesurée est  $\overline{(\rho U^2)}$  parce qu'elle est obtenue avec une sonde de type pitot. Des définitions de la moyenne pondérée par la masse volumique, il résulte que :

$$\overline{\rho U^2} = \bar{\rho} \widetilde{U^2} + \bar{\rho} \widetilde{u''^2} \quad (16)$$

A ce stade de fermeture, les composantes normales du tenseur des contraintes de Reynolds ne sont pas connues. Donc  $\widetilde{u''^2}$  peut être approximée seulement comme une fraction de l'énergie de turbulence. L'hypothèse d'une turbulence isotrope amène donc  $\widetilde{u''^2} = \frac{2}{3} k$  ce qui signifie que la correction qui apparait dans l'équation (16) est de l'ordre de 2 % du terme principal.

L'estimation du nombre de Schmidt turbulent  $\sigma_{CI}$  est obtenue par la comparaison des résultats expérimentaux avec les calculs de pression dynamique, parce que cette quantité combine les effets de masse volumique (donc de concentration) avec les effets de quantité du mouvement. Ce test doit être effectué pour  $\alpha = 0$ , parce que les fluctuations de masse volumique n'influencent pas les processus de diffusion turbulente par le biais des termes de gradient de pression qui sont présents dans les équations pour  $k$  et  $\epsilon$ . Après un grand nombre de calculs, la valeur de 0,26 est retenue pour fournir le meilleur accord avec les résultats expérimentaux de Rebolls [6] (voir fig. 11).

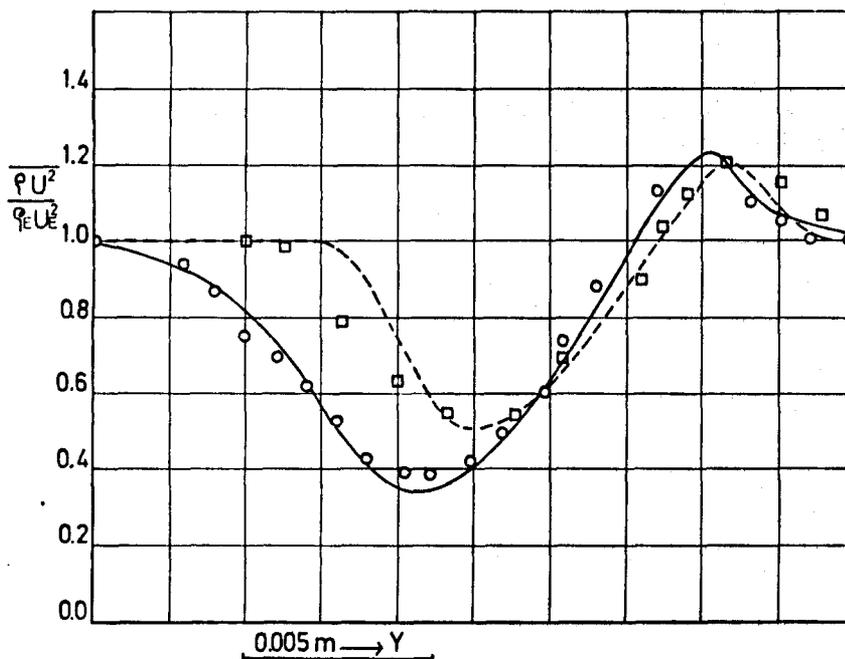


Fig. 11 Pression dynamique pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = -0,18$   
à  $x = 5,08$  cm Modèle I - Mesures de [6].  
Mêmes symboles que la fig. 10.

Toutefois, cette valeur étonnamment faible s'accorde très bien avec la valeur donnée par Rebollo, provenant d'une analyse de similitude, et qui

est rapportée dans la référence [6]. Dans des calculs d'écoulements réactifs turbulents, Elgobashi [8] donne une valeur de 0,6 pour le nombre de Schmidt turbulent associé à la fraction de mélange ("mixture fraction") avec un niveau semblable de fluctuations de masse volumique. Une conséquence importante de la différence de masses volumiques des deux constituants de mélange est la forme particulière du profil de pression dynamique avec un minimum correspondant au sillage de la plaque séparatrice et également un maximum dû à des taux de diffusion différents de la quantité de mouvement et de la fraction massique (ces taux de diffusion seraient semblables si  $\sigma_{CI} = 1$ ). Pour montrer l'influence du nombre de Schmidt  $\sigma_{CI}$  sur le développement de ce maximum, différentes valeurs de  $\sigma_{CI}$  furent utilisées pour les deux cas de gradient de pression. Les résultats rapportés sur la figure 12 montrent pour  $\alpha = 0$  une relation simple entre  $\sigma_{CI}$  et la croissance du maximum tandis que pour le cas du gradient de pression positif ( $\alpha = -0,18$ ) la relation semble plus complexe.

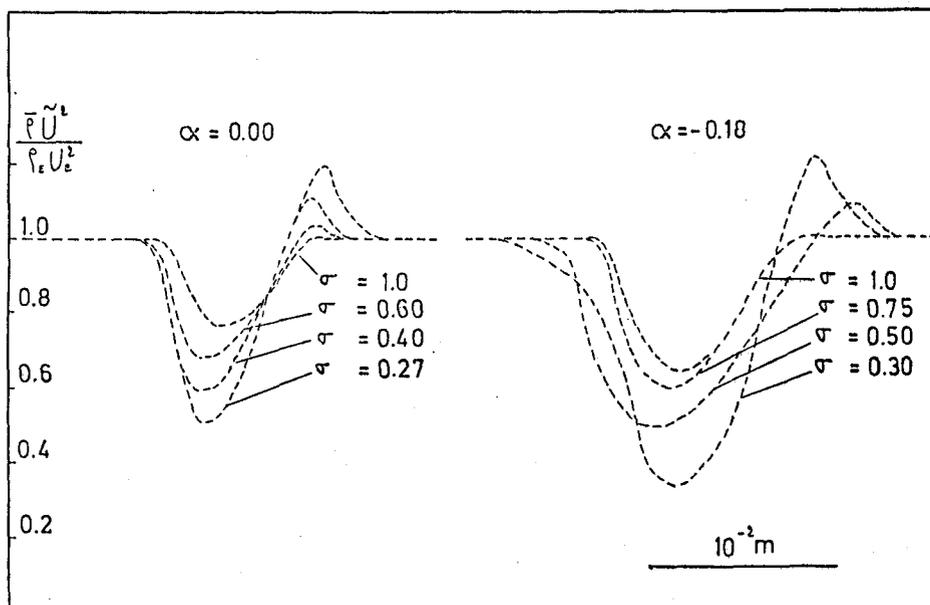


Figure 12 - Influence du nombre de Schmidt turbulent sur le profil de pression dynamique ( $x = 5,08$  cm) Modèle I .

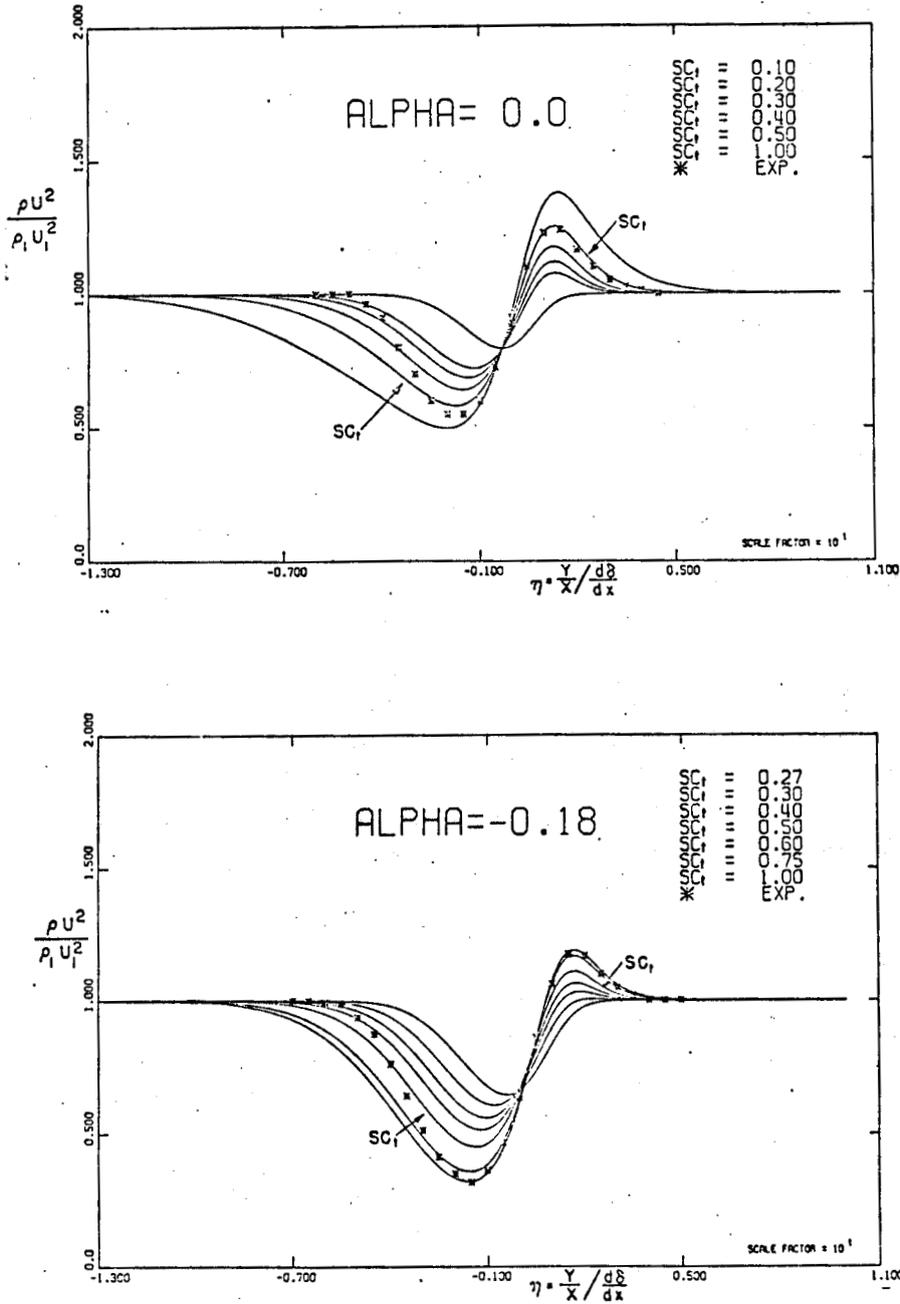


Fig. 13 - Influence du nombre de Schmidt turbulent selon l'analyse de Rebollo [6]

Ceci est dû à la connexion entre les fluctuations de masse volumique et les variables de turbulence  $k$  et  $\epsilon$  via le gradient de pression.

Pour  $\sigma_{CI} = 1$  le profil de pression dynamique montre seulement un minimum qui correspond au sillage de la plaque de séparation. Puis avec des valeurs décroissantes de  $\sigma_{CI}$ , ce minimum est renforcé et le maximum apparaît sur le



sur le côté basse vitesse de la couche de mélange et s'accroît au fur et à mesure que  $\sigma_{CI}$  diminue. Cette tendance est observée dans les deux cas  $\alpha = 0$  et  $\alpha = -0,18$ . Dans la figure 13 qui est tirée de la thèse de Rebollo, le même processus est montré pour des valeurs de  $\sigma_{CI}$  dans le même intervalle que celui préconisé par les calculs. Toutefois deux remarques sont nécessaires :

a) L'analyse de Rebollo ne prédit pas très bien la largeur totale du profil de pression dynamique (spécialement le côté haute vitesse ne correspond pas aux mesures).

b) Les effets des fluctuations de masse volumique ne sont pas présents dans cette analyse. Cela peut expliquer l'absence de superposition des courbes avec différentes valeurs de  $\sigma_{CI}$ .

#### C - 4 Fluctuations de masse volumique.

Le résultat des prédictions de fluctuations de masse volumique est montré dans la figure 14.

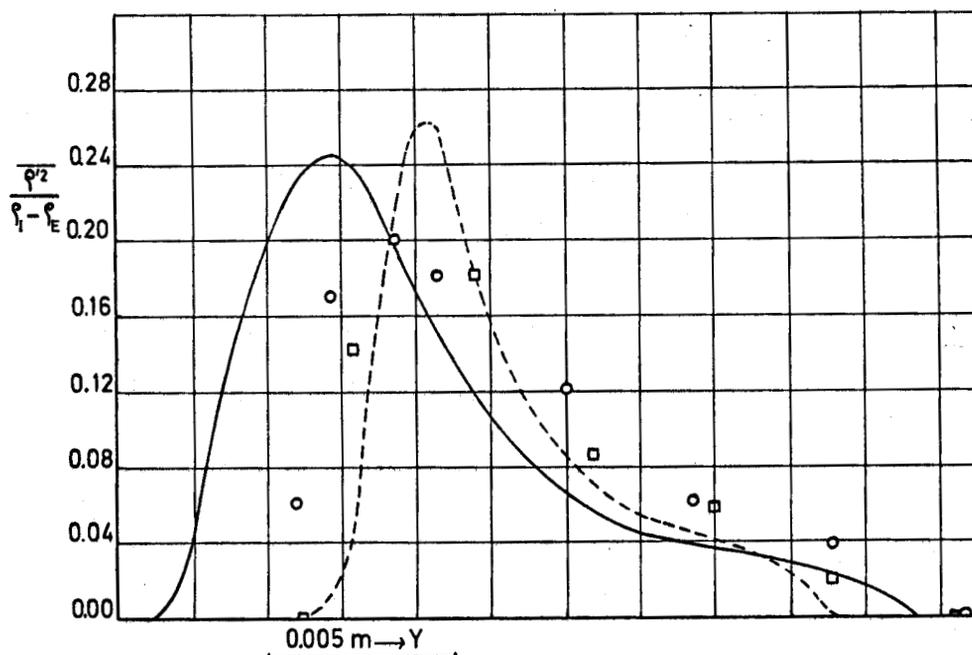


Fig. 14 Fluctuations de masse volumique à 5,08 cm.  
Modèle I (mêmes symboles que sur la figure 10).

Les profils mesurés et calculés ont une forme particulière avec un plateau qui indique que les fluctuations de masse volumique sont fortement présentes dans toute la zone de mélange et spécialement à l'endroit du maximum de pression dynamique.

### C - 5 Vitesse moyenne

La vitesse moyenne n'a pas été mesurée directement dans le travail expérimental de Rebollo. Toutefois elle peut être calculée à partir des mesures de pression dynamique et de masse volumique.

La solution de l'équation de transport de quantité de mouvement donne la moyenne pondérée de la vitesse.

$$\bar{u} = \bar{u} + \frac{\overline{\rho' u'}}{\bar{\rho}} \quad (17)$$

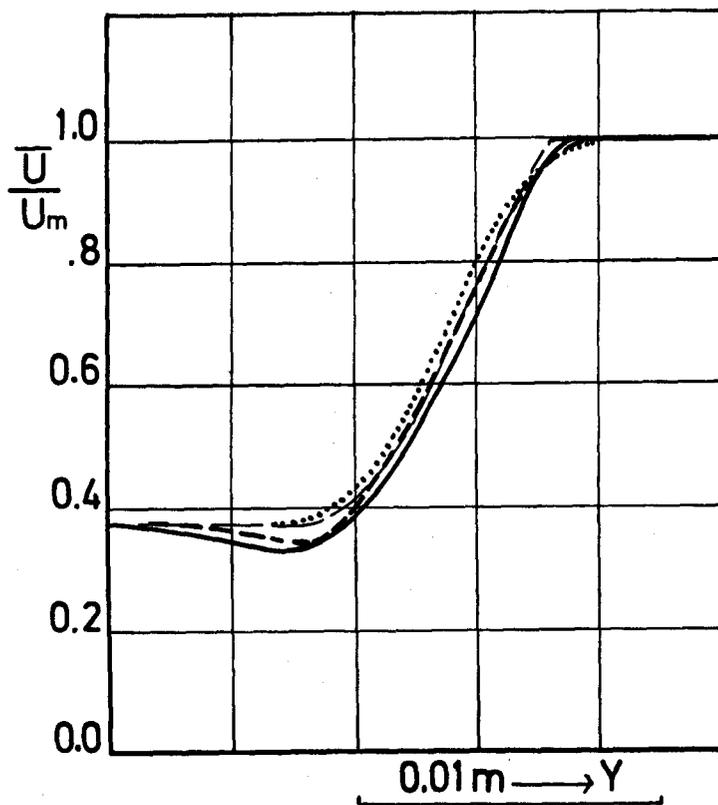


Fig. 15 Vitesse moyenne à  $x = 5,08$  cm. Modèle I  
 $\alpha = 0$  : ... exp [6] , — — prédiction  
 $\alpha = -0,18$  : --- exp [6], — prédiction.

A ce niveau de fermeture, la corrélation vitesse-masse volumique n'est pas connue. Toutefois il est réaliste de supposer que cette quantité est petite comparée à la vitesse moyenne. Une évaluation possible de cette différence consiste à supposer que la turbulence est isotrope et en utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$\overline{(\rho'u')^2} \leq \overline{\rho'^2} \cdot \overline{u'^2} .$$

La valeur de cette borne supérieure confirme effectivement que ce terme peut être négligé devant la variable moyenne. Les différentes courbes de vitesse sont montrées dans la figure (15) et montrent un accord très acceptable.

#### C - 6 Contraintes de cisaillement turbulent

Comme pour la vitesse moyenne, la comparaison entre les contraintes issues des mesures et celles issues du calcul nécessite quelques précautions, dues à la différence entre les deux types de moyenne concernés. La figure 16 montre que les valeurs calculées sont notablement plus petites que les valeurs expérimentales. Néanmoins, les principales caractéristiques des courbes sont bien prédites. Pour  $\alpha = -0,18$  la courbe de vitesse moyenne montre de légers dépassements avant d'atteindre les valeurs limites (fig. 15), ce qui est en accord avec le comportement asymptotique qui a été montré par Rebollo [6]. Par conséquent, les contraintes de Reynolds montrent une légère dépression du côté de faible vitesse. Cette dépression n'apparaît pas du côté à vitesse élevée, ce qui peut être dû à la sous-estimation du niveau des fluctuations de masse volumique, ce qui change la valeur de la viscosité tourbillonnaire.

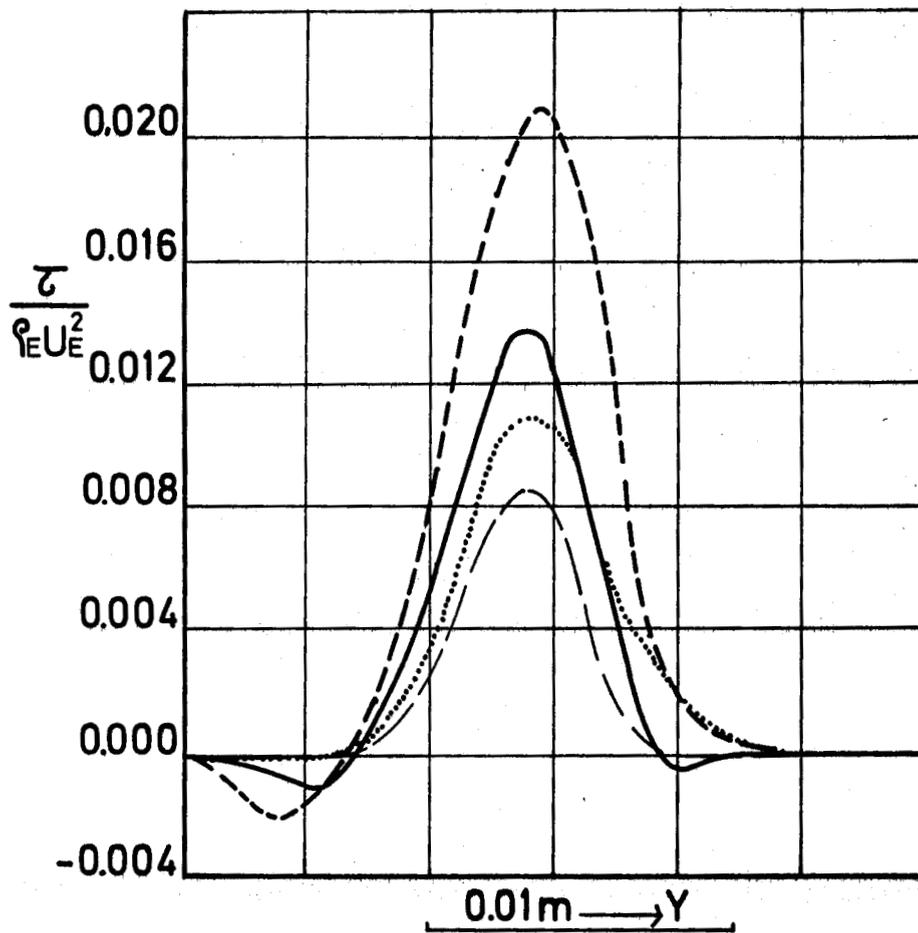


Fig. 16 - Contraintes de cisaillement turbulent à  $x = 5,08$  cm.

Modèle I (mêmes symboles que la fig. 15).

V - 3 Modèle k -  $\epsilon$  pour écoulement à masse volumique variable.

Modèle II .

Ce modèle est une extension du premier. La principale différence est que l'approximation de transport par gradient est supposée valable pour une statistique conventionnelle (pas de pondération par la masse volumique) et ne peut pas être transposée directement à la statistique de Favre. Il s'ensuit que

$$-\overline{\rho v'' \phi''} = \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial y} - \frac{\mu_t}{\sigma_\rho} \frac{\overline{\phi}}{\rho} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial y} \quad (18)$$

Cette approximation introduit de nouveaux termes sources dans les équations décrites au chapitre III. A nouveau, ce modèle est testé pour la prédiction de l'écoulement étudié par Rebollo et les résultats sont comparés également à ceux du modèle I.

#### A - Constantes du modèle

Les constantes qui sont utilisées dans ce modèle ont des valeurs identiques à celles utilisées dans le modèle précédent. Toutefois la nouvelle forme de l'approximation de transport par gradient introduit une nouvelle constante  $\sigma_\rho$ . On pourrait s'attendre à ce que  $\sigma_\rho$  prenne une valeur proche de celles de  $\sigma_{CI}$  ou  $\sigma_Q$ , mais en fait, après qu'une grande variété de valeurs aient été essayées, des résultats satisfaisants furent obtenus avec  $\sigma_\rho = 7,3$ . Le choix de cette valeur vient seulement d'une optimisation numérique. Il est probable que l'universalité ne doit pas être attendue de cette constante, et que sa valeur soit rattachée de façon plus ou moins simple à des paramètres propres de l'écoulement, comme par exemple le rapport des masses moléculaires des deux constituants.

#### B - Résultats

Les prédictions de ce modèle II sont comparées avec les résultats du modèle I et avec les résultats expérimentaux de Rebollo [6]. Les figures 17, 18 et 19 montrent les résultats concernant la masse volumique moyenne, la pression dynamique moyenne et les fluctuations de masse volumique.

La prédiction de la masse volumique moyenne est meilleure au bord de la zone de mélange à masse volumique élevée, mais on observe encore le même gradient très fort, ce qui est probablement une conséquence de l'approximation de transport par gradient elle-même, quand elle est utilisée pour décrire une région de grande intermittence, plutôt que les implications des fluctuations de masse

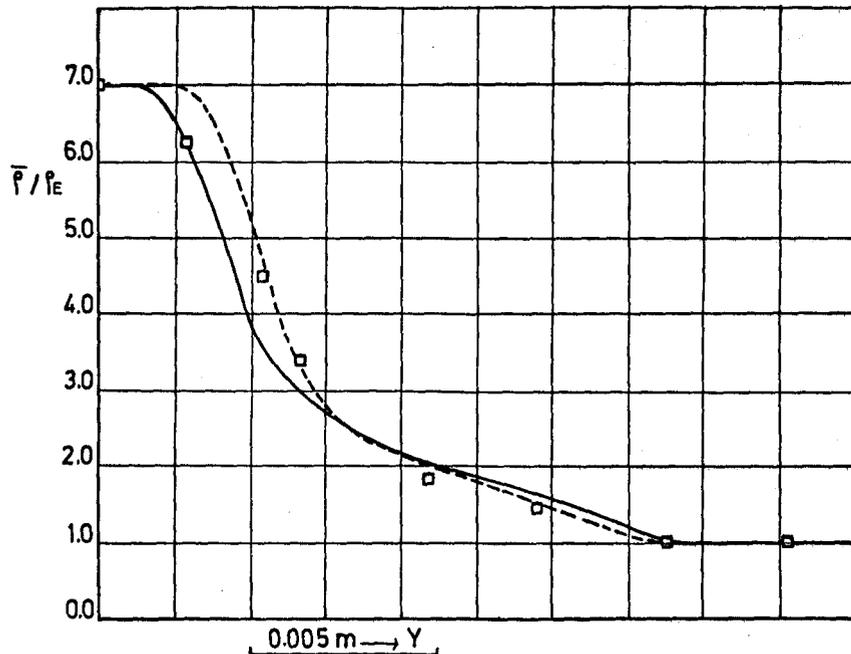


Fig. 17 - Masse volumique moyenne à  $x = 5,08$  cm

$\alpha = 0$  : exp [6] , --- Modèle I, — Modèle II

volumique. La prédiction de la pression dynamique est réellement meilleure quoique la remarque ci-dessus soit encore valable. Sur la figure 18, nous pouvons voir que le terme additif de l'équation de fraction massique agit pour renforcer l'effet du nombre de Schmidt turbulent différent de l'unité. Les extrema sont renforcés et la largeur totale de la zone de mélange correspond mieux aux résultats expérimentaux.

Le maximum des fluctuations de masse volumique est diminué d'environ 20 % par rapport aux prédictions du premier modèle, et s'est déplacé vers le côté à masse volumique élevée (fig. 19). Ceci est dû aussi au fait que le transport diffusif de fraction massique s'étend sur une zone plus large, la valeur maximum des fluctuations de masse volumique correspond à l'endroit où est situé le maximum du gradient de masse volumique dans le domaine de l'écoulement.

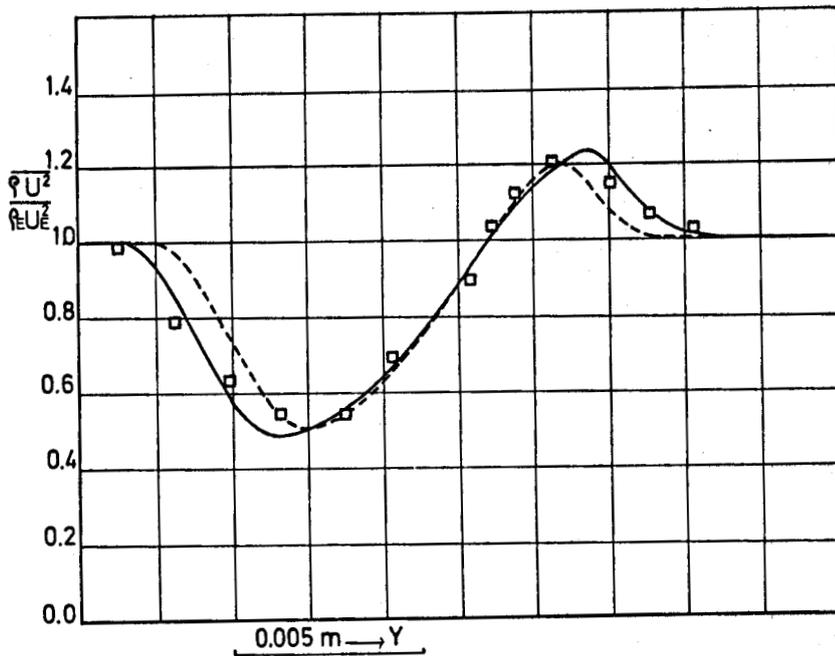


Fig. 18 - Pression dynamique à  $x = 5,08$  cm  
 $(\alpha=0)$  (mêmes symboles que fig. 17).

Une autre approche a été suivie par Sætran [9] pour améliorer l'approximation de transport par gradient. Ce travail est basé sur une suggestion de Bradshaw [10] pour approximer la diffusion turbulente d'un scalaire. L'hypothèse résultante de Sætran est

$$-\overline{\rho v'' \phi''} = \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + K \overline{\rho \phi} (k)^{1/2} \quad (19)$$

et les résultats sont en bon accord avec les données expérimentales.

Il faut néanmoins souligner que dans ce travail, les deux principales constantes de l'équation de dissipation ( $C_{\epsilon 1}$ ,  $C_{\epsilon 2}$ ) n'ont pas des valeurs standard qui pourraient être utilisées pour le calcul d'écoulements à masse volumique constante.

Une dernière comparaison pour cet écoulement est faite avec les contraintes de Reynolds. La figure 20 montre que la prédiction a la même qualité que celle du modèle I ; toutefois le maximum est inférieur d'environ 10 %.

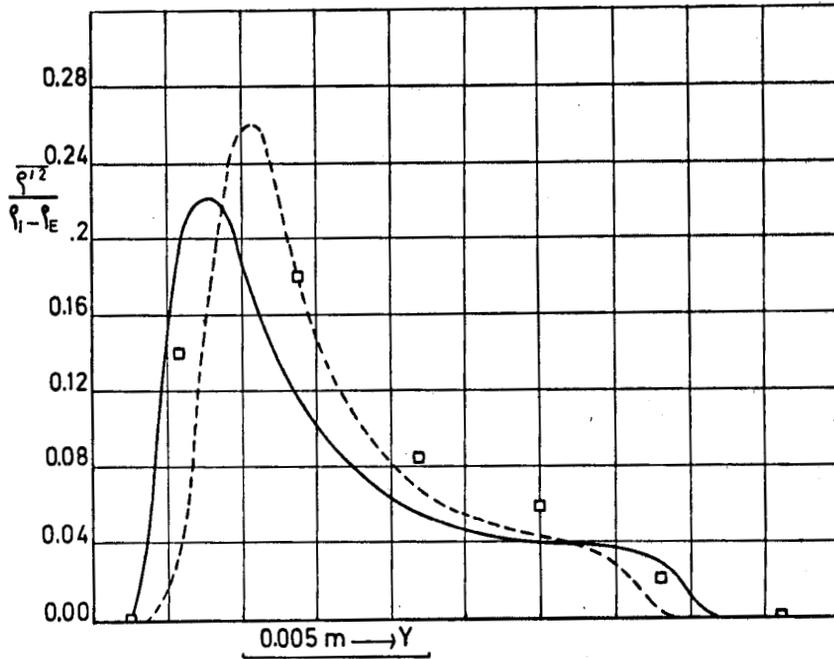


Fig. 19 - Fluctuations de masse volumique à  $x = 5,08$  m.

$\alpha = 0$  (mêmes symboles que fig. 17).

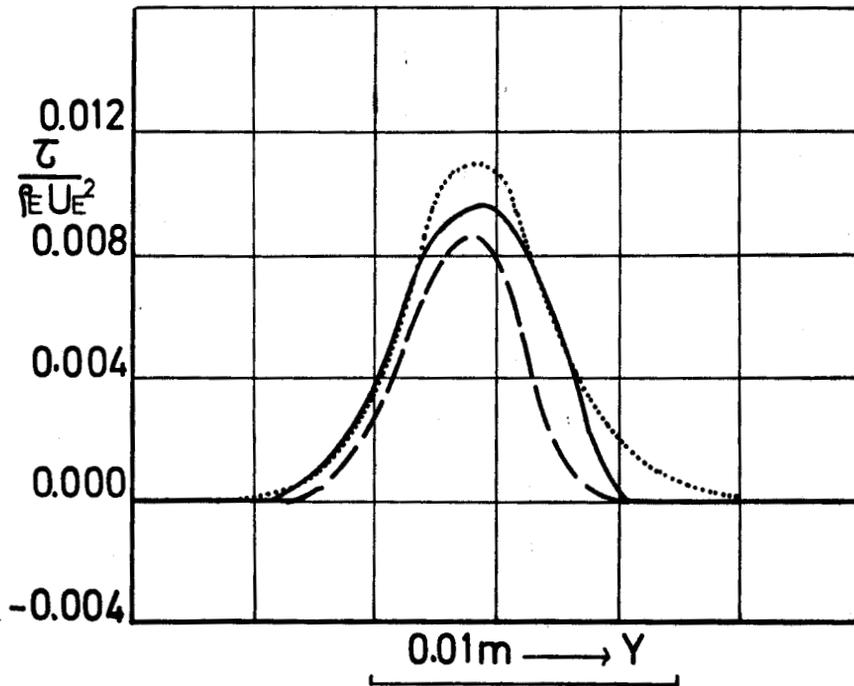


Fig. 20 - Contraintes de cisaillement turbulent à  $x = 5,08$  cm.

$\alpha = 0$  : ... exp. [6], --- modèle I, — modèle II .



L'hypothèse que nous avons faite pour exprimer les termes de diffusion turbulente (eq. 18) fut également utilisée pour le cas  $\alpha = -0,18$ . Les résultats sont rapportés dans les figures 21 à 23.

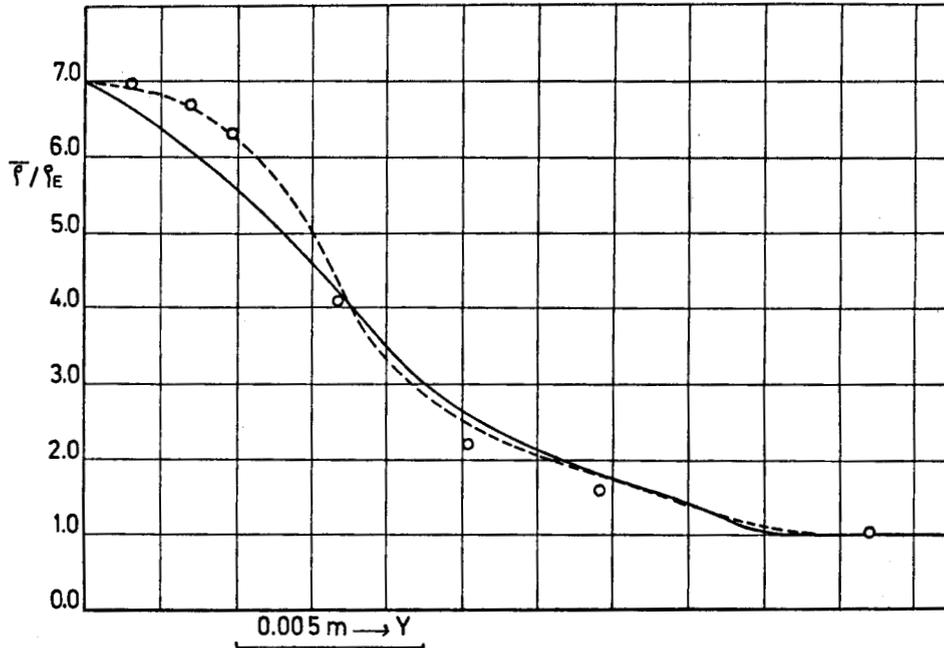


Fig. 21 - Masse volumique moyenne à  $x = 5,08$  cm.

$\alpha = -0,18$  : 0 exp. [6], --- modèle I, — modèle II

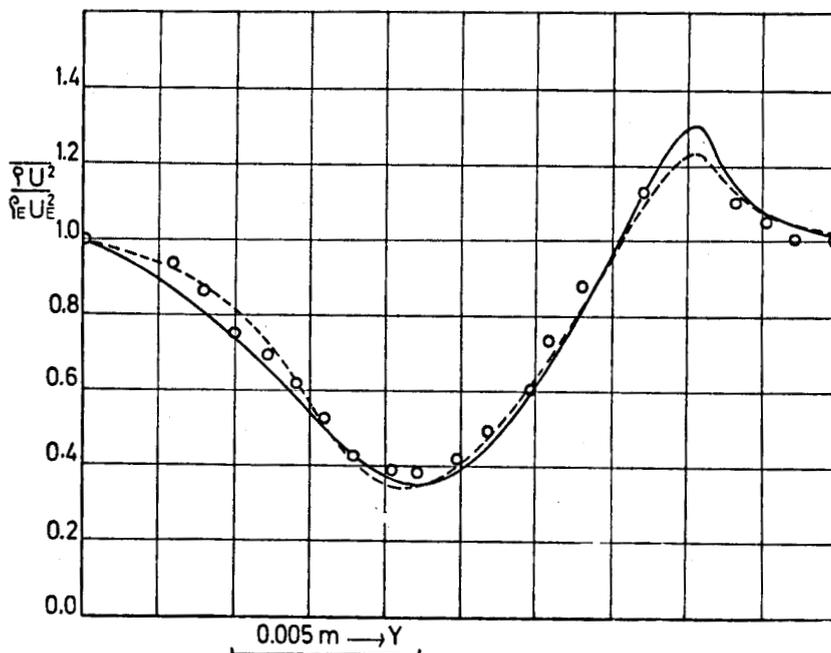


Fig. 22 - Pression dynamique a  $x = 5,08$  cm.

$\alpha = -0,18$  (mêmes symboles que la fig. 21)

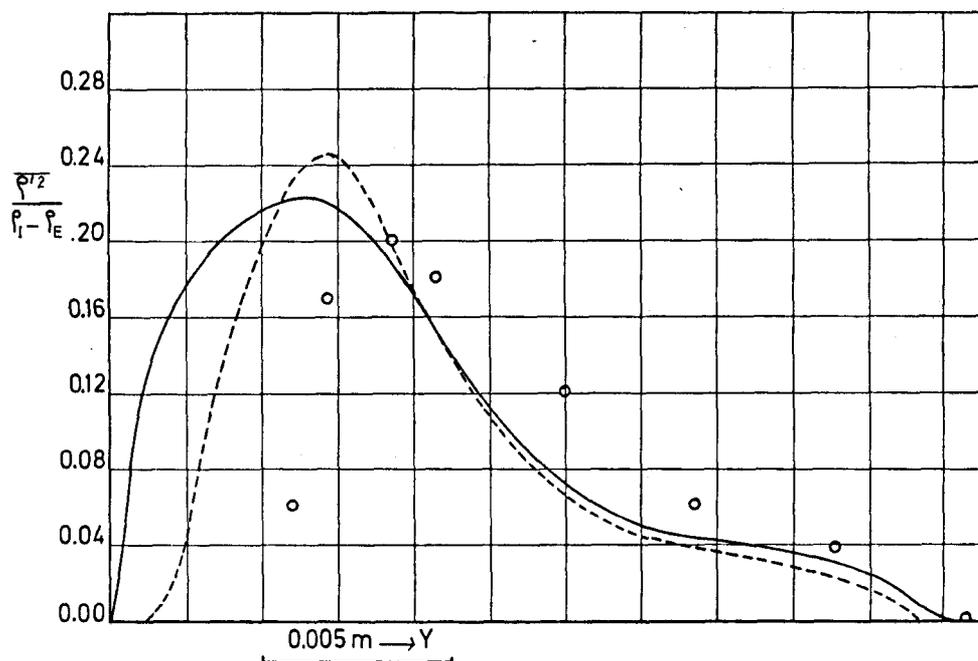


Fig. 23 - Fluctuations de masse volumique à  $x = 5,08$  cm  
 $\alpha = -0,18$  (mêmes symboles que la fig. 21).

La propriété majeure de cette approximation (éq. 18) est de renforcer le transport diffusif de masse. Ceci est montré sur le profil de masse volumique (fig. 21) par une diminution plus rapide de la masse volumique à partir de la zone dense de la couche de mélange.

Sur la figure 22, la même tendance peut être observée en même temps qu'un renforcement de maximum qui est un critère de différence des taux de diffusion de la masse et de la quantité de mouvement.

Ce fait peut également être remarqué sur les figures 23-24 où une forte différence apparaît sur le côté dense du profil des fluctuations de masse volumique tandis qu'un tel défaut n'apparaît pas dans la prédiction des contraintes de cisaillement turbulent.

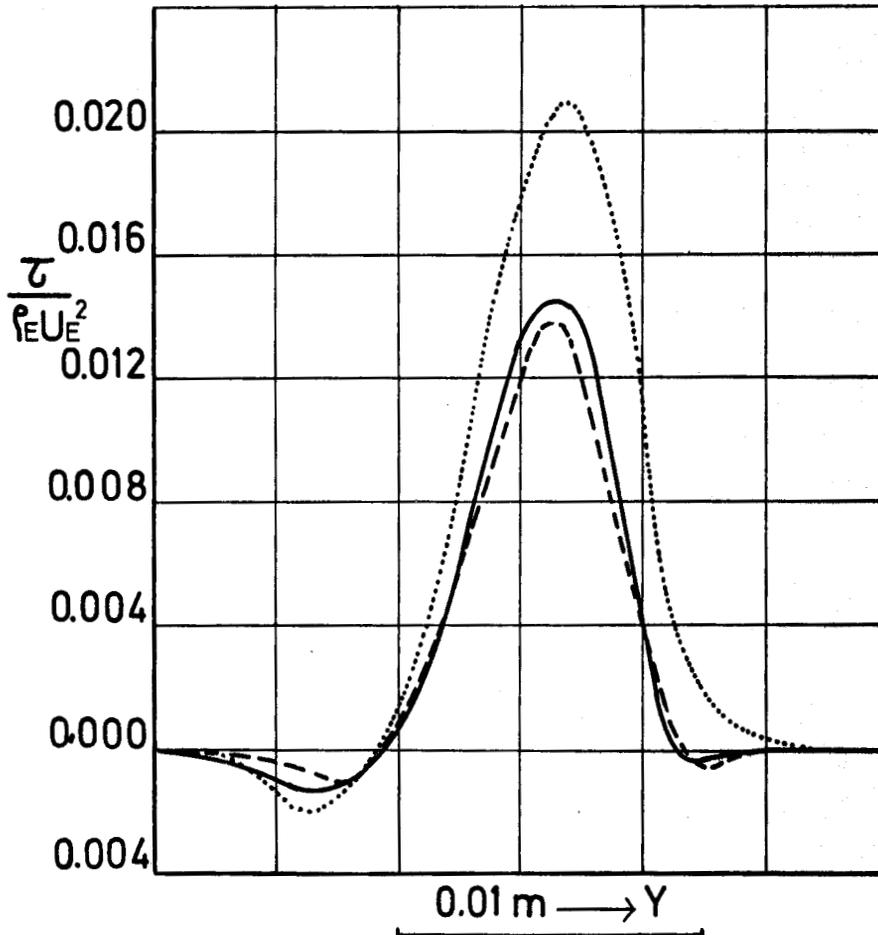


Fig. 24 - Contraintes de cisaillement turbulent à  $x = 5,08$  cm.

$\alpha = -0,18$  : ... exp [6] , --- modèle I, — modèle II

Finalement nous pouvons observer que les prédictions des modèles I et II sont équivalentes pour les contraintes de Reynolds.

#### V - 4 Modèle $k - \epsilon$ pour mélange supersonique - Modèle I

Dans cette dernière partie, nous allons voir les possibilités qu'offre notre méthode pour la prédiction d'écoulements à grande vitesse. Il est toutefois nécessaire de souligner ici que le modèle de turbulence tel qu'il a été développé dans les chapitres II et III avait principalement pour but la prédiction d'écoulements compressibles, il serait donc nécessaire d'introduire les effets

de compressibilité dans le calcul. Ce qui signifie l'utilisation de la forme complète de l'équation d'état (équation 15 du chapitre III) et la connaissance du champ thermique. Pour cela il faudrait donc introduire une équation de transport pour l'enthalpie ainsi que probablement deux équations pour les corrélations entre la température et les masses volumiques partielles des constituants du mélange. Les calculs qui sont présentés ici ne concernent pas ces trois dernières équations et ne veulent être qu'une ouverture possible vers la prédiction d'écoulements compressibles. Le modèle I a été utilisé tel qu'il est décrit dans le chapitre III, avec des conditions aux limites adaptées à un écoulement dans une tuyère supersonique. Après une rapide description de l'aspect expérimental, les conditions initiales et aux limites seront détaillées et suivies de quelques résultats de calculs.

#### A - Description de l'écoulement

Un courant d'argon est injecté par une fente dans l'écoulement transsonique bidimensionnel d'une tuyère du type Laval.

L'injecteur est placé dans la partie subsonique de la tuyère de telle façon que l'injection se fasse dans le sens du courant principal d'air à partir du col. Le mélange d'air et d'argon se fait donc dans la partie supersonique de détente de la tuyère où il est soumis à une accélération non négligeable due au gradient de pression négatif dans le divergent de la tuyère. Des profils de concentration ont été mesurés à différentes positions axiales en aval de l'injection. Les conditions de réservoir pour les deux gaz ont été choisies de telle façon que leurs vitesses à l'endroit de l'injection soient approximativement les mêmes (conditions soniques). La fraction massique d'argon moyenne se situe entre 6 et 6,5 %. Le nombre de Mach après le divergent de la tuyère est approximativement de 3,5.

La technique de prélèvement et d'analyse du mélange est rapportée dans les références [11] et [12]. La fig. (25) donne une vue schématique du montage expérimental.

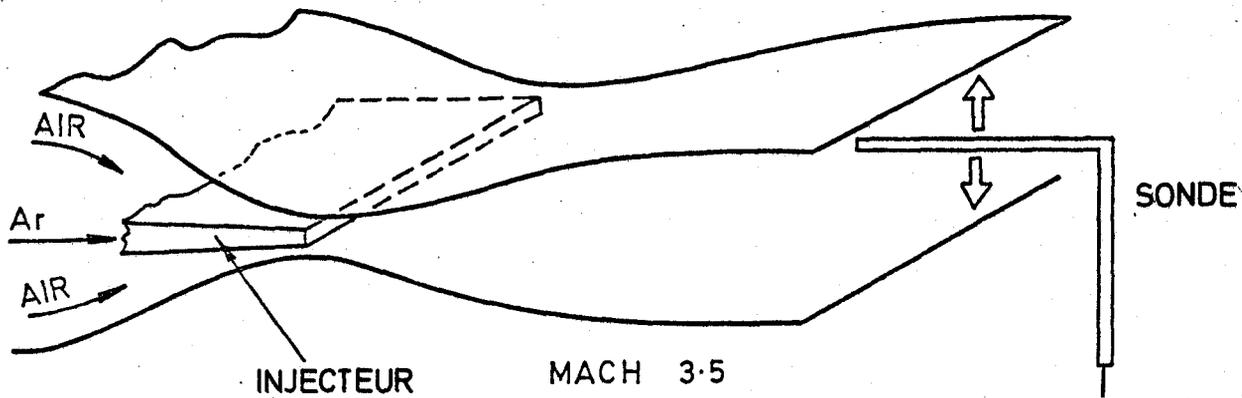


Fig. 25 - Schéma de la tuyère supersonique.

#### B - Traitement numérique

##### B - 1 Conditions initiales

Considérant la géométrie de la tuyère montrée dans la fig. 25, les hypothèses suivantes sont faites. L'écoulement principal est sonique dans la section située à la sortie de l'injecteur. Le gradient de pression transversal est négligeable et les conditions d'arrêt sont connues. On suppose également que la zone de mélange est libre de toute onde de choc. Ainsi le débit massique d'air peut être obtenu à partir de la valeur de la section de l'écoulement principal. Puis le débit massique d'argon peut être déterminé par le premier profil mesuré de la concentration. La vitesse initiale de l'air est constante tandis que celle de l'argon correspond à un écoulement de Poiseuille : A proximité

de la paroi de l'injecteur, le profil de vitesse de l'air est raccordé à un profil de couche limite laminaire. Puisque des écoulements de recirculations ne peuvent pas être prédits avec notre méthode, le sillage des lèvres de l'injecteur est remplacé par un écoulement de vitesse très faible (0,5 % de la valeur de la vitesse dans l'écoulement principal) d'air ou d'argon. La composition de cet écoulement est ajustée par la considération de rapport des débits massiques de chaque courant.

Les profils initiaux pour les deux variables du modèle de turbulence sont choisis pour représenter une viscosité tourbillonnaire du même ordre de grandeur que la viscosité laminaire. Le profil initial de concentration est en marche d'escalier. Les fluctuations de masse volumique sont prises égales à zéro au début du domaine de calcul et la température est supposée constante dans chaque section transversale de l'écoulement.

#### B - 2 Conditions aux limites

Des conditions de Neumann sont appliquées aux deux limites du domaine de calcul

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \psi = \tilde{u}, \quad k, \quad \varepsilon, \quad C_I, \quad Q_{IJ}$$

La limite inférieure du domaine correspond à une droite dans le plan de symétrie de la tuyère. La limite supérieure devrait avoir une condition de Dirichlet pour représenter la paroi de la tuyère. Toutefois il est raisonnable de négliger cette condition parce que l'écoulement est si fortement accéléré, que la production de turbulence dans la couche limite de paroi est insignifiante et que la couche de mélange ne s'étend pas jusque cette région de l'écoulement. Il n'y a donc pas d'interaction entre la couche limite de paroi et la couche de mélange du jet d'argon.

Le contour de la tuyère est donné de façon à supprimer toute discontinuité suivant la hauteur du tunnel malgré la présence de l'injecteur. A partir du profil de la tuyère, le nombre de Mach isentropique est calculé, qui donne la température statique (supposée constante dans chaque section transversale) ainsi que le gradient de pression et la masse volumique à la limite supérieure de la couche de mélange.

### C - Résultats

Il existe deux comparaisons possibles entre les résultats expérimentaux et numériques, à savoir la vitesse moyenne et la fraction massique. Une précision de l'ordre de 1 % est obtenue pour la prédiction de la vitesse moyenne, toutefois il a été jugé inutile de rapporter ce résultat sur une figure étant donné l'allure aplatie des profils de vitesse. Plus intéressants sont les profils de concentration qui peuvent également être comparés aux résultats expérimentaux (fig. 26).

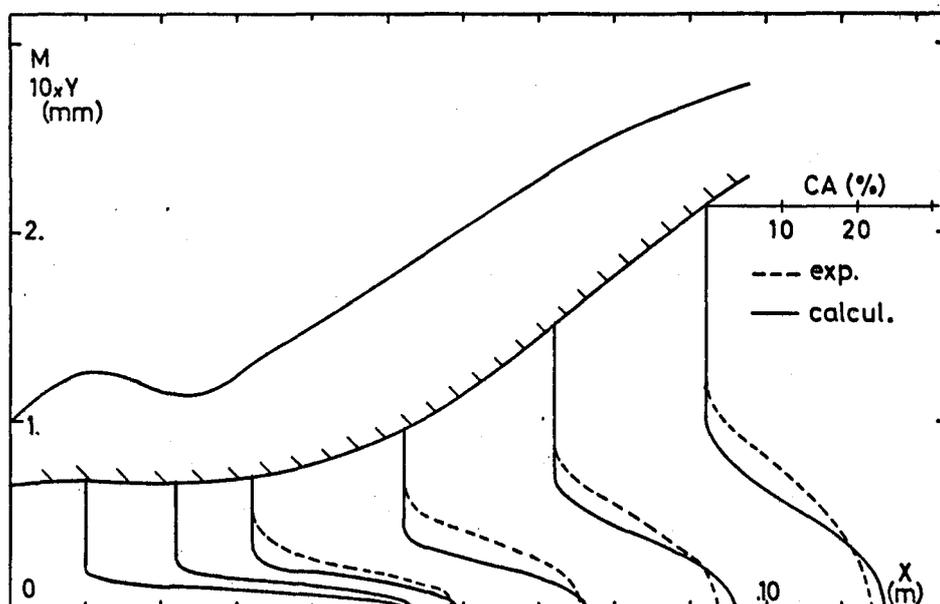


Fig. 26 - Profils de concentration moyenne et

valeur du nombre de Mach dans la tuyère. (exp [11]).

Ces résultats sont obtenus avec les valeurs des constantes qui ont été utilisées dans les calculs précédents pour le mélange d'hélium et d'azote. La figure 27 rapporte la décroissance de la fraction massique dans le plan de symétrie de la tuyère en fonction de la position longitudinale. Afin d'illustrer l'influence de la constante  $\sigma_{C_I}$  qui régit la diffusion turbulente de masse, la figure 28 donne les positions de cette courbe de concentration axiale avec différentes valeurs de  $\sigma_{C_I}$  comprises entre 0,1 et 1 .

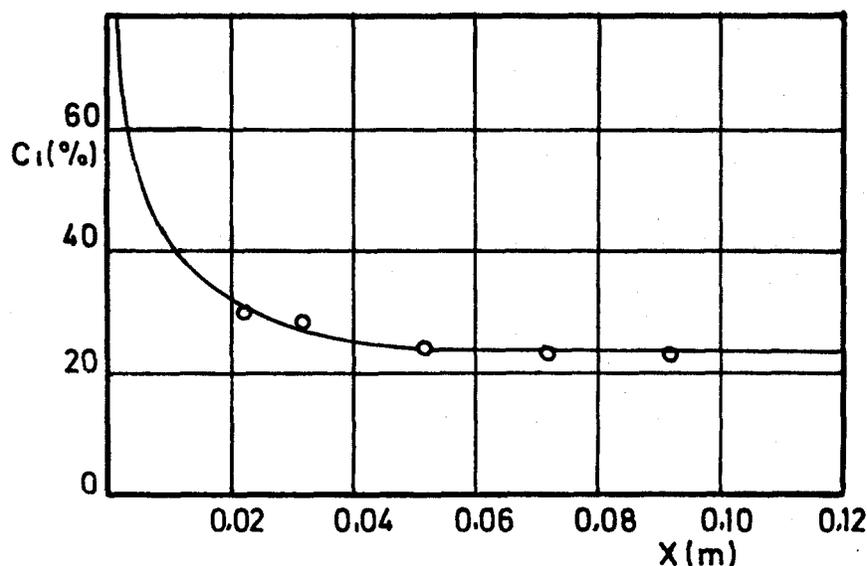


Fig. 27 - Concentration moyenne sur l'axe de la tuyère (exp [11], calculs avec le modèle I,  $\sigma_{C_I} = 0,26$ ).

Un tel calcul permet d'obtenir toutes les quantités qui furent discutées pour le cas du mélange à vitesse modérée (masse volumique, pression dynamique, fluctuations de masse volumique etc...) ainsi que l'énergie de turbulence ou son taux de dissipation, toutefois en l'absence des résultats expérimentaux correspondants il serait vain de discuter de l'exactitude des résultats obtenus. L'objet de ces calculs est donc restreint à l'examen des phénomènes de transport de masse.

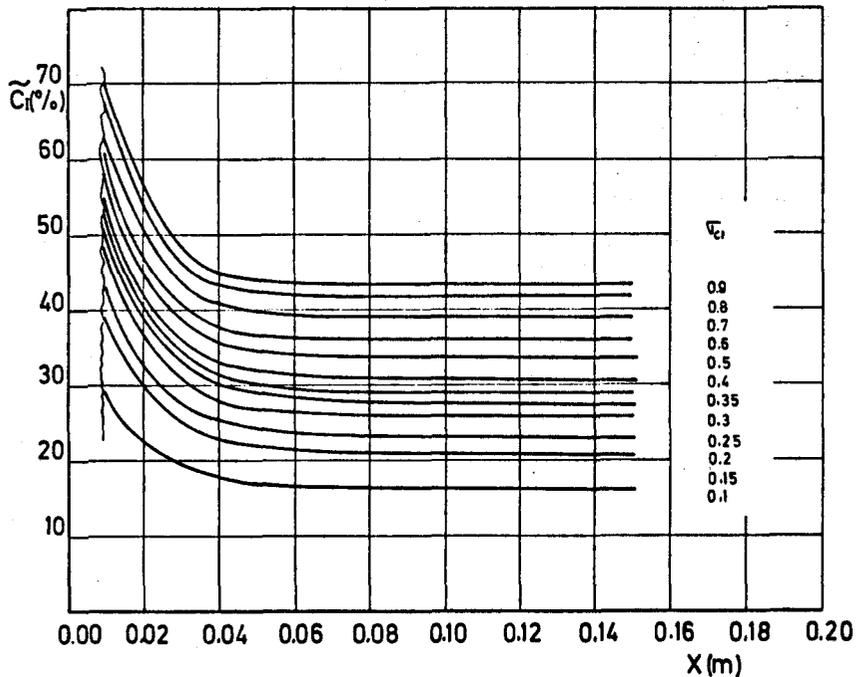


Fig. 28 - Influence de  $\sigma_{C_I}$  sur la diffusion de masse  
(concentrations moyennes sur l'axe de la tuyère).

Deux conclusions apparaissent clairement :

- 1) Le rôle du nombre de Schmidt turbulent est confirmé. Lors du traitement de l'écoulement proposé par Rebollo, nous avons pu observer au travers les profils de pression dynamique moyenne que  $\sigma_{C_I}$  contrôlait le transfert de masse par rapport à celui de quantité de mouvement. Il apparaît maintenant que pour cet écoulement possédant un axe de symétrie, le paramètre ( $\sigma_{C_I}$ ) agit pour diffuser plus ou moins rapidement l'argon dans l'écoulement d'air. Dans les deux cas, le taux de diffusion de masse est plus fort à mesure que  $\sigma_{C_I}$  diminue à partir de la valeur 1.
- 2) Conformément aux résultats expérimentaux, le gradient de pression semble avoir pour effet de "geler" la diffusion massique pour  $x > 5$  cm. Ce qui signifie que la concentration sur l'axe de symétrie ne varie qu'entre le début de la zone de mélange (zone d'injection) et la section située approximativement 5 cm en aval. On peut d'ailleurs constater que ces cinq premiers centimètres de la zone de mélange (fig. 26) correspondent à une zone où la section ne change pas beaucoup, donc, où le gradient de pression est modéré.

V - REFERENCES

- 1 GUTMARK E. et WYGNANSKI I. "The planar turbulent jet" J.F.M. 73-3  
pp. 73-3, pp. 465-495 (1976).
- 2 JONES W.P. et LAUNDER B.E. "The prediction of laminarization with a  
two equation model of turbulence".  
Int. f. Heat Mass transfer vol. 15, n° 2, pp. 301-314 (1972).
- 3 HESKESTAD G. "Hot wire measurements in a plane turbulent jet"  
of applied Mechanics Vol. 32-E-4, pp. 721-734.
- 4 LAUNDER B.E., MORSE A., RODI W. et SPALDING D.B. : "Prediction of free  
shear flows a comparison of the performance of six  
turbulence models".  
Free turbulent shear flows conference proceedings, 1972,  
NASA-Langley Hampton - Virginia NASA SP 321.
- 5 ROSHKO A. Open forum of free turbulence shear flow conference NASA  
SP 321, pp. 629-636.
- 6 REBOLLO M. "Analytical and experimental investigation of a turbulent  
mixing layer of different gases on a pressure gradient".  
Phd. thesis. California Institute of technology, 1973.
- 7 KOLLMANN W. et VANDROMME D. "The calculation of free turbulent shear  
flows with strong density fluctuations".  
(1979) Int. J. Heat Mass transfer vol. 22, n° 11, pp. 1557-1565.
- 8 ELGOBASHI S. "Studies in the prediction of turbulent diffusion flames"  
from "Studies in convection, vol. 2".  
Ed. Launder B.E. Academic Press NY (1977).

9 SAETRAN L. "Turbulent flux models".

VKI. P.R. 1979-4. Rhode St Genese, Belgique.

10 BRADSHAW P. et FERRISS D.H. NPL Aero Rept. 1271 (1968).

11 VANDROMME D. "Turbulent mixing in a two dimensional compressible flow  
with streamwise pressure gradient".

WKI PR 1976-8, June 1976, Rhode St Genese (Belgique).

12 VANDROMME D. et WENDT J.F. "Turbulent mixing experiments with application  
to the Downstream Mixing Gasdynamic Laser".

Proc. Int. Symp on Gasdynamic and Chemical Lasers ed

M. Fiebig & H. Hügel DFVLR Press 1976.

VI CONCLUSION

1. TYPE D'ECOLEMENT.
2. NIVEAU DE FERMETURE.
3. RESULTATS.
4. PERSPECTIVES.

## VI-1 - TYPE D'ÉCOULEMENT

Tant dans leurs applications industrielles que de laboratoire, les problèmes de mécanique des fluides sont de plus en plus concernés par les écoulements à masse volumique variable. Ces variations de masse volumique peuvent avoir différentes origines dans le cadre des milieux continus.

- 1) Hétérogénéité de composition (mélange de fluides à masses moléculaires différentes).
- 2) Inhomogénéité de température (mélange de deux courants du même fluide à des températures différentes).
- 3) Effets de compressibilité des écoulements à grande vitesse.
- 4) Réactions chimiques. Dans certains cas, une réaction chimique peut être liée à une forte production ou absorption de chaleur. Ce cas se ramène alors à celui des inhomogénéités de température.
- 5) Les écoulements dans les cavités laser peuvent aussi afficher de fortes fluctuations de masse volumique en cas d'extraction de puissance. Ce cas peut être relié au précédent et ne concerne qu'une catégorie très particulière d'écoulements.

Jusqu'à il y a deux ou trois ans, les expériences et les prédictions numériques ne concernaient pour la plupart, que les écoulements incompressibles. Ce n'est que récemment que l'intérêt pour des écoulements plus complexes est apparu et le progrès fut lié principalement aux nouvelles méthodes de diagnostic par laser et aussi à l'arrivée sur le marché d'ordinateurs très rapides. Ce progrès fut induit par un intérêt renforcé pour les problèmes énergétiques et de dispersion des polluants. Néanmoins, toute contribution dans ce domaine doit être basée sur le choix d'hypothèses tendant à limiter le sujet.

Deux critères peuvent être retenus :

- origine des fluctuations de masse volumique.
- configuration de l'écoulement.

Ainsi dans ce travail :

- \* les fluctuations de masse volumique n'ont pour origine que des inhomogénéités de composition. Le fluide considéré principalement est un mélange d'azote et d'hélium dont le rapport des masses volumiques est égal à 7 .
- \* tous les écoulements considérés ici sont des écoulements de cisaillement plans bidimensionnels libres (couche de mélange ou jet).

#### VI-2 - NIVEAU DE FERMETURE

Une des caractéristiques de la recherche en turbulence est qu'il n'existe aucun système universel pour prédire des écoulements turbulents. Différentes orientations sont explorées en différents endroits du monde scientifique, mais il n'y a aucune raison d'exclure l'une ou l'autre approche. Au départ de toute contribution, il est donc nécessaire de faire un choix. Le travail, qui fait l'objet de ce mémoire ne concerne que la modélisation des corrélations en un point apparaissant dans les équations moyennes du mouvement turbulent. Deux niveaux différents de fermeture sont envisageables, toutefois le premier sera seul considéré dans cette thèse.

- fermeture au premier ordre (souvent fermeture à deux paramètres).
- fermeture au second ordre (fermeture aux contraintes de Reynolds).

Au niveau de fermeture au premier ordre, les quantités du second ordre (par exemple les contraintes de Reynolds) sont exprimées en termes de valeurs moyennes des variables primitives (vitesse ou concentration) au moyen d'une loi du type gradient. Le terme de viscosité apparaissant dans une telle loi doit être relié aux échelles caractéristiques du mouvement turbulent. Ainsi,

au minimum, deux quantités sont nécessaires pour caractériser la turbulence, qui sont des échelles de longueur et de temps. Entre autres combinaisons, l'énergie cinétique de turbulence, couplée à son taux de dissipation permet de déterminer commodément la viscosité turbulente. Les corrélations de la vitesse avec un scalaire peuvent être également déterminées de cette façon en utilisant un nombre de Schmidt turbulent qui permet de représenter des taux de diffusion turbulente différents pour la masse et la quantité de mouvement. Donc, dans cette classe de modèle de turbulence, deux équations doivent être ajoutées aux équations moyennes pour la vitesse et la fraction massique. De plus trois autres équations pour les fluctuations de masse volumique peuvent être ajoutées au système d'équations.

La fermeture au second ordre consiste en approximant les quantités du troisième ordre en termes de grandeurs du second ordre. Ainsi avec les équations de transport pour les variables primitives, des équations pour les moments du second ordre doivent être résolues. Une équation de transport pour le taux de dissipation mécanique de l'énergie cinétique de la turbulence est encore nécessaire, ainsi que les trois équations pour le transport des corrélations de masses volumiques partielles. Il est utile aussi de résoudre des équations de transport pour les corrélations entre la vitesse et la masse volumique pour prédire des écoulements soumis à un gradient de pression.

Pour résumer ces deux approches, le nombre total d'équations de transport pour le premier niveau de fermeture est 7, tandis que pour le second, ce nombre serait 14.

### VI - 3 - RESULTATS

Avant d'aborder les écoulements à masse volumique variable, un écoulement incompressible a été décrit par un modèle de turbulence avec fermeture au premier ordre. L'approximation de transport par gradient qui est habituellement utilisée pour les écoulements incompressibles est supposée

valide aussi en utilisant des moyennes pondérées (Modèle I). Puis cette approximation est supposée juste, uniquement quand elle est employée avec des moyennes conventionnelles. Cela produit une nouvelle forme de l'approximation de transport par gradient contenant un terme de gradient de masse volumique moyenne (Modèle II).

Dans les deux cas la qualité des prédictions est satisfaisante vu le manque d'information au sujet des variables prédites telles que fluctuations de masse volumique ou corrélations vitesse masse volumique. Néanmoins quelques remarques sont nécessaires.

#### A - Statistique

Pour ce type de fermeture au premier ordre, il est avantageux d'utiliser la moyenne pondérée des variables primitives, parce que même dans le cas d'écoulements avec gradient de pression les prédictions sont satisfaisantes en utilisant une simple hypothèse d'isotropie dans les termes de gradient de pression des deux équations du modèle de turbulence. De plus il serait difficile de résoudre les équations de transport pour les corrélations vitesse-masse volumique sans connaître les composantes du tenseur des contraintes de Reynolds.

Il faut toutefois rappeler que le choix des moyennes pondérées entraîne une forme beaucoup plus compliquée pour l'équation de dissipation. Il semble que ce soit le prix à payer pour une équation de continuité simplifiée. Toutefois, étant donné que l'on se ramène à une forme analogue à l'équation d'énergie de turbulence, cet inconvénient est surmonté. Cette solution est gardée comme étant la moins pire, vu le manque d'informations expérimentales pour l'équation de dissipation.

## B - Comparaison des résultats.

Pour tous les tests concernant les écoulements à vitesse modérée, la conclusion première est que la qualité des résultats est équivalente. La statistique de Favre permet d'utiliser des formes plus simples des équations de transport, tout particulièrement en ce qui concerne les termes de convection où n'apparaissent pas les quantités  $\overline{\rho' u'}$  etc ... La valeur du nombre de Schmidt turbulent qui est utilisée dans les deux modèles s'accorde parfaitement avec les résultats de Rebollo pour les deux configurations possibles de gradient de pression. L'usage du terme de gradient de masse volumique (modèle II) dans l'approximation de transport par gradient améliore très légèrement les résultats, mais cela se paie par l'introduction d'une nouvelle constante  $\sigma_\rho$  dont la valeur est étrangement élevée ( $\sigma_\rho = 7,3$ ) et pour laquelle aucune vérification si ce n'est l'optimisation numérique n'est possible. La dernière série de calculs n'est pas un cas test complet comme les précédents mais plutôt une ouverture sur un type d'écoulement plus complexe. Le modèle a été conservé tel qu'il est utilisé pour l'écoulement de Rebollo. Seules les conditions initiales et aux limites ont été adaptées au problème supersonique, et quoique le champ de température ne soit pas calculé, la prédiction est tout à fait acceptable pour les grandeurs moyennes. Le champ de vitesse s'accorde parfaitement aux mesures. Le taux de dispersion est correctement prédit. En effet l'utilisation de conditions de Neumann des deux côtés de l'écoulement ne permet pas de contrôler directement les frontières du domaine de calcul. Néanmoins par la seule prescription du gradient de pression et du nombre de Mach, le domaine de calcul suit le contour de la tuyère à 1 % près. Finalement, les profils de concentration donnent les moins bons résultats quoique la décroissance sur l'axe soit correctement décrite. Pour obtenir une complète détermination du modèle pour un tel écoulement, il serait donc nécessaire d'avoir des informations sur la turbulence dans la zone de mélange (contraintes de Reynolds, fluctuations de

masse volumique etc...). Ce qui est encore inaccessible pour l'expérimentateur.

#### VI - 4 - PERSPECTIVES

Différentes directions sont suggérées pour des études à venir.

- Utilisation de ce modèle pour la prédiction d'autres mélanges à vitesse modéré ( $\text{CO}_2$ -Air, He-Air,  $\text{N}_2$ - $\text{NO}_r$  ...) pour essayer de mettre en évidence l'influence sur le nombre de Schmidt turbulent de différents paramètres tels que le rapport des vitesses initiales, celui des masses moléculaires etc...

- Utilisation d'un modèle semblable pour prédire le transfert de chaleur plutôt que de masse (air chaud-air froid, par exemple).

- Elaboration complète d'un modèle (k- $\epsilon$ ) pour écoulements compressibles.

- Passage à une fermeture au second ordre pour la prédiction des écoulements de mélange déjà cités.

ANNEXE I

Dans les équations instantanées d'un écoulement compressible, la dérivée particulaire ou lagrangienne a la forme générale : (avec  $v_k$  les composantes de la vitesse et  $\phi$  toute variable dépendante transportable telle que vitesse, fraction massique, enthalpie etc...).

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k \phi) \quad (1)$$

Dans cette annexe, nous verrons combien de termes seront produits par les deux différentes méthodes de moyenne (conventionnelle et pondérée). Dans les deux cas, nous considérons le nombre de termes pour la partie moyenne et la fluctuation. Cette dernière est la différence entre la valeur instantanée et la valeur moyenne et sa valeur moyenne doit être nulle.

I - Moyenne conventionnelle pour la masse volumique  $\rightarrow \rho = \bar{\rho} + \rho'$

I.A - Moyenne conventionnelle pour la vitesse  $\rightarrow v_k = \bar{v}_k + v'_k$

I-A.1 - Moyenne conventionnelle pour  $\phi$   $\rightarrow \phi = \bar{\phi} + \phi'$

$$\rho \phi = \bar{\rho} \bar{\phi} + \rho' \phi' + \bar{\rho} \phi' + \rho' \bar{\phi}$$

$$\rho v_k \phi = \bar{\rho} \bar{v}_k \bar{\phi} + \rho' \phi' \bar{v}_k + \bar{\rho} \phi' \bar{v}_k + \rho' \bar{v}_k \bar{\phi} + \bar{\rho} v'_k \bar{\phi} + \rho' v'_k \phi' +$$

$$\bar{\rho} \phi' v'_k + \rho' \bar{\phi} v'_k$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\phi}) = \frac{\partial}{\partial t} [\bar{\rho} \bar{\phi} + \overline{\rho' \phi'}] \quad \rightarrow 2 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k \phi) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \bar{\rho} \bar{v}_k \bar{\phi} + \overline{\rho' \phi'} \bar{v}_k + \overline{\rho' v'_k \bar{\phi}} + \overline{\rho v'_k \phi'} \right] \rightarrow 4 \text{ termes}$$

Pour la fluctuation il reste donc  $\frac{\partial}{\partial t} [\rho\phi - \overline{\rho\phi}] + \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho v_k \phi - \overline{\rho v_k \phi}]$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi - \overline{\rho\phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho'\phi' - \overline{\rho'\phi'} + \bar{\rho}\phi' + \rho'\bar{\phi})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k \phi - \overline{\rho v_k \phi}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho'\phi' \bar{v}_k - \overline{\rho'\phi' \bar{v}_k} + \rho' v_k' \bar{\phi} - \overline{\rho' v_k' \bar{\phi}} + \\ &\quad \rho v_k' \phi' - \overline{\rho v_k' \phi'} + \bar{\rho} \bar{v}_k \phi' + \bar{\rho} \bar{\phi} v_k' + \rho' \bar{v}_k \phi) \quad \rightarrow 9 \text{ termes} \end{aligned}$$

I-A.2 - Moyenne pondérée pour  $\phi = \tilde{\phi} + \phi''$

$$\rho\phi = \bar{\rho}\tilde{\phi} + \bar{\rho}\phi'' + \rho'\tilde{\phi} + \rho'\phi''$$

$$\begin{aligned} \rho v_k \phi &= \bar{\rho} \tilde{\phi} \bar{v}_k + \bar{\rho} \bar{v}_k \phi'' + \rho' \tilde{\phi} \bar{v}_k + \rho' \bar{v}_k \phi'' + \bar{\rho} \tilde{\phi} v_k' + \bar{\rho} v_k' \phi'' \\ &\quad + \rho' \tilde{\phi} v_k' + \rho' v_k' \phi'' \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho\phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\tilde{\phi}) \quad \rightarrow 1 \text{ terme}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_k \phi}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \bar{v}_k \tilde{\phi} + \overline{\rho' v_k' \tilde{\phi}} + \overline{\rho v_k' \phi''}) \quad \rightarrow 3 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi - \overline{\rho\phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi'' + \rho'\tilde{\phi}) \quad \rightarrow 2 \text{ termes}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k \phi - \overline{\rho v_k \phi}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho\phi'' \bar{v}_k + \rho' \tilde{\phi} \bar{v}_k + \bar{\rho} \tilde{\phi} v_k' + \rho\phi'' v_k' - \overline{\rho\phi'' v_k'} \\ &\quad + \rho' v_k' \tilde{\phi} - \overline{\rho' v_k' \tilde{\phi}}) \quad \rightarrow 7 \text{ termes} \end{aligned}$$

I.B - Moyenne pondérée pour la vitesse  $v_k = \tilde{v}_k + v_k''$

I-B.1 - Moyenne conventionnelle pour  $\phi \rightarrow \phi = \bar{\phi} + \phi'$

$$\rho\phi = \bar{\rho}\bar{\phi} + \rho'\bar{\phi} + \bar{\rho}\phi' + \rho'\phi'$$

$$\rho v_k \phi = \bar{\rho} \bar{\phi} \tilde{v}_k + \rho' \bar{\phi} \tilde{v}_k + \bar{\rho} \phi' \tilde{v}_k + \rho' \phi' \tilde{v}_k + \bar{\rho} \bar{\phi} v_k'' + \rho' \bar{\phi} v_k'' + \\ + \bar{\rho} \phi' v_k'' + \rho' \phi' v_k''$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho\phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\bar{\phi} + \overline{\rho'\phi'}) \quad \rightarrow 2 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_k \phi}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \bar{\phi} \tilde{v}_k + \overline{\rho'\phi'} \tilde{v}_k + \overline{\rho\phi' v_k''}) \quad \rightarrow 3 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho\phi - \rho\phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho'\bar{\phi} + \bar{\rho}\phi' + \rho'\phi' - \overline{\rho'\phi'}) \quad \rightarrow 4 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_k \phi - \rho v_k \phi}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho'\bar{\phi} \tilde{v}_k + \bar{\rho} \phi' \tilde{v}_k + \rho' \phi' \tilde{v}_k - \overline{\rho'\phi'} \tilde{v}_k + \rho v_k'' \bar{\phi} \\ + \rho \phi' v_k'' - \overline{\rho\phi' v_k''}) \quad \rightarrow 7 \text{ termes}$$

I-B.2 - Masse pondérée pour  $\phi \rightarrow \phi = \tilde{\phi} + \phi''$

$$\rho = \bar{\rho} \tilde{\phi} + \bar{\rho} \phi'' + \rho' \tilde{\phi} + \rho' \phi''$$

$$\rho v_k \phi = \bar{\rho} \tilde{v}_k \tilde{\phi} + \bar{\rho} \phi'' \tilde{v}_k + \rho' \tilde{\phi} \tilde{v}_k + \rho' \phi'' \tilde{v}_k + \bar{\rho} \tilde{\phi} v_k'' + \bar{\rho} \phi'' v_k'' \\ + \rho' \tilde{\phi} v_k'' + \rho' \phi'' v_k''$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho\phi}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho\tilde{\phi}}) \quad \rightarrow 1 \text{ terme}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_k \phi}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{\phi} \tilde{v}_k + \overline{\rho\phi'' v_k''}) \quad \rightarrow 2 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho\phi - \rho\phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi'' + \rho'\tilde{\phi}) \quad \rightarrow 2 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_k \phi - \rho v_k \phi}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho\phi'' \tilde{v}_k + \rho v_k'' \tilde{\phi} + \rho' \tilde{v}_k \tilde{\phi} + \rho\phi'' v_k'' - \overline{\rho v_k'' \phi''}) \rightarrow 5 \text{ termes}$$

II - Moyenne pondérée pour la masse volumique  $\rho = \tilde{\rho} + \rho''$

II-A. Moyenne conventionnelle pour la vitesse  $v_k = \bar{v}_k + v'_k$

II-A.1. Moyenne conventionnelle pour  $\phi \rightarrow \phi = \bar{\phi} + \phi'$

$$\rho\phi = \tilde{\rho} \bar{\phi} + \rho'' \bar{\phi} + \tilde{\rho} \phi' + \rho'' \phi'$$

$$\rho v_k \phi = \tilde{\rho} \bar{\phi} \bar{v}_k + \rho'' \bar{\phi} \bar{v}_k + \tilde{\rho} \phi' \bar{v}_k + \tilde{\rho} \bar{\phi} v'_k + \rho'' \bar{\phi} v'_k + \tilde{\rho} \phi' v'_k + \rho'' \phi' v'_k$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) = \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\rho} \bar{\phi} + \rho'' \bar{\phi} + \overline{\rho'' \phi'}) \rightarrow 3 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k \phi) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\tilde{\rho} \bar{\phi} \bar{v}_k + \rho'' \bar{\phi} \bar{v}_k + \overline{\rho'' \phi'} \bar{v}_k + \overline{\rho'' v'_k} \bar{\phi} + \overline{\rho \phi' v'_k}) \rightarrow 5 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi - \overline{\rho\phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho'' \bar{\phi} - \overline{\rho'' \bar{\phi}} + \tilde{\rho} \phi' + \rho'' \phi' - \overline{\rho'' \phi'}) \rightarrow 5 \text{ termes}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k \phi - \overline{\rho v_k \phi}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho'' \bar{v}_k \bar{\phi} - \overline{\rho'' \bar{v}_k \bar{\phi}} + \tilde{\rho} \phi' \bar{v}_k + \rho'' \phi' \bar{v}_k - \overline{\rho'' \phi'} \bar{v}_k \\ &\quad + \tilde{\rho} \bar{\phi} v'_k + \rho'' v'_k \bar{\phi} - \overline{\rho'' v'_k \bar{\phi}} + \rho \phi' v'_k - \overline{\rho \phi' v'_k}) \rightarrow 10 \text{ termes} \end{aligned}$$

II-A.2. Moyenne pondérée pour  $\phi \rightarrow \phi = \tilde{\phi} + \phi''$

$$\rho\phi = \tilde{\rho} \tilde{\phi} + \rho'' \tilde{\phi} + \tilde{\rho} \phi'' + \rho'' \phi''$$

$$\begin{aligned} \rho v_k \phi &= \tilde{\rho} \bar{v}_k \tilde{\phi} + \rho'' \tilde{\phi} \bar{v}_k + \rho'' \phi'' \bar{v}_k + \tilde{\rho} \phi'' \bar{v}_k + \tilde{\rho} \tilde{\phi} v'_k + \rho'' \tilde{\phi} v'_k \\ &\quad + \rho'' \phi v'_k + \rho'' \phi'' v'_k \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho\phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\rho} \tilde{\phi} + \overline{\rho'' \tilde{\phi}}) \rightarrow 2 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_k \phi}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\tilde{\rho} \bar{v}_k \tilde{\phi} + \bar{\rho}'' \tilde{\phi} \bar{v}_k + \overline{\rho'' v_k'} \tilde{\phi} + \overline{\rho \phi'' v_k'}) \quad \rightarrow 4 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi - \overline{\rho \phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho'' \tilde{\phi} - \bar{\rho}'' \tilde{\phi} + \rho \phi'') \quad \rightarrow 3 \text{ termes}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k \phi - \overline{\rho v_k \phi}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho'' \tilde{\phi} \bar{v}_k - \bar{\rho}'' \tilde{\phi} \bar{v}_k + \rho \phi'' \bar{v}_k + \tilde{\rho} \tilde{\phi} v_k' \\ &\quad + \rho'' v_k' \tilde{\phi} - \bar{\rho}'' v_k' \tilde{\phi} + \rho \phi'' v_k' - \overline{\rho \phi'' v_k'}) \quad \rightarrow 8 \text{ termes} \end{aligned}$$

II-B. Moyenne pondérée pour la vitesse  $\tilde{v}_k = v_k + v_k''$

II-B.1. Moyenne conventionnelle pour  $\phi \rightarrow \phi = \bar{\phi} + \phi'$

$$\rho \phi = \tilde{\rho} \bar{\phi} + \rho'' \bar{\phi} + \tilde{\rho} \phi' + \rho'' \phi'$$

$$\begin{aligned} \rho v_k \phi &= \tilde{\rho} \bar{\phi} \tilde{v}_k + \rho'' \bar{\phi} \tilde{v}_k + \tilde{\rho} \phi' \tilde{v}_k + \rho'' \phi' \bar{v}_k + \tilde{\rho} \bar{\phi} v_k'' + \rho'' \bar{\phi} v_k'' \\ &\quad + \tilde{\rho} \phi' v_k'' + \rho'' \phi' v_k'' \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\rho} \bar{\phi} + \bar{\rho}'' \bar{\phi} + \overline{\rho'' \phi'}) \quad \rightarrow 3 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_k \phi}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\tilde{\rho} \bar{\phi} \tilde{v}_k + \bar{\rho}'' \bar{\phi} \tilde{v}_k + \overline{\rho'' \phi'} \tilde{v}_k + \overline{\rho v_k'' \phi'}) \quad \rightarrow 4 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi - \overline{\rho \phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho'' \bar{\phi} - \bar{\rho}'' \bar{\phi} + \tilde{\rho} \phi' + \rho'' \phi' - \overline{\rho'' \phi'}) \quad \rightarrow 5 \text{ termes}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k \phi - \overline{\rho v_k \phi}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho'' \bar{\phi} \tilde{v}_k - \bar{\rho}'' \bar{\phi} \tilde{v}_k + \tilde{\rho} \phi' \tilde{v}_k + \rho'' \phi' \tilde{v}_k \\ &\quad - \overline{\rho'' \phi'} \tilde{v}_k + \rho v_k'' \bar{\phi} + \rho \phi' v_k'' - \overline{\rho \phi' v_k''}) \quad \rightarrow 8 \text{ termes} \end{aligned}$$

II-B.2. Masse pondérée pour  $\phi \rightarrow \phi = \tilde{\phi} + \phi''$

$$\rho\phi = \tilde{\rho} \tilde{\phi} + \rho'' \tilde{\phi} + \tilde{\rho} \phi'' + \rho'' \phi''$$

$$\rho v_k \phi = \tilde{\rho} \tilde{v}_k \tilde{\phi} + \rho'' \tilde{v}_k \tilde{\phi} + \tilde{\rho} v_k'' \tilde{\phi} + \rho'' v_k'' \tilde{\phi} + \tilde{\rho} \tilde{v}_k \phi'' + \rho'' \tilde{v}_k \phi'' + \tilde{\rho} v_k'' \phi'' + \rho'' v_k'' \phi''$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho\phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\rho}\tilde{\phi} + \overline{\rho''\phi''}) \rightarrow 2 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_k \phi}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\tilde{\rho} \tilde{v}_k \tilde{\phi} + \overline{\rho'' \tilde{v}_k \tilde{\phi}} + \overline{\rho v_k'' \phi''}) \rightarrow 3 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi - \overline{\rho\phi}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho'' \tilde{\phi} - \overline{\rho'' \tilde{\phi}} + \rho \phi'') \rightarrow 3 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k \phi - \overline{\rho v_k \phi}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho'' \tilde{\phi} \tilde{v}_k - \overline{\rho'' \tilde{\phi} \tilde{v}_k} + \rho \phi'' \tilde{v}_k + \rho v_k'' \tilde{\phi} + \rho v_k'' \phi'' - \overline{\rho v_k'' \phi''}) \rightarrow 6 \text{ termes}$$

III - Résumé de la partie convective

		Partie.moyenne		fluctuation		
		$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial}{\partial x_k}$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial}{\partial x_k}$	
p1	$\tilde{v}_k$	$\phi$	2	4	4	9
		$\phi^2$	1	3	2	7
	$v_k''$	$\phi$	2	3	4	7
		$\phi^2$	1	2	2	5
p2	$\tilde{v}_k$	$\phi^2$	3	5	5	10
		$\phi$	2	5	3	8
	$v_k''$	$\phi$	3	4	5	8
		$\phi^2$	2	3	3	6

Tableau I - nombre de termes de la dérivée particulaire.

Le tableau I résume toutes les combinaisons possibles pour la partie convective des équations. Ces résultats sont donnés sans préciser  $k$  qui est un indice de sommation pour les dérivées spatiales. Donc, le nombre exact de termes pour ces termes est  $k \times n$  avec  $k_d$  le nombre de dimensions de l'écoulement et  $n$  le nombre donné par le tableau I.

#### IV - Partie diffusive des équations d'écoulement compressible.

Sous forme instantanée, le terme de diffusion est  $\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right]$ .

Supposons que  $\Gamma$  (viscosité) est constant et appliquons maintenant

la même décomposition formelle que pour la partie convective. Les deux

quantités à considérer sont maintenant  $\rho$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}$ .

$$1 - \underline{\rho = \bar{\rho} + \rho' ; \phi = \bar{\phi} + \phi'}$$

$$\rho \phi = \bar{\rho} \bar{\phi} + \rho' \bar{\phi} + \bar{\rho} \phi' + \rho' \phi'$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Gamma \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_k} + \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial x_k} \right) \right] \rightarrow 2 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \bar{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \rho' \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_k} + \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial x_k} - \bar{\rho} \frac{\partial \phi'}{\partial x_k} \right) \right] \rightarrow 3 \text{ termes}$$

$$2 - \underline{\rho = \bar{\rho} + \rho' ; \phi = \tilde{\phi} + \phi''}$$

$$\rho \phi = \bar{\rho} \tilde{\phi} + \rho' \tilde{\phi} + \bar{\rho} \phi'' + \rho' \phi''$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_k} + \rho' \frac{\partial \phi''}{\partial x_k} \right) \right] \rightarrow 2 \text{ termes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \bar{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \rho' \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_k} + \rho' \frac{\partial \phi''}{\partial x_k} - \bar{\rho} \frac{\partial \phi''}{\partial x_k} \right) \right] \rightarrow 3 \text{ termes}$$

$$2. \underline{\rho = \bar{\rho} + \rho' ; \phi = \tilde{\phi} + \phi''}$$

$$\rho \phi = \tilde{\rho} \bar{\phi} + \rho'' \bar{\phi} + \rho'' \bar{\phi}' + \tilde{\rho} \phi'$$

→ 2 termes

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \overline{\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_k}} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_k} + \rho'' \frac{\partial \phi'}{\partial x_k} + \rho'' \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}} \right) \right]$$

→ 3 termes

$$3. \underline{\rho = \tilde{\rho} + \rho'' ; \phi = \bar{\phi} + \phi'}$$

$$\rho \phi = \tilde{\rho} \bar{\phi} + \rho'' \bar{\phi} + \rho'' \phi' + \tilde{\rho} \phi'$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \overline{\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_k}} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_k} + \rho'' \frac{\partial \phi'}{\partial x_k} + \rho'' \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}} \right) \right]$$

→ 3 termes

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \rho \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \rho'' \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_k} - \rho'' \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}} + \tilde{\rho} \frac{\partial \phi'}{\partial x_k} + \rho'' \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \rho'' \frac{\partial \phi'}{\partial x_k} \right) \right]$$

→ 5 termes

$$4. \underline{\rho = \tilde{\rho} + \rho'' , \phi = \tilde{\phi} + \phi''}$$

$$\rho \phi = \tilde{\rho} \tilde{\phi} + \rho'' \tilde{\phi} + \tilde{\rho} \phi'' + \rho'' \phi''$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \overline{\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_k}} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_k} + \rho'' \frac{\partial \phi''}{\partial x_k} + \rho'' \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}} \right) \right]$$

→ 3 termes

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \rho \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \Gamma \left( \rho'' \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_k} + \rho'' \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}} - \rho \frac{\partial \phi''}{\partial x_k} - \rho \overline{\frac{\partial \phi''}{\partial x_k}} \right) \right] \rightarrow 4 \text{ termes}$$

		partie moyenne	fluctuation
$\rho$	$\bar{\phi}$	2	3
	$\phi^2$	2	3
$\rho^2$	$\bar{\phi}$	3	5
	$\phi^2$	3	4

Tableau II - Nombre de termes de la partie diffusive.

V - Terme source

Ce terme s'écrira  $\rho \cdot \phi$  dans la forme instantanée. Il faut toutefois noter que ici  $\phi$  peut être une variable dépendante ou une combinaison de variables.

De même que pour la partie diffusive, quatre combinaisons sont possibles.

$$1. \quad \underline{\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad \phi = \bar{\phi} + \phi'}$$

$$\overline{\rho\phi} = \bar{\rho} \bar{\phi} + \overline{\rho' \phi'} \quad \rightarrow \quad 2 \text{ termes}$$

$$(\rho\phi - \overline{\rho\phi}) = \rho' \bar{\phi} + \bar{\rho} \phi' + \rho' \phi' - \overline{\rho' \phi'} \quad \rightarrow \quad 4 \text{ termes}$$

$$2. \quad \underline{\rho = \bar{\rho} + \rho'; \quad \phi = \tilde{\phi} + \phi''}$$

$$\overline{\rho\phi} = \bar{\rho} \tilde{\phi} \quad \rightarrow \quad 1 \text{ terme}$$

$$(\rho\phi - \overline{\rho\phi}) = \rho' \tilde{\phi} - \rho\phi'' \quad \rightarrow \quad 2 \text{ termes}$$

$$3. \underline{\rho = \tilde{\rho} + \rho'' ; \phi = \bar{\phi} + \phi'}$$

$$\overline{\rho\phi} = \tilde{\rho} \bar{\phi} + \overline{\rho'' \bar{\phi}} + \overline{\rho'' \phi'} \quad \rightarrow 3 \text{ termes}$$

$$(\rho\phi - \overline{\rho\phi}) = \rho'' \bar{\phi} - \overline{\rho'' \bar{\phi}} + \tilde{\rho} \phi' + \rho'' \phi'' - \overline{\rho'' \phi'} \quad \rightarrow 5 \text{ termes}$$

$$4. \underline{\rho = \tilde{\rho} + \rho'' ; \phi = \tilde{\phi} + \phi''}$$

$$\overline{\rho\phi} = \tilde{\rho} \tilde{\phi} + \overline{\rho'' \tilde{\phi}} \quad \rightarrow 2 \text{ termes}$$

$$(\rho\phi - \overline{\rho\phi}) = \rho'' \tilde{\phi} - \overline{\rho'' \tilde{\phi}} + \rho \phi'' \quad \rightarrow 3 \text{ termes}$$

		partie moyenne	Fluctuation
ρ	$\bar{\phi}$	2	4
	$\tilde{\phi}$	1	2
ρ̃	$\bar{\phi}$	3	5
	$\tilde{\phi}$	2	3

Table III - Nombre de termes de la partie source/puit.

Les tableaux I, II et III résument les différentes contributions des termes de l'équation générale de transport. La même étude est maintenant faite pour l'équation de continuité.

#### VI - Equation de conservation de la masse

La forme compressible instantanée de cette équation est rappelée ici

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0$$

De nouveau, quatre combinaisons sont possibles. On remarque que l'on a une forme identique à celle du paragraphe précédent en remplaçant  $\phi$  par  $v_k$ . Les résultats seront donc identiques à ceux du tableau III, multipliés par  $k_d$  le nombre de dimension de l'écoulement considéré.

