50376
1980
94

N° d'ordre : 830

50376
1980
94

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

AZIZ EL KACIMI - ALAOUI

COHOMOLOGIE FEUILLETÉE - EXEMPLES DE CALCULS

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

MEMBRES DU JURY : D. LEHMANN, PRÉSIDENT

G. HECTOR, RAPPORTEUR

N. MAHAMMED, EXAMINATEUR

SOUTENUE LE 26 JUIN 1980

Gilbert HECTOR m'a initié à la topologie algébrique et à la théorie des feuilletages. Il a guidé mon travail sans discontinuer ; ses remarques et ses conseils sont à la base de l'élaboration de ce mémoire. Je suis très heureux de l'en remercier.

Je remercie Daniel LEHMANN pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse, ainsi que Nourreddine MAHAMMED qui a bien voulu y participer et qui m'a beaucoup apporté par les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui.

Alberto VERJOVSKY m'a énormément aidé lors de son séjour à Lille. Qu'il en soit sincèrement remercié.

Je remercie toute l'équipe de feuilletages de Lille pour son enthousiasme et sa sympathie.

Arlette LENGAIGNE a dactylographié ce travail avec soin et rapidité, je l'en remercie, ainsi que les services de l'imprimerie de l'U.E.R. de Mathématiques de Lille I.

P L A N.

CHAPITRE I - RAPPELS. 1

A - Préfaisceaux - Faisceaux. 1
B - Cohomologie à valeurs dans un faisceau. 3
C - Théorèmes fondamentaux. 5

CHAPITRE II - COHOMOLOGIE DES VARIETES FEUILLETEES. 8

A - Formes différentielles de type (p,q). 8
B - Théorème de De Rham pour les variétés feuilletées. 11

CHAPITRE III - PROPRIETES DE LA COHOMOLOGIE DE TYPE (p,q). 14

A - Invariance par homotopie intégrable. 14
B - Théorème de Mayer-Vietoris. 18

CHAPITRE IV - EXEMPLES DE CALCULS DE COHOMOLOGIE FEUILLETEE. 21

A - Exemples simples. 21
B - Produit de deux variétés. 22
C - Tore T^2 muni du feuilletage linéaire. 23
D - Tore T^3 muni du feuilletage en cylindres. 26
E - Fibres hyperboliques T^3_A. 28
F - Composante de Reeb 31
G - Cohomologie feuilletée de $S^2 \times S^1$. 34

CHAPITRE V - RELATION ENTRE L'HOLONOMIE ET LA COHOMOLOGIE FEUILLETEE. 36

A - Feuilletages transversalement orientables. 36
B - Suspension d'un difféomorphisme de $[0, +\infty[$ 39

./..

CHAPITRE VI - UN EXEMPLE DE FEUILLETAGE SANS FEUILLES COMPACTES ET SANS DEFORMATION INFINITESIMALE. 44

A - Cohomologie feuilletée à valeurs dans le fibré normal. 44
B - Exemple. 45

CHAPITRE VII - COHOMOLOGIE DES COURANTS DE TYPE (p,q) SUR UNE VARIETE FEUILLETEE. 50

A - Courants de type (p,q). 51
B - Ecriture locale. 53
C - Différentielle feuilletée d'un courant de type (p,q). 54
D - Cohomologie des courants de type (p,q). 57

CONCLUSION. 58

BIBLIOGRAPHIE. 59

INTRODUCTION.

La cohomologie feuilletée a été introduite il y a une vingtaine d'années par Reinhart. C'est Vaisman [14] qui en a donné une formalisation en montrant l'existence d'une résolution fine du faisceau ϕ^p des germes de p-formes feuilletées à l'aide des formes de type (p,q).

Jusqu'à très récemment,

i) On ne disposait pratiquement d'aucun calcul explicite à part celui du tore muni du feuilletage en droites qui a été fait par Heitsch [5] dans le cadre des déformations infinitésimales des feuilletages et par Roger [11] dans le cas général de la cohomologie de type (p,q).

ii) On n'en connaissait guère d'interprétation de type géométrique.

Dans ce travail nous établissons quelques règles de calcul analogues à celles de la cohomologie réelle, et nous donnons des calculs de H^1 de quelques exemples représentatifs de feuilletages de codimension un. Nous donnons un début d'interprétation de cette cohomologie, en la reliant à l'holonomie linéaire pour un feuilletage de codimension un transversalement orientable.

Notre démarche est la suivante. Les chapitres I et II donnent quelques rappels de théorie de la cohomologie à valeurs dans un faisceau et introduisent la cohomologie de type (p,q) d'une variété feuilletée.

Dans le chapitre III nous montrons l'invariance de cette cohomologie par homotopie intégrable et un théorème du type Mayer - Vietoris. Dans le chapitre IV nous donnons quelques exemples de calculs de H^1 pour certains feuilletages de codimension un. Dans le chapitre V nous donnons une interprétation de la cohomologie feuilletée en reliant le H^1 à l'honomie linéaire du feuilletage. Dans le chapitre VI nous montrons que le feuilletage en cylindres et plans [2] sur les fibrés hyperboliques T^3_A n'a pas de déformation infinitésimale en calculant son premier groupe de cohomologie à valeurs dans le faisceau des germes des champs de vecteurs feuilletés [15]. Enfin dans le chapitre VII nous donnons une généralisation de cette cohomologie en introduisant une cohomologie de type (p,q) des courants sur une variété feuilletée analogue à celle des formes C^∞.

CHAPITRE I

RAPPELS.

Ce chapitre est un ensemble de rappels de toutes les notions dont on aura besoin dans la suite. Il fait référence au livre de Vaisman [14].

A - PREFAISCEAUX - FAISCEAUX.

Définition I-A-1.- Un préfaisceau P de modules sur un espace topologique X est la donnée pour chaque ouvert U de X d'un module $P(U)$ et pour chaque paire d'ouverts $U \subset V$ d'un morphisme de restriction :

$$r_U^V : P(V) \longrightarrow P(U)$$

tel que :

i) pour tout ouvert U de X : $r_U^U = id_U$.

ii) si $U \subset V \subset W$ alors $r_U^W = r_U^V \cdot r_V^W$.

L'espace X est appelé la base du préfaisceau. Un élément de $P(U)$ est appelé une section de P au-dessus de U.

Exemple I-A-2.- Pour tout ouvert U de X on note $C(U)$ l'ensemble des fonctions continues de U dans R et pour $U \subset V$, r_U^V l'application de restriction :

$$r_U^V : C(V) \longrightarrow C(U)$$
$$f \longrightarrow f_{|U}$$

Il est clair qu'on obtient sur X un préfaisceau de modules.

Définition I-A-3.- Un faisceau F de modules sur X est un préfaisceau de modules sur X qui vérifie en plus les propriétés suivantes :

i) Soient U un ouvert de X et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de U. Si s_1 et s_2 sont deux sections au-dessus de U telles que pour tout i de I $s_{1|U_i} = s_{2|U_i}$ alors $s_1 = s_2$.

ii) Soit $s_i \in F(U_i)$ où $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X. Si $s_{i|U_i \cap U_j} = s_{j|U_i \cap U_j}$ alors il existe une section s au-dessus de $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ telle que $s_{|U_i} = s_i$.

Pour tout $x \in X$, la limite inductive $F_x = \varinjlim_{x\in U} F(U)$ est un module que l'on appelle la fibre au-dessus de X.

Définition I-A-4.- Soient F et F' deux faisceaux de modules sur X. Un homomorphisme de F dans F' est la donnée pour chaque ouvert U de X d'un homomorphisme φ_U de $F(U)$ dans $F'(U)$ tel que si $U \subset V$ le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
F(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "r_U^V"'] & F'(V) \arrow[d, "r'^V_U"] \\
F(U) \arrow[r, "\varphi_U"'] & F'(U)
\end{tikzcd}$$

commute.

Si φ_U est un isomorphisme pour tout U, on dira que φ est un isomorphisme de faisceaux.

Soient f une application continue d'un espace topologique X dans un espace topologique Y et F un faisceau sur X. On définit un faisceau fF sur Y en posant pour tout U, ouvert de Y :

$$fF(U) = F(f^{-1}(U)) .$$

Le faisceau fF est appelé l'<u>image directe de</u> F par l'application f.

<u>Définition</u> I-A-5.- Soit X un espace topologique séparé et paracompact. Un faisceau F de modules sur X est <u>fin</u> si pour tout recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ localement fini de X, il existe des endomorphismes $h_i : F \to F$ tels que :

i) $\sum_{i\in I} h_i = id$

ii) le support de h_i, $\operatorname{supp} h_i = \overline{\{x \in X \mid h_i(F_x) \neq 0\}}$ est inclus dans U_i.

B - *COHOMOLOGIE A VALEURS DANS UN FAISCEAU.*

Soit F un faisceau de modules sur un espace topologique X qu'on supposera séparé et paracompact. Soit $(U_i)_i = \mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. On pose :

i) $U_{S_q} = U_{s_o} \cap \ldots \cap U_{s_q}$ où $S_q = (s_o, \ldots, s_q)$

ii) $\Sigma_q = \{S_q \mid U_{S_q} \neq \emptyset\}$.

Alors $\{\Sigma_q\}$ est un complexe simplicial appelé le nerf du recouvrement $\mathcal{U}$.

Posons :

$$C^q(\mathcal{U},F) = \prod_{S_q \in \Sigma_q} F(U_{S_q})$$

et soit $p_{s_q} : C^q(\mathcal{U},F) \longrightarrow F(U_{S_q})$ la projection de $C^q(\mathcal{U},F)$ sur le facteur $F(U_{S_q})$. Pour $S_{q+1} = (s_o,\ldots,s_{q+1})$ on pose $S^i_{q+1} = (s_o,\ldots,\hat{s}_i,\ldots,s_{q+1})$ et on considère l'homomorphisme :

$$\sum_{i=0}^{q} (-1)^i \, r^{U_{S^i_{q+1}}}_{U_{S_{q+1}}} \, p_{S^i_{q+1}} : C^p(\mathcal{U},F) \longrightarrow F(U_{S_{q+1}}) .$$

On définit donc un homomorphisme unique :

$$\delta : C^q(\mathcal{U},F) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U},F)$$

qui vérifie $\delta^2 = 0$.

Si on pose $C(\mathcal{U},F) = (C^q(\mathcal{U},F),\delta)$, on a un complexe de cochaînes qui donne lieu à une théorie de cohomologie $H^*(\mathcal{U},F)$ qu'on appelle la cohomologie de X à valeurs dans F et relative au recouvrement $\mathcal{U}$.

Soit $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathcal{U}$. On obtient un homomorphisme :

$$C^q(\mathcal{U},F) \longrightarrow C^q(\mathcal{V},F)$$

qui induit un homomorphisme :

$$H^q(\mathcal{U},F) \longrightarrow H^q(\mathcal{V},F) .$$

Définition I-B-1.- La limite inductive de $H^q(\mathcal{U},F)$ sur les recouvrements de plus en plus fins de X est appelée le $q^{\text{ème}}$ module de <u>cohomologie de</u> X <u>à valeurs dans</u> F. On le note $H^q(X,F)$.

Tout homomorphisme de faisceaux $\varphi : F \to F'$ induit des homomorphismes $\varphi^{*q} : H^q(X,F) \to H^q(X,F')$. Si φ est un isomorphisme, φ^{*q} est un isomorphisme.

Soit f une application continue de X dans un espace topologique Y. Alors f induit des homomorphismes :

$$f^{*q} : H^q(Y,fF) \longrightarrow H^q(X,F)$$

C - *THEOREMES FONDAMENTAUX.*

Soient X un espace séparé et paracompact et F un faisceau sur X.

Théorème I-C-1.- Si F est fin alors $H^q(X,F) = 0$ pour $q \geq 1$.

Définition I-C-2.- On appelle résolution de F une suite exacte de faisceaux et d'homomorphismes :

$$\rho \equiv 0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} F_o \xrightarrow{h_o} F_1 \xrightarrow{h_1} F_2 \longrightarrow \dots \qquad (1)$$

telle que $H^q(X,F_\alpha) = 0$ pour $\alpha \geq 0$ et $q \geq 1$ (2)

Théorème de de Rham I-C-3.- Soit X un espace topologique séparé et paracompact. Soient F un faisceau de modules sur X et ρ une résolution de F. Considérons le complexe $K = (\Gamma(X,F_\alpha), h_\alpha^*)$ où $\Gamma(X,F_\alpha)$ désigne le module des sections globales de F_α et h_α^* l'homomorphisme induit par h_α. Alors on a :

$$H^q(X,F) = H^q(K) .$$

Démonstration : De la suite (1) on déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker h_\alpha \longrightarrow F_\alpha \longrightarrow \ker h_{\alpha+1} \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

pour $\alpha \geq 0$. A cette suite on associe la suite exacte longue de cohomologie.

$$\ldots \to H^i(X,\ker h_\alpha) \to H^i(X,F_\alpha) \to H^i(X,\ker h_{\alpha+1}) \to H^{i+1}(X,\ker h_\alpha) \to \ldots \qquad (4)$$

En utilisant la relation (2) on obtient :

$$H^{i+1}(X,\ker h_\alpha) = H^i(X,\ker h_{\alpha+1}) \quad \text{pour} \quad i \geq 1 \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0 \qquad (5)$$

En particulier pour $\alpha = 0$ on a :

i) $H^{i+1}(X,\ker h_o) = H^i(X,\ker h_1)$.

En itérant on obtient :

$$H^{i+1}(X,\ker h_o) = H^1(X,\ker h_i) \qquad (6)$$

Par exactitude de la suite (1) on a $\ker h_o = F$; d'où :

$$H^{i+1}(X,F) = H^1(X,\ker h_i) \quad \text{pour} \quad i \geq 0 \qquad (7)$$

ii) Pour $\alpha = i > 0$ on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker h_i \longrightarrow F_i \longrightarrow \ker h_{i+1} \longrightarrow 0 .$$

Les premiers six termes de la suite exacte longue de cohomologie qui lui est associée sont

$$0 \to H^o(X,\ker h_i) \to H^o(X,F_i) \xrightarrow{h_i^*} H^o(X,\ker h_{i+1}) \to H^1(X,\ker h_i) \to 0 \qquad (8)$$

On en déduit l'isomorphisme $H^1(X,\ker h_i) = \dfrac{H^o(X,\ker h_{i+1})}{\operatorname{Im} h_i^*}$ (9)

En définitive les suites (7), (8) et (9) donnent :

$$H^{i+1}(X,F) = \ker h^*_{i+1} \;/\; \mathrm{Im}\, h^*_i \quad . \tag{10}$$

Finalement on a : $H^q(X,F) = \dfrac{\ker h^*_q}{\mathrm{Im}\, h^*_{q-1}}$.

Pour $q = 0$ on a $H^0(X,F) = \Gamma(X,F)$. ■

CHAPITRE II

COHOMOLOGIE DES VARIETES FEUILLETEES.

Soit V une variété riemannienne de dimension $n + m$ munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n et de classe C^∞ [14] .

A - FORMES DIFFERENTIELLES DE TYPE (p,q).

En chaque point x de V, $T_x(\mathcal{F})$ et $N_x(\mathcal{F})$ désignent l'espace tangent et l'espace normal à la feuille passant par x.
On a :

$$T_x(V) = T_x(\mathcal{F}) \oplus N_x(\mathcal{F}) .$$

Définition II-A-1.- Une forme différentielle ω est dite de type (p,q) si elle est de degré $r = p + q$ et si pour tout r-uple de vecteurs $\sum = (X_1,\dots,X_r)$ on a :

$$\omega(X_1,\dots,X_r) = 0 \quad \text{sauf si } q \text{ vecteurs de } \sum$$

sont tangents à $\mathcal{F}$ et p vecteurs de $\sum$ sont normaux à $\mathcal{F}$.

On vérifie facilement que toute forme différentielle de degré r s'écrit de façon unique comme somme de formes différentielles de type (p,q) où $p + q = r$. D'où :

$$A^r = \bigoplus_{p+q=r} A^{p,q}$$

où A^r est l'espace des r-formes différentielles et $A^{p,q}$ l'espace des (p,q) formes.

Lemme II-A-2.- La différentielle extérieure d'une forme de type (p,q) se décompose en la somme de trois formes respectivement de types $(p,q+1)$, $(p+1, q)$ et $(p+2, q-1)$.

Démonstration : Soit ω une forme différentielle de type (p,q). Sa différentielle extérieure $d\omega$ est une forme de degré $p+q+1$ définie par :

$$d\omega(X_1,\ldots,X_{p+q+1}) = \sum_{i=1}^{p+q+1} (-1)^{i+1} X_i \ \omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{p+q+1})$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i,X_j], X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{p+q+1}) .$$

Les seules composantes non nulles de d sont de type $(p,q+1)$, $(p+1,q)$ et $(p+2,q-1)$. En effet :

i) Les premiers termes donnent deux types de composantes : pour X_i tangent au feuilletage on obtient une composante de type $(p,q+1)$ et pour X_i normal au feuilletage on obtient une composante de type $(p+1,q)$.

ii) Les deuxièmes termes donnent trois types de composantes :

- Pour X_i et X_j tangents à F, le crochet est aussi tangent à F d'après le théorème de Frobenius et on a une composante de type $(p,q+1)$.
- Pour X_i et X_j normaux à F, en chaque point on peut décomposer $[X_i,X_j]$ sous forme $X^1_{ij} + X^2_{ij}$ où X^1_{ij} est tangent à F et X^2_{ij} est normal à F. Ce qui donne une composante de type $(p+2,q-1)$ et une composante de type $(p+1,q)$.

- Pour X_i tangent à F et X_j normal à F, on décompose comme précédemment $[X_i, X_j]$ et on obtient une composante de type $(p+1,q)$ et une composante de type $(p,q+1)$.

La différentielle extérieure se décompose donc en la somme de trois opérateurs d_{01}, d_{10} et $d_{2,-1}$ respectivement de types $(0,1)$, $(1,0)$ et $(2,-1)$. Nous serons intéressés par l'opérateur d_{01} qu'on note d_F.

Lemme II-A-3.- L'opérateur d_F-satisfait aux propriétés :

i) $d_F(\alpha \wedge \beta) = d_F\, \alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg\alpha}\, \alpha \wedge d_F\, \beta$.

ii) $d_F^2 = 0$.

L'opérateur d_F est appelé la <u>différentielle extérieure feuilletée</u>.

Démonstration : On a $d = d_F + d_{1,0} + d_{2,-1}$.
D'où $d(\alpha \wedge \beta) = d_F(\alpha \wedge \beta) + d_{1,0}(\alpha \wedge \beta) + d_{2,-1}(\alpha \wedge \beta)$. D'autre part $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg\alpha}\, \alpha \wedge d\beta$. En identifiant les composantes de même type on obtient la relation (i).

Par ailleurs de $d^2 = 0$ on déduit :

$$d_F^2 + (d_{1,0}^2 + d_F\, d_{2,-1} + d_{2,-1} \cdot d_F) + (d_F\, d_{1,0} + d_{1,0}\, d_F)$$

$$+ (d_{1,0} d_{2,-1} + d_{2,-1}\, d_{1,0}) = 0$$

Dans cette somme l'opérateur d_F^2 est le seul de type $(0,2)$. Il est donc nécessairement nul. Ce qui démontre (ii).

Définition II-A-4.- Une forme ω de type (p,q) est dite d_F-fermée si $d_F\omega = 0$. Elle dite d_F-exacte s'il existe une forme β de type $(p,q-1)$ telle que $\omega = d_F\beta$.

B - THEOREME DE DE RAHM POUR LES VARIETES FEUILLETEES.

Définition II-B-1.- Une p-forme différentielle α sur V est dite feuilletée si elle est de type $(p,0)$ et vérifie $d_F\alpha = 0$.

Pour $p = 0$ on a une fonction feuilletée.

Lemme II-B-2.- Soit ω une forme différentielle de type (p,q) avec $q \geq 1$ et telle que $d_F\omega = 0$. Alors pour tout point x dans V il existe un voisinage U de x et une forme β de type $(p,q-1)$ définie dans U telle que $\omega = d_F\beta$.

Démonstration : Au voisinage de x, on peut trouver un système de coordonnées locales $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ telles que le feuilletage F soit défini par les équations $dx_i = 0$ où $i = 0,\ldots,n$ et ω s'écrit :

$$\omega = \sum \omega_{a_1\ldots a_p b_1\ldots b_q} \, dx^{a_1} \wedge \ldots \wedge dx^{a_p} \wedge dy^{b_1} \wedge \ldots \wedge dy^{b_q} .$$

La démonstration se fera par récurrence sur l'entier k qui est défini par la condition que l'écriture précédente ne contient pas les termes $dx^{k+1}, \ldots, dx^n$.

i) Pour $k = 0$ on a $\omega = \sum \omega_{b_1\ldots b_q} \, dy^{b_1} \wedge \ldots \wedge dy^{b_q}$

et donc $d_F\omega = d\omega = 0$. Par le lemme de Poincaré usuel, il existe un voisinage U de x et une forme β définie sur U telle que $\omega = d\beta$. La forme β est de type $(0,q-1)$, la forme ω est de type $(0,q)$ on en déduit que $\omega = d_F\beta$.

ii) Supposons donc que le théorème est vrai pour $k < h$ et soit ω de type (p,q) telle que son écriture locale ne contient pas les termes $dx^{h+1}, \ldots, dx^n$. On a $\omega = dx^h \wedge \lambda + \mu$ où λ et μ sont des formes dont l'écriture locale ne contient pas $dx^h, \ldots, dx^n$. Alors $d_F\omega = - dx^h \wedge d_F\lambda + d_F\mu$ et $d_F\lambda = 0$ entraîne $d_F\lambda = 0$ et $d_F\mu = 0$. Il existe donc σ de type $(p,q-1)$ et τ de type $(p-1,q-1)$ telles que $\mu = d_F\sigma$ et $\lambda = d_F\tau$.

On obtient finalement que $\omega = d_F\,(dx^h \wedge \tau + \sigma)$. ■

On note Φ^p le faisceau des germes des p-formes différentielles feuilletées sur V et A^{pq} le faisceau des germes des formes différentielles de type (p,q) sur V.

Lemme II-B-3.- Le faisceau A^{pq} est fin.

Démonstration : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de V et soit $(\vartheta_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité différentiable associée à $(U_i)_{i\in I}$. On définit :

$$h_i : A^{pq} \longrightarrow A^{pq} \quad \text{avec} \quad h_i[\omega] = [\vartheta_i\omega].$$

Alors h_i est un endomorphisme de A^{pq} et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} h_i[\omega] &= \sum_{i\in I} [\vartheta_i\omega] \\ &= [\sum_{i\in I} \vartheta_i\omega] \\ &= [(\sum_{i\in I} \vartheta_i)\omega] \\ &= [\omega]\end{aligned}$$

On en déduit $\sum_{i\in I} h_i = id$ ce qui achève la démonstration.

Théorème II-B-4. (de Rham) [14].-

La suite $0 \longrightarrow \Phi^p \longrightarrow A^{p,0} \xrightarrow{d_F} A^{p,1} \longrightarrow \dots$ est exacte en raison de la caractérisation des p-formes feuilletées, de la relation $d_F^2 = 0$ et du lemme II-B-2. C'est donc une résolution fine du faisceau Φ^p. On a donc le théorème :

Théorème.-

$$H^q(V, \Phi^p) = \frac{\ker(A^{pq} \longrightarrow A^{p,q+1})}{\mathrm{Im}(A^{p,q-1} \longrightarrow A^{p,q})}$$

Le groupe $H^q(X,\Phi^p)$ est appelé le groupe de cohomologie de type (p,q) de la variété feuilletée (V,F). Pour $p = 0$ on appellera $H^q(X,\Phi^o)$ le groupe de cohomologie feuilletée de la variété (V,F).

Pour $q > m$ on a évidemment $H^q(V,\Phi^p) = 0$.

CHAPITRE III

PROPRIETES DE LA COHOMOLOGIE DE TYPE (p,q).

Contrairement à la cohomologie réelle, la cohomologie de type (p,q) n'est pas invariante par homotopie même si cette homotopie préserve le feuilletage. Cependant nous allons montrer que cette cohomologie est un invariant d'un type d'homotopie qu'on appelle homotopie intégrable.

Nous montrerons aussi un théorème du type Mayer-Vietoris lorsqu'on coupe la variété feuilletée par une sous-variété de codimension un normale au feuilletage.

A - *INVARIANCE PAR HOMOTOPIE INTEGRABLE.*

Soient $(V,\mathcal{F})$ et $(V',\mathcal{F}')$ deux variétés riemanniennes feuilletées. Une application f de V dans V' préserve les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ si elle envoie chaque feuille de $\mathcal{F}$ dans une feuille de $\mathcal{F}'$.

Définition III-A-2.- Soient f et g deux applications différentiables de $(V,\mathcal{F})$ dans $(V',\mathcal{F}')$. Une homotopie intégrable de f à g est une application H différentiable de $(V \times \mathbb{R}, \mathcal{F} \times \mathbb{R})$ dans $(V',\mathcal{F}')$ préservant les feuilletages $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}'$ et telle que $H(\ ,t) = f$ pour $t \leq 0$ et $H(\ ,t) = g$ pour $t \geq 1$.

Définition III-A-3.- Les variétés feuilletées $(V,\mathcal{F})$ et $(V',\mathcal{F}')$ ont même type d'homotopie intégrable s'il existe une application f de V dans V' et une application g de V' dans V et des homotopies intégrables respectivement de $f \circ g$ à $id_{V'}$ et de $g \circ f$ à id_V.

On munit $V \times \mathbb{R}$ du feuilletage $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$J_t : V \longrightarrow V \times \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow (x,t)$$

est une injection de la variété feuilletée V dans la variété feuilletée $V \times \mathbb{R}$.

Proposition III-A-4.- Soit $A^{p,*} = \sum_q A^{pq}$. Il existe une application linéaire :

$$K : A^{p,*}(V \times \mathbb{R}) \longrightarrow A^{p,*}(V)$$

vérifiant i) $K(A^{p,q}(V \times \mathbb{R})) \subset A^{p,q-1}(V)$.

ii) $d_{\mathcal{F}} \circ K + K \circ d_{\mathcal{F}} = J_1^* - J_*^o$.

Démonstration : La construction de K se fera comme dans le cas usuel.

a) modèle local $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ feuilletée par les plans $\{\theta\} \times \mathbb{R}^m$. On pose :

$Kf = 0$ si f est une fonction différentiable .

$K\alpha = 0$ si $\alpha = a\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_q}$

$K\beta = (\int_0^1 b\, dt)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_{q-1}}$ si

$\beta = b\, dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_{q-1}}$.

Il est clair qu'on a $K(A^{pq}(V \times \mathbb{R})) \subset A^{pq-1}(V)$.

Par ailleurs on a :

*) $d_F Kf + K\, d_F f = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\, dt = f(1) - f(0)$ c'est-à-dire :

$d_F Kf + K\, d_F f = (J_1^* - J_o^*)\, f$.

**) $d_F K\alpha = 0$

et $$K\, d_F\, \alpha = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}\, dt\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_q}$$

$$= J_1^* - J_o^* .$$

***) Finalement $J_1^*\beta - J_o^*\beta = 0$ et :

$$d_F K\beta = \sum_{1 \leq j \leq m} \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial y_j}\, dt\right) dy_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_{q-1}}$$

$$K\, d_F\, \beta = - \sum_{1 \leq j \leq m} \left(\int_o^1 \frac{\partial b}{\partial y_j}\, dt\right) dy_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_{q-1}}$$

on a : $K\, d_F\, \beta + d_F\, K\beta = (J_1^* - J_o^*)$.

b) Nous allons globaliser le résultat précédent. Si h est un difféomorphisme préservant le feuilletage de $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ on a $K(k^*\gamma) = h^*K(\gamma)$ où k est le difféomorphisme de $V \times \mathbb{R}$ défini par $k(x,t) = (h(x),t)$ et qui préserve le feuilletage de $V \times \mathbb{R}$.

On suppose que V est une variété feuilletée définie par un atlas (U_i, h_i) tel que :

i) $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert localement fini de V.

ii) h_i est un difféomorphisme de U_i sur $\mathbb{R}^{n+m}$.

iii) Les changements de cartes sont des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ préservant le feuilletage $\{\theta\} \times \mathbb{R}^m$.

La famille $(U_i \times \mathbb{R}, k_i)_{i\in I}$ où $k_i(x,t) = (h_i(x),t)$ est un atlas définissant le feuilletage de $V \times \mathbb{R}$. Soit $(\vartheta_i)_{i\in I}$ une partition différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$. La famille $(\Psi_i)_{i\in I}$ où $\Psi_i(x,t) = \vartheta_i(x)$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i \times \mathbb{R})_{i\in I}$.

On pose :

$$\hat{K}(\alpha) = \sum_{i\in I} h_i^* K[(k_i^{-1})^* \Psi_i \alpha]$$

On a alors :

i) $\hat{K}(A^{pq}(V \times \mathbb{R})) \subset A^{p,q-1}(V)$

ii) $d_F \hat{K}(\alpha) + \hat{K} d_F(\alpha) = \sum_{i\in I} d_F \hat{K}(\Psi_i \alpha) + \hat{K} d_F(\Psi_i \alpha)$

$$= \sum_{i\in I} h_i^* d_F K(k_i^{-1})^* (\Psi_i \alpha) + h_i^* K d_F(k_i^{-1}) (\Psi_i \alpha)$$

$$= \sum_{i\in I} h_i^*(J_1^* - J_o^*) \Psi_i \alpha = (J_1^* - J_o^*) \alpha$$

ce qui achève la démonstration.

Remarquons que toute application de (V,F) dans (V',F') préservant les feuilletages induit un homomorphisme en cohomologie de type (p,q).

Proposition III-A-5.- Soient f et g deux applications différentiables de (V,F) dans (V',F') préservant les feuilletages F et F'. S'il existe une homotopie intégrable de f à g alors f et g induisent le même homomorphisme en cohomologie de type (p,q).

Démonstration : Si $H : V \times \mathbb{R} \to V'$ est une homotopie intégrable de f à g on a $H \circ J_o = f$ et $H \circ J_1 = g$. Si α est une forme de type (p,q) et d_F fermée sur V' on a :

$$g^*\alpha - f^*\alpha = J_1^* H^*\alpha - J_o^* H^* \alpha$$

$$= d_F K(H^* \alpha) + K d_F(H^* \alpha)$$

$$= d_F K(H^* \alpha) .$$

Les formes $g^*\alpha$ et $f^*\alpha$ sont donc cohomologues. Ce qui donne le résultat annoncé.

Corollaire III-A-6.- Si (V,F) et (V',F') ont même type d'homotopie intégrable alors elles ont des groupes de cohomologie de type (p,q) isomorphes.

Définition III-A-7.- Soit $W \hookrightarrow V$ une sous-variété de V transverse à F munie du feuilletage $F_{|W}$. On dira qu'une application :

$$r : V \longrightarrow W$$

est une rétraction par déformation intégrable si :

i) r est une rétraction par déformation,

ii) la restriction de r à chaque feuille F de F est une rétraction par déformation de F sur $F \cap W$.

Corollaire III-A-8.- Si W est un rétracte par déformation intégrable de V alors V et W ont mêmes groupes de cohomologie de type (p,q).

B - THEOREME DE MAYER-VIETORIS.

(Soient $V,F)$ une variété feuilletée et M et N deux sous-variétés fermées de V telles que :

i) $M \cup N = V$.

ii) Et $\partial M = \partial N$ est transverse à $\mathcal{F}$.

Alors on a $K = M \cap N = \partial M = \partial N$ qui sont munis respectivement de feuilletages $\mathcal{F}_K$, $\mathcal{F}_M$ et $\mathcal{F}_N$.

On a un diagramme de variétés et d'applications feuilletées qui est commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \cap N \arrow[r, hook, "\ell"] \arrow[d, hook, "k"'] & N \arrow[d, hook, "j"] \\ M \arrow[r, hook, "i"'] & V \end{tikzcd}$$

Soient λ et μ les applications :

$$\lambda : A^{p,*}(V) \longrightarrow A^{p,*}(M) \oplus A^{p,*}(N)$$
$$\omega \longrightarrow (i^*\omega, - j^*\omega)$$

$$\mu : A^{p,*}(M) \oplus A^{p,*}(N) \longrightarrow A^{p,*}(K)$$
$$(\alpha,\beta) \longrightarrow k^*\alpha + \ell^*\beta .$$

Lemme III-B-1.- La suite :

$$0 \longrightarrow A^{p,*}(V) \longrightarrow A^{p,*}(M) \oplus A^{p,*}(N) \longrightarrow A^{p,*}(K) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

est exacte.

Démonstration :

a) λ est injective car si $(i^*\omega , - j^*\omega) = (0,0)$, ω est évidemment nulle.

Si $(\alpha,\beta) \in \operatorname{Im} \lambda$ on a : $\alpha = i^*\omega$ et $\beta = - j^*\omega$.

D'où $k^*\alpha + \ell^*\beta = 0$ et par conséquent $(\alpha,\beta) \in \ker \mu$. De même si $(\alpha,\beta) \in \ker \mu$ on a $k^*\alpha + \ell^*\beta = 0$ et par conséquent il existe une forme ω sur V telle que $\alpha = i^*\omega$ et $\beta = - j^*\omega$; c'est-à-dire $(\alpha,\beta) \in \operatorname{Im} \lambda$. Finalement $\operatorname{Im} \lambda = \ker \mu$.

b) Montrons que μ est surjective. Soient γ une forme de type (p,q) sur K et γ_1 une (p,q) forme sur $K \times [-1, 1]$ où $[-1, +1]$ est tangent à $F_K \times [-1, +1]$, définie par :

$$\gamma_1(x,t) = \gamma(x) .$$

Considérons une fonction C^∞ $\psi(x,t)$ sur $K \times [-1, +1]$, ne dépendant que de t, nulle sur un voisinage du bord et vérifiant $\psi(x,0) = 1$. Posons $\gamma_2 = \psi\, \gamma_1$. En prolongeant γ_2 par la forme nulle, on obtient un élément $\tilde{\gamma} \in A^{p,q}(M) \oplus A^{p,q}(N)$ telle que : $\tilde{\gamma}_{|K} = \gamma$.

Théorème III-B-2.- On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^o(V,\Phi^p) \longrightarrow H^o(M,\phi^p) \oplus H^o(N,\phi^p) \longrightarrow H^o(K,\phi^p) \longrightarrow H^1(V,\Phi^p) \longrightarrow \dots \quad (2)$$

Cette suite est exactement la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte (1).

CHAPITRE IV

EXEMPLES DE CALCULS DE COHOMOLOGIE FEUILLETEE.

Dans la suite nous nous intéresserons uniquement au cas où $p = 0$, c'est à la cohomologie à valeurs dans le faisceau Φ des germes des fonctions constantes sur les feuilles que nous avons appelée la cohomologie feuilletée.

Rappelons (cf. th. I-C-3) que le groupe $H^0(V,\Phi)$ est l'espace des fonctions constantes sur les feuilles (on suppose que V est connexe). Par conséquent on a :

i) Si V/F est une variété on a $H^0(V,\Phi) = C^\infty(V/F)$.

ii) Si V est compacte, toute feuille contient un minimal dans son adhérence et on a donc : $H^0(V,\Phi)$ est l'espace des fonctions constantes sur les minimaux.

A - EXEMPLES SIMPLES.

Exemple IV-A-1.- Soit $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont les feuilles sont les droites $\{x\} \times \mathbb{R}$. On a $H^0(V,\Phi) = C^\infty(\mathbb{R})$.

Pour calculer $H^1(V,\Phi)$ considérons une $(0,1)$ forme $\omega = f(x,y)\,dy$ où f est une fonction C^∞ en x et y. La forme ω est nécessairement d_F-fermée car elle est de degré maximum sur les feuilles. Elle est d_F-exacte s'il existe une fonction h, C^∞ et telle que :

$\frac{\partial h}{\partial y} = f$. On a donc $h(x,y) = \int_0^y f(x,t)\,dt + K(x)$

D'où $H^1(V,\Phi) = 0$.

Exemple IV-A-2.- Soit $V = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ muni du feuilletage produit i.e. dont les feuilles sont $\{x\} \times \mathbb{S}^1$. On calcule $H^1(V,\Phi)$ de la même façon que précédemment sauf que f et h doivent être périodiques. Ce qui donne la relation :

$$\int_0^1 f(x,t)\,dt = 0 .$$

Nous en déduisons que les formes $\omega = f(x,y)\,dy$ telles que f est une constante non nulle en y n'admettent pas de primitive au sens de la différentielle d_F. Par conséquent $H^1(V,\Phi) = C^\infty(\mathbb{S}^1)$.

B - PRODUIT DE DEUX VARIETES.

On remarque que le groupe $H^q(V,\Phi)$ n'est rien d'autre que le groupe de cohomologie réelle de la feuille type tensorisé par l'espace des fonctions différentiables sur la transversale. Nous allons montrer que c'est toujours vrai dans le cas d'un produit.

Proposition IV-B-1.- Soient F et T deux variétés différentiables et posons $V = T \times F$ munies du feuilletage dont les feuilles sont les variétés $\{x\} \times F$. Alors :

$$H^q(V,\Phi) = H^q(F,\mathbb{R}) \otimes C^\infty(T) .$$

Démonstration : Considérons l'application :

$$p : V \longrightarrow F$$

$$(x,y) \longrightarrow y$$

et U un ouvert de F. On a $p^{-1}(U) = T \times U$. La cohomologie feuilletée étant invariante par rétraction intégrable on a :

$$\varinjlim_{y \in U} H^q(p^{-1}(U), \Phi) = H^q(T,\Phi) \quad .$$

D'après le théorème de Leray [3] on a une suite spectrale $E_2^{pq} = H^p(F, H^q(T,\Phi))$ qui converge vers la cohomologie de V à valeurs dans le faisceau Φ.

Le feuilletage induit sur T est un feuilletage par points. On a donc $H^q(T,\Phi) = 0$ pour $q \neq 0$ et $H^0(T,\Phi) = C^\infty(T)$. Par conséquent $E_2^{pq} = 0$ pour $q \neq 0$. La suite spectrale E_2^{pq} est donc dégénérée. Ceci donne :

$$H^n(V,\Phi) = H^n(F,C^\infty(T)) \quad .$$

L'action de $\pi_1(F)$ sur $H^n(F,C^\infty(T))$ étant triviale on a :

$$H^n(V,\Phi) = H^n(F,\mathbb{R}) \otimes C^\infty(T) \quad .$$

C - *TORE* T^2 *MUNI DU FEUILLETAGE LINEAIRE.*

On considère le tore T^2 muni du feuilletage linéaire de pente α. Le calcul de sa cohomologie a été aussi donné par Heitsch [5] dans le cadre des déformations infinitésimales des feuilletages et par Roger [11] dans le cas de la cohomologie de type (p,q).

Définition IV-C-1.- Soit α un nombre réel irrationnel.

i) α est un nombre de Liouville, si pour tout entier $s \geq 1$ il existe des entiers m et n tels que :

$$|m + \alpha n| < \frac{1}{|n|^s} \quad .$$

ii) Si α n'est pas de Liouville, on dit alors qu'il vérifie une condition diophantienne ; il existe un entier $s \geqslant 1$ et A réel strictement positif vérifiant $|m + \alpha n| > \dfrac{A}{(|m| + |n|)^s}$.

On rappelle que $H^o(V,\Phi)$ est l'espace des fonctions différentiables constantes sur les feuilles. Par conséquent on a :

i) $H^o(T^2,\Phi_\alpha) = C^\infty(\mathbb{S}^1)$ si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

ii) $H^o(T^2,\Phi_\alpha) = \mathbb{R}$ si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Pour $H^1(T^2,\Phi_\alpha)$ on a le résultat :

Théorème IV-C-2.-

i) Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a $H^1(T^2,\Phi_\alpha) = C^\infty(\mathbb{S}^1)$.

ii) Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ on a :

$$H^1(T^2, \phi_\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } \alpha \text{ vérifie une condition diophantienne.} \\ \text{Un espace de dimension infinie si } \alpha \text{ est un nombre de Liouville.} \end{cases}$$

Démonstration : Toute forme sur T^2 s'écrit comme forme sur $\mathbb{R}^2$ invariante par les translations entières. En particulier ω de type $(0,1)$ s'écrit $\omega = f(x,y)\,dz$ avec x et y les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^2$ et z une coordonnée sur la feuille ; f étant une fonction C^∞ bipériodique.

Il est clair que ω est d_F-fermée. Elle est d_F-exacte s'il existe une fonction h sur T^2 , C^∞ et telle que :

$$d_F\, h = f \tag{1}$$

c'est-à-dire
$$\frac{\partial h}{\partial x} + \alpha \frac{\partial h}{\partial y} = f \tag{2}$$

Les fonctions f et h étant bipériodiques en x et y on peut les développer en série de Fourier :

$$f(x,y) = \sum_{m,n} f_{mn}\, e^{2i\pi(mx+ny)}$$

et
$$h(x,y) = \sum_{m,n} h_{mn}\, e^{2i\pi(mx+ny)} \quad .$$

En dérivant formellement h l'équation (2) se ramène à

$$2i\pi(m+\alpha n)\, h_{mn} = f_{mn} \tag{3}$$

On en déduit :

$$h_{mn} = \frac{f_{mn}}{2i\pi(m+\alpha n)} \qquad \text{si} \quad (m,n) \neq (0,0)$$

si $f_{oo} \neq 0$ l'équation (2) n'a pas de solution.

La différentiabilité de h dépend de la nature arithmétique de α. Nous distinguerons deux cas :

i) si α vérifie une condition diophantienne, alors il existe $s \in \mathbb{N}^*$ et $A > 0$ tels que $|m + \alpha n| > \dfrac{A}{(|m| + |n|)^s}$ pour m et n assez grands. Cette inégalité donne :

$$|h_{mn}| < \tilde{A}(|m| + |n|)^s\, |f_{mn}|$$

Ce qui montre que les coefficients $(h_{mn})_{m,n}$ définissent une fonction C^∞ et par conséquent $H^1(T^2,\Phi_\alpha) = \mathbb{R}$.

ii) Si α est un nombre de Liouville, on construit une infinité de $(0,1)$-formes non cohomologues deux à deux et qui n'admettent pas de primitives au sens de la différentielle d_F.

Pour tout entier $s \geq 1$ considérons la suite d'entiers (m,n) tels que $|m + \alpha n| < \frac{1}{|n|^s}$.

Soit f la fonction C^∞ définie par ses coefficients de Fourier $f_{-m,n} = \frac{1}{(mn)^{s/2}}$, les autres étant choisis arbitrairement parmi les suites à décroissance rapide.

On a alors :

$$h_{m,n} = \frac{1}{(mn)^{s/2}\ 2i\pi(+m+\alpha n)}$$

d'où :

$$|h_{m,n}| > \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{s/2} .$$

Quand s tend vers l'infini on a $|h_{m,n}| \to +\infty$.

Les h_{mn} ne sont pas donc les coefficients de Fourier d'une fonction C^∞ ; par conséquent on a :

$$H^1(T^2, \phi_\alpha)$$

est de dimension infinie.

D - TORE T^3 MUNI DU FEUILLETAGE EN CYLINDRES.

On considère le feuilletage sur T^2 de pente α qu'on note F_α. Le feuilletage sur $T^2 \times \mathbb{R}$ dont les feuilles sont $F \times \mathbb{R}$ où F est une feuille de F_α est invariant par l'application $(m,t) \longrightarrow (m, t+1)$ et passe donc au quotient en un feuilletage en cylindres sur T^3.

Les feuilles étant denses si α est irrationnel on a

$$H^o(T^3,\phi) = \mathbb{R} .$$

Nous allons faire le calcul des groupes de cohomologie feuilletée dans le cas où α vérifie une condition diophantienne en utilisant la suite spectrale de Leray [3] associée à un recouvrement.

Proposition IV-D-1.- On a :

$$H^1(T^3,\Phi) = \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad H^2(T^3,\Phi) = \mathbb{R} .$$

Démonstration : La variété T^3 peut être obtenue en collant deux exemplaires de $T^2 \times I$ à l'aide de l'identité du bord. On pose :

$$M_o = M_1 = T^2 \times I \quad \text{et} \quad K = M_o \cap K_1 = T^2 \times \{0\} \underset{\text{disjointe}}{\cup} T^2 \times \{1\} .$$

On a une suite exacte [3] :

$$0 \longrightarrow E_2^{o,n} \longrightarrow H^n(T^3,\Phi) \longrightarrow E_2^{1,n-1} \longrightarrow 0$$

où $E_2^{o,n}$ est le sous-groupe de $H^n(M_o,\Phi) \times H^n(M_1,\Phi)$ formé des couples (α_o,α_1) qui induisent la même classe de cohomologie sur $M_o \cap M_1$.

Le groupe $E_2^{1,n-1}$ est le quotient de $H^{n-1}(M_o \cap M_1,\Phi)$ par le sous-groupe formé des classes de cohomologie qui sont différence de deux classes induites par des classes de M_o et M_1.

D'autre part $T^2 \times I$ et T^2 ont même type d'homotopie intégrable donc ont même groupes de cohomogie feuilletée. On a finalement :

$$E_2^{0,1} = \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad E_2^{1,0} = \mathbb{R}$$

$$E_2^{0,2} = 0 \qquad \text{et} \qquad E_2^{1,1} = \mathbb{R}$$

ce qui donne les résultats annoncés.

E - *FIBRES HYPERBOLIQUES* T_A^3.

1 - *Construction du feuilletage sur* T_A^3 [2].

Pour tout $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ on désigne par T_A^3 le fibré en tores obtenu en quotientant $T^2 \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence identifiant (m,t) à $(A(m), t+1)$. Un tel fibré est dit hyperbolique si A est hyperbolique, c'est-à-dire si $|\mathrm{tr}\, A| > 2$. On note p_A la fibration de T_A^3 induite par l'application $(m,t) \in T^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow t \in \mathbb{R}$.

L'automorphisme A étant hyperbolique, il a deux directions propres réelles de pente irrationnelles. On note λ une des valeurs propres et α la pente associée. Le feuilletage du plan par droites de pente α passe au quotient en un feuilletage en droites. Le feuilletage produit sur $T^2 \times \mathbb{R}$ est invariant par l'application $(m,t) \longrightarrow (A(m), t+1)$ et définit donc un feuilletage sur T_A^3. Les feuilles sont des plans ou des cylindres et sont toutes denses.

2 - *Calcul de la cohomologie feuilletée de* T_A^3.

Les feuilles sont toutes denses, on a donc $H^0(T_A^3, \Phi) = \mathbb{R}$.

Proposition IV-E-1.- On a :

$$H^1(T_A^3, \Phi) = \mathbb{R} .$$

Démonstration : Considérons la fibration :

$$T^2 \hookrightarrow T^3_A \xrightarrow{p_A} \mathbb{S}^1 .$$

Soient m un point de $\mathbb{S}^1$ et U un voisinage ouvert de m. L'ouvert $p^{-1}(U)$ est difféomorphe à $T^2 \times U$. La fibre T^2_m au-dessus de m et $p^{-1}(U)$ ont même type d'homotopie intégrable. On en déduit une suite spectrale [3] :

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbb{S}^1, H^q(T^2,\Phi)) \Longrightarrow H^{p+q}(T^3_A,\Phi) .$$

Or $E_2^{pq} = 0$ pour $q \neq 0,1$; ce qui donne une suite exacte [1] :

$$0 \longrightarrow E_2^{0,0} \longrightarrow H^o(T^3_A, \Phi) \longrightarrow E_2^{-1,1} \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow H^1(T^3,\Phi) \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0} \longrightarrow \dots \tag{1}$$

On a $H^o(T^2,\Phi) = \mathbb{R}$ et par conséquent $E_2^{1,0} = \mathbb{R}$

Lemme IV-E-2.- On a :

$$H^o(\mathbb{S}^1,H^1(T^2,\Phi)) = 0 .$$

Démonstration : $H^o(\mathbb{S}^1,H^1(T^2,\Phi))$ est le groupe de cohomologie feuilletée des $(0,1)$ formes sur T^2 invariantes par le difféomorphisme A.

Soit $\omega = f(x,y)\,dz$ une $(0,1)$ forme invariante par A sur T^2 c'est-à-dire telle que f vérifie $\lambda f(A(x,y)) = f(x,y)$. Déterminons une $(0,0)$ forme h sur T^2 invariante par A telle que $d_F h = \omega$, c'est-à-dire vérifiant $h(A(x,y)) = h(x,y)$. La fonction h est définie par ses coefficients de Fourier :

$$h_{mn} = \frac{f_{mn}}{2i\pi(m+\alpha n)}$$

qui définissent une fonction C^∞ car α étant algébrique, il vérifie une condition diophantienne [7] . La condition d'invariance sur f se traduit au niveau des coefficients de Fourier par :

$$f_{A'(m,n)} = \lambda f_{m,n} \quad \text{où } A' \text{ est la transposée de } A.$$

On a :
$$h_{A'(m,n)} = \frac{f_{A'(m,n)}}{2i\pi(m'+\alpha n')} \quad \text{avec } (m',n') = A'(m,n).$$

Or $m' + \alpha n' = \lambda(m + \alpha n)$. On en déduit :

$$h_{m',n'} = \frac{\lambda\, f_{mn}}{2i\mu\lambda(m+\alpha n)} = \frac{f_{mn}}{2i\pi(m+\alpha n)} \qquad \text{c'est-à-dire :}$$

$$h_{(m',n')} = h_{(m,n)} \quad .$$

La fonction h est donc invariante par A.

Les formes de type (0,1) qui n'admettent pas de primitives sont de la forme $k\,dz$ ou k est une constante. Or ces formes ne sont pas invariantes. Ce qui donne :

$$H^o(\mathbb{S}^1, H^1(T^2,\Phi)) = 0 \ .$$

Nous terminons la démonstration en remarquant que la suite exacte (1) se réduit à :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^o(T^3_A,\Phi) \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(T^3_A,\Phi) \longrightarrow 0 \quad .$$

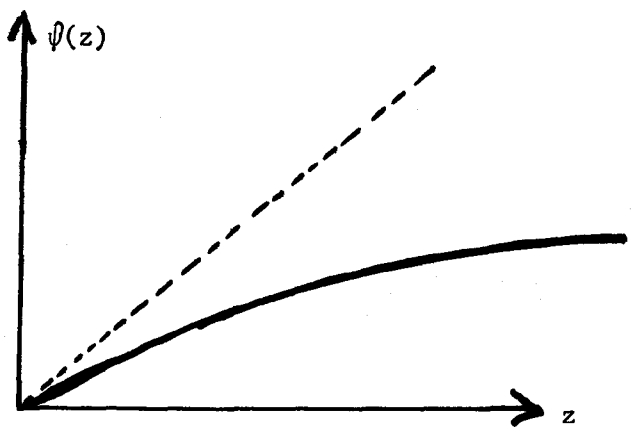
d'où :
$$H^1(T^3_A,\Phi) = \mathbb{R} \ .$$

F - COMPOSANTE DE REEB.

1 - Construction.

Soit H^* le demi-espace $\{(x,y,z) \mid z \geq 0\}$ privé du point $(0,0,0)$ et feuilleté par les surfaces d'équations $dz = 0$. Il est difféomorphe à $D^2 \times \mathbb{R}$. On le rapporte aux coordonnées cylindriques (r,θ,z).

Soit φ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ contractant et ayant 0 comme point fixe.



L'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par l'application $(r,\theta,z) \xrightarrow{\gamma} (\frac{r}{2}, \theta, \varphi(z))$ laisse le feuilletage invariant. On a donc un feuilletage F sur la variété obtenue en quotientant H^* par cette action qui n'est rien d'autre que $D^2 \times S^1$ muni du feuilletage de Reeb habituel.

2 - *Calcul du* H^o *et du* H^1.

La composante de Reeb a une seule feuille compacte on a donc $H^o(D^2 \times \mathbb{S}^1, \Phi) = \mathbb{R}$.

Calculons $H^1(D^2 \times \mathbb{S}^1, \Phi)$.

a) Une (0,1) forme sur $D^2 \times \mathbb{S}^1$ s'écrit :

$\omega = f(r,\theta,z)\, dr + g(r,\theta,z)\, d\theta$ où f et g

sont des fonctions C^∞ de r,θ,z avec $\gamma^*\omega = \omega$.

On a $\gamma^*\omega = \omega$ si

i) $f(\frac{r}{2}, \theta, \phi(z)) = 2f(r,\theta,z)$

$g(\frac{r}{2}, \theta, \phi(z)) = g(r,\theta,z)$

en plus :

ii) f et g sont périodiques en θ.

Pour que ω soit d_F-fermée il faut et il suffit d'avoir

iii) $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial r}$.

ω est d_F exacte s'il existe une fonction $h(r,\theta,z)$, C^∞ en r,θ,z et telle que :

i) h périodique en θ,

ii) $\gamma^*h = h$ i.e. $h(\frac{r}{2},\theta,\phi(z)) = h(r,\theta,z)$.

iii) $$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial r} = f & (1) \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} = g & (2) \end{cases}$$

b) Résolution des équations (1) et (2).

on a $$h(r,\theta,z) = \int_1^\theta g(r,t,z)\, dt + K(r,z) \ .$$

En dérivant par rapport à r on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \int_1^\theta \frac{\partial g}{\partial r}(r,t,z)\, dt + \frac{\partial K}{\partial r}(r,z) \ .$$

Or $\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial \theta}$ et par conséquent :

$\frac{\partial h}{\partial r} = f + \frac{\partial K}{\partial r}$. On en déduit que $\frac{\partial K}{\partial r} = 0$. La fonction K ne dépend que de z :

$$h(r,\theta,z) = \int_1^\theta g(r,t,z)\, dt + K(z) \ .$$

c) <u>Vérifions les conditions d'invariance</u> :

i) La fonction h doit être périodique en θ. On doit avoir :

$$\int_0^1 g(r,\theta,z)\, d\theta = 0 \ .$$

Ceci implique : $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ est non identiquement nulle.

Ceci nous permet de caractériser les formes non d_F-exactes. Elles s'écrivent :

$$\omega = f(r,\theta,z)\, dr + g(r,z)\, d\theta.$$

Or $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial r}$. Ce qui implique $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$ et puisque f est périodique en θ on en déduit que f ne dépend pas en fait de θ et donc que g ne dépend pas de r.

Finalement $\omega = f(r,z)\, dr + g(z)\, d\theta$.

ii) Si on choisit K vérifiant $K(z) = K(\psi(z))$ la condition $h(\frac{r}{2}, \theta, \psi(z)) = h(r, \theta, z)$ est automatiquement vérifiée.

En définitive deux formes :

$$\omega_1 = f_1(r,z)\, dr + g_1(z)\, d\theta$$

$$\omega_2 = f_2(r,z)\, dr + g_2(z)\, d\theta$$

sont cohomologues si et seulement si $g_1(z) - g_2(z)$ est une fonction de θ. Mais comme elle constante en θ on a nécessairement $g_1(z) = g_2(z)$. On en déduit que chaque classe de cohomologie est représentée par une forme $\omega = g(z)\, d\theta$ où g vérifie $g(\psi(z)) = g(z)$.

La fonction g ne dépend ni de r ni de θ donc elle est constante sur les feuilles et par conséquent constante partout. D'où :

$$H^1(D^2 \times \mathbb{S}^1, \Phi) = \mathbb{R} .$$

G - COHOMOLOGIE FEUILLETEE DE $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

1 - Construction du feuilletage linéaire sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

On considère l'espace $\mathbb{R}^3_*$ rapporté aux coordonnées cylindriques r, θ et z et feuilleté par les surfaces d'équations $dz = 0$.

L'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par l'application : $(r,\theta,z) \to (\frac{r}{2},\theta,\frac{z}{2})$ laisse le feuilletage invariant et définit donc un feuilletage sur le quotient qui est $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Les feuilles sont des plans avec une feuille compacte qui est le tore T^2. Ce feuilletage peut être obtenu de la manière suivante.

On considère deux composantes de Reeb comme précédemment obtenues à l'aide du difféomorphisme $\varphi(z) = \frac{1}{2} z$. On recolle ces deux composantes à l'aide de l'identité du bord.

2 - *Cohomologie feuilletée de* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

On a $$H^0(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \Phi) = \mathbb{R} .$$

Le calcul de $H^1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \Phi)$ se fait exactement de la même façon que celui de la composante de Reeb. On trouve :

$$H^1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \Phi) = \mathbb{R} .$$

CHAPITRE V

RELATION ENTRE L'HOLONOMIE ET LA COHOMOLOGIE FEUILLETEE.

Dans le calcul de la cohomologie feuilletée de la composante de Reeb $D^2 \times \mathbb{S}^1$ nous avons vu apparaître une relation entre l'holonomie et $H^1(D^2 \times \mathbb{S}^1, \Phi)$. Nous allons montrer l'existence d'une relation entre l'holonomie linéaire et la cohomologie feuilletée dans le cas d'un feuilletage transversalement orientable.

A - FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT ORIENTABLES.

Soit V une variété riemannienne munie d'un feuilletage F de codimension un et transversalement orientable. Un tel feuilletage peut être défini par une équation de Pfaff $\omega = 0$ où ω est une 1-forme complètement intégrable.

On peut trouver une 1-forme (cf. [9]) α telle que :

i) $d\omega = \omega \wedge \alpha$

ii) Pour toute feuille L de F la restriction $\alpha_{|L}$ de α à L est une forme fermée.

iii) La classe de cohomologie réelle de $\alpha_{|L}$ ne dépend que de F et de L.

iv) On a : $\int_\alpha \alpha_{|L} = \text{Log } dh_\gamma$ pour $\gamma \in \pi_1(L)$ et où dh_γ représente l'holonomie linéaire.

Proposition V-A-1.- La composante de type $(0,1)$ de α définit une classe de cohomologie dans $H^1(V,\Phi)$.

Démonstration : La forme α s'écrit d'une manière unique sous forme :

$$\alpha = \alpha_{01} + \alpha_{10}$$

où α_{01} est de type $(0,1)$ et α_{10} de type $(1,0)$.

D'autre part pour toute feuille L de F on a : $d(\alpha_{|L}) = 0$. Ceci implique que α est d_F-fermée ; et par conséquent on a :

$$d_F\, \alpha_{01} + d_F\, \alpha_{10} = 0 .$$

Les formes $d_F\, \alpha_{01}$ et $d_F\, \alpha_{10}$ sont respectivement de types $(0,2)$ et $(1,1)$; et puisque la décomposition d'une forme en somme de formes de type (p,q) est unique on en déduit que α_{01} est d_F fermée ; donc définit une classe de cohomologie dans $H^1(V,\Phi)$. ■

Nous allons montrer qu'en fait l'holonomie linéaire du feuilletage F va être représentée par la forme α_{01} .

Lemme V-C-2.- Soit β une forme différentielle sur V de type $(0,r)$. Si L est une feuille de F et γ une chaîne de L de dimension $r+1$.

$$\int_\gamma d_F\, \beta = \int_{\partial\gamma} \beta .$$

Démonstration : On a :

$$d\beta = d_F\, \beta + d_{10}\, \beta + d_{2,-1}\, \beta \qquad \text{(cf. II-A-2).}$$

On aura donc :

$$\int_\gamma d\beta = \int_\gamma d_F\,\beta + \int_\gamma d_{10}\,\beta + \int_\gamma d_{2,-1}\,\beta\ .$$

Puisque γ est sur une feuille on a :

$$\int_\gamma d_{10}\,\beta = \int_\gamma d_{2,-1}\,\beta = 0$$

Finalement : $$\int_\gamma d\beta = \int_\gamma d_F\,\beta\ .$$

D'après le lemme de Stockes usuel on a :

$$\int_\gamma d\beta = \int_{\partial\gamma} \beta$$

on en déduit : $$\int_\gamma d_F\,\beta = \int_{\partial\gamma} \beta\ . \blacksquare$$

On peut écrire donc :

$$\int_\gamma \alpha|_L = \int_\gamma \alpha_{01} \quad \text{car} \quad \alpha_{10} \quad \text{est de type } (1,0) \quad \text{et}$$

par conséquent son intégrale sur une chaîne tangente au feuilletage est nulle.

D'après le lemme V-A-2 l'intégrale $\int_\gamma \alpha_{01}$ ne dépend que de la classe de cohomologie feuilletée de α_{01}. On a donc le théorème :

Théorème V-A-3.- Soit F un feuilletage de codimension un transversalement orientable sur une variété riemannienne V.

Si $H^1(V,\Phi) = 0$, alors F est sans holonomie linéaire.

Corollaire V-A-4.- Soit F un feuilletage de codimension un transversalement affine sur une variété riemannienne V.

Si $H^1(V,\Phi) = 0$ alors F est sans holonomie.

En effet l'holonomie linéaire d'un feuilletage transversalement affine caractérise entièrement l'holonomie.

B - *SUSPENSION D'UN DIFFEOMORPHISME DE* $[0, +\infty[$.

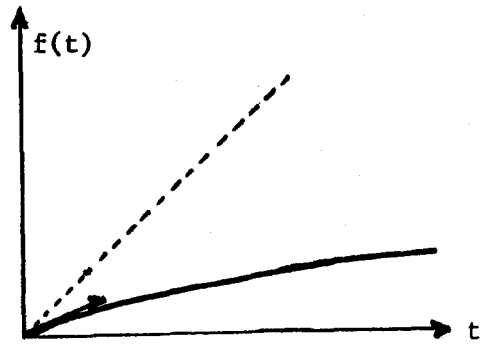
Dans ce paragraphe, nous montrerons le rôle que joue l'holonomie linéaire dans le calcul de la cohomologie feuilletée.

Soit f un difféomorphisme C^∞ de $[0, +\infty[$ tel que :

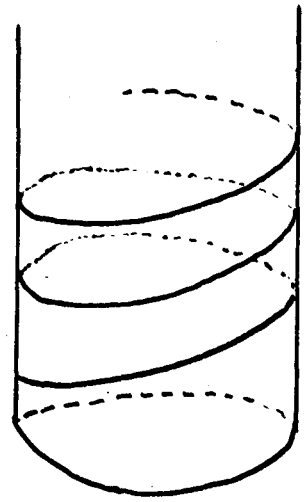
i) $f(0) = 0$

ii) f est contractant i.e. $f(t) < t$ pour $t > 0$.

iii) $f'(0) = a$ avec $0 < a < 1$.



En suspendant f on obtient un feuilletage sur $M = S^1 \times [0, +\infty[$ en droites spiralant sur la feuille compacte $S^1 \times \{0\}$.



On a $H^0(M,\Phi) = \mathbb{R}$ (cf. ch. IV).

Théorème V-B-1.- (*Sternberg* [13]).

Si f est un difféomorphisme C^∞ de $[0, +\infty[$ tel que :

i) $f(0) = 0$

ii) f est contractant i.e. $f(t) < t$ pour $t > 0$.

iii) $f'(0) = a$ avec $0 < a < 1$.

Alors :

f est C^∞ conjugué à l'homothétie :

$$t \longrightarrow at .$$

Ceci montre que le feuilletage défini par f est C^∞ conjugué à la suspension de cette homothétie.

Puisque la cohomologie feuilletée est invariante par conjugaison C^∞ il suffit de calculer $H^1(M,\Phi)$ pour cette suspension.

Calcul de $H^1(M,\Phi)$.

Une $(0,1)$-forme sur M s'écrit comme $(0,1)$ forme sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ invariante par l'application :

$$(x,t) \longrightarrow (x + 1, at) .$$

Une telle forme s'écrit :

$\omega = \psi(x,t)\, dt$ où ψ est une fonction C^∞ en x,t sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ vérifiant $\psi(x,t) = \psi(x + 1, at)$.

i) La forme ω est d_F-fermée car elle est de degré maximum sur les feuilles.

ii) Elle est d_F-exacte s'il existe une fonction h, C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ vérifiant :

$$\begin{cases} h(x+1, at) = h(x,t) \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} = \psi \end{cases}$$

En intégrant cette équation on obtient :

$$h(x,t) = \int_1^x \psi(\tau,t)\, d\tau + K(t) \ .$$

La condition d'invariance s'exprime donc par :

$$\int_1^{x+1} \psi(\tau,at)\, d\tau + K(at) = \int_1^x \psi(\tau,t)\, d\tau + K(t) \ .$$

En faisant un changement de variable de τ en $\tau+1$ on obtient :

$$\int_0^1 \psi(\tau,t)\, d\tau + K(at) = K(t) \ .$$

Il faut donc trouver une fonction $K(t)$, C^∞ et vérifiant une telle relation.

Lemme V-B-2.- On a $H^1(M,\Phi) \neq 0$.

Démonstration : La fonction K doit être continue à l'origine. On doit avoir :

$$K(0) = K(0) - \int_0^1 \psi(\tau,0)\, d\tau$$

c'est-à-dire : $$\int_0^1 \psi(x,0)\, dx = 0 \ .$$

Pour $t = 0$ la condition d'invariance sur ψ est une condition de périodicité. Les formes $\psi(x,t)\,dx$ telles que $\psi(x,0)$ est une constante non nulle ne sont pas d_F-exactes. Ce qui montre le lemme.

Proposition V-B-3.- On a :

$$H^1(M,\Phi) = \mathbb{R} .$$

Démonstration : Soit $\omega = \psi(x,t)\,dx$ telle que

$$\int_0^1 \psi(x,0)\,dx = 0 .$$

On a nécessairement :

$$K(t) = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 \psi(x,a^n t)\,dx .$$

Lemme B-3a.- La fonction K est de classe C^1 .

Démonstration : On a

$$Du_n(t) = a^n \int_0^1 D_\theta\, \psi(x,a^n t)\,dx$$

où on a posé $\theta = a^n t$ et $u_n(t) = \int_0^1 \psi(x,a^n t)\,dx$. La fonction $\int_0^1 D_\theta\, \psi(x,a^n t)\,dx$ est différentiable donc bornée sur tout compact $[0,t_o]$ indépendamment de n.

La série de terme général $Du_n(t)$ est donc uniformément convergente sur tout compact $[0, t_o]$ et par conséquent la série de terme général $u_n(t)$ aussi car pour $t = 0$ on a $u_n(0) = 0$ et donc $K(0) = 0$.

Lemme V-B-3b.- La fonction K est de classe C^{∞}.

Démonstration : On a :

$$D^k u_n(t) = a^{nk} \int_0^1 D_\theta^k \, \phi(x, a^n t) \, dx \, .$$

En raisonnant de la même façon que le lemme précédent on montre que la série :

$$\sum_{n \geq 0} D^k u_n(t)$$

est uniformément convergente sur tout compact $[0, t_0]$. ■

CHAPITRE VI

UN EXEMPLE DE FEUILLETAGE SANS FEUILLES COMPACTES ET SANS DEFORMATION INFINITESIMALE.

A - COHOMOLOGIE FEUILLETEE A VALEURS DANS LE FIBRE NORMAL.

Soit (V,F) une variété riemannienne feuilletée.

On désigne par :

i) Λ le faisceau des germes des champs de vecteurs feuilletés sur V.

ii) A^{pq} l'espace des formes différentielles sur V de type (p,q) à valeurs dans le fibré normal et A^{pq}, le faisceau des germes correspondant.

On a une résolution fine du faisceau Λ [15] :

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow A^{00} \xrightarrow{d_F} A^{01} \longrightarrow 0 \ldots$$

de sorte que :

$$H^q(V,\Lambda) = \frac{\ker(A^{0q} \xrightarrow{d_F} A^{0,q+1})}{\mathrm{Im}(A^{0,q-1} \xrightarrow{d_F} A^{0q})}$$

Le groupe $H^q(V,\Lambda)$ est appelé le qème groupe de cohomologie feuilletée de V à valeurs dans le fibré normal.

On sait [6] que $H^1(V,\Lambda)$ contient les déformations infinitésimales du feuilletage F. Ce groupe a été aussi utilisé

par Hamilton [4] dans l'étude de la C^∞-stabilité des feuilletages sur une variété riemannienne compacte.

Les exemples de feuilletages sans déformation infinitésimale que l'on connaît sont à feuilles compactes [8].

Ici nous en donnons un sans feuilles compactes.

B - *EXEMPLE.*

On considère la variété feuilletée (T^3_A, F) (cf. IV-E-1). On supposera donnée sur T^3_A une métrique riemannienne telle que sur chaque fibre T^2 l'autre direction propre soit orthogonale au feuilletage.

On désignera par (x,y,t) les coordonnées d'un point de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ et par (z,θ) les coordonnées d'un point de T^2 respectivement dans la direction du feuilletage et son orthogonale.

i) Un élément de A^{00} s'écrit :

$$\gamma = h(x,y,t) \otimes \frac{\partial}{\partial\theta}$$

où h vérifie : $\lambda h(A(x,y),t+1) = h(x,y,t)$ et est C^∞ et périodique en x et y.

ii) Un élément de A^{01} s'écrit :

$$\omega = f(x,y,t)\, dz \otimes \frac{\partial}{\partial\theta} + g(x,y,t)\, dt \otimes \frac{\partial}{\partial\theta}$$

où f et g sont C^∞ vérifiant :

$$\lambda^2 f(A(x,y),\ t+1) = f(x,y,t)$$

$$\lambda g(A(x,y),\ t+1) = g(x,y,t)$$

et sont périodiques en x et y.

iii) Enfin un élément de A^{02} s'écrit :

$$\eta = \ell(x,y,t)\, dz \wedge dt \otimes \frac{\partial}{\partial\theta}$$

où ℓ est C^∞ vérifiant :

$$\lambda^2 \ell(A(x,y),\ t+1) = \ell(x,y,t) \quad \text{et périodique en } x \text{ et } y\ .$$

Proposition VI-B-1.- Il existe des opérateurs H et K :

$$H : A^{01} \longrightarrow A^{00}$$

$$K : A^{02} \longrightarrow A^{01}$$

vérifiant : $\qquad d_F H + K\, d_F = id\ .$

Démonstration : Soit $\omega = f(x,y,t)\, dz \otimes \frac{\partial}{\partial\theta} + g(x,y,t)\, dt \otimes \frac{\partial}{\partial\theta}$.

La fonction f s'écrit :

$$f(x,y,t) = \sum_{m,n} f_{mn}(t)\, e^{2i\pi(mx+ny)}\ .$$

Considérons la fonction h définie par ses coefficients de Fourier $h_{mn}(t)$ tels que :

$$h_{mn}(t) = \frac{f_{mn}(t)}{2i\pi(m+\alpha n)} \quad \text{si} \quad (m,n) \neq (0,0)$$

$$h_{00}(t) = 0\ .$$

On a : $\qquad h(x,y,t) = \sum_{m,n} \frac{f_{mn}(t)}{2i\pi(m+\alpha n)}\, e^{2i\pi(mx+ny)}\ .$

Lemme VI-B-1a.- La fonction h est de classe C^∞.

Démonstration : On a formellement :

$$\frac{\partial^{k+p+q} h}{\partial t^k \, \partial x^p \, \partial y^p} = \sum_{m,n} \frac{m^p \, n^q}{2i\pi(m+\alpha n)} \frac{d^k f_{mn}(t)}{dt^k} e^{2i\pi(mx+ny)}$$ d'autre part on a :

$$f_{mn}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{T^2} f(x,y,t) \, e^{-2i\pi(mx+ny)} \, dx \, dy \, .$$

On pose :

$$u_{mn}(t) = \frac{m^p \, n^q}{2i\pi(m+\alpha n)} \frac{d^k f_{mn}(t)}{dt^k}$$

On a :

$$u_{mn}(t) = K \, . \, \frac{m^p \, n^q}{(m+\alpha n)} \int_{T^2} \frac{\partial^k f}{dt^k} \, e^{-2i\pi(mx+ny)} \, dx \, dy \, .$$

où K est une constante.

En intégrant p' fois par parties on obtient :

$$u_{mn}(t) = \tilde{K} \frac{m^p \, n^q}{(m+\alpha n) \, (mn)^{p'}} \, . \int_{T^2} \frac{\partial^{k+2p'} f}{\partial t^k \, \partial x^{p'} \, \partial y^{p'}} \, e^{-2i\pi(mx+ny)} \, dx \, dy$$

D'autre part on sait qu'il existe $s \geq 1$ et $A > 0$ tels que :

$$|m + \alpha n| > \frac{A}{(|m| + |n|)^s}$$

On aura finalement :

$$|u_{mn}(t)| \leq K' \frac{|m|^p \, |n|^q \, (|m| + |n|)^s}{|mn|^{p'}} \, . \int_{T^2} \left| \frac{\partial^{k+2p'} f}{\partial t^k \, \partial x^{p'} \, \partial y^{p'}} \right| dx \, dy \, .$$

La fonction $\int_{T^2} \left| \frac{\partial^{k+2p'} f}{\partial t^k \, \partial x^{p'} \, \partial y^{p'}} \right| dx \, dy$ est bornée .

On choisit p' suffisamment grand et on obtient :

La série $\sum_{m,n} u_{mn}(t)\, e^{2i\pi(mx+ny)}$ converge donc uniformément ce qui démontre le lemme.

Un calcul analogue à celui fait dans la partie IV-E-2 montre que h vérifie :

$$\lambda h(A(x,y),\ t+1) = h(x,y,t) \ .$$

On pose donc :

$$H(\omega) = h(x,y,t) \otimes \frac{\partial}{\partial\theta} \ .$$

De la même façon on pose :

$$K(\gamma) = g(x,y,t)\ dt \otimes \frac{\partial}{\partial\theta}$$

où g est définie par ses coefficients de Fourier :

$$g_{mn}(t) = \frac{h_{mn}(t)}{2i\pi(m+\alpha n)} \quad \text{si} \quad (m,n) \neq (0,0)$$

$$g_{00} = 0$$

avec $$\gamma = \ell(x,y,t)\ dz \wedge dt \otimes \frac{\partial}{\partial\theta} \ .$$

Lemme VI-B-1b.- Les opérateurs H et K vérifient :

$$d_F\, H + K\, d_F = id \ .$$

Démonstration : Soit $\omega = f(x,y,t)\ dz \otimes \frac{\partial}{\partial\theta} + g(x,y,t)\ dt \otimes \frac{\partial}{\partial\theta}$.

On a :

$$d_F\, H(\omega) = \sum_{m,n} f_{mn}(t)\, e^{2i\pi(mx+ny)}\, dz \otimes \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{m,n} \frac{f_{mn}(t)\, e^{2i\pi(mx+ny)}}{2i\pi(m+\alpha n)}\, dt \otimes \frac{\partial}{\partial\theta}$$

et :

$$K\, d_F(\omega) = \sum_{m,n} g_{mn}(t)\, e^{2i\pi(mx+ny)}\, dt \otimes \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m,n} \frac{f_{mn}(t)\, e^{2i\pi(mx+ny)}}{2i\pi(m+\alpha n)}\, dt \otimes \frac{\partial}{\partial\theta} .$$

On obtient la relation cherchée.

De la proposition VI-B-1 on déduit :

$$H^1(T^3_A, \Lambda) = 0 .$$

Ce qui montre que le feuilletage F sur T^3_A n'a pas de déformation infinitésimale.

BUS LILLE

CHAPITRE VII

COHOMOLOGIE DES COURANTS DE TYPE (p,q) SUR UNE VARIETE FEUILLETEE.

On considère le tore T^2 muni du feuilletage en droites de pente $\alpha \notin \mathbb{Q}$. On a vu (cf. IV-C-2) que si :

i) α est un nombre de Liouville on a $H^1(T^2,\Phi_\alpha)$ est un espace de dimension infinie.

ii) α vérifie une condition diophantienne on a :

$$H^1(T^2,\Phi_\alpha) = \mathbb{R} .$$

Les propriétés arithmétiques de α déterminent l'ordre de différentiabilité de la solution h de l'équation :

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \alpha \frac{\partial h}{\partial y} = f .$$

Si on ne s'intéresse qu'aux formes mesurables on aura beaucoup plus de formes d_F-exactes pour α irrationnel.

Ceci motive l'introduction d'une cohomologie des courants analogue à celle des formes C^∞ de type (p,q) introduite au chapitre II. ■

Dans la suite V désignera une variété riemannienne de dimension $n + m$ munie d'un feuilletage F de codimension n et de classe C^∞.

A - *COURANTS DE TYPE* (p,q).

On note A_C^{pq} l'espace des formes différentielles de type (p,q) de classe C^∞ et à support compact dans V.

On munit l'espace A_C^{pq} de la pseudo-topologie suivante :

si $\beta \in A_C^{pq}$ on notera β^i ses coefficients et on dira que la suite $(\beta_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 si :

i) $\operatorname{supp} \beta_n^i \subset K$ où K est un compact fixe indépendant de i et de n.

ii) $(\beta_n^i)_{n\geq 0}$ tend vers 0 pour tout i uniformément sur K ainsi que toutes ses dérivées.

Soit α une forme différentielle de type (p,q) localement intégrable sur V. L'application :

$$\beta \in A_C^{n-p,m-q} \longrightarrow \int_V \alpha \wedge \beta \in \mathbb{R}$$

est linéaire continue.

Ceci motive la définition suivante :

Définition VII-A-1.- On appelle courant de type (p,q) sur V toute forme linéaire continue sur l'espace $A_C^{n-p,m-q}$.

On peut évidemment définir un tel courant comme étant une forme sur $\oplus A_C^{k,\ell}$ en supposant qu'il est nul sur les formes de type $(k,\ell) \neq (n-p, m-q)$.

On notera T^{pq} l'espace des courants de type (p,q) sur V.

Si $t \in T^{pq}$ et $\psi \in A_C^{n-p,m-q}$ alors $\langle t,\psi\rangle$ désignera l'évaluation de t en ψ.

Exemples VII-A-2.-

a) Toute forme différentielle α de type (p,q) localement intégrable définit un courant de type (p,q) sur V.

b) Si Γ est une chaîne singulière cubique de type (p,q) [12], on pose :

$$<\tilde{\Gamma}\ ,\ \beta> = \int_{\Gamma} \beta\ .$$

$\tilde{\Gamma}$ est un courant appelé le courant d'intégration sur Γ. Il est de type $(n-p,\ m-q)$.

c) Courant de Dirac de type (p,q) .

Soit $a \in V$. Soit $(X_1,\ldots,X_p,X_{p+1},\ldots,X_{p+q}) = \sum$ un système de $p+q$-vecteurs où X_i est normal à F pour $i = 1,\ldots,p$ et X_i tangent à F pour $i = p+1\ ,\ldots,\ p+q$.

Pourtout $\beta \in A_C^{pq}(V)$ on pose :

$$<\sum,\beta> = \beta_a(X_1,\ldots,X_p,X_{p+1},\ldots,X_{p+q})\ .$$

$\sum$ définit un courant de type $(n-p,\ m-q)$ de support le point a. ■

On peut définir le produit extérieur d'un courant t par une forme C^∞, α en posant :

$$<t \wedge \alpha\ ,\ \psi> = <t,\ \alpha \wedge \psi>\ .$$

Si t est de type (p,q) et α de type (p',q') alors $t \wedge \alpha$ est de type $(p+p',\ q+q')$.

B - ECRITURE LOCALE.

Soit $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ un système de coordonnées locales définissant la variété feuilletée (V,F) au voisinage d'un certain point.

Si $t^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}(i_1 < \dots < i_p$ et $j_1 < \dots < j_q)$ sont N courants où $N = C^p_n \cdot C^q_m$ de type $(0,0)$ alors :

$$t = \sum t^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q}$$

est un courant de type (p,q).

Inversement tout courant de type (p,q) peut être représenté localement par une telle expression.

En effet si t est un courant de type (p,q) on pose :

$$\langle t^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}, \varphi\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q}\rangle =$$

$$\varepsilon\langle t, \varphi\, dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_{n-p}} \wedge dy^{j'_1} \wedge \dots \wedge dy^{j'_{m-q}}\rangle$$

avec :

φ une fonction C^∞ à support compact .

$$\varepsilon = \delta^{1,\dots,n+m}_{i_1\dots i_p i'_1\dots i'_{n-p} j_1\dots j_q j'_1\dots j'_{m-q}}$$

et $(i_1,\dots,i_p,i'_1,\dots,i'_{n-p},j_1,\dots,j_q,j'_1,\dots,j'_{m-q})$

est une permutation de $(1,\dots,n+m)$.

On a donc :

$$t^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \quad \text{est un courant de type} \quad (0,0) \ .$$

On voit donc que localement tout courant de type (p,q) est une forme différentielle de type (p,q) à coefficients distributions.

C - *DIFFERENTIELLE FEUILLETEE D'UN COURANT DE TYPE* (p,q).

Soit α une forme différentielle de type (p,q) et de classe C^1. Soit $\beta \in A^{n-p,m-q-1}$.

La forme $\alpha \wedge \beta$ est donc de type $(n, m-1)$. Calculons sa différentielle extérieure :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d_F(\alpha \wedge \beta) + d_{10}(\alpha \wedge \beta) + d_{2,-1}(\alpha \wedge \beta) \ .$$

Or
$$d_{10}(\alpha \wedge \beta) = d_{2,-1}(\alpha \wedge \beta) = 0$$

car la forme $\alpha \wedge \beta$ est de degré maximum dans la direction normale au feuilletage.

Il reste finalement :

$$\begin{aligned} d_F(\alpha \wedge \beta) &= d(\alpha \wedge \beta) \\ &= d_F\, \alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q}\, \alpha \wedge d_F\, \beta \ . \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$d_F\, \alpha \wedge \beta = (-1)^{p+q+1}\, \alpha \wedge d_F\, \beta + d_F(\alpha \wedge \beta) \quad \text{qui donne :}$$

$$\int_V d_F\, \alpha \wedge \beta = (-1)^{p+q+1} \int_V \alpha \wedge d_F\, \beta + \int_V d_F\, (\alpha \wedge \beta) \ .$$

Or $\int_V d_F(\alpha \wedge \beta) = \int_V d(\alpha \wedge \beta) = 0$ car $\alpha \wedge \beta$ est de classe C^1

et de degré total $(n+m-1)$ et à support compact (cf. [10]).

Finalement :

$$\int_V d_F\, \alpha \wedge \beta = (-1)^{p+q+1} \int_V \alpha \wedge d_F\, \beta$$

Définition VII-C-1.- Soit t un courant de type (p,q). La différentielle feuilletée de t est un courant $\delta_F\, t$ de type $(p,q+1)$ défini par :

$$\langle \delta_F\, t, \beta \rangle = (-1)^{p+q+1} \langle t, d_F\, \beta \rangle$$

où β est un élément de $A_C^{n-p,m-q-1}$.

Il est clair qu'on a :

$\delta_F^2 = 0$. Ceci découle de $d_F^2 = 0$.

Un courant t de type (p,q) est δ_F-fermé si $\delta_F\, t = 0$ c'est-à-dire :

$\langle \delta_F\, t, \beta \rangle = 0$ pour tout élément β de $A_C^{n-p,m-q-1}$.

On dira que t est nul sur l'ouvert U si :

$\langle t, \beta \rangle = 0$ pour toute forme β de type $(n-p, m-q)$ à support compact inclus dans U.

Les courants t_1 et t_2 sont égaux sur U s'ils sont du même type et si $t_1 - t_2 = 0$ sur U.

Un courant t de type (p,q) est δ_F-exact s'il existe un courant s de type $(p,q-1)$ tel que :

$$\delta_F\, s = t .$$

Un courant δ_F-exact est évidemment δ_F-fermé.

Lemme VII-C-2.- Un courant t de type (p,q) δ_F-fermé est localement δ_F-exact.

Démonstration : Soient x un point de V et β un élément de $A_C^{n-p,m-q+1}$ et d_F-fermé .

Il existe un élément ω de $A^{n-p,m-q}$ défini sur un voisinage U de x et vérifiant :

$$d_F\,\omega = \beta\ .$$

Si ω n'est pas à support compact, soit U' un ouvert de U tel que $\bar{U}' \subset U$ et $x \in U'$.

On multiplie ω par une fonction ψ de classe C^∞ valant 1 sur $\bar{U}'$ et nulle hors de $\bar{W}$ où W est un ouvert vérifiant $\bar{U}' \subset W \subset U$.

On peut donc supposer ω à support compact.

Soit alors s le courant de type $(p,q-1)$ défini sur U' par :

$$\langle s,\beta\rangle = (-1)^{p+q}\ \langle t,\omega\rangle$$

Le courant s est défini sur les formes d_F-fermées de type $(n-p,\ m-q+1)$ à support compact qui forment un sous-espace de $A_C^{n-p,m-q+1}$. D'après le théorème de Hann-Banach s se prolonge continûment à $A_C^{n-p,m-q+1}$.

On vérifie que si $\beta \in A_C^{n-p,m-q}$ on a :

$$\begin{aligned} \langle \delta_F s, \beta \rangle &= (-1)^{p+q} \langle s, d_F \beta \rangle \\ &= (-1)^{2p+2q} \langle t, \beta \rangle \\ &= \langle t, \beta \rangle \quad . \end{aligned}$$

D - COHOMOLOGIE DES COURANTS DE TYPE (p,q).

Un courant t sur V est dit feuilleté s'il est de type $(p,0)$ et s'il vérifie $\delta_F t = 0$.

On désigne par :

i) C^p le faisceau des germes des courants de type $(p,0)$ feuilletés.

ii) T^{pq} le faisceau des germes des courants de type (p,q) sur V.

On a une résolution fine du faisceau C^p :

$$0 \longrightarrow C^p \longrightarrow T^{pq} \xrightarrow{\delta_F} T^{p,q+1} \xrightarrow{\delta_F} \dots$$ de sorte qu'on a :

$$H^q(V,C^p) = \frac{\ker(T^{pq} \xrightarrow{\delta_F} T^{p,q+1})}{\mathrm{Im}(T^{p,q-1} \xrightarrow{\delta_F} T^{p,q})} \quad .$$

$H^q(V,C^p)$ est le groupe de cohomologie des courants de type (p,q) de la variété feuilletée V.

CONCLUSION.

On peut se poser évidemment les questions suivantes :

i) Les variétés $D^2 \times \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^3$ étant munies du feuilletage de Reeb, on a vu que $H^1(D^2 \times \mathbb{S}^1, \phi) = \mathbb{R}$. Peut-on en déduire un calcul de $H^1(\mathbb{S}^3, \phi)$?

ii) On a vu que pour une suspension d'un difféomorphisme de $[0, +\infty[$ ayant 0 comme point fixe, le H^1 est de dimension un. L'holonomie linéaire implique-t-elle que le H^1 est de dimension finie non nulle dans le cas d'un feuilletage de codimension un transversalement orientable ?

iii) Quel type d'interprétation géométrique peut-on attribuer à la cohomologie feuilletée.

Nous espérons répondre à toutes ces questions dans un proche avenir.

BIBLIOGRAPHIE

---

[1] CARTAN H., EILENBERG S. - Homological algebra, Princeton University Press (1956).

[2] GHYS E. et V. SERGIESCU - Stabilité et Conjugaison différentiable pour certains feuilletages, Topology 19 (1980).

[3] GODEMENT R. - Topologie algebrique et theorie des faisceaux, Hermann, Paris (1958).

[4] HAMILTON S.R. - Deformation theory of foliations, Preprint cornell University.

[5] HEITSCH J.L. - A cohomology of foliated manifolds, Comment. Math. Helviti, 50 (1975), 197-218.

[6] KODAIRA K., SPENCER D.C. - Multifoliate structures, Ann. of Math. 74 (1961), 52-100.

[7] LANG S. - Introduction to diophantine approximation;

[8] LANGEVIN R., ROSENBERG - On stability of compact leaves and fibrations, Topology, 16 (1977), 107-111.

[9] REEB G. - Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Act. Sci. et Ind., Hermann Paris (1952).

[10] DE RHAM G. - Variétés différentiables, Act. Sci. et Ind. Hermann, Paris.

[11] ROGER C. - Methodes homotopiques et cohomologiques en théorie des feuilletages, Thèse, Orsay (1976).

[12] SHIKATA Y. - On a homology theory associated to foliations, Nagoya Math. J. 38 (1970), 53-61.

[13] STERNBERG S. - Local C^n transformations of the real line, Duke. Math. J., 24 (1957), 97-102.

[14] VAISMAN I. - Cohomology and differential forms, Dekker (1973).

[15] VAISMAN I. - Variétés riemaniennes feuilletées, Czechosl. Math. J. 21 (1971), 46-75.

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE