

50376  
1980  
96

N° d'ordre : 802

50376  
1980  
96

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

FRANCIS BUIRE

FORMES FERMÉES AVEC SINGULARITÉS DE MORSE



MEMBRES DU JURY : J. LEHMANN, PRÉSIDENTE

G. HECTOR, RAPPORTEUR

{ R. BARRE  
EXAMINATEURS  
B. CALLENAERE

Soutenue le 26 JUIN 1980

Je voudrais exprimer ici ma gratitude envers tous ceux qui m'ont aidé dans la préparation de ce travail.

Monsieur Gilbert Hector m'a fait découvrir la théorie des feuilletages et m'a suggéré le sujet de cette thèse. Je lui suis reconnaissant pour les nombreux conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de cette étude. La forme définitive prise par ce travail lui doit beaucoup.

C'est, pour moi, un grand plaisir d'évoquer ici le séjour à Lille de Monsieur Alberto Verjovsky. L'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail, les nombreuses et fructueuses conversations que nous avons eu ensemble m'ont été des plus précieux.

Madame Lehmann m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Qu'elle en soit ici très vivement remerciée ainsi que Messieurs R. Barre et B. Callenaere qui ont accepté de participer à ce jury.

Que Madame Bérat et Madame Lengaigne qui ont dactylographié avec compétence et rapidité le manuscrit, ainsi que les services de l'imprimerie de l'U.E.R. de Mathématiques trouvent ici mes sincères remerciements.

TABLE DES MATIERES

---

INTRODUCTION.

CHAPITRE I - DEFINITIONS ET PRELIMINAIRES.	1
CHAPITRE II - PROPRIETES GLOBALES DU FEUILLETAGE ASSOCIE A UNE FORME DE MORSE.	14
CHAPITRE III - UN CRITERE DE MINIMALITE DU FEUILLETAGE $\hat{F}$ .	25
CHAPITRE IV - GRAPHE ASSOCIE A UNE FORME DE MORSE.	35
BIBLIOGRAPHIE.	47

## I N T R O D U C T I O N .

Les formes fermées sans singularités fournissent des exemples de feuilletages dont les propriétés sont bien connues. L'objet de ce travail est de regarder comment celles-ci s'étendent à des feuilletages avec singularités définis par des formes fermées qui sont localement des différentielles de fonctions de Morse.

I. Kupka (cf. [Ku]) a montré que, sur une surface, les feuilles du feuilletage défini par une telle forme étaient toutes denses lorsque

- i) les singularités sont des points selles,
- ii) il n'existe pas de connexions de selles.

L'un de nos résultats sera la généralisation de cette propriété aux variétés de dimension plus grande.

Dans un article récent, Imanishi (cf. [Im]) a montré que les feuilles d'un feuilletage défini par une forme fermée dont les singularités sont isolées sont soit fermées soit localement denses. Nous obtenons, de façon indépendante, un résultat analogue, mais les hypothèses plus restrictives dans lesquelles nous nous plaçons permettent de caractériser les trois situations suivantes : (cf. chapitre 3).

- i) toutes les feuilles sont fermées,
- ii) toutes les feuilles sont denses,
- iii) il existe à la fois des feuilles fermées et des feuilles localement denses.

## II

Enfin une étude de l'espace des feuilles lorsque toutes les feuilles sont fermées permet d'établir l'analogie pour les formes de Morse du résultat selon lequel un feuilletage défini par une forme fermée sans singularité dont toutes les feuilles sont compactes est définie par une fibration sur  $S^1$  (cf. chapitre IV).

Le premier chapitre rappelle les éléments de théorie de Morse nécessaires à l'étude locale, au voisinage d'une singularité des feuilletages qui nous intéressent ici et donne des exemples de tels feuilletages.

Au deuxième chapitre on généralise les résultats sur les formes fermées sans singularités qui concernent les ensembles minimaux et l'holonomie.

## CHAPITRE I

### DEFINITIONS ET PRELIMINAIRES.

-----

On se propose d'introduire les formes différentielles fermées dites de Morse ; ces formes sont localement des différentielles de fonctions de Morse. Dans ce chapitre nous ferons quelques rappels sur les fonctions de Morse de manière à décrire les propriétés locales des formes de Morse, (1,1) (1,2) et (1,3). Aux paragraphes (1,4) et (1,5) on décrira des familles d'exemples.

#### (1,1) - RAPPELS SUR LES FONCTIONS DE MORSE.

Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^2$  d'une variété  $M$  de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}$ . Le point  $s \in M$  est un point critique si  $df(s) = 0$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  un système de coordonnées locales défini dans un voisinage  $V$  de  $s$ .

Le rang de la matrice  $H(f) = \left( \frac{\partial^2 f(s)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$  est indépendant

du système de coordonnées. On dit que  $s$  est un point critique non dégénéré si le rang de  $H(f)$  est maximum.

On rappelle que l'indice d'une forme quadratique est la dimension d'un sous-espace vectoriel maximal sur lequel la forme quadratique est définie négative. L'indice de la forme quadratique définie par la matrice  $H(f)$  est indépendant du système de coordonnées. C'est l'indice de  $f$  en  $s$ .

(1,1,1) Définition.- Une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  est dite de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés.

Le lemme suivant est bien connu (cf. [M]).

(1,1,2) Lemme de Morse.- Soit  $s$  un point critique non dégénéré d'indice  $\lambda$  d'une fonction  $f$  de classe  $C^2$ . Il existe un voisinage  $V$  de  $s$  et un système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $V$  tels que

- i)  $x_i(s) = 0$ , pour tout  $i$ .
- ii)  $f = f(s) - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$  dans  $V$ .

(1,1,3) Corollaire.- Les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés.

## (1,2) - DESCRIPTION LOCALE DES VARIÉTÉS DE NIVEAUX D'UNE FONCTION DE MORSE.

Soit  $s$  un point critique d'une fonction de Morse  $f$ . Pour simplifier les notations on supposera  $f(s) = 0$ .

(1,2,1) Définition.- On appelle voisinage adapté du point critique  $s$  un voisinage  $V_s$  de  $s$ , difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , muni d'un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  tel que :

- i)  $x_i(s) = 0$ , pour tout  $i$ .
- ii)  $f|_{V_s} = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$ .

On se propose dans ce paragraphe de décrire quelques propriétés élémentaires du feuilletage défini dans  $V_s - \{s\}$  par les variétés de niveaux de  $f$ .

En fonction de l'indice  $\lambda$  on distinguera trois catégories de points critiques ; le point  $s$  sera :

- a) un centre : si  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = n$
- b) un point selle de type I : si  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = n-1$
- c) un point selle de type II : si  $2 \leq \lambda \leq n-2$  (Il n'en existe que si  $n \geq 4$ ).

Cette classification résulte du fait que les variétés invariantes du champ :  $X : (x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow (-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$  sont les sous-espaces  $W^s = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = x_2 = \dots = x_\lambda = 0\}$  et  $W^u = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_{\lambda+1}, \dots, x_n = 0\}$

qui selon que  $\lambda$  est ou non égal à 1 ou  $n-1$  séparent ou non les variétés de niveaux de  $f$  en deux composantes connexes.

On peut remarquer également que si  $S(\mu)$  est la sphère de rayon  $\mu$ , l'intersection de  $S(\mu)$  avec les variétés de niveau de  $f$  est homéomorphe à  $S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$  et est connexe pour les singularités de type II et non connexe pour les singularités de type I.

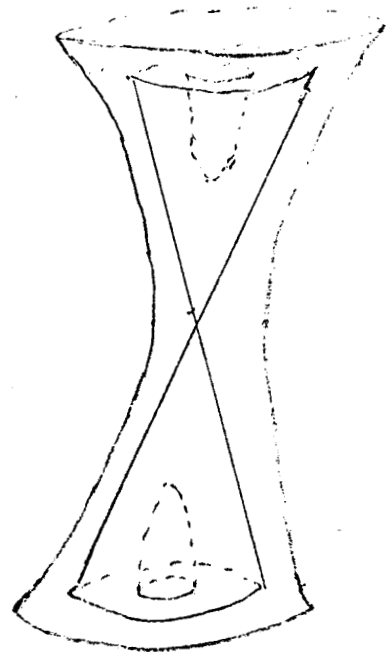
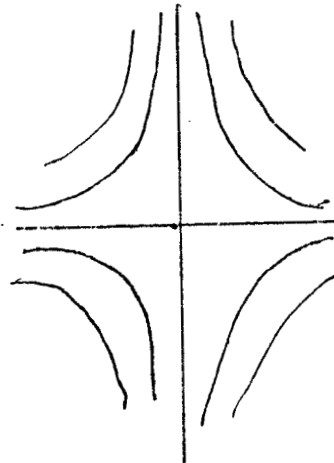
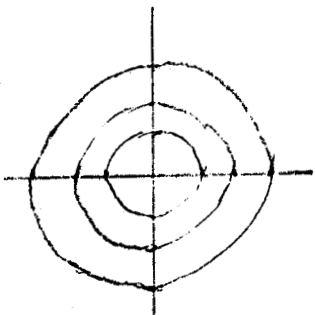
De plus en faisant tendre  $\mu$  vers 0 on peut voir que lorsque  $s$  est une selle les composantes connexes de la variété des niveaux  $f = 0$  sont des cônes. On les appellera cônes singuliers de  $s$ .

Ces cônes sont au nombre de un si  $s$  est une selle de type II, de deux si  $s$  est une selle de type I et  $n \geq 3$ , de quatre si  $s$  est une selle de type I et  $n = 2$ .



Lorsque  $s$  est un centre les variétés de niveaux de  $f$  sont des sphères.

Terminons par quelques cas de figures typiques.



(1,3) - ESPACE DES FEUILLES DES VARIETES DE NIVEAUX DANS UN VOISINAGE ADAPTE.

Au voisinage d'un point régulier d'un feuilletage on peut toujours définir un ouvert distingué tel que l'espace des plaques sont homéomorphe à  $\mathbb{R}$ . Ce n'est plus le cas pour un voisinage adapté d'une singularité. L'espace des feuilles sera en général une variété non séparée de dimension 1 à nombre fini de points de branchement.

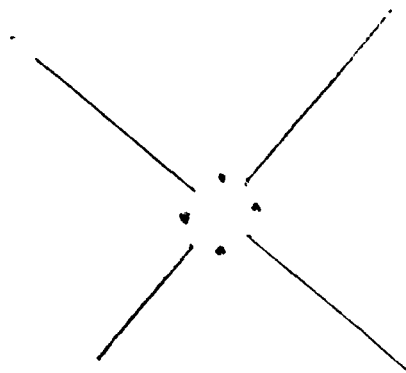
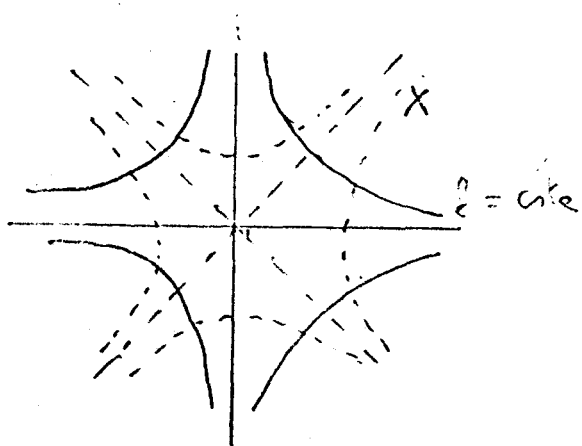
Pour le voir considérons le champ linéaire

$$X : (x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow (-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$$

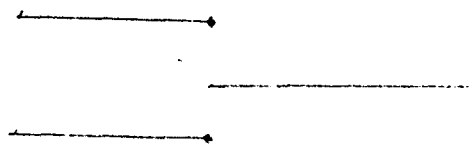
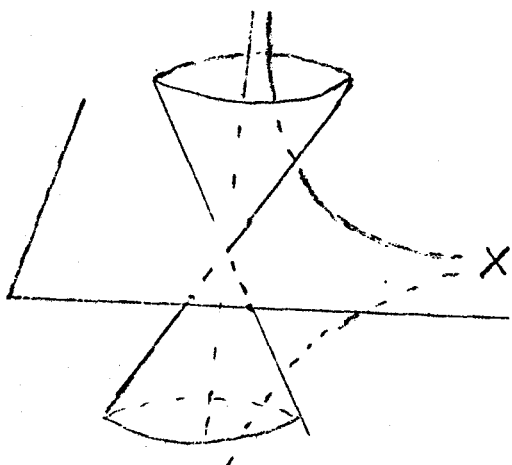
transverse au feuilletage défini par les variétés de niveaux connexes de  $f$ . Une courbe intégrale de  $X$  coupe toutes les feuilles qui intersectent une composante connexe du complémentaire des variétés invariantes de  $X$ . On obtient donc l'espace des feuilles à partir d'un ensemble fini de trajectoires en identifiant les points de deux trajectoires qui sont sur une même feuille.

On a donc les espaces des feuilles suivant :

- i)  $s$  est un centre : l'espace des feuilles est  $\mathbb{R}$ ,
- ii)  $s$  est une selle de type II : l'espace des feuilles est  $\mathbb{R}$ ,
- iii)  $s$  est une selle de type I et  $n = 2$  : l'espace des feuilles est une variété non séparée possédant quatre branchements simples.



- iv)  $s$  est une selle de type I et  $n \geq 3$  : l'espace des feuilles est un branchement simple.



(1,4) - FORMES FERMEES DE MORSE.

Nous pouvons maintenant globaliser les données précédentes.

Soit  $\omega$  une forme fermée sur une variété  $M$ .

Le lemme suivant est classique.

(1,4,1) Lemme de Poincaré.- Toute forme fermée est localement exacte.

En particulier toute 1-forme fermée est localement la différentielle d'une fonction et on s'intéresse au cas où ces fonctions sont des fonctions de Morse :

(1,4,2) Définition.- On dira qu'une 1-forme fermée  $\omega$  est de Morse si pour toute singularité  $s$  de  $\omega$  il existe un voisinage  $V$  de  $s$  et une fonction de Morse  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $\omega|_V = df$ .

On a le résultat évident suivant :

(1,4,3) Proposition.- Si  $\omega$  est une 1-forme fermée de Morse sur une variété compacte  $M$  le nombre de singularités de  $\omega$  est fini.

En effet les singularités de  $\omega$  sont isolées. Puisque  $M$  est compacte il y en a un nombre fini.  $\square$

Les singularités de  $\omega$  seront appelées centres, selles de type I, selles de type II, selon qu'elles sont des centres ou des selles de type I ou II et une fonction de Morse  $f$  telle que  $\omega|_V = df$ .

On notera  $\Sigma$  l'ensemble des singularités de  $\omega$  et respectivement  $\Sigma_C$ ,  $\Sigma_I$ ,  $\Sigma_{II}$  l'ensemble des centres, des selles de type I, des selles de type de II de la forme  $\omega$ .

On a donc  $\Sigma = \Sigma_C \cup \Sigma_I \cup \Sigma_{II}$  .

Rappelons le résultat bien connu suivant :

(1,4,4) Lemme.- Soit  $\alpha$  une 1-forme fermée sur une variété  $M$  et  $C$  et  $C'$  deux lacets différentiables dans  $M$ .

Si  $C$  et  $C'$  sont homotopes alors  $\int_{S^1} C^* \alpha = \int_{S^1} C'^* \alpha$  .

En effet les formes  $C^* \alpha$  et  $C'^* \alpha$  sont alors cohomologues et il existe une fonction  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $C^* \alpha - C'^* \alpha = df$  .

Et le théorème de Stokes montre que :

$$\int_{S^1} (C^* \alpha - C'^* \alpha) - \int_{S^1} df = 0 \quad \square$$

On peut donc définir une application  $I_\alpha$  de  $\pi_1(\mu)$  dans  $\mathbb{R}$  par  $I_\alpha : \pi_1(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$[C] \rightsquigarrow \int_C \alpha$$

Cette application est clairement un homomorphisme de groupe. Son image est le groupe des périodes  $P_\alpha$  de la forme  $\alpha$ .

- On démontre facilement le résultat ci-dessous :

(1,4,5) Lemme.- Le groupe des périodes d'une 1-forme fermée  $\alpha$  est nul si et seulement si la forme est exacte.

Une forme de Morse sur une variété compacte  $M$  est sans singularité en restriction à  $M - \Sigma$  et définit sur cet ouvert un feuilletage, qu'on appellera le feuilletage associé à la forme de Morse  $\omega$ . L'étude de ce feuilletage est le but principal de notre travail.

Le cas le plus simple de tels feuilletages est évidemment celui où  $\int = \emptyset$ . Rappelons les résultats bien connus sur ces feuilletages définis par une forme fermée  $\omega$  sans singularité :

a) Il existe une métrique  $g$  et un champ  $X$  dual de la forme  $\omega$  pour cette métrique, tel que le feuilletage défini par  $\omega$  soit invariant par le flot  $\psi_t$  associé à  $X$ .

b) Toutes les feuilles sont difféomorphes.

c) Le feuilletage est sans holonomie.

d) En fonction du groupe de périodes  $P\omega$ , trois situations sont possibles :

i)  $P\omega = (0)$ . Alors toutes les feuilles sont compactes et le feuilletage est une fibration sur  $[0,1]$ .

ii)  $P\omega$  est cyclique non nul. Alors toutes les feuilles sont compactes et le feuilletage est une fibration sur  $S^1$ .

iii)  $P\omega$  est non cyclique. Alors toutes les feuilles sont denses.

Nous allons maintenant examiner les phénomènes nouveaux qui peuvent se produire lorsqu'on introduit des singularités :

#### (1,5) - EXEMPLES DE FORMES FERMEES DE MORSES.

A - Feuilletage défini par une fonction de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Le théorème ci-dessous est bien connu (cf.  $[M]$ ).

(1,5,1) Théorème.- Sur toute variété  $M$  il existe des fonctions de Morse.

La forme de Morse  $\omega$  est alors globalement la différentielle de la fonction de Morse  $f$ .

Les remarques suivantes sont alors évidentes :

i) Si  $M$  est compacte,  $\omega$  possède au moins un centre qui est un maximum et au moins un centre qui est un minimum.

ii)  $P\omega = 0$  car  $\omega$  est exacte.

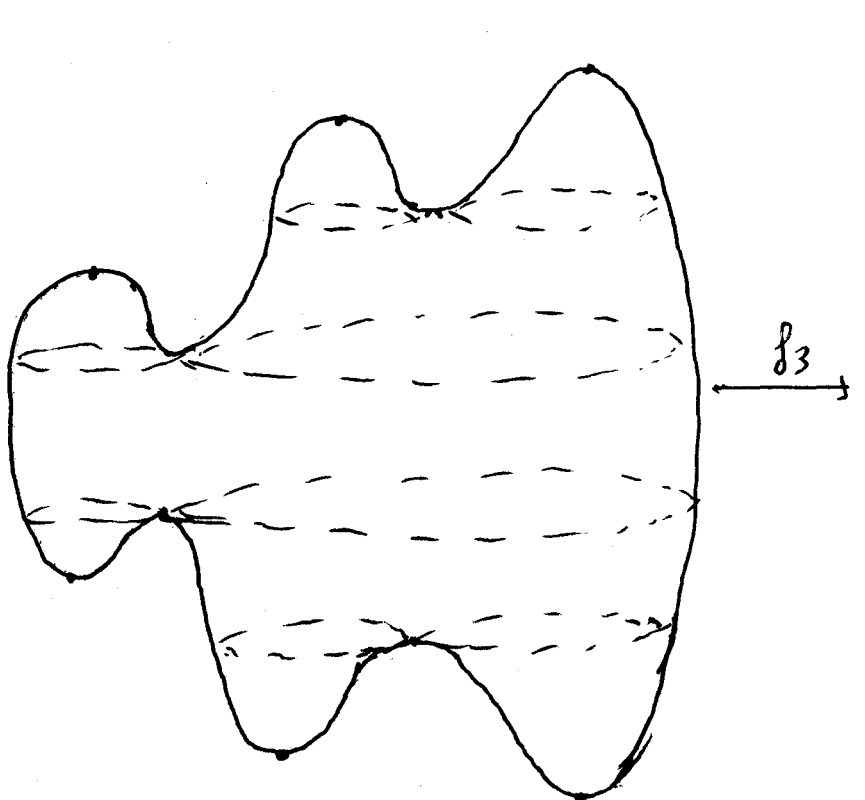
iii) Toutes les feuilles sont fermées : ce sont les composantes connexes des variétés de niveaux de  $f$ .

iv) Les feuilles ne sont pas toutes homéomorphes.

Pour illustrer ce dernier point on considérera la famille  $(f_n)$  suivantes de fonctions de Morse sur  $S^2$  qui a les propriétés suivantes :

a)  $f_n$  possède  $n$  maxima et  $n$  minima ,

b)  $f_n$  possède  $2n-2$  points selles qui correspondent à des valeurs critiques distinctes :



Les feuilles du feuilletage défini par  $f_n$  sont alors des cercles sauf  $2(2n-2)$  qui sont des droites. Elles sont donc toutes fermées dans  $M - \Sigma$  mais pas toutes compactes.

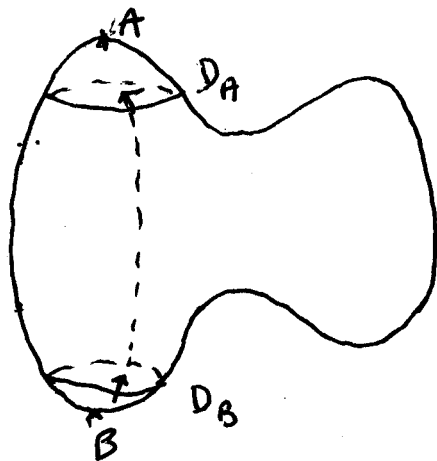
Nous allons maintenant décrire des procédés de construction pour obtenir d'autres formes de Morse à partir des fonctions de Morse, en nous intéressant plus particulièrement au cas des surfaces orientables.

### B - Formes de Morse sur les surfaces orientables.

#### a) Construction par "addition d'anses".

Soit  $S_g$  la surface orientable de genre  $g$  et  $\omega$  une forme de Morse sur  $S_g$  qui possède un maximum  $A$  et un minimum  $B$ . Le champ  $X$  dual de la forme  $\omega$  par rapport à une métrique quelconque sur  $S_g$  va d'un minimum vers un maximum.

Découpons deux disques  $D_A$  et  $D_B$  autour de  $A$  et  $B$



dont les bords sont des feuilles et identifions ces bords à l'aide d'un difféomorphisme  $\varphi : \partial D_A \rightarrow \partial D_B$  qui préserve les orientations définies sur  $\partial D_A$  et  $\partial D_B$  à l'aide du champ transverse  $X$ . On obtient ainsi une nouvelle variété orientable  $S_{g+1}$ ,

un feuilletage  $F$  et un champ  $X'$  transverse à  $F$ . La forme duale  $\omega'$  du champ  $X'$  est fermée. Ses singularités sont localement des différentielles de fonction de Morse. Mais  $\omega'$  a un minimum et un maximum de moins que  $\omega$ .

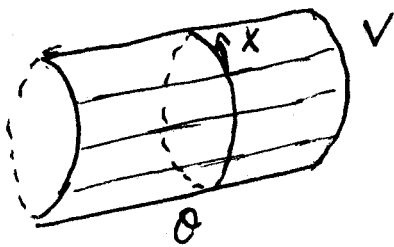
En particulier en partant des fonctions de Morse  $f_g$  sur  $S^2$  et en itérant  $g$  fois cette construction on obtient sur  $S_g$  une forme de Morse  $\omega$  dont les singularités sont  $2g-2$  points selles. Cette forme ne peut être définie globalement par une fonction de Morse car une telle fonction n'aurait pas d'extréma.

Les feuilles du feuilletage ainsi obtenu restent fermées.

Le groupe des périodes  $P_\omega \subset \mathbb{R}$  est engendré par l'intégrale de  $df_g$  sur les arcs de trajectoires du champ dual  $X$  allant d'un bord d'un disque au bord du disque auquel on recolle le premier. Par conséquent, en choisissant convenablement les disques que l'on ôte, le groupe des périodes du feuilletage défini sur  $S_g$  peut avoir un rang compris entre 1 et  $g$ .

b) Construction par "twist".

Soient  $S_g$  une surface orientable,  $\omega$  une forme de Morse sur  $S_g$  et  $\theta$  une transversale fermée au feuilletage. Soit  $V$  un voisinage tubulaire de  $\theta$ . En prenant une métrique convenable, on peut supposer que  $\theta$  est orthogonale aux feuilles : coupons la



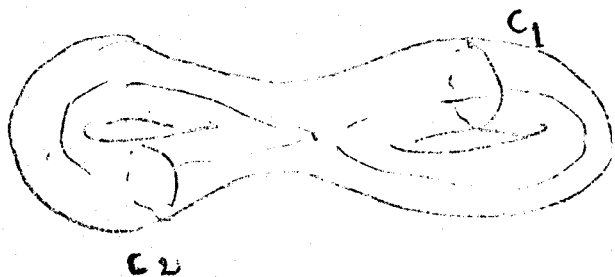
variété le long de  $\theta$  et recollons les deux bords à l'aide d'une rotation d'angle  $\alpha$ .

La variété  $M'$  obtenue est encore  $S_g$ .

Le champ dual  $X$  de  $\omega$  sur  $S_g$ , qui a  $\theta$  comme trajectoire, définit au nouveau champ  $X'$  sur  $M'$  et la forme  $\omega'$ , duale de  $X'$ , est une forme fermée qui a les mêmes singularités que  $\omega$ .



Par exemple soit  $S_2$  la surface de genre 2 et soit  $\omega$  la forme sans centre défini en a).



Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux cercles transverses.

En coupant le long de  $C_1$  et en recollant à l'aide d'une rotation irrationnelle on supprime deux connexions de selles.

On verra en (3,3,4) que le feuilletage ainsi obtenu possède des feuilles compactes et des feuilles localement denses.

En procédant de même avec  $C_2$  et en prenant une rotation indépendante de celle effectuée sur  $C_1$  on obtient un feuilletage sans connexion de selles. On verra que dans ce cas toutes les feuilles sont partout denses (cf. 3,3,3).

Chaque rotation introduit un générateur de plus dans le groupe des périodes : précisément l'angle de la rotation effectuée.

### c) Exemples en dimension supérieure.

a) feuilletage produit : si  $\omega$  et  $\omega'$  sont de formes de Morse sur  $M$  et  $M'$ , alors  $p^*\omega + p'^*\omega'$  est une forme de Morse sur  $M \times M'$  où  $p$  et  $p'$  sont les projections  $M \times M' \rightarrow M$  et  $M \times M' \rightarrow M'$  les singularités de  $\omega$  sont les points  $(s, s')$  où  $s$  et  $s'$  sont des singularités de  $\omega$  et  $\omega'$  respectivement. L'indice de  $(s, s')$  est la somme des indices de  $s$  et de  $s'$ .

En particulier on peut prendre  $M' = S^1$  et  $\omega' = \sin \theta d\theta$  qui a 0 comme singularité d'indice 0 et  $\pi$  comme singularité d'indice 1. Alors si  $M = S_2$  et si  $\omega$  est la forme construite en  $(B,b)$  on voit qu'il existe sur  $S_2 \times T^n$  un feuilletage à feuilles denses dont les indices des singularités prennent toutes valeurs entre 1 et  $n+1$ .

b) feuilletage induit : tout feuilletage avec singularité sur  $M$  peut être considéré comme obtenu à partir d'un feuilletage sans singularité sur  $M \times S^1$  défini par  $\Omega = p^* \omega + p'^* d\theta$ .

Réciproquement, soit  $\omega$  est une forme sans singularité sur une variété  $N$  qui définit un feuilletage  $F$ . Si  $M$  est une sous-variété de  $N$ , en mettant  $M$  en position générale par rapport au feuilletage  $F$  on obtient sur  $M$  un feuilletage défini par une forme fermée de Morse.

Les sous-variétés en position générale formant un ouvert dense dans l'espace des plongements on voit que tout feuilletage avec singularité sur une variété  $M$  défini par une forme fermée peut être approchée par un feuilletage défini par une forme de Morse.

## CHAPITRE II

### PROPRIETES GLOBALES DU FEUILLETAGE ASSOCIE A UNE FORME DE MORSE.

-----

Dans ce chapitre et les suivants on utilisera systématiquement les notations ci-dessous.

On désigne par :

- i)  $M$  une variété compacte connexe de dimension  $n$ .
- ii)  $\omega$  une forme de Morse sur  $M$ .
- iii)  $\Sigma$  l'ensemble des singularités de  $\omega$ .

On pose  $\hat{M} = M - \Sigma$  et  $\hat{\omega} = \omega|_{\hat{M}}$ .

Alors le feuilletage  $\hat{F}$  sur  $\hat{M}$  défini par la forme fermée sans singularité  $\hat{\omega}$  est appelé feuilletage associé à la forme de Morse  $\omega$ .

On se propose dans ce chapitre d'étendre au feuilletage  $\hat{F}$  quelques résultats bien connus sur les feuilletages définis par des formes fermées sans singularités et concernant l'holonomie (2,1) et les ensembles minimaux (2,2). On termine par une caractérisation des minimaux que l'on ne rencontre pas dans le cas sans singularité : les feuilles fermées non compactes.

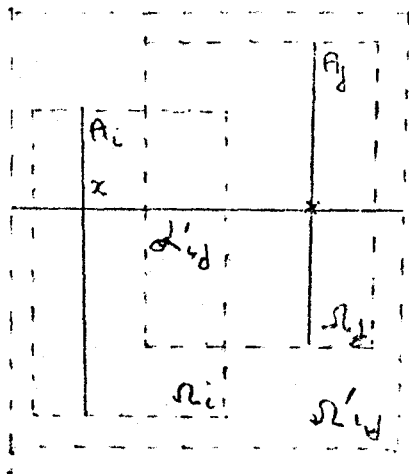
(2,1) - PSEUDO-GROUPE D'HOLONOMIE DE  $\hat{F}$ .

Soit  $g$  une métrique riemannienne sur  $M$  et soit  $X$  le champ dual de  $\omega$  relativement à la métrique  $g$ . Le champ  $X$  a exactement les mêmes singularités que  $\omega$ . Par suite  $\hat{g} = g(X, X)$  est une métrique sur  $\hat{M}$  et le champ  $\hat{X} = \frac{1}{g(X, X)} X$ , défini sur  $\hat{M}$ , est le champ dual de  $\hat{\omega}$  pour la métrique  $\hat{g}$ . Il vérifie  $\hat{\omega}(\hat{X}) = 1$  et donc  $L_{\hat{X}}\hat{\omega} = L_X d\hat{\omega} + dL_X\omega = 0$ . Par suite la forme  $\hat{\omega}$  est invariante par le flot  $\psi_t$  associé à  $\hat{X}$ .

Remarque : Nous pouvons noter une première différence avec le cas des feuilletages définis par des formes fermées sans singularités. Le raisonnement de Reeb (cf. [Re] p. 110) montre que si  $\hat{X}$  est complet toutes les feuilles de  $\hat{F}$  sont homéomorphes. Les exemples étudiés en (1,5,B) montre que ce n'est pas le cas. Donc, en général le champ  $\hat{X}$  n'est pas complet.

On peut définir le pseudo-groupe d'holonomie de  $\hat{F}$  de manière analogue au cas usuel (cf. [He]).

Il existe un recouvrement localement fini  $\Omega = (\Omega_n | n \in \mathbb{N})$  de  $\hat{M}$  par des ouverts bidistingués réguliers, c'est-à-dire un recouvrement par des ouverts  $\Omega_i$  distingués à la fois pour le feuilletage  $\hat{F}$  et par le feuilletage transverse défini par le champ  $\hat{X}$  et tels que si  $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$  il existe un ouvert bidistingué  $\Omega'_{i,j}$  tel que  $\overline{\Omega_i \cap \Omega_j} \subset \Omega'_{i,j}$ .



Pour tout  $i$ , on choisit une  $\hat{X}$  plaque  $A_i$  et on appelle  $A$ , la somme disjointe des  $A_i$ , l'axe du recouvrement  $\Omega$ . La condition de régularité montre que si  $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$  toute  $\hat{F}$  plaque de  $\Omega_i$  rencontre au plus une  $\hat{F}$  plaque de  $\Omega_j$  et les deux plaques sont contenues dans une plaque de  $\Omega'_{i,j}$ .

Pour  $x \in A_i$ , soit  $\alpha'_{i,j}(x)$  la plaque de  $\Omega'_{i,j}$  qui contient  $x$ .

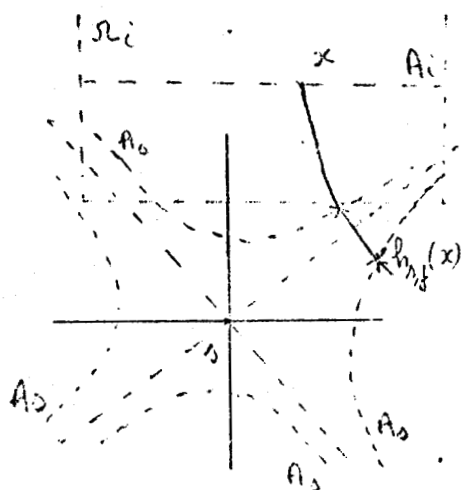
Alors  $h_{j,i} : A_i \longrightarrow A_j$  est un homéomorphisme local.

$$x \rightsquigarrow \alpha'_{i,j}(x) \cap \Omega_j.$$

L'ensemble  $\{h_{j,i}\}$  engendre un pseudo-groupe d'homéomorphisme locaux de  $A$  qui est le pseudo-groupe d'holonomie de  $\hat{F}$  réduit à  $A$ .

Remarque.- Le pseudo-groupe ainsi construit, n'est pas, en général, de type fini car  $\hat{M}$  n'est pas compact. On pourrait cependant construire un pseudo-groupe de type fini de la manière suivante :

Pour toute singularité  $s$  choisissons un voisinage adapté  $V_s$ . L'espace  $M = \bigcup_1 (V_s)$  étant compact peut être recouvert par un recouvrement bidistingué régulier fini  $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .



On peut définir l'axe  $A_s$  de l'ouvert adapté  $V_s$  comme étant l'espace des plaques de  $V_s$  (cf. 1,3). L'axe  $A_s$  peut être représenté dans  $V_s$  par une famille finie de courbes intégrales du champ  $\hat{X}$  dont on identifie les points appartenant à une même plaque de  $V_s$ .

Si  $\Omega_i \cap V_s \neq \emptyset$  on définit un homéomorphisme local  $h_{s,i} : A_i \rightarrow A_s$  en désignant par  $h_{s,i}(x)$  le point de  $A_s$  déterminé par l'intersection de la famille passant par  $x$  avec l'une des courbes intégrales de  $\hat{S}$  représentant  $A_s$ .  $\square$

La remarque suivante sera fondamentale pour l'étude des ensembles minimaux (cf. (2,2)).

(2,1,1) Proposition.- Le pseudo-groupe d'holonomie de  $\hat{F}$  est un pseudo-groupe de translations.

En paramétrant les courbes intégrales du champ  $\hat{X}$  à l'aide du flot  $\psi_t$ , le fait que le feuilletage  $\hat{F}$  soit invariant par  $\psi_t$  montre que les  $h_{j,i}$  sont des translations.  $\square$

Le premier résultat important, bien que naturel, est :

(2,1,2) Théorème.- Le feuilletage  $\hat{F}$  associé à une forme de Morse  $\omega$  est sans holonomie.

Démonstration : Soit  $F$  une feuille de  $\hat{F}$  et  $\sigma : S^1 \rightarrow F$  un lacet en  $x_0 = \sigma(1)$ . Le flot  $\psi_t$  étant un groupe local il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\psi_t[\sigma(S^1)]$  soit défini pour  $|t| < \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \text{L'application } \psi_\sigma : S^1 \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ &\longrightarrow \hat{M} \\ (\theta, t) &\longrightarrow \psi_t[\sigma, (\theta)] \end{aligned}$$

est transverse à  $\hat{F}$ . Donc la forme  $\psi_\sigma^* \hat{\omega}$  est sans singularité sur  $S^1 \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . En outre  $\psi_\sigma^* \hat{\omega}$  est fermé et admet  $S^1 \times \{0\}$  comme feuille. Donc le feuilletage défini sur  $S^1 \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  par  $\psi_\sigma^* \hat{\omega}$  est un feuilletage par cercles. Ceci montre que les relèvements de  $\sigma$  dans  $\hat{M}$  sont des lacets fermés et  $F$  est sans holonomie. Par conséquent  $\hat{F}$  est sans holonomie.  $\square$

## (2,2) - ENSEMBLES MINIMAUX DE $\hat{F}$ .

Il est bien connu que du point de vue de l'étude qualitative des feuilletages, les sous-ensembles les plus importants sont les ensembles minimaux.

Rappelons qu'un ensemble  $M$  est dit minimal si il est fermé, saturé non vide, minimal pour l'inclusion parmi les ensembles possédant ces trois propriétés. Les minimaux considérés habituellement sont des ensembles compacts. Ce ne sera pas le cas ici, et l'on devra même commencer par s'assurer de l'existence de minimaux pour le feuilletage  $\hat{F}$ , la variété  $\hat{M}$  n'étant plus compacte (cf. (2,2,2)).

Il est facile de voir qu'un minimal  $M$  de  $\hat{F}$  est de l'un des trois types suivants (cf. [C,N] p. 233)

- a) une feuille fermée,
- b) la variété  $\hat{M}$  toute entière. Dans ce cas toutes les feuilles sont partout denses,
- c) un minimal exceptionnel. Dans ce cas l'intersection du minimal avec une transversale est localement un ensemble de Cantor.

(2,2,1) Remarque.- Soit  $F$  une feuille de  $\hat{F}$  et  $L$  une feuille de  $\hat{F}$  contenue dans  $\text{adh}_{\hat{M}}F$ , l'adhérence de  $F$  dans  $\hat{M}$ . Alors si  $L$  est une sphère on a  $L = F$ .

Puisque  $L$  est une sphère le théorème de stabilité de Reeb (cf. [Re], [C,N]) montre que les feuilles voisines de  $L$  sont aussi des sphères. Donc  $F$  est une sphère et  $\text{adh}_{\hat{M}}F = F$ . Par suite  $L = F$ .  $\square$

(2,2,2) Proposition.- Pour toute feuille  $F$  de  $\hat{F}$  il existe un minimal de  $\hat{F}$  contenu dans  $\text{adh}_{\hat{M}}(F)$ .

Démonstration : Pour toute singularité  $s$  de  $\omega$  choisissons un voisinage adapté  $V_s$ . Posons  $V = \bigcup_s V_s$  et  $\tilde{M} = M - V$ .

On a deux cas :

i) Il existe un centre  $s$  tel que  $(\text{adh}_{\hat{M}}F) \cap V_s \neq \emptyset$ . Alors  $\text{adh}_{\hat{M}}F$  contient une sphère et d'après (2,2,1)  $F$  est une sphère et donc est minimale puisque fermée.

ii) Pour tout centre  $s$ , l'intersection de  $\text{adh}_{\hat{M}}F$  avec  $V_s$  est vide. Dans ce cas, d'après le lemme de Zorn, il suffit de montrer que l'ensemble des fermés non vides, saturés dans  $\hat{M}$  contenues dans  $\text{adh}_{\hat{M}}F$  est inductif.

Pour cela soit  $(A_k)_{k \in K}$  une famille totalement ordonnée de tels fermés saturés non vides. L'ensemble  $A = \bigcap_{k \in K} A_k$  est un fermé saturé. Il nous faut montrer qu'il est non vide.

Posons  $\tilde{A}_k = A_k \cap \tilde{M}$  et  $\tilde{A} = A \cap \tilde{M}$ .

On a 
$$\tilde{A} = \bigcap_{k \in K} \tilde{A}_k .$$



Or les voisinages  $V_s$  coupés par  $\text{adh}_M \hat{F}$  sont des voisinages adaptés de points selles et ils ne contiennent donc aucun ensemble saturé. Donc  $(\tilde{A}_k)_{k \in K}$  est une famille totalement ordonnée de compacts non réelles. Par suite  $\tilde{A}$  et donc  $A$  sont non vides.  $\square$

(2,2,3) Proposition.- Le feuilletage  $\hat{F}$  ne possède pas de minimal exceptionnel.

Ce résultat se déduit du théorème de Sacksteder (cf. [Sa]) et du fait que le pseudo-groupe d'holonomie de  $\hat{F}$  est un pseudo-groupe d'holonomie de  $\hat{F}$  est un pseudo-groupe de translations. Le théorème de Sacksteder peut se formuler de la façon suivante, légèrement différente de l'énoncé original de Sacksteder, en ce que le pseudo-groupe n'est pas supposé de type fini.

(2,2,4) Théorème de Sacksteder.- Soit  $\Gamma$  un pseudo-groupe de  $C^2$ -difféomorphismes de  $\mathbb{R}$  et  $\Gamma_0$  un système de générateurs de  $\Gamma$ . Supposons qu'il existe deux constantes positives  $\lambda$  et  $\theta$  telles que pour tout  $h \in \Gamma_0$  on ait

i)  $|h'| \leq \lambda$

ii)  $|h''/h'| \leq \theta$ .

Alors si  $\Gamma$  possède un minimal exceptionnel  $M$ , il existe  $x \in M$  et  $f \in \Gamma$  tels que  $f(x) = x$  et  $|f'(x)| < 1$ .  $\square$

(2,2,5) Démonstration de la proposition (2,2,3)

Comme le pseudo-groupe d'holonomie est un pseudo-groupe de translations l'existence des constantes  $\lambda$  et  $\theta$  est assurée. Par conséquent si le feuilletage  $\hat{F}$  possédait un minimal exceptionnel il aurait de l'holonomie, ce qui est impossible d'après (2,1,2).  $\square$

(2,3) - UNE CARACTERISATION DES FEUILLES FERMEES.

Dans ce paragraphe on caractérise les feuilles fermées du feuilletage  $\hat{F}$  à l'aide de leurs "ensembles limites" suivant un bout", notion qui généralise celle d' $\alpha$ -limite et d' $\omega$ -limite des trajectoires des équations différentielles. Ceci nous sera utile aux paragraphes (3,2) et (3,3).

Rappelons que les bouts d'une variété  $V$  se définissent comme suit. Soit  $A$  l'ensemble des suites  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fermés connexes de  $V$  telles que :

- i)  $A_{n+1} \subset A_n$
- ii)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$
- iii)  $\partial A_n$  est compact, non vide .

Les suites  $(A_n)$  sont en particulier des bases de filtres et on dira que deux telles suites sont équivalentes si elles définissent le même filtre. Une classe d'équivalence est appelée un bout de  $V$ .

Remarquons qu'une variété compacte n'a pas de bout . Un bout  $\varepsilon$  sera représenté par une suite de fermés  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartenant à  $\varepsilon$ .

Soit  $F$  une feuille de  $\hat{F}$  et  $\varepsilon$  un bout de  $F$  représenté par une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . L'ensemble  $\lim_{\varepsilon} F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n$  où  $\bar{A}_n$  désigne l'adhérence de  $A_n$  dans  $M$  ne dépend pas de la suite  $A_n$  choisie. On appellera  $\lim_{\varepsilon} F$  l'ensemble limite de  $F$  selon le bout  $\varepsilon$ .

On a, bien sur :  $\lim_{\varepsilon} F \subset \bar{F}$  .

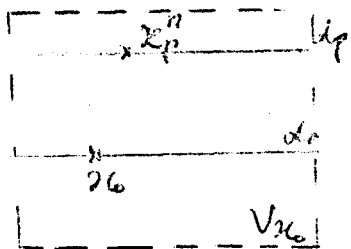
(2,3,1) Proposition.- Soit  $F$  une feuille non compacte de  $\hat{F}$ . L'ensemble  $\lim_{\varepsilon} F$  est un fermé de  $M$ , saturé dans  $M$ , non vide, connexe.

Démonstration : Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite représentant  $\varepsilon$ .

i) L'ensemble  $\lim_{\varepsilon} F$  est un fermé non vide car c'est l'intersection d'une suite décroissante de compact non vides.

ii) Pour montrer que  $\lim_{\varepsilon} F$  est saturé on va montrer qu'il est ouvert et fermé dans  $\hat{M}$  muni de la topologie des feuilles. D'après i) l'ensemble  $\lim_{\varepsilon} F$  est fermé dans cette topologie. Il reste à montrer qu'il est ouvert. Pour cela soit  $x_0 \in \lim_{\varepsilon} F - \sum$  et soit  $V_{x_0}$  un voisinage distingué de  $x_0$ . Si  $\alpha_0$  est la plaque de  $V_{x_0}$  qui contient  $x_0$ , il suffit de montrer que, pour  $n$  assez grand, on a  $\alpha_0 \subset \bar{A}_n$ .

Or il existe  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$  on ait  $x_0 \notin A_n$ . Par définition de  $\lim_{\varepsilon} F$ , pour  $n \geq n_0$  il existe une suite  $(x_p^n)_{p \in \mathbb{N}}$  de points de  $A_n$  telle que  $x_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} x_p^n$ . On peut supposer cette suite contenue dans  $V_{x_0}$ . Appelons alors  $\alpha_p$  la plaque de  $V_{x_0}$  contenant  $x_p^n$ . Comme  $\partial A_n$  est compact il existe  $p_0$  tel que pour  $p \geq p_0$  on ait  $\alpha_p \subset A_n$ . Il en résulte  $\alpha_0 \subset \bar{A}_n$  pour  $n \geq n_0$ .



Par suite  $\alpha_0 \subset \lim_{\varepsilon} F$  et  $(\lim_{\varepsilon} F) \cap \hat{M}$  est bien un ouvert pour la topologie des feuilles.

iii)  $\lim_{\varepsilon} F$  est connexe : sinon il existerait deux ouverts disjoints  $V_1$  et  $V_2$  de  $M$  tels que

a)  $\lim_{\varepsilon} F \subset V_1 \cup V_2$

b)  $(\lim_{\varepsilon} F) \cap V_1 \neq \emptyset$  et  $(\lim_{\varepsilon} F) \cap V_2 \neq \emptyset$ .

Par conséquent  $\bigcap A_n \subset V_1 \cup V_2$  et puisque  $M' = M - (V_1 \cup V_2)$  est compact il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $A_n \cap M' = \emptyset$  pour  $n \geq n_0$ .  
 Donc on a  $A_n \subset V_1 \cup V_2$  pour  $n \geq n_0$  et puisque  $(A_n)$  est une suite décroissante de fermés connexes pour  $n \geq n_0$  tous les fermés  $A_n$  sont contenus dans l'un des deux ouverts  $V_1$  ou  $V_2$ . Par suite l'un des ensembles  $(\lim_{\varepsilon} F) \cap V_1$  ou  $(\lim_{\varepsilon} F) \cap V_2$  est vide ce qui est contradictoire.

(2,3,2) Lemme.- Soient  $F$  une feuille de  $\hat{F}$  et  $x_0$  un point de  $\bar{F} - F$ . Il existe un bout  $\varepsilon$  de  $F$  tel que  $x_0 \in \lim_{\varepsilon} F$ .

Démonstration : Il existe une suite  $(x_n)$  dans  $F$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  dans  $M$ .

Soit  $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de compacts de  $F$  telle que  $\bigcup_p K_p = F$ . Pour tout  $p$  il existe une composante connexe  $A_p$  de  $F - K_p$  telle que

- i)  $A_p$  contienne une infinité de points de la suite  $(x_n)$ .
- ii)  $A_p \subset A_{p-1}$ .

Il est clair que la suite  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  définit un bout qui possède la propriété demandée.  $\square$

(2,3,3) Proposition.- Une feuille non compacte  $F$  de  $\hat{F}$  est fermée dans  $\hat{M}$  si et seulement si pour tout bout  $\varepsilon$  de  $F$ , l'ensemble  $\lim_{\varepsilon} F$  est formé d'une singularité et d'une seule. En particulier une telle feuille a un nombre fini de bouts.

Démonstration :

a) Supposons que  $F$  soit fermée. Alors  $\lim_{\varepsilon} F \cap \hat{M} = \emptyset$ .  
 Donc  $\lim_{\varepsilon} F \subset \bar{F}$ . Et par connexité  $\lim_{\varepsilon} F$  est un point.

b) Réciproquement supposons que pour tout bout  $\varepsilon$  de  $F$ ,  $\lim_{\varepsilon} F$  soit formée d'une singularité. D'après le lemme (2,3,2) les points de  $\bar{F} - F$  sont des singularités,  $\bar{F}$  étant l'adhérence de  $F$  dans  $M$ . Il en résulte que  $F$  est égale à son adhérence dans  $\hat{M}$ .  $\square$

Remarque : Appelons feuille singulière toute feuille de  $\hat{F}$  contenant un cône singulier. La proposition (2,3,3) montre que les feuilles fermées non compactes de  $\hat{F}$  sont des feuilles singulières.

### CHAPITRE III

#### UN CRITERE DE MINIMALITE DU FEUILLETAGE $\hat{F}$ .

-----

L'objet de ce chapitre est de décrire la structure du feuilletage  $\hat{F}$  associé à une forme de Morse (voir (3,4)).

On donnera, en particulier, des conditions pour que  $\hat{F}$  possède l'une des deux propriétés suivantes :

- i) Toutes les feuilles de  $\hat{F}$  sont fermées (voir (3,2) ;
- ii) Toutes les feuilles de  $\hat{F}$  sont denses (voir (3,3)).

Dans ce dernier cas le feuilletage  $\hat{F}$  sera dit minimal.

Nous commençons par un théorème de stabilité qui étend aux formes de Morse le résultat de Reeb (cf. [Re], [C,N]).

Dans tout le chapitre,  $\omega$  désigne une forme de Morse sur une variété compacte connexe  $M$ .

#### (3,1) - UN THEOREME DE STABILITE.

Soit  $K$  la réunion des singularités de  $\omega$  et des feuilles singulières fermées de  $\hat{F}$ . Soit  $C$  une composante connexe de  $K$  non réduite à une singularité. La composante  $C$  est un compact réunion d'un nombre fini de feuilles singulières  $L_1, L_2, \dots, L_p$  et d'un nombre fini de singularités  $s_1, s_2, \dots, s_q$  qui sont des points selles.

$$\text{On posera } \hat{C} = \bigcup_{i=1}^q L_i = C - \Sigma = C \cap \hat{M}.$$

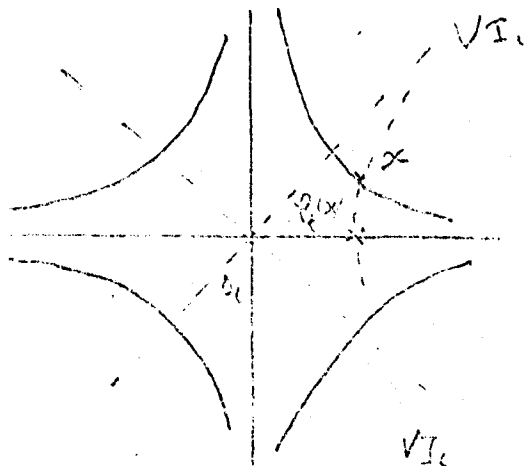
Pour tout  $i$ , soit  $V_i$  un petit voisinage adapté de la singularité  $s_i$  et  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son système de coordonnées locales défini en (1,2,1). En utilisant une partition de l'unité convenable on construit aisément une métrique  $g$  sur  $M$  qui coïncide sur les  $V_i$  avec la métrique déduite de celle de  $\mathbb{R}^n$  à l'aide du système de coordonnées. Pour cette métrique le champ  $X$  dual de  $\omega$  est en restriction à  $V_i$  le champ linéaire  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow 2(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$  ou  $\lambda$  est l'indice de la singularité  $s_i$ . Comme en (2,1), on modifie la métrique  $g$  dans  $\hat{M}$  pour obtenir un champ  $\hat{X}$  dual de  $\hat{\omega}$  tel que le feuilletage  $\hat{F}$  soit invariant par le flot  $\varphi_t$  associé à  $\hat{X}$ .

Dans  $V_i - \{s_i\}$ , on a  $\hat{X}|_{V_i} = \frac{1}{4\sum x_i^2} X|_{V_i}$ .

En particulier,  $\hat{X}|_{V_i}$  est invariant par la symétrie  $\sigma$  par rapport à une variété invariante du champ  $X$  c'est-à-dire  $\sigma \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \sigma$  (3,1,1).

(3,1,1) Lemme.- Soit  $P$  une feuille du feuilletage induit par  $\hat{F}$  dans  $V_i - \{s_i\}$ . Il existe  $t \in \mathbb{R}$  unique et une application continue  $\pi_t : P \rightarrow C$  qui est égale à  $\varphi_t$  sur le complémentaire dans  $P$  des variétés invariantes du champ  $X|_{V_i}$  et à  $s_i$  sur l'intersection de  $P$  avec les variétés invariantes.

Démonstration : Soit  $VI_i$  la réunion des variétés invariants du champ  $X|_{V_i}$  et soit  $x \in P - VI_i$ . Il existe  $t \in \mathbb{R}$  unique tel que  $\varphi_t(x)$  soit sur un cône singulier issue de  $s_i$ . L'invariance de  $\hat{F}$  par  $\varphi_t$  montre que pour tout point  $y$  de la composante



connexe de  $P - VI_1$  contenant  $x$ , on a  $\psi_t(y) \in \hat{C}$ .

Or  $P - VI_1$  a une ou deux composantes connexes. Dans ce dernier cas soit  $\sigma(x)$  le symétrique de  $x$  par rapport à la variété invariante qui sépare  $P$  en deux composantes connexes. La symétrie du champ  $\hat{X}$  (cf. 3,1,1) montre que  $\psi_t(\sigma(x))$  est sur un cône singulier pour la même valeur de  $t$ . Par suite, tous les points  $y$  de la composante connexe de  $P - VI_1$  contenant  $\sigma(x)$  sont aussi tels que  $\psi_t(y) \in \hat{C}$ .

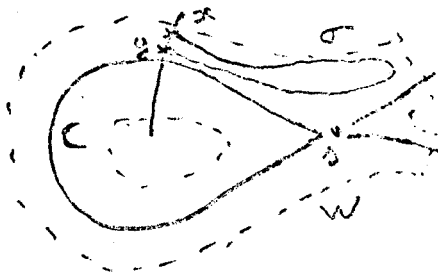
Enfin, on prolonge  $\psi_t$  sur  $VI_1$  en une application continue  $\pi_t$  en posant  $\pi_t(P - VI_1) = s_1$ . ■

Soit  $W$  un ouvert de  $M$ . On notera  $\hat{F}_W$  et  $\hat{X}_W$  le feuilletage et le champ induit par  $\hat{F}$  et  $\hat{X}$  dans l'ouvert  $W \cap \hat{M}$ .

(3,1,2) Proposition. - Soit  $C$  une composante connexe de  $K$ . Il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $C$  tel que toute feuille de  $\hat{F}_W$  coupe toute courbe intégrale de  $\hat{X}_W$  en au plus un point. Par suite, les feuilles de  $\hat{F}_W$  sont fermées.

Démonstration :

Puisque  $C$  est compacte, on peut recouvrir  $C$  par un nombre fini d'ouverts bidistingués ou adaptés  $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq n}$  tels que  $\Omega_i \cap C$  soit une plaque si  $\Omega_i$  est distingué



ou une réunion de cônes si  $\Omega_i$  est un voisinage adapté d'une singularité.

Posons  $W = \bigcup_i \Omega_i$  et soit  $F$  une feuille de  $\hat{F}_W$ . Supposons qu'une courbe intégrale de  $\hat{X}_W$  coupe  $F$  en deux points  $x$  et  $y$  et soit  $\sigma$  un chemin dans  $F$  de  $x$  à  $y$ . Puisque  $\sigma$  est dans  $W$ , pour tout



$\theta \in [0,1]$  il existe un nombre réel  $t_\theta$  unique tel que  $\psi_{t_\theta}(\sigma(\theta)) \in \hat{C}$  ou que  $\pi_{t_\theta}(\sigma(\theta)) \in \hat{C}$  si  $\sigma(\theta)$  est dans un ouvert adapté.

On peut donc définir une application  $\Psi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\theta \rightsquigarrow t_\theta.$

L'invariance du feuilletage par  $\psi_t$  et la définition de  $\pi_t$  montre que l'application  $\Psi$  est localement constante et donc constante par connexité. Par suite  $t_0 = t_1$  et  $\sigma(0) = \sigma(1)$ . Donc  $F$  ne coupe une transversale qu'en un seul point.  $\square$

Remarque : Le voisinage  $W$  de  $C$  défini en (3,1,2) n'est, en général, pas saturé, pour le feuilletage  $\hat{F}$ . Nous allons maintenant donner des conditions pour qu'il le soit.

(3,1,3) Définition.- On dira que le feuilletage  $\hat{F}$  associé à la forme de Morse  $\omega$  possède suffisamment de feuilles fermées si l'une des conditions suivantes est vérifiée

- i)  $\Sigma_I \neq \emptyset$  et toutes les feuilles singulières issues de points de  $\Sigma_I$  sont fermées.
- ii)  $\Sigma_I = \emptyset$  et  $\Sigma_C \neq \emptyset$ .
- iii)  $\Sigma = \Sigma_{II}$  et il existe au moins une feuille fermée.

Remarquons que dans iii) la feuille fermée exigée n'est pas nécessairement singulière.

(3,1,4) Théorème de stabilité.- Soit  $C$  une composante connexe de  $K$ . Si  $\hat{F}$  a suffisamment de feuilles fermées il existe un voisinage saturé  $\tilde{W}$  de  $C$  tel que toute feuille de  $F_{\tilde{W}}$  soit fermée.

Démonstration : Construisons  $W$  comme en (3,1,2). On trouve aisément un nombre réel  $t_0$  tel que pour  $x \in \hat{C}$  et tout  $t$  tel que  $|t| < t_0$  on ait  $\psi_t(x) \in W$ . L'ensemble  $E = \{y \in M / y = \psi_t(x), x \in \hat{C}, |t| < t_0\}$  est un ouvert. Donc si,  $W'$  est son saturé,  $\tilde{W} = W' \cup \Sigma$  est un voisinage saturé de  $C$ . Il nous suffit de montrer que  $\tilde{W}$  est contenu dans  $W$ . Pour cela soit  $F$  une feuille de  $\hat{F}$  contenue dans  $\tilde{W}$ . Par construction  $F$  possède un point  $x$  dans  $W$  et il existe  $t$ , avec  $|t| < t_0$  tel que  $\psi_t(x) \in \hat{C}$ . Le fait que  $\hat{F}$  ait suffisamment de feuilles fermées assure que si  $C$  contient un cône singulier issu d'une singularité  $s_i$ , il contient aussi tout autre cône issu de  $s_i$ . Alors si  $F_x$  est la feuille passant par  $x$  du feuilletage  $F_W$ , les applications  $\psi_t$  et  $\pi_t$  permettent de définir une application continue  $\pi_t : F_x \rightarrow \hat{C}$  qui coïncide avec  $\psi_t$  sur les ouverts distingués et avec  $\Pi_t$  sur l'ouvert adapté pour une même valeur de  $t$ . Comme l'ensemble des points de  $F$  qui sont dans le domaine de  $\Pi_t$  est un ouvert et un fermé non vide de  $F$  on a  $F = F_x$  et  $F$  est contenu dans  $W$ .

Par suite  $F$  est fermée et compacte si elle n'est pas singulière.  $\square$

Remarque 1.- Il résulte de (3,1,2) que toute feuille de  $W$  coupe une courbe intégrale de  $\hat{X}$  en au plus un point.

Remarque 2.- Dans le cas où  $\Sigma = \Sigma_{II} = \emptyset$ , notre résultat est le théorème de Reeb pour les formes sans singularités.

### (3,2) - UN CRITERE POUR QUE TOUTES LES FEUILLES DE $\hat{F}$ SOIENT FERMEES.

Il est bien connu que lorsque toutes les singularités de  $\omega$  sont des centres toutes les feuilles de  $\hat{F}$  sont des sphères  $S^n$

(cf. [Re], [C,N]). De plus  $\omega$  possède alors exactement deux singularités la variété  $M$  est une sphère  $S^{n+1}$  et  $\omega$  est la différentielle d'une fonction de Morse.

Rappelons brièvement la démonstration de ce résultat.

Soient  $\{s_i\}_{i \in \{1, \dots, p\}}$  l'ensemble non vide des centres de  $\omega$ , et, pour tout  $i$ , soit  $U_i$  un voisinage adapté de  $s_i$  tel que  $\partial U_i$  soit une feuille sphérique de  $F$ . La variété  $N = M - \bigcup_{i=1}^p U_i$  est une variété compacte connexe muni d'un feuilletage  $F$  tel que les composantes connexes de  $\partial N$ , qui sont des sphères  $S^{n-1}$  soient des feuilles de  $F$ . Alors le théorème de stabilité complète de Reeb montre que toutes les feuilles de  $F$  sont des sphères. De plus, à l'aide du champ transverse  $\hat{X}$  (cf. 2,1) on voit que  $N$  est un fibré localement trivial à fibre  $S^{n-1}$  sur l'espace des feuilles  $N/F$  qui est une variété compacte connexe de dimension un à bord. Donc  $N/F$  est homéomorphe à  $[0,1]$  et  $N$  à  $S^{n-1} \times [0,1]$ . Par suite  $\omega$  possède exactement deux centres et  $M$ , qui est obtenu en recollant à  $N$  deux boules  $U_1$  et  $U_2$  est la sphère  $S^n$ .  $\square$

Le théorème ci-dessous va donner des conditions pour que toutes les feuilles de  $\hat{F}$  soient fermées (et presque toutes compactes) lorsque il existe des points selles.

(3,2,1) Théorème.- Les propriétés suivantes sont équivalentes

- i) Le feuilletage  $\hat{F}$  possède suffisamment de feuilles fermées.
- ii) Toutes les feuilles de  $\hat{F}$  sont fermées.

Démonstration : Il suffit de voir que i) entraîne ii).

Pour cela soit  $A$  la réunion des feuilles fermées de  $\hat{F}$ . Comme  $\hat{M}$  a le type d'homotopie d'une variété compacte à bord, le théorème de Haefliger (cf. [Ha]) montre que  $A$  est un fermé de  $\hat{M}$ .

Montrons que  $A$  est un ouvert de  $\hat{M}$  : soit  $F$  une feuille de  $A$  et dans le cas où  $F$  est singulière soit  $C$  la composante connexe de la réunion des singularités et des feuilles singulières, (cet ensemble est différent de  $K$ ) contenant  $F$ . Trois cas sont possibles :

i)  $F$  est une feuille compacte. Alors le théorème de stabilité de Reeb montre que  $F$  possède un voisinage de feuilles compactes.

ii)  $F$  est une feuille singulière qui ne contient que des singularités de type II dans son adhérence dans  $M$ . Alors  $C$  est la réunion de la feuille  $F$  et des singularités adhérentes à  $F$ .

iii)  $F$  est une feuille singulière qui contient une singularité de type I dans son adhérence dans  $M$ . Alors  $C$  est réunion de feuilles singulières issues de singularités de type I et, comme le feuilletage possède suffisamment de feuilles fermées, toutes les feuilles singulières contenues dans  $C$  sont fermées.

Dans les deux derniers cas, il résulte de (3,1,4) que  $F$  possède un voisinage de feuilles fermées. Comme  $A$  est non vide d'après ii),  $A$  est donc égal à  $\hat{M}$ , ce qui démontre le théorème.

### (3,3) - UN CRITERE DE MINIMALITE DU FEUILLETAGE $\hat{F}$ .

Un résultat, non publié, de Kupka, dit qu'une forme de Morse sur une surface, possédant des singularités qui sont toutes des points selle définit un feuilletage minimal si et seulement si il n'existe pas de connexion de selles. On se propose ici de généraliser ce résultat à des variétés de dimension plus grande.

Remarquons qu'une condition nécessaire évidente de minimalité de  $F$  est que  $\omega$  ne possède pas de centre. On n'aura cependant besoin que d'une hypothèse un peu plus faible.

(3,3,1) Théorème. - Si l'ensemble  $\Sigma$  des singularités de  $\omega$  contient un point selle les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\hat{F}$  est minimal ;
- ii) Toute feuille fermée de  $\hat{F}$  est compacte ;
- iii) Il n'y a pas de feuilles singulières fermées.

Démonstration : Il résulte immédiatement de (2,3,3) que la condition ii) est équivalente à la condition iii). D'autre part, un feuilletage minimal n'ayant pas de feuille fermée la condition i) entraîne la condition ii). Il suffit donc de voir que ii) entraîne i).

La variété  $\hat{M}$  a le type d'homotopie d'une variété compacte à bord et par suite son premier nombre de Betti est fini. Donc si  $C$  désigne la réunion des feuilles fermées de  $\hat{F}$ . L'ensemble  $C$  est un fermé de  $\hat{M}$  d'après le théorème de Haefliger (cf. [Ha]).

Si la condition ii) est vérifiée,  $C$  est la réunion des feuilles compactes de  $\hat{F}$ . Puisque  $\hat{F}$  est sans holonomie,  $C$  est un ouvert de  $\hat{M}$  d'après le théorème de stabilité de Reeb (cf. [Re], [C,N]). Or  $C$  ne peut être égal à  $\hat{M}$  puisque,  $\omega$  possédant au moins un point selle,  $\hat{F}$  contient une feuille non compacte. Donc  $C = \emptyset$ . Par suite, un minimal  $M$  de  $\hat{F}$  n'est ni une feuille fermée, ni un minimal exceptionnel d'après (2,2,3). Donc  $M = \hat{M}$  et  $F$  est minimal.  $\square$

#### (3,4) - STRUCTURE DU FEUILLETAGE ASSOCIE A UNE FORME DE MORSE.

Pour étudier les feuilletages presque sans holonomie, on a l'habitude de décomposer la variété en un nombre fini de modèles en la découpant le long des feuilles compactes (cf. [He]). Par analogie, on va étudier le feuilletage  $\hat{F}$  sur le complémentaire de la réunion  $K$  des feuilles singulières fermées et des singularités.

Soit  $A$  une composante connexe de  $M - K$ .

Nous commençons pour étudier les ensembles minimaux du feuilletage  $F_A$  défini par  $\omega$  sur  $A$ . Ici encore  $A$  est non compact, et le problème de l'existence des minimaux se pose.

(3,4,1) Lemme 1. - Le feuilletage  $F_A$  possède un ensemble minimal.

Démonstration : Soit  $\bar{A}$  l'adhérence de  $A$  dans  $M$ .  $\bar{A} - A$  est une réunion de composantes connexes de  $K$  et d'après (3,1,2) on peut trouver un voisinage non saturé  $W$  de  $\bar{A} - A$  dans  $\bar{A}$  tel que toute feuille  $F$  de  $F_W$  coupe une courbe intégrale de  $\hat{X}$  en au plus un point.

Deux cas sont alors possibles :

i) Il existe une feuille  $F$  de  $F_A$  contenue dans  $W$ . Alors  $F$  qui d'après (3,1,2) est un fermé de  $W$  est aussi un fermé de  $\bar{W}$  et est donc compacte. Par suite,  $F_A$  possède un minimal : la feuille  $F$ .

ii) aucune feuille de  $F_A$  n'est contenue dans  $W$ . Alors un raisonnement analogue à (2,2,2) montre que  $F_A$  possède un minimal.  $\square$

(3,4,2) Lemme 2. - Le feuilletage  $F_A$  ne possède pas de minimal exceptionnel.

On peut construire sur  $A$  un pseudo-groupe d'holonomie qui est un pseudo-groupe de translation. Ce pseudo-groupe n'est en général pas de type fini, mais le théorème de Sacksteder énoncé en (3,2,4) reste valable.

(3,4,3) Théorème. - Soit  $A$  une composante connexe de  $M - K$ .

i) Ou bien le feuilletage défini par  $\omega$  dans  $A$  a toutes ses feuilles compactes et homéomorphes, et le feuilletage  $F_A$  est un produit  $F \times ]0,1[$ .

ii) Ou bien toutes les feuilles de  $F_A$  sont denses dans  $A$ .

Démonstration : Si  $A$  contient une feuille fermée  $F$ , alors  $F$  est compacte et les théorèmes de Reeb et Haefliger montrent que la réunion des feuilles compactes est  $A$  tout entier.

De plus, les feuilles voisines de  $F$  sont homéomorphes car ce sont les images de  $F$  par  $\psi_t$ . La connexité de  $A$  entraîne alors que toutes les feuilles sont homéomorphes.

Enfin, on voit à l'aide de flot  $\psi_t$  que  $A$  est un fibré localement trivial sur une variété ouverte de dimension 1. Donc  $A$  est homéomorphe à  $F \times ]0,1[$ .

ii) Si  $A$  n'a pas de feuilles fermées, comme  $A$  n'a pas non plus de minimal exceptionnel, toutes les feuilles sont denses dans  $A$ .  $\square$

## CHAPITRE IV

### GRAPHE ASSOCIE A UNE FORME DE MORSE.

-----

Nous étudions plus spécialement dans ce chapitre les feuilletages définis par des formes de Morse qui ont toutes leurs feuilles fermées. Dans le cas où  $\omega$  est sans singularités on sait que le feuilletage est défini par une fibration sur  $S^1$ . On se propose d'établir un résultat analogue lorsqu'il existe des singularités (4,3). Nous commençons par définir les formes étudiées dans ce chapitre (4,1) et par étudier leur espace des feuilles (4,2).

#### (4,1) - FORMES GENERIQUES.

On a vu en (1,5) que tout feuilletage défini par une forme fermée  $\omega$  pouvant être considérée comme l'image réciproque par un plongement  $h : M \rightarrow M \times S^1$  du feuilletage défini sur  $M \times S^1$  par la forme  $\Omega = p^*\omega + p'^*d\theta$ .

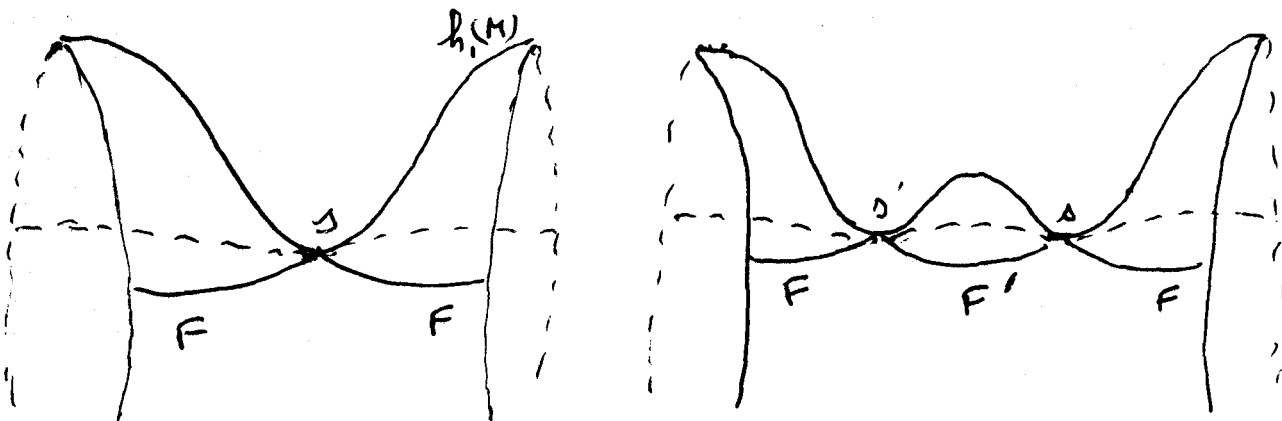
Il est facile de voir que l'espace des plongements de  $M$  dans  $M \times S^1$  étant muni de la  $C^\infty$  topologie on peut faire les approximations suivantes :

1) Il existe  $h_1$  tel que  $h_1^*\Omega$  soit de Morse, les singularités étant les points  $x$  de  $M$  tels que  $h_1(M)$  soit tangent en  $h_1(x)$  au feuilletage défini par  $\Omega$  (cf. [Hae])

2) Il existe  $h_2$ , proche de  $h_1$ , tel que  $h_2^*\Omega$  soit de Morse et que de chaque point selle de type I de  $h_2^*\Omega$  soient issues deux feuilles



singulières. Il suffit pour cela de procéder localement. Si  $s$  est un point selle ayant ses deux cônes dans une même feuille  $F$  on modifie  $h_1$  de façon à faire apparaître un point selle supplémentaire  $s'$  tel qu'il existe une feuille singulière  $F'$  contenant un cône de  $s$  et un cône de  $s'$  :



3) Il existe  $h_3$ , proche de  $h_2$ , telle que toute feuille singulière de  $h_3^* \Omega$  continue exactement un cône singulier si  $\dim M = 3$  et deux cônes si  $\dim M = 2$ . Pour cela, on choisit simplement  $h_3$  de telle manière que tous ses points de contact appartiennent à des feuilles différentes de  $\Omega$ .

Finalement, soit  $P(M, M \times S^1)$  l'ensemble des plongements de  $M$  dans  $M \times S^1$  et soit  $K$  l'ensemble des plongements  $k$  vérifiant la propriété suivante :

- Il existe une forme fermée sans singularité  $\Omega$  telle que
- i)  $k^* \Omega$  est une forme de Morse ;
  - ii) D'un point selle de type I de  $k^* \Omega$  sont issues au moins deux feuilles singulières ;
  - iii) Toute feuille singulière de  $k^* \Omega$  contient exactement un cône singulier si  $\dim M \geq 3$  et deux cônes si  $\dim M = 2$ .

La proposition suivante résulte alors aisément des considérations précédentes :

(4,1,1) Proposition.-  $K$  est un ouvert dense de  $P(M, M \times S^1)$

On appellera formes génériques les formes  $k^* \Omega$  correspondantes.

#### (4,2) - ESPACE DES FEUILLES.

Nous nous proposons de montrer que, pour une forme de Morse dont toutes les feuilles sont fermées, l'espace des feuilles  $\hat{M}/\hat{F}$  a une structure très simple : celle d'une variété de dimension un non séparée ayant un nombre fini de points de branchement et de bouts.

a) Rappelons qu'on appelle point de branchement d'ordre  $n$  d'une variété non séparée un  $n$ -uplet  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de points de la variété tel que

- i) pour tout voisinage  $V_i$  de  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )  $\bigcap_{i=1}^n V_i \neq \emptyset$ .
- ii) il n'existe pas de  $(n+1)$ -uplet ayant  $x_1, x_2, \dots, x_n$  comme composantes et possédant la propriété i).

Le branchement est simple lorsque  $n = 2$ .

b) On peut définir les bouts d'une variété non séparée comme pour une variété séparée en considérant le même type de suites  $(F_n)$ . Bien sûr le complété par les bouts que l'on peut définir de la même manière que pour une variété séparée n'est plus compacte, mais seulement quasi-compacte. Néanmoins dans ce complété l'ensemble des bouts est séparé car cette propriété n'est qu'une conséquence de l'axiome de Borel-Lebesgue appliqué aux frontières des suites de fermés définissant le bout.

(4,2,1) Théorème.- Si le feuilletage associé à une forme de Morse  $\omega$  ne possède que des feuilles fermées, l'espace des feuilles

est une variété de dimension un affine orientée, non séparée  $\widehat{M}/\widehat{F}$  vérifiant les propriétés suivantes :

i) Les bouts de  $\widehat{M}/\widehat{F}$  sont en nombre fini et en bijection avec les centres de  $\omega$  ;

ii) Les points de branchement sont en nombre fini et si  $\omega$  est générique, ils sont simples et en bijection avec les points selles de type I de  $\omega$ .

Démonstration :

Soit  $K$  la réunion des feuilles singulières et des singularités. Il résulte du théorème de stabilité (3,1,4) que chaque composante connexe de  $K$  possède un voisinage ouvert saturé  $W$  telle que chaque feuille coupe une trajectoire du champ  $\widehat{X}_W$  en un point au plus. De plus, les composantes connexes de  $\widehat{M} - K$  sont des ouverts  $V$  feuilletés en produit d'après (3,4,3).

On peut donc recouvrir  $M$  par un nombre fini d'ouverts saturés  $V$  et  $W$ .

Dans chacun de ces ouverts  $U$  on choisit une famille finie de trajectoires du champ dual  $\widehat{X}|_U$  dont la réunion coupe toutes les feuilles et on paramètre chaque courbe intégrale à l'aide du flot  $\psi_t$  associé à  $\widehat{X}|_U$ .

L'espace des feuilles est obtenu en identifiant les points de cet ensemble de trajectoires qui sont sur une même feuille.

Il est alors facile de vérifier les faits suivants :

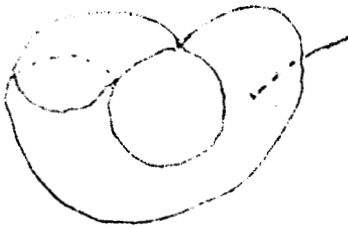
i) Le paramétrage des transversales définit sur  $\widehat{M}/\widehat{F}$  un atlas affine qui fait de  $\widehat{M}/\widehat{F}$  une variété affine orientée.

ii) Au voisinage d'un centre ou d'un point selle de type II, l'espace des feuilles est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ .

Les points de branchements sont obtenues, en procédant aux identifications convenables dans le voisinage  $W$  d'un point selle de type I.

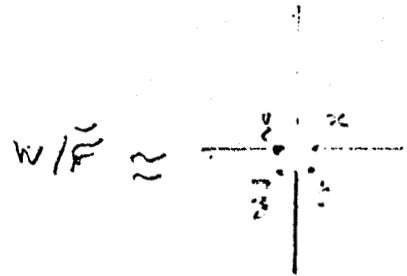
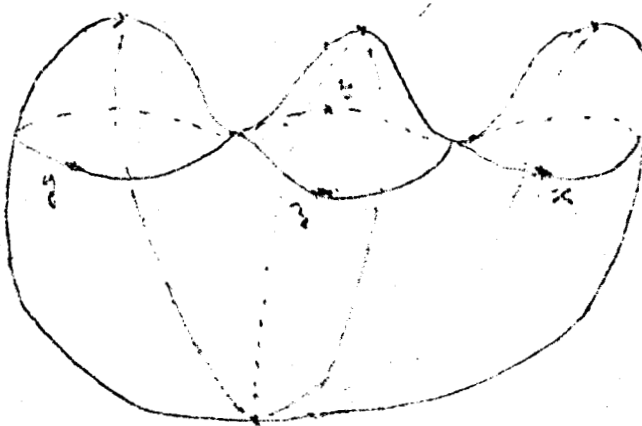
Mais tous les points selles de type I ne donnent pas des points de branchements :

a) Ainsi si les deux cônes issus d'un point selle sont sur une même feuille, l'espace des feuilles  $W/\hat{F}$  est  $\mathbb{R}$ .



$$W/\hat{F} \simeq \mathbb{R}$$

b) L'ordre du point de branchement dépend du nombre de singularités de type I contenu dans  $W$  :



pour le feuilletage défini sur  $S^2$  (comme ci-dessus) par la fonction cote  $\hat{W}/\hat{F}$  contient un branchement d'ordre 4  $(x,y,z,t)$ .

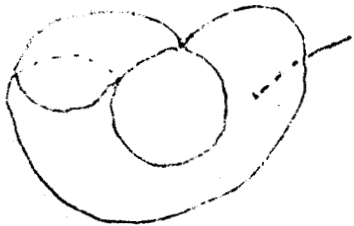
Un exemple analogue en dimension trois, où les feuilles  $z$  et  $t$  sont confondues donnerait un branchement d'ordre trois.

c) Toutefois, lorsque la forme de Morse  $\omega$  est générique, tous les branchements sont simples et il y en a un par singularité de type I :

Les points de branchements sont obtenues, en procédant aux identifications convenables dans le voisinage  $W$  d'un point selle de type I.

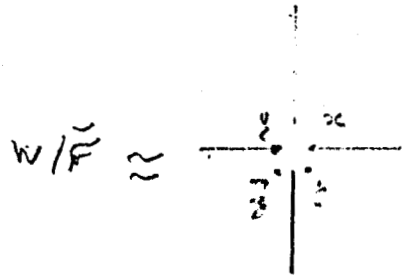
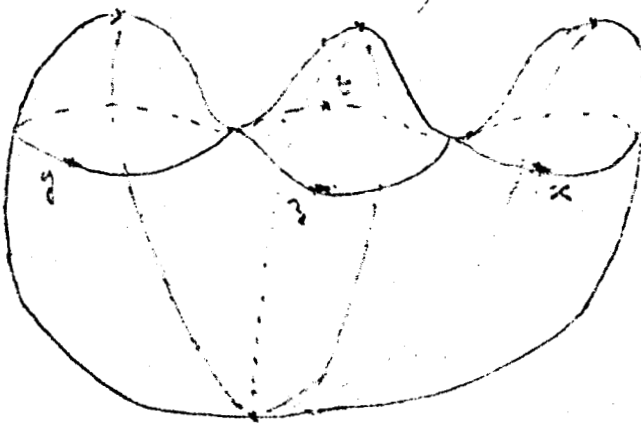
Mais tous les points selles de type I ne donnent pas des points de branchements :

a) Ainsi si les deux cônes issus d'un point selle sont sur une même feuille, l'espace des feuilles  $W/\hat{F}$  est  $\mathbb{R}$ .



$$W/\hat{F} \approx \mathbb{R}$$

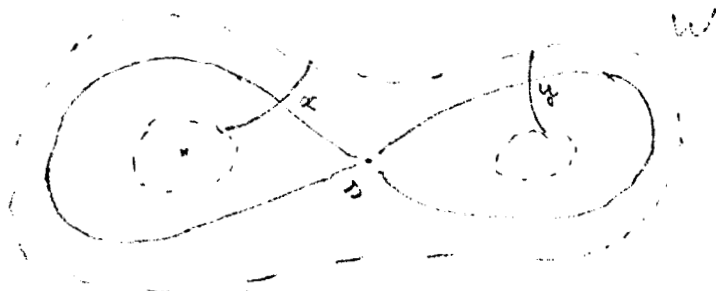
b) L'ordre du point de branchement dépend du nombre de singularités de type I contenu dans  $W$  :



pour le feuilletage défini sur  $S^2$  (comme ci-dessus) par la fonction cote  $\hat{W}/\hat{F}$  contient un branchement d'ordre 4  $(x, y, z, t)$ .

Un exemple analogue en dimension trois, où les feuilles  $z$  et  $t$  sont confondues donnerait un branchement d'ordre trois.

c) Toutefois, lorsque la forme de Morse  $\omega$  est générique, tous les branchements sont simples et il y en a un par singularité de type I :



Dans ce cas, les points de branchement  $(x,y)$  représentent le couple de feuilles singulières issues de la singularité.

iii) Les bouts de  $\hat{M}/\hat{F}$  sont les bouts des trajectoires aboutissant à un centre.  $\square$

(4,2,2) Corollaire. -  $\hat{M}/\hat{F}$  est quasi-compacte si et seulement si  $\omega$  ne possède pas de centre.

Soit  $\hat{f} : \hat{M} \rightarrow \hat{M}/\hat{F}$  la projection canonique. On peut prolonger  $\hat{f}$  en une application continue de  $M_2 = \hat{M} \cup \Sigma_{II}$  sur  $\hat{M}/\hat{F}$  : en effet, si  $s$  est un point selle de type II il n'y a qu'une seule feuille singulière issue de  $s$  et si  $a$  est l'image de cette feuille par  $\hat{f}$  on prolonge  $\hat{f}$  en  $s$  en posant  $\hat{f}(s) = a$ .

De plus, soit  $dt$  la forme coordonnée dans une carte de l'atlas affine défini plus haut. Comme les applications de transition sont des translations, les formes  $dt$  définissent une forme  $d\theta$  sur  $\hat{M}/\hat{F}$  qu'on appellera forme fondamentale.

(4,2,3) Proposition. - L'application  $\hat{f} : M_2 \rightarrow \hat{M}/\hat{F}$  est différentiable. Les points critiques sont les points selles de type II et sont non dégénérés.

De plus  $\omega_{/M_2} = f^* d\theta$ .

En effet, si  $x$  est un point de  $M_2$  et  $(U, \psi)$  une carte de  $\hat{M}/\hat{F}$  au voisinage de  $\hat{f}(x)$ , dans un voisinage de  $x$ ,  $\hat{f}$  coïncide avec une fonction de Morse  $g$  telle que  $\omega = dg$ .  $\square$

#### (4,3) - GRAPHE ASSOCIEE A UNE FORME DE MORSE GENERIQUE.

On se propose dans ce paragraphe d'associer un graphe  $G_\omega$  à une forme de Morse  $\omega$  dont les feuilles sont fermées. Bien que ce ne soit pas nécessaire pour la construction du graphe on se limitera au cas où  $\omega$  est générique pour obtenir une interprétation simple des sommets du graphe en terme de singularités.

$G_\omega$  se construit à partir de l'espace des feuilles de la manière suivante :

- i) On identifie les couples de points  $(x,y)$  tels que  $(x,y)$  soit un branchement simple.
- ii) On compactifie l'espace obtenu par les bouts.
- iii) On rajoute un sommet en tout point  $\hat{f}(s)$  tel que  $s$  soit un point selle de type II.

On obtient ainsi un graphe fini orienté  $G_\omega$  ayant les propriétés suivantes :

- a) Les sommets du graphe sont de degré 1, 2 ou 3 et respectivement en bijection avec les centres, les points selles de type II et les points selles de type I de  $\omega$ .
- b) Les arcs représentent des transversales allant d'une singularité à une autre sans couper des feuilles singulières.
- c) Enfin  $G_\omega$  peut être muni d'une structure affine en un sens que nous allons préciser :

Il est clair que la structure affine sur  $\hat{M}/\hat{F}$  définit une structure affine sur le complété par les bouts  $(\hat{M}/\hat{F})$  de  $\hat{M}/\hat{F}$ . De plus, la projection  $P : (\hat{M}/\hat{F}) \rightarrow G\omega$  est une bijection entre le domaine  $U$  d'une carte  $(U, \psi)$  de  $(\hat{M}/\hat{F})$  et son image  $P(U)$ .

On peut alors définir un "atlas"  $(P(U), \Psi)$  où  $\Psi = \psi \circ P^{-1}$  du graphe  $G\omega$  dont les applications de transitions sont encore des translations.

Remarquons que les domaines des cartes de cet "atlas" ne sont pas des ouverts de  $G\omega$ .

Toutefois, on peut définir sur  $G\omega$ , comme sur une variété un fibré tangent et l'on a donc la notion d'application différentiable à valeur dans  $G\omega$ .

De plus, les formes coordonnées  $dt$  définissent globalement une forme  $d\theta$  sur  $G\omega$  qu'on appellera forme fondamentale.

Ces remarques permettent d'améliorer la proposition (4,2,3).

(4,3,1) Proposition. - L'application  $p \circ \hat{f} : M_2 \rightarrow G\omega$  se prolonge en une application différentiable  $f : M \rightarrow G\omega$  dont l'ensemble des points critiques est exactement l'ensemble  $\Sigma$  des singularités de  $\omega$ . De plus  $\omega = f^* d\theta$  où  $d\theta$  est la forme fondamentale sur  $G\omega$ .  $\square$

Démonstration : On prolonge  $p \circ \hat{f}$  à  $M$  en envoyant chaque singularité de  $\omega$  sur le sommet du graphe qui lui est associé. Si  $(U, \Psi)$  est une carte de  $G\omega$  l'application  $\Psi \circ f|_{f^{-1}(U)}$  est les restrictions à  $f^{-1}(U)$  d'une fonction de Morse  $g$  définie sur un ouvert  $V$  de  $M$  et telle que  $\omega|_V = dg$ . Donc  $f$  est différentiable et est une submersion en restriction à  $\hat{M}$ .



De plus,  $\hat{\omega} = (\psi_i \circ f)^* dt = f^* \psi_i^* dt = f^* d\theta$ .  $\square$

Remarque : On a construit  $G_\omega$  à partir de l'espace des feuilles. Inversement, il est clair que la donnée du graphe  $G_\omega$  détermine l'espace des feuilles.

(4,4) - GRAPHE DUAL ASSOCIE A UNE FORME GENERIQUE.

Nous allons décrire un autre procédé permettant d'associer un graphe à une forme de Morse générique  $\omega$  dont toutes les feuilles sont fermées.

Soit  $K$  la réunion des feuilles singulières et des singularités.  $M - K$  a un nombre fini de composantes connexes  $A_1, A_2, \dots, A_p$ . Toutes les feuilles de  $A_i$  sont difféomorphes entre elles. On en fixe une notée  $F_i$ .

On construit un graphe  $G_\omega$  de la façon suivante :

- i) Les sommets de  $\hat{G}_\omega$  sont les feuilles  $F_i$ .
- ii) Un arc de  $\hat{G}_\omega$  est un couple  $(F_i, F_j)$  tel qu'il existe une trajectoire orientée du champ dual  $\hat{X}$  allant de  $F_i$  à  $F_j$  sans couper les autres feuilles  $F_k$  choisies.

Rappelons que le graphe dual d'un graphe orienté  $G$  est le graphe  $G$  obtenu en prenant comme sommets les arcs de  $G$  et en reliant deux sommets  $x$  et  $y$  par un arc si l'extrémité de l'arc  $x$  est l'origine de l'arc  $y$ .

On a alors la relation suivante entre  $G_\omega$  et  $\hat{G}_\omega$  :

(4,4,1) Proposition. -  $\hat{G}_\omega$  est le graphe dual de  $G_\omega$ .

Démonstration : En effet, à un arc de  $G_\omega$  correspond une composante connexe de  $M - K$  donc une feuille  $F_i$ . De plus, deux arcs

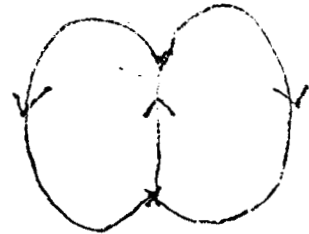
consécutifs de  $G\omega$  représentent une transversale de  $\hat{X}$  qui joint les feuilles types correspondantes sans en couper d'autres.  $\square$

Remarque :  $G\omega$  n'est en général pas le dual de  $\tilde{G}\omega$ .

Prenons le feuilletage, sans centre défini à partir du feuilletage suivant sur  $S^2$  en recollant les disques  $D_1$  et  $D'_1$  ainsi que  $D_2$  et  $D'_2$  :



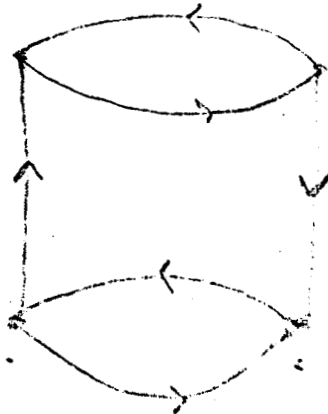
On a  $G\omega$  :



$\tilde{G}\omega$  :



Mais le dual de  $\tilde{G}\omega$  est :



(4,5) UN THEOREME DE TISCHLER POUR LES FORMES AVEC SINGULARITES.

Tischler ([Ti]) a montré que toute forme fermée sans singularité pouvait être approchée par une forme fermée sans singularité dont toutes les feuilles sont compactes et définissant par conséquent une fibration de base  $S^1$ .

Pour une forme quelconque ce résultat s'étend facilement de la façon suivante :

(4,5,1) Proposition. - Soit  $M$  une variété compacte de classe  $C^\infty$ . Les formes fermées génériques  $\omega$  sur  $M$  vérifiant les conditions suivantes :

- i) toutes les feuilles de  $\omega$  sont fermées ,
- ii) le groupe des périodes  $P_\omega$  est isomorphe à  $Z$  ,

sont denses dans l'ensemble des formes fermées munis de la  $C^\infty$  topologie.

Démonstration : Soit  $\alpha$  une forme fermée sur  $M$  et  $p$  et  $p'$  les projections de  $M \times S^1$  sur  $M$  et  $S^1$  respectivement. Alors  $\Omega = p^*\alpha + p'^*d\theta$  est une forme sans singularité sur  $M \times S^1$  et si  $h$  est le plongement  $h : M \rightarrow M \times S^1$  on a  $h^*\Omega = \alpha$ .  
 $x \rightsquigarrow (x, 1)$  .

Le théorème de Tischler ([Ti]) appliqué à la forme fermée sans singularité  $\Omega$  montre qu'il existe une forme fermée  $\Omega'$  sans singularité  $C^\infty$  proche de  $\Omega$  dont toutes les feuilles sont compactes.

D'autre part, on peut trouver d'après (4,1,1) un plongement  $h_1$ ,  $C^\infty$  proche de  $h$ , tel que  $\omega = h_1^*\Omega'$  soit générique.

Alors  $\omega$  est une forme  $C^\infty$  proche de  $\alpha$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $\omega$  définit un feuilletage avec singularités dont toutes les feuilles sont fermées.

ii) Le groupe des périodes  $P_\omega$  de  $\omega$ , qui s'injecte dans le groupe des périodes de  $\Omega'$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  car  $P_{\Omega'} = \mathbb{Z}$ .

B I B L I O G R A P H I E.

-----

- [C.N] C. CAMACHO et A. NETO - *Introdução à Teoria das Folheações.*  
I.M.P.A. - Rio de Janeiro, (1977).
- [Ha] A. HAEFLIGER - *Variétés feuilletées.*  
Ann. Scuola Normale Sup. Pisa  
16 (1964) 367-397.
- [Hae] A. HAEFLIGER - *Structure feuilletée et cohomologie*  
*à valeur dans un faisceau de groupoïdes.*  
Commentarii 32 (1957-58) 248-329.
- [He] G. HECTOR - *Croissance des feuilletages presque sans*  
*holonomie.*  
Lecture Notes n° 652 - 141-182.
- [Ku] I. KUPKA - Communication orale.
- [Im] H. IMANISHI - *On codimension one foliations defined by*  
*closed one forms with singularities.*  
J. Math. Kyoto Univ. 19-2 (1979) 285-291.
- [M] J. MILNOR - *Morse theory.* Princeton Univ. Press (1963).
- [Re] G. REEB - *Sur certaines propriétés topologiques des*  
*variétés feuilletées.*  
Act. Scient. et Indust. Hermann Paris (1952).
- [Sa] R. SACKSTEDER - *Foliations and pseudo-groups.*  
Amer of Math. 87 (1965) 79-102.
- [Ti] D. TISCHLER - *On fibering certain foliated manifold*  
*over  $S^1$ .*  
Topology 9 (1970) 153-154.

