N° d'ordre : 897

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Abdallah BOUNABAT

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DE CONTROLE OPTIMAL

Membres du Jury : P. POUZET, Président
F. MIGNOT, Rapporteur
C. BREZINSKI, Examinateurs
G. HECQUET, Examinateurs

Soutenue le 24 Juin 1981

N° d'ordre : 897

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Abdallah BOUNABAT

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DE CONTROLE OPTIMAL

Membres du Jury : P. POUZET, Président
F. MIGNOT, Rapporteur
C. BREZINSKI, Examinateurs
G. HECQUET, Examinateurs

Soutenue le 24 Juin 1981

J'adresse à Monsieur Pouzet tous mes remerciements pour avoir bien voulu accepter la présidence du jury.

J'ai mené à bien ce travail sous la direction de Monsieur Mignot. Je ne saurais dire combien son aide et ses conseils m'ont été précieux qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Messieurs Brézinski et Hecquet qui ont accepté de faire partie du jury.

Je remercie également, toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail, Messieurs Van-Ingelandt et Yvon Tinel pour la partie Informatique, Madame Lengaigne qui a assuré la dactylographie, ainsi que le personnel de l'imprimerie de l'U.E.R. de Mathématiques de Lille.

TABLE DES MATIERES.

./..

Pages

Position du problème.

Soit le problème de contrôle optimal perturbé suivant :

$$
(\mathrm{I}) \; : \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \; u_\varepsilon \in U_{ad} \;, \; \text{solution de} \\[2ex] J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \displaystyle\inf_{v \in U_{ad}} (J_\varepsilon(v)) \end{array} \right.
$$

où Uad est un convexe fermé de $L^2(\Gamma)$ et $J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y_\varepsilon(v) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2 \, d\Gamma$

N = constante positive.

z_d = une fonction donnée appartenant à $L^2(\Gamma)$.

$y_\varepsilon(v)$ = est l'état du système, il est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$
(\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta y_\varepsilon(v) = 0 \quad , \quad \text{dans } \; \Omega \\[2ex] \dfrac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu} + \varepsilon \, y_\varepsilon(v) = v \quad , \quad \text{sur } \; \Gamma \\[2ex] v \in L^2(\Gamma) \;, \quad y_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega) \;. \end{array} \right.
$$

Il est évident que le problème (II) mis sous forme variationnelle, admet une solution unique $y_\varepsilon(v)$ (théorème de Lax-Milgramm).

Le problème (I) possède une solution unique $u_\varepsilon \in U_{ad}$ voir (théorème 1.1., [1]).

On veut que $\chi_\varepsilon = \underset{v \in U_{ad}}{\operatorname{Inf}} (J_\varepsilon(v))$, admette une <u>limite finie</u> quand ε tend vers 0.

La suite $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ <u>ne converge pas pour tout</u> $U_{ad} \subset L^2(\Gamma)$.

<u>Un exemple</u> :

Soit $U_{ad} = \{v\}$, $v \in L^2(\Gamma)$ et $\int_\Gamma v \, d\Gamma \neq 0$.

On a la proposition suivante :

<u>Proposition</u> : La suite $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ tend vers ∞, quand ε tend vers 0.

<u>Preuve</u> : On fait un raisonnement par l'absurde. On suppose que $y_\varepsilon(v)$ reste borné dans $L^2(\Gamma)$. $\varepsilon\, y_\varepsilon(v)$ tend dans $L^2(\Gamma)$ vers 0, quand $\varepsilon \to 0$ $\dfrac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu} = - \varepsilon\, y_\varepsilon(v) + v$, reste bornée dans $L^2(\Gamma)$ donc à la limite on a :

$$\begin{cases} -\Delta y(v) = 0, & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v, & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Par la formule de Green on a :

$$\int_\Gamma v . d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial y(v)}{\partial \nu} . 1 \, d\Gamma = \int_\Omega (\nabla y(v), \nabla 1) \, dx = 0$$

$$\int_\Gamma v \, d\Gamma = 0 \quad \text{contradiction !}$$

$\int_\Gamma (y_\varepsilon(v))^2 \, d\Gamma$ tend donc vers ∞, quand $\varepsilon \to 0$

$J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y_\varepsilon(v) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2 \, d\Gamma$ devient infini pour ε tendant vers 0.

Conclusion :

Si on suppose que le convexe U_{ad} (ensemble des contrôles admissibles) vérifie $U_{ad} \cap \{v \in L^2(\Gamma) / \int v \, d\Gamma = 0\} = \emptyset$, la suite U_ε , ne converge pas et la limite des coûts J_ε tend vers ∞, quand $\varepsilon \to 0$.

CHAPITRE I

On suppose dans tout ce chapitre :

. $\varepsilon > 0$, un nombre réel positif - petit.

. $U_{ad} = \{v \in L^2(\Gamma) \ / \int_\Gamma v \, d\Gamma = 0\}$, le convexe des contrôles admissibles.

. $V = \{y \in H^1(\Omega) \ / \int_\Gamma y \, d\Gamma = 0\}$, espace des états du système.

. $(.,.)$ le produit scalaire dans V

$$(y,\varphi)_V = \int_\Omega (\nabla y, \nabla\varphi) \, dx \ , \quad \forall y \in V \ , \ \forall\varphi \in V \ .$$

Le problème du contrôle optimal perturbé :

On cherche $u_\varepsilon \in U_{ad}$, solution du problème :

$$\text{(P)} \qquad J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \operatorname*{Inf}_{v \in U_{ad}} (J_\varepsilon(v))$$

$$J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y_\varepsilon(v) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2 \, d\Gamma \ , \quad \forall v \in U_{ad} \ .$$

. z_d est une fonction quelconque dans $L^2(\Gamma)$, donnée à l'avance.

. N = constante positive.

. $y_\varepsilon(v)$ est l'état du système à contrôler. Il est solution du problème (P1). suivant :

$$\text{(P1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} - \Delta y_\varepsilon(v) = 0 \ , \quad \text{dans } \Omega \\[2ex] \dfrac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu} + \varepsilon \, y_\varepsilon(v) = v \ , \quad \text{sur } \Gamma \\[2ex] y_\varepsilon(v) \in V \ , \quad (v \in U_{ad}) . \end{array} \right.$$

Cet exemple a été considéré par Lions [3].

Objectif du chapitre (I).

Il s'agit dans ce chapitre, d'étudier la convergence de u_ε, le contrôle optimal perturbé, quand $\varepsilon \to 0$ et d'établir les systèmes d'optimalités.

1 - *Formulation variationnelle sur l'Hilbert* V.

On désigne par :

. $$\|y\|'_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (\nabla y, \nabla y)\, dx + \int_\Omega y^2\, dx\right)^{1/2}$$

la norme usuelle de $H^1(\Omega)$.

. $(.,.)_V$ le produit scalaire suivant :

$$(y,\psi)_V = \int_\Omega (\nabla y, \nabla \psi)\, dx \ , \quad \forall y \in V \ , \ \forall \psi \in V$$

. $\|y\|_{L^2(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma (y^2)\, d\Gamma\right)^{1/2}$, la norme usuelle de $L^2(\Gamma)$.

. $(.,.)_{L^2(\Gamma)}$, le produit scalaire usuel dans $L^2(\Gamma)$, on applique la formule de Green au problème (P1). On obtient, $\forall v \in U_{ad}$:

$$0 = -\int_\Omega (\Delta y_\varepsilon(v) \ . \ \psi)\, dx = \int_\Omega (\nabla y_\varepsilon(v), \nabla\psi)\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu} \ . \ \psi\, d\Gamma \quad \forall \psi \in V \ .$$

$$\int_\Gamma (\nabla y_\varepsilon(v), \nabla\psi)\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu} \ . \ \psi\, d\Gamma, \quad \forall \psi \in V \ .$$

Le problème (P1) est équivalent au problème (P2), suivant, $\forall v \in U_{ad}$:

$$(P2) \begin{cases} \text{Trouver } y_\varepsilon(v) \in V \text{ solution de :} \\ \\ \displaystyle\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon(v), \nabla\psi)\, dx + \varepsilon \int_\Gamma y_\varepsilon(v) \ . \ \psi\, d\Gamma = \int_\Gamma v \ . \ \psi\, d\Gamma, \ \forall \psi \in V \end{cases}$$

Lemme 1.1.- Soit $p : V \to \mathbb{R}^+$, définie par

$$p^2(y) = \int_\Omega (\nabla y, \nabla y)\, dx \ , \quad \forall y \in V$$

L'application p est une norme sur V équivalente à la norme induite par $H^1(\Omega)$ sur V.

Preuve :

a) On vérifie facilement que p est une norme sur le sous-espace vectoriel V de $H^1(\Omega)$. Il est évident que p vérifie les axiomes d'une semi-norme.

$$p(y) = 0 \Longrightarrow \int_\Omega (\nabla y, \nabla y)\, dx = 0 \Longrightarrow y \equiv \text{cste} \ .$$

Si $y \in V$, on a $\int_\Gamma y\, d\Gamma = 0 \Longrightarrow \text{cste} \equiv 0 \Longrightarrow y \equiv 0$

donc p est une norme sur V.

b) p est une norme équivalente à la norme induite par $H^1(\Omega)$ sur V.

On utilise le lemme suivant :

Lemme de Peetre : Soient E et F deux espaces de Banach munis respectivement de $\| \ \|_E$, et $\| \ \|_F$.

H_1) $E \hookrightarrow F$, injection compacte.

H_2) $p : E \to \mathbb{R}^+$, une norme sur E continue.

H_3) On suppose : $\exists\ \lambda > 0$, telle que :

$$p(y) + \lambda \,.\, \|y\|_F \geq \|y\|_E \ , \quad \forall y \in E$$

Alors :

$\exists\, C > 0$ telle que : $p(y) \geq C\, ||y||_E$, $\forall y \in E$.

On applique, le lemme pour :

$E = V$, muni de sa norme usuelle.

$F = L^2(\Omega)$, muni de sa norme usuelle.

$E \hookrightarrow F$, il y a injection compacte.

E est muni de la norme p.

On a : $p^2(y) + ||y||^2_{L^2(\Omega)} \geq ||y||^2_{H^1(\Omega)}$, $\forall y \in V$ alors il existe $C > 0$ telle que :

$$p^2(y) \geq C\, ||y||^2_{H^1(\Omega)} .$$

Lemme 1.2.- Le sous-espace vectoriel V de $H^1(\Omega)$ est un Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme p.

Preuve : On définit le produit scalaire suivant :

$$(y,\varphi)_V = \int_\Omega (\nabla y, \nabla\varphi)\, dx \ , \quad \forall y \in V \ , \ \forall \varphi \in V$$

on vérifie que l'on a :

$$p^2(y) = (y,y)_V \ , \forall y \in V$$

Soit (y_n) une suite de Cauchy dans V pour la norme p.

C'est une suite de Cauchy de $H^1(\Omega)$.

Car la norme induite sur V par $H^1(\Omega)$ est équivalente à la norme p.

$H^1(\Omega)$ est un Hilbert, donc complet et la suite y_n converge fortement dans $H^1(\Omega)$ vers $y \in H^1(\Omega)$ on a ,

$$\left| \int_\Gamma (y_n - y)\, d\Gamma \right| \leq |\Gamma| \; ||y_n - y||_{L^2(\Gamma)}$$

$$\leq |\Gamma| \; ||y_n - y||_{H^1(\Omega)}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Gamma y_n \, d\Gamma = \int_\Gamma y \, d\Gamma$, $\int_\Gamma y_n \, d\Gamma = 0$ car $y_n \in V$ on obtient

$y \in H^1(\Omega)$ et $\int_\Gamma y \, d\Gamma = 0$ car $y \in V$.

$$p^2(y_n - y) = ||y_n - y||_V^2 \leq ||y_n - y||^2_{H^1(\Omega)}$$

$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ fortement dans $H^1(\Omega)$ donc

$$\lim_{n\to\infty} ||y_n - y||_{H^1(\Omega)} = 0 .$$

Toute suite de Cauchy dans V converge fortement pour la norme p dans V.

Lemme 1.3.- Le problème (P2), admet une solution unique $y_\varepsilon(v) \in V$, $\forall v \in U_{ad}$.

Preuve : On applique le théorème de Lax-Milgramm.

Soit v quelconque dans U_{ad}.

. L'application

$$a : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ (\varphi,\Psi) & \longrightarrow & a(\varphi,\Psi) = \int_\Omega (\nabla\Psi,\nabla\varphi)\, dx + \varepsilon \int_\Gamma \Psi \cdot \varphi \, d\Gamma \end{array}$$

est bilinéaire-continue sur $V \times V$.

. L'application, $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\psi \longmapsto L(\psi) = \int_\Gamma v \,.\, \psi \, d\Gamma$$ est

linéaire continue sur V.

. <u>L'application</u> a <u>est coercive sur</u> V :

Il faut vérifier que l'on a :

$$a(y,y) \geq C \, ||y||_V^2 \quad , \quad \forall y \in V$$

C = constante positive .

$$a(y,y) = \int_\Omega (\nabla y, \nabla y) \, dx + \varepsilon \int_\Gamma y^2 \, d\Gamma$$

$$\geq \mathrm{Inf}(1,\varepsilon) \left(\int_\Omega (\nabla y, \nabla y) \, dx + \int_\Gamma y^2 \, d\Gamma \right)$$

soit $$q(y) = \left(\int_\Omega (\nabla y, \nabla y) \, dx + \int_\Gamma y^2 \, d\Gamma \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H^1(\Omega)$, équivalente la norme usuelle dans $H^1(\Omega)$.

On prend $c(\varepsilon) = \mathrm{Inf}(1,\varepsilon)$.

Il existe $c > 0$ telle que : $C||y||^2_{H^1(\Omega)} \leq q^2(y)$ on a,

$$a(y,y) \geq c(\varepsilon) \, ||y||^2_{H^1(\Omega)} \geq c(\varepsilon) \,.\, p^2(y) = c(\varepsilon) \, ||y||_V^2 \quad , \quad \forall y \in V.$$

Le problème (P2) admet une solution unique $y_\varepsilon(v) \in V$, $\forall v \in U_{ad}$, puisque toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgramm ont été vérifiées.

On écrit la formulation variationnelle, sous la forme :

$$B(y_\varepsilon(v), \psi) + \varepsilon \, A(y_\varepsilon(v), \psi) = \int_\Omega (\nabla y_\varepsilon(v), \nabla \psi) \, dx + \varepsilon \int_\Gamma (y_\varepsilon(v) \,.\, \psi) \, d\Gamma$$

où :

$$B(y_\varepsilon(v),\varphi) = \int_\Omega (\nabla y_\varepsilon(v), \nabla\varphi)\, dx \,, \quad \forall\varphi \in V$$

$$A(y_\varepsilon(v),\varphi) = \int_\Gamma y_\varepsilon(v) \,.\, \varphi\, d\Gamma \,, \quad \forall\varphi \in V$$

2 - *Etude de la convergence du contrôle optimal sur* U_{ad}.

Théorème 2.1.- $\forall v \in U_{ad}$, la solution $y_\varepsilon(v)$ du problème (P2) converge fortement dans V , muni de la norme induite par $H^1(\Omega)$, vers $y(v) \in V$ solution du problème :

(P4)
$$\begin{cases} -\Delta y(v) = 0 \,, & \text{dans } \Omega \,, \\ \dfrac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v \,, & \text{sur } \Gamma \,. \\ \displaystyle\int_\Gamma y(v)\, d\Gamma = 0 \,. & \end{cases}$$

Preuve :

A - *Etude de la convergence faible sur* V.

On utilise la formulation variationnelle.

On pose $y_\varepsilon(v) = y_\varepsilon$

on a, (2) $\varepsilon A(y_\varepsilon, y_\varepsilon) + B(y_\varepsilon, y_\varepsilon) = \int_\Gamma v \,.\, y_\varepsilon\, d\Gamma \,, \quad \forall v \in U_{ad}$

$$\varepsilon A(y_\varepsilon, y_\varepsilon) = \varepsilon \left(\int_\Gamma (y_\varepsilon)^2\, d\Gamma\right) \geq 0$$

$$B(y_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \int_\Gamma v \,.\, y_\varepsilon\, d\Gamma \leq \left(\int_\Gamma v^2\, d\Gamma\right)^{1/2} \left(\int_\Gamma y_\varepsilon^2\right)^{1/2}$$

On désigne toutes les constantes de majorations par la même lettre C.

$$||y_\varepsilon||_V^2 \leq C\left(\int_\Gamma v^2\, d\Gamma\right)^{1/2} ||y_\varepsilon||_V$$

car : $||\varphi||_V \geq C\, ||\varphi||_{H^1(\Omega)} \,, \quad \forall\varphi \in V$.

v étant fixé, on a (3) $\quad ||y_\varepsilon||_V \leq C\,||v||_{L^2(\Gamma)} \leq C'$. La suite y_ε est bornée dans V , elle converge donc faiblement vers $y_1(v) \in V$.

La limite faible vérifie le problème (P3) suivant :

$$
(P3) \quad \begin{cases} B(y_1,\varphi) = \displaystyle\int_\Gamma v\,.\,\varphi\, d\Gamma\ , & \forall\varphi \in V \\ y_1 \in V\ , \quad \forall v \in U_{ad} \end{cases}
$$

Etude de la convergence forte sur V.

On pose :

$$X_\varepsilon = B(y_\varepsilon - y_1,\ y_\varepsilon - y_1)$$

$$
\begin{aligned}
X_\varepsilon &= B(y_\varepsilon\ ,\ y_\varepsilon - y_1) - B(y_1,\ y_\varepsilon - y_1) \\
&\leq B(y_\varepsilon\ ,\ y_\varepsilon - y_1) - (v,\ y_\varepsilon - y_1)_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq B(y_\varepsilon,\ y_\varepsilon) - B(y_\varepsilon,\ y_1) - (v,\ y_\varepsilon - y_1)_{L^2(\Gamma)}\ .
\end{aligned}
$$

$$X_\varepsilon \leq \varepsilon\, A(y_\varepsilon,\ y_\varepsilon) + B(y_\varepsilon,\ y_\varepsilon) - B(y_\varepsilon,\ y_1) - (v,\ y_\varepsilon - y_1)_{L^2(\Gamma)}\ .$$

on vérifie à l'aide de la formulation variationnelle :

5 $$\varepsilon\, A(y_\varepsilon,\ y_\varepsilon) + B(y_\varepsilon,\ y_\varepsilon) = (v,\ y_\varepsilon)_{L^2(\Gamma)}$$

$$0 \leq X_\varepsilon \leq -\,B(y_\varepsilon,\ y_1) + (v,\ y_1)_{L^2(\Gamma)}$$

y_ε converge faiblement vers $y_1 \in V$, on a :

$$0 \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,(X_\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\,\left(-\,B(y_\varepsilon,\ y_1) + (v,y_1)_{L^2(\Gamma)}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\,(X_\varepsilon) = 0$$

$$X_\varepsilon = B(y_\varepsilon - y_1,\ y\ - y_1) \geq C\,||y - y_1||^2_{H^1(\Omega)}\ .$$

On a donc , $\lim_{\varepsilon \to 0} ||y_\varepsilon - y_1||_{H^1(\Omega)} = 0$,

y_ε converge fortement vers $y_1 \in V$, la limite faible solution du problème (P4).

Théorème 2.2.- On a les résultats suivants :

1) $J_\varepsilon(v) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} J(v)$, $\forall v \in U_{ad}$.

2) $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u$, fortement dans U_{ad} , muni de la norme induite par celle de $L^2(\Gamma)$, où u est l'optimum :

$$J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in U_{ad}} (J(v)) .$$

<u>Preuve</u> :

1) Le problème limite admet une solution unique u^* ,

$$J(u^*) = \operatorname*{Inf}_{v \in U_{ad}} (J(v)) .$$

$$J(v) = \int_\Gamma |y(v) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2 \, d\Gamma \ , \ \forall v \in U_{ad}$$

$y(v)$ <u>est la solution du problème</u> :

$$(P4) \quad \begin{cases} -\Delta y(v) = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v \ , & \text{sur } \Gamma \\ \int_\Gamma y(v) \, d\Gamma = 0 \end{cases}$$

Pour l'existence et l'unicité de l'optimum u^* , on applique le théorème (1.1.) (J.L. Lions [1]) à l'application strictement convexe J sur U_{ad} .

2) On a $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J(0) = \int_\Gamma z_d^2 \, d\Gamma = C$

on déduit de (2) $||u_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \leq C$

u_ε converge donc faiblement vers un $u \in U_{ad}$ (une sous-suite) , muni de la norme induite par celle de $L^2(\Gamma)$.

3) On a, $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} J(u^*)$.

Pour la démonstration de 3) on utilise le théorème (2.1.) établi précédemment.

$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v)$, $\forall v \in U_{ad}$ (définition du contrôle optimal perturbé).

$\forall v \in U_{ad}$, on a :

$0 \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} (J_\varepsilon(u_\varepsilon)) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v) = J(v)$ (d'après le théorème 2.1.)

en prenant $v = u^*$ on a donc :

$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J(u^*)$ (u^* l'optimum dans U_{ad}) J_ε est une application semi-continue inférieurement sur U_{ad} .

On a, $\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} (J_\varepsilon(u_\varepsilon)) \geq J(u)$ ($u_\varepsilon \rightharpoonup u \Longrightarrow y_\varepsilon(u) \longrightarrow y(u)$, dans $H^1(\Omega)$ donc dans $L^2(\Omega)$) ; (démontré dans la page suivante).

u est la limite faible de u_ε dans U_{ad} .

Donc l'optimum u^* vérifie, $J(u^*) \geq J(u)$.

On a donc, $u^* = u$ car l'optimum de J est unique.

Donc u^* (l'optimum), est la limite faible dans $L^2(\Gamma)$ de toute la suite u_ε.

4) <u>La suite</u> u_ε <u>converge fortement vers</u> u^* <u>pour la norme de</u> $L^2(\Gamma)$.

a) <u>On a</u> , $\|y_\varepsilon - z_d\|^2_{L^2(\Gamma)} \longrightarrow \|y(u^*) - z_d\|^2_{L^2(\Gamma)}$.

Pour démontrer a) on utilise la formulation variationnelle du problème perturbé.

Les calculs précédents donnent :

$$\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon, \nabla y_\varepsilon)\, dx + \varepsilon \int_\Gamma y_\varepsilon^2\, d\Gamma = \int_\Gamma u_\varepsilon \cdot y_\varepsilon\, d\Gamma .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon, \nabla y_\varepsilon)\, dx + \varepsilon \int_\Gamma y^2\, d\Gamma \leq \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \|y_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}$$

On utilise (4.2.), (4.1.) et (4.3.).

(4.2.) : $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \leq C$

(4.1.) : $C\, \|y_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|y_\varepsilon\|_V$

on obtient $\|y_\varepsilon\|_V \leq C$.

$V \subset H_1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, il y a injection compacte.

La suite y_ε étant bornée dans V , elle converge <u>faiblement</u> vers $y(u^*)$ dans V.

y_ε converge donc fortement dans $L^2(\Omega)$ vers $y(u^*)$ car il y a injection compacte de V dans $L^2(\Omega)$ donc on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ||y_\varepsilon - z_d||_{L^2(\Gamma)} = ||y(u^*) - z_d||_{L^2(\Gamma)}$$

b) On a, le résultat suivant :

$$||u_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \longrightarrow ||u^*||_{L^2(\Gamma)} \quad , \quad \varepsilon \to 0 \; .$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Gamma |y_\varepsilon - z_d|^2 \, d\Gamma + \lim_{\varepsilon\to 0} N \int_\Gamma u_\varepsilon^2 \, d\Gamma = \int_\Gamma |y(u^*) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma (u^*)^2 \, d\Gamma$$

on utilise le résultat b), on obtient :

$$||u_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} ||u^*||_{L^2(\Gamma)}$$

On a les deux résultats suivants :

1) $||u_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} ||u^*||_{L^2(\Gamma)}$

2) u_ε converge faiblement dans $L^2(\Gamma)$ vers l'optimum u^*.

On en conclut de 1) et de 2) que la suite u_ε converge fortement vers l'optimum u^* du problème limite.

3 - *Le système d'optimalité - L'étude de la convergence de l'état adjoint perturbé.*

3.1. - *L'état - adjoint perturbé* :

On introduit $p_\varepsilon(v) \in V$, $\forall v \in U_{ad}$, solution du problème (E1) suivant :

$$(E1) \quad : \quad \begin{cases} - \Delta p_\varepsilon(v) = 0 \ , \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial p_\varepsilon(v)}{\partial \nu} + \varepsilon \ p_\varepsilon(v) = (y_\varepsilon(v) - z_d) + \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma p_\varepsilon(v) \, d\Gamma = 0 \quad , \quad v \in U_{ad} \ . \end{cases}$$

<u>On a la formule suivante</u> :

$$\boxed{\int_\Gamma (p_\varepsilon(v) + Nv) \ . \ w \, d\Gamma = \int_\Gamma (y_\varepsilon(v) - z_d) \ . \ y_\varepsilon(w) \, d\Gamma + N \int_\Gamma v \ . \ w \, d\Gamma \ , \quad \forall w \in U_{ad} \ .}$$

<u>Preuve de la formule</u> : On sait que, $\forall w \in U_{ad}$, $y_\varepsilon(w)$ est la solution du problème :

$$(P) \quad : \quad \begin{cases} - \Delta y_\varepsilon(w) = 0 \quad , \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon(w)}{\partial \nu} + \varepsilon \ y_\varepsilon(w) = w \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma y_\varepsilon(w) \, d\Gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (y_\varepsilon(v) - z_d) \ y_\varepsilon(w) \, d\Gamma &= \int_\Gamma \left(\frac{\partial p_\varepsilon(v)}{\partial \nu} + \varepsilon \ p_\varepsilon(v)\right) \ . \ y_\varepsilon(w) \, d\Gamma \\ &= \int_\Gamma \frac{\partial p_\varepsilon(v)}{\partial \nu} \ . \ y_\varepsilon(w) \, d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma p_\varepsilon(v) \ . \ y_\varepsilon(w) \, d\Gamma \end{aligned}$$

on applique la formule de Green deux fois, on a :

$$\int_\Gamma \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} \, y_\varepsilon \, d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} \, p_\varepsilon \, d\Gamma \qquad .$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (y_\varepsilon(v) - z_d) \ . \ y_\varepsilon(w) \, d\Gamma &= \int_\Gamma \left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu}(w) + \varepsilon \ y_\varepsilon(w)\right) \ p_\varepsilon(v) \, d\Gamma \ , \quad \forall w \in U_{ad} \\ &= \int_\Gamma p_\varepsilon(v) \ . \ w \, d\Gamma \ , \quad \forall w \in U_{ad} \ . \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

3.2. - *Le système d'optimalité* :

. L'application $U_{ad} : v \longrightarrow J_\varepsilon(v) \in \mathbb{R}$ est strictement - convexe et Gateaux - différentiable.

On vérifie que l'on a :

(3.2.1.) $$\boxed{(J'_\varepsilon(v) \; . \; w) = \int_\Gamma 2(p_\varepsilon(v) + N\, v) \; . \; w \, d\Gamma \; , \; \forall w \in U_{ad} \; .}$$

On applique le théorème 3.1. (J.L. Lions, [1]) .

L'unique élément vérifiant : $J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \underset{v \in U_{ad}}{\operatorname{Inf}} \; (J_\varepsilon(v))$, est caractérisé par :

(3.2.2.) $$(J'_\varepsilon(u_\varepsilon) \; . \; v) \geq 0 \quad , \quad \forall v \in U_{ad} \quad .$$

U_{ad} est un sous-espace vectoriel de $L^2(\Gamma)$, l'inégalité (3.2.2.) est une égalité dans U_{ad}.

L'optimum vérifie la condition :

(3.2.3.) $$(J'_\varepsilon(u_\varepsilon) \; . \; v) = 0 \quad , \quad \forall v \in U_{ad} \quad .$$

on a d'après (3.2.1.) :

(3.2.4.) $$\int_\Gamma (p_\varepsilon(u_\varepsilon) + N\, u_\varepsilon) \; . \; v \, d\Gamma = 0 \; , \quad \forall v \in U_{ad}$$

on pose : $$p_\varepsilon(u_\varepsilon) = p_\varepsilon$$

donc $$p_\varepsilon + N\, u_\varepsilon = \lambda \; , \quad \text{sur } \Gamma, \; \lambda \in \mathbb{R} \; .$$

Calcul de la constante λ :

$$0 = \int_\Gamma p_\varepsilon \, d\Gamma + N \int_\Gamma u_\varepsilon \, d\Gamma = \lambda . \text{ mesure } (\Gamma)$$

car $\quad p_\varepsilon \in V = \{y \in H^1(\Omega) \ / \int_\Gamma y \, d\Gamma = 0\}$

et $\quad u_\varepsilon \in U_{ad} = \{w \in L^2(\Gamma) \ / \int_\Gamma w \, d\Gamma = 0\}$

On a : $\lambda = 0$.

On obtient la condition (3.3.5.), appelé la condition d'optimalité :

(3.2.5.) $$p_\varepsilon + N\, u_\varepsilon = 0 \ , \quad \text{sur } \Gamma.$$

$(y_\varepsilon, p_\varepsilon, u_\varepsilon) \in V \times V \times U_{ad}$, est la solution du système d'optimalité :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta y_\varepsilon = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ -\Delta p_\varepsilon = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, y_\varepsilon = u_\varepsilon \ , & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, p_\varepsilon = (y_\varepsilon - z_d) + \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \ , & \text{sur } \Gamma \\ p_\varepsilon + N\, u_\varepsilon = 0 \ , & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

3.3. - *Etude de la convergence de l'état adjoint* :

Théorème 3.3.- L'état adjoint p_ε , converge fortement dans V muni de sa norme $\| \ \|_V$, vers $p(u^*)$ la solution du problème (E2) , suivant :

$$(E2) : \left\{ \begin{array}{l} -\Delta p(u^*) = 0 \ , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial p}{\partial \nu}(u^*) = (y(u^*) - z_d) + \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \ , \quad \text{sur } \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma p(u^*) \, d\Gamma = 0 \end{array} \right.$$

u^* est le contrôle optimal limite (voir page 12).

Preuve :

A - *Etude de la convergence faible.*

On sait que p_ε est la solution du problème :

$$(E) : \quad \begin{cases} -\Delta p_\varepsilon = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, p_\varepsilon = (y_\varepsilon - z_d) + \dfrac{1}{|\Gamma|}\displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \;, \quad \text{sur } \Gamma \\ p_\varepsilon \in V \end{cases}$$

La formulation variationnelle du problème (E) s'écrit :

$$\int_\Omega (\nabla p_\varepsilon, \nabla \Psi)\, dx + \varepsilon \int_\Gamma p_\varepsilon \,.\, \Psi \, d\Gamma = \int_\Gamma (y_\varepsilon - z_d) \,.\, \Psi \, d\Gamma \;, \quad \forall \Psi \in V$$

on prend, $\Psi = p_\varepsilon$ et on utilise l'équivalence de la norme $\| \ \|_V$ et $\| \ \|_{H^1(\Omega)}$ sur V on obtient :

$$\|p_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C$$

p_ε est une suite bornée dans un Hilbert, elle converge faiblement vers $p(u^*)$, la solution du problème - limite - faible :

$$(E2) : \quad \begin{cases} -\Delta p(u^*) = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial p(u^*)}{\partial \nu} = (y(u^*) - z_d) + \dfrac{1}{|\Gamma|}\displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma p(u^*)\, d\Gamma = 0 \quad , \end{cases}$$

B - *La convergence - forte.*

a) $\|p_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C$, donc $\varepsilon \|p_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \longrightarrow 0$, $\varepsilon \to 0$

$$(y_\varepsilon - z_d) + \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} y(u^*) - z_d + \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z_d \, d\Gamma$$

dans $L^2(\Gamma)$ fort.

b) $||p_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \leq c$ et $\dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} \in L^2(\Gamma)$ alors on a

$||p_\varepsilon||_{H^{3/2}(\Omega)} \leq c$ on en conclut que p_ε <u>converge fortement dans</u> $H^1(\Omega)$

vers.

<u>*Le système d'optimalité à la limite*</u> :

$$(S^1) \; : \; \begin{cases} -\Delta y(u^*) = 0 \; , & \text{dans } \Omega \\ -\Delta p(u^*) = 0 \; , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y(u^*)}{\partial \nu} = u^* \; , & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p(u^*)}{\partial \nu} = y(u^*) - z_d + \dfrac{1}{|\Gamma|}\displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \; , & \text{sur } \Gamma \\ p(u^*) + N\, u^* = 0 \; , & \text{sur } \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma y(u^*)\, d\Gamma = 0 \; , \; \int_\Gamma p(u^*)\, d\Gamma = 0 \text{ et } \int_\Gamma u^*\, d\Gamma = 0 & \\ y(u^*) \in H^1(\Omega)' \; , \; p(u^*) \in H^1(\Omega) \text{ et } u^* \in L^2(\Gamma) \; . & \end{cases}$$

CHAPITRE II

Les notations sont les mêmes, comme le chapitre (I).

On suppose dans tout ce chapitre :

. $U = L^2(\Gamma)$ et $U_{ad} = \{v \in L^2(\Gamma) \ / \int_\Gamma v \, d\Gamma = 0\}$

. $V = H^1(\Omega)$, espace des états du système à contrôler.

On munit $H^1(\Omega)$ de son produit scalaire et de sa norme usuels.

On cherche $u_\varepsilon \in L^2(\Gamma)$ solution de :

$$(P) \quad : \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \operatorname*{Inf}_{v \in L^2(\Gamma)} (J_\varepsilon(v))$$

. $J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y_\varepsilon(v) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2 \, d\Gamma \ , \quad \forall v \in L^2(\Gamma)$

. z_d , donnée à l'avance dans $L^2(\Gamma)$.

. $y_\varepsilon(v)$ est l'état, solution du problème :

$$(P1) \ : \ \begin{cases} -\Delta y_\varepsilon(v) = 0 \ , & \text{dans } \Omega \ , \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu} + \varepsilon \, y_\varepsilon(v) = v \ , & \text{sur } \Gamma \ , \\ y_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega) \ , & \forall v \in L^2(\Gamma) \ . \end{cases}$$

Le problème (P) admet une <u>solution unique</u> , $u_\varepsilon \in L^2(\Gamma)$ d'après le théorème (1.1.) [1], (J.L. Lions).

Résumé du chapitre II :

Il s'agit dans ce chapitre, d'étudier la convergence de la suite u_ε des contrôles optimaux perturbés dans le cas où l'ensemble des solutions admissibles est l'espace tout entier $L^2(\Gamma)$.

On établira les sytèmes d'optimalités perturbé et limite.

1 - *Formulation variationnelle du problème* (P1).

Le problème (P1) est équivalent au problème,

$$(P2)\begin{cases} \text{Soit } v \in L^2(\Gamma) \\ \text{Trouver } y_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega) \text{ , solution de} \\ \displaystyle\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon(v), \nabla\varphi)\, dx + \varepsilon \int_\Gamma y_\varepsilon(v) \,.\, \varphi \, d\Gamma = \int_\Gamma v.\varphi \, d\Gamma \text{ ,} \forall\varphi \in H^1(\Omega) \,. \end{cases}$$

Le problème (P2), admet une solution unique $y_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega)$, $\forall v \in L^2(\Gamma)$.

2 - *Etude de la convergence de la suite des contrôles* u_ε.

On note : $J(y(v),v) = \displaystyle\int_\Gamma |y(v) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2 \, d\Gamma$, $\forall v \in L^2(\Gamma)$.

On a le théorème :

Théorème 2.1.- La suite $u_\varepsilon \in L^2(\Gamma)$, converge fortement vers $u^* \in U_{ad}$ solution de $J(y(u^*), u^*) = \displaystyle\inf_{v \in U_{ad}} (J(y(v),v))$

u^* introduit à la page 12.

. $U_{ad} = \{v \in L^2(\Gamma) \;/\; \displaystyle\int_\Gamma v \, d\Gamma = 0\}$

. $y(v)$ est la solution du problème :

$$(P4) : \begin{cases} -\Delta y(v) = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v \quad , \quad \text{sur } \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma y(v)\, d\Gamma = 0 \, . \end{cases}$$

La preuve du théorème : On considère l'optimum $u^* \in U_{ad}$, (introduit à la page 12).

$$J(y(u^*), u^*) = \inf_{v \in U_{ad}} [J(y(v),v)]$$

où $y(v)$ est solution du problème (P4).

(Le problème (P4) n'admet pas de solution si $\int_\Gamma v\, d\Gamma \neq 0$).

Soit, $A(v) = \{y \in H^1(\Omega)$ / solutions du problème :

$$(A) : \left\{ \begin{aligned} & -\Delta y = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ & \frac{\partial y}{\partial \nu} = v \quad , \quad \text{sur } \Gamma \, . \end{aligned} \right\}$$

On introduit la fonction suivante :

$$J(\psi,v) = \int_\Gamma |\psi - z_d|^2\, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2\, d\Gamma \, , \quad \forall v \in U_{ad} \, , \quad \forall \psi \in A(v) \, .$$

Soit le problème (A1) :

$$(A1) : \text{trouver } (y,u) \in A(u) \times U_{ad} \, , \quad J(y,u) = \inf_{\substack{v \in U_{ad} \\ y \in A(v)}} (J(y,v) \, .$$

1) On a :

Lemme 2.1.- On a le résultat suivant :

$$J\left(y(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z_d \, d\Gamma,\ u^*\right) = \inf_{\substack{v\in U_{ad} \\ y\in A(v)}} (J(y,v))$$

Preuve du lemme : Comme il y a unicité et existence du couple (y,u) (réalisant l'optimum de J), car J est une application strictement convexe, en le couple $(y,v) \in A(v) \times U_{ad}$,

Il suffit de montrer que :

$$\boxed{\begin{gathered}\forall v \in U_{ad},\ \forall y \in A(v) : \\ J(y,v) \geq \int_\Gamma \left|y(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z_d \, d\Gamma - z_d\right|^2 d\Gamma + N\int_\Gamma (u^*)^2 \, d\Gamma\end{gathered}}$$

Soit $v \in U_{ad}$.

On a $y = y(v) + C$, (C = constante)

comme $\int_\Gamma y(v) \, d\Gamma = 0$ on a

$$C = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma y \, d\Gamma \qquad \text{donc}$$

$$\begin{aligned} J(y,v) &= J(y(v) + C,\ v) \\ &= \int_\Gamma |y(v) + C - z_d|^2 \, d\Gamma + N\int_\Gamma v^2 \, d\Gamma \\ &= \int_\Gamma (y(v) - z_d)^2 \, d\Gamma + 2C\int_\Gamma (y(v) - z_d) \, d\Gamma + C^2 |\Gamma| + N\int_\Gamma v^2 \, d\Gamma \end{aligned}$$

$$J(y,v) = J(y(v),v) - 2C\int_\Gamma z_d \, d\Gamma + C^2 |\Gamma|, \quad \forall v \in U_{ad}.$$

On sait que [page 12] :

$$J(y(u^*),u^*) = \inf_{v\in U_{ad}} (J(y(v),v))$$

donc on a :

$$J(y,v) \geq J(y(u^*), u^*) - 2C \int_\Gamma z_d \, d\Gamma + C^2 |\Gamma| \quad , \quad \forall v \in U_{ad} \quad , \forall C \in \mathbb{R} \quad \text{donc}$$

$$J(y,v) \geq \operatorname*{Inf}_{C \in \mathbb{R}} (J(y(u^*), u^*) - 2C \int_\Gamma z_d \, d\Gamma + C^2 |\Gamma|) \quad .$$

$P(C) = J(y(u^*), u^*) - 2C \int_\Gamma z_d \, d\Gamma + C^2 |\Gamma|$, est un trinôme en C.

Le minimum du polynôme est atteint pour $C = \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma$
on obtient :

$$(A'1) : J(y,v) \geq (J(y(u^*), u^*) - \frac{1}{|\Gamma|} (\int_\Gamma z_d \, d\Gamma)^2) \quad , \quad \forall v \in U_{ad}$$

Or

$$J(y(u^*), u^*) - \frac{1}{|\Gamma|} (\int_\Gamma z_d \, d\Gamma)^2 = J(y(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \, , \, u^*)$$

$$\operatorname*{Inf}_{\substack{v \in U_{ad} \\ y \in A(v)}} (J(y,v) = J(y,u) \qquad (y \in A(u))$$

D'après le résultat (A'1), $\quad J(y,u) \geq J(y(u^*) + \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma, u^*)$
on a alors puisque le couple (y,u) est l'optimum unique dans ,
$(A(u) \times U_{ad})$.

$$J(y,u) = J(y(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \, , \, u^*) = \operatorname*{Inf}_{\substack{v \in U_{ad} \\ y \in A(v)}} J(y,v)$$

On a donc :

$$(A'2) : \begin{cases} y(u^*) + \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma = y \\ \\ u^* = u \end{cases}$$

2) *Etude de la convergence de la suite* u_ε *dans* $L^2(\Gamma)$:

A - *Etude de la convergence faible.*

Le problème du contrôle optimal perturbé s'écrit : avec les notations précédentes :

$$J(y_\varepsilon, u_\varepsilon) = \operatorname*{Inf}_{v \in L^2(\Gamma)} (J(y_\varepsilon(v), v) ,$$

$y_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega)$, vérifie :

$$(P1) : \begin{cases} -\Delta y_\varepsilon(v) = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \; , \\[2mm] \dfrac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu} + \varepsilon \, y_\varepsilon(v) = v \quad , \quad \text{sur } \Gamma \; , \\[2mm] v \in L^2(\Gamma) \end{cases}$$

$$J(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J(0,0) = \int_\Gamma z_d^2 \, d\Gamma = C$$

Il en résulte :

$$(1.1.) \qquad ||u_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \leq C \quad \text{et} \quad ||y_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \leq C \; .$$

La formulation variationnelle pour $v = u_\varepsilon$ de (P1) , s'écrit :

$$\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon, \nabla \phi) \, dx + \varepsilon \int_\Gamma y_\varepsilon \cdot \phi \, d\Gamma = \int_\Gamma u_\varepsilon \cdot \phi \, d\Gamma \; , \quad \forall \phi \in H^1(\Omega) \; .$$

On prend $\phi = y_\varepsilon$.

On a donc :

$$\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon, \nabla y_\varepsilon) \, dx + \varepsilon \int_\Gamma y_\varepsilon^2 \, d\Gamma = \int_\Gamma u_\varepsilon \cdot y_\varepsilon \, d\Gamma \; .$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz et on utilise (1.1.).

On obtient

(1.2.) $$\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon, \nabla y_\varepsilon)\, dx \leq C$$

(1.2.) et (1.1.) donnent :

(1.3.) $$||y_\varepsilon||_{H^1(\Omega)} \leq C$$

car la norme : $\left(\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon, \nabla y_\varepsilon)\, dx + \int_\Gamma y_\varepsilon^2\, d\Gamma\right)^{1/2}$ est équivalente à la norme $||y_\varepsilon||_{H^1(\Omega)}$.

Les résultats (1.1.) et (1.3.) donnent la convergence faible.

Les suites y_ε , u_ε convergent faiblement respectivement dans $H^1(\Omega)$ et $L^2(\Gamma)$.

On a : $$\begin{cases} u_\varepsilon \longrightarrow u_\infty & \text{dans } L^2(\Gamma) \\ y_\varepsilon \longrightarrow y_\infty & \text{dans } H^1(\Omega) \end{cases}$$

$y(u_\infty) \in A(u_\infty)$ et $u_\infty \in U_{ad}$.

On va montrer que l'on a le résultat suivant :

Lemme 2.2.- La limite faible u_∞ est effectivement l'optimum u^* (introduit page 12).

La démonstration du lemme 2.2. :

On sait que :

$$J(y(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \, , u^*) \leq J(y_\infty, u_\infty)$$

car le couple : $(y(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \, , u^*)$ réalise l'optimum de la fonction $J(y,v)$, $v \in U_{ad}$.

On a quand $\varepsilon \to 0$, $y_\varepsilon \longrightarrow y_\infty$ dans $L^2(\Gamma)$ et $u_\varepsilon \rightharpoonup u_\infty$ faiblement dans $L^2(\Gamma)$.

On en déduit :

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} J(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq J(y_\infty, u_\infty)$$

Par ailleurs :

$$J(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J(y_\varepsilon(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \, , u^* + \frac{\varepsilon}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma)$$

$$\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} J(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} J(y_\varepsilon(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \, , u^* + \frac{\varepsilon}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma) =$$

$$J(y(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \, , u^*)$$

$$J(y_\infty, u_\infty) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} (J(y_\varepsilon, u_\varepsilon)) \leq J(y(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \, , u^*)$$

On a alors :

(2.2.1.) : $$\lim_{\varepsilon\to 0} (J(y_\varepsilon, u_\varepsilon)) = J(y(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma, u^*)$$

et d'après l'unicité de u^*

(2.2.2.) : $$y_\infty = y(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \quad \text{et} \quad u_\infty = u^*$$

Une démonstration de la convergence forte de $(y_\varepsilon, p_\varepsilon, u_\varepsilon)$ *dans* $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)$:

Le système d'optimalité perturbé :

On suppose, que l'ensemble des contrôles est tout l'espace $L^2(\Gamma)$. On sait que le système d'optimalité perturbé est le suivant :

$$(\mathrm{I}) : \begin{cases} -\Delta y_\varepsilon = 0 \ , \quad \text{dans } \Omega \\ -\Delta p_\varepsilon = 0 \ , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, y_\varepsilon = u_\varepsilon \ , \quad \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, p_\varepsilon = y_\varepsilon - z_d \ , \quad \text{sur } \Gamma \\ p_\varepsilon + N\, u_\varepsilon = 0 \ , \quad \text{sur } \Gamma \\ y_\varepsilon \in H^1(\Omega) \ , \quad p_\varepsilon \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \in L^2(\Gamma) \end{cases}$$

Rappel : On suppose, z_d quelconque dans $L^2(\Gamma)$.

u_ε est le contrôle optimal perturbé , il est la solution unique de :

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v \in L^2(\Gamma)} (J_\varepsilon(v))$$

où

$$J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y_\varepsilon(v) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2 \, d\Gamma \ , \quad \forall v \in L^2(\Gamma) \ .$$

N = constante positive.

$$y_\varepsilon(v) \text{ solution de : } \begin{cases} -\Delta y_\varepsilon(v) = 0 \ , & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu} + \varepsilon\, y_\varepsilon(v) = v \ , & \text{sur } \Gamma \\ y_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad v \in L^2(\Gamma) \end{cases}$$

On sait que l'on a :

$$\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon, \nabla y_\varepsilon)\, dx + \varepsilon \int_\Gamma y_\varepsilon^2\, d\Gamma = \int_\Gamma u_\varepsilon\, y_\varepsilon\, d\Gamma$$

<u>on a les estimations suivantes</u> :

1) $||y_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \leq C$

2) $||u_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \leq C \ , \quad u_\varepsilon \longrightarrow u_\infty$ faiblement dans $L^2(\Gamma)$

et $u_\infty \in U_{ad} = \{v \in L^2(\Gamma) \ / \int_\Gamma v\, d\Gamma = 0\}$

3) $\int_\Gamma (\nabla y_\varepsilon, \nabla y_\varepsilon)\, dx \leq C$

4) $||y_\varepsilon||_{H^1(\Omega)} \leq C \ , \quad y_\varepsilon \longrightarrow y_\infty$ faiblement dans $H^1(\Omega)$

et $y_\varepsilon \longrightarrow y_\infty$ fortement dans $L^2(\Gamma)$.

5) $$\int_\Omega (\nabla(y_\varepsilon - y_\infty), \nabla(y_\varepsilon - y_\infty))\, dx \leq \varepsilon \left|\int_\Gamma (y_\varepsilon - y_\infty)\, y_\varepsilon\right| d\Gamma + ||u_\varepsilon - u_\infty||_{L^2(\Gamma)}\, ||y_\varepsilon - y_\infty||_{L^2(\Gamma)}$$

$$\leq C\, \varepsilon\, ||y_\varepsilon - y_\infty||_{L^2(\Gamma)} + C\, ||y_\varepsilon - y_\infty||_{L^2(\Gamma)}$$

Ce qui implique :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_\Omega (\nabla(y_\varepsilon - y_\infty) \, , \nabla(y_\varepsilon - y_\infty) + \int_\Gamma (y_\varepsilon - y_\infty)^2 \, d\Gamma\right) = 0$$

on obtient alors : $y_\varepsilon \xrightarrow{H^1(\Omega)} y_\infty$ <u>solution de</u> :

$$(S1) : \begin{cases} - \Delta y_\infty = 0 \quad , \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial y_\infty}{\partial \nu} = u^* \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma \end{cases}$$

$$\int_\Gamma y_\infty \, d\Gamma = \int_\Gamma z_d \, d\Gamma$$

la dernière relation est (2.2.2.).

6) $u_\varepsilon \longrightarrow u^*$ fortement dans $L^2(\Gamma)$. Car :

a) $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \longrightarrow J(u^*)$, $\varepsilon \to 0$

b) $y_\varepsilon \xrightarrow{L^2(\Gamma)} y_\infty$

on en déduit que : $||u_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} ||u^*||_{L^2(\Gamma)}$

c) $u_\varepsilon \rightharpoonup u^*$ faiblement dans $L^2(\Gamma)$

on en conclut que l'on a $u_\varepsilon \longrightarrow u^*$ dans $L^2(\Gamma)$ solution de $J(u^*) = \inf\limits_{v\in U_{ad}} (J(v))$.

7) $p_\varepsilon \xrightarrow{H^1(\Omega)} p_\infty$ <u>solution de</u> :

$$(S6) : \begin{cases} - \Delta p_\infty = 0 \quad , \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial p_\infty}{\partial \nu} = y_\infty - z_d \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma p_\infty \, d\Gamma = 0 \end{cases}$$

on a ,

(6.1.) $$||p_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \leq C$$

(6.2.) $$\int_\Omega (\nabla p_\varepsilon, \nabla p_\varepsilon)\, dx \leq C$$

car $\int_\Omega (\nabla p_\varepsilon, \nabla p_\varepsilon)\, dx + \varepsilon \int_\Gamma p_\varepsilon^2\, d\Gamma = \int_\Gamma (y_\varepsilon - z_d)\, p_\varepsilon\, d\Gamma$

$$\int_\Omega (\nabla p_\varepsilon, \nabla p_\varepsilon)\, dx \leq ||y_\varepsilon - z_d||_{L^2(\Gamma)}\ ||p_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \leq C$$

(6.3.) $||p_\varepsilon||_{H^1(\Omega)} \leq C$, $p_\varepsilon \xrightarrow{H^1(\Omega)} p_\infty$ faiblement dans $H^1(\Omega)$.

$p_\varepsilon \longrightarrow p_\infty$ fortement dans $L^2(\Gamma)$. p_∞ vérifie (S6)

$$\int_\Omega (\nabla(p_\varepsilon - p_\infty), \nabla(p_\varepsilon - p_\infty))\, dx = -\varepsilon \int_\Gamma (p_\varepsilon - p_\infty)\, p_\varepsilon\, d\Gamma + \int_\Gamma (y_\varepsilon - y_\infty)\, (p_\varepsilon - p_\infty)\, d\Gamma$$

$$\leq C\, \varepsilon\, ||p_\varepsilon - p_\infty||_{L^2(\Gamma)} + ||y_\varepsilon - y_\infty||_{L^2(\Gamma)}\ ||p_\varepsilon - p_\infty||_{L^2(\Omega)}$$

On a alors, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega (\nabla(p_\varepsilon - p_\infty)\ , \nabla(p_\varepsilon - p_\infty))\, dx + \int_\Gamma (p_\varepsilon - p_\infty)^2\, d\Gamma = 0$.

On en conclut que l'on a , $p_\varepsilon \longrightarrow p_\infty$ dans $H^1(\Omega)$.

Le système d'optimalité à la limite est le suivant :

$$\text{(II)} : \begin{cases} -\Delta y_\infty = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ -\Delta p_\infty = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\infty}{\partial \nu} = u^* \ , & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p_\infty}{\partial \nu} = y_\infty - z_d \ , & \text{sur } \Gamma \\ p_\infty + N\, u_\infty = 0 \ , & \text{sur } \Gamma \\ \int_\Gamma y_\infty\, d\Gamma = \int z_d\, d\Gamma \ , \ \int_\Gamma p_\infty\, d\Gamma = 0 \ \text{et} \ \int_\Gamma u^*\, d\Gamma = 0 \ . & \end{cases}$$

CHAPITRE III

ETUDE DU PROBLEME DE CONTROLE OPTIMAL PERTURBE DANS LE CAS DES CONVEXES.

On étudie, la convergence du contrôle optimal perturbé, et les systèmes d'optimalité pour le cas d'un convexe fermé K, inclus dans $L^2(\Gamma)$.

Le problème de contrôle optimal perturbé, dans K s'énonce ; trouver $u_\varepsilon \in K$, tel que :

$$\cdot \quad J_\varepsilon(y_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon) = \operatorname*{Inf}_{v \in K} J_\varepsilon(y_\varepsilon(v), v)$$

$$J_\varepsilon(y_\varepsilon(v), v) = \int_\Gamma |y_\varepsilon(v) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2 \, d\Gamma \ , \quad \forall v \in K \ .$$

$y_\varepsilon(v)$ est la solution de :

$$(I) : \quad \begin{cases} - \Delta y_\varepsilon(v) = 0 \quad , \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu} + \varepsilon \, y_\varepsilon(v) = v \quad , \text{ sur } \Gamma \\ y_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega) \quad , \quad v \in K \end{cases}$$

. z_d quelconque dans $L^2(\Gamma)$.

. N = constante positive.

On a, le système d'optimalité perturbé :

$$
(S) : \begin{cases} -\Delta y_\varepsilon = 0 \,, & \text{dans } \Omega \\ -\Delta p_\varepsilon = 0 \,, & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, y_\varepsilon = u_\varepsilon \,, & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, p_\varepsilon = (y_\varepsilon - z_d) \,, & \text{sur } \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma (p_\varepsilon + N\, u_\varepsilon) \,.\, (v - u_\varepsilon)\, d\Gamma \geq 0 \,, & \forall v \in K \,. \end{cases}
$$

On fait l'hypothèse, suivante :

(H1) : K est une convexe-fermé de $L^2(\Gamma)$, tel que $K \cap U_{ad} \neq \emptyset$.

Théorème 1.1.- Si (H1) est vraie. On a les deux résultats :

a) On peut extraire une sous-suite u_ε qui converge faiblement dans $L^2(\Gamma)$, vers $u_\infty \in K \cap U_{ad}$.

b) y_ε converge fortement dans $H^1(\Omega)$, vers $y_\infty \in H^1(\Omega)$, de plus y_∞ et u_∞ sont liés par la relation :

$$
\begin{aligned} -\Delta y_\infty &= 0 \,, \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial y_\infty}{\partial \nu} &= u_\infty \,, \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned}
$$

Preuve du théorème : Soit

$$
J_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) = \operatorname*{Inf}_{v \in K} J_\varepsilon(y_\varepsilon(v), v)
$$

on utilise (H1), on obtient : $J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq C$. On en déduit que l'on a :

1) $||u_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \leqslant C$

2) $||y_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)} \leqslant C$

3) $\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon, \nabla y_\varepsilon)\, dx \leqslant C$

4) $u_\varepsilon \longrightarrow u_\infty$ faiblement dans $L^2(\Gamma)$. On peut extraire une sous-suite u_ε qui converge faiblement dans $L^2(\Gamma)$, vers $u_\infty \in K \cap U_{ad}$.

5) $y_\varepsilon \longrightarrow y_\infty$ converge faiblement vers y_∞ dans $H^1(\Omega)$.

(y_∞ et u_∞) sont liés par la relation :

$$\text{(II) :} \quad \begin{cases} -\Delta y_\infty = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\infty}{\partial \nu} = u_\infty \ , & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

6) y_ε converge fortement dans $H^1(\Omega)$, on a

$$\text{(III) :} \quad \begin{cases} -\Delta(y_\varepsilon - y_\infty) = 0 \ , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu}(y_\varepsilon - y_\infty) = -\varepsilon\, y_\varepsilon + (u_\varepsilon - u_\infty) \ , \quad \text{sur } \Gamma \\ u_\infty \in K \cap U_{ad} \ , \quad u_\varepsilon \in K \end{cases}$$

La formulation variationnelle donne :

$$\int_\Omega (\nabla(y_\varepsilon - y_\infty), \nabla(y_\varepsilon - y_\infty))\, dx = -\varepsilon \int_\Gamma y_\varepsilon (y_\varepsilon - y_\infty)\, d\Gamma + \int_\Gamma (u_\varepsilon - u_\infty)\, y_\varepsilon\, d\Gamma$$

$$\leqslant \varepsilon\, ||y_\varepsilon||_{L^2(\Gamma)}\, ||y_\varepsilon - y_\infty||_{L^2(\Gamma)} + \left| \int_\Gamma (u_\varepsilon - u_\infty)\, y_\varepsilon\, d\Gamma \right|$$

$$\leqslant C\, \varepsilon\, ||y_\varepsilon - y_\infty||_{L^2(\Gamma)} + \left| \int_\Gamma (u_\varepsilon - u_\infty)\, y_\varepsilon\, d\Gamma \right|$$

5) implique y_ε converge dans $L^2(\Gamma)$, <u>fortement</u> vers y_∞ .

5) et 4) impliquent que : $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} (\int_\Gamma (u_\varepsilon - u_\infty)\, y_\varepsilon \, d\Gamma = 0$ et

quand, $\varepsilon \to 0$, on a :

$$\int_\Omega (\nabla(y_\varepsilon - y_\infty) \, , \, \nabla(y_\varepsilon - y_\infty))\, dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad ,$$

on en déduit : $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} (||y_\varepsilon - y_\infty||_{H^1(\Omega)}) = 0$.

<u>Notations et définitions</u> :

Soit $u^* \in K \cap U_{ad}$, la <u>solution</u> de :

(III bis) $$J(u^*, y(u^*)) = \inf_{v\in K \cap U_{ad}} (J(v,y(v))$$

y(v) <u>solution de</u> :

(IV) : $$\begin{cases} - \Delta y(v) = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v \ , & \text{sur } \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma y(v)\, d\Gamma = 0 & \end{cases}$$

On définit, la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} \Psi : (K \cap U_{ad}) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} \quad & & \\ (v,c) & \longrightarrow & \Psi(v,c) \end{array} \quad ,$$

définie par :

$$\Psi(v,c) = \int_\Gamma |y(v) + c - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2 \, d\Gamma$$

Lemme 1.1.-

On a : (u^* solution de III bis)

$$\min_{v\in K \cap U_{ad}} \min_{c\in\mathbb{R}} \Psi(v,c) = \Psi(u^*, c_o) , \quad c_o = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z_d \, d\Gamma .$$

Preuve du lemme :

$$\Psi(v,c) = ||y(v) + c - z_d||^2_{L^2(\Gamma)} + N\, ||v||^2_{L^2(\Gamma)}$$

$$= (||y(v) - z_d||^2_{L^2(\Gamma)} + N\, ||v||^2_{L^2(\Gamma)}) + (C^2\, |\Gamma| - 2C \int_\Gamma z_d \, d\Gamma)$$

Le second membre, est un polynôme en C de degré 2, $\min\limits_{c\in\mathbb{R}} (\Psi(v,c))$ s'obtient pour , $c_o = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z_d \, d\Gamma$.

$$\min_{c\in\mathbb{R}} \Psi(v,c) = J(v, y(v)) - \frac{1}{|\Gamma|}\left(\int_\Gamma z_d \, d\Gamma\right)^2 , \quad \forall v \in K \cap U_{ad} .$$

or $\quad J(u^*,y(u^*)) = \min\limits_{v\in K \cap U_{ad}} J(v, y(v))$

on a alors,

$$\min_{c\in\mathbb{R}} \Psi(v,c) \geq J(u^*,y(u^*)) - \frac{1}{|\Gamma|}\left(\int_\Gamma z_d \, d\Gamma\right)^2$$

on obtient, donc

$$\Psi\left(u^*, \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z_d \, d\Gamma\right) = \min_{v\in K \cap U_{ad}} \min_{c\in\mathbb{R}} (\Psi(v,c)) .$$

Etude du cas $K \subset U_{ad}$.

Dans ce cas $u_\varepsilon \to u^*$ dans $L^2(\Gamma)$ $y_\varepsilon \to y(u^*)$ dans $H^1(\Omega)$, solution de III bis ($K \cap U_{ad} = K$).

Ceci a été pratiquement démontré, dans la première partie.

Il est clair que si, $\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \neq 0$ on a ,

$$\min_{v\in K} \|y(v)-z_d\|^2_{L^2(\Gamma)} + N \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} > \min_{v\in K} \|y-z_d\|^2_{L^2(\Gamma)} + N \|v\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

où :
$$\begin{cases} -\Delta y = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = v \ , & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

(on n'impose pas de condition sur y).

On a, la remarque suivante :

$$\min_{v\in K \cap U_{ad}} (\|y-z_d\|^2_{L^2(\Gamma)} + N \|v\|^2_{L^2(\Gamma)}) = \min_{v\in K \cap U_{ad}} \ \min_{c\in\mathbb{R}} (\Psi(v,c)) \ .$$

On a, d'abord une condition nécessaire pour que u_ε converge fortement vers u^* , vérifiant : (y(v) solution de IV)

$$J(u^*, y(u^*)) = \min_{v\in K \cap U_{ad}} [J(v,y(v))]$$

Proposition 1.1.- Une condition nécessaire pour que (y_∞, u_∞) réalise, $\min_{v\in K \cap U_{ad}} (\|y - z_d\|^2_{L^2(\Gamma)} + N \|v\|^2_{L^2(\Gamma)})$.

(y est déterminée à une constante près) est que l'on ait :

$$\int_\Gamma y_\infty \, d\Gamma = \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \ .$$

Preuve : On sait, que l'on a :

$$\underset{v \in K \cap U_{ad}}{\mathrm{Min}} \left(\|y-z_d\|^2_{L^2(\Gamma)} + N \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \right) = \Psi\left(u^*, \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma\right)$$

$$= J(u^*, y(u^*)) - \frac{1}{|\Gamma|} \left(\int_\Gamma z_d \, d\Gamma\right)^2$$

Si (y_∞, u_∞) réalise le minimum de

(P) : $$\|y-z_d\|^2_{L^2(\Gamma)} + N \|v\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

On a :

et $$\left[\begin{array}{l} y_\infty = y(u^*) + \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \\ \\ u_\infty = u^* , \end{array} \right.$$

car le problème (P) admet une solution unique. On a, alors

$$\int_\Gamma y_\infty \, d\Gamma = \int_\Gamma z_d \, d\Gamma .$$

Objectif : On cherche, des convexes, $K \subset L^2(\Gamma)$ pour lesquels (y_∞, u_∞) réalise le minimum de

$$\left(\|y-z_d\|^2_{L^2(\Gamma)} + N \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \right) \qquad v \in K \cap U_{ad}$$

où :

$$\begin{cases} -\Delta y = 0 , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = v , & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

(Pas de condition sur $\int_\Gamma y \, d\Gamma$).

On fait l'hypothèse suivante :

(H2) : $$K \cap U_{ad} + \mathbb{R}^+ \left(\text{signe} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma\right) \subset K \; .$$

Théorème.- On suppose (K) vérifie (H2) alors $(y_\varepsilon, u_\varepsilon)$ converge fortement dans $(H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma))$, vers (y_∞, u_∞) réalisant le

$$\underset{(v \in K \cap U_{ad})}{\text{Min}} \left(\|y - z_d\|^2_{L^2(\Gamma)} + N \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \right) .$$

et y_∞ solution de (A) :

$$(A) : \begin{cases} - \Delta y_\infty = 0 \; , \quad \text{dans} \;\; \Omega \; , \\ \dfrac{\partial y_\infty}{\partial \nu} = u_\infty \; , \quad \text{sur} \;\; \Gamma \; , \\ \displaystyle\int_\Gamma y_\infty \, d\Gamma = \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \; . \end{cases}$$

Preuve du théorème :

Soit, $$\tilde{y}_\varepsilon = y_\varepsilon(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma$$

où $$J(u^*, y(u^*)) = \underset{v \in K \cap U_{ad}}{\text{Min}} [J(v, y(v))]$$

on suppose, que l'on a l'hypothèse (H2).

On vérifie, que $\tilde{y}_\varepsilon$ est la solution de

$$(B) : \begin{cases} - \Delta \tilde{y}_\varepsilon = 0 \; , \; \text{dans} \;\; \Omega \\ \dfrac{\partial \tilde{y}_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon \, \tilde{y}_\varepsilon = \left(u^* + \dfrac{\varepsilon}{|\Gamma|} \displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma\right) \; , \quad \text{sur} \;\; \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma \tilde{y}_\varepsilon \, d\Gamma = \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \; , \end{cases}$$

D'après l'hypothèse (H2).

$$(u^* + \frac{\varepsilon}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma) \in K \quad ,$$

on peut alors écrire :

$$\int_\Gamma |y_\varepsilon - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma u_\varepsilon^2 \, d\Gamma \leq \int_\Gamma |\tilde{y}_\varepsilon - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma (u^* + \frac{\varepsilon}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma)^2 \, d\Gamma$$

$$\int_\Gamma |y_\infty - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma u_\infty^2 \, d\Gamma \leq \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} (J(y_\varepsilon, u_\varepsilon)) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} (J(\tilde{y}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon))$$

$$\leq \int_\Gamma |y(u^*) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma (u^*)^2 \, d\Gamma$$

$$= \Psi(u^*, \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma)$$

D'autre part :

$$\int_\Gamma |y_\infty - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma u_\infty^2 \, d\Gamma = \int_\Gamma (y(u_\infty) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma y_\infty \, d\Gamma - z_d)^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma u_\infty^2 \, d\Gamma$$

$$= \Psi(u_\infty, \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma y_\infty \, d\Gamma).$$

L'unicité du <u>minimum</u> de Ψ, implique :

$$\begin{cases} u^* = u_\infty \\ y_\infty = y(u^*) + \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \\ \text{et donc, } \displaystyle\int_\Gamma y_\infty \, d\Gamma = \int_\Gamma z_d \, d\Gamma. \end{cases}$$

On a alors <u>les résultats</u> suivants :

1) $||y_\infty - z_d||^2_{L^2(\Gamma)} + N \, ||u_\infty||^2_{L^2(\Gamma)} = \underset{v \in K \cap U_{ad}}{\mathrm{Min}} \left[||y - z_d||^2_{L^2(\Gamma)} + N \, ||v||^2_{L^2(\Gamma)} \right]$

2) $J(u_\infty, y(u_\infty)) = J(u^*, y(u^*)) = \underset{v \in K \cap U_{ad}}{\mathrm{Min}} \left[J(v, y(v)) \right]$

3) y_∞ <u>est la solution de</u> A .

4) y_ε <u>converge fortement</u> dans $H^1(\Omega)$ vers $y_\infty \in H^1(\Omega)$, vérifiant 3).

5) u_ε <u>converge fortement</u> dans $L^2(\Gamma)$ vers $u^* = u_\infty \in K \cap U_{ad}$ et on a :

$$J(u_\infty, y(u_\infty)) = \underset{v \in K \cap U_{ad}}{\mathrm{Min}} \left[J(v,y(v))\right] .$$

Exemples.-

Exemple 1 : $K = L^2(\Gamma)$.

On a démontré dans la <u>deuxième partie</u> que l'on a : u_ε <u>converge fortement</u> vers u_∞ dans $L^2(\Gamma)$ et y_ε <u>converge fortement</u> dans $H^1(\Omega)$ vers y_∞ la solution de :

$$\underset{v \in U_{ad}}{\mathrm{Min}} \; ||y-z_d||^2_{L^2(\Gamma)} + N\,||v||^2_{L^2(\Gamma)} = ||y_\infty - z_d||^2_{L^2(\Gamma)} + N\,||u_\infty||^2_{L^2(\Gamma)}$$

Exemple 2 : $K = \{f \in L^2(\Gamma) \ / \ f = \text{constante, sur } \Gamma\}$.

$K \cap U_{ad} = \{0\}$ et l'hypothèse (H2) est encore vérifiée et on peut appliquer le théorème précédent.

Exemple 3 : $K_1 = \{v \in L^2(\Gamma) \ / \ v \geq 0\}$.

$K_1 \cap U_{ad} = \{0\}$ on a :

$$\begin{cases} -\Delta y_\varepsilon = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, y_\varepsilon = v \ , & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

donc, $\varepsilon \int_\Gamma y_\varepsilon \, d\Gamma = \int_\Gamma v \, d\Gamma \geq 0$, ce qui <u>implique</u> :

$$\int_\Gamma y_\varepsilon \, d\Gamma \geq 0 \ , \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

on suppose, donc $\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \geq 0$ l'hypothèse (H2) est vérifiée, pour le convexe K1. On peut, appliquer le théorème précédent. On a ,

$$u^* = 0 \quad , \quad y_\infty = \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \, .$$

(y_∞, u^*) réalise le minimum de : $||y-z_d||^2_{L^2(\Gamma)} + N \, ||v||^2_{L^2(\Gamma)}$.

Exemple 4 : $K_1 = \{v \in L^2(\Gamma) \ / \ v \geq -1\}$ et $\int_\Gamma z_d \, d\Gamma > 0$.

$K_1 \cap U_{ad} \neq \emptyset$ et on a $K_1 \cap U_{ad} + \mathbb{R}^+$ (signe $\int_\Gamma z_d \, d\Gamma) \subset K1$ l'hypothèse (H2) est encore vérifiée et dans ce cas la réponse n'est pas aussi triviale.

En conclusion : Si le convexe K fermé de $L^2(\Gamma)$ vérifie l'hypothèse (H2), le système d'optimalité à la limite est le suivant :

$$(S) : \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta y_\infty = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ -\Delta p_\infty = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\infty}{\partial \nu} = u_\infty \, , \quad \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p_\infty}{\partial \nu} = (y_\infty - z_d) \, , \quad \text{sur } \Gamma \\ \int_\Gamma (p_\infty + N \, u_\infty) \, . \, (v - u_\infty) \, d\Gamma \geq 0 \quad , \quad \forall v \in U_{ad} \cap K \\ \int_\Gamma y_\infty \, d\Gamma = \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \, , \quad \int_\Gamma p_\infty \, d\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad u_\infty \in K \cap U_{ad} \end{array} \right.$$

CHAPITRE IV

Introduction.-

Il s'agit de mettre $(y_\varepsilon, p_\varepsilon, u_\varepsilon)$, la solution du système d'optimalité pour ε (petit positif), sous la forme :

$$y_\varepsilon = y^o + \varepsilon\, y^1 + \ldots + \varepsilon^k\, y^k + \ldots$$

$$p_\varepsilon = p^o + \varepsilon\, p^1 + \ldots + \varepsilon^k\, p^k + \ldots$$

$$u_\varepsilon = u^o + \varepsilon\, u^1 + \ldots + \varepsilon^k\, u^k + \ldots \quad .$$

Pour avoir davantage de détails sur le calcul asymptotique, on peut se référer à [2] et [3].

L'objet de ce chapitre, d'une part est de déterminer les systèmes que vérifient les triplets (y^k, p^k, u^k), $k \in \mathbb{N}$ d'autre part à déterminer des estimations, des correcteurs que l'on précisera ultérieurement.

1 - *Etude du calcul asymptotique pour le cas* $U = U_{ad}$.

A - *Application à l'état - perturbé, son adjoint et le contrôle optimal perturbé.*

On rappelle que :

. $U_{ad} = \{v \in L^2(\Gamma) \;/\; \int_\Gamma v\, d\Gamma = 0\}$, et

. $V = \{y \in H^1(\Omega) \;/\; \int_\Gamma y\, d\Gamma = 0\}$

on utilise le système d'optimalité (S).

$$(S) : \begin{cases} -\Delta y_\varepsilon = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ -\Delta p_\varepsilon = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, y_\varepsilon = u_\varepsilon \ , & \text{sur } \Gamma \ , \\ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, p_\varepsilon = (y_\varepsilon - z_d) + \dfrac{1}{|\Gamma|}\displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \ , & \text{sur } \Gamma \ . \\ p_\varepsilon + N\, u_\varepsilon = 0 \ , & \text{sur } \Gamma . \end{cases}$$

On a :

$$\int_\Gamma y_\varepsilon \, d\Gamma = 0 \quad , \quad \int_\Gamma p_\varepsilon \, d\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \int_\Gamma u_\varepsilon \, d\Gamma = 0$$

$$y_\varepsilon \in H^1(\Omega) \quad , \quad p_\varepsilon \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \in L^2(\Gamma) \ .$$

1) *Calcul du coefficient de* ε^k :

Soient :

$$\Psi_\varepsilon = y^o + \varepsilon\, y^1 + \ldots + \varepsilon^k\, y^k$$

$$\phi_\varepsilon = p^o + \varepsilon\, p^1 + \ldots + \varepsilon^k\, p^k$$

et $$w_\varepsilon = u^o + \varepsilon\, u^1 + \ldots + \varepsilon^k\, u^k$$

* $(y^o, p^o, u^o) \in V \times V \times U_{ad}$, <u>le coefficient de</u> ε^o , est la <u>solution du système</u>

$$A(0) : \begin{cases} -\Delta y^o = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ -\Delta p^o = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y^o}{\partial \nu} = u^o \ , & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p^o}{\partial \nu} = (y^o - z_d) + \dfrac{1}{|\Gamma|}\displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \ , & \text{sur } \Gamma \\ p^o + N\, u^o = 0 \ , & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

* $(y^1, p^1, u^1) \in V \times V \times U_{ad}$, est la solution du problème :

$$
A(1) : \quad \begin{cases} -\Delta y^1 = 0 , & \text{dans } \Omega \\ -\Delta p^1 = 0 , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial \nu} + \dfrac{1}{N} p^1 + y^o = 0 , & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p^1}{\partial \nu} + p^o = y^1 , & \text{sur } \Gamma \\ p^1 + N u^1 = 0 , & \text{sur } \Gamma \end{cases}
$$

En général, $(y^k, p^k, u^k) \in V \times V \times U_{ad}$, est la solution du système suivant : (pour $k \geq 1$).

$$
A(k) : \quad \begin{cases} -\Delta y^k = 0 , & \text{dans } \Omega \\ -\Delta p^k = 0 , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y^k}{\partial \nu} + \dfrac{1}{N} p^k + y^{k-1} = 0 , & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p^k}{\partial \nu} + p^{k-1} = y^k , & \text{sur } \Gamma \\ p^k + N u^k = 0 , & \text{sur } \Gamma \end{cases}
$$

Remarque : (y^o, p^o, u^o) est la solution du système limite d'optimalité (chapitre I).

On a, la proposition suivante :

Proposition 1.1.- Pour tout $k \geq 1$, entier naturel, le problème $A(k)$ possède une solution unique (y^k, p^k, u^k) appartenant à $V \times V \times U_{ad}$.

Preuve : On fait, la démonstration pour le cas $k = 1$. La formulation variationnelle du problème $A(k)$ s'écrit :

$$\int_\Omega (\nabla y^1,\nabla\varphi)\,dx + \frac{1}{N}\int_\Omega (\nabla p^1,\nabla\Psi)\,dx - \frac{1}{N}\int_\Gamma y^1 .\Psi\,d\Gamma + \frac{1}{N}\int_\Gamma p^1 .\varphi\,d\Gamma$$

$$= -\int_\Gamma y^o .\varphi\,d\Gamma - \frac{1}{N}\int_\Gamma p^o .\Psi\,d\Gamma\ ,\ \forall(\varphi,\Psi)\in V\times V$$

On pose :

$$A((y,p),(\varphi,\Psi)) = \int_\Omega (\nabla y,\nabla\varphi)\,dx + \frac{1}{N}\int_\Omega (\nabla p,\nabla\Psi)\,dx - \frac{1}{N}\int_\Gamma y .\Psi\,d\Gamma$$

$$+ \frac{1}{N}\int_\Gamma p .\varphi\,d\Gamma\ ,\quad \forall(y,p,\varphi,\Psi)\in (V\times V)^2$$

et,

$$L(\varphi,\Psi) = -\int_\Gamma y^o .\varphi\,d\Gamma - \frac{1}{N}\int_\Gamma p^o .\Psi\,d\Gamma\ ,\ \forall(\varphi,\Psi)\in (V\times V)\ .$$

a) L'application A est une application bilinéaire continue sur $(V\times V)^2$.

A est coercive sur $(V\times V)$, car l'espace $V\times V$ muni de la norme , $||(\varphi,\Psi)||_{V\times V} = (||\varphi||_V^2 + ||\Psi||_V^2)^{1/2}$.

Les calculs précédents donnent :

$$A((\varphi,\Psi),(\varphi,\Psi)) = \int_\Omega (\nabla\varphi,\nabla\varphi)\,dx + \frac{1}{N}\int_\Omega (\nabla\Psi,\nabla\psi)\,dx$$

$$= ||\varphi||_V^2 + ||\Psi||_V^2$$

On a, alors :

$$A((\varphi,\Psi),(\varphi,\Psi)) \geq C\,||(\varphi,\Psi)||_{V\times V}^2\ .$$

b) Il est évident que l'application L définie sur $V \times V$ est linéaire - continue sur l'Hilbert $(V \times V)$. On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgramm ce qui implique l'existence et l'unicité, dans $V \times V \times U_{ad}$ de (y^1, p^1, u^1) solution de :

$$
(P) : \quad \left\{ \begin{array}{l} A((y^1, p^1), (\varphi,\Psi)) = L(\varphi,\Psi) \\ u^1 = -\frac{1}{N} p^1 \quad , \quad \text{sur } \Gamma \\ \forall (\varphi,\Psi) \in (V \times V) . \end{array} \right.
$$

On a, la proposition suivante :

Proposition 1.2.- Il existe C, une constante, qui ne dépend pas de $k \in \mathbb{N}$, telle que :

$$
\|y^k\|_{H^1(\Omega)} \leq C^k \quad \text{et} \quad \|p^k\|_{H^1(\Omega)} \leq C^k .
$$

$\forall (y^k, p^k)$, solution du problème $A(k)$.

<u>Preuve</u> : On fait, la formulation variationnelle du système $A(k)$, en appliquant la formule de Green. On trouve :

$$
(1) \quad \int_\Omega (\nabla y^k, \nabla y^k)\, dx + \frac{1}{N} \int_\Omega (\nabla p^k, \nabla p^k)\, dx = - \int_\Gamma y^{k-1} . y^k\, d\Gamma - \frac{1}{N} \int_\Gamma p^k . p^{k-1}\, d\Gamma
$$

On applique, au second membre de (1) l'inégalité suivante :

$$
\frac{a^2 + b^2}{2} \geq - a\, b \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall b \in \mathbb{R} . .
$$

On prend, sur V la norme suivante :

$$
\|\varphi\|_V^2 = \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla\varphi)\, dx \quad , \quad \forall \varphi \in V
$$

(1), donne :

$$
(2) : \quad (\|y^k\|_V^2 + \frac{1}{N} \|p^k\|_V^2) \leq C_1 (\|y^{k-1}\|_V \|y^k\|_V + \|p^{k-1}\|_V \|p^k\|_V)
$$

(grâce au théorème de Trace)

$$C_1 \, \|y^{k-1}\|_V \, \|y^k\|_V \leq \frac{1}{2} \|y^k\|_V^2 + C' \, \|y^{k-1}\|_V^2$$

$$C_1 \, \|p^{k-1}\|_V \, \|p^k\|_V \leq \frac{1}{2N} \|p^k\|_V^2 + C'' \, \|p^{k-1}\|_V^2$$

donc, avec (2)

$$\frac{1}{2} (\|y^k\|_V^2 + \frac{1}{N} \|p^k\|_V^2) \leq C' \, (\|y^{k-1}\|_V^2 + \|p^{k-1}\|_V^2)$$

en réitérant :

$$\|y^k\|_V^2 + \|p^k\|_V^2 \leq C^k \, (\|y^o\|_V^2 + \|p^o\|_V^2) \; .$$

2 - *Estimations des correcteurs.*

On appelle, correcteurs :

$$\eta_\varepsilon = y_\varepsilon - (y^o + \varepsilon \, y^1 + \ldots\ldots + \varepsilon^k \, y^k + \varepsilon^{k+1} \, y^{k+1})$$

et $$\pi_\varepsilon = p_\varepsilon - (p^o + \varepsilon \, p^1 + \ldots\ldots + \varepsilon^k \, p^k + \varepsilon^{k+1} \, p^{k+1})$$

On a, la proposition suivante :

Proposition 2.1.- $(\eta_\varepsilon, \pi_\varepsilon)$ est la solution du système :

$$(\mathcal{D}) : \left\{ \begin{array}{ll} - \Delta \eta_\varepsilon = 0 \; , & \text{dans } \Omega \\ - \Delta \pi_\varepsilon = 0 \; , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon \, \eta_\varepsilon + \dfrac{1}{N} \pi_\varepsilon = - \varepsilon^{k+2} \, y^{k+1} \; , & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial \pi_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon \, \pi_\varepsilon - \eta_\varepsilon = - \varepsilon^{k+2} \, p^{k+1} \; , & \text{sur } \Gamma \\ (\eta_\varepsilon, \pi_\varepsilon) \in V \times V & \end{array} \right.$$

Preuve de la proposition 2.1. :

Il est évident que l'on a dans l'ouvert Ω, $-\Delta\eta_\varepsilon = 0$, et $-\Delta\pi_\varepsilon = 0$.

Les conditions aux bords, s'obtiennent de la façon suivante :

$$\frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial\nu} + \varepsilon\,\eta_\varepsilon + \frac{1}{N}\pi_\varepsilon = \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial\nu} - \left(\frac{\partial y^o}{\partial\nu} + \varepsilon\frac{\partial y_1}{\partial\nu} + \ldots\ldots + \varepsilon^k\frac{\partial y^k}{\partial\nu} + \varepsilon^{k+1}\frac{\partial y^{k+1}}{\partial\nu}\right)$$
$$+ \varepsilon\, y_\varepsilon - \varepsilon\,(y^o + \ldots\ldots + \varepsilon^k y^k + \varepsilon^{k+1} y^{k+1})$$
$$+ \frac{1}{N}p_\varepsilon - \frac{1}{N}(p^o + \varepsilon\, p^1 + \ldots\ldots + \varepsilon^k p^k + \varepsilon^{k+1} p^{k+1})$$

on utilise, les systèmes donnant les coefficients de ε^k, pour $k \in \mathbb{N}$, on a alors au bord, Γ :

$$\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial\nu} + \varepsilon\, y_\varepsilon + \frac{1}{N}p_\varepsilon = 0 \quad ,$$
$$-\frac{\partial y^o}{\partial\nu} + \frac{1}{N}p^o = 0 \quad ,$$
$$-\varepsilon\left(\frac{\partial y^1}{\partial\nu} + y^o + \frac{1}{N}p^o\right) = 0 \quad ,$$

- -

$$-\varepsilon^k\left(\frac{\partial y^k}{\partial\nu} + y^{k-1} + \frac{1}{N}p^k\right) = 0 \quad ,$$
$$-\varepsilon^{k+1}\left(y^k + \frac{1}{N}p^{k+1} + \frac{\partial y^{k+1}}{\partial\nu}\right) = 0 \quad ,$$

on obtient, en ajoutant membre à membre, $\dfrac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial\nu} + \varepsilon\,\eta_\varepsilon + \dfrac{1}{N}\pi_\varepsilon = -\,\varepsilon^{k+2}\, y^{k+1}$,

on fait exactement la même démarche pour obtenir ,

$\dfrac{\partial\pi_\varepsilon}{\partial\nu} + \varepsilon\,\pi_\varepsilon - \eta_\varepsilon = -\,\varepsilon^{k+2}\, p^{k+1}$, on obtient , donc le système $(\mathcal{D})$.

On cherche, des estimations de η_ε , et π_ε dans $H^1(\Omega)$ en fonction de ε (petit).

On a le théorème, suivant :

Théorème (I) 2.1.- On a les estimations suivantes :

1) $||y_\varepsilon - (y^o + \varepsilon\, y^1 + \ldots + \varepsilon^k\, y^k)||_{H^1(\Omega)} \leqslant C^k \,.\, \varepsilon^{k+1}$

2) $||p_\varepsilon - (p^o + \varepsilon\, p^1 + \ldots + \varepsilon^k\, p^k)||_{H^1(\Omega)} \leqslant C^k \,.\, \varepsilon^{k+1}$

où $C = C(\Omega)$, une constante ne dépendant que de l'ouvert Ω.

Preuve : La formulation variationnelle du système $(\mathcal{D})$ donne :

$$(A) \quad : \int_\Omega (\nabla\eta_\varepsilon,\nabla\eta_\varepsilon)\, dx + \varepsilon \int_\Omega \eta_\varepsilon^2\, d\Gamma = -\frac{1}{N}\int_\Gamma \pi_\varepsilon \,.\, \eta_\varepsilon\, d\Gamma - \varepsilon^{k+2}\int_\Gamma y^{k+1} \,.\, \eta_\varepsilon\, d\Gamma$$

et

$$(B) \quad : \frac{1}{N}\int_\Omega (\nabla\pi_\varepsilon,\nabla\pi_\varepsilon)\, dx + \frac{\varepsilon}{N}\int_\Omega \pi_\varepsilon^2\, d\Gamma = \frac{1}{N}\int_\Gamma \pi_\varepsilon \,.\, \eta_\varepsilon\, d\Gamma - \frac{\varepsilon^{k+2}}{N}\int_\Gamma p^{k+1} \,.\, \pi_\varepsilon\, d\Gamma$$

on ajoute (A) à (B), on obtient :

$$\int_\Omega (\nabla\eta_\varepsilon,\nabla\eta_\varepsilon)\, dx + \frac{1}{N}\int_\Omega (\nabla\pi_\varepsilon,\nabla\pi_\varepsilon)\, dx + \varepsilon\int_\Gamma \eta_\varepsilon^2\, d\Gamma + \frac{\varepsilon}{N}\int_\Gamma \pi_\varepsilon^2\, d\Gamma$$

$$= -\,\varepsilon^{k+2}\int_\Gamma y^{k+1} \,.\, \eta_\varepsilon\, d\Gamma - \frac{\varepsilon^{k+2}}{N}\int_\Gamma p^{k+1} \,.\, \pi_\varepsilon\, d\Gamma$$

on utilise les résultats, suivants :

$$(2.2.) \qquad \frac{\varepsilon^{2k+3}}{2}\,|y^{k+1}|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\varepsilon}{2}\,|\eta_\varepsilon|^2_{L^2(\Gamma)} \geqslant -\,\varepsilon^{k+2}\int_\Gamma y^{k+1} \,.\, \eta_\varepsilon\, d\Gamma$$

$$(2.3.) \qquad \frac{\varepsilon^{2k+3}}{2}\,|p^{k+1}|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\varepsilon}{2N}\,|\pi_\varepsilon|^2_{L^2(\Gamma)} \geqslant -\,\frac{\varepsilon^{k+2}}{N}\int_\Gamma p^{k+1} \,.\, \pi_\varepsilon\, d\Gamma$$

(2.2.), (2.3.) et la proposition (1.2.) nous donnent :

$$\int_\Omega (\nabla\eta_\varepsilon, \nabla\eta_\varepsilon)\, dx + \frac{\varepsilon}{2} |\eta_\varepsilon|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{1}{N}\int_\Omega (\nabla\pi_\varepsilon, \nabla\pi_\varepsilon)\, dx + \frac{\varepsilon}{2N}\int_\Gamma \pi_\varepsilon^2\, d\Gamma \leq [C(\Omega)]^k \cdot \varepsilon^{2k+3}$$

$\eta_\varepsilon \in V = \{y \in H^1(\Omega) \;/\; \int_\Gamma y\, d\Gamma = 0\}$ et $\pi_\varepsilon \in V$ donc :

$$\int_\Omega (\nabla\eta_\varepsilon, \nabla\eta_\varepsilon)\, dx \geq C \cdot ||\eta_\varepsilon||^2_{H^1(\Omega)}$$

et

$$\frac{1}{N}\int_\Omega (\nabla\pi_\varepsilon, \nabla\pi_\varepsilon)\, dx \geq C \cdot ||\pi_\varepsilon||^2_{H^1(\Omega)}$$

on a donc, pour , $(0 < \varepsilon < 1)$:

$$C \cdot \varepsilon[||\pi_\varepsilon||^2_{H^1(\Omega)} + ||\eta_\varepsilon||^2_{H^1(\Omega)}] \leq [C(\Omega)]^k \cdot \varepsilon^{2k+3}$$

on obtient, alors les deux estimations, suivantes :

$$||\eta_\varepsilon||_{H^1(\Omega)} \leq [C(\Omega)]^k \cdot \varepsilon^{k+1}$$

et
$$||\pi_\varepsilon||_{H^1(\Omega)} \leq [C(\Omega)]^k \cdot \varepsilon^{k+1}$$

$C(\Omega)$ est une constante positive, ne dépendant que de l'ouvert Ω.

2 - *Etude du calcul asymptotique, cas où* $U = L^2(\Gamma)$.

Le problème perturbé :

$$(I) : \begin{cases} -\Delta y_\varepsilon = 0 \text{, dans } \Omega \\ -\Delta p_\varepsilon = 0 \text{, dans } \Omega \\ -\dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, y_\varepsilon = u_\varepsilon \text{, sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, p_\varepsilon = y_\varepsilon - z_d \text{, sur } \Gamma \\ p_\varepsilon + N\, u_\varepsilon = 0 \text{, sur } \Gamma \\ y_\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{, } p_\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ et } u_\varepsilon \in L^2(\Gamma) \end{cases}$$

On sait que :

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \operatorname*{Inf}_{v \in L^2(\Gamma)} (J_\varepsilon(v)) .$$

On cherche un développement asymptotique de y_ε de la forme :

$$y_\varepsilon = y^o + \varepsilon\, y^1 + \ldots + \varepsilon^k\, y^k + \ldots$$

De même, on cherche un développement de p_ε de la forme :

$$p_\varepsilon = p^o + \varepsilon\, p^1 + \ldots + \varepsilon^k\, p^k + \ldots$$

Le coefficient de ε^o :

On calcule, (y^o, p^o, u^o) la solution du système :

$$(I)^o : \begin{cases} -\Delta y^o = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ -\Delta p^o = 0 \ , & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y^o}{\partial \nu} = u^o \ , & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p^o}{\partial \nu} = y^o - z_d \ , & \text{sur } \Gamma \\ p^o + N\, u^o = 0 \ , & \text{sur } \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma y^o \, d\Gamma = \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \ , \quad \int_\Gamma p^o \, d\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \int_\Gamma u^o \, d\Gamma = 0 \end{cases}$$

on pose,

$$\tilde{y}^o = y^o - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma$$

$$p^o = \tilde{p}^o \quad \text{et} \quad u^o = \tilde{u}^o$$

On a, $(\tilde{y}^o, \tilde{p}^o, \tilde{u}^o)$ la solution de :

$$
(\tilde{I})^{o} : \begin{cases}
- \Delta \tilde{y}^{o} = 0 \quad , \quad \text{dans} \quad \Omega \\
- \Delta \tilde{p}^{o} = 0 \quad , \quad \text{dans} \quad \Omega \\
\dfrac{\partial \tilde{y}^{o}}{\partial \nu} = \tilde{u}^{o} \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma \\
\dfrac{\partial \tilde{p}^{o}}{\partial \nu} = (\tilde{y}^{o} - z_d) + \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\int_{\Gamma} z_d \, d\Gamma \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma \\
\tilde{p}^{o} + N \, \tilde{u}^{o} = 0 \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma \\
\tilde{y}^{o} \in V \quad , \quad \tilde{p}^{o} \in V \quad \text{et} \quad \tilde{u}^{o} \in U_{ad}
\end{cases}
$$

$$V = \{y \in H^{1}(\Omega) \ / \int_{\Gamma} y \, d\Gamma = 0\} \quad \text{et} \quad U_{ad} = \{v \in L^{2}(\Gamma) \ / \int_{\Gamma} v \, d\Gamma = 0\}$$

$(\tilde{y}^{o}, \tilde{p}^{o}, \tilde{u}^{o})$ est le coefficient de ε^{o} , trouvé dans le cas $U = U_{ad}$.

<u>*Le coefficient de*</u> ε :

$(y^{1}, p^{1}, u^{1}) \in H^{1}(\Omega) \times H^{1}(\Omega) \times L^{2}(\Gamma)$ la solution de :

$$
(II) : \begin{cases}
- \Delta y^{1} = 0 \quad , \quad \text{dans} \quad \Omega \\
- \Delta p^{1} = 0 \quad , \quad \text{dans} \quad \Omega \\
\dfrac{\partial y^{1}}{\partial \nu} + \dfrac{1}{N} p^{1} = - y^{o} \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma \\
\dfrac{\partial p^{1}}{\partial \nu} + p^{o} = y^{1} \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma \\
p^{1} + N \, u^{1} = 0 \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma \\
\text{Cette solution vérifie en outre} \\
\displaystyle\int_{\Gamma} p^{1} \, d\Gamma = - N \int_{\Gamma} z_d \, d\Gamma \ , \quad \int_{\Gamma} y^{1} \, d\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} u^{1} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} z_d \, d\Gamma
\end{cases}
$$

On pose, $$y^1 = \tilde{y}^1$$

$$\tilde{u}^1 = u^1 - \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z_d \, d\Gamma$$

$$\tilde{p}^1 = p^1 + \frac{N}{|\Gamma|}\int_\Gamma z_d \, d\Gamma$$

on a, $$\frac{1}{N}\tilde{p}^1 = \frac{1}{N} p^1 + \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z_d \, d\Gamma$$

et $$\frac{1}{N}\tilde{p}^1 + \tilde{u}_1 = u^1 + \frac{1}{N} p^1 = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma$$

$(\tilde{y}^1, \tilde{p}^1, \tilde{u}_1) \in V \times V \times U_{ad}$ est exactement le coefficient de ε, dans le calcul asymptotique du cas précédent $U = U_{ad}$.

En général, le coefficient de ε^{2k}, pour $k \geq 1$ est $(y^{2k}, p^{2k}, u^{2k}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)$.

Il est la solution de :

$$(I)^{2k} : \left\{ \begin{array}{l} -\Delta y^{2k} = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ -\Delta p^{2k} = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial p^{2k}}{\partial \nu} + p^{2k-1} = y^{2k} \quad , \quad \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial y^{2k}}{\partial \nu} + \dfrac{1}{N} p^{2k} + y^{2k-1} = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma \\ p^{2k} + N u^{2k} = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma y^{2k} \, d\Gamma = (-1)^k N \int_\Gamma z_d \, d\Gamma \ , \ \int_\Gamma p^{2k} \, d\Gamma = 0 \ \text{ et } \int_\Gamma u^{2k} \, d\Gamma = 0 \end{array} \right.$$

on pose, $$\tilde{y}^{2k} = y^{2k} + \frac{(-1)^{k+1}}{|\Gamma|}\int_\Gamma z_d \, d\Gamma$$

$$\tilde{p}^{2k} = p^{2k} \quad \text{et} \quad u^{2k} = \tilde{u}^{2k} .$$

On vérifie, que l'on a, $(\tilde{y}^{2k}, \tilde{p}^{2k}, \tilde{u}^{2k}) \in V \times V \times U_{ad}$, et $(\tilde{y}^{2k}, \tilde{p}^{2k}, \tilde{u}^{2k})$ est le <u>coefficient</u> de ε^{2k}, dans le calcul asymptotique du cas $U = U_{ad}$, fait précédemment.

<u>*Le coefficient de*</u> ε^{2k+1} :

$(y^{2k+1}, p^{2k+1}, u^{2k+1}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)$, est la solution de :

$$(I)^{2k+1} : \begin{cases} -\Delta y^{2k+1} = 0 \ , \quad \text{dans } \Omega \\ -\Delta p^{2k+1} = 0 \ , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y^{2k+1}}{\partial \nu} + \dfrac{1}{N} p^{2k+1} + y^{2k} = 0 \ , \quad \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p^{2k+1}}{\partial \nu} + p^{2k} = y^{2k+1} \ , \quad \text{sur } \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma y^{2k+1}\, d\Gamma = 0 \ , \quad \int_\Gamma p^{2k+1}\, d\Gamma = (-1)^{k+1} N \int_\Gamma z_d\, d\Gamma \\ \text{et } \displaystyle\int_\Gamma u^{2k+1}\, d\Gamma = (-1)^k \int_\Gamma z_d\, d\Gamma \ . \end{cases}$$

Si, on pose :

$$\tilde{y}^{2k+1} = y^{2k+1}$$

$$\tilde{p}^{2k+1} = p^{2k+1} + \frac{(-1)^k}{|\Gamma|} N \int_\Gamma z_d\, d\Gamma$$

et

$$\tilde{u}^{2k+1} = u^{2k+1} + \frac{(-1)^{k+1}}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d\, d\Gamma$$

on vérifie que l'on a $(\tilde{y}^{2k+1}, \tilde{p}^{2k+1}, \tilde{u}^{2k+1}) \in V \times V \times U_{ad}$ d'une part et il est <u>coefficient</u> de ε^{2k+1} dans le calcul asymptotique du cas $U = U_{ad}$, d'autre part.

* *Estimations des correcteurs* :

On appelle, correcteurs :

$$\eta_\varepsilon = y_\varepsilon - (y^o + \varepsilon\, y^1 + \ldots\ldots + \varepsilon^k\, y^k + \varepsilon^{k+1}\, y^{k+1})$$

et $$\pi_\varepsilon = p_\varepsilon - (p^o + \varepsilon\, p^1 + \ldots\ldots + \varepsilon^k\, p^k + \varepsilon^{k+1}\, p^{k+1})$$

On vérifie, en utilisant les calculs précédents que $(\eta_\varepsilon, \pi_\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ est la solution de :

$$(\mathcal{D}) : \quad \begin{cases} -\Delta\eta_\varepsilon = 0 \quad , \text{ dans } \Omega \\ -\Delta\pi_\varepsilon = 0 \quad , \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial\nu} + \varepsilon\, \eta_\varepsilon + \dfrac{1}{N}\, \pi_\varepsilon = -\, \varepsilon^{k+2}\, y^{k+1} \quad , \text{ sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial\pi_\varepsilon}{\partial\nu} + \varepsilon\, \pi_\varepsilon - \eta_\varepsilon = -\, \varepsilon^{k+2}\, p^{k+1} \quad , \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

On a, le théorème suivant :

Théorème (II) 2.1.- Il existe une constante, positive, ne dépendant que de l'ouvert Ω, telle que :

1) $$||y_\varepsilon - (y^o + \varepsilon\, y^1 + \ldots\ldots + \varepsilon^k\, y^k)||_{H^1(\Omega)} \leq [C(\Omega)]^{k+1} \,.\, \varepsilon^{k+1}$$

2) $$||p_\varepsilon - (p^o + \varepsilon\, p^1 + \ldots\ldots + \varepsilon^k\, p^k)||_{H^1(\Omega)} \leq [C(\Omega)]^{k+1} \,.\, \varepsilon^{k+1} \,.$$

Preuve : La formulation variationnelle du système $(\mathcal{D})$, donne :

$$\int_\Omega (\nabla\eta_\varepsilon, \nabla\eta_\varepsilon)\, dx + \frac{1}{N}\int_\Omega (\nabla\pi_\varepsilon, \nabla\pi_\varepsilon)\, dx + \varepsilon \int_\Gamma \eta_\varepsilon^2\, d\Gamma + \frac{\varepsilon}{N}\int_\Gamma \pi_\varepsilon^2\, d\Gamma$$

$$= -\, \varepsilon^{k+2} \int_\Gamma y^{k+1} \,.\, \eta_\varepsilon\, d\Gamma - \frac{\varepsilon^{k+2}}{N}\int_\Gamma p^{k+1} \,.\, \pi_\varepsilon\, d\Gamma \,.$$

On utilise, l'inégalité $a^2 + b^2 \geq -2\,ab$, $\forall a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ on obtient pour le second membre :

$$-\varepsilon^{k+2} \int_\Gamma p^{k+1} \cdot \pi_\varepsilon \, d\Gamma \leq \frac{\varepsilon^{2k+3}}{2N} |p^{k+1}|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\varepsilon}{2N} |\pi_\varepsilon|^2_{L^2(\Gamma)}$$

$$-\varepsilon^{k+2} \int_\Gamma y^{k+1} \cdot \eta_\varepsilon \, d\Gamma \leq \frac{\varepsilon^{2k+3}}{2} |y^{k+1}|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\varepsilon}{2} |\eta_\varepsilon|^2_{L^2(\Gamma)} .$$

D'après ce qui précède, on a :

$$y^{k+1} = \tilde{y}^{k+1} + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma y^{k+1} \, d\Gamma \quad , \quad \tilde{y}^{k+1} \in V$$

$$p^{k+1} = \tilde{p}^{k+1} + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma p^{k+1} \, d\Gamma \quad , \quad \tilde{p}^{k+1} \in V$$

on remarque que :

$$\left| \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma y^{k+1} \, d\Gamma \right| = C \quad \text{et} \quad \left| \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma p^{k+1} \, d\Gamma \right| = C \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Ceci, se vérifie à partir des systèmes, $(I)^k$ précédents on a , donc :

$$||y^{k+1}||_{L^2(\Gamma)} \leq ||\tilde{y}^{k+1}||_{L^2(\Gamma)} + C$$

et

$$||p^{k+1}||_{L^2(\Gamma)} \leq ||\tilde{p}^{k+1}||_{L^2(\Gamma)} + C$$

D'après, la partie (I), on a :

$$||\tilde{y}^{k+1}||_{H^1(\Omega)} \leq [C(\Omega)]^{k+1} \quad \text{et} \quad ||\tilde{p}^{k+1}||_{H^1(\Omega)} \leq [C(\Omega)]^{k+1}$$

On, en déduit que l'on peut écrire :

$$\int_\Omega (\nabla\eta_\varepsilon, \nabla\eta_\varepsilon)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Gamma \eta_\varepsilon^2\,d\Gamma + \frac{\varepsilon}{2N}\int_\Gamma \pi_\varepsilon^2\,d\Gamma + \frac{1}{N}\int_\Omega (\nabla\pi_\varepsilon,\nabla\pi_\varepsilon)\,dx$$

$$\leqslant [C(\Omega)]^{k+1}\ \varepsilon^{2k+3}$$

$C(\Omega)$ = constante positive ne dépendant que de Ω , pour $0 < \varepsilon < 1$, on a :

$$\varepsilon\int_\Omega (\nabla\eta_\varepsilon, \nabla\eta_\varepsilon)\,dx + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Gamma \eta_\varepsilon^2\,d\Gamma + \frac{\varepsilon^2}{2N}\int_\Gamma \pi_\varepsilon^2\,d\Gamma + \frac{\varepsilon}{N}\int_\Omega (\nabla\pi_\varepsilon, \nabla\pi_\varepsilon)\,dx$$

$$\leqslant \varepsilon\int_\Omega (\nabla\eta_\varepsilon, \nabla\eta_\varepsilon)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Gamma \eta_\varepsilon^2\,d\ + \frac{\varepsilon}{N}\int_\Omega (\nabla\pi_\varepsilon, \nabla\pi_\varepsilon)\,dx$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2N}\int_\Gamma \pi_\varepsilon^2\,d\Gamma\ .$$

D'où :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\eta_\varepsilon, \nabla\eta_\varepsilon)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma \eta_\varepsilon^2\,d\Gamma \leqslant [C(\Omega)]^{k+1}\ .\ \varepsilon^{2k+2}$$

et

$$\frac{1}{2N}\int_\Omega (\nabla\pi_\varepsilon, \nabla\pi_\varepsilon)\,dx + \frac{1}{2N}\int_\Omega \pi_\varepsilon^2\,d\Gamma \leqslant [C(\Omega)]^{k+1}\ .\ \varepsilon^{2k+2}$$

ce qui implique que l'on a :

$$||\eta_\varepsilon||_{H^1(\Omega)} \leqslant [C(\Omega)]^{k+1}\ .\ \varepsilon^{k+1}$$

et

$$||\pi_\varepsilon||_{H^1(\Omega)} \leqslant [C(\Omega)]^{k+1}\ .\ \varepsilon^{k+1}\ .$$

CHAPITRE V

ALGORITHMES DE RESOLUTION DU SYSTEME PERTURBÉ.

A - ALGORITHME POUR LA RESOLUTION DIRECTE DU SYSTEME D'OPTIMALITE.-

Il s'agit, dans cette partie, d'utiliser un algorithme, résolvant par une méthode itérative le système d'optimalité perturbé.

Soient :

. $U_{ad} = \{v \in L^2(\Gamma) \;/\; \int_\Gamma v \, d\Gamma = 0\}$, et

. $V = \{y \in H^1(\Omega) \;/\; \int_\Gamma y \, d\Gamma = 0\}$

On sait que, le système d'optimalité perturbé est :

$$(I) : \quad \begin{cases} -\Delta y_\varepsilon = 0 \ , \quad \text{dans } \Omega \\ -\Delta p_\varepsilon = 0 \ , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, y_\varepsilon = u_\varepsilon \ , \quad \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\, p_\varepsilon = (y_\varepsilon - z_d) + \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\int_\Gamma z_d \, d\Gamma \ , \quad \text{sur } \Gamma \\ p_\varepsilon + N\, u_\varepsilon = 0 \ , \quad \text{sur } \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma y_\varepsilon \, d\Gamma = 0 \ , \ \int_\Gamma p_\varepsilon \, d\Gamma = 0 \ \text{ et } \ u_\varepsilon \in U_{ad} \end{cases}$$

On supposera, z_d quelconque dans $L^2(\Gamma)$.

1 - *Définitions et Algorithmes*.

Soit l'opérateur
$$\begin{array}{ccc} A : V & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ \cup & & \cup \\ y & \longrightarrow & Ay \end{array}$$

On définit A par :

$$\langle Ay,\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),V} = \int_\Omega (\nabla y, \nabla\varphi)\, dx\,, \qquad \forall\varphi \in V$$

soient, les deux opérateurs suivants :

$$\begin{array}{ccc} B : U_{ad} & \longrightarrow & L^2(\Gamma) \\ \cup & & \cup \\ v & \text{———} & B(v) \end{array}\quad , \text{ définie par :}$$

$$\langle B(v), \Psi\rangle_{L^2(\Gamma),L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma v\,.\,\Psi\, d\Gamma \quad , \qquad \forall\Psi \in L^2(\Gamma)\ .$$

$$\begin{array}{ccc} C : V & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ \cup & & \cup \\ y & \text{———} & c(y) \end{array}\quad , \text{ définie par :}$$

$$\langle c(y), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),V} = \int_\Gamma y\,.\,\varphi\, d\Gamma \quad , \qquad \forall\varphi \in V$$

On peut, définir la trace sur $H^1(\Omega)$.

$$\begin{array}{ccc} T : H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma) \\ \cup & & \cup \\ y & \longrightarrow & T(y) \end{array}$$

Le système (I) est équivalent au système (II) suivant :

$$(II) : \begin{cases} A(y) + \varepsilon\, C(y) - B(v) = 0 , \\ A(p) + \varepsilon\, C(p) - B(T(y_\varepsilon)) = - \quad (z_d) + \quad (\frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma), \\ T(p) + N\, u = 0 \\ (p,y) \in V \times V \quad \text{et} \quad u \in U_{ad} \end{cases}$$

Algorithme.

Soit u^o , quelconque dans $U_{ad} = \{v \in L^2(\Gamma) \; / \int_\Gamma v \, d\Gamma = 0\}$.
On définit, $(y^{n+1}, p^{n+1}, u^{n+1})$ par :

$$ALG\,(1) : \begin{cases} A(y^{n+1}) + \varepsilon\, C(y^{n+1}) = B(u^n) \quad , \\ A(p^{n+1}) + \varepsilon\, C(p^{n+1}) = B(T(y^n)) - \quad (z_d) + \quad (\frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma z_d \, d\Gamma), \\ u^{n+1} = - N^{-1} \; . \; T(p^{n+1}) \\ (u^{n+1}, p^{n+1}, y^{n+1}) \in U_{ad} \times V \times V \end{cases}$$

2 - *Etude de la convergence de* ALG (1).

Pour l'étude de la convergence de cet algorithme. On utilise [5].
Théorème 2.1. (Miellou [5]).

Proposition.- Alg (1) converge vers la solution du système d'optimalité perturbé, si N vérifie $N > C(\Omega)$, où $C(\Omega)$ est une constante qui ne dépend que de l'ouvert Ω.

Preuve : On vérifie que l'on a :

$$\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon^{n+1}, \nabla y_\varepsilon^{n+1}) \, dx + \varepsilon \int_\Gamma (y_\varepsilon^{n+1})^2 \, d\Gamma = \int_\Gamma u_\varepsilon^n \, . \, y_\varepsilon^{n+1} \, d\Gamma$$

1) $\int_{\Omega} (\nabla y_{\varepsilon}^{n+1}, \nabla y_{\varepsilon}^{n+1})\, dx \leqslant ||u_{\varepsilon}^{n}||_{L^2(\Gamma)} \cdot ||y_{\varepsilon}^{n+1}||_{L^2(\Gamma)}$

2) $\exists\ C(\Omega) > 0 \quad , \quad ||y_{\varepsilon}^{n+1}||_{L^2(\Gamma)} \leqslant C(\Omega) \left(\int_{\Omega} (\nabla y_{\varepsilon}^{n+1}, \nabla y_{\varepsilon}^{n+1})^{1/2}\, dx\right)$,

car $y_{\varepsilon}^{n+1} \in V$.

3) $\left(\int_{\Omega} (\nabla y_{\varepsilon}^{n+1}, \nabla y_{\varepsilon}^{n+1})\, dx\right)^{1/2} \leqslant C(\Omega)\ ||u_n||_{L^2(\Gamma)}$.

4) $u_{\varepsilon}^{n} = - N^{-1} \cdot p_{\varepsilon}^{n}$, sur Γ

5) $\left(\int_{\Omega} (\nabla y_{\varepsilon}^{n+1}, \nabla y_{\varepsilon}^{n+1})\, dx\right)^{1/2} \leqslant \frac{C(\Omega)}{N}\ ||p_{\varepsilon}^{n}||_{L^2(\Gamma)}$

6) $\left(\int_{\Omega} (\nabla p_{\varepsilon}^{n}, \nabla p_{\varepsilon}^{n})\, dx\right)^{1/2} \leqslant C(\Omega)\ ||y_{\varepsilon}^{n} - z_d||_{L^2(\Gamma)}$

7) $||y_{\varepsilon}^{n+1}||_V \leqslant \left(\frac{C(\Omega)}{N}\right) ||y_{\varepsilon}^{n}||_{L^2(\Gamma)} + \left(\frac{C(\Omega)}{N}\right) ||z_d||_{L^2(\Gamma)}$, $\forall n$

On en déduit, que l'on a (par récurrence) :

$$||y_{\varepsilon}^{n+1}||_V \leqslant \left(\frac{C(\Omega)}{N}\right)^{n+1} \cdot ||y_{\varepsilon}^{o}||_{L^2(\Gamma)} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{C(\Omega)}{N}\right)^{k} ||z_d||_{L^2(\Gamma)}$$

Il suffit de prendre $0 < \frac{C(\Omega)}{N} < 1$, pour avoir une série géométrique convergente.

Si cette condition est vérifiée la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{C(\Omega)}{N}\right)^{n+1} ||z_d||_{L^2(\Gamma)} \quad \text{est } \underline{\text{convergente}} \ .$$

On a , donc $\left(\frac{C(\Omega)}{N}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Soit, $\ell = ||z_d||_{L^2(\Gamma)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{C(\Omega)}{N}\right)^k \right)$

On obtient,

$$\boxed{||y_\varepsilon^n||_V \leq ||y_\varepsilon^o||_{L^2(\Gamma)} + \ell = c \, , \qquad \forall n \in \mathbb{N} \, .}$$

On peut extraire une sous-suite $(y_\varepsilon^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers $y_{\varepsilon,\infty}$, la solution de :

$$(S1) : \begin{cases} -\Delta y_{\varepsilon,\infty} = 0 \, , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_{\varepsilon,\infty}}{\partial \nu} + \varepsilon \, y_{\varepsilon,\infty} = u_{\varepsilon,\infty} \quad \text{sur } \Gamma \\ y_{\varepsilon,\infty} \in V \quad \text{et} \quad \int_\Gamma u_{\varepsilon,\infty} \, d\Gamma = 0 \end{cases}$$

8) On a, $y_\varepsilon^n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_{\varepsilon,\infty}$ dans $L^2(\Gamma)$ fortement.

9) $$\int_\Omega (\nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}), \nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}) \, dx + \varepsilon \int_\Gamma (y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty})^2 \, d\Gamma$$
$$= \int_\Gamma (u_\varepsilon^n - u_{\varepsilon,\infty}) \, . \, (y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}) \, d\Gamma$$
$$\leq ||u_\varepsilon^n||_{L^2(\Gamma)} \, ||y_{\varepsilon,\infty} - y_\varepsilon^n||_{L^2(\Gamma)} + ||u_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} \, ||y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} \, .$$

On sait que l'on a :

$$||u_\varepsilon^n||_{L^2(\Gamma)} \leq C$$

9) devient :

$$\int_\Omega (\nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}), \nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}))\, dx \leq$$

$$C\, ||y_{\varepsilon,\infty} - y_\varepsilon^n||_{L^2(\Gamma)} + ||u_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)}\, ||y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)}$$

on a, donc :

$$\lim_{n\to\infty} (\int_\Omega (\nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}), \nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}))\, dx = 0$$

car y_ε^n converge <u>fortement</u> (quand $n \to \infty$) dans $L^2(\Gamma)$ vers $y_{\varepsilon,\infty}$.

y_ε^n converge fortement dans $H^1(\Omega)$, vers $y_{\varepsilon,\infty}$ la solution de (S1).

. p_ε^n converge <u>fortement</u> dans $H^1(\Omega)$ vers $p_{\varepsilon,\infty}$ solution de (S2) ;

$$(S2) : \begin{cases} -\Delta p_{\varepsilon,\infty} = 0 \ , \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial p_{\varepsilon,\infty}}{\partial \nu} + \varepsilon\, p_{\varepsilon,\infty} = y_{\varepsilon,\infty} - z_d + \dfrac{1}{|\Gamma|}\displaystyle\int_\Gamma z_d\, d\Gamma \ , \text{ sur } \Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma p_{\varepsilon,\infty}\, d\Gamma = 0 \end{cases}$$

On a,

$$\int_\Omega (\nabla(p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}), \nabla(p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}))\, dx \leq C\, ||y_{\varepsilon,\infty} - y_\varepsilon^n||_{L^2(\Gamma)}\, ||p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)}$$

$$\exists C(\Omega) > 0 \ , \ ||p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} \leq C(\Omega)\, (\int_\Omega (\nabla(p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}), \nabla(p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}))^{1/2}$$

on obtient,

$$(\int_\Omega (\nabla(p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}), \nabla(p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}))\, dx)^{1/2} \leq C(\Omega)\ .\ ||y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)}$$

car $(p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}) \in V = \{y \in H^1(\Omega) \ / \int_\Gamma y\, d\Gamma = 0\}$.

$$\lim_{n\to\infty} (||p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}||_V) = 0 \quad , \qquad \text{puisqu'on a}$$

$$\lim_{n\to\infty} ||y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} = 0$$

p_ε^n converge donc fortement dans $H^1(\Omega)$ vers $p_{\varepsilon,\infty} \in V$ la solution de (S2).

On sait que l'on a :

$$u_\varepsilon^n = - N^{-1} p_\varepsilon^n \quad , \quad \text{sur } \Gamma$$

et

$$u_{\varepsilon,\infty} = - N^{-1} p_{\varepsilon,\infty} \quad , \quad \text{sur } \Gamma$$

$$||u_\varepsilon^n - u_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} = N^{-1} ||p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

u_ε^n converge <u>fortement</u> dans $L^2(\Gamma)$ vers $u_{\varepsilon,\infty}$ l'optimum perturbé.

En définitive, la méthode définie par ALG(1) converge pour $0 < C(\Omega) < N$, vers le <u>système d'optimalité perturbé</u>.

B - *APPLICATION D'UNE METHODE DU GRADIENT*.-

. On utilise, une méthode du gradient pour le calcul du contrôle optimal perturbé.

. Le problème <u>du contrôle optimal perturbé</u> s'énonce :

Trouver, $u_\varepsilon \in U_{ad}$ tel que : $J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v\in U_{ad}} (J_\varepsilon(v))$.

Rappelons les notations :

$$U_{ad} = \{v \in L^2(\Gamma) \;/\; \int_\Gamma v \, d\Gamma = 0\}$$

$$V = \{y \in H^1(\Omega) \;/\; \int_\Gamma y \, d\Gamma = 0\}$$

$$J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y_\varepsilon(v) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2 \, d\Gamma \quad , \quad \forall v \in U_{ad}$$

N = une constante positive donnée.

z_d supposé quelconque dans $L^2(\Gamma)$.

$y_\varepsilon(v)$ est l'état, il est solution de :

$$(\mathrm{I}) : \quad \begin{cases} -\Delta y_\varepsilon(v) = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu}(v) + \varepsilon \, y_\varepsilon(v) = v \quad , \quad \text{sur } \Gamma \\ y_\varepsilon(v) \in V \quad , \quad v \in U_{ad} \end{cases}$$

On définit l'algorithme, suivant :

Soit u^o quelconque dans U_{ad} (par exemple $u^o = 0$).

* *ALGORITHME* :

1) $u^o = 0$, pour $i = 0$,

2) $d_\varepsilon^i = -\operatorname{grad}(J_\varepsilon(u_\varepsilon^i)) = -2 \,.\, (p_\varepsilon(u_\varepsilon^i) + N\, u_\varepsilon^i)$, sur Γ

$p_\varepsilon(u_\varepsilon^i)$ est l'adjoint, associé à $y_\varepsilon(u_\varepsilon^i)$ solution de (I).

3) $\lambda_\varepsilon^i \in \mathbb{R}$, solution du problème :

ALG(2)

$$\phi(\lambda_\varepsilon^i) = \operatorname*{Min}_{\lambda \in \mathbb{R}} (\phi(\lambda))$$

$$\phi(\lambda) = \int_\Gamma |y_\varepsilon(u_\varepsilon^i + \lambda\, d_\varepsilon^i) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma (u_\varepsilon^i + \lambda\, d_\varepsilon^i)^2 \, d\Gamma \;, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} .$$

4) $u_\varepsilon^{i+1} = u_\varepsilon^i + \lambda_\varepsilon^i \, d_\varepsilon^i$, puis on retourne pour l'itération suivante à 2).

* *Etude de la convergence de* ALG(2) :

Théorème.- La suite $(u_\varepsilon^i)_{i\in\mathbb{N}}$, converge fortement dans $L^2(\Gamma)$ vers $u_\varepsilon \in U_{ad}$, le contrôle optimal perturbé.

La preuve du théorème :

On suppose u^o , quelconque dans U_{ad} , $(u^o = 0)$ on a, $J_\varepsilon(u_\varepsilon^i) \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon^{i-1}) \leq \ldots \leq J_\varepsilon(u^o) \leq C$. D'après la définition de [ALG(2)].

La suite $(J_\varepsilon(u_\varepsilon^i))_{i\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

1) $J_\varepsilon(u_\varepsilon^n) \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$ pour ε fixé.

2) $||u_\varepsilon^n||_{L^2(\Gamma)} \leq C$ et $u_\varepsilon^n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_{\varepsilon,\infty}$ faiblement dans $L^2(\Gamma)$ vers $u_{\varepsilon,\infty} \in U_{ad}$.

3) $||y_\varepsilon^n||_{L^2(\Gamma)} \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4) $\displaystyle\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon^n, \nabla y_\varepsilon^n)\, dx + \varepsilon \int_\Gamma (y_\varepsilon^n)^2\, d\Gamma = \int_\Gamma u_\varepsilon^n \cdot y_\varepsilon^n\, d\Gamma$

donc $\displaystyle\int_\Omega (\nabla y_\varepsilon^n, \nabla y_\varepsilon^n)\, dx \leq ||u_\varepsilon^n||_{L^2(\Gamma)}\, ||y_\varepsilon^n||_{L^2(\Gamma)} \leq C$

5) $||y_\varepsilon^n||_{H^1(\Omega)} \leq C$, $y_\varepsilon^n \xrightarrow{H^1(\Omega)} y_{\infty,\varepsilon}$ on peut extraire une sous-suite y_ε^n qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers $y_{\infty,\varepsilon} \in V$ solution de

$$(II) : \begin{cases} -\Delta y_{\infty,\varepsilon} = 0 \ , \quad \text{dans } \Omega \\[2mm] \dfrac{\partial y_{\infty,\varepsilon}}{\partial \nu} + \varepsilon\, y_{\infty,\varepsilon} = u_{\varepsilon,\infty} \ , \quad \text{sur } \Gamma \\[2mm] \displaystyle\int_\Gamma y_{\infty,\varepsilon}\, d\Gamma = 0 \end{cases}$$

6) y_ε^n converge <u>fortement</u> dans $L^2(\Gamma)$, puisqu'il y a convergence faible dans $H^1(\Omega)$.

7) $$\int_\Omega (\nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}), \nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}))\, dx + \varepsilon \int_\Gamma (y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty})^2\, d\Gamma = \int_\Gamma (u_{\varepsilon,n} - u_{\varepsilon,\infty})\,(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty})\, d\Gamma$$

$$\int_\Omega (\nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}), \nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}))\, dx \leq ||u_{\varepsilon,n} - u_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)}\ ||y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)}$$

$$\leq C\ ||y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} + ||u_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)}\ ||y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega (\nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}), \nabla(y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}))\, dx\right) = 0$$

car on a, $\lim_{n\to\infty} (||y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)}) = 0$, on en déduit que :

y_ε^n converge <u>fortement</u> dans $H^1(\Omega)$ vers $y_{\varepsilon,\infty}$ solution de (I.I).

8) p_ε^n converge <u>fortement</u> dans $H^1(\Omega)$, vers $p_{\varepsilon,\infty} \in V$ la solution de :

$$\text{(III)} :\quad \begin{cases} -\Delta p_{\varepsilon,\infty} = 0 \ , \quad \text{dans } \Omega \\[2mm] \dfrac{\partial p_{\varepsilon,\infty}}{\partial \nu} + \varepsilon\, p_{\varepsilon,\infty} = y_{\varepsilon,\infty} - z_d + \dfrac{1}{|\Gamma|}\displaystyle\int_\Gamma z_d\, d\Gamma \ , \quad \text{sur } \Gamma \\[2mm] p_{\varepsilon,\infty} \in V \end{cases}$$

On vérifie que l'on a :

$$\int_\Omega (\nabla(p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}), \nabla(p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}))\, dx + \varepsilon \int_\Gamma (p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty})^2\, d\Gamma$$

$$= \int_\Gamma (y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}) \cdot (p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty})\, d\Gamma$$

$$\leq ||p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} \cdot ||y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} \ .$$

Ce qui implique : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int_\Omega (\nabla(p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}), \nabla(p_\varepsilon^n - p_{\varepsilon,\infty}))\, dx\right) = 0$ car on a , $\lim\limits_{n\to\infty} ||y_\varepsilon^n - y_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} = 0$.

En <u>résumé</u> on a extrait <u>une sous-suite.</u> u_ε^n et on a les résultats suivants :

$$\begin{cases} u_\varepsilon^n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_{\varepsilon,\infty} , & \underline{\text{faiblement}} \text{ dans } L^2(\Gamma) . \\ y_\varepsilon^n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_{\varepsilon,\infty} , & \underline{\text{fortement}} \text{ dans } H^1(\Omega) . \\ p_\varepsilon^n \xrightarrow[n\to\infty]{} p_{\varepsilon,\infty} , & \text{fortement dans } H^1(\Omega) . \end{cases}$$

On a :

9) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left[J_\varepsilon(u_\varepsilon^n)\right] \geq J_\varepsilon(u_{\varepsilon,\infty})$, car J_ε est <u>continue</u> et $u_\varepsilon^n \longrightarrow u_{\varepsilon,\infty}$, <u>faiblement</u> dans $L^2(\Gamma)$, il y a même égalité, $\lim\limits_{n\to\infty} (J_\varepsilon(u_\varepsilon^n)) = J_\varepsilon(u_{\varepsilon,\infty})$.

10) On en déduit :

$$||u_\varepsilon^n||_{L^2(\Gamma)} \xrightarrow[n\to\infty]{} ||u_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} ,$$

(puisqu'on a y_ε^n converge fortement dans $L^2(\Gamma)$ vers $y_{\varepsilon,\infty}$).

11) On en conclut que l'on a :

u_ε^n <u>converge fortement</u> dans $L^2(\Gamma)$, vers $u_{\varepsilon,\infty} \in U_{ad}$.

12) On a, $p_{\varepsilon,\infty} + N\, u_{\varepsilon,\infty} = 0$, sur Γ,

c'est-à-dire $u_{\varepsilon,\infty}$ vérifie la <u>condition</u> d'optimalité sur U_{ad} et donc $u_{\varepsilon,\infty}$ est le <u>contrôle optimal perturbé.</u>

Pour démontrer 12) on procède de la façon suivante :

$$\phi(\lambda) = \int_\Gamma |y_\varepsilon(u_\varepsilon^i + \lambda\, d^i) - z_d|^2\, d\Gamma + N \int_\Gamma (u_\varepsilon^i + \lambda\, d_\varepsilon^i)^2\, d\Gamma\ , \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}\ .$$

$$\phi(\lambda_\varepsilon^i) = \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{\mathrm{Min}}\ [\phi(\lambda)]$$

$$\phi'(\lambda_\varepsilon^i) = 0 \quad , \quad \text{car } \lambda_\varepsilon^i \text{ réalise le minimum}$$

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{\phi(\lambda + h) - \phi(\lambda)}{h}\right] = 2\ .\int_\Gamma d_\varepsilon^i [p_\varepsilon(u^i + \lambda\, d_\varepsilon^i) + N(u_\varepsilon^i + \lambda\, d_\varepsilon^i)]\, d\Gamma$$

$$d_\varepsilon^{i+1} = p_\varepsilon(u^i + \lambda_\varepsilon^i\, d_\varepsilon^i) + N(u_\varepsilon^i + \lambda^i\, d_\varepsilon^i) \quad , \quad \text{sur } \Gamma$$

Ce qui implique :

$$2\ .\int_\Gamma d_\varepsilon^i\ .\ d_\varepsilon^{i+1} = 0 \quad , \qquad \forall i \in \mathbb{N}\ .$$

On a, $$\lim_{i\to\infty} \left(\int_\Gamma d_\varepsilon^i\ .\ d_\varepsilon^{i+1}\, d\Gamma\right) = 0$$

mais $$\lim_{i\to\infty} \left(\int_\Gamma d_\varepsilon^i\ .\ d_\varepsilon^{i+1}\, d\Gamma\right) = \int_\Gamma (p_{\varepsilon,\infty} + N\, u_{\varepsilon,\infty})^2\, d\Gamma$$

car, on a $u_\varepsilon^n \xrightarrow{L^2(\Gamma)} u_{\varepsilon,\infty}$ et $p_\varepsilon^n \xrightarrow{H^1(\Omega)} p_{\varepsilon,\infty}$.

Il reste donc,

$$||p_{\varepsilon,\infty} + N\, u_{\varepsilon,\infty}||_{L^2(\Gamma)} = 0$$

on a alors la condition d'optimalité :

$$p_{\varepsilon,\infty} + N\, u_{\varepsilon,\infty} = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma$$

et toutes les suites convergent.

C - APPLICATION DE LA METHODE DE LA SECANTE.-

Soit le problème (P), suivant :

$$(P) : \begin{cases} \text{Trouver, } u_\varepsilon \in U_{ad} \text{ tel que :} \\ J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \underset{v \in U_{ad}}{\text{Min}} \left[J_\varepsilon(v)\right] \end{cases}$$

où :

1) $U_{ad} = \{v \in L^2(\Gamma) \ / \int_\Gamma v \, d\Gamma = 0\}$.

2) $J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y_\varepsilon(v) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma v^2 \, d\Gamma \ , \ \forall v \in U_{ad}$

3) $y_\varepsilon(v)$, la solution de

$$(I) : \begin{cases} - \Delta y_\varepsilon(v) = 0 \ , \ \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu} + \varepsilon \, y_\varepsilon(v) = v \ , \ \text{sur } \Gamma \\ \int_\Gamma y_\varepsilon(v) \, d\Gamma = 0 \end{cases}$$

4) $y_\varepsilon(v) \in V = \{y \in H^1(\Omega) \ / \int_\Gamma y \, d\Gamma = 0\}$.

On suppose, z_d quelconque dans $L^2(\Gamma)$.

* *Explication de la méthode* :

Le problème (P) est un problème de minimisation avec la contrainte, $\int_\Gamma v \, d\Gamma = 0$.

On relaxe cette condition, en introduisant un multiplicateur de Lagrange λ.

Soit, donc J_λ^ε l'application strictement convexe :

$$L^2(\Gamma) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \text{définie par :}$$

$$J_\lambda^\varepsilon(v) = J_\varepsilon(v) + \lambda\left(\int_\Gamma v \, d\Gamma\right) \; , \quad \forall v \in L^2(\Gamma) \; .$$

Soit λ <u>fixé</u> , il existe $u_\lambda^\varepsilon \in L^2(\Gamma)$ unique solution de :

$$J_\lambda^\varepsilon(u_\lambda^\varepsilon) = \underset{v \in L^2(\Gamma)}{\mathrm{Min}} \quad [J_\lambda^\varepsilon(v)]$$

u_λ^ε est donc <u>la solution</u> de :

$$\frac{\partial J_\lambda^\varepsilon(u_\lambda^\varepsilon)}{\partial v} = 0$$

Les calculs précédents montrent que :

$$< \frac{\partial J_\lambda^\varepsilon(v)}{\partial v} , w>_{L^2(\Gamma)} = 2 \, . \int_\Gamma (p_\varepsilon(v) + N\,v + \lambda) \, . \, w \, d\Gamma \; , \quad \forall w \in L^2(\Gamma)$$

Avec :

$$\text{(II)} : \quad \begin{cases} - \Delta p_\varepsilon(v) = 0 \; , \quad \text{dans} \quad \Omega \\[2mm] \dfrac{\partial p_\varepsilon(v)}{\partial \nu} + \varepsilon \, p_\varepsilon(v) = (y_\varepsilon(v) - z_d) \; , \; \text{sur} \quad \Gamma \\[2mm] p_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

On pose :

$$\phi(\lambda) = \int_\Gamma u_\lambda^\varepsilon \, d\Gamma$$

Il s'agit de résoudre $\phi(\lambda) = 0$. Ceci peut se faire au moyen de la méthode de Newton. Il faut alors calculer $\phi'(\lambda) = \int_\Gamma \frac{du_\lambda^\varepsilon}{d\lambda} \, d\Gamma$ donc $\frac{du_\lambda^\varepsilon}{d\lambda}$, qui est défini implicitement par $DJ(u_\lambda^\varepsilon) = 0$.

Or, on a, $D^2(J_\lambda^\varepsilon(v))(w,w) \geq C\ ||w||^2_{L^2(\Gamma)}$, $\forall w \in L^2(\Gamma)$,

où C est une constante positive.

On en déduit que :

$$[D^2\ J_\lambda^\varepsilon(v)] \in \mathrm{Isom}[L^2(\Gamma)\ ,\ L^2(\Gamma)]$$

on peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites.

On a, alors :

$$\left(\frac{du_\lambda^\varepsilon}{d\lambda}\right) = -\ [D^2[J_\lambda^\varepsilon(u_\varepsilon^\lambda)]]^{-1} \cdot (\ell)$$

où ℓ , l'application linéaire :

$$\begin{array}{l} L^2(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \ \ \cup \\ \ \ w \longrightarrow \ell(w) = \int_\Gamma w\ d\Gamma \end{array}$$

On est donc amené à calculer la matrice inverse de $D^2\ J_\lambda^\varepsilon(u_\lambda^\varepsilon)$ ce qui est très coûteux. C'est pourquoi on va introduire la méthode de la sécante.

ALGORITHME : ([7]).

1) Soit λ_o , donné.

On suppose que $\phi(\lambda_o) > 0$ et $\phi(\lambda_o) = \int_\Gamma u_{\lambda_o}^\varepsilon\ d\Gamma$.

2) $u_{\lambda_o}^\varepsilon$, réalise le minimum de $J_\lambda^\varepsilon(v)$,

Pour le calcul du minimum , on utilise une méthode du gradient. (pages 66-67).

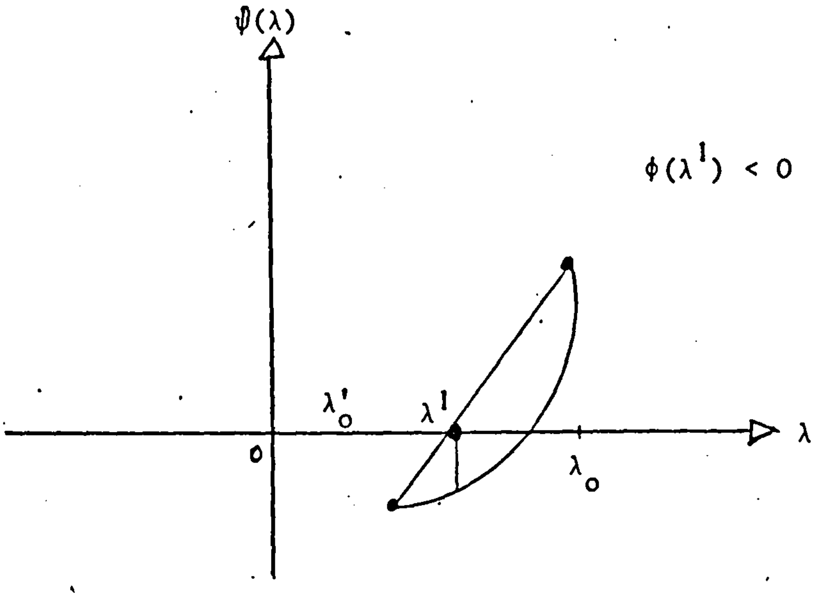
3) $\phi(\lambda_o) = \int_\Gamma u^\varepsilon_{\lambda_o}\, d\Gamma = \ell(u^\varepsilon_{\lambda_o})$

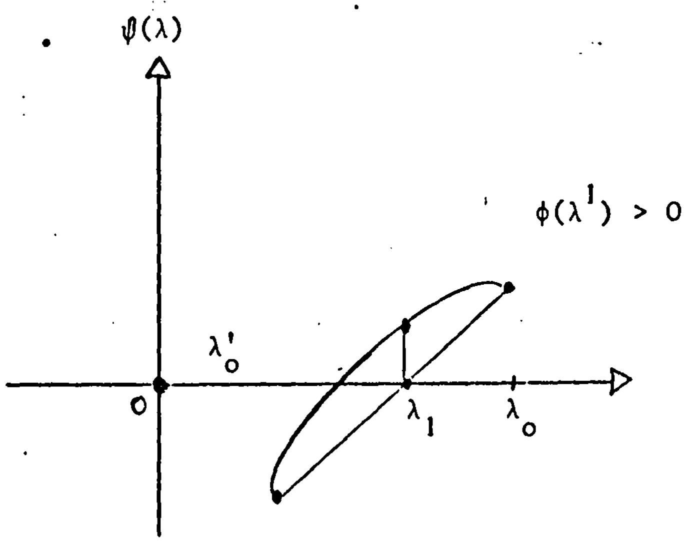
4) On prend, λ'_o tel que : $\phi(\lambda'_o) < 0$ on calcule alors

$u^\varepsilon_{\lambda'_o}$, $\phi(\lambda'_o) = \int_\Gamma u^\varepsilon_{\lambda'_o}\, d\Gamma$.

5) On détermine λ^1 par , une <u>interpolation linéaire</u> :

$$\boxed{\lambda^1 = \frac{(\phi(\lambda'_o) \,.\, \lambda_o - \phi(\lambda_o) \,.\, \lambda'_o)}{(\phi(\lambda'_o) - \phi(\lambda_o))}}$$





6) $\lambda^1 \longrightarrow u^\varepsilon_{\lambda^1}$ la solution de :

$$J^\varepsilon_{\lambda_1}(u^\varepsilon_{\lambda_1}) = \underset{v \in L^2(\Gamma)}{\mathrm{Min}} \left[J^\varepsilon_{\lambda_1}(v)\right]$$

7) On calcule, $\phi(\lambda^1) = \int_\Gamma u_\varepsilon^{\lambda^1} \, d\Gamma$.

8) Suivant le signe de $\phi(\lambda^1)$, on reprend la méthode de la sécante avec λ_o , ou λ'_o etc ...

D - DISCRETISATION DES ALGORITHMES.-

On utilise une méthode <u>d'éléments finis</u> pour les trois algorithmes précédents.

1) *Construction d'un sous-espace de discrétisation.*

Définitions - Notations :

Soit : $W^h = \{\phi_h \in C^o(\bar{\Omega}) \; / \; \phi_{h|T} \in P^1\}$.

. P^1 : ensemble des polynômes de degré 1.

. $T \in \mathcal{T}_h$: une triangulation de Ω, supposée régulière.

. h : le pas de discrétisation.

. NS : le nombre total des noeuds.

(a_i) $1 \leq i \leq NS$: les sommets de tous les triangles formant $\mathcal{T}_h$.

Soient $(\psi_j)_{1\leq j\leq NS}$ la base classique de W^h .

On sait que, pour $j \in [1,NS]$:

$$\psi_j(a_i) = \begin{cases} 1 \ , & \text{si} \quad i = j \\ 0 \ , & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit, le sous-espace V^h de W^h , de la façon suivante :

$$V^h = \{\psi^h \in W^h \ / \int_\Gamma \psi^h \, d\Gamma = 0\} .$$

On introduit les deux-ensembles suivants :

I = {ensemble des noeuds intérieurs à Ω}

F = {ensemble des noeuds Frontières}.

On suppose de plus que le noeud, a_{NS} est sur le bord Γ.

On définit, pour $i \in [1 \ , \ NS - 1]$:

$$\vartheta_i = \begin{cases} \psi_i \ , & \text{si} \quad i \in I \\ \psi_i - \left(\dfrac{\int_\Gamma \psi_i \, d\Gamma}{\int_\Gamma \psi_{NS} \, d\Gamma}\right) . \ \psi_{NS} \ , & \text{si} \quad i \in F \end{cases}$$

Lemme.- La suite (ϑ_i) $1 \leq i \leq NS-1$ est une base de l'espace V^h .

On vérifie que l'on a $\vartheta_i \in V^h$. La suite $(\vartheta_i)_{1\leq i\leq NS-1}$ est une base de V^h , car la suite $(\psi_i)_{1\leq i\leq NS}$ est une base de l'espace W^h.

L'ensemble des contrôles discrétisé sera :

$$U^h_{ad} = \{\psi^h \in W^h(\Gamma) \;/\; \psi^h_{T \cap \Gamma} \in P^1 \quad , \quad T \in T_h\} \;.$$

2) *Le problème approché - perturbé* :

On introduit, le problème (P^h) du contrôle optimal perturbé de la manière suivante :

Le problème - approché

$$(P^h) : \begin{cases} \text{Trouver, } u^h_\varepsilon \in U^h_{ad} \text{ solution de :} \\ J^h_\varepsilon(u^\varepsilon_h) = \underset{v^h \in U^h_{ad}}{\text{Min}} \; J^h_\varepsilon(v^h_\varepsilon) \end{cases}$$

$$J^h_\varepsilon(v^h) = \int_\Gamma |y^h_\varepsilon(v^h) - z^h_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Gamma (v^h)^2 \, d\Gamma \;,\; \forall v^h \in U^h_{ad} \;.$$

. z^h_d est un élément approximant $z_d \in L^2(\Gamma)$.

. $y^h_\varepsilon(v^h) \in V^h$ est la solution de :

$$\int_\Omega (\nabla y^h_\varepsilon(v^h) \;,\; \nabla\psi^h) \, dx + \varepsilon \int_\Gamma y^h_\varepsilon(v^h) \;.\; \psi^h \, d\Gamma = \int_\Gamma v^h \;.\; \psi^h \, d\Gamma \;,\quad \nabla\psi^h \in V^h$$

On introduit, $p^h_\varepsilon \in V^h$ solution de :

$$\int_\Omega (\nabla p^h_\varepsilon, \nabla \Psi^h) \, dx + \varepsilon \int_\Gamma p^h_\varepsilon \;.\; \Psi^h \, d\Gamma = \int_\Gamma (y^h_\varepsilon - z^h_d) \;.\; \Psi^h \, d\Gamma \;,\quad \forall \Psi^h \in V^h \;.$$

3.1. - *Etude de la convergence du problème approché*.

On démontre aisément la solution discrétisée du problème approché (P^h) converge fortement vers la solution optimale quand $h \to 0$.

3.2. - *La discrétisation de ALG (1).*

a) [ALG(1)] discrétisé s'écrit :

On prend, comme espace de discrétisation des états l'espace V^h et comme ensemble des contrôles admissibles l'espace U^h_{ad} .

Soit, $u^o_h \in U^h_{ad}$ quelconque :

$[ALG(1)]_h$

On résout :

1) $A \cdot y^h_{n+1,\varepsilon} = B(u^n_{h,\varepsilon})$

$$(y^\varepsilon_{n+1,h}) \in \mathbb{R}^{NS-1} \, , \, \sum_{i=1}^{NS-1} y^\varepsilon_{n+1,h}(i) \cdot \tilde{\psi}_i \in V^h \; .$$

2) $A \cdot p^h_{n+1,\varepsilon} = B(T(y^{n+1}_{h,\varepsilon}) - z^h_d)$

$$p^\varepsilon_{h,n+1} \in \mathbb{R}^{NS-1} \, , \, \sum_{i=1}^{NS-1} p^\varepsilon_{h,n+1}(i) \cdot \tilde{\psi}_i \in V^h \; .$$

3) $$u^{n+1}_h(i) = \begin{cases} - N^{-1} \, p^{n+1}_h(i) \, , & \text{si } i \text{ est un noeud frontalier} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Pour l'itération suivante, on revient à 1).

. A est la matrice du système linéaire approché :

$$A(\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j) = \int_\Omega (\nabla\tilde{\psi}_i, \nabla\tilde{\psi}_j) \, dx + \varepsilon \int_\Gamma (\tilde{\psi}_i \cdot \tilde{\psi}_j) \, d\Gamma \quad j \in [1, NS-1] \text{ et } i \in [1, NS-1]$$

. $B(u^n_{h,\varepsilon}) = (V(i))_{1 \leq i \leq NS-1}$, le second membre du système linéaire approché.

Les composantes de ce vecteur sont données par la formule :

$$V(i) = \int_\Gamma u^n_{h,\varepsilon} \cdot \tilde{\psi}_i \, d\Gamma \, , \; \forall i \in [1, NS-1] \; .$$

Même chose pour les autres algorithmes utilisés.

CHAPITRE VI

RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME PERTURBE.

Pour la discrétisation des différentes méthodes, on prend comme ouvert le carré unité.

$$\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2 .$$

. NS = 100 noeuds.

. h = 1/10 (le pas de discrétisation régulier).

. NT = le nombre de triangles utilisés. (162) .

On suppose, $W^h = \{\psi_h \in C^o(\bar{\Omega}) \; / \; \psi_{h|T} \in P^1\}$ $(\psi_i)_{1 \leq i \leq NS}$ la base associée à cet espace.

$$. \quad V^h = \{\psi_h \in W^h \; / \int_\Gamma \psi_h \, d\Gamma = 0\}$$

$(\vartheta_i)_{1 \leq i \leq NS-1}$, la base associée à cet espace.

On définit :

$$. \; U^h_{ad} = \{\psi_h \in W^h \; / \; \psi_{h|\Omega} = 0 \;\text{ et }\; \int_\Gamma \psi_h \, d\Gamma = 0\} .$$

on prend comme fonction d'observation sur le carré ABCD (par exemple) :

$$ZD = \begin{cases} 1 \; , & \text{sur AB} \\ 0 \; , & \text{sur BC} \\ 1 \; , & \text{sur CD} \\ 0 \; , & \text{sur AD} \end{cases}$$

On applique les 3 algorithmes précédents.

. Les sous-programmes utilisés sont :

FORMA : forme la matrice A , les coefficients sont :

$$A(i,j) = \int_\Omega (\nabla\tilde{\varphi}_i , \nabla\tilde{\varphi}_j)\, dx , \qquad 1 \leq i \leq NS-1, \quad 1 \leq j \leq NS-1$$

FORMA1 : forme la matrice B , dont les coefficients sont :

$$B(i,j) = \int_\Gamma \tilde{\varphi}_i \cdot \tilde{\varphi}_j \, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq NS-1, \quad 1 \leq j \leq NS-1$$

FORMA2 : calcule la matrice :

$C = A + \varepsilon B$, (ε petit positif).

SEMEL : calcule le vecteur V :

$$V(i) = \int_\Gamma u \cdot \varphi_i \, d\Gamma , \qquad 1 \leq i \leq NS$$

u , étant une fonction donnée appartenant à $L^2(\Gamma)$.

SEMEL2 : calcule le vecteur $\tilde{V}$:

$$\tilde{V}(i) = \int_\Gamma u \cdot \tilde{\varphi}_i \, d\Gamma , \qquad 1 \leq i \leq NS-1$$

MAIL : sous-programme qui fait le maillage du carré - unité.
Il calcule les numéros des sommets dans un tableau, les coordonnée des sommets, les numéros des triangles etc .

DRGAU : fait la résolution d'un système linéaire par la méthode descente - remontée.

GAUSS : décompose la matrice du système sous forme A = LU , L matrice diagonale inférieure dont la diagonale est égale à 1.

COÛT : calcule la fonction coût suivante :

$$J(u) = ||y(u) - z_d||^2_{L^2(\Gamma)} + N\ ||u||^2_{L^2(\Gamma)}$$

OPT : calcule le minimum $R_o \ \varepsilon\ R$ de

$$J(u + Rp) = ||y(u + Rp) - z_d||^2_{L^2(\Gamma)} + N\ ||u + Rp||^2_{L^2(\Gamma)}$$

MINIMUM : calcule le minimum $(U\ R_o)$ de

$$J(u + Rp) + \lambda \int_\Gamma u\, d\Gamma \quad , \qquad \lambda = \text{nombre réel donné.}$$

On fait les calculs pour :

$$\varepsilon = 0\ ,\ 01 \quad \text{(par exemple)}\ .$$

Test-d'arrêt :

. Pour la méthode directe, on a choisi :

$$\frac{|J(u^{n+1}) - J(u^n)|}{(J(u^n))} \leqslant \varepsilon 1 = 10^{-4}$$

. Pour la méthode du gradient :

$$\max_{i \varepsilon |1,NS-1|} \left|\left(\frac{\partial J(u^n)}{\partial x_i}\right)\right| \leqslant \varepsilon\ 2 = 0{,}5\ .\ 10^{-2}$$

. *Comparaisons entre les différentes méthodes.*

1) *Méthode de résolution directe* :

On a programmé cette méthode dans un programme appelé RESOL. (temps d'exécution 1,02 minute). Cette méthode présente l'inconvénient de nécessiter N assez grand pour converger. Cependant les temps de calculs sont très bons (voir fig. 1).

2) *Méthode du gradient* :

Cette méthode a été programmée dans un programme appelé COPT. (temps d'exécution 1,27 minute). Elle convient au problème de contrôle optimal perturbé, car elle est utilisable pour N quelconque positif.

On peut, donc l'utiliser pour calculer des coefficients dans le calcul asymptotique (voir fig. 2).

3) *Méthode du Lagragien* :

La méthode itérative du Lagragien a été programmée dans un programme appelé NEW. (temps d'exécution 1,87 minute). Cette méthode ne converge pas pour ε petit. Ceci est dû au fait que la matrice du système linéaire à inverser est très instable (pour ε petit).

CONCLUSIONS.-

Dans ce travail, on a montré que l'on a une convergence forte dans $L^2(\Gamma)$, de la suite des contrôles perturbés pour différents cas d'ensembles de contrôles.

On a établi les systèmes d'optimalités pour plusieurs ensembles de contrôles.

La méthode du calcul asymptotique a été appliquée au système perturbé dans deux cas :

$$U = \{v \in L^2(\Gamma) \ / \int_\Gamma v \, d\Gamma = 0\} \quad \text{et} \quad U = L^2(\Gamma) \ .$$

On a établi des estimations du contrôle perturbé de l'état et de son adjoint de la forme $[C(\Omega)]^k \cdot \varepsilon^{k+1}$.

Dans le cas où l'ensemble des contrôles admissibles est un convexe fermé de $L^2(\Gamma)$ vérifiant $U_{ad} + \mathbb{R}^+$ (signe de $\int_\Gamma z_d \, d\Gamma) \subset U_{ad}$, on a montré la convergence des contrôles perturbées. Le problème des convexes généraux reste ouvert. On a essayé 3 méthodes numériques pour approximer la solution perturbée.

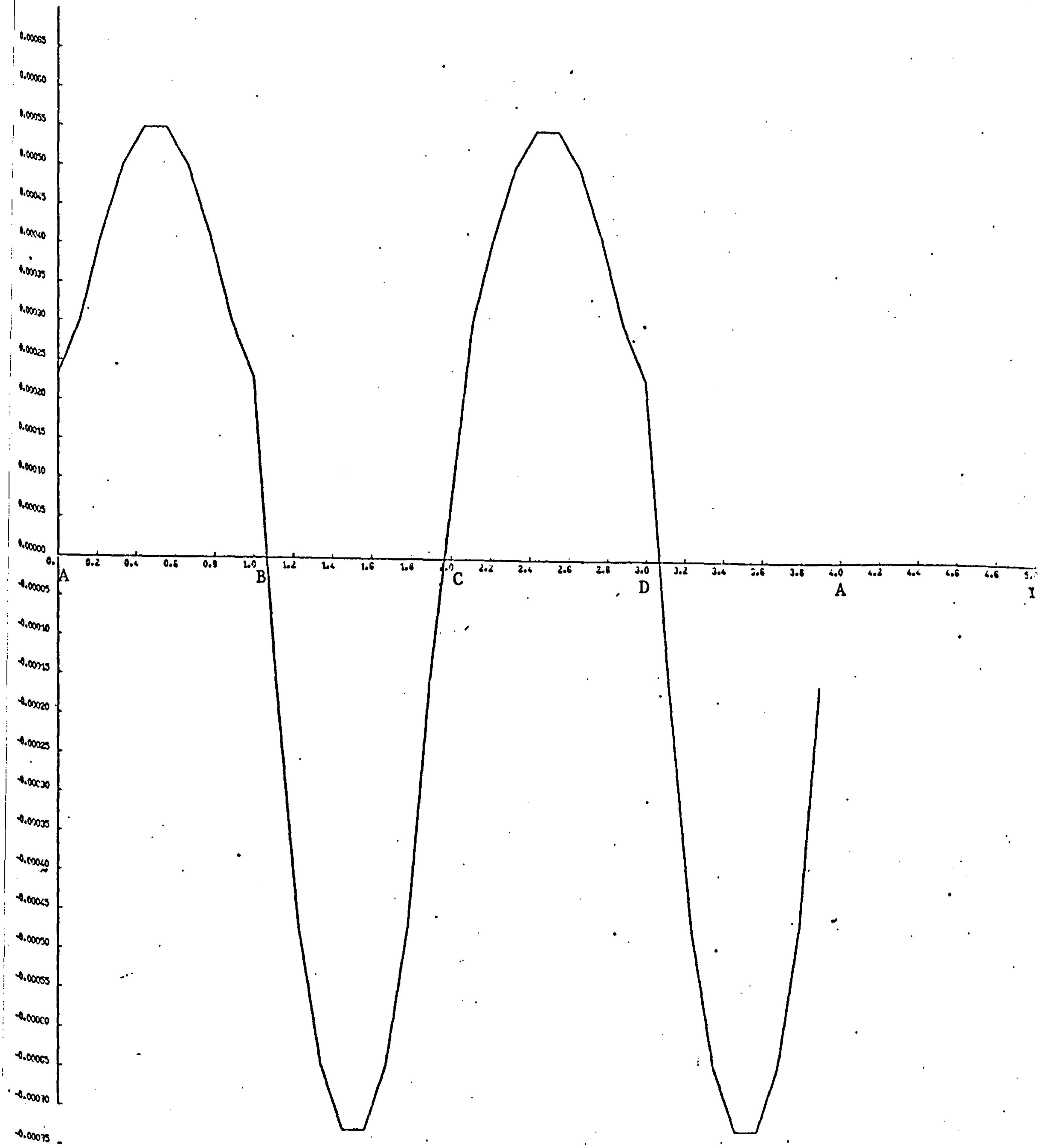
1) On a résolu le système perturbé par une méthode directe. Cette méthode converge pour N assez grand.

2) On a employé une méthode du gradient cette méthode converge et permet de calculer les coefficients du calcul asymptotique.

3) L'algorithme utilisant un multiplicateur de Lagrange ne converge pas pour ε petit et donc on ne peut pas l'appliquer pour le problème perturbé.

Dans la plupart de ces cas comme on a à résoudre un problème de Fredholm les calculs sont assez longs.

FIGURE 1

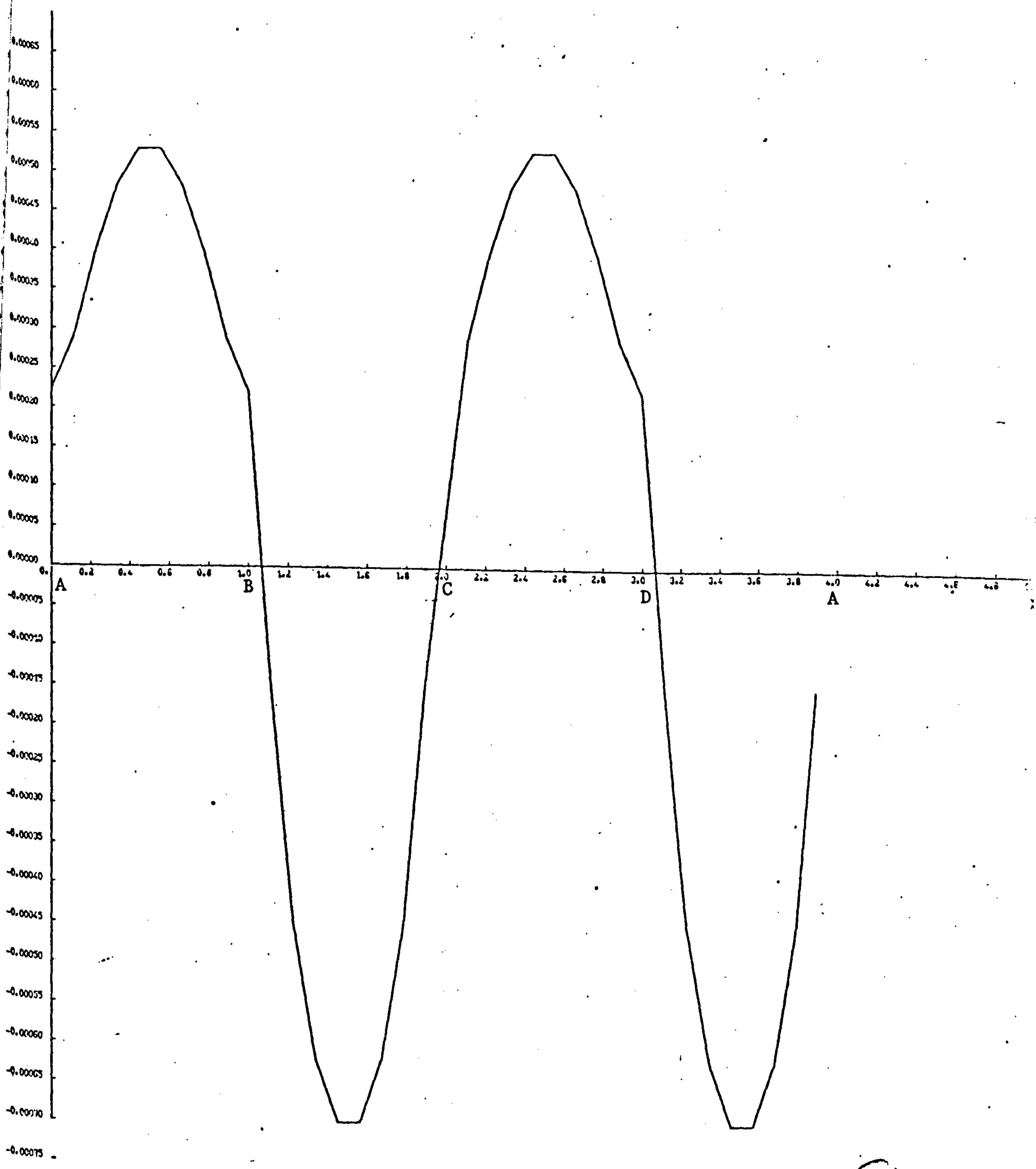


N = 100

ALG(1).

Graphe du contrôle optimal $\varepsilon = 0{,}01$.

FIGURE 2

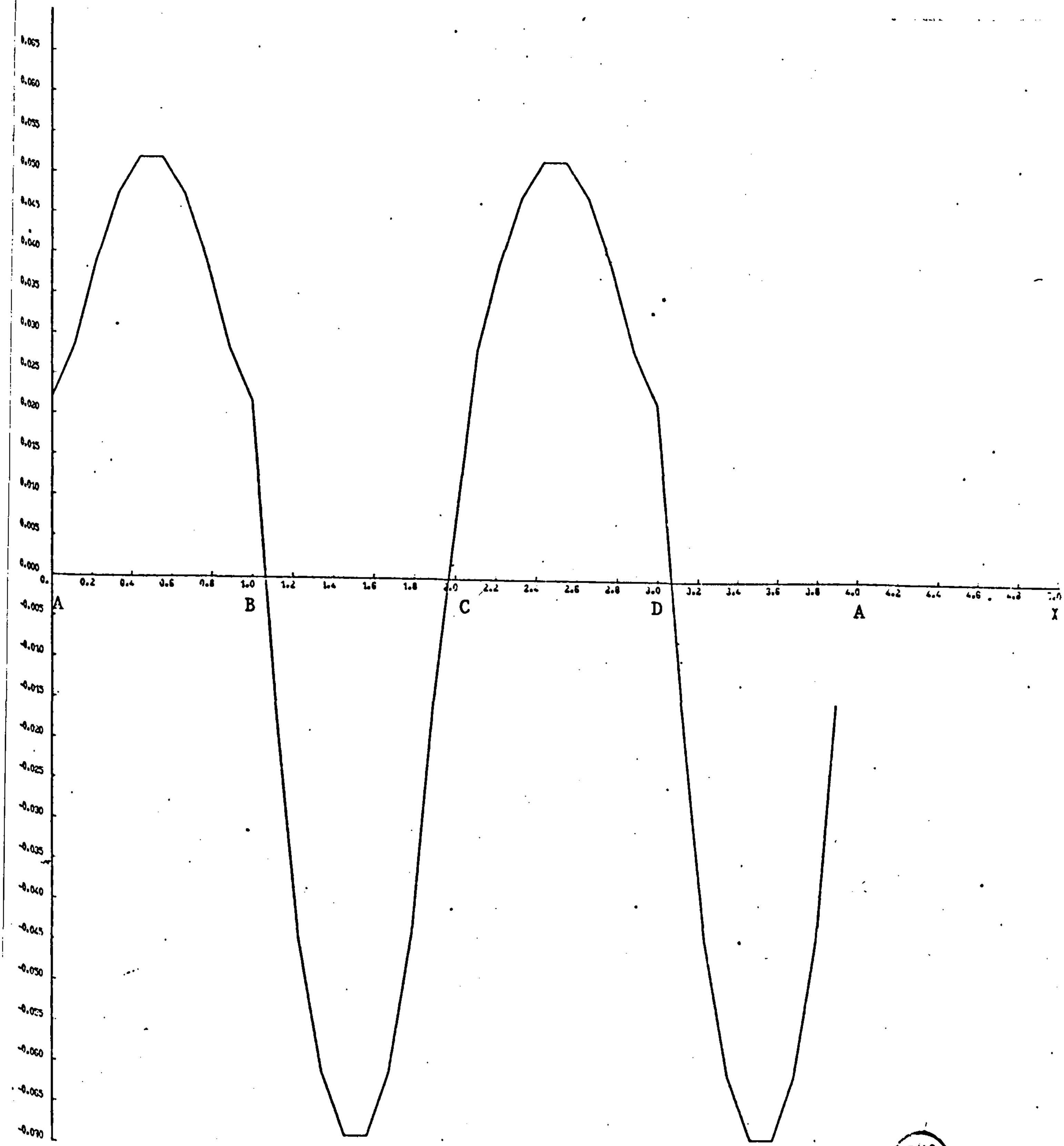


N = 100

ALG(2).

Graphe du contrôle optimal $\varepsilon = 0{,}01$

FIGURE 3



N = 1

ALG(2).

Graphe du contrôle optimal $\varepsilon = 0{,}01$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J.L. LIONS - *Contrôle optimal de système gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Dunod - 1968.

[2] J.L. LIONS - *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal.* Springer - Verlag - Berlin - Heidlberg. New-York 1973.

[3] J.L. LIONS - *Théorie du contrôle optimal. Théorie des perturbations.* (Notes de cours 78-79).

[4] F. MIGNOT - *Résolution d'une équation aux dérivées partielles*

[5] J.P. YVON - *Applications des méthodes duales au contrôle optimal.* I.R.I.A. 1971.

[6] B. MERCIER - *Examples of finite element methods.* I.R.I.A. 1973.

[7] GLOWINSKI - *Méthode de la sécante.* Note de Glowinski à F. Mignot.