

50376
1981
153

d'ordre 896

50376
1981
153

Exclu du
PRÊT

THÈSE
présentée à
l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

par

Mohammed BAZINE

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DE CONTROLE
PAR LE DOMAINE EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE



Membres du Jury : P. POUZET, Président
F. MIGNOT, Rapporteur
F. PARSY, Examineur
G. HECQUET, Examineur

Soutenue le 12 juin 1981

REMERCIEMENTS

Ma gratitude et mes remerciements s'adressent tout particulièrement à Fulbert MIGNOT qui m'a initié aux techniques du contrôle optimal, et qui, par ses conseils et suggestions m'a permis de mener à bien ce travail.

Mes remerciements sincères à Fernand PARSY pour l'aide et les encouragements chaleureux qu'il n'a cessé de me fournir. Je tiens à remercier Pierre POUZET qui me fait l'honneur de présider le jury ainsi que Gérard HECQUET qui a accepté d'en faire partie.

Mes remerciements sincères et chaleureux à Raymonde BÉRAT du secrétariat scientifique et à Françoise GOUTHIER qui ont permis et assuré dans des conditions difficiles, la réalisation matérielle de ce travail. Mes remerciements s'adressent aussi à Madame WODCZYK du service de la photocopie et également le service de l'imprimerie.

SOMMAIRE

CHAPITRE 0 - INTRODUCTION GENERALE.

- 0 - 1 : Motivation.
- 0 - 2 : Position du problème.
- 0 - 3 : Différentes méthodes de résolution.

CHAPITRE I - RESULTATS ET PRELIMINAIRES TECHNIQUES.

- I - 1 : Espaces de difféomorphismes.
- I - 2 : Dérivation de l'application $\theta \rightarrow \text{Jac}(I+\theta)$.
- I - 3 : Dérivation d'une matrice.
- I - 4 : Dérivation de l'application $\theta \rightarrow f_{\theta}(I+\theta)$.
- I - 5 : Dérivation de l'application $\theta \rightarrow \Phi(\theta) \circ (I+\theta)$.
- I - 6 : Dérivation locale d'une fonction définie sur un ouvert variable.
- I - 7 : Formules de dérivation par rapport aux domaines et aux surfaces.
- I - 8 : Théorème des fonctions implicites.

CHAPITRE II - CONSTRUCTION DES ESPACES DE DOMAINES.

- II - 1 : Introduction.
- II - 2 : Définition et propriétés des espaces de difféomorphismes.
- II - 3 : Pseudo-distance et propriétés métriques des espaces $C_0^{2,b}$.
- II - 4 : Etude des translations et des dilatations.
- II - 5 : Résultat de Trace.

CHAPITRE III - DERIVATION DE QUELQUES PROBLEMES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.

- III - 1 : Dérivation d'un problème général.
- III - 2 : Premier cas modèle : étude du problème de contrôle associé au problème de DIRICHLET.
- III - 3 : Deuxième cas modèle : Application à une intégrale superficielle.

CHAPITRE IV - PROBLEMES DE CONTROLE PAR LE DOMAINE EN ELASTICITE LINEAIRE.

- IV - 1 : Rappels des mécanique des milieux continus.
- IV - 2 : Problèmes classiques en élasticité linéaire.
- IV - 3 : Problèmes de contrôle par le domaine associés au problème de l'élasticité linéaire statique.

.../...

- IV - 3 - 1 : Introduction.
- IV - 3 - 2 : Position du problème.
- IV - 3 - 3 : Existence d'un domaine optimal.
- IV - 3 - 4 : Quelques résultats sur le bord.
- IV - 3 - 5 : Dérivation du problème de l'élasticité.
- IV - 3 - 6 : Dérivation de la fonction coût.
- IV - 3 - 7 : Compléments.

BIBLIOGRAPHIE.

CHAPITRE 0 : INTRODUCTION GENERALE

Dans ce chapitre, on expose d'une façon assez générale les problèmes de "CONTROLE PAR LE DOMAINE", de "DOMAINE OPTIMAL" ou de "OPTIMAL DESIGN". On présente aussi un bref rappel historique sur les différentes méthodes envisagées pour résoudre de tels problèmes.

On se limitera dans ce travail à définir une classe de domaines et un cadre fonctionnel bien adapté aux calculs; on cherchera également à optimiser des fonctions coûts, en appliquant la méthode des variations intérieures.

0 - 1 : MOTIVATION.

L'objet de ce travail est l'étude de quelques problèmes de contrôle optimal où le contrôle est la forme géométrique d'un domaine et où l'état du système est défini par une équation aux dérivées partielles.

Quelques exemples de problèmes de recherche du domaine optimal.

1 - Recherche d'une meilleure forme parmi un ensemble de formes admissibles : Ce peut être la forme d'un diélectrique, d'un disque de turbo machine, d'un réacteur nucléaire, d'un réacteur d'avion ou d'un rail.

2 - Un objet ayant une forme donnée, on cherche à le placer au mieux : il s'agit donc d'un problème de meilleure place; l'objet peut être un tuyau, un électrode, une barre ou un réflecteur.

3 - Une identification de forme : l'objet existe, une partie de sa frontière peut être accessible et une partie ne l'est pas. Il s'agit donc de déterminer

la forme de la partie non accessible (fond d'un glacier).

4 - Contrôle optimal - Support optimal.

On désigne par Ω le support du contrôle dans un problème de contrôle optimal. Le contrôle optimal dépend de Ω ; la fonction économique du problème de contrôle pour le choix du contrôle optimal peut être encore "meilleure" si le support Ω est bien choisi. Il s'agit donc de trouver le meilleur support.

On considère dans une première partie, une classe de domaines D dont une partie de la frontière est susceptible de varier (Fig. I-1). On traitera ensuite le cas de l'ensemble des disques homothétiques au disque unité (dilatations), le centre étant fixé à l'origine du repère et le rayon variable (Fig. I-2) on étudiera aussi les variations des contraintes $\bar{\sigma}$ et des déplacements \vec{u} du problème bidimensionnel de l'élasticité linéaire statique par rapport au domaine.

Il s'agit donc de calculer $\frac{\partial \vec{u}(\theta)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ et $\frac{\partial \bar{\sigma}(\theta)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ où $\vec{u}(\theta)$ et $\bar{\sigma}(\theta)$ sont solutions du problème :

$$\begin{cases} \text{(i)} & -\operatorname{div} \bar{\sigma}(\vec{u}(\theta)) = \vec{f} & \text{dans } (I + \theta)(D) \\ \text{(ii)} & \vec{u} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_0^\theta \\ \text{(iii)} & \bar{\sigma}(\vec{u}(\theta))\vec{n} = \vec{g} & \text{sur } \Gamma_1^\theta \end{cases}$$

\vec{f} étant la densité de forces volumiques appliquées à $(I + \theta)(D)$,

\vec{g} étant la densité de forces surfaciques appliquées à une partie de sa frontière Γ_1^θ .

Une des difficultés qui se présente est la dérivation de la condition aux limites (iii), qui est due essentiellement à la dérivation de la normale extérieure \vec{n} par rapport au champ de vecteurs θ .

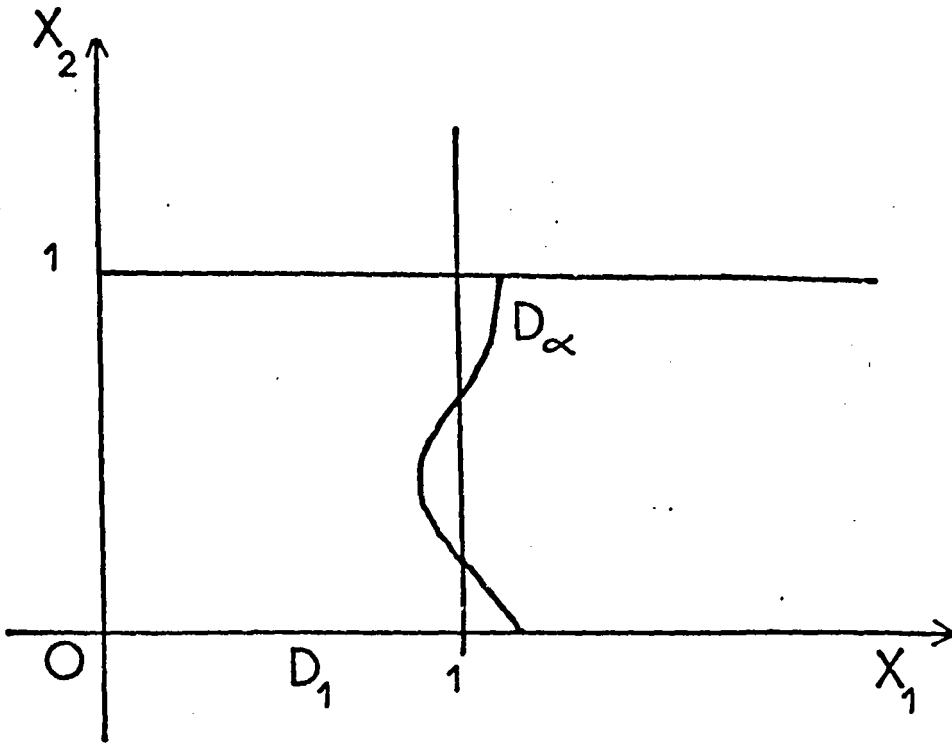


Fig. I - 1

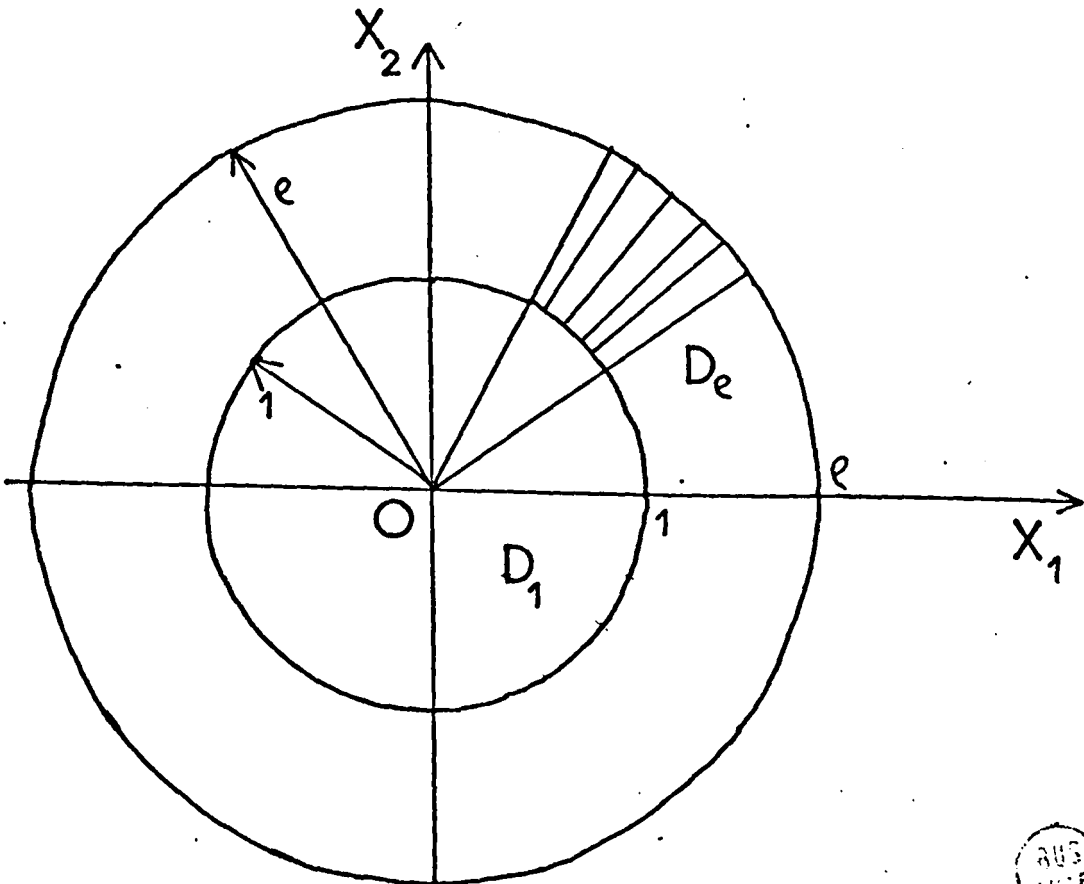


Fig. I - 2

On se propose donc de traiter ce problème dans le cas simple où les variations de D se traduisent par des homothéties, dans ce cas la normale extérieure est colinéaire au champ de vecteurs θ .

Ensuite on envisage le cas où D est un ouvert borné en couronne de frontières (Σ) et (S) , pour θ assez petit, $(I + \theta)(D)$ est encore un ouvert borné en couronne de frontières (Σ_θ) et (S_θ) .

On suppose données des forces surfaciques \vec{g} sur (S_θ) , le problème devient :

$$\begin{cases} - \operatorname{div} \vec{\sigma}(u(\theta)) = \vec{f} & \text{dans } (I + \theta)(D) . \\ \vec{u}(\theta) = \vec{0} & \text{sur } \Sigma_\theta \\ \vec{\sigma}(\vec{u}(\theta)) \vec{n} = \vec{g} & \text{sur } S_\theta \end{cases}$$

on calculera $\frac{\partial \vec{u}(\theta)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ en utilisant le théorème des fonctions implicites, ceci nous permettra de calculer les dérivées par rapport au champ de vecteurs θ des fonctionnelles définies par :

$$J_1(\theta) = \int_{S_\theta} ||\vec{u}(\theta) - \vec{z}||^2 d\sigma \quad \text{et}$$

$$J_2(\theta) = \int_{(I+\theta)(D)} ||\vec{u}(\theta) - \vec{z}||^2 d\sigma ,$$

et de les mettre sous la forme :

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = \int_S \langle \vec{n}, \vec{\tau} \rangle F(\vec{u}(D), \vec{P}(D)) d\sigma \quad \text{où}$$

$\vec{u}(D)$ est la solution du problème (i), (ii), (iii) pour $\theta = 0$ et

$\vec{P}(D)$ est un état adjoint qui ne dépend pas de τ .

De nombreux problèmes de physique sont de ce type : citons par exemple, la détermination de la forme d'un profil de coque ou d'une aile créant une traînée minimale : BOUROT, KRAIKO-TILLIAEVA, MIELE, MURAT-SIMON, PIRONNEAU [].

La recherche de la forme d'une paroi poreuse assurant un régime de diffusion donné (BEGIS-GLOWINSKI []).

La localisation d'un objet de forme donnée : tube électronique, KOENIG-ZOLESIO.

La détermination de la forme d'une pièce de poids minimal pouvant supporter certaines contraintes : DESTUYNDER.

Il y a aussi de nombreux problèmes qui ont été considérés, notamment en ce qui concerne les variations des valeurs propres associés à un domaine quand celui-ci est déformé : MIGNOT, MURAT-PUEL [] .

HADAMARD dans son mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées), a étudié des problèmes analogues sur le bilaplacien.

0 - 2 : POSITION DU PROBLEME.

0 - 2 - 1 : PROBLEME INITIAL.

A) Soit $D =]0,1[\times]0,1[$ le carré unité.

Soit $\alpha(x)$ une fonction de $L^{2,b}(\mathbb{R}^2)$ et soit :

$D_\alpha = \{ (I + \theta_\alpha)(X) / X \in D \}$ où θ_α est un champ de vecteurs appartenant à $L^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{\alpha}(X) = (\alpha(X), 0) \quad \text{et} \\ \alpha(X) \geq 0 \quad \forall X \in D \\ \alpha(0, X_2) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq X_2 \leq 1. \end{array} \right.$$

I étant l'application identité de \mathbb{R}^2 .

On considère la fonction $u(D_{\alpha})$ définie dans D_{α} et solution du problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(u(D_{\alpha})) = f \quad \text{dans } D_{\alpha} . \\ B(u(D_{\alpha})) = g \quad \text{dans } \partial D_{\alpha} . \end{array} \right.$$

on définit la fonction coût par :

$$J(D_{\alpha}) = \int_{D_{\alpha}} C(u(D_{\alpha})) \, dX .$$

A, B et C étant des opérateurs aux dérivées partielles donnés dans \mathbb{R}^2 , linéaires et à coefficients constants. f et g étant des fonctions données dans \mathbb{R}^2 .

Les problèmes qu'on se propose de traiter consistent à étudier les variations de $u(D_{\alpha})$ et $J(D_{\alpha})$ par rapport au domaine D_{α} .

B) Soit $D_1 = \{ (X, Y) \in \mathbb{R}^2 / X^2 + Y^2 < 1 \}$.

Soit Γ_1 la frontière de D_1 . Pour tout nombre réel strictement positif e, on considère le domaine $D = \{ (X, Y) \in \mathbb{R}^2 / X^2 + Y^2 < e^2 \}$ et $\Gamma_e = \partial D_e$.

Soit $u(D_e)$ la solution du problème de Dirichlet homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u(D_e) = f \quad \text{dans } D_e . \\ u|_{\Gamma_e} = 0 \end{array} \right.$$

et soit J la fonction coût définie par :

$$J(e) = \int_{\Gamma_e} \left| \frac{\partial u(D_e)}{\partial n} - z \right|^2 d\sigma .$$

Il s'agit donc d'établir les variations de $\vec{u}(D_e)$ en fonction du domaine D_e et de calculer la dérivée de J par rapport à D_e . L'ensemble des domaines n'ayant pas de structure affine, on précisera donc la façon dont variera le domaine D : par exemple dans le cas A).

$$(I + \theta_\alpha) = \{ x + \theta_\alpha(x) / x \in D \}$$

Pour α assez petit dans $C^{2,b}(\mathbb{R}^2)$, $(I + \theta_\alpha)$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 et $(I + \theta_\alpha)(D)$ est donc un ouvert de \mathbb{R}^2 voisin de D ; on se limitera à de telles variations. Ainsi, moralement dire que u et J dépendent de D_α revient à dire que u et J dépendent de θ_α ; Ceci est un exemple simple de la méthode des variations intérieures, elle a été introduite par GARABEDIAN-SPENCER et développée par MURAT-SIMON.

0 - 3 : DIFFERENTES METHODES DE RESOLUTION

0 - 3 - 1 : Variations de la fonction caractéristique.

Cette méthode consiste à considérer un ensemble d'ouverts formé des parties de \mathbb{R}^N localement images d'un demi-espace par des bijections bilipschitziennes, (CHESNAIS []). Cet ensemble est défini de la manière suivante :

Soient r et k 2 nombres positifs et D un ouvert borné, régulier de \mathbb{R}^N . $VL(r,k)$ est l'ensemble des ouverts de \mathbb{R}^N contenus dans D tels que :

$$\forall x \in \partial \Omega, \exists V_x \text{ ouvert de } \mathbb{R}^N \text{ et } T_x : B(x,r) \longrightarrow V_x$$

bijective, bilipschitzienne de constante k telle que :

$$T_x(B(x,r) \cap \Omega) = V_x \cap \mathbb{R}_+^N$$

La topologie considérée sur $VL(r,k)$ est la topologie $L^1(D)$ des fonctions caractéristiques de ses éléments.

Ω' tend vers Ω dans $VL(r,k)$ si et seulement si :

$$\chi_{\Omega'} \longrightarrow \chi_{\Omega} \text{ dans } L^1(D) \text{ fort.}$$

On peut remarquer que c'est une topologie métrique sur $VL(r,k)$.

0 - 3 - 2 : Variations de la frontière.

Il s'agit de repérer le domaine optimal par sa frontière, ce dernier étant soumis à certaines contraintes. Il est possible d'introduire un repérage de la frontière Γ , ce repérage dépendant d'un certain nombre de paramètres. JEAN CEA, ALAIN GIOAN et JEAN MICHEL [] ont étudié une méthode indépendante du repérage, en définissant un accroissement $\delta\Omega$ de Ω de la façon suivante :

$\delta\Omega^+$ et $\delta\Omega^-$ sont deux ouverts contenus dans un compact K de \mathbb{R}^N tels que :

$$\begin{cases} \delta\Omega^+ \cap \Omega = \phi \\ \delta\Omega^- \subset \Omega \end{cases}$$

$\Omega + \delta\Omega = \{ x / x \in \delta\Omega^+ \text{ ou } x \in \Omega \text{ et } x \notin \delta\Omega^- \}$ et :

$\Omega + \delta\Omega$ tend vers Ω si et seulement si $\text{mes}(|\delta\Omega|)$ tend vers 0. (On peut également étudier une paramétrisation géométrique du domaine, on le fait varier en déplaçant les points de la normale à Γ .)

0 - 3 - 3 : Méthode des variations intérieures.

L'idée est de déplacer tous les points de l'ouvert (et non seulement ceux du bord), par application d'un champ de vecteurs. L'ouvert D est alors

déformé en l'ouvert $(I + \varepsilon\theta)(D)$, ε étant un nombre réel petit et θ un champ de vecteurs.

CHAPITRE I : RESULTATS ET PRELIMINAIRES TECHNIQUES

Pour les détails et démonstrations des résultats qui suivent, nous renvoyons à MURAT-SIMON [] et J. SIMON [].

I - 1 : ESPACE DE DIFFEOMORPHISMES

On note $C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions continues et bornées de \mathbb{R}^2 dans lui-même ainsi que leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à deux.

L'application $\| \cdot \|_2 : C^{2,b}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\theta \longrightarrow \|\theta\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, |\alpha| \leq 2} \text{ess } |D^\alpha \theta(x)|$$

est une norme sur $C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et :

$T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ muni de cette norme est un espace de Banach. On note I l'identité de \mathbb{R}^2 : ie $I(X) = X \quad \forall X \in \mathbb{R}^2$.

Résultat :

Si $\|\theta\|_2 < \frac{1}{2}$, alors θ est une contraction stricte de \mathbb{R}^2 et

l'application $(I + \theta)$ est inversible d'inverse :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I + \theta)^{-1} = I + \tau \text{ où } \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \text{ et } \exists C > 0 \text{ telle que :} \\ \|\tau\|_2 \leq C \|\theta\|_2. \end{array} \right.$$

I - 2 : DERIVATION DE L'APPLICATION $\theta \longrightarrow \text{Jac}(I + \theta)$

Soit $\theta \in T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $\theta(X_1, X_2) = (\theta_1(X_1, X_2), \theta_2(X_1, X_2))$

on note :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} {}^t [(I + \theta)']^{-1} \cdot \tau = - \left[\frac{\partial \tau_j}{\partial x_i} \right]_{1 \leq i, j \leq 2} \quad (0)$$

Résultat 2 :

Si $\theta \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tel que $\|\theta\|_2 < \frac{1}{2}$ et si $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$,

alors :

$$\nabla f \circ (I + \theta) = {}^t [(I + \theta)']^{-1} \nabla (f \circ (I + \theta))$$

I - 4 : DERIVATION DE L'APPLICATION $\theta \longrightarrow f \circ (I + \theta)$

Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R}^2 et $\theta \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $f \circ (I + \theta)$ est une fonction réelle définie sur \mathbb{R}^2 et on a :

Lemme (MURAT-SIMON) :

$$\begin{cases} \text{Si } f \in W^{m,r}(\mathbb{R}^2) & 1 \leq r \leq \infty & m \leq 3 \\ f \in C^m(\mathbb{R}^2) & \text{Si } r = \infty \end{cases}$$

Alors l'application $C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow W^{m-1,r}(\mathbb{R}^2)$

$$\theta \longrightarrow f \circ (I + \theta)$$

est dérivable en 0 et $\forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, sa dérivée dans la direction τ est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [f \circ (I + \theta)] \cdot \tau = \tau \cdot \nabla f \quad (0)$$

$$\text{Jac } (I + \theta) = \left| \det \left[\frac{\partial (I + \theta)_i}{\partial x_j} \right] \right| \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Résultat :

L'application $C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\theta \longrightarrow \text{Jac } (I + \theta)$ est dérivable en 0

et $\forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, sa dérivée dans la direction τ est donnée par la formule :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\text{Jac } (I + \theta) \right]_{(0)} \cdot \tau = \text{div } \tau$$

I - 3 : DERIVATION D'UNE MATRICE

On note

$$\left[(I + \theta)' \right] = \left[\frac{\partial (I + \theta)_i}{\partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq 2}, \quad \text{la matrice}$$

de la différentielle de l'application $(I + \theta)$.

On note ${}^t[(I + \theta)']^{-1}$ la transposée de son inverse.

Résultat 1 :

L'application $C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow C^{1,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$

$\theta \longrightarrow {}^t[(I + \theta)']^{-1}$ est

dérivable en 0 et $\forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, sa dérivée dans la direction τ est donnée par :

I - 5 : DERIVATION DE L'APPLICATION $\theta \longrightarrow \phi(\theta) \circ (I + \theta)$.

Soit $\phi(\theta)$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi(\theta) \in W^{m,r}(\mathbb{R}^2) & 1 \leq m \leq 2 \quad 1 \leq r < \infty \\ \phi(0) \in C^m(\mathbb{R}^2) & \text{si } r = \infty. \end{array} \right. \quad \text{Alors on a :}$$

Lemme : Si l'application $T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow W^{m,r}(\mathbb{R}^2)$

$$\theta \longrightarrow \phi(\theta) \circ (I + \theta)$$

est dérivable en 0, alors l'application $C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow W^{m-1,r}(\mathbb{R}^2)$

$$\theta \longrightarrow \phi(\theta)$$

est dérivable en 0, et $\forall \tau \in T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, sa dérivée dans la direction τ est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [\phi(\theta)]_{(0)} \cdot \tau = \frac{\partial}{\partial \theta} [\phi(\theta) \circ (I + \theta)]_{(0)} \cdot \tau - \tau \cdot \nabla \phi(0)$$

I - 6 : DERIVATION LOCALE D'UNE FONCTION DEFINIE SUR UN OUVERT VARIABLE.

Soit D un ouvert fixé de \mathbb{R}^2 et soit $\theta \in T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, on définit l'ouvert $(I + \theta)(D)$ de \mathbb{R}^2 pour θ assez petit par :

$$(I + \theta)(D) = \{ x + \theta(x) / x \in D \}.$$

Soit $\phi(\theta)$ une fonction définie sur l'ouvert $(I + \theta)(D)$ variable avec θ .

$\phi(\theta)$ est une fonction qui varie donc avec le domaine dans lequel elle est définie, il est par conséquent difficile de dériver une telle fonction par rapport à θ , par contre, on peut envisager de dériver ses restrictions à des ouverts fixes. On aura donc ce qu'on appelle une dérivation locale dans D .

En fait, 3 méthodes ont été proposées pour lever cette difficulté.

(i) 1^{ère} méthode :

On considère une fonction $\phi(\theta)$ définie dans $H^1_0(I + \theta)(D)$.

Soit $\tilde{\phi}(\theta)$ la fonction définie par :

$$\tilde{\phi}(\theta) = \begin{cases} \phi(\theta) & \text{sur } (I + \theta)(D). \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 - (I + \theta)(D) \end{cases}$$

$\tilde{\phi}(\theta)$ est le prolongement par 0 de $\phi(\theta)$ en dehors de $(I + \theta)(D)$.

L'application $\theta \longrightarrow \tilde{\phi}(\theta)$ est donc définie de $T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ à valeurs dans $H^1_0(\mathbb{R}^2)$, on peut sans difficulté étudier sa continuité et sa dérivabilité. Mais, cette méthode ne peut être aussi facilement applicable dans les cas où $\phi(\theta)$ appartient à des espaces de fonctions quelconques, notamment lorsque $\phi(\theta)$ a une trace qui n'est pas nulle sur $(I + \theta)(D)$.

(ii) 2^{ème} méthode.

Elle consiste à dériver dans des espaces "strictement contenus dans l'ouvert fixe D ".

Soit ω un ouvert de \mathbb{R}^2 tel que $\bar{\omega} \subset D$. Pour θ assez petit, $\omega \subset (I + \theta)(D)$ et la restriction de $\phi(\theta)$ à ω , $\phi(\theta)|_{\omega}$ est bien définie, on pourra donc étudier la continuité et la dérivabilité de l'application $\theta \longrightarrow \phi(\theta)|_{\omega}$.

(iii) 3^{ème} méthode.

Considérons par exemple une fonction $\phi(\theta) \in W^{2,p}(I + \theta)(D)$, en effectuant le changement de variable $(I + \theta)$, la fonction $\psi(\theta) = (\phi(I + \theta) \circ (I + \theta))$ appartient donc à l'espace $W^{2,p}(D)$ et on peut

en étudiant la dérivabilité de $\psi(\theta)$ déduire la dérivabilité de l'application $\theta \rightarrow \phi(\theta)$ grâce à une condition suffisante de dérivabilité locale (voir II-7).

Remarque :

Soit E un espace de Banach fixé, soit Ω un ouvert fixé de \mathbb{R}^2 .

On considère une application ϕ définie par :

$$\Omega \longrightarrow (I + \theta)(\Omega) \xrightarrow{\phi} E, \text{ et on considère l'application}$$

$$\psi : C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow E$$

$$\theta \longrightarrow \psi(\theta) = \phi((I + \theta)(\Omega))$$

Soient θ_1 et θ_2 deux champs de vecteurs de $C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tels que :

$$(I + \theta_1)(\Omega) = (I + \theta_2)(\Omega), \text{ alors } \psi(\theta_1) = \psi(\theta_2).$$

Autrement dit, $D\phi(\theta)$ ne dépend que de la valeur de θ au bord de Ω .

Ceci permet de faire le lien entre la méthode des variations intérieures et la méthode des accroissements sur la normale.

I - 7 : FORMULES DE DERIVATION PAR RAPPORT AUX DOMAINES ET AUX SURFACES

A partir des espaces de difféomorphismes définis dans (I - 1), on peut définir les espaces de domaines dans lesquels on pourra étudier les variations des fonctions du type :

$$J_1(D) = \int_D \phi(D) dx \quad \text{et} \quad J_2(D) = \int_{\partial D} \phi(D) dS \quad \text{où } \phi \text{ est une}$$

fonction définie sur D et dépendant de D .

Il s'agit donc d'une généralisation de l'étude de :

$$J([a,b]) = \int_a^b \phi(a,b)(x) dx \text{ par rapport à } a \text{ et } b.$$

Si f est une fonction régulière définie sur \mathbb{R}^2 , alors :

$$\frac{\partial}{\partial D} \left[\int_D f dx \right]_{(D_0)} \cdot \theta = \int_{\partial D_0} \langle n, \theta \rangle f d\sigma$$

$$\frac{\partial}{\partial D} \left[\int_{\partial D} f d\sigma \right]_{(D_0)} \cdot \theta = \int_{\partial D_0} \langle n, \theta \rangle \left[\frac{\partial f}{\partial n} + Hf \right] d\sigma$$

$$\forall \theta \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

où H est la courbure moyenne de ∂D_0 et

\vec{n} est la normale extérieure à ∂D_0 .

I. - 7. - 1 : Dérivation d'une intégrale par rapport à son domaine d'intégration.

Soit D_1 un ouvert régulier de \mathbb{R}^2 . Soit $\phi(D) \in L^1(D)$. Si l'application $\hat{\phi}_{D_1}$ définie par : $\hat{\phi}_{D_1}(\theta) = \phi((I + \theta)(D_1)) \circ (I + \theta)$

est dérivable en 0 de $T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \rightarrow L^1(D_1)$ alors :

l'application $J(D) = \int_D \phi(D) dx$ est dérivable de $T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$

au point 0 et $\forall \theta \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial J}{\partial D}(D_1) \cdot \theta = \int_{D_1} \left[\phi(D_1) \operatorname{div} \theta + \frac{\partial \hat{\phi}_{D_1}}{\partial \theta}(0) \cdot \theta \right] dx$$

1 - 7 - 2 : Dérivation de l'intégrale superficielle

1) Définition [1]

Soit Q un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , localement graphe lipschitzien, on dit que $f \in L^1(\partial Q)$ si $f(x'^j, \psi^j(x'^j)) \in L^1(\Delta^j)$ et on définit l'intégrale superficielle par :

$$\int_{\partial Q} f \, d\sigma = \sum_{j=1}^{2n} \int_{\Delta^j} f(x'^j, \psi^j(x'^j)) \alpha^j(x'^j, \psi^j(x'^j)) \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial \psi^j}{\partial x'^j} \right| \right]^{1/2} dx'^j.$$

où ∂Q est représenté par les pavés Δ^j dans le système de cartes (x'^j, x_n^j) par $x_n^j = \psi^j(x'^j)$ et où α^j est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de ∂Q par les Δ^j $[\psi^j - \beta^j, \psi^j + \beta^j]$.

2 - Théorème :

Soit Q un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , localement graphe lipschitzien et soit T un difféomorphisme. Si $f \in L^1(\partial(T(Q)))$ alors :
 $f \circ T \in L^1(\partial Q)$ et :

$$\int_{\partial(T(Q))} f \, d\sigma = \int_{\partial} (f \circ T) \cdot |\det T'| \cdot \left| |T'|^{-1} \right|_n \Big|_{\mathbb{R}^2} d\sigma$$

[1] : JINDRICH NECAS : Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.

3) Théorème :

Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , localement graphe lipschitzien, soit $\phi(D) \in L^1(\partial D)$, alors :

Si l'application $\hat{\phi}_D(\theta) = \phi(I + \theta)(D) \circ (I + \theta) \in L^1(\partial D)$ est dérivable de $T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \rightarrow L^1(\partial D)$ au point 0 , alors l'application

$J(D) = \int_{\partial D} \phi(D) \, d\sigma$ est dérivable au point D dans \mathbb{R} et :

$$\forall \theta \in T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

$$\frac{\partial J}{\partial D}(D) \cdot \theta = \int_{\partial D} \{ [\phi(D)(\operatorname{div} \theta - \langle [\theta']_n, n \rangle)] + \frac{\partial \hat{\phi}_D(\theta)}{\partial \theta}(0) \cdot \theta' \} \, d\sigma$$

I - 8 : THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES (SCHWARTZ).

On énonce une variante de ce théorème définie comme suit :
soient E, F et G 3 espaces de Banach. Soit a un élément de F , et soient $V(0)$ un voisinage ouvert de 0 dans E et $W(a)$ un voisinage ouvert de a dans F .

On considère deux applications f et g telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f : V(0) \times W(a) \longrightarrow G \\ g : V(0) \longrightarrow W(a) \\ g(0) = a \text{ et } f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in V(0) \end{array} \right.$$

Si :

- (i) f est dérivable (Fréchet) au point $(0, a)$
- (ii) $\frac{\partial f}{\partial a}(0, a)$ est un isomorphisme de F sur G .
- (iii) g est continue en $x = 0$.

Alors g est dérivable (Fréchet) en $X = 0$ et sa dérivée est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(0, a) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial x}(0) \cdot \tau \right] = - \frac{\partial f}{\partial X}(0, a) \cdot \tau$$

$\forall \tau \in E.$

Remarque :

g représente l'application $\theta \rightarrow u(\theta)$, f est l'application définie par :
 $f(\theta, \vec{u}(\theta)) = 0$.

Ce théorème permettra de calculer $\frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$.

CHAPITRE II : CONSTRUCTION DES ESPACES DE DOMAINES

II - 1 : INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est de construire un espace de domaines Ω de \mathbb{R}^2 à partir du rectangle fixe $D_1 =]0,1[\times]0,1[$ dont seule la partie $\Gamma_1 = \{(1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x_2 \leq 1\}$ de sa frontière varie d'une façon qu'on déterminera ultérieurement. On traite en détail le cas des domaines translatsés, en montrant que la métrique introduite sur cet espace est équivalente à la métrique de Hausdorff dans ce cas particulier (Fig. II-1).

On construit également un espace de domaines obtenus en dilatant le disque unité de \mathbb{R}^2 par application d'une classe d'homothéties (Fig. 1-2).

Il s'agit donc de munir ces espaces d'une structure métrique afin d'étudier la continuité et la différentiabilité de fonctionnelles définies sur ces espaces. Ainsi, on a un cadre fonctionnel bien adapté à l'étude des problèmes de contrôle où ce dernier est le domaine.

II - 2 : DEFINITION ET PROPRIETES D'ESPACES DE DIFFEOMORPHISMES.

Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ où $\xi_i \in \mathbb{N}$ $i = 1, 2$ et $|\xi| = \xi_1 + \xi_2$.

On note :
$$D^\xi = \frac{\partial^{|\xi|}}{\partial x_1^{\xi_1} \partial x_2^{\xi_2}}$$

Soit $T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ le sous-ensemble de $C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ défini par :

$$T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \{ \theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \theta(x_1, x_2) = (\theta_1(x_1, x_2), 0) \} .$$

Remarque : on notera θ_α les éléments de $C_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ $\theta_\alpha(X) = (\alpha(X), 0)$
où $\alpha \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2)$.

Lemme :

L'ensemble $T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est un sous-espace vectoriel de $T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, muni de la norme induite par celle de $T^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ c'est un espace de Banach.

II - 2 - 1 : Définitions :

On note $A_o^{2,b}$ l'espace des applications ψ de \mathbb{R}^2 dans lui-même telles que $\psi - I \in C_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$; I étant l'identité de \mathbb{R}^2 .

$A_o^{2,b}$ est un espace affine normé complet construit sur $C_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

On définit ensuite l'espace $T_o^{2,b}$ par :

$$T_o^{2,b} = \{ \text{bijections de } \mathbb{R}^2 \text{ dans lui-même telles que } T \in A_o^{2,b} \text{ et } \\ T^{-1} \in A_o^{2,b} \}$$

II - 2 - 2 : Propriétés des espaces $A_o^{2,b}$ et $T_o^{2,b}$:

1) $A_o^{2,b}$ est stable pour la composition des applications.

En effet :

Soit $\psi \in A_o^{2,b}$, $\exists \alpha \in T^{2,b}(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$\psi(X_1, X_2) = (X_1 + \alpha(X_1, X_2), X_2) \quad \forall (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit $\varphi \in A_o^{2,b}$, $\exists \beta \in T^{2,b}(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$\varphi(X_1, X_2) = (X_1 + \beta(X_1, X_2), X_2).$$

$$(\varphi \circ \psi)(X_1, X_2) = \varphi[\psi(X_1, X_2)] = \varphi[X_1 + \alpha(X_1, X_2), X_2] =$$

$$(X_1 + \beta(X_1, X_2) + \alpha(X_1 + \beta(X_1, X_2), X_2), X_2)$$

On pose :

$$\gamma (X_1, X_2) = \beta (X_1, X_2) + \alpha (X_1 + \beta (X_1, X_2), X_2) \quad \text{on a :}$$

$$\gamma \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2) \text{ et}$$

$$(\psi_o \psi)(X) = (X_1 + \gamma(X), X_2) \quad \text{d'où} \quad \psi_o \psi \in A_o^{2,b}.$$

$$2) \quad T_o^{2,b} \text{ est ouvert dans } A_o^{2,b}.$$

$$3) \quad \text{L'application } T \longrightarrow \bar{T}^1 \text{ est continue de } A_o^{2,b} \longrightarrow A_o^{2,b} \text{ en tout point } T_1 \in T_o^{2,b}.$$

II - 3 : PSEUDO-DISTANCE ET PROPRIETES METRIQUES DES ESPACES $T_o^{2,b}$

II - 3 - 1 : Définitions et propriétés

On appelle pseudo-distance sur un espace E, une application

$$\delta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ telle que :}$$

$$(i) \quad \delta(e_1, e_2) = \delta(e_2, e_1) \quad \forall e_1, e_2 \in E$$

$$(ii) \quad \delta(e_1, e_2) = 0 \iff e_1 = e_2$$

$$(iii) \quad \delta(e_1, e_2) \leq \delta(e_1, e_3) + \delta(e_3, e_2) + \delta(e_1, e_3) \cdot \delta(e_3, e_2) \cdot P[\delta(e_1, e_3) + \delta(e_2, e_3)]$$

$\forall (e_1, e_2, e_3) \in E^3$ où P est une fonction continue et croissante de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ .

Soit δ une pseudo-distance sur E, pour tout nombre réel α tel que

$0 < \alpha < 1$, il existe $\eta_\alpha > 0$ tel que :

L'application $\delta^{(\alpha)}$ définie par :

$$\delta^{(\alpha)}(e_1, e_2) = \text{Inf} \{ \delta(e_1, e_2), \eta_\alpha \}^\alpha \quad \text{soit une distance sur E.}$$

Dans un espace E muni d'une pseudo-distance δ , on peut donc définir une topologie en introduisant la base de voisinages $(V_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ définie par :

$$V_\varepsilon = \{(e_1, e_2) \in E^2 / \delta(e_1, e_2) < \varepsilon\}.$$

On peut ainsi définir les suites de Cauchy, et cette structure peut être définie par une quelconque distance $\delta^{(\alpha)}$ $0 < \alpha < 1$.

II - 3 - 2 : Pseudo-distance sur $T_o^{2,b}$.

On considère l'application $\delta_2 : T_o^{2,b} \times T_o^{2,b}$ à valeur dans \mathbb{R}^+ définie par :

$$\delta_2(T_1, T_2) = \|T_2 \circ T_1^{-1} - I\|_2 + \|T_1 \circ T_2^{-1} - I\|_2$$

$$\forall (T_1, T_2) \in (T_o^{2,b})^2.$$

δ_2 est une pseudo-distance sur $T_o^{2,b}$ et l'espace $T_o^{2,b}$ est complet pour cette pseudo-distance.

II - 3 - 3 : Définition et propriétés des espaces de domaines

Définition :

Soit $D_1 =]0,1[\times]0,1[$, on définit :

$$\mathcal{D}_{D_1}^{2,b} = \{T(D_1) / T \in T_o^{2,b}\} \text{ avec}$$

$$T(D_1) = \{T(X) / X \in D_1\}.$$

Remarque : Tout ensemble de $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$ est un ouvert, connexe borné de \mathbb{R}^2 .

Pseudo-distance sur $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$.

L'application $d_2 : \mathcal{D}_{D_1}^{2,b} \times \mathcal{D}_{D_1}^{2,b} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$d_2(D, D') = \inf_{T \in T_o^{2,b}} \left\{ \|T - I\|_2 + \|T^{-1} - I\|_2 \right\}$$

$$T(D) = D'$$

$\forall (D, D') \in (\mathcal{D}_{D_1}^{2,b})^2$ est une pseudo-distance et l'espace $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$ muni de d_2 est complet.

Remarque : On peut vérifier que :

$$d_2(D, D') = \inf \delta_2(T, T')$$

$$T, T' \in T_o^{2,b}$$

$$T(D_1) = D$$

$$T'(D_1) = D'$$

Dérivation dans les espaces $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$.

Soit ϕ une fonction définie sur $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$ à valeurs dans un espace de Banach E.

Soit $D_\alpha \in \mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$, $\exists \alpha \in \mathcal{D}^{2,b}(\mathbb{R}^2)$ tel que :

$D_\alpha = (I + \theta_\alpha)(D_1)$ où $\theta_\alpha(x) = (\alpha(x), 0)$. On suppose en outre que :

$$\begin{cases} \alpha(x) \geq 0 & \forall x \in D_1 \text{ et} \\ \alpha(0, x_2) = 0 & \text{pour } 0 \leq x_2 \leq 1. \end{cases}$$

on dira que ϕ est dérivable de $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$ à valeurs dans E au point D_1 si l'application :

$$\phi_{D_1}^* : T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \rightarrow E$$

$$\theta_\alpha \rightarrow \phi((I + \theta_\alpha)(D_1)) \text{ est}$$

dérivable au point 0 et on dit que :

$$\frac{\partial \phi(D_\alpha)}{\partial D_\alpha} (D_1) = \frac{\partial \phi_{D_1}^*(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \in L_c(T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), E)$$

III - 3 - 4 : Condition suffisante de dérivabilité locale.

Lemme :

Soit ϕ une fonction définie sur $T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \phi(\theta_\alpha) \in W^{m,r}(D_\alpha) & m \leq 2 \quad 1 \leq r \leq \infty \\ \phi(0) \in T^m(D_1) & \text{si } r = \infty \end{cases}$$

Si l'application $\theta_\alpha \rightarrow \phi(\theta_\alpha) \circ (I + \theta_\alpha)$ est dérivable en 0 de $T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ à valeurs dans $W^{m,r}(D_1)$, alors l'application $\theta_\alpha \rightarrow \phi(\theta_\alpha)$ est dérivable en 0 de $T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \rightarrow W_{loc}^{m-1,r}(D_1)$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \left[\phi(\theta_\alpha) \right]_{(0)} \cdot \theta_\beta = \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \left[\phi(\theta_\alpha) \circ (I + \theta_\alpha) \right]_{(0)} \cdot \theta_\beta - \theta_\beta \cdot \nabla \phi(0)$$

Preuve du Lemme :

Soit $D' \subset D \subset D_1$ au sens $\bar{D}' \subset D$, on considère une fonction $e \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $e \equiv 1$ sur D_0 , $e \equiv 0$ hors de D_1 avec $D' \subset D_0 \subset D \subset D_1$ (Fig. II - 2). On définit pour θ_α assez petit dans $T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ la fonction

$$\psi(\theta_\alpha) = \begin{cases} e \phi(\theta_\alpha) & \text{dans } D_1 \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 - D_1 \end{cases}$$

L'application $\theta_\alpha \rightarrow \psi(\theta_\alpha) \circ (I + \theta_\alpha)$ étant dérivable en 0 de $T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ à valeurs dans $W^{m,r}(D_1)$, il en résulte donc que l'application

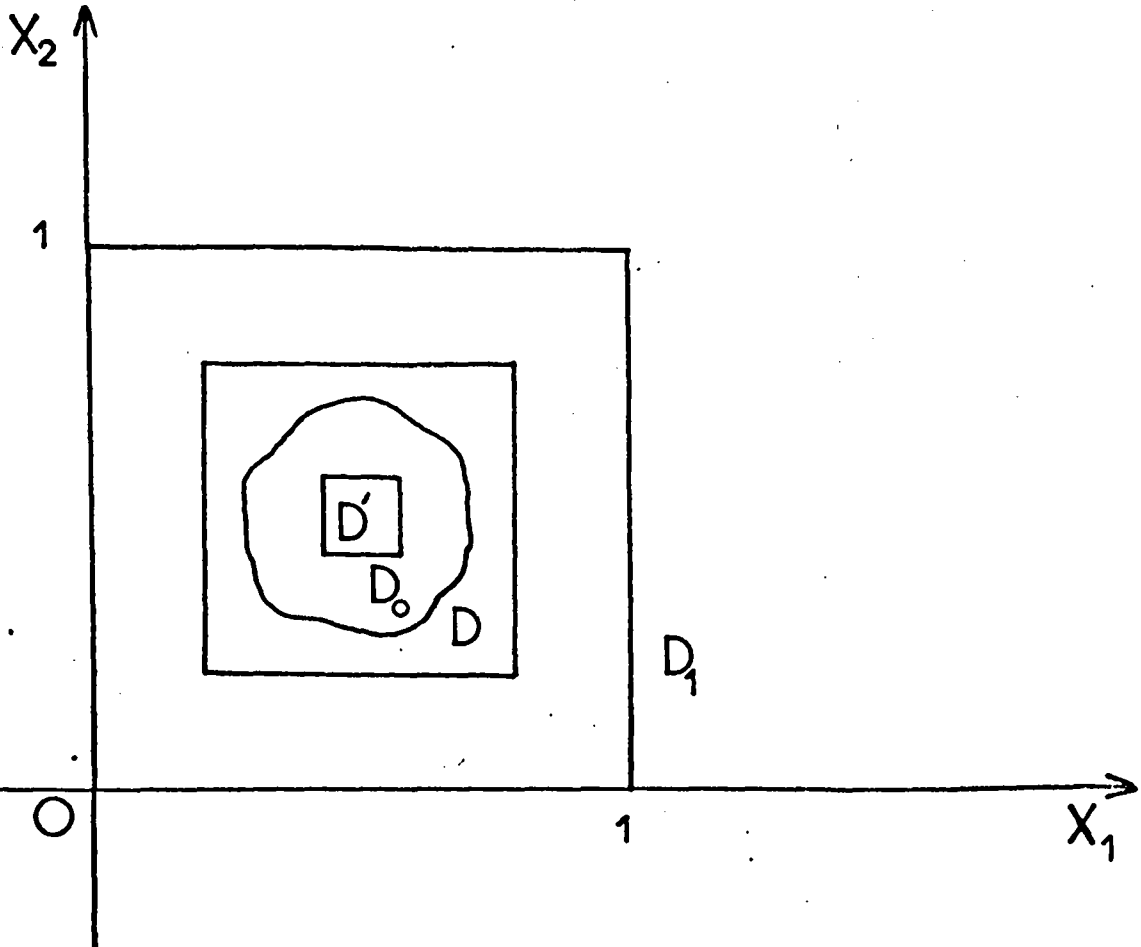


Fig. II - 2



$\theta_\alpha \rightarrow \psi(\theta_\alpha) \circ (I + \theta_\alpha)$ est dérivable au point 0 de $T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dans $W^{m,r}(\mathbb{R}^2)$, la formule (I-5) entraîne que l'application $\theta_\alpha \rightarrow \psi(\theta_\alpha)$ est dérivable au point 0 de $T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dans $W^{m-1,r}(\mathbb{R}^2)$ et :

$$\frac{\partial \psi(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha}(0) \cdot \theta_\beta = \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \left[\psi(\theta_\alpha) \circ (I + \theta_\alpha) \right]_{t=0} \cdot \theta_\beta = \theta_\beta \cdot \nabla \psi(0)$$

d'où par restriction à D on a le résultat.

II - 4 : ETUDE DES TRANSLATIONS ET DES DILATATIONS

II - 4 - 1 : "Translations"

On considère les champs de vecteurs θ_α définis par :

$$\begin{cases} \theta_\alpha(X_1, X_2) = (\alpha X_1, 0) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \\ \theta_\alpha(0, X_2) = 0 \end{cases} \quad \forall X_2 \in [0, 1]$$

$$D_\alpha = (I + \theta_\alpha)(D_1)$$

calculons $d_2(D_\alpha, D_1)$ où d_2 est la pseudo-distance définie précédemment.

$$d_2(D_\alpha, D_1) = \inf_{T \in T_o^{2,b}} \{ \|T - I\|_2 + \|\bar{T}^1 - I\|_2 \}$$

$$T(D_1) = D_\alpha$$

L'application \bar{T}^1 est définie par :

$$\bar{T}^1(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{1+\alpha}, x_2 \right)$$

$\bar{T}^1 = I + \theta \frac{1}{1+\alpha}$, il en résulte donc que :

$$d_2(D_\alpha, D_1) = \frac{\alpha(2+\alpha)}{1+\alpha} \text{ et}$$

$\alpha \leq d_2(D_\alpha, D_1) \leq 2\alpha$ d'où d_2 est équivalente à α .

Remarque :

Dans ce cas simple, on dit que le domaine D_α tend vers le domaine D_β dans $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$ si α tend vers β dans \mathbb{R} .

II - 4 - 2 : Dilatations

On considère le sous-espace de $\mathcal{T}^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ formé par les homothéties de rapport $e > 0$ et de centre 0.

On note :

$$\mathcal{T}_d^{2,b} = \{ \theta_e \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) / \theta_e(x) = e_x \}.$$

Soit D le disque unité

On note :

$$\mathcal{D}_d^{2,b} = \{ (I + \theta_e)(D) / \theta_e \in \mathcal{T}_d^{2,b} \}.$$

$$\text{Soit } D_e \in \mathcal{D}_d^{2,b} \Rightarrow D_e = (I + \theta_e)(D)$$

$$D'_e \in \mathcal{D}_d^{2,b} \Rightarrow D'_e = (I + \theta_{e'}) (D)$$

$$d_2(D_e, D'_e) = \text{Inf} \{ \|T_0 T'^{-1} - I\|_2 + \|T'_0 \bar{T}^1 - I\|_2 \}$$

$$T.T' \in \mathcal{T}_d^{2,b}$$

$$T(D) = D_e$$

$$T'(D) = D_{e'}$$

$\mathcal{T}_d^{2,b}$ étant l'ensemble des bijections T de \mathbb{R}^2 dans lui-même telles que $T - I \in C_d^{2,b}$ et $\bar{T}^1 - I \in \mathcal{T}_d^{2,b}$.

$$\text{On a } d_2(D_e, D'_e) \geq \left| \frac{e-e'}{e} \right| + \left| \frac{e-e'}{e'} \right|$$

On peut vérifier comme pour les translations que la pseudo-distance d_2 est équivalent à $|e-e'|$.

Remarque :

Dans ce cas particulier, on dit que D_e tend vers $D_{e'}$, dans $\mathcal{D}_d^{2,b}$ si e tend vers e' dans \mathbb{R} .

II - 5 : UN RESULTAT DE TRACE.

Soit D_α un élément de $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$ $D_\alpha = (I + \theta_\alpha) (D_1)$

Soit $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 \}$ et

$$\Gamma_\alpha = \{ \alpha(1, x_2) / 0 \leq x_2 \leq 1 \} .$$

On va déterminer la trace sur Γ de la dérivée locale de la fonction

$\theta_\alpha \rightarrow \phi(\theta_\alpha)$ lorsque $\phi(\theta_\alpha)$ a une trace nulle sur Γ_α .

On suppose que $\phi(\theta_\alpha) \in W^{1,1}((I + \theta_\alpha)(D_1))$.

Lemme :

On suppose que :

(i) l'application $\theta_\alpha \rightarrow \phi(\theta_\alpha) \circ (I + \theta_\alpha)$ est dérivable en 0 de $\mathcal{T}_0^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dans $W^{1,1}(D_1)$.

(ii) $\phi(\theta_\alpha) = 0$ sur ∂D_α .

(iii) $\phi(0) \in W^{2,1}(D_1)$. Alors :

L'application $\theta_\alpha \rightarrow \phi(\theta_\alpha)$ est dérivable en 0 de $\mathcal{T}_0^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dans $L_{loc}^1(D_1)$ et :

$\forall \theta_\beta \in T_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, sa dérivée dans la direction θ_β vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \left[\Phi(\theta_\alpha) \right]_{(0)} \cdot \theta_\beta \in W^{1,1}(D_1) \text{ et}$$

$$\frac{\partial \Phi(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \theta_\beta = - \beta n_1 \cdot \frac{\partial \Phi(0)}{\partial x_1} \text{ sur } \Gamma$$

où n_1 est la première composante de la normale extérieure à Γ .

Preuve du lemme :

Le lemme II - 3 - 4 entraîne que l'application $\Phi(\theta_\alpha)$ est dérivable dans $L^1_{loc}(D_1)$ au point 0 et en appliquant l'application trace, on a :

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\frac{\partial \Phi(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta \right] &= \text{tr} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} (\Phi(\theta_\alpha) \circ (I + \theta_\alpha)) (0) \cdot \theta_\beta \right] \\ &= \text{tr} \left[\theta_\beta \cdot \nabla \Phi(0) \right] \text{ d'où} \end{aligned}$$

le Lemme.

CHAPITRE III : DERIVATION DE QUELQUES PROBLEMES
D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Dans ce chapitre, on va étudier quelques problèmes modèles de contrôle par le domaine et quelques variantes, en utilisant les espaces de domaines $\mathcal{D}_0^{2,b}$ et $\mathcal{D}_d^{2,b}$ qu'on a munis au chapitre II d'une structure complète.

On considérera les fonctions coûts J_1 et J_2 définies respectivement sur les espaces $\mathcal{D}_0^{2,b}$ et $\mathcal{D}_d^{2,b}$ par :

$$J_1(D_\alpha) = \int_{D_\alpha} |\nabla(u(D_\alpha) - z)|^2 dx.$$

$$J_2(D_\rho) = \int_{\partial D_\rho} \left| \frac{\partial u(D_\rho)}{\partial n} - z \right|^2 d\sigma \quad \text{où les états}$$

$u(D_\alpha)$ et $u(D_\rho)$ sont solutions du problème homogène de Dirichlet respectivement dans les domaines D_α et D_ρ .

III - 1 : DERIVATION D'UN PROBLEME GENERAL. SIMON [1]

III - 1 - 1 : Position du problème.

Soit $\theta_\alpha \in C_0^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $\theta_\alpha(x) = (\alpha(x), 0)$ où $\alpha \in C^{2,b}(\mathbb{R}^2)$ et $\alpha(0, x_2) = 0$ pour $0 \leq x_2 \leq 1$.

On suppose que $\|\theta_\alpha\|_2 < \frac{1}{2}$ de sorte que $D_\alpha = (I + \theta_\alpha)(D_1)$ appartienne à $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$.

Soient A, B et C trois opérateurs aux dérivées partielles linéaires et continus d'ordre deux au plus.

Pour donner un sens au problème, on suppose que pour tout ouvert D' voisin de D , les opérateurs A , B et C vérifient :

A , B et C envoient $W^{m,p}(D')$ respectivement dans $\mathcal{D}'(D')$,

$W^{1,1}(D')$ et $L^1(D')$ où $1 \leq m \leq 2$

$$1 \leq p < \infty.$$

Remarque : On note encore A , B et C les opérateurs obtenus par restriction à D' des coefficients.

Soient f et g deux fonctions suffisamment régulières données dans \mathbb{R}^2 . On considère la fonction $u(\theta_\alpha)$ définie dans D_α telle que

$$(III - 1) \quad \begin{cases} u(\theta_\alpha) \in W^{m,p}(D_\alpha) & 1 \leq m \leq 2 \quad 1 \leq p < \infty \\ A(u(\theta_\alpha)) = f & \text{dans } D_\alpha \\ B(u(\theta_\alpha)) = g & \text{sur } \partial D_\alpha. \end{cases}$$

on considère la fonction J définie sur $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$ à valeurs réelles telle que :

$$J(D_\alpha) = \int_{D_\alpha} c(u(\theta_\alpha)) dx.$$

III - 1 - 2 : Théorème.

On suppose que l'application $\theta_\alpha \rightarrow u(\theta_\alpha)0(I+\theta_\alpha)$ est dérivable au point 0 de $C_0^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dans $W^{m,p}(D_1)$. Alors :

l'application $\theta_\alpha \rightarrow u(\theta_\alpha)$ est dérivable en 0 dans $W_{loc}^{m-1,p}(D_1)$ et $\forall \theta_\beta \in C_0^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, on a :

$$\begin{cases} A \left[\frac{\partial u(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta \right] = 0 \text{ dans } D_1 \\ B \left[\frac{\partial u(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta \right] = - \langle n, \theta_\beta \rangle \frac{\partial}{\partial n} [B(u(0)) - g]. \end{cases}$$

sur ∂D_1 .

Dé plus, l'application $\theta_\alpha \rightarrow J(\theta_\alpha)$ est dérivable au point 0 dans R et sa dérivée dans la direction θ_β est donnée par :

$$\frac{\partial J(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta = \int_{D_1} C \left[\frac{\partial u(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta \right] dx + \int_{\partial D_1} \langle n, \theta_\beta \rangle C(u(0)) d\sigma.$$

\vec{n} étant la normale extérieure à D_1 .

$u(0)$ est la solution du problème (III-1) dans le domaine D_1 .

Remarque : On suppose que le problème (III-1) admet une solution unique.

Preuve du théorème :

L'hypothèse de dérivabilité de la fonction $u(\theta_\alpha) \circ (I + \theta_\alpha)$ au point 0 et les hypothèses sur les opérateurs A, B et C impliquent que les applications $\theta_\alpha \rightarrow B(u(\theta_\alpha) \circ (I + \theta_\alpha))$ et $\theta_\alpha \rightarrow C(u(\theta_\alpha)) \circ (I + \theta_\alpha)$ sont dérivables au point 0 respectivement dans $L^1(\Gamma_1)$ et $L^1(D_1)$.

Par ailleurs, le lemme I-5 implique que la fonction $\theta_\alpha \rightarrow u(\theta_\alpha)$ est dérivable au point 0 dans $W_{loc}^{m-1, p}(D_1)$ et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta \in W_{loc}^{m-1, p}(D_1) \\ A \left[\frac{\partial u(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta \right] = 0 \text{ dans } D_1, \quad \forall \theta_\beta \in C_0^{2, b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2). \end{array} \right.$$

En appliquant le résultat de trace établi au chapitre I, on a : l'application $\theta_\alpha \rightarrow B(u(\theta_\alpha)) - g$ est dérivable localement dans $L^1(\Gamma_1)$ et :

$$\forall \theta_\beta \in C_0^{2, b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) :$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} [B(u(\theta_\alpha)) - g] (0) \cdot \theta_\beta \in L^1(\Gamma_1) \text{ avec :}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} [B(u(\theta_\alpha)) - g]_{(0)} \cdot \theta_\beta = -\langle n, \theta_\beta \rangle \frac{\partial}{\partial n} [B(u(0)) - g] \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

Dérivation de la fonction J.

On effectue le changement de variable $(I+\theta_\alpha)$ dans l'expression de J, et on a :

$$J(\theta_\alpha) = \int_{D_1} C(u(\theta_\alpha)) \circ (I+\theta_\alpha) \cdot \text{Jac}(I+\theta_\alpha) \cdot dx \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{\partial J(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta = \int_{D_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} [C(u(\theta_\alpha)) \circ (I+\theta_\alpha)]_{(0)} \cdot \theta_\beta + C(u(0)) \cdot \text{div } \theta_\beta \right\} dx.$$

L'application du lemme I-5 relative à la dérivation de $C(u(\theta_\alpha)) \circ (I+\theta_\alpha)$ donne donc :

$$\frac{\partial J(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta = \int_{D_1} \left[C\left(\frac{\partial u(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha}\right)_{(0)} \cdot \theta_\beta + \langle \theta_\beta, \nabla C(u) \rangle + C(u(0)) \text{div } \theta_\beta \right] dx$$

or puisque $C(u(0)) \in W^{1,1}(D_1)$, on a :

$$\int_{D_1} [\langle \theta_\beta, \nabla C(u(0)) \rangle + C(u(0)) \cdot \text{div } \theta_\beta] dx = \int_{D_1} \text{div} [\theta_\beta C(u(0))] dx$$

et par suite :

$$\frac{\partial J(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta = \int_{D_1} \left\{ C\left(\frac{\partial u(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha}\right)_{(0)} \cdot \theta_\beta \right\} dx + \int_{\partial D_1} \langle n, \theta_\beta \rangle C(u(0)) d\sigma.$$

d'où le théorème.

III - 2 : PREMIER CAS MODELE : ETUDE DU PROBLEME DE CONTROLE ASSOCIE AU PROBLEME DE DIRICHLET.

III - 2 - 1 : Position du problème.

Soit $D_1 =]0,1[\times]0,1[$ et $\theta_\alpha \in C_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ assez petit.

On suppose que $\alpha(0, x_2) = 0$ pour $0 \leq x_2 \leq 1$.

Soit $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et $Z \in H^1(\mathbb{R}^2)$ deux fonctions données.

Remarque :

Pour tout champ de vecteurs θ_α , le domaine D_α est un ouvert connexe borné de \mathbb{R}^2 .

On considère le problème aux limites :

$$(III - 2) \quad \begin{cases} -\Delta u(D_\alpha) = f \text{ dans } D_\alpha \\ u|_{\partial D_\alpha} = 0. \end{cases}$$

La formulation variationnelle du problème (III - 2) se traduit par :

$$(III - 2') \quad \begin{cases} u(D_\alpha) \in H_0^1(D_\alpha) \text{ et} \\ \forall v \in H_0^1(D_\alpha), \int_{D_\alpha} \langle \nabla u(D_\alpha), \nabla v \rangle dx = \int_{D_\alpha} f.v \, dx \end{cases}$$

Le théorème de Lax-Milgram entraîne qu'il existe une solution unique $u(D_\alpha)$ du problème (III - 2').

On définit la fonction $J_1 : \mathcal{D}_{D_1}^{2,b} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$J_1(D_\alpha) = \int_{D_\alpha} |\nabla(u(D_\alpha) - z)|^2 dx.$$

L'application $u(D_\alpha) \rightarrow \int_{D_\alpha} |\nabla(u(D_\alpha) - Z)|^2 dx$ est bien définie sur $H_0^1(D_\alpha)$.

III - 2 - 2 : Existence d'un domaine optimal.

Théorème :

Soit \mathcal{D}_{ad} un sous-ensemble compact de $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$. Alors il existe un domaine optimal. i.e. - :

$$\exists D_0 \in \mathcal{D}_{ad} \text{ tel que : } \forall D \in \mathcal{D}_{ad} \quad J_1(D_0) \leq J_1(D).$$

Remarque :

Soit C_{ad} l'ensemble des fonctions $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) $\alpha \in \{\alpha / \alpha \in C^3(\mathbb{R}^2), D^3\alpha \text{ lipschitzienne}\}.$
- (ii) $0 \leq \alpha(x_1, x_2) \leq \lambda,$ λ constante positive fixée.
- (iii) $\alpha(0, x_2) = 0$ pour $0 \leq x_2 \leq 1.$
- (iv) $\int_0^1 \alpha(1, x_2) dx_2 = c_1$ $c_1 > 0$ (aire constante)
- (v) $|D^3\alpha(x)| \leq c_2$ c_2 constante positive

L'ensemble des champs de vecteurs θ_α tels que $\alpha \in C_{ad}$ est un compact de $C_0^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et :

$$\mathcal{D}_{ad} = \{(I + \theta_\alpha)(D_1) / \alpha \in C_{ad}\} \text{ est un compact de } \mathcal{D}_{D_1}^{2,b}.$$

Preuve du théorème :

Soit $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathcal{D}_{ad} qui tend vers D_0 , alors $\{1_{D_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1_{D_0} dans $L^p(\mathbb{R}^2)$ $1 \leq p < \infty.$

($1_{\{E\}}$ étant la fonction caractéristique de l'ensemble E).

On considère la fonction $\tilde{u}(D_n)$ définie par :

$$\tilde{u}(D_n)(x) = \begin{cases} u(D_n)(x) & \text{si } x \in D_n \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^2 - D_n \text{ où} \end{cases}$$

$u(D_n)$ est l'unique solution du problème (III - 2) relative au domaine $D_n.$

$$\tilde{u}(D_n) \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ et } \|\tilde{u}(D_n)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} = \|u(D_n)\|_{H^1(D_n)}.$$

L'équation d'état relative au domaine D_n est donnée par :

$$(III - 2)'' \left\{ \begin{array}{l} \int_{D_n} \langle \nabla u(D_n), \nabla v \rangle dx = \int_{D_n} f \cdot v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(D_n) \\ u(D_n) \in H_0^1(D_n) \end{array} \right.$$

en faisant $v = u(D_n)$ dans (III - 2)'', on a :

$$\int_{D_n} |\nabla u(D_n)|^2 dx = \int_{D_n} f \cdot u(D_n) dx \quad \text{d'où}$$

$$\|u(D_n)\|_{H_0^1(D_n)}^2 \leq \|f\|_{L^2(D_n)} \cdot \|\tilde{u}(D_n)\|_{L^2(D_n)} \quad \text{donc}$$

$$\|\tilde{u}(D_n)\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \cdot \|\tilde{u}(D_n)\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)} \quad \text{et par suite :}$$

$$\|\tilde{u}(D_n)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \quad C \text{ constante positive.}$$

On peut donc extraire de la suite $(\tilde{u}(D_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite notée encore $(\tilde{u}(D_n))$ convergente dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ faible.

$\tilde{u}(D_n) \rightarrow W$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ faible. Par ailleurs, on a :

$$\tilde{u}(D_n) \{1 - 1_{\{D_n\}}\} = 0 \quad \text{d'où } W \text{ est nul presque partout}$$

dans $\mathbb{R}^2 - D_0$ et donc $W|_{D_n} \in H_0^1(D_n)$ et : $(\tilde{W}|_{D_n}) = W$.

Passage à la limite :

Soit $\psi \in \mathcal{D}(D_0)$, pour $m > N$, $\text{Supp}(\psi) \subset D_m$ et :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \tilde{u}(D_m), \nabla \tilde{\psi} \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \tilde{\psi} \, dx$$

$\tilde{\psi}$ étant le prolongement par 0 de ψ en dehors de D_0 en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, il vient que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla W, \nabla \tilde{\psi} \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \tilde{\psi} \, dx \quad \text{et par densité de } \mathcal{D}(D_0) \text{ dans } H_0^1(D_0),$$

cette égalité est encore vraie pour tout $\varphi \in H^1_0(D_0)$. D'où $W = \hat{u}(D_0)$ et donc l'application $\mathcal{D}_{ad} \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ qui, à tout D_α fait correspondre $u(D_\alpha)$ est continue et par suite J_1 est continue sur \mathcal{D}_{ad} d'où le théorème.

Remarque :

On peut supposer que la partie Γ_3 de D_1 susceptible de varier peut-être représentée par une fonction réelle $x_1 = v(x_2)$, $x_2 \in [0, 1]$ lorsque v décrit l'ensemble

$$V = \{v \in U / 0 < \alpha \leq v \leq \beta, \left| \frac{dv}{dx_2} \right| \leq C_1, \int_0^1 v(x_2) dx_2 = C_2\}$$

où U est l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$; et on pourra ensuite ramener le problème d'optimisation par rapport au domaine à un problème d'optimisation par rapport à la fonction v .

III - 2 - 3 : Dérivation de l'état par rapport au domaine.

Soit $u(D_\alpha)$ l'unique solution du problème (III - 2), on définit :

$$\hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha) = u(D_\alpha) \circ (I + \theta_\alpha)$$

le changement de variable $(I + \theta_\alpha)$ dans l'équation (III - 2)' implique que :

$$\begin{aligned} & \int_{D_1} \langle {}^t[(I + \theta_\alpha)']^{-1} \nabla(\hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)), {}^t[(I + \theta_\alpha)']^{-1} \nabla \hat{\Psi} \rangle \cdot |\det(I + \theta_\alpha)'| dx \\ & = \int_{D_1} f \circ (I + \theta_\alpha) \cdot \hat{\Psi} \cdot |\det(I + \theta_\alpha)'| dx \end{aligned}$$

où $\hat{\Psi} = \Psi \circ (I + \theta_\alpha)$ décrit l'espace $H^1_0(D_1)$ lorsque Ψ décrit $H^1_0(D)$ on considère l'application F définie sur $C^{2,b}_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \times H^1_0(D_1)$ à valeurs dans $H^{-1}(D_1)$ telle que :

$$F(\theta_\alpha, v) = -\text{div}\{|\text{dét}(I+\theta_\alpha)'| |(I+\theta_\alpha)'|^{-1} {}^t|(I+\theta_\alpha)'|^{-1} \nabla v\} - \\ f \circ (I+\theta_\alpha) \cdot |\text{dét}(I+\theta_\alpha)'|.$$

L'équation d'état ci-dessus est équivalente à :

$$F(\theta_\alpha, \hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)) = 0.$$

Vérification des hypothèses du théorème des fonctions implicites :

On pose $F_1(\theta_\alpha) = -f \circ (I+\theta_\alpha) \cdot |\text{dét}(I+\theta_\alpha)'|$

$$F_2(\theta_\alpha) = -\text{div}\{|\text{dét}(I+\theta_\alpha)'| [(I+\theta_\alpha)']^{-1} {}^t[(I+\theta_\alpha)']^{-1} \nabla v\}$$

$f \in H^1(\mathbb{R}^2) \implies F_1$ est dérivable au point 0 de $C_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dans $H^{-1}(D_1)$ et on a : $\forall \theta_\beta \in C_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_1(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha}(0) \cdot \theta_\beta = -\text{div}\{f \cdot \theta_\beta\} = - \left[f \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial f}{\partial x_1} \right] \\ \frac{\partial F_2(\theta_\alpha, v)}{\partial \theta_\alpha}(0, u(D_1)) \cdot \theta_\beta = -\text{div}\left\{ \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \nabla(u(D_1)) - ([\theta_\beta]' + {}^t[\theta_\beta]') \nabla u(D_1) \right\} \\ \frac{\partial F_2(\theta_\alpha, v)}{\partial v}(0, u(D_1)) \cdot Y = -\Delta Y \quad \forall Y \in H_o^1(D_1) \end{array} \right.$$

d'où donc :

- (i) F est dérivable au point $(0, u(D_1))$.
- (ii) $\frac{\partial F}{\partial v} = -\Delta$ est un isomorphisme de $H_o^1(D_1)$ dans $H^{-1}(D_1)$.
- (iii) L'application $\hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)$ est continue au point 0.

L'application du théorème des fonctions implicites entraîne que :

$$-\Delta \left[\frac{\partial \hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta \right] = \left[f \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial f}{\partial x_1} \right] +$$

$$\operatorname{div} \left[\frac{\partial \beta}{\partial x_1} \nabla(u(D_1)) - ([\theta_\beta]') + {}^t[\theta_\beta]' \nabla(u(D_1)) \right] \text{ dans } H^{-1}(D_1).$$

D'autre part, $\hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)$ étant nulle sur ∂D_1 , on a :

$$\frac{\partial \hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta = 0 \text{ sur } \partial D_1 \text{ d'où :}$$

Lemme :

L'application $\hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)$ est dérivable au point 0 dans $H^1_0(D_1)$ et $\forall \theta_\beta \in C^{2,b}_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, en posant $v(\theta_\beta) = \frac{\partial \hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta$, $v(\theta_\beta)$ est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(\theta_\beta) \in H^1_0(D_1) \text{ et} \\ -\Delta [v(\theta_\beta)] = \left[f \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial f}{\partial x_1} \right] + \operatorname{div} \left[\frac{\partial \beta}{\partial x_1} \nabla(u(D_1)) - ([\theta_\beta]') + {}^t[\theta_\beta]' \nabla(u(D_1)) \right] \\ \text{dans } H^{-1}(D_1). \end{array} \right.$$

Remarque :

$\hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)$ étant dérivable au point 0, il en résulte donc que $u(D_\alpha)$ est dérivable au point 0 et :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \left[\frac{\partial u(D_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta \right] = 0 \text{ dans } D_1. \\ \frac{\partial u(D_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta = -\beta n_1 \cdot \frac{\partial u(D_1)}{\partial \eta} \text{ sur } \partial D_1 \text{ où} \end{array} \right.$$

n_1 est la première composante de la normale extérieure à D_1 .

III - 2 - 4 : Dérivation de la fonction coût.

Théorème :

On suppose que $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et $Z \in H^2(\mathbb{R}^2)$. Alors la fonction J_1 définie par (III) est dérivable au point 0 dans \mathbb{R} et :
 $\forall \theta_\beta \in C_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$:

$$\frac{\partial J_1(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha}(0) \cdot \theta_\beta = \int_{\partial D_1} \langle n, \theta_\beta \rangle \left[|\nabla(u(D_1) - Z)|^2 + 2 \frac{\partial u(D_1)}{\partial n} \cdot \frac{\partial P(D_1)}{\partial n} \right] d\sigma$$

où n est la normale extérieure à D_1 et où l'état adjoint $P(D_1)$ est défini par :

$$\begin{cases} P(D_1) \in H_o^1(D_1) \\ -\Delta[P(D_1)] = -\Delta(u(D_1) - Z) = f + \Delta Z \text{ dans } \mathcal{D}'(D_1). \end{cases}$$

Preuve du théorème :

Le résultat établi au paragraphe (I-7-1) avec $\Phi(D_\alpha) = |\nabla(u(D_\alpha) - Z)|^2$ montre que si l'application $\theta_\alpha \rightarrow \hat{\Phi}_{D_1}(\theta_\alpha) = |\nabla(u(D_\alpha) - Z)|^2 \circ (I + \theta_\alpha)$ est dérivable de $C_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dans $L^1(D_1)$ au point 0, alors l'application J_1 est dérivable de $\mathcal{D}_{D_1}^{2,b}$ dans \mathbb{R} au point D_1 et $\forall \theta_\beta \in C_o^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$:

$$\frac{\partial J_1(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha}(0) \cdot \theta_\beta = \int_{D_1} \{ |\nabla(u(D_1) - Z)|^2 \operatorname{div} \theta_\beta + \frac{\partial \hat{\Phi}_{D_1}(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha}(0) \cdot \theta_\beta \} dx$$

or la formule de changement de variable jointe à la définition de $\hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)$ montre que $\hat{\Phi}_{D_1}(\theta_\alpha) = |{}^t[(I + \theta_\alpha)]^{-1} \nabla(\hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha) - Z \circ (I + \theta_\alpha))|^2$.

Les résultats de dérivation de $\hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)$ et les lemmes

de dérivation des fonctions ${}^t[(I+\theta_\alpha)']^{-1}$ et $Z \circ (I+\theta_\alpha)$ montrent que l'hypothèse ci-dessus est vérifiée et que : $\forall \theta_\beta \in C_0^{2,b}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$:

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{D_1}(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta = 2 \langle \nabla(u(D_1) - Z), \{-{}^t[\theta_\beta]'\nabla(u(D_1) - Z) + \nabla(\frac{\partial \hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta - \langle \nabla Z, \theta_\beta \rangle)\} \rangle$$

où $\frac{\partial \hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta$ est donnée par le lemme III - 2 - 4. Ainsi on a :

$$\frac{\partial J_1(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta = \int_{D_1} \{ |\nabla(u(D_1) - Z)|^2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + 2 \langle \nabla(u(D_1) - Z), \{-{}^t[\theta_\beta]'\nabla(u(D_1) - Z) + \nabla(\frac{\partial \hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta - \langle \nabla Z, \theta_\beta \rangle)\} \} dx$$

on pose :

$$A = |\nabla(u(D_1) - Z)|^2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + 2 \langle \nabla(u(D_1) - Z), \{-{}^t[\theta_\beta]'\nabla(u(D_1) - Z) + \nabla(\frac{\partial \hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta - \langle \nabla Z, \theta_\beta \rangle)\} \rangle.$$

$$A \in L^1(D_1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial J_1(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} (0) \cdot \theta_\beta = \int_{D_1} A \, dx.$$

Dans une première étape, on transforme A et on déduira ensuite l'expression de J_1 en utilisant la formule de STOCKES

(D_1 étant régulier). Pour cela,

$$\text{on pose : } \frac{\partial \hat{u}_{D_1}(\theta_\alpha)}{\partial \theta_\alpha} = U(\theta_\beta) + \langle \nabla u(D_1), \theta_\beta \rangle.$$

$U(\theta_\beta)$ n'est autre que la dérivée locale de $u(D_\alpha)$ par rapport à D_α et vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\theta_\beta) \in H_{loc}^1(D_1) \cap L^2(D_1) \\ -\Delta[U(\theta_\beta)] = 0 \text{ dans } D_1 \\ U(\theta_\beta) = - \langle n, \theta_\beta \rangle \frac{\partial u(D_1)}{\partial n} \text{ sur } \partial D_1 \end{array} \right.$$

d'où

$$A = 2 \langle \nabla(u(D_1) - Z), \nabla U(\theta_\beta) \rangle + B \text{ avec}$$

$$B = \text{div}\{|\nabla(u(D_1) - Z)|^2 \cdot \theta_\beta\}.$$

La formule de Stokes implique que

$$\int_{D_1} B \, dx = \int_{\partial D_1} \langle n, \theta_\beta \rangle |\nabla(u(D_1) - Z)|^2 \, d\sigma.$$

D'autre part, en considérant l'état adjoint $p(D_1)$, il vient que :

$$\int_{D_1} \langle \nabla(u(D_1) - Z), \nabla U(\theta_\beta) \rangle dx = - \int_{D_1} \Delta p(D_1) \cdot U(\theta_\beta) dx$$

or on a dans $L_{loc}^1(D_1)$ l'égalité :

$$- \Delta p(D_1) U(\theta_\beta) = \text{div}\{p(D_1) \cdot \nabla U(\theta_\beta) - U(\theta_\beta) \cdot \nabla p(D_1)\} \text{ d'où :}$$

$$- 2 \int_{D_1} \Delta p(D_1) \cdot U(\theta_\beta) dx = 2 \int_{D_1} \text{div}\{p(D_1) \nabla U(\theta_\beta) - U(\theta_\beta) \cdot \nabla p(D_1)\} dx =$$

$$2 \int_{\partial D_1} \langle n, p(D_1) \nabla U(\theta_\beta) - U(\theta_\beta) \nabla p(D_1) \rangle d\sigma =$$

$$- 2 \int_{\partial D_1} \langle n, U(\theta_\beta) \nabla p(D_1) \rangle d\sigma = 2 \int_{\partial D_1} \langle n, \theta_\beta \rangle \frac{\partial u(D_1)}{\partial n} \cdot \frac{\partial p(D_1)}{\partial n} d\sigma$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

III - 3 : DEUXIEME CAS MODELE : APPLICATION A UNE INTEGRALE SUPERFICIELLE.

Nous allons dans ce paragraphe étudier une application du problème de contrôle par le domaine à une intégrale superficielle, dans le cas simple où les domaines considérés sont les disques homothétiques au disque unité.

III - 3 - 1 : Position du problème.

Soit D_e le disque de centre l'origine et de rayon $e > 0$, on considère le problème homogène de Dirichlet dans l'ouvert D_e :

$$(III - 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \Delta u(D_e) = f \text{ dans } D_e \\ u|_{C_e} = 0 \text{ où } C_e = \partial D_e. \end{array} \right.$$

Soit J_2 la fonction à valeurs réelles définie par :

$$J_2(D_e) = \int_{C_e} \left| \frac{\partial u(D_e)}{\partial n} - z \right|^2 d\sigma \quad .$$

La fonctionnelle J_2 est d'ordre $\frac{3}{2}$, en ce sens que l'application

$$u \rightarrow \int_{\partial D_e} \left| \frac{\partial u(D_e)}{\partial n} - z \right|^2 d\sigma \text{ est définie sur } H^{\frac{3}{2} + \epsilon} \quad (\forall \epsilon > 0).$$

III - 3 - 2 : Existence d'un domaine optimal.

On suppose que $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et $Z \in H^1(\mathbb{R}^2)$, la solution $u(D_e)$ du problème (III - 3) est régulière au sens : $u(D_e) \in H^2(D_e)$.

Théorème :

Soit e_0 et e_1 deux nombres réels strictement positifs.

Il existe $e \in [e_0, e_1]$ tel que :

$$\forall e' \in [e_0, e_1] \quad J_2(D_{e'}) \leq J_2(D_e).$$

Preuve du théorème :

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs qui tend vers e . $(D_{e_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers (D_e) dans $\mathcal{D}_1^{2,b}$.

- continuité du transporté de l'état sur le domaine fixe D_1 .

Soit $u(D_{e_n})$ l'unique solution du problème (III - 3) relative au domaine D_{e_n} . On a $u(D_{e_n}) \circ (I + \theta_{e_n}) \in H^1_0(D_1)$ où θ_{e_n} est défini par : $\theta_{e_n}(x) = (e_n - 1)(x) \quad \forall x \in D_1$ et :

$$\int_{D_{e_n}} \langle \nabla u(D_{e_n}), \nabla \psi \rangle dx = \int_{D_{e_n}} f \cdot \psi dx \quad \forall \psi \in H^1_0(D_{e_n}).$$

On fait le changement de variable $(I + \theta_{e_n})$, il vient alors que :

$$\int_{D_1} \langle \nabla (u(D_{e_n}) \circ (I + \theta_{e_n})), \nabla \hat{\psi} \rangle dx = \int_{D_1} e_n^2 \cdot f \circ (I + \theta_{e_n}) \cdot \psi dx$$

avec $\hat{\psi} = \psi \circ (I + \theta_{e_n})$ décrit $H^1_0(D_1)$ lorsque ψ décrit $H^1_0(D_{e_n})$. Or on a $e_n^2 \rightarrow e^2$ dans \mathbb{R} et

$$f \circ (I + \theta_{e_n}) \rightarrow f \circ (I + \theta_e) \text{ dans } L^2(D_1).$$

D'autre part, puisque la solution d'une équation elliptique est continue par rapport à ses coefficients et au second membre, il en résulte donc que $u(D_{e_n}) \circ (I + \theta_{e_n}) \rightarrow u(D_e) \circ (I + \theta_e)$ dans $H^2(D_1)$ faible.

- continuité de J_2 .

On note $n(D_{e_n})$ la normale extérieure à D_{e_n} , alors

$$J_2(D_{e_n}) = \int_{\partial D_{e_n}} |\langle n(D_{e_n}), \nabla(u(D_{e_n})) \rangle - Z|^2 d\sigma =$$

$$\int_{\partial D_1} |\langle n(D_1), \nabla(u(D_{e_n}) \circ (I+\theta_{e_n})) - Z \circ (I+\theta_{e_n}) \rangle|^2 \cdot e_n d\sigma.$$

Or, on a :

$$\nabla(u(D_{e_n}) \circ (I+\theta_{e_n})) \rightarrow \nabla(u(D_e) \circ (I+\theta_e)) \text{ dans } L^2(D_1) \text{ faible.}$$

$$Z \circ (I+\theta_{e_n}) \longrightarrow Z \circ (I+\theta_e) \text{ dans } L^2(D_1) \text{ fort, d'où :}$$

$J_2(D_{e_n}) \rightarrow J_2(D_e)$ dans \mathbb{R} et par suite, J_2 est continue sur $[e_0, e_1]$ ce qui établit le théorème.

III - 3 - 3 : Dérivation de la fonction coût.

On suppose pour avoir des résultats de dérivation que $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et $Z \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

Lemme :

L'application $\theta_e \rightarrow \hat{u}_{D_1}(\theta_e) = u(D_e) \circ (I+\theta_e)$ est dérivable au point 0 dans $H^2(D_1) \cap H^1_0(D_1)$ et $\forall e' \in \mathbb{R}^+$

$\frac{\partial \hat{u}_{D_1}(\theta_e)}{\partial \theta_e}(0) \cdot \theta_{e'}$, vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \Delta \left[\frac{\hat{u}_{D_1}(\theta_e)}{\partial \theta_e}(0) \cdot \theta_{e'} \right] = (e'-1) \left[2f(x) + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] \\ \frac{\partial \hat{u}_{D_1}(\theta_{e'})}{\partial \theta_e}(0) \cdot \theta_{e'} \in H^1_0(D_1). \end{array} \right.$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme III - 2 - 3.

Théorème :

La fonction J_2 est dérivable au point 0 dans \mathbb{R} et
 $\forall e' \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\partial J_2(\theta_e)}{\partial \theta_e}(0) \cdot \theta_{e'} = \int_{\partial D_1} (e'-1) 2p_1(D_1) \frac{\partial p_1(D_1)}{\partial n} + (p_1(D_1))^2 - 2 \frac{\partial p_1(D_1)}{\partial n} \cdot \frac{\partial u(D_1)}{\partial n} \Big|_{dc}$$

où l'état adjoint $p_1(D_1)$ est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(D_1) \in H^1(D_1) \\ -\Delta p_1(D_1) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(D_1) \\ p_1(D_1) = \frac{\partial u(D_1)}{\partial n} - z \text{ sur } \partial D_1. \end{array} \right.$$

CHAPITRE IV : PROBLEMES DE CONTROLE
PAR LE DOMAINE EN ELASTICITE LINEAIRE

IV - 1 : RAPPELS DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS.

Nous n'envisageons pas de refaire toute la théorie des milieux continus. pour un tel exposé, nous renvoyons aux ouvrages de P. GERMAIN [], G. MONDEL [] et W. NOLL [].

Néanmoins, nous tenons à rappeler les principes et les résultats essentiels dont nous aurons besoin pour la suite, et fixer les notations qui seront utilisées. Les rappels porteront sur le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations et les lois de comportement.

IV - 1 - 1 : Tenseur des contraintes.

Soit un milieu continu qui occupe une région ouverte Ω de \mathbb{R}^3 rapporté à un système d'axes orthonormés $Ox_1x_2x_3$. Ce milieu est en équilibre sous l'effet d'efforts extérieurs, constitués en général par une densité de forces volumiques dans Ω et une densité de forces surfaciques sur une partie de la frontière de Ω . Ces efforts engendrent au sein du milieu continu un champ de contraintes qui peuvent être décrites de la façon suivante : Soit un point M de Ω et V une variété de dimension 2 continûment différentiable passant par M et partageant le milieu continu en deux régions Ω_1 et Ω_2 . Soit \vec{n} la normale unitaire à V en M dirigée vers Ω_2 . On établit alors que l'action de Ω_2 sur Ω_1 se traduit par une densité de forces \vec{F} sur V dépendant du point M et du vecteur normal \vec{n} par la formule :

$$(1) \quad F_i = \sigma_{ij} n_j \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3$$

où les coefficients σ_{ij} dépendent du point M, n_j étant les composantes du vecteur \vec{n} .

Remarque :

On a utilisé dans l'équation (1) (on le fera dans la suite de cet exposé) la convention de sommation sur l'indice répété.

Les quantités σ_{ij} sont les composantes d'un tenseur du second ordre noté $\vec{\sigma}$ et appelé tenseur des contraintes.

IV - 1 - 2 : Lois de conservation de la quantité de mouvement.

Cette loi de conservation, connue aussi sous le nom de principe fondamental de la dynamique s'énonce de la façon suivante :

Il existe un repère et une chronologie t dits galiléens tels que pour tout système matériel et à chaque instant, le torseur des forces extérieures appliquées au système est égal à la dérivée par rapport au temps du torseur des quantités de mouvement.

Reprenons le milieu Ω introduit précédemment, le système d'axes $OX_1X_2X_3$ étant supposé galiléen, en écrivant l'égalité des 2 torseurs par leurs éléments de réduction en 0, on a :

$$\int_{\Omega} f_i dx + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j d\sigma = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \cdot v_i \cdot dx \quad \forall \Omega$$

en transformant l'intégrale de surface en intégrale de volume et en utilisant la conservation de la masse, on a :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \gamma_i \quad i = 1,2,3.$$

γ_i étant les composantes du vecteur accélération, ρ la densité de masse. Dans toute la suite, on n'envisage que le cas sta-

tique (t n'intervient pas), il vient alors que :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega \text{ ou}$$

$$- \operatorname{div} \bar{\sigma} = f \text{ dans } \Omega.$$

Cette équation est appelée équation d'équilibre.

Remarque :

Le tenseur des contraintes est symétrique ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).

IV - 1 - 3 : Tenseur des déformations.

(i) Description cinématique.

Soit un milieu continu en mouvement qui occupe un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 rapporté à sa base orthonormée directe $OX_1X_2X_3$.

Soit (a_α) ($\alpha = 1, 2, 3$) les composantes de la particule matérielle à l'instant initial se trouvant au point de coordonnées (x_i) ($i = 1, 2, 3$) à l'instant t .



Les composantes (a_α) sont appelées coordonnées de Lagrange de la particule.

Les composantes (x_i) sont les coordonnées eulériennes à l'instant t .

(ii) Gradient de la déformation.

On suppose qu'il existe une correspondance biunivoque entre les (a_α) et les (x_i) d'une même particule.

$$a_\alpha = g_\alpha(x, t) \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

$$x_i = f_i(a, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad a = (a_1, a_2, a_3).$$

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha} da_\alpha \quad \text{ou} \quad \vec{dM} = \bar{F} \cdot dM_0 \quad \text{où}$$

\bar{F} est le tenseur de composantes $F_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha}$.

\bar{F} est le tenseur de composantes $F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha}$.

Le tenseur \bar{F} est appelé gradient de la déformation.

Soit \bar{C} le tenseur défini par : $\bar{C} = {}^t\bar{F} \cdot \bar{F}$ et

$$\bar{X} = \frac{1}{2} (\bar{C} - \bar{I}) \quad \text{où} \quad \bar{I} \text{ est le tenseur unité.}$$

\bar{X} est appelé tenseur des déformations.

Si $x_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur \bar{X} , on a :

$$x_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right] \quad \text{où}$$

(u_α) sont les composantes du vecteur déplacement \vec{u} ($x_i = a_i + u_i(a)$).

On introduit :

$$\epsilon_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right].$$

$\epsilon_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur $\bar{\epsilon}$ appelé tenseur des déformations linéarisé.

IV - 1 - 4 : Lois de comportement.

Les lois de comportement n'ont pas de caractère universel, elles caractérisent le comportement de chaque type de milieu.

D'une façon générale, ce sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations.

IV - 2 : PROBLEMES CLASSIQUES EN ELASTICITE LINEAIRE.

Dans la théorie linéaire qui nous occupe, la loi de comportement exprime une relation entre le tenseur des contraintes σ_{ij} et le tenseur des déformations linéarisé $\epsilon_{ij}(u)$ soit :

$$(2) \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl} \epsilon_{kl}(u), \text{ où}$$

les a_{ijkl} sont les coefficients d'élasticité indépendants du tenseur des déformations. Ces coefficients ont les propriétés de symétrie

$$a_{ijkl} = a_{jilk} = a_{klij} \text{ et d'ellipticité :}$$

$$\begin{cases} a_{ijkl} \epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{ij} \geq \alpha_1 \epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{ij} \\ \forall \epsilon_{ij} \end{cases} \quad \alpha_1 \text{ constante positive.}$$

Cette loi correspond à un matériau anisotrope. La relation (2) peut encore s'écrire :

$$\epsilon_{ij}(u) = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{où}$$

$$A_{ijkl} = A_{jilk} = A_{klij} \text{ et}$$

$$\begin{cases} A_{ijkl} \sigma_{ij} \cdot \sigma_{kl} \geq \alpha_2 \sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij} \\ \forall \sigma_{ij} \end{cases} \quad \alpha_2 \text{ constante positive.}$$

en posant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, on a donc

$$\begin{cases} a_{ijkl} \epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl} \geq \alpha \epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{ij} \\ A_{ijkl} \sigma_{ij} \cdot \sigma_{kl} \geq \alpha \sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij} \end{cases} \quad \alpha > 0.$$

Cas isotrope :

Dans le cas où le milieu est isotrope, les coefficients a_{ijkl} peuvent s'écrire :

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad \text{où}$$

les scalaires λ et μ sont appelés : coefficients de Lamé.

IV - 2 - 1 : Equations de l'élasticité linéaire statique.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 occupé par le corps élastique dans son état non déformé. On suppose que Ω est borné et de frontière assez régulière. Soit $x = \{x_i\}$ un point de Ω et $\vec{u} = \{u_i\}$ le vecteur déplacement de la particule x .

Les équations de l'élasticité linéaire en cas statique sont :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \vec{\sigma} = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} = a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}). \end{cases}$$

- Conditions aux limites.

On suppose que les déplacements sont donnés sur une partie Γ_U de Γ et que les forces surfaciques sont données sur le reste Γ_F de la frontière.

$$\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_F \quad \text{et} \quad \Gamma_U \cap \Gamma_F = \emptyset$$

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{U} & \text{sur } \Gamma_U \\ \vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{F} & \text{sur } \Gamma_F. \end{cases}$$

\vec{n} étant la normale extérieure à Γ_F .

En résumé : le problème de l'élasticité linéaire statique se traduit par la recherche de \vec{u} et de $\vec{\sigma}$ tels que :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \vec{\sigma} = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} = a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) & i, j = 1, 2, 3 \\ \vec{u} = \vec{U} & \text{sur } \Gamma_U \\ \vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{F} & \text{sur } \Gamma_F \end{cases}$$

IV - 2 - 2 : Elasticité plane statique.

Par rapport au repère orthonormé $Ox_1x_2x_3$, on considère le cylindre

$$(B) = \{(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3 / (X_1, X_2) \in \bar{D} \text{ et } |X_3| \leq h\}.$$

\bar{D} étant le disque unité de \mathbb{R}^2 , $2h$ est la hauteur du cylindre.

On suppose que le cylindre est constitué d'un matériau élastique, linéaire, homogène et isotrope de constantes de Lamé λ et μ .

S_1 et S_2 désignent deux parties complémentaires de la surface latérale de (B) telles que $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ soit formé au plus de segments de droites de longueur $2h$ et parallèles à Ox_3 (Fig. IV - 1). On suppose données des forces volumiques de densité \vec{f} dans (B), des déplacements \vec{u} sur (S_1) et des efforts \vec{F} sur (S_2) où \vec{f} , \vec{u} et \vec{F} sont indépendants de x_3 et parallèles au plan Ox_1x_2 .

(i) $(\vec{u}, \vec{\sigma}, \vec{\epsilon})$ est un état de déformation plane si :

$$\begin{cases} u_1 = u_1(X_1, X_2) \\ u_2 = u_2(X_1, X_2) \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Compte tenu des relations contraintes-déformations, on a :

$$\begin{cases} \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0 \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = \lambda \epsilon_{ii}. \end{cases}$$

Le problème dans \mathbb{R}^3 se ramène donc à un problème plan où les contraintes et les déformations ne dépendent pas de x_3 .

(ii) $(\vec{u}, \vec{\sigma}, \vec{\epsilon})$ est un état de contraintes planes si :

$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ dans (B), on peut remarquer dans ce cas que $\vec{\sigma}(\vec{n}) \wedge \vec{e}_3 = \vec{0}$ pour tout vecteur \vec{n} parallèle à Ox_3 , \vec{e}_3 étant

le vecteur unitaire porté par l'axe OX_3 .

On peut remarquer également que le champ des contraintes est caractérisé par la relation de compatibilité :

$$(3) \quad \sum_{i=1}^2 \Delta \sigma_{ii} = 0.$$

(iii) Fonction d'Airy.

On suppose que la densité de forces volumiques appliquées à D est nulle. Si σ_{ij} ($i, j = 1, 2$) est de classe C^n sur D en vertu de l'équation d'équilibre $\text{div } \vec{\sigma} = \vec{0}$, il existe une fonction Ψ de classe C^{n+2} sur D vérifiant :

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \end{array} \right.$$

et l'équation de compatibilité (3) entraîne que $\Delta^2 \Psi = 0$.

Une fonction d'AIRY est une fonction définie sur D , biharmonique dont les contraintes associées sont définies par les équations (3)'.

Remarque :

Deux fonctions d'AIRY engendrant les mêmes contraintes sont définies à une fonction linéaire près.

Le problème bidimensionnel où seules les forces à la frontière sont imposées pour un ouvert D simplement connexe consiste donc à la recherche d'une fonction Ψ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 \psi = 0 \text{ dans } D \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} n_1 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} n_2 = F_1 \\ - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} n_2 = F_2 \end{array} \right\} \text{ sur } D$$

avec les conditions de compatibilité qu'on précisera.

Interprétation.

Soit Γ un arc de courbe injectif de représentation paramétrique :

$\Gamma = \{x(s) / 0 \leq s \leq \ell\}$ supposé différentiable par morceaux.

On peut démontrer qu'il existe ψ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \psi(s) \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \psi}{\partial n}(s) = -L(s) \text{ où} \end{array} \right.$$

M est le moment des forces extérieures appliquées à Γ et

$L(s)$ est la résultante des efforts tangentiels appliqués à l'arc $[0, s]$.

IV - 2 - 3 : Formulation variationnelle.

On considère un ensemble Ω ouvert borné de \mathbb{R}^3 , de frontière assez régulière. Soit Γ_0 une partie ouverte de Γ de mesure strictement positive et $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$.

Soit $\vec{f} = (f_i)_{i=1,2,3} \in [L^2(\Omega)]^3$ et $\vec{F} = (F_i)_{i=1,2,3} \in [L^2(\Gamma_1)]^3$.

Le problème de l'élasticité linéaire statique équivaut formellement à la recherche d'un champ \vec{u} vérifiant :

$$\begin{array}{l}
 \text{(i)} \\
 \text{(ii)} \\
 \text{(iii)}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 - \frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkl} \epsilon_{kl}(u)] = f_i \quad \text{dans } \Omega \quad i = 1, 2, 3 \\
 \vec{u} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_0 \\
 \vec{\sigma}(\vec{n}) = F_i \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad i = 1, 2, 3.
 \end{array} \right.$$

La condition $\vec{u} = \vec{0}$ sur Γ_0 signifie qu'il y a encastrement sur la partie Γ_0 .

Soit $[H^1(\Omega)]^3$ l'espace des champs $\vec{v} = (v_i)_{i=1,2,3}$ tels que $v_i \in H^1(\Omega)$. $[H^1(\Omega)]^3$ muni de la norme produit est un espace de Hilbert. On définit :

$$V(\Omega) = \{ \vec{v} = (v_i) \in [H^1(\Omega)]^3 / \vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_0 \}.$$

Lemme 1 :

$V(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme induite par celle de $[H^1(\Omega)]^3$.

Lemme 2 : Inégalité de KORN.

Il existe une constante $C(\Omega)$ positive et dépendant de Ω telle que :

$$\int_{\Omega} \epsilon_{ij}(\vec{v}) \cdot \epsilon_{ij}(\vec{v}) dx + \int_{\Omega} v_i \cdot v_i dx \geq C(\Omega) \|\vec{v}\|_{V(\Omega)}^2$$

$$\forall v \in [H^1(\Omega)]^3.$$

Une conséquence immédiate de ce lemme est que l'application

$$p : V(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ définie par :}$$

$$p(\vec{v}) = \left[\int_{\Omega} \epsilon_{ij}(\vec{v}) \cdot \epsilon_{ij}(\vec{v}) dx \right]^{1/2} \text{ est une norme sur } V(\Omega)$$

équivalente à $\|\vec{v}\|_{V(\Omega)}$.

Soit $\vec{v} \in V(\Omega)$, on multiplie l'équation (i) par \vec{v} et on intègre sur Ω , on a alors :

$$\int_{\Omega} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) \right] v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx \quad \text{et en appliquant la formule}$$

de Green, on a :

$$\int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) \cdot \epsilon_{ij}(\vec{v}) dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_1} F_i v_i d\sigma.$$

On pose :

$$\begin{cases} a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) \cdot \epsilon_{ij}(\vec{v}) dx \\ L(\vec{v}) = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_1} F_i v_i d\sigma. \end{cases}$$

a est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $V(\Omega)$ pour la norme p , L est une forme linéaire continue sur $V(\Omega)$. Le problème (i), (ii), (iii), équivaut à la recherche de $\vec{u} \in V(\Omega)$ tel que :

$$\begin{aligned} &\vec{u} \in V(\Omega) \quad \text{et} \\ &a(\vec{u}, \vec{v}) = L(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V(\Omega). \end{aligned}$$

Interprétation physique :

Il s'agit donc de minimiser parmi tous les champs cinématiquement admissibles (\vec{v} est cinématiquement admissible si $\vec{v} = \vec{0}$ sur Γ_0) l'énergie potentielle de v définie par :

$$E(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - L(\vec{v}).$$

Le théorème de Lax-Milgram entraîne que le problème (i), (ii), (iii) admet une solution unique.

IV - 2 - 4 : Cas où il n'y a pas de déplacements fixés sur le bord.

On examine dans ce paragraphe le cas où seules les forces sur la frontière sont imposées ($\Gamma_0 = \emptyset$) et $V(\Omega) = [H^1(\Omega)]^3$. La difficulté réside dans le fait que $[a(v,v)]^{1/2}$ n'est plus une norme sur $[H^1(\Omega)]^3$ mais une semi-norme.

Soit $R = \{ \vec{v}/\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{x}, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \}$.

Alors $a(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{v} \in R$.

R est l'ensemble des déplacements rigides.

On définit l'espace $\dot{V} = V(\Omega)/R$ et pour \dot{u} et $\dot{v} \in \dot{V}$, on définit la forme bilinéaire $\dot{a}(\dot{u}, \dot{v}) = a(u, v)$ où $u \in \dot{u}$ et $v \in \dot{v}$.

La forme bilinéaire a est coercive ; on définit la forme linéaire \dot{L} par :

$$\dot{L}(\dot{v}) = \int_{\Gamma} F_i v_i d\sigma \quad \text{où } v \in \dot{V}.$$

Le problème n'est possible que si la forme linéaire \dot{L} est nulle sur R c'est-à-dire :

$$\forall \rho \in R \quad \int_{\Gamma} F_i \cdot \rho_i d\sigma = 0$$

D'un point de vue mécanique, cette condition exprime que le torseur des forces extérieures $\{F_i\}$ est équivalent à 0. Sous cette condition, le problème :

$$\begin{cases} \dot{u} \in \dot{V} \\ \dot{a}(\dot{u}, \dot{v}) = \dot{L}(\dot{v}) \quad \forall \dot{v} \in \dot{V} \end{cases} \text{ admet une solution unique.}$$

On dit que le problème (i), (ii), (iii) admet une solution \vec{u} définie à un déplacement rigide près.

IV - 3 : PROBLEMES DE CONTROLE PAR LE DOMAINE ASSOCIES AU PROBLEME DE L'ELASTICITE LINEAIRE STATIQUE.

IV - 3 - 1 : Introduction.

On considère dans cette partie un problème de contrôle par le domaine où l'état $\vec{u}(D)$ du système est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} - \operatorname{div} \vec{\sigma}(\vec{u}(D)) = \vec{f} \quad \text{dans } D \\ \vec{u} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \vec{\sigma}(\vec{u}(D)) \cdot \vec{n} = \vec{F} \quad \text{sur } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Γ_0 et Γ_1 étant 2 parties disjointes de la frontière de D .
On étudiera aussi le comportement des fonctions coût J_1, J_2 et J_3 définies par :

$$J_1(D) = \int_{\Gamma_1} ||\vec{u}(D) - z||^2 d\sigma.$$

$$J_2(D) = \int_D ||\vec{u}(D) - z||^2 dx, \quad \text{et}$$

$$J_3(D) = \int_{\Gamma_0} ||\vec{\sigma}(\vec{n}) - \vec{z}||^2 d\sigma \quad \text{par rapport à } D.$$

On énonce un résultat d'existence qui se démontre par une méthode de transport sur le domaine fixe D_1 . On démontre ensuite que les fonctionnelles J_1, J_2 et J_3 sont dérivables dans \mathbb{R} au point 0, on calcule leurs dérivées en les mettant sous la forme :

$$\frac{\partial J}{\partial D}(0) \cdot \tau = \int_{\Gamma_1} \langle n, \tau \rangle F(\vec{u}(D_1), \vec{p}(D_1)) d\sigma \quad \text{où :}$$

$\langle n, \tau \rangle = \sum_{i=1}^3 n_i \tau_i$ est la composante normale de τ et où $\vec{p}(D_1)$ est un état adjoint qui ne dépend pas de τ .

Cette expression de la dérivée de J permet de déterminer explicitement les directions de descente.

IV - 3 - 2 : Position du problème.

Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^3 en couronne et régulier vérifiant : $D = D_2 - \bar{D}_1$ où D_1 et D_2 sont deux ouverts bornés, D_1 inclus strictement dans D_2 au sens $\bar{D}_1 \subset D_2$ et localement d'un seul côté de leur frontière respective S et Σ (Fig. IV - 2).

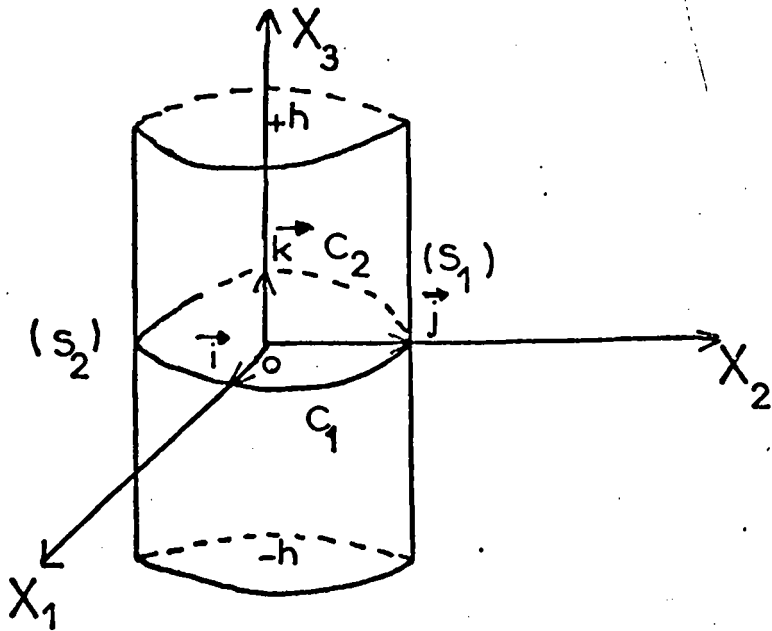


Fig. IV - 1

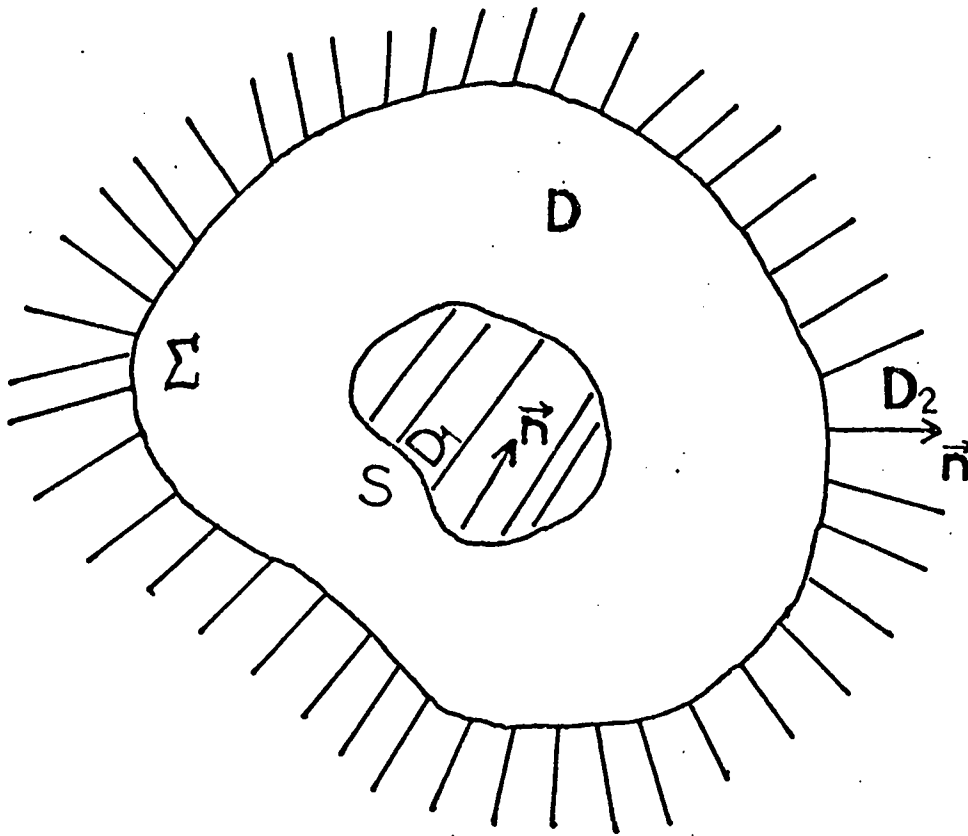


Fig. IV - 2

On suppose que S et Σ sont de classe C^2 .

Soit $\theta \in C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ un champ de vecteurs assez petit de telle sorte que $(I+\theta)$ soit un difféomorphisme de \mathbb{R}^3 .

On pose $D_\theta = (I+\theta)(D)$.

Pour θ assez petit, D_θ est assez voisin de D , par exemple, pour la métrique de Hausdorff.

On pose $D_1^\theta = (I+\theta)(D_1)$ et $D_2^\theta = (I+\theta)(D_2)$,

$S_\theta = \partial((I+\theta)(D_1))$ et $\Sigma_\theta = \partial((I+\theta)(D_2))$.

$D = D_2^\theta - \overline{D_1^\theta}$ est encore un ouvert borné de \mathbb{R}^3 régulier et en couronne.

Soient \vec{f} et \vec{g} deux fonctions données dans \mathbb{R}^3 telles que :

$$\vec{f} \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3 \text{ et } \vec{g} \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3.$$

$$\vec{f} = (f_i)_{i=1,2,3}, \quad \vec{g} = (g_i)_{i=1,2,3}.$$

Soit $\vec{u}(\theta)$ la solution du problème :

$$(IV - 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}(\theta) \in [H^2(D_\theta)]^3 \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(\theta))] = f_i \text{ dans } D, \quad i = 1, 2, 3 \\ \vec{u}(\theta) = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_\theta \\ a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(\theta)) n_j = g_i \text{ sur } S_\theta, \quad i = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

Remarque :

La solution du problème (i), (ii), (iii) est régulière au sens $\vec{u} \in [H^2(\Omega)]^3$ lorsque Ω est en couronne et régulier.

On note $\vec{u} = \vec{u}(0)$ la solution du problème (IV - 3) relative au domaine D .

Soit $\vec{z} \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ et $J(\theta)$ l'application définie sur $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et à valeurs réelles telle que :

$$J(\theta) = \int_{S_\theta} ||\vec{u}(\theta) - \vec{z}||^2 d\sigma.$$

Remarque :

La fonctionnelle J est d'ordre 1, on pourrait étudier des fonctionnelles d'ordre plus élevé en faisant intervenir des hypothèses de régularité plus fortes, ou encore étudier des fonctionnelles définies par une intégrale sur un domaine fixe.

IV - 3 - 3 : Existence d'un domaine optimal.

Théorème :

On suppose que $\vec{f} \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$, $\vec{g} \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$ et $\vec{z} \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$.

Soit C_{ad} un sous-ensemble compact de $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, il existe un domaine optimal. i.e. :

$$\exists D_1 \text{ tel que : } D_1 = (I+\theta)(D), \quad \theta \in C_{ad} \text{ et}$$

$$J(D_1) \leq J(D) \quad \forall D \in \mathcal{D}_{ad} \text{ où :}$$

$$\mathcal{D}_{ad} = \{D' = (I+\theta')(D) \mid \theta' \in C_{ad}\}.$$

Preuve du théorème :

Soit $\{D_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers D_0 pour la distance d_2 définie au chapitre II, on peut en extraire une sous-suite notée encore $\{D_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$D_m = T_m(D) \text{ et } D_0 = T_0(D) \text{ avec } T_m \text{ et } T_0 \text{ définies par :}$$

$$T_m = (I + \theta_m)$$

$$T_0 = (I + \theta_0) \text{ où } \theta_m \text{ et } \theta_0 \text{ appartiennent à } C_{ad}.$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|T_m - T_0\|_2 + \|T_m^{-1} - T_0^{-1}\|_2 \leq C \text{ et} \\ \|T_m - T_0\| + \|T_m^{-1} - T_0^{-1}\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right.$$

- continuité du transporté de l'état sur le domaine fixe D.

La fonction $\vec{u}(D_m)$ est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}(D_m) \in V(D_m) \text{ et } \forall \vec{v} \in V(D_m) : \\ \int_{D_m} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u(D_m)) \cdot \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dx = \int_{D_m} f_i v_i dx + \int_{T_m(S)} g_i v_i d\sigma \end{array} \right.$$

où $D_m = T_m(D)$.

On fait le changement de variable T_m , il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D a_{ijkl} [\varepsilon_{kl}(\vec{u}(D_m)) \circ T_m] \cdot [\varepsilon_{ij}(\vec{v}) \circ T_m] \cdot |\det(T_m)'| dx = \\ \int_D (f_i \circ T_m) \cdot (v_i \circ T_m) \cdot |\det(T_m)'| dx + \int_S (g_i \circ T_m) \cdot (v_i \circ T_m) \cdot \left| \left[{}^t (T_m)' \right]^{-1} n \right|_{\mathbb{R}^3} \\ |\det(T_m)'| d\sigma. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, on a le résultat du transport des dérivées :

Si ϕ est une fonction définie sur $T^{2,b}$, alors $\forall T \in T^{2,b}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [\phi(T)] = \sum_{h=1}^3 M_{i,h}(T) \frac{\partial}{\partial x_h} [\phi(T) \circ T]. \text{ Avec :}$$

$M_{i,h}[T] = [{}^t [T']^{-1}]_{i,h}$. Il en résulte donc que :

$$\varepsilon_{kl}(\vec{u}(D_m) \circ T_m) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k(D_m)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l(D_m)}{\partial x_k} \right] \circ T_m =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k(D_m)}{\partial x_l} \circ T_m + \frac{\partial u_l(D_m)}{\partial x_k} \circ T_m \right] \text{ Or } \frac{\partial u_k(D_m)}{\partial x_l} \circ T_m = \sum_{h=1}^3 M_{l,h}(T_m) \cdot \frac{\partial}{\partial x_h} [u_k(D_m) \circ T_m]$$

avec : $M_{l,h}(T_m) = {}^t [(T_m)']^{-1}_{l,h}$ d'où

$$\varepsilon_{kl}(\vec{u}(D_m) \circ T_m) = \frac{1}{2} \left[\sum_{h=1}^3 M_{l,h}(T_m) \frac{\partial}{\partial x_h} (u_k(D_m) \circ T_m) + \sum_{h=1}^3 M_{k,h}(T_m) \cdot \frac{\partial}{\partial x_h} [u_l(D_m) \circ T_m] \right]$$

comme donc :

$$\begin{array}{ll} {}^t [(T_m)']^{-1} & \longrightarrow \quad {}^t [T_0']^{-1} \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^6) \\ |\det(T_m)'| & \longrightarrow \quad |\det(T_0)'| \quad \text{dans } L^2(D) \\ f_i \circ T_m & \longrightarrow \quad f_i \circ T_0 \quad \text{dans } L^2(D) \\ g_i \circ T_m & \longrightarrow \quad g_i \circ T_0 \quad \text{dans } L^2(S). \end{array}$$

et puisque la solution d'une équation elliptique est continue par rapport à ses coefficients et au second membre, il en résulte que :

$$\vec{u}(D_m) \circ T_m \rightarrow \vec{u}(D_0) \circ T_0 \text{ dans } V(D).$$

D étant de classe $C^{2,\infty}$ et puisque l'équation (IV - 3) est uniformément elliptique en m, on a :

$$\vec{u}(D_m) \circ T_m \longrightarrow \vec{u}(D_0) \circ T_0 \text{ dans } [H^2(D)]^3 \text{ faible.}$$

Continuité de J :

On note $\vec{n}(D)$ la normale extérieure à D.

$$J(D_m) = \int_{T_m(S)} ||\vec{u}(D_m) - z||^2 d\sigma.$$

on effectue le changement de variable T_m , d'où :

$$J(D_m) = \int_S ||u(D_m) \circ T_m - z \circ T_m||^2 \cdot ||{}^t[(T_m)']^{-1} n(D)||_{R^3} \cdot |dét(T_m)'| d\sigma.$$

Les résultats de convergence établis précédemment restent encore valables dans $L^\infty(S)$ d'où :

$$\vec{u}(D_m) \circ T_m \longrightarrow \vec{u}(D_0) \circ T_0 \text{ dans } [L^2(S)]^3 \text{ fort,}$$

$$Z \circ T_m \longrightarrow Z \circ T_0 \text{ dans } [L^2(S)]^3 \text{ fort,}$$

d'où $J(D_m) \longrightarrow J(D_0)$ dans \mathbb{R} . Ce qui établit le théorème.

Remarque :

Cette méthode sert également pour démontrer des résultats d'existence du domaine optimal dans le cas des fonctionnelles J_2 et J_3 .

IV - 3 - 4 : Quelques résultats sur le bord.

Dans le but d'obtenir des résultats de dérivation dans le cas général, on rappelle dans cette partie quelques formules concernant la dérivation du jacobien tangentiel d'un difféomorphisme $(I+\theta)$ restreint à un bord ∂D , ainsi que quelques définitions intervenant dans la suite de l'exposé. Nous renvoyons pour les démonstrations à J. SIMON []:

IV - 3 - 4 - 1 : Changement de variable dans une intégrale superficielle.

Soit D un ouvert borné de bord ∂D , de classe C^1 et de normale extérieure \vec{n} . Soit T un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^N . On définit le Jacobien tangentiel de T sur ∂D par :

$$\text{Jac}_{\partial D}(T) = ||^t [T']^{-1} \vec{n} || \cdot \text{Jac}(T) \quad \text{sur } \partial D$$

Résultat :

Soit \tilde{f} une fonction définie sur $\partial(T(D))$, si $f \in L^1(\partial(T(D)))$, $f \circ T \in L^1(\partial D)$ et on a :

$$\int_{\partial(T(D))} f \, d\sigma = \int_{\partial D} (f \circ T) \cdot \text{Jac}_{\partial D}(T) \cdot d\sigma.$$

IV - 3 - 4 - 2 : Définition de la divergence tangentielle.

Soit v un champ de vecteurs appartenant à $C^1(\partial D, \mathbb{R}^N)$, on définit sa divergence tangentielle par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}_{\partial D} v = \text{div } \tilde{v} - [\tilde{v}'] \cdot n \cdot n = \sum_j \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_j} - \sum_{k, \ell} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_\ell} n_k \cdot n_\ell \\ \text{où} \\ \tilde{v} \text{ est un prolongement de } v, \tilde{v} \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N). \end{array} \right.$$

Cette définition a bien un sens car le second membre ne dépend pas du prolongement v utilisé.

Remarque : $\operatorname{div}_{\partial D} v \in C^0(\partial D)$.

Lemme :

L'application $\theta \rightarrow \operatorname{Jac}_{\partial D}(I+\theta)$ définie sur $C^{2,b}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et à valeurs dans $C^{1,b}(\partial D)$ est dérivable en 0, et $\forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ sa dérivée dans la direction τ vaut :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\operatorname{Jac}_{\partial D}(I+\theta) \right]_{(0)} \cdot \tau = \operatorname{div}_{\partial D} \tau.$$

IV - 3 - 4 - 3 : Décomposition de la divergence tangentielle.

Soit V un champ de vecteurs sur ∂D , sa composante tangentielle est donnée par :

$$v_{\partial D} = v - n(n \cdot v).$$

Lemme :

Soit D un ouvert de classe C^2 et $v \in C^1(\partial D, \mathbb{R}^N)$. On a :

$$\operatorname{div}_{\partial D} v = \operatorname{div}_{\partial D} v_{\partial D} + H \langle n, v \rangle \quad \text{sur } \partial D$$

où H est la courbure moyenne de ∂D .

Soit g une fonction de $C^1(\partial D)$, on définit son gradient tangential par :

$$\begin{cases} \operatorname{grad}_{\partial D} g = \operatorname{grad} \tilde{g} - n \cdot \frac{\partial \tilde{g}}{\partial n} & \text{sur } \partial D \quad \text{où} \\ \tilde{g} \text{ est un prolongement de } g, \quad \tilde{g} \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Lemme :

Etant donnés $g \in C^1(\partial D)$ et $\tau \in C^1(\partial D, \mathbb{R}^N)$, on a :

$$\tau \cdot \operatorname{grad}_{\partial D} g + g \operatorname{div}_{\partial D} \tau = \operatorname{div}_{\partial D} (g \cdot \tau) \quad \text{sur } \partial D$$

et on a la propriété intégrale :

si $v \in C^1(\partial D, \mathbb{R}^N)$, on a :

$$\int_{\partial D} \operatorname{div}_{\partial D} v \, d\sigma = \int_{\partial D} H(n, V) \, d\sigma.$$

IV - 3 - 5 : Dérivation du problème de l'élasticité.

On considère le domaine D défini dans (IV - 3 - 1).

Soit $V(D) = \{ \vec{v} \in [H^2(D)]^3 / \vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \Sigma \}$

$V(D)$ est un sous-espace de $[H^2(D)]^3$.

Soit $V(D_\theta) = \{ \vec{v} \in [H^2(D_\theta)]^3 / \vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \Sigma_\theta \}$

et $\vec{u}(\theta)$ la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \vec{u}(\theta) \in V(D_\theta) \\ \text{(ii)} \quad - \operatorname{div} \vec{\sigma}(\vec{u}(\theta)) = \vec{f} \text{ dans } D_\theta \\ \text{(iii)} \quad \vec{\sigma}(\vec{u}(\theta)) \cdot \vec{n} = \vec{g} \text{ sur } S_\theta \end{array} \right.$$

$$\vec{u}(\theta) = \vec{0} \text{ sur } \Sigma_\theta \implies \vec{u}(\theta) \circ (I+\theta) = \vec{0} \text{ sur } \Sigma.$$

$$\text{D'autre part, } \vec{u}(\theta) \in [H^2(D_\theta)]^3 \implies \vec{u}(\theta) \circ (I+\theta) \in [H^2(D)]^3.$$

Il en résulte donc que lorsque $\vec{u}(\theta)$ décrit l'espace $V(D_\theta)$, $\vec{u}(\theta) \circ (I+\theta)$ décrit $V(D)$.

Théorème :

L'application $\theta \rightarrow \vec{u}(\theta) \circ (I+\theta)$ est dérivable au point 0 de $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dans $V(D)$.

Preuve du théorème :

On va démontrer ce théorème en utilisant le théorème des fonctions implicites.

$\vec{u}(\theta)$ étant l'unique solution du problème (i), (ii), (iii), en composant avec $(I+\theta)$, il vient donc que :

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}(\theta))] \circ (I+\theta) = f_i \circ (I+\theta) \text{ dans } D$$

d'où en utilisant la formule du transport des dérivées, on a :

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}(\theta))] \circ (I+\theta) =$$

$$-\sum_{h=1}^3 M_{j,h}(\theta) \frac{\partial}{\partial x_h} [a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}(\theta)) \circ (I+\theta)].$$

$$\text{D'autre part : } \epsilon_{kl}(\vec{u}(\theta)) \circ (I+\theta) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k(\theta)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l(\theta)}{\partial x_k} \right] \circ (I+\theta) =$$

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{p=1}^3 M_{l,p}(\theta) \frac{\partial (u_k(\theta) \circ (I+\theta))}{\partial x_p} + \sum_{p=1}^3 M_{k,p}(\theta) \frac{\partial (u_l(\theta) \circ (I+\theta))}{\partial x_p} \right]$$

où on désigne par $M_{i,j}(\theta)$ la matrice ${}^t[(I+\theta)']^{-1}$.

On pose $\hat{u}_D(\theta) = \vec{u}(\theta) \circ (I+\theta)$, l'équation (i) devient donc

$$-\frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 M_{j,h}(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial x_h} \left[a_{ijkl} \sum_{p=1}^3 (M_{l,p}(\theta) \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_p} + M_{k,p}(\theta) \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial x_p}) \right] =$$

$$f_i \circ (I+\theta) \quad i = 1, 2, 3.$$

On pose :

$$A_i(\theta, \vec{v}(\theta)) = -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 M_{j,h}(\theta) \frac{\partial}{\partial x_h} \left[a_{ijkl} \sum_{p=1}^3 (M_{l,p}(\theta) \frac{\partial v_k}{\partial x_p} + M_{k,p}(\theta) \frac{\partial v_l}{\partial x_p}) \right]$$

$$- f_i \circ (I+\theta).$$

$$\forall \theta \in C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \text{ et } \forall \vec{v} \in V(D).$$

De même, en composant l'équation (ii) avec $(I+\theta)$, il vient :

$$a_{ijkl} [\varepsilon_{kl}(\vec{u}(\theta)) \circ (I+\theta)] n_j \circ (I+\theta) = g_i \circ (I+\theta) \quad \text{sur } S \quad i = 1, 2, 3$$

$n_j \circ (I+\theta)$ sont les composantes de la normale extérieure à D . L'équation (ii) devient :

$$\frac{1}{2} a_{ijkl} \sum_{p=1}^3 \left[M_{\ell,p}(\theta) \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_p} + M_{k,p}(\theta) \frac{\partial \hat{u}_\ell}{\partial x_p} \right] n_j \circ (I+\theta) = g_i \circ (I+\theta) \quad \text{sur } S.$$

On pose :

$$B_i(\theta, v) = \frac{1}{2} a_{ijkl} \sum_{p=1}^3 \left[M_{\ell,p}(\theta) \frac{\partial v_k}{\partial x_p} + M_{k,p}(\theta) \frac{\partial v_\ell}{\partial x_p} \right] n_j - g_i \circ (I+\theta).$$

Il en résulte donc que $\hat{u}_D(\theta)$ vérifie les équations implicites :

$$\begin{cases} A(\theta, \hat{u}_D(\theta)) = \vec{0} & \text{dans } D \\ B(\theta, \hat{u}_D(\theta)) = \vec{0} & \text{sur } S \\ \hat{u}_D(\theta) \in V(D). \end{cases}$$

Or, on a que $\frac{\partial \hat{u}_D(\theta)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = \vec{0}$ sur $\sum \forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

On considère l'application $G = (G_1, G_2)$ définie sur $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \times V(D)$ à valeurs dans $[L^2(D)]^3 \times [H^{1/2}(S)]^3$ définie par :

$$\begin{cases} G_1(\theta, v) = A(\theta, v) \\ G_2(\theta, v) = B(\theta, v). \end{cases}$$

- Vérification des hypothèses du théorème des fonctions implicites

(i) G est dérivable de $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \times V(D)$ au point $(0, \vec{u})$ d'après les résultats du chapitre (I).

(ii) $\frac{\partial G}{\partial v}(0, \vec{u})$ est un isomorphisme de $V(D)$ sur $[L^2(D)]^3 \times [H^{1/2}(S)]^3$.

(iii) l'application $\hat{u}_D(\theta)$ est continue de $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ à valeurs dans $V(D)$ au point 0. D'où :

$$\frac{\partial G}{\partial v}(0, u) \cdot \left[\frac{\partial \hat{u}_D(\theta)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \right] = - \frac{\partial G}{\partial \theta}(0, \vec{u}) \cdot \tau$$

$\forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, ce qui établit le théorème.

Dérivation de l'état par rapport au domaine.

$\vec{u}(\theta) \circ (I+\theta)$ étant dérivable en 0 dans $V(D)$, le théorème III - 2 entraîne que l'application $\theta \rightarrow \vec{u}(\theta)$ est dérivable en 0 de $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dans $[H^1(D)]_{loc}^3$ et : $\forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

$$- \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}(\theta)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \right) \right] = \vec{0} \text{ localement dans } D.$$

Cette équation est équivalente en termes de contraintes à l'équation :

$$- \operatorname{div} \sigma \left(\frac{\partial \vec{u}(\theta)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \right) = \vec{0} \text{ localement dans } D.$$

Dérivation des conditions aux limites :

1) On a $\vec{u}(\theta) = \vec{0}$ sur \sum_θ . D'après le théorème III - 2 :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{u}(\theta))_{(0)} \cdot \tau = - \langle \vec{n}, \vec{\tau} \rangle \frac{\partial \vec{u}(0)}{\partial n} \text{ localement sur } \sum$$

où \vec{n} est la normale extérieure à \sum .

2) L'équation (iii) s'écrit :

$$a_{ijkl} \epsilon_{kl} (\vec{u}(\theta)) \cdot n_j = g_i \text{ sur } S_\theta.$$

Soit $\vec{v}(\theta)$ le vecteur de composantes $[a_{ijkl} \epsilon_{kl} (\vec{u}(\theta)) \psi_i]_{j=1,2,3}$ où ψ_i est une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a :

$a_{ijkl} \epsilon_{kl} (\vec{u}(\theta)) n_j \cdot \psi_i = g_i \psi_i$ sur S_θ . On pose :

$$F_\psi(\theta) = \int_{S_\theta} (a_{ijkl} \epsilon_{kl} (\vec{u}(\theta)) n_j \psi_i - g_i \psi_i) d\sigma, \text{ on a donc :}$$

$$F_\psi(\theta) = 0 \quad \forall \psi \in [C^\infty(\mathbb{R}^3)]^3.$$

Soit $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\alpha \equiv 1$ au voisinage de S_θ et $\alpha \equiv 0$ partout ailleurs. Alors :

$$F_\psi(\theta) = \int_{\partial((I+\theta)(D))} \alpha \cdot v(\theta) \cdot \vec{n} d\sigma - \int_{\partial((I+\theta)(D))} \alpha g_i \psi_i d\sigma = 0$$

or :

$$\int_{\partial((I+\theta)(D))} \alpha \cdot \vec{v}(\theta) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{(I+\theta)(D)} \operatorname{div} [\alpha \vec{v}(\theta)] dx \text{ d'où :}$$

$$F_\psi(\theta) = \int_{(I+\theta)(D)} \operatorname{div} [\alpha \vec{v}(\theta)] dx - \int_{\partial((I+\theta)(D))} \alpha g_i \psi_i d\sigma$$

en appliquant les formules de dérivation d'une intégrale par rapport au domaine d'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\psi(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau &= \int_D \operatorname{div} \left[\alpha \cdot \frac{\partial \vec{v}(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau \right] dx + \int_{\partial D} \langle \tau, n \rangle \operatorname{div} [\alpha \vec{v}(0)] d\sigma \\ &- \int_{\partial D} \langle \tau, n \rangle \left[\alpha H g_i \psi_i + \frac{\partial}{\partial n} (\alpha H g_i \psi_i) \right] d\sigma \end{aligned}$$

en appliquant les résultats IV - 3 - 4, il vient alors :

$$\operatorname{div}(\alpha \vec{v}(0)) = \operatorname{div}_{\partial D}(\alpha v(0)) + \vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial n} (\alpha \vec{v}(0)) \text{ sur } \partial D$$

d'où :

$$\langle \tau, n \rangle \left[\operatorname{div}(\alpha \vec{v}(0)) - \frac{\partial}{\partial n} (\alpha g_i \psi_i) \right] =$$

$$\langle \tau, n \rangle \left[\operatorname{div}_{\partial D}(\alpha \vec{v}(0)) + \vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial n} (\alpha \vec{v}(0)) - \frac{\partial}{\partial n} (\alpha g_i \psi_i) \right] =$$

$$\langle \tau, n \rangle \left[\operatorname{div}_{\partial D}(\alpha \vec{v}(0)) + \vec{n} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{\partial \vec{v}(0)}{\partial n} + \vec{v}(0) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right) - \alpha \frac{\partial}{\partial n} (g_i \psi_i) - g_i \psi_i \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right] =$$

$$\langle \tau, n \rangle \left[\operatorname{div}_{\partial D}(\alpha \vec{v}(0)) + \alpha \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{v}(0)}{\partial n} + \vec{n} \cdot \vec{v}(0) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial n} - g_i \psi_i \frac{\partial \alpha}{\partial n} - \alpha g_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} - \alpha \psi_i \frac{\partial g_i}{\partial n} \right]$$

D'autre part :

$$\vec{v}(0) = [a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) \cdot \psi_i]_{j=1,2,3} \implies$$

$$\frac{\partial \vec{v}(0)}{\partial n} = \left[a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right) \psi_i + a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \right]_{j=1,2,3} \quad \text{d'où :}$$

$$\langle \tau, n \rangle \left[\operatorname{div}(\alpha \vec{v}(0)) - \frac{\partial}{\partial n} (\alpha g_i \psi_i) \right] =$$

$$\langle \tau, n \rangle \left[\operatorname{div}_{\partial D}(\alpha \vec{v}(0)) + \alpha \vec{n} \cdot \left(a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right) \psi_i + a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \right) + \right.$$

$$\left. n_j a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) \psi_i \frac{\partial \alpha}{\partial n} - g_i \psi_i \frac{\partial \alpha}{\partial n} - \alpha g_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} - \alpha \psi_i \frac{\partial g_i}{\partial n} \right] =$$

$$\langle \vec{\tau}, \vec{n} \rangle \left[\operatorname{div}_{\partial D}(\alpha \vec{v}(0)) + \alpha a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right) \psi_i n_j - \alpha \psi_i \frac{\partial g_i}{\partial n} \right]$$

car $a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) n_j = g_i$ sur S .

On a donc :

$$\langle \tau, n \rangle \left[\operatorname{div}(\alpha \vec{v}(0)) - \frac{\partial}{\partial n} (\alpha g_i \psi_i) \right] =$$

$$\langle \tau, n \rangle \operatorname{div}_{\partial D}(\alpha \vec{v}(0)) + \langle \tau, n \rangle \alpha \psi_i \left(a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right) n_j - \frac{\partial g_i}{\partial n} \right).$$

Par ailleurs, l'application des résultats de IV - 3 - 4 implique que :

$$\operatorname{div}_{\partial D}(h\vec{f}) = h \operatorname{div}_{\partial D} \vec{f} + \operatorname{grad}_{\partial D} h \cdot \vec{f} \quad \text{d'où}$$

$$\langle \tau, n \rangle \operatorname{div}_{\partial D}(\alpha \vec{v}(0)) = \operatorname{div}_{\partial D}[\langle \tau, n \rangle \alpha \vec{v}(0)] - \alpha \operatorname{grad}_{\partial D}(\langle \tau, n \rangle) \cdot \vec{v}(0) \quad \text{et en}$$

vertu de l'égalité :

$$\int_{\partial D} \operatorname{div}_{\partial D}(\langle \tau, n \rangle \alpha \vec{v}(0)) d\sigma = \int_{\partial D} H \cdot \langle \tau, n \rangle \cdot \alpha v(0) \cdot \vec{n} d\sigma$$

on a donc :

$$\frac{\partial F_{\psi}(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau = \int_{\partial D} \left[\alpha \cdot \frac{\partial \vec{v}(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau \cdot \vec{n} - \langle \tau, n \rangle H g_i \psi_i \alpha + \right.$$

$$\left. H \langle \tau, n \rangle g_i \psi_i \alpha - \alpha \operatorname{grad}_{\partial D}(\langle \tau, n \rangle) a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) \psi_i + \right.$$

$$\left. \langle \tau, n \rangle \alpha \psi_i \left(a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right) n_j - \frac{\partial g_i}{\partial n} \right) \right] d\sigma$$

et par suite on a :

$$\forall \psi \in [C^{\infty}(\mathbb{R}^3)]^3, \quad \forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) :$$

$$\frac{\partial F_{\psi}(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau = \int_S \psi_i \left[a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau \right) n_j - \operatorname{grad}_{\partial D}(\langle \tau, n \rangle) a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) \right.$$

$$\left. + \langle \tau, n \rangle \left(a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right) n_j - \frac{\partial g_i}{\partial n} \right) \right] d\sigma = 0$$

et donc :

$$a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau \right) n_j = \operatorname{grad}_{\partial D}(\langle \tau, n \rangle) a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) -$$

$$\langle \tau, n \rangle \left[a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right) n_j - \frac{\partial g_i}{\partial n} \right] \quad \text{sur } S$$

et on a :

Théorème :

Soit B un ouvert de \mathbb{R}^3 tel que $\bar{B} \subset D$, l'application $\theta \rightarrow \vec{u}(\theta)|_B$ est dérivable au point 0 dans $[H^1(B)]^3$ et :

$$\forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) :$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\vec{u}(\theta)|_B \right]_{(0)} \cdot \tau = \vec{U}(\tau)|_B \text{ avec :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \vec{U}(\tau) \in [H^1(D)]^3 \\ \operatorname{div} \vec{\sigma}(\vec{U}(\tau)) = \vec{0} \text{ dans } [D'(D)]^3 \\ (2) \quad \vec{U}(\tau) = - \langle \tau, n \rangle \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \text{ dans } [H^{1/2}(\Sigma)]^3 \\ (3) \quad \vec{\sigma}(\vec{U}(\tau))(\vec{n}) = \operatorname{grad}_{\partial D}(\langle \tau, n \rangle) a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) \\ \quad - \langle \tau, n \rangle \left[a_{ijk} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right) n_j - \frac{\partial g_i}{\partial n} \right] \text{ dans } [H^{-1/2}(S)]^3 \end{array} \right.$$

IV - 3 - 6 : Dérivation de la fonction coût.

On se place dans les hypothèses du paragraphe IV - 3 - 2, et on considère la fonction J définie sur $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ à valeurs réelles telle que :

$$J(\theta) = \int_{S_\theta} ||u(\theta) - z||^2 d\sigma \text{ où } \vec{u}(\theta) \text{ est solution du}$$

problème (i), (ii), (iii) et $z \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$ est fixée.

Théorème :

L'application $\theta \rightarrow J(\theta)$ est dérivable au point 0 de $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dans \mathbb{R} , et $\forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, sa dérivée dans la direction τ est donnée par l'expression :

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau = \int_S \langle \tau, n \rangle \left[H ||\vec{u} - \vec{z}||^2 + \frac{\partial}{\partial n} (||\vec{u} - \vec{z}||^2) - \right.$$

$$\left. 2 a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right)_j P_i + 2 \frac{\partial g_i}{\partial n} P_i \right] d\sigma + 2 \int_S \text{grad}_{\partial D} \langle \tau, n \rangle \cdot a_{ijkl} \epsilon_{kl} (\vec{u}) \cdot P_i d\sigma$$

où H est la courbure moyenne de D.

\vec{n} est la normale extérieure à S,

\vec{u} l'unique solution du problème (i), (ii), (iii) relatif au domaine D

et où l'état adjoint P(D) est l'unique solution du

Problème :

$$\text{IV - 3 - 6} \quad \begin{cases} \vec{P}(D) \in V(D) \\ \text{div } \vec{\sigma}(\vec{P}(D)) = \vec{0} \quad \text{dans } [L^2(D)]^3 \\ \vec{\sigma}(\vec{P}(D))(\vec{n}) = \vec{u}(D) - \vec{z} \quad \text{dans } [H^{1/2}(S)]^3 \end{cases}$$

Démonstration du théorème :

Soit α une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que α est identiquement nulle au voisinage de γ_θ , et $\alpha \equiv 1$ au voisinage de S_θ . On a donc :

$$J(\theta) = \int_{\partial((I+\theta)(D))} \alpha \cdot ||\vec{u}(\theta) - \vec{z}||^2 d\sigma.$$

L'application $\theta \rightarrow \vec{u}(\theta)$ étant dérivable en 0 de $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ à valeurs dans $[H^1(D)]^3$, la formule de dérivation d'une intégrale superficielle par rapport à son domaine d'intégration entraîne que :

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau = \int_{\partial D} \langle \tau, n \rangle \left[\alpha H \cdot ||\vec{u} - \vec{z}||^2 + \frac{\partial}{\partial n} (\alpha \cdot ||\vec{u} - \vec{z}||^2) \right] d\sigma +$$

$$\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\alpha \cdot ||\vec{u}(\theta) - \vec{z}||^2 \right] (0) \cdot \tau d\sigma. \quad \forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3).$$

Calculons $\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha ||\vec{u}(\theta) - \vec{z}||^2)_{(0)} \cdot \tau = A$ on a :

$$A = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha ||\vec{u}(\theta) - \vec{z}||^2)_{(0)} \cdot \tau \, d\sigma = \int_{\partial D} \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\langle \vec{u}(\theta) - \vec{z}, \vec{u}(\theta) - \vec{z} \rangle)_{(0)} \cdot \tau \, d\sigma$$

$$A = 2 \int_{\partial D} \alpha \cdot \frac{\partial \vec{u}(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau, \vec{u} - \vec{z} \rangle d\sigma = 2 \int_S \frac{\partial \vec{u}(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau, u - z \rangle d\sigma. \text{ On pose}$$

$$\vec{U}(\tau) = \frac{\partial \vec{u}(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau.$$

$\vec{U}(\tau)$ est déterminée par le théorème IV - 3 - 5. D'où :

$$A = 2 \int_S \langle \vec{U}(\tau), u - z \rangle d\sigma = 2 \int_S a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{P}(D)) n_j U_i(\tau) d\sigma$$

où $\vec{P}(D)$ est définie par IV - 3 - 6. D'où en appliquant la formule de Green, on a alors :

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_D \frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{P}(D))] U_i(\tau) dx + 2 \int_D a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{P}(D)) \epsilon_{ij}(\vec{U}(\tau)) dx \\ &= -2 \int_D \frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{U}(\tau))] P_i(D) dx + 2 \int_{\partial D} a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{U}(\tau)) n_j P_i \, d\sigma \end{aligned}$$

or $P_i \equiv 0$ sur Γ , d'où donc :

$$A = 2 \int_S a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{U}(\tau)) n_j P_i(D) d\sigma \text{ et les résultats de dérivation des}$$

conditions aux limites entraînent que :

$$A = 2 \int_S \{ \text{grad}_{\partial D} \langle \tau, n \rangle a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\vec{u}) - \langle \tau, n \rangle \left[a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right) n_j - \frac{\partial q_i}{\partial n} \right] \} P_i \, d\sigma.$$

D'où le théorème.

Remarques :

1) $\vec{U}(\tau)$ est la dérivée de l'état $\vec{u}(D_\theta)$ par rapport à D_θ .

Cette dérivation n'a qu'un sens local.

2) Etant donné $\vec{v} \in [H^1(D)]^3$, on définit sa dérivée normale $\frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \in [H^{-1/2}(D)]^3$ par la formule de Green ($\Delta \vec{v} \in [L^2(D)]^3$).

Théorème 2 :

On se place dans les mêmes hypothèses que le théorème 1, alors, l'application J_2 définie sur $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et à valeurs réelles par :

$$J_2(\theta) = \int_{D_\theta} ||\vec{u}(\theta) - z||^2 dx \quad \text{où } \vec{u}(\theta)$$

est l'unique solution du problème (i), (ii), (iii) est dérivable au point 0, et $\forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ on a :

$$\frac{\partial J_2(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau = \int_{\partial D} \langle n, \tau \rangle ||\vec{u}(D) - z||^2 d\sigma + 2 \int_S \langle \tau, n \rangle \left[a_{ijkl} \epsilon_{kl} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right)_{n_j} - \frac{\partial g_i}{\partial n} \right] P_1^i(D) d\sigma - 2 \int_S \text{grad}_{\partial D} \langle \tau, n \rangle a_{ijkl} \epsilon_{kl} (\vec{u}) P_1^j(D) d\sigma$$

où \vec{n} est la normale extérieure à ∂D .

\vec{u} est l'unique solution du problème (i), (ii), (iii) relative au domaine D et où l'état adjoint $\vec{P}_1(D)$ est défini par :

$$\begin{cases} - \text{div } \vec{\sigma}(\vec{P}_1(D)) = \vec{0} & \text{dans } D \\ \vec{P}_1(D) = \vec{0} & \text{sur } \Sigma \\ \vec{\sigma}(\vec{P}_1(D)) \cdot \vec{n} = \vec{0} & \text{sur } S \end{cases}$$

Démonstration du théorème :

L'application $\theta \rightarrow \vec{u}(\theta)$ étant dérivable de $C^{2,b}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dans $[H^1(D)]^3$ au point 0, il en résulte en appliquant la formule de dérivation pour $f = ||\vec{u} - z||^2$ (chapitre I - 7) que :

$$\frac{\partial J_2(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau = \int_{\partial D} \langle n, \tau \rangle \|\vec{u} - \vec{z}\|^2 d\sigma + \int_D \frac{\partial}{\partial \theta} [\langle \vec{u}(\theta) - \vec{z}, u(\theta) - \vec{z} \rangle] (0) \cdot \tau \, dx =$$

$$\int_{\partial D} \langle n, \tau \rangle \|\vec{u} - \vec{z}\|^2 d\sigma + 2 \int_D \left\langle \frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau, \vec{u} - \vec{z} \right\rangle dx.$$

$$\text{On pose } B = \int_D \left\langle \frac{\partial \vec{u}(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau, \vec{u} - \vec{z} \right\rangle dx.$$

On a alors en utilisant l'état adjoint $\vec{P}_1(D)$:

$$B = \int_D - \frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{P}(D))] U_i(\tau) d\sigma \quad \text{où}$$

$\vec{U}(\tau)$ est la solution du problème (1), (2), (3) l'application de la formule de Green implique donc que :

$$B = - \int_{\partial D} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{P}(D)) n_j \cdot U_i(\tau) d\sigma \quad \text{d'où le théorème.}$$

IV - 3 - 7 : Compléments.

Pour établir les résultats de dérivation de la condition aux limites : $\vec{\sigma}(\vec{u}(\theta)) \cdot \vec{n} = \vec{g}$, on a été amené à dériver l'expression :

$$F_\psi(\theta) = \int_{\partial((I+\theta)(D))} (\vec{\sigma}(\vec{u}(\theta)) \cdot \vec{n} - \vec{g}) \vec{\psi} \, d\sigma.$$

On pourrait dériver une telle condition aux limites directement comme au chapitre (III), mais la difficulté réside dans le fait qu'on ne peut pas dériver la normale extérieure à D par rapport au champ de vecteurs θ .

Dans le cas des dilatations du disque unité considérés au chapitre (II), la normale extérieure au domaine D_ℓ est colinéaire au champ de vecteurs θ_ℓ et sa dérivation ne pose donc aucun problème.

Dans le cas général, cette difficulté a été levée dans un article de J. SIMON (à paraître) par la construction d'un prolongement de la normale.

On définit une fonction δ dans \mathbb{R}^N par :

$$\delta(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, \partial D) & \text{si } x \notin D \\ -\text{dist}(x, \partial D) & \text{si } x \in D. \end{cases}$$

Il existe un voisinage ouvert V de ∂D tel que :

$$\delta \in C^k(\bar{V}) \text{ et } |\text{grad } \delta| = 1 \text{ sur } V.$$

Soit V' un voisinage ouvert de ∂D tel que $\bar{V}' \subset V$.

On se donne $\theta \in C^{2,b}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ assez petit pour que :

- $(I+\theta)$ soit un difféomorphisme de \mathbb{R}^N .
- $(I+\theta)(V) \supset V$

On définit alors un champ de vecteurs $v(\theta)$ dans $(I+\theta)(V)$

par :

$$v(\theta) = \frac{\text{grad}(\delta \circ (I+\theta)^{-1})}{\|\text{grad}(\delta \circ (I+\theta)^{-1})\|_{\mathbb{R}^N}} \text{ dans } (I+\theta)(V)$$

Si on note $n(\theta) = n((I+\theta)(D))$ le champ de vecteurs défini sur $\partial((I+\theta)(D))$ unitaire, normal à $\partial((I+\theta)(D))$ et dirigé vers l'extérieur, on a donc :

$$\begin{cases} v(\theta) \in C^1(\bar{V}', \mathbb{R}^N) \\ v(\theta) = n(\theta) \text{ sur } \partial((I+\theta)(D)). \end{cases}$$

et on a le résultat :

- L'application $\theta \rightarrow v(\theta) \circ (I+\theta)$ est dérivable en 0 de $C^{2,b}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $C^1(\bar{V}', \mathbb{R}^N)$.

- L'application $\theta \rightarrow v(\theta)$ est dérivable en 0 de $C^{2,b}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $C^0(\bar{V}', \mathbb{R}^N)$ et $\forall \tau \in C^{2,b}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$,

$$\frac{\partial v(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau = - \text{grad}_{\partial D} n \cdot \tau \quad \text{sur } \partial D.$$

Le prolongement adopté n'est pas intrinsèque, car un domaine $D' = (I+\theta)(D)$ peut être défini par plusieurs champs θ .

Dérivation de la condition aux limites.

$\bar{\sigma}(\vec{u}(\theta)) \cdot \vec{n}(\theta) = \vec{g}$ sur S_θ entraîne donc que :

$$\bar{\sigma} \left[\frac{\partial \vec{u}(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau \right] \vec{n} = \langle \tau, n \rangle \left[\frac{\partial \vec{g}}{\partial n} - n \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial n} \right] + (\text{grad}_{\partial D}(\tau, n)) \bar{\sigma}(\vec{u}) .$$

On retrouve donc l'expression de la dérivée de $\vec{u}(\theta)$ établie dans le paragraphe précédent.

Ceci nous permettra de calculer la dérivée de J_3 . En effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_3(\theta)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau &= \int_S \langle n, \tau \rangle \left\{ \left\| \bar{\sigma}(\vec{n}) - \vec{z} \right\|^2 + H \frac{\partial}{\partial n} \left\| \bar{\sigma}(\vec{n}) - \vec{z} \right\|^2 \right\} + \\ &\int_S \frac{\partial}{\partial \theta} (\langle \bar{\sigma}(\vec{n}) - \vec{z}, \bar{\sigma}(n) - \vec{z} \rangle) (0) \cdot \tau \, d\sigma. \end{aligned}$$

CONCLUSION

La méthode des variations intérieures s'applique donc au système de l'élasticité linéaire statique pour la recherche d'un domaine optimal, dans le cas d'un domaine régulier et en couronne.

Deux remarques essentielles peuvent être dégagées :

1) La dérivation de la normale extérieure par rapport au champ de vecteurs caractérisant les variations du domaine, pose un problème pour la dérivation des conditions aux limites. Cette difficulté est levée par l'utilisation de la formule de Stokes après changement de variable permettant de se ramener sur le domaine fixe.

L'application des résultats de J. SIMON en ce qui concerne la dérivation de la normale extérieure par rapport au domaine donne les mêmes formules.

2) Le problème étudié au chapitre IV est un problème mixte avec des conditions de Dirichlet sur une partie de la frontière du domaine et des conditions de Neumann sur l'autre.

Dans le cas d'un domaine quelconque (non fortement en couronne), les techniques qu'on a utilisées ne peuvent s'appliquer si facilement ; car après application du champ de vecteurs θ au domaine D , on risque d'avoir glissement d'une partie de la frontière sur l'autre.

BIBLIOGRAPHIE

- F. MURAT et J. SIMON - [1] Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique.
(Université Paris VI, Laboratoire d'analyse numérique LA 189, n° enregistrement 74003).
- [2] Sur le contrôle par un domaine géométrique.
Thèse d'état (1976).
- J. SIMON - [1] Variation par rapport au domaine dans les problèmes aux limites.
Laboratoire d'analyse numérique.
LA 189, Université P. et M. Curie,
Paris VI, n° enregistrement 80 001.
- [2] Sur la dérivation de la normale par rapport au domaine (A paraître).
- F. MIGNOT, F. MURAT, J.P. PUEL - Variation d'un point de retournement par rapport au domaine.
Comm. on P.D.E. ; 4, n° 11, (1979).
- J. HADAMARD - Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées (1908).
Oeuvres de J. HADAMARD, C.N.R.S., Paris, 1968.
- J. CEA, A. GIOAN, J. MICHEL - Quelques résultats sur l'identification de domaines.
Estratto de Calcolo, fasc. III-IV, 1973.
- D. CHESNAIS - [1] On the existence of a solution in a domain identification problem.
Journal of mathematical analysis and applications. Vol. 52, n° 52, novembre 1975.
- [2] Sur une famille à bord lipschitziennes.
Application à un problème d'identification de domaines.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble 27, 4 (1974), pp. 201-231.
- N.F. HICKS - Notes on differential geometry,
Van Nostrand (1965).
- B. PALMERIO-A.DERVIEUX - Hadamard's variational formula for a mixed problem and an application to a problem related to a SIGNORINI-LIKE. Variational Inequality.
(Rapport de recherche n° 339, janvier 1979).

- D. BEGIS, R. GLOWINSKI - Application de la méthode des éléments finis à l'approximation d'un problème de domaine optimal.
Applied Math. and optimisation.
Vol. 2, n° 2, 1975.
- O. PIRONNEAU - [1] On optimum design in fluid mechanics.
J. Fluid Mechanics 64 (1974), pp. 97-111.
- [2] Optimum design with Lagrangian finite elements : design of an electromagnet.
comp. math. in appl. mech. and Eng. 15, (1978), pp. 207-308.
- M. KOENIG, J.P. ZOLESIO - [1] Localisation d'un objet de forme convexe donnée.
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 274, série A (1972).
- [2] Sur la localisation d'un domaine de forme donnée.
Thèse 3ème cycle, Nice (1973).
- B. ROUSSELET - Identification de domaines et problèmes de valeurs propres.
Thèse de 3ème cycle, Nice (1977).
- JINDRICH-NECAS - Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.
Academia, Editeurs (1967).
- Ph. CIARLET - The finite element method.
Tata institute of fundamental Reseach.
Bombay, 1975.
- J.L. LIONS, E. MAGENES - Problèmes aux limites non homogènes et applications.
- J.L. LIONS, DUVAUT - Inéquations en mécanique et en physique.
- R.J. KNOPS, L.E. PAYNE - Uniqueness theorem's in linear elasticity.
Springer tracts in natural philosophy.
Volume 19.

