N° d'ordre : 941

T H E S E

présentée à

l'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le titre de

Docteur de 3ème cycle

en

Mécanique

par

Yvette RAILLON

QUELQUES REFLEXIONS SUR LA THEORIE DES COQUES CYLINDRIQUES ELASTIQUES.

Soutenue le 17 Décembre 1981 ..t la Commission d'examen

Membres du Jury :

Président :	M. ZEYTOUNIAN, Professeur, Université de Lille I.
Rapporteur :	M. PARSY, Professeur, Université de Lille I.
Membre :	M. OUDIN, Professeur, Université de Valenciennes.
Invités :	M. THIBAULT, Professeur, Université de Toulouse.
	M. DESTUYNDER, Direction Etudes et Recherches E.D.F.

Cette étude doit l'existence à Monsieur le Professeur PARSY; je le remercie vivement de m'avoir incitée à entreprendre ce travail et de m'avoir soutenue au cours de mes recherches de ses conseils et de sa sollicitude. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde gratitude pour sa direction sûre et efficace.

Je remercie Monsieur le Professeur ZEYTOUNIAN d'avoir accepté de présider la soutenance et Messieurs les Professeurs OUDIN et DESTUYNDER d'avoir consenti à juger mon travail et à participer au jury. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma gratitude.

J'exprime également ma sincère reconnaissance à Monsieur le Professeur THIBAULT de m'avoir fait l'honneur de s'intéresser à mes travaux et d'avoir effectué un long déplacement pour écouter mon exposé.

Je tiens enfin à remercier Madame PÉTIAUX qui a dactylographié mon manuscrit avec minutie et le service de reprographie de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées qui s'est chargé de l'impression du document.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est l'étude dans un contexte tridimensionnel des équations qui régissent le comportement des coques cylindriques, élastiques. Après avoir consulté les ouvrages et articles cités dans la bibliographie, il nous est apparu que leurs auteurs faisaient des approximations diverses et nous avons été amenés à faire les observations suivantes :

. Les équations d'équilibre étant considérées comme acquises, on leur adjoint les lois de comportement qui, de manière générale, sont considérées comme des approximations linéaires de lois plus générales concernant les matériaux dits simples. Si l'on définit η comme la borne supérieure sur le solide de la norme du gradient du vecteur déplacement, la loi de l'Elasticité linéaire homogène et isotrope apparait alors comme une théorie approchée "à η^2 près".

. Cette observation serait peut-être encore valable dans le cas où l'on utiliserait le tenseur non linéarisé $[\gamma]$ des déformations.

Ensuite interviennent en général deux "petits paramètres" $\varepsilon = \frac{h}{R}$ et $\delta = \frac{h}{\ell}$ où h désigne la demi-épaisseur de la coque, R son rayon moyen et ℓ sa longueur. Dans la théorie des membranes notamment (cas $\varepsilon = \varepsilon_o\ \delta$) les équations d'équilibre et les relations contrainte-déformation sont écrites en utilisant des notations adimensionnelles et en faisant a priori les hypothèses suivantes :

- le déplacement maximal U est de l'ordre de h (i.e. $\frac{U}{R} = O(\varepsilon)$).
- la contrainte maximale $\sum$ est de l'ordre de $\frac{EU}{R}$ (i.e. $\sum = O(\varepsilon)$)

  et le vecteur-déplacement $\vec{u}(\rho,\theta,\varepsilon,\zeta)$ est recherché sous la forme :

$$\vec{u}(\rho,\theta,\varepsilon,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n\ \vec{u}^n(\rho,\theta,\zeta) \text{ (implicitement on devrait avoir } u^o(\rho,\theta,\zeta)= \vec{0}).$$

En fait, ces théories classiques, dont la plupart utilisent les hypothèses de LOVE-KIRCHOFF, établissent mais de manière non explicite une comparaison entre les paramètres.

En effet, si $\overrightarrow{PP'} = \vec{u}\,(P)$ (resp. $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}(M)$) est le vecteur déplacement d'un point P de la surface moyenne ω de la coque (resp. le déplacement du point M de la coque défini par : $M = P + x_3\,\vec{N}(P)$ où $\vec{N}(P)$ unitaire normal en P à ω , $|x_3| \leq h$) et si $\vec{N}(P')$ désigne le vecteur normal en P' à la déformée ω' de ω, les hypothèses de Love-Kirchoff signifient que : $\overrightarrow{P'M'} = x_3\,\vec{N}\,(P')$ ce qui entraîne :

$$\vec{u}(M) = \vec{u}(P) + x_3\,(\vec{N}\,(P')-\vec{N}(P)) = \vec{u}(P) + x_3\ \mathrm{Grad}_p\,\vec{N}(\vec{u}(P)) + \vec{O}(||\vec{u}(P)||^2,\,\vec{N})$$

ce qui mène aux formules classiques $\varepsilon(M) = \varepsilon(P) - x_3\,K(P) + O(\frac{x_3^2}{R^2}\,\eta)$
$\varepsilon(M) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{Grad}_M\,\vec{u} + {}^T\mathrm{Grad}_M\,\vec{u})$ et K(P) est le tenseur de courbure de ω en P <u>sous</u> réserve que l'on ait $\frac{x_3^2}{R^2}\eta = O(\eta^2)$ soit $\varepsilon = O(\eta^{1/2})$ ce qui correspond à la valeur particulière $\alpha = \frac{1}{2}$ de nos observations.

A notre connaissance seuls Messieurs F. JOHN (c.f. [1]) et LADEVEZE ont fait intervenir l'approximation en loi de comportement.

F. JOHN prend en considération parmi "les petits paramètres" celui que nous notons η remarquant que, vraisemblablement, la théorie générale des systèmes d'équation elliptique doit permettre son évaluation en fonction des charges appliquées. F. JOHN utilise également le paramètre $\varepsilon = \frac{h}{R}$ mais le paramètre $\frac{h}{D}$ où D désigne la distance d'un point quelconque, au bord de la coque (ceci en vue des phénomènes de couche limite).

P. LADEVEZE, lui, construit à partir de la solution du problème bidimensionnel (correspondant à $\varepsilon = 0$) une solution $\vec{u}$ qui vérifie les équations tridimensionnelles et satisfait à une approximation quadratique en loi de comportement.

La démarche que nous avons suivie au chapitre II est différente puisque notre point de départ est le modèle tridimensionnel et que nous prenons en compte l'approximation impliquée par la loi de comportement (on remarquera que dans le cas particulier des coques cylindriques de révolution $\varepsilon = \frac{h}{R}$ est un paramètre "global" alors que pour des coques générales il ne représente qu'un paramètre "local").

Chronologiquement le chapitre II a été rédigé le premier; la rédaction de ce dernier terminée, Monsieur PARSY nous a conseillé compte tenu des travaux de CIARLET, DESTUYNDER et de l'article général de NAGHDI (Handbuch der Physik) de reprendre le problème essentiel évoqué dans le chapitre II et de se placer dans le cadre général des grands déplacements et petites déformations des solides élastiques. Nous avons donc été amenés à rédiger le Chapitre I qui est un essai de synthèse très détaillé (trop peut être pour les spécialistes ?) sur la Mécanique non linéaire des solides déformables.

Dans la conclusion du Chapitre I nous expliquons les raisons pour lesquelles nous n'avons pas inclus dans ce mémoire, la formulation variationnelle pour les coques et les méthodes asymptotiques.

CHAPITRE I

RAPPELS DE MECANIQUE DES SOLIDES DEFORMABLES

A Aspects géométriques

I - *HYPOTHESES GENERALES*

1) *Cadre de l'étude*

Soit un milieu continu occupant un domaine Ω de E_3 : (E_3 espace affine euclidien orienté de dimension 3), rapporté à un repère orthonormal $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, de frontière $\partial\Omega$, de point générique x, à l'instant t = 0 .

$\overline{\Omega}$ représente la "position initiale" (ou "non déformée") du solide déformable considéré. Sous l'action de forces, (1) de densité surfacique $\vec{F}_s$, appliquées à une partie $(\partial\Omega)_F$ de $\partial\Omega$ (un champ de déplacement $\vec{u}_d$ étant imposé sur la partie $(\partial\Omega_u)$ complémentaire de $(\partial\Omega)_F$ dans $\partial\Omega$).
(2) de densité volumique $\vec{f}$ appliquées à Ω le "solide"Ω subit une "déformation caractérisée par une application Φ définie comme suit :

A.I.1.1. $\Phi : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow E_3$

$(x,t) \longrightarrow X$

On pose

A.I.1.2.
$$\boxed{\begin{array}{l} X = \Phi(x,t) = x + \vec{u}(x,t) \text{ pour } x \in \overline{\Omega} \text{ et } t > 0 \\ \vec{u}\,(x,t) = u_i(x,t)\,\vec{e}_i \;\; (\in \vec{E}_3) \end{array}}$$

où $\vec{u}(x,t)$ représente le vecteur déplacement du point x à l'instant t, donc un élément de $\vec{E}_3$, espace vectoriel associé à l'espace affine E_3; (on a alors de façon évident $\vec{u}(x,0) = 0_{\vec{E}_3}$ soit $\boxed{x = \Phi\,(x,0)}$.

Définition A.I.1.

$x = (x_1, x_2, x_3)$ et t sont les variables de Lagrange

$x = (X_1, X_2, X_3)$ et t sont les variables d'Euler.

Le principe de non impénétrabilité de la matière postulé en Mécanique nécessite que Φ soit, pour tout instant t, un difféomorphisme global de Ω sur $\Phi\ (\Omega;t)$ et que Φ préserve l'orientation. Dans l'espace E_3 muni du repère orthonormal $(0;\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ on définit pour tout x de Ω et tout t de R_+^* les vecteurs

A.I.1.3.
$$\boxed{\vec{G}_i(x) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(x,t)\ \vec{e}_j \qquad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3 \end{array}}$$

Soit en notation abrégée en posant $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$; $\overrightarrow{G_i(x)} = \partial_i\ \Phi_j(x,t)\vec{e}_j \quad 1 \leq i \leq 3$

Les hypothèses faites sur Φ entrainent que, pour tout point x de Ω , ces 3 vecteurs $\vec{G}_i(x)$ sont linéairement indépendants et par conséquent que l'espace tangent à la variété $\Phi\ (\Omega)$ au point $X = \Phi\ (x,t)$, c'est-à-dire l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{G}_i(x)$ est de dimension 3 (et peut être ainsi identifié à $\mathbb{R}^3$). Ceci revient à dire que la matrice dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\frac{\partial}{\partial x_j}\ \Phi_i(x)$, qui représente l'application linéaire tangente $D\ \Phi(x)$ dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est une matrice inversible. D'autre part le fait que Φ conserve l'orientation se traduit par la condition :

$$\boxed{J(x) = \text{Dét}\ (D\ \Phi(x)) = \text{Dét}\ \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x)\right) > 0 \qquad \forall\ x \in\ \Omega}$$

Remarque A.I.1. Réciproquement la condition $J(x) > 0$ entraine que, *localement*, Φ est un difféomorphisme et préserve l'orientation, mais cette seule hypothèse est insuffisante pour obtenir un résultat d'inversibilité globale.

2) *Cas de coordonnées curvilignes sur Ω*

Ω est dit muni d'un système de coordonnées curvilignes (ξ^i, $i \in \{1, 2, 3\}$) s'il existe un difféomorphisme Ψ d'un ouvert ω de R^3 sur Ω tel que :

A.I.2.1. $\quad \xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \omega \xrightarrow{\Psi} x = \Psi(\xi) \in \Omega$ vérifiant

$$\Psi(\partial\omega) \supset \partial\Omega$$

L'exemple suivant d'une coque cylindrique de révolution d'axe Ox_3, de longueur 2L, épaisseur 2h et de rayon moyen R, sera étudié plus particulièrement dans la suite de ce travail : (fig. 1).

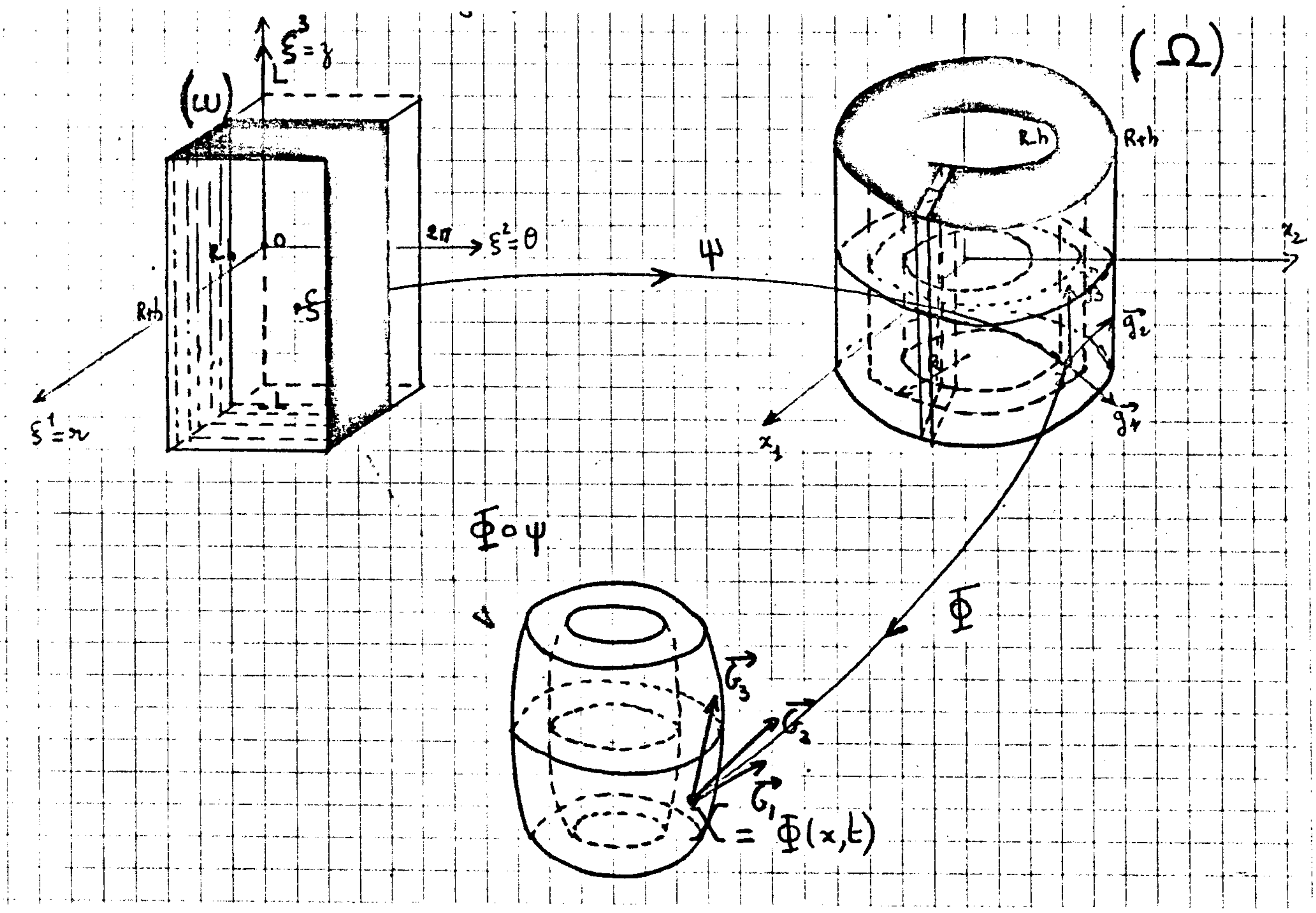


FIGURE 1

$x = \Psi\ (\xi)$ est défini par $x_1 = \xi^1 \cos \xi^2; x_2 = \xi^1 \sin \xi^2;\ x_3 = \xi^3$

où $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \omega$ avec $\omega =]R-h, R+h[\times]0,2\pi[\times]-L, +L[$

(l'hypothèse usuelle où h est très petit devant R; $h << R$; assure que Ψ est un difféomorphisme de ω sur $\Psi\ (\omega)$ car le Jacobien du changement de coordonnées est $\xi^1 (\xi^1 > 0$ car $\xi^1\ ]R-h, R+h[)$.

On a $\partial\omega = \bigcup\limits_{i=1}^{6} \partial\omega_i$ avec

$\partial\omega_1 = \{R-h\} \times [0,2\pi] \times [-L,L]$: $\partial\omega_2 = \{R+h\} \times [0,2\pi] \times [-L,L]$

$\partial\omega_3 = [R-h,R+h]\ [0,2\pi] \times \{-L\}$; $\partial\omega_4 = [R-h,R+h] \times [0,2\pi] \times \{L\}$

$\partial\omega_5 = [R-h,R+h] \times \{0\} \times [-L,L]$; $\partial\omega_6 = [R-h,R+h] \times \{2\pi\} \times [-L,L]$

et $\partial\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{4} \Psi(\partial\omega_i) = \Psi\ (\bigcup\limits_{i=1}^{4} \partial\omega_i) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{6} \Psi(\partial\omega_i)$

Si g est une fonction de Ω dans R, on lui associe la fonction $\hat{g} = g \circ \Psi$ de $\bar{\omega}$ dans R, 2π - périodique en ξ^2, (définie sur $[R-h, R+h] \times [0,2\pi] \times [-L,L] = \bar{\omega}$

En tout point x de Ω, on définit la base "naturelle" covariante $\{\vec{g}_i(x)$; $1 \leqslant i \leqslant 3\}$ par

A.I.2.2. $$\boxed{\vec{g}_i(x) = \frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi_i}\ \vec{e}_j \qquad 1 \leqslant j \leqslant 3}$$

La matrice dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $(\frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi_i})$ qui représente l'application linéaire $d\Psi\ (\xi)$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est inversible et son déterminant noté $j(\xi)$ sera supposé > 0 . Les vecteurs $\vec{g}_i(x)$ forment donc une base (directe) de l'espace vectoriel tangent T_x à la variété $\Omega = \Psi\ (\omega)$ au point x .

$\Phi(\Omega) = (\ \Phi \circ \Psi\ )\ (\omega)$ est aussi munie des coordonnées (ξ^i) et en tout point $X = \Phi\ (x,t)$ de $\Phi\ (\Omega)$ l'espace tangent T_X à la variété $\Phi\ (\Omega)$ est engendré par les vecteurs :

I.2.3. $\overrightarrow{G_i(X)} = \frac{\partial(\Phi \circ \Psi)_j}{\partial \xi_i} \vec{e}_j = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \vec{e}_j$; soit encore

puisque $x_k = \Psi_k(\xi)$ $\quad \overrightarrow{G_i(X)} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} \vec{e}_j = \frac{\partial \Psi_k}{\partial \xi_i} G_k(x)$

$$\overrightarrow{G_i(X)} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial \xi_i} \overrightarrow{G_k(\vec{x})} \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant k \leqslant 3 \end{array}$$

APPLICATIONS

1) *Etude des premières formes fondamentales* ds^2 (*respectivement* sur T_x *et* $T_{\Phi(\vec{x})}$)

a)

Soit $\vec{\zeta} \in R^3$ tel que si $\xi \in \omega$ alors $\xi + \vec{\zeta} \in \omega$. La formule des accroissements finis montre que :

A.I.2.1. -1- $\overrightarrow{\psi(\xi+\vec{\zeta}) - \Psi(\xi)} = \zeta_i \frac{\overrightarrow{\partial \Psi}}{\partial \xi^i} + \vec{o}(||\vec{\zeta}||) = \zeta_i \vec{g}_i(x) + \vec{o}(||\vec{\zeta}||)$

d'où (.,.) et ||.|| désignant respectivement le produit scalaire euclidien sur R^3 et la norme associée,

A.I.2.1. -2- $\quad ||\overrightarrow{\Psi(\xi+\vec{\zeta}) - \Psi(\xi)}||^2 = g_{ij}(x)\, \zeta_i\, \zeta_j + o\,(||\vec{\zeta}||^2)$ où

A.I.2.1. -3-

$$\boxed{g_{ij}(x) = (\vec{g}_i(x).\vec{g}_j(x)) = \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_j} \; ; \; x = \psi(\xi) \in \Omega \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3 \end{array}}$$

sont les composantes (covariantes) du tenseur métrique de Ω . La formule A.I.2.1.3 permet de définir la première forme (quadratique) fondamentale ou ds^2 définie sur l'ouvert ω par :

A.I.2.1.
-4-
$$\boxed{ds^2 = g_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j}$$
ce qui signifie la chose suivante :

L'espace tangent T_x à Ω au point x étant canoniquement isomorphe $\{x\} \times R^3$, on associe à tout vecteur $\vec{\eta}_x = (x,\vec{\eta}) \in \{x\} \times R^3$ de cet espace <u>tangent</u> la quantité :

A.I.2.1.
-5-
$$ds^2\,(\vec{\eta}_x) = g_{ij}(x)\,\eta^i\,\eta^j \quad (\in R) \text{ où } \quad \boxed{\vec{\eta}_x = \eta^i\,\vec{g}_i(x) \qquad 1 \leq i \leq 3}$$

La première forme quadratique fondamentale de Ω est définie positive en tout point x de Ω puisque les vecteurs $\vec{g}_i(x)$ sont linéairement indépendants et que la forme bilinéaire associée :

A.I.2.1.
-6-
$$\boxed{ds^2\,(\vec{\eta}_x,\vec{\zeta}_x) = (\vec{\eta}_x . \vec{\zeta}_x) = (\eta^i\,\vec{g}_i(x) . \zeta^j\,\overrightarrow{g_j(x)}) = g_{ij}(x)\,\eta^i\,\zeta^j}$$

est induite sur T_x par le produit scalaire euclidien usuel.

b) De même, la première forme fondamentale de la variété $\Phi(\Omega)$ est définie à partir de la forme bilinéaire qui, à tout couple de vecteurs $\vec{\eta}_X$, $\vec{\zeta}_X$ de l'espace tangent T_X en $X = \Phi(x)$ à $\Phi(\Omega)$ associe le nombre réel :

A.I.2.1.
-7-
$$\boxed{ds^2_\Phi\,(\vec{\eta}_X,\vec{\zeta}_X) = (\vec{\eta}_X . \vec{\zeta}_X) = (\eta^i_X\,\overrightarrow{G_i(X)} . \zeta^j_X\,\overrightarrow{G_j(X)}) = G_{ij}(X) = \eta^i_X\,\zeta^j_X}$$

On a donc

A.I.2.1.
-8-
$$\boxed{ds^2_\Phi\,(\vec{\eta}_X) = G_{ij}(X)\,\eta^i_X\,\eta^j_X} \quad \text{où} \quad \boxed{\begin{array}{l} \vec{\eta}_X = \eta^i_X\,\vec{G}_i(X) \qquad 1 \leq i \leq 3 \text{ et} \\ G_{ij}(X) = (\overrightarrow{G_i(X)} . \overrightarrow{G_j(X)}) \end{array}}$$

Le tenseur métrique de Φ (Ω), $G_{ij}(X)$, peut être considéré comme défini sur l'espace tangent T_x en $x \in \Omega$ par :

A.I.2.1. -9- $$ds_\Phi^2 = G_{k\ell}(x)\, \frac{\partial \Psi_k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \Psi_\ell}{\partial \xi^j}\, d\xi^i\, d\xi^j \text{ compte tenu de :}$$

A.I.2.1. -10- $$G_{ij}(X) = (\vec{G}_i(X).\vec{G}_j(X)) = (\frac{\partial \Psi_K}{\partial \xi_i}\, \vec{G}_K(x).\frac{\partial \Psi_\ell}{\partial \xi_j}\, \vec{G}_\ell(x)) = \frac{\partial \Psi_K}{\partial \xi_i} \frac{\partial \psi_\ell}{\partial \xi_j}\, G_{K\ell}(x)$$

d'où

$$ds_\Phi^2(\vec{\eta}_x, \vec{\zeta}_x) = G_{k\ell}(x)\, \frac{\partial \Psi_K}{\partial \xi_i}\, \eta^i\, \frac{\partial \Psi_\ell}{\partial \xi_j}\, \zeta^j = G_{k\ell}(x)\, (\eta^i\, \vec{g}_i.\vec{e}_k)(\zeta^j\, \vec{g}_j.\vec{e}_\ell)$$

$$= G_{k\ell}(x)\, (\vec{\eta}_x.\vec{e}_k)(\vec{\zeta}_x.\vec{e}_\ell) \quad = (\eta^i\, \vec{G}_i,\ \zeta^j\, \vec{G}_j\ )$$

c) Calcul de la longueur d'une courbe déformée (d'une courbe donnée).

Soit Γ un arc de courbe de classe C^1 de Ω c'est-à-dire l'image par une application de classe C^1 d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

$f : [t_o, t_1] \subset R \longrightarrow \Omega$. La longueur de Γ est par définition donnée par :

$$L(\Gamma) = \int_{t_o}^{t_1} ||f'(t)||\, dt$$

f peut être définie par l'intermédiaire d'une application $\xi : [t_o, t_1] \longrightarrow \omega$

$$[t_o, t_1] \xrightarrow{\xi} \omega \xrightarrow{\Psi} \Omega$$

$$t \longrightarrow \xi(t) \longrightarrow x = f(t) = (\Psi \circ \xi)\,(t) \quad \text{alors}$$

$$f = \Psi \circ \xi \quad \text{et } L(\Gamma) = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(\xi(t)\ \xi'_i(t)\ \xi'_j(t)}\ dt$$

(où $\vec{\xi}'(t) = \xi'_i(t)\ \vec{g}_i(x))$.

La longueur de l'arc déformé de Γ , Φ (Γ) est alors donnée par

$$L(\Phi(\Gamma)) = \int_{t_o}^{t_1} ||(\Phi \circ f)'(t)|| dt = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{G_{ij}(f(t) f_i'(t) f_j'(t)} \, dt =$$

$$\int_{t_o}^{t_1} \sqrt{G_{ij}(\xi(t)) \frac{\partial \Psi_i}{\partial \xi^k} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi^\ell} (\xi(t) \, \xi_k'(t) \, \xi_\ell'(t)} \, dt$$

2) *Calcul de l'élément de volume déformé*

Pour tout x de Ω , l'élément de volume "déformé" $dV(x)$ au point $X = \Phi\,(x,t)$ de $\Phi\,(\Omega)$ se déduit de l'élément de volume $dv(x)$ par :

$$dV(x) = \left[[\vec{G}_1(x).(\vec{G}_2(x) \wedge \overrightarrow{G_3(x)})] \right] dv(x) = \left[\text{Dét}\,(D\Phi\,(x) \right] dv(x)$$

$$= |J(x)| dv(x)$$

Si l'on pose $G(x) = \text{Dét}(G_{ij}(x)) = \text{Dét} \left[(\partial_j \, \Phi_k(x)^T (\partial_K \Phi_i(x)) \right] = \text{Dét} \left[{}^T D\Phi(x) \circ D\Phi(x) \right]$

alors $G(x) = J^2(x)$ soit encore la relation

A.I.2.2.
-1-

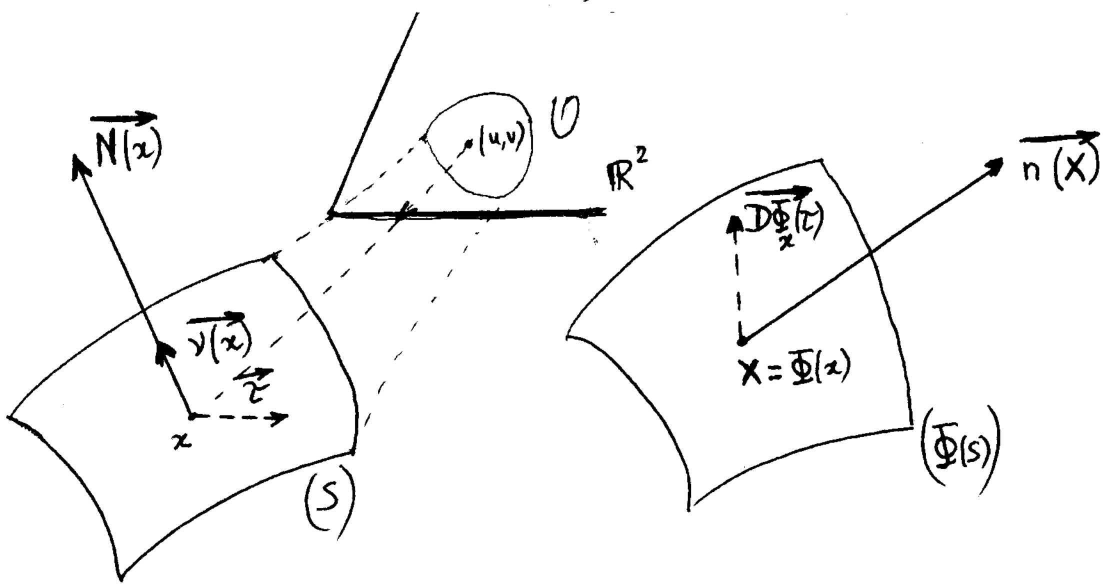
$$\boxed{dV(x) = \sqrt{G(x)}\, dv(x)}$$

Comme Ω et $\Phi\,(\Omega)$ sont munis des coordonnées curvilignes (ξ^i) on a également

A.I.2.2.	$dv(x) = j(\xi)\, d\nu\,(\xi)$ (avec $j^2(\xi) = \text{dét}\,(g_{ij}) = g(\xi)$)
-2-	$dV(x) = \sqrt{G(x)\, g(\xi)}\, d\nu\,(\xi)$

3) *Calcul de l'élément de surface déformée*

Soit (S) une surface de R^3, difféomorphe à un ouvert de R^2, telle qu'en tout point x de (S) existe un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N(x)}$.



Si $d\sigma(x)$ désigne la mesure induite sur (S) par la mesure de Lebesgue de R^3 on a :

Si $x = x(u,v) = x_i\ (u,v)\ \vec{e}_i$ appartient à (S) ($(u,v) \in$ O ouvert de R^2 auquel (S) est difféomorphe).

$$\boxed{\overrightarrow{N(x)}\ d\sigma\ (x) = (\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial v})\ du\ dv} \qquad \text{sur } \Omega$$

et en $X = \Phi(x)$ appartenant à $\Phi(S)$ munie du vecteur unitaire normal $\overrightarrow{n(X)}$ et de la mesure induite $d\Sigma\ (X)$.

$$\boxed{\overrightarrow{n(X)}\ d\Sigma\ (X) = (\frac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial v})\ du\ dv}$$

$$\text{Or}\ : \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial u}\ \vec{e}_i \qquad \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{x}_j}{\partial v}\ \vec{e}_j$$

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u} = \frac{\partial x_i}{\partial u}\ \vec{G}_i \qquad \text{de même} \quad \frac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial v} = \frac{\partial x_j}{\partial v}\ \vec{G}_j$$

Soit :

A.I.2.3.
-1-

$$\boxed{\begin{aligned}
&\vec{N}(x)\ d\sigma(x) = (\varepsilon_{pij}\ \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v})\ \vec{e}_p\ du\ dv = N_p\ d\sigma(x)\ \vec{e}_p \\
&\overrightarrow{n(X)}\ d\Sigma\ (X) = (\vec{G}_i \wedge \vec{G}_j)\ \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v}\ du\ dv \quad \text{ou encore} \\
&n_k\ d\Sigma(X)\ \vec{e}_k = \vec{e}_k\ (\varepsilon_{k\ell m}\ \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v})\ du\ dv
\end{aligned}}$$

Compte tenu de l'identité

ε_{ijp} Dét $\left[D\Phi(x) \right] = \varepsilon_{k\ell m} \dfrac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_i} \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_j} \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_p}$ et en multipliant les deux membres de la 3e équation A.I.2.3-1- par $\dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_p}$ on obtient

$n_k \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_p} d\Sigma(X) = \varepsilon_{ijp}$ dét $(D\Phi(x)) \dfrac{\partial x_i}{\partial u} \dfrac{\partial x_j}{\partial v}$ du dv ; soit en utilisant la première équation de A.I.2.3-1-

A.I.2.3.
\- 2 -

$$\boxed{n_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_p} d\Sigma\ (X) = \text{dét}\ (D\Phi\ (x))\ N_p\ d\sigma(x) = \nu_p\ d\Sigma\ (X)}$$

A ce stade, il est utile d'introduire le vecteur

I.2.3.
\- 3 -

$$\boxed{\overrightarrow{\nu(x)} = \nu_p\ \vec{e}_p = n_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_p}\ \vec{e}_p = {}^{T}D\Phi(x)(\overrightarrow{n(x)})}$$

qui est normal à (S) en x

En effet désignons par $\vec{\tau}$ un vecteur de l'espace tangent en x à (S) on a donc :

$(\overrightarrow{v(x)}.\vec{\tau}) = ({}^{T} D\Phi(x)(\overrightarrow{n(X)}).\vec{\tau}\ ) = (\overrightarrow{n(X)}.D\Phi_x(\vec{\tau})\ )$.

Or $D\Phi_x(\vec{\tau})$ est un vecteur de l'espace tangent en $X = \Phi(x)$ à $\Phi(S)$ et $\overrightarrow{n(X)}$ est le vecteur unitaire normal en X à Φ (S). Ces deux vecteurs étant orthogonaux, on obtient $(\overrightarrow{\nu(x)}.\vec{\tau}) = 0$ et $\overrightarrow{\nu\ (x)}$ apparait donc comme un vecteur normal en $X = \Phi\ (x)$ à Φ (S).

$\overrightarrow{\nu\ (x)}$ et N(x) étant colinéaires et vu que Φ conserve l'orientation les vecteurs $\overrightarrow{\nu(x)}$ et $\overrightarrow{N(x)}$ ont même sens. Soit

$$\boxed{\overrightarrow{N(x)} = \frac{\overrightarrow{\nu(x)}}{||\overrightarrow{\nu(x)}||}}$$

D'autre part d'après A.I.2.3-2-

$$\vec{\nu}(x)\ d\Sigma\ (X) = \text{Dét}\ [D\ \Phi_{(x)}]\ \vec{N}(x)\ d\sigma(x) = \text{Dét}\ [D\Phi(x)]\ \frac{d\sigma_{(x)}}{||\overrightarrow{\nu(x)}||}\ \overrightarrow{\nu(x)}$$

Soit

$$\boxed{d\Sigma(X) = \frac{\sqrt{G(x)}}{||\overrightarrow{\nu(x)}||}\ d\sigma(x)}$$

4) *Conservation de la masse - Variation de la densité*

On rappelle les résultats suivants :

Pour tout x de Ω , l'élément de volume "déformé" $dV(x)$ au point $X = \Phi(x,t)$ de $\Phi(\Omega,t)$ se déduit de l'élément de volume $dv(x)$ par :

$$dV(x) = |\ \vec{G}_1(x).(\overrightarrow{G_2(x)}\ \Lambda\ \overrightarrow{G_3(x)}|\ dv(x)$$

$$dV(x) = |\text{Dét}\ (D\Phi\ (x))|\ dv(x) = |J(x)|\ dv(x)$$

Si l'on pose

A.I.2.4. -1-

$$G_{ij}(x) = (\overrightarrow{G_i(x)}.\overrightarrow{G_j(x)}) = (\partial_i\ \Phi_j(x)\ \vec{e}_j.\partial_j\ \Phi_k(x)\ \vec{e}_k)$$

Soit :

$$G_{ij}(x) = \overrightarrow{G_i(x)}.\overrightarrow{G_j(x)} = \partial_i\ \Phi_k(x)\ \partial_j\ \Phi_k(x)$$ on a :

A.I.2.4. -2-

$$G(x) = \text{Dét}(G_{ij}(x)) = \text{Dét}\left[(\partial_j\,.\Phi_k(x))\ {}^t(\partial_k\ \Phi_i(x)\right] = \text{Dét}\left[{}^tD\Phi(x).D\Phi(x)\right]$$

Soit

$$\boxed{G(x) = J^2(x)}$$ d'où la relation

A.I.2.4. -3-

$$\boxed{dV(x) = \sqrt{G(x)}\ dv(x)}$$

Soit alors $\rho_o(x)$ la densité volumique de masse au point x de Ω et $\rho(x,t)$ la densité de masse au point $X = \Phi(x,t)$ de $\Phi(\Omega,t)$. La loi de conservation de la masse d'un volume v_o de Ω que l'on suit dans la déformation s'écrit, en variables de Lagrange :

$$\forall v_o \subset \Omega : \int_{v_o} \rho_o(x)\, dv(x) = \int_{\Phi(v_o)} \rho(x,t)\, dV(x) = \int_{v_o} \rho\,(x,t)\, \sqrt{G(x)}\, dv(x)$$

D'où ponctuellement :

A.1.2.4.
-4-

$$\boxed{\rho\,(x,t) \quad \sqrt{G(x)} = \rho_o(x)}$$

Remarque I.2. Si l'on avait utilisé les variables d' Euler, on aurait été amené à traduire la loi de conservation de la masse par : $\forall v \subset \Omega$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\Phi(v,t)} \rho(X,t)\, dv(X)\right] = 0$$ Soit en tenant compte de l'application Φ

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{v} \rho\left[\Phi(x),t\right].J(x,t)\, dv(x)\right] = 0$$ ou encore

$$\int_{v} \left[(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial X_i}\ \frac{d}{dt}\,\Phi_i(x,t)\ J(x,t) + \rho\ (\Phi(x),t)\ \frac{d}{dt}\, J(x,t)\right]\ dv(x) = 0$$

Calcul intermédiaire de $\frac{d}{dt}\, J(x,t)$

$$J(x,t) = \text{Dét}(D\Phi\ (x)) = \left|\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}\,(x)\right| = \left|\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_i}(x)\right|$$
$$= \text{Dét}({}^tD\Phi\ (x))$$

Tout d'abord du fait que $x_i = \Phi_i(x,0)$ les x_i ne dépendent pas du temps donc lorsqu'on explicite le calcul de $\frac{d}{dt}\, J(x,t)$ il vient :

$$\frac{d}{dt}\,J(x,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\,(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}) & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial t}\,(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2}) & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial t}\,(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}) & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t}\,(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}) & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial t}\,(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}) & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial t}\,(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}) & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3}\right) \end{vmatrix}$$

en utilisant le fait que $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial t}\right)$

et en posant $U_j = \frac{\partial\Phi_j}{\partial t}(x,t)$

on obtient :

$$\frac{d}{dt} J(x,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} & \frac{\partial\ {}_2}{\partial x_3} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

Soit en notation abrégée :

$$\frac{d}{dt} J(x,t) = \frac{D(U_1,\Phi_2,\Phi_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} + \frac{D(\Phi_1,U_2,\Phi_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} + \frac{D(\Phi_1,\Phi_2,U_3)}{D(x_1,x_2,x_3)}$$

or $\frac{D(U_1,\Phi_2,\Phi_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} = \frac{D(U_1,\Phi_2,\Phi_3)}{D(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)} \times \frac{D(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} = \frac{D(U_1,\Phi_2,\Phi_3)}{D(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)}\ J(x,t)$

De plus

$\frac{D(U_1,\Phi_2,\Phi_3)}{D(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial\Phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial U_1}{\partial\Phi_1} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1}$ (de même pour les deux autres déterminants).

Finalement $\boxed{\frac{d}{dt} J(x,t) = \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3}\right) J(x,t) = \mathrm{div}_X\,(\vec{U}).J(x,t)}$

avec $\vec{U} = U_i\ \vec{e}_i$

En reportant dans l'identité précédente :

$$\int_v \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial X_i}\frac{d}{dt}\Phi_i(x,t) + \rho(X,t)\,\mathrm{div}_X(\vec{U})\right] J(x,t) \quad dv(x) = 0$$

Soit encore en revenant à Φ (v)

$$\int_{\Phi(v)} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Phi_i(x,t) + \rho(X,t)\,\mathrm{div}_X\,(\vec{U})\right] dv(x) = 0$$

$$\int_{\Phi(v)} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial X_i}U_i + \rho(X,t)\,\mathrm{div}_X(\vec{U})\right] dv(x) = 0 \quad \text{or } \frac{\partial\rho}{\partial X_i}U_i = \overrightarrow{\mathrm{grad}_X}\,\rho\,(X,t).\vec{U}$$

$$\int_{\Phi(v)} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}_X}\,\rho(X,t).\vec{U} + \rho(X,t)\,\mathrm{div}_X(\vec{U})\right] dv(x) = 0$$

ce qui donne finalement puisque l'intégrale ci-dessus a été écrite pour tout volume de v de Ω

A.I.2.4.
-5-

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}_X\,(\rho\vec{U}) = 0}$$

II - TENSEUR DES DEFORMATIONS

1 En I.1.2. on a introduit le vecteur déplacement du point x de Ω

A.II.1.1. $\boxed{\vec{u}(x,t) = u_i(x,t)\,\vec{e}_i = U^j(\xi)\,\overrightarrow{g_j(x)}}$ $1 \leq j \leq 3;\ 1 \leq K \leq 3$

On a donc l'égalité (vu que $\overrightarrow{g_j(x)} = \dfrac{\partial\psi_i}{\partial\xi_j}\vec{e}_i$)

A.II.1.2. $\boxed{u_k(x) = \dfrac{\partial\psi_k}{\partial\xi_j}U^j(\xi)}$; $x = \psi\,(\xi)$; $\boxed{U^j(\xi) = \dfrac{\partial\xi^j}{\partial\psi_k}\,(u_k \circ \psi)\,(\xi)}$

Sur Ω, en vertu de A.I.1.2. si l'on utilise les données cartésiennes (x_1, x_2, x_3) puisque $\Phi_k(x)\ \vec{e}_k = x_k\ \vec{e}_k + u_k\ \vec{e}_k$ on obtient :

$\overrightarrow{G_i(x)} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}\ \vec{e}_k = (\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i})\vec{e}_k$ soit en notation abrégée $\partial_i\ \Phi_k = \delta_{ik} + \delta_i\ u_k$

A.II.1.3. et $G_{ij}(x) = (\overrightarrow{G_i(x)} . \overrightarrow{G_j(x)}) = (\delta_{ik} + \delta_i u_k)\vec{e}_k . (\delta_{j\ell} + \delta_j u_\ell)\vec{e}_\ell = (\delta_{ik} + \delta_i u_k)(\delta_{jk} + \delta_j u_k)$

$$\boxed{G_{ij}(x) = \delta_{ij} + \partial_i\ u_j + \partial_j\ u_i + \partial_i\ u_k\ .\ \partial_j\ u_k}$$

Si l'on tient compte des coordonnées curvilignes (ξ^i) A.I.1.2. s'écrit :

A.II.1.4. $X = (\Phi o \psi)(\xi) = \psi(\xi) + U^j(\xi)\ \overrightarrow{g_j(x)}$ d'où en introduisant *les symboles de Christoffel* Γ^k_{ij} par

A.II.1.5. $\frac{\partial \vec{g}_j}{\partial \xi^i} = \Gamma^k_{ij}\ \vec{g}_k$ où $\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial^2 \psi_\ell}{\partial \xi^i\ \partial \xi^j} - \frac{\partial \xi^k}{\partial \psi^\ell} = \Gamma^k_{ji}$

$$\overrightarrow{G_i(X)} = \frac{\partial}{\partial \xi^i}\ (\Phi o \psi)_j(\xi)\vec{e}_j = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi^i}\ \psi_j(\xi)\vec{e}_j + \frac{\partial U^k(\xi)}{\partial \xi^i}}\ \vec{g}_k(x) + U^j(\xi)\ \Gamma^k_{ij}\ \vec{g}_k(x)$$

$$\overrightarrow{G_i(X)} = \overrightarrow{g_i(x)} + (\frac{\partial U^k}{\partial \xi^i} + \Gamma^k_{ij}\ U^j)\overrightarrow{g_k(x)}$$

D'où

A.II.1.6. $\overrightarrow{G_i(X)} = \overrightarrow{g_i(x)} + (D_i\ \vec{u})^k\ \vec{g}_k$ où

A.II.1.7. $\boxed{D_i\ \vec{u} = (D_i\ \vec{u})^k\ \vec{g}_k\ ;\ (D_i\ \vec{u})^k = \frac{\partial U^k}{\partial \xi^i} + \Gamma^k_{ij}\ U^j}$

2 - TENSEUR DES DEFORMATIONS

La déformation de Ω en Φ (Ω) se traduit par le fait que la distance de deux points x, y de Ω est différente de celle de leurs images $\Phi(x)$, Φ (y) dans Φ (Ω). Au lieu d'étudier la fonction $||\Phi(y)-\Phi(x)||-||y-x||$ pour tout (x,y) de $\bar{\Omega}^2$ il semble plus aisé d'étudier l'application Φ au voisinage de tout point x de Ω c'est-à-dire d'étudier l'"écart" de l'application linéaire tangente $D\Phi(x)$, élément de L $(T_x, T_{\Phi(x)})$, à une isométrie (ou application linéaire orthogonale).

En effet, si Φ $(x,t) = c(t) + Q(t).x$ avec $Q(t)^t\, Q(t) = II_{\vec{E}_3}$ alors D_t Φ $(x) = Q(t)$ est une isométrie.

<u>REMARQUE I.3</u>. Il est intéressant de se préoccuper du problème réciproque suivant : dans quelle mesure, si $D_\Phi(x)$ est orthogonale en tout point x de Ω pourra-t-on en conclure que :

$$\Phi\ (x,t) = c(t) + Q(t).x \qquad \text{où}\quad Q(t)\ {}^tQ(t) = I_{\vec{E}_3} \quad ?$$

. La conclusion est immédiate si $D\Phi(x)$ est en fait indépendante de x dans Ω. Dans le cas où $D_\Phi(x)$ est orthogonale pour tout x de Ω(mais dépend à priori du point x de Ω considéré), pour qu'il n'y ait pas de déformation, c'est à dire pour que l'on puisse écrire :

$$\Phi(x,t) = c(t) + Q(t).x \qquad \text{où}\quad Q(t)^t\ Q(t) = I_{\vec{E}_3}$$

il faut et il suffit que les fonctions $\Phi_i (1 \leq i \leq 3)$ définies par : $X = \Phi\ (x) = X_i\ \vec{e}_i = \Phi_i(x)\ \vec{e}_i$ soient des fonctions linéaires affines de x_1, x_2, x_3 . En d'autres termes cela revient à dire que le tenseur de courbure de Φ (Ω) muni des coordonnées $(x_i)_{i=1,2,3}$ soit nul.

Nous reviendrons sur ce dernier point lors de l'étude d'un paragraphe ultérieur intitulé "Conditions de compatibilité".

Le tenseur des déformations de GREEN-LAGRANGE s'introduit naturellement dès lors que l'on étudie l'écart de $D\Phi$ à une isométrie. On étudie la forme bilinéaire suivante, définie sur $T_x(\Omega)$ par :

II.2.1.

$$\boxed{\begin{array}{l} \gamma_x(\vec{X},\vec{Y}) = \frac{1}{2}\left[(D\Phi_x(X).D\Phi_x(\vec{Y}))-(\vec{X}.\vec{Y})\right] \\ \text{qui est nulle si } D\Phi \text{ est une isométrie} \end{array}} \qquad \begin{array}{c} (\vec{X},\vec{Y}) \in T_x^2(\Omega) \\ x \in \Omega \end{array}$$

Par définition, le tenseur des déformations en x de Ω est le tenseur deux fois covariant, symétrique, défini par la forme bilinéaire A.II.2.1.En effet si $\vec{X} = X^i\,\vec{g}_i(x), \vec{Y} = Y^j\,\vec{g}_{j(x)}$ A II.2.1. s'écrit

$$\gamma_x(\vec{X},\vec{Y}) = \frac{1}{2}\left[(D\Phi_x(X^i\,\vec{g}_{i(x)}).\ D\Phi_x(Y^j\,\vec{g}_j(x)) - (X^i\,\overrightarrow{g_i(x)}.Y^j\,\overrightarrow{g_j(x)}\ )\right]$$

$$= \frac{1}{2} X^i\ Y^j\left[(D\Phi_x(\frac{\partial\psi_k}{\partial\xi^i}\,\vec{e}_k).D\Phi_x(\frac{\partial\psi_\ell}{\partial\xi^j}\,\vec{e}_\ell)) - g_{ij}(\xi)\right]$$

$$= \frac{1}{2} X^i\ Y^j\left[\frac{\partial\psi_k}{\partial\xi^i}\,\frac{\partial\psi_\ell}{\partial\xi^j}\ (D\Phi_x(\vec{e}_k).D\Phi_x(\vec{e}_\ell)) - g_{ij}(\xi)\right]$$

$$= \frac{1}{2} X^i\ Y^j\left[\frac{\partial\psi_k}{\partial\xi^i}\,\frac{\partial\psi_\ell}{\partial\xi^j}\ (\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_k}\,\vec{e}_r.\ \frac{\partial\Phi_s}{\partial x_\ell}\,\vec{e}_s) - g_{ij}(\xi)\right]$$

$$= \frac{1}{2} X^i\ Y^j\left[\frac{\partial\psi_k}{\partial\xi_i}\,\frac{\partial\psi_\ell}{\partial\xi^j}\,\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_k}\,\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_\ell} - g_{ij}(\xi)\right] = \frac{1}{2} X^i\ Y^j\left[\frac{\partial(\Phi o\psi)r}{\partial\xi^i}\ .\ \frac{\partial(\Phi o\psi)r}{\partial\xi^j} - g_{ij}(\xi)\right]$$

$$= \frac{1}{2} X^i Y^j \left[\left(\frac{\partial(\Phi o \psi)}{\partial \xi^i} r \vec{e}_r \cdot \frac{\partial(\Phi o \psi)}{\partial \xi^j} s \vec{e}_s \right) - g_{ij}(\xi) \right]$$

$$= \frac{1}{2} X^i Y^j \left[\left(\overrightarrow{G_i(X)} \cdot \overrightarrow{G_j(X)} \right) - g_{ij}(\xi) \right].$$ D'où

A.II.2.2. $\boxed{\gamma(\vec{X},\vec{Y}) = \frac{1}{2} \left[G_{ij}(\xi) - g_{ij}(\xi) \right] X^i Y^j}$ soit, si l'on

introduit la base $\{\vec{g}^i\}$ contravariante associée à la base covariante $\{\vec{g}_i\}$ c'est-à-dire telle que

A.II.2.3. $$\vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = \delta^i_j$$

et que l'on définit la forme bilinéaire $\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j$ par

A.II.2.4. $$\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j (\vec{X},\vec{Y}) = X^i Y^j$$

le tenseur γ s'écrit alors

A.II.2.5. $\boxed{\gamma = \gamma_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j}$ où compte tenu de A.II.1.6 et A.II.1.7

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left((\vec{g}_i + (D_i \vec{u})^k \vec{g}_k) \cdot (\vec{g}_j + (D_j \vec{u})^\ell \vec{g}_\ell) \right) - (\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j) \right]$$ soit encore

A.II.2.6.

$$\boxed{\gamma_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left[g_{i\ell}(D_j \vec{u}) + g_{jk}(D_i \vec{u})^k + g_{k\ell}(D_i \vec{u})^k (D_j \vec{u})^\ell \right]}$$

<u>REMARQUE A.I.3</u> Si les coordonnées (ξ^i) sont <u>*orthogonales*</u>, c'est-à-dire si $g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, A.II.2.6 s'écrit :

A.II.2.7.

$$\boxed{\gamma_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left[\|\vec{g}_i\|^2 (D_j\ \vec{u})^i + \|\vec{g}_j\|^2 (D_i\ \vec{u})^j + \sum_{k=1}^{3} \|\vec{g}_k\|^2 (D_i\ \vec{u})^k (D_j\ \vec{u})^k\right]}$$

(formule où l'on a utilisé le symbole Σ au lieu de la convention d'Einstein pour souligner le fait qu'il n'y a pas sommation sur i et j).

<u>*DANS LE CAS DE LA COQUE CYLINDRIQUE I.3.*</u>, on a

A.II.2.8. $\vec{g}_1 = \vec{e}_1 \cos \xi^2 + \vec{e}_2 \sin \xi^2$, $\vec{g}_2 = \xi^1(-\vec{e}_1 \sin \xi^2 + \vec{e}_2 \cos \xi^2)$;

$\vec{g}_3 = \vec{e}_3$ les coordonnées curvilignes (ξ^i) sont orthogonales,

$\|\vec{g}_1\|^2 = \|\vec{g}_3\|^2 = 1$, $\|\vec{g}_2\|^2 = (\xi^1)^2$ or

A.II.2.9. $$\frac{\partial \vec{g}_1}{\partial \xi^1} = \vec{0}\ ,\quad \frac{\partial \vec{g}_1}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\xi^1}\vec{g}_2\ ;\quad \frac{\partial \vec{g}_1}{\partial \xi^3} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \vec{g}_2}{\partial \xi^1} = \frac{\vec{g}_2}{\xi^1}\quad \frac{\partial \vec{g}_2}{\partial \xi^2} = -\ \xi^1\ \vec{g}_1\ ;\quad \frac{\partial \vec{g}_2}{\partial \xi^3} = \vec{0}\ ;\quad \frac{\partial \vec{g}_3}{\partial \xi^1} = \frac{\partial \vec{g}_3}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \vec{g}_3}{\partial \xi^3} = \vec{0}$$

A.II.2.10. Ainsi les seuls Γ^k_{ij} non nuls sont $\boxed{\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{\xi^1} \quad \text{et} \quad \Gamma^1_{22} = -\ \xi^1}$

D'où l'on déduit (en posant $\xi^1 = r$, $\xi^2 = \theta$, $\xi^3 = z$ comme de coutume)

$$\gamma_{11} = \gamma_{rr} = \frac{\partial U^r}{\partial r} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U^r}{\partial r}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial U^\theta}{\partial r} + \frac{U^\theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial U^z}{\partial r}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{22} = \gamma_{\theta\theta} = r^2\left(\frac{\partial U^\theta}{\partial \theta} + \frac{U^r}{r}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U^r}{\partial \theta} - r\,U^\theta\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial U^\theta}{\partial \theta} + \frac{U^r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial U^z}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{33} = \gamma_{zz} = \frac{\partial U^z}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U^r}{\partial z}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial U^\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U^z}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta r} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U^r}{\partial \theta} - r\,U^\theta + r^2\left(\frac{\partial U^\theta}{\partial r} + \frac{U^\theta}{r}\right) + \frac{\partial U^r}{\partial r}\left(\frac{\partial U^r}{\partial \theta} - r\,U^\theta\right) + \right.$$

$$\left. r^2\left(\frac{\partial U^\theta}{\partial r} + \frac{U^\theta}{r}\right)\left(\frac{\partial U^\theta}{\partial \theta} + \frac{U^r}{r}\right) + \frac{\partial U^z}{\partial r}\,\frac{\partial U^z}{\partial \theta}\right]$$

A.II.2.11.

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = \gamma_{\theta z} = \gamma_{z\theta} = \frac{1}{2}\left[r^2\,\frac{\partial U^\theta}{\partial z} + \frac{\partial U^z}{\partial \theta} + \frac{\partial U^r}{\partial z}\left(\frac{\partial U^r}{\partial \theta} - r\,U^\theta\right) + r^2\,\frac{\partial U^\theta}{\partial z}\left(\frac{\partial U^\theta}{\partial \theta} + \frac{U^r}{r}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial U^z}{\partial \theta}\,\frac{\partial U^z}{\partial z}\right]$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{rz} = \gamma_{zr} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U^r}{\partial z} + \frac{\partial U^z}{\partial r} + \frac{\partial U^r}{\partial r}\,\frac{\partial U^r}{\partial z} + r^2\left(\frac{\partial U^\theta}{\partial r} + \frac{U^\theta}{r}\right)\frac{\partial U^\theta}{\partial z} + \frac{\partial U^z}{\partial r}\,\frac{\partial U^z}{\partial z}\right]$$

en ayant préalablement calculé les quantités

$$(D_1 \vec{u})^1 = \frac{\partial U^1}{\partial \xi^1} \qquad (D_1 \vec{u})^2 = \frac{\partial U^2}{\partial \xi^1} + \frac{U^2}{\xi^1} \qquad (D_1 \vec{u})^3 = \frac{\partial U^3}{\partial \xi^1}$$

$$(D_2 \vec{u})^1 = \frac{U^1}{\partial \xi^2} - \xi^1 U^2 \qquad (D_2 \vec{u})^2 = \frac{\partial U^2}{\partial \xi^2} + \frac{U_1}{\xi^1} \qquad (D_2 \vec{u})^3 = \frac{\partial U^3}{\partial \xi^2}$$

$$(D_3 \vec{u})^1 = \frac{\partial U^1}{\partial \xi^3} \qquad (D_3 \vec{u})^2 = \frac{\partial U^2}{\partial \xi^3} \qquad (D_3 \vec{u})^3 = \frac{\partial U^3}{\partial \xi^3}$$

3 - D'APRES A.II.2.6 on a :

A.II.3.1. $$\boxed{\gamma_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left[(\vec{g}_i, D_j \vec{u}) + (\vec{g}_j, D_i \vec{u}) + (D_i \vec{u}, D_j \vec{u})\right]}$$

ce qui n'est autre que la représentation, dans la base $\{\vec{g}_i\}$, du tenseur :

A.II.3.2. $$\boxed{\gamma(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left[(I_{\vec{E}_3} + {}^{T}\mathrm{Grad}\, \vec{u}) \circ (I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}\, \vec{u}) - I_{\vec{E}_3}\right]}$$

(le symbole ^{T} désignant la transposition).

Le tenseur γ défini par l'intermédiaire de la formule II.3.2 apparait en fait comme une application de l'ensemble des endomorphismes de $\vec{E}_3$, dans celui des endomorphismes symétriques de $\vec{E}_3$. En effet γ dépend de $\mathrm{Grad}_x \vec{u}$ qui, dans la base $(\vec{e}_i)$ par exemple, est représenté par la matrice de terme général $(\frac{\partial u_i}{\partial x_j})$, élément de $M_3(R)$ (espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels), alors que $\gamma(\vec{u})$ est représenté par la matrice de terme général

$$(\gamma_{ij}(\vec{u})) = \frac{1}{2}\left[\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k\right]$$, élément de $M_3^{\mathrm{Sym}}(R)$

(espace vectoriel des matrices carrées réelles, d'ordre 3, symétriques).

Définition : On appelle déplacement rigide superposé à la configuration $\Phi(\Omega)$ (ou au champ de déplacement $\vec{u}$), un champ de déplacement $\vec{u}^*$ défini sur $\Phi(\Omega)$ tel que :

A.II.3.3. $\boxed{x + \vec{u} + \vec{u}^* = \tilde{X} = c + R.\Phi(x) = c = RX}$ avec $X = x + \vec{u}$

où . R est un endomorphisme orthogonal de E_3 $({}^tR.R = I\!I_{\vec{E}_3})$ et

. C ainsi que R sont indépendants de x dans Ω .

On peut encore écrire :

A.II.3.4.

$$\boxed{\vec{u}^* = c + R(x + \vec{u}) - (x + \vec{u}) = c + (R - I_{\vec{E}_3})(x + \vec{u}) = c + (R - I_{\vec{E}_3})\, X}$$

Propriété : Le tenseur $\gamma\,(\vec{u})$ n'est pas changé si l'on superpose à $\vec{u}$ un déplacement rigide.

En effet soit $\vec{u}^*$ un déplacement rigide superposé à $\vec{u}$ c'est-à-dire tel que $x + \vec{u} + \vec{u}^* = c + R(x + \vec{u})$. D'où $I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x(\vec{u} + \vec{u}^*) = R(I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x\, \vec{u})$.

En reportant cette dernière égalité dans A.II.3.2 on obtient :

$$\gamma_x(\vec{u} + \vec{u}^*) = \frac{1}{2}\left[(I_{\vec{E}_3} + {}^T\mathrm{Grad}_x(\vec{u} + \vec{u}^*)\ \mathrm{o}\ (I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x(\vec{u} + \vec{u}^*)) - I_{\vec{E}_3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(I_{E_3} + {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u})\mathrm{o}\ \underbrace{{}^t\bar{R}\ \mathrm{o}\ R\ \mathrm{o}}_{I_{E_3}}\ (I_{E_3} + \mathrm{Grad}\ \vec{u})\right.$$

Soit :

$$\boxed{\gamma\ (\vec{u} + \vec{u}^*) = \gamma(\vec{u})}$$

Propriété : L'application γ : $M_3(R) \xrightarrow{\gamma} M_3^{sym}(R)$ n'est pas une application

$$\mathrm{Grad}_x\ \vec{u} \xrightarrow{\gamma} \gamma_x(u)$$

linéaire, mais elle est *différentiable* : En effet si l'on calcule $\gamma(\vec{u} + \vec{u}^*) - \gamma(\vec{u})$ on obtient :

$$\gamma_x(\vec{u}+\vec{u}^*) - \gamma_x(\vec{u}) = \frac{1}{2}\Big[(I_{E_3} + {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u} + {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*)\mathrm{o}(I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*)$$

$$- (I_{\vec{E}_3} + {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u})\ \mathrm{o}\ (I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u})\Big]$$

$$\gamma_x(\vec{u} + \vec{u}^*) - \gamma_x(\vec{u}) = \frac{1}{2}\Big[{}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*\mathrm{o}(I_{E_3} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u}) + (I_{\vec{E}_3} + {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u})\mathrm{o}\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*\Big]$$

$$\boxed{+ \frac{1}{2}\ {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*\ \mathrm{o}\ \mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*}$$

En remarquant que la quantité

$$\frac{1}{2}\Big[{}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*\ \mathrm{o}(I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u}) + (I_{\vec{E}_3} + {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u})\mathrm{o}\ \mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*)\Big]$$

est linéaire en u^*, c'est-à-dire également en $\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*$ on a donc :

$$\boxed{\gamma_x(\vec{u} + \vec{u}^*) - \gamma_x(\vec{u}) = D\ \gamma_{\vec{u}}(\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*) + \frac{1}{2}\ {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*\ \mathrm{o}\ \mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*}$$

où $D\gamma_{\vec{u}}\ (\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*)$ est définie par :

$$D\gamma_{\vec{u}}(\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*) = \frac{1}{2}\Big[{}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*\ \mathrm{o}(I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u}) + (I_{\vec{E}_3} + {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u})\mathrm{o}\ \mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*)\Big]$$

ou encore

$$D\gamma_{\vec{u}}(\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*) = \text{partie symétrique de } {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^* \circ (I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u})$$

(en abrégé SYM $\left[{}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^* \circ (I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u})\right]$)

or d'après I.1.2. $\Phi\ (x,t) = x + \vec{u}(x,t)$ on peut écrire :

$D\ \Phi_x = I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u}$ soit enfin :

$D\gamma_{\vec{u}}(\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*) = \frac{1}{2}\left[{}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^* \circ D\Phi_{(x)} + {}^T D\Phi_{(x)} \circ \mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*\right]$ mais comme

$X = \Phi(x)$ et $\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^* = \mathrm{Grad}_X\ \vec{u}^* \circ D\Phi(x)$ l'écriture finale de $D\gamma_{\vec{u}}(\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*)$

sera :

A.II.3.5.

$$D\gamma_{\vec{u}}(\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*) = \mathrm{SYM}\left[{}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^* \circ (I_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u})\right]$$

$$= {}^T D\Phi(x) \circ \frac{1}{2}\left[\mathrm{Grad}_X\ \vec{u}^* + {}^T\mathrm{Grad}_X\ \vec{u}^*\right] \circ D\Phi(x)$$

où $X = \Phi(x)$ et $\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^* = \mathrm{Grad}_X\ \vec{u}^* \circ D\Phi(x)$

$D\gamma_{\vec{u}} \in L(M_3(R);\ M_3^{sym}(R)$; son noyau est caractérisé par :

A.II.3.6. $\mathrm{Ker}(D\gamma_{\vec{u}}) = \{\vec{u}^* : \Phi\ (\Omega) \to R^3\ /\ \mathrm{Grad}_X\ \vec{u}^* \text{ antisymétrique }\}$

En effet $D\gamma_{\vec{u}}(\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}^*) = 0$ équivaut à $(I_{\vec{E}_3} + {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}) \circ \mathrm{Grad}_x \vec{u}^*$ antisymétrique c'est-à-dire d'après la formule A.II.3.5, $D\Phi(x)$ étant non singulière, à $\mathrm{Grad}_X\ \vec{u}^*$ antisymétrique.

$$\boxed{\text{Or } \mathrm{Grad}_X\, u^* \text{ antisymétrique} \iff \varepsilon_{ijX}(\vec{u}^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial X_i}\right) = 0 \quad \forall\, (i,j) \in \{1,2,3\}^2 \subset N^2}$$

On a donc, si $\Phi\ (\Omega)$ est simplement connexe

$$\boxed{\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial X_j\, \partial X_k} = \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial X_k\, \partial X_j} = -\frac{\partial^2 u_j^*}{\partial X_k \partial X_i} = -\frac{\partial^2 u_j^*}{\partial X_i\, \partial X_k} = -\frac{\partial \varepsilon_{X\,jk}(\vec{u}^*)}{\partial X_i} - \frac{\partial \varepsilon_X ij(\vec{\ }^*)}{\partial X_k} + \frac{\partial \varepsilon_X ik(u^*)}{\partial X_j} = 0 \quad \forall\, (i,j,k) \in \{1,2,3\}^3 \subset N^3}$$

D'où $\frac{\partial u_i^*}{\partial X_j} = a_{ij} (= -\ a_{ji} = -\frac{\partial u_j^*}{\partial X_i})$ avec a_{ij} réel et indépendant de X (donc de x dans Ω). Ainsi $\mathrm{Grad}_X\ \vec{u}^* = A$ avec : A antisymétrique et indépendante de X (i.e de x) d'où

$$\boxed{\vec{u}^*(X) = \vec{c} + AX \ (\vec{c} \text{ indépendant de x dans } \Omega\ )}$$

<u>*Définition*</u> : <u>*On appelle déplacement rigide infinitésimal superposé à $\Phi(\Omega)$ un déplacement*</u>

A.II.3.7. $\quad \vec{u}^*$ *de la forme* : $\boxed{\vec{u}^* = \vec{c} + A.X = \vec{c} + A\ (x + \vec{u})}$

<u>*où $\vec{c}$ et A antisymétrique sont indépendants de X (donc de $x \in \Omega$).*</u>

On désigne par R_u la variété affine des déplacements rigides infinitésimaux superposés à la configuration $\Phi(\Omega)$ c'est-à-dire

A.II.3.8. $\boxed{\mathcal{R}_u = \{\vec{u}^* = \vec{c} + A(x + \vec{u}) \;/\; \begin{matrix} A = -{}^{T}A \\ c \text{ et } A \text{ indépendant de } x \end{matrix}\}}$

Il résulte alors de A.II.3.5 et A.II.3.6 que

A.II.3.9. $\boxed{\vec{u}^* \in \mathcal{R}_u \iff D_{\gamma_{\vec{u}}}(\mathrm{Grad}_x\, \vec{u}^*) = 0}$

Remarques I.4.

. Les déplacements rigides infinitésimaux superposés à $\Phi\,(\Omega)$ donnés par A.II.3.7 s'introduisent dans *l'hypothèse dite des "petites perturbations"* (H.P.P.) où la matrice R définie en II.3.3 peut s'écrire :

A.II.3.10 $\boxed{R = I_{\vec{E}_3} + A + 0(||A||^2)}$ (avec par exemple comme norme sur $M_{33}(\mathbb{R})$ $||A||^2 = \mathrm{Trace}\,({}^{T}A\circ A)$ et où on néglige les termes d'ordre au moins 2 en $||A||$. Alors

$$ {}^{t}R\circ R = \left[0_1(||A||^2) + {}^{T}A + I_{\vec{E}_3}\right] \circ \left[I_{\vec{E}_3} + A + 0_2(||A||^2)\right] = {}^{T}A + I_{\vec{E}_3} + {}^{T}A\circ A + A + 0_3(||A||^2) $$

or ${}^{T}A \circ A = 0_4(||A||^2)$ d'où finalement :

$$ \boxed{{}^{T}R \circ R = I_{\vec{E}_3} + {}^{T}A \circ A + 0_5(||A||^2)} $$

R sera bien orthogonale (${}^{T}R \circ R = I_{\vec{E}_3}$) à $0(||A||^2)$ près si et seulement si ${}^{T}A + A = 0_{\vec{E}_3}$ c'est-à-dire A est antisymétrique.

.. Si l'on désigne par $\Omega_x(\vec{u})$ et $E_x(\vec{u})$ respectivement les parties symétrique et antisymétrique de $\mathrm{Grad}_x\,\vec{u}$

$$ E_x(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Grad}_x\,\vec{u} + {}^{T}\mathrm{Grad}_x\,\vec{u}\right] \qquad \Omega_x(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Grad}_x\,\vec{u} - {}^{T}\mathrm{Grad}_x\,\vec{u}\right] $$

$E_x(\vec{u})$ (respectivement $\Omega_x(\vec{u})$) est un endomorphisme symétrique (respectivement antisymétrique) de $\vec{E}_3$

$$\mathrm{Grad}_x\ \vec{u} = E_x(\vec{u}) + \Omega_x(\vec{u})$$

On sait qu'il existe un isomorphisme de l'espace vectoriel $\vec{E}_3$ sur l'espace vectoriel $L^a(\vec{E}_3,\vec{E}_3)$ des endomorphismes antisymétriques de $\vec{E}_3$, noté i tel que :

$\vec{E}_3 \xrightarrow{i} L^a(\vec{E}_3, \vec{E}_3)$ $\quad$ $\vec{E}_3$ étant rapporté à la base orthonormée

$\vec{\omega} \xrightarrow{i} \Omega$ $\quad$ directe $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{i} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$: matrice représentative de Ω dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

A.II.3.11.

c'est-à-dire défini par :

$$\forall\ \vec{v} \in \vec{E}_3 \qquad \Omega(\vec{v}) = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = i(\vec{\omega})\ [\vec{v}] = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

On a : $$\Omega_x(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Grad}_x\ \vec{u} - {}^T\mathrm{Grad}_x \cdot \vec{u}\right] = \frac{1}{2}\ i\ (\overrightarrow{\mathrm{Rot}_x \vec{u}})$$

A.II.3.12. *Par définition*

$$\boxed{\vec{\omega}_{(u)} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{\mathrm{Rot}_x\ \vec{u}} \text{ est le vecteur de rotation local}}$$

Ainsi on peut écrire :

A.II.3.13. $$D\Phi(x) = I_{\vec{E}_3} + E_x(\vec{u}) + i\ (\vec{\omega}(\vec{u})) \quad \text{sur} \quad T_x(\Omega)$$

III - CONDITIONS DE COMPATIBILITE

Le tenseur des déformations γ doit vérifier des conditions de compatibilité, pour que l'endomorphisme symétrique $\gamma_x(\vec{u})$ étant donné sur Ω par l'intermédiaire des $\gamma_{ij}(x)$ $(= \gamma_{ji}(x))$, il existe un champ de déplacement $\vec{u}$ sur Ω tel que II.3.2 ait lieu.

1) *Cas linéaire*

Dans le cas "linéarisé" c'est-à-dire sous l'hypothèse que $\mathrm{Grad}_x\, \vec{u}$ est uniformément borné sur $\bar{\Omega}$ par un nombre réel "très petit" $\eta > 0$ (ainsi que $\vec{u}$ quand Ω est borné) et avec la convention qui consiste à négliger systématiquement toutes les quantités d'ordre $\eta^k (k > 1)$, $\gamma_x(\vec{u})$ se réduit à $E_x(\vec{u})$. Le problème est alors de savoir :

A quelle condition sur $E_x(\vec{u})$, existe-t-il un champ de déplacement $\vec{u}(x)$ tel que : $\boxed{2\, E_x(\vec{u}) = \mathrm{Grad}_x\, \vec{u} + {}^{\tau}\mathrm{Grad}_x\, \vec{u}}$?

Pour cela on définit le rotationnel d'un endomorphisme A_x de $\vec{E}_3$ par :

A.III.1.1

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{ROT}\ A \in \mathcal{L}(\vec{E}_3;\vec{E}_3) \text{ tel que } \forall\ \vec{V} \text{ constant dans } \vec{E}_3 : \\ (\mathrm{ROT}\ A_x).\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{Rot}_x\ (A_x.\vec{V})} \end{array}}$$

Désignons par $\left[\overrightarrow{\mathrm{Rot}_x\ (A_x\ \vec{V})}\right]_i$ la $i^{\text{ème}}$ composante sur une base orthonormée directe de $\vec{E}_3$ du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{Rot}_x (A_x.\vec{V})}$; on a :

$$\left[\overrightarrow{\mathrm{Rot}_x (A_x.\vec{V})}\right]_i = \varepsilon_{ijk}\ \partial_j \left[A_x.\vec{V}\right]_k = \varepsilon_{ijk}\ \partial_j (a_{k\ell}(x).V_\ell) = \varepsilon_{ijk}\ \partial_j (a_{k\ell}(x)).\ V_\ell$$

(d'après A.III.1.1) $= \left[\mathrm{ROT}\ A_x\right]_{i\ell} V_\ell$. Comme $\left[{}^{\tau}\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}\right]_{ij} = \partial_i\ u_j$

$$\left[ROT\ {}^{T}Grad_x\ \vec{u}\right]_{i\ell} = \varepsilon_{ijk}\ \partial_j\ \partial_k\ u_\ell = \varepsilon_{ijk}\ (\partial_j\ \partial_k\ u_\ell - \partial_k\ \partial_j\ u_\ell) = 0$$

Soit

A.III.1.2. $$\boxed{ROT\ {}^{T}Grad_x(.) = 0}$$

D'autre part $\left[ROT\ Grad_x\ \vec{u}\right]_{i\ell} = \varepsilon_{ijk}\ \partial_j\ \partial_\ell\ u_k = \partial_\ell(\varepsilon_{ijk}\ \partial_j\ u_k) =$
$\partial_\ell \left[\overrightarrow{Rot_x\ \vec{u}}\right]_i = \left[Grad_x\ \overrightarrow{Rot_x\ \vec{u}}\right]_{i\ell}$. D'où

A.III.1.3. $$\boxed{ROT\ Grad_x(.) = Grad_x(\overrightarrow{Rot_x\ .})}$$

Il résulte alors de l'expression de E(x), de A.III.1.2. et A.III.1.3 que l'on doit avoir

A.III.1.4. $$\boxed{ROT\ o\ {}^{T}ROT\ E(x) = 0}$$

C'est la condition de compatibilité cherchée.

Pour ne pas avoir à faire intervenir le théorème de Poincaré sur les formes différentielles, on vérifiera réciproquement que, pour tout x de Ω , l'intégrale curviligne $\vec{u}(x) = \int_{x_o}^{x} U(y,x)d\vec{y} = \int_{x_o}^{x} U(y,x)(\frac{dy_j}{ds}\ \vec{e}_j)\ ds =$ $\int_{x_o}^{x} U_{ij}(y,x)\ dy.\vec{e}_i = \int_{x_o}^{x} U_{ij}(y,x)\ \frac{dy_j}{ds}\ \vec{e}_i\ ds$ où $U_{ij}(y,x)$ est le terme général de la matrice carrée d'ordre 3 U(y,x) définit, compte tenu de A.III.1.4, le vecteur $\vec{u}$ à un déplacement infinitésimal près; les termes $U_{ij}(y,x)$ étant définis par l'expression suivante :

$$\boxed{U_{ij}(y,x) = \varepsilon_{ij}(y) + (x_k - y_k)\left[\frac{\partial}{\partial y_k}\ \varepsilon_{ij}(y) - \frac{\partial}{\partial y_i}\ \varepsilon_{kj}(y)\right]}\ .$$

$$\text{Or } \partial_j\ \omega_{ik}(y) = \frac{\partial\omega_{ik}(y)}{\partial y_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial u_i}{\partial y_k} - \frac{\partial u_k}{\partial y_i}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_j}{\partial y_k\,\partial y_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_j}{\partial y_i\,\partial y_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial u_k}{\partial y_j} \quad \text{soit encore}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_k}\underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right)\right]}_{\varepsilon_{ij}(y)} - \frac{\partial}{\partial y_i}\underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_k}\right)\right]}_{\varepsilon_{kj}(y)}$$

Ainsi $U_{ij}(y,x)$ peut encore s'écrire

$$\boxed{U_{ij}(y,x) = \varepsilon_{ij}(y) + (x_k - y_k)\frac{\partial}{\partial y_j}\ \omega_{ik}(y)}$$

compte tenu du fait que $\omega_{ik,j} = \varepsilon_{i,j,k} - \varepsilon_{kj,i}$ (où $\boxed{,i}$ désigne la dérivation partielle par rapport à y_i , et $\boxed{,ik}$ désigne la dérivation partielle seconde c'est-à-dire $\frac{\partial^2}{\partial y_k\ \partial y_i}$). Il est alors aisé de montrer que :

$$\boxed{\text{A.III.1-4} \iff \omega_{nm,kj} = \omega_{nm,jk}}$$

En effet $\text{ROT}\ {}^{T}\text{ROT}\ E_{(x)} = 0 \iff [\text{ROT}\ {}^{T}\text{ROT}\ E]_{i\ell} = 0\ \forall\,(i,\ell) \in (\{1,2,3\})^2$

or $[\text{ROT}\ {}^{T}\text{ROT}\ E]_{i\ell} = \varepsilon_{ijk}\left[[{}^{T}\text{ROT}]_{k\ell}\right]_{,j} = \varepsilon_{ijk}\ [\text{ROT}\ E]_{\ell k,j}$ soit par itération du procédé de calcul :

$$\boxed{[\text{ROT}\ \ {}^{T}\text{ROT}\ E]_{i\ell} = \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{\ell mn}\ \ e_{nk,mj} = 0 \qquad \forall\ (i,\ell) \in (\{1,2,3\}^2)}$$

Soit un couple (i,ℓ) quelconque de $\{1,2,3\}^2$, d'après la définition de ε_{ijk} et $\varepsilon_{\ell mn}$ seuls seront non nuls les termes pour lesquels j et k seront distincts et différents de i, de même ceux pour lesquels m et n seront distincts et différents de ℓ. L'ensemble d'indice n'étant que $\{1,2,3\}$ il vient :

$$\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{\ell mn}\ e_{nk,mj} - \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{\ell mn}\ e_{nj,mk} = 0$$

ou

$$\varepsilon_{\ell mn}\ e_{nk,mj} - \varepsilon_{\ell mn}\ e_{mk,nj} - (\varepsilon_{\ell mn}\ e_{nj,mk} - \varepsilon_{\ell mn}\ e_{mj,nk}) = 0$$

$$\underbrace{e_{nk,mj} - e_{mk,nj}}\ - \underbrace{(e_{nj,mk} - e_{mj,nk})} = 0$$

$$\boxed{\omega_{nm,kj} - \omega_{nm,jk} = 0}$$

Si l'on reprend l'expression du déplacement $\vec{u}(x) = \left(\int_{x_o}^{x} U_{ij}(y,x)dy_j\right) \vec{e}_i$

on a alors :

$$\vec{u}(x) = \left[\int_{x_o}^{x} \varepsilon_{ij}(y)\ dy_j + \int_{x_o}^{x} (x_k-y_k)\ \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial y_j}(y)\ dy_j\right] \vec{e}_i$$

$$\vec{u}(x) = \left[\int_{x_o}^{x} \varepsilon_{ij}(y)\ dy_j + \{(x_k - y_k)\ \omega_{ik}(y)\}_{(x_k)^o}^{(x_k)} + \int_{x_o}^{x} \delta_j^k\ \omega_{ik}(y)\ dy_j\right] \vec{e}_i$$

$$\boxed{\vec{u}(x) = \left[\int_{x_o}^{x} \{\varepsilon_{ij}(y) + \omega_{ij}(y)\}\ dy_j - (x_k-x_k^o)\ \omega_{ik}(x^o)\right] \vec{e}_i}$$

l'expression de $\vec{u}(x)$ ainsi obtenue vérifie bien la condition

$$\varepsilon_{ij}(\vec{u}(x)) = \varepsilon_{ij}(x) \qquad (\varepsilon_{ij}(x) \text{ donnés a priori})$$

En effet $\varepsilon_{ij}(\vec{u}(x)) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}(x) + \omega_{ij}(x) - \delta_k^j\ \omega_{ik}(x^o) + \varepsilon_{ij}(x) - \omega_{ij}(x) - \delta_k^i\ \omega_{jk}(x^o)\right]$$

$$= \varepsilon_{ij}(x)$$

REMARQUE A.I.5.

La formule III.1.4 se traduit par six équations scalaires. En effet ROT ^{T}ROT E *est un endomorphisme symétrique de* $\vec{E}_3$ *car, dans la base* $(\vec{e}_i)$ *, on a compte tenu de la symétrie de* E :

A.III.1-5 $$\boxed{[\mathrm{ROT}\ {}^T\mathrm{ROT}\ \mathrm{E}]_{i\ell} = [\mathrm{ROT}\ {}^T\mathrm{ROT}\ \mathrm{E}]_{\ell i}}$$

En effet $[\mathrm{ROT}\ {}^T\mathrm{ROT}\ \mathrm{E}]_{i\ell} = \varepsilon_{ijk}\ [{}^T\mathrm{ROT}]_{k\ell,j} = \varepsilon_{ijk}[\mathrm{ROT}]_{\ell k,j} = \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{\ell mn}\ e_{nk,mj}$

$= \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{\ell mn}\ e_{kn,jm}$. Faisons la substitution d'indices (m = j; n = k)

$= \varepsilon_{imn}\ \varepsilon_{\ell jk}\ e_{nk,mj} = \varepsilon_{\ell jk}\ \varepsilon_{imn}\ e_{nk,mj} = [\mathrm{ROT}\ {}^T\mathrm{ROT}\ \mathrm{E}]_{\ell i}$

d'où les équations scalaires en x_1, x_2, x_3 .

. $i = \ell = 1$

A.III.6. $$\boxed{a)\quad e_{33,22} - 2\, e_{23,23} + e_{22,33} = 0}$$

5.a)b). $i = \ell = 2$; $i = \ell = 3$ les équations correspondantes s'obtenant à partir de III.1.6.a) en effectuant des permutations circulaires sur les indices 1, 2, 3 .

. $i = 1$, $\ell = 2$

$$\boxed{b)\quad e_{13,32} - e_{33,12} - e_{12,33} + e_{32,13} = 0}$$.

Les deux dernières équations se déduisent de III.1.6 .b) par permutation circulaire sur les indices 1, 2, 3.

2) *Cas non linéaire*

A.II.3-2- s'écrit :

$$2\gamma\ (x) + I_{d_{\vec{E}_3}} = (I_{d_{\vec{E}_3}} + {}^T\mathrm{Grad}_x\ \vec{u}) \circ (Id_{\vec{E}_3} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u})$$

où $2\ \gamma(x) + I_{d_{\vec{E}_3}}$ est un endomorphisme symétrique défini positif de $\vec{E}_3$, donné sur Ω .

Ainsi, pour $2\gamma(x) + I_{d_{\vec{E}_3}}$, il existe ($\forall x \in \Omega$) une base orthonormale de vecteurs propres $\{\vec{p}_i(x);\ i \in \{1,2,3\}$ de valeurs propres associées respectives $\lambda_i^2(x) > 0$ avec $\lambda_i(x) > 0$ sur Ω , $i \in \{1,2,3\}$.

En d'autres termes, il existe une matrice de passage orthogonale $Q(x)$ de la base canonique $\{\vec{e}_i;\ i \in \{1,2,3\}\}$ à la base orthonormale $\{\vec{p}_i(x);\ i \in \{1,2,3\}\}$ telle que :

$$Q(x).\ \left[2\gamma(x) + I_{d_{\vec{E}_3}}\right] \circ {}^TQ(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2(x) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(x) \end{pmatrix} \text{ notée}$$

$$\mathrm{Diag}\left[\lambda_1^2(x),\ \lambda_2^2(x),\ \lambda_3^2(x)\right]$$

En posant $(I_{d_{\vec{E}_3}} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u}) \circ {}^TQ(x) = \Gamma\ (x)$ on a :

$${}^T\Gamma(x).\ \Gamma(x) = \mathrm{Diag}\left[\lambda_1^2(x),\ \lambda_2^2(x),\ \lambda_3^2(x)\right]$$

Mais, d'après le théorème de décomposition polaire d'une matrice carrée non singulière (ou par une démonstration directe) on a :

$\boxed{I_{d_{\vec{E}_3}} + \mathrm{Grad}_x\ \vec{u} = O(x).U(x)}$ avec : . $O(x)$ matrice orthogonale et $U(x) = {}^TQ(x) \circ \mathrm{Diag}\left[\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ \lambda_3(x)\right] \circ Q(x)$ est une matrice symétrique définie positive. Si $O(x)$ était connue, on aurait

A III.2-1- $$\boxed{\mathrm{Grad}_x\,\vec{u} = O(x) \circ U(x) - I_{d\vec{E}_3}}$$

Or précédemment nous avons vu que pour déterminer en fait les coefficients de la matrice $\mathrm{Grad}_x\,\vec{u}$, il suffisait de connaitre ceux de la matrice $E(x)$ avec $E(x) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Grad}_x\,\vec{u} + {}^{T}\mathrm{Grad}_x\,\vec{u}\right]$ ($E(x)$ symétrique dépendant donc de 6 coefficients scalaires). Ainsi le second membre de l'égalité A III.2-1- doit vérifier 6 équations scalaires de compatibilité d'après ce qui a été vu dans le cas linéarisé.

Il s'agit à présent de traduire les conditions de Schwarz :

A III.2-2- $$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial X_j\,\partial X_k} = \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial X_k\,\partial X_j} \; ; \; \vec{u} = u_i\,\vec{e}_i = U^j\,\vec{G}_j \quad \text{en variables}(x_i)$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial X_I} \quad \frac{\partial(U^k\,\vec{G}_k)}{\partial X_I} = \frac{\partial x_i}{\partial X_I}\left[\frac{\partial U^k}{\partial X_I}\,\vec{G}_k + U^k\,\frac{\partial\vec{G}_k}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial x_i}{\partial X_I}\left[\frac{\partial U^k}{\partial x_i}\,\vec{G}_k + U^k\,\Gamma^{\ell}_{ik}\,\vec{G}_\ell\right]$$

soit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial\vec{u}}{\partial X_I} = \frac{\partial x_i}{\partial X_I}\left[\frac{\partial U^k}{\partial x_i} + \Gamma^k_{i\ell}U^\ell\right]\vec{G}_K \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial x_i}{\partial X_I}\,(D_i\,\vec{u})^k\,\vec{G}_k}$$

On a de même

$$\boxed{\frac{\partial\vec{u}}{\partial X_J} = \frac{\partial x_j}{\partial X_J}\left[\frac{\partial U^k}{\partial x_j} + \Gamma^k_{j\ell}U^\ell\right]\vec{G}_k \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial x_j}{\partial X_J}\,(D_j\,\vec{u})^k\,\vec{G}_k}$$

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial X_J\partial X_I} = \frac{\partial x_j}{\partial X_J}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_I}\right)(D_i\,\vec{u})^k\,\vec{G}_k + \frac{\partial x_i}{\partial X_I}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\{(D_i\,\vec{u})^k\}\,\vec{G}_k + \frac{\partial x_i}{\partial X_I}\,(D_i\,\vec{u})^\ell\,\Gamma^k_{j\ell}\,\vec{G}_k\right]$$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial X_J\, \partial X_I} = \vec{G}_k \left[\frac{\partial^2 x_i}{\partial X_J \partial X_I} \left(\frac{\partial U^k}{\partial x_i} + \Gamma^k_{i\ell} U^\ell\right) + \frac{\partial x_j}{\partial X_J}\frac{\partial x_i}{\partial X_I} \left\{ \frac{\partial^2 U^k}{\partial x_j \partial x_i} + \Gamma^k_{i\ell,j}\, U^\ell + \Gamma^k_{i\ell}\frac{\partial U^\ell}{\partial x_j} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Gamma^k_{j\ell}\frac{\partial U^\ell}{\partial x_i} + \Gamma^p_{i\ell}\, \Gamma^k_{jp}\, U^\ell \right]\right.$$

De même on obtient pour $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial X_I \partial X_J}$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial X_I \partial X_J} = \vec{G}_k \left[\frac{\partial^2 x_j}{\partial X_I \partial X_J} \left(\frac{\partial U^k}{\partial x_j} + \Gamma^k_{j\ell}\, U^\ell\right) + \frac{\partial x_j}{\partial X_J}\frac{\partial x_i}{\partial X_I} \left\{ \frac{\partial^2 U^k}{\partial x_i \partial x_j} + \Gamma^k_{j\ell,i}\, U^\ell + \Gamma^k_{j\ell}\frac{\partial U^\ell}{\partial x_i} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Gamma^k_{i\ell}\frac{\partial U^\ell}{\partial x_j} + \Gamma^k_{ip}\quad \Gamma^p_{j\ell}\, U^\ell \right]\right.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial X_I \partial X_J} - \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial X_J \partial X_I} = \vec{G}_k \left[\Gamma^k_{j\ell,i} - \Gamma^k_{i\ell,j} + \Gamma^k_{ip}\, \Gamma^p_{j\ell} - \Gamma^p_{i\ell}\Gamma^k_{jp} \right] U^\ell \frac{\partial x_i}{\partial X_I}\frac{\partial x_j}{\partial X_J} = \vec{0}\,(\forall\, \vec{u})$$

Posons $\boxed{R^k_{\ell ij} = \Gamma^k_{\ell j,i} - \Gamma^k_{\ell i,j} + \Gamma^p_{\ell j}\Gamma^k_{pi} - \Gamma^p_{\ell i}\, \Gamma^k_{pj}}$

Compte tenu du fait que $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ et de ce qui précède, A III2-2- estéquivalente à

$\boxed{\frac{\partial x_i}{\partial X_I}\frac{\partial x_j}{\partial X_J} R^k_{\ell ij} = 0}$ $\quad \Phi$ et Φ^{-1} étant non singulière

A.III.2-3- $\boxed{\frac{\partial X_J}{\partial x_n}\frac{\partial X_I}{\partial x_m}\frac{\partial x_i}{\partial X_I}\frac{\partial x_j}{\partial X_J} R^k_{\ell ij} = \delta_{jn}\, \delta_{im}\, R^k_{\ell ij} = R^k_{\ell mn} = 0}$

On montre ainsi que la condition A.III.2-2 est équivalente à l'ANNULATION des composantes mixtes $R^k_{\ell mn}$ du tenseur de courbure de $\Phi\ (\Omega)$ muni des coordonnées curvilignes (x_i).

. En dimension trois nous verrons qu'il y a en fait 6 composantes $R^i_{jk\ell}$ indépendantes, et l'annulation de celles-ci nous donnera bien les 6 équations de compatibilité recherchées.

Les composantes covariantes $R_{ijk\ell}$ du tenseur de courbure sont données par

A.III.2-4- $\boxed{R_{ijk\ell} = G_{ip}\, R^p_{jk\ell}}$ où G_{ip} est le tenseur métrique de $\Phi(\Omega)$

avec $G_{ip} = \vec{G}_i . \vec{G}_p = \dfrac{\partial X_m}{\partial x_i} \dfrac{\partial X_m}{\partial x_p}$ et

$\boxed{R^p_{jk\ell} = \Gamma^p_{j\ell,k} - \Gamma^p_{jk,\ell} + \Gamma^r_{j\ell}\,\Gamma^p_{rk\ell} - \Gamma^r_{jk}\,\Gamma^p_{r\ell}}$ i,j,k,ℓ,p,r indice de $\{1,2,\ldots,n\}$

avec $n = \dim E$.

Nous allons établir des relations liant les composantes covariantes $R_{ijk\ell}$ du tenseur de courbure à l'aide d'expressions des symboles de Christoffel données en fonction des composantes du tenseur métrique G.

Préalablement nous allons définir les symboles de Christoffel de première espèce par :

A.III.2-5

$\boxed{\Gamma^k_{ij} = G^{ks}\,\Gamma_{ijs}}$

Γ^k_{ij} : symbole de Christoffel de 2ème espèce.

Γ_{ijs} : symbole de Christofelle de 1ère espèce.

Tout d'abord : $\vec{G}_k = \dfrac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_k}\,\vec{e}_\ell = \dfrac{\partial X_\ell}{\partial x_k}\,\vec{e}_k$; $\vec{G}_{k,i} = \Gamma^p_{ki}\,\dfrac{\partial X_\ell}{\partial x_p}\,\vec{e}_\ell = \dfrac{\partial^2 X_\ell}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\vec{e}_\ell$

Ainsi $\boxed{\Gamma^k_{ij} = \dfrac{\partial^2 X_m}{\partial x_i \partial x_j} \quad \dfrac{\partial x_k}{\partial X_m}}$

Calculons à présent la quantité $\dfrac{1}{2}\left[G_{is,j} + G_{js,i} - G_{ij,s}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial X_m}{\partial x_i}\,\frac{\partial X_m}{\partial x_s}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial X_m}{\partial x_j}\,\frac{\partial X_m}{\partial x_s}\right) - \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial X^m}{\partial x_i}\,\frac{\partial X^m}{\partial x_j}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 X_m}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial X_m}{\partial x_s} + \frac{\partial^2 X_m}{\partial x_s \partial x_j}\frac{\partial X_m}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 X_m}{\partial x_i\, \partial x_j}\frac{\partial X_m}{\partial x_s} + \frac{\partial^2 X_m}{\partial x_i\, \partial x_s}\frac{\partial X_m}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 X_m}{\partial x_s \partial x_i}\frac{\partial X_m}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 X_m}{\partial x_s \partial x_j}\frac{\partial X_m}{\partial x_i}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 X_m}{\partial x_j\, \partial x_i}\frac{\partial X_m}{\partial x_s} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial X_m}{\partial x_k}\frac{\partial X_m}{\partial x_s} \qquad \text{Or} \quad \vec{G}^k.\vec{G}^s = G^{ks} = \frac{\partial x_k}{\partial X_m}\frac{dx_s}{\partial X_m}$$

$$= \Gamma_{ijs}$$

A.III.2-6 Ainsi $\boxed{\Gamma_{ijs} = \frac{1}{2}\left[G_{is,j} + G_{js,i} - G_{ij,s}\right]}$

Nous recherchons l'expression de $R_{ijk\ell}$ en fonction des dérivées secondes partielles des composantes G_{mn} du tenseur métrique

$$R_{ijk\ell} = G_{ip}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(G^{pu}\,\Gamma_{j\ell u}) - \frac{\partial}{\partial x_\ell}(G^{ps}\,\Gamma_{jks}) + G^{rs}\,G^{pt}\,\Gamma_{j\ell s}\,\Gamma_{rkt} - G^{ru}\,G^{pv}\,\Gamma_{jku}\,\Gamma_{r\ell v}\right]$$

sachant que $G_{ip}\,G^{pu} = \delta_{iu}$

$$R_{ijk\ell} = \Gamma_{j\ell i,k} - G^{pu}\,G_{ip,k}\,\Gamma_{j\ell u} - \Gamma_{jki,\ell} + G^{ps}\,G_{ip,\ell}\,\Gamma_{jks} + G^{rs}\,\Gamma_{j\ell s}\,\Gamma_{rki} - G^{ru}\,\Gamma_{jku}\,\Gamma_{r\ell i}$$

$$R_{ijk\ell} = \Gamma_{j\ell i,k} - \Gamma_{jki,\ell} - G_{ip,k\ell}\,\Gamma^p_{j\ell} + G_{ip,\ell}\,\Gamma^p_{jk} + \Gamma^r_j\,\Gamma_{rki} - \Gamma^r_{jk}\,\Gamma_{r\ell i}$$

$$R_{ijk\ell} = \Gamma_{j\ell i,k} - \Gamma_{jki,\ell} + \Gamma^r_{j\ell}(\Gamma_{rki} - G_{ir,k}) + \Gamma^p_{jk}\,(-\Gamma_{p\ell i} + G_{ip,\ell})$$

$$R_{ijk\ell} = \Gamma_{j\ell i,k} - \Gamma_{jki,\ell} - \Gamma^r_{j\ell}\Gamma_{kir} + \Gamma^p_{jk}\,\Gamma_{\ell ip}$$

$$R_{ijk\ell} = \Gamma_{j\ell i,k} - \Gamma_{jki,\ell} - G^{rs}\,\Gamma_{j\ell s}\,\Gamma_{kir} + G^{pu}\,\Gamma_{jku}\,\Gamma_{\ell ip}$$

$$R_{ijk\ell} = \frac{1}{2}\left[G_{ji,\ell k} + G_{\ell i,jk} - G_{j\ell,ik} - G_{ji,k\ell} - G_{ki,j\ell} + G_{jk,i\ell}\right] +$$

$$G^{rs}\,(\Gamma_{jks}\,\Gamma_{\ell ir} - \Gamma_{j\ell s}\,\Gamma_{kir}) ,$$

A.III.2- Soit finalement,

- 7 - $$\boxed{R_{ijk\ell} = \frac{1}{2}\left[G_{i\ell,jk} + G_{jk,i\ell} - G_{ik,j\ell} - G_{j\ell,ik}\right] + G^{rs}\left[\Gamma_{jks}\,\Gamma_{i\ell r} - \Gamma_{j\ell s}\,\Gamma_{ikr}\right]}$$

D'après l'expression de $R_{ijk\ell}$ donnée en A.III.2-7- on vérifie aisément les relations

A.III.2

- 8 - $$\boxed{R_{ijk\ell} = -R_{jik\ell} = -\,R_{ij\ell k} = R_{k\ell ij}}$$

- 9 - $$\boxed{R_{ijk\ell} + R_{ik\ell j} + R_{i\ell jk} = 0}$$

Il résulte de A.III.2-8 et A.III.2-9 que la donnée des composantes covariantes $R_{ijk\ell}$ et $R_{ik\ell j}$ entraine celle des 24 composantes associées aux permutations de (i,j,k,ℓ)

. En effet considérons les six composantes covariantes dont le premier indice cst i

. $R_{ijk\ell}$, $R_{ik\ell j}$, $R_{i\ell jk}$, $R_{ij\ell k}$, $R_{i\ell kj}$, $R_{ikj\ell}$

La donnée de $R_{ijk\ell}$ et $R_{ik\ell j}$ entraine celle de $R_{i\ell jk}$ d'après A.III.2-9, de $R_{ij\ell k}$ d'après A.III.2-8, enfin, $R_{i\ell kj}$ est déterminé à partir de $R_{i\ell jk}$

d'après A.III.2-8 et $R_{ikj\ell}$ est déterminé également d'après A.III.2-8 à partir de $R_{ik\ell j}$. De même par permutation circulaire sur les indices i, j, k, ℓ la donnée de $R_{jk\ell i}$ et $R_{j\ell ik}$ entraine celle des six composantes covariantes dont le premier indice est j à savoir :

$$R_{jk\ell i} \, , \, R_{j\ell ik}, \, R_{ji\ell k} \, , \, R_{jki\ell} \, , \, R_{ji\ell k}, \, R_{j\ell ki} \, .$$

$$\text{Or } R_{jk\ell i} = R_{\ell ijk} = - R_{i\ell jk} \text{ et } R_{j\ell ik} = R_{ikj\ell}$$

En résumé la donnée de $R_{ijk\ell}$ et $R_{ik\ell j}$ entraine celle de 12 composantes covariantes : (les composantes covariantes de premier indice i et les composantes covariantes de premier indice j). Enfin toujours par permutation circulaire sur les indices i, j, k, ℓ on montre qu'en fait la donnée de $R_{ijk\ell}$ et $R_{ik\ell j}$ entraine celle des 24 composantes covariantes du tenseur de courbure de Φ (Ω).

On vérifie aisément que le symétrisé du tenseur R est nul : en effet

$$R_{ijk\ell} + R_{ik\ell j} + R_{i\ell jk} + R_{ij\ell k} + R_{i\ell kj} + R_{ikj\ell} = R_{ij\ell k} + R_{i\ell kj} + R_{ikj\ell}$$

(d'après A.III.2-9).

Or $R_{ij\ell k} + R_{i\ell kj} + R_{ikj\ell} = - R_{ijk\ell} - R_{i\ell jk} - R_{ik\ell j} = 0$ (toujours d'après A III-2-9). Ainsi

A.III.2-10 $$\boxed{R_{ijk\ell} + R_{ik\ell j} + R_{i\ell jk} + R_{ij\ell k} + R_{i\ell kj} + R_{ikj\ell} = 0}$$

D'où $$\boxed{R^{s}_{ijk} = \frac{1}{4!} \sum_{\sigma \in S^4} S_{\sigma(i)\,\sigma(j)\,\sigma(k)\,\sigma(\ell)} = 0}$$

où S^4 désigne l'ensemble des permutations de quatre indices.

En tant que tenseur du quatrième ordre, le tenseur de courbure (R)

$$(R) = R_{ijk\ell}\, \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}^{\,k} \otimes \vec{e}^{\,\ell}$$

fait correspondre à tout tenseur d'ordre 2 :

$$(\sigma) = \sigma_{ij}\, \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j}$$

le tenseur du second ordre :

$$(R\sigma) = \{R_{ijk}\quad \sigma^{k\ell}\}\, \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j}$$

Or si (σ) est symétrique : $(R\sigma) = \{R_{ij\ell k}\, \sigma^{\ell k}\}\, \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j} = -\{R_{ijk\ell}\, \sigma^{k\ell}\}\vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j}$

$$= -(R\sigma) = (0)$$

D'autre part, pour tout tenseur (τ) du 2ème ordre $^T\{(R)(\tau)\} = R_{ijk\ell}(\tau)^{k\ell}\vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j}$

$= -R_{ijk\ell}\,(\tau)^{k\ell}\ \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = -(R)\ (\tau)$. Comme (τ) s'écrit de manière unique :

$(\tau) = (\sigma) + (\alpha)$ avec (σ) tenseur symétrique et (α) tenseur antisymétrique,

$^T\{(R)(\tau)\} = {}^T\{(R)(\sigma)+(R)(\alpha)\} = \boxed{^T\{(R)\ (\alpha)\}} = -(R)(\sigma)-(R)(\alpha) = -(R)(\alpha)$

R applique donc l'espace vectoriel des tenseurs antisymétriques d'ordre 2 sur lui-même.

E_n étant euclidien de dimension n on munit $E_n \otimes E_n$ du produit scalaire suivant :

$\langle(\sigma).(\sigma')\rangle = \mathrm{Tr}\ [(\sigma);\ (\sigma')] = \sigma_{i\ell}\ \sigma'_{i\ell} = \mathrm{Tr}\ [\Sigma.\ {}^T\Sigma']$ où Σ et Σ' sont les matrices représentatives de (σ) et (σ') dans la base canonique de $\vec{E}_n$

$(E_n \otimes E_n)_A \xrightarrow{(R)} (E_n \otimes E_n)_A$ où $(E_n \otimes E_n)_A$ désigne l'espace vectoriel des tenseurs antisymétriques d'ordre 2 pour le produit scalaire défini ci-dessus sur $E_n \times E_n$ R est autoadjoint : En effet :

$$\langle (R\sigma).(\sigma')\rangle = R_{ijk\ell}\, \sigma^{k\ell}\, \sigma'^{ij} = \sigma^{k\ell}\, R_{k\ell ij}\, \sigma'^{ij} = \langle (\sigma).(R\sigma')\rangle$$

Or l'espace des tenseurs antisymétriques d'ordre 2 sur E_n est de dimension p avec $2p = n^2 - n$ soit $p = \frac{n(n-1)}{2}$ et l'espace des tenseurs du 4e ordre sur E_n auto adjoints (c'est-à-dire symétriques par rapport aux couples d'indices (ij) et ($k\ell$) est de dimension $\frac{p(p-1)}{2} + p$ soit $\frac{p(p+1)}{2}$

Ainsi l'espace des tenseurs du 4e ordre sur E_n auto adjoints est de dimension $\frac{n(n-1)}{8}(n^2-n+2)$

D'autre part lorsqu'on écrit que le symétrisé du tenseur R est nul :

$R^s_{ijk\ell} = 0 \quad \forall (i, j, k, \ell) \in S_4(1,2,\ldots,n)$ on obtient $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$

conditions linéaires homogènes sur les coefficients de (R).

Il résulte de ce qui précède que (R) sera déterminé par la donnée de $\frac{n(n-1)}{8}(n^2-n+2) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$ coefficients.

En particulier si n = 3 la condition (R) = (0) se traduit par l'annulation de 6 coefficients.

Nous retrouvons bien le résultat annoncé au début du paragraphe A.III.2.

B ASPECTS MECANIQUES

Dans cette partie, notre étude va être principalement axée sur :

- les équations d'équilibre
- les lois de comportement, lesquelles dans la plupart des exposés modernes se situent dans un cadre thermodynamique.

I - *LES EQUATIONS D'EQUILIBRE*

On se place dans la configuration déformée Φ (Ω). On suppose qu'au point $X = X_i \vec{e}_i$ ($\in \Phi(\Omega)$) s'exerce une densité volumique ρ (X) $\overrightarrow{F(\vec{X})}$ de forces où, pour tout X de Φ (Ω), ρ (X) représente la densité de masse au point X et où $\vec{F}$ est un champ de vecteurs défini sur Φ (Ω) {par exemple $\vec{F}(X) = (0,0,-g)$} . Rappelons un principe de la mécanique des milieux continus :

1) *Principe* : La configuration $\Phi(\Omega)$ étant une configuration d'équilibre pour le solide, quel que soit le volume $V \subset \Phi$ (Ω), le torseur des forces ρ (X) $\overrightarrow{F(\vec{X})}$ dX est équivalent à un torseur de forces de surface de la forme

I.1.1. $\boxed{-\vec{T}\,(X,\vec{n})\; d\Gamma(X)}$ où $d\Gamma(X)$ est l'élément de surface de la frontière ∂V de ce volume au point X de ∂V .

D'où les identités :

B.I.1-2. $$\int_V \rho\,(X)\,\overrightarrow{F(\vec{X})}\,dV(x) + \int_{\partial V} \vec{T}(X,\vec{n})\,d\Gamma(X) = \vec{0}$$

B.I.1-3. $$\int_V \rho(X)\,(\vec{X} \wedge \overrightarrow{F(\vec{X})})\,dV(x) + \int_{\partial V} \vec{X} \wedge \vec{T}(X,\vec{n})\,d\Gamma(X) = \vec{0}$$

Il résulte de B.I.1.1. (c.f. P. GERMAIN 1972) que, sous des hypothèses de régularité (sur lesquelles on reviendra), $\vec{T}(X,\vec{n})$ dépend *linéairement* de $\vec{n}$ c'est-à-dire que l'on peut écrire :

B.I.1-4 $$\boxed{\vec{T}(X,\vec{n}) = \Sigma_{ij}(X) n_j \, \vec{e}_i}$$

Les $\Sigma_{ij}(X)$ sont les composantes du tenseur des contraintes de CAUCHY.

D'après B.I.1.4 on peut écrire

$$\int_{\partial V} T_i(X,\vec{n}) \, d\Gamma(X) = \int_{\partial V} \Sigma_{ij}(X) \, n_j \, d\Gamma(X) = \int_V \mathrm{div}_X \; \vec{\Sigma}_i(X) \, dV(x)$$ où $\vec{\Sigma}_i$ est le vecteur $\Sigma_{ij} \, \vec{e}_j$ et Div_X est la divergence "par rapport aux variables X_i" . Les équations B.I.1.2. se traduisent alors par l'identité :

B.I.1-5. $$\boxed{\mathrm{Div}_X \, \vec{\Sigma}_i(X) + \rho \, F_i = 0 \text{ soit encore : } \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial X_j} + \rho \, F_i = 0 \qquad i \in \{1, 2, 3\}}$$

Ce sont les équations d'équilibre

Propriété : Le tenseur $\Sigma = (\Sigma_{ij})$ est un tenseur symétrique :

démonstration : Partant de B.I.1.3. :

$$\int_V \rho(X)(\vec{X} \wedge \overrightarrow{F(X)}) \, dV(x) + \int_{\partial V} \vec{X} \wedge \vec{T}(X,\vec{n}) \, d\Gamma(X) = \vec{0}$$

on obtient

$$\int_V \rho(X) \, \varepsilon_{rst} \, X_s \, F_t \, \vec{e}_r \, dV(x) + \int_{\partial V} \varepsilon_{rst} \, X_s \, \Sigma_{tj} \, n_j \, \vec{e}_r \, d\Gamma(X) = \vec{0} \quad \forall \, r \in \{1,2,3\}$$

Soit pour r quelconque dans {1, 2, 3} mais fixé, et en utilisant B.I.1.5.

$$\int_V - X_s \frac{\partial \Sigma t_p}{\partial X_p} + X_t \frac{\partial \Sigma_{sm}}{\partial X_m} + \int_{\partial V} \left[X_s \Sigma_{tj} n_j - X_t \Sigma_{sj} n_j \right] d\Gamma(X) = 0$$

Or d'après le théorème de la divergence

$$\int_{\partial V} \left[X_s \Sigma_{tj} n_j - X_t \Sigma_{sj} n_j \right] d\Gamma(X) = \int_V \mathrm{Div}_X \left[X_s \Sigma_{tj} \vec{e}_j - X_t \Sigma_{sj} \vec{e}_j \right] dV(x) = 0$$

Finalement :

$$\int_V \left[- X_s \frac{\partial}{\partial X_\rho} \Sigma_{tp} + X_t \frac{\partial}{\partial X_m} \Sigma_{sm} + \Sigma_{ts} + X_s \frac{\partial \Sigma t_j}{\partial X_j} - \Sigma_{st} - X_t \frac{\partial}{\partial X_j} \Sigma_{sj} \right] = dV(x) = 0$$

Soit

$$\int_V \left[\Sigma_{ts}(X) - \Sigma_{st}(X) \right] dV(x) = 0$$ pour tout volume $V \subset \Phi\ (\Omega)$ et ainsi

$\Sigma_{ts} = \Sigma_{st}$; le tenseur Σ est symétrique.

2) *Equations d'équilibre dans la configuration initiale (non déformée)*

Les équations d'équilibre ont été exprimées dans la configuration déformée $\Phi(\Omega)$ dans le § précédent, (en utilisant les variables X_j). Pour pouvoir les exploiter plus aisément, nous nous proposons de les transcrire dans la configuration initiale (où on utilise les variables x_i). L'équation B.I.1.2.

$$\boxed{\int_V \rho(X)\ \overrightarrow{F(X)}\ dV(x) + \int_{\partial V} \Sigma_{ij}(X)\ n_j(X)\ \vec{e}_i\ d\Gamma(X) = \vec{0}}$$ se transforme

de la manière suivante : en posant $V = \Phi\ (V)$

. $\int_V \rho(X)\, \overrightarrow{F(X)}\, dV(x) = \int_V \rho\, (\Phi(x))\, \vec{F}\, [\Phi(x)] \sqrt{G(x)} dv(x)$. Or d'après A.I.2.4-4

$\rho(x,t)\ \sqrt{G(x)} = \rho_o(x)$ soit

$$\int_V \rho(X)\, \overrightarrow{F(X)}\, dV(x) = \int_V \rho_o(x)\, \vec{F}\, [\Phi(x)]\, dv(x)$$

.. Pour le deuxième terme du premier membre de l'équation B.I.1-2. on introduit le tenseur $\sigma_{ij}(x)$, $(x \in \Omega)$, second tenseur de Piola-Kirchoff par :

B.I.2-1.

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma(x) = \sqrt{G(x)}\ \ \{D\Phi(x)\}^{-1}.\Sigma\ [\Phi(x)].\ \ \{{}^{T}D(x)\}^{-1} \\ \\ \sqrt{G(x)}\ \ \ \Sigma(X) = D\ \Phi\ (x).\sigma\ (x).{}^{T}D\Phi(x) \end{array}}$$ ou encore

$$\Sigma_{ij}(X)\ n_j(X)\ \vec{e}_i = \frac{1}{\sqrt{G(x)}}\ (D\Phi(x))_{ik}\ \ (\sigma(x).{}^{T}D\Phi(x))_{kj}\ n_j\ \vec{e}_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G(x)}}\ \frac{\partial\Phi_i(x)}{\partial x_k}\ \ \sigma_{k\ell}(x)\ \ (D\Phi(x))_{j\ell}\ n_j\ \vec{e}_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G(x)}}\ \frac{\partial\Phi_{i}(x)}{\partial x_k}\ \ \sigma_{k\ell}(x)\ \frac{\partial\Phi_j(x)}{\partial x_\ell}\ \ n_j\ \vec{e}_i$$

soit encore en utilisant la notation abrégée : $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ et la définition du vecteur $\vec{\nu}$ donné en A.I.2.3-3. par $\vec{\nu} = \partial_\ell\ \Phi_j(x) n_j\ \vec{e}_\ell = \nu_\ell(x)\ \vec{e}_\ell$

B.I.2 2.

$$\Sigma_{ij}(X)\ n_j(X)\ \vec{e}_i = \frac{1}{\sqrt{G(x)}}\sigma_{k\ell}(x)\ \partial_k\ \Phi_i(x)\ \ \ \nu_\ell(x)\ \vec{e}_i$$

---

ou si l'on pose : $W_{i\ell}(x) = \frac{1}{\sqrt{G(x)}}\ \ \sigma_{k\ell}(x)\ \partial_k\ \Phi_i(x)$; $i \in \{1,2,3\}$

$\Sigma_{ij}(X)\ n_j(X)\ \vec{e}_i = W_{i\ell}(x)\ \nu_\ell\ (x)\ \vec{e}_i$ $\qquad \ell \in \{1,2,3\}$

Soient les vecteurs $\overrightarrow{W_i(x)} = W_{i\ell(x)}\ \overrightarrow{G_\ell(x)}$ $\quad i \in \{1,2,3\}$, $\ell \in \{1,2,3\}$

alors $W_{i\ell}(x)\ \nu_\ell\ (x) = (\overrightarrow{W_i(x)}.\vec{n}(\Phi(x)) = (\vec{W}_i \circ \Phi^{-1}(X).\vec{n}(x))$

d'où $\Sigma_{ij}(X)\ n_j(X)\ \vec{e}_i = (\vec{W}_i \circ \Phi^{-1}(X).\vec{n}(X))\ \vec{e}_i$. Ainsi

$$\boxed{\int_{\partial V} \Sigma_{ij}(X) n_j(X)\ \vec{e}_i\ d\Gamma(X) = \int_{\partial V} (\vec{W}_i \circ \Phi^{-1}(X).\vec{n}(X))\ d\Gamma(X)\ \vec{e}_i}$$

Pour i fixé dans l'ensemble d'indices $\{1,2,3\}$ en appliquant la formule de Stokes on obtient :

B.I.2-3.
$$\boxed{\int_{\partial V} \Sigma_{ij}(X) n_j(X)\ d\Gamma(X) \vec{e}_i = \int_V \mathrm{Div}_X \left[W_i \circ \Phi^{-1}\right](X)\quad dV(x)\ \vec{e}_i}$$

Nous allons maintenant établir la formule suivante :

B.I.2-4.
$$\boxed{\mathrm{Div}_X\ [\vec{W}_i \circ \Phi^{-1}]\ (X) = \frac{1}{\sqrt{G(x)}}\ \partial_\ell\ (\sqrt{G(x)}\ W_{i\ell}(x)) \text{ ou } X = \Phi\ (x)}$$

. $\mathrm{Div}_X \left[\vec{W}_i \circ \Phi^{-1}\right] (X) = \mathrm{Div}_X \left[\vec{W}_i(x)\right] = \mathrm{Div}_X \left[W_{i\ell}(x)\ \overrightarrow{G_\ell(x)}\right] =$

$\mathrm{Div}_X \left[W_{i\ell}(x)\ \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_\ell}\ \vec{e}_r\right]$

$$= \mathrm{Div}_X \left[W_{i\ell}(x)\ \frac{\partial X_r}{\partial x_\ell}\ \vec{e}_r\right] = \frac{\partial}{\partial X_r}\left[W_{i\ell}(x)\ \frac{\partial X_r}{\partial x_\ell}\right] = \frac{\partial x_k}{\partial X_r}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\ (W_{i\ell}(x)\ \frac{\partial X_r}{\partial x_\ell}\right]$$

$$= \frac{\partial W_{i\ell}(x)}{\partial x_k}\ \underbrace{\frac{\partial X_r}{\partial x_\ell}\ \frac{\partial x_k}{\partial X_r}}_{\delta_k^\ell} + \frac{\partial x_k}{\partial X_r}\ W_{i\ell}(x)\ \frac{\partial}{\partial x_k}\ (\frac{\partial X_r}{\partial x_\ell}\ )$$

$$\boxed{\mathrm{Div}_X \left[\vec{W}_i \circ \Phi^{-1}\right](X) = \frac{\partial W_{i\ell}(x)}{\partial x_\ell} + \frac{\partial x_k}{\partial X_r}\ \ W_{i\ell}(x)\ \frac{\partial}{\partial x_k}\ (\frac{\partial X_r}{\partial x_\ell}\ )}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{G(x)}} \partial_\ell \left(\sqrt{G(x)}\; W_{i\ell}(x)\right) = \frac{\partial W_{i\ell}(x)}{\partial x_\ell} + W_{i\ell}(x) \frac{1}{\sqrt{G(x)}} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\sqrt{G(x)}\right]$$

Or $\sqrt{G(x)} = \text{Dét}\,(\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3)_{/\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3} = \dfrac{D(X_1,X_2,X_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} = (\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3)$

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell} \sqrt{G(x)} = \frac{D(\partial_\ell X_1,X_2,X_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} + \frac{D(X_1,\partial_\ell X_2,X_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} + \frac{D(X_1,X_2,\partial_\ell X_3)}{D(x_1,x_2,x_3)}$$

or

$$\frac{D(\partial_\ell X_1,X_2,X_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} = \frac{D(\partial_\ell X_1,X_2,X_3)}{D(X_1,X_2,X_3)} \frac{D(X_1,X_2,X_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} = \sqrt{G(x)}\, \frac{D(\partial_\ell X_1,X_2,X_3)}{D(X_1,X_2,X_3)}$$

et des relations analogues pour $\dfrac{D(X_1,\partial_\ell X_2,X_3)}{D(x_1,x_2,x_3)}$, $\dfrac{D(X_1,X_2,\partial_\ell X_3)}{D(x_1,x_2,x_3)}$

Ainsi $\dfrac{1}{\sqrt{G(x)}} \dfrac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\sqrt{G(x)}\right] = \dfrac{D(\partial_\ell X_1,X_2,X_3)}{D(X_1,X_2,X_3)} + \dfrac{D(X_1,\partial_\ell X_2,X_3)}{D(X_1,X_2,X_3)} + \dfrac{D(X_1,X_2,\partial_\ell X_3)}{D(X_1,X_2,X_3)}$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_\ell}\right) & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_\ell}\right) & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_\ell}\right) & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_\ell}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_\ell}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_\ell}\right) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_\ell}\right) \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_\ell}\right) \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3}\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_\ell}\right) \end{vmatrix}$$

$= \dfrac{\partial}{\partial X_r}\left(\dfrac{\partial X_r}{\partial x_\ell}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial X_r}{\partial x_\ell}\right) \dfrac{\partial x_k}{\partial X_r}$. Finalement

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{G(x)}}\,\partial_\ell(\sqrt{G(x)}\;W_{i\ell}(x)) = \frac{\partial W_{i\ell}(x)}{\partial x_\ell} + W_{i\ell}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial X_r}{\partial x_\ell}\right)\frac{\partial x_k}{\partial X_r}}\,.$$

La formule B.I.2-4. est ainsi démontrée. En posant $V = \Phi^{-1}(\mathcal{V})$ on obtient : $\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \mathrm{Div}_X\left[\vec{W}_i \circ \Phi^{-1}\right](X)\; dV(x)\;\vec{e}_i = \int_V \frac{1}{\sqrt{G(x)}}\,\partial_\ell\left[\sqrt{G(x)}\;W_{i\ell}(x)\right]\, dV(x)\;\vec{e}_i$

$$= \int_V \partial_\ell\left[\sigma_{k\ell}(x)\;\partial_k\;\Phi_i(x)\right]\, dv(x)\;\vec{e}_i$$

En revenant à l'équation B.I.1-2. exprimée dans la configuration initiale on obtient : $\displaystyle\int_V \{\partial_i\left[\sigma_{ij}(x)\;\overrightarrow{G_j(x)} + \rho_o(x)\;\vec{F}(\Phi(x))\right]\}\; dv(x) = \vec{0}$

Quel que soit le volume $V \subset \Omega$. D'où la condition ponctuelle :

B.I.2-5. $$\boxed{\partial_i\left[\sigma_{ij}(x)\;\overrightarrow{G_j(x)}\right] + \rho_o(x)\;\vec{F}(\Phi(x)) = \vec{0}}$$

Si l'on multiplie scalairement l'équation B.I.2-5. par la vitesse virtuelle $\vec{u}^{*} = u_i^{*}\,\vec{e}_i$ avec $\underset{1\leqslant i\leqslant 3}{u_i^{*}} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, ($\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ étant l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact inclus dans $\bar{\Omega}$). On obtient :

$$\partial_i\left[\sigma_{ij}\;\vec{u}^{*}.\overrightarrow{G_j(x)}\right] = -\rho_o(x)\;\vec{F}.\vec{u}^{*} + \sigma_{ij}\;\overrightarrow{G_j(x)}.\partial_i\;\vec{u}^{*} \quad \text{soit :}$$

B.I.2.6. $$\boxed{\int_\Omega \sigma_{ij}\;\overrightarrow{G_j(x)}.\partial_i\;\vec{u}^{*}\; dv(x) = \int_\Omega \rho_o(x)\;F_i\;u_i^{*}\; dv(x) + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}\;\vec{G}_j.\vec{u}^{*}\;n_i\; d\gamma(x)}$$

Le premier membre de B.I.2-6. est défini comme étant la puissance virtuelle des efforts intérieurs P_i^* .

Le second membre de B.I.2-6. représentant alors la puissance virtuelle des efforts donnés.

3) *Nature des forces appliquées à Ω*

Le problème se pose de savoir quelle est la nature :

a) des forces $\vec{F}(\Phi(x))$ qui dépendent du déplacement Φ (en général inconnu).

b) des forces appliquées sur $\partial\Omega$ (ou sur une partie de $\partial\Omega$), c'est-à-dire les conditions de bord appliquées aux équations d'équilibre.

a)α) Pour les forces $\vec{F}(\Phi(x))$, en élasticité linéarisée (c.f.POTTIER-FERRY) où les configurations Ω et Φ (Ω) son confondues, on impose généralement des forces $\vec{F}$ ($\cancel{\Phi(x)}$) $= \overrightarrow{f(x)}$ indépendantes de Φ, donc du déplacement $\vec{u}$. Par contre, en grandes déformations, il est nécessaire de préciser le mode d'application des forces. On fait en général l'hypothèse des charges mortes ("dead loading") c'est-à-dire que l'on pose :

B.I.3.1. $\boxed{\vec{F}\ [\Phi(x)] = \overrightarrow{f(x)} \text{ indépendante du déplacement}}$

<u>*Remarque*</u> : On rappelle la définition de la dérivée, dans la direction d'un vecteur $\vec{V}$ d'une fonctionnelle Ψ linéaire : $\vec{u} \xrightarrow{\Psi} <\vec{f}.\vec{u}>$

$$d\Psi_{\vec{u}}(\vec{u}^*) = \lim_{t\to 0} \frac{\Psi(\vec{u} + t\vec{u}^*)-\Psi(\vec{u})}{t} = \Psi\ (\vec{u}^*) = <\vec{f}.\vec{u}^*>$$

Ainsi $<\vec{f}.\vec{u}^*> = \int_\Omega \rho_o\ \vec{f}.\vec{u}^*\ dv(x)$ est la dérivée dans la direction $\vec{u}^*$ de la fonctionnelle linéaire Ψ.

Ces forces $\overrightarrow{f(x)}$ sont aussi appelées charges conservatives.

β) Un deuxième type de charges est celui des charges tournantes qui sont telles que si l'on impose un déplacement rigide $X = c + Rx$ (R endomorphisme orthogonal de E_3, et c ainsi que R sont indépendants de x dans Ω) les forces $\vec{F}\left[\overrightarrow{\Phi(x)}\right]$ deviennnent

B.I.3 2. $$\vec{F}(\Phi(x)) = R\,\vec{F}_o \quad \text{où } \vec{F}_o \text{ est indépendante de } c \text{ et } R.$$

En utilisant le théorème de décomposition polaire d'un endomorphisme symétrique défini positif on a pour $D\Phi(x)$ dont le déterminant $J(x)$ est strictement positif la décomposition :

$$\boxed{\begin{aligned} D\Phi(x) = R(\text{Grad}\,\vec{u}) \circ W(\text{Grad}\,\vec{u}) \text{ avec } & R(\text{Grad}\,\vec{u}) \text{ orthogonal} \\ & W(\text{Grad}\,\vec{u}) \text{ symétrique} \\ & W(\text{Grad}\,\vec{u}) = \left[II_{d_{E_3}} + 2\gamma\right]^{1/2} \end{aligned}}$$

Parmi les exemples de charges tournantes, on a celui des charges suivantes définie par :

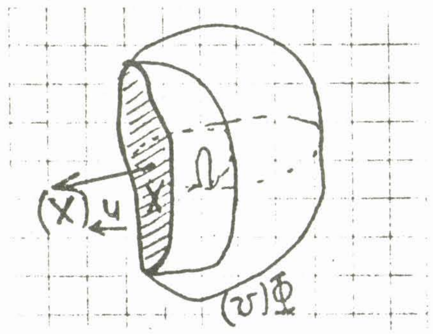
B.I.3 3. $$\vec{F}(\Phi(x)) = R(\text{Grad}\,\vec{u})\,\vec{F}_o \quad \text{où } \vec{F}_o \text{ est indépendante de } \vec{u}$$

On pourrait aussi envisager d'uatres éventualités comme par exemple

B.I.3 4. $$\overrightarrow{F(\Phi(x))} = D\Phi(x).\vec{F}_o$$

Remarque : Dans le cas de charges tournantes, $\overrightarrow{F(\Phi(x))}$ est fonction de $D\Phi(x)$ c'est-à-dire de Grad $\vec{u}$; il est donc exclu que $\langle \vec{f}.\vec{u}^* \rangle$ soit la dérivée d'une fonctionnelle dans la direction $\vec{u}^*$.

b) Pour les forces appliquées sur $\partial\Omega$, on suppose que $\partial\Omega = \Gamma$, frontière de l'ouvert Ω , est réunion de deux parties disjointes Γ_o et Γ_1, et que le solide occupant $\bar{\Omega}$ dans la configuration initiale a un déplacement imposé $\vec{u}_o$ sur Γ_o (le cas $\vec{u}_o = \vec{0}$ correspond d'ailleurs à un solide encastré sur la partie Γ_o de sa frontière), les forces de surface étant imposées sur Γ_1 (si celles-ci sont nulles on dit que le solide est à bord Γ_1 libre.



Si l'on considère la loi fondamentale de la dynamique appliquée à un volume V arbitraire, inclus dans $\overline{\Phi(\Omega)}$ mais ayant une partie de sa frontière ∂V commune avec $\partial\Phi(\Omega)$, $\vec{T}(X,\vec{n})$, $(X \in \partial\Phi(\Omega))$ représente les actions extérieures de surface exercées sur Φ (Ω) au point X où $\vec{n} = \vec{n}$ (X) est le vecteur unitaire normal "sortant" à $\partial\Phi$ (Ω) en X.

- Dans la configuration initiale, les efforts de surface exercées sur Γ_1 sont représentés sous la forme $\overrightarrow{g(x)}\, d\gamma(x)$ où $\vec{g}$ est un champ de vecteurs définis sur Γ_1 et où $d\gamma(x)$ est l'élément de surface au point x de Γ_1 .

- Dans la configuration déformée, les efforts de surface exercés sur Φ (Γ_1) sont représentés par $\overrightarrow{G(X)}\, d\Gamma$ (X) où $\vec{G}$ est un champ de vecteurs définis sur $\Phi(\Gamma_1)$.

(*) Dans l'hypothèse des charges mortes on a :

B.I.3 5. $$\forall\, x \in \Gamma_1 \begin{cases} \overrightarrow{G(X)}\, d\Gamma(X) = \vec{g}(x)\, d\gamma(x) \\ X = \Phi(x) \end{cases}$$

(**) Dans l'hypothèse des charges tournantes on a :

B.I.3 6 $$\forall\, x \in \Gamma_1 \begin{cases} \overrightarrow{G(X)}\, d\Gamma(X) = R.\, [\vec{g}(x)]\, d\gamma(x) \\ X = \Phi(x) = c + R\, x \end{cases}$$

(***) avec l'exemple des charges suivantes

B.I.3 7. $\quad \forall x \in \Gamma_1 \quad \overrightarrow{G(X)}\, d\Gamma(X) = R(\text{Grad}\, \vec{u})\, \vec{g}(x)\, d\gamma(x)$

(****) Dans une hypothèse un peu plus générale on a :

B.I.3 8. $\quad \forall x \in \Gamma_1 \quad \overrightarrow{G(X)}\, d\Gamma(X) = D\Phi(x)[\vec{g}(x)]\, d\gamma(x)$

D'après B.I.2.2. On a : $\vec{T}(X,\vec{n}) \doteq \overrightarrow{G(X)} = \dfrac{1}{\sqrt{G(x)}}\, \sigma_{kj}(x)\, \nu_k(x)\overrightarrow{G_j(x)}$

B.I.3.9.

Or d'après A.I.2 2.

B.I.3 9 $\quad d\Gamma(X) = \dfrac{\sqrt{G(x)}}{||\vec{\nu}(x)||}\, d\gamma(x)$ d'où :

B.I.3 10 sous l'hypothèse (*) $\quad \vec{G}[\Phi(x)] = \dfrac{||\nu(x)||}{\sqrt{G(x)}}\, \vec{g}(x) \quad \forall x \in \Gamma_1$

10' sous l'hypothèse (***) $\quad \vec{G}[\Phi(x)] = \dfrac{||\vec{\nu}(x)||}{\sqrt{G(x)}}\, R(\text{Grad}\, \vec{u}).\vec{g}(x) \; \forall x \in \Gamma_1$

10" sous l'hypothèse (****) $\quad \vec{G}[\Phi(x)] = \dfrac{||\vec{\nu}(x)||}{\sqrt{G(x)}}\, D\Phi(x).\vec{g}(x) \; \forall x \in \Gamma_1$

Si l'on pose $\vec{g}(x) = g_i(x)\, \vec{e}_i$; $\overrightarrow{N(x)} = N_i(x)\, \vec{e}_i$; $R(\text{Grad}\, \vec{u}) = (r_{ij}(\text{Grad}\, \vec{u})$

$D\Phi(x) = (\partial_j\, \Phi_i(x)) = (\delta_{ji} + \partial_j\, u_i(x))$

Ainsi BI.3 9. donne :

B.I 3. sous l'hypothèse (*) : $\sigma_{kj}(x)\ \nu_k(x) < \vec{G}_j(x).\vec{e}_i \quad = ||\overrightarrow{\nu(x)}||\ g_i(x)$

ou encore étant donné que $\overrightarrow{N(x)} = N_i(x)\ \vec{e}_i = \dfrac{\overrightarrow{\nu(x)}}{||\overrightarrow{\nu(x)}||} = \dfrac{\nu_k}{||\overrightarrow{\nu(x)}||}\ \vec{e}_k$

-11- $$\boxed{\sigma_{kj}(x)\ N_k(x) < \overrightarrow{G_j(x)}.\vec{e}_i > = g_i(x)}$$

.sous l'hypothèse (***)

-11'- $$\boxed{\sigma_{kj}(x)\ N_k(x) < \overrightarrow{G_j(x)}.\vec{e}_i > \ = r_{ij}(\text{Grad}\ \vec{u})g_j(x)}$$

sous l'hypothèse (****)

-11"- $$\boxed{\sigma_{kj}(x)\ N_k(x) < \overrightarrow{G_j(x)}.\vec{e}_i > = \partial_j\ \Phi_i(x)\ g_j(x)}$$

Les conditions formulées en BI.3 9. constituent les conditions à la frontière relatives à Γ_1. Si l'on écrit $\Phi\ (x) = x + \overrightarrow{u(x)}$, on obtient en exprimant les vecteurs $\overrightarrow{G_j(x)}$ en fonction de $\vec{u}$, les équations classiques suivantes :

. sous l'hypothèse (*)

B.1.3

$$\begin{cases} -\partial_j \left[\sigma_{ji}(x) + \sigma_{jk}(x)\ \partial_k\ u_i(x)\right] = \rho_o(x)\ f_i(x) \text{ dans } \Omega & \text{-12-} \\ \left[\sigma_{ji}(x) + \sigma_{jk}(x)\ \partial_k\ u_i(x)\right] N_j(x) = g_i(x) \text{ sur } \Gamma_1 & \text{-13-} \\ \vec{u} = \vec{u}_o \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_o & \text{-14-} \end{cases}$$

. Sous l'hypothèse (***)

B.I.3.

$$\begin{cases} -\partial_j \left[\sigma_{ji}(x) + \sigma_{jk}(x)\ \delta_k\ u_i(x)\right] = \rho_o(x)\ r_{ij}(\mathrm{Grad}\ \vec{u})\ f_j(x) & \text{dans } \Omega \quad -12'- \\ \left[\sigma_{ji}(x) + \sigma_{jk}(x)\ \delta_k\ u_i(x)\right] N_j(x) = r_{ij}(\mathrm{Grad}\ \vec{u}) g_j(x) & \text{sur } \Gamma_1 \quad -13'- \\ \vec{u} = \vec{u}_o & \text{sur } \Gamma_o \quad -14'- \end{cases}$$

. Sous l'hypothèse (****) le second membre de B.I.3 12 est à remplacer par

$\rho_o(x)(\delta_i^j + \delta_j\ u_i)\ f_j(x)$ et celui de B.I.3 13 par $(\delta_i^j + \delta_j\ u_i)\ g_j(x)$

Dans B.I.3 12.13.14 respectivement (-12'-13'-14') ou dans les équations obtenues sous l'hypothèse (****) on a fait des hypothèses sur les conditions de bord. Par exemple (c'est le cas du problème de Von Kàrman) on peut, sur Γ_o , ne pas se donner "complètement" le déplacement $\vec{u}_o$ tandis que l'on s'impose d'autres conditions sur les efforts de surface exercés.

Conclusion : De manière générale, compte-tenu de l'équation B.I.3.-12- on peut s'imposer sur Γ un opérateur $B(\mathrm{Grad}\ \vec{u}, \vec{u}, \sigma) = 0$ où B est par exemple différentiel d'ordre un au plus par rapport à $\vec{u}$ et d'ordre 0 par rapport à Grad $\vec{u}$ et σ .

II - LES LOIS DE COMPORTEMENT - FORMULATION VARIATIONNELLE

1) Les lois de comportement.

Le problème est de trouver un déplacement $\vec{u} = u_i\ \vec{e}_i$ et un tenseur(σ): $(\sigma) = \sigma_{ij}\ \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\ (i,j) \in \{1,2,3\}^2$ *symétrique* vérifiant B.I.3.-12- dans Ω et les conditions de bord sur $\Gamma = \delta\Omega$. Il est clair que les 9 fonctions inconnues ($6\ \sigma_{ij}(x)$ et $3\ u_i(x)$) ne peuvent être déterminées à partir de ces équations et conditions de bord.

D'ailleurs d'un point de vue mécanique, il est clair que pour une distribution de forces donnée, la déformation Φ (ou le déplacement) dépend de la nature du matériau dont est constitué le solide déformable. Bien que la plupart des exposés modernes de la théorie des lois de comportement se situent dans un cadre thermodynamique, on se contentera de rappeler la loi de comportement la plus simple qui s'écrit :

$[\sigma] = A^{-1}.(\gamma)$ soit $(\gamma) = A.(\sigma)$ où A est un opérateur linéaire sur l'espace vectoriel des tenseurs symétriques du second ordre défini par :

B.II.1 $$(A[\sigma])_{ij} = \frac{1+\nu}{E}[\sigma]_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}[1]_{ij} \qquad \text{avec } E > 0 \text{ , } 0 < \nu < \frac{1}{2}$$

$$(A^{-1}[\gamma])_{ij} = 2\mu[\gamma]_{ij} + \lambda\,\gamma_{kk}\,[1]_{ij} \quad \text{avec } \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} > 0$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0$$

Compte tenu des équations d'équilibre B.I.3.-12-, des conditions de bord B.I.3-13-14 et des lois de comportement B.II.1 si Ω est un ouvert borné de R^3 de frontière $\Gamma = \Gamma_o \cup \Gamma_1$, mes $(\Gamma_o) > 0$ on a :

B.II.2. $$\begin{cases} -\partial_j\,[\sigma_{ji}(x) + \sigma_{jk}(x)\,\partial_k\,u_i(x)] = \rho_o(x)\,f_i(x) & \text{dans } \Omega \\ (A[\sigma])_{ij} = [\gamma]_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\,[\partial_i\,u_j(x)+\partial_j\,u_i(x)+\partial_i\,u_k(x)\,\partial_j\,u_k(x)] & \text{dans } \overline{\Omega} \\ [\sigma_{ji}(x) + \sigma_{jk}(x)\,\partial_k\,u_i(x)]\,N_j(x) = g_i(x) & \text{sur } \Gamma_1 \\ \vec{u} = \vec{u}_o(x) & \text{sur } \Gamma_o \end{cases}$$

dans l'hypothèse des "charges mortes" (*)

On commence par se ramener à un problème concernant le seul déplacement $\vec{u}$, c'est-à-dire qu'on élimine les inconnues $\sigma_{ij}(x)$ en utilisant la deuxième relation B.II.1 qui s'écrit de façon générale

$[\sigma]_{ij} = (A^{-1}[\gamma])_{ij} = a_{ijk\ell}[\gamma]_{k\ell}$ avec $a_{ijk\ell}$ des constantes ne dépendant que de λ et μ données par la formule

$$a_{ijk\ell} = \lambda\delta_{ij}\,\delta_{k\ell} + \mu(\delta_{ik}\,\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\,\delta_{jk}) \text{ vérifiant :}$$

$a_{ik\ell} = a_{jik\ell} = a_{k\ell ij}$

La première équation de B.II.2. s'écrit alors :

$$-\partial_j\left[a_{ijk\ell}\,\partial_k\,u_l + \frac{1}{2}a_{ijk\ell}\,\partial_k\,u_m(x)\,\partial_\ell\,u_m(x) + a_{\ell jkp}\,\partial_k\,u_p(x)\,\partial_\ell\,u_i(x)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}a_{\ell jkp}\,\partial_k\,u_m\,\partial_p\,u_m\,\partial_\ell\,u_i\right] = \rho_o(x)\;f_i(x)$$

qui peut encore s'écrire sous forme condensée

$$B(\vec{u}) + \rho_o\;\overrightarrow{f(\vec{x})} = \vec{0} \qquad \text{ou encore}$$

B.II.3 $\quad B_{ijkl}\dfrac{\partial^2 u_j(x)}{\partial x_k\,\partial x_\ell} + \rho_o\;f_i(x) = 0 \quad$ avec

B.II.4 $\quad B_{ijk\ell} = a_{i\ell kj} + \left[\delta_{ij}\,a_{\ell kmp}\,\dfrac{\partial u_p}{\partial x_m} + (a_{m\ell kj} + a_{ik\ell m})\,\dfrac{\partial u_i}{\partial x_m}\right]$

$$+ \left[\frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,a_{\ell kpq}\,\frac{\partial u_p}{\partial x_m}\,\frac{\partial u_q}{\partial x_m} + a_{m\ell kp}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_p}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right]$$

Au système (B.II.3), valable dans Ω, il faut ajouter les conditions de bord :

$$\vec{u} = \vec{u}_o \text{ sur } \Gamma_o$$

(B.II.5) $\quad \left[a_{ijk\ell}\,\partial_k\,u_\ell + \frac{1}{2}\,a_{ijk\ell}\cdot\partial_k\,u_m\cdot\partial_\ell\,u_m + a_{\ell jkp}\cdot\partial_k\,u_p\cdot\partial_\ell\,u_i\right.$

$$\left. + \frac{1}{2}\,a_{\ell jkp}\cdot\partial_k\,u_m\cdot\partial_p\,u_m\cdot\partial_\ell\,u_i\right]N_j = g_i(x) \quad \text{sur } \Gamma_1\,.$$

2) *FORMULATION VARIATIONNNELLE*

Une formulation variationnelle du problème (B.II.2) consiste à trouver $(\sigma,\vec{u})$ dans $\Sigma \times V$, solution de

$$\text{(B.II.6)}\quad \forall(\tau)\in \Sigma,\int_\Omega (A[\sigma])_{ij}\,\tau_{ij} - \int_\Omega \tau_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\vec{u}) - \frac{1}{2}\int_\Omega \tau_{ij}\,\partial_i u_\ell\,\partial_j u_\ell = 0$$

$$\text{(B.II.7)}\quad \forall \vec{v}\in V,\ \int_\Omega \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\vec{v}) + \int_\Omega \sigma_{kj}\,\partial_k u_i.\partial_j v_i = \int_\Omega \rho_o\, f_i\, v_i + \int_{\Gamma_1} g_i\, v_i$$

les espaces Σ et V étant définis par :

$$\text{(B.II.8)}\qquad \Sigma = \{[\tau] = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega))^9\ ;\ \tau_{ij} = \tau_{ji}\}$$

$$\text{(B.II.9)}\qquad V = \{\vec{v} = v_i\,\vec{e}_i,\ v_i\in W^{1,4}(\Omega) : i\in\{1,2,3\};\ \vec{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_o\}\ .$$

Démonstration : On va justifier le choix de $W^{1,4}(\Omega)$ et étudier, au moins formellement, l'équivalent de (B.II.2) et (B.II.6,7,8 et 9).

. Tout d'abord, $(L^2(\Omega))^9$ étant muni du produit scalaire :

$$<[\tau],[\gamma]> = \int_\Omega \tau_{ij}\ \gamma_{ij}\ dv(x),$$

(B.II.6) signifie que $<A[\sigma] - [\gamma(\vec{u})],\tau> = 0\ ,\ \forall\,[\tau] \in (L^2(\Omega))^9$

(La notation $[\tau] \in (L^2(\Omega))^9$ signifiant en fait que les composantes τ_{ij} du tenseur du second ordre $[\tau]$ sont des fonctions de $L^2(\Omega)$).

Ainsi si $[\gamma(\vec{u})] \in (L^2(\Omega))^9$,

$A[\sigma] = [\gamma\ (\vec{u})]$ presque partout dans Ω , ce qui n'est autre que (B.II.2.(2)).

Pour que $\gamma_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\ (\partial_i\ u_j + \partial_j\ u_i + \partial_i\ u_k\ \partial_j\ u_k)$ *appartienne à* $L^2(\Omega)$, *il ne suffit pas, comme dans le cas linéarisé,* de supposer que $\vec{u} = u_i\ \vec{e}_i$ appartient à $(H^1(\Omega))^3 = (W^{1,2}(\Omega))^3$. On rappelle que $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de SOBOLEV des fonctions u appartenant à $L^p(\Omega)$ ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre m (dérivées prises au sens des distributions : u a une dérivée d'ordre q, $q \leqslant m$, au sens des distributions de puissance p$^{\text{ème}}$ intégrable, s'il existe une fonction v_q de $L^p(\Omega)$ telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \int_\Omega u(x)\ D^q \phi(x)dx = (-1)^{|q|} \int_\Omega v_q(x)\ \phi\ (x)\ dx$$

où $D^q\ \phi\ (x) = \dfrac{\partial^{|q|}\phi(x)}{\partial x_1^{q_1}.\partial x_2^{q_2}.\partial x_3^{q_3}}$, $\quad |q| = q_1 + q_2 + q_3)$; $m \in N$, $1 \leqslant p < +\infty$.

Dans le cas non linéaire, le terme supplémentaire $\partial_i\ u_k.\partial_j\ u_k$ intervenant dans $\gamma_{ij}(\vec{u})$ appartient à $L^2(\Omega)$ dès que u_i appartient à $W^{1,4}(\Omega)$ (cf. ADAMS p. 115 où il est démontré que lorsque Ω est un ouvert de R^n, $W^{m,p}(\Omega)$ est une algèbre de BANACH pour $mp > n$: ici, $n = 3$, $m = 1$ et l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est donc une algèbre dès que $p > 3$ en particulier si $p = 4$). D'autre part, si $0 < \text{mes}(\Omega) < +\infty$, on a l'inclusion $L^4(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Finalement,

$$\boxed{\vec{u} = u_i\ \vec{e}_i,\ u_i \in W^{1,4}(\Omega) \text{ entraîne } \gamma_{ij}(\vec{u}) \in L^2(\Omega)}\ .$$

.. On va établir l'équivalence formelle de B.II.7 et de B.II.2 (où $\vec{u}_o(x)=\vec{0}$).

Tout d'abord (B.II.7) a un sens si l'on prend $\rho_o\ f_i$ dans $L^2(\Omega)$ et g_i dans $L^2(\Gamma)$. (B.II.7) peut s'écrire :

B.II.7' $$A([\sigma],\vec{v}) + B([\sigma],\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \rho_o f_i v_i + \int_{\Gamma_1} g_i v_i$$

où $A : (\sigma,\vec{v}) \rightsquigarrow \int_\Omega \sigma_{ij}\, \partial_j v_i$ bilinéaire continue de $\Sigma \times V$ dans R. En effet :

$$|A([\sigma],\vec{v})| \leqslant ||\sigma_{ij}||_{L^2(\Omega)} . ||\partial_j v_i||_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant (\text{mes } \Omega)^{1/4} . ||\partial_j v_i||_{L^4(\Omega)} . ||\sigma_{ij}||_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant C(\Omega) ||\sigma||_\Sigma \, ||\vec{v}||_V$$

et où $B([\sigma], \vec{u}, \vec{v}) = \int_\Omega \sigma_{kj}\, \partial_k u_i\, \partial_j v_i$ définit une forme trilinéaire continue sur $\Sigma \times V \times V$. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset W^{1,4}(\Omega)$, d'une part $\int_{\Gamma_1} g_i v_i = 0$ dans B.II.7 si $v_i \in \mathcal{D}(\Omega)$; d'autre part

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\, \partial_j v_i = \langle\sigma_{ij}, \partial_j v_i\rangle = - \langle\partial_j \sigma_{ij}, v_i\rangle$$

$$\int_\Omega \sigma_{kj}\, \partial_k u_i\, \partial_j v_i = \langle\sigma_{kj}\, \partial_k u_i, \partial_j v_i = \langle\partial_j(\sigma_{kj}\, \partial_k u_i), v_i\rangle$$

où $\langle T,\phi\rangle$ désigne la valeur de la distribution T pour $\phi \in (\Omega)$. On rappelle que $\mathcal{D}'(\Omega)$ désigne l'ensemble des distributions définies sur Ω .

B.II.7' s'écrit encore :

$$-\partial_j(\sigma_{ji} + \sigma_{jk}\, \partial_k u_i) = \rho_o f_i \quad \text{au sens des distributions sur } \Omega$$

Donc on est ramené à trouver$([\sigma],u)$ dans $\Sigma \times V$ vérifiant :

$$-\partial_j(\sigma_{ji} + \sigma_{jk}.\partial_k u_i) = \rho_o f_i \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

(B.II.10) $$\forall \vec{v}\ V, \int_\Omega -\partial_j(\sigma_{ji} + \sigma_{jk}\, \partial_k u_i)\, v_i = A(\sigma,\vec{v}) + B(\sigma,\vec{u},\vec{v}) - \int_{\Gamma_1} g_i v_i$$

et, inversement, si$([\sigma],\vec{u}) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^{12}$ est solution du problème (B.II.10) c'est clairement une solution de (B.II.7).

Si l'on fait des hypothèses de régularité supplémentaires sur la solution, la seconde relation (B.II.10) peut s'interpréter comme jouant le rôle de conditions aux bords.

Si $(\sigma,\vec{u}) \in (H^1(\Omega))^9 \times (W^{2,4}(\Omega)\cap V)^3$, on a : $\forall \vec{v} \in V$

$$A([\sigma],\vec{v}) + \mathcal{B}([\sigma],\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega -\partial_j(\sigma_{ji}+\sigma_{jk}\,\partial_k u_i)v_i\,dx + \int_{\Gamma_1}(\sigma_{ji}+\sigma_{jk}\partial_k u_i)N_j v_i\,d\gamma$$

(B.II.11)

$$= \int_\Omega \rho_o(x)\, f_i(x)v_i(x)dx + \int_{\Gamma_1} g_i(x)v_i(x)\,d\gamma .$$

Par conséquent, la conjonction de (B.II.10) et (B.II.11) implique :

(B.II.12) $$\forall \vec{v} \in V \int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij} + \sigma_{jk}\,\partial_k\, u_i)\, N_j\, v_i\, d\gamma = \int_{\Gamma_1} g_i(x)v_i(x)d\gamma$$

Or, si Ω est localement situé d'un même côté de sa frontière Γ supposée être de classe $C^{0,1}$ (au moins), on peut montrer (ADAMS p. 97-98) que $v \in W^{1,4}(\Omega)$ admet une trace sur Γ notée $v|_\Gamma$ qui appartient à $C^o(\Gamma)$, que $\sigma_{ij} \in W^{1,2}(\Omega)$ est tel que $\sigma_{ij}|_\Gamma \in L^4(\Gamma)$ que $\partial_k\, u_i|_\Gamma \in C^o(\Gamma)$ (car $\partial_k\, u_i \in W^{1,4}(\Omega)$). Dans ces conditions (B.II.12) est une égalité dans $L^2(\Gamma_1)$ et par conséquent, on a,

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{jk}\,\partial_k\, u_i)\, N_j = g_i \qquad \text{p.p. sur } \Gamma_1 .$$

On a donc établi que, formellement (B.II.6) à (B.II.9) étaient bien équivalents à (B.II.2) (l'appartenance à V impliquant $\vec{u} = \vec{0}$ sur Γ_o)

Conclusion

Nous avons rédigé ce chapitre dans l'intention de faire une mise au point de nos connaissances sur la Mécanique *non linéaire* des solides déformables (dans l'hypothèse de grands déplacements et petites déformations); une formulation variationnelle y est incluse. Nous avons effectué une rédaction très détaillée qui n'est autre qu'une synthèse de résultats exposés notamment dans CIARLET-RABIER [2], POTIER-FERRY, GERMAIN.

Nous aurions pû faire figurer dans ce chapitre, un exposé sur les aspects thermomécaniques des lois de comportement qui mène à une formulation variationnelle relative aux solides thermoélastiques, et aussi une formulation tridimensionnnelle d'un problème non linéaire de coque : ces deux sujets sont étudiés en collaboration avec Monsieur PARSY. Nous ne les avons pas inclus dans ce mémoire pour deux raisons : l'une est une question de volume du manuscrit, l'autre étant la connaissance d'un preprint d'un article de Monsieur DESTUYNDER sur la théorie non linéaire des membranes (à paraître) et dont Monsieur PARSY a eu connaissance lors des Journées "Plaques et Coques" organisées les 25-26 et 27 Novembre 1981 par Messieurs DESTUYNDER et BERNADOU.

CHAPITRE II

EQUATIONS D'EQUILIBRE DES COQUES CYLINDRIQUES

I - RAPPELS MATHEMATIQUES

1) Coordonnées curvilignes orthogonales

Soit E un espace affine euclidien (orienté) E de dimension 3, rapporté à un repère $Ox_1\ x_2\ x_3$, cartésien orthogonal. On appelle coordonnées curvilignes sur une partie $\mathcal{D}$ de E, toute application ϕ de R^3 dans R^3 :

$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\phi} (y_1, y_2, y_3)$ bijective et deux fois continûment dérivable dans le domaine $\mathcal{D}$ où elle est définie. En tout point M de $\mathcal{D}$, il passe ainsi trois courbes coordonnées y_j = Constante, $j \in \{1, 2, 3\}$ et trois seulement, les trois vecteurs $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial y_j}$ formant une base de l'espace vectoriel E_3 associé à E .

Les coordonnées curvilignes sont dites orthogonales si les vecteurs $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial y_1}, \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial y_2}, \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial y_3}$ sont deux à deux orthogonaux. On pose

I.1.1 : $$\boxed{\frac{\partial \vec{M}}{\partial y_j} = h_j\ \vec{e}_j \text{ (j fixé) où } \|\vec{e}_j\| = 1 \quad \text{et} \quad h_j > 0}$$

2) Expression d'un certain nombre d'opérateurs classiques utilisés dans la suite de la rédaction. *(en coordonnées curvilignes orthogonales).*

I.2.1. : a) déplacement élémentaire

$$\boxed{\overrightarrow{dM} = h_1\ dy_1\ \vec{e}_1 + h_2\ dy_2\ \vec{e}_2 + h_3\ dy_3\ \vec{e}_3 = \Sigma\ \{h_j\ dy_j\ \vec{e}_j\}}$$

où la notation $\Sigma\ \{f\}$ désigne la somme des trois termes obtenus en effectuant dans f les permutations circulaires des indices 1, 2, 3.

b) Vecteur $\vec{n}\, d\,\sigma$, où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire d'origine M normal à une aire élémentaire $d\sigma$ tracée sur une portion de surface :

I.2.2. $$\boxed{\vec{n}\, d\,\sigma = \Sigma\, \{h_2\, h_3\, dy_2\, dy_3\, \vec{e}_1\}}$$

c) Elément de volume élémentaire dv au voisinage de M :

I.2.3. $$\boxed{dv = h_1\, h_2\, h_3\, dy_1\, dy_2\, dy_3}$$

d) Divergence d'un vecteur $\vec{A}$ de composantes A_i sur les $\vec{e}_i$:

I.2.4. $$\boxed{\mathrm{div}\, \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\, \Sigma\, \{ \frac{\partial}{\partial y_1}\, (A_1\, h_2\, h_3)\} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\, \Sigma\, \{(A_1\, h_2\, h_3)\, ,1}$$

où la notation, 1 désigne la dérivation partielle par rapport à y_1 .

e) Rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ de composantes A_i sur les $\vec{e}_i$.

A l'aide de la formule de Stokes on obtient :

I.2.5. $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} = \Sigma\, \{ \frac{1}{h_1 h_2} \left[(A_2\, h_2)_{,1} - (A_1\, h_1)_{,2} \right] \vec{e}_3\, \}}$$

f) Gradient d'un vecteur

Le gradient d'un vecteur $\vec{A}$ est le tenseur, défini en chaque point M, qui, par définition fait correspondre au déplacement élémentaire $\overrightarrow{dM}$ la différentielle de $\vec{A}$ c'est-à-dire la quantité $\overrightarrow{dA} = d\, (A_1 \vec{e}_1 + A_2\, \vec{e}_2 + A_3\, \vec{e}_3)$. Après avoir préalablement calculé les dérivées des vecteurs $\vec{e}_i$ (i.e. les quantités $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial y_j}$ qui interviennent dans $\overrightarrow{dA}$) et si on désigne par $V_{ij}(\vec{A})$ les composantes de ce tenseur sur les vecteurs $\vec{e}_i$ on obtient :

I.2.6. $$\boxed{\nabla_{11}(\vec{A}) = \frac{A_{1,1}}{h_1} + \frac{A_2}{h_2}\frac{h_{1,2}}{h_1} + \frac{A_3}{h_3}\frac{h_{1,3}}{h_1} \; ; \; \nabla_{12}(\vec{A}) = \frac{A_{1,2}}{h_2} - \frac{A_2}{h_1}\frac{h_{2,1}}{h_2}}$$

$$\boxed{\nabla_{13}(\vec{A}) = \frac{A_{1,3}}{h_3} - \frac{A_3 h_{3,1}}{h_1 h_3}}$$

et des formules analogues pour les autres composantes.

g) Divergence d'un tenseur du second ordre

En utilisant le théorème classique de la divergence et la définition de la divergence d'un tenseur F de composantes t_{ij} on obtient :

I.2.7. $$\boxed{\overrightarrow{\text{div } F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\,\Sigma\,\{\left[h_2 h_3(t_{11}\,\vec{e}_1 + t_{21}\,\vec{e}_2 + t_{31}\,\vec{e}_3)\right]_{,1}\}}$$

II - EQUATIONS D'EQUILIBRE

On considère par rapport au repère orthonormé direct $(O\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le domaine (C) suivant :

$$C = \{(r,\theta,z) \ / \ r \in [R-h, R+h] \quad ; \ z \in [0,\ell] \quad ; \ \theta \in [0,2\pi[\}$$

coque cylindrique de révolution autour de Oz, de rayon moyen R, d'épaisseur 2h (<< 2R) limitée par les plans z = 0 et z = ℓ (> 0).

On est évidemment amené à travailler en *coordonnées curvilignes orthogonales cylindriques*, le repère local orthonormé direct en M ∈ C étant $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ où :

II.0.1.

$h_r\ \vec{e}_r = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}$	$h_\theta\ \vec{e}_\theta = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}$	$h_z\ \vec{e}_z = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}$

Les formules de passage des coordonnées cartésiennes $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ aux coordonnées curvilignes cylindriques $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ étant données par les relations inversibles :

$x = r \cos\theta$	$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$	D'autre part
$y = r \sin\theta$	$\theta = \text{arc tg} \frac{y}{x}$	$\vec{e}_x = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x}$; $\vec{e}_y = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y}$; $\vec{e}_z = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}$
$z = z$	$z = z$	

II.0.2.

$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_x \cos\theta + \vec{e}_y \sin\theta = \vec{e}_r$;	$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = -r \sin\theta\, \vec{e}_x + r\cos\theta\, \vec{e}_y = r\, \vec{e}_\theta$	$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$

D'où

II.0.3.

$h_r = 1$	$h_\theta = r$	$h_z = 1$

A l'intérieur de la coque (C) on considère un volume V tel que $V = [R-h, R+h] \times (D)$ où (D) est un domaine de classe C^1 de la surface moyenne S de la coque définie par $S = \{ (r,\theta,z) \ / \ r = R \ ; \ \theta \in [0,2\pi[\ ; \ z \in [0,\ell] \}$, et tel que la frontière ∂D de (D) soit coupée en au plus deux points par toute génératrice du cylindre $r = R$.

Nous allons traduire la loi fondamentale de la statique en exprimant que la résultante des efforts tant extérieurs qu'intérieurs (efforts donnés, efforts de contraintes) appliqués au volume V est nulle, ainsi que le moment résultant par rapport à un point O de l'axe de (C).

1) *Equation d'équilibre des résultantes*

Si l'on désigne par $\vec{f}$ la densité volumique des efforts donnés (par exemple : pesanteur, inertie, etc...) et par (σ_{ij}) le tenseur symétrique des contraintes appliquées à V.

On a

II.1.1.a. $$\boxed{\vec{0} = \iiint_V \vec{f}\, dV + \iint_{\partial V} \sigma_{ij}\, n_j\, \vec{e}_i\, dS}$$ où n_j désigne la $j^{\text{ème}}$ composante par rapport à $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ du vecteur normal $\vec{n}$ dirigé vers l'extérieur de la surface (∂V), frontière du volume V.

Nous allons présentement introduire un certain nombre de notations.

Notations : dans ce qui suit les indices i,j,k seront remplacés par r,θ,z.

II.1.2. Notations

. $(f_r, f_\theta, f_z) = (f_i)$, les composantes de $\vec{f}$ sur les axes $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

. $F_i(\theta,z) = \int_{R-h}^{R+h} f_i(r,\theta,z)dr$. $\Sigma_{ij}(\theta,z) = \int_{R-h}^{R+h} \sigma_{ij}(r,\theta,z)\, dr$

$m_i(\theta,z) = \int_{R-h}^{R+h} (r-R) f_i(r,\theta,z)dr$. $M_{ij}(\theta,z) = \int_{R-h}^{R+h} \varepsilon_{irk}(r-R)\, \sigma_{kj}\, dr$

$n_i(\theta,z) = \int_{R-h}^{R+h} r(r-R) f_i(r,\theta,z)dr$. $N_{ij}(\theta,z) = \int_{R-h}^{R+h} \varepsilon_{irk}\, r(r-R)\, \sigma_{kj}\, dr$

. $\Lambda_{ij}(\theta,z) = \int_{R-h}^{R+h} \lambda_{ij}(r,\theta,z)\, dr$

. $M_{ij}(\theta,z) = \int_{R-h}^{R+h} \varepsilon_{irk}(r-R)\, \lambda_{kj}\, dr$

. $N_{ij}(\theta,z) = \int_{R-h}^{R+h} \varepsilon_{irk}\, r(r-R)\, \lambda_{kj}\, dr$

. On obtient ainsi

$M_{rr} = M_{r\theta} = M_{rz} = N_{rr} = N_{r\theta} = N_{rz} = 0$

$.M_{\theta r} = -\int_{R-h}^{R+h} (r-R)\, \sigma_{rz}\, dr$

$.M_{zz} = -M_{\theta\theta} = \int_{R-h}^{R+h} (r-R)\, \sigma_{\theta z}\, dr$

$.M_{zr} = \int_{R-h}^{R+h} (r-R)\, \sigma_{r\theta} dr$. $M_{\theta z} = -\int_{R-h}^{R+h} (r-R)\sigma_{zz}\, dr$

$.M_{z\theta} = \int_{R-h}^{R+h} (r-R)\, \sigma_{\theta\theta}\, dr$

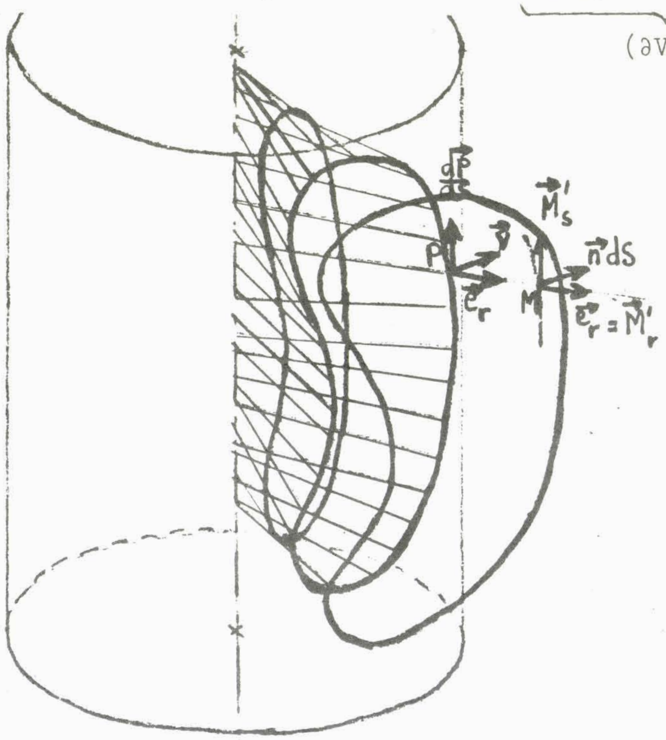
De même

$$. \; N_{\theta r} = -\int_{R-h}^{R+h} r(r-R)\sigma_{rz}\, dr \qquad . \; N_{zz} = -N_{\theta\theta} = \int_{R-h}^{R+h} r(r-R)\sigma_{\theta z} dr \qquad . N_{\theta z} = -\int_{R-h}^{R+h} r(r-R(-)\sigma_{zz}\, dr$$

$$. \; N_{zr} = \int_{R-h}^{R+h} r(r-R)\; \sigma_{r\theta}\; dr \qquad . \; N_{z\theta} = \int_{R-h}^{R+h} r(r-R)\; \sigma_{\theta\theta}\; dr$$

Nous allons expliciter l'équation II.1.1 après intégration par rapport à r entre R-h et R+h et nous ramener ainsi à une équation sur la surface moyenne.

$V = [R-h,\ R+h] \times (D)$ et $(\partial V) = D^{+} \cup D^{-} \cup \underbrace{[R-h,\ R+h] \times (\partial D)}_{(\partial V_{lat})}$



ce qui donne

II.1.1.b $\quad \vec{0} = \iint_{(D)} (m_i + R\, F_i)\vec{e}_i\; d\theta\; dz + \iint_{(D)} [(R+h)\sigma_{ir}(R+h,\theta,z) - (R-h)\sigma_{ir}(R-h,\theta,z)]$

$$\vec{e}_i\; d\theta\, dz + \iint_{(\partial V_{\ell at})} \sigma_{ij}\; n_j\; \vec{e}_i\; dS\ .$$

Nous allons ici évaluer $\iint_{(\partial \ell at)} \sigma_{ij}\; n_j\; \vec{e}_i\; dS$

Nous pouvons prendre comme paramètres de description pour la surface latérale de V : - l'abscisse curviligne s sur (∂D) bord du domaine (D) de la surface moyenne.

- la coordonnée cylindrique r

Les lignes coordonnées sont alors : - les rayons du cylindre

- des courbes "parallèles" à (∂D)

Un point générique de $(\partial D_{\ell at})$ peut s'écrire $\boxed{\vec{M}(r,s)=\vec{P}(s)+(r-R)\vec{e}_r(s)}$

Si l'on désigne par $\vec{n}$ le vecteur "sortant" unitaire au point M de la surface latérale on aura $\boxed{\vec{n}\; dS = \vec{M}'_s \wedge \vec{M}'_r\; ds\; dr}$; et si $\vec{\nu}$ désigne le vecteur normal "sortant" de $(\partial V\, \ell at)$ au point P d'après les définitions de $\overrightarrow{dP}$, $\vec{e}_r$, $\vec{\nu}$ et ds on a la relation $\boxed{\overrightarrow{dP} = e_r \wedge \vec{\nu}\; ds}$

$$\vec{M}'_s = \frac{\overrightarrow{dP}}{ds} + (r-R)\,\frac{d\vec{e}_r}{ds} = \vec{e}_r \wedge \vec{\nu} + (r-R)\,\frac{d\theta}{ds}\,\vec{e}_\theta \qquad \vec{M}'_r = \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_r \wedge \vec{\nu} : \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu_z \\ \nu_\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{M}'_s : \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu_z + (r-R)\dfrac{d\theta}{ds} \\ \nu_\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{n}\, dS = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_\theta\, dr\, ds \\ [\nu_z - (r-R)\dfrac{d\theta}{ds}]\, dr\, ds \end{pmatrix}$$

D'où $$\iint_{(\partial lat)} \sigma_{ij}\, n_j\, \vec{e}_i\, dS = \int_{\partial D}\int_{R-h}^{R+h} \{[\sigma_{r\theta}\,\nu_\theta\, dr\, ds + \sigma_{rz}\,\nu_z\, dr\, ds - (r-R)\sigma_{rz} dr\; d\theta]\vec{e}_r$$

$$+ [\sigma_{\theta\theta}\,\nu_\theta\, dr\; ds + \sigma_{\theta z}\;\nu_z\; dr\; ds - (r-R)\sigma_{\theta z} dr\, d\theta]\vec{e}_\theta + \sigma_{z\theta}\;\nu_\theta\; dr\; ds + [\sigma_{zz}\;\nu_z\; dr\; ds$$

$$- (r-R)\;\sigma_{zz}\; dr\; d\theta]\;\vec{e}_z\;\}$$. Soit encore :

II.1.1.c

$$\iint_{(\partial \nu_{\ell at})} \sigma_{ij}\; n_j\; \vec{e}_i\; dS = \int_{\partial D}\int_{R-h}^{R+h} \{[\sigma_{r\theta}\;\nu_\theta(s) + \sigma_{rz}\;\nu_z(s)\;]\;\vec{e}_r + [\sigma_{\theta\theta}\;\nu_\theta(s) + \sigma_{\theta z}\;\nu_z(s)]\vec{e}_\theta$$

$$+[\sigma_{z\theta}\;\nu_\theta(s)+\sigma_{zz}\;\nu_z(s)]\vec{e}_z\}\; dr\; ds + \int_{\partial D} (M_{\theta r}\;\vec{e}_r + M_{\theta\theta}\;\vec{e}_\theta + M_{\theta z}\;\vec{e}_z)\; d\theta$$

La dernière intégrale $\int_{\partial D} (M_{\theta r}\ \vec{e}_r + M_{\theta\theta}\ \vec{e}_\theta + M_{\theta z}\ \vec{e}_z) d\theta = \int_{\partial D} (M_{\theta i}\ \vec{e}_i)\ d\theta$

peut encore s'exprimer comme une intégrale double étendue au domaine D .

En effet :

$$\iint_{(D)} - \frac{\partial}{\partial z} (M_{\theta r}\ \vec{e}_r + M_{\theta\theta}\ \vec{e}_\theta + M_{\theta z}\ \vec{e}_z)\ d\theta\ dz$$

$$= \int_\alpha^\beta M_{\theta i}\ [z_1(\theta)]\ \vec{e}_i\ d\theta - \int_\alpha^\beta M_{\theta i}\ [z_2(\theta)]\ \vec{e}_i\ d\theta$$

$$= \int_{(\partial D)} (M_{\theta i}\ \vec{e}_i)\ d\theta$$

(en vertu de l'hypothèse faite à la page où l'on a supposé que la frontière ∂D de D était coupée en au plus deux points par toute génératrice du cylindre $r = R$).

Ainsi

II.1.1.d
$$\boxed{\int_{\partial D} (M_{\theta i}\ \vec{e}_i) d = \iint_{(D)} - \frac{\partial}{\partial z} (M_{\theta i}\ \vec{e}_i)\ d\theta\ dz}$$

En utilisant II.1.1.d dans II.1.1.c puis en utilisant II.1.1.c dans l'équation II.1.1.b on obtient l'équation intermédiaire II.1.1.bis

II.1.1.bis
$$\vec{0} = \iint_{(D)} [m_i + R\ F_i + (R+h)\sigma_{ir}(R+h,\theta,z) - (R-h)\sigma_{ir}(R-h,\theta,z)]\ \vec{e}_i\ d\theta\ dz$$

$$- \iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial z} (M_{\theta i}\ \vec{e}_i)\ d\theta dz + \int_{\partial D} \{ [\Sigma_{r\theta}\ \nu_\theta(s) + \Sigma_{rz}\ \nu_z(s)]\ \vec{e}_r + [\Sigma_{\theta\theta}\ \nu_\theta(s) + \Sigma_{\theta z}\ \nu_z(s)]\ \vec{e}_\theta$$

$$+ [\Sigma_{z\theta}\ \nu_\theta(s) + \Sigma_{zz}\ \nu_z(s)]\ \vec{e}_z \}\ ds\ .$$

Or les efforts sur les "couvercles" D^+ et D^- du volume V sont donnés - le vecteur unitaire normal "sortant" de D^+ étant $\vec{e}_r$ et le vecteur unitaire normal sortant de D^- étant $-\vec{e}_r$, posons :

II.1.1.e et

$$\boxed{\begin{aligned}&\sigma_{rr}(R+h,\theta,z)\,\vec{e}_r + \sigma_{r\theta}(R+h,\theta,z)\vec{e}_\theta + \sigma_{rz}(R+h,\theta,z)\vec{e}_z = p_r^+\,\vec{e}_r + p_\theta^+\,\vec{e}_\theta + p_z^+\,\vec{e}_z\\ &\sigma_{rr}(R-h,\theta,z)\,\vec{e}_r + \sigma_{r\theta}(R-h,\theta,z)\,\vec{e}_\theta + \sigma_{rz}(R-h,\theta,z)\,\vec{e}_z = p_r^-\,\vec{e}_r + p_\theta^-\,\vec{e}_\theta + p_z^-\,\vec{e}_z\end{aligned}}$$

L'équation II.1.1.bis devient :

II.1.1.

$$\vec{0} = \iint_{(D)} [m_i + R\,F_i + (R+h)p_i^+ - (R-h)p_i^-]\,\vec{e}_i\,d\theta\,dz - \iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial z}(M_{\theta i}\,\vec{e}_i)\,d\theta\,dz$$

$$+ \int_{\partial D} \{ [\Sigma_{r\theta}\nu_\theta(s) + \Sigma_{rz}\,\nu_z(s)]\vec{e}_r + [\Sigma_{\theta\theta}\,\nu_\theta(s) + \Sigma_{\theta z}\,\nu_z(s)]\vec{e}_\theta + [\Sigma_{z\theta}\,\nu_\theta(s) + \Sigma_{zz}\,\nu_z(s)]\}ds$$

On peut à l'aide du théorème de Stokes transformer l'intégrale :

$$\int_{\partial D}\{[\Sigma_{r\theta}\nu_\theta(s) + \Sigma_{rz}\nu_z(s)]\vec{e}_r + [\Sigma_{\theta\theta}\nu_\theta(s) + \Sigma_{\theta z}\,\nu_z(s)]\,\vec{e}_\theta + [\Sigma_{z\theta}\nu_\theta(s) + \Sigma_{zz}\,\nu_z(s)]\vec{e}_z\}\,ds$$

En effet $\int_{\partial D} \vec{A}.\vec{d\ell} = \iint_{(D)} \overrightarrow{\text{Rot}\,\vec{A}}.\vec{n}\,dS$ où ∂D est une courbe fermée sur laquelle s'appuie la surface (D); $\vec{d\ell}$ l'élément différentiel tangent linéaire de la courbe (∂D) et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal "sortant" de la surface (D).

L'intégrale II.1.1.f se présente sous la forme $\int_{\partial D} A_i(s)\,\vec{e}_i(s)\,ds$ et nous allons la transformer sous la forme $\iint_{(D)} B_i(\theta,z)\,\vec{e}_i(\theta)\,d\theta\,dz$.

D'autre part, d'après les définitions de $\vec{d\ell}$, $\vec{e}_r$, $\vec{\nu}$ et ds vues antérieurement on rappelle que $\vec{d\ell} = \vec{e}_r \wedge \vec{\nu}\,ds$ d'où

$$\boxed{\int_{\partial D} \vec{A}(s).\vec{d\ell} = \int_{\partial D} \overrightarrow{A(s)}.(\vec{e}_r \wedge \vec{\nu})ds = \iint_{(D)} \overrightarrow{\text{Rot}\,\overrightarrow{A(s)}}.\vec{n}\,dS = \iint_{(D)} \overrightarrow{\text{Rot}\,\overrightarrow{A\,(s)}}.\vec{e}_r\,dS}$$

car $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire normal sortant de (D).

D'après I.2.5. la composante sur $\vec{e}_r$ du vecteur $\overrightarrow{\text{Rot}\,\vec{A}}$ est donnée par

$$\left(\overrightarrow{\text{Rot}\,\vec{A}}\right)_r = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} A_z - \frac{\partial}{\partial z} r\, A_\theta\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \quad \text{avec } \vec{A} = A_i\,\vec{e}_i \,.$$

Or sur (D) nous avons r = R et nous obtenons alors la formule suivante

$$\text{II.1.1.g.} \qquad \boxed{\int_{\partial D} \left[-A_\theta(s)\nu_z + A_z(s)\nu_\theta\right] ds = \iint_{(D)} \left[\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - R\,\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right] d\theta\, dz}$$

Comme $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de θ et donc de s nous allons repasser dans le repère cartésien de référence $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ pour pouvoir permuter les symboles d'intégration et l'écriture des différents vecteurs, intervenant dans les calculs, par rapport à la base fixe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Ainsi d'après II.0.2 :

$$\int_{\partial D}\left\{\left[\Sigma_{r\theta}\,\nu_\theta(s) + \Sigma_{rz}\,\nu_z(s)\right](\vec{e}_x\cos\theta + \vec{e}_y\sin\theta) + \left[+\Sigma_{\theta\theta}\,\nu_\theta(s) + \Sigma_{\theta z}\,\nu_z(s)\right]\right.$$

$$-(\vec{e}_x\sin\theta + \vec{e}_y\cos\theta).$$

$$\left.+\left[\Sigma_{z\theta}\,\nu_\theta(s) + \Sigma_{zz}\,\nu_z(s)\right]\vec{e}_z\right\}ds = \int_{\partial D}\left\{\left[\cos\theta(\Sigma_{r\theta}\,\nu_\theta(s) + \Sigma_{rz}\,\nu_z(s))\right.\right.$$

$$\left. - \sin\theta(\Sigma_{\theta\theta}\,\nu_\theta(s) + \Sigma_{\theta z}\,\nu_z(s)\right]\vec{e}_x$$

$$+\left[\sin\theta(\Sigma_{r\theta}\,\nu_\theta(s) + \Sigma_{rz}\,\nu_z(s)) + \cos\theta(\Sigma_{\theta\theta}\,\nu_\theta(s) + \Sigma_{\theta z}\,\nu_z(s))\right]\vec{e}_y +$$

$$\left.+\left[\Sigma_{z\theta}\,\nu_\theta(s) + \Sigma_{zz}\,\nu_z(s)\right]\vec{e}_z\right\}ds$$

$$= \left(\int_{\partial D}\left\{\nu_z(s)\left[\cos\theta\,\Sigma_{rz} - \sin\theta\,\Sigma_{\theta z}\right] + \nu_\theta(s)\left[\cos\theta\,\Sigma_{r\theta} - \sin\theta\,\Sigma_{\theta\theta}\right]\right\}ds\right)\vec{e}_x$$

$$+ \left(\int_{\partial D}\left\{\nu_z(s)\left[\sin\theta\,\Sigma_{rz} + \cos\theta\,\Sigma_{\theta z}\right] + \nu_\theta(s)\left[\sin\theta\,\Sigma_{r\theta} + \cos\theta\,\Sigma_{\theta\theta}\right]\right\}ds\right)\vec{e}_y$$

$$+ \left(\int_{\partial D}\left\{\nu_z(s)\left[\Sigma_{zz}\right] + \nu_\theta(s)\left[\Sigma_{z\theta}\right]\right\}ds\right)\vec{e}_z$$

Soit en utilisant la formule II.1.1.g

$$= \left(\iint_{(D)} \{ - \sin\theta\ \Sigma_{r\theta} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{r\theta} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{\theta\theta} - \cos\theta\ \Sigma_{\theta\theta} + R\cos\theta \frac{\partial\Sigma}{\partial z} rz - R\sin\theta \frac{\partial\Sigma\theta_z}{\partial z} \} \, d\theta\, dz\right) \vec{e}_x$$

$$+ \left(\iint_{(D)} \{\cos\theta\ \Sigma_{r\theta} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{r\theta} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{\theta\theta} - \sin\theta\ \Sigma_{\theta\theta} + R\sin\theta \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{rz} + R\cos\theta \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{\theta z}\} \, d\theta\, dz\right) \vec{e}_y$$

$$+ \left(\iint_{(D)} \{\frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{z\theta} + R \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{zz}\} d\theta\, dz\right) \vec{e}_z = \iint_{(D)} \{[\ldots]\vec{e}_x + [\ldots]\vec{e}_y + [\ldots]\ \vec{e}_z\}\ d\theta\, dz$$

Par des regroupements de termes on obtient

$$= \iint_{(D)} \{\Sigma_{r\theta}\ \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{r\theta}\ \vec{e}_r + \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{\theta\theta}\ \vec{e}_\theta - \Sigma_{\theta\theta}\ \vec{e}_r + R \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{rz}\ \vec{e}_r + R \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{\theta z}\ \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{z\theta} + \frac{\partial}{\partial z} R\ \Sigma_{zz}\right) \vec{e}_z\}\ d\theta\, dz$$

$$= \iint_{(D)} \{\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{r\theta} - \Sigma_{\theta\theta} + R \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{rz}\right] \vec{e}_r + \left[\Sigma_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{\theta\theta} + R \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{\theta z}\right] \vec{e}_\theta + \left[\frac{\partial\Sigma z\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial z} R\ \Sigma_{zz}\right] \vec{e}_z\}\ d\theta\, dz$$

On obtient ainsi l'égalité :

$$\int_{\partial D} \{\left[\Sigma_{r\theta}\ \nu_\theta(s) + \Sigma_{rz}\ \nu_z(s)\right]\vec{e}_r + \left[\Sigma_{\theta\theta}\ \nu_\theta(s) + \Sigma_{\theta z}\ \nu_z(s)\right]\vec{e}_\theta + \left[\Sigma_{z\theta}\ \nu_\theta(s) + \Sigma_{zz}\ \nu_z(s)\right]\vec{e}_z\} ds$$

$$= \iint_{(D)} \{\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{r\theta} - \Sigma_{\theta\theta} + R \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{rz}\right]\vec{e}_r + \left[\Sigma_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{\theta\theta} + R \frac{\partial}{\theta z} \Sigma_{\theta z}\right]\vec{e}_\theta + \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{z\theta} + \frac{\partial}{\partial z} R\Sigma_{zz}\right]\vec{e}_z\} d\theta\, dz$$

En substituant dans II.1.1.ter le second membre de cette égalité au premier membre de celle-ci on obtient l'équation II.1.3.

$$\vec{0} = \iint_{(D)} \left\{ \left[(R+h)p_i^{+} - (R-h)p_i^{-} + m_i + R\,F_i - \frac{\partial}{\partial z} M_{\theta i} \right] \vec{e}_i + \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \Sigma_{r\theta} - \Sigma_{\theta\theta} + R \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{rz} \right] \vec{e}_r \right.$$

$$\left. + \left[\Sigma_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \Sigma_{\theta\theta} + R \frac{\partial \Sigma}{\partial z}\,\theta z \right] \vec{e}_\theta + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}\, z\theta + \frac{\partial}{\partial z} R\Sigma_{zz} \right| \vec{e}_z \Big\} \, d\theta \, dz$$

Le domaine (D) est un domaine arbitraire de classe C^1 de la surface moyenne S de la coque (mise à part la restriction que sa frontière (∂D) soit coupée en au plus deux points par toute génératrice du cylindre $r = R$).

A ce stade on utilise le lemme fondamental suivant :

Lemme Fondamental : <u>Si F est une fonction (scalaire ou vectorielle) continue</u>
II.1.3.bis <u>sur S et si l'on a $\iint_{(\Delta)} F(M)d\sigma = 0 \quad \forall \Delta \subset S$, alors F est identiquement nulle sur S.</u>

La démonstration de ce lemme se fait par l'absurde et elle montre en fait que l'on peut se limiter à des ensembles (D) de S denses dans S en ce sens que dans tout voisinage ouvert d'une point de S on peut inclure un ensemble de la famille des domaines bornés (D) de frontière ∂D régulière coupée en au plus deux points par toute génératrice.

Si les quantités intervenant sous le signe $\iint$ de l'équation II.1.3. sont continues dans S, par projection sur les axes $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$ on obtient les équations d'équilibre des résultantes : II.1.4.5.6.

II.1.4.5.6.

$$(R+h)\ p_r^+ - (R-h) p_r^- + m_r + RF_r - \frac{\partial}{\partial z} M_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \Sigma_{r\theta} - \Sigma_{\theta\theta} + R \frac{\partial \Sigma_{rz}}{\partial z} = 0 \qquad \text{II.1.4}$$

$$(R+h)\ p_\theta^+ - (R-h)\ p_\theta^- + m_\theta + RF_\theta - \frac{\partial}{\partial z} M_{\theta\theta} + \Sigma_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \Sigma_{\theta\theta} + R \frac{\partial \Sigma_{\theta z}}{\partial z} = 0 \qquad \text{II.1.5}$$

$$(R+h)\ p_z^+ - (R-h)\ p_z^- + m_z + RF_z - \frac{\partial}{\partial z} M_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \Sigma_{z\theta} + \frac{\partial}{\partial z} R\ \Sigma_{zz} = 0 \qquad \text{II.1.6}$$

2) *Remarques*

a) Nous aurions pu suivre une autre démarche pour établir les équations II.1.4.5.6. à partir de l'équation II.1.1, en utilisant le théorème de la divergence pour transformer l'équation II.1.1 ce qui donne :

II.2.1.

$$\boxed{\vec{0} = \iiint_V \vec{f}\ dv + \iiint_V \overrightarrow{\mathrm{div}(\sigma)}\ dv}$$

puis précéder à une intégration par rapport à r entre [R-h, R+h] pour se ramener à une équation sur la surface moyenne. En projetant cette dernière sur les axes $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$ nous retrouvons évidemment les équations II.1.4.5.6.

Détail des calculs

$\vec{0} = \iiint_V \vec{f}\ dv + \iiint_V \overrightarrow{\mathrm{div}(\sigma)}\ dv$. D'après I.2.7 on a l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{div}(\sigma)}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{div}\ \sigma} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\ \{r(\sigma_{rr}\ \vec{e}_r + \sigma_{r\theta}\ \vec{e}_\theta + \sigma_{rz}\ \vec{e}_z)\} + \frac{\partial}{\partial \theta}\{\sigma_{\theta\theta}\ \vec{e}_\theta + \sigma_{z\theta}\ \vec{e}_z + \sigma_{r\theta}\ \vec{e}_r\}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\ \{r(\sigma_{zz}\ \vec{e}_z + \sigma_{rz}\ \vec{e}_r + \sigma_{\theta z}\ \vec{e}_\theta)\}\right.$$ D'où :

$$\vec{\mathcal{O}} = \iiint_V \{\frac{\partial}{\partial r}\left[r(\sigma_{rr}\,\vec{e}_r + \sigma_{\theta r}\,\vec{e}_\theta + \sigma_{rz}\,\vec{e}_z)\right] + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sigma_{r\theta}\,\vec{e}_r + \sigma_{\theta\theta}\,\vec{e}_\theta + \sigma_{z\theta}\,\vec{e}_z\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[r(\sigma_{rz}\,\vec{e}_r + \sigma_{\theta z}\,\vec{e}_\theta + \sigma_{zz}\,\vec{e}_z)\right] + r(f_r\,\vec{e}_r + f_\theta\,\vec{e}_o + f_z\,\vec{e}_z)\}\;dr\;d\theta\;\;dz$$

$$\vec{\mathcal{O}} = \iint_{(D)} \{(R+h)\left[\sigma_{rr}(R+h,\theta,z)\,\vec{e}_r + \sigma_{\theta r}(R+h,\theta,z)\,\vec{e}_\theta + \sigma_{rz}(R+h,\theta,z)\,\vec{e}_z\right]$$

$$- (R-h)\left[\sigma_{rr}(R-h,\theta,z)\,\vec{e}_r + \sigma_{\theta r}(R-h,\theta,z)\,\vec{e}_\theta + \sigma_{rz}(R-h,\theta,z)\,\vec{e}_z\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta}\left[(\int_{R-h}^{R+h} \sigma_{r\theta}(r,\theta,z)dz)\,\vec{e}_r + (\int_{R-h}^{R+h} \sigma_{\theta\theta}(r,\theta,z)dr)\vec{e}_\theta + (\int_{R-h}^{R+h} \sigma_{z\theta}(r,\theta,z)dr)\vec{e}_z\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[(\int_{R-h}^{R+h} (r-R)\,\sigma_{rz}(r,\theta,z)dr + R\int_{R-h}^{R+h} \sigma_{rz}(r,\theta,z)dr)\,\vec{e}_r\right.$$

$$+(\int_{R-h}^{R+h} (r-R)\,\sigma_{\theta z}(r,\theta,z)dr + R\int_{R-h}^{R+h} \sigma_{\theta z}(r,\theta,z)\,dr)\,\vec{e}_\theta$$

$$\left.+(\int_{R-h}^{R+h} (r-R)\,\sigma_{zz}(r,\theta,z)dr + R\int_{R-h}^{R+h} \sigma_{zz}(r,\theta,z)dr)\,\vec{e}_z\right]$$

$$+(\int_{R-h}^{R+h} (r-R)\,f_r\,dr + R\int_{R-h}^{R+h} f_r\,dr)\,\vec{e}_r + \ldots\}\;\;d\theta\;dz$$

Soit encore en utilisant les notations II.1.2 et II.1.1.e :

II.2.2.

$$0 = \iint_{(D)} \{(R+h)(p_r^+ \vec{e}_r + p_\theta^+ \vec{e}_\theta + p_z^+ \vec{e}_z) - (R-h)(p_r^- \vec{e}_r + p_\theta^- \vec{e} + p_z^- \vec{e}_z)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Sigma_{r\theta} \vec{e}_r + \Sigma_{\theta\theta} \vec{e}_\theta + \Sigma_{z\theta} \vec{e}_z\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(-M_{\theta r} + R\,\Sigma_{rz}) \vec{e}_r + (M_{zz} + R\,\Sigma_{\theta z}) \vec{e}_\theta\right.$$

$$\left. + (-M_{\theta z} + R\,\Sigma_{zz}) \vec{e}_z\right] + (m_r + RF_r)\vec{e}_r + (m_\theta + RF_\theta) \vec{e}_\theta + (m_z + RF_z) \vec{e}_z \}\, d\theta\, dz$$

En utilisant le fait que $\frac{\partial}{\partial\theta} \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$ et $\frac{\partial}{\partial\theta} \vec{e}_\theta = - \vec{e}_r$ l'équation ci-dessus II.2.2 est en fait l'équation II.1.3, d'où la conclusion énoncée à la fin du paragraphe 2) Remarques a).

b) Dans la littérature certains auteurs tentent d'établir l'analogue des équations II.1.4.5.6. en considérant un volume V infinitésimal et en faisant un certain nombre d'approximation sur les σ_{zi}, m_i, etc...

(c.f. NOVOZHILOV, [1], DONNELL [1])

. D'autres partent de l'équation II.2.1. écrite pour un volume V arbitraire intérieur à la coque (C) et utilisent le lemme fondamental II.1.3.bis pour aboutir aux équations classiques d'équilibre des résultantes en coordonnées cylindriques II.2.3, II.2.4, II.2.5.

II.2.3.	$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$
II.2.4 :	$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{\partial z}}{\partial z} + 2\,\frac{\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0$
II.2.5 :	$\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{rz} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + f_z = 0$

. Après multiplication par r de chacune de ces équations et intégration par rapport à r entre R-h et R + h, on retrouve les équations II.1.4.5.6.

Détail des calculs

(α) $$\int_{R-h}^{R+h}\left[r\,\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}(r,\theta,z)+\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}(r,\theta,z)+r\,\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}(r,\theta,z)+\sigma_{rr}(r,\theta,z)\right.$$
$$\left.-\ \sigma_{\theta\theta}(r,\theta,z)+r\,f_r(r,\theta,z)\right]dr=0$$

soit encore

$$\int_{R-h}^{R+h}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_{rr}(r,\theta,z))+\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}(r,\theta,z)+r\,\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}(r,\theta,z)-\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,z)+r\,f_r(r,\theta,z)\,dr=0$$

En utilisant les notations II.1.2 et II.1.1e on obtient :

$$(R+h)p_r^+-(R-h)\,p_r^-+\frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{r\theta}-\frac{\partial M_{\theta r}}{\partial z}+R\,\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial z}\,rz-\Sigma_{\theta\theta}+m_r+R\,F_r=0$$

(qui n'est autre que l'équation II.1.4 à l'ordre d'écriture des termes près).

(β) $$r\,\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+r\,\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}+2\sigma_{r\theta}+r\,f_\theta=0 \text{ d'où}$$

$$\int_{R-h}^{R+h}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{r\theta})+\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+r\,\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}+\sigma_{r\theta}+r\,f_\theta\right]dr=0\ .$$

En utilisant toujours les notations II.1.2 et II.1.1.e on obtient :

$$(R+h)\,p_\theta^+-(R-h)p_\theta^-+\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{R-h}^{R+h}\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,z)dr+\frac{\partial}{\partial z}\int_{R-h}^{R+h}r\sigma_{\theta z}(r,\theta,z)dr+\int_{R-h}^{R+h}\sigma_{r\theta}(r,\theta,z)dr$$

$$+\int_{R-h}^{R+h}r\,f_\theta(r,\theta,z)dr=0 \qquad \text{c'est-à-dire encore :}$$

$$(R+h)\ p_\theta^+ -(R-h)\ p_\theta^- + \frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} M_{zz} + R\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial z} + \Sigma_{r\theta} + m_\theta + R\ F_\theta = 0$$

(qui n'est autre que l'équation II.1.5 à l'ordre d'écriture des termes près).

(γ) $$r\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + r\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \sigma_{rz} + rf_z = 0$$

$$\int_{R-h}^{R+h}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\ \sigma_{rz}) + \frac{\partial}{\partial\theta}\sigma_{\theta z} + r\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + r\ f_z\right] dr = 0$$ Soit :

$$(R+h)\ p_z^+ - (R-h)\ p_z^- + \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{R-h}^{R+h}\sigma_{\theta z}(r,\theta,z)\ dr + \frac{\partial}{\partial z}\left[\int_{R-h}^{R+h}(r-R)\ \sigma_{zz}(r,\theta,z)\ dr + R\int_{R-h}^{R+h}\sigma_{zz}(r,\theta,z)\ dr\right]$$

$$+\int_{R-h}^{R+h}(r-R)\ f_z(r,\theta,z)\ dr + R\int_{R-h}^{R+h} f_z(r,\theta,z)\ dr = 0$$

Grâce aux notations II.1.2 on obtient :

$$(R+h)p_z^+ - (R-h)p_z^- + \frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[- M_{\theta z} + R\ \Sigma_{zz}\right] + m_z + R\ F_z = 0$$ Soit :

$$(R+h)p_z^+ - (R-h)p_z^- + \frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{\theta z} - \frac{\partial}{\partial z}M_{\theta z} + R\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial z} + m_z + RF_z = 0$$

(qui n'est autre que l'équation II.1.6 à l'ordre d'écriture des termes près.

---

3) *Equation d'équilibre des moments*

On exprime que le moment résultant par rapport à l'origine du repère de tous les efforts appliquées à V est nul, soit :

II.3.1. $$\boxed{\vec{O} = \iiint_V \vec{OM}.\ \Lambda\ \vec{f}\ dv + \iint_{\partial V}\vec{OM}\ \Lambda\ \sigma_{ij}\ n_j\ \vec{e}_i\ dS}$$

Nous allons, comme cela a été fait dans le paragraphe II 1 , expliciter l'équation II.3.1 en intégrant par rapport à r entre R-h et R+h et nous ramener également à une équation d'équilibre sur la surface moyenne.

On a :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$$

II.3.1. s'écrit :

$$\vec{0} = \iiint_{[R-h,R+h)\times D} (r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z) \wedge (f_i\,\vec{e}_i)\, r\, dr\, d\theta\, dz + \iint_{\partial V} \overrightarrow{OM} \wedge \sigma_{ij}\, n_j\, \vec{e}_i\, dS$$

Par intégration par rapport à r entre R-h et R+h dans le premier terme du second membre de l'équation II.3.1, on obtient, (à l'aide des notations II.1.2) : l'équation II.3.1.a).

$$\iiint_{[R-h,R+h]\times D} (r\,\vec{e}_r + r\,\vec{e}_z) \wedge (f_i\,\vec{e}_i)\, r\, dr\, d\theta\, dz = \iint_{(D)} \{[-z\, m_\theta - z\, R\, F_\theta]\,\vec{e}_r$$

$$\{[z\, m_r + z\, R\, F_r - n_z - Rm_z - R^2\, F_z]\,\vec{e}_\theta + [n_\theta + R\, m_\theta + R^2\, F_\theta]\,\vec{e}_z\}\, d\theta\, dz$$

<u>Calcul de la deuxième intégrale</u> $\boxed{\iint_{\partial V} \overrightarrow{OM} \wedge \sigma_{ij}\, n_j\, \vec{e}_i\, dS}$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \sigma_{ij}\, n_j\, \vec{e}_i = (r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z) \wedge (\sigma_{ij}\, n_j\, \vec{e}_i) = r\,\varepsilon_{ikr} + z\,\varepsilon_{ikz})\, \sigma_{ij}\, n_j\, \vec{e}_k$$

ou les symboles $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ont la signification suivante : $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 \text{ si } (\alpha,\beta,\gamma) \text{ permutation paire} \\ -1 \text{ si } (\alpha,\beta,\gamma) \text{ permutation impaire de } 0,\theta,z \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

on pose $\boxed{\lambda_{kj} = (r\,\varepsilon_{ikr} + z\,\varepsilon_{ikz})\, \sigma_{ij}}$

$\partial V = D^+ \cup D^- \cup \underbrace{[R-h,\ R+h] \times D}_{(\partial V\ lat)}$ (on calcule l'intégrale $\iint_{\partial V} \lambda_{kj} . n_j \ \vec{e}_k \ dS$ de façon tout à fait analogue à celle utilisée pour $\iint_{\partial V} \sigma_{ij} \ n_j \ \vec{e}_i \ dS$ dans le § II) par intégration en r entre [R +h, R+h]

$$\iint_{\partial V} \lambda_{kj} \ n_j \ \vec{e}_k \ dS = \iint_{(D)} (R+h) \ \lambda_{kr}(R+h,\theta,z)\vec{e}_k \ d\theta \ dz - \iint_{(D)} (R-h) \ \lambda_{kr}(R-h,\theta,z)\vec{e}_k \ d\theta \ dz$$

$$- \iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial z} \left[M_{\theta i} \ e_i\right] d\theta \ dz + \iint_{(D)} \left(\left\{\frac{\partial}{\partial \theta} \Lambda_{r\theta} - \Lambda_{\theta\theta} + R \ \frac{\partial \Lambda_{rz}}{\partial z}\right\}\vec{e}_r + \left\{ \Lambda_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \Lambda_{\theta\theta}\right.\right.$$

$$\left.\left. + R \ \frac{\partial \Lambda_{\theta z}}{\partial z} \right\} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \Lambda_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} R \ \Lambda_{zz}\right\} \vec{e}_z\Big) \ d\theta \ dz$$

---

nous allons expliciter les λ_{kj}, Λ_{kj}, $M_{\theta i}$ en fonction de σ_{ij}, Σ_{ij}, etc...

II.3.1.b

$\lambda_{rr} = -z \ \sigma_{\theta r}$	$\lambda_{\theta r} = -r\sigma_{zr} + z \ \sigma_{rr}$	$\lambda_{zr} = r \ \sigma_{\theta r}$
$\lambda_{\theta\theta} = -r \ \sigma_{z\theta} + z \ \sigma_{r\theta}$	$\lambda_{z\theta} = r \ \sigma_{\theta\theta}$	$\lambda_{r\theta} = - z \ \sigma_{\theta\theta}$
$\lambda_{zz} = r \ \sigma_{\theta z}$	$\lambda_{rz} = - z \ \sigma_{\theta z}$	$\lambda_{\theta z} = -r \ \sigma_{zz} + z \ \sigma_{rz}$
$\Lambda_{r\theta} = -z \ \Sigma_{\theta\theta}$ $\Lambda_{\theta z} = z \ \Sigma_{rz} + M_{\theta z} - R \ \Sigma_{zz}$	$\Lambda_{\theta\theta} = z \ \Sigma_{r\theta} - M_{zz} - R \ \Sigma_{z\theta}$ $\Lambda_{z\theta} = M_{z\theta} + R \ \Sigma_{\theta\theta}$	$\Lambda_{rz} = -z \ \Sigma_{\theta z}$ $\Lambda_{zz} = M_{zz} + R \ \Sigma_{\theta z}$

$$M_{\theta r} = - \int_{R-h}^{R+h} (r-h) \ \lambda_{rz} \ dr = z \ M_{zz}; \quad M_{\theta\theta} = - \int_{R-h}^{R+h} (r-R) \ \lambda_{\theta z} \ dr = - N_{\theta z} + z \ M_{\theta r}$$

$$M_{\theta z} = - \int_{R-h}^{R+h} (r-R) \ \lambda_{zz} \ dr = - N_{zz} \ .$$

En substituant à l'aide des formules précédentes les (λ) en fonction des (σ) on obtient :

$$\iint_{\partial V} \lambda_{kj}\, n_j\, \vec{e}_k\, dS = \iint_{(D)} \Big((R+h)[-z\, p_\theta^+\, \vec{e}_r + (z\, p_r^+ - (R+h)p_z^+)\, \vec{e}_\theta + (R+h)p_\theta^+\, \vec{e}_z]$$

$$-(R-h)\,[-z\, p_\theta^-\, \vec{e}_r + (z\, p_r^- - (R-h)p_z^-)\, \vec{e}_\theta + (R-h)\, p_\theta^-\, \vec{e}_z] - (M_{zz} + z\, \frac{\partial}{\partial z} M_{zz})\, \vec{e}_r$$

$$+ (\frac{\partial N_{\theta z}}{\partial z} - M_{\theta r} - z\, \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial z})\vec{e}_\theta + \frac{\partial N_{zz}}{\partial z}\, \vec{e}_z + \{-z\, \frac{\partial \Sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - z\, \Sigma_{r\theta} + M_{zz} + R\, \Sigma_{z\theta}$$

$$- R\, \Sigma_{\theta z} - Rz\, \frac{\partial \Sigma_{\theta z}}{\partial z}\, \}\vec{e}_r + \{-z\, \Sigma_{\theta\theta} + z\, \frac{\partial \Sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial M_{zz}}{\partial \theta} - R\, \frac{\partial \Sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + R\, \Sigma_{rz} + RZ\, \frac{\partial \Sigma_{rz}}{\partial z}$$

$$+ R\, \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial z} - R^2\, \frac{\partial \Sigma_{zz}}{\partial z}\, \}\, \vec{e}_\theta + \{\, \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial \theta} + R\, \frac{\partial \Sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + R\, \frac{\partial M_{zz}}{\partial z} + R^2\, \frac{\partial \Sigma_{\theta z}}{\partial z}\, \}\vec{e}_z \Big)\, d\theta\, dz$$

D'ou l'écriture explicite de II.3.1 :

$$\text{II.3.1.} \quad \vec{0} = \iint_{(D)} \Big((-zm_\theta - z\, R\, F_\theta)\vec{e}_r + (zm_r + z\, RF_r - n_z - Rm_z - R^2\, F_z)\vec{e}_\theta + (n_\theta$$

$$+ Rm_\theta + R^2 F_\theta)\vec{e}_z + (R+h)\,[-z\, p_\theta^+\, \vec{e}_r + (z\, p_r^+ - (R+h)p_z^+)\, \vec{e}_\theta + (R+h)\, p_\theta^+\, \vec{e}_z] - (R-h)$$

$$[-z\, p_\theta^-\, \vec{e}_r + (z\, p_r^- - (R-h)p_z^-)\, \vec{e}_\theta + (R-h)p_\theta^-\, \vec{e}_z] - z\, \frac{\partial}{\partial z}\, M_{zz}\, \vec{e}_r + (\frac{\partial}{\partial z}\, N_{\theta z} - M_{\theta r} - z\, \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial z}\,)\vec{e}_\theta$$

$$+ \frac{\partial N_{zz}}{\partial z}\, \vec{e}_z + \{-z\, \frac{\partial \Sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - z\, \Sigma_{r\theta} + R\, \Sigma_{z\theta} - R\, \Sigma_{\theta z} - Rz\, \frac{\partial \Sigma_{\theta z}}{\partial z}\, \}\, \vec{e}_r + \{-z\, \Sigma_{\theta\theta} + z\, \frac{\partial \Sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial M_{zz}}{\partial \theta}$$

$$- R\, \frac{\partial \Sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + R\, \Sigma_{rz} + Rz\, \frac{\partial \Sigma_{rz}}{\partial z} + R\, \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial z} - R^2\, \frac{\partial \Sigma_{zz}}{\partial z}\, \}\vec{e}_\theta + \{\, \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial \theta} + R\, \frac{\partial \Sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + R\, \frac{\partial M_{zz}}{\partial z}$$

$$+ R^2\, \frac{\partial \Sigma_{\theta z}}{\partial z}\, \}\, \vec{e}_z\, \Big)\, d\theta\, dz\, .$$

Si les quantités intervenant sous le signe $\iint$ de l'équation II.3.1 sont continues dans S en utilisant à nouveau le lemme fondamental II.1.3 on obtient par projection sur les axes $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$ les équations d'équilibre relatives aux moments : II.3.2.3.4.

II.3.2
$$-z\ m_\theta\ -z\ R\ F_\theta - z(R+h)p_\theta^+ + z(R-h)p_\theta^- - z\ \frac{\partial}{\partial z}\ M_{zz} - z\ \frac{\partial}{\partial \theta}\ \Sigma_{\theta\theta} - z\ \Sigma_{r\theta} - Rz\ \frac{\partial \Sigma_{\theta z}}{\partial z} = 0$$

II.3.3
$$z\ m_r + z\ RF_r - n_z - Rm_z - R^2F_z + z(R+h)p_r^+ - (R+h)^2 p_z^+ - z(R-h)p_r^- + (R-h)^2\ p_z^-$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\ N_{\theta z} - M_{\theta r} - z\ \frac{\partial}{\partial z}\ M_{\theta r} - z\ \Sigma_{\theta\theta} + z\ \frac{\partial}{\partial \theta}\ \Sigma_{r\theta} - \frac{\partial}{\partial \theta}\ M_{zz} - R\ \frac{\partial}{\partial \theta}\ \Sigma_{z\theta} + R\ \Sigma_{rz}$$
$$+ Rz\ \frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma_{rz} + R\ \frac{\partial}{\partial z}\ M_{\theta z} - R^2\ \frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma_{zz} = 0$$

II.3.4
$$n_\theta + Rm_\theta + R^2F_\theta + (R+h)^2\ p_\theta^+ - (R-h)^2\ p_\theta^- + \frac{\partial}{\partial z}\ N_{zz} + \frac{\partial}{\partial \theta}\ M_{z\theta} + R\frac{\partial}{\partial \theta}\Sigma_{\theta\theta} + R\frac{\partial}{\partial z}\ M_{zz}$$
$$+ R^2\ \frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma_{\theta z} = 0$$

4) *Remarques*

(a) Nous pouvons faire une remarque tout à fait analogue à celle que nous avions faite concernant l'équation d'équilibre des résultantes. En effet par transformation à l'aide du théorème de la divergence de l'équation II.3.1 nous obtenons l'équation :

II.4.1
$$\boxed{\vec{0} = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}\ dv + \iiint_V \overrightarrow{div(\lambda)} dv} \qquad \text{avec } \lambda_{kj} = (r\ \varepsilon_{ikr} + z\ \varepsilon_{ikz})\ \sigma_{ij}$$

puis procéder à une intégration par rapport à r entre R-h et R+h pour se ramener à une équation sur la surface moyenne. En projetant l'équation ainsi obtenue, sur les axes $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$ nous retrouvons évidemment les équations II.3.2.3.4

Le premier terme du second membre de l'équation II.4.1 est toujours donné par l'équation II.3.1.a.

Détail des calculs

En utilisant I.2.7 pour obtenir l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{div}}(\vec{\lambda})$ on trouve :

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}(\vec{\lambda}) = \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left[r(\lambda_{rr}\vec{e}_r + \lambda_{\theta r}\vec{e}_\theta + \lambda_{zr}\vec{e}_z)\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\lambda_{\theta\theta}\vec{e}_\theta + \lambda_{z\theta}\vec{e}_z + \lambda_{r\theta}\vec{e}_r\right]\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\left[r(\lambda_{zz}\vec{e}_z + \lambda_{rz}\vec{e}_r + \lambda_{\theta z}\vec{e}_\theta)\right]\right\}.$$ D'où en utilisant II.3.1. b

---

$$\vec{O} = \iint_{(D)}\{(-z\, m_\theta - z\, R\, F_\theta)\,\vec{e}_r + (z\, m_r + z\, R\, F_r - n_z - Rm_z - R^2\, F_z)\,\vec{e}_\theta$$

$$+ (r_\theta + Rm_\theta + R^2\, F_\theta)\,\vec{e}_z\,\}\, d\theta\, dz + \iiint_{[R-h,R+h]\times D}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left[-z\,\sigma_{\theta r}\,\vec{e}_r + (-r\,\sigma_{zr} + z\sigma_{rr})\,\vec{e}_\theta\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+ r\,\sigma_{\theta r}\,\vec{e}_z\right]\right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\,\{(-r\,\sigma_{z\theta} + z\,\sigma_{r\theta})\vec{e}_\theta + r\,\sigma_{\theta\theta}\,\vec{e}_z - z\,\sigma_{\theta\theta}\,\vec{e}_r \;+ \frac{\partial}{\partial z}\left\{r\left[r\,\sigma_{\theta z}\, e_z - z\,\sigma_{\theta z}\,\vec{e}_r\right.\right.$$

$$\left.\left.+ (-r\,\sigma_{zz} + z\,\sigma_{rz})\,\vec{e}_\theta\right]\right\}\, dr\, d\theta\, dz$$. Après intégration par rapport à r entre R − h et R + h on a :

$$\vec{O} = \iint_{(D)}\{(-z\, m_\theta - z\, R\, F_\theta)\vec{e}_r + (z\, m_r + z\, RF_r - n_z - Rm_z - R^2\, F_z)\,\vec{e}_\theta + (n_\theta + Rm_\theta + R^2\, F_\theta)\vec{e}_z\} d\theta\, dz$$

$$+\iint_{(D)}\{(R+h)\left[-z\sigma_{\theta r}(R+h,\theta,z)\vec{e}_r + \{-(R+h)\sigma_{zr}(R+h,\theta,z) + z\,\sigma_{rr}(R+h,\theta,z)\}\,\vec{e}_\theta\, +\right.$$

$$\left.(R+h)\,\sigma_{\theta r}(R+h,\theta,z)\,\vec{e}_z\right] - (R-h)\left[-z\sigma_{\theta r}(R-h,\theta,z)\vec{e}_r + \{-(R-h)\,\sigma_{zr}(R-h,\theta,z)\, +\right.$$

$$\left. z\,\sigma_{rr}(R-h,\theta,z)\,\vec{e}_\theta\} + (R-h)\sigma_{\theta r}(R-h,\theta,z)\vec{e}_z\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\,\{-z\,\Sigma_{\theta\theta}\,\vec{e}_r + (z\,\Sigma_{r\theta} - M_{zz} - R\Sigma_{z\theta})\vec{e}_\theta$$

$$+(M_{z\theta} + R\Sigma_{\theta\theta})\vec{e}_z\,\} + \frac{\partial}{\partial z}\,\{(-z\, M_{zz} - Rz\,\Sigma_{\theta z})\,\vec{e}_r + \left[z(-M_{\theta r} + R\,\Sigma_{rz})\right.$$

$$\left.+ (N_{\theta z} + R\, M_{\theta z} - R^2\,\Sigma_{zz})\right]\,\vec{e}_\theta + (N_{zz} + RM_{zz} + R^2\Sigma_{\theta z})\,\vec{e}_z\}\,\}d\theta\, dz$$

En utilisant, comme d'habitude, les notations II.1.1.e l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\vec{\delta} = \iint_{(D)} \left\{(-z\ m_\theta - z\ R\ F_\theta)\vec{e}_r + (z\ m_r + z\ RF_r - n_z - Rm_z - R^2\ F_z)\vec{e}_\theta + (n_\theta + Rm + R^2\ F_\theta)\vec{e}_z\right\} d\theta\ dz$$

$$+ \iint_{(D)} \left\{(R+h)\left[-z\ p_\theta + \vec{e}_r + \left\{z\,p_r^+ - (R+h)\ p_z^+\right\}\vec{e} + (R+h)\ p_\theta + \vec{e}_z\right]\right.$$

$$- (R-h)\left[-z\ p_\theta^-\ \vec{e}_r + \left\{z\ p_r^- - (R-h)\ p_z^-\right\}\vec{e}_\theta + (R-h)\ p_\theta - \vec{e}_z\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{-z\ \Sigma_{\theta\theta}\ \vec{e}_r + (z\ \Sigma_{r\theta} - M_{zz} - R\ \Sigma_{z\theta})\ \vec{e}_\theta + (M_{z\theta} + R\ \Sigma_{\theta\theta})\vec{e}_z\right\}$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left\{(-zM_{zz} - Rz\Sigma_{\theta z})\vec{e}_r + \left[z(-M_{\theta r} + R\Sigma_{rz}) + (N_{\theta z} + RM_{\theta z} - R^2\Sigma_{zz})\right]\vec{e}_\theta + (N_{zz} + RM_{zz} + R^2\Sigma_{\theta z})\vec{e}_z\right\}\right\} d\theta\ dz$$

Si les quantités intervenant sous le signe $\iint$ de l'équation ci-dessus sont continues dans S, en utilisant toujours le lemme fondamental II.1.3.bis on obtient par projection sur les axes $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$ les équations suivantes : II.4.2a.3a.4a.

II.4.2.a

$$-z\ m_\theta - z\ R\ F_\theta - z(R+h)p_\theta^+ + z(R-h)p_\theta^- - z\ \frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} - z\ \Sigma_{r\theta} + M_{zz} + R\ \Sigma_{z\theta\theta}$$

$$- z\ \frac{\partial}{\partial z}\ (M_{zz} + R\ \Sigma_{\theta z}) - M_{zz} - R\ \Sigma_{\theta z} = 0$$

(équation qui, après réduction de termes n'est autre que l'équation II.3.2. à l'ordre d'écriture des termes, près).

II.4.3.a

$$z\ m_r + z\ R\ F_r - n_z - Rm_z - R^2\ F_z + z(R+h)\ p_r^+ - (R+h)^2\ p_z^+ - z(R-h)\ p_r^- + (R-h)^2\ p_z^-$$

$$- z\ \Sigma_{\theta\theta} + z\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ \Sigma_{r\theta} - \frac{\partial}{\partial\theta}\ M_{zz} - R\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ \Sigma_{z\theta} - M_{\theta r} + R\ \Sigma_{rz} - z\ \frac{\partial}{\partial z}\ M_{\theta r}$$

$$+ z\ R\ \frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma_{rz} + \frac{\partial}{\partial z}\ N_{\theta z} + R\ \frac{\partial}{\partial z}\ M_{\theta z} - R^2\ \frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma_{zz} = 0$$

(équation qui, à l'ordre d'écriture des termes près, n'est autre que l'équation II.3.3).

II.4.4.a

$$n_\theta + R\, m_\theta + R^2 F_\theta + (R+h)^2 p_\theta^{+} - (R-h)^2 p_\theta^{-} + \frac{\partial}{\partial\theta}(M_{z\theta} + R\,\Sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} N_{zz}$$

$$+ R \frac{\partial}{\partial z} M_{zz} + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{\theta z} = 0$$

(équation qui, à l'ordre d'écriture des termes près, n'est autre que l'équation II.3.4).

(b) Certains auteurs utilisent les équations classiques d'équilibre des résultantes en coordonnées curvilignes orthogonales cylindriques pour établir les équations II.3.2.3.4. Ils multiplient chacune de ces premières par le coefficient r^2 et effectuent une intégration par rapport à r, entre R-h et R+h; en utilisant par ailleurs les équations d'équilibre des résultantes II.1.4.5.6, ils obtiennent un système de trois équations : II.4.2c.3c.4c.

Détail des calculs

(α) $$\int_{R-h}^{R+h} \left[r^2 \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}(r,\theta,z) + r\,\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}(r,\theta,z) + r^2 \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}(r,\theta,z) + r(\sigma_{rr}(r,\theta,z) - \sigma_{\theta\theta}(r,\theta,z) + r^2 f_r(r,\theta,z)\right] dr = 0$$

. Soit en utilisant les notations II.1.1.c :

$$0 = (R+h)^2 \, p_r^+ - (R-h)^2 \, p_r^- - \int_{R-h}^{R+h} r \, \sigma_{rr} \, (r,\theta,z) \, dr + \frac{\partial}{\partial\theta} \int_{R-h}^{R+h} r \, \sigma_{r\theta} \, (r,\theta,z) \, dr +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\int_{R-h}^{R+h} r(r-R) \, \sigma_{rz}(r,\theta,z) \, dr + R \int_{R-h}^{R+h} r \, \sigma_{rz}(r,\theta,z) dr - \int_{R-h}^{R+h} r \, \sigma_{\theta\theta}(r,\theta,z) \, dr \right.$$

$$+ \int_{R-h}^{R+h} r(r-R) \, f_r(r,\theta,z) dr + R \left[\int_{R-h}^{R+h} (r-R) f_r(r,\theta,z) dr + R \int_{R-h}^{R+h} f_r(r,\theta,z) dr \right]$$

Soit encore en utilisant les notations II.1.2.

$$(R+h)^2 \, p_r^+ - (R-h)^2 \, p_r^- - \int_{R-h}^{R+h} r \, \sigma_{rr}(r,\theta,z) dr + \frac{\partial}{\partial\theta} M_{zr} + R \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{r\theta} - \frac{\partial}{\partial z} N_{\theta r} - R \frac{\partial}{\partial r} M_{\theta r}$$

$$+ R^2 \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{rz} - M_{z\theta} - R \, \Sigma_{\theta\theta} + n_r + Rm_r + R^2 F_r = 0$$

Or l'équation II.1.4 multipliée par R peut encore s'écrire sous la forme :

$$(R+h)^2 \, p_r^+ - h(R+h) \, p_r^+ - (R-h)^2 \, p_r^- - h(R-h) \, p_r^- + R \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_{r\theta} - R \frac{\partial}{\partial z} M_{\theta r}$$

$$+ R^2 \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_{rz} - R \, \Sigma_{\theta\theta} + R \, m_r + R^2 \, F_r = 0$$

d'où l'équation II.4.2b

II.4.2.C

$$h(R+h) \, p_r^+ + h(R-h) \, p_r^- - \int_{R-h}^{R+h} r \, \sigma_{rr}(r,\theta,z) dr + \frac{\partial}{\partial\theta} M_{zr} - \frac{\partial}{\partial z} N_{\theta r} - M_{z\theta} + n_r = 0$$

$$\text{(β)}\quad \int_{R-h}^{R+h}\left[r^2\,\frac{\partial\sigma r\theta}{\partial r}(r,\theta,z)+r\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,z)+r^2\,\frac{\partial\sigma\theta z}{\partial z}(r,\theta,z)+2r\,\sigma_{r\theta}(r,\theta,z)\right.$$

$$\left.+\,r^2\,f_\theta\,(r,\theta,z)\right]dr=0$$. Soit en utilisant les notations II.1.1.e

---

$$(R+h)^2\,p_\theta^+-(R-h)^2\,p_\theta^-+\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{R-h}^{R+h}r\,\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,z)dr+\frac{\partial}{\partial z}\left[\int_{R-h}^{R+h}r(r-R)\sigma_{\theta z}(r,\theta,z)\,dr\right.$$

$$\left.+\,R\int_{R-h}^{R+h}r\sigma_{\theta z}(r,\theta,z)\,dr\right]+\int_{R-h}^{R+h}r(r-R)f_\theta(r,\theta,z)\,dr+R\left[\int_{R-h}^{R+h}(r-R)f_\theta\,(r,\theta,z)\,dr\right.$$

$$\left.+\,R\int_{R-h}^{R+h}f_\theta\,(r,\theta,z)\,dr\right]=0$$

Soit encore en utilisant les notations II.1.2.

II.4.3b

$$(R+h)^2\,p_\theta^+-(R-h)^2\,p_\theta^-+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[M_{z\theta}+R\,\Sigma_{\theta\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[N_{zz}+R(M_{zz}+R\,\Sigma_{\theta z})\right]+n_\theta$$

$$+\,R\left[m_\theta+R\,F_\theta\right]=0$$

Or l'équation II.1.5. multipliée par R peut encore s'écrire sous la forme :

$$R(R+h)\,p_\theta^+-R(R-h)p_\theta^-+R\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Sigma_{\theta\theta}+R\,\frac{\partial}{\partial z}\,M_{zz}+R^2\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Sigma_{\theta z}+R\,\Sigma_{r\theta}+Rm_\theta+R^2F_\theta=0$$

D'où l'équation II.4.3c

II.4.3c

$$h(R+h)\ p_\theta^+ + h(R-h)p_\theta^- + \frac{\partial}{\partial\theta} M_{z\theta} + \frac{\partial}{\partial z} N_{zz} + n_\theta - R\ \Sigma_{r\theta} = 0$$

$$\gamma \quad \int_{R-h}^{R+h} \left[r^2 \frac{\partial\sigma rz}{\partial r}(r,\theta,z) + r\frac{\partial}{\partial\theta}\ \sigma_{\theta z}(r,\theta,z) + r^2 \frac{\partial\sigma zz}{\partial z}(r,\theta,z) + r\ \sigma_{rz}(r,\theta,z)\right.$$

$$\left. + r^2\ f_z\ (r,\theta,z)\right] dr = 0$$. Soit en utilisant les notations II.1.1.e

---

$$(R+h)^2\ p_z^+ - (R-h)^2\ p_z^- - \int_{R-h}^{R+h} r\sigma_{rz}(r,\theta,z)dr + \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{R-h}^{R+h} r\sigma_{\theta z}(r,\theta,z)dr +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\int_{R-h}^{R+h} r(r-R)\ \sigma_{zz}(r,\theta,z)\ dr + R\int_{R-h}^{R+h}(r-R)\sigma_{zz}(r,\theta,z)dr + R^2\int_{R-h}^{R+h}(r-R)\sigma_{zz}(r,\theta,z)dr\right]$$

$$+\int_{R-h}^{R+h} r(r-R)f_z(r,\theta,z)\ dr + R\int_{R-h}^{R+h}(r-R)\ f_z(r,\theta,z)\ dr + R^2\int_{R-h}^{R+h} f_z(r,\theta,z)dr = 0\ .$$

Soit encore en utilisant les notations II.1.2.

II.4.4b

$$(R+h)^2\ p_z^+ - (R-h)^2\ p_z^- + M_{\theta r} - R\ \Sigma_{rz} + \frac{\partial}{\partial\theta} M_{zz} + R\frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{\theta z} - \frac{\partial}{\partial z}\ N_{\theta z} - R\frac{\partial}{\partial z} M_{\theta z}$$

$$+ R^2\frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma_{zz} + n_z + R\ m_z + R^2\ F_z = 0$$. Or l'équation II.1.6 multipliée par R s'écrit encore sous la forme :

$$R(R+h)\ p_z^+ - R(R-h)p_z^- + R\frac{\partial}{\partial\theta}\ \Sigma_{\theta z} - R\frac{\partial}{\partial z} M_{\theta z} + R^2\frac{\partial}{\partial z}\Sigma_{zz} + R\ mz + R^2\ F_z = 0$$

D'où l'équation II.4.4c

II.4.4c $\quad h(R+h)\, p_z^+ + h(R-h)\, p_z^- + M_{\theta r} - R\, \Sigma_{rz} + \frac{\partial}{\partial\theta} M_{zz} - \frac{\partial}{\partial z} N_{\theta z} + n_z = 0$

Nous allons maintenant vérifier que la première des trois équations précédentes (i.e. l'équation II.4.2c) se réduit en fait à une identité, compte-tenu de la première équation classique d'équilibre II.2.3.

Détail des calculs

On reprend l'équation II.4.2c, qui compte tenu des définitions de M_{zr}, $N_{\theta r}$, $M_{z\theta}$ et n_r peut encore s'écrire :

$$h(R+h)p_r^+ + h(R-h)\, p_r^- + \int_{R-h}^{R+h} \left[-r\, \sigma_{rr} + (r-R)\, \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + r(r-R)\, \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} - (r-R)\, \sigma_{\theta\theta} + r(r-R)\, f_r \right] dr = 0$$

$$h(R+h)p_r^+ + h(R-h)p_r^- + \int_{R-h}^{R+h} \left\{ -r\, \sigma_{rr} + r(r-R) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{1}{r}\, \sigma_{\theta\theta} + f_r \right] \right\} dr = 0$$

Or d'après l'équation II.2.3 on a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + f_r = - \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\sigma_{rr}}{r}$$

D'où en substituant dans II.4.2b

$$h(R+h)p_r^+ + h(R-h)p_r^- + \int_{R-h}^{R+h} \left\{ -r\, \sigma_{rr} - r(r-R) \left[\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} \right] \right\} dr = 0$$

$$h(R+h)p_r^+ + h(R-h)p_r^- + \int_{R-h}^{R+h} \left\{ -2r\, \sigma_{rr} + R\, \sigma_{rr} - (r^2 - Rr)\, \frac{\sigma_{rr}}{\partial r} \right\} dr = 0$$

Or $-2r\, \sigma_{rr} + R\, \sigma_{rr} - (r^2 - Rr)\, \dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} = \dfrac{\partial}{\partial r} \left[(rR - r^2)\, \sigma_{rr} \right]$ d'où

$$h(R+h)p_r^+ + h(R-h)\ p_r^- + \left[(R+h)R-(R+h)^2\right] p_r^+ - \left[(R-h)R-(R-h)^2\right] p_r^- = 0$$

(d'après les notations II.1.1e)

$$h(R+h)\ p_r^+ + h(R-h)p_r^- + (R+h)(-h)p_r^+ - (R)h)(h)\ p_r^- = 0 \qquad \text{(identité)}$$

l'équation II.4.2b disparaît donc.

Ⓒ *Equivalence des systèmes d'équations obtenus à partir des méthodes différentes envisagées précédemment.*

. Tout d'abord, à la simple lecture on remarque que :

- l'équation II.4.4a est la même que l'équation II.4.3b.
- l'équation II.4.2a est la même que l'équation II.1.5 (déjà rencontrée lorsqu'on a écrit l'équilibre des résultantes au paragraphe II.1°)).

Donc l'équation II.4.2a disparaît, en ce sens qu'elle ne nous apporte rien de nouveau.

. Considérons donc l'équation II.4.3a restante :

II.4.3a (rappel)

$$z\ m_r + z\ R\ F_r - n_z - R\ m_z - R^2\ F_z + z(R+h)\ p_r^+ - (R+h)^2\ p_z^+ - z(R-h)\ p_r^-$$

$$+ (R-h)^2\ p_z^- - z\ \Sigma_{\theta\theta} + z\frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{r\theta} - M_{\theta r} + R\ \Sigma_{rz} - z\frac{\partial}{\partial z}M_{\theta r} + z\ R\frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma_{rz}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}N_{\theta z} + R\frac{\partial}{\partial z}M_{\theta z} - R^2\frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma_{zz} - \frac{\partial}{\partial\theta}M_{zz} - R\frac{\partial}{\partial\theta}\ \Sigma_{z\theta} = 0$$

qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$z\left[m_r + RF_r + (R+h)\ p_r^{+}(R-h)\ p_r^{-} - \Sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{r\theta} - \frac{\partial}{\partial z}M_{\theta r} + R\frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma_{rz}\right]$$

$$-\left[n_z + Rm_z + R^2\ F_z + (R+h)^2\ p_z^{+} - (R-h)^2\ p_z^{-} + M_{\theta r} - R\ \Sigma_{rz} - \frac{\partial}{\partial z}N_{\theta z} - R\frac{\partial}{\partial z}M_{\theta z}\right.$$

$$\left. + R^2\frac{\partial}{\partial z}\ \Sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial\theta}M_{zz} + R\frac{\partial}{\partial\theta}\ \Sigma_z\right] = 0$$

. On voit ainsi aisément que II.4.3a est une combinaison linéaire des équations II.1.4 et II.4.4b à savoir :

$$\boxed{[\text{II.4.3a}] = z\ [\text{II.1.4}] - [\text{II.4.4b}]}$$

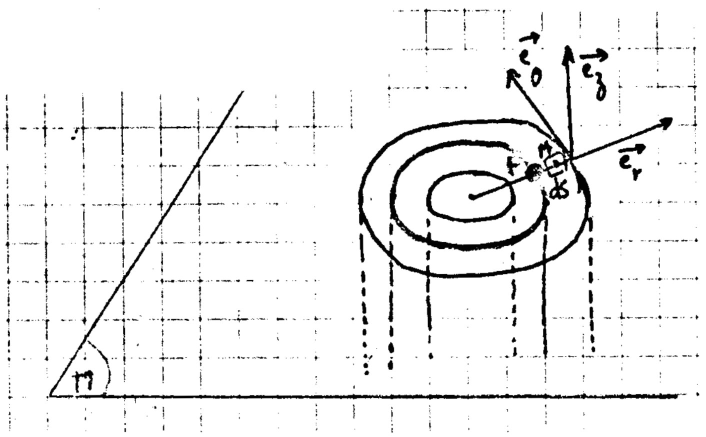
En résumé on a les équivalences suivantes entre les systèmes d'équations :

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{l}\text{II.1.4}\\ \text{II.1.5}\\ \text{II.1.6}\\ \text{II.4.3a}\\ \text{II.4.4a}\end{array}} \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dd, Leftrightarrow] \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{II.1.4}\\ \text{II.1.5}\\ \text{II.1.6}\\ \text{II.4.3c}\\ \text{II.4.4c}\end{array}} \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
 & \boxed{\begin{array}{l}\text{II.1.4}\\ \text{II.1.5}\\ \text{II.1.6}\\ \text{II.4.3b}\\ \text{II.4.4b}\end{array}}
\end{tikzcd}$$

III - CONDITIONS AUX BORDS DE C ($z = 0$ et $z = \ell$).

1) Conditions ramenées aux "cercles moyens" définis par : $\{r = R;\ z = 0\}$ et $\{r = R;\ z = \ell\}$.

1) Conditions ramenées aux "cercles moyens" définis par : $r = R;\ z = 0$ et $r = R;\ z = \ell$



(π) représente le plan $z = 0$ ou $z = \ell$. Soit une distribution surfacique $\vec{f}_o^{\ell}(M)$ de forces sur les bords ($z = 0$) ou ($z = \ell$). Nous allons ici nous ramener à l'intersection de la surface moyenne S et du plan π et ainsi obtenir des conditions aux bords sur les cercles moyens en intégrant par rapport à r entre R-h et R+h (La méthode est analogue à celle utilisée dans le II 1 et II 3) - L'équilibre de la coque entraine qu'en tout point M des extrémités ($z = 0$) ou ($z = \ell$) on a $\overrightarrow{F(M)} = \sigma_{ij}(M)n_j(M)\ \vec{e}_i$, où $n_r = n_\theta = 0$; $n_z = \pm 1$.

a) Conditions sur les résultantes

Si $F_o^{\ell}r$, F_o^{ℓ} , $F_o^{\ell}z$ désigne les composantes sur ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$) de la distribution surfacique $\overrightarrow{F_o^{\ell}(M)}$ sur $\{z = 0\}$ ou $\{z = \ell\}$ et ($R_o^{\ell}{}_r$, R_o^{ℓ} , $R_o^{\ell}{}_z$) les composantes de la distribution résultante linéique $\overrightarrow{R_o(P)}$ sur les cercles moyens on peut écrire :

$$R d\theta\ \overrightarrow{R_o^{\ell}(P)} = \int_{R-h}^{R+h} (f^{\ell}_{r_o}\vec{e}_r + f^{\ell}_{\theta_o}\ \vec{e}_\theta + f^{\ell}_{o\,z}\ \vec{e}_z) r\ dr\ d\theta = \pm \int_{R-h}^{R+h} r\ \sigma_{iz}(r,\theta,{}^{\ell}_o)\vec{e}_i\ dr\ d\theta$$

(+ si $z = \ell$; - si $z = 0$)

Soit en utilisant des notations tout à fait analogues à celles du II.1.2.

$$F(\theta, \overset{\ell}{o}) = \int_{R-h}^{R+h} (r,\theta,\overset{\ell}{o})\, dr \qquad \Sigma_{ij}(\theta,\overset{\ell}{o}) = \int_{R-h}^{R+h} \sigma_{ij}(r,\theta,\overset{\ell}{o})\, dr$$

$$m_i(\theta,\overset{\ell}{o}) = \int_{R-h}^{R+h} (r-R)\, f_i(r,\theta,\overset{\ell}{o})\, dr \qquad M_{ij}(\theta,o) = \int_{R-h}^{R+h} \varepsilon_{irk}(r-R)\, \sigma_{kj}(r,\theta,\overset{\ell}{o})dr$$

$$n_i(\theta,\overset{\ell}{o}) = \int_{R-h}^{R+h} r(r-R)\, F_i(r,\theta,\overset{\ell}{o})\, dr \qquad N_{ij}(\theta,\overset{\ell}{o}) = \int_{R-h}^{R+h} \varepsilon_{irk}\, r(r-R)\sigma_{kj}(r,\theta,\overset{\ell}{o})dr$$

D'où

$$\left[m_i(\theta,\overset{\ell}{o}) + R\, F_i(\theta,\overset{\ell}{o})\right|\vec{e}_i = \pm\left[-M_{\theta r}(\theta,\overset{\ell}{o}) + R\, \Sigma\, (\theta,\overset{\ell}{o})\right]\vec{e}_r$$

$$\pm\left[-M_{\theta\theta}(\theta,\overset{\ell}{o}) + R\, \Sigma_{\theta z}(\theta,\overset{\ell}{o})\right]\vec{e}_\theta \pm\left[-M_{\theta z}(\theta,\overset{\ell}{o}) + R\, \Sigma_{zz}(\theta,\overset{\ell}{o})\right]\vec{e}_z$$

I.III.1.-a-

1 2 3

$$m_r(\theta,\overset{\ell}{o}) + RF_r(\theta,\overset{\ell}{o}) = \pm\left[-M_{\theta r}(\theta,\overset{\ell}{o}) + R\, \Sigma_{rz}(\theta,\overset{\ell}{o})\right] \qquad (1)$$

$$m_\theta(\theta,\overset{\ell}{o}) + RF_\theta(\theta,\overset{\ell}{o}) = \pm\left[-M_{\theta\theta}(\theta,\overset{\ell}{o}) + R\, \Sigma_{\theta z}(\theta,\overset{\ell}{o})\right] \qquad (2)$$

$$m_z(\theta,\overset{\ell}{o}) + RF_z(\theta,\overset{\ell}{o}) = \pm\left[-M_{\theta z}(\theta,\overset{\ell}{o}) + R\, \Sigma_{zz}(\theta,\overset{\ell}{o})\right] \qquad (3)$$

b) Conditions sur les moments

$$\int_{R-h}^{R+h} (r\,\vec{e}_r + \overset{\ell}{o}\,\vec{e}_z)\,\Lambda\,(f_r\,\vec{e}_r + f_\theta\,\vec{e}_\theta + f_z\,\vec{e}_z) r\,dr = \pm \int_{R-h}^{R+h} (r\,\vec{e}_r + \overset{\ell}{o}\,e_z)\Lambda(\sigma_{iz}(r,\theta,\overset{\ell}{o})e_i r dr$$

Soit

$$\left[-\overset{\ell}{o}\int_{R-h}^{R+h} r\,f_\theta\,dr\right]\vec{e}_r + \left[\int_{R-h}^{R+h}\left\{\overset{\ell}{o}\,rf_r - r^2\,f_z\right\}dr\right]\vec{e}_\theta + \left[\int_{R-h}^{R+h} r^2\,f_\theta\,dr\right]\vec{e}_z =$$

$$\pm\left\{\left[-\overset{\ell}{o}\int_{R-h}^{R+h} r\sigma_{\theta z}(r,\theta,\overset{\ell}{o})dr\right]\vec{e}_r + \left[\int_{R-h}^{R+h}(\overset{\ell}{o}\,r\,\sigma_{rz} - r^2\,\sigma_{zz})dr\right]\vec{e}_\theta + \left[\int_{-R-h}^{R+h} r^2\,\sigma_{\theta z}\,dr\right]\vec{e}_z\right\}$$

$$\left[-\overset{\ell}{o}\,m\,(\theta,\overset{\ell}{o}) - R_o\,F\,(\theta,\overset{\ell}{o})\right]\vec{e}_r + \left[\overset{\ell}{o}\,m_r(\theta,\overset{\ell}{o}) + R\overset{\ell}{o}\,F_r(\theta,\overset{\ell}{o}) - n_z(\theta,\overset{\ell}{o})\right.$$

$$\left. - R\,m_z(\theta,\overset{\ell}{o}) - R^2\,F_z(\theta,\overset{\ell}{o})\right]\vec{e}_\theta + \left[m_\theta\,(\theta,\overset{\ell}{o}) + Rm_\theta(\theta,\overset{\ell}{o}) + R^2\,F_\theta(\theta,\overset{\ell}{o})\right]\vec{e}_z$$

$$= \pm\left\{\left[+\overset{\ell}{o}\,M_{\theta\theta}(\theta,\overset{\ell}{o}) - \overset{\ell}{R_o}\,\Sigma_{\theta z}(\theta,\overset{\ell}{o})\right]\vec{e}_r + \left[-\overset{\ell}{o}\,M_{\theta r}(\theta,\overset{\ell}{o}) + \overset{\ell}{o}\,R\,\Sigma_{rz}\,(\theta,\overset{\ell}{o}) + N_{\theta z}(\theta,\overset{\ell}{o})\right.\right.$$

$$\left.\left. + RM_{\theta z}(\theta,\overset{\ell}{o}) - R^2\,\Sigma_{zz}(\theta,\overset{\ell}{o})\right]\vec{e}_\theta + \left[-N_{\theta\theta}\,(\theta,\overset{\ell}{o}) - R\,M_{\theta\theta}(\theta,\overset{\ell}{o}) + R^2\,\Sigma_{\theta z}(\theta,\overset{\ell}{o})\right]\vec{e}_z\right\}$$

Soit en projetant sur $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$: on obtient les équations III.1.

4 5 6

III.

$$-\overset{\ell}{o}\,m_\theta(\theta,\overset{\ell}{o}) - R\,\overset{\ell}{o}\,F_\theta(\theta,\overset{\ell}{o}) = \pm\left[\overset{\ell}{o}\,M_{\theta\theta}(\theta,\overset{\ell}{o}) - R\,\overset{\ell}{o}\,\Sigma_{\theta z}\,(\theta,\overset{\ell}{o})\right] \qquad (4)$$

$$+ \ell_o\, m_r(\theta,\ell_o) + R\, \ell_o\, F_r(\theta,\ell_o) - n_z(\theta,\ell_o) - R\, m_z(\theta,\ell_o) - R^2\, F_z(\theta,\ell_o) \qquad (5)$$

$$\pm \left[- \ell_o\, M_{\theta r}(\theta,\ell_o) + \ell_o\, R\, \Sigma_{rz}(\theta,\ell_o) + N_{\theta z}(\theta,\ell_o) + RM_{\theta z}(\theta,\ell_o) - R^2\, \Sigma_{\theta z}(\theta,\ell_o) \right]$$

$$n_\theta(\theta,\ell_o) + R\, m_\theta(\theta,\ell_o) + R^2\, F_\theta(\theta,\ell_o) = \pm \left[-N_{\theta\theta}(\theta,\ell_o) - RM_{\theta\theta}(\theta,\ell_o) + R^2\, \Sigma_{\theta z}(\theta,\ell_o) \right] \qquad (6)$$

En considérant les équations (1) (2) (3) d'une part et (4) (5) (6) d'autre par on constate que :

(4) $\Longleftrightarrow$ 2

(5) $\Longleftrightarrow \begin{cases} - N_{\theta z}(\theta,\ell) = n_z(\theta,\ell) \\ N_{\theta z}(\theta,o) = n_z(\theta,o) \end{cases}$

(6) $\Longleftrightarrow \begin{cases} - N_{\theta\theta}(\theta,\ell) = n_\theta(\theta,\ell) \\ N_{\theta\theta}(\theta,o) = n_\theta(\theta,o) \end{cases}$

IV - DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS DU SYSTEME DIFFERENTIEL DE NAVIER.

Reprenons les équations classiques d'équilibre des résultantes (en coordonnées cylindriques) II.2.3; II.2.4; II.2.5 et avant de poursuivre notre étude où nous envisageons la coque (C) constituée d'un matériaux élastique linéaire homogène et isotrope nous allons préalablement faire le calcul du gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques. Pour cela nous utilisons la définition donnée au I 2°) f).

1) *Gradient d'un vecteur*

Le gradient d'un vecteur $\vec{U}_{(M)}$ est le *tenseur*, défini en chaque point M qui, par définition, fait correspondre au déplacement élémentaire $\vec{dM} = h_i \, dx_i \, \vec{e}_i$ la différentielle de $\vec{U}$, c'est-à-dire la quantité $\vec{dU} = d(U_r \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta + N_z \vec{e}_z)$ i.e. encore :

$$\vec{dU} = \left[U_{r,r}\, dr + U_{r,\theta}\, d\theta + U_{r,z}\, dz\right] \vec{e}_r + \left[U_{\theta,r}\, dr + U_{\theta,\theta}\, d\theta + U_{\theta,z}\, dz\right] \vec{e}_\theta +$$

$$\left[U_{z,r}\, dr + U_{z,\theta}\, d\theta + U_{z,z}\, dz\right] \vec{e}_z + U_r \left[d\theta \;\; \vec{e}_\theta\right] + U_\theta \left[-\vec{e}_r \; d\theta\right] + U_z \left[\;0\;\right]$$

$$\vec{dU} = \left[U_{r,r}\, dr + (U_{r,\theta} - U_\theta)\, d\theta + U_{r,z}\, dz\right] \vec{e}_r + \left[U_{\theta,r}\, dr + (U_{\theta,\theta} + U_r) d\theta + U_{\theta,z}\, dz\right] \vec{e}_\theta$$

$$+ \left[U_{z,r}\, dr + U_{z,\theta}\, d\theta + U_{z,z}\, dz\right] \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{dM} \Big/_{r,\theta,z} \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{pmatrix} \xrightarrow[\theta]{\text{grad } \vec{U} = \nabla_{\vec{U}}} \begin{pmatrix} U_{r,r}\, dr + (U_{r,\theta} - U_\theta) d\theta + U_{r,z}\, dz \\ \text{----------------} \\ \text{----------------} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} U_{r,r}; \frac{1}{r}(U_{r,\theta} - U_\theta); U_{r,z} \\ U_{\theta,r}; \frac{1}{r}(U_{\theta,\theta} + U_r); U_{\theta,z} \\ U_{z,r}; \frac{1}{r} U_{z,\theta}\ ; \quad U_{zz} \end{pmatrix}}_{(\vec{V})_{\vec{U}}} \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{pmatrix}$$

$\vec{V}_{ij}(\vec{U})$ étant les composantes du tenseur $\vec{V}$ sur les vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$

on remarque au passage que :

$$\overline{V}_{rr}(\vec{U}) + \nabla_{\theta\theta}(\vec{U}) + \nabla_{zz}(\vec{U}) = \text{div } \vec{U}$$

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{U}} = \Sigma\{ \overline{V}_{z\theta}(\vec{U}) - \overline{V}_{\theta z}(\vec{U})\} \vec{e}_r$$

Soit $\vec{u} = u_i \vec{e}_i = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z$ le vecteur déplacement du point M (r,θ,z) lorsqu'on passe de la position initiale à la position déformée de (C) .

2) *Définition du tenseur des taux de déformations* (ε)

Le tenseur linéarisé des taux de déformations (ε) est la partie paire du gradient du vecteur déplacement $\vec{u}$. En d'autres termes :

$$\boxed{(\varepsilon)_U = \frac{1}{2}\left[\vec{V}_U + {}^t\vec{V}_U\right]}$$

Les composantes ε_{ij} de ce tenseur évidemment symétrique des taux de déformations sont donc données par

$$\boxed{2\,\varepsilon_{ij(U)} = \overline{V}_{ij}(\vec{U}) + \overline{V}_{ji}(\vec{U})}$$

D'après les expressions des composantes $\overline{V}_{ij}(\vec{u})$ du tenseur grad $(\vec{u})$ écrites plus haut il est aisé d'écrire les composantes ε_{ij} du tenseur symétrique (ε) .

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \; ; \; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) \; ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right)\right] \; ; \; \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right]$$

$$(\varepsilon) \qquad \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,u_z + \frac{\partial}{\partial z}\,u_\theta\right]$$

D'autre part si le matériau constituant la coque (C) est élastique linéaire homogène et isotrope on sait que les relations contraintes-déformations s'écrivent :

$$\boxed{(\Sigma) = \lambda \; tr[(\varepsilon)] \; (I) + 2\mu \; (\varepsilon)}$$

soit pour les composantes des tenseurs en présence :

$$\boxed{\sigma_{ij} = \lambda \; (\varepsilon_{kk}) \; \delta_{ij} + 2 \; \mu \; \varepsilon_{ij}}$$

$$\varepsilon_{kk} = tr\,[(\varepsilon)] = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \overbrace{\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}}^{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_r)} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \text{ ou encore}$$

$$\boxed{\varepsilon_{kk} = tr\,[(\varepsilon)] = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,u_r) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}}$$

expression des ε_{ij} à l'aide des relations contraintes-déformations.

$$\sigma_{rr} = \lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\, u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + 2\mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right)\right]$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] \qquad \sigma_{rz} = \mu \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right]$$

$$\boxed{\sigma_{\theta z} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right]}$$

3) *Equations de Navier dimensionnelles.*

En reportant les expressions ci-dessus des σ_{ij} dans les équations d'équilibre on obtient les équations de Navier : *(nous allons détailler le calcul de la 1ère équation de Navier* (% r).

On reporte donc les expressions des σ_{ij} trouvés à la page précédente dans l'équation $\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$ ce qui donne,

$$\lambda \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\, u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + 2\mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \left[- \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}\right]$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \pm \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}\right] + 2 \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r}\right] + f_r = 0$$

Or $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[ru_r\right] = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r}$ d'où $\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] =$

L'équation ci-dessus peut alors s'écrire :

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] - \frac{\mu}{r}\left[\underbrace{\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}}_{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru_\theta)}{\partial r\partial \theta}} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{r\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{r\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}\right] + fr = 0$$

soit finalement la première équation de Navier :

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] - \frac{\mu}{r}\left[\frac{\partial^2 (ru_\theta)}{\partial r\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - r\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + r\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}\right] + f_r = 0$$

Des calculs tout à fait analogues aux précédents nous conduisent aux deux autres équations de Navier, à savoir :

$$\left(\frac{\lambda+2\mu}{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] - \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]\right.$$
$$+ f_\theta = 0$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] - \frac{\mu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial z\partial \theta} - r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta\partial z}\right] + f_z = 0$$

Exprimons maintenant les condition à la frontière :

4) Equations de Navier adimensionnelles

$r = R(1+\rho\varepsilon) \qquad \varepsilon = \frac{h}{R} \qquad z = \ell\,\zeta \qquad \rho = \frac{r-R}{h}$

$u_i = \bar{u}_i U \qquad \zeta = \frac{z}{\ell}$

Nous allons réécrire *les équations de Navier* avec les variables adimensionnelles introduites précédemment : (nous allons détailler le calcul de la 1ère équation de Navier).

(Rappel de la 1ère équation)

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]-\frac{\mu}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}-r\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+r\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}\right]+f_r=0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)=\frac{\partial}{\partial r}\left[R(1+\rho\varepsilon)U\,\bar{u}_r\right]=\frac{RU}{h}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[(1+\rho\varepsilon)\,\bar{u}_r\right]=\frac{RU}{h}\left[\varepsilon\,\bar{u}_r+(1+\rho\varepsilon)\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\rho}\right]$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)=\frac{U}{h(1+\rho\varepsilon)}\left[\varepsilon\bar{u}_r+(1+\rho\varepsilon)\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\rho}\right]=\frac{U}{h}\left[\frac{\varepsilon}{1+\rho\varepsilon}\bar{u}_r+\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\rho}\right]$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{U}{h}\left[\frac{\varepsilon}{1+\rho\varepsilon}\bar{u}_r+\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\rho}\right]+\frac{U}{R(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta}+\frac{U}{\ell}\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial\zeta}$$

$$1 = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z \partial}\right] = \frac{U}{h}\left\{\frac{-\varepsilon^2}{h(1+\rho\varepsilon)^2}\bar{u}_r + \frac{\varepsilon}{h(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \rho} + \frac{1}{h}\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \rho^2}\frac{-\varepsilon}{R(1+\rho E)^2} \times \right.$$

$$\left.\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial\theta\partial\rho} + \frac{1}{\ell}\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial\rho\partial z}\right\} . \text{ Or } h = R\varepsilon$$

$$1 = U\left\{\frac{-\bar{u}_r}{R^2(1+\rho\varepsilon)^2} + \frac{1}{R^2\ \varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \rho} + \frac{1}{R^2\varepsilon^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \rho^2} - \frac{1}{R^2(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{R^2\ \varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{1}{R\varepsilon\ell}\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial\rho\partial\zeta}\right\}$$

$$1 = \frac{U}{R^2}\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \bar{u}_r\right) - \frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}\left(\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \bar{u}_r\right) + \frac{R}{\ell\varepsilon}\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial\rho\partial\zeta}\right]$$

Calcul de $\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - r\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + r\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(ru_\theta) = r\ U\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} = R(1+\rho\varepsilon)\, U\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r\partial\theta} = \frac{1}{R(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r\partial\theta} = \frac{1\ \cancel{R}\ U}{R(1+\rho\varepsilon)\varepsilon\cancel{R}}\left[\varepsilon\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + (1+\rho\varepsilon)\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial\theta\partial\rho}\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r\partial\theta} = \frac{U}{R}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta}\right]}$$

D'où (2) $\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + r\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}$

$$(2) = \frac{U}{R}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta} - \frac{1}{(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\theta^2} - \frac{R^2}{\ell^2}(1+\rho\varepsilon)\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\zeta^2} + R\frac{(1+\rho\varepsilon)}{\varepsilon\ell}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\rho\partial\zeta}\right]$$

$$(2) = \frac{U}{R}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{u}_\theta - \frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\theta}\right) - \frac{R^2}{\ell^2}(1+\rho\varepsilon)\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\zeta^2} + \frac{R(1+\rho\varepsilon)}{\varepsilon\ell}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\rho\partial\zeta}\right]$$

$\Longrightarrow (\lambda+2\mu)\frac{U}{R^2}[1] - \frac{\mu}{R(1+\rho\varepsilon)}\frac{U}{R}[2] + f_r = 0$ s'écrit explicitement :

1ère équation de Navier

$$(\lambda+2\mu)\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta} + \bar{u}_r\right) - \frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}\left(\frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta} + \bar{u}_r\right) + \frac{R}{\ell\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\rho\partial\zeta}\right]$$

$$- \frac{\mu}{1+\rho\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{u}_\theta - \frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\theta}\right) - \frac{R^2}{\ell^2}(1+\rho\varepsilon)\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\zeta^2} + \frac{R(1+\rho\varepsilon)}{\varepsilon\ell}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\rho\partial\zeta}\right] + \frac{R^2}{U}f_r = 0$$

Des calculs tout à fait analogues aux précédents nous conduisent aux deux autres équations :

$$\left(\frac{\lambda+2\mu}{r}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] = \frac{\lambda+2\mu}{1+\rho\varepsilon}\frac{U}{R^2}\left[\frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{u}_r + \frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\rho\partial\theta}\right.$$

$$\left. + \frac{R}{\ell}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\theta\partial\zeta}\right].$$

Calcul de $\boxed{-\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 uz}{\partial z\partial\theta} - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\right] = E_2}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = U\left(\frac{\bar{u}_\theta}{\cancel{R}(1+\rho\varepsilon)} + \frac{1}{\cancel{R}\varepsilon}\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\cancel{R}(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] = \frac{U}{R^2\varepsilon}\left[\frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \rho} - \frac{\varepsilon}{(1+\rho\varepsilon)^2}\bar{u}_\theta + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \rho^2} - \frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \rho \partial \theta}\right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta}\right].$$

d'où

$$E_2 = -\frac{-\mu U}{R^2}\left[\frac{R}{\ell R(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \zeta \partial \theta} - \frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\cancel{R}^2\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\cancel{R}^2(1+\rho\varepsilon)^2}\bar{u}_\theta\right.$$

$$\left. - \frac{1}{R^2\varepsilon^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{R^2\ \varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\cancel{R}^2(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta}\right] =$$

$$\boxed{-\frac{\mu U}{R^2}\left[-\frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\bar{u}_\theta - \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta}\right) + \frac{R}{\ell(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \zeta \partial \theta}\right.}$$

$$\boxed{\left. + \frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}\left(\bar{u}_\theta - \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \rho^2}\right]}$$

2ème équation de Navier

$$\frac{(\lambda+2\mu)}{1+\rho\varepsilon}\left[\frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\bar{u}_r + \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{R}{\ell}\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \theta \partial \zeta}\right] - \mu\left[-\frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\bar{u}_\theta - \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{R}{\ell(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}\left(\bar{u}_\theta - \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \rho^2}\right] + f_\theta\frac{R^2}{U} = 0$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]=\frac{(\lambda+2\mu)U}{R\ell}\left[\frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\zeta}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\rho\partial\zeta}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\theta\partial\zeta}+\frac{R}{\ell}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\zeta^2}\right]=\frac{(\lambda+2\mu)U}{R\ell}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\rho\partial\zeta}+\frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\bar{u}_r+\frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{\ell}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\zeta^2}\right]$$

Calcul de

$$-\frac{\mu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial z}-r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 uz}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u\theta}{\partial\theta\partial z}\right]=E_3$$

$$E_3=-\frac{-\mu U}{R(1+\rho\varepsilon)}\left[\frac{1}{R\varepsilon}-\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{R(1+\rho\varepsilon)}{}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\zeta}\frac{R(1+\rho\varepsilon)}{R\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial\rho}\right\}-\frac{1}{R(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\ell}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\theta\partial\zeta}\right]$$

$$=\frac{-\mu U}{R(1+\rho\varepsilon)}\left[\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\zeta}-\frac{\ell}{R_\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial\rho}+\frac{1+\rho\varepsilon}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\zeta}-\frac{}{R_\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial\rho}\right)-\frac{\ell}{R(1+\quad)}\frac{\partial^2 u_z}{2}+\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\theta\partial\zeta}\right]$$

3ème équation de Navier

$$(\lambda+e\mu)\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\rho\partial\zeta}+\frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\ell}{\partial\zeta}\left(\bar{u}_r+\frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\zeta^2}\right]-\frac{\mu}{1+\rho\varepsilon}\left[\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\zeta}-\frac{\ell}{R\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial\rho}\right.$$

$$\left.+\frac{1+\rho\varepsilon}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\zeta}-\frac{\ell}{R\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial\rho}\right)-\frac{\ell}{R(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta\partial\zeta}\right]+f_z\frac{R\ell}{U}=0$$

Exprimons maintenant *les conditions à la frontière* dans les coordonnées (ρ,θ,ζ)

$$(\lambda+2\mu)\,\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \rho}\,(1,\theta,\zeta)+\lambda\left[\frac{1}{1+\varepsilon}\,\left(\bar{u}_r+\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta}\right)_{(1,\theta,\zeta)}+\frac{R}{\ell}\,\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \zeta}\,(1,\theta,\zeta)\right]=p_r^{+}\,\frac{R}{U}$$

$$(\lambda+2\mu)\,\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \rho}\,(-1,\theta,\zeta)+\lambda\left[\frac{1}{1-\varepsilon}\,\left(\bar{u}_r+\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta}\right)_{(-1,\theta,\zeta)}+\frac{R}{\ell}\,\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \zeta}\,(-1,\theta,\zeta)\right]=p_r^{-}\,\frac{R}{U}$$

$$\mu\left[\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \rho}\,(\mp 1,\theta,\zeta)+\frac{1}{1\mp\varepsilon}\,\left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta}-\bar{u}_\theta\right)_{(\mp 1,\theta,\zeta)}\right]=p_\theta^{\mp}\,\frac{R}{U}$$

$$\mu\left[\frac{R}{\ell}\,\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \zeta}\,(\mp 1,\theta,\zeta)+\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \rho}\,(\mp 1,\theta,\zeta)\right]=p_z^{\mp}\,\frac{R}{U}$$

Les relations contraintes déformations IV.2.2 ainsi que les équations d'équilibre que nous avons utilisées dans l'exposé précédent ne sont valables qu'en première approximation car nous avons utilisé le tenseur linéarisé (ε) IV.2.0 des taux de déformations, d'où une linéarisation implicite dans la configuration initiale (non déformée) par rapport au "petit paramètre":

$$\boxed{\eta = \sup_{M \in C} \left\| \mathrm{Grad}_M \vec{U} \right\|}$$

On introduit tout naturellement une norme sur l'espace des tenseurs du second ordre par l'intermédiaire d'une norme sur l'espace des matrices carrées réelles d'ordre 3. Si $(\bar{V}_{ij}(\vec{U}))$ est la matrice représentative du tenseur $\bar{V}(\vec{U})$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ on posera donc

$$\boxed{\left\| \vec{V}_M(U) \right\| = \sup_{(i,j)\in(\{1,2,3\})^2} \left| \bar{V}_{ij}(\vec{U}) \right|}$$

D'où

$$\eta = \sup_{M \in C} \operatorname{Max} \left\{ \left|\frac{\partial u_r}{\partial r}\right| ; \frac{1}{r}\left|\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right| ; \left|\frac{\partial u_z}{z}\right| ; \frac{1}{r}\left|\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right| ; \left|\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right| ; \left|\frac{\partial u_r}{\partial z}\right| ; \right.$$

$$\left. \frac{1}{r}\left|\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right| ; \left|\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right| ; \left|\frac{\partial u_z}{\partial r}\right| \right\} \quad \text{soit aussi}$$

$$\eta = \sup_{\substack{\rho \in [-1,1] \\ \theta \in [0,2\pi] \\ \zeta \in [0,1\varepsilon]}} \operatorname{Max} \left\{ \frac{U}{R}\left|\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \rho}\right| ; \left|\frac{U}{R(1+\rho\varepsilon)}\right| \left|\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \bar{u}_r\right| ; \frac{U}{\ell}\left|\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \zeta}\right| ; \frac{U}{R(1+\rho\varepsilon)}\left|\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \theta}\right| \right.$$

$$\left. \frac{U}{\ell}\left|\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \zeta}\right| ; \frac{U}{\ell}\left|\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \zeta}\right| ; \frac{U}{R(1+\rho\varepsilon)}\left|\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} - \bar{u}_\theta\right| ; \frac{U}{R\varepsilon}\left|\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \rho}\right| ; \frac{U}{R\varepsilon}\left|\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \rho}\right| \right.$$

en remarquant que $\frac{U}{R(1+\rho\varepsilon)} \leqslant \frac{U}{R(1-\varepsilon)} \forall \rho \in [-1,1]$ on voit que si les fonctions $\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$, $\bar{u}_z$ sont de classe C^1 sur le compact $K = [-1,1]\times[0,2\pi] \times [0,1]$, leurs dérivées partielles sont continues et bornées sur K et d'après la définition ci-dessus de η les quantités $\frac{U}{R\varepsilon}$, $\frac{U}{R(1-\varepsilon)}$, $\frac{U}{\ell}$ doivent être $O(\eta)$ (i.e. $\leqslant K\eta$ pour $0 < \eta < \eta_o$ λ constante réelle).

Ainsi $U = O(\eta\varepsilon)$ et d'ailleurs aussi $U = O(\eta)$. Compte tenu de la linéarisation où l'on a négligé des termes $O(\eta^2)$ on est amené à poser

$$\boxed{\varepsilon = \eta^\alpha \qquad 0 < \alpha < 1}$$

De même que nous avons introduit le " petit paramètre adimensionnel d'épaisseur " $\varepsilon = \frac{h}{R}$, on pourrait à ce stade envisager un " petit paramètre adimensionnel de forme " $\delta = \frac{h}{\ell}$.

D'après ce qui précède $\frac{U}{\ell} = \frac{U}{R}\frac{R}{h}\frac{h}{\ell} = \frac{U}{R}$ — doit être également $O(\eta)$

De même que précédemment, compte tenu des linéarisations où on néglige des termes $O(\eta^2)$ on est amené à poser

$$\boxed{\delta = \eta^{\beta} \text{ avec } \beta > 0 \quad \text{et } \alpha - \beta < 1}$$

On pourrait ainsi développer une théorie asymptotique des équations de Navier en faisant des développements en séries doubles par rapport au "petit paramètre d'épaisseur" ε et au "petit paramètre de forme" δ des déplacements $\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$, $\bar{u}_z$. Cela entrainerait des calculs fastidieux mais sans doute des conclusions intéressantes concernant l'influence du paramètre δ sur les résultats déjà connus pour les coques cylindriques où on a fait abstraction du phénomène "profondeur".

Compte tenu des applications envisagées (réservoir sous pression), nous ferons désormais l'hypothèse simplificative suivante :

Le rayon R et la longueur ℓ de la coque C sont d'ordre de grandeur comparable de sorte qu'on posera $\alpha = \beta$ (le cas $\beta > \alpha$ correspondant plutôt à des tubes).

5) *Développement asymptotique des fonctions* $(\bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{u}_z)$

Nous allons rechercher un développement asymptotique adéquat des fonctions $\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$, $\bar{u}_z$ par rapport au seul paramètre ε tel qu'après substitution dans le système différentiel constitué par les 3 équations de Navier, les densités de force de volume $\vec{f}$ de composantes f_r, f_θ, f_z sur $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$ apparaissent bien comme uniformément bornées. Dans les premiers membres des équations de Navier adimensionnelles IV.4.1, IV.4.2, IV.4.3. les termes de plus bas degré en ε sont de la forme $\frac{U}{R^2}(\lambda+2\mu)\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_i^2}$ $(i \in \{r,\theta,z\}$, $x_i = \rho$, θ, ou $\zeta)$.

D'autre part, comme $U = O(\eta\varepsilon) = O(\varepsilon^{1+\frac{1}{\alpha}})$ on peut poser :

$\frac{U}{R^2} = K(\varepsilon)\ \varepsilon^{1+\frac{1}{\alpha}}$ avec $K(\varepsilon)$ une fonction continue sur tout compact de R telle que $0 < K(0) < +\infty$, voire même une fonction de classe C^∞, sans restreindre la généralité du problème. Il y a tout lieu en effet de supposer $K(0) \neq 0$. On rappelle que

$$\frac{U}{R^2} = K(\varepsilon)\ \varepsilon^{1+\frac{1}{\alpha}} = K(\eta^{\alpha})\ \eta^{1+\alpha} = \left[K(0) + \eta^{\alpha} K'(0) + \eta^{2\alpha} \ldots\right] \eta^{1+\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

Si $K(0)$ était supposé nul, le terme de plus bas degré dans $\frac{U}{R^2}$ serait $K'(0)\ \eta^{1+2\alpha}$, terme qui n'est pas d'ordre η^2 si l'on suppose $1 + 2\alpha < 2$ c'est-à-dire $\alpha < \frac{1}{2}$ (pour $K'(0) \neq 0$).

Enfin si les (p-1) premières dérivées de K à l'origine étaient nulles, il faudrait de la même manière supposer $\alpha < \frac{1}{p}$.

Pour ne pas avoir à faire, à ce stade de la rédaction, d'hypothèses restrictives concernant α nous posons $K(0) \neq 0$.

D'où

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 < \alpha < 1 \\ U = R^2\ K(\varepsilon)\ \varepsilon^{1+\frac{1}{\alpha}} \end{array}}$$

Nous obtenons pour la première équation adimensionnllle de Navier IV.4.1, par exemple la relation :

$$\underbrace{K(\varepsilon)\ \varepsilon^{1+\frac{1}{\alpha}} (\lambda+2\mu)\ \frac{1}{\varepsilon^2}\ \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \rho^2}} \ldots\ldots\ldots \quad = -\ f_r$$

terme de plus bas degré en ε dans le premier membre de IV.4.1 soit encore

IV.5.1.
$$\boxed{\begin{array}{l} \underbrace{K(\varepsilon)\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1} (\lambda+2\mu)\ \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \rho^2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots = -\ f_r \\ \text{terme de plus bas degré en } \varepsilon \text{ dans le 1er membre de IV.4.1} \end{array}}$$

(Des relations analogues auraient été obtenues à partir des équations de Navier IV.4.2 ou IV.4.3).

Ecrivons a priori un développement "pseudo-analytique" en ε des fonction $\bar{u}_r(\rho,\theta,\zeta,\varepsilon)$, $\bar{u}_\theta(\rho,\theta,\zeta,\varepsilon)$ et $\bar{u}_z(\rho,\theta,\zeta,\varepsilon)$ sous la forme :

IV.5.2. $$\boxed{\bar{u}_i(\rho,\theta,\zeta,\varepsilon) = \varepsilon^x \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u}_i^n(\rho,\theta,\zeta)\,\varepsilon^n}$$ (ε "petit paramètre d'épaisseur $\varepsilon \in [0, \varepsilon_o]$ $\varepsilon_o > 0$).

En substituant IV.5.2. dans IV.5.1. on voit que les f_i seront uniformément bornées si et seulement si : l'expression

$$\left[K(\varepsilon)\,\varepsilon^{\frac{1}{\alpha} - 1+x} (\lambda+2\mu) \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u}_r^n(\rho,\theta,\zeta)\,\varepsilon^n\right]$$ admet une limite finie lorsque ε tend vers zéro par valeur supérieure.

D'où la condition $\frac{1}{\alpha} - 1 + x = 0$.

Nous poserons donc

IV.5.3 $$\boxed{\bar{u}_i(\rho,\theta,\zeta,\varepsilon) = \varepsilon^{1-\frac{1}{\alpha}} \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u}_i^n(\rho,\theta,\zeta)\,\varepsilon^n}$$

$$\frac{U}{R^2} = k\;\varepsilon^{1+1/\alpha}$$

SYSTEME DIFFERENTIEL VERIFIE par les fonction $\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$, $\bar{u}_z$

$$\frac{U}{R^2}\left\{(\lambda+2\mu)\left[-\frac{\bar{u}_r}{(1+\rho\varepsilon)^2} + \frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\rho} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\rho^2} - \frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{R}{\ell\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\rho\partial\zeta}\right]\right.$$
$$\left.-\mu\left[\frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\rho\partial\theta} - \frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\theta^2} - \frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\zeta^2} + \frac{R}{\ell\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\rho\partial\zeta}\right]\right\} + f_r = 0$$

$$\frac{U}{R^2}\left\{(\lambda+2\mu)\left[\frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\theta}+\frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\rho\partial\theta}+\frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{R}{\ell(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\zeta\partial\theta}\right]\right.$$

$$+\mu\left[\frac{R}{(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\zeta\partial\theta}-\frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\zeta^2}+\frac{\bar{u}_\theta}{(1+\rho\varepsilon)^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\rho}-\frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\theta}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\rho\partial\theta}\right]\right\}+f_\theta=0$$

$$\frac{U}{R^2}\left\{(\lambda+2\mu)\left[\frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{R}{\ell}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\zeta}+\frac{R}{\ell\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\rho\partial\zeta}+\frac{R}{\ell(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\zeta\partial\theta}+\frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\zeta^2}\right]\right.$$

$$-\mu\left[\frac{R}{\ell\varepsilon}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\rho\partial\zeta}+\frac{R}{\ell(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\zeta}-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial\rho}-\frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\theta^2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{R}{(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\theta\partial\zeta}\right]\right\}+f_z=0$$

Compte tenu des développements suivants :

$$\frac{1}{1+\rho\varepsilon}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\rho^n\varepsilon^n\ ;\quad \frac{1}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\rho^n\varepsilon^{n-1}\ ;$$

$$\frac{1}{(1+\rho\varepsilon)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,n\,\rho^{n-1}\varepsilon^{n-1}$$

et la formule du produit de 2 séries :

$$\boxed{\left(\sum_{p=0}^{\infty}a_p\varepsilon^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}b_q\varepsilon^q\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^n\left(\sum_{\substack{p+q=n\\0\leqslant p\leqslant n}}a_p b_q\right)}$$

On obtient, en substituant formellement les développements

$$\boxed{\bar{u}_{\substack{r\\ \theta\\ z}} = \varepsilon^{1-\frac{1}{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}^{n}_{\substack{r\\ \theta\\ z}} \varepsilon^{n}}$$

dans le système différentiel ci-dessus des identités

de la forme :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (A_n, B_n, C_n)\, \varepsilon^n + (\bar{f}_r(\varepsilon), \bar{f}_\theta(\varepsilon), \bar{f}_z(\varepsilon)) = 0}$$

où $\bar{f}_i(\varepsilon) = \dfrac{f_i}{K(\varepsilon)}$ $i = r, \theta, z$.

La fonction $K(\varepsilon)$ ayant été supposée une fonction de classe C^∞ avec $K(0) \neq 0$ nous obtenons le développement suivant pour les fonctions $\bar{f}_i(\varepsilon)$:

$$\bar{f}_i(\varepsilon) = f_i \left[\frac{1}{K(0)} - \frac{K'(0)}{K^2(0)}\varepsilon - \left(\frac{K''(0)}{2K^2(0)} - \frac{K'^2}{K^3(0)}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{K''^1(0)K'(0)}{K^3(0)} - \frac{K'^3(0)}{K^4(0)} - \frac{K'''(0)}{6K^2(0)}\right.\right.$$

$$\left.\varepsilon^3 + \ldots\right]$$

Soit en remplaçant dans les identités précédentes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (A_n, B_n, C_n)\, \varepsilon^n + f_i \left[\frac{1}{K(0)} - \frac{K'(0)}{K^2(0)}\varepsilon - \left(\frac{K''(0)}{2K^2(0)} - \frac{K'^2(0)}{K^3(0)}\right)\varepsilon^2\right.$$

$$\left. + \left(\frac{K'^1(0)\, K^1(0)}{K^3(0)} - \frac{K'^3(0)}{K^4(0)} - \frac{K'''(0)}{K^2(0)}\right)\varepsilon^3 + \ldots\ldots\right] = 0$$

Nous obtenons ainsi les relations liant les $\bar{u}^n_i$ et leurs diverses dérivées partielles par rapport à ρ, θ, ζ aux dérivées successives en zéro de la fonction C^∞, $K(\varepsilon)$. Ce résultat ne semble pas présenter un intérêt majeur et comme ε est une petit paramètre nous allons, dans un but de simplification, assimiler

$K(\varepsilon)$ à son terme constant $K(0)$ de son développement de Taylor. Ceci revient donc à supposer $K(\varepsilon) = K(0) = Cte = k$.

Les identités auxquelles nous nous intéressons désormais s'écrivent

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(A_n, B_n, C_n)\;^{n} + (\bar{f}_r, \bar{f}_\theta, \bar{f}_z) = 0 \\[2ex] \displaystyle\text{avec } \bar{f}_i = \frac{f_i}{k} \quad .\end{array}}$$

Calcul explicite des A_n, B_n, C_n

La première équation de Navier peut encore s'écrire :

$$(\lambda+2\mu)\left[-\frac{\varepsilon^2}{(1+\rho\varepsilon)^2}\left(\bar{u}_r + \frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\cancel{\ell}^2}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\rho^2} + \frac{1\varepsilon}{\cancel{\ell}(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\rho}\right]$$

$$\mu\left[\frac{+\varepsilon^2}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{u}_\theta - \frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\theta}\right) - \frac{R^2}{\ell^2}\varepsilon^2\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\zeta^2}\right] + (\lambda+\mu)\left[\frac{1\varepsilon}{\cancel{\ell}(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{R\varepsilon}{\ell\cancel{\ell}}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\rho\partial\zeta}\right] + \bar{f}_r = 0$$

$$(\lambda+2\mu)\left[\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p}\,p\,\rho^{p-1}\,\varepsilon^{p+1}\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^{q}\left(\bar{u}_r^{q} + \frac{\partial\bar{u}_\theta^{q}}{\partial\theta}\right)\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n}\frac{\partial^2\bar{u}_r^{n}}{\partial\rho^2} + \left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p}\rho^{p}\varepsilon^{p+1}\right)\right.$$

$$\left.\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^{q}\frac{\partial\bar{u}_r^{q}}{\partial\rho}\right)\right] - \mu\left[\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p+1}\,p\,\rho^{p-1}\,\varepsilon^{p+1}\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^{q}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{u}_\theta^{q} - \frac{\partial}{\partial\theta}\bar{u}_r^{q}\right)\right)\right.$$

$$\left. - \frac{R^2}{\ell^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+2}\frac{\partial^2\bar{u}_r^{n}}{\partial\zeta^2}\right] + (\lambda+\mu)\left[\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p}\rho^{p}\varepsilon^{p+1}\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^{q}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta^{q}}{\partial\rho\partial\theta}\right) + \frac{R}{\ell}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+1}\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2\bar{u}_z^{n}}{\partial\rho\partial\zeta}\right] + \bar{f}_r = 0$$

$$(\lambda+2\mu)\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+1}\Big(\sum_{\substack{p+q=n\\0\leqslant p\leqslant n}} (-1)^p\, p\, \rho^{p-1}\big(\bar{u}_r^q + \frac{\partial \bar{u}_\theta^q}{\partial\theta}\big)\Big)+\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \frac{\partial^2 \bar{u}_r^n}{\partial\rho^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+1}\right.$$

$$\left.\Big(\sum_{\substack{p+q=n\\0\leqslant p\leqslant n}} (-1)^p \rho^p \frac{\partial \bar{u}_r^q}{\partial\rho}\Big)\right]+\mu\left[\sum_{\substack{p+q=n\\0\leqslant p\leqslant n}} (-1)^p p\rho^{p-1} \frac{\partial}{\partial\theta}\big(\bar{u}_\theta^q - \frac{\partial \bar{u}_r^q}{\partial\theta}\big)\Big)- \frac{R^2}{\ell^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+2}\frac{\partial^2 \bar{u}_r^n}{\partial\zeta^2}\right]$$

$$+ (\lambda+\mu)\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+1}\Big(\sum_{\substack{p+q=n\\0\leqslant p\leqslant n}} (-1)^p \rho^p \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^q}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{R}{\ell}\frac{\partial^2 \bar{u}_z^n}{\partial\rho\partial\zeta}\right]+ \bar{f}_r = 0$$

Il ne reste plus à ce stade qu'à rechercher le coefficient de ε^n dans les sommations intervenant dans l'équation ci-dessus pour obtenir l'expression de A_n; soit :

$$A_n = (\lambda+2\mu)\left[\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}} (-1)^p\, p\, \rho^{p-1}\big(\bar{u}_r^q + \frac{\partial \bar{u}_\theta^q}{\partial\theta}\big)+ \frac{\partial^2 \bar{u}_r^n}{\partial\rho^2} + \sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}} (-1)^p \rho^p \frac{\partial \bar{u}_r^q}{\partial\rho}\right]$$

$$+ \mu\left[\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}} (-1)^p\, p\, \rho^{p-1} \frac{\partial}{\partial\theta}\big(\bar{u}^q - \frac{\partial \bar{u}_r^q}{\partial\theta}\big) + \frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2 u_r^{n-2}}{\partial\zeta^2}\right]$$

$$+ (\lambda+\mu)\left[\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}} (-1)^p \rho^p \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^q}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{R}{\ell}\frac{\partial^2 \bar{u}_z^{n-1}}{\partial\rho\partial\zeta}\right]$$

---

la deuxième équation du système différentiel peut encore s'écrire :

$$(\lambda+2\mu)\left[\frac{1\varepsilon^2}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\bar{u}_r + \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial\theta}\big)\right]+\mu\left[\frac{R^2}{\ell^2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial\zeta^2} + \frac{1\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial\rho^2} + \frac{\cancel{\varepsilon^2}}{\cancel{\varepsilon}(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial\rho}\right.$$

$$\left.- \frac{1\varepsilon^2}{(1+\rho\varepsilon)^2}\big(\bar{u}_\theta - \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial\theta}\big)\right] + (\lambda+\mu)\left[\frac{\cancel{\varepsilon^2}}{\varepsilon(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{R\varepsilon^2}{\ell(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial\zeta\partial\theta}\right]+ \bar{f}_\theta = 0$$

$$(\lambda+2\mu)\left[(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p+1}\,p\,\rho^{p-1}\,\varepsilon^{p+1})(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^{q}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\bar{u}_r^q+\frac{\partial\bar{u}_\theta^q}{\partial\theta}))\right]+\mu\left[\frac{R^2}{\ell^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+2}\,\frac{\partial^2\bar{u}_\theta^n}{\partial\zeta^2}\right.$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n}\,\frac{\partial\bar{u}_\theta^n}{\partial\rho^2}+(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\,\rho^p\,\varepsilon^{p+1})(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^q\,\frac{\partial\bar{u}_\theta^q}{\partial\rho})-(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p+1}\,p\,\rho^{p-1}\,\varepsilon^{p+1})$$

$$\left.(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^q(\bar{u}_\theta^q-\frac{\partial\bar{u}_r^q}{\partial\theta}))\right]+(\lambda+\mu)\left[(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\rho^p\varepsilon^{p+1})(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^q\,\frac{\partial^2\bar{u}_r^q}{\partial\rho\partial\theta})+\frac{R}{\ell}(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\,\rho^p\,\varepsilon^{p+2})\right.$$

$$\left.(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^q\,\frac{\partial^2\bar{u}_z^q}{\partial\zeta\partial\theta})\right]+\bar{f}_\theta=0$$

$$(\lambda+2\mu)\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+1}\,(\sum_{\substack{p+q=n\\0\leq p\leq n}}(-1)^{p+1}p\,\rho^{q-1}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\bar{u}_r^q+\frac{\partial\bar{u}_\theta^q}{\partial\theta}))\right.+\mu\left[\frac{R^2}{\ell^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+2}\,\frac{\partial^2\bar{u}_\theta^n}{\partial\zeta^2}\right.$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^n\,\frac{\partial\bar{u}_\theta^n}{\partial\rho^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+1}\,(\sum_{\substack{p+q=n\\0\leq p\leq n}}(-1)^p\,p\,\rho^{p-1}\,\frac{\partial\bar{u}_\theta^q}{\partial\rho})+\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+1}\,(\sum_{\substack{p+q=n\\0\leq p\leq n}}(-1)^p\,p$$

$$\left.\rho^{p-1}(\bar{u}^q-\frac{\partial\bar{u}_r^q}{\partial\theta}))\right]+(\lambda+\mu)\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+1}\,(\sum_{\substack{p+q=n\\0\leq p\leq n}}(-1)^p\,\rho^p\,\frac{\partial^2\bar{u}_r^q}{\partial\rho\partial\theta})+\frac{R}{\ell}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+2}\right.$$

$$\left.(\sum_{\substack{p+q=n\\0\leq p\leq n}}(-1)^p\,\rho^p\,\frac{\partial^2\bar{u}_z^q}{\partial\zeta\partial\theta})\right]+\bar{f}_\theta=0$$

Il ne reste plus à ce stade qu'à rechercher le coefficient de ε^n dans les sommations intervenant dans l'équation ci-dessus pour obtenir l'expression de B_n, soit :

$$B_n = (\lambda+2\mu)\left[\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}} (-1)^{p+1}\, p\, \rho^{p-1} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{u}_r^q + \frac{\partial \bar{u}_\theta^q}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$+ \mu\left[\frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2 \bar{u}^{n-2}}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial \bar{u}_\theta^n}{\partial\rho^2} + \sum_{p+q=n-1} (-1)^p \rho^p \frac{\partial \bar{u}_\theta^q}{\partial\rho} + \sum_{\substack{0<p<n-1\\p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}} (-1)^p\, p\, \rho^{p-1}\left(\bar{u}_\theta^q - \frac{\partial \bar{u}_r^q}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$+ (\lambda+\mu)\left[\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}} (-1)^p \rho^p \frac{\partial^2 \bar{u}_r^q}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{R}{\ell}\sum_{\substack{p+q=n-2\\0\leqslant p\leqslant n-2}} (-1)^p \rho^p \frac{\partial^2 \bar{u}_z^q}{\partial\zeta\partial\theta}\right]$$

---

la troisième équation du système différentiel peut encore s'écrire :

$$(\lambda+2\mu)\left[\frac{R^2}{\ell^2}\varepsilon^2\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\zeta^2}\right] + \mu\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^2\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\frac{\varepsilon^{\cancel{2}}}{(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial\rho} + \frac{1\varepsilon^2}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\theta^2}\right] + (\lambda+\mu)$$

$$\left[\frac{1\varepsilon^2}{1+\rho\varepsilon}\,\frac{R}{\ell}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\zeta} + \frac{R\varepsilon^{\cancel{2}}}{\ell\cancel{\varepsilon}}\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial\rho\partial\zeta} + \frac{R}{\ell}\frac{\varepsilon^2}{(1+\rho\varepsilon)}\frac{\partial^2\bar{u}_\theta}{\partial\zeta\partial\theta}\right] + \bar{f}_z = 0 \quad \text{soit encore}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{R^2}{\ell^2}\varepsilon^2\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\zeta^2} + \mu\left[\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\rho^2} + \frac{\varepsilon}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial\rho} + \frac{\varepsilon^2}{(1+\rho\varepsilon)^2}\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial\theta^2}\right]$$

$$+ (\lambda+\mu)\frac{R}{\ell}\left[\frac{\varepsilon^2}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\bar{u}_r + \frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta}\right) + \varepsilon\frac{\partial^2 u_r}{\partial\rho\partial\zeta}\right] + \bar{f}_z = 0$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{R^2}{\ell^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+2}\frac{\partial^2\bar{u}_z^n}{\partial\zeta^2} + \mu\left[\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\partial^2\bar{u}_z^n}{\partial\rho^2} + \left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\rho^p\varepsilon^{p+1}\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^q\frac{\partial\bar{u}_z^q}{\partial\rho}\right)\right.$$

$$\left.+ \left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p+1}\,p\,\rho^{p-1}\varepsilon^{p+1}\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^q\frac{\partial^2\bar{u}_z^q}{\partial\theta^2}\right)\right] + (\lambda+\mu)\frac{R}{\ell}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+1}\frac{\partial^2\bar{u}_r^n}{\partial\rho\partial\zeta}\right.$$

$$\left.+ \left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\rho^p\varepsilon^{p+2}\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\varepsilon^q\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\bar{u}_r^q + \frac{\partial\bar{u}_\theta^q}{\partial\theta}\right)\right)\right] + \bar{f}_z = 0$$

$$(\lambda+2\mu)\,\frac{R^2}{\ell^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+2}\,\frac{\partial^2\bar{u}_z^n}{\partial\zeta^2}+\mu\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n}\,\frac{\partial^2\bar{u}_z^n}{\partial\rho^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+1}\Big(\sum_{p+q=n}(-1)^p\,\rho^p\,\frac{\partial\bar{u}_z^q}{\partial\rho}\Big)\right.$$

$$\left.+\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+1}\Big(\sum_{p+q=n}(-1)^{p+1}\,p\,\rho^{p-1}\,\frac{\partial^2\bar{u}_z^q}{\partial\theta^2}\Big)\right]+(\lambda+\mu)\,\frac{R}{\ell}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+1}\,\frac{\partial^2\bar{u}_r^n}{\partial\rho\,\partial\zeta}\right.$$

$$\left.+\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n+2}\Big(\sum_{p+q=n}(-1)^p\,\rho^p\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(\bar{u}_r^q+\frac{\partial\bar{u}_\theta^q}{\partial\theta}\Big)\Big)\right]+\bar{f}_z=0$$

Recherchons le coefficient de ε^n dans les sommations écrites dans l'équation ci-dessus pour obtenir l'expression de C_n, soit

$$C_n=(\lambda+2\mu)\,\frac{R^2}{\ell^2}\,\frac{\partial^2\bar{u}_z^{n-2}}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2\bar{u}_z^n}{\partial\rho^2}+\mu\left[\frac{\partial^2\bar{u}_z^n}{\partial\rho^2}+\overbrace{\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leq p\leq n-1}}(-1)^p\,\rho^p\,\frac{\partial\bar{u}_z^q}{\partial\rho}+\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leq p\leq n-1}}(-1)^{p+1}\,p\,\rho^{p-1}\,\frac{\partial^2\bar{u}_z^q}{\partial\theta^2}}^{\sum\limits_{\substack{p+q=n-1\\0\leq p\leq n-1}}(-1)^p\,\rho^{p-1}\left(\rho\,\frac{\partial\bar{u}_z^q}{\partial\rho}-p\,\frac{\partial^2\bar{u}_z^q}{\partial\theta^2}\right)}\right]$$

$$+(\lambda+\mu)\,\frac{R}{\ell}\left[\frac{\partial^2\bar{u}_r^{n-1}}{\partial\rho\,\partial\zeta}+\sum_{\substack{p+q=n-2\\0\leq p\leq n-2}}(-1)^p\,\rho^p\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(\bar{u}_r^q+\frac{\partial\bar{u}_\theta^q}{\partial\theta}\Big)\right]$$

Nous allons récapituler les résultats donnant les expressions des A_n, B_n, C_n; puis exprimer que $\bar{f}_r$, $\bar{f}_\theta$, $\bar{f}_z$ sont d'ordre 0 en ε i.e.

$$A_n=B_n=C_n=0\qquad\forall\, n\in\mathbb{N}^*\;;\quad A_o=-\bar{f}_r\,,\;B_o=-\bar{f}_\theta\;;\quad C_o=-\bar{f}_z$$

Nous en déduirons ainsi les expressions de $\bar{u}_r^n$, $\bar{u}_\theta^n$, $\bar{u}_z^n$ sous forme de polynômes en ρ à coefficients ne dépendant que de θ et ζ (si les $\bar{f}_i$ sont indépendantes de ρ ; sinon, "modulo" les termes provenant de la présence des $\bar{f}_i$).

$$A_n = (\lambda+2\mu)\left[\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leq p\leq n-1}} (-1)^p\, p\, \rho^{p-1}\left(\bar{u}_r^q + \frac{\partial \bar{u}_\theta^q}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 \bar{u}_r^n}{\partial\rho^2} + \sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leq p\leq n-1}} (-1)^p \rho^p \frac{\partial \bar{u}_r^q}{\partial\rho}\right]$$

$$+ \mu \left[\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leq q\leq n-1}} (-1)^p\, p\, \rho^{p-1} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{u}_\theta^q - \frac{\partial \bar{u}_r^q}{\partial\theta}\right) + \frac{R^2}{\ell^2}\, \frac{\partial^2 \bar{u}_r^{n-2}}{\partial\zeta^2}\right]$$

$$+ (\lambda+\mu) \left[\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leq p\leq n-1}} (-1)^p \rho^p \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^q}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{R}{\ell}\, \frac{\partial^2 \bar{u}_z^{n-1}}{\partial\rho\partial\zeta}\right]$$

$$A_o = (\lambda+2\mu)\, \frac{\partial^2 \bar{u}_r^o}{\partial\rho^2}$$

$$A_1 = (\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r^1}{\partial\rho^2} + \frac{\partial \bar{u}_r^o}{\partial\rho}\right) + (\lambda+\mu)\left(\frac{R}{\ell}\, \frac{\partial^2 \bar{u}_z^o}{\partial\rho\partial\zeta} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^o}{\partial\rho\partial\theta}\right)$$

$$A_2 = (\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial^2 \bar{u}_r^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial \bar{u}_r^1}{\partial\rho} - \rho\, \frac{\partial \bar{u}_r^o}{\partial\rho} - \bar{u}_r^o - \frac{\partial \bar{u}_\theta^o}{\partial\rho}\right] + \mu\left[\frac{R^2}{\ell^2}\, \frac{\partial^2 \bar{u}_r^o}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{u}_\theta^o - \frac{\partial \bar{u}_r^o}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$+ (\lambda+\mu)\left[\frac{R}{\ell}\, \frac{\partial^2 \bar{u}_z^1}{\partial\rho\partial\zeta} + \frac{\partial^2 \bar{u}^1}{\partial\rho\partial\theta} - \rho\, \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^o}{\partial\rho\partial\theta}\right]$$

$$A_3 = (\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial^2 \bar{u}_r^3}{\partial\rho^2} + \frac{\partial \bar{u}_r^2}{\partial\rho} - \rho\, \frac{\partial \bar{u}_r^1}{\partial\rho} + \right.$$

$$\left.\rho^2\, \frac{\partial \bar{u}_r^o}{\partial\rho} - \left(\bar{u}_r^1 + \frac{\partial \bar{u}_\theta^1}{\partial\theta}\right) + 2\rho\left(\bar{u}_r^o + \frac{\partial \bar{u}_\theta^o}{\partial\theta}\right)\right] + \mu\left[\frac{R^2}{\ell^2}\, \frac{\partial^2 \bar{u}_r^1}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{u}_\theta^1 - \frac{\partial \bar{u}_r^1}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left. + 2\rho\, \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{u}_\theta^o - \frac{\partial \bar{u}_r^o}{\partial\theta}\right)\right] + (\lambda+\mu)\left[\frac{R}{\ell}\, \frac{\partial^2 \bar{u}_z^2}{\partial\rho\partial\zeta} + \rho^2\, \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^o}{\partial\rho\partial\theta} - \rho\, \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^1}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^2}{\partial\rho\partial\theta}\right]$$

$$B_n = (\lambda+2\mu)\left[\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}}^{0\leqslant p\leqslant n-1} (-1)^{p+1}\; p\,\rho^{p-1}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar u_r^q + \frac{\partial \bar u_\theta^q}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$+\mu\left[\frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2 \bar u_\theta^{n-2}}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 \bar u_\theta^{n-2}}{\partial\rho^2} + \sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}}^{0\leqslant p\leqslant n-1} (1)^p\,\rho^p\,\frac{\partial \bar u_\theta^q}{\partial\rho} + \sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}}^{0\leqslant p\leqslant n-1}(-1)^p\; p\rho^{p-1}\left(\bar u_\theta^q - \frac{\partial \bar u_r^q}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$+(\lambda+\mu)\left[\sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}}^{0\leqslant p\leqslant n-1}(-1)^p\,\rho^p\,\frac{\partial^2 \bar u_r^q}{\partial\rho\,\partial\theta} + \frac{R}{\ell}\sum_{\substack{p+q=n-2\\0\leqslant p\leqslant n-1}}^{0\leqslant p\leqslant n-2}(-1)^p\,\rho^p\,\frac{\partial^2 \bar u_z^q}{\partial\zeta\,\partial\theta}\right]$$

$$B_o = \mu\,\frac{\partial^2 \bar u_\theta^o}{\partial\rho^2}$$

$$B_1 = \mu\left[\frac{\partial^2 \bar u^1}{\partial\rho^2} + \frac{\partial \bar u_\theta^o}{\partial\rho}\right] + (\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2 \bar u_r^o}{\partial\rho\,\partial\theta}\right]$$

$$B_2 = (\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar u_r^o + \frac{\partial \bar u_\theta^o}{\partial\theta}\right)\right] + \mu\left[\frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2 \bar u_\theta^o}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 \bar u_\theta^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial\,\bar u_\theta^1}{\partial\rho} - \rho\,\frac{\partial \bar u_\theta^o}{\partial\rho} - \left(\bar u_\theta^o - \frac{\partial \bar u_r^o}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$+(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2 \bar u_r^1}{\partial\rho\,\partial\theta} - \rho\,\frac{\partial^2 \bar u_r^o}{\partial\rho\,\partial\theta} + \frac{R}{\ell}\frac{\partial^2 \bar u_z^o}{\partial\zeta\,\partial\theta}\right]$$

$$B_3 = (\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar u_r^1 + \frac{\partial \bar u_\theta^1}{\partial\theta}\right) - 2\rho\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar u_r^o + \frac{\partial \bar u_\theta^o}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$+\mu\left[\frac{R^2}{\ell^2}\;\frac{\partial^2 \bar u_\theta^1}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 \bar u_\theta^3}{\partial\rho^2} + \frac{\partial \bar u_\theta^2}{\partial\rho} - \rho\,\frac{\partial \bar u_\theta^1}{\partial\rho} + \rho^2\,\frac{\partial \bar u_\theta^o}{\partial\rho} + 2\rho\left(\bar u_\theta^o - \frac{\partial \bar u_r^o}{\partial\theta}\right) - \left(\bar u_\theta^1 - \frac{\partial \bar u_r^1}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$+(\lambda+\mu)\left[\rho^2\,\frac{\partial^2 \bar u_r^o}{\partial\rho\,\partial\theta} - \rho\;\frac{\partial^2 \bar u_r^1}{\partial\rho\,\partial\theta} + \frac{\partial^2 \bar u_r^2}{\partial\rho\,\partial\theta} + \frac{R}{\ell}\left(\frac{\partial^2 \bar u_z^1}{\partial\zeta\,\partial\theta} - \rho\,\frac{\partial^2 \bar u_z^o}{\partial\zeta\,\partial\theta}\right)\right]$$

$$C_n = (\lambda+2\mu)\,\frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2 \bar u_z^{n-2}}{\partial\zeta^2} + \mu\left[\frac{\partial^2 \bar u_z^n}{\partial\rho^2} + \sum_{\substack{p+q=n-1\\0\leqslant p\leqslant n-1}}^{0\leqslant p\leqslant n-1}(-1)^p\,\rho^{p-1}\left(\rho\,\frac{\partial \bar u_z^q}{\partial\rho} - p\,\frac{\partial^2 \bar u_z^q}{\partial\theta^2}\right)\right]$$

$$+(\lambda+\mu)\,\frac{R}{\ell}\left[\frac{\partial^2 \bar u_r^{n-1}}{\partial\rho\,\partial\zeta} + \sum_{\substack{p+q=n-2\\0\leqslant p\leqslant n-2}}^{0<p<n-2}(-1)^p\,\rho^p\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\bar u_r^q + \frac{\partial \bar u_\theta^q}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$C_o = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_z^o}{\partial \rho^2}$$

$$C_1 = \mu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_z^1}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \bar{u}_z^o}{\partial \rho} \right] + (\lambda+\mu) \frac{R}{\ell} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_r^o}{\partial \rho \partial \zeta} \right]$$

$$C_2 = (\lambda+2\mu) \frac{R^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_z^o}{\partial \zeta^2} + \mu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_z^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z^1}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial \bar{u}_z^o}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z^o}{\partial \theta^2} \right] + (\lambda+\mu) \frac{R}{\ell} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_r^1}{\partial \rho \partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\bar{u}_r^o + \frac{\partial \bar{u}_\theta^o}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$C_3 = (\lambda+2\mu) \frac{R^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \zeta^2} + \mu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_z^3}{\partial \rho^2} + \rho \left(\rho \frac{\partial \bar{u}_z^o}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial^2 \bar{u}_z^o}{\partial \theta^2} \right) - \rho \frac{\partial \bar{u}_z^1}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z^1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \bar{u}_z^2}{\partial \rho} \right] + (\lambda+\mu) \frac{R}{\ell} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_r^2}{\partial \rho \partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\bar{u}_r^1 + \frac{\partial \bar{u}_\theta^1}{\partial \theta} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\bar{u}_r^o + \frac{\partial \bar{u}_\theta^o}{\partial \theta} \right) \right]$$

Explicitons $A_o = - \bar{f}_r$ $B_o = - \bar{f}$ $C_o = - \bar{f}_z$

$$(\lambda+2\mu) \frac{\partial^2 \bar{u}_r^o}{\partial \rho^2} = - \bar{f}_r \qquad \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^o}{\partial \rho^2} = - \bar{f}_\theta \qquad \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_z^o}{\partial \rho^2} = - \bar{f}_z$$

6) *Intégration du système de Navier à partir des développements asymptotiques des fonctions* $\bar{u}_i(\rho,\theta,\zeta,\varepsilon)$ *par rapport à* ε .

a) $(A_o, B_o, C_o) = - (\bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta) \; ; \; \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta) \; ; \; \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta))$ soit :

$$\left\{\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\,\frac{\partial^2 \bar{u}_r^o}{\partial\rho^2} &= -\,\bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta).\\ \mu\,\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^o}{\partial\rho^2} &= -\,\bar{f}_\theta\,(\rho,\theta,\zeta)\\ \mu\,\frac{\partial^2 \bar{u}_z^o}{\partial\rho^2} &= -\,\bar{f}_z\,(\rho,\theta,\zeta)\end{aligned}\right.$$

D'où par intégration partielle par rapport à ρ

$$\left\{\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\,\frac{\partial \bar{u}_r^o}{\partial\rho} &= -\int \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)d\rho+a_r^o(\theta,\zeta)\\ \mu\,\frac{\partial \bar{u}_\theta^o}{\partial\rho} &= -\int \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta)d\rho + a_\theta^o(\theta,\zeta)\\ \mu\,\frac{\partial \bar{u}_z^o}{\partial\rho} &= -\int \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho + a_z^o(\theta,\zeta)\end{aligned}\right.$$

Notation : nous noterons $\int^{(n)} \bar{f}_i(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho$ toute "primitive $n^{\text{ième}}$ de $\bar{f}_i(\rho,\theta,\zeta)$" par rapport à la variable ρ c'est-à-dire toute fonction $\bar{F}_i(\rho,\theta,\zeta)$ telle que

$$\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\,\bar{F}_i(\rho,\theta,\zeta) = \bar{f}_i(\rho,\theta,\zeta)\ .$$

Soit par une nouvelle intégration partielle par rapport à ρ :

IV.6.(1.2.3)

$$\boxed{\begin{aligned}(\lambda + 2u)\,\bar{u}_r^o &= -\int^{(2)} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho + \rho\,a_r^o(\theta,\zeta) + b_r^o(\theta,\zeta)\\ \mu\,\bar{u}_\theta^o &= -\int^{(2)} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho + \rho\,a_\theta^o(\theta,\zeta) + b_\theta^o(\theta,\zeta)\\ \mu\,\bar{u}_z^o &= -\int^{(2)} \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho + \rho\,a_z^o(\theta,\zeta) + b_z^o(\theta,\zeta)\end{aligned}}$$

Les "constantes" d'intégration par rapport à ρ , $a^o_{i(\theta,\zeta)}$ et $b^o_{i(\theta,\zeta)}$ étant déterminées par les conditions à la frontière (correspondant à $\rho = \pm 1$) et qui seront explicitées ultérieurement; sans oublier le fait que $a^n_{i(\theta,\zeta)}$ et $b^n_{i(\theta,\zeta)}$ sont 2π - périodique en θ . (A la simple lecture des résultats ci-dessus on constate que les expressions des $\bar{u}_i^o(\rho,\theta,\zeta)$ sont, mises à part les "primitives secondes" par rapport à ρ des fonctions données $\bar{f}_i$, des polynômes du premier degré en θ à coefficients ne dépendant que de θ et ζ).

b) $(A_n, B_n, C_n) = (0,0,0) \quad \forall\, n \in N^*$

. $n = 1$

$(A_1, B_1, C_1) = (0,0,0)$. D'où

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 \bar{u}_r^1}{\partial\rho^2} = \int \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho - a_r^o(\theta,\zeta) - (\lambda+\mu)\left[\frac{R}{\ell\mu}\left(-\int\frac{\partial \bar{f}_z}{\partial\zeta}(\rho,\theta,\zeta)d\rho + \frac{\partial}{\partial\zeta}a_z^o(\theta,\zeta)\right) - \frac{1}{\mu}\int\frac{\partial\bar{f}_\theta}{\partial\theta}(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho + \frac{1\partial}{\mu\partial\theta}a_\theta^o(\theta,\zeta)\right]$$

$$\mu\frac{\partial^2\bar{u}^1}{\partial\rho^2} = +\int\bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta)d\rho - a_\theta^o(\theta,\zeta) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left(\int\frac{\partial}{\partial\theta}\bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho - \frac{\partial}{\partial\theta}a_r^o(\theta,\zeta)\right)$$

$$\mu\frac{\partial^2\bar{u}_z^1}{\partial\rho^2} = \int \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho - a_z^o(\theta,\zeta) + \frac{(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{R}{\ell}\left(\int\frac{\partial}{\partial\zeta}\bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho - \frac{\partial}{\partial\zeta}a_r^o(\theta,\zeta)\right)$$

Par intégration partielle par rapport à ρ on obtient :

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\bar{u}_r^1}{\partial\rho} = \int^{(2)}\bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho - \rho\,a_r^o(\theta,\zeta) - (\lambda+\mu)\left[\frac{R}{\ell\mu}\left(-\int^{(2)}\frac{\partial\bar{f}_z}{\partial\zeta}(\rho,\theta,\zeta)d\rho + \rho\frac{\partial}{\partial\zeta}a_z^o(\theta,\zeta)\right) - \frac{1}{\mu}\int^{(2)}\frac{\partial\bar{f}_\theta}{\partial\theta}(\rho,\theta,\zeta)d\rho + \frac{1}{\mu}\rho\frac{\partial}{\partial\theta}a_\theta^o(\theta,\zeta)\right] + a_r^1(\theta,\zeta)$$

$$\mu\frac{\partial\bar{u}^1}{\partial\rho} = \int^{(2)}\bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho - \rho\,a_\theta^o(\theta,\zeta) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left(\int^{(2)}\frac{\partial}{\partial\theta}\bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\,d\rho - \rho\frac{\partial}{\partial\theta}a_r^o(\theta,\zeta) + a_\theta^1(\theta,\zeta)\right.$$

$$\mu \; \frac{\partial \bar{u}_z^1}{\partial \rho} = \int^{(2)} \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho - \rho\, a_z^o(\theta,\zeta) + \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)} \frac{R}{\ell} \left(\int^{(2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \rho \frac{\partial}{\partial \zeta} a_r^o(\theta,\zeta) \right)$$

$$+ a_z^1(\theta,\zeta)$$

Soit par nouvelle intégration partielle par rapport à ρ

$$(\lambda+2\mu)\, \bar{u}_r^1 = \int^{(3)} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \frac{\rho^2}{2} a_r^o(\theta,\zeta) - (\lambda+\mu) \left[\frac{R}{\ell\mu} \left(- \int^{(3)} \frac{\partial \bar{f}_z}{\partial \zeta} (\rho,\theta,\zeta) d\rho + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta} a_z^o(\theta,\zeta) \right) \right.$$

IV.6(4.5.6)

$$\left. - \frac{1}{\mu} \int^{(3)} \frac{\partial \bar{f}_\theta}{\partial \theta} (\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \frac{1}{\mu} \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} a_\theta^o(\theta,\zeta) \right] + \rho\, a_r^1(\theta,\zeta) + f_r^1(\theta,\zeta)$$

$$\mu\, \bar{u}^1 = \int^{(3)} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \frac{1}{2} \rho^2\, a_\theta^o(\theta,\zeta) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \left(\int^{(3)} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \theta} a_r^o(\theta,\zeta) \right)$$

$$+ \rho\, a_\theta^1(\theta,\zeta) + b_\theta^1(\theta,\zeta)$$

$$\mu\, \bar{u}_z^1 = \int^{(3)} \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \frac{1}{2} \rho^2\, a_z^o(\theta,z) + \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)} \frac{R}{\ell} \left(\int^{(3)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} a_r^o(\theta,\zeta) \right)$$

$$+ \rho\, a_z^1(\theta,\zeta) + b_z^1(\theta,\zeta) \; .$$

On constate ici que les expressions des $\bar{u}_i^1$ (ρ,θ,ζ) sont, mises à part les "primitives troisièmes par rapport à ρ" des fonctions $\bar{f}_i$ et de leurs dérivées partielles premières par rapport à ζ et θ, des polynômes du second degré en ρ à coefficients ne dépendant que de θ et ζ .

Il est immédiat d'après les expressions de A_n, B_n, C_n établies antérieurement que si l'on fait l'hypothèse de récurrence suivante à l'ordre n-1, elle est encore valable à l'ordre n.

Hypothèse de récurrence : les expressions des $\bar{u}_i^{n-1}(\rho,\theta,\zeta)$ sont, mis à part les termes comportant les "primitives $(n+1)^{\text{èmes}}$ par rapport à ρ "des fonctions $\bar{f}_i$ et de leurs dérivées partielles successives par rapport à ζ et θ , des polynômes de degré n en ρ à coefficients ne dépendant que de θ et ζ .

On se contentera d'une vérification de cette hypothèse de récurrence, jusqu'à l'ordre n = 2; la démonstration générale ne présentant que des difficultés de notation (en fait cette démonstration est évidente à la lecture des coefficients A_n, B_n et C_n).

. n = 2 $(A_2, B_2, C_2) = (0,0,0)$

IV.6.7.

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \bar{u}_r^2}{\partial \rho^2} = - \int^{(2)} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)d\rho + \rho\, a_r^o(\theta,\zeta) + (\lambda+\mu)\left[\frac{R}{\ell\mu} \left(-\int^{(2)} \frac{\partial \bar{f}_z}{\partial \zeta} (\rho,\theta,\zeta)\, d\rho\right.\right.$$

$$\left.\left. + \rho \frac{\partial}{\partial \zeta} a_z^o (\theta,\zeta) \right) - \frac{1}{\mu} \int^{(2)} \frac{\partial \bar{f}_\theta}{\partial \theta} (\rho,\theta,\zeta)d\rho + \frac{1}{\mu} \rho \frac{\partial}{\partial \theta} a_\theta^o(\theta,\zeta) \right] - a_r^1(\theta,\zeta)$$

$$- \rho \int \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)d\rho + \rho\, a_r^o(\theta,\zeta) - \int^{(2)} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \rho\, a_r^o(\theta,\zeta)$$

$$+ b_r^o(\theta,\zeta) + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \left(- \int^{(2)} \frac{\partial \bar{f}_\theta}{\partial \theta} (\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \rho \frac{\partial}{\partial \theta} a_\theta^o (\theta,\zeta) + \frac{\partial}{\partial \theta} b_\theta^o (\theta,\zeta) \right)$$

$$- \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)} \frac{R^2}{\ell^2} \left(- \int^{(2)} \frac{\partial^2 \bar{f}_r}{\partial \zeta^2} (\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \rho \frac{\partial^2 a_r^o(\theta,\zeta)}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} b_r^o(\theta,\zeta) \right)$$

$$- \int^{(2)} \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \rho \frac{\partial}{\partial\theta} a^o_\theta\ (\theta,\zeta) + \frac{\partial}{\partial\theta} b^o_\theta\ (\theta,\zeta)$$

$$- \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \left(- \int^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \rho \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} a^o_\theta\ (\theta,\zeta) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} b^o_\theta\ (\theta,\zeta) \right)$$

$$- (\lambda+\mu) \frac{R}{\ell\mu} \left[\int^{(2)} \frac{\partial}{\partial\zeta} \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho - \rho \frac{\partial}{\partial\zeta} a^o_z(\theta,\zeta) + \frac{\lambda+\mu}{(\lambda+2\mu)} \frac{R}{\ell} \left(\int^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta) d\rho \right.\right.$$

$$\left.\left. - \rho \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} a^o_r\ (\theta,\zeta) + \frac{\partial}{\partial\zeta} a^1_z(\theta,\zeta) \right] - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \left[\int^{(2)} \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \rho \frac{\partial}{\partial\theta} a^o_\theta(\theta,\zeta) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \right.$$

$$\left(\int^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \rho \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} a^o_r(\theta,\zeta) + \frac{\partial}{\partial\theta} a^1_\theta\ (\theta,\zeta) + \left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right) \left(- \rho \int \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta) d\rho \right.\right.$$

$$\left.\left. + \rho \frac{\partial}{\partial\theta} a^o_\theta(\theta,\zeta) \right) \right.$$

IV.6.8.

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^{2}}{\partial\rho^2} = \int^{(2)} \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \rho \frac{\partial}{\partial\theta} a^o_r(\theta,\zeta) - \frac{\partial}{\partial\theta} b^o_r(\theta,\zeta) + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \left(\int^{(2)} \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta) d\rho \right.$$

$$\left. - \rho \frac{\partial}{\partial\theta} a^o_\theta(\theta,\zeta) - \frac{\partial}{\partial\theta} b^o_\theta(\theta,\zeta) \right) + \frac{R^2}{\ell^2} \left(\int^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \rho \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} a^o_\theta(\theta,\zeta) \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} b^o(\theta,\zeta) \right) - \int^{(2)} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta) d\rho + \rho\, a^o_\theta(\theta,\zeta) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \left(\int^{(2)} \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho \right.$$

$$- \rho \frac{\partial}{\partial\theta} a_r^o(\theta,\zeta) \ ) - a_\theta^1(\theta,\zeta) - \rho \int^{(2)} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \rho\, a_\theta^o(\theta,\zeta)$$

$$- \int^{(2)} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \rho\, a_\theta^o(\theta,\zeta) + b_\theta^o(\theta,\zeta) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \left(\int^{(2)} \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho \right.$$

$$\left. - \rho \frac{\partial}{\partial\theta} a_r^o(\theta,\zeta) - \frac{\partial}{\partial\theta} b_r^o(\theta,\zeta) \right) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \left\{ \int^{(2)} \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho - \rho \frac{\partial}{\partial\theta} a_r^o(\theta,\zeta) - (\lambda+\mu) \left[\frac{R}{\ell\mu} \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(- \int^{(2)} \frac{\partial^2 \bar{f}_z}{\partial\theta\partial\zeta} + \rho \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\zeta} a_z^o(\theta,\zeta) \right) - \frac{1}{\mu} \int^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \frac{1}{\mu} \rho \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} a_\theta^o(\theta,\zeta) \right] + \frac{\partial}{\partial\theta} a_r^1(\theta,\zeta) \right\}$$

$$+ \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \left(-\rho \int^{(2)} \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \rho \frac{\partial}{\partial\theta} a_r^o(\theta,\zeta) \right) - \frac{(\lambda+\mu)}{\mu} \frac{R}{\ell} \left(\int^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\theta} \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho \right.$$

$$\left. + \rho \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\zeta} a_z^o(\theta,\zeta) + \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\theta} b_z^o(\theta,\zeta) \right)$$

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{u}_z^2}{\partial\rho^2} = - \frac{(\lambda+2\mu)}{\mu} \frac{R^2}{\ell^2} \left(- \int^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta) d\rho + \rho \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} a_z^o(\theta,\zeta) + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} b_z^o(\theta,\zeta) \right)$$

IV.6.9. $$- \int^{(2)} \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta) d\rho + \rho\, a_z^o(\theta,\zeta) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \frac{R}{\ell} \left(\int^{(2)} \frac{\partial}{\partial\zeta} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \rho \frac{\partial}{\partial\zeta} a_r^o(\theta,\zeta) \right)$$

$$- a_z^1(\theta,\zeta) - \rho \int^{(2)} \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \rho\, a_z^o(\theta,\zeta) + \int^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \bar{f}_z(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho$$

$$- \rho \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} a_z^o(\theta,\zeta) - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} b_z^o(\theta,\zeta) - \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)} \frac{R}{\ell} \left\{ \int^{(2)} \frac{\partial}{\partial\zeta} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta) d\rho - \rho \frac{\partial}{\partial\zeta} a_r^o(\theta,\zeta) \right.$$

$$-(\lambda+\mu) \left[\frac{R}{\ell\mu} \left(- \int^{(2)} \frac{\partial^2 \bar{f}_z}{\partial\zeta^2} (\rho,\theta,\zeta) d\rho + \rho \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} a_z^o(\theta,\zeta) \right) - \frac{1}{\mu} \int^{(2)} \frac{\partial^2 \bar{f}_\theta}{\partial\theta\partial\zeta} (\rho,\theta,\zeta) d\rho \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mu} \rho \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\zeta} a^o(\theta,\zeta) \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \zeta} a_r^1(\theta,\zeta) - \int^{(2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{f}_r(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \rho \frac{\partial}{\partial \zeta} a_r^o(\theta,\zeta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} b_r^o(\theta,\zeta) + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}$$

$$(- \int^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\zeta} \bar{f}_\theta(\rho,\theta,\zeta)\, d\rho + \rho \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\zeta} a_\theta^o(\theta,\zeta) + \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\zeta} b_\theta^o(\theta,\zeta) \;)$$

Pour intégrer le système différentiel

$$\Delta_n \quad \begin{cases} (A_o, B_o, C_o) = - (\bar{f}_r, \bar{f}_\theta, \bar{f}_z) \\ (A_n, B_n, C_n) = (0,0,0) \ (n \in N^*) \end{cases}$$

(que l'on vient d'intégrer pour les valeurs n = 0, n = 1 et expliciter pour la valeur n = 2), il faudra déterminer les "constantes d'intégration" $b_i^n(\theta,\zeta)$ et $a_i^n(\theta,\zeta)$ à l'aide des conditions aux frontières latérales de la coque (C) ($\rho = + 1$ et $\rho = - 1$).

Pour cela on rappelle l'expression des σ_{ij} obtenues à l'aide des relations contraintes-déformations (c.f. Chapitre I.IV.2.2).

$$\sigma_{rr} = \lambda \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + 2\,\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + 2\,\mu \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right)\right]$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + 2\,\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]$$

$$\sigma_{\theta z} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right]$$

Nous allons exprimer les conditions à la frontière dans les coordonnées adimensionnelle $\rho = \frac{r-R}{h}$, θ , $\zeta = \frac{z}{\ell}$ sachant que :

$$\sigma_{rr}(R+h,\theta,z) = p_r^+ \qquad \sigma_{r\theta}(R+h,\theta,z) = p_\theta^+ \qquad \sigma_{rz}(R+h,\theta,z) = p_z^+$$

$$\sigma_{rr}(R-h,\theta,z) = p_r^- \qquad \sigma_{r\theta}(R-h,\theta,z) = p_\theta^- \qquad \sigma_{rz}(R-h,\theta,z) = p_z^-$$

Nous obtenons ainsi les conditions aux frontières latérales de la coque (C) correspondant à $\rho = +1$ et $\rho = -1$:

IV.6.10

$$(\lambda+2\mu)\,\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \rho}\,(1,\theta,\zeta) + \lambda \left[\frac{1}{1+\varepsilon}\left(\bar{u}_r + \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta}\right)_{(1,\theta,\zeta)} + \frac{R}{\ell}\,\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \zeta}\,(1,\theta,\zeta)\right] = p_r^+\,\frac{R}{U}$$

$$(\lambda+2\mu)\,\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \rho}\,(-1,\theta,\zeta) + \lambda \left[\frac{1}{1-\varepsilon}\left(\bar{u}_r + \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta}\,(-1,\theta,\zeta) + \frac{R}{\ell}\,\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \zeta}\,(-1,\theta,\zeta)\right.\right. = p_r^-\,\frac{R}{U}$$

IV.6.11

$$\mu \left[\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \rho}\,(1,\theta,\zeta) + \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} - \bar{u}_\theta\right)_{(1,\theta,\zeta)}\right] = p_\theta^+\,\frac{R}{U}$$

$$\mu \left[\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \rho}\,(-1,\theta,\zeta) + \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} - \bar{u}_\theta\right)_{(-1,\theta,\zeta)}\right] = p_\theta^-\,\frac{R}{U}$$

$$\text{IV.6.12.}\quad \mu\left[\frac{R}{\ell}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\zeta}(1,\theta,\zeta)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial\rho}(1,\theta,\zeta)\right]=p_z^+\frac{R}{U}$$

$$\mu\left[\frac{R}{\ell}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\zeta}(-1,\theta,\zeta)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial\rho}(-1,\theta,\zeta)\right]=p_z^-\frac{R}{U}$$

On attire l'attention du lecteur sur le fait que lors du passage des variables dimensionnelles r,θ,z aux variables adimensionnelles ρ,θ,ζ on a implicitement pour une fonction quelconque $\phi(\rho,\theta,\varepsilon,\zeta)$ la relation :

$$\text{IV.6.13.}\quad \boxed{\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varepsilon,\zeta)=\varepsilon\,\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}(\rho,\theta,\varepsilon,\zeta)}$$

On rappelle d'autre part que $\frac{U}{R^2}=K\,\varepsilon^{1+1/\alpha}$ et que les fonctions $\bar{u}_i(\rho,\theta,\varepsilon,\zeta)$ (pour $i=r,\theta,z$) satisfaisant à la condition IV.6.13 leurs développements asymptotiques par rapport à ε s'écrivent :

$$\bar{u}_i(\rho,\theta,\zeta,\varepsilon)=(\rho\varepsilon)^{1-1/\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\bar{u}_i^n(\theta,\zeta)\,\rho^n\,\varepsilon^n \text{ ou encore}$$

$$\text{IV.6.14.}\quad \boxed{\bar{u}_i(\rho,\theta,\zeta,\varepsilon)=\varepsilon^{1-1/\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\bar{u}_i^n(\rho,\theta,\zeta)\,\varepsilon^n \text{ avec } \bar{u}_i^n(\rho,\theta,\zeta)=\bar{u}_i^n(\theta,\zeta)\rho^{n+1-1/\alpha}}$$

En multipliant les membres respectifs de IV.6 (10.11.12) par $\frac{U}{R}=R\,k\,\varepsilon^{1+\frac{1}{\alpha}}$ et en remplaçant $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varepsilon,\zeta)$ par $\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial\varepsilon}$ on obtient :

$$\text{IV.6.10'}:\ \pm(\lambda+2\mu)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1-\frac{1}{\alpha})\bar{u}_r^n(\pm 1,\theta,\zeta)\,\varepsilon^{n+1}+\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p+q=n}(-1)^p\Big\{\bar{u}_r^q(\pm 1,\theta,\zeta)$$

$$+\frac{\partial\bar{u}_\theta^q}{\partial\theta}(\pm 1,\theta,\zeta)\Big\}\,\varepsilon^{n+2}\Big)+\frac{\lambda R}{\ell}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial\bar{u}_z^n}{\partial\zeta}(\pm 1,\theta,\zeta)\,\varepsilon^{n+2}=\frac{1}{KR}\,p_r^\pm$$

$$\text{IV.6.11'}:\ \mu\Big[\pm\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1-\frac{1}{\alpha})\bar{u}_\theta^n(\pm 1,\theta,\zeta)\varepsilon^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p+q=n}(-1)^p\Big\{\frac{\partial\bar{u}_r^q}{\partial\theta}(\pm 1,\theta,\zeta)-\bar{u}_\theta^q\Big)(\pm 1,\theta,\zeta)\Big\}$$

$$\varepsilon^{n+2}=\frac{1}{KR}\,p_\theta^\pm$$

$$\text{IV.6.12'}: \quad \mu\left[\frac{R}{\ell}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial \bar{u}_r^n}{\partial\zeta}(\pm 1,\theta,\zeta)\,\varepsilon^{n+2} \pm \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1-\frac{1}{\alpha})\,\bar{u}_z^n(\pm 1,\theta,\zeta)\,\varepsilon^{n+1}\right] = \frac{1}{KR}\,p_z^{\pm}$$

Remarque : Les termes de plus bas degré en ε dans les membres de gauche des relations IV.6.(10'.11'.12') étant d'ordre 1 on va prendre un développement asymptotique de $p_i^{\pm}$ en puissance de ε de la forme

$$\boxed{p_i^{\pm}(\theta,\zeta) = KR \sum_{n=0}^{+\infty} \overset{n\pm}{p_i}(\theta,\zeta)\;\varepsilon^{n+1}}$$

D'autre part dans l'hypothèse de la nullité des f_i, le système différentiel de Navier à l'ordre zéro vous avez conduit à :

$$\boxed{\begin{aligned} N^\circ : (\lambda + 2\mu)\,\bar{u}_r^o &= \rho\,\phi_r^o(\theta,\zeta) + \psi_r^o(\theta,\zeta) \\ \mu\,\bar{u}_\theta^o &= \rho\,\phi_\theta^o(\theta,\zeta) + \psi_\theta^o(\theta,\zeta) \\ \mu\,\bar{u}_z^o &= \rho\,\phi_z^o(\theta,\zeta) + \psi_z^o(\theta,\zeta) \end{aligned}}$$

Par identification des termes en ε dans les équations IV.6(10'-11'-12') on trouve :

IV_ε. 6.10' : $\pm\,(\lambda + 2\mu)\,(1 - \frac{1}{\alpha})\,\bar{u}_r^o(\pm\,1,\theta,\zeta) = \overset{o\pm}{p_r}(\theta,\zeta)$

IV_ε. 6.11' $\pm\,\mu\,(1 - \frac{1}{\alpha})\,\bar{u}_\theta^o(\pm\,1,\theta,\zeta) = \overset{o\pm}{p_\theta}(\theta,\zeta)$

IV_ε. 6.12' $\pm\,\mu\,(1 - \frac{1}{\alpha})\,\bar{u}_z^o(\pm\,1,\theta,\zeta) = \overset{o\pm}{p_z}(\theta,\zeta)$

Soit encore : IV_ε 6.(10'-11'-12') $(1-\frac{1}{\alpha})(\phi_i^o(\theta,\zeta) + \psi_i^o(\theta,\zeta)) = \overset{o+}{p_i}(\theta,\zeta)$

$$(1-\frac{1}{\alpha})(\phi_i^o(\theta,\zeta) - \psi_i\;(\theta,\zeta)) = \overset{o-}{p_i}(\theta,\zeta)$$

Si $\alpha \neq 1$ (ce qui a été supposé antérieurement dans la définition de α) on a les formules :

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_i^o(\theta,\zeta) &= \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \left[\overset{o+}{p_i}(\theta,\zeta) + \overset{o-}{p_i}(\theta,\zeta)\right] \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = r,\theta,z \\ \psi_i^o(\theta,\zeta) &= \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \left[\overset{o+}{p_i}(\theta,\zeta) - \overset{o-}{p_i}(\theta,\zeta)\right] \end{aligned}}$$

Ainsi les $\bar{u}_i^o(\rho,\theta,\zeta)$ sont déterminés.

Par identification des termes en ε^2 dans les équations IV.6(10'-11'-12') on trouve

IV.$_{\varepsilon^2}$.6.10'

$$\pm(\lambda+2\mu)(2-\frac{1}{\alpha})\ \bar{u}_r^1(\pm 1,\theta,\zeta) + \lambda\left[\bar{u}_r^o(\pm 1,\theta,\zeta) + \frac{\partial \bar{u}_\theta^o}{\partial\theta}\ (\pm 1,\theta,\zeta)\right] + \frac{\lambda R}{\ell}\frac{\partial \bar{u}_z^o}{\partial\zeta}\ (\pm 1,\theta,\zeta) = p_r^{1\pm}$$

IV.$_{\varepsilon^2}$.6.11'

$$\mu\left[\pm(2-\frac{1}{\alpha})\bar{u}_\theta^1(\pm 1,\theta,\zeta) + \frac{\partial \bar{u}_r^o}{\partial\theta}\ (+1,\theta,\zeta) - \bar{u}_\theta^o(\pm 1,\theta,\zeta)\right] = p_\theta^{1\pm}$$

IV$_{\varepsilon^2}$.6.12'

$$\mu\left[\frac{R}{\ell}\frac{\partial \bar{u}_r^o}{\partial\zeta}\ (\pm 1,\theta,\zeta) \pm (2-\frac{1}{\alpha})\ \bar{u}_z^1(\pm 1,\theta,\zeta)\right] = p_z^{1\pm}$$

D'autre part le système différentiel de Navier à l'ordre 1 (toujours dans l'hypothèse de nullité des f_i nous a conduit à :

$$N^1 : (\lambda+2\mu)\bar{u}_r^1 = -\frac{\rho^2}{2}\left[\phi_r^o(\theta,\zeta) + \frac{\lambda+\mu}{\mu}(\frac{R}{\ell}\frac{\partial\phi_z^o}{\partial\zeta}\ (\theta,\zeta) + \frac{\partial\psi_\theta^o}{\partial\theta}\ (\theta,\zeta) + \rho\,\phi_r^1(\theta,\zeta) + \psi_r^1(\theta,\zeta)\right.$$

$$\mu\ \bar{u}_\theta^1 = -\frac{\rho^2}{2}\left[\phi_\theta^o(\theta,\zeta) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\phi_r^o}{\partial\theta}\ (\theta,\zeta)\right] + \rho\phi_\theta^1(\theta,\zeta) + \psi_\theta^1(\theta,\zeta)$$

$$\mu\ \bar{u}_z^1 = -\frac{\rho^2}{2}\left[\phi_z^o(\theta,\zeta) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\ \frac{R}{\ell}\frac{\partial}{\partial\zeta}\ \phi_r^o(\theta,\zeta)\right] + \rho\ \phi_z^1(\theta,\zeta) + \psi_z^1(\theta,\zeta)$$

Les coefficients des termes en ρ^2 dans les équations N^1 étant des quantités connues par les calculs précédents, nous pouvons encore écrire en les désignant respectivement par $2H_r^o$, $2H_\theta^o$, $2H_z^o$

$$N^1 : (\lambda + 2\mu)\ \bar{u}_r^{-1} = -\rho^2\ H_r^o(\theta,\zeta) + \rho\,\phi_r^1\ (\theta,\zeta) + \psi_r^1(\theta,\zeta)$$

$$\mu\ \bar{u}_\theta^{-1} = -\rho^2\ H_\theta^o(\theta,\zeta) + \rho\,\phi_\theta^1\ (\theta,\zeta) + \psi_\theta^1(\theta,\zeta)$$

$$\mu\ \bar{u}_z^{-1} = -\rho^2\ H_z^o(\theta,\zeta) + \rho\,\phi_z^1\ (\theta,\zeta) + \psi_z^1(\theta,\zeta)$$

Soit encore IV $_{\varepsilon^2}$.6(10'-11'-12')

IV $_{\varepsilon^2}$.6.10'
$$\pm(2-\frac{1}{\alpha})\left[-H_r^o(\theta,\zeta)\pm\phi_r^1(\theta,\zeta)+\psi_r^1(\theta,\zeta)\right]+\lambda\left[\bar{u}_r^o(\pm1,\theta,\zeta)+\frac{\partial\bar{u}_\theta^o}{\partial\theta}(\pm1,\theta,\zeta)\right]$$
$$+\frac{\lambda R}{\ell}\frac{\partial\bar{u}_z^o}{\partial\zeta}(\pm1,\theta,\zeta)=\overset{1\pm}{p_r}$$

IV $_{\varepsilon^2}$.6.11'
$$\pm(2-\frac{1}{\alpha})\left[-H^o(\theta,\zeta)\pm\phi^1(\theta,\zeta)+\psi^1(\theta,\zeta)\right]+$$
$$\mu\left[\frac{\partial\bar{u}_r^o}{\partial\theta}(\pm1,\theta,\zeta)-\bar{u}_\theta^o(\pm1,\theta,\zeta)\right]=\overset{1\pm}{p_\theta}$$

IV $_{\varepsilon^2}$.6.12'
$$\mu\frac{R}{\ell}\frac{\partial\bar{u}_r^o}{\partial\zeta}(\pm,\theta,\zeta)\pm(2-\frac{1}{\alpha})\left[-H_z^o(\theta,\zeta)\pm\phi_z^1(\theta,\zeta)+\psi_z^1(\theta,\zeta)\right]=\overset{1\pm}{p_z}$$

Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$ on peut déduire des équations IV $_{\varepsilon^2}$.6(10'-11'-12') ci-dessus les expressions de $\phi_i^1(\theta,\zeta)$ et $\psi_i^1(\theta,\zeta)$ en fonction des quantités connues $\overset{o\pm}{p_i}$, $\overset{1\pm}{p_i}$ et α . Ainsi les $\bar{u}_i^{-1}(\rho,\theta,\zeta)$ sont déterminés. Et ce pour la détermination de $\bar{u}_i^{2}(\rho,\theta,\zeta)$... De proche en proche on détermine par itération du procédé les $\bar{u}_i^{n}(\rho,\theta,\zeta)$.

REMARQUE

Il est évident que ce procédé tombe en défaut lorsque α est l'inverse d'un entier naturel non nul, (ce que l'on peut encore écrire par abus de notation $\alpha \in \frac{1}{N^*}$). En effet on remarquera que dès que $\alpha = \frac{1}{n+1}$, on peut déterminer $\bar{u}_i^{p}(\rho,\theta,\zeta)$ pour $p \in \{0,\dots n-1\}$ par le précédent procédé, mais pas $\bar{u}_i^{n}$

Etude d'un cas particulier où $\alpha \in \frac{1}{N^*}$ $(\alpha = \frac{1}{2})$

On rappelle que la condition IV.6.13 permet de rechercher ici les $\bar{u}_i^{n}$ (ρ,θ,ζ) sous la forme : $\boxed{\bar{u}_i^{n}(\rho,\theta,\zeta) = \rho^{n-1}\,\tilde{u}_i^{n}(\theta,\zeta)}$ $\qquad (n \in N)$

D'autre part, dans l'hypothèse de la nullité des f_i, le système différentiel de Navier à l'ordre zéro donne :

$$(\lambda+2\mu)\,\frac{\partial^2 \bar{u}_r^{o}}{\partial\rho^2} = 0$$

$$\mu\,\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta^{o}}{\partial\rho^2} = 0 \qquad \text{Donc nécessairement} \quad \bar{u}_i^{o}(\rho,\theta,\zeta) = 0$$

$$\mu\,\frac{\partial^2 \bar{u}_z^{o}}{\partial\rho^2} = 0 \qquad \text{Ainsi les } \overset{o}{p}{}_i^{\pm} \text{ doivent être nulles}$$

$$\boxed{\overset{o}{p}{}_i^{\pm} = 0}$$

La condition IV.6.14 nous indique que $\bar{u}_i^{1}$ est indépendant de ρ, en particulier $\bar{u}_i^{1}(\rho,\theta,\zeta) = \bar{u}_i^{1}(\pm 1,\theta,\zeta) = \bar{u}_i^{1}(\theta,\zeta)$; on peut donc utiliser les conditions où la frontière ($\zeta = \pm 1$) pour la détermination des u_i^{1}.

Les équations IV_{ε^2}-6-(10'-11'-12') imposent la nullité des $p_i^{1\pm}$. $\boxed{p_i^{1\pm} = 0}$

Le système différentiel de Navier à l'ordre un se trouve réduit alors à une identité.

Si on effectue l'identification des termes en ε^3 dans les équations IV.6(10'-11'-12) on obtient

$$IV_{\varepsilon^3}.6.10' \quad \pm(\lambda+2\mu)\,\bar{u}_r^{2}(\pm 1,\theta,\zeta) + \lambda\left[\bar{u}_r^{1}(\theta,\zeta) + \frac{\partial \bar{u}_\theta^{1}}{\partial\theta}(\theta,\zeta) + \frac{R}{\ell}\frac{\partial \bar{u}_z^{1}}{\partial\zeta}(\theta,\zeta)\right] = p_r^{2\pm}$$

$$IV_{\varepsilon^3}6.11' \quad \pm\mu\,\bar{u}_\theta^{2}(\pm 1,\theta,\zeta) + \mu\left[\frac{\partial \bar{u}_r^{1}}{\partial\theta}(\theta,\zeta) - u_\theta^{1}(\theta,\zeta)\right] = p_\theta^{2\pm}$$

$$IV_{\varepsilon^3}6.12' \quad \mu\frac{R}{\ell}\frac{\partial \bar{u}_r^{1}}{\partial\zeta}(\theta,\zeta) \pm \mu\,\bar{u}_z^{2}(\pm 1,\theta,\zeta) = p_z^{2\pm}$$

Or $\bar{u}_i^{2}(\pm 1,\theta,\zeta) = \pm\,\tilde{u}_i^{2}(\theta,\zeta)$ - Nécessairement on doit donc avoir

$\boxed{p_i^{2+} = p_i^{2-}}$ et on a d'ailleurs de façon générale $\boxed{p_i^{n+} = (-1)^n\, p_i^{n-}}$

Le système différentiel de Navier d'ordre 2 est dans les hypothèses présentes identiquement vérifié. Il faut donc considérer celui d'ordre 3 qui s'écrit :

$$N_3 \quad \begin{aligned}&(\lambda+2\mu)\left[2\,\tilde{u}_r^{3} + \tilde{u}_r^{2} - \left(\tilde{u}_r^{1} + \frac{\partial \tilde{u}_\theta^{1}}{\partial\theta}\right)\right] + \mu\left[\frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}_r^{1}}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{u}_\theta^{1} - \frac{\partial \tilde{u}_r^{1}}{\partial\theta}\right)\right]\\ &+ (\lambda+\mu)\left[\frac{R}{\ell}\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{u}_z^{2} + \frac{\partial}{\partial\theta}\tilde{u}_\theta^{2}\right] = 0\end{aligned}$$

$$(\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{u}_r^1 + \frac{\partial \tilde{u}_\theta^1}{\partial\theta}\right)\right] + \mu\left[\frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2\tilde{u}_\theta^1}{\partial\zeta^2} + 2\,\tilde{u}_\theta^3 + \tilde{u}_\theta^2 - \left(\tilde{u}_\theta^1 - \frac{\partial\tilde{u}_r^1}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\tilde{u}_r^2 + \frac{R}{\ell}\frac{\partial^2 \tilde{u}_z^1}{\partial\zeta\partial\theta}\right] = 0 \,.$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{R^2}{\ell^2}\frac{\partial^2\tilde{u}_z^1}{\partial\zeta^2} + \mu\left[2\,\tilde{u}_z^3 + \frac{\partial^2\tilde{u}_z^1}{\partial\theta^2} + \tilde{u}_z^2\right] + (\lambda+\mu)\frac{R}{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{u}_r^2 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\tilde{u}_r^1 + \frac{\partial\tilde{u}_\theta^1}{\partial\theta}\right)\right] = 0$$

A présent effectuons l'identification des termes en ε^4 dans les équations IV.6(10'-11'-12').

$IV_{\varepsilon^4}.6(10')$: $$(\lambda+2\mu)\,2\,\tilde{u}_r^3 + \lambda\left[\tilde{u}_r^2 + \frac{\partial\tilde{u}_\theta^2}{\partial\theta}\right] - \lambda\left[\tilde{u}_r^1 + \frac{\partial\tilde{u}_\theta^1}{\partial\theta}\right] + \frac{\lambda R}{\ell}\frac{\partial\tilde{u}_z^2}{\partial\zeta} = \overset{3+}{p_r}$$

$IV_{\varepsilon^4}.6(11')$: $$\mu\left[2\,\tilde{u}_\theta^3 + \frac{\partial}{\partial\theta}\tilde{u}_r^2 - \tilde{u}_\theta^2 + \tilde{u}_\theta^1 - \frac{\partial\tilde{u}_r^1}{\partial\theta}\right] = \overset{3+}{p_\theta}$$

$IV_{\varepsilon^4}.6(12')$ $$\mu\left[\frac{R}{\ell}\frac{\partial\tilde{u}_z^2}{\partial\zeta} + 2\,\tilde{u}_z^3\right] = \overset{3+}{p_z}$$

Or l'identification des termes en ε^3 dans les équations IV.6(10'-11'-12') nous donnait :

$$\mathrm{IV}_{\varepsilon^3}6.10' \qquad (\lambda+2\mu)\,\tilde{u}_r^2 + \lambda\left[\tilde{u}_r^1 + \frac{\partial \tilde{u}_\theta^1}{\partial\theta}\right] + \lambda\,\frac{R}{\ell}\,\frac{\partial \tilde{u}_z^1}{\partial\zeta} = \overset{\textcircled{2}+}{p_r}$$

$$\mathrm{IV}_{\varepsilon^3}.6.11' \qquad \mu\,\tilde{u}_\theta^2 - \mu\left[\tilde{u}_\theta^1 - \frac{\partial \tilde{u}_r^1}{\partial\theta}\right] = \overset{\textcircled{2}+}{p_\theta}$$

$$\mathrm{IV}_{\varepsilon^3}.6.12' \qquad \mu\,\frac{R}{\ell}\,\frac{\partial \tilde{u}_r^1}{\partial\zeta} + \mu\,\tilde{u}_z^2 = \overset{\textcircled{2}+}{p_z}$$

D'où par élimination de $\tilde{u}_i^3$ entre N_3 et $\mathrm{IV}_{\varepsilon^4}.6.(10'-11'-12')$ puis ensuite par élimination de $\tilde{u}_i^2$ à l'aide de $\mathrm{IV}_{\varepsilon^3}-6(10'-11'-12')$ on obtient un système différentiel en $\tilde{u}_i^1\,(\theta,\zeta)$ que l'on notera Δ^1

$$-2\mu\,\tilde{u}_r^2 + 2\mu\left(\tilde{u}_r^1 + \frac{\partial \tilde{u}_\theta^1}{\partial\theta}\right) + \mu\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{u}_\theta^1 - \frac{\partial \tilde{u}_r^1}{\partial\theta}\right) - \frac{R^2}{\ell^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{u}_r^1}{\partial\zeta^2}\right] - \frac{\mu R}{\ell}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\,\tilde{u}_z^2 - \mu\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\tilde{u}_\theta^2 = \overset{\textcircled{3}+}{p_r}$$

$$-2\mu\,\tilde{u}_\theta^2 + 2\mu\left(\tilde{u}_\theta^1 - \frac{\partial \tilde{u}_r^1}{\partial\theta}\right) - (\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{u}_r^1 + \frac{\partial \tilde{u}_\theta^1}{\partial\theta}\right) - \mu\,\frac{R^2}{\ell^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta^1}{\partial\zeta^2} - \frac{\lambda\partial}{\partial\theta}\,\tilde{u}_r^2 - (\lambda+\mu)\frac{R}{\ell}\,\frac{\partial^2 \tilde{u}_z^1}{\partial\zeta\partial\theta} = \overset{\textcircled{3}+}{p_\theta}$$

$$-(\lambda+2\mu)\,\frac{R^2}{\ell^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{u}_z^1}{\partial\zeta^2} - \mu\,\frac{\partial^2 \tilde{u}_z^1}{\partial\theta^2} - \mu\,\tilde{u}_z^2 - \frac{\lambda R}{\ell}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\,\tilde{u}_r^2 - (\lambda+\mu)\,\frac{R}{\ell}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\tilde{u}_r^1 + \frac{\partial \tilde{u}_\theta^1}{\partial\theta}\right) = \overset{\textcircled{3}+}{p_z}$$

Soit en utilisant les expressions des $\tilde{u}^2_i(\theta,\zeta)$ données par IV_{ε^3}-6-(10'-11'-12') le système Δ^1-1-2-3.

$$1 \quad \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left[\tilde{u}^1_r + \frac{\partial \tilde{u}^1_\theta}{\partial\theta}\right] + \frac{2\lambda\mu \quad R}{(\lambda+2\mu)\ell}\,\frac{\partial \tilde{u}^1_z}{\partial\zeta} - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\,\overset{\textcircled{2}+}{p}_r - \frac{R}{\ell}\frac{\partial}{\partial\zeta}\overset{\textcircled{2}+}{p}_z - \frac{\partial}{\partial\theta}\overset{\textcircled{2}+}{p}_\theta = \overset{\textcircled{3}+}{p}_r$$

$$\Delta_1 \quad 2 \quad \frac{-4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{u}^1_r + \frac{\partial \tilde{u}^1_\theta}{\partial\theta}\right] - \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\,\frac{R}{\ell}\,\frac{\partial^2 \tilde{u}^1_z}{\partial\zeta\partial\theta} - \mu\,\frac{R^2}{\ell^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{u}^1_\theta}{\partial\zeta^2} - 2\,\overset{\textcircled{2}+}{p}_\theta - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial \overset{\textcircled{2}+}{p}_r}{\partial\theta} = \overset{\textcircled{3}+}{p}_\theta$$

$$3 \quad -\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\,\mu}\,\frac{R}{\ell}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\tilde{u}^1_r + \frac{\partial \tilde{u}^1_\theta}{\partial\theta}\right) - \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial^2 \tilde{u}^1_z}{\partial\zeta^2} - \mu\,\frac{\partial^2 \tilde{u}^1_z}{\partial\theta^2} + \mu\,\frac{R}{\ell}\,\frac{\partial \tilde{u}^1_r}{\partial\zeta} - \overset{\textcircled{2}+}{p}_z$$
$$- \frac{\lambda R}{\ell(\lambda+2\mu)}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\overset{\textcircled{2}+}{p}_r = \overset{\textcircled{3}+}{p}_r$$

Nous allons maintenant utiliser la 2π - périodicité des fonctions $\tilde{u}^1_i(\theta,\zeta)$ et $\overset{\textcircled{n}+}{p}_i(\theta,\zeta)$ et considérer leur développement en série de Fourier par rapport à θ :

$$\tilde{u}^1_i(\theta,\zeta) = \frac{U^i_o}{2}(\zeta) + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[U^i_n(\zeta)\cos n\,\theta + V^i_n(\zeta)\sin n\,\theta\right] \quad \forall\,\theta \in [0,2\pi]$$

$$\overset{\textcircled{n}+}{p}_i\,(\theta,\zeta) = \frac{\overset{\textcircled{n}}{P}{}^i_o}{2}(\zeta) + \sum_{q=0}^{+\infty}\left[P^i_q(\zeta)\cos n\,\theta + Q^i_q(\zeta)\sin q\,\theta\right]$$

le système Δ^1 se ramène à un système différentiel linéaire du second ordre à coefficient constant qui s'écrit :

$$\alpha \left[U_n^r(\zeta) + n\, V_n^\theta(\zeta)\right] + \beta\, U_n^{z'}(\zeta) = A_n^r(\zeta)$$

$$\alpha \left[V_n^r(\zeta) - n\, U_n^\theta(\zeta)\right] + \beta\, V_n^{z'}(\zeta) = B_n^r(\zeta)$$

$$-\alpha n \left[V_n^r(\zeta) - r\, U_n^\theta(z)\right] - \gamma n\, V_n^{z'}(\zeta) - \delta\, U_r^{\theta''}(\zeta) = A_n^\theta(\zeta)$$

$$+\alpha n \left[U_n^r(\zeta) + n\, V_n^\theta(\zeta)\right] + \gamma\, n\, U_n^{z'}(\zeta) - \delta\, V_n^{\theta''}(\zeta) = B_n^\theta(\zeta)$$

$$-\gamma \left[U_n^{r'}(\zeta) + n\, V_n^{\theta'}(\zeta)\right] - \alpha\, U_n^{z''}(\zeta) - n^2\, \mu\, U_n^z(\zeta) + \omega\, U_n^{r'}(\zeta) = A_n^z(\zeta)$$

$$-\gamma \left[V_n^{r'}(z) - n\, U_n^{\theta'}(\zeta)\right] - \alpha\, V_n^{z''}(\zeta) - n^2\, \mu\, V_n^z(\zeta) + \omega\, V_n^r(\zeta) = B_n^z(\zeta)$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \omega)$ étant six constantes fonctions de λ et μ, et les seconds membres des six équations du système différentiel étant **a priori** connus.

$\alpha = \dfrac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}$	$\beta = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\,\dfrac{R}{\ell}$	$\gamma = \dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\,\dfrac{R}{\ell}$
$\delta = +\mu\,\dfrac{R^2}{\ell^2}$	μ	$\omega = \mu\,\dfrac{R}{\ell}$

Nous recherchons, pour le système homogène, des solutions de la forme $U_n^i(\zeta) = u_n^i\, e^{s\zeta}$; $V_n^i(\zeta) = v_n^i\, e^{s\zeta}$ et écrivons l'annulation du déterminant caractéristique :

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \beta s & 0 & \alpha n & 0 \\ 0 & -\alpha n & 0 & \alpha & 0 & \beta s \\ 0 & \alpha n^2-\delta s^2 & 0 & -\alpha n & 0 & -\gamma ns \\ \alpha n & 0 & \gamma ns & 0 & \alpha n^2-\delta s^2 & 0 \\ s(\omega-\gamma) & 0 & -\alpha s^2-n^2\mu & 0 & -n\gamma s & 0 \\ 0 & n\gamma s & 0 & s(\omega-\gamma) & 0 & -\alpha s^2-n^2\mu \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha s^2[n^2\gamma\omega + \delta(\alpha s^2+\mu n^2)] \begin{vmatrix} -n\alpha & \alpha & \beta s \\ \alpha n^2-\delta s^2 & -\alpha n & -\gamma ns \\ n\gamma s & s(\omega-\gamma) & -\alpha s^2-\mu n^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \beta s^2 [\delta s^2(\omega-\gamma) - n^2 \alpha \omega] \begin{vmatrix} -n\alpha & \alpha & \beta s \\ \alpha n^2-\delta s^2 & -\alpha n & -\gamma ns \\ n\gamma s & s(\omega-\gamma) & -\alpha s^2-\mu n^2 \end{vmatrix}$$

or $$\begin{vmatrix} -n\alpha & \alpha & \beta s \\ \alpha n^2-\delta s^2 & -\alpha n & -\gamma ns \\ n\gamma s & s(\omega-\gamma) & -\alpha s^2-\mu n^2 \end{vmatrix} = -s^2\{s^2[\delta(\beta(\omega-\gamma)+\alpha^2)]+\alpha\mu n^2\delta+\alpha\omega n^2(\gamma-\beta)\}$$

or $\gamma-\beta=\omega$ l'équation caractéristique s'écrit donc :

$$-s^4\{s^2\,\delta[\beta(\omega-\gamma)+\alpha^2] + \alpha n^2(\mu\delta+\omega^2)\}\{\delta\, s^2[\alpha^2+\beta(\omega-\gamma)] + \alpha\, n^2(\omega^2+\mu\delta)\}\}$$

ou finalement :

$$\boxed{-s^4 \left\{\delta \left[\beta(\omega-\gamma) + \alpha^2\right] s^2 + \underbrace{\alpha\, n^2(\mu\, \delta + \omega^2)}_{>0} \right\}^2}$$

$$\alpha^2 + \beta\ (\omega-\gamma) = \left[\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\right]^2 - \left[\frac{2\lambda\mu R}{(\lambda+2\mu)}\right]^2 = \frac{4\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}\ \left[4(\lambda+\mu)^2 - \lambda^2 \frac{R^2}{\ell^2}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{4\mu^2\lambda^2}{(\lambda+2\mu)^2}\ \left[\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda} + \frac{R}{\ell}\right]}_{>0}\left[\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda} - \frac{R}{\ell}\right]$$

Le coefficient de s^2 dans l'équation caractéristique ci-dessus a le signe de $\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda} - \frac{R}{\ell}$.

<u>1er cas</u> . Si $\frac{R}{\ell} > 2\ (1 + \frac{\mu}{\lambda})$ les solutions sont de la forme

$$e^{\pm S_1\zeta}(a\zeta+b)$$

<u>2ème cas</u> .. Si $\frac{R}{\ell} < 2(1 + \frac{\mu}{\lambda})$ les solutions sont de la forme $e^{\pm iS_1\zeta}(a\zeta+b)$

(ce dernier cas correspond plutôt à la réalité d'une coque cylindrique dont la longueur est "grande" par rapport au rayon moyen).

Ainsi les $U_n^i(\zeta)$ et $V_n^i(\zeta)$ solutions du système homogène associé à Δ_1 sont donc des combinaisons linéaires des quatre solutions linéairement indépendantes.

. $e^{s_1\zeta}$, $e^{-s_1\zeta}$, $\zeta e^{s_1\zeta}$, $\zeta e^{-s_1\zeta}$ pour le premier cas

.. $\cos s_1 \zeta$, $\sin s_1 \zeta$, $\zeta \cos s_1 \zeta$, $\zeta \sin s_1 \zeta$ pour le deuxième cas

solutions auxquelles il faut rajouter la solution générale correspondant à $s = 0$.

A savoir $(-nc', c, 0, nc, c', 0)$ c, c' constantes arbitraires.

Pour la détermination de la solution générale du système avec second membre on utiliserait la méthode de variation des constantes. Les calculs sont élémentaires et longs, mais ici nous intéresse simplement la possibilité démontrée de déterminer $\tilde{u}_i^1 (\theta,\zeta)$

Conclusion

Ce qui nous a frappé dans les méthodes de développement asymptotique utilisées en théorie des coques, c'est l'absence de toute référence à la linéarisation (par rapport au paramètre η) implicitement contenue dans la loi de comportement de l'élasticité linéaire homogène et isotrope. A notre connaissance, seul F. JOHN dans son article paru en 1965 dans les C.P.A.M. [1] a tenu compte du petit paramètre η , en plus du paramètre $\varepsilon = \frac{h}{R}$, mais cela dans un contexte différent.

Nous avons donc tenté de tenir compte de cette référence au paramètre η dans le cas des coques cylindriques de révolution. Notre but était de déterminer les termes du développement asymptotique et de les comparer à ceux obtenus dans les théories classiques : (c.f. par exemple NAGHDI [1], [2], GOL'DENVEIZER [1]; nous n'avons pu consulter le livre de RUTTEN [ ] (édition épuisée) et un livre de GOL'DENVEIZER dont nous venons d'apprendre l'existence).

Nous avions introduit α lorsque nous avions constaté que $\frac{U}{R} = O(\eta)$, soit en posant $\varepsilon = O(\eta^{\alpha})$; $\frac{U}{R} = O(\varepsilon^{1+\frac{1}{\alpha}}) = O(\eta^{\alpha+1})$. La théorie de l'élasticité linéaire classique utilisée au Chapitre II, faisant l'hypothèse $U = O(\eta^{k})$ avec $0 < K < 2$, impose à α la condition $0 < \alpha < 1$.

Dans la théorie classique, les auteurs que nous avons pu lire font a priori l'hypothèse $\frac{U}{R} = O(\varepsilon)$; ce qui dans notre étude correspondrait au cas " α tendant vers l'infini". En d'autres termes cela revient à considérer les petits paramètres ε et η comme indépendants. Ces auteurs obtiennent alors pour les déplacements "réels" des expressions de la forme :

$$u_i(\rho,\varepsilon,\theta,\zeta) = u_i\ (0,\theta,\zeta) + \rho\ \varepsilon\ u_i^1(\theta,\zeta) + \rho^2\ \varepsilon^2\ u_i^2(\theta,\zeta) + \ldots.$$

où les u_i^n $(i = n,\theta,z)$ sont déterminés par les déplacements des points de la surface moyenne, i.e. des $u_i(0,\theta,\zeta)$.

Mis à part le cas $\alpha = \frac{1}{p}$ $(p \in N^*,\ p > 1)$ qui, nous l'avons vu, ne pouvait se présenter que pour des pressions latérales très particulières : (par exemple dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$, ces conditions s'écrivent $p_i^{\pm} = \sum_{n=2}^{\infty} \overset{(n)}{p_i}\ \varepsilon^{n+1}$, $\overset{(n)}{p_i}{}^{+} = (-1)^n\ \overset{(n)}{p_i}$ et d'autres relations entre les $\overset{(n)}{p_i}{}^{\pm}$ et leurs dérivées par rapport à θ et ζ) on obtient dans notre cas général, pour les déplacements réels :

$$(\lambda+2\mu)\ u_r(\rho,\varepsilon,\theta,\zeta) = KR^2\ \varepsilon^2\ \left[\frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \left\{\rho\left[\overset{\circ}{p}{}_i^{+}(\theta,\zeta) + \overset{\circ}{p}{}_i^{-}(\theta,\zeta)\right] + \overset{\circ}{p}{}_i^{+}(\theta,\zeta) - \overset{\circ}{p}{}_i^{-}(\theta,\zeta)\right\}\right.$$

$$\left. + \varepsilon\left[-\rho^2\ H_r^{\circ}(\theta,\zeta) + \rho\ \phi_r^1(\theta,\zeta) + \psi_r^1(\theta,\zeta)\right] + \varepsilon^2\left[\ldots\right] + \ldots.\right]$$

et des expressions analogues pour $\mu\ u_\theta$ et $\mu\ u_z$ (en rappelant que le coefficient de ε^n dans [ ] est un polynôme de degré $(n+1)$ en ρ à coefficients ne dépendant que de θ et ζ .

Les résultats ainsi obtenus apparaissent, sauf erreur de notre part, différents de ceux obtenus habituellement, il faudrait donc peut-être répendre la théorie classique en supposant $\frac{U}{R} = O(\varepsilon^2)$, ce que nous envisageons de traiter ultérieurement.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, nous avons commencé à exposer les problèmes de la Mécanique non linéaire des solides déformables et leur formulation variationnelle. Dans la seconde partie, nous considérons exclusivement des coques cylindriques de révolution, pour lesquelles nous avons établi les équations d'équilibre "des résultantes et des moments" à l'aide de procédés techniques différents. Nous nous sommes attachés à démontrer de façon extrêmement détaillée l'équivalence logique des divers systèmes d'équations ainsi obtenus : (c.f. : Remarques II 2 , II 4). Nous avons évité d'écrire l'équilibre d'un "élément infinitésimal de coque", écriture correcte en substance, mais à laquelle personnellement, nous préférons une formulation inspirée de celle exposée dans GERMAIN ou TRUESDELL NOLL.

Ensuite, utilisant la loi de comportement de l'élasticité linéaire homogène et isotrope, nous nous sommes interrogés sur les relations entre les approximations usuellement utilisées en théorie des coques (développement en puissance de $\varepsilon = \frac{h}{R}$ et $\frac{h}{\ell}$) et celle impliquée par la loi de comportement.

Nous avons établi que nécessairement :

- les paramètres $\varepsilon = \frac{h}{R}$ et $\eta = \operatorname{Sup}_{x \in \Omega} ||\mathrm{Grad}_x \vec{u}||$ étaient liés par la relation $\varepsilon = 0(\eta^{\alpha})$ $0 < \alpha < 1$.

- la norme du vecteur déplacement u(r, ,z) était majorée par U telle que $\frac{U}{R} = 0\ (\eta^{1+\alpha}) = 0\ (\varepsilon^{1+\frac{1}{\alpha}})$.

Pour tout α réel, $\alpha \in \ ]0,1[$, mais sous réserve que les formes volumiques soient uniformément bornées (comme par exemple la pesanteur)

on obtient pour le vecteur déplacement, un développement de la forme :
$\vec{u}\,(r,\theta,\ z,\varepsilon) = \varepsilon^2 \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n\ \vec{u}_n(r,\theta,z) \right]$ dont les termes sont des polynômes en ρ à coefficients dépendant de θ et z , ces coefficients sont déterminés par les charges exercées sur les faces latérales internes et externe de la coque.

Les résultats ci-dessus diffèrent de ceux des théories usuelles par la présence d'un 1er terme en ε^2, alors que classiquement on impose souvent $U = O(\varepsilon)$.

Une comparaison plus approfondie devrait être faite d'une part dans le cadre des diverses théories existantes (KOITER, NAGHDI, BUDIANSKI-SANDERS), d'autre part dans le cadre des théories <u>non linéaires</u> plus élaborées, et peut-être même dans le cas des plaques.

Sur ce dernier point les travaux de Monsieur LADEVEZE devraient nous apporter des éléments de discussion.

BIBLIOGRAPHIE

ADAMS, R. Sobolev Spaces, Academic Press, New-York 1976.

CIARLET, P.G. [1] "A justification of Von Kármánn equations". Rapport interne du Laboratoire d'Analyse Numérique L A 189 Université de Paris VI 1979.

CIARLET, P.G. et RABIER, P. [2] Les équations de Von Kármánn. Lecture Notes in Mathematics n0 826 Springer-Verlag.

CIARLET, P.G. et DESTUYNDER Ph. [3] A justification of the two dimensional linear plate model. J. de Mécanique, vol. 18.2 (1979) 315-344.

DESTUYNDER Ph.[1] Thèse Etat 1980 Paris VI "Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques".

[2] Sur la théorie non linéaire des membranes (à paraître).

DHUIQUE-MEYER, J.P. Thèse 3ème cycle 1978 Lille I "Modélisation de l'influence des supports d'un réservoir horizontal à virole cylindrique".

DONNEL L.H. Beams, plates and shells, Mc Graw Hill, NEW-YORK, 1976

DUVAUT G., LIONS J.L. Les inéquations en Mécanique et Physique Dunod Paris 1973.

FRIEDRICHS K.O., DRESSLER R.F. A boundary layer theory for elastic plates C.P.A.M., XIV, 1961, 1-33.

GERMAIN, P. Cours de Mécanique des Milieux continus. Masson Editeurs.

GILL S.S. The stress analysis of pressure vessels.International series of Monographs in Mechanical Engineering Pergamon Press 1970.

GOL'DENVEIZER, A.L. Dérivation of an approximate theory of bending of a plate by a method of asymptotic integration of the equations in the theory of elasticity. J. App. Math 19 (1963) 1000-1025.

GREEN A.E., ZERNA W. Theoretical elasticity; Oxford Press 1975.

JOHN F. [1] "Estimates for the derivatives of the stresses on a thin shell and interior shall equations. C.P.A.M. (18) 235-267.

[2] "Refined interior shell equations" dans "Theory of thin shells" NIORSON (édit.) Springer-Verlag - Berlin 1968, p. 1-14.

HAGE-CHEHADE H. "Une théorie générale des coques cylindriques" Thèse Etat 1979 Lille I.

KOITER "Foundations of basic equations of shell theory" dans "Theory of Thin shalls (Niorson édit.) p. 169-195.

LADEVEZE P. Justification de la théorie linéaire des coques élastiques" Journal de Mécanique. Vol. 15, n° 5 (1976) p. 813-850.

MANDEL J. Cours de Mécanique des milieux continus Gauthier-Villars Paris 1962.

NAGHDI P.M. [1] "Fondations of elastic shell theory". Progress in Solid Mechanics Vol. 4, p. 3-90, SNEDDON et HILL (édit.) North Holland Publishing Company 1963.

[2] "Theory of plates and shells" Handbuch der Physik, vol. VI.a.2 Springer Verlag. Berlin 1972, p. 425-640.

NOVOZHILOV V.V. "Thin shell theory" Walters Nondhoff Publ.

POTIER-FERRY "Fondements mathématiques de la théorie de la stabilité élastique". Thèse 1978. Université Pierre et Marie Curie.

RUTTEN "Asymptotic Approximation in the three dimensional theory of thin and thick elastic shells" dans "Theory of thin elastic shells" (Niorson édit.). Springer-Verlag Berlin 1968, pp. 115-134.

TIMOSHENKO S., WOINOWSKY-KRIEGER S. "Theory of plates and shells"
Mac Graw Hill New-York, 1959.

TRUESDELL-NOLL Non linear field theories in Handbuch der Physik,
Vol. VI, 1965.

VALID R. La Mécanique des Milieux Continus et le Calcul des
structures. Eyrolles Paris 1977.

WASHIZU K. Variational Methods in elasticity and plasticity.
Pergamon Press Oxford 1968.