50 376
1 981
156

N° d'ordre : 533

50376
1981
156

THÈSES

présentées à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

O. Jean-Pierre EZIN

Première thèse :

QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES CAS-LIMITES DES INÉGALITÉS DE SOBOLEV ; COURBURE DES MÉTRIQUES CONFORMES A LA MÉTRIQUE STANDARD DE LA SPHÈRE ET GROUPE CONFORME

Seconde thèse : Sur le problème de Dirichlet pour une équation de Monge-Ampère complexe.

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE Section de SCIENCES LILLE

Thèses soutenues le 18 décembre 1981 devant la commission d'examen :

Président : G. COEURE, *Professeur à l'Université de Lille I*

Rapporteurs : J.P. BOURGUIGNON, *Maître de Recherche au CNRS*
J.L. KAZDAN, *Professeur à l'Université de Philadelphie*
F. PARSY, *Professeur à l'Université de Lille I*

Examinateurs : D. LEHMANN, *Professeur à l'Université de Lille I*
S. TOURÉ, *Professeur à l'Université d'Abidjan*

A

ma Mère et mon Père...

A

Victoire,

Maxellende, Wallerend et Franz-Olivier.

R E M E R C I E M E N T S

Je remercie les Professeurs :

G. COEURÉ de m'avoir proposé le sujet de ma seconde thèse et pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury d'examen,

J. KAZDAN pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail ; je me sens très honoré par sa présence dans ce jury,

D. LEHMANN et S. TOURÉ pour l'amitié qu'ils me font en acceptant d'examiner ce travail.

Durant la rédaction de cette thèse, j'ai eu de nombreuses conversations avec le Professeur F. PARSY. Ses questions pertinentes m'ont permis de préciser certains points et d'étayer d'autres par des exemples. Il a bien voulu siéger parmi les membres du jury. Je lui en suis reconnaissant.

C'est J.P. BOURGUIGNON qui a attiré mon attention sur le sujet de ma première thèse. Pendant les nombreuses années où je m'en suis occupé, ses conseils ne m'ont jamais fait défaut. J'ai trouvé auprès de lui beaucoup de patience pour m'aider à cheminer et une grande disponibilité pour lire mes manuscrits et répondre à mes questions même lorsque cela devait l'obliger à m'écrire de longues lettres quand nous étions séparés par des milliers de kilomètres. Je rends hommage à ses qualités et à son amitié qui m'ont aidé à passer les moments de découragement que j'ai connus. De tout cela je lui suis profondément reconnaissant et je profite de l'occasion pour lui dire toute mon admiration.

Je remercie Claudine TATTI et, à travers elle, tout le secrétariat scientifique. Elle s'est acquittée avec compétence d'un travail de frappe exigeant. Je n'oublie pas le personnel de l'imprimerie qui a assuré le tirage et la reliure.

J'ai élaboré une grande partie de cette thèse à l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Lille I où j'ai été accueilli comme enseignant pendant quatre ans. J'associe dans une même pensée le personnel *de cette U.E.R. pour son hospitalité et toutes les personnes, parents et amis, qui, durant mon séjour en France, m'ont aidé, d'une manière ou d'une autre, à mener ce travail au point où je l'ai conduit.*

Je remercie A. BESSE de m'avoir accueilli à ses séminaires à Paris VII et à ses journées d'études et pour les nombreuses conversations que nous avons eues ensemble.

J'ai commencé ce travail au Département de Mathématiques de l'Université Nationale du Bénin. J'y ai trouvé auprès de certains de mes collègues, notamment A. LARGILLIER, un enthousiasme et une détermination qui ont été pour moi de précieux stimulants.

TABLE DES MATIERES

		page
Avertissement à propos des renvois		1
Introduction		2
CHAPITRE 0	: Notations et résultats préliminaires	8
CHAPITRE I	: Espace de Sobolev et symétrisation sphérique	15
CHAPITRE II	: Sur l'estimée de N.S. Trudinger pour le cas-limite des inégalités de Sobolev	47
CHAPITRE III	: Instabilité à la linéarisation de l'application courbure scalaire en présence de l'action du groupe conforme	93
Conclusion		153
Bibliographie		155
Annexe A		
Annexe B		
Seconde thèse		

AVERTISSEMENT A PROPOS DES RENVOIS

A l'intérieur d'un chapitre le renvoi à un paragraphe (resp. une formule) du même chapitre est indiqué par deux nombres séparés par un point (resp. entre parenthèses) ; le renvoi à un paragraphe ou à une formule d'un autre chapitre est noté à l'aide des mêmes symboles suivis du numéro du chapitre concerné.

Exemple. Au chapitre III :

(4.11) renvoie à la formule (4.11) du chapitre III

4.7 renvoie au paragraphe 4.7. du chapitre III

(4.6) Ch.II renvoie à la formule (4.6) du chapitre II.

Le renvoi à un théorème, proposition, lemme ou corollaire est indiqué par le nom, suivi du n° du chapitre et du n° d'ordre.

Exemple. proposition (II.3.8) renvoie à la proposition 3.8 du chapitre II où elle figure sous la forme

Proposition (II.3.8).

INTRODUCTION

En 1967, dans un article intitulé "On imbeddings into Orlicz spaces and some applications" [TR1], N.S. Trudinger a construit un plongement continu de l'espace de Sobolev $W_n^1(\Omega)$, (où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$) dans l'espace d'Orlicz $L_\psi(\Omega)$ avec $\psi(t) = e^{|t|^{\frac{n}{n-1}}}-1$.

Quelques années plus tard, en collaboration avec J. Hempel et G. Morris [H.M.T], il a démontré que, dans ce cas limite des inégalités de Sobolev, cet espace d'Orlicz est le plus petit dans lequel un tel plongement a lieu. (Dans la catégorie des espaces de fonctions définies dans des domaines bornés, les morphismes étant les applications continues, les espaces d'Orlicz $L_\psi(\Omega)$ comme les espaces $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, s'ordonnent par l'inclusion. L'espace $W_n^1(\Omega)$ est continûment plongé dans chaque $L_p(\Omega)$ $n \leq p < +\infty$. Le "plus petit" signifie ici qu'il n'existe pas d'espace d'Orlicz intermédiaire entre $L_\psi(\Omega)$ et $W_n^1(\Omega)$ où aboutit une flèche de plongement continu partant de $W_n^1(\Omega)$).

Depuis lors l'estimée $(\mathcal{T}_n)$ (cf. §.II.1) qui exprime ce plongement et surtout la forme duale $(\mathcal{D}_n)$ (corollaire II.1.5) qui s'en déduit aisément ont suscité un grand intérêt en analyse et en géométrie.

En effet l'estimée $(\mathcal{D}_2)$ a beaucoup servi dans la recherche d'une solution à un problème posé par L. Nirenberg dans les années "50" à partir des travaux de H. Minkowski et H. Weyl (cf. [NG] et sa bibliographie) à savoir quelles sont les fonctions régulières sur S^2 (sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ centrée à l'origine qui sont des courbures de Gauss de métriques conformes à la métrique (que nous notons c) induite par le plongement standard de S^2 dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3,e)$? Pour une surface riemannienne (M,g), la traduction analytique de ce problème consiste à décrire l'image de l'opérateur différentiel quasi-linéaire F_2 défini dans l'espace de Sobolev $W_2^1(M)$

par (voir [ET], [K.W.1]).

$$(*) \qquad F_2(u) = e^{-2u}(\Delta^g u + k)$$

où k est la courbure de Gauss de la métrique g et Δ^g est le laplacien de cette métrique $(\Delta^g u = -\mathrm{div}_g(\nabla^g u))$.

A notre connaissance les études les plus avancées de ce problème convenablement généralisé sont à ce jour celles de J. Kazdan et F. Warner ([K.W.1] et [K.W.2]), J. Moser [MR.2] et T. Aubin [AN4].

Pour obtenir certains de leurs résultats, ils utilisent une méthode variationnelle qui requiert des formes précisées de $(\mathcal{D}_2)$. En effet, supposons que la caractéristique d'Euler de (M,g), notée $\chi(M)$ soit positive et soit $\tilde{K}$ une fonction de classe C^∞ sur M positive en au moins un point. On résout l'équation

$$\tilde{K}\, e^{2u} = \Delta^g u + k$$

en minimisant la fonctionnelle

$$J(u) = \int_M \left(\frac{1}{2}\, g^{-1}(du,du) + k\, u\right) v_g$$

où v_g désigne la mesure définie par g, sur l'hypersurface E de $W_2^1(M)$ donnée par

$$E = \{u \in W_2^1(M) \mid \int_M \tilde{K}\, e^{2u}\, v_g = 2\pi\, \chi(M)\}.$$

Soit $\bar{u} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M u\, v_g$ la moyenne de u sur M. En posant $u = \bar{u} + U$ et en résolvant en $\bar{u}$ l'équation définissant E, on ramène (cf. 4.9 ch.III pour les détails), la minimisation de J à celle de la fonctionnelle J_o

définie sur le sous-ensemble de E formé des fonctions de moyenne nulle par

$$J_o(U) = \int_M \frac{1}{2} g^{-1}(dU,dU)v_g - 2\pi\ \chi(M)\ \mathrm{Log} \int_M \tilde{K}\, e^{2U} v_g + \text{constante}$$

Il suit de l'estimée $(\mathcal{D}_2)$ que

$$J_o(U) \geqslant (\frac{1}{2} - 4\pi\ \chi(M)\beta)\, \|dU\|^2_{L_2} + \text{constante}$$

où β est la constante dans $(\mathcal{D}_2)$. Il existe donc des valeurs de β pour lesquelles $J_o(U)$ est bornée inférieurement. C'est pour cette raison, entre autres, que la recherche de la "meilleure constante α" (la plus grande possible) dans $(\mathcal{T}_n)$ et la "meilleure constante β" (la plus petite possible) dans $(\mathcal{D}_n)$ a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années. Outre les deux articles de T. Aubin et J. Moser que nous avons déjà mentionnés, citons encore celui de J. Moser [MR.1] consacré aux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ et à la sphère (S^2,c), celui de P. Cherrier [CR1] sur les variétés riemanniennes compactes et celui de l'auteur avec A. Largillier [E.L] sur la sphère standard (S^n,c) de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^{n+1},e)$.

En dimension $n \geqslant 3$, l'opérateur différentiel elliptique quasi-linéaire F_n qui traduit analytiquement l'étude des fonctions régulières qui, sur une variété compacte (M,g) sont des courbures scalaires de métriques conformes à g est défini par (voir [ET] ou [YE]).

$$(**) \qquad F_n(u) = u^{-\frac{n+2}{n-2}}\,(4\ \frac{n-1}{n-2}\,\Delta^g u + k\, u)$$

où u appartient à un ensemble de fonctions positives sur M. Cette étude a été amorcée par H. Yamabé [YE], puis poursuivie par N.S. Trundinger [TR2] H. Eliasson [EL] T. Aubin [AN.5], [AN.4] et J. Kazdau et F. Warner [K.W.3].

L'interpénétration de l'analyse et de la géométrie est frappante dans la plupart des travaux que nous avons mentionnés, les auteurs utilisant à la fois des méthodes et concepts issus de l'une et l'autre discipline (voir à ce sujet l'article de synthèse de J.P. Bourguignon [BN 2]).

En dépit des progrès importants qui ont été obtenus ces dernières années (voir les derniers résultats connus de T. Aubin [AN.4] et une bibliographie assez complète dans [B-B] ainsi que l'exposé par H. Gluck consacré à la dimension 2 dans [GK]) en vue de sa résolution, le problème de L. Nirenberg demeure toujours ouvert en toute dimension $n \geq 2$.

Dans ce travail nous nous proposons d'apporter une contribution à la description des fonctions régulières sur une variété riemannienne compacte (M,g) de dimension $n \geq 2$ qui sont réalisables comme courbures scalaires de métriques $\tilde{g}$ conformes à g (i.e. qui s'écrivent $\tilde{g} = \rho^2 g$ où ρ est une fonction régulière positive sur M).

A cet égard la sphère standard (S^n,c) se présente comme un cas singulier. D'une part en dimension 2 elle est la seule surface compacte pour laquelle le problème de Nirenberg généralisé aux variétés n'est pas encore résolu. D'autre part parmi toutes les variétés riemanniennes compactes elle est la seule dont le groupe conforme n'est pas compact.

C'est cette dernière remarque qui nous a poussé à étudier plus particulièrement le cas de (S^n,c) et à utiliser pour notre étude une action du groupe conforme, à la "source", sur les métriques C^∞ sur S^n et au "but" sur les fonctions régulières définies sur S^n. Cela nous a permis :

- d'obtenir une nouvelle condition d'intégrabilité pour les équations de la forme $F_n(u) = \tilde{K}$ $(n \geq 2)$ (la "condition N" du théorème (III.3.16)) qui contient celle trouvée précédemment par J. Kazdan et F. Warner;
- de construite sur la sphère (S^n,c) de nouveaux

exemples de fonctions qui sont "interdites" comme courbures scalaires de métriques conformes à c ;

• de montrer que l'ensemble $\mathrm{Int}(S^n,c)$ des fonctions interdites sur S^n pour la métrique c n'a pas une structure linéaire.

En dimension $n \geq 3$, nous redémontrons assez simplement que l'orbite de la métrique c sous l'action du groupe conforme par image réciproque est constituée par les métriques à courbure sectionnelle constante (voir aussi l'article de M. Obato [OA.2]).

En dimension 2, l'image de F_2 ($\mathrm{Im}\, F_2$) reste stable sous l'action du groupe conforme que nous avons introduite. Il en résulte que $\mathrm{Im}\, F_2$ est dense pour les topologies L_p $p \geq 1$ dans un sous-espace de fonctions régulières sur S^2. Nous avons établi que, outre les harmoniques sphériques d'ordre pair, certaines harmoniques sphériques d'ordre impair peuvent être réalisées comme des courbures scalaires de métriques conformes à la métrique standard sur (S^2,c).

Pour obtenir certains des résultats énoncés ci-dessus nous avons utilisé la méthode variationnelle pour laquelle nous avons dû nous intéresser aux "meilleurs constantes" dans $(\mathcal{T}_n)$ et $(\mathcal{D}_n)$. Nous avons pu simplifier la preuve donnée par J. Moser de son théorème principal (th.1) dans [MR.1] que nous avons prolongé à la sphère (S^n,c). Nous avons ainsi amélioré nos précédents résultats avec A. Largillier dans [E.L] et ceux de [CR1] concernant la sphère standard. La considération des fonctions "exponentiellement L_2-orthogonales aux harmoniques sphériques d'ordre $p \geq 1$ nous a permis d'obtenir une généralisation utile du corollaire 2 de [AN.4] qui améliore la constante β dans $(\mathcal{D}_n)$.

La base de l'étude des "meilleures constantes" dans $(\mathcal{T}_n)$ et $(\mathcal{D}_n)$ est un procédé de symétrisation des espaces de Sobolev qui permet de ramener le problème à un problème à une variable. C'est pour cela que nous en présentons une synthèse dans notre premier chapitre.

L'ensemble du travail s'articule autour du noyau qu'est le chapitre 0 (son numéro d'ordre ne doit donc pas faire perdre de vue son intérêt !).

Le plan que nous avons adopté est le suivant :

Chapitre 0 : Notations et résultats préliminaires.

Chapitre I : Espaces de Sobolev et symétrisation sphérique.

Chapitre II : Sur l'estimée de N.S. Trudinger pour le cas limite des inégalités de Sobolev.

Chapitre III : Instabilité à la linéarisation de l'application courbure scalaire en présence de l'action du groupe conforme.

Conclusion : L'exposé se termine pour quelques remarques en guise de conclusion.

Pour rendre la lecture plus facile, en tête de chaque chapitre (à l'exception du chapitre 0, très bref) se trouve un plan détaillé.

CHAPITRE 0

PRELIMINAIRES - NOTATIONS

0.1. Nous désignons par Ω un domaine de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, par $d\Omega$ la mesure de Lebesgue sur Ω et nous considérons les fonctions mesurables sur Ω. Comme il est maintenant classique, une fonction u localement sommable est dite la dérivée faible $|\alpha|$-ième (ou $|\alpha|$-ième dérivée au sens des distributions) de U sur Ω si

$$\int_\Omega u\, \varphi\, d\Omega = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega U\, D^\alpha \varphi\, d\Omega$$

pour tout élément φ de l'ensemble $C_o^k(\Omega)$ des fonctions à support compact dans Ω dérivables jusqu'à l'ordre k. Nous avons adopté les notations de L. Schwartz : $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ désigne la longueur du multi-indice

$$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \quad \text{et} \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} . \partial x_2^{\alpha} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} .$$ On prend $|\alpha| \leqslant k$.

0.2. On note $L_q(\Omega)$ $(1 \leqslant q \leqslant +\infty)$ l'espace des classes de fonctions dont la puissance q-ième du module est sommable et $L_\infty(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions bornées presque partout sur Ω. L'espace de Sobolev $W_q^k(\Omega)$ est défini par

$$W_q^k(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L_q(\Omega), \quad \forall\alpha, \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant k\}$$

les dérivées $D^\alpha u$ étant prises au sens des distributions. Une norme sur $W_q^k(\Omega)$ est donnée par

$$u \mapsto \|u\|_{k,q} = \left(\int_\Omega \sum_{\substack{\alpha \\ 0\leq|\alpha|\leq k}} |D^\alpha u|^q \, d\Omega\right)^{\frac{1}{q}} ,$$

norme pour laquelle $W^k_q(\Omega)$ est un espace de Banach (un espace de Hilbert pour $q = 2$).

On note $\overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega)$ le sous-espace constitué par l'adhérence de $C^\infty_o(\Omega)$ dans $W^1_q(\Omega)$. On vérifie à l'aide de l'inégalité de Poincaré (cf par exemple [MY], voir aussi §.0.6) que la semi-norme

$$u \mapsto |u|_{1,q} \equiv \|\nabla u\|_{L_q} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^q \, d\Omega\right)^{\frac{1}{q}}$$

définit une norme sur $\overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\ \|_{1,q}$.

Remarquons que si u appartient à $W^1_q(\Omega)$, $|u|$ appartient aussi à $W^1_q(\Omega)$: les espaces $W^1_q(\Omega)$ sont <u>réticulés</u> [SA, Lemme 1.1]).

0.3. Dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire, nous <u>désignons</u> par (M,g) une variété différentielle, compacte, C^∞, sans bord, connexe de dimension $n \geq 2$, munie d'une métrique riemannienne g. La mesure positive que g définit sur M (voir [B.G.M. ch.II]) sera noté v_g (ou $d\sigma$ lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre).

Nous <u>notons</u> $\mathcal{T}M$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞ et $\mathcal{F}M$ l'algèbre des fonctions régulières (classe C^∞) sur M.

Pour toute fonction u sur M, le gradient de u par rapport à g (i.e. le champ de vecteurs dual de la différentielle du) au sens des distributions sera noté $\nabla^g u$ (ou parfois ∇u). Globalement $\nabla^g u$ est donc défini pour tout champ de vecteurs X sur M par

$$du(X) = X.u = g(\nabla^g u, X),$$

et, par rapport à un système de coordonnées locales $(x^1,\dots,x^n)$ dans lequel la matrice de g est (g_{ij}) $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, l'on a

$$\nabla^g u = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de (g_{ij}).

La <u>divergence</u> est l'application définie sur $\mathcal{T}M$ à valeurs dans $\mathcal{F}M$ qui, à tout champ de vecteurs X, associe la fonction, <u>notée</u> $\mathrm{div}^g X$, elle-même définie par la formule

$$L_X v_g = (\mathrm{div}^g X) v_g \quad ,$$

dans laquelle L_X désigne la dérivée de Lie par rapport à X. Par dualité par rapport au produit scalaire ponctuel (défini par g), on obtient sur l'espace des 1-formes (différentielles) l'application δ^g à valeurs dans $\mathcal{F}M$ définie pour toute 1-forme différentielle α sur M par

$$\delta^g \alpha = -\mathrm{div}^g(\alpha^\#)$$

($\alpha^\#$ est le champ de vecteurs défini par $g(\alpha^\#, X) = \alpha(X)$). L'application δ^g est adjointe de la différentielle extérieure d par rapport au produit scalaire global sur (M,g), i.e.

$$\int_M g^{-1}(du,\alpha) v_g = \int_M u\, \delta^g \alpha\, v_g$$

g^{-1} étant le tenseur métrique sur l'espace des 1-formes induit par g et dont l'expression locale est la matrice (g^{ij}), ce qui justifie la notation g^{-1}. Dans le système de coordonnées locales $(x^1,\dots,x^n)$, δ^g s'écrit

$$\delta^g \alpha = - \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \cdot \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det g_{ij}}\, g^{ij} \alpha_j\right) \ ,$$

où nous avons désigné par α_j les composantes de α dans la base locale $(dx^1,\ldots,dx^n)$, de sorte que $\sum_{j=1}^{n} g^{ij}\,\alpha_j = g(\alpha^{\#}, \frac{\partial}{\partial x^i})$. L'application δ^g est la <u>codifférentielle</u> sur l'espace des 1-formes différentielles de (M,g). Dans une section du chapitre III, nous utiliserons aussi mais accessoirement la codifférentielle sur l'espace des champs de (0,2)-tenseurs symétriques de (M,g). Si h est un élément de cet espace alors la codifférentielle de h est la 1-forme différentielle dont l'expression locale dans la base $(\frac{\partial}{\partial x^i},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n})$ est

$$\delta^g h = -\sum_{i=1}^{n} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\, h(\frac{\partial}{\partial x^i}\ \bullet)$$

où D est l'opérateur de dérivation covariante de Levi-Civita de la métrique g. L'adjoint de δ^g par rapport au produit scalaire global sur (M,g) est défini sur l'espace des 1-formes différentielles par

$$\delta^{*g}\alpha = \frac{1}{2}\, L_{\alpha^{\#}}\, g.$$

On aurait pu dire que la codifférentielle d'une 1-forme α, vue comme un champ de (0,1)-tenseurs sur (M,g) est la fonction

$$\delta^g\alpha = -\Sigma(\,D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\alpha\,)(\frac{\partial}{\partial x^i}) = -\,\mathrm{tr}_g(D\alpha),$$

tr_g désignant la trace par rapport à g.

Pour une étude détaillée de ces questions on peut voir [NN].

0.4. Comme pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$, on sait définir les espaces de Sobolev sur (M,g). Soit u une fonction régulière (de classe C^∞) sur M. Etant donné un entier $k \geqslant 1$, on définit la <u>dérivée covariante d'ordre</u> k de u comme étant égale à la dérivée covariante $D^{k-1}(du)$ d'ordre (k-1) de sa différentielle du. La variété M étant compacte, la fonctionnelle

$$(0.5) \qquad u \mapsto \|u\|_{k,q} = \left(\int_M (u^{q} + g^{-1}(D^{k-1}(du), D^{k-1}(du))^{\frac{q}{2}}) v_g\right)^{\frac{1}{q}} \quad , \quad q \geq 1$$

définit une norme sur l'espace $\mathcal{F}M$ des fonctions régulières sur M. Le complété de $\mathcal{F}M$ pour cette norme est l'espace de Sobolev $W_q^k(M)$ sur (M,g). C'est un espace de Banach, un espace de Hilbert pour $q = 2$. (Pour une étude générale de $W_q^k(M)$ voir [PS], [EN]).

0.6. Soit $|M| = \int_M v_g$, le <u>volume de</u> M. On définit la <u>moyenne</u> d'une fonction u intégrable sur (M,g) par le nombre

$$\bar{u} = \frac{1}{|M|} \int_M u \, v_g .$$

Dans le sous-espace de $W_q^1(M)$ formé des fonctions à moyenne nulle, la semi-norme

$$(0.7) \qquad u \to \|du\|_{L_q(M,g)} = \left(\int_M g^{-1}(du,du)^{\frac{q}{2}} v_g\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_M g(\nabla u, \nabla u)^{\frac{q}{2}} v_g\right)^{\frac{1}{q}} = \|\nabla u\|_{L_q}$$

définit également une norme que nous <u>noterons</u> suivant le contexte $|u|_{1,q}$, $\|\nabla u\|_{L_q}$ ou $\|du\|_{L_q}$ pour une fonction u donnée. Sur le sous-espace $W_q^1(M) \cap \operatorname{Ker} \int_M$ des fonctions à moyenne nulle, la semi-norme $|\ |_{1,q}$ est équivalente à la norme $\|\ \|_{1,q}$. En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit (u_j) une suite dans $W_q^1(M) \cap \operatorname{Ker} \int_M$ telle que

i) $\|u_j\|_{1,q} = 1$, pour tout j

ii) $\lim_{j \to +\infty} |u_j|_{1,q} = 0$.

La suite (u_j) est bornée dans $W_q^1(M)$. D'après le théorème de Rellich-Kondrachov (voir 1.2. ch.II) elle contient donc une sous-suite que nous notons (u_k) qui converge fortement dans $L_q(M)$ vers une fonction u. Cette propriété de convergence combinée avec ii) montre que la suite (u_k) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $(W_q^1(M), \| \ \|_{1,q})$. Elle converge donc en norme $\| \ \|_{1,q}$ vers u.

La fonction u est à moyenne nulle puisque d'après l'inégalité de Hölder

$$\left|\int_M u_k v_g - \int_M u v_g\right| \leqslant \int_M |u_k - u| v_g \leqslant |M|^{1-\frac{1}{q}} \|u_k - u\|_{L_q}.$$

Mais u n'est pas identiquement nulle car

$$\|u\|_{L_q}^q = \lim_{k\to+\infty} \|u_k\|_{L_q}^q \quad (\text{du fait que } \|u\|_{L_q} \leqslant \|u-u_k\|_{L_q} + \|u_k\|_{L_q}$$
$$\text{et } \|u_k\|_{L_q} \leqslant \|u_k-u\|_{L_q} + \|u\|_{L_q})$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \|u_k\|_{1,q}^q = 1 \quad (\text{puisque } u_k \text{ vérifie ii) et i)}).$$

Or nous avons aussi, et de la même façon

$$|u|_{1,q} = \lim_{k\to\infty} |u_k|_{1,q} = 0.$$

L'équivalence des normes $| \ |_{1,q}$ et $\| \ \|_{1,q}$ en résulte par contradiction.

Ultérieurement, c'est l'espace $W_n^1(M)$ qui va nous intéresser. C'est un espace <u>réflexif</u> puisque nous supposons $n \geqslant 2$.

0.8. Appelons <u>classe conforme</u> d'une métrique g l'ensemble des métriques $\tilde{g}$ sur M qui s'écrivent $\tilde{g} = \rho^2 g$, où ρ est une fonction positive dans $\mathcal{F}M$. Pour $q = n$, la semi-norme (0.6) est insensible aux changements de métriques dans la classe conforme de g, i.e.

(0.9) $$\|du\|_{L_n(M,\rho^2 g)} = \|du\|_{L_n(M,g)} .$$

En effet

$$\begin{aligned}
\|du\|_{L_n(M,\rho^2 g)} &= \left(\int_M (\rho^{-2} g^{-1}(du,du))^{\frac{n}{2}} v_{\rho^2 g}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\int_M g^{-1}(du,du)^{\frac{n}{2}} v_g\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \|du\|_{L_n(M,g)} .
\end{aligned}$$

Nous dirons que la semi-norme $u \mapsto \|du\|_{L_n}$ est <u>invariante conforme</u> sur (M,g). Cette propriété généralise à la dimension n, l'invariance conforme de l'intégrale de Dirichlet bien connue en dimension 2.

0.10. Nous <u>noterons</u> (S^n,c) la sphère standard (ou canonique) (c'est-à-dire la sphère euclidienne de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$, centrée à l'origine) où c désigne la métrique induite par le plongement dans $\mathbb{R}^{n+1}$. L'élément de volume (la mesure positive) défini par c et le champ de vecteurs gradient d'une fonction u sur S^n seront respectivement notés v_c et ∇u.

Lorsque nous aurons besoin de spécifier la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^{n+1}$, nous écrirons $(\mathbb{R}^{n+1},e)$.

CHAPITRE I

ESPACES DE SOBOLEV ET SYMETRISATION SPHERIQUE

I.1. Symétrisation spéhrique et inégalité isopérimétrique :

Le cas des ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$.

I.2. Comportement de $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$ *par symétrisation sphérique.*

I.3. Extension à la sphère standard (S^n,c)

. une remarque générale concernant les espaces riemanniennes symétriques de rang 1.

. Le cas de la sphère standard : réarrangement sphérique sur $W^1_p(S^n,c)$.

I.4. Remarque : un contre-exemple (qui singularise la symétrisation sphérique) portant sur $W^1_n(S^n,c)$.

I.1. *Symétrisation sphérique et inégalité isopérimétrique.*

1.1. La symétrisation que nous allons rappeler est une généralisation d'un procédé géométrique inventé par J. Steiner(*) pour transformer un domaine plan Ω en un domaine Ω^* symétrique par rapport à une droite d du plan et obtenu comme suit. Soit p le pied d'une perpendiculaire H à d qui rencontre Ω. On note $M(p)$ le segment de H centré en p et de longueur $\mathrm{long}(M(p)) = \mathrm{long}(\Omega \cap H)$. La réunion des segments $M(p)$ lorsque p décrit d est le symétrisé Ω^* par rapport à d du domaine Ω. En substituant aux droites H des cercles centrés en un même point O de d et la droite d par l'une des deux demi-droites, soit d_-, issues de O, on définit la symétrisation circulaire par rapport à d_-.

1.2. Pour les problèmes de géométrie que nous avons en vue, nous utiliserons la symétrisation sphérique par rapport à une demi-droite (on utilise aussi le terme de réarrangement sphérique introduit par G. Hardy, J. Littlewood et G. Polya (cf. [H.L.P]). C'est une variante de la symétrisation de J. Steiner que l'on peut décrire de la façon suivante.

Considérons dans $\mathbb{R}^n$ le demi-axe

$$d_- = \{(x^1,0,\dots,0) \mid x^1 \leq 0\}$$

et pour tout nombre réel $r > 0$ la sphère

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\} .$$

(*) Pour plus de détails, on peut se reporter au livre de G. Polya et G. Szegö [P.S., ch. VII] ou à [MW].

Etant donné un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, posons

$$I_\Omega = \{r > 0 \mid S_r \cap \Omega \neq \emptyset\} .$$

Soit $M^*(-r)$ la calotte sphérique incluse dans S_r, centré au point $(pr,0,\ldots,0)$ et dont le volume sur S_r, soit $m_{n-1}(M^*(-r))$, est égal au volume $m_{n-1}(S_r \cap \Omega)$ de $S_r \cap \Omega$. Alors le domaine Ω^* défini par

$$\Omega^* = \bigcup_{r \in I_\Omega} M^+(-r)$$

est le symétrisé sphérique par rapport à d_- de Ω et l'on fait la convention suivante [MW] :

i) si Ω est ouvert, la calotte de définition $M^*(-r)$ est prise ouverte et le point $(r,0,\ldots,0)$ ne lui appartient que si la sphère S_r est incluse dans Ω,

ii) si Ω est fermé, la calotte $M^*(-r)$ est prise avec son bord. Le symétrisé Ω^* est, bien sûr, un "solide" de révolution d'axe d_-.

1.3. Les propriétés suivantes en sont alors immédiates :

i) si Ω est ouvert, le symétrisé Ω^* est aussi ouvert puisque le bord de Ω^* est constitué par les points des bords des calottes $M^*(-r)$,

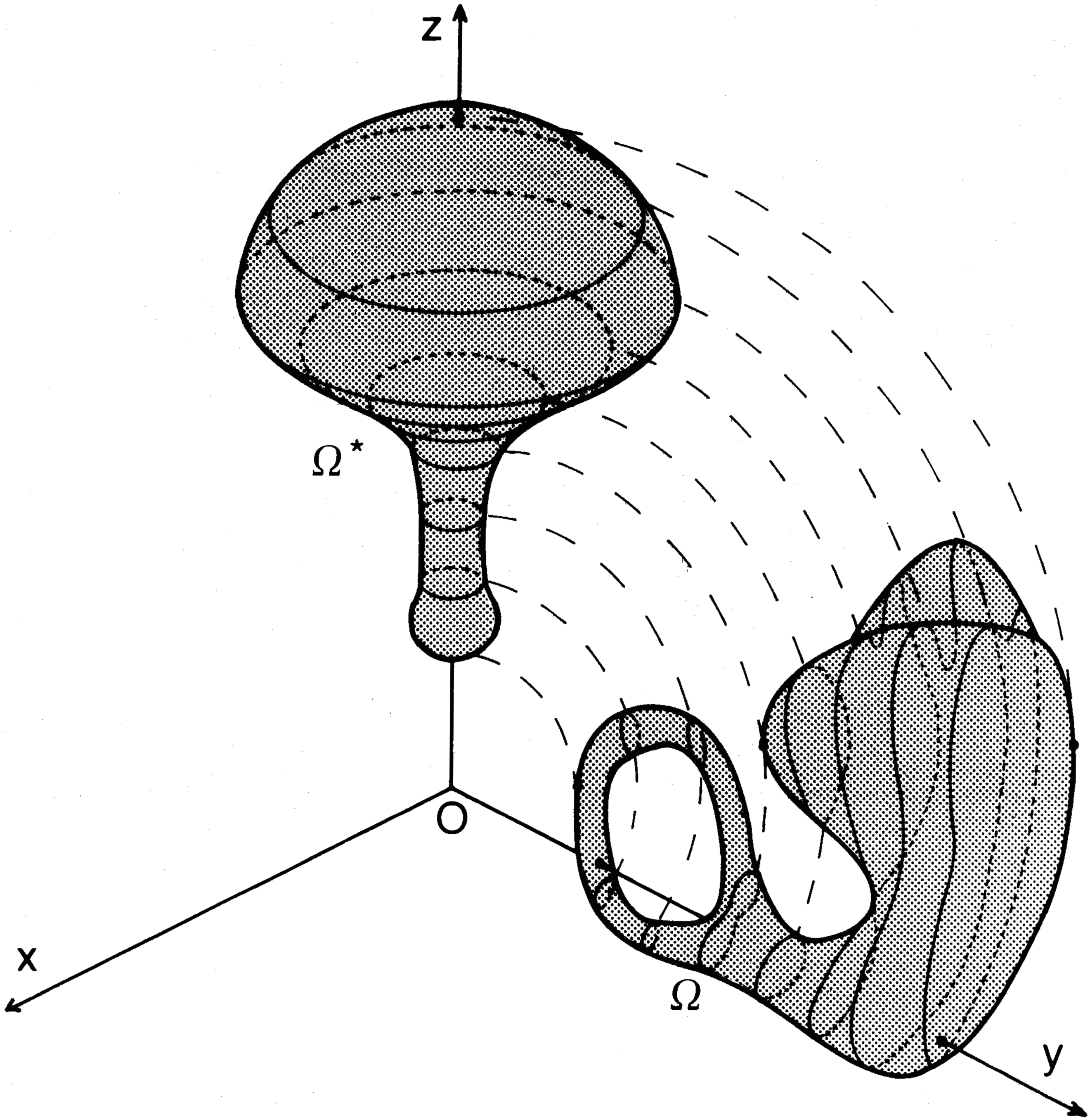
ii) si Ω est fermé, Ω^* l'est aussi car le complémentaire de Ω^* dans $\mathbb{R}^n$ est le symétrisé par rapport à l'axe $d_+ = \{(x^1,0,\ldots,0) \mid x^1 > 0\}$ du complémentaire de Ω.

Proposition 1.1.4. Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines dans $\mathbb{R}^n$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\Omega_1^* \subset \Omega_2^*$

ii) $I_{\Omega_1} \subset I_{\Omega_2}$ et pour tout r appartenant à I_{Ω_1}

$$m_{n-1}(S_r \cap \Omega_1) \leqslant m_{n-1}(S_r \cap \Omega_2).$$



Symétrisé d'un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ par rapport à OZ.

BUS LILLE

<u>Preuve</u> : i) => ii) . Nous avons $\Omega_1^* \subset \Omega_2^*$ équivaut à

$$\bigcup_{r\in I_{\Omega_1}} M^*(-r) \subset \bigcup_{r\in I_{\Omega_2}} M^*(-r).$$

Supposons que I_{Ω_1} ne soit pas contenu dans I_{Ω_2}. Il existe alors $r_o \in I_{\Omega_1}$ tel que $M^*(-r_o) \subset \Omega_1^*$ et $M^*(-r_o) \cap \Omega_2^* = \emptyset$, ceci est impossible. Donc pour tout r appartenant à I_{Ω_1}, on a $M^*(-r) \cap \Omega_2^* \neq \emptyset$ et comme $\Omega_1^* \subset \Omega_2^*$, la calotte $M^*(-r)$ est incluse dans une calotte $M_2^*(-r)$ de Ω_2^* ayant le même centre que $M^*(-r)$; par suite

$$m_{n-1}(S_r \cap \Omega_1) = m_{n-1}(M^*(-r)) \leqslant m_{n-1}(M_2^*(-r)) = m_{n-1}(S_r \cap \Omega_2).$$

ii) => i). Si $I_{\Omega_1} \subset I_{\Omega_2}$ et $m_{n-1}(S_r \cap \Omega_1) \leqslant m_{n-1}(S_r \cap \Omega_2)$, alors, pour tout r appartenant à I_{Ω_1} et en désignant par $M_i^*(-r)$ la calotte sphérique $M^*(-r)$ incluse dans Ω_i^* $(i = 1,2)$, nous avons

$$M_1^*(-r) \cap M_2^*(-r) = M_1^*(-r)$$

puisque $m_{n-1}(M_1^*(-r)) \leqslant m_{n-1}\ M_2^*(-r)$.

D'où

$$M_1^*(-r) \subset M_2^*(-r), \quad \text{pour tout } r \in I_{\Omega_1},$$

ce qui implique

$$\Omega_1^* = \bigcup_{r\in I_{\Omega_1}} M_1^*(-r) \subset \bigcup_{r\in I_{\Omega_2}} M_2^*(-r) = \Omega_2^* \quad \blacksquare$$

<u>*Corollaire*</u> *I.1.5.* Pour tous domaines Ω_1, Ω_2 de $\mathbb{R}^n$, on a

1. si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, alors $\Omega_1^* \subset \Omega_2^*$: la symétrisation préserve l'inclusion,
2. $(\Omega_1 \cap \Omega_2)^* = \Omega_1^* \cap \Omega_2^*$: la symétrisation commute à l'intersection,
3. $(\Omega_1 \cup \Omega_2)^* = \Omega_1^* \cup \Omega_2^*$: la symétrisation commute à l'union.

Remarque. Les points 2 et 3 se prolongent à une famille infinie (cf. [MW]).

Le théorème suivant exprime l'idée qu'en symétrisant un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, on conserve son volume tout en diminuant la mesure $(n-1)$-dimensionnelle de son bord $\partial\Omega$ (propriété isopérimétrique).

Théorème I.1.6. (*Inégalité isopérimétrique*). Soit Ω un domaine compact de $\mathbb{R}^n$ tel que le bord de son intersection avec toute boule de $\mathbb{R}^n$ soit une sous-variété régulière par morceaux ayant une mesure $(n-1)$-dimensionnelle finie. Alors

$$m_n(\Omega^*) = m_n(\Omega)$$

et

$$m_{n-1}(\partial\Omega^*) \leqslant m_{n-1}(\partial\Omega) .$$

1.7. Avant de donner la preuve de ce théorème rappelons quelques résultats concernant les voisinages tubulaires de Ω. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit

$$T_\varepsilon(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in \Omega, \ |x-t| < \varepsilon\}$$

le tube de rayon ε autour de Ω.

En écrivant $T_\varepsilon(\Omega)$ sous la forme

$$T_\varepsilon(\Omega) = \Omega + B_\varepsilon$$

où B_ε est la boule de rayon ε centrée à l'origine de $\mathbb{R}^n$, on observe que $m_n(T_\varepsilon(\Omega)) - m_n(\Omega))$ est égale à la mesure de la partie du voisinage tubulaire $T_\varepsilon(\partial\Omega)$ du bord $\partial\Omega$ situé à l'extérieur de Ω. Il suit que

$$m_n(T_\varepsilon(\partial\Omega)) = 2(m_n\ T_\varepsilon(\Omega) - m_n(\Omega)).$$

Or, par définition (cf. [FR1, 3.2.77] pour une situation plus générale), le bord $\partial\Omega$ étant régulier par morceaux

$$m_{n-1}(\partial\Omega) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_n(T_\varepsilon(\partial\Omega))}{2\varepsilon} \quad .$$

Il vient donc que

(1.8) $$m_{n-1}(\partial\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_n(T_\varepsilon(\Omega))-m_n(\Omega)}{\varepsilon} \quad .$$

Enonçons maintenant un lemme dû à G. Mostow [MW, lemme 8.1].

Lemme I.1.9. Pour tout $\varepsilon > 0$

(M) $$T_\varepsilon(\Omega^*) \subset (T_\varepsilon(\Omega))^* \quad .$$

Preuve du théorème I.1.6. : Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\psi(r) = m_n(B_r \cap \Omega),$$

où B_r est la boule euclidienne de rayon $r \geqslant 0$, centrée à l'origine. En remarquant que

$$\partial(B_r \cap \Omega) = (\partial B_r) \cap \Omega = S_r \cap \Omega,$$

S_r étant la sphère euclidienne de rayon r, centrée à l'origine, nous avons d'après (1.8)

$$\begin{aligned} m_{n-1}(S_r \cap \Omega) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_n(T_\varepsilon(B_r \cap \Omega))-m_n(B_r \cap \Omega)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_n(B_r \cap \Omega+B_\varepsilon)-m_n(B_r \cap \Omega)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_n(B_{r+\varepsilon} \cap \Omega)-m_n(B_r \cap \Omega)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\psi(r+\varepsilon)-\psi(r)}{\varepsilon} \quad . \end{aligned}$$

Comme la mesure $m_{n-1}(S_r \cap \Omega)$ du bord $\partial(B_r \cap \Omega)$ est finie, cette dernière égalité signifie que la fonction ψ est dérivable en tout point r et que

$$\psi'(r) = m_{n-1}(S_r \cap \Omega).$$

En définissant par analogie une fonction ψ^* par

$$\psi^*(r) = m_n(B_r \cap \Omega^*),$$

on a évidemment

$$\psi^*(r) = m_{n-1}(S_r \cap \Omega^*)$$

et comme

$$m_{n-1}(S_r \cap \Omega) = m_{n-1}(S_r \cap \Omega^*)$$

il suit

$$\psi^{*\prime}(r) = \psi'(r).$$

D'où

$$\psi^*(r) = \psi(r), \qquad \text{pour tout } r \geqslant 0$$

puisque

$$\psi^*(0) = \psi(0) = 0.$$

En choisissant r assez grand, on obtient

$$m_n(\Omega^*) = m_n(\Omega).$$

Pour la seconde partie du théorème, nous utilisons l'inclusion (M) pour obtenir l'inégalité

$$m_{n-1}(\partial\Omega^*) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_n(T_\varepsilon(\Omega^*))-m_n(\Omega^*)}{\varepsilon}$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_n(T_\varepsilon(\Omega))^*-m_n(\Omega^*)}{}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_n(T_\varepsilon(\Omega))-m_n(\Omega)}{\varepsilon} = m_{n-1}(\partial\Omega),$$

puisque $m_n(T_\varepsilon(\Omega))^* = m_n(T_\varepsilon(\Omega))$ ∎

1.10. L'effet de la symétrisation spéhrique par rapport à une droite est de transformer un domaine Ω en un <u>domaine de révolution</u> Ω^* autour d'un axe choisi à l'avance. La symétrisation (sphérique) par rapport à un point associe à un domaine Ω une boule Ω^* centrée en un point donné. Sa propriété isopérimétrique que rappelle le théorème (I.1.6) est bien connue. Dans la suite quand nous parlerons de symétrisation sphérique, c'est à cette dernière que nous nous référerons pour des raisons de commodité dans les calculs puisque les fonctions symétrisées ne dépendront alors que d'une variable.

I.2. Comportement de $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$ par symétrisation sphérique.

A partir de maintenant Ω désigne exclusivement un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

2.1. Etant donnée une fonction f dans $C^\infty_o(\Omega,\mathbb{R})$, notons pour tout nombre réel t

$$\Omega_t = \{x \in \Omega \mid f(x) \geqslant t\}$$

$$\mathcal{O}_t = \{x \in \Omega \mid f(x) > t\} .$$

La <u>symétrisée sphérique de la fonction</u> f (par rapport à un point fixe P) est la fonction f^* définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f^*(x) = t \text{ si et seulement si } x \in (\Omega_t^* - \mathcal{O}_t^*).$$

La valeur $f^*(x)$ de f^* en un point x ne dépend que du module $|x|$ et est une fonction non croissante de $|x|$. On le voit en symétrisant Ω_t et $\mathcal{O}_t$ par rapport à un point fixe 0, ce qui donne $\Omega_t^* - \mathcal{O}_t^*$ comme une surface sphérique $S^{n-1}(R_t)$ de rayon R_t, centrée en 0. Pour chaque t la fonction f^* admet $S^{n-1}(R_t)$ pour ensemble de niveau. De plus pour deux réels t_o et t_1, $t_o < t_1$, on a $\Omega_{t_o}^* \supset \Omega_{t_1}^*$. On conclut que f^* est non croissante en remarquant que

$$f^*(x) = t_1 \qquad \text{si} \qquad |x| = R_{t_1}$$

$$f^*(x) = t_o \qquad \text{si} \qquad |x| = R_{t_o} \;).$$

Plus généralement, soit f une fonction mesurable sur Ω. La fonction de distribution de f est la fonction μ décroissante, continue à droite, à valeurs dans $[0, m_n(\Omega)]$, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mu(t) = m_n(\mathcal{O}_t).$$

La symétrisée sphérique (ou le réarrangement sphérique) de f est la fonction f^* dont les ensembles de niveau

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f^*(x) > t\}$$

sont des boules concentriques centrées en P et de même mesure que $\{x \in \Omega \mid f(x) > t\}$.

La symétrisée sphérique f^* de f est ainsi une fonction dont la valeur en chaque point x ne dépend que de la distance euclidienne de x à un point fixe P et qui a même fonction de distribution que f. Il est équivalent de définir f^* par :

$$f^*|\partial O_t^* = t = f_{|\partial O_t} .$$

La propriété essentielle de la symétrisation $f \to f^*$ dont nous aurons besoin et une contraction de l'espace de Sobolev $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$ au sens précis du

Théorème I.2.2. La symétrisation sphérique $f \mapsto f^*$ est une contraction de l'espace de Sobolev $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$, i.e. si f appartient à $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$ f^* appartient à $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega^*)$ et $\|f^*\|_{1,p} \leqslant \|f\|_{1,p}$ pour tout p, $1 \leqslant p < +\infty$.

2.3. *Remarque.* Il existe dans la littérature plusieurs preuves de ce théorème dont celles de K. Hilden [HN], de G. Mostow [MW], de G. Talenti [TI], C. Bandle [BA], L. Fraenkel et M. Berger [F.B] et qui consistent en général à établir le résultat d'abord pour des fonctions particulières et à utiliser un argument de densité de l'ensemble de ces fonctions dans $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$ pour conclure. La preuve que nous proposons ci-dessous généralise, pour les fonctions appartenant à $C_o^\infty(\Omega)$, une idée de G. Polya et G. Sezgö [P.S] et utilise pour terminer, le procédé de passage à la limite de [HN] adapté au cas qui nous intéresse. Elle se réduit à établir deux lemmes.

Lemme I.2.4. Soit $d\Omega$ (resp. $d\Omega^*$) la mesure de Lebesgue sur Ω (resp. Ω^*). Si f est une fonction continue sur Ω^* alors f^* est continue sur Ω^* et les mesures images sur $\mathbb{R}$ par f de $d\Omega$ et par f^* de $d\Omega^*$ coïncident ,

<u>Preuve</u> : Pour prouver la continuité de f^* il nous suffit de montrer que pour tous nombres réels t_o et t_1 $(t_o < t_1)$

$$\{x \in \Omega^* \mid t_o < f^*(x) < t_1\} = \mathcal{O}^*_{t_o} \cap {}^c\Omega^*_{t_1}$$

où ${}^c\Omega^*_{t_1}$ désigne le complémentaire de $\Omega^*_{t_1}$ puisque l'ensemble dans le membre de droite est ouvert.

Or on observe que $f^*(x) \geqslant t_1$ est équivalent à x appartient à $\Omega^*_{t_1}$.

De plus

$$\Omega_{t_1} \equiv f^{-1}([t_1,+\infty[) = \bigcap_{t<t_1} f^{-1}([t,+\infty[) = \bigcap_{t<t_1} \Omega_t$$

et

$$\mathcal{O}_{t_o} \equiv f^{-1}(]t_o,+\infty[) = \bigcup_{t>t_o} f^{-1}([t_o,+\infty[) = \bigcup_{t>t_o} \Omega_t .$$

Il suit

$$\Omega^*_{t_1} = \bigcap_{t<t_1} \Omega^*_t$$

$$\mathcal{O}^*_{t_o} = \bigcup_{t>t_o} \Omega^*_t$$

puisque l'intersection et l'union commutent à la symétrisation sphérique.

Par conséquent

$$f^{*-1}(]t_o,+\infty[) = \mathcal{O}^*_{t_o}$$

et

$$f^{*-1}(]t_o,t_1[) = \mathcal{O}^*_{t_o} \cap {}^c\Omega^*_{t_1} ,$$

la fonction f^* est donc continue sur Ω^*.

De plus comme Ω et Ω^* sont bornés les fonctions f et f^* sont propres respectivement pour les mesures de Lebesgue $d\Omega$ et $d\Omega^*$. Soit alors $f_*(d\Omega)$ (resp. $f^*_*(d\Omega^*)$) l'image de $d\Omega$ (resp. $d\Omega^*$) sur $\mathbb{R}$ par f (resp. f^*).

Pour tout intervalle (a,b) de $\mathbb{R}$, on a :

$$f_*(d\Omega)(a,b) = \int_\Omega (\chi_{(a,b)} o f) d\Omega = \int_\Omega \chi_{f^{-1}(a,b)} d\Omega = m_n(f^{-1}(a,b))$$

où χ_E désigne la fonction caractéristique de l'ensemble E. Mais on sait par ailleurs que

$$m_n(f^{-1}(a,b)) = m_n(f^{-1}(a,b)^*) = m_n f^{*-1}(a,b) \equiv f^*_*(d\ ^*)(a,b)$$

d'où

$$f_*(d\Omega) = f^*_*(d\Omega^*) . \blacksquare$$

Corollaire I.2.5. Pour toute fonction borélienne G sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et toute fonction f réelle sur Ω, on a

$$\int_\Omega (G \text{ o } f) d\Omega = \int_{\Omega^*} (G \text{ o } f^*) d\ ^*$$

en particulier,

$$\int_\Omega |f|^p \, d\Omega = \int_{\Omega^*} |f^*|^p \, d\Omega, \text{ pour tout } p, \quad 0 \leqslant p < +\infty$$

les égalités ayant lieu lorsque l'un des membres est défini.

2.5. *Remarque*. Du point de vue analytique, le corollaire I.2.5. signifie que la symétrisation conserve les fonctionnelles qui ne font intervenir que les valeurs des fonctions.

Lemme I.2.6. La symétrisation sphérique $f \to f^*$ est une contraction de $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$ munie de la semi-norme $| \ |_{1,p}$ pour tout p, $1 \leq p < +\infty$.

Preuve : Donnons d'abord la preuve pour f dans $C_o^\infty(\Omega)$; nous la prolongerons ensuite à $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$.

Soit

$$\Omega_t = \{x \in \Omega \mid f(x) \geq t\}$$

$$S_t = \{x \in \Omega \mid f(x) = t\}.$$

Nous désignons par $d\sigma$ l'élément de volume sur la surface S_t. D'après le théorème de Sard (voir e.g. [SG, th. 3.1]) l'ensemble des valeurs critiques t de f a une mesure nulle dans $\mathbb{R}$. L'ensemble ω des points critiques correspondants est un fermé de Ω dont la mesure peut être positive. Pour toutes les valeurs régulières t, S_t est une sous-variété de dimension n-1 dans Ω, lisse, bordant Ω_t.

En un point a appartenant à $(\Omega-\omega)$, $(\nabla f)(a) \neq 0$. Supposons que dans un système de coordonnées locales $(x^1,\dots,x^n)$ $\frac{\partial f}{\partial x^n}(a) \neq 0$. Pour toute valeur régulière t, d'après le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage v_a de a dans $\Omega_t - \omega$ et une fonction g de classe C^∞ tels que l'équation $f(x) = t$ soit résoluble en x^n et que $x^n = g(x^1,\dots,x^{n-1},t)$ avec $\frac{\partial g}{\partial t} = (\frac{\partial f}{\partial x^n})^{-1}$. La transformation

$$x^i = v_i \qquad i = 1,\dots,n-1$$

$$x^n = g(v_1,\dots,v_{n-1},t)$$

est donc un difféomorphisme ψ d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur v_a. Comme les x^i ne dépendent pas de t, pour $i = 1,\dots,n-1$, le vecteur $\frac{\partial\psi}{\partial t}(v_1,\dots,v_{n-1}t)$

est colinéaire à l'axe des x^n et y a pour composante $(\frac{\partial f}{\partial x^n})^{-1}$. En outre la normale en un point à la surface S_t a pour vecteurs unitaires $\nu = \pm|\nabla f|^{-1} \nabla f$. Par conséquent le produit scalaire euclidien $e(\frac{\partial \psi}{\partial t},\nu)$ a pour module

$$|e(\frac{\partial \psi}{\partial},\nu)| = |\nabla f|^{-1} \quad .$$

Par suite pour toute fonction u intégrable dans v_a, on a, par ce changement de variable :

$$\int_{v_a} u \, d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{f^{-1}(t)} u|\nabla f|^{-1} \, d\sigma)dt$$

et, pour toute fonction u intégrable à support compact dans $\Omega_t - \omega$, on a

$$\int_{\Omega_t - \omega} u \, d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{f^{-1}(\tau)} u|\nabla f|^{-1} \, d\sigma)d\tau \tag{2.7}$$

En particulier pour f appartenant à $C_o^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^p \, d\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{f^{-1}(t)} |\nabla f|^{p-1} \, d\sigma)dt \tag{2.8}$$

(en réalité l'intervalle d'intégration par rapport à t est borné !) car l'intégrale de $|\nabla f|^p$ étendue à ω est nulle (ω étant l'ensemble des points critiques de f) pour tout $p > 0$.

Pour terminer la preuve, utilisons l'inégalité de Hölder qui dit que pour deux fonctions u,v dans $L_p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ et dans $L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ respectivement

$$\int_{\Omega} |u \, v| d\Omega \leqslant \|u\|_{L_p} \, \|v\|_{L_{\frac{p}{p-1}}} \quad . \tag{H_p}$$

Supposons donc d'abord $p > 1$. D'après (H_p)

$$\int_{S_t} d\sigma \leqslant \left(\int_{S_t} |\nabla f|^{-1} d\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{S_t} |\nabla f|^{p-1} d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

soit en isolant la dernière intégrale à droite et en élevant à la puissance p,

$$(*) \qquad \int_{S_t} |\nabla f|^{p-1} d\sigma \geqslant \left(\int_{S_t} |\nabla f|^{-1} d\sigma\right)^{1-p} (m_{n-1}(S_t))^p .$$

Nous allons évaluer l'intégrale à droite de (*) en fonction de $\mu(t) = m_n(\mathcal{O}_t)$. Or il résulte de (2.7) et de la définition de $\mu(t)$ que pour chaque valeur régulière t

$$\mu(t) = \int_t^{+\infty} \left(\int_{S_\tau} \frac{1}{|\nabla f|} d\sigma\right) d\tau$$

et par suite

$$\int_{S_t} |\nabla f|^{-1} d\sigma = -\mu'(t) .$$

L'inégalité (*) s'écrit donc encore

$$\int_{S_t} |\nabla f|^{p-1} d\sigma \geqslant [-\mu'(t)]^{1-p} (m_{n-1}(S_t))^p ,$$

ce qui, avec (2.8) donne

$$(2.9) \qquad |f|^p_{1,p} = \|\nabla f\|^p_{L_p} \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |-\mu'(t)|^{1-p} (m_{n-1}(S_t))^p dt .$$

Pour la symétrisée f^*, soient Ω_t^*, $\mathcal{O}_t^*$ et S_t^* les quantités analogues respectivement à Ω_t, $\mathcal{O}_t$, S_t. Soit $R(t)$ le rayon de la boule $\mathcal{O}_t^*$ pour une valeur régulière t.

Alors

$$f^*_{|S^*_t} = t = {}^{-1}(m_n\, \mathcal{O}_t)$$

par définition de la fonction de distribution μ. En posant

$$\tilde{f}^*(|x|) = f^*(x),$$

on définit une fonction $\tilde{f}^*$ telle que $\tilde{f}^*(R(t)) = t$ et qui est dérivable pour presque tout t (μ^{-1} est monotone). Elle admet alors une dérivée au sens des distributions qui vaut $\tilde{f}^{*\prime} = (\frac{dR}{dt})^{-1}$. Comme f^* est radiale elle admet par rapport à $|x| = r$, au sens des distributions, une dérivée qui est égale à $\tilde{f}^{*\prime}$ et que nous noterons dans la suite $\frac{df^*}{dr}$ ou $f^{*\prime}$.

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\int_{S^*_t} |\nabla f^*|^{p-1} d\sigma^* &= \int_{S^*_t} |f^{*\prime}|^{p-1} d\sigma^* \\ &= \int_{S^*_t} \left|\frac{dt}{dR}\right|^{p-1} d\sigma^* \\ &= \left(-\frac{dt}{dR}\right)^{p-1} \; m_{n-1}(S^+_t)\end{aligned}$$

car $t \mapsto R(t)$ est une fonction décroissante qui ne dépend pas des points de S^*_t.

Remarquant enfin que l'on peut écrire $-\frac{dt}{dR} = \frac{d\mu^*}{dR}\left(-\frac{d\mu^*}{dt}\right)^{-1}$,

où $\mu^*(t) = m_n(\mathcal{O}^*_t)$, on obtient

$$(2.10) \qquad \int_{S^*_t} |\nabla f^*|^{p-1} d\sigma^* = [-\mu'(t)]^{1-p}\; (m_{n-1}(S^*_t))^p$$

puisque f et f^* ont même fonction de distribution $\mu = \mu^*$ et que $\frac{d\mu^*}{dR} = m_{n-1}(S_t^*)$ pour toute valeur régulière t. Il suit alors de (2.10) que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*} |\nabla f^*|^p d\Omega^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{S_t^*} |\nabla f^*|^{p-1} d\sigma^*\right. \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [-\mu'(t)]^{1-p} \, (m_{n-1}(S_t^*))^p \, dt \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} [-\mu'(t)]^{1-p} \, (m_{n-1}(S_t^*))^p \, dt \\ &\leqslant \int_{\Omega} |\nabla f|^p d\Omega ,\end{aligned}$$

d'après le théorème isopérimétrique (I.1.6) et l'estimée (2.9).

Pour $p = 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*} |\nabla f^*| d\Omega^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{S_t^*} d\sigma^*\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} m_{n-1}(S_t^*) dt \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} m_{n-1}(S_t) dt = \int_{\Omega} |\nabla f| d\Omega\end{aligned}$$

puisque $m_{n-1}(S_t^*) \leqslant m_{n-1}(S_t)$, ce qui complète la preuve du lemme pour f appartenant à $C_o^\infty(\Omega)$.

Plaçons-nous à présent dans le cas général où f appartient à $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$. Soient (f_m) une suite de fonctions dans $C_o^\infty(\Omega)$ convergeant en norme $\| \ \|_{1,p}$ vers f, (f_m^*) et f^* les symétrisées respectives de (f_m)

et de f. Suivant une idée de K. Hilden [HN], montrons que $-\dfrac{df^*}{dr}$ est une mesure de Radon positive qui est en fait une fonction dans $L_p(\Omega)$ pour $p > 1$.

Par rapport au système de coordonnées locales $(x^1,\dots,x^n)$, on a au sens des distributions

$$\frac{df^*}{dr} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^*}{\partial x^i}\,\frac{x^i}{|x|} \quad ,$$

de sorte que, pour toute fonction φ dans $C_o^\infty(\Omega)$,

$$<\frac{df^*}{dr}, \varphi> = -\int_{\mathbb{R}^n} f^* \operatorname{div}^e\left(\frac{x}{|x|}\,\varphi\right)v_e.$$

En observant alors que $\tilde{f}^*(|x|) = f^*(x)$, il suit que

$$<\frac{df^*}{dr}, \varphi> = -\int_0^{+\infty}\left(\int_{|x|=r} \operatorname{div}^e\left(\frac{x}{|x|}\,\varphi\right)d\sigma\right)\tilde{f}^*(r)dr$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_{|x|\leqslant r} \operatorname{div}^e\left(\frac{x}{|x|}\,\varphi\right)d\sigma\right)\tilde{f}^{*\prime}(r)dr$$

par intégration par parties, soit encore

$$<\frac{df^*}{dr}, \varphi> = \int_0^{+\infty}\left(\int_{|x|=r} e\left(\frac{x}{|x|},\frac{x}{|x|}\right)\varphi\ d\sigma\right)\tilde{f}^{*\prime}(r)dr$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_{|x|=r} \varphi\ d\sigma\right)\ \tilde{f}^{*\prime}(r)dr,$$

d'après le théorème de la divergence et en observant que la normale extérieure unitaire à $S_r = \{x \mid |x| = r\}$ est $\dfrac{x}{|x|}$.

En posant $\phi(r) = \dfrac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \displaystyle\int_{|x|=r} \psi \, d\sigma$, on obtient

$$<\frac{df^*}{dr}, \psi> = \omega_{n-1} \int_0^{+\infty} \phi(r) \, \tilde{f}^{*\prime}(r) \, r^{n-1} \, dr,$$

ce qui achève de montrer que $-\dfrac{df^*}{dr}$ est une mesure de Radon positive.

Soient $R(t)$ et $R_m(t)$ les rayons respectifs des boules $\Omega_t^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f^*(x) \geq t\}$ et $\Omega_{t,m}^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_m^*(x) \geq t\}$.

Considérons alors une fonction <u>positive</u> ψ dans $C_o^\infty(\Omega)$ ne dépendant que de la distance euclidienne r à l'origine. Il vient

$$|<\frac{df^*}{dr}, \psi>| = -\omega_{n-1} \int_0^{+\infty} \psi(r) \, \tilde{f}^{*\prime}(r) dr.$$

En faisant le changement de variable $r = R(t)$, on obtient (en se rappelant que $f^{*\prime}(R(t)) = \dfrac{1}{R'(t)}$ p.p.)

$$\begin{aligned}
|<\frac{df^*}{dr}, \psi>| &= \omega_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(R(t)) \, R^{n-1}(t) dt \\
&\leq \liminf_{m \to +\infty} \omega_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(R_m(t)) R_m^{n-1}(t) dt \quad \text{(lemme de Fatou)} \\
&= \liminf_{m \to +\infty} \omega_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(r) \frac{df_m^*}{dr} r^{n-1} \, dr \\
&\leq \liminf_{m \to +\infty} \left(\omega_{n-1} \int^{\infty} \left|\frac{df_m^*}{dr}\right|^p r^{n-1} dr\right)^{\frac{1}{p}} \left(\omega_{n-1} \int_0^{+\infty} \psi(r)^{\frac{p}{p-1}} r^{n-1} dr\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= \liminf_{m \to +\infty} \|\nabla f_m^*\|_{L_p} \|\psi\|_{L_{\frac{p}{p-1}}} \quad \text{(inégalité de Hölder } H_p) \\
&\leq \liminf_{m \to +\infty} \|\nabla f_m\| \, \|\psi\|_{\frac{p}{p-1}} \quad \text{(puisque } f_m \text{ appartient à } C_o^\infty(\Omega)) \\
&= \|\nabla f\|_{L_p} \|\psi\|_{L_{\frac{p}{p-1}}} \quad \text{(à cause de la convergence dans } \overset{o}{W}{}_p^1).
\end{aligned}$$

Puisque $-\frac{df^+}{dr}$ est une mesure de Radon positive qui ne dépend que de r la dernière estimée et le théorème de Hahn-Banach montrent que $\frac{df^*}{dr}$ se prolonge en une fonction appartenant à $L_p(\Omega)$ (dual de $L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$) et de plus $\|\frac{df^*}{dr}\|_{L_p} \leq \|\nabla f\|_{L_p}$. Comme $\nabla f^* = \frac{df^*}{dr}$, le lemme est démontré pour $p > 1$.

Dans l'étude du cas $p = 1$, il est important de remarquer d'abord que la fonction $\tilde{f}^*$ définie à partir de la symétrisée f^* d'une fonction f est absolument continue. On utilise alors les arguments de [HN, th.1] pour conclure. Nous n'envisagerons pas ce cas dans la suite

2.11. Preuve du théorème (I.2.2). : Elle consiste à réunir les deux propositions précédentes. En effet du corollaire (I.2.5) et du lemme (I.2.6) nous déduisons que, si f appartient à $(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\ ),\ \|\ \|_{1,p})$, alors f^* appartient aussi à $(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega),\ \|\ \|_{1,p})$ puisque

$$\|f^*\|^p_{1,p} = \|f^*\|^p_{L_p} + \|\nabla f^*\|^p_{L_p} \leq \|f\|^p_{L_p} + \|\nabla f\|^p_{L_p} = \|f\|^p_{1,p},$$

ce qui prouve de plus que $f \to f^*$ est une contraction de $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, muni de la norme $\|\ \|_{1,p}$ ■

I.3. Extension aux espaces riemanniens symétriques de rang 1.

3.1. Ce qui caractérise la symétrisation sphérique pour les fonctions sur $\mathbb{R}^n$, comme nous l'avons vu dns la section précédente, c'est de transformer une fonction f en une fonction f^* ne dépendant que de la distance à un point fixe (f^* est dite radiale). Dans la preuve de l'inégalité sur la symétrisation le fait que le volume des sphères ne dépende que de la distance joue un rôle important.

Une variété riemannienne (M,g) est dite harmonique si et seulement si en tout point m de M, l'image réciproque $\exp^*(v_g)$ de l'élément de volume v_g par l'application exponentielle ne dépend que de la distance dans l'espace tangent T_mM. Rappelons certaines définitions (dont le lecteur averti omettra la lecture). Une variété riemannienne (M,g) est un espace riemannien symétrique si pour tout point m de M la symétrie géodésique autour de m est une isométrie. Le rang d'un espace riemannien symétrique est la dimension de son plus grand sous-espace plat totalement géodésique. Ainsi le rang d'une variété grassmannienne $G_{p,q}$ est égal à $\inf(p,q)$.

Les seuls espaces riemanniens symétriques de rang 1 (ESR 1) sont alors la sphère (S^n,c) et les espaces projectifs (réel $\mathbb{R}P^n$, complexe $\mathbb{C}P^n$, quaternionique $\mathbb{H}P^n$) et le plan projectif des octaves de Cayley $\mathbb{C}ap^2$. Un ESR1 est une variété à courbure minorée par une constante strictement positive (c'est donc une variété compacte) ; toutes ses géodésiques sont fermées et ont même longueur.

Les ESR1 constituent des exemples de variétés harmoniques. On ignore si ce sont les seules, mais on sait que tout espace riemannien symétrique et harmonique est de rang 1 [EG].(Pour une étude approfondie des ESR1, voir [BE] ou [CL]). Une extension de la symétrisation sphérique aux domaines et fonctions définis sur les ESR1 paraît donc raisonnablement envisageable. Cependant dans le cadre de ce travail nous nous limiteron à la seule sphère canonique (S^n,c) qui va nous intéresser dans les chapitres suivants.

3.2. Etant donnée une sous-variété D de dimension n, à bord dans (S^n,c), on peut définir le symétrisé sphérique de D par rapport à un demi-méridien comme suit : sur S^n, fixons d'abord les deux pôles N et S (Nord et Sud).

Choisissons ensuite un demi-méridien d avec la condition que N appartient à d et S n'appartient pas à d. Soient ω_r la sphère géodésique dans S^n, centrée au point N et de rayon r ($0 < r < \pi$, 2π étant la longueur commune des géodésiques) et σ_n la mesure canonique sur (S^n,c). Nous considérons l'ensemble des nombres réels positifs

$$J_D = \{r \in]0,\pi[\mid \omega_r \cap D \neq \emptyset\}$$

et notons $M^*(-r)$ la calotte sphérique incluse dans ω_r, ayant même σ_{n-1}-mesure que $\omega_r \cap D$, centrée sur D (σ_{n-1} désignant la mesure induite sur ω_r par la métrique c). Alors le symétrisé sphérique D^* par rapport à d de D est la réunion des $M^*(-r)$ lorsque r décrit J_D.

Comme pour les domaines de $\mathbb{R}^n$, l'opération géométrique qui consiste à associer à un domaine D dans (S^n,c) une boule géodésique de même volume centrée en un point fixé à l'avance est la symétrisation (sphérique) par rapport à ce point. C'est à elle que nous nous référerons dans la suite. Elle a une propriété isopérimétrique analogue au théorème (I.1.6) que nous allons décrire.

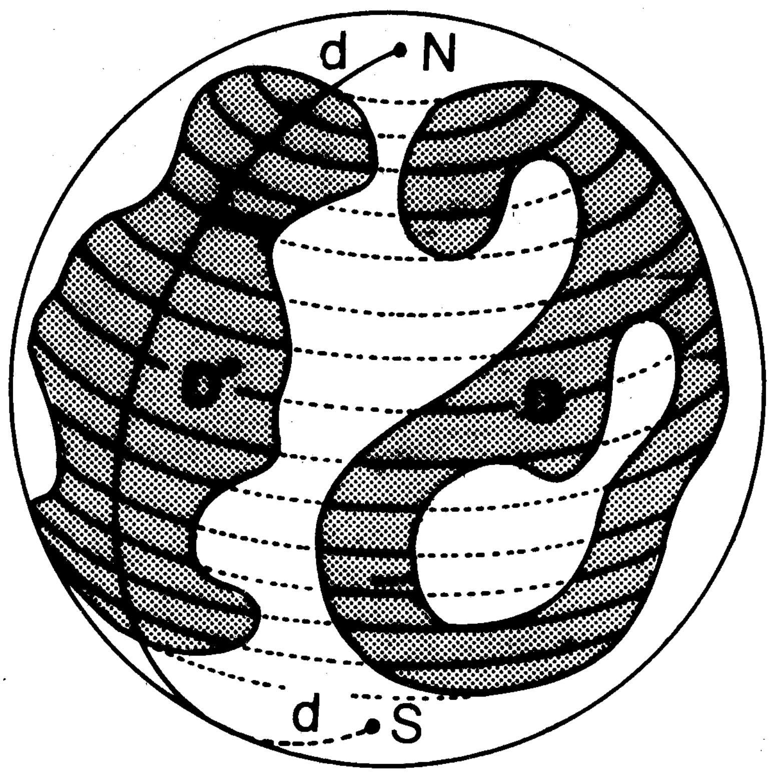
Soient D une variété de dimension n dans (S^n,c), à bord D lisse par morceaux, et pour tout $\varepsilon > 0$, $T_\varepsilon(D)$ un voisinage tubulaire autour de $\bar{D}$. On a, comme dans (§.I.1)

$$\sigma_{n-1}(\partial D) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sigma_n(T_\varepsilon(D)) - \sigma_n(D)}{\varepsilon} \quad . \tag{3.3}$$

La proposition suivante, qui est valide aussi pour toute variété à courbure constante, prolonge à (S^n,c) le théorème (I.1.6) :

Proposition I.3.4. ([DS], [ST]). Soient D une variété ouverte de (S^n,c) à bord ∂D lisse par morceaux et D^* une boule géodésique de même volume que D. Alors

$$\sigma_{n-1}(\partial D^*) \leqslant \sigma_{n-1}(\partial D).$$



Symétrisé sphérique D^* de D par rapport au demi-méridien d.

3.5. Soit f une fonction régulière sur (S^n,c) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel t, posons

$$D_t = \{x \in S^n \mid f(x) \geq t\}$$

$$S_t = \{x \in S^n \mid f(x) = t\}.$$

Soient D_t^* et S_t^* les quantités correspondantes par symétrisation. La symétrisée sphérique de la fonction f est la fonction $f^* : S^n \to \mathbb{R}$, définie par la condition que $f^*(x) = t$ si et seulement si $x \in (D_t^* - \overset{o}{D}{}_t^*)$ où $\overset{o}{D}{}_r^* = D_t^* - S_t^*$.

Il est connu, que comme pour les fonctions sur $\mathbb{R}^n$, f^* est une fonction radiale, continue (lipschitzienne) et dérivable au sens des distributions.

On a le

Théorème I.3.6. <u>L'application</u> $f \to f^*$ <u>est une contraction de l'espace</u> $W_p^1(S^n)$.

3.7. La preuve de ce théorème est semblable à celle du théorème I.2.2 ; nous ne la redonnons donc pas. Cette preuve, comme la précédente, repose en effet sur le théoèrme isopérimétrique (I.3.4) et le lemme suivant qui seul sera démontré.

Lemme I.3.8. <u>Soit</u> (M,g) <u>une variété riemannienne compacte et</u> f <u>une fonction régulière sur</u> M <u>à valeurs dans</u> $\mathbb{R}$.

<u>Pour toute fonction</u> φ <u>positive intégrable sur</u> (M,g), <u>on a</u>

$$\int_M \varphi \, v_g \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{f^{-1}(t)} \varphi \, |df|^{-1} \sigma_g \right) dt \tag{3.8}$$

<u>où</u> σ_g <u>est la mesure induite sur</u> $f^{-1}(t)$ <u>par la métrique</u> g <u>et</u> $|df|^2 = g^{-1}(df,df)$.

Preuve : Soit ω l'ensemble des points critiques de f. C'est une partie fermée de M et d'après le théorème de Sard l'ensemble $f(\omega)$ des valeurs critiques est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$.

Si on pose $d\nu = \dfrac{df}{|df|}$, alors l'élément de volume v_g s'écrit

$$\begin{aligned} v_g &= d\nu \wedge *d\nu = d\nu \wedge \sigma_g \\ &= \frac{dt}{|dt|} \wedge \sigma_g , \end{aligned}$$

pour presque tout t, puisque $f(x) = t$ sur S_t. Il suit alors d'après le théorème de Fubini que

$$\int_M \varphi\, v_g \geq \int_{M-\omega} \varphi\, v_g = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{f^{-1}(t)} \varphi \frac{\sigma_g}{|df|} \Big) dt \qquad \blacksquare$$

3.9. *Remarque*. Il y a égalité dans (3.8) si ω est un ensemble de mesure nulle et φ n'a alors pas besoin d'être positive, c'est notamment le cas lorsque la fonction f n'a pas de points critiques (et donc pas de valeurs critiques !) ou n'a que des points critiques non dégénérés (ils sont alors en nombre fini et les valeurs critiques correspondantes aussi).

I.4. Remarque : contre-exemple.

4.1. Il existe sur la sphère (S^n, c) d'autres types de transformations qui conservent les espaces $W_p^1(S^n)$, $p \geq 1$. C'est le cas par exemple de la moyenne par le groupe d'isotropie du pôle nord N. On appelle ainsi le procédé consistant à associer à une fonction u définie sur S^n, la fonction $\tilde{u}$ définie S^n par :

$$\tilde{u}(x) = \int_H (u \circ \sigma)(x)\, d\sigma \equiv \int_H (\sigma . u)(x)\, d\sigma \tag{4.2}$$

où H est un groupe isomorphe au groupe des rotations de $\mathbb{R}^{n+1}$ laissant le pôle N invariant. Nous prendrons le volume de H par rapport à la mesure de Haar égal à 1.

Alors nous avons la propriété suivante.

Théorème I.4.3. La moyenne par le groupe d'isotropie de N est une contraction de l'espace de Sobolev $W_n^1(S^n)$ c'est-à-dire que si $\tilde{u}$ appartient à $W_n^1(S^n)$, alors u appartient également à $W_n^1(S^n)$ et de plus

$$\|\tilde{u}\|_{1,n,S^n} \leqslant \|u\|_{1,n,S^n} .$$

Toutefois l'intégrale de u composée avec les fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles n'est pas conservée par cette transformation : il existe des fonctions boréliennes G telles que

$$\int_{S^n} (G \circ u)v \neq \int_{S^n} (G \circ \tilde{u})v \tag{4.4}$$

C'est notamment le cas pour les fonctions convexes ainsi que nous le montrons plus loin. Par exemple en prenant

$$G : t \mapsto G(t) = e^{\alpha |t|^{\frac{n}{n-1}}} , \quad \alpha > 0,$$

nous avons

$$\int_{S^n} (G \circ u)v \geqslant \int_{S^n} (G \circ \tilde{u})v .$$

L'intérêt de la symétrisation sphérique réside donc non seulement dans le fait qu'elle contracte l'espace $W_n^1(S^n)$ mais aussi dans le fait qu'elle conserve l'intégrale de $G \circ u$ sur S^n pour toute fonction borélienne G sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et toute fonction u intégrable sur S^n.

Le théorème I.4.3 et la formule (4.4) vont résulter des propositions qui suivent. Mais avant de les donner remarquons que la sphère S^n étant l'espace homogène $SO(n+1)/SO(n)$ le groupe d'isotropie du pôle Nord est en même temps groupe d'isotropie de l'équateur. Alors la fonction $\tilde{u}$ définie par (4.2) ne dépend en tout point x que de la distance géodésique de x au pôle nord N.

Dans ces conditions on a les résultats suivants :

Proposition 1.4.5. Si u est une fonction de classe C^∞ sur S^n alors la fonction $\tilde{u}$ est aussi de classe C^∞ et si u appartient à $W_n^1(S^n)$, la fonction $\tilde{u}$ est aussi dans $W_n^1(S^n)$ et les deux fonctions ont même moyenne sur (S^n,c).

Preuve : Le groupe H étant compact, pour tout $\sigma \in H$ et $u \in C^\infty(S^n)$, la fonction $\tilde{u}$ est de classe C^∞ comme $u \circ \sigma$.

Soit u dans $W_n^1(S^n)$. Puisque la métrique standard sur S^n est invariante sous le difféomorphisme σ, on vérifie facilement que :

$$\int_{S^n} |\nabla(\sigma . u)|^n v_c = \int_{S^n} |\nabla(u \circ \sigma)|^n v_c = \int_{S^n} |\nabla u|^n v_c .$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que $\int_H d\sigma = 1$, on déduit de l'expression (4.2) que

$$|\tilde{u}(x)| \leqslant \left(\int_H |(\sigma.u)(x)|^n d\sigma\right)^{1/n} \quad \text{et} \quad |\nabla\tilde{u}| \leqslant \left(\int_H |\nabla(\sigma.u)^n d\sigma\right)^{1/n} ,$$

les dérivations étant prises en sens des distributions. Il résulte de ces inégalités et d'après le théorème de Fubini,

$$\int_{S^n} (|\tilde{u}|^n + |\nabla\tilde{u}|^n)\, v_c = \|\tilde{u}\|^n_{1,n}$$

$$\leqslant \int_H \int_{S^n} (|(\sigma.u)|^n + |\nabla\sigma.u|^n) d\sigma\, v_c \ .$$

Par suite $\tilde{u}$ appartient à $W^1_n(S^n)$. Enfin en intégrant (4.2) sur S^n, il vient :

$$\int_{S^n} u(x)\, v_c = \int_{S^n} \int_H (\sigma.u)(x) d \quad v_c = \int_H d\sigma \int_{S^n} u(x)\, v_c$$

$$= \int_{S^n} u(x)\, v_c \ ,$$

Ce qui termine la preuve de la proposition ■

Proposition I.4.6. La transformation $u \mapsto \tilde{u}$ de $W^1_n(S^n)$ diminue la semi-norme $|\ |_{1,n}$ de u en ce sens que

$$\int_{S^n} |\nabla\tilde{u}|^n\, v_c \leqslant \int_{S^n} |\nabla u|^n\, v_c \ .$$

Une preuve de cette proposition résultera du lemme général suivant :

Lemme I.4.7. Soit f une fonction appartenant à $W^1_n(S^n)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f ne dépend en tout point m de S^n que de la distance géodésique $r(m)$ de ce point au pôle nord N ;

ii) f est invariante par le groupe d'isotropie H_N de N ;

iii) le gradient de f est normal aux sphères parallèle de S^n (qui sont des surfaces de niveau de la fonction r).

Preuve : i) => ii). Si f ne dépend que de la distance r, il existe une fonction F sur S^n telle que

$$f = F \circ r.$$

Soit σ une rotation laissant N fixe. Alors en tout point x de S^n

$$(f \circ \sigma)(m) = (F \circ r \circ \sigma)(m) = F(r(m)) = f(m)$$

ii) => iii). Supposons en effet

$$\sigma f = f \circ \sigma = f \quad \text{pour tout } \sigma \text{ dans } H_N .$$

Ecrivons

$$\nabla f = \nabla f^T + \nabla f^{\perp},$$

où ∇f^T (resp. $\nabla f^{\perp}$) désigne la composante tangentielle (resp. normale) du gradient de f au sens des distributions à une sphère parallèle de (S^n,c). Supposons $\nabla f^T \neq 0$ et soit $\mathcal{H}_N$ l'algèbre de Lie du groupe de Lie H_N. Il existe une isométrie infinitésimale X dans $\mathcal{H}_N$ telle que $\nabla f^T(m) = X_m$ en tout point m de la sphère parallèle envisagée. Comme f est invariante par $\mathcal{H}_N$, nous avons

$$0 = X.f = c(\nabla f,X) = c(\nabla f^T,X) = |\nabla f^T|^2 \neq 0 ,$$

et la preuve est obtenue par contradiction.

3) => 1). Supposons que le gradient de f soit normal aux sphères parallèles. Il s'ensuit que f est constante sur les sphères parallèles. Donc la restriction de f à tout méridien (plongement de S^1 dans S^n) détermine complètement f. Or le paramètre déterminant cette courbe méridienne est précisément la distance géodésique au pôle nord : f ne dépend donc que de cette distance ∎

Revenons à la proposition. Comme $\tilde{u}(x)$ ne dépend en tout point x que de la distance géodésique de ce point au pôle nord N, son gradient $\nabla\tilde{u}$ est normal aux sphères parallèles de S^n. Donc

$$\nabla\tilde{u} = \nabla\tilde{u}^{\perp} = \nabla u^{\perp}$$

Par suite, on a : $|\nabla u|^2 = |\nabla u^T|^2 + |\nabla u^{\perp}|^2 \geqslant |\nabla u \quad| = |\nabla\tilde{u}|^2$,

d'où

$$|\nabla\tilde{u}|^n \leqslant |\nabla u|^n \quad \text{et} \quad \int_{S^n} |\nabla\tilde{u}|^n \, v_c \leqslant \int_{S^n} |\nabla u|^n \, v_c \quad \blacksquare$$

4.7. *Remarque*. Si u appartient à $W_n^1(S^n)$ alors pour α positif et pour tout $q > 1$, nous avons

$$\int_{S^n} e^{\alpha|\tilde{u}|^q} \, v_c \leqslant \int_{S^n} e^{\alpha|u|^q} \, v_c$$

et en général il n'y a pas égalité.

En effet, soient α réel > 0, $q > 1$ et u appartenant à $W_n^1(S^n)$. De la définition $\tilde{u}(x) = \int_H (u \circ \sigma)(x) d\sigma$ et de l'inégalité de Hölder (H_q) nous déduisons :

$$|\tilde{u}| \leqslant \int_H |u \circ \sigma| d\sigma \leqslant \left(\int_H |u \circ \sigma|^q\right)^{1/q}$$

et

$$\alpha|\tilde{u}|^q \leqslant \int_H \alpha|u \circ \sigma|^q \, d\sigma \quad ,$$

ceci implique

$$e^{\alpha|\tilde{u}|^q} \leqslant e^{\int_H \alpha|u \circ \sigma|^q \, d\sigma} .$$

La fonction exponentielle étant convexe, il suit que

$$e^{\alpha|\tilde{u}|^q} \leqslant e^{\int_H \alpha|u \circ \sigma|^q d\sigma} \leqslant \int_H e^{\alpha|u \circ \sigma|^q} \, d\sigma .$$

Intégrons ces expressions sur S^n. Il vient :

$$\int_{S^n} e^{\alpha|\tilde{u}|^q} v_c \leqslant \int_{S^n}\left(\int_H e^{\alpha|u \circ \sigma|^q} d\sigma\right) v_c = \int_{S^n} e^{\alpha|u|^q} v_c \quad . \quad .$$

CHAPITRE II

SUR L'ESTIMEE DE N.S. TRUDINGER POUR LE CAS-LIMITE DES INEGALITES DE SOBOLEV.

II.1. *Plongement des espaces de Sobolev dans des espaces d'Orlicz : estimée de N.S. Trudinger.*

. Le cas-limite des inégalités de Sobolev.

. Espaces d'Orlicz : estimée (T_n) de Trudinger et forme duale (D_n) de (T_n).

II.2. *Formes optimales de l'estimée de Trudinger sur un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

. Le théorème de J. Moser sur $\overset{\circ}{W}{}^1_n(\Omega)$: meilleure constante α_Ω dans (T_n).

. Forme duale du théorème de J. Moser : meilleure constante β_Ω dans (D_n).

. Relation de dualité entre les constantes α_Ω et β_Ω.

II.3. *Estimées de Trudinger sur la sphère* (S^n,c).

. Extension du théorème de J. Moser à (S^n,c) : nouvelle preuve pour la majoration de α sur (S^n,c).

. Relation de dualité entre α_{S^n} et β_{S^n}.

. Sur les meilleures constantes α_M et β_M pour une variété compacte (M,g) : le cas des fonctions antipodalement symétriques sur (S^n,c).

II.4. *Amélioration de* α_2 *et* β_2 *sur* (S^n,c) *pour les fonctions "exponentiellement orthogonale" aux harmoniques sphériques.*

. Le théorème de T. Aubin.

. Quelques remarques.

II.1. Plongement des espaces de Sobolev dans des espaces d'Orlicz : estimée de Trudinger.

1.1. Il est connu que si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété du cône(*) on a les injections continues suivantes (indiquées par des flèches) qui constituent le théorème du plongement continu de Sobolev (voir [MY. 3.5] ou [AS. th. 5.4] pour une présentation générale, ou [G.T., th. 7.10]) :

i) pour $1 \leqslant q < n$ $\quad W^1_q(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$, si $q \leqslant p \leqslant \dfrac{n}{\frac{n}{q} - 1}$,

ii) pour $n < q$ $\quad W^1_q(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$, si $q \leqslant p \leqslant +\infty$,

iii) cas-limite $q = n$ $\quad W^1_q(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$, si $q \leqslant p < +\infty$.

Les inégalités traduisant la continuité de ces injections ont été popularisées par S.L. Sobolev à partir des années "trente" ([SV.1], [SV.2] et [SV.3] pour une présentation générale) et sont appelées aujourd'hui les "inégalités de Sobolev". On sait également que dans les cas i) et ii) les plus petits espaces dans lesquels $W^1_q(\Omega)$ peut être continûment plongé sont respectivement $L_{\frac{n}{\frac{q}{n}-1}}(\Omega)$ et $C^o_B(\Omega)$, espace des fonctions continues bornées sur Ω .

Ce dernier résultat peut être amélioré lorsque Ω est à bord régulier : le plus petit espace dans lequel $W^1_q(\Omega)$ $(q > n)$ est continûment plongé est alors $C^{o,1-\frac{n}{q}}$, espace de Hölder d'ordre $1 - \frac{n}{q}$. Dans le premier

---

(*) Un ouvert Ω dans $\mathbb{R}^n$ a la propriété du cône si tout point $x \in \Omega$ est le sommet d'un cône contenu dans Ω et ayant le même volume qu'un cône fixe. On s'affranchit de cette condition dans les énoncés ci-dessous en prenant Ω à bord régulier (un tel domaine a la propriété du cône !) ou en opérant dans $\overset{o}{W}{}^1_q(\Omega)$.

cas des résultats existent qui donnent la valeur de la plus petite constante de continuité du plongement de $W^1_q(\Omega)$ $(1 \leqslant q < n)$ dans $L_{\frac{n}{\frac{n}{q}-1}}(\Omega)$ ([TI] ou [AN2, th. 4]).

1.2. Enfin rappelons que d'après le <u>théorème de compacité de Rellich-Kondrachov</u> (voir par exemple [AS, Th. 6.2]) :

i)' le plongement i) est compact pour tout p, $q \leqslant p < \frac{n}{\frac{n}{q}-1}$, l'exposant $\frac{n}{\frac{n}{q}-1}$ apparaissant donc comme le cas-limite ;

ii)' le plongement ii) de $W^1_q(\Omega)$ $(q > n)$ dans $L_p(\Omega)$ est compact. Lorsque Ω a un bord régulier, le plongement de $W^1_q(\Omega)$ dans $C^{o,\lambda}(\bar{\Omega})$ est compact pour tout λ, $0 \leqslant \lambda < 1 - \frac{n}{q}$, l'exposant $1 - \frac{n}{q}$ étant alors le cas-limite.

Dans le cas-limite iii) $(q = n)$, l'injection indiquée est compacte pour tout p. Mais le théorème de Sobolev ne donne pas le meilleur espace dans lequel $W^1_n(\Omega)$ est continûment plongé puisqu'il n'existe pas d'injection continue de $W^1_n(\Omega)$ dans $L_\infty(\Omega)$. Par exemple, si pour $0 < \mu < \frac{n-1}{n}$, $u(x) = (\mathrm{Log}\,\frac{1}{r})^\mu$ où $r = |x|$, alors u appartient à $W^1_n(B_R)$, mais u n'appartient pas à $L_\infty(B_R)$, (B_R est la boule de R^n centrée à l'origine et de rayon R). Les résultats de N.S. Trudinger qui nous concernent ici comblent cette lacune en donnant le plus petit espace intermédiaire entre L_p et L_∞ dans lequel W^1_n $(n \leqslant p)$ peut être continûment plongé. C'est un espace modelé sur des fonctions convexes à croissance rapide qu'on peut décrire comme nous le faisons dans le paragraphe suivant.

1.3. Une N-fonction(*) est une fonction φ paire, convexe définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to +\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty .$$

Sur un domaine Ω on appelle classe d'Orlicz définie par une N-fonction φ, l'ensemble des classes u de fonctions mesurables sur Ω telles que

$$\int_\Omega \varphi(|u|)d\Omega < +\infty \quad .$$

Nous notons $L_\varphi(\Omega)$ cet ensemble. Comme φ est convexe, $L_\varphi(\Omega)$ est toujours un ensemble convexe. Mais en général, $L_\varphi(\Omega)$ n'est pas un espace vectoriel (pour l'addition et la multiplication par un scalaire).

On appelle alors espace d'Orlicz l'espace vectoriel engendré par L_φ. Nous le noterons L_{φ^*}. La fonctionnelle

$$u \mapsto \|u\|_{\Omega,\varphi} \equiv \|u\|_\varphi = \inf\{k > 0, \int_\Omega \varphi(k^{-1}|u|)d\Omega \leq 1\}$$

définit une norme sur L_{φ^*} et en fait un espace de Banach. La norme $\| \ \|_\varphi$ est parfois appelée norme de Luxemburg. Une étude générale des espaces d'Orlicz est faite par A. KRASNOSEL'SKII et B. RUTICKII (à qui l'on doit le terme de N-fonction) dans [K.R].

(*) Pour définir les espace d'Orlicz, on utilise parfois les fonctions de Young qui sont plus générales que les N-fonctions cf. [O'L].

Le meilleur espace dans lequel $W^1_n(\Omega)$ peut être continûment plongé est un espace d'Orlicz. Précisément, N.S. Trudinger a notamment démontré dans [TR1].

Théorème II.1.4. [TR1, Th.2]. Si Ω satisfait la propriété du cône, alors l'espace de Sobolev $W^1_n(\Omega)$ peut être continûment plongé dans l'espace d'Orlicz $L_{\psi^*}(\Omega)$ où ψ est la fonction $t \to e^{|t|^{\frac{n}{n-1}}}-1$.

Cette proposition se prouve en montrant qu'il existe deux constantes α et C (α dépendant de n et C dépendant de n et de la mesure de Ω) telles que :

$$(T_n) \qquad \int_\Omega \exp\left[\alpha\left(\frac{|u|}{\|u\|_{1,n}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right] d\Omega \leqslant C.$$

Dans la suite du texte, (T_n) sera appelé estimée de Trudinger. Dans ce théorème l'exposant $\frac{n}{n-1}$ est optimal. En effet si nous définissons ψ par $\psi(t) \equiv e^{|t|^\gamma}-1$, où $\gamma > \frac{n}{n-1}$ et considérons la fonction u définie sur B_R par $u(x) = (\text{Log } \frac{1}{r})^\mu$ avec $\frac{1}{\gamma} < \mu < \frac{n-1}{n}$, alors nous obtenons :

$$\|u\|^n_{1,n} = \omega_R\left[\int_0^R (\text{Log } \frac{1}{r})^{n\mu}\, r^{n+1} dr + \mu^n \int_0^R \frac{1}{r}(\text{Log } \frac{1}{r})^{n(\mu-1)} dr\right]$$

$$= \text{Cons} + \omega_R\, \mu^n \left[\frac{1}{n(\mu-1)+1}\, (\text{Log } \frac{1}{r})^{n(\mu-1)+1}\right]_0^R < +\infty$$

puisque $n(\mu-1)+1 < 0$, ω_R désignant l'aire du bord de la boule B_R. Par contre u n'appartient pas à $L_{\psi^*}(B_R)$ pour $\psi(t) \equiv e^{|t|^\gamma}-1$ car

$$\int_{B_R} \psi(u)\,dx = \int_{B_R} (e^{|u|}-1)\,dx = \int_{B_R} \left[\exp(\mathrm{Log}\,\frac{1}{r})^{\gamma\mu}-1\right]dx$$

$$= \omega_R \int_0^R \left[\exp(\mathrm{Log}\,\frac{1}{r})^{\gamma\mu}-1\right] r^{n-1}\,dr$$

$$= -\frac{R^n}{n}\,\omega_R + \omega_R \int_{\mathrm{Log}\,\frac{1}{R}}^{+\infty} \exp(X^{\gamma\mu}-nX)\,dX,$$

après avoir posé $\mathrm{Log}\,\frac{1}{r} = X$.

Comme $\gamma\mu > 1$, la dernière intégrale à droite est infinie.

Pour compléter le théorème II.1.4, N. Trudinger et co-auteurs ont démontré dans [H.M.T.] que L_{ψ^*} (avec $\psi(t) = e^{|t|^{\frac{n}{n-1}}}-1$) est effectivement le plus petit espace d'Orlicz dans lequel W^1_n peut être continûment plongé, l'injection n'étant toutefois pas compacte.

On trouvera une généralisation du théorème II.1.4 aux espaces $W^k_q(\Omega)$ dans le cas-limite où $k_q = n$, $q > 1$, dans [AS, th. 8.25] : il existe une injection continue de $W^k_q(\Omega)$ dans $L_{\psi^*}(\Omega)$ avec

$$\psi(t) = e^{|t|^{\frac{n}{n-k}}} \equiv e^{|t|^{\frac{q}{q-1}}}.$$

Dans [CR2], P. Cherrier prolonge ce résultat à des variétés riemanniennes en utilisant les méthodes de [AN1].

Lorsqu'on se restreint aux fonctions u dans la boule unité de $\overset{\circ}{W}{}^1_n(\Omega)$, l'estimée (T_n) prend la forme

$$(T'_n) \qquad \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}}\,d\Omega \leqslant C.$$

Sous cette forme il est facile d'en déduire le corollaire suivant qui montre en autres que toute fonction dans $\overset{\circ}{W}{}^1_n(\Omega)$ a son exponentielle dans $L_p(\Omega)$, pour tout p, $1 \leqslant p < +\infty$ (voir aussi [AN1]).

Corollaire II.1.5. Il existe deux constantes positives β et M (ne dépendant que de n et Ω) telles que pour toute fonction u appartenant à $\overset{\circ}{W}{}^1_n(\Omega)$, on ait

$$(\mathcal{D}_n) \qquad \int_\Omega e^{|u|} d\Omega \leqslant M\, e^{\beta \|\nabla u\|^n_{L_n}} .$$

Preuve : Nous esquissons la preuve du corollaire par des techniques que nous détaillerons dans l'étude des formes optimales de $(\mathcal{T}_n)$ et $(\mathcal{D}_n)$ dans la section II.2.

Pour toute fonction u dans $W^1_n(\Omega)$, la fonction $w = u\|\nabla u\|^{-1}_{L_n}$ est dans la boule unité de $\overset{\circ}{W}{}^1_n(\Omega)$ pour la semi-norme $u \to |u|_{1,n}$, équivalente à la norme $\| \ \|_{1,n}$. D'après $(\mathcal{T}'_n)$ il existe deux constantes positives α et C telles que

$$\int_\Omega e^{\alpha |w|^{\frac{n}{n-1}}} d\Omega \leqslant C.$$

Or, pour tout réel $t \geqslant 0$, on vérifie facilement que

$$t^{n-1} \leqslant \alpha t^n + \beta$$

où β est la constante définie par

$$\beta = \max_{t \geqslant 0} (t^{n-1} - \alpha t^n) = \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n\alpha}\right)^{n-1} .$$

En faisant $t = |w|^{\frac{n}{n-1}} \|\nabla u\|_{L_n}^{-1}$ dans l'inégalité ci-dessus, nous obtenons l'inégalité

$$|u| \leqslant \alpha |w|^{\frac{n}{n-1}} + \beta \|\nabla u\|_{L_n}^{n}$$

qui donne, par intégration de l'exponentielle des deux membres

(1.6) $$\int_\Omega e^{u}\, d\Omega \leqslant \int_\Omega e^{|u|} d\Omega \leqslant M\, e^{\beta \|\nabla u\|_L^n} \quad \text{avec} \quad M \geqslant C \ \blacksquare$$

1.7. Dans l'estimée (T_n), α est la constante de Sobolev du plongement de $W_n^1(\Omega)$ dans $L_\varphi(\Omega)$. En effet pour toute fonction u dans $W_n^1(\Omega)$, nous avons d'après la définition de $\|u\|_\varphi$ et la continuité du plongement précité :

$$\|u\|_\varphi = \inf\{k > 0, \int_\Omega \Big[\exp\Big(\frac{|u|}{k\|u\|_{1,n}}\Big)^{\frac{n}{n-1}} - 1\Big] d\Omega \leqslant 1\}$$

$$= \inf\{k > 0 \int_\Omega \exp\Big(\frac{|u|}{k\|u\|_{1,n}}\Big)^{\frac{n}{n-1}} d\Omega \leqslant 1 + \text{mes}(\Omega)\}$$

$$\leqslant C \|u\|_{1,n} ,$$

où C est une constante.

Posons $\alpha = k^{-\frac{n}{n-1}}$; nous obtenons alors

$$\|u\|_\varphi = \sup\{\alpha > 0, \int_\Omega \exp\, \alpha\Big(\frac{|u|}{\|u\|_{1,n}}\Big)^{\frac{n}{n-1}} d\Omega \leqslant 1 + \text{mes}(\Omega)\}$$

$$\leqslant C\|u\|_{1,n} ,$$

soit, en prenant u dans la boule unité de $W_n^1(\Omega)$,

$$(1.8) \qquad \|u\|_{\psi} = \sup\{\alpha > 0,\ \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}}\, d\Omega \leqslant 1 + \mathrm{mes}(\Omega)\} \leqslant C,$$

ce qui montre que le maximum de α dans (T'_n) est la constante de Sobolev du plongement de $W^1_n(\Omega)$ dans $L_\psi(\Omega)$.

Il n'en va pas de même pour la constante β dans $(\mathcal{D}_n)$ puisque la fonctionnelle $u \mapsto \int_\Omega e^{|u|}\, d\Omega$ n'est manifestement pas une norme. Néanmoins il est intéressant de noter, en ce qui la concerne, les propriétés qui suivent.

Il résulte de $(\mathcal{D}_n)$ et (1.8) que nous pouvons écrire

$$\mathrm{Log} \int_\Omega e^{|u|}\, d\Omega \leqslant \beta \|\nabla u\|^n_{L_n} + \mathrm{Log}(1 + \mathrm{mes}(\Omega)).$$

Soit B la fonctionnelle définie sur $W^1_n(\Omega)$ à valeurs dans $[0,+\infty[$, par :

$$B(u) = \mathrm{Log}\, \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega e^{|u|}\, d\Omega\ ,$$

où $|\Omega| = \mathrm{mes}(\Omega)$.

Puisque

$$B(u+v) \leqslant \mathrm{Log}\, \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega e^{|u|+|v|}\, d\Omega\ ,$$

nous avons, en utilisant l'inégalité de Hölder (H_2) ;

$$\text{(i)} \quad B(u+v) \leqslant \mathrm{Log}\, \frac{1}{|\Omega|} \Big(\int_\Omega e^{2|u|} d\Omega\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega e^{2|v|} d\Omega\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(B(2u)+B(2v))$$

de même, pour tout λ, $0 < \lambda \leqslant 1$, l'inégalité $(H_{\frac{1}{\lambda}})$ donne

$$\text{(ii)} \quad B(\lambda u) = \mathrm{Log}\, \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega e^{\lambda|u|} d\Omega \leqslant \mathrm{Log}\Big(\int_\Omega e^{|u|} d\Omega\Big)^{\lambda} |\Omega|^{-\lambda} = \lambda\, B(u).$$

1.9. C'est sous sa forme $(\mathcal{D}_n)$ que l'estimée de Trudinger a connu jusqu'à présent dans la littérature ses plus nombreuses applications. Comme nous le verrons dans les sections suivantes, on démontre qu'il existe des valeurs critiques pour les constantes α et β. Nous montrerons quel lien existe entre elles.

II.2. *Formes optimales de l'estimée de Trudinger sur un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Au vu de l'expression (T'_n) de l'estimée de Trudinger il est naturel de se demander s'il existe une valeur optimale α_n de α telle que (T'_n) soit vraie pour $\alpha \leq \alpha_n$ et fausse pour $\alpha > \alpha_n$.

Dans ce sens, on a le résultat suivant de J. Moser :

Théorème II.2.1. [MR1, th. 1]. Il existe une constante $C_1(n)$ ne dépendant que de n telle que dans l'espace $\overset{o}{W}{}^1_n(\Omega)$

$$\sup_{|u|_{1,n} \leq 1} \int_\Omega e^{\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}} d\Omega \leq C_1(n)\, m_n(\Omega) \tag{2.2}$$

si et seulement si $\alpha \leq \alpha_n \equiv n(\omega_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$, où ω_{n-1} est le volume de la sphère (S^{n-1}, c) donné par

$$\omega_{2n} = 2\,\frac{(2\pi)^n}{1.3.\dots.(2n-1)}\ , \quad \omega_{2n+1} = 2\,\frac{\pi^{n+1}}{n!}\ . \tag{2.3}$$

Preuve : J. Moser établit ce théorème en se ramenant d'abord à une variable par le procédé de symétrisation sphérique décrit au chapitre I. Il prouve ensuite qu'il existe une constante $C_o(n)$ telle que pour toute fonction f de classe $C^1[0,+\infty[$, nulle à l'origine et à dérivée non négative dans la boule unité de $L_n([0,+\infty[)$, on a

$$(M) \qquad \int_0^\infty e^{\eta f^{\frac{n}{n-1}}(t)-t}\, dt \leqslant C_2(n) \qquad \text{si} \quad \eta \leqslant 1$$

cette estimée n'ayant pas lieu si $\eta > 1$. C'est ce que nous nous proposons de faire aussi mais en simplifiant la preuve donnée par J. Moser.

Rappelons que pour la symétrisée u^* d'une fonction u, toutes les fonctionnelles ne faisant intervenir que la valeur de la fonction sont conservées et que

$$|u^*|_{1,n} \leqslant |u|_{1,n}$$

où $| \; |_{1,n}$ désigne la semi-norme W_n^1 définie en (0.7) par $|u|_{1,n} = (\int_M g^{-1}(du,du)^{\frac{n}{2}} v_g)^{\frac{1}{n}}$. (Cette semi-norme ne dépend que de la classe conforme de la métrique). Pour le problème de Dirichlet la fonction u s'annule sur le bord du domaine Ω où elle est définie. La fonction symétrisée u^* s'annule sur le bord de la boule D de même volume que Ω (symétrisée de Ω). Soit R le rayon de cette boule.

Au lieu de travailler avec des fonctions définies sur l'intervalle $[0,R]$, il sera commode de faire le changement de variable

$$e^{-t} = \frac{\rho^n}{R^n}$$

qui nous fait étudier les fonctions définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On remarque alors que l'application $u^* \to \psi$ définie par

$$\psi(t) = n^{\frac{n-1}{n}} \omega_{n-1}^{\frac{1}{n}} \; u^*(\rho)$$

est une isométrie de $W_n^1([0,R])$ sur $L_n([0,+\infty[)$ car

$$\int_D |du^*|^n \, d\Omega = \omega_{n-1} \int_0^R |u^{*\prime}(\rho)|^n \rho^{n-1} \, d\rho = \int_0^{+\infty} |\psi'(t)|^n \, dt$$

puisque $-\, e^{-t}\, dt = n \dfrac{\rho^{n-1}}{R^n}\, d\rho$ et que $\psi'(t)dt = n^{\frac{n-1}{n}}\, \omega_{n-1}^{\frac{1}{n}}\, u^{*}{}'(\rho)\, d\rho$.

Introduisons la constante $a = \dfrac{\alpha}{\alpha_n}$, avec $\alpha_n = n\, \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$. Alors la fonction ψ vérifie : $\psi : [0,+\infty[\,\to \mathbb{R}$.

i) $\psi(0) = 0$

ii) ψ est croissante

iii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\psi'(t)|^n dt \leqslant 1$

iv) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{a\psi^{\nu}(t)-t}\, dt = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} e^{\alpha u(x)}\, d\Omega$

avec $|\Omega| = \mathrm{mes}(\Omega)$ et $\nu = \dfrac{n}{n-1}$ (de sorte que $\dfrac{1}{\nu} + \dfrac{1}{n} = 1$).

Le théorème sera donc démontré si nous prouvons qu'il existe une constante $C_o(n)$ indépendante de ψ telle que

$$(**) \qquad \int_0^{+\infty} e^{a\psi^{\nu}(t)-t}\, dt \leqslant C_o$$

<u>pour tout</u> $a \leqslant 1$, <u>l'estimée étant fausse si</u> $a > 1$.

L'ingrédient de base de la preuve sera l'inégalité de Hölder sous la forme : pour tout t_1 et t_2 $(t_1 < t_2)$.

$$(H_n) \qquad \psi(t_2)-\psi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \psi(\tau)d\tau \leqslant (t_2-t_1)^{\frac{1}{\nu}} \left(\int_{t_1}^{t_2} (\psi'(\tau))^n d\tau\right)^{\frac{1}{n}} .$$

Nous en trouvons une première application dans le cas où $a < 1$. L'existence de la constante C_o est pratiquement triviale dans ce cas. En effet en appliquant à ψ l'inégalité (H_n) pour $t_2 = t$ et $t_1 = 0$, nous obtenons $\psi(t) \leqslant t^{\frac{1}{\nu}} (\int (\psi'(\tau))^n \, d\tau)^{\frac{1}{n}}$, soit, d'après la propriété iii) de ψ

$$\psi(t) \leqslant t^{\frac{1}{\nu}} .$$

Par suite si $a < 1$

$$\int_0^{+\infty} e^{a\psi(t)^\nu - t} \, dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{(a-1)t} \, dt = \frac{1}{1-a} .$$

Remarquons que toujours en utilisant (H_n) on peut montrer que pour toute fonction ψ vérifiant i), ii) et iii) les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{a\psi^\nu(t)-t} \, dt$ sont finies (la difficulté dans l'estimée (**) vient donc de l'uniformité de C_o par rapport à ψ). En effet comme $\int_0^{+\infty} (\psi'(t))^n dt < +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe t_ε tel que

$$\int_{t_\varepsilon}^{+\infty} (\psi'(t))^n \, dt < \varepsilon .$$

Ecrivons (H_n) pour $t_1 = t_\varepsilon$ et $t_2 = t$:

$$\psi(t) \leqslant \psi(t_\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{1}{n}} (t - t_\varepsilon)^{\frac{1}{\nu}} ,$$

soit encore

$$\psi(t) \, t^{-\frac{1}{\nu}} \leqslant \psi(t_\varepsilon) \, t^{-\frac{1}{\nu}} + \varepsilon^{\frac{1}{n}} \left(\frac{t - t_\varepsilon}{t}\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

d'où

$$\lim_{t \to +\infty} \psi(t) \, t^{-\frac{1}{\nu}} = 0.$$

Par suite pour t assez grand $a\psi(t)^{\nu} \leqslant \frac{1}{2}t$ par exemple et les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{a\psi(t)^{\nu}-t}\,dt$ existent toujours.

Cependant, pour $a > 1$, si nous posons $\phi_1(s) = \min(s,1)$, puis $\phi_{t_1}(t) = t_1^{\frac{1}{\nu}}\,\phi_1(\frac{t}{t_1})$, alors ϕ_{t_1} vérifie i), ii) et iii), mais

$$\int_0^{+\infty} e^{a\phi_{t_1}(t)^{\nu}-t}\,dt \geqslant \int_{t_1}^{+\infty} e^{at_1-t}\,dt = e^{(a-1)t_1}$$

qui tend vers l'infini lorsque t_1 tend vers $+\infty$.

Dans la preuve du cas-limite $a = 1$, ces fonctions spéciales, linéaires puis constantes, jouent un rôle particulier. En effet, introduisons (avec J. Moser) pour toute fonction ψ vérifiant i), ii) et iii) le nombre δ_ψ défini par

$$1 - \delta_\psi = \max_t\, t^{-(n-1)}\,\psi(t)^n \equiv t_\psi^{-(n-1)}\,\psi(t_\psi)^n.$$

Nous remarquons alors que $0 \leqslant \delta_\psi < 1$. (Nous avons vu que $\psi(t) \leqslant t^{1/\nu}$, d'où $\psi^n(t)\,t^{-(n-1)} \leqslant 1$). De plus $\delta_\psi = 0$ ne se produit que si $\psi = \phi_{t_1}$ car sur $[t_\psi,+\infty[$, on doit avoir $\int_{t_\psi}^{+\infty} (\psi'(t))^n dt = 0$, donc constante et sur $[0,t_\psi]$, l'égalité dans l'inégalité de Hölder entraîne que ψ est linéaire. La remarque cruciale (due à J. Moser) permettant de conclure est qu'il est possible de borner l'intégrale

$$I_n(\psi) = \int_0^{+\infty} e^{\psi^{\nu}(t)-t}\,dt$$

en fonction de δ_ψ.

En effet, par définition de δ_ψ, pour tout t dans $[0,+\infty[$,

$$\psi^{\nu}(t) \leqslant (1-\delta_\psi)^{\nu-1}\,t$$

de telle sorte que

$$\psi^{\nu}(t)-t \leqslant ((1-\delta_{\psi})^{\nu-1}-1)t \leqslant -(\nu-1)\delta_{\psi}\, t$$

par concavité pour $1 \leqslant \nu \leqslant 2$ de la fonction $x \to (1-x)^{\nu-1}$ sur $[0,1]$;

par suite

$$I_n(\psi) = \int_0^{+\infty} e^{\psi^{\nu}(t)-t} dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(\nu-1)\delta_{\psi} t} dt = \frac{1}{(\nu-1)\delta_{\psi}} .$$

Ainsi pour toute fonction ψ vérifiant i), ii) et iii) et telle que $0 < \delta_o \leqslant \delta_{\psi}$, l'intégrale $I_n(\psi)$ est bornée par une constante ne dépendant que de n et δ_o. On peut remarquer que $0 < \delta_o \leqslant \delta_{\psi}$ peut s'interpréter comme le fait que ψ est "assez loin" d'une fonction de la famille ϕ_{t_1} pour laquelle $\delta_{\phi_1} = 0$.

Pour terminer la preuve, il nous reste à montrer que toute fonction ψ vérifiant i), ii) et iii) telle que $\delta_{\psi} \leqslant \delta_o$ est au contraire suffisamment "proche" de la fonction $\phi_{t_{\psi}}$ pour que l'intégrale $I_n(\psi)$ soit uniformément bornée comme l'est celle des fonctions $\phi_{t_{\psi}}$.

Pour cela (toujours en suivant J. Moser) normalisons l'étude de l'intégrale $I_n(\psi)$ en posant

$$s = t_{\psi}^{-1}\, t \quad \text{et} \quad \phi(s) = t_{\psi}^{-\frac{1}{\nu}}\, \psi(t_{\psi} s).$$

Nous obtenons

$$I_n(\psi) = t_{\psi} \int_0^{+\infty} e^{t_{\psi}(\phi^{\nu}(s)-s)} ds$$

que nous considérons comme une famille d'intégrales

$$I_n^{\lambda}(\phi) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{\lambda(\phi^{\nu}(s)-s)} ds .$$

De plus $1 - \delta_{\psi} = 1 - \delta_{\phi} = \phi(1)^n \quad \int_0^{+\infty} (\phi'(s))^n ds = \int_0^{+\infty} (\psi'(t))^n dt \leqslant 1$,

donc ϕ vérifie i), ii) et iii). Enfin on a évidemment $t_{\phi} = 1$.

Montrons maintenant que les intégrales $I_n^{\lambda}(\phi)$ sont bornées en les découpant en intégrales sur plusieurs sous-intervalles de $[0,+\infty[$.

Nous allons d'abord montrer que sur $[0,1]$ ϕ ne peut être beaucoup plus grande que la fonction ϕ_1 (sur $[0,1]$, $\phi_1(s) = s$) au sens suivant "pour (une amélioration en dimension 2 voir annexe B) :

<u>Lemme</u> *II.2.4.* <u>Pour tout</u> s <u>dans</u> $[0,1]$, <u>on a</u>

$$\phi(s) \leqslant s + (2\,\delta_{\phi})^{\frac{1}{n}}\, s^{\frac{1}{\nu}} .$$

<u>Preuve</u> : Fixons un point s_o dans $[0,1]$. Par application de l'inégalité de Hölder (H_n) sur $[0,s_o]$ à $\phi(s_o) = \int_0^{s_o} \phi'(s)ds$ et sur $[s_o,1]$ à $\phi(1) - \phi(s_o) = \int_{s_o}^1 \phi'(s)ds$, nous avons successivement

$$\phi(s_o) \leqslant (s_o)^{\frac{1}{\nu}} \left(\int_0^{s_o} (\phi'(s))^n\, ds\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\phi(1) - \phi(s_o) \leqslant (1-s_o)^{\frac{1}{\nu}} \left(\int_{s_o}^1 (\phi'(s))^n\, ds\right)^{\frac{1}{n}} .$$

Il en résulte, par isolement des intégrales :

$$\phi(s_o)^n\, s_o^{1-n} + (\phi(1)-\phi(s_o))^n (1-s_o)^{1-n} \leqslant \int_0^1 (\phi'(s))^n\, ds \leqslant 1 .$$

Puisque ϕ est une fonction croissante, la fonction $\mapsto \phi(s)(\phi(1))^{-1}$ définie sur $[0,1]$ prend ses valeurs dans $[0,1]$. Considérons alors les deux variables $x = \phi(s)(\phi(1))^{-1}$ et $y = s$ et la fonction

f_n définie sur le carré ouvert $[0,1] \times]0,1[$ par

$$f_n(x,y) = x^n y^{1-n} + (1-x)^n (1-y)^{1-n} .$$

Nous sommes amenés à établir une relation entre les coordonnées x et y des points tels que :

$$f_n(x,y) \leqslant (1-\delta_\phi)^{-1}.$$

On a $f_n(x,y) \geqslant 1$ (on le vérifie par exemple en faisant $x > y$ et $x < y$ dans la définition de f_n) et la valeur minimum est prise le long de la diagonale $y = x$.

Supposons que $2\delta_\phi \leqslant 1$. Alors $(1-\delta_\phi)^{-1}$ est inférieur ou égal à $1+2\delta_\phi$. Par suite

. si $x \leqslant y$, l'estimée annoncée est démontrée.

. si $x > y$, en posant $x = y + (x-y)$, nous sommes conduits à étudier l'ensemble des (x,y) tels que

$$(1+ \frac{x-y}{y})^n y + (1- \frac{x-y}{1-y})^n (1-y) \leqslant 1 + 2\delta_\phi .$$

En remarquant que pour tout $z \geqslant 0$,

$$1 + nz + z^n \leqslant (1+z)^n \qquad \text{et} \qquad 1-nz \leqslant |1-z|^n,$$

nous obtenons

$$(x-y)^n y^{1-n} \leqslant 2\delta_\phi ,$$

d'où

$$\phi(s) \leqslant x \leqslant s + (2\delta_\phi)^{\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{\nu}} \quad ■$$

En utilisant avec J. Moser le fait que la fonction $x \mapsto \frac{(1+x)^q-1}{x+x^q}$, avec $q \geq 1$ est bornée sur $[0,+\infty[$, on obtient une constante C ne dépendant que de q telle que pour $z \geq 0$ et $t \geq 0$

$$(*) \qquad (z+t)^q \leq z^q + C(z^{q-1}\, t+t^q).$$

Nous avons alors sur l'intervalle $]0,\frac{1}{2}]$ à l'aide du lemme II.2.4 et en posant $(2\delta_\phi)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon$

$$\phi(s)^\nu - s \leq (s+\varepsilon s^{\frac{1}{\nu}})^\nu - s$$

$$\leq s(s^{\nu-1}+2C\varepsilon-1)$$

puisque $\nu + \frac{1}{\nu} > 2$ et (s,δ_ϕ) appartient à $[0,\frac{1}{2}] \times]0,\frac{1}{2}]$.

En choisissant δ_ϕ assez petit, on a :

$$\phi(s)^\nu - s \leq s((\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{n-1}} - 1) \quad .$$

Dans l'intervalle $[\frac{1}{2},1-\varepsilon[$, en appliquant l'inégalité de Schwarz à $\phi(s) - \phi(1)s = \int_s^1 (\phi'(\tau) - \phi(1)\tau)d\tau$, on obtient l'estimée donnée par J. Moser

$$\phi(s)^\nu \leq s + C_1(\delta_\phi(1-s))^{\frac{1}{2}} \quad .$$

D'où il suit, d'après (*) et J. Moser

$$\phi(s)^\nu - s \leq -\frac{1}{4(n-1)}(1-s) ,$$

en utilisant de façon essentielle le fait que $\nu \leq 2$, $s \geq \frac{1}{2}$ et, δ_ϕ assez petit.

Dans les intervalles autour de 1 les estimées données par J. Moser s'appliquent :

$$\phi(s)^\nu - s \leq -(\nu-1)\delta_\phi s$$

et en choisissant δ_ϕ assez petit, on utilise le fait que $x\, e^{-x} \leqslant e^{-1}$ (pour $x \geqslant 0$ pour conclure).

Sur l'intervalle $[1+\varepsilon, +\infty[$, par l'inégalité de Hölder (H_n),

$$\phi(s) \leqslant \phi(1) + (s-1)^{\frac{1}{\nu}} \left(\int_1^{+\infty} (\phi'(s))^n\, ds\right)^{\frac{1}{n}} \quad ;$$

mais $\int_1^{+\infty} (\phi'(s))^n ds \leqslant \delta_\phi$ puisque d'après les définitions de ϕ, de δ_ϕ et par application de (H_n) sur $[0,1]$ à $\phi(1) - \phi(0)$,

$$\int_1^{+\infty} (\phi'(s))^n\, ds \leqslant 1 - \int_0^1 (\phi'(s))^n\, ds \leqslant 1 - (\phi(1))^n = \delta_\phi \; .$$

Nous pouvons donc prendre, pour $s \geqslant 1$,

$$\phi(s) \leqslant 1 + \delta_\phi^{1/n}(s-1)^{1/\nu} \; .$$

Il suit que sur l'intervalle $[1+\varepsilon, +\infty[$, on a

$$\phi(s)^\nu - s \leqslant (1+\delta_\phi^{1/n}(s-1)^{1/\nu})^\nu - s.$$

Or en utilisant (*) on obtient une constante C ne dépendant que de n telle que

$$\begin{aligned}\phi(s)^\nu - s &\leqslant 1-s + C(\delta_\phi^{\frac{1}{n}}(s-1)^{\frac{1}{\nu}} + \delta_\phi^{\frac{1}{n}}(s-1)) \\ &\leqslant (s-1)\ \left[- \frac{1}{2} + C\left(\frac{\delta_\phi}{s-1}\right)^{\frac{1}{n}}\right] ,\end{aligned}$$

si on choisit δ_ϕ assez petit. En prenant $s-1 > (4C)^n \delta_\phi$, on obtient

$$\phi(s)^\nu - s \leqslant -\frac{1}{4}(s-1) \quad ,$$

ce qui termine la preuve ∎

De l'estimée (2.2) du théorème, on déduit la forme optimale de $(\mathcal{D}_n)$ suivante que l'on pourra comparer au théorème 1 de [CR1].

Proposition II.2.5. Il existe une constante $M_1(n,\Omega)$ ne dépendant que de n et de Ω telle que pour toute fonction u appartenant à $W_n^1(\Omega)$ on ait

(2.6)
$$\int_\Omega e^{|u|} d\Omega \leqslant M_1(n,\Omega)\, e^{\beta \|\nabla u\|^n_{L_n}}$$

pour toute constante $\beta \geqslant \beta_n \equiv (n-1)^{n-1}\, n^{-2n+1}\, \omega_{n-1}^{-1}$.

2.7. Cette proposition contient la formule (1.6). L'élément nouveau qu'elle introduit est la valeur critique β_n de β dans $(\mathcal{D}_n)$.

Il existe entre cette constante β_n et la constante α_n de l'estimée (2.2) une relation de dualité qui précise le lien entre (2.2) et (2.6) et que nous allons donner maintenant. Pour cela posons (comme dans la preuve du corollaire II.1.6) pour tout nombre réel $a_n > 0$,

(2.8)
$$b_n \equiv \max_{t \geqslant 0} (t^{n-1} - a_n t^n) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n a_n}\right)^{n-1} \quad .$$

De même si b_n est une constante positive donnée, nous définissons a_n par

(2.9)
$$a_n \equiv \max_{t \geqslant 0} (t - b_n t^n) \quad \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n b_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad .$$

Alors nous savons d'après la preuve du corollaire II.1.6 que si u appartient à $\overset{o}{W}{}^1_n(\Omega)$, la fonction $w = u\|\nabla u\|^{-1}_{L_n}$ appartient à la boule unité de $\overset{o}{W}{}^1_n(\Omega)$ pour la semi-norme $|\ |_{1,n}$ et que

$$\int_\Omega e^u \, d\Omega \leqslant e^{b_n \|\nabla u\|^n_{L_n}} \int_\Omega e^{a_n |w|^{\frac{n}{n-1}}} d\Omega \, .$$

En appliquant le théorème II.2.1 à l'intégrale dans le membre de droite nous obtenons (2.6) comme une conséquence de l'estimée (2.2) pourvu que $a_n \leqslant \alpha_n$. Or d'après les définitions (2.8) ou (2.9) ci-dessus nous avons entre a_n et b_n la relation de dualité :

$$(2.10) \qquad a_n \leqslant \alpha_n \Longleftrightarrow b_n \geqslant \beta_n \, .$$

Ce qui achève la preuve de la proposition avec $M_1(n,\Omega) \geqslant C_1(n)\,\mathrm{mes}(\Omega)$, où $C_1(n)$ est la constante dans le second membre de (2.2).

2.11. Pour les boules B_R de $\mathbb{R}^n$, on montre qu'il n'existe pas de constante M, telle que l'estimée (2.6) soit vérifiée si $\beta < \beta_n$. Une façon de le voir est de considérer [cf CR1] la suite de fonctions (f_m) dans $\overset{o}{W}{}^1_n(B_r)$ ne dépendant en chaque point x que de la distance r de ce point au centre de la boule et qui est définie par

$$f_m = \mathrm{Log}\left(\frac{\frac{1}{m} + R^\nu}{\frac{1}{m} + r^\nu}\right)^n \quad , \quad \text{où} \quad \nu = \frac{n}{n-1} \quad .$$

On vérifie alors que les expressions

$$\int_{B_R} e^{f_m} \, d\Omega \quad \text{et} \quad e^{\beta \|\nabla f_m\|^n_{L_n}}$$

sont respectivement de l'ordre de m et m^{β/β_n} pour m assez grand, ce qui suffit.

II.3. *Estimées de Trudinger sur la sphère* (S^n, c)

A l'aide de la symétrisation sphérique et de l'invariance conforme de la semi-norme $|\ |_{1,n}$ nous pouvons étendre à la sphère standard (S^n, c) le théorème II.2.1 en le théorème suivant dû à J. Moser pour $n = 2$. Il améliore [CR1, th.3] (en ce sens qu'il montre que la valeur optimale α_{S^n} de α dans (T_n) est atteinte sur (S^n, c)) ainsi que nos précédents résultats dans [E.L].

Théorème II.3.1. Il existe une constante $C_2(n)$ telle que, pour toute fonction u appartenant à $W^1_n(S^n)$ de moyenne nulle et $\|\nabla u\|_{L_n} \leqslant 1$, et pour toute constante $\alpha \leqslant \alpha_{S^n}$ on ait :

$$\int_{S^n} e^{\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}} v_c \leqslant C_2(n)\, \omega_n, \tag{3.2}$$

où $\alpha_{S^n} \equiv n\, \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$. La constante $C_2(n)$ ne dépend que de n et α_{S^n} est la plus grande valeur pour laquelle une telle constante existe.

Avant de prouver ce théorème, faisons les remarques suivantes :

3.3. *Remarques*

1) La condition de normalisation de "moyenne nulle" n'est pas invariante par changement conforme de métrique sur S^n. Nous l'avons cependant retenue parce qu'elle permet l'utilisation de la semi-norme $u \to |u|_{1,n} = \|\nabla u\|_{L_n}$ invariante conforme à la place de la norme $\|\cdot\|_{1,n}$. On opère ainsi dans $W^1_n(S^n)$ dans des conditions similaires à celles que nous avons rencontrées précédemment sur $\overset{o}{W}{}^1_n(\Omega)$, Ω ouvert borné dans R^n.

2) Le théorème dit que la valeur critique α_{S^n} de α sur (S^n,c) est égale à $\alpha_n = n\,\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$ celle d'un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ d'après le théorème II.2.1.

3) Pour $\alpha \leqslant \alpha_{S^n}$, la preuve consistera à nous ramener au cas des ouverts euclidiens envisagé dans le théorème II.2.1. Nous avons tout de même trouvé intéressant de donner une preuve plus facile du cas $\alpha < \alpha_{S^n}$ basée sur le lemme suivant qui permet également de construire un contre-exemple pour montrer que l'estimée (3.2) n'est plus vraie pour $\alpha > \alpha_{S^n}$. Mais malheureusement ce lemme ne couvre pas le cas-limite crucial $\alpha = \alpha_{S^n}$.

Lemme II.3.4. Considérons τ_o, K' et K des nombres réels positifs. Si χ est une fonction réelle positive vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)dt = 1 \quad \text{et} \quad K'\, e^{-\tau_o|t|} \leqslant \chi(t) \leqslant e^{-\tau_o|t|} ,$$

alors pour toute entier $n \geqslant 2$ et pour tout $a < \tau_o$, il existe une constante C_o ne dépendant que de K et τ_o telle que pour toute fonction réelle ψ dérivable p.p. vérifiant

$$\text{i)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi'(t)|^n dt \leqslant 1$$

$$\text{ii)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,\chi(t) = 0$$

on ait l'estimée

$$(**) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)\, e^{a|\psi(t)|^{\frac{n}{n-1}}} dt \leqslant C_o .$$

Une telle estimée n'existe pas pour $\tau_o < a$.

La preuve de ce lemme est plutôt technique : nous la donnerons un peu plus loin. Voici comment le théorème s'en déduit dans le cas $\alpha \neq \alpha_{S^n}$.

<u>Preuve du théorème II.3.1.</u> Observons que si l'estimée (3.2) est vraie pour une suite (u_m) de fonctions telles pour tout m que $\bar{u}_m = 0$ et $\|\nabla u_m\|_{L_n} = |u_m|_{1,n} \leq 1$ et qui converge dans $W_n^1(S^n)$ vers u, elle l'est pour la fonction limite u.

En effet on a $|u|_{1,n} \leq 1$ à cause de l'équivalence des normes $|\ |_{1,n}$ et $\|\ \|_{1,n}$ sur le sous-espace de $W_n^1(S^n)$ formé des fonctions de moyenne nulle et il résulte du §.0.6 du chapitre 0 que $\bar{u} = 0$. De plus la suite (u_m) convergeant vers u dans $W_n^1(S^n)$ converge dans $L_n(S^n)$ vers u. Elle contient donc une sous-suite que nous notons encore (u_m) qui converge simplement vers u presque partout (p.p.) [RN, th. 3.12]. La suite des fonctions positives $\left(e^{\alpha_{S^m}|u_m|^{\frac{n}{n-1}}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers $e^{\alpha_{S^n}|u|^{\frac{1}{n-1}}}$ p.p. Il suit du lemme de Fatou que

$$\int_{S^n} \exp(\alpha_{S^n}|u|^{\frac{n}{n-1}})\, v_c \leq \liminf_{m\to+\infty} \int_{S^n} \exp(\alpha_{S^n}|u_m|^{\frac{n}{n-1}}) v_c \leq C_2(n)\omega_n \,.$$

Pour prouver le théorème, il nous suffit donc de le faire sur une partie dense de $W_n^1(S^n)$. L'algèbre $\mathcal{F}S^n$ des fonctions régulières sur S^n est dense dans $W_n^1(S^n)$.

Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}S^n$ et de support D. La fonction f peut être approchée en norme $\|\ \|_{1,n}$ par une suite (f_m) de fonctions continues sur S^n, de classe C^∞ à l'intérieur de leur support (D_m) contenu dans D dont le bord (∂D_m) est une sous-variété C^∞ de dimension $n-1$ et qui n'ont sur leur support qu'un nombre fini de points critiques non dégénérés.

A chaque fonction f_m nous pouvons associer sa symétrisée sphérique f_m^* définie sur D_m^*. Comme pour toute fonction borélienne réelle G, nous avons

$$\int_{D_m^*} (G \circ f_m^*) v_c = \int_{D_m} (G \circ f_n) v_c \quad \text{et que} \quad |f_m^*|_{1,n} \leqslant |f|_{1,n} \quad ,$$

nous aurons, si $\bar{f}_m = 0$ et $|f_m|_{1,n} \leqslant 1$, $\bar{f}_m^* = 0$ et $|f_m^*|_{1,n} \leqslant 1$ et

$$\int_{S^n} e^{\alpha |f_m^*|^{\frac{n}{n-1}}} v_c = \int_{S^n} e^{\alpha |f_m|^{\frac{n}{n-1}}} v_c \; .$$

Ainsi, si le théorème est démontré pour chaque fonction f_m^*, il le sera pour la fonction f_m dont elle est la symétrisée sphérique. Il sera donc démontré par passage à la limite pour la fonction $f = \lim_{m \to +\infty} f_m$ (au sens de la topologie de $W_n^1(S^n)$).

Il nous suffit donc de prouver le théorème pour une fonction u dans $W_n^1(S^n)$ qui, comme une fonction symétrisée f_m^* ne dépend que de la distance au pôle Nord et est dérivable presque partout.

Nous considérons le plongement de la variété $B : S^{n-1} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $S^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ défini par

$$\psi : (x,\theta) \to (x \cos \theta, \sin \theta).$$

Pour toute fonction u dans $W_n^1(S^n)$ qui ne dépend que de θ, on a

$$|u|_{1,n} = \|\nabla u\|_{L_n}^n = \int_B |\nabla(u \circ \psi)|^n \, \psi^*(v_c)$$

$$= \int_{S^{n-1}} v_c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\frac{d}{d\theta} (u \circ \psi)\right|^n \cos^{n-1}\theta \, d\theta$$

et

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{\omega_n} \int_{S^n} u \, v_c = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(\theta) \cos^{n-1}\theta \, d\theta$$

Opérons le changement de variables

$$e^{\frac{t}{p_n}} = \mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{avec} \quad p_n \equiv \left(\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} .$$

L'invariance conforme de la semi-norme $| \ |_{1,n}$ se traduit par

$$|u|_{1,n} = \|\nabla u\|_{L_n}^n = \omega_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\frac{du}{dt}\right|^n \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^n \cos^{n-1}\theta \, d\theta$$

$$= \omega_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\frac{du}{dt}\right|^n \left(\frac{p_n}{\cos\theta}\right)^n \cos^{n-1}\theta \, d\theta$$

$$= \omega_n \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{du}{dt}\right|^n dt.$$

Pour ne pas alourdir les notations, nous avons abusivement désigné par la même lettre u une fonction définie sur S^n dépendant de θ et une fonction de la variable réelle $t(\theta)$ introduite par notre changement de variable !

A l'aide des fonctions de t définies par

$$\psi(t) = \omega_n^{\frac{1}{n}} u(\theta)$$

$$\chi(t) = \left(\frac{1}{p_n \operatorname{ch} \frac{t}{p_n}}\right)^n$$

on obtient

$$|u|_{1,n} = \|\nabla u\|^n_{L_n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{d\psi}{dt}\right|^n dt$$

tandis que l'intégration de ψ contre la mesure $\chi(t)dt$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\ \chi(t)dt = p_n^{1-n}\ \omega_n^{\frac{1}{n}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{2\operatorname{tg}(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}}\right)^n \cos\theta)^{-1}\ u(\theta)d\theta$$

$$= \omega_n^{\frac{1}{n}-1}\ \omega_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(\theta)\ \cos^{n-1}\theta\ d\theta = \omega_n^{\frac{1}{n}}\ \bar{u}\ .$$

Par ailleurs, on a

$$p_n^{-n}\ e^{-\frac{n}{p_n}|t|} \leqslant \chi(t) \leqslant (2p_n^{-1})^n\ e^{-\frac{n}{p_n}|t|}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)dt = p_n^{1-n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{2\operatorname{tg}(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\right)^n (\cos\theta)^{-1}\ d\theta.$$

$$= \omega_n^{-1}\ \omega_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta\, d\theta = \omega_n^{-1} \int_{S^n} v_c = 1.$$

Donc si u dérivable p.p. est de moyenne nulle et se trouve dans la boule unité pour la semi-norme $|\ |_{1,n}$, il existe, d'après le lemme II.3.4 une constante C_o dépendant de n telle que pour tout $a < n\,p_n^{-1}$, on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)\ e^{a|\psi(t)|^{\frac{n}{n-1}}}\ dt \leqslant C_o,$$

cette estimée n'étant pas vraie pour $a > n\,p_n^{-1}$.

Posons $a = \alpha\,\omega_n^{-\frac{1}{n-1}}$ et remplaçons dans l'intégrale à gauche ψ par $\omega_n^{\frac{1}{n}}\,u$. Nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}}\ \chi\ dt = p_n^{1-n}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}}\ \cos^{n-1}\theta\ d\theta$$

$$= \omega_n^{-1}\int_{S^n} e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}}\ v_c \leqslant C_o(\frac{n}{p_n})$$

d'où

$$\int_{S^n} e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}} \leqslant C_2(n)\omega_n \quad \text{avec} \quad \alpha < p_n^{-1}\ \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} = n\ \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \equiv \alpha_{S^n} \ .$$

Ceci termine la preuve du théorème pour $\alpha \neq \alpha_{S^n}$ avec $C_2(n) = C_o(\frac{n}{p_n})$.

Pour $\alpha = \alpha_{S^n} = \alpha_n$ (ce qui suit est en fait valide pour $\alpha \leqslant \alpha_{S^n}$). Nous allons modifier légèrement nos précédentes notations pour adopter les suivantes.

Soit (r,θ) un système de coordonnées géodésiques polaires centré au pôle nord $(0 \leqslant r \leqslant \pi$ et $\theta \in S^{n-1})$. L'élément de volume v_c s'écrit alors

$$v_c = (\sin r)^{n-1}\, dr\, d\theta .$$

Puisque la fonction u ne dépend que de r et a une moyenne nulle, elle s'annule le long d'une (n-1)-sphère parallèle de S^n. Soient a la distance de cette sphère au pôle nord, M et M' les deux boules de S^n admettant cette sphère comme bord commun de rayon respectif a et π-a. Nous avons alors

$$\int_{S^n} e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}} v_c = \int_M e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}} v_c + \int_{M'} e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}} v_c \quad ,$$

et évidemment

$$\int_M c^{-1}(du,du)^{\frac{n}{2}} v_c \leqslant 1, \qquad \int_{M'} c^{-1}(du,du)^{\frac{n}{2}} v_c \leqslant 1.$$

Or, si nous notons (B_a, e) une boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$ de rayon a, nous obtenons

$$\int_M e^{\alpha_n|u|^{\nu}} v_c = \omega_{n-1} \int_0^a e^{\alpha_n|u(r)|^{\nu}} (\sin r)^{n-1}\, dr$$

$$\leqslant \omega_{n-1} \int_0^a e^{\alpha_n|u(r)|^{\nu}} r^{n-1} dr = \int_{B_a} e^{\alpha_n|u|^{\nu}} v_c$$

avec $\nu = \frac{n}{n-1}$.

Nous allons montrer que l'intégrale étendue à B_a est bornée.

Par l'invariance conforme de la semi-norme $|\ |_{1,n}$, nous avons

$$|u|_{1,n,B_a} \equiv \int_{B_a} e^{-1}(du,du)^{\frac{n}{2}} v_c \leqslant \int_M c^{-1}(du,du)^{\frac{n}{2}} v_c = |\ |_{1,n,M} \leqslant 1 .$$

(En effet faisons le changement de variable $\rho = 2\mathrm{tg}\,\frac{r}{2}$. Nous obtenons

$$1 \geq \int_M c^{-1}(du,du)^{\frac{n}{2}}\, v_c = \omega_{n-1} \int_0^a |u'(r)|^n \,(\sin r)^{n-1}\, dr$$

$$= \omega_{n-1} \int_0^{2\mathrm{tg}\frac{a}{2}} |u'(\rho)|^n \,\rho^{n-1}\, d\rho$$

$$= \omega_{n-1} \int_0^a |u'(\rho)|^n \,\rho^{n-1}\, d\rho = \int_{B_a} e^{-1}(du,du)^{\frac{n}{2}}\, v_e \quad ;$$

puisque $|u'_r|^n \sin^{n-1} r = |u'|^n \rho^{n-1}(1+\rho^2)^{-1}$ et que $2\mathrm{tg}\,\frac{a}{2} > a$).

Comme u est nulle au bord de B_a, il suit du théorème II.2.1 qu'il existe une constante $C_1(n)$ telle que

$$\int_{B_a} e^{\alpha_n |u|^{\frac{n}{n-1}}}\, v_e \leq C_1(m)\ \mathrm{mes}(B_a).$$

Par suite

$$\int_{S^n} e^{\alpha_n |u|^{\frac{n}{n-1}}}\, v_c \leq C_1(n)(\mathrm{mes}(B_a) + \mathrm{mes}(B_{\pi-a}))$$

$$\leq 2C_1(n)\ \mathrm{mes}(B_\pi) = 2C_1\, \frac{\pi^n}{n+1}\, \omega_n \quad ,$$

et le théorème est ainsi démontré dans le cas $\alpha = \alpha_{S^n} = \alpha_n$ avec $C_2(n) \geq 2C_1(n)\, \frac{\pi^n}{n+1}$, ce qui en achève la preuve ∎

<u>Preuve du lemme II.3.4</u>. Pour $a < \tau_o$, le lemme est assez immédiat. Ecrivons en effet

$$\psi(x) - \psi(y) = \int_y^x |\psi'(t)|^n)^{\frac{1}{n}}$$

i.e.
$$- |x-y|^{1-\frac{1}{n}} \leq \psi(x) - \psi(y) \leq |x-y|^{1-\frac{1}{n}} \quad .$$

En multipliant les trois membres de cette double inégalité par la fonction poids $\chi(y)$ et en intégrant par rapport à y, on a

$$|\varphi(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|^{1-\frac{1}{n}} \chi(y)dy$$

soit, en appliquant l'inégalité (H_n) à l'intégrale à droite

$$|\varphi(x)| \leqslant \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} [(|x-y|\chi(y))^{\frac{n-1}{n}}]^{\frac{n}{n-1}} dy\right\}^{1-\frac{1}{n}} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} [\chi(y)^{\frac{1}{n}}]^{n} dy\right\}^{\frac{1}{n}} .$$

Compte tenu des propriétés de χ, cette inégalité donne

$$|\varphi(x)| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|\chi(y)\, dy\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \left(|x| + \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\chi(y)\, dy\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

et

$$|\varphi(x)|^{\nu} \leqslant |x| + M_o, \qquad \text{avec} \quad \nu = \frac{n}{n-1}$$

où M_o est une constante positive ne dépendant que de K et τ_o.

Par suite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x)\, e^{a|\varphi(x)|^{\frac{n}{n-1}}} dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x)\, e^{a(|x|+M_o)}$$

$$\leqslant K\, e^{\tau_o M_o} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a-\tau_o)|x|} dx \leqslant C_o$$

où C_o dépendant de M_o, a étant strictement inférieur à τ_o.

Pour $a > \tau_o$, il nous suffit comme dans la preuve du théorème II.2.1 d'exhiber une famille à un paramètre (φ_λ) de fonctions vérifiant i) et ii) pour laquelle l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a|\varphi_\lambda(x)|^{\nu}} \chi(x)dx$ n'est pas uniformément majorée par rapport à λ . En fait l'intégrale (**) du lemme existe toujours (*) quel que soit a, la difficulté tient ici encore à l'uniformité de C_o par rapport à ψ). Pour cela nous allons considérer une fonction ψ linéaire puis constante, et construire sur le modèle de ψ la famille (ψ_λ) de manière que le support de chaque fonction ψ_λ s'étale lorsque λ augmente. La borne inférieure de χ assure alors la non convergence uniforme de l'intégrale considérée.

Appelons $\tilde{\phi}_{\frac{1}{2}}$ la fonction impaire telle que

---

(*) Pour chaque fonction ψ vérifiant les hypothèses i) et ii) du lemme l'intégrale $\int_{\infty}^{\infty} e^{a|\psi(x)|^\nu}\chi(x)dx$ est finie quel que soit a (Le cas $a \leqslant 0$ est trivial). En effet il résulte de la convergence de l'intégrale, $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi'(t)|^n dt$, qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une constante positive $M_1(\varepsilon) = M_1$ telle que

$$\int_{|\chi|>M_1} |\psi'(t)|^n \, dt < \varepsilon \, .$$

D'après l'inégalité de Hölder (H_n), nous obtenons pour tout x, $|x| > M_1$

$$|\psi(x)| \leqslant |\psi(\pm M_1)| + (|x-M_1|)^{\frac{1}{\nu}} \; \varepsilon^{1/n}$$

Il suit que $|\psi(x)| \; |x|^{-\frac{1}{\nu}}$ tend vers 0 quand $|x|$ tend vers l'infini : donc il existe une constante M_2 telle que $|x| > M_2$ implique $|\psi(x)|^\nu \leqslant \frac{\tau_o}{2a}|x|$ par exemple, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(x)\,\exp(a|\psi(x)|^{\frac{n}{n-1}})dx \leqslant \int_{|x|\leqslant M_2}\chi(x)\,\exp(a|\psi(x)|^{\frac{n}{n-1}})dx +$$
$$+ K\int_{|x|}\exp(-\frac{\tau_o}{a}|x|)dx < +\infty.$$

$$\tilde{\phi}_{\frac{1}{2}}(x) = \min(x,\tfrac{1}{2}), \qquad \text{pour} \quad x \geqslant 0.$$

Considérons la famille de fonctions $\tilde{\phi}_\lambda$ telles que

$$\tilde{\phi}_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n+1}{n}} \tilde{\phi}_{\frac{1}{2}}(\tfrac{x}{\lambda}) \ ,$$

avec λ nombre réel positif assez grand. Les fonctions $\tilde{\phi}_\lambda$ vérifient i) et ii) comme on peut le vérifier facilement. Cependant

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a|\tilde{\phi}_\lambda(x)|^\nu} \chi(x)dx &= 2\int_0^{+\infty} \chi(x) \exp(a\lambda^{\frac{n+1}{n}\cdot\nu} |\tilde{\phi}_{\frac{1}{2}}(\tfrac{x}{\lambda})|^\nu)dx \\
&= 2\lambda \int_0^{+\infty} \chi(\lambda v) \exp(a\lambda^{\frac{n+1}{n}\cdot\nu} (\tilde{\phi}_{\frac{1}{2}}(v))^\nu)dv \\
&\geqslant 2\lambda \int_0^{+\infty} \chi(\lambda v) \exp(a\lambda^{\frac{n+1}{n}\cdot\nu} \cdot(\tfrac{1}{2})\ )dv \\
&\geqslant 2\,\frac{K'}{\tau_o} \exp(a\cdot(\tfrac{\lambda}{2}^{\frac{n+1}{n}})^\nu - \tau_o\cdot\tfrac{\lambda}{2}) \\
&\geqslant 2\,\frac{K'}{\tau_o} \exp\, \tau_o((\tfrac{\lambda}{2})^{1+\frac{2}{n-1}} - \tfrac{\lambda}{2})
\end{aligned}$$

puisque $K' e^{-\tau_o x} \leqslant \chi(x)$ et que $a > \tau_o$.

Le membre de droite de la dernière inégalité qugmente arbitrairement avec λ et l'intégrale à gauche ne peut donc pas être majorée uniformément par rapport à λ ∎

Comme conséquence du théorème II.3.1 on a le corollaire suivant qui donne la valeur optimale de β dans l'estimée $(\mathcal{D}_n)$ sur la sphère (S^n,c) :

Corollaire II.3.5. (comparer avec [CR1, th.2])

Il existe deux constantes β_{S^n} et $M_2(n)$ ne dépendant que de n telles que pour toute fonction u dans $W_n^1(S^n)$ et pour tout $\beta \geqslant \beta_{S^n}$ on ait

$$\int_{S^n} e^u v_c \leqslant M_2(n) \exp(\beta \|\nabla u\|_{L_n}^n + \omega_n^{-1} \|u\|_{L_1}). \tag{3.6}$$

Pour le voir, il suffit encore une fois d'appliquer le théorème II.3.1 à la fonction w définie par

$$u = \bar{u} + w\|\nabla u\|_{L_n} .$$

En faisant $t = |w|^{\frac{1}{n-1}} \|\nabla u\|_{L_n}^{-1}$ dans les inégalités $0 \leqslant t \leqslant a_n t^n + b_n$ où a_n et b_n sont deux constantes définies par (2.8) et (2.9), on obtient

$$|u| - |\bar{u}| \leqslant |w| \ . \ \|\nabla u\|_{L_n}^{-1} \leqslant a_n\, w^{\frac{n}{n-1}} + b_n \|\nabla u\|_{L_n}^n ,$$

qui implique

$$\int_{S^n} e^{|u|} v_c \leqslant \exp(|\bar{u}| + b_n \|\nabla u\|_{L_n}^n) \int_{S^n} e^{a_n |w|^{\frac{n}{n-1}}} v_c .$$

Comme w est dans la boule unité de $W_n^1(S^n)$ et a une moyenne nulle, il suit du théorème II.3.1 que

$$\int_{S^n} e^u v_c \leqslant C_2(n)\omega_n \exp(|\bar{u}| + b_n \|\nabla\|_{L_n}^n) \leqslant C_2(n)\omega_n \exp(\omega_n^{-1} \|u\|_{L_1} + b_n \|\nabla u\|_{L_n}^n)$$

pourvu que $a_n \leqslant \alpha_{S^n}$, ce qui équivaut à $b_n \geqslant \beta_n$. Il suffit alors de poser $M_2(n) \geqslant C_2(n)\omega_n$ et $\beta_{S^n} \equiv \beta_n = (n-1)^{n-1} n^{-2n+1} \omega_{n-1}^{-1}$. Les constantes α_{S^n}

et β_{S^n} sont ainsi liées par les relations de dualité (2.8) et (2.9).

Il suit de (3.6) que l'estimée du corollaire se réduit à

$$\int_{S^n} e^u v_c \leqslant M_2(n)\, e^{\beta\|\nabla u\|^n_{L_n}} \quad , \quad \beta \geqslant \beta_{S^n} \quad ,$$

lorsque la fonction u est de moyenne nulle. La plus petite constante β_{S^n} est donc atteinte dans ce cas.

3.7. D'une façon générale sur une variété compacte (M,g) les estimées de Trudinger $(\mathcal{T}_n)$ et $(\mathcal{D}_n)$ sont valides ; il existe donc des constantes c, m, α et β telles qu'on ait pour toute fonction w de moyenne nulle dans la boule unité de $W^1_n(M)$ pour la semi-norme $|\ |_{1,n}$

$$(3.8) \qquad \int_M e^{\alpha|w|^{\frac{n}{n-1}}} v_g \leqslant c$$

et pour toute fonction u dans $W^1_n(M)$

$$(3.9) \qquad \int_M e^u v_g \leqslant m \exp(\beta\|\nabla^g u\|^n_{L_n} + \frac{1}{|M|}\|\nabla u\|_{L_1}) \quad .$$

On démontre que les meilleures constantes α_M et β_M dans (3.8) et (3.9) sont respectivement strictement majorées et minorées par α_n et β_n. Précisément, on a

Théorème II.3.10. [CR1]

1. <u>En dimension</u> $n = 2$, <u>il existe une constante</u> m <u>telle que</u>, <u>pour toute fonction</u> u <u>dans</u> $W^1_2(M)$, <u>on ait</u>

$$\int_M e^u v_g \leqslant m \exp(\beta_2\|\nabla^g u\|^2_{L_2} + \frac{1}{|M|}\|\nabla u\|_{L_1})$$

2. En dimension $n \geqslant 3$, il existe des constantes c et $\alpha_M < \alpha_n$ telles que pour toute fonction u appartenant à la boule unité de $W_n^1(M)$, on ait

$$\int_M e^{\alpha_M |u|^{\frac{n}{n-1}}} v_g \leqslant c.$$

De même il existe une constante m telle que pour toute fonction u dans $W_n^1(M)$ et toute constante $\beta > \beta_n$, on ait

$$\int_M e^u v_g \leqslant m \exp(\beta \|\nabla u\|_{L_n}^n + \frac{1}{|M|} \|u\|_{L_1}).$$

3.11. Dans certains sous-ensembles de $W_n^1(S^n)$, on peut améliorer la constante opitmale pour laquelle l'estimée (3.2) du théorème II.3.1 est vérifiée. La proposition suivante va nous en donner un premier exemple. Mais auparavant, soit τ la symétrie antipodale sur (S^n, c) $(\tau(x) = -x)$. On définit l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ de dimension n en faisant agir sur S^n le groupe $G \equiv \{id, \tau\}$, où Id est l'application identique, la projection canonique $p : S^n \to S^n/G \equiv \mathbb{R}P^n$ étant un revêtement régulier à deux feuillets. C'est donc une variété compacte de classe C^∞ ; la métrique standard sur $\mathbb{R}P^n$ est celle dont l'image réciproque par p est la métrique standard de S^n. (nous la noterons g_o). L'espace projectif standard (ou canonique) est $(\mathbb{R}P^n, g_o)$ et son volume vaut par conséquent $\frac{\omega_n}{2}$. Toute fonction régulière u sur $\mathbb{R}P^n$ se remonte sur S^n en une fonction régulière $\tilde{u} = u \circ p$.

Du théorème II.3.1, nous déduisons alors la

Proposition *II.3.12*. Il existe une constante $C_3(n)$ ne dépendant que de la dimension telle que pour toute fonction $\tilde{u}$, antipodalement symé-

<u>trique</u> $(\tilde{u}(x) = \tilde{u}(-x))$, <u>de moyenne nulle sur</u> S^n <u>et appartenant à la boule unité de</u> $W^1_n(S^n)$, <u>et pour tout</u> $\alpha < \alpha'_{S^n} = 2^{1/n-1}\alpha_{S^n}$, <u>on ait</u>

$$\int_{S^n} e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}} v_c \leq C_3(n)\omega_n \quad .$$

<u>Preuve</u> : Soit $\tilde{u}$ est une fonction définie sur $\mathbb{RP}^n$ qui appartient à la boule unité de $W^1_n(\mathbb{RP}^n)$. Soit $\tilde{u} = u \circ p$ la fonction qui remonte u sur S^n. Le revêtement p étant à deux feuillets, si u est dans la boule unité de $W^1_n(\mathbb{RP}^n)$ pour la semi-norme $u \to |u|_{1,n} = \|\nabla^{g_o} u\|_{L_n}$ alors u est dans la boule homothétique de la boule unité de $W^1_n(S^n)$ (pour la même semi-norme) dans l'homothétie de rapport $2^{1/n}$ puisque

$$\begin{aligned} c^{-1}(d\tilde{u},d\tilde{u})^{\frac{n}{2}} &= ((p^* g_1)^{-1}(du \circ p,\ du \circ p))^{\frac{n}{2}} \\ &= (g^{-1}(du,du) \circ p)^{\frac{n}{2}} \\ &= (p^*(g^{-1}(du,du))^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

et que par suite

$$\begin{aligned} |\tilde{u}|^n_{1,n,S^n} &= \int_{S^n} c^{-1}(d\tilde{u},d\tilde{u})^{\frac{n}{2}} v_c = \int_{S^n} (p^* g^{-1}(du,du))^{\frac{n}{2}} v_c \\ &= \int_{S^n} (p^* g^{-1}(du,du))^{\frac{n}{2}} p^*(v_{g_o}) \\ &= 2\int_{\mathbb{RP}^n} g^{-1}(du,du)^{\frac{n}{2}} v_{g_o} = 2|u|_{1,n,\mathbb{RP}^n} \end{aligned}$$

car v_{g_o} est défini par $p^*(v_{g_o}) = v_c$.

De plus

$$\int_{S^n} \tilde{u}\, v_c = \int_{S^n} p^*(uv_{g_o}) = 2\int_{\mathbb{R}P^n} u\, v_{g_o} .$$

Si donc u est de moyenne nulle dans la boule unité de $W_n^1(\mathbb{R}P^n, g_o)$, $2^{-\frac{1}{n}}\tilde{u}$ est de moyenne nulle dans la boule unité de $W_n^1(S^n, c)$. Il suit de l'identité

$$2\int_{\mathbb{R}P^n} e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}} v_{g_o} = \int_{S^n} \exp(2^{\frac{1}{n-1}} \alpha |2^{-\frac{1}{n}} \tilde{u}|^{\frac{n}{n-1}}) v_c$$

que les constantes α' pour lesquelles les intégrales de la forme $\int_{S^n} \exp(\alpha' |2^{-\frac{1}{n}} \tilde{u}|^{\frac{n}{n-1}}) v_c$ sont bornées sont $2^{\frac{1}{n-1}}$ fois supérieures à celles pour lesquelles les intégrales dans le membre de gauche sont bornées. Or il suit du théorème (II.3.10) que $\alpha_{\mathbb{R}P^n} < \alpha_{S^n}$, $n \geq 3$. Donc pour toute fonction $\tilde{u}$ antipodalement symétrique de moyenne nulle dans la boule unité de $W_n^1(S^n, c)$,

$$\int_{S^n} e^{\alpha|\tilde{u}|^{\frac{n}{n-1}}} v_c \leq 2^{-1} C_2(n)\omega_n \quad \text{si} \quad \alpha < 2^{\frac{1}{n-1}} \alpha_{S^n} \equiv \alpha'_{S^n} .$$

Ceci établit la proposition avec $c_3(n) \geq 2^{-1} C_2(n)$ ■

La proposition II.3.12 est dans J. Moser [MR2] pour $n = 2$ et dans ce cas $\alpha \leq \alpha'_{S^2}$. Elle admet le corollaire suivant :

Proposition II.3.13. Il existe une constante $M_3(n)$ ne dépendant que de n telle que pour toute fonction u dans $W_n^1(S^n,c)$ antipodalement symétrique et tout $\beta \geq \frac{1}{2}\beta_{S^n}$ on ait

$$(3.14) \qquad \int_{S^n} e^u v_c \leq M_3(n)\, e^{\beta\|\nabla u\|^n_{L_n} + \omega_n^{-1}\|u\|_{L_1}} .$$

Si en plus u est de moyenne nulle, alors

$$(3.15) \qquad \int_{S^n} e^u v_c \leq M_3(n)\, e^{\beta\|\nabla u\|^n_{L_n}} .$$

Preuve. Si u est antipodalement symétriquement dans $W_n^1(S^n)$, la fonction w dans la boule unité de $W_n^1(S^n,c)$ définie par

$$u = \bar{u} + w\|\nabla u\|_{L_n}$$

est antipodalement symétrique et de moyenne nulle. L'estimée (3.14) suit alors de la proposition II.3.12 à l'aide des techniques suivant le corollaire II.3.5.

Pour montrer que $\beta \geq \frac{1}{2}\beta_{S^n}$, posons

$$\alpha'_{S^n} = 2^{\frac{1}{n-1}}\alpha_{S^n} .$$

D'après la relation de dualité (2.9) la constante β de (3.14) est alors supérieure ou égale à β'_{S^n} où

$$\beta'_{S^n} = \max_{t\geq 0}(t^{n-1} - \alpha'_{S^n} t^n) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n\alpha'_{S^n}}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n\, 2^{\frac{1}{n-1}}\alpha_{S^n}}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n\alpha_{S^n}}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\beta_{S^n} .$$

L'estimée (3.15) est alors une conséquence évidente de (3.14) d'après (3.6).■

3.16. *Remarque.*

1. Notons V_p^n (avec $V_p \equiv V_p^2$) l'espace des harmoniques sphériques d'ordre $p \geqslant 0$ sur (S^n,c) (c'est-à-dire l'espace des fonctions propres de Δ^c associées à la $p^{\text{ième}}$ valeur propre $\lambda_p = p(n+p-1)$). Il est connu que pour $p \geqslant 2$, V_p^n est un espace vectoriel de dimention

$$\binom{n+p}{p} - \binom{n+p-2}{p-2} \quad \left(\text{soit } \frac{n+p-2)(n+p-3\ldots(n+1)^n}{p!}(n+2p-1)\right) \text{[B-G-M] ou [MU] ;}$$

en particulier $\dim V_p = 2p+1$. L'espace V_1^n est isomorphe à l'espace vectoriel des fonctions linéaires sur $\mathbb{R}^{n+1}$ (il est formé des restrictions de ces fonctions à S^n) et donc $\dim V_1^n = n+1$ tandis que V_o^n est formé des constantes.

2. En dimension $n = 2$, nous avons montré dans [EZ] que la constante $\alpha_{S^2} = 4\pi$ de J. Moser reste inchangée lorsqu'on considére, au lieu des fonctions de moyenne nulle c'est-à-dire L_2-orthogonales à l'espace V_o des harmoniques sphériques d'ordre zéro, les fonctions de la boule unité de $W_2^1(S^2)$ L_2-orthogonales à la somme directe $\bigoplus_{p=0}^{\ell} V_p$ des espaces V_p des harmoniques sphériques d'ordre $p \leqslant \ell$, ℓ entier positif. Cependant T. Aubin a récemment prouvé [AN4, cor. 2] qu'on peut diminuer la constante optimale du corollaire II.3.5 à l'aide d'un autre ensemble de fonctions L_2-orthogonales à V_1^n. Ce sont ses résultats que nous voulons utiliser dans la section qui suit.

II.4. Amélioration de α_n *et* β_n *sur* (S^n,c) *pour certaines fonctions* L_2*-orthogonales aux harmoniques sphériques.*

4.1. *Définition.* Nous dirons qu'une fonction u dans $W_n^1(S^n,c)$ est "exponentiellement" L_2-orthogonale à une fonction ξ dans $L_2(S^n,c)$ si

(4.2) $$\int_{S^n} \xi\, e^u\, v_c = 0.$$

Remarquons que l'intégrale à gauche de (4.2) a toujours un sens puisque, u étant dans $W_n^1(S^n)$, e^u appartient à $L_q(S^n)$ pour tout q, $1 \leqslant q < +\infty$.

4.3. *Définition.* Un sous-espace vectoriel de dimension k de l'espace des fonctions sur une variété M est dit admissible s'il admet une base $(\xi_i)_{i=1,\dots,k}$ pour laquelle $\sum_1^k |\xi_i| > 0$ en tout point de M.

Soit V_p^n l'espace des harmoniques spéhriques d'ordre p sur S^n. C'est évidemment un espace admissible de dimension $\dim V_p^n$. Mais encore nous avons :

Lemme *II.4.4.* Pour tout $p \geqslant 1$, V_p^n contient un sous-espace admissible de dimension $n+1$.

Preuve : Pour $p = 1$, ce sous-espace est évidemment V_1^n lui même, formé des premières harmoniques spéhriques.

Supposons $p \geqslant 2$. A tout point m de S^n, associons la fonction zonale φ_m d'ordre p (de norme L_2 égale à 1) par rapport au sous-groupe d'isotropie de m. Il est connu que (cf. [B.G.M., p.165] ne dépend que de la distance au point m. Une telle fonction est unique car elle est dans V_n^p et solution de l'équation

$$\Delta\varphi_m = p(p+n-1)\varphi_m$$

nous déduisons que si $\varphi_m(x) = \phi(d(m,x))$

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + (n-1)\frac{\cos r}{\sin r}\frac{d\phi}{dr} + p(p+n-1)\phi = 0$$

avec les deux conditions $\phi'(0) = 0$ et $\int_0^\pi \phi^2(r)dr = 1$.

Soit $(m_o,\ldots,m_n)$ une suite de $n+1$ points distincts de S^n. Considérons l'épplication $\psi_{m_o,\ldots,m_n}$ de S^n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\psi_{m_o,\ldots,m_n}(x) = (\varphi_{m_o}(x),\ldots,\varphi_{m_n}(x)).$$

Alors on peut choisir les points $(m_o,\ldots,m_n)$ de telle sorte qu'en tout point x de S^n, on ait

$$\psi_{m_o,\ldots,m_n}(x) \neq (0,\ldots,0).$$

En effet supposons que nous ayons en x_o de S^n

$$\psi_{m_o,\ldots,m_n}(x_o) = (0,\ldots,0),$$

autrement dit les $(n+1)$ fonctions zonales $\varphi_{m_o},\ldots,\varphi_{m_n}$ sont nulles en x_o. Comme elles sont solutions des équations

$$(*) \qquad \frac{d^2\varphi_{m_i}}{dr^2} + (n-1)\frac{\cos r}{\sin r}\frac{d\varphi_{m_i}}{dr} + \lambda_p\,\varphi_{m_i} = 0$$

avec $\varphi_{m_i}(m_i) = 0$, il suit du théorème de Sturm-Liouville que $d(x_o,m_i) = \alpha_i$ $(i = 1,\ldots,p)$ est égale à l'un des zéros des solutions de l'équation $(*)$.

Si on fixe $m_o,..,m_{n-1}$, les sous-variétés $S_{m_j}(\alpha_i) = \{x \in S^n \mid d(m_j,x) = \alpha_i\}$ $(j = 0,\dots,n-1)$ sont fixées. L'ensemble $\cap S_{m_j}(\alpha_i)$ est de codimension au moins deux. Il est possible de choisir m_n de telle sorte que $d(m_n, \cap S_{m_j}(\alpha_i))$ soit différente de chacune des valeurs α_i, ce qui assure qu'au moins une fonction $\varphi_{m_j}(x_o) \neq 0$.∎

Moyennant ce lemme nous allons voir que dans un sous-ensemble E de $W_n^1(S^n) \cap \ker \int_{S^n}$ formé des fonctions exponentiellement L_2-orthogonales à une partie de V_p^n les constantes α_{S^n} et β_{S^n} du théorème II.3.1 et du corollaire II.3.5 peuvent être améliorées. Précisément, on a

Théorème II.4.5. Il existe une constante M_4 ne dépendant que de n et une suite de $(n+1)$ harmoniques sphériques (ξ_i^p) appartenant à une base de V_p^n sur S^n telles que pour toute fonction u appartenant à $W_n^1(S^n) \cap \mathrm{Ker} \int_{S^n}$ et exponentiellement L_2-orthogonale à $(\xi_i^p)_{i=1,\dots,n+1}$, et pour tout $\beta > \frac{\beta_n}{2}$, on ait

$$\int_{S^n} e^u v_c \leqslant M_4 \, e^{\beta \|\nabla u\|^n_{L_n}} . \tag{4.6}$$

Ce théorème résulte d'une part du lemme précédent et de la proposition suivante.

Proposition II.4.7. [AN4, th. 6]. Soient une variété compacte (M,g) et $(f_i)_I$ une famille finie de fonctions régulières qui changent de signe sur M telle que $\sum_I |f_i| > 0$.

Il existe une constante $m(n)$ telle que pour toute constante $\beta > \frac{\beta_n}{2}$ et toute fonction u dans $W_n^1(M) \cap \mathrm{Ker} \int_M$ exponentiellement L_2-orthogonale à $(f_i)_I$, on ait

$$\int_M e^u v_g \leqslant m(n) \, e^{\beta \|\nabla u\|^n_{L_n}} .$$

Preuve du théorème II.4.5. D'après le lemme II.4.4, l'espace V_p^n contient un sous-espace admissible V de dimension $n+1$. Soit $(\xi_i^p)_{i=1,\dots,n+1}$ une base admissible de V. Alors $\sum_i^{n+1} |\xi_i^p| > 0$ et chaque ξ_i^p change de signe sur S^n.

Le théorème suit alors de la proposition II.4.7 en prenant $(f_i)_I = (\xi_i^p)_{i=1,\dots,+1}$ ■

Comme conséquence de ce théorème nous pouvons observer que si l'intégrale

$$\int_{S^n} e^{\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}} v_c$$

est uniformément majorée pour u appartenant à $W_n^1(S^n) \cap \operatorname{Ker} \int_{S^n}$ et exponentiellement L_2-orthogonale à un sous-espace admissible de V_n^p, la meilleure constante α est alors $\alpha'_{S^n} = 2^{\frac{1}{n-1}} \alpha_{S^n}$.

4.8. Le lemme II.4.4 nous permet aussi d'énoncer le théorème suivant dont nous aurons ultérieurement besoin pour l'étude du plongement de $W_2^1(S^n)$ dans $L_{\frac{2n}{n-2}}(S^n)$.

Soient ν et q deux nombres réels positifs tels que $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{q} = \frac{1}{n}$ et

$$(4.9) \qquad A(n,q) = \left(\frac{q-1}{n-q}\right)^{1-\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{q}} \left(\frac{q}{n-q}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{q}-1)\Gamma(n+1-\frac{n}{q})\omega_{n-1}}\right)$$

la constante introduite par T. Aubin [AN3, p. 574] (voir aussi [TI, p. 353].

Théorème III.4.10. <u>Soit</u> $(\xi_i^p)_{i=1,\dots,n+1}$ <u>une base admissible d'un sous-espace admissible de</u> V_p^n. <u>Alors pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe une constante</u> $m(\varepsilon) > 0$ <u>telle que quelle soit la fonction</u> u <u>dans</u> $W_q^1(S^n)$

<u>et ayant la puissance</u> $\nu^{\text{ième}}$ <u>de sa valeur absolue</u> L_2-<u>orthogonale à</u> $(\xi_i^p)_{i=1,\dots,n+1}$ <u>on ait, pour toute constante</u> $A \geqslant 2^{-1/n} A(n,q) + \varepsilon$

$$\|u\|_{L_\nu}^q \leqslant A^q \|\nabla u\|_{L_q}^q + m(\varepsilon)\|u\|_{L_q}^q .$$

<u>Preuve</u> : Pour $p = 1$, ce théorème est le même que le théorème 2 de [AN4]. Pour $p \geqslant 2$ la preuve est la même que celle de ce dernier.

4.11. *<u>Remarque</u>*. L'introduction des sous-espaces admissibles de V_p^n et le lemme II.4.4 qui montre que pour les espaces harmoniques sphériques d'ordre $p \geqslant 2$ il existe des sous-espaces propres admissibles ont permis d'énoncer les théorèmes II.4.5 et II.4.10. Cette remarque ainsi que les diverses estimées obtenues dans ce chapitre vont nous être très utiles lorsqu'il s'agira de décrire l'image de l'application courbure scalaire sur S^n au chapitre suivant.

CHAPITRE III

INSTABILITE A LA LINEARISATION DE L'APPLICATION COURBURE SCALAIRE EN PRESENCE DE L'ACTION DU GROUPE CONFORME

III.1. *Résultats connus et motivations* :

. Linéarisation de l'application courbure scalaire F

. Fonctions courbures scalaires sur (M,g)

III.2. *Le groupe conforme de* (M,g) *et son algèbre de Lie. Le cas de la sphère standard* (S^n,c).

. Métriques difféoconformes et conformes sur (M,g)

. L'algèbre de Lie $\mathfrak{X}(M,g)$ du groupe conforme $C(M,g)$

. L'algèbre de Lie du groupe conforme de (S^n,c)

III.3. *Une condition d'intégrabilité de* $F(g) = \tilde{K}$ *en présence de l'action de* $C(M,g)$ *sur les espaces des métriques et des fonctions régulières sur* M.

. Opérateur différentiel courbure scalaire F_n dans une classe conforme.

. Action de $C(M,g)$ dans la classe conforme de g.

. Relation de compatibilité : la condition (N).

. Fonctions interdites par la condition (N) : nouveaux exemples.

III.4. *Description de l'image de* F *dans la classe conforme de la métrique standard* c *de* S^n.

. Orbite d'une métrique sous l'action de $C(M,g)$: le cas de c pour le groupe $C(S^n,c)$.

. Image de F_2 pour la sphère (S^2,c).

. Les harmoniques sphériques et Im F_2.

III.1. Résultats connus et motivations.

1.1. Soit (M,g) une variété riemannienne, compacte, connexe, C^{∞} sans bord, de dimension n. Nous considérons deux variétés différentielles de fonctions définies sur (M,g) : une variété "source" $\mathcal{S}$ et une variété "but" $\mathcal{B}$. Nous désignons par F une application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}$ et, en un point s appartenant à $\mathcal{S}$, nous posons

$$F(s) = K.$$

Deux types de questions peuvent alors se poser.

Le premier, de nature globale, consiste à décrire l'image de F, soit $\operatorname{Im} F$, dans $\mathcal{B}$.

Le second, de nature moins globale, consiste à décrire, connaissant un élément K_o dans $\operatorname{Im} F$, la "fibre" $F^{-1}(K_o)$ de F au-dessus de K_o. Son étude se ramène en général à celle de la stabilité à la linéarisation de l'application F en un point s_o de la "fibre". Pour rappeler cette notion, désignons par $(S.F)(s_o)$ la valeur en s_o de la dérivée de F suivant le vecteur S de l'espace tangent en s_o à $\mathcal{S}$. Par définition on a

$$(S.F)(s_o) = \frac{d}{dt} F(s_o + t\, S)\Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{F(s_o+tS) - F(s_o)}{t},$$

où S désigne un vecteur tangent à une courbe $t \to s(t)$ dans $\mathcal{S}$, telle que $s(0) = s_o$ et qui est une solution de l'équation

$$F(s) = K_o \quad . \tag{1.2}$$

L'application $S \mapsto (S.F)(s_o)$, tangente à F, définie sur l'espace tangent $T_{s_o}\mathcal{S}$ en s_o à $\mathcal{S}$ sera notée $TF(s_o)$.

La linéarisation (au 1er ordre) en s_o de l'équation (1.2) est l'équation définie sur $T_{s_o}\mathcal{S}$ par

(1.3) $$(S.F)(s_o) = 0$$

On dit qu'il y a stabilité à la linéarisation de F en s_o lorsque pour toute fonction S dans l'espace tangent $T_{s_o}\mathcal{S}$ (que l'on identifie à $\mathcal{S}$ lorsque celui-ci a une structure d'espace vectoriel) solution de l'équation linéarisée (1.3) il existe une courbe $s(t)$ solution de (1.2) qui vérifie simultanément

$$\frac{d}{dt} s(t)\Big|_{t=0} = S \quad \text{et} \quad s(0) = s_o.$$

Dans le cas contraire, on dit qu'il y a instabilité à la linéarisation de l'équation $F(s) = K_o$ en s_o.

Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{B}$ sont des espaces de Banach, les théorèmes des fonctions implicites dont nous donnons un énoncé ci-dessous permettent de lier les deux types de questions : tout en permettant une description locale de l'image, ils fournissent des critères d'instabilité à la linéarisation de l'application F.

Proposition III.1.4. (voir par exemple [F.M].

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{B}$ deux espaces de Banach et F une application dérivable de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}$. Soit $(s_o, K_o = F(s_o))$ un point du graphe de F.

Si la dérivée de F en s_o est surjective et son noyaux est un facteur direct de $T_{s_o}\mathcal{B}$, F est stable à la linéarisation en s_o.

Des exemples d'instabilité à la linéarisation apparaissent souvent en physique et en mécanique théoriques (étude des bifurcations). C'est cependant un exemple issu de la géométrie riemannienne qui nous intéresse dans le cadre de ce travail.

1.5. *Exemple : la linéarisation de l'application courbure scalaire.*

Désignons par S^2_+M l'espace des 2-tenseurs métriques g de la variété M et par R_g le champ de 4 tenseurs, courbure de Riemann de (M,g).

Les coefficients de R_g dans un système de coordonnées locales sont notés Rijkl. Si (Γ^k_{ij}) désignent les coefficients (symboles de Christoffel) de la connexion métrique associée à g, la courbure scalaire u_g de (M,g) est la fonction réelle définie par

$$(1.6) \qquad u_g = g^{jk} g^{i\ell} g_{mj} \left[\frac{\partial\Gamma^m_{i\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^m_{ik}}{\partial x^\ell} + (\Gamma^h_{ik}\Gamma^m_{h\ell} - \Gamma^h_{i\ell}\,\Gamma^m_{ih})\right]$$

ou on a utilisé la convention d'Einstein de sommation par rapport aux indices répétés).

Comme

$$\Gamma^m_i = \frac{1}{2} g^{ms}\left(\frac{\partial g_{si}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{s\ell}}{\partial x^i}\right)$$

on obtient

$$u_g = \frac{1}{2} g^{jk} g^{i\ell} g_{mj}\, g^{ms}\left(\frac{\partial^2 g_{s\ell}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{sk}}{\partial x^i \partial x^\ell} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^\ell \partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{i\ell}}{\partial x^s \partial x^k}\right)$$

$$+ g^{jk} g^{i\ell}\left(\frac{\partial g^{ms}}{\partial x^k}\,\Gamma_{i\ell s} - \frac{\partial g^{ms}}{\partial x^\ell}\,\Gamma_{iks}\right) g_{mj}$$

$$+ g^{jk} g^{i\ell} g_{mj}(\Gamma^h_{ik}\,\Gamma^m_{h\ell} - \Gamma^h_{i\ell}\,\Gamma^m_{ih})$$

où $\Gamma_{i\ell s} = g_{ms}\Gamma^m_{i\ell}$.

Il suit

$$u_g = \frac{1}{2} g^{jk} g^{i\ell} \left(\frac{\partial^2 g_{j\ell}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^\ell} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^\ell \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{i\ell}}{\partial x^j x^k}\right) + \Gamma_\alpha \Gamma^\alpha$$

i.e.

(1.7) $$u_g \equiv g^{jk} g^{i\ell} \left(\frac{\partial^2 g_{j\ell}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^\ell}\right) + \Gamma_\alpha \Gamma^\alpha$$

où le terme $\Gamma_\alpha \Gamma^\alpha$ ne contient que des dérivées d'ordre ≤ 1 des coefficients de la métrique g. L'application $g \mapsto F(g) = u_g$ est ainsi un opérateur différentiel quasi-linéaire avec des termes quadradiques en les dérivées premières de g. Nous l'appelons dans la suite application courbure scalaire.

1.8. *Remarques.*

1. Il existe dans la littérature d'autres définitions plus géométriques de la courbure scalaire u_g. A titre d'exemple citons celle donnée par J. Lelong-Ferraud [L-F].

Si m *est un point de* M *et* $B_r^g(m)$ *la boule de centre* m *et de rayon* r *de* (M,g), *alors la courbure scalaire de* M *pour la métrique* g *est la fonction* u_g *dont la valeur en* m *est donnée par*

$$\int_{B_r^g(m)} v_g = \left(\int_{B_r^e(0)} v_e\right) \left(1 - \frac{r^2}{6(n+2)} u_g(m) + O(r^2)\right)$$

où $B_r^e(0)$ *est la boule euclidienne de* $\mathbb{R}^n$ *de centre* 0 *et de rayon* r.

Cette définition montre que la courbure scalaire en m, mesure la déviation au 1er ordre du volume de la boule riemannienne $B_r^g(m)$ par rapport à celui de la boule euclidienne $B_r^e(0)$. La définition que nous avons retenue est celle qui s'adapte le mieux au problème que nous étudions.

2. Notons r_g le (0,2)-tenseur de courbure de Ricci, i.e. le tenseur dont la composante r_{jk} est la trace $g^{i\ell} R_{ijk\ell}$ du tenseur de courbure de Riemann. Alors une autre façon de lire (1.6) est de dire que u_g est la trace de r_g par rapport à g :

$$u_g = tr_g(r_g) = g^{jk} r_{jk} \ ,$$

où tr_g signifie la trace par rapport à g.

1.9. Soit g une métrique fixée. Il n'est pas difficile de montrer [B.E., (5.3)], que la dérivée $h.F$ de F suivant le champ de 2-tenseurs symétriques h appartenant à $T_g \mathcal{S}_+M$ prend en g la valeur

$$(1.10) \qquad (h.f)(g) = \Delta^g(tr_g h) + \delta^g\delta^g h - (h,r_g).$$

Dans cette formule (h,r_g) est le produit scalaire ponctuel $g^{i} g^{jk} h_{i\ell} r_{jk}$ des tenseurs h et r_g ; Δ^g est le laplacien opérant sur les fonctions de (M,g). Il est défini par

$$\Delta^g f = \delta^g df = - div^g(\nabla^g f) \quad .$$

En coordonnées locales, il s'écrit, d'après 0.3

$$\Delta^g f = - \frac{1}{\sqrt{d\acute{e}t\ g_{ij}}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{d\acute{e}t\ g_{ij}}\ g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right).$$

Son symbole principal est donc

$$\sigma(f) = - \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \quad ,$$

qui est une forme quadratique non dégénérée.

Le laplacien est donc un opérateur différentiel elliptique du second ordre. Il est positif et formellement auto-adjoint. La variété (M,g) étant compacte, le sepctre (i.e. l'ensemble des valeurs propres) de Δ^g est discret , infini, et formé de nombres réels non négatifs. Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion nous écrirons Δ au lieu de Δ^g. Pour une étude détaillée du laplacien des fonctions sur M, on peut se référer par exemple à [B.G.M.].

De ces propriétés du laplacien et de celles de la codifférentielle δ^g, il résulte

$$\int_M (h.F)(g)\ f\ v_g = \int_M (\mathrm{tr}_g h\ \Delta^g f + \delta^g h(df) - f(h,r_g))v_g \ .$$

Pour g fixée, $h \mapsto (h.F)(g)$ est un opérateur différentiel sur $T_g\, S_+M$ dont nous notons l'adjoint formel $(TF)^*(g)$. Il suit alors

$$\int_M ((TF)^*(g)(f),h)v_g = \int_M (g^{ij}h_{ij}\Delta^g f + h.\delta^{*g}(df) - f(r_g,h))v_g$$

$$= \int_M ((g\Delta^g f + \delta^{*g}(df) - fr_g),h)v_g \quad ,$$

d'où la formule classique

$$(TF)^*(g)(f) = g\ \Delta^g f + \delta^{*g}(df) - fr_g$$

qui s'écrit encore, en remarquant que, $\delta^{*g}(df) = \frac{1}{2} L_{\nabla^g f}\, g = \mathrm{Hess}\ f$,

$$(TF)^*(g)(f) = g\ \Delta^g f + \mathrm{Hess}\ f - fr_g,$$

où $\mathrm{Hess}\ f$ est le hessien de f (i.e. la double dérivée covariante de f).

BUS LILLE

L'opérateur composé $TF(g) \circ (TF(g))^*$ est elliptique et a même noyau que $(TF(g))^*$. Or on montre que si $(TF(g))^*$ a un noyau non réduit à zéro, alors $F(g)$ est une constante non négative k qui est reliée à une valeur propre λ du laplacien Δ^g par $k = (n-1)\lambda$. Il en résulte alors la

Proposition II.1.11. [BN1, prop. VIII.8].

L'application courbure scalaire F est une submersion en la métrique g si $F(g)$ est différente d'une constante $k = \lambda(n-1)$, λ étant une valeur propre non nulle du laplacien Δ^g.

Cela signifie qu'au voisinage de toute métrique g_o où $\frac{1}{n-1} F(g_o)$ n'appartient pas au spectre de Δ^g, il y a stabilité à la linéarisation de l'équation $F(g) = F(g_o)$.

Remarquons que la sphère (S^n,c) échappe à cette proposition puisque précisément $F(c) = n(n-1)$ et que n est la première valeur propre de Δ^c.

1.12. Pour étudier le problème global de la description de Im F, la dimension 2 constitue un point de départ intéressant. En effet grâce au principe d'uniformisation (selon lequel pour toute paire de métrique $\tilde{g}$ et g sur une surface compacte M il existe un difféomorphisme φ de M, et une fonction régulière u sur M telle que $\varphi^*(g) = e^{2u}g$) l'application courbure scalaire F (qui s'identifie alors au double de la courbure de Gauss) permet de définir un opérateur différentiel quasi-linéaire que nous notons également F, sur l'espace des fonctions u. De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de ce problème ces dernières années notamment par J. Kazdan et F. Warner qui ont prouvé le

Théorème III.1.13 [K.W.4, th. 5.6] , ou [K.W.5, th.B]).

Soit $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface riemannienne compacte connexe M. L'image de l'application courbure scalaire F est formée par les fonctions régulières K qui prennent en au moins un point le signe de $\chi(M)$ (par signes nous entendrons $\{-,0,+\}$).

Désignons par S^2, T^2 et $\mathbb{R}P^2$, respectivement la sphère, le tore et le plan projectil réel.

Notons T_q (resp. P_q) la somme connexe de q exemplaires de T^2 (resp. $\mathbb{R}P^2$). D'après le théorème de classification des surfaces compactes, connexes, il existe un entier non négatif r tel que la surface M, suivant qu'elle est orientable ou non, est homéomorphe à l'une des sommes connexes suivantes :

$$T_r = S^2 \# T_r \quad \text{ou} \quad P_r = S^2 \# P_r$$

Il s'ensuit que $\chi(M)$ est de l'une des formes

$$\chi(S^2 \# T_q) = 2.2q \quad \text{ou} \quad \chi(S^2 \# P_q) = 2-q.$$

Par conséquent le théorème III.1.13 décrit les fonctions régulières définies sur T_q et P_q qui sont des courbures scalaires de métriques sur ces surfaces suivant la valeur de l'entier non négatif q. En particulier une fonction K régulière sur la sphère $S^2(\equiv T_o)$ ou le plan projectif $\mathbb{R}P^2(\equiv P_1)$ ne peut être réalisée comme la courbure scalaire une métrique sur S^2 ou $\mathbb{R}P^2$ que si K est positive en au moins un point. De même sur le tore $T^2(\equiv T_1)$ ou sur la bouteille de Klein $B(\equiv P_2)$, une fonction K régulière ne peut être la courbure scalaire d'une métrique que si $K \equiv 0$ ou change de signes.

Le théorème III.1.13 peut être lu comme une réciproque de la formule de Gauss-Bonnet $\left(\int_M K\, v_g = 4\pi\, \chi(M)\right)$ car il indique que la condition de signe sur K nécessaire pour que K soit réalisable comme la courbure scalaire d'une métrique est aussi suffisante.

1.14. En dimension supérieure ou égale à 3, le résultat le plus général est encore dû à J. Kazdan et F. Warner :

Théorème III.1.15. ([K.W.4, th.6.4] [K.W.5, th.C], [K.W.3, th.1.3] voir aussi [K.W. 6])

Soit M une variété compacte connexe de dimension $\geqslant 3$.

i) Toute fonction K négative en au moins un point sur M peut être réalisée comme la courbure scalaire d'une métrique sur M.

ii) Toute fonction K régulière est réalisable comme la courbure scalaire d'une métrique sur M dès que M admet une métrique à courbure scalaire positive constante.

iii) La fonction nulle est la courbure scalaire d'une métrique sur M si M admet une métrique à courbure scalaire non négative.

La partie 1 du théorème prolonge considérablement un résultat antérieur qui se déduit des travaux de H. Eliasson [EL], T. Aubin [AN.3] et N. Trudinger [TR 2] sur le problème de Yamabé [YE] et selon lequel toute variété compacte, connexe a une métrique à courbure scalaire constante négative.

Il résulte de la partie 2 du théorème que toute fonction régulière sur les sphères S^n, $(n \geqslant 3)$ et l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ $(n \geqslant 3)$ est réalisable comme courbure scalaire d'une métrique.

Par contre pour les tores T^n, M. Gromov et H.B. Lawson [G.L] ont montré que les fonctions positives ne peuvent pas être des courbures scalaires de métriques sur T^n, généralisant ainsi un résultat obtenu par R. Schoen et S.T. Yau [S.Y] pour $n \leqslant 7$.

J. Kazdan et F. Warner ont obtenu les résultats ci-dessus en utilisant la surjectivité locale de F et un lemme d'approximation (voir [K.W. 4]). En dimension supérieure ou égale à 3 et par analogie avec le cas des surfaces, ils ont cherché les fonctions qui sont réalisables comme courbures scalaires de métriques $\tilde{g}$ liées à une métrique g par la relation $\psi^*\tilde{g} = \rho^2 g$ dans laquelle ρ est une fonction positive et ψ un difféomorphisme de la variété. Mais les résultats que nous avons mentionnés ci-dessus concernant aussi bien la dimension 2 que les dimensions supérieures ne sont pas valides lorsqu'on contraint ψ à être l'identité voir [K.W.1], [K.W. 3], [K.W.7]). Or ce cas est intéressant à plusieurs points de vue.

1.16. Géométriquement il décrit avec une précision plus grande la déformation de structure qu'il faut imposer à la métrique g pour qu'une fonction donnée sur (M,g) soit la courbure scalaire d'une autre métrique $\tilde{g}$ dans $S^2_r M$ en restant dans la même classe conforme.

Du point de vue de l'analyse, ce cas-limite géométrique débouche sur une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire dont l'étude nécessite des informations très précises sur le cas-limite des inégalités de Sobolev que nous avons étudiées dans le chapitre précédent. Il est intéressant aussi de remarquer que ce cas-limite se présente dans une situation où simultanément l'équation aux dérivées partielles est instable à la linéarisation et le groupe conforme de la variété agit sur les espaces des fonctions à la "source" (par l'intermédiaire, de l'espace des métriques) et au "but".

Enfin "historiquement" l'étude de ce cas-limite pour la sphère S^2 a été introduite par L. Nirenberg au début des années "50" (voir [NG]) sous la forme suivante : quelles sont les fonctions sur S^2 qui sont réalisables comme courbures scalaires de métriques conformes à la métrique canonique ?

C'est ce problème que nous voulons étudier dans ce chapitre en complément aux réponses partielles déjà apportées (voir en particulier [BR 1], [MR 2], [K.W 1], [K.W.3], [AN4] et [B-B] et [GK] pour une bibliographie assez large) en utilisant d'une part l'action du groupe conforme de la sphère standard (S^n, c) sur l'espace $\mathcal{F}S^n$ des fonctions régulières sur la sphère et d'autre part les formes raffinées des estimées de Trudinger.

III.2. *Le groupe conforme des variétés riemanniennes compactes et son algèbre de Lie. Le cas de la sphère standard* (S^n, c).

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, de classe C^∞, de dimension n et sans bord.

2.1. *Définition*. Nous dirons de deux métriques g et $\tilde{g}$ sur M qu'elles sont difféoconformes(*) s'il existe un difféomorphisme φ de M et une fonction régulière positive ρ tels que

$$(**) \qquad \varphi^*(\tilde{g}) = \rho^2 g \quad .$$

"Etre difféoconformes" introduit une relation d'équivalence dans l'espace des métriques C^∞ sur M. La classe d'une métrique g par cette relation sera appelée la <u>classe difféoconforme</u> de g. Lorsque dans $(**)$ φ est

----

(*) On dit aussi "globalement conformes" ou "conformément équivalentes".

l'identité, les métriques g et $\tilde{g}$ sont dite conformes et la classe de g est appelée la classe conforme de g comme nous l'avons dit en 0.8, Ch.0.

2.2. Les difféomorphismes φ de M qui vérifient, pour une métrique g donnée, la relation $\varphi^*(g) = \rho^2 g$, sont les transformations conformes de M. Ils forment un groupe pour la composition des applications : le groupe conforme de (M,g) que nous noterons $C(M,g)$. Il est insensible aux changements de métriques dans la classe conforme de g, i.e. $C(M,g) = C(M, \rho^2 g)$ pour toute fonction régulière positive ρ. Le groupe $C(M,g)$ est *un groupe de Lie de dimension finie* (voir [W-G] ou [K-N, I]) qui est en général compact lorsque M est compact. *La seule variété compacte dont le groupe conforme n'est pas compact est la sphère standard* (S^n, c). Cette assertion connue sous le nom de "conjecture de Lichnerowicz", fut démontrée indépendamment par J. Lelong-Ferrand [L-F] et M. Obata [OA2].

Si dans (**) ρ est une constante, alors φ est une homothétie (on voit facilement par intégration que si M est compacte cette constante vaut 1) : φ est une isométrie.

2.3. Une transformation infinitésimale conforme de (M,g) (ou un champ de vecteurs conforme) est un champ de vecteurs X sur (M,g) dont le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe de transformations conformes. Si le flot (φ_t) de X est un groupe d'isométries de (M,g), X est appelé une isométrie infinitésimale (ou champ de vecteurs de Killing).

Les transformations infinitésimales conformes constituent une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie TM des champs de vecteurs sur M : l'algèbre de Lie $C(M,g)$ du groupe conforme $\mathfrak{C}(M,g)$ [W.G., p.75].

L'invariance de $C(M,g)$ dans la classe conforme de g se retrouve d'une certaine façon dans l'opérateur différentiel $\gamma_g^{(*)}$ qui définit $\mathcal{K}(M,g)$.

Plus précisément soit γ_g l'opérateur défini sur TM à valeurs dans l'espace des 2-tenseurs symétriques à trace nulle sur (M,g) par

$$\gamma_g(X) = L_X g - \frac{2}{n}(\mathrm{div}^g X)g$$

(pour un 2-tenseur la notion de nullité de la trace par rapport à une métrique est bien définie).

Alors γ_g a les propriétés suivantes :

<u>*Lemme*</u> *III.2.4.*

i) <u>si</u> $\tilde{g} = \rho^2 g$, <u>alors</u> $\gamma_{\tilde{g}} = \rho^2 \gamma_g$;

ii) <u>L'adjoint formel</u> γ_g^* de γ_g <u>sur les 2-tenseurs symétriques à trace nulle est égal à</u>

$$\gamma_g^* = -\,2\,\mathrm{div}^g .$$

(*) Une façon d'obtenir l'opérateur γ_g est de prendre la dérivée de Lie dans la direction d'un champ de vecteurs X du produit tensoriel $g \otimes (v_g)^{-\frac{2}{n}}$, quantité positivement homogène de degré 0, donc invariante conforme

$$L_X(g \otimes (v_g)^{-\frac{2}{n}}) = (L_X g - \frac{2}{n}(\mathrm{div}^g X)g) \otimes (v_g)^{-\frac{2}{n}} .$$

Preuve :

i) Pour tout X dans TM,

$$\gamma_{\tilde{g}}(X) = (X.\rho^2)_g + \rho^2 L_X g - \frac{2\rho^2}{n} (\mathrm{div}^{\tilde{g}} X)_g .$$

Or $(\mathrm{div}^{\tilde{g}}X)v_{\rho^2 g} = \rho^n(\mathrm{div}^{\tilde{g}} X)v_g = L_X v_{\rho^2 g} = (X.\rho^n)v_g + \rho^n L_X g_g$, d'où

$$\mathrm{div}^{\tilde{g}}X = (\mathrm{div}^g X + n\, X.\mathrm{Log}\,\rho).$$

L'égalité i) du lemme en résulte par substitution dans l'expression de $\gamma_{\tilde{g}}(X)$ ci-dessus.

ii) C'est une conséquence immédiate de la définition de l'adjoint formel. En effet, pour tout 2-tenseur symétrique h à trace nulle, nous avons

$$\begin{aligned}\int_M (\gamma_g(X),h)v_g &= \int_M g(X, \gamma_g^*(h))v_g \\ &= \int_M (L_X g,h)v_g - \frac{2}{n}\int_M \mathrm{div}^g X(g,h)v_g \\ &= \int_M 2(\delta^{*g}X^b,h)v_g \\ &= \int_M g(X, -2\mathrm{div}^g h)v_g,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\gamma_g^* = -2\,\mathrm{div}^g \quad \blacksquare$$

Les transformations infinitésimales conformes de (M,g) sont caractérisées par le fait <u>qu'elles forment le noyau</u> de γ_g. Ainsi X est une transformation infinitésimale conforme de (M,g) signifie que

(2.5) $$L_X g = \frac{2}{n} (\mathrm{div}^g X) g.$$

2.6 *Remarque* 1. On obtient aussi (2.5) par un calcul direct qui consiste à dériver en $t = 0$ la relation de définition $\varphi_t^* g = e^{2u_t} g$. On conclut en utilisant la remarque que pour toute métrique g, $(L_X g)(Y,Z) = g(D_Y X, Z) + g(D_Z X, Y)$ (D étant la dérivation covariante de Levita-Civita définie par g) et en prenant la trace de $L_X g$ obtenue ainsi de deux façons différentes.

2. Le groupe conforme de la sphère standard n'est pas compact. Son algèbre de Lie admet la décomposition suivante :

Proposition III.2.7. L'algèbre de Lie du groupe conforme de (S^n,c) peut s'écrire comme la somme directe

$$(B_n) \quad \mathfrak{C}(S^n,c) = \mathfrak{o}(n+1) \oplus \mathfrak{P}\mathfrak{C}(n+1)$$

où $\mathfrak{o}(n+1)$ est l'algèbre de Lie du groupe orthogonal $O(n+1)$ et $\mathfrak{P}\mathfrak{C}(n+1)$ est un espace vectoriel qui s'identifie à l'espace vectoriel de dimension $(n+1)$ des gradients des premières harmoniques sphériques de (S^n,c).

Preuve : Le groupe $O(n+1)$ des isométries de (S^n,c) étant un sous-groupe fermé donc de Lie de $C(S^n,c)$, son algèbre de Lie $\mathfrak{o}(n+1)$ est incluse dans $\mathfrak{C}(S^n,c)$. Un supplémentaire de cette algèbre peut se construire comme suit.

Les premières harmoniques sphériques sont les restrictions à la sphère des fonctions linéaires sur $(\mathbb{R}^{n+1},e)$ (voir [B.G.M., p. 140]). Soit ξ une fonction linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Le gradient euclidien $\nabla^e \xi$ de ξ engendre le flot (φ_t) des translations sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Par conséquent

$$L_{\nabla^e \xi}\, e = \frac{d}{dt}\,(\varphi_t^*(e))\Big|_{t=0} = 0\ .$$

Mais

$$e \equiv dr^2 + r^2 c \quad ,$$

où r est la fonction distance à l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Il suit

$$L_{\nabla^e \xi}\, e = L_{\nabla^e \xi}(dr) \otimes dr + dr \otimes L_{\nabla^e \xi}(dr + 2\, e(\nabla^e \xi, \nabla^e \xi)c + \gamma^2 L_{\nabla^e \xi}\, c = 0$$

Pour tout vecteur tangent la sphère S^n, les deux premiers termes sont nuls et pour tout m pris sur S^n,

$$e(\nabla\xi, \nabla r)_m = \xi(m)$$

car pour une fonction linéaire dans $\mathbb{R}^{n+1}$, il revient au même de prendre le produit scalaire euclidien de son gradient contre le vecteur $\vec{Om}$ que de prendre la valeur de la fonction au point m.

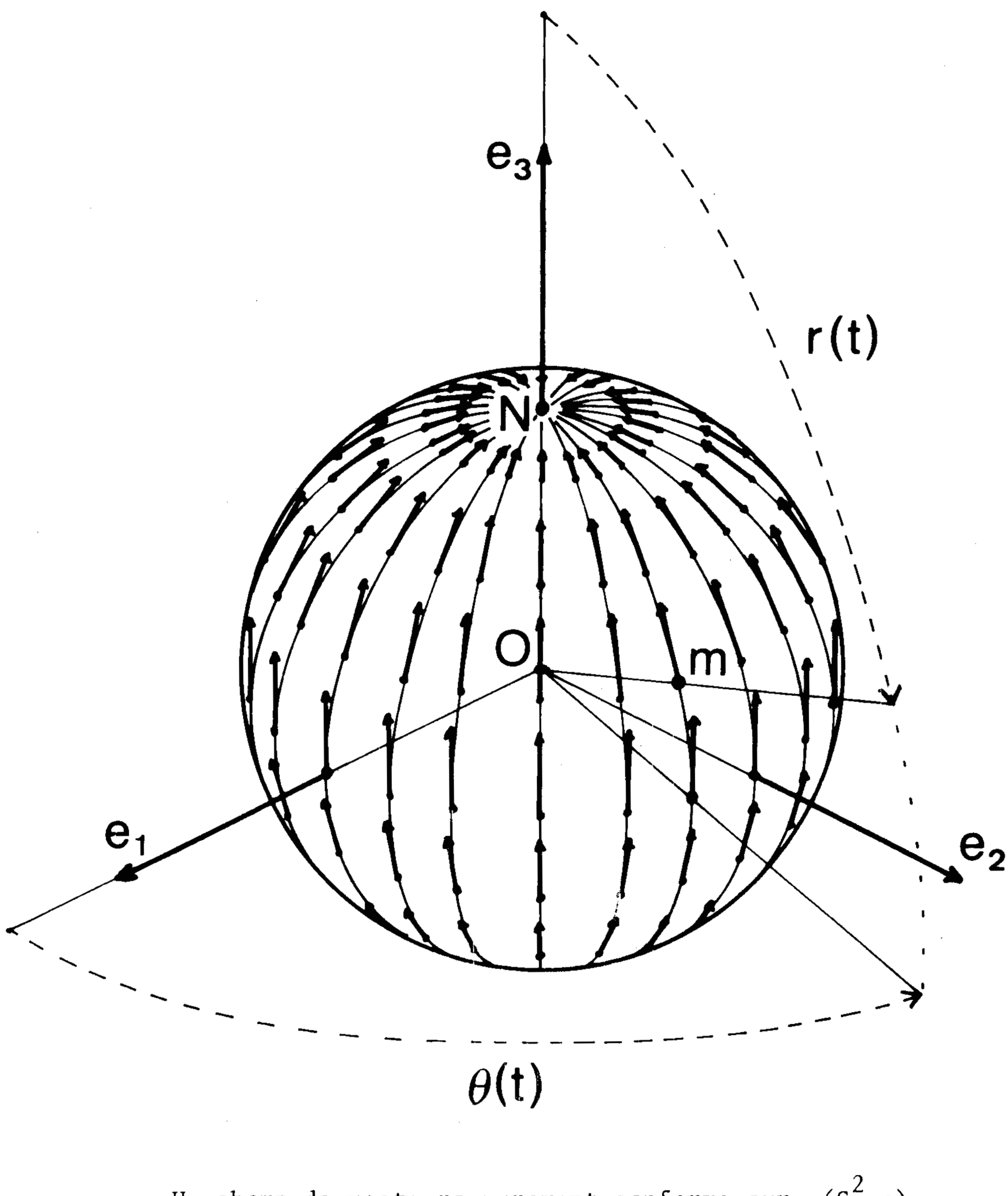
Par conséqent la restriction de ξ à (S^n, c) vérifie

$$L_{\nabla^c \xi}\, c \equiv L_{\nabla^\xi}\, c = -\,2\xi c = -\,\Delta\xi c = \mathrm{div}(\nabla\xi)c \quad ,$$

i.e. $\nabla\xi$ st un champ de vecteurs conforme sur (S^n, c).

Comme l'espace vectoriel des premières harmoniques sphériques est de dimension $n+1$, l'espace vectoriel des gradients de ces fonctions non constantes est aussi de dimension $n+1$. Le théorème découle de l'identification de $\mathcal{P}\mathfrak{X}(n+1)$ à cet espace vectoriel. ∎

2.8. Dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{X}(S^n, c)$, les champs de vecteurs qui constituent l'espace $\mathcal{P}\mathfrak{X}(n+1)$ sont orthogonaux (pour le produit scalaire global) aux isométries infinitésimales : pour cette raison nous les appelle-



Un champ de vecteurs purement conforme sur (S^2, c)

BUS LILLE

rons transformations infinitésimales conformes pures ou encore champs de vecteurs purement conformes.

Remarquons que le crochet de deux champs de vecteurs purement conformes non colinéaires est une isométrie infinitésimale non triviale. En effet si $\nabla\xi$ et $\nabla\xi'$ sont deux tels champs de vecteurs sur (S^n,c), on a

$$\begin{aligned} L_{[\nabla\xi,\nabla\xi']}\, c &= L_{\nabla\xi}(L_{\nabla\xi'}c) - L_{\nabla\xi'}(L_{\nabla\xi}c) \\ &= -2\left[L_{\nabla\xi}(\xi'c) - L_{\nabla\xi'}(\xi c)\right] \\ &= -2\left[c(\nabla\xi,\nabla\xi)c - c(\nabla\xi',\nabla\xi)c\right] \\ &\quad - 2\left[\xi'(L_{\nabla\xi}c) - \xi(L_{\nabla\xi'}c)\right] \\ &= 4(\xi'\xi c - \xi'\xi c) = 0. \end{aligned}$$

2.9. A titre d'exemple, étudions unchamp de vecteurs purement conforme sur (S^n,c).

Les orbites des champs de vecteurs purement conformes sont les grands cercles de (S^n,c). Car si $(0 : \vec{e}_1,\ldots,\overrightarrow{e_{n+1}})$ est un repère orthonormé de $\mathbb{R}^{n+1}$, le champ de vecteurs gradient de la fonction hauteur par rapport à $\overrightarrow{e_{n+1}}$ définie sur (S^n,c) est une transformation infinitésimale conforme pure. Tous les champs de vecteurs purement conformes sur (S^n,c) sont d'ailleurs obtenus de cette façon. Soient h cette fonction et m un point de la sphère. Repérons m par le couple (θ,r) où r est la distance géodésique de m au pôle nord et θ le point d'intersection du demi-cercle méridien passant par m avec la sphère équatoriale S^{n+1}. Il suit

$$h(m) = \cos r$$

et donc

$$\nabla h = \frac{dh}{dr}\frac{\partial}{\partial r} = - \sin r \frac{\partial}{\partial r} .$$

Par conséquent les orbites de ∇h sont les cercles méridiens : θ = constante et le flot (φ_t) de ∇h est donné par

$$\varphi_t(\theta_o,t_o) = (\theta_o, \frac{4r_o}{\pi} \text{Arctg } e^{-t}).$$

Outre qu'ils sont nuls aux deux pôles, les champs de vecteurs purement conformes sur (S^n,c) poussent uniformément les points des sphères parallèles vers le pôle nord (une fois fixé le vecteur $\overrightarrow{e_{n+1}}$).

III.3. *Une condition de compatibilité pour l'application courbure scalaire F en présence de l'action du groupe conforme sur les espaces des métriques et des fonctions régulières de* (M,g).

3.1. Soit $\tilde{g}$ une métrique dans la classe conforme de g. Notons $\tilde{K}$ sa courbure scalaire. Pour les problèmes que nous avons en vue, il est pertinent de poser dans la définition (2.1) de la classe conforme

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \rho = e^u & \text{pour les surfaces} \\ \rho = u^{\frac{2}{n-2}}, & \text{pour } n \geqslant 3, \end{cases}$$

où u est une fonction C^∞ sur M, positive si $n \geqslant 3$.

Notons K_g la courbure scalaire de g. Il découle de la définition de l'application courbure scalaire F les formules classiques suivantes (voir par exemple [ET] ou [YE]) :

$$(3.3- \qquad \begin{cases} K = (2\Delta^g u + K_g)\, e^{-2u} & \text{pour les surfaces} \\ K = (4\,\frac{n-1}{n-2}\,\Delta^g u + K_g u)u^{-\frac{n+2}{n-2}}, & \text{si } n \geqslant 3, \quad u > 0. \end{cases}$$

Il est remarquable que les seconds membres de (3.3) ne dépendent pas explicitement de g, mais de la fonction courbure scalaire K_g, de la fonction u et du laplacien de u dans la métrique g.

3.5. *Remarque*. Si $\tilde{g}$ est difféoconforme à g, avec les notations de (2.1), on a

$$F(\psi^* g) \equiv F(\rho^2 g) = F(\tilde{g}) \circ \psi = \tilde{K} \circ \psi .$$

où $\tilde{K}$ est la courbure scalaire de $\tilde{g} = \psi^{*-1}(\rho^2 g)$.

Il suit que les équations analogues à (3.3) sont dans ce cas

$$(3.6) \quad \begin{cases} \tilde{K} \circ \psi = (2\Delta^g u + K_g)e^{-2u} & \text{pour les surfaces} \\ \tilde{K} \circ \psi = (4\,\frac{n-1}{n-2}\,\Delta^g u + K_g u)u^{-\frac{n+2}{n-2}} & \text{, pour } n \geqslant 3, \quad n > 0. \end{cases}$$

3.7. L'application F induit ainsi sur l'espace FM des fonctions régulières sur (M,g) un opérateur différentiel quasi-linéaire que nous notons F_n défini par

$$(3.8) \quad \begin{cases} F_2(u) = (2\Delta^g u + K_g)e^{-2u} & \text{, si } n = 2 \\ F_n(u) = (4\,\frac{n-1}{n-2}\,\Delta^g u + K_g u)u^{-\frac{n+2}{n-2}} & \text{, si } n \geqslant 3, \quad u > 0. \end{cases}$$

Pour toute fonction U dans l'esapce tangent $T_u FM$, la dérivée $U.F_n$ de F_n dans la direction de U est donnée pour

i) $n = 2$ par

$$(U.F_2)(u) = \lim_{t\to 0} \frac{F_2(u+tU)-F_2(u)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[(2\Delta^g u+K_g)\frac{e^{-2tU}-1}{t} + (2\Delta^g U)e^{-2tU}\right]e^{-2u}$$

soit

$$(U.F_2)(u) = 2\left[\Delta^g U-U(2\Delta^g u + K_g)\right]e^{-2u} \tag{3.9}$$

ii) $n \geqslant 3$ par

$$(U.F_n)(u) = \lim_{t\to 0}\Big[4\,\frac{n-1}{n-2}\,\Delta^g U(u+tU)^{-\frac{n+2}{n-2}} + 4\,\frac{n-1}{n-2}\,\Delta^g u\,\frac{(u+tU)^{-\frac{n+2}{n-2}}-u^{-\frac{n+2}{n-2}}}{t}$$

$$+ K_g\,u\,\frac{(u+tU)^{-\frac{n+2}{n-2}} - u^{-\frac{n+2}{n-2}}}{t}\Big], \quad u > 0.$$

Soit

$$(U.F_n)(u) = 4^{\frac{n-1}{n-2}}\left[\Delta^g u - \left(\frac{n+2}{n-2}\,\frac{\Delta^g u}{u} + \frac{K_g}{n-1}\right)U\right]u^{-\frac{n+2}{n-2}}. \tag{3.10}$$

3.11. Fixons la métrique g sur M. Par sa définition même, le groupe conforme $C(M,g)$ est muni d'une application α_n dans l'espace $\mathcal{F}^+M$ des fonctions régulières positives ainsi définie :

. pour $n = 2$, $\quad \psi^*(g) = e^{2\alpha_2(\psi)}g$

. pour $n \geqslant 3$, $\quad \psi^*(g) = (\alpha_n(\psi))^{\frac{4}{n-2}}g.$

Nous pouvons d'ailleurs calculer $\alpha_n(\psi)$ en évaluant l'élément de volume $\psi^*(v_g)$. (En effet $\psi^*(v_g) = v_{\rho^* g} = e^{2\alpha_2(\psi)} v_g$ (pour $n = 2$) ; mais aussi $\psi^*(v_g) = (\text{dét } \psi_*) \; v_g$; il suit donc $\alpha_2(\psi) = \frac{1}{2} \operatorname{Log}(\text{dét } \psi_*)$.

Pour $n \geq 3$, $\psi^*(v_g) = (\alpha_n(\psi))^{\frac{2n}{n-1}} v_g = (\text{dét } \psi_*) v_g$ i.e. $\alpha_n(\psi) = (\text{dét } \psi_*)^{\frac{n-2}{2n}}$).

Comme le groupe conforme $C(M,g)$ ne dépend en fait que de la classe conforme de g, on peut s'intéresser à la façon dont ce groupe agit dans la classe conforme, soit

$$(3.12)\begin{cases} (\psi, e^{2u} g) \mapsto \psi^*(e^{2u} g) = e^{2u o \psi} \psi^*(g) = e^{2(u o \psi + \alpha_2(\psi))} g, \text{ si } n \leqslant 2 \\ (\psi, u^{\frac{4}{n-2}} g) \mapsto \psi^*(u^{\frac{4}{n-2}} g) = (u \circ \psi)^{\frac{4}{n-2}} \psi^*(g) = ((u o \psi).\alpha_n(\psi))^{\frac{4}{n-2}} g, \text{ si} \end{cases}$$

$n \geq 3$, $n > 0$.

Il résulte de (3.12) que la restriction à la classe conforme de g de l'action de $C(M,g)$ par image réciproque sur l'espace des métriques induit une action, que nous notons $\square_n$ du groupe conforme sur l'espace FM des fonctions régulières sur M, à savoir

$$(\psi, n) \mapsto u \,\square_n\, \psi = \begin{cases} u \circ \psi + \alpha_2(\psi), & \text{si } n = 2 \\ \\ (u \circ \psi)\alpha_n(\psi), & \text{si } n \geq 3, \; u > 0. \end{cases}$$

Le lemme suivant donne le calcul explicite de l'action tangente à $\square_n$ sur l'espace des champs de vecteurs sur FM.

Lemme III.3.13. Soit (φ_t) le flot d'une transformation infinitésimale conforme X sur (M,g). Alors pour toute fonction régulière u sur M $(u > 0,$ si $n \geq 3)$,

$$\frac{d}{dt}(u \; \square_2 \; \varphi_t)\Big|_{t=0} = X \cdot u + \frac{1}{2} \operatorname{div} X$$

$$\frac{d}{dt}(u \; \square_n \; \varphi_t)\Big|_{t=0} = X \cdot u + \frac{n-2}{2n} u \operatorname{div} X, \quad \text{si} \quad n \geq 3.$$

Preuve : Pour $n = 2$, posons

$$\tilde{g}_t = \varphi_t^*(e^{2u} g).$$

D'une part, nous avons

$$\tilde{g}_t = e^{2u \circ \varphi_t} \varphi_t^* g$$

et

$$\frac{d}{dt}(\tilde{g}_t)\Big|_{t=0} = 2\left(\frac{d}{dt}(\varphi_t^*(u))\Big|_{t=0}\right) e^{2u} g + e^{2u}\left(\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \, g)\Big|_{t=0}\right)$$

$$= 2(X \cdot u) \, e^{2u} g + e^{2u} \, L_X g$$

$$= (2X \cdot u \;\; + \operatorname{div} X) \, e^{2u} \; g.$$

D'autre part, nous avons aussi

$$\tilde{g}_t = e^{2(u \; \square_2 \; \varphi_t)} \; g$$

et, en dérivant

$$\frac{d}{dt}(\tilde{g}_t)\Big|_{t=0} = 2\left(\frac{d}{dt}(u \; \square_2 \; \varphi_t)\Big|_{t=0}\right) e^{2u} g \; .$$

Par suite

$$\frac{d}{dt}\,(u \;\Box_2\; \psi_t)\Big|_{t=0} = X \cdot u + \frac{1}{2}\,\mathrm{div}\; X.$$

En dimensions supérieures ou égales à 3, un calcul analogue permet d'obtenir le résultat annoncé. En effet en posant

$$\tilde{g}_t = \left[(u \circ \psi_t)\ \alpha_n(\psi_t)\right]^{\frac{4}{n-2}}\, g,$$

nous avons en observant que $\tilde{g}_t = (u \circ \psi_t)^{\frac{4}{n-2}}\ \psi_t^{*} g$,

$$\frac{d}{dt}(\tilde{g}_t)\Big|_{t=0} = \frac{4}{n-2}\, u^{\frac{4}{n-2}}\ \frac{d}{dt}\,\psi_t^{*}(u)\Big|_{t=0} + u^{\frac{4}{n-2}}\ L_X g$$

$$= \frac{4}{n-2}\, u^{\frac{4}{n-2}-1}\ (X \cdot u) g + \frac{2}{n}\, u^{\frac{4}{n-2}}\ (\mathrm{div}\; X) g.$$

Mais $\tilde{g}_t$ s'écrit encore

$$\tilde{g}_t = (u \;\Box_n\; \psi_t)^{\frac{4}{n-2}}\ g\ ;$$

ce qui donne par dérivation

$$\frac{d}{dt}\,(\tilde{g}_t)\Big|_{t=0} = \frac{4}{n-2}\ u^{\frac{4}{n-2}-1}\ \frac{d}{dt}\,(u \;\Box_n\; \psi_t)\Big|_{t=0}.$$

Il suit alors

$$\frac{d}{dt}(u \;\Box_n\; \psi_t)\Big|_{t=0} = X \cdot u + \frac{n-2}{2n}\, u\ \mathrm{div}\; X. \blacksquare$$

3.14 *Remarques.*

i) Soient φ et ψ deux éléments du groupe conforme $C(M,g)$.

Les identités

$$\varphi^*(\psi^* g) = (\psi \circ \varphi)^* g = \begin{cases} (\alpha_n(\psi \circ \varphi))^{\frac{4}{n-2}} g, & \text{si } n \geqslant 3 \\ \\ e^{2\alpha_2(\psi \circ \varphi)} g, & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

impliquent :

$$\alpha_n(\psi \circ \varphi) = \alpha_n(\psi) \circ_n \psi.$$

Pour une isométrie φ, $\alpha_n(\varphi) = 1$ (si $n \geqslant 3$) $\alpha_2(\varphi) = 0$.

ii) Si (φ_t) est le flot d'un champ de vecteur conforme X,

on a :

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* g)\Big|_{t=0} \equiv \frac{d}{dt}(\alpha_n(\varphi_t))^{\frac{4}{n-2}} g\Big|_{t=0} = \frac{4}{n-2}(\frac{d}{dt}\alpha_n(\varphi_t))\Big|_{t=0} g \quad , (n \geqslant 3),$$

$$\equiv \frac{d}{dt} e^{2\alpha_2(\varphi_t)} g\Big|_{t=0} = 2\frac{d}{dt}\alpha_2(\varphi_t)\Big|_{t=0}$$

$$= L_X g = \frac{2}{n} \operatorname{div} X\, g.$$

Il suit

$$(3.14) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} \alpha_n(\varphi_t)\Big|_{t=0} = \dfrac{n-2}{2n} \operatorname{div} X & (n \geqslant 3) \\ \\ \dfrac{d}{dt} \alpha_2(\varphi_t)\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{2} \operatorname{div} X \end{cases}$$

iii) Lorsque la métrique de départ g est à courbure scalaire constante sur M, soit k, les fonctions(*) $u = 1$ (si $n \geqslant 3$) et $u = 0$ (si $n = 2$) sont solutions des équations $F_n(n) = k$. On observe alors, en faisant dans les formules (3.9) et (3.10). $U = \mathrm{div}^g X$, que la divergence par rapport à la métrique g de toute transformation infinitésimale conforme X est fonction propre du laplacien Δ^g pour la valeur propre $\frac{k}{n-1}$, i.e. vérifie l'identité

$$(3.15) \qquad {}^g(\mathrm{div}^g X) = \frac{k}{n-1}\,\mathrm{div}^g X \ .$$

(*) La relation (3.15) est classique. Elle est valide pour toute métrique g à courbure scalaire constante et on peut l'obtenir aussi comme suit.

Soit K_g la courbure scalaire d'une métrique g, donc

$$F(g) = K_g \equiv K \quad \text{(nous omettons l'indice "g")}.$$

Pour tout champ de vecteurs X sur M, la dérivée de F dans la direction du tenseur $L_X g$ vaut en g

$(L_X g \cdot F)(g) = L_X(F(g)) = X \cdot K$ (on le voit en dérivant en $t = 0$, les deux membres de l'égalité $\psi_t^*(F(g)) = F(\psi_t^* g)$, où (ψ_t) est le flot du champ de vecteurs X).

Si X est une transformation infinitésimale conforme, en faisant $h = L_X g = \frac{2}{n}\,\mathrm{div}\,X$ dans la formule (1.9), il suit

$$X \cdot K = (L_X g \cdot F)(g) = \Delta(\mathrm{tr}(\tfrac{2}{n}\,\mathrm{div}\,X\, g)) + \delta\delta(\tfrac{2}{n}\,\mathrm{div}\,X\, g) - \tfrac{2}{n}\mathrm{div}\,X(g \qquad {}_g)$$

$$= 2\,\Delta(\mathrm{div}\,X) - \frac{2}{n}\,\delta\,\nabla(\mathrm{div}\,X) - \frac{2K}{n}\,\mathrm{div}\,X$$

$$= \frac{2}{n}\left[(n-1)\,\Delta(\mathrm{div}\,X) - K\,\mathrm{div}\,X\right]$$

et finalement $\frac{n}{2(n-1)}\,X \cdot K = \Delta(\mathrm{div}\,X) - \frac{K}{n-1}\,\mathrm{div}\,X$, d'où résulte (3.15) pour $K = k = C^{te}$.

Ces remarques et le lemme III.3.13 nous permettent de prouver le théorème suivant qui donne une condition nécessaire d'existence de solution pour les équations (3.3) sur (M,g) (compacte, connexe, sans bord) lorsque la métrique g est à courbure scalaire constante.

Théorème III.3.16. Soit g une métrique à courbure scalaire constante k sur M. Une condition nécessaire pour qu'une fonction régulière $\tilde{K}$ sur M soit la courbure scalaire d'une métrique $\tilde{g}$ appartenant à la classe conforme de g est que pour toute transformation infinitésimale conforme X de (M,g), on ait

$$(N_X) \qquad \int_M X \cdot \tilde{K}\, v_{\tilde{g}} = 0.$$

Preuve : La métrique g étant fixée, nous supprimerons dans cette preuve les indices "g" lorsqu'aucune confusion n'est possible.

Soient $\tilde{g} = e^{2u} g$ si $n = 2$ ou $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$, si $n \geq 3$, une métrique dans la classe conforme de g, et $K_{\tilde{g}} = \tilde{K}$ sa courbure scalaire : nous avons donc

$$F_n(u) = \tilde{K} .$$

Pour le flot (φ_t) d'un champ de vecteurs conforme X, nous avons l'identité

$$F_n(u \,\Box_n\, \varphi_t) = \varphi_t^*(\tilde{K}).$$

En la dérivant en $t = 0$, nous obtenons

$$\left[\frac{d}{dt} (u \,\Box_n\, \varphi_t)\Big|_{t=0} \cdot F_n\right](u) = X \cdot \tilde{K} .$$

D'après le lemme III.3.13, cette équation s'écrit encore :

i) pour $n = 2$

$$X \cdot \tilde{K} = \left[(X \cdot u + \frac{1}{2} \operatorname{div} X) \cdot F_2\right](n),$$

soit, d'après (3.9),

$$X \cdot \tilde{K} = 2\left[\Delta(X\cdot u + \frac{1}{2} \operatorname{div} X) - (X\cdot u + \frac{1}{2} \operatorname{div} X)(2\Delta n + k)\right]e^{-2u}$$

ce qui donne par intégration sur M contre l'élément de volume $v_{\tilde{g}} = e^{2u} v_g$

$$\int_M X \cdot \tilde{K} e^{2u} v_g = -4 \int_M X \cdot u \quad \Delta u \, v_g - 2(k \int_M X \cdot u \, v_g + \int_M (\operatorname{div} X) \, \Delta u \, v_g)$$

$$= -4 \int_M X \cdot u \quad \Delta u \, v_g - 2(k \int_M X \cdot \Delta u \, v_g + \int_M u \, \Delta(\operatorname{div} X) \, v_g) .$$

En tenant compte de (3.15) dans la 3ème intégrale, on a

$$\int_M X \cdot \tilde{K} e^{2u} v_g = -4 \int_M X \cdot u \, \Delta u \, v_g - 2k(\int_M X \cdot u \, v_g + \int_M u \operatorname{div} X \, v_g) .$$

La somme des deux dernières intégrales à droite est nulle.

Donc

$$\int_M X \cdot \tilde{K} \, v_{\tilde{g}} = -4 \int_M X \cdot u \, \Delta u \, v_g \quad ;$$

ii) pour $n \geqslant 3$ et $u > 0$,

$$X \cdot \tilde{K} = \left[(X \cdot u + \frac{n-2}{2n} u \operatorname{div} X) \cdot F_n\right](u)$$

et d'après (3.10)

$$\frac{n-2}{4(n-1)} X \cdot \tilde{K} = \left[u \, \Delta(X\cdot u + \frac{n-2}{2n} u \operatorname{div} X) - (\frac{n+2}{n-2} \Delta u + \frac{k}{n-1} u \operatorname{div} X)\right] u^{-\frac{2n}{n-2}} ,$$

soit encore

$$\frac{n-2}{4(n-1)}(X\cdot\tilde{K})u = u\,\Delta(X\cdot u + \frac{n-2}{2n}\,u\,\operatorname{div} X) - (\frac{n+2}{n-2}\,\Delta u + \frac{k}{n-1}\,u)(X\cdot u + \frac{n-2}{2n}\,u\,\operatorname{div} X).$$

Intégrons cette égalité sur (M,g) contre l'élément de volume

$$\tilde{v}_g = u^{\frac{2n}{n-2}}\,v_g$$

$$\frac{n-2}{4(n-1)}\int_M X\cdot\tilde{K}\,v_{\tilde{g}} = -\frac{4}{n-2}\Big(\int_M (X\cdot u)\Delta u\,v_g + \frac{n-2}{2n}\int_M (u\Delta u)\operatorname{div} X\,v_g +$$

$$+\frac{k(n-2)}{4(n-1)}\int_M u(X\cdot u + \frac{n-2}{2n}\,u\,\operatorname{div} X)v_g\Big).$$

En notant que $u\,\Delta u = \frac{1}{2}\,\Delta u^2 + g^{-1}(du,du)$, il suit

$$-\frac{(n-2)^2}{16(n-1)}\int_M X.\tilde{K}\,v_{\tilde{g}} = \int_M (X\cdot u)\Delta u\,v_g + \frac{n-2}{4n}\int_M (\Delta u^2)\operatorname{div} X\,v_g +$$

$$+\frac{n-2}{2n}\int_M \operatorname{div} X\,g^{-1}(du,du)v_g + \frac{k(n-2)}{8(n-1)}\int_M X\cdot u^2\,v_g$$

$$+\frac{k(n-2)^2}{8n(n-1)}\int u^2\operatorname{div} X\,v_g\ .$$

En évaluant la 2ème intégrale à droite, l'on a, compte tenu de (3.15)

$$-\frac{(n-2)^2}{16(n-1)}\int_M X\cdot\tilde{K}\,v_{\tilde{g}} = \int_M (X\cdot u)\Delta u\,v_g + \frac{(n-2)}{2n}\int_M (\operatorname{div} X)\,g^{-1}(du,du)v_g$$

$$+\frac{(n-2)k}{4n(n-1)}\int_M (1+\frac{n-2}{2})u^2\operatorname{div} X\,v_g + \frac{k(n-2)}{8(n-1)}\int_M X\cdot u^2\,v_g\ ,$$

ce qui donne

$$- \frac{(n-2)^2}{16(n-1)} \int_M X \cdot \tilde{K} \, v_g = \int_M [X.u) \, u + \frac{n-2}{2n} (\mathrm{div}\, X) \, g^{-1}(du,du)] v_g$$

$$+ \frac{(n-2)k}{8(n-1)} \int_M (u^2 \, \mathrm{div}\, X + X \, u^2) v_g \ .$$

La dernière intégrale à droite est nulle, de sorte que

$$\int_M X \cdot \tilde{K} \, v_g = - \frac{16(n-1)}{(n-2)^2} \left(\int_M (X \cdot u) \Delta u \, v_g + \frac{n-2}{2n} \int_M \mathrm{div}\, X \, g^{-1}(du,du) v_g \right) \ .$$

Pour terminer la preuve, démontrons le lemme suivant qui traduit le comportement de l'intégrale de Dirichlet sous l'action du groupe conforme d'une variété (M,g), compacte et sans bord :

<u>*Lemme* III.3.17</u>. <u>Pour toute transformation infinitésimale conforme</u> X <u>de</u> (M,g), <u>et pour toute fonction régulière</u> u <u>sur</u> M, <u>on a</u>

$$\int_M (X \cdot u) \, \Delta u \, v_g + \frac{n-2}{2n} \int_M (\mathrm{div}\, X) g^{-1}(du,du) \, v_g = 0$$

<u>Preuve</u> : Soit (ψ_t) le flot engendré par la transformation infinitésimale conforme X. Chaque ψ_t est une transformation conforme.

Nous avons donc $\psi_t^*(g) = (\alpha_n(\psi_t))^{\frac{4}{n-2}}$ (si $n \geq 3$) ($= e^{2\alpha_2(\psi_t)} g$, si $n = 2$).

Pour toute fonction régulière u (en fait c^2 suffit), nous avons :

i) pour $n = 2$

$$\int_M g^{-1}(du,du) v_g = \int_M e^{-2\alpha_2(\psi_t)} g^{-1}(du,du) \, e^{2\alpha_2(\psi_t)} \, v_g$$

$$= \int_M (\psi_t^* \, g)^{-1}(du,du) \, v_{\psi_t^* g}$$

$$= \int_M g^{-1}(d(u \circ \psi_{-t}), \, d(u \circ \psi_{-t})) v_g \ ,$$

et le lemme s'en déduit par dérivation en $t = 0$.

ii) pour $n \geq 3$,

$$\int_M g^{-1}(du,du)v_g = \int_M (\varphi_t^* g)^{-1}(\varphi_t^* du, \varphi_t^* du)\ \varphi_t^*(v_g)$$

$$= \int_M (\alpha_n(\varphi_t))^2\ g^{-1}(\varphi_t^* du, \varphi_t^* du)\ v_g .$$

En dérivant en $t = 0$, nous obtenons

$$0 = 2\int_M \frac{d}{dt}\alpha_n(\varphi_t)\Big|_{t=0} g^{-1}(du,du)v_g + 2\int_M g^{-1}(L_X du,du)v_g$$

$$= 2\int_M \frac{d}{dt}\alpha_n(\varphi_t)\Big|_{t=0} g^{-1}(du,du)v_g + 2\int_M g^{-1}(d(X u,du)v_g ,$$

ce que nous pouvons écrire encore d'après (3.14) et l'intégration du dernier terme

$$0 = \frac{n-2}{n}\int_M \operatorname{div} X\ g^{-1}(du,du)v_g + 2\int_M (X\cdot u)\ \Delta u\ v_g \ ■$$

<u>Fin de la preuve du théorème</u> III.3.10

Il suit du lemme (III.3.17) que le terme de droite de la relation (N_X) est nul pour $\dim M \geq 2$, soit

$$(N_X) \qquad \int_M X \cdot \tilde{K}\ v_{\tilde{g}} = 0 \ ■$$

Nous appellerons <u>condition</u> (N) la réunion de toutes les conditions (N_X) lorsque X parcourt l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales conformes.

3.18. *Définition*. Nous dirons qu'une fonction régulière $\tilde{K}$ est <u>interdite</u> sur (M,g) s'il n'existe aucune métrique dans la classe conforme de g dont $\tilde{K}$ soit la courbure scalaire.

Nous <u>noterons</u> $\mathrm{Int}(M,g)$ l'ensemble des fonctions interdites pour la métrique g sur M.

Il résulte immédiatement du théorème III.3.16 la

Proposition III.3.19. <u>Soient</u> (M,g) <u>une variété à courbure scalaire constante et</u> $\tilde{K}$ <u>une fonction régulière sur</u> M. <u>La fonction</u> $\tilde{K}$ <u>est interdite sur</u> (M,g) <u>s'il y existe une transformation infinitésimale conforme</u> X <u>telle que quelle que soit la métrique</u> $\tilde{g}$ <u>dans la classe conforme de</u> g, <u>on ait</u>

$$\int_M X \cdot \tilde{K}\, v_{\tilde{g}} \neq 0 .$$

Nous dirons d'une fonction $\tilde{K}$ vérifiant la proposition III.3.19 qu'elle est <u>interdite par la condition</u> (N) sur (M,g). Toute fonction $\tilde{K}$ pour laquelle on peut trouver une transforamtion infinitésimale conforme X telle que la fonction $X \cdot \tilde{K}$ garde un signe constant est évidemment interdite par la condition (N) sur (M,g).

3.20 Comme conséquences de la proposition III.3.19 nous pouvons faire les observations suivantes :

1. si la métrique g est à courbure scalaire constante l'ensemble des fonctions interdites sur (M,g) par la condition (N) est <u>stable</u> sous l'action du groupe conforme $C(M,g)$, en ce sens que si $\tilde{K}$ est une fonction interdite par (N) sur (M,g), la fonction $\tilde{K} \circ \varphi$ est aussi interdite par (N) sur (M,g) quelle que soit la transformation conforme φ.

En effet soit X un champ de vecteurs conforme sur (M,g) tel que, pour toute métrique $\tilde{g}$ qui s'écrit $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ (si $n \geq 3$) $\tilde{g} = e^{2u} g$ si $n = 2$ on ait $\int_M X \cdot \tilde{K} \, v_{\tilde{g}} \neq 0$. Etant donnée la transformation conforme φ de (M,g), l'image directe $\varphi_*^{-1}(X)$ est un champ de vecteurs conforme sur $(M, \varphi^* g)$ et nous avons

$$\int_M \varphi_*^{-1}(X) \cdot (\tilde{K} \circ \varphi) \, v_{\varphi^* g} = \int_M (X \cdot \tilde{K}) (\alpha_n(\varphi))^{\frac{2n}{n-2}} \, v_g \neq 0 \quad (n \geq 3)$$

$$\left(= \int_M (X \cdot \tilde{K}) \, e^{2\alpha_2(\varphi)} \, v_g \neq 0 \qquad (n = 2)\right).$$

2. Si $\tilde{K}$ est une fonction interdite par (N) sur (M,g) et $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ strictement monotone la fonction $G \circ \tilde{K}$ est interdite par (N) sur (M,g).

Soit en effet X un champ de vecteurs conforme tel que $\int_M X \cdot \tilde{K} \, v_{\tilde{g}} \neq 0$ où $\tilde{g}$ est une métrique comme dans la première partie. Supposons que G soit corissante. Nous avons :

$$\int_M X \cdot (G \circ \tilde{K}) v_{\tilde{g}} = \int_M (X \cdot \tilde{K}) \left((G' \circ \tilde{K})^{\frac{n-2}{2n}} u \right)^{\frac{2n}{n-2}} v_g \neq 0 \quad (n \geq 3))$$

$$\left(= \int_M (X \cdot \tilde{K}) \, e^{2(u + \mathrm{Log}\sqrt{G' \circ \tilde{K}})} \, v_g \neq 0 \qquad (n = 2)\right).$$

3.21 *Remarques.*

i) Pour un champ de vecteurs de Killing X sur une variété (M,g) à courbure scalaire constante la condition (N_X) est trivialement satisfaite car nous obtenons alors, en prenant $u \equiv 0$ si $\dim M = 2$ et $u \equiv 1$ si $\dim M \geq 3$,

$$(N_X) \qquad \int_M X \cdot \tilde{K}\, v_{\tilde{g}} = \int_M X \cdot \tilde{K}\, v_g = \int_M (\mathrm{div}^g X)\tilde{K}\, v_g = 0.$$

Pour $\tilde{K}$ fixée, comme on peut prendre pour la même fonction $u \equiv 0$ (resp. $n \equiv 1$) tous les champs de vecteurs de Killing X, nous pouvons dire que, prise isolément la collection des conditions (N_X) ne contient, dans ce cas aucune information pour l'étude de $\mathrm{Int}(M,g)$.

Lorsque la courbure scalaire k de g est non positive, en utilisant la positivité du laplacien et la relation $\Delta(\mathrm{div}^g X) = \frac{k}{n-1}(\mathrm{div}^g X)$, on observe que les seules transformations infinitésimales conformes sur (M,g) sont les champs de vecteurs de Killing, la condition (N) s'évanouit donc.

Soit maintenant $k > 0$. On dit que le groupe conforme $C(M,g)$ est <u>essentiel</u> s'il existe une transformation infinitésimale conforme X sur (M,g) qui n'est un champ de vecteurs de Killing pour aucune métrique de la classe conforme de g (autrement $C(M,g)$ n'est contenu dans le groupe d'isométries d'aucune métrique conforme à g). Soit (φ_t) le flot d'un tel champ de vecteurs conforme X. Son adhérence $\overline{(\varphi_t)}$ dans $C(M,g)$ est nécessairement non compacte ; donc $C(M,g)$ est non compact.

Il suit du théorème de J. Lelong-Ferraud et M. Obata sur la conjecture de Lichnerowicz que (M,g) est conforme à une sphère euclidienne d'où l'intérêt que présente le cas de la sphère standard que nous examinons maintenant.

3.22 *Exemples de fonctions interdites sur* (S^n, c)

La condition (N) contient strictement la condition de compatibilité trouvée par J. Kazdan et F. Warner [K.W.1] et [K.W.3]) pour les équations (3.3) et dont il résulte que les fonctions $K = \xi$ + constante (où ξ est une première harmonique sphérique) ainsi que les fonctions monotones de la distance géodésique à un point fixe sont interdites sur la sphère standard. L'application des assertions (3.20, 1 et 2) à cette sphère (S^n, c) élargit déjà ces classes de fonctions interdites.

La condition (N) va nous permettre d'en construire de nouvelles. Considérons en effet le champ de vecteurs $\nabla\xi$ dans $\mathfrak{C}\mathfrak{X}(n+1)$ défini par une première harmonique sphérique non nulle. Pour tout α choisi dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, posons

$$X^{\alpha} = \cos\alpha\ \nabla\xi + \sin\alpha\ Y$$

où Y est une isométrie infinitésimale non nulle ayant deux points singuliers communs avec $\nabla\xi$. La forme convariante de Y notée $\omega = Y^b$ n'est pas fermée sinon ω serait parallèle puisque

$$D\omega \overset{\text{déf}}{\equiv} d\omega + \frac{1}{2}\ L_Y c = d\omega$$

Remarquons qu'une fonction $\tilde{K}$ régulière sur (S^n, c) telle que

$$X^{\alpha} \cdot \tilde{K} \geqslant 0 \quad (\text{mais } \not\equiv 0)$$

est interdite pour la métrique c par la condition (N_{X^α}). Cette interdiction ne peut s'obtenir à partir d'une condition $(N_{\nabla\xi})$ de J. Kazdan et F. Warner même après changement conforme de métrique comme le prouve le

Lemme III.3.24. Le champ de vecteurs conforme X^{α} ne peut pas être réalisé comme le gradient d'une fonction régulière par rapport à une métrique de la classe conforme de c sauf si $\alpha = 0$.

Preuve : Si X^{α} était le gradient d'une fonction ζ pour la métrique $\tilde{g} = e^{2u}c$, on aurait

$$\cos\alpha\ \nabla\xi + \sin\alpha\ Y = e^{-2u}\ \nabla^c\ \zeta \equiv e^{-2u}\ \nabla\zeta$$

soit, en passant à la forme covariante

$$e^{2u}(\cos\alpha\ d\xi + \sin\alpha\ \omega) = d\zeta\ .$$

Il suit donc

$$2du \wedge (\cos\alpha \ d\xi + \sin\alpha\ \omega) = -\sin\alpha\ d\omega\ .$$

En particulier, aux points singuliers communs à $d\xi$ et ω, nous avons $\sin\alpha\, d\omega = 0$.

La conclusion s'obtient par contradiction. Supposons en effet $\sin\alpha \neq 0$. La dérivée covariante (Lévi-Civita) par rapport à c de la forme ω est $d\omega$ et de plus ω n'étant pas une forme fermée ne peut pas être identiquement nulle. Or comme l'isométrie infinitésimale Y est un champ de Jacobi le long de toute géodésique γ de (S^n,c) elle vérifie l'équation différentielle du second ordre

$$D_{\dot\gamma} D_{\dot\gamma} Y + R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma = 0$$

La forme covariante ω de Y est donc aussi solution d'une équation différentielle du second ordre le long de toute géodésique. Si la différentielle covariante de ω s'annulait aux points singuliers communs à ω et à $d\xi$, la forme ω serait identiquement nulle, d'où une contradiction. La constante α est donc nulle. ∎

Fixons alors α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et posons

$$X_1 = \cos\alpha\,(\nabla\xi)\ ;\quad X_o = \sin\alpha\ Y,$$

de sorte que $X^\alpha = X_1 + X_o$. Une fonction $\tilde K$ qui s'écrit $\tilde K = \xi + f$ où f est une fonction régulière telle que

$$\int_{S^n} (X_1\cdot(\xi+f) + X_o\cdot(\xi+f))u^{\frac{2n}{n-2}}\ v_c > 0 \qquad (n \geqslant 3)$$

$$\left(\text{ou} \quad \int_{S^2} (X_1\cdot(\xi+f) + X_o\cdot(\xi+f))\ e^{2u}\ v_c > 0 \qquad (n = 2)\right)$$

est interdite par la condition (N_{X^α}) sur (S^n,c). Les inégalités ci-dessus s'écrivent encore

$$(3.24) \qquad \int_{S^n} (X_1\cdot(\xi+f) + X_o\cdot f)u^{\frac{2n}{n-2}}\, v_c > 0 \qquad (n \geqslant 3)$$

$$\left(\text{ou} \int_{S^2} (X_1\cdot(\xi+f) + X_o\cdot f)e^{2u}\, v_c > 0 \qquad (n = 2).\right.$$

Ces conditions sont par exemple satisfaites pour un certain α par une fonction f, à support dans une boule assez petite qui à l'intérieure de cette boule est très proche de la fonction "hauteur" d'un cône à sommet excentré convenablement choisi.

Qu'une telle fonction soit satisfaite est montré en annexe prouvant ainsi le

Théorème III.3.26. Il existe des fonctions évidemment interdites par la condition (N) qui ne sont pas évidemment interdites par la condition $N_{\nabla\xi}$.

Observons qu'il se peut qu'en considérant les mesures relatives des ensembles A_1^+ et A_o^n de S^n où les fonctions $X_1\cdot(\xi+f)$ et $X_o\cdot(\xi+f)$ sont respectivement positive et négative ou puisse déduire que la fonction $\xi+f$ est interdite par la condition $N_{\nabla\xi}$. Mais cela semble difficile à mettre en oeuvre.

3.27 *Remarques.*

1. Rapportons la sphère standard S^2 aux coordonnées sphériques (r,θ) et prenons pour Y le champ de vecteurs de Killing $J(\nabla\xi)$ déduit de $\nabla\xi$ par la structure presque complexe J de S^2. Alors par rapport à la base $(\xi_o = \cos r \ ; \ \xi_1 = \sin r \cos\theta \ ; \ \xi_2 = \sin r \sin\theta)$ de l'espace

V_1 des premières harmoniques sphériques, la condition (3.27) se traduit successivement par

$$\begin{cases} -\cos\alpha \dfrac{\partial\tilde{K}}{\partial r} + \dfrac{\sin\alpha}{\sin r}\dfrac{\partial\tilde{K}}{\partial\theta} \geqslant 0 & \text{si } \xi = \xi_o \\ \cos\theta\cos r(\cos\alpha \dfrac{\partial\tilde{K}}{\partial r} + \dfrac{\sin\alpha}{\sin r}\dfrac{\partial\tilde{K}}{\partial\theta}) + \sin\theta(\sin\alpha \dfrac{\partial\tilde{K}}{\partial r} - \dfrac{\cos\alpha}{\sin r}\dfrac{\partial\tilde{K}}{\partial\theta}) \geqslant 0, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \xi = \xi_1 & \\ \sin\theta\cos r(\cos\alpha \dfrac{\partial\tilde{K}}{\partial r} + \dfrac{\sin\alpha}{\sin r}\dfrac{\partial\tilde{K}}{\partial\theta}) + \cos\theta(-\sin\alpha \dfrac{\partial\tilde{K}}{\partial r} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin r}\dfrac{\partial\tilde{K}}{\partial\theta}) \geqslant 0, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \xi = \xi_2 & \end{cases}$$

car $J(\frac{\partial}{\partial r}) = * \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sin r}\frac{\partial}{\partial\theta}$. On vérifie alors que les fonctions élémentaires suivantes sont interdites sur (S^2,c) :

$$(3.28) \qquad \begin{cases} \tilde{K}_o(r,\theta) = (\cos r)^{2q+1} + \text{constante} \\ \tilde{K}_1(r,\theta) = (\sin r)^a(\cos\theta)^{2q+1} + \text{constante} \\ \tilde{K}_2(r,\theta) = (\sin r)^a(\sin\theta)^{2q+1} + \text{constante} \end{cases}$$

où a est un nombre réel $\geqslant 1$ et q un entier non négatif.

2. Soit $\tilde{K}$ une fonction régulière définie sur la sphère (S^n,c) par

$$x \mapsto \tilde{K}(x) = (\xi + G(\xi))(x)$$

où G est une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbb{R})$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} X^\alpha.\tilde{K} &= \cos\alpha\ c(\nabla\xi,\nabla\tilde{K}) + \sin a\ c(Y,\nabla\tilde{K}) \\ &= \cos\alpha\ (c(\nabla\xi,\nabla\xi) + G'(\xi)\ c(\nabla\xi,\nabla\xi)) \\ &= \cos\alpha\ |\nabla\xi|^2\ (1+G'(\xi)). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que si la dérivée G' de G ne traverse pas la valeur -1, la fonction $\tilde{K}$ est interdite sur (S^n,c). Ainsi par exemple la fonction $\tilde{K}$ définie sur S^n par

$$x \to \tilde{K}(x) = \xi(x) + \text{Log ch}(\xi(x)) + \text{constante}$$

ne peut pas être réalisée comme courbure scalaire d'une métrique appartenant à la classe conforme de la métrique canonique c.

3. Les fonctions décrites en 1 et 2 ci-dessus pouvaient déjà être obtenues par la condition de compatibilité de J. Kazdan et Warner [K.W.1, 8.10] et [K.W.3,5.19] comme on peut le vérifier a posteriori. Par ailleurs en dimension 2, pour α fixé, les orbites du champ de vecteurs conforme X^α sont des loxodromies de la sphère et on obtient toutes les loxodromies de cette façon (on posera $\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$ lorsque l'angle β de la loxodromie avec les cercles méridiens et compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π). Par conséquent la relation $X^\alpha \cdot \tilde{K} \geq 0$ ci-dessus signifie que toute fonction dont le champ de vecteurs gradient fait un angle variant de θ à $\frac{\pi}{2}$ (ou $\frac{\pi}{2}$ à π) avec le champ de vecteurs tangents à une loxodromie de la sphère S^2 est interdite par (N_{X^α}) pour la métrique canonique.

III.4. *Description de l'image de l'application courbure scalaire* F *sur* (S^n,c) *dans la classe conforme de* c.

4.1. Sur la variété (M,g), l'application courbure scalaire F est équivariante sous l'action du groupe conforme $C(M,g)$ sur l'espace des métriques C^∞ à la source et l'espace FM au but. Sur la classe conforme de g, nous avons donc

$$F(\psi^*(e^{2u}g)) = F(e^{2u}g) \circ \psi \quad , \quad \forall \psi \in C(M,g) \tag{4.2}$$

Cette égalité se traduit par l'équivariance de l'opérateur F_n aux actions $\square_n$ à la source et 0 au but du groupe conforme sur FM c'est-à-dire

(4.3) $$F_n(u \ \square_n \ \alpha_n(\psi)) = F_n(u) \circ \psi \ , \qquad \forall\psi \in C(M,g).$$

Comme $u \mapsto u \ \square_n \psi$ est un automorphisme de FM, l'égalité (4.3) montre que l'image de F_n est une réunion d'orbites dans FM sous l'action de $C(M,g)$. L'orbite à la source de la fonction 1 $(n \geqslant 3)$ ou 0 $(n = 2)$ est $\{\alpha_n(\psi),\ \psi \in C(M,g)\}$. Il résulte de (4.3) que son image par F_n est l'orbite au but de la courbure scalaire $F_n(1)$ (ou $F_n(0)$) de la métrique initiale g. Si la métrique g est à courbure scalaire constante k, l'orbite au but de cette courbure est réduite à $\{k\}$.

4.4 En particulier pour la sphère standard (S^n,c), il suit de (4.2) que la "fibre" (ou la contre-image) $F^{-1}(n(n-1))$ de F au-dessus de la fonction constante $n(n-1)$ est l'orbite sous l'action du groupe conforme de la métrique canonique c. Pour $n \geqslant 3$, la proposition suivante décrit cette orbite en termes de courbure sectionnelle (i.e. la fonction σ_m définie sur l'ensemble des 2-plans en un point m par $\sigma_m(P) = -R(X,Y,X,Y)$ où X,Y est une base orthonormée du plan P inclus dans l'espace tangent T_mS^n).

Proposition III.4.5. L'orbite à la source de la métrique standard de S^n $(n \geqslant 3)$ sous l'action du groupe conforme $C(S^n,c)$ par image réciproque est formée des métriques à courbure sectionnelle constante.

Preuve : Compte-tenu de (4.4), la proposition III.4.5 est équivalente à <<les métriques de la classe conforme de c qui ont la même courbure scalaire constante $n(n-1)$ sont celles qui sont à courbure sectionnelle

constante>>. Cet énoncé est dû à M. Obata [OA 2]. Nous en donnons une preuve plus simple basée sur les propriétés de l'opérateur γ_c. Mais d'abord prouvons le lemme suivant :

Lemme III.4.6. Sur une variété riemannienne (M,g), notons z_g la partie qui mesure la déviation de g à être une métrique d'Einstein sur M. Alors nous avons

$$\mathrm{div}^g(z_g) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})\, \nabla^g K_g ,$$

K_g désignant la courbure scalaire de g.

Preuve : Soit r_g la courbure de Ricci de g. Alors

$$z_g = r_g - \frac{1}{n} K_g\, g,$$

et

$$\mathrm{div}^g(z_g) = \mathrm{div}^g(r_g) - \frac{1}{n}\mathrm{div}^g(K_g\, g)$$
$$= \mathrm{div}^g(r_g) - \frac{1}{n} \nabla^g K_g .$$

D'après la 2ème identité de Bianchi (qui s'écrit

$$(D_X R(Y,Z)T,U) + (D_Y R(Z,X)T,U) + (D_Z R(X,Y),U) = 0 \quad (1)$$

pour tous champs de vecteurs X,Y,Z,T,U sur (M,g)), on a

$$\mathrm{div}^g r_g = \frac{1}{2} \nabla^g K_g$$

(on le voit en prenant la trace en (Z,U) puis en (Y,T) de (1)).

Il suit

$$\mathrm{div}^g(z_g) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})\, \nabla^g K_g . \blacksquare$$

Il en résulte que pour $n \geqslant 3$, la métrique g est à courbure scalaire constante, si et seulement si z_g est à divergence nulle.

4.7. Preuve de la proposition. III.4.5. Si sur (M,g), une métrique $\tilde{g}$ est conforme à g, on a d'après [ET]

$$z_{\tilde{g}} = z_g + \rho\, \gamma_g(\nabla^g(\rho^{-1})),$$

où

$$\tilde{g} = \rho^2\, g, \qquad \rho > 0 \quad .$$

Sur la sphère (S^n,c) où $z_c \equiv 0$, cette relation devient

$$z_{\tilde{g}} = \rho\, \gamma_c(\nabla^c(\rho^{-1})),$$

où

$$\tilde{g} = \rho^2 c$$

et il suit $\operatorname{div}^{\tilde{g}}(z_{\tilde{g}}) = \operatorname{div}^{\tilde{g}}(\rho\gamma_c(\nabla^c(\rho^{-1})))$.

Comme $n \geqslant 3$, la courbure scalaire $K_{\tilde{g}}$ est constante si et seulement si $\operatorname{div}^{\tilde{g}}(z_{\tilde{g}}) \equiv 0$, i.e.

$$\operatorname{div}^{\tilde{g}}\, \rho(\gamma_c\nabla^c(\rho^{-1})) \equiv 0.$$

En intégrant sur $(S^n,\tilde{g})$ le produit scalaire (défini par $\tilde{g}$) de cette divergence contre $\nabla^c(\rho^{-1})$, il vient

$$\int_{S^n} \tilde{g}[\operatorname{div}^{\tilde{g}}\, \rho\gamma_c(\nabla^c(\rho^{-1})),\ \nabla^c(\rho^{-1})]v_{\tilde{g}} = 0,$$

ce qui s'écrit encore, par définition de l'adjoint formel et d'après le lemme III.2.4 :

$$0 = -\frac{1}{2}\int_{S^n} \tilde{g}(\rho\gamma_c(\nabla^c(\rho^{-1})),\ \gamma_{\tilde{g}}(\nabla^c\rho^{-1}))v_{\tilde{g}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{S^n} \tilde{g}[\rho\gamma_c(\nabla^c(\rho^{-1})),\ \rho^2\gamma_c(\nabla^c(\rho^{-1}))]v_{\tilde{g}}$$

Puisque $\rho > 0$, il suit que $\gamma_c(\nabla^c(\rho^{-1})) \equiv 0$, ce qui équivaut à $z_{\tilde{g}} \equiv 0$. Par conséquent $\tilde{g}$ est une métrique d'Einstein (i.e. une métrique telle que $r_{\tilde{g}} = \frac{K\tilde{g}}{n}\ \tilde{g}$). De plus $\tilde{g}$ étant dans la classe conforme de c, est conformément plate (i.e. conforme à une métrique localement euclidienne). Ceci termine la preuve puisqu'une métrique d'Einstein conformément plate est à courbure sectionnelle constante (voir par exemple [KI. prop. 8.1]) ∎

4.8. <u>*Remarque*</u>. On sait que sur la "plupart" des variétés compactes (M,g) il existe une métrique dans la classe conforme de g une métrique $\tilde{g}$ à courbure scalaire constante. Il reste néanmoins les cas suivants où la conjecture de Yamabe [YE] qui affirme l'existence d'une telle métrique n'est pas encore entièrement démontrée cf. [TR2], [AN5]) :

1. $3 \leqslant \dim M < 6$ et (M,g) est non conformément plate à groupe de Poincaré π_1 infini.

2. La vérité (M,g) est conformément plate à groupe de Poincaré π_1 infini.

4.9 Pour une variété (M,g) examinons l'équation générale

(4.10) $$f_n(u) = K_{\tilde{g}} = (4\ \frac{n-1}{n-2}\ \Delta u^{g_u} .$$

Suivant Yamabe [YE], on considère, pour son étude, l'équation

(Y_q) $$\Delta u + K\ u = \eta\ \tilde{K}\ u^{q-1}$$

avec $2 < q \leqslant \frac{2n}{n-2}$, η une constante, K et $\tilde{K}$ deux fonctions régulières données sur M.

Soit la fonctionnelle J_q définie par

$$J_q(f) = \|\nabla f\|^2_{L_2} + \int K\, f\, v_g$$

sur le sous-ensemble E_q de $W^1_2(M)$ tel que

$$E_q = \{f \in W^1_2(M) \mid f > 0, \quad \int_M \tilde{K}\, f^q\, v_g = 1\}.$$

L'équation (Y_q) apparaît alors comme l'équation d'Euler de J_q, η s'identifiant à un multiplicateur de Lagrange.

Pour $q < \frac{2n}{n-2}$, il suit des théorèmes des plongements continus et compacts de Sobolev, Rellich- Kondrachov que J_q atteint son minimum en une fonction u appartenant à B_q qui est solution de (Y_q).

Pour $q = \frac{2n}{n-2}$, nous sommes dans le cas-limite du théorème de compacité de Rellich-Kondrachov. Cela nécessite que la borne inférieure de la fonctionnelle J_q soit inférieure à une valeur critique reliée à la constante $A(n,2)$ (définie en (4.9) chapitre II) de façon analogue à celle que nous verrons en détail dans la section suivante pour $n = 2$. On peut choisir la constante η telle que l'équation $(Y_{\frac{2n}{n-2}})$ admette une solution régulière positive pour $\tilde{K}$ positive et vérifiant $(\sup \tilde{K})\ (\inf \tilde{K})^{-1} < C$, où C est une constante qui ne dépend que de K.

Nous savons que pour la sphère standard (S^n,c) il existe des fonctions interdites $\tilde{K}$ pour lesquelles l'équation (4.10) (qui est du type $Y_{\frac{2n}{n-2}}$) n'a pas de solution (on obtient ainsi une illustration de la nécessaire non compacité du plongement continu de $W^1_2(S^n)$ dans $L_{\frac{2n}{n-2}}(S^n)$

(cf. 1.1 chapitre II)). Quant à l'existence d'une solution de cette équation sur (S^n,c) elle est assurée par le

Théorème III.4.11 (voir [AN4, th.9]). Soit f une fonction régulière, positive sur (S^n,c) telle que $(\sup f)(\inf f)^{-1} < 2^{\frac{2}{n-2}}$ alors il existe une harmonique sphérique ξ^p d'ordre $p \geq 1$ telle que l'équation (4.10) avec $K_{\tilde{g}} = f + \xi^p$ ait une solution positive régulière sur S^n.

L'énoncé que nous donnons de ce théorème diffère légèrement de celui de [AN4]. Ceci tient à la remarque que nous avons faite au chapitre II, section 4 à propos des sous-espaces admissibles de V_p^n. Mais la preuve elle n'en est guère différente. Ses principales étapes sont :

1. On considère l'équation, pour $2 < q < \frac{2n}{n-2}$,

$$(Y_q(S^n)) \qquad 4\,\frac{n-1}{n-2}\,\Delta u + k\,u = \tilde{K}\,u^{q-1} \quad , \ k \ \text{constant},$$

à laquelle on associe la fonctionnelle J_q telle que

$$J_q(u) = \left(4\,\frac{n-1}{n-2}\,\|\nabla u\|^2_{L_2} + k\|u\|^2_{L_2}\right)\left(\int f\,u^q\,v_c\right)^{-\frac{2}{q}}$$

Par la méthode de Yamabe on minimise J_q sur le sous-ensemble B_q^o de B_q formé par les fonctions u telles que u^q soit L_2-orthogonale à un sous-espace admissible de V_p^n, pour p fixé ≥ 1.

2. On utilise un procédé de passage à la limite en faisant tendre q vers $\frac{2n}{n-2}$ pour conclure ∎

4.9. Dans le reste de ctte section (M,g) est une surface dont nous notons $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Dans la classe conforme de la métrique g, il existe une métrique à courbure scalaire constante : nous pouvons donc supposer que g elle-même est à courbure scalaire constante, soit k. L'équation (3.8) exprimant l'opérateur différentiel F_2 de la courbure scalaire dans la classe conforme de g s'écrit donc

$$F_2(u) = (2\Delta^g u + k)e^{-2u}$$

A propos de l'image de F_2 dans FM les faits suivants sont connus :

Si $k < 0$ (i.e. $\chi(M) < 0$) l'image de F_2 est formée par les fonctions négatives sur M [BR1] ou [BR2].

Si $k = 0$ (i.e. $\chi(M) = 0$) l'image de F_2 est formée par la fonction nulle et les fonctions qui changent de signes et ont une moyenne négative [K.W.1].

4.10 Le cas $k > 0$ (i.e. $\chi(M) > 0$) reste seul ouvert ; la surface (M,g) est alors la sphère S^2 ou le plan projectif réel munis de leur métrique canonique. C'est ce que nous voulons étudier maintenant.

Soit $\tilde{K}$ une fonction régulière sur M. Si $\tilde{K}$ est la courbure scalaire d'une métrique g dans la classe conforme de g, il existe une fonction u telle que

$$\tilde{K}\, e^{2u} = 2\Delta^g u + k\,, \qquad k > 0. \tag{4.11}$$

L'intégration de cette égalité contre l'élément de volume v_g et la formule de Gauss-Bonnet

$$\int_M \tilde{K}\, v_{\tilde{g}} = \int_M k\, v_g = 4\pi\, \chi(M) > 0$$

(ici 4π parce que k est la courbure scalaire qui vaut le double de la courbure de Gauss) montrent <u>qu'une condition nécessaire pour que</u> $\tilde{K}$ <u>appartienne à l'image de</u> F_2 <u>est que</u> $\tilde{K}$ <u>soit positive en au moins un point sur</u> M.

Cette condition étant supposée satisfaite sur $\tilde{K}$, soit

$$E = \{u \in W_2^1(M) \mid \int_M \tilde{K}\, e^{2u}\, v_g = 4\pi\, \chi(M)\}\ ,$$

où $W_2^1(M)$ est vu comme le complété de $C^\infty(M)$ pour la norme de Sobolev. Puisque $\tilde{K}$ est positive sur un ensemble de mesure non nulle, E est non vide.

<u>Quelles conditions sont suffisantes pour que</u> $\tilde{K}$ <u>appartienne à</u> $\mathrm{Im}\, F_2$?

4.12 Pour répondre à cette question, il suffit, $\tilde{K}$ étant donnée, de résoudre l'équation (4.11) dans l'ensemble E. Faisons le par la méthode variationnelle directe en utilisant les suites minimisantes comme dans [MR2], [BR1]. Considérons pour cela la fonctionnelle J définie sur $W_2^1(M)$ par

$$J(u) = \int_M (g^{-1}(du,du) + k\, u)\, v_g .$$

Minimisons J sur l'hypersurface E de $W_2^1(M)$.

Sur E l'équation d'Euler de J est

$$2\Delta^g u + k + 2\lambda\, \tilde{K}\, e^{2u} = 0$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte définissant E.

De l'intégration de cette dernière égalité sur (M,g), de la formule de Gauss-Bonnet et de la contrainte exprimée par l'appartenance de u à l'ensemble E, il résulte que $\lambda = -\frac{1}{2}$. Il suit alors que l'équation d'Euler du problème initial est l'équation (4.11).

4.13 Pour transférer la contrainte définissant E sur la fonctionnelle, posons

$$u = U + \bar{u}$$

où U est une fonction donnée dans $W_2^1(M)$ et à moyenne nulle et où $\bar{u}$ désigne la moyenne de u.

Soit J_o la fonctionnelle définie sur le sous-espace $W_2^1(M) \cap \mathrm{Ker}\int_M$ de $W_2^1(M)$ formé des fonctions U de moyenne nulle par

$$J_o(U) = \int_M g^{-1}(du,du)v_g - 2\pi\ \chi(M)\ \mathrm{Log}\int_M \tilde{K}\ e^{2u}v_g + 2\pi\chi(M)\ \mathrm{Log}\ 4\pi\ \chi(M)).$$

Remarquons que

$$\inf_{W_2^1(M)\cap \mathrm{Ker}\int_M} J_o(U) = \inf_E J(U) \quad .$$

En effet il suit de la définition de J_o que si, U étant donné, on pose $\bar{u}$ tel que

$$\int_M \tilde{K}\ e^{2(U+\bar{u})}\ v_g = 4\pi\ \chi(M),$$

$U+\bar{u}$ appartient à E et $J(U+\bar{u}) = J_o(U)$, d'où

$$\inf_{W_2^1(M)\cap \mathrm{Ker}\int_M} J_o(U) \geqslant \inf_E J(u) \ .$$

Inversement si u élément quelconque de E est décomposé en $u = U+\bar{u}$, où U est à moyenne nulle, alors un calcul rapide montre que $J(u) = J_o(U)$ et par suite

$$\inf_E J(u) \geqslant \inf_{W_2^1(M)\cap \mathrm{Ker}\int_M} J_o(U) \ .$$

En outre

$$J_o(U) \geqslant \|du\|^2_{L_2} - 2\pi\ \chi(M)\ \left[\mathrm{Log}\int_M e^{2u}v_g + \mathrm{Log}(\sup_M \tilde{K}) - \mathrm{Log}\ 4\pi\ \chi(M)\right].$$

En estimant le premier terme entre crochets dans le membre de droite de cette inégalité à l'aide de l'estimée (3.14) du chapitre II (c'est-à-dire $\int_M e^{2U} v_g \leqslant \gamma\, e^{4\beta_M \|dU\|^2_{L_2}}$), on obtient

$$J_o(U) \geqslant (1-8\pi\ \chi(M)\beta_M)\|dU\|^2_{L_2} + C_1\ ,$$

où C_1 est une constante qui peut être choisie égale à

$$2\pi\ \chi(M)\ \mathrm{Log}(4\pi\ \chi(M)) \cdot (\chi \sup_M \tilde{K})^{-1}.$$

Par conséquent J_o est bornée inférieurement si

$$\beta_M \leqslant \frac{1}{8\pi\ \chi(M)}$$

4.14 Examinons d'abord le cas où $\beta_M < \frac{1}{8\pi\ \chi(M)}$; $J_o(U)$ domine alors la norme W^1_2 de U.

Posons $\inf\limits_{W^1_2(M) \cap \mathrm{Ker}\int_M} J_o = m$ et soit (U_n) une suite de fonctions dans $W^1_2(M)$ de moyennes nulles telle que $(J_o(U_n))$ converge vers m et que $J_o(U_n) \leqslant m+a$, pour tout n et pour un certain nombre réel positif a. Comme J_o domine la norme $\| \ \|_{1,2}$ la suite (U_n) est bornée en norme $\| \ \|_{1,n}$). Il suit que cette suite (U_n) contient une sous-suite que nous notons encore (U_n) qui converge faiblement dans $W^1_2(M)$ vers une fonction U de moyenne nulle.

La suite $(e^{2U_n})_n$ converge alors fortement en norme L_1 vers e^{2U} d'après l'estimée duale $(\mathcal{D}_2)$ de Trudinger et le théorème de plongement compact de Rellich-Kondrachov (la suite $(U_n)_n$ qui converge faiblement dans $W^1_2(M)$ vers U converge fortement dans $L_4(M)$ vers U (cf [AS, th. 6.2]). (En effet d'après l'inégalité de Schwarz nous avons

$$\int_M |e^{2U_n} - e^{2U}| v_g = \int_M e^{2U} |e^{2(U-U_n)} - 1) v_g$$

$$\leqslant (\int_M e^{4U} v_g)^{\frac{1}{2}} (\int_M |e^{2(U-U_n)} - 1|^2 v_g)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2(\int_M e^{4U} v_g)^{\frac{1}{2}} (\int_M e^{4(U-U_n)} |U-U_n|^2 v_g)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2(\int_M e^{4U} v_g)^{\frac{1}{2}} (\int_M e^{8|U-U_n|} v_g)^{\frac{1}{4}} (\int_M |U-U_n|^4 v_g)^{\frac{1}{4}}$$

car $|e^x - 1| \leqslant |x| e^{|x|}$. Les fonctions U et U_n étant dans $W_2^1(M)$, dans le membre de droite de la dernière inégalité les deux premières intégrales sont bornées d'après l'estimée $(\mathcal{D}_2)$ du chapitre II et la dernière intégrale tend vers 0 par ce que (U_n) tend fortement dans L_4 vers U quand n tend vers l'infini). De plus on a

$$\underline{\lim} \, \|U_n\|_{1,2} \geqslant \|U\|_{1,2} \quad ,$$

car ou $U \equiv 0$ et l'inégalité est triviale, ou en notant $(\, , \,)_{1,2}$ le produit scalaire dans $W_2^1(M)$, on obtient par application de l'inégalité de Schwarz

$$(\|U\|^{-1} U, \, U_n)_{1,2} \leqslant \|U_n\|_{1,2} \quad ,$$

d'où l'inégalité cherchée par passage à la limite faible.

Il s'en suit donc que

$$m = \lim_{n \to +\infty} J_o(U_n) \geqslant \underline{\lim} (\|dU_n\|_{L_2}^2 - 2\pi \, \chi(M) \cdot \mathrm{Log} \int_M \tilde{K} \, e^{2U_n} v_g) + C^{te}$$

$$\geqslant J_o(U).$$

Comme par suite de la convergence faible la fonction U est dans $W_2^1(M) \cap \mathrm{Ker} \int_M$, il ne peut y avoir qu'égalité. Par suite la fonction u dans $W_2^1(M)$ définie par $u = U + \bar{u}$, où $\bar{u}$ est le nombre réel tel que

$\int_M K\, e^{2(U+\bar{u})} = 4\pi\ \chi(M)$, minimise la fonctionnelle J sur l'ensemble E et est par conséquent solution faible de l'équation

$$(2\Delta^g u + k)\, e^{-2u} = \tilde{K},$$

sur (M,g).

4.15 De la théorie de régularité L_p des équations elliptiques appliquée à l'équation ci-dessus, il suit que la fonction u est de classe C^∞ sur M. En effet, réécrivant cette équation sous la forme

$$2\Delta^g u = \tilde{K}\, e^{2u} - k,$$

on observe ce qui suit :

u appartient à $W_2^1(M)$ implique, d'après Trudinger, que e^{2u} est dans $L_p(M)$ pour tout p, ce qui implique que $\Delta^g u$ appartient à $L_p(M)$, pour $p > 2$. Par la régularité L_p, u est donc dans $W_p^2(M)$. D'après l'inégalité de Sobolev rappelée en (1.1 ii) ch.II), u est de classe C^1. Par suite e^{2u} est de classe C^1, donc $\Delta^g u$ est de classe C^1 ; donc u est de classe C^2, ce qui implique à son tour que e^{2u} est de classe C^2 etc... On obtient ainsi de proche en proche que u est de classe C^∞.

Un cas particulier intéressant est celui du plan projectif réel muni de sa métrique canonique g_o. Comme nous avons au chapitre II, la constante optimale β_M de toute surface compacte, connexe, M (ou d'un domaine borné d'une surface connexe non compacte) est atteinte et égale à $\frac{1}{16\pi}$ (cf. th.II.3.10). Il suit alors (voir aussi [MR2]) :

Proposition III.4.16. Sur le plan projectif réel $(\mathbb{R}P, \tilde{g}_o)$ l'image de F_2 est précisément l'ensemble des fonctions régulières positives en au moins un point.

<u>Preuve</u> : La proposition résulte de la conjonction des deux situations favorables suivantes sur $(\mathbb{R}P, g_o)$:

. d'une part $\dfrac{1}{8\pi\ \chi(\mathbb{R}P^2)} = \dfrac{1}{8\pi}$

. d'autre part dans l'estimée duale $(\mathcal{D}_2)$ sur $\mathbb{R}P^2$ la constante β peut-être choisie égale à $\frac{1}{16\beta}$ d'après ce que nous avons juste rappelé. La condition suffisante $\beta_M < \frac{1}{8\pi\ \chi(M)}$ est donc réalisée pour $(M,g) = (\mathbb{R}P^2, g_o)$ ∎

4.17 Pour $\beta_M = \frac{1}{8\pi\ \chi(M)}$, la fonctionnelle J bien que bornée inférieurement n'admet pas nécessairement de points critiques. C'est le cas lorsque la surface (M,g) est la sphère (S^2,c) [K.W.1] sur laquelle on a justement. $\beta_{S^2} = \frac{1}{16\pi}$. La méthode variationnelle exposée ci-dessus ne permet donc pas de résoudre l'équation (4.11) pour n'importe quelle fonction régulière $\tilde{K}$ sur (S^2,c) satisfaisant la condition de signe. Nous reprendrons ce cas plus loin au moment de donner une description "qualitative" de l'image de l'application courbure scalaire F_2 sur (S^2,c).

4.18 Comme conséquence de ce qui précède nous retrouvons d'abord le fait que l'estimée $(\mathcal{D}_2)$ du chapitre II n'est valide sur la sphère standard (S^2,c) que pour $\beta \geqslant \frac{1}{16\pi} \equiv \beta_{S^2}$ (*). Les conditions du théorème de J. Moser (théorème II.3.1) qui donne la meilleure constante α_{S^2} ne peuvent donc pas être améliorées.

(*) Nous savons qu'il existe sur (S^2,c) des fonctions interdites pour la métrique par la condition d'intégrabilité (N). Nous pouvions donc nous attendre a priori à ce que la condition géométrique $\beta_{S^2}\ \frac{1}{16\pi} = \frac{1}{8\pi\ \chi(S^2)}$ fût impossible. En retour la présence de cette obstruction géométrique traduit la non existence de solution pour l'équation (4.11) avec $\tilde{K}$ une fonction régulière positive sur un sous-ensemble non négligeable de S^2. Cette étude fournit ainsi s'il en est besoin un exemple d'interprénétration de la géométrie et de l'analyse.

Proposition III.4.19. Toute fonction $\tilde{K}$ régulière sur (S^2,c), antipodalement symétrique (i.e. $\tilde{K}(x) = \tilde{K}(-x)$), positive en au moins un point est la courbure scalaire d'une métrique dans la classe conforme de c.

Preuve : On peut observer que la fonction $\tilde{K}$ est en fait définie sur le plan projectif $(\mathbb{R}P^2, g_o)$ et usiliser la proposition III.4.16 pour conclure. Mais il est instructif de donner la preuve qui suit.

D'après la proposition II.3.8, la meilleure constante β pour les fonctions antipodalement symétriques dans $W_2^1(S^2)$ est au moins égale à $\frac{1}{2}\ \beta_{S^2} = \frac{1}{32\pi}$.

De plus le laplacien étant invariant par antipodie, si u est antipodalement symétrique $F_2(u)$ l'est aussi.

La proposition résulte alors de ce que dans la classe des fonctions antipodalement symétriques la constante β peut être choisie arbitrairement voisine de $\frac{1}{32\pi}$ et donc la condition $\beta < \frac{1}{8\pi\ \chi(M)} = \frac{1}{16\pi}$ se trouve réalisée pour la sphère canonique (S^2,c) dans ce cas ∎

Corollaire III.4.20. Les harmoniques sphériques d'ordre pair sur (S^2,c) peuvent être réalisées comme des courbures scalaires de métriques appartenant à la classe conforme de c.

La proposition III.4.19 nous conduit au thorème suivant

Théorème III.4.21. L'ensemble des fonctions régulières sur (S^2,c) qui sont réalisables comme des courbures scalaires de métriques appartenant à la classe conforme de c est dense pour les topologies L_p $(p \geqslant 1)$ dans l'espace des fonctions régulières positives en un au moins un point de S^2.

Preuve : Nous allons prouver que toute fonction régulière K positive en au moins un point sur S^2 peut être approchée en norme L_p $(p \geq 1)$ par une fonction $\tilde{K}$ réalisable comme courbure scalaire d'une métrique dans la classe conforme de c.

Soit N le pôle nord de S^2. Pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe une transformation conforme ψ de (S^2,c) qui transforme l'hémisphère nord en une boule P de S^2 centrée en N et dont le volume est inférieur à ε_1. Notons P' le complémentaire de P sur S^2.

Soit K une fonction régulière sur S^2 positive sur un ensemble de mesure non nulle. Soit $\tilde{K}$ la fonction définie par

$$\tilde{K} = K \text{ sur } P'$$

$$\tilde{K} = K \circ \psi^{-1} \circ \tau \circ \psi \text{ sur } P.$$

Par construction la fonction $\tilde{K}$ est invariante par l'antipodie $\psi^{-1} \circ \tau \circ \psi$ de la métrique $\psi^* c$. Comme elle est aussi positive sur un ensemble de mesure non nulle, $\tilde{K}$ est par conséquent la courbure scalaire d'une métrique dans la classe conforme de $\psi^* c$, donc de c. De plus

$$\int_{S^2} |K - \tilde{K} \circ \psi|^p \, v_c = \int_P |K - \tilde{K} \circ \psi|^p \, v_c \, .$$

Par ailleurs K étant fixée, $|K - \tilde{K} \circ \psi| < 2 \sup K$.

Il suit que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir ε_1 tel que

$$\| K - \tilde{K} \circ \psi \|_{L_p} < \varepsilon,$$

ce qui termine la preuve ∎

4.22 D'après (3.8) la dérivée de F_2 dans la direction de U prend en la fonction nulle la valeur

$$(U \cdot F_2)(0) = 2(\Delta U - 2U),$$

où U appartient à $T_o \mathcal{F}M$, espace tangent en 0 à l'espace des fonctions régulières.

Il suit que le noyau de l'opérateur $(U \mapsto (U \cdot F_2)(0))$, soit $\ker(T\, F_2(0))$ dans $T_o \mathcal{F}S^2$ est l'espace vectoriel V_1 des premières harmoniques sphériques. Son conoyau, soit $\mathrm{coker}(T\, F_2(0))$ i.e. l'orthogonal dans $\mathcal{F}S^2$ au sens L_2 de l'image de $(U \mapsto (U \cdot F_2)(0))$ est aussi V_1. En effet pour tout h appartenant à $\mathrm{coker}(T\, F_2(0))$, nous avons

$$0 = \int_{S^2} (U \cdot F_2)(0) h\, v_c = 2\int_{S^2} (\Delta U - 2U) h\, v_c$$

$$= 2\int_{S^2} U(\Delta h - 2h) v_c,$$

quelle que soit la fonction U dans $T_o \mathcal{F}S^2$. Par suite

$$\Delta h - 2h = 0$$

et

$$\mathrm{coker}(T\, F_2(0)) = \ker(T\, F_2(0)) = V_1. \tag{4.23}$$

Observons que $T_o \mathcal{F}S^2$ est ici confondu avec l'esapce de Banach "source" et "but" $\mathcal{F}S^2$. De plus V_1 étant de dimension finie est fermé dans $\mathcal{F}S^2$ et le quotient $\mathcal{F}S^2 \setminus V_1$ est un espace de Banach.

Il résulte alors de (4.23) que l'opérateur $(U \mapsto (U \cdot F_2)(0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{F}S^2 \setminus V_1$ à valeurs dans $\mathcal{F}S^2 \setminus V_1$. Par conséquent F_2 est un difféomorphisme d'un voisinage 0 sur un voisinage de $F_2(0) = k$: pour toute fonction f voisine de k dans $\mathcal{F}S^2$, il existe une première harmonique sphérique ξ_f telle que l'équation

$$f - \xi_f = (2\Delta^g u + k)e^{-2u}$$

admette une solution u dans un voisinage de 0. En fait ce résultat est global et ne se limite pas aux voisinages de 0 (sous réserve de certaines conditions de signe sur f) (voir [AN.4, th.8]). Plus généralement

Théorème III.4.24. Soit f une fonction régulière sur S^2, positive en au moins un point. Il existe une harmonique sphérique d'ordre $p \geq 1$ soit ξ_f^p telle que la fonction $\tilde{K} = f + \xi_f^p$ soit la courbure scalaire d'une métrique conforme à la métrique standard.

Preuve : La preuve peut se faire par la méthode variationnelle exposée au début de cette section et en utilisant l'estimée ((4.6) ch.II). Nous en donnons juste les grandes lignes.

Il s'agit de prouver que l'équation

$$\tilde{K} = (2\Delta u + k)e^{-2u} \quad , \text{ sur } \quad (S^2,c) \quad (k = 2)$$

admet une solution régulière lorsque $\tilde{K} = f + \xi_f^p$, $p \geq 1$.

Considérons la fonctionnelle J définie sur $W_2^1(S^2)$ par

$$J(u) = \int_{S^2} (c^{-1}(du,du) + k\,u)\,v_c \;.$$

Nous voulons minimiser $J(u)$ sous la contrainte que u appartient à l'ensemble

$$E = \{u \in W_2^1(S^2| \int_{S^2} f\, e^{2u} v_c = 8\pi \quad \text{et} \quad \int \xi_i^p\, e^{2u}\, v_c = 0,\ i=0,\dots 2p\},$$

pour pouvoir utiliser l'estimée ((4.6) ch.II) qui améliore la constante β dans l'estimée duale de Trudinger. L'ensemble E est non vide puisque f est positive sur un ensemble de mesure non nulle et les ξ_i^p de moyenne nulle sur (S^2,c). Introduisons les multiplicateurs de Lagrange λ, μ_i, $0 = 1$, $i = 1,\dots,2p$, associés à la contrainte définissant $\mathcal{E}$. Sur $\mathcal{E}$ l'équation d'Euler de $\mathcal{J}$ s'écrit alors

$$2\Delta u + k + 2\lambda\, f\, e^{2u} + 2 \sum_{i=0} \mu_i \xi_i^p\, e^{2u} = 0.$$

Les constantes μ_i sont déterminées par f, de sorte que cette équation peut encore se mettre sous la forme

$$2\Delta u + k = -2\lambda(f + \xi_f^p)e^{2u}$$

où ξ_f^p est une harmonique sphérique d'ordre p, dépendant de f. En intégrant cette égalité sur (S^2,c), on obtient $\lambda = -\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$2\Delta u + k = (f + \xi_f^p)e^{2u} \quad .$$

L'existence d'une solution régulière de cette dernière équation résulte de la minimisation de $\mathcal{J}(u)$ et de la théorie de régularité des équations elliptiques ∎

4.25 Nous avons remarqué précédemment que pour obtenir la partition de l'unité par des harmoniques sphériques qui assure la validité de l'estimée (4.16) du chapitre II qu'il suffit de prendre $(n+1)$ harmoniques sphériques (ξ_i^p) d'ordre p bien choisies. Il suffit en effet de se placer sur un sous-espace "admissible" (i.e. qui admet une base (ξ_i^p), $i = 0,1,2$ pour laquelle $\sum_{i=0}^{2} |\xi_i^p| > 0$ en tout point de S^2 de l'esapce vectoriel V_p des harmoniques sphériques d'ordre p sur (S^2,c).)

La proposition III.4.24 admet donc le corollaire suivant :

Proposition III.4.26. Pour tout ξ non nul dans V_p, $p \geqslant 2$, il existe ξ' dans un sous-espace "admissible" de V_p tel que la fonction $\tilde{K} = \xi + \xi'$ (qui est une harmonqiue sphérique d'ordre p), soit la courbure scalaire d'une métrique dans la classe conforme de c.

Si p est pair la fonction $\tilde{K}$ est paire sur (S^2,c) et le corollaire III.4.20 donne un résultat beaucoup plus fort.

Si p est impair la preuve est analogue à celle de la proposition III.4.24. ■

4.27. Pour terminer, voici une proposition qui montre que l'ensemble $\mathrm{Int}(S^2,c)$ des fonctions interdites sur S^2 pour la métrique standard n'a pas de structure linéaire puisque nous exhibons deux fonctions interdites dont la somme ne l'est pas.

Proposition III.4.28. Soient ξ une première harmonique sphérique et φ une transformation conforme de (S^2,c). Il existe sur S^2 une métrique $\tilde{g}$ dans la classe conforme de c dont la courbure scalaire $\tilde{K}$ est de la forme

$$\tilde{K} = \xi \circ \varphi + \xi'$$

où ξ' est une autre première harmonique sphérique.

On sait en effet que ξ appartient à $\mathrm{Int}(S^2,c)$ et d'après (3.20), la fonction $\xi \circ \varphi$ est interdite sur (S^2,c). Mais comme $\xi \circ \varphi$ est positive sur un ensemble de mesure non nulle de S^2, il suit de la proposition III.4.24 qu'il existe une première harmonique sphérique $\xi^1_{\xi\circ\varphi}$

telle

$$\xi \circ \psi + \xi^{1}_{\xi \circ \psi}$$

soit la courbure scalaire d'une métrique dans la calsse conforme de c,

d'où le résultat ∎

CONCLUSION ! *(si l'on peut conclure ...)*

En guise de conclusion nous voudrions attirer l'attention du lecteur sur certaines perspectives que semble ouvrir ce travail et des problèmes qui à notre avis restent ouverts en dehors du problème de L. Nirenberg dont nous n'avons pas, à notre déception, achevé la résolution.

1. Il coexiste aujourd'hui encore dans la littérature plusieurs types de symétrisations de Steiner (symétrisation sphérique par rapport à un demi-axe, à un point, symétrisation par rapport à une droite, à un plan) sans qu'il soit aisé de passer de l'un à l'autre. Ils ont en commun la propriété fondamentale des inégalités isopérimétriques des théorèmes I.1.6 et I.2.2 et celle de faire dépendre la fonction symétrisée d'un nombre de variables inférieur à celui des variables de la fonction à symétriser. L'introduction d'une topologie convenable dans l'ensemble de ces transformations devrait en unifier la théorie et permettre de passer de l'une à l'autre à l'aide d'une notion de limite appropriée. C'est à notre avis un travail qui ne manquerait pas d'intérêt à cause de l'utilisation sans cesse croissante des propriétés de "la" symétrisation sphérique en géométrie comme en analyse (cf. [GV], [BA]). Signalons comme autre problème ouvert l'introduction d'une symétrisation sphérique sur les espaces riemanniens symétriques de rang 1 sur lesquels il devrait être instructif d'écrire des inétalités de type isopérimétrique.

2. Il nous paraît raisonnable d'envisager que la méthode de l'action du groupe conforme de (S^n,c) utilisée pour les équations induites par l'application courbure scalaire puisse s'appliquer à d'autres situations où se présente une équation différentielle non linéaire en même temps qu'un groupe de transformations non compact sur une variété compacte (M,g).

Ainsi par exemple il ne sera sans doute pas inintéressant d'utiliser l'action du groupe des difféomorphismes holomorphes de l'espace projectif complexe standard $(\mathbb{C}P^n, g_o)$, à la source sur l'espace des métriques c^ω et au but sur l'espace des fonctions holomorphes, pour chercher l'image de l'opérateur $\varphi \to e^{\varphi} \dfrac{(\omega + \partial\bar{\partial}\varphi)^m}{\omega^m}$ où ω est la métrique de Fubini Study sur $\mathbb{C}P^n$ (cf [BN 3]).

3. Y a-t-il équivalence entre les estimées de Trudinger $(\mathcal{T}_n)$ et $(\mathcal{D}_n)$ comme le laisserait entrevoir la relation de dualité (2.10) du chapitre II ?

BIBLIOGRAPHIE

[AS] : R.A. ADAMS
Sobolev spaces - Academic Press (1975)

T. AUBIN

[AN1] : *Sur la fonction exponentielle*, C.R.A.S Paris - Série A 270 - (1970) 1514-1516

[AN2] : *Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes*, Bull. Sc. Math. 100 (1975) 149-173

[AN3] : *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Diff. Geom. 11 (1976) 573-598

[AN4] : *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire*, J. Func . Analysis 32 (1979) 148-174

[AN5] : *Equations différentielles non linéaires et problèmes de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures et Appl. 55 (1976) 269-296

[BA] : C. BANDLE
Isoperimetric inequalities and applications, Monographs and Studies in Math. n°7, Ptiman (1980)

[B-B] : L. BERARD BERGERY
La courbure scalaire des variétés riemanniennes, Séminaire Bourbaki (1979/1980) exposé n°556 (21 pages)

[B.M] : P. BERARD et D. MEYER
Inégalités isopérimétriques et applications, à paraître (preprint U.E.R. Math. Univ. Paris 7 (1981)).

Melvyn BERGER

[BR1] : *On Riemannian structures of prescribed curvature for compact two-manifolds*, J. Diff. Geom., 5 (1971), 325-332

[BR2] : *Non linearity and Functional Analysis*,Academic Press (1977)

[B.E] : Marcel BERGER, D.G. EBIN
Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold, J. Diff. Geom. 3 (1969) 379-392

[B.G.M] : Marcel BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET
Le spectre d'une variété riemannienne, Springer-Verlag, Lectures Notes in Math. 194 (1971)

[BE] : A. BESSE
Manifolds all of whose geodesies are closed, Springer-Verlag (1978)

J.P. BOURGUIGNON

[BN1] : *Une stratification de l'espace des structures riemanniennes*, Compositio Math. 30 (1975) 1-41

[BN2] : *Courbure scalaire et le cas-limite des inégalités de Sobolev*, Preprint, Centre de Math, Ecole Polytechnique. Palaiseau (France)

[BN3] : *Sur la deuxième conjecture de Calabi*, Exposé X dans Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi - Astérique n°58 (1978) 135-147

[CL] : I. CHAVEL
Riemannian symmetric spaces of rank one, Lect. Notes in Pure and Appl. Math. 5, M. Dekker, Inc (1972)

P. CHERRIER

[CR1] : *Une inégalité de Sobolev sur les variétés riemanniennes*, Bull. Sc. Math. 2ème série 103 (1979) 353-374

[CR2] : *Cas d'exception du théorème d'inclusion de Sobolev sur les variétés riemanniennes et applications*, Bull. Sc. Math. 2ème série 105 (1981) 235-288

[C.H] : R. COURANT, D. HILBERT
Methods of mathematical physics, Vol. 1, Interscience Publishers (1955)

[DS] : A. DINGHAS
Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in Riemannsflachen Räumen mit Konstanter Krümmung, Math. Nachr. 2 (1949) 148-162

[EN] : D.G. EBIN
The manifold of Riemannian metrics, Proc. of the A.M.S Symposia in Pure Math. XV, Global Analysis Berkeley (1968) 11-40

[ET] : L.P. EISENHART
Riemannian geometry, Princeton Univ. Press. (1949)

[EL] : H. ELIASSON
On variations of metrics, Math. Scand. 29 (1971) (317-327)

[EG] : J.H. ESCHENBURG
A note on symmetric and harmonic spaces, J. London Math. Soc. 21 (1980) 541-543

[EZ] : J.P. EZIN
Remarques sur une inégalité de J. Moser, Communication au 1ère Conf. Pan-Africain de Math. Rabat (1976)

[E.L] : J.P. EZIN, A. LARGILLIER
Majoration d'intégrale de fonctions exponentielles, Proc. of Int. Symp. on Func . Anal. and its Appl. in W. Africa (Ibadan 1977) Ibadan Univ. Press.

H. FEDERER

[FR1] : *Geometric measure theory*, Springer-Verlag (1969)

[FR2] : *Curvature measures*, Trans. Am. Math. Soc. 93 (1959) 418-491

[F.M] : A.E. FISCHER, J.E. MARSDEN
Deformations of the scalar curvature, Duke Math. Jour. 42 (1975) 519-547

[F.B] : L.E. FRAENKEL, Melvyn BERGER
A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid, Acta Math. 132 (1974) 13-51 (spécial. Appendice I 42-45)

[G.T] : D. GILBARG, N.S. TRUDINGER
Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag (1977)

[GK] : H. GLUCK
Manifolds with preassigned curvature, A survey, Bull. of the A.M.S 81 (1975) 313-329

[G.L] : M. GROMOV, H.B. LAWSON, Jr.
Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group I
Ann. of Math., 111 (1980) 209-230

[GV] : M. GROMOV
Paul Levy's isoperimetric inequality, IHES/M/80/320 (1980)

[H.L.P] : G. HARDY, J. LITTLEWOOD, G. POLYA
Inequalities, Cambridge University Press

[H.M.T] : J.A. HEMPEL, G.R. MORRIS, N.S. TRUDINGER
On the sharpness of a limiting case of the Sobolev imbedding theorem, Bull. Austr. Math. Soc. 3 (1970) 369-373

[HN] : K. HILDEN
Symmetrization of functions in Sobolev spaces and the isoperimetric inequality, Manus. Math. 18 (1976) 215-235

J. KAZDAN, F. WARNER

[K.W.1] : *Curvature functions for compact 2-manifolds*, Ann. Math., 99 (1974) 14-47

[K.W.2] : *Curvature functions for open 2-manifolds*, Ann. Math. 99 (1974) 203-219

[K.W.3] : *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J. Diff Geom. 10 (1975) 113-134

[K.W.4] : *Existence and conformal deformation of metrics wiht prescribed Gaussian and scalar curvatures*, Ann. Math. 101 (1975) 317-331

[K.W.5] : *A direct approach to the determination of Gaussian and scalar curvature functions*, Inventiones Math. 28 (1975) 227-230

[K.W.6] : *Prescribing curvatures*, Proc. of the A.M.S. Symposia in Pure Math XXVII (1975) 309-319

[K.W.7] : *Integrability conditions for* $\Delta u = k - K e^{\alpha u}$ *with applications to Riemannian geometry*, Bull. A.M.S. 27 (1971) 819-823

[K.N] : *S. KOBAYASHI, K. NOMIZU*
Foundations of differential geometry, I, Interscience Publishers (1963)

[K.R] : *A. KRASNOSEL'SKII, B. RUTICHKII*
Convex functions and Orlicz spaces, Nordhoff (1961)

[KI] : *R.S. KULKARNI*
Curvature structures and conformal transformations, J. Diff. Geom. 4 (1969) 425-451

[L-F] : *J. LELONG-FERRAND*
Transformations conformes et quasi-conformes des variētēs riemanniennes compactes (dēmonstration de la conjecture de A. Lichnerowicz), Acad. Roy. Belg., Cl. Sci. Mem. XXXIX, fasc.5 (1971 (45 pages)

[MY] : *C.B. MORREY Jr*
Multiple integrals in the calculus of variations, Springer-Verlag (1966)

J. MOSER

[MR1] : *A sharp form of an inequality by N.S. Trudinger*, Ind. Univ. Math. J. 20 (1971) 1077-1092

[MR2] : *On a nonlinear problem in differential geometry (Dynamical Systems)* Peinoto ed. Acad. Press (1973) 273-280

[MW] : *G.D. MOSTOW*
Quasi-conformal mappings in n-*space and the rigidity of hyperbolic space forms*, I.H.E.S. Publ. Math. 34 (1968) 53-104

[MU] : *C. MULLER*
Spherical harmonics, L. Notes in Math. 17 Springer-Verlag (1966)

[NN] : *E. NELSON*
Tensor analysis, Math. Notes, Princeton Univ. Press (1967)

[NG] : *L. NIRENBERG*
The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large Com. on Pure and Appl. Math. 6 (1953) 337-394

M. OBATA

[OA1] : *Conformal transformations of compact Riemannian manifolds*, Illin. Jour. Math. 6 (1962) 292-295

[OA2] : *The conjectures on conformal transformations of Rieamnnian manifolds*, J. Diff. Geom. 6 (1971) 247-258

[O'L] : *R. O'NEILL*
Fractional integration in Orlicz spaces, Trans. A.M.S. 115 (1965) 300-328

[PS] : R.S. PALAIS
Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Ann. of Math. Studies 57 Princeton Univ. Press. (1965) (spécial Ch. X)

[P.S] : G. POLYA, G. SZEGÖ
Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Ann. of Math. Studies 27. Princeton Univ. Press (1951).

[RN] : W. RUDIN
Real and Complex Analysis, Tata Mc Graw Hill (1978)

[SA] : G. STAMPACCHIA
Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, S.M.S., Les Presses de l'Université de Montréal (1966)

[ST] : E. SCHMIDT
Der Brunn-Minkowskische Sutz und sein Spiegel theorem sowie die isoperimetrische Eigenschaff der Kungel in der euklidischen und nichtenklidischen Geometrie, Math. Nachr, 2 (1949) 171-244

[SG] : S. STERNBERG
Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., (1964)

[S.Y] : R. SCHOEN, S.T. YAU
On the structure of manifolds with positive scalar curvature, Manusc. Math. 28 (1979) 159-183

S.L. SOBOLEV

[SV1] : *On some estimates of families of functions having square integrable derivates*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1 (1936) 267-270

[SV2] : *Sur un théorème d'analyse fonctionnelle*, Mat. Sb. 46 (1938) 471-498

[SV3] : *Applications of functional analysis in mathematical physics*, Leningrad 1950 (Trad. A.M.S Transl, Math. Mono 7 (1963))

[TI] : G. TALENTI
Best constant in Sobolev inequality, Ann. di Mat Pura e App. 110 (1976) 353-372

N.S. TRUDINGER

[TR1] : *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. 17 (1967) 473-483

[TR2] : *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968) 265-274

[W.G] : W. WEBER, S.I. GOLDBERG
Conformal deformations of Riemannian manifolds, Queen's papers in Pure and App. Math. 16. Queen's Univ. Kingston (1969)

[YE] : H. YAMABE
On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Asaka Math. J. 12 (1960) 21-37

ANNEXE

<u>La fonction</u> f <u>du théorème III.3.25 telle que</u> $\tilde{K} = \xi + f$, (ξ <u>est une première harmonique spéhrique) soit interdite sur</u> (S^n, c) <u>est un lissage de la fonction hauteur</u> f_o <u>d'un cône à base circulaire et dont le sommet est convenablement placé</u>. Nous en donnons une preuve en dimension $n = 2$.

Nous faisons d'abord le calcul dans l'espace euclidien et supposons que le gradient de ξ est un champ de vecteurs vertical constant. Soit un cône à base circulaire dont le sommet est placé de telle sorte que sa projection orthogonale B sur le plan $x\,o\,y$ contenant sa base se trouve dans le premier quadrant (fig. 1). Soient b et β les coordonnées polaires de B, (r,θ) celles d'un point μ du cercle de base, l'origine des axes (Ox, Oy) de coordonnées étant confondue avec le centre de ce cercle.

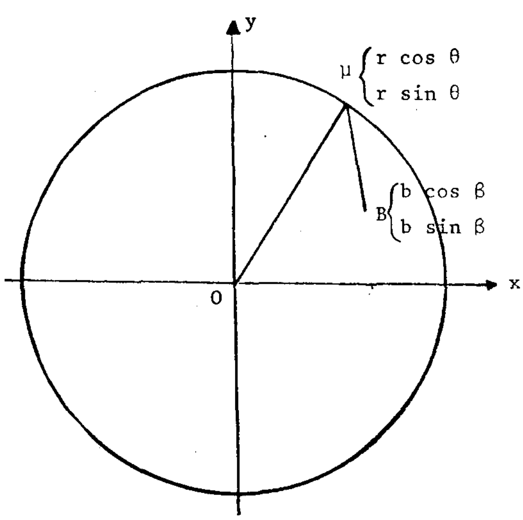


Fig.1

Nous commençons par étudier la fonction f_o.

Le gradient de f_o étant tangent au cône, il est en chaque point x porté par le segment joignant x au sommet S du cône. Il est constant le long de cette droite dont il mesure par ailleur la pente et est orienté vers S. Il vaut en ce point

$$\nabla f_o = \frac{h}{|\overrightarrow{\mu A}|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mu A}}{|\overrightarrow{\mu A}|} = h \frac{\overrightarrow{\mu A}}{|\overrightarrow{\mu A}|^2}$$

où h est la hauteur du cône soit en projetant sur les axes (Ox, Oy)

$$\nabla f_o = \begin{cases} h \dfrac{r \cos\theta - b \cos\beta}{r^2+b^2-2br\cos(\theta-\beta)} \\[2ex] h \dfrac{r \sin\theta - b \sin\beta}{r^2+b^2-2br\cos(\theta-\beta)} \end{cases}$$

Ce qu'il nous importe de contrôler c'est le signe de la fonction $\nabla\xi \cdot (\xi+f_o)$: nous voulons qu'elle prenne les deux signes pour que la fonction $\xi+f_o$ ne soit pas évidemment interdite par la conditon $(N_{\nabla\xi})$ déjà donnée J. Kazdan et F. Warner tout en l'étant par la condition (N). En fait nous allons chercher un champ de vecteurs $X^\alpha = \cos\alpha\, \nabla\xi + \sin\alpha\, J(\nabla\xi)$ tel que $X^\alpha \cdot (\xi+f_o)$ garde un signe constant.

La fonction qu'il nous suffit d'étudier est donc

$$Y_{b,\beta}(\theta) = h\sqrt{e}\, \frac{r \sin\theta - b \sin\beta}{r^2+b^2-2br\cos(\theta-\beta)} + e$$

où $e = |\nabla\xi|^2 =$ constant.

Nous voulons que cette fonction atteigne son minimum dans une petite zone A^- située à droite de la verticale passant par B, la constante e étant ajustée de telle sorte que $Y_{b,\beta}$ soit positive hors de cette zone du plan (fig.2)

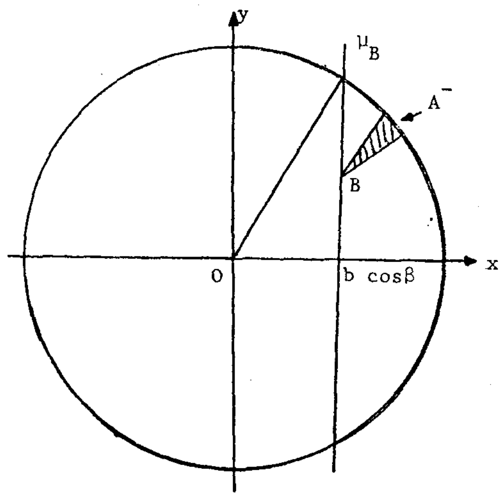


Fig.2

Nous sommes donc amenés à comparer les coordonnées du point $M_{b,\beta}$ où $Y_{b,\beta}$ prend sa valeur minimum à celles du point μ_B du cercle de base ayant même abscisse que B. Comme nous voulons que $M_{b,\beta}$ soit à droite du segment $\mu_B B$, ses coordonnées polaires (r,θ) doivent vérifier $r\cos\theta > b\cos\beta$. En outre elles sont solutions de l'équation

$$(r^2+b^2\cos 2\beta)\cos\theta + b^2\sin 2\beta\sin\theta - 2br\cos\beta = 0$$

dans laquelle le membre de gauche est le numérateur de $Y'_{b,\beta}(\theta)$ après simplification. (En effet, nous avons

$$Y'_{b,\beta}(\theta) = h\sqrt{e}\,\frac{r\cos\theta(r^2+b^2-2br\cos(\theta-\beta)) - (r\sin\theta-b\sin\beta)\,2br\sin(\theta-\beta)}{(r^2+b^2-2br\cos(\theta-\beta))^2}$$

dont le numérateur N s'écrit encore :

$$\begin{aligned}(h\sqrt{e})^{-1}N &= r(r^2+b^2)\cos\theta - 2r^2b(\cos\theta\cos(\theta-\beta)+\sin\theta\sin(\theta-\beta)) + 2r^2b\sin\beta\sin\theta-\beta\\ &= r(r^2+b^2)\cos\theta - 2r^2b\cos\theta + 2rb^2\sin\beta(\sin\theta\cos\beta-\sin\beta\cos\theta)\\ &= r(r^2+b^2)\cos\theta - 2r^2b\cos\beta - 2rb^2\sin2\beta\cos\theta + rb^2\sin2\beta\sin\theta\\ &= r(r^2+b^2(1-2\sin2\beta)\cos\theta) + rb^2\sin2\beta\sin\theta - 2r^2b\cos\beta\\ &= r\left[(r^2+b^2\cos2\beta)\cos\theta + b^2\sin2\beta\sin\theta - 2br\cos\beta\right].)\end{aligned}$$

Cette relation s'écrit encore

$$r^2 \cos\theta - 2br\cos\beta + b^2 \cos(2\beta-\theta) = 0,$$

soit enfin

$$r\cos\theta - b\cos\beta = b(\cos\beta - \frac{b}{r}\cos(2\beta-\theta)).$$

La relation que nous voulons que les coordonnées de $M_{b,\beta}$ vérifient est donc en particulier satisfaite dès que

$$\cos\beta > \frac{b}{r} \quad \text{(Une application possible } \beta = \frac{\pi}{4}, \frac{b}{r} = \frac{1}{2}).$$

Dans ce cas en choisissant convenablement la constante e, on peut obtenir que la fonction $\nabla\xi \cdot (\xi+f_o) = (\nabla\xi, \nabla(\xi+f_o))$ ne soit négative que dans une petite zone A^- autour du minimum dont la mesure peut être rendue arbitrairement petite. Ainsi le champ de vecteurs $\nabla(\xi+f_o)$ fait un angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$ avec le champ de vecteurs vertical sauf sur A^-.

Pour trouver l'angle α qui détermine le champ de vecteurs X^α cherché nous faisons une analyse par secteurs autour du point B . (fig.3)

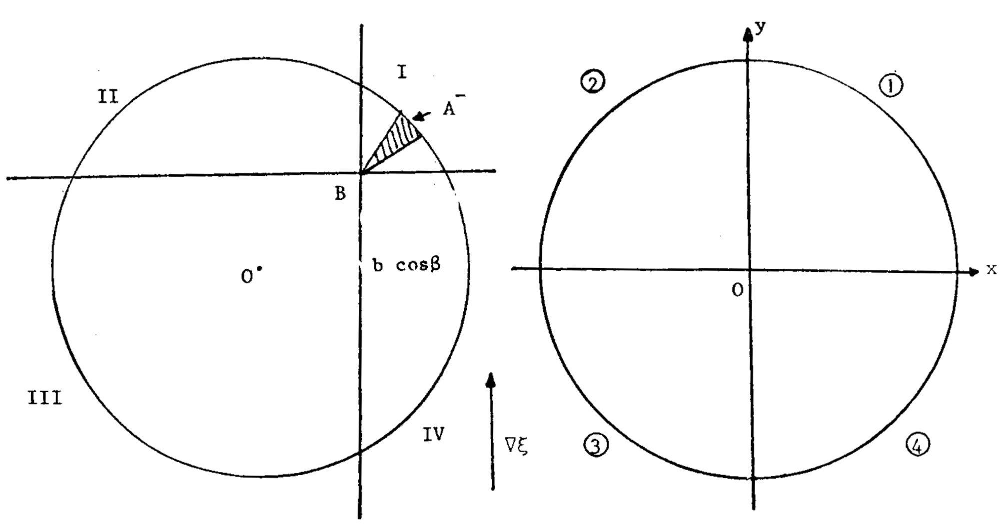


Fig.3

Dans la zone II, par construction $\nabla(\xi+f_o)$ appartient au quadrant ①. Comme $(\nabla f_o)_y$ (la composante suivant oy de ∇f_o) est loin de son minimum sur tout le quadrant $(\nabla(\xi+f_o))_y$ est bornée inférieurement par un nombre positif fini : $\nabla(\xi+f_o)$ appartient au quadrant ① moins un secteur angulaire fini de mesure .

Dans la zone III, $(\nabla(\xi+f_o))_y$ est très positive, donc $\nabla(\xi+f_o)$ appartient encore au quadrant ① près de l'axe des y.

Dans la zone IV, $\nabla(\xi+f_o)$ appartient au quadrant ②.

Dans la zone A^- hachurée $(\nabla(\xi+f_o))_y$ est négative mais arbitrairement petite (par l'ajustement de e) alors que A^- étant strictement à l'intérieur de la zone I, $(\nabla(\xi+f_o))_x$ est bornée supérieurement par un nombre négatif fini. Par conséquent $\nabla(\xi+f_o)$ appartient à un secteur infiniment proche de l'axe des x dans le quadrant ③. Pour le reste de la zone I, $\nabla(\xi+f_o)_y$ est positive et par suite $\nabla(\xi+f_o)$ appartient au quadrant ②.

Il est donc possible de trouver un angle α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tel que $\nabla(\xi+f_o)$ appartienne au demi-plan supérieur déterminé par cet angle. Nous obtenons de cette façon le champ de vecteurs conforme X^α cherché.

Nous pouvons passer du cas euclidien à la sphère en utilisant les coordonnées normales et les voisinages normaux. En tout point m de S^2 nous considérons une boule B_ε de centre m, de rayon ε assez petit pour que dans B_ε ∇ varie assez peu et que le calcul de ∇f dans la métrique S^2 soit assez proche de celui de ∇f_o dans la métrique euclidienne ∎

Remarque. Il est possible de superposer un nombre fini de telles fonctions f à supports disjoints assez petits.

ANNEXE B.

En dimension $n = 2$, le lemme II.2.4 peut être amélioré de la façon suivante :

Lemme. Pour tout s dans $[0,1]$, on a

$$(s) \leqslant s + (2\delta_\phi)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{1}{2}}$$

c'est-à-dire simultanément,

$$\phi(s) \leqslant s + (2\delta_\phi)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi(s) \leqslant s + (2\delta_\phi)^{\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{1}{2}}$$

Preuve : Nous gardons les notations du lemme II.2.4. En dimension $n = 2$, nous voulons donc trouver une relation entre les coordonnées x,y des points tels que

$$f_2(x,y) = x^2 y^{-1} + (1-x)^2 (1-y)^{-1} \leqslant 1+2\delta_\phi .$$

Définissons une fonction $\tilde{f}_2$ par

$$\tilde{f}_2(x,y) = x^2(1-y) + (1-x)^2 y - y(1-y)$$

$$(= (f_2(x,y)-1)\ y(1-y)).$$

La relation à vérifier par x et y s'écrit alors

$$\tilde{f}_2(x,y) \leqslant \varepsilon\ y(1-y).$$

Mais nous avons

$$\tilde{f}_2(x,y) = (x-y)^2,$$

d'oũ

$$(x-y)^2 \leq (2\delta_\phi)\ y(1-y)$$

soit

$$x \leq y + (2\delta_\phi)^{\frac{1}{2}}\ y^{\frac{1}{2}}\ (1-y).$$

Comme $0 < y < 1$, les deux dernières inégalités du lemme sont établies.■

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

SECONDE THÈSE

SUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR UN OPÉRATEUR DE MONGE-AMPÈRE COMPLEXE

d'après

E. BEDFORD ET B.A. TAYLOR