

50376
1981
170

N° d'ordre 927

50376
1981
170

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Alain DUHAMEL

**APPROXIMATIONS DES SOLUTIONS
D'INÉQUATIONS VARIATIONNELLES PARABOLIQUES
AVEC CONVEXE DÉPENDANT DU TEMPS**



Membres du Jury : MM. BREZINSKI Claude, Président
MIGNOT Fulbert, Rapporteur
PUEL Jean-Pierre
DENEL Jacques
BOCCARDO Luccio } Examineurs

Soutenue le 12 novembre 1981

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur MIGNOT pour l'aide constante et ses encouragements qui ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur BREZINSKI de l'Université de Lille I, Messieurs les Professeurs DENEL de l'Université de Lille I, PUEL de l'Université de Nancy I et Monsieur BOCCARDO, Professeur à l'Université de l'Aquila (Italie) d'avoir accepté de bien vouloir juger ce travail.

Je tiens également à remercier Monsieur VAN-INGELANDT pour l'aide qu'il m'a apportée sur la partie numérique.

J'exprime également ma profonde gratitude à Madame DOCLOT pour les multiples services qu'elle m'a rendus.

Je n'oublierai pas celles et ceux qui ont permis la réalisation matérielle de ce mémoire : Madame TATTI qui en a assuré la frappe avec diligence et compétence ainsi que les techniciens de l'imprimerie qui en ont réalisé le tirage et la présentation définitive.

P L A N

	Pages
<i>Introduction</i>	1
<u><i>Chapitre I : Régularisation elliptique</i></u>	3
1. Formulation du problème	5
2. Estimations a priori	9
3. Passage à la limite (premier résultat)	25
4. Etude du cas régulier	28
5. Etude du cas général	33
6. Propriétés des solutions minimales régulières	48
<u><i>Chapitre II : Discrétisation</i></u>	54
1. Approximation de $[0, T[\times \Omega$ et des opérateurs	55
2. Formulation du problème discret	57
3. Estimations a priori	59
4. Passage à la limite	62
<u><i>Chapitre III : Applications numériques</i></u>	71
1. Exemple en dimension 1	72
2. Exemples en dimension 2	75
3. Courbes	91
<i>Annexe A</i>	
<i>Annexe B</i>	
<i>Conclusion</i>	95
<i>Bibliographie</i>	97

INTRODUCTION

A l'opérateur parabolique $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$, et aux convexes du type $\{v \geq \psi\}$, on peut associer des problèmes d'évolution paraboliques du type suivant :

Ω étant un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière $\delta\Omega$, $\psi: [0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ($T > 0$) on cherche $u: [0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solution de :

$$u \geq \psi, \quad u(0) = 0, \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad [0, T[\times \delta\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right)(u - \psi) = 0.$$

Pour des obstacles suffisamment réguliers Brézis [4], Charrier-Troianiello [6], ce problème admet une solution unique que l'on appelle solution forte.

Lorsque ψ est simplement mesurable, le problème fort n'admet pas toujours de solution mais on sait associer à l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ et aux convexes $\{v \geq \psi\}$, une inéquation variationnelle faible qui admet toujours des solutions Brézis [3], Lions [9] et en particulier une solution minimale. Mignot Puel [12].

Notre propos est l'approximation de cette solution minimale.

Dans le chapitre I, nous abordons ce problème par une méthode de régularisation elliptique : on considère l'opérateur elliptique $-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ et la solution u_ε de l'inéquation variationnelle associée.

Lorsque ψ est régulier (paragraphe IV), nous montrons que la limite de u_ε est la solution forte.

Pour les obstacles quelconques, mais vérifiant une hypothèse de densité (paragraphe V), nous montrons que u_ε converge vers la solution minimale du problème faible.

Au chapitre II, nous abordons le problème de l'approximation numérique.

La méthode choisie est celle de l'approximation externe au moyen des différences finies.

A la formulation faible, nous savons associer le problème discrétisé (Ph) Glovinski [8] et nous montrons que la solution de ce problème converge vers la solution minimale.

Nous donnons dans le chapitre III plusieurs exemples de calcul numérique de la solution u_h du problème (Ph) et nous comparons, pour les différents ordres d'approximation choisis, cette solution u_h et la vraie solution minimale.

CHAPITRE I

REGULARISATION ELLIPTIQUE

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement, lorsque le paramètre ε tend vers 0, de la solution u_ε d'une inéquation variationnelle associée à l'opérateur $-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ et aux convexes du type $\{v \geq \psi\}$.

Notre objectif est de montrer que la limite de u_ε , $\varepsilon \rightarrow 0$, est la solution minimale de l'inéquation variationnelle faible associée à l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$.

Les résultats obtenus peuvent être énoncés de la manière suivante :

- i) Lorsque ψ est "régulier", u_ε converge fortement vers l'unique solution forte u .
- ii) Pour les obstacles quelconques, moyennant une hypothèse de densité sur les convexes, u_ε converge faiblement vers la solution minimale.

Tout d'abord, par une méthode de pénalisation, nous établissons des estimations a priori qui nous permettent d'énoncer un premier résultat de convergence : la limite de u_ε est solution d'une inéquation faible associée à un convexe plus petit que celui intervenant dans la formulation faible ordinaire (paragraphe III).

Dans le paragraphe IV, nous nous plaçons dans le cadre des obstacles réguliers et nous établissons le point i).

C'est au paragraphe V que nous étudions le cas des obstacles quelconques. Pour montrer que la limite de u_ε est la plus petite solution faible u , nous avons considéré u , non plus sous sa forme variationnelle, mais sous sa forme ponctuelle Pierre [15].

Au paragraphe VI, nous donnons des propriétés des solutions minimales régulières.

Les difficultés que nous avons rencontrées sont essentiellement de trois types :

i) Des difficultés liées au passage d'un opérateur du second ordre à un opérateur parabolique : obtention d'estimations a priori suffisantes.

ii) Des difficultés liées aux convexes :

- D'une part, les convexes des fonctions tests de l'inéquation elliptique ne sont pas denses dans ceux de l'inéquation parabolique.

- D'autre part, si nous montrons au paragraphe III que la limite de u_ε vérifie une inéquation faible, les convexes associés à cette inéquation ne sont pas, en général, denses dans ceux de la formulation faible ordinaire. C'est pourquoi nous avons été amenés à introduire une hypothèse de densité.

iii) Il n'a pas été possible de montrer directement à partir de la formulation variationnelle et des estimations a priori que la limite de u_ε est la plus petite solution faible. Cette difficulté a été levée en utilisant l'interprétation ponctuelle de la solution minimale Pierre [15].

I. FORMULATION DU PROBLEME.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n dont le bord $\partial\Omega$ est régulier.

On posera $H = L^2(\Omega)$,

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in H, v/\partial\Omega = 0\}$$

Soit $T > 0$, on posera $Q =]0, T[\times \Omega$, $\tilde{Q} = [0, T] \times \Omega$. On notera $V = L^2(0, T; V)$, $V' = L^2(0, T; V')$ et $W = \{v \in L^2(0, T; V) ; \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; V')\}$.

La norme sur $L^2(\Omega)$ est notée $|| \cdot ||$ et la norme sur $H_0^1(\Omega)$, $|| \cdot ||$.

On a alors :

$$||u||_{L^2(0, T; V)} = \left(\int_0^T ||u||^2 dt \right)^{1/2},$$

$$|u|_{L^2(0, T; H)} = \left(\int_0^T |u|^2 dt \right)^{1/2},$$

$$||u||_W^2 = \left(||u||_{L^2(0, T; V)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; V')}^2 \right)$$

Rappelons que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, les injections étant continues, compactes et denses. D'autre part W s'injecte continûment dans $C([0, T] \rightarrow H)$, l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ à valeurs dans H (Lions, Magenes [1]) rappelons que sur $H_0^1(\Omega)$, la contraction module opère, c'est-à-dire que si $u \in H_0^1(\Omega)$, $u^+ \in H_0^1(\Omega)$.

Cette propriété n'étant pas vérifiée sur W , on notera

$$S = \{u \in L^2(0,T; V) ; \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; H)\}$$

$$W_0 = \{u \in W ; u(0) = 0\} \quad \text{et}$$

$$W_T = \{u \in W ; u(T) = 0\} ,$$

S_0 et S_T les espaces correspondants dans S .

Pour $\psi \in L^2(0,T; H)$ on notera :

$$K_\psi = \{u \in L^2(0,T; V) ; u \geq \psi \text{ pp}\}$$

On précisera dans chaque cas, les conditions supplémentaires de régularité sur ψ , mais nous supposerons toujours $K_\psi \cap H_0^1(Q)$ non vide (donc si $\psi(0)$ a un sens $\psi(0) \leq 0$ pp sur Ω et si ψ/Σ a un sens $\psi/\Sigma \leq 0$).
 $(\Sigma =]0, T[\times \partial\Omega)$.

Soit f un élément de $L^2(0,T; H)$, pour tout $\varepsilon > 0$, on considère u_ε la solution du problème :

$$(I) \quad \varepsilon \int_0^T \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}(v-u_\varepsilon) \right)_H dt + \int_0^T \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v-u_\varepsilon \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u_\varepsilon, \nabla(v-u_\varepsilon))_H dt \\ \geq \int_0^T (f, v-u_\varepsilon)_H dt ;$$

$$\forall v \in H_0^1(Q) \cap K_\psi$$

$$u_\varepsilon \in H_0^1(Q) \cap K_\psi$$

On sait que cette inéquation variationnelle elliptique admet une solution unique sous les hypothèses précédentes (voir Lions et Stampacchia [10]). (Brezis et Stampacchia [5]).

Au problème (I) de caractère elliptique, on peut associer une inéquation variationnelle parabolique du premier ordre qui admet une formulation forte et une formulation faible que nous allons détailler ci-dessous.

Formulation forte.

On cherche $u \in K_\psi \cap W$, telle que

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u \right)_{V',V} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla (v-u))_H dt \geq \int_0^T (f, v-u)_H dt, \\ \forall v \in K_\psi \\ u(0) = 0 \\ u \in K_\psi \cap W. \end{array} \right.$$

Ce problème fort n'admet pas toujours de solution. Le résultat suivant de Charrier-Troianiello [6] précise les conditions d'existence de cette solution forte.

On désigne par V'^+ les formes linéaires positives de V' ($\ell \in V'^+$ si $\ell \in V'$ et $\forall u \in L^2(OT : V)$, $u \geq 0$, $(\ell, u) \geq 0$) on pose $V^* = V'^+ - V'$. C'est le dual d'ordre de V . On a le résultat :

$$\text{si } f \in V^*, \psi \in W \text{ et } \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi \right) \in V^*, \psi(0) \leq 0,$$

alors le problème fort admet une solution unique.

Il convient de remarquer que les obstacles ψ appartenant à W sont déjà irréguliers : la condition $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi \right) \in V^*$ n'est pas en général réalisée.

Notons cependant que dans le cas où $\psi \in W$ on a unicité de la solution faible. (Voir Pierre [15] et annexe A).

Formulation faible.

On cherche $u \in K_\psi$, telle que

$$(III) \begin{cases} \int_0^T (\frac{\partial v}{\partial t}, v-u)_{V',V} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla(v-u))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, v-u)_H dt ; \\ \forall v \in W \cap K_\psi \end{cases}$$

Nous savons d'après Brezis [3] et Lions [9], que cette formulation affaiblie admet toujours des solutions et même, dans ce cas particulier des convexes K , une solution minimum. Mignot Puel [12].

Nous détaillons en annexe B des propriétés de cette solution minimum. (voir Pierre [15]) et nous donnons des exemples d'existence de la solution forte.

Notre propos est l'étude du comportement de u_ε quand ε tend vers 0.

Il nous faudra tout d'abord obtenir des estimations a priori qui feront l'objet du paragraphe suivant.

Des exemples simples, en particulier en dimension un, montrent que nous ne pouvons pas espérer que u_ε reste borné dans W : il y a une couche limite au voisinage de T (voir annexe B).

Nous commencerons par étudier la convergence de u_ε vers une solution du problème faible, ce qui sera en partie conséquence d'estimations a priori dans des espaces plus grands que W .

II. ESTIMATIONS A PRIORI.

Pour tout $\eta > 0$, considérons u_{ε_η} la solution du problème pénalisé :

$$(IV) \begin{cases} -\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t^2} + \frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t} - \Delta u_{\varepsilon_\eta} - \frac{1}{\eta}(\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+ = f, \text{ dans } Q, \\ u_{\varepsilon_\eta} \in H^1_0(Q). \end{cases}$$

Cette solution existe et est unique, d'autre part on sait que $u_{\varepsilon_\eta} \in H^2(Q)$ (voir Lions [9]).

Tout d'abord, démontrons un lemme préliminaire qui servira à rendre licite les intégrations par partie effectuées par la suite.

Lemme II.1. Soit u_{ε_η} la solution du problème (IV), alors

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t} \in V.$$

Démonstration : On va, en fait, démontrer la propriété suivante :

si $\theta \in H^2(Q) \cap H^1_0(Q)$ alors $\frac{\partial \theta}{\partial t} \in L^2(0, T; V)$.

$$\theta \in H^1_0(Q) \Rightarrow \theta \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

$$\theta \in H^2(Q) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

donc $\theta \in C([0, T] \rightarrow H^1(\Omega))$. θ étant définie presque partout sur $]0, T[$ à valeurs dans $V = H^1_0(Q)$, θ est donc continue de $[0, T]$ à valeurs dans V .

On a :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(t+h) - \theta(t)}{h}, \text{ limite prise dans } L^2(0, T; H^1)$$

mais $\frac{\theta(t+h)-\theta(t)}{h} \in L^2(0,T; V)$ qui est fermé dans $L^2(0,T; H^1)$

donc $\frac{\partial \theta}{\partial t} \in L^2(0,T; V)$.

De l'équation pénalisée (IV), nous déduisons l'estimation a priori suivante :

Lemme II.2. Soit $u_{\varepsilon\eta}$ solution de IV, alors :

$$\sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H)} + \|u_{\varepsilon\eta}\|_{L^2(0,T;V)} \leq C,$$

C étant indépendante de ε et η .

Démonstration : Soit $v \in K_\psi \cap H^1_0(Q)$, multiplions l'équation (IV) par $(v-u_{\varepsilon\eta})$ et intégrons sur $(0,T)$:

$$\int_0^T \left(-\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}}{\partial t^2}, (v-u_{\varepsilon\eta}) \right)_H dt + \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}, (v-u_{\varepsilon\eta}) \right)_H dt + \int_0^T \left(-\Delta u_{\varepsilon\eta}, (v-u_{\varepsilon\eta}) \right)_H dt - \frac{1}{\eta} \int_0^T \left((\psi-u_{\varepsilon\eta})^+, (v-u_{\varepsilon\eta}) \right)_H dt = \int_0^T \left(f, (v-u_{\varepsilon\eta}) \right)_H dt.$$

Par intégration par partie les termes au bord disparaissent et l'on obtient :

$$\varepsilon \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} (v-u_{\varepsilon\eta}) \right)_H dt + \int_0^T \left(\nabla u_{\varepsilon\eta}, \nabla (v-u_{\varepsilon\eta}) \right)_H dt - \int_0^T \left(u_{\varepsilon\eta}, \frac{\partial}{\partial t} (v-u_{\varepsilon\eta}) \right)_H dt \geq \int_0^T \left(f, (v-u_{\varepsilon\eta}) \right)_H dt$$

car sur l'ensemble $\{(\psi-u_{\varepsilon\eta}) \geq 0\}$, on a $v \geq \psi \geq u_{\varepsilon\eta}$ et par suite

$$\int_0^T \left((\psi-u_{\varepsilon\eta})^+, (v-u_{\varepsilon\eta}) \right)_H dt \geq 0$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_0^T \left| \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t} \right|_H^2 dt + \int_0^T \|u_{\varepsilon\eta}\|_V^2 dt \leq \varepsilon \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{L^2(0,T;H)} \left| \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t} \right|_{L^2(0,T;H)} \\ & + \|u_{\varepsilon\eta}\|_{L^2(0,T;V)} \|v\|_{L^2(0,T;V)} + |u_{\varepsilon\eta}|_{L^2(0,T;H)} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{L^2(0,T;H)} \\ & + |f|_{L^2(0,T;H)} |v|_{L^2(0,T;H)} + |f|_{L^2(0,T;H)} |u_{\varepsilon\eta}|_{L^2(0,T;H)}. \end{aligned}$$

On utilise alors l'inégalité de Poincaré :

$$|u_{\varepsilon\eta}|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq C \|u_{\varepsilon\eta}\|_{L^2(0,T;V)}^2$$

alors :

$$\varepsilon \left| \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t} \right|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|u_{\varepsilon\eta}\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C + C_1 \|u_{\varepsilon\eta}\|_{L^2(0,T;V)} + C_2 \varepsilon \left| \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t} \right|_{L^2(0,T;H)}$$

et le lemme est démontré.

Remarquons, dès maintenant, que C étant indépendante de η , cette estimation est également valable pour u_ε .

Lemme II.3. Estimation L^∞ .

Si ψ^+ et f sont dans $L^\infty(Q)$, alors $u_{\varepsilon\eta} \in L^\infty(Q)$ et $|u_{\varepsilon\eta}|_{L^\infty(Q)} \leq C$, C constante indépendante de ε et η .

Démonstration : Posons $z_{\varepsilon\eta} = e^{-\lambda t} u_{\varepsilon\eta}$, $\lambda > 0$ fixé, nous allons démontrer que $|z_{\varepsilon\eta}|_{L^\infty(Q)} \leq C$, on aura ainsi le résultat.

En reprenant l'équation pénalisée on voit immédiatement que z_{ε_η} vérifie l'équation suivante :

$$-\varepsilon z_{\varepsilon_\eta}'' + (1-2\lambda\varepsilon)z_{\varepsilon_\eta}' - \Delta z_{\varepsilon_\eta} + (\lambda-\varepsilon\lambda^2)z_{\varepsilon_\eta} - \frac{1}{\eta}(\psi - e^{\lambda t} z_{\varepsilon_\eta})^+ e^{-\lambda t} = f e^{-\lambda t}$$

Faisons $\xi = \psi e^{-\lambda t}$, $g = f e^{-\lambda t}$. (D'après nos hypothèses ξ^+ et g sont dans $L^\infty(Q)$).

L'équation devient :

$$-\varepsilon z_{\varepsilon_\eta}'' + (1-2\lambda\varepsilon)z_{\varepsilon_\eta}' - \Delta z_{\varepsilon_\eta} + (\lambda-\varepsilon\lambda^2)z_{\varepsilon_\eta} - \frac{1}{\eta}(\xi - z_{\varepsilon_\eta})^+ = g.$$

Soit $k = \text{Max} \left[\|\xi^+\|_{L^\infty(Q)}, \frac{\|g\|_{L^\infty(Q)}}{\lambda} + 1 \right]$. On a $(z_{\varepsilon_\eta} - k)^+ \in H_0^1(Q)$ puisque $k > 0$ et que la contraction module opère sur $H_0^1(Q)$.

Multiplions l'équation vérifiée par z_{ε_η} par $(z_{\varepsilon_\eta} - k)^+$ et intégrons sur $(0, T)$, on obtient, après intégrations par parties :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial t} (z_{\varepsilon_\eta} - k)^+ \right|_{L^2(0, T; H)}^2 + (1-2\lambda\varepsilon) \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t} (z_{\varepsilon_\eta} - k)^+, (z_{\varepsilon_\eta} - k)^+ \right)_H dt \\ & + \left\| (z_{\varepsilon_\eta} - k)^+ \right\|_{L^2(0, T; V)}^2 + (\lambda - \varepsilon\lambda^2) \left\| (z_{\varepsilon_\eta} - k)^+ \right\|_{L^2(0, T; H)}^2 = \\ & = \frac{1}{\eta} \int_0^T \left((\xi - z_{\varepsilon_\eta})^+, (z_{\varepsilon_\eta} - k)^+ \right)_H dt + \int_0^T (g - k(\lambda - \varepsilon\lambda^2), (z_{\varepsilon_\eta} - k)^+)_H dt. \end{aligned}$$

Une nouvelle intégration par partie fait disparaître le 2ème terme du premier membre. D'autre part, sur $\{z_{\varepsilon_\eta} \geq k\}$ on a $z_{\varepsilon_\eta} \geq \xi$ d'après la définition de k . Par conséquent, le 1er terme du second membre disparaît également.

enfin, comme $k \geq \frac{|g|L^\infty(Q)}{\lambda} + 1$ on a $g + \lambda - \lambda k \leq 0$. En choisissant

$\varepsilon < \frac{1}{k\lambda}$, on aura donc $g - \lambda k + k \varepsilon \lambda^2 \leq 0$.

On en déduit que pour ε assez petit ($\varepsilon < \frac{1}{k\lambda}$),

$$\| (z_{\varepsilon_\eta} - k)^+ \|_{L^2(0,T;V)}^2 + \varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial t} (z_{\varepsilon_\eta} - k)^+ \right|_{L^2(0,T;H)}^2 + (\lambda - \varepsilon \lambda^2) \| (z_{\varepsilon_\eta} - k)^+ \|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq 0.$$

En remarquant que $\lambda - \varepsilon \lambda^2 > \lambda(1 - \frac{1}{k}) > 0$ (d'après le choix de k),

on en déduit que $z_{\varepsilon_\eta} \leq k$.

Pour minorer z_{ε_η} posons $k' = -\frac{|g|L^\infty(Q)}{\lambda} - 1$ on a $(z_{\varepsilon_\eta} - k')^- \in H_0^1(Q)$ puisque $k' < 0$ et que la contraction module opère sur $H_0^1(Q)$.

Multiplions l'équation vérifiée par z_{ε_η} , par $(z_{\varepsilon_\eta} - k')^-$ et intégrons sur $(0,T)$.

On obtient de la même manière que précédemment :

$$\begin{aligned} & - \varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial t} (z_{\varepsilon_\eta} - k')^- \right|_{L^2(0,T;H)}^2 - \| (z_{\varepsilon_\eta} - k')^- \|_{L^2(0,T;V)}^2 \\ & - (\lambda - \varepsilon \lambda^2) \| (z_{\varepsilon_\eta} - k')^- \|_{L^2(0,T;H)}^2 = \frac{1}{\eta} \int_0^T (\xi - z_{\varepsilon_\eta})^+, (z_{\varepsilon_\eta} - k')^-)_H dt \\ & + \int_0^T (g - k'(\lambda - \varepsilon \lambda^2), (z_{\varepsilon_\eta} - k')^-)_H dt \end{aligned}$$

le premier terme du second membre est toujours positif. D'autre part,

$\frac{g}{\lambda} - 1 \geq k'$. Si on choisit $\varepsilon < \frac{1}{\lambda|k'|}$ on aura,

$$g - \lambda k' + \varepsilon \lambda^2 k' > 0,$$

on en conclut que,

$$-\varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial t} (z_{\varepsilon\eta} - k')^- \right|_{L^2(O,T;H)}^2 - \left\| (z_{\varepsilon\eta} - k')^- \right\|_{L^2(O,T;V)}^2 - (\lambda - \varepsilon\lambda^2) \left| (z_{\varepsilon\eta} - k')^- \right|_{L^2(O,T;H)}^2 \geq 0$$

et comme $(\lambda - \varepsilon\lambda^2) > \lambda - \frac{\lambda}{|k'|} > 0$ on obtient $z_{\varepsilon\eta} \geq k'$ d'où le lemme.

Les estimations qui précèdent sont insuffisantes pour passer à la limite dans l'équation (I). En effet, nous savons que u_ε ne reste pas borné, en général, dans \mathcal{W} , et nous étudierons d'abord la convergence de u_ε vers une solution du problème parabolique faible (III).

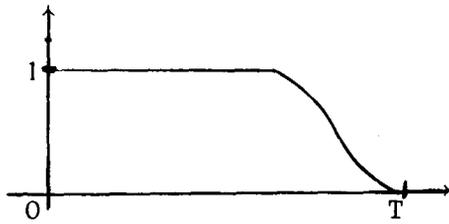
Mais alors, puisque $\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ n'est borné que dans $L^2(O,T;H)$, il nous faut prendre des fonctions tests dans $K_\psi \cap S$: En effet, $K_\psi \cap H^1_0(Q)$ n'est pas dense dans $K_\psi \cap \mathcal{W}$. (On rencontre déjà cette difficulté dans le cas des équations, $H^1_0(Q)$ n'étant pas dense dans \mathcal{W}).

Nous nous heurtons alors à trois difficultés :

i) la première provient de l'apparition d'un terme au bord, $\varepsilon \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(0), v(0) \right)_H$, obtenu par intégration par partie. En utilisant la technique des fonctions barrières comme dans Bardos [2], cette difficulté pourra être surmontée.

ii) la deuxième provient de la nature des convexes : Le convexe $K_\psi \cap S$ n'est pas dense, en général, dans le convexe $K_\psi \cap \mathcal{W}$. Nous verrons par la suite comment éviter cette deuxième difficulté.

iii) Il y a existence d'une couche limite de u_ε au voisinage de $\{T\} \times \Omega$. Pour nous en affranchir, nous utiliserons des fonctions tests ψv , $v \in K_\psi \cap S$, avec ψ définie comme suit :



$$\psi \geq 0$$

$$\psi \in C^1[0, T]$$

$$\psi = 0 \text{ au voisinage de } T$$

$$\psi' \leq 0$$

On notera $\phi = \{\psi, \psi \text{ vérifiant les hypothèses ci-dessus}\}$.

Traitement du terme en 0.

Lemme II.4. Supposons que $\psi \leq 0$ dans un voisinage de $\{0\} \times \Omega$,

alors

$$\forall v \in K_\psi \cap S, \quad \varepsilon \left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}(0), v(0) \right)_H = o(\sqrt{\varepsilon}),$$

uniformément en η .

Démonstration : Nous reprenons, pour l'essentiel, la technique des fonctions barrières développée dans Bardos [2]. Nous allons démontrer que

$$\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}(0) = o(\sqrt{\varepsilon}), \text{ uniformément en } \eta.$$

Soit v_ε la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} -\varepsilon v_\varepsilon'' + v_\varepsilon' - \Delta v_\varepsilon &= f \text{ dans } Q, \\ v_\varepsilon &\in H_0^1(Q) \end{aligned}$$

en retranchant de cette équation l'équation pénalisée IV, on obtient :

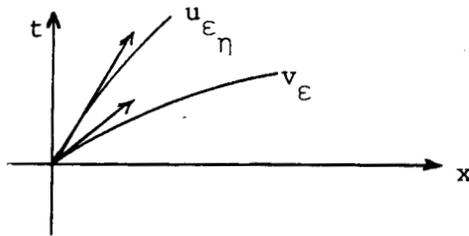
$$-\varepsilon(v_\varepsilon'' - u_\varepsilon'') + (v_\varepsilon' - u_\varepsilon') - \Delta(v_\varepsilon - u_\varepsilon) + \frac{1}{\eta}(\psi - u_\varepsilon)^+ = 0 \text{ dans } Q.$$

Il est aisé de voir que, si l'on multiplie cette équation par $(v_\varepsilon - u_\varepsilon)^+$ et que l'on intègre sur $(0, T)$, on obtient,

$$u_{\varepsilon\eta} \geq v_\varepsilon \quad \text{pp}$$

mais on a :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{\varepsilon\eta} \geq v_{\varepsilon} \\ u_{\varepsilon\eta} / \partial Q = v_{\varepsilon} / \partial Q = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}(0) \geq \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial t}(0)$$



Nous procédons alors en deux étapes :

1ère étape : nous exhibons une fonction h_{ε} telle que $\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}(0) \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial t}(0) \leq C$ uniformément en η .

2ème étape : nous montrons que $\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial t}(0) \geq -C'$ uniformément en η . Compte tenu de (1) le lemme IV sera démontré.

1ère étape : Posons $z_{\varepsilon\eta} = e^{-\lambda t} u_{\varepsilon\eta}$, $\lambda > 0$ fixé. $z_{\varepsilon\eta}$ vérifie la même équation qu'au lemme II.3 avec les mêmes notations, c'est-à-dire que si $\xi = \psi e^{-\lambda t}$; $g = f e^{-\lambda t}$ on a :

$$-\varepsilon z''_{\varepsilon\eta} + (1-2\lambda\varepsilon)z'_{\varepsilon\eta} - \Delta z_{\varepsilon\eta} + (\lambda - \varepsilon\lambda^2)z_{\varepsilon\eta} - \frac{1}{\eta}(\xi - z_{\varepsilon\eta})^+ = g,$$

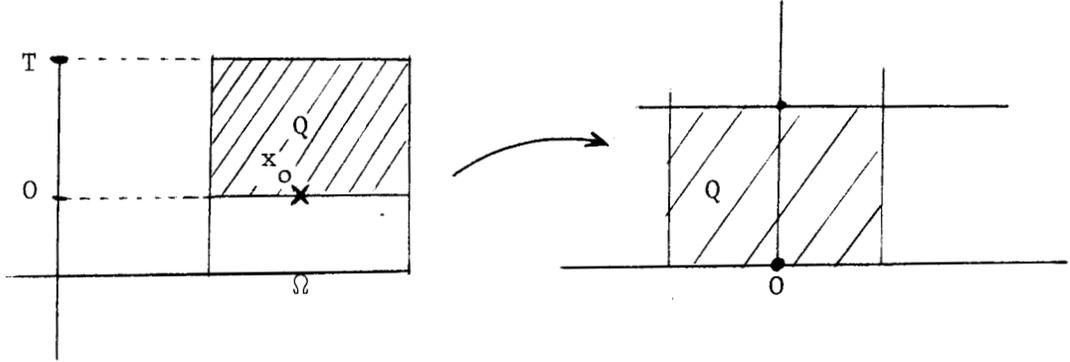
$z_{\varepsilon\eta} \in H^1_0(Q)$. D'autre part :

$$\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t} = \frac{\partial z_{\varepsilon\eta}}{\partial t} e^{\lambda t} + z_{\varepsilon\eta} \lambda e^{\lambda t},$$

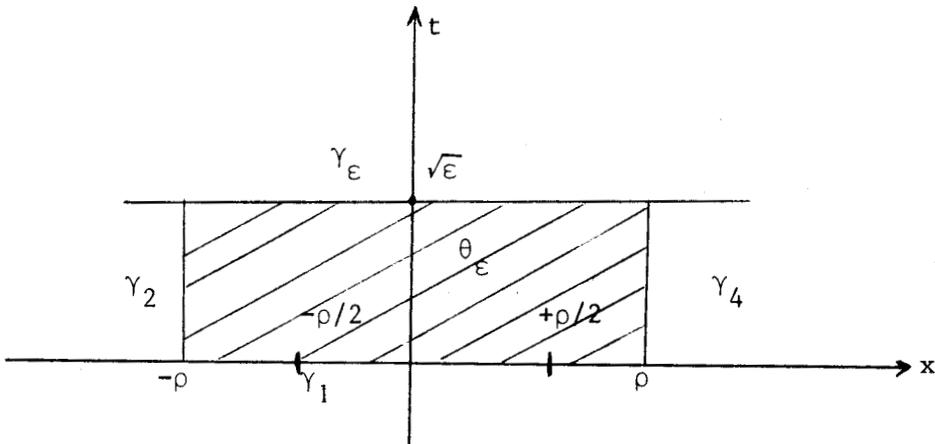
$$\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}(0) = \frac{\partial z_{\varepsilon\eta}}{\partial t}(0).$$

il nous suffit donc de montrer que $\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial z_{\varepsilon\eta}}{\partial t}(0) \leq C$ uniformément en η .

Soit $x_0 \in \Omega$, on considère un voisinage de $(0, x_0)$ dans $]0, T[\times \Omega$. Par translation on peut se ramener au cas où $x_0 = 0$



soit $B(0, \rho)$, la boule de centre 0 et de rayon ρ incluse dans ce voisinage et prenons θ_ε l'ouvert suivant :



Soit $w_\varepsilon^k(t, x) = 1 - e^{-\frac{kt}{\sqrt{\varepsilon}}}$ $k > 0$.

On a :

$$w_\varepsilon^k(0, x) = 0,$$

$$w_\varepsilon^k(\sqrt{\varepsilon}, x) = 1 - e^{-k} > 0,$$

$$\text{et } w_\varepsilon^k(t, x) \geq 0.$$

Soit A_ε l'opérateur $-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (1-2\lambda\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} - \Delta + (\lambda - \varepsilon\lambda^2)$, on a

$$A_\varepsilon z_{\varepsilon_\eta} - \frac{1}{\eta} (\xi - z_{\varepsilon_\eta})^+ = g.$$

De plus,

$$A_\varepsilon w_\varepsilon^k = e^{-\frac{kt}{\sqrt{\varepsilon}}} \left\{ k^2 + (1-2\lambda\varepsilon) \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}} - (\lambda - \varepsilon\lambda^2) \right\} + \lambda - \varepsilon\lambda.$$

ε étant destiné à tendre vers 0, si on se fixe $\varepsilon_0 = \frac{1}{2\lambda}$ et $k_0 = \frac{3\lambda}{2\sqrt{2\lambda}}$, on vérifie que pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $k > k_0$, $A_\varepsilon w_\varepsilon^k > \delta > 0$.

Soit maintenant $a \in \mathcal{D}(\Omega)$ définie comme suit :

$$a(x) \geq 0,$$

$$a(x) = 0 \quad \text{sur } |x| < \frac{\rho}{2},$$

$$a(x) = 1 \quad |x| = \rho$$

Posons $h_\varepsilon(t, x) = C_1 a(x) + C_2 w_\varepsilon^k(t)$, C_1 et C_2 que l'on va déterminer de façon que,

$$(a) \quad \begin{cases} A_\varepsilon h_\varepsilon - \frac{1}{\eta} (\xi - h_\varepsilon)^+ \geq g \quad \text{dans } \theta_\varepsilon, \\ h_\varepsilon \geq z_{\varepsilon\eta} \quad \text{sur } \partial\theta_\varepsilon = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \end{cases}$$

Réalisation de la condition $h_\varepsilon \geq z_{\varepsilon\eta}$ sur $\partial\theta_\varepsilon$:

i) Sur γ_1 , $z_{\varepsilon\eta} = 0$ ($z_{\varepsilon\eta} \in H_0^1(Q)$),

$$h_\varepsilon(0, x) = C_1 a(x) \geq 0 \quad \text{si } C_1 > 0,$$

ii) Sur γ_2 et γ_4 , $|x| = \rho$ donc $a(x) = 1$,

$$h_\varepsilon(t, x) = C_1 + C_2 w_\varepsilon^k(t) \geq C_1,$$

mais on sait que $\|z_{\varepsilon\eta}\|_{L^\infty(Q)} \leq C$ (lemme II.3) en choisissant $C_1 \geq C$
on aura

$$h_\varepsilon(t, x) \geq C \geq z_{\varepsilon\eta} \quad \text{sur } \gamma_1 \cup \gamma_4$$

iii) Sur γ_3 , $h_\varepsilon(t, x) = C_1 a(x) + (1 - e^{-k})C_2$,

donc $h_\varepsilon(t, x) \geq C_2(1 - e^{-k})$,

si l'on choisit $C_2 \geq \frac{C}{1 - e^{-k}}$ on aura,

$$h_\varepsilon(t, x) \geq C \geq z_{\varepsilon\eta} \quad \text{sur } \gamma_3.$$

On a donc déterminé C_1 et C_2 de façon que

$$h_\varepsilon \geq z_{\varepsilon\eta} \quad \text{sur } \theta_\varepsilon.$$

Réalisation de la condition $A_\varepsilon h_\varepsilon - \frac{1}{\eta} (\xi - h_\varepsilon)^+ \geq g$ dans θ_ε :

Remarquons, d'après l'hypothèse $\psi \leq 0$ dans un voisinage de $\{0\} \times \Omega$ et la définition de ξ , que $\xi \leq 0$ dans un voisinage de $\{0\} \times \Omega$.

Pour ε assez petit, θ_ε sera donc inclus dans ce voisinage et on aura $\xi \leq 0$ dans θ_ε . Comme $h_\varepsilon \geq 0$, on en déduit que $(\xi - h_\varepsilon)^+ = 0$ dans θ_ε , pour ε assez petit.

D'après la définition de h_ε on a :

$$A_\varepsilon h_\varepsilon \geq C_2 \delta + C_1 A_\varepsilon a(x).$$

Comme $a(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $g \in L^\infty(Q)$, on peut choisir C_2 assez grand pour que $A_\varepsilon h_\varepsilon \geq g$ dans θ_ε ($A_\varepsilon a(x)$ uniformément borné). Les conditions (a) sont donc satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\varepsilon h_\varepsilon \geq g \text{ dans } \theta_\varepsilon, \\ h_\varepsilon \geq z_{\varepsilon_\eta} \text{ sur } \partial\theta_\varepsilon, \\ A_\varepsilon z_{\varepsilon_\eta} - \frac{1}{\eta}(\xi - z_{\varepsilon_\eta})^+ = g \text{ dans } \theta_\varepsilon, \end{array} \right.$$

il en résulte que

$$(b) \quad A_\varepsilon (h_\varepsilon - z_{\varepsilon_\eta}) + \frac{1}{\eta}(\xi - z_{\varepsilon_\eta})^+ \geq 0 \text{ dans } \theta_\varepsilon.$$

Montrons que $h_\varepsilon \geq z_\varepsilon$ dans θ_ε :

$z_{\varepsilon_\eta} \in H^2(Q) \cap H^1_0(Q)$, donc $z_{\varepsilon_\eta} \in H^1(\theta_\varepsilon) \cap H^2(\theta_\varepsilon)$.

Puisque $h_\varepsilon \geq z_{\varepsilon_\eta}$ sur $\partial\theta_\varepsilon$, on a $(z_{\varepsilon_\eta} - h_\varepsilon)^+ \in H^1_0(\theta_\varepsilon) \cap H^2(\theta_\varepsilon)$.

on obtient alors à partir de l'inégalité (b),

$$(A_\varepsilon (h_\varepsilon - z_{\varepsilon_\eta}), (z_{\varepsilon_\eta} - h_\varepsilon)^+)_{L^2(\theta_\varepsilon)} + \frac{1}{\eta} ((\xi - z_{\varepsilon_\eta})^+, (z_{\varepsilon_\eta} - h_\varepsilon)^+)_{L^2(\theta_\varepsilon)} \geq 0$$

dans θ_ε .

Sur l'ensemble $\{(\xi \geq z_{\varepsilon_\eta})\}$, $h_\varepsilon \geq z_{\varepsilon_\eta}$ puisque $h_\varepsilon \geq \xi$.

Le second terme du premier membre est donc nul.

En explicitant $(A_\varepsilon (h_\varepsilon - z_{\varepsilon_\eta}), (z_{\varepsilon_\eta} - h_\varepsilon)^+)_{L^2(\theta_\varepsilon)} \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} -\varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial t} (z_{\varepsilon_\eta} - h_\varepsilon)^+ \right|_{L^2(\theta_\varepsilon)}^2 - \left| \nabla (z_{\varepsilon_\eta} - h_\varepsilon)^+ \right|_{L^2(\theta_\varepsilon)}^2 - \\ - (\lambda - \varepsilon \lambda^2) \left| (z_{\varepsilon_\eta} - h_\varepsilon)^+ \right|_{L^2(\theta_\varepsilon)}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(en intégrant par partie, les termes aux bords s'annulent). On en déduit que

$h_\varepsilon \geq z_{\varepsilon_\eta}$ dans θ_ε ($\varepsilon < \varepsilon_0$).

Finalement on a obtenu le résultat suivant :

$$\begin{cases} h_\varepsilon \geq z_{\varepsilon\eta} & \text{dans } \theta_\varepsilon, \\ z_{\varepsilon\eta}(0, x) = 0, \\ h_\varepsilon(0, x) = 0 & \text{pour } |x| < \frac{\rho}{2}, \end{cases}$$

il en résulte que $\frac{\partial h_\varepsilon(0)}{\partial t} \geq \frac{\partial z_{\varepsilon\eta}(0)}{\partial t}$ pour $|x| < \frac{\rho}{2}$ or

$$h_\varepsilon(t, x) = C_1 a(x) + C_2 w_\varepsilon^k(t)$$

Donc $\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial t}(0, x) = \frac{C_2 k}{\sqrt{\varepsilon}}$ et finalement : $\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial z_{\varepsilon\eta}(0)}{\partial t} \leq C_2 k$ au voisinage de tout point $(0, x_0)$ ($x_0 \in \Omega$) uniformément en η . La première étape est donc terminée.

2ème étape : Il nous faut montrer que $\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon(0)}{\partial t} \geq -C'$, indépendante de η , on reprend v_ε solution de ,

$$\begin{aligned} -\varepsilon v_\varepsilon'' + v_\varepsilon' - \Delta v_\varepsilon &= f, \text{ dans } Q, \\ v_\varepsilon &\in H_0^1(Q). \end{aligned}$$

en posant $A_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ on a donc $A_\varepsilon v_\varepsilon = f$.

Soit $z_\varepsilon = v_\varepsilon e^{-\lambda t}$ $\lambda > 0$,

$$\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} = -\lambda e^{-\lambda t} v_\varepsilon + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} e^{-\lambda t},$$

donc

$$\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t}(0) = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(0).$$

Montrons la propriété sur z_ε .

Il est facile de voir que z_ϵ vérifie l'équation :

$$-\epsilon z_\epsilon'' + (1-2\lambda\epsilon)z_\epsilon' - \Delta z_\epsilon + (\lambda-\epsilon\lambda^2)z_\epsilon = g,$$

avec $g = f e^{-\lambda t}$, $z_\epsilon \in H_0^1(Q)$.

$$\text{On pose } B_\epsilon = -\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (1-2\lambda\epsilon) \frac{\partial}{\partial t} - \Delta + (\lambda-\epsilon\lambda^2),$$

$B_\epsilon z_\epsilon = g$ et comme $g \in L^2(Q)$ on a $z_\epsilon \in H^2(Q) \cap H_0^1(Q)$.

On considère le même ouvert θ_ϵ que précédemment :

$$\text{Soit } w_\epsilon^k(t,x) = e^{-\frac{k}{\sqrt{\epsilon}} t} - 1, \quad k > 0.$$

On a :

$$w_\epsilon^k(0,x) = 0,$$

$$w_\epsilon^k(\sqrt{\epsilon},x) = e^{-k} - 1 < 0,$$

$$w_\epsilon^k(t,x) \leq 0,$$

$$B_\epsilon w_\epsilon^k = e^{-\frac{kt}{\sqrt{\epsilon}}} \left[-k^2 - (1-2\lambda\epsilon) \frac{k}{\sqrt{\epsilon}} + (\lambda-\epsilon\lambda^2) \right] - \lambda + \epsilon\lambda^2.$$

de même que dans la 1ère étape, si l'on choisit $\epsilon < \epsilon_0$ et $k > k_0$ avec

$\epsilon_0 = \frac{1}{2\lambda}$ et $k = \frac{3\lambda}{2\sqrt{2\lambda}}$, on obtient :

$$B_\epsilon w_\epsilon^k < \delta < 0$$

Soit maintenant $a \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} a(x) \leq 0, \\ a(x) = 0 & |x| < \rho/2, \\ a(x) = -1 & |x| = \rho, \end{cases}$$

et $h_\varepsilon(t, x) = C'_1 a(x) + C'_2 w_\varepsilon^k(x, t)$. Nous allons déterminer C'_1 et C'_2 de façon que,

$$(a') \quad \begin{cases} B_\varepsilon h_\varepsilon \leq g & \text{dans } \theta_\varepsilon, \\ h_\varepsilon \leq z_\varepsilon & \text{sur } \partial\theta_\varepsilon. \end{cases}$$

Réalisation de la condition $h_\varepsilon \leq z_\varepsilon$ sur $\partial\theta_\varepsilon$

Sur γ_1 , $z_\varepsilon = 0$ et $h_\varepsilon(0, x) = C'_1 a(x) \leq 0$ si $C'_1 > 0$.

Sur $\gamma_2 \cup \gamma_4$, $|x| = \rho$, $h_\varepsilon = -C'_1 + C'_2 w_\varepsilon^k \leq -C'_1 \leq 0$.

Puisque $f \in L^\infty(Q)$, en utilisant une démonstration analogue à celle du lemme II.3, on peut montrer que $z_\varepsilon \in L^\infty(Q)$ et $|z_\varepsilon|_{L^\infty(Q)} \leq C$, C indépendant de ε .

Si on choisit $C'_1 > C$ on aura,

$$h_\varepsilon \leq -C \leq z_\varepsilon \quad \text{sur } \gamma_2 \cup \gamma_4.$$

Sur γ_3 , $t = \sqrt{\varepsilon}$,

$$h_\varepsilon = C'_1 a(x) + C'_2 (e^{-k}-1) \leq C'_2 (e^{-k}-1),$$

on choisit alors $C'_2 \geq \frac{C}{e^{-k}-1}$ et on aura $h_\varepsilon \leq C \leq z_\varepsilon$ sur γ_3 .

La 2ème condition de (a') est donc bien vérifiée.

En ce qui concerne l'inégalité $B_\varepsilon h_\varepsilon \leq g$, on a :

$$B_\varepsilon h_\varepsilon = C'_1 B_\varepsilon a(x) + C'_2 B_\varepsilon w_\varepsilon^k \leq C'_1 B_\varepsilon a(x) + C'_2 \delta.$$

Puisque $a(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $B_\varepsilon a(x)$ est uniformément borné et l'on peut choisir C'_2 assez grand pour que $B_\varepsilon h_\varepsilon \leq g$ dans θ_ε .

Les conditions (a') sont donc satisfaites :

$$B_\varepsilon h_\varepsilon \leq g \quad \text{dans } \theta_\varepsilon,$$

$$h_\varepsilon \leq z_\varepsilon \quad \text{sur } \partial\theta_\varepsilon$$

rappelons que $B_\varepsilon z_\varepsilon = g$ dans θ_ε .

On a donc $B_\varepsilon (h_\varepsilon - z_\varepsilon) \leq 0$ dans θ_ε et comme $h_\varepsilon \leq z_\varepsilon$ sur $\partial\theta_\varepsilon$, on en conclut que $(h_\varepsilon - z_\varepsilon)^+ \in H_0^1(\theta_\varepsilon)$.

Explicitons la relation $(B_\varepsilon (h_\varepsilon - z_\varepsilon), (h_\varepsilon - z_\varepsilon)^+)_{L^2(\theta_\varepsilon)} \leq 0$:

$$\varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial t} (h_\varepsilon - z_\varepsilon)^+ \right|_{L^2(\theta_\varepsilon)}^2 + \left| \nabla (h_\varepsilon - z_\varepsilon)^+ \right|_{L^2(\theta_\varepsilon)}^2 + (\lambda - \varepsilon \lambda^2) \left| (h_\varepsilon - z_\varepsilon)^+ \right|_{L^2(\theta_\varepsilon)}^2 \leq 0$$

Pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, on obtient donc $h_\varepsilon \leq z_\varepsilon$ sur θ_ε .

Enfin, pour $|x| < \rho/2$ $a(x) = 0$ et

$$h_\varepsilon(0, x) = C_2' w_\varepsilon^k(0, x) = 0,$$

$$z_\varepsilon(0, x) = 0,$$

et donc si $|x| < \rho/2$.

$$\begin{cases} h_\varepsilon \leq z_\varepsilon \\ h_\varepsilon(0, x) = z_\varepsilon(0, x) = 0 \end{cases}$$

et on sait qu'alors

$$\frac{\partial h_\varepsilon(0)}{\partial t} \leq \frac{\partial z_\varepsilon(0)}{\partial t}$$

mais $\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial t}(0) = -\frac{C_2' k}{\sqrt{\varepsilon}}$, donc :

$$\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}(0) \geq \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial t}(0) = \frac{\partial z_{\varepsilon}}{\partial t}(0) \geq -\frac{C_2'k}{\sqrt{\varepsilon}}$$

On termine alors la seconde étape puisque $\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}(0) \geq -C_2'k$ uniformément en η au voisinage de tout point $(0, x_0)$ $x_0 \in \Omega$.

Le lemme est ainsi établi :

$$-C_2'k \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}(0) \leq C_2k$$

III. PASSAGE A LA LIMITE (premier résultat).

Dans ce paragraphe, nous étudions le comportement de u_{ε} quand ε tend vers 0 en utilisant les estimations du paragraphe II.

Nous savons que le convexe $K_{\psi} \cap H_0^1(Q)$ n'est pas dense dans le convexe $K_{\psi} \cap W$. Nous allons donc être amené à prendre des fonctions tests de $K_{\psi} \cap S$.

Tout d'abord, ε étant fixé, on sait d'après LIONS [9] que $u_{\varepsilon\eta}$ converge vers u_{ε} dans $H_0^1(Q)$ faible et dans $L^2(Q)$ fort, u_{ε} étant la solution de l'inéquation variationnelle elliptique (I).

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante :

Proposition III.1. Soient f et ψ vérifiant les hypothèses des lemmes II.3 et II.4, alors de toute sous suite de $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$, u_{ε} solution du problème I, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans V vers une solution u de l'inéquation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla(v-u))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, v-u)_H dt, \\ u \in K_{\psi} \quad ; \quad \underline{\forall v \in K_{\psi} \cap S.} \end{array} \right.$$

Démonstration : D'après le lemme II.2, C étant indépendante de η , on peut extraire une sous-suite (u_ε) telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2(0,T; V)$$

comme $u_\varepsilon \in K_\psi$, convexe fermé de $L^2(0,T; V)$, on en déduit immédiatement que $u \in K_\psi$.

D'autre part, pour tout $v \in K_\psi \cap S$, pour tout $\rho \in \phi$, si l'on multiplie l'équation pénalisée par $\rho(v-u_{\varepsilon_\eta})$ et que l'on intègre sur $(0,T)$ on obtient, après intégration par partie :

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rho(v-u_{\varepsilon_\eta}) \right)_H dt + \varepsilon \left(\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}(0), v(0) \right)_H + \\ \int_0^T (\nabla u_{\varepsilon_\eta}, \nabla \rho(v-u_{\varepsilon_\eta}))_H dt + \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \rho(v-u_{\varepsilon_\eta}) \right)_H dt \geq \int_0^T (f, \rho(v-u_{\varepsilon_\eta}))_H dt \end{array} \right.$$

$$\text{mais } \int_0^T \left(\frac{\partial (v-u_{\varepsilon_\eta})}{\partial t}, \rho(v-u_{\varepsilon_\eta}) \right)_H dt = \int_0^T -\frac{\rho'}{2} |v-u_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \rho |v-u_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \rho(v-u_{\varepsilon_\eta}) \right)_H dt &= \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \rho(v-u_{\varepsilon_\eta}) \right)_H dt + \int_0^T \frac{\rho'}{2} |v-u_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt + \\ &+ \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \leq \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \rho(v-u_{\varepsilon_\eta}) \right)_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \quad (\rho' \leq 0) \end{aligned}$$

La seule difficulté pour passer à la limite dans (a) provient des termes

$$\varepsilon \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rho(v-u_{\varepsilon_\eta}) \right)_H dt \quad \text{et} \quad \int_0^T (\nabla u_{\varepsilon_\eta}, \nabla \rho(v-u_{\varepsilon_\eta}))_H dt.$$

L'estimation du lemme II.2 nous permet d'écrire :

$$|\varepsilon \int_0^T (\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} (\rho v))_H dt| \leq \sqrt{\varepsilon} |\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}|_{L^2(0T;H)} \sqrt{\varepsilon} |\frac{\partial}{\partial t} (\rho v)|_{L^2(0T;H)} \leq C_1 \sqrt{\varepsilon}$$

d'autre part, l'application $w \rightarrow \psi(w) = \int_0^T \rho |\nabla w|_H^2 dt$ est convexe, continue pour la topologie forte de $L^2(0,T;V)$ ($\rho \geq 0$) donc semi-continue inférieurement pour la topologie faible c'est-à-dire :

$$\liminf_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_0^T \rho |\nabla u_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt \geq \int_0^T \rho |\nabla u|_H^2 dt$$

enfin, $\varepsilon \int_0^T (\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \frac{\partial \rho u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t})_H dt = \varepsilon \int_0^T (\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \rho' u_{\varepsilon_\eta})_H dt + \varepsilon \int_0^T \rho |\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}|_H^2 dt$ et

$$|\varepsilon \int_0^T (\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \rho' u_{\varepsilon_\eta})_H dt| \leq C_3 \sqrt{\varepsilon} \quad (\text{lemme II.2}).$$

De (a) on déduit donc l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_0^T (\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \frac{\partial \rho v}{\partial t})_H dt + \varepsilon (\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}(0), v(0))_H + \int_0^T (\nabla u_{\varepsilon_\eta}, \nabla \rho v)_H dt + \\ & + \int_0^T (\frac{\partial v}{\partial t}, \rho(v - u_{\varepsilon_\eta}))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, \rho(v - u_{\varepsilon_\eta}))_H dt \\ & + \varepsilon \int_0^T \rho |\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}|_H^2 dt + \int_0^T \rho |\nabla u_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt + \varepsilon \int_0^T (\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \rho' u_{\varepsilon_\eta})_H dt \end{aligned}$$

d'après le lemme II.4 et puisque $\rho \geq 0$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} & C_1 \sqrt{\varepsilon} + C_2 \sqrt{\varepsilon} + \int_0^T (\nabla u_{\varepsilon_\eta}, \nabla \rho v)_H dt + \int_0^T (\frac{\partial v}{\partial t}, \rho(v - u_{\varepsilon_\eta}))_H dt + \\ & + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, \rho(v - u_{\varepsilon_\eta}))_H dt + \int_0^T \rho |\nabla u_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt - C_3 \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

et en passant à la limite quand $\eta \rightarrow 0$ et $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_0^T (\nabla u, \nabla \rho v)_H dt + \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \rho(v-u) \right)_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, \rho(v-u))_H dt + \int_0^T \rho |\nabla u|_H^2 dt .$$

Enfin, en considérant une suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de ϕ , telle que $\rho_n(t) \rightarrow 1 \quad \forall t \in [0, T[$ et en appliquant le théorème de Lebesgue, on a :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla(v-u))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, v-u)_H dt,$$

$$\forall v \in K_\psi \cap S \quad ; \quad u \in K_\psi.$$

La proposition est alors établie.

Pour démontrer la convergence de (u_ε) vers une solution de III, il nous faudra des hypothèses supplémentaires sur le convexe $K_\psi \cap S$, c'est pourquoi, avant de traiter le cas général, nous allons étudier le cas où ψ est régulier, c'est-à-dire $\psi \in L^2(0, T; H^2)$, $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$.

IV. ETUDE DU CAS REGULIER.

Outre les hypothèses introduites aux paragraphes précédents, on suppose donc, dans ce paragraphe, que $\psi \in L^2(0, T; H^2)$ et $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$. Nous ne supposons pas que $\psi \in L^2(0, T; V)$, on ne peut donc pas se ramener à $\psi = 0$ en posant $w = u - \psi$. Dans les conditions de régularité précédentes, nous savons que le problème fort II admet une solution unique u telle que $u \in L^2(0, T; H^2 \cap H_0^1)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$ Charrier Troianiello [6].

Nous nous proposons de démontrer directement que (u_ε) converge vers u dans $L^2(0, T; V)$.

Lemme IV.1. ψ vérifiant les conditions de régularité précédentes, $f \in L^2(0, T; H)$, alors il existe une constante $C > 0$, indépendante de ε et de η telle que

$$\frac{1}{\eta} |(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+|_{L^2(0, T; H)} \leq c_\lambda, \quad \forall \lambda > 0$$

Démonstration : Soit $\rho \in \phi$, multiplions l'équation pénalisée par

$\rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \in H^1(Q)$ et intégrons sur $(0, T)$. Comme $\psi \leq 0$ sur $]0, T[\times \partial\Omega$ et $\psi(0) \leq 0$ il vient :

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_0^T \left(\frac{\partial \epsilon_\eta}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u_{\epsilon_\eta}, \nabla \rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+) dt + \\ & + \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\epsilon_\eta}}{\partial t}, \rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right)_H dt - \frac{1}{\eta} \int_0^T \rho |(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+|_H^2 dt = \int_0^T (f, \rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+) dt. \end{aligned}$$

$$\int_0^T \left(\frac{\partial u_{\epsilon_\eta}}{\partial t}, \rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right)_H dt = \int_0^T \left(\frac{\partial (u_{\epsilon_\eta} - \psi)}{\partial t}, \rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right)_H dt +$$

$$\int_0^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right)_H dt = - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \rho |(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+|_H^2 dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T \rho |(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+|_H^2 dt + \int_0^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right)_H dt \leq c |(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+|_{L^2(0, T; H)}.$$

$$\epsilon \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\epsilon_\eta}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right)_H dt = \epsilon \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\epsilon_\eta}}{\partial t}, \rho'(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right)_H dt +$$

$$+ \epsilon \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_{\epsilon_\eta} - \psi), \rho \frac{\partial}{\partial t} (\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right)_H dt + \epsilon \int_0^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \rho \frac{\partial}{\partial t} (\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right)_H dt$$

$$\leq \sqrt{\epsilon} \left| \frac{\partial u_{\epsilon_\eta}}{\partial t} \right|_{L^2(0, T; H)} \sqrt{\epsilon} |\rho'(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+|_{L^2(0, T; H)} - \epsilon \int_0^T \rho \left| \frac{\partial}{\partial t} (\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right|_H^2 dt$$

$$+ \sqrt{\epsilon} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{L^2(0, T; H)} \sqrt{\epsilon} \left| \rho \frac{\partial}{\partial t} (\psi - u_{\epsilon_\eta})^+ \right|_{L^2(0, T; H)} \leq c' \sqrt{\epsilon}$$

$$\int_0^T (\nabla u_{\epsilon_\eta}, \nabla \rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+) dt = \int_0^T \rho (\nabla (u_{\epsilon_\eta} - \psi), \nabla (\psi - u_{\epsilon_\eta})^+) dt +$$

$$\int_0^T \rho (-\Delta \psi, (\psi - u_{\epsilon_\eta})^+) dt \leq c'' |\rho(\psi - u_{\epsilon_\eta})^+|_{L^2(0, T; H)}$$

(car $\psi \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$).

on peut donc écrire :

$$\frac{1}{\eta} \int_0^T \rho |(\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+|_H^2 dt \leq C' \sqrt{\varepsilon} + C'' |(\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+ \sqrt{\rho}|_{L^2(0,T;H)}$$

$$+ C |\sqrt{\rho}(\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+|_{L^2(0,T;H)} + \|f\|_{L^2(0,T;H)} |\sqrt{\rho}(\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+|_{L^2(0,T;H)}$$

on en conclut alors le lemme.

Lemme IV.2. En conservant les mêmes hypothèses qu'au lemme IV.1,

on a :

$$\sqrt{\varepsilon} \left| \frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t} (0) \right|_H \leq C_\lambda \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t} \right|_{L^2(0,T-\lambda;H)} \leq C'_\lambda$$

C, C' ne dépendant que de λ .

Démonstration : On sait que $u'_{\varepsilon_\eta} \in V = L^2(0,T;V)$; pour $\rho \in \phi$, multiplions l'équation pénalisée par $\rho u'_{\varepsilon_\eta}$:

$$- \varepsilon \int_0^T (u''_{\varepsilon_\eta}, \rho u'_{\varepsilon_\eta})_H dt + \int_0^T \rho |u'_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt = - \int_0^T (\nabla u_{\varepsilon_\eta}, \nabla \rho u'_{\varepsilon_\eta})_H dt$$

$$+ \frac{1}{\eta} \int_0^T ((\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+, \rho u'_{\varepsilon_\eta})_H dt + \int_0^T (f, \rho u'_{\varepsilon_\eta})_H dt$$

intégrons par partie :

$$- \varepsilon \int_0^T (u''_{\varepsilon_\eta}, \rho u'_{\varepsilon_\eta})_H dt = - \varepsilon \int_0^T \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} |u'_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt = - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \rho |u'_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt$$

$$+ \int_0^T \frac{\varepsilon \rho'}{2} |u'_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt.$$

d'autre part :

$$- \int_0^T (\nabla u_{\varepsilon_\eta}, \nabla \rho u'_{\varepsilon_\eta})_H dt = - \int_0^T \rho (u_{\varepsilon_\eta}, u'_{\varepsilon_\eta})_V dt = - \frac{1}{2} \int_0^T \rho \frac{d}{dt} |u_{\varepsilon_\eta}|_V^2 dt$$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \rho |u_{\varepsilon_\eta}|_V^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \rho' |u_{\varepsilon_\eta}|_V^2 dt$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{2} |u'_{\varepsilon_\eta}(0)|_H^2 + \varepsilon \int_0^T \frac{\rho'}{2} |u'_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt + \int_0^T \rho |u'_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt = \\ & \frac{1}{\eta} \int_0^T ((\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+, \rho u'_{\varepsilon_\eta})_H dt + \int_0^T (f, \rho u'_{\varepsilon_\eta})_H dt + \frac{1}{2} \int_0^T \rho' |u_{\varepsilon_\eta}|_V^2 dt \\ & \leq \frac{1}{\eta} \int_0^T (\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+, \rho u'_{\varepsilon_\eta})_H dt + \int_0^T (f, \rho u'_{\varepsilon_\eta})_H dt \end{aligned}$$

on en déduit, compte tenu du lemme II.2 et du lemme IV.1 :

$$\frac{\varepsilon}{2} |u'_{\varepsilon_\eta}(0)|_H^2 + \int_0^T \rho |u'_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt \leq C + C' |\sqrt{\rho} u'_{\varepsilon_\eta}|_{L^2(0,T;H)}$$

on en conclut le lemme.

Ces estimations sont alors suffisantes pour passer à la limite.

Nous allons pouvoir démontrer directement à partir de la formulation forte (II) et de l'équation pénalisée le théorème suivant :

Théorème IV.1. Si $\psi \in L^2(0,T; H^2)$, $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^2(0,T;H)$, $f \in L^\infty(Q)$ alors la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge fortement dans $L^2(0,T; V)$ vers la solution u du problème parabolique fort (II) et on a l'estimation :

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} \leq C \sqrt{\varepsilon} .$$

Démonstration : D'après la proposition III.1 on sait que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(0,T;V)$ où u est une solution de l'inéquation :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v - u \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla (v - u))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, v - u)_H dt$$

$u \in K_\psi$; $\forall v \in K_\psi \cap S$.

Grâce à la régularité sur ψ , $K_\psi \cap S$ est dense dans $K_\psi \cap W$.

u est donc solution du problème III. D'après les estimations précédentes, $u(0)$ a un sens et $u(0) = 0$.

D'autre part, si $\psi \in L^2(0, T; H^2)$, $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$, nous savons que la solution forte (problème II) existe, qu'elle est l'unique solution faible u , et qu'elle vérifie $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$ (Annexe A).

Nous pouvons donc écrire :

$$(a) \quad \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla v-u)_H dt \geq \int_0^T (f, v-u)_H dt,$$

$$u \in K_\psi \cap S \quad \forall v \in K_\psi ; u(0).$$

Démonstration de l'estimation : $\|u-u_\epsilon\|_{L^2(0, T; V)} \leq C\sqrt{\epsilon}$.

Prenons $v = u_\epsilon$, dans (a) ce qui est loisible, on obtient :

$$(a) \quad \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u_\epsilon - u \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla u_\epsilon - u)_H dt \geq \int_0^T (f, u_\epsilon - u)_H dt$$

Considérons maintenant l'équation pénalisée que l'on multiplie par $\rho(u-u_{\epsilon_\eta})$. Les intégrations par parties sont alors licites et puisque $\rho(u-u_{\epsilon_\eta}) \in S$ on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\epsilon_\eta}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rho(u-u_{\epsilon_\eta}) \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u_{\epsilon_\eta}, \nabla \rho(u-u_{\epsilon_\eta}))_H dt + \\ \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\epsilon_\eta}}{\partial t}, \rho(u-u_{\epsilon_\eta}) \right)_H dt - \frac{1}{\eta} \int_0^T (\psi - u_{\epsilon_\eta})^+, \rho(u-u_{\epsilon_\eta})_H dt = \\ \int_0^T (f, \rho(u-u_{\epsilon_\eta}))_H dt. \end{aligned}$$

Sur l'ensemble $\{\psi \geq u_{\epsilon_\eta}\}$, $u \geq u_{\epsilon_\eta}$; d'autre part :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial u_{\epsilon_\eta}}{\partial t}, \rho(u-u_{\epsilon_\eta}) \right)_H dt = \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \rho(u-u_{\epsilon_\eta}) \right)_H dt + \int_0^T \frac{\rho'}{2} |u-u_{\epsilon_\eta}|_H^2 dt.$$

enfin, il est facile de voir que, d'après le lemme IV.2,

$$\epsilon \left| \int_0^T \left(\frac{\partial u_{\epsilon_\eta}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rho(u-u_{\epsilon_\eta}) \right)_H dt \right| \leq C \epsilon$$

On obtient alors l'inégalité :

$$C_\varepsilon + \int_0^T (\nabla u_{\varepsilon_\eta}, \nabla \rho u)_H dt + \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \rho(u-u_{\varepsilon_\eta}) \right)_H dt \\ \geq \int_0^T \rho |\nabla u_{\varepsilon_\eta}|_H^2 dt + \int_0^T (f, \rho(u-u_{\varepsilon_\eta}))_H dt.$$

Comme $w \rightarrow \int_0^T \rho |\nabla w|_H^2 dt$ est semi-continue inférieurement pour la

topologie faible, on obtient par passage à la limite quand $\eta \rightarrow 0$:

$$C_\varepsilon + \int_0^T (\nabla u_\varepsilon, \nabla \rho u)_H dt + \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \rho(u-u_\varepsilon) \right)_H dt \geq \\ \int_0^T \rho |\nabla u_\varepsilon|_H^2 dt + \int_0^T (f, \rho(u-u_\varepsilon))_H dt.$$

Soit $\rho_n \in \phi$, $\rho_n(t) \rightarrow 1$, $\forall t \in [0, T[$, on peut écrire, d'après

le théorème de Lebesgue :

$$(b) \quad C_\varepsilon + \int_0^T (\nabla u_\varepsilon, \nabla(u-u_\varepsilon))_H dt + \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u-u_\varepsilon \right)_H dt \geq \int_0^T (f, u-u_\varepsilon)_H dt.$$

On additionne alors (a) et (b) :

$$C_\varepsilon + \int_0^T (\nabla(u-u_\varepsilon), \nabla(u_\varepsilon-u))_H dt \geq 0.$$

Soit encore :

$$\|u-u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C_\varepsilon.$$

V. ETUDE DU CAS GENERAL.

Dans ce paragraphe, nous supposons vérifiées les hypothèses des lemmes II.3 et II.4 c'est-à-dire :

$$(a) \quad \begin{cases} \psi \in L^2(0,T;H), & \psi^+ \in L^\infty(Q), \quad \psi \leq 0 \text{ sur un voisinage de} \\ \{0\} \times \Omega & \text{et } f \in L^\infty(Q). \end{cases}$$

Nous allons montrer que, pour ces obstacles irréguliers, en introduisant une hypothèse supplémentaire relative aux convexes des fonctions tests la solution (u_ε) du problème (I) converge, quand ε tend vers 0, vers la plus petite solution faible du problème parabolique associée à un choix convenable du convexe des fonctions tests.

La difficulté essentielle rencontrée au cours de cette étude provient du fait qu'il n'a pas été possible de montrer directement, à partir de la formulation variationnelle, que la limite de u_ε est la plus petite solution faible.

Cette difficulté a été levée en utilisant l'interprétation ponctuelle de la solution minimale. C'est pourquoi nous avons fait appel aux résultats de Pierre [15] que nous rappelons dans l'annexe [B].

Nous savons, d'après la proposition III.1 que, de toute suite (u_ε) $\varepsilon > 0$, on peut extraire une sous-suite, encore notée u_ε , telle que : $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; V)$ où u est solution de l'inéquation :

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, (v-u) \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla (v-u))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, v-u)_H dt, \\ \forall v \in K_\psi \cap S, \quad u \in K_\psi. \end{array} \right.$$

Notons immédiatement que l'inégalité (a) est encore vérifiée pour toute fonction v de $(K_\psi \cap S)_W$. D'autre part, la fonction u , étant limite faible de u_ε dans $L^2(0, T; V)$, appartient à l'adhérence dans $L^2(0, T; V)$ de $K_\psi \cap S$.

Les notations étant celles de l'annexe [B], remarquons tout d'abord que u , solution de (a) est un élément de $W + P_a$:

LEMME V.1. Soit u la limite faible de (u_ε) , selon la proposition III.1 alors $u \in (W+Pa)$.

Démonstration : Soit τ la solution du problème :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \Delta \tau = f$$

$$\tau(0) = 0 \quad ; \quad \tau \in \mathcal{W}$$

Nous allons établir que $u-\tau \in Pa$. Reprenons l'équation pénalisée IV, que l'on multiplie par $v \in S \cap C_0^+(\llbracket 0, T \llbracket \times \Omega)$. Après intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_0^T \left(-\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \right)_H dt + \int_0^T \left(-\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, v \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u_{\varepsilon_\eta}, \nabla v)_H dt + \varepsilon \left(-\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}(0), v(0) \right)_H \\ & = \frac{1}{\eta} \int_0^T \left((\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+, v \right)_H dt + \int_0^T (f, v)_H dt. \end{aligned}$$

Donc :

$$\varepsilon \left(-\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}(0), v(0) \right)_H + \varepsilon \int_0^T \left(-\frac{\partial u_{\varepsilon_\eta}}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \right)_H dt + \int_0^T \left(-\frac{\partial v}{\partial t}, u_{\varepsilon_\eta} \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u_{\varepsilon_\eta}, \nabla v)_H dt \geq \int_0^T (f, v)_H dt.$$

Le passage à la limite quand $\eta \rightarrow 0$, puis quand $\varepsilon \rightarrow 0$, s'effectue de la même manière que dans la proposition III.1., il en résulte que :

$$\int_0^T \left(-\frac{\partial v}{\partial t}, u \right)_H dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla v)_H dt \geq \int_0^T \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}, v \right)_H dt + \int_0^T (\nabla \tau, \nabla v)_H dt.$$

Après une nouvelle intégration par partie sur le terme $\int_0^T \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}, v \right)_H dt$, il vient :

$$\int_0^T \left(-\frac{\partial v}{\partial t}, (u-\tau) \right)_H dt + \int_0^T (\nabla (u-\tau), \nabla v)_H dt \geq 0 \quad ; \quad \forall v \in S \cap C_0^+(\llbracket 0, T \llbracket \times \Omega)$$

mais nous savons que $S \cap C_0^+(\llbracket 0, T \llbracket \times \Omega)$ est dense dans \mathcal{W}_T^+ , on en conclut le lemme.

En notant $u(\psi)$, la limite selon la proposition III.1 de u_{ε_η} associée à l'obstacle ψ , nous allons établir que l'application $\psi \rightarrow u(\psi)$ est croissante.

Lemme V.2. Soient ψ et ψ' vérifiant les hypothèses (a)

on a :

$$\psi \geq \psi' \Rightarrow u(\psi) \geq u(\psi') \quad \text{pp}$$

Démonstration : Reprenons les équations pénalisées associées aux obstacles

ψ et ψ' . On pose $u_{\varepsilon_\eta} = u_{\varepsilon_\eta}(\psi)$ et $v_{\varepsilon_\eta} = u_{\varepsilon_\eta}(\psi')$:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u_{\varepsilon_\eta}'' + u_{\varepsilon_\eta}' - \Delta u_{\varepsilon_\eta} - \frac{1}{\eta}(\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+ &= f \\ -\varepsilon v_{\varepsilon_\eta}'' + v_{\varepsilon_\eta}' - \Delta v_{\varepsilon_\eta} - \frac{1}{\eta}(\psi' - v_{\varepsilon_\eta})^+ &= f \end{aligned}$$

Soit $w_{\varepsilon_\eta} = v_{\varepsilon_\eta} - u_{\varepsilon_\eta}$. w_{ε_η} vérifie l'équation :

$$-\varepsilon w_{\varepsilon_\eta}'' + w_{\varepsilon_\eta}' - \Delta w_{\varepsilon_\eta} - \frac{1}{\eta}[(\psi' - v_{\varepsilon_\eta})^+ - (\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+] = 0$$

On multiplie cette équation par $w_{\varepsilon_\eta}^+$ puis on intègre sur $(0, T)$, on obtient, après intégration partie :

$$\varepsilon \int_0^T \left| \frac{\partial (w_{\varepsilon_\eta}^+)}{\partial t} \right|_H^2 dt + \int_0^T \|\nabla w_{\varepsilon_\eta}^+\|_H^2 dt - \frac{1}{\eta} \int_0^T ((\psi' - v_{\varepsilon_\eta})^+ - (\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+, w_{\varepsilon_\eta}^+) dt = 0.$$

Sur l'ensemble $\{v_{\varepsilon_\eta} \geq u_{\varepsilon_\eta}\}$, on a $(\psi' - v_{\varepsilon_\eta})^+ \leq (\psi - u_{\varepsilon_\eta})^+$.

Le dernier terme du 1er membre est alors positif, on en déduit que

$w_{\varepsilon_\eta}^+ = 0$, c'est-à-dire $u_{\varepsilon_\eta}(\psi) \geq u_{\varepsilon_\eta}(\psi')$.

En passant à la limite quand $\eta \rightarrow 0$, puis quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on en conclut le lemme.

Pour $\psi \in S$, nous savons que le problème III admet une solution unique (Annexe A).

De plus, on a alors $(\overline{K_\psi \cap S})_\omega = K_\psi \cap \omega$: en effet $K_\psi \cap \omega = \psi + \omega^+$ et $K_\psi \cap S = \psi + S^+$. On utilise alors la densité de S^+ dans ω^+ .

En utilisant la proposition III.1, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition V.1. Soit $f \in L^\infty(Q)$, $\psi \in S$ telle que $\psi^+ \in L^\infty(Q)$, $\psi \leq 0$ sur un voisinage de $\{0\} \times \Omega$ alors la suite $(u_\varepsilon) \varepsilon > 0$, u_ε solution du problème I, converge faiblement dans $L^2(0, T; V)$ vers l'unique solution u du problème III.

En particulier $u = u(\tilde{\psi}, 0, f)$. $\tilde{\psi}$ étant le représentant quasi-continu de ψ (Annexe B).

Avant d'étudier le cas où il n'y a plus unicité de la solution faible, nous allons établir des propriétés liées aux convexes des fonctions tests.

Nous renvoyons à l'annexe B pour les définitions des capacités elliptiques et paraboliques.

Rappelons que $S = \{v \in L^2(0, T; V), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; H)\} = \{v \in H^1(Q), v/\Sigma = 0\}$.

S est un sous-espace fermé de $H^1(Q)$.

Nous savons que S muni du produit scalaire :

$$a(u, v) = \int_0^T (\nabla u, \nabla v)_H dt + \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \right)_H dt,$$

est un espace de Dirichlet.

Le convexe $K_\psi \cap S = \{v \in S, v \geq \psi \text{ pp}\}$ est fermé, inf stable et héréditaire ($v \in K_\psi \cap S, w \in S^+ \Rightarrow v+w \in K_\psi \cap S$).

D'après Mignot Puel [13] et Ancona [1], il existe donc une fonction $\hat{\psi}_S$, quasi scs pour la capacité associée au produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$ de $H^1(Q)$ telle que :

i) $K_\psi \cap S = \{v \in S, \tilde{v} \geq \hat{\psi}_S S\text{-qp}\}$ \tilde{v} étant le représentant quasi-continue de v .

ii) il existe une suite ψ_n , $\psi_n \in K_\psi \cap S$, $\tilde{\psi}_n \downarrow \hat{\psi}_S S\text{-qp}$.

Soit $C = \overline{(K_\psi \cap S)}_{L^2(0,T;V)} \cap (W+Pa)$ (nous savons que

$u = \lim_{\epsilon} u_\epsilon \in C$). Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme V.3. $C = \overline{(K_\psi \cap S)}_{L^2(0,T;V)} \cap (W+Pa)$ est un convexe unila-

téral et inf-fermé de $(W+Pa)$.

Démonstration : Posons $C = \overline{K_\psi \cap S}_{L^2(0,T;V)}$.

Montrons tout d'abord que C est héréditaire et inf-stable dans $L^2(0,T;V)$.

a) C est héréditaire.

Soit $v \in C$, $w \in V^+$ ($V = L^2(0,T;V)$). D'après la définition de C , il existe $v_n \in K_\psi \cap S$, $v_n \rightarrow v$ dans $L^2(0,T;V)$.

Soit (w_n) , $n > 0$, la solution du problème :

$$w_n + \frac{1}{n} \frac{\partial w_n}{\partial t} = w,$$

$$w_n(0) = 0,$$

$$w_n \in W.$$

Il est facile de voir que $w_n \geq 0$ ($w \geq 0$), $w_n \rightarrow w$ dans $L^2(0,T;V)$, $n \rightarrow \infty$.

D'autre part, puisque $w \in L^2(0,T;V)$, nous savons que $w_n \in S$.

$K_\psi \cap S$ étant héréditaire, la suite $v_n + w_n \in K_\psi \cap S$ et de plus elle converge fortement vers $v+w$ dans $L^2(0,T;V)$, donc C est héréditaire.

b) C est inf-stable.

Nous savons que l'application $u \rightarrow u^+$ est continue de V fort dans V fort.

Soit v_1 et $v_2 \in C$, v_{1n} et v_{2n} les suites correspondantes dans $K_\psi \cap S$.

$K_\psi \cap S$ étant inf-stable, $v_{1n} \wedge v_{2n} = \min(v_{1n}, v_{2n})$ appartient à $K_\psi \cap S$ et $v_{1n} \wedge v_{2n} \rightarrow v_1 \wedge v_2$ dans $L^2(0, T; V)$ d'après la remarque précédente.

C est donc inf-stable.

c) C est unilatéral.

Soient $v_1, v_2 \in C = C \cap (W+Pa)$ et $v \in W+Pa$ avec :

$$\hat{v}_1 \wedge \hat{v}_2 \leq \hat{v} \quad \text{qp.}$$

C étant inf-stable, on a $v_1 \wedge v_2 \in C$. Posons $w = v_1 \wedge v_2$. On peut écrire :

$$v = w + (v-w).$$

Mais $w \in C$, $v-w \geq 0$, on en déduit que $v \in C$ puisque C est héréditaire.

d) C est inf-fermé.

Soient $(v_n) \in C \cap (W+Pa)$, $v \in W+Pa$ avec $\hat{v}_n \downarrow \hat{v}$ qp.

$v \in (W+Pa) \Rightarrow (v-v_0) \in Pa$, $v_0 \in W$. D'après la définition du représentant quasi scs d'un potentiel (Annexe B.3), nous savons qu'il existe une suite $(w_p) \in Pa$, w_p quasi continues telle que :

$$\tilde{w}_p \downarrow \tilde{v-v_0} \quad \text{qp.}$$

(w_p) étant une suite décroissante de potentiels, converge faiblement dans $L^2(0, T; V)$ vers $\hat{v-v_0}$ (Annexe B.1). Comme $C = \overline{(K_\psi \cap S)}_{L^2(0, T; V)}$ est faiblement fermé, il suffit d'établir que $\psi_p = w_p + v_0 \in C$.

$\psi_p + (v_n - \psi_p)^+ = v_n + (\psi_p - v_n)^+ \in C$ puisque C est héréditaire.

Pour p fixé, $(\hat{v}_n - \tilde{\psi}_p)^+ \downarrow 0$ qp, $n \rightarrow \infty$.

En reprenant la notation de l'annexe B.5, soit $\tilde{u}_n((\hat{v}_n - \tilde{\psi}_p)^+, 0, 0)$ la solution ponctuelle associée au cas homogène, à la condition initiale nulle et à l'obstacle quasi-scs $(\hat{v}_n - \tilde{\psi}_p)^+$, p étant fixé. D'après le théorème B.1, nous savons que $\tilde{u}_n \downarrow 0$ qp.

$u_n \in Pa$, on en déduit que $u_n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T; V)$.

D'autre part, $\psi_p + \tilde{u}_n \in C$ puisque $u_n \geq (v_n - \psi_p)^+$ et que C est héréditaire.

On obtient alors : $\psi_p + u_n \in C$, $u_n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T; V)$, $\forall p$ fixé. C étant faiblement fermé, on en déduit que $\psi_p \in C$.

Le lemme est alors établi.

S étant de Dirichlet, il existe $\hat{\psi}_S$ définie quasi partout pour la capacité sur S telle que :

$$K_\psi \cap S = \{v \in S, \tilde{v} \geq \psi_S \text{ S-qp}\}$$

- $C = (\overline{K_\psi \cap S})_{L^2(0, T; V)} \cap (W+Pa)$ étant un convexe unilatéral et inf-fermé de $(W+Pa)$ nous savons d'après l'annexe B.4 qu'il existe une fonction $\hat{\psi}_C$, quasi scs telle que :

$$C = \{v \in (W+Pa), \hat{v} \geq \hat{\psi}_C \text{ qp}\}.$$

- $K_\psi \cap (W+Pa)$ étant également unilatéral et inf-fermé, il existe une fonction $\hat{\psi}$, régularisée quasi scs de ψ telle que :

$$K_\psi \cap (W+Pa) = \{v \in (W+Pa), \hat{v} \geq \hat{\psi} \text{ qp}\}.$$

Rappelons que les fonctions tests de l'inéquation faible III doivent être prises dans $K_\psi \cap \omega$.

Il existe donc 3 régularisées de ψ : $\hat{\psi}$, $\hat{\psi}_C$, $\hat{\psi}_S$.

Nous avons alors le lemme :

Lemme V.4. Posons :

$$\tilde{K}_{\hat{\psi}_S} = \{v \in \omega, \tilde{v} \geq \hat{\psi}_S \text{ qp}\}$$

$$\tilde{K}_{\hat{\psi}_C} = \{v \in \omega, \tilde{v} \geq \hat{\psi}_C \text{ qp}\} = C \cap \omega$$

$$\tilde{K}_{\hat{\psi}} = \{v \in \omega, \tilde{v} \geq \hat{\psi} \text{ qp}\} = K_\psi \cap \omega,$$

qp désignant quasi-partout pour la capacité parabolique.

On a alors :

$$\overline{(K_\psi \cap S)}_\omega \subset \tilde{K}_{\hat{\psi}_S} \subset \tilde{K}_{\hat{\psi}_C} \subset \tilde{K}_{\hat{\psi}}.$$

Démonstration :

- Pour la première inclusion, soit $v \in \overline{(K_\psi \cap S)}_\omega$:

$\exists v_n \in K_\psi \cap S$, $v_n \rightarrow v$ dans ω .

Nous savons que $\tilde{v}_n \geq \hat{\psi}_S$ S qp. Donc $\tilde{v}_n \geq \hat{\psi}_S$ qp (pour la capacité parabolique) (car d'après la définition de la capacité, un ensemble de capacité nulle sur S est aussi de capacité nulle sur ω).

D'autre part, puisque $v_n \rightarrow v$ dans ω , on peut extraire une sous-suite, encore notée v_n , telle que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ qp. (Pierre [15]). On en déduit que $\tilde{v} \geq \hat{\psi}_S$ qp c'est-à-dire $v \in \tilde{K}_{\hat{\psi}_S}$.

- Montrons maintenant que $\tilde{K}_{\hat{\psi}_S} \subset \tilde{K}_{\hat{\psi}_C} = C \cap \omega$

$$\tilde{K}_{\hat{\psi}_C} = \{v \in \omega, \tilde{v} \geq \hat{\psi}_C \text{ qp}\}$$

D'après la définition de $\hat{\psi}_S$, $\exists \psi_n \in K_\psi \cap S$, $\tilde{\psi}_n \downarrow \hat{\psi}_S$ S-qp et donc qp pour la capacité parabolique.

Comme

$$K_\psi \cap S \subset C \cap W$$

on en déduit que $\tilde{\psi}_n \geq \hat{\psi}_C$ qp. Par limite décroissante, on a donc $\hat{\psi}_S \geq \hat{\psi}_C$ qp, ce qui établit la 2ème inclusion.

- enfin, pour la dernière inclusion, il suffit de remarquer que :

$$C = \overline{(K_\psi \cap S)}_{L^2(0,T;V)} \subset K_\psi$$

on a donc :

$$C \cap W = C \cap W \subset K_\psi \cap W = \tilde{K}_\psi.$$

Remarques.

1) il est facile de voir, en utilisant les caractérisations par limites décroissantes des fonctions $\hat{\psi}_C$ et $\hat{\psi}$ que

$$\hat{\psi}_C \geq \hat{\psi} \quad \text{qp.}$$

On a donc :

$$\hat{\psi}_S \geq \hat{\psi}_C \geq \hat{\psi} \quad \text{qp}$$

et

$$\hat{\psi}_S \geq \hat{\psi}_C \geq \hat{\psi} \geq \psi \quad \text{pp.}$$

2) (u_ϵ) la solution du problème I, converge faiblement dans $L^2(0,T;V)$ vers u telle que :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, (v-u) \right)_{V',V} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla (v-u))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \\ & \geq \int_0^T (f, (v-u)) dt, \quad \forall v \in \overline{(K_\psi \cap S)}_W, \end{aligned}$$

$$u \in C = \overline{(K_\psi \cap S)}_{L^2(0,T;V)} \cap (W+Pa) = \{v \in W+Pa, \hat{v} \geq \hat{\psi}_C \text{ qp}\}$$

l'inéquation vérifiée par u n'est pas une inéquation faible ordinaire puisque $\overline{(K_\psi \cap S)}_W \subset C \cap W = \tilde{K}_{\hat{\psi}_C}$.

Afin d'utiliser la caractérisation de la solution minimale rappelée en Annexe B.5, faisons l'hypothèse

$$H) \quad \underline{C \cap W (= \tilde{K}_{\hat{\psi}_C}) = \tilde{K}_{\hat{\psi}_S}}$$

Avant de faire quelques remarques sur cette hypothèse, établissons le lemme suivant :

Lemme V.5. Soit $C = \overline{(K_\psi \cap S)}_{L^2(0,T;V)} \cap (W+Pa)$.

Si l'hypothèse H) est vérifiée, alors :

$$C = \{v \in W+Pa, \hat{v} \geq \hat{\psi}_S \text{ qp}\}.$$

Démonstration : Nous savons, d'après le lemme V.3, que $C = \{v \in W+Pa, \hat{v} \geq \hat{\psi}_C \text{ qp}\}$ et d'après le lemme V.4, que $\hat{\psi}_S \geq \hat{\psi}_C \text{ qp}$.

D'autre part, par définition de la régularisée $\hat{\psi}_C$ (annexe B.4), il existe $\psi_n \in C \cap W$, $\psi_n \downarrow \hat{\psi}_C \text{ qp}$. D'après l'hypothèse H), $C \cap W = \tilde{K}_{\hat{\psi}_S}$ et donc $\psi_n \geq \hat{\psi}_S \text{ qp}$. Par limite décroissante, $n \rightarrow \infty$, on obtient $\hat{\psi}_C \geq \hat{\psi}_S \text{ qp}$ on en conclut le lemme.

Remarque. Dans le cas général, $\hat{\psi}_S \geq \hat{\psi}_C \text{ qp}$. L'hypothèse H) équivaut donc à supposer que $\hat{\psi}_S = \hat{\psi}_C \text{ qp}$.

Remarques sur l'hypothèse H) :

a) Pourquoi l'hypothèse H) ? Le but de ce paragraphe est de montrer que u , la limite faible dans $L^2(0,T;V)$ de (u_ε) selon la proposition III.1 est la plus petite solution faible de l'inéquation III associée à un convexe convenable.

Pour cela, nous approchons la régularisée de ψ associée à ce convexe par des fonctions (ψ_n) pour lesquelles le problème est résolu.

Il apparaît tout d'abord naturel de considérer la régularisée $\hat{\psi}$ associée au convexe de la formulation III c'est-à-dire :

$$\{v \in W+Pa, v \geq \psi \text{ pp}\} = \{v \in W+Pa, \hat{v} \geq \hat{\psi} \text{ qp}\}.$$

La suite (ψ_n) associée à $\hat{\psi}$ vérifie alors :

$$\psi_n \in W, \psi_n \geq \psi \text{ pp}, \tilde{\psi}_n \downarrow \hat{\psi} \text{ qp}.$$

Nous nous heurtons alors à la difficulté suivante : pour les obstacles de W , la solution faible du problème III est unique, mais il ne nous a pas été possible d'établir une proposition analogue à la proposition V.1 : d'une part, il ne semble pas que $K_\psi \cap S$ soit dense dans $K_\psi \cap W$, pour $\psi \in W$, d'autre part, nous n'avons certainement pas, pour ces obstacles de W , $\hat{\psi}_S = \tilde{\psi} \text{ qp}$. Un problème ouvert serait d'exhiber des contre-exemples.

Le problème étant résolu pour les obstacles de S , nous sommes alors conduits naturellement à considérer la régularisée $\hat{\psi}_S$, la suite ψ_n associée vérifiant :

$$\psi_n \geq \psi \text{ pp}, \psi_n \in S, \tilde{\psi}_n \downarrow \hat{\psi}_S \text{ qp}.$$

Notre propos est alors de montrer que $u = \lim u_\epsilon$ est la plus petite solution faible du problème :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, (v-u) \right)_{V,V} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla (v-u))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \\ \geq \int_0^T (f, (v-u))_H dt ; \forall v \in C \cap W ; u \in C = \{v \in W+Pa, \hat{v} \geq \hat{\psi}_S \text{ qp}\}$$

Nous savons que $u = \lim u_\varepsilon$ vérifie :

$$u \in \tau + Pa, \quad \hat{u} \geq \hat{\psi}_C \text{ qp.}$$

Mais, dans le cas général, on a seulement l'inégalité :

$$\hat{\psi}_S \geq \hat{\psi}_C \text{ qp. Ainsi } u \text{ n'est pas nécessairement dans } C.$$

L'hypothèse H) ($\hat{\psi}_S = \hat{\psi}_C$ qp) nous assure alors que $u \in C$.

b) L'hypothèse H) est la moins restrictive: D'après le lemme V.4

nous savons que

$$\overline{(K_\psi \cap S)}_\omega \subset \tilde{K}_{\hat{\psi}_S} \subset \tilde{K}_{\hat{\psi}_C} \subset \tilde{K}_{\hat{\psi}}.$$

Nous ne supposons pas que $\overline{(K_\psi \cap S)}_\omega = \tilde{K}_{\hat{\psi}_C}$ mais seulement

$$\tilde{K}_{\hat{\psi}_S} = \tilde{K}_{\hat{\psi}_C}.$$

Ainsi, a priori, $u = \lim(u_\varepsilon)$ n'est donc pas une solution faible du problème III associé à C puisque les fonctions tests doivent être prises seulement dans $\overline{(K_\psi \cap S)}_\omega$.

Nous verrons néanmoins que l'hypothèse H) suffit par montrer directement que u est la plus petite solution faible du problème III associé à C .

c) Exemples de validité de l'hypothèse H) :

- en dimension 1, l'hypothèse H) est toujours vérifiée. En effet on a alors :

$$Q =]0, T[\quad S = \omega = H^1(Q) \quad \text{et}$$

$$\overline{(K_\psi \cap S)}_\omega = K_\psi \cap H^1(Q) = \{v \in H^1(Q), v \geq \psi \text{ pp}\}.$$

On a donc l'égalité des trois régularisées de ψ .

En dimension quelconque :

- si ψ est continue sur $[0, T] \times \Omega$, on a : $\hat{\psi}_S = \hat{\psi}_C = \hat{\psi} = \psi$.

L'hypothèse H) est donc vérifiée.

- si ψ est quasi-continue pour la capacité définie sur S on a encore $\hat{\psi}_S = \hat{\psi}_C = \hat{\psi} = \psi$ qp. L'hypothèse H) est donc vérifiée.

- si ψ est telle qu'il existe une suite ψ_n de $K_\psi \cap S$ avec $\tilde{\psi}_n \downarrow \hat{\psi}$ qp, l'hypothèse H) est vérifiée.

En effet, $\psi_n \in K_\psi \cap S \Rightarrow \tilde{\psi}_n \geq \hat{\psi}_S$ qp et donc $\hat{\psi} \geq \hat{\psi}_S$ qp. On en conclut que $\hat{\psi}_S = \hat{\psi}_C = \hat{\psi}$ qp.

Nous allons maintenant nous placer dans le cadre de l'hypothèse H) afin d'établir que $u = \lim(u_\epsilon)$ est la plus petite solution faible du problème III associé au convexe C .

Pour cela, nous aurons besoin du lemme :

Lemme V.6. Si $\psi \leq 0$ sur $[0, \eta[\times \Omega$, $\hat{\psi}_S$ associée à $K_\psi \cap S$, alors il existe une suite $\psi_n \in K_\psi \cap S$ telle que :

$$\psi_n \leq 0 \text{ sur } [0, \frac{\eta}{2}[\times \Omega \text{ et } \tilde{\psi}_n \downarrow \hat{\psi}_S \text{ qp.}$$

Démonstration : L'existence d'une suite (ψ_n) , $\psi_n \in K_\psi \cap S$, $\tilde{\psi}_n \downarrow \hat{\psi}_S$ qp. est une conséquence du fait que $K_\psi \cap S$ est héréditaire et inf-stable (Mignot Puel [13]).

Soit $\theta \in S$, $\theta \geq 0$, $\tilde{\theta} \geq \hat{\psi}_S$ qp et $\theta = 0$ sur $[0, \eta[\times \Omega$. Une telle fonction existe puisque $\hat{\psi}_S \leq 0$ sur $[0, \eta[\times \Omega$. Considérons la suite $\psi_n = \inf(\psi_n, \theta)$. Il est clair que $\psi_n \in K_\psi \cap S$ ($K_\psi \cap S$ est inf-stable). Sur $[0, \frac{\eta}{2}[\times \Omega$, $\theta = 0$, donc $\psi_n \leq 0$. D'autre part, puisque $\tilde{\theta} \geq \hat{\psi}_S$ qp et $\tilde{\psi}_n \downarrow \hat{\psi}_S$ qp, on en déduit que $\tilde{\psi}_n = \inf(\tilde{\psi}_n, \tilde{\theta}) \downarrow \hat{\psi}_S$ qp. On en conclut le lemme.

Nous allons maintenant pouvoir établir le

Théorème V.1. Soit $f \in L^\infty(Q)$, ψ telle que $\psi^+ \in L^\infty(Q)$, $\psi \leq 0$ dans un voisinage de $\{0\} \times \Omega$. On suppose que l'hypothèse H) est vérifiée,

c'est-à-dire :

$$C = (\overline{K_\psi \cap S})_{L^2(0,T;V)} \cap (W+Pa) = \{v \in W+Pa, \hat{v} \geq \hat{\psi}_S \text{ qp}\} .$$

Alors la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, u_ε solution du problème (I) converge faiblement dans $L^2(0,T;V)$ vers \underline{u} , la plus petite solution du problème :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, (v-\underline{u}) \right)_{V',V} dt + \int_0^T (\nabla \underline{u}, \nabla (v-\underline{u}))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \\ & \geq \int_0^T (f, (v-\underline{u}))_H dt, \quad \forall v \in C \cap W, \quad u \in C. \end{aligned}$$

Remarque. Nous savons que cette solution minimum \underline{u} est caractérisée par les relations ponctuelles :

- i) $\underline{u} \in \tau+Pa$
- ii) $\hat{\underline{u}} \geq \hat{\psi}_S \text{ qp}, \quad \hat{\underline{u}}(0) = 0 ;$
- iii) $\int_{[0,T] \times \Omega} (\hat{\underline{u}} - \hat{\psi}_S) d(Eu-f) = 0$ c'est-à-dire $\hat{\underline{u}} = \hat{u}(\hat{\psi}_S, 0, f) \text{ qp}.$

Démonstration : D'après le lemme V.5, nous savons que

$$C = \{v \in W+Pa, \hat{v} \geq \hat{\psi}_S \text{ qp}\}$$

$\hat{\psi}_S$ est donc la régularisée quasi scs associée au convexe C . D'après l'annexe B5, $u(\hat{\psi}_S, 0, f)$ est la plus petite solution faible du problème III associée au convexe C .

Soit u , la limite faible de u_ε selon la proposition III.1.

Nous savons que $u \in C$. Plus précisément :

$$u - \tau \in Pa \quad \text{et} \quad \hat{u} \geq \hat{\psi}_S \text{ qp}.$$

Nous savons alors, d'après l'annexe B5 que $\hat{u}(\hat{\psi}_S, 0, f) \leq u$ pp.

Il suffit donc de montrer que $u \leq \hat{u}(\hat{\psi}_S, 0, f)$ pp.

Soit ψ_n , la suite définissant $\hat{\psi}_S$ introduite au lemme V.6 c'est-à-dire :

$$\psi_n \in K_\psi \cap S, \quad \psi_n(0) \leq 0, \quad \tilde{\psi}_n \downarrow \hat{\psi}_S \text{ qp.}$$

n étant fixé, notons (u_ε^n) la solution du problème I associée à ψ_n . Nous savons que $u_\varepsilon^n \rightarrow u_n$ dans $L^2(0, T; V)$ où u_n est l'unique solution faible du problème III associé à ψ_n . De plus $u_n = u_n(\tilde{\psi}_n, 0, f)$ (Proposition V.1).

Puisque $\psi_n(0) \leq 0$, $\tilde{\psi}_n \downarrow \hat{\psi}_S$ qp, on peut appliquer le théorème B1, c'est-à-dire :

$$\tilde{u}_n(\tilde{\psi}_n, 0, f) \downarrow \hat{u}(\hat{\psi}_S, 0, f) \text{ qp,} \quad n \rightarrow \infty.$$

Mais, d'après le lemme V.2 :

$$\psi_n \geq \psi \Rightarrow u_n \geq u \text{ pp} \quad \forall n.$$

En passant à la limite décroissante (pp) il vient

$$\hat{u}(\hat{\psi}_S, 0, f) \geq u \text{ pp}$$

et le théorème est établi.

Nous terminerons ce chapitre par l'étude du cas particulier où la solution minimale est dans l'espace ω .

VI. PROPRIETES DES SOLUTIONS MINIMALES REGULIERES.

Soit \underline{u} la plus petite solution du problème :

$$\text{III} \quad \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, (v-u) \right)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla (v-u))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|^2 \geq \\ \int_0^T (f, (v-u))_H dt ; \quad \forall v \in K_\psi \cap \omega ; \quad u \in K_\psi.$$

Nous étudions, dans ce paragraphe, le cas particulier où la solution minimale \underline{u} est dans l'espace ω .

Nous renvoyons au chapitre III pour un exemple numérique. Les propriétés vérifiées par les solutions minimales régulières peuvent être résumées par la proposition suivante :

Proposition VI. Soit \underline{u} la solution minimale du problème III.

Si $\underline{u} \in \mathcal{W}$, on a :

- i) \underline{u} est l'unique solution faible de III,
- ii) \underline{u} vérifie l'inéquation :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}, (v - \underline{u}) \right)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla \underline{u}, \nabla (v - \underline{u}))_H dt \geq \int_0^T (f, (v - \underline{u}))_H dt ; \quad \underline{u} \in K_\psi \cap \mathcal{W} ; \quad \underline{u}(0) = 0 ; \quad \underline{v} \in K_\psi \cap \mathcal{W}.$$

Démonstration : Pour établir i), nous procédons comme dans Pierre [15]

(Annexe A) :

Soit $w \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, $w \geq \underline{u}$.

Pour tout $\lambda > 0$, considérons w_λ la solution du problème :

$$(1) \begin{cases} w_\lambda + \lambda \left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t} - \Delta w_\lambda \right) = w + \lambda \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \Delta \underline{u} \right) , \\ w_\lambda(0) = 0, \quad w_\lambda \in \mathcal{W} \end{cases}$$

Nous savons que :

- 1) $w_\lambda \geq \underline{u}$,
- 2) w_λ tend faiblement vers w dans $L^2(0, T; V)$ quand $\lambda \rightarrow 0$,
- 3) $\limsup \int_0^T \left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}, (w_\lambda - w) \right)_{V', V} dt \leq 0$.

Soit u_1 , une solution faible du problème III :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, (v - u_1) \right)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla u_1, \nabla (v - u_1))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, (v - u_1))_H dt ; \quad u_1 \in K_\psi \quad \forall v \in K_\psi \cap \mathcal{W}.$$



\underline{u} étant la solution minimale, on a $u_1 \geq \underline{u}$ pp et \underline{u} vérifie l'inéquation III.

Prenons $w = \frac{u_1 + \underline{u}}{2}$ ($w \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ et $w \geq \underline{u}$).

Considérons donc w_λ la solution de (1) associée à w . Comme $w_\lambda \in K_\psi \cap W$, on peut prendre $v = w_\lambda$ dans les inéquations vérifiées par u_1 et \underline{u} .

En ajoutant ces deux inéquations membre à membre, il vient :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}, \left(w - \left(\frac{u_1 + \underline{u}}{2} \right) \right) \right)_{V', V} dt + \frac{1}{2} \int_0^T (\nabla u_1, \nabla (w_\lambda - u_1))_H dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T (\nabla \underline{u}, \nabla (w_\lambda - \underline{u}))_H dt \geq \int_0^T (f, w_\lambda - \left(\frac{u_1 + \underline{u}}{2} \right))_H dt .$$

En passant à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$, compte tenu de l'inégalité 3), on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_0^T (\nabla u_1, \nabla \left(\frac{u_1 + \underline{u}}{2} - u_1 \right))_H dt + \frac{1}{2} \int_0^T (\nabla \underline{u}, \nabla \left(\frac{u_1 + \underline{u}}{2} - \underline{u} \right))_H dt \geq 0$$

et donc :

$$\|u_1 - \underline{u}\|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq 0 .$$

On en conclut i).

Pour établir ii), nous utilisons la caractérisation ponctuelle de la solution minimale, (Annexe B) : \tilde{u} étant le représentant quasi-continu de \underline{u} nous savons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{[0, T] \times \Omega} (\tilde{u} - \hat{\psi}) d(E\underline{u} - f) = 0, \\ \tilde{u}(0) = 0. \end{array} \right.$$

Soit $v \in K_\psi \cap W$, on a :

$$\int_{[0, T] \times \Omega} (\tilde{v} - \tilde{u}) d(E\underline{u} - f) \geq 0$$

désignons par τ la solution du problème :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \Delta \tau = f,$$

$$\tau(0) = 0 ; \quad \tau \in \mathcal{W}.$$

Puisque $\underline{u} - \tau \in \mathcal{W}$, on peut écrire :

$$\int_0^T \left(-\frac{\partial(\underline{v}-\underline{u})}{\partial t}, (\underline{u}-\tau) \right)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla(\underline{u}-\tau), \nabla(\underline{v}-\underline{u}))_H dt$$

$$+ (\underline{v}-\underline{u})(T), \underline{u}-\tau(T))_H = \int_{[0, T] \times \Omega} (\tilde{\underline{v}}-\tilde{\underline{u}}) d(\tilde{E}\underline{u}-f) \geq 0$$

en intégrant par partie, le 1er terme du premier membre on obtient :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial(\underline{u}-\tau)}{\partial t}, (\underline{v}-\underline{u}) \right)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla(\underline{u}-\tau), \nabla(\underline{v}-\underline{u}))_H dt \geq 0, \quad \forall \underline{v} \in K_\psi \cap \mathcal{W}.$$

On en conclut ii).

Remarques.

i) \underline{u} vérifie donc une inéquation analogue à la formulation forte II, mais les fonctions tests doivent être prises dans $K_\psi \cap \mathcal{W}$.

ii) $K_\psi \cap \mathcal{W}$ n'est pas dense, en général, dans K_ψ comme le montre l'exemple ci-dessous :

Soit $]0, T[=]0, 3[$, $V = V' = H = R$.

Soit $E \subset [1, 2]$, mesurable et tel que : $\forall I =]\alpha, \beta[\subset [1, 2]$,

$0 < \text{mesure}(E \cap I) < \text{mesure}(I)$.

Considérons $\psi = 1_E$.

Comme $\mathcal{W} = H^1]0, 3[$, les fonctions de $K_\psi \cap \mathcal{W}$ sont continues.

On en conclut que :

$$K_\psi \cap \mathcal{W} = \{v \in H^1]0, 3[, \quad v(t) \geq 1_{[1, 2]}(t)\}.$$

$$(\hat{\psi} = 1_{[1, 2]}).$$

D'autre part,

$$K_\psi = \{v \in L^2]0,3[, v \geq 1_E \text{ pp}\} .$$

En prenant $v = 1_E$, il est facile de voir d'après (a) que $v \notin \overline{(K_\psi \cap W)}_{L^2}$.

iii) La solution minimale \underline{u} peut appartenir à W sans être la solution forte au sens de II comme le montre l'exemple suivant : on prend

$$]0,T[=]0,3[, \quad v = H = v' = R$$

et $\psi = 1_E$ définie comme en ii). On a $\hat{\psi} = 1_{[1,2]}$.

$$\text{Soit } f = 2t + t^2 \text{ sur } [0,1[$$

$$f = 0 \text{ sur } [1,3[.$$

Le problème III s'écrit alors :

$$\int_0^3 v'(v-u)dt + \int_0^3 u(v-u)dt + \frac{1}{2}(v(0))^2 \geq \int_0^3 f(v-u)dt, \quad \forall v \in K_\psi \cap H^1(0,3), \quad u \in K_\psi.$$

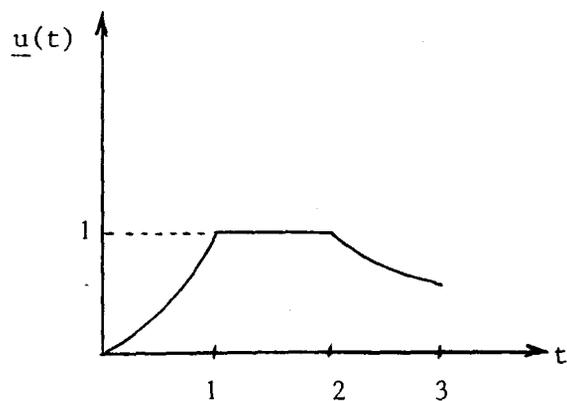
Il est facile de voir que la solution minimale associée à cette inéquation est définie par :

$$\underline{u} = t^2 \text{ sur } [0,1]$$

$$\underline{u} = 1 \text{ sur } [1,2]$$

$$\underline{u} = e^{-t+2} \text{ sur } [2,3[$$

Nous avons alors $\underline{u} \in H^1(0,3)$:



Soit $v = 1_E$. $v \in K_\psi$ et :

$$\int_0^3 (u' + u - f)(v - u) dt = \int_1^2 u(v - u) dt =$$
$$\int_1^2 (v - 1) dt = \int_1^2 1_E dt - \int_1^2 dt < 0 \quad \text{compte tenu de (a).}$$

On en conclut que u n'est pas la solution forte au sens de II.
Nous savons, d'autre part, que si la solution forte existe, elle est
l'unique solution faible (lemme A1). Il n'y a donc pas existence de la
solution forte pour ce problème.



CHAPITRE II

DISCRETISATION

L'objet de ce chapitre est l'approximation numérique de la solution minimale de l'inéquation (III) :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, (v-u) \right)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla (v-u))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, (v-u))_H dt ;$$
$$\forall v \in K_\psi \cap W ; \quad u \in K_\psi.$$

Le cadre que nous avons choisi est celui des différences finies ψ, f et u sont approchées par des fonctions caractéristiques ψ_{hk}, f_{hk} ; u_{hk} (h et k désignant respectivement le paramètre discrétisation en espace et en temps).

Pour un choix convenable de ψ_{hk} et de f_{hk} , nous savons que la solution u_{hk} du problème discret converge vers une solution faible du problème (III) Glowinski [3] et [7]. Ces résultats sont rappelés aux paragraphes I, II et III.

La solution minimale \underline{u} étant considérée non plus sous sa forme variationnelle, mais sous sa forme ponctuelle (Annexe B), nous avons remarqué que la solution discrète u_{hk} vérifiait des relations analogues. Cette remarque nous a conduit tout naturellement à montrer que la limite de u_{hk} est la solution minimale \underline{u} en utilisant la définition de \underline{u} sous sa forme ponctuelle. C'est l'objet du paragraphe IV.

I. APPROXIMATION DE $[0, T[\times \Omega$ ET DES OPERATEURS.

1) Approximation de Ω .

Soit $h \in \mathbb{R}^p$, $h = (h_1, \dots, h_p)$, on pose

$$R_h = \{M \in \mathbb{R}^p, M = (m_1 h_1, \dots, m_p h_p), m_i \in \mathbb{Z}\}.$$

A tout point M de R_h , on associe le pavé de centre M :

$$P_h(M) = \prod_{i=1}^p](m_i - 1/2)h_i, (m_i + 1/2)h_i[$$

et la croix de centre M :

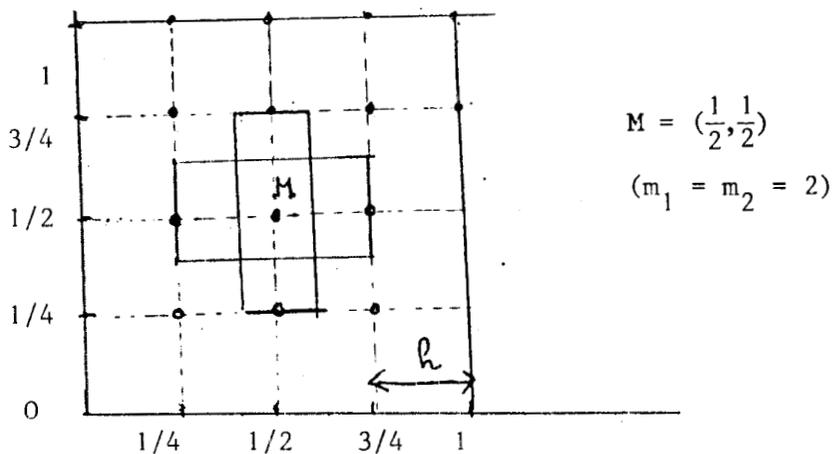
$$C_h(M) = \bigcup_{i=1}^p P_h(M \pm \frac{h_i e_i}{2})$$

où e_i désigne le i ème vecteur unitaire de \mathbb{R}^p .

On considère alors :

$$\Omega_h = \{M \in R_h, C_h(M) \subset \Omega\}.$$

Exemple. $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, $h_1 = h_2 = \frac{1}{4}$



2) Approximation de $V = H_0^1(\Omega)$.

Nous approchons les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ par des fonctions caractéristiques.

On désigne par θ_h^M , la fonction indicatrice du pavé $P_h(M)$.

On considère alors V_h , l'espace engendré par les $\theta_h^M, M \in \Omega_h$. Les fonctions θ_h^M ne sont donc pas dans $H_0^1(\Omega)$: V_h n'est pas un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$.

Posons $a(u,v) = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dX$. On ne peut pas définir $a(u,v)$ sur V_h et il nous faut alors approcher $a(u,v)$:

3) Approximation de $a(u,v)$.

Pour $i = 1, p$ posons

$$\delta_i \rho(x) = \frac{1}{h_i} \left[\rho\left(x + \frac{h_i e_i}{2}\right) - \rho\left(x - \frac{h_i e_i}{2}\right) \right]$$

Soient $u_h, v_h \in V_h$, on définit

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^p (\delta_i v_h \delta_i u_h) \right) dX = (A_h u_h, v_h)$$

on posera $a_h(u_h, u_h) = \|u_h\|_h^2 = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^p |\delta_i u_h|^2 \right) dX$. Rappelons que l'on a encore l'inégalité de Poincaré discrète :

$$|u_h|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u_h\|_h^2 \quad \text{Glovinski [8]}$$

D'autre part :

$$\|u_h\|_h \leq \frac{C}{|h|} |u_h|_{L^2(\Omega)} \quad \text{Glovinski [8]}$$

4) Approximation sur $[0, T[$:

On subdivise $[0, T[$ en N intervalles de longueur k . (k étant destiné à tendre vers 0).

Pour $v_h^n \in V_h, n = 0, N-1$ on pose :

$$v_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} v_h^n 1_{[nk, (n+1)k[}$$

on approche alors l'opérateur $v \rightarrow v' = \frac{\partial v}{\partial t}$ sur cet espace de fonctions par :

$$\partial v_{hk}(t) = \frac{v_{hk}(t) - v_{hk}(t-k)}{k}$$

5) Approximation de ψ et de f :

On approche ψ et $f \in L^2(0, T; H)$ par ψ_{hk} et f_{hk} , des fonctions en escalier sur $[0, T[$ à valeurs dans V_h telles que :

$$\begin{aligned} \psi_{hk} &\rightarrow \psi \quad \text{dans } L^2(0, T; H) , \\ f_{hk} &\rightarrow f \quad \text{dans } L^2(0, T; H) . \end{aligned}$$

Pour cela, on prend les valeurs moyennes de ψ et f .

Soient donc :

$$\psi_h(t) = \sum_{M \in \Omega_h} \frac{1}{h_1, \dots, h_p} \left(\int_{\Omega} \psi \theta_h^M dX \right) \theta_h^M ,$$

$$f_h(t) = \sum_{M \in \Omega_h} \frac{1}{h_1, \dots, h_p} \left(\int_{\Omega} f \theta_h^M dX \right) \theta_h^M ,$$

$$\psi_{hk}^{(n)} = \frac{1}{k} \int_{nk}^{(n+1)k} \psi_h dt ,$$

$$f_{hk}^{(n)} = \frac{1}{k} \int_{nk}^{(n+1)k} f_h dt ,$$

Nous poserons alors :

$$\psi_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{hk}^n(X) 1_{[nk, (n+1)k[}(t) ,$$

$$f_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} f_{hk}^n(X) 1_{[nk, (n+1)k[}(t) .$$

II. FORMULATION DU PROBLEME DISCRET.

On cherche une approximation de la solution minimale du problème (III) dans la classe des fonctions en escalier sur $[0, T[$ à valeurs dans V_h .

Sur chaque intervalle $[nk, (n+1)k[$, $n = 0, N-2$ on résout le problème suivant :

$$(P_h) \begin{cases} u_h^0 = 0 \\ \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + A_h u_h^{n+1}, v_h^{n+1} - u_h^{n+1} \right)_H \geq (f_h^{n+1}, v_h^{n+1} - u_h^{n+1})_H \\ \forall v_h^{n+1} \geq \psi_h^{n+1}, v_h^{n+1} \in V_h, \\ u_h^{n+1} \geq \psi_h^{n+1}, u_h^{n+1} \in V_h. \end{cases}$$

on posera alors $u_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n 1_{[nk, (n+1)k[}$ l'existence et l'unicité de u_{hk} sont immédiates du fait de la coercivité de l'opérateur $(I+A_h)$.

Remarque. u_h^{n+1} , $n = 0, N-2$ est solution du problème de minimisation :

$$\text{minimiser } \left\{ \frac{1}{2} \left((I+kA_h)v_h^{n+1}, v_h^{n+1} \right)_H - (u_h^n + k f_h^{n+1}, v_h^{n+1})_H \right\}_{v_h^{n+1} \geq \psi_h^{n+1}}$$

Notre propos est de montrer que (u_{hk}) converge vers \underline{u} la solution minimale du problème (III) quand $h, k \rightarrow 0$.

Nous commencerons par étudier la convergence de (u_{hk}) vers une solution faible du problème parabolique (III), ce qui sera conséquence d'estimations a priori obtenus dans le paragraphe III. Auparavant, nous donnons une autre formulation du problème (P_h) .

Nous savons que la solution minimale du problème III (Annexe B) s'interprète comme l'unique solution du problème :

- i) $u \in \tau + Pa,$
- ii) $\hat{u} \geq \hat{\psi}$ qp, $\hat{u}(0) = 0,$
- iii) $\int_{[0, T[\times \Omega} (\hat{u} - \hat{\psi}) d(Eu - f) = 0.$

Nous retrouvons une formulation analogue pour la solution u_{hk} du problème (P_h) :

Lemme II.1. Soit $u_h^k = \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n 1_{[nk, (n+1)k[}$ la solution du problème (P_h) . Alors u_h^n , $n = 0, N-2$, sont solutions de :

$$\begin{aligned} & u_h^0 = 0, \quad u_h^{n+1} \in V_h, \quad u_h^{n+1} \geq \psi_h^{n+1}, \\ (1) \quad & \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + A_h u_h^{n+1} - f_h^{n+1} \geq 0, \\ (2) \quad & \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + A_h u_h^{n+1} - f_h^{n+1}, \psi_h^{n+1} - u_h^{n+1} \right)_H = 0. \end{aligned}$$

Démonstration : Prenons dans la formulation (P_h) , $v_h^{n+1} = u_h^{n+1} + w_h^{n+1}$ avec $w_h^{n+1} \in V_h$, $w_h^{n+1} \geq 0$.

On obtient alors l'inégalité (1).

D'autre part, comme $\psi_h^{n+1} \in V_h$, on peut prendre $v_h^{n+1} = \psi_h^{n+1}$ dans la formulation (P_h) . On obtient alors :

$$\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + A_h u_h^{n+1} - f_h^{n+1}, \psi_h^{n+1} - u_h^{n+1} \right) \geq 0.$$

Compte tenu de (1), on en déduit l'égalité (2).

Réciproquement, soit $v_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n 1_{[hk, (n+1)k[}$, avec $v_h^n \in V_h$, $v_h^{n+1} \geq \psi_h^{n+1}$. On a :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_k^{n+1} - u_h^n}{k} + A_h u_h^{n+1} - f_h^{n+1}, v_h^{n+1} - u_h^{n+1} \right) = \\ & \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + A_h u_h^{n+1} - f_h^{n+1}, v_h^{n+1} - \psi_h^{n+1} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

On en conclut le lemme.

III. ESTIMATIONS A PRIORI.

Remarquons tout d'abord que les fonctions de $K_\psi \cap \mathcal{W}$ peuvent être approchées par des fonctions v_{hk} de la formulation (P_h) :

Lemme III.1. Soit $v \in k\psi \cap W$, il existe v_{hk} avec

$$v_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} v_h^n \mathbb{1}[nk, (n+1)k[$$
 telle que :

i) $v_h^n \in V_h, \quad v_h^n \geq \psi_h^n$

ii) $v_{hk} \rightarrow v$ dans $L^2(0, T; H)$

$\partial v_{hk} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}$ dans $L^2(0, T; V')$

$(\partial_1 v_{hk}, \dots, \partial_p v_{hk}) \rightarrow (\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_p})$ dans $(L^2(Q))^P$.

Démonstration. Il suffit de considérer, pour $v \in k\psi \cap W$:

$$v_h(t) = \sum_{M \in \Omega_h} \frac{1}{h_1, \dots, h_p} \left(\int_{\Omega} v \theta_h^M dX \right) \theta_h^M$$

$$v_h^n = \frac{1}{k} \int_{n_k}^{(n+1)k} v_h dt$$

et $v_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} v_h^n \mathbb{1}[nk, (n+1)k[$

Puisque $v \geq \psi$, on a bien $v_{hk} \geq \psi_{hk}$ et les résultats de convergence sont classiques.

Lemme III.2. - Estimations a-priori : Soit $u_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n \mathbb{1}[nk, (n+1)k[$, la solution du problème (P_h) alors, $\forall N$, on a :

i) $\|u_h^{N-1}\|_H^2 \leq C$,

ii) $\sum_{n=0}^{N-2} k \|u_h^{n+1}\|_h^2 \leq C$,

C indépendante de h, k et de N .

Démonstration : Nous reprenons la formulation (P_h) , avec

$$v_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} v_h^n \mathbb{1}[nk, (n+1)k[$$
 choisie comme au lemme III.1 ; nous omettons les indices h de façon à alléger l'écriture.

$$\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{k}, u^{n+1} \right)_H + \|u^{n+1}\|^2 \leq \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{k}, v^{n+1} \right)_H + a(u^{n+1}, v^{n+1}) - (f^{n+1}, v^{n+1})_H ; n = 0, N-2.$$

Remarquons que $\sum_{n=0}^{N-2} ((u^{n+1} - u^n), v^{n+1})_H = - \sum_{n=0}^{N-2} (u^n, (v^{n+1} - v^n))_H + u^{N-1} v^{N-1}$,
 puisque $u^0 = 0$.

$$\text{D'autre part, } (a-b, a) = \frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|b|^2 + \frac{1}{2}|a-b|^2.$$

En sommant de $n = 0$ à $N-2$, on obtient alors :

$$\sum_{n=0}^{N-2} \left\{ \frac{1}{2}|u^{n+1}|_H^2 - \frac{1}{2}|u^n|_H^2 + \frac{1}{2}|u^{n+1} - u^n|_H^2 + k\|u^{n+1}\|^2 \right\} \leq - \sum_{n=0}^{N-2} (u^n, v^{n+1} - v^n) + u^{N-1} v^{N-1} + \sum_{n=0}^{N-2} k a(u^{n+1}, v^{n+1}) - \sum_{n=0}^{N-2} k (f^{n+1}, v^{n+1})_H.$$

1) l'inégalité de Schwartz nous permet d'écrire :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-2} (u^n, v^{n+1} - v^n)_H \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{N-2} k|u^n|_H^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-2} \frac{|v^{n+1} - v^n|_H^2}{k} \right)^{1/2}$$

en remarquant que $\left(\sum_{n=0}^{N-2} \frac{|v^{n+1} - v^n|_H^2}{k} \right)^{1/2} = |\partial v_{hk}|_{L^2(O, T; H)}$ et compte tenu

du lemme III.1 on obtient :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-2} (u^n, v^{n+1} - v^n)_H \right| \leq C \left(\sum_{n=0}^{N-2} k|u^n|_H^2 \right)^{1/2}$$

$$2) \left| \sum_{n=0}^{N-2} k a(u^{n+1}, v^{n+1}) \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{N-2} k\|u^{n+1}\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-2} k\|v^{n+1}\|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq C' \left(\sum_{n=0}^{N-2} k\|u^{n+1}\|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{Lemme III.1})$$

$$3) \left| \sum_{n=0}^{N-2} k (f^{n+1}, v^{n+1})_H \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{N-2} k |f^{n+1}|_H^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-2} k |v^{n+1}|_H^2 \right)^{1/2} \leq C''.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u^{N-1}|_H^2 + \sum_{n=0}^{N-2} |u^{n+1} - u^n|_H^2 + \sum_{n=0}^{N-2} k \|u^{n+1}\|^2 &\leq u^{N-1} v^{N-1} + \\ &+ C \left(\sum_{n=0}^{N-2} k |u^n|_H^2 \right)^{1/2} + C' \left(\sum_{n=0}^{N-2} k \|u^{n+1}\|^2 \right)^{1/2} + C''. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré discrète, il vient :

$$\frac{1}{4} |u^{N-1}|_H^2 + \sum_{n=0}^{N-2} |u^{n+1} - u^n|_H^2 + \sum_{n=0}^{N-2} k \|u^{n+1}\|^2 \leq K + C_1 \left(\sum_{n=0}^{N-2} k \|u^n\|^2 \right)^{1/2}$$

On en déduit alors :

$$\frac{1}{4} |u^{N-1}|_H^2 + \sum_{n=0}^{N-2} |u^{n+1} - u^n|_H^2 + \sum_{n=0}^{N-2} k \|u^{n+1}\|^2 \leq C. \text{ Le lemme est établi.}$$

IV. PASSAGE A LA LIMITE.

Les estimations du lemme III.2 sont suffisantes pour passer à la limite et nous pouvons démontrer la proposition suivante :

Proposition IV.1. Soit $u_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n 1[nk, (n+1)k[$, la solution du problème (P_h) , alors pour une sous-suite :

- i) $u_{hk} \rightharpoonup u$ $h, k \rightarrow 0$ dans $L^\infty(0, T; H)$ faible *
- ii) $(u_{hk}, \partial_1 u_{hk}, \dots, \partial_p u_{hk}) \rightharpoonup (u, \frac{\partial u}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial X_p})$ dans $L^2(0, T; (L^2 \Omega)^{p+1})$

u étant une solution faible du problème (III).

Démonstration. D'après le lemme III.2, u_{hk} reste borné dans $L^\infty(0, T; H)$ et $(u_{hk}, \partial_1 u_{hk}, \dots, \partial_p u_{hk})$ reste borné dans $L^2(0, T; (L^2 \Omega)^{p+1})$. Il existe donc une sous-suite, encore notre u_{hk} , telle que $u_{hk} \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; H)$.

D'après la définition de ψ_{hk} , nous savons que $\psi_{hk} \rightarrow \psi$ dans $L^2(0, T; H)$. Puisque $u_{hk} \geq \psi_{hk}$, on en conclut que $u \geq \psi$.

De l'estimation iii) du lemme III.2, on déduit que :

$$\partial_i u_{hk} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial X_i} \quad \text{dans } L^2(0, T; H), \quad i = 1, p.$$

D'après ce qui précède et la définition de Ω_h , on a

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H).$$

Nous allons maintenant passer à la limite dans la formulation (P_h) : soit $v \in K_\psi \cap \mathcal{W}$, v_{hk} comme au lemme III.1, on a :

$$(1) \quad \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{k} + Au^{n+1}, v^{n+1} - u^{n+1} \right)_H \geq (f^{n+1}, v^{n+1} - u^{n+1})_H$$

$u^0 = 0, n = 0, N-2$. (en omettant les indices h).

Remarquons que :

$$\begin{aligned} & (u^{n+1} - u^n, v^{n+1} - u^{n+1})_H = (v^{n+1} - v^n, v^{n+1} - u^{n+1})_H - \\ & - (v^{n+1} - u^n - (u^{n+1} - u^n), v^{n+1} - u^{n+1})_H = (v^{n+1} - v^n, v^{n+1} - u^{n+1})_H - \\ & - (v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n), v^{n+1} - u^{n+1})_H. \end{aligned}$$

En utilisant $(a-b, a) = \frac{1}{2} |a|^2 - \frac{1}{2} |b|^2 + \frac{1}{2} |a-b|^2$ et en sommant de $n = 0$ à $N-2$, on en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{N-2} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{k}, v^{n+1} - u^{n+1} \right)_H = \sum_{n=0}^{N-2} \left(\frac{v^{n+1} - v^n}{k}, v^{n+1} - u^{n+1} \right)$$

$$- \frac{1}{2} |v^{N-1} - u^{N-1}|_H^2 + \frac{1}{2} |v^0|_H^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-2} |v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)|_H^2.$$

D'après ce qui précède, en sommant de $n = 0$ à $N-2$ l'inégalité (1) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N-2} \left(\frac{v^{n+1} - v^n}{k}, v^{n+1} - u^{n+1} \right)_H - \frac{1}{2} |v^{N-1} - u^{N-1}|_H^2 + \frac{1}{2} |v^0|_H^2$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-2} |v^{n+1} - u^{n+1} - (v^n - u^n)|_H^2 + \sum_{n=0}^{N-1} a(u^{n+1}, v^{n+1} - u^{n+1}) \geq$$

$$\geq \sum_{n=0}^{N-2} (f^{n+1}, v^{n+1} - u^{n+1})_H$$

on peut alors écrire :

$$\sum_{n=0}^{N-2} \left(\frac{v^{n+1} - v^n}{k}, v^{n+1} - u^{n+1} \right)_H + \frac{1}{2} |v^0|_H^2 + \sum_{n=0}^{N-2} a(u^{n+1}, v^{n+1} - u^{n+1})$$

$$\geq \sum_{n=0}^{N-2} (f^{n+1}, v^{n+1} - u^{n+1})_H.$$

en multipliant les 2 membres par k et d'après les définitions de u_{hk} , v_{hk} , f_{hk} on obtient :

$$\int_k^T (\partial v_{hk}, v_{hk} - u_{hk})_H dt + \frac{1}{2} |v_{hk}(0)|_H^2 + \int_k^T a_h(u_{hk}, v_{hk} - u_{hk}) dt$$

$$\geq \int_k^T (f_{hk}, v_{hk} - u_{hk})_H dt.$$

Passage à la limite.

- 1) $f_{hk} \rightarrow f$ dans $L^2(O, T; H)$
- $v_{hk} \rightarrow v$ dans $L^2(O, T; H)$
- $u_{hk} \rightarrow u$ dans $L^2(O, T; H)$

on en conclut que

$$\int_k^T (f_{hk}, v_{hk} - u_{hk})_H dt \rightarrow \int_0^T (f, v - u)_H dt$$

$$2) \int_k^T a_h(u_{hk}, v_{hk}) dt = \int_k^T \left(\sum_{i=1}^p (\partial_i v_{hk}, \partial_i u_{hk})_H \right) dt \rightarrow \int_0^T (\nabla u, \nabla v)_H dt$$

d'après iii) du lemme III.2.

$$3) |v_{hk}(0)|_H^2 \rightarrow |v(0)|_H^2 \text{ d'après la définition de } v_{hk}.$$

$$4) \text{ l'application } u_{hk} \rightarrow \int_k^T \sum_{i=1}^p |\delta_i u_{hk}|_H^2 dt \text{ est semi-continue}$$

inférieurement pour la topologie faible de $L^2(0, T; H)$, on a donc :

$$\liminf \int_k^T \left(\sum_{i=1}^p |\delta_i u_{hk}|^2 \right) dt \geq \int_0^T |\nabla u|_H^2 dt$$

$$5) \delta v_{hk} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} \text{ dans } L^2(0, T; V')$$

$$u_{hk} \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; H), \quad u \in L^2(0, T; V)$$

on a donc

$$\int_k^P (\partial v_{hk}, v_{hk} - u_{hk})_H dt \rightarrow \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v - u \right)_{V', V} dt$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v - u \right)_{V', V} dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 + \int_0^T (\nabla u, \nabla v)_H dt \geq \\ & \geq \int_0^T (f, v - u)_H dt + \int_0^T |\nabla u|_H^2 dt . \end{aligned}$$

on en conclut la proposition.

Pour montrer que u est la plus petite solution faible du problème (III), nous procédons de manière analogue au chapitre I. Nous utiliserons donc la caractérisation de cette solution minimale rappelée en Annexe [B].

En notant $u(\psi)$ la limite selon la proposition IV.1 de u_{hk} associée à ψ_{hk} , nous allons établir que l'application $\psi \rightarrow u(\psi)$ est croissante.

Lemme IV.1. Soient $\psi, \psi' \in L^2(0, T; H)$ tels que $\psi' \geq \psi$ pp alors $u(\psi') \geq u(\psi)$ pp.

Démonstration. On note ψ_{hk} et ψ'_{hk} les approximations en valeur moyenne de ψ et ψ' . On a : $\psi'_{hk} \geq \psi_{hk}$.

Nous savons d'après le lemme II.1 que $u_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n 1[nk, (n+1)k[$ où $u_h^n, n=0, N-2$ sont solutions de :

$$u_h^0 = 0, \quad u_h^{n+1} \in V_h, \quad u_h^{n+1} \geq \psi_h^{n+1}$$

$$(a) \quad \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + Ah u_h^{n+1} - f_h^{n+1} \geq 0$$

$$(b) \quad \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + Ah u_h^{n+1} - f_h^{n+1}, u_h^{n+1} - \psi_h^{n+1} \right) = 0.$$

$$\text{Soit } w_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} w_h^n 1[nk, (n+1)k[\text{ avec } w_h^n \in V_h,$$

$$w_h^n \geq \psi_h^n, \quad \frac{w_h^{n+1} - w_h^n}{k} + Ah w_h^{n+1} - f_h^{n+1} \geq 0 \quad \text{pour } n = 0, N-2.$$

$(u_h^{n+1} - w_h^{n+1})^+ \in V_h$. On a alors :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{w_h^{n+1} - u_h^{n+1} - (w_h^n - u_h^n)}{k} + Ah(w_h^{n+1} - u_h^{n+1}), (u_h^{n+1} - w_h^{n+1})^+ \right) = \\ & \left(\frac{w_h^{n+1} - w_h^n}{k} + Ah w_h^{n+1} - f_h^{n+1}, (u_h^{n+1} - w_h^{n+1})^+ \right) - \\ & \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + Ah u_h^{n+1} - f_h^{n+1}, (u_h^{n+1} - w_h^{n+1})^+ \right). \end{aligned}$$

or $\frac{w_h^{n+1} - w_h^n}{k} + Ah w_h^{n+1} - f_h^{n+1} \geq 0$, le premier terme est donc positif. $\psi_h^{n+1} \leq w_h^{n+1}$,

on a donc $(u_h^{n+1} - w_h^{n+1})^+ \leq u_h^{n+1} - \psi_h^{n+1}$. D'après (a), on en conclut que :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + Ah u_h^{n+1} - f_h^{n+1}, (u_h^{n+1} - w_h^{n+1})^+ \right) \leq \\ & \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + Ah u_h^{n+1} - f_h^{n+1}, u_h^{n+1} - \psi_h^{n+1} \right) = 0 \quad (\text{d'après b}) \end{aligned}$$

En posant $z_h^n = u_h^n - w_h^n$, on obtient alors :

$$\left(\frac{z_h^{n+1} - z_h^n}{k} + Ah z_h^{n+1}, (z_h^{n+1})^+ \right) \leq 0.$$

D'autre part : $(Ah z_h^{n+1}, (z_h^{n+1})^+) = \sum_{i=1}^p (\delta_i z_h^{n+1}, \delta_i (z_h^{n+1})^+)$

d'après la définition de $\delta_i v_h$, $v_h \in V_h$, il est facile de voir que :

$$\forall i = 1, p \quad (\delta_i (v_h)^+, \delta_i (v_h)^-) \leq 0$$

on en conclut que

$$(Ah z_h^{n+1}, (z_h^{n+1})^+) \geq \|(z_h^{n+1})^+\|_h^2$$

d'autre part :

$$\left(\frac{z_h^{n+1} - z_h^n}{k}, (z_h^{n+1})^+ \right) = \left(\frac{(z_h^{n+1})^+ - z_h^n}{k}, (z_h^{n+1})^+ \right).$$

En utilisant la formule $(a-b, a) = \frac{1}{2} |a|^2 - \frac{1}{2} |b|^2 + \frac{1}{2} |a-b|^2$ et en faisant la somme de $n = 0$ à $N-2$, on obtient :

$$\frac{1}{2} |(z_h^{N-1})^+|_H^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-2} |(z_h^{n+1})^+ - z_h^n|_H^2 + \sum_{n=0}^{N-2} \|(z_h^{n+1})^+\|_h^2 \leq 0$$

on en conclut que $(z_h^{n+1})^+ = 0$ $n = 0, N-2$, et donc $w_{hk} \geq u_{hk}$ (1)

Soit u'_{hk} la solution du problème (P_h) associée à ψ'_{hk} .

On a :

$$u'_{hk} \geq \psi'_{hk} \geq \psi_{hk},$$

$$\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + Ah u_h^{n+1} - f_h^{n+1} \right) \geq 0$$

l'inégalité (1), appliquée à $w_{hk} = u'_{hk}$, nous permet alors d'écrire :

$$u'_{hk} \geq u_{hk}$$

en passant à la limite suivant la proposition IV,1, on en conclut que $u(\psi') \geq u(\psi)$ et le lemme est établi.

Désignons par \underline{u} la plus petite solution faible du problème (III) :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v - \underline{u} \right)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla \underline{u}, \nabla (v - \underline{u}))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|^2 \geq \int_0^T (f, v - \underline{u})_H dt ; \underline{u} \in K_\psi,$$

$$\forall v \in K_\psi \cap \omega.$$

Nous pouvons maintenant établir le théorème suivant :

Théorème IV.1. Soit $\psi \in L^2(0,T;H)$, $\psi \leq 0$ dans un voisinage de $\{0\} \times \Omega$, $f \in L^2(0,T;H)$ alors : la suite u_{hk} du problème (P_h) converge faiblement dans $L^2(0,T;H)$ vers \underline{u} , la plus petite solution du problème III.

Démonstration. Nous noterons \underline{u} , la limite faible de (u_{hk}) selon la proposition IV.1.

$$\text{Soit } C = K_\psi \cap (W+Pa)$$

Nous savons, d'après l'annexe [B] que :

- i) $C = \{v \in W+Pa, \hat{v} \geq \hat{\psi} \text{ qp}\}$, $\hat{\psi}$ quasi scs
- ii) $\exists \psi_m \in C \cap W, \hat{\psi}_m \downarrow \hat{\psi} \text{ qp.}$

m étant fixé, considérons $(u_{hk})_m$, la solution du problème (P_h) associée à l'obstacle $(\psi_{hk})_m$:

$$(\psi_{hk})_m = \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_{hk})_m^n 1_{[nk, (n+1)k[},$$

$$(\psi_{hk})_m^n = \frac{1}{k} \int_{hk}^{(n+1)k} (\psi_h)_m dt$$

$$(\psi_h)_m = \sum_{M \in \Omega_h} \frac{1}{h_1 \dots h_p} \left(\int_{\Omega} \psi_m \theta_h^M \right) \theta_h^M .$$

D'après la proposition IV.1, nous savons que

$$(u_{hk})_m \rightharpoonup u_m, (h,k) \rightarrow 0, \text{ dans } L^2(0,T;H),$$

où u_m est une solution faible du problème (III) associé à ψ_m .

Mais comme $\psi_m \in W$, il y a unicité de la solution faible (annexe A) et

$u_m = u_m(\tilde{\psi}_m, 0, f)$. D'après le lemme IV.1, puisque $\psi_m \geq \psi$ on a :

$$u_m \geq u \quad \text{pp.}$$

En reprenant la démonstration du lemme V.6 chapitre 1, on peut supposer que $\psi_m(0) \leq 0$ et donc d'après le théorème B1, (annexe B), on a :

$$\hat{u}_m(\tilde{\psi}_m, 0, f) \downarrow \hat{u}(\hat{\psi}, 0, f) \quad \text{qp,}$$

$\hat{u}(\hat{\psi}, 0, f)$ étant la solution ponctuelle associée à l'obstacle $\hat{\psi}$ et au second membre f .

C'est aussi la plus petite solution faible \underline{u} du problème (III).

$$\hat{u}_m(\tilde{\psi}_m, 0, f) \downarrow \hat{u}(\hat{\psi}, 0, f) \quad \text{qp}$$

$$u_m \geq u \quad \text{pp}$$

on en conclut que $u(\hat{\psi}, 0, f) \geq u$ pp donc :

$$u(\hat{\psi}, 0, f) = \underline{u} = u \quad \text{pp.}$$

le théorème est établi.

ANNEXE A

Les obstacles ψ et la fonction f étudiés au chapitre I.4 vérifient :

$$\psi \in L^2(0, T; H^2) \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^2(0, T; H) \quad ; \quad f \in L^2(0, T; H).$$

L'existence et l'unicité de la solution forte (II) a été établie par Charrier et Troianiello [6] pour des obstacles et des fonctions f vérifiant des hypothèses plus générales rappelées au chapitre I.

Cependant, sous les conditions rappelées ci-dessus, nous pouvons donner une démonstration directe de l'existence de la solution forte (Mignot Puel [12]) c'est l'objet du paragraphe I de cette annexe.

Dans le paragraphe II, nous rappelons un résultat d'unicité des solutions faibles (III) pour les obstacles de W. Pierre [15]. Ce résultat est utilisé au chapitre I.5 pour l'étude du cas général.

I. EXISTENCE D'UNE SOLUTION FORTE SI $\psi \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$ $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$:
PREUVE DIRECTE.

Dans le cas particulier où $\psi \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$, $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$, on peut donner une démonstration directe de l'existence de la solution forte.

Il suffit, comme dans Mignot Puel [12] de reprendre l'équation pénalisée associée au problème (II) et d'obtenir l'estimation a priori :

$$\left(\frac{1}{\lambda} |(\psi - u_\lambda)^+| \right)_{L^2(0, T; H)} \leq C.$$

On considère donc, pour tout $\lambda > 0$, la solution u_λ du problème :

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} - \Delta u_\lambda - \frac{1}{\lambda} (\psi - u_\lambda)^+ = f \\ u_\lambda \in W \\ u_\lambda(0) = 0. \end{cases}$$

Mais d'après Lions [9], on sait que $u_\lambda \in S$.

Multiplions cette équation par $(\psi - u_\lambda)^+$ et intégrons sur $(0, T)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{\partial(u_\lambda - \psi)}{\partial t}, (\psi - u_\lambda)^+ \right)_H dt + \int_0^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, (\psi - u_\lambda)^+ \right)_H dt + \\ & \int_0^T \left(\nabla(u_\lambda - \psi), \nabla(\psi - u_\lambda)^+ \right)_H dt - \int_0^T \left(\Delta \psi, (\psi - u_\lambda)^+ \right)_H dt - \int_0^T \left(f, (\psi - u_\lambda)^+ \right)_H dt = \\ & = \frac{1}{\lambda} \int_0^T |(\psi - u_\lambda)^+|_H^2 dt \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} |(\psi - u_\lambda)^+|_H^2 dt - \|(\psi - u_\lambda)^+\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \int_0^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, (\psi - u_\lambda)^+ \right)_H dt \\ & + \int_0^T \left(-\Delta \psi, (\psi - u_\lambda)^+ \right)_H dt - \int_0^T \left(f, (\psi - u_\lambda)^+ \right)_H dt = \frac{1}{\lambda} |(\psi - u_\lambda)^+|_{L^2(0, T; F)}^2. \end{aligned}$$

Puisque $\psi(0) \leq 0$, on obtient l'estimation :

$$\frac{1}{\lambda} |(\psi - u\lambda)^+|_{L^2(0, T; H)} \leq C.$$

Cette estimation est alors suffisante pour passer à la limite dans l'équation (a).

Remarque. D'après Charrier et Troianiello [6] nous savons que $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$; $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$.

II. PROPRIETES DES SOLUTIONS FAIBLES.

Lemme A1. Si la solution forte existe, c'est l'unique solution faible.

Démonstration : Soit u la solution du problème (II). (formulation forte) c'est-à-dire :

$$u \in K_\psi \cap W ; \quad u(0) = 0 \quad \text{et}$$

$$(a) \quad \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u \right)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla v-u)_H dt \geq \int_0^T (f, v-u)_H dt \quad \forall v \in K_\psi.$$

Remarquons que u est alors solution faible : en effet, $\forall v \in K_\psi \cap W$,

$$\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u \right)_{V', V} dt = \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u \right)_{V', V} dt - \frac{1}{2} |u(T) - v(T)|_H^2 + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2$$

on en déduit que

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u \right)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla (v-u))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, v-u)_H dt .$$

Soit alors \hat{u} une solution faible :

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v - \hat{u} \right)_{V', V} + \int (\nabla \hat{u}, \nabla v - \hat{u})_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, v - \hat{u})_H dt \\ \hat{u} \in K_\psi ; \quad \forall v \in K_\psi \cap \mathcal{W}. \end{array} \right.$$

On prend $v = \hat{u}$ dans la formulation forte (a) et $v = u$ dans la formulation faible (b). En additionnant (a) et (b) on obtient :

$$\int_0^T (\nabla(u - \hat{u}), \nabla(\hat{u} - u))_H \geq 0$$

On a donc $u = \hat{u}$, ce qui montre le lemme.

Rappelons que $S = \{v \in L^2(0, T; V), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; H)\}$.

Pour $\psi \in S$, il n'y a pas, en général, existence de la solution forte (Problème II). Néanmoins, nous savons d'après Pierre [15] que le problème faible admet une solution unique dans le cas où $\psi \in \mathcal{W}$ (donc en particulier si $\psi \in S$). Nous en rappelons ici la démonstration :

Lemme A2 : Si $\psi \in \mathcal{W}$, la solution faible est unique.

Démonstration : Soit $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, $u \geq \psi$. Pour tout $\lambda > 0$, on considère u_λ , la solution du problème :

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} u_\lambda + \lambda \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} - \Delta u_\lambda \right) = u + \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi \right), \\ u_\lambda \in \mathcal{W}, \\ u_\lambda(0) = 0. \end{array} \right.$$

en posant $w_\lambda = u_\lambda - \psi$ et $w = u - \psi$, w_λ est alors solution de $w_\lambda + \lambda \left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t} - \Delta w_\lambda \right) = w$, $w_\lambda \in L^2(0, T; V)$, $w_\lambda(0) = -\psi(0) \geq 0$. Comme $w \geq 0$, on en conclut que $w_\lambda \geq 0$, c'est-à-dire $u_\lambda \geq \psi$.

D'autre part, il est facile de voir que u_λ tend faiblement vers u dans $L^2(0, T; V)$ quand $\lambda \rightarrow 0$. En effet si l'on considère v_λ , la solution de :

$$\begin{cases} v_\lambda + \lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} = u, \\ v_\lambda(0) = 0, \\ v_\lambda \in W. \end{cases}$$

la solution explicite est $v_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\frac{s-t}{\lambda}} u(s) ds$. Il est clair que $v_\lambda \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; V)$. L'équation (a) devient alors :

$$u_\lambda + \lambda \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} - \Delta u_\lambda \right) = v_\lambda + \lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi \right)$$

en multipliant cette équation par $(u_\lambda - v_\lambda)$ et en intégrant par parties il vient :

$$\|u_\lambda - v_\lambda\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_\lambda(T) - v_\lambda(T)\|_H^2 + \lambda \|u_\lambda - v_\lambda\|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq$$

$$C\lambda \|u_\lambda - v_\lambda\|_{L^2(0, T; V)} + C'\lambda \|u_\lambda - v_\lambda\|_{L^2(0, T; H)}$$

grâce aux hypothèses sur ψ . On en déduit que :

$$\|u_\lambda - v_\lambda\|_{L^2(0, T; V)} \leq C$$

$$\|u_\lambda - v_\lambda\|_{L^2(0, T; H)} \leq C\lambda$$

donc $(u_\lambda - v_\lambda) \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T; H)$ quand $\lambda \rightarrow 0$ et $u_\lambda \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; V)$ quand $\lambda \rightarrow 0$.

Notons enfin que la solution u_λ du problème (a) vérifie la propriété :

$$(b) \quad \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^T \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}, u_\lambda - u \right)_{V', V} dt \leq 0$$

en effet :

$$\frac{\partial u\lambda}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi \right) + \Delta u\lambda - \frac{(u\lambda - u)}{\lambda}$$

donc :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{\partial u\lambda}{\partial t}, u\lambda - u \right)_{V',V} dt = \int_0^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi, u\lambda - u \right)_{V',V} dt - \\ & - \int_0^T (\nabla u\lambda, \nabla (u\lambda - u))_H dt - \int_0^T \frac{|u\lambda - u|^2}{\lambda} dt = \int_0^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi, u\lambda - u \right)_{V',V} dt + \\ & + \int_0^T (\nabla u\lambda, \nabla u)_H dt - \int_0^T |\nabla u\lambda|_H^2 dt - \int_0^T \frac{|u\lambda - u|_H^2}{\lambda} dt \end{aligned}$$

Comme $u\lambda \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; V)$, on en déduit l'inégalité (b).

Soient maintenant u_1 et u_2 , 2 solutions faibles du problème (III).

$v = \frac{(u_1 + u_2)}{2}$, on a $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ et $v \geq \psi$.

On peut donc associer à v une suite $(v\lambda)$ avec :

$$v\lambda \geq \psi, \quad v\lambda \rightarrow v \text{ dans } L^2(0, T; V) \quad \text{et} \quad \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^T \left(\frac{\partial v\lambda}{\partial t}, v\lambda - v \right)_{V',V} dt \leq 0$$

Puisque $v\lambda \geq \psi$ et $v\lambda \in \mathcal{W}$, on peut prendre $v\lambda$ comme fonction test dans chacune des inégalités que vérifient u_1 et u_2 .

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{\partial v\lambda}{\partial t}, v\lambda - u_1 \right)_{V',V} dt + \int_0^T (\nabla u_1, \nabla (v\lambda - u_1))_H dt \geq \int_0^T (f, v\lambda - u_1)_H dt \\ & \int_0^T \left(\frac{\partial v\lambda}{\partial t}, v\lambda - u_2 \right)_{V',V} dt + \int_0^T (\nabla u_2, \nabla (v\lambda - u_2))_H dt \geq \int_0^T (f, v\lambda - u_2)_H dt \end{aligned}$$

en additionnant membre à membre on obtient :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v \lambda}{\partial t}, v \lambda - \left(\frac{u_1 + u_2}{2} \right) \right)_{V', V} dt + \frac{1}{2} \int_0^T (\nabla u_1, \nabla (v \lambda - u_1))_H dt +$$

$$\frac{1}{2} \int_0^T (\nabla u_2, \nabla (v \lambda - u_2))_H dt \geq \int_0^T \left(f, v \lambda - \frac{(u_1 + u_2)}{2} \right)_H dt$$

en passant à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$ et compte tenu de l'inégalité (b) vérifiée par $(v \lambda)$ et v , on obtient :

$$\int_0^T (\nabla u_1, \nabla (v - u_1))_H dt + \int_0^T (\nabla u_2, \nabla (v - u_2))_H dt \geq 0$$

c'est-à-dire, puisque $v = \frac{u_1 + u_2}{2}$:

$$\int_0^T (\nabla (u_1 - u_2), \nabla (u_2 - u_1))_H dt \geq 0$$

il en résulte que $u_1 = u_2$.

ANNEXE B

Cette annexe comprend deux parties :

Dans la partie I, nous donnons un exemple qui justifie la démarche suivie au chapitre I : Pour des obstacles quelconques, la solution (u_ε) du problème (I) ne reste pas bornée dans W et il faut étudier la convergence de (u_ε) , $\varepsilon \rightarrow 0$, vers une solution faible du problème (III).

La partie II est utilisée au chapitre I.5 : Pour montrer que la limite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \rightarrow 0}$ du problème (I) est la plus petite solution faible du problème (III) associée à un convexe convenable, nous avons considéré la caractérisation ponctuelle de cette solution minimale. C'est pourquoi nous avons rappelés les résultats de Pierre [15] qui nous sont nécessaires.

Un exemple en dimension 1.

Montrons tout d'abord, sur un exemple en dimension 1, que u_ϵ solution de (I) ne reste pas bornée dans W pour ψ non régulier.

$$\text{Soit } Q =]0,3[$$

$$\psi = -\infty \text{ sur } [0,1[\text{ et }]2,3[$$

$$\psi = 1 \text{ sur } [1,2]$$

$$f = 0$$

On considère u_ϵ , la solution du problème :

$$\int_0^3 (-\epsilon u_\epsilon'' + u_\epsilon' + u_\epsilon)(v - u_\epsilon) dt \geq 0 ; \quad \forall v \geq \psi ; \quad u \in H_0^1(0,3)$$

$$u_\epsilon \in H_0^1(0,3), \quad u_\epsilon \geq \psi .$$

Cette solution est caractérisée par :

$$-\epsilon u_\epsilon'' + u_\epsilon' + u_\epsilon = 0 \text{ sur } [0,1[\text{ et }]2,3[$$

$$u_\epsilon = 1 \text{ sur } [1,2].$$

Ce problème admet pour solution explicite :

$$u = \frac{1}{r_2 - r_1} [e^{r_2 t} - e^{r_1 t}] \text{ sur } [0,1[$$

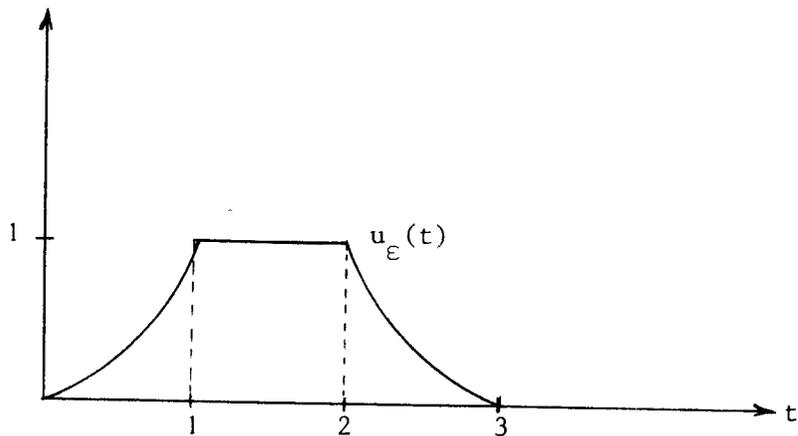
$$u_\epsilon = 1 \text{ sur } [1,2]$$

$$u_\epsilon = \frac{1}{(e^{2r_2} - e^{2r_1} - 1)} [e^{r_2 - 3r_1} e^{r_1 t} - e^{-2r_2} e^{r_2 t}] \text{ sur } [2,3[$$

avec

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\epsilon}}{2\epsilon}$$

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\epsilon}}{\epsilon}$$



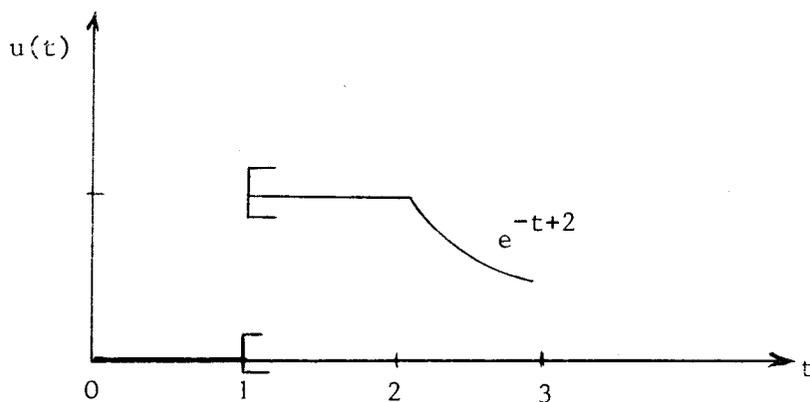
Il est facile de voir que, quand ϵ tend vers 0, u_ϵ tend simplement vers u caractérisée par :

$$u = 0 \text{ sur } [0,1]$$

$$u = 1 \text{ sur } [1,2]$$

$$u = e^{-t+2} \text{ sur } [2,3]$$

il en résulte que la limite de u_ϵ n'est pas dans $\mathcal{W} = H_0^1(0,3)$



Remarquons que $\frac{\partial u}{\partial t} + u = 0$ sur $]0,1[$ et sur $]2,3[$ c'est-à-dire sur l'ensemble $\{u > \psi\}$.



II. POTENTIELS PARABOLIQUES ET CAPACITE PARABOLIQUE.

Dans ce paragraphe, nous rappelons les résultats obtenus par Pierre [15] qui nous seront utiles pour l'étude du cas général.

Afin d'éclairer l'énoncé de ces résultats, nous rappelons tout d'abord les propriétés de la solution du problème elliptique suivant :

Soit $C_\psi = \{v \in H^1_0(\Omega), v \geq \psi \text{ pp}\}$, on considère la solution u du problème :

$$E \quad \begin{cases} u \in C_\psi, \\ \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla(v-u)) dX \geq 0, \quad \forall v \in C_\psi. \end{cases}$$

Nous avons alors, d'après Ancona [1] :

i) à tout élément u de l'ensemble

$$P_a = \{v \in H^1_0(\Omega), \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla w) dX \geq 0, \quad \forall w \geq 0, w \in H^1_0(\Omega)\}$$

on peut associer une unique mesure de Radon positive sur $C_0(\Omega)$, notée Eu et telle que :

$$\forall v \in C_0(\Omega) \cap H^1_0(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dX = \int_{\Omega} v d Eu$$

$Eu = -\Delta u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Les éléments de P_a sont appelées potentiels (elliptiques) la solution u du problème E est un potentiel.

ii) Soit A une partie quelconque de Ω et soit $u \in H^1_0(\Omega)$. On dira que $u \geq 1$ sur A au sens de $H^1_0(\Omega)$ si il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^1_0(\Omega)$, $u_n \geq 1$ pp au voisinage de A et $u_n \rightarrow u$ dans $H^1_0(\Omega)$.

Considérons alors le convexe

$$\Gamma A = \{u \in H^1_0(\Omega), u \geq 1 \text{ sur } A \text{ au sens de } H^1_0(\Omega)\}.$$

La solution u_A du problème (E) associé à ΓA est le plus petit élément de $P_A \geq 1$ sur A au sens de $H_0^1(\Omega)$.

On appelle alors capacité de A , la quantité

$$\text{Cap}(A) = \int_{\Omega} |\nabla u_A|^2 dX .$$

iii) une propriété sera dite vraie quasi-partout, si elle est vraie partout, sauf sur un ensemble de capacité nulle.

iv) Soit v une fonction numérique définie sur Ω .

v sera dite quasi-continue s'il existe une suite décroissante d'ouverts $\omega_n \subset \Omega$ telle que

- v continue sur $\Omega - \omega_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cap}(\omega_n) = 0$

v) tout élément v de $H_0^1(\Omega)$ admet un représentant quasi-continue \tilde{v} , et on a :

$$\forall u \in P_A , \quad \int_{\Omega} \tilde{v} dEu = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dX .$$

vi) il existe $\hat{\psi}$, régularisée quasi-semi-continue supérieure de ψ , telle que

$$C_{\psi} = \{v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi \text{ pp}\} = \{v \in H_0^1(\Omega), \tilde{v} \geq \hat{\psi} \text{ q.p.}\}$$

vii) la solution du problème (E) est l'unique solution du problème :

$$u \in P_A,$$

$$\tilde{u} \geq \hat{\psi} \text{ qp},$$

$$\int_{\Omega} (\tilde{u} - \hat{\psi}) dEu = 0$$

Ainsi, l'existence et l'unicité de la solution du problème (E) sont caractérisées par la propriété que la mesure positive $\mathcal{E}u$ est portée par l'ensemble $\{\hat{u} = \hat{\psi}\}$.

Nous allons voir que chacune des définitions et propriétés énoncées ci-dessus peuvent s'adapter au cas parabolique et que, sous certaines conditions liées au convexe K_ψ , la solution minimale du problème III peut s'interpréter de manière analogue à vii.

Il convient de noter deux différences importantes entre le problème (E) et le problème (III) :

- a) l'espace \mathcal{W} n'est pas un espace de Dirichlet.
- b) la solution minimale du problème (III) n'appartient pas à \mathcal{W} .

1. Potentiels paraboliques.

Rappelons que $\mathcal{W}_T^+ = \{v, v \in \mathcal{W}, v \geq 0, v(T) = 0\}$

On appelle potentiel parabolique, tout élément de l'ensemble :

$$Pa = \{u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \ ; \ \forall v \in \mathcal{W}_T^+, \int_0^T (-\frac{\partial v}{\partial t}, u)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla v)_H dt \geq 0\}.$$

les éléments de Pa ne sont donc pas nécessairement dans \mathcal{W} .

A tout élément de Pa, on peut associer une unique mesure de Radon positive sur $C_0([0, T] \times \Omega)$, notée $\mathcal{E}u$, telle que :

$\forall v \in C_0([0, T] \times \Omega) \cap \mathcal{W}_T$ on ait :

$$\int_0^T (-\frac{\partial v}{\partial t}, u)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla v)_H dt = \int_{[0, T] \times \Omega} v d \mathcal{E}u$$

$$\mathcal{E}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T] \times \Omega).$$

Notons que si $u \in \mathcal{W} \cap \text{Pa}$, u est alors caractérisé par : $u \in \mathcal{W}$,
 $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq 0$ dans V' , $u(0) \geq 0$.

Ces relations s'obtiennent à partir de la définition de Pa en intégrant par partie.

Notons une propriété importante des suites décroissantes d'éléments de Pa : Soit $(u_n) \in \text{Pa}$, (u_n) décroissante, alors $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(0,T;H)$ et $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(0,T;V)$ avec $u \in \text{Pa}$ et $u = \inf_n (u_n)$.

Cette propriété est à rapprocher du cas elliptique mais on a seulement une convergence faible dans $L^2(0,T;V)$.

2. Capacité parabolique.

Soit $K \subset [0,T[\times \Omega$ compact ^E, on dira que $u \geq 1$ sur K si

i) $u \in \text{Pa}$

ii) il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Pa}$, $u_n \geq 1$ pp au voisinage de K et $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(0,T;V)$.

On introduit alors la capacité parabolique en la définissant tout d'abord sur les compacts de $[0,T[\times \Omega$, puis sur les ouverts et enfin, sur les ensembles quelconques.

Soit K compact de $[0,T[\times \Omega$, alors le convexe $S_K = \{u \in \text{Pa}, u \geq 1 \text{ sur } K\}$ admet un plus petit élément u_K . On pose alors

$$\text{Capacité de } K = \text{Cap } K = \int_{[0,T[\times \Omega} d E u_K .$$

Soit ω ouvert de $[0,T[\times \Omega$ on aura :

$$\text{Cap}(\omega) = \text{Sup}_{K \subset \omega \text{ compact}} (\text{Cap}(K)) .$$

Enfin, si A est quelconque, $A \subset [0, T[\times \Omega$: on aura

$$\text{Cap } A = \inf_{A \subset \omega \text{ ouvert}} (\text{Cap}(\omega)) .$$

Notons, comme le montre l'exemple ci-dessous, qu'en dimension 1, la capacité d'un point est non nulle : $\Omega =]0, 2[$; Prenons $a(u, v) = 0$

$$P_a = \{u \in L^\infty(0, 2) ; \forall v \in H^{1+}(0, 2) ; v(2) = 0 ; \int_0^2 -v'u \, dt \geq 0\}$$

On vérifie que $u_{\{1\}}$ associé à $S_{\{1\}}$ est caractérisé par :

$$u_{\{1\}} = 0 \text{ sur } [0, 1[; u_{\{1\}} = 1 \text{ sur } [1, 2[.$$

Il en résulte que

$$\text{Cap}\{1\} = \int_{[0, 2[} d(\delta_{\{1\}}) = 1.$$

Les définitions iii) et iv) du cas elliptique s'adaptent sans difficulté au cas parabolique.

Notons le théorème suivant, analogue à la propriété v) :

tout élément v de \mathcal{M} admet un représentant quasi-continue noté \tilde{v} unique (à un ensemble de capacité nulle près) et $\forall u \in P_a, \forall v \in \mathcal{M}_T$:

$$\int_{[0, T[\times \Omega} \tilde{v} \, dEu = \int_0^T \left(-\frac{\partial v}{\partial t}, u\right)_{V', V} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla v)_H dt$$

Notons enfin le résultat suivant : $v_1, v_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, v_1 = v_2 \text{ qp} \Rightarrow \forall t \in [0, T[, v_1(t) = v_2(t) \text{ pp}$ (une fonction définie quasi partout, définit une unique fonction de $[0, T[$ dans H).

3. Représentant quasi scs d'un potentiel parabolique.

Dans le cas elliptique, nous savons que la solution u du problème (E) est un potentiel. Les potentiels elliptiques étant les éléments de $H_0^1(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u \geq 0$, ils sont donc quasi-continues.

Nous ne retrouvons pas cette propriété dans le cas parabolique : l'exemple donné au début de cette annexe prouve que la solution minimale du problème III n'est pas en général dans \mathcal{W} et qu'elle n'est pas non plus quasi-continue ($\text{Cap}\{1\} \neq 0$).

Notons cependant, que toute solution u du problème III homogène est un élément de Pa : il suffit d'appliquer l'inégalité vérifiée par u en prenant comme fonctions tests $w + \lambda v$ avec $w \in K_\psi \cap \mathcal{W}$, $v \in \mathcal{W}_T^+$, $\lambda > 0$ et de faire tendre λ vers l'infini.

Il a donc été nécessaire, afin d'obtenir une caractérisation de la solution minimale analogue à vii), de définir une nouvelle notion de représentant pour les fonctions de Pa : $\forall u \in \text{Pa}$, il existe une suite (u_n) de potentiels quasi-continues et \hat{u} unique (à un ensemble de capacité nulle près) tels que :

- i) $\tilde{u}_n \downarrow \hat{u}$ qp (quasi-partout)
- ii) $\hat{u} = u$ pp

\hat{u} est appelé le représentant quasi scs de u .

Remarque. Si $u \in \mathcal{W} + \text{Pa}$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in \mathcal{W}$, $u_2 \in \text{Pa}$ on aura :

$$\hat{u} = \tilde{u}_1 + \hat{u}_2 .$$

Nous allons maintenant voir comment la propriété vi) s'adapte au cas parabolique :

4) Caractérisation des convexes inf-fermés et unilatéraux
de $W+Pa$.

Nous savons que la solution minimale du problème III homogène est un élément de Pa .

Dans le cas non homogène, considérons τ , la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \in W \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - \Delta \tau = f, \\ \tau(0) = 0 \end{array} \right.$$

il est facile de voir que si u est la solution minimale associée à ψ et f , alors $u_1 = u - \tau$ est la solution minimale associée à $f = 0$ et $\psi_1 = \psi - \tau$.

Comme $u_1 \in Pa$, on en déduit que $u \in (W+Pa) \cap K_\psi$. Nous nous intéressons donc aux convexes de $W+Pa$.

Dans le cas elliptique vi), l'existence de $\hat{\psi}$ est une conséquence du fait que le convexe des fonctions tests est héréditaire et inf-stable. (Mignot Puel [13]). La propriété d'inf-stabilité n'est pas vérifiée pour le convexe $K_\psi \cap W$ (W n'est pas inf-stable).

Nous sommes donc amenés à définir d'autres propriétés sur les convexes de $(W+Pa)$:

Soit C un convexe de $(W+Pa)$, on dira que C est inf-fermé si :

$$(u_n \in C, \underline{u} \in (W+Pa), \hat{u}_n \downarrow \hat{u} \text{ qp}) \Rightarrow u \in C$$

C sera dit unilatéral si :

$$(u_1, \dots, u_p \in C, u \in (W+Pa), \min(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_p) \leq \hat{u} \text{ qp}) \Rightarrow u \in C.$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Soit C un convexe inf-fermé et unilatéral de $(W+Pa)$, alors :

i) $\exists \underline{\psi}_n \in C \cap W$ et $\hat{\psi}$ quasi scs telles que

$$\hat{\psi}_n + \hat{\psi} \text{ qp}$$

ii) $C = \{u \in (W+Pa), \hat{u} \geq \hat{\psi} \text{ qp}\}$

Application. Soit $K_\psi = \{v \in L^2(0,T;V), v \geq \psi \text{ pp}\}$,

$$C = (K_\psi) \cap (W+Pa) = \{v \in W+Pa, v \geq \psi \text{ pp}\}.$$

il est facile de vérifier que C est inf-fermé et unilatéral. On a donc :

$\exists \hat{\psi}$ quasi scs telle que

$$C = \{v \in W+Pa ; \hat{v} \geq \hat{\psi} \text{ qp}\} \text{ et}$$

$$C \cap W = \{v \in W, \hat{v} \geq \hat{\psi} \text{ qp}\}.$$

Remarque. Dans l'exemple précédent, prenons $\psi = 1_{\{1\}}$.

Soit $C_1 = \{v \in W+Pa, v \geq \psi \text{ pp}\}$.

On a $C_1 = \{v \in W+Pa, v \geq 0 \text{ pp}\}$.

Soit maintenant $C_2 = \{v \in W+Pa, \hat{v} \geq \psi \text{ qp}\}$. C_1 et C_2 sont distincts puisque $\text{Cap}\{1\} \neq 0$.

5. Caractérisation de la solution minimale.

Nous en arrivons maintenant au point essentiel de l'annexe B :

La solution minimale du problème III s'interprète de manière analogue au cas elliptique vi) :

Soit τ la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \Delta \tau = f, \\ \tau(0) = 0, \quad \tau \in W. \end{cases}$$

Soit C un convexe unilatéral et inf-fermé de $(\mathcal{U}+Pa)$ et soit $\hat{\psi}$ associée à C vérifiant $\hat{\psi}(0) \leq 0$. Alors il existe u unique tel que :

- i) $u \in \tau+Pa$
- ii) $\hat{u} \geq \hat{\psi}_{qp}$, $\hat{u}(0) = 0$
- iii) $\int_{[0,T] \times \Omega} (\hat{u} - \hat{\psi}) d(Eu - f) = 0$

On notera $\hat{u}(\hat{\psi}, 0, f)$ le représentant quasi scs de cette solution ponctuelle.

De plus u est le plus petit élément de C vérifiant :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, (v-u)_{V'} \right)_{V'} dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla(v-u))_H dt + \frac{1}{2} |v(0)|_H^2 \geq \int_0^T (f, (v-u))_H dt ;$$

$$\forall v \in C \cap \mathcal{U}.$$

u est donc la plus petite solution faible associée au convexe C .

Notons enfin que si $v \in \tau+Pa$, avec $\hat{v} \geq \hat{\psi}_{qp}$ alors $\hat{u}(\hat{\psi}, 0, f) \leq \hat{v}_{qp}$. (\hat{u} est donc le plus petit élément de $\tau+Pa$ vérifiant $\hat{u} \geq \hat{\psi}_{qp}$.)

Application. $\psi \in L^2(0, T; H)$, $\psi \leq 0$ au voisinage de $\{0\} \times \Omega$.

$$C = K_\psi \cap (\mathcal{U}+Pa) = \{v \in (\mathcal{U}+Pa), \hat{v} \geq \hat{\psi}_{qp}\},$$

$$C \cap \mathcal{U} = \{v \in \mathcal{U}, v \geq \psi_{pp}\} = \{v \in \mathcal{U}, \hat{v} \geq \hat{\psi}_{qp}\},$$

alors la solution ponctuelle définie par i), ii), iii) est la solution minimale du problème III.

Nous terminerons cette annexe en rappelant une propriété qui sera à la base de l'étude du cas général :

6. Stabilité par limite décroissante des solutions ponctuelles.

Le résultat suivant démontré par Pierre [15] traduit la stabilité par limite décroissante (qp) des solutions ponctuelles associées à des obstacles quasi scs.

Nous l'utiliserons sous cette forme :

Théorème B1. Soit $\tilde{\psi}_n$ une suite de fonctions quasi-continues, décroissant quasi partout vers $\hat{\psi}$ et telle que $\tilde{\psi}_n(0) \leq 0$ pour tout n . Alors : $\hat{u}_n(\tilde{\psi}_n, 0, 0)$ décroît quasi-partout vers $\hat{u}(\hat{\psi}, 0, 0)$.

Rappelons que u_n étant une suite décroissante de potentiels, elle converge fortement dans $L^2(0, T; H)$ et faiblement dans $L^2(0, T; V)$ vers u .

Notons, d'autre part, que ce résultat peut être étendu au cas non homogène.

En effet, soit τ la solution du problème :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \Delta \tau = f,$$

$$\tau(0) = 0,$$

$$\tau \in \mathcal{U}.$$

$\hat{u}(\hat{\psi}, 0, f)$ étant la solution ponctuelle du 5°), posons $\hat{u}_1 = \hat{u} - \tilde{\tau}$ et $\hat{\psi}_1 = \hat{\psi} - \tilde{\tau}$. Il est facile de voir que \hat{u}_1 est la solution ponctuelle associée à $f = 0$ et $\hat{\psi}_1$, c'est-à-dire $\hat{u}_1 = \hat{u}_1(\hat{\psi}_1, 0, 0)$.

Soit maintenant $\tilde{\psi}_n \downarrow \hat{\psi}$ qp, $\tilde{\psi}_n(0) \leq 0 \forall n$, et $\hat{u}_n(\tilde{\psi}_n, 0, f)$ solution du 5°) pour tout n .

On a alors :

$$\tilde{u}_n(\tilde{\psi}_n, 0, f) = \hat{u}_{1n}(\tilde{\psi}_{1n}, 0, 0) + \tilde{\tau}.$$

mais $\tilde{\psi}_{1n} = \tilde{\psi}_n - \tilde{\tau}$ décroît quasi partout vers $\hat{\psi} - \tilde{\tau} = \hat{\psi}_1$.

D'autre part, $\tilde{\psi}_{1n}(0) = \tilde{\psi}_n(0) \leq 0$.

On applique alors le théorème B1 :

$$\hat{u}_{1n}(\tilde{\psi}_{1n}, 0, 0) \downarrow \hat{u}_1(\hat{\psi}_1, 0, 0) \quad \text{qp}$$

on en conclut que $\hat{u}_n(\tilde{\psi}_n, 0, f) \downarrow \hat{u}(\hat{\psi}, 0, f)$.

CHAPITRE III

APPLICATIONS NUMERIQUES

Ce chapitre est une application directe du résultat du chapitre II : $u_{hk} \rightarrow \underline{u}$, la solution minimale du problème (III).

Afin d'éprouver la validité numérique de ce théorème, nous avons choisi trois exemples pour lesquels la solution minimale \underline{u} est connue.

Dans le paragraphe I, nous traitons un exemple en dimension un. La solution numérique du problème (P_h) est alors très simple et la programmation ne soulève aucune difficulté.

Dans le paragraphe II, nous avons choisi deux exemples en dimension deux :

Pour le premier exemple, l'obstacle ψ que nous considérons ne comporte pas de sauts en temps mais seulement en espace. D'autre part la solution minimale est régulière ($\underline{u} \in W$). Pour $k = \frac{1}{100}$ et $h = \frac{1}{11}$, la solution u_{hk} calculée est pratiquement la solution minimale \underline{u} (l'erreur relative maximale est de l'ordre de 0,2 %).

Dans le deuxième exemple, nous reprenons l'obstacle précédent mais en le tronquant par la fonction nulle sur $[0, t_0[\times \Omega$. Il comporte donc un saut positif en temps.

Les résultats numériques sont alors comparables à ceux obtenus dans l'exemple précédent, à la différence près qu'au voisinage du saut en temps de ψ , la convergence est mauvaise. Ce phénomène n'est pas surprenant dans la mesure où nous savons que \underline{u} est discontinue aux points où il y a croissance discontinue de ψ Pierre [15].

I. UN EXEMPLE EN DIMENSION 1.

Nous reprenons ici l'exemple développé en annexe B.

On considère

$$]0, T[=]0, 3[,$$

$$V = H = V' = R,$$

$$W = S = H^1(0, 3) = \{v \in L^2(0, 3), v' \in L^2(0, 3)\}$$

$$\psi = 1 \text{ sur } [1, 2]$$

$$f = 0$$

L'inéquation parabolique (III) s'écrit alors :

$$(III) \begin{cases} u \in L^\infty(0, 3), \quad u \geq \psi \text{ pp,} \\ \int_0^3 v'(v-u) dt + \int_0^3 u(v-u) dt + \frac{1}{2}(v(0))^2 \geq 0, \\ \forall v \in H^1(0, 3), \quad v \geq \psi \end{cases}$$

Nous savons que

$$\underline{u} = 0 \text{ sur } [0, 1[$$

$$\underline{u} = 1 \text{ sur } [1, 2[$$

$$\underline{u} = e^{-t+2} \text{ sur } [2, 3[$$

est la solution minimale de ce problème.

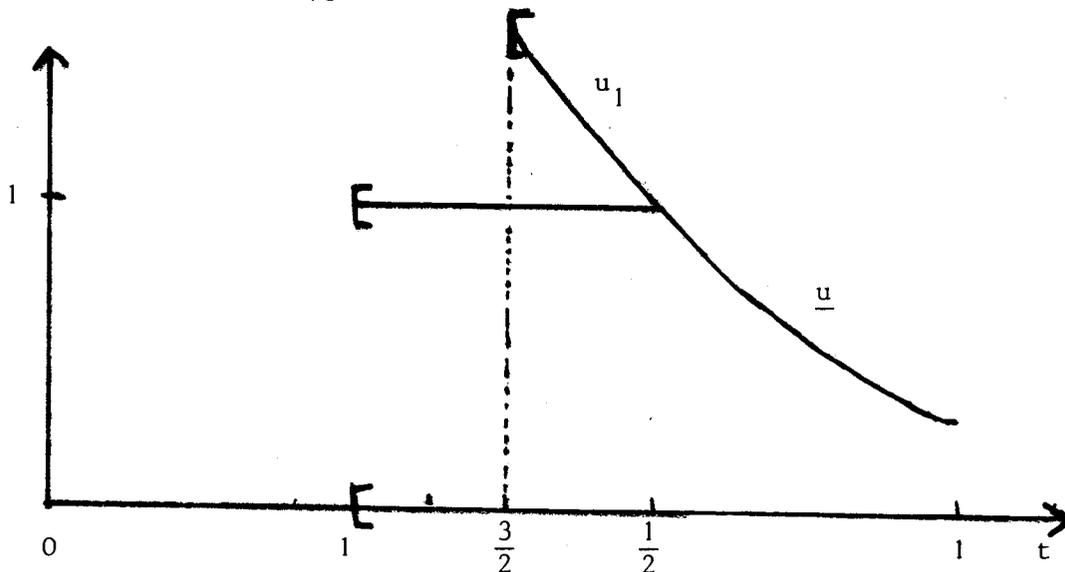
Nous allons vérifier que

$$u_1 = 0 \text{ sur } [0, 1[$$

$$u_1 = 1 \text{ sur } [1, \frac{3}{2}[$$

$$u_1 = e^{-t+2} \text{ sur } [\frac{3}{2}, 3[$$

est une solution du problème (III).



Remarquons que u_1 vérifie :

$$u_1' + u_1 = 0 \quad \text{sur }]0, 1[$$

$$u_1' + u \geq 0 \quad \text{sur }]1, \frac{3}{2}[$$

$$u_1' + u = 0 \quad \text{sur }]\frac{3}{2}, 3[.$$

D'autre part :

$$u_1^-(1) = 0, \quad u_1^+(1) = 1, \quad u_1^-(\frac{3}{2}) = 1, \quad u_1^+(\frac{3}{2}) = e^{1/2} = a.$$

Intégrons alors par partie sur chaque intervalle $(0, 1)$, $(1, \frac{3}{2})$ et $(\frac{3}{2}, 3)$ l'inégalité (III). Il vient, compte tenu des remarques précédentes :

$$\int_0^3 (v' + u_1)(v - u_1) dt + \frac{1}{2}(v(0))^2 \geq \frac{1}{2}(v(0))^2 + \frac{1}{2}(v(1))^2 - \frac{1}{2}(v(0))^2$$

$$+ \frac{1}{2}(v(\frac{3}{2}) - 1)^2 - \frac{1}{2}(v(1) - 1)^2 + \frac{1}{2}(v(3) - u^-(3))^2 - \frac{1}{2}(v(\frac{3}{2}) - a)^2$$

après développement et simplification, il vient :

$$\int_0^3 (v' + u_1)(v - u_1) dt + \frac{1}{2}(v(0))^2 \geq -v(\frac{3}{2}) + v(1)$$

$$+ \frac{1}{2}(v(3) - u^-(3))^2 + v(1) - \frac{1}{2} a^2 \geq v(\frac{3}{2})(a-1) + v(1) - \frac{1}{2} a^2.$$

mais $v \in H^1(0,3)$ et $v \geq \psi$. On a donc $v(\frac{3}{2}) \geq 1$ et $v(1) \geq 1$. Puisque $a = e^{1/2}$ on obtient :

$$\int_0^3 (v' + u_1)(v - u_1) dt + \frac{1}{2}(v(0))^2 \geq a - \frac{1}{2} a^2 \geq 0.$$

u_f est donc solution faible.

Nous indiquons maintenant les principales étapes du calcul de la solution discrète en dimension 1.

On fait une subdivision de $[0,3[$ en N -intervalles de longueur $k = \frac{3}{N}$.

$$\text{Soit } \psi_k = \sum_{n=0}^{N-1} \psi(nk) \mathbb{1}_{[nk, (n+1)k[}.$$

Nous utilisons la formulation explicite du problème (P_h) Glovinski [8].

$$\text{On cherche } u_k = \sum_{n=0}^{N-1} u^n \mathbb{1}_{[nk, (n+1)k[} \text{ tel que}$$

$$u^0 = 0,$$

$$u^{n+1} \geq \psi(n+1)k,$$

$$\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{k} + u^n \right) (v^{n+1} - u^{n+1}) \geq 0,$$

$$\forall v^{n+1} \geq \psi(n+1)k, \quad n = 0, N-2.$$

Il est facile de voir que les démonstrations du lemme IV.2, de la proposition IV.1 et du théorème IV.1 s'adaptent à cette formulation.

D'autre part, on obtient u^{n+1} , $n = 0, N-2$, en considérant le problème de minimisation :

$$\text{Minimiser } \left\{ \frac{1}{2}(v^{n+1})^2 + (k-1)u^n v^{n+1} \right\}$$

$$v^{n+1} \geq \psi(n+1)k$$

qui admet pour solution explicite :

$$\textcircled{A} \quad \begin{cases} u^{n+1} = \text{Max}(\psi(n+1)k, u^n(1-k)) \\ u^0 = 0 \\ n = 0, N-2 \end{cases}$$

Le schéma \textcircled{A} est alors très simple à programmer.

Nous avons résolu le schéma \textcircled{A} pour $N = 100$, $N = 200$, $N = 300$.

On a évalué l'écart entre la vraie solution minimale \underline{u} et la solution numérique obtenue, par :

$$E = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{N-1} (\underline{u}(nk) - u^n)^2$$

On obtient alors :

	N = 100	N = 200	N = 300
E max	0,0134	0,00194	0,00034

II. EXEMPLES EN DIMENSION 2.

Nous savons que l'inéquation parabolique du premier ordre admet une formulation forte (II) et une formulation faible (III).

Nous avons rappelé au chapitre I, les conditions suffisantes pour qu'il y ait existence (et unicité) de la solution forte.

Nous étudions ici deux exemples :

i) dans le premier exemple nous prendrons un obstacle irrégulier ($\psi \notin L^2(0, T; V)$), mais la solution minimale associée à cet obstacle sera dans \mathcal{W} . Nous savons qu'alors, \underline{u} vérifie une inéquation analogue à la formulation forte mais avec des fonctions tests de $K_\psi \cap \mathcal{W}$. (I.6).

ii) Dans le deuxième exemple, il n'y aura pas unicité des solutions faibles.

1. Formulation du problème approché.

Dans les 2 exemples étudiés, nous avons considéré

$$]0, T[=]0, 1[, \quad \Omega =]0, 1[.$$

On subdivise alors $]0, T[=]0, 1[$ en N intervalles de longueur $k = \frac{1}{N}$ et $\Omega =]0, 1[$ en $M+1$ intervalles de longueur $h = \frac{1}{M+1}$.

On pose :

$$f_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} f_h^n \mathbb{1}_{[nk, (n+1)k[} ,$$

$$f_h^n = \sum_{i=1}^M f(nk, ih) \mathbb{1}_{(i-1/2)h, (i+1/2)h[} ,$$

et de manière analogue :

$$\psi_{hk} = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_k^n \mathbb{1}_{[nk, (n+1)k[} ,$$

$$\psi_h^n = \sum_{i=1}^M \psi(nk, ih) \mathbb{1}_{(i-1/2)h, (i+1/2)h[} .$$

Le choix de f et ψ dans chacun des deux exemples justifiera ces approximations f_{hk} et ψ_{hk} .

Remarquons que pour $v_h \in V_h$ c'est-à-dire

$$v_h = \sum_{i=1}^M v_h^i \mathbb{1}_{(i-1/2)h, (i+1/2)h[} ,$$

on aura :

$$A_h v_h = - \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^M (v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1})$$

Le problème (P_h) s'écrit alors : Trouver

$$u_{hk} = \sum_{n=0}^M u_h^{n+1} [nk, (n+1)k] ,$$

$$u_h^n = \sum_{i=1}^M u_i^n](i-1/2)h, (i+1/2)h[,$$

$$u_0^n = u_{M+1}^n = 0 \quad \forall n, \text{ et tel que :}$$

i) $u_i^0 = 0 \quad i = 1, M$

ii) Pour $n = 0, N-1, (u_i^{n+1}) \quad i = 1, M$ solution de :

$$\sum_{i=1}^M (u_i^{n+1} - u_i^n - \frac{k}{2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) - kf_i^{n+1}, v_i^{n+1} - u_i^{n+1}) \geq 0,$$

$$\forall v^{n+1} = (v_1^{n+1}, \dots, v_M^{n+1}), \quad v_i^{n+1} \geq \psi((n+1)k, ih) \text{ et}$$

$$u_i^{n+1} \geq \psi((n+1)k, ih) \quad , \quad i = 1, M.$$

Nous savons que pour $n = 0, N-1, (u_i^{n+1}) \quad i = 1, M$ est solution du problème de minimisation :

$$M^{n+1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad J_{n+1}(v_1^{n+1}, \dots, v_M^{n+1}) \\ v_i^{n+1} \geq \psi((n+1)k, ih) \end{array} \right.$$

avec :

$$J_{n+1}(v_1^{n+1}, \dots, v_M^{n+1}) = \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{1}{2} [(v_i^{n+1})^2 - \frac{k}{2}(v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1})v_i^{n+1}] - (u_i^n - kf_i^{n+1})v_i^{n+1} \right\} .$$

Remarquons que $J_{n+1}(v_1^{n+1}, \dots, v_M^{n+1}) = \frac{1}{2}(Av^{n+1}, v^{n+1}) - L^{n+1}(v^{n+1})$ où A est une matrice bande $M \times M$ indépendante de N , et :

$$L^{n+1}(v^{n+1}) = ((u^n - kf^{n+1}), v^{n+1}) .$$

On part donc de $(u_i^0) = 0 \quad i = 0, M+1$.

Puis, à chaque étape n , $n = 0, N-1$, nous avons résolu le problème de minimisation (M^{n+1}) .

Cette minimisation a été réalisée par la méthode de relaxation ponctuelle avec contrainte : Glover [8].

$J_{n+1} : R^M \rightarrow R$ est strictement convexe et de classe C^1 .

En posant

$$K^{n+1} = \prod_{i=1}^M [\psi_i^{n+1}, +\infty[,$$

on doit minimiser J_{n+1} sur K^{n+1} et on vérifie que

$$J_{n+1}(v^{n+1}) \rightarrow +\infty \quad \text{si} \quad \|v^{n+1}\| \rightarrow +\infty \quad v^{n+1} \in K^{n+1}.$$

Nous savons dans ces conditions que l'algorithme de relaxation ponctuelle converge vers (u^{n+1}) , la solution du problème (M^{n+1}) .

L'algorithme de relaxation ponctuelle nous permet de construire, à chaque étape n , une suite $(u^{n+1})^p \in R^M$ qui converge vers (u^{n+1}) dans R^M .

Le critère d'arrêt choisi, dans la recherche de la solution (u^{n+1}) est :

$$\sum_{i=1}^M |(u_i^{n+1})^{p+1} - (u_i^{n+1})^p|^2 < 10^{-3} = \epsilon$$

\underline{u} étant la vraie solution minimale, on a calculé dans chacun des deux exemples :

$$E_{n+1} = \sqrt{\sum_{i=1}^M |u_i^{n+1} - \underline{u}((n+1)k, ih)|^2}$$

et l'erreur relative :

$$E(i) = \frac{|u_i^{n+1} - \underline{u}((n+1)k, ih)| \times 100}{|\underline{u}((n+1)k, ih)|} \quad i = 1, M$$

pour $n = 0, 10, \dots < N$.

2) Organisation des calculs.

Pour chacun des deux exemples, nous avons posé :

$$H = \frac{1}{M+1}$$

$$P_1 = \frac{1}{N}.$$

Nous avons construit les sous-programmes suivants :

a) Sous-programme matrice A :

$$\text{MAT}(A, M, H, P_1)$$

b) Sous-programme second membre :

$$\text{SEC}(F, M, N, H, P_1)$$

avec $F(J, I) = f(JH, IP_1)$

$$J = 1, M$$

$$I = 1, N-1$$

c) Sous-programme obstacle :

$$\text{OBS}(D, M, N, H, P_1)$$

avec $D(J, I) = \psi(JH, IP_1) \quad I = 1, N-1, J = 1, M.$

d) Sous-programme "vraie solution" :

SOL(U,D,M,N,H,P₁)

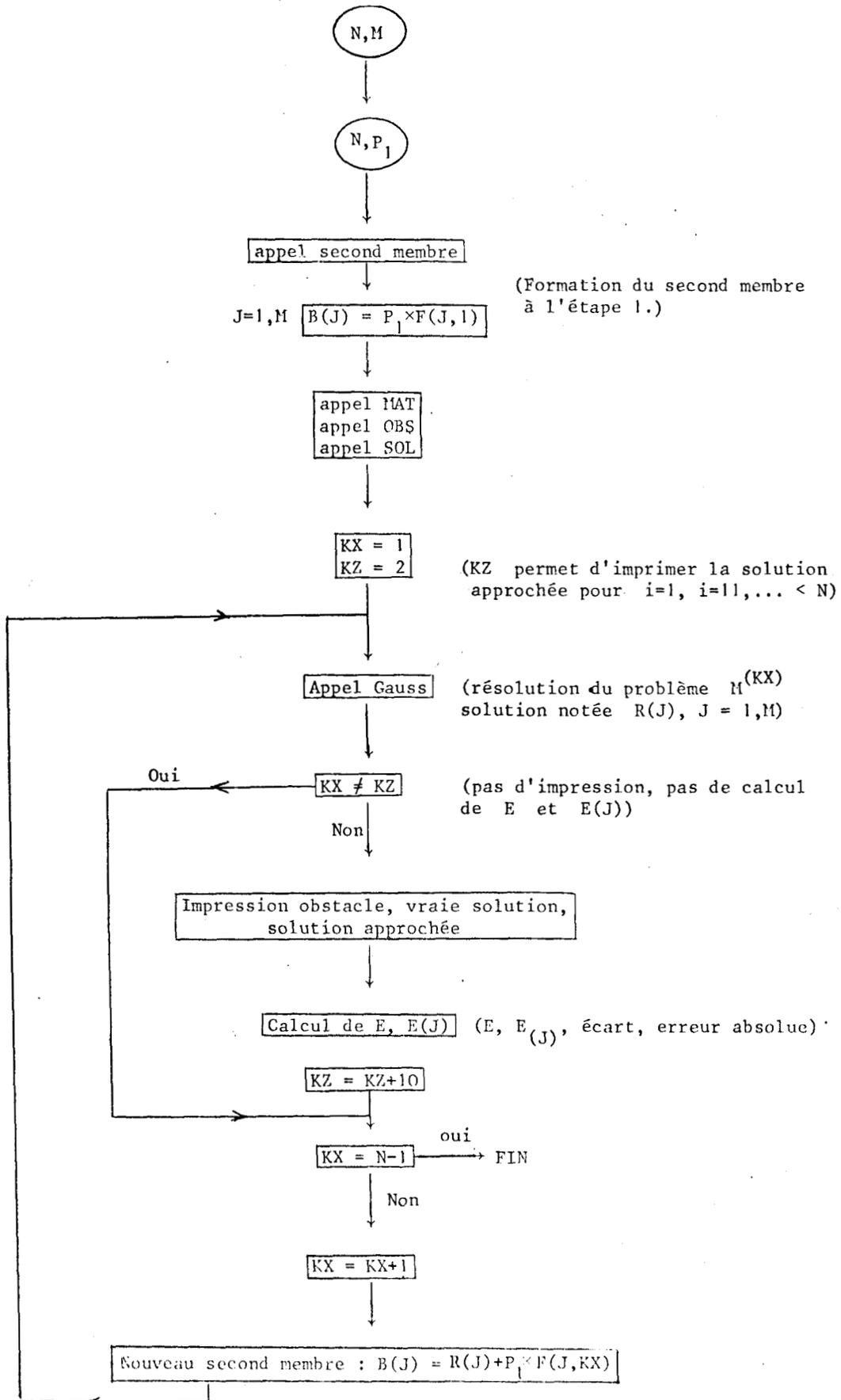
avec $U(J,I) = u(JH,IP_1)$ $J = 1,M, I = 1,N-1$.

e) Sous-programme de minimisation de J_{n+1} :

GAUSS(A,D,B,R,M,KX)

Ce sous-programme minimise la fonctionnelle : $\frac{1}{2}(Av,v) - Bv$ pour $v(J) \geq D(J,KX)$, $J = 1,M, KX = 1, \dots, N-1$ par la méthode de relaxation ponctuelle. La solution obtenue approche donc la solution du problème (M^{n+1}) pour $n+1 = KX$ à ε près. On la note $R(J)$, $J = 1,M$.

f) Organigramme simplifié du calcul de la solution discrète.



3) Exemple 1. la solution minimale est dans (\mathcal{O}) :

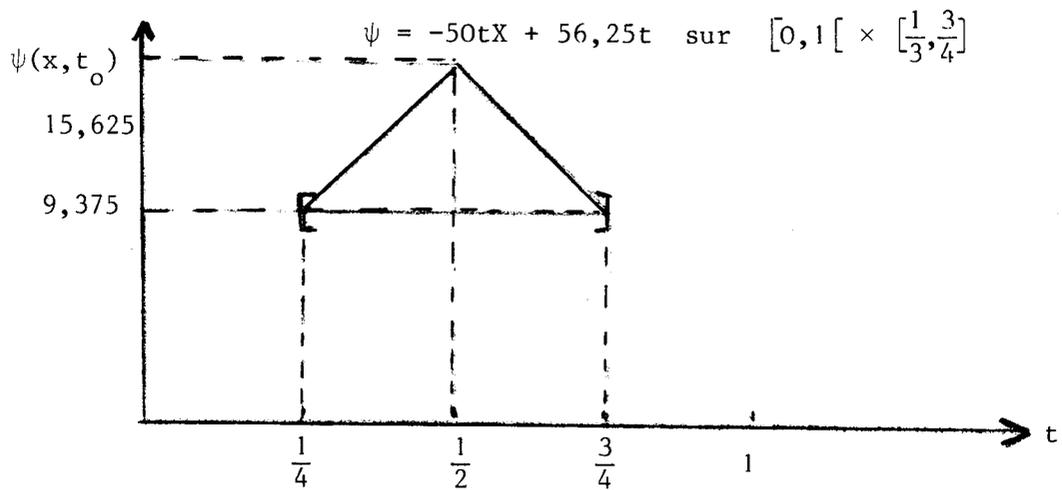
a) énoncé de l'exemple :

On prend donc $\Omega =]0,1[\times]0,1[$

$$\psi = 0 \quad \text{sur} \quad [0,1[\times [0, \frac{1}{4}[$$

$$\psi = 0 \quad \text{sur} \quad [0,1[\times [\frac{3}{4}, 1[$$

$$\psi = 6,25t + 50tx \quad \text{sur} \quad [0,1[\times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$$

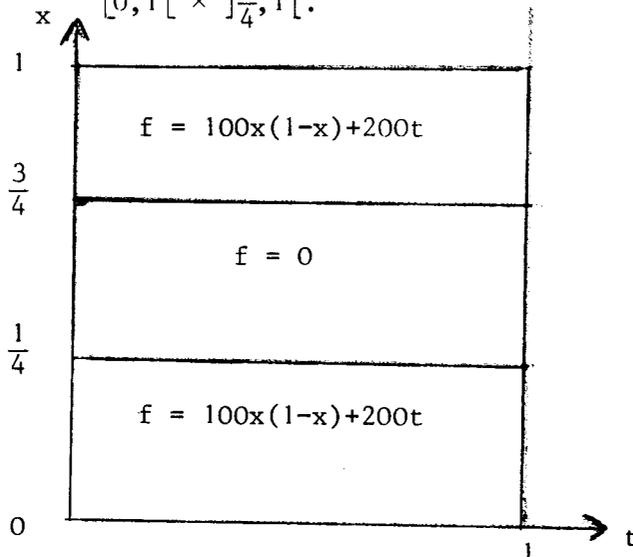


Second membre : On prend :

$$f = 0 \quad \text{sur} \quad [0,1[\times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[\quad (\text{support de } \psi)$$

$$f = 100x(1-x) + 200t \quad \text{sur} \quad [0,1[\times [0, \frac{1}{4}[\quad \text{et sur}$$

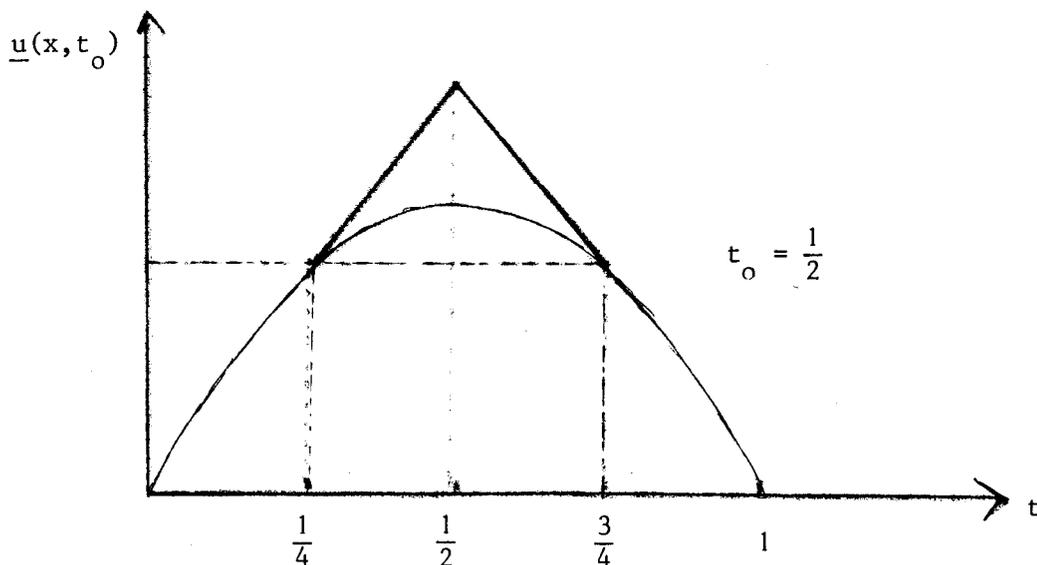
$$[0,1[\times [\frac{3}{4}, 1[.$$



Nous allons vérifier que

$$\begin{cases} \underline{u} = \psi & \text{sur } [0,1[\times [\frac{1}{4},\frac{3}{4}] \\ \underline{u} = 100x(1-x)t & \text{sur } [0,1[\times [0,\frac{1}{4}[\cup [0,1[x]\frac{3}{4},1[\end{cases}$$

est la solution minimale du problème (III).



Remarquons que $\underline{u} \in L^2((0,1); H_0^1(0,1))$ et que $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \in L^2([0,1[\times]0,1[)$. On en conclut que $\underline{u} \in \mathcal{W}$ (et même $\underline{u} \in S$).

D'autre part, on a bien $\underline{u} \geq \psi$ (partout) et $u(0,x) = 0$.

Il est facile de voir que :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \Delta \underline{u} - f = 0 \quad \text{sur } [0,1[\times [0,\frac{1}{4}[\cup [0,1[\times]\frac{3}{4},1[,$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \Delta \underline{u} - f \geq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0,1[\times [\frac{1}{4},\frac{3}{4}]).$$

Enfin :

$$\int_{[0,1[\times [0,1[} (\underline{u}-\psi)d(Eu-f) = \int_{[0,1[\times [\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} (\underline{u}-\psi)d(Eu-f) = 0$$

\underline{u} est donc la solution minimale.

b) Résultats numériques.

Nous avons calculé la solution (u_{hk}) du problème (P_h) pour

N = 50	M = 5
N = 100	M = 10
N = 500	M = 20

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau III.b.

Nous avons d'autre part représenté sur un même graphique les courbes $x \rightarrow u_{hk}(x, t_0)$ et $x \rightarrow \underline{u}(x, t_0)$, t_0 étant fixé.

Nous précisons sur chaque courbe les temps t_0 et les valeurs choisies pour M et N

Tableau III.b.

Rappelons que
$$E_{n+1} = \sqrt{\sum_{i=1}^M |u_i^{n+1} - \underline{u}((n+1)k, ih)|^2}.$$

Nous avons représenté, dans ce tableau, l'écart E_{n+1} pour les 3 ordres d'approximation

M = 5	t_0	$\frac{1}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{31}{50}$	$\frac{41}{50}$
	E_{n+1}	0,0058	0,1012	0,1994	0,2976	0,3958
M = 10	t_0	$\frac{1}{100}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{41}{100}$	$\frac{61}{100}$	$\frac{81}{100}$
	E_{n+1}	0,0041	0,0097	0,0193	0,0288	0,0429
M = 20	t_0	$\frac{1}{500}$	$\frac{111}{500}$	$\frac{211}{500}$	$\frac{311}{500}$	$\frac{411}{500}$
	E_{n+1}	0,0137	0,0347	0,0767	0,119	0,177

Ce tableau amène les remarques suivantes :

i) Dans le cas 1) ($M = 5$, $N = 50$), le pourcentage d'erreur relative

$$\frac{|u((n+1)k, ih) - u_i^{n+1}|}{u((n+1)k, ih)} \times 100$$

à une valeur maximale de 2,45 % alors que cette valeur maximale n'est plus que de 0,22 % dans le cas 2) ($M = 10$, $N = 100$).

ii) Les résultats sont moins précis pour le 3ème cas.

Le choix du critère d'arrêt dans l'algorithme de relaxation ponctuelle ($\epsilon = 10^{-3}$) semble en être la cause.

Courbes I (t_0 fixé).

Nous avons choisi l'ordre (3) d'approximation pour le tracé des courbes afin d'avoir une représentation plus précise de la vraie solution et de la solution approchée.

- On constatera que, pour chacun des 5 temps choisis, la vraie solution et la solution approchée sont pratiquement confondues.

- C'est au voisinage des points où l'obstacle est irrégulier que l'écart entre la vraie solution et la solution approchée atteint son maximum.

Nous constaterons à nouveau ce phénomène dans l'exemple n°2.

Courbes II (X_0 fixé).

Pour l'ordre (2) d'approximation nous avons tracé les courbes $t \rightarrow u_{hk}(t, X_0)$ et $t \rightarrow \underline{u}(t, X_0)$.

4) Exemple 2. La solution minimale n'est pas dans \mathcal{W} .

a) énoncé de l'exemple :

On prend à nouveau $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. On considère ψ défini

par :

$$\psi = 0 \quad \text{sur} \quad [0 ; 0,3[\times]0 ; 1[$$

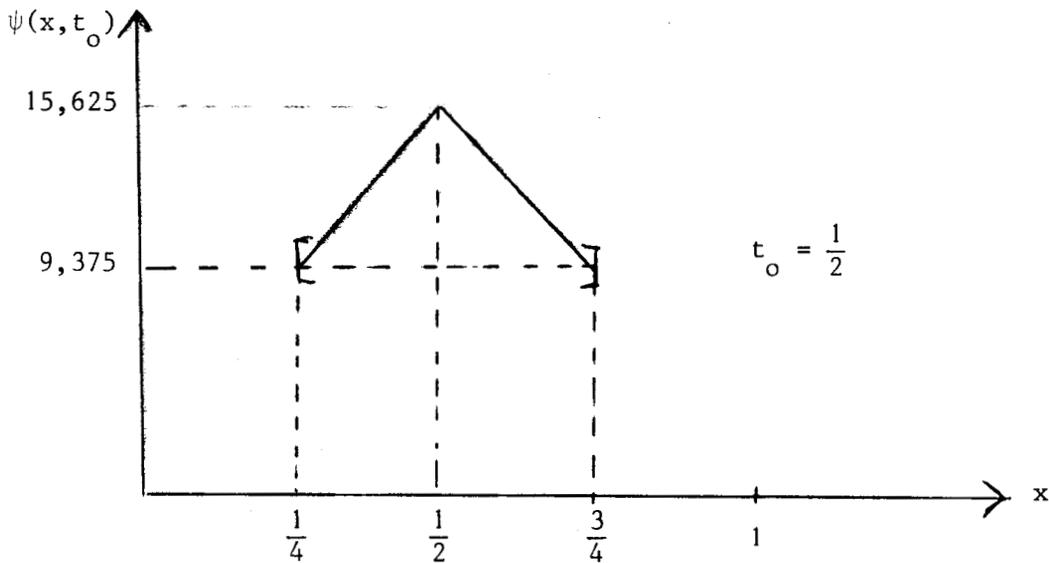
$$\psi = 0 \quad \text{sur} \quad [0,3 ; 1[\times [0 ; \frac{1}{4}[$$

$$\psi = 0 \quad \text{sur} \quad [0,3 ; 1[\times]\frac{3}{4} ; 1[$$

$$\psi = 6,25t + 50tX \quad \text{sur} \quad [0,3 ; 1[\times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$$

$$\psi = -50tX + 56,25t \quad \text{sur} \quad [0,3 ; 1[\times]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] ,$$

on a donc $\psi = 0$ pour $t < 0,3$ et pour t_0 fixé, $t_0 > 0,3$:



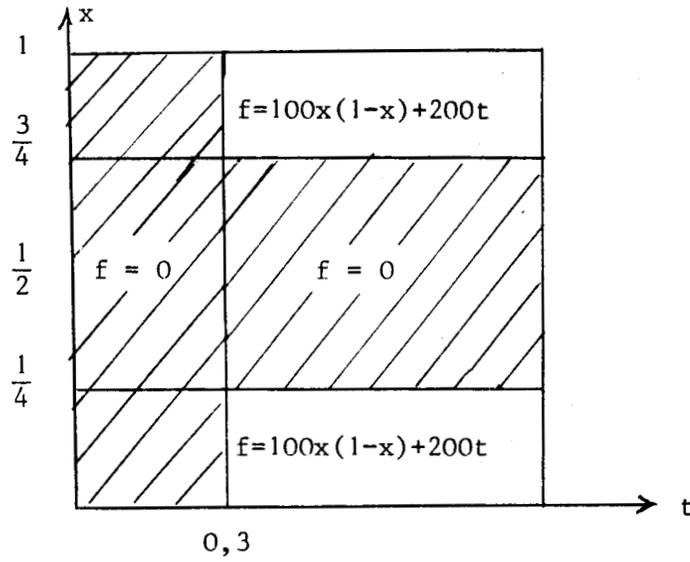
Second membre : On prend

$$f = 0 \quad \text{sur} \quad [0 ; 0,3[\times]0,1[$$

$$f = 0 \quad \text{sur le support de } \psi$$

$$f = 100x(1-x) + 200t \quad \text{sur}$$

$$[0,3 ; 1[\times [0, \frac{1}{4}[\cup [0,3 ; 1[\times]\frac{3}{4}, 1[$$



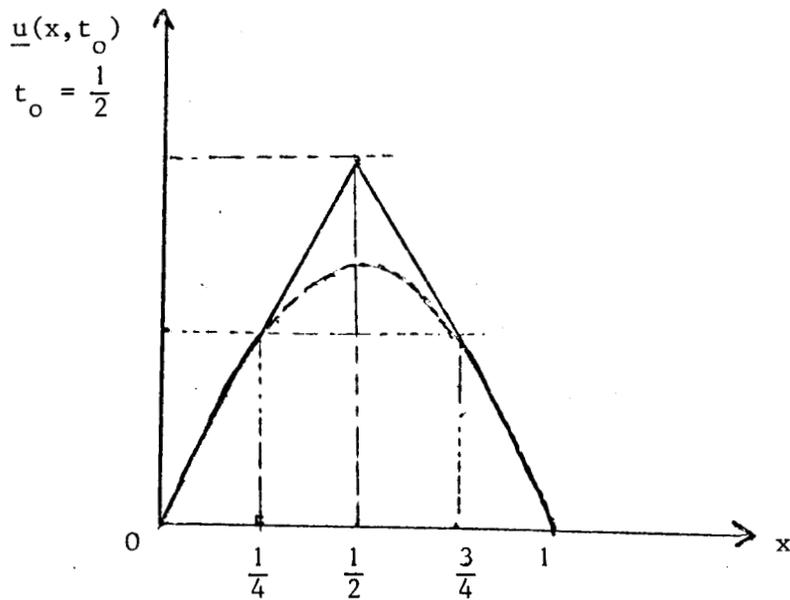
La solution minimale \underline{u} est définie par :

$$\underline{u} = 0 \quad \text{sur} \quad [0 ; 0,3 [\times]0,1 [$$

$$\underline{u} = 100x(1-x)t \quad \text{sur} \quad [0,3 ; 1[\times [0 ; \frac{1}{4}[\cup$$

$$[0,3 ; 1[\times]\frac{3}{4}, 1[$$

$$\underline{u} = \psi \quad \text{sur} \quad [0,3, 1[\times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$$



$$\underline{u}(x, t_0) = 0 \quad \forall t_0 < 0,3$$



Nous remarquerons que $\underline{u} \notin W$ puisqu'il y a un "saut" au temps $t = 0,3$.

Vérification : il est facile de voir que :

$$\underline{u} \geq \psi$$

$$\underline{u}(0) = 0 ;$$

$$\underline{u} \in L^2[0,1 : H_0^1(0,1)] ;$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \Delta \underline{u} - f = 0 \quad \text{sur } [0,1[\times [0 ; 0,3[$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \Delta \underline{u} - f = 0 \quad \text{sur } [0,3 ; 1[\times [0, \frac{1}{4}[\cup \\ [0,3 ; 1[\times]\frac{3}{4} ; 1[$$

$$\underline{u} = \psi \quad \text{sur } [0,3 ; 1[\times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$$

Enfin, on remarquera que $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \Delta \underline{u} - f \geq 0$ dans $D'(Q)$.

Nous en déduisons que \underline{u} est la solution minimale de l'inéquation parabolique faible associée au convexe

$$\{v \in L^2(0,1 : H_0^1(0,1)) ; v \geq \psi \text{ pp}\} .$$

b) Résultats numériques : Comme pour l'exemple précédent, nous avons calculé (u_{hk}) la solution du problème P_h pour :

$$N = 50 \quad M = 5$$

$$N = 100 \quad M = 10$$

$$N = 500 \quad M = 20$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 4.b.

Nous avons d'autre part représenté sur un même graphique les courbes $x \rightarrow u_{hk}(x, t_0)$ et $x \rightarrow \underline{u}(x, t_0)$ t_0 étant fixé.

Les temps t_0 et l'ordre d'approximation (M,N) choisis sont précisés sur chaque courbe.

Tableau 4.b

N = 50 M = 5 (1)	t_0		$\frac{21}{50}$	$\frac{31}{50}$	$\frac{41}{50}$
	E_{n+1}		0,1708	0,2976	0,3958
N = 100 M = 10 (2)	t_0	$\frac{31}{100}$	$\frac{41}{100}$	$\frac{61}{100}$	$\frac{81}{100}$
	E_{n+1}	3,1612	0,0205	0,0327	0,0435
N = 500 M = 20 (3)	t_0	$\frac{151}{500}$	$\frac{211}{500}$	$\frac{311}{500}$	$\frac{411}{500}$
	E_{n+1}	9,1341	0,0911	0,1475	0,2201

$$\text{Rappelons que } E_{n+1} = \sqrt{\sum_1^M |u_i^{n+1} - \underline{u}((n+1)k, ih)|^2}.$$

Ce tableau amène les remarques suivantes.

i) Les résultats sont mauvais au voisinage du saut en temps de ψ . ($t = 0,3$) : Ainsi à l'itération 31 ($t = 0,31$) du cas (2) l'écart est de 3,1612 et le pourcentage d'erreur relative maximal

$$\left(\text{Max}_{i=1, M} \frac{|u((n+1)k, ih) - u_i^{n+1}|}{\underline{u}((n+1)k, ih)} \times 100 \right)$$

est de l'ordre de 50 %. Cet écart entre la vraie solution et la solution approchée apparaît sur la courbe III. Pour l'ordre (3), cet écart est de 9,1341 à l'itération 151 ($t = 0,302$) mais n'est plus que de 1,1 à l'itération 161 ($t = 0,322$). C'est donc au voisinage du saut en temps de ψ que l'approximation est mauvaise.

Nous avons tenté d'affiner le découpage de l'intervalle de temps $[0,1[$ au voisinage de 0,3. La programmation s'est révélée plus longue et plus coûteuse, sans que les résultats s'améliorent.

Rappelons que les seuls points de discontinuité de \underline{u} sont ceux où il y a croissance discontinue de ψ Pierre [15].

ii) Le cas donnant les meilleurs résultats est le 2ème ($N = 100$ $M = 10$) en dehors du saut de ψ , le pourcentage d'erreur maximal passe de 2,4 % dans le cas 1 à 0,2 % dans le cas 2 mais il est de 0,7 % dans le cas (3).

Comme pour l'exemple 1, le choix du critère d'arrêt dans l'algorithme de relaxation ponctuelle ($\epsilon = 10^{-3}$) semble en être la cause.

Courbes III (t_0 , fixé).

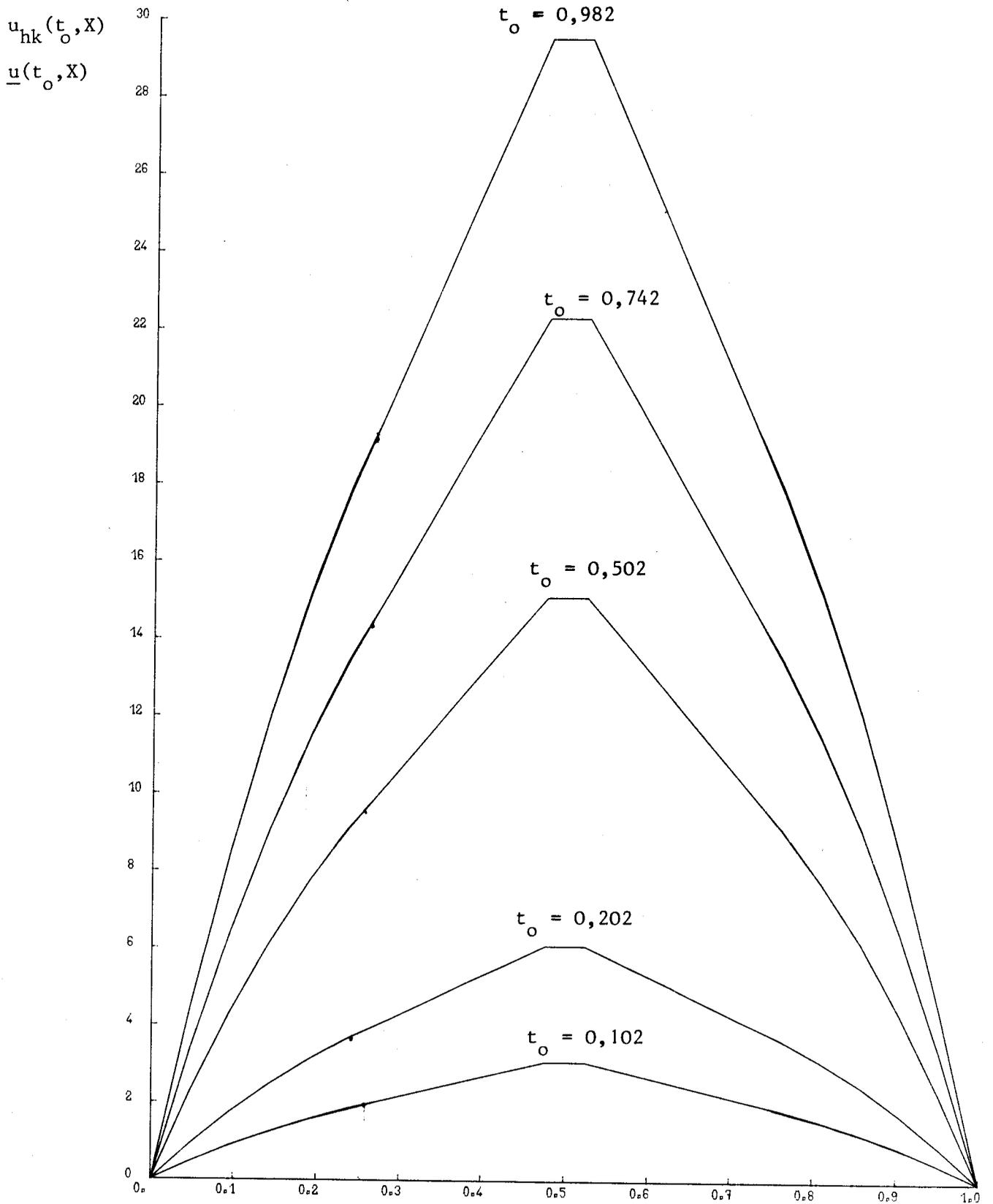
Nous avons choisi le cas 2 d'approximation pour le tracé des courbes.

- au temps $t_0 = 0,31$ on notera l'écart important entre la vraie solution (courbe supérieure) et la solution approchée.

- pour $t_0 = 0,41$, $t_0 = 0,61$ et $t_0 = 0,81$, \underline{u} et u_{kh} sont pratiquement confondues.

Courbe IV (X_0 fixé).

Pour le 2ème cas d'approximation, nous avons tracé les courbes $t \rightarrow u_{hk}(t, X_0)$ et $t \rightarrow \underline{u}(t, X_0)$.

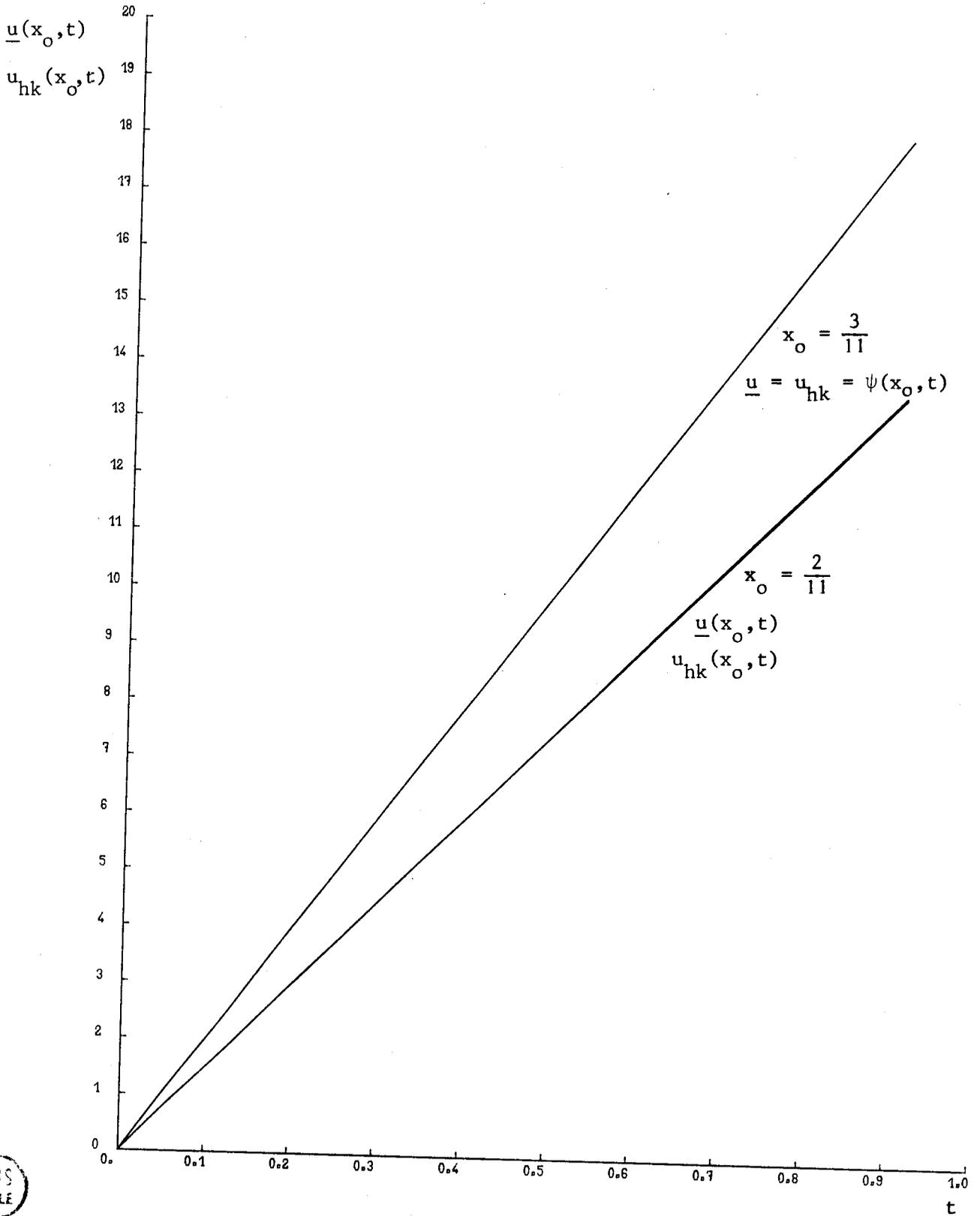


Courbes I : La solution minimale est caractérisée par :

$$\underline{u}(t_0, X) = \psi(t_0, X) \quad \text{sur} \quad \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]$$

$$\underline{u}(t_0, X) = 100X(1-X)t_0 \quad \text{sur} \quad \left[0, \frac{1}{4} \cup \left[\frac{3}{4}, 1 \right] \right]$$

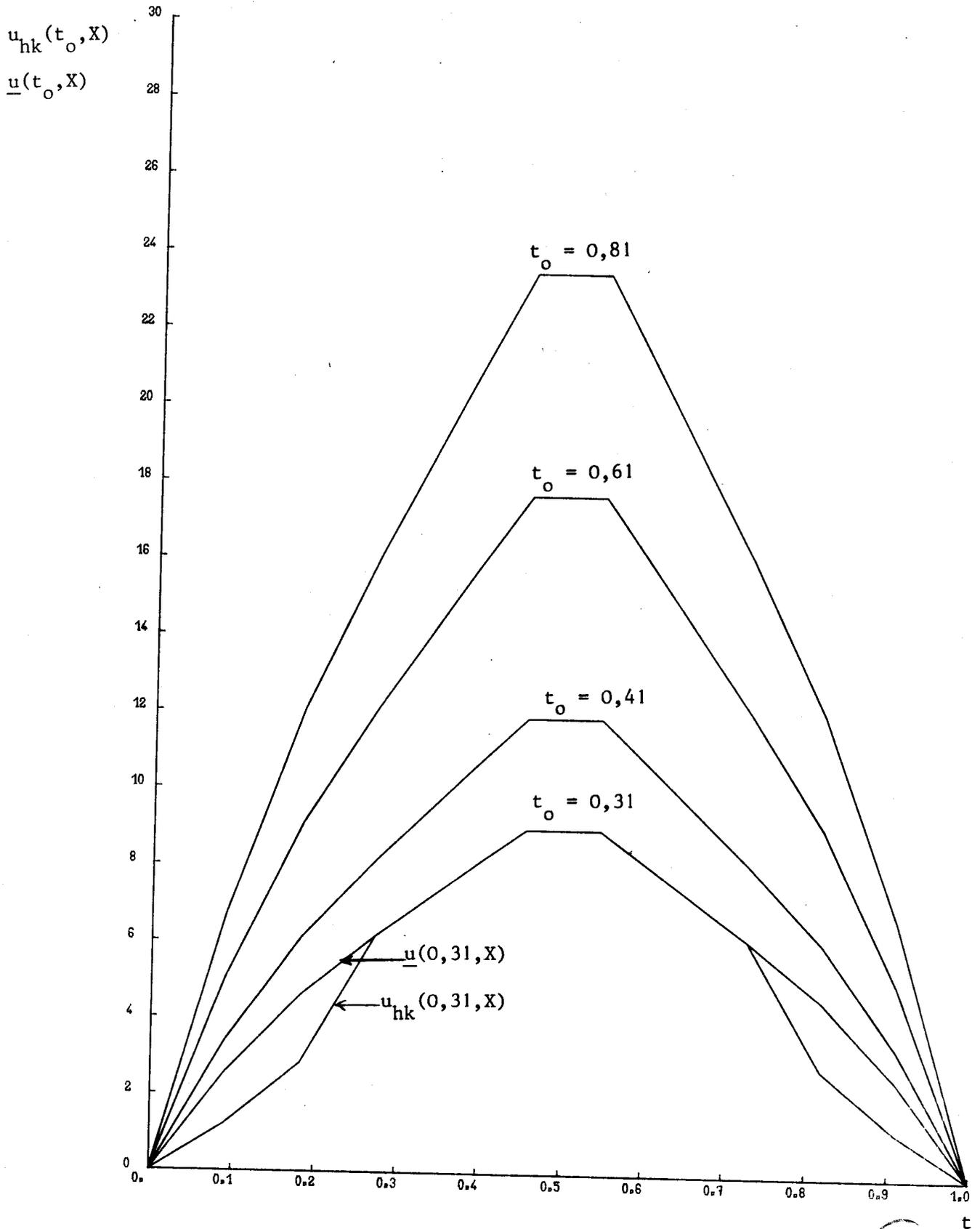




Courbes II : x_0 fixé

$$\underline{u}(x_0, t) = 100x_0(1-x_0)t \quad \text{si } x_0 < \frac{1}{4} \quad \text{et } x_0 > \frac{3}{4}$$

$$\underline{u}(x_0, t) = \psi(x_0, t) \quad \text{si } x_0 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$



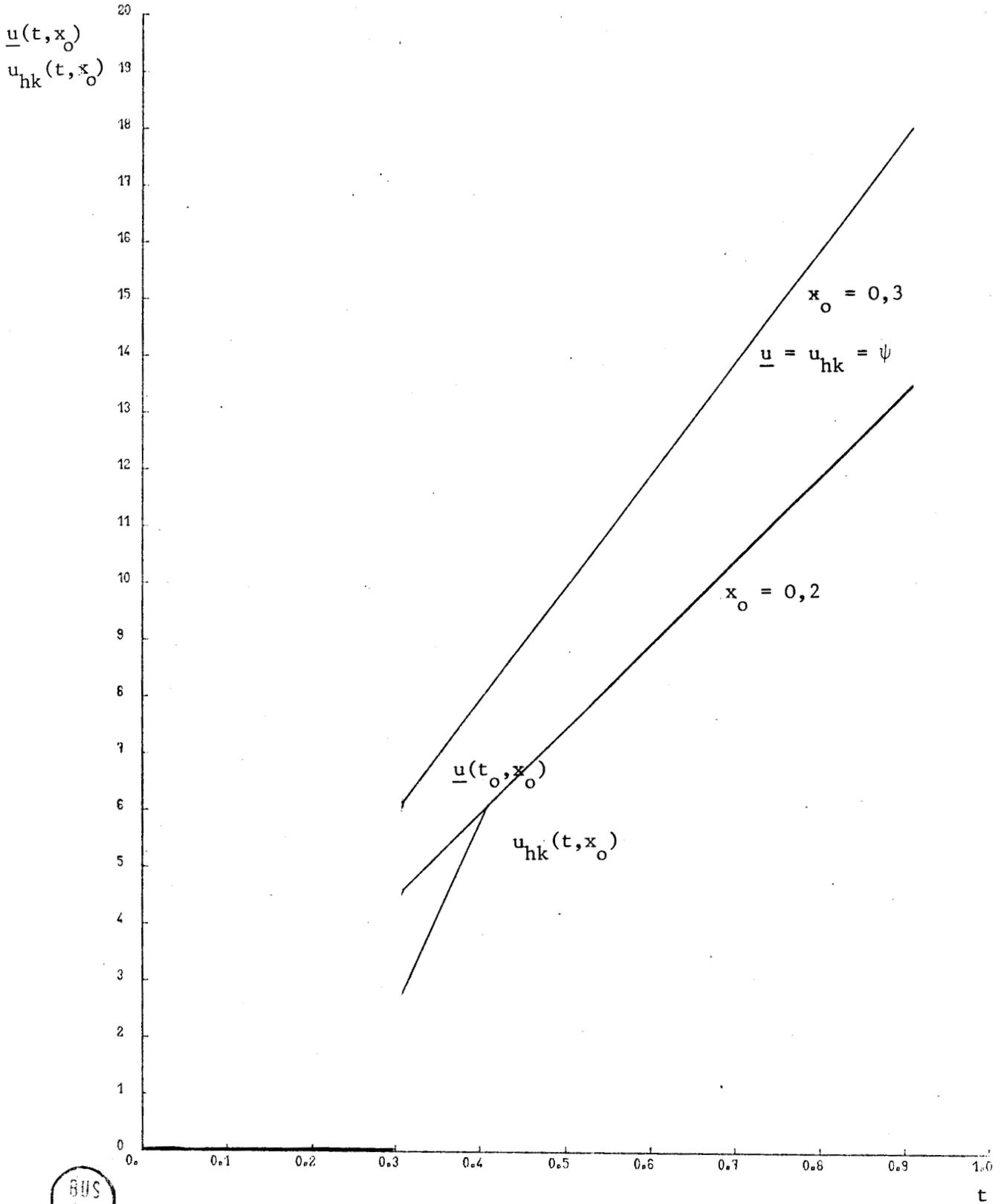
Courbes III : La solution minimale \underline{u} est caractérisée par :

$$\underline{u}(t_0, X) = 0 \quad t_0 < 0,3 \quad ; \quad \text{pour } t_0 \geq 0,3 :$$

$$\underline{u}(t_0, X) = \psi(t_0, X) \quad \text{sur } \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

$$\underline{u}(t_0, X) = 100X(1-X)t_0 \quad \text{sur } \left[0, \frac{1}{4} \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]\right]$$





Courbes IV. x_0 fixé ; la solution minimale vérifie :

$$\underline{u}(t, x_0) = 0 \text{ sur } [0 ; 0,3[\times]0,1[$$

$$\underline{u}(t, x_0) = 100x_0(1-x_0)t \text{ sur }]0,3 ; 1[\times [0, \frac{1}{4}] \cup]0,3 ; 1[\times]\frac{3}{4}, 1[$$

$$\underline{u}(t, x_0) = \psi(t, x_0) \text{ sur } [0,3 ; 1] \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$$

CONCLUSION

Les résultats obtenus dans le chapitre I peuvent se résumer de la manière suivante :

Lorsque l'hypothèse H) est vérifiée, c'est-à-dire lorsque $(\overline{K_\psi \cap S})_{L^2(0,T;V)} \cap W = \{v \in W, \tilde{v} \geq \hat{\psi}_S \text{ qp}\} (= \tilde{K}_{\hat{\psi}_S})$, u_ε converge vers \underline{u} la plus petite solution faible du problème III associé au convexe $\tilde{K}_{\hat{\psi}_S}$.

En particulier, pour les obstacles vérifiant

$$\tilde{K}_{\hat{\psi}_S} = \{v \in W, v \geq \psi \text{ pp}\}$$

la limite de u_ε est la solution minimale usuelle, c'est-à-dire associée au convexe $\{v \in W, v \geq \psi \text{ pp}\}$.

L'hypothèse H) que nous avons introduite est justifiée par le fait que le problème n'est pas résolu pour les obstacles de W . Un problème ouvert serait donc d'exhiber des exemples d'obstacles de W tels que $(\overline{K_\psi \cap S})_W$ strictement inclu dans $K_\psi \cap W$ et $\hat{\psi}_S \neq \hat{\psi}$ (pour l'égalité qp).

Remarquons qu'en l'absence d'hypothèse H) on a toujours

$$\hat{u}(\hat{\psi}, 0, f) \leq u \leq \hat{u}(\hat{\psi}_S, 0, f) \quad \text{pp}$$

$\hat{u}(\hat{\psi}, 0, f)$ (resp. $\hat{u}(\hat{\psi}_S, 0, f)$) désignant la solution minimale associée au convexe $\{v \in W, v \geq \psi \text{ pp}\}$ (resp. $\{v \in W, \tilde{v} \geq \hat{\psi}_S \text{ qp}\}$).

Les rapports entre capacité elliptique et capacité parabolique n'ont pas été abordés mais cette étude pourrait faire appel au théorème V.

L'étude du cas hyperbolique Mignot-Puel [14] et des inéquations quasivariationnelles d'évolution Mignot-Puel [12] reste ouverte.

Dans le chapitre II, nous avons choisi la méthode des différences finies pour l'approximation sur $[0, T[$ et sur Ω .

Toute autre approximation conservant la croissance de l'application $\psi \rightarrow u(\psi)$ ($= \lim_{hk} u_{hk}$) conviendrait.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ANCONA : "Théorie du potentiel dans les espaces fonctionnels à forme coercive".
Cours 3ème cycle. Université de Paris VI (1973).
- [2] C. BARDOS : "Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels
Théorèmes d'approximation - Application à l'équation de transport".
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. - 4ème série, t 3, 1970
p. 185 à 233.
- [3] H. BREZIS : "Problèmes unilatéraux".
Journal de Math. pures et appliquées - 51,1 (1972).
- [4] H. BREZIS : "Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps".
C.R.A.S., 274 - Série A, p. 310 (1972).
- [5] H. BREZIS - G. STAMPOCCHIA : "Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques".
Bull. Soc. Math. France, 96 - 1968 - P. 153 à 180.
- [6] P. CHARRIER - G.M. TROIANIELLO : "Un résultat d'existence et de régularité pour les solutions fortes d'un problème unilatéral d'évolution avec obstacle dépendant du temps".
C.R.A.S. - 281 - Série A - p. 621 (1975).
- [7] R. GLOVINSKI : "Lectures on numerical Methods for non linear variational problems".
Tata - Notes Springer - Cours aux Indes - Fev. 1977.
- [8] R. GLOVINSKI - J.L. LIONS - R. TREMOLIERES : "Analyse numérique des inéquations variationnelles".
Méthodes Math. de l'informatique - Dunod Tomes 1 et 2.
- [9] J.L. LIONS : "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires".
Dunod Gauthier-Villars.
- [10] J.L. LIONS - G. STAMPACCHIA : "Variational inequalities".
Comm. pure an appl. Math. Tome 20 - 1967. p. 493 à 519.
- [11] J.L. LIONS - E. MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes et applications".
Dunod. Paris (1968) - Vol. 1.

- [12] F. MIGNOT - J.P. PUEL : "Inéquations d'évolution paraboliques avec convexes dépendant du temps. Applications aux inéquations quasi-variationnelles d'évolution".
Arch. for. Rat. Mech. and. Ana. Vol. 64, n°1 (1977).
- [13] F. MIGNOT - J.P. PUEL : "Un résultat de perturbations singulières dans les inéquations variationnelles".
Publ. Math. Université de Lille I, n°99 (1976).
- [14] F. MIGNOT - J.P. PUEL : "Inéquations variationnelles et quasi-variationnelles hyperboliques du 1er ordre".
J. Math. pures et appl. 55, 1976 p. 353.
- [15] M. PIERRE : "Equations d'évolution non linéaires, Inéquations variationnelles et potentiels paraboliques".
Thèse - Université de Paris VI (1979).

* *
*

