

50376
1981
176-1

N° d'ordre : 531

50376
1981
176-1

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

André DRAUX

**POLYNOMES ORTHOGONAUX FORMELS.
APPLICATIONS.**

TOME 1



Soutenue le 7 décembre 1981 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury

P. POUZET
J. MEINGUET
H. VAN ROSSUM
P. HENRICI
C. BREZINSKI
P. MARONI

Président
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Membre Invité

PROFESSEURS 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean	Physique
M. BONNOT Ernest	Biologie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M. DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M. DURCHON Maurice	Biologie
M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. HEUBEL Joseph	Chimie
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LANSRAUX Guy	Physique
M. LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
M. LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie

M. MAILLET Pierre	S.E.S.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

M. AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M. ANTOINE Philippe	Mathématiques
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOBE Bernard	S.E.S.
M. BODART Marcel	Biologie
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement)	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.

M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique
M. DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M. DYMENT Arthur	Mathématiques
M. FLAMME Jean-Marie	E.U.D.I.L.
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. GERVAIS Michel	S.E.S.
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HANGAN Théodore	Mathématiques
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LAURENT François	I.E.E.A.
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques

M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LENTACKER Firmin	G.A.S.
M. LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M. LHENAFF René	G.A.S.
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M. LOUAGE Francis	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mlle MARQUET Simone	Mathématiques
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M. MONTEL Marc	Physique
Mme NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mlle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RICHARD Alain	Biologie
M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	M.P.A.
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M. SCHAMPS Joël	Physique
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mlle SPIK Geneviève	Biologie
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole

M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. WALLART Francis	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

M. TOP Gérard	S.E.S.
M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. DUVEAU Jacques	S.E.S.
M. HOFLACK Jacques	I.P..A
M. LATOUCHE Serge	S.E.S.
M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M. OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Je remercie vivement Monsieur P. Pouzet, Professeur à l'Université de Lille I, qui me fait l'honneur de présider cette thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur C. Brezinski, Professeur à l'Université de Lille I, d'avoir suivi mon travail avec intérêt, et de m'avoir guidé par ses conseils et sa grande connaissance de la bibliographie concernant ce sujet.

Je suis très honoré de la présence de Messieurs P. Henrici, Professeur à l'Université de Zürich, J. Meinguet, Professeur à l'Université de Louvain la Neuve et H. Van Rossum, Professeur à l'Université d'Amsterdam qui ont accepté de s'intéresser à ce travail et de le juger.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur P. Maroni, Maître de recherches C.N.R.S. à l'Université de Paris VI, qui s'intéressant aux polynômes orthogonaux a bien voulu accepter de faire partie de mon jury.

Je tiens à remercier également Madame Françoise Tailly et Mademoiselle Bénédicte Fiévet qui ont avec gentillesse et rapidité tapé cette thèse, et à Monsieur et Madame Debock qui avec les mêmes qualités l'ont imprimée.

TABLE DES MATIERES

- * -

	Pages
INTRODUCTION	11
1 - POLYNOMES ORTHOGONAUX	13
1.1 - Définition	16
1.2 - Etude du système linéaire (M_p) . Déterminants de Hankel	17
1.3 - Existence des polynômes orthogonaux	48
1.4 - Relation de récurrence	66
1.5 - Propriétés des zéros des polynômes. Détection des blocs de zéros dans la table H	89
1.6 - Fonctionnelle linéaire liée à deux polynômes premiers entre eux	97
1.7 - Formalisme matriciel	102
2 - SYSTEMES ADJACENTS DE POLYNOMES ORTHOGONAUX	109
2.1 - Propriétés générales des systèmes adjacents de polynômes orthogonaux	110
2.2 - Algorithme "qd"	150
2.3 - Polynômes orthogonaux réciproques	181
2.4 - Forme progressive de l'algorithme "qd"	183
3 - FONCTIONNELLES LINEAIRES PARTICULIERES	191
3.1 - Fonctionnelles linéaires semi-définies positives	195
3.2 - Fonctionnelles linéaires $H^{(i)}$ semi-définies positives	214
3.3 - Fonctionnelles linéaires lacunaires d'ordre $s+1$	226
3.4 - Fonctions de poids polynomiales	244
4 - RELATIONS TOUS AZIMUTS	289
4.1 - Relations avec les déterminants de Hankel	293
4.2 - Déplacements diagonaux	310
4.3 - Polynômes $W_i^{(m)}(x)$	320
4.4 - Déplacements antidiagonaux	336
4.5 - Déplacements horizontaux dans la table P	346
4.6 - Polynômes semi-orthogonaux	356
4.7 - Polynômes orthogonaux sur le cercle	366
4.8 - Déplacements verticaux dans la table P	385
4.9 - Algorithmes de calcul des polynômes orthogonaux réguliers	405

	Pages
5 - QUADRATURES DE GAUSS	419
5.1 - Généralités	421
5.2 - Cas d'une fonctionnelle linéaire semi-définie positive	432
5.3 - Cas d'une fonctionnelle linéaire lacunaire d'ordre $s+1$	436
5.4 - Cas d'une fonction de poids de la forme $x\omega(x)$	447
6 - APPROXIMANTS DE PADÉ EN DEUX POINTS	453
6.1 - Définition des approximants de Padé en deux points	456
6.2 - Existence et unicité des approximants de Padé en deux points. Etude des blocs	462
6.3 - Relations de récurrence	491
6.4 - Propriétés des zéros des polynômes $P_{k,m}(x)$ et $Q_{k,m}(x)$	526
6.5 - Table F_2 normale. Table F_2 non normale	546
6.6 - Cas des fonctionnelles linéaires définies positives	547
6.7 - Etude de l'erreur	552
6.8 - Polynômes de Laurent orthogonaux	562
6.9 - Détermination des tables P_2 et Q_2	565
7 - APPROXIMANTS DES SERIES DE FONCTIONS	567
7.1 - Définition	569
7.2 - Existence et unicité des approximants	578
7.3 - Expression de l'erreur et théorèmes de convergence	582
7.4 - Propriétés des approximants des séries de fonctions	587
7.5 - Approximants de type exponentiel	595
7.6 - Existence et unicité des approximants de type exponentiel	599
7.7 - Combinaisons linéaires d'exponentielles	602
7.8 - Problèmes d'intégration et de dérivation	609
CONCLUSION - PROBLEMES OUVERTS	615
ANNEXE	617
BIBLIOGRAPHIE	635
INDEX	645

INTRODUCTION

Nos recherches ont débuté par l'étude des approximations de type exponentiel. Dès que le problème de l'existence et de l'unicité est abordé, apparaissent les polynômes orthogonaux par rapport à une fonctionnelle linéaire déduite de la série formelle que l'on cherche à approcher. C'est ainsi que nous avons été amenés à nous intéresser aux propriétés satisfaites par ces polynômes. Les cas où la fonctionnelle linéaire est définie ou définie positive avaient été suffisamment étudiés pour ne pas retenir notre attention. Restait le cas d'une fonctionnelle linéaire absolument quelconque. C'est à l'étude de ce cas général qu'est consacré ce mémoire.

Tout d'abord se pose un problème de sémantique. Comment appeler ces polynômes qui présentent des singularités. C. Brezinski [6] a qualifié de généraux les polynômes orthogonaux définis à partir d'une fonctionnelle linéaire c . Mais par la suite il nous a fait partager son sentiment que ce terme n'était pas bien approprié. En effet on voit souvent apparaître dans la littérature le terme de polynômes orthogonaux généraux pour des catégories de polynômes obtenus à partir d'une fonctionnelle linéaire définie positive. Il nous avait conseillé de les appeler polynômes orthogonaux formels, parce qu'ils sont définis formellement à partir des moments c_i de la fonctionnelle c . Nous nous sommes ralliés à ce vocable. Le présent mémoire s'intitule donc "POLYNOMES ORTHOGONAUX FORMELS - APPLICATIONS".

Notre étude a été guidée par l'idée suivante. Dans le cas normal H. Van Rossum a relié dans sa thèse [48] la théorie des polynômes orthogonaux aux approximants de Padé. C. Brezinski pensait que cette liaison devait exister dans le cas général. Son livre, "PADE-TYPE APPROXIMATION AND GENERAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS" [6] a fait cette connexion dans le cas d'une fonctionnelle linéaire définie. Cet ouvrage a donc essentiellement servi de point de départ à notre travail. Il nous a évité de nombreuses recherches dans l'ensemble des articles éparés dans les revues et nous lui avons emprunté de nombreuses idées directrices.

Ce mémoire se décompose en deux parties. La première de quatre chapitres est consacrée aux polynômes orthogonaux, à leurs propriétés. Notre but a été de définir au mieux la table dans laquelle sont disposés les polynômes, d'étudier les blocs qui y apparaissent, d'obtenir des relations de récurrence dans toutes les directions et d'en déduire des algorithmes permettant le calcul des polynômes. Pour y parvenir nous avons parfois eu à étudier de nouvelles formes d'orthogonalité (polynômes W , polynômes semi-orthogonaux). Nous donnons également des propriétés sur quelques fonctionnelles linéaires particulières.

La seconde partie de trois chapitres est réservée aux applications. La principale est celle des quadratures de Gauss. Elle ouvre la voie aux approximations des séries de fonctions. Une d'entre elles retiendra notre attention. Il s'agit des approximants de type exponentiel. Enfin nous avons appliqué la théorie des polynômes orthogonaux et de leurs associés au problème des approximants de Padé en deux points. Cette façon de voir entièrement originale permet de résoudre ce problème dans le cas le plus général où il peut y avoir des blocs.

Nous ne détaillons pas davantage, les résumés en tête de chaque chapitre sont faits pour cela.

En conclusion nous espérons que notre mémoire servira de complément au livre de C. Brezinski. Nous pensons avoir fait la connexion entre la théorie des polynômes orthogonaux formels et les approximants des séries de fonctions et en particulier les approximants de Padé.

POLYNOMES ORTHOGONAUX

- * -

Ce premier chapitre fournit les propriétés essentielles des polynômes orthogonaux par rapport à une fonctionnelle linéaire c quelconque.

La première section donne la définition générale du problème de la recherche des polynômes orthogonaux. Le système linéaire (M_i) satisfait par les coefficients de ces polynômes a une matrice de Hankel, et l'existence des polynômes orthogonaux est liée à l'existence des solutions de ce système. C'est pour cette raison que nous étudions très en détail dans la deuxième section les propriétés des déterminants de Hankel et des systèmes linéaires dont les matrices sont de Hankel. C'est à l'étude de leur rang que nous nous sommes essentiellement consacrés.

L'existence des polynômes orthogonaux est abordée dans la troisième section. Nous nous sommes placés dans le cas le plus général où la fonctionnelle linéaire c est quelconque, et où, par conséquent, les systèmes (M_i) réguliers fournissent les polynômes orthogonaux réguliers qui sont uniques dès que le coefficient de plus haut degré est fixé. Les systèmes (M_i) singuliers compatibles donnent les polynômes orthogonaux singuliers qui se déduisent du polynôme orthogonal régulier qui les précède en multipliant ce dernier par un polynôme arbitraire de degré complémentaire. Bien évidemment il n'y a plus unicité. Enfin les systèmes (M_i) singuliers incompatibles n'ont pas de solutions. Par conséquent

s'il existe des systèmes (M_i) de cette dernière catégorie il n'y a pas de suite infinie de polynômes orthogonaux de degré croissant d'une unité de l'un à l'autre, et donc les polynômes orthogonaux ne forment plus une base de l'espace vectoriel P des polynômes réels. Pour compléter cet ensemble et former une base, nous définissons des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre j , qui découlent des systèmes linéaires singuliers compatibles. Ils satisfont uniquement les équations compatibles du système (M_i) . Cette notion se trouve déjà dans les articles de J.A. Shohat [50a] et A. Ronveaux [47].

Des propriétés sont également données pour les polynômes associés aux polynômes orthogonaux.

La base définie ci-dessus servira à démontrer dans la quatrième section l'existence d'une relation de récurrence entre trois polynômes orthogonaux réguliers successifs. Nous établirons des relations permettant le calcul des coefficients de la relation de récurrence. Puis nous donnerons une expression plus condensée de cette relation, qui se trouve également dans l'article de G.W. Struble [56].

Pour terminer cette section nous montrons que la pseudo-orthogonalité définie par J.S. Dupuy [15] est en fait un cas particulier de quasi-orthogonalité.

Dans la cinquième section nous mettrons en évidence des propriétés des zéros des polynômes orthogonaux réguliers et de leurs associés. Nous généralisons la relation de Christoffel Darboux. Nous exposons également une méthode simple de détection des blocs de zéros dans la table H en utilisant les polynômes orthogonaux déjà calculés et la fonctionnelle c .

Dans la sixième section nous résolvons le problème de l'existence et du calcul des moments de la fonctionnelle linéaire liée à deux polynômes donnés premiers entre eux. Nous désirons qu'ils soient orthogonaux par rapport à cette fonctionnelle linéaire. Le théorème qui en découle est une généralisation du théorème de J. Favard [17].

Enfin la dernière section donne à la théorie des polynômes orthogonaux un formalisme matriciel. Dans le cas normal les polynômes orthogonaux et leurs propriétés sont reliés aux matrices tridiagonales, que l'on peut rendre symétriques par un choix approprié de la normalisation des polynômes. Dans le cas général la matrice comprend des blocs tridiagonaux séparés par une ligne faisant intervenir des coefficients en deçà des trois diagonales centrales. Nous trouvons encore que les valeurs propres de cette matrice sont les zéros des polynômes orthogonaux.

D'autre part, si M est la matrice de Hankel $(c_{i+j})_{i,j=0}^{\infty}$, nous donnons une décomposition générale de cette matrice dans le cas où tous les déterminants H_i ne sont pas tous non nuls.

1.1 DEFINITION.

Soit P l'espace vectoriel des polynômes réels. Soit $\{c_i\}$, pour $i \in \mathbb{N}$, une suite de nombres réels. Nous pouvons définir une fonctionnelle linéaire c sur P par la relation

$$c(x^i) = c_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Nous cherchons les polynômes $P_k(x)$ orthogonaux par rapport à la fonctionnelle c , c'est-à-dire tels que : $\deg P_k = k$ et

$$c(x^i P_k(x)) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k-1$$

Si $P_k(x) = \sum_{j=0}^k \lambda_{j,k} x^{k-j}$ on obtient le système linéaire suivant :

$$\sum_{j=0}^k \lambda_{j,k} c_{i+k-j} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k-1$$

Notations.

* Nous appellerons système (M_k) le système linéaire qui donne les $\lambda_{j,k}$. Ce système est tel que $\lambda_{0,k}$ peut être fixé puisqu'il est non nul.

* Nous appellerons ligne h , la ligne de numéro h , la numérotation commençant à 0. C'est donc la $(h+1)^{\text{ème}}$ ligne, si on effectue le comptage des lignes.

* Idem pour les colonnes.

1.2 ETUDE DU SYSTEME LINEAIRE (M_p) . DETERMINANTS DE HANKEL.RAPPELS.

Avant d'aborder les démonstrations nous faisons quelques rappels d'algèbre linéaire relatifs à la terminologie et aux propriétés employées.

On considère un système linéaire écrit sous la forme $Ax=b$, où A est une matrice carrée $n \times n$ et x et b sont des vecteurs de \mathbb{R}^n .

a). Les quatre propositions suivantes sont équivalentes.

- i) Le système est indépendant.
- ii) $\det A \neq 0$.
- iii) Aucune colonne de A n'est combinaison linéaire d'autres colonnes de A .
Idem pour toute ligne de A .
- iv) Le rang du système est n .

b). Les quatre propositions suivantes sont équivalentes.

- i) Le système est lié.
- ii) $\det A = 0$.
- iii) Au moins une colonne de A est combinaison linéaire d'autres colonnes de A .
Idem pour au moins une ligne de A . Cette colonne ou cette ligne est alors dite liée aux autres.
- iv) Le rang du système est strictement inférieur à n .

c). Le mineur principal d'ordre h est le déterminant extrait de A formé des h premières lignes et des h premières colonnes.

- d). Lorsqu'un système est lié, on cherche le déterminant non nul extrait de A d'ordre maximal.

Soit r son ordre. Alors r est le rang du système. Les lignes correspondant à ce déterminant de rang r forment le système des équations principales ; les autres sont les équations non principales. Les colonnes correspondant à ce déterminant de rang r donnent les inconnues principales, les autres sont les inconnues non principales.

Le système des équations principales est formé de lignes indépendantes. Les équations non principales sont liées aux précédentes. Nous dirons qu'il s'agit des lignes liées sans préciser davantage si aucune confusion n'est possible.

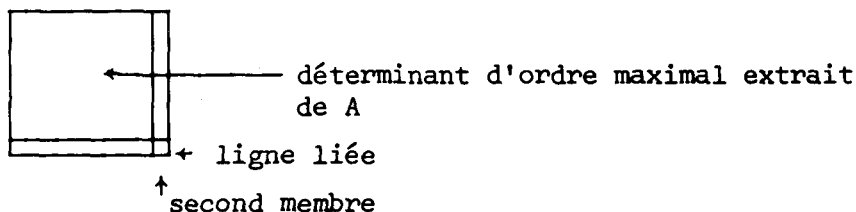
Une méthode algorithmique pour trouver les équations principales peut être la suivante. On regarde si la seconde ligne du système est liée à la première : si oui, c'est une équation non principale ; sinon c'est une équation principale. On regarde si la troisième ligne est liée au système formé des équations principales déjà trouvées. Si oui cette équation est non principale, sinon c'est une équation principale, et ainsi de suite.

- e). Lorsqu'un système est lié et lorsqu'on a déterminé son rang, on dit qu'il est compatible,

si les seconds membres des équations non principales sont liés aux seconds membres des équations principales avec la même relation qui lie les équations non principales aux équations principales.

Le système est dit incompatible, s'il n'est pas compatible.

- f). Quand le système est lié, on appelle déterminant caractéristique le déterminant formé à partir du déterminant d'ordre maximal extrait de A, des éléments du second membre correspondant aux lignes du déterminant d'ordre maximal, et des éléments d'une ligne liée correspondant aux colonnes du déterminant d'ordre maximal et au second membre.



g). Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

- i) Le système est lié compatible.
- ii) Tous les déterminants caractéristiques correspondant à toutes les lignes liées sont nuls.

h). Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

- i) Le système est lié incompatible.
- ii) Il existe des déterminants caractéristiques non nuls. Les lignes liées correspondantes sont dites incompatibles.

Nous allons étudier maintenant les propriétés du système linéaire (M_p) . La matrice de ce système est une matrice de Hankel. Nous serons donc amenés à utiliser les déterminants de Hankel. Nous adopterons la notation suivante :

$$H_k(c_i) = H_k^{(i)} = \begin{vmatrix} c_i & c_{i+1} & \dots & c_{i+k-1} \\ c_{i+1} & c_{i+2} & \dots & c_{i+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i+k-1} & c_{i+k} & \dots & c_{i+2k-2} \end{vmatrix}$$

Lemme 1.1.

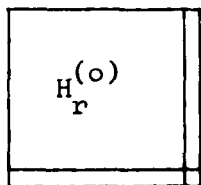
On prend un système (M) d'ordre infini. On suppose $H_r^{(o)} \neq 0$, $H_{r+1}^{(o)} = 0$, les $(r+1)$ premières lignes indépendantes.

Alors, il existe un déterminant d'ordre $(r+1)$ non nul formé des r premières colonnes et d'une colonne supplémentaire différente de la $(r+1)^{\text{ème}}$.

Démonstration.

$H_r^{(o)} \neq 0$ et $H_{r+1}^{(o)} = 0 \Rightarrow$ Il existe une relation entre la $(r+1)^{\text{ème}}$

ligne de $H_{r+1}^{(0)}$ et les r premières. Comme les $(r+1)$ premières lignes de (M) sont indépendantes, il existe au moins une colonne pour laquelle la relation précédente n'est pas vérifiée. On ajoute cette colonne aux r premières pour former un déterminant d'ordre $(r+1)$.



On considère la $(r+1)^{\text{ème}}$ ligne avec les r précédentes en utilisant la relation qui existe pour $H_{r+1}^{(0)}$. La $(r+1)^{\text{ème}}$ ligne est nulle, sauf le dernier terme qui vaut u .

Ce déterminant d'ordre $(r+1)$ vaut donc $u H_r^{(0)} \neq 0$.

Lemme 1.2.

On prend un système (M) d'ordre infini. On suppose $H_r^{(0)} \neq 0$, $H_{r+1}^{(0)} = 0$. Si tous les déterminants d'ordre $(r+1)$ formés des r premières colonnes et d'une colonne supplémentaire $(l+1)$ sont nuls, quel que soit $l \geq r$, (on ne prend les éléments que dans les $(r+1)$ premières lignes), alors la $(r+1)^{\text{ème}}$ ligne est liée aux r précédentes.

Démonstration.

Si la $(r+1)^{\text{ème}}$ ligne était indépendante, d'après le lemme 1.1, il existerait un déterminant d'ordre $(r+1)$ non nul. Or ils sont tous nuls. Donc cette ligne est liée aux r précédentes.

cqfd.

Propriété 1.1.

Sous les hypothèses du lemme 1.1, on cherche la première colonne $h-1$, $h > r$, qui donne le déterminant d'ordre $(r+1)$ non nul formé à partir de $H_r^{(0)}$, des r éléments de la ligne r et de cette colonne $h-1$. Alors $H_h^{(0)} \neq 0$ et $H_i^{(0)} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $r+1 \leq i \leq h-1$.

Démonstration.

$$H_h^{(o)} = \begin{array}{cccccccc} c_0 & c_1 & \dots & c_{r-1} & c_r & \dots & \dots & c_{h-1} \\ & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & c_1 & & & & & & \\ & \vdots & & & & & & \\ c_{r-1} & \dots & \dots & c_{2r-2} & c_{2r-1} & \dots & \dots & c_{h+r-2} \\ & & & & & & & \\ c_r & \dots & \dots & c_{2r-1} & c_{2r} & \dots & \dots & c_{h+r-1} \\ & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & & & \\ c_{h-1} & \dots & \dots & c_{h+r-2} & c_{h+r-1} & \dots & \dots & c_{2h-2} \end{array}$$

$H_r^{(o)} \neq 0$ et $H_{r+1}^{(o)} = 0$ entraînent qu'il existe une relation entre la $(r+1)^{ème}$ ligne de $H_{r+1}^{(o)}$ et les r premières. On applique cette relation à l'ensemble des termes de la $(r+1)^{ème}$ ligne. Puisque les hypothèses du lemme 1.1 sont vérifiées, les éléments de la colonne h ne satisfont pas cette relation. On a donc :

$$c_{r+j} = \sum_{s=0}^{r-1} \gamma_s c_{j+s} \quad \forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq h-2$$

Pour $j = h-1$ on a :

$$u = c_{r+h-1} - \sum_{s=0}^{r-1} \gamma_s c_{s+h-1} \neq 0$$

On part de la ligne $(h-1)$ que l'on combine avec les r lignes précédentes à l'aide des coefficients γ_s ; les r premiers termes sont nuls, le $(r+1)^{ème}$ vaut u , les suivants n'interviennent pas dans la démonstration.

On recommence la même opération sur la ligne (h-2) et les r précédentes. Les (r+1) premiers termes sont nuls et le (r+2)^{ème} vaut u. Et ainsi de suite jusqu'à la ligne r qui devient nulle sauf le dernier terme qui vaut u.

$$H_h^{(o)} = \begin{array}{|c|c|} \hline H_r^{(o)} & \phantom{H_r^{(o)}} \\ \hline 0 & \begin{array}{c} o \\ \text{---} \\ u \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} o \\ r-1 \\ r \\ h-1 \end{array} \quad H_h^{(o)} = (-1)^{(h-r)} \frac{(h+3r-1)}{2} u^{h-r} \cdot H_r^{(o)} \neq 0$$

Tous les mineurs principaux $H_i^{(o)}$, $i \in \mathbb{N}$, $r+1 \leq i \leq h-1$ ont une ligne r composée de 0. Ils sont donc tous nuls.

cqfd.

Remarque : dans toute la suite la démonstration utilisée dans la propriété 1.1 pour mettre le déterminant $H_{k+1}^{(o)}$ sous la forme précédente sera fréquemment utilisée. On se contentera toujours de dire "en utilisant une méthode analogue à celle de la propriété 1.1" sans la détailler à nouveau.

Corollaire 1.1.

Si on a $H_r^{(o)} \neq 0$, $H_i^{(o)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $r+1 \leq i \leq h-1$ et $H_h^{(o)} \neq 0$, la colonne (h-1) est la première colonne qui associée à $H_r^{(o)}$ et à la ligne r donne un déterminant d'ordre (r+1) non nul.

Démonstration.

D'après la propriété 1.1 la première colonne $k-1 \geq r$ est telle que $k \geq h$, sinon on trouverait $H_k^{(o)} \neq 0$ pour $k < h$.

De même on ne peut avoir $k > h$, sinon $H_i^{(0)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$,
 $h \leq i \leq k-1$.

cgfd.

Lemme 1.3. (Gantmacher - Vol I - p. 339 - édition anglaise).

Si les r premières lignes sont indépendantes et les $(r+1)$ premières sont liées, alors le mineur principal $H_r^{(0)} \neq 0$.

Nous étudions maintenant le cas d'un système (M_p) de rang strictement inférieur à p . On désire repérer les lignes indépendantes dans leur ensemble, ou ce qui revient au même de repérer les lignes qui leur sont liées. L'idée directrice est le procédé algorithmique vu dans les rappels (d).

Corollaire 1.2.

Dans un système (M_p) de rang strictement inférieur à p les lignes liées sont consécutives.

Démonstration.

Supposons que les h premières lignes soient indépendantes, que les $(k-h-1)$ suivantes soient liées aux h premières, que la $k^{\text{ème}}$ soit indépendante.

Montrons que les dernières sont alors toutes indépendantes, ce qui démontrera bien, qu'il n'existe qu'un seul groupe de lignes liées consécutives.

La ligne $(k-2)$ étant liée aux h premières lignes on a une relation :

$$c_{k+j-2} = \sum_{s=0}^{h-1} \gamma_s \cdot c_{j+s}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq p-1$$

On a une autre relation pour la ligne h qui est liée aux h premières lignes.

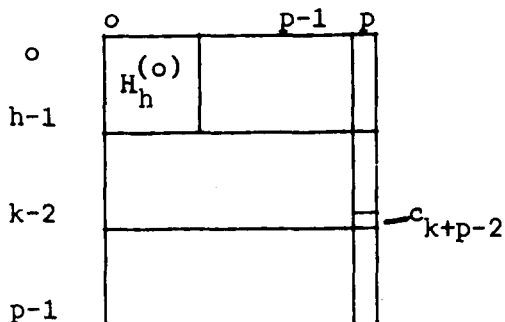
$$c_{h+j} = \sum_{s=0}^{h-1} \eta_s c_{j+s}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq p-1$$

Montrons que si la ligne (k-1) n'est pas liée aux h premières, alors le terme de la dernière colonne ne satisfait pas la relation que satisfont tous les autres termes de la ligne avec les h premières. En effet en prenant la ligne (k-2) qui est liée aux h premières, on a en ne considérant que les (p-1) derniers termes de cette ligne :

$$\begin{aligned} c_{k+j-1} &= \sum_{s=0}^{h-1} \gamma_s c_{s+1+j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq p-2 \\ &= \gamma_{h-1} c_{h+j} + \sum_{s=0}^{h-2} \gamma_s c_{s+j+1} \\ &= \gamma_{h-1} \sum_{i=0}^{h-1} \eta_i c_{j+i} + \sum_{s=0}^{h-2} \gamma_s c_{s+j+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{h-1} \rho_\ell c_{j+\ell} \quad \forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq p-2 \end{aligned}$$

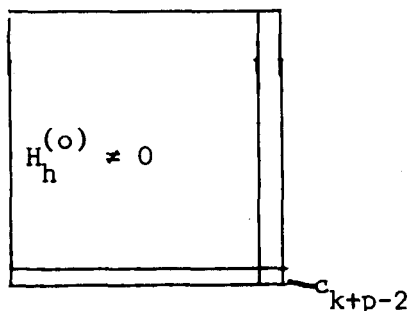
avec $\rho_0 = \gamma_{h-1} \eta_0$ et $\rho_\ell = \gamma_{\ell-1} + \gamma_{h-1} \eta_\ell, \forall \ell \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq h-1$

Ce qui entraîne que les (p-1) premiers termes de la ligne (k-1) sont liés aux termes des h premières. Comme ces lignes sont indépendantes le dernier terme c_{k+p-2} ne satisfait pas cette relation. On a :



Montrons qu'il n'existe plus de ligne liée après la ligne (k-2) et que par conséquent il n'y aura plus d'autre ligne incompatible.

Alors le déterminant caractéristique suivant est non nul.



Si on considère le système (M_{p+1}) , en appliquant le corollaire 1.2 toutes les lignes $j, \forall j \in \mathbb{N}, k-1 \leq j \leq p-1$ sont indépendantes.

cqfd.

Corollaire 1.4.

Si le système (M_p) est de rang $r < p$ et compatible, alors les r premières lignes sont indépendantes.

Démonstration.

Il revient au même de montrer que toutes les lignes finales sont liées. On suppose que la ligne (k-2) soit la dernière ligne liée aux h premières avec $k-2 < h-1$. Elle est compatible, donc elle est liée également aux h premières dans le système (M_{p+1}) . Donc les p premiers termes de la ligne k sont liés aux termes des h premières lignes. La ligne k du système (M_p) est liée aux h premières.

cqfd.

Propriété 1.2. (Th. 7 - p. 202 - Gantmacher - Tome 2 - Version française).

Un système (M_∞) est de rang fini si et seulement si une ligne est liée aux précédentes.

Corollaire 1.5.

Si le système (M_p) est de rang $r < p-1$, non compatible, alors il est impossible que les r premières lignes soient indépendantes et la $(r+1)^{\text{ème}}$ ligne soit incompatible.

Démonstration.

Supposons que ce soit vrai, alors, d'après le corollaire 1.3, puisque la ligne r est la dernière des lignes liées, les suivantes sont indépendantes. Le rang est alors supérieur à r .

cqfd.

Corollaire 1.6.

Si le système (M_p) est de rang $r < p$ non compatible et si les r premières lignes sont indépendantes, la ligne incompatible est la dernière.

C'est une conséquence directe des corollaires 1.2 et 1.3.

Nous rappelons la propriété classique suivante appliquée au système (M_p) .

Propriété 1.3.

On considère un système (M_p) . Si les r premières lignes sont indépendantes, les $(r+1)$ premières liées, une condition nécessaire et suffisante pour que le système des $(r+1)$ lignes soit compatible est que le

déterminant caractéristique formé à partir du mineur principal $H_r^{(o)}$ soit nul.

Démonstration.

Si le système est compatible la ligne r est liée aux r premières lignes, y compris le terme du second membre. Donc le déterminant caractéristique formé à partir du mineur principal $H_r^{(o)}$ est nul.

Réciproquement la ligne r étant liée aux r premières lignes, il y a donc une relation entre les éléments de la ligne r et ceux des r premières. On considère le déterminant caractéristique qui est nul. On combine les lignes de celui-ci grâce à la relation précédente. La dernière ligne obtenue est nulle, y compris le terme u de la dernière colonne, sinon le déterminant vaudrait $u \cdot H_r^{(o)} \neq 0$.

cqfd.

Pour les deux propriétés et les deux corollaires suivants on considère un système (M_p) de rang $r < p$ et non compatible. On suppose que les h premières lignes sont indépendantes, les $(k-h-1)$ suivantes sont liées aux h premières. En fait $k-h-1 = p-r$.

On examine les propriétés des systèmes (M) d'ordres supérieurs et inférieurs à (M_p) .

Propriété 1.4.

Si on prend un système (M_{p+1}) alors son rang est $r+2$. Il est non compatible si $r < p-1$, sinon il est de rang maximum.

Démonstration.

En effet la ligne $k-2$ étant non compatible, dans le système (M_{p+1}) elle est indépendante des h premières lignes.

D'après le corollaire 1.3 toutes les suivantes sont indépendantes. Donc on a deux lignes indépendantes supplémentaires : les lignes $(k-2)$ et p . Le rang est $r+2$.

* Si $r < p-1$ on a au moins deux lignes liées consécutives, dont la ligne $k-2$ qui est incompatible.

Dans le système (M_{p+1}) la ligne $(k-3)$ est liée non compatible, sinon la ligne $(k-2)$ serait liée compatible pour (M_p) .

* Si $r = p-1$, le système (M_{p+1}) est de rang $r+2 = p+1$; donc le rang est maximal.

cqfd.

Corollaire 1.7.

Le système (M_{2p-r}) est de rang maximal $(2p-r)$.

Démonstration.

Le système (M_p) est de rang r ; il y a $(p-r)$ lignes liées. On ajoute $(p-r)$ lignes. On a un système (M_{2p-r}) et le rang devient

$$r + 2(p-r) = 2p-r.$$

cqfd.

Propriété 1.5.

- i) Si $h = r$ le système (M_{p-1}) est de rang r et compatible.
- ii) Si $h = r-1$ le système (M_{p-1}) est de rang $r-1$ et compatible.
- iii) Si $h < r-1$ le système (M_{p-1}) est de rang $r-2$ et non compatible.

Démonstration.

- i) Si $h = r$ la dernière ligne était liée incompatible. Le système (M_{p-1}) reste de même rang que (M_p) . Il est compatible.
- ii) Si $h = r-1$, la dernière ligne de (M_p) est indépendante; l'avant dernière est liée incompatible.
Le système (M_{p-1}) a une ligne indépendante en moins ; il est de rang $(r-1)$.
La ligne $(p-2)$ était liée aux h premières, donc le système (M_{p-1}) est compatible.
- iii) Si $h < r-1$, les deux dernières lignes au moins de (M_p) sont indépendantes. La ligne $(k-2)$ est liée aux h premières et non compatible. La ligne $(k-1)$ est indépendante.
Donc dans le système (M_{p-1}) on supprime la dernière ligne de (M_p) qui est indépendante et la ligne $(k-1)$ devient liée incompatible.

cqfd.Corollaire 1.8.

- i) Si $h < r-1$ le système $(M_{p-\text{entier}(\frac{r+1-h}{2})})$ est de rang h .
- ii) Si $(r-h)$ est impair ce système est compatible.

iii) Si $(r-h)$ est pair ce système est incompatible ; alors le système $(M_{p-1-\frac{r-h}{2}})$ est de rang h compatible.

Démonstration.

- i) Quand on passe au système $(M_{p-\text{entier}(\frac{r+1-h}{2})})$ il n'y a plus de lignes indépendantes en fin du système. Donc le rang est h .
- ii) Si $(r-h)$ est impair le système $(M_{p-\text{entier}(\frac{r-h}{2})})$ a sa dernière ligne indépendante, son avant dernière liée incompatible. Il est de rang $(h+1)$. D'après la propriété 1.5 le système $(M_{p-\text{entier}(\frac{r+1-h}{2})})$ est d'ordre h et il est compatible.
- iii) Si $(r-h)$ est pair le système $(M_{p+1-\frac{r-h}{2}})$ a ses deux dernières lignes indépendantes. Donc le système $(M_{p-\frac{r-h}{2}})$ est de rang h et il est incompatible d'après la propriété 1.5.
- Mais toujours d'après la même propriété le système $(M_{p-1-\frac{r-h}{2}})$ est de rang h et compatible.

cqfd.

Nous allons démontrer une propriété très utile pour les polynômes orthogonaux.

Propriété 1.6.

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (M_p) soit de rang $r < p$ avec les h premières lignes indépendantes et les $(p-r)$ suivantes liées est que :

$$H_h^{(0)} \neq 0, H_i^{(0)} = 0, \forall i \in \mathbb{N}, h+1 \leq i \leq p.$$

Les systèmes (M_i) , $\forall i \in \mathbb{N}$, $h+1 \leq i \leq p-1$ -entier $(\frac{r+1-h}{r})$ sont liés compatibles.

Les systèmes (M_i) , $\forall i \in \mathbb{N}$, $p+1$ -entier $(\frac{r+1-h}{2}) \leq i \leq p$ sont liés incompatibles.

Le système $(M_{p\text{-entier } \frac{r+1-h}{2}})$ est lié compatible si $(r-h)$ est impair et lié incompatible si $(r-h)$ est pair.

Démonstration.

\Rightarrow A l'aide d'une démonstration analogue à la propriété 1.1 on met la matrice de (M_p) sous la forme :

0		
h-1		
	0	
h-1+p-r		
p-1	0	u

On a $H_h^{(0)} \neq 0$

$H_i^{(0)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $h+1 \leq i \leq p$, car la ligne h est composée de 0.

La compatibilité ou l'incompatibilité des systèmes (M_i) découle du corollaire 1.8.

\Leftarrow $H_h^{(0)} \neq 0$ entraîne que les h premières lignes sont indépendantes. La ligne h est liée aux h premières, sinon il existerait un déterminant d'ordre $(h+1)$ non nul formé à partir de $H_h^{(0)}$, de la ligne h et d'une colonne $k-1$ avec $h+1 \leq k-1 \leq p-1$. Alors $H_k^{(0)}$ serait non nul d'après la propriété 1.1, ce qui est contraire aux hypothèses.

D'après le corollaire 1.2 les lignes liées étant consécutives, on suppose que les $(p-k)$ lignes qui suivent les h premières sont liées. On a donc le rang de (M_p) qui est égal à k.

Or les conditions sur la compatibilité ou l'incompatibilité des (M_i) et le corollaire 1.8 montrent que si on applique la méthode de la propriété 1.1 on a une matrice de la forme précédente. Le rang vaut donc $r = k$.

cgfd.

Dans ce qui suit, nous examinons le cas où le système (M_p) est homogène, et le cas où le système (M_p) est de rang r et le système (M_r) homogène.

Propriété 1.7.

Soit un système (M_p) de rang p et homogène. On suppose $H_{p+1}^{(o)} = 0$. On cherche la première colonne $h-1$ telle que le déterminant formé à partir de $H_p^{(o)}$, de la ligne p et de cette colonne $h-1$ soit différent de 0.

Alors le système (M_h) est de rang h non homogène.

Démonstration.

On sait d'après la propriété 1.1 que $H_h^{(o)}$ est non nul. Donc le système (M_h) est de rang h .

$H_p^{(o)} \neq 0$ et le système (M_p) est homogène $\Rightarrow c_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}, p \leq i \leq 2p-1$

$H_{p+1}^{(o)} = 0 \Rightarrow c_{2p} = 0$ sinon $H_{p+1}^{(o)} = c_{2p} \cdot H_p^{(o)} \neq 0$.

Soit c_{k+p-1} le premier terme différent de 0 avec $k-1 > p$. La colonne $(k-1)$ a ses p premiers termes nuls et le $(p+1)^{\text{ème}}$ vaut $c_{k+p-1} \neq 0$.

Les colonnes $j, j \in \mathbb{N}, p \leq j \leq k-2$ ont leurs $(p+1)$ premiers termes nuls.

Donc la première colonne $(h-1)$ qui donne un déterminant d'ordre $(p+1)$ non nul est cette colonne $k-1$.

Le système (M_h) est non homogène puisque c_{k+p-1} figure dans la colonne second membre.

cgfd.

Corollaire 1.9.

On suppose que le système (M_h) est de rang h et homogène. On suppose également que $H_j^{(0)} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $r+1 \leq j \leq h-1$ et que $H_r^{(0)} \neq 0$. Alors le système (M_r) est de rang r non homogène.

Démonstration.

Supposons que le système (M_r) soit homogène. Alors, d'après le corollaire 1.1, la colonne $h-1$ est celle qui donne le déterminant d'ordre $(r+1)$ non nul.

La propriété 1.7 entraîne que le système (M_h) est non homogène, ce qui est contraire aux hypothèses.

cqfd.

Propriété 1.8.

On considère un système (M_p) de rang r compatible, et on suppose que le système (M_r) est homogène.

Alors

$$c_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}, r \leq i \leq 2p-1$$

Démonstration.

Le système (M_r) est homogène $\Leftrightarrow c_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}, r \leq i \leq 2r-1$
 $H_r^{(0)} \neq 0 \Leftrightarrow c_{r-1} \neq 0$ car la diagonale non principale est composée de c_{r-1} et $H_r^{(0)} = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} (c_{r-1})^r$.

La ligne r ne peut être liée et compatible avec les r précédentes que si elle est composée de 0.

En effet on a :

$$c_{r+j} = \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_i c_{j+i}, \forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq p$$

Or

$$c_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}, r \leq i \leq 2r-1$$

$$\Rightarrow \gamma_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq r-1$$

$$\Rightarrow c_i = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, r \leq i \leq r+p.$$

On recommence le même raisonnement pour les lignes $j, j \in \mathbb{N}, r+1 \leq j \leq p-1.$

q.q.f.d.

Nous étudions à présent les propriétés de l'ensemble des déterminants de Hankel qu'il est possible d'extraire du système (M_∞) .

Définition.

On appelle table H le tableau triangulaire contenant les $H_k^{(i)}$.

$$\begin{array}{cccc}
 & & & & H_1^{(0)} \\
 & & & & | \\
 & & & & H_1^{(1)} & H_2^{(0)} \\
 & & & & | & | \\
 & & & & H_1^{(2)} & H_2^{(1)} & H_3^{(0)} \\
 & & & & | & | & | \\
 & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \diagdown
 \end{array}$$

Définition.

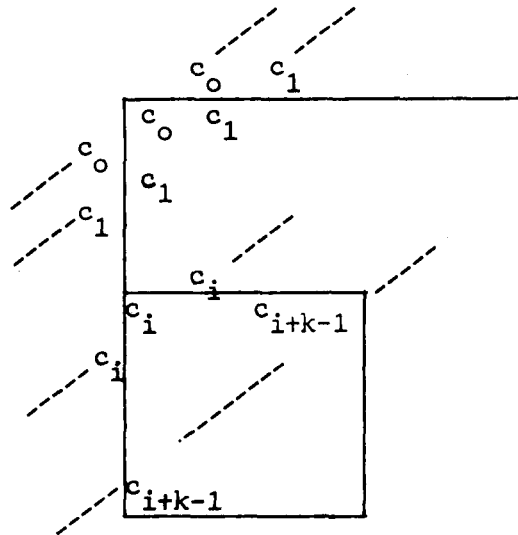
On appellera système $(M_k^{(i)})$ le système dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} c_i & \dots & c_{i+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i+k-1} & \dots & c_{i+2k-2} \end{pmatrix} \text{ et le second membre } = \begin{pmatrix} c_{i+k} \\ \vdots \\ c_{i+2k-1} \end{pmatrix}$$

Définition.

La table H sera dite normale si aucun des $H_k^{(i)}$ est nul, sinon elle sera dite non normale.

Pour faciliter les déplacements dans la table des coefficients, on supposera que les coefficients continuent de se répéter sur les anti-diagonales sortant de la matrice du système $(M_{\infty}^{(o)})$



On utilisera alors des numéros de ligne et de colonne négatifs.

Les systèmes $(M_k^{(i)})$ seront supposés positionnés à partir de la ligne i et de la colonne o .

Notre but est de montrer la possibilité d'existence de blocs carrés de zéro dans la table H en n'utilisant que des propriétés matricielles, ce qui nous permettra d'en déduire ultérieurement des propriétés pour les polynômes orthogonaux.

Nous croyons utile d'insister sur le fait que les polynômes orthogonaux sont définis par des systèmes linéaires et que toutes leurs propriétés peuvent être déduites de l'étude algébrique de ces systèmes.

Lemme 1.4.

On suppose

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{h+1}^{(k)} \neq 0 \\ H_{h+1+i}^{(k)} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq b \\ H_{h+2+b}^{(k)} \neq 0 \end{array} \right.$$

On suppose que la ligne $(k+h+1)$ du système $(M_{h+2}^{(k)})$ est combinaison linéaire des lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h$, le coefficient de cette relation qui intervient pour la ligne $(k+l)$ étant non nul.

Alors la ligne $(k+h+1)$ du système $(M_{h+1+b}^{(k)})$ est liée aux lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h$; elle est indépendante dans le système $(M_{h+2+b}^{(k)})$.

Démonstration.

L'indépendance de la ligne $(k+h+1)$ du système $(M_{h+2+b}^{(k)})$ est évidente puisque $H_{h+2+b}^{(k)} \neq 0$.

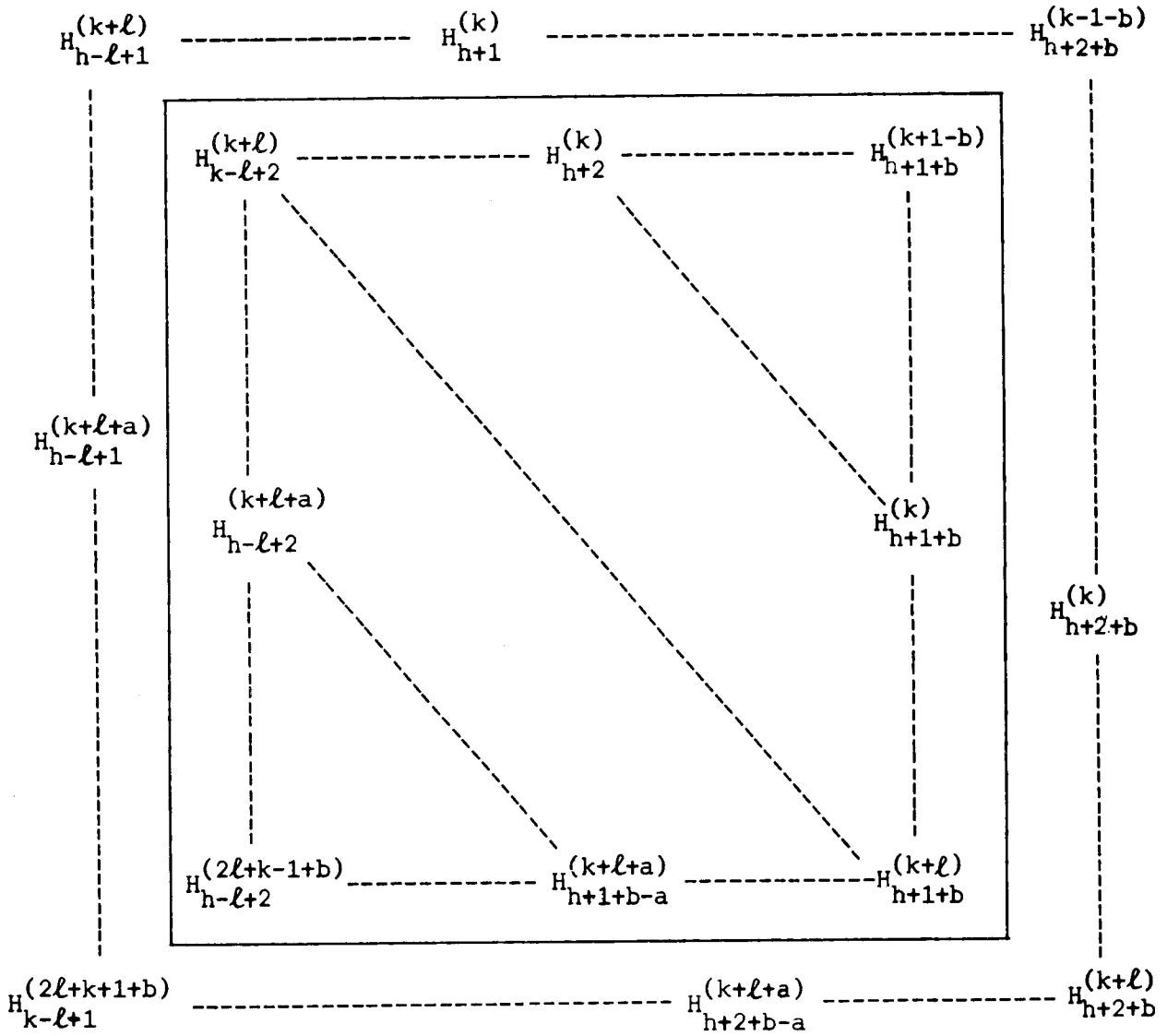
On considère le système $(M_{h+2+b}^{(k)})$ et on écrit la relation entre la ligne $(k+h+1)$ et les lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h$, qui fait intervenir les coefficients de la relation qui existe dans $(M_{h+2}^{(k)})$. On explore la ligne $(k+h+1)$ à la recherche du premier élément non nul. Puisque cette ligne dans le système $(M_{h+2}^{(k)})$ est liée aux lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h$, le premier élément non nul ne peut être que sur une colonne $s \in \mathbb{N}$, $h+2 \leq s \leq h+1+b$.

En fait il ne peut être que sur la colonne $h+1+b$. En effet, s'il figure sur la colonne $s < h+1+b$, le déterminant d'ordre $(h+2)$ formé des $(h+1)$ premières colonnes de $(M_{h+2}^{(k)})$ et de cette colonne s est non nul. Alors d'après la propriété 1.1, $H_{s-k+1}^{(k)} = 0$ ce qui est impossible d'après les hypothèses.

cqfd.

Propriété 1.9.

Les hypothèses du lemme 1.5 avec $l > 0$ entraînent :



Le carré ne contient que des zéros ; tous les éléments de la périphérie sont non nuls, c'est-à-dire $H_j^{(i)} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$,

$$h+k+2 \leq i+j \leq h+l+k+1+b \text{ et } h-l+2 \leq j \leq h+1+b$$

$$H_j^{(i)} \neq 0 \text{ pour } \left\{ \begin{array}{l} j = h-l+1 \text{ et } i \in \mathbb{N}, k+l \leq i \leq 2l+k+1+b \\ j = h+2+b \text{ et } i \in \mathbb{N}, k-1-b \leq i \leq k+l \\ i+j = k+h+1 \text{ et } i \in \mathbb{N}, k-1-b \leq i \leq k+l \\ i+j = k+l+h+2+b \text{ et } i \in \mathbb{N}, k+l \leq i \leq 2l+k+1+b \end{array} \right.$$

et réciproquement.

Remarque : si, pour $j \in \mathbb{N}$, $j \in]k, k-1-b]$, des indices j sont négatifs strictement, alors on conviendra de limiter le carré par la diagonale qui correspond à $H^{(0)}$. Si la ligne $(k+h+1)$ de $(M_{h+2}^{(k)})$ est composée de zéros, on conviendra de prendre $l = h+1$ et on limitera le carré à gauche par la verticale $H_0^{(i)}$ dont on fixera ultérieurement la valeur par convention.

Démonstration.

a) D'après le lemme 1.4 la ligne $(k+h+1)$ de $(M_{h+1+b}^{(k)})$ est liée aux lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h$. Donc tous les déterminants extraits du système $(M_{\bullet}^{(0)})$ dont $(h-l+2)$ lignes consécutives sont formées d'éléments des lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h+1$ du système $(M_{h+1+b}^{(k)})$ sont nuls.

On trouve donc tous les déterminants du carré.

b) Tout système de lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+s \leq j \leq k+h$ avec $0 \leq s \leq l$, extrait de $(M_{h+1}^{(k)})$ est formé de lignes indépendantes sinon $H_{h+1}^{(k)}$ serait nul.

La ligne $(k+h+1)$ est liée à ces lignes. Ceci reste vrai pour les mêmes lignes dans le système $(M_{h+1+b}^{(k)})$.

D'après le lemme 1.3 appliqué à $(M_{h-s+1}^{(k+s)})$ on a $H_{h-s+1}^{(k+s)} \neq 0$ pour $0 \leq s \leq \ell$.

c) Appelons L_j les lignes du système $(M_{h+1+b}^{(k)})$ pour $j \in \mathbb{N}$, $k+\ell \leq j \leq k+h+1$. On a :

$$L_{k+h+1} = \sum_{j=\ell}^h \alpha_{j+k} L_{j+k} \text{ avec } \alpha_{\ell+k} \neq 0$$

Nous considérons tous les déterminants de Hankel d'ordre $(h-\ell+1)$ composés uniquement d'éléments des lignes L précédentes.

Soit

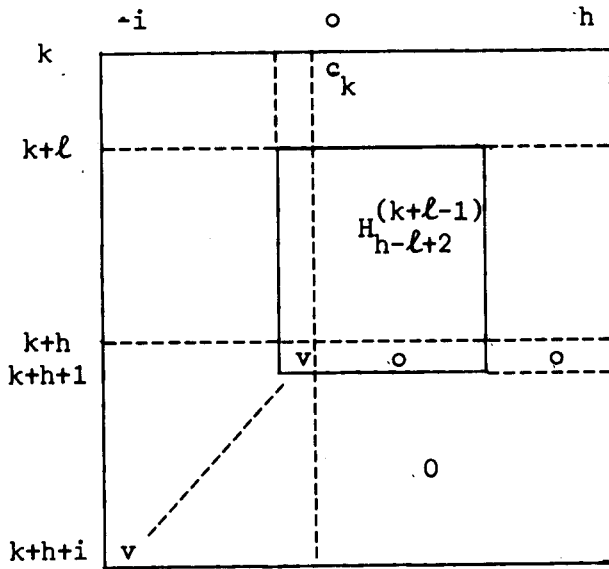
$$H_{h-\ell+1}^{(k+\ell+1+i)} = \det_{k+\ell+1+i} (L_{k+\ell+1}, L_{k+\ell+2}, \dots, L_{k+h}, L_{k+h+1})$$

un tel déterminant pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq \ell+b$. On a :

$$\begin{aligned} H_{h-\ell+1}^{k+\ell+1+i} &= \det_{k+\ell+1+i} (L_{k+\ell+1}, \dots, L_{k+h}, \sum_{j=\ell}^h \alpha_{j+k} L_{j+k}) \\ &= \alpha_{\ell+k} (-1)^{h-\ell} \det_{k+\ell+1+i} (L_{k+\ell}, L_{k+\ell+1}, \dots, L_{k+h}) \\ &= (-1)^{h-\ell} \alpha_{\ell+k} H_{h-\ell+1}^{(k+\ell+i)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq \ell+b \end{aligned}$$

Or $H_{h-\ell+1}^{(k+\ell)} \neq 0$ ce qui entraîne de proche en proche que $H_{h-\ell+1}^{k+\ell+i} \neq 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq \ell+b+1$.

d) Maintenant nous considérons les déterminants $H_{h+1+i}^{(k-i)}$, pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq b+1$.



On combine la ligne $(k+h+1)$ avec les lignes $j \in \mathbb{N}, k+l \leq j \leq k+h$ en utilisant la relation qui existe dans $(M_{h+1}^{(k)})$.

Tous les termes de la ligne $(k+h+1)$ situés sur les colonnes $s \in \mathbb{N}, 0 \leq s \leq h$, sont nuls. Le terme v sur la colonne -1 est non nul sinon $H_{h-l+2}^{(k+l-1)}$ serait nul ce qui est contraire au b).

On réitère sur les lignes $k+h+2$ à $k+h+i$ comme dans la propriété 1.1.

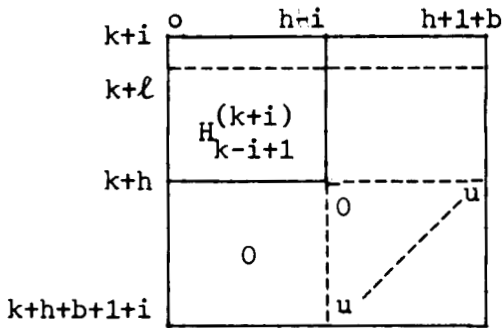
On a alors :

$$H_{h+1+i}^{(k-i)} = (-1)^{\frac{(h+1+i)(h+i)-h(h+1)}{2}} v^i H_{h+1}^{(k)} \neq 0$$

pour $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq b+1$.

e) Nous considérons les déterminants $H_{h+2+b}^{(k+i)}$ pour $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq l$.

On utilise le b) et le a). On a :



$$H_{h-i+1}^{(k+i)} \neq 0, \quad H_{h-i+2}^{(k+i)} = 0$$

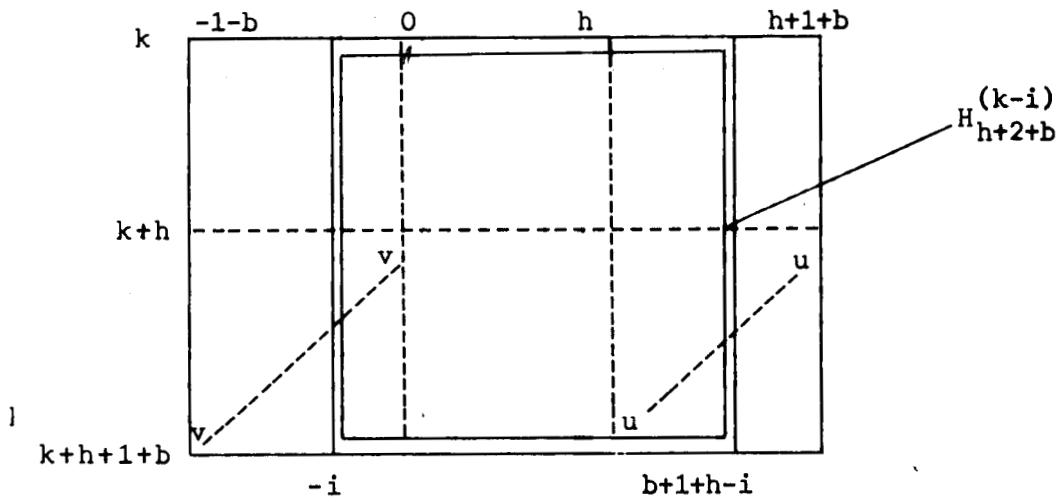
On utilise encore la relation entre les lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h+1$, de $(M_{h+1+b}^{(k)})$ de la même façon que dans la propriété 1.1.

On a :

$$H_{h+2+b}^{(k+i)} = (-1)^{\frac{(b+i)(b+1+i)}{2}} u^{b+1+i} H_{h-i+1}^{(k+i)} \neq 0$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l$.

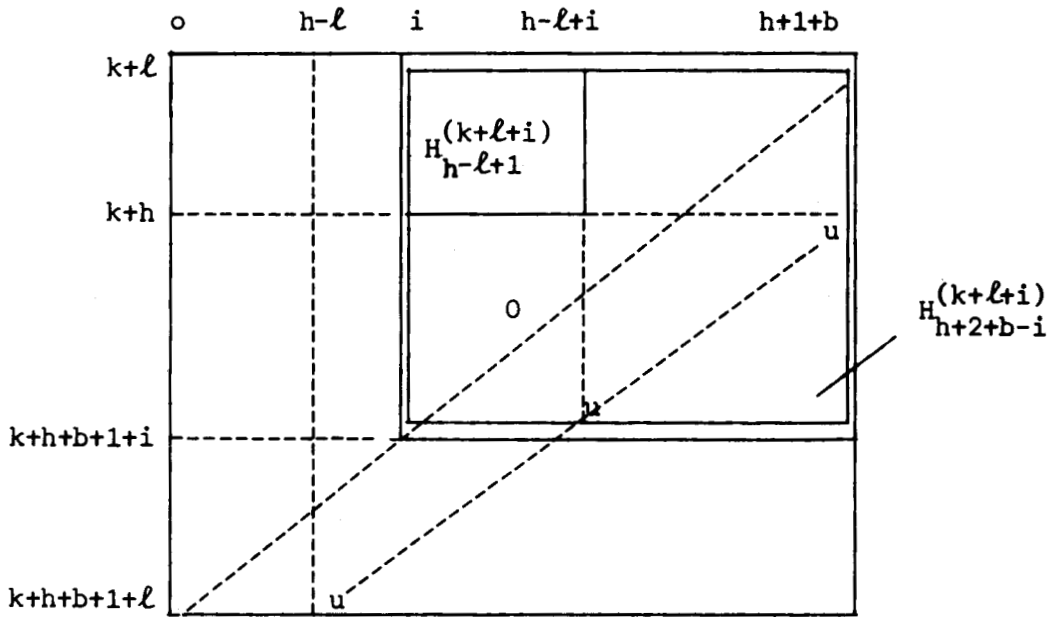
f) Nous considérons les déterminants $H_{h+2+b}^{(k-i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq b+1$. On utilise le raisonnement fait en d) et e). On obtient :



$$H_{h+2+b}^{(k-i)} = u^{(b-i+1)} v^i (-1)^{\frac{(b-i)(b-i+1)+i(2h+1+i)}{2}} H_{h+1}^{(k)} \neq 0$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq 1+b$.

g) Nous considérons $H_{h+2+b-i}^{(k+l+i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l+b+1$.
 On utilise le raisonnement fait en e) et le fait que $H_{h-l+1}^{(k+l+i)} \neq 0$



On a :

$$H_{h+2+b-i}^{(k+l+i)} = (-1)^{\frac{(b+1-i)(b-i)}{2}} u^{b+1-i} H_{h-l+1}^{(k+l+i)}$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l+b+1$

h) Réciproquement, si le carré et sa périphérie sont donnés on a bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{h+1}^{(k)} \neq 0 \\ H_{h+1+i}^{(k)} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq b \\ H_{h+2+b}^{(k)} \neq 0 \end{array} \right.$$

Puisque $H_{h+2}^{(k)} = 0$, sa ligne $(k+h+1)$ est liée aux lignes $j \in \mathbb{N}$, $k \leq j \leq k+h$.

En fait elle n'est liée qu'aux lignes $k+l \leq j \leq k+h$, sinon par le raisonnement fait pour la condition nécessaire on trouverait un carré de zéros plus grand ou plus petit entouré d'une périphérie non nulle.

cgfd.

Propriété 1.10.

On suppose que l'on a :

$$\begin{cases} H_{h-l+1}^{(k+l+a)} \neq 0 & \text{pour } a \text{ fixé } \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq l+b-1 \\ H_{h-l+1+i}^{(k+l+a)} = 0 & \text{pour } i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq l+b-a \\ H_{h+2+b-a}^{(k+l+a)} \neq 0 \end{cases}$$

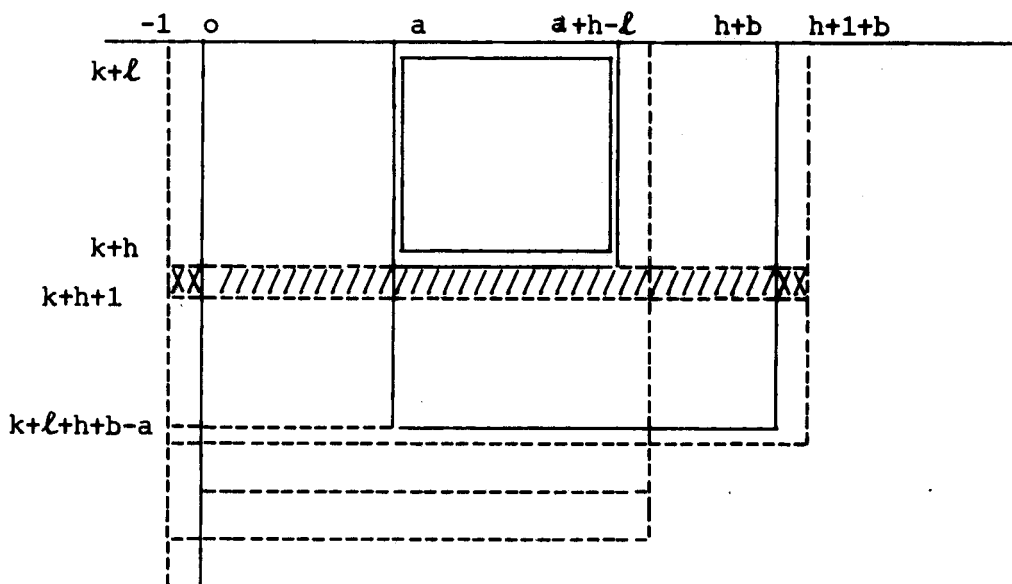
et la ligne $(k+h+1)$ du système $(M_{a+h-l+2}^{(k+l)})$ est liée aux lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h$, le coefficient de la relation intervenant pour la ligne $k+l$ étant non nul.

Enfin, la ligne $(k+h+1)$ du système $(M_{a+h-l+3}^{(k+l-1)})$ est indépendante des lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h$.

Alors on a le tableau de la propriété 1.9 et réciproquement.

Démonstration.

On supposera que le déterminant $H_{h-l+1}^{(k+l+a)}$ démarre à la ligne $k+l$ et à la colonne a .



Nous allons montrer que les hypothèses des propriétés 1.9 et 1.10 sont équivalentes.

a) Montrons tout d'abord que les hypothèses de la propriété 1.9 entraînent celles de la propriété 1.10.

Les hypothèses de 1.9 entraînent l'existence du carré ; donc on a les hypothèses de 1.10 relatives aux valeurs des déterminants $H_{h-l+1+i}^{(k+l+a)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l+b+1-a$. D'autre part, en utilisant la partie f) de la propriété 1.9 on a les éléments de la ligne $k+h+1$ qui sont nuls sur les colonnes $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq h+b$ et non nuls sur les colonnes -1 et $h+b+1$. Par conséquent la ligne $k+h+1$ est liée aux lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h$ dans $(M_{a+h-l+2}^{(k+l)})$ et indépendante dans $(M_{a+h-l+3}^{(k+l-1)})$, le coefficient de la relation intervenant pour la ligne $(k+l)$ étant non nul.

b) Montrons que les hypothèses de la propriété 1.10 entraînent celles de la propriété 1.9.

Si on combine la ligne $(k+h+1)$ avec les lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h$, en utilisant la relation qui existe dans $(M_{a+h-l+2}^{(k+l)})$, les termes de cette ligne situés sur les colonnes $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq a+h-l+1$ sont nuls ; celui

de la colonne -1 est non nul.

En appliquant le lemme 1.4 avec une utilisation du système $(M_{h-l+2}^{(k+l+a)})$, la ligne $k+h+1$ est liée aux lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h$ dans le système $(M_{h+1+b-a}^{(k+l+a)})$; elle est indépendante dans $(M_{h+2+b-a}^{(k+l+a)})$ et par conséquent les termes sur les colonnes $i \in \mathbb{N}$, $a \leq i \leq h+b$ sont nuls, et le terme sur la colonne $h+b+1$ est non nul.

Donc on a l'hypothèse de liaison ou d'indépendance de la ligne $(k+h+1)$ dans la propriété 1.9.

D'autre part, en appliquant un raisonnement analogue au a) de la propriété 1.9, on obtient le même carré de zéros que dans la propriété 1.9.

Donc $H_{h+1+i}^{(k)} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq b$.

Appelons L_j les lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h+1$, du système $(M_{h+1+b}^{(k)})$.

On a

$$L_{k+h+1} = \sum_{j=l}^h \alpha_{j+k} L_{j+k} \text{ avec } \alpha_{l+k} \neq 0$$

Nous considérons tous les déterminants d'ordre $h-l+1$ formés uniquement des éléments des lignes précédentes.

Soit

$$H_{h-l+1}^{(k+l+a+i)} = \det_{k+l+a+i} (L_{k+l+1}, L_{k+l+2}, \dots, L_{k+h+1})$$

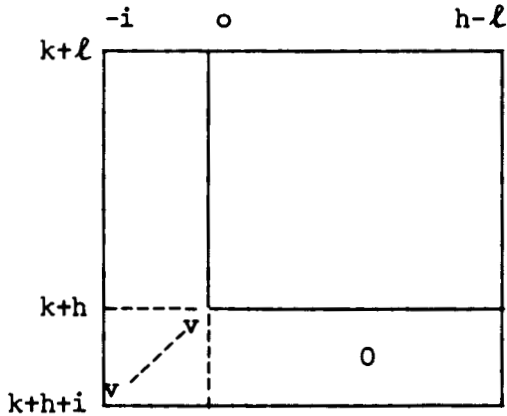
un tel déterminant avec $-a \leq i \leq 1$ ou $1 \leq i \leq l+b+1-a$.

On a :

$$\begin{aligned} H_{h-l+1}^{(k+l+a+i)} &= \det_{k+l+a+i} (L_{k+l+1}, \dots, L_{k+h}, \sum_{j=l}^h \alpha_{j+k} L_{j+k}) \\ &= \alpha_{l+k} (-1)^{h-l} \det_{k+l+a+i} (L_{k+l}, L_{k+h+1}, \dots, L_{k+h}) \\ &= \alpha_{l+k} (-1)^{h-l} H_{h-l+1}^{(k+l+a+i-1)} \end{aligned}$$

Comme $H_{h-l+1}^{(k+l+a)} \neq 0$ on peut en déduire de proche en proche que $H_{h-l+1}^{(k+l+i)} = 0$, pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l+1+b$.

Considérons les déterminants $H_{h-l+1+i}^{(k+l-i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l$.



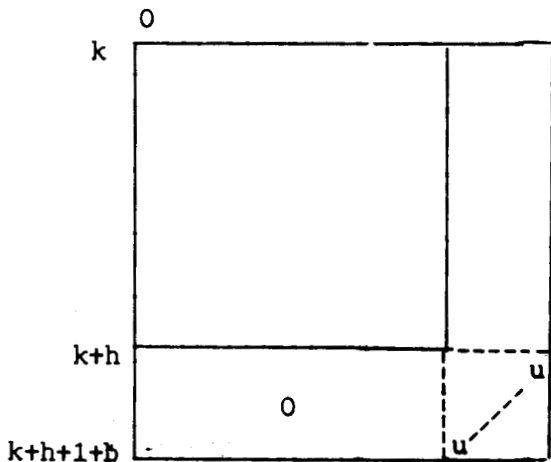
En combinant la ligne $k+h+1$ avec les lignes $j \in \mathbb{N}$, $k+l \leq j \leq k+h$, on obtient des zéros sur la ligne $k+h+1$ et sur les colonnes $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq h-l$ et un élément v non nul sur la colonne -1 . On réitère comme dans le raisonnement fait pour la propriété 1.1.

On trouve :

$$H_{h-l+1+i}^{(k+l-i)} = (-1)^{\frac{(-l+i)(2h+1-l+i)}{2}} v^i H_{h-l+1}^{(k+l)} \neq 0$$

Par conséquent : $H_{h+1}^{(k)} \neq 0$.

Considérons maintenant le déterminant $H_{h+2+b}^{(k)}$.



Comme dans la propriété 1.1 on obtient

$$H_{h+2+b}^{(k)} = (-1)^{\frac{b(b+1)}{2}} u^{b+1} H_{h+1}^{(k)} \neq 0.$$

On retrouve bien les hypothèses de la propriété 1.9.

Cqfd.

1.3 EXISTENCE DES POLYNOMES ORTHOGONAUX

Nous considérons un système (M_p) de rang $r < p$.

Si le système (M_p) est incompatible, il n'a pas de solution.

Si le système (M_p) est compatible il a une infinité de solutions $\lambda_{i,p}$.

Les racines $m_{i,p}$ de $P_p(x)$ existent donc.

Nous allons montrer le résultat fondamental suivant.

L'ensemble des $m_{i,p}$ contient l'ensemble des $m_{i,r}$ (racines du polynôme $P_r(x)$) déterminées de façon unique grâce au système (M_r) avec leur ordre de multiplicité au moins.

Propriété 1.11.

Si le système (M_p) est de rang r compatible, avec $r < p$, alors la solution de $(M_r^{(0)})$ est aussi solution de $(M_r^{(i)})$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 2p - 2r - 1$.

Démonstration.

Si le système (M_p) est de rang r compatible, d'après le corollaire 1.4, les r premières lignes sont indépendantes. D'après le lemme 1.3, $H_r^{(0)} \neq 0$.

Donc la solution de (M_r) existe et est unique dès que $\lambda_{0,r}$ est fixé. La ligne r du système ci-dessous est liée aux r premières lignes.

$$\left(\begin{array}{cccc} c_0 & c_1 & \dots & c_{2p-r-2} & c_{2p-r-1} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ c_r & \dots & c_{2p-2} & & c_{2p-1} \end{array} \right)$$

et ceci parce que (M_p) est compatible, sinon par une démonstration analogue à la propriété 1.1 on aurait une contradiction en aboutissant à :

$$H_{2p+1-r}^{(0)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

0
r-1
p-1

u
u
u

et (M_p) serait ou de rang strictement supérieur à r, ou incompatible. Or on a avec (M_r)

$$\sum_{i=0}^{r-1} c_{k+i} \lambda_{r-i,r} = -c_{k+r} \quad \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq r-1$$

Par conséquent :

$$\sum_{i=0}^{r-1} c_{k+i} \lambda_{r-i,r} = -c_{k+r} \quad \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2p-r-1$$

cgfd.

On écrit le système (M_p) sous la forme (M'_p) .

$$\begin{pmatrix} c_0 & \cdots & c_{p-1} & c_p \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{p-1} & \cdots & c_{2p-2} & c_{2p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{p,p} \\ \vdots \\ \lambda_{0,p} \end{pmatrix} = 0$$

Dans (M'_p) le coefficient $\lambda_{0,p}$ n'est plus assujéti à être non nul.

Propriété 1.12.

Si le système (M_p) est de rang r compatible alors

$$(\lambda_{p,p}, \lambda_{p-1,p}, \dots, \lambda_{0,p}) = (0, \dots, 0, \lambda_{r,r}, \lambda_{r-1,r}, \dots, \lambda_{0,r}, 0, \dots, 0),$$

où $\lambda_{r,r}$ peut occuper les places i , $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq p - r + 1$, est solution de (M'_p) .

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate de la propriété 1.11.

cgfd.

Corollaire 1.10.

Toute combinaison linéaire des solutions proposées dans la propriété 1.12 est solution de (M'_p) .

C'est une solution de (M_p) si le coefficient qui multiplie $(0, \dots, 0, \lambda_{r,r}, \dots, \lambda_{0,r})$ est non nul.

Démonstration.

Le résultat est évident si on utilise la propriété 1.12.

Si le coefficient qui multiplie $(0, \dots, 0, \lambda_{r,r}, \dots, \lambda_{0,r})$ est non nul, alors on obtient bien $\lambda_{0,p}$ non nul et nous avons dans ce cas une solution de (M_p) .

cqfd.

Propriété 1.13.

L'ensemble des solutions de (M_p) est constitué par l'ensemble des combinaisons linéaires des solutions proposées dans la propriété 1.12 telles que le coefficient qui multiplie $(0, \dots, 0, \lambda_{r,r}, \dots, \lambda_{0,r})$ soit non nul.

Démonstration.

Ces combinaisons linéaires sont solutions de (M_p) d'après le corollaire 1.10.

De plus l'ensemble des solutions de (M'_p) forment un espace vectoriel de dimension $p-r+1$. Or les $p-r+1$ solutions proposées dans la propriété 1.12 sont indépendantes. En effet les $p-r+1$ dernières composantes de ces $p-r+1$ solutions donnent un déterminant triangulaire avec les $\lambda_{0,r}$ non nuls sur la diagonale principale.

Par conséquent ces solutions forment une base de l'ensemble des solutions de (M'_p) .

D'où le résultat.

cqfd.

Théorème 1.1.

Si (M_p) est de rang $r < p$ compatible, alors l'ensemble des racines de $P_p(x)$ contient toutes les racines de $P_r(x)$ avec le même ordre de multiplicité au moins, les $(p-r)$ racines restantes de $P_p(x)$ étant quelconques.

Démonstration.

D'après la propriété 1.12 les coefficients de $P_r(x)$, $x P_r(x)$, ..., $x^{p-r} P_r(x)$ sont solutions de (M'_p) .

D'après la propriété 1.13 les coefficients de

$$\sum_{i=0}^{p-r} \alpha_i x^i P_r(x) \text{ avec } \alpha_{p-r} \neq 0$$

sont solutions de (M_p) . C'est donc $P_p(x)$. D'où le résultat.

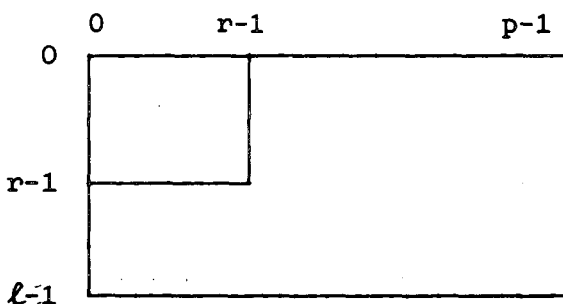
cgfd.

CONCLUSION.

Pour trouver les solutions d'un système (M_p) de rang $r < p$ compatible, on étudie le système (M_r) qui a une solution unique dès que $\lambda_{0,r}$ est fixé. L'étude de l'existence et de l'unicité éventuelle des polynômes orthogonaux repose essentiellement sur le résultat du théorème 1.1.

Remarque 1.1.

Si on s'intéresse à un système rectangulaire compatible de l lignes et p colonnes, de rang r avec $H_r^{(0)} \neq 0$, le résultat du théorème 1.1 reste valable, c'est à dire que le polynôme $P_p(x)$ solution est tel que $P_p(x) = u_{p-r}(x) P_r(x)$ avec $u_{p-r}(x)$ polynôme arbitraire de degré $(p-r)$.



Théorème 1.2.

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (M_k) soit lié compatible de rang $r < p \forall k \in \mathbb{N}, r < k \leq p$ est que :

$$H_r^{(0)} \neq 0 \text{ et } P_k(x) = u_{k-r}(x) P_r(x), \forall k \in \mathbb{N}, r < k \leq p$$

avec $u_{k-r}(x)$ polynôme arbitraire de degré $(k-r)$.

Démonstration.

\Rightarrow déjà démontré dans le théorème 1.1.

\Leftarrow le système (M_k) est lié, $\forall k \in \mathbb{N}, r+1 \leq k \leq p$ sinon on aurait une solution unique

$$H_k^{(0)} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, r+1 \leq k \leq p.$$

Le système (M_k) est compatible puisqu'on a une solution $P_k(x)$.

Dans la propriété 1.6 le système (M_k) est de rang r .

cqfd.

La propriété suivante donne les conditions d'existence des polynômes orthogonaux par rapport à c . Dans toute la suite l'indice $\ell \in \mathbb{N}$ numérote les groupes successifs de déterminants $H_i^{(0)}$ nuls.

Propriété 1.14.

On suppose que l'on a pour une valeur de ℓ :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_i^{(0)} \neq 0 \quad \text{pour } i \in \mathbb{N} \quad p_{\ell}+1 \leq i \leq h_{\ell+1}+1 \\ H_i^{(0)} = 0 \quad \text{pour } i \in \mathbb{N} \quad h_{\ell+1}+2 \leq i \leq p_{\ell+1} \\ H_{p_{\ell+1}+1}^{(0)} \neq 0 \end{array} \right.$$

Alors

i) Pour $i \in \mathbb{N}$, $p_{\ell+1} \leq i \leq h_{\ell+1} + 1$, $P_i(x)$ existe. Il est unique, si on fixe le coefficient de x^i .

ii) $P_i(x)$ existe pour $i \in \mathbb{N}$, $h_{\ell+1} + 2 \leq i \leq p_{\ell+1} - \text{entier}(\frac{p_{\ell+1} + 1 - h_{\ell+1}}{2})$

avec $P_i(x) = P_{h_{\ell+1} + 1}(x) w_{i - h_{\ell+1} - 1}(x)$ où $w_{i - h_{\ell+1} - 1}(x)$ est un polynôme arbitraire de degré $i - h_{\ell+1} - 1$.

iii) $P_i(x)$ n'existe pas pour $i \in \mathbb{N}$, $p_{\ell+1} + 2 - \text{entier}(\frac{p_{\ell+1} + 1 - h_{\ell+1}}{2}) \leq i \leq p_{\ell+1}$

iv) $P_{p_{\ell+1} + 1}(x)$ existe. Il est unique si on fixe le coefficient de $x^{p_{\ell+1} + 1}$.

v) $P_{p_{\ell+1} + 1 - \text{entier}(\frac{p_{\ell+1} + 1 - h_{\ell+1}}{2})}(x)$ existe si $(p_{\ell+1} - h_{\ell+1})$ est impair, et vaut $P_{h_{\ell+1} + 1}(x) w_{\frac{p_{\ell+1} - h_{\ell+1} - 1}{2}}(x)$ où $w_{\frac{p_{\ell+1} - h_{\ell+1} - 1}{2}}(x)$ est un polynôme arbitraire de degré $\frac{p_{\ell+1} - h_{\ell+1} - 1}{2}$.

Il n'existe pas si $(p_{\ell+1} - h_{\ell+1})$ est pair.

Démonstration.

i) Les systèmes (M_i) sont réguliers. La solution existe donc. Elle est unique si on fixe le coefficient de x^i .

ii) D'après la propriété 1.6, les systèmes (M_i) pour $i \in \mathbb{N}$,

$h_{\ell+1} + 2 \leq i \leq p_{\ell+1} - \text{entier}(\frac{p_{\ell+1} + 1 - h_{\ell+1}}{2})$ sont liés compatibles. La solution existe. D'après le théorème 1.1 l'ensemble des racines de $P_i(x)$ contient celui de $P_{h_{\ell+1} + 1}(x)$ avec leur ordre de multiplicité, les autres étant arbitraires. D'où le résultat.

iii) D'après la propriété 1.6 les systèmes (M_i) , pour $i \in \mathbb{N}$,

p_{l+1}^{+2} -entier $(\frac{p_{l+1}^{+1-h} l_{l+1}}{2}) \leq i \leq p_{l+1}$ sont liés incompatibles. Il n'existe

donc pas de solution.

iv) $H^{(0)}_{p_{l+1}^{+1}} \neq 0$. Donc on a un système régulier et $P_{p_{l+1}^{+1}}(x)$ existe.

Il est unique si on fixe le coefficient de $x^{p_{l+1}^{+1}}$.

v) Si $(p_{l+1}^{-h} l_{l+1})$ est impair, d'après la propriété 1.6 le système

$(M_{p_{l+1}^{+1}$ -entier $(\frac{p_{l+1}^{+1-h} l_{l+1}}{2}))$ est lié compatible. Par conséquent, à l'aide

du théorème 1.1 on a le résultat annoncé :

Si $(p_{l+1}^{-h} l_{l+1})$ est pair le système $(M_{p_{l+1}^{+1}$ -entier $(\frac{p_{l+1}^{+1-h} l_{l+1}}{2}))$

est lié incompatible, et par conséquent le polynôme n'existe pas.

cqfd.

Le théorème 2.1 du livre de C. Brezinski définit les polynômes orthogonaux comme étant les polynômes $\hat{P}_k(x)$ tels que :

$$\hat{P}_k(x) = D_k \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_k \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k-1} & \dots & c_{2k-1} \\ 1 & \dots & x^k \end{vmatrix} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \text{ et } D_k \text{ constante}$$

non nulle.

Dans le cas où $H_k^{(0)}$ est non nul ce théorème reste valable pour nos polynômes orthogonaux.

Si $H_k^{(0)}$ est nul l'expression ci-dessus définit encore un polynôme qui vérifie $c(x^i \hat{P}_k(x)) = 0$ pour $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k-1$, mais il est de degré strictement inférieur à k . Pour ces polynômes nous montrons le théorème suivant :

Théorème 1.3.

On considère le système (M_k) et le polynôme $\hat{P}_k(x) =$

$$\begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_k \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k-1} & \dots & c_{2k-1} \\ 1 & \dots & x^k \end{vmatrix}$$

avec $\hat{P}_0(x) =$ constante arbitraire non nulle. On a alors :

- i) (M_k) est de rang $k \iff \hat{P}_k(x)$ est de degré k
- ii) (M_k) est de rang $(k-1)$ incompatible et c'est la ligne s de (M_k) qui est liée aux s premières lignes.
 $\iff \hat{P}_k(x) \equiv \delta \cdot \hat{P}_s(x)$ avec $\delta =$ constante non nulle et $\hat{P}_s(x)$ de degré $s \leq k-1$

$$\hat{P}_s(x) = \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_s \\ \vdots & & \vdots \\ c_{s-1} & \dots & c_{2s-1} \\ 1 & \dots & x^s \end{vmatrix}$$

- iii) (M_k) est de rang $\leq k-2$ ou de rang $(k-1)$ compatible $\iff \hat{P}_k(x) \equiv 0$

Démonstration.

- i) Démontré dans le livre de C. Brezinski.
- ii) \implies On peut en utilisant la relation qui existe entre la ligne s et les s précédentes, mettre le déterminant donnant $\hat{P}_k(x)$ sous la forme :

$$\hat{P}_k(x) = \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{s-1} & \dots & c_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{s-1} & \dots & c_{2s-2} & \dots & c_{k+s-1} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & u \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & u \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & x^{s-1} & x^s & x^{s+1} & \dots & x^k \end{vmatrix} \quad \text{avec } u \neq 0.$$

En développant ce déterminant par rapport aux lignes $s, s+1, \dots, k-1$ on a :

$$\hat{P}_k(x) = u^{k-s} (-1)^{\frac{(k-s)(k+3s-1)}{2}} \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_s \\ \vdots & & \vdots \\ c_{s-1} & \dots & c_{2s-1} \\ 1 & \dots & x^s \end{vmatrix} \equiv \delta \cdot \hat{P}_s(x)$$

iii) \Rightarrow Si (M_k) est de rang $\leq k-2$, on a deux lignes consécutives au moins, s et $s+1$, liées aux s premières lignes. Si on considère le système (M_{k+1}) la ligne s est liée aux s précédentes. Donc tous les déterminants d'ordre k extraits de $\begin{pmatrix} c_0 & \dots & c_k \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k-1} & \dots & c_{2k-1} \end{pmatrix}$ sont nuls $\Rightarrow \hat{P}_k(x) \equiv 0$.

Si (M_k) est de rang $(k-1)$ compatible, la ligne $(k-1)$ du système (M_{k+1}) est liée aux $(k-1)$ premières. Les déterminants d'ordre k extraits de $\begin{pmatrix} c_0 & \dots & c_k \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k-1} & \dots & c_{2k-1} \end{pmatrix}$ sont encore nuls $\Rightarrow \hat{P}_k(x) \equiv 0$.

\Leftarrow Si $\hat{P}_k(x) \equiv 0$, alors (M_k) n'est ni de rang k , sinon d'après le i) $\hat{P}_k(x)$ serait de degré k , ni de rang $k-1$ incompatible, sinon d'après le ii) $\Rightarrow \hat{P}_k(x)$ serait de degré s . Par conséquent $\hat{P}_k(x)$ est de degré inférieur ou égal à $k-2$ ou de degré $(k-1)$ compatible.

ii) \Leftarrow Si $\hat{P}_k(x) \equiv \delta \cdot \hat{P}_s(x)$ avec $s \leq k-1$, alors (M_k) n'est pas de rang k , sinon $\deg \hat{P}_k(x) = k$, ni de rang $(k-1)$ compatible ou de rang $\leq k-2$, sinon $\hat{P}_k(x) \equiv 0$. Donc (M_k) est de rang $(k-1)$ incompatible. Il n'y a donc qu'une seule ligne s' de (M_k) liée aux s' précédentes.

Si on applique le ii) \Rightarrow on obtient $\hat{P}_k(x) \equiv \delta' \cdot \hat{P}_{s'}(x)$.

Donc $s' = s$.

cqfd.

On constate donc que définir les polynômes orthogonaux par l'intermédiaire du théorème 2.1 du livre de C. Brezinski ne donnera pas l'ensemble des polynômes orthogonaux par rapport à la fonctionnelle c . Seule la propriété 1.14 est capable de nous donner cet ensemble.

Nous examinons maintenant le cas où $c_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq q-1$, et $c_q \neq 0$.

Propriété 1.15.

$$H_i^{(0)} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq q \iff c_i = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq q-1$$

Démonstration.

\Leftarrow évident.

\Rightarrow Nous la démontrons par récurrence :

$$H_1^{(0)} = c_0 = 0$$

$$H_2^{(0)} = -c_1^2 = 0$$

On suppose la propriété vraie jusqu'à l'ordre $k < q$ c'est-à-dire que :

$$c_i = 0, \quad 0 \leq i \leq k-1$$

$$H_{k+1}^{(0)} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} (c_k)^{k+1} = 0 \Rightarrow c_k = 0$$

Propriété 1.16.

Si $c_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq q-1$ et $c_q \neq 0$, alors :

i) Tout polynôme de degré $k \leq \frac{q}{2}$ est orthogonal par rapport à c .

ii) Il n'existe pas de polynôme orthogonal de degré k tel que $\frac{q}{2} < k \leq q$.

Démonstration.

i) Le système (M_k) est composé uniquement de 0 et il est homogène. Donc les $\lambda_{j,k}$ sont quelconques.

ii) Le système (M_k) contient au moins une ligne de 0 et le second membre contient comme premier terme non nul $-c_q$. Le système (M_k) n'a pas de solution car la ligne $(q-k)$ est telle que : $0 = -c_q$.

cgfd.

Définition.

On appelle polynômes orthogonaux réguliers $P_i(x)$ ceux pour lesquels $H_i^{(0)}$ est non nul, et polynômes orthogonaux singuliers $P_i(x)$ les polynômes orthogonaux pour lesquels $H_i^{(0)}$ est nul.

Construction d'une base de P.1er cas.

On suppose que :

$$\begin{cases} H_i^{(0)} \neq 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, p_{l+1} \leq i \leq h_{l+1}+1 \\ H_i^{(0)} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, h_{l+1}+2 \leq i \leq p_{l+1} \end{cases}$$

$$p_0 = 0$$

$p_0, h_1, p_1, h_2, p_2, \dots$ est une suite croissante d'entiers.

Les $P_i(x)$, pour $i \in \mathbb{N}, p_{l+1} \leq i \leq h_{l+1}+1$ sont orthogonaux réguliers.

Les $P_i(x)$, pour $i \in \mathbb{N}, h_{l+1}+2 \leq i \leq \frac{p_{l+1}+h_{l+1}}{2}$, si $(p_{l+1}-h_{l+1})$ est pair,

ou $h_{\ell+1}+2 \leq i \leq \frac{p_{\ell+1}+h_{\ell+1}+1}{2}$ si $(p_{\ell+1}-h_{\ell+1})$ est impair sont orthogonaux

singuliers. Ils valent $w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(x) \cdot P_{h_{\ell+1}+1}(x)$ où $w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(x)$

est un polynôme arbitraire de degré $i-h_{\ell+1}-1$. Il n'existe pas de polynômes

orthogonaux $P_i(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $\frac{p_{\ell+1}+h_{\ell+1}}{2} + 1 \leq i \leq p_{\ell+1}$ si $(p_{\ell+1}-h_{\ell+1})$ est pair,

ou $\frac{p_{\ell+1}+h_{\ell+1}+1}{2} + 1 \leq i \leq p_{\ell+1}$ si $(p_{\ell+1}-h_{\ell+1})$ est impair.

On prend les polynômes $P_i(x) = w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(x) P_{h_{\ell+1}+1}(x)$ où $w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(x)$

est un polynôme arbitraire de degré $i-h_{\ell+1}-1$. Ces polynômes ne sont pas orthogonaux, mais d'après la remarque 1.1, ils satisfont le système (M_i) réduit aux seules lignes compatibles.

2e cas.

On suppose que : $c_i = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq p_0-1$ et $c_{p_0} \neq 0$.

On a donc d'après la propriété 1.15 :

$$H_i^{(0)} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq p_0 \text{ et } H_{p_0+1}^{(0)} \neq 0.$$

On suppose donc que l'on a :

$$\begin{cases} H_i^{(0)} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, h_{\ell}+2 \leq i \leq p_{\ell} \\ H_i^{(0)} \neq 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, p_{\ell}+1 \leq i \leq h_{\ell+1}+1 \end{cases}$$

$$h_0 = -1.$$

$h_0, p_0, h_1, p_1, \dots$ est une suite croissante d'entiers.

On prend les mêmes polynômes $P_i(x)$ présentés dans le premier cas pour $i \geq p_0+1$.

Pour $0 \leq i \leq p_0$ on prend les polynômes $w_{i,0}(x)$ arbitraires de degré i .

En effet, d'après la propriété 1.16, pour $0 \leq i \leq \frac{p_0}{2}$ tout polynôme de degré i est orthogonal, et pour $\frac{p_0}{2} < i \leq p_0$ il n'existe pas de polynôme orthogonal de degré i .

Théorème 1.4.

Les polynômes $P_i(x)$ ainsi définis dans chacun des deux cas forment une base de P .

Démonstration.

Les polynômes $P_i(x)$ sont de degré strictement égal à i .

cgfd.

Définition.

On appellera base B_1 celle obtenue dans le premier cas et base B_2 celle obtenue dans le deuxième cas.

La propriété qui va suivre est fondamentale pour l'établissement des relations de récurrence. Elle nous permettra de définir les polynômes quasi-orthogonaux d'ordre k .

Propriété 1.17.

On considère les polynômes $P_i(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $h_\ell+1 \leq i \leq p_\ell$.

Alors :

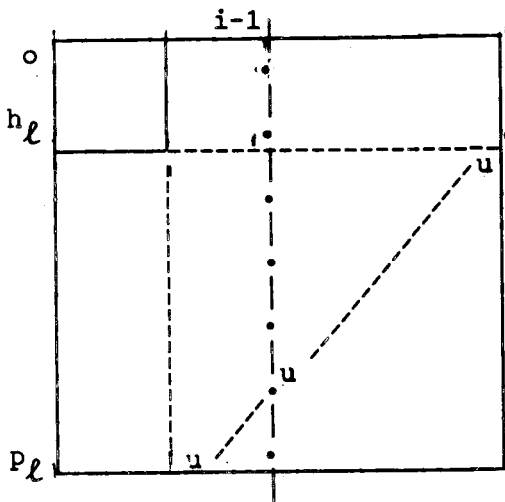
i) $c(x^j P_i) = 0$ si $0 \leq j \leq p_\ell + h_\ell - i$ et par conséquent $c(P_j P_i) = 0$

ii) $c(x^j P_i) \neq 0$ si $j = p_\ell + h_\ell + 1 - i$ et par conséquent $c(P_j P_i) \neq 0$

iii) En général on ne peut rien dire pour $c(x^j P_i)$ avec $p_\ell + 2 + h_\ell - i \leq j \leq p_\ell$

Démonstration.

On utilise la matrice du système $(M_{p_\ell+1})$.



$P_i(x) = w_{i-h_l-1} x^{h_l+1} P_{h_l+1}(x)$ et les coefficients de $P_{h_l+1}(x)$ sont solutions de (M_{h_l+1}) .

D'après la remarque 1.1, $P_i(x)$ est un polynôme dont les coefficients satisfont les lignes compatibles de (M_i) , y compris celles qui sont extérieures à (M_i) si elles sont compatibles.

Donc pour connaître la valeur de $c(x^j P_i)$ il suffit d'examiner les lignes du système formé des i premières colonnes et des (p_l+1) premières lignes. Or toutes les lignes $j \in \mathbb{N}$, $h_l+1 \leq j \leq p_l+h_l-i$ sont compatibles avec les (h_l+1) premières. Par conséquent, les coefficients de $P_i(x)$ satisfont toutes les lignes $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq p_l+h_l-i$, ce qui est équivalent à $c(x^j P_i) = 0$. Alors bien évidemment $c(P_j P_i) = 0$.

Par contre, les coefficients de P_i ne satisfont pas la ligne $j = p_l+h_l+1-i$ qui est incompatible.

Donc $c(x^{p_l+h_l+1-i} P_i) \neq 0$ et par conséquent $c(P_j P_i) \neq 0$.

Pour les lignes $j \in \mathbb{N}$, $p_l+h_l+2-i \leq j \leq p_l$, on ne peut rien dire a priori.

cqfd.

Corollaire 1.11.

$$c(P_i^2) = 0 \text{ pour } h_l+1 \leq i \leq \frac{p_l+h_l}{2}.$$

Propriété 1.18.

$$c(P_i^2) \neq 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, p_l+1 \leq i \leq h_{l+1}.$$

Démonstration.

Evidente puisque $H_{i+1}^{(0)} \neq 0$

cqfd.

Définition 1.1.

On appelle polynômes quasi-orthogonaux d'ordre k , $k \in \mathbb{N}$, les polynômes $P_i(x)$ tels que :

$$c(x^j P_i) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq i-1-k.$$

Conséquence :

Les polynômes $P_i(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{p_\ell + h_\ell}{2} + 1 \leq i \leq p_\ell$ si

$(p_\ell - h_\ell)$ est pair ou $\frac{p_\ell + h_\ell + 1}{2} + 1 \leq i \leq p_\ell$ si $(p_\ell - h_\ell)$ est impair sont quasi-orthogonaux d'ordre $(2i-1-p_\ell-h_\ell)$.

Lorsque, dans la suite, nous parlerons de polynômes quasi-orthogonaux, l'ordre sera la plupart du temps omis pour ne pas alourdir le texte.

Nous étudions la propriété équivalente à la propriété 1.14 pour les polynômes $Q_k(t)$ associés aux polynômes orthogonaux

$$Q_k(t) = c \left(\frac{P_k(x) - P_k(t)}{x-t} \right)$$

Propriété 1.19.

On suppose que l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_i^{(0)} \neq 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, p_{\ell+1} \leq i \leq h_{\ell+1} + 1 \\ H_i^{(0)} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, h_{\ell+1} + 2 \leq i \leq p_{\ell+1} \\ H_{p_{\ell+1}+1}^{(0)} \neq 0 \end{array} \right.$$

Alors :

i) Pour $i \in \mathbb{N}$, $p_{\ell+1} \leq i \leq h_{\ell+1} + 1$, $Q_i(t)$ existe. Il est unique si on a fixé le coefficient de x^i de $P_i(x)$.

ii) $Q_i(t)$ existe pour $i \in \mathbb{N}$, $h_{\ell+1} + 2 \leq i \leq p_{\ell+1}$ -entier $(\frac{p_{\ell+1} + 1 - h_{\ell+1}}{2})$
avec $Q_i(t) = w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(t) Q_{h_{\ell+1}+1}(t)$ où

$P_i(x) = P_{h_{\ell+1}+1}(x) \cdot w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(x)$ avec $w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(x)$ polynôme arbitraire de degré $i-h_{\ell+1}-1$.

iii) $Q_i(t)$ n'existe pas pour $i \in \mathbb{N}$, $p_{\ell+1} + 2$ -entier $(\frac{p_{\ell+1} + 1 - h_{\ell+1}}{2}) \leq i \leq p_{\ell+1}$

iv) $Q_{p_{\ell+1}+1}(t)$ existe. Il est unique si on a fixé le coefficient de $x^{p_{\ell+1}+1}$ de $P_{p_{\ell+1}+1}(x)$.

v) $Q_{p_{\ell+1}+1-\text{entier}}(\frac{p_{\ell+1} + 1 - h_{\ell+1}}{2})$ existe si $(p_{\ell+1} - h_{\ell+1})$ est impair et vaut

$$Q_{h_{\ell+1}+1}(t) w_{\frac{p_{\ell+1} - h_{\ell+1} - 1}{2}, \ell+1}(t) \text{ où } P_{p_{\ell+1}+1}(x) = P_{h_{\ell+1}+1}(x) \cdot w_{\frac{p_{\ell+1} - h_{\ell+1} - 1}{2}, \ell+1}(x)$$

avec $w_{\frac{p_{\ell+1} - h_{\ell+1} - 1}{2}, \ell+1}(x)$ polynôme arbitraire de degré $(\frac{p_{\ell+1} - h_{\ell+1} - 1}{2})$

Il n'existe pas si $(p_{\ell+1} - h_{\ell+1})$ est pair.

Démonstration.

i) et iv) Evident du fait même de l'existence et de l'unicité de $P_i(x)$, quand on a fixé le coefficient de x^i .

iii) $P_i(x)$ n'existant pas, on ne peut définir $Q_i(t)$ comme polynôme associé à un polynôme orthogonal.

ii)

$$Q_i(t) = c \left[\frac{w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(x) P_{h_{\ell+1}+1}(x) - w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(t) P_{h_{\ell+1}+1}(t)}{x-t} \right]$$

$$= c \left[\frac{w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(x) - w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(t)}{x-t} P_{h_{\ell+1}+1}(x) \right]$$

$$+ w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(t) c \left[\frac{P_{h_{\ell+1}+1}(x) - P_{h_{\ell+1}+1}(t)}{x-t} \right]$$

$$\frac{w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(x) - w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(t)}{x-t} = v_{i-h_{\ell+1}-2, \ell+1}(x) \text{ polynôme en } x \text{ de}$$

degré $(i-h_{\ell+1}-2)$.

Or, on sait que, pour $i \in \mathbb{N}$, $h_{\ell+1}+1 \leq i \leq p_{\ell+1}$ -entier $(\frac{p_{\ell+1}+1-h_{\ell+1}}{2})$, on a un polynôme orthogonal de degré i en multipliant $P_{h_{\ell+1}+1}(x)$ par un polynôme arbitraire de degré $i-h_{\ell+1}-1$. Donc $v_{i-h_{\ell+1}-2, \ell+1}(x) P_{h_{\ell+1}+1}(x)$ est un polynôme orthogonal.

$$c(v_{i-h_{\ell+1}-2, \ell+1}(x) P_{h_{\ell+1}+1}(x)) = 0.$$

$$\text{Alors } Q_i(t) = w_{i-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(t) Q_{h_{\ell+1}+1}(t).$$

v) La démonstration est identique au iv).

cqfd.

Propriété 1.20.

Si $c_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq q-1$ alors :

i) $Q_k(t) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \leq \frac{q}{2}$

ii) Il n'existe pas de polynôme $Q_k(t)$ associé à un polynôme orthogonal, $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{q}{2} < k \leq q$.

Démonstration.

i) $\frac{P_k(x) - P_k(t)}{x-t} = \text{polynôme de degré } (k-1) \text{ en } x$.

D'après la propriété 1.16 c'est un polynôme orthogonal.

Donc $c(\frac{P_k(x) - P_k(t)}{x-t}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \leq \frac{q}{2}$

ii) $P_k(x)$ n'existant pas, $Q_k(x)$ ne peut exister.

cqfd.

1.4 RELATION DE RECURRENCE.

Théorème 1.5.

Les polynômes $P_k(x)$ satisfont l'une des relations de récurrence suivantes.

i) Si $k \in \mathbb{N}$ et $l \geq 0, h_l + 2 \leq k \leq p_l$ on a :

$P_k(x) = w_{k-h_l-1, l}(x) P_{h_l+1}(x)$ où $w_{k-h_l-1, l}(x)$ est un polynôme arbitraire de degré $k-h_l-1$.

ii) Si $P_{p_l+1+r}(x)$ est orthogonal régulier avec $r \in \mathbb{N}, p_l+1+r \leq h_{l+1}+1$, on a :

$$P_{p_{\ell}+1+r}^{(x)} = (A_{p_{\ell}+r+1, p_{\ell}+r+1} x + A_{p_{\ell}+r, p_{\ell}+r+1}) P_{p_{\ell}+r}^{(x)}$$

$$+ \sum_{j=h_{\ell}}^{p_{\ell}+r-1} A_{j, p_{\ell}+r+1} P_j^{(x)} + A_{h_{\ell-1}+1, p_{\ell}+r+1} P_{h_{\ell-1}+1}^{(x)}$$

avec $A_{p_{\ell}+r+1, p_{\ell}+r+1} = \frac{1}{a_{p_{\ell}+r+1}^{(p_{\ell}+r)}} \neq 0$

$$A_{j, p_{\ell}+r+1} = - \frac{a_j^{(p_{\ell}+r)}}{a_{p_{\ell}+r+1}^{(p_{\ell}+r)}} \text{ pour } j \in \mathbb{N}, h_{\ell} \leq j \leq p_{\ell}+r \text{ et } j = h_{\ell-1}+1$$

$$a_{p_{\ell}+r+1}^{(p_{\ell}+r)} = \frac{c(x^{p_{\ell}+r} P_{p_{\ell}+r+1})}{c(P_{p_{\ell}+r+1}^2)} \neq 0, \text{ si } p_{\ell}+r < h_{\ell+1}$$

$$= \frac{c(x^{p_{\ell}+r} P_{p_{\ell}+r})}{c(P_{p_{\ell}+r+1}^2)} \neq 0 \text{ si } p_{\ell}+r = h_{\ell+1}$$

$$a_{p_{\ell}+r}^{(p_{\ell}+r)} = \frac{c(x^{p_{\ell}+r} P_{p_{\ell}+r})}{c(P_{p_{\ell}+r}^2)} \text{ si } r > 0$$

Si $r = 0$ et si $p_{\ell-1} \neq h_{\ell}$.

$$A_{h_{\ell-1}+1, p_{\ell}+1} = 0, A_{h_{\ell}, p_{\ell}+1} \neq 0 \text{ et } a_{h_{\ell}}^{(p_{\ell})} = \frac{c(x^{p_{\ell}} P_{p_{\ell}})}{c(P_{h_{\ell}}^2)} \neq 0$$

Si $r = 0$ et si $p_{\ell-1} = h_{\ell}$.

$$A_{h_{\ell}, p_{\ell}+1} = 0, A_{h_{\ell-1}+1, p_{\ell}+1} \neq 0 \text{ et } a_{h_{\ell-1}+1}^{(p_{\ell})} = \frac{c(x^{p_{\ell}} P_{p_{\ell}})}{c(P_{h_{\ell-1}+1}^2)} \neq 0$$

Dans les deux cas les $a_j^{(p_\ell)}$, pour $j \in \mathbb{N}$, $h_{\ell+1} \leq j \leq p_\ell$ sont donnés par le système triangulaire régulier suivant :

$$c(xP_i P_{p_\ell}) = \sum_{j=p_\ell+h_{\ell+1}-i}^{p_\ell} a_j^{(p_\ell)} c(P_i P_j), \text{ pour } i \in \mathbb{N}, h_{\ell+1} \leq i \leq p_\ell$$

Si $r = 1$.

$$A_{j, p_\ell+2} = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, h_{\ell+2} \leq j \leq p_\ell, j = h_\ell \text{ et } j = h_{\ell-1}+1$$

$$a_{h_{\ell+1}}^{(p_\ell+1)} = \frac{c(xP_{p_\ell} P_{p_\ell+1})}{c(P_{p_\ell} P_{h_{\ell+1}})} \neq 0.$$

Si $r \geq 2$.

$$A_{j, p_\ell+r+1} = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, h_\ell \leq j \leq p_\ell+r-2 \text{ et } j = h_{\ell-1}+1$$

$$a_{p_\ell+r-1}^{(p_\ell+r)} = \frac{c(xP_{p_\ell+r-1} P_{p_\ell+r})}{c(P_{p_\ell+r-1}^2)} \neq 0$$

pour le démarrage des relations de récurrence on utilise les éléments suivants :

$$h_0 = -1, P_{-1}(x) = 0 \text{ et } A_{-1, p_0+1} = \text{constante arbitraire qui sera fixée à}$$

$$A_{p_0+1, p_0+1} c(P_{p_0}) \text{ dans le théorème 1.6.}$$

On prend $P_0(x) = \text{constante arbitraire.}$

Démonstration.

i) Pour $k \in \mathbb{N}$, $h_{\ell+2} \leq k \leq p_\ell$, $P_k(x)$ est orthogonal singulier ou quasi-orthogonal. On a donc, d'après ce qui a été vu au cours de la définition d'une base de P .

$P_k(x) = w_{k-h_{\ell-1}, \ell}(x) \cdot P_{h_{\ell}+1}(x)$ où $w_{k-h_{\ell-1}, \ell}(x)$ est un polynôme arbitraire de degré $k-h_{\ell}-1$.

ii) $xP_k(x)$ peut s'exprimer de façon unique en fonction des éléments de la base B_1 ou B_2 de \mathcal{P} .

$$xP_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j^{(k)} P_j(x)$$

et donc

$$c(xP_i P_k) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j^{(k)} c(P_i P_j)$$

Etudions ce qui se passe pour

$$c(xP_i P_{p_{\ell}+r}) = \sum_{j=0}^{p_{\ell}+r+1} a_j^{(p_{\ell}+r)} c(P_i P_j) \text{ avec } r \geq 0 \text{ et } p_{\ell}+r \leq h_{\ell+1}$$

Montrons que $\forall r \geq 0$ tel que $p_{\ell}+r \leq h_{\ell+1}$ on a :

a) Si $r = 0$ et $p_{\ell-1} = h_{\ell}$, $a_j^{(p_{\ell})} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq h_{\ell-1}$ et $h_{\ell-1}+2 \leq j \leq h_{\ell}$

$$a_{h_{\ell-1}+1}^{(p_{\ell})} = \frac{c(xP_{h_{\ell}} P_{p_{\ell}})}{c(P_{h_{\ell}} P_{h_{\ell-1}+1})}$$

b) Si $r = 0$ et $p_{\ell-1} \neq h_{\ell}$, $a_j^{(p_{\ell})} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq h_{\ell-1}$

c) Si $r > 0$, $a_j^{(p_{\ell}+r)} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq h_{\ell}$.

Nous introduisons l'indice $h_0 = -1$ dans le cas de la base B_1 . Par conséquent, pour $\ell = 0$ les relations précédentes sont bien vérifiées. Nous supposons maintenant que $a_j^{(p_{\ell}+r)} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq h_s$ avec $s < \ell$, et nous démontrons que :

a) Si $r = 0$ et $s+1 = \ell$ et $p_s = h_{s+1} = h_\ell$

$$a_j^{(p_\ell)} = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq h_{\ell-1} \text{ et } h_{\ell-1}+2 \leq j \leq h_\ell$$

et

$$a_{h_{\ell-1}+1}^{(p_\ell)} = \frac{c(xP_{h_\ell} P_{p_\ell})}{c(P_{h_\ell} P_{h_{\ell-1}+1})}$$

b) Si $r = 0$ et $s+1 = \ell$ et $p_s \neq h_{s+1}$, $a_j^{(p_\ell)} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq h_{s+1}-1$.

c) Si $r \neq 0$ ou $s+1 < \ell$, $a_j^{(p_\ell+r)} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq h_{s+1}$.

Démontrons tout d'abord que :

$$\text{Si } r = 0 \text{ et } s+1 = \ell \text{ et } p_s = h_{s+1} = h_\ell \left\{ \begin{array}{l} a_j^{(p_\ell)} = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, h_{\ell-1}+2 \leq j \leq p_{\ell-1} \\ a_{h_{\ell-1}+1}^{(p_\ell)} = \frac{c(xP_{h_\ell} P_{p_\ell})}{c(P_{h_\ell} P_{h_{\ell-1}+1})} \end{array} \right.$$

sinon $a_j^{(p_\ell+r)} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}, h_{s+1} \leq j \leq p_s$.

Pour $i = h_{s+1}$, $c(P_{h_{s+1}} P_j) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}, h_{s+1} \leq j \leq p_{\ell+r+1}$ et $j \neq p_s$.

En effet, si $j \in \mathbb{N}, p_{\ell}+1 \leq j \leq p_{\ell+r+1}$ les polynômes P_j correspondants sont orthogonaux.

Si $j \in \mathbb{N}, h_{k+1} \leq j \leq p_k$, avec $s+1 \leq k \leq \ell$ on applique la propriété 1.17 i).

Si $j \in \mathbb{N}, p_k+1 \leq j \leq h_{k+1}+1$ avec $s \leq k \leq \ell-1$, $P_j(x)$ est orthogonal de degré strictement supérieur au degré de $P_{h_{s+1}}(x)$.

Si $j \in \mathbb{N}, h_{s+1} \leq j \leq p_s-1$, on applique la propriété 1.17 i).

D'autre part, $c(P_{h_{s+1}} P_{p_s}) \neq 0$ d'après la propriété 1.17 ii).

Enfin $c(xP_{h_s+1} P_{p_\ell+r}) = 0$, si $r = 0$ en appliquant la propriété 1.17 i)

puisqu'on a $s < \ell$, et si $r > 0$ à cause de l'orthogonalité de $P_{p_\ell+r}$.

$$\text{Donc } a_{p_s}^{(p_\ell+r)} = 0.$$

Prenons $h_s+2 \leq i \leq p_s$. On suppose que $a_j^{(p_\ell+r)} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$ et

$p_s+h_s+2-i \leq j \leq p_s$, et montrons que $a_{p_s+h_s+1-i}^{(p_\ell+r)} = 0$ sauf si $r = 0$, $s+1=\ell$,

$i=p_s$ et $p_s = h_{s+1} = h_\ell$.

Si $r=0$, $s+1 = \ell$, $i = p_s$ et $p_s = h_{s+1} = h_\ell$, on a :

$$c(xP_i P_{p_\ell+r}) = c(xP_{h_\ell} P_{p_\ell}) \neq 0$$

d'après la propriété 1.17 ii).

Sinon on a :

$$c(xP_i P_{p_\ell+r}) = 0$$

d'après la propriété 1.17 i) si $r = 0$ en dehors du cas précédent, ou d'après l'orthogonalité de $P_{p_\ell+r}$ si $r > 0$.

D'autre part $c(P_i P_{p_s+h_s+1-i}) \neq 0$ d'après la propriété 1.17 ii).

Enfin $c(P_i P_j) = 0$ pour $h_s+1 \leq j \leq p_\ell+r+1$ et $j \notin [p_s+h_s+1-i, p_s]$.

En effet si $j \in \mathbb{N}$, $p_\ell+1 \leq j \leq p_\ell+r+1$ les polynômes P_j correspondants sont orthogonaux.

Si $j \in \mathbb{N}$, $h_k+1 \leq j \leq p_k$ avec $s+1 \leq k \leq \ell$ on applique la propriété 1.17 i).

Si $j \in \mathbb{N}$, $p_k+1 \leq j \leq h_{k+1}+1$ avec $s \leq k \leq \ell-1$, $P_j(x)$ est orthogonal de degré strictement supérieur au degré de $P_i(x)$.

Si $j \in \mathbb{N}$, $h_s+1 \leq j \leq p_s+h_s-i$ on applique la propriété 1.17 i).

On a donc :

$$\begin{aligned} c(xP_i P_{p_\ell+r}) &= \sum_{j=h_s+1}^{p_\ell+r+1} a_j^{(p_\ell+r)} c(P_i P_j) = \sum_{j=p_s+h_s+1-i}^{p_s} a_j^{(p_\ell+r)} c(P_i P_j) \\ &= a_{p_s+h_s+1-i}^{(p_\ell+r)} c(P_i P_{p_s+h_s+1-i}) \end{aligned}$$

puisque $a_j^{(p_\ell)} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $p_s + h_s + 2 - i \leq j \leq p_s$.

Par conséquent si $p_s = h_\ell = h_{s+1}$, $a_{p_{\ell-1} + h_{\ell-1} + 1 - i}^{(p_{\ell+r})} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$,

$h_{\ell-1} + 1 \leq i \leq p_{\ell-1} - 1$ et

$$a_{h_{\ell-1} + 1}^{(p_\ell)} = \frac{c(xP_{p_s} P_{p_\ell})}{c(P_{p_s} P_{h_s + 1})} = \frac{c(xP_{h_\ell} P_{p_\ell})}{c(P_{h_\ell} P_{h_{\ell-1} + 1})} \neq 0$$

sinon on a : $a_{p_s + h_s + 1 - i}^{(p_{\ell+r})} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $h_s + 1 \leq i \leq p_s$.

Finalement on a bien les résultats proposés pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq p_s$.

Montrons maintenant que $a_j^{(p_{\ell+r})} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\text{si } s+1 = \ell \text{ et } r = 0, p_s + 1 \leq j \leq h_{s+1} - 1$$

$$\text{si } s+1 < \ell \text{ ou } r > 0, p_s + 1 \leq j \leq h_{s+1}.$$

On remarquera que dans le cas où $r = 0$ et $s+1 = \ell$ et $p_{\ell-1} = h_\ell$, il n'existe aucun indice j tel que $p_s + 1 \leq j \leq h_{s+1}$.

On a déjà montré que $a_j^{(p_\ell)}$ était nul dans ce cas pour $j \in \mathbb{N}$, $h_{\ell-1} + 2 \leq j \leq p_{\ell-1} = h_\ell$.

Prenons $i \in \mathbb{N}$, $p_s + 1 \leq i \leq h_{s+1}$, alors $c(P_i P_j) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$,

$p_s + 1 \leq j \leq p_{\ell+r+1}$ et $i \neq j$.

En effet si $j \in \mathbb{N}$, $p_{\ell} + 1 \leq j \leq p_{\ell+r+1}$ les polynômes P_j correspondants sont orthogonaux.

Si $j \in \mathbb{N}$, $h_k + 1 \leq j \leq p_k$, avec $s+1 \leq k \leq \ell$ on applique la propriété 1.17 i)

Si $j \in \mathbb{N}$, $p_k + 1 \leq j \leq h_{k+1}$ avec $s+1 \leq k \leq \ell-1$, $P_j(x)$ est orthogonal de degré strictement supérieur au degré de $P_i(x)$.

Si $j \in \mathbb{N}$, $p_s + 1 \leq j \leq h_{s+1}$, P_i et P_j sont orthogonaux, donc si $i \neq j$, $c(P_i P_j) = 0$.

D'autre part, $c(P_i^2) \neq 0$ d'après la propriété 1.18.

Enfin $c(xP_i P_{p_{\ell+r}}) = 0$ pour $0 \leq i \leq h_{\ell-1}$ si $r = 0$ en appliquant la propriété

1.17 i), ou pour $0 \leq i \leq p_{\ell} - 2 + r$ si $r > 0$ car $P_{p_{\ell} + r}$ est orthogonal et $p_{\ell} + r - 2 \geq p_{\ell} - 1 > h_{\ell} \geq h_{s+1}$.

Par conséquent on a bien la propriété annoncée.

Donc la propriété est démontrée jusqu'à l'ordre ℓ . Il reste à déterminer les $a_j^{(p_{\ell} + r)}$ jusqu'à $p_{\ell} + r + 1$.

Prenons $r = 0$ avec la base B_2 et $\ell \geq 1$ ou la base B_1 .

$$c(x_{P_i}^{P_{p_{\ell}}}) = a_{h_{\ell-1}+1}^{(p_{\ell})} c(P_{i, h_{\ell-1}+1}^{P_{p_{\ell}}}) + \sum_{j=h_{\ell}}^{p_{\ell}+1} a_j^{(p_{\ell})} c(P_{i, j}^{P_{p_{\ell}}})$$

où $a_{h_{\ell-1}+1}^{(p_{\ell})} = 0$ si $p_{\ell-1} \neq h_{\ell}$ et $a_{h_{\ell}}^{(p_{\ell})} = 0$ si $p_{\ell-1} = h_{\ell}$.

Pour $i = h_{\ell}$. si $p_{\ell-1} \neq h_{\ell}$ on a :

$c(x_{h_{\ell}}^{P_{p_{\ell}}}) \neq 0$ d'après la propriété 1.17 ii)

$$c(P_{h_{\ell}, j}^{P_{p_{\ell}}}) = 0 \begin{cases} \text{pour } j = p_{\ell} + 1 \text{ car } P_{p_{\ell} + 1} \text{ est orthogonal} \\ \text{pour } h_{\ell} + 1 \leq j \leq p_{\ell} \text{ d'après la propriété 1.17 i).} \end{cases}$$

$c(P_{h_{\ell}}^2) \neq 0$ car $P_{h_{\ell}}$ est orthogonal et on utilise la propriété 1.18.

Donc

$$a_{h_{\ell}}^{(p_{\ell})} = \frac{c(x_{h_{\ell}}^{P_{p_{\ell}}})}{c(P_{h_{\ell}}^2)} \neq 0$$

Pour $h_{\ell} + 1 \leq i \leq p_{\ell}$.

On ne peut rien dire pour $c(x_{P_i}^{P_{p_{\ell}}})$.

D'après la propriété 1.17, on a :

$$c(P_i P_j) = 0 \text{ pour } 0 \leq j \leq p_\ell + h_\ell - i$$

$$c(P_i P_j) \neq 0 \text{ pour } j = p_\ell + h_\ell + 1 - i$$

On ne peut rien dire pour $c(P_i P_j)$ avec $p_\ell + h_\ell + 2 - i \leq j \leq p_\ell$.

On a donc :

$$c(xP_i P_{p_\ell}) = \sum_{j=p_\ell+h_\ell+1-i}^{p_\ell} a_j^{(p_\ell)} c(P_i P_j)$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $h_{\ell+1} \leq i \leq p_\ell$.

C'est un système triangulaire régulier (la diagonale est composée des termes $c(P_i P_j) \neq 0$ car $i+j = p_\ell + h_\ell + 1$) de $(p_\ell - h_\ell)$ équations à $(p_\ell - h_\ell)$ inconnues

$$a_j^{(p_\ell)}.$$

Pour $i = p_\ell + 1$.

$$c(P_{p_\ell+1} P_j) = 0 \text{ si } j \leq p_\ell \text{ car } P_{p_\ell+1} \text{ est orthogonal.}$$

Si $H_{p_\ell+2}^{(0)} \neq 0$ alors $c(P_{p_\ell+1}^2) \neq 0$ ce qui entraîne $c(xP_{p_\ell} P_{p_\ell+1}) \neq 0$.

Donc

$$a_{p_\ell+1}^{(p_\ell)} = \frac{c(xP_{p_\ell+1} P_{p_\ell})}{c(P_{p_\ell+1}^2)} \neq 0$$

Le cas $H_{p_\ell+2}^{(0)} = 0$ est vu après.

Prenons $r = 0$, la base B_2 et $\ell = 0$.

Le raisonnement fait pour $r = 0$ et la base B_1 reste valable dans ce cas. Seul le cas $i = h_0 = -1$ est particulier et sera examiné dans la partie consacrée au démarrage des équations de récurrence.

Pour $h_0 + 1 = 0 \leq i \leq p_0$, on trouve donc le même système triangulaire de $p_0 + 1$ à $p_0 + 1$ inconnues, c'est à dire encore $(p_0 - h_0)$.

$$\text{Si } H_{p_0+2}^{(0)} \neq 0 \text{ on a } a_{p_0+1}^{(p_0)} = \frac{c(xP_{p_0+1} P_{p_0})}{c(P_{p_0+1}^2)} \neq 0.$$

Le cas $H_{p_0+2}^{(0)} = 0$ est vu après.

Prenons $r = 1$.

On montre comme précédemment que $a_j^{(p_\ell+1)} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $h_\ell+2 \leq j \leq p_\ell$. Il ne reste donc que trois coefficients :

$$a_{h_\ell+1}^{(p_\ell+1)}, a_{p_\ell+1}^{(p_\ell+1)} \text{ et } a_{p_\ell+2}^{(p_\ell+1)}.$$

Pour $i = p_\ell$, $c(P_{p_\ell} P_{h_\ell+1}) \neq 0$ d'après la propriété 1.17 ii).

$c(P_{p_\ell} P_j) = 0$ pour $j = p_\ell+1$ et $p_\ell+2$ car P_j est orthogonal.

$c(xP_{p_\ell} P_{p_\ell+1}) \neq 0$ car $c(P_{p_\ell+1}^2) \neq 0$ puisque $H_{p_\ell+2}^{(0)} \neq 0$.

Donc

$$a_{h_\ell+1}^{(p_\ell+1)} = \frac{c(xP_{p_\ell} P_{p_\ell+1})}{c(P_{p_\ell} P_{h_\ell+1})} \neq 0$$

Pour $i = p_\ell+1$.

En tenant compte du fait que $P_{p_\ell+1}$ est orthogonal on a :

$$c(xP_{p_\ell+1}^2) = a_{p_\ell+1}^{(p_\ell+1)} c(P_{p_\ell+1}^2),$$

or $c(P_{p_\ell+1}^2) \neq 0$.

Donc :

$$a_{p_\ell+1}^{(p_\ell+1)} = \frac{c(xP_{p_\ell+1}^2)}{c(P_{p_\ell+1}^2)}$$

Pour $i = p_{\ell} + 2$.

On a :

$$c(xP_{p_{\ell}+1} P_{p_{\ell}+2}) = a_{p_{\ell}+2}^{(p_{\ell}+1)} c(P_{p_{\ell}+2}^2)$$

Si $H_{p_{\ell}+3}^{(0)} \neq 0$ alors $c(P_{p_{\ell}+2}^2) \neq 0$ ce qui entraîne que $c(xP_{p_{\ell}+1} P_{p_{\ell}+2}) \neq 0$

Donc

$$a_{p_{\ell}+2}^{(p_{\ell}+1)} = \frac{c(xP_{p_{\ell}+1} P_{p_{\ell}+2})}{c(P_{p_{\ell}+2}^2)} \neq 0$$

Le cas $H_{p_{\ell}+3}^{(0)}$ est vu après.

Prenons $r > 1$.

On montre comme précédemment que $a_j^{(p_{\ell}+r)} = 0, \forall j \in \mathbb{N}, p_{\ell}+1 \leq j \leq p_{\ell}$.

Il reste donc les coefficients $a_j^{(p_{\ell}+r)}$ pour $j \in \mathbb{N}, p_{\ell}+1 \leq j \leq p_{\ell}+r+1$.

$$c(xP_i P_{p_{\ell}+r}) = \sum_{j=p_{\ell}+1}^{p_{\ell}+r+1} a_j^{(p_{\ell}+r)} c(P_i P_j).$$

Pour $p_{\ell}+1 \leq i \leq p_{\ell}+r-2, c(xP_i P_{p_{\ell}+r}) = 0$ puisque $P_{p_{\ell}+r}$ est orthogonal.

$c(P_i P_j) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}, p_{\ell}+1 \leq j \leq p_{\ell}+r+1$ et $i \neq j$ puisque P_i et P_j sont orthogonaux.

Enfin $c(P_j^2) \neq 0$, donc $a_j^{(p_{\ell}+r)} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}, p_{\ell}+1 \leq j \leq p_{\ell}+r-2$.

Pour $i = p_{\ell} + r - 1$.

On a $c(P_{p_{\ell} + r - 1} P_{p_{\ell} + r + 1})$ ainsi que $c(P_{p_{\ell} + r - 1} P_{p_{\ell} + r + 2}) = 0$ à cause de l'orthogonalité des polynômes.

$c(P_{p_{\ell} + r + 1}^2) \neq 0$ ainsi que $c(P_{p_{\ell} + r}^2)$ ce qui entraîne que $c(xP_{p_{\ell} + r - 1} P_{p_{\ell} + r}) \neq 0$.

Donc :

$$a_{p_{\ell} + r - 1}^{(p_{\ell} + r)} = \frac{c(xP_{p_{\ell} + r - 1} P_{p_{\ell} + r})}{c(P_{p_{\ell} + r - 1}^2)} \neq 0$$

Pour $i = p_{\ell} + r$.

On a pour les mêmes raisons :

$$a_{p_{\ell} + r}^{(p_{\ell} + r)} = \frac{c(xP_{p_{\ell} + r}^2)}{c(P_{p_{\ell} + r}^2)}$$

Pour $i = p_{\ell} + r + 1$.

On a $c(xP_{p_{\ell} + r} P_{p_{\ell} + r + 1}) = a_{p_{\ell} + r + 1}^{(p_{\ell} + r)} c(P_{p_{\ell} + r + 1}^2)$.

Si $H_{p_{\ell} + r + 2}^{(0)} \neq 0$, alors $c(P_{p_{\ell} + r + 1}^2) \neq 0$ ce qui entraîne que $c(xP_{p_{\ell} + r} P_{p_{\ell} + r + 1}) \neq 0$.

Donc

$$a_{p_{\ell} + r + 1}^{(p_{\ell} + r)} = \frac{c(xP_{p_{\ell} + r} P_{p_{\ell} + r + 1})}{c(P_{p_{\ell} + r + 1}^2)} \neq 0$$

Cas où $H_{p_{\ell} + r + 2}^{(0)} = 0$ avec $r \geq 0$.

Cela signifie que $p_{\ell} + r = h_{\ell + 1}$. Alors $c(P_{p_{\ell} + r + 1}^2) = 0$ d'après le corollaire 1.11. Donc on a également $c(xP_{p_{\ell} + r + 1} P_{p_{\ell} + r}) = 0$. Par conséquent on

a une relation $0 = 0 \cdot a_{p_{\ell} + r + 1}^{(p_{\ell} + r)}$.

On prend $i \in [h_{\ell+1}+2, p_{\ell+1}]$.

Tant que $P_i(x)$ est orthogonal singulier on aura une relation $0 = 0$ puisque $c(P_i P_j) = 0$ pour $0 \leq j \leq p_{\ell+r+1}$ et $c(xP_i P_{\ell+r}) = 0$.

On prend donc le premier polynôme quasi-orthogonal P_s tel que :

$$c(xP_{s-1} P_{\ell+r}) = 0 \text{ et } c(xP_s P_{\ell+r}) \neq 0.$$

Puisque $p_{\ell+r} = h_{\ell+1}$ et en appliquant la propriété 1.17 ii) on trouve $s = p_{\ell+1}$ on a alors :

$$c(xP_s P_{\ell+r}) = c(xP_{p_{\ell+1}} P_{\ell+r}) = \sum_{j=h_{\ell}}^{p_{\ell+r+1}} a_j^{(p_{\ell+r})} c(P_{p_{\ell+1}} P_j)$$

Or $c(P_{p_{\ell+1}} P_j) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}, h_{\ell} \leq j \leq p_{\ell+r}$ d'après la propriété 1.17 i).

$c(P_{p_{\ell+1}} P_{p_{\ell+r+1}}) = c(P_{p_{\ell+1}} P_{h_{\ell+1}+1}) \neq 0$ d'après la propriété 1.17 ii).

Donc :

$$a_{p_{\ell+r+1}}^{(p_{\ell+r})} = \frac{c(xP_{p_{\ell+1}} P_{\ell+r})}{c(P_{p_{\ell+1}} P_{p_{\ell+r+1}})} \neq 0$$

Démarrage des équations de récurrence.

Dans le cas de la base B_1 , on prend $h_0 = -1, P_0(x) =$ constante arbitraire non nulle. On pourra appliquer les relations de récurrence avec $P_{-1}(x) = 0$ et $A_{-1,1} =$ constante arbitraire non nulle. On verra dans le théorème 1.6 qu'on prend :

$$A_{-1,1} = A_{1,1} c(P_0)$$

On a alors :

$$P_{p_0+1}(x) = (A_{p_0+1,p_0+1} x + A_{p_0,p_0+1}) P_{p_0}(x) + \sum_{j=h_0}^{p_0-1} A_{j,p_0+1} P_j(x)$$

Soit ici $P_1(x) = (A_{1,1}x + A_{0,1})P_0(x) + A_{-1,1}P_{-1}(x) = (A_{1,1}x + A_{0,1})P_0(x)$

ce qui est bien équivalent à $xP_0(x) = a_1^{(0)}P_1(x) + a_0^{(0)}P_0(x)$.

Dans le cas de la base B_2 on a $h_0 = -1$ et $P_i(x) = w_{i,0}(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq p_0$, où $w_{i,0}(x)$ est un polynôme arbitraire de degré i .

Pour que les relations présentées dans le cas de la base B_1 restent valables pour $P_{p_0+1}(x)$ on peut prendre $P_{-1}(x) = 0$ et $A_{-1,p_0+1} =$ constante arbitraire non nulle. Nous verrons dans le théorème 1.6 qu'on prend :

$$A_{-1,p_0+1} = A_{p_0+1,p_0+1} c(P_{p_0}(x))$$

On a alors :

$$P_{p_0+1}(x) = (A_{p_0+1,p_0+1}x + A_{p_0,p_0+1})P_{p_0}(x) + \sum_{j=-1}^{p_0-1} A_{j,p_0+1}P_j(x)$$

cqfd.

Dans ce qui suit nous allons transformer certains des coefficients $A_{j,p_\ell+r+1}$. Une première raison conduisant à ces transformations est que, lorsque l'on cherche le polynôme $P_{p_\ell+r+1}(x)$, il intervient dans le calcul de $a_{p_\ell+r+1}^{(p_\ell+r)}$ par $c(xP_{p_\ell+r}P_{p_\ell+r+1})$.

Une seconde raison est que ces nouvelles expressions des coefficients nous permettront d'introduire une écriture plus commode des relations de récurrence, que l'on rencontre déjà dans l'article de G. Struble [56].

Nous allons d'abord montrer que l'on peut calculer $a_{p_\ell+r+1}^{(p_\ell+r)}$ sans connaître $P_{p_\ell+r+1}(x)$.

$$P_{p_\ell+r}(x) = \sum_{i=0}^{p_\ell+r} \lambda_{i,p_\ell+r} x^{p_\ell+r-i}$$

Si $p_{\ell+r} < h_{\ell+1}$ on a :

$$c(xP_{p_{\ell+r}} P_{p_{\ell+r+1}}) = c\left(\sum_{i=0}^{p_{\ell+r}} \lambda_{i,p_{\ell+r}} x^{p_{\ell+r+1}-i}\right) P_{p_{\ell+r+1}}$$

$$= \lambda_{0,p_{\ell+r}} c(x^{p_{\ell+r+1}} P_{p_{\ell+r+1}})$$

puisque $P_{p_{\ell+r+1}}(x)$ est orthogonal régulier.

$$= \frac{\lambda_{0,p_{\ell+r}}}{\lambda_{0,p_{\ell+r+1}}} c(P_{p_{\ell+r+1}}^2)$$

Donc

$$a_{p_{\ell+r+1}}^{(p_{\ell+r})} = \frac{\lambda_{0,p_{\ell+r}}}{\lambda_{0,p_{\ell+r+1}}}$$

Si $p_{\ell+r} = h_{\ell+1}$ on a en tenant compte du fait que

$$P_{p_{\ell+1}}(x) = w_{p_{\ell+1}-h_{\ell+1}-1, \ell+1}(x) P_{h_{\ell+1}+1}(x) = w_{p_{\ell+1}-p_{\ell}-r-1, \ell+1}(x) P_{p_{\ell+r+1}}(x)$$

avec

$$w_{p_{\ell+1}-p_{\ell}-r-1, \ell+1}(x) = \tau_{p_{\ell+1}-p_{\ell}-r-1} x^{p_{\ell+1}-p_{\ell}-r-1} + \dots$$

$$a_{p_{\ell+r+1}}^{(p_{\ell+r})} = \frac{c(xP_{p_{\ell+1}} P_{p_{\ell+r}})}{c(P_{p_{\ell+1}} P_{p_{\ell+r+1}})} = \frac{c(xw_{p_{\ell+1}-p_{\ell}-r-1, \ell+1} P_{p_{\ell+r+1}} P_{p_{\ell+r}})}{c(w_{p_{\ell+1}-p_{\ell}-r-1, \ell+1} P_{p_{\ell+r+1}}^2)}$$

$$\frac{c((\tau_{p_{\ell+1}-p_{\ell}-r-1} \cdot \lambda_{0,p_{\ell+r}} x^{p_{\ell+1}} + \dots) P_{p_{\ell+r+1}})}{c((\tau_{p_{\ell+1}-p_{\ell}-r-1} \cdot \lambda_{0,p_{\ell+r+1}} x^{p_{\ell+1}} + \dots) P_{p_{\ell+r+1}})}$$

$$c((\tau_{p_{\ell+1}-p_{\ell}-r-1} \cdot \lambda_{0,p_{\ell+r+1}} x^{p_{\ell+1}} + \dots) P_{p_{\ell+r+1}})$$

$$= \frac{\lambda_{0, p_{\ell}+r}}{\lambda_{0, p_{\ell}+r+1}} \frac{c(x^{p_{\ell}+1} P_{p_{\ell}+r+1})}{c(x^{p_{\ell}+1} P_{p_{\ell}+r+1})} \quad \text{d'après la propriété 1.17 i),}$$

Donc

$$a_{p_{\ell}+r+1}^{(p_{\ell}+r)} = \frac{\lambda_{0, p_{\ell}+r}}{\lambda_{0, p_{\ell}+r+1}}$$

Alors

$$A_{p_{\ell}+r+1, p_{\ell}+r+1} = \frac{\lambda_{0, p_{\ell}+r+1}}{\lambda_{0, p_{\ell}+r}}$$

Or le coefficient du terme de plus haut degré des polynômes orthogonaux est arbitraire. On choisit donc $\lambda_{0, p_{\ell}+r}$ et $\lambda_{0, p_{\ell}+r+1}$. On peut ainsi calculer $A_{p_{\ell}+r+1, p_{\ell}+r+1}$ sans connaître $P_{p_{\ell}+r+1}$.

Déterminons maintenant $A_{p_{\ell}+r-1, p_{\ell}+r+1}$ pour $r \geq 2$. On tiendra compte du fait que $P_{p_{\ell}+r}$ est orthogonal régulier. On trouve comme précédemment que

$$c(x^{p_{\ell}+r-1} P_{p_{\ell}+r}) = \lambda_{0, p_{\ell}+r-1} c(x^{p_{\ell}+r} P_{p_{\ell}+r}) = \frac{\lambda_{0, p_{\ell}+r-1}}{\lambda_{0, p_{\ell}+r}} c(P_{p_{\ell}+r}^2)$$

En posant $c(P_i^2) = u_i$ on obtient.

$$\begin{aligned} A_{p_{\ell}+r-1, p_{\ell}+r+1} &= \frac{-\lambda_{0, p_{\ell}+r-1} \lambda_{0, p_{\ell}+r+1}}{(\lambda_{0, p_{\ell}+r})^2} \frac{c(P_{p_{\ell}+r}^2)}{c(P_{p_{\ell}+r+1}^2)} \\ &= - \frac{A_{p_{\ell}+r+1, p_{\ell}+r+1}}{A_{p_{\ell}+r, p_{\ell}+r}} \frac{u_{p_{\ell}+r}}{u_{p_{\ell}+r-1}} \end{aligned}$$

$A_{p_{\ell}+1, p_{\ell}+2}$ se détermine de la même façon. On obtient :

$$A_{h_{\ell}+1, p_{\ell}+2} = - \frac{\lambda_{o, p_{\ell}} \lambda_{o, p_{\ell}+2} c(P_{p_{\ell}+1}^2)}{(\lambda_{o, p_{\ell}+1})^2 c(P_{h_{\ell}+1, p_{\ell}})} = - \frac{A_{p_{\ell}+2, p_{\ell}+2} u_{p_{\ell}+1}}{A_{p_{\ell}+1, p_{\ell}+1} c(P_{h_{\ell}+1, p_{\ell}})}$$

Si $h_{\ell} \neq p_{\ell-1}$, calculons $A_{h_{\ell}, p_{\ell}+1}$.

$$\begin{aligned} a_{h_{\ell}}^{(p_{\ell})} &= \frac{c(x_{h_{\ell}}^{p_{\ell}})}{c(P_{h_{\ell}}^2)} = \frac{c(\sum_{i=0}^{h_{\ell}} \lambda_{o, i} x^{h_{\ell}+1-i})_{p_{\ell}}}{c(P_{h_{\ell}}^2)} \\ &= \lambda_{o, h_{\ell}} \frac{c(x_{h_{\ell}+1}^{p_{\ell}})}{c(P_{h_{\ell}}^2)} = \frac{\lambda_{o, h_{\ell}} c(P_{h_{\ell}+1, p_{\ell}})}{\lambda_{o, h_{\ell}+1} c(P_{h_{\ell}}^2)} \end{aligned}$$

en appliquant deux fois de suite la propriété 1.17.

Donc

$$A_{h_{\ell}, p_{\ell}+1} = - \frac{\lambda_{o, h_{\ell}} \lambda_{o, p_{\ell}+1} c(P_{h_{\ell}+1, p_{\ell}})}{\lambda_{o, h_{\ell}+1} \lambda_{o, p_{\ell}} c(P_{h_{\ell}}^2)} = - \frac{A_{p_{\ell}+1, p_{\ell}+1} c(P_{h_{\ell}+1, p_{\ell}})}{A_{h_{\ell}+1, h_{\ell}+1} c(P_{h_{\ell}}^2)}$$

Si $h_{\ell} = p_{\ell-1}$, calculons $A_{h_{\ell-1}+1, p_{\ell}+1}$. On obtiendra comme précédemment.

$$a_{h_{\ell-1}+1}^{(p_{\ell})} = \frac{c(x_{h_{\ell}}^{p_{\ell}})}{c(P_{p_{\ell-1}, h_{\ell-1}+1})} = \frac{\lambda_{o, h_{\ell}} c(P_{h_{\ell}+1, p_{\ell}})}{\lambda_{o, h_{\ell}+1} c(P_{p_{\ell-1}, h_{\ell-1}+1})}$$

Donc

$$A_{h_{\ell-1}+1, p_{\ell}+1} = - \frac{\lambda_{o, h_{\ell}} \lambda_{o, p_{\ell}+1} c(P_{h_{\ell}+1} P_{p_{\ell}})}{\lambda_{o, h_{\ell}+1} \lambda_{o, p_{\ell}} c(P_{p_{\ell-1}} P_{h_{\ell-1}+1})} = - \frac{A_{p_{\ell}+1, p_{\ell}+1} c(P_{h_{\ell}+1} P_{p_{\ell}})}{A_{h_{\ell}+1, h_{\ell}+1} c(P_{p_{\ell-1}} P_{h_{\ell-1}+1})}$$

Définition.

Un polynôme est dit unitaire, si le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

Remarque 1.2.

Si nous considérons les relations de récurrence que nous avons obtenues, un polynôme orthogonal régulier $P_i(x)$ est obtenu à l'aide des deux polynômes orthogonaux réguliers qui le précèdent. Nous noterons ces deux polynômes $P_{pr(i)}(x)$ et $P_{pr(pr(i))}(x)$. On a alors la relation de récurrence suivante :

$$P_i(x) = (A_i \cdot \omega_{i-pr(i)-1}(x) + B_i) P_{pr(i)}(x) + C_i P_{pr(pr(i))}(x)$$

où $\omega_{i-pr(i)-1}(x)$ est un polynôme unitaire de degré $i-pr(i)-1$ déterminé de façon unique, $A_i = A_{i,i}$ et $C_i = A_{pr(pr(i)),i}$.

Nous pouvons considérer également qu'un polynôme $P_i(x)$ orthogonal singulier, ou quasi-orthogonal est obtenu à l'aide de la même relation faisant intervenir les deux polynômes orthogonaux réguliers qui le précèdent. On a alors $A_i, B_i, \omega_{i-pr(i)-1}(x)$ arbitraires et $C_i = 0$, avec A_i non nul et $\omega_{i-pr(i)-1}(x)$ de degré $i-pr(i)-1$.

Dans le cas où les polynômes orthogonaux sont unitaires, $A_i = 1$ et les coefficients de $\omega_{i-pr(i)-1}(x)$ ainsi que B_i et C_i s'obtiennent de la façon suivante, compte tenu des transformations qui ont été vues précédemment.

$$C_i = - \frac{c(P_{pr(i)} P_{i-1})}{c(P_{pr(pr(i))} P_{pr(i)-1})}$$

$$x \omega_{i-pr(i)-1}(x) + B_i = \sum_{j=0}^{i-pr(i)} b_j x^j \text{ avec } b_{i-pr(i)} = 1 \text{ et } b_0 = B_i.$$

$$= \frac{1}{P_{pr(i)}(x)} [x P_{i-1}(x) - \sum_{j=pr(i)}^{i-1} a_j^{(i-1)} P_j(x)]$$

et

$$c(x P_k P_{i-1}) = \sum_{j=i-1-k}^{i-1-pr(i)} a_{pr(i)+j}^{(i-1)} c(P_k P_{pr(i)+j})$$

pour $k \in \mathbb{N}$, $pr(i) \leq k \leq i-1$.

Si les polynômes orthogonaux ne sont pas unitaires, il suffit de multiplier tous les coefficients précédents par

$$\frac{A_{i,i}}{A_{pr(i),pr(i)}}$$

Théorème 1.6.

Les polynômes $\{Q_k\}$ satisfont la même relation de récurrence que les polynômes $\{P_k\}$.

Pour le démarrage on utilise les éléments suivants :

$$Q_{-1}(t) = 1 \text{ et } C_{p_0+1} = A_{p_0+1} c(P_{p_0}).$$

Pour la base B_1 on a $Q_0(t) = 0$.

Pour la base B_2 on a $Q_k(t) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq p_0$.

Démonstration.

Nous utilisons la relation générale de la remarque 1.2 pour $\text{pr}(k) \geq 1$.

$$P_k(x) = (A_k x \omega_{k-\text{pr}(k)-1}(x) + B_k) P_{\text{pr}(k)}(x) + C_k P_{\text{pr}(\text{pr}(k))}(x)$$

On écrit cette relation pour t , on la retranche de celle obtenue pour x , et on divise par $(x-t)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{P_k(x) - P_k(t)}{x-t} &= A_k \frac{(x \omega_{k-\text{pr}(k)-1}(x) P_{\text{pr}(k)}(x) - t \omega_{k-\text{pr}(k)-1}(t) P_{\text{pr}(k)}(t))}{x-t} \\ &+ B_k \frac{P_{\text{pr}(k)}(x) - P_{\text{pr}(k)}(t)}{x-t} + C_k \frac{P_{\text{pr}(\text{pr}(k))}(x) - P_{\text{pr}(\text{pr}(k))}(t)}{x-t} \\ &= (A_k t \omega_{k-\text{pr}(k)-1}(t) + B_k) \frac{P_{\text{pr}(k)}(x) - P_{\text{pr}(k)}(t)}{x-t} \\ &+ A_k P_{\text{pr}(k)}(x) \frac{x \omega_{k-\text{pr}(k)-1}(x) - t \omega_{k-\text{pr}(k)-1}(t)}{x-t} + C_k \frac{P_{\text{pr}(\text{pr}(k))}(x) - P_{\text{pr}(\text{pr}(k))}(t)}{x-t} \\ &\frac{x \omega_{k-\text{pr}(k)-1}(x) - t \omega_{k-\text{pr}(k)-1}(t)}{x-t} = v_{k-\text{pr}(k)-1}(x) \end{aligned}$$

polynôme de degré $k-\text{pr}(k)-1$ en x .

On applique c aux deux membres de la relation. On obtient donc :

$$Q_k(t) = (A_k t \omega_{k-\text{pr}(k)-1}(t) + B_k) Q_{\text{pr}(k)}(t) + C_k Q_{\text{pr}(\text{pr}(k))}(t)$$

car $c(P_{pr(k)}(x) v_{k-pr(k)-1}(x)) = 0$ soit à cause de l'orthogonalité de $P_{pr(k)}(x)$ si $k-pr(k)-1 < pr(k)$, soit en appliquant la propriété 1.17 i).

Démarrage des relations de récurrence.

$$Q_0(t) = c\left(\frac{P_0(x) - P_0(t)}{x-t}\right) = c(0) = 0$$

Si on est dans la base B_1 on a :

$$Q_1(t) = c\left(\frac{P_1(x) - P_1(t)}{x-t}\right) = A_1 \cdot c(P_0).$$

Or si on emploie une relation de récurrence similaire à celle vérifiée par $P_1(x)$, on a :

$$Q_1(t) = (A_1 \cdot t + B_1)Q_0(t) + C_1 Q_{-1}(t) = C_1 Q_{-1}(t).$$

où C_1 est une constante arbitraire.

On prendra donc $Q_{-1}(t) = 1$ et $C_1 = A_1 \cdot c(P_0)$.

Si on est dans la base B_2 on a :

Si $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq p_0$,

$$Q_k(t) = c\left(\frac{P_k(x) - P_k(t)}{x-t}\right) = c(v_{k-1}(x)) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i c_i = 0$$

puisque $c_i = 0$ pour $i < p_0$.

Voyons ce que vaut $Q_{p_0+1}(t)$.

Si on utilise une relation similaire à celle que vérifie $P_{p_0+1}(x)$ on a :

$$Q_{p_0+1}(t) = (A_{p_0+1} \cdot t \omega_{p_0}(t) + B_{p_0+1}) Q_{p_0}(t) + C_{p_0+1} Q_{-1}(t) = C_{p_0+1} Q_{-1}(t)$$

Or on a :

$$P_{p_0+1}(x) = A_{p_0+1} (x P_{p_0}(x) + x w_{p_0-1}(x))$$

$$Q_{p_0+1}(t) = c \left(\frac{P_{p_0+1}(x) - P_{p_0+1}(t)}{x-t} \right)$$

$$= A_{p_0+1} \left(\frac{x P_{p_0}(x) - t P_{p_0}(t)}{x-t} \right) + A_{p_0+1} c \left(\frac{x w_{p_0-1}(x) - t w_{p_0-1}(t)}{x-t} \right)$$

$$= A_{p_0+1} c \left(t \frac{P_{p_0}(x) - P_{p_0}(t)}{x-t} \right) + A_{p_0+1} c(P_{p_0}(x)) + A_{p_0+1} c(v_{p_0-1}(x))$$

$$= A_{p_0+1} t Q_{p_0}(t) + A_{p_0+1} c(P_{p_0}(x)) + A_{p_0+1} c(v_{p_0-1}(x)) = A_{p_0+1} c(P_{p_0}(x))$$

Comme C_{p_0+1} est une constante arbitraire on prend :

$$Q_{-1}(t) = 1 \text{ et } C_{p_0+1} = A_{p_0+1} c(P_{p_0}(x))$$

cgfd.

Remarque 1.3.

Supposons que :

$$H_{h+1} \neq 0, H_{p+1} \neq 0 \text{ et } H_j = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, h+2 \leq j \leq p.$$

Les polynômes quasi-orthogonaux $P_i(x)$ pour $i \in \mathbb{N}, h+2 \leq i \leq p$, peuvent être choisis de façon que l'on ait :

$$\begin{aligned} c(P_j P_i) &= 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq p+h-i, \\ &\neq 0 \text{ pour } j = p+h+1-i, \\ &= K_j \text{ constante donnée pour } p+h+2-i \leq j \leq i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En effet, posons : } P_j(x) &= \sum_{k=0}^j \lambda_{k,j} x^{j-k} \text{ avec } \lambda_{0,j} = 1 \\ w_{j-h-1}(x) &= \sum_{s=0}^{i-h-1} \tau_s x^{i-h-1-s} \text{ avec } \tau_0 = 1, \end{aligned}$$

$$\text{où } P_i(x) = w_{j-h-1}(x) P_{h+1}(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } P_j(x) w_{i-h-1}(x) &= \left(\sum_{k=0}^j \lambda_{k,j} x^{j-k} \right) \left(\sum_{s=0}^{i-h-1} \tau_s x^{i-h-1-s} \right) \\ &= \tau_0 \lambda_{0,j} x^{j+i-h-1} + (\tau_0 \lambda_{1,j} + \tau_1 \lambda_{0,j}) x^{j+i-h-2} + \dots \end{aligned}$$

En écrivant successivement les relations $c(P_j P_i) = K_j$ pour $j \in \mathbb{N}$, $p+h+2-i \leq j \leq i-1$, nous constatons que nous obtenons un système triangulaire faisant intervenir τ_r pour $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq 2i-p-h-2$. Ce système est régulier car la diagonale est occupée par $\lambda_{0,j} c(x^P P_{h+1}) \neq 0$. Donc la détermination de τ_r , pour $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq 2i-p-h-2$ se fait de manière unique. Pour $j=i$ on écrira $P_j(x)$ sous la forme $w_{i-h-1}(x) P_{h+1}(x)$.

Pour calculer $c(P_i^2)$ on sera amené à déterminer le coefficient de x^P dans $w_{i-h-1}^2(x) P_{h+1}(x)$. Il dépend linéairement de $\tau_{2i-p-h-1}$, puisque $i-h-1 \geq 2i-p-h-1$ dans le cas de polynômes quasi-orthogonaux. On pourra donc encore calculer $\tau_{2i-p-h-1}$.

Comme cas particulier nous pouvons envisager de prendre :

$$\begin{aligned} K_j &= 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, p+h+2-i \leq j \leq i-1, \\ K_i &\neq 0. \end{aligned}$$

J.S. Dupuy [15] a défini des polynômes pseudo-orthogonaux comme étant des polynômes satisfaisant :

$$\begin{aligned} c(\phi_n \phi_m) &\neq 0 \text{ si } n = m \text{ et } |n - m| = 2 \\ &= 0 \text{ autrement.} \end{aligned}$$

Ces polynômes sont en fait des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 pour lesquels on a fait le choix de constantes proposé en cas particulier.

1.5 PROPRIÉTÉS DES ZÉROS DES POLYNÔMES. DÉTECTION DES BLOCS DE ZÉROS DANS LA TABLE H.

Nous commençons par donner deux résultats sous forme de condition nécessaire et suffisante, alors qu'ils figurent sous forme de condition nécessaire dans le livre de C. Brezinski.

Définition 1.2.

La fonctionnelle linéaire c est dite semi-définie si :

$$H_k^{(0)} = 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}, h_{\ell}+2 \leq k \leq p_{\ell}$$

$$H_k^{(0)} \neq 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}, p_{\ell}+1 \leq k \leq h_{\ell+1}+1, \ell \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.7.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle c soit définie est que $\forall k \in \mathbb{N}$,

- i) P_k et P_{k+1} n'aient aucun zéro en commun.
- ii) Q_k et Q_{k+1} n'aient aucun zéro en commun.
- iii) P_k et Q_k n'aient aucun zéro en commun.

Démonstration.

\Rightarrow livre de C. Brezinski Th : 2.14 p. 57.

\Leftarrow Si la fonctionnelle c est semi-définie, il existe au moins une valeur $k \in \mathbb{N}$, telle que $H_k^{(0)} \neq 0$ et $H_{k+1}^{(0)} = 0$. Donc $P_{k+1}(x) = \omega_1(x)P_k(x)$.

Les deux polynômes ont en commun l'ensemble des racines de $P_k(x)$.

cqfd.

Théorème 1.8.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle soit définie est que $c(pP_k) \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}, \forall p(x)$ tel que $\text{degré } p(x) = k$.

Démonstration.

\Rightarrow livre de C. Brezinski. Th. : 2.5 p 49.

\Leftarrow Si la fonctionnelle c est semi-définie, il existe au moins une valeur $k \in \mathbb{N}$ telle que $H_k^{(0)} \neq 0$ et $H_{k+1}^{(0)} = 0$
 $c(pP_k) = 0$ d'après la propriété 1.17 i).

cqfd.

Nous allons étendre le résultat du théorème 1.7 au cas des polynômes orthogonaux réguliers par rapport à une fonctionnelle semi-définie. Auparavant nous démontrons la propriété suivante.

Propriété 1.21.

i) Si $k \in \mathbb{N}, h_{\ell+1} \leq k \leq p_{\ell}-1$

$$P_{k+1}(x) Q_k(x) - Q_{k+1}(x) P_k(x) = 0$$

ii) Si $k \in \mathbb{N}, p_{\ell} \leq k \leq h_{\ell+1}$ et $\ell \geq 0$

$$P_{k+1}(x) Q_{pr(k+1)}(x) - P_{pr(k+1)}(x) Q_{k+1}(x) = -A_{k+1} c(P_k P_{pr(k+1)})$$

Démonstration.

i) Si $k \in \mathbb{N}, h_{\ell+1} \leq k \leq p_{\ell}-1$ on a :

$$P_{k+1}(x) = w_{k-h_\ell, \ell}(x) P_{h_\ell+1}(x) \text{ et } P_k(x) = w_{k-h_\ell-1, \ell}(x) P_{h_\ell+1}(x)$$

On a des relations identiques pour $Q_{k+1}(x)$ et $Q_k(x)$.

D'où la relation proposée.

ii)

$$P_{k+1}(x) = (A_{k+1} x \omega_{k-\text{pr}(k+1)}(x) + B_{k+1}) P_{\text{pr}(k+1)}(x) + C_{k+1} P_{\text{pr}(\text{pr}(k+1))}(x)$$

On a la même relation pour $Q_{k+1}(x)$.

Donc

$$\begin{aligned} \Delta &= P_{k+1}(x) Q_{\text{pr}(k+1)}(x) - P_{\text{pr}(k+1)}(x) Q_{k+1}(x) \\ &= -C_{k+1} (P_{\text{pr}(k+1)}(x) Q_{\text{pr}(\text{pr}(k+1))}(x) - Q_{\text{pr}(k+1)}(x) P_{\text{pr}(\text{pr}(k+1))}(x)) \end{aligned}$$

avec

$$C_{k+1} = - \frac{A_{k+1}}{A_{\text{pr}(k+1)}} \frac{c(P_k P_{\text{pr}(k+1)})}{c(P_{\text{pr}(k+1)-1} P_{\text{pr}(\text{pr}(k+1))})}$$

Par conséquent, $\forall i \in \mathbb{N}$, $i \leq k$ tel que $P_i(x)$ soit orthogonal régulier, on a :

$$\Delta = \frac{A_{k+1}}{A_i} \frac{c(P_k P_{\text{pr}(k+1)})}{c(P_{i-1} P_{\text{pr}(i)})} (P_i(x) Q_{\text{pr}(i)}(x) - Q_i(x) P_{\text{pr}(i)}(x))$$

Donc

$$\Delta = \frac{A_{k+1}}{A_{p_0+1}} \frac{c(P_k P_{\text{pr}(k+1)})}{c(P_{h_0+1} P_{p_0})} (P_{p_0+1}(x) Q_{h_0+1}(x) - P_{h_0+1}(x) Q_{p_0+1}(x))$$

Pour la base B_1 on a $p_0 = 0$, $h_0 = -1$, $Q_0(x) = 0$, $Q_1 = A_1 c(P_0)$ et $P_0 c(P_0) = c(P^2)$.

Donc

$$\Delta = -A_{k+1} c(P_k P_{\text{pr}(k+1)})$$

Pour la base B_2 on a :

$$h_0 = -1, Q_0 = 0, Q_{p_0+1}(x) = A_{p_0+1} c(P_{p_0}).$$

On retrouve donc également $\Delta = -A_{k+1} c(P_k P_{pr(k+1)})$.

cqfd.

Théorème 1.9.

Si $l \geq 0$ et si $k \in \mathbb{N}$, $p_l \leq k \leq h_{l+1}$, alors :

- i) $P_{k+1}(x)$ et $P_{pr(k+1)}(x)$ n'ont pas de zéro en commun.
- ii) $Q_{k+1}(x)$ et $Q_{pr(k+1)}(x)$ n'ont pas de zéro en commun.
- iii) $P_{k+1}(x)$ et $Q_{k+1}(x)$ n'ont pas de zéro en commun.

Démonstration.

On utilise la relation de la propriété 1.21 ii)

$$P_{k+1}(x) Q_{pr(k+1)}(x) - P_{pr(k+1)}(x) Q_{k+1}(x) = -A_{k+1} c(P_k P_{pr(k+1)})$$

A_{k+1} et $c(P_k P_{pr(k+1)})$ sont non nuls.

Donc si une paire des polynômes cités a un zéro commun on aurait :

$$0 = -A_{k+1} c(P_k P_{pr(k+1)}),$$

ce qui est impossible.

cqfd.

Remarque.

Une démonstration plus naturelle peut être donnée des propositions i) et ii) du théorème 1.9 en utilisant les propriétés de l'algorithme d'Euclide de recherche du pgcd de deux polynômes. En effet la relation de récurrence à trois termes

$$P_{k+1}(x) = (A_{k+1} x + B_{k+1})P_{pr(k+1)}(x) + C_{k+1}P_{pr(pr(k+1))}(x)$$

est équivalente à l'écriture de la division de $P_{k+1}(x)$ par $P_{pr(k+1)}(x)$. Par conséquent le pgcd de $P_{k+1}(x)$ et $P_{pr(k+1)}(x)$ est égal au pgcd de $P_{pr(k+1)}(x)$ et $P_{pr(pr(k+1))}(x)$.

En réitérant, le dernier polynôme qui intervient est $P_0(x)$ qui est égal à une constante. Donc $P_{k+1}(x)$ et $P_{pr(k+1)}(x)$ sont premiers entre eux et n'ont de ce fait aucun zéro en commun.

On a la même démonstration pour le ii) puisque $Q_k(x)$ vérifie une relation de récurrence identique.

Il est possible d'établir une relation de Christoffel Darboux dans le cas général.

Soient I l'ensemble des indices $i \in \mathbb{N}$ tels que $p_\ell \leq i \leq h_{\ell+1}$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, et I_k le sous-ensemble de I composé des indices $i \in I$ tels que $i \leq k$. On posera $t_{k+1} = c(P_k P_{pr(k+1)})$.

Propriété 1.22.

i) Si $h_\ell + 1 \leq k \leq p_\ell - 1$ on a :

$$P_{k+1}(x) P_k(t) - P_{k+1}(t) P_k(x) = (x-t) P_k(x) P_k(t)$$

ii) Si $p_\ell \leq k \leq h_{\ell+1}$ et $\ell \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
 & (P_{k+1}(x) P_{pr(k+1)}(t) - P_{k+1}(t) P_{pr(k+1)}(x)) t_{k+1}^{-1} A_{k+1}^{-1} \\
 = & \sum_{i \in I_k} t_{i+1}^{-1} (x \omega_{1-pr(i+1)}(x) - t \omega_{i-pr(i+1)}(t)) P_{pr(i+1)}(x) P_{pr(i+1)}(t)
 \end{aligned}$$

Démonstration :

i) Puisque $P_{k+1}(x) = P_k(x)(x+\alpha)$ on obtient la relation proposée :

$$\text{ii) Puisque } P_{k+1}(x) = (A_{k+1} x \omega_{k-pr(k+1)}(x) + B_{k+1}) P_{pr(k+1)}(x) + C_{k+1} P_{pr(k+1)}(x)$$

$$\Delta_{k+1} = P_{k+1}(x) P_{pr(k+1)}(t) - P_{k+1}(t) P_{pr(k+1)}(x)$$

$$\begin{aligned}
 & = A_{k+1} (x \omega_{k-pr(k+1)}(x) - t \omega_{k-pr(k+1)}(t)) P_{pr(k+1)}(x) P_{pr(k+1)}(t) \\
 & \quad - C_{k+1} \Delta_{pr(k+1)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } -C_{k+1} = \frac{A_{k+1} c(P_k P_{pr(k+1)})}{A_{pr(k+1)} c(P_{pr(k+1)-1} P_{pr(k+1)})} = \frac{A_{k+1} t_{k+1}}{A_{pr(k+1)} t_{pr(k+1)}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } t_{k+1}^{-1} A_{k+1}^{-1} \Delta_{k+1} & = t_{k+1}^{-1} (x \omega_{k-pr(k+1)}(x) - t \omega_{k-pr(k+1)}(t)) P_{pr(k+1)}(x) P_{pr(k+1)}(t) \\
 & \quad + A_{pr(k+1)}^{-1} t_{pr(k+1)}^{-1} \Delta_{pr(k+1)}
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 t_{k+1}^{-1} A_{k+1}^{-1} \Delta_{k+1} & = \sum_{i \in I_k} t_{i+1}^{-1} (x \omega_{i-pr(i+1)}(x) - t \omega_{i-pr(i+1)}(t)) P_{pr(i+1)}(x) P_{pr(i+1)}(t) \\
 & \quad + A_{pr(p_0+1)}^{-1} t_{pr(p_0+1)}^{-1} \Delta_{pr(p_0+1)}
 \end{aligned}$$

$$\Delta_{pr(p_0+1)} = \Delta_0 = P_{p_0-1} P_{-1} P_{p_0} = 0, \text{ d'où le résultat.}$$

qfd.

Corollaire 1.12.

$$\begin{aligned}
& t_{k+1}^{-1} A_{k+1}^{-1} [P'_{k+1}(x)P_{pr(k+1)}(x) - P'_{pr(k+1)}(x)P_{k+1}(x)] \\
&= \sum_{i \in I_k} t_{i+1}^{-1} (\omega_{i-pr(i+1)}(x) + x\omega'_{i-pr(i+1)}(x)) P_{pr(i+1)}^2(x)
\end{aligned}$$

Démonstration.

On utilise la relation de la propriété 1.22. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{t_{k+1}^{-1} A_{k+1}^{-1} \Delta_{k+1}}{x-t} &= \sum_{i \in I_k} t_{k+1}^{-1} \left(\frac{x\omega_{i-pr(i+1)}(x) - t\omega_{i-pr(i+1)}(t)}{x-t} \right) P_{pr(i+1)}(x)P_{pr(i+1)}(t) \\
&= t_{k+1}^{-1} A_{k+1}^{-1} [P_{pr(k+1)}(t) \frac{P_{k+1}(x) - P_{k+1}(t)}{x-t} - P_{k+1}(t) \frac{P_{pr(k+1)}(x) - P_{pr(k+1)}(t)}{x-t}]
\end{aligned}$$

On fait tendre t vers x et on obtient le résultat proposé.

Remarque.

Les polynômes associés $Q_k(x)$ satisfont la relation de la propriété 1.22 et la relation du corollaire 1.12 puisqu'on a la même relation de récurrence pour les polynômes $Q_k(x)$.

Dans le but de détecter simplement les blocs de zéros dans la table H , nous établissons la condition nécessaire et suffisante suivante.

Propriété 1.23.

Une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$H_{h_{\ell}+1}^{(0)} \neq 0, H_i^{(0)} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, h_{\ell}+2 \leq i \leq p_{\ell}, H_{p_{\ell}+1}^{(0)} \neq 0$$

est que :

$$\begin{cases} P_{h_{\ell}+1} \text{ soit orthogonal régulier} \\ c(x^j P_{h_{\ell}+1}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N} \quad 0 \leq j \leq p_{\ell}-1 \\ c(x^{p_{\ell}} P_{h_{\ell}+1}) \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$\Rightarrow H_{h_{\ell}+1}^{(0)} \neq 0 \Rightarrow P_{h_{\ell}+1}(x) \text{ orthogonal régulier}$$

$$H_{p_{\ell}+1}^{(0)} \neq 0 \Rightarrow P_{p_{\ell}+1}(x) \text{ orthogonal régulier.}$$

La propriété 1.17 dit que $c(x^j P_{h_{\ell}+1}) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq p_{\ell}-1$ et $c(x^{p_{\ell}} P_{h_{\ell}+1}) \neq 0$.

$$\Leftarrow P_{h_{\ell}+1}(x) \text{ orthogonal régulier} \Rightarrow H_{h_{\ell}+1}^{(0)} \neq 0$$

Considérons le système linéaire de $p_{\ell}+1$ lignes et $h_{\ell}+1$ colonnes constitué par :

$$\begin{pmatrix} c_0 & \dots & c_{h_{\ell}+1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p_{\ell}} & \dots & c_{p_{\ell}+h_{\ell}+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{h_{\ell}+1} \end{pmatrix} = 0$$

$$c(x^j P_{h_{\ell}+1}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq j \leq p_{\ell}-1 \text{ et } c(x^{p_{\ell}} P_{h_{\ell}+1}) \neq 0$$

signifient que les coefficients de $P_{h_{\ell}+1}$ vérifient les p_{ℓ} premières lignes, mais pas la dernière du système précédent. Donc les lignes j , $j \in \mathbb{N}$,

$h_{\ell}+1 \leq j \leq p_{\ell}-1$ sont compatibles avec les $h_{\ell}+1$ premières lignes ; la ligne $p_{\ell}+1$ est incompatible. Par conséquent tout déterminant caractéristique d'ordre $h_{\ell}+1$ extrait du système des p_{ℓ} premières lignes est nul.

La ligne p_ℓ , n'étant pas compatible, donne un déterminant caractéristique non nul.

Alors, d'après la propriété 1.1, $H_{p_\ell+1}^{(o)} \neq 0$ et $H_i^{(o)} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $h_\ell+2 \leq i \leq p$.

cqfd.

Remarque 1.3.

La propriété 1.22 est particulièrement commode pour détecter les déterminants $H_i^{(o)}$ nuls.

Lorsqu'un calcul de $P_k(x)$ a été effectué avec les relations de récurrence on calcule $c(x^k P_k(x))$.

Si cette quantité est non nulle, alors $H_{k+1}^{(o)} \neq 0$ et $P_{k+1}(x)$ est un polynôme orthogonal régulier. On calcule $P_{k+1}(x)$ par les relations de récurrence.

Si cette quantité est nulle, on a $H_{k+1}^{(o)} = 0$ et $P_{k+1}(x) = w_{k-h_\ell, \ell}(x) P_{h_\ell+1}(x)$ avec $h_\ell+1 = k$. On regarde à nouveau ce que vaut $c(x^{k+1} P_k(x))$. Si cette quantité est non nulle, alors $H_{k+2}^{(o)} \neq 0$ et $P_{k+2}(x)$ est un polynôme orthogonal régulier qu'on calcule à l'aide des relations de récurrence, sinon $H_{k+2}^{(o)} = 0$ et $P_{k+2}(x) = w_{k+1-h_\ell, \ell}(x) P_{h_\ell+1}(x)$, et ainsi de suite.

1.6. FONCTIONNELLE LINEAIRE LIEE A DEUX POLYNOMES PREMIERS ENTRE EUX.

Nous avons vu que deux polynômes orthogonaux réguliers successifs par rapport à une fonctionnelle linéaire sont premiers entre eux.

Nous pouvons nous poser le problème suivant.

Etant donnés deux polynômes premiers entre eux et unitaires $P_k(x)$ et $P_{pr(k)}(x)$, existe-t-il une fonctionnelle linéaire c par rapport à laquelle ils seraient orthogonaux, et si oui que valent les c_i , pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq 2k-1$?

Nous commençons par appliquer l'algorithme d'Euclide de recherche du pgcd de P_k et $P_{pr(k)}(x)$. Puisqu'ils sont premiers entre eux, on obtient une suite S_k de polynômes $P_i(x)$ de degré i strictement décroissant, le dernier étant $P_0(x) = 1$.

Nous construisons ainsi des relations de récurrence à trois termes. La première est :

$$P_k(x) = (x\omega_{k-1-pr(k)}(x) + B_k) P_{pr(k)}(x) + C_k P_{pr(pr(k))}(x).$$

Si la fonctionnelle c existe nous aurons donc :

$$c(x^i P_k) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k-1$$

$$c(x^i P_{pr(k)}) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k-2.$$

Par conséquent :

$$c(x^j (x\omega_{k-1-pr(k)}(x) + B_k) P_{pr(k)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq pr(k)-2$$

ce qui entraîne que

$$c(x^j P_{pr(pr(k))}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq pr(k)-2.$$

Donc $P_{pr(pr(k))}(x)$ est orthogonal par rapport à la fonctionnelle c .

Ce raisonnement peut se reproduire sur l'ensemble S_k des polynômes $P_i(x)$ trouvés grâce à l'algorithme d'Euclide.

Nous complétons cet ensemble S_k de polynômes pour former une base de P_{2k-1} qui est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $2k-1$.

Tout d'abord $P_s(x) = w_{s-k}^{(s)}(x) P_k(x)$ pour $s \in \mathbb{N}, k \leq s \leq 2k-1$
 où $w_{s-k}^{(s)}(x)$ est un polynôme unitaire arbitraire de degré $s-k$. Ensuite si deux polynômes $P_i(x)$ et $P_{pr(i)}(x)$, pour $i \leq k$, sont tels que $pr(i) < i$, alors on prendra :

$$P_{pr(i)+j}(x) = w_j^{(pr(i)+j)}(x) P_{pr(i)}(x), \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq i-pr(i)-1$$

où $w_j^{(pr(i)+j)}(x)$ est un polynôme unitaire arbitraire de degré j .

Alors, $\forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq 2k-1$, nous pouvons écrire :

$$x^j = \sum_{i=0}^j \alpha_{i,j} P_i(x) \text{ avec } \alpha_{j,j} = 1.$$

Si la fonctionnelle c existe, elle est telle que :

$$c(x^j) = c_j \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq 2k-1$$

c'est à dire :



$$c_j = c\left(\sum_{i=0}^j \alpha_{i,j} P_i(x)\right) = \sum_{i=0}^j \alpha_{i,j} c(P_i)$$

Si $P_1(x)$ appartient à la suite S_k , alors on a :

$$c(P_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N}, 0 < i \leq 2k-1$$

soit à cause de l'orthogonalité de P_i , soit en appliquant la propriété 1.17 i).
Il reste $c(P_0^2) \neq 0$ et $c(P_0^2) = c(1) = c_0$.

Donc :

$$c_j = \alpha_{0,j} c_0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq 2k-1.$$

$$c_0 = \text{constante arbitraire non nulle.}$$

Si $P_{p+1}(x)$ est le premier polynôme après $P_0(x)$ qui appartient à la suite S_k , alors :

$$c(P_o P_i) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq p-1 \text{ et } p+1 \leq i \leq 2k-1.$$

$$c(P_o P_p) \neq 0$$

$$c(P_o P_p) = c(P_o x^p) = c_p$$

On trouve donc :

$$c_j = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq p-1$$

$$c_j = \alpha_{p,j} c_p \text{ pour } j \in \mathbb{N}, p \leq j \leq 2k-1$$

$$c_p = \text{constante arbitraire non nulle.}$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant qui est une généralisation du théorème de Favard [17].

Théorème 1.10.

Soient $P_k(x)$ et $P_{pr(k)}(x)$ deux polynômes unitaires premiers entre eux. Il existe une fonctionnelle linéaire c , qui est unique dès qu'on a fixé le premier coefficient non nul à partir de c_o , par rapport à laquelle les deux polynômes $P_k(x)$ et $P_{pr(k)}(x)$ sont orthogonaux, ainsi que toute la suite S_k des polynômes $P_i(x)$ déduits de $P_k(x)$ et $P_{pr(k)}(x)$ par application de l'algorithme d'Euclide.

Nous aurions pu tenter de répondre aux questions posées en résolvant le système linéaire de $2k-1$ équations à $2k$ inconnues que l'on obtient grâce à l'écriture de l'orthogonalité de $P_k(x)$ et $P_{pr(k)}(x)$, c'est à dire :

$$\begin{cases} c(x^i P_k(x)) = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k-1 \\ c(x^i P_{pr(k)}(x)) = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k-2. \end{cases}$$

Si nous posons :

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^k \lambda_{i,k} x^{k-i}$$

Le calcul des coefficients $\alpha_{i,j}$ est très simple à partir de l'expression formelle des polynômes $P_i(x)$ de la base de P_{2k-1} qui a été créée.

Par exemple pour $x^j = \sum_{i=0}^j \alpha_{i,j} P_i(x)$ on commence par former :

$$x^j - P_j(x) = R_{j-1}(x).$$

Alors $\alpha_{j-1,j}$ est le coefficient du terme de degré x^{j-1} de $R_{j-1}(x)$.

On forme alors $R_{j-1}(x) - \alpha_{j-1,j} P_{j-1}(x) = R_{j-2}(x)$; $\alpha_{j-2,j}$ est le coefficient du terme de degré x^{j-2} de $R_{j-2}(x)$, et ainsi de suite.

1.7 FORMALISME MATRICIEL

Cette section s'inspire très largement du plan et des résultats présentés dans le livre de C. Brezinski [6] dans le cas normal.

Nous commençons par définir une matrice J infinie, dont les lignes et les colonnes seront numérotées à partir de 1.

Nous prenons une suite d'entiers strictement croissante de N . Si k est un entier de cette suite il est précédé et suivi respectivement par $pr(k)$ et $su(k)$.

La ligne k de la matrice J est formée de :

$$(0, \dots, 0, -C_k, 0, \dots, 0, -B_k, -\beta_{k-1-pr(k),k}, \dots, -\beta_{0,k}, A_k, 0, \dots)$$

Le coefficient $-C_k$ est en colonne $pr(pr(k)) + 1$, A_k est en colonne $k + 1$. Au delà de A_k tous les termes sont nuls.

Pour une ligne j telle que $pr(k) < j < k$ nous avons uniquement un coefficient A_j en colonne $j + 1$.

Nous supposons tous les coefficients A non nuls.

Prenons maintenant la somme des éléments $J_{i,s}$ de la ligne i de la matrice J multipliés respectivement par y_s et égalons cette quantité à $x y_i$. Nous obtenons ainsi une équation aux différences, définie $\forall i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$. Nous ajoutons la condition initiale $y_0 = 1$.

Alors, $\forall i \in \mathbb{N}$, y_i est un polynôme en x de degré i exactement, et si $\text{pr}(k) < i < k$, $y_i = D_i x^{i-\text{pr}(k)} y_{\text{pr}(k)}$ où

$$D_i = \prod_{j=\text{pr}(k)+1}^i A_j.$$

Si on pose $y_k = P_k(x)$, la $k^{\text{ième}}$ équation aux différences donne par conséquent une relation de récurrence à trois termes.

$$P_k(x) = (x \omega_{k-1-\text{pr}(k)}(x) + B_k) P_{\text{pr}(k)}(x) + C_k P_{\text{pr}(\text{pr}(k))}(x)$$

$$\text{où } \omega_{k-1-\text{pr}(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1-\text{pr}(k)} \beta_{i,k} x^{k-1-\text{pr}(k)-i}$$

En utilisant les résultats de la section 1.6, ces polynômes sont orthogonaux par rapport à une fonctionnelle c dont on peut calculer les moments.

Ecrivons les polynômes orthogonaux ou quasi-orthogonaux par rapport à la fonctionnelle linéaire c

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^k p_i^{(k)} x^i$$

Soit L la matrice infinie :

$$L = \begin{pmatrix} P_0^{(0)} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ P_0^{(1)} & P_1^{(1)} & 0 & \dots & \dots \\ P_0^{(2)} & P_1^{(2)} & P_2^{(2)} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Soit M la matrice $(c_{i+j})_{i,j=0}^{\infty}$

Soit H la matrice $H = L M L^T$

La matrice H est une matrice symétrique dont les éléments $H_{i,j}$ valent $c(P_i P_j)$.

La partie de ces matrices limitée aux k premières lignes et colonnes sera repérée par la même lettre indiquée par k.

L_k est inversible puisque $P_i^{(i)} \neq 0, \forall i \in \mathbb{N}$.

Donc $M_k = L_k^{-1} H_k (L_k^{-1})^T, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$,

et par conséquent : $M = L^{-1} H (L^{-1})^T$

Si tous les polynômes P_k sont orthogonaux réguliers, alors H est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux valent $c(P_i^2)$. C'est la décomposition de Gauss-Banachiewicz de la matrice M (cf. W.B. Gragg [23a] et C. Brezinski [6]).

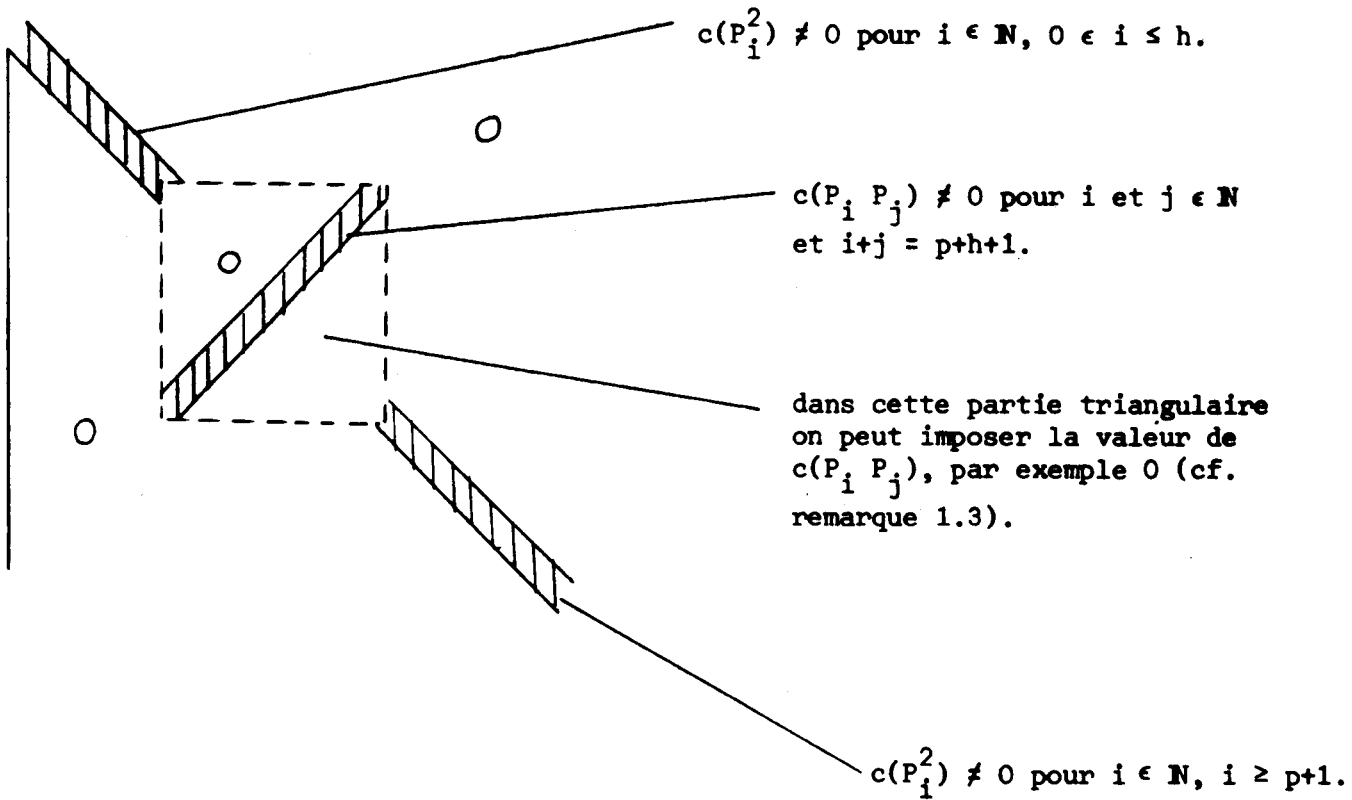
Si tous les polynômes P_k ne sont pas orthogonaux réguliers, alors H a une structure de blocs diagonaux alternés avec des blocs triangulaires.

Nous schématisons ci-après cette structure dans le cas où par exemple nous aurions

$$H_i^{(0)} \neq 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq h+1,$$

$$H_i^{(0)} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, h+2 \leq i \leq p,$$

$H_i^{(0)} \neq 0$ pour $i \geq p+1$.



D'autre part sur l'antidiagonale du bloc, la valeur de $c(P_i P_j)$ est constante pour $i+j = p+h+1$. En effet :

$$c(P_i P_j) = c(w_{i-h-1} w_{j-h-1} P_{h+1}^2) = c(x^{p-h-1} P_{h+1}^2).$$

Nous avons ainsi une décomposition générale de la matrice M dans le cas où des mineurs $H_i^{(0)}$ sont nuls.

Revenons à la matrice J . Nous appellerons I_k la matrice identité d'ordre k . Nous supposons que $A_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.11.

i) Si P_k est orthogonal régulier, alors les zéros de P_k sont les valeurs propres de J_k .

ii) Si P_k n'est pas orthogonal régulier, alors les valeurs propres de J_k sont les zéros de $P_{pr(k)}$ et la racine 0 d'ordre de multiplicité $k - pr(k)$.

Démonstration.

Nous utilisons les résultats des équations aux différences. Nous pouvons écrire

$$x \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = J_k \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_k \end{pmatrix}$$

Posons $y(x) = (y_0, y_1, \dots, y_{k-1})^T$ et $e_k = (0, \dots, 0, 1)^T$.

Nous avons $x y(x) = J_k \cdot y(x) + y_k \cdot e_k$

Par conséquent z_i sera racine de y_k si et seulement si z_i est valeur propre de J_k .

De plus $y_k = P_k(x)$ ou $x^{k-pr(k)} P_{pr(k)}(x)$.

cqfd.

Corollaire 1.14.

i) Si P_k est orthogonal régulier, alors :

$$P_k(x) = \det (x I_k - J_k)$$

ii) Si P_k n'est pas orthogonal régulier, alors :

$$\det (x I_k - J_k) = x^{k-\text{pr}(k)} P_{\text{pr}(k)}(x)$$

Les associés Q_k des polynômes orthogonaux P_k satisfont la même relation de récurrence avec une initialisation différente.

De plus $\deg Q_k = r-1$ avec $r \leq k$.

Nous aurons donc si J' est la matrice obtenue à partir de J en supprimant les $k-r+1$ premières lignes et premières colonnes :

Théorème 1.12.

i) Si P_k est orthogonal régulier, alors :

$$Q_k(x) = c_{k-r} \det (x I_{r-1} - J'_{r-1})$$

ii) Si P_k n'est pas orthogonal régulier et si $\text{pr}(k) > 0$, alors :

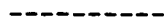
$$c_{k-r} \det (x I_{r-1} - J'_{r-1}) = x^{k-\text{pr}(k)} Q_{\text{pr}(k)}(x).$$

Nous avons encore un corollaire pour les zéros de $Q_k(x)$.

Corollaire 1.15.

i) Si P_k est orthogonal régulier, les zéros de Q_k sont les valeurs propres de J'_{r-1} .

ii) Si P_k n'est pas orthogonal régulier et si $pr(k) > 0$, les valeurs propres de J'_{r-1} sont les zéros de $Q_{pr(k)}$ et la racine 0 d'ordre de multiplicité $k-pr(k)$.



Remarque 1.4.

Pratiquement, pour connaître la valeur de $k-r+1$, il suffit d'examiner les lignes de J .

Les lignes j de J , pour $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq k-r+1$ ne contiennent que l'élément 1 en colonne $j+1$. La ligne $k-r+2$ contient en plus un élément $-C_{k+r+2}$ non nul.

SYSTEMES ADJACENTS DE POLYNOMES ORTHOGONAUX

- * -

Lorsque nous avons défini les polynômes orthogonaux, ceux-ci ont été reliés aux déterminants $H_k^{(0)}$ et à la fonctionnelle linéaire c . Nous montrerons que nous pouvons, comme dans le cas normal, définir des systèmes adjacents de polynômes orthogonaux qui seront reliés aux déterminants $H_k^{(i)}$ et aux fonctionnelles linéaires $c^{(i)}$.

La première section est consacrée aux propriétés générales de ces systèmes adjacents, aux relations qui existent entre deux systèmes successifs.

Dans la seconde nous présentons un algorithme de type *qd* permettant de calculer l'ensemble des systèmes adjacents de polynômes orthogonaux. L'algorithme présenté fonctionne dans tous les cas. On retrouve naturellement les relations proposées par Claessens et Whytack pour un cas particulier. Bien que leurs auteurs aient affirmé "Combinations of the rules given in theorem 2 and 3 can be used to handle the general case where blocks of different length are combined", nous verrons qu'il n'en est rien dans de nombreux cas et que seules nos relations permettent de trouver l'ensemble des polynômes orthogonaux.

Quelques résultats sur les polynômes orthogonaux réciproques sont donnés dans la troisième section. Ils serviront à la fois pour la forme progressive de l'algorithme *qd* et pour les approximations des séries de fonctions.

Pour terminer nous présentons la forme progressive de l'algorithme "qd". Le calcul s'effectue horizontalement après horizontale à partir d'initialisations données par la fonctionnelle \tilde{c} , qui est liée aux polynômes orthogonaux réciproques.

2.1 PROPRIETES GENERALES DES SYSTEMES ADJACENTS DE POLYNOMES ORTHOGONAUX.

Définition.

Nous appelons systèmes adjacents de polynômes orthogonaux $P_k^{(i)}(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, les polynômes orthogonaux par rapport aux fonctionnelles linéaires $c^{(i)}$, telles que :

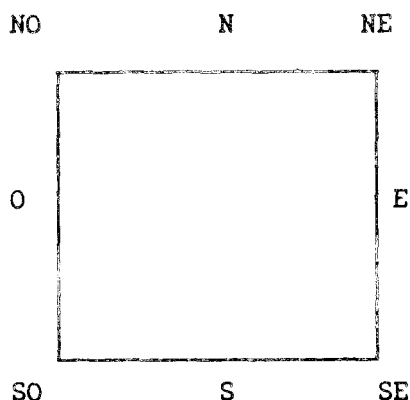
$$c^{(i)}(x^j) = c_{i+j}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Définitions.

On appelle bloc H un bloc carré où tous les déterminants $H_k^{(i)}$ sont nuls comme dans la propriété 1.9..

On appelle bloc P un bloc carré de polynômes des systèmes adjacents qui correspond au bloc H dans la table H. Ce bloc P contient donc des polynômes orthogonaux singuliers et des polynômes quasi-orthogonaux.

On définira les côtés et les coins de chacun des blocs par un repère géographique (Nord, Sud, Est et Ouest pour les côtés, Nord-Ouest, Nord-est, Sud-est et Sud-ouest pour les coins). On les note en abrégé N, S, E, O; NO; NE, SE et SO.



On appellera table P la table des polynômes $P_i^{(n)}(x)$ écrite sous forme d'un tableau triangulaire.

$$\begin{array}{ccc}
 P_{-1}^{(0)}(x) & & \\
 P_{-1}^{(1)}(x) & P_0^{(0)}(x) & \\
 P_{-1}^{(2)}(x) & P_0^{(1)}(x) & P_1^{(0)}(x) \\
 \vdots & \vdots & \vdots \quad \text{---}
 \end{array}$$

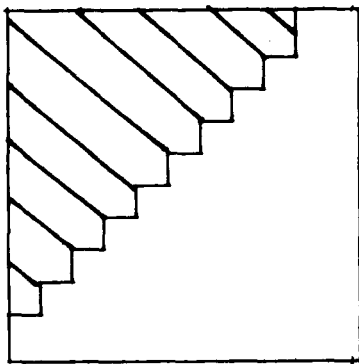
La table P est dite normale si elle ne contient que des polynomes orthogonaux reguliers, sinon elle est dite non normale.

Remarque 2.1.

Grâce au theoreme 1.9, lorsque $P_k^{(0)}$ et $P_{pr(k)}^{(0)}$ sont connus, on peut determiner de facon unique toute la table P comprise entre la diagonale 0 et l'antidiagonale 2 k-1 jusqu'au polynome $P_k^{(0)}(x)$.

Remarque 2.2.

La propriete 1.14 montre que les polynomes orthogonaux singuliers occupent la partie hachuree du bloc P, donc au dessus de l'antidiagonale principale du bloc P.



L'autre partie est occupee par les polynomes-quasi orthogonaux.

Nous commençons par demontrer une propriete relative aux polynomes orthogonaux qui sont au nord et à l'ouest d'un bloc P.

Considerons le bloc de la propriete 1.9 et la suite $H_{h-l+1}^{(k+l+i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l+b$ et la suite $H_{h-l+1+j}^{(k+l-j)}$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq l+b$.

Ces determinants sont tous non nuls. Ils permettent de definir des polynomes orthogonaux reguliers des systemes adjacents. Nous les supposerons unitaires. On a ainsi la suite $P_{h-l+1}^{(k+l+i)}(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l+b$ et la suite $P_{k-l+1+j}^{(k+l-j)}(x)$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq l+b$.

Propriété 2.1.

i) Les polynômes unitaires à l'ouest et nord-ouest d'un bloc P $P_{h-l+1}^{(k+l+i)}(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l+b$ sont identiques.

ii) Les polynômes unitaires au nord-ouest et nord d'un bloc P $P_{h-l+1+j}^{(k+l-j)}(x)$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq l+b$ sont identiques à $x^j \cdot P_{h-l+1}^{(k+l)}(x)$.

Démonstration.

i) Nous avons $c^{(k+l)}(x^j P_{h-l+1}^{(k+l)}) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq h+b$,
 $\neq 0$ pour $j = h+b+1$.

Donc pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l+b$,

$c^{(k+l+i)}(x^j P_{h-l+1}^{(k+l)}) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq h+b-i$,
 $\neq 0$ pour $j = h+b-i+1$.

Or pour le polynôme $P_{h-l+1}^{(k+l+i)}(x)$ situé à l'ouest ou au nord-ouest du bloc P nous avons :

$c^{(k+l+i)}(x^j P_{h-l+1}^{(k+l+i)}) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq h+b-i$,
 $\neq 0$ pour $j = h+b-i+1$.

Par conséquent du fait de l'unicité du polynôme orthogonal régulier nous obtenons

$P_{h-l+1}^{(k+l+i)}(x) \equiv P_{h-l+1}^{(k+l)}(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l+b$.

ii) De la même façon nous avons pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l+b$:

$$c^{(k+l-i)}(x^j x^i P_{h-l+1}^{(k+l)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq h+b, \\ \neq 0 \text{ pour } j = h+b+1.$$

$$\text{Or } c^{(k+l-i)}(x^j P_{h-l+1+i}^{(k+l-i)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq h+b, \\ \neq 0 \text{ pour } j = h+b+1.$$

et par conséquent nous obtenons

$$P_{h-l+1+i}^{(k+l-i)}(x) \equiv x^i P_{h-l+1}^{(k+l)}(x).$$

cqfd.

La propriété suivante peut servir à caractériser les polynômes orthogonaux réguliers qui se trouvent au nord d'un bloc P. C'est une condition nécessaire et suffisante pour que ces polynômes occupent cette position.

Propriété 2.2.

Les seuls polynômes orthogonaux réguliers des systèmes adjacents admettant la racine 0 sont au nord d'un bloc P.

Démonstration.

$$P_k^{(i)}(x) = \begin{vmatrix} c_i & \text{-----} & c_{k+i} \\ | & & | \\ | & & | \\ c_{k+i-1} & \text{-----} & c_{2k+i-1} \\ | & & | \\ 1 & & x^k \end{vmatrix}$$

Régulier $\Leftrightarrow H_k^{(i)} \neq 0$

Racine nulle $\Leftrightarrow H_k^{(i+1)} = 0$

On est donc bien au nord d'un bloc.

cqfd.

Propriété 2.3.

Dans un bloc P, tous les polynomes ont en facteur le polynome orthogonal régulier situe en NO.

Démonstration.

Immédiate d'après la construction des bases B₁ ou B₂ et la propriété 2.1.

cqfd.

Dans l'ensemble des démonstrations qui suivent interviennent des polynomes orthogonaux réguliers prédecesseurs ou successeurs de P_i⁽ⁿ⁾(x). Nous ferons intervenir un second indice dans la notation du prédecesseur ou du successeur, afin d'indiquer par rapport à quelle fonctionnelle ils sont pris. Par exemple pr(i,n) est égal au degré du polynome orthogonal régulier par rapport à c⁽ⁿ⁾ qui précède P_i⁽ⁿ⁾(x). P_{pr(i,n)}⁽ⁿ⁺¹⁾ serait alors le polynome de degré pr(i,n) pris par rapport à la fonctionnelle c⁽ⁿ⁺¹⁾.

Nous noterons donc les polynomes orthogonaux réguliers par : P_{pr(i,n)}⁽ⁿ⁾(x), P_{pr(pr(i,n),n)}⁽ⁿ⁾(x), ..., P_{su(i,n)}⁽ⁿ⁾(x), P_{su(su(i,n),n)}⁽ⁿ⁾(x), Tous les polynomes P_j^(k) sont unitaires, ∀j et k ∈ N. On repère les blocs P de P_i⁽ⁿ⁾(x) par les indices d'entrée et de sortie h_ℓ+1 et p_ℓ+1, ℓ ∈ N.

Propriété 2.4.

Tout polynome P_i⁽ⁿ⁺¹⁾ orthogonal régulier vérifie les relations suivantes, pour i ∈ N, p_ℓ ≤ i ≤ h_{ℓ+1}+1.

$$P_i^{(n+1)}(x) = x^{-1} P_{i+1}^{(n)}(x) + q_{i+1,\ell}^{(n)} P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x)$$

$$P_i^{(n+1)}(x) = \omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(x) \cdot P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x) + E_{i+1}^{(n)} P_{pr(pr(i+1,n),n+1)}^{(n+1)}(x)$$

$P_{pr(pr(i+1,n),n+1)}^{(n+1)}(x)$ représente le polynôme orthogonal régulier qui précède $P_{pr(i+1,n)}^{(n+1)}(x)$ qui est le polynôme situé sur la colonne $pr(i+1,n)$.

$q_{i+1,l}^{(n)}$ et $E_{i+1}^{(n)}$ sont des constantes qui sont définies ci-après.

Les polynômes $P_i^{(n+1)}(x)$ quasi-orthogonaux qui n'appartiennent pas à un bloc P de $P_i^{(n)}(x)$, c'est à dire tels que $P_i^{(n)}(0) = 0$ vérifient la relation :

$$P_i^{(n+1)}(x) = P_i^{(n)}(x) + \bar{B}_i^{(n+1)} P_{i-1}^{(n+1)}(x) \text{ où } \bar{B}_i^{(n+1)} \text{ est la constante arbitraire qui intervient dans la relation } P_i^{(n+1)}(x) = (x + \bar{B}_i^{(n+1)}) P_{i-1}^{(n+1)}(x).$$

Les polynômes $P_i^{(n+1)}(x)$ qui appartiennent à un bloc P de $P_i^{(n)}(x)$ vérifient l'une ou l'autre des deux relations suivantes :

Si $P_{h_\ell+1}^{(n)}(0) \neq 0$, $P_i^{(n+1)}(x) = w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $h_\ell+2 \leq i \leq p_\ell-1$

Si $P_{h_\ell+1}^{(n)}(0) = 0$, $P_i^{(n+1)}(x) = w_{i-h_\ell}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x) \cdot x^{-1}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $h_\ell+1 \leq i \leq p_\ell$

où $w_{i-h_\ell}^{(n+1)}(x)$ et $w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x)$ sont des polynômes arbitraires respectivement de degré $i-h_\ell$ et $i-h_\ell-1$ définis par $P_i^{(n+1)}(x) = w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n+1)}(x)$ et $P_i^{(n+1)}(x) = w_{i-h_\ell}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell}^{(n+1)}(x)$.

Pour déterminer les coefficients $q_{i+1,l}^{(n)}$ et $E_{i+1}^{(n)}$ on pose :

$$\text{Si } i = p_\ell \quad \begin{cases} B_{p_\ell+1}^{(n)} = -q_{p_\ell+1,l}^{(n)} - e_{h_\ell+1,l}^{(n)} \\ C_{p_\ell+1}^{(n)} = -q_{h_\ell+1,l-1}^{(n)} e_{h_\ell+1,l}^{(n)} \end{cases}$$

Dans les autres cas :

$$\begin{cases} B_{i+1}^{(n)} = -q_{i+1,l}^{(n)} - e_{pr(i+1,n),l}^{(n)} \\ C_{i+1}^{(n)} = -q_{pr(i+1,n),l}^{(n)} e_{pr(i+1,n),l}^{(n)} \end{cases}$$

avec au démarrage $e_{0,0}^{(n)} = 0$, $q_{0,0}^{(n)} = 0$ et par convention $-q_{0,0}^{(n)} e_{0,0}^{(n)} = c_n$.

Quand les $q_{pr(i+1,n),l}^{(n)}$ et $e_{pr(i+1,n),l}^{(n)}$ sont définis, alors

$$E_{i+1}^{(n)} = -e_{pr(i+1,n),l}^{(n)} \text{ sinon } E_{i+1}^{(n)} = C_{i+1}^{(n)}$$

Dans le cas où certains q_i et e_i sont indéfinis on a :

1. Si $P_{i+1}^{(n)}$ et $P_i^{(n)}$ sont orthogonaux réguliers et $P_i^{(n+1)}$ quasi-orthogonal, c'est-à-dire si $P_i^{(n)}(o) = 0$ et

$$a) \text{ si } P_{h_{\ell-1}+1}^{(n)}(o) \neq 0 \text{ et } p_{\ell-1}+1 \leq i < h_{\ell}+1$$

ou

$$b) \text{ si } P_{h_{\ell-1}+1}^{(n)}(o) = 0 \text{ et } p_{\ell-1}+2 \leq i < h_{\ell}+1$$

$$\text{Alors } q_{i,\ell-1}^{(n)}(o) = 0, e_{i,\ell-1}^{(n)} = \infty, q_{i+1,\ell-1}^{(n)} = \infty$$

2. Si $P_i^{(n)}(o) = 0$ avec $i < h_{\ell}$, donc si $P_{i+2}^{(n)}$ est orthogonal régulier, alors $e_{i+1,\ell-1}^{(n)} = 0, q_{i+2,\ell-1}^{(n)} = -B_{i+2}^{(n)}$.

3. Si $P_{h_{\ell}}^{(n)}(o) = 0$, donc si $P_{h_{\ell}+2}^{(n)}$ n'est pas orthogonal régulier, alors

$$P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(o) \neq 0, q_{h_{\ell}+1,\ell-1}^{(n)} = \infty, e_{h_{\ell}+1,\ell-1}^{(n)} = 0$$

$$q_{h_{\ell}+2,\ell-1}^{(n)} = -\bar{B}_{h_{\ell}+2}^{(n)} \text{ où } \bar{B}_{h_{\ell}+2}^{(n)} \text{ est une constante arbitraire}$$

définie par :

$$P_{h_{\ell}+2}^{(n)}(x) = (x + \bar{B}_{h_{\ell}+2}^{(n)}) P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(x)$$

4. Si $P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(0) \neq 0$ et $P_{h_{\ell}}^{(n)}(0) \neq 0$, alors $q_{h_{\ell}+1, \ell-1}^{(n)}$ est fini non nul, $P_{h_{\ell}}^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier et $e_{h_{\ell}+1, \ell-1}^{(n)} = 0$.

5. Si $P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(0) = 0$, c'est à dire si $P_{P_{\ell}+1}^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier et $P_{P_{\ell}}^{(n+1)}(x)$ quasi-orthogonal alors :

$$q_{h_{\ell}+1, \ell-1}^{(n)} = 0, e_{h_{\ell}+1, \ell}^{(n)} = \infty, q_{P_{\ell}+1, \ell}^{(n)} = \infty, e_{P_{\ell}+1, \ell}^{(n)} = 0$$

avec si $P_{\ell}+2 \leq h_{\ell+1}+1$, $q_{P_{\ell}+2, \ell}^{(n)} = -B_{P_{\ell}+2}^{(n)}$

si $P_{\ell} = h_{\ell+1}$, $q_{P_{\ell}+2, \ell}^{(n)} = -\bar{B}_{P_{\ell}+2}^{(n)}$ où $\bar{B}_{P_{\ell}+2}^{(n)}$ est une constante arbitraire définie par :

$$P_{P_{\ell}+2}^{(n)}(x) = (x + \bar{B}_{P_{\ell}+2}^{(n)}) P_{P_{\ell}+1}^{(n)}(x)$$

Démonstration.

Nous démontrons cette propriété par récurrence.

Montrons d'abord que les résultats de l'énoncé sont vrais pour $j \in \mathbb{N}$, $h_0+1 \leq j \leq h_1+1$.

I. LA BASE B_1 DEFINIT LES POLYNOMES $P_i^{(n)}(x)$.

a) Regardons comment démarrent les relations.

$$P_1^{(n)}(x) = (x + B_1^{(n)}) P_0^{(n)}(x) + C_1^{(n)} P_{-1}^{(n)}(x)$$

avec $P_0^{(n)}(x) = 1$ et $P_{-1}^{(n)}(x) = 0$.

On pose
$$B_1^{(n)} = -q_{1,0}^{(n)} - e_{0,0}^{(n)}$$

On prendra
$$e_{0,0}^{(n)} = 0 \text{ et } q_{0,0}^{(n)} = 0.$$

Puisque $C_1^{(n)} = A_1^{(n)} c^{(n)} (P_0^{(n)}) = c_n$ d'après le théorème 1.5 on prendra par convention

$$-q_{0,0}^{(n)} e_{0,0}^{(n)} = c_n.$$

Donc
$$x^{-1}(P_1^{(n)}(x) + q_{1,0}^{(n)} P_0^{(n)}(x)) = P_0^{(n)}(x) = 1.$$

Par conséquent on a bien
$$P_0^{(n+1)}(x) = 1 = x^{-1}(P_1^{(n)}(x) + q_{1,0}^{(n)} P_0^{(n)}(x))$$

b) Si $P_i^{(n)}(0) \neq 0$, $i < h_1 + 1$ et $P_{i-1}^{(n+1)}(x) = x^{-1}(P_i^{(n)}(x) + q_{i,0}^{(n)} P_{i-1}^{(n)}(x))$.

Alors $P_i^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier, car $P_i^{(n)}(x)$ n'est pas au nord d'un bloc P qui serait bloc P pour $P_i^{(n+1)}(x)$.

$$P_{i+1}^{(n)}(x) = (x + B_{i+1}^{(n)})P_i^{(n)}(x) + C_{i+1}^{(n)} P_{i-1}^{(n)}(x)$$

On pose
$$\left\{ \begin{array}{l} B_{i+1}^{(n)} = -q_{i+1,0}^{(n)} - e_{i,0}^{(n)} \\ C_{i+1}^{(n)} = -q_{i,0}^{(n)} e_{i,0}^{(n)} \end{array} \right.$$

Posons
$$\begin{aligned} \bar{P}_i(x) &= x^{-1}(P_{i+1}^{(n)}(x) + q_{i+1,0}^{(n)} P_i^{(n)}(x)) \\ &= P_i^{(n)}(x) - e_{i,0}^{(n)}(P_i^{(n)}(x) + q_{i,0}^{(n)} P_{i-1}^{(n)}(x))x^{-1} = P_i^{(n)}(x) - e_{i,0}^{(n)} P_{i-1}^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

Donc $\bar{P}_i(x)$ est un polynôme de degré i . De plus il est orthogonal par rapport à la fonctionnelle $c^{(n+1)}$

$$c^{(n)}(x \bar{P}_i P_j^{(n+1)}) = c^{(n)}(P_{i+1}^{(n)} P_j^{(n+1)}) + q_{i+1,0}^{(n)} c^{(n)}(P_i^{(n)} P_j^{(n+1)}) = 0$$

pour $0 \leq j \leq i-1$ à cause de l'orthogonalité de $P_i^{(n)}$ et $P_{i+1}^{(n)}$.

Donc $c^{(n+1)}(\bar{P}_i P_j^{(n+1)}) = 0$ pour $0 \leq j \leq i-1$.

Par conséquent on a bien les relations cherchées.

$$P_i^{(n+1)}(x) = x^{-1}(P_{i+1}^{(n)}(x) + q_{i+1,0}^{(n)} P_i^{(n)}(x))$$

$$P_i^{(n+1)}(x) = P_i^{(n)}(x) - e_{i,0}^{(n)} P_{i-1}^{(n+1)}(x).$$

c) Si $\underline{P_i^{(n)}(0) = 0}$ et $i < h_1 + 1$.

$P_{i+1}^{(n)}$ est orthogonal régulier puisque $i < h_1 + 1$.

$P_i^{(n)}(x)$ est au nord d'un bloc P pour $P_i^{(n+1)}(x)$ qui est quasi-orthogonal.

$P_{i-1}^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier.

Nous allons donner les valeurs de $q_{i,0}^{(n)}$, $e_{i,0}^{(n)}$, $q_{i+1,0}^{(n)}$

$$x^{-1} P_i^{(n)}(x) = P_{i-1}^{(n+1)}(x) = x^{-1}(P_i^{(n)}(x) + q_{i,0}^{(n)} P_{i-1}^{(n)}(x))$$

Donc $q_{i,0}^{(n)} = 0$

$$P_{i+1}^{(n)}(x) = (x + B_{i+1}^{(n)}) P_i^{(n)}(x) + C_{i+1}^{(n)} P_{i-1}^{(n)}(x).$$

On pose
$$\left\{ \begin{array}{l} B_{i+1}^{(n)} = -q_{i+1,0}^{(n)} - e_{i,0}^{(n)} \\ C_{i+1}^{(n)} = -q_{i,0}^{(n)} e_{i,0}^{(n)} \neq 0 \text{ d'après le théorème 1.5} \end{array} \right.$$

puisque $P_{i+1}^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier.

Donc $e_{i,0}^{(n)} = \infty$, $q_{i+1,0}^{(n)} = \infty$. Ce qui entraîne que :

$$\bar{P}_i(x) = x^{-1}(P_{i+1}^{(n)}(x) + q_{i+1,0}^{(n)} P_i^{(n)}(x))$$

n'est pas défini.

De plus on a :

$$P_i^{(n+1)}(x) = (x + \bar{B}_i^{(n+1)}) P_{i-1}^{(n+1)}(x)$$

avec $\bar{B}_i^{(n+1)}$ arbitraire, et puisque $P_{i-1}^{(n+1)}(x) = x^{-1} P_i^{(n)}(x)$ on obtient :

$$P_i^{(n+1)}(x) = P_i^{(n)}(x) + \bar{B}_i^{(n+1)} P_{i-1}^{(n+1)}(x).$$

d) Si $P_i^{(n)}(0) = 0$ et $i+1 < h_1+1$.

$P_{i+2}^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier, par hypothèse.

$$P_{i+2}^{(n)}(x) = (x + B_{i+2}^{(n)}) P_{i+1}^{(n)}(x) + C_{i+2}^{(n)} P_i^{(n)}(x)$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{i+2}^{(n)} = -q_{i+2,0}^{(n)} - e_{i+1,0}^{(n)} \\ C_{i+2}^{(n)} = -q_{i+1,0}^{(n)} e_{i+1,0}^{(n)} \neq 0 \end{array} \right.$$

Puisque $q_{i+1,0}^{(n)} = \infty$, alors $e_{i+1,0}^{(n)} = 0$ et $q_{i+2,0}^{(n)} = -B_{i+2}^{(n)}$.

De plus $P_{i+2}^{(n)}(0) = B_{i+2}^{(n)} P_{i+1}^{(n)}(0)$ ce qui entraine que :

$$\bar{P}_{i+1}^{(n)}(x) = x^{-1} (P_{i+2}^{(n)}(x) + q_{i+2,0}^{(n)} P_{i+1}^{(n)}(x))$$

est un polynôme de degré $i+1$.

$x\bar{P}_{i+1}^{(n)}(x) = P_{i+2}^{(n)}(x) + q_{i+2,0}^{(n)} P_{i+1}^{(n)}(x)$ est orthogonal par rapport à $c^{(n)}$.

Donc $\bar{P}_{i+1}^{(n)}(x)$ est orthogonal par rapport à $c^{(n+1)}$ et est identique à $P_{i+1}^{(n+1)}(x)$.

Enfin $P_{i+1}^{(n+1)}(x) = x^{-1} (P_{i+2}^{(n)}(x) + q_{i+2,0}^{(n)} P_{i+1}^{(n)}(x))$

$$= P_{i+1}^{(n)}(x) + x^{-1} C_{i+2}^{(n)} P_i^{(n)}(x) = P_{i+1}^{(n)}(x) + C_{i+2}^{(n)} P_{i-1}^{(n+1)}(x).$$

$$e) \underline{P_{h_1}^{(n)}(0) = 0.}$$

$P_{h_1+1}^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier. Il est à l'ouest ou dans le coin Nord-Ouest du bloc P pour $P_i^{(n)}(x)$. Donc $P_{h_1+1}^{(n)}(0) \neq 0$.

$$P_{h_1+2}^{(n)}(x) = (x + \bar{B}_{h_1+2}^{(n)})P_{h_1+1}^{(n)}(x) \text{ avec } \bar{B}_{h_1+2}^{(n)} \text{ arbitraire.}$$

$$\text{On pose } \begin{cases} \bar{B}_{h_1+2}^{(n)} = -q_{h_1+2,0}^{(n)} - e_{h_1+1,0}^{(n)} \\ 0 = -e_{h_1+1,0}^{(n)} q_{h_1+1,0}^{(n)} \end{cases}$$

$$q_{h_1+1,0}^{(n)} = \infty \Rightarrow e_{h_1+1,0}^{(n)} = 0 \Rightarrow q_{h_1+2,0}^{(n)} = -\bar{B}_{h_1+2}^{(n)}$$

Enfin $x^{-1}(P_{h_1+2}^{(n)}(x) + q_{h_1+2,0}^{(n)} P_{h_1+1}^{(n)}(x)) = P_{h_1+1}^{(n)}(x) = P_{h_1+1}^{(n+1)}(x)$ d'après la propriété 2.1 i).

$$\begin{aligned} \text{On a aussi : } P_{h_1+1}^{(n+1)}(x) &= P_{h_1+1}^{(n)}(x) - e_{h_1+1,0}^{(n)} P_{h_1-1}^{(n+1)}(x) \\ &= P_{h_1+1}^{(n)}(x) + C_{h_1+2}^{(n)} P_{h_1-1}^{(n+1)}(x) \text{ puisque } C_{h_1+2}^{(n)} \end{aligned}$$

est nul d'après la remarque 1.2.

$$f) \underline{P_{h_1+1}^{(n)}(0) \neq 0.}$$

$P_{h_1+1}^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier ; il est à l'ouest ou au nord-ouest d'un bloc P. On a les mêmes résultats que dans le cas e), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} e_{h_1+1,0}^{(n)} = 0, \quad q_{h_1+2,0}^{(n)} &= -\bar{B}_{h_1+2}^{(n)} \\ P_{h_1+1}^{(n+1)}(x) &= P_{h_1+1}^{(n)}(x) - e_{h_1+1,0}^{(n)} P_{pr(h_1+1, n+1)}^{(n+1)}(x) \\ &= P_{h_1+1}^{(n)} + C_{h_1+2}^{(n)} P_{pr(h_1+1, n+1)}^{(n+1)}(x) \\ P_{h_1+1}^{(n+1)}(x) &= x^{-1}(P_{h_1+2}^{(n)}(x) + q_{h_1+2,0}^{(n)} P_{h_1+1}^{(n)}(x)) \end{aligned}$$

En effet :

Soit $P_{h_1}^{(n)}(0) = 0$, alors $P_{h_1}^{(n+1)}(x)$ est quasi-orthogonal et on est dans le cas e). Donc $q_{h_1+1,0}^{(n)} = \infty$ et on a les résultats proposés.

Soit $P_{h_1}^{(n)}(0) \neq 0$, alors $P_{h_1}^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier puisque $P_{h_1}^{(n)}(x)$ n'est pas au nord d'un bloc P pour $P^{(n+1)}(x)$.

$q_{h_1+1,0}^{(n)}$ est fini non nul, car si $q_{h_1+1,0}^{(n)} = 0$, on aurait

$$P_{h_1}^{(n+1)}(x) = x^{-1}(P_{h_1+1}^{(n)}(x) + q_{h_1+1,0}^{(n)} P_{pr(h_1+1,n)}^{(n)}(x)) = x^{-1} P_{h_1+1}^{(n)}(x)$$

ce qui entrainerait $P_{h_1+1}^{(n)}(0) = 0$.

Donc $e_{h_1+1,0}^{(n)} = 0$ et $P_{h_1+1}^{(n+1)}(x) = P_{h_1+1}^{(n)}(x)$.

On obtient les résultats proposés.

g) $P_{h_1+1}^{(n)}(0) = 0$.

$P_{h_1+1}^{(n)}$ est au nord d'un bloc P qui est aussi bloc P pour $P_i^{(n+1)}(x)$.
Par conséquent :

$$P_{h_1+2}^{(n)}(x) = (x + \bar{B}_{h_1+2}^{(n)}) P_{h_1+1}^{(n)}(x) \text{ avec } \bar{B}_{h_1+2}^{(n)} \text{ arbitraire.}$$

$$P_{h_1+1}^{(n+1)}(x) = (x + \bar{B}_{h_1+1}^{(n+1)}) P_{h_1}^{(n+1)}(x) \text{ avec } \bar{B}_{h_1+1}^{(n+1)} \text{ arbitraire.}$$

Or $x P_{h_1}^{(n+1)}(x) = P_{h_1+1}^{(n)}(x)$.

On a encore $q_{h_1+1,0}^{(n)} = 0$ comme dans le cas c).

D'autre part : $P_{h_1+1}^{(n+1)}(x) = P_{h_1+1}^{(n)}(x) + \bar{B}_{h_1+1}^{(n+1)} P_{h_1}^{(n+1)}(x)$.

II. LA BASE B_2 DEFINIT LES POLYNOMES $P_i^{(n)}(x)$.

Tant qu'on parcourt le bloc P on a : $P_i^{(n)}(x) = w_i^{(n)}(x)$ et $P_{i-1}^{(n+1)}(x) = w_{i-1}^{(n+1)}(x)$ où $w_i^{(n)}(x)$ et $w_{i-1}^{(n+1)}(x)$ sont des polynômes arbitraires respectivement de degré i et $i-1$.

A la sortie du bloc P on a :

$$P_{p_0+1}^{(n)}(x) = (x\omega_{p_0}^{(n)}(x) + B_{p_0+1}^{(n)}) P_0^{(n)}(x) + C_{p_0+1}^{(n)} P_{-1}^{(n)}(x)$$

On pose :

$$\begin{cases} B_{p_0+1}^{(n)} = -q_{p_0+1,0}^{(n)} - e_{0,0}^{(n)} \\ C_{p_0+1}^{(n)} = -e_{0,0}^{(n)} q_{0,0}^{(n)} \end{cases}$$

On prendra $e_{0,0}^{(n)} = 0$, $q_{0,0}^{(n)} = 0$ ce qui entraine que $q_{p_0+1,0}^{(n)} = -B_{p_0+1}^{(n)}$.

Puisque $C_{p_0+1}^{(n)} = A_{p_0+1}^{(n)} c_{p_0}^{(n)}(P_0^{(n)}) = c_{n+p_0}$ d'après le théorème 1.5, on prendra par convention

$$-q_{0,0}^{(n)} e_{0,0}^{(n)} = c_{n+p_0}.$$

Alors $\bar{P}_{p_0}(x) = x^{-1}(P_{p_0+1}^{(n)}(x) + q_{p_0+1,0}^{(n)} P_0^{(n)}(x)) = \omega_{p_0}^{(n)}(x) P_0^{(n)}(x)$

$\bar{P}_{p_0}(x)$ est un polynôme de degré p_0 , orthogonal par rapport à $c^{(n+1)}$

$$c^{(n)}(x\bar{P}_{p_0}(x) P_i^{(n+1)}(x)) = c^{(n)}(P_{p_0+1}^{(n)} P_i^{(n+1)}) + q_{p_0+1,0}^{(n)} c^{(n)}(P_i^{(n+1)}) = 0$$

pour $i < p_0$ (on rappelle que dans le cas de la base B_2 , $c(P_i) = 0$, $\forall P_i$ pour $i < p_0$).

Donc $\bar{P}_{p_0}(x) \equiv P_{p_0}^{(n+1)}(x)$ puisque $P_{p_0}^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier.

On a également $P_{p_0}^{(n+1)}(x) = \omega_{p_0}^{(n)}(x) P_0^{(n)}(x) - e_{0,0}^{(n)} P_{-1}^{(n+1)}(x)$

Enfin pour $i \in \mathbb{N}$, $p_0+2 \leq i \leq h_1+1$, on retrouve les mêmes démonstrations que dans le I.

III. ON SUPPOSE LES RESULTATS DE L'ENONCE VRAIS JUSQU'A L'ORDRE $h_{\ell+1}$.
 MONTRONS QUE CES RESULTATS RESTENT VRAIS POUR $h_{\ell+2} \leq i \leq h_{\ell+1}+1$.

(A)
$$\underline{P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(0) \neq 0.}$$

$P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(x)$ est à l'ouest ou au nord-ouest du bloc P.

$$P_{h_{\ell+1}}^{(n+1)}(x) \equiv P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(x)$$

$$P_{h_{\ell+2}}^{(n)}(x) = (x + \bar{B}_{h_{\ell+2}}^{(n)}) P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(x)$$

avec $\bar{B}_{h_{\ell+2}}^{(n)}$ arbitraire.

Tant que $P_{h_{\ell+2+i}}^{(n)}$, pour $i \in \mathbb{N}$, parcourt le bloc P on a :

$$P_{h_{\ell+2+i}}^{(n)}(x) = w_{i+1}^{(n)}(x) P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(x)$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq p_{\ell} - h_{\ell} - 2$

$$P_{h_{\ell+1+i}}^{(n+1)}(x) = w_i^{(n+1)}(x) P_{h_{\ell+1}}^{(n+1)}(x) = w_i^{(n+1)}(x) P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(x) \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq p_{\ell} - h_{\ell} - 2,$$

où $w_{i+1}^{(n)}(x)$ et $w_i^{(n+1)}(x)$ sont des polynômes arbitraires respectivement de degré $i+1$ et i .

Sortie du bloc P.

$P_{p_{\ell}}^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier.

$$P_{p_{\ell}+1}^{(n)}(x) = (x \omega_{p_{\ell}-h_{\ell}-1}^{(n)}(x) + B_{p_{\ell}+1}^{(n)}) P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(x) + C_{p_{\ell}+1}^{(n)} P_{pr(h_{\ell+1},n)}^{(n)}(x)$$

On pose

$$\left\{ \begin{aligned} B_{p_{\ell}+1}^{(n)} &= -q_{p_{\ell}+1, \ell}^{(n)} - e_{h_{\ell+1}, \ell}^{(n)} \\ C_{p_{\ell}+1}^{(n)} &= -q_{h_{\ell+1}, \ell-1}^{(n)} e_{h_{\ell+1}, \ell}^{(n)} \neq 0 \end{aligned} \right.$$

$q_{h_{\ell}+1, \ell-1}^{(n)}$ est soit fini non nul, soit infini.

Si $q_{h_{\ell}+1, \ell-1}^{(n)}$ est fini non nul.

Alors $P_{h_{\ell}}^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier et $e_{h_{\ell}+1, \ell-1}^{(n)} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \bar{P}_{P_{\ell}}(x) &= x^{-1}(P_{P_{\ell}+1}^{(n)}(x) + q_{P_{\ell}+1, \ell}^{(n)} P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(x)) \\ &= \omega_{P_{\ell}-h_{\ell}-1}^{(n)}(x) P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(x) - x^{-1} e_{h_{\ell}+1, \ell}^{(n)} (P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(x) + q_{h_{\ell}+1, \ell-1}^{(n)} P_{\text{pr}(h_{\ell}+1, n)}^{(n)}(x)) \\ &= \omega_{P_{\ell}-h_{\ell}-1}^{(n)}(x) P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(x) - e_{h_{\ell}+1, \ell}^{(n)} P_{h_{\ell}}^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

$\bar{P}_{P_{\ell}}(x)$ est donc un polynôme de degré p_{ℓ} ; il est orthogonal par rapport à $c^{(n+1)}$

$$c^{(n)}(x \bar{P}_{P_{\ell}} P_j^{(n+1)}) = c^{(n)}(P_{P_{\ell}+1}^{(n)} P_j^{(n+1)}) + q_{P_{\ell}+1, \ell}^{(n)} c^{(n)}(P_{h_{\ell}+1}^{(n)} P_j^{(n+1)}) = 0$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq p_{\ell}-1$, soit à cause de l'orthogonalité de $P_{P_{\ell}+1}^{(n)}$, soit en appliquant la propriété 1.17 i).

Donc $\bar{P}_{P_{\ell}}(x) \equiv P_{P_{\ell}}^{(n+1)}(x)$.

On a aussi :

$$P_{P_{\ell}}^{(n+1)}(x) = \omega_{P_{\ell}-h_{\ell}-1}^{(n)}(x) P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(x) - e_{h_{\ell}+1, \ell}^{(n)} P_{h_{\ell}}^{(n+1)}(x).$$

Si $q_{h_{\ell}+1, \ell-1}^{(n)} = \infty$.

Alors $P_{h_{\ell}}^{(n+1)}$ est quasi-orthogonal et $P_{\text{pr}(h_{\ell}+1, n)}^{(n)}(0) = 0$

$$e_{h_{\ell}+1, \ell}^{(n)} = 0 \text{ et } B_{P_{\ell}+1}^{(n)} = -q_{P_{\ell}+1, \ell}^{(n)}$$

Enfin puisque $P_{pr(h_\ell+1,n)}^{(n)}(o) = 0$, alors $P_{p_\ell+1}^{(n)}(o) = B_{p_\ell+1}^{(n)} P_{h_\ell+1}^{(n)}(o)$, ce qui entraîne que :

$$\bar{P}_{p_\ell}^{(n)}(x) = x^{-1} P_{p_\ell+1}^{(n)}(x) + q_{p_\ell+1,\ell}^{(n)} P_{h_\ell+1}^{(n)}(x) \text{ est un polynôme de degré } p_\ell.$$

Comme précédemment on a l'orthogonalité par rapport à $c^{(n+1)}$.

$$\text{Donc } \bar{P}_{p_\ell}^{(n)}(x) \equiv P_{p_\ell}^{(n+1)}(x).$$

$$\text{De plus on a : } x^{-1} P_{p_\ell+1}^{(n)}(x) + q_{p_\ell+1,\ell}^{(n)} P_{h_\ell+1}^{(n)}(x)$$

$$= \omega_{p_\ell-h_\ell-1}^{(n)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x) + x^{-1} C_{p_\ell+1}^{(n)} P_{pr(h_\ell+1,n)}^{(n)}(x).$$

$$\text{Or } P_{pr(h_\ell+1,n)}^{(n)}(x) = x P_{pr(h_\ell+1,n)-1}^{(n+1)}(x) \text{ et } pr(h_\ell+1,n)-1 = pr(h_\ell+1,n+1).$$

$$\text{Donc } P_{p_\ell}^{(n+1)}(x) = \omega_{p_\ell-h_\ell-1}^{(n)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x) + C_{p_\ell+1}^{(n)} P_{pr(h_\ell+1,n+1)}^{(n+1)}(x).$$

Par conséquent, on a en utilisant nos notations sur les polynômes orthogonaux réguliers prédécesseurs d'une position donnée,

$$P_{p_\ell}^{(n+1)}(x) = \omega_{p_\ell-pr(p_\ell+1,n)}^{(n)}(x) P_{pr(p_\ell+1,n)}^{(n)}(x) + C_{p_\ell+1}^{(n)} P_{pr(pr(p_\ell+1,n),n+1)}^{(n+1)}(x)$$

B

$$P_{h_\ell+1}^{(n)}(o) = 0.$$

$P_{h_\ell+1}^{(n)}(x)$ est au nord du bloc P qui est aussi bloc P pour $P_i^{(n+1)}(x)$.

$P_i^{(n+1)}(x)$ est non orthogonal régulier pour $i \in \mathbb{N}$, $h_\ell+1 \leq i \leq p_\ell$.

Pendant la traversée du bloc P on a :

$$P_{h_\ell+2+i}^{(n)}(x) = w_{i+1}^{(n)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x) \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq p_\ell-h_\ell-2$$

$$P_{h_\ell+1+i}^{(n+1)}(x) = w_{i+1}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell}^{(n+1)}(x) = w_{i+1}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x) \cdot x^{-1} \text{ pour } i \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq i \leq p_\ell-h_\ell-1$$

$$P_{p_{\ell}+1}^{(n)}(x) = (x \omega_{p_{\ell}-h_{\ell}-1}^{(n)}(x) + B_{p_{\ell}+1}^{(n)}) P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(x) + C_{p_{\ell}+1}^{(n)} P_{pr(h_{\ell}+1, n)}^{(n)}(x)$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{p_{\ell}+1}^{(n)} = -q_{p_{\ell}+1, \ell}^{(n)} - e_{h_{\ell}+1, \ell}^{(n)} \\ C_{p_{\ell}+1}^{(n)} = -q_{h_{\ell}+1, \ell-1}^{(n)} e_{h_{\ell}+1, \ell}^{(n)} \neq 0 \end{array} \right.$$

On a $q_{h_{\ell}+1, \ell-1}^{(n)} = 0$, donc $e_{h_{\ell}+1, \ell}^{(n)} = \infty$ et $q_{p_{\ell}+1, \ell}^{(n)} = \infty$

1. Si $p_{\ell}+2 \leq h_{\ell}+1$.

Alors $P_{p_{\ell}+2}^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier

$$P_{p_{\ell}+2}^{(n)}(x) = (x + B_{p_{\ell}+2}^{(n)}) P_{p_{\ell}+1}^{(n)}(x) + C_{p_{\ell}+2}^{(n)} P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(x).$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{p_{\ell}+2}^{(n)} = -q_{p_{\ell}+2, \ell}^{(n)} - e_{p_{\ell}+1, \ell}^{(n)} \\ C_{p_{\ell}+2}^{(n)} = -q_{p_{\ell}+1, \ell}^{(n)} e_{p_{\ell}+1, \ell}^{(n)} \neq 0 \end{array} \right.$$

$$q_{p_{\ell}+1, \ell}^{(n)} = \infty \Rightarrow e_{p_{\ell}+1, \ell}^{(n)} = 0 \Rightarrow B_{p_{\ell}+2}^{(n)} = -q_{p_{\ell}+2, \ell}^{(n)}.$$

$$\text{Posons } \bar{P}_{p_{\ell}+1}^{(n)}(x) = x^{-1}(P_{p_{\ell}+2}^{(n)}(x) + q_{p_{\ell}+2, \ell}^{(n)} P_{p_{\ell}+1}^{(n)}(x))$$

$$P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow P_{p_{\ell}+2}^{(n)}(0) = B_{p_{\ell}+2}^{(n)} P_{p_{\ell}+1}^{(n)}(0).$$

Donc $\bar{P}_{p_{\ell}+1}^{(n)}(x)$ est un polynôme de degré $p_{\ell}+1$ qui est orthogonal par rapport à $c^{(n+1)}$, ce qui se prouve par une démonstration analogue à la précédente.

Par conséquent $\bar{P}_{p_{\ell}+1}^{(n)}(x) = P_{p_{\ell}+1}^{(n+1)}(x)$.

D'autre part on sait que $P_{h_{\ell}+1}^{(n)}(x) = x P_{h_{\ell}}^{(n+1)}(x)$.

$$\text{Donc } P_{p_{\ell}+1}^{(n+1)}(x) = x^{-1}(P_{p_{\ell}+2}^{(n)}(x) + q_{p_{\ell}+2, \ell}^{(n)} P_{p_{\ell}+1}^{(n)}(x)) = P_{p_{\ell}+1}^{(n)}(x) + C_{p_{\ell}+2}^{(n)} P_{h_{\ell}}^{(n+1)}(x)$$

Comme précédemment à l'aide de nos notations nous trouvons :

$$P_{p_\ell+1}^{(n+1)}(x) = P_{pr(p_\ell+2,n)}^{(n)}(x) + C_{p_\ell+2}^{(n)} P_{pr(pr(p_\ell+2,n),n+1)}^{(n+1)}(x).$$

2. Si $p_\ell = h_{\ell+1}$.

Alors $P_{p_\ell+2}^{(n)}(x) = P_{h_{\ell+1}+2}^{(n)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

$$P_{p_\ell+2}^{(n)}(x) = (x + \bar{B}_{p_\ell+2}^{(n)}) P_{p_\ell+1}^{(n)}(x) \text{ avec } \bar{B}_{p_\ell+2}^{(n)} \text{ arbitraire.}$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{B}_{p_\ell+2}^{(n)} = -q_{p_\ell+2,\ell}^{(n)} - e_{p_\ell+1,\ell}^{(n)} \\ 0 = -e_{p_\ell+1,\ell}^{(n)} q_{p_\ell+1,\ell}^{(n)} \end{array} \right.$$

$$q_{p_\ell+1,\ell}^{(n)} = \infty \Rightarrow e_{p_\ell+1,\ell}^{(n)} = 0 \Rightarrow \bar{B}_{p_\ell+2}^{(n)} = -q_{p_\ell+2,\ell}^{(n)}$$

$$\bar{P}_{p_\ell+1}^{(n)}(x) = x^{-1}(P_{p_\ell+2}^{(n)}(x) + q_{p_\ell+2,\ell}^{(n)} P_{p_\ell+1}^{(n)}(x)) = P_{p_\ell+1}^{(n)}(x).$$

Donc $\bar{P}_{p_\ell+1}^{(n)}(x)$ est un polynôme de degré $p_\ell+1$ qui est orthogonal par rapport

à $c^{(n+1)}$. Il est donc identique à $P_{p_\ell+1}^{(n+1)}(x)$.

On peut encore écrire :

$$\begin{aligned} P_{p_\ell+1}^{(n+1)}(x) &= P_{p_\ell+1}^{(n)}(x) - e_{p_\ell+1,\ell}^{(n)} P_{h_\ell}^{(n+1)}(x) \\ &= P_{p_\ell+1}^{(n)}(x) + C_{p_\ell+2}^{(n)} P_{h_\ell}^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

puisque $C_{p_\ell+2}^{(n)} = 0$ d'après la remarque 1.2.

Les démonstrations qui suivent sont valables dans les cas **(A)** et **(B)**.

j) Si $P_i^{(n)}(0) \neq 0$ et $P_{pr(i+1,n)-1}^{(n+1)}(x) = x^{-1} P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x) + q_{pr(i+1,n),l}^{(n)} P_{pr(pr(i+1,n),n)}^{(n)}(x)$

avec $p_{\ell+1} \leq i < h_{\ell+1} + 1$ dans le cas **(A)** et $p_{\ell+2} \leq i < h_{\ell+1} + 1$ dans le cas **(B)**, alors $P_i^{(n)}(x)$ n'est pas au nord d'un bloc P pour $P_i^{(n+1)}(x)$. Donc $P_i^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier. On a une démonstration analogue au b) en utilisant la relation générale suivante :

$$P_{i+1}^{(n)}(x) = (x \omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(x) + B_{i+1}^{(n)}) P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x) + C_{i+1}^{(n)} P_{pr(pr(i+1,n),n)}^{(n)}(x)$$

et en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{i+1}^{(n)} = -q_{i+1,l}^{(n)} - e_{pr(i+1,n),l}^{(n)} \\ C_{i+1}^{(n)} = -q_{pr(i+1,n),l}^{(n)} e_{pr(i+1,n),l}^{(n)} \end{array} \right.$$

On trouve alors :

$$P_i^{(n+1)}(x) = x^{-1} P_{i+1}^{(n)}(x) + q_{i+1,l}^{(n)} P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x)$$

$$P_i^{(n+1)}(x) = \omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(x) P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x) - e_{pr(i+1,n),l}^{(n)} P_{pr(i+1,n)-1}^{(n+1)}(x)$$

k) Si $P_i^{(n)}(0) = 0$.

Avec $p_{\ell+1} \leq i < h_{\ell+1} + 1$ dans le cas **(A)** et $p_{\ell+2} \leq i < h_{\ell+1} + 1$ dans le cas **(B)**, alors $P_i^{(n)}(x)$ est au nord d'un bloc P pour $P_i^{(n+1)}(x)$ qui est quasi-orthogonal. $P_{i+1}^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier ainsi que $P_{i-1}^{(n+1)}(x)$. Comme dans le cas c) on obtient :

$$x^{-1} P_i^{(n)}(x) = P_{i-1}^{(n+1)}(x) = x^{-1} P_i^{(n)}(x) + q_{i,l}^{(n)} P_{pr(i,n)}^{(n)}(x)$$

Donc $q_{i,l}^{(n)} = 0$.

$$P_{i+1}^{(n)}(x) = (x + B_{i+1}^{(n)}) P_i^{(n)}(x) + C_{i+1}^{(n)} P_{pr(i,n)}^{(n)}(x).$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} B_{i+1}^{(n)} = -q_{i+1,l}^{(n)} - e_{i,l}^{(n)} \\ C_{i+1}^{(n)} = -q_{i,l}^{(n)} e_{i,l}^{(n)} \neq 0 \end{cases}$$

d'après le théorème 1.5 puisque $P_{i+1}^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier.

$$\text{Donc } e_{i,l}^{(n)} = \infty \Rightarrow q_{i+1,l}^{(n)} = \infty$$

$$P_i^{(n+1)}(x) = (x + \bar{B}_i^{(n+1)}) P_{i-1}^{(n+1)}(x) \text{ avec } \bar{B}_i^{(n+1)} \text{ arbitraire.}$$

$$\text{Or } P_{i-1}^{(n+1)}(x) = x^{-1} P_i^{(n)}(x).$$

$$\text{Donc } P_i^{(n+1)}(x) = P_i^{(n)}(x) + \bar{B}_i^{(n+1)} P_{i-1}^{(n+1)}(x).$$

ℓ) Si $P_i^{(n)}(0) = 0$ et $p_{\ell+2} \leq i+1 < h_{\ell+1}+1$.

La démonstration est identique à celle du cas d).

On obtient donc :

$$q_{i+1,l}^{(n)} = \infty, e_{i+1,l}^{(n)} = 0, q_{i+2,l}^{(n)} = -B_{i+2}^{(n)}$$

$$P_{i+1}^{(n+1)}(x) = x^{-1} (P_{i+2}^{(n)}(x) + q_{i+2,l}^{(n)} P_{i+1}^{(n)}(x))$$

$$P_{i+1}^{(n+1)}(x) = P_{i+1}^{(n)}(x) + C_{i+2}^{(n)} P_{i-1}^{(n+1)}(x)$$

m) Si $P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(0) = 0$.

La démonstration et les résultats sont ceux du cas e).

$$q_{h_{\ell+1}+1,l}^{(n)} = \infty, e_{h_{\ell+1}+1,l}^{(n)} = 0, q_{h_{\ell+1}+2,l}^{(n)} = -\bar{B}_{h_{\ell+1}+2}^{(n)}$$

$$P_{h_{\ell+1}+1}^{(n+1)}(x) = x^{-1}(P_{h_{\ell+1}+2}^{(n)}(x) + q_{h_{\ell+1}+2, \ell}^{(n)} P_{h_{\ell+1}+1}^{(n)}(x))$$

$$\begin{aligned} P_{h_{\ell+1}+1}^{(n+1)}(x) &= P_{h_{\ell+1}+1}^{(n)}(x) - e_{h_{\ell+1}+1, \ell}^{(n)} P_{h_{\ell+1}-1}^{(n+1)}(x) \\ &= P_{h_{\ell+1}+1}^{(n)}(x) + C_{h_{\ell+1}+2}^{(n)} P_{h_{\ell+1}-1}^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

n) $P_{h_{\ell+1}+1}^{(n)}(0) \neq 0$.

La démonstration et les résultats sont ceux du cas f).

$$e_{h_{\ell+1}+1, \ell}^{(n)} = 0, \quad q_{h_{\ell+1}+2, \ell}^{(n)} = -\bar{B}_{h_{\ell+1}+2}^{(n)}$$

$$P_{h_{\ell+1}+1}^{(n+1)}(x) = x^{-1}(P_{h_{\ell+1}+2}^{(n)}(x) + q_{h_{\ell+1}+2, \ell}^{(n)} P_{h_{\ell+1}+1}^{(n)}(x))$$

$$\begin{aligned} P_{h_{\ell+1}+1}^{(n+1)}(x) &= P_{h_{\ell+1}+1}^{(n)}(x) - e_{h_{\ell+1}+1, \ell}^{(n)} P_{pr(h_{\ell+1}+1, n+1)}^{(n+1)}(x) \\ &= P_{h_{\ell+1}+1}^{(n)}(x) + C_{h_{\ell+1}+2}^{(n)} P_{pr(h_{\ell+1}+1, n+1)}^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

o) Si $P_{h_{\ell+1}+1}^{(n)}(0) = 0$.

La démonstration et les résultats sont ceux du cas g).

$$P_{h_{\ell+1}+2}^{(n)}(x) = (x + \bar{B}_{h_{\ell+1}+2}^{(n)}) P_{h_{\ell+1}+1}^{(n)}(x) \text{ avec } \bar{B}_{h_{\ell+1}+2}^{(n)} \text{ arbitraire.}$$

$$P_{h_{\ell+1}+1}^{(n+1)}(x) = (x + \bar{B}_{h_{\ell+1}+1}^{(n+1)}) P_{h_{\ell+1}}^{(n+1)}(x) \text{ avec } \bar{B}_{h_{\ell+1}+1}^{(n+1)} \text{ arbitraire.}$$

$$P_{h_{\ell+1}+1}^{(n+1)}(x) = P_{h_{\ell+1}+1}^{(n)}(x) + \bar{B}_{h_{\ell+1}+1}^{(n+1)} P_{h_{\ell+1}}^{(n+1)}(x) \text{ et } q_{h_{\ell+1}+1, \ell}^{(n)} = 0$$

cqfd.

La propriété suivante peut permettre un calcul très simple des polynômes d'une famille adjacente.

Propriété 2.5.

On considère deux polynômes orthogonaux réguliers successifs $P_i^{(n)}(x)$ et $P_{\text{su}(i,n)}^{(n)}(x)$.

Soit l'expression $x^{-1}(P_{\text{su}(i,n)}^{(n)}(x) + q \cdot P_i^{(n)}(x))$.

i) S'il existe une valeur de q telle que cette expression soit un polynôme, alors c'est le polynôme orthogonal régulier $P_{\text{su}(i,n)-1}^{(n+1)}(x)$ et $q = q_{\text{su}(i,n),l}^{(n)}$

ii) S'il n'existe pas de valeur de q , telle que cette expression soit un polynôme, alors le polynôme $P_{\text{su}(i,n)-1}^{(n+1)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

Démonstration.

i) Si cette valeur de q existe, elle est unique et est telle que

$$P_{\text{su}(i,n)}^{(n)}(0) + qP_i^{(n)}(0) = 0$$

Posons alors $\bar{P}_{\text{su}(i,n)-1}^{(n+1)}(x) = x^{-1}(P_{\text{su}(i,n)}^{(n)}(x) + qP_i^{(n)}(x))$.

On a : $c^{(n+1)}(P_j^{(n)}(x) \bar{P}_{\text{su}(i,n)-1}^{(n+1)}(x)) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq \text{su}(i,n)-2$.

$$\begin{aligned} \text{En effet } c^{(n+1)}(x^{-1}P_j^{(n)}(x)(P_{\text{su}(i,n)}^{(n)}(x) + qP_i^{(n)}(x))) \\ = c^{(n)}(P_j^{(n)}P_{\text{su}(i,n)}^{(n)}) + q \cdot c^{(n)}(P_j^{(n)}P_i^{(n)}) = 0 \end{aligned}$$

soit à cause de l'orthogonalité de $P_{\text{su}(i,n)}^{(n)}(x)$, soit en appliquant la propriété 1.17i) à $P_i^{(n)}(x)$.

Donc $\bar{P}_{\text{su}(i,n)-1}^{(n+1)}(x) \equiv P_{\text{su}(i,n)-1}^{(n+1)}(x)$.

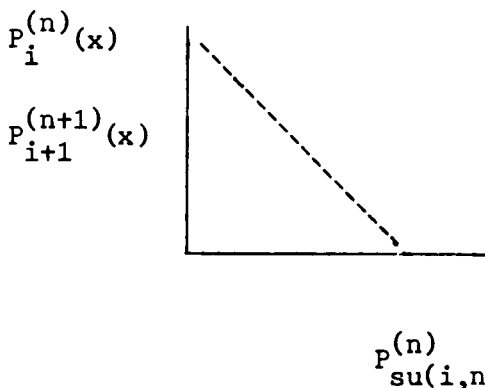
D'après la propriété 2.4, $q = q_{\text{su}(i,n),l}^{(n)}$.

ii) S'il n'existe pas de valeur de q telle que cette expression soit un polynôme, alors $P_{su(i,n)-1}^{(n+1)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

En effet si $P_{su(i,n)-1}^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier, on aurait, d'après la propriété 2.4, une valeur existante de $q = q_{su(i,n),l}^{(n)}$.

cqfd.

Remarque 2.3.



Les seuls polynômes orthogonaux réguliers des familles adjacentes qu'on ne puisse pas atteindre à l'aide de cette propriété sont les polynômes $P_i^{(n+1)}(x)$ qui sont à l'ouest d'un bloc P .
Mais on sait qu'alors $P_i^{(n+1)}(x) \equiv P_i^{(n)}(x)$.

Propriété 2.6.

-Si $P_i^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier, alors le polynôme associé $Q_i^{(n+1)}(t)$ vérifie les deux relations suivantes pour $i \in \mathbb{N}$, $p_\ell \leq i \leq h_{\ell+1} + 1$

$$Q_i^{(n+1)}(t) = Q_{i+1}^{(n)}(t) + q_{i+1,l}^{(n)} Q_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t) - c_n P_i^{(n+1)}(t)$$

$$Q_i^{(n+1)}(t) = \omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(t) (t Q_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t) - c_n P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t)) + E_{i+1}^{(n)} Q_{pr(pr(i+1,n),n+1)}^{(n+1)}(t)$$

$E_{i+1}^{(n)}$ a la valeur qui est fixée dans la propriété 2.4.

-Si $P_i^{(n+1)}(x)$ est un polynôme quasi-orthogonal n'appartenant pas à un bloc P de $P_i^{(n)}(x)$ on a :

$$Q_i^{(n+1)}(t) = t Q_i^{(n)}(t) - c_n P_i^{(n)}(t) + \bar{B}_i^{(n)} Q_{i-1}^{(n+1)}(t)$$

-Si $P_i^{(n+1)}(x)$ est tel que $P_i^{(n+1)}(x) = w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x)P_{h_\ell+1}^{(n)}(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $h_\ell+2 \leq i \leq p_\ell-1$, alors

$$Q_i^{(n+1)}(t) = w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(t) (tQ_{h_\ell+1}^{(n)}(t) - c_n P_{h_\ell+1}^{(n)}(t))$$

-Si $P_i^{(n+1)}(x) = x^{-1} w_{i-h_\ell}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x)$ alors

$$Q_i^{(n+1)}(t) = w_{i-h_\ell}^{(n+1)}(t) Q_{h_\ell+1}^{(n)}(t)$$

Pour le démarrage on prend $Q_0^{(n)}(t) = Q_0^{(n+1)}(t) = 0$.

Démonstration.

i) La preuve de la première relation est totalement analogue à celle des pages 92 et 93 du livre de C. Brezinski

$$Q_i^{(n+1)}(t) = c^{(n+1)} \left[\frac{P_i^{(n+1)}(x) - P_i^{(n+1)}(t)}{x-t} \right] = c^{(n)} \left[x \frac{P_i^{(n+1)}(x) - P_i^{(n+1)}(t)}{x-t} \right]$$

$$\begin{aligned} P_i^{(n+1)}(x) - P_i^{(n+1)}(t) &= x^{-1}(P_{i+1}^{(n)}(x) + q_{i+1,\ell}^{(n)} P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x)) \\ &\quad - t^{-1}(P_{i+1}^{(n)}(t) + q_{i+1,\ell}^{(n)} P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t)) \\ &= x^{-1}t^{-1} [tP_{i+1}^{(n)}(x) - xP_{i+1}^{(n)}(t) + q_{i+1,\ell}^{(n)} (tP_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x) - xP_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t))] \end{aligned}$$

Or $tP_{i+1}^{(n)}(x) - xP_{i+1}^{(n)}(t) = t(P_{i+1}^{(n)}(x) - P_{i+1}^{(n)}(t)) - (x-t)P_{i+1}^{(n)}(t)$.

Donc $x(P_i^{(n+1)}(x) - P_i^{(n+1)}(t)) = t^{-1}[t(P_{i+1}^{(n)}(x) - P_{i+1}^{(n)}(t)) - (x-t)P_{i+1}^{(n)}(t) +$

$$q_{i+1,\ell}^{(n)}(t(P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x) - P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t)) - (x-t)P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t))]$$

Par conséquent :

$$Q_i^{(n+1)}(t) = Q_{i+1}^{(n)}(t) - \frac{c_n}{t} P_{i+1}^{(n)}(t) + q_{i+1,\ell}^{(n)} (Q_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t) - \frac{c_n}{t} P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t))$$

c'est-à-dire :

$$Q_i^{(n+1)}(t) = Q_{i+1}^{(n)}(t) + q_{i+1,\ell}^{(n)} Q_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t) - c_n P_i^{(n+1)}(t)$$

ii) Pour démontrer la seconde relation on utilise le fait que $Q_{i+1}^{(n)}$ et $P_{i+1}^{(n)}$ satisfont la même relation de récurrence.

Si $P_{i+1}^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier on a :

$$P_{i+1}^{(n)}(x) = (x \omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(x) + B_{i+1}^{(n)}) P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x) + C_{i+1}^{(n)} P_{pr(pr(i+1,n),n)}^{(n)}(x)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} Q_{i+1}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} P_{i+1}^{(n)}(t) &= (t \omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(t) + B_{i+1}^{(n)}) Q_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t) + \\ &C_{i+1}^{(n)} Q_{pr(pr(i+1,n),n)}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} [(t \omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(t) + B_{i+1}^{(n)}) P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t) + \\ &C_{i+1}^{(n)} P_{pr(pr(i+1,n),n)}^{(n)}(t)] \end{aligned}$$

1. Si $i=p_\ell$, $P_{h_\ell+1}^{(n)}(0) \neq 0$ et $q_{h_\ell+1,\ell-1}^{(n)}$ fini non nul.

Alors $P_{p_\ell+1}^{(n)}(t)$ est orthogonal régulier ainsi que $P_{h_\ell}^{(n+1)}(t)$.

$$\begin{cases} B_{p_\ell+1}^{(n)} = -q_{p_\ell+1,\ell}^{(n)} - e_{h_\ell+1,\ell}^{(n)} \\ C_{p_\ell+1}^{(n)} = -q_{h_\ell+1,\ell-1}^{(n)} e_{h_\ell+1,\ell}^{(n)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } Q_{P_{\ell+1}}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} P_{P_{\ell+1}}^{(n)}(t) &= t \omega_{P_{\ell}-h_{\ell}-1}^{(n)}(t) Q_{h_{\ell+1}}^{(n)}(t) - q_{P_{\ell+1}, \ell}^{(n)} Q_{h_{\ell+1}}^{(n)}(t) \\
 &- e_{h_{\ell+1}, \ell}^{(n)} Q_{h_{\ell+1}}^{(n)}(t) - q_{h_{\ell+1}, \ell-1}^{(n)} e_{h_{\ell+1}, \ell}^{(n)} Q_{\text{pr}(h_{\ell+1}, n)}^{(n)}(t) \\
 &- c_n \omega_{P_{\ell}-h_{\ell}-1}^{(n)}(t) P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(t) \\
 &+ c_n t^{-1} q_{P_{\ell+1}, \ell}^{(n)} P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(t) + c_n t^{-1} e_{h_{\ell+1}, \ell}^{(n)} P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(t) \\
 &+ c_n t^{-1} q_{h_{\ell+1}, \ell-1}^{(n)} e_{h_{\ell+1}, \ell}^{(n)} P_{\text{pr}(h_{\ell+1}, n)}^{(n)}(t)
 \end{aligned}$$

On a donc dans ce cas ci puisque $P_{P_{\ell}}^{(n+1)}(t)$ est orthogonal régulier

$$t^{-1} (P_{P_{\ell+1}}^{(n)}(t) + q_{P_{\ell+1}, \ell}^{(n)} P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(t)) = P_{P_{\ell}}^{(n+1)}(t).$$

$$Q_{P_{\ell+1}}^{(n)}(t) + q_{P_{\ell+1}, \ell}^{(n)} Q_{h_{\ell+1}}^{(n)}(t) = c_n P_{P_{\ell}}^{(n+1)}(t) + Q_{P_{\ell}}^{(n+1)}(t)$$

$$c_n t^{-1} e_{h_{\ell+1}, \ell}^{(n)} (P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(t) + q_{h_{\ell+1}, \ell-1}^{(n)} P_{\text{pr}(h_{\ell+1}, n)}^{(n)}(t)) = c_n e_{h_{\ell+1}, \ell}^{(n)} P_{h_{\ell}}^{(n+1)}(t)$$

et enfin

$$e_{h_{\ell+1}, \ell}^{(n)} (Q_{h_{\ell+1}}^{(n)}(t) + q_{h_{\ell+1}, \ell-1}^{(n)} Q_{\text{pr}(h_{\ell+1}, n)}^{(n)}(t) - c_n P_{h_{\ell}}^{(n+1)}(t)) = e_{h_{\ell+1}, \ell}^{(n)} Q_{h_{\ell}}^{(n+1)}(t).$$

On obtient à l'aide de toutes ces relations :

$$Q_{P_\ell}^{(n+1)}(t) = \omega_{P_\ell - h_\ell - 1}^{(n)}(t) (t Q_{h_\ell + 1}^{(n)}(t) - c_n P_{h_\ell + 1}^{(n)}(t)) - e_{h_\ell + 1, \ell}^{(n)} Q_{h_\ell}^{(n+1)}(t)$$

2. Si $i = P_\ell$, $P_{h_\ell + 1}^{(n)}(0) \neq 0$ et $q_{h_\ell + 1, \ell - 1}^{(n)} = \infty$.

Alors $P_{P_\ell}^{(n)}$ est orthogonal régulier et $P_{h_\ell}^{(n+1)}$ est quasi-orthogonal.

$$P_{\text{pr}(h_\ell + 1, n)}^{(n)}(0) = 0, e_{h_\ell + 1, \ell - 1}^{(n)} = e_{h_\ell + 1, \ell}^{(n)} = 0 \text{ et } B_{P_\ell + 1}^{(n)} = -q_{P_\ell + 1, \ell}^{(n)}$$

On a donc :

$$Q_{P_\ell + 1}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} P_{P_\ell + 1}^{(n)}(t) = t \omega_{P_\ell - h_\ell - 1}^{(n)}(t) Q_{h_\ell + 1}^{(n)}(t)$$

$$-q_{P_\ell + 1, \ell}^{(n)} Q_{h_\ell + 1}^{(n)}(t) + c_{P_\ell + 1}^{(n)} Q_{\text{pr}(h_\ell + 1, n)}^{(n)}(t) - c_n \omega_{P_\ell - h_\ell - 1}^{(n)}(t) P_{h_\ell + 1}^{(n)}(t)$$

$$+ c_n t^{-1} q_{P_\ell + 1, \ell}^{(n)} P_{h_\ell + 1}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} c_{P_\ell + 1}^{(n)} P_{\text{pr}(h_\ell + 1, n)}^{(n)}(t).$$

A l'aide des premières relations des propriétés 2.4 et 2.6 on obtient :

$$Q_{P_\ell}^{(n+1)}(t) = \omega_{P_\ell - h_\ell - 1}^{(n)}(t) (tQ_{h_\ell + 1}^{(n)}(t) - c_n P_{h_\ell + 1}^{(n)}(t)) \\ + c_{P_\ell + 1}^{(n)} (Q_{h_\ell - 1 + 1}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} P_{h_\ell - 1 + 1}^{(n)}(t))$$

On a également $t^{-1} P_{h_\ell - 1 + 1}^{(n)}(t) = P_{h_\ell - 1}^{(n+1)}(t)$.

$$\text{Par conséquent } Q_{h_\ell - 1 + 1}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} P_{h_\ell - 1 + 1}^{(n)}(t) = Q_{h_\ell - 1 + 1}^{(n)}(t) - c_n P_{h_\ell - 1}^{(n+1)}(t) \\ = Q_{h_\ell - 1}^{(n+1)} - q_{h_\ell - 1 + 1, \ell - 2}^{(n)} Q_{\text{pr}(h_\ell - 1 + 1, n)}^{(n)}(t).$$

Or d'après la propriété 2.4, 5°) on a $q_{h_\ell - 1 + 1, \ell - 2}^{(n)} = 0$.

Donc finalement :

$$Q_{P_\ell}^{(n+1)}(t) = \omega_{P_\ell - h_\ell - 1}^{(n)}(t) (tQ_{h_\ell + 1}^{(n)}(t) - c_n P_{h_\ell + 1}^{(n)}(t)) + c_{P_\ell + 1}^{(n)} Q_{h_\ell - 1}^{(n+1)}(t).$$

3. Si $i = p_\ell + 1$, $P_{h_\ell + 1}^{(n)}(0) = 0$ et $p_\ell + 2 \leq h_{\ell + 1} + 1$.

Dans ce cas on trouve toujours à l'aide des premières relations des propriétés 2.4 et 2.6

$$Q_{P_\ell + 1}^{(n+1)}(t) = tQ_{P_\ell + 1}^{(n)}(t) - c_n P_{P_\ell + 1}^{(n)}(t) + c_{P_\ell + 2}^{(n)} (Q_{h_\ell + 1}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} P_{h_\ell + 1}^{(n)}(t))$$

Comme dans le 2, on a :

$$Q_{h_\ell + 1}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} P_{h_\ell + 1}^{(n)}(t) = Q_{h_\ell}^{(n+1)}(t) + q_{h_\ell + 1, \ell - 1}^{(n)} Q_{\text{pr}(h_\ell + 1, n)}^{(n)}(t) = Q_{h_\ell}^{(n+1)}(t)$$

$$\text{Donc } Q_{P_\ell + 1}^{(n+1)}(t) = tQ_{P_\ell + 1}^{(n)}(t) - c_n P_{P_\ell + 1}^{(n)}(t) + c_{P_\ell + 2}^{(n)} Q_{h_\ell}^{(n+1)}(t).$$

4. Si $i = p_{\ell+1}$, $P_{h_{\ell+1}}^{(n)}(0) = 0$ et $p_{\ell} = h_{\ell+1}$.

$$\text{On a : } P_{p_{\ell+2}}^{(n)}(x) = (x + \bar{B}_{p_{\ell+2}}^{(n)}) P_{p_{\ell+1}}^{(n)}(x).$$

On a une relation identique pour $Q_{p_{\ell+2}}^{(n)}(x)$.

$$\text{De plus } \bar{B}_{p_{\ell+2}}^{(n)} = -q_{p_{\ell+2},\ell}^{(n)} ; e_{p_{\ell+1},\ell}^{(n)} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } Q_{p_{\ell+2}}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} P_{p_{\ell+2}}^{(n)}(t) &= t Q_{p_{\ell+1}}^{(n)}(t) - q_{p_{\ell+2},\ell}^{(n)} Q_{p_{\ell+1}}^{(n)}(t) - \\ &c_n P_{p_{\ell+1}}^{(n)}(t) + q_{p_{\ell+2},\ell}^{(n)} c_n t^{-1} P_{p_{\ell+1}}^{(n)}(t). \end{aligned}$$

A l'aide des premières relations de 2.4 et 2.6 on obtient :

$$Q_{p_{\ell+1}}^{(n+1)}(t) = t Q_{p_{\ell+1}}^{(n)}(t) - c_n P_{p_{\ell+1}}^{(n)}(t)$$

5. Cas général.

On écarte les 4 premiers cas et on prend $P_i^{(n+1)}$ orthogonal régulier.

a) Si $P_{i+1}^{(n)}$ est orthogonal régulier.

$$P_{i+1}^{(n)}(x) = (x + B_{i+1}^{(n)}) P_i^{(n)}(x) + C_{i+1}^{(n)} P_{pr(i,n)}^{(n)}(x)$$

$P_i^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier puisqu'on n'est pas dans le cas 1 ou 2.

$$\begin{cases} B_{i+1}^{(n)} = -q_{i+1,\ell}^{(n)} - e_{i,\ell}^{(n)} \\ C_{i+1}^{(n)} = -q_{i,\ell}^{(n)} e_{i,\ell}^{(n)} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 Q_{i+1}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} P_{i+1}^{(n)}(t) &= t Q_i^{(n)}(t) - q_{i+1, \ell}^{(n)} Q_i^{(n)}(t) - e_{i, \ell}^{(n)} Q_i^{(n)}(t) \\
 - q_{i, \ell}^{(n)} e_{i, \ell}^{(n)} Q_{pr(i, n)}^{(n)}(t) - c_n P_i^{(n)}(t) &+ c_n t^{-1} q_{i+1, \ell}^{(n)} P_i^{(n)}(t) + c_n t^{-1} e_{i, \ell}^{(n)} P_i^{(n)}(t) \\
 + c_n t^{-1} q_{i, \ell}^{(n)} e_{i, \ell}^{(n)} P_{pr(i, n)}^{(n)}(t). &
 \end{aligned}$$

Puisque $P_i^{(n+1)}(t)$ est orthogonal régulier on a :

$$\begin{aligned}
 c_n t^{-1} (P_{i+1}^{(n)}(t) + q_{i+1, \ell}^{(n)} P_i^{(n)}(t)) &= c_n P_i^{(n+1)}(t) \\
 Q_{i+1}^{(n)}(t) + q_{i+1, \ell}^{(n)} Q_i^{(n)}(t) &= Q_i^{(n+1)}(t) + c_n P_i^{(n+1)}(t)
 \end{aligned}$$

$P_{i-1}^{(n+1)}(t)$ est orthogonal régulier puisqu'on a écarté les 4 premiers cas.

$$c_n e_{i, \ell}^{(n)} t^{-1} (P_i^{(n)}(t) + P_{pr(i, n)}^{(n)}(t)) = c_n e_{i, \ell}^{(n)} P_{i-1}^{(n+1)}(t)$$

Enfin

$$e_{i, \ell}^{(n)} (Q_i^{(n)}(t) + q_{i, \ell}^{(n)} Q_{pr(i, n)}^{(n)}(t) - c_n P_{i-1}^{(n+1)}(t)) = e_{i, \ell}^{(n)} Q_{i-1}^{(n+1)}(t).$$

D'où la relation cherchée.

Pour le démarrage on prend $Q_0^{(n)}(t) = Q_0^{(n+1)}(t) = 0$.

b) Si $P_{i+1}^{(n)}$ n'est pas orthogonal régulier.

$$P_{i+1}^{(n)}(x) = (x + \bar{B}_{i+1}^{(n)}) P_i^{(n)}(x) \text{ et } P_i^{(n+1)}(x) = P_i^{(n)}(x)$$

On a :
$$e_{i,\ell}^{(n)} = 0, \bar{B}_{i+1}^{(n)} = -q_{i+1,\ell}^{(n)}, i = p_\ell + 1.$$

$$Q_{i+1}^{(n)}(t) - c_n t^{-1} P_{i+1}^{(n)}(t) = t Q_i^{(n)}(t) - q_{i+1,\ell}^{(n)} Q_i^{(n)}(t) - c_n P_i^{(n)}(t) + c_n t^{-1} q_{i+1,\ell}^{(n)} P_i^{(n)}(t).$$

Comme précédemment à l'aide des deux relations trouvées on a :

$$Q_i^{(n+1)}(t) = t Q_{i,\ell}^{(n)}(t) - c_n P_i^{(n)}(t)$$

ce qui est la relation cherchée avec $e_{i,\ell}^{(n)} = 0$.

iii) Pour les polynômes $P_i^{(n+1)}(x)$ quasi-orthogonaux qui n'appartiennent pas à un bloc P de $P_i^{(n)}(x)$ on a la relation :

$$P_i^{(n+1)}(x) = P_i^{(n)}(x) + \bar{B}_i^{(n)} P_{i-1}^{(n+1)}(x).$$

$$Q_i^{(n+1)}(t) = c^{(n+1)} \left(\frac{P_i^{(n)}(x) - P_i^{(n)}(t)}{x-t} \right) + \bar{B}_i^{(n)} c^{(n+1)} \left(\frac{P_{i-1}^{(n+1)}(x) - P_{i-1}^{(n+1)}(t)}{x-t} \right)$$

$$= c^{(n)} \left(x \frac{P_i^{(n)}(x) - P_i^{(n)}(t)}{x-t} \right) + \bar{B}_i^{(n)} Q_{i-1}^{(n+1)}(t)$$

$$x(P_i^{(n)}(x) - P_i^{(n)}(t)) = (x-t)(P_i^{(n)}(x) - P_i^{(n)}(t)) + t(P_i^{(n)}(x) - P_i^{(n)}(t))$$

$$c^{(n)} \left(x \frac{P_i^{(n)}(x) - P_i^{(n)}(t)}{x-t} \right) = c^{(n)} (P_i^{(n)}(x)) - c^{(n)} (P_i^{(n)}(t)) + t Q_i^{(n)}(t)$$

$$= t Q_i^{(n)}(t) - c_n P_i^{(n)}(t)$$

car $c^{(n)}(P_i^{(n)}(x)) = 0$ puisque $P_i^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier.

On obtient donc :

$$Q_i^{(n+1)}(t) = tQ_i^{(n)}(t) - c_n P_i^{(n)}(t) + \bar{B}_i^{(n)} Q_{i-1}^{(n+1)}(t).$$

iv) Si $P_i^{(n+1)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

a) Si $P_{h_\ell+1}^{(n)}(0) \neq 0$.

On a : $P_i^{(n+1)}(x) = w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $h_\ell+2 \leq i \leq p_\ell-1$

$$Q_i^{(n+1)}(t) = c^{(n)}(x) \frac{P_i^{(n+1)}(x) - P_i^{(n+1)}(t)}{x-t}$$

$$x(w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x) - w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(t) P_{h_\ell+1}^{(n)}(t))$$

$$= (x-t) w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x) + t(w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x) - w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(t)) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x)$$

$$+ t w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(t) (P_{h_\ell+1}^{(n)}(x) - P_{h_\ell+1}^{(n)}(t)) - w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(t) P_{h_\ell+1}^{(n)}(t) (x-t)$$

Donc $Q_i^{(n+1)}(t) = c^{(n)}(w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x)) + t w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(t) Q_{h_\ell+1}^{(n)}(t)$

$$+ t c^{(n)}(P_{h_\ell+1}^{(n)}(x) \frac{w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x) - w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(t)}{x-t}) - c_n w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(t) P_{h_\ell+1}^{(n)}(t).$$

Or $c^{(n)}(w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x)) = 0$ d'après la propriété 1.17 i).

$$\frac{w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(x) - w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(t)}{x-t} = v_{i-h_\ell-2}^{(n+1)}(x) \text{ polynôme de degré } i-h_\ell-2 \text{ en } x.$$

Donc $c^{(n)}(v_{i-h_\ell-2}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x)) = 0$ d'après la propriété 1.17 i).

On a en définitive

$$Q_i^{(n+1)}(t) = w_{i-h_\ell-1}^{(n+1)}(t)(t Q_{h_\ell+1}^{(n)}(t) - c_n P_{h_\ell+1}^{(n)}(t))$$

b) Si $P_{h_\ell+1}^{(n)}(0) = 0$.

$$\text{On a } P_i^{(n+1)}(x) = x^{-1} w_{i-h_\ell}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x).$$

$$\text{Donc } Q_i^{(n+1)}(t) = c^{(n)} \left(\frac{w_{i-h_\ell}^{(n+1)}(x) P_{h_\ell+1}^{(n)}(x) - w_{i-h_\ell}^{(n+1)}(t) P_{h_\ell+1}^{(n)}(t)}{x-t} \right)$$

$$= w_{i-h_\ell}^{(n+1)}(t) Q_{h_\ell+1}^{(n)}(t) \text{ d'après la propriété 1.19.}$$

cqfd.

Le résultat qui suit présente des propriétés des zéros des polynômes orthogonaux des familles adjacentes.

Lemme 2.1.

Si $P_k^{(n)}(x)$ et $P_k^{(n+1)}(x)$ sont orthogonaux réguliers et identiques, alors ils sont à l'ouest ou au nord-ouest d'un même bloc P.

Démonstration.

On peut écrire d'après la propriété 2.4.

$$x P_k^{(n+1)}(x) = P_{k+1}^{(n)}(x) + q_{k+1, \ell}^{(n)} P_k^{(n)}(x)$$

Soit $(x - q_{k+1, \ell}^{(n)}) P_k^{(n)}(x) = P_{k+1}^{(n)}(x)$

$P_{k+1}^{(n)}(x)$ a donc toutes les racines de $P_k^{(n)}(x)$, ce qui d'après le théorème 1.8 montre que $P_{k+1}^{(n)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier et démontre le résultat.

cqfd.

Théorème 2.1.

i) Si les deux polynômes $P_k^{(n)}(x)$ et $P_{k-1}^{(n+1)}(x)$ sont orthogonaux réguliers et ne sont pas tous les deux au nord ou nord-ouest d'un bloc P, alors les trois polynômes $P_k^{(n)}(x)$, $P_{pr(k,n)}^{(n)}(x)$ et $P_{k-1}^{(n+1)}(x)$ n'ont aucune racine commune deux à deux.

De plus $P_{pr(k,n)}^{(n)}(0) \neq 0$ et $P_k^{(n)}(0) \neq 0$.

ii) Si les deux polynômes $P_k^{(n)}(x)$ et $P_k^{(n+1)}(x)$ sont orthogonaux réguliers et ne sont pas tous les deux à l'ouest ou nord-ouest d'un bloc P, alors les trois polynômes $P_k^{(n)}(x)$, $P_k^{(n+1)}(x)$ et $P_{pr(k,n+1)}^{(n+1)}(x)$ n'ont aucune racine commune deux à deux.

De plus $P_k^{(n)}(0) \neq 0$, et l'un au moins des deux polynômes $P_k^{(n+1)}(x)$ et $P_{pr(k,n+1)}^{(n+1)}(x)$ n'a pas zéro pour racine.

Démonstration.

i) Puisque $P_{k-1}^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier on peut écrire :

$$xP_{k-1}^{(n+1)}(x) = P_k^{(n)}(x) + q_k^{(n)}P_{pr(k,n)}^{(n)}(x)$$

$q_k^{(n)}$ n'est pas nul, sinon on aurait $xP_{k-1}^{(n+1)}(x) = P_k^{(n)}(x)$ et ces deux polynômes seraient tous deux au nord ou nord-ouest d'un bloc P. Pour la même raison $P_k^{(n)}(0) \neq 0$.

Considérons tous les zéros z de $P_{k-1}^{(n+1)}(x)$

$$zP_{k-1}^{(n+1)}(z) = 0 = P_k^{(n)}(z) + q_k^{(n)}P_{pr(k,n)}^{(n)}(z)$$

Si z est zéro de $P_k^{(n)}(x)$, il est aussi zéro de $P_{pr(k,n)}^{(n)}(x)$ et vice versa, ce qui est impossible d'après le théorème 1.9.

Donc $P_{k-1}^{(n+1)}(x)$ n'a aucune racine en commun avec $P_k^{(n)}(x)$ ou $P_{pr(k,n)}^{(n)}(x)$.

Enfin $P_{pr(k,n)}^{(n)}(0) \neq 0$ sinon avec la relation précédente on obtiendrait

$$P_k^{(n)}(0) = 0.$$

ii) Si $P_k^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier on peut écrire :

$$P_k^{(n+1)}(x) = P_k^{(n)}(x) + E_{k+1}^{(n)} P_{pr(k,n+1)}^{(n+1)}(x)$$

$E_{k+1}^{(n)}$ n'est pas nul, sinon $P_k^{(n+1)}(x) = P_k^{(n)}(x)$ et d'après le lemme 2.1 ces deux polynômes seraient à l'ouest ou au nord-ouest d'un bloc P , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Considérons tous les zéros z de $P_k^{(n)}(x)$

$$P_k^{(n)}(z) = 0 = P_k^{(n+1)}(z) - E_{k+1}^{(n)} P_{pr(k,n+1)}^{(n+1)}(z)$$

Pour les mêmes raisons que dans le i) z n'est pas racine de $P_k^{(n+1)}(x)$ et $P_{pr(k,n+1)}^{(n+1)}(x)$. D'autre part $P_k^{(n)}(x)$ ne peut être au nord d'un bloc P , puisque

$P_k^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier. Donc $P_k^{(n)}(0) \neq 0$.

Enfin si $P_k^{(n+1)}(0) = 0$, il est au nord d'un bloc P . Alors $P_{pr(k,n+1)}^{(n+1)}(0) \neq 0$, sinon il serait au nord d'un bloc P et $P_k^{(n+1)}(x)$ serait à l'ouest de ce bloc P et ne pourrait être au nord du bloc P suivant.

cqfd.

Les propriétés des polynômes qui sont sur les côtés nord, nord-ouest et ouest d'un bloc P nous permettent de déduire un élargissement des relations d'orthogonalité. Nous utilisons les notations de la propriété 2.1 qui correspondent au bloc P de la propriété 1.9.

Théorème 2.2.

Si $P_{h-l+1}^{(k+l)}(x)$ est le polynôme orthogonal régulier situé au nord-ouest d'un bloc P, alors pour les polynômes orthogonaux réguliers situés à l'ouest ou au nord-ouest de ce bloc P avec $0 \leq i \leq l+b$, nous avons :

$$c^{(k+l+i)}(x^j P_{h-l+1}^{(k+l+i)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{Z}, -i \leq j \leq h+b-i, \\ \neq 0 \text{ pour } j = -i-1 \text{ et pour } j = h+b-i+1.$$

Démonstration.

Les deux premières relations de la démonstration de la propriété 2.1 montrent que nous avons :

$$c^{(k+l+i)}(x^j P_{h-l+1}^{(k+l+i)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{Z}, -i \leq j \leq h+b-i, \\ \neq 0 \text{ pour } j = h+b-i+1.$$

Supposons que cette expression soit encore nulle pour $j = -i-1$.

Nous aurions alors :

$$c^{(k+l-1)}(x^s P_{h-l+1}^{(k+l)}) = 0 \text{ pour } 0 \leq s \leq h+b+1$$

et par conséquent $P_{h-l+1}^{(k+l)}(x)$ est orthogonal par rapport à $c^{(k+l-1)}$.

Si $P_{h-l+1}^{(k+l-1)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier, il ne peut être que quasi-orthogonal.

En effet il est dans un bloc P et $P_{h-l+1}^{(k+l)}(x)$ est orthogonal régulier donc au sud de ce bloc.

Dans ce cas $c^{(k+l-1)}(x^j P_{h-l+1}^{(k+l-1)}) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq r$ avec $r < h-l-1$, ce qui contredit l'orthogonalité de $P_{h-l+1}^{(k+l)}$ par rapport à $c^{(k+l-1)}$.

Donc $P_{h-l+1}^{(k+l-1)}$ est orthogonal régulier et

$$P_{h-l+1}^{(k+l-1)}(x) \equiv P_{h-l+1}^{(k+l)}(x).$$

Or d'après le lemme 2.1 les seuls polynômes orthogonaux réguliers identiques consécutifs sur une verticale sont à l'ouest ou au nord-ouest d'un même bloc P, ce qui est impossible ici puisque nous avons supposé que $P_{h-l+1}^{(k+l)}$ était au nord-ouest de ce bloc P.

cqfd.

Nous déduisons immédiatement du théorème 2.2 le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.

i)a) Pour les polynômes du côté ouest ou nord-ouest du bloc P, ainsi que pour les polynômes du bloc P situés sur une diagonale qui coupe le côté ouest ou nord-ouest nous avons :

Pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq l+b$ et $s \in \mathbb{N}$, $h-l+1 \leq s \leq h+1+b-i$,

$$c^{(k+l+i)}(x^j P_s^{(k+l+i)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{Z}, -i \leq j \leq 2h-l+1+b-i-s, \\ \neq 0 \text{ pour } j = -i-1 \text{ et } j = 2h-l+2+b-i-s.$$

b) Si de plus 0 est racine d'ordre r de $w_{s-h+l-1}^{(k+l+i)}(x)$, alors :

$$c^{(k+l+i)}(x^j P_s^{(k+l+i)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{Z}, -i-r \leq j \leq 2h+b-s-l+1-i, \\ \neq 0 \text{ pour } j = -i-r-1 \text{ et } j = 2h+b-s-l+2-i.$$

ii) Pour un polynôme du bloc P situé sur une diagonale qui coupe le côté nord :

$$P_s^{(k+l-i)}(x) \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq l+b-1 \text{ et} \\ \text{pour } s \in \mathbb{N}, h-l+2+i \leq s \leq h+1+b,$$

et pour lequel 0 est racine d'ordre r de $w_{s-h+l-1-i}^{(k+l-i)}(x)$, alors :

$$c^{(k+l-i)}(x^j P_s^{(k+l-i)}(x)) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{Z}, -r \leq j \leq 2h-l+1+b+i-s, \\ \neq 0 \text{ pour } j = -r-1 \text{ et } j = 2h-l+2+b+i-s.$$

Démonstration.

i)a) C'est une conséquence immédiate du théorème 2.2.

$$b) c^{(k+l+i)}(x^j P_s^{(k+l+i)}(x)) = c^{(k+l+i)}(x^j w_{s-h+l-1}^{(k+l+i)}(x) P_{h-l+1}^{(k+l+i)}(x))$$

$$= c^{(k+l+i)}(x^j x^r \hat{w}_{s-h+l-1-r}^{(k+l+i)}(x) P_{h-l+1}^{(k+l+i)}(x))$$

$$= c^{(k+l+i)}(x^j \hat{w}_{s-h+l-1-r}^{(k+l+i)}(x) P_{h-l+1+r}^{(k+l-i)}(x))$$

$$= c^{(k+l-r)}(x^{j+r+i} \hat{w}_{s-h+l-1-r}^{(k+l+i)}(x) P_{h-l+1+r}^{(k+l-r)}(x))$$

Cette expression est nulle pour $0 \leq j+r+i \leq 2h+b-s-l+1+r$.

Elle est différente de 0 pour $j+r+i = -1$ et $j+r+i = 2h+b-s-l+2+r$.

En passant à j on obtient bien les relations proposées.

$$ii) P_s^{(k+l-i)}(x) = w_{s-h+l-1-i}^{(k+l-i)}(x) P_{h-l+1+i}^{(k+l-i)}(x).$$

$$= x^r \hat{w}_{s-h+l-i-1-r}^{(k+l-i)}(x) P_{h-l+1+i}^{(k+l-i)}(x)$$

$$= \hat{w}_{s-h+l-i-1-r}^{(k+l-i)}(x) P_{h-l+1+i+r}^{(k+l-i-r)}(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } c^{(k+l-i)}(x^j P_s^{(k+l-i)}(x)) \\ = c^{(k+l-i-r)}(x^{j+r} \hat{w}_{s-h+l-i-1-r}^{(k+l-i)}(x) P_{h-l+1+i+r}^{(k+l-i-r)}(x)) \end{aligned}$$

Cette expression est nulle pour $0 \leq j+r \leq 2h+l+1+b+i+r-s$.

Elle est différente de 0 pour $j+r = -1$ et $j+r = 2h-l+2+b+i+r-s$.

En passant encore à j on obtient bien les relations proposées.

cqfd.

Corollaire 2.2.

Les seuls polynômes orthogonaux réguliers $P_k^{(n)}(x)$ pour lesquels on ait $c^{(n)}(x^j P_k^{(n)}(x)) = 0$ pour $j \in \mathbb{Z}$, $-i \leq j \leq k-1$ avec $i > 0$, sont à l'ouest d'un bloc P.

Démonstration.

En effet si $P_k^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier par rapport à $c^{(n)}$ et $c^{(n)}(x^j P_k^{(n)}) = 0$ pour $j \in \mathbb{Z}$, $-i \leq j \leq k-1$ avec $i > 0$, alors

$$c^{(n-1)}(x^{j+1} P_k^{(n)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{Z}, -i+1 \leq j+1 \leq k \text{ avec } i+1 \geq 0.$$

Donc $P_k^{(n)}(x)$ est orthogonal par rapport à $c^{(n-1)}$ et par conséquent par un raisonnement analogue au théorème 2.2 nous en déduisons que $P_k^{(n-1)}$ est orthogonal régulier et que $P_k^{(n)}(x) \equiv P_k^{(n-1)}(x)$.

D'après le lemme 2.1, $P_k^{(n)}(x)$ est à l'ouest d'un bloc P.

cqfd.

2.2 ALGORITHME "QD"

Les propriétés 2.4 et 2.6 nous ont donné les quatre relations suivantes :

$$P_i^{(n+1)}(x) = \omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(x) P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x) + E_{i+1}^{(n)} P_{pr(pr(i+1,n),n+1)}^{(n+1)}(x)$$

$$P_{i+1}^{(n)}(x) = x P_i^{(n+1)}(x) - q_{i+1,\ell}^{(n)} P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x)$$

$$Q_i^{(n+1)}(t) = \omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(t) (t Q_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t) - c_n P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t)) + E_{i+1}^{(n)} Q_{pr(pr(i+1,n),n+1)}^{(n+1)}(t)$$

$$Q_{i+1}^{(n)}(t) = Q_i^{(n+1)}(t) - q_{i+1,\ell}^{(n)} Q_{pr(i+1,n)}^{(n)}(t) + c_n P_i^{(n+1)}(t).$$

On peut donc calculer ces quatre polynômes à partir des précédents, si on connaît les coefficients $q_{i+1,\ell}^{(n)}$, $E_{i+1}^{(n)}$ et le polynôme $\omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(x)$. On effectuera un calcul colonne après colonne dans la table P et dans la table Q. Nous allons montrer comment calculer ces trois éléments.

Nous serons amenés à étudier ce qui se passe en présence d'un bloc P.

On sait que tout bloc P est entouré d'une rangée de polynômes orthogonaux réguliers. Nous supposons que le bloc P est de largeur (r+1) et que le polynôme situé dans l'angle NO intérieur au bloc P est le polynôme $P_k^{(n)}(x)$.

Nous supposons qu'avant ce bloc tous les indices ℓ sont indicés par l'indice supérieur de P. A la sortie du bloc P nous obtiendrons donc $\ell^{(i)}+1$ pour les familles ayant traversé ce bloc.

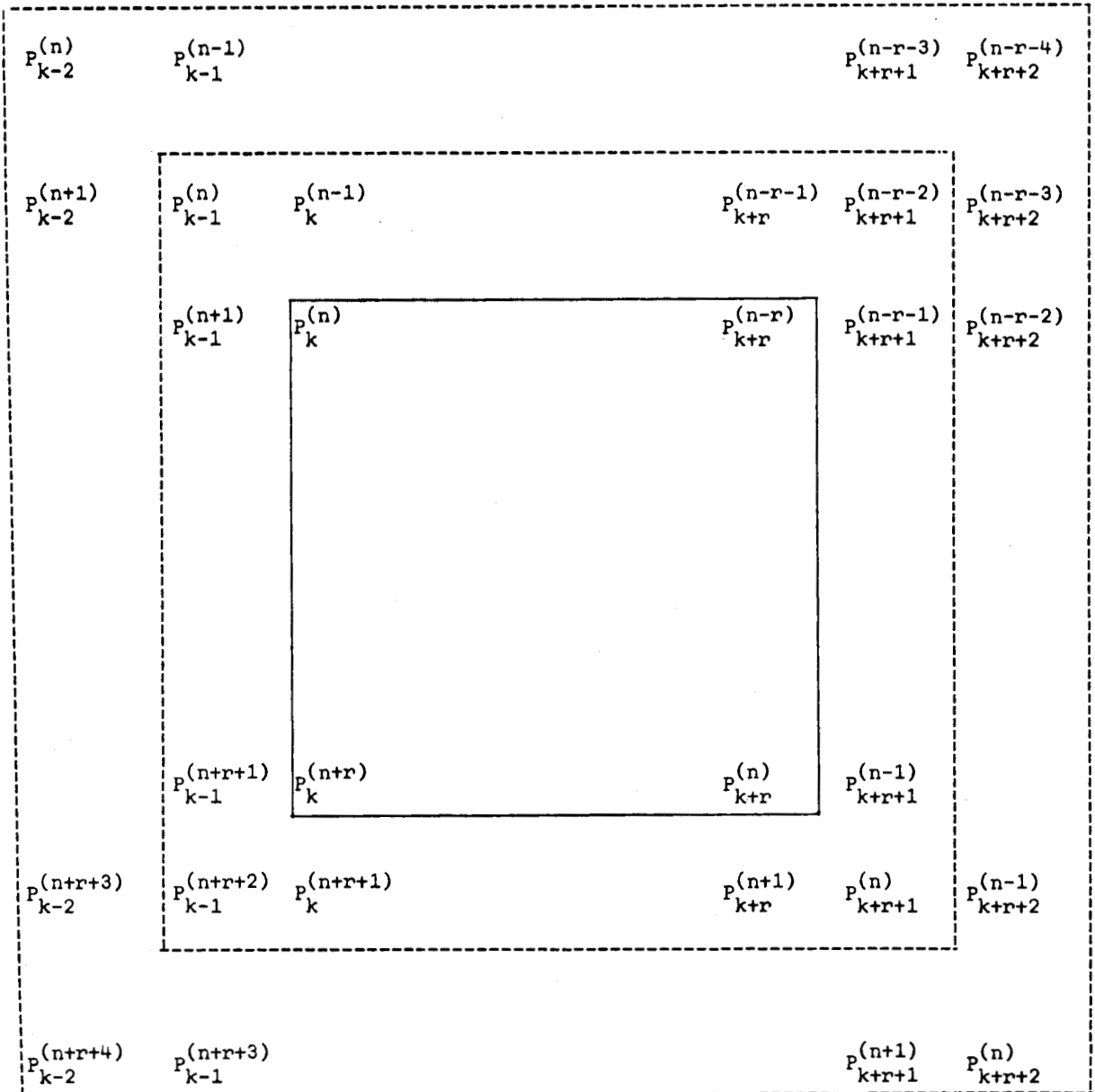
Le bloc se présente donc comme celui dessiné ci-après .

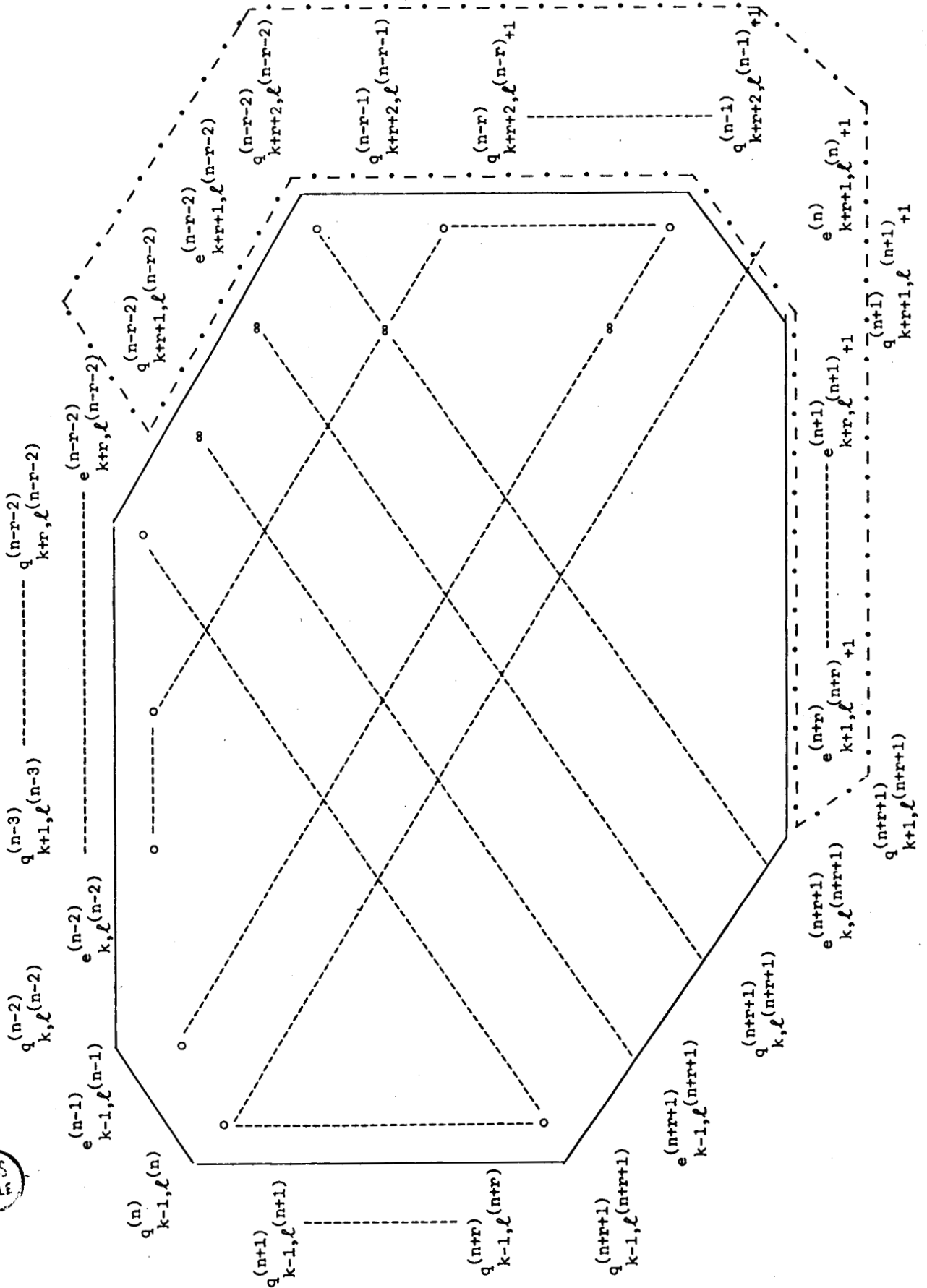
Les valeurs obtenues de $q_i^{(n)}$ et $e_i^{(n)}$ seront placées dans un tableau triangulaire de la manière classique.

La propriété 2.4 conduit à définir une zone dans le tableau du qd qui est celle encadrée dans la page suivante et qui contient les valeurs 0 et ∞ mentionnées.

Nous montrerons que, quelles que soient les configurations possibles des blocs de la table P, les relations qui permettent les calculs de $q_{i+1,\ell}^{(n)}$ et $E_{i+1}^{(n)}$

sont des relations récurrentes ayant au maximum quatre termes, mais qui ne sont pas toujours aux sommets d'un losange.





I, Si les cinq polynômes $P_i^{(n)}(x)$, $P_{i+1}^{(n)}(x)$, $P_{i-1}^{(n+1)}(x)$, $P_i^{(n+1)}(x)$ et $P_{i+1}^{(n+1)}(x)$ sont orthogonaux réguliers, pour $i \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\ell^{(n)}}^{(n)} + 1 \leq i \leq h_{\ell^{(n)+1}}^{(n)} \\ P_{\ell^{(n+1)}}^{(n+1)} + 1 \leq i \leq h_{\ell^{(n+1)+1}}^{(n+1)} \end{array} \right.$$

alors on a les deux relations rhomboïdales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{i+1,\ell^{(n+1)}}^{(n+1)} + e_{i,\ell^{(n+1)}}^{(n+1)} = q_{i+1,\ell^{(n)}}^{(n)} + e_{i+1,\ell^{(n)}}^{(n)} \\ q_{i,\ell^{(n+1)}}^{(n+1)} e_{i,\ell^{(n+1)}}^{(n+1)} = q_{i+1,\ell^{(n)}}^{(n)} e_{i,\ell^{(n)}}^{(n)} \end{array} \right.$$

qui sont obtenues par la démonstration qui figure dans le livre de C. Brezinski p. 93.

Pour le démarrage, si $c_n \neq 0$ on a : $e_{0,0}^{(n)} = 0$, $q_{0,0}^{(n)} = 0$ et $q_1^{(n)} = \frac{c_{n+1}}{c_n}$.

Si $c_n = 0$ nous sommes en présence d'un bloc. Ce cas est résolu dans le II.

II, Dans tout ce qui suit, lorsque nous utiliserons les relations de récurrence des polynômes orthogonaux, les expressions de $B^{(n)}$ et $C^{(n)}$ proviendront de la propriété 2.4. Il suffira au lecteur de se reporter aux divers cas exposés dans cette propriété pour retrouver les valeurs utilisées.

a) Considérons le polynôme

$$P_{k+1+i}^{(n+r-i)}(x) = (x \omega_{i+1}^{(n+r-i)}(x) + B_{k+1+i}^{(n+r-i)}) P_{k-1}^{(n+r-i)}(x) + C_{k+1+i}^{(n+r-i)} P_{\text{pr}(k-1, n+r-i)}^{(n+r-i)}(x)$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

Nous utilisons le polynôme.

$$P_{k+i}^{(n+r+1-i)}(x) = (x \omega_i^{(n+r+1-i)}(x) + B_{k+i}^{(n+r+1-i)}) P_{k-1}^{(n+r+1-i)}(x) + C_{k+i}^{(n+r+1-i)} P_{pr(k-1, n+r+1-i)}^{(n+r+1-i)}(x)$$

Or $x P_{k+i}^{(n+r+1-i)}(x) = P_{k+1+i}^{(n+r-i)}(x) + q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} P_{k-1}^{(n+r-i)}(x)$

et $P_{k-1}^{(n+r+1-i)}(x) = P_{k-1}^{(n+r-i)}(x).$

On a donc :

$$P_{k+1+i}^{(n+r-i)}(x) = \left[x(x \omega_i^{(n+r+1-i)}(x) + B_{k+i}^{(n+r+1-i)}) - q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} \right] P_{k-1}^{(n+r-i)}(x) + x C_{k+i}^{(n+r+1-i)} P_{pr(k-1, n+r+1-i)}^{(n+r+1-i)}(x)$$

Nous savons que :

$$B_{k+i}^{(n+r+1-i)} = -q_{k+i, \ell}^{(n+r+1-i)} - e_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)} + \gamma_i$$

$$C_{k+i}^{(n+r+1-i)} = -e_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)} + \gamma_i q_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)}$$

pour $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq r+1,$

$\gamma_i = 0$ si $i = 0$ et $\gamma_i = 1$ si $i \geq 1.$

1. Si $P_{k-2}^{(n+r+1-i)}(x)$ est orthogonal régulier.

C'est-à-dire si $q_{k-1, \ell}^{(n+r-i)}$ est fini non nul, (est nul si $k-1 = 0$)
on a :

$$x P_{k-2}^{(n+r+1-i)}(x) = P_{k-1}^{(n+r-i)}(x) + q_{k-1, \ell}^{(n+r-i)} P_{pr(k-1, n+r-i)}^{(n+r-i)}(x)$$

Par conséquent on obtient :

$$P_{k+1+i}^{(n+r-i)}(x) = \left[x(x\omega_i^{(n+r+1-i)}(x) + B_{k+i}^{(n+r+1-i)}) + C_{k+i}^{(n+r+1-i)} - q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} P_{k-1}^{(n+r-i)}(x) \right] + C_{k+i}^{(n+r+1-i)} q_{k-1, \ell}^{(n+r-i)} P_{pr(k-1, n+r-i)}^{(n+r-i)}(x)$$

Par identification des deux relations polynomiales on obtient :

$$B_{k+1+i}^{(n+r-i)} = C_{k+i}^{(n+r+1-i)} - q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} + 1$$

$$C_{k+1+i}^{(n+r-i)} = C_{k+i}^{(n+r+1-i)} q_{k-1, \ell}^{(n+r-i)}$$

$$\omega_{i+1}^{(n+r-i)}(x) = x \omega_i^{(n+r+1-i)}(x) + B_{k+i}^{(n+r+1-i)}$$

La seconde relation nous permet d'extraire à l'aide des relations donnant les $C_i^{(j)}$.

$$e_{k-1, \ell}^{(n+r-i)} = q_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)} \quad e_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)} = -C_{k+i}^{(n+r+1-i)}$$

2. Si $P_{k-2}^{(n+r+1-i)}(x)$ est quasi-orthogonal.

C'est-à-dire si $q_{k-1, \ell}^{(n+r-i)}$ est infini, on a :

$$x P_{pr(k-1, n+r+1-i)}^{(n+r+1-i)}(x) = P_{pr(k-1, n+r-i)}^{(n+r-i)}(x)$$

On obtient alors :

$$P_{k+1+i}^{(n+r-i)}(x) = \left[x(x\omega_i^{(n+r+1-i)}(x) + B_{k+i}^{(n+r+1-i)}) - q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} \right] P_{k-1}^{(n+r-i)}(x) + C_{k+i}^{(n+r+1-i)} P_{pr(k-1, n+r-i)}^{(n+r-i)}(x)$$

D'où les relations :

$$B_{k+1+i}^{(n+r-i)} = -q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}$$

$$C_{k+1+i}^{(n+r-i)} = C_{k+i}^{(n+r+1-i)}$$

$$\omega_{i+1}^{(n+r-i)}(x) = x\omega_i^{(n+r+1-i)}(x) + B_{k+i}^{(n+r+1-i)}$$

La première relation nous donne

$$e_{k-1, \ell}^{(n+r-i)} = 0$$

qui est une valeur déjà trouvée dans la propriété 2.4 dans ce cas là.

Remarque.

Certaines relations présentées auraient pu être obtenues plus rapidement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_{k+i}^{(n+r+1-i)}(x) &= \omega_{i+1}^{(n+r-i)}(x) P_{k-1}^{(n+r-i)}(x) + E_{k+1+i}^{(n+r-i)} P_{pr(k-1, n+r+1-i)}^{(n+r+1-i)}(x) \\ &= \omega_{i+1}^{(n+r-i)}(x) P_{k-1}^{(n+r+1-i)}(x) + E_{k+1+i}^{(n+r-i)} P_{pr(k-1, n+r+1-i)}^{(n+r+1-i)}(x) \end{aligned}$$

$$\text{avec } E_{k+1+i}^{(n+r-i)} = -e_{k-1, \ell}^{(n+r-i)} + \gamma_i \quad \text{si } P_{k-2}^{(n+r+1-i)}(x) \text{ est orthogonal régulier.}$$

$$= C_{k+1+i}^{(n+r-i)} \quad \text{si } P_{k-2}^{(n+r+1-i)}(x) \text{ est quasi-orthogonal.}$$

On obtient par identification

$$x \omega_i^{(n+r+1-i)}(x) + B_{k+i}^{(n+r+1-i)} = \omega_{i+1}^{(n+r-1)}(x)$$

$$C_{k+i}^{(n+r+1-i)} = E_{k+1+i}^{(n+r-i)}$$

Malgré tout la première façon d'obtenir les relations se justifie par le fait que nous faisons intervenir le coefficient $q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}_{+1}$.

Remarque.

On se souviendra que, si l'on trouve $e_{k-1, \ell}^{(n+r-i)}_{+1} = 0$, c'est le

coefficient $C_{k+1}^{(n+r+1-i)}$ ou $C_{k+1+i}^{(n+r-i)}$ qui intervient dans la seconde relation entre les familles adjacentes de polynomes orthogonaux

b) Nous considérons le polynôme $P_{k+1+i}^{(n+r+1-i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

1. S'il n'est pas orthogonal régulier.

On a $P_{k+1+i}^{(n+r-i)}(x) = x P_{k+i}^{(n+r+1-i)}(x)$, et on sait d'après la propriété 3.4 que $q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}_{+1} = 0$ et $e_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}_{+2} = \infty$.

Pour savoir si le polynôme $P_{k+1+i}^{(n+r+1-i)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier, on doit tester dans le tableau du qd si $q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}_{+1}$ est nul. Or c'est une valeur que l'on cherche.

En fait on est toujours capable de savoir si cette valeur est nulle ou pas, avant d'effectuer son "calcul" proprement dit. En effet si $P_{k+1+i}^{(n+r+1-i)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier, cela signifie qu'il est dans un bloc P en dessous de celui que nous étudions, et dont le côté ouest est au moins à gauche de ce polynôme. Comme les déplacements dans le qd se font colonne après colonne de la gauche vers la droite, on aura rencontré le bord ouest avant le calcul de $q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}_{+1}$, ce qui permettra d'abord de connaître la taille du bloc qd, puis de délimiter son cadre et de placer les valeurs démontrées dans la propriété 2.4. En particulier on sera amené à placer une valeur nulle à $q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}_{+1}$.

Si on n'a pas placé de valeur nulle nous avons alors :

2. S'il est orthogonal régulier.

$$P_{k+1+i}^{(n+r+1-i)}(x) = (x + B_{k+1+i}^{(n+r+1-i)}) P_{k+i}^{(n+r+1-i)}(x) + C_{k+1+i}^{(n+r+1-i)} P_{k-1}^{(n+r+1-i)}(x)$$

Or on a :

$$\begin{aligned} P_{k+1+i}^{(n+r+1-i)}(x) &= P_{k+1+i}^{(n+r-i)}(x) - e_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} P_{k+i}^{(n+r+1-i)}(x) \\ &= x P_{k+i}^{(n+r+1-i)}(x) - q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} P_{k-1}^{(n+r-i)}(x) - e_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} P_{k+i}^{(n+r+1-i)}(x) \\ &= (x - e_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}) P_{k+i}^{(n+r+1-i)}(x) - q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} P_{k-1}^{(n+r+1-i)}(x) \end{aligned}$$

puisque $P_{k-1}^{(n+r-i)}(x) = P_{k-1}^{(n+r+1-i)}(x)$.

D'où les relations :

$$\begin{aligned} -B_{k+1+i}^{(n+r+1-i)} &= e_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} = q_{k+1+i, \ell}^{(n+r+1-i)} + e_{k+i, \ell}^{(n+r+1-i)} \\ -C_{k+1+i}^{(n+r+1-i)} &= q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} = e_{k+i, \ell}^{(n+r+1-i)} q_{k+i, \ell}^{(n+r+1-i)} \end{aligned}$$

La seconde relation permet de calculer $q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}$, mais cette valeur n'intervient pas dans le calcul de $e_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}$, comme dans les relations rhomboïdales classiques où tous les sommets interviennent. Tout ce passe comme si on avait un terme $q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}$ nul qui était ajouté à la première relation.

c) Nous étudions maintenant

$$\begin{aligned}
 P_{k+r+1}^{(n-r-1)}(x) &= (x + B_{k+r+1}^{(n-r-1)})P_{k+r}^{(n-r-1)}(x) + C_{k+r+1}^{(n-r-1)}P_{pr(k+r, n-r-1)}^{(n-r-1)}(x) \\
 &= P_{k+r+1}^{(n-r-2)}(x) - e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} P_{k+r}^{(n-r-1)}(x) \\
 &= (x - e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}) P_{k+r}^{(n-r-1)}(x) - q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} P_{pr(k+r+1, n-r-2)}^{(n-r-2)}(x).
 \end{aligned}$$

1. Si $P_{k+r}^{(n-r-2)}(x)$ est orthogonal régulier.

C'est-à-dire si $e_{k+r, \ell}^{(n-r-2)}$ est défini, on a :

$$P_{k+r}^{(n-r-2)}(x) = P_{k+r}^{(n-r-1)}(x) - E_{k+r+1}^{(n-r-2)} P_{pr(k+r, n-r-1)}^{(n-r-1)}(x)$$

$E_{k+r+1}^{(n-r-2)} = -e_{k+r, \ell}^{(n-r-2)}$ si $q_{k+r, \ell}^{(n-r-2)}$ est fini non nul, c'est à dire si $P_{k+r-1}^{(n-r-1)}(x)$ est orthogonal régulier.

$E_{k+r+1}^{(n-r-2)} = C_{k+r+1}^{(n-r-2)}$ si $q_{k+r, \ell}^{(n-r-2)}$ est infini, c'est à dire si $P_{k+r-1}^{(n-r-1)}(x)$

est quasi-orthogonal.

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 P_{k+r+1}^{(n-r-1)}(x) &= (x - e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} - q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}) P_{k+r}^{(n-r-1)}(x) \\
 &\quad + E_{k+r+1}^{(n-r-2)} q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} P_{pr(k+r, n-r-1)}^{(n-r-1)}(x)
 \end{aligned}$$

D'où les deux relations.

$$B_{k+r+1}^{(n-r-1)} = -q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} - e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}$$

$$C_{k+r+1}^{(n-r-1)} = q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} E_{k+r+1}^{(n-r-2)}$$

2. Si $P_{k+r}^{(n-r-2)}(x)$ est quasi-orthogonal.

C'est-à-dire si $e_{k+r, \ell}^{(n-r-2)}$ et $q_{k+r, \ell}^{(n-r-2)}$ ne sont pas définis,

alors $P_{pr(k+r, n-r-1)}^{(n-r-1)}(x) = P_{pr(k+r+1, n-r-2)}^{(n-r-2)}(x)$.

$$P_{k+r+1}^{(n-r-1)}(x) = (x - e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}) P_{k+r}^{(n-r-1)}(x) - q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} P_{pr(k+r, n-r-1)}^{(n-r-1)}(x)$$

D'où les relations :

$$B_{k+r+1}^{(n-r-1)} = -e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}$$

$$C_{k+r+1}^{(n-r-1)} = -q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}$$

d) Considérons maintenant le polynôme

$$P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x) = (x\omega_i^{(n-r-1+i)}(x) + B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}) P_{k+r-i}^{(n-r-1+i)}(x)$$

$$+ C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} P_{pr(k+r-i, n-r-1+i)}^{(n-r-1+i)}(x)$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

$$P_{k+r+1}^{(n-r+i)}(x) = P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x) + C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} P_{k+r-i-1}^{(n-r+i)}(x)$$

$$P_{k+r-i}^{(n-r-1+i)}(x) = x P_{k+r-1-i}^{(n-r+i)}(x)$$

On obtient alors :

$$P_{k+r+1}^{(n-r+i)}(x) = \left[x(x\omega_i^{(n-r-1+i)}(x) + B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}) + C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} \right] P_{k+r-1-i}^{(n-r+i)}(x) + C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} P_{pr(k+r-i, n-r-1+i)}^{(n-r-1+i)}(x)$$

1. Si $P_{k+r-1-i}^{(n-r-1+i)}(x)$ est orthogonal régulier.

C'est à dire si $e_{k+r-1-i, \ell}^{(n-r-1+i)}$ est défini, on a :

$$P_{k+r-1-i}^{(n-r+i)}(x) = P_{k+r-1-i}^{(n-r-1+i)}(x) + E_{k+r-i}^{(n-r-1+i)} P_{pr(k+r-1-i, n-r+i)}^{(n-r+i)}$$

$$E_{k+r-i}^{(n-r-1+i)} = -e_{k+r-1-i, \ell}^{(n-r-1+i)} \text{ si } q_{k+r-1-i, \ell}^{(n-r-1+i)} \text{ est fini non nul (est nul}$$

si $k+r-1-i = 0$), c'est à dire si $P_{k+r-2-i}^{(n-r+i)}(x)$ est orthogonal régulier.

si $P_{k+r-2-i}^{(n-r+i)}(x)$ est orthogonal régulier.

$$E_{k+r-i}^{(n-r-1+i)} = C_{k+r-i}^{(n-r-1+i)} \text{ si } q_{k+r-1-i, \ell}^{(n-r-1+i)} \text{ est infini, c'est à dire si}$$

$P_{k+r+2-i}^{(n-r+1)}(x)$ est quasi-orthogonal.

Nous obtenons donc :

$$P_{k+r+1}^{(n-r+i)}(x) = x(x\omega_i^{(n-r-1+i)}(x) + B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}) + C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} + C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} P_{k+r-i-1}^{(n-r+i)}(x) \\ - C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} E_{k+r-i}^{(n-r-1+i)} P_{pr(k+r-1-i, n-r+i)}^{(n-r+i)}(x).$$

Or on a :

$$P_{k+r+1}^{(n-r+i)}(x) = (x\omega_{i+1}^{(n-r+i)}(x) + B_{k+r+1}^{(n-r+i)}) P_{k+r-1-i}^{(n-r+i)} + C_{k+r+1}^{(n-r+i)} P_{pr(k+r-1-i, n-r+i)}^{(n-r+i)}(x)$$

D'où les relations :

$$\begin{aligned} C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} + C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} &= B_{k+r+1}^{(n-r+i)} \\ -C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} E_{k+r-i}^{(n-r-1+i)} &= C_{k+r+1}^{(n-r+i)} \\ \omega_{i+1}^{(n-r+i)}(x) &= x\omega_i^{(n-r-1+i)}(x) + B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} \end{aligned}$$

2. Si $P_{k+r-1-i}^{(n-r-1+i)}(x)$ est quasi-orthogonal.

C'est à dire si $e_{k+r-1-i, \ell}^{(n-r-1+i)}$ et $q_{k+r-1-i, \ell}^{(n-r-1+i)}$ ne sont pas définis, on a :

$$P_{pr(k+r-1-i, n-r+i)}^{(n-r+i)}(x) = P_{pr(k+r-i, n-r-1+i)}^{(n-r-1+i)}(x)$$

Par conséquent :

$$P_{k+r+1}^{(n-r+i)}(x) = [x(\omega_i^{(n-r-1+i)}(x) + B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}) + C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}] P_{k+r-i-1}^{(n-r+i)}(x) + C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} P_{pr(k+r-1-i, n-r+i)}^{(n-r+i)}(x).$$

Nous obtenons alors les trois relations suivantes.

$$C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} = B_{k+r+1}^{(n-r+i)}$$

$$C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} = C_{k+r+1}^{(n-r+i)}$$

$$\omega_{i+1}^{(n-r+i)}(x) = x\omega_i^{(n-r-1+i)}(x) + B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}$$

Remarque 2.4.

Nous avons trouvé dans le a)

$$\omega_{i+1}^{(n+r-i)}(x) = x\omega_i^{(n+r+1-i)}(x) + B_{k+i}^{(n+r+1-i)}$$

Pour $i = r$ on a identité avec la relation obtenue dans le d)

$$\omega_{i+1}^{(n-r+i)}(x) = x\omega_i^{(n-r-1+i)}(x) + B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}$$

puisque'on obtient $\omega_{r+1}^{(n)}(x)$, ce qui entraine

$$B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} = B_{k+i}^{(n+r+1-i)}$$

pour $i \in \mathbb{N}$,
 $0 \leq i \leq r$

$$\omega_i^{(n-r-1+i)}(x) = \omega_i^{(n+r+1-i)}(x)$$

Remarque 2.5.

Les secondes relations obtenues dans le d) permettent le calcul récurrent des $C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}$ à condition de connaître une valeur de départ.

On utilise la valeur $C_{k+r+1}^{(n)}$ obtenue dans le a).

Il existe un cas où on ne peut calculer les $C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}$ à partir de $C_{k+r+1}^{(n)}$.

En effet, si le bloc P a son côté ouest occupé par les polynômes $P_0^{(n+i+1)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$, on a dans le cas d. 1).

$$C_{k+i}^{(n+r+1-i)} = -e_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)} + \gamma_i \quad q_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)} = 0 \text{ puisque } k = 1.$$

Cette relation est valable pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r+1$ (cf. le a)).

$$C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} e_{k+r-1-i, \ell}^{(n-r-1+i)} = C_{k+r+1}^{(n-r+i)}$$

Pour $k = 1$ et $i = r$, $C_{k+r+1}^{(n-1)} e_{k-1, \ell}^{(n-1)} = C_{k+r+1}^{(n)}$, soit une relation $0 = 0$.

Pour pallier cet inconvénient nous utilisons la fonctionnelle c.

$$\begin{aligned} P_{r+2}^{(n-1)}(x) &= (x \omega_{r+1}^{(n-1)}(x) + B_{r+2}^{(n-1)}) P_1^{(n-1)}(x) + C_{r+2}^{(n-1)} P_0^{(n-1)}(x) \\ &= (x \omega_{r+1}^{(n-1)}(x) + B_{r+2}^{(n-1)}) + C_{r+2}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

On sait que $c_i = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $n \leq i \leq n+r$ et que $c_{r+2}^{(n-1)}(P_{r+2}^{(n-1)}(x)) = 0$

Supposons que $P_{r+2}^{(n-1)}(x) = \sum_{i=0}^{r+2} \lambda_{r+2-i, r+2} x^i$.

Alors $c_{r+2}^{(n-1)}(P_{r+2}^{(n-1)}(x)) = \sum_{i=0}^{r+2} \lambda_{r+2-i, r+2} c_{n-1+i} = \lambda_{r+2, r+2} c_{n-1} + \lambda_{0, r+2} c_{n+r+1}$.

Or $\lambda_{r+2, r+2} = c_{r+2}^{(n-1)}$ et $\lambda_{0, r+2} = 1$.

Donc $c_{r+2}^{(n-1)} = - \frac{c_{n+r+1}}{c_{n-1}}$.

C'est cette valeur qui sera utilisée comme valeur de départ de la relation de récurrence.

e) 1. Si le polynôme $P_{k+r+2}^{(n-r-2+i)}(x)$ est orthogonal régulier.

C'est à dire si $E_{k+r+2}^{(n-r-2+i)} \neq 0$.

$$\begin{cases} E_{k+r+2}^{(n-r-2)} = - e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} \\ E_{k+r+2}^{(n-r-2+i)} = c_{k+r+2}^{(n-r-2+i)} \text{ si } i > 0 \end{cases}$$

1.1 Si le polynôme $P_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}(x)$ est orthogonal régulier.

C'est à dire si $c_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} \neq 0$, on a :

$$P_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}(x) = (x + B_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}) P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x) + C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} P_{k+r-i}^{(n-r-1+i)}(x)$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

Nous savons que dans ce cas :

$$B_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} = -q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-1+i)} + \gamma_i$$

$$P_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}(x) = P_{k+r+2}^{(n-r-2+i)}(x) - e_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)} + \delta_i P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x)$$

avec $\delta_i = 0$ si $i \leq 1$, $\delta_i = 1$ si $i > 1$.

$$\begin{aligned} P_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}(x) &= x P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x) - q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)} + \delta_i P_{k+r+1}^{(n-r-2+i)}(x) \\ &\quad - e_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)} + \delta_i P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x) \end{aligned}$$

$$= x P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x) - e_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)} + \delta_i P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x)$$

$$- q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)} + \delta_i \left[P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x) - E_{k+r+2}^{(n-r-2+i)} P_{k+r-i}^{(n-r-1+i)}(x) \right]$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} P_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}(x) &= (x - e_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)} + \delta_i - q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)} + \delta_i) P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x) \\ &\quad + E_{k+r+2}^{(n-r-2+i)} q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)} + \delta_i P_{k+r-i}^{(n-r-1+i)}(x). \end{aligned}$$

D'où les relations :

$$B_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} = -q_{k+r+2, \ell^{(n-r-1+i)} + \gamma_i}^{(n-r-1+i)} = -e_{k+r+2, \ell^{(n-r-2+i)} + \delta_i}^{(n-r-2+i)} - q_{k+r+2, \ell^{(n-r-2+i)} + \delta_i}^{(n-r-2+i)}$$

$$C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} = E_{k+r+2}^{(n-r-2+i)} q_{k+r+2, \ell^{(n-r-2+i)} + \delta_i}^{(n-r-2+i)}$$

1.2 Si le polynôme $P_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

C'est à dire si $C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} = 0$ on a :

$$P_{k+r+2}^{(n-r-2+i)}(x) = x P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x)$$

$$q_{k+r+2, \ell^{(n-r-2+i)} + \delta_i}^{(n-r-2+i)} = 0$$

Remarque.

Dans ce cas la seconde relation du cas 1.1 reste valable puisque $C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} = 0$ et $E_{k+r+2}^{(n-r-2+i)} \neq 0$ entraînent bien que $q_{k+r+2, \ell^{(n-r-2+i)} + \delta_i}^{(n-r-2+i)} = 0$.

Remarque.

La première relation du cas 1.1 montre que les calculs se poursuivent derrière le bloc comme dans le cas normal puisque $e_{k+r+1, \ell^{(n-r-1+i)}}^{(n-r-1+i)} = 0$.

2. Si le polynôme $P_{k+r+2}^{(n-r-2+i)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

C'est à dire si $E_{k+r+2}^{(n-r-2+i)} = 0$ on a :

$$P_{k+r+1}^{(n-r-2+i)}(x) = P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}(x)$$

et

$$e_{k+r+1, \ell^{(n-r-2+i)} + \delta_i}^{(n-r-2+i)} = 0$$

f) 1. Si $P_{k+r+2}^{(n-1)}(x)$ est orthogonal régulier.

C'est à dire si $C_{k+r+2}^{(n-1)} \neq 0$

1.1 Si le polynôme $P_{k+r+2}^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier.

C'est à dire si $q_{k+r+2, \ell^{(n-1)} + \gamma_r}^{(n-1)} \neq 0$ on a :

$$P_{k+r+2}^{(n)}(x) = (x + B_{k+r+2}^{(n)}) P_{k+r+1}^{(n)}(x) + C_{k+r+2}^{(n)} P_{k-1}^{(n)}(x)$$

$$= (x - q_{k+r+2, \ell^{(n)} + 1}^{(n)} - e_{k+r+1, \ell^{(n)} + 1}^{(n)}) P_{k+r+1}^{(n)}(x)$$

$$- q_{k+r+1, \ell^{(n)} + 1}^{(n)} e_{k+r+1, \ell^{(n)} + 1}^{(n)} P_{k-1}^{(n)}(x)$$

Par une méthode analogue au point précédent on obtient :

$$P_{k+r+2}^{(n)}(x) = (x - e_{k+r+2, \ell^{(n-1)} + \gamma_r}^{(n-1)} - q_{k+r+2, \ell^{(n-1)} + \gamma_r}^{(n-1)}) P_{k+r+1}^{(n)}(x)$$

$$+ C_{k+r+2}^{(n-1)} q_{k+r+2, \ell^{(n-1)} + \gamma_r}^{(n-1)} P_{k-1}^{(n)}(x)$$

D'où les relations :

$$\begin{aligned}
 q_{k+r+2, \ell^{(n)}+1}^{(n)} + e_{k+r+1, \ell^{(n)}+1}^{(n)} &= e_{k+r+2, \ell^{(n-1)}+\gamma_r}^{(n-1)} + q_{k+r+2, \ell^{(n-1)}+\gamma_r}^{(n-1)} \\
 - q_{k+r+1, \ell^{(n)}+1}^{(n)} e_{k+r+1, \ell^{(n)}+1}^{(n)} &= c_{k+r+2}^{(n-1)} q_{k+r+2, \ell^{(n-1)}+\gamma_r}^{(n-1)} + \gamma_r
 \end{aligned}$$

Remarque.

Les formules données servent à calculer $q_{k+r+2, \ell^{(n-1)}+\gamma_r}^{(n-1)}$, puis $e_{k+r+2, \ell^{(n-1)}+\gamma_r}^{(n-1)}$.

On utilise le commentaire fait en b.1, car on teste ici également la nullité de $q_{k+r+2, \ell^{(n-1)}+\gamma_r}^{(n-1)}$ pour effectuer ensuite son calcul. Cela tient encore à la présence d'un bloc P situé en dessous du bloc étudié et qui aura été détecté auparavant.

Remarque.

La première relation montre bien que derrière le bloc P on poursuit avec les relations classiques du qd obtenues dans le cas normal.

1.2 Si le polynôme $P_{k+r+2}^{(n)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

 C'est à dire si $q_{k+r+2, \ell^{(n-1)}+\gamma_r}^{(n-1)}$, on a également

$$e_{k+r+2, \ell^{(n-1)}+\gamma_r}^{(n-1)} = \infty$$

Remarque.

Dans le cas 1.2 on peut encore appliquer la seconde relation du 1.1 car $e_{k+r+1, \ell}^{(n)} = 0$ et $c_{k+r+2}^{(n-1)} \neq 0 \Rightarrow q_{k+r+2, \ell}^{(n-1)} + \gamma_r = 0$

2. Si $p_{k+r+2}^{(n-1)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

C'est à dire si $c_{k+r+2}^{(n-1)} = 0$, on a :

$$p_{k+r+1}^{(n-1)}(x) = p_{k+r+1}^{(n)}(x)$$

et

$$e_{k+r+1, \ell}^{n-1} + \gamma_r = 0$$

Conduite des calculs.

On effectue les calculs colonne après colonne dans le tableau du qd. On se rappellera que lorsqu'un terme $E_{i+1}^{(n)}$ intervient dans les relations de la propriété 2.4, il correspond à un coefficient $c_{i+1}^{(n)}$ ou $e_i^{(n)}$. Par conséquent on est amené à calculer des termes d'indice $i+1$ en même temps que des termes d'indice i lorsqu'il s'agit des termes $E_{i+1}^{(n)}$.

On commence donc à placer les valeurs de $e_{o,o}^{(n)}$, puis celles de $q_1^{(n)}$ si $c_n \neq 0$. Si $c_n = 0$, on a un bloc P dès le début de la table P. Tant que les valeurs de $q_i^{(n)}$ et $e_i^{(n)}$ sont non nulles, on utilise les relations rhomboïdales du (I).

Un bloc est détecté par la présence de zéros dans une colonne $e_{k-1}^{(i)}$. Le nombre de zéros consécutifs donne la largeur du bloc P. On peut ainsi placer toutes les valeurs nulles et ∞ qui figurent dans le bloc qd. On met en oeuvre les relations du (II) pour calculer les valeurs périphériques du bloc qd.

Ce sont tout d'abord les valeurs de $e_{k-1, \ell}^{(n+i)} + 1$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

Puis les valeurs de $q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}$ et $e_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$,

$0 \leq i \leq r$. On calcule ensuite $q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}$ et $e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}$.

On calcule $C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$ et enfin les valeurs de $q_{k+r+2, \ell}^{(n-r)}$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

Les valeurs de $e_{k-1, \ell}^{(n+i)}$ et $q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}$ sont intérieures au bloc qd.

Les $C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$ jouant le rôle d'un coefficient $E_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$ seront placés aux places de $e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-1+i)}$.

Sur les schémas d'exemples que nous proposerons, toutes ces valeurs intérieures au bloc qd seront cerclées, pour éviter de les confondre avec les valeurs trouvées dans la propriété 2.4. En fait ces dernières valeurs ont un intérêt quasi nul. Seules les valeurs nulles de $e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-1+i)}$ associées aux deux valeurs

consécutives $q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)}$ et $q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-1+i)}$ permettent le

calcul de $e_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)}$, ainsi que l'indique la seconde remarque qui suit

le cas e) 1.2.

Lorsque nous sommes dans le cas a) 2, où $e_{k-1, \ell}^{(n+r-i)}$ est nul, on ne doit pas

faire figurer cette valeur dans un cercle. Il faut la remplacer par la valeur de $-C_{k+1+i}^{(n+r-i)}$ qui vaut encore $-C_{k+i}^{(n+r+1-i)}$. En effet si $e_{k-1, \ell}^{(n+r-i)}$ est non

nul nous avons :

$$P_{k+i}^{(n+r+1-i)}(x) = \omega_{i-1}^{(n+r-i)}(x) P_{k-1}^{(n+r-i)}(x) - e_{k-1, \ell}^{(n+r-i)} P_{k-2}^{(n+r+1-i)}(x)$$

Si $e_{k-1, \ell}^{(n+r-i)}$ est nul nous avons :

$$P_{k+i}^{(n+r+1-i)} = \omega_{i-1}^{(n+r-i)}(x) P_{k-1}^{(n+r-i)}(x) + C_{k+1+i}^{(n+r-i)} P_{pr(k-1, n+r+1-i)}^{(n+r+1-i)}(x).$$

Enfin si des valeurs de $C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$ sont nulles, nous sommes en présence du bord gauche d'un nouveau bloc qd. La colonne qui correspond à e_{k+r+1} doit être explorée

à partir de ces valeurs nulles pour trouver la largeur du nouveau bloc qd afin de pouvoir le délimiter.

D'autre part on continue de pratiquer les calculs colonne après colonne en utilisant les relations du (I) là où il n'y avait pas de zéros détectés dans la colonne $e_{k-1}^{(i)}$, à condition que les éléments de cette colonne ne soient pas intérieurs à un bloc qd précédemment détecté.

Claessens et Wuytack ont donné des relations du qd dans un cas qui correspond à un bloc P entouré de deux rangées de polynômes orthogonaux réguliers. Nous donnons donc la propriété suivante qui est valable dans ce cas particulier et qui a le mérite de montrer plus simplement comment les calculs doivent être menés.

Propriété 2.7.

On suppose que l'on a un bloc P de largeur (r+1) entouré de deux rangées de polynômes orthogonaux réguliers, et que le polynôme situé dans l'angle NO intérieur au bloc P est le polynôme $P_k^{(n)}(x)$. Les calculs faits avec le (I) et l'utilisation de la propriété 2.4 donnent l'ensemble des valeurs inscrites sur la figure de la table qd à l'intérieur du bloc singulier du qd et sur le pourtour, sauf à l'intérieur du cadre en tirets.

On a les relations suivantes extraites du (II).

$$1 \quad e_{k-1, \ell}^{(n+r-i)} = q_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)} e_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)} + \gamma_i$$

$$\text{pour } i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq r \text{ et } \begin{cases} \gamma_i = 0 & \text{si } i = 0 \\ \gamma_i = 1 & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

$$2 \quad q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} = e_{k+i, \ell}^{(n+r+1-i)} q_{k+i, \ell}^{(n+r+1-i)} + \gamma_i$$

pour $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq r$.

$$3 \quad e_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)} = q_{k+1+i, \ell}^{(n+r+1-i)} + e_{k+i, \ell}^{(n+r+1-i)}$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

$$4 \quad B_{k+i}^{(n+r+1-i)} = -q_{k+i, \ell}^{(n+r+1-i)} - e_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)}$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r+1$.

$$5 \quad C_{k+i}^{(n+r+1-i)} = -e_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)} + q_{k-1, \ell}^{(n+r+1-i)}$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r+1$.

Toutes les relations suivantes sont prises pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

$$6 \quad C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} e_{k+r-1-i, \ell}^{(n-r-1+i)} = C_{k+r+1}^{(n-r+i)}$$

Pour le démarrage de cette relation on prend $C_{k+r+1}^{(n)}$ obtenu avec la relation précédente.

$$7 \quad C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} + C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} = C_{k+i}^{(n+r+1-i)} - q_{k+1+i, \ell}^{(n-r-i)}$$

$$8 \quad B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} = B_{k+i}^{(n+r+1-i)}$$

$$9 \quad \omega_i^{(n-r-1+i)}(x) = \omega_i^{(n+r+1-i)}(x)$$

$$10 \quad x \omega_i^{(n-r-1+i)}(x) + B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} = \omega_{i+1}^{(n-r+i)}(x)$$

$$11 \quad x \omega_i^{(n+r+1-i)} + B_{k+i}^{(n+r+1-i)} = \omega_{i+1}^{(n-r-i)}(x)$$

$$12 \quad C_{k+r+1}^{(n-r-1)} = -q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} e_{k+r, \ell}^{(n-r-2)}$$

$$13 \quad B_{k+r+1}^{(n-r-1)} = -q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} - e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}$$

Cette relation est équivalente à la suivante, dont la démonstration sera donnée peu après avec celles des trois autres relations de Claessens et Wuytack.

$$13 \text{ BIS } q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} + e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} = q_{k, \ell}^{(n+r+1)} + e_{k-1, \ell}^{(n+r+1)}$$

$$14 \quad C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} = E_{k+r+2}^{(n-r-2+i)} q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)} + \delta_i$$

$\delta_i = 0$ si $i \leq 1$ et $\delta_i = 1$ si $i > 1$.

$$E_{k+r+2}^{(n-r-2)} = -e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}$$

$$E_{k+r+2}^{(n-r-2+i)} = C_{k+r+2}^{(n-r-2+i)} \text{ pour } i > 0$$

$$15 \quad C_{k+r+2}^{(n-1)} q_{k+r+2, \ell}^{(n-1)} + \gamma_r = -q_{k+r+1, \ell}^{(n)} + e_{k+r+1, \ell}^{(n)}$$

$$16 \quad q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-1+i)} + 1 = e_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)} + \delta_i + q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)} + \delta_i$$

$$17 \quad q_{k+r+2, \ell}^{(n)} + 1 + e_{k+r+1, \ell}^{(n)} + 1 = e_{k+r+2, \ell}^{(n-1)} + \gamma_r + q_{k+r+2, \ell}^{(n-1)} + \gamma_r$$

Remarque.

Ces relations ont été écrites dans l'énoncé dans l'ordre des calculs à effectuer.

La relation] permet le calcul de $e_{k-1, \ell}^{(n+r-i)} + 1$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

La relation 2 donne $q_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}_{+1}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

La relation 3 donne $e_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}_{+1}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

La relation 4 donne tous les coefficients des polynomes $\omega_{i-pr(i+1, n)}^{(n)}(x)$, c'est à dire avec les notations de la propriété 1.22, $B_{k+i}^{(n+r+1-i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r+1$.

La relation 5 donne le deuxième coefficient de la relation de récurrence des polynomes orthogonaux réguliers unitaires, soit

$$C_{k+i}^{(n+r+1-i)} \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq r+1.$$

La relation 6 fournit $C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

La relation 7 donne $C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$ qui constituent les coefficients $E_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$ des relations entre familles adjacentes.

Les relations 8 à 11 permettent le calcul des $\omega_{i-pr(i+1, n)}^{(n)}(x)$.

La relation 12 donne $q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}$.

La relation 13 donne $e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}$.

La relation 14 donne $q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)}_{+\delta_i}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

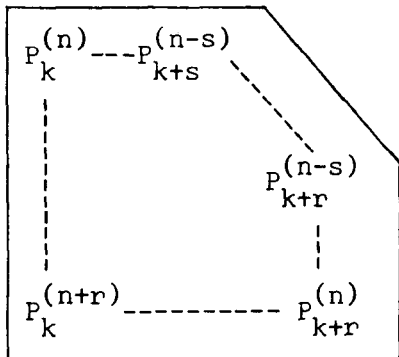
La relation 15 donne $q_{k+r+2, \ell}^{(n-1)}_{+\gamma_r}$.

La relation 16 donne $e_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+i)}_{+\delta_i}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

La relation **17** donne $e_{k+r+2, \ell}^{(n-1)} + \gamma_r$

Remarque 2.6.

Si on a un bloc P qui coupe le bord diagonal de la table P et qui débute sur une colonne k avec $n-s=0$ et $n > 0$, les relations **1** à **5** sont toujours utilisables.



1. Si $k > 1$.

Les relations **6** à **10** sont prises pour $i \in \mathbb{N}$
 $r-s+1 \leq i \leq r$.

La relation **11** est prise pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

Les relations **12** et **13** n'existent pas.

Les relations **14** et **16** sont prises pour $i \in \mathbb{N}$,
 $r-s+2 \leq i \leq r$.

2. Si $k=1$.

On prendra $c_{r+2}^{(n-1)} = -\frac{c_{n+r+1}}{c_{n-1}}$ pour le démarrage de la relation **6**.

3. Si $n=0$.

On n'utilise que les relations **1** à **5** et **11**.

Cette remarque s'applique également au cas général de la même façon.

Montrons comment à partir des relations de la propriété 2.7 on obtient les relations de Claessens et de Wuytack.

Nous avons trouvé :

$$c_{k+r+1}^{(n-r+i)} = c_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} e_{k+r-1-i, \ell}^{(n-r-1+i)}$$

$$c_{k+1+i}^{(n+r-i)} = c_{k+i}^{(n+r+1-i)} q_{k-1, \ell}^{(n+r-i)}$$

On fait le produit de $i=0$ à r de chaque relation. On obtient après simplification par les termes C qui sont tous non nuls d'après le théorème 1.5.

$$\begin{aligned}
 C_{k+r+1}^{(n)} &= C_{k+r+1}^{(n-r-1)} \prod_{i=0}^r e_{k+r-1-i, \ell}^{(n-r-1+i)} \\
 &= -q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} \prod_{i=-1}^r e_{k+r-1-i, \ell}^{(n-r-1+i)} \\
 C_{k+r+1}^{(n)} &= C_k^{(n+r+1)} \prod_{i=0}^r q_{k-1, \ell}^{(n+r-i)} \\
 &= -e_{k-1, \ell}^{(n+r+1)} \prod_{i=-1}^r q_{k-1, \ell}^{(n+r-i)}
 \end{aligned}$$

D'où leur première relation.

Nous avons trouvé que $B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} = B_{k+i}^{(n+r+1-i)}$. Pour $i = 0$ on a donc

$B_{k+r+1}^{(n-r-1)} = B_k^{(n+r+1)}$. On utilise les relations 4 et B et on obtient la relation Bbis.

On utilise maintenant les quatre relations.

$$\begin{aligned}
 C_{k+r+1}^{(n-r-1+j)} e_{k+r-1-j, \ell}^{(n-r-1+j)} &= C_{k+r+1}^{(n-r+j)} \\
 C_{k+r+2}^{(n-r-1+j)} &= C_{k+r+2}^{(n-r-2+j)} q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+j)} + \delta_j \\
 C_{k+1+j}^{(n+r-j)} &= C_{k+j}^{(n+r+1-j)} q_{k-1, \ell}^{(n+r-j)} \\
 q_{k+1+j, \ell}^{(n+r-j)} + 1 &= e_{k+j, \ell}^{(n+r+1-j)} + \gamma_j q_{k+j, \ell}^{(n+r+1-j)} + \gamma_j
 \end{aligned}$$

On fait le produit de la première depuis $j=0$ jusqu'à $i-1$, le produit de la seconde depuis $j=1$ jusqu'à i , le produit de la troisième depuis $j=0$ jusqu'à $i-1$ et enfin le produit de la dernière depuis $j=0$ jusqu'à i . Les résultats sont reportés dans la relation 7. On obtient leur troisième relation.

$$\begin{aligned}
 e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} \prod_{j=0}^i q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2+j)} + \delta_j &+ q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)} \prod_{j=-1}^{i-1} e_{k+r-1-j, \ell}^{(n-r-1+j)} \\
 &= e_{k-1, \ell}^{(n+r+1)} \prod_{j=-1}^{i-1} q_{k-1, \ell}^{(n+r-j)} + q_{k, \ell}^{(n+r+1)} \prod_{j=0}^i e_{k+j, \ell}^{(n+r+1-j)} + \gamma_j
 \end{aligned}$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

Enfin pour trouver leur quatrième relation on utilise la relation 15 et les produits des deuxième et quatrième relations précédentes.

On obtient :

$$q_{k,\ell}^{(n+r+1)} \prod_{j=0}^{r+1} e_{k+j,\ell}^{(n+r+1-j)} + \gamma_j = e_{k+r+1,\ell}^{(n-r-2)} \prod_{j=0}^{r+1} q_{k+r+2,\ell}^{(n-r-2+j)} + \gamma_j$$

Remarque sur le calcul des polynômes orthogonaux et des polynômes associés.

Lorsqu'on dispose des coefficients du qd ($q_{i+1,\ell}^{(n)}$ et $E_{i+1}^{(n)}$) et des polynômes $\omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(x)$ on peut appliquer les relations des propriétés 2.4 et 2.6, c'est à dire celles qui ont été présentées lors de l'introduction de cette section. Lorsqu'on rencontre un bloc P on peut, pour calculer les polynômes qui bordent les côtés S et E de ce bloc, utiliser les polynômes $\omega_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(x)$.

Si on ne désire pas effectuer de multiplication de polynômes, on peut les obtenir en utilisant pour le côté S les coefficients $q_{k+1+i, (n+r-i)}^{(n+r-i)}$ et pour le côté E les coefficients $C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$. On n'effectuera ainsi que des additions.

Exemple.

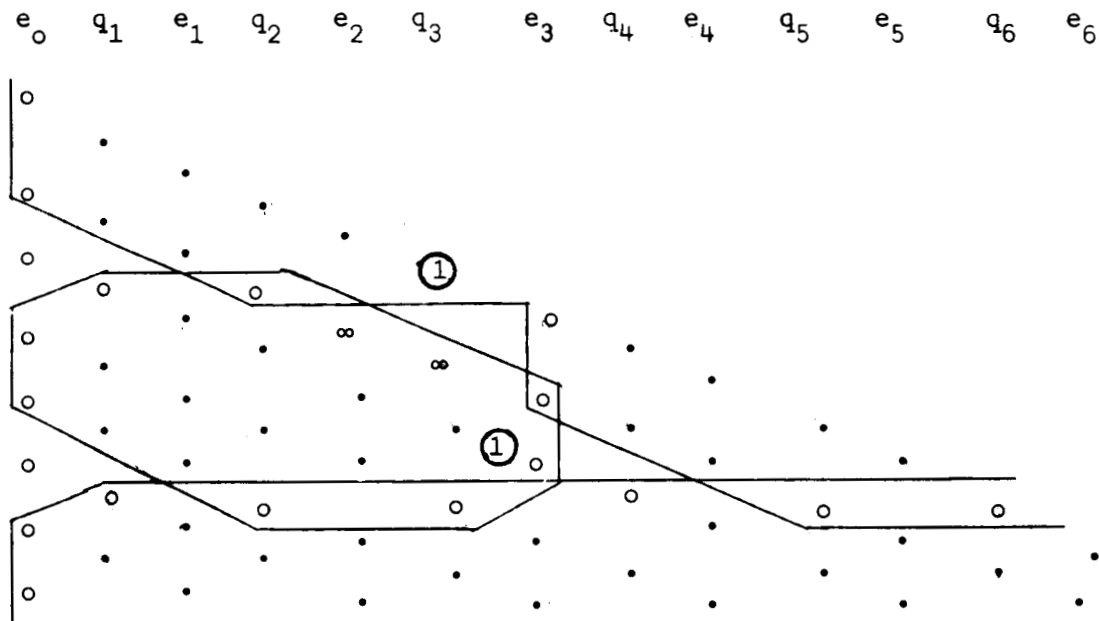
L'exemple suivant montre que les relations de Claessens et Wuytack ne permettent pas le calcul de tous les polynômes orthogonaux.

Soit la série formelle $f(x) = x^2 + x^5$.

Nous avons la table P suivante, dans laquelle nous ne faisons pas figurer les polynômes qui ne sont pas orthogonaux réguliers.

0											
0	1										
0	1		.								
0	1		.	.							
0	1		x	x ²	x ³ -1						
0	1		.		x ³ -1		.				
0	1		.		x ³ -1		.	.			
0	1		x	x ²	x ³		x ⁴	x ⁵	x ⁶		
0	1										
0	1										

La table de correspondance du qd est la suivante.



Les valeurs cerclées representent respectivement $q_3^{(0)}$ et C_4^2 , qui ne peuvent être calculées par les relations de Claessens et Wuytack. Il est donc impossible de trouver les polynomes orthogonaux x^3-1 . Si nous appliquons nos relations nous avons :

$$\begin{aligned}
 C_1^{(2)} &= 0 & B_1^{(2)} &= 0 & C_1^{(5)} &= 0 & B_1^{(5)} &= 0 \\
 C_2^{(1)} &= 0 & B_2^{(1)} &= 0 & C_2^{(4)} &= 0 & B_2^{(4)} &= 0 \\
 C_3^{(0)} &= 0 & B_3^{(0)} &= -q_3^{(0)} & C_3^{(3)} &= 0 & B_3^{(3)} &= 0 \\
 -C_3^{(1)} &= q_3^{(0)} & -B_3^{(1)} &= e_3^{(0)} & C_3^{(2)} + C_4^{(2)} &= 0 & C_3^{(2)} &= \frac{C_5}{C_2} = -1 \Rightarrow \underline{C_4^{(2)} = 1} \\
 & & & & C_3^{(1)} &= C_3^{(2)} = -1 \Rightarrow \underline{q_3^{(0)} = 1.}
 \end{aligned}$$

2.3 POLYNOMES ORTHOGONAUX RECIPROQUES

Nous présentons ici quelques résultats sur les polynômes orthogonaux réciproques qui nous seront utiles pour justifier la forme progressive de l'algorithme qd général.

Soit f^{-1} la série réciproque de f . Elle est telle que :

$$f(x) f^{-1}(x) = 1.$$

$$\text{Nous écrivons } f^{-1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{c}_i x^i.$$

Nous pouvons calculer les \hat{c}_i par les relations.

$$c_0 \hat{c}_0 = 1$$

$$\sum_{i=0}^k \hat{c}_i c_{k-i} = 0, \forall k \in \mathbb{N}, k > 0.$$

Nous devons avoir naturellement $c_0 \neq 0$.

Le système obtenu peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{-----} & c_0 \\ 0 & \text{-----} & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0 & c_1 & \text{-----} & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_k \\ \vdots \\ \hat{c}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est un système régulier.

$$\hat{c}_k = \frac{1}{c_0^{k+1}} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{-----} & c_0 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0 & c_1 & \text{-----} & c_{k-1} \\ c_1 & \text{-----} & & c_k \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c_0^{k+1}} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} H_k^{(-k+2)}$$

Nous définissons la fonctionnelle linéaire $\hat{c}^{(j)}$ par :

$$\hat{c}^{(j)}(x^i) = \hat{c}_{i+j}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Nous conviendrons que $\hat{c}_i = 0$ pour $i < 0$.

Nous appellerons $\{R_k^{(j)}\}$ la famille de polynômes orthogonaux ou quasi-orthogonaux par rapport à $\hat{c}^{(j)}$, $\{S_k^{(j)}\}$ la famille des polynômes associés aux polynômes $R_k^{(j)}$.

Théorème 2.3. [6]

Si $R_k^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier, ainsi que $P_k^{(n+1)}(x)$, alors pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$ nous avons :

$$R_k^{(n+1)}(x) \sum_{i=0}^n \hat{c}_i x^{n-1} + S_k^{(n+1)}(x) = \hat{c}_0 P_{n+k}^{(-n+1)}(x)$$

$$P_k^{(n+1)}(x) \sum_{i=0}^n c_i x^{n-1} + Q_k^{(n+1)}(x) = c_0 R_{n+k}^{(-n+1)}(x).$$

Nous obtenons immédiatement :

Corollaire 2.3.

Si $R_k^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier, alors $P_{n+k}^{(-n+1)}(x)$ est orthogonal régulier.

Si $P_k^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier, alors $R_{n+k}^{(-n+1)}(x)$ est orthogonal régulier.

Démonstration.

La démonstration du théorème 2.3 (cf. [6]) transforme le déterminant.

$$\begin{vmatrix} d_{n+1} & \text{-----} & d_{n+k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n+k} & \text{-----} & d_{n+2k} \\ 0 & \text{-----} & 0 \quad 1 \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} c_{-n+1} & \text{-----} & c_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_k & \text{-----} & c_{n+2k} \\ 0 & \text{-----} & 0 \quad c_0 \end{vmatrix}$$

On a une transformation analogue pour le deuxième cas.

cqfd.

Corollaire 2.4.

A un bloc P de largeur l dont l'angle nord-ouest est occupé par $P_{n+k}^{(-n+1)}$ correspond un bloc R de largeur l dont l'angle nord-ouest est occupé par $R_k^{(n+1)}$.

Démonstration.

En effet si $P_{n+k}^{(-n+1)}$ n'est pas orthogonal régulier, alors $R_k^{(n+1)}$ n'est pas orthogonal régulier.

cqfd.

2.4 FORME PROGRESSIVE DE L'ALGORITHME "QD"

Nous prenons comme convention que $c_i = 0$ pour $i \in \mathbb{Z}$, $i < 0$. Nous complétons la table H et la table P pour les diagonales d'indice négatif. Nous supposons également que $c_j = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq s-1$, et $c_s \neq 0$.

Alors $H_k^{(j)} = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$ tel que $j \leq s-k$.

L'ensemble de ces déterminants forment un bloc infini.

$$H_k^{(s-k+1)} = \begin{vmatrix} c_{s-k+1} & \cdots & c_s \\ \vdots & & \vdots \\ c_s & \cdots & c_{s+k-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} (c_s)^k \neq 0.$$

Par conséquent les polynômes $P_k^{(s-k+1)}$ sont orthogonaux réguliers, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Nous calculons à présent l'ensemble de la table qd. Celle-ci sera la suivante.

$e_0^{(s)}$	$q_1^{(s)}$	$q_2^{(s-1)}$	$q_3^{(s-2)}$	$q_4^{(s-3)}$	$q_5^{(s-4)}$. . .
$e_0^{(s+1)}$	$e_1^{(s)}$	$e_2^{(s-1)}$	$e_3^{(s-2)}$	$e_4^{(s-3)}$		
	$q_1^{(s+1)}$	$q_2^{(s)}$	$q_3^{(s-1)}$	$q_4^{(s-2)}$	$q_5^{(s-3)}$. . .
$e_0^{(s+2)}$	$e_1^{(s+1)}$	$e_2^{(s)}$	$e_3^{(s-1)}$	$e_4^{(s-2)}$		
.	.			.		
.	.			.		
.	.			.		

Les deux traits délimitent le bloc qd infini correspondant au bloc P infini.

Nous rappelons que les éléments q et e portent un second indice inférieur, que nous n'avons pas fait figurer ci-dessus, qui numérote les blocs successifs traversés suivant une diagonale. Par exemple les termes $e_{2+k}^{(s-1-k)}$ devraient s'écrire $e_{2+k,1}^{(s-1-k)}$.

Le calcul de cette table peut s'opérer à partir des horizontales et non plus des verticales. Cette méthode qui est appelée forme progressive de l'algorithme qd est plus stable numériquement dans le cas normal (cf. le livre de P. Henrici [25]).

Pour effectuer ce calcul il suffit de disposer des éléments $e_0^{(s+i+1)}$, $q_{i+1}^{(s-i)}$ et $e_{i+1}^{(s-i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$.

Nous savons déjà que $e_0^{(s+i+1)} = 0, \forall i \in \mathbb{N}$, et $q_1^{(s)} = \frac{c_{s+1}}{c_s}$.

En utilisant les résultats de la section 2, nous savons que le calcul de $e_{2+k}^{(s-k-1)}$, pour $k \in \mathbb{N}$, s'effectue à partir de $e_{1+k}^{(s-k)}$ et de $q_{2+k}^{(s-k)}$, donc avec une valeur de $q_{2+k,0}^{(s-k-1)}$ nulle.

$$q_{2+k,0}^{(s-k-1)} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$$

Pour le cas où nous désirons obtenir la valeur de $q_{2+k,1}^{(s-k-1)}$ pour $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$P_{2+k}^{(s-k-1)}(x) = x P_{1+k}^{(s-k)}(x) - q_{2+k,1}^{(s-k-1)} P_0^{(s-k-1)}(x).$$

et donc :

$$q_{2+k,1}^{(s-k-1)} = - P_{2+k}^{(s-k-1)}(0) = (-1)^{k+3} \frac{H_{k+2}^{(s-k)}}{H_{k+2}^{(s-k-1)}} \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

Pour déterminer pratiquement $H_{k+2}^{(s-k)}$ nous utiliserons les relations fournies par le calcul des moments de la fonctionnelle linéaire \hat{c} par rapport à laquelle sont orthogonaux les polynômes réciproques (cf. [6], [25] et la section 3). Nous avons :

$$\hat{c}_{k+2} = \frac{1}{(c_s)^{k+3}} (-1)^{\frac{(k+2)(k+3)}{2}} H_{k+2}^{(s-k)},$$

et par conséquent

$$q_{2+k,1}^{(s-k-1)} = - c_s \hat{c}_{k+2} = - \frac{\hat{c}_{k+2}}{\hat{c}_0} \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

On remarquera que $q_1^{(s)}$ s'obtient à partir de la même relation.

$$\text{En effet } q_1^{(s)} = -\frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_0} = \frac{c_{s+1}}{c_s}.$$

Passons maintenant à la détermination de $e_{k+1, \gamma_k}^{(s-k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$,

avec $\gamma_0 = 0$ et $\gamma_k = 1$ pour $k > 0$.

Si $P_{k+1}^{(s-k+1)}$ est orthogonal régulier, c'est-à-dire si $q_{k+1, \gamma_k}^{(s-k)} \neq 0$,

alors :

$$P_{k+1}^{(s-k+1)}(x) = P_{k+1}^{(s-k)}(x) - e_{k+1, \gamma_k}^{(s-k)} P_k^{(s-k+1)}(x),$$

avec

$$e_{k+1, \gamma_k}^{(s-k)} = -\frac{H_{k+2}^{(s-k)} H_k^{(s-k+1)}}{H_{k+1}^{(s-k)} H_{k+1}^{(s-k+1)}}$$

où $H_k^{(s-k+1)} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} (c_s)^k,$

et $H_{k+2}^{(s-k)} = (c_s)^{k+3} \hat{c}_{k+2} (-1)^{\frac{(k+2)(k+3)}{2}}$

Donc :

$e_{k+1, \gamma_k}^{(s-k)} = \frac{\hat{c}_{k+2}}{\hat{c}_{k+1}}$

Si $P_{k+1}^{(s-k+1)}$ n'est pas orthogonal régulier, c'est-à-dire si $q_{k+1, \gamma_k}^{(s-k)} = 0$,

alors on est dans un bloc qd.

Supposons que l'on explore la première horizontale de la table qd

et que nous ayons $q_{\ell, \gamma_{\ell-1}}^{(s-\ell+1)} \neq 0$ et $q_{\ell+1, \gamma_{\ell}}^{(s-\ell)} = 0$. Par conséquent $\hat{c}_{\ell} \neq 0$ et

$\hat{c}_{\ell+1} = 0$, et $e_{\ell+1, \gamma_{\ell}}^{(s-\ell)}$ n'est pas défini. Nous aurons la même situation tant

que \hat{c}_i sera nul. La relation encadrée précédente permet donc d'obtenir la seconde horizontale. Il suffira d'inclure dans un bloc qd toutes les valeurs de e nulles ou non définies.

Nous appellerons table P complétée la table des polynômes orthogonaux dans laquelle on fait figurer les polynômes à partir de l'horizontale passant par $P_1^{(s+1)}$. Nous avons donc complété la suite des c_i par des valeurs nulles pour $i < 0$. Si nous considérons la table complétée des polynômes orthogonaux réciproques, les blocs sont symétriques de ceux de la table P complétée, par rapport à la diagonale $s+1$ de la table (cf. corollaire 2.4).

Soient \hat{q} et \hat{e} les coefficients de la table qd des polynômes orthogonaux réciproques. Alors nous avons :

$$\hat{q}_1^{(0)} = -q_1^{(s)},$$

$$\hat{q}_m^{(n)} = e_{n+m-1}^{(s+1-n)} \quad \text{et} \quad \hat{e}_m^{(n)} = q_{n+m}^{(s+1-n)} \quad \text{pour } n > -m,$$

$$q_m^{(n+s)} = \hat{e}_{n+m-1}^{(1-n)} \quad \text{et} \quad e_m^{(n+s)} = \hat{q}_{n+m}^{(1-n)} \quad \text{pour } n > -m,$$

partout où ces valeurs sont définies.

En effet les initialisations $\hat{e}_0^{(n)} = q_n^{(s+1-n)} = 0$ et

$$\hat{q}_1^{(n)} = e_n^{(s+1-n)} = \frac{\hat{c}_{n+1}}{\hat{c}_n}$$

sont celles de l'algorithme qd.

Pour $\hat{q}_1^{(n)}$ on conserve l'expression $\frac{\hat{c}_{n+1}}{\hat{c}_n}$ même si certains des \hat{c}_i

sont nuls. Les coefficients $\hat{q}_1^{(n)}$ nuls ou indéfinis sont dans les blocs qd.

D'autre part nous avons vu que :

$$q_1^{(s)} = - \frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_0} = \frac{c_{s+1}}{c_s} = - \hat{q}_1^{(0)}.$$

Ensuite les règles rhomboïdales classiques restent inchangées (cf. th. 7.6.d du livre de P. Henrici [25]).

En présence d'un bloc qd nous utiliserons les résultats de la deuxième section appliqués à une table complétée, c'est-à-dire que les coefficients $q_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}$, $e_{k+r+1, \ell}^{(n-r-2)}$ et $q_{k+r+2, \ell}^{(n-r-2)}$ ne sont plus des inconnues.

Si nous examinons le bloc qd du début de la deuxième section il est de forme symétrique par rapport à la diagonale principale. Si sur un côté nous avons les coefficients e, sur le côté symétrique nous avons q et réciproquement.

Le rôle joué par les éléments périphériques $e_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}$ et $q_{k+r+2, \ell}^{(n-1-i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$ est symétrique et leur obtention se

fait de façon analogue à partir des éléments intérieurs au bloc. Ce sont des règles de trois éléments. Toutes ces règles sont symétriques, c'est-à-dire que si q intervient dans l'une, E ou e intervient dans l'autre et réciproquement.

Enfin les éléments intérieurs permettant d'obtenir $e_{k+1+i, \ell}^{(n+r-i)}$ et $q_{k+r+2, e}^{(n-i-1)}$ s'obtiennent aussi de façon symétrique avec des règles de trois éléments.

De plus l'ensemble des éléments de la table qd est déterminé de façon unique à partir des initialisations.

Donc si nous effectuons une symétrie de la table qd par rapport à la diagonale $s + \frac{1}{2}$, on échange d'abord les rôles joués par e et q, ensuite les blocs occupent une place symétrique qui est celle de la table R des polynômes orthogonaux réciproques. Les initialisations sont celles de la table qd correspondant aux éléments \hat{q} et \hat{e} . Toutes les règles sont rendues symétriques. Par conséquent nous avons la table qd correspondant aux polynômes orthogonaux réciproques.

En conclusion pour calculer la forme progressive de l'algorithme qd il suffit de calculer la table qd correspondant à la table complétée des polynômes orthogonaux réciproques en ajoutant l'horizontale d'initialisation qui contient les éléments $\hat{q}_1^{(0)}$ et $\hat{q}_{i+1}^{(-i)} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$.

On effectue le calcul colonne après colonne comme dans la deuxième section en tenant compte de l'horizontale d'initialisations supplémentaires. On calcule les éléments intéressants intérieurs aux blocs qd. Puis on effectue une symétrie par rapport à la diagonale $s + \frac{1}{2}$ en changeant \hat{q} en e et \hat{e} en q comme il a été indiqué ci-dessus.

FONCTIONNELLES LINEAIRES PARTICULIERES

- * -

L'objet du présent chapitre est de nous donner un certain nombre de propriétés des polynômes orthogonaux par rapport à des fonctionnelles linéaires de quatre types particuliers. Ces propriétés seront exploitées dans le chapitre concernant les quadratures de Gauss.

La première section est consacrée aux fonctionnelles linéaires semi-définies positives. Elles sont caractérisées par la présence d'un bloc H infini et en avant de ce bloc les polynômes orthogonaux ont des propriétés identiques à celles que l'on a pour une fonctionnelle linéaire définie positive. Le théorème 3.2 concernant les propriétés des racines des polynômes orthogonaux peut s'appliquer aux fonctionnelles linéaires définies positives et donne des propriétés supplémentaires par rapport à ce qui était fait jusqu'à présent (cf. le théorème 2.32 du livre de C. Brezinski [6]).

Dans la seconde section nous introduisons les fonctionnelles linéaires $H^{(i)}$ semi-définies positives. Sur une diagonale i les déterminants de Hankel sont astreints à être positifs ou nuls. Le théorème 3.5 concerne les propriétés d'une partie des racines du polynôme orthogonal régulier situé derrière le premier bloc sur une diagonale donnée. Nous ne sommes pas parvenus à démontrer certaines propriétés des autres racines que nous avons constatées sur de nombreux exemples. En particulier il semble que les racines non nulles restantes soient toujours imaginaires conjuguées.

Le cas particulier des fonctionnelles totalement H semi-définies positives est intéressant car il est en liaison directe avec les suites totalement monotones. Les moments de ces fonctionnelles forment une suite totalement monotone.

Ensuite nous étudions les fonctionnelles linéaires lacunaires d'ordre $(s+1)$ dans la troisième section. On rencontre déjà cette notion chez H. Van Rossum [49] avec ses polynômes orthogonaux lacunaires et chez J. Gilewicz [22] avec ses séries lacunaires. Nous donnons une description complète de la table des polynômes orthogonaux obtenu dans le cas le plus général. Pour y parvenir nous avons donné à ces fonctionnelles la définition la plus large possible. Nous n'imposons qu'une périodicité des zéros et peu nous importe ce qui sépare les groupes de zéro.

La table des associés est également déterminée. Les résultats obtenus concernant les deux tables sont une généralisation de résultats présentés dans le livre de C. Brezinski [6] dans le cas où $s=1$ et pour une diagonale paire. Les propriétés des racines de ces polynômes sont étudiées et nous donnons un résultat sur le calcul des déterminants qui composent la table H .

Les fonctionnelles lacunaires interviennent souvent dans la pratique. Ce sont par exemple des fonctionnelles lacunaires d'ordre 2 qui génèrent les polynômes de Legendre.

Dans le chapitre des quadratures nous ferons surtout appel à leurs propriétés remarquables.

Dans la dernière section nous abordons le cas d'une fonctionnelle linéaire e qui se déduit d'une autre fonctionnelle linéaire c après l'intervention d'une fonction de poids polynomiale. De nombreux auteurs se sont intéressés à ce problème : Stieltjes, Szegő G. [57], Kronrod A. S. [34], Patterson, Barrucand P. [3] et [4], Krylov V.I. [35], Davis et Rabinowitz [13], Struble G.W. [56], Monegato G. [43], Brezinski C. [6] et [6a]. Cette liste est loin d'être exhaustive. De notre côté nous avons surtout considéré le cas où la fonction de poids polynomiale change de signe dans l'ensemble support de la fonctionnelle c qui n'est par forcément définie. Nous donnons plusieurs propriétés sur les blocs qui correspondent à la fonctionnelle e .

Nous avons étendu la propriété classique qui exprime $u_k V_{k+1}$ en fonction des polynômes P_{k+1} à P_{k+h+1} lorsque c est définie, au cas où c n'est pas définie.

De même nous donnons une généralisation du théorème de Christoffel pour une fonctionnelle c non définie. Nous donnons également quelques résultats dans le cas où la fonctionnelle c et la fonction de poids polynomiale sont lacunaires d'ordre $(s+1)$.

La fin de cette section est consacrée à l'étude d'un problème qui a vraisemblablement été posé pour la première fois par Stieltjes. On prend comme fonction de poids polynomiale un polynôme P_k orthogonal par rapport à c , et on désire obtenir des propriétés concernant les polynômes V_i et en particulier sur leurs racines. Le problème posé à l'origine visait à montrer que V_{k+1} a toutes ses racines réelles distinctes dans l'ensemble support E et séparées par celles de P_k . Szegő [57] a démontré cette propriété pour une fonctionnelle linéaire c lacunaire d'ordre 2, attachée à une fonction de poids de la forme $(1-x^2)^\lambda$ avec $\lambda > -\frac{1}{2}$. Nous avons essayé de voir ce qui se passait pour une fonctionnelle linéaire c lacunaire d'ordre 2 quelconque. Ne sachant aborder le problème de front nous avons appliqué une idée présentée dans l'article de P. Barrucand [3]. Elle consiste à fragmenter le polynôme $P_k(x)$ en polynômes $(x^2 - a_i^2)$ et à étudier ce qui se passe pour les fonctionnelles définies par les moments

$$e^{(\cdot, i)}(x^j) = e^{(\cdot, i-1)}((x^2 - a_i^2)x^j)$$

pour $0 \leq i \leq \text{entier} \left(\frac{k}{2}\right)$ avec $e^{(\cdot, 0)} = c^{(\cdot)}$.

Malheureusement nous ne sommes pas parvenus aux résultats escomptés. Tout d'abord un contre exemple montre que pour une fonctionnelle linéaire c lacunaire d'ordre 2 quelconque les racines ne sont pas forcément dans l'ensemble support E . Ensuite nous n'avons pu montrer que les racines étaient réelles distinctes séparées par celles de P_k que dans la première étape de la récurrence. Les relations de récurrence obtenues entre les diverses catégories de polynômes orthogonaux semblaient séduisantes, mais là aussi la suite est infructueuse.

Bien que les résultats de cette partie soient très partiels nous les avons faits figurer dans ce chapitre. Peut être pourront-ils servir ultérieurement à trouver de nouvelles propriétés qui permettraient de conclure.

D'autre part, ils pourraient éventuellement servir pour les formules de quadratures de Gauss avec deux abscisses imposées symétriques. Dans la même optique, nous avons donné aussi quelques propriétés reliées au cas où la fonction de poids polynômiale est de degré 1.

3.1 FONCTIONNELLES LINEAIRES SEMI-DEFINIES POSITIVES.

Définition 3.1.

On appelle fonctionnelle linéaire semi-définie positive une fonctionnelle linéaire c telle que :

$$\forall q \in P : \forall x, q(x) \geq 0 \quad \text{alors} \quad c(q(x)) \geq 0$$

et

$$\exists p \in P : \forall x, p(x) \geq 0 \text{ et } p \neq 0 \text{ tel que } c(p(x)) = 0.$$

Nous commençons par démontrer quelques propriétés qui s'inspirent de celles satisfaites par les fonctionnelles définies positives. Nous ferons le lien entre les fonctionnelles linéaires semi-définies positives et certains opérateurs linéaires semi-définis positifs.

Propriété 3.1.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonctionnelle linéaire c soit semi-définie positive est que la matrice $D_k^{(c)}$ soit semi-définie positive, $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$D_k^{(c)} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_k \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{k+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_k & c_{k+1} & \dots & c_{2k} \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Prenons un polynôme réel q positif de degré k . Par conséquent, il ne peut être décomposé qu'en polynômes du second degré irréductibles, ou en polynômes du premier degré élevé à une puissance paire. Il est donc de degré pair et on a :

$$q(x) = d \cdot \prod_{j=1}^{k/2} (x-x_j-iy_j)(x-x_j+iy_j) \text{ avec } d \geq 0.$$

Posons

$$A(x) + iB(x) = d^{1/2} \prod_{j=1}^{k/2} (x-x_j-iy_j).$$

Alors

$$q(x) = A^2(x) + B^2(x).$$

Donc il revient au même, pour montrer la propriété, de prendre un polynôme $p(x)$ et de former $c(p^2)$

$$p(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i x^i.$$

Nous associons la fonctionnelle c aux matrices $D_k^{(0)}$

$$\begin{aligned} c(p^2) &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \alpha_i \alpha_j c(x^i x^j) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \alpha_i \alpha_j c_{i+j}. \\ &= \langle v, D_k^{(0)} v \rangle \text{ avec } v = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)^T \end{aligned}$$

On obtient bien la propriété cherchée.

cgfd.

Définition 3.2.

Soit A une matrice.

On appellera sous mineur extrait de A , un déterminant obtenu à partir de A en supprimant des lignes et des colonnes de même indice.

Nous avons la propriété classique suivante (cf. [33] p. 59).

Propriété 3.2.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit semi-définie positive est que tous les sous mineurs extraits de A soient positifs ou nuls.

Corollaire 3.1.

Si la fonctionnelle c est semi-définie positive, alors

$$H_n^{(2i)} \geq 0, \forall i \in \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration.

D'après la propriété 3.2 tout sous mineur extrait de $D_n^{(0)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, est positif ou nul. En particulier ceux pour lesquels on a retiré successivement la première ligne et la première colonne de $A_n^{(0)}$, puis les deux premières lignes et les deux premières colonnes et ainsi de suite. On obtient donc $D_n^{(2)}$, $D_n^{(4)}$, etc ...

cqfd.

Prenons une fonctionnelle linéaire c semi-définie. Un au moins des $H_n^{(0)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est nul. Nous allons démontrer l'existence d'un bloc infini.

Propriété 3.3.

Si la fonctionnelle linéaire c est semi-définie positive, alors :

$$H_k^{(0)} > 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}, k \leq h+1$$

et

$$H_k^{(0)} = 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}, k \geq h+2.$$

On a un bloc H infini ayant au plus un élément au nord dans la table H. En dehors de ce bloc la table H ne peut contenir que des blocs d'un élément qui est un déterminant tel que $H_k^{(2i+1)}$ avec $i \geq 0$.

Démonstration.

i) Prenons un bloc fini de largeur $r \geq 2$. Appelons S_0 le déterminant de l'angle Sud-Ouest, S_1, S_2, \dots, S_r ceux du côté Sud et enfin S_{r+1} celui de l'angle Sud-Est. Si on applique la relation de Sylvester à ces déterminants on a :

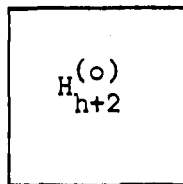
$$S_i S_{i+2} = - S_{i+1}^2 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq r-1.$$

Donc si $S_i > 0$ alors $S_{i+2} < 0$ ce qui est impossible d'après le corollaire 3.1.

ii) Ensuite il est impossible d'avoir un bloc d'un élément tel que

$$H_{h+1}^{(0)} \neq 0, H_{h+2}^{(0)} = 0 \text{ et } H_{h+3}^{(0)} \neq 0.$$

$$H_{h+1}^{(0)}$$



$$H_{h+1}^{(2)}$$

$$H_{h+3}^{(0)}$$

En effet, en appliquant la relation de Sylvester à partir de $H_{h+1}^{(0)} > 0$ on trouvera $H_{h+1}^{(2)} > 0$ puis $H_{h+3}^{(0)} < 0$.

iii) Par conséquent puisqu'au moins un déterminant $H_n^{(0)}$ est nul, on a un bloc infini :

$$H_k^{(0)} > 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}, k \leq h+1$$

et

$$H_k^{(0)} = 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}, k \geq h+2.$$

Le côté Nord ne peut avoir plus d'un élément dans la table H. En effet, s'il avait au moins deux éléments, en appliquant encore la relation de Sylvester au côté Nord et Nord-Ouest du bloc infini, on trouverait que l'élément $H_{h-1}^{(2)}$ est strictement négatif ce qui est contraire au corollaire 3.1.

iv) Enfin, le reste de la table H peut contenir des blocs d'un élément pourvu qu'ils contiennent des déterminants $H_k^{(2i+1)}$ avec $i \geq 0$. Si un bloc contenait un déterminant $H_k^{(2i)}$ on pourrait recommencer le raisonnement du ii).

cqfd.

La définition mentionne l'existence de polynômes p positifs tels que $c(p)=0$. La propriété suivante montre que les seuls polynômes positifs qui puissent vérifier cette condition sont les multiples de P_{h+1}^2 .



Propriété 3.4.

Soit c une fonctionnelle linéaire semi-définie positive. Les seuls polynômes p positifs tels que $c(p) = 0$ sont les multiples de P_{h+1}^2 .

Démonstration.

p peut être mis sous la forme $A^2(x) + B^2(x)$ (cf. la propriété 3.1), avec $\deg A^2 = \deg p$ et $\deg B^2 < \deg p$.

D'autre part $A(x)$ peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i P_i(x),$$

et donc

$$c(A^2) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^2 c(P_i^2).$$

Or

$$c(P_i^2) \neq 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq h$$

et

$$c(P_i^2) = 0 \text{ pour } i \geq h+1.$$

Donc A^2 est un multiple de P_{h+1}^2 .

On trouverait de la même façon que B^2 est un multiple de P_{h+1}^2 .

D'où la conclusion.

cgfd.

Avec la propriété suivante nous disposons d'une réciproque partielle.

Propriété 3.5.

Soit une fonctionnelle linéaire c .

Si les seuls polynômes p positifs qui sont tels que $c(p) = 0$, sont les multiples d'un polynôme P_{h+1}^2 , alors :

$$H_j = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, j \geq h+2$$

et soit tous les déterminants H_j pour $j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq h+1$ sont tous positifs, soit ils sont tous de signe alterné.

Démonstration.

Il est évident que $H_j = 0$ pour $j \in \mathbb{N}, j \leq h+2$, à cause du fait que $c(w^2(x) P_{h+1}^2(x)) = 0$ quel que soit le polynôme $w(x)$. C'est une conséquence de la propriété 1.23.

Pour $j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq h+1$, il n'y a pas d'autre déterminant nul. En effet si $H_k = 0$ pour $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq h+1$, alors $c(P_{k-1}^2) = 0$.

D'autre part, pour $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq h$, $c(P_k^2) = \frac{H_{k+1}}{H_k}$ (cf. [6] p. 46), et $H_0 = 1$.

S'il existait $c(P_k^2)$ et $c(P_\ell^2)$ de signes opposés avec $0 \leq k \leq h$ et $0 \leq \ell \leq h$, alors on pourrait trouver deux constantes positives α^2 et β^2 telles que

$$\alpha^2 c(P_k^2) + \beta^2 c(P_\ell^2) = 0.$$

$\alpha^2 P_k^2 + \beta^2 P_\ell^2$ est un polynôme positif de degré inférieur à $h+1$. On aurait donc une contradiction.

Par conséquent $c(P_k^2)$ est d'un signe constant quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq h$. D'où le résultat.

cqfd.

Pour obtenir une véritable réciproque il faut supposer en plus que c_0 est positif. Nous avons alors le théorème :

Théorème 3.1.

Soit c une fonctionnelle linéaire et $c_0 > 0$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que c soit semi-définie positive est que les seuls polynômes p positifs qui soient tels que $c(p) = 0$, soient les multiples d'un polynôme P_{h+1}^2 .

Démonstration.

La propriété 3.4 montre la condition suffisante.

La propriété 3.5 montre que les quantités $c(P_i^2)$ sont de signe constant pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq h$.

Or $c(P_0^2) = c_0 > 0$, donc $c(P_i^2) > 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq h$, et par conséquent $\forall q \in \mathcal{P}$, tel que $\forall x, q > 0$, alors $c(q) \geq 0$.

cqfd.

Nous supposons que pour la propriété suivante le bloc infini commence à la colonne $h+2$, c'est à dire que pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ on a :

$$H_j^{(2i)} \neq 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq h+1,$$

$$H_j^{(2i)} = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, \quad j \geq h+2.$$

Propriété 3.6.

Si la fonctionnelle c est semi-définie positive, alors la fonctionnelle $c^{(2i)}$ est semi-définie positive, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

Montrons que $c^{(2i)}(q) \geq 0$ avec $q(x) \geq 0$.

$q(x)$ peut se mettre sous la forme $A^2(x) + B^2(x)$ (cf. la décomposition de la propriété 3.1).

Il suffit de montrer que

$$c^{(2i)}(A^2(x)) \geq 0.$$

Or

$$A(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j P_j^{(2i)}(x)$$

si A est de degré k .

Du fait de l'orthogonalité des polynômes $P_j^{(2i)}$, on obtient :

$$c^{(2i)}(A^2(x)) = \sum_{j=0}^k \alpha_j^2 c((P_j^{(2i)}(x))^2).$$

Or

$$c((P_j^{(2i)}(x))^2) = \frac{H_{j+1}^{(2i)}}{H_j^{(2i)}} > 0 \text{ si } j < h+1.$$

$$c((P_j^{(2i)}(x))^2) = 0 \text{ si } j \geq h+1.$$

D'où le résultat.

cqfd.

Une conséquence immédiate de cette propriété est que :

$$c_{2i} > 0, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Grâce à la propriété 3.4, le théorème 2.15 du livre de C. Brezinski [6] relatif aux racines des polynômes orthogonaux par rapport à une fonctionnelle linéaire définie positive s'applique aux polynômes orthogonaux de degré strictement inférieur à $h+1$ dans le cas d'une fonctionnelle linéaire semi-définie positive. Montrons qu'il reste vrai pour $k = h+1$.

Théorème 3.2.

Si c est semi-définie positive, alors pour tous les polynômes orthogonaux réguliers on a :

- i) les zéros de P_k sont réels et distincts.
- ii) Les zéros de Q_k sont réels et distincts.
- iii) Deux zéros consécutifs de P_k sont séparés par un zéro de P_{k-1} et réciproquement.
- iv) Deux zéros consécutifs de Q_k sont séparés par un zéro de Q_{k-1} et réciproquement.
- v) Deux zéros consécutifs de P_k sont séparés par un zéro de Q_k et réciproquement.

Démonstration.

Nous donnons la démonstration complémentaire pour $k = h+1$.

- i) Supposons que nous ayons :

$$P_{h+1}(x) = v(x) \prod_{i=1}^n (x-x_i) \text{ avec } n < h+1$$

et où v est un polynôme n'ayant plus que des racines complexes.

v est donc un polynôme positif qui peut être écrit sous la forme :

$$A^2(x) + B^2(x) \text{ avec } \deg A^2 = \deg v, \\ \deg B^2 < \deg v.$$

(cf. la décomposition effectuée dans la démonstration de la propriété 3.1).

v est de degré pair.

On a du fait de l'orthogonalité de P_{h+1}

$$c\left(\prod_{i=1}^n (x-x_i) P_{h+1}(x)\right) = 0$$

Mais :

$$\prod_{i=1}^n (x-x_i) P_{h+1}(x) = \prod_{i=1}^n (x-x_i)^2 (A^2(x) + B^2(x)).$$

On a :

$$\deg\left(\prod_{i=1}^n (x-x_i) A(x)\right) < h+1.$$

De même

$$\deg\left(\prod_{i=1}^n (x-x_i) B(x)\right) < h+1.$$

Donc

$$c\left(\prod_{i=1}^n (x-x_i)^2 A^2(x)\right) > 0$$

et

$$c\left(\prod_{i=1}^n (x-x_i)^2 B^2(x)\right) > 0.$$

D'où une contradiction.

Supposons maintenant que toutes les racines de P_{h+1} ne soient pas distinctes

$$P_{h+1}(x) = (x-x_1)^n u(x) \text{ avec } n > 1.$$

Si n est pair et $n = 2q$.

$$c(u(x) P_{h+1}(x)) = 0$$

Or

$$u(x) P_{h+1}(x) = (u(x))^2 (x-x_1)^{2q}$$

et

$$\deg(u(x)(x-x_1)^q) < h+1.$$

Donc

$$c((u(x))^2(x-x_1)^{2q}) > 0$$

ce qui est impossible.

Si n est impair et $n = 2q+1$ avec $q > 0$.

Alors

$$c(u(x)(x-x_1) P_{h+1}(x)) = 0.$$

Or

$$u(x)(x-x_1) P_{h+1}(x) = (u(x))^2 (x-x_1)^{2q+2}$$

et

$$\deg(u(x)(x-x_1)^{q+1}) < h+1.$$

Donc

$$c((u(x))^2(x-x_1)^{2q+2}) > 0$$

ce qui est impossible.

Le iii) se démontre comme dans le théorème 2.15 du livre de C. Brezinski en utilisant le corollaire 1.12.

Il en est de même pour le ii) et le iv).

Le v) se montre comme dans le e) du théorème 2.15 du livre de C. Brezinski, mais on prend deux zéros consécutifs de $P_{h+1}(x)$ en utilisant la relation

$$P_h(x) Q_{h+1}(x) - Q_h(x) P_{h+1}(x) = A_{h+1} c(P_h^2)$$

et la suite est la même.

cqfd.

Remarque 3.1.

Le théorème 3.1 est applicable à tous les polynômes orthogonaux réguliers par rapport aux fonctionnelles linéaires $c^{(2i)}$.

Les fonctionnelles $c^{(2i)}$ sont également semi-définies positives. Nous avons donc un théorème semblable au théorème 2.32 du livre de C. Brezinski, relatif aux zéros des polynômes orthogonaux réguliers par rapport aux fonctionnelles $c^{(2i)}$, $c^{(2i+1)}$ et $c^{(2i+2)}$.

Théorème 3.3.

Nous considérons les polynômes orthogonaux réguliers $P_k^{(2i)}$, $P_k^{(2i+1)}$ et $P_k^{(2i+2)}$. Nous supposons $H_k^{(2i+1)} \neq 0$.

i) Si $H_{k+1}^{(2i+1)} = 0$, alors :

a) Les zéros de $P_k^{(2i+1)}$ sont identiques à ceux de $P_k^{(2i+2)}$ et sont réels distincts non nuls.

b) Deux zéros consécutifs de $P_k^{(2i+1)}$ sont séparés par un zéro de $P_{k-1}^{(2i+2)}$.

ii) Si $H_{k+1}^{(2i+2)} \neq 0$, alors :

a) Les zéros de $P_k^{(2i+1)}$ sont réels distincts non nuls.

b) Deux zéros consécutifs de $P_k^{(2i+2)}$ sont séparés par un zéro de $P_k^{(2i+1)}$, un zéro de $P_{k-1}^{(2i+1)}$, un zéro de $P_{k+1}^{(2i+1)}$ et un zéro de $P_{k+1}^{(2i+2)}$.

c) Deux zéros consécutifs de $P_k^{(2i+1)}$ sont séparés par un zéro de $P_k^{(2i+2)}$ et un zéro de $P_{k-1}^{(2i+2)}$.

d) Deux zéros consécutifs de même signe de $P_{k+1}^{(2i)}$ (resp. $P_k^{(2i)}$) sont séparés par un zéro de $P_k^{(2i+1)}$.

Si $P_{k+1}^{(2i)}$ (resp. $P_k^{(2i)}$) a des zéros de signes opposés, il n'y a pas de zéro de $P_k^{(2i+1)}$ entre le plus grand zéro négatif et le plus petit zéro positif de $P_{k+1}^{(2i)}$ (resp. $P_k^{(2i)}$). A l'extérieur du plus petit intervalle contenant les zéros de $P_{k+1}^{(2i)}$ (resp. $P_k^{(2i)}$) il y a un zéro de $P_k^{(2i+1)}$ (resp. deux zéros de $P_k^{(2i+1)}$ de part et d'autre de cet intervalle).

Deux zéros consécutifs de même signe de $P_k^{(2i+1)}$ sont séparés par un zéro de $P_{k+1}^{(2i)}$ et un zéro de $P_k^{(2i)}$.

Si $P_k^{(2i+1)}$ possède des zéros de signes opposés, alors il y a deux zéros de signes opposés de $P_k^{(2i)}$ et deux zéros de signes opposés de $P_{k+1}^{(2i)}$ entre le plus grand zéro négatif et le plus petit zéro positif de $P_k^{(2i+1)}$.

e) Deux zéros consécutifs de même signe de $P_{k+1}^{(2i+1)}$ (resp. $P_k^{(2i+1)}$) sont séparés par un zéro de $P_k^{(2i+1)}$ (resp. $P_{k+1}^{(2i+1)}$).

Si $P_{k+1}^{(2i+1)}$ (resp. $P_k^{(2i+1)}$) a des zéros de signes opposés, alors entre le plus grand zéro négatif et le plus petit zéro positif, il n'y a aucun zéro de $P_k^{(2i+1)}$ (resp. il y a deux zéros de $P_{k+1}^{(2i+1)}$ de signes opposés).

Démonstration.

$$P_k^{(2i)}$$

$$P_{k-1}^{(2i+2)} P_k^{(2i+1)} P_{k+1}^{(2i)}$$

$$P_k^{(2i+2)} P_{k+1}^{(2i+1)}$$

Les fonctionnelles $c^{(2i)}$ sont semi-définies positives, $\forall i \in \mathbb{N}$. D'après le théorème 3.1, les zéros de $P_k^{(2i+2)}$ sont réels distincts séparés par ceux de $P_{k-1}^{(2i+2)}$.

i) Si $H_{k+1}^{(2i+1)} = 0$, alors :

$P_k^{(2i+2)}(x) \equiv P_k^{(2i+1)}(x)$ puisqu'ils sont à l'Ouest et au Nord-Ouest du bloc P.

Donc leurs racines sont identiques.

Le théorème 3.1 démontre alors le a) et le b).

ii) Si $H_{k+1}^{(2i+1)} \neq 0$, alors :

a) Prenons deux zéros consécutifs y et z de $P_k^{(2i+2)}$.

Grâce à la relation

$$P_k^{(2i+2)}(x) = P_k^{(2i+1)}(x) - e_k^{(2i+1)} P_{k-1}^{(2i+2)}(x),$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_k^{(2i+1)}(y) = e_k^{(2i+1)} P_{k-1}^{(2i+2)}(y) \\ P_k^{(2i+1)}(z) = e_k^{(2i+1)} P_{k-1}^{(2i+2)}(z) \end{array} \right.$$

Or $P_{k-1}^{(2i+2)}(y) P_{k-1}^{(2i+2)}(z) < 0$ et $e_k^{(2i+1)} \neq 0$

Par conséquent $P_k^{(2i+1)}$ a un zéro réel entre y et z , soit au total $(k-1)$ zéros réels séparant les k zéros de $P_k^{(2i+2)}$. Le dernier zéro de $P_k^{(2i+1)}$ est donc réel et ne peut être qu'extérieur au plus petit intervalle contenant toutes les racines de $P_k^{(2i+2)}$.

Donc les zéros de $P_k^{(2i+1)}$ sont réels distincts non nuls puisque $P_k^{(2i+1)}$ n'est pas au Nord d'un bloc P .

b) Nous venons de montrer que deux zéros consécutifs y et z de $P_k^{(2i+2)}$ sont séparés par un zéro de $P_k^{(2i+1)}$. Nous savons également qu'entre y et z il y a un zéro de $P_{k+1}^{(2i+2)}$ et un zéro de $P_{k-1}^{(2i+2)}$.

En utilisant la relation :

$$P_{k+1}^{(2i+2)}(x) = P_{k+1}^{(2i+1)}(x) - e_{k+1}^{(2i+1)} P_k^{(2i+2)}(x),$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{k+1}^{(2i+2)}(y) = P_{k+1}^{(2i+1)}(y) \\ P_{k+1}^{(2i+2)}(z) = P_{k+1}^{(2i+1)}(z) \end{array} \right.$$

Or

$$P_{k+1}^{(2i+2)}(y) P_{k+1}^{(2i+2)}(z) < 0.$$

Donc y et z sont également séparés par un zéro de $P_{k+1}^{(2i+1)}$.

c) On déduit du ii) a) que deux zéros consécutifs de $P_k^{(2i+1)}$ sont séparés par un zéro de $P_k^{(2i+2)}$.

Prenons deux zéros consécutifs y et z de $P_k^{(2i+1)}$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_k^{(2i+2)}(y) = - e_k^{(2i+1)} P_{k-1}^{(2i+2)}(y) \\ P_k^{(2i+2)}(z) = - e_k^{(2i+1)} P_{k-1}^{(2i+2)}(z) \end{array} \right.$$

Or

$$P_k^{(2i+2)}(y) P_k^{(2i+2)}(z) < 0.$$

Donc un zéro de $P_{k-1}^{(2i+2)}$ sépare y et z.

d) 1. Prenons deux zéros consécutifs y et z de même signe de $P_{k+1}^{(2i)}$. Alors la relation :

$$x P_k^{(2i+1)}(x) = P_{k+1}^{(2i)}(x) + q_{k+1}^{(2i)} P_k^{(2i)}(x),$$

où $q_{k+1}^{(2i)}$ est différent de zéro, nous montre que, puisque y et z sont séparés par un zéro de $P_k^{(2i)}$, ils sont également séparés par un zéro de $P_k^{(2i+1)}$.

S'il existe des zéros de $P_{k+1}^{(2i)}$ de signes opposés, on prend deux zéros consécutifs y et z tels que $y < 0 < z$.

Alors

$$P_k^{(2i+1)}(y) P_k^{(2i+1)}(z) > 0.$$

Il y a donc un nombre pair de zéros de $P_k^{(2i+1)}$ entre y et z .

En fait il n'y en a aucun puisqu'on a déjà placé $(k-1)$ zéros de $P_k^{(2i+1)}$ entre les zéros de même signe de $P_{k+1}^{(2i)}$.

$P_k^{(2i+1)}$ a donc un zéro à l'extérieur du plus petit intervalle contenant les zéros de $P_{k+1}^{(2i)}$.

2. Cette première partie montre que si on prend deux zéros consécutifs de même signe de $P_k^{(2i+1)}$ ils sont séparés par un zéro de $P_{k+1}^{(2i)}$, donc aussi par un zéro de $P_k^{(2i)}$.

Si $P_k^{(2i+1)}$ possède des zéros de signes opposés alors on prend deux zéros consécutifs y et z tels que $y < 0 < z$.

On a placé $(k-2)$ zéros de $P_{k+1}^{(2i)}$. Les trois zéros restant à placer ne sont pas de même signe, sinon on aurait au moins deux zéros consécutifs séparés par un zéro de $P_k^{(2i+1)}$. Deux zéros ne peuvent pas être consécutifs de même signe pour la même raison. Il ne peut pas y avoir un seul zéro de $P_{k+1}^{(2i)}$ entre y et z à cause de la première partie de d.

Donc il y a deux zéros de $P_{k+1}^{(2i)}$ de signes opposés entre y et z .

Alors

$$P_{k+1}^{(2i)}(y) P_{k+1}^{(2i)}(z) > 0$$

et également

$$P_k^{(2i)}(y) P_k^{(2i)}(z) > 0.$$

Par conséquent il y a un nombre pair de zéros de $P_k^{(2i)}$ entre y et z .
 Puisqu'on a déjà placé $(k-2)$ zéros de $P_k^{(2i)}$ entre les zéros de même signe de $P_k^{(2i+1)}$ il y a ou deux zéros de $P_k^{(2i)}$ ou aucun entre y et z .
 Mais entre deux zéros de $P_{k+1}^{(2i)}$ se trouve un zéro de $P_k^{(2i)}$. Or entre y et z il y a deux zéros de $P_{k+1}^{(2i)}$. Nous en déduisons qu'entre y et z il y a aussi deux zéros de $P_k^{(2i)}$. Ils ne peuvent être de même signe sinon un zéro de $P_k^{(2i+1)}$ les sépareraient.

3. On déduit donc de ce qui vient d'être vu ci-dessus que deux zéros consécutifs de même signe de $P_k^{(2i)}$ sont séparés par un zéro de $P_k^{(2i+1)}$. S'il existe des zéros de $P_k^{(2i)}$ de signes opposés et si y et z sont deux zéros consécutifs tels que $y < 0 < z$, il n'y a aucun zéro de $P_k^{(2i+1)}$ entre y et z . En effet si cela était vrai, on aurait deux zéros de $P_k^{(2i+1)}$ entre y et z qui ne pourraient qu'être de signes opposés sinon ils seraient séparés par un zéro de $P_k^{(2i)}$. Or comme y et z sont séparés par un zéro de $P_{k+1}^{(2i)}$, on aurait un zéro de $P_k^{(2i+1)}$ entre le plus grand zéro négatif et le plus petit zéro positif de $P_{k+1}^{(2i)}$, ce qui est contraire au d) 1. .
 Il reste donc deux zéros réels à placer à l'extérieur du plus petit intervalle contenant les racines de $P_k^{(2i)}$. Ils sont donc de part et d'autre de cet intervalle, sinon ils constitueraient deux zéros consécutifs séparés par un zéro de $P_k^{(2i)}$.

e) Considérons la relation :

$$xP_k^{(2i+2)}(x) = P_{k+1}^{(2i+1)}(x) + q_{k+1}^{(2i+1)} P_k^{(2i+1)}(x)$$

où $q_{k+1}^{(2i+1)}$ est différent de zéro.

On prend deux zéros consécutifs de même signe de $P_{k+1}^{(2i+1)}$.

Ils sont séparés par un zéro de $P_k^{(2i+2)}$, donc également par un zéro de $P_k^{(2i+1)}$.

S'il existe des zéros de signes opposés pour $P_{k+1}^{(2i+1)}$ on prend deux zéros consécutifs y et z tels que $y < 0 < z$.

Alors

$$P_k^{(2i+2)}(y) P_k^{(2i+2)}(z) < 0$$

et

$$P_k^{(2i+1)}(y) P_k^{(2i+1)}(z) > 0.$$

Par un raisonnement analogue au ii) d) 1. on montre qu'aucun zéro de $P_k^{(2i+1)}$ sépare y et z , et que le dernier zéro réel de $P_k^{(2i+1)}$ est extérieur au plus petit intervalle contenant les zéros de $P_{k+1}^{(2i+1)}$.

La démonstration concernant les propriétés des zéros de $P_k^{(2i+1)}$ est identique à celle du ii) d) 2. .

cgfd.

Soit c une fonctionnelle définie positive.

On considère la table H liée aux fonctionnelles $c^{(i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Corollaire 3.2.

La table H ne peut contenir que des blocs H d'un élément qui est un déterminant $H^{(2i+1)}$ pour $i \geq 0$.

Remarque 3.2.

Le théorème 3.3 s'applique au cas d'une fonctionnelle c définie positive.

3.2 FONCTIONNELLES $H^{(i)}$ SEMI-DEFINIES POSITIVES

Définition 3.3.

On appelle fonctionnelle linéaire $H^{(i)}$ semi-définie positive une fonctionnelle linéaire $c^{(i)}$ telle que :

$$H_j^{(i)} > 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, p_{\ell+1} \leq j \leq h_{\ell+1}+1,$$

$$H_j^{(i)} = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, h_{\ell+1}+2 \leq j \leq p_{\ell+1},$$

où l'indice $\ell \in \mathbb{N}$ numérote les blocs H successifs.

Une diagonale i correspondant à une fonctionnelle $c^{(i)}$ linéaire $H^{(i)}$ semi-définie positive ne peut pas traverser des blocs H sur une longueur quelconque. Nous avons le résultat négatif suivant :

Propriété 3.7.

Il n'existe pas de fonctionnelle $c^{(i)}$ linéaire $H^{(i)}$ semi-définie positive qui soit telle que pour au moins le $l^{\text{ème}}$ bloc avec $l > 0$ on ait :

$$p_{\ell} - h_{\ell} = \text{multiple de } 2 \text{ de la forme } 2(2n+1).$$

Démonstration.

Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}$, tel que $p_{\ell} - h_{\ell} = 2(2n+1)$.

On a :

$$H_{p_{\ell}+1}^{(i)} = \begin{vmatrix} c_i & \dots & c_{h_{\ell}+i} & \dots & c_{p_{\ell}+i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{h_{\ell}+i} & \dots & \dots & \dots & c_{p_{\ell}+h_{\ell}+i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{p_{\ell}+i} & \dots & \dots & \dots & c_{2p_{\ell}+i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_i & \dots & c_{h_{\ell}+i} & \dots & c_{p_{\ell}+i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{h_{\ell}+i} & \dots & c_{2h_{\ell}+i} & \dots & c_{p_{\ell}+h_{\ell}+i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & u \\ & & & u & \vdots \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \frac{(p_{\ell}-h_{\ell})(p_{\ell}+3h_{\ell}+3)}{2} u^{p_{\ell}-h_{\ell}} H_{h_{\ell}+1}^{(i)}$$

Nous avons $H_{h_{\ell}+1}^{(i)} > 0$ et $u^{p_{\ell}-h_{\ell}} > 0$.

Or

$$(-1) \frac{(p_{\ell}-h_{\ell})(p_{\ell}+3h_{\ell}+3)}{2} = (-1) \frac{(p_{\ell}-h_{\ell})(p_{\ell}-h_{\ell}-1)}{2} < 0.$$

On aurait donc $H_{p_{\ell}+1}^{(i)} < 0$, ce qui est impossible.

cqfd.

Nous introduisons maintenant un cas particulier de ces fonctionnelles linéaires $H^{(i)}$ semi-définies positives. Nous verrons par la suite que cette fonctionnelle a des moments qui possèdent une propriété remarquable.

Définition 3.4.

On appelle fonctionnelle linéaire totalement H semi-définie positive une fonctionnelle linéaire c telle que toute fonctionnelle linéaire $c^{(i)}$ soit $H^{(i)}$ semi-définie positive, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Propriété 3.8.

Il n'existe pas de fonctionnelle linéaire c totalement H semi-définie positive à blocs H finis.

Démonstration.

Pour un bloc H fini il existe des fonctionnelles $c^{(i)}$ telles que $p_\ell - h_\ell = 2(2n+1)$.
D'où la conclusion.

cqfd.

On ne peut donc avoir qu'un bloc H infini.

Propriété 3.9.

Une fonctionnelle c linéaire totalement H semi-définie positive a un seul bloc H qui est un bloc infini ayant au plus un élément sur le côté Nord dans la table H.

Démonstration.

Elle est identique au iii) de la propriété 3.3.

cqfd.

La propriété qui suit va nous permettre aussitôt après de relier les suites totalement monotones aux moments des fonctionnelles linéaires totalement H semi-définies positives.

Propriété 3.10.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonctionnelle c soit totalement H semi-définie positive est que les fonctionnelles c et $c^{(1)}$ soient semi-définies positives.

Démonstration.

Si la fonctionnelle linéaire c est totalement H semi-définie positive, alors on a un bloc H infini et en dehors de ce bloc tous les déterminants $H_k^{(i)}$ sont strictement positifs, $\forall k$ et $i \in \mathbb{N}$. Si les fonctionnelles c et $c^{(1)}$ sont semi-définies positives, il ne peut y avoir de bloc H d'un élément. D'autre part, on a le même bloc H infini pour les deux fonctionnelles puisque la table H est unique. On a donc bien équivalence entre les deux notions.

cgfd.

Définition 3.5.

Une suite $\{c_n\}$ est dite totalement monotone (noté T.M) si :

$$(-1)^k \Delta^k c_n \geq 0 \quad \forall n \text{ et } k \in \mathbb{N}.$$

Propriété 3.11. [6]

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\{c_n\}$ soit T.M est que :

$$H_k^{(0)} \geq 0 \text{ et } H_k^{(1)} \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Propriété 3.12. [6]

Si c_0, c_1, \dots est une suite T.M, alors c_n, c_{n+1}, \dots est aussi une suite T.M, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nous pouvons déduire immédiatement des trois propriétés 3.10, 3.11 et 3.12 la propriété suivante.

Propriété 3.13.

Les moments d'une fonctionnelle c totalement H semi-définie positive forment une suite T.M.

On trouvera dans les ouvrages de C. Brezinski [6] et J. Gilewicz [22] de nombreuses propriétés de ces suites T.M.

Nous passons maintenant aux propriétés des zéros.

Théorème 3.4.

Si la fonctionnelle linéaire c est totalement H semi-définie positive, alors les zéros de tous les polynômes $P_k^{(i)}$ orthogonaux réguliers sont réels distincts et positifs.

Deux zéros consécutifs de $P_k^{(i)}$ sont séparés par un zéro de $P_{k-1}^{(i)}$, un zéro de $P_{k-1}^{(i+1)}$, un zéro de $P_k^{(i-1)}$, un zéro de $P_k^{(i+1)}$, un zéro de $P_{k+1}^{(i-1)}$ et un zéro de $P_{k+1}^{(i)}$, si les polynômes cités sont orthogonaux réguliers.

Démonstration.

Puisque les fonctionnelles c et $c^{(1)}$ sont semi-définies positives le théorème 3.3 s'applique à chacune d'elle.

Donc les racines des polynômes orthogonaux réguliers $P_k^{(i)}$ sont réelles distinctes.

De plus, les b) et c) du théorème 3.3 appliqué à $P_k^{(i)}$ montre la propriété de séparation.

Montrons que toutes les racines sont positives.

S'il y avait des zéros de signes opposés pour $P_k^{(i)}$, en prenant deux zéros consécutifs y et z tels que $y < 0 < z$ et en utilisant la relation

$$xP_k^{(i+1)}(x) = P_{k+1}^{(i)}(x) + q_{k+1}^{(i)} P_k^{(i)}(x)$$

On obtiendrait :

$$P_{k+1}^{(i)}(y) P_{k+1}^{(i)}(z) < 0$$

et donc

$$P_k^{(i+1)}(y) P_k^{(i+1)}(z) > 0$$

ce qui est impossible d'après la propriété de séparation.

Toujours à cause de la propriété de séparation les zéros de tous les polynômes sont tous du même signe. Il suffit donc de connaître le signe de la racine des polynômes $P_1^{(i)}$.

$$P_1^{(i)}(x) = c_i x - c_{i+1}.$$

Or $H_1^{(i)}$ est positif et vaut c_i , $\forall i \in \mathbb{N}$.

Donc la racine de $P_1^{(i)}$ est positive.

cqfd.

Revenons aux fonctionnelles $c^{(i)}$ linéaires $H^{(i)}$ semi-définies positives.

Supposons que l'on ait :

$$H_k^{(i)} > 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq k+1 \text{ et } H_{h+2}^{(i)} = 0.$$

Propriété 3.14.

Si $c^{(i)}$ est une fonctionnelle linéaire $H^{(i)}$ semi-définie positive, alors pour tout polynôme $p(x)$ de degré k inférieur ou égal à $h+1$,

$$c^{(i)}(p^2) \geq 0.$$

$c^{(i)}(p^2) = 0$ si et seulement si p est un multiple de $P_{h+1}^{(i)}$.

Démonstration.

$$p(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j P_j^{(i)}(x).$$

Alors

$$c(p^2) = \sum_{j=0}^k \alpha_j^2 c((P_j^{(i)}(x))^2).$$

Or

$$c((P_j^{(i)}(x))^2) = \frac{H_{j+1}^{(i)}}{H_j^{(i)}} \geq 0.$$

Donc

$$c(p^2) \geq 0.$$

La propriété 3.4 démontre la condition nécessaire et suffisante pour avoir $c(p^2) = 0$.

cgfd.

Remarque 3.3.

Le théorème 3.2 s'applique aux fonctionnelles $H^{(i)}$ semi-définies positives pour les polynômes orthogonaux réguliers de degré inférieur ou égal à $h+1$.

Corollaire 3.3.

Si c est une fonctionnelle $H^{(0)}$ semi-définie positive, alors :

$$H_{m-i}^{(2i)} > 0 \begin{cases} \forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq h+1 \\ \forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Démonstration.

$c(p^2) > 0$ quel que soit le polynôme p de degré k inférieur ou égal à $h+1$ et non multiple de $P_{h+1}^{(0)}$.

Donc la matrice $D_{h+1}^{(0)} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_h \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{h+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_h & c_{h+1} & \dots & c_{2h} \end{pmatrix}$ est définie positive.

cqfd.

Considérons une fonctionnelle $c^{(i)}$ linéaire $H^{(i)}$ semi-définie positive pour $i \in \mathbb{N}, i \geq 1$.

Supposons que $H_k^{(i)} > 0$ pour $0 \leq k \leq h+1$ et $H_{h+2}^{(i)} = 0$.

Théorème 3.5.

Nous supposons que $H_n^{(i-1)} \neq 0$ avec $0 \leq n \leq h$.

i) Si $H_{n+1}^{(i-1)} = 0$, alors :

a) Les zéros de $P_n^{(i-1)}$ sont identiques à ceux de $P_n^{(i)}$ et sont réels distincts non nuls.

b) Deux zéros consécutifs de $P_n^{(i-1)}$ sont séparés par un zéro de $P_{n-1}^{(i)}$.

ii) Si $H_{n+1}^{(i-1)} \neq 0$, alors :

a) Les zéros de $P_n^{(i-1)}$ sont réels distincts non nuls.

b) Deux zéros consécutifs de $P_n^{(i)}$ sont séparés par un zéro de $P_{n-1}^{(i)}$, un zéro de $P_{n+1}^{(i)}$, un zéro de $P_n^{(i-1)}$ et un zéro de $P_{n+1}^{(i-1)}$.

c) Deux zéros consécutifs de $P_n^{(i-1)}$ sont séparés par un zéro de $P_{n-1}^{(i)}$ et un zéro de $P_n^{(i)}$.

d) Deux zéros consécutifs de même signe de $P_{n+1}^{(i-1)}$ (resp. $P_n^{(i-1)}$) sont séparés par un zéro de $P_n^{(i-1)}$ (resp. $P_{n+1}^{(i-1)}$).

Si $P_{n+1}^{(i-1)}$ (resp. $P_n^{(i-1)}$) a des zéros de signes opposés, alors entre le plus grand zéro négatif et le plus petit zéro positif il n'y a aucun zéro de $P_n^{(i-1)}$ (resp. il y a deux zéros de signes opposés de $P_{n+1}^{(i-1)}$).

iii) Si $H_n^{(i+1)} = 0$, alors :

Les zéros de $P_{n-1}^{(i+1)}$ sont identiques à ceux de $P_n^{(i)}$, sauf la racine zéro, et sont réels distincts.

iv) Si $H_n^{(i+1)} \neq 0$ et $H_{n-1}^{(i+1)} \neq 0$, alors :

a) Deux zéros consécutifs de même signe de $P_n^{(i)}$ (resp. $P_{n-1}^{(i)}$) sont séparés par un zéro de $P_{n-1}^{(i+1)}$.

Si $P_n^{(i)}$ (resp. $P_{n-1}^{(i)}$) a des zéros de signes opposés, il n'y a pas de zéro de $P_{n+1}^{(i+1)}$ entre le plus grand zéro négatif et le plus petit zéro positif de $P_n^{(i)}$ (resp. $P_{n-1}^{(i)}$).

Deux zéros consécutifs de même signe de $P_{n-1}^{(i+1)}$ sont séparés par un zéro de $P_n^{(i)}$ et un zéro de $P_{n-1}^{(i)}$.

Si $P_{n-1}^{(i+1)}$ possède des zéros de signes opposés, alors il y a deux zéros de signes opposés de $P_n^{(i)}$ et deux zéros de signes opposés de $P_{n-1}^{(i)}$ entre le plus grand zéro négatif et le plus petit zéro positif de $P_{n-1}^{(i+1)}$.

b) Deux zéros consécutifs de même signe de $P_n^{(i+1)}$ (resp. $P_{n-1}^{(i+1)}$) sont séparés par un zéro de $P_{n-1}^{(i+1)}$ (resp. $P_n^{(i+1)}$).

Si $P_n^{(i+1)}$ (resp. $P_{n-1}^{(i+1)}$) possède des zéros de signes opposés, entre le plus grand zéro négatif et le plus petit zéro positif de $P_n^{(i+1)}$ (resp. $P_{n-1}^{(i+1)}$) il n'y a aucun zéro de $P_{n-1}^{(i+1)}$ (resp. il y a deux zéros de signes opposés de $P_n^{(i+1)}$).

Démonstration.

$$P_{n-1}^{(i)} \quad P_n^{(i-1)}$$

$$P_{n-1}^{(i+1)} \quad P_n^{(i)} \quad P_{n+1}^{(i-1)}$$

$$P_n^{(i+1)} \quad P_{n+1}^{(i)}$$

Les démonstrations des i) a et b, ii), a), b), c) et d) sont totalement identiques à celles du théorème 3.3.

iii) Si $H_n^{(i+1)} = 0$ alors

$$x \cdot P_{n-1}^{(i+1)}(x) = P_n^{(i)}(x),$$

d'où la propriété.

iv)

a) La démonstration est identique au théorème 3.3 ii) d).

On se rappellera que si $H_n^{(i)} > 0$ alors $H_{n-1}^{(i+2)} > 0$ (cf. le corollaire 3.3).

b) Nous avons la relation :

$$P_n^{(i+1)}(x) = P_n^{(i)}(x) - e_n^{(i)} P_{n-1}^{(i+1)}(x) \text{ avec } e_n^{(i)} \neq 0.$$

Deux zéros consécutifs de même signe de $P_n^{(i+1)}$ sont séparés par un zéro de $P_n^{(i)}$ donc aussi par un zéro de $P_{n-1}^{(i+1)}$.

Si $P_n^{(i+1)}$ a des zéros de signes opposés on prend deux zéros consécutifs y et z tels que $y < 0 < z$. Entre y et z il y a deux zéros de signes opposés de $P_n^{(i)}$.

Donc

$$P_n^{(i)}(y) P_n^{(i)}(z) > 0$$

et aussi

$$P_{n-1}^{(i+1)}(y) P_{n-1}^{(i+1)}(z) > 0.$$

Comme on a déjà placé $(n-2)$ zéros de $P_{n-1}^{(i+1)}$ le dernier zéro ne sépare donc pas y et z .

Tout ceci montre également que deux zéros consécutifs de même signe de $P_{n-1}^{(i+1)}$ sont séparés par un zéro de $P_n^{(i+1)}$.

Si $P_{n-1}^{(i+1)}$ a des zéros de signes opposés, on a placé $(n-3)$ zéros de $P_n^{(i+1)}$ entre les zéros de même signe de $P_{n-1}^{(i+1)}$.

Comme dans le théorème 3.3 on déduit qu'entre y et z il y a deux zéros de signes opposés de $P_n^{(i+1)}$.

cqfd.

On suppose en outre que :

$$H_k^{(i)} = 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}, h+2 \leq k \leq p,$$

$$H_{p+1}^{(i)} \neq 0.$$

Théorème 3.6.

Deux zéros consécutifs de $P_{h+1}^{(i)}$ sont séparés par un zéro de $P_{p+1}^{(i)}$. $P_{p+1}^{(i)}$ a au moins h zéros réels distincts.

Démonstration.

$$P_{p+1}^{(i)}(x) = (x\omega_{p-h-1}^{(i)}(x) + B_{p+1}^{(i)}) P_{h+1}^{(i)}(x) + C_{p+1}^{(i)} P_h^{(i)}(x)$$

On prend deux zéros consécutifs y et z de $P_{h+1}^{(i)}$.

Nous avons alors

$$P_h^{(i)}(y) P_h^{(i)}(z) < 0$$

et aussi

$$P_{p+1}^{(i)}(y) P_{p+1}^{(i)}(z) < 0$$

D'où le résultat.

cqfd.

Conséquence du théorème 3.5.

$H_n^{(i+1)}$ ne peut appartenir à un bloc H de largeur supérieure ou égale à 2 sinon $P_n^{(i)}$ aurait la racine 0 multiple.

Si $P_{h+1}^{(i)}$ est au nord d'un bloc P il occupe la position la plus à gauche, sinon 0 serait racine multiple.

3.3 FONCTIONNELLES LINEAIRES LACUNAIRES D'ORDRE $s+1$.

H. Van Rossum, ayant repris divers résultats de Kurt Endl de 1956 présente dans son article [49] les polynômes orthogonaux lacunaires.

J. Gilewicz [22] démontre diverses propriétés des séries lacunaires.

C. Brezinski [6] donne des résultats dans le cas particulier où $s=1$ et pour une diagonale paire.

Nous généralisons l'ensemble de tous ces résultats en prenant tout d'abord comme définition des fonctionnelles linéaires lacunaires d'ordre $s+1$.

Définition 3.6.

On appelle fonctionnelle linéaire lacunaire d'ordre $s+1$ une fonctionnelle linéaire $c^{(r)}$ telle que $c_{i+tr} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $r+i \neq 0 \pmod{s+1}$.

Nous définissons des fonctionnelles linéaires $u^{(n)}$ telles que

$$u^{(n)}(x^i) = u_{n+i} = c_{(n+i)(s+1)}.$$

Définition 3.7.

Nous dirons qu'une fonctionnelle linéaire $c^{(n(s+1)+j+1)}$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq s$, lacunaire d'ordre $s+1$ est u -définie (resp. u -définie positive, u -semi-définie positive) si les deux fonctionnelles $u^{(n+1)}$ et $u^{(n+2)}$ sont définies (resp. définies positives, semi-définies positives).

On prêtera attention au fait qu'une fonctionnelle linéaire lacunaire u -définie n'est jamais définie sauf dans le cas où $s = 0$ ou dans le cas où $s = 1$ et $j = 1$.

Soient $U_k^{(n)}$ les polynômes unitaires orthogonaux ou quasi-orthogonaux par rapport à $u^{(n)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Nous appellerons table U la table à double entrée dans laquelle sont rangés les polynômes U .

Le théorème 3.7 permet de définir la structure de la table P .

Théorème 3.7.

Si le polynôme $U_k^{(n+1)}$ est orthogonal régulier et est au Nord-Ouest d'un bloc de largeur a dans la table U , alors dans la table P correspondant aux fonctionnelles c nous avons un bloc P de largeur $(a+1)(s+1)-1$ dont l'angle Nord-Ouest est occupé par le polynôme orthogonal régulier par rapport à $c^{(n(s+1)+1)}$:

$$P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}(x) \equiv U_k^{(n+1)}(x^{s+1}).$$

Démonstration.

Si le théorème est vrai nous avons donc sur les côtés Nord, Nord-Ouest et Ouest du bloc, ainsi que dans le bloc les polynômes suivants.

$$P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1+j)}(x) = w_i^{(n(s+1)+1+j)}(x) U_k^{(n+1)}(x^{s+1})$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq (a+1)(s+1)-1$ et $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq (a+1)(s+1)-1-j$.

$$P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-j)}(x) = x^j w_{i-j}^{(n(s+1)+1-j)}(x) U_k^{(n+1)}(x^{s+1})$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq (a+1)(s+1)-1$ et $i \in \mathbb{N}$, $j \leq i \leq (a+1)(s+1)-1$,

où $w_i^{(n(s+1)+1+j)}$ et $w_{i-j}^{(n(s+1)+1-j)}$ sont des polynômes arbitraires de degré i et $i-j$ respectivement.

Pour démontrer le théorème il suffit de montrer que

$$c^{(n(s+1)+1+j)}(x^\ell P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1+j)}(x)) = 0$$

pour $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell \leq (a+k+1)(s+1)-2-i-j$,

$$c^{(n(s+1)+1+j)}(x^\ell P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1+j)}(x)) \neq 0$$

pour $\ell = (a+k+1)(s+1)-1-i-j$,

et également

$$c^{(n(s+1)+1-j)}(x^\ell P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-j)}(x)) = 0$$

pour $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell \leq (a+k+1)(s+1)-2-i+j$,

$$c^{(n(s+1)+1-j)}(x^\ell P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-j)}(x)) \neq 0$$

pour $\ell = (a+k+1)(s+1)-1-i+j$.

Or $U_k^{(n+1)}$ est au Nord-Ouest d'un bloc de largeur a .

Donc

$$u^{(n+1)}(x^q U_k^{(n+1)}(x)) = 0$$

pour $q \in \mathbb{N}$, $0 \leq q \leq k+a-1$,

$$u^{(n+1)}_{(x^q)} U_k^{(n+1)}(x) \neq 0$$

pour $q = kta$.

En changeant x en x^{s+1} et $u^{(n+1)}$ en $c^{((n+1)(s+1))}$ on obtient :

$$c^{((n+1)(s+1))}_{(x^{q(s+1)})} U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) = 0$$

pour $q \in \mathbb{N}$, $0 \leq q \leq kta-1$,

$$c^{((n+1)(s+1))}_{(x^{q(s+1)})} U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) \neq 0$$

pour $q = kta$.

Puisque $c_i = 0$ pour $i \not\equiv 0 \pmod{s+1}$ nous avons également :

$$c^{((n+1)(s+1))}_{(x^{q(s+1)+\delta})} U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) = 0$$

pour $q \in \mathbb{N}$, $0 \leq q \leq kta-1$ et $\delta \in \mathbb{N}$, $0 \leq \delta \leq s$.

Par conséquent :

$$c^{((n+1)(s+1))}_{(x^{\ell'})} U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) = 0$$

pour $\ell' \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell' \leq (kta)(s+1)-1$

$$c^{((n+1)(s+1))}_{(x^{\ell'})} U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) \neq 0$$

pour $\ell' = (kta)(s+1)$.

Or

$$A = c_{(n(s+1)+1+j)}^{(n(s+1)+1+j)}(x) w_i^{(n(s+1)+1+j)}(x) U_k^{(n+1)}(x^{s+1})$$

est une combinaison linéaire d'expressions du type :

$$B = c_{(n(s+1)+1+j)}^{(n(s+1)+1+j)}(x) U_k^{(n+1)}(x^{s+1})$$

avec $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq i$.

Si $0 \leq j+l+r \leq s-1$,

$B = 0$ puisque seuls interviennent des c_i pour $i \not\equiv 0 \pmod{s+1}$.

Si $j+l+r \geq s$, alors

$$B = c_{((n+1)(s+1))}^{((n+1)(s+1))}(x) U_k^{(n+1)}(x^{s+1}).$$

Donc

$$B = 0$$

pour $0 \leq j+l+r-s \leq (k+q)(s+1)-1$, soit $s-r-j \leq l \leq (k+a+1)(s+1)-2-r-j$.

D'où en tenant compte du fait que $0 \leq r \leq i$ et que $A = 0$ pour

$0 \leq j+l+r \leq s-1$, nous avons :

$$A = 0$$

pour $0 \leq l \leq (k+a+1)(s+1)-2-i-j$.

D'autre part

$$A \neq 0$$

pour $l+j-s+i = (k+a)(s+1)$, soit $l = (k+a+1)(s+1)-1-i-j$.

De la même façon on démontrerait les deux relations pour $P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-j)}$.

cqfd.

Corollaire 3.4.

A tout polynôme orthogonal régulier $U_k^{(n+1)}$ correspond dans la table P un polynôme orthogonal régulier $P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}$ tel que :

$$P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}(x) \equiv U_k^{(n+1)}(x^{s+1}).$$

Démonstration.

i) Si $U_k^{(n+1)}$ est au Nord-Ouest d'un bloc U nous avons directement le résultat du théorème 3.7.

ii) Si $U_k^{(n+1)}$ est au Nord d'un bloc U, alors :

$$U_k^{(n+1)}(x) = x^j U_{k-j}^{(n+1+j)}(x) \text{ avec } U_{k-j}^{(n+1-j)}(0) \neq 0.$$

Alors le théorème 3.7 démontre que $P_{(k-j)(s+1)}^{((n+j)(s+1)+1)}$ est au Nord-Ouest d'un bloc P de largeur $(j+1)(s+1)-1$ au moins et le polynôme $P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}$ est au nord de ce bloc P et vaut donc :

$$x^{j(s+1)} P_{(k-j)(s+1)}^{((n+j)(s+1)+1)}(x)$$

qui est identique à

$$x^{j(s+1)} U_{k-j}^{(n+1+j)}(x^{s+1}),$$

c'est à dire à $U_k^{(n+1)}(x^{s+1})$.

iii) Si $U_k^{(n+1)}$ est à l'Ouest d'un bloc U, alors :

$$U_k^{(n+1)}(x) = U_k^{(n+1-j)}(x)$$

où $U_k^{(n+1-j)}$ est au Nord-Ouest du bloc U.

Le théorème 3.7 démontre encore que $P_{k(s+1)}^{((n-j)(s+1)+1)}$ est au Nord-Ouest d'un bloc P de largeur $(j+1)(s+1)-1$ au moins et le polynôme $P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}$ est à l'Ouest de ce bloc P et est identique à $P_{k(s+1)}^{((n-j)(s+1)+1)}$, qui est lui-même identique à $U_k^{(n+1-j)}(x^{s+1})$, c'est à dire à $U_k^{(n+1)}(x^{s+1})$.

cqfd.

Remarque 3.4.

Considérons le polynôme orthogonal régulier $U_k^{(n+1)}$ au Nord-Ouest d'un bloc U, ainsi que le polynôme $U_{su(k,n+1)}^{(n+1)}$.

Nous obtiendrons un bloc de largeur $(su(k,n+1)-k)(s+1)-1$ dans la table P au Nord-Ouest duquel nous avons le polynôme :

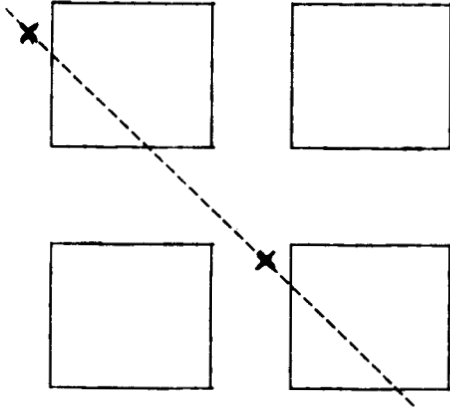
$$P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}(x) \equiv U_k^{(n+1)}(x^{s+1}).$$

D'après le corollaire 3.4, à $U_{su(k,n+1)}^{(n+1)}$ correspond le polynôme orthogonal régulier :

$$P_{su(k,n+1)(s+1)}^{(n(s+1)+1)}(x) = U_{su(k,n+1)}^{(n+1)}(x^{s+1}).$$

$U_k^{(n+1)}$ et $U_{su(k,n+1)}^{(n+1)}$ n'ont aucun zéro en commun, donc également $P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}$ et $P_{(s+1)su(k,n+1)}^{(n(s+1)+1)}$.

Nous pouvons en déduire que les deux polynômes sur une même diagonale, qui sont sur les côtés Nord, Nord-Ouest et Ouest des blocs correspondants n'ont aucune racine non nulle en commun.



Ainsi les deux polynômes repérés par une croix n'ont aucune racine non nulle commune.

Remarque 3.5.

Nous pouvons déduire simplement la relation de récurrence satisfaite par les polynômes $P^{(n(s+1)+1)}$ de celle satisfaite par les polynômes $U^{(n+1)}$.

En effet nous avons :

$$U_k^{(n+1)}(x) = (x^{\omega_{k-1-\text{pr}(k,n+1)}^{(n+1)}}(x) + B_k^{(n+1)} U_{\text{pr}(k,n+1)}^{(n+1)}(x) + C_k^{(n+1)} U_{\text{pr}(\text{pr}(k,n+1),n+1)}^{(n+1)}(x))$$

Si on change x en x^{s+1} et si on passe aux polynômes $P^{(n(s+1)+1)}$ on obtient :

$$P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}(x) = (x^{s+1 \omega_{k-1-\text{pr}(k,n+1)}^{(n+1)}}(x^{s+1}) + B_k^{(n+1)} P_{\text{pr}(k,n+1)}^{(n(s+1)+1)}(x) + C_k^{(n+1)} P_{\text{pr}(\text{pr}(k,n+1),n+1)}^{(n(s+1)+1)}(x)).$$

Sur les autres diagonales de la table P il n'y a pas de lien direct avec la relation satisfaite par les polynômes U .

La table H peut avoir une structure périodique dans le cas suivant.

Corollaire 3.5.

Si la fonctionnelle $c^{(l)}$ lacunaire d'ordre $s+1$ est u -définie, $\forall l \in \mathbb{N}$, alors la table H est composée de blocs H de largeur s séparés par une rangée de déterminants non nuls, c'est à dire tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq s,$$

nous ayons :

$$H_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1+j)} \neq 0, H_{k(s+1)+j}^{(n(s+1)+1-j)} \neq 0.$$

$$H_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1+j)} = 0$$

pour $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq s-j,$

$$H_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-j)} = 0$$

pour $i \in \mathbb{N}, j+1 \leq i \leq s.$

Nous passons maintenant aux divers polynômes associés.

Soit $v_k^{(n+1)}(t)$ le polynôme associé à $U_k^{(n+1)}(x)$.

On suppose que $U_k^{(n+1)}$ est au Nord-Ouest d'un bloc de largeur a .

Posons $j = d(s+1)+e$ avec $d \in \mathbb{N}, 0 \leq d \leq a,$ et $e \in \mathbb{N}, 0 \leq e \leq s.$

Définissons des polynômes Q par :

$$Q_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1+j)}(t) = t^e w_i^{(n(s+1)+1+j)}(t) \cdot v_k^{(n+1+d)}(t^{s+1})$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq (a+1)(s+1)-1$ et $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq (a+1)(s+1)-1-j$.

$$Q_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-j)}(t) = w_{i-j}^{(n(s+1)+1-j)}(t) \left[v_{k+d}^{(n+1-d)}(t^{s+1}) + c_{(n-d)(s+1)} U_{k+d}^{(n+1-d)}(t^{s+1}) \right]$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq (a+1)(s+1)-1$ et pour $i \in \mathbb{N}$, $j \leq i \leq (a+1)(s+1)-1$,

où $w_i^{(n(s+1)+1+j)}$ et $w_{i-j}^{(n(s+1)+1-j)}$ sont les polynômes arbitraires qui interviennent respectivement dans les polynômes $P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1+j)}$ et $P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-j)}$.

Théorème 3.8.

$$Q_k^{(n)}(t) = c^{(n)} \left(\frac{P_k^{(n)}(x) - P_k^{(n)}(t)}{x-t} \right)$$

Démonstration.

On posera

$$U_k^{(n+1)}(x) = \sum_{\ell=0}^k \lambda_{\ell,k} x^\ell.$$

i) Pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq (a+1)(s+1)-1$ et $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq (a+1)(s+1)-1-j$, nous avons :

$$B = c^{(n(s+1)+1+j)} \left(\frac{P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1+j)}(x) - P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1+j)}(t)}{x-t} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= c^{(n(s+1)+1+j)} \left(\frac{w_i(x) U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) - w_i(t) U_k^{(n+1)}(t^{s+1})}{x-t} \right) \\
 &= c^{(n(s+1)+1+j)} \left(\frac{w_i(x) - w_i(t)}{x-t} U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) \right) \\
 &+ c^{(n(s+1)+1+j)} \left(w_i(t) \frac{U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) - U_k^{(n+1)}(t^{s+1})}{x-t} \right)
 \end{aligned}$$

Or

$$c^{((n+1)(s+1))} (x^{q(s+1)+\delta} U_k^{(n+1)}(x^{s+1})) = 0$$

pour $q \in \mathbb{N}$, $0 \leq q \leq k+a-1$ et $0 \leq \delta \leq s$.

Donc par un raisonnement analogue à celui du théorème 3.7 nous trouvons que le premier terme de B est nul.

Il nous reste donc :

$$\begin{aligned}
 B &= w_i(t) c^{(n(s+1)+1+j)} \left(\frac{U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) - U_k^{(n+1)}(t^{s+1})}{x-t} \right) \\
 &= w_i(t) c^{(n(s+1)+1+j)} \left(\sum_{\ell=1}^k \lambda_{\ell,k} \sum_{m=0}^{\ell(s+1)-1} x_t^m \ell^{(s+1)-1-m} \right) \\
 &= w_i(t) c^{((n+d)(s+1)+1+e)} \left(\sum_{\ell=1}^k \lambda_{\ell,k} x^{s-e} \sum_{r=0}^{\ell-1} x^{r(s+1)} t^{(\ell-r-1)(s+1)+e} \right) \\
 &+ w_i(t) c^{(n(s+1)+1+j)} (E(x,t)).
 \end{aligned}$$

$E(x,t)$ ne comprend que des puissances μ de x telles que :

$$\mu - s + j \not\equiv 0 \pmod{s+1},$$

et par conséquent

$$c^{(n(s+1)+1+j)}(E(x,t)) = 0.$$

D'où :

$$B = t^e w_i(t) c^{((n+1+d)(s+1))} \left(\sum_{\ell=1}^k \lambda_{\ell,k} \sum_{r=0}^{\ell-1} x^{r(s+1)} t^{(\ell-r-1)(s+1)} \right)$$

$$= t^e w_i(t) v_k^{(n+1+d)}(t^{s+1}) = Q_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1+j)}(t).$$

ii) Pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq (a+1)(s+1)-1$ et $i \in \mathbb{N}$, $j \leq i \leq (a+1)(s+1)-1$, nous avons :

$$B = c^{(n(s+1)+1-j)} \left(\frac{P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-j)}(x) - P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-j)}(t)}{x-t} \right)$$

$$= c^{(n(s+1)+1-j)} \left(\frac{x^j w_{i-j}(x) U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) - t^j w_{i-j}(t) U_k^{(n+1)}(t^{s+1})}{x-t} \right)$$

$$= c^{(n(s+1)+1-j)} \left(\frac{w_{i-j}(x) - w_{i-j}(t)}{x-t} x^j U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) \right)$$

$$+ c^{(n(s+1)+1-j)} \left(w_{i-j}(t) \frac{x^j U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) - t^j U_k^{(n+1)}(t^{s+1})}{x-t} \right)$$

Pour les mêmes raisons que dans le théorème 3.7 le premier terme de B est nul. Il reste donc :

$$\begin{aligned}
 B &= c^{((n-d)(s+1)+1-e)} \left(w_{i-j}(t) \frac{x^e U_{k+d}^{(n+1-d)}(x^{s+1}) - t^e U_{k+d}^{(n+1-d)}(t^{s+1})}{x-t} \right) \\
 &= w_{i-j}(t) c^{((n-d)(s+1)+1-e)} \left(\sum_{\ell=0}^{k+d} \lambda_{\ell, k+d} \sum_{m=0}^{\ell(s+1)+e-1} x^m t^{\ell(s+1)+e-1-m} \right) \\
 &= w_{i-j}(t) c^{((n-d)(s+1)+1-e)} \left(\sum_{\ell=0}^{k+d} \lambda_{\ell, k+d} x^{e-1} \sum_{r=0}^{\ell} x^{r(s+1)} t^{(\ell-r)(s+1)} \right) \\
 &\quad + w_{i-j}(t) c^{(n(s+1)+1-j)} (E(x,t)).
 \end{aligned}$$

Le deuxième terme du second membre est encore nul.

Donc :

$$\begin{aligned}
 B &= w_{i-j}(t) c^{((n-d)(s+1))} \left(\sum_{\ell=0}^{k+d} \lambda_{\ell, k+d} t^{\ell(s+1)} \right) \\
 &\quad + w_{i-j}(t) c^{((n-d)(s+1))} \left(\sum_{\ell=1}^{k+d} \lambda_{\ell, k+d} \sum_{r=1}^{\ell} x^{r(s+1)} t^{(\ell-r)(s+1)} \right) \\
 &= w_{i-j}(t) c_{(n-d)(s+1)} U_{k+d}^{(n-d+1)}(t^{s+1}) \\
 &\quad + w_{i-j}(t) c^{((n+1-d)(s+1))} \left(\sum_{\ell=1}^{k+d} \lambda_{\ell, k+d} \sum_{r=0}^{\ell-1} x^{r(s+1)} t^{(\ell-1-r)(s+1)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= w_{i-j}(t) (v_{k+d}^{(n-d+1)}(t^{s+1}) + c_{(n-d)(s+1)} U_{k+d}^{(n-d+1)}(t^{s+1})) \\
&= Q_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-j)}(t)
\end{aligned}$$

cgfd.

Du théorème 3.7, nous pouvons déduire une propriété des racines des polynômes orthogonaux réguliers $P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}$.

Propriété 3.15.

Si la fonctionnelle $c^{(n(s+1)+1)}$ lacunaire d'ordre $s+1$ est u -définie positive, alors toutes les racines de $P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}$ sont distinctes.

Démonstration.

Toutes les racines z de $U_k^{(n+1)}$ sont réelles distinctes.

Les racines de $P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}$ sont alors fournies par $x^{s+1}-z$.

Pour que deux racines provenant de $x^{s+1}-z_1$ et $x^{s+1}-z_2$ soient identiques, il faut qu'elles aient même module et même argument, ce qui entraîne

$$z_1 = z_2.$$

cgfd.

Nous notons $H_j^{*(n)}$ les déterminants de Hankel correspondant à la fonctionnelle $u^{(n)}$.

Nous avons alors la propriété suivante pour les trois déterminants :

Alors

$$H_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)} = \begin{vmatrix} u_{n+1}^E & u_{n+2}^E & \dots & u_{n+k}^E \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+k}^E & u_{n+k+1}^E & \dots & u_{n+2k-1}^E \end{vmatrix}$$

On permute dans chaque bloc les lignes. On obtient alors si I est la matrice unité.

$$H_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)} = (-1)^{\frac{ks(s+1)}{2}} \begin{vmatrix} u_{n+1}^I & u_{n+2}^I & \dots & u_{n+k}^I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+k}^I & u_{n+k+1}^I & \dots & u_{n+2k-1}^I \end{vmatrix}$$

On numérote les lignes et les colonnes de 1 à $k(s+1)$.

On amène chaque colonne $1+j(s+1)$ en colonne j pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq k-1$.

On effectue le même travail sur les lignes.

Alors :

$$H_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)} = (-1)^{\frac{ks(s+1)}{2}} \begin{vmatrix} H_k^{*(n+1)} & & & 0 \\ & u_{n+1}^I & \dots & u_{n+k}^I \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & u_{n+k}^I & \dots & u_{n+2k-1}^I \end{vmatrix}$$

où chacun des k^2 blocs u_j^I est composé de s lignes et s colonnes. En réitérant on obtient :

$$H_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)} = (-1)^{\frac{ks(s+1)}{2}} \left| \begin{array}{ccc} H_k^{*(n+1)} & & 0 \\ & H_k^{*(n+1)} & \\ 0 & & H_k^{*(n+1)} \end{array} \right|$$

D'où le résultat :

ii)

$$H_{k(s+1)+1}^{(n(s+1))} = \left| \begin{array}{cccc} u_n & \text{---} & u_{n+1} & \text{---} & u_{n+2} & \text{---} & u_{n+k} \\ \vdots & \diagdown & \vdots & \diagdown & \vdots & \diagdown & \vdots \\ u_{n+1} & & & & & & \\ \vdots & \diagdown & \vdots & \diagdown & \vdots & \diagdown & \vdots \\ u_{n+2} & & & & & & \\ \vdots & \diagdown & \vdots & \diagdown & \vdots & \diagdown & \vdots \\ u_{n+k} & \text{---} & & & & & u_{n+2k} \\ \vdots & & & & & & \vdots \end{array} \right|$$

On amène chaque ligne $1+j(s+1)$ en ligne j pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq k$.

On effectue le même travail sur les colonnes. On obtient :

$$H_{k(s+1)+1}^{(n(s+1))} = \left| \begin{array}{ccc} H_{k+1}^{*(n)} & & 0 \\ & u_{n+1}^E \text{---} & u_{n+k}^E \\ 0 & \vdots & \vdots \\ & u_{n+k}^E \text{---} & u_{n+2k-1}^E \end{array} \right|$$

Les k^2 blocs antidiagonaux ont chacun s lignes et s colonnes. On utilise le résultat du i). On obtient le résultat proposé.

iii)

$$H_{k(s+1)}^{(n(s+1)+2)} = \begin{array}{|cccc|} \hline & 0 & \text{---} & u_{n+1} & \text{---} & u_{n+2} & \text{---} & u_{n+k} & 0 \\ & | & / & & / & & / & & | \\ u_{n+1} & & & & & & & & \\ & | & / & & / & & / & & | \\ u_{n+2} & & & & & & & & \\ & | & / & & / & & / & & | \\ u_{n+k} & & & & & & & & \\ & | & & & & & & & | \\ 0 & \text{---} & u_{n+2k-1} & \text{---} & u_{n+2k} & & & & \\ \hline \end{array}$$

On amène la colonne $(k-j)(s+1)$ en colonne $k(s+1)-j$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq k-1$. On effectue le même travail sur les lignes. On obtient :

$$H_{k(s+1)}^{(n(s+1)+2)} = \begin{array}{|cccc|} \hline u_{n+1}^E & u_{n+2}^E & \text{---} & u_{n+k}^E & & & & 0 \\ & | & / & & / & & / & \\ u_{n+k}^E & & & & & & & \\ & | & / & & / & & / & \\ u_{n+k+1}^E & & & & & & & \\ & | & / & & / & & / & \\ u_{n+2k-1}^E & & & & & & & \\ & | & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & H_k^{*(n+2)} \\ \hline \end{array}$$

Les k^2 blocs antidiagonaux ont chacun s lignes et s colonnes. On utilise encore le résultat du i) et on obtient la relation proposée.

cqfd.

A l'aide des trois relations de la propriété 3.16 nous sommes capable de déduire la valeur de tous les déterminants de la table H à partir de la table H^* et en utilisant la relation de Sylvester.

3.4. FONCTIONS DE POIDS POLYNOMIALES.

Pour commencer, nous donnons une propriété et une remarque qui nous serviront par la suite.

J. Favard [17] a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonctionnelle c soit définie positive est que le coefficient C_k de la relation de récurrence soit strictement négatif $\forall k$ et que $c_0 > 0$.

De notre côté nous montrons que :

Théorème 3.9.

Soit une fonctionnelle linéaire c telle que $c_0 > 0$.
 Une condition nécessaire et suffisante pour que $H_i > 0$ pour $i \in \mathbb{N}$,
 $1 \leq i \leq n+1$, est que P_n et P_{n+1} aient leurs zéros réels distincts et
 que deux zéros consécutifs de P_{n+1} soient séparés par un zéro de P_n .

Démonstration.

\Rightarrow C'est le cas où c est définie positive ou semi-définie positive.

\Leftarrow Nous écrivons la relation de récurrence vérifiée par P_n et P_{n+1}

$$P_{n+1}(x) = (x + B_{n+1}) P_n(x) + C_{n+1} P_{pr(n)}(x).$$

Deux zéros consécutifs de P_n sont séparés par un zéro unique de P_{n+1} , donc aussi par un zéro de $P_{pr(n)}$. On place ainsi $n-1$ zéros réels distincts de $P_{pr(n)}$. Donc $pr(n) = n-1$.

On trouverait de la même façon que P_i est orthogonal régulier, $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n+1$.

Pour le plus grand zéro z de P_n , $P_{n+1}(z) < 0$ et $P_{n-1}(z) > 0$.

Donc $C_{n+1} < 0$.

On trouverait de la même façon que $C_i < 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $2 \leq i \leq n+1$.

Or :

$$C_i = - \frac{c(P_{i-1}^2)}{c(P_{i-2}^2)}$$

Donc $c(P_i^2) > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, puisque $c(P_0^2) = c_0 > 0$.

Par conséquent $H_i > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n+1$ puisque $c(P_i^2) = \frac{H_{i+1}}{H_i}$ et $H_1 = c_0 > 0$.
 $H_1 = c_0 > 0$.

cqfd.

Remarque 3.6.

Si P_i est orthogonal régulier, $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$ et si $C_i < 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $2 \leq i \leq n$, alors les zéros de P_i sont réels distincts séparés par ceux de P_{i-1} . En effet $C_i < 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $2 \leq i \leq n$ entraîne que $c(P_i^2)$ a un signe constant, $\forall i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq n$. Le raisonnement est le même pour obtenir les propriétés des zéros que ce signe soit positif ou négatif.

Nous considérons à présent une fonctionnelle linéaire $c^{(n)}$ définie par :

$$c^{(n)}(x^i) = c_{i+n}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Nous prenons un polynôme $u_k(x)$ unitaire

$$u_k(x) = \prod_{j=1}^s (x-y_j)^{n_j} = \sum_{j=0}^k \alpha_{j,k} x^j$$

et

$$\sum_{j=1}^s n_j = k \text{ et } \alpha_{k,k} = 1.$$

Nous définissons une fonctionnelle linéaire $e^{(n)}$ par :

$$e^{(n)}(x^i) = c^{(n)}(x^i u_k(x)) = e_{i+n}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Nous cherchons les polynômes $V_i^{(n)}(x)$ orthogonaux par rapport à la fonctionnelle $e^{(n)}$.

Nous appellerons $\{P_j^{(n)}\}$ l'ensemble des polynômes orthogonaux par rapport à la fonctionnelle $c^{(n)}$.

Nous appellerons respectivement $H_i^{(n)}$ et $H_i^{*(n)}$ les déterminants de Hankel construits à partir des fonctionnelles $c^{(n)}$ et $e^{(n)}$. Les tables de ces déterminants seront appelées respectivement table H, table H^* . Nous appellerons table V celle dans laquelle sont disposés les polynômes $V_i^{(n)}$. Nous supposerons que tous les polynômes orthogonaux qui interviennent sont unitaires.

Supposons que nous ayons :

$$H_{h+1}^{(n)} \neq 0, H_{p+1}^{(n)} \neq 0 \text{ et } H_i^{(n)} = 0, \forall i \in \mathbb{N}, h+2 \leq i \leq p.$$

La propriété 1.1 nous montre que la $(h+2)^{\text{ème}}$ ligne du déterminant $H_p^{(n)}$ est liée aux $h+1$ précédentes.

Nous allons en déduire la propriété suivante, qui montre que la table H^* conserve certaines parties des blocs H de la table H.

Propriété 3.17.

Si $H_{h+1}^{(n)} \neq 0, H_{p+1}^{(n)} \neq 0$ et $H_i^{(n)} = 0, \forall i \in \mathbb{N}, h+2 \leq i \leq p$ avec $p-h-2 \geq k$, alors :

$$H_i^{*(n)} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, h+2 \leq i \leq p-k.$$

Démonstration.

Appelons $L_{j,\ell}^{(n)}$ la ligne formée par $c_{n+j}, \dots, c_{n+j+\ell}$.

D'après la propriété 1.1, il existe des constantes β_s non toutes nulles, pour $s \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq h+1$ telles que :

$$\sum_{s=0}^{h+1} \beta_s L_{s+r, p-1-r}^{(n)} = 0, \quad \forall r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq p-h-2.$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, $h+2 \leq i \leq p-k$, nous avons :

$$H_i^{*(n)} = \det \left(\sum_{j=0}^k \alpha_{j,k} L_{j,i-1}^{(n)}, \dots, \sum_{j=0}^k \alpha_{j,k} L_{j+i-1,i-1}^{(n)} \right).$$

Ce déterminant sera nul s'il existe des coefficients μ_m non tous nuls pour $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq i-1$ tels que :

$$A = \sum_{m=0}^{i-1} \mu_m \left(\sum_{j=0}^k \alpha_{j,k} L_{j+m,i-1}^{(n)} \right) = 0.$$

Or

$$A = \sum_{j=0}^k \alpha_{j,k} \left(\sum_{m=0}^{i-1} \mu_m L_{j+m,i-1}^{(n)} \right).$$

Posons $\mu_m = \beta_m$ pour $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq h+1$.

$$\mu_m = 0 \text{ pour } m \in \mathbb{N}, h+2 \leq m \leq i-1.$$

Alors $A = \sum_{j=0}^k \alpha_{j,k} \left(\sum_{s=0}^{h+1} \beta_s L_{s+j,i-1}^{(n)} \right)$ est bien nul puisque $k \leq p-h-2$.

cqfd.

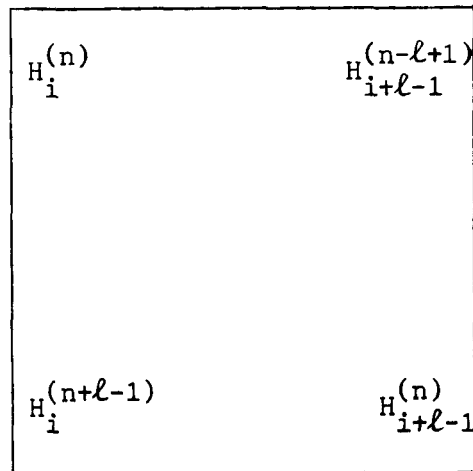
Notations.

Nous noterons les blocs H par $H(n,i,\ell)$, ce qui signifie que

$$H_k^{(n+j)} = 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}, i \leq k \leq i+\ell-1$$

$$\text{et } j \in \mathbb{Z}, i-k \leq j \leq i-k+\ell-1.$$

C'est donc un bloc de largeur ℓ tel que :



De la propriété 3.17 nous déduisons :

Corollaire 3.6.

A tout bloc $H(n,h+2,\ell)$ tel que $\ell > k$ correspond au moins un bloc $H^*(n,h+2,\ell-k)$, c'est à dire que le bloc H^* peut éventuellement être plus large quel que soit le polynôme $u_k(x)$ de degré k exactement.

Corollaire 3.7.

Si la table H a un bloc $H(n, h+2, \infty)$, la table H^* a au moins un bloc $H(n, h+2, \infty)$.

Suivant Th. Chihara [10] nous appellerons ensemble support E d'une fonctionnelle linéaire c un ensemble $E \subset]-\infty, +\infty[$ tel que :

$$\forall x \in E, c(p) \text{ soit défini.}$$

En particulier pour une fonctionnelle linéaire c définie positive, nous aurons :

$$\forall x \in P \text{ tel que } \forall x \in E, p(x) \geq 0 \Rightarrow c(p) > 0.$$

Nous considérons dans toute la suite, le cas où E est un intervalle. Pour la fonctionnelle d'intégration, E correspond à l'intervalle d'intégration.

Nous donnons tout d'abord deux propriétés élémentaires.

Propriété 3.18.

Si c est définie positive et $u_k(x) \geq 0$ sur E , alors e est définie positive.

Démonstration.

$$\forall q \geq 0, \forall x \in E \text{ alors } c(q) > 0.$$

Par conséquent $\forall p \geq 0, \forall x \in E, e(p) = c(u_k p) > 0$.

cqfd.

Propriété 3.19.

Si c est semi-définie positive et $u_k(x) \geq 0$ sur E , alors e est semi-définie positive.

Démonstration.

$\forall p \geq 0, \forall x \in E, \text{ alors } c(p) \geq 0.$

$\exists q \geq 0$ sur E , non identiquement nul, tel que $c(q) = 0$.

Donc $\forall p \geq 0, e(p) = c(up) \geq 0$.

D'autre part c étant semi-définie positive, $\exists h \in \mathbb{N}$ tel que :

$$H_i > 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq h+1,$$

$$H_i = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, i \geq h+2.$$

Nous avons donc un bloc $H(0, h+2, \infty)$ et par conséquent un bloc $H^*(0, h+2, \infty)$ d'après le corollaire 3.7.

Il existe donc $q \geq 0$ tel que $e(q) = 0$ (par exemple V_i^2 , pour $i \in \mathbb{N}, i \geq h+1$).

Donc e est semi-définie positive.

cqfd.

Nous rappelons un résultat classique (cf. Davis et Rabinowitz [13]) qui nous servira ensuite à établir diverses propriétés de la table V. Nous en donnons la démonstration, car dans les propriétés suivantes nous l'exploiterons.

Propriété 3.20 [13]

Si c est définie et si $V_i(x)$ est orthogonal régulier par rapport à e , alors :

$$u_k(x) V_i(x) = \sum_{j=i}^{k+i} t_j P_j(x) \text{ avec } t_{k+i} = 1.$$

Démonstration.

Nous pouvons écrire $u_k(x) V_i(x)$ sous la forme :

$$u_k(x) V_i(x) = \sum_{j=0}^{k+i} t_j P_j(x) \text{ avec } t_{k+i} = 1.$$

Or $c(u_k(x) \cdot x^\ell V_i(x)) = 0$ pour $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell \leq i-1$.

Donc

$$\sum_{j=0}^{k+i} t_j c(x^\ell P_j(x)) = \sum_{j=0}^{\ell} t_j c(x^\ell P_j(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell \leq i-1.$$

C'est un système triangulaire régulier, puisque $c(x^\ell P_\ell) \neq 0$.

Donc $t_j = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq i-1$.

cqfd.

Corollaire 3.8.

Nous supposons c définie.

Une condition nécessaire et suffisante pour que V_i et V_{i+1} soient orthogonaux réguliers est que :

$$u_k(x) V_i(x) = \sum_{j=i}^{k+i} t_j P_j(x) \text{ avec } t_{k+i} = 1 \text{ et } t_i \neq 0.$$

Démonstration.

\Rightarrow Puisque V_i est orthogonal régulier nous avons la relation de la propriété 3.20. Puisque V_{i+1} est orthogonal régulier $c(x^i V_i(x) u_k(x)) \neq 0$. Or cette quantité vaut $t_i c(x^i P_i(x))$ avec $c(x^i P_i(x)) \neq 0$.

Donc $t_i \neq 0$.

\Leftarrow Nous avons dans ce cas :

$$c(x^\ell u_k(x) V_i(x)) = \sum_{j=i}^{k+i} t_j c(x^\ell P_j(x)) = 0$$

pour $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell \leq i-1$.

Cette quantité est non nulle pour $\ell = i$.

Par conséquent, V_i est orthogonal régulier par rapport à e , ainsi que V_{i+1} .

cqfd.

Supposons que nous ayons $H_{h+1}^* \neq 0$, $H_{p+1}^* \neq 0$ et $H_i^* = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $h+2 \leq i \leq p$. Considérons les polynômes $V_i(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $h+1 \leq i \leq p$.

Propriété 3.21.

Si c est définie, alors pour la fonctionnelle e il n'existe pas plus de k déterminants H^* consécutifs nuls et

$$u_k(x) V_i(x) = \sum_{j=p+h+1-i}^{k+i} t_j P_j(x) \text{ avec } t_{p+h+1-i} \neq 0$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $h+1 \leq i \leq p$.

Démonstration.

Pour $i \in \mathbb{N}$, $h+1 \leq i \leq p$, $u_k(x) V_i(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$\sum_{j=0}^{k+i} t_j P_j(x).$$

Or

$$c(x^\ell u_k(x) V_i(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell \leq p+h-i, \\ \neq 0 \text{ pour } \ell = p+h+1-i.$$

En recommençant la démonstration de la propriété 3.20 nous obtenons :

$$u_k(x) V_i(x) = \sum_{j=p+h+1-i}^{k+i} t_j P_j(x) \text{ avec } t_{p+h+1-i} \neq 0.$$

Ceci montre également que pour $i = h+1$ on doit avoir $k+h+1 \geq p$, sinon $u_k(x) V_{h+1}(x)$ serait identiquement nul.

cqfd.

Corollaire 3.9.

Si c est définie positive, alors il n'existe pas dans la table H^* de bloc de largeur supérieure à $k+1$.

Si c et $c^{(1)}$ sont définies positives, alors il n'existe pas dans la table H^* de bloc de largeur supérieure à k .

Démonstration.

La propriété 3.21 montre qu'il ne peut pas y avoir plus de k déterminants $H^{*(0)}$ consécutifs nuls.

D'autre part, les fonctionnelles $c^{(2i)}$ sont également définies positives.

D'où les deux résultats.

cqfd.

Corollaire 3.10.

Soit c une fonctionnelle linéaire définie et e une fonctionnelle linéaire telle que

$$e(x^i) = c(x^i u_k(x)).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que V_{h+1} soit orthogonal régulier et $H_j^* = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $h+2 \leq j \leq h+k+1$ et $H_{h+k+2}^* \neq 0$ est que :

$$u_k(x) V_{h+1}(x) = P_{k+h+1}(x).$$

Démonstration.

\Rightarrow Immédiate avec la propriété 3.21.

$$\Leftarrow c(u_k(x) V_{h+1}(x) x^i) = c(P_{k+h+1}(x) \cdot x^i) = 0$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq k+h$,

$$c(u_k(x) V_{h+1}(x) x^i) = c(P_{k+h+1}(x) \cdot x^i) \neq 0$$

pour $i = k+h+1$.

Donc V_{h+1} est orthogonal par rapport à e et de plus

$$H_j^* = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, h+2 \leq j \leq h+k+1.$$

Nous avons donc k déterminants nuls.

Donc $H_{h+1}^* \neq 0$ et V_{h+1} est orthogonal régulier.

Par conséquent

$$H_{k+h+2}^* \neq 0$$

cqfd.

Dans le cas d'une fonctionnelle c linéaire définie positive nous avons une propriété plus forte que la propriété 3.21.

Propriété 3.22.

Si c est définie positive et si E contient au plus m racines distinctes de $u_k(x)$ d'ordre de multiplicité impair, alors pour la fonctionnelle e on ne peut avoir plus de m déterminants H^ consécutifs nuls.*

Démonstration.

Soient y_i , pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$, avec $m \leq s$ toutes les racines de u_k d'ordre de multiplicité impair n_i qui se trouvent dans E .

$$u_k(x) = \hat{u}_{k-m}(x) \prod_{j=1}^m (x-y_j)$$

où \hat{u}_{k-m} est un polynôme positif sur E .

Nous définissons une nouvelle fonctionnelle linéaire \bar{c} telle que :

$$\bar{c}(x^i) = c(x^i \hat{u}_{k-m}(x)).$$

\bar{c} est définie positive d'après la propriété 3.18.

Soient $\{\bar{\Pi}_i\}$ les polynômes orthogonaux par rapport à \bar{c} .

On applique la propriété 3.21 à la fonctionnelle e obtenue à partir de la fonctionnelle \bar{c} par :

$$e(x^i) = \bar{c}(x^i \prod_{j=1}^m (x-y_j)).$$

cqfd.

Nous pouvons encore en déduire un corollaire sur la largeur des blocs.

Corollaire 3.11.

Si E contient au plus m racines distinctes de $u_k(x)$ d'ordre de multiplicité impair, et

- i) si c est définie positive, alors il n'existe pas dans la table H^* de bloc de largeur supérieure à $m+1$.
- ii) Si c et $c^{(1)}$ sont définies positives, alors il n'existe pas dans la table H^* de bloc de largeur supérieure à m .

Supposons maintenant que c ne soit pas définie. Nous aurons dans ce cas :

$$H_i \neq 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, p_{\ell}+1 \leq i \leq h_{\ell+1}+1,$$

$$H_i = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, h_{\ell}+2 \leq i \leq p_{\ell}.$$

L'indice ℓ numérote les blocs successifs.

On suppose V_{h+1} orthogonal régulier et on appelle V_{p+1} le polynôme orthogonal régulier successeur de V_{h+1} . On appellera $P_{p_{\ell}+1}$ le polynôme orthogonal régulier successeur de P_p . Donc $h_{\ell}+2 \leq p \leq p_{\ell}$. Nous pouvons énoncer la propriété suivante.

Propriété 3.23.

i) Si P_p est orthogonal régulier, alors :

$$u_k(x) V_{h+1}(x) = \sum_{j=p}^{k+h+1} t_j P_j(x) \text{ avec } t_{p_\ell} \neq 0 \text{ et } p_\ell \leq k+h+1.$$

ii) Si P_p appartient à un bloc P , alors :

$$u_k(x) V_{h+1}(x) = \sum_{j=h_\ell+1}^{k+h+1} t_j P_j(x)$$

et

$$j \notin [p_\ell+h_\ell+2-p, p_\ell]$$

avec $t_{p_\ell+h_\ell+1-p} \neq 0$ et $p_\ell \neq k+h+1$.

Si $p_\ell > k+h+1$, alors $p_\ell+h_\ell+1-p = k+h+1$.

Démonstration.

Nous avons

$$c(x^r u_k V_{h+1}) = 0 \text{ pour } r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq p-1,$$

$$c(x^r u_k V_{h+1}) \neq 0 \text{ pour } r = p.$$

i) Si P_p est orthogonal régulier.

On trouve que $t_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq p-1$.

En effet tant que P_j et P_{j+1} sont orthogonaux réguliers, on a $c(x^j P_j) \neq 0$.

On en déduit que t_j est nul.

Quand on a $j = h_\ell + 1$, alors $c(x^j P_{p_\ell}) \neq 0$ et $c(x^j P_m) = 0$, pour $m \in \mathbb{N}$, $h_\ell + 1 \leq m \leq p_\ell - 1$ et $m > p_\ell$. Donc $t_{p_\ell} = 0$. On trouvera de la même façon que pour $j \in \mathbb{N}$, $h_\ell + 2 \leq j \leq p_\ell$, t_i est nul pour $i \in \mathbb{N}$, $h_\ell + 1 \leq i \leq p_\ell - 1$.

Donc

$$u_k(x) V_{h+1}(x) = \sum_{j=p}^{k+h+1} t_j P_j(x).$$

D'une part $c(x^p u_k(x) V_{h+1}(x)) \neq 0$.

D'autre part, en posant $p = h_\ell + 1$, $c(x^p P_j) = 0$ pour $j \geq p$ et $j \neq p_\ell$, et $c(x^p P_{p_\ell}) \neq 0$.

Il faut donc avoir

$$p_\ell \leq k+h+1.$$

ii) Si P_p appartient à un bloc P .

Nous avons $h_\ell + 2 \leq p \leq p_\ell$.

En posant $u_k(x) V_{h+1}(x) = \sum_{j=0}^{k+h+1} t_j P_j(x)$, avec $t_j = 0$ pour $j > k+h+1$,

nous avons toujours $t_j = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq p_\ell$.

Nous avons en plus $t_j = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $p_\ell + h_\ell + 2 - p \leq j \leq p_\ell$ et $t_{p_\ell + h_\ell + 1 - p} \neq 0$.

Nous obtenons donc :

$$u_k(x) V_{h+1}(x) = \sum_{j=h_\ell+1}^{k+h+1} t_j P_j(x).$$

et

$$j \notin [p_\ell + h_\ell + 2 - p, p_\ell]$$

On constate qu'il n'est pas possible d'avoir $p_\ell = k+h+1$.

Enfin si $p_\ell > k+h+1$, d'après la relation obtenue on ne peut avoir $p_\ell+h_\ell+1-p < k+h+1$.

D'autre part si $p_\ell+h_\ell+1-p > k+h+1$, alors :

$$c(u_k x^p V_{h+1}) = \sum_{j=h_\ell+1}^{k+h+1} t_j c(x^p P_j) = 0.$$

Or

$$c(u_k x^p V_{h+1}) \neq 0.$$

Donc dans ce cas

$$u_k(x) V_{h+1}(x) = \sum_{j=h_\ell+1}^{k+h+1} t_j P_j(x) \text{ avec } p_\ell+h_\ell+1-p = k+h+1.$$

cqfd.

Dans le cas où P_{h+1} et V_{h+1} sont orthogonaux réguliers, nous donnerons pour ce dernier une expression sous forme de déterminant, ce qui constituera une généralisation du théorème de Christoffel.

D'après la propriété 3.23, nous avons :

$$u_k(x) V_{h+1}(x) = \sum_{j=h+1}^{k+h+1} t_j P_j(x) \text{ avec } t_{k+h+1} = 1.$$

En utilisant les racines de $u_k(x)$ nous obtenons :

$$(u_k(x) V_{h+1}(x))_{x=y_i}^{(m_i)} = 0 = \sum_{j=h+1}^{k+h+1} t_j P_j^{(m_i)}(y_i) \text{ avec } t_{k+h+1} = 1,$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq s$ et pour $m_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq m_i \leq n_i-1$.

Nous mettons ce système sous la forme :

$$(T) \quad \sum_{j=h+1}^{k+h} t_j P_j^{(m_i)}(y_i) = -P_{k+h+1}^{(m_i)}(y_i)$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq s$ et pour $m_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq m_i \leq n_i - 1$.

Lemme 3.1.

Si P_{h+1} et V_{h+1} sont orthogonaux réguliers, alors le déterminant du système T est non nul.

Démonstration.

Supposons que le déterminant du système (T) soit nul. Alors il existe des constantes non toutes nulles d_j pour $j \in \mathbb{N}$, $h+1 \leq j \leq k+h$ telles que

$$\sum_{j=h+1}^{k+h} d_j P_j^{(m_i)}(y_i) = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq s \text{ et}$$

$$\text{pour } m_i \in \mathbb{N}, 0 \leq m_i \leq n_i - 1.$$

Posons

$$s(x) = \sum_{j=h+1}^{k+h} d_j P_j(x)$$

Alors $s^{(m_i)}(y_i) = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq s$ et $m_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq m_i \leq n_i - 1$.

Donc $s(x) = u_k(x) \rho_h(x)$, où $\rho_h(x)$ est le polynôme complémentaire de degré h exactement.

D'autre part $s(x)$ est orthogonal à tout polynôme de P_h par rapport à c .

$$c(x^i u_k \rho_h) = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq h.$$

Donc $\rho_h(x)$ est orthogonal par rapport à e avec $e(\rho_h^2) = 0$.

Dans ces conditions V_{h+1} ne peut pas être orthogonal régulier (cf. remarque 1.3).

cqfd.

Remarque 3.7.

Le lemme 3.1 montre donc que

$$\det(T) = 0 \Rightarrow H_{h+1}^{*(0)} = 0.$$

Nous pouvons maintenant donner la généralisation du théorème de Christoffel. La forme de la démonstration est celle présentée dans l'ouvrage de Krylov [35].

Théorème 3.10.

Si P_{h+1} est orthogonal régulier par rapport à c et si V_{h+1} est orthogonal régulier par rapport à e , alors :

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c} P_{h+1}(x) \quad \text{-----} \quad P_{k+h+1}(x) \\ P_{h+1}(y_1) \quad \text{-----} \quad P_{k+h+1}(y_1) \\ \vdots \quad \text{-----} \quad \vdots \\ P_{h+1}^{(m_s)}(y_s) \quad \text{-----} \quad P_{k+h+1}^{(m_s)}(y_s) \end{array} \right| \\
 \hline
 u_k(x) V_{h+1}(x) = \\
 \left| \begin{array}{c} P_{h+1}(y_1) \quad \text{-----} \quad P_{k+h}(y_1) \\ \vdots \quad \text{-----} \quad \vdots \\ P_{h+1}^{(m_s)}(y_s) \quad \text{-----} \quad P_{k+h}^{(m_s)}(y_s) \end{array} \right|
 \end{array}$$

Démonstration.

On couple le système (T) avec la relation donnant $u_k(x) V_{h+1}(x)$.

On obtient :

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} P_{h+1}(x) \quad \text{-----} \quad P_{k+h}(x) \quad 1 \\ P_{h+1}(y_1) \quad \text{-----} \quad P_{k+h}(y_1) \quad 0 \\ \vdots \quad \text{-----} \quad \vdots \quad \vdots \\ P_{h+1}^{(m_s)}(y_s) \quad \text{-----} \quad P_{h+k}^{(m_s)}(y_s) \quad 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} t_{h+1} \\ \vdots \\ t_{h+k} \\ u_k(x) V_{h+1}(x) \end{array} \\
 = \\
 \left[\begin{array}{c} P_{k+h+1}(x) \\ P_{k+h+1}(y_1) \\ \vdots^{(m_s)} \\ P_{k+h+1}(y_s) \end{array} \right]
 \end{array}$$

D'où en calculant le terme $u_k(x) V_{h+1}(x)$ de ce système régulier on obtient la relation proposée.

Remarque 3.8.

i) Avec les conditions du théorème 3.10, aucun des polynômes P_j pour $j \in \mathbb{N}$, $h+1 \leq j \leq h+k$ n'est divisible par u_k , sinon le déterminant de (T) serait nul.

ii) Avec les conditions du théorème 3.10, si P_{k+h+1} est divisible par u_k , alors

$$u_k(x)V_{h+1}(x) = P_{k+h+1}(x).$$

Si P_{k+h+1} est orthogonal régulier et si on pose $h_{\ell+1} = k+h+1$, alors on a : $p_{\ell}-h-1$ déterminants $H^{*(o)}$ nuls consécutifs.

$H_j^{*(o)} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $h+2 \leq j \leq p_{\ell}$ avec $p_{\ell} \geq h_{\ell+1}$, et $H_{p_{\ell}+1}^{*(o)} \neq 0$.

En effet nous avons :

$$e(u_k V_{h+1} x^j) = c(P_{h_{\ell+1}} x^j) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq p_{\ell}-1,$$

$$e(u_k V_{h+1} x^{p_{\ell}}) = c(P_{h_{\ell+1}} x^{p_{\ell}}) \neq 0.$$

Nous prenons maintenant une fonctionnelle c lacunaire d'ordre $s+1$.

Définition 3.8.

Nous appellerons polynôme lacunaire d'ordre $s+1$ un polynôme $\sum_{i=1}^{n(s+1)} a_i x^i$ tel que $a_i = 0$ pour $i \neq 0 \pmod{s+1}$.

Propriété 3.24.

Si c est lacunaire d'ordre $s+1$ et si $u_{k+n(s+1)}(x) = x^k \hat{u}_{n(s+1)}(x)$ avec $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq s$ et où $\hat{u}_{n(s+1)}$ est lacunaire d'ordre $s+1$, alors $e_i = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $\text{Sup}(0,1-k) \leq i \leq s-k$ et $e^{(s+1-k)}$ est lacunaire d'ordre $s+1$.

Démonstration.

$$e_i = c(x^k \hat{u}_{n(s+1)}(x) x^i) = c^{(k+i)}(\hat{u}_{n(s+1)}(x)) = 0$$

si $k+i \neq 0 \pmod{s+1}$.

cqfd.

A partir de la théorie présentée sur les fonctionnelles lacunaires, nous en déduisons immédiatement :

Propriété 3.25.

Les polynômes orthogonaux v situés au Nord-Ouest des blocs v sont lacunaires d'ordre $s+1$.

Propriété 3.26.

Si c est u -définie lacunaire d'ordre $s+1$, $u_{k(s+1)}(x)$ lacunaire d'ordre $s+1$ et si $v_{i(s+1)}^{(1)}$ est orthogonal régulier et $v_{r(s+1)}^{(1)}$ est le polynôme orthogonal régulier successeur de $v_{i(s+1)}^{(1)}$, alors :

$$u_{k(s+1)}(x) v_{i(s+1)}^{(1)}(x) = \sum_{j=(r-1)(s+1)}^{(k+i)(s+1)} t_j P_j^{(1)}(x)$$

avec $t_j = 0$ pour $j \neq 0 \pmod{s+1}$.

Démonstration.

$P_{\ell(s+1)}^{(1)}$ est orthogonal régulier pour $\ell \in \mathbb{N}$. De plus il est lacunaire d'ordre $(s+1)$.

D'après la propriété 3.23, nous avons :

$$u_{k(s+1)}(x) v_{i(s+1)}^{(1)}(x) = \sum_{j=(r-1)(s+1)}^{(k+i)(s+1)} t_j P_j^{(1)}(x).$$

On peut montrer que $t_j = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, j prenant successivement les valeurs $(k+i)(s+1)-1$ à $(k+i-1)(s+1)+1$, car les polynômes $P_j^{(1)}$ correspondants introduiraient des termes en x^j pour j non multiple de $(s+1)$.

On peut réitérer le même raisonnement pour toutes les valeurs de $j \neq 0 \pmod{(s+1)}$.

cqfd.

Dans le cas particulier d'une fonctionnelle c définie lacunaire d'ordre 2, nous savons que $P_{2n}^{(2j)}$ est un polynôme pair et $P_{2n+1}^{(2j)}(x) = x P_{2n}^{(2j+1)}(x) = x P_{2n}^{(2j+2)}(x)$ est un polynôme impair.

La propriété suivante est identique à celle obtenue par C. Brezinski [6a] dans le cas où $u_k(x) = P_k(x)$.

Propriété 3.27.

On suppose que $v_i(x)$ est orthogonal régulier.

Si c est définie lacunaire d'ordre 2 et,

i) Si u_k et i sont de même parité, alors :

$$u_k(x) v_i(x) = \sum_{j=i}^{k+i} t_j P_j(x)$$

avec $t_j = 0$ si j est impair et $t_{k+i} = 1$.

ii) Si u_k et v_i sont de parités opposées, alors :

$$u_k(x) v_i(x) = \sum_{j=i}^{k+i} t_j P_j(x)$$

avec $t_j = 0$ si j est pair et $t_{k+i} = 1$.

Démonstration.

i) $k+i$ est pair et $u_k v_i$ est un polynôme pair.

Par un raisonnement analogue à celui de la propriété 3.26, on obtient

$t_j = 0$ pour j impair.

ii) $k+i$ est impair et $u_k v_i$ est un polynôme impair.

On obtient donc $t_j = 0$ pour j pair.

cqfd.

Nous considérons une fonctionnelle c définie positive lacunaire d'ordre 2 sur $E = [-1, 1]$. Nous prenons $k=2$ et $u_2(x) = x^2 - a^2$ avec a réel et $0 < a < 1$.

Propriété 3.28.

Si un déterminant $H_n^{*(0)}$ est nul, alors soit $H_{n+1}^{*(0)} = 0$ et $H_{n-1}^{*(0)} \neq 0$, $H_{n+2}^{*(0)} \neq 0$, soit $H_{n-1}^{*(0)} = 0$ et $H_{n-2}^{*(0)} \neq 0$, $H_{n+1}^{*(0)} \neq 0$.

Démonstration.

D'après la propriété 3.24, c est lacunaire d'ordre 2.

Donc la table V peut présenter des blocs de largeur $2(r+1)-1$ avec $r \in \mathbb{N}$, dont la diagonale principale n'est pas d'indice pair (cf. le théorème 3.7).

D'après le corollaire 3.9 on ne peut avoir que $r = 0$ ou 1 .

D'où la propriété.

cqfd.

Propriété 3.29.

Si V_n est orthogonal régulier et si n est impair, alors V_n a 0 comme racine simple ou triple.

Démonstration.

D'après le théorème 3.7 l'angle Nord-Ouest d'un bloc est occupé par un polynôme de degré pair et de diagonale impaire.

Donc si n est impair, V_n est au Nord d'un bloc V .

Si ce bloc est de largeur 1, il a 0 pour racine simple. Si ce bloc est de largeur 3, V_n aura donc 0 soit comme racine simple, soit comme racine triple.

cqfd.

D'après la propriété 3.27, si V_n est orthogonal régulier, alors :

$$u_2(x) V_n(x) = P_{n+2}(x) + t_n P_n(x).$$

D'où en faisant $x = a$ on trouve $t_n = - \frac{P_{n+2}(a)}{P_n(a)}$.

$P_n(a)$ est non nul, sinon on aurait aussi $P_n(-a) = 0$ et P_n serait divisible par u_2 ce qui est impossible d'après la remarque 3.8 i).

D'après la même remarque $P_{n+1}(a) \neq 0$.

Nous retrouvons ce qui était présenté par P. Barrucand dans [3].

Enfin si $H_{n+1}^*(o) = H_{n+2}^*(o) = 0$ alors d'après le corollaire 3.10

$$u_2(x) V_n(x) = P_{n+2}(x).$$

Propriété 3.30.

a n'est racine d'aucun polynôme V_n orthogonal régulier.

Démonstration.

Si a était racine d'un polynôme orthogonal régulier V_n , nous pourrions le mettre sous la forme $(x^2 - a^2) \hat{V}_{n-2}(x)$.

La fonctionnelle \hat{e} définie par les moments $\hat{e}(x^i) = c(x^i(x^2 - a^2)^2)$ est définie positive. Donc aucun déterminant \hat{H} relatif à \hat{e} n'est nul.

Or $c((x^2 - a^2) V_n(x) \cdot x^j) = c((x^2 - a^2)^2 \hat{V}_{n-2}(x) x^j) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq n-1$.

Cette relation montre que \hat{V}_{n-2} est orthogonal et que $\hat{H}_{n-1} = 0$, ce qui est contradictoire.

cqfd.

Les polynômes P_i satisfont une relation de récurrence à trois termes

$$P_i = x P_{i-1} + C_i P_{i-2} \text{ avec } C_i < 0.$$

Nous pouvons en déduire la propriété suivante.

Propriété 3.31.

Si V_n est orthogonal régulier et si $u_2(x) V_n(x) = P_{n+2}(x)$ alors

$$V_{n+3}(x) = P_{n+3}(x) + x C_{n+4} V_n(x).$$

Démonstration.

Puisque $u_2(x) V_n(x) = P_{n+2}(x)$, alors $H_{n+1}^{*(0)} = H_{n+2}^{*(0)} = 0$ et $H_{n+3}^{*(0)} \neq 0$.

Donc V_{n+3} est orthogonal régulier. Nous avons alors :

$$u_2(x) V_{n+3}(x) = P_{n+5}(x) + t_{n+3} P_{n+3}(x).$$

Nous remplaçons P_{n+5} , puis P_{n+4} par leur expression donnée par la relation de récurrence à trois termes.

Nous obtenons ainsi :

$$u_2(x) V_{n+3}(x) = (x^2 + C_{n+5} + t_{n+3}) P_{n+3}(x) + x C_{n+4} P_{n+2}(x).$$

En faisant $x = a$ et compte tenu du fait que $P_{n+3}(a)$ ne peut s'annuler, puisqu'il n'a aucune racine commune avec P_{n+2} , nous trouvons que $x^2 + C_{n+5} + t_{n+3} \equiv u_2(x)$. D'où la relation après simplification par u_2 .

cqfd.

Cette relation nous permet d'énoncer le

Théorème 3.11.

Si $u_2(x) V_n(x) = P_{n+2}(x)$, alors V_{n+3} a tous ses zéros réels, distincts, symétriques séparés par les zéros de P_{n+2} .

Démonstration.

Nous savons qu'entre deux zéros consécutifs de P_{n+3} se trouve un zéro unique de P_{n+2} . Donc a est toujours entre deux zéros de P_{n+3} .

- Entre deux zéros consécutifs b_1 et b_2 ($b_1 < b_2$) de P_{n+2} nous avons :

$$\text{signe } P_{n+2}(x) = \text{signe } P_{n+3}(b_2) = -\text{signe } P_{n+3}(b_1).$$

C'est une conséquence directe du fait qu'entre deux zéros consécutifs de P_{n+2} se trouve un zéro unique de P_{n+3} et réciproquement, et que ces polynômes sont positifs au-delà de leur plus grand zéro.

De plus

$$\text{si } x > a, \text{ signe } V_n(x) = \text{signe } P_{n+2}(x),$$

$$\text{si } 0 < x < a, \text{ signe } V_n(x) = -\text{signe } P_{n+2}(x).$$

- Soit z_M le plus grand zéro de P_{n+3} . Alors $z_M C_{n+4} V_n(z_M) < 0$, puisqu'après le plus grand zéro de V_n qui est inférieur à z_M , ce polynôme est positif.

Par conséquent $V_{n+3}(z_M) < 0$. Donc il existe un nombre impair de zéro de V_{n+3} sur $]z_M, +\infty[$.

- Soient z_1 et z_2 deux zéros consécutifs positifs de P_{n+3} . Il existe un zéro unique b de P_{n+2} entre z_1 et z_2 .

Si $b \neq a$, alors il existe le zéro b de V_n entre z_1 et z_2 et donc aussi un zéro de V_{n+3} .

Si $b = a$, V_n ne s'annule pas sur l'intervalle $[z_1, z_2]$ et V_{n+3} a alors un nombre pair de zéros sur cet intervalle.

- Appelons z_m le plus petit zéro positif de P_{n+3} .

i) Si n est pair.

$\alpha)$ Si $a \in [0, z_m]$, alors entre les $\frac{n}{2} + 1$ zéros positifs de P_{n+3} on place $\frac{n}{2}$ zéros de V_{n+3} .

Sur $]z_m, +\infty[$ se trouve un autre zéro de V_{n+3} . Nous avons donc $n+2$ zéros réels distincts symétriques et 0 est racine.

Réciproquement entre deux zéros positifs consécutifs y_1 et y_2 de V_{n+3} se trouve un zéro unique de P_{n+3} .

Donc $P_{n+3}(y_1) \cdot P_{n+3}(y_2) < 0$ ce qui entraîne $V_n(y_1) V_n(y_2) < 0$. Par conséquent entre y_1 et y_2 se trouve également un zéro de V_n .

On place ainsi les n zéros de V_n .

D'autre part, $a \in [0, z_m]$. Or le plus petit zéro positif y_m de V_{n+3} est supérieur à z_m . Donc a sépare les deux zéros 0 et y_m de V_{n+3} .

β) Si $a > z_m$, alors en excluant l'intervalle des deux zéros positifs consécutifs de P_{n+3} qui contient a , on place $\frac{n}{2} - 1$ zéros positifs de V_{n+3} dans les $\frac{n}{2} - 1$ intervalles restants.

Sur $]z_m, +\infty[$ nous avons encore un zéro de V_{n+3} . Au total nous plaçons n zéros réels distincts symétriques et 0 est racine.

Entre 0 et z_m se trouve un zéro b de P_{n+2} qui est aussi zéro de V_n .

Nous avons :

$$\text{signe } V_n(z_m) = -\text{signe } P_{n+2}(z_m) = \text{signe } P_{n+3}(b)$$

$$\text{signe } V_n(0) = -\text{signe } P_{n+2}(0) = -\text{signe } P_{n+3}(b).$$

Or la relation à trois termes de la propriété 3.31 donne :

$$\text{signe } V_{n+3}(b) = \text{signe } P_{n+3}(b)$$

D'autre part

$$\text{signe } V_{n+3}(z_m) = -\text{signe } V_n(z_m) = -\text{signe } P_{n+3}(b).$$

Donc V_{n+3} s'annule entre b et z_m , et par conséquent les zéros de V_{n+3} sont réels distincts symétriques.

Réciproquement entre deux zéros positifs consécutifs y_1 et y_2 de V_{n+3} se trouve un zéro de P_{n+3} , sauf si l'intervalle $[y_1, y_2]$ contient a , auquel cas deux zéros de P_{n+3} sont entre y_1 et y_2 .

Alors $P_{n+3}(y_1) P_{n+3}(y_2) < 0$ et $V_n(y_1) V_n(y_2) < 0$ pour les intervalles $[y_1, y_2]$ qui ne contiennent pas a .

On place ainsi $\frac{n}{2} - 1$ zéros de V_n . De plus entre b et z_m , V_{n+3} s'annule en y_m , et 0 est racine. Donc entre 0 et y_m se trouve un zéro b de V_n .

Enfin a , qui est zéro de P_{n+2} , sépare deux zéros consécutifs de V_{n+3} .
D'où le résultat.

ii) Si n est impair, alors $a > z_m$.

Le raisonnement fait dans le cas n pair s'applique encore. On place $\frac{n-1}{2}$ zéros positifs de V_{n+3} dans les $\frac{n+1}{2}$ intervalles bornés par deux zéros positifs consécutifs de P_{n+3} qui ne contiennent pas a .

Sur $]z_m, +\infty[$ se trouve encore un zéro de V_{n+3} . Au total nous plaçons $(n+1)$ zéros réels distincts symétriques.

Enfin

$$\text{signe } V_n(z_m) = \text{signe } P_{n+3}(0) = -\text{signe } V_{n+3}(z_m)$$

$$\text{signe } V_{n+3}(0) = \text{signe } P_{n+3}(0).$$

Donc V_{n+3} s'annule entre 0 et z_m et par conséquent les zéros de V_{n+3} sont réels distincts symétriques.

De la même façon que dans le cas pair, on place $\frac{n-1}{2}$ zéros de V_n dans les intervalles $[y_1, y_2]$ qui ne contiennent pas a . De plus 0 est racine de V_n et sépare le plus petit zéro positif et le plus grand zéro négatif de V_{n+3} . Enfin, a sépare deux zéros consécutifs de V_{n+3} .

cgfd.

Remarque 3.9.

Nous ne pouvons pas dire que toutes les racines de V_{n+3} appartiennent à E . En effet la plus grande et la plus petite peuvent être à l'extérieur de E .

Exemple.

$$c_i = \int_{-1}^{+1} x^{i+2} dx.$$

$$u_2(x) = P_2(x) = x^2 - \frac{3}{5}, \quad e_i = \int_{-1}^{+1} P_2(x) x^{i+2} dx$$

$$V_3(x) = x(x^2 - \frac{10}{9})$$

Nous introduisons de nouvelles notations.

$$u_2^{(\cdot, j)}(x) = x^2 - a_j^2 \text{ pour } j \in \mathbb{N}, j \geq 1.$$

Nous désignerons par $v^{(\cdot, j)}$ les polynômes orthogonaux par rapport à $e^{(\cdot, j)}$, où :

$$e_i^{(\cdot, j)} = e^{(\cdot, j-1)}(u_2^{(\cdot, j)}(x) x^i) \text{ pour } j \in \mathbb{N}, j \geq 1 \text{ et } i \in \mathbb{N}$$

avec

$$e^{(\cdot, 0)} \equiv c^{(\cdot)}$$

Le point réserve la place de l'indice qui correspond aux numéros des diagonales paires dans les diverses tables des polynômes orthogonaux.

Propriété 3.32.

Si $P_{n+2}^{(\cdot)}(a_{k+1}) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq \text{entier } [\frac{n}{2}]$, alors :

$V_{n-2k}^{(\cdot, k+1)}$ et $V_{n+3}^{(\cdot, k+1)}$ sont orthogonaux réguliers

$$P_{n+2}^{(\cdot)}(x) = V_{n-2k}^{(\cdot, k+1)}(x) \prod_{s=1}^{k+1} u_2^{(\cdot, s)}(x)$$

$$H_{n-2k}^{*(\cdot, k+1)} \neq 0, H_{n+3}^{*(\cdot, k+1)} \neq 0 \text{ et } H_{\ell}^{*(\cdot, k+1)} = 0$$

pour $\ell \in \mathbb{N}$, $n-2k+1 \leq \ell \leq n+2$.

Démonstration.

Appelons \hat{V}_{n-2k} le polynôme tel que :

$$P_{n+2}^{(\cdot)}(x) = \hat{V}_{n-2k}(x) \prod_{s=1}^{k+1} u_2^{(\cdot, s)}(x).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} c^{(\cdot)}(P_{n+2}^{(\cdot)}(x) x^{\ell}) &= c^{(\cdot)}(x^{\ell} \hat{V}_{n-2k}(x) \prod_{s=1}^{k+1} u_2^{(\cdot, s)}) \\ &= e^{(\cdot, k+1)}(x^{\ell} \hat{V}_{n-2k}(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell \leq n+1, \end{aligned}$$

$$e^{(\cdot, k+1)}(x^{\ell} \hat{V}_{n-2k}(x)) \neq 0 \text{ pour } \ell = n+2.$$

Donc \hat{V}_{n-2k} est orthogonal par rapport à $e^{(\cdot, k+1)}$.

D'autre part $H_\ell^{*(.,k+1)} = 0$ pour $\ell \in \mathbb{N}$, $n-2k+1 \leq \ell \leq n+2$ (cf. la remarque 1.3).

Donc d'après la propriété 3.21, \widehat{V}_{n-2k} est orthogonal régulier.

Il est donc identique à $V_{n-2k}^{(.,k+1)}$.

Puisque $e^{(.,k+1)}(x^{n+2} V_{n-2k}^{(.,k+1)}) \neq 0$, alors $V_{n+3}^{(.,k+1)}$ est orthogonal régulier.

Enfin nous avons bien les relations proposées sur les déterminants de Hankel $H^{*(.,k+1)}$.

cqfd.

Propriété 3.33.

Les diagonales (.) paires ont toujours un nombre pair de déterminants $H^{*(.,k)}$ nuls consécutifs.

Démonstration.

En effet d'après les propriétés des fonctionnelles lacunaires d'ordre 2, les blocs sont de largeur $2(r+1)-1$ et leur angle Nord-Ouest est occupé par un polynôme pair sur une diagonale impaire. Donc toutes les diagonales paires ont un nombre pair de déterminants de Hankel nuls consécutifs.

cqfd.

Nous noterons les relations de récurrence à trois termes.

$$V_i^{(.,k)}(x) = (x \omega_{i-\text{pr}(i,.)-1}^{(.,k)}(x) + B_i^{(.,k)} V_{\text{pr}(i,.)}^{(.,k)}(x) + C_i^{(.,k)} V_{\text{pr}(\text{pr}(i,.),.)}^{(.,k)}(x))$$

Si $V_i^{(.,k)}$ n'est pas orthogonal régulier nous garderons la même relation de récurrence avec $C_i^{(.,k)} = 0$.

Nous poserons entier $\binom{n}{2} = [\frac{n}{2}]$.

Propriété 3.34.

Si $P_{n+2}^{(\cdot)}(a_{k+1}) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$, alors :

$$V_{n+3}^{(\cdot, k+1)}(x) = V_{n+3}^{(\cdot, k)}(x) + x C_{n+4}^{(\cdot, k)} V_{n-2k}^{(\cdot, k+1)}(x)$$

pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$.

$C_{n+4}^{(\cdot, k)} = 0$ si $V_{n+4}^{(\cdot, k)}$ n'est pas orthogonal régulier.

$C_{n+4}^{(\cdot, k)} \neq 0$ si $V_{n+4}^{(\cdot, k)}$ est orthogonal régulier.

Démonstration.

D'après la propriété 3.23 nous avons :

$$u_2^{(\cdot, k+1)}(x) V_{n+3}^{(\cdot, k+1)}(x) = \sum_{i=n+3}^{n+5} t_i^{(\cdot, k+1)} V_i^{(\cdot, k)}(x)$$

avec $t_{n+5}^{(\cdot, k+1)} = 1$.

D'autre part $V_{n-2k+2}^{(\cdot, k)}(x) = u_2^{(\cdot, k+1)}(x) V_{n-2k}^{(\cdot, k+1)}(x)$.

1) $V_{n+4}^{(\cdot, k)}$ est orthogonal régulier.

a) $V_{n+5}^{(\cdot, k)}$ est orthogonal régulier.

$$V_{n+5}^{(\cdot, k)}(x) = x V_{n+4}^{(\cdot, k)}(x) + C_{n+5}^{(\cdot, k)} V_{n+3}^{(\cdot, k)}(x)$$

$$V_{n+4}^{(\cdot, k)}(x) = x V_{n+3}^{(\cdot, k)}(x) + C_{n+4}^{(\cdot, k)} V_{n-2k+2}^{(\cdot, k)}(x).$$

En remplaçant dans la relation donnant $u_2^{(\cdot, k+1)}(x) v_{n+3}^{(\cdot, k+1)}(x)$ nous obtenons :

$$u_2^{(\cdot, k+1)}(x) v_{n+3}^{(\cdot, k+1)}(x) = (x(x + t_{n+4}^{(\cdot, k+1)})) + c_{n+5}^{(\cdot, k)} + t_{n+3}^{(\cdot, k+1)}) v_{n+3}^{(\cdot, k)}(x) + c_{n+4}^{(\cdot, k)}(x + t_{n+4}^{(\cdot, k+1)}) v_{n-2k+2}^{(\cdot, k)}(x).$$

Pour des raisons de parité $t_{n+4}^{(\cdot, k+1)} = 0$.

D'autre part $v_{n-2k+2}^{(\cdot, k)}(a_{k+1}) = 0$ et donc $v_{n+3}^{(\cdot, k)}(a_{k+1}) \neq 0$.

Par conséquent en faisant $x = a_{k+1}$ nous trouvons :

$$x^2 + c_{n+5}^{(\cdot, k)} + t_{n+3}^{(\cdot, k+1)} = u_2^{(\cdot, k+1)}(x).$$

D'où la relation proposée.

b) $v_{n+5}^{(\cdot, k)}$ n'est pas orthogonal régulier.

$$v_{n+5}^{(\cdot, k)}(x) = w_1^{(\cdot, k)}(x) v_{n+4}^{(\cdot, k)}(x).$$

Nous trouvons dans ce cas :

$$u_2^{(\cdot, k+1)}(x) v_{n+3}^{(\cdot, k+1)}(x) = (x(w_1^{(\cdot, k)}(x) + t_{n+4}^{(\cdot, k+1)}) + t_{n+3}^{(\cdot, k+1)}) v_{n+3}^{(\cdot, k)}(x) + (w_1^{(\cdot, k)}(x) + t_{n+4}^{(\cdot, k+1)}) c_{n+4}^{(\cdot, k)} v_{n-2k+2}^{(\cdot, k)}(x).$$

Pour des raisons de parité $w_1^{(\cdot, k)}(x) + t_{n+4}^{(\cdot, k+1)} = x$.

Enfin par un raisonnement analogue au a) nous obtenons :

$$x(w_1^{(\cdot,k)}(x) + t_{n+4}^{(\cdot,k+1)}) + t_{n+3}^{(\cdot,k+1)} = u_2^{(\cdot,k+1)}(x)$$

Dans ce cas $t_{n+3}^{(\cdot,k+1)} = -a_{k+1}^2$.

ii) $v_{n+4}^{(\cdot,k)}$ n'est pas orthogonal régulier,

alors d'après la propriété 3.33, $v_{n+5}^{(\cdot,k)}$ n'est pas non plus orthogonal régulier

$$v_{n+5}^{(\cdot,k)}(x) = w_2^{(\cdot,k)}(x) v_{n+3}^{(\cdot,k)}(x)$$

$$v_{n+4}^{(\cdot,k)}(x) = w_1^{(\cdot,k)}(x) v_{n+3}^{(\cdot,k)}(x).$$

Donc

$$u_2^{(\cdot,k+1)}(x) v_{n+3}^{(\cdot,k+1)}(x) = (w_2^{(\cdot,k)}(x) + t_{n+4}^{(\cdot,k+1)} w_1^{(\cdot,k)}(x) + t_{n+3}^{(\cdot,k+1)}) v_{n+3}^{(\cdot,k)}(x)$$

Nous trouvons ici que :

$$w_2^{(\cdot,k)}(x) + t_{n+4}^{(\cdot,k+1)} w_1^{(\cdot,k)}(x) + t_{n+3}^{(\cdot,k+1)} = u_2^{(\cdot,k+1)}(x)$$

et donc

$$v_{n+3}^{(\cdot,k+1)} = v_{n+3}^{(\cdot,k)}(x).$$

cqfd.

Propriété 3.35.

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, $1 \leq k \leq [\frac{n}{2}] - 1$, si $C_{n+4}^{(\cdot, k-1)} \neq 0$ alors :

$$u_2^{(\cdot, k+1)}(x) v_{n+3}^{(\cdot, k+1)}(x) = v_{n+3}^{(\cdot, k)}(x) (u_2^{(\cdot, k+1)}(x) + \frac{C_{n+4}^{(\cdot, k)}}{C_{n+4}^{(\cdot, k-1)}}) - \frac{C_{n+4}^{(\cdot, k)}}{C_{n+4}^{(\cdot, k-1)}} v_{n+3}^{(\cdot, k-1)}(x)$$

Démonstration.

En utilisant la propriété 3.34, nous avons :

$$v_{n+3}^{(\cdot, k+1)}(x) = v_{n+3}^{(\cdot, k)}(x) + x C_{n+4}^{(\cdot, k)} v_{n-2k}^{(\cdot, k+1)}(x),$$

$$v_{n+3}^{(\cdot, k)}(x) = v_{n+3}^{(\cdot, k-1)}(x) + x C_{n+4}^{(\cdot, k-1)} v_{n-2k+2}^{(\cdot, k)}(x).$$

On multiplie la première relation par $u_2^{(\cdot, k+1)}$ et on lui retranche la seconde multipliée par $\frac{C_{n+4}^{(\cdot, k)}}{C_{n+4}^{(\cdot, k-1)}}$.

cgfd.

Cette dernière relation pourrait permettre éventuellement de résoudre le problème des zéros de $v_{n+3}^{(\cdot, k+1)}$ si on avait des informations supplémentaires sur $\frac{C_{n+4}^{(\cdot, k)}}{C_{n+4}^{(\cdot, k-1)}}$, par exemple son signe et sa valeur relative par rapport à $-a_{k+1}^2$.

Théorème 3.12.

On suppose les racines positives de P_{n+2} rangées dans l'ordre suivant :

$$a_1 > a_2 > \dots > a_{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}.$$

Alors $V_i^{(\cdot, k)}$ a toutes ses racines réelles distinctes séparées par celles de $V_{i-1}^{(\cdot, k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ et $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n-2k+2$, et $C_i^{(\cdot, k)} < 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $2 \leq i \leq n-2k+2$.

Démonstration.

Puisque a_1 est la plus grande racine de $P_{n+2}^{(\cdot)}$ et que $V_{n+3}^{(\cdot, 1)}$ a tous ses zéros séparés par ceux de P_{n+2} , alors entre deux zéros consécutifs de $V_n^{(\cdot, 1)}$ se trouve un zéro et un seul de $V_{n+3}^{(\cdot, 1)}$

$$V_{n+3}^{(\cdot, 1)}(x) = (x^3 + x \hat{B}_{n+3}^{(\cdot, 1)}) V_n^{(\cdot, 1)}(x) + C_{n+3}^{(\cdot, 1)} V_{pr(n)}^{(\cdot, 1)}(x).$$

Par un raisonnement analogue au théorème 3.9 nous trouvons que $pr(n)=n-1$, et que deux zéros de $V_n^{(\cdot, 1)}$ sont séparés par un zéro de $V_{n-1}^{(\cdot, 1)}$.

Nous trouverons donc que $V_i^{(\cdot, 1)}$ a tous ses zéros réels distincts séparés par ceux de $V_{i-1}^{(\cdot, 1)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$.

De plus $C_i^{(\cdot, 1)} < 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $2 \leq i \leq n$.

a_2 est le plus grand zéro de $V_n^{(\cdot, 1)}$, donc a_2 n'est pas zéro de $V_i^{(\cdot, 1)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n-1$, à cause de l'entrelacement des zéros.

Donc $v_i^{(\cdot,2)}$ est orthogonal régulier, $\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n-2$.

Par conséquent nous avons :

$$u_2^{(\cdot,2)}(x) v_{i-2}^{(\cdot,2)}(x) = v_i^{(\cdot,1)}(x) + t_{i-2}^{(\cdot,2)} v_{i-2}^{(\cdot,1)}(x)$$

avec

$$t_{i-2}^{(\cdot,2)} = - \frac{v_i^{(\cdot,1)}(a_2)}{v_{i-2}^{(\cdot,1)}(a_2)} < 0$$

puisque $v_i^{(\cdot,1)}(a_2) > 0$ pour $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n-1$.

De plus

$$v_{i-2}^{(\cdot,2)}(x) = x v_{i-3}^{(\cdot,2)}(x) + c_{i-2}^{(\cdot,2)} v_{i-4}^{(\cdot,2)}(x),$$

pour $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n$.

On multiplie les deux membres par $u_2^{(\cdot,2)}$ et on remplace en fonction des polynômes $v_i^{(\cdot,1)}$. On obtient :

$$\begin{aligned} v_i^{(\cdot,1)}(x) &= x v_{i-1}^{(\cdot,1)}(x) + (c_{i-2}^{(\cdot,2)} - t_{i-2}^{(\cdot,2)}) v_{i-2}^{(\cdot,1)}(x) + x t_{i-3}^{(\cdot,2)} v_{i-3}^{(\cdot,1)}(x) \\ &\quad + c_{i-2}^{(\cdot,2)} t_{i-4}^{(\cdot,2)} v_{i-4}^{(\cdot,1)}(x). \end{aligned}$$

Or

$$v_{i-4}^{(\cdot,1)}(x) = \frac{v_{i-2}^{(\cdot,1)}(x) - x v_{i-3}^{(\cdot,1)}(x)}{c_{i-2}^{(\cdot,1)}}$$

D'où

$$V_i^{(\cdot,1)}(x) = x V_{i-1}^{(\cdot,1)}(x) + (C_{i-2}^{(\cdot,2)} - t_{i-2}^{(\cdot,2)} + \frac{C_{i-2}^{(\cdot,2)} t_{i-4}^{(\cdot,2)}}{C_{i-2}^{(\cdot,1)}}) V_{i-2}^{(\cdot,1)}(x) \\ + x V_{i-3}^{(\cdot,1)}(x) (t_{i-3}^{(\cdot,2)} - \frac{C_{i-2}^{(\cdot,2)} t_{i-4}^{(\cdot,2)}}{C_{i-2}^{(\cdot,1)}})$$

Or

$$V_i^{(\cdot,1)}(x) = x V_{i-1}^{(\cdot,1)}(x) + C_i^{(\cdot,1)} V_{i-2}^{(\cdot,1)}(x),$$

ce qui entraîne que

$$t_{i-3}^{(\cdot,2)} - \frac{C_{i-2}^{(\cdot,2)} t_{i-4}^{(\cdot,2)}}{C_{i-2}^{(\cdot,1)}} = 0$$

sinon on trouverait $V_{i-2}^{(\cdot,1)}(x) = x V_{i-3}^{(\cdot,1)}(x)$.

D'où

$$C_{i-2}^{(\cdot,2)} = C_{i-2}^{(\cdot,1)} \frac{t_{i-3}^{(\cdot,2)}}{t_{i-4}^{(\cdot,2)}} < 0$$

D'après la remarque 3.6 les zéros de $V_i^{(\cdot,2)}$ sont réels distincts séparés par ceux de $V_{i-1}^{(\cdot,2)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n-2$.

Le raisonnement fait pour $V_i^{(\cdot,2)}$ s'applique à $V_i^{(\cdot,k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq [\frac{n+2}{2}]$ et $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n-2k+2$.

cqfd.

Remarque 3.10.

Pour le plus grand zéro a_2 de $V_n^{(\cdot,1)}$, $V_{n-1}^{(\cdot,1)}$ est positif.
 $V_{n+3}^{(\cdot,1)}$ est également positif, puisque d'après ce qui a été exposé en tête de la démonstration précédente, il y a deux zéros de V_{n+3} supérieurs à a_2 .
 Par conséquent

$$c_{n+3}^{(\cdot,1)} > 0$$

Nous prenons une fonctionnelle $c^{(s)}$ définie positive, $\forall s \in \mathbb{N}$ sur $E = [0,1]$.
 Nous noterons :

$$u_1(x) = x - a^2, \text{ avec } a^2 < 1.$$

Nous désignons toujours par $\{V_n\}$ les polynômes orthogonaux par rapport à e .

Propriété 3.36.

a^2 n'est racine d'aucun polynôme V_n orthogonal régulier.

Démonstration.

Si a^2 était racine de V_n on pourrait écrire

$$V_n(x) = (x - a^2) \hat{V}_{n-1}(x).$$

La fonctionnelle \hat{e} définie par $\hat{e}(x^i) = c((x-a^2)x^i)$ est définie positive.
 Donc aucun déterminant \hat{H} relatif à \hat{e} n'est nul.

Or

$$c((x-a^2) V_n(x) \cdot x^i) = c((x-a^2)^2 \hat{V}_{n-1}(x) x^i) = 0$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq n-1$.

Cette relation montre que \hat{V}_{n-1} est orthogonal et que $\hat{H}_n = 0$, ce qui est impossible.

cqfd.

Propriété 3.37.

Si V_k est orthogonal régulier, V_k a ses k zéros réels distincts. $k-1$ d'entre eux sont dans $[0,1]$.

Si V_{k+1} n'est pas orthogonal régulier, le dernier zéro de V_k est aussi dans $[0,1]$.

Démonstration.

i) Nous avons :

$$(x-a^2) V_k(x) = P_{k+1}(x) + t_k P_k(x).$$

Prenons deux zéros consécutifs de P_{k+1} placés d'un même côté de a^2 .

Un zéro de P_k les sépare, donc aussi un zéro de V_k .

On place ainsi $k-1$ zéros réels distincts de V_k .

On ne peut donc avoir de zéro double et par conséquent le $k^{\text{ème}}$ zéro est réel distinct des autres.

ii) D'après le corollaire 3.10, si V_{k+1} n'est pas orthogonal régulier, alors

$$(x-a^2) V_k(x) = P_{k+1}(x).$$

D'où la conclusion.

cqfd.

En dehors du cas où V_{k+1} n'est pas orthogonal régulier la propriété précédente ne précise pas où se trouve le dernier zéro. Il pourrait donc être en dehors de $[0,1]$ et en particulier négatif.

Nous appelons $z_{i,k}$ les zéros de P_k pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k$ et $z_{i,k} < z_{i+1,k}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k-1$.

Nous rappelons que si V_k est orthogonal régulier, alors $P_k(a^2) \neq 0$ (d'après le lemme 3.1).

Entre $z_{i,k+1}$ et $z_{i+1,k+1}$, nous avons :

$$\text{signe } P_{k+1}(x) = \text{signe } P_k(z_{i,k+1}) = - \text{signe } P_k(z_{i+1,k+1}).$$

C'est une conséquence directe du fait qu'entre deux zéros consécutifs de P_{k+1} se trouve un zéro unique de P_k et réciproquement et que ces polynômes sont positifs au-delà de leur plus grand zéro.

Lemme 3.2.

- i) Si $z_{i,k+1} < a^2 < z_{i,k}$, alors $t_k < 0$.
- ii) $z_{i,k} < a^2 < z_{i+1,k+1}$, alors $t_k > 0$.

Démonstration.

$$t_k = - \frac{P_{k+1}(a^2)}{P_k(a^2)}$$

i)
$$\text{signe } P_{k+1}(a^2) = \text{signe } P_k(z_{i,k+1}) = \text{signe } P_k(a^2)$$

ii)
$$\text{signe } P_{k+1}(a^2) = -\text{signe } P_k(z_{i+1,k+1}) = -\text{signe } P_k(a^2).$$

cqfd.

Propriété 3.38.

Si V_k et V_{k+1} sont orthogonaux réguliers et si :

- i) $z_{i,k+1} < a^2 < z_{i,k}$, alors V_k a son dernier zéro sur $]z_{k+1,k+1}, +\infty[$
- ii) $z_{i,k} < a^2 < z_{i+1,k+1}$, alors V_k a son dernier zéro sur $] -\infty, z_{1,k+1}[$
- iii) Si $a^2 \notin [z_{1,k+1}, z_{k+1,k+1}]$, alors les zéros de V_k séparent les zéros de P_{k+1} .

Démonstration.

i) D'après le lemme 3.2, $t_k < 0$.

Donc $(z_{k+1,k+1} - a^2) V_k(z_{k+1,k+1}) = t_k P_k(z_{k+1,k+1}) < 0$, et par conséquent

V_k s'annule sur $]z_{k+1,k+1}, +\infty[$.

ii) Dans ce cas, $t_k > 0$.

Donc $V_k(z_{k+1,k+1}) > 0$.

V_k s'annule en dehors de $[z_{1,k+1}, z_{k+1,k+1}]$ donc sur $] -\infty, z_{1,k+1}[$.

iii) Evident en utilisant le i) de la démonstration de la propriété 3.37.

cgfd.

Propriété 3.39.

Si V_n est orthogonal régulier et si $u_1(x) V_n(x) = P_{n+1}(x)$,
alors :

$$V_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + C_{n+3} V_n(x).$$

Démonstration.

Dans ce cas $H_{n+1}^* = 0$.

D'autre part

$$\begin{aligned} u_1(x) V_{n+2}(x) &= P_{n+3}(x) + t_{n+2} P_{n+2}(x) \\ &= (x + B_{n+3} + t_{n+2}) P_{n+2}(x) + C_{n+3} P_{n+1}(x) \\ &= u_1(x) P_{n+2}(x) + C_{n+3} P_{n+1}(x) \end{aligned}$$

puisque les deux membres sont nuls pour $x = a^2$.

En divisant par u_1 , nous obtenons le résultat.

cqfd.

Propriété 3.40.

Si V_n est orthogonal régulier et si $u_1(x) V_n(x) = P_{n+1}(x)$, alors V_{n+2} a tous ses zéros réels distincts séparés par ceux de P_{n+1} .

Démonstration.

Entre deux zéros de P_{n+2} se trouve un zéro de P_{n+1} . Donc a^2 est toujours entre deux zéros de P_{n+2} .

Entre deux zéros consécutifs z_1 et z_2 de P_{n+2} se trouve un zéro de V_{n+2} , si $a^2 \notin [z_1, z_2]$.

Soit z_M le plus grand zéro de P_{n+2} , alors $C_{n+3} V_n(z_M) < 0$ puisqu'après le plus grand zéro de V_n qui est inférieur à z_M , ce polynôme est positif. Par conséquent $V_{n+2}(z_M) < 0$. Donc il existe au moins un nombre impair

de zéros de V_{n+2} sur $]z_M, +\infty[$.

On place ainsi $(n+1)$ zéros de V_{n+2} .

Le dernier zéro doit donc être inférieur au plus petit zéro z_m de P_{n+2} .

Réciproquement entre deux zéros consécutifs y_1 et y_2 de V_{n+2} se trouve un zéro de P_{n+2} , donc aussi un zéro de V_n , sauf si $a^2 \in [y_1, y_2]$.

Mais a^2 est un zéro de P_{n+1} qui sépare y_1 et y_2 .

cqfd.

