N° d'ordre : 531



# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES**

par

André DRAUX

# POLYNOMES ORTHOGONAUX FORMELS. APPLICATIONS.

TOME 2



**Soutenue le 7 décembre 1981 devant la Commission d'Examen**

| | | |
|---|---|---|
| **Membres du Jury** | **P. POUZET** | **Président** |
| | **J. MEINGUET** | **Rapporteur** |
| | **H. VAN ROSSUM** | **Rapporteur** |
| | **P. HENRICI** | **Rapporteur** |
| | **C. BREZINSKI** | **Rapporteur** |
| | **P. MARONI** | **Membre Invité** |

# 4

## RELATIONS TOUS AZIMUTS

\- * -

*Ce chapitre vise essentiellement à donner les relations et les algorithmes permettant des déplacements dans toutes les directions dans la table* P. *A cette occasion nous serons amenés à définir de nouvelles relations d'orthogonalité pour des polynômes qui sont reliés aux polynômes orthogonaux de la table* P.

*Dans la première section nous calculons* $q^{(n)}$ *et* $E^{(n)}$ *en fonction des déterminants de Hankel. Nous retrouvons la relation de Gilewicz et Froissart permettant le calcul de la table* H *en présence de blocs* H. *Nous en déduisons le calcul des coefficients B qui interviennent dans les polynômes* $\omega(x)$ *qui permettent de traverser les blocs* P.

*Dans la seconde section nous introduisons les polynômes d'Hadamard et leurs transformés* $\tilde{H}(x)$, *puis nous donnons les relations de récurrence entre les transformés de trois polynômes d'Hadamard orthogonaux réguliers consécutifs, au cours de déplacements sur une diagonale ou deux diagonales adjacentes.*

*Dans la troisième section nous définissons une nouvelle fonctionnelle linéaire* $\gamma^{(m)}$ *par rapport à laquelle nous cherchons les polynômes orthogonaux. Ce sont les polynômes* $W_i^{(m)}(x)$. *Ils ont la particularité de se* *situer sur les antidiagonales de la table* W *et sont proportionnels aux transformés des polynômes d'Hadamard sous certaines conditions. Tous les résultats des chapitres précédents s'appliquent à ces nouvelles familles de polynômes. Nous indiquons comment passer d'une propriété relative aux polynômes* $P_i^{(n)}(x)$ *à celle qui s'applique aux polynômes* $W_i^{(m)}(x)$. *Nous retrouvons en particulier les relations de récurrence à trois termes, les relations entre systèmes adjacents, un algorithme* $\tilde{qd}$, *les relations avec les déterminants de Hankel.*

*La quatrième section est consacrée aux relations de récurrence entre les transformés* $\tilde{HW}^{(m)}(x)$ *de trois polynômes* $W_i^{(m)}(x)$ *orthogonaux réguliers consécutifs, au cours de déplacements sur une antidiagonale ou deux antidiagonales adjacentes. Ces relations se déduisent simplement de la section 4.2.*

*Les sections 2 et 4 nous permettent de déduire dans la cinquième section la relation de récurrence qui existe entre trois polynômes orthogonaux réguliers successifs placés sur une même horizontale en dehors de la réunion des blocs* P *et* W. *Elle rend possible le calcul de ces polynômes au cours de déplacements horizontaux.*

*La sixième section exploite la relation de la section précédente. Nous montrons qu'elle est la conséquence d'une nouvelle forme d'orthogonalité appelée "semi-orthogonalité". Nous étudions surtout ce qui se passe en présence de blocs. Nous prouvons également que donner deux polynômes semi-orthogonaux sur une même horizontale et un paramètre permettant de positionner le bloc qui les sépare, détermine de façon unique toute la table comprise entre la diagonale et l'antidiagonale qui passe par celui des deux polynômes qui a le plus grand degré i, depuis les polynômes de degré 0 jusqu'au degré i.*

*La "semi-orthogonalité" englobe le cas particulier des polynômes orthogonaux sur le cercle. La septième section est consacrée à quelques nouvelles propriétés de ces polynômes et des polynômes des horizontales adjacentes, dont la table présente une espèce de "symétrie".*

*Suivant Ya. L. Geronimus* [20] *nous introduisons les polynômes*

$\phi_j^{*(s)}(z) = z^j\, \bar{\phi}_j^{(s)}\,(\frac{1}{z})$ *où la barre représente le polynôme dont les coefficients sont imaginaires conjugués de ceux de* $\phi$. *Nous généralisons quelques résultats présentés dans* [20] *dans le cas normal.*

*Pour terminer cette section nous donnons également une généralisation de la propriété d'approximation vérifiée par les polynômes* $\phi^*$ *et* $\psi^*$. *Les polynômes* $\psi$ *sont les polynômes du second ordre définis dans* [20].

*Il ne nous restait plus qu'à donner dans la huitième section la relation de récurrence vérifiée par trois polynômes orthogonaux réguliers successifs placés sur une même verticale en dehors de la réunion des blocs* P *et de leur côté ouest. Dans le cas particulier où* $P_i(x) = x^i$ *la relation de récurrence n'est pas unique.*

*Après une propriété sur les zéros de ces polynômes nous démontrons une propriété analogue à celle qui avait été établie pour les polynômes semi-orthogonaux. Donner deux polynômes orthogonaux réguliers successifs de degré* i *sur une même verticale, et un paramètre permettant de positionner le bloc qui les sépare, détermine de façon unique toute la table comprise entre la diagonale et l'antidiagonale passant par celui des deux polynômes qui est situé sur la diagonale d'indice le plus élevé, depuis les polynômes de degré 0 jusqu'au degré* i.

*Enfin dans la dernière section, nous proposons des algorithmes pour déterminer les polynômes orthogonaux et leurs associés suivant une diagonale ou deux diagonales adjacentes. Ces algorithmes demeurent valables suivant les antidiagonales pour déterminer les polynômes* W(x) *orthogonaux par rapport à la fonctionnelle linéaire* $\gamma$.

*Nous proposons également un algorithme pour les déplacements horizontaux et un autre pour les déplacements verticaux.*

# 4.1 RELATIONS AVEC LES DETERMINANTS DE HANKEL

Nous allons chercher les relations qui existent entre les déterminants de Hankel et les coefficients $q_j^{(n)}$ et $E_j^{(n)}$.
Si $P_i^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier on a :

$$H_i^{(n)} P_i^{(n)}(x) = \begin{vmatrix} c_n & \cdots & c_{n+i} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+i-1} & \cdots & c_{n+2i-1} \\ 1 & \cdots & x^i \end{vmatrix} \quad \text{et } H_i^{(n)} \neq 0$$

$$H_i^{(n)} \cdot P_i^{(n)}(o) = (-1)^i \, H_i^{(n+1)}.$$

*Propriété 4.1.*

*Si $P_i^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier on a :*

$$P_i^{(n)}(o) = 0 \iff H_i^{(n+1)} = 0$$

Démonstration.

$$P_i^{(n)}(o) = 0 \iff P_i^{(n)}(x) \text{ est au nord d'un bloc } P$$
$$\iff P_i^{(n+1)}(x) \text{ n'est pas orthogonal régulier} \iff H_i^{(n+1)}=0$$

cqfd.

*Propriété 4.2.*

*Si $P_i^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier, alors $P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(o) \neq 0$.*

Démonstration.

Si $pr(i+1,n) = i$, $P_i^{(n)}(o) \neq o$ car il n'est pas au nord d'un bloc P, puisque $H_i^{(n+1)} \neq 0$.

Si $pr(i+1,n) \neq i$, $P^{(n)}_{pr(i+1,n)}(x)$ est à l'ouest ou au nord ouest du bloc P, donc $P^{(n)}_{pr(i+1,n)}(o) \neq 0$.

cqfd.

*Corollaire 4.1.*

*Si* $P_i^{(n+1)}(x)$ *est orthogonal régulier, alors* $H^{(n+1)}_{pr(i+1,n)} \neq 0$.

Démonstration.

$$H^{(n)}_{pr(i+1,n)} P^{(n)}_{pr(i+1,n)}(o) = (-1)^{pr(i+1,n)} H^{(n+1)}_{pr(i+1,n)}$$

Le premier membre est non nul puisque $P^{(n)}_{pr(i+1,n)}(x)$ est orthogonal régulier

cqfd.

La propriété suivante nous donne $q^{(n)}_{i+1,\ell}$ en fonction des déterminants de Hankel.

*Propriété 4.3.*

*Si* $P_i^{(n+1)}(x)$ *est orthogonal régulier on a :*

*i)*

$$H^{(n)}_{i+1}\, q^{(n)}_{i+1,\ell} = (-1)^{i+pr(i+1,n)}\, H^{(n+1)}_{i+1} \frac{H^{(n)}_{pr(i+1,n)}}{H^{(n+1)}_{pr(i+1,n)}}$$

*ii)* *Si en plus* $P^{(n)}_{i+1}(x)$ *est orthogonal régulier on a :*

$$q^{(n)}_{i+1,\ell} = (-1)^{i+pr(i+1,n)} \frac{H^{(n+1)}_{i+1}\, H^{(n)}_{pr(i+1,n)}}{H^{(n)}_{i+1}\, H^{(n+1)}_{pr(i+1,n)}}$$

*iii)* *Si* $P^{(n)}_{i+1}(x)$ *est orthogonal singulier, on a* $q^{(n)}_{i+1,\ell}$ *arbitraire en utilisant la relation du i).*

Démonstration.

i) La relation donnée est la transcription immédiate de $P_{i+1}^{(n)}(o) = -q_{i+1\ell}^{(n)} P_{pr(i+1,n)}^{(n)}(0)$ obtenue à partir de la première relation de la propriété 2.4.
On utilise la relation $H_j^{(n)} P_j^{(n)}(o) = (-1)^j H_j^{(n+1)}$ et le corollaire 4.1.

ii) On utilise la relation du i) et le fait que $P_{i+1}^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier.

iii) Si $P_{i+1}^{(n)}(x)$ est orthogonal singulier on a $H_{i+1}^{(n)} = 0$ et aussi $H_{i+1}^{(n+1)} = 0$, car, d'après la remarque 2.2, en dessous de tout polynôme orthogonal singulier il y a au moins un polynôme qui n'est pas orthogonal régulier.
Si on utilise la relation du i) on a : $0 \,.\, q_{i+1,\ell}^{(n)} = 0$ ce qui entraine que $q_{i+1,\ell}^{(n)}$ est arbitraire.
Ce résultat est conforme à ce qui a été prouvé dans la propriété 2.4.

cqfd.

Nous avons l'analogue de la propriété précédente pour le coefficient $E_{i+1}^{(n)}$, mais elle est, comme on pourra le constater, peu pratique dans le cas où $pr(i+1,n) \neq i$ à cause du coefficient $B_i^{(n+1)}$ qui intervient.

*Propriété 4.4.*

*Soit* $P_i^{(n+1)}(x)$ *un polynôme orthogonal régulier. On a :*

*i)* *Si* $pr(i+1,n) \neq i$

$$H_{pr(pr(i+1,n),n+1)}^{(n+2)} E_{i+1}^{(n)} = (-1)^{pr(pr(i+1,n),n+1)} H_{pr(pr(i+1,n),n+1)}^{(n+1)}$$

$$* \left[ \frac{(-1)^i H_i^{(n+2)} H_{pr(i+1,n)}^{(n)} - (-1)^{pr(i+1,n)} B_i^{(n+1)} H_{pr(i+1,n)}^{(n+1)} H_i^{(n+1)}}{H_i^{(n+1)} H_{pr(i+1,n)}^{(n)}} \right]$$

*Si* $pr(i+1,n) = i$

$$H^{(n+2)}_{pr(i,n+1)} E^{(n)}_{i+1} = (-1)^{pr(i,n+1)+i} H^{(n+1)}_{pr(i,n+1)} \left[ \frac{H_i^{(n+2)} H_i^{(n)} - (H_i^{(n+1)})^2}{H_i^{(n+1)} H_i^{(n)}} \right]$$

*ii)* *Si* $P^{(n+1)}_{pr(pr(i+1,n),n+1)}(0) \neq 0$ *on a si* $pr(i+1,n) \neq i$ :

$$E^{(n)}_{i+1} = (-1)^{pr(pr(i+1,n),n+1)} \frac{H^{(n+1)}_{pr(pr(i+1,n),n+1)}}{H^{(n+2)}_{pr(pr(i+1,n),n+1)}} *$$

$$\left[ \frac{(-1)^i H_i^{(n+2)} H^{(n)}_{pr(i+1,n)} - (-1)^{pr(i+1,n)} B_i^{(n+1)} H^{(n+1)}_{pr(i+1,n)} H_i^{(n+1)}}{H_i^{(n+1)} H^{(n)}_{pr(i+1,n)}} \right]$$

*Si* $pr(i+1,n) = i$,

$$E^{(n)}_{i+1} = (-1)^{pr(i,n+1)+i} \frac{H^{(n+1)}_{pr(i,n+1)}}{H^{(n+2)}_{pr(i,n+1)}} \left[ \frac{H_i^{(n+2)} H_i^{(n)} - (H_i^{(n+1)})^2}{H_i^{(n+1)} H_i^{(n)}} \right]$$

*iii)* *Si* $P^{(n+1)}_{pr(pr(i+1,n),n+1)}(0) = 0$ *on a* :

$$H_i^{(n+2)} H^{(n)}_{pr(i+1,n)} - (-1)^{i+pr(i+1,n)} B_i^{(n+1)} H^{(n+1)}_{pr(i+1,n)} H_i^{(n+1)} = 0 \text{ si } pr(i+1,n) \neq i,$$

$$H_i^{(n+2)} H_i^{(n)} - (H_i^{(n+1)})^2 = 0 \text{ si } pr(i+1,n) = i.$$

Démonstration.

i) Si $P_i^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier, on a :

$$P_i^{(n+1)}(x) = \omega^{(n)}_{i-pr(i+1,n)}(x) P^{(n)}_{pr(i+1,n)}(x) + E^{(n)}_{i+1} P^{(n+1)}_{pr(pr(i+1,n),n+1)}(x)$$

On écrit cette relation pour $x = 0$.

On sait d'après la présentation du qd que :

$$\omega^{(n)}_{i-pr(i+1,n)}(x) = x\,\omega^{(n+1)}_{i-1-pr(i+1,n)} + B^{(n+1)}_i$$

Si $pr(i+1,n) = i$, on a $\omega^{(n+1)}_{i-pr(i+1,n)}(x) = 1$ sinon on a :

$$\omega^{(n)}_{i-pr(i+1,n)}(o) = B^{(n+1)}_i$$

On obtient donc les relations proposées en utilisant la relation $H^{(n)}_j P^{(n)}_j(0) = (-1)^j\ H^{(n+1)}_j$ et le corollaire 4.1.

ii) Si $P^{(n+1)}_{pr(pr(i+1,n),n+1)}(0) \neq 0 \Rightarrow P^{(n+2)}_{pr(pr(i+1,n),n+1)}(x)$ est orthogonal régulier $\Rightarrow H^{(n+2)}_{pr(pr(i+1,n),n+1)} \neq 0$. D'où les deux relations.

iii) Si $P^{(n+1)}_{pr(pr(i+1,n),n+1)}(0) = 0 \Rightarrow P^{(n+2)}_{pr(pr(i+1,n),n+1)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier $\Rightarrow H^{(n+2)}_{pr(pr(i+1,n),n+1)} = 0$. D'où les deux relations.

cqfd.

Nous donnons maintenant les relations existant entre déterminants de Hankel et les fonctionnelles de certains produits de polynômes, en vue de calculer par la suite les coefficients $C^{(n)}_{su(i+1,n)}$.

*Propriété 4.5.*

*i)* *Si* $P^{(n)}_i(x)$ *est orthogonal régulier, alors*

$$c^{(n)}((P^{(n)}_i(x))^2) = \frac{H^{(n)}_{i+1}}{H^{(n)}_i}$$

*Nous considérons dans la suite que* $h_\ell+1$ *et* $p_\ell+1$ *sont les indices limites extérieurs du bloc* P *pour* $P^{(n)}_i(x)$.

*ii)* *Si* $P_{p_\ell}^{(n+1)}(x)$ *est orthogonal régulier, alors*

$$c^{(n)}(P_{h_\ell+1}^{(n)}\ P_{p_\ell}^{(n)}) = (-1)^{p_\ell+h_\ell+1}\ \frac{H_{p_\ell+1}^{(n)}\ H_{h_\ell+1}^{(n+1)}}{H_{p_\ell}^{(n+1)}\ H_{h_\ell+1}^{(n)}}$$

*iii)* *Si* $P_{p_\ell+1}^{(n+1)}(x)$ *est orthogonal régulier, alors :*

$$c^{(n)}(P_{h_\ell+1}^{(n)}\ P_{p_\ell}^{(n)}) = (-1)^{p_\ell+h_\ell}\ \frac{H_{p_\ell+1}^{(n+1)}\ H_{h_\ell+1}^{(n)}}{H_{h_\ell}^{(n+1)}\ H_{p_\ell+1}^{(n)}}$$

*iv)* *Si* $P_{p_\ell+2}^{(n-1)}(x)$ *est orthogonal régulier, alors :*

$$c^{(n)}(P_{h_\ell+1}^{(n)}\ P_{p_\ell}^{(n)}) = (-1)^{p_\ell+h_\ell}\ \frac{H_{p_\ell+2}^{(n-1)}\ H_{h_\ell+1}^{(n)}}{H_{p_\ell+1}^{(n)}\ H_{h_\ell+1}^{(n-1)}}$$

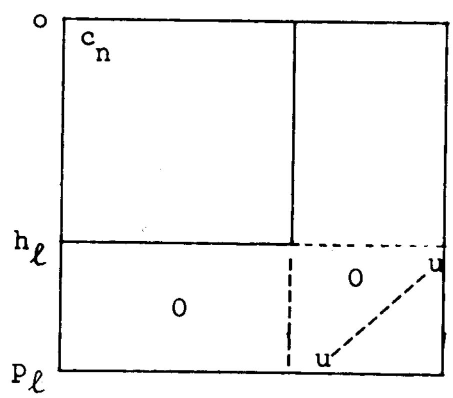
*v)* *Si* $P_{p_\ell+1}^{(n-1)}(x)$ *est orthogonal régulier alors :*

$$c^{(n)}(P_{h_\ell+1}^{(n)}\ P_{p_\ell}^{(n)}) = (-1)^{p_\ell+h_\ell+1}\ \frac{H_{p_\ell+1}^{(n)}\ H_{h_\ell+2}^{(n-1)}}{H_{p_\ell+1}^{(n-1)}\ H_{h_\ell+1}^{(n)}}$$

Démonstration.

i) Livre de C. Brezinski page 46.

ii) On considère le déterminant $H^{(n)}_{p_\ell+1}$.




On sait que $H^{(n)}_{h_\ell+1} \neq 0$ et que $H^{(n)}_j = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $h_\ell+2 \leq j \leq p_\ell$.

On rappelle que :

$$H^{(n)}_{p_\ell+1} = (-1)^{(p_\ell-h_\ell)\,\frac{(p_\ell+3h_\ell+3)}{2}}\; u^{p_\ell-h_\ell}\, H^{(n)}_{h_\ell-1}$$

On a également :

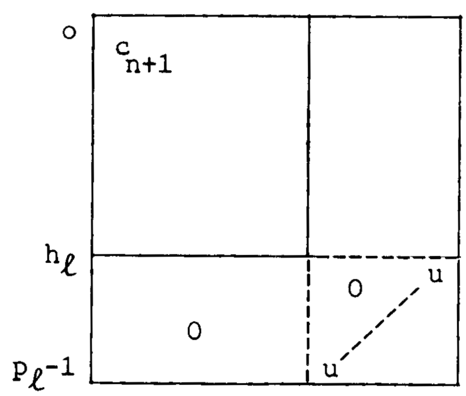
$$c^{(n)}(P^{(n)}_{h_\ell+1}\,P^{(n)}_{p_\ell}) = c^{(n)}(x^{p_\ell}\,P^{(n)}_{h_\ell+1}) = \frac{1}{H^{(n)}_{h_\ell+1}}\; c^{(n)}(x^{p_\ell}H^{(n)}_{h_\ell+1}\,P^{(n)}_{h_\ell+1})$$

$$c^{(n)}(x^{p_\ell}H^{(n)}_{h_\ell+1}\,P^{(n)}_{h_\ell+1}) = \begin{vmatrix} c_n & \cdots & c_{n+h_\ell+1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+h_\ell} & \cdots & c_{n+2h_\ell+1} \\ & & \\ c_{n+p_\ell} & \cdots & c_{n+p_\ell+h_\ell+1} \end{vmatrix} = u\, H^{(n)}_{h_\ell+1}$$

Donc $c^{(n)}(P^{(n)}_{h_\ell+1}\ P^{(n)}_{p_\ell}) = u$.

Si $P^{(n+1)}_{p_\ell}(x)$ est orthogonal régulier, alors $H^{(n+1)}_{p_\ell}$ et $H^{(n+1)}_{h_\ell+1}$ sont non nuls.
On considère $H^{(n+1)}_{p_\ell}$ et on applique la même relation que précédemment entre les lignes.

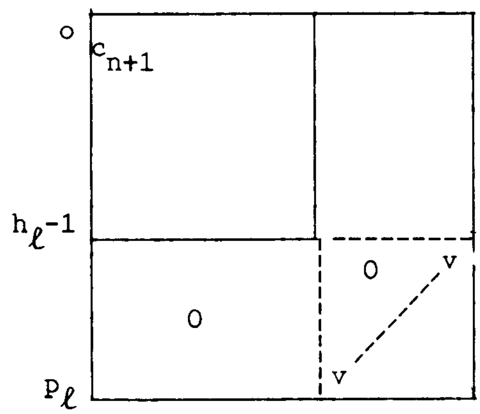
On obtient :




$$H^{(n+1)}_{p_\ell} = u^{(p_\ell-h_\ell-1)}(-1)^{\frac{(p_\ell-h_\ell-1)(p_\ell+3h_\ell+2)}{2}}\ H^{(n+1)}_{h_\ell+1}$$

En faisant le rapport des deux expressions trouvées on en tire u, donc la relation proposée.

iii) Si $P^{(n+1)}_{p_\ell+1}(x)$ est orthogonal régulier, alors $H^{(n+1)}_{p_\ell+1}$ et $H^{(n+1)}_{h_\ell}$ sont non nuls.
Nous considérons $H^{(n+1)}_{p_\ell+1}$.
En utilisant la relation qui existe entre chacune des lignes $j \in \mathbb{N}$, $h_\ell \le j \le p_\ell$ et les $h_\ell$ premières lignes on obtient le déterminant ci-dessous :




On obtient :

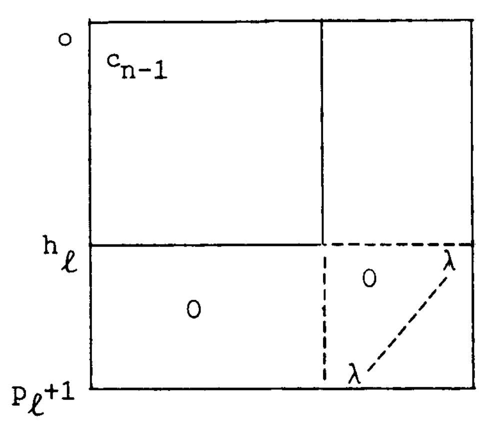
$$H^{(n+1)}_{p_\ell+1} = (-1)^{\frac{(p_\ell-h_\ell+1)(p_\ell+3h_\ell)}{2}} \; v^{p_\ell-h_\ell+1} \; H^{(n+1)}_{h_\ell}$$

D'autre part :

$$c^{(n)}(P^{(n)}_{h_\ell+1}\; P^{(n)}_{p_\ell}) = c^{(n)}(xP^{(n+1)}_{h_\ell} P^{(n)}_{p_\ell}) = c^{(n+1)}(x^{p_\ell}\; P^{(n+1)}_{h_\ell}) = v.$$

Donc v = u. On fait le rapport de la relation obtenue ci-dessus avec la première relation obtenue dans le ii). On trouve la relation cherchée :

iv) Si $P^{(n-1)}_{p_\ell+2}$ est orthogonal régulier, alors $H^{(n-1)}_{p_\ell+2}$ et $H^{(n-1)}_{h_\ell+1}$ sont non nuls.



On considère le déterminant $H^{(n-1)}_{p_\ell+2}$. On a :

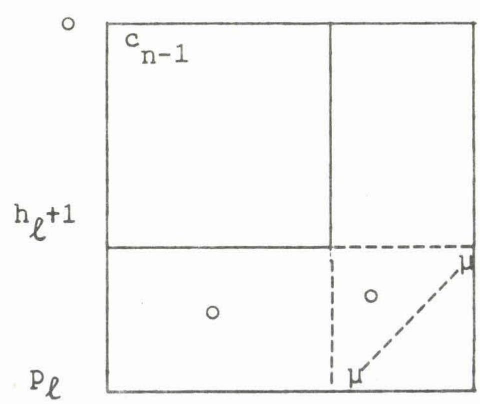
$$H^{(n-1)}_{p_\ell+2} = (-1)^{\frac{(p_\ell-h_\ell+1)(p_\ell+3h_\ell+4)}{2}} \lambda^{p_\ell-h_\ell+1} H^{(n-1)}_{h_\ell+1}$$

$$c^{(n)}(P^{(n)}_{h_\ell+1}\; P^{(n)}_{p_\ell}) = c^{(n)}(P^{(n-1)}_{h_\ell+1}\; P^{(n)}_{p_\ell}) = c^{(n-1)}(x^{p_\ell+1}\; P^{(n-1)}_{h_\ell+1}) = \lambda$$

Donc $\lambda = u$. D'où en faisant encore le rapport de l'expression précédente avec la première relation du ii) on obtient l'expression cherchée.

v) Si $P^{(n-1)}_{p_\ell+1}(x)$ est orthogonal régulier, alors $H^{(n-1)}_{p_\ell+1}$ et $H^{(n-1)}_{h_\ell+2}$ sont non nuls.

On considère le déterminant $H^{(n-1)}_{p_\ell+1}$.




$$H^{(n-1)}_{p_\ell+1} = (-1)^{\frac{(p_\ell-h_\ell-1)(p_\ell+3n_\ell+6)}{2}} \mu^{p_\ell-h_\ell-1} H^{(n-1)}_{h_\ell+2}$$

$$c^{(n)}(P^{(n)}_{h_\ell+1}\; P^{(n)}_{p_\ell}) = c^{(n-1)}(xP^{(n)}_{h_\ell+1}\; P^{(n)}_{p_\ell}) = c^{(n-1)}(x^{p_\ell} P^{(n-1)}_{h_\ell+2}) = \mu\,.$$

Donc $u = \mu$.

D'où le résultat par un rapport identique aux précédents.

cqfd.

## Remarque 4.1.

A partir des relations trouvées dans la propriété 4.5, on peut déduire des relations entre déterminants de Hankel sur les côtés d'un bloc H.

<u>1er Cas</u>. $P^{(n)}_{p_\ell+1}(x)$ est sur le côté S d'un bloc P.

Les relations de 4.5 ii) et 4.5 iv) donnent en les égalant :

$$H^{(n-1)}_{p_\ell+2}\ H^{(n+1)}_{p_\ell}(H^{(n)}_{h_\ell+1})^2 = -(H^{(n)}_{p_\ell+1})^2\ H^{(n+1)}_{h_\ell+1}\ H^{(n-1)}_{h_\ell+1}$$

<u>2eme Cas</u>. $P^{(n)}_{p_\ell+1}(x)$ est sur le côté E d'un bloc P.

Les relations du iii) et v) donnent :

$$H^{(n+1)}_{p_\ell+1}(H^{(n)}_{h_\ell+1})^2\ H^{(n-1)}_{p_\ell+1} = -(H^{(n)}_{p_\ell+1})^2\ H^{(n-1)}_{h_\ell+2}\ H^{(n+1)}_{p_\ell}$$

<u>3eme Cas</u>. $P^{(n)}_{p_\ell+1}(x)$ est dans l'angle SE du bloc P.

Les relations du ii) et v) donnent :

$$H^{(n+1)}_{h_\ell+1}\ H^{(n-1)}_{p_\ell+1} = H^{(n-1)}_{h_\ell+2}\ H^{(n+1)}_{p_\ell}$$

Les deux premières relations auraient pu se déduire également de la propriété de progression géométrique qui existe entre les déterminants qui bordent un bloc H (voir : Gilewicz page 192 - Approximants de Padé). Elles se déduisent donc directement de la relation de Sylvester.

Nous rappelons que si $P^{(n)}_{i+1}(x)$ est orthogonal régulier, le théorème 1.5 et la transformation des coefficients des relations de récurrence nous donnent la valeur de $C^{(n)}_{su(i+1,n)}$

$$C^{(n)}_{su(i+1,n)} = -\frac{c^{(n)}\ (P^{(n)}_{i+1}\ P^{(n)}_{su(i+1,n)-1})}{c^{(n)}\ (P^{(n)}_{i}\ P^{(n)}_{pr(i+1,n)})}$$

On a également :

$$C^{(n)}_{i+2} = -e^{(n)}_{i+1,\ell}\ q^{(n)}_{i+1,\ell}$$

$$C^{(n)}_{su(i+1,n)} = -e^{(n)}_{i+1,\ell+1}\ q^{(n)}_{i+1,\ell}$$

Nous pouvons maintenant donner l'expression de $e_{i+1,\ell}^{(n)}$ dans un cas particulier.

*Propriété 4.6.*

*Si* $P_i^{(n+1)}(x)$, $P_{i+1}^{(n+1)}(x)$ *et* $P_{i+1}^{(n)}(x)$ *sont orthogonaux réguliers, alors :*

$$e_{i+1,\ell}^{(n)} = \frac{H_{i+2}^{(n)}\, H_i^{(n+1)}}{H_{i+1}^{(n)}\, H_{i+1}^{(n+1)}}$$

Démonstration.

$$C_{i+2}^{(n)} = -e_{i+1,\ell}^{(n)}\, q_{i+1,\ell}^{(n)}$$

Si $P_{i+2}^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier on a :

$$C_{i+2}^{(n)} = -\frac{c^{(n)}((P_{i+1}^{(n)})^2)}{c^{(n)}(P_i^{(n)} P_{pr(i+1,n)}^{(n)})} = (-1)^{i+1+pr(i+1,n)} \frac{H_i^{(n+1)}\, H_{i+2}^{(n)}\, H_{pr(i+1,n)}^{(n)}}{(H_{i+1}^{(n)})^2\, H_{pr(i+1,n)}^{(n+1)}}$$

en utilisant la propriété 4.5 ii).

Si $P_{i+2}^{(n)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier on a $C_{i+2}^{(n)} = 0$. Or $H_{i+2}^{(n)}$ est nul. Donc l'expression donnant $C_{i+2}^{(n)}$ reste valable.

D'autre part $q_{i+1,\ell}^{(n)} = (-1)^{i+pr(i+1,n)} \dfrac{H_{i+1}^{(n)}\, H_{pr(i+1,n)}^{(n)}}{H_{i+1}^{(n)}\, H_{pr(i+1,n)}^{(n+1)}}$.

D'où l'expression de $e_{i+1,\ell}^{(n)}$ en faisant le rapport.

Enfin si $P_{i+2}^{(n)}$ n'est pas orthogonal régulier on sait que l'on a $e_{i+1,\ell}^{(n)} = 0$, ce que la relation proposée donne bien puisque $H_{i+2}^{(n)} = 0$.

cqfd.

## Calcul de la table H.

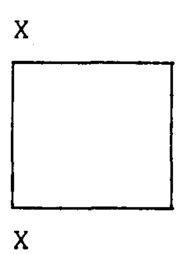
*Théorème 4.1* (*Sylvester*).

*On a la relation :*

$$H_{i+1}^{(n)}\, H_{i+1}^{(n+2)} - (H_{i+1}^{(n+1)})^2 = H_i^{(n+2)}\, H_{i+2}^{(n)}.$$

On calcule la table H colonne après colonne en utilisant la relation précédente avec les valeurs de départ.

$$H_o^{(n)} = 1 \text{ et } H_1^{(n)} = c_n.$$




Lorsqu'on rencontre pour la première fois un bloc H dans la table on peut calculer la colonne qui borde le côté ouest et les deux éléments marqués d'une croix à l'aide de la relation du théorème 4.1. On peut ainsi calculer les éléments du pourtour du bloc H, soit avec l'aide de la relation du théorème 4.1, soit avec l'aide de la relation du 3e cas de la remarque 4.1.

Par contre ces relations ne permettent pas le calcul des éléments de la colonne qui suit celle qui est à l'est de ce bloc.
Nous allons montrer comment, à l'aide des relations obtenues pour le qd, on peut calculer ces éléments de la table H et retrouver ainsi la relation proposée par Gilewicz et Froissart.

*Propriété 4.7.*

*On suppose que l'on a un bloc* P *de largeur* r+1 *dont le coin NO intérieur est occupé par le polynôme* $P_k^{(n)}(x)$. *On a alors la relation suivante pour* $i \in Z$, $-1 \le i \le r$ *qui permet de calculer* $H_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$

$$\frac{H_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}\; H_{k+r-1-i}^{(n-r+i)}}{H_{k+r+1}^{(n-r+i)}\; H_{k+r-i}^{(n-r-1+i)}} + \frac{H_{k+r+1}^{(n-r+i)}\; H_{k+r-1-i}^{(n-r-1+i)}}{H_{k+r-1-i}^{(n-r+i)}\; H_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}} =$$

$$\frac{H_{k+1+i}^{(n+r-i)}\ H_{k-2}^{(n+r+1-i)}}{H_{k+i}^{(n+r+1-i)}\ H_{k-1}^{(n+r-i)}} + \frac{H_{k+1+i}^{(n+r+1-i)}\ H_{k-1}^{(n+r-i)}}{H_{k+1+i}^{(n+r-i)}\ H_{k-1}^{(n+r+1-i)}}$$

Démonstration.

i) Nous commençons par calculer $H_{k+r+2}^{(n-r-2)}$. Il faut pour cela calculer $e_{k+r+1,\ell^{(n-r-2)}}^{(n-r-2)}$ qui sera obtenu après le calcul de $B_k^{(n+r+1)}$ et $B_{k+r+1}^{(n-r-1)}$ qui sont égaux. On a :

$$B_k^{(n+r+1)} = -q_{k,\ell^{(n+r+1)}}^{(n+r+1)} - e_{k-1,\ell^{(n+r+1)}}^{(n+r+1)}$$

$$C_k^{(n+r+1)} = -e_{k-1,\ell^{(n+r+1)}}^{(n+r+1)}\ q_{k-1,\ell^{(n+r+1)}}^{(n+r+1)}$$

En utilisant les relations des propriétés 4.6 et 4.3 ii) on obtient :

$$B_k^{(n+r+1)} = -\frac{H_k^{(n+r+2)}\ H_{k-1}^{(n+r+1)}}{H_k^{(n+r+1)}\ H_{k-1}^{(n+r+2)}} - \frac{H_k^{(n+r+1)}\ H_{k-2}^{(n+r+2)}}{H_{k-1}^{(n+r+1)}\ H_{k-1}^{(n+r+2)}}$$

Calculons maintenant $B_{k+r+1}^{(n-r-1)}$. On utilise le c) du qd.

Si $P_{k+r}^{(n-r-2)}(x)$ est orthogonal régulier on a :

$$B_{k+r+1}^{(n-r-1)} = -q_{k+r+1,\ell^{(n-r-2)}}^{(n-r-2)} - e_{k+r+1,\ell^{(n-r-2)}}^{(n-r-2)}$$

avec

$$q_{k+r+1,\ell^{(n-r-2)}}^{(n-r-2)} = \frac{H_{k+r+1}^{(n-r-1)}\ H_{k+r}^{(n-r-2)}}{H_{k+r+1}^{(n-r-2)}\ H_{k+r}^{(n-r-1)}}$$

Si $P_{k+r}^{(n-r-2)}(x)$ est non orthogonal on a : $B_{k+r+1}^{(n-r-1)} = -e_{k+r+1,\ell^{(n-r-2)}}^{(n-r-2)}$.

On constate que la relation donnant q s'annule dans ce cas et on retrouve bien l'égalité ci-dessus.

Enfin en utilisant la propriété 4.6 on trouve :

$$e^{(n+r-2)}_{k+r+1,\ell^{(n-r-2)}} = \frac{H^{(n-r-2)}_{k+r+2}\ H^{(n-r-1)}_{k+r}}{H^{(n-r-1)}_{k+r+1}\ H^{(n-r-2)}_{k+r+1}}$$

ce qui nous donne la relation proposée dans l'énoncé pour i = -1.

ii) Nous calculons maintenant $H^{(n-r-1+i)}_{k+r+2}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$, en utilisant l'égalité des deux coefficients $B^{(n-r+i)}_{k+r+1}$ et $B^{(n+r-i)}_{k+i+1}$.

Calculons d'abord $B^{(n+r-i)}_{k+i+1}$.

On sait que si $P^{(n+r+1-i)}_{k-2}$ est orthogonal régulier on a :

$$B^{(n+r-i)}_{k+i+1} = C^{(n+r+1-i)}_{k+i} - q^{(n+r-i)}_{k+1+i,\ell^{(n+r-i)}+1}$$

$$q^{(n+r-i)}_{k+1+i,\ell^{(n+r-i)}+1} = (-1)^{i-1}\frac{H^{(n+r+1-i)}_{k+1+i}\ H^{(n+r-i)}_{k-1}}{H^{(n+r-i)}_{k+1+i}\ H^{(n+r+1-i)}_{k-1}}$$

$$C^{(n+r+1-i)}_{k+i} = \frac{-c^{(n+r+1-i)}(P^{(n+r+1-i)}_{k-1}\ P^{(n+r+1-i)}_{k+i-1})}{c^{(n+r+1-i)}((P^{(n+r+1-i)}_{k-2})^2)} = (-1)^{i}\ \frac{H^{(n+r-i)}_{k+1+i}\ H^{(n+r+1-i)}_{k-2}}{H^{(n+r+1-i)}_{k+i}\ H^{(n+r-i)}_{k-1}}$$

en utilisant la propriété 4.5 iv).

Si $P^{(n+r+1-i)}_{k-2}(x)$ n'est pas orthogonal régulier, on a $B^{(n+r-i)}_{k+i+1} = -q^{(n+r-i)}_{k+1+i,\ell^{(n+r-i)}+1}$ ;

or la relation précédente qui donne $B_{k+i+1}^{(n+r-i)}$ restera valable car l'expression qui donne $C_{k+i}^{(n+r+1-i)}$ est nulle avec $H_{k-2}^{(n+r+1-i)}$.

Calculons à présent $B_{k+r+1}^{(n-r+i)}$.

Si $P_{k+r-1-i}^{(n-r-1+i)}(x)$ est orthogonal régulier on a :

$$B_{k+r+1}^{(n-r+i)} = C_{k+r+1}^{(n+r-1+i)} + C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$$

$$C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} = - \frac{c^{(n-r-1+i)}(P_{k+r}^{(n-r-1+i)}\ P_{k+r-i}^{(n-r-1+i)})}{c^{(n-r-1+i)}((P_{k+r-1-i}^{(n-r-1+i)})^2)} = (-1)^i\ \frac{H_{k+r+1}^{(n-r+i)}\ H_{k+r-1-i}^{(n-r-1+i)}}{H_{k+r-1-i}^{(n-r+i)}\ H_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}}$$

en utilisant la propriété 4.5 iii).

$$C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} = - \frac{c^{(n-r-1+i)}\ ((P_{k+r+1}^{(n-r-1+i)})^2)}{c^{(n-r-1+i)}\ (P_{k+r}^{(n-r-1+i)}\ P_{k+r-i}^{(n-r-1+i)})} = (-1)^i\ \frac{H_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}\ H_{k+r-1-i}^{(n-r+i)}}{H_{k+r+1}^{(n-r+i)}\ H_{k+r-i}^{(n-r-1+i)}}$$

en utilisant la propriété 4.5 iii).

Cette dernière relation établie sous l'hypothèse que $P_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$ est orthogonal régulier reste néanmoins valable si cette condition n'est pas vérifiée car alors $C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$ est nul, ce qu'on obtient bien avec $H_{k+r+2}^{(n-r-1+i)} = 0$.

Enfin si $P_{k+r-1-i}^{(n-r-1+i)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier on a :

$$B_{k+r+1}^{(n-r+i)} = C_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}$$

ce qu'on obtient bien avec les deux relations précédentes, car celle que l'on a écrite pour $C_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}$ s'annule avec $H_{k+r-1-i}^{(n-r-1+i)}$.
Finalement en égalant $B_{k+r+1}^{(n-r+i)}$ et $B_{k+i+1}^{(n+r-i)}$ on obtient bien la relation proposée.

cqfd.

Remarque.

Cette propriété est une généralisation de celle présentée par Van Rossum dans le cas normal (cf. Livre de C. Brezinski page 128 - th. 3.5).

Remarque 4.2.

Nous avons calculé $B_{k+r+1}^{(n-r+i)}$ et $B_{k+i+1}^{(n+r-i)}$ pour $i \in \mathbb{Z}$, $-1 \leq i \leq r$.
On peut ainsi calculer par récurrence $\omega_i^{(n-r-1+i)}(x)$ et $\omega_i^{(n+r+1-i)}(x)$ pour $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq r$ grâce aux relations.

$$B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)} = B_{k+i}^{(n+r+1-i)}$$

$$\omega_i^{(n-r-1+i)}(x) = \omega_i^{(n+r+1-i)}(x)$$

$$\omega_{i+1}^{(n-r+i)}(x) = x\omega_i^{(n-r-1+i)}(x) + B_{k+r+1}^{(n-r-1+i)}$$

Si on prend l'expression trouvée pour $B_{k+r+1}^{(n-r+i)}$ pour $i \in \mathbb{Z}$, $-1 \leq i \leq r-1$, on obtient en réduisant au même dénominateur et en utilisant la relation du théorème 4.1.

$$B_{k+r+1}^{(n-r+i)} = (-1)^i \left[ \frac{H_{k+r+1}^{(n-r+1+i)} H_{k+r-1-i}^{(n-r-1+i)} - H_{k+r-2-i}^{(n-r+i+1)} H_{k+r+2}^{(n-r-1+i)}}{H_{k+r-1-i}^{(n-r+i)} H_{k+r+1}^{(n-r+i)}} \right]$$

On effectue le même travail pour $B_{k+i+1}^{(n+r-i)}$ pour $i \in Z$, $-1 \leq i \leq r-1$.
On obtient :

$$B_{k+i+1}^{(n+r-i)} = (-1)^i \left[ \frac{H_{k-1}^{(n+r-i-1)} H_{k+1+i}^{(n+r+1-i)} - H_{k-2}^{(n+r+1-i)} H_{k+2+i}^{(n+r-1-i)}}{H_{k-1}^{(n+r-i)} H_{k+1+i}^{(n+r-i)}} \right]$$

Pour i=r, on réduit au même dénominateur, on utilise la relation du théorème 4.1 et celle du 3e cas de la remarque 4.1.

$$H_{k-1}^{(n+1)} H_{k+r+1}^{(n-1)} = H_{k}^{(n-1)} H_{k+r}^{(n+1)}$$

On obtient :

$$B_{k+r+1}^{(n)} = (-1)^r \left[ \frac{H_{k+r+1}^{(n+1)} H_{k-1}^{(n-1)} - H_{k+r+2}^{(n-1)} H_{k-2}^{(n+1)}}{H_{k-1}^{(n)} H_{k+r+1}^{(n)}} \right]$$

Les relations précédentes sont donc encore valables pour i=r.

## 4.2 DEPLACEMENTS DIAGONAUX

Nous introduisons les polynômes de Hadamard :

$$H_k^{(n)}(x) = H_k^{(n)} . P_k^{(n)}(x)$$

puis les polynômes transformés $\tilde{H}_k^{(n)}(x) = x^k H_k^{(n)}(x^{-1})$ qui seront disposés dans une table $\tilde{H}$ de la même manière que les polynômes $P_k^{(n)}(x)$ dans la table P.

Si nous posons :

$$\tilde{P}_k^{(n)}(x) = x^k \, P_k^{(n)}(x^{-1})$$

$$\tilde{Q}_k^{(n)}(x) = x^{k-1} \, Q_k^{(n)}(x^{-1})$$

$$\tilde{\omega}_s^{(n)}(x) = x^s \, \omega_s^{(n)}(x^{-1})$$

les relations entre familles adjacentes deviennent :

$$\tilde{P}_i^{(n+1)}(x) = \tilde{P}_{i+1}^{(n)}(x) + q_{i+1,\ell}^{(n)} \, x^{i+1-pr(i+1,n)} \, \tilde{P}_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x)$$

$$\tilde{P}_i^{(n+1)}(x) = \tilde{\omega}_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(x) \, . \, \tilde{P}_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x) \; +$$

$$E_{i+1}^{(n)} \, x^{i-pr(pr(i+1,n),n+1)} \, \tilde{P}_{pr(pr(i+1,n),n+1)}^{(n+1)}(x)$$

$$x\tilde{Q}_i^{(n+1)}(x) = \tilde{Q}_{i+1}^{(n)}(x) + q_{i+1,\ell}^{(n)} \, x^{i-pr(i+1,n)+1} \, \tilde{Q}_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x) - c_n \, \tilde{P}_i^{(n+1)}(x)$$

$$x\tilde{Q}_i^{(n+1)}(x) = \tilde{\omega}_{i-pr(i+1,n)}^{(n)}(x) \, (\tilde{Q}_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x) - c_n \, \tilde{P}_{pr(i+1,n)}^{(n)}(x))$$

$$+ \, E_{i+1}^{(n)} \, x^{i-pr(pr(i+1,n),n+1)+1} \, \tilde{Q}_{pr(pr(i+1,n),n+1)}^{(n+1)}(x)$$

I. Nous considérons d'abord les déplacements le long d'une seule diagonale, c'est à dire que connaissant $\tilde{H}_i^{(n)}(x)$ et $\tilde{H}_{pr(i,n)}^{(n)}(x)$ on désire calculer $\tilde{H}_{su(i,n)}^{(n)}(x)$

$$\tilde{P}_{su(i,n)}^{(n)}(x) = (\tilde{\omega}_{su(i,n)-i-1}^{(n)}(x) + B_{su(i,n)}^{(n)} \, x^{su(i,n)-i}) \, \tilde{P}_i^{(n)}(x)$$

$$+ \, x^{su(i,n)-pr(i,n)} \, C_{su(i,n)}^{(n)} \, \tilde{P}_{pr(i,n)}^{(n)}(x)$$

En utilisant la remarque 4.2 on a :

$$B^{(n)}_{su(i,n)} = (-1)^{su(i,n)-i-2} \frac{H^{(n+1)}_{su(i,n)} H^{(n-1)}_{i} - H^{(n+1)}_{i-1} H^{(n-1)}_{su(i,n)+1}}{H^{(n)}_{i} H^{(n)}_{su(i,n)}}$$

$$C^{(n)}_{su(i,n)} = - \frac{c^{(n)}(P^{(n)}_{i} P^{(n)}_{su,(i,n)-1})}{c^{(n)}(P^{(n)}_{i-1} P^{(n)}_{pr(i,n)})}$$

L'expression suivante intervenant dans toutes les relations nous l'appelons $Z^{(n)}(x)$ pour simplifier :

$$Z^{(n)}(x) = H^{(n)}_{i} H^{(n)}_{su(i,n)} \tilde{\omega}^{(n)}_{su(i,n)-i-1}(x) + (-x)^{su(i,n)-i}(H^{(n-1)}_{i} H^{(n+1)}_{su(i,n)} - H^{(n+1)}_{i-1} H^{(n-1)}_{su(i,n)+1})$$

$\tilde{\omega}^{(n)}_{su(i,n)-i-1}$ est obtenu grâce aux relations de récurrence de la remarque 4.2.

**I.1 Si $H^{(n-1)}_{i+1} = 0$.**

$P^{(n)}_{i}(x)$ est à l'ouest du bloc P.

En utilisant les relations de la propriété 4.5 iv) et v) on obtient :

$$C^{(n)}_{su(i,n)} = (-1)^{su(i,n)+pr(i,n)} \frac{H^{(n-1)}_{su(i,n)+1} H^{(n)}_{pr(i,n)}}{H^{(n)}_{su(i,n)} H^{(n-1)}_{pr(i,n)+1}}$$

D'où la relation :

$$\boxed{\begin{aligned}(H_i^{(n)})^2\, H_{pr(i,n)+1}^{(n-1)}\, \tilde{H}_{su(i,n)}^{(n)}(x) &= Z^{(n)}(x)\, H_{pr(i,n)+1}^{(n-1)}\, \tilde{H}_i^{(n)}(x) \\ &+ (-x)^{su(i,n)-pr(i,n)} (H_i^{(n)})^2\, H_{su(i,n)+1}^{(n-1)}\, \tilde{H}_{pr(i,n)}^{(n)}(x)\end{aligned}}$$

I.2 <u>Si $H_i^{(n+1)} = 0$.</u>

$P_i^{(n)}$ est au nord du bloc P.

En utilisant les relations de la propriété 4.5 ii) et iii) on obtient :

$$C_{su(i,n)}^{(n)} = (-1)^{su(i,n)+pr(i,n)}\ \frac{H_{su(i,n)}^{(n+1)}\ H_{pr(i,n)}^{(n)}}{H_{su(i,n)}^{(n)}\ H_{pr(i,n)}^{(n+1)}}$$

D'où la relation :

$$\boxed{\begin{aligned}(H_i^{(n)})^2\, H_{pr(i,n)}^{(n+1)}\, \tilde{H}_{su(i,n)}^{(n)}(x) &= Z^{(n)}(x)\, H_{pr(i,n)}^{(n+1)}\, \tilde{H}_i^{(n)}(x) \\ &+ (-x)^{su(i,n)-pr(i,n)} (H_i^{(n)})^2\, H_{su(i,n)}^{(n+1)}\, \tilde{H}_{pr(i,n)}^{(n)}(x)\end{aligned}}$$

I.3 <u>Si $H_i^{(n+1)}$ et $H_{i+1}^{(n-1)} \neq 0$.</u>

$P_i^{(n)}(x)$ est dans l'angle NO du bloc P.

I.3.1 Si $H_i^{(n-1)} = 0$.

En utilisant les relations de la propriété 4.5 ii) et v) on obtient :

$$C_{su(i,n)}^{(n)} = (-1)^{su(i,n)+pr(i,n)-1} \frac{H_{su(i,n)}^{(n)} H_{i+1}^{(n-1)} H_{i-1}^{(n+1)} H_{pr(i,n)}^{(n)}}{H_{su(i,n)}^{(n-1)} (H_i^{(n)})^2 H_{pr(i,n)}^{(n+1)}}$$

D'où la relation :

$$\boxed{\begin{aligned} (H_i^{(n)})^2 H_{su(i,n)}^{(n-1)} H_{pr(i,n)}^{(n+1)} \tilde{H}_{su(i,n)}^{(n)}(x) &= Z^{(n)}(x).H_{su(i,n)}^{(n-1)} H_{pr(i,n)}^{(n+1)} \tilde{H}_i^{(n)}(x) \\ &- (-x)^{su(i,n)-pr(i,n)} (H_{su(i,n)}^{(n)})^2 H_{i+1}^{(n-1)} H_{i-1}^{(n+1)} \tilde{H}_{pr(i,n)}^{(n)}(x) \end{aligned}}$$

I.3.2 Si $H_{i-1}^{(n+1)} = 0$.

En utilisant les relations de la propriété 4.5 ii) et v) on obtient :

$$C_{su(i,n)}^{(n)} = (-1)^{su(i,n)+pr(i,n)-1} \frac{H_{su(i,n)}^{(n)} H_i^{(n+1)} H_i^{(n-1)} H_{pr(i,n)}^{(n)}}{H_{su(i,n)-1}^{(n+1)} (H_i^{(n)})^2 H_{pr(i,n)+1}^{(n-1)}}$$

D'où la relation :

$$\boxed{\begin{aligned}&(H_i^{(n)})^2\, H_{su(i,n)-1}^{(n+1)}\, H_{pr(i,n)+1}^{(n-1)}\, \tilde{H}_{su(i,n)}^{(n)}(x) = Z^{(n)}(x)\, H_{su(i,n)-1}^{(n+1)}\, H_{pr(i,n)+1}^{(n-1)}\, \tilde{H}_i^{(n)}(x)\\ &\quad - (-x)^{su(i,n)-pr(i,n)}\, (H_{su(i,n)}^{(n)})^2\, H_i^{(n+1)}\, H_i^{(n-1)}\, \tilde{H}_{pr(i,n)}^{(n)}(x)\end{aligned}}$$

I.3.3 <u>Si $H_i^{(n-1)}$ et $H_{i-1}^{(n+1)} \neq 0$.</u>

Les deux relations trouvées dans I.3.1 et I.3.2 sont valables.

<u>Remarque 4.3.</u>

Si $H_{i+1}^{(n-1)} = 0$ la relation du I.3.2 s'applique au cas I.1.
En effet on a alors :

$$(H_i^{(n)})^2 = H_i^{(n+1)}\, H_i^{(n-1)}$$

$$(H_{su(i,n)}^{(n)})^2 = -H_{su(i,n)-1}^{(n+1)}\, H_{su(i,n)+1}^{(n-1)}$$

De même si $H_i^{(n+1)} = 0$ la relation du I.3.1 s'applique au cas I.2 car on a alors :

$$(H_i^{(n)})^2 = -\, H_{i+1}^{(n-1)}\, H_{i-1}^{(n+1)}$$

$$(H_{su(i,n)}^{(n)})^2 = H_{su(i,n)}^{(n+1)}\, H_{su(i,n)}^{(n-1)}$$

II. Maintenant nous étudions les déplacements sur deux diagonales n et n+1 sur lesquelles on bâtit un escalier. Nous désirons connaître tous les polynômes $\tilde{H}^{(n)}(x)$ et $\tilde{H}^{(n+1)}(x)$ qui sont tels que les $H^{(n)}$ et $H^{(n+1)}$ correspondants soient non nuls.

## II.1 Si $H_i^{(n)}$, $H_{i+1}^{(n)}$ et $H_i^{(n+1)}$ sont non nuls.

o Nous utilisons la relation qui fait intervenir $q^{(n)}_{i+1,\ell^{(n)}}$.

o *

On obtient la relation 2.25 du livre de C. Brezinski.

$$H_i^{(n+1)} \tilde{H}_{i+1}^{(n)}(x) = H_{i+1}^{(n)} \tilde{H}_i^{(n+1)}(x) - x\, H_{i+1}^{(n+1)} \tilde{H}_i^{(n)}(x)$$

## II.2 Si $H_{i-1}^{(n+1)}$, $H_i^{(n)}$ et $H_i^{(n+1)}$ sont non nuls.

o o Nous utilisons la relation qui fait intervenir $e^{(n)}_{i,\ell^{(n)}}$.

*

On obtient la relation 2.24 du livre de C. Brezinski.

$$H_i^{(n)} \tilde{H}_i^{(n+1)}(x) = H_i^{(n+1)} \tilde{H}_i^{(n)}(x) - x\, H_{i+1}^{(n)} \tilde{H}_{i-1}^{(n+1)}(x)$$

Nous étudions maintenant ce qui se passe lors de la traversée du bloc H. Nous supposons connus tous les polynômes $\tilde{H}^{(n)}$ et $\tilde{H}^{(n+1)}$ avant la traversée de ce bloc.

## II.3 Si $H_i^{(n)}$, $H_i^{(n+1)}$ sont non nuls et $H_{i+1}^{(n)} = 0$.

$H_i^{(n)}$ et $H_i^{(n+1)}$ sont à l'ouest du bloc H. Il faut d'abord calculer $\tilde{H}^{(n+1)}_{su(i,n+1)}(x)$. Nous avons :

$$\tilde{P}^{(n+1)}_{su(i,n+1)}(x) = \tilde{\omega}^{(n)}_{su(i,n+1)-i}(x)\ \tilde{P}^{(n)}_{i}(x) +$$

$$E^{(n)}_{su(i,n+1)+1}\ x^{su(i,n+1)-pr(i,n+1)}\ \tilde{P}^{(n+1)}_{pr(i,n+1)}(x),$$

$\tilde{\omega}^{(n)}_{su(i,n+1)-i}(x)$ se déduit des relations de la remarque 4.2.

II.3.1 Si $H^{(n+1)}_{i-1} \neq 0$.

On a $E^{(n)}_{su(i,n+1)+1} = -e^{(n)}_{i,\ell^{(n)}+1}$

$$C^{(n)}_{su(i,n+1)+1} = -e^{(n)}_{i,\ell^{(n)}+1}\ q^{(n)}_{i,\ell^{(n)}}$$

$$q^{(n)}_{i,\ell^{(n)}} = (-1)^{i-1+pr(i,n)}\ \frac{H^{(n+1)}_{i}\ H^{(n)}_{pr(i,n)}}{H^{(n)}_{i}\ H^{(n+1)}_{pr(i,n)}}$$

$$C^{(n)}_{su(i,n+1)+1} = -\ \frac{c^{(n)}(P^{(n)}_{i}P^{(n)}_{su(i,n+1)})}{c^{(n)}(P^{(n)}_{i-1}\ P^{(n)}_{pr(i,n)})}$$

$$= (-1)^{pr(i,n)+su(i,n+1)}\ \frac{H^{(n)}_{su(i,n+1)+1}\ H^{(n+1)}_{i}\ H^{(n+1)}_{i-1}\ H^{(n)}_{pr(i,n)}}{H^{(n+1)}_{su(i,n+1)}\ (H^{(n)}_{i})^{2}\ H^{(n+1)}_{pr(i,n)}}$$

en utilisant la relation de la propriété 4.5 ii). On obtient ainsi :

$$e^{(n)}_{i,\ell^{(n)}+1} = (-1)^{i+su(i,n+1)}\ \frac{H^{(n)}_{su(i,n+1)+1}\ H^{(n+1)}_{i-1}}{H^{(n)}_{i}\ H^{(n+1)}_{su(i,n+1)}}$$

D'où la relation suivante en tenant compte du fait que $pr(i,n+1) = i-1$

$$H^{(n)}_{i}\ \tilde{H}^{(n+1)}_{su(i,n+1)}(x) = \tilde{\omega}^{(n)}_{su(i,n+1)-i}(x)\ H^{(n+1)}_{su(i,n+1)}\ \tilde{H}^{(n)}_{i}(x)$$

$$+ (-x)^{su(i,n+1)-i+1}\ H^{(n)}_{su(i,n+1)+1}\ \tilde{H}^{(n+1)}_{i-1}(x).$$

II.3.2 Si $H_{i-1}^{(n+1)} = 0.$

$$\text{Alors } E_{su(i,n+1)+1}^{(n)} = C_{su(i,n+1)+1}^{(n)}.$$

En utilisant les relations de la propriété 4.5 ii) et iii) on trouve :

$$C_{su(i,n+1)+1}^{(n)} = (-1)^{su(i,n+1)+pr(i,n)+1} \frac{H_{su(i,n+1)+1}^{(n)} \; H_{pr(i,n)-1}^{(n+1)}}{H_{su(i,n+1)}^{(n+1)} \; H_{pr(i,n)}^{(n)}}$$

On obtient donc la relation suivante en tenant compte du fait que $pr(i,n+1) = pr(i,n)-1$ :

$$\boxed{\begin{aligned} H_i^{(n)} H_{pr(i,n+1)+1}^{(n)} \tilde{H}_{su(i,n+1)}^{(n+1)}(x) &= \tilde{\omega}_{su(i,n+1)-i}^{(n)}(x) \; H_{su(i,n+1)}^{(n+1)} H_{pr(i,n+1)+1}^{(n)} \tilde{H}_i^{(n)}(x) \\ &+ (-x)^{su(i,n+1)-pr(i,n+1)} \; H_i^{(n)} \; H_{su(i,n+1)+1}^{(n)} \; \tilde{H}_{pr(i,n+1)}^{(n+1)}(x) \end{aligned}}$$

On remarquera que si $pr(i,n+1) = i-1$ on retrouve la relation du II.3.1. Par conséquent nous conserverons uniquement la relation ci-dessus.

II.3.3 On doit ensuite calculer $\tilde{H}_{su(i,n)}^{(n)}(x)$.

Pour cela nous utilisons les deux relations suivantes :

$$\tilde{P}_{su(i,n)-1}^{(n+1)}(x) = \tilde{P}_{su(i,n)}^{(n)}(x) + q_{su(i,n),\ell^{(n)}+1}^{(n)} \; x^{su(i,n)-i} \; \tilde{P}_i^{(n)}(x).$$

$$q_{su(i,n),\ell^{(n)}+1}^{(n)} = (-1)^{su(i,n)-1+i} \; \frac{H_{su(i,n)}^{(n+1)} \; H_i^{(n)}}{H_{su(i,n)}^{(n)} \; H_i^{(n+1)}}$$

et nous obtenons :

$$\boxed{\begin{gathered} H^{(n+1)}_{su(i,n)-1}\; H^{(n+1)}_{i}\; \tilde{H}^{(n)}_{su(i,n)}(x) = H^{(n)}_{su(i,n)}\; H^{(n+1)}_{i}\; \tilde{H}^{(n+1)}_{su(i,n)-1}(x) + \\ (-x)^{su(i,n)-i}\; H^{(n+1)}_{su(i,n)}\; H^{(n+1)}_{su(i,n)-1}\; \tilde{H}^{(n)}_{i}(x) \end{gathered}}$$

II.4 <u>Si $H^{(n+1)}_{i-1}$, $H^{(n)}_{i}$ sont non nuls et $H^{(n+1)}_{i} = 0$.</u>

$H^{(n+1)}_{i-1}$ et $H^{(n)}_{i}$ sont au nord du bloc H.

On doit d'abord calculer $\tilde{H}^{(n)}_{su(i,n)}(x)$. On le fera à l'aide d'une relation de récurrence classique à trois termes comme dans la partie I. On calcule ensuite $\tilde{H}^{(n+1)}_{su(i,n)}(x)$.

On utilise la relation :

$$\tilde{P}^{(n+1)}_{su(i,n)}(x) = \tilde{P}^{(n)}_{su(i,n)}(x) + E^{(n)}_{su(i,n)+1}\; \tilde{P}^{(n+1)}_{i-1}(x).x^{su(i,n)-i+1}$$

$$E^{(n)}_{su(i,n)+1} = C^{(n)}_{su(i,n)+1} = - \frac{c^{(n)}\left((P^{(n)}_{su(i,n)})^2\right)}{c^{(n)}\left(P^{(n+1)}_{su(i,n)-1}\; P^{(n+1)}_{i-1}\right)}$$

$$= (-1)^{i+1+su(i,n)}\; \frac{H^{(n)}_{su(i,n)+1}\; H^{(n+1)}_{i-1}}{H^{(n)}_{i}\; H^{(n+1)}_{su(i,n)}}$$

en utilisant la relation de la propriété 4.5 v).

On obtient donc :

$$H_i^{(n)} H_{su(i,n)}^{(n)} \tilde{H}_{su(i,n)}^{(n+1)}(x) = H_i^{(n)} H_{su(i,n)}^{(n+1)} \tilde{H}_{su(i,n)}^{(n)}(x)$$

$$+ (-x)^{su(i,n)-i+1} H_{su(i,n)+1}^{(n)} H_{su(i,n)}^{(n)} \tilde{H}_{i-1}^{(n+1)}(x)$$

## 4.3 POLYNOMES $W_i^{(m)}(x)$.

Nous définissons la fonctionnelle linéaire $\gamma^{(m)}$ telle que :

$$\gamma^{(m)}(x^j) = c_{m-j} \text{ pour } j \in \mathbb{N} \text{ et } m-j \geq 0.$$

Nous cherchons les polynômes de degré k, $W_k^{(m)}(x) = \sum_{i=o}^{k} w_i^{(m)} x^i$ qui sont orthogonaux par rapport à la fonctionnelle $\gamma^{(m)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Nous avons donc le système linéaire suivant :

$$\gamma^{(m)}(x^j\, W_k^{(m)}(x)) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq k-1$$

c'est à dire :

$$\sum_{i=o}^{k} w_i^{(m)} c_{m-i-j} = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq k-1.$$

Le polynôme $W_k^{(m)}(x)$ sera orthogonal régulier si $\begin{vmatrix} c_m & \cdots & c_{m-k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m-k+1} & \cdots & c_{m-2k+2} \end{vmatrix} \neq 0,$

c'est à dire si $H_k^{(m-2k+2)} \neq 0$.
Si $H_k^{(m-2k+2)} = 0$, nous définissons également des polynômes $W_k^{(m)}(x)$ orthogonaux singuliers ou quasi-orthogonaux qui seront déterminés ou définis comme étant égaux au polynôme orthogonal régulier $W^{(m)}(x)$ qui les précède multiplié par un polynôme complémentaire arbitraire pour obtenir le bon degré.

Nous étudierons les familles adjacentes des polynômes orthogonaux par rapport aux fonctionnelles $\gamma^{(m)}$ pour $m > 0$.

Les polynômes $W_k^{(m)}(x)$ sont supposés unitaires.

*Propriété 4.8.*

*Les blocs* H *de la fonctionnelle* $\gamma$ *sont ceux de la fonctionnelle* c.

Démonstration.

C'est évident avec la définition de la fonctionnelle $\gamma$ et du système d'orthogonalité.

cqfd.

*Définition.*

*Nous appellerons table* W *la table dans laquelle sont rangés les polynômes* $W_k^{(m)}(x)$ *de la manière suivante :*

$$\begin{array}{llll}
W_1^{(1)} & & & \\
 & & & \\
W_1^{(2)} & W_2^{(3)} & & \\
 & & & \\
W_1^{(3)} & W_2^{(4)} & W_3^{(5)} & \\
 & & & \\
W_1^{(4)} & W_2^{(5)} & W_3^{(6)} & W_4^{(7)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots
\end{array}$$

Nous appellerons table $\tilde{P}$ la table dans laquelle sont rangés les polynômes $\tilde{P}_k^{(n)}(x)$ de la manière suivante :

$$
\begin{array}{llll}
\tilde{P}_1^{(0)} & & & \\
\tilde{P}_1^{(1)} & \tilde{P}_2^{(0)} & & \\
\tilde{P}_1^{(2)} & \tilde{P}_2^{(1)} & \tilde{P}_3^{(0)} & \\
\tilde{P}_1^{(3)} & \tilde{P}_2^{(2)} & \tilde{P}_3^{(1)} & \tilde{P}_4^{(0)} \\
\vdots & & & \vdots \ \ddots
\end{array}
$$

Propriété 4.9.

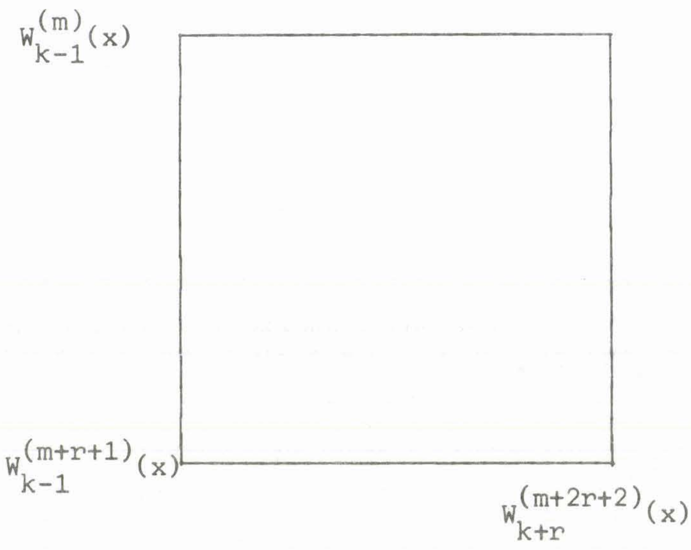
*Les blocs de la table* W *sont ceux de la table* P *translatés d'une rangée vers le haut.*

Démonstration.

Le polynôme $W_k^{(m)}(x)$ appartient à un bloc W si $H_k^{(m-2k+2)}$ est nul. Or la position du polynôme $W_k^{(m)}(x)$ est identique à celle du polynôme $P_k^{(m-2k+1)}(x)$. Par conséquent on a bien translation du bloc d'une rangée vers le haut.

cqfd.

Nous considérons maintenant un bloc W de largeur r+1, dont les côtés ouest et sud sont entourés des polynômes W(x) mentionnés. L'angle extérieur Sud-Ouest est occupé par le polynôme $W_{k-1}^{(m+r+1)}(x)$.



Nous avons la propriété suivante pour les polynômes qui bordent le côté sud du bloc W.

*Propriété 4.10.*

$$W_{k-1+j}^{(m+r+1+j)} = x^j \, W_{k-1}^{(m+r+1-j)} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \; 0 \le j \le r+1.$$

Démonstration.

Le bloc H correspondant au bloc W est le suivant :

$H_{k-1}^{(m+3-2k)}$

$H_{k-1}^{(m+4-2k+r)}$ $\qquad$ $H_{k+r}^{(m+3-2k)}$

$W_{k-1}^{(m+r+1)}(x)$ occupe la place de $H_{k-1}^{(m+4-2k+r)}$

Considérons le polynôme $W_{k-1+j}^{(m+r+1+j)}$. Il est orthogonal régulier. Par conséquent on peut écrire :

$$W_{k-1+j}^{(m+r+1+j)}(x) = \frac{1}{H_{k-1+j}^{(m+r+5-2k-j)}} \begin{vmatrix} c_{m+r+1+j} & \cdots & c_{m+r+2-k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m+r+3-k} & \cdots & c_{m+r+4-2k-j} \\ 1 & & x^{k+1+j} \end{vmatrix}$$

En permutant toutes les lignes sauf la dernière et toutes les colonnes on obtient :

$$W_{k-1+j}^{(m+r+1+j)}(x) = \frac{(-1)^{(k+j-1)^2}}{H_{k-1+j}^{(m+r+5-2k-j)}} \begin{vmatrix} c_{m+r+4-2k-j} & \cdots & c_{m+r+3-k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m+r+2-k} & \cdots & c_{m+r+1+j} \\ x^{k-1+j} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Or nous savons que $H_{k+j}^{(m+r+4-2k-j)} \neq 0$, $H_{k-1}^{(m+r+4-2k-j)} \neq 0$ et $H_{k-1+s}^{(m+r+4-2k-j)} = 0$ pour $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq j$.

Par conséquent les (k-1) premières lignes du déterminant précédent définissant $W_{k-1+j}^{(m+r+1+j)}(x)$ sont indépendantes. Toutes les suivantes sont telles qu'on peut mettre $W_{k-1+j}^{(m+r+1+j)}(x)$ sous la forme

$$\frac{(-1)^{(k+j-1)^2}}{H_{k-1+j}^{(m+r+5-2k-j)}} \begin{vmatrix} c_{m+r+4-2k-j} & \cdots & c_{m+r+2-k-j} & \cdots & & & c_{m+r+3-k} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ c_{m+r+2-k-j} & \cdots & c_{m+r-j} & \cdots & & & c_{m+r+1} \\ \vdots & & \vdots & & & & u \\ \vdots & 0 & \vdots & & 0 & \iddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & u & & \vdots \\ x^{k-1+j} & \cdots & x^{j+1} & x^j & x^{j-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

avec $u \neq 0$.

On voit facilement que l'on a :

$$W_{k-1+j}^{(m+r+1+j)}(x) = \frac{(-1)^{(k+j+1)^2} u^j (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}}{H_{k-1+j}^{(m+r+5-2k-j)}} \begin{vmatrix} c_{m+r+4-2k-j} & \cdots & c_{m+r+3-k-j} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m+r+2-k-j} & \cdots & c_{m+r+1-j} \\ x^{k-1+j} & \cdots & x^j \end{vmatrix}$$

Le déterminant vaut $H_{k-1}^{(m+r+5-2k-j)} \quad W_{k-1}^{(m+r+1-j)}(x).x^j$.

Par conséquent du fait que les polynômes W(x) sont unitaires on a la relation proposée.

<u>cqfd.</u>

La propriété suivante est très importante car elle donne une équivalence entre une partie de la table $\tilde{H}$ et une partie de la table W.

Nous posons $\tilde{W}_k^{(m)}(x) = x^k \; W_k^{(m)}(x)$

Propriété 4.11.

*Une condition nécessaire et suffisante pour que* $P_k^{(m+1-2k)}(x)$ *soit orthogonal régulier par rapport à la fonctionnelle* $c^{(m+1-2k)}$ *avec* $\tilde{P}_k^{(m+1-2k)}(0) \neq 0$ *est que le polynôme* $\tilde{P}_k^{(m+1-2k)}(x)$ *soit orthogonal régulier par rapport à la fonctionnelle* $\gamma^{(m)}$ *avec* $\tilde{P}_k^{(m+1-2k)}(0) \neq 0$.
*On a dans ce cas :*

$$\tilde{P}_k^{(m+1-2k)}(x) = (-1)^k \frac{H_k^{(m+2-2k)}}{H_k^{(m+1-2k)}} W_k^{(m)}(x)$$

*où* $W_k^{(m)}(x)$ *est orthogonal régulier par rapport à* $\gamma^{(m)}$

$$P_k^{(m+1-2k)}(x) = (-1)^k \frac{H_k^{(m+2-2k)}}{H_k^{(m+1-2k)}} \tilde{W}_k^{(m)}(x)$$

*où* $\tilde{W}_k^{(m)}(x)$ *est orthogonal régulier par rapport à* $c^{(m+1-2k)}$.

Démonstration.

$$\text{Posons } \tilde{P}_k^{(m+1-2k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \tilde{\lambda}_{k-i,m+1-2k}\, x^i$$

$$P_k^{(m+1-2k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_{k-i,m+1-2k}\, x^i$$

avec $\lambda_{0,m+1-2k} = 1$.
Puisque $\tilde{P}_k^{(m+1-2k)}(x) = x^k P_k^{(m+1-2k)}(x^{-1})$ on a :

$$\lambda_{j,m+1-2k} = \tilde{\lambda}_{k-j,m+1-2k}$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq k$.

CN : si $P_k^{(m+1-2k)}(x)$ est orthogonal régulier par rapport à la fonctionnelle $c^{(m+1-2k)}$, on a le système $(O_1)$ d'orthogonalité suivant.

$(\mathcal{O}_1)$ $\sum_{i=o}^{k} \lambda_{k-i,m+1-2k}\ c_{m+1-2k+i+j} = 0$ pour $j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k-1$.

Si $P_k^{(m+1-2k)}(o) \neq 0$, alors $H_k^{(m+2-2k)} \neq 0$ et $\tilde{\lambda}_{o,m+1-2k} \neq 0$.

Nous avons le système d'orthogonalité $(\mathcal{O}_2)$ déduit de $(\mathcal{O}_1)$.

$(\mathcal{O}_2)$ $\sum_{i=o}^{k} \tilde{\lambda}_{k-i,m+1-2k}\ c_{m-i-j} = 0$ pour $j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k-1$.

Par conséquent le polynôme $\tilde{P}_k^{(m+1-2k)}(x)$ est orthogonal par rapport à $\gamma^{(m)}$.

$\tilde{P}_k^{(m+1-2k)}(o) \neq 0$ car son terme constant est égal à $\tilde{\lambda}_{k,m+1-2k}$ qui vaut 1.

<u>CS</u> : la réciproque se traite de la même façon.

D'autre part le système $(\mathcal{O}_2)$ est satisfait également par le polynôme $W_k^{(m)}(x)$ qui est orthogonal régulier puisque $H_k^{(m+2-2k)} \neq 0$. Il est donc proportionnel à $\tilde{P}_k^{(m+1-2k)}(x)$, dont le terme de plus haut degré est $\lambda_{k,m+1-2k}$. Il est facile de voir que ce terme vaut $(-1)^k \dfrac{H_k^{(m+2-2k)}}{H_k^{(m+1-2k)}}$ et par suite

$$\tilde{P}_k^{(m+1-2k)}(x) = (-1)^k \frac{H_k^{(m+2-2k)}}{H_k^{(m+1-2k)}} W_k^{(m)}(x).$$

La seconde relation est la transformée de celle-ci.

<u>cqfd</u>.

<u>Remarque 4.4.</u>

Nous avons également dans ce cas :

$$\tilde{H}_k^{(m+1-2k)}(x) = (-1)^k H_k^{(m+2-2k)} W_k^{(m)}(x).$$

La propriété 4.12 termine la série des propriétés relatives au pourtour des blocs W. On trouve l'égalité de tous les polynômes W sur le côté ouest du bloc.

<u>*Propriété 4.12.*</u>

$$W_{k-1}^{(m+j)}(x) = W_{k-1}^{(m)}(x),\ \forall j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le r+1.$$

Démonstration.

$$P_{k-1}^{(m+1-2k+j)}(x) = P_{k-1}^{(m+1-2k)}(x) \ \forall j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le r+1$$

car ces polynômes sont sur le côté ouest du bloc P.
Donc $\tilde{P}_{k-1}^{(m+1-2k+j)}(x) = \tilde{P}_{k-1}^{(m+1-2k)}(x)$.

En utilisant la propriété 4.11 nous obtenons :

$$\frac{H_k^{(m+2-2k+j)}}{H_k^{(m+1-2k+j)}} W_k^{(m+j)}(x) = \frac{H_k^{(m+2-2k)}}{H_k^{(m+1-2k)}} W_k^{(m)}(x)$$

Comme les polynômes W(x) sont normalisés on a :

$$W_k^{(m+j)}(x) = W_k^{(m)}(x)$$

et on retrouve accessoirement la relation de progression géométrique des déterminants de Hankel au bord d'un bloc H.

cqfd.

## Remarque 4.5.

Si $W_k^{(m)}(x)$ est orthogonal régulier et $H_k^{(m+1-2k)} = 0$, alors $P_k^{(m+1-2k)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

$W_k^{(m)}(x) = x^j\ W_{k-j}^{(m-j)}(x)$ si $W_{k-j}^{(m-j)}(x)$ est le polynôme situé à l'angle sud ouest du bloc W.

$P_{k-j}^{(m+1-2k+j)}(x)$ est orthogonal régulier et on a :

$$\tilde{P}_{k-j}^{(m+1-2k+j)}(x) = (-1)^{k-j} \frac{H_{k-j}^{(m+2-2k+j)}}{H_{k-j}^{(m+1-2k+j)}} W_{k-j}^{(m-j)}(x)$$

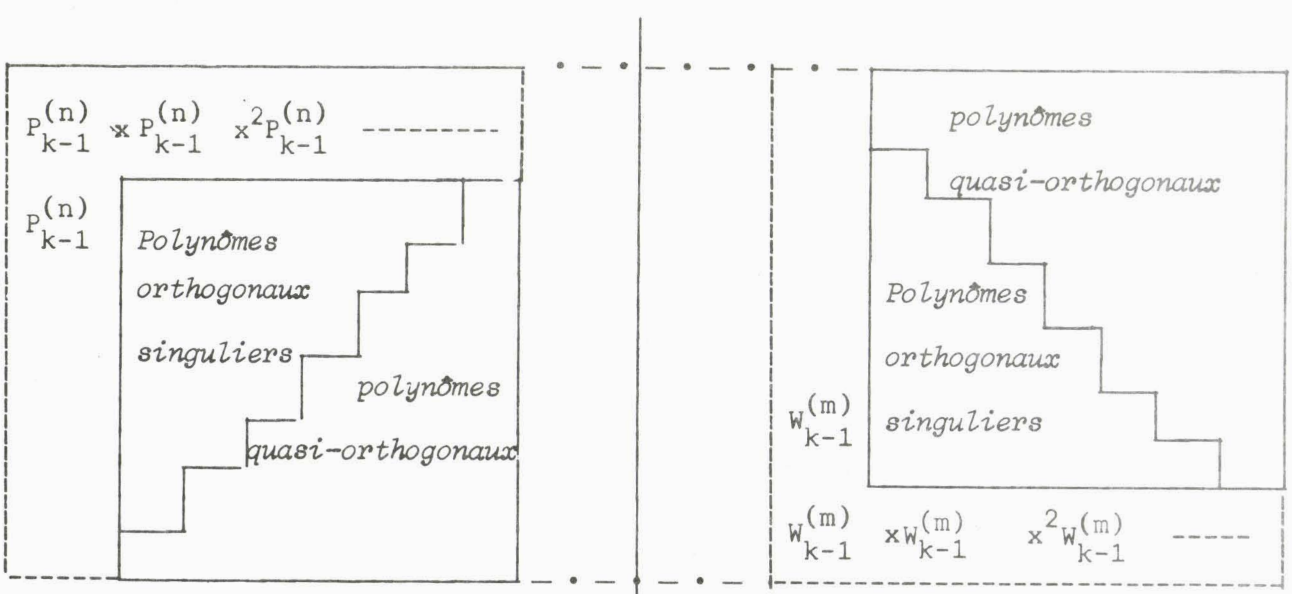
Par conséquent, on obtient :

$$x^j \, \tilde{P}_{k-j}^{(m+1-2k+j)}(x) = (-1)^{k-j} \, \frac{H_{k-j}^{(m+2-2k+j)}}{H_{k-j}^{(m+1-2k+j)}} \, W_k^{(m)}(x).$$

Soit

$$\boxed{x^j \, \tilde{H}_{k-j}^{(m+1-2k+j)}(x) = (-1)^{k-j} \, H_{k-j}^{(m+2-2k+j)} \, W_k^{(m)}(x)}$$

Les propriétés démontrées pour les polynômes orthogonaux s'étendent naturellement aux polynômes $W_k^{(m)}(x)$. Il faut simplement faire attention au décalage des blocs W par rapport aux blocs H ou P, et se rappeler qu'il y a une symétrie effectuée sur la "géométrie" des blocs par rapport à un axe horizontal passant par le centre du bloc.




Bloc P $n = m + 3 - 2k$ Bloc W

*Balayage suivant les diagonales.* *Balayage suivant les antidiagonales.*

Le théorème 1.5 nous dit également qu'il existe une relation de récurrence à trois termes entre trois polynômes orthogonaux successifs $W_k^{(m)}(x)$ dont les coefficients sont déterminés par les relations présentées dans ce théorème en remplaçant la fonctionnelle $c^{(n)}$ par la fonctionnelle $\gamma^{(m)}$.
Pour noter les polynômes orthogonaux réguliers prédécesseurs et successeurs suivant l'antidiagonale n nous utiliserons $\tilde{pr}(i,n)$ et $\tilde{su}(i,n)$.
$\tilde{pr}(i,n)$ donne le degré du polynôme orthogonal régulier qui précéde le polynôme de degré i sur l'antidiagonale n.
En utilisant la remarque 1.2 nous obtenons :

<u>Remarque 4.6.</u>

$$W_i^{(m)}(x) = (x\, \Omega^{(m)}_{i-\tilde{pr}(i,m)-1}(x) + \tilde{B}_i^{(m)})\, W^{(m)}_{\tilde{pr}(i,m)}(x) + \tilde{C}_i^{(m)}\, W^{(m)}_{\tilde{pr}(\tilde{pr}(i,m),m)}(x)$$

avec $W_{-1}^{(m)}(x) = 0$, $W_o^{(m)}(x) = 1$.

$$\tilde{C}_i^{(m)} = - \frac{\gamma^{(m)}(W^{(m)}_{\tilde{pr}(i,m)}\; W^{(m)}_{i-1})}{\gamma^{(m)}(W^{(m)}_{\tilde{pr}(\tilde{pr}(i,m),m)}\; W^{(m)}_{\tilde{pr}(i,m)-1})}$$

$$x\, \Omega^{(m)}_{i-\tilde{pr}(i,m)-1}(x) + \tilde{B}_i^{(m)} = \sum_{j=o}^{i-\tilde{pr}(i,m)} \tilde{b}_j\, x^j$$

avec $\tilde{b}_o = \tilde{B}_i^{(m)}$ et $\tilde{b}_{i-\tilde{pr}(i,m)} = 1$.

Les $\tilde{b}_j$ sont donnés par le système linéaire régulier suivant :

$$\gamma^{(m)}(x\, W_k^{(m)}\, W_{i-1}^{(m)}) = \sum_{j=i-1-k}^{i-1-\tilde{pr}(i,m)} (-\tilde{b}_j)\, \gamma^{(m)}(W_k^{(m)}\, W^{(m)}_{\tilde{pr}(i,m)+j})$$

pour $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{pr}(i,m) \le k \le i-1$.

*Propriété 4.13.*

$$\gamma^{(m)}(x\, W_k^{(m)}(x)) = \gamma^{(m-1)}\, (W_k^{(m)}(x)).$$

La démonstration est immédiate.

Grâce à cette propriété tous les résultats du chapitre 2 vont s'étendre sans démonstration au cas des polynômes $W_k^{(m)}(x)$. Il suffira de transformer tous les passages de l'indice $n$ à $n+1$ des diagonales en passages de l'indice $m$ à $m-1$ des antidiagonales.

Par exemple, on obtiendra pour l'équivalent de la propriété 2.4.

Tout polynôme $W_i^{(m-1)}$ orthogonal régulier vérifie les deux relations suivantes :

$$W_i^{(m-1)}(x) = x^{-1}(W_{i+1}^{(m)}(x) + \tilde{q}_{i+1,\ell}^{(m)}\, W^{(m)}_{\widetilde{pr}(i+1,m)}(x))$$

$$W_i^{(m-1)}(x) = \Omega^{(m)}_{i-\widetilde{pr}(i+1,m)}(x)\, W^{(m)}_{\widetilde{pr}(i+1,m)}(x) + \tilde{E}_{i+1}^{(m)}\, W^{(m-1)}_{\widetilde{pr}(\widetilde{pr}(i+1,m),m-1)}(x).$$

Algorithme "$\tilde{q}d$".

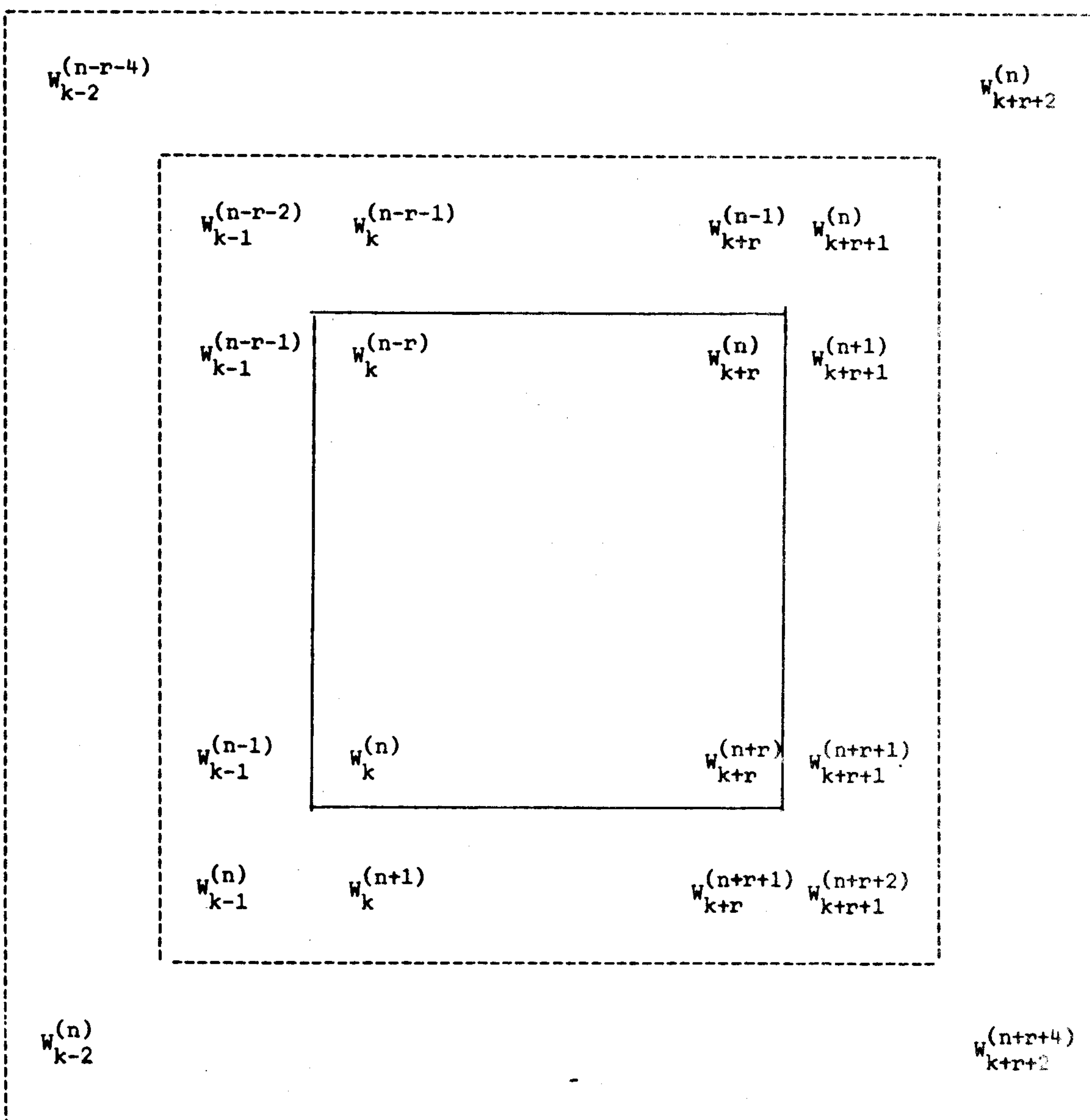
Les relations rhomboïdales classiques deviennent :

$$\tilde{q}_{k+1}^{(m)} + \tilde{e}_{k+1}^{(m)} = \tilde{q}_{k+1}^{(m-1)} + \tilde{e}_k^{(m-1)}$$

$$\tilde{e}_k^{(m)}\, \tilde{q}_{k+1}^{(m)} = \tilde{e}_k^{(m-1)}\, \tilde{q}_k^{(m-1)}$$

avec au départ $\tilde{e}_{o,o}^{(m)} = 0$, $\tilde{q}_{o,o}^{(m)} = 0$ et $\tilde{q}_1^{(m)} = \dfrac{c_{m-1}}{c_m}$.

Dans le cas d'une table W non normale, l'ensemble des résultats pour le contournement des blocs P s'applique aux blocs W. Le comportement de l'algorithme, l'allure des blocs du "$\tilde{q}d$" sont symétriques, par rapport à un axe horizontal passant par le centre des blocs $\tilde{q}d$, de ceux de la section 2.2


$W_{k-2}^{(n-r-4)}$
$W_{k+r+2}^{(n)}$
$W_{k-1}^{(n-r-2)}$
$W_{k}^{(n-r-1)}$
$W_{k+r}^{(n-1)}$
$W_{k+r+1}^{(n)}$
$W_{k-1}^{(n-r-1)}$
$W_{k}^{(n-r)}$
$W_{k+r}^{(n)}$
$W_{k+r+1}^{(n+1)}$
$W_{k-1}^{(n-1)}$
$W_{k}^{(n)}$
$W_{k+r}^{(n+r)}$
$W_{k+r+1}^{(n+r+1)}$
$W_{k-1}^{(n)}$
$W_{k}^{(n+1)}$
$W_{k+r}^{(n+r+1)}$
$W_{k+r+1}^{(n+r+2)}$
$W_{k-2}^{(n)}$
$W_{k+r+2}^{(n+r+4)}$

Si nous considérons le bloc W dessiné à la page précédente on obtient les relations "spéciales" pour le contournement du bloc en transformant les relations de contournement des blocs P de la façon suivante.
Les indices inférieurs restent identiques. Seuls les indices supérieurs sont modifiés de façon symétrique par rapport à n. Par exemple :

$$n+r+1-i \longrightarrow n-r-1+i$$

En particulier nous obtenons pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq r$.

$$\tilde{B}_{k+r+1}^{(n+r+1-i)} = \tilde{B}_{k+i}^{(n-r-1+i)}$$

$$\Omega_i^{(n+r+1-i)}(x) = \Omega_i^{(n-r-1+i)}(x)$$

$$\Omega_{i+1}^{(n+r-i)}(x) = x\, \Omega_i^{(n+r+1-i)}(x) + \tilde{B}_{k+r+1}^{(n+r+1-i)}$$

<u>Relations entre les déterminants de Hankel et les coefficients $\tilde{q}_i^{(n)}$ et $\tilde{E}_i^{(n)}$.</u>

Si $W_i^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier on a :

$$H_i^{(n-2i+2)}\, W_i^{(n)}(x) = \begin{vmatrix} c_n & \cdots & c_{n-i} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n-i+1} & \cdots & c_{n-2i+1} \\ 1 & \cdots & x^i \end{vmatrix}$$

$$H_i^{(n-2i+2)}\, W_i^{(n)}(o) = (-1)^i\, H_i^{(n-2i+1)}$$

Les propriétés de la section 4.1 s'étendent sans problème en faisant un changement d'indices pour les déterminants.

Si avec le polynôme $P_i^{(n)}(x)$ on a $H_i^{(n)}$, avec le polynôme $W_i^{(n)}(x)$ on aura $H_i^{(n-2i+2)}$.

Si on passe de $P_i^{(n)}(x)$ à $P_i^{(n+1)}(x)$ et de $H_i^{(n)}$ à $H_i^{(n+1)}$, on passera de $W_i^{(n)}(x)$ à $W_i^{(n-1)}(x)$ et de $H_i^{(n-2i+2)}$ à $H_i^{(n-2i+1)}$.

On peut dire en règle générale que ce sont les deux indices de $q_i^{(n)}$ ou $e_i^{(n)}$ qui servent d'origine de repère pour les changements d'indice.

Nous présentons ci-après les propriétés donnant les relations que vérifient $\tilde{q}_{i+1,\ell}^{(n)}$, la fonctionnelle $\gamma^{(m)}$ de certains produits de déterminants $\tilde{e}_{i+1,\ell}^{(n)}$ et les coefficients $\tilde{B}$ des polynômes $\Omega(x)$ qui permettent la traversée des blocs W suivant une antidiagonale.

<u>*Propriété 4.14.*</u>

*Si* $W_i^{(n-1)}(x)$ *est orthogonal régulier on a :*

*i)*

$$H_{i+1}^{(n-2i)}\ \tilde{q}_{i+1,\ell}^{(n)} = (-1)^{i+\tilde{pr}(i+1,n)} \frac{H_{i+1}^{(n-2i-1)}\ H_{\tilde{pr}(i+1,n)}^{(n+2-2\tilde{pr}(i+1,n))}}{H_{\tilde{pr}(i+1,n)}^{(n+1-2\tilde{pr}(i+1,n))}}$$

*ii)* *Si en plus* $W_{i+1}^{(n)}(x)$ *est orthogonal régulier on a :*

$$\tilde{q}_{i+1,\ell}^{(n)} = (-1)^{i+\tilde{pr}(i+1,n)} \frac{H_{i+1}^{(n-2i-1)}\ H_{\tilde{pr}(i+1,n)}^{(n+2-2\tilde{pr}(i+1,n))}}{H_{i+1}^{(n-2i)}\ H_{\tilde{pr}(i+1,n)}^{(n+1-2\tilde{pr}(i+1,n))}}$$

*iii)* *Si* $W_{i+1}^{(n)}(x)$ *est orthogonal singulier on a* $\tilde{q}_{i+1,\ell}^{(n)}$ *arbitraire en utilisant la relation du i).*

*Propriété 4.15.*

*i)* *Si* $W_i^{(n)}(x)$ *est orthogonal régulier alors :*

$$\gamma^{(n)}((W_i^{(n)}(x))^2) = \frac{H_{i+1}^{(n-2i)}}{H_i^{(n-2i+2)}}$$

*Nous considérons dans la suite que* $h_\ell+1$ *et* $p_\ell+1$ *sont les indices limites du bloc* P *pour* $P_i^{(n)}(x)$.

*ii)* *Si* $W_{p_\ell}^{(n-1)}$ *est orthogonal régulier, alors :*

$$\gamma^{(n)}(W_{h_\ell+1}^{(n)}\, W_{p_\ell}^{(n)}) = (-1)^{p_\ell+h_\ell+1}\, \frac{H_{p_\ell+1}^{(n-2p_\ell)}\; H_{h_\ell+1}^{(n-2h_\ell-1)}}{H_{p_\ell}^{(n-2p_\ell+1)}\; H_{h_\ell+1}^{(n-2h_\ell)}}$$

iii) *Si* $W_{p_\ell+1}^{(n-1)}(x)$ *est orthogonal régulier, alors*

$$\gamma^{(n)}(W_{h_\ell+1}^{(n)}\, W_{p_\ell}^{(n)}) = (-1)^{p_\ell+h_\ell}\, \frac{H_{p_\ell+1}^{(n-2p_\ell-1)}\; H_{h_\ell+1}^{(n-2h_\ell)}}{H_{h_\ell}^{(n-2h_\ell+1)}\; H_{p_\ell+1}^{(n-2p_\ell)}}$$

*iv)* *Si* $W_{p_\ell+2}^{(n+1)}(x)$ *est orthogonal régulier, alors :*

$$\gamma^{(n)}(W_{h_\ell+1}^{(n)}\, W_{p_\ell}^{(n)}) = (-1)^{p_\ell+h_\ell}\, \frac{H_{p_\ell+2}^{(n-2p_\ell-1)}\; H_{h_\ell+1}^{(n-2h_\ell)}}{H_{p_\ell+1}^{(n-2p_\ell)}\; H_{h_\ell+1}^{(n-2h_\ell+1)}}$$

v) *Si* $W_{p_\ell+1}^{(n+1)}(x)$ *est orthogonal régulier alors* :

$$\gamma^{(n)}(W_{h_\ell+1}^{(n)}\ W_{p_\ell}^{(n)}) = (-1)^{p_\ell+h_\ell+1}\ \frac{H_{p_\ell+1}^{(n-2p_\ell)}\ H_{p_\ell+2}^{(n-2p_\ell-1)}}{H_{p_\ell+1}^{(n-2p_\ell+1)}\ H_{h_\ell+1}^{(n-2h_\ell)}}$$

<u>*Propriété 4.16.*</u>

*Si* $W_i^{(n-1)}(x)$, $W_{i+1}^{(n-1)}(x)$ *et* $W_{i+1}^{(n)}(x)$ *sont orthogonaux réguliers, alors* :

$$\tilde{e}_{i+1,\ell}^{(n)} = \frac{H_{i+2}^{(n-2i-2)}\ H_i^{(n-2i+1)}}{H_{i+1}^{(n-2i)}\ H_{i+1}^{(n-2i-1)}}$$

*La remarque suivante est l'équivalent de la remarque 4.2.*

<u>Remarque 4.7.</u>

On a pour $i \in Z$, $-1 \leq i \leq r$.

$$\tilde{B}_{k+r+1}^{(n+r-i)} = (-1)^i \left[ \frac{H_{k+r+1}^{(n-r-1-2k-i)}H_{k+r-1-i}^{(n+r-2k+5+i)} - H_{k+r-2-i}^{(n-r-2k+5+i)}H_{k+r+2}^{(n-r-1-2k-i)}}{H_{k+r-1-i}^{(n+r-2k+4+i)}\ H_{k+r+1}^{(n-r-2k-i)}} \right]$$

$$\tilde{B}_{k+i+1}^{(n-r+i)} = (-1)^i \left[ \frac{H_{k-1}^{(n-r-2k+i+5)}\ H_{k+1+i}^{(n-r-2k-1-i)} - H_{k-2}^{(n-r+5-2k+i)}\ H_{k+i+2}^{(n-r-1-2k-i)}}{H_{k-1}^{(n-2k+4-r+i)}\ H_{k+i+1}^{(n-2k-r-i)}} \right]$$

# 4.4 DEPLACEMENTS ANTIDIAGONAUX

Nous désirons connaître les relations de récurrence portant sur les polynômes $\tilde{H}(x)$, soit sur une seule antidiagonale, soit sur deux antidiagonales adjacentes, et qui ne font intervenir que des déterminants de Hankel.

Nous utiliserons les relations de récurrence sur les $W^{(m)}(x)$, ou les relations sur deux familles adjacentes. Il suffira de transformer les relations de la section 4.2 grâce aux changements d'indices.

Mais on ne peut passer des polynômes $W_k^{(m)}(x)$ aux polynômes $\tilde{H}_k^{(m-2k+1)}(x)$ en utilisant la propriété 4.12 que si le polynôme $P_k^{(m-2k+1)}(x)$ est orthogonal régulier, c'est à dire si $H_k^{(m-2k+1)} \neq 0$ ou $W_k^{(m)}(o) \neq o$.

Aussi nous posons :

$$\tilde{HW}_k^{(m-2k+1)}(x) = (-1)^k \, H_k^{(m+2-2k)} \, W_k^{(m)}(x).$$

Si $H_k^{(m-2k+1)} \neq 0$, alors $\tilde{HW}_k^{(m-2k+1)}(x) \equiv \tilde{H}_k^{(m-2k+1)}(x)$

## I. DEPLACEMENT SUR UNE SEULE ANTIDIAGONALE.

Nous considérons $W_i^{(n)}(x)$ et $W_{\tilde{pr}(i,n)}^{(n)}(x)$ deux polynômes orthogonaux réguliers et nous désirons connaître $W_{\tilde{su}(i,n)}^{(n)}(x)$. On utilise la relation de récurrence à trois termes et $\Omega_{\tilde{su}(i,n)-1-i}^{(n)}(x)$ est obtenu grâce aux relations de récurrence de la remarque 4.6.

$$W_{\tilde{su}(i,n)}^{(n)}(x) = \left(x\,\Omega_{\tilde{su}(i,n)-1-i}^{(n)}(x) + \tilde{B}_{\tilde{su}(i,n)}^{(n)}\right) W_i^{(n)}(x) + \tilde{C}_{\tilde{su}(i,n)}^{(n)} \, W_{\tilde{pr}(i,n)}^{(n)}(x)$$

$$\tilde{B}_{\tilde{su}(i,n)}^{(n)} = (-1)^{\tilde{su}(i,n)-i-2} \, \frac{H_{\tilde{su}(i,n)}^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))} \, H_i^{(n-2i+3)} - H_{i-1}^{(n-2i+3)} \, H_{\tilde{su}(i,n)+1}^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}}{H_i^{(n-2i+2)} \, H_{\tilde{su}(i,n)}^{(n-2\tilde{su}(i,n)+2)}}$$

Par souci de simplification nous posons encore :

$$\bar{Z}^{(n)}(x) = H^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}_{\tilde{su}(i,n)} H^{(n-2i+3)}_{i} - H^{(n-2i+3)}_{i-1} H^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}_{\tilde{su}(i,n)+1}$$

$$+ (-1)^{\tilde{su}(i,n)-i} x. \Omega^{(n)}_{\tilde{su}(i,n)-1-i} H^{(n-2i+2)}_{i} H^{(n-2\tilde{su}(i,n)+2)}_{\tilde{su}(i,n)}$$

I.1 <u>Si $H^{(n-2i+1)}_{i+1} = 0$.</u>

$W^{(n)}_{i}(x)$ est à l'ouest du bloc W.

$\tilde{H}^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))}_{\tilde{pr}(i,n)}(x)$ n'est pas identique à $\tilde{HW}^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))}_{\tilde{pr}(i,n)}(x)$. On ne peut rien dire pour $\tilde{H}^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}_{\tilde{su}(i,n)}(x)$.

$$\tilde{C}^{(n)}_{\tilde{su}(i,n)} = (-1)^{\tilde{su}(i,n)+\tilde{pr}(i,n)} \frac{H^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}_{\tilde{su}(i,n)+1} H^{(n-2\tilde{pr}(i,n)+2)}_{\tilde{pr}(i,n)}}{H^{(n-2\tilde{su}(i,n)+2)}_{\tilde{su}(i,n)} H^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))}_{\tilde{pr}(i,n)+1}}$$

On a la relation suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} &(H^{(n-2i+2)}_{i})^2 H^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))}_{\tilde{pr}(i,n)+1} \tilde{HW}^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}_{\tilde{su}(i,n)}(x) = \\ &\bar{Z}^{(n)}(x) H^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))}_{\tilde{pr}(i,n)+1} \tilde{HW}^{(n-2i+1)}_{i}(x) + \\ &\qquad \tilde{H}^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}_{\tilde{su}(i,n)+1} (H^{(n-2i+2)}_{i})^2 \tilde{HW}^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))}_{\tilde{pr}(i,n)}(x) \end{aligned}}$$

**I.2 Si $H_i^{(n-2i+1)} = 0$.**

$W_i^{(n)}(x)$ est au nord du bloc W.

$\tilde{H}_i^{(n-2i+1)}(x)$ n'est pas identique à $\tilde{HW}_i^{(n-2i+1)}(x)$.

$$\tilde{C}^{(n)}_{\tilde{su}(i,n)} = (-1)^{\tilde{su}(i,n)+\tilde{pr}(i,n)} \frac{H^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}_{\tilde{su}(i,n)} \; H^{(n-2\tilde{pr}(i,n)+2)}_{\tilde{pr}(i,n)}}{H^{(n-2\tilde{su}(i,n)+2)}_{\tilde{su}(i,n)} \; H^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))}_{\tilde{pr}(i,n)}}$$

D'où la relation :

$$\boxed{\begin{aligned} &(H_i^{(n-2i+2)})^2 \; H^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))}_{\tilde{pr}(i,n)} \; \tilde{HW}^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}_{\tilde{su}(i,n)}(x) = \\ &\bar{Z}^{(n)}(x) \; H^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))}_{\tilde{pr}(i,n)} \; \tilde{HW}_i^{(n-2i+1)}(x) + \\ &\qquad H^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}_{\tilde{su}(i,n)} (H_i^{(n-2i+2)})^2 \; \tilde{HW}^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))}_{\tilde{pr}(i,n)}(x) \end{aligned}}$$

**I.3 Si $H_i^{(n+1-2i)}$ et $H_{i+1}^{(n+1-2i)} \neq 0$.**

$W_i^{(n)}(x)$ est dans l'angle SO du bloc W.

**I.3.1 Si $H_i^{(n+3-2i)} = 0$.**

On ne peut rien dire pour $\tilde{H}^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}_{\tilde{su}(i,n)}(x)$

$$\tilde{\mathcal{C}}^{(n)}_{\widetilde{su}(i,n)} = (-1)^{\widetilde{su}(i,n)+\widetilde{pr}(i,n)-1} \frac{H^{(n-2\widetilde{su}(i,n)+2)}_{\widetilde{su}(i,n)} \, H^{(n+1-2i)}_{i+1} \, H^{(n+3-2i)}_{i-1} \, H^{(n-2\widetilde{pr}(i,n)+2)}_{\widetilde{pr}(i,n)}}{H^{(n+3-2\widetilde{su}(i,n))}_{\widetilde{su}(i,n)} \, (H^{(n-2i+2)}_{i})^2 \, H^{(n+1-2\widetilde{pr}(i,n))}_{\widetilde{pr}(i,n)}}$$

D'où la relation :

$$\boxed{\begin{aligned} &(H^{(n-2i+2)}_{i})^2 \, H^{(n+3-2\widetilde{su}(i,n))}_{\widetilde{su}(i,n)} \, H^{(n+1-2\widetilde{pr}(i,n))}_{\widetilde{pr}(i,n)} \, \widetilde{HW}^{(n+1-2\widetilde{su}(i,n))}_{\widetilde{su}(i,n)}(x) = \\ &\quad \bar{Z}^{(n)}(x) \, H^{(n+3-2\widetilde{su}(i,n))}_{\widetilde{su}(i,n)} \, H^{(n+1-2\widetilde{pr}(i,n))}_{\widetilde{pr}(i,n)} \, \widetilde{HW}^{(n-2i+1)}_{i}(x) \\ &\quad -(H^{(n-2\widetilde{su}(i,n)+2)}_{\widetilde{su}(i,n)})^2 \, H^{(n+1-2i)}_{i+1} \, H^{(n+3-2i)}_{i-1} \, \widetilde{HW}^{(n+1-2\widetilde{pr}(i,n))}_{\widetilde{pr}(i,n)}(x) \end{aligned}}$$

I.3.2 <u>Si $H^{(n+3-2i)}_{i-1} = 0$.</u>

$\widetilde{H}^{(n+1-2\widetilde{pr}(i,n))}_{\widetilde{pr}(i,n)}(x)$ n'est pas identique à $\widetilde{HW}^{(n+1-2\widetilde{pr}(i,n))}_{\widetilde{pr}(i,n)}(x)$ et on ne peut rien dire pour $\widetilde{H}^{(n+1-2\widetilde{su}(i,n))}_{\widetilde{su}(i,n)}(x)$.

$$\tilde{\mathcal{C}}^{(n)}_{\widetilde{su}(i,n)} = (-1)^{\widetilde{su}(i,n)+\widetilde{pr}(i,n)-1} \frac{H^{(n-2\widetilde{su}(i,n)+2)}_{\widetilde{su}(i,n)} \, H^{(n+1-2i)}_{i} \, H^{(n+3-2i)}_{i} \, H^{(n-2\widetilde{pr}(i,n)+2)}_{\widetilde{pr}(i,n)}}{H^{(n+3-2\widetilde{su}(i,n))}_{\widetilde{su}(i,n)-1} \, (H^{(n-2i+2)}_{i})^2 \, H^{(n+1-2\widetilde{pr}(i,n))}_{\widetilde{pr}(i,n)+1}}$$

D'où la relation :

$$(H_i^{(n-2i+2)})^2 \, H_{\tilde{su}(i,n)-1}^{(n+3-2\tilde{su}(i,n))} \, H_{\tilde{pr}(i,n)+1}^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))} \, \tilde{HW}_{\tilde{su}(i,n)}^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}(x) =$$

$$\bar{Z}^{(n)}(x) \, H_{\tilde{su}(i,n)-1}^{(n+3-2\tilde{su}(i,n))} \, H_{\tilde{pr}(i,n)+1}^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))} \, \tilde{HW}_i^{(n-2i+1)}(x)$$

$$- (H_{\tilde{su}(i,n)}^{(n-2\tilde{su}(i,n)+2)})^2 \, H_i^{(n+1-2i)} \, H_i^{(n+3-2i)} \, \tilde{HW}_{\tilde{pr}(i,n)}^{(n+1-2\tilde{pr}(i,n))}(x)$$

I.3.3 Si $H_i^{(n+3-2i)}$ et $H_{i-1}^{(n+3-2i)} \neq 0$.

On ne peut rien dire pour $\tilde{H}_{\tilde{su}(i,n)}^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}(x)$.

Les deux relations trouvées précédemment sont valables.
Nous avons une remarque analogue à la remarque 4.3.

**Remarque 4.8.**

Si $H_{i+1}^{(n-2i+1)} = 0$ la relation du I.3.2 s'applique au cas I.1 car on a :

$$(H_i^{(n-2i+2)})^2 = H_i^{(n+1-2i)} \, H_i^{(n-2i+3)}$$

$$(H_{\tilde{su}(i,n)}^{(n-2\tilde{su}(i,n)+2)})^2 = - H_{\tilde{su}(i,n)-1}^{(n+3-2\tilde{su}(i,n))} \, H_{\tilde{su}(i,n)+1}^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}$$

De même si $H_i^{(n-2i+1)} = 0$ la relation du I.3.1 s'applique au cas I.2 car on a :

$$(H_i^{(n+2-2i)})^2 = -H_{i+1}^{(n+1-2i)}\ H_{i-1}^{(n+3-2i)}$$

$$(H_{\tilde{su}(i,n)}^{(n-2\tilde{su}(i,n)+2)})^2 = H_{\tilde{su}(i,n)}^{(n+3-2\tilde{su}(i,n))}\ H_{\tilde{su}(i,n)}^{(n+1-2\tilde{su}(i,n))}$$

II. Nous étudions maintenant le cas où nous avons deux antidiagonales adjacentes m et m-1 sur lesquelles on bâtit un escalier. Nous désirons connaître tous les polynômes $W^{(m)}(x)$ et $W^{(m-1)}(x)$ orthogonaux réguliers et en déduire les polynômes $\tilde{HW}(x)$ correspondants.

## II.1 Si les déterminants $H_i^{(m+1-2i)}$, $H_{i+1}^{(m-2i)}$ et $H_i^{(m-2i+2)}$ sont non nuls.

o * Nous avons
o

$$xW_i^{(m-1)}(x) = W_{i+1}^{(m)}(x) + \tilde{q}_{i+1,\ell}^{(m)}\ W_i^{(m)}(x)$$

avec

$$\tilde{q}_{i+1,\ell}^{(m)} = \frac{H_{i+1}^{(m-2i-1)}\ H_i^{(m-2i+2)}}{H_{i+1}^{(m-2i)}\ H_i^{(m+1-2i)}}$$

On a alors :

$$H_i^{(m+1-2i)}\ \tilde{HW}_{i+1}^{(m-1+2i)}(x) = H_{i+1}^{(m-2i-1)}\ \tilde{HW}_i^{(m+1-2i)}(x) - x\ H_{i+1}^{(m-2i)}\ \tilde{HW}_i^{(m-2i)}(x).$$

C'est la relation 2.30 du livre de C. Brezinski.

**Remarque.**

Si $H_{i+1}^{(m-2i-1)} = 0$, alors $W_{i+1}^{(m-1)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

$W_{i+1}^{(m)}(x)$ est au sud d'un bloc W et on a $W_{i+1}^{(m)}(x) = x\ W_i^{(m-1)}(x)$, ce que donne bien la relation proposée.

## II.2 Si les déterminants $H_i^{(m+1-2i)}$, $H_i^{(m-2i+2)}$ et $H_{i-1}^{(m+3-2i)}$ sont non nuls.

$\overset{*}{\circ\ \circ}$ Nous avons :

$$W_i^{(m-1)}(x) = W_i^{(m)}(x) - \tilde{e}_{i,\ell}^{(m)} \; W_{i-1}^{(m-1)}(x)$$

et

$$\tilde{e}_{i,\ell}^{(m)} = \frac{H_{i+1}^{(m-2i)} \; H_{i-1}^{(m-2i+3)}}{H_i^{(m-2i+2)} \; H_i^{(m-2i+1)}}$$

On a alors :

$$H_i^{(m-2i+2)} \; \widetilde{HW}_i^{(m-2i)}(x) = H_i^{(m-2i+1)} \; \widetilde{HW}_i^{(m+1-2i)}(x) + H_{i+1}^{(m-2i)} \; \widetilde{HW}_{i-1}^{(m-2i+2)}(x)$$

C'est la relation 2.27 du livre de C. Brezinski.

**Remarque.**

Si $H_{i+1}^{(m-2i)} = 0$, alors $W_{i+1}^{(m)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier et $W_i^{(m)}(x) = W_i^{(m-1)}(x)$ ce que donne bien la relation ci-dessus.

## II.3 Si $H_i^{(n)}$ et $H_i^{(n+1)}$ sont non nuls, et $H_{i+1}^{(n+1)} = 0$

alors $P_i^{(n)}(x)$ est à l'ouest du bloc P. $P_{su(i,n)}^{(n-2su(i,n)+2i)}(x)$ est au nord de ce bloc et vaut $x^{su(i,n)-i} \; P_i^{(n)}(x)$. Par conséquent on a :

$$H_i^{(n)} \; \tilde{H}_{su(i,n)}^{(n-2su(i,n)+2i)}(x) = H_{su(i,n)}^{(n-2su(i,n)+2i)} \; \tilde{H}_i^{(n)}(x)$$

$\tilde{H}_{su(i,n)}^{(n-2su(i,n)+2i)}(x)$ n'est pas orthogonal par rapport à $\gamma^{(n+2i-1)}$.

Nous étudions à présent ce qui se passe lors de la traversée d'un bloc W. Nous supposons connus tous les polynômes $W^{(m)}(x)$ et $W^{(m-1)}(x)$ avant la traversée de ce bloc.

Il suffit de transposer les relations obtenues dans la section 4.2 II.

## II.4. Si $H_i^{(m-2i+2)}$ et $H_i^{(m-2i+1)}$ sont non nuls et $H_{i+1}^{(m-2i)} = 0$.

Il faut d'abord calculer $\tilde{HW}^{(m-2\tilde{su}(i,m-1))}_{\tilde{su}(i,m-1)}(x)$. Nous avons

$$W^{(m-1)}_{\tilde{su}(i,m-1)}(x) = \Omega^{(m)}_{\tilde{su}(i,m-1)-i}(x)\, W_i^{(m)}(x) + \tilde{E}^{(m)}_{\tilde{su}(i,m-1)+1}\, W^{(m-1)}_{\tilde{pr}(i,m-1)}(x)$$

$\Omega^{(m)}_{\tilde{su}(i,m-1)-i}(x)$ se déduit des expressions de la remarque 4.6.

Nous transformons la relation de la section 4.2, II.3.2 car c'est la plus générale.

$$\tilde{E}^{(m)}_{\tilde{su}(i,m-1)+1} = (-1)^{\tilde{su}(i,m-1)+\tilde{pr}(i,m)+1}\, \frac{H^{(m-2\tilde{su}(i,m-1))}_{\tilde{su}(i,m-1)+1}\; H^{(m+3-2\tilde{pr}(i,m))}_{\tilde{pr}(i,m)-1}}{H^{(m+1-2\tilde{su}(i,m-1))}_{\tilde{su}(i,m-1)}\; H^{(m-2\tilde{pr}(i,m)+2)}_{\tilde{pr}(i,m)}}$$

On obtient donc en tenant compte du fait que $\tilde{pr}(i,m-1) = \tilde{pr}(i,m)-1$

$$\boxed{\begin{aligned} & H_i^{(m+2-2k)}\, H^{(m-2\tilde{pr}(i,m-1))}_{\tilde{pr}(i,m-1)-1}\, \tilde{HW}^{(m-2\tilde{su}(i,m-1))}_{\tilde{su}(i,m-1)}(x) = \\ & (-1)^{\tilde{su}(i,m-1)+i}\, \Omega^{(m)}_{\tilde{su}(i,m-1)-i}(x)\, H^{(m+1-2\tilde{su}(i,m-1))}_{\tilde{su}(i,m-1)}\, H^{(m+2\tilde{pr}(i,m-1))}_{\tilde{pr}(i,m-1)-1}\, \tilde{HW}_i^{(m+1-2k)}(x) \\ & -H^{(m-2\tilde{su}(i,m-1))}_{su(i,m-1)+1}\, H_i^{(m+2-2k)}\, \tilde{HW}^{(m-2\tilde{pr}(i,m-1)}_{pr(i,m-1)}(x) \end{aligned}}$$

II.5 Si $H_i^{(m-2i+2)}$ et $H_i^{(m-2i+1)}$ sont non nuls et $H_{i+1}^{(m-2i)} = 0$.

On doit ensuite calculer $\tilde{HW}_{\tilde{su}(i,m)}^{(m+1-2\tilde{su}(i,m-1))}(x)$, c'est à dire puisque $\tilde{su}(i,m-1) = \tilde{su}(i,m)-1$ on cherche $\tilde{HW}_{\tilde{su}(i,m)}^{(m-1-2\tilde{su}(i,m))}(x)$. On a alors :

$$xW_{\tilde{su}(i,m)-1}^{(m-1)}(x) = W_{\tilde{su}(i,m)}^{(m)}(x) + \tilde{q}_{\tilde{su}(i,m),\ell^{(m)}+1}^{(m)} W_i^{(m)}(x)$$

$$\tilde{q}_{\tilde{su}(i,m),\ell^{(m)}+1}^{(m)} = (-1)^{\tilde{su}(i,m)-1+i} \frac{H_{\tilde{su}(i,m)}^{(m+1-2\tilde{su}(i,m))} H_i^{(m-2i+2)}}{H_{\tilde{su}(i,m)}^{(m-2\tilde{su}(i,m)+2)} H_i^{(m+1-2i)}}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\begin{aligned} & x\, H_i^{(m+1-2i)} H_{\tilde{su}(i,m)}^{(m-2\tilde{su}(i,m)+2)} \tilde{HW}_{\tilde{su}(i,m)-1}^{(m+3-2\tilde{su}(i,m))} = \\ & -H_{\tilde{su}(i,m)-1}^{(m+4-2\tilde{su}(i,m))} H_i^{(m+1-2i)} \tilde{HW}_{\tilde{su}(i,m)}^{(m+1-2\tilde{su}(i,m))} \\ & + H_{\tilde{su}(i,m)}^{(m+1-2\tilde{su}(i,m))} H_{\tilde{su}(i,m)-1}^{(m+4-2\tilde{su}(i,m))} \tilde{HW}_i^{(m+1-2i)}(x) \end{aligned}}$$

II.6 Si $H_{i-1}^{(m+3-2i)}$, $H_i^{(m-2i+2)}$ sont non nuls et $H_i^{(m-2i+1)} = 0$.

$W_{i-1}^{(m-1)}(x)$ et $W_i^{(m)}(x)$ sont au sud du bloc W. On doit d'abord calculer $W_{\tilde{su}(i,m)}^{(m)}(x)$. Ici encore nous le ferons à l'aide d'une relation classique à trois termes le long de l'antidiagonale m (voir la partie I). On calcule ensuite $W_{\tilde{su}(i,m)}^{(m-1)}(x)$. On utilise

$$W^{(m-1)}_{\tilde{su}(i,m)}(x) = W^{(m)}_{\tilde{su}(i,m)}(x) + \tilde{E}^{(m)}_{\tilde{su}(i,m)+1} \; W^{(m-1)}_{i-1}(x)$$

avec

$$\tilde{E}^{(m)}_{\tilde{su}(i,m)+1} = (-1)^{i+1+\tilde{su}(i,m)} \frac{H^{(m-2\tilde{su}(i,m))}_{\tilde{su}(i,m)+1} \; H^{(m+3-2i)}_{i-1}}{H^{(m+2-2i)}_{i} \; H^{(m+1-2\tilde{su}(i,m))}_{\tilde{su}(i,m)}}$$

Nous obtenons :

$$\boxed{\begin{aligned} & H^{(m+2-2i)}_{i} \; H^{(m+2-2\tilde{su}(i,m))}_{\tilde{su}(i,m)} \; \tilde{HW}^{(m-2\tilde{su}(i,m))}_{\tilde{su}(i,m)}(x) = \\ & H^{(m+2-2i)}_{i} \; H^{(m+1-2\tilde{su}(i,m))}_{\tilde{su}(i,m)} \; \tilde{HW}^{(m+1-2\tilde{su}(i,m))}_{\tilde{su}(i,m)}(x) \\ & + H^{(m+2-2\tilde{su}(i,m))}_{\tilde{su}(i,m)} \; H^{(m-2\tilde{su}(i,m))}_{\tilde{su}(i,m)+1} \; \tilde{HW}^{(m-2i+2)}_{i-1}(x) \end{aligned}}$$

Remarque 4.9.

Le théorème 1.10 s'applique aux polynômes $W^{(m)}(x)$. Par conséquent nous avons l'équivalent de la remarque 2.1.

Lorsque $W^{(m)}_{k}$ et $W^{(m)}_{\tilde{pr}(k,m)}$ sont connus, alors on peut déterminer de façon unique toute la table W comprise entre la diagonale m+1-2k et l'anti-diagonale m jusqu'au polynôme $W^{(m)}_{k}$. On peut alors en déduire la table P grâce aux propriétés 4.9, 4.10 et 4.11.

## 4.5 DEPLACEMENTS HORIZONTAUX DANS LA TABLE P.

Les relations présentées pour les déplacements diagonaux et antidiagonaux permettent par composition de trouver des relations liant trois polynômes orthogonaux successifs horizontaux. Comme nous faisons intervenir à la fois les relations liant les polynômes $P(x)$ et celles liant les polynômes $W(x)$, nous devons écarter les blocs P et les blocs W. Nous obtenons ainsi des blocs rectangulaires dont la hauteur excède d'une unité la largeur. Nous appellerons ces blocs $P \cup W$ ((blocP) $\cup$ (bloc W)).

Nous supposerons que $P_i^{(n)}(x)$ est orthogonal régulier et nous ferons intervenir le polynôme $P_{i-p}^{(n+p)}(x)$ orthogonal régulier qui précéde $P_i^{(n)}(x)$ et le polynôme $P_{i+s}^{(n-s)}(x)$ orthogonal régulier qui succède à $P_i^{(n)}(x)$ suivant l'horizontale passant par $P_i^{(n)}(x)$. Nous supposerons que ces trois polynômes sont extérieurs aux blocs $P \cup W$.

Par contre lorsque nous ferons intervenir les polynômes $P^{(n)}_{pr(i,n)}(x)$ ou $W^{(m)}_{\tilde{pr}(i,m)}(x)$, les blocs seront les blocs P ou les blocs W.

<u>*Propriété 4.17.*</u>

*Il existe une relation de récurrence entre trois polynômes orthogonaux réguliers successifs placés en dehors des blocs* $P \cup W$ *sur une même horizontale.*

$$P_{i+s}^{(n-s)}(x) = (x\, \pi_{s-1}^{(n-s)}(x) + \beta_{i+s}^{(n-s)})\, P_i^{(n)}(x)$$

$$+ \Gamma_{i+s}^{(n-s)}\, x^{s-su(i,n)+pr(i,n+1)+1+p}\, P_{i-p}^{(n+p)}(x).$$

*où* $\pi_{s-1}^{(n-s)}(x)$ *est un polynôme unitaire de degré* $s-1$ *déterminé de façon unique et où* $\beta_{i+s}^{(n-s)}$ *et* $\Gamma_{i+s}^{(n-s)}$ *sont des constantes non nulles.*

<u>Démonstration.</u>

1. On suppose que $s = p = 1$.

1.1 Si $P_i^{(n-1)}(x)$ est orthogonal régulier.

o
o o * On obtient alors la relation 2.29 du livre de C. Brezinski.

$$H_i^{(n)}\ H_i^{(n+1)}\ \tilde{H}_{i+1}^{(n-1)}(x) = [H_{i+1}^{(n-1)}\ H_i^{(n+1)} - x\ H_i^{(n)}\ H_{i+1}^{(n)}]\ \tilde{H}_i^{(n)}(x)$$

$$- x\ H_{i+1}^{(n-1)}\ H_{i+1}^{(n)}\ \tilde{H}_{i-1}^{(n+1)}(x)$$

On remarquera que cette relation reste valable si $P_{i-1}^{(n+1)}$ est au nord d'un bloc P.

1.2 Si $P_i^{(n-1)}(x)$ est quasi-orthogonal.

On a :

$$P_{i+1}^{(n-1)}(x) = x\ P_i^{(n)}(x) - q_{i+1}^{(n-1)}\ P_{pr(i+1,n-1)}^{(n-1)}(x)$$

$$xP_{i-1}^{(n+1)}(x) = P_i^{(n)}(x) + q_i^{(n)}\ P_{pr(i,n)}^{(n)}(x).$$

En utilisant le fait que $pr(i,n) = pr(i+1,n-1)$ et que $P_{pr(i,n)}^{(n)}(x) = P_{pr(i+1,n-1)}^{(n-1)}(x)$, on obtient la même relation qu'au 1.1 en éliminant ces deux polynômes dans les deux relations précédentes et en utilisant les relations de la propriété 4.3 ii) et du théorème 4.1.

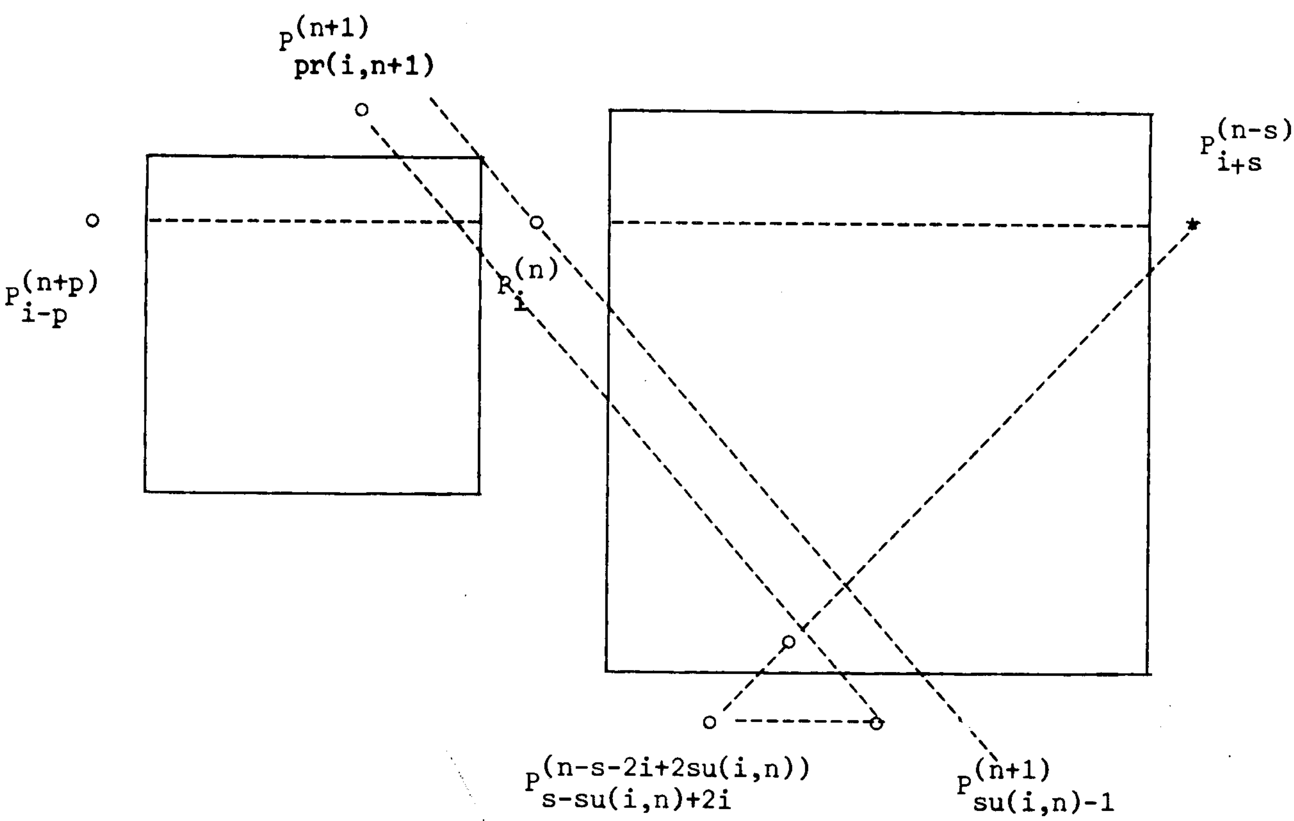
La relation 2.29 du livre de C. Brézinski transformée pour obtenir les polynômes P est bien de la forme proposée.

2. <u>On suppose que s et p sont différents de 1.</u>

Nous utilisons le procédé constructif suivant.

Si $su(i,n) - i > \frac{s}{2}$

On connait $P_{i-p}^{(n+p)}$. On en déduit donc $P_{pr(i,n+1)}^{(n+1)}$ qui est au nord d'un bloc P et vaut $x^{pr(i,n+1)+p-i}\ P_{i-p}^{(n+p)}(x)$.




Puis $P_{pr(i,n+1)}^{(n+1)}$ et $P_i^{(n)}$ nous permettent de calculer $P_{su(i,n)-1}^{(n+1)}$ grâce à la deuxième relation de la propriété 2.4.

$$P_{su(i,n)-1}^{(n+1)}(x) = \omega_{su(i,n)-1-i}^{(n)}(x)\ P_i^{(n)}(x) + E_{su(i,n)}^{(n)}\ P_{pr(i,n+1)}^{(n+1)}(x).$$

Ensuite avec $P_i^{(n+1)}(x) \equiv P_i^{(n)}(x)$ et $P_{su(i,n)-1}^{(n+1)}$, on obtient $P_{su(i,n)-2}^{(n+2)}$

grâce à la première relation de la propriété 2.4 et ainsi de suite jusque $P_{s-su(i,n)+2i}^{(n-s+2su(i,n)-2i)}$ qui se trouve sur la même antidiagonale que $P_{i+s}^{(n-s)}$ ;
nous avons donc les relations suivantes :

$$x\, P_{su(i,n)-2-j}^{(n+2+j)}(x) = P_{su(i,n)-1-j}^{(n+1+j)}(x) + q_{su(i,n)-1-j}^{(n+1+j)}\, P_i^{(n+2+j)}(x)$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le 2su(i,n)-2i-2-s$.

On fait la somme de toutes ces relations multipliées respectivement par $x^j$.

On obtient :

$$x^{2su(i,n)-s-2i-1}\, P_{s-su(i,n)+2i}^{(n-s-2i+2su(i,n))}(x)$$

$$= P_{su(i,n)-1}^{(n+1)}(x) + \theta_{2su(i,n)-s-2i-2}(x)\, P_i^{(n)}(x)$$

où $\theta_{2su(i,n)-s-2i-2}$ est un polynôme de degré $2su(i,n)-s-2i-2$ au plus.

En faisant intervenir les deux premières relations et en tenant compte du fait que $su(i,n)-1 \le s+i-1$ (ce qui entraîne que $su(i,n)-1-i > 2su(i,n)-s-2i-2$), on obtient :

$$x^{2su(i,n)-s-2i-1}\, P_{s-su(i,n)+2i}^{(n-s-2i+2su(i,n))}(x) = \omega_{su(i,n)-1-i}^{(n)}(x)\, P_i^{(n)}(x)$$

$$+ E_{su(i,n)}^{(n)}\, x^{pr(i,n+1)+p-i}\, P_{i-p}^{(n+p)}(x).$$

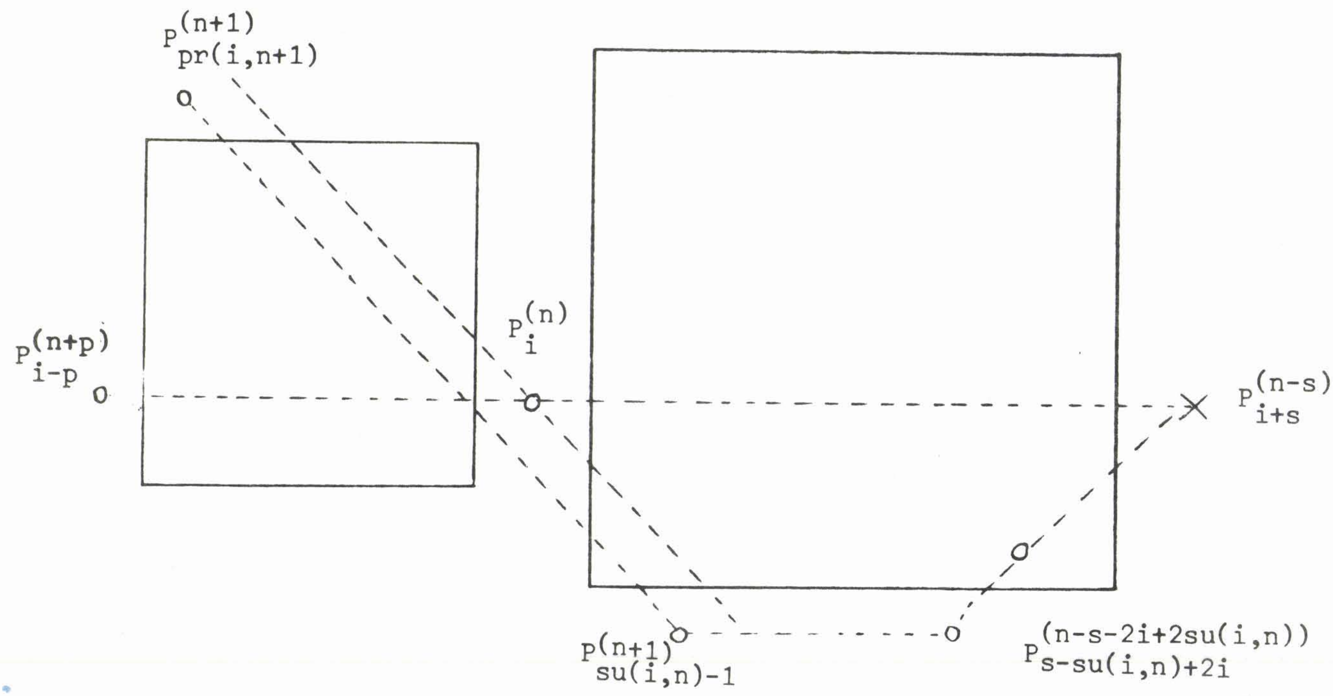
$\omega_{su(i,n)-1-i}^{(n)}$ est un polynôme unitaire de degré $su(i,n)-1-i$.

Si $su(i,n)-i \leq \frac{s}{2}$

Comme dans le cas précédent on calcule $P^{(n+1)}_{su(i,n)-1}$. Ensuite avec $P^{(n)}_{i}$ et $P^{(n+1)}_{su(i,n)-1}$ on obtient $P^{(n)}_{su(i,n)}$ grâce à la première relation de la propriété 2.4, et ainsi de suite jusque $P^{(n-s+2su(i,n)-2i)}_{s-su(i,n)+2i}$.

$$x\, P^{(n+1-j)}_{su(i,n)-1+j}(x) = P^{(n-j)}_{su(i,n)+j}(x) + q^{(n-j)}_{su(i,n)+j}\, P^{(n-j)}_{i}(x),$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq 2i+s-2su(i,n)$



Nous effectuons encore la somme de toutes ces relations respectivement multipliées par $x^{2i+s-2su(i,n)-j}$ et nous obtenons :

$$P^{(n-s-2i+2su(i,n))}_{s-su(i,n)+2i}(x) = x^{s-2su(i,n)+2i+1}\ P^{(n+1)}_{su(i,n)-1}(x)$$

$$+\ \theta_{s-2su(i,n)+2i}(x)\ P^{(n)}_{i}(x),$$

où $\theta_{s-2su(i,n)+2i}$ est un polynôme de degré s-2su(i,n)+2i au plus.

En faisant intervenir les deux premières relations du cas $su(i,n)-i > \frac{s}{2}$ et en tenant compte du fait que $su(i,n)-i > 0$, on en déduit la relation suivante :

$$P^{(n-s-2i+2su(i,n))}_{s-su(i,n)+2i}(x) = \omega_{s-su(i,n)+i}(x)\ P^{(n)}_{i}(x)$$

$$+\ E^{(n)}_{su(i,n)}\ x^{s+p+pr(i,n+1)+1+i-2su(i,n)}\ P^{(n+p)}_{i-p}(x).$$

2.1 <u>Si $P^{(n-s+2su(i,n)-2i)}_{s-su(i,n)+2i}(0) \neq 0$</u>

Le polynôme transformé $\tilde{P}^{(n-s+2su(i,n)-2i)}_{s-su(i,n)+2i}$ est proportionnel à $W^{(n+2i+s-1)}_{s-su(i,n)+2i}$ d'après la propriété 4.11.

$$W^{(n+s+2i-1)}_{s-su(i,n)+2i}(x) = (-1)^{s-su(i,n)+2i}\ \frac{H^{(n-s-2i+2su(i,n))}_{s-su(i,n)+2i}}{H^{(n-s-2i+2su(i,n)+1)}_{s-su(i,n)+2i}}\ \tilde{P}^{(n-s-2i+2su(i,n))}_{s-su(i,n)+2i}(x)$$

<u>Si $su(i,n)-i \neq 1$</u>,

Le polynôme orthogonal régulier qui succède à $W^{(n+2i+s-1)}_{s-su(i,n)+2i}$ sur l'antidiagonale n+2i+s-1 est le polynôme $W^{(n+2i+s-1)}_{s-su(i,n)+2i+1}$ qui est au sud du bloc W.

Nous avons donc :

$$W^{(n+2i+s-1)}_{s-su(i,n)+2i+1}(x) = x^{s-su(i,n)+i+1} \; W^{(i+su(i,n)-2+n)}_{i}(x).$$

$W^{(i+su(i,n)-2+n)}_{i}$ est le polynôme orthogonal régulier dans l'angle sud-ouest du bloc W. Il est proportionnel à $\tilde{P}^{(n)}_i$.

$$W^{(n+2i+s-1)}_{s-su(i,n)+2i+1}(x) = (-1)^{s-su(i,n)+2i+1} \; \frac{H^{(n)}_i}{H^{(n+1)}_i} \; x^{s-su(i,n)+i+1} \; \tilde{P}^{(n)}_i(x).$$

Les deux polynômes $W^{(s+2i-1+n)}_{s-su(i,n)+2i}$ et $W^{(s+2i-1+n)}_{s-su(i,n)+2i+1}$ permettent d'obtenir $W^{(s+2i-1+n)}_{i+s}$, qui est proportionnel à $\tilde{P}^{(n-s)}_{i+s}$, grâce à la relation de récurrence à trois termes sur les polynômes W.

$$W^{(n+s+2i-1)}_{i+s}(x) = (x\;\Omega^{(n+s+2i-1)}_{i+su(i,n)-2i-1}(x) + \tilde{B}^{(n+s+2i-1)}_{i+s}) \; W^{(n+s+2i-1)}_{s-su(i,n)+2i+1}(x)$$

$$+ \; \tilde{C}^{(n+s+2i-1)}_{i+s} \; W^{(n+s+2i-1)}_{s-su(i,n)+2i}(x).$$

avec $W^{(n+s+2i-1)}_{i+s}(x) = (-1)^{i+s} \; \dfrac{H^{(n-s)}_{i+s}}{H^{(n+1-s)}_{i+s}} \; \tilde{P}^{(n-s)}_{i+s}(x).$

En remplaçant les polynômes W par les polynômes $\tilde{P}$ dans la relation de récurrence à trois termes, puis en changeant x en $\frac{1}{x}$ et en multipliant par $x^{i+s}$, on obtient :

$$(-1)^{i+s} \; \frac{H^{(n-s)}_{i+s}}{H^{(n+1-s)}_{i+s}} \; P^{(n-s)}_{i+s}(x)$$

$$= (-1)^{s-su(i,n)+2i+1} \; (\tilde{\Omega}^{(n+s+2i-1)}_{i+su(i,n)-2i-1}(x) + \tilde{B}^{(n+s+2i-1)}_{i+s} \; x^{i+su(i,n)-2i}) \; *$$

$$\frac{H^{(n)}_i}{H^{(n+1)}_i} \; P^{(n)}_i(x)$$

$$+ \tilde{C}_{i+s}^{(n+s+2i-1)} (-1)^{s-su(i,n)+2i} \frac{H_{s-su(i,n)+2i}^{(n-s-2i+2su(i,n))}}{H_{s-su(i,n)+2i}^{(n-s-2i+2su(i,n)+1)}} x^{su(i,n)-i} \; P_{s-su(i,n)+2i}^{(n-s-2i+2su(i,n))}(x)$$

où $\tilde{\Omega}_k(x) = x^k \, \Omega_k(\frac{1}{x})$.

Si $su(i,n)-i = 1$,

On prend le polynôme orthogonal régulier $W_{s-su(i,n)+2i}^{(n+2i+s-2)}$ qui est au sud du bloc W. Nous avons dans ce cas :

$$W_{s-su(i,n)+2i}^{(n+2i+s-2)}(x) = x^{s-su(i,n)+i} \; W_i^{(i+su(i,n)-2+n)}(x)$$

Les deux polynômes $W_{s-su(i,n)+2i}^{(n+2i+s-2)}$ et $W_{s-su(i,n)+2i}^{(n+2i+s-1)}$ permettent d'obtenir $W_{i+s}^{(s+2i-1+n)}$ grâce à la relation

$$x \, W_{s-su(i,n)+2i}^{(n+2i+s-2)}(x) = x^s \; W_i^{(i+su(i,n)-2+n)}(x)$$

$$= W_{i+s}^{(n+s+2i-1)}(x) + \tilde{q}_{i+s}^{(n+s+2i-1)} \; W_{s-su(i,n)+2i}^{(n+s+2i-1)}(x)$$

avec $W_i^{(i+su(i,n)-2+n)}(x) = (-1)^i \dfrac{H_i^{(n)}}{H_i^{(n+1)}} \tilde{P}_i^{(n)}(x)$

Par conséquent on obtient en transformant cette relation.

$$(-1)^{i+s} \frac{H_{i+s}^{(n-s)}}{H_{i+s}^{(n+1-s)}} P_{i+s}^{(n-s)}(x) = (-1)^i \frac{H_i^{(n)}}{H_i^{(n+1)}} P_i^{(n)}(x)$$

$$+ \tilde{q}_{i+s}^{(m)} (-1)^{i+s} \times \frac{H_{s-1+i}^{(n-s+2)}}{H_{s-1+i}^{(n-s+3)}} P_{s-1+i}^{(n-s+2)}(x).$$

On constate qu'en exprimant $P_{i+s}^{(n-s)}$ en fonction de $P_i^{(n)}$ et $P_{i-p}^{(n+p)}$ on obtient bien la relation proposée.

2.2 Si $P_{s-su(i,n)+2i}^{(n-s+2su(i,n)-2i)}(0) = 0$

Il est au nord d'un bloc P et le polynôme $W_{s-su(i,n)+2i}^{(n+2i+s-1)}$ est quasi-orthogonal. On prend donc le polynôme orthogonal régulier situé à l'ouest de ce bloc P sur la même antidiagonale n+s+2i-1. Ce polynôme est identique au polynôme $P_{s-su(i,n)+2i}^{(n-s+2su(i,n)-2i)}$ duquel on a retiré les termes x qui sont en facteur.

En le transformant en $\tilde{P}$ il est proportionnel à

$W_{\tilde{p}r(s-su(i,n)+2i+1,n+s+2i-1)}^{(n+s+2i-1)}$ et permet d'obtenir $W_{i+s}^{(n+s+2i-1)}(x)$ en utilisant soit $W_{s-su(i,n)+2i+1}^{(n+s+2i-1)}$ et la relation de récurrence à trois termes suivant l'antidiagonale n+s+2i-1, soit $W_{s-su(i,n)+2i}^{(n+s+2i-2)}$ et la première relation qui suit la propriété 4.13.

Par conséquent dans les deux relations obtenues dans le 2.1 intervient $W_{\tilde{p}r(s-su(i,n)+2i+1,n+s+2i-1)}^{(n+s+2i-1)}$ à la place de $W_{s-su(i,n)+2i}^{(n+s+2i-1)}$.

Si 0 est racine d'ordre de multiplicité r de $P_{s-su(i,n)+2i}^{(n-s-2i+2su(i,n))}$,

alors : $W_{\tilde{p}r(s-su(i,n)+2i+1,n+s+2i-1)}^{(n+s+2i-1)}(x) = W_{s-su(i,n)+2i-r}^{(n+s+2i-1)}(x)$

$$= (-1)^{s-su(i,n)+2i-r} \frac{H_{s-su(i,n)+2i-r}^{(n-s-2i+2su(i,n)+2r)}}{H_{s-su(i,n)+2i-r}^{(n-s-2i+2su(i,n)+2r+1)}} \tilde{P}_{s-su(i,n)+2i-r}^{(n-s-2i+2su(i,n)+2r)}(x)$$

$$= (-1)^{s-su(i,n)+2i-r} \frac{H^{(n-s-2i+2su(i,n)+2r)}_{s-su(i,n)+2i-r}}{H^{(n-s-2i+2su(i,n)+2r+1)}_{s-su(i,n)+2i-r}} \tilde{P}^{(n-s-2i+2su(i,n))}_{s-su(i,n)+2i}(x).$$

Seul varie donc le coefficient en facteur de $\tilde{P}^{(n-s-2i+2su(i,n))}_{s-su(i,n)+2i}$.

On constate encore qu'en exprimant $P^{(n-s)}_{i+s}$ en fonction de $P^{(n)}_{i}$ et $P^{(n+p)}_{i-p}$, on obtient bien la relation proposée.

3. <u>Si p = 1 et s ≠ 1,</u>

Alors on calcule encore $P^{(n+1)}_{su(i,n)-1}$ à partir de $P^{(n+1)}_{i-1}$ et de $P^{(n)}_{i}$, et la suite est la même que dans le 2.

Le résultat est donc :

$$P^{(n-s)}_{i+s}(x) = (x\, \pi^{(n-s)}_{s-1}(x) + \beta^{(n-s)}_{i+s})\, P^{(n)}_{i}(x) + \Gamma^{(n-s)}_{i+s}\, x^{s-su(i,n)+i+1}\, P^{(n+1)}_{i-1}(x).$$

4. <u>Si p ≠ 1 et s = 1,</u>

On a exactement le même processus de calcul que dans le 2, mais en prenant $P^{(n+1)}_{i}$ à la place de $P^{(n+1)}_{su(i,n)-1}$.

Par conséquent on obtient :

$$P^{(n-1)}_{i+1}(x) = (x + \beta^{(n-1)}_{i+1})\, P^{(n)}_{i}(x) + \Gamma^{(n-1)}_{i+1}\, x^{p+pr(i,n+1)-i+1}\, P^{(n+p)}_{i-p}(x).$$

----------

$\beta_{i+s}^{(n-s)}$ est différent de zéro car sinon 0 serait racine de $P_{i+s}^{(n-s)}$ ce qui est impossible puisqu'il n'appartient pas à un bloc P U W.

$\Gamma_{i+s}^{(n-s)}$ est également non nul sinon toutes les racines de $P_i^{(n)}$ seraient racines de $P_{i+s}^{(n-s)}$. Or si s = 1 cela contredit le théorème 2.1, et si $s \neq 1$, $P_{i+s}^{(n-s)}$ et $P_{pr(i+s,n-s)}^{(n-s)}$ n'ont pas de racine commune et toutes les racines de $P_i^{(n)}$ sont racines de $P_{pr(i+s,n-s)}^{(n-s)}$, d'où une contradiction.

cqfd.

Remarque :

Lorsqu'un polynôme orthogonal régulier se trouve sur le côté ouest d'un bloc P, mais pas du bloc W, ou vice versa, il est bien évident que l'on peut déduire immédiatement tous les polynômes du côté sud du bloc W ou du côté nord du bloc P en multipliant le polynôme précédent par des puissances croissantes de x.

## 4.6 POLYNOMES SEMI-ORTHOGONAUX

Nous introduisons maintenant à propos des déplacements horizontaux une nouvelle forme "d'orthogonalité" que nous appellerons semi-orthogonalité. Les résultats de cette section seront utilisés pour les polynômes orthogonaux sur un cercle qui forment un cas particulier de semi-orthogonalité.

Nous définissons une fonctionnelle linéaire $\tau^{(h)}$, pour $h \in \mathbb{N}$, par $\tau^{(h)}(x^k) = c_{h+k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Nous cherchons les polynômes $\phi_k^{(h)}(x)$ de degré k exactement tels que :

$\tau^{(h)}\left(\frac{1}{x^\ell}\phi_k^{(h)}(x)\right) = 0,\ \forall \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le k-1.$

Nous posons $\phi_k^{(h)}(x) = \sum_{j=o}^{k} \lambda_{j,k}^{(h)} x^{k-j}$.

Nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\sum_{j=o}^{k} \lambda_{j,k}^{(h)} c_{k-j-\ell+h} = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le k-1.$$

C'est un système linéaire dont la matrice est de Toeplitz.

$$\begin{pmatrix} c_h & c_{h+1} & \cdots & c_{h+k} \\ c_{h-1} & c_h & \cdots & c_{h-1+k} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{h-k+1} & c_{h-k+2} & \cdots & c_{h+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{k,k}^{(h)} \\ \vdots \\ \lambda_{o,k}^{(h)} \end{pmatrix} = 0$$

Ce système est également vérifié par le polynôme $P_k^{(h-k+1)}$.

<u>*Propriété 4.18.*</u>

*Si $P_k^{(h-k+1)}$ est orthogonal, alors $\phi_k^{(h)}$ est identique à $P_k^{(h-k+1)}$ à une constante multiplicative près.*

----------

Si $P_k^{(h-k+1)}$ est quasi-orthogonal nous prendrons $\phi_k^{(s)}$ identique à $P_k^{(h-k+1)}$ à une constante multiplicative près.

Posons $\tilde{\phi}_k^{(h)}(x) = x^k\ \phi_k^{(h)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Alors nous avons :

*Propriété 4.19.*

$$\tau^{(h)}\left(\frac{1}{x^\ell}\,\phi_k^{(h)}(x)\right) = 0,\ \forall \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le k-1$$

$$\iff \tau^{(h)}\left(x^\ell\,\tilde{\phi}_k^{(h)}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0\ ,\ \forall \ell \in \mathbb{N},\ 1 \le \ell \le k.$$

Démonstration.

$$\tau^{(h)}\left(x^\ell\,\tilde{\phi}_k^{(h)}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \tau^{(h)}\left(x^{\ell-k}\,\phi_k^{(h)}(x)\right)$$

D'où le résultat.

cqfd.

*Définition 4.1.*

*Nous appellerons polynôme semi-orthogonal un polynôme satisfaisant l'une des deux relations de la propriété 4.19.*

*Définition 4.2.*

*On donnera au polynôme* $\phi_k^{(h)}$ *le qualificatif régulier, singulier ou quasi-orthogonal que possède le polynôme* $P_k^{(h-k+1)}$.

Dans la suite quand nous parlerons de polynômes orthogonaux, ce sera toujours par rapport à une fonctionnelle linéaire c. Ces polynômes sont sur une diagonale de la table P. Quand nous parlerons de polynômes semi-orthogonaux, ce sera toujours par rapport à une fonctionnelle $\tau^{(h)}$ et ces polynômes sont sur l'horizontale h de la table $\phi$.

*Définition 4.3.*

*On appellera table* $\phi$ *la table dans laquelle sont rangés les polynômes* $\phi_k^{(h)}$ *de la manière suivante.*

$$
\begin{array}{llll}
\phi_1^{(0)} & & & \\
\phi_1^{(1)} & \phi_2^{(1)} & & \\
\phi_1^{(2)} & \phi_2^{(2)} & \phi_3^{(2)} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Lorsque le polynôme $\phi_k^{(h)}$ est semi-orthogonal régulier nous avons une écriture de ce polynôme sous forme de déterminant, puisqu'il est identique à $P_k^{(h-k+1)}$.

Dans ce cas nous avons :

<u>*Propriété 4.20.*</u>

*Si* $\phi_k^{(h)}$ *et* $\phi_{k+1}^{(h)}$ *sont semi-orthogonaux réguliers, alors :*

$$\tau^{(h)}\left(\frac{1}{x^k}\,\phi_k^{(h)}(x)\right) = (-1)^k \,\frac{H_{k+1}^{(h-k)}}{H_k^{(h-k+1)}} \neq 0.$$

<u>Démonstration.</u>

$$\phi_k^{(h)}(x) = \frac{1}{H_k^{(h-k+1)}} \begin{vmatrix} c_{h-k+1} & \cdots & c_{h+1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_h & \cdots & c_{h+k} \\ 1 & \cdots & x^k \end{vmatrix}$$

Le calcul de $\tau^{(h)}\left(\frac{1}{x^k}\,\phi_k^{(h)}(x)\right)$ donne comme valeur du déterminant précédent $(-1)^k\, H_{k+1}^{(h-k)}$. Puisque $\phi_{k+1}^{(h)}$ est semi-orthogonal régulier, $H_{k+1}^{(h-k)} \neq 0$. D'où le résultat.

cqfd.

La définition du problème et les propriétés 4.18 et 4.19 nous donnent bien évidemment la propriété suivante.

*Propriété 4.21.*

*Si $\phi_\ell^{(h)}$ et $\phi_k^{(h)}$ sont semi-orthogonaux réguliers, alors*

$\tau^{(h)}(\phi_\ell^{(h)}(\frac{1}{x})\ \phi_k^{(h)}(x)) = 0$ *pour* $0 \le \ell \le k-1$ *et* $1 \le k \le \ell$.

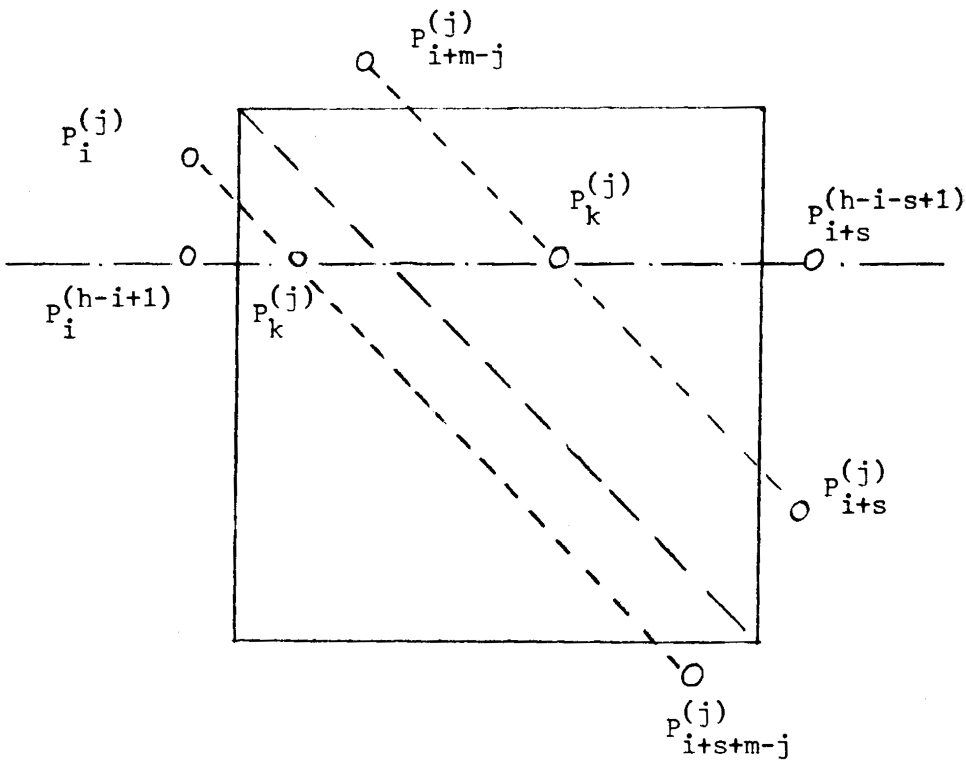
*Définition 4.4.*

*Nous noterons les polynômes semi-orthogonaux réguliers prédécesseurs et successeurs de $\phi_k^{(h)}$ suivant l'horizontale h, respectivement*

$\phi^{(h)}_{prh(k,h)}$ *et* $\phi^{(h)}_{suh(k,h)}$.

Dans toute la suite on appellera horizontale h l'horizontale de la table P qui passe par le polynôme $P_1^{(h)}$. Elle correspond à l'horizontale h de la table $\phi$.

Examinons le cas où une horizontale h traverse un bloc P U W. Nous appellons m l'indice de la diagonale principale du bloc P. Soient i et i+s les degrés des polynômes orthogonaux réguliers sur les côtés ouest et est de ce bloc P.




Nous avons $k = h-j+1$.

Les propriétés 4.22 et 4.23 nous donnent les relations de semi-orthogonalité vérifiées dans le bloc ou sur les côtés nord ou nord-ouest.

<u>*Propriété 4.22.*</u>

*Pour* $j \in \mathbb{N}$, $h-i-s+2 \leq j \leq h-i+1$, *nous avons :*

$$\tau^{(h)}\left(\frac{1}{x^{\ell}}\, \phi^{(h)}_{h-j+1}(x)\right) = 0 \quad et \quad \tau^{(h)}\left(x^{h-j+\ell+1}\, \tilde{\phi}_{h-j+1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

*pour* $\ell \in \mathbb{Z}$, $2h+3-2i-m-s-j \leq \ell \leq h-j$.

*Les deux expressions sont non nulles pour* $\ell = 2h+2-2i-m-s-j$.

<u>Démonstration.</u>

Nous considérons le polynôme $P^{(j)}_{h-j+1}$ sur l'horizontale h.

D'après la propriété 1.17 nous avons :

$$c^{(j)}(x^{\ell}\, P^{(j)}_{h-j+1}(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le 2i+m+s-h-3$$
$$\ne 0 \text{ pour } \ell = 2i+m+s-h-2.$$

Cela revient à dire que le système suivant est vérifié, où $b = 2i+m+s-h-3$.

$$\begin{pmatrix} c_j & \cdots & c_{h+1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{j+b} & \cdots & c_{h+1+b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{(j)}_{h-j+1,h-j+1} \\ \vdots \\ \lambda^{(j)}_{0,h-j+1} \end{pmatrix} = 0$$

Ces relations équivalent à :

$$\tau^{(h)}(\frac{1}{x^{\ell}}\, \phi^{(h)}_{h-j+1}(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ 2h+3-2i-m-s-j \le \ell \le h-j,$$
$$\ne 0 \text{ pour } \ell = 2h+2-2i-m-s-j.$$

La propriété concernant la seconde relation est obtenue en utilisant la propriété 4.19.

cqfd.

*Propriété 4.23.*

*i)* $$\tau^{(h)}(\frac{1}{x^{\ell}}\, \phi^{(h)}_{i}(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ h-m-i-s+2 \le \ell \le h-m,$$
$$\ne 0 \text{ pour } \ell = h+1-m \text{ et } \ell = h-m-i-s+1.$$

*ii)* *Si* $h-i+2 \le j \le m$ *et si* 0 *est racine d'ordre de multiplicité* $r$ *de* $w^{(j)}_{h-j-i+1}$ *alors :*

$$\tau^{(h)}(\frac{1}{x^{\ell}}\, \phi^{(h)}_{h-j+1}(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ 2h+3-2i-m-s-j \le \ell \le h-m+r,$$
$$\ne 0 \text{ pour } \ell = h-m+r+1 \text{ et } \ell = 2h+2-2i-m-s-j.$$

*iii)* *Si* $m+1 \leq j \leq h-i-s$ *et si* 0 *est racine d'ordre de multiplicité* $r$ *de* $w^{(j)}_{h-m-i+1}$, *alors* :

$$\tau^{(h)}\left(\frac{1}{x^\ell}\, \phi^{(h)}_{h-j+1}(x)\right) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ 2h+3-2i-m-s-j \leq \ell \leq h-j+r,$$
$$\neq 0 \text{ pour } \ell = h-j+r+1 \text{ et } \ell = 2h+2-2i-m-s-j.$$

Démonstration.

i) Les polynômes $P^{(j)}_i$ sont identiques pour $j \in \mathbb{N}$, $m \leq j \leq h-i+1$.

Donc d'après le théorème 2.2

$$c^{(h-i+1)}(x^\ell\, P^{(h-i+1)}_i(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ m-h+i-1 \leq \ell \leq 2i+s+m-h-3,$$
$$\neq 0 \text{ pour } \ell = m-h+i-2 \text{ et } \ell = 2i+s+m-h-2,$$

ce qui est équivalent à

$$\tau^{(h)}\left(\frac{1}{x^\ell}\, \phi^{(h)}_i(x)\right) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ h-m-i-s+2 \leq \ell \leq h-m,$$
$$\neq 0 \text{ pour } \ell = h+1-m \text{ et } \ell = h-m-i-s+1.$$

ii) Si $h-i+2 \leq j \leq m$ et si 0 est racine d'ordre de multiplicité $r$ de $w^{(j)}_{h-j-i+1}$, alors d'après le corollaire 2.1 on a :

$$c^{(j)}(x^\ell\, P^{(j)}_{h-j+1}(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ -j+m-r \leq \ell \leq 2i-3+s-h+m,$$
$$\neq 0 \text{ pour } \ell = -j+m-r-1 \text{ et } \ell = 2i-2+s-h+m.$$

Donc $\tau^{(h)}\left(\frac{1}{x^\ell}\, \phi^{(h)}_{h-j+1}(x)\right) = 0$ pour $\ell \in \mathbb{Z}$, $2h-m-s-2i+3-j \leq \ell \leq h-m+r$,

$$\neq 0 \text{ pour } \ell = 2h-m-s-2i+2-j \text{ et } \ell = h-m+r+1.$$

iii) Si $m+1 \leq j \leq h-i-s$ et si 0 est racine d'ordre de multiplicité $r$ de $w^{(j)}_{h-m-i+1}$, alors toujours d'après le corollaire 3.1 nous avons :

$$c^{(j)}(x^\ell\, P^{(j)}_{h-j+1}(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ -r \leq \ell \leq 2i+s-3-h+m,$$
$$\neq 0 \text{ pour } \ell = -r-1 \text{ et } \ell = 2i+s-2-h+m,$$

ce qui est équivalent à :

$$\tau^{(h)}\left(\frac{1}{x^{\ell}}\,\phi^{(h)}_{h-j+1}(x)\right) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ 2h+3-2i-m-s-j \le \ell \le h-j+r,$$

$$\neq 0 \text{ pour } \ell = 2h+2-2i-m-s-j \text{ et } \ell = h-j+r+1.$$

cqfd.

Remarque 4.10.

En utilisant la propriété 4.19 on obtiendra les relations faisant intervenir $\gamma^{(h)}(\frac{1}{x})$.

Remarque 4.11.

Pour un polynôme quasi semi-orthogonal nous avons :

$$\tau^{(h)}\left(\frac{1}{x^{\ell}}\,\phi^{(h)}_{k}(x)\right) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha+1 \le \ell \le k-1.$$

$\exists \alpha \in \mathbb{N}$, avec $\alpha > 0$ tel que $\tau^{(h)}\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\,\phi^{(h)}_{k}(x)\right) \neq 0$.

----------

Une propriété des zéros des polynômes semi-orthogonaux peut être donnée.

*Propriété 4.24.*

*Deux polynômes semi-orthogonaux réguliers successifs sur une même horizontale, extérieurs aux blocs* P U W *n'ont pas de racine commune.*

Démonstration.

Voir la démonstration de $\Gamma^{(n-s)}_{i+s} \neq 0$ dans la propriété 4.15.

cqfd.

La propriété suivante permet de connaître une partie de la table et surtout de positionner tous les blocs de cette partie. Nous supposons les polynômes unitaires.

Propriété 4.25.

*Si* $\phi_{i+s}^{(h)}$ *et* $\phi_i^{(h)}$ *sont donnés en dehors d'un bloc* P U W *et si on connait* su(i, h-i+1), *alors toute la table comprise entre la diagonale* h-i-s+1 *et l'antidiagonale* h+i+s *est déterminée de façon unique jusqu'au polynôme* $\phi_{i+s}^{(h)}$.

Démonstration.

Connaître s et su(i, h-i+1) positionne de façon exacte le bloc qui sépare $\phi_i^{(h)}$ de $\phi_{i+s}^{(h)}$.

i) *Si* s=1, on a obligatoirement su(i, h-i+1) = i+1, sinon $\phi_{i+1}^{(h)}$ serait au nord d'un bloc P.

En retranchant $\phi_{i+1}^{(h)}$ de x $\phi_i^{(h)}(x)$ on obtient $q_{i+1}^{(h-i+1)}\ P_{pr(i+1,h-i)}^{(h-i)}(x)$

et donc $P_{pr(i+1,h-i)}^{(h-i)}(x)$ puisqu'il est unitaire.

Alors d'après la remarque 2.1 la partie de la table mentionnée est bien déterminée.

ii) *Si* s≠1 et

a) *si* $\phi_{i+s}^{(h)}$ *est à l'est du bloc* P,

alors on connait le polynôme orthogonal régulier prédecesseur de $P_{i+s}^{(h-i-s+1)}$ sur la diagonale h-i-s+1. C'est le polynôme $x^{su(i,h-i+1)-i}\ \phi_i^{(h)}(x)$.

Par conséquent d'après la remarque 2.1, $\phi_{i+s}^{(h)}$ et $x^{su(i,h-i+1)-i}\ \phi_i^{(h)}(x)$ permettent la détermination de la partie de la table mentionnée.

b) *si* $\phi_{i+s}^{(h)}$ *est au nord-est du bloc* P,

alors on retranche $\phi_{i+s}^{(h)}$ de $x^s\ \phi_i^{(h)}(x)$.

On obtient $q_{i+s}^{(h-i-s+1)}\ P_{pr(i+s,h-i-s+1)}^{(h-i-s+1)}(x)$ et donc $P_{pr(i+s,h-i-s+1)}^{(h-i-s+1)}$.
La remarque 2.1 permet encore de conclure.

cqfd.

## 4.7 POLYNOMES ORTHOGONAUX SUR LE CERCLE

Nous définissons une fonctionnelle linéaire $\tau^{(s)}$, pour $s \in \mathbb{Z}$, telle que :

pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ on ait $\tau^{(s)}(z^k) = c_{s+k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Dans toute la suite, chaque fois que nous appliquerons $\tau^{(s)}$ il sera sous entendu que $|z| = 1$.

Nous pouvons en déduire que :

$$\tau^{(s)}(\bar{z}^k) = \bar{c}_{s+k} = \tau^{(s)}(z^{-k}) = c_{s-k},\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

où la barre représente l'imaginaire conjugué.

Nous cherchons les polynômes $\phi_k^{(s)}(z)$ de degré k exactement tels que :

$$\tau^{(s)}\left(\frac{1}{z^\ell}\ \phi_k^{(s)}(z)\right) = 0,\ \forall \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le k-1.$$

On retrouve la semi-orthogonalité de la section 4.6 avec en plus la condition $|z| = 1$. C'est pour cette raison que les polynômes $\phi_k^{(s)}$ seront dits orthogonaux sur le cercle unité. Dans la suite nous parlerons simplement des polynômes $\phi_k^{(s)}$ orthogonaux. Il sera toujours sous-entendu que cette orthogonalité a lieu sur le cercle unité.

Nous allons naturellement retrouver les résultats présentés pour la semi-orthogonalité.

Si nous posons $\phi_k^{(s)}(x) = \sum_{j=o}^{k} \lambda_{j,k}^{(s)} z^{k-j}$, nous obtenons le système d'orthogonalité suivant :

$$\sum_{j=o}^{k} \lambda_{j,k}^{(s)} c_{k-j-\ell+s} = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le k-1.$$

C'est un système linéaire dont la matrice est de Toeplitz.

$$\begin{pmatrix} c_s & c_{s+1} & \cdots & c_{s+k} \\ c_{s-1} & c_s & \cdots & c_{s+k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{s-k+1} & c_{s-k+2} & \cdots & c_{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{k,k}^{(s)} \\ \vdots \\ \lambda_{o,k}^{(s)} \end{pmatrix} = 0$$

Soit $c^{(r)}$ la fonctionnelle linéaire définie sur l'espace vectoriel des polynômes de la variable complexe z telle que :

$$c^{(r)}(z^j) = c_{r+j},\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Nous considérons les polynômes $P_s^{(r)}$ orthogonaux par rapport à la fonctionnelle linéaire $c^{(r)}$.

Nous avons la propriété suivante identique à la propriété 4.18.

*Propriété 4.26.*

*Si* $P_k^{(s-k+1)}$ *est orthogonal par rapport à* $c^{(s-k+1)}$*, alors* $\phi_k^{(s)}$ *est identique* $P_k^{(s-k+1)}$ *à une constante multiplicative près.*

Démonstration.

Le système vérifié par $\phi_k^{(s)}$ l'est aussi par $P_k^{(s-k+1)}$.

cqfd.

Si $P_k^{(s-k+1)}$ est quasi-orthogonal, nous prendrons $\phi_k^{(s)}$ identique à $P_k^{(s-k+1)}$ à une constante multiplicative près.

**Remarque.**

Comme dans le cas de la semi-orthogonalité les polynômes $\phi_k^{(s)}$, pour $k \in \mathbb{N}$, correspondent à l'horizontale de la table P qui passe par le polynôme $P_1^{(s)}$. Dans la suite cette horizontale sera toujours appelée horizontale s.

*Définition 4.5.*

*On donnera au polynôme* $\phi_k^{(s)}$ *le qualificatif régulier, singulier ou quasi-orthogonal que possède le polynôme* $P_k^{(s-k+1)}$.

*Définition 4.6.*

*Nous noterons les polynômes orthogonaux réguliers prédecesseurs et successeurs de* $\phi_k^{(s)}$ *suivant l'horizontale* s*, respectivement :*

$$\phi_{prh(k,s)}^{(s)} \text{ et } \phi_{suh(k,s)}^{(s)}.$$

Si $\phi_k^{(s)}$ est orthogonal régulier, nous pouvons l'écrire sous forme de déterminant.

$$\phi_k^{(s)}(z) = D_k^{(s)} \begin{vmatrix} c_s & \cdots\cdots & c_{s+k} \\ c_{s-1} & \cdots\cdots & c_{s+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{s-k+1} & \cdots\cdots & c_{s+1} \\ 1 & \cdots\cdots & x^k \end{vmatrix}$$

où $D_k^{(s)}$ est une constante arbitraire non nulle.

Dans la suite $\bar{\phi}_j^{(s)}(z)$ représentera le polynôme dont les coefficients sont imaginaires conjugués de ceux de $\phi_j^{(s)}(z)$. Pour ces polynômes nous avons :

***Propriété 4.27.***

*Si le polynôme $\phi_k^{(s)}$ est orthogonal par rapport à $\tau^{(s)}$, alors :*

$$\tau^{(s)}(z^{\ell}\ \bar{\phi}_k^{(s)}\ (\tfrac{1}{z})) = 0 \quad \text{pour } \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le k-1.$$

Démonstration.

$$\tau^{(s)}(\overline{z^{\ell}\ \bar{\phi}_k^{(s)}(\tfrac{1}{z})}) = \tau^{(s)}(\frac{1}{z^{\ell}}\ \phi_k^{(s)}(z)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le k-1.$$

cqfd.

***Propriété 4.28.***

*Si les polynômes $\phi_k^{(s)}$ et $\phi_\ell^{(s)}$ sont orthogonaux réguliers, avec $k \neq \ell$, alors*

$$\tau^{(s)}(\phi_k^{(s)}(z)\ \bar{\phi}_\ell^{(s)}(\tfrac{1}{z})) = 0$$

Démonstration.

Elle est évidente, compte-tenu de l'orthogonalité des deux polynômes et de la propriété 4.27.

cqfd.

Comme nous l'avons vu dès le début de cette section la fonctionnelle $\tau$ a des moments particuliers. Nous aurons donc des propriétés remarquables pour les déterminants de Hankel correspondants, ainsi que pour les polynômes P qui composent la table P.

*Propriété 4.29.*

$$\bar{H}_k^{(s-k+1-j)} = H_k^{(s-k+1+j)}.$$

Démonstration.

$$\bar{H}_k^{(s-k+1-j)} = \begin{vmatrix} \bar{c}_{s-k+1-j} & \bar{c}_{s-k+2-j} & \cdots & \bar{c}_{s-j} \\ \bar{c}_{s-k+2-j} & \bar{c}_{s-k+3-j} & \cdots & \bar{c}_{s-j+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar{c}_{s-j} & \bar{c}_{s-j+1} & \cdots & \bar{c}_{s-j+k-1} \end{vmatrix}$$

Or $\bar{c}_{s+\ell} = c_{s-\ell}$.

Donc

$$\bar{H}_k^{(s-k+1-j)} = \begin{vmatrix} c_{s+k-1+j} & c_{s+k-2+j} & \cdots & c_{s+j} \\ c_{s+k-2+j} & c_{s+k-3+j} & \cdots & c_{s+j-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{s+j} & c_{s+j-1} & \cdots & c_{s+j-k+1} \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant n'est autre que $H_k^{(s+j-k+1)}$.

cqfd.

*Corollaire 4.2.*

*Si* $H_k^{(s-k+1-j)} = 0$, *alors* $H_k^{(s-k+1+j)} = 0$ *et réciproquement.*

La disposition des blocs dans la table H est donc symétrique par rapport à l'horizontale s. D'autre part l'horizontale s ne peut traverser que des blocs de largeur impaire pour lesquels elle sert d'axe de symétrie.

Les polynômes P orthogonaux réguliers qui composent la table P vérifient une propriété du même genre.

*Propriété 4.30.*

*Si les polynômes* $P_k^{(s-k-j)}$ *et* $P_k^{(s-k+j+1)}$ *sont orthogonaux réguliers et unitaires, nous avons :*

$$P_k^{(s-k-j)}(z) = \frac{H_k^{(s-k+1-j)}}{H_k^{(s-k-j)}}\, z^k\, \bar{P}_k^{(s-k+j+1)}\left(\frac{1}{z}\right)$$

Démonstration.

$$P_k^{(s-k+1+j)}(z) = \frac{1}{H_k^{(s-k+1+j)}} \begin{vmatrix} c_{s-k+1+j} & \cdots & c_{s+1+j} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{s+j} & \cdots & c_{s+k+j} \\ 1 & \cdots & z^k \end{vmatrix}$$

$$z^k\, \bar{P}_k^{(s-k+1+j)}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\bar{H}_k^{(s-k+1+j)}} \begin{vmatrix} c_{s+k-1-j} & \cdots & c_{s-1-j} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{s-j} & \cdots & c_{s-k-j} \\ z^k & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Compte-tenu du fait que $\bar{c}_{s-\ell} = c_{s+\ell}$, $\forall \ell \in \mathbb{Z}$.

Donc

$$z^k \bar{P}_k^{(s-k+1+j)}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{H_k^{(s-k-j)}}{\bar{H}_k^{(s-k+1+j)}} P_k^{(s-k-j)}(z) = \frac{H_k^{(s-k-j)}}{H_k^{(s-k+1-j)}} P_k^{(s-k-j)}(z)$$

en utilisant la propriété 4.29.

cqfd.

*Définition 4.7.*

*Un polynôme* $\sum_{i=o}^{k} a_i z^i$ *est dit à coefficients symétriques si :*

$a_{k-j} = \mu \bar{a}_j, \forall j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le k$ *où* $\mu$ *est une constante de module unité.*

*Un polynôme est dit à coefficients antisymétriques si :*

$a_{k-j} = - \mu \bar{a}_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le k$ *où* $\mu$ *est encore une constante de mudule unité.*

A partir de cette définition nous déduisons de la propriété 4.30 le corollaire suivant.

*Corollaire 4.3.*

*Les polynômes unitaires situés à l'ouest ou au nord-ouest d'un bloc* P *traversé par l'horizontale* s *sont à coefficients symétriques ou antisymétriques.*

Démonstration.

D'après la propriété 4.30 nous avons :

$$P_k^{(s-k)}(z) = \frac{H_k^{(s-k+1)}}{H_k^{(s-k)}} z^k \bar{P}_k^{(s-k+1)}(\frac{1}{z})$$

Or $P_k^{(s-k)}(z) = P_k^{(s-k+1)}(z)$ si $P_k^{(s-k)}$ est à l'ouest ou au nord-ouest d'un bloc P.

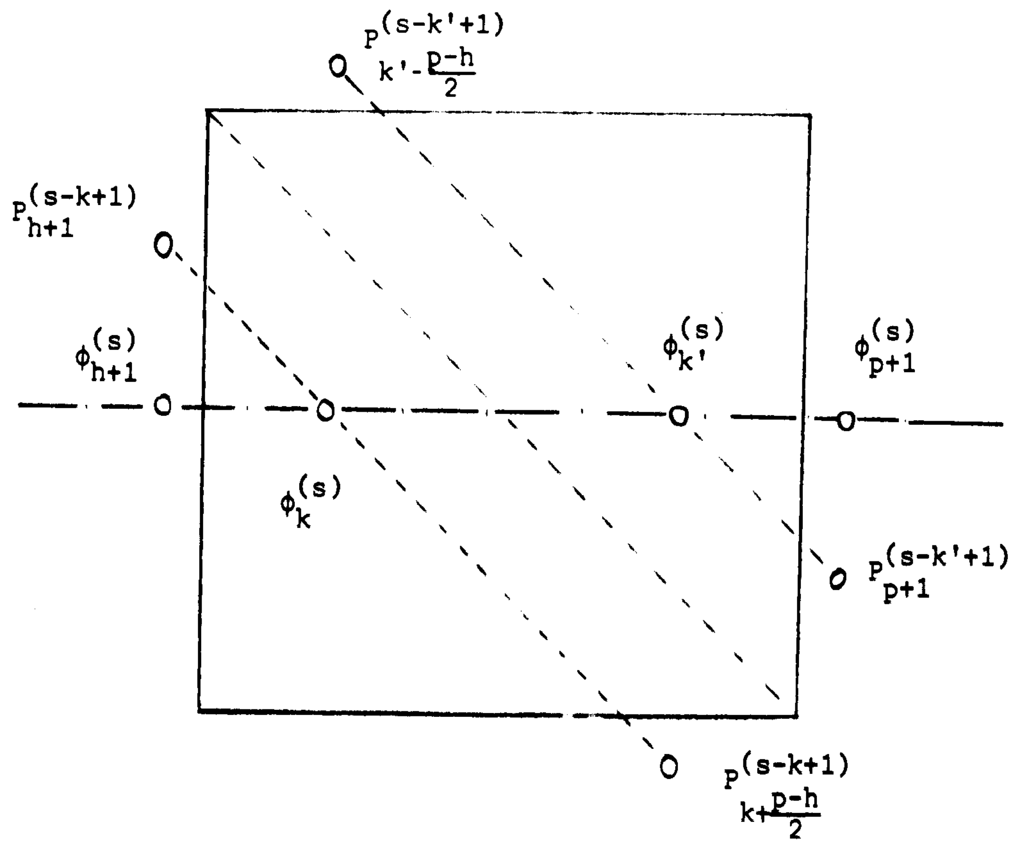
Donc si $P_k^{(s-k+1)}(z) = \sum_{j=o}^{k} \lambda_j z^{k-j}$ avec $\lambda_0 = 1$ nous avons :

$$\frac{\bar{\lambda}_k}{1} = \frac{\bar{\lambda}_{k-1}}{\lambda_1} = \ldots = \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_{k-1}} = \frac{1}{\lambda_k}.$$

D'où le résultat

cqfd.

Considérons la table P et l'horizontale s et examinons le cas où cette horizontale coupe des blocs.



Soient $\phi_{h+1}^{(s)}$ et $\phi_{p+1}^{(s)}$ les deux polynômes orthogonaux situés sur les côtés ouest et est du bloc P, et soit $\phi_k^{(s)}$ un polynôme intérieur à ce bloc.

On supposera unitaires tous les polynômes considérés.

Nous aurons des propriétés qui sont des transpositions immédiates des propriétés des polynômes semi-orthogonaux au cas des polynômes orthogonaux sur le cercle.

*Lemme 4.1.*

*Si* $k \in \mathbb{N}$, $h+1 \leq k \leq p$, *alors* :

$$\tau^{(s)}\left(\frac{1}{z^{\ell}}\,\phi_k^{(s)}(z)\right) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ k - \frac{p+h}{2} \leq \ell \leq k-1,$$

$$\neq 0 \text{ pour } \ell = k - \frac{p+h}{2} - 1$$

Démonstration.

C'est la propriété 4.22 appliquée au cas particulier des polynômes orthogonaux sur le cercle.

cqfd.

Du lemme 4.1 on peut déduire immédiatement une propriété analogue à la propriété 4.27.

*Propriété 4.31.*

*Si* $k \in \mathbb{N}$, $h+1 \leq k \leq p$, *alors* :

$$\tau^{(s)}\left(z^{\ell}\,\bar{\phi}_k^{(s)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ k - \frac{p+k}{2} \leq \ell \leq k-1.$$

$$\neq 0 \text{ pour } \ell = k-1 - \frac{p+h}{2}.$$

Dans le cas particulier où $\phi_k^{(s)}$ est au nord-ouest d'un bloc P, nous avons la propriété suivante, si on pose k = h+1 et si p+1 est l'indice de sortie du bloc P suivant la diagonale (s-h).

*Propriété 4.32.*

$$\tau^{(s)}\left(\frac{1}{z^{\ell}}\,\phi_{h+1}^{(s)}(z)\right) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ h+1-p \le \ell \le h,$$

$$\ne 0 \text{ pour } \ell = h-p.$$

$$\tau^{(s)}\left(z^{\ell}\,\bar{\phi}_{h+1}^{(s)}\left(\frac{1}{z}\right)\right) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ h+1-p \le \ell \le h,$$

$$\ne 0 \text{ pour } \ell = h-p.$$

Démonstration.

Nous nous servons encore du fait que :

$$c^{(s-h)}(z^{\ell}\,P_{h+1}^{(s-h)}(z)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le p-1,$$
$$\ne 0 \text{ pour } \ell = p.$$

Ces relations sont équivalentes aux deux premières de l'énoncé.

La propriété 4.27 donne les deux autres.

cqfd.

Dans le cas où $\phi_k^{(s)}$ est soit orthogonal singulier, soit sur le côté ouest du bloc P, on peut augmenter l'intervalle d'annulation de $\tau^{(s)}\left(\frac{1}{z^{\ell}}\,\phi_k^{(s)}(z)\right)$, ainsi que dans le cas où 0 est racine de $w_{k-h-1}^{(s-k+1)}$ ou de $w_{\frac{p-h}{2}}^{(s-k+1)}$.

*Propriété 4.33.*

*i)* $\tau^{(s)}(\frac{1}{z^\ell}\,\phi_{h+1}^{(s)}(z)) = 0$ *pour* $\ell \in \mathbb{Z},\ 1 - \frac{p-h}{2} \leq \ell \leq \frac{p+h}{2}$,

$\tau^{(s)}(\frac{1}{z^\ell}\,\phi_{h+1}^{(s)}(z)) \neq 0$ *pour* $\ell = -\frac{p-h}{2}$ *et pour* $\ell = \frac{p+h}{2} + 1$.

*ii)* *Si* $h+2 \leq k \leq \frac{p+h}{2}$ *et si* $0$ *est racine de* $w_{k-h-1}^{(s-k+1)}$ *d'ordre de multiplicité* $r$, *alors :*

$\tau^{(s)}(\frac{1}{z^\ell}\,\phi_{k}^{(s)}(z)) = 0$ *pour* $\ell \in \mathbb{Z},\ k - \frac{p+h}{2} \leq \ell \leq \frac{p+h}{2} + r$,

$\neq 0$ *pour* $\ell = k - 1 - \frac{p+h}{2}$ *et pour* $\ell = \frac{p+h}{2} + r + 1$.

*iii)* *Si* $\frac{p+h}{2} + 1 \leq k \leq p$ *et si* $0$ *est racine de* $w_{\frac{p-h}{2}}^{(s-k+1)}$ *d'ordre de multiplicité* $r$, *alors :*

$\tau^{(s)}(\frac{1}{z^\ell}\,\phi_{k}^{(s)}(z)) = 0$ *pour* $\ell \in \mathbb{N},\ k - \frac{p+h}{2} \leq \ell \leq k-1+r$,

$\neq 0$ *pour* $\ell = k-1 - \frac{p+h}{2}$ *et pour* $\ell = k+r$.

Démonstration.

La diagonale principale du bloc P porte l'indice $s - \frac{p+h}{2}$.

Nous avons ici l'analogue de la propriété 4.23 des polynômes semi-orthogonaux.

cqfd.

On peut encore déduire de la propriété 4.33 une propriété analogue à la propriété 4.27.

*Propriété 4.34.*

*i)* $$\tau^{(s)}(z^{\ell}\, \bar{\phi}^{(s)}_{h+1}(\tfrac{1}{z})) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ 1 - \tfrac{p-h}{2} \le \ell \le \tfrac{p+h}{2},$$

$$\ne 0 \text{ pour } \ell = -\tfrac{p-h}{2} \text{ et pour } \ell = \tfrac{p+h}{2} + 1.$$

*ii)* *Si* $h+2 \le k \le \frac{p+h}{2}$ *et si* 0 *est racine de* $w^{(s-k+1)}_{k-h-1}$ *d'ordre de multiplicité* r, *alors :*

$$\tau^{(s)}(z^{\ell}\, \bar{\phi}^{(s)}_{k}(\tfrac{1}{z})) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ k - \tfrac{p+h}{2} \le \ell \le \tfrac{p+h}{2} + r,$$

$$= 0 \text{ pour } \ell = k-1 - \tfrac{p+h}{2} \text{ et } \ell = \tfrac{p+h}{2} + r + 1.$$

*iii)* *Si* $\frac{p+h}{2} + 1 \le k \le p$ *et si* 0 *est racine de* $w^{(s-k+1)}_{\frac{p-h}{2}}$ *d'ordre de multiplicité* r, *alors :*

$$\tau^{(s)}(z^{\ell}\, \bar{\phi}^{(s)}_{k}(\tfrac{1}{z})) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{N},\ k - \tfrac{p+h}{2} \le \ell \le k-1+r,$$

$$\ne 0 \text{ pour } \ell = k-1 - \tfrac{p+h}{2} \text{ et } \ell = k + r.$$

---

Nous nous intéressons à présent aux relations de récurrence entre polynômes orthogonaux réguliers extérieurs aux blocs P U W.

Nous poserons $\phi^{*(s)}_{j}(z) = z^{j}\, \bar{\phi}^{(s)}_{j}(\frac{1}{z})$.

Le lemme suivant est la généralisation d'une propriété classique dans le cas normal [20].

*Lemme 4.2.*

*Si les polynômes* $\phi_k^{(s)}$ *et* $\phi_{k+1}^{(s)}$ *sont orthogonaux réguliers et si* $\phi_{k+1}^{(s)}$ *est extérieur aux blocs* P U W, *alors :*

$$\phi_{k+1}^{(s)}(z) = z\,\phi_k^{(s)}(z) + \phi_{k+1}^{(s)}(0)\,\phi_k^{*(s)}(z)$$

$$\phi_{k+1}^{*(s)}(z) = \phi_k^{*(s)}(z) + \bar{\phi}_{k+1}^{(s)}(0)\,z\,\phi_k^{(s)}(z)$$

Démonstration.

i) Si $P_k^{(s-k)}$ est orthogonal régulier par rapport à $c^{(s-k)}$, alors nous avons :

$$z\,P_k^{(s-k+1)}(z) = P_{k+1}^{(s-k)}(z) + q_{k+1}^{(s-k)}\,P_k^{(s-k)}(z) \text{ avec } q_{k+1}^{(s-k)} \neq 0.$$

Soit

$$\phi_{k+1}^{(s)}(z) = z\,\phi_k^{(s)}(z) - q_{k+1}^{(s-k)}\,P_k^{(s-k)}(z)$$

$$= z\,\phi_k^{(s)}(z) - q_{k+1}^{(s-k)}\,\frac{H_k^{(s-k+1)}}{H_k^{(s-k)}}\,z^k\,\bar{P}_k^{(s-k+1)}\left(\frac{1}{z}\right)$$

d'après la propriété 4.30.

Donc $\phi_{k+1}^{(s)}(z) = z\,\phi_k^{(s)}(z) - q_{k+1}^{(s-k)}\,\dfrac{H_k^{(s-k+1)}}{H_k^{(s-k)}}\,\phi_k^{*(s)}(z)$

En faisant z = 0 on trouve la relation proposée.

ii) Si $P_k^{(s-k)}$ n'est pas orthogonal régulier, alors d'après la propriété 4.29 $\phi_k^{(s)}$ est au nord d'un bloc.

Soit $\phi_{k+1}^{(s)}$ le polynôme qui est au nord-ouest de ce bloc.

Nous avons :

$$z\, P_k^{(s-k+1)}(z) = P_{k+1}^{(s-k)}(z) + q_{k+1}^{(s-k)}\, P_{pr(k+1,s-k)}^{(s-k)}(z)$$

avec $q_{k+1}^{(s-k)} \neq 0$,

c'est-à-dire :

$$\phi_{k+1}^{(s)}(z) = z\, \phi_k^{(s)}(z) - q_{k+1}^{(s-k)}\, P_{h+1}^{(s-k)}(z).$$

$P_{h+1}^{(s-k)}$ est identique à $P_{h+1}^{(s-h+1)}$ qui est le polynôme situé à **l'ex**trêmité inférieure du côté ouest de ce bloc P.

D'après la propriété 4.30.

$$P_{h+1}^{(s-h-1)}(z) = \frac{H_{h+1}^{(s-h)}}{H_{h+1}^{(s-h-1)}}\, z^{h+1}\, \bar{P}_{\mathbf{h+1}}^{(s-h)}\left(\frac{1}{z}\right).$$

$$\text{Or } P_k^{(s-k+1)}(z) = z^{k-h-1}\, P_{h+1}^{(s-h)}(z)$$

$$\bar{P}_k^{(s-k+1)}\left(\frac{1}{z}\right) = z^{h+1-k}\, \bar{P}_{h+1}^{(s-h)}\left(\frac{1}{z}\right).$$

$$\text{Donc } P_{h+1}^{(s-h-1)}(z) = \frac{H_{h+1}^{(s-h)}}{H_{h+1}^{(s-h-1)}}\, z^{k}\, \bar{P}_k^{(s-k+1)}\left(\frac{1}{z}\right)$$

D'où la relation proposée.

iii) On obtient la seconde relation en changeant z en $\frac{1}{z}$ et en prenant les quantités conjuguées pour les coefficients et en multipliant par $z^{k+1}$.

<u>cqfd</u>.

*Propriété 4.35.*

*Si* prh(k,s) $\neq$ k-1 *et si* $\phi_{k+1}^{(s)}$ *est orthogonal régulier, alors :*

$$\phi_k^{(s)}(z) = \phi_k^{(s)}(0)\ \phi_k^{*(s)}(z) + E_{k+1}^{(s-k)}\ z^{\frac{k-prh(k,s)}{2}}\ \phi_{prh(k,s)}^{(s)}(z),$$

$$\phi_k^{*(s)}(z) = \bar{\phi}_k^{(s)}(0)\ \phi_k^{*(s)}(z) + \bar{E}_{k+1}^{(s-k)}\ z^{\frac{k-prh(k,s)}{2}}\ \phi_{prh(k,s)}^{(s)}(z)$$

avec $E_{k+1}^{(s-k)} \neq 0$.

Démonstration.

Dans ces conditions

$$P_k^{(s-k+1)}(z) = P_s^{(s-k)}(z) + E_{k+1}^{(s-k)}\ P_{pr(k,s-k+1)}^{(s-k+1)}(z)$$

avec $E_{k+1}^{(s-k)} \neq 0$.

D'autre part :

$$P_{pr(k,s-k+1)}^{(s-k+1)}(z) = P_{\frac{k+prh(k,s)}{2}}^{(s-k+1)}(z) = z^{\frac{k-prh(k,s)}{2}}\ P_{prh(k,s)}^{(s-prh(k,s)+1)}(z).$$

Enfin

$$P_k^{(s-k)}(z) = \frac{H_k^{(s-k+1)}}{H_k^{(s-k)}}\ z^k\ \bar{P}_k^{(s-k+1)}(\tfrac{1}{z}) = \frac{H_k^{(s-k+1)}}{H_k^{(s-k)}}\ \phi_k^{*(s)}(z).$$

En remplaçant les polynômes P de la relation ci-dessus par leurs nouvelles expressions et en passant aux polynômes $\phi$ nous obtenons la première relation.

La seconde est obtenue à partir de la première en changeant z en $\frac{1}{z}$, en prenant les quantités conjuguées et en multipliant par $z^k$.

cqfd.

En ce qui concerne la relation de récurrence à trois termes, nous avons le théorème suivant qui est une conséquence immédiate de la propriété 4.17.

Théorème 4.2.

*Entre trois polynômes orthogonaux réguliers $\phi^{(s)}$ consécutifs en dehors des blocs* P U W, *il existe une relation de récurrence.*

$$\phi_k^{(s)}(z) = (z\, \pi^{(s)}_{k-prh(k,s)-1}(z) + \beta_k^{(s)})\, \phi^{(s)}_{prh(k,s)}(z)$$

$$+ \Gamma_k^{(s)}\, z^m\, \phi^{(s)}_{prh(prh(k,s),s)}(z)$$

*avec* $m = k - prh(prh(k,s),s) - su(prh(k,s),n) + pr(prh(k,s),n+1) + 1$

et $n = s - prh(k,s) + 1$.

$\pi^{(s)}_{k-1-prh(k,s)}$ *est un polynôme unitaire de degré* $k-1-prh(k,s)$ ;

$\beta_k^{(s)}$ et $\Gamma_k^{(s)}$ *sont des constantes non nulles.*

Remarque 4.12.

Si $\phi_k^{(s)}$ est dans l'angle nord-est d'un bloc P, alors :

$su(prh(k,s),n) = k$.

Si $\phi_k^{(s)}$ n'est pas dans l'angle nord-est d'un bloc P, alors

$su(prh(k,s),n) = \frac{k+prh(k,s)}{2}$.

Si $\phi^{(s)}_{prh(k,s)}$ est dans l'angle nord-est d'un bloc P, alors :

$pr(prh(k,s),n+1) + 1 = prh(k,s)$.

Si $\phi^{(s)}_{prh(k,s)}$ n'est pas dans l'angle nord-est d'un bloc P, alors

$pr(prh(k,s),n+1) + 1 = \frac{prh(k,s)+prh(prh(k,s),s)}{2}$.

<u>*Corollaire 4.4.*</u>

*Si nous posons* $\pi^{*(s)}_i(z) = z^i\, \bar{\pi}^{(s)}_i(\frac{1}{z})$, *alors* :

$$\phi^{*(s)}_k(z) = (\bar{\beta}^{(s)}_k\, z^{k-prh(k,s)} + \pi^{*(s)}_{k-1-prh(k,s)}(z))\, \phi^{*(s)}_{prh(k,s)}(z)$$

$$+ \bar{\Gamma}^{(s)}_k\, z^{k-m-prh(prh(k,s),s)}\, \phi^{*(s)}_{prh(prh(k,s),s)}(z).$$

---

Nous introduisons les polynômes du second ordre définis par Y.L. Geronimus [20].

$$\psi^{(s)}_n(t) = \tau^{(s)}\, (\frac{z+t}{z-t}\, (\phi^{(s)}_n(z) - \phi^{(s)}_n(t)),$$

$\tau^{(s)}$ agissant sur la variable z.

Nous poserons $\psi^{*(s)}_n(t) = t^n\, \bar{\psi}^{(s)}(\frac{1}{t})$,

$F(t) = \tau^{(s)}\, (\frac{z+t}{z-t})$ pour $|t| < 1$.

Nous avons une propriété d'approximation.

*Propriété 4.36.*

Pour $|t| < 1$,

*i)* *Si* $\phi_n^{(s)}$ *est orthogonal régulier et n'est pas au nord, nord-ouest et ouest d'un bloc* P, *alors* :

$$F(t)\ \phi_n^{*(s)}(t) - \psi_n^{*(s)}(t) = O(t^{n+1})$$

*ii)* *Si* $\phi_{h+1}^{(s)}$ *est au nord-ouest d'un bloc* P *et si* $p+1$ *est le degré du polynôme orthogonal régulier par rapport à* $c^{(s-h)}$ *à la sortie de ce bloc* P, *alors* :

$$F(t)\ \phi_{h+1}^{*(s)}(t) - \psi_{h+1}^{*(s)}(t) = O(t^{p+1})$$

*iii)* *Si l'horizontale* s *coupe un bloc* P *et si* $\phi_{h+1}^{(s)}$ *et* $\phi_{p+1}^{(s)}$ *sont les deux polynômes orthogonaux réguliers situés à l'entrée et à la sortie de ce bloc nous avons* :

*a)* *Si* $h+1 \le n \le \frac{p+h}{2} + 1$, *alors* :

$$F(t)\ \phi_n^{*(s)}(t) - \psi_n^{*(s)}(t) = O(t^{\frac{p+h}{2}+1})$$

*b)* *Si* $\frac{p+h}{2} + 2 \le n \le p$, *alors* :

$$F(t)\ \phi_n^{*(s)}(t) - \psi_n^{*(s)}(t) = O(t^n) \text{ au moins.}$$

Démonstration.

$$\bar{\psi}_n^{(s)}(\tfrac{1}{t}) = \tau^{(s)} \left(\frac{\bar{z} + \frac{1}{t}}{\bar{z} - \frac{1}{t}}\ (\overline{\phi_n^{(s)}(z)} - \bar{\phi}_n^{(s)}(\tfrac{1}{t})\right)$$

Puisque $|z| = 1$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Donc

$$\psi_n^{*(s)}(t) = t^n \, \bar{\psi}_n^{(s)}(\tfrac{1}{t}) = - \tau^{(s)}(\tfrac{z+t}{z-t} \, (t^n \, \overline{\phi_n^{(s)}(z)} - \phi_n^{*(s)}(t))$$

$$= \phi_n^{*(s)}(t) \, \tau^{(s)} \, (\tfrac{z+t}{z-t}) - t^n \, \tau^{(s)} \, (\tfrac{z+t}{z-t} \, \overline{\phi_n^{(s)}(z)})$$

et par conséquent :

$$F(t) \, \phi_n^{*(s)}(t) - \psi_n^{*(s)}(t) = t^n \, \tau^{(s)}(\tfrac{z+t}{z-t} \, \overline{\phi_n^{(s)}(z)})$$

$$= t^n \, \tau^{(s)} \, ((1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} t^k \, z^{-k}) \, \overline{\phi_n^{(s)}(z)})$$

i) D'après la propriété 4.27 :

$$\tau^{(s)}(\overline{\phi_n^{(s)}(z)}) = 0.$$

D'où le résultat.

ii) D'après la propriété 4.32 :

$$\tau^{(s)}(z^\ell \, \overline{\phi_{h+1}^{(s)}}(z)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z}, \; h+1-p \le \ell \le h.$$
$$\ne 0 \text{ pour } \ell = h-p.$$

Donc $F(t) \, \phi_{h+1}^{*(s)}(t) - \psi_{h+1}^{*(s)}(t)$

$$= 2 \, t^{h+1} \sum_{k=p-h}^{\infty} t^k \, \tau^{(s)}(z^{-k} \, \overline{\phi_n^{(s)}}(z))$$

D'où le résultat.

iii) D'après la propriété 4.34, si $h+1 \leq n \leq \frac{p+h}{2}$, alors :

$$\tau^{(s)}(z^{\ell}\, \bar{\Phi}_n^{(s)}(\tfrac{1}{z})) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ n - \tfrac{p+h}{2} \leq n \leq \tfrac{p+h}{2},$$

$$\neq 0 \text{ pour } \ell = n - 1 - \tfrac{p+h}{2}.$$

Donc $F(t)\ \phi_n^{\star(s)}(t) - \psi_n^{\star(s)}(t)$

$$= 2\ t^n \sum_{k=\frac{p+h}{2}+1-n}^{\infty} t^k\ \tau^{(s)}\ (z^{-k}\ \overline{\phi_n^{(s)}(z)}).$$

D'où le résultat.

Enfin si $\frac{p+h}{2} + 1 \leq n \leq p$, alors la propriété 4.34 indique que

$$\tau^{(s)}(z^{\ell}\, \bar{\phi}_n^{(s)}(\tfrac{1}{z})) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ n - \tfrac{p+h}{2} \leq \ell \leq n-1,$$

$$\neq 0 \text{ pour } \ell = n - 1 - \tfrac{p+h}{2} \geq 0.$$

Donc, soit $\tau^{(s)}(\bar{\phi}_n^{(s)}(\frac{1}{z})) \neq 0$ pour $n = \frac{p+h}{2} + 1$, soit on ne peut rien dire.

D'où le résultat.

<u>cqfd</u>.

# 4.8 DEPLACEMENTS VERTICAUX DANS LA TABLE P.

Nous pouvons d'une façon analogue mettre en évidence des relations de récurrence à trois termes entre polynômes orthogonaux réguliers suivant une verticale.

Nous considérons dans cette partie des blocs $P \cup O$, c'est à dire des blocs composés du bloc P et de son côté ouest. En effet puisque tous les polynômes sont identiques sur le côté ouest il est impossible d'obtenir le polynôme orthogonal régulier de l'angle SO par combinaison des deux précédents du côté ouest, car cela signifierait que le polynôme SO est divisible par un de ces polynômes du côté ouest.

Nous connaissons $P_i^{(n)}(x)$ et $P_i^{(n-p)}(x)$ polynôme orthogonal régulier prédecesseur de $P_i^{(n)}(x)$ suivant la verticale passant par $P_i^{(n)}(x)$ et nous désirons calculer $P_i^{(n+s)}(x)$ polynôme orthogonal régulier successeur de $P_i^{(n)}(x)$. Ces trois polynômes sont extérieurs aux blocs $P \cup O$.

*Propriété 4.37.*

*Il existe une relation de récurrence entre trois polynômes orthogonaux réguliers successifs placés en dehors des blocs* $P \cup O$ *sur une même verticale.*

$$x^s P_i^{(n+s)}(x) = (x \hat{\pi}_{s-1}^{(n+s)}(x) + \hat{\beta}_i^{(n+s)}) P_i^{(n)}(x)$$

$$+ \hat{\Gamma}_i^{(n+s)} x^{s+pr(i+1,n-1)-su(i,n)} P_i^{(n-p)}(x)$$

*où* $\hat{\pi}_{s-1}^{(n+s)}$ *est un polynôme unitaire de degré* $s-1$ *déterminé de façon unique et où* $\hat{\beta}_i^{(n+s)}$ *et* $\hat{\Gamma}_i^{(n+s)}$ *sont des constantes non nulles.*

Démonstration.

1. On suppose que $s = p = 1$.

1.1 Si $P_{i-1}^{(n+1)}(x)$ est orthogonal régulier.

```
  o
o o
  *
```

On obtient la relation 2.28 du livre de C. Brezinski.

$$H_i^{(n)} H_{i+1}^{(n-1)} \tilde{H}_i^{(n+1)}(x) = (H_i^{(n+1)} H_{i+1}^{(n-1)} + x H_{i+1}^{(n)} H_i^{(n)}) \tilde{H}_i^{(n)}(x)$$

$$- x H_{i+1}^{(n)} H_i^{(n+1)} \tilde{H}_i^{(n-1)}(x).$$

On remarquera que cette relation reste valable si $P_i^{(n-1)}(x)$ appartient au côté ouest d'un bloc P.

1.2 Si $P_{i-1}^{(n+1)}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

On a :

$$\begin{cases} P_i^{(n+1)}(x) = P_i^{(n)}(x) + C_{i+1}^{(n)}\ P_{pr(i,n+1)}^{(n+1)}(x) \\ \\ P_i^{(n)}(x) = P_i^{(n-1)}(x) + E_{i+1}^{(n-1)}\ P_{pr(i,n)}^{(n)}(x) \\ \\ x\ P_{pr(i,n+1)}^{(n+1)}(x) = P_{pr(i,n)}^{(n)}(x) \end{cases}$$

On élimine $P_{pr(i,n)}^{(n)}(x)$ dans les deux premières relations, on remplace $C_{i+1}^{(n)}$ et $E_{i+1}^{(n-1)}$ par leurs expressions en fonction des déterminants de Hankel et on applique la relation du théorème 4.1. On obtient alors la même relation qu'au 1.1.

La relation 2.28 du livre de C. Brezinski transformée pour obtenir les polynômes P est bien de la forme proposée.

2. On suppose que s et p sont différents de 1.

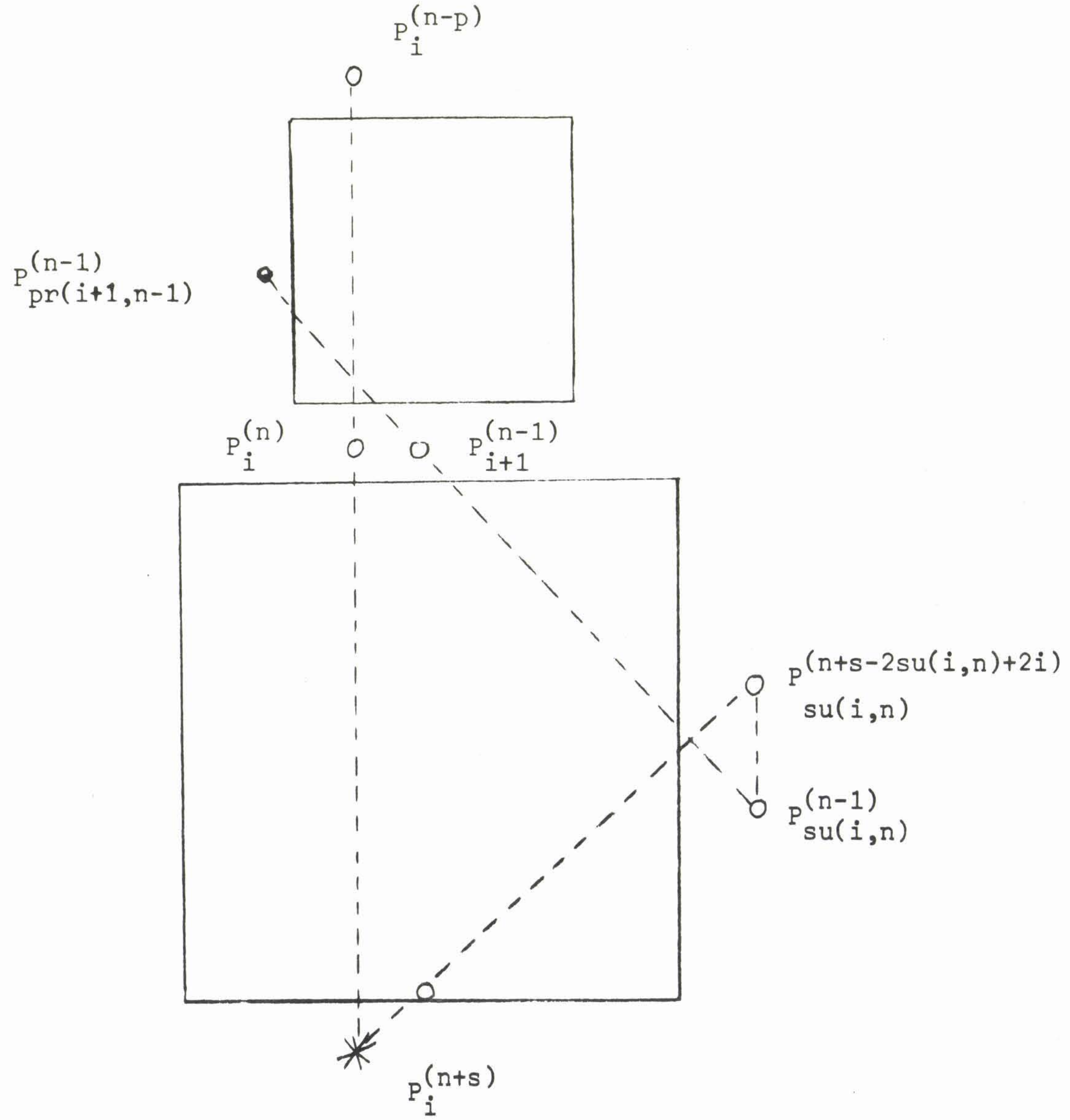
Nous utilisons le procédé constructif suivant :

Si $su(i,n)-i > \frac{s}{2}$,

à l'aide d'une relation de récurrence à trois termes on déduit $P_{su(i,n)}^{(n-1)}$

de $P_{i+1}^{(n-1)}(x) = x\ P_i^{(n)}(x)$ et de $P_{pr(i+1,n-1)}^{(n-1)}(x) = x^{pr(i+1,n-1)-i}\ P_i^{(n-p)}(x)$.

A l'aide de $P_{i+1}^{(n-1)}$ et de $P_{su(i,n)}^{(n-1)}$ on déduit $P_{su(i,n)}^{(n-2)}$ et ainsi de suite jusqu'à $P_{su(i,n)}^{(n+s-2su(i,n)+2i)}$ qui se trouve sur la même **antidiagonale** $n+s+2i-1$ que $P_i^{(n+s)}(x)$.



Nous avons donc :

$$P^{(n-1)}_{su(i,n)}(x) = (x\ \omega^{(n-1)}_{su(i,n)-i-2}(x) + B^{(n-1)}_{su(i,n)})\ P^{(n-1)}_{i+1}(x)$$

$$+ C^{(n-1)}_{su(i,n)}\ P^{(n-1)}_{pr(i+1,n-1)}(x).$$

$$P^{(n-1-j)}_{su(i,n)}(x) = P^{(n-2-j)}_{su(i,n)}(x) + E^{(n-2-j)}_{su(i,n)+1}\ P^{(n-1-j)}_{i+1+j}(x),$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le 2su(i,n)-s-2i-2$.

On fait la somme de ces $2su(i,n)-s-2i-1$ relations et on obtient :

$$P^{(n+s-2su(i,n)+2i)}_{su(i,n)}(x) = P^{(n-1)}_{su(i,n)}(x) + x\ \theta_{2su(i,n)-s-2i-2}(x)\ P^{(n)}_{i}(x)$$

où $\theta_{2su(i,n)-s-2i-2}$ est un polynôme de degré $2su(i,n)-s-2i-2$ au plus.

En utilisant la relation de récurrence à trois termes et en tenant compte du fait que $su(i,n)-i-1 > 2su(i,n)-s-2i-2$, on obtient :

$$P^{(n+s-2su(i,n)+2i)}_{su(i,n)}(x) = x\ \hat{\omega}^{(n-1)}_{su(i,n)-i-1}(x)\ P^{(n)}_{i}(x)$$

$$+ C^{(n-1)}_{su(i,n)}\ x^{pr(i+1,n-1)-i}\ P^{(n-p)}_{i}(x)$$

où $\hat{\omega}^{(n-1)}_{su(i,n)-i-1}$ est un polynôme unitaire de degré $su(i,n)-i-1$.

Si $su(i,n)-i \leq \frac{s}{2}$

Si $su(i,n)-i \neq 1$

Toujours à l'aide d'une relation de récurrence à trois termes on déduit $P^{(n-1)}_{su(i,n)}$ de $P^{(n-1)}_{i+1}$ et de $P^{(n-1)}_{pr(i+1,n-1)}$.

Puis à l'aide de $P^{(n)}_{i}$ et de $P^{(n-1)}_{su(i,n)}$ on calcule $P^{(n)}_{su(i,n)}$ et ainsi de suite jusque $P^{(n+s-2su(i,n)+2i)}_{su(i,n)}$.

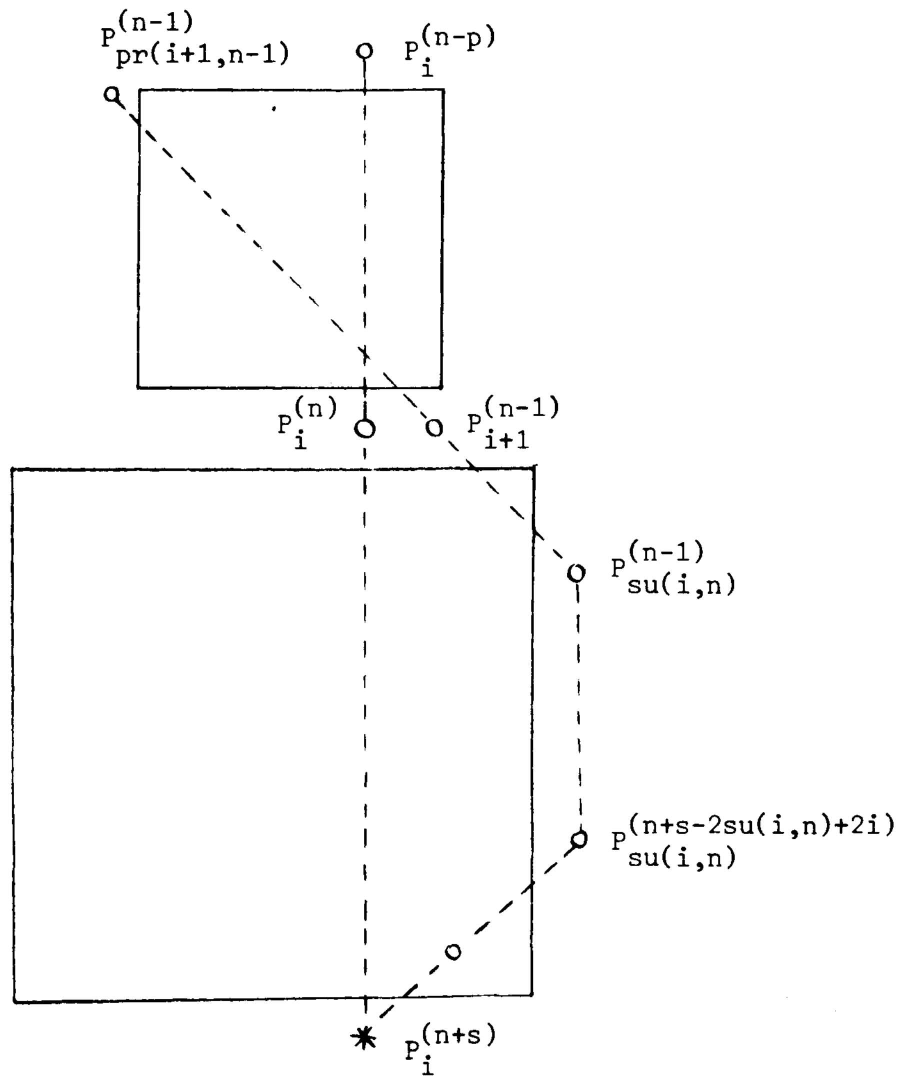
$$P^{(n+j)}_{su(i,n)}(x) = P^{(n-1+j)}_{su(i,n)} + E^{(n-1+j)}_{su(i,n)+1}\ P^{(n+j)}_{i-j}(x),$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq s-2su(i,n)+2i$.

On ajoute ces $s-2su(i,n)+2i+1$ relations, ce qui donne :

$$P^{(n+s-2su(i,n)+2i)}_{su(i,n)}(x) = P^{(n-1)}_{su(i,n)}(x) + \theta_{s-2su(i,n)+2i}\left(\frac{1}{x}\right) P^{(n)}_{i}(x)$$

où $\theta_{s-2su(i,n)+2i}(x)$ est un polynôme de degré $s-2su(i,n)+2i$ au plus.




En utilisant la relation de récurrence à trois termes on obtient donc :

$$P^{(n+s-2su(i,n)+2i)}_{su(i,n)}(x) = (x\ \omega^{(n-1)}_{su(i,n)-i-2}(x) + B^{(n-1)}_{su(i,n)})\ x\ P^{(n)}_{i}(x)$$

$$+\ \theta_{s-2su(i,n)+2i}(\tfrac{1}{x})\ P^{(n)}_{i}(x) + C^{n-1}_{su(i,n)}\ x^{pr(i+1,n-1)-i}\ P^{(n-p)}_{i}(x).$$

Soit encore :

$$x^{s-2su(i,n)+2i}\ P^{(n+s-2su(i,n)+2i)}_{su(i,n)}(x)$$

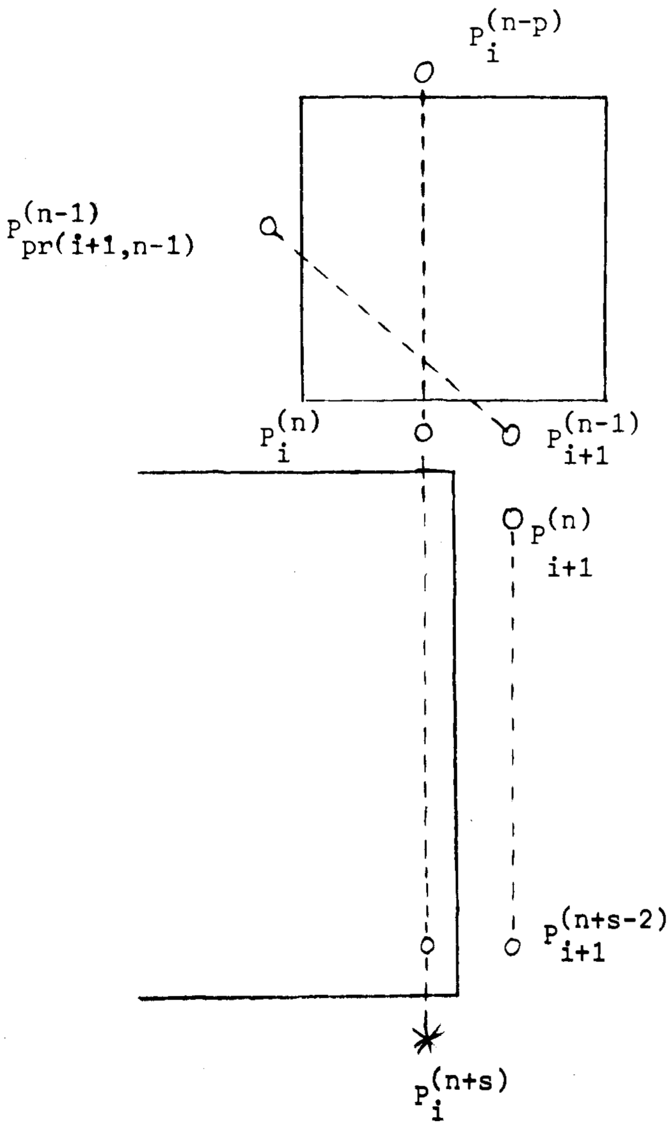
$$= \hat{\omega}^{(n-1)}_{s-su(i,n)+i}(x)\ P^{(n)}_{i}(x) + C^{(n-1)}_{su(i,n)}\ x^{s-2su(i,n)+i+pr(i+1,n-1)}\ P^{(n-p)}_{i}(x).$$

Si su(i,n)-i = 1,

avec $P_i^{(n)}$ et $P_{pr(i+1,n-1)}^{(n-1)}$ on détermine $P_{i+1}^{(n-1)}(x)$ à l'aide de la première relation de la propriété 2.4

$$x\, P_i^{(n)}(x) = P_{i+1}^{(n-1)}(x) + q_{i+1}^{(n-1)}\, P_{pr(i+1,n-1)}^{(n-1)}(x),$$

avec $q_{i+1}^{(n-1)} \neq 0$.



La seconde relation de cette propriété nous donne $P_{i-1}^{(n)}$ à partir de $P_i^{(n)}$ et $P_{i+1}^{(n-1)}$, et ainsi de suite jusque $P_{i+1}^{(n+s-2)}$.

$$P_{i+1}^{(n+j)}(x) = P_{i+1}^{(n-1+j)}(x) + E_{i+2}^{(n-1+j)} \; P_{i-j}^{(n+j)}(x)$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq s-2$.

La somme de ces (s-1) relations donne :

$$P_{i+1}^{(n+s-2)}(x) = P_{i+1}^{(n-1)}(x) + \theta_{s-2}(\tfrac{1}{x}) \; P_i^{(n)}(x).$$

En utilisant la première relation de la propriété 2.4 nous obtenons :

$$P_{i+1}^{(n+s-2)}(x) = (x + \theta_{s-2}(\tfrac{1}{x})) \; P_i^{(n)}(x) + q_{i+1}^{(n-1} \; x^{pr(i+1,n-1)-i} \; P_i^{(n-p)}(x),$$

soit encore :

$$x^{s-2} \; P_{i+1}^{(n+s-2)}(x) = \omega_{s-1}(x) \; P_i^{(n)}(x) + q_{i+1}^{(n)}(x) \; x^{s-2+pr(i+1,n-1)-i} \; P_i^{(n-p)}(x).$$

2.1 <u>Si $H_i^{(n+s+1)} \neq 0$,</u>

alors $P_i^{(n+s)}(0) \neq 0$ et $\tilde{P}_i^{(n+s)}$ est proportionnel à $W_i^{(n+s+2i-1)}$.

$$W_i^{(n+s+2i-1)}(x) = (-1)^i \frac{H_i^{(n+s)}}{H_i^{(n+s+1)}} \; \tilde{P}_i^{(n+s)}(x).$$

$$W_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)}(x) = (-1)^{su(i,n)} \; \frac{H_{su(i,n)}^{(n+s-2su(i,n)+2i)}}{H_{su(i,n)}^{(n+s-2su(i,n)+2i+1)}} \; \tilde{P}_{su(i,n)}^{(n+s-2su(i,n)+2i)}(x)$$

Si $su(i,n)-i \neq 1$,

Nous obtiendrons $W_i^{(n+s+2i-1)}$ par une relation de récurrence à trois termes portant sur les polynômes orthogonaux réguliers situés sur la même antidiagonale n+s+2i-1, et faisant intervenir le polynôme

$W_{i+1}^{(n+s+2i-1)}$, qui est au sud du bloc W et qu'on calcule simplement en fonction du polynôme W qui est dans l'angle sud-ouest du bloc W, et le

polynôme $W_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)}$ qui est proportionnel à $\tilde{P}_{su(i,n)}^{(n+s-2su(i,n)+2i)}$.

Nous avons donc :

$$W_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)}(x) = (x\, \Omega_{su(i,n)-i-2}^{(n+s+2i-1)}(x) + \tilde{B}_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)})\, W_{i+1}^{(n+s+2i-1)}(x)$$

$$+ \tilde{C}_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)}\, W_i^{(n+s+2i-1)}(x).$$

0 est racine d'ordre de multiplicité $i+s+1-su(i,n)$ de $W_{i+1}^{(n+s+2i-1)}(x)$.

Donc :

$$W_{i+1}^{(n+s+2i-1)}(x) = x^{i+s+1-su(i,n)}\, W_{su(i,n)-s}^{(n+i+su(i,n)-2)}(x).$$

$$W_{su(i,n)-s}^{(n+i+su(i,n)-2)}(x) = (-1)^{su(i,n)-s} \frac{H_{su(i,n)-s}^{(n+i+2s-su(i,n)-1)}}{H_{su(i,n)-s}^{(n+i+2s-su(i,n))}}\, \tilde{P}_{su(i,n)-s}^{(n+i+2s-2su(i,n)-1)}(x)$$

et $\tilde{P}_{su(i,n)-s}^{(n+i+2s-su(i,n)-1)} \equiv \tilde{P}_i^{(n)}(x)$.

Par conséquent en transformant la relation de récurrence par le changement de x en $\frac{1}{x}$ et en multipliant par $x^{su(i,n)}$, on obtient :

$$(-1)^{su(i,n)} \frac{H_{su(i,n)}^{(n+s-2su(i,n)+2i)}}{H_{su(i,n)}^{(n+s-2su(i,n)+2i+1)}} P_{su(i,n)}^{(n+s-2su(i,n)+2i)}(x)$$

$$= (-1)^{su(i,n)-s} \frac{H_{su(i,n)-s}^{(n+i+2s-2su(i,n)-1)}}{H_{su(i,n)-s}^{(n+i+2s-2su(i,n))}} (\tilde{\Omega}_{su(i,n)-i-2}^{(n+s+2i-1)}(x) + \tilde{B}_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)} *$$

$$x^{su(i,n)-i-1}) * x^{su(i,n)-i-s} P_i^{(n)}(x) +$$

$$(-1)^i \tilde{C}_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)} \frac{H_i^{(n+s)}}{H_i^{(n+s+1)}} x^{su(i,n)-i} P_i^{(n+s)}(x).$$

Si $su(i,n)-i = 1$,

nous obtiendrons $W_i^{(n+s+2i-1)}$ en utilisant la première relation de la propriété 4.13 appliquée aux polynômes $W_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)}$ et $W_i^{(n+s+2i-2)}$ qui est au sud du bloc W.

0 est racine d'ordre de multiplicité s-1 de $W_i^{(n+s+2i-2)}$. Alors :

$$x\, W_i^{(n+s+2i-2)}(x) = W_{i+1}^{(n+s+2i-1)}(x) + \tilde{q}_{i+1}^{(n+s+2i-1)}\, W_i^{(n+s+2i-1)}(x)$$

$$= x^s\, W_{i-s+1}^{(n+2i-1)}(x) \text{ avec } \tilde{q}_{i+1}^{(n+s+2i-1)} \neq 0.$$

Dans ce cas on trouve après transformation :

$$(-1)^{i+1} \frac{H_{i+1}^{(n+s-2)}}{H_{i+1}^{(n+s-1)}} P_{i+1}^{(n+s-2)}(x) = x^{1-s} (-1)^{i+1-s} \frac{H_{i+1-s}^{(n+2s-2)}}{H_{i+1-s}^{(n+2s-1)}} P_i^{(n)}(x)$$

$$+ (-1)^{i+1} \tilde{q}_{i+1}^{(n+s+2i-1)} \frac{H_i^{(n+s)}}{H_i^{(n+s+1)}} x\, P_i^{(n+s)}(x).$$

Dans le cas où $su(i,n)-i > \frac{s}{2}$ nous avons $su(i,n)-i \neq 1$.

Si nous cherchons la relation existant entre $P_i^{(n-p)}$, $P_i^{(n)}$ et $P_i^{(n+s)}$ nous obtenons :

$$\overset{\sim}{C}{}^{(n+s+2i-1)}_{su(i,n)} \; (-1)^i \frac{H_i^{(n+s)}}{H_i^{(n+s+1)}} \; x^{su(i,n)-i} \; P_i^{(n+s)}(x) =$$

$$[x \, \omega^{(n-1)}_{su(i,n)-i-1}(x) \; (-1)^{su(i,n)} \frac{H^{(n+s-2su(i,n)+2i)}_{su(i,n)}}{H^{(n+s-2su(i,n)+2i+1)}_{su(i,n)}} -$$

$$(-1)^{su(i,n)-s} \frac{H^{(n+i+2s-su(i,n)-1)}_{su(i,n)-s}}{H^{(n+1+2s-su(i,n))}_{su(i,n)-s}} \; x^{su(i,n)-i-s} \; (\overset{\sim}{\Omega}{}^{(n+s+2i-1)}_{su(i,n)-i-2}(x) +$$

$$\overset{\sim}{B}{}^{(n+s+2i-1)}_{su(i,n)} \; x^{su(i,n)-i-1})] \;\; P_i^{(n)}(x)$$

$$+ \; (-1)^{su(i,n)} \frac{H^{(n+s-2su(i,n)+2i)}_{su(i,n)}}{H^{(n+s-2su(i,n)+2i+1)}_{su(i,n)}} \; C^{(n-1)}_{su(i,n)} \; x^{pr(i+1,n-1)-i} \; P_i^{(n-p)}(x).$$

Après multiplication des deux membres par $x^{s+i-su(i,n)}$ on trouve la relation proposée.

Dans le cas où $su(i,n)-i \leq \frac{s}{2}$ et $su(i,n)-i \neq 1$, en effectuant le même travail on obtient :

$$\overset{\sim}{C}{}^{(n+s+2i-1)}_{su(i,n)} \; (-1)^i \frac{H_i^{(n+s)}}{H_i^{(n+s+1)}} \; x^{s-su(i,n)+i} \; P_i^{(n+s)}(x) =$$

$$[(-1)^{su(i,n)} \frac{H^{(n+s-2su(i,n)+2i)}_{su(i,n)}}{H^{(n+s-2su(i,n)+2i+1)}_{su(i,n)}} \; \omega^{(n-1)}_{s-su(i,n)+i}(x) -$$

$$(-1)^{su(i,n)-s} \frac{H^{(n+i+2s-su(i,n)-1)}_{su(i,n)-s}}{H^{(n+i+2s-su(i,n))}_{su(i,n)-s}} x^{i-su(i,n)} (\tilde{\Omega}^{(n+s+2i-1)}_{su(i,n)-i-2}(x) +$$

$$\tilde{B}^{(n+s+2i-1)}_{su(i,n)} x^{su(i,n)-i-1})] \; P^{(n)}_i(x) +$$

$$(-1)^{su(i,n)} \frac{H^{(n+s-2su(i,n)+2i)}_{su(i,n)}}{H^{(n+s-2su(i,n)+2i+1)}_{su(i,n)}} C^{(n-1)}_{su(i,n)} x^{s-2su(i,n)+i+pr(i+1,n-1)} *$$

$$P^{(n-p)}_i(x).$$

Après multiplication des deux membres par $x^{su(i,n)-i}$, on obtient encore la relation proposée.

Enfin dans le cas où $su(i,n)-i \leq \frac{s}{2}$ et $su(i,n)-i = 1$ on a :

$$(-1)^{i+1} \tilde{q}^{(n+s+2i-1)}_{i+1} \frac{H^{(n+s)}_i}{H^{(n+s+1)}_i} x^{s-1} P^{(n+s)}_i(x)$$

$$= [(-1)^{i+1} \frac{H^{(n+s-2)}_{i+1}}{H^{(n+s-1)}_{i+1}} \tilde{\omega}_{s-1}(x) - \frac{1}{x} (-1)^{i+1-s} \frac{H^{(n+s-2)}_{i+1-s}}{H^{(n+s-1)}_{i+1-s}}] \; P^{(n)}_i(x)$$

$$+ (-1)^{i+1} q^{(n-1)}_{i+1} x^{s-2+pr(i+1,n-1)-i} \frac{H^{(n+s-2)}_{i+1}}{H^{(n+s-1)}_{i+1}} P^{(n-p)}_i(x).$$

Il suffit de multiplier par x pour retrouver la relation proposée.

2.2 Si $H^{(n+s+1)}_i = 0$,

alors $P^{(n+s)}_i(0) = 0$ et $W^{(n+s+2i-1)}_i$ est quasi-orthogonal.

Si $su(i,n)-i \neq 1$,

$W_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)}$ et $W_{i+1}^{(n+s+2i-1)}$ permettent de calculer dans ce cas $W_{\tilde{pr}(i+1,n+s+2i-1)}^{(n+s+2i-1)}$ grâce à une relation de récurrence à trois termes.

$$W_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)}(x) = (x\ \Omega_{su(i,n)-i-2}^{(n+s+2i-1)}(x) + \tilde{B}_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)})\ W_{i+1}^{(n+s+2i-1)}(x)$$

$$+ \tilde{C}_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)}\ W_{\tilde{pr}(i+1,n+s+2i-1)}^{(n+s+2i-1)}(x).$$

Ce polynôme est proportionnel à $\tilde{P}_{\tilde{pr}(i+1,n+s+2i-1)}^{(n+s-2\tilde{pr}(i+1,n+s+2i-1)+2i)}$ qui est à l'ouest du bloc P ayant $P_i^{(n+s)}$ sur son côté nord.

Posons $\ell = \tilde{pr}(i+1,n+s+2i-1)$

$$W_\ell^{(n+s+2i-1)}(x) = (-1)^\ell \frac{H_\ell^{(n+s+2i-2\ell)}}{H_\ell^{(n+s+2i+1-2\ell)}} \tilde{P}_\ell^{(n+s+2i-2\ell)}(x)$$

$$= (-1)^\ell \frac{H_\ell^{(n+s+2i-2\ell)}}{H_\ell^{(n+s+2i+1-2\ell)}} \tilde{P}_i^{(n+s)}(x).$$

Donc dans les relations présentées dans le 2.1 seul variera le coefficient en facteur de $\tilde{P}_i^{(n+s)}(x)$.

Si $su(i,n)-i = 1$,

la première relation de la propriété 4.13 appliquée aux polynômes $W_{su(i,n)}^{(n+s+2i-1)}$ et $W_i^{(n+s+2i-2)}$ permet d'obtenir $W_{\tilde{pr}(i+1,n+s+2i-1)}^{(n+s+2i-1)}$. La suite est alors la même que dans le cas su(i,n)-i $\neq$ 1. Par conséquent on arrive au même résultat. Seul change le coefficient en facteur de $\tilde{P}_i^{(n+s)}$.

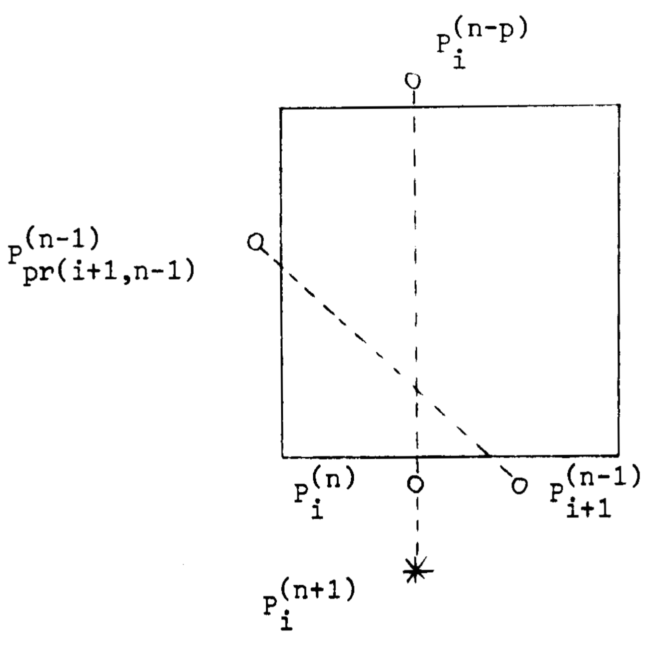
La relation proposée est encore bien vérifiée dans le cas $H_i^{(n+s+1)} = 0$.

## 3. Si p = 1 et s $\neq$ 1

Il suffit de remplacer pr(i+1,n-1) par i dans les relations du 2. Par conséquent on a encore la relation proposée.

## 4. Si p $\neq$ 1 et s = 1

On procède comme pour le cas su(i,n)-i = 1.




On calcule d'abord $P_{i+1}^{(n-1)}$ par la relation

$$x\, P_i^{(n)}(x) = P_{i+1}^{(n-1)}(x) + q_{i+1}^{(n-1)}\, P_{pr(i+1,n-1)}^{(n-1)}(x)$$

avec $q_{i+1}^{(n-1)} \neq 0$.

Puis $P_i^{(n+1)}$ sera calculé comme en 2.1 ou 2.2.

Donc on trouve encore la relation proposée.

---

Enfin $\hat{\Gamma}_i^{(n+s)}$ est une constante non nulle. En effet elle ne dépend à chaque fois que d'un rapport de déterminants non nuls et d'une constante non nulle $C_{su(i,n)}^{(n-1)}$ ou $q_{i+1}^{(n-1)}$.

$\hat{\beta}_i^{(n+s)}$ est également non nulle, car elle ne dépend aussi que d'un rapport de déterminants non nuls et du terme constant de $\Omega_{su(i,n)-i-2}^{(n+s+2i-1)}$ qui vaut 1.

<u>cqfd</u>.

Nous indiquons maintenant la façon de déterminer s, su(i,n) et pr(i+1,n-1) lorsque l'on connait $P_i^{(n-p)}$ et $P_i^{(n)}$, en vue de calculer $P_i^{(n+s)}$.

Pour cela nous commençons par calculer $c^{(n)}(x^{i+j}\ P_i^{(n)}(x))$ pour $j \in \mathbb{N}$, tant que cette expression est nulle. Nous aurons donc :

$$c^{(n)}(x^{i+j}\ P_i^{(n)}(x)) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq k_1-1$$

$$c^{(n)}(x^{i+k_1}\ P_i^{(n)}(x)) \neq 0.$$

Dans ces conditions $su(i,n) = i+k_1+1$.

$P_i^{(n)}$ étant connu, on a l'ordre de multiplicité $k_2$ de la racine 0.

Par conséquent $s = k_1 + k_2 + 1$.

$$pr(i+1,n+s-1) = i - k_2$$

Posons $b = s+pr(i+1,n-1)-su(i,n)$.

Nous donnons une propriété concernant les ordres relatifs des polynômes $P_i^{(n)}$ et $x^b\ P_i^{(n-p)}$. Nous rappelons que l'ordre noté ord, est l'exposant de plus bas degré d'un polynôme.

*Propriété 4.38.*

$$\mathrm{Ord}(P_i^{(n)}(x) = \mathrm{ord}(x^b\ P_i^{(n-p)}(x)).$$

Démonstration.

Ce qui a été présenté ci-dessus montre que :

$$k_2 \leq s-1.$$

i) Supposons que $k_2 < \mathrm{ord}(x^b\ P_i^{(n-p)}(x))$.

Dans ce cas on divise les deux membres de la relation de récurrence par $x^{k_2}$ et on fait $x = 0$. On obtient donc

$$\hat{\beta}_i^{(n+s)} \left[\frac{P_i^{(n)}(x)}{x^{k_2}}\right]_{x=0} = 0$$

et par conséquent $\hat{\beta}_i^{(n+s)} = 0$, ce qui est impossible.

ii) Supposons que $k_2 > \mathrm{ord}(x^b\ P_i^{(n-p)}(x)) = q$,

alors on divise les deux membres de la relation de récurrence par $x^q$ et on fait $x = 0$.

On obtient $\hat{\Gamma}_i^{(n+s)} \left[\dfrac{P_i^{(n-p)}(x)}{x^{q-b}}\right]_{x=0} = 0,$

ce qui contredit le fait que $\hat{\Gamma}_i^{(n+s)}$ est non nul.

cqfd.

La propriété suivante étudie le cas où $P_i^{(n)}$ est au nord ou nord-ouest d'un bloc dont l'angle nord-ouest est occupé par $P_0 = 1$.

Propriété 4.39.

*Si $P_i^{(n)}(x) = x^i$, alors la constante non nulle $\hat{\Gamma}_i^{(n+s)}$ peut être choisie de façon arbitraire. Le polynôme $\hat{\pi}_{s-1}^{(n+s)}$ et la constante $\hat{\beta}_i^{(n-s)}$ sont alors déterminés de façon unique.*

Démonstration.

Nous posons $x\, \hat{\pi}_{s-1}^{(n+s)}(x) + \hat{\beta}_i^{(n+s)} = \sum_{\alpha=0}^{s} \mu_\alpha x^\alpha.$

et $x^b\, P_i^{(n-p)}(x) = \sum_{\ell=i}^{b+i} \lambda_{\ell,i}^{(n-p)} x^\ell$ avec $\lambda_{i,i}^{(n-p)} \neq 0.$

La relation de récurrence donne donc :

$$x^s\, P_i^{(n+s)}(x) = x^i \sum_{\alpha=0}^{s} \mu_\alpha x^\alpha + \hat{\Gamma}_i^{(n+s)} x^b\, P_i^{(n-p)}(x)$$

$$= x^i \sum_{\alpha=0}^{b} (\mu_\alpha + \lambda_{i+\alpha,i}^{(n-p)} \hat{\Gamma}_i^{(n+s)})\, x^\alpha + x^i \sum_{\alpha=b+1}^{s} \mu_\alpha x^\alpha$$

On voit que les $\mu_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $b+1 \le \alpha \le s$ sont déterminés de façon unique.

Par contre les $\mu_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha \le b$ dépendent de $\hat{\Gamma}_i^{(n+s)}$ si $\lambda_{i+\alpha,i}^{(n-p)}$ est non nul.

En particulier $\mu_0 = \hat{\beta}_i^{(n+s)}$ dépend de $\hat{\Gamma}_i^{(n+s)}$.

On peut donc fixer de façon arbitraire $\hat{\Gamma}_i^{(n+s)}$ et dans ce cas tous les $\mu_\alpha$ sont déterminés de façon unique.

cqfd.

Nous avons aussi une propriété des zéros des polynômes orthogonaux réguliers placés sur une même verticale.

*Propriété 4.40.*

*Deux polynômes orthogonaux réguliers successifs sur une même verticale, extérieurs aux blocs* P U O *n'ont pas de racine non nulle commune.*

Démonstration.

i) Si $P_i^{(n)}$ est au nord d'un bloc P, alors $P_i^{(n+s)}$ n'a pas de racine commune avec $P_{pr(i,n+s)}^{(n+s)}$.

Or $P_i^{(n)}(x) = x^{i-pr(i,n+s)}\ P_{pr(i,n+s)}^{(n+s)}(x)$.

D'où le résultat.

ii) Si $P_i^{(n)}$ n'est pas au nord d'un bloc P, alors le théorème 2.1 ii) montre que $P_i^{(n+s)}$ et $P_i^{(n+s-1)}$ n'ont pas de racine commune.

Si $s = 1$, $P_i^{(n+s-1)}(x) \equiv P_i^{(n)}(x)$.

Si $s \neq 1$, $P_i^{(n)}$ est au nord-ouest d'un bloc P et dans ce cas nous avons encore :

$$P_i^{(n+s-1)}(x) \equiv P_i^{(n)}(x).$$

cqfd.

Dans le cas des déplacements verticaux nous avons une propriété similaire à la propriété 4.25 qui permet de déterminer une partie de la table.

<u>*Propriété 4.41.*</u>

*Si* $P_i^{(n)}$ *et* $P_i^{(n+s)}$ *sont donnés en dehors d'un bloc* P U O *et si on connait* su(i,n), *alors toute la table comprise entre la diagonale* n+s *et l'antidiagonale* n+s+2i-1 *est déterminée de façon unique jusqu'au polynôme* $P_i^{(n+s)}$.

<u>Démonstration.</u>

Connaître s et su(i,n) positionne de façon unique le bloc qui sépare $P_i^{(n)}$ et $P_i^{(n+s)}$.

i) <u>Si s = 1</u>

alors su(i,n) = i+1 sinon $P_i^{(n+1)}$ serait à l'ouest d'un bloc P. On retranche $P_i^{(n+1)}$ de $P_i^{(n)}$. On obtient $E_{i+1}^{(n)}\ P_{pr(i,n+1)}^{(n+1)}$, ce qui permet d'en déduire

$P_{pr(i,n+1)}^{(n+1)}$ puisqu'il est unitaire.

La remarque 2.1 permet de conclure.

ii) <u>Si s ≠ 1</u> et

a) <u>Si $P_i^{(n)}$ est au nord du bloc P,</u>

alors on connait le polynôme orthogonal régulier prédecesseur de $P_i^{(n+s)}$ sur la diagonale n+s. C'est le polynôme $x^{su(i,n)-s-i}\ P_i^{(n)}(x)$. Ce polynôme et $P_i^{(n+s)}$ permettent la détermination de la partie de la table mentionnée, d'après la remarque 2.1.

b) <u>Si $P_i^{(n)}$ est au nord-ouest du bloc P,</u>

alors on retranche $P_i^{(n+s)}$ de $P_i^{(n)}$ et on obtient $E_{i+1}^{(n+s-1)}\ P_{pr(i,n+s)}^{(n+s)}$ et donc $P_{pr(i,n+s)}^{(n+s)}$. La remarque 2.1 permet encore de conclure.

<u>cqfd.</u>

# 4.9 ALGORITHMES DE CALCUL DES POLYNOMES ORTHOGONAUX REGULIERS

## 1. Le long d'une diagonale.

### a). Cas d'une fonctionnelle linéaire c définie.

On utilise la relation de récurrence à trois termes

$$P_{k+1}(x) = (x + B_{k+1})\, P_k(x) + C_{k+1}\, P_{k-1}(x)$$

avec $P_{-1}(x) = 0$ et $P_o(x) = 1$.

On suppose connu $P_k(x)$ et $P_{k-1}(x)$.
Pour calculer $P_{k+1}(x)$ on utilise l'orthogonalité des polynômes

$$c(x^j\, P_{k+1}(x)) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k.$$

Mais on a également

$$c(x^j\, P_k) = 0 \qquad \text{pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k-1,$$

$$c(x^j\, P_{k-1}) = 0 \quad \text{pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k-2.$$

On aura donc en définitive deux équations à deux inconnues $B_{k+1}$ et $C_{k+1}$ qui sont :

$$c(x^k\, P_k) + C_{k+1}\, c(x^{k-1}\, P_{k-1}) = 0$$

$$c(x^{k+1}P_k) + B_{k+1}\, c(x^k\, P_k) + C_{k+1}\, c(x^kP_{k-1}) = 0.$$

**Complexité de l'algorithme.**

A chaque étape, pour calculer $C_{k+1}$, on utilise la valeur de $c(x^{k-1}\, P_{k-1})$ trouvée à l'étape précédente et on calcule $c(x^k\, P_k)$ pour lequel il faut k additions et k multiplications, soit pour le calcul de $C_{k+1}$, k additions, k multiplications, 1 division.

Pour calculer $B_{k+1}$ on utilise également les valeurs de $c(x^k P_{k-1})$ trouvées au cours de l'étape précédente ainsi que celle de $c(x^k P_k)$ calculée pour $C_{k+1}$. Pour déterminer $c(x^{k+1} P_k)$ il faut k additions et k multiplications, soit pour trouver $B_{k+1}$, k additions, (k+1) multiplications et 1 division. Pour calculer $P_{k+1}$ il faut encore 2k additions et 2k+1 multiplications, soit au total 4k additions, 4k+2 multiplications et 2 divisions.

Pour déterminer l'ensemble $P_1,\ldots,P_{k+1}$ il faut donc $2k(k+1)$ additions, $2(k+1)^2$ multiplications et $2(k+1)$ divisions.

b) Cas d'une fonctionnelle linéaire c non définie.

Pour détecter un bloc P on utilise la remarque 1.3.
Si $P_k(x)$ est orthogonal régulier on calcule $c(x^i P_k)$ pour $i \geq k$. Cette quantité sera nulle jusqu'à $i = su(k) - 2$. Alors $P_{su(k)}(x)$ est orthogonal régulier.
Nous avons alors :

$$P_{su(k)}(x) = (x\,\omega_{su(k)-k-1}(x) + B_{su(k)})\,P_k(x) + C_{su(k)}\,P_{pr(k)}(x).$$

On utilise encore l'orthogonalité des polynômes pour calculer $C_{su(k)}$, $B_{su(k)}$ et les su(k)-k-1 coefficients de $\omega_{su(k)-k-1}(x)$ puisqu'il est unitaire.

On a :

$$\begin{cases} c(x^j P_{su(k)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq su(k)-1 \\ c(x^j P_k) = 0 \quad\ \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq su(k)-2 \\ c(x^j P_{pr(k)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq k-2\ . \end{cases}$$

Par conséquent on utilise les su(k)-k+1 relations que l'on obtient avec

$$c[x^j((x\omega_{su(k)-k-1}(x) + B_{su(k)})\,P_k(x) + C_{su(k)}\,P_{pr(k)}(x)] = 0$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $k-1 \leq j \leq su(k)-1$, pour déterminer les $su(k)-k+1$ inconnues citées précédemment.
C'est un système triangulaire régulier puisque $c(x^{k-1}\ P_{pr(k)}) \neq 0$, ainsi que $c(x^{su(k)-1}\ P_k)$.

On obtient donc d'abord $C_{su(k)}$, puis les coefficients de $\omega_{su(k)-k-1}(x)$ en commençant par les exposants les plus élevés et enfin $B_{su(k)}$.

## Complexité de l'algorithme.

Pour calculer l'ensemble des $su(k)-k+1$ coefficients il faut calculer

$$c(x^j\ P_{pr(k)}) \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ k-1 \leq j \leq su(k)-1$$

et

$$c(x^j\ P_k) \qquad \text{pour } j \in \mathbb{N},\ k-1 \leq j \leq 2su(k)-k-1$$

Mais parmi ces quantités, $c(x^j\ P_{pr(k)})$, pour $j \in \mathbb{N}$, $k-1 \leq j \leq 2k-pr(k)-1$ ont déjà été calculées au cours de l'étape précédente.
Pour résoudre le système linéaire triangulaire il faut donc :
$\frac{(su(k)+k)(su(k)+k+1)}{2} + pr(k)\ (su(k)-2k+pr(k)+1)$ additions, autant de multiplications et $su(k)-k+1$ divisions.
Pour calculer $P_{su(k)}(x)$ il faut encore $k(su(k)-k)+pr(k)+1$ additions et $k(su(k)-k)+pr(k)$ multiplications.
Soit au total pour obtenir $P_{su(k)}$, il faut

$\frac{(su(k)+k)(su(k)+k+1)}{2} + k(su(k)-k) + 1 + pr(k)(su(k)-2k+pr(k)+2)$ additions, le même nombre moins 1 de multiplications et $su(k)-k+1$ divisions.

Par conséquent, pour calculer l'ensemble des polynômes orthogonaux réguliers jusqu'à $P_{su(k)}(x)$ la complexité reste en $O(su^2(k))$.

## 2. Le long de deux diagonales adjacentes.

### a) Cas où les fonctionnelles linéaires $c^{(n)}$ et $c^{(n+1)}$ sont définies.

On utilise successivement les deux relations

$$P_{k+1}^{(n)}(x) = x\, P_k^{(n+1)} - q_{k+1}^{(n)}\, P_k^{(n)}(x)$$

$$P_{k+1}^{(n+1)}(x) = P_{k+1}^{(n)}(x) - e_{k+1}^{(n)}\, P_k^{(n+1)}(x).$$

Pour déterminer $q_{k+1}^{(n)}$ et $e_{k+1}^{(n)}$ on utilise encore l'orthogonalité des polynômes. Pour la première relation on a :

$$c^{(n)}(x^j\, P_{k+1}^{(n)}) = 0 \qquad \text{pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k$$

$$c^{(n)}(x^j\, P_k^{(n)}) = 0 \qquad \text{pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k-1$$

$$c^{(n)}(x^j x\, P_k^{(n+1)}) = c^{(n+1)}(x^j\, P_k^{(n+1)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k-1.$$

Par conséquent

$$q_{k+1}^{(n)} = \frac{c^{(n+1)}(x^k\, P_k^{(n+1)})}{c^{(n)}\,(x^k\, P_k^{(n)})}$$

Pour la seconde relation on a :

$$c^{(n+1)}(x^j\, P_{k+1}^{(n+1)}) = 0 \qquad \text{pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k$$

$$c^{(n+1)}(x^j\, P_k^{(n+1)}) = 0 \qquad \text{pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k-1$$

$$c^{(n+1)}(x^j\, P_{k+1}^{(n)}) = c^{(n)}(x^{j+1}\, P_{k+1}^{(n)}) \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k-1.$$

Par conséquent :

$$e_{k+1}^{(n)} = \frac{c^{(n)}\ (x^{k+1}\ P_{k+1}^{(n)})}{c^{(n+1)}\ (x^k\ P_k^{(n+1)})}$$

<u>Complexité de l'algorithme.</u>

Pour déterminer $q_{k+1}^{(n)}$, $c^{(n)}(x^k\ P_k^{(n)})$ a déjà été calculé au cours de l'étape précédente. Seul reste à calculer $c^{(n+1)}\ (x^k\ P_k^{(n+1)})$.
Il faut donc k additions, k multiplications et 1 division.

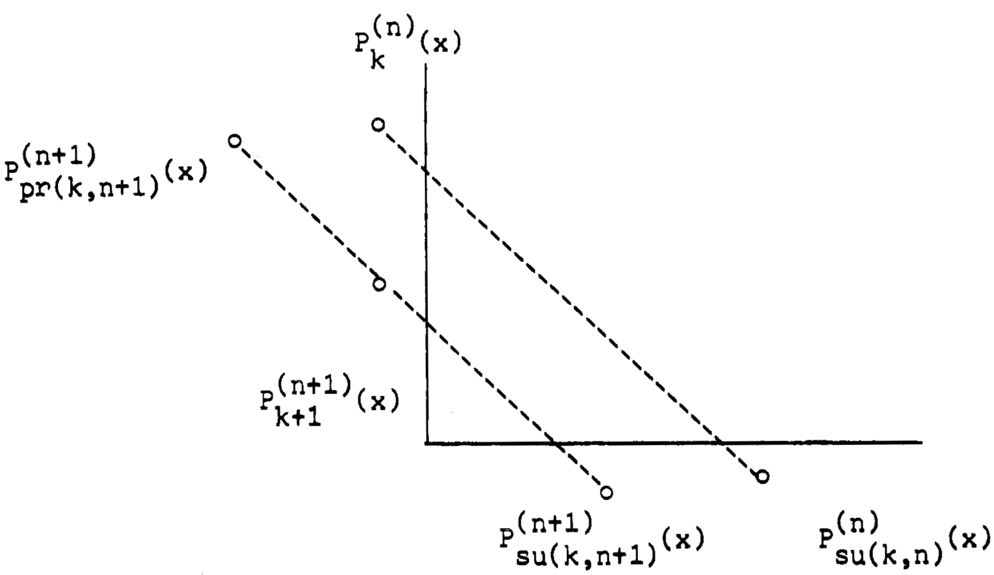
Pour déterminer $e_{k+1}^{(n)}$, $c^{(n+1)}(x^k\ P_k^{(n+1)})$ vient d'être calculé. On doit encore trouver $c^{(n)}(x^{k+1}\ P_{k+1}^{(n)})$. Il faut donc k+1 additions, k+1 multiplications, et 1 division.

Pour calculer les deux polynômes $P_{k+1}^{(n)}$ et $P_{k+1}^{(n+1)}$ il faut donc 4k+2 additions, 4k+1 multiplications et 2 divisions, soit pour calculer la suite des polynômes $P_i^{(n)}(x)$ et $P_i^{(n+1)}(x)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k+1$, $2(k+1)^2$ additions, $(k+1)(2k+1)$ multiplications et $2(k+1)$ divisions.

b) <u>Cas où au moins une fonctionnelle linéaire $c^{(x)}$ et $c^{(n+1)}$ n'est pas définie.</u>

i) <u>On aborde un bloc par l'ouest.</u>

$$c^{(n)}(x^k\ P_k) = o \text{ et } c^{(n+1)}(x^k\ P_k^{(n+1)}) = 0.$$




On connaît $P_k^{(n)}(x)$, $P_k^{(n+1)}(x)$ et $P_{pr(k,n+1)}^{(n+1)}(x)$.

On calcule $P^{(n+1)}_{su(k,n+1)}(x)$ par la relation :

$$P^{(n+1)}_{su(k,n+1)}(x) = \omega^{(n)}_{su(k,n+1)-k}(x)\ P^{(n)}_k(x) + E^{(n)}_{i+1}\ P^{(n+1)}_{pr(k,n+1)}(x).$$

On utilise l'orthogonalité :

$$c^{(n+1)}(x^j\ P^{(n+1)}_{su(k,n+1)}) = 0 \qquad \text{pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le su(k,n+1)-1$$

$$c^{(n+1)}(x^j\ P^{(n)}_k) = c^{(n)}\ (x^{j+1}\ P^{(n)}_k) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le su(k,n)-3$$

c'est à dire $0 \le j \le su(k,n+1)-2$ puisque $su(k,n) = su(k,n+1)+1$

$$c^{(n+1)}(x^j\ P^{(n+1)}_{pr(k,n+1)}) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k-2$$

On obtiendra donc les $su(k,n+1)-k+1$ inconnues qui sont les $su(k,n+1)-k$ coefficients de $\omega^{(n)}_{su(k,n+1)-k}(x)$ et $E^{(n)}_{i+1}$, avec les $su(k,n+1)-k+1$ relations du système triangulaire régulier suivant.

$$c[x^j(\omega^{(n)}_{su(k,n+1)-k}(x)\ P^{(n)}_k(x) + E^{(n)}_{i+1}\ P^{(n+1)}_{pr(k,n+1)}(x))] = 0$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $k-1 \le j \le su(k,n+1)-1$.

La complexité de ce calcul est analogue à celle obtenue le long d'une diagonale dans le cas non défini.

Ensuite on calcule $P^{(n)}_{su(k,n)}(x)$ par la relation :

$$P^{(n)}_{su(k,n)}(x) = x\ P^{(n+1)}_{su(k,n+1)} - q^{(n)}_{su(k,n),\ell}\ P^{(n)}_k(x)$$

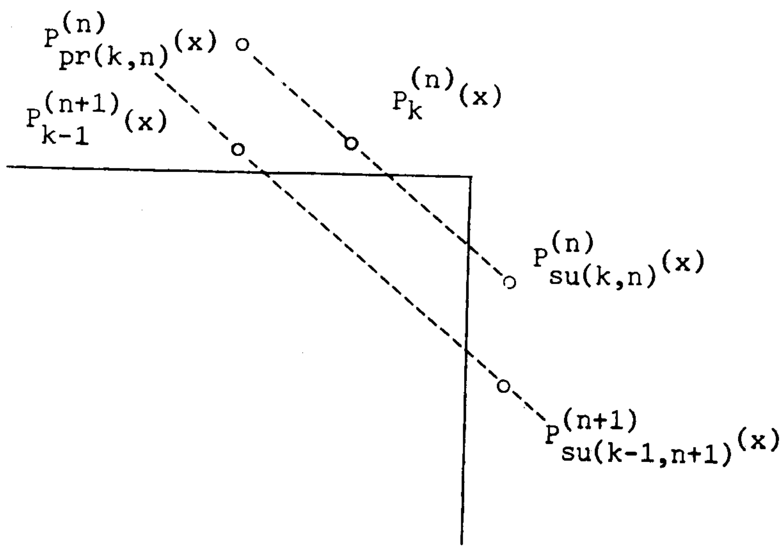
On utilise alors l'algorithme du cas normal, c'est à dire qu'on calcule :

$$q^{(n)}_{su(k,n),\ell} = \frac{c^{(n+1)}(su^{(k,n+1)}\; P^{(n+1)}_{su(k,n+1)}(x))}{c^{(n)}\;(x^{su(k,n)-1}\; P^{(n)}_{k}(x))}$$

puisque $su(k,n+1) = su(k,n)-1$.

Et ainsi de suite.

ii) On aborde un bloc par le nord.




On a $c^{(n+1)}(x^{k-1}\; P^{(n+1)}_{k-1}) = 0$ et $c^{(n)}\;(x^{k}\; P^{(n)}_{k}) = 0$.

On calcule $P^{(n)}_{su(k,n)}(x)$ à l'aide de la relation de récurrence à trois termes le long de la diagonale n.

Ensuite on calcule $P^{(n+1)}_{su(k-1,n+1)}(x)$ par la relation

$$P^{(n+1)}_{su(k-1,n+1)}(x) = P^{(n)}_{su(k,n)}(x) + E^{(n)}_{su(k-1,n+1)+1}\; P^{(n+1)}_{k-1}(x).$$

On utilise encore l'algorithme du cas régulier, c'est à dire :

$$E^{(n)}_{su(k-1,n+1)+1} = - \frac{c^{(n)}(x^{su(k,n)}\ P^{(n)}_{su(k,n)}(x))}{c^{(n+1)}(x^{su(k-1,n+1)-1}\ P^{(n+1)}_{k-1}(x))}$$

puisque $su(k-1,n+1) = su(k,n)$.

Et ainsi de suite.

## 3. Calcul de $Q(x)$.

L'obtention des polynômes associés est immédiate. On utilise soit la relation de récurrence à trois termes le long d'une diagonale, soit les deux relations de la propriété 2.6. L'ensemble des coefficients de ces relations est alors connu.

## 4. Algorithmes suivant les antidiagonales.

En ce qui concerne les algorithmes suivant les antidiagonales, ils sont totalement analogues à ceux qui sont présentés pour les diagonales, à la condition d'utiliser les polynômes $W(x)$ et la fonctionnelle linéaire $\gamma$.

**Remarque 4.13.**

On se rappellera que :

i) Lorqu'un polynôme P est au nord d'un bloc P, il ne lui correspond pas de polynôme W. On obtient ce polynôme P en multipliant le polynôme placé à l'ouest sur la même antidiagonale par une puissance convenable de x.

ii) Lorsqu'un polynôme W est au nord d'un bloc W il ne lui correspond aucun polynôme P.

5. Algorithmes suivant une horizontale h.

Nous utilisons la relation de récurrence

$$P_{i+s}^{(n-s)}(x) = (x\ \pi_{s-1}^{(n-s)}(x) + \beta_{i+s}^{(n-s)})\ P_i^{(n)}(x) + \Gamma_{i+s}^{(n-s)}\ x^b\ P_{i-p}^{(n+p)}(x)$$

avec $b = s-su(i,n)+pr(i,n+1)+1+p$.

Nous devons d'abord déterminer les valeurs de s, de su(i,n) et de pr(i,n+1), ce qui revient à détecter les blocs que traverse l'horizontale h.

Nous calculons $c^{(n)}(x^{i+j}\ P_i^{(n)}(x))$ pour $j \in \mathbb{N}$, tant que cette expression est nulle.

Nous aurons donc $c^{(n)}(x^{i+j}\ P_i^{(n)}(x)) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq k_1-1$,

$$c^{(n)}(x^{i+k_1}\ P_i^{(n)}(x)) \neq 0.$$

Nous en déduisons que $su(i,n) = i + k_1 + 1$.

Nous calculons également $c^{(n-j)}(P_i^{(n)}(x))$ pour $j \in \mathbb{N}$, tant que cette expression est nulle.

Nous aurons

$c^{(n-j)}(P_i^{(n)}(x)) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq k_2-1$,

$c^{(n-k_2)}(P_i^{(n)}(x)) \neq 0.$

Nous vérifions de cette façon si le polynôme $P_i^{(n-j)}(x) = P_i^{(n)}(x)$ est orthogonal et se trouve par conséquent à l'ouest du bloc P.

La valeur de $k_2$ nous permet le calcul de

$s = k_1 + k_2$ et de $pr(i+s,n-s+1) = i+s-k_2$.

La valeur de $pr(i,n+1)$ est connue grâce à l'étape précédente.

Nous savons d'après la propriété 4.23 que :

$$\tau^{(h)}(\frac{1}{x^\ell}\,\phi_i^{(h)}(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ h-m-i-s+2 \le \ell \le h-m,$$
$$\ne 0 \text{ pour } \ell = h+1-m \text{ et } \ell = h-m-i-s+1.$$

Or ici $m = h-i-k_2+2$.

Donc :

$$\tau^{(h)}(\frac{1}{x^\ell}\,\phi_i^{(h)}(x)) = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z},\ k_2-s \le \ell \le i+k_2-2,$$
$$\ne 0 \text{ pour } \ell = k_2-s-1 \text{ et } \ell = i+k_2-1.$$

Nous remarquons que $i+k_2-2 \le i+s-1$.

Nous poserons :

$$x\,\pi_{s-1}^{(n-s)}(x) + \beta_{i+s}^{(n-s)} = \sum_{\alpha=0}^{s} \mu_\alpha\, x^\alpha$$

avec $\mu_s = 1$ et $\mu_0 = \beta_{i+s}^{(n-s)}$.

On multiplie les deux membres de la relation de récurrence par $\frac{1}{x^j}$ et on applique $\tau^{(h)}$. Nous avons donc :

$$\tau^{(h)}(\frac{1}{x^j} P_{i+s}^{(n-s)}(x)) = \sum_{\alpha=0}^{s} \mu_\alpha \tau^{(h)}(\frac{1}{x^{j-\alpha}} P_i^{(n)}(x))$$
$$+ \Gamma_{i+s}^{(n-s)} \tau^{(h)}(\frac{1}{x^{j-b}} P_{i-p}^{(n+p)}(x))$$

On prend d'abord $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq k_2-1$.

Alors $\tau^{(h)}(\frac{1}{x^j} P_{i+s}^{(n-s)}) = 0$ et nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\sum_{\alpha=s+j-k_2+1}^{s} \mu_\alpha \tau^{(h)}(\frac{1}{x^{j-\alpha}} P_i^{(n)}(x)) = - \Gamma_{i+s}^{(n-s)} \tau^{(h)}(\frac{1}{x^{j-b}} P_{i-p}^{(n+p)}(x))$$

La relation pour $j = k_2-1$ donne directement la valeur de $\Gamma_{i+s}^{(n-s)}$ puisque $\mu_s = 1$ ; les $k_2-1$ relations suivantes forment un système linéaire triangulaire régulier avec les inconnues $\mu_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $s+1-k_2 \leq \alpha \leq s-1$.

On prend ensuite $j \in \mathbb{N}$, $i+k_2-1 \leq j \leq i+s-1$.

Nous avons toujours $\tau^{(h)}(\frac{1}{x^j} P_{i+s}^{(n-s)}(x)) = 0$

Nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\sum_{\alpha=0}^{j-i-k_2+1} \mu_\alpha \tau^{(h)}(\frac{1}{x^{j-\alpha}} P_i^{(n)}(x)) = - \Gamma_{i+s}^{(n-s)} \tau^{(h)}(\frac{1}{x^{j-b}} P_{i-p}^{(n+p)}(x))$$

C'est encore un système linéaire triangulaire régulier. La relation pour $j = k_2+i-1$ donne directement $\mu_0$, c'est-à-dire $\beta_{i+s}^{(n-s)}$. Les $s-k_2$ suivantes donnent $\mu_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $1 \leq \alpha \leq s-k_2$.

Tous les éléments de la relation de récurrence sont maintenant parfaitement déterminés.

Si $s > 1$ avec $k_2 = 1$, $P_i^{(n)}$ est au nord-ouest du bloc P.

Nous obtiendrons tous les polynômes au nord du bloc P avec $x\, P_i^{(n)}(x),\ x^2\, P_i^{(n)}(x), \ldots,\ x^{s-1}\, P_i^{(n)}(x)$.

## 6. Algorithme suivant une verticale.

Nous utilisons la relation de récurrence :

$$x^s\, P_i^{(n+s)}(x) = (x\, \hat{\pi}_{s-1}^{(n+s)}(x) + \hat{\beta}_i^{(n+s)})\, P_i^{(n)}(x) + \hat{\Gamma}_i^{(n+s)}\, x^b\, P_i^{(n-p)}(x)$$

avec $b = s+pr(i+1,n-1)-su(i,n)$.

Le bloc séparant $P_i^{(n)}$ et $P_i^{(n+s)}$ est détecté comme il a été indiqué dans la section 4.8, dont nous conservons les notations.

Nous poserons encore :

$$x\, \hat{\pi}_{s-1}^{(n+s)}(x) + \hat{\beta}_i^{(n+s)} = \sum_{\alpha=0}^{s} \mu_\alpha\, x^\alpha.$$

Nous multiplions les deux membres de la relation de récurrence par $x^j$ et nous appliquons $c^{(n)}$.

Nous obtenons :

$$c^{(n)}(x^{j+s}\, P_i^{(n+s)}(x)) = \sum_{\alpha=0}^{s} \mu_\alpha\, c^{(n)}(x^{j+\alpha}\, P_i^{(n)}(x)) +$$
$$\hat{\Gamma}_i^{(n+s)}\, c^{(n)}(x^{b+\alpha}\, P_i^{(n-p)}(x)) = c^{(n+s)}(x^j\, P_i^{(n+s)}(x)).$$

Or $c^{(n+s)}(x^j\, P_i^{(n+s)}(x)) = 0$ pour $j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le i-1$.

D'autre part $c^{(n)}(x^{j+\alpha}\, P_i^{(n)}(x)) = 0$ pour $j+\alpha \in \mathbb{N},\ 0 \le j+\alpha \le i+k_1-1$,

$$c^{(n)}(x^{i+k_1}\, P_i^{(n)}(x)) \neq 0.$$

Par conséquent pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq i+k_1-s-1$, les relations obtenues sont identiquement nulles.

Puisque $s = k_1 + k_2 + 1$ et $i \geq k_2$ nous avons $i + k_1 + 1 \geq s$.

L'égalité n'a lieu que si $i = k_2$.

a) Si $i + k_1 + 1 > s$

Pour $j \in \mathbb{N}$, $i + k_1 - s \leq j \leq i-1$ nous obtenons :

$$0 = \sum_{\alpha=i+k_1-j}^{s} \mu_\alpha \; c^{(n)}(x^{j+\alpha} P_i^{(n)}(x)) + \hat{\Gamma}_i^{(n+s)} \; c^{(n)}(x^{b+j} P_i^{(n-p)}).$$

La première relation pour $j = i + k_1 - s$ donne $\hat{\Gamma}_i^{(n+s)}$. Les $s - k_1 - 1$ suivantes forment un système linéaire triangulaire régulier qui permet d'obtenir $\mu_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $k_1 + 1 \leq \alpha \leq s-1$ en fonction de $\hat{\Gamma}_i^{(n+s)}$.

La propriété 4.38 permet d'obtenir les relations donnant $\mu_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha \leq k_1$, en fonction de $\hat{\Gamma}_i^{(n+s)}$.

En effet il suffit d'écrire que les coefficients des termes d'exposant $x^{k_2}, \ldots, x^{s-1}$ du membre de droite sont nuls.

Posons $P_i^{(n)}(x) = \sum_{\ell=k_2}^{i} \lambda_{\ell,i}^{(n)} x^\ell$ avec $\lambda_{k_2,i}^{(n)} \neq 0$,

et $x^b P_i^{(n-p)}(x) = \sum_{\ell=k_2}^{i+b} \lambda_{\ell,i}^{(n-p)} x^\ell$.

Nous avons donc :

$$x^s P_i^{(n+s)}(x) = (\sum_{\alpha=0}^{s} \mu_\alpha x^\alpha)(\sum_{\ell=k_2}^{i} \lambda_{\ell,i}^{(n)} x^\ell) + \hat{\Gamma}_i^{(n+s)} \sum_{\ell=k_2}^{i+b} \lambda_{\ell,i}^{(n-p)} x^\ell.$$

On voit donc qu'en prenant les coefficients des termes d'exposant $x^{k_2}, \ldots, x^{s-1}$ on obtient un système linéaire triangulaire régulier puisque la diagonale est composée de $\lambda^{(n)}_{k_2,i}$ ; ce système donne $\mu_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha \leq s - k_2 - 1 = k_1$ en fonction de $\hat{\Gamma}^{(n+s)}_i$.

b) <u>Si $i + k_1 + 1 = s$,</u>

nous savons que dans ce cas $\hat{\Gamma}^{(n+s)}_i$ peut être choisi de façon arbitraire. Ensuite les calculs se déroulent comme dans le a), à ceci près que le premier système linéaire est pris pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq i-1$. Nous avons encore un système triangulaire régulier donnant $\mu_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $k_1+1 \leq \alpha \leq s-1$ en fonction de $\hat{\Gamma}^{(n+s)}_i$.

Enfin le second système est un système diagonal régulier donnant $\mu_\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha \leq k_1$, toujours en fonction de $\hat{\Gamma}^{(n+s)}_i$.

Tous les éléments de la relation de récurrence sont alors parfaitement connus.

# 5

## QUADRATURES DE GAUSS

- * -

*Ce cinquième chapitre est d'une grande importance. Outre les résultats immédiatement applicables aux quadratures il permettra de résoudre certains problèmes des approximants des séries de fonctions.*

*Dans le cas d'une fonctionnelle définie positive, les propriétés des formules de quadratures de Gauss sont bien connues. Leur grand intérêt réside dans le fait qu'elles sont stables et convergentes. Etendre ces deux propriétés à d'autres fonctionnelles n'est pas chose aisée. Nous donnons des résultats pour les trois premiers types de fonctionnelles que nous avons étudiés dans le chapitre 3.*

*La première section expose les généralités du problème de quadrature de Gauss pour une fonctionnelle linéaire c quelconque. Nous donnons d'abord les formules classiques dans le cas où les racines du polynôme orthogonal peuvent être multiples, imaginaires conjuguées. Puis nous démontrons un résultat concernant le degré de précision de ces formules en présence d'un bloc et nous rappelons l'expression classique de l'erreur de quadrature.*

*Lorsque le polynôme orthogonal est dans un bloc les coefficients de quadrature s'expriment en fonction de ceux obtenus pour le polynôme orthogonal régulier prédécesseur.*

*Le formalisme matriciel de la section 1.7 trouve son prolongement dans les résultats obtenus par J. Kautsky* [32a]. *Ils donnent une expression des coefficients de quadrature en fonction des vecteurs principaux. Nous présentons un résumé de ces résultats.*

*La seconde section traite le cas d'une fonctionnelle linéaire* c *semi-définie positive. Nous montrons que les formules de quadratures correspondantes sont stables et convergentes. Elles sont également stables et convergentes pour toute fonctionnelle* $c^{(j)}$, *pour* $j \in \mathbb{N}$.

*La troisième section contient les résultats qui concernent le cas plus complexe d'une fonctionnelle lacunaire d'ordre* (s+1). *Après avoir donné les diverses relations existant entre les coefficients des formules de quadrature par rapport aux deux fonctionnelles* u *et* c, *où* $c_{i(s+1)} = u_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, *nous démontrons un théorème de stabilité et de convergence.*

*Nous terminons cette section par un théorème qui sera exploité dans le dernier chapitre sur les approximants des séries de fonctions. Il montre que pour les fonctionnelles lacunaires d'ordre 2 une relation de symétrie ou d'égalité lie les coefficients de quadrature correspondants à deux zéros symétriques du polynôme orthogonal, et dans le cas d'une racine nulle multiple les coefficients sont nuls de deux en deux.*

*La dernière section étudie un cas particulier de la précédente. La fonction de poids utilisée est de la forme* $x\,\omega(x)$, *où* $\omega(x)$ *est paire et positive dans* $[-1, 1]$. *Les formules de quadratures obtenues sont stables et convergentes. Dans ce cas l'erreur de quadrature se simplifie notablement.*

# 5.1 GENERALITES

Nous considérons une fonctionnelle linéaire c définie sur un espace général de fonctions qui contient l'espace des polynômes et dont les moments $c_i$ appartiennent à $\mathbb{R}$. f étant une fonction de cet espace, nous désirons obtenir une valeur approchée de c(f).

Soient $\xi_i$, pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$, m points distincts intérieurs à un domaine D simplement connexe, où la fonction analytique f sera supposée régulière. Nous supposons que chaque point $\xi_i$ est pris avec l'ordre de multiplicité $n_i$ et que :

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

Appelons $L_n$ le polynôme d'interpolation de f en ces points, tel que :

$$L_n^{(k)}(\xi_i) = f^{(k)}(\xi_i) \qquad \begin{cases} \forall i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq m. \\ \forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n_i-1. \end{cases}$$

Nous écrirons $L_n$ sous une forme analogue à celle présentée dans le livre de A.O. Guelfond [24] p 36.

Nous posons : $\quad v_n(z) = \prod_{j=1}^{m} (z-\xi_j)^{n_j}.$

Alors : $\quad v_n^{(n_i)}(\xi_i) = (n_i)\,!\ \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} (\xi_i-\xi_j)^{n_j}.$

Nous posons également :

$$Y_i(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \left(\frac{z-\xi_i}{\xi_i-\xi_j}\right)^{n_j}$$

Alors :

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=o}^{n_i-1} f^{(k)}(\xi_i)\, L_{i,k}(z)$$

avec :

$$L_{i,k}(z) = \frac{v_n(z)}{v_n^{(n_i)}(\xi_i)} \; \frac{n_i!}{k!} \sum_{s=o}^{n_i-k-1} \frac{1}{s!} \; \frac{\left[\dfrac{1}{Y_i(z)}\right]^{(s)}_{z=\xi_i}}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}$$

Nous pouvons approcher $c(f)$ par $c(L_n)$.

$$c(L_n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=o}^{n_i-1} f^{(k)}(\xi_i) \quad A^{(n)}_{i,k}$$

Avec

$$A^{(n)}_{i,k} = c(L_{i,k}(z)) = \sum_{s=o}^{n_i-k-1} \frac{n_i!}{k!s!} \; \frac{\left[\dfrac{1}{Y_i(z)}\right]^{(s)}_{z=\xi_i}}{v_n^{(n_i)}(\xi_i)} \; c\left(\frac{v_n(z)}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}\right)$$

$$= \sum_{s=o}^{n_i-k-1} \frac{n_i!}{k!s!} \; \frac{\left[\dfrac{1}{Y_i(z)}\right]^{(s)}_{z=\xi_i}}{v_n^{(n_i)}(\xi_i)} \; c\left(\frac{v_n(z) - v_n(\xi_i)}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}\right)$$

***Définition 5.1.***

*La relation donnant* $c(L_n)$ *sera appelée formule de quadrature.*

*Théorème 5.1.*

*Si* $f$ *est un polynôme de degré* $n-1$ *au plus alors* $c(L_n) = c(f)$.

Démonstration.

On a dans ce cas $f \equiv L_n$

cqfd.

*Théorème 5.2.*

*Soit* $P_n$ *le polynôme orthogonal régulier ou singulier, ou quasi-orthogonal par rapport à* $c$, *dont les racines sont* $\xi_i$, *pour* $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le m$, *d'ordre de multiplicité* $n_i$.

*i)* *Si* $P_n$ *et* $P_{n+1}$ *sont orthogonaux réguliers et si* $f$ *est un polynôme de degré* $2n-1$ *au plus, alors*

$$c(L_n) = c(f).$$

*ii)* *Soient* $P_{h+1}$ *et* $P_{p+1}$ *deux polynômes orthogonaux réguliers par rapport à* $c$ *tels que* $H_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $h+2 \le i \le p$.

*On suppose que* $h+1 \le n \le p$.

*Si* $f$ *est un polynôme de degré* $p+h$ *au plus, alors :*

$$c(L_n) = c(f).$$

Démonstration.

i) On prend un polynôme arbitraire $P$ de degré $2n-1$ au plus, qu'on divise par $P_n$. On obtient.

$$P(z) = P_n(z)\, Q(z) + R(z).$$

avec deg $R(z) \le n-1$ et deg $Q(z) \le n-1$.

Donc $c(P(z)) = c(Q\,P_n) + c(R) = c(R)$

à cause de l'orthogonalité de $P_n$.

D'autre part :

$$P^{(k)}(\xi_i) = [P_n(z)\,Q(z)]^{(k)}_{z=\xi_i} + R^{(k)}(\xi_i)$$

$$= R^{(k)}(\xi_i) \quad \begin{cases} \text{pour } i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le m, \\ \text{pour } k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n_i-1. \end{cases}$$

On peut interpoler R aux points $\xi_i$. On a :

$$R(z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=o}^{n_i-1} R^{(k)}(\xi_i)\, L_{i,k}(z),$$

et par conséquent :

$$c(P(z)) = c(R(z)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=o}^{n_i-1} R^{(k)}(\xi_i)\, A^{(n)}_{i,k}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=o}^{n_i-1} P^{(k)}(\xi_i)\, A^{(n)}_{i,k}$$

ce qui est bien le résultat cherché.

ii) On prend un polynôme arbitraire P de degré p+h au plus.

On met encore P sous la forme

$$P(x) = Q(x).\ P_n(x) + R(x).$$

avec deg $Q(x) \le p+h-n$ et deg $R(x) \le n-1$.

Donc $c(P) = c(Q\ P_n) + c(R) = c(R)$ d'après la propriété 1.17 i).

La suite de la démonstration est la même que pour le i).

<u>cqfd</u>.

<u>Remarque 5.1.</u>

Dans le cas i), la formule de quadrature n'est pas exacte pour un polynôme de degré 2n et dans le cas ii) elle n'est pas exacte pour un polynôme de degré p+h+1, car $c(Q\ P_n) \neq 0$ d'après la propriété 1.17 ii).

----------

Nous allons donner maintenant une expression de l'erreur de quadrature. Nous supposons les polynômes $P_i$ unitaires.

n est supposé tel que $h+1 \le n \le p$.

On remarquera que si $P_{h+2}$ est orthogonal régulier le raisonnement fait ci-après reste valable.

Les n racines $\xi_j$ de $P_n$, d'ordre de multiplicité $n_j$, pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le m$, seront également notées $z_j$, pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le n$, en répétant l'écriture des racines multiples.

Donc si on pose : $\begin{cases} i_0 = 0 \\ i_j = \sum\limits_{s=1}^{j-1} n_s, \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 2 \le j \le m+1, \end{cases}$

alors $\xi_j = z_{i_j+k}$ pour $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le m$ et
pour $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n_j$.

Nous prenons le polynôme $P_{p+h+1-n}$ dont nous notons les racines par $z_{n+1},\dots, z_{p+h+1}$. Dans cette liste on retrouvera l'ensemble des racines de $P_{h+1}$ puisque $P_{p+h+1-n}(x) = w_{p-n}(x)\, P_{h+1}(x)$, où $w_{p-n}(x)$ est un polynôme arbitraire de degré p-n.

Nous supposerons que la $(p+h+1)^{\text{ième}}$ dérivée de f(x) existe et est bornée dans le domaine fermé $\bar{D}$ qui est le plus petit domaine convexe contenant les points x, $z_i$, pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le p+h+1$.

Soient P le polynôme d'interpolation d'Hermite de f basé sur les points $z_i$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le p+h+1$, et R le reste de la formule d'interpolation.

On a :

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

avec $R(x) = P_n(x)\, P_{p+h+1-n}(x)\, [x, z_1,\dots, z_{p+h+1}]$

où $[x, z_1,\dots, z_{p+h+1}]$ est la différence divisée généralisée d'ordre p+h+1 de f basée sur les points x, $z_i$, pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le p+h+1$.

$$[x, z_1,\dots, z_{p+h+1}] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{p+h}} f^{(p+h+1)} [z_1 + (z_2-z_1)\, t_1 + \dots$$

$$\dots + (z_{p+h+1}-z_{p+h})\, t_{p+h} + (x - z_{p+h+1})\, t_{p+h+1}]\, dt_{p+h+1} \dots dt_1.$$

Alors $c(f) = c(P) + c(R)$.

$$\text{Or } c(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=o}^{n_i-1} A_{i,k}^{(n)}\, P^{(k)}(\xi_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=o}^{n_i-1} A_{i,k}^{(n)}\, f^{(k)}(\xi_i) = c(L_n).$$

d'après le théorème 5.2 puisque P est un polynôme de degré p+h.

On obtient donc l'expression de l'erreur :

$$c(R) = c(P_n(x)\, P_{p+h+1-n}(x)\, [x, z_1, \ldots, z_{p+h+1}]).$$

----------

Nous considérons maintenant une formule de quadrature de Gauss associée au polynôme $P_n$ qui est soit orthogonal singulier, soit quasi-orthogonal.

On suppose que $P_{pr(n)}(z) = P_{h+1}(z)$ et

$$P_n(z) = w_{n-h-1}(z)\, P_{h+1}(z).$$

Les racines de $w_{n-h-1}$ étant arbitraires peuvent être également racines de $P_{h+1}$. Nous adopterons la notation suivante :

$n_i = \bar{n}_i + \hat{n}_i$ où $\hat{n}_i$ est l'ordre de multiplicité de la racine $\xi_i$ dans le polynôme $P_{h+1}$ et $\bar{n}_i$ celui dans le polynôme $w_{n-h-1}$. L'indice k sera numéroté de 0 à $\hat{n}_i - 1$ et les coefficients de quadrature associés correspondront aux racines provenant de $P_{h+1}$. Puis k sera numéroté de $\hat{n}_i$ à $n_i - 1$ et les coefficients de quadrature correspondront aux racines de $w_{n-h-1}$.

Nous avons alors le théorème suivant.

<u>*Théorème 5.3.*</u>

*i)* $A_{i,k}^{(n)} = 0$ *pour* $k \in \mathbb{N}$, $\hat{n}_i \le k \le n_i - 1$,

*ii)* $A_{i,k}^{(n)} = A_{i,k}^{(h+1)}$ *pour* $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le \hat{n}_i - 1$,

et $A_{i,\hat{n}_i-1}^{(h+1)} \neq 0$.

Démonstration.

i) Regardons ce que vaut la quantité suivante :

$$X = \frac{1}{P_n^{(n_i)}(\xi_i)} \; c\left(\frac{P_n(z)-P_n(\xi_i)}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}\right) \quad \text{pour } k \in \mathbb{N},\ \hat{n}_i \le k \le n_i-1.$$

$P_n^{(n_i)}(\xi_i) \neq 0$ puisque $\xi_i$ est racine d'ordre de multiplicité $n_i$ de $P_n$.

$$c\left(\frac{P_n(z)-P_n(\xi_i)}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}\right) = c\left(P_n(z)\ \frac{w_{n-h-1}(z)-w_{n-h-1}(\xi_i)}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}\right)$$

$$+ \; w_{n-h-1}(\xi_i)\ c\left(\frac{P_{h+1}(z)-P_{h+1}(\xi_i)}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}\right)$$

$\dfrac{w_{n-h-1}(z)-w_{n-h-1}(\xi_i)}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}$ est un polynôme en z de degré $n-n_i-h-1+k+s$.

Par conséquent la première expression du second membre est nulle à cause de l'orthogonalité de $P_{h+1}$.

La seconde est nulle, car $w_{n-h-1}(\xi_i)$ est nul. Donc $X = 0$.

ii) $$c(L_{h+1}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=o}^{\hat{n}_i-1} f^{(k)}(\xi_i)\ A_{i,k}^{(h+1)}$$

avec $h+1 = \sum_{i=1}^{m} \hat{n}_i$.

$$c(L_n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=o}^{n_i-1} f^{(k)}(\xi_i)\ A_{i,k}^{(n)}$$

D'après le théorème 5.2, $c(L_n) = c(L_{h+1})$, $\forall f$.

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=o}^{\hat{n}_i-1} f^{(k)}(\xi_i)\,(A_{i,k}^{(n)} - A_{i,k}^{(h+1)}) = 0$, $\forall f$,

puisque $A_{i,k}^{(n)} = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$, $\hat{n}_i \leq k \leq n_i-1$.

Par conséquent $A_{i,k}^{(n)} = A_{i,k}^{(h+1)}$.

Enfin pour $k = \hat{n}_i-1$, nous avons :

$$A_{i,\hat{n}_i-1}^{(h+1)} = \hat{n}_i \frac{1}{Y_i(\xi_i)\, P_{h+1}^{(\hat{n}_i)}(\xi_i)}\, c\left(\frac{P_{h+1}(z)}{x-\xi_i}\right)$$

$$= \frac{\hat{n}_i\, Q_{h+1}(\xi_i)}{Y_i(\xi_i)\, P_{h+1}^{(\hat{n}_i)}(\xi_i)}$$

$P_{h+1}^{(\hat{n}_i)}(\xi_i)$ est non nul ainsi que $Y_i(\xi_i)$.

Quant à $Q_{h+1}$, il n'a aucune racine commune avec $P_{h+1}$.

Donc $Q_{h+1}(\xi_i) \neq 0$.

<u>cqfd</u>.

Nous pouvons étendre aux formules de quadrature le formalisme matriciel de la section 1.7 grâce aux beaux résultats de J. Kautsky [32a].

Nous reprenons les notations de la section 1.7.

Nous avons $x\, y(x) = J_n\, y(x) + y_n\, e_n$.

Nous posons $M_n = J_n - \lambda\, I_n$

$$M_{n,i} = J_n - \xi_i\, I_n.$$

$y_n(x) = P_n(x)$ a pour racines $\xi_i$ d'ordre de multiplicité $n_i$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$.

Nous posons également $r_{i,k} = \frac{1}{k!} y^{(k)}(\xi_i)$.

J. Kautsky a montré que :

$$M_{n,i}\, r_{i,k} = r_{i,k-1} \text{ pour } k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n_i-1$$

$$M_{n,i}\, r_{i,o} = 0$$

et donc que $r_{i,k-1}$ est un vecteur principal d'ordre k de $J_n$ correspondant à la valeur propre $\xi_i$ d'ordre de multiplicité $n_i$.

Nous notons $z_{i,s}$ les vecteurs principaux à gauche d'ordre (s+1) de la matrice $J_n$ correspondants aux valeurs propres $\xi_i$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$ et $s \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq n_i-1$.

Si nous posons $q = c(y(x))$ alors nous avons le théorème suivant

<u>*Théorème* [32a]</u>.

*Si on considère les vecteurs principaux à gauche d'ordre supérieur à 1 tels que :*

$z_{i,s}^T\, r_{i,n_i-1} = 0$ *pour* $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq n_i-1$, *alors les coefficients*

*de quadrature satisfont.*

$$A_{i,k}^{(n)} = \frac{\mu_i}{(k-1)!}\, z_{i,n_i-k}^T\, q$$

où $\mu_i^{-1} = z_{i,o}^T\, r_{i,n_i-1}$.

Nous rappelons les résultats classiques suivants sur la stabilité et la convergence d'une méthode de quadrature (cf. [6]).

*Définition 5.2.*

*Une méthode de quadrature est dite stable, s'il existe* M *indépendant de* n *tel que :*

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=o}^{n_i-1} A_{i,k}^{(n)}\,\varepsilon_{i,k}\right| \le M \max_{i,k}|\varepsilon_{i,k}|$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, \varepsilon_{i,k}$ *pour* $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le m$ *et*
*pour* $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n_i-1$.

*Théorème 5.4.*

*Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une méthode de quadrature soit stable est qu'il existe* M *indépendant de* n *tel que :*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=o}^{n_i-1} |A_{i,k}^{(n)}| \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Définition 5.3.*

*Soit* V *un espace de Banach de fonctions sur lequel* c *est définie.*

*Une méthode de quadrature est dite convergente sur* V *si*

$$\lim_{n\to\infty} c(L_n) = c(f), \quad \forall f \in V.$$

*Théorème 5.5.*

*Une condition nécessaire et suffisante pour que :*

$\lim\limits_{n\to\infty} c(L_n) = c(f)$, $\forall f \in C_\infty[a, b]$, *espace des fonctions continues sur* $[a,b]$ *avec* $||f|| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, *est qu'il existe* M *indépendant de* n *tel que :*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=o}^{n_i-1} |A_{i,k}^{(n)}| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

----------

Nous examinons à présent quelques cas de fonctionnelles particulières.

## 5.2 CAS D'UNE FONCTIONNELLE LINEAIRE SEMI-DEFINIE POSITIVE

On suppose que $H_k^{(o)} > 0$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq h+1$,

et $H_k^{(o)} = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq h+2$.

Les polynômes $P_k^{(o)}$ ont leurs racines réelles distinctes pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq h+1$.

A l'intérieur du bloc H infini, on prend :

$$P_k^{(o)}(x) = w_{k-h-1}(x)\, P_{h+1}^{(o)}(x).$$

On choisit les racines de $w_{k-h-1}$ distinctes de celles de $P_{h+1}^{(o)}$.

<u>*Théorème 5.6.*</u>

*Si la fonctionnelle* c *est semi définie positive, les formules de quadrature de Gauss sont stables et convergentes sur* $C_\infty[a, b]$.

Démonstration.

Si on limite la fonctionnelle c aux 2h+1 premiers moments, elle est alors définie positive, et les $A_{i,k}^{(k)}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq k$ et $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq h+1$ sont strictement positifs.

Dans ce cas :

$$\sum_{i=1}^{k} |A_{i,k}^{(k)}| = \sum_{i=1}^{k} A_{i,k}^{(k)} = c_o, \quad \forall k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq h+1.$$

D'autre part, pour $k \in \mathbb{N}$, $h+2 \leq k$ on a :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=o}^{n_i-1} |A_{i,s}^{(k)}| = \sum_{i=1}^{h+1} |A_{i,k+1}^{(h+1)}| = c_o \text{ d'après le théorème 5.3.}$$

cqfd.

Nous considérons maintenant la fonctionnelle $c^{(2n+1)}$, la fonctionnelle linéaire c étant toujours semi-définie positive.

Les fonctionnelles $c^{(2i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ sont semi-définies positives.

D'après le théorème 3.3 les racines des polynômes orthogonaux réguliers $P_k^{(2n+1)}$ sont réelles distinctes non nulles.

Pour le bloc H infini, deux cas peuvent se présenter (cf. la propriété 3.3) :

i) $H_{h+1}^{(1)} = 0$, alors le bloc infini commence à la colonne (h+1).

$H_{h+1}^{(i)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$.

Pour $k \leq \mathbb{N}$, $k \geq h+1$,

$$P_k^{(2n+1)}(x) = w_{k-h}(x)\ P_h^{(2n+1)}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On choisit les racines de $w_{k-h}$ distinctes de celles de $P_k^{(2n+1)}$.

ii) $H_{i+1}^{(1)} \neq 0$, alors le bloc infini commence à la colonne h+2.

$H_{h+2}^{(i)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq h+2$,

$$P_k^{(2n+1)}(x) = w_{k-h-1}(x)\ P_{h+1}^{(2n+1)}(x), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On choisit encore les racines de $w_{k-h-1}$ distinctes de celles de $P_k^{(2n+1)}$.

<u>*Théorème 5.7.*</u>

*Si la fonctionnelle* c *est semi-définie positive, alors les formules de quadrature de Gauss associées à* $c^{(j)}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, *sont stables et convergentes sur* $C_\infty[a, b]$.

<u>Démonstration.</u>

i) <u>$j = 2n$</u>

La fonctionnelle $c^{(2n)}$ est semi-définie positive et le théorème 5.6 démontre le résultat.

ii) <u>$j = 2n+1$</u>

a) <u>$H_{h+1}^{(1)} \neq 0$.</u>

Pour $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq h+1$ nous posons :

$$M_k = \sum_{i=1}^{k} |A_{i,k}^{(k)}|$$

Pour $k \geq h+2$,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=o}^{n_i-1} |A_{i,s}^{(k)}| = \sum_{i=1}^{h+1} |A_{i,k+1}^{(h+1)}| = M_{h+1} \quad \text{(cf. théorème 5.3).}$$

Comme k est fini, on prend :

$$M = \sup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ 1 \leq i \leq h+1}} (M_i)$$

Alors $\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=o}^{n_i-1} \left|A_{i,s}^{(k)}\right| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq 1.$

ce qui démontre le résultat.

b) $H_{h+1}^{(1)} = 0$

Le raisonnement est identique avec $M = \sup\limits_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ 1 \leq i \leq h}} (M_i)$.

cqfd.

On a la conséquence immédiate du théorème 5.2.

*Corollaire 5.1.*

*Les formules de quadrature de Gauss associées à* $c^{(j)}$ *pour* $j \in \mathbb{N}$, *sont exactes pour tout polynôme de degré quelconque,*

*i)* *si elles sont basées sur* (h+1) *points au moins dans le cas où* $H_{h+1}^{(1)} \neq 0$.

*ii)* *si elles sont basées sur* h *points au moins pour* $i \geq 1$ *et* (h+1) *points au moins pour* $i = 0$, *dans le cas où* $H_{h+1}^{(1)} = 0$.

*Corollaire 5.2.*

*Dans les conditions du corollaire 5.1, les formules de quadrature de Gauss sont exactes sur* [-R, R] *pour toute fonction ayant une série entière de rayon de convergence* R.

## 5.3 CAS D'UNE FONCTIONNELLE C LINEAIRE LACUNAIRE D'ORDRE s+1

Nous supposons la fonctionnelle linéaire $u^{(n+1)}$ définie positive et les fonctionnelles $u^{(n+2)}$ et $u^{(n)}$ définies et nous considérons le bloc suivant relatif à la fonctionnelle c.

$P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}(x)$ $\qquad$ $P_{k(s+1)+s}^{(n(s+1)+1-s)}(x)$

$P_{k(s+1)}^{((n+1)(s+1))}(x)$

Nous avons alors :

$$P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1+i)}(x) = U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) \text{ pour } i \in \mathbb{N},\ 0 \le i \le s.$$

$$P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-i)}(x) = x^i\, U_k^{(n+1)}(x^{s+1}) \text{ pour } i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le s.$$

$$Q_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1+i)}(t) = t^i\, V_k^{(n+1)}(t^{s+1}) \text{ pour } i \in \mathbb{N},\ 0 \le i \le s.$$

$$Q_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-i)}(t) = V_k^{(n+1)}(t^{s+1}) + c_{n(s+1)}\, U_k^{(n+1)}(t^{s+1}) \text{ pour } i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le s.$$

Puisque la fonctionnelle linéaire $u^{(n+1)}$ est définie positive, $U_k^{(n+1)}$ a ses k racines $\xi_{1,n+1},\dots,\xi_{k,n+1}$ réelles distinctes. Elles sont non nulles puisque la fonctionnelle $u^{(n+2)}$ est définie.

Soient $\xi_{j,n+1}^{(\ell)}$ pour $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le k$ et $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \le \ell \le s$ les racines de $P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}$ telles que :

$$\xi_{j,n+1} = (\xi_{j,n+1}^{(\ell)})^{s+1}.$$

Soient $B_j^{(k,n+1)}$ pour $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le k$, les coefficients des formules de quadrature de Gauss associées au polynôme $U_k^{(n+1)}$.

Soient $A_{j,\ell}^{(k(s+1),n(s+1)+1+i)}$ pour $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le k$, $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \le \ell \le s$ et $i \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le s$, les coefficients des formules de quadrature de Gauss associées au polynôme $P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+i+1)}$.

Soient $A_{j,\ell}^{(k(s+1),n(s+1)+1-i)}$ pour $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le k$, $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \le \ell \le s$ et $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le s$, et pour $j = 0$ et $0 \le \ell \le i-1$, les coefficients des formules de quadrature de Gauss associées au polynôme $P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-i)}$.

L'indice $j = 0$ correspond à la racine 0 d'ordre de multiplicité i.

Nous allons donner dans ce cas particulier des relations entre les $A_{j,\ell}$ et les $B_j$, ainsi que l'expression de $A_{o,\ell}$.

<u>*Propriété 5.1.*</u>

$$A_{j,\ell}^{(k(s+1),n(s+1)+1+i)} = \frac{B_j^{(k,n+1)}}{(s+1)(\xi_{j,n+1}^{(\ell)})^{s-i}} \quad \begin{array}{l} \text{pour } j \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le k, \\ \text{pour } \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le s, \\ \text{pour } i \in \mathbb{N},\ 0 \le i \le s. \end{array}$$

$$A_{j,\ell}^{(k(s+1)+i,n(s+1)+1-i)} = \frac{B_j^{(k,n+1)}}{(s+1)(\xi_{j,n+1}^{(\ell)})^{s+i}} \quad \begin{array}{l} \text{pour } j \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le k, \\ \text{pour } \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le s, \\ \text{pour } i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le s. \end{array}$$

$$A_{o,\ell}^{(k(s+1)+i,n(s+1)+1-i)} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{pour } i \in \mathbb{N},\ 2 \le i \le s \\ \text{et } \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le i-2. \end{array}$$

$$A_{o,i-1}^{(k(s+1)+i,n(s+1)+1-i)} = \frac{V_k^{(n+1)}(o) + c_{n(s+1)}\ U_k^{(n+1)}(o)}{(i-1)!\ U_k^{(n+1)}(o)}$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le s$.

Démonstration.

$$B_j^{(k,n+1)} = \frac{V_k^{(n+1)}(\xi_{j,n+1})}{U_k'^{(n+1)}(\xi_{j,n+1})}$$

i) $$A_{j,\ell}^{(k(s+1),n(s+1)+1+i)} = \frac{Q_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1+i)}(\xi_{j,n+1}^{(\ell)})}{P'^{(n(s+1)+1+i)}_{k(s+1)}(\xi_{j,n+1}^{(\ell)})}$$

$$= \frac{(\xi_{j,n+1}^{(\ell)})^i\ V_k^{(n+1)}(\xi_{j,n+1})}{(s+1)(\xi_{j,n+1}^{(\ell)})^s\ U_k'^{(n+1)}(\xi_{j,n+1})} = \frac{B_j^{(k,n+1)}}{(s+1)(\xi_{j,n+1}^{(\ell)})^{s-i}}$$

ii) Pour $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le k$, nous avons :

$$A_{j,\ell}^{(k(s+1)+i,n(s+1)+1-i)} = \frac{Q_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-i)}(\xi_{j,n+1}^{(\ell)})}{P'^{(n(s+1)+1-i)}_{k(s+1)+i}(\xi_{j,n+1}^{(\ell)})}$$

$$= \frac{V_n^{(n+1)}(\xi_{j,n+1}) + c_{n(s+1)}\ U_k^{(n+1)}(\xi_{j,n+1})}{[x^i\ U_k^{(n+1)}(x^{s+1})]'_{x=\xi_{j,n+1}^{(\ell)}}} = \frac{V_k^{(n+1)}(\xi_{j,n+1})}{(s+1)(\xi_{j,n+1}^{(\ell)})^{s+i}\ U_k'^{(n+1)}(\xi_{j,n+1})}$$

$$= \frac{B_j^{(k,n+1)}}{(s+1)(\xi_{j,n+1}^{(\ell)})^{s+i}}$$

iii) La racine 0 étant d'ordre de multiplicité i, on a :

$$A_{o,\ell}^{(k(s+1)+i,n(s+1)+1-i)} =$$

$$\sum_{r=o}^{i-\ell-1} \frac{i!}{\ell!r!} \frac{\left[\frac{1}{Y_o(x)}\right]_{x=o}^{(r)}}{\left[P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-i}(x)\right]_{x=o}^{(i)}} \quad c^{(n(s+1)+1-i)}\left(\frac{P_{k(s+1)+i}^{(n(s+1)+1-i)}(x)}{x^{i-\ell-r}}\right)$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le s$ et $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \le \ell \le i-1$.

Nous avons : $0 \le i-\ell-1 \le i-1 \le s-1$

$$Y_o(x) = \frac{P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}(x)}{P_{k(s+1)}^{(n(s+1)+1)}(o)} = \frac{U_k^{(n+1)}(x^{s+1})}{U_k^{(n+1)}(o)}$$

$$\left[\frac{1}{U_k^{(n+1)}(x^{s+1})}\right]_{x=o}^{(r)} = 0 \text{ si } 1 \le r \le s-1.$$

En effet :

$$\left[\frac{1}{U_k^{(n+1)}(x^{s+1})}\right]' = -(s+1)\, x^s \frac{U_k'^{(n+1)}(x^{s+1})}{\left[U_k^{(n+1)}(x^{s+1})\right]^2} = x^s\, \phi(x)$$

et par conséquent toutes les dérivées d'ordre r avec $1 \le r \le s-1$ sont nulles à l'origine.

D'où : $$\left[\frac{1}{Y_o(x)}\right]^{(r)}_{x=o} = 0 \quad \text{pour } r \in \mathbb{N},\ 1 \le r \le s-1.$$

$$= 1 \quad \text{pour } r = 0.$$

D'autre part :

$$\left[P^{(n(s+1)+1-i)}_{k(s+1)+i}(x)\right]^{(i)}_{x=o} = i!\ U^{(n+1)}_k(o) \neq 0.$$

Enfin

$$c^{(n(s+1)+1-i)}\left(\frac{P^{(n(s+1)+1-i)}_{k(s+1)+i}(x)}{x^{i-\ell}}\right) = c^{(n(s+1)+1-i)}\ (x^{\ell}\ U^{(n+1)}_k(x^{s+1})).$$

Si $0 \le \ell \le i-2$, cette expression est nulle car $x^{\ell}\ U^{(n+1)}_k(x^{s+1})$ ne comprend que des puissances q de x telles que :

$$q-i+1 \not\equiv 0 \mod (s+1).$$

Donc $$A^{(k(s+1)+i,n(s+1)+1-i)}_{o,\ell} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N},\ 2 \le i \le s \text{ et pour } \ell \in \mathbb{N},\ 0 \le \ell \le i-2.$$

iv)

$$A^{(k(s+1)+i,n(s+1)+1-i)}_{o,i-1} = \frac{1}{(i-1)!\ U^{(n+1)}_k(o)}\ c^{(n(s+1)+1-i)}\left(\frac{P^{(n(s+1)+1-i)}_{k(s+1)+i}(x)}{x}\right)$$

$$= \frac{Q^{(n(s+1)+1-i)}_{k(s+1)+i}(o)}{(i-1)!\ U^{(n+1)}_k(o)} = \frac{V^{(n+1)}_k(o) + c_{n(s+1)}\ U^{(n+1)}_k(o)}{(i-1)!\ U^{(n+1)}_k(o)}$$

<u>cqfd</u>.

Corollaire 5.3.

$$A_{j,\ell}^{(k(s+1),n(s+1)+2+i)} = \xi_{j,n+1}^{(\ell)} A_{j,\ell}^{(k(s+1),n(s+1)+1+i)}$$

$$A_{j,\ell}^{(k(s+1)+i,n(s+1)+1-i)} = \xi_{j,n+1}^{(\ell)} A_{j,\ell}^{(k(s+1)+i+1,n(s+1)-i)}$$

*pour* $i \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le s-1$.

$$A_{o,i-1}^{(k(s+1)+i,n(s+1)+1-i)} = i. \quad A_{o,i}^{(k(s+1)+i+1,n(s+1)-i)}$$

*pour* $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le s-1$.

Théorème 5.8.

*Si les fonctionnelles linéaires* $u^{(n+1)}$ *et* $u^{(n+2)}$ *sont définies positives et si les formules de quadrature de Gauss associées à la fonctionnelle* $c^{(n(s+1)+2)}$ *sont stables et convergentes sur* $C_\infty[0, b]$, *alors les formules de quadrature de Gauss associées aux fonctionnelles linéaires* $c^{(n(s+1)+2+r)}$ *pour* $r \in \mathbb{N}$, $1 \le r \le s$ *sont stables et convergentes sur* $C_\infty[0, b]$.

Démonstration.

Pour obtenir des fonctionnelles c lacunaires les fonctionnelles u sont définies sur des intervalles finis [0, b]. (cf. Van Rossum. Lacunary orthogonal polynomials [49]).

Les racines $\xi_{j,n+1}$ et $\xi_{j,n+2}$ des polynômes orthogonaux $U_k^{(n+1)}$ et $U_k^{(n+2)}$ sont donc réelles distinctes non nulles et appartiennent à [0, b].

Il suffit de donner les relations pour les polynômes orthogonaux réguliers par rapport à $c^{(n(s+1)+2+r)}$, puisque pour les polynômes orthogonaux singuliers ou quasi-orthogonaux on a les mêmes relations que celles obtenues pour le polynôme orthogonal régulier prédécesseur (cf. le théorème 5.3).

Pour la fonctionnelle $c^{(n(s+1)+2)}$ nous avons par hypothèse :

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=o}^{s} \left| A_{j,\ell}^{(k(s+1),n(s+1)+2)} \right| \leq M_{n+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=o}^{s} \left| A_{j,\ell}^{(k(s+1)+s,n(s+1)+2)} \right| + \left| A_{o,s-1}^{(k(s+1)+s,n(s+1)+2)} \right| \leq M_{n+1},$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

Prenons la fonctionnelle $c^{(n(s+1)+2+r)}$ et utilisons le corollaire 5.3. On obtient :

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=o}^{s} \left| A_{j,\ell}^{(k(s+1),n(s+1)+2+r)} \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=o}^{s} \left( \left| \xi_{j,n+1}^{(\ell)} \right| \right)^{r} \left| A_{j,\ell}^{(k(s+1),n(s+1)+2)} \right|$$

$$\leq \mathrm{Sup}(b,\ 1).\ M_{n+1}$$

car $\left| \xi_{j,n+1}^{(\ell)} \right|^{r} = \left| \xi_{j,n+1} \right|^{\frac{r}{s+1}}$ avec $\frac{r}{s+1} < 1$ et $\left| \xi_{j,n+1} \right| \leq b$.

D'autre part, si $s-r-1 \geq 0$,

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=o}^{s} \left| A_{j,\ell}^{(k(s+1)+s-r,n(s+1)+2+r)} \right| + \left| A_{o,s-r-1}^{(k(s+1)+s-r,n(s+1)+2+r)} \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=o}^{s} \left| \xi_{j,n+2}^{(\ell)} \right|^{r} \left| A_{j,\ell}^{(k(s+1)+s,n(s+1)+2)} \right|$$

$$+ \left|A_{o,s-1}^{(k(s+1)+s,n(s+1)+2}\right| (s-1) \ldots (s-r).$$

$$\leq \mathrm{Sup}(b,(s-1) \ldots (s-r)).\ M_{n+1}.$$

Enfin pour r = s nous avons :

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=o}^{s} \left|A_{j,\ell}^{(k(s+1),(n+1)(s+1)+1)}\right|$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=o}^{s} \left|\xi_{j,n+2}^{(\ell)}\right|^{s} \left|A_{j,k}^{(k(s+1)+s,n(s+1)+2)}\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=o}^{s} \left|\xi_{j,n+2}^{(\ell)}\right|^{s} \left|A_{j,k}^{(k(s+1)+s,n(s+1)+2)}\right| + \left|A_{o,s-1}^{(k(s+1)+s,n(s+1)+2)}\right|$$

$$\leq \mathrm{Sup}(b,\ 1).\ M_{n+1}.$$

Nous aurons trois majorations par rapport à un nombre $M_{n+1}^{(r)}$ fixe en prenant $M_{n+1}^{(r)} = M_{n+1}.\ \mathrm{Sup}(b,\ (s-1) \ldots (s-r))$.

cqfd.

En ce qui concerne les coefficients des formules de quadrature nous pouvons encore démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.9.

*Soit* $P_n$ *le polynôme orthogonal par rapport à* c.

i) *Si* c *est lacunaire d'ordre 2, alors pour deux racines symétriques* $\xi_i$ *et* $\xi_{i+1}$ *nous avons :*

$$A_{i,k}^{(n)} = (-1)^k \, A_{i+1,k}^{(n)}.$$

*Si* $\xi_1 = 0$ *est racine, son ordre de multiplicité* $n_1$ *est impair et* $A_{1,k}^{(n)} = 0$ *pour* $k$ *impair.*

*ii)* *Si* $c$ *est telle que* $c_0 = 0$ *et la fonctionnelle* $e^{(o)} = c^{(1)}$ *soit lacunaire d'ordre 2, alors pour deux racines symétriques* $\xi_i$ *et* $\xi_{i+1}$ *nous avons*

$$A_{i,k}^{(n)} = (-1)^{k+1} \, A_{i+1,k}^{(n)}.$$

*Si* $\xi_1 = 0$ *est racine, son ordre de multiplicité* $n_1$ *est pair et*

$A_{1,k}^{(n)} = 0$ *pour* $k$ *pair.*

Démonstration.

i) Puisque $c$ est lacunaire d'ordre 2, alors les blocs de la table P sont de largeur $2(r+1)-1$ et leur angle Nord-ouest est occupé par un polynôme pair sur une diagonale impaire.

Donc si 0 est racine de $P_n$, son ordre de multiplicité est impair, puisque $P_n$ est sur une diagonale paire.

D'autre part toutes les racines non nulles de $P_n$ sont symétriques.

a) Si $\xi_i$ est une racine non nulle nous avons :

$$A_{i,k}^{(n)} = \sum_{s=o}^{n_i-k-1} \frac{n_i!}{k!\; s!} \; \frac{\left[\frac{1}{Y_i(z)}\right]_{z=\xi_i}^{(s)}}{P_n^{(n_i)}(\xi_i)} \; c\left(\frac{P_n(z) - P_n(\xi_i)}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}\right)$$

$$P_n^{(n_i)}(\xi_i) = (-1)^{n+n_i} \, P_n^{(n_i)}(\xi_{i+1})$$

Ensuite $\left[\dfrac{1}{Y_i(z)}\right]^{(s)}_{z=\xi_i} = \left[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \left(\dfrac{\xi_i-\xi_j}{z-\xi_j}\right)^{n_j}\right]^{(s)}_{z=\xi_i} = (-1)^s \left[\dfrac{1}{Y_i(z)}\right]^{(s)}_{z=\xi_{i+1}}$

En effet le dénominateur des éléments composants $\left[\dfrac{1}{Y_i(z)}\right]^{(s)}$ est de degré $n-n_i+s$.

Au dénominateur il y a s termes excédentaires qui ne se simplifient pas avec ceux du numérateur lorsqu'on fait $z = \xi_i$.

En raison de la symétrie de $P_n$, à un terme $\xi_i-\xi_j$ correspond un terme $\xi_i + \xi_j$, si $\xi_j \neq 0$. D'autre part nous avons des termes de la forme $\xi_i + \xi_i$ et enfin il y a des termes $\xi_i$ seuls lorsque nous avons la racine $\xi_1 = 0$.

Donc si au lieu de faire $z = \xi_i$, on fait $z = \xi_{i+1}$, tous ces termes sont changés de signe. Soit au total une variation en $(-1)^s$.

Enfin nous posons $P_n(z) = (z-\xi_i)^{n_i} (z+\xi_i)^{n_i} \hat{P}_{n-2n_i}(z)$.

Alors $c\left(\dfrac{P_n(z) - P_n(\xi_i)}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}\right) = c\left((z-\xi_i)^{k+s} (z+\xi_i)^{n_i} \hat{P}_{n-2n_i}(z)\right)$.

Si n est pair il ne reste que les termes pairs dans le développement de la parenthèse, puisque les autres sont annulés par application de la fonctionnelle c.

Tous les exposants de $\xi_i$ sont alors de la parité de $n_i+k+s$.

Si n est impair il ne reste que les termes impairs et tous les exposants de $\xi_i$ ont la parité de $n_i+k+s-1$.

Donc en définitive on peut dire qu'ils ont la parité de $n+n_i+k+s$.

Par conséquent

$$c\left(\frac{P_n(z) - P_n(\xi_i)}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}\right) = (-1)^{n+n_i-k-s}\ c\left(\frac{P_n(z) - P_n(\xi_{i+1})}{(z-\xi_{i+1})^{n_i-k-s}}\right)$$

D'où le résultat : $A_{i,k}^{(n)} = (-1)^k A_{i+1,k}^{(n)}$.

b) $Y_1(z)$ est un polynôme pair. Donc toutes les racines d'ordre s impair de $\frac{1}{Y_1(z)}$ sont nulles pour z = 0. Si on pose $P_n(z) = z^{n_1} \hat{P}_{n-n_1}(z)$ où $\hat{P}_{n-n_1}$ est un polynôme pair, nous avons :

$$c\left(\frac{P_n(z)}{z^{n_1-k-s}}\right) = c\left(z^{k+s}\ \hat{P}_{n-n_1}(z)\right) = 0 \text{ si } k+s \text{ est impair.}$$

Donc si k est impair, $A_{1,k}^{(n)} = 0$.

ii) On peut considérer que $\hat{c}^{(o)} = c^{(-1)}$ est lacunaire d'ordre 2 en fixant $c_{-1}$ de façon quelconque.

Dans ce cas $P_n$ n'est orthogonal régulier que si n est pair. Ses racines sont encore symétriques et si $\xi_1 = 0$ est racine son ordre de multiplicité $n_1$ est pair.

a) Si $\xi_1$ est une racine non nulle le raisonnement est similaire au i) a).

Nous trouvons dans ce cas que :

$$c\left(\frac{P_n(z) - P_n(\xi_i)}{(z-\xi_i)^{n_i-k-s}}\right) = (-1)^{n_i-k-s-1}\ c\left(\frac{P_n(z) - P_n(\xi_{i+1})}{(z-\xi_{i+1})^{n_i-k-s}}\right)$$

En effet dans le développement de $(z-\xi_i)^{k+s}\,(z+\xi_i)^{n_i}\,\hat{P}_{n-2n_i}(z)$ on ne garde que les termes impairs puisque $\hat{e}^{(o)}$ est lacunaire d'ordre 2.

Donc la parité des exposants des termes en $\xi_i$ est $n_i-k-s-1$.

Pour les autres termes de $A_{i,k}^{(n)}$ il n'y a aucun changement.

On obtient donc le résultat proposé

b) Dans ce cas $c(z^{k+s}\,\hat{P}_{n-n_1}(z)) = 0$ si $k+s$ est pair.

Donc si k est pair $A_{1,k}^{(n)} = 0$.

<u>cqfd</u>.

## 5.4 CAS D'UNE FONCTION DE POIDS DE LA FORME x ω(x)

Nous supposons que $\omega(x)$ est paire et positive, mais non identiquement nulle dans $[-1, +1]$ et telle que $\int_{-1}^{+1} \omega(x)\, dx$ existe.

Nous définissons les moments $c_i$ par :

$$c_i = \int_{-1}^{+1} x^i\, \omega(x)\, dx, \ \forall i \in \mathbb{N}$$

Les fonctionnelles $c^{(2s)}$ sont alors définies positives, $\forall s \in \mathbb{N}$.

D'autre part nous introduisons la fonctionnelle linéaire $u^{(s)}$ telle que

$$u^{(s)}(x^i) = u_{s+i} = \int_0^1 x^{i+s}\, \frac{\omega(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$$

Cette intégrale existe et la fonctionnelle $u^{(s)}$ est définie positive, $\forall s \in \mathbb{N}$.

*Propriété 5.2.*

$c_{2i} = u_i$ *et* $c_{2i+1} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

$c_{2i+1} = 0$, car on intègre une fonction impaire sur un intervalle symétrique.

Si nous posons $x = t^2$, nous avons :

$$u_i = \int_0^1 t^{2i} \frac{\omega(t)}{t} 2t \, dt = \int_{-1}^{+1} t^{2i} \omega(t) \, dt$$

puisque la fonction à intégrer est paire.

cqfd.

La fonctionnelle c est donc lacunaire d'ordre 2 et u-définie positive et nous pouvons appliquer l'ensemble des résultats des fonctionnelles linéaires lacunaires.

Nous avons donc :

$$P_{2k}^{(2s)}(x) = U_k^{(s)}(x^2)$$

$$P_{2k+1}^{(2s)}(x) = x \, U_k^{(s+1)}(x^2)$$

$$P_{2k}^{(2s+1)}(x) = U_k^{(s+1)}(x^2)$$

$$P_{2k+1}^{(2s+1)}(x) = w_1(x) \, U_k^{(s+1)}(x^2) \qquad \text{pour s et k} \in \mathbb{N}.$$

$w_1$ est un polynôme arbitraire de degré 1.

D'après le théorème 3.7 les polynômes $\{P_k^{(2s)}\}$ sont orthogonaux réguliers par rapport à la fonctionnelle $c^{(2s)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Les polynômes $P_{2k}^{(2s+1)}$ sont orthogonaux réguliers par rapport à la fonctionnelle $c^{(2s+1)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ; les polynômes $P_{2k+1}^{(2s+1)}$ sont quasi-orthogonaux par rapport à la même fonctionnelle linéaire.

D'après le corollaire 3.5, les déterminants $H_{2k+1}^{(2s+1)}$ sont nuls, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall s \in \mathbb{N}$, et ce sont les seuls.

*Propriété 5.3.*

$H_{4k}^{(2s+1)} > 0$ *et* $H_{4k+2}^{(2s+1)} < 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

On utilise la relation de la propriété 3.16 qui donne $H_{4k}^{(2s+1)}$ et $H_{4k+2}^{(2s+1)}$.

$$H_{4k}^{(2s+1)} = (-1)^{2k}(H_{2k}^{*(s+1)})^2 > 0.$$

$$H_{4k+2}^{(2s+1)} = (-1)^{2k+1}(H_{2k+1}^{*(s+1)})^2 < 0.$$

cqfd.

*Propriété 5.4.*

*Les racines de* $P_{2i}^{(2s+1)}$, *pour* $i \in \mathbb{N}$ *et* $s \in \mathbb{N}$, *sont réelles, distinctes non nulles, symétriques par rapport à* 0 *et appartiennent à l'intervalle* [-1, +1].

Démonstration.

C'est une conséquence de la propriété 3.15.

cqfd.

De la propriété 5.1 nous déduisons pour $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq k$ :

$$A_{j,\ell}^{(2i,2s+2)} = \frac{B_j^{(i,s+1)}}{2} \quad \text{pour } \ell = 0 \text{ ou } 1.$$

$$A_{j,\ell}^{(2i,2s+1)} = \frac{B_j^{(i,s+1)}}{2\,\xi_{j,s+1}^{(\ell)}} \quad \text{pour } \ell = 0 \text{ ou } 1.$$

et puisque $\xi_{j,s+1}^{(o)} = -\xi_{j,s+1}^{(1)}$ on a :

$$A_{j,o}^{(2i,2s+1)} = -A_{j,1}^{(2i,2s+1)}.$$

D'autre part puisque les fonctionnelles linéaires $c^{(2s)}$ sont définies positives, les formules de quadrature de Gauss relatives à ces fonctionnelles sont stables et convergentes sur $C_\infty[-1, +1]$. (cf. le corollaire 2.5 du livre de C. Brezinski).

En appliquant le théorème 5.8 les formules de quadrature de Gauss relatives aux fonctionnelles $c^{(2s+1)}$ sont également stables et convergentes sur $C_\infty[-1, +1]$.

*Propriété 5.5.*

*Les formules de quadrature de Gauss associées aux fonctionnelles* $c^{(i)}$, *pour* $i \in \mathbb{N}$, *sont stables et convergentes sur* $C_\infty[-1, +1]$.

## Remarque 5.2.

D'après le théorème 5.2, en utilisant les racines des polynômes $P_{2i}^{(2s+1)}$ et $P_{2i+1}^{(2s+1)}$, les formules de quadrature de Gauss correspondantes sont exactes pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $4i$. Elles ne sont pas exactes pour des polynômes de degré $4i+1$.

## Erreur des formules de quadrature

On reprend le raisonnement fait dans le cas général en l'adaptant au cas particulier des fonctionnelles $c^{(2s+1)}$.

Nous supposons l'existence d'une $(4i+1)^{\text{ième}}$ dérivée de $f(x)$ bornée sur $[-1, +1]$.

$$c^{(2s+1)}(R) = c^{(2s+1)}(P_{2i}^{(2s+1)}\ P_{2i+1}^{(2s+1)}\ [x, z_1, \ldots, z_{4i+1}])$$

$P_{2i+1}^{(2s+1)}(x) = w_1(x)\ P_{2i}^{(2s+1)}(x)$ et toutes les racines de ces polynômes sont réelles distinctes.

Dans le cas de racines réelles on a :

$$[x, z_1, \ldots, z_{4i+1}] = \frac{f^{(4i+1)}(\xi)}{(4i+1)!}$$

où $\xi$ appartient au plus petit intervalle contenant $x$ et les $z_i$.

Donc

$$c^{(2s+1)}(R) = \frac{1}{(4i+1)!}\ c^{(2s+1)}(x(P_{2i}^{(2s+1)})^2\ f^{(4i+1)}(\xi))$$

$$= \frac{1}{(4i+1)!}\ c^{(2s+2)}((P_{2i}^{(2s+1)})^2\ f^{(4i+1)}(\xi))$$

Puisque $f^{(4i+1)}$ est supposée bornée sur $[-1, +1]$, on a :

$$m \leq f^{(4i+1)}(\xi) \leq M.$$

Donc

$$m(P_{2i}^{(2s+1)})^2 \leq f^{(4i+1)}(\xi)\ (P_{2i}^{(2s+1)})^2 \leq M(P_{2i}^{(2s+1)})^2$$

$c^{(2s+2)}$ est une fonctionnelle linéaire définie positive.

Par conséquent :

$$\frac{m}{(4i+1)!}\, c^{(2s+2)}((P_{2i}^{(2s+1)})^2) \leq c^{(2s+1)}(R) \leq \frac{M}{(4i+1)!}\, c^{(2s+2)}((P_{2i}^{(2s+1)})^2)$$

Puisque $P_{2i}^{(2s+1)}(x) \equiv P_{2i}^{(2s+2)}(x)$, alors :

$$c^{(2s+2)}((P_{2i}^{(2s+1)})^2) = \frac{H_{2i+1}^{(2s+2)}}{H_{2i}^{(2s+2)}}.$$

D'où on tire :

$$c^{(2s+1)}(R) = \frac{H_{2i+1}^{(2s+2)}}{H_{2i}^{(2s+2)}}\, \frac{1}{(4i+1)!}\, f^{(4i+1)}(\xi').$$

avec $\xi' \in [-1, +1]$.

6

# APPROXIMANTS DE PADE EN DEUX POINTS

\- * -

*Les approximants de Padé sont pris par rapport à une série formelle au voisinage de l'origine et leur comportement pour les grandes valeurs de* x *laisse parfois à désirer, quand il n'y a pas tout simplement divergence (voir l'exemple proposé dans l'article de Baker). Aussi l'idée est venue de construire des approximants par rapport à deux séries formelles, l'une au voisinage de* $x = 0$*, l'autre au voisinage de l'infini. Nous parlerons de séries formelles pour* x *petit et* x *grand pour conserver les appellations anglo-saxones.*

*La théorie des approximants de Padé en deux points a surtout été introduite à partir des fractions continues, et essentiellement des T-fractions (voir les articles de W. Jones, W. Thron, J. Mc Cabe, J. Murphy). Des relations de récurrence et des méthodes de calcul ont été présentées dans ces articles uniquement dans le cas normal.*

*A. Sidi a présenté ces approximants sous une forme plus padéiste, en ce sens qu'il cherche le polynôme du dénominateur, puis celui du numérateur de l'approximant. En se plaçant toujours dans le cas normal il a donné des expressions de ces deux polynômes sous forme de déterminants et de nombreuses relations de récurrence dont il a déduit des schémas de calcul.*

*De notre côté nous avons abordé cette étude par l'intermédiaire des polynômes orthogonaux et de leurs associés par rapport à certaines fonctionnelles linéaires. Cette façon de voir ces approximants est totalement originale et nous a permis de nous placer dans le cas général où la table peut être non normale.*

*La première section définit les approximants de Padé en deux points et donne une équivalence entre les polynômes du déterminateur et les polynômes orthogonaux par rapport à une fonctionnelle linéaire, et une autre équivalence entre les polynômes du numérateur et les associés des polynômes précédents par rapport à une autre fonctionnelle linéaire.*

*Dans la seconde section nous donnons le théorème d'existence et d'unicité de ces approximants, puis nous présentons les propriétés des blocs de la table des approximants de Padé en deux points, ainsi que celles des tables des polynômes du dénominateur et du numérateur.*

*La troisième section établit que les huit relations classiques de récurrence satisfaites par les polynômes orthogonaux sont également satisfaites par leurs associés, comme approximant de Padé en deux points, avec les mêmes coefficients.*

*La quatrième section présente les propriétés des zéros des polynômes* $P_{k,m}(x)$ *et* $Q_{k,m}(x)$, *ce qui nous permettra de mieux définir dans la cinquième section une table normale d'approximants de Padé en deux points. Nous établirons dans cette dernière section une propriété remarquable d'une table normale.*

*La sixième section est consacrée à l'étude du cas où la fonctionnelle linéaire* $d^{(k-2m)}$ *est définie positive. Nous donnons des propriétés concernant les zéros. Nous en déduisons une condition nécessaire d'existence de ces fonctionnelles.*

*La section suivante présente les polynômes de Laurent orthogonaux introduits dans un papier de W. Jones et W. Thron ; leur but était de relier ces polynômes aux T-fractions. Nous montrons que les polynômes de Laurent orthogonaux se déduisent de façon triviale des polynômes orthogonaux classiques. L'emploi des polynômes de Laurent conduit à deux relations de récurrence au lieu d'une seule.*

*D'autre part ils ne permettent d'exploiter que l'horizontale* $k = m$ *de la table* $F_2$.

*Enfin la détermination des tables* $P_2$ *et* $Q_2$ *est abordée dans la dernière section.*

## 6.1 DEFINITION DES APPROXIMANTS DE PADE EN DEUX POINTS.

Soient deux séries formelles, l'une L pour x petit, l'autre $L^*$ pour x grand.

$$L = \sum_{j=o}^{\infty} c_j \, x^j$$

$$L^* = \sum_{j=1}^{\infty} c^*_{-j} \, x^{-j}$$

On cherche une fraction rationnelle

$$f_{k,m}(x) = \frac{\sum_{j=o}^{m-1} a_j \, x^j}{\sum_{j=o}^{m} b_j \, x^j} = \frac{\mathcal{Q}_{k,m}(x)}{\mathcal{P}_{k,m}(x)}$$

telle que :

$$L.\mathcal{P}_{k,m}(x) - \mathcal{Q}_{k,m}(x) = 0_+(x^k) \text{ avec } 0 \leq k \leq 2m$$

et

$$L^*.\mathcal{P}_{k,m}(x) - \mathcal{Q}_{k,m}(x) = 0_-(x^{k-m-1})$$

La première expression $0_+(x^k)$ signifie qu'il y a coïncidence de tous les termes, depuis celui d'exposant 0 jusqu'à celui d'exposant k-1 inclus. La seconde expression $0_-(x^{k-m-1})$ signifie qu'il y a coïncidence de tous les termes depuis celui d'exposant m-1 jusqu'à celui d'exposant (k-m) inclus.

On remarquera que ces deux relations conduisent à un système linéaire de 2m équations à (2m+1) inconnues.

Remarque 6.1.

L'ensemble de toute l'étude qui est faite reste valable si les deux séries formelles sont respectivement :

$$L = \sum_{j=-\nu}^{\infty} c_j \, x^j \text{ pour x petit avec } \nu \geq 0$$

et

$$L^* = \sum_{j=-\infty}^{\mu} c_j^* \, x^j \text{ pour x grand avec } \mu \geq 0$$

L'approximant de Padé en deux points s'exprime alors sous la forme :

$$\sum_{j=-\nu}^{-1} c_j \, x^j + \sum_{j=o}^{\mu} c_j^* \, x^j + f_{k,m}(x)$$

où $f_{k,m}(x)$ est l'approximant de Padé en deux points des deux séries formelles suivantes :

$$L_1 = \sum_{j=o}^{\infty} (c_j - c_j^*) x^j \text{ pour x petit}$$

et

$$L_2 = \sum_{j=-\infty}^{-1} (c_j^* - c_j) x^j \text{ pour x grand}$$

avec la convention que $\begin{cases} c_j^* = 0 \text{ si } j > \mu \\ c_j = 0 \text{ si } j < -\nu. \end{cases}$

Convention.

On prendra $a_j = 0$ si $j < 0$ et $j > m-1$.

On prendra $c_i = 0$ si $i < 0$ et $c_i^* = 0$ si $i > -1$.

*Propriété 6.1.*

*L'approximant de Padé en deux points satisfait les systèmes linéaires* ($S_1$) *et* ($S_2$) *suivants :*

$$(S_1) : \quad \sum_{i=o}^{m} c_{j-i}\, b_i - a_j = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k-1$$

$$(S_2) : \quad \sum_{i=o}^{m} c^*_{j-i}\, b_i - a_j = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{Z},\ k-m \le j \le m-1.$$

Démonstration.

$$L\, \tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{Q}_{k,m}(x) = O_+(x^k)$$

c'est à dire

$$\sum_{j=o}^{\infty} \Big( \sum_{i=o}^{m} c_{j-i}\, b_i \Big) x^j - \sum_{j=o}^{m-1} a_j\, x^j = O_+(x^k).$$

D'où le système ($S_1$).

$$L^*\, \tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{Q}_{k,m}(x) = O_-(x^{k-m-1})$$

c'est à dire

$$\sum_{j=-m+1}^{\infty} \Big( \sum_{i=o}^{m} c^*_{-j-i}\, b_i \Big) x^{-j} - \sum_{j=-m+1}^{o} a_{-j} x^{-j} = O_-(x^{k-m-1}).$$

D'où le système ($S_2$).

cqfd.

On posera $P_{k,m}(x) = x^m \tilde{P}_{k,m}(x^{-1})$

$$d_i = c_i - c_i^*, \ \forall i \in Z.$$

On définira des fonctionnelles linéaires $d^{(j)}$ telles que :

$$d^{(j)}(x^s) = d_{j+s}, \ \forall s \in \mathbb{N}$$

<u>*Propriété 6.2.*</u>

*Si le polynôme* $P_{k,m}(x)$ *existe, alors :*

$$P_{k,m}(x) \equiv P_m^{(k-2m)}(x)$$

*c'est à dire que ce polynôme est orthogonal par rapport à la fonctionnelle linéaire* $d^{(k-2m)}$.

Démonstration.

On retranche dans $(S_1)$ les lignes de $(S_2)$ ayant le même indice j. On obtient le système (S) :

$$(S) : \qquad \sum_{i=o}^{m} d_{j-i}\, b_i = 0 \text{ pour } j \in Z, \ k-m \le j \le k-1.$$

c'est un système homogène de m équations à (m+1) inconnues, dont la matrice est de Hankel. Par conséquent si $P_{k,m}(x)$ existe, il est bien orthogonal par rapport à $d^{(k-2m)}$.

<u>cqfd</u>.

Lorsque le polynôme $P_{k,m}(x)$ est déterminé, c'est à dire lorsque les $b_j$ sont connus, on détermine le polynôme $\tilde{Q}_{k,m}(x)$ par le système suivant :

Si $k > m-1$.

(S') : $$\sum_{i=0}^{m} c_{j-i}\, b_i - a_j = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le m-1.$$

Si $0 \le k \le m-1$.

(S") : $$\sum_{i=0}^{m} c^*_{j-i}\, b_i - a_j = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le m-1$$

soit encore $\sum_{i=1}^{m} c^*_{j-i}\, b_i - a_j = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le m-1$.

*Propriété 6.3.*

*Les systèmes* ((S$_1$) *et* (S$_2$)) *et* ((S) *et* ((S') *ou* (S"))) *sont équivalents.*

Démonstration.

En effet on passe du système ((S$_1$) et (S$_2$)) au système ((S) et ((S') ou (S"))) et vice versa, uniquement en faisant de simples soustractions entre deux lignes ayant le même indice dans les deux sous-systèmes.

Le système résultant est obtenu en gardant une des deux lignes d'origine et la ligne obtenue après soustraction ; toutes celles qui ne sont pas intervenues dans les soustractions sont conservées.

cqfd.

Dans la propriété suivante nous exprimons le polynôme du numérateur en terme d'associé du polynôme dénominateur par rapport à une certaine fonctionnelle linéaire.

Nous posons

$$Q_{k,m}(x) = x^{m-1}\, \tilde{Q}_{k,m}(x^{-1})$$

Nous noterons c la fonctionnelle linéaire définie sur l'espace vectoriel $P$ des polynômes telle que :

$$c(x^i) = c_i, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Nous noterons $c^*$ la fonctionnelle linéaire définie sur l'espace vectoriel $P$ telle que :

$$c^*(x^i) = c^*_{-i-1}, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

*Propriété 6.4.*

*Si* $P_{k,m}(x)$ *est orthogonal par rapport à* $d^{(k-2m)}$, *alors*

*i)* *Si* $m-1 < k \le 2m$, $Q_{k,m}(t) = c\left(\frac{P_{k,m}(x) - P_{k,m}(t)}{x-t}\right)$, *la fonctionnelle* c *agissant sur la variable* x.

*ii)* *Si* $0 \le k \le m-1$, $\tilde{Q}_{k,m}(t) = c^*\left(\frac{\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{P}_{k,m}(t)}{x-t}\right)$, *la fonctionnelle* $c^*$ *agissant sur la variable* x.

Démonstration.

i) $$\frac{P_{k,m}(x) - P_{k,m}(t)}{x-t} = b_{m-1} + b_{m-2}(x+t) + \ldots + b_o\left(\sum_{i=o}^{m-1} x^{m-1-i}\, t^i\right)$$

puisque $\frac{x^i - t^i}{x-t} = \sum_{j=o}^{i-1} x^{i-1-j}\, t^j$.

Alors : $$c\left(\frac{P_{k,m}(x) - P_{k,m}(t)}{x-t}\right) = \sum_{j=o}^{m-1} \left(\sum_{i=o}^{m} c_{j-i}\, b_i\right) t^{m-1-j}$$

$$= \sum_{j=o}^{m-1} a_j\, t^{m-1-j} \equiv Q_{k,m}(t).$$

ii) $$\frac{\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{P}_{k,m}(t)}{x-t} = b_1 + b_2(x+t) + \ldots + b_m(\sum_{i=o}^{m-1} x^{m-1-i}\, t^i)$$

Donc

$$c^*\left(\frac{\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{P}_{k,m}(t)}{x-t}\right) = \sum_{j=o}^{m-1} \left(\sum_{i=o}^{m} c^*_{j-i}\, b_i\right) t^j$$

$$= \sum_{j=o}^{m-1} a_j\, t^j \equiv \tilde{Q}_{k,m}(t).$$

<u>cqfd.</u>

<u>Remarque 6.2.</u>

Si $k = 2m$, on retrouve l'approximant de Padé classique avec $P_{2m,m}(x) \equiv P_m^{(o)}(x)$ qui est orthogonal par rapport à $d^{(o)}$ qui est alors identique à c, et $Q_{2m,m}(x)$ est le polynôme associé à $P_m^{(o)}(x)$ par rapport à c. Si nous notons $f_{[m-1/m]}(x)$ l'approximant de Padé classique on a par conséquent :

$$f_{2m,m}(x) \equiv f_{[m-1/m]}(x).$$

## 6.2 EXISTENCE ET UNICITE DES APPROXIMANTS DE PADE EN DEUX POINTS. ETUDE DES BLOCS.

Nous associons à la fonctionnelle $d^{(k-2m)}$ les déterminants de Hankel $H_i^{(k-2m)}$.

<u>*Théorème 6.1.*</u>

*i)* *Si $H_m^{(k-2m)} \neq 0$, l'approximant de Padé en deux points existe et est unique.*

*ii)* *Si* $H_m^{(k-2m)} = 0$ *et si* h *est le plus grand entier tel que* $h+1 < m$ *et* $H_{k+1}^{(k-2m)} \neq 0$, *et si* p *est le plus petit entier tel que* $p+1 > m$ *et* $H_{p+1}^{(k-2m)} \neq 0$, *alors :*

*a)* *Pour* $h+2 \leq m \leq p+1$*-entier* $(\frac{p-h+1}{2})$ *si* $(p-h)$ *est impair ou pour* $h+2 \leq m \leq p$*-entier* $(\frac{p-h+1}{2})$ *si* $(p-h)$ *est pair, l'approximant de Padé en deux points existe et est unique.*
*On a :*

$$f_{k,m}(x) = \frac{\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(x)}{\tilde{P}_{k+1}^{(k-2m)}(x)}$$

*où* $\tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(x)$ *est le polynôme orthogonal régulier de degré* $h+1$ *par rapport à la fonctionnelle linéaire* $d^{(k-2m)}$ *et, soit* $Q_{k+1}^{(k-2m,o)}(x)$ *est le polynôme associé à* $P_{h+1}^{(k-2m)}(x)$ *par rapport à* c *si* $m-1 < k \leq 2m$, *soit* $\tilde{Q}_{k+1}^{(k-2m,o)}(x)$ *est le polynôme associé à* $\tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(x)$ *par rapport à* $c^*$ *si* $0 \leq k \leq m-1$.

*Si* $m-1 < k \leq 2m$ *on aura* $\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,o)}(x) = x^k\, Q_{k+1}^{(k-2m,o)}(1/x)$.

*b)* *Pour* $p+2$*-entier* $(\frac{p-h+1}{2}) \leq m \leq p$ *si* $(p-h)$ *est impair ou pour* $p+1$*-entier* $(\frac{p-h+1}{2}) \leq m \leq p$ *si* $(p-h)$ *est pair, l'approximant de Padé en deux points n'existe pas.*

<u>Démonstration</u>.

i) On utilise la propriété 1.14. Le polynôme $P_{k,m}(x)$ est déterminé à un facteur multiplicatif près. Si on rend $P_{k,m}(x)$ unitaire, il est alors déterminé de façon unique.
L'associé est alors déterminé également de façon unique.
Par conséquent, l'approximant de Padé en deux points existe et est unique.

ii), b) D'après la propriété 1.14, on sait que, dans ce cas, le polynôme orthogonal $P_m^{(k-2m)}(x)$ n'existe pas. Par conséquent l'approximant de Padé en deux points n'existe pas.

ii), a) Toujours d'après la propriété 1.14, on a :

$$P_{k,m}(x) \equiv P_m^{(k-2m)}(x) = P_{h+1}^{(k-2m)}(x) \, . \, w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x)$$

où $w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x)$ est un polynôme arbitraire de degré m-h-1 et $P_{h+1}^{(k-2m)}(x)$ est le polynôme orthogonal régulier par rapport à $d^{(k-2m)}$ qui précéde $P_m^{(k-2m)}(x)$. Cherchons quelle est la forme du polynôme $\tilde{Q}_{k,m}(x)$.

<u>Si k > m-1.</u>

$$Q_{k,m}(t) = c\left(\frac{w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x)\; P_{h+1}^{(k-2m)}(x) - w_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)\; P_{h+1}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

$$= c\left(\frac{w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x) - w_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\; P_{h+1}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$$+ w_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)\; c\left(\frac{P_{h+1}^{(k-2m)}(x) - P_{h+1}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

$$= d^{(k-2m)}\left(x^{2m-k}\left(\frac{w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x) - w_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right) P_{h+1}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$$+ w_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)\; Q_{h+1}^{(k-2m,0)}(t).$$

$x^{2m-k}\left(\frac{w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x) - w_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$ est un polynôme en x de degré 3m-k-h-2.

Or d'après la propriété 1.17, on a :

$$d^{(k-2m)}(x^j\, P_{k+1}^{(k-2m)}(x)) = 0 \text{ pour } 0 \le j \le p-1.$$

Puisque $P_m^{(k-2m)}(x)$ est orthogonal singulier, on a $m-h-1 < \frac{p-h}{2}$.

En ajoutant la condition $k > m-1$ on trouve :

$$3m - 2 - h - k \le p-1$$

Par conséquent, il nous reste :

$$Q_{k,m}(t) = w_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)\; Q_{h+1}^{(k-2m,o)}(t),$$

et l'approximant $f_{k,m}(x)$ vaut $\dfrac{\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,o)}(x)}{\tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(x)}$. Il est donc unique.

<u>Si $k \le m-1$</u>.

<u>1er cas</u>.

On suppose que $P_{h+1}^{(k-2m)}(o) \neq 0$, c'est à dire que ce polynôme est à l'ouest ou au nord ouest du bloc P, soit encore que $\tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(x)$ est à l'ouest ou au nord ouest du bloc W.

On a :

$$P_{k,m}(x) = P_m^{(k-2m)}(x) = w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x)\; P_{h+1}^{(k-2m)}(x) = w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x)\; P_{h+1}^{(k-2h-2)}(x)$$

puisque tous les polynômes sont identiques sur le côté ouest d'un bloc P.

Alors $\tilde{P}_{h+1}^{(k-2h-2)}(x)$ est orthogonal par rapport à la fonctionnelle linéaire $\gamma^{(k-1)}$ qui est telle que :

$$\gamma^{(k-1)}(x^i) = d_{k-1-i},\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

On a également $c^*(x^i) = -\gamma^{(k-1)}(x^{i+k}),\ \forall i \in \mathbb{N}$.

Nous avons $\tilde{P}_{k,m}(x) = \tilde{w}_{m-h-1}^{(k-2m)}(x)\; \tilde{P}_{h+1}^{(k-2k-2)}(x)$ avec $\tilde{w}_{m-h-1}^{(k-2m)}(x) = x^{m-h-1}\, w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x^{-1})$.

$$\text{Alors } \tilde{Q}_{k,m}(t) = c^*\left(\frac{\tilde{W}^{(k-2m)}_{m-h-1}(x)\ \tilde{P}^{(k-2h-2)}_{h+1}(x) - \tilde{W}^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)\ \tilde{P}^{(k-2h-2)}_{h+1}(t)}{x-t}\right)$$

$$= -\gamma^{(k-1)}\left(x^k\left(\frac{\tilde{W}^{(k-2m)}_{m-h-1}(x) - \tilde{W}^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)}{x-t}\right)\tilde{P}^{(k-2h-2)}_{h+1}(x)\right)$$

$$+ \tilde{W}^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)\ c^*\left(\frac{\tilde{P}^{(k-2h-2)}_{h+1}(x) - \tilde{P}^{(k-2h-2)}_{h+1}(t)}{x-t}\right)$$

En utilisant l'analogue de la propriété 1.17 pour les polynômes W, on a :

$$\gamma^{(k-1)}\left(x^j\ \tilde{P}^{(k-2k-2)}_{h+1}(x)\right) = 0 \text{ si } 0 \le j \le \tilde{p}-1$$

où $\tilde{p}$ est tel que $W^{(k-1)}_{\tilde{p}}(x)$ appartient au bloc W et $W^{(k-1)}_{\tilde{p}+1}(x)$ est orthogonal régulier.

Or $x^k\left(\frac{\tilde{W}^{(k-2m)}_{m-h-1}(x) - \tilde{W}^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)}{x-t}\right)$ est un polynôme en x de degré k+m-h-2.

Puisque $P^{(k-2m)}_{h+1}(o) \neq 0$ on a $m-h-1 \le \tilde{p}-m$ ; en effet le bloc W est décalé d'une rangéevers le haut par rapport au bloc P. Cette inégalité associée à $0 \le k \le m-1$ donne :

$$m + k - h - 1 \le \tilde{p}-1.$$

Par conséquent :

$$\tilde{Q}_{k,m}(t) = \tilde{W}^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)\ \tilde{Q}^{(k-2h-2,o)}_{h+1}(t) = \tilde{W}^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)\ \tilde{Q}^{(k-2m,o)}_{h+1}(t)$$

puisque

$$\tilde{P}^{(k-2h-2)}_{h+1}(x) \equiv \tilde{P}^{(k-2m)}_{h+1}(x).$$

2e cas.

On suppose que $P_{h+1}^{(k-2m)}(x) = x^s\ P_{h+1-s}^{(k-2m+s)}(x)$ avec $P_{h+1-s}^{(k-2m+s)}(o) \neq 0$.

Alors $\tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(x) = \tilde{P}_{k+1-s}^{(k-2m+s)}(x) = \tilde{P}_{h+1-s}^{(k-2h-2+2s)}(x)$.

Ce dernier polynôme est sur l'antidiagonale k-1. Il est orthogonal régulier par rapport à $\gamma^{(k-1)}$. Il est à l'ouest ou nord-ouest du bloc W.
Alors $\tilde{p} = 2m-1-h$.
Par conséquent, la conclusion du 1er cas reste valable, c'est à dire que

$$-\gamma^{(k-1)}(x^k\ (\frac{\tilde{w}_{m-h-1}^{(k-2m)}(x) - \tilde{w}_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)}{x-t})\ \tilde{P}_{h+1-s}^{(k-2k-2+2s)}(x)) = 0$$

et

$$\tilde{Q}_{k,m}(t) = \tilde{w}_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)\ \tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,o)}(t).$$

cqfd.

Remarque 6.3.

Quand $H_m^{(k-2m)} \neq 0$, on peut exprimer $\tilde{P}_{k,m}(x)$ et $\tilde{Q}_{k,m}(x)$ sous forme de déterminant (cf. Théorème 2.1 et 2.9 du livre de C. Brezinski). On retrouve naturellement deux expressions analogues à celles proposées par Sidi dans son article (cf. Théorème 3).

$$P_{k,m}(x) = \frac{1}{D_{k,m}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & d_{k-1} \\ 1 & \cdots & x^m \end{vmatrix}$$

où $D_{k,m}$ est une constante arbitraire non nulle.

$$\tilde{P}_{k,m}(x) = \frac{1}{D_{k,m}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & d_{k-1} \\ x^m & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

<u>Si $m-1 < k \le 2m$</u>, $Q_{k,m}(t) = c\left(\frac{P_{k,m}(x) - P_{k,m}(t)}{x-t}\right)$ avec $c = d^{(o)}$ et

$\tilde{Q}_{k,m}(t) = t^{m-1}\, Q_{k,m}(1/t)$.

Par conséquent :

$$\tilde{Q}_{k,m}(t) = \frac{1}{D_{k,m}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-1} \\ 0 & d_0 t^{m-1} & d_0 t^{m-2} + d_1 t^{m-1} & \cdots & \sum_{i=o}^{m-1} d_i t^i \end{vmatrix}$$

<u>Si $0 \le k \le m-1$</u>, $\tilde{Q}_{k,m}(t) = c^*\left(\frac{\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{P}_{k,m}(t)}{x-t}\right)$ avec $c^*_{-1-i} = -d_{-1-i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Donc :

$$\tilde{Q}_{k,m}(t) = -\frac{1}{D_{k,m}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-1} \\ \sum_{i=o}^{m-1} d_{i-m} t^i & \cdots & \sum_{i=o}^{j-1} d_{i-j} t^i & \cdots & d_{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

*Définition 6.1.*

*On appellera table* $P_2$ *la table dans laquelle sont rangés les polynômes* $P_{k,m}(x)$ *de la manière suivante.*

$$
\begin{array}{llll}
 & & P_{0,3} & ----- \\
 & P_{0,2} & P_{1,3} & ----- \\
P_{0,1} & P_{1,2} & P_{2,3} & ----- \\
P_{1,1} & P_{2,2} & P_{3,3} & ----- \\
P_{2,1} & P_{3,2} & P_{4,3} & ----- \\
 & P_{4,2} & P_{5,3} & ----- \\
 & & P_{6,3} & -----
\end{array}
$$

*Cette table* $P_2$ *est donc une partie de la table* $P$ *des polynômes orthogonaux par rapport aux fonctionnelles linéaires* $d^{(i)}$, *pour* $i \in Z$.

$$
\left.\begin{array}{llll}
 & & P_3^{(-6)} & ----- \\
 & P_2^{(-4)} & P_3^{(-5)} & ----- \\
P_1^{(-2)} & P_2^{(-3)} & P_3^{(-4)} & -----
\end{array}\right\} \quad 0 \le k \le m-1
$$

$$
\left.\begin{array}{llll}
P_1^{(-1)} & P_2^{(-2)} & P_3^{(-3)} & ----- \\
P_1^{(0)} & P_2^{(-1)} & P_3^{(-2)} & ----- \\
 & P_2^{(0)} & P_3^{(-1)} & ----- \\
 & & P_3^{(0)} & -----
\end{array}\right\} \quad m-1 < k \le 2m
$$

*Nous rangerons également les polynômes* $\tilde{P}_{k,m}(x)$ *dans une table* $\tilde{P}_2$, *qui a le même agencement que la table* $P_2$, *ainsi que les polynômes* $\tilde{Q}_{k,m}(x)$ *dans une table* $\tilde{Q}_2$ *et les polynômes* $Q_{k,m}(x)$ *dans une table* $Q_2$.

*Enfin les approximants de Padé en deux points* $f_{k,m}(x)$ *seront rangés de façon analogue dans une table* $F_2$.

Remarque 6.4.

Nous avons préféré cette définition pour ces tables à celle proposée par Sidi, car la structure des blocs de la table P est conservée dans le table $\tilde{P}_2$.
En particulier à un bloc P de la table P correspond un bloc $P_2$ dans la table $P_2$ qui est l'intersection de la table $P_2$ et du bloc P.
L'emplacement dans la table $\tilde{P}_2$ (respectivement $Q_2$, $\tilde{Q}_2$) correspond à ce bloc $P_2$ sera appelé bloc $\tilde{P}_2$ (respectivement $Q_2$, $\tilde{Q}_2$).

Le théorème 6.1 donne le contenu des blocs $Q_2$ dans le cas des polynômes associés aux polynômes orthogonaux singuliers. Nous allons nous intéresser maintenant aux associés des polynômes quasi-orthogonaux.

*Propriété 6.5.*

*Si un bloc* P *est situé entièrement dans la partie* $m < k$, *ou si un bloc* P *est situé entièrement dans la partie* $k \le m-1$ *tel que son côté ouest ne soit pas entièrement pas hors de la table* $P_2$, *alors à tout élément* $w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x)\ P_{h+1}^{(k-2m)}(x)$ *du bloc* $P_2$ *correspond un élément* $\tilde{w}_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)\ \tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(t)$ *du bloc* $\tilde{Q}_2$.

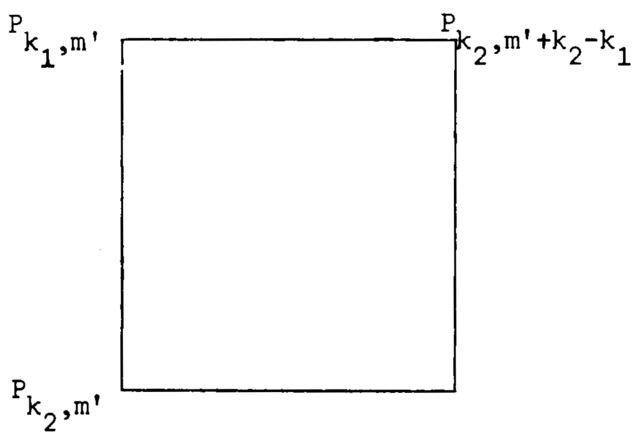
Démonstration.

i) Si $m < k$ on a :

$$Q_{k,m}(t) = d^{(k-2m)}\left(x^{2m-k}\left(\frac{w^{(k-2m)}_{m-h-1}(x) - w^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)}{x-t}\right) P^{(k-2m)}_{h+1}(x)\right)$$

$$+ \, w^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)\; Q^{(k-2m,0)}_{h+1}(t).$$

On considère le bloc P suivant avec $m' < k_1$.



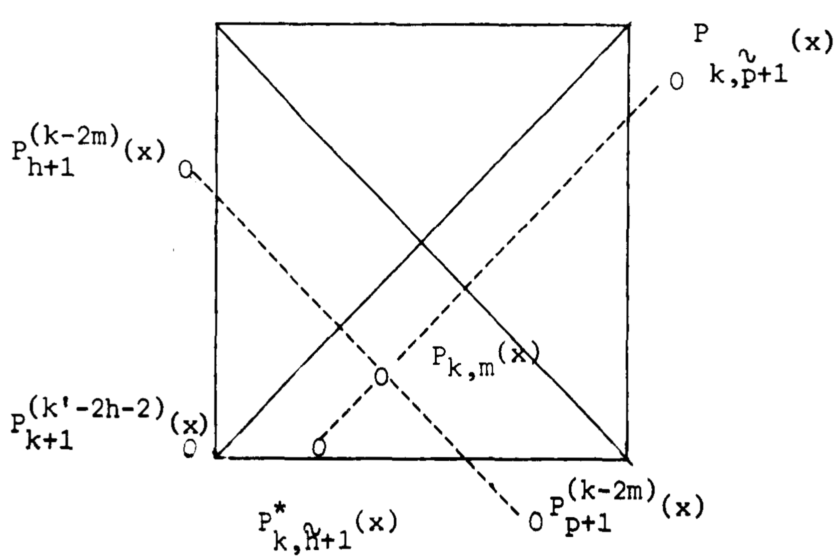

On sait d'après le théorème 6.1 que :

$$d^{(k-2m)}\left(x^{2m-k}\left(\frac{w^{(k-2m)}_{m-h-1}(x) - w^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)}{x-t}\right) P^{(k-2m)}_{h+1}(x)\right) = 0$$

pour $3m - 2 - h - k \le p-1$ et que cette condition est toujours satisfaite au-dessus de l'antidiagonale principale du bloc $P_2$.

Or m < k entraine $3m - 1 - h - k \leq p-1$. Par conséquent, la propriété est encore vraie pour l'antidiagonale principale et a fortiori pour tout le bloc $\mathcal{C}_2$.
En effet, la propriété est vraie pour la ligne supérieure. Elle est donc vraie pour toute colonne. Quand on parcourt une colonne m constante, la quantité $h + k + p$ reste constante. Par conséquent, la condition $3m - 1 - h - k \leq p-1$ est toujours satisfaite.

ii) Si $k \leq m-1$,




On prend $P_{k,m}(x)$ quasi-orthogonal, c'est à dire tel que $m-h-1 \geq \frac{p-h}{2}$. On le prend sous la diagonale principale du bloc W correspondant, c'est à dire tel que $m-\tilde{h}-1 < \frac{\tilde{p}-\tilde{h}}{2}$.

$$P_{k,m}(x) = w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x)\, P_{h+1}^{(k-2m)}(x).$$

on a :

$$\tilde{Q}_{k,m}(t) = \tilde{w}^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)\ \tilde{Q}^{(k-2m,0)}_{h+1}(t)$$

$$-\gamma^{(k-1)}\ (x^k\ (\frac{\tilde{w}^{(k-2m)}_{m-h-1}(x) - \tilde{w}^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)}{x-t})\ \tilde{P}^{(k-2m)}_{k+1}(x))$$

On sait que : $\tilde{P}^*_{k,\tilde{h}+1}(x) = x^{\tilde{h}-h}\ \tilde{P}^{(k-2m)}_{h+1}(x)$ est orthogonal par rapport à $\gamma^{(k-1)}$, d'après la remarque 4.5. Il est au sud du bloc W.

Donc,

$$\gamma^{(k-1)}\ (x^j\ x^{\tilde{h}-h}\ \tilde{P}^{(k-2m)}_{h+1}(x)) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le \tilde{p}-1$$

$$\tilde{Q}_{k,m}(t) = \tilde{w}^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)\ \tilde{Q}^{(k-2m,o)}_{h+1}(t)$$

$$-\gamma^{(k-1)}\ (x^{k-\tilde{h}+h}\ (\frac{\tilde{w}^{(k-2m)}_{m-h-1}(x) - \tilde{w}^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)}{x-t})\ x^{\tilde{h}-h}\ \tilde{P}^{(k-2m)}_{h+1}(x))$$

Si $k-\tilde{h}+h \ge 0$, alors $x^{k-\tilde{h}+h}\ (\frac{\tilde{w}^{(k-2m)}_{m-h-1} - \tilde{w}^{(k-2m)}_{m-h-1}(t)}{x-t})$ est un polynôme de degré $m+k-\tilde{h}-2$.

Vérifions que $k-\tilde{h}+h$ est positif ou nul.

Si $P_{h+1}^{(k'-2h-2)}(x)$ est le polynôme situé au bas du côté ouest du bloc P, on a :

$$k - k' = \tilde{h} - h$$

Par conséquent, si $P_{h+1}^{(k'-2h-2)}$ appartient à la table $P_2$ alors :

$$k' = k - \tilde{h} + h \geq 0, \text{ sinon } k' < 0.$$

Or par hypothèse $P_{h+1}^{(k'-2h-2)}$ appartient à la table $P_2$.

Nous avons ici $m-\tilde{h}-1 < \frac{\tilde{p}-\tilde{h}}{2}$ et $k \leq m-1$.

Donc $m+k-\tilde{h}+1 \leq \tilde{p}-1$. Ce qui entraine que :

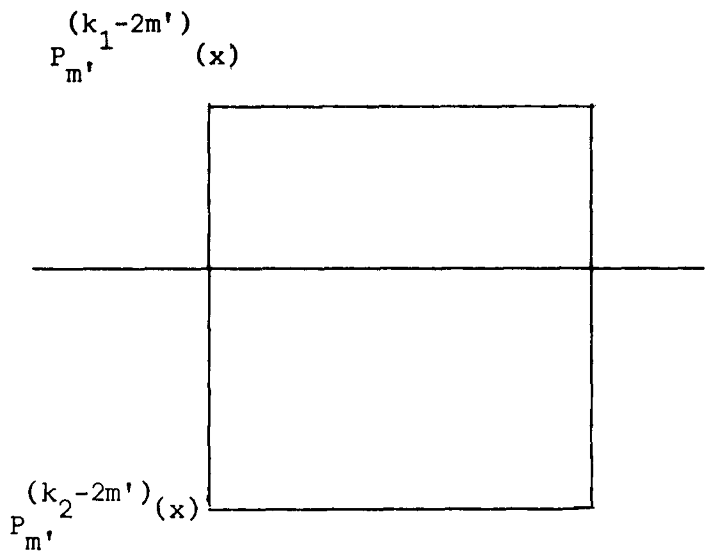
$$\gamma^{(k-1)}\left(x^{k-\tilde{h}+h}\left(\frac{\tilde{w}_{m-h-1}^{(k-2m)}(x) - \tilde{w}_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right) x^{\tilde{h}-h}\, \tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(x)\right) = 0$$

et $\tilde{Q}_{k,m}(t) = \tilde{w}_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)\, \tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(t)$.

En particulier, la propriété est vraie pour la dernière ligne du bloc $P_2$. Elle est donc vraie pour tout le bloc. En effet, on prend une colonne m fixe. Pour tous les polynômes quasi-orthogonaux de cette colonne, $k-\tilde{h}$ est une constante. Par conséquent, $m+k-\tilde{h} \leq \tilde{p}-1$.
La propriété est vraie pour tous les polynômes quasi-orthogonaux. Comme elle est vraie pour tous les polynômes orthogonaux singuliers, elle est vraie pour tout le bloc.

cqfd.

On considère maintenant le bloc P.




$P_{m'}^{(k_1-2m')}(x)$ est dans l'angle Nord-Ouest du bloc P et $P_{m'}^{(k_2-m')}(x)$ est au bas du côté ouest de ce bloc.

<u>*Propriété 6.6.*</u>

*Si* $k_1 \leq m'-1 < k_2$, *alors :*

*i)* *Si* $k \leq m-1$, *à tout élément* $w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x)\ P_{h+1}^{(k-2m)}(x)$ *du bloc* $P_2$ *correspond un élément* $\tilde{w}_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)\ \gamma_{h+1}^{(k-2m,0)}(t)$ *du bloc* $\gamma_2$.

*ii)* *Si* $k > m-1$ *et* $m \leq k_2$, *à tout élément* $w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x)\ P_{h+1}^{(k-2m)}(x)$ *du bloc* $P_2$ *correspond un élément* $\tilde{w}_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)\ \gamma_{h+1}^{(k-2m,0)}(t)$ *du bloc* $\gamma_2$.

*iii)* *Si* $k > m-1$ *et* $m = k_2+1$, *cette correspondance n'est pas vraie.*

<u>Démonstration.</u>

**i) Si $k \leq m-1$, on prend le polynôme $P_{k,m}(x)$ sur la diagonale principale du bloc.**
**On examine ce que deviennent les résultats de la démonstration du théorème 6.1. Dans le premier cas on a : $m-h-1 \leq \tilde{p}+1-m$ puisque $P_{k,\tilde{p}+1}(x)$ est dans l'angle Nord-Est du bloc $P_2$.**

Dans le second cas on a :

$$m - h - 1 = \tilde{p} + 1 + m.$$

Par conséquent, la propriété est encore vérifiée sur la diagonale principale. Alors, par un raisonnement analogue à celui de la propriété 6.5 ii), la propriété est vraie pour toutes les colonnes de la partie du bloc $P_2$ telle que $k \leq m-1$.

ii) On sait que la propriété est vraie pour les polynômes orthogonaux singuliers ; donc elle est vraie pour les colonnes correspondantes dans la partie du bloc $P_2$ telle que $k > m-1$, c'est à dire telle que $m \leq k_2$.

iii) Si $k > m-1$ et $m = k_2+1$, on prend $P_{k,m}(x)$ sur la diagonale principale du bloc P. On reprend l'expression de $Q_{k,m}(t)$ donnée dans la démonstration de la propriété 6.5. i).

On a ici :

$$m = k \text{ et } m = \frac{p+h}{2} + 1$$

c'est à dire :

$$3m - k - h - 2 = p.$$

Par conséquent,

$$d^{(k-2m)}\left(x^{2m-k}\left(\frac{w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x) - w_{m-h-1}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right) P_{h+1}^{(k-2m)}(x)\right) \neq 0$$

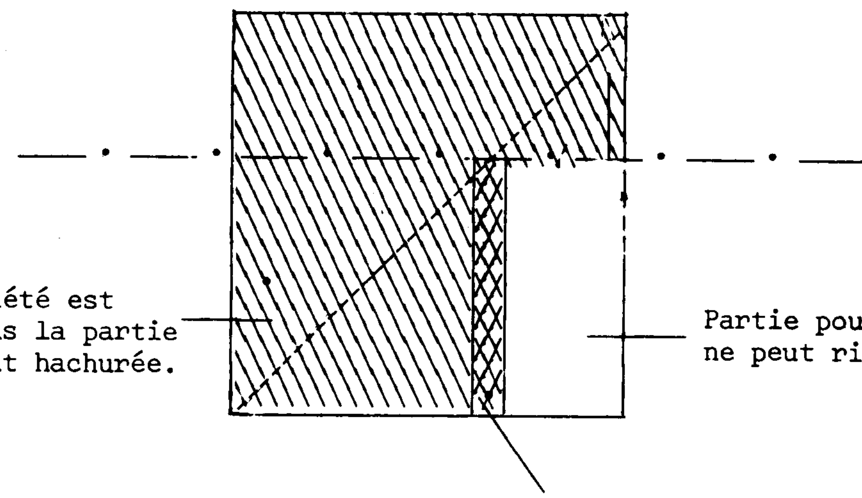
d'après la propriété 1.17 ii).

Par un raisonnement analogue à celui de la propriété 6.5 i), la propriété n'est pas vraie pour cette colonne $m = k_2 + 1$ dans la partie du bloc $P_2$ telle que $k > m-1$.

<u>cqfd</u>.

Remarque 6.5.

Si on reporte sur le bloc les résultats de cette propriété on a :

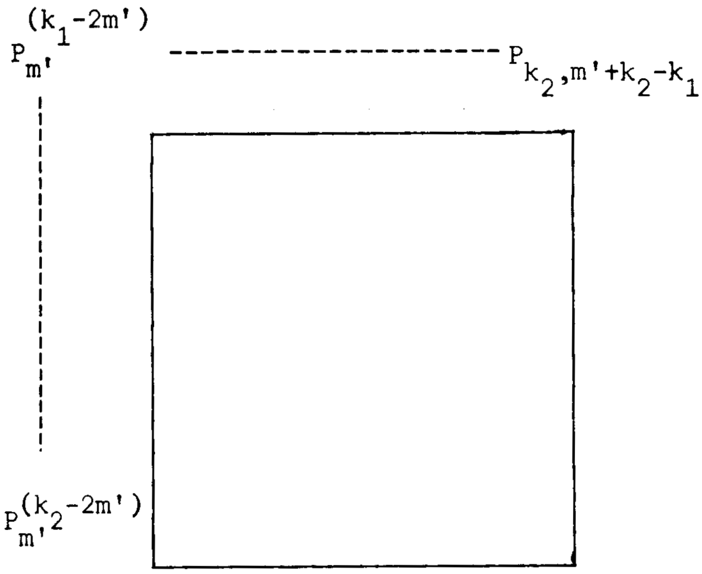



Nous supposons désormais les polynômes $P_{k,m}(x)$ unitaires.

*Propriété 6.7.*

*Les polynômes $\mathfrak{Q}_{k,m}(x)$ situés à l'ouest, au nord-ouest et au nord d'un bloc $\mathfrak{Q}_2$ sont tous identiques.*

Démonstration.




a) <u>Si $k_2 \leq m'-1$.</u>

Les polynômes $\tilde{P}_{k,m}(x)$ situés au nord, nord-ouest ou ouest de ce bloc P sont tous identiques, donc également leurs associés $\tilde{Q}_{k,m}$ par rapport à la fonctionnelle $c^*$.

b) <u>Si $k_1 \leq m'-1 < k_2$.</u>

Les polynômes $\tilde{P}_{k,m}(x)$ avec $m = m'$ et $k_1 \leq k \leq m'-1$, ou avec $k_1 \leq k \leq k_2$ et $m = m' + k - k_1$, sont tous identiques, donc également leurs associés $\tilde{Q}_{k,m}(x)$ par rapport à la fonctionnelle $c^*$.
D'autre part, les polynômes $P_{k,m}(x)$ avec $m = m'$ et $m' \leq k \leq k_2$ sont tous identiques, donc aussi leurs associés $Q_{k,m}(x)$ par rapport à la fonctionnelle c. Par conséquent, leurs transformés $\tilde{Q}_{k,m}$ sont également tous identiques.

Montrons que $\tilde{Q}_{m',m'}(x) \equiv \tilde{Q}_{m'-1,m'}(x)$, et nous aurons ainsi l'identité des polynômes $\tilde{Q}$ des deux ensembles.

$$\tilde{Q}_{m',m'}(t) = \frac{1}{H_{m'}^{(-m')}} \begin{vmatrix} d_{-m'} & \cdots & & & d_0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{-1} & \cdots & & & d_{m'-1} \\ 0 & d_0 t^{m'-1} & d_0 t^{m'-2} + d_1 t^{m'-1} & \cdots & \sum_{i=o}^{m'-1} d_i t^i \end{vmatrix}$$

On retranche de la dernière ligne la somme des m' premières lignes respectivement multipliées par $t^i$, pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq m'-1$.

On a donc :

$$\tilde{Q}_{m',m'}(t) = \frac{1}{H_{m'}^{(-m')}} \begin{vmatrix} d_{-m'} & \cdots & & d_o \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{-1} & \cdots & & d_{m'-1} \\ \sum_{i=o}^{m'-1} d_{i-m'} t^i & \cdots & d_{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

D'autre part :

$$\tilde{Q}_{m'-1,m'}(t) = -\frac{1}{H_{m'}^{(-m'-1)}} \begin{vmatrix} d_{-m'-1} & \cdots & & d_{-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{-2} & \cdots & & d_{m'-2} \\ \sum_{i=o}^{m'-1} d_{i-m'} t^i & \cdots & d_{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Or on a : $P_{m',m'}(x) \equiv P_{m'-1,m'}(x)$. Donc il y a identité des coefficients de même exposant.

Par conséquent :

$$\tilde{Q}_{m',m'}(t) \equiv \tilde{Q}_{m'-1,m'}(t)$$

c) Si $m'-1 < k_1$.

Pour les mêmes raisons que dans le b), tous les polynômes $\tilde{Q}$ du côté ouest et nord-ouest du bloc sont identiques.
Il faut examiner le cas des polynômes qui sont au nord du bloc.
Considérons deux polynômes consécutifs sur le côté nord ou l'angle Nord-ouest du bloc $P_2$. On a :

$$P_{k,m}(x) = x\, P_{k-1,m-1}(x)$$

avec

$$k_1 + 1 \le k \le k_2 \text{ et } m = m' + k - k_1.$$

On a donc identité des coefficients de $x^j$, pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le m$, dans le développement des deux déterminants.

$$\frac{1}{H_m^{(k-2m)}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \text{--------} & d_{k-m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \text{--------} & d_{k-1} \\ 1 & \text{--------} & x^m \end{vmatrix} = \frac{x}{H_{m-1}^{(k-2m+1)}} \begin{vmatrix} d_{k-2m+1} & \text{-------} & d_{k-m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \text{--------} & d_{k-2} \\ 1 & \text{--------} & x^{m-1} \end{vmatrix}$$

De plus $H_m^{(k-2m+1)} = 0$

$$\tilde{Q}_{k,m}(t) = \frac{1}{H_m^{(k-2m)}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \text{------------------------} & & d_{k-m} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \text{------------------------} & & d_{k-1} \\ 0 \quad d_0 t^{m-1} & d_0 t^{m-2} + d_1 t^{m-1} & \text{-----} & \sum_{i=o}^{m-1} d_i t^i \end{vmatrix}$$

$$\tilde{Q}_{k-1,m-1}(t) = \frac{1}{H_{m-1}^{(k-2m+1)}} \begin{vmatrix} d_{k-2m+1} & \cdots & & & d_{k-m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & & & d_{k-2} \\ 0 & d_0 t^{m-2} & d_0 t^{m-3} + d_1 t^{m-2} & \cdots & \sum_{i=0}^{m-2} d_i t^i \end{vmatrix}$$

Puisque $P_{k,m}(x)$ et $P_{k-1,m-1}(x)$ appartiennent à la table $P_2$ on a :

$$m-1 < k \leq 2m \text{ et } m-2 < k-1 \leq 2m-2$$

c'est à dire que l'on a :

$$m-1 < k \leq 2m-1.$$

Alors le déterminant D est nul

$$D = \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & & & d_{k-m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & & & d_{k-1} \\ 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{m-1} \end{vmatrix}$$

En effet parmi les m premières lignes de D figure la ligne $d_{-1}, d_0, \ldots, d_{m-1}$. On la retranche de la dernière ligne. Il vient :

$$D = (-1)^{m+1} d_{-1} H_m^{(k-2m+1)} = 0.$$

Par conséquent, le coefficient du terme en $t^{m-1}$ de $\tilde{Q}_{k,m}(t)$ est nul et donc $\tilde{Q}_{k,m}(t) \equiv \tilde{Q}_{k-1,m-1}(t)$ du fait de l'identité des coefficients de $x^j$ de $P_{k,m}(x)$ et $x\, P_{k-1,m-1}(x)$.

Donc les polynômes $\tilde{Q}$ sont tous identiques sur les côtés Nord, Nord-Ouest et Ouest des blocs $\tilde{Q}_2$.

cqfd.

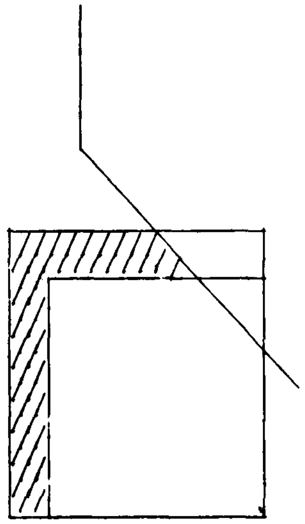
## Remarque 6.6.

Nous définissons une table $\tilde{Q}$ comme étant la table qui est associée à la table P de telle sorte qu'à tout polynôme $P_m^{(k-2m)}(x)$ on associe le polynôme $\tilde{Q} = c^*(\frac{\tilde{P}_m^{(k-2m)}(x) - \tilde{P}_m^{(k-2m)}(t)}{x-t})$ si $k \leq m-1$ et le polynôme

$$\tilde{Q} = t^{m-1}\, c(\frac{P_m^{(k-2m)}(x) - P_m^{(k-2m)}(t^{-1})}{x - t^{-1}}) \text{ si } k > m-1.$$

Les blocs $\tilde{Q}$ ont la même position que les blocs P.

Alors les a) et b) de la propriété 6.7 sont vrais pour les blocs $\tilde{Q}$.
Par contre, si on a un bloc P qui est coupé sur son côté Nord par la diagonale O correspondant à la fonctionnelle $d^{(o)}$, la propriété 6.7 n'est vraie que pour les seuls polynômes $\tilde{Q}$ appartenant à la table $\tilde{Q}_2$.



Ils sont en général différents des polynômes $\tilde{Q}$ qui sont situés hors de la table $\tilde{Q}_2$ sur le côté Ouest, Nord-Ouest et Nord du bloc $\tilde{Q}$.

Dans le théorème 6.1 nous avons trouvé que dans un bloc $P_2$, si $P_{k,m}(x)$ est orthogonal singulier par rapport à $d^{(k-2m)}$, alors l'approximant de Padé en deux points est :

$$f_{k,m}(x) = \frac{\tilde{w}^{(k-2m)}_{m-h-1}(x)\ \tilde{Q}^{(k-2m,0)}_{h+1}(x)}{\tilde{w}^{(k-2m)}_{m-h-1}(x)\ \tilde{P}^{(k-2m)}_{h+1}(x)} \equiv \frac{\tilde{Q}^{(k-2m,0)}_{h+1}(x)}{\tilde{P}^{(k-2m)}_{h+1}(x)}$$

avec $H^{(k-2m)}_{h+1} \neq 0$ et $H^{(k-2m)}_{h+j+1} = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le m-h-1$.

Nous allons chercher à quelle condition $\dfrac{\tilde{Q}^{(k-2m,0)}_{h+1}(x)}{\tilde{P}^{(k-2m)}_{h+1}(x)}$ représente un approximant de Padé en deux points $f_{k',h+1}(x)$.

__Propriété 6.8.__

*Si* $k' = k-2m+2h+2$ et *si* $k' \ge 0$, *alors* $\dfrac{\tilde{Q}^{(k-2m,0)}_{h+1}(x)}{\tilde{P}^{(k-2m)}_{h+1}(x)}$ *est l'approximant de Padé en deux points* $f_{k',h+1}(x)$ *et* $f_{k,m}(x) \equiv f_{k',h+1}(x)$.

Démonstration.

i) Considérons d'abord le dénominateur.
$P^{(k-2m)}_{h+1}(x)$ est un polynôme de degré $(h+1)$, orthogonal régulier par rapport à la fonctionnelle $d^{(k-2m)}$. On désire avoir :

$$P^{(k-2m)}_{h+1}(x) \equiv P_{k',h+1}(x) \equiv P^{(k'-2h+2)}_{h+1}(x).$$

On doit donc avoir $k' = k-2m+2h+2$.

Pour que $P_{k',h+1}(x)$ appartienne à la table $P_2$, $k'$ doit satisfaire la relation $0 \le k' \le 2h+2$.

$k' \le 2+2h$ est toujours satisfait puisque $k \le 2m$.

Il reste donc $k' \ge 0$.

$k' < 0$ signifie que le bloc $P_2$ est coupé par l'antidiagonale $k=0$ de la table $P_2$.

ii) Dans le cas où $k' = k-2m+2h+2 \geq 0$, montrons que

$$\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(x) \equiv \tilde{Q}_{k',h+1}(x).$$

a) <u>Si $0 \leq k \leq m-1$.</u>

On a : $$\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(t) = c^*\left(\frac{\tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(x) - \tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

Or :

$$\tilde{Q}_{k',h+1}(x) = c^*\left(\frac{\tilde{P}_{k',h+1}(x) - \tilde{P}_{k',h+1}(t)}{x-t}\right)$$

Par conséquent :

$$\tilde{Q}_{k',h+1}(x) \equiv \tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(x).$$

On a alors :

$$f_{k,m}(x) \equiv f_{k',h+1}(x).$$

b) <u>Si $m-1 < k \leq 2m$ et $h < k' \leq 2h+2$.</u>

On a : $$Q_{h+1}^{(k-2m,0)}(t) = c\left(\frac{P_{h+1}^{(k-2m)}(x) - P_{h+1}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

Or:

$$Q_{k',h+1}(t) = c\left(\frac{P_{k',h+1}(x) - P_{k',h+1}(t)}{x-t}\right)$$

Par conséquent $Q_{k',h+1}(t) = Q_{h+1}^{(k-2m,0)}(t)$ et également leurs transformés

$$\tilde{Q}_{k',h+1}(t) = \tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(t).$$

On a encore :

$$f_{k,m}(x) \equiv f_{k',h+1}(x).$$

c) <u>Si $m-1 < k \leq 2m$ et $0 \leq k' \leq h$.</u>

On a dans ce cas :

$$Q_{h+1}^{(k-2m,0)}(t) = c\left(\frac{P_{h+1}^{(k-2m)}(x) - P_{h+1}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

et

$$\tilde{Q}_{k',h+1}(t) = c^*\left(\frac{\mathcal{P}_{k',h+1}(x) - \mathcal{P}_{k',h+1}(t)}{x-t}\right)$$

1. <u>Si $P_{k',h+1}(x)$ est à l'ouest ou au nord-ouest du bloc $P$.</u>

Dans ce cas on sait, d'après la propriété 6.7, que tous les polynômes $\mathcal{Q}$ qui sont à l'ouest ou au nord-ouest du bloc $\mathcal{Q}_2$ sont identiques. Les polynômes P sont également tous identiques à l'ouest et au nord-ouest du bloc $P_2$. En particulier :

$$P_{h+1}^{(k-2m)}(x) \equiv P_{h+1}^{(-h-1)}(x) \text{ où } P_{h+1}^{(-h-1)}(x) = P_{h+1,h+1}(x)$$

et par conséquent

$$Q_{h+1}^{(k-2m,0)}(t) = Q_{h+1,h+1}(t)$$

et donc

$$\mathcal{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(t) \equiv \mathcal{Q}_{k',h+1}(t).$$

D'où le résultat.

On remarquera que la relation $\mathcal{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(t) \equiv \mathcal{Q}_{h+1,h+1}(t)$ reste valable même si $P_{h+1}^{(k-2m)}(x)$ est en dehors de la table $P_2$.

2. Si $P_{k',h+1}(x)$ est au nord du bloc P.

Nous avons $P_{h+1}^{(k-2m)}(x) \equiv x\, P_h^{(k-2m+1)}(x)$, ce qui entraîne $H_{h+1}^{(k'-2h-1)} = 0$

Nous allons montrer que $\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(x) \equiv \tilde{Q}_h^{(k-2m+1,0)}(x)$.

$$\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(x) = \frac{1}{H_{h+1}^{(k'-2h-2)}} \begin{vmatrix} d_{k'-2h-2} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k'-h-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k'-h-2} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k'-1} \\ 0 & d_0 t^h & d_0 t^{h-1} + d_1 t^h & \cdots & \sum_{i=0}^{h} d_i t^i \end{vmatrix}$$

$$\tilde{Q}_h^{(k-2m+1,0)}(x) = \frac{1}{H_h^{(k'-2h-1)}} \begin{vmatrix} d_{k'-2h-1} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k'-h-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k'-h-2} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k'-2} \\ 0 & d_0 t^{h-1} & d_0 t^{h-2} + d_1 t^{h-1} & \cdots & \sum_{i=0}^{h-1} d_i t^i \end{vmatrix}$$

Puisque $P_{k',h+1}(x)$ est au nord d'un bloc on a :

$$H_{h+1}^{(k'-2h-2)} \neq 0,\ H_{h+1+j}^{(k'-2h-2)} = 0$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le 2\,(m-h-1)$ au moins, car $P_{k,m}(x)$ est orthogonal singulier.

En particulier, si on prend $j = m-h-1$ on a $H_m^{(k'-2h-2)} = 0$.

D'autre part $m-1 < k \le 2m$ entraine que $2m-k \le m$, et $2m-k = 2h+2-k'$ et $k' \le h$ entrainent que $2m-k \ge h+2$.

Par conséquent $\quad H_{2m-k}^{(k'-2h-2)} = H_{2h+2-k'}^{(k'-2h-2)} = 0.$

Alors :

$$\begin{vmatrix} d_{k'-2h-2} & \cdots & d_{k'-h-1} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k'-h-2} & \cdots & d_{k'-1} \\ d-1 & d_0 \;\cdots & d_h \end{vmatrix} = 0$$

sinon d'après le corollaire 1.1 on aurait $H_{2h+2-k'}^{(k'-2h-2)} \neq 0$.

Comme $H_{h+1}^{(k'-2h-1)} = 0$ on a :

$$\begin{vmatrix} d_{k'-2h-2} & \cdots & d_{k'-h-1} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k'-h-2} & \cdots & d_{k'-1} \\ 0 & d_0 \;\cdots & d_h \end{vmatrix} = 0$$

ce qui entraine que :

$$\mathcal{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(x) = \frac{1}{H_{h+1}^{(k'-2h-2)}} \begin{vmatrix} d_{k'-2h-2} & & & & \cdots & d_{k'-h-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ d_{k'-h-2} & & & & \cdots & d_{k'-1} \\ 0 & 0 & d_0 t^{h-1} & d_0 t^{h-2} + d_1 t^{h-1} & \cdots & \sum_{i=o}^{h-1} d_i t^i \end{vmatrix}$$

**L'identité de $P_{h+1}^{(k-2m)}(x)$ et $x\ P_h^{(k-2m+1)}(x)$ conduit à l'identité des coefficients des termes $x^j$.**

Par conséquent :

$$\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(x) \equiv \tilde{Q}_{h}^{(k-2m+1,0)}(x).$$

Cette relation reste vraie même si $P_{h+1}^{(k-2m)}(x)$ est en dehors de la table $P_2$.

Par conséquent on remonte avec cette relation jusqu'à l'angle Nord-Ouest du bloc $\tilde{Q}$.
D'après la remarque faite à la fin du c) 1) de cette propriété, on a identité entre $\tilde{Q}^{(\cdot,o)}$ et $\tilde{Q}$ le long du côté ouest.
Puis, on applique le b) de la propriété 6.7 qui est également valable en dehors de la table $\tilde{Q}_2$. Sur les côtés Ouest, Nord-Ouest et Nord du bloc il y a identité de tous les polynômes $\tilde{Q}$.

Par conséquent :

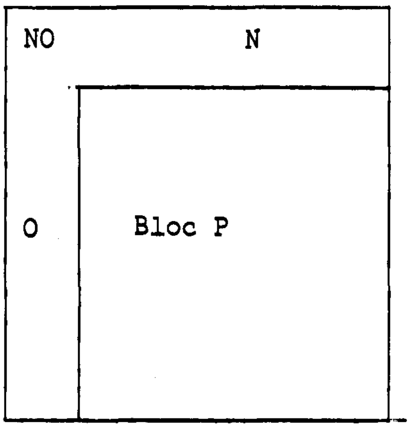
$$\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,o)}(x) \equiv \tilde{Q}_{k',h+1}(x).$$

D'où le résultat.

cqfd.

## *Définition 6.2.*

*On appellera bloc $F_2$ la réunion de la partie de la table $F_2$ qui correspond au bloc $P_2$ et des parties qui correspondent aux côtés Nord, Nord-Ouest et Ouest du bloc $P_2$.*



<u>*Corollaire 6.1.*</u>

*Dans un bloc $F_2$, tous les approximants de Padé en deux points situés au-dessus de l'antidiagonale qui correspond à l'antidiagonale principale du bloc P sont identiques, lorsqu'on les a mis sous forme irréductible.*

<u>Démonstration.</u>

Le théorème 6.1 et les propriétés 2.1, 6.7 et 6.8 démontrent ce corollaire même si le polynôme $P_{h+1}^{(k-2m)}$ est en dehors de la table $P_2$, car la démonstration du c) de la propriété 6.8 montre que l'on a encore $\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(x)$ identique à un polynôme $\tilde{Q}$ du côté ouest.

<u>cqfd.</u>

Les propriétés 6.5 et 6.6 ainsi que la remarque 6.5 permettent de compléter ce corollaire en prenant les éléments qui sont dans la partie qui correspond aux polynômes $P_m^{(k-2m)}$ quasi-orthogonaux.

<u>*Corollaire 6.2.*</u>

*Si un bloc P est entièrement dans la partie* $m < k$, *ou si un bloc P est situé entièrement dans la partie* $k \leq m-1$ *tel que tout son côté ouest ne soit pas hors de la table $P_2$, alors toutes les fractions rationnelles du bloc $F_2$ sont identiques lorsqu'on les a mises sous forme irréductible.*

<u>Démonstration.</u>

C'est une conséquence immédiate des propriétés 6.5 et 6.8.

<u>cqfd.</u>

<u>*Corollaire 6.3.*</u>

*Dans les conditions de la propriété 6.6 les fractions rationnelles qui correspondent au côté Nord, Nord-Ouest et Ouest du bloc $P_2$, ainsi que celles qui se trouvent dans la partie du bloc $F_2$ qui correspond à la partie simplement hachurée du bloc P présenté dans la remarque 6.5, sont toutes identiques lorsqu'on les a mises sous forme irréductible.*

Nous démontrons le corollaire suivant qui nous sera fort utile pour la section suivante.

<u>*Corollaire 6.4.*</u>

*Si on reprend le bloc $P_2$ de la propriété 6.7 et si* $k_1 \leq m'-1 < m' \leq k_2$, *alors pour tout polynôme* $P_{k,m}(x)$ *appartenant à la table $P_2$ et situé au nord, nord-ouest ou ouest de ce bloc $P_2$ et tel que* $m \leq k_2$, *on a :*

$$c^*\left(\frac{\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{P}_{k,m}(t)}{x-t}\right) = \tilde{Q}_{k,m}(t)$$

*et*

$$c\left(\frac{P_{k,m}(x) - P_{k,m}(t)}{x-t}\right) = Q_{k,m}(t).$$

<u>Démonstration.</u>

On a toujours un polynôme du côté ouest et Nord-ouest dans chacune des deux demi-tables.
La propriété 6.7 démontre qu'on a toujours la première relation sur l'ensemble des côtés ouest, Nord-ouest et Nord du bloc $P_2$.

Les polynômes $P_{k,m}(x)$ sont identiques sur le côté Ouest et Nord-ouest du bloc. Donc la seconde relation est vérifiée pour ce côté.

Enfin, la propriété 6.6 démontre qu'on a la seconde relation sur le côté Nord pourvu que $m \leq k_2$. Il suffit de prendre $w_{m-h-1}^{(k-2m)}(x) = x^{m-h-1}$.

<u>cqfd</u>.

## 6.3 RELATIONS DE RECURRENCE.

La table $P_2$ est une restriction de la table P. On a donc, dans la table $P_2$, la même relation de récurrence entre trois polynômes orthogonaux réguliers consécutifs, que dans la table P. C'est à dire :

$$P_m^{(k-2m)}(x) = (x\ \omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x) + B_m^{(k-2m)})\ P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x) + C_m^{(k-2m)}\ P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x)$$

Nous allons montrer que les polynômes $Q_{k,m}(x)$ satisfont aussi la même relation de récurrence avec les mêmes coefficients.

Nous poserons :

$$k-2m = k' - 2pr(m) = k'' - 2pr(pr(m))$$

ce qui signifie que les polynômes $P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)$ et $P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x)$ sont respectivement sur les antidiagonales k' et k''.

<u>*Théorème 6.2.*</u>

*Les polynômes $P^{(k-2m)}(x)$ de la table $P_2$ et leurs associés de la table $Q_2$ satisfont la même relation de récurrence*

$$P_{k,m}(x) = (x\ \omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x) + B_m^{(k-2m)})\ P_{k',pr(m)}(x) + C_m^{(k-2m)}\ P_{k'',pr(pr(m))}(x)$$

$$Q_{k,m}(x) = (x\ \omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x) + B_m^{(k-2m)})\ Q_{k',pr(m)}(x) + C_m^{(k-2m)}\ Q_{k'',pr(pr(m))}(x)$$

<u>Démonstration.</u>

i) <u>Si $pr(pr(m)) \le k'' \le 2pr(pr(m))$.</u>

Les trois polynômes sont dans la moitié inférieure de la table $P_2$, qui est le champ d'application de la fonctionnelle c.

On calcule $\dfrac{P_m^{(k-2m)}(x) - P_m^{(k-2m)}(t)}{x-t}$ et on applique la fonctionnelle c.

On obtient alors :

$$Q_{k,m}(t) = c\left(\frac{x\,\omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x)\,P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x) - t\,\omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(t)\,P_{pr(m)}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

$$+ B_m^{(k-2m)}\,Q_{k',pr(m)}(t) + C_m^{(k-2m)}\,Q_{k'',pr(pr(m))}(t)$$

$$= c\left(\frac{x\,\omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x) - t\,\omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\,P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$$+ \left(t\,\omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(t) + B_m^{(k-2m)}\right) Q_{k',pr(m)}(t) + C_m^{(k-2m)}\,Q_{k'',pr(pr(m))}(t)$$

On change c en $d^{(k-2m)}$ en introduisant $x^{2m-k}$ à l'intérieur de l'expression
Puisque $P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x)$ est dans la demi-table inférieure on a :

$$k' \geq pr(m) + 1.$$

D'autre part $x^{2m-k}\left(\dfrac{x\,\omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x) - t\,\omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$ est un polynôme en x de degré $3m-1-k-pr(m)$.

Or $2m-k = 2pr(m)-k'$.

On trouve $3m-1-k-pr(m) \leq m-2$ en utilisant $k' \geq pr(m)+1$.

Par conséquent :

$$d^{(k-2m)}\left(x^{2m-k}\left(\frac{x\,\omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x) - t\,\omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)\;P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right) = 0$$

d'après la propriété 1.17 ii).

La relation de récurrence est donc la même pour $Q_{k,m}(x)$ dans la demi-table inférieure.

ii) <u>Si $0 \leq k'' < k' < k \leq m-1$</u>.

Les trois polynômes sont dans la moitié supérieure de la table $P_2$ qui est le champ d'application de la fonctionnelle $c^*$.

Nous avons :

$$\tilde{P}_m^{(k-2m)}(x) = (\tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(x) + x^{m-pr(m)} B_m^{(k-2m)}) \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x) +$$

$$x^{m-pr(pr(m))} C_m^{(k-2m)} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)$$

on applique la fonctionnelle $c^*$ à $\dfrac{\tilde{P}_m^{(k-2m)}(x) - \tilde{P}_m^{(k-2m)}(t)}{x-t}$.

On obtient :

$$\tilde{Q}_{k,m}(x) = (\tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t) + t^{m-pr(m)} B_m^{(k-2m)}) \tilde{Q}_{k',pr(m)}(t)$$

$$+ C_m^{(k-2m)} t^{m-pr(pr(m))} \tilde{Q}_{k'',pr(pr(m))}(t)$$

$$+ B_m^{(k-2m)} c^*(\frac{x^{m-pr(m)} - t^{m-pr(m)}}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x))$$

$$+ C_m^{(k-2m)} c^*(\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x))$$

$$+ c^*(\frac{\tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(x) - \tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t)}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x))$$

a). On suppose que $P_{pr(m)}^{(k-2m)}(0) \neq 0$.

Par conséquent si $P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)$ est au bord d'un bloc, il est à l'ouest de ce bloc $P_2$.

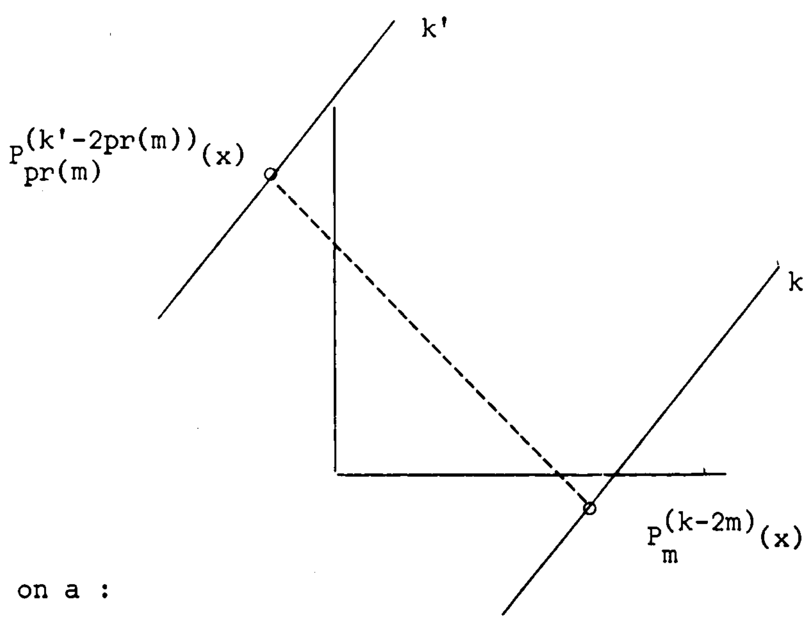
$\tilde{P}_{pr(m)}^{(k-2m)} = \tilde{P}_{pr(m)}^{(k'-2pr(m))}(x)$ est orthogonal régulier par rapport à la fonctionnelle linéaire $\gamma^{(k'-1)}$ avec :

$$\gamma^{(k'-1)}(x^i) = d_{k'-1-i}, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

$$c^*\left(\frac{x^{m-pr(m)} - t^{m-pr(m)}}{x-t} \tilde{P}_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$$= -\gamma^{(k'-1)} \left(x^{k'} \frac{x^{m-pr(m)} - t^{m-pr(m)}}{x-t} \tilde{P}_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$x^{k'}\left(\frac{x^{m-pr(m)} - t^{m-pr(m)}}{x-t}\right)$ est un polynôme en x de degré $k'+m-1-pr(m)$.




Dans ce cas on a :

$$k' \leq pr(m) - 1 - (m-pr(m)).$$

Par conséquent $k'+m-1-pr(m) \leq pr(m)-2$.

Alors

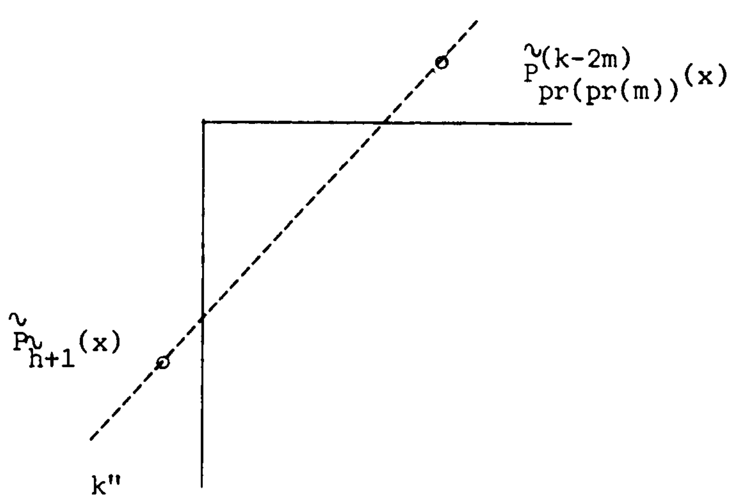
$$c^*\left(\frac{x^{m-pr(m)} - t^{m-pr(m)}}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)\right) = 0$$

ainsi que

$$c^*\left(\frac{\tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(x) - \tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t)}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)\right)$$

à cause de l'orthogonalité de $\tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)$.

D'autre part, si $P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)$ est au bord d'un bloc, il ne peut être qu'au nord de ce bloc.




$\tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x) = \tilde{P}_{\tilde{h}+1}(x)$ qui est sur la même antidiagonale k".

$\tilde{P}_{\tilde{h}+1}(x)$ est orthogonal par rapport à $\gamma^{(k''-1)}$ et on a :

$$\gamma^{(k''-1)}(x^j \tilde{P}_{\tilde{h}+1}(x)) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq pr(pr(m))-1$$

car le bloc W est décalé d'une rangée vers le haut par rapport au bloc P.

$$c^*\left(\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t}\,\tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)\right)$$

$$= -\gamma^{(k''-1)}\left(x^{k''}\,\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t}\,\tilde{P}_{\tilde{h}+1}(x)\right) = 0$$

car $x^{k''}\left(\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t}\right)$ est un polynôme en x de degré $k''+m-1-pr(pr(m))$ et par un raisonnement analogue à celui fait pour $k'$, on a :

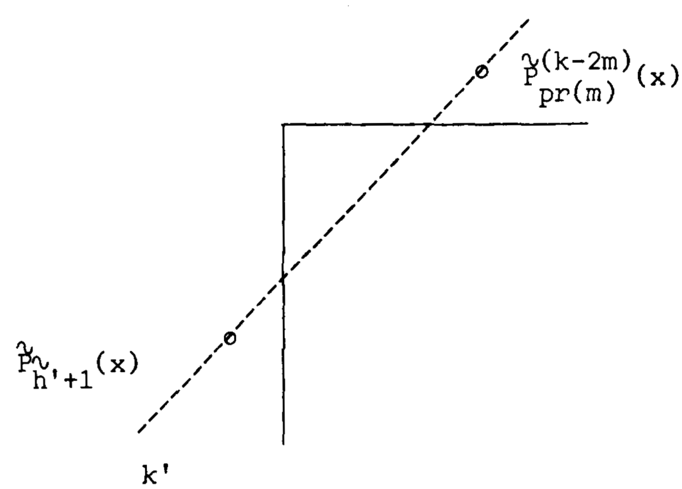
$$k'' \leq pr(pr(m)-1-(m-pr(pr(m)))$$

Donc $k''+m-1-pr(pr(m)) \leq pr(pr(m)) - 2$.
D'où le résultat.

b). <u>On suppose que $P^{(k-2m)}_{pr(m)}(o) = 0$.</u>

Donc $P^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)$ est nord d'un bloc $P_2$.

On a encore $$\tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x) = \tilde{P}_{\tilde{h}'+1}(x)$$




$\tilde{P}_{\tilde{h}+1}(x)$ est orthogonal par rapport à $\gamma^{(k'-1)}$ et $\gamma^{(k'-1)}(x^j\,\tilde{P}_{\tilde{h}'+1}(x)) = 0$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le pr(m)-1$.

Comme précédemment on trouve $k'+m-1-pr(m) \le pr(m)-2$.

Donc :

$$c^*\left(\frac{x^{m-pr(m)} - t^{m-pr(m)}}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)\right) = 0$$

ainsi que :

$$c^*\left(\frac{\tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(x) - \tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t)}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)\right).$$

D'autre part, si $P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)$ est au bord d'un bloc, il ne peut être qu'à l'ouest ou au nord-ouest.

On a :

$$c^*\left(\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)\right)$$

$$= - \gamma^{(k''-1)}\left(x^{k''} \frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)\right)$$

$x^{k''}\left(\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t}\right)$ est un polynôme en x de degré $k''+m-1-pr(pr(m))$.

Or comme précédemment on a :

$$k''+m-1-pr(pr(m)) \le pr(pr(m)) - 2.$$

Par conséquent, l'expression ci-dessus est nulle à cause de l'orthogonalité de $\tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)$.

iii) <u>Si $0 \le k'' \le pr(pr(m))-1$ et $pr(m) \le k' < k \le 2m$.</u>

$P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)$ est dans la demi-table supérieure et $P^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)$ et $P^{(k-2m)}_{m}(x)$ sont dans la demi-table inférieure.

On a dans ce cas :

$$Q_{k,m}(x) = c(\frac{x\ \omega^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)} - t\ \omega^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t)}{x-t}\ P^{(k-2m)}_{pr(m)}(x))$$

$$+ (t\ \omega^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t) + B^{(k-2m)}_m)\ Q_{k',pr(m)}(t) + C^{(k-2m)}_m\ c(\frac{P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x) - P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(t)}{x-t})$$

a). <u>Si $k' \geq pr(m)+1$</u>.

$P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)$ est au bord d'un bloc dont au moins une rangée est dans la demi-table inférieure.

On sait d'après le i) que :

$$c(\frac{x\ \omega^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(x) - t\ \omega^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t)}{x-t}\ P^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)) = 0$$

D'autre part, d'après le corollaire 6.4, le transformé de $c(\frac{P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x) - P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(t)}{x-t})$ est égal à $\mathcal{Q}_{k'',pr(pr(m))}(t)$.

Donc on a encore la même relation de récurrence.

b). <u>Si $k' = pr(m)$</u>.

Alors :

$$d^{(k-2m)}(x^{2m-k}\ (\frac{x\ \omega^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(x) - t\ \omega^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t)}{x-t})\ P^{(k-2m)}_{pr(m)}(x))$$

$$= d^{(k-2m)}\ (x^{m-1}\ P^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)) \neq 0.$$

On a :

$$C_m^{(k-2m)} = - \frac{d^{(k-2m)}\,(P_{pr(m)}^{(k-2m)}\;P_{m-1}^{(k-2m)})}{d^{(k-2m)}\,(P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}\;P_{pr(m)-1}^{(k-2m)})} = - \frac{d^{(k-2m)}\,(P_{pr(m)}^{(k-2m)}\;x^{m-1})}{d^{(k-2m)}(P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}\;x^{pr(m)-1})}$$

Par conséquent on obtient :

$$G(t) = c\left(\frac{x\omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x) - t\omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\;P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$$+ C_m^{(k-2m)}\;c\left(\frac{P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x) - P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

$$= C_m^{(k-2m)}\left[c\left(\frac{P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x) - P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right) - d^{(k-2m)}(x^{pr(m)-1}\;P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x))\right]$$

$$= C_m^{(k-2m)}\left[c\left(\frac{P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x) - P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right) - d^{(-1)}\;(P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x))\right]$$

$$d^{(-1)}(P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x)) = \frac{1}{H_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}}\begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & d_{k-2m+pr(pr(m))} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-2m+pr(pr(m))-1} & \cdots & d_{k-2m+2pr(pr(m))-1} \\ d_{-1} & \cdots & d_{pr(pr(m))-1} \end{vmatrix}$$

Alors on a, si $\tilde{G}(t) = t^{pr(pr(m))-1}\;G(\frac{1}{t})$.

$$\tilde{G}(t) = \frac{1}{H^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & d_{k-2m+pr(pr(m))} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{k-2m+pr(pr(m))-1} & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & d_{k-2m+2pr(pr(m))-1} \\ -d_{-1}t^{pr(pr(m))-1} & 0 & d_0 t^{pr(pr(m))-2} \cdots & \sum\limits_{i=o}^{pr(pr(m))-2} d_i t^i \end{vmatrix}$$

Puisqu'on a un bloc :

$$H^{(k-2m)}_{pr(pr(m))} \neq 0,\ H^{(k-2m)}_{pr(m)} \neq 0 \text{ et } H^{(k-2m)}_{i} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N},$$

$pr(pr(m))+1 \leq i \leq pr(m)-1$.

Donc d'après le corollaire 1.1, on a :

$$\begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots\cdots & d_{k-2m+pr(pr(m))} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-2m+pr(pr(m))-1} & \cdots\cdots & d_{k-2m+2pr(pr(m))-1} \\ d_i & \cdots\cdots & d_{i+pr(pr(m))} \end{vmatrix} = 0$$

pour $i \in Z$, $k-2m+pr(pr(m)) \leq i \leq -2$.

Parmi les lignes de :

$$\begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots\cdots & d_{k-2m+pr(pr(m))} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{-2} & \cdots\cdots & d_{-2+pr(pr(m))} \end{vmatrix}$$

On prend la somme des $pr(pr(m))-1$ dernières lignes que l'on multiplie respectivement par $1, t, t^2, \dots, t^{pr(pr(m))-2}$.

On retranche cette somme de la dernière ligne de $\tilde{G}(t)$. On obtient alors :

$$\frac{-1}{H^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots\cdots\cdots & d_{k-2m+pr(pr(m))} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-2m+pr(pr(m))-1} & \cdots\cdots\cdots & d_{k-2m+2pr(pr(m))-1} \\ \sum_{i=o}^{pr(pr(m))-1} d_{i-pr(pr(m))} t^i \quad \cdots\cdots & d_{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Or cette expression est celle de $\tilde{Q}_{k'',pr(pr(m))}(t)$.

iv) <u>Si $0 \le k'' < k' \le pr(m)-1$ et $m \le k \le 2m$.</u>

$P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)$ et $P^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)$ sont dans la demi-table supérieure et $P^{(k-2m)}_m(x)$ est dans la demi-table inférieure.

a). <u>Si $k = m$.</u>

On utilise la relation de récurrence donnant $\tilde{P}^{(k-2m)}_m(x)$.
On obtient donc :

$$c^*\left(\frac{\tilde{P}^{(k-2m)}_m(x) - \tilde{P}^{(k-2m)}_m(t)}{x-t}\right) = (\tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t) + t^{m-pr(m)}\, B^{(k-2m)}_m)\tilde{Q}^{(k-2m)}_{pr(m)}(t)$$

$$+ C^{(k-2m)}_m\, t^{m-pr(pr(m))}\, \tilde{Q}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(t)$$

$$+ c^*\left(\frac{\tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(x) - \tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t)}{x-t}\, \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)\right)$$

$$+ B^{(k-2m)}_m\, c^*\left(\frac{x^{m-pr(m)} - t^{m-pr(m)}}{x-t}\, \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)\right)$$

$$+ C_m^{(k-2m)} \; c^*\left(\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t} \; \tilde{P}_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x)\right)$$

On a d'abord :

$$c^*\left(\frac{\tilde{P}_m^{(k-2m)}(x) - \tilde{P}_m^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

$$= -\frac{1}{H_m^{(-m)}} \begin{vmatrix} d_{-m} & \cdots\cdots & d_0 \\ \vdots & & \vdots \\ d_{-1} & \cdots\cdots & d_{m-1} \\ \sum_{i=o}^{m-1} d_{i-m} t^i & \cdots\cdots \; d_{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

On retranche de la dernière ligne la somme des m premières lignes respectivement multipliées par $1, t, \ldots, t^{m-1}$.
On obtient alors l'expression de $\tilde{Q}_{m,m}(t)$.

1. Si $P_{pr(m)}^{(k-2m)}(0) \neq 0$

alors $\tilde{P}_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)$ est orthogonal par rapport à $\gamma^{(k'-1)}$

$$c^*\left(\frac{x^{m-pr(m)} - t^{m-pr(m)}}{x-t} \; \tilde{P}_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

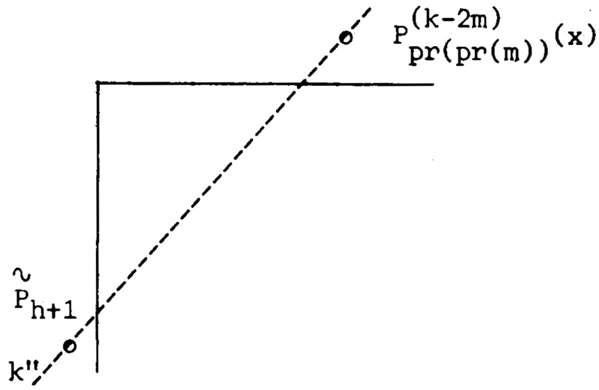
$$= -\gamma^{(k'-1)}\left(x^{k'} \; \frac{x^{m-pr(m)} - t^{m-pr(m)}}{x-t} \; \tilde{P}_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right) = 0$$

car $x^{k'}\left(\frac{x^{m-pr(m)} - t^{m-pr(m)}}{x-t}\right)$ est un polynôme en x de degré $k'+m-1-pr(m) = pr(m)-1$.

On a donc aussi :

$$c^*\left(\frac{\tilde{\omega}_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x) - \tilde{\omega}_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(t)}{x-t} \; \tilde{P}_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right) = 0$$

Alors si $P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)$ est au bord d'un bloc, il ne peut être qu'au nord de ce bloc.



On a :

$$\tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x) = \tilde{\tilde{P}}_{h+1}(x).$$

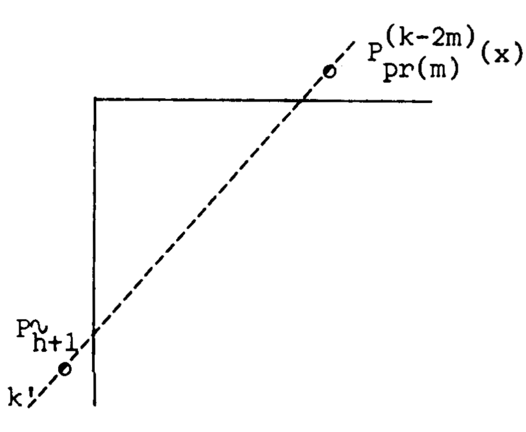
Donc :

$$c^*\left(\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t}\,\tilde{\tilde{P}}_{h+1}(x)\right)$$

$$= -\gamma^{(k''-1)}\left(x^{k''}\,\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t}\,\tilde{\tilde{P}}_{h+1}(x)\right) = 0$$

car $x^{k''}\left(\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t}\right)$ est un polynôme en x de degré $k''+m-1-pr(pr(m)) = pr(pr(m))-1$ et $\gamma^{(k''-1)}(x^j\,\tilde{\tilde{P}}_{h+1}) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le pr(pr(m))-1$ puisque le bloc W est décalé d'une rangée vers le haut. Par conséquent les polynômes Q satisfont bien la même relation de récurrence que les polynômes $P_{k,m}(x)$.

2. <u>Si $P^{(k-2m)}_{pr(m)}(o) = 0$.</u>



Alors $\tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x) = \tilde{P}_{\tilde{h}'+1}(x)$.

On a encore

$$c^*(\frac{x^{m-pr(m)} - t^{m-pr(m)}}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(m)}(x)) = 0$$

ainsi que

$$c^*(\frac{\tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-pr(m)}(x) - \tilde{\omega}^{(k-2m)}_{m-pr(m)}(t)}{x-t} P^{(k-2m)}_{pr(m)}(x))$$

De même

$$c^*(\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x))$$

$$= -\gamma^{(k''-1)}(x^{k''} \frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t} \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)) = 0$$

car $\tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(o) \neq 0$ ce qui entraine que $\tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)$ est orthogonal par rapport à $\gamma^{(k''-1)}$ et $x^{k''}(\frac{x^{m-pr(pr(m))} - t^{m-pr(pr(m))}}{x-t})$ est un polynôme en x de degré $k''+m-1-pr(pr(m)) = pr(pr(m))-1$.

b). <u>Si $k \geq m+1$.</u>

On utilise la relation de récurrence des $P^{(k-2m)}(x)$. On obtient en appliquant la fonctionnelle c :

$$Q_{k,m}(t) = c(\frac{x\omega^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(x) - t\,\omega^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t)}{x-t} P^{(k-2m)}_{pr(m)}(x))$$

$$+ (t\,\omega^{(k-2m)}_{m-1-pr(m)}(t) + B^{(k-2m)}_m)\; c(\frac{P^{(k-2m)}_{pr(m)}(x) - P^{(k-2m)}_{pr(m)}(t)}{x-t})$$

$$+ C^{(k-2m)}_m\; c(\frac{P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x) - P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(t)}{x-t})$$

D'après le corollaire 6.4

$$c\left(\frac{P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x) - P_{pr(m)}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right) = Q_{k',pr(m)}(t)$$

Considérons l'expression :

$$G(t) = c\left(\frac{x\ \omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x) - t\ \omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\ P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$$= d^{(k-2m)}\left(x^{2m-k}\ \frac{x\ \omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)} - t\ \omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\ P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

Posons $x\ \omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x) = \sum_{j=1}^{m-pr(m)} \beta_j x^j$ avec $\beta_{m-pr(m)} = 1$.

Alors :

$$G(t) = d^{(k-2m)}\left(x^{2m-k} \sum_{j=1}^{m-pr(m)} \beta_j\ \frac{x^j-t^j}{x-t}\ P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$$= d^{(k-2m)}\left(x^{2m-k} \sum_{j=1}^{m-pr(m)} \beta_j \sum_{s=o}^{j-1} t^s\ x^{j-1-s}\ P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$$= \sum_{s=0}^{m-1-pr(m)} t^s \left(\sum_{j=s+1}^{m-pr(m)} \beta_j\ d^{(k-2m)}\left(x^{2m-k+j-1-s}\ P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)\right)$$

Or $$d^{(k-2m)}\left(x^{2m-k+j-1-s}\ P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right) = 0$$

pour $2m-k+j-1-s \le m-2$ c'est à dire $j \le s+k-m-1$.

Par conséquent :

$$G(t) = \sum_{s=o}^{m-1-pr(m)} t^s \left( \sum_{j=Sup(s+1,s+k-m)}^{m-pr(m)} \beta_j \; d^{(k-2m)} \left(x^{2m-k+j-1-s} \; P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)\right)$$

$$= \sum_{s=o}^{2m-k-pr(m)} t^s \left( \sum_{j=sup(s+1,s+k-m)}^{m-pr(m)} \beta_j \; d^{(k-2m)} \left(x^{2m-k+j-1-s} \; P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)\right)$$

D'autre part en utilisant la relation de récurrence à trois termes on obtient :

$$P_m^{(k-2m)}(x) = \left(x \; \omega_{m-1-pr(m)}^{(k-2m)}(x) + B_m^{(k-2m)}\right) P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x) + C_m^{(k-2m)} \; P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{m-pr(m)} \beta_j \; x^j \; P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x) + B_m^{(k-2m)} \; P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x) + C_m^{(k-2m)} \; P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x)$$

Or on a :

$$\begin{cases} d^{(k-2m)} \left(x^i \; P_m^{(k-2m)}(x)\right) = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N}, \; 0 \le i \le m-1 \\ d^{(k-2m)} \left(x^i \; P_{pr(m)}^{(k-2m)}\right) = 0 \quad \text{ pour } i \in \mathbb{N}, \; 0 \le i \le m-2 \end{cases}$$

Alors on multiplie les deux membres de la relation de récurrence par $x^{pr(m)-1+i}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le m-1-pr(m)$, puis on applique $d^{(k-2m)}$. On obtient :

$$d^{(k-2m)} \left(x^{pr(m)-1+i} \; P_m^{(k-2m)}(x)\right) = 0$$

$$= \sum_{j=1}^{m-pr(m)} \beta_j \; d^{(k-2m)} \left(x^{pr(m)-1+i+j} \; P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$$+ B_m^{(k-2m)} \; d^{(k-2m)} \left(x^{pr(m)-1+i} \; P_{pr(m)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$$+ C_m^{(k-2m)} \; d^{(k-2m)} \left(x^{pr(m)-1+i} \; P_{pr(pr(m))}^{(k-2m)}(x)\right)$$

$$= \sum_{j=m-pr(m)-i}^{m-pr(m)} \beta_j \, d^{(k-2m)}(x^{pr(m)-1+i+j} \, P^{(k-2m)}_{pr(m)}(x))$$

$$+ \; C^{(k-2m)}_m \, d^{(k-2m)}(x^{pr(m)-1+i} \, P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x)) = 0$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq m-1-pr(m)$.

Or si $m-pr(m)-i = \mathrm{Sup}(s+1, s+k-m-1)$, alors $pr(m)-1+i+j = 2m-k+j-1-s$ et par conséquent :

$$\tilde{G}(t) = \sum_{s=o}^{2m-k-pr(m)} (-t^s) \, C^{(k-2m)}_m \, d^{(k-2m)} \, (x^{2m-k-1-s} \, P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x))$$

et par suite :

$$G(t) = t^{pr(pr(m))-1} \, G(\tfrac{1}{t})$$

$$= - \, C^{(k-2m)}_m \sum_{s=o}^{2m-k-pr(m)} t^{pr(pr(m))-1-s} \, d^{(k-2m)} \, (x^{2m-k-1-s} \, P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x))$$

$$= \frac{-C^{(k-2m)}_m}{H^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & d_{k-2m+pr(pr(m))} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-2m+pr(pr(m))-1} & \cdots & d_{k-2m+2pr(pr(m))-1} \\ \sum\limits_{s=o}^{2m-k-pr(m)} d_{-1-s} t^{pr(pr(m))-s-1} & \cdots & \sum\limits_{s=o}^{2m-k-pr(m)} d_{-1-s-pr(pr(m))} \, t^{pr(pr(m)-1-s} \end{vmatrix}$$

Nous avons aussi

$$t^{pr(pr(m))-1} \, c\left(\frac{P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(x) - P^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}(\frac{1}{t})}{x - \frac{1}{t}}\right) = \tilde{R}(t)$$

$$= \frac{1}{H^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & & d_{k-2m+pr(pr(m))} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{k-2m+pr(pr(m))-1} & \cdots & & d_{k-2m+2pr(pr(m))-1} \\ 0 & d_0 t^{pr(pr(m))-1} & \cdots & \sum_{i=o}^{pr(pr(m))-1} d_i t^i \end{vmatrix}$$

Donc $C_m^{(k-2m)} \tilde{R}(t) + \tilde{G}(t) =$

$$\frac{C_m^{(k-2m)}}{H^{(k-2m)}_{pr(pr(m))}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & & & d_{k-2m+pr(pr(m))} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k-2m+pr(pr(m))-1} & \cdots & & & d_{k-2m+2pr(pr(m))-1} \\ -\sum_{s=o}^{2m-k+pr(m)} d_{-1-s} t^{pr(pr(m))-1-s} & \cdots & 0 & \cdots & \sum_{i=o}^{pr(m)-2m+k+pr(pr(m))-2} d_i t^i \end{vmatrix}$$

Enfin, $H^{(k-2m)}_{pr(pr(m))} \neq 0$, $H^{(k-2m)}_{pr(m)} \neq 0$ et $H_i^{(k-2m)} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $pr(pr(m))+1 \leq i \leq pr(m)-1$.

Donc :

$$\begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & d_{k-2m+pr(pr(m))} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-2m+pr(pr(m))-1} & \cdots & d_{k-2m+2pr(pr(m))-1} \\ d_{k-2m+i} & \cdots & d_{k-2m+pr(pr(m))+i} \end{vmatrix} = 0$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $pr(pr(m)) \leq i \leq pr(m)-2$.

Parmi les lignes de :

$$\begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & d_{k-2m+pr(pr(m))} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-2m+pr(m)-2} & \cdots & d_{k-2m+pr(pr(m))+pr(m)-2} \end{vmatrix} .$$

On prend la somme des pr(m)-2m+k+pr(pr(m))-1 dernières lignes qu'on multiplie respectivement par 1, $t,\ldots,t^{pr(m)-2m+k+pr(pr(m))-2}$. Puis on retranche cette somme de la dernière ligne de l'expression $C_m^{(k-2m)}\ \tilde{R}(t) + \tilde{G}(t)$, ce qui ne modifie pas le résultat.
On obtient alors :

$$C_m^{(k-2m)}\ \tilde{Q}_{k'',pr(pr(m))}(t).$$

Par conséquent, on obtient bien la même relation de récurrence.

cqfd.

<u>*Corollaire 6.5.*</u>

*Si* $P_{m,m}(x)$ *est orthogonal régulier, alors :*

$$Q_{m,m}(t) = c\left(\frac{P_{m,m}(x) - P_{m,m}(t)}{x-t}\right)$$

et

$$\tilde{Q}_{m,m}(t) = c^*\left(\frac{\tilde{P}_{m,m}(x) - \tilde{P}_{m,m}(t)}{x-t}\right).$$

Démonstration.

On prend celle faite dans le théorème 6.2 iv) a).

cqfd.

Nous avons montré dans le chapitre 2 que tout polynôme $P_m^{(n+1)}(x)$ orthogonal régulier de la table P vérifie les deux relations suivantes, pour $m \in \mathbb{N}$, $p_\ell \leq m \leq h_{\ell+1}+1$

$$P_m^{(n+1)}(x) = x^{-1}\,(P_{m+1}^{(n)}(x) + q_{m+1,\ell}^{(n)}\, P_{pr(m+1,n)}^{(n)}(x))$$

$$P_m^{(n+1)}(x) = \omega_{m-pr(m+1,n)}^{(n)}(x)\, P_{pr(m+1,n)}^{(n)}(x) + E_{m+1}^{(n)}\, P_{pr(pr(m+1,n),n+1)}^{(n+1)}(x)$$

Nous montrons dans les deux propriétés qui suivent que, si les trois polynômes qui interviennent dans ces deux relations sont dans la table $P_2$, alors les polynômes $Q_{k,m}(x)$ vérifient les mêmes relations de récurrence.

Nous posons $n = k-1-2m$ et $k+1-2(m+1) = k'-2pr(m+1,n)$.

<u>*Propriété 6.9.*</u>

*Les polynômes* $P_{k,m}(x)$ *et* $Q_{k,m}(x)$ *vérifient la même relation de récurrence*

$$x\, U_{k,m}(x) = U_{k+1,m+1}(x) + q_{m+1,\ell}^{(k-1-2m)}\, U_{k',pr(m+1,n)}(x)$$

*si les trois polynômes qui interviennent sont dans la table* $P_2$ *ou* $Q_2$.

<u>Démonstration.</u>

Nous savons déjà que $P_{k,m}(x)$ vérifie cette relation de récurrence. Montrons que les polynômes $Q_{k,m}(x)$ vérifient la même relation. Examinons d'abord le cas où

**a). $P_{m+1}^{(k-2m+1)}$ est orthogonal régulier.**

**i) <u>Si $pr(m+1,n) \leq k'$.</u>**

Les trois polynômes sont dans la demi-table inférieure et de plus $k \geq m+1$.

On a alors :

$$c\left(x\,\frac{P_m^{(k-2m)}(x) - t\,P_m^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right) = Q_{k+1,m+1}(t) + q_{m+1,\ell}^{(k-2-2m)}\,Q_{k',pr(m+1,n)}(t)$$

$$= c(P_m^{(k-2m)}(x)) + t\,Q_{k,m}(t) = t\,Q_{k,m}(t)$$

car $c(P_m^{(k-2m)}(x)) = d^{(k-2m)}\,(x^{2m-k}\,P_m^{(k-2m)}(x)) = 0$ puisque $k \geq m+1$.

ii) <u>Si les trois polynômes sont dans la demi table supérieure</u>.

On a $k \leq m-1$.

On utilise la relation avec les polynômes transformés, c'est à dire :

$$\tilde{P}_m^{(k-2m)}(x) = \tilde{P}_{m+1}^{(k-1-2m)}(x) + q_{m+1,\ell}^{(k-1-2m)}\,x^{m+1-pr(m+1,n)}\,\tilde{P}_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x)$$

On a donc :

$$\tilde{Q}_{k,m}(t) = \tilde{Q}_{k+1,m+1}(t) + t^{m+1-pr(m+1,n)}\,q_{m+1,\ell}^{(k-1-2m)}\,\tilde{Q}_{k',pr(m+1,n)}(t)$$

$$+ q_{m+1,\ell}^{(k-1-2m)}\,c^*\left(\frac{x^{m+1-pr(m+1,n)} - t^{m+1-pr(m+1,n)}}{x-t}\,\tilde{P}_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x)\right)$$

$$= \tilde{Q}_{k+1,m+1}(t) + t^{m+1-pr(m+1,n)}\,q_{m+1,\ell}^{(k-1-2m)}\,\tilde{Q}_{k',pr(m+1,n)}(t)$$

car le terme qui fait intervenir $c^*$ est égal à :

$$-\gamma^{(k'-1)}\left(x^{k'}\,\frac{x^{m+1-pr(m+1,n)} - t^{m+1-pr(m+1,n)}}{x-t}\,\tilde{P}_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x)\right) = 0$$

d'après la démonstration faite dans le ii) du théorème 6.2.

**iii) Si $P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x)$ est dans la demi-table supérieure et** les deux autres dans la demi-table inférieure.

Alors $k \geq m$ et $k' \leq pr(m+1,n)-1$.

On a en utilisant la relation avec les polynômes $P_{k,m}(x)$ :

$$c\left(x\,\frac{P^{(k-2m)}_m(x) - t\,P^{(k-2m)}_m(t)}{x-t}\right) = Q_{k+1,m+1}(t)$$

$$+\; q^{(k-1-2m)}_{m+1,\ell}\; c\left(\frac{P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x) - P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(t)}{x-t}\right)$$

$$= c(P^{(k-2m)}_m(x)) + t\,Q_{k,m}(t).$$

1. Si $k \geq m+1$.

Un bloc $P_2$ existe entre $P^{(k-1-2m)}_{m+1}(x)$ et $P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x)$.

$c(P^{(k-2m)}_m(x)) = 0$ (voir le cas i)).

D'autre part, $P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x)$ est à l'ouest du bloc $P_2$ et d'après le corollaire 6.4

$$c\left(\frac{P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x) - P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(t)}{x-t}\right) = Q_{k',pr(m+1,n)}(t).$$

D'où le résultat.

2. Si $k = m$.

On multiplie les deux membres de la relation

$$x\,P^{(k-2m)}_m(x) = P^{(k-1-2m)}_{m+1}(x) + q^{(k-1-2m)}_{m+1,\ell}\;P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x)$$

par $x^m$ et on applique $d^{(k-1-2m)}$. On obtient :

$$q_{m+1,\ell}^{(k-1-2m)} = \frac{d^{(k-2m)}(x^m P_m^{(k-2m)}(x))}{d^{(k-1-2m)}(x^m P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x)}$$

On a alors :

$$q_{m+1,\ell}^{(k-1-2m)} \; c(\frac{P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x) - P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(t)}{x-t}) - c(P_m^{(k-2m)}(x))$$

$$= q_{m+1,\ell}^{(k-1-2m)} \left[ c(\frac{P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x) - P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(t)}{x-t}) - d^{(k-1-2m)} \; (x^m P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x)) \right]$$

$$= q_{m+1,\ell}^{(k-1-2m)} \left[ c(\frac{P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x) - P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(t)}{x-t}) - d^{(-1)} \; (P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x)) \right]$$

$$= q_{m+1,\ell}^{(k-1-2m)} \; Q_{k',pr(m+1,n)}(t)$$

en utilisant une démonstration totalement analogue à celle faite dans le théorème 6.2 iii) b).

b) Si $P_{m+1}^{(k-1-2m)}$ n'est pas orthogonal régulier.

Alors $pr(m+1,n) = m$.

Les deux polynômes $P_m^{(k-2m)}(x)$ et $P_m^{(k-1-2m)}(x)$ sont à l'ouest d'un bloc $P_2$. Ils sont identiques et on sait que les associés correspondant sont aussi identiques (propriété 6.7). Par conséquent, on a bien également la même relation de récurrence.

cqfd.

Pour la propriété suivante nous posons toujours n = k-1-2m et

$$\begin{cases} k-2m = k''-2pr(pr(m+1,\ n),\ n+1) \\ k-1-2m = k'-2pr(m+1,\ n) \end{cases}$$

Propriété 6.10.

*Les polynômes* $P_{k,m}(x)$ *et* $Q_{k,m}(x)$ *vérifient la même relation de récurrence*

$$V_{k,m}(x) = \omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(x)\ V_{k',pr(m+1,n)}(x) + E^{(k-1-2m)}_{m}\ V_{k'',pr(pr(m+1,n),n+1)}(x)$$

*si les trois polynômes qui interviennent sont dans la table* $P_2$ *ou* $Q_2$.

Démonstration.

Nous savons déjà que les $P_{k,m}(x)$ satisfont cette relation. Nous démontrons la relation pour les $Q_{k,m}(x)$.

Dans ce cas on a : $P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(0) \neq 0$ et si $P^{(k-2m)}_{pr(pr(m+1,n),n+1)}(x)$ est au bord d'un bloc il est toujours au nord ou au nord-ouest de ce bloc.

i) Si les trois polynômes sont dans la demi-table inférieure.

$$pr(m+1,n) \leq k'.$$

On a alors :

$$Q_{k,m}(t) = \omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(t)\ Q_{k',pr(m+1,n)}(t) + E^{(k-1-2m)}_{m}\ Q_{k''-pr(pr(m+1,n),n+1)}(t)$$

$$+\ c\left(\frac{\omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(x) - \omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(t)}{x-t}\ P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x)\right)$$

$$= \omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(t)\ Q_{k',pr(m+1,n)}(t) + E^{(k-1-2m)}_{m}\ Q_{k'',pr(pr(m+1,n),n+1)}(t)$$

car

$$d^{(k-1-2m)}(x^{2m-k+1}\ (\frac{\omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(x) - \omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(t)}{x-t})\ P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x)) = 0$$

En effet $d^{(k-1-2m)}(x^j\ P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x)) = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le m-1$, et

$x^{2m-k+1}\ (\frac{\omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(x) - \omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(t)}{x-t})$ est un polynôme en x de degré

$3m-k-pr(m+1,n) = pr(m+1,n)-k'-1+m \le m-1$.

ii) <u>Les trois polynômes sont dans la demi-table supérieure.</u>

On utilise la relation avec les polynômes transformés

$$P^{(k-2m)}_{m}(x) = \tilde{\omega}^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(x)\ \tilde{P}^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x)$$

$$+ E^{(k-1-2m)}_{m}\ x^{m-pr(pr(m+1,n),n+1)}\ \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m+1,n),n+1)}(x).$$

On a alors :

$$\tilde{Q}_{k,m}(t) = \tilde{\omega}^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(t)\ \tilde{Q}_{k',pr(m+1,n)}(t)$$

$$+ E^{(k-1-2m)}_{m}\ t^{m-pr(pr(m+1,n),n+1)}\ \tilde{Q}_{k'',pr(pr(m+1,n),n+1)}(t)$$

$$+ c^*(\frac{\tilde{\omega}^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(x) - \tilde{\omega}^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(t)}{x-t}\ \tilde{P}^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x))$$

$$+ E^{(k-1-2m)}_{m}\ c^*(\frac{x^{m-pr(pr(m+1,n),n+1)} - t^{m-pr(pr(m+1,n),n+1)}}{x-t}\ \tilde{P}^{(k-2m)}_{pr(pr(m+1,n),n+1)}(x))$$

De la même façon que dans le théorème 6.2 ii) a), on obtient l'annulation des deux expressions faisant intervenir la fonctionnelle $c^*$.

Donc on retrouve la même relation de récurrence.

**iii) <u>Si le polynôme $P^{(k-2m)}_{pr(pr(m+1,n),n+1)}(x)$ est dans la demi-table supérieure</u>**

et les deux autres dans la demi-table inférieure, alors $P^{(k-2m)}_{pr(pr(m+1,n),n+1)}(x)$ est au nord ou nord-ouest d'un bloc $P_2$ et $P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x)$ est à l'est de ce bloc. On a :

$$Q_{k,m}(t) = \omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(t)\; Q_{k',pr(m+1,n)}(t)$$

$$+ c\left(\frac{\omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(x) - \omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(t)}{x-t}\; P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x)\right)$$

$$+ E^{(k-1-2m)}_{m}\; c\left(\frac{P^{(k-2m)}_{pr(pr(m+1,n),n+1)}(x) - P^{(k-2m)}_{pr(pr(m+1,n),n+1)}(t)}{x-t}\right)$$

D'après le corollaire 6.4 on a :

$$c\left(\frac{P^{(k-2m)}_{pr(pr(m+1,n),n+1)}(x) - P^{(k-2m)}_{pr(pr(m+1,n),n+1)}(t)}{x-t}\right) = Q_{k'',pr(pr(m+1,n),n+1)}(t).$$

D'autre part en utilisant le i)

$$c\left(\frac{\omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(x) - \omega^{(k-1-2m)}_{m-pr(m+1,n)}(t)}{x-t}\; P^{(k-1-2m)}_{pr(m+1,n)}(x)\right) = 0$$

D'où le résultat.

**iv) <u>Si le polynôme $P^{(k-2m)}_{m}(x)$ est dans la demi-table inférieure</u>** et les deux autres dans la demi-table supérieure.

a). Si $k = m$.

On utilise la relation de récurrence avec les polynômes transformés. On a alors :

$$c^*\left(\frac{\tilde{P}_m^{(k-2m)}(x) - \tilde{P}_m^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right) = \tilde{\omega}_{m-pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(t)\, \tilde{Q}_{k',pr(m+1,n)}(t)$$

$$+ c^*\left(\frac{\tilde{\omega}_{m-pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x) - \tilde{\omega}_{m-pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(t)}{x-t}\, \tilde{P}_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x)\right)$$

$$+ E_m^{(k-1-2m)}\, t^{m-pr(pr(m+1,n),n+1)}\, \tilde{Q}_{k'',pr(pr(m+1,n),n+1)}(t)$$

$$+ E_m^{(k-1-2m)}\, c^*\left(\frac{x^{m-pr(pr(m+1,n),n+1)} - t^{m-pr(pr(m+1,n),n+1)}}{x-t}\, \tilde{P}_{pr(pr(m+1,n),n+1)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

D'après le corollaire 6.5 on a :

$$c^*\left(\frac{\tilde{P}_m^{(-m)}(x) - \tilde{P}_m^{(-m)}(t)}{x-t}\right) = \tilde{Q}_{m,m}(t).$$

On démontre de la même façon que dans le théorème 6.2 iv) a) 1. que :

$$c^*\left(\frac{\tilde{\omega}_{m-pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x) - \tilde{\omega}_{m-pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(t)}{x-t}\, \tilde{P}_{pr(pr(m+1,n))}^{(k-1-2m)}(x)\right) = 0$$

ainsi que :

$$c^*\left(\frac{x^{m-pr(pr(m+1,n),n+1)} - t^{m-pr(pr(m+1,n),n+1)}}{x-t}\, \tilde{P}_{pr(pr(m+1,n),n+1)}^{(k-2m)}(x)\right)$$

on retrouve bien la même relation de récurrence.

b). Si $k \geq m+1$.

On utilise la relation de récurrence sur $P_m^{(k-2m)}(x)$.
On obtient donc :

$$Q_{k,m}(t) = \omega_{m-pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(t)\, c\left(\frac{P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x) - P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

$$+ E_m^{(k-1-2m)}\, c\left(\frac{P_{pr(pr(m+1,n),n+1)}^{(k-2m)}(x) - P_{pr(pr(m+1,n),n+1)}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

$$+ c\left(\frac{\omega_{m-pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x) - \omega_{m-pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(t)}{x-t}\, P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x)\right)$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 6.2 iv) b).

On a :

$$Q_{k',pr(m+1,n)}(t) = c\left(\frac{P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x) - P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

Si on pose $\omega_{m-pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x) = \sum_{j=o}^{m-pr(m+1,n)} \beta_j x^j$ avec $\beta_{m-pr(m+1,n)} = 1$, on retrouve :

$$G(t) = c\left(\frac{\omega_{m-pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x) - \omega_{m-pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(t)}{x-t}\, P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x)\right)$$

$$= \sum_{s=o}^{2m-k-pr(m+1,n)} t^s \left(\sum_{j=Sup(s+1,s+k-m)}^{m-pr(m+1,n)} \beta_j\, d^{(k-1-2m)}\left(x^{2m-k+j-s}\, P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}\right)\right)$$

En utilisant la relation de récurrence sur les P(x) on obtient :

$$P_m^{(k-2m)}(x) = \sum_{j=o}^{m-pr(m+1,n)} \beta_j\, x^j\, P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x) + E_m^{(k-1-2m)}\, P_{pr(pr(m+1,n),n+1)}^{(k-2m)}(x)$$

On a ici :

$$d^{(k-2m)}\,(x^i\,P_m^{(k-2m)}(x)) = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N},\ 0 \le i \le m-1$$

$$d^{(k-1-2m)}(x^i\,P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x)) = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N},\ 0 \le i \le m-1.$$

Alors, on multiplie les deux membres de la relation de récurrence par $x^{pr(m+1,n)-1+i}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le m-1-pr(m+1,n)$, puis on applique $d^{(k-2m)}$. Avec $k \ge m+1$, on a :

$$pr(m,n+1) = pr(m+1,n)$$

Par conséquent, on obtiendra :

$$\sum_{j=m-pr(m+1,n)-i}^{m-pr(m+1,n)} \beta_j\, d^{(k-2m)}\,(x^{pr(m+1,n)-1+i+j}\,P_{pr(m+1,n)}^{(k-1-2m)}(x))$$

$$+\ E_m^{(k-1-2m)}\,d^{(k-2m)}\,(x^{pr(m+1,n)-1+i}\,P_{pr(pr(m+1,n),n+1)}^{(k-2m)}(x)) = 0$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le m-1-pr(m+1,n)$.

Alors par des considérations totalement identiques à celles du théorème 6.2 iv) b) on en déduit que :

$$G(t) + E_m^{(k-1-2m)}\,c\left(\frac{P_{pr(pr(m+1,n),n+1)}^{(k-2m)}(x) - P_{pr(pr(m+1,n),n+1)}^{(k-2m)}(t)}{x-t}\right)$$

$$= E_m^{(k-1-2m)}\,Q_{k'',pr(pr(m+1,n),n+1)}(t).$$

D'où le résultat.

<u>cqfd.</u>

Nous allons maintenant démontrer que les relations de récurrence le long d'une antidiagonale ou de deux antidiagonales adjacentes, que satisfont les polynômes $P_{k,m}(x)$ et leurs associés sont identiques.

En vue de démontrer ce résultat nous établissons certaines propriétés des tables des polynômes.

Définissons deux séries formelles, l'une $\bar{L}$ pour x petit, l'autre $\bar{L}^*$ pour x grand

$$\bar{L} = \sum_{j=0}^{\infty} c^*_{-j-1}\, x^j$$

$$\bar{L}^* = \sum_{j=1}^{\infty} c_{j-1}\, x^{-j}$$

Les coefficients $c_i$ et $c^*_{-i}$ gardent les valeurs qu'ils avaient dans L et $L^*$.
Nous cherchons l'approximant de Padé en deux points des deux séries formelles $\bar{L}$ et $\bar{L}^*$.

$$\bar{f}_{k',m}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \bar{a}_j\, x^j}{\sum_{j=0}^{m} \bar{b}_j\, x^j} = \frac{\tilde{Q}\tilde{W}_{k',m}(x)}{\tilde{W}_{k',m}(x)}$$

Nous définissons les fonctionnelles linéaires c et $c^*$ comme précédemment.
Nous posons $\bar{d}_j = -d_{-j} = c^*_{-j} - c_{-j}$, $\forall j \in Z$.
Nous définissons la fonctionnelle linéaire $\bar{d}^{(-s-1)}$ par :

$$\bar{d}^{(-s-1)}(x^j) = -\bar{d}_{j-s}, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Nous savons, d'après la propriété 6.2, que le polynôme $W_{k',m}(x)$ est orthogonal par rapport à la fonctionnelle linéaire $\bar{d}^{(k'-2m)}$.

En effet le système $(S_1)$ est

$$\sum_{i=0}^{m} \bar{b}_i\, c^*_{-j-1+i} - \bar{a}_j = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k'-1$$

et le système $(S_2)$ est

$$\sum_{i=0}^{m} \bar{b}_i\, c_{-j+i-1} - \bar{a}_j = 0 \text{ pour } j \in Z,\ k'-m \le j \le m-1$$

Le système d'orthogonalité (S) résultant est donc :

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{b}_i (c^*_{-j-1+i} - c_{-j-1+i}) = 0 \text{ pour } j \in Z,\ k'-m \leq j \leq k'-1$$

c'est à dire

$$\sum_{i=0}^{m} \bar{b}_i \, \bar{d}_{j+1-i} = 0$$

Enfin d'après la propriété 6.4 nous avons :

<u>Si $k' > m-1$.</u>

$$QW_{k',m}(t) = c^*\left(\frac{W_{k',m}(x) - W_{k',m}(t)}{x-t}\right)$$

<u>Si $0 \leq k' \leq m-1$.</u>

$$\tilde{QW}_{k',m}(t) = c\left(\frac{\tilde{W}_{k',m}(x) - \tilde{W}_{k',m}(t)}{x-t}\right)$$

Nous plaçons les polynômes $W_{k',m}(x)$ dans une table $\bar{W}$ de la façon suivante

$$\left.\begin{array}{ccc} & W_{0,2} & ----- \\ W_{0,1} & W_{1,2} & ----- \end{array}\right\} \text{champ d'action de } c \text{ pour obtenir l'associé}$$

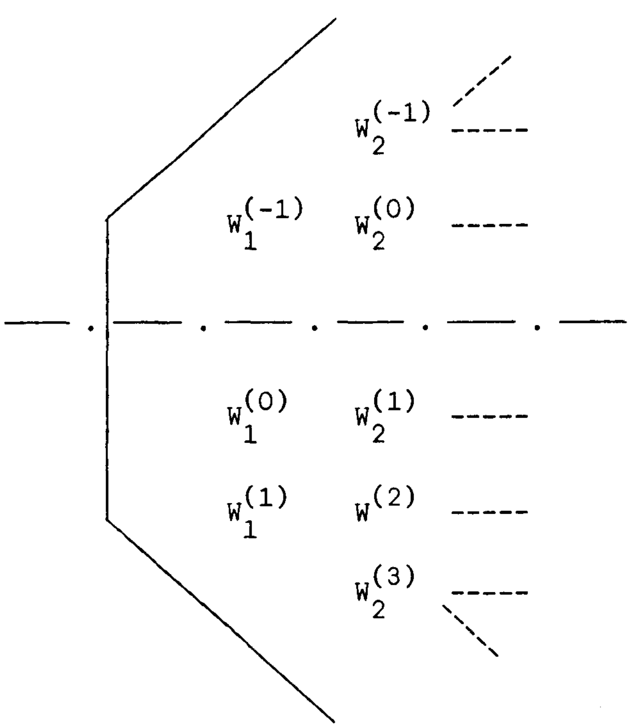
$$\left.\begin{array}{ccc} W_{1,1} & W_{2,2} & ----- \\ W_{2,1} & W_{3,2} & ----- \\ & W_{4,2} & ----- \end{array}\right\} \text{champ d'action de } c^* \text{ pour obtenir l'associé}$$

Les polynômes $QW_{k',m}(t)$ seront placés de façon similaire dans une table $\overline{QW}$.

Nous considérons maintenant les polynômes $W_i^{(s)}(x)$ obtenus dans la section 4.3, qui sont orthogonaux par rapport à la fonctionnelle linéaire $\gamma^{(s)}$ qui est telle que :

$$\gamma^{(s)}\ (x^j) = d_{s-j} \text{ pour } j \in \mathbb{N}.$$

Nous avons vu dans la propriété 4.11, comment le polynôme $W_i^{(s)}(x)$ était relié au polynôme $\tilde{P}_i^{(s+1-2i)}(x)$.
Nous disposons comme dans la section 4.3 les polynômes $W_i^{(s)}(x)$ dans une table W.
Nous appellerons table $W_2$ la partie de la table W qui correspond aux frontières définies pour la table $P_2$.
La table $W_2$ est donc la suivante :




Nous séparons horizontalement la table $W_2$ en deux demi-tables. La demi-table supérieure correspondra à $-1 \le s \le i-2$.
La demi table inférieure correspondra à $i-1 \le s \le 2i-1$.
Alors aux polynômes $W_i^{(m)}(x)$ nous associerons les polynômes $QW_i^{(m)}(x)$ tels que :

si $-1 \le s \le i-2$, $QW_i^{(m)}(t) = c^*\left(\dfrac{W_i^{(m)}(x) - W_i^{(m)}(t)}{x-t}\right)$,

si $i-1 \le s \le 2i-1$, $\tilde{QW}_i^{(m)}(t) = t^{i-1}\, QW_i^{(m)}(\frac{1}{t}) = c\left(\dfrac{\tilde{W}_i^{(m)}(x) - \tilde{W}_i^{(m)}(t)}{x-t}\right)$

où $\tilde{W}_i^{(m)}(x) = x^i\, \tilde{W}_i^{(m)}(\frac{1}{x})$.

Les polynômes $QW_i^{(m)}(x)$ seront placés dans une table $QW_2$ de façon analogue aux polynômes $W_i^{(m)}(x)$ dans la table $W_2$.

Nous savons que les positions des blocs W de la table W se déduisent de celles des blocs P en les décalant d'une rangée vers le haut.
Le côté sud des blocs W est occupé par les polynômes $xW_i^{(s)}(x)$, $x^2W_i^{(s)}(x),\ldots$, où $W_i^{(s)}(x)$ est le polynôme qui occupe l'angle Sud Ouest du bloc W. Sur le côté ouest tous les polynômes sont identiques à $W_i^{(s)}(x)$.
Les blocs de la table $W_2$ seront appelés blocs $W_2$. Ils correspondent bien évidemment aux blocs W.
On leur fera correspondre les blocs $QW_2$ de la table $QW_2$.

Définition 6.3.

*Nous appellerons table transposée une table dont on a échangé les éléments symétriques par rapport à la médiatrice* $k = m$.

Propriété 6.11.

*Si les polynômes* $W_i^{(s)}(x)$ *et* $W_{k',m}(x)$ *sont unitaires, la table* $\bar{W}$ *est la transposée de la table* $W_2$, *et la table* $\overline{QW}$ *est la transposée de la table* $\overline{QW_2}$.

Démonstration.

i) La fonctionnelle linéaire $\gamma^{(s)}$ est telle que

$$\gamma^{(s)}(x^j) = d_{s-j} = -\bar{d}_{j-s}.$$

Elle est donc identique à la fonctionnelle $\bar{d}^{(-s-1)}$.

$W_{k',m}(x)$ est orthogonal par rapport à la fonctionnelle linéaire $\gamma^{(-k'+2m-1)}$, de même que $W_m^{(-k'+2m-1)}(x)$. Puisqu'ils sont unitaires et de même degré, ils sont égaux.

La table $\bar{W}$ peut alors s'écrire :

$$\begin{array}{ccc}
 & W_2^{(3)} & \text{-----} \\
W_1^{(1)} & W_2^{(2)} & \text{-----} \\
W_1^{(0)} & W_2^{(1)} & \text{-----} \\
W_1^{(-1)} & W_2^{(0)} & \text{-----} \\
 & W_2^{(-1)} & \text{-----}
\end{array}$$

On a bien la transposée de la table $W_2$.

ii) Il faut montrer que les tables des associés correspondants sont transposées l'une par rapport à l'autre. Or en transposant les tables on s'aperçoit que les champs d'application des fonctionnelles c et c* sont les mêmes sauf pour la médiatrice. Mais d'après le corollaire 6.5, cette médiatrice peut aussi bien appartenir au champ d'action de c qu'au champ d'action de c*.

cqfd.

En conséquence, toutes les propriétés de la table $\bar{W}$ en termes d'approximants de Padé en deux points s'étendent par transposition à la table $W_2$. En particulier, les relations de récurrence dans la table $W_2$ suivant les antidiagonales auront leur transposition dans la table W suivant les diagonales. Ces relations dans la table $W_2$ donneront des relations sur les polynômes de la table $\tilde{P}_2$, car le polynôme $W_m^{(k)}(x)$ est proportionnel au polynôme $\tilde{P}_m^{(k-2m+1)}(x)$, si $W_m^{(k)}(x)$ est orthogonal régulier et $W_m^{(k)}(o) \neq 0$.

Dans ces conditions $W_{k',m}(x)$ est proportionnel à $\mathcal{P}_{2m-k',m}(x)$.
En effet, $W_{k',m}(x) = W_m^{(-k'+2m-1)}(x)$ qui est proportionnel à $\mathcal{P}_m^{(-k')}(x)$.
Nous pouvons donc donner les propriétés suivantes :

<u>*Propriété 6.12.*</u>

*Les polynômes* $\mathcal{Q}W$ *de la table* $QW_2$ *qui sont situés sur les côtés Ouest, Sud-Ouest et Sud d'un bloc* $\mathcal{Q}W_2$ *sont identiques.*

<u>*Propriété 6.13.*</u>

*Les polynômes* $W_i^{(s)}(x)$ *de la table* $W_2$ *et leurs associés* $QW$ *de la table* $QW_2$ *satisfont la même relation de récurrence à trois termes suivant une antidiagonale* s

$$T_i^{(s)}(x) = (x\,\Omega^{(s)}_{i-\widetilde{pr}(i,s)-1}(x) + \mathcal{B}_i^{(s)})\, T^{(s)}_{\widetilde{pr}(i,s)}(x) + \mathcal{C}_i^{(s)}\, T^{(s)}_{\widetilde{pr}(\widetilde{pr}(i,s),s)}$$

<u>*Propriété 6.14.*</u>

*Si le polynôme* $W_i^{(s-1)}$ *est orthogonal régulier, alors les polynômes* $W_i^{(s)}(x)$ *de la table* $W_2$ *et leurs associés de la table* $QW_2$ *satisfont les mêmes relations de récurrence à trois termes suivant deux antidiagonales* s *et* s-1.

$$U_i^{(s-1)}(x) = x^{-1}(U_{i+1}^{(s)}(x) + \tilde{q}^{(s)}_{i+1,\ell}\ \ U^{(s)}_{\widetilde{pr}(i+1,s)}(x))$$

$$V_i^{(s-1)}(x) = \Omega^{(s)}_{i-\widetilde{pr}(i+1,s)}(x)\, V^{(s)}_{\widetilde{pr}(i+1,s)}(x) + \mathcal{E}^{(s)}_{i+1}\ \ V^{s-1}_{\widetilde{pr}(\widetilde{pr}(i+1,s),s-1)}(x)$$

Nous avons vu dans la section 4.5 qu'il existe des relations entre trois polynômes P orthogonaux réguliers situés sur une même horizontale et extérieurs aux blocs $P \cup W$.

*Propriété 6.15.*

*Les polynômes Q de la table $Q_2$ vérifient la même relation de récurrence suivant les horizontales que les polynômes P de la table $P_2$.*

Démonstration.

Nous savons que les polynômes Q vérifient les mêmes six relations de récurrence (trois pour les diagonales et trois pour les antidiagonales) que les polynômes P. On emploie donc pour trouver la relation sur les Q le même procédé de construction de la relation sur les P qui a été exposé dans la section 4.5.2.
Il est évident que l'on obtiendra la même relation de récurrence.

cqfd.

Nous avons vu également qu'il existe des relations entre trois polynômes P orthogonaux réguliers situés sur une même verticale et extérieurs aux blocs $P \cup O$.

*Propriété 6.16.*

*Les polynômes Q de la table $Q_2$ vérifient la même relation de récurrence suivant les verticales que les polynômes P de la table $P_2$.*

Démonstration.

Elle est identique à celle de la propriété précédente. On utilise le procédé de construction de la section 4.8.2.

cqfd.

## 6.4 PROPRIETES DES ZEROS DES POLYNOMES $P_{k,m}(x)$ ET $Q_{k,m}(x)$.

Nous présentons maintenant quelques propriétés relatives aux zéros des polynômes $P_{k,m}(x)$ et $Q_{k,m}(x)$. Nous établissons d'abord la propriété suivante.

__Propriété 6.17.__

*Si* $m \in \mathbb{N}$, $p_\ell+1 \leq m \leq h_{\ell+1}+1$ *et* $\ell \geq 0$ *et si* $P_{k,m}(x)$ *et* $P_{k',pr(m)}(x)$ *avec* $k' = k-2m+2pr(m)$ *appartiennent à la table* $P_2$, *alors :*

$$\Delta_m^{(k-2m)} = P_{k,m}(x)\, Q_{k',pr(m)}(x) - P_{k',pr(m)}(x)\, Q_{k,m}(x) = \rho_m^{(k-2m)}\, x^{2m-k}$$

*où* $\rho_m^{(k-2m)}$ *est une constante non nulle.*

Démonstration.

Nous démontrons cette propriété par récurrence.

i) Elle est vraie pour $k = 2m$ puisqu'on retrouve l'approximant de Padé classique et par conséquent la propriété 1.21 ii) est vérifiée

$$\rho^{(o)} = -A_{m+1}\, c(P_{m-1}^{(o)}\ P_{pr(m)}^{(o)}) \neq 0.$$

ii) Montrons que $\Delta^{(k-2m-1)}$ est proportionnel à $x\Delta^{(k-2m)}$.

a) __Si $P_{k,m}(x)$, $P_{k-2,m-1}(x)$, $P_{k-1,m}(x)$ et $P_{k-3,m-1}(x)$ sont orthogonaux réguliers.__

$$\begin{array}{cccc}
P_{k-3,m-1}(x) & 0 & & \\
P_{k-2,m-1}(x) & 0 & 0 & P_{k-1,m}(x) \\
 & & 0 & P_{k,m}(x).
\end{array}$$

Nous avons :

$$x\Delta_m^{(k-2m)} = x\, P_{k,m}(x)\, Q_{k-2,m-1}(x) - x\, P_{k-2,m-1}(x)\, Q_{k,m}(x)$$

$$= x(P_{k-1,m}(x) - e_m^{(k-2m-1)} P_{k-2,m-1}(x))\, Q_{k-2,m-1}(x)$$

$$- x\, P_{k-2,m-1}(x)\, (Q_{k-1,m}(x) - e_m^{(k-2m-1)} Q_{k-2,m-1}(x))$$

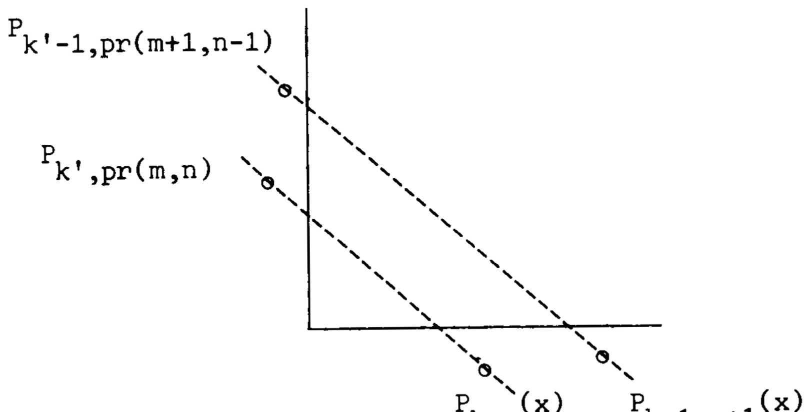
$$= x\, P_{k-1,m}(x)\, Q_{k-2,m-1}(x) - x\, P_{k-2,m-1}(x)\, Q_{k-1,m}(x)$$

$$= P_{k-1,m}(x)\, (Q_{k-1,m}(x) + q_{m-1}^{(k-2m)} Q_{k-3,m-1}(x))$$

$$- Q_{k-1,m}(x)(P_{k-1,m}(x) + q_{m-1}^{(k-2m)} P_{k-3,m-1}(x)) = q_{m-1}^{(k-2m)} \Delta_m^{(k-2m-1)}$$

avec $q_{m-1}^{(k-2m)} \neq 0$ puisque $P_{k-1,m}(x)$ n'est pas au nord d'un bloc $P_2$.

b) <u>Si $P_{k-1,m}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.</u>




On pose toujours $n = k-2m$ et $k' = k-2m+2pr(m,n)$.

$$x\,\Delta_m^{(k-2m)} = x(P_{k,m}(x)\, Q_{k',pr(m,n)}(x) - Q_{k,m}(x)\, P_{k',pr(m,n)}(x))$$

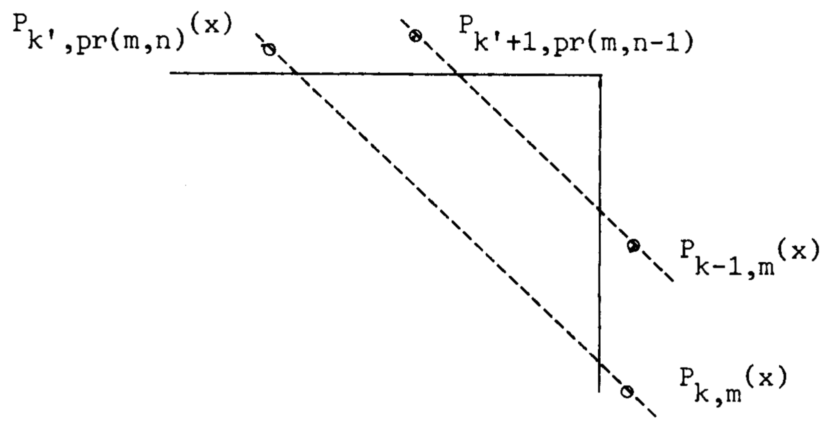
$$= Q_{k',pr(m,n)}(x)\, (P_{k+1,m+1}(x) + q_{m+1}^{(k-2m-1)} P_{k'-1,pr(m+1,n-1)}(x))$$

$$- P_{k',pr(m,n)}(x)(Q_{k+1,n+1}(x) + q_{m+1}^{(k-2m-1)} Q_{k'-1,pr(m+1,n-1}(x))$$

$$= \Delta_{m+1}^{(k-2m-1)}$$

car $P_{k',pr(m,n)}(x) = P_{k'-1,pr(m+1,n-1)}(x)$ et on a la même égalité pour les polynômes Q.

c) Si $P_{k-1,m}(x)$ est orthogonal régulier et $P_{k-2,m-1}(x)$ est quasi-orthogonal.




$$x\Delta_m^{(k-2m)} = x\ (P_{k,m}(x)\ Q_{k',pr(m,n)}(x) - Q_{k,m}(x)\ P_{k',pr(m,n)}(x))$$

$$= x\ Q_{k',pr(m,n)}(x)\ (P_{k-1,n}(x) + E_{m+1}^{(k-2m-1)}\ P_{k',pr(m,n)}(x))$$

$$- x\ P_{k',pr(m,n)}(x)\ (Q_{k-1,n}(x) + E_{m+1}^{(k-2m-1)}\ Q_{k',pr(m,n)}(x))$$

$$= \Delta_m^{(k-2m-1)}$$

car $x\ P_{k',pr(m,n)}(x) = P_{k'+1,pr(m,n-1)}(x)$ et on a la même égalité pour les polynômes Q.

cqfd.

Pour les propriétés qui vont suivre, nous avons partagé l'étude en deux cas. Le premier est celui où $d_{-1}$ est non nul. Le second est celui où les premiers termes de $c^*$ sont nuls.

<u>*Propriété 6.18.*</u>

*Si $d_{-1} \neq 0$, alors les polynômes $P_{k,m}(x)$ et $Q_{k,m}(x)$ qui sont à l'Ouest et au Nord-Ouest des blocs $P_2$ et $Q_2$ n'ont pas zéro pour racine.*

<u>Démonstration</u>.

i) La propriété 2.2 démontre la propriété pour les polynômes $P_{k,m}(x)$.

ii) <u>Si $m \le k \le 2m-1$.</u>

$$Q_{k,m}(o) = 0 \iff \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & \cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & \cdots & d_{k-1} \\ 0 & d_0 & \cdots & d_{m-1} \end{vmatrix} = 0$$

Parmi les m premières lignes on a la ligne $d_{-1},\ldots,d_{m-1}$ ; on la retranche de la dernière.

Alors

$$Q_{k,m}(o) = 0 \iff d_{-1}\, H_m^{(k-2m+1)} = 0$$

0 serait racine de $P_{k,m}(x)$, ce qui est impossible.

iii) <u>Si $0 \le k \le m-1$.</u>

$$Q_{k,m}(o) = 0 \iff \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & \cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & \cdots & d_{k-1} \\ d_{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff d_{-1} H_m^{(k-2m+1)} = 0$$

D'où la même conclusion.

iv) Si $k = 2m$.

Si $P_{k,m}(x)$ est à l'ouest du bloc $P_2$, on prend le polynôme $P_{k-1,m}(x)$ qui est identique à $P_{k,m}(x)$ et on applique le ii). On en déduit que $Q_{k-1,m}(o) \neq 0$, ainsi que $Q_{k,m}(o)$.
Si $P_{k,m}(x)$ est au nord-ouest du bloc $P_2$, on prend le polynôme $P_{k+1,m+1}(x)$ qui est au nord.
On sait que $P_{k+1,m+1}(x) = x\, P_{k,m}(x)$ et $P_{k,m}(o) \neq 0$.
Si $d_{-1} \neq 0$, alors $P_1^{(-1)}$ est orthogonal régulier.
Par conséquent, si $m > 1$, alors $P_{k',pr(m+1)}(x)$ existe.

Si m=1, alors $Q_{0,1}(x) \equiv 0$ et par conséquent 0 n'est pas racine.
On applique la propriété 6.17 à la diagonale -1. 0 n'est que racine simple du premier membre et il est déjà racine simple de $P_{k+1,m+1}(x)$. On a donc si on pose $k' = k-1-2m+2pr(m+1)$

$$P_{k',pr(m+1)}(x)\; Q_{k+1,m+1}(x) = x\, R(x) \text{ avec } R(o) \neq 0$$

Or $P_{k',pr(m+1)}(x)$ et $P_{k+1,m+1}(x)$ n'ont pas de racine commune.
Donc $Q_{k+1,m+1}(x) = x\, Q(x)$ avec $Q(o) \neq 0$.
Et puisque $\mathcal{C}_{k,m}(x) \equiv \mathcal{C}_{k+1,m+1}(x)$ d'après la propriété 6.7 on a :

$$Q_{k,m}(x) = Q(x) \quad \text{et} \quad Q_{k,m}(o) \neq 0$$

cqfd.

*Corollaire 6.6.*

*Si* $d_{-1} \neq 0$ *et les polynômes* $P_{k,m}(x)$ *et* $Q_{k,m}(x)$ *sont au nord des blocs* $P_2$ *et* $Q_2$, *alors :*

*i) Si au moins un polynôme du côté ouest ou Nord-Ouest du bloc* P *appartient à la table* $P_2$, $P_{k,m}(x)$ *et* $Q_{k,m}(x)$ *ont 0 pour racine avec le même ordre de multiplicité.*

*ii)* *Si aucun polynôme du côté Ouest ou Nord-Ouest du bloc* P *n'appartient à la table* $P_2$, $Q_{k,m}(x)$ *a 0 pour racine d'ordre de multiplicité* $2m-k$.

Démonstration.

Nous savons déjà que $P_{k,m}(x) = x^j\ P(x)$ avec $P(o) \neq 0$, où $P(x)$ est le polynôme qui se trouve au Nord-Ouest du bloc P.

i) On prend le polynôme qui est à l'Ouest ou au Nord-Ouest du bloc $P_2$ ; il est identique à $P(x)$.
Son associé $Q(x)$ n'a pas 0 pour racine.
D'après la propriété 6.7, les polynômes $\mathcal{Q}(x)$ sont identiques à l'Ouest, au Nord-Ouest et au Nord du bloc $\mathcal{Q}_2$.
Donc :

$$\mathcal{Q}_{k,m}(x) \equiv \mathcal{Q}(x).$$

Par conséquent $Q_{k,m}(x) = x^j\ Q(x)$ avec $Q(o) \neq 0$.

ii) Dans ce cas le polynôme $P_{2m,m}(x)$ est au Nord de ce bloc. 0 étant racine de $P_{2m,m}(x)$, il ne peut être racine de $Q_{2m,m}(x)$ d'après le théorème 1.9. En utilisant la propriété 6.7 on arrive à la conclusion que si $Q_{2m+i,m+i}(x)$ est au nord de ce bloc $Q_2$ alors :

$$Q_{2m+i,m+i}(x) = x^i\ Q_{2m,m}(x).$$

cqfd.

*Corollaire 6.7.*

*Si* $d_{-1} \neq 0$ *et* $P_{k,m}(x)$ *est orthogonal régulier avec* $0 \leq k \leq 2m-1$, *alors les seuls polynômes* $P_{k,m}(x)$ *et* $Q_{k,m}(x)$ *ayant 0 pour racine sont au nord des blocs* $P_2$ *et* $Q_2$.

Démonstration.

i) La propriété 2.2 démontre le cas des $P_{k,m}(x)$.

ii) Si $m \leq k \leq 2m-1$.

La démonstration faite dans le ii) de la propriété 6.18 montre que

$$Q_{k,m}(o) = 0 \Longleftrightarrow P_{k,m}(o) = 0.$$

D'où le résultat.

iii) Si $0 \leq k \leq m-1$.

On a le même résultat en utilisant la démonstration du iii) de la propriété 6.18.

cqfd.

**Remarque 6.7.**

Si $k = 2m$, on peut avoir $P_{2m,m}(0) = 0$ et $P_{2m+1,m+1}(0) \neq 0$, c'est à dire $P_{2m,m}(x)$ est au nord d'un bloc P qui n'a aucun élément dans la table $P_2$. D'autre part si $P_{2m,m}(o) \neq 0$ on peut avoir $Q_{2m,m}(o) = 0$.

**Exemple** : on prend $c = \{1, 2, 1, -4, 1, \ldots\}$.

$$P_{4,2}(x) = x^2 - 2x + 3 \;;\; Q_{4,2}(x) = x.$$

Nous examinons maintenant le cas où $d_{-i} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$, et $d_{-r-1} \neq 0$.

*Propriété 6.19.*

*Si* $d_{-1} = 0$, *pour* $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$ *et* $d_{-r-1} \neq 0$, *aux polynômes orthogonaux réguliers* $P_{k,m}(x)$ *non situés au nord ou à l'ouest des blocs* $P_2$ *correspondent des polynômes* $Q_{k,m}(x)$ *tels que :*

*i)* *Si* $2m-k < r$, *alors* $Q_{k,m}(x) = x^{2m-k}\, Q^{*}_{k,k-m}(x)$ *avec* $Q^{*}_{k,k-m}(0) \neq 0$ *et* $k-m \geq 1$.

*ii)* *Si* $2m-k \geq r$, *alors* $Q_{k,m}(x) = x^{r}\, Q^{*}_{k,m-r}(x)$ *avec* $m-r \geq 1$ ; $Q^{*}_{k,m-r}(0) \neq 0$ *si* $2m-k > r$ *ou si* $2m-k = r$ *avec* $0 \leq k \leq m-1$.
*Si* $2m-k=r$ *et* $m \leq k \leq 2m$, *on ne peut rien dire.*

Démonstration.

i) Si $2m-k < r$.

a) Si $k > m-1$.

On a :

$$Q_{k,m}(t) = \frac{1}{H_m^{(k-2m)}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & & & d_{k-m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & & & d_{k-1} \\ 0 & d_0 & d_0 t + d_1 & \cdots & \sum_{i=o}^{m-1} d_i t^{m-1-i} \end{vmatrix}$$

Si $k = m$, alors la première ligne de $H_m^{(k-2m)}$ est nulle et $P_{k,m}(x)$ n'est pas orthogonal régulier, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si $k = 2m$ on a l'approximant de Padé classique.

$$Q_{k,m}(o) = 0 \iff \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & d_{k-1} \\ 0 & d_0 \cdots & d_{m-1} \end{vmatrix} = 0$$

c'est à dire $H_{m+1}^{(-1)} = 0$ puisque $d_{-1} = 0$.

Alors $P_{k,m}(x)$ serait à l'ouest d'un bloc $P_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si $1 \le 2m-k < r$ on retranche de la dernière ligne du déterminant donnant $Q_{k,m}(t)$ la somme des $2m-k$ premières lignes multipliées respectivement par $t^{2m-k-1},\dots,1$. En tenant compte du fait que $d_{-1} = \dots = d_{k-2m} = 0$, on obtient :

$$Q_{k,m}(t) = \frac{1}{H_m^{(k-2m)}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & d_0 t^{2m-k} & \cdots & \sum_{i=o}^{k-m-1} d_i t^{m-1-i} \end{vmatrix}$$

$= t^{2m-k}\, Q^*_{k,k-m}(t)$ avec $Q^*_{k,k-m}(o) \ne 0$.

En effet

$$Q^*_{k,k-m}(o) = \frac{1}{H_m^{(k-2m)}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & d_0 \; \cdots & d_{k-m-1} \end{vmatrix} = (-1)^m \frac{H_{m+1}^{(k-2m-1)}}{H_m^{(k-2m)}} \ne 0$$

puisque $P_{k,m}(x)$ n'est pas à l'ouest d'un bloc $P_2$.

b) Si $0 \le k \le m-1$.

On a :

$$Q_{k,m}(t) = -\frac{1}{H_m^{(k-2m)}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & & & d_{k-m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & & & d_{k-1} \\ \sum_{i=0}^{m-1} d_{-1-i}t^i & \cdots & \sum_{i=o}^{j-1} d_{i-j}\, t^{m-1-i} & \cdots\ d_{-1}t^{m-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Puisque $2m-k < r$, la première ligne au moins du déterminant est nulle, et par conséquent $P_{k,m}(x)$ n'est pas orthogonal régulier.

ii) Si $2m-k \geq r$.

a) Si $m \leq k \leq 2m$.

On a en fait $k < 2m$ puisque $r \geq 1$.
D'autre part les inégalités $k \geq m$ et $2m-k \geq r$ donnent $m \geq r$.
Si $m = r$ il existe parmi les m premières lignes de $Q_{k,m}(t)$ la ligne $d_{-r},\ldots,d_0$.
Donc $H_m^{(k-2m)} = 0$, ce qui est contraire aux hypothèses. Par conséquent on a $m-r \geq 1$.
Parmi les m premières lignes du déterminant de $Q_{k,m}(t)$ figurent les lignes $d_{-i},\ldots,d_{-i+m}$, pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$. On retranche la somme de ces lignes multipliées respectivement par $t^{i-1}$ de la dernière ligne.
Il nous reste en tenant compte du fait que $d_{-i} = 0$ pour $1 \leq i \leq r$

$$Q_{k,m}(t) = \frac{1}{H^{(k-2m)}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & & & d_{k-m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & & & d_{k-1} \\ 0 \cdots 0 & d_0t^r & \cdots & \sum_{i=o}^{m-1-r} & d_i t^{m-1-i} \end{vmatrix}$$

$$= t^r\, Q^*_{k,m-r}(x).$$

Si $2m-k > r$, alors $Q^*_{k,m-r}(o) \neq 0$.

En effet

$$Q^*_{k,m-r}(0) = \frac{1}{H_m^{(k-2m)}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & d_0 \cdots & d_{m-1-r} \end{vmatrix}$$

Il existe parmi les m premières lignes la ligne $d_{-r-1},\ldots,d_{-r-1+m}$. On la retranche de la dernière. On obtient :

$$Q^*_{k,m-r}(0) = (-1)^{m+1} \frac{d_{-r-1}}{H_m^{(k-2m)}} H_m^{(k-2m+1)} \neq 0,$$

puisque $d_{-r-1} \neq 0$ et $H_m^{(k-2m+1)} \neq 0$ car $P_{k,m}(x)$ n'a pas 0 pour racine.

b) <u>Si $0 \le k \le m-1$</u>.

1. <u>Si $r < m$</u>.

$$Q_{k,m}(t) = \frac{-1}{H_m^{(k-2m)}} \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d_{k-1} \\ \sum_{i=r}^{m-1} d_{-1-i}\, t^i & \cdots & \sum_{i=j-r}^{j-1} d_{i-j}\, t^{m-1-i} & \cdots & d_{-r-1} t^{m-1} & 0 \cdots 0 \end{vmatrix}$$

$= t^r\, Q^*_{k,m-r}(x)$ avec $Q^*_{k,m-r}(o) \neq 0$.

En effet, $Q^*_{k,m-r}(o) = (-1)^{m+1} \dfrac{d_{-r-1}}{H_m^{(k-2m)}} H_m^{(k-2m+1)} \neq 0$ pour les mêmes raisons que dans le a).

2. Si $r \geq m$.

Alors il y a parmi les lignes de $Q_{k,m}(t)$ la ligne $d_{-m-1},\ldots,d_{-1}$, c'est à dire parmi les lignes de $H_m^{(k-2m+1)}$ on a la ligne $d_{-m},\ldots,d_{-1}$ qui est nulle. Alors $P_{k,m}(x)$ serait au nord d'un bloc $P_2$, ce qui est contraire aux hypothèses.

cqfd.

Remarque 6.8.

La propriété 6.19 est vraie pour les polynômes orthogonaux réguliers qui sont situés au nord ouest des blocs $Q_2$.
Elle vraie également pour les polynômes orthogonaux réguliers qui sont situés à l'ouest des blocs $Q_2$ si $2m-k \geq r$.

Remarque 6.9.

Il existe des exemples pour lesquels si $2m-k = r$ et $m \leq k \leq 2m$, alors :

$$Q^*_{k,m-r}(o) = 0$$

Par exemple :

$$L = -1 + x^4 + x^6 + \ldots$$

$$L^* = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^7} - \frac{1}{x^8} + \ldots$$

$$P_{6,4}(x) = x^4 + 1 \text{ et } Q_{6,4}(t) = t^3.$$

*Corollaire 6.8.*

*On considère les blocs* Q *de la table* Q *pour* $m > r$.

*i)* *Si l'angle Nord-Ouest d'un bloc* Q *appartient à la table* $Q_2$ *et si* $Q_{k,m}(t)$ *est le polynôme qui y est situé, alors :*

$$Q_{k,m}(t) = t^j \, Q^*_{k,m-j}(t) \text{ avec } Q^*_{k,m-j}(o) \neq 0.$$

a) *Si* $2m-k < r$ *alors* $j = 2m-k$

b) *Si* $2m-k > r$ *alors* $j = r$

c) *Si* $2m-k = r$ *alors* $j \geq r$

*Pour tous les polynômes* $Q_{k+i,m}(t)$ *situés à l'ouest de ce bloc* $Q_2$ *on a :*

$$Q_{k+i,m}(t) = Q_{k,m}(t) = t^j \, Q^*_{k,m-j}(t)$$

*Pour tous les polynômes* $Q_{k+i,m+i}(t)$ *situés au nord de ce bloc* $Q_2$ *on a :*

$$Q_{k+i,m+i}(t) = t^i \, Q_{k,m}(t) = t^{i+j} \, Q^*_{k,m-j}(t).$$

*ii)* *Si l'angle Nord-Ouest d'un bloc* Q *n'appartient pas à la table* $Q_2$ *et si au moins un polynôme du côté Ouest appartient à la table* $Q_2$, *alors si* m *est le degré du polynôme* P *qui est à l'ouest,* $Q_{o,m}(t)$ *est à l'ouest de ce bloc* $Q_2$. *On a* $2m > r$ *et*

$$Q_{o,m}(t) = t^r \, Q^*_{o,m-r}(t) \text{ avec } Q^*_{o,m-r}(o) \neq 0$$

*Pour tous les polynômes* $Q_{i,m}(t)$ *situés à l'ouest de ce bloc* $Q_2$ *on a :*

$$Q_{i,m}(t) = Q_{o,m}(t) = t^r \, Q^*_{o,m-r}(t).$$

*Pour tous les polynômes* $Q_{k,m+k+i}(t)$ *situés au nord de ce bloc* $Q_2$ *on a :*

$$Q_{k,m+k+i}(t) = t^{k+i}\, Q_{o,m}(t) = t^{r+i+k}\, Q^*_{o,m-r}(t).$$

*où* i *est l'écart de degré entre le polynôme* P *le plus à gauche du côté Nord de ce bloc et le polynôme* $P_{o,m}(x)$.

*iii)* *Si le côté Ouest ou Nord-Ouest d'un bloc* Q *n'appartient pas à la table* $Q_2$, *alors les polynômes* Q *du nord de ce bloc* $Q_2$ *ont* 0 *pour racine avec comme ordre de multiplicité* 2m-k.

Démonstration.

i) et ii) sont des conséquences immédiates des propriétés 6.19 et 6.7.

iii) $P_{2m,m}(x)$ qui est au nord du bloc $P_2$ a 0 pour racine.
Donc $Q_{2m,m}(o) \neq 0$ d'après le théorème 1.9.
En appliquant la propriété 6.7, on a le résultat.

cqfd.

Lorsque $P_{k,m}(x)$ est orthogonal régulier, il arrive que $\tilde{Q}_{k,m}(t)$ soit identiquement nul pour $m \geq 1$. Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que cela soit réalisé.

*Propriété 6.20.*

*Soit* $P_{k,m}(x)$ *un polynôme orthogonal régulier par rapport à la fonctionnelle linéaire* $d^{(k-2m)}$ *avec* $m \geq 1$.
*Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\tilde{Q}_{k,m}(x)$ *soit identiquement nul est que l'on ait* $d_{k-i} = 0$ *pour* $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$ *et* $0 \leq k \leq m$, *c'est à dire que* $P_{k,m}(x)$ *soit dans la partie de la table* $P_2$ *telle que* $0 \leq k \leq m$ *et qu'il soit au nord d'un bloc* $P_2$ *dont le côté ouest est occupé par des polynômes de degré 0.*

Démonstration.

CS : Un bloc a son côté ouest occupé par des constantes $P_o^{(i)}$ si et seulement si les coefficients $d_i$ sont nuls.

$$P_{k,m}(x) = x^m \text{ avec } m \geq 1 \text{ et } 0 \leq k \leq m.$$

Il est au nord d'un bloc P de largeur au moins égale à m.

Si $k = m$, $\qquad d_0 = \ldots\ldots = d_{m-1} = 0$

Alors $Q_{k,m}(x) \equiv 0$ et $\tilde{Q}_{k,m}(x) \equiv 0$.

Si $0 \leq k \leq m-1$, alors $d_{-1} = 0$ au moins

$$\tilde{Q}_{k,m}(x) = c^*(0) = 0.$$

CN : supposons que $\tilde{Q}_{k,m}(x)$ soit identiquement nul.

i) Si $m-1 \leq k \leq 2m$.

En utilisant l'expression de $\tilde{Q}_{k,m}(x)$ sous forme de déterminant on a :

$$\tilde{Q}_{k,m}(x) \equiv 0 \iff \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots\cdots & d_{k-m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots\cdots & d_{k-1} \\ & & \\ 0 \;\cdots\; 0 & d_0 \;\cdots & d_{m-1} \end{vmatrix} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq m$$

En commençant avec $i = m$ on a $d_0\, H_m^{(k-2m)} = 0$ ce qui entraine que $d_0 = 0$ puisque $P_{k,m}(x)$ est orthogonal régulier.
On obtient ainsi $d_s = 0$ pour $s \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq m-1$.
Si $m < k \leq 2m$, parmi les lignes de $H_m^{(k-2m)}$ une ligne est identique à $d_0,\ldots,d_{m-1}$. On a donc $H_m^{(k-2m)} = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.
Si $k=m$, $H_m^{(k-2m+1)} = 0$, car sa dernière ligne est $d_0,\ldots,d_{m-1}$.
Donc $P_{k,m}(x)$ est au nord d'un bloc P qui a son côté ouest occupé par des polynômes de degré 0 puisque $d_0,\ldots,d_{m-1}$ sont nuls.

ii) Si $0 \leq k \leq m-1$.

On obtient :

$$\tilde{Q}_{k,m}(x) \equiv 0 \iff \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots\cdots\cdots & & d_{k-m} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots\cdots\cdots & & d_{k-1} \\ d_{i-m} & \cdots\ d_{-1} & 0\ \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{N},\ 0 \leq i \leq m-1$$

a) Si $d_{-1} \neq 0$, alors pour $i = m-1$ on a :

$$H_m^{(k-2m+1)} = 0.$$

On en déduira de proche en proche que tous les déterminants d'ordre m, sauf $H_m^{(k-2m)}$, extraits des m premières lignes du déterminant précédent sont nuls.

Par conséquent $P_{k,m}(x) = x^m$.

$P_{k,m}(x)$ est au nord d'un bloc dont le côté ouest est occupé par des polynômes de degré 0. Mais si $d_{-1} \neq 0$, aucun bloc occupant cette position n'a son côté nord dans la demi-table supérieure.

b) Si $d_{-i} = 0$, pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$ et $d_{-r-1} \neq 0$ tous les polynômes $\tilde{Q}_{k,m}(x)$ pour $m \leq r$ sont identiquement nuls.

D'autre part, il y a un bloc P qui a une hauteur de (r-1) dans la demi-table supérieure. Ce bloc a son côté ouest occupé par des constantes.

Pour $m \leq r$ il existe un seul polynôme $P_{k,m}(x)$ orthogonal régulier. Il est au nord de ce bloc. Le côté nord du bloc $\tilde{Q}_2$ est occupé par des polynômes identiquement nuls d'après la propriété 6.7. Ce sont les seuls à être identiquement nuls pour $r < m$. En effet, supposons que $\tilde{Q}_{k,m}(x) \equiv 0$ pour $r < m$.

On trouve que :

$$\begin{vmatrix} d_{k-2m} & \cdots\cdots & & & d_{k-m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{k-m-1} & \cdots\cdots & & & d_{k-1} \\ 0 \;\cdots\; 0 & & d_{-r-1} & & 0 \;\cdots\; 0 \end{vmatrix} = 0$$

quelle que soit la colonne $j \in \mathbb{N}$ occupée par $d_{-r-1}$, $0 \leq j \leq m-1-r$.

Alors en utilisant l'expression de $P_{k,m}(x)$ sous forme de déterminant on obtient :

$$P_{k,m}(x) = x^{m-r}\, P_r^{(k-m-r)}(x) = x^{m-r+j}\, P_{r-j}^{(k-m-r+j)}(x)$$

avec

$$P_{r-j}^{(k-m-r+j)}(o) \neq 0 \text{ et } j \geq 0.$$

$$P_{k,m}(x) = x^{m-r+j}\, P^*_{r-j}(x)$$

où $P^*_{r-j}(x)$ est un polynôme situé sur le côté ouest du bloc $P_2$.
On a par conséquent $\mathcal{Q}_{k,m}(x) \equiv \mathcal{Q}^*_{r-j}(x) \equiv 0$.

Or le seul polynôme orthogonal régulier, tel que sa colonne soit inférieure ou égale à r, est au nord d'un bloc ; il ne peut donc être à l'ouest d'un autre bloc. Il faut donc que l'on ait $r = j$.
Par conséquent $\mathcal{Q}_{k,m}(x)$ ne peut être identiquement nul que s'il est au nord d'un bloc $P_2$ dont le côté ouest est occupé par des constantes.
On a alors $d_{k-i} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$.

cqfd.

Corollaire 6.9.

*Les seuls polynômes $\mathcal{Q}_{k,m}(x)$ identiquement nuls sont*

*i) au nord d'un bloc $\mathcal{Q}_2$ dont le bloc P correspondant a son côté ouest occupé par des polynômes de degré 0 et son côté nord situé dans la demi-table* $0 \leq k \leq m$.

*ii) dans la partie du bloc* $\tilde{Q}_2$ *où la propriété 6.6 est vraie (cf. remarque 6.5).*

Démonstration.

C'est la conséquence immédiate des propriétés 6.20 et 6.6.

cqfd.

Pour la propriété suivante on pose encore $m = k-2m$ et $k' = k-2m+2pr(m,n)$.

*Propriété 6.21.*

*Si* $P_{k,m}(x)$ *est orthogonal régulier, alors :*

*i)* $P_{k,m}(x)$ *et* $P_{k',pr(m,n)}(x)$ *n'ont pas de racine commune.*

*ii)* *Si* $d_{-1} \neq 0$, $Q_{k,m}(x)$ *et* $Q_{k',pr(m,n)}(x)$ *n'ont pas de racine commune.*

*iii)* *Si* $d_{-1} = 0$, $Q_{k,m}(x)$ *et* $Q_{k',pr(m,n)}(x)$ *n'ont pas d'autre racine commune que 0.*

*iv)* *Si* $P_{k,m}(x)$ *n'est pas au nord d'un bloc P,* $P_{k,m}(x)$ *et* $Q_{k,m}(x)$ *n'ont pas de racine commune.*

*v)* *Si* $P_{k,m}(x)$ *est au nord d'un bloc P et si* $k = 2m$, *alors* $P_{k,m}(x)$ $Q_{k,m}(x)$ *n'ont pas de racine commune, si* $0 \leq k \leq 2m-1$, *alors 0 est la seule racine commune.*

Démonstration.

D'après la propriété 6.17 on a :

$$\Delta_m^{(k-2m)} = P_{k,m}(x)\, Q_{k',pr(m,n)}(x) - Q_{k,m}(x)\, P_{k',pr(m,n)}(x) = \rho_m^{(k-2m)}\, x^{2m-k}.$$

Donc la seule racine commune que puissent avoir deux polynômes pris dans chacun des produits est zéro, ce qui démontre le iii).

i) Démontré dans le théorème 1.9 i).

ii) Si $d_{-1} \neq 0$ et si $0 \leq k \leq 2m-1$, les polynômes $Q_{k,m}(x)$ et $Q_{k',pr(m,n)}(x)$ ne peuvent avoir 0 pour racine commune car cela signifierait qu'ils sont tous les deux au nord d'un bloc $Q_2$ (corollaire 6.7).
Si $k = 2m$, on a l'approximant de Padé classique et la propriété est vraie. (Théorème 1.9 ii)).

iv) Si $P_{k,m}(x)$ n'est pas au nord d'un bloc $P_2$, il n'a pas 0 pour racine. Par conséquent $P_{k,m}(x)$ et $Q_{k,m}(x)$ n'ont pas de racine commune.

v) Si $k = 2m$ on a l'approximant de Padé classique, d'où le résultat (théorème 1.9 ii)).
Si $0 \leq k \leq 2m-1$ la propriété 6.7 démontre le résultat.

<u>cqfd</u>.

## <u>Remarque 6.10.</u>

Lorsque $P_{k,m}(x)$ est orthogonal régulier, nous avons les équivalences suivantes pour le degré de $Q_{k,m}(t)$ et $\tilde{Q}_{k,m}(t)$.
Nous savons déjà que $\deg P_{k,m}(x) = m$.

<u>Si $k > m-1$.</u>

$$\deg Q_{k,m}(t) = m-1 \iff d_0 \neq 0$$

$$\deg \tilde{Q}_{k,m}(t) = m-1 \iff Q_{k,m}(0) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} d_{k-2m} & \text{------------} & d_{k-m} \\ d_{k-m-1} & \text{------------} & d_{k-1} \\ 0 \; d_0 & \text{----------} & d_{m-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Si $0 \leq k \leq m-1$.

$$\deg \tilde{Q}_{k,m}(t) = m-1 \iff \begin{cases} d_{-1} \neq 0 \\ H_m^{(k-2m+1)} \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d_{-1} \neq 0 \\ P_{k,m}(0) \neq 0. \end{cases}$$

## 6.5 TABLE F2 NORMALE - TABLE F2 NON NORMALE.

*Définition 6.4.*

*Nous appellerons table $H_2$, la sous table des déterminants de Hankel qui correspond aux limites de la table $P_2$.*

*Définition 6.5.*

*Une table $F_2$ sera dite normale si et seulement si la table $H_2$ est normale. Dans le cas contraire la table $F_2$ sera dite non normale.*

*Propriété 6.22.*

*Si la table $F_2$ est normale et si $0 \leq k \leq 2m-1$, alors*

$$\deg \tilde{P}_{k,m}(x) = m \text{ et } \deg \tilde{Q}_{k,m}(x) = m-1.$$

Démonstration.

La table $H_2$ est normale, donc $d_0 \neq 0$ et $d_{-1} \neq 0$.
Pour $0 \leq k \leq 2m-1$, $P_{k,m}(0) \neq 0$ puisqu'aucun bloc P n'a d'élément dans la table $P_2$.
Donc $\deg \tilde{P}_{k,m}(x) = m$.
Si $0 \leq k \leq m-1$, alors $\deg \tilde{Q}_{k,m}(t) = m-1$ d'après la remarque 6.10.
Si $m \leq k \leq 2m-1$, 0 ne peut être racine de $Q_{k,m}(t)$ que s'il est au nord d'un bloc $Q_2$ (corollaire 6.7), ce qui est contraire à l'hypothèse.
Donc $\deg \tilde{Q}_{k,m}(t) = m-1$.

cqfd.

Remarque 6.11.

On prendra garde au fait que pour $k = 2m$ on peut avoir :

$$\deg \tilde{P}_{k,m}(x) = m \text{ et } \deg \tilde{Q}_{k,m} < m-1$$

ou

$$\deg \tilde{P}_{k,m}(x) < m \text{ et } \deg \tilde{Q}_{k,m} = m-1$$

Exemple 1.

$$c = \{1, 2, 1, -4, 1, \dots\}$$

$P_{4,2}(x) = x^2 - 2x + 3$

$Q_{4,2}(x) = x$ et $\tilde{Q}_{4,2}(x) = 1.$

Exemple 2.

$$c = \{1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, \dots\}$$

$P_{6,3}(x) = x^2(x-1)$ $\quad \tilde{P}_{6,3}(x) = 1-x$

$Q_{6,3}(x) = x^2+x-1$ et $\tilde{Q}_{6,3}(x) = -x^2+x+1$

## 6.6 CAS DES FONCTIONNELLES LINEAIRES DEFINIES POSITIVES.

Nous étudions maintenant les propriétés des zéros de $P_{k,m}(x)$ et $Q_{k,m}(x)$, lorsque la fonctionnelle linéaire $d^{(k-2m)}$ est définie positive.

*Propriété 6.23.*

*Si* $0 \le k \le 2m-1$ *et si la fonctionnelle linéaire* $d^{(k-2m)}$ *est définie positive, alors :*

*i)* *Les zéros de* $P_{k,m}(x)$ *sont réels et distincts* *ii)* *Deux zéros consécutifs de* $P_{k+2,m+1}(x)$ *sont séparés par un zéro de* $P_{k,m}(x)$ *et réciproquement.*

*iii)* *Les zéros de* $Q_{k,m}(x)$ *sont réels et les zéros non nuls sont distincts*

*iv)* *Deux zéros consécutifs de même signe de* $P_{k,m}(x)$ *sont séparés par un zéro de* $Q_{k,m}(x)$ *et réciproquement.*
*Si 0 est racine simple de* $P_{k,m}(x)$ *il est racine de* $Q_{k,m}(x)$.
$Q_{k,m}(x)$ *peut avoir au plus une racine double nulle, seulement dans le cas où* $k$ *est pair,* $P_{k,m}(0) = 0$ *et s'il existe des zéros de signe opposé pour* $P_{k,m}(x)$.
*Enfin, si* $k$ *est pair et si* $0$ *n'est pas racine, alors deux zéros consécutifs de* $P_{k,m}(x)$ *sont séparés par un zéro de* $Q_{k,m}(x)$ *et réciproquement.*

*v)* *Deux zéros consécutifs de même signe de* $Q_{k,m}(x)$ *sont séparés par un zéro de* $Q_{k+2,m+1}(x)$ *et réciproquement.*

Démonstration.

i) et ii) Démontré dans le théorème 2.15 du livre de C. Brezinski.

iii) et iv)

a) Si $k$ est pair.

On prend deux zéros consécutifs y et z de $P_{k+2,m+1}(x)$.

Si aucun des deux n'est nul on a en utilisant la propriété 6.17

$$-P_{k,m}(y)\; Q_{k+2,m+1}(y) = \rho_{m+1}^{(k-2m)}\; y^{2m-k}$$

$$-P_{k,m}(z)\; Q_{k+2,m+1}(z) = \rho_{m+1}^{(k-2m)}\; z^{2m-k}.$$

Ces deux expressions sont de même signe.
Or, d'après le ii), $P_{k,m}(y)$ et $P_{k,m}(z)$ sont de signe opposé, donc aussi $Q_{k+2,m+1}(y)$ et $Q_{k+2,m+1}(z)$. $Q_{k+2,m+1}(x)$ a donc un zéro entre y et z.
Soit au total m zéros réels et distincts.

**Si 0 est racine.**

Alors

$$P_{k,m}(0)\ Q_{k+2,m+1}(0) = 0$$

D'après le i) $P_{k,m}(0) \neq 0$, donc $Q_{k+2,m+1}(0) = 0$.

Si de plus il existe des zéros de signe opposé, alors si on prend les trois zéros consécutifs y, 0, z tels que $y < 0 < z$, on a :

$$- P_{k,m}(y)\ Q_{k+2,m+1}(y) = \rho_{m+1}^{(k-2m)}\ y^{2m-k}$$

$$- P_{k,m}(z)\ Q_{k+2,m+1}(z) = \rho_{m+1}^{(k-2m)}\ z^{2m-k}$$

ces deux expressions sont toujours de même signe, mais cette fois ci $P_{k,m}(y)$ et $P_{k,m}(z)$ sont aussi de même signe, donc également $Q_{k+2,m+1}(y)$ et $Q_{k+2,m+1}(z)$.

Or, $Q_{k+2,m+1}(0) = 0$. Ceci n'est possible que s'il existe un second zéro entre y et z. 0 peut être racine double. Si 0 n'est pas racine double il y a un autre zéro réel non nul entre y et z.

Soit au total m zéros réels et les zéros non nuls sont distincts.

**b) Si k est impair.**

Entre deux zéros consécutifs non nuls de même signe de $P_{k+2,m+1}(x)$ on trouve encore un zéro de $Q_{k+2,m+1}(x)$.

**Si 0 est racine**, il est aussi racine de $Q_{k+2,m+1}(x)$.

Si de plus il existe des zéros de signe opposé alors en prenant trois zéros consécutifs y, 0, z tels que $y < 0 < z$ on a les deux mêmes relations que dans le a). Elles sont cette fois-ci de signe opposé et $P_{k,m}(y)$ et $P_{k,m}(z)$ sont de même signe. Donc $Q_{k+2,m+1}(y)$ et $Q_{k+2,m+1}(z)$ sont de signe opposé. Il y a donc un nombre impair de zéros entre y et z. Il y a déjà 0. En fait, il n'y en a pas d'autre sinon on aurait (m+1) zéros réels et $Q_{k+2,m+1}(x)$ peut avoir au plus m zéros.

Il reste donc au plus un zéro réel à placer avant ou après les zéros de $P_{k+2,m+1}(x)$.

Si 0 n'est pas racine, et s'il existe des zéros de signe opposé alors on prend encore deux zéros consécutifs y et z tels que $y < 0 < z$. Or $P_{k,m}(y)$ et $P_{k,m}(z)$ sont de signe opposé. Donc $Q_{k+2,m+1}(y)$ et $Q_{k+2,m+1}(z)$ sont de même signe.
On a donc un nombre pair de zéros entre y et z. En fait il n'y en a aucun, sinon on aurait encore (m+1) zéros pour $Q_{k+2,m+1}(x)$. Il reste donc au plus un zéro réel à placer avant ou après les zéros de $P_{k+2,m+1}(x)$.

v) Prenons deux zéros consécutifs y et z de même signe de $Q_{k,m}(x)$. On a encore les deux mêmes relations. Ces deux expressions sont de même signe. Or d'après le iv), $P_{k,m}(y)$ et $P_{k,m}(z)$ sont de signe opposé, donc aussi $Q_{k+2,m+1}(y)$ et $Q_{k+2,m+1}(z)$. Donc il y a un nombre impair de zéros de $Q_{k+2,m+1}(y)$ entre y et z.
Pour montrer la réciproque on procède de la même façon en prenant deux zéros consécutifs y et z de même signe de $Q_{k+2,m+1}(x)$.
D'où la conclusion.

cqfd.

Remarque 6.12.

Si $k = 2m$ on a l'approximant de Padé classique et par conséquent le théorème 2.15 du livre de C. Brezinski est valable dans son intégralité

i) Les zéros de $P_{2m,m}(x)$ sont réels et distincts.

ii) Les zéros de $Q_{2m,m}(x)$ sont réels et distincts.

iii) Deux zéros consécutifs de $P_{2m+2,m+1}(x)$ sont séparés par un zéro de $P_{2m,m}(x)$ et réciproquement.

iv) Deux zéros consécutifs de $Q_{2m+2,m+1}(x)$ sont séparés par un zéro de $Q_{2m,m}(x)$ et réciproquement.

v) Deux zéros consécutifs de $P_{2m,m}(x)$ sont séparés par un zéro de $Q_{2m,m}(x)$ et réciproquement.

*Corollaire 6.10.*

*Si* $d_{-1} \neq 0$ *et si la fonctionnelle linéaire* $d^{(k-2m)}$ *est définie positive avec* $0 \leq k \leq 2m-1$, *alors.*

*i)* *Les zéros de* $P_{k,m}(x)$ *sont réels et distincts.*

*ii)* *Deux zéros consécutifs de* $P_{k+2,m+1}(x)$ *sont séparés par un zéro de* $P_{k,m}(x)$ *et réciproquement.*

*iii)* *Les zéros de* $Q_{k,m}(x)$ *sont réels et distincts.*

*iv)* *Si* 0 *est racine simple de* $P_{k,m}(x)$ *il est racine simple de* $Q_{k,m}(x)$ *et réciproquement.*
*Deux zéros consécutifs de même signe de* $P_{k,m}(x)$ *sont séparés par un zéro de* $Q_{k,m}(x)$ *et réciproquement.*
*Enfin, si* k *est pair et si* 0 *n'est pas racine, alors deux zéros consécutifs de* $P_{k,m}(x)$ *sont séparés par un zéro de* $Q_{k,m}(x)$ *et réciproquement.*

*v)* *Deux zéros consécutifs de même signe de* $Q_{k,m}(x)$ *sont séparés par un zéro de* $Q_{k+2,m+1}(x)$ *et réciproquement.*

*Si 0 est racine de l'un il n'est pas racine de l'autre.*

Démonstration.

La démonstration reste celle de la propriété 6.23 à laquelle il convient d'ajouter :

- pour les iii) et iv) - D'après le corollaire 6.6, $Q_{k,m}(x)$ a 0 pour racine avec un ordre de multiplicité inférieur ou égal à celui de $P_{k,m}(x)$.

- pour le v) - Si 0 est racine de l'un, il est au nord d'un bloc de largeur 1. L'autre ne peut donc être aussi au nord d'un bloc.

cqfd.

*Corollaire 6.11.*

*Si* $d_{-1} = 0$ *pour* $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$, *alors* :

*i)* *La fonctionnelle linéaire* $d^{(-j)}$ *pour* $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq r$, *n'est pas définie.*

*ii)* *Si* $r > 1$, *la fonctionnelle linéaire* $d^{(-j)}$ *pour* $j > r$ *n'est pas définie positive.*

Démonstration.

i) Evident puisque $H_1^{(-j)} = 0$.

ii) Si $j = 2m-k > r \geq 2$ on utilise la propriété 6.19 et le corollaire 6.8.

$$Q_{k,m}(x) = x^r \; Q^*_{k,m-r}(x).$$

Alors 0 est racine d'ordre $r \geq 2$ au moins de $Q_{k,m}(x)$.
On a alors une contradiction avec la propriété 6.23 iv). En effet, $Q_{k,m}(x)$ ne peut avoir 0 pour racine double au plus, que dans le cas où k est pair, $P_{k,m}(0) = 0$ et s'il existe des zéros de signe opposé pour $P_{k,m}(x)$.
Si $P_{k,m}(0) = 0$, $P_{k,m}(x)$ est au nord d'un bloc P de largeur 1. D'après le corollaire 6.8, $Q_{k,m}(x) = x^{r+1} \; Q^*_{k,m-r-1}(x)$ et 0 serait racine triple de $Q_{k,m}(x)$.

cqfd.

## 6.7 ETUDE DE L'ERREUR.

Nous voulons connaître l'expression de $f(x) - f_{k,m}(x)$ pour x petit et pour x grand.
En utilisant les relations introduites dans la section 6.1 nous avons :

Pour x petit :

$$f(x).\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{Q}_{k,m}(x) = \sum_{j=k}^{\infty} \left( \sum_{i=o}^{m} c_{j-i}\, b_i - a_j \right) x^j$$

Pour x grand :

$$f(x).\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{Q}_{k,m}(x) = \sum_{j=k-m-1}^{-\infty} \left( \sum_{i=o}^{m} c^{*}_{j-i}\, b_i - a_j \right) x^j$$

Nous pouvons en déduire la propriété suivante :

*Propriété 6.24.*

*Nous avons pour* x *petit* :

$$f(x).\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{Q}_{k,m}(x) = \sum_{j=k}^{\infty} \left( \sum_{i=o}^{m} d_{j-i}\, b_i \right) x^j$$

*pour* x *grand* :

$$f(x).\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{Q}_{k,m}(x) = - \sum_{j=k-m-1}^{-\infty} \left( \sum_{i=o}^{m} d_{j-i}\, b_i \right) x^j .$$

Démonstration.

i) Si $m+1 \le k \le 2m$.

Pour x petit, $a_j = 0$ pour $j \in \mathbb{N}$, $j \ge k$. D'où le résultat.
Pour x grand on a : $0 \le k-m-1 \le m-1$.
Or, pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le m-1$, $\sum_{i=o}^{m} c_{j-i}\, b_i - a_j = 0$.
On retranche cette expression de chacun des coefficients de $x^j$ de $f(x).\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{Q}_{k,m}(x)$.

Par conséquent

$$f(x)\ \tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{Q}_{k,m}(x) = \sum_{j=k-m-1}^{-\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} (c^*_{j-i} - c_{j-i}) b_i \right) x^j$$

$$= - \sum_{j=k-m-1}^{-\infty} \left( \sum_{i=0}^{m} d_{j-i}\ b_i \right) x^j$$

ii) <u>Si $0 \leq k \leq m-1$.</u>

Pour x grand on a $-m-1 \leq k-m-1 \leq -2$.
Donc $a_j = 0$ pour $j \leq k-m-1$. D'où le résultat.

Pour x petit on a :

$$\sum_{i=0}^{m} c^*_{j-i}\ b_i - a_j = 0 \text{ pour } j \in Z,\ k-m \leq j \leq m-1.$$

On retranche cette expression de chacun des coefficients de $x^j$ de $f(x).\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{Q}_{k,m}(x)$. D'où le résultat.

iii) <u>Si $k = m$.</u>

Pour x petit $a_j = 0$ pour $j \geq m$. D'où le résultat.

Pour x grand $a_j = 0$ pour $j < 0$. D'où le résultat.

<u>cqfd</u>.

Nous démontrons maintenant une propriété qui fournit l'expression de l'erreur $f(x) - f_{k,m}(x)$ quand l'approximant $f_{k,m}(x)$ existe.

<u>*Propriété 6.25.*</u>

*Si l'approximant de Padé en deux points $f_{k,m}(x)$ existe on a :*

*i) <u>Pour x petit.</u>*

*Si* $H_m^{(k-2m)} \neq 0$, *alors* :

$$f(x) - f_{k,m}(x) = \frac{H_{m+1}^{(k-2m)}}{H_m^{(k-2m)}} \quad x^k + 0(x^{k+1})$$

*Si* $H_m^{(k-2m)} = 0$ *et si* $H_{h+1}^{(k-2m)} \neq 0$, $H_{p+1}^{(k-2m)} \neq 0$ *et* $H_i^{(k-2m)} = 0$ *pour* $i \in \mathbb{N}$, $h+2 \leq i \leq p$, *alors* :

$$f(x) - f_{k,m}(x) = d^{(k-2m)}(x^p \, P_{h+1}^{(k-2m)}) \; x^{k-2m+p+h+1} + 0(x^{k-2m+p+h+2})$$

*ii)* *Pour x grand.*

*Si* $H_m^{(k-2m+1)} \neq 0$ *et* $H_m^{(k-2m)} \neq 0$ *alors* :

$$f(x) - f_{k,m}(x) = - \frac{H_{m+1}^{(k-2m-1)}}{H_m^{(k-2m+1)}} \quad x^{k-2m-1} + 0_- \, (x^{k-2m-2})$$

*Si* $H_m^{(k-2m+1)} = 0$ *ou* $H_m^{(k-2m)} = 0$, *et si* $H_{\tilde{h}+1}^{(k-2\tilde{h}-1)} \neq 0$, $H_{\tilde{p}+1}^{(k-2\tilde{p}-1)} \neq 0$ *et* $H_i^{(k-2i+1)} = 0$ *pour* $i \in \mathbb{N}$, $\tilde{h}+2 \leq i \leq \tilde{p}$, *alors* :

$$f - f_{k,m}(x) = -\gamma^{(k-1)}(x^{\tilde{p}} \, W_{\tilde{h}+1}^{(k-1)})x^{k-\tilde{p}-\tilde{h}-2} + 0_-(x^{k-\tilde{p}-\tilde{h}-3})$$

*où* $W_{\tilde{h}+1}^{(k-1)}$ *est identique au polynôme* $\tilde{P}_{k,\tilde{h}+1}(x)$ *rendu unitaire.*

Démonstration.

i) Pour x petit.

Si $H_m^{(k-2m)} \neq 0$, alors le premier terme non nul de $f.\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{Q}_{k,m}(x)$ est :

$$\sum_{i=o}^{m} d_{k-i} \, b_i = d^{(k-2m)}(x^m \, P_{k,m}(x)) = \frac{H_{m+1}^{(k-2m)}}{H_m^{(k-2m)}}$$

Donc :

$$f(x) - f_{k,m}(x) = \frac{1}{\tilde{P}_{k,m}(x)} \frac{H_{m+1}^{(k-2m)}}{H_m^{(k-2m)}} x^k + \frac{1}{\tilde{P}_{k,m}(x)} O(x^{k+1})$$

Or $\tilde{P}_{k,m}(0) = 1$. Par conséquent, on a le résultat proposé.

Si $H_m^{(k-2m)} = 0$, puisque l'approximant de Padé en deux points $f_{k,m}(x)$ existe, il est identique aux approximants des côtés intérieurs Ouest, Nord et Nord-Ouest du bloc $F_2$ dans lequel il se trouve. En particulier :

$$f_{k,m}(x) \equiv \frac{\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(x)}{\tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(x)}$$

Posons $\tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(x) = \sum_{i=o}^{h+1} \lambda_{i,h+1} x^i$ et $k' = k-2m+2h+2$. On applique la propriété 6.24 à l'approximant $\frac{\tilde{Q}_{h+1}^{(k-2m,0)}(x)}{\tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(x)}$.

Or on a :

$$\sum_{i=o}^{h+1} d_{j-i} \lambda_{i,h+1} = d^{(k-2m)} (x^{j-k'+h+1} P_{h+1}^{(k-2m)}) = 0$$

pour $j \in Z$, $k'-h-1 \leq j \leq k'+p-h-2$

$$\sum_{i=o}^{h+1} d_{k'+p-h-1-i} \lambda_{i,h+1} = d^{(k-2m)} (x^p P_{h+1}^{(k-2m)}) \neq 0.$$

Puisque $\tilde{P}_{h+1}^{(k-2m)}(0) = 1$, on a le résultat proposé.

ii) Pour x grand.

Si $H_m^{(k-2m)} \neq 0$ et $H_m^{(k-2m+1)} \neq 0$, alors le premier terme non nul de $f.\tilde{P}_{k,m}(x) - \tilde{Q}_{k,m}(x)$ est

$$- \sum_{i=o}^{m} d_{k-m-1-i}\ b_i = -\gamma^{(k-1)}\ (x^m\ \tilde{P}_{k,m}(x))$$

Or $\tilde{P}_{k,m}(x) = (-1)^m \dfrac{H_m^{(k-2m+1)}}{H_m^{(k-2m)}} \quad W_m^{(k-1)} = \sum_{i=o}^{m} b_i x^i$.

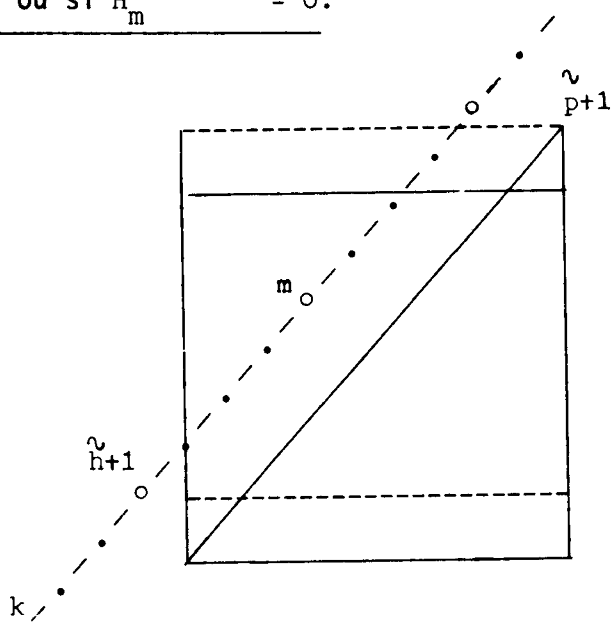
Donc $b_m = (-1)^m \dfrac{H_m^{(k-2m+1)}}{H_m^{(k-2m)}}$ .

Par conséquent :

$$f(x) - f_{k,m}(x) = -\gamma^{(k-1)}\ (x^m\ W_m^{(k-1)})\ x^{k-2m-1} + 0\_(x^{k-2m-2})$$

$$= - \frac{H_{m+1}^{(k-2m-1)}}{H_m^{(k-2m+1)}}\ x^{k-2m-1} + 0\_(x^{k-2m-2})$$

Si $H_m^{(k-2m)} = 0$ ou si $H_m^{(k-2m+1)} = 0$.



En trait plein nous avons représenté le bloc P, en pointillé le bloc W.
Sur la diagonale k nous n'avons fait figurer que les valeurs des colonnes.
Avec nos hypothèses, $f_{k,m}(x)$ est dans la partie du bloc $F_2$ situé au dessus de l'antidiagonale principale de ce bloc ou sur cette antidiagonale.
Par contre, il n'est pas sur la première colonne de gauche de ce bloc $F_2$.
Alors :

$$f_{k,m}(x) \equiv \frac{\tilde{Q}^{(k-2\tilde{k}-2,0)}_{\tilde{h}+1}(x)}{\tilde{P}^{(k-2\tilde{h}-2)}_{\tilde{h}+1}(x)}$$

où $\tilde{Q}^{(k-2\tilde{h}-2,0)}_{\tilde{h}+1}(x)$ est l'associé de $\tilde{P}^{(k-2\tilde{h}-2)}_{\tilde{h}+1}(x)$.

Nous avons :

$$\begin{cases} \gamma^{(k-1)}\left(x^j\, W^{(k-1)}_{\tilde{h}+1}\right) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le \tilde{p}-1 \\ \gamma^{(k-1)}\left(x^{\tilde{p}}\, W^{(k-1)}_{\tilde{h}+1}\right) = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\tilde{P}^{(k-2\tilde{h}-2)}_{\tilde{h}+1}(x) = (-1)^{\tilde{h}+1} \frac{H^{(k-2\tilde{h}-1)}_{\tilde{h}+1}}{H^{(k-2\tilde{h}-2)}_{\tilde{h}+1}} \quad W^{(k-1)}_{\tilde{h}+1}(x) = \sum_{i=o}^{\tilde{h}+1} \lambda_{i,\tilde{h}+1}\, x^i$$

On a donc :

$$\lambda_{\tilde{h}+1,\tilde{h}+1} = (-1)^{\tilde{h}+1} \frac{H^{(k-2\tilde{h}-1)}_{\tilde{h}+1}}{H^{(k-2\tilde{h}-2)}_{\tilde{h}+1}}$$

En appliquant la propriété 6.24 à l'approximant $\dfrac{\tilde{Q}^{(k-2\tilde{h}-2,0)}_{\tilde{h}+1}(x)}{\tilde{P}^{(k-2\tilde{h}-2)}_{\tilde{h}+1}(x)}$ on a :

$$\sum_{i=o}^{\tilde{h}+1} d_{j-i}\, \lambda_{i,\tilde{h}+1} = 0 \text{ pour } j \in Z,\ h-\tilde{p} \le j \le k-1$$

$$\sum_{i=0}^{\tilde{h}+1} d_{k-\tilde{p}-1-i}\ \lambda_{i,\tilde{h}+1} \neq 0$$

Par conséquent :

$$f(x)\ \tilde{P}^{(k-2\tilde{h}-2)}_{\tilde{h}+1}(x) - \tilde{Q}^{(k-2\tilde{h}-2,0)}_{\tilde{h}+1}(x) = -\gamma^{(k-1)}\ (x^{\tilde{p}}\ \tilde{P}^{(k-2\tilde{h}-2)}_{\tilde{h}+1}(x))\ x^{k-\tilde{p}-1}$$

$$+ O_{-}\ (x^{k-\tilde{p}-2}).$$

C'est à dire en divisant les deux membres par $\tilde{P}^{(k-2\tilde{h}-2)}_{\tilde{h}+1}(x)$ et en prenant le premier terme du développement asymptotique.

$$f(x) - f_{k,m}(x) = -\gamma^{(k-1)}\ (x^{\tilde{p}}\ W^{k-1}_{\tilde{h}+1}(x))\ x^{k-\tilde{p}-\tilde{h}-2} + O_{-}(x^{k-\tilde{p}-\tilde{h}-3})$$

cqfd.

Remarque 6.13.

Dans le cas normal on retrouve les expressions données par Sidi dans son article (théorème 4).

Remarque 6.14.

Dans le cas non normal on peut donner une expression du premier terme de l'erreur en fonction de déterminants de Hankel. Il suffit de faire appel à la propriété 4.5 dans le cas où x est petit et à la propriété 4.15 dans le cas où x est grand.

*Propriété 6.26.*

*Une condition nécessaire et suffisante pour que* $f(x) \equiv f_{k,m}(x) = \dfrac{\tilde{Q}_{k,m}(x)}{\tilde{P}_{k,m}(x)}$ *irréductible avec* $\deg \tilde{P}_{k,m}(x) = m$ *est que l'on ait un bloc* $F_2$ *infini pour les colonnes* $j \geq m$.

Démonstration.

CN Si $\dfrac{\tilde{Q}_{k,m}(x)}{\tilde{P}_{k,m}(x)}$ est irréductible, alors $P_{k,m}(x)$ n'est pas à l'intérieur d'un bloc $P_2$ (cf : propriété 6.21 et théorème 6.1).

Donc $H_m^{(k-2m)} \neq 0$.
Si en plus deg $\tilde{P}_{k,m}(x) = m$, 0 n'est pas racine de $P_{k,m}(x)$.

Donc $H_m^{(k-2m+1)} \neq 0$.
Alors d'après la propriété 6.25, pour x petit l'identité de $f(x)$ et de $f_{k,m}(x)$ entraine que $H_{m+1}^{(k-2m)}$ est nul et que $d^{(k-2m)}\ (x^j\ P_m^{(k-2m)})$ est nul quelque soit $j \in \mathbb{N}$, et par conséquent :

$$H_j^{(k-2m)} = 0,\ \forall j \geq m+1.$$

D'autre part, pour x grand, la même propriété 6.25 donne

$$f(x) \equiv f_{k,m}(x) \Rightarrow \begin{cases} H_{m+1}^{(k-2m-1)} = 0 \\ \\ \gamma^{(k-1)}\ (x^j\ W_m^{(k-1)}) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

et par conséquent :

$$H_i^{(k-2i+1)} = 0 \quad \forall i \geq m+1.$$

On a donc un bloc infini avec $H_i = 0$ pour $i \geq m+1$ et $H_m \neq 0$.

CS : Puisqu'on a un bloc $F_2$ infini pour les colonnes $j \geq m$, $H_m^{(k-2m)} \neq 0$, $\forall k,\ 0 \leq k \leq 2m$.
Alors $P_{k,m}(x)$ n'a pas 0 pour racine puisqu'il est à l'ouest d'un bloc $P_2$.
Donc deg $\tilde{P}_{k,m}(x) = m$.

Suivant la diagonale k-2m on a :

$$H_i^{(k-2m)} = 0, \ \forall i \in \mathbb{N}, \ i \geq m+1$$

Donc pour x petit

$$f(x) - f_{k,m}(x) = d^{(k-2m)}(x^j \ P_m^{(k-2m)}) \ x^{k-m+j} + O(x^{k-m+j+1})$$

et

$$d^{(k-2m)} \ (x^j \ P_m^{(k-2m)}) = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

D'où :

$$f(x) \equiv f_{k,m}(x).$$

cqfd.

*Propriété 6.27.*

*Si* f *est une fraction rationnelle irréductible dont le dénominateur est de degré* m *et le numérateur de degré* m-s-1 *avec* $s \geq 0$, *alors on a un bloc* $F_2$ *infini pour les colonnes* $j \geq m$ *et tous les approximants de Padé en deux points du bloc* $F_2$ *infini sont identiques.*

Démonstration.

Nous avons $f \equiv f_{[m-1/m]}(x) = f_{2m,m}(x)$.
C'est une conséquence du théorème 10 p. 196 du livre de J. Gilewicz.
On applique la propriété 6.26. D'où le résultat.

cqfd.

Remarque 6.15.

Si f est identique à une fraction irréductible dont le dénominateur est de degré m et le numérateur de degré m+s-1 avec $s \geq 0$, on obtiendra un résultat semblable en utilisant la remarque 6.1.

## 6.8 POLYNOMES DE LAURENT ORTHOGONAUX.

Récemment un papier de W. Jones et W. Thron donne des propriétés de certains polynômes de Laurent en vue de les relier aux T-fractions. Nous allons montrer que ces polynômes sont reliés de façon extrêmement simple aux polynômes orthogonaux classiques.

<u>*Définition 6.6.*</u>

*Nous appelons polynômes de Laurent une fonction de la forme :*

$$\bar{P}_{-n,k}(x) = \sum_{i=-n}^{k} \lambda_{i,(-n,k)}\, x^i \qquad n,\ k \in \mathbb{N}.$$

<u>**Notations.**</u>

Nous noterons $\bar{P}_{-n,k}$ l'ensemble des polynômes de Laurent $\bar{P}_{-i,j}(x)$ tels que $i,\ j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq k$ et $0 \leq i \leq n$.

Nous noterons $\bar{P}_{-\infty,\infty}$ l'ensemble des polynômes de Laurent $\bar{P}_{-i,j}(x)$ tels que $i,\ j \in \mathbb{N}$.

<u>**Remarque 6.16.**</u>

$\bar{P}_{-\infty,\infty}$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

$\bar{P}_{-n,k}$ est un sous-espace vectoriel de dimension n+k+1 de $\bar{P}_{-\infty,\infty}$.

<u>*Définition 6.7.*</u>

*Soit* $\{d_k\}_{k \in Z}$ *une suite de nombres réels. Nous définissons une fonctionnelle linéaire* $\hat{d}^{(o)}$ *par :*

$$\hat{d}^{(o)}(x^i) = d_i,\ \forall i \in Z.$$

Parmi les polynômes de $\bar{P}_{-\infty,\infty}$ nous ne retiendrons que les polynômes du type $\bar{P}_{-n,n}(x)$ ou $\bar{P}_{-n,n-1}(x)$.

On cherche les polynômes du type précédent orthogonaux par rapport à la fonctionnelle $\hat{d}^{(o)}$, c'est à dire tels que :

$$\hat{d}^{(o)}\ (x^j\ \bar{P}_{-n,n}(x)) = 0 \text{ pour } j \in Z,\ -n \leq j \leq n-1$$

$$\hat{d}^{(o)}\ (x^j\ \bar{P}_{-n,n-1}(x)) = 0 \text{ pour } j \in Z,\ -n+1 \leq j \leq n-1.$$

Nous obtenons donc les deux systèmes linéaires suivants respectivement pour la première et la seconde relations.

$$\sum_{i=-n}^{n} \lambda_{i,(-n,n)}\ d_{i+j} = 0 \text{ pour } j \in Z,\ -n \leq j \leq n-1$$

$$\sum_{i=-n}^{n-1} \lambda_{i,(-n,n-1)}\ d_{i+j} = 0 \text{ pour } j \in Z,\ -n+1 \leq j \leq n-1.$$

Nous imposons $\lambda_{n,(-n,n)} = 1$ et $\lambda_{n-1,(-n,n-1)} = 1$, c'est à dire que nous désirons que les polynômes $\bar{P}_{-n,n}(x)$ et $\bar{P}_{-n,n-1}(x)$ soient unitaires.

Alors les systèmes d'orthogonalité satisfaits par $\bar{P}_{-n,n}(x)$ et $\bar{P}_{-n,n-1}(x)$ sont aussi satisfaits respectivement par $P_{2n}^{(-2n)}(x)$ et $P_{2n-1}^{(-2n+1)}(x)$, c'est à dire également par $P_{2n,2n}(x)$ et $P_{2n-1,2n-1}(x)$.

Tous les polynômes étant supposés unitaires, nous avons donc :

$$\begin{cases} x^n\ \bar{P}_{-n,n}(x) \equiv P_{2n}^{(-2n)}(x) \equiv P_{2n,2n}(x) \\ x^n\ \bar{P}_{-n,n-1}(x) \equiv P_{2n-1}^{(-2n+1)} \equiv P_{2n-1,2n-1}(x) \end{cases}$$

Les polynômes de Laurent orthogonaux ainsi définis se déduisent donc simplement des polynômes orthogonaux situés sur l'horizontale $k = m$ dans la table $P_2$.

Leur existence et leur unicité sont donc liées à celles des polynômes orthogonaux classiques.
Ils satisfont une relation de récurrence entre trois polynômes orthogonaux réguliers successifs, si on appelle polynôme de Laurent orthogonal régulier un polynôme pour lequel le déterminant de Hankel correspondant (soit $H_{2n}^{(-2n)}$ ou $H_{2n-1}^{(-2n+1)}$) est non nul.

En particulier lorsque la table est normale on peut utiliser la relation 2.29 du livre de C. Brezinski.

Nous avons donc :

$$H_{2n-1}^{(-2n+1)} H_{2n-1}^{(-2n+2)} H_{2n}^{(-2n)} \tilde{P}_{2n}^{(-2n)}(x)$$

$$= (H_{2n}^{(-2n)} H_{2n-1}^{(-2n+2)} - x H_{2n-1}^{(-2n+1)} H_{2n}^{(-2n+1)}) H_{2n-1}^{(-2n+1)} \tilde{P}_{2n-1}^{(-2n+1)}(x)$$

$$- x H_{2n}^{(-2n)} H_{2n}^{(-2n+1)} H_{2n-2}^{(-2n+2)} \tilde{P}_{2n-2}^{(-2n+2)}(x)$$

qui conduit à la relation suivante avec les polynômes de Laurent orthogonaux

$$H_{2n-1}^{(-2n+1)} H_{2n-1}^{(-2n+2)} H_{2n}^{(-2n)} \bar{P}_{-n,n}(x)$$

$$= (x H_{2n}^{(-2n)} H_{2n-1}^{(-2n+2)} - H_{2n-1}^{(-2n+1)} H_{2n}^{(-2n+1)}) H_{2n-1}^{(-2n+1)} \bar{P}_{-n,n-1}(x)$$

$$- H_{2n}^{(-2n)} H_{2n}^{(-2n+1)} H_{2n-2}^{(-2n+2)} \bar{P}_{-n+1,n-1}(x).$$

et

$$H_{2n}^{(-2n)} H_{2n}^{(-2n+1)} H_{2n+1}^{(-2n-1)} \tilde{P}_{2n+1}^{(-2n-1)}(x) =$$

$$(H^{(-2n-1)}_{2n+1}\; H^{(-2n+1)}_{2n} - x\, H^{(-2n)}_{2n}\; H^{(-2n)}_{2n+1})\; H^{(-2n)}_{2n}\; \tilde{P}^{(-2n)}_{2n}(x)$$

$$- x\, H^{(-2n-1)}_{2n+1}\; H^{(-2n)}_{2n+1}\; H^{(-2n+1)}_{2n-1}\; \tilde{P}^{(-2n+1)}_{2n-1}(x)$$

qui conduit à la seconde relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Laurent orthogonaux.

$$H^{(-2n)}_{2n}\; H^{(-2n+1)}_{2n}\; H^{(-2n-1)}_{2n+1}\; \bar{P}_{-n-1,n}(x) =$$

$$(H^{(-2n-1)}_{2n+1}\; H^{(-2n+1)}_{2n} - \frac{1}{x}\, H^{(-2n)}_{2n}\; H^{(-2n)}_{2n+1})\; H^{(-2n)}_{2n}\; \bar{P}_{-n,n}(x)$$

$$- H^{(-2n-1)}_{2n+1}\; H^{(-2n)}_{2n+1}\; H^{(-2n+1)}_{2n-1}\; \bar{P}_{-n,n-1}(x).$$

On retrouve les deux relations de récurrence de Jones et Thron. Si en plus la fonctionnelle est définie positive on a les propriétés classiques pour les zéros des polynômes orthogonaux, ainsi que l'ensemble des propriétés de leur théorème 1.

En conclusion, l'emploi des polynômes de Laurent orthogonaux alourdit et particularise l'étude des approximants de Padé en deux points. En effet, tout d'abord on obtient deux relations de récurrence au lieu d'une seule car il faut tenir compte de la distinction entre $\bar{P}_{-n,n}(x)$ et $\bar{P}_{-n,n-1}(x)$. Ensuite, on n'est capable de trouver l'approximant de Padé en deux points que sur l'horizontale k=m dans la table $P_2$.

## 6.9 DETERMINATION DES TABLES $P_2$ ET $Q_2$.

La table $P_2$ peut être obtenue à partir du calcul de la table P, mais naturellement on fait intervenir des polynômes qui ne sont pas dans la table $P_2$ et qui par conséquent n'ont pas de rapport avec les approximants de Padé en deux points.

La table $Q_2$ ne peut pas être obtenue à partir d'une table plus vaste. Il est donc préférable de calculer ensemble les polynômes $P_{k,m}(x)$ et $Q_{k,m}(x)$ en utilisant les huit relations classiques que vérifient simultanément ces deux catégories de polynômes à l'intérieur des tables $P_2$ et $Q_2$. Les relations générales concernant les polynômes P ont été données au chapitre 4. On a ainsi la possibilité de déterminer n'importe quel approximant de Padé en deux points de la table $F_2$.

L'algorithme général "qd" présenté dans le chapitre 2 peut également être appliqué ici. Les coefficients que l'on obtiendra, s'appliqueront aussi bien pour déterminer $P_{k,m}(x)$ que $Q_{k,m}(x)$.

7

# APPROXIMANTS DES SERIES DE FONCTIONS

\- * -

*Dans la publication ANO 27 nous nous étions intéressés aux propriétés des approximants de type exponentiel. En fait tout ce que nous avions démontré s'applique sans grands changements aux approximants des séries de fonctions. Nous avons donc remanié le chapitre 1 de notre publication ANO pour faire ce septième chapitre. De nombreux résultats obtenus pour les quadratures de Gauss trouveront leur application ici.*

*Nous avons utilisé l'introduction à ces approximants qui figure dans le livre de C. Brezinski [6]. Elle montre comment à partir d'une formule de quadrature de Gauss on obtient un approximant de séries de fonctions. Nous en déduisons que les coefficients de quadrature satisfont un système linéaire dont la matrice est d'Hermite et dans laquelle ne figurent que les valeurs des zéros du polynôme orthogonal* $P_p$*. Il est équivalent à deux autres systèmes linéaires dont l'un est le système d'orthogonalité satisfait par* $P_p$*. Cette propriété clôture la première section.*

*La seconde section est consacréeà l'étude de l'existence et de l'unicité de ces approximants. Nous montrons que lorsqu'il existe, il est unique. Si le polynôme est orthogonal singulier, l'approximant est identique à celui que l'on obtient à partir du polynôme orthogonal régulier prédécesseur. Si le polynôme est quasi-orthogonal, l'approximant n'existe pas. Dans ce cas on peut se ramener à l'étude d'un système plus petit ou plus grand qui a une solution.*

*La troisième section donne une expression de l'erreur en fonction de déterminants de Hankel ou de la fonctionnelle linéaire. Nous utilisons ensuite les résultats de convergence des formules de quadrature de Gauss pour donner des théorèmes de convergence des approximants des séries de fonctions.*

*Quelques propriétés de ces approximants sont exposées dans la quatrième section. Ce sont des résultats sur la parité des approximants, sur leur identité dans un bloc et sur quelques transformations de séries formelles.*

*Toute la fin du chapitre traite des approximants de type exponentiel. La série de fonctions est telle que* $g_i(t) = \frac{t^i}{i!}$ . *Dans ce cas bien particulier on peut obtenir ces approximants en choisissant de façon convenable la solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre* p *à coefficients constants.*
*Il y a d'ailleurs identité entre ce problème et la recherche directe des approximants.*

*L'existence et l'unicité découlent immédiatement des propriétés de la deuxième section.*

*Plus particuliers sont les résultats de la septième section dans laquelle nous ne nous intéressons qu'au cas où le polynôme orthogonal doit avoir des racines simples.*

*Dans la huitième section nous étudions les propriétés des dérivées et des primitives des approximants de type exponentiel, ainsi que celles relatives aux approximants des séries formelles dérivées successives ou primitives. Nous verrons que ces derniers sont en connexion avec les systèmes adjacents de polynômes orthogonaux.*

# 7.1 DEFINITION

On trouvera dans [6] une excellente introduction à ces approximants.

Nous considérons une série de fonction

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\, g_i(t).$$

Nous posons $f_n(t) = \sum_{i=n}^{\infty} c_i\, g_i(t)$, $\forall_n \in Z$.

Nous conviendrons que $c_i = 0$ pour $i < 0$ et que $g_i(t) \equiv 0$ pour $i < 0$.

Nous définissons des fonctionnelles linéaires $c^{(j)}$ pour $j \in Z$ sur l'espace vectoriel P des polynômes réels par

$$c^{(j)}(x^i) = c_{i+j}, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Nous supposons connues les fonctions génératrices $G_n(x,t)$ de $f_n(t)$

$$G_n(x,t) = \sum_{i=n}^{\infty} x^{i-n}\, g_i(t).$$

Nous avons $f_n(t) = c^{(n)}(G_n(x,t))$.

Soit $P_p^{(n)}$ le polynôme orthogonal par rapport à $c^{(n)}$, lorsqu'il existe, et soient $m_{j,p}$ ses racines d'ordre de multiplicité $q_{j,p}$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq \ell_p$ avec :

$$\sum_{j=0}^{\ell_p} q_{j,p} = p.$$

Nous définissons l'approximant de la série de fonctions $f_n(t)$ comme étant $c^{(n)}(L_{p,n}(x))$, où $L_{p,n}(x)$ est le polynôme d'interpolation d'Hermite de $G_n(x,t)$ basé sur les racines $m_{j,p}$.

Nous noterons cet approximant $[p-1/p]_{f_n}(t)$. C'est la notation adopté dans [6].

Nous définissons également les approximants $[p-1+n/p]_f(t)$, $\forall n \in Z$, $n \geq 1 - p$ et $\forall p \in \mathbb{N}$ par :

$$[p-1+n/p]_f(t) = \sum_{i=o}^{n-1} c_i g_i(t) + c^{(n)}(L_{p,n}(x))$$

$$= \sum_{i=o}^{n-1} c_i g_i(t) + [p-1/p]_{f_n}(t).$$

Sans restreindre la généralité du problème nous pouvons nous contenter de démontrer les propriétés relatives à $[p-1/p]_f$.

$$[p-1/p]_f(t) = \sum_{j=o}^{\ell_p} \sum_{n=o}^{q_{j,p}-1} A_{j,n}^{(p)}\, G^{(n)}(m_{j,p},t)$$

où la dérivée $n^{\text{ème}}$ de G est prise par rapport à x.

Pour avoir une numérotation continue des $A_{j,n}^{(p)}$ nous poserons :

$$A_{j,n}^{(p)} = k_{i_j+n,p} \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq \ell_p$$

$$\text{et pour } n \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq q_{j,p}-1,$$

avec
$$\begin{cases} i_o = 0 \\ i_j = \displaystyle\sum_{s=o}^{j-1} q_{s,p} \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq \ell_p+1. \end{cases}$$

Nous commençons par généraliser le théorème 4.13 de [6].

Nous supposons que le polynôme $P_p$ existe.

__*Théorème 7.1.*__

*Lorsqu'on cherche l'approximant* $[p-1/p]_f(t)$, *les* $k_{j,p}$ *et* $m_{j,p}$ *satisfont le système (1) suivant :*

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ m_{o,p} & 1 & 0 & \cdots & m_{1,p} & \cdots & 0 \\ m_{o,p}^2 & 2m_{o,p} & 2 & \cdots & m_{1,p}^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & (q_{\ell_p,p}-1)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ m_{o,p}^{2p-1} & (2p-1)m_{o,p}^{2p-2} & (2p-2)(2p-1)m_{o,p}^{2p-3} & \cdots & m_{1,p}^{2p-1} & \cdots & (2p-1)\cdots(2p-q_{\ell_p,p}+1)m_{\ell_p,p}^{2p-q_{\ell_p,p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{o,p} \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{p-1,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_o \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{2p-1} \end{pmatrix}$$

*Nous avons alors :*

$$[p-1/p]_f(t) = \sum_{i=o}^{\infty} \alpha_i g_i(t)$$

*avec*

$$\alpha_i = \sum_{j=o}^{\ell_p} \sum_{n=o}^{q_{j,p}-1} A_{j,n}^{(p)} [x^i]^{(n)}_{x=m_{j,p}}$$

*et* $\alpha_i = c_i$ *pour* $i \in \mathbb{N},\ 0 \le i \le 2p-1.$

Démonstration.

D'après le théorème 5.2 i) nous avons :

$$c_s = c(x^s) = \sum_{j=o}^{\ell_p} \sum_{n=o}^{q_{j,p}-1} A_{j,n}^{(p)} [x^s]^{(n)}_{x=m_{j,p}}$$

pour $s \in \mathbb{N},\ 0 \le s \le 2p-1.$

$$c_s = c(x^s) = \sum_{j=o}^{\ell_p} \sum_{n=o}^{q_{j,p}-1} s(s-1)\ldots(s-n+1)(m_{j,p})^{s-n} k_{i_j+n,p}$$

C'est bien le système (1).

D'autre part :

$$[p-1/p]_f(t) = \sum_{j=o}^{\ell_p} \sum_{i=o}^{q_{j,p}-1} A_{j,n}^{(p)} \left( \sum_{i=o}^{\infty} g_i(t)[x^i]^{(n)}_{x=m_{j,p}} \right)$$

$$= \sum_{i=o}^{\infty} g_i(t) \left( \sum_{j=o}^{\ell_p} \sum_{n=o}^{q_{j,p}-1} A_{j,n}^{(p)} [x^i]^{(n)}_{x=m_{j,p}} \right).$$

Si on pose :

$$\alpha_i = \sum_{j=o}^{\ell_p} \sum_{n=o}^{q_{j,p}-1} A_{j,n}^{(p)} [x^i]^{(n)}_{x=m_{j,p}} ,$$

nous trouvons bien les résultats proposés.

<u>cqfd.</u>

A partir de ce théorème nous avons :

<u>*Théorème 7.2.*</u>

$$f(t)-[p-1+n/p]_f(t) = O(g_{2p+n}(t)),\ \forall n \in Z,\ n \geq p-1.$$

Remarque fondamentale 7.1.

Nous considérons dans toute la suite que $[p-1/p]_f$ est un approximant de la série de fonction f si et seulement si :

$$f(t)-[p-1/p]_f(t) = O(g_{2p}(t)).$$

Notations.

Désormais on appellera $K_{i,j}$ les éléments de la matrice du système (1) écrit sous la forme :

$$(K_{i,j})\begin{pmatrix} k_{o,p} \\ \vdots \\ k_{p-1,p} \end{pmatrix} = (c_i),\ \text{pour } i \in \mathbb{N},\ 0 \le i \le 2p-1\,.$$

Nous écrivons $P_p$ sous la forme :

$$P_p(z) = \sum_{j=o}^{\ell_p} (z-m_{j,p})^{q_{j,p}} = \sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p}\, z^{p-i}.$$

Donc :

$$\sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p}\, m_{j,p}^{n+p-i} = o \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le \ell_p \end{cases}$$

D'autre part la dérivée d'ordre s, $P_p^{(s)}(m_{j,p}) = o$, $\forall s \in \mathbb{N}$, $1 \le s \le q_{j,p} - 1$

$$P_p^{(s)}(z) = \sum_{i=o}^{p-s} \lambda_{i,p} \, (p-i) \ldots (p+1-i-s) z^{p-i-s}$$

$$m_{j,p}^n \, P_p^{(s)}(m_{j,p}) = \sum_{i=o}^{p-s} \lambda_{i,p} (p-i) \ldots (p+1-i-s) \, m_{j,p}^{n+p-i-s} = 0$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{N}, \ 1 \le s \le q_{j,p} - 1 \\ \forall j \in \mathbb{N}, \ 0 \le j \le \ell_p \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit encore $m_{j,p}^n \sum_{i=o}^{p-s} \lambda_{i,p} \, K_{p-i,i_j+s} = 0$

Comme $K_{i,i_j+s} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le s-1$ on a :

$$\left( \sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p} \, K_{p-i,i_j+s} \right) m_{j,p}^n = 0 \qquad \begin{cases} \forall s \in \mathbb{N}, \ 1 \le s \le q_{j,p} - 1 \\ \forall j \in \mathbb{N}, \ 0 \le j \le \ell_p \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nous allons montrer dans le lemme suivant que ce résultat reste vrai pour toute combinaison de (p+1) lignes.

<u>*Lemme 7.1.*</u>

$$\sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p}\, K_{k+p-i,n} = 0 \quad \begin{cases} \forall k \in \mathbb{N} \\ \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le n \le p \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>.

Posons $n = i_j + s$, $0 \le s \le q_{j,p} - 1$

On a :

$$\begin{cases} K_{k+p-i,n} = s! \quad C^{s}_{k+p-i} \quad m_{j,p}^{k+p-i-s} & \text{si } k+p-i \ge s \\ \\ K_{k+p-i,n} = 0 & \text{si } k+p-i < s \end{cases}$$

$$\sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p}\, K_{k+p-i,n} = \sum_{\substack{i=o \\ \text{et} \\ i \le k+p-s}}^{p} \lambda_{i,p}\, (s!)\, C^{s}_{k+p-i}\, m_{j,p}^{k+p-i-s}$$

Or
$$P_p(z) = \sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p}\, z^{p-i}$$

$$z^k P_p(z) = \sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p}\, z^{p+k-i} = z^k \prod_{j=o}^{\ell_p} (z - m_{j,p})^{q_{j,p}}$$

On a donc :

$$\sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p}\, K_{k+p-i,n} = \left[ z^k\, P_p(z) \right]^{(s)}_{z=m_{j,p}} = 0$$

<u>cqfd</u>.

Notation.

Nous appellerons système $(K_p)$ le système carré obtenu à partir de système (1) en ne retenant que les p premières équations.

Nous rappelons que le système $(M_p)$ est le système d'orthogonalité satisfait par les coefficients de $P_p$.

*Propriété 7.1.*

*Le système (1) est équivalent aux systèmes* $(M_p)$ et $(K_p)$.

Démonstration.

Montrons qu'à partir du système 1 on construit les systèmes $(M_p)$ et $(K_p)$ et donc que toute solution de (1) sera solution de $(M_p)$ et $(K_p)$.

Formons

$$\sum_{i=o}^{p} c_{n+p-i}\, \lambda_{i,p},\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le n \le p-1$$

avec

$$c_{n+j} = \sum_{i=o}^{p-1} k_{i,p}\, K_{n+j,i},\ \forall (n+j) \in \mathbb{N},\ 0 \le n+j \le 2p-1$$

$$\sum_{i=o}^{p} c_{n+p-i}\, \lambda_{i,p} = \sum_{i=o}^{p} \Big(\sum_{j=o}^{p-1} k_{j,p}\, K_{n+p-i,j}\Big)\, \lambda_{i,p}$$

$$= \sum_{j=o}^{p-1} k_{j,p} \left(\sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p}\, K_{n+p-i,j}\right) = 0$$

d'après le lemme 7.1.

Donc

$$\sum_{i=o}^{p} c_{n+p-i} \quad \lambda_{i,p} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n \leq p-1$$

soit encore

$$\sum_{i=o}^{p} c_{n+i} \quad \lambda_{p-i,p} = -c_{n+p}$$

On obtient donc le système $(M_p)$ que l'on jumelle avec le système $(K_p)$.

Montrons que réciproquement, le système (1) se déduit des systèmes $(M_p)$ et $(K_p)$, et donc que toute solution de $(M_p)$ et $(K_p)$ est solution de (1).

Le système $(M_p)$ s'écrit

$$\sum_{i=o}^{p-1} c_{j+i} \ \lambda_{p-i,p} = -c_{p+j}, \ \forall j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq p-1$$

On prend l'équation qui correspond à j=0, et en utilisant le système $(K_p)$ on remplace les $c_i$ par leur expression en fonction des $k_{j,p}$. On obtient donc :

$$c_p = \sum_{i=o}^{p-1} \left( \sum_{j=o}^{p-1} K_{i,j} \ k_{j,p} \right) \lambda_{p-i,p}$$

$$= \sum_{j=o}^{p-1} k_{j,p} \left( \sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,p} \ K_{p-i,j} \right)$$

D'après le lemme 7.1 on a :

$$\sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p} \ K_{n+p-i,j} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq p-1.$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,p} K_{p-i,j} = -\lambda_{o,p} K_{p,j} = -K_{p,j}$$

d'où

$$c_p = \sum_{j=o}^{p-1} k_{j,p} K_{p,j}$$

On retrouve la $(p+1)^{\text{ème}}$ ligne du système (1).

Si on prend la ligne 1 de $(M_p)$, par un raisonnement analogue on retrouve la $(p+2)^{\text{ème}}$ ligne de (1) et ainsi de suite.

cqfd.

## 7,2 EXISTENCE ET UNICITE DES APPROXIMANTS

L'existence des approximants des séries de fonctions est liée à l'existence du polynôme orthogonal $P_p$. L'unicité pourra être démontrée en utilisant le théorème 5.3. Elle ne dépend pas de façon biunivoque de l'unicité du polynôme orthogonal correspondant. En effet, aux polynômes orthogonaux singuliers correspond également un approximant unique.

Théorème 7.3.

*Lorsque le polynôme $P_p$ est orthogonal par rapport à c, alors l'approximant $[p-1/p]_f$ existe et est unique.*
*Si le polynôme $P_p$ est quasi-orthogonal, l'approximant $[p-1/p]_f$ n'existe pas.*

Démonstration.

i) Si $P_p$ est orthogonal régulier, il est défini de manière unique. Le polynôme d'interpolation $L_{p,n}$ est également défini de manière unique.

ii) Si $P_p$ est orthogonal singulier alors :

$$P_p(x) = w_{p-pr(p)}(x)\ P_{pr(p)}(x).$$

D'après le théorème 5.3 les coefficients de quadrature associés aux racines de $w_{p-pr(p)}$ sont nuls. Ceux associés aux racines de $P_{pr(p)}$ sont définis de manière unique.

iii) Si $P_p$ est quasi-orthogonal, l'ensemble du système d'orthogonalité $(M_p)$ n'est pas satisfait. L'approximant n'existe donc pas.

cqfd.

*Corollaire 7.1.*

*Si le polynôme* $P_p$ *est orthogonal singulier alors l'approximant* $[p-1/p]_f$ *est identique à l'approximant* $[pr(p)-1/pr(p)]_f$.

Démonstration.

Immédiate à partir de la démonstration du ii) dans le théorème 7.3.

cqfd.

Si $f(t) = \sum\limits_{j=o}^{\ell_r} \sum\limits_{n=o}^{q_{j,r}-1} A_{j,n}^{(r)}\ G^{(n)}(m_{j,r},t)$, alors nous avons :

*Théorème 7.4.*

*Soit* $r$ *fixé.*

*Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$f \equiv F = \sum_{j=o}^{\ell_r} \sum_{n=o}^{q_{j,r}-1} A_{j,n}^{(r)} G^{(n)}(m_{j,r},t)$$

*est que* $\forall p \geq r$ *le système* $(M_p)$ *soit de rang* $r$ *compatible.*

Démonstration.

C.S. D'après le théorème 7.3 et le corollaire 7.1, $\forall p \geq r$, $[p-1/p]_f$ existe et est unique. De plus il est identique à $[r-1/r]_f$.
Donc :

$$f \equiv F$$

C.N. Lorsqu'elle existe, la solution est unique. Or il existe une solution $f \equiv F$. Ceci n'est possible que si $\forall p \geq r$ tout système $(M_p)$ est de rang $r$ compatible.

cqfd.

On considère un système $(M_p)$ de rang $r < p$ incompatible. Il n'a donc pas de solution.
On peut en utilisant le corollaire 1.7 ou le corollaire 1.8 se ramener au cas où on a un système qui a une solution.
On a donc la propriété suivante en employant les notations de ces deux corollaires.

*Propriété 7.2.*

*Soit un système* $(M_p)$ *de rang* $r < p$ *incompatible.*

*i)* *Le système* $(M_{2p-r})$ *a une solution unique et l'approximant* $[2p-r-1/2p-r]_f$ *existe et est unique.*

*ii)* *Si* $r-h$ *est impair le système* $(M_{p-1-\frac{r-h-1}{2}})$ *a une solution unique et l'approximant* $[p-2-\frac{r-h-1}{2} / p-1-\frac{r-h-1}{2}]_f$ *existe et est unique.*

*iii)* *Si* $r-h$ *est pair le système* $(M_{p-1-\frac{r-h}{2}})$ *a une solution unique et l'approximant* $[p-2-\frac{r-h}{2} / p-1-\frac{r-h}{2}]_f$ *existe et est unique.*

Démonstration.

Elle est immédiate en utilisant les corollaires 1.7 et 1.8 et le théorème 7.3.

cqfd.

Dans le cas particulier suivant nous avons :

*Propriété 7.3.*

*Supposons que* $c_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq q-1$ *et* $c_q \neq 0$.
*Soit un système* $(M_p)$.

*i)* *Si* $p \leq \frac{q}{2}$ *on a une solution unique* $[p-1/p]_f \equiv 0$.

*ii)* *Si* $\frac{q}{2} < p \leq q$ *il n'y a pas de solution.*

Démonstration.

i) D'après la propriété 1.16 tout polynôme de degré $p \leq \frac{q}{2}$ est orthogonal par rapport à c. D'après le théorème 5.3 les coefficients de quadrature correspondants sont nuls.
Donc 0 est l'unique solution.

ii) D'après la propriété 1.16 il n'existe pas de polynôme orthogonal. Il n'y a donc pas de solution.

cqfd.

## 7.3 EXPRESSION DE L'ERREUR ET THEOREMES DE CONVERGENCE

Nous allons d'abord donner une expression de l'erreur $f(t) - [p-1/p]_f(t)$.
Nous savons d'après le théorème 7.1 et les notations adoptées que :

$$\alpha_j = \sum_{i=o}^{p-1} k_{i,p} K_{j,i}, \ \forall j \in \mathbb{N}$$

et

$$\alpha_j = c_j, \ \forall j \in \mathbb{N}, \ 0 \leq j \leq 2p-1.$$

Donc

$$f(t) - [p-1/p]_f(t) = \sum_{j=o}^{\infty} (c_{2p+j} - \alpha_{2p+j}) \, g_{2p+j}(t).$$

Nous allons calculer les termes $\alpha_{2p+j}$ en n'utilisant pas les coefficients $k_{i,p}$.
Dans la démonstration de la propriété 7.1 nous faisons intervenir les lignes $(2p-1+j)$ pour $j \in \mathbb{N}$ dans le système (I).
Nous posons $\alpha_j = c_j$ pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq 2p-1$.
Avec la propriété 7.1 nous obtiendrons donc :

$$\sum_{i=o}^{p} \alpha_{2p+j-i} \lambda_{i,p} = 0$$

Cette relation permet le calcul récurrent des termes $\alpha_{2p+j}$ pour $j \in \mathbb{N}$,

et on peut ainsi calculer $c_{2p+j} - \alpha_{2p+j} = c_{2p+j} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{2p+j-i}\, \lambda_{i,p}$.

En particulier pour $j = 0$ on a :

$$c_{2p} - \alpha_{2p} = \sum_{i=o}^{p} c_{2p-i}\, \lambda_{i,p}.$$

Si $H_p^{(o)} \neq 0$, alors $c_{2p} - \alpha_{2p} = c^{(o)}(x^p\, P_p^{(o)}(x)) = \dfrac{H_{p+1}^{(o)}}{H_p^{(o)}}$ et

$$f - [p-1/p]_f(t) = \frac{H_{p+1}^{(o)}}{H_p^{(o)}}\, g_{2p}(t) + 0(g_{2p+1}(t))$$

Si $H_p^{(o)} = 0$ et si $[p-1/p]_f(t)$ existe, alors on cherche $H_r^{(o)} \neq 0$ et $H_\ell^{(o)} \neq 0$ tels que $H_i^{(o)} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $r+1 \leq i \leq \ell-1$ et $r < p < \ell$.

Nous avons :

$$[p-1/p]_f = [r-1/r]_f.$$

En reprenant ce qui a été fait ci-dessus nous pouvons écrire :

$$c_{2r+j} - \alpha_{2r+j} = c_{2r+j} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{2r+j-i}\, \lambda_{i,r}.$$

D'autre part :

$$\sum_{i=o}^{r} c_{2r+j-i}\ \lambda_{i,r} = c^{(o)}\ (x^{r+j}\ P_r^{(o)}(x))$$

$$= 0 \text{ pour } r \leq r+j \leq \ell-2$$

$$\neq 0 \text{ pour } r+j = \ell-1.$$

Par conséquent on a $c_k = \alpha_k$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq r+\ell-2$ et

$c_{r+\ell-1} - \alpha_{r+\ell-1} = c^{(o)}(x^{\ell-1}\ P_r^{(o)}(x))$.

On en déduit donc que :

$$f(t) - [p-1/p]_f(t) = c^{(o)}(x^{\ell-1}\ P_r^{(o)}(x))\ g_{r+\ell-1}(t) + O(g_{r+\ell}(t))$$

Dans le cas où $H_p^{(o)}$ est différent de 0 et $H_{p+1}^{(o)} = 0$, on peut utiliser le raisonnement fait ci-dessus. On cherchera $H_\ell^{(o)} \neq 0$ tel que $H_i^{(o)} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$, $p+1 \leq i \leq \ell-1$.

Nous trouvons alors que :

$$f(t) - [p-1/p]_f(t) = c^{(o)}(x^{\ell-1}P_p^{(o)}(x))g_{p+\ell-1}(t) + O(g_{p+\ell}(t))$$

Nous avons la propriété suivante :

*Propriété 7.4.*

*Si l'approximant* $[p-1/p]_f$ *existe et*

i) Si $H_p^{(o)} \neq 0$ et si

a) $H_{p+1}^{(o)} \neq 0$ *alors* :

$$f(t) - [p-1/p]_f(t) = \frac{H_{p+1}^{(o)}}{H_p^{(o)}} g_{2p}(t) + O(g_{2p+1}(t))$$

b) $H_i^{(o)} = 0$ *pour* $i \in \mathbb{N}$, $p+1 \leq i \leq \ell-1$ *et* $H_\ell^{(o)} \neq 0$, *alors* :

$$f(t) - [p-1/p]_f(t) = c^{(o)}(x^{\ell-1} P_p^{(o)}(x))\, g_{p+\ell-1}(t) + O(g_{p+\ell}(t))$$

ii) Si $H_p^{(o)} = 0$ et si $[p-1/p]_f \equiv [r-1/r]_f$ avec $H_r^{(o)} \neq 0$, $H_i^{(o)} = 0$

*pour* $i \in \mathbb{N}$, $r+1 \leq i \leq \ell-1$ *et* $H_\ell^{(o)} \neq 0$ *alors* :

$$f(t) - [p-1/p]_f(t) = c^{(o)}(x^{\ell-1} P_r^{(o)}(x)) g_{r+\ell-1}(t) + O(g_{r+\ell}(t)).$$

Remarque.

Si on désire une expression en fonction des déterminants de Hankel dans le ii), on prend pour $c^{(o)}(x^{\ell-1} P_r^{(o)}(x))$ une des valeurs présentées dans la propriété 4.5.

Nous donnons maintenant quelques résultats de convergence pour ces approximants.

Nous supposons que pour tout t fixé d'un domaine $\nabla$ inclus dans $\mathbb{R}$ la fonction génératrice $G(x,t)$ appartient à $C_\infty[a,b]$.

Si c est définie par :

$$c(x^i) = \int_a^b x^i \, d\alpha(x)$$

où $\alpha$ est bornée et non décroissante dans $[a,b]$, alors les formules de quadrature de Gauss appliquées à $G(x,t)$ sont stables et convergentes. Nous pouvons énoncer le

<u>*Théorème 7.5.*</u>

*Si* $f(t) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i \, g_i(t)$ *où* $c_i = \int_a^b x^i \, d\alpha(x)$ *avec* $\alpha$ *bornée et non-décroissante dans* $[a,b]$ *et si* $G(x,t) \in C_\infty[a,b]$, $\forall t$ *fixé* $\in \nabla \subset \mathbb{R}$, *alors :*

$$\lim_{p\to\infty} [p-1/p]_f(t) = f(t).$$

---

Notre théorème 5.6 nous permet de donner un résultat de convergence dans le cas d'une fonctionnelle linéaire c semi-définie positive.

<u>*Théorème 7.6.*</u>

*Si* $f(t) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i g_i(t)$ *où les* $c_i$ *sont les moments d'une fonctionnelle linéaire* c *semi-définie positive et si* $G(x,t) \in C_\infty[a,b]$, $\forall t$ *fixé* $\in \nabla \subset \mathbb{R}$, *alors :*

$$\lim_{p\to\infty} [p-1/p]_f(t) = f(t).$$

---

Notre propriété 5.5 donnera un autre résultat de convergence dans le cas d'une fonctionnelle lacunaire d'ordre 2 de la forme $x\omega(x)$.

Théorème 7.7.

*Si* $f(t) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i\, g_i(t)$, *où les* $c_i$ *sont les moments d'une fonctionnelle linéaire* c *lacunaire d'ordre 2 définie par* $c_i = c(x^i) = \int_{-1}^{+1} x^{i+1}\omega(x)dx$ *avec* $\omega(x)$ *paire et positive, mais non identiquement nulle dans* $[-1,1]$, *et telle que* $\int_{-1}^{+1} \omega(x)dx$ *existe, et si* $G(x,t) \in C_\infty[-1,1]$, $\forall t$ *fixé* $\in \nabla \subset \mathbb{R}$, *alors*

$$\lim_{p\to\infty} [p-1/p]_f(t) = f(t).$$

## 7.4 PROPRIETES DES APPROXIMANTS DES SERIES DE FONCTIONS

Pour commencer nous donnons un résultat sur la parité de l'approximant $[p-1/p]_f$.

Théorème 7.8.

*Si l'approximant* $[p-1/p]_f$ *existe et si*

*i)* c *est une fonctionnelle lacunaire d'ordre 2 et si* $g_i(t)$ *est paire pour* i *pair, alors l'approximant est pair.*

*ii)* *Si* $c_o = 0$ *et la fonctionnelle* $e^{(o)} = c^{(1)}$ *est lacunaire d'ordre 2, et si* $g_i(t)$ *est impaire pour* i *impair, alors l'approximant est impair.*

Démonstration.

i) On utilise les résultats du théorème 5.9 i).

Si $m_{j,p} \neq 0$, à un terme $A_{j,n}^{(p)}\, G^{(n)}(m_{j,p},t)$ correspond un terme $(-1)^k\, A_{j,n}^{(p)}\, G^{(n)}(-m_{j,p},t)$.

La résultante de ces deux termes ne contient plus que les $g_i(t)$ pour i pair.

Si $m_{j,p} = 0$ il ne reste que les termes $A_{j,n}^{(p)}\, G^{(n)}(0,t)$ pour n pair qui valent $A_{j,n}^{(p)}\, n!\, g_n(t)$.

ii) On utilise les résultats du théorème 5.9 ii).

Si $m_{j,p} \neq 0$, à un terme $A_{j,n}^{(p)}\, G^{(n)}(m_{j,p}, t)$ correspond un terme $(-1)^{n+1}\, A_{j,n}^{(p)}\, G^{(n)}(-m_{j,p},t)$.

La résultante de ces deux termes ne contient plus que les $g_i(t)$ pour i impair.

Si $m_{j,p} = 0$, il ne reste que les termes $A_{j,n}^{(p)}\, G^{(n)}(0,t)$ pour n impair, qui valent $A_{j,n}^{(p)}\, n!\, g_n(t)$.

cqfd.

Remarque 7.2.

D'après ce que nous savons des fonctionnelles lacunaires, dans le cas ii) du théorème 7.8, l'approximant $[p-1/p]_f$ n'existe que si p est pair.

*Définition 7.1.*

*Nous appellerons table A la table à double entrée dans laquelle sont rangés les approximants* $[p/q]_f$.

| | | |
|---|---|---|
| [0/0] | [0/1] | [0/2] --- |
| [1/0] | [1/1] | [1/2] --- |
| [2/0] | [2/1] | [2/2] --- |
| ¦ | ¦ | ¦ |

*Définition 7.2.*

*Nous appellerons bloc* A *un bloc carré situé dans la table* A *qui correspond à un bloc* P *et à ses côtés Nord, Nord-Ouest et Ouest.*

Considérons maintenant un bloc P. Nous savons qu'au-dessus de l'antidiagonale principale les polynômes orthogonaux existent, donc aussi les approximants.

*Théorème 7.9.*

*Dans un bloc* A, *au-dessus de l'antidiagonale principale et sur cette antidiagonale les approximants sont tous identiques.*

Démonstration.

Nous savons déjà que le long d'une même diagonale d'un bloc, les approximants, lorsqu'ils existent, sont identiques à celui qui est contre le bord du bloc (corollaire 7.1). Ils existent au-dessus de l'antidiagonale principale du bloc P, donc au-dessus de l'antidiagonale principale du bloc A et sur cette antidiagonale.
Montrons que les approximants intérieurs au bloc A et contre les côtés Nord, Nord-Ouest et Ouest sont identiques, et la démonstration sera achevée.

Soit $[p-1+k/p]_f$ l'approximant placé dans l'angle intérieur Nord-Ouest d'un bloc A de largeur $\ell$.

Alors $f(t) - [p-1+k/p]_f(t) = O(g_{2p+\ell+k}(t))$ (cf. le théorème 7.2 et la propriété 7.4).

De plus toujours d'après les mêmes propriétés nous avons pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq \ell$.

$$f(t) - [p-1+k+j/p]_f(t) = O(g_{2p+\ell+k}(t)).$$

Du fait de l'unicité de l'approximant (théorème 7.3) nous avons :

$$[p-1+k+j/p]_f = [p-1+k/p]_f.$$

Contre le côté Nord nous avons pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq \ell$

$$f(t) - [p-1+k/p+j]_f(t) = O(g_{2p+\ell+k}(t))$$

ce qui entraîne que :

$$[p-1+k/p+j]_f = [p-1+k/p]_f$$

cqfd.

Dans ce qui va suivre nous nous intéressons aux transformations de séries formelles. Nous étendons au cas des approximants des séries de fonctions des résultats démontrés pour les approximants de Padé dans le livre de J. Gilewicz [22].

*Théorème 7.10.*

*Si* $R(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(t)$ *et si* $[p-1+k/p]_f$ *est l'approximant situé dans l'angle intérieur Nord-Ouest d'un bloc* A *de largeur* $\ell$*, alors :*

i) Si $n \leq k-1$,

$$[p-1+k/p]_f + R = [p-1+k/p]_{f+R}$$

*et* $[p-1+k/p]_{f+R}$ *est dans l'angle intérieur Nord-Ouest d'un bloc de largeur* $\ell$*.*

ii) Si $k \le n \le k+\ell-1$,

$$[p-1+k/p]_f + R = [p+n/p]_{f+R}$$

*et* $[p+n/p]_{f+R}$ *est dans l'angle intérieur Nord-Ouest d'un bloc de largeur* $n+1-k-\ell$.

Démonstration.

D'après le théorème 7.9

$$[p-1+k/p]_f = [p-1+k+j/p]_f \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le \ell.$$

Pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le \ell$,

$$[p-1+k+j/p]_f(t) + R(t)$$

$$= \sum_{i=o}^{k-1+j} (c_i+a_i)\, g_i(t) + [p-1/p]_{f_{k+j}}(t) + R_{k+j}(t)$$

où $a_i = 0$ si $i > n$ et $R_{k+j}(t) = \sum_{i=k+j}^{n} a_i g_i(t)$.

i) Si $n \le k-1$,

$R_{k+j}(t) \equiv 0$, et donc :

$$[p-1/p]_{f_{k+j}} + R_{k+j} = [p-1/p]_{f_{k+j}+R_{k+j}}.$$

Par conséquent :

$$[p-1+k+j/p]_f + R = [p-1+k+j/p]_{f+R} = [p-1+k/p]_{f+R}$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq \ell$.

Nous avons bien les résultats proposés.

ii) <u>Si $k \leq n \leq k+\ell-1$</u>,

$R_{n+1}(t) \equiv 0$. Donc pour $j \in \mathbb{N}$, $n-k+1 \leq j \leq \ell$, nous avons :

$$[p+n/p]_f(t) + R(t) = [p-1+k+j/p]_f(t) + R(t)$$

$$= \sum_{i=o}^{k-1+j} (c_i+a_i)g_i(t) + [p-1/p]_{f_{k+j}+R_{k+j}}(t)$$

$$= [p+n/p]_{f+R}(t).$$

Le bloc a pour largeur le nombre moins un de valeurs prises par j.

<u>cqfd</u>.

Nous avons pris comme définition de l'approximant $[p-1+k/p]_f$ lorsqu'il existe :

$$[p-1+k/p]_f(t) = \sum_{i=o}^{k-1} c_i g_i(t) + [p-1/p]_{f_k}(t).$$

Si cet approximant est dans l'angle intérieur Nord-Ouest d'un bloc de largeur $\ell$ nous avons :

$$[p-1+k/p]_f = [p-1+k+j/p]_f \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq \ell,$$

c'est à dire :

$$[p-1+k+j/p]_f(t) = \sum_{i=o}^{k+j-1} c_i g_i(t) + [p-1/p]_{f_{k+j}}(t).$$

<u>*Théorème 7.11.*</u>

*Si l'approximant* $[p-1+k/p]_f$ *est dans l'angle intérieur Nord-Ouest d'un bloc de largeur* $\ell$*, alors :*

$$[p-1+k/p]_f = \sum_{i=o}^{k+j-1} c_i g_i(t) + [p-1/p]_{f_{k+j}}(t)$$

*pour* $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq \ell$.

---

Nous considérons maintenant un cas particulier de fonctions $g_i(t)$ qui vont nous permettre de définir les approximants de $\frac{1}{f}$.

Nous prenons $g_o(t) = 1$ et $g_i(t) = (g_1(t))^i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$.

Alors la fonction génératrice est :

$$G(x,t) = \frac{1}{1-x\, g_1(t)} .$$

L'approximant $[p-1/p]_f$ s'exprime sous la forme d'une fonction rationnelle en $g_1(t)$, de même tous les approximants $[p-1+k/p]_f$.

Dans ce cas particulier, comme dans le cas des approximants de Padé classiques, il est inutile de calculer les racines du polynôme orthogonal $P_p$. Le dénominateur de $[p-1/p]_f$ est le polynôme en $g_1(t)$.

$$\tilde{P}_p(g_1(t)) = (g_1(t))^p \; P_p\left(\frac{1}{g_1(t)}\right).$$

Le numérateur est le polynôme en $g_1(t)$ :

$$\tilde{Q}_p(g_1(t)) = (g_1(t))^{p-1} \; Q_p\left(\frac{1}{g_1(t)}\right)$$

où $Q_p$ est le polynôme associé au polynôme orthogonal $P_p$.

Avec ces fonctions $g_i(t)$ nous pouvons énoncer le théorème suivant :

*Théorème 7.12.*

*Si* $g_o(t) = 1$ *et si* $g_i(t) = (g_1(t))^i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, *si de plus* $c_o \neq 0$ *et* $[n+k/k]_f$ *est dans l'angle intérieur Nord-Ouest d'un bloc de largeur* $\ell$, *alors* $[k/n+k]_{\frac{1}{f}}$ *est dans l'angle intérieur Nord-Ouest d'un bloc de largeur* $\ell$ *et*

$$([n+k/k]_f)^{-1} = [k/n+k]_{\frac{1}{f}}.$$

Démonstration.

$$f = \sum_{i=o}^{\infty} c_i g_i(t) \text{ avec } c_o \neq 0.$$

On peut alors définir

$$f^{-1} = \sum_{i=o}^{\infty} \hat{c}_i \; g_i(t).$$

On obtient :

$$c_o \hat{c}_o = 1,$$

$$\sum_{i=o}^{k} \hat{c}_i \, c_{k-i} = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ k \geq 1.$$

Nous retrouvons les relations présentées dans la section traitant des polynômes orthogonaux réciproques.
La démonstration faite dans le cas des approximants de Padé classiques reste valable en changeant t en $g_1(t)$. (cf. th 22, p. 216 [22]).

cqfd.

Nous retrouvons le positionnement des blocs donné par le corollaire 2.4.

**Remarque.**

f et $f^{-1}$ ont la même fonction génératrice $G(x,t)$.

Si $\hat{c}$ est la fonctionnelle linéaire qui a pour moments les $\hat{c}_i$, nous avons :

$$c(G(x,t) = f,$$

$$\hat{c}(G(x,t)) = f^{-1}.$$

## 7.5 APPROXIMANTS DE TYPE EXPONENTIEL

Dans la fin de ce chapitre nous nous intéressons au cas particulier suivant de série de fonctions

$$f(t) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i \frac{t^i}{i!}$$

La fonction génératrice est dans ce cas $e^{xt}$.

L'approximant $[p-1/p]_f$ sera noté $F_p$.

Nous avons :

$$F_p(x) = \sum_{j=o}^{\ell_p} \sum_{n=o}^{q_{j,p}-1} k_{i_j+n,p}\, G^{(n)}(m_{j,p},x)$$

$$= \sum_{j=o}^{\ell_p} \sum_{n=o}^{q_{j,p}-1} k_{i_j+n,p}\, t^n\, e^{m_{j,p}x}.$$

Donc :

$$F_p(x) = \sum_{j=o}^{\ell_p} S_j(x)\, e^{m_{j,p}x}$$

où les $S_j(x)$ sont des polynômes de degré $q_{j,p}-1$, pour $j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le \ell_p$

et

$$\sum_{j=o}^{\ell_p} q_{j,p} = p$$

$$S_j(x) = \sum_{i=i_j}^{i_{j+1}-1} k_{i,p}\, x^{i-i_j}, \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ o \le j \le \ell_p$$

avec

$$\begin{cases} i_o = o \\ i_j = \sum_{s=o}^{j-1} q_{s,p} \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le \ell_p+1 \end{cases}$$

Nous appellerons $F_p$ approximant de type exponentiel.

Si l'approximant $F_p$ existe, nous avons lorsqu'on développe $F_p(x)$ en série entière :

$$\mathrm{ord}(f-F_p) \ge 2p.$$

On rappelle que l'ordre, noté ord, est l'exposant de plus bas degré de la série formelle.

Nous appellerons problème 1 la recherche directe de $F_p$.

Nous pouvons définir un second problème.

## PROBLEME 2.

On cherche les solutions $F_p(x)$ de l'équation différentielle linéaire (E) homogène, d'ordre p à coefficients constants, telles que, si on développe $F_p$ en série entière on ait $\mathrm{ord}(f-F_p) \geq 2p$.

$$(E) \qquad \sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p}\, y^{(p-i)} = o$$

Les $\lambda_{i,p}$ sont donnés par le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} c_o & c_1 \cdots & c_{p-1} \\ c_1 & \cdots & c_p \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p-1} & \cdots & c_{2p-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{p,p} \\ \lambda_{p-1,p} \\ \vdots \\ \lambda_{1,p} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_p \\ c_{p+1} \\ \vdots \\ c_{2p-1} \end{pmatrix}$$

et $\lambda_{o,p} = 1$

Remarque : les $\lambda_{i,p}$ n'existent pas toujours.

RESOLUTION DU PROBLEME 2.

Il est nécessaire que $(M_p)$ ait au moins une solution.

Pour résoudre (E) on est amené à étudier les racines du polynôme caractéristique en u,

$$\sum_{i=o}^{p} \lambda_{i,p} \, u^{p-i} = 0$$

Soient $m_{i,p}$ les racines de ce polynôme, pour $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq p-1$. On suppose qu'il y a $\ell_p$ racines distinctes. Soit $q_{i,p}$ l'ordre de multiplicité de $m_{i,p}$ avec $\sum_{i=o}^{\ell_p} q_{i,p} = p$. Alors les solutions de (E) sont de la forme :

$$F(x) = \sum_{j=o}^{\ell_p} S_j(x) \, e^{m_{j,p}x} \quad \text{avec deg } S_j(x) = q_{j,p} - 1 \text{ et}$$

$$S_j(x) = \sum_{i=i_j}^{i_{j+1}-1} \mu_{i,p} \, x^{i-i_j} \quad \forall j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq \ell_p$$

On cherche les solutions $F_p$ telles que $\text{ord}(f-F_p) \geq 2p$. On retrouve le système (1) dont les p premières équations forment le système $(K_p)$.

*Propriété 7.5.*

*Il y a identité entre les problèmes 1 et 2.*

Démonstration.

Les deux problèmes possèdent les mêmes systèmes (1) ou $(M_p)$ et $(K_p)$.

cqfd.

## 7.6 EXISTENCE ET UNICITE DES APPROXIMANTS DE TYPE EXPONENTIEL

Tous les résultats qui vont suivre sont des cas particuliers des propriétés et théorèmes de la section 7.2.

<u>*Propriété 7.6.*</u>

*Soit un système* $(M_p)$ *de rang* p.
*Alors on a une solution unique au système* $(M_p)$ *et l'ensemble des racines* $m_{i,p}$ *est déterminé de façon unique*

*i)* *Si les* $m_{i,p}$ *sont tous distincts, alors on a une solution unique*

$$F_p(x) = \sum_{i=o}^{p-1} k_{i,p}\, e^{m_{i,p}x} \quad \textit{et } \mathrm{ord}\,(f-F_p) \geq 2p.$$



*ii)* *Si les* $m_{i,p}$ *ne sont pas tous distincts, mais sont non tous nuls, et si* $q_{i,p}$ *est l'ordre respectif des racines avec* $\sum_{j=o}^{\ell_p} q_{j,p} = p$*, alors on a une solution unique.*

$$F_p(x) = \sum_{j=o}^{\ell_p} S_j(x)\, e^{m_{j,p}x} \quad \textit{et } \mathrm{ord}\,(f-F_p) \geq 2p$$

*iii)* *Si le système* $(M_p)$ *est homogène, alors les* $m_{i,p}$ *sont tous nuls et on a une solution unique.*

$$F_p(x) = \sum_{j=o}^{p-1} \frac{c_j}{j!} x^j \quad \textit{et } \mathrm{ord}\,(f-F_p) \geq 2p.$$

Propriété 7.7.

*Soit un système* $(M_p)$ *de rang* $r < p$ *compatible.*

*i)* *Si les* $m_{i,r}$ *solutions de* $(M_r)$ *sont distincts, alors il existe une solution unique* $F_p(x)$ *telle que :*

$$F_p(x) = \sum_{i=o}^{r-1} k_{i,r}\, e^{m_{i,r}x} \text{ et } \operatorname{ord}(f-F_p) \geq 2p.$$

*ii)* *Si les* $m_{i,r}$ *solutions de* $(M_r)$ *ne sont pas distincts, mais non tous nuls, alors il existe une solution unique* $F_p(x)$ *telle que :*

$$F_p(x) = \sum_{j=o}^{\ell_r} S_j(x)\, e^{m_{j,r}x} \text{ et } \operatorname{ord}(f-F_p) \geq 2p.$$

*iii)* *Si* $(M_r)$ *est homogène, alors il existe une solution unique* $F_p(x)$ *telle que*

$$F_p(x) = \sum_{i=o}^{r-1} \frac{c_i}{i!}\, x^i \text{ et } \operatorname{ord}(f-F_p) \geq 2p.$$

Propriété 7.8.

*Soit* $r$ *fixé.*
*Une condition nécessaire et suffisante pour que* $f \equiv F = \sum_{j=o}^{\ell_r} S_j(x)\, e^{m_{j,r}x}$ *est que,* $\forall p \geq r$ *le système* $(M_p)$ *soit de rang* $r$ *compatible.*

Propriété 7.9.

*Soit un système* $(M_p)$ *de rang* $r < p$ *incompatible.*

*i)* *Le système* $(M_{2p-r})$ *a une solution unique*

$$F_{2p-r}(x) = \sum_{j=o}^{\ell_{2p-r}} S_j(x)\, e^{m_{j,2p-r}x} \text{ avec } \operatorname{ord}(f-F_{2p-r}) \geq 2(2p-r)$$

*ii)* *Si* (r-h) *est impair, le système* $(M_{p-1-\frac{r-h-1}{2}})$ *a une solution unique*

$$F_{p-1-\frac{r-h-1}{2}}(x) = \sum_{j=o}^{\ell_{p-1-\frac{r-h-1}{2}}} S_j(x)\, e^{m_{j,p-1-\frac{r-h-1}{2}}x}$$

*avec* $\operatorname{ord}(f-F_{p-1-\frac{r-h-1}{2}}) \geq 2(p-1-\frac{r-h-1}{2})$

*iii)* *Si* (r-h) *est pair, le système* $(M_{p-1-\frac{r-h}{2}})$ *a une solution unique*

$$F_{p-1-\frac{r-h}{2}}(x) = \sum_{j=o}^{\ell_{p-1-\frac{r-h}{2}}} S_j(x)\, e^{m_{j,p-1-\frac{r-h}{2}}x}$$

*avec* $\operatorname{ord}(f-F_{p-1-\frac{r-h}{2}}) \geq 2\,(p-1-\frac{r-h}{2})$

<u>*Propriété 7.10.*</u>

*On suppose que* ord f=q. *Soit un système* $(M_p)$.

*i)* *Si* $p \leq \frac{q}{2}$ *on a une solution unique* F = 0 *telle que* ord(f-F) ≥ 2p

*ii)* *Si* $\frac{q}{2} < p \leq q$, *il n'y a pas de solution.*

<u>Remarque 7.3.</u>

La fonction génératrice $e^{xt} \in C_\infty[a,b]$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Les théorèmes de convergence 7.5, 7.6 et 7.7 s'appliquent donc.

Le théorème 7.8 s'applique également aux approximants de type exponentiel.

<u>*Théorème 7.13.*</u>

*Si l'approximant* $F_p$ *existe et si*

*i)* f *est une fonction paire, alors* $F_p$ *est pair.*

*ii)* f *est une fonction impaire, alors* $F_p$ *est impair.*

## 7.7 COMBINAISONS LINEAIRES D'EXPONENTIELLES

Nous présentons maintenant des résultats relatifs au cas où l'on recherche uniquement $F_p(x)$ sous forme d'une combinaison linéaire d'exponentielles, c'est à dire que les racines de $P_p(x)$ sont toutes distinctes.

*Propriété 7.11.*

*Soit* A *la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=o}^{p-1} k_{i,p} & \cdots & \sum_{i=o}^{p-1} k_{i,p}\, m_{i,p}^{p-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=o}^{p-1} k_{i,p}\, m_{i,p}^{p-1} & \cdots & \sum_{i=o}^{p-1} k_{i,p}\, m_{i,p}^{2p-2} \end{pmatrix}$$

Alors $$\det A = \prod_{i=o}^{p-1} k_{i,p} \prod_{0\le i<j\le p-1} (m_{j,p}-m_{i,p})^2$$

Démonstration.

La matrice A est égale au produit $BDB^T$

avec $$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ m_{o,p} & & m_{p-1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{o,p}^{p-1} & \cdots & m_{p-1,p}^{p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} k_{o,p} & & O \\ & \ddots & \\ O & & k_{p-1,p} \end{pmatrix}$$

Or $$\det B = \prod_{o\le i<j\le p-1} (m_{j,p}-m_{i,p}) \text{ et } \det D = \prod_{i=o}^{p} k_{i,p}.$$

cqfd.

<u>*Corollaire 7.2.*</u>

*On suppose le système* $(M_p)$ *de rang* p.

*i)* *Si les* $m_{j,p}$ *solutions du système* $(M_p)$ *sont tous distincts, alors les* $k_{j,p}$ *existent et sont non nuls.*

*ii)* *Si les* $m_{j,p}$ *ne sont pas tous distincts, alors le système* $(K_p)$ *n'a pas de solution.*

<u>Démonstration.</u>

i) Si les $m_{j,p}$ sont tous distincts => le système $(K_p)$ est de rang p.
=> les $k_{j,p}$ existent => dans la matrice A de la propriété 7.11 on remplace

$$c_j \text{ par } \sum_{i=0}^{p-1} k_{i,p}\, m_{i,p}^j,\ \forall j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq 2p-2$$

det A ≠ 0 et det A = $(\det B)^2$.det D => tous les $k_{j,p}$ sont non nuls.

ii) Si les $m_{j,p}$ ne sont pas distincts, le système $(K_p)$ ne peut avoir de solution.
En effet supposons qu'il ait une solution composée de $k_{j,p}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq 2p-2$. On peut appliquer la propriété 7.11.
det A = $(\det B)^2$.det D, or det A ≠ 0 et det B = 0 ce qui est impossible.

<u>cqfd.</u>

<u>*Corollaire 7.3.*</u>

*Soit un système* $(M_p)$. *Si tous les* $m_{j,p}$ *solution du système* $(M_p)$ *sont distincts et tous les* $k_{j,p}$ *non nuls, alors le système* $(M_p)$ *est de rang* p *non homogène.*

<u>Démonstration.</u>

On peut mettre A sous la forme de la propriété 7.11.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \det B \neq 0 \\ \\ \det D \neq 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \det A \neq 0$$

$\Rightarrow$ Le système $(M_p)$ est de rang p. Il est non homogène, sinon tous les $m_{j,p}$ seraient nuls et ne seraient donc pas distincts.

cqfd.

Propriété 7.12.

*Soit un système* $(M_p)$ *de rang* p.

*i)* *Si* $p > 1$ *et si tous les* $m_{i,p}$ *sont tous distincts, alors il existe une solution unique* $F_p(x)$

$$F_p(x) = \sum_{i=o}^{p} k_{i,p}\, e^{m_{i,p}x} \text{ telle que } \operatorname{ord}(f-F_p) \geq 2p.$$

*ii)* *Si* $p > 1$ *et si tous les* $m_{i,p}$ *ne sont pas distincts, il n'existe pas de solution.*

*iii)* *Si* $p = 1$, *il existe une solution unique* $F_1 = c_o\, e^{\frac{c_1}{c_o}x}$ *telle que* $\operatorname{ord}(f-F_1) \geq 2$.

*Si en plus le système* $(M_1)$ *est homogène,* $F_1 = c_o$.

Démonstration.

i) et ii) - Démonstration immédiate avec la propriété 7.6 .

iii) Si p = 1 on a $\begin{cases} k_{o,1} = c_o \\ c_o \lambda_{1,1} = c_1 \end{cases}$

d'où $m_{o,1} = \frac{c_1}{c_o}$ et $F_1 = c_o e^{\frac{c_1}{c_o} x}$.

Si $p = 1$ et $c_1 = o$ $m_{o,1} = 0$. Donc $F_1 = c_o$.

cqfd.

*Propriété 7.13.*

*Soit un système* $(M_p)$ *de rang* $r < p$ *et compatible.*

*i)* *Si* $r > 1$ *et si les* $m_{i,r}$ *solution du système* $(M_r)$ *sont tous distincts, alors il existe une solution unique* $F_p(x)$

$$F_p(x) = \sum_{i=o}^{r-1} k_{i,r} e^{m_{i,r} x} \quad \textit{telle que } \operatorname{ord}(f-F_p) \geq 2p$$

*ii)* *Si* $r > 1$ *et si les* $m_{i,r}$ *solution du système* $(M_r)$ *ne sont pas tous distincts, il n'existe pas de solution.*

*iii)* *Si* $r = 1$ *on a une solution unique telle que* $\operatorname{ord}(f-F_p) \geq 2p$.

*Si* $c_1 \neq 0$ $\qquad F_p = c_o e^{\frac{c_1}{c_o} x}$

*Si* $c_1 = 0$ $\qquad F_p = c_o$

Démonstration.

i) et ii) - Immédiate avec la propriété 7.7.
iii) - Immédiate avec les propriétés 7.7 et 7.12.

*Propriété 7.14.*

*On considère un système* $(M_r)$ *de rang* $r$ *et homogène.*
*On suppose que* $H_i^{(o)} = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $h+1 \leq i \leq r-1$ *et* $H_h^{(o)} \neq 0$.

*i)* *Si* $h = r-1$, *le système* $(M_h)$ *est de rang* $h$ *non homogène. Il existe une solution unique* $F_h = \sum_{i=o}^{h-1} k_{i,h}\, e^{m_{i,h}x}$ *telle que* $\text{ord}(f-F_h) \geq 2h$.

*ii)* *Si* $h \leq r-2$ *et si* $(r-h)$ *est impair, alors le système* $(M_{h+\text{entier}\,(\frac{r-h}{2})})$ *est lié compatible et il existe une solution unique* $F_{h+\text{entier}(\frac{r-h}{2})}$ *telle que :*

$$F_{h+\text{entier}\,(\frac{r-h}{2})} = \sum_{i=o}^{h-1} k_{i,h}\, e^{m_{i,h}x} \quad \text{et} \quad \text{ord}(f-F_{h+\text{entier}(\frac{r-h}{2})}) \geq 2(h+\text{entier}(\frac{r-h}{2}))$$

*iii)* *Si* $h \leq r-2$ *et si* $(r-h)$ *est pair, alors le système* $(M_{h+\frac{r-h}{2}})$ *est de rang* $h$ *non compatible ; il n'a donc pas de solution.*
*Le système* $(M_{h-1+\frac{r-h}{2}})$ *est de rang* $h$ *compatible et il existe une solution unique* $F_{h-1+\frac{r-h}{2}}$ *telle que* $F = \sum_{i=o}^{h-1} k_{i,h}\, e^{m_{i,h}x}$ *et* $\text{ord}(f-F_{h-1+\frac{r-h}{2}}) \geq 2(h-1+\frac{r-h}{2})$.

Démonstration.

D'après le corollaire 1.9 le système $(M_h)$ est non homogène. D'après le corollaire 1.1, la colonne $(r-1)$ est la première qui donne avec $H_h^{(o)}$ et la ligne $h$ un déterminant d'ordre $(h+1)$ non nul. Ce qui veut dire que les $(r-1)$ premiers termes de la ligne $h$ sont liés aux $h$ premières lignes. Donc, le terme $c_{r+h-1}$, qui est nul, ne satisfait pas la relation qui lie les termes $c_{h-1+i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r-1$, aux $h$ premières lignes.
Par conséquent, les $(r+h-1-j)$ premiers termes de la ligne $j$ sont liés aux $h$ premières lignes. Le $(r+h-j)^{\text{ème}}$ terme de cette ligne $j$ ne satisfait pas cette relation.

i) $h = r - 1$.

Le système $(M_h)$ est de rang h. Il est non homogène. D'après la propriété 7.12, il existe une solution unique.

$$F_h = \sum_{i=o}^{h-1} k_{i,h}\, e^{m_{i,h}x} \text{ telle que } \operatorname{ord}(f-F_h) \geq 2h.$$

ii) $h \leq r-2$.

Il existe au moins un système lié de rang h et d'ordre supérieur à h. L'ordre le plus grand possible est h+entier $(\frac{r-h}{2})$. Si (r-h) est impair, le système $(M_{h+\text{entier}(\frac{r-h}{2})})$ est compatible. En effet la ligne h-1+entier$(\frac{r-h}{2})$ de $(M_\infty)$ a ses $\frac{r+h+1}{2}$ premiers termes liés aux h premières lignes.

Il existe alors une solution unique $F_{\frac{r+h-1}{2}} = \sum_{i=o}^{h-1} k_{i,h}\, e^{m_{i,h}.x}$ telle que

$\operatorname{ord}(f-F_{\frac{r+h-1}{2}}) \geq h+r-1$

iii) Si (r-h) est pair, le système n'est pas compatible, puisque le premier terme de la ligne h-1+entier $(\frac{r-h}{2})$ de $(M_\infty)$, indépendant des h premières lignes est le terme de la colonne $\frac{r+h}{2}$, c'est à dire figure au second membre. D'après le corollaire 1.8, le système $(M_{h-1+\frac{r-h}{2}})$ est encore

de rang h. Il est compatible. Il existe une solution unique $F_{\frac{r+h-2}{2}}(x)$ telle que $F_{\frac{r+h-2}{2}} = \sum_{i=o}^{h-1} k_{i,h}\, e^{m_{i,h}x}$ et $\operatorname{ord}(f-F_{\frac{r+h-2}{2}}) \geq r+h-2$.

cqfd.

*Propriété 7.15.*

*On considère un système* $(M_p)$ *de rang* r *non compatible. On suppose que les* h *premières lignes sont indépendantes et que le système* $(M_h)$ *est homogène.* $H_{h+1}^{(o)} = 0$. *Alors il n'existe pas de système* $(M_j)$, $j \in \mathbb{N}$ $h \leq j \leq p$, *qui possède une solution.*

Démonstration.

Le système $(M_p)$ est de rang r. Les lignes $\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, $h+p-r \leq \ell \leq p-1$ sont indépendantes ; les lignes $\ell'$, $\ell' \in \mathbb{N}$, $h \leq \ell' \leq h+p-r-1$ sont liées aux h premières lignes et la dernière ligne $(h+p-r-1)$ est non compatible. Par un raisonnement analogue à la propriété 1.8 on trouve que $c_h \neq 0$, $c_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$ $h \leq i \leq h+2p-r-2$, $c_{2p+h-r-1} \neq 0$ car la ligne $h+p-r-1$ est incompatible.

Les systèmes $(M_j)$, $j \in \mathbb{N}$, $h \leq j \leq p$ sont ou liés incompatibles, ou liés compatibles se réduisant au système $(M_h)$ homogène. Ils n'ont donc pas de solution.

cqfd.

On est donc conduit à réduire encore la taille du système comme dans le cas des systèmes $(M_r)$ de la propriété 7.14.

*Propriété 7.16.*

*On considère un système $(M_p)$ de rang r non compatible. On suppose que les h premières lignes sont indépendantes et que le système $(M_h)$ est homogène. $H_{h+1}^{(o)} = 0$. Alors le système $(M_{2p-r})$ est le premier système qui a une solution.*
*Il est de rang maximum $(2p-r)$ non homogène. La solution F est unique.*

$$F_{2p-r} = \sum_{i=o}^{2p-r} k_{i,2p-r}\, e^{m_{i,2p-r}x}$$

*avec* $$\mathrm{ord}(f-F_{2p-r}) \geq 2(2p-r)$$

Démonstration.

D'après le corollaire 1.7 le système $(M_{2p-r})$ est de rang maximum $(2p-r)$. D'après la propriété 1.4 c'est le premier système qui a une solution, car tout système $(M_j)$, $j \in \mathbb{N}$, $p \leq j < 2p-r$ est lié incompatible.

Dans la propriété 7.15 on a vu que $c_{h+2p-r-1} \neq 0$.

Donc le système $(M_{2p-r})$ est non homogène.

Il a donc bien la solution unique proposée.

cqfd.

Remarque.

L'ensemble de ces résultats peut trouver son analogue pour les séries de fonctionsen général, dans le cas où on ne désire conserver que les polynômes $P_p$ ayant des racines simples.

## 7.8 PROBLEMES D'INTEGRATION ET DE DERIVATION

Soit une série formelle

$$f(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i \frac{x^i}{i!} .$$

On considère les séries formelles :

$$f^{(j)}(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_{j+i} \frac{x^i}{i!} \quad \text{pour } j \in \mathbb{N},\ j \geq 1$$

obtenues en dérivant terme à terme les séries formelles $f^{(j-1)}(x)$.

On prendra $f^{(o)} \equiv f$.

La somme de ces séries, si elles sont convergentes , représentent f et ses dérivées successives.

Enfin on considère les séries formelles :

$$ {}^{j}\!f(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_{i-j} \frac{x^i}{i!} \text{ pour } j \in \mathbb{N},\ j \geq 1 $$

obtenues en intégrant terme à terme entre 0 et x les séries formelles ${}^{j-1}\!f(t)$ et en ajoutant une constante $c_{-j}$. On prendra $f^{(o)} \equiv f$.

A chacune des séries formelles on associe la solution, si elle existe, du problème (1) ou (2) avec l'ordre de l'écart de la série et de la solution supérieur ou égal à 2p. Soit $F_p(x)$ celle qui est associée à $f(x)$. Soient $\tilde{F}_{p,j}(x)$ celles qui sont associées à $f^{(j)}(x)$ et enfin soient $\bar{F}_{p,j}(x)$ celles qui sont associées à ${}^{j}\!f(x)$.

On considère les fonctions $F_p^{(k)}(x)$, $\tilde{F}_{p,j}^{(k)}(x)$ et $\bar{F}_{p,j}^{(k)}(x)$ qui sont respectivement les dérivées $k^{\text{ème}}$ de $F_p(x)$, $\tilde{F}_{p,j}(x)$ et $\bar{F}_{p,j}(x)$.

Enfin on considère les fonctions ${}^{k}F_p(x)$, ${}^{k}\tilde{F}_{p,j}(x)$ et ${}^{k}\bar{\bar{F}}_{p,j}(x)$ qui sont respectivement les fonctions obtenues après k intégrations entre 0 et x de $F_p(x)$, $\tilde{F}_{p,j}(x)$ et $\bar{F}_{p,j}(x)$ et en ajoutant les constantes $c_{-i}$ convenables.

$$ {}^{k}F_p(x) = c_{-k} + \int_o^x \left(c_{-k+1} + \int_o^{x_1} \left(c_{-k+2} + \ldots \left(c_{-1} + \int_o^{x_{k-1}} F_p(x_k)dx_k\right) \ldots\right) dx_1\right) $$

$$ {}^{k}\tilde{F}_{p,j}(x) = c_{-k+j} + \int_o^x \left(c_{-k+1+j} + \int_o^{x_1}\left(c_{-k+2+j} + \ldots \left(c_{-1+j} + \right.\right.\right. $$

$$ \left.\left.\left.\int_o^{x_{k-1}} \tilde{F}_{p,j}(x_k)dx_k\right) \ldots\right)dx_1\right) $$

$$\overset{k}{\bar{F}}_{p,j}(x) = c_{-k+j} + \int_o^x (c_{-k+1+j} + \int_o^{x_1}(c_{-k+2-j} + \dots (c_{-1-j} +$$

$$\int_o^{x_{k-1}} \bar{F}_{p,j}(x_k)\, dx_k) \dots)\, dx_1$$

<u>*Propriété 7.17.*</u>

*i)* *Si* $F_p(x)$ *existe, alors* $\mathrm{ord}(f^{(k)} - F_p^{(k)}(x)) \geq 2p-k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ *tel que* $2p \geq k$.

*ii)* *Si* $F_p(x)$ *existe, alors* $\mathrm{ord}(\overset{k}{f} - \overset{k}{F}_p(x)) \geq 2p+k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

*iii)* *Si* $\tilde{F}_{p,j}(x)$ *existe, alors* $\mathrm{ord}(f^{(k)} - \tilde{F}^{(k-j)}_{p,j}(x)) \geq 2p-k+j$, $\forall k \in \mathbb{N}$ *tel que* $k \geq j$ *et* $2p \geq k-j$.

*iv)* *Si* $\bar{F}_{p,j}(x)$ *existe, alors* $\mathrm{ord}(\overset{k}{f} - \overset{k-j}{\bar{F}}_{p,j}(x)) \geq 2p+k-j$, $\forall k \in \mathbb{N}$ *tel que* $k \geq j$.

*v)* *Si* $\tilde{F}_{p,j}(x)$ *existe, alors* $\mathrm{ord}(\overset{k}{f} - \overset{k+j}{\tilde{F}}_{p,j}(x)) \geq 2p+k+j$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

*vi)* *Si* $\bar{F}_{p,j}(x)$ *existe, alors* $\mathrm{ord}(f^{(k)} - \bar{F}^{(k+j)}_{p,j}(x)) \geq 2p-k-j$, $\forall k \in \mathbb{N}$ *tel que* $2p \geq k+j$.

<u>Démonstration.</u>

i) On a $\mathrm{ord}(f - F_p(x)) \geq 2p$, c'est à dire que :

$$f - F_p(x) = \beta_{2p}\, x^{2p}\, g(x)$$

où $g(x)$ est une série formelle.

$$f^{(k)} - F_p^{(k)}(x) = \beta_{2p} \sum_{i=o}^{k} (x^{2p})^{(i)} \, g(x)^{(k-i)} \, C_k^i$$

$$= \beta_{2p} \sum_{i=o}^{k} i! \, C_{2p}^i \, x^{2p-i} \, g^{(k-i)}(x) \, C_k^i$$

$$= \beta_{2p} \, x^{2p-k} \sum_{i=o}^{k} i! \, C_k^i \; C_{2p}^i \, x^{k-i} \, g^{(k-i)}(x)$$

$$= \beta_{2p} \, x^{2p-k} \, h(x)$$

où h(x) est une série formelle. D'où le résultat.

ii) $\overset{k}{f} - \overset{k}{F}_p(x) =$

$$\sum_{i=o}^{\infty} c_{i-k} \frac{x^i}{i!} - \left[ c_{-k} + \int_o^x (c_{-k+1} + \int_o^{x_1} (c_{-k+2} + \ldots (c_{-1} + \int_o^{x_{k-1}} F_p(x_k) dx_k) \ldots) dx_1 \right]$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} c_{i-k} \frac{x^i}{i!} - \int_o^x \int_o^{x_1} \ldots \int_o^{x_{k-1}} F_p(x_k) \, dx_k \ldots dx_1$$

$$= \int_o^x \int_o^{x_1} \ldots \int_o^{x_{k-1}} (f(x_k) - F_p(x_k)) \, dx_k \ldots dx_1$$

$$= \int_o^x \int_o^{x_1} \ldots \int_o^{x_{k-1}} \beta_{2p} \, x_k^{2p} \, g(x_k) \, dx_k \ldots dx_1$$

$$= \beta_{2p} \, x^{2p+k} \, h^*(x)$$

où $h^*(x)$ est une série formelle.

iii) $\operatorname{ord}(f^{(j)} - \tilde{F}_{p,j}(x)) \geq 2p.$

Donc d'après i) on a :

$$\operatorname{ord}(f^{(j)} - \tilde{F}_{p,j}(x))^{(k-j)} = \operatorname{ord}(f^{(k)} - \tilde{F}^{(k-j)}_{p,j}(x)) \geq 2p-k+j$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $2p \geq k-j$.

iv) $\operatorname{ord}(\overset{j}{f} - \bar{F}_{p,j}(x)) \geq 2p.$

D'après ii), on a :

$$\operatorname{ord}\overline{(\overset{j}{f} - \bar{F}_{p,j}(x))}^{k-j} = \operatorname{ord}(\overset{k}{f} - \overline{F}^{k-j}_{p,j}(x)) \geq 2p+k-j,\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq j$$

v) $\operatorname{ord}(f^{(j)} - \tilde{F}_{p,j}(x)) \geq 2p$

D'après iv) on a :

$$\operatorname{ord}(\overset{k}{f} - \overset{k+j}{\tilde{F}}_{p,j}(x)) \geq 2p+k+j.$$

vi) $\operatorname{ord}(\overset{j}{f} - \bar{F}_{p,j}(x)) \geq 2p.$

D'après iii) on a :

$$\operatorname{ord}(f^{(k)} - \bar{F}^{(k+j)}_{p,j}(x)) \geq 2p-k-j,\ \forall k \in \mathbb{N},\ 2p \geq k+j$$

<u>cqfd</u>.

**Remarque.**

On peut dans les cas i), ii) et vi) supprimer les inégalités reliant k et p. En effet, la négation de ces inégalités signifierait que l'on a l'ordre d'une constante supérieur ou égal à un nombre strictement négatif, ce qui est vrai. Mais cette comparaison n'a plus aucun intérêt.

L'examen des séries formelles introduites montre que, si à la série formelle f(x) on fait correspondre l'approximant $F_p(x)$, s'il existe, il est en connexion avec $P_p^{(o)}(x)$. Les racines de ce polynôme orthogonal donnent les coefficients des exposants de $F_p(x)$. Alors les séries formelles $f^{(j)}(x)$ ont pour approximants $\tilde{F}_{p,j}(x)$, s'ils existent, qui sont en connexion avec $P_p^{(j)}(x)$ dont les racines donnent les coefficients des exposants de $\tilde{F}_{p,j}(x)$ et les séries formelles $\overset{j}{f}(x)$ ont pour approximants $\bar{F}_{p,j}(x)$ qui sont en connexion avec $P_p^{(-j)}(x)$.

L'existence de tous ces approximants est donc liée à l'existence des polynômes orthogonaux $P_p^{(j)}(x)$ pour $j \in Z$.

On a la propriété suivante qui découle immédiatement de ce qui vient d'être exposé.

*Propriété 7.18.*

*Soient une série formelle* $f(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i \frac{x^i}{i!}$ *et une suite* $\{c_{-k}\}$ *de réels pour* $k \in \mathbb{N}$ *et* $k > 0$.
*Les approximants* $\tilde{F}_{p,j}(x)$ *(respectivement* $\bar{F}_{p,j}(x)$*) n'existent que si les polynômes orthogonaux* $P_p^{(j)}(x)$ *(resp.* $P_p^{(-j)}(x)$*) par rapport à la fonctionnelle linéaire* $c^{(j)}$ *(resp.* $c^{(-j)}$*) existent et réciproquement. Les racines de ces polynômes donnent les coefficients des exposants des approximants.*

- • -

## CONCLUSION - PROBLEMES OUVERTS

*L'ensemble de notre travail est une étude algébrique des polynômes orthogonaux débouchant sur leur calcul et sur quelques applications. Si nous examinons leur intervention dans les applications nous constatons que ce sont surtout leurs zéros qui sont utiles. En dehors des cas des fonctionnelles définies positives, semi-définies positives et des fonctionnelles u-définies positives lacunaires d'ordre* s+1, *nous n'avons pratiquement aucune propriété intéressante sur les zéros. Il est bien certain qu'alors certaines applications ont une portée limitée. Par exemple il est possible d'utiliser des formules de quadrature de Gauss mais nous ne pouvons pas être sûr de la stabilité et de la convergence. Il en sera de même pour les approximations des séries de fonctions. Quant aux approximants de Padé le calcul des zéros est inutile pour obtenir leur expression formelle, mais dès qu'on aborde, par exemple, des problèmes de convergence, il faut localiser les pôles ! Le problème des zéros des polynômes orthogonaux est donc encore très largement ouvert.*

*D'autre part il reste un gros travail d'exploitation numérique. Les algorithmes d'obtention des polynômes orthogonaux dans toutes les directions pourraient être programmés ainsi que l'algorithme* "qd" *soit sous sa forme directe soit sous sa forme progressive.*

*Ensuite nous pensons que notre mémoire montre suffisamment l'intérêt de l'étude des polynômes orthogonaux et de leurs applications et nous souhaitons qu'il soit une porte ouverte sur la résolution de problèmes algébriques apparentés. Nous en donnons une liste qui n'est pas exhaustive.*

- *Polynômes orthogonaux formels à plusieurs variables.*
- *Quadratures à plusieurs variables.*
- *Approximants de séries de fonctions à plusieurs variables.*
- *Polynômes orthogonaux formels en algèbre non commutative.*
- *Orthogonalité discrète.*
- *Séries orthogonales et problèmes de convergence.*
- *Approximants de séries de fonctions en deux points.*
- *Approximants de type Padé en deux points.*

*Enfin parmi les problèmes que nous avons abordés, certains n'ont été résolus que partiellement, d'autres pourraient être étendus. Ce sont par exemple :*

- *Les propriétés des fonctions de poids polynômiales.*
- *Les propriétés des zéros des polynômes orthogonaux par rapport à une fonctionnelle $H^{(i)}$ semi-définie positive.*
- *Les propriétés des polynômes orthogonaux sur un cercle, voir sur une courbe quelconque (cf. Szegö [58]).*

# ANNEXE

-

Cette partie examine les résultats numériques obtenus par MOUKOKO étudiant à l'Université de Lille I dans son mémoire pratique de D.E.A. Ils concernent les approximants de type exponentiel.

Le travail a consisté à calculer dans un premier temps les coefficients du polynôme orthogonal de degré fixé p en résolvant le système linéaire d'orthogonalité $(M_p)$ par une méthode déduite de celle proposée par J. Rissanen [46].
Cet algorithme fournit la solution d'un système Cx = A où C est une matrice de Hankel en $O(n^2)$ opérations. On cherche une matrice B triangulaire inférieure ayant des 1 sur la diagonale principale telle que BC = Q, où Q est une matrice qui peut être rendue triangulaire supérieure par des permutations de lignes. Nous exposons ci-dessous la méthode transformée.

Le système $(M_p)$ se met sous la forme :

$$C_p.x = -A_p.$$

On pose $\bar{C}_p = (C_p, A_p)$. C'est donc une matrice rectangulaire (p, p+1) de Hankel.
Avec l'algorithme proposé par J. Rissanen on a $\bar{Q}_p = (Q_p, A'_p)$ par

$$B_p.\bar{C}_p = B_p(C_p, A_p) = \bar{Q}_p = (Q_p, A'_p)$$

et donc

$$B_pA_p = A'_p.$$

Cette transformation de l'algorithme économise des opérations sur le calcul de $A'_p$, car on n'a pas à faire le produit $B_p A_p$.

## Méthode.

On détermine les lignes successives de $B_p$ et $\bar{Q}_p$ avec $\bar{B}_p\bar{C}_p = \bar{Q}_p$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_o & c_1 & \cdots & c_p \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{p-1} & & \cdots & c_{2p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_o & \cdots & c_p \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

## $1^{\text{ère}}$ phase.

On pose :

$$\begin{cases} b_o = (1,0,\ldots,0) = \text{ligne } 0 \text{ de } B_p \\ q_o = (c_o,\ldots,c_p) = \text{ligne } 0 \text{ de } \bar{Q}_p \end{cases}$$

Soit s le plus petit indice tel que $c_s \neq 0$.

On prend $i_o = s$ et $u_o = c_s$.

On définit les deux ensembles :

$$I_o = \{i_o\} \qquad \text{et} \qquad U_o = \{u_o\}.$$

On pose $k = 0$.

## $2^{\text{e}}$ phase.

Si $k = p-1$, c'est fini.

Sinon on pose :

$$b_{k+1}^{(1)} = (0, b_{k,o},\dots,b_{k,k-1}, 1, 0,\dots,0) ;$$

il y a p+1 composantes.

Les $b_{i,j}$ sont les éléments de la matrice $B_p$.

$b_{k+1}$ est la ligne k+1 de $B_p$.

$$q_{k+1}^{(1)} = (q_{k,1},\dots,q_{k,p}, q_{k+1,p}^{(1)})$$

où

$$q_{k+1,p}^{(1)} = b_{k,o}\, c_{p+1} +\dots + b_{k,k-1}\, c_{p+k} + c_{p+k+1}.$$

Les $q_{i,j}$ sont les éléments de la matrice $\bar{Q}_p$.

On pose j = 1.

## <u>3^e phase</u>.

Il faut trouver le plus petit nombre s tel que $q_{k+1,s}^{(j)} \neq 0$ où

$$q_{k+1}^{(j)} = (q_{k+1,o}^{(j)},\dots,q_{k+1,p}^{(j)})$$

## <u>4e phase</u>.

<u>Si</u> $s \notin I_k$ on pose :

$$u_{k+1} = q_{k+1,s}^{(j)} \text{ et } i_{k+1} = s.$$

$$U_{k+1} = U_k \cup \{u_{k+1}\} \text{ et } I_{k+1} = I_k \cup \{i_{k+1}\},$$

et on passe à la 5e phase.

Sinon $s = i_r$.

On prend :

$$\begin{cases} b_{k+1}^{(j+1)} = b_{k+1}^{(j)} - q_{k+1,s}^{(j)} . u_r^{-1} . b_r \\ \\ q_{k+1}^{(j+1)} = q_{k+1}^{(j)} - q_{k+1,s}^{(j)} . u_r^{-1} . q_r \ . \end{cases}$$

On remplace j par j+1 et on retourne à la phase 3.

5$^{e}$ phase.

On pose :

$$\begin{cases} b_{k+1} = b_{k+1}^{(j)} \\ \\ q_{k+1} = q_{k+1}^{(j)} \end{cases}$$

On remplace k par k+1 et on recommence la 2$^{ème}$ phase.

Remarque.

Grâce aux propriétés des systèmes $(M_p)$ on peut encore améliorer un peu cet algorithme.
Dans la 4$^{e}$ phase, si $s \notin I_k$ et si $s-i_k > 1$, alors dans le retour à la 2$^{e}$ phase puis à la 3$^{e}$ on aura $s = i_{k+1} - 1$ et ainsi de suite jusqu'au moment où on trouvera $s = i_k+1$.

ANALYSE DES CAS POSSIBLES.

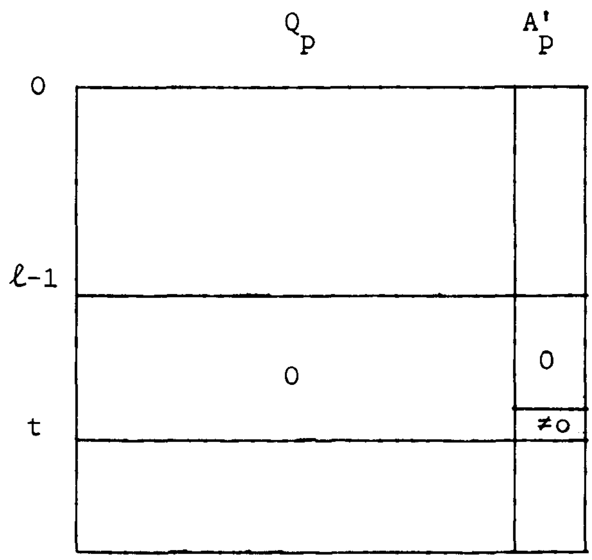
1$^{er}$ cas.

Le système $(M_p)$ est de rang maximum p.
On obtient une matrice $Q_p$ régulière qui peut être rendue triangulaire supérieure par des permutations de lignes.

<u>$2^e$ cas</u>.

Le système $(M_p)$ est lié.

Alors on a une ligne de 0 dans $Q_p$. Soit $\ell$ le numéro de la première ligne nulle. On a calculé également l'élément correspondant de $A'_p$. S'il est nul cette ligne est liée compatible.
On calcule alors l'élément suivant de $A'_p$. Tant qu'il est nul on continue. S'il est non nul cette ligne est liée incompatible (par exemple sur la ligne t).




Alors le système $(M_t)$ est lié compatible.

La solution du problème $(M_t)$, $(K_t)$ est la même que celle du problème $(M_\ell)$, $(K_\ell)$ et le système $(M_\ell)$ est de rang maximum $\ell$.

-

Lorsque le polynôme orthogonal $P_p$ est connu, l'extraction des racines se fait par la méthode de Bairstow suivie par la méthode de Newton.

Enfin la résolution du système $(K_p)$ par la méthode de Gauss fournit les coefficients $k_i$ de l'approximant.

-

Deux types d'essais numériques ont été effectués.
Premièrement, nous avons voulu vérifier s'il était facile de déceler la singularité du système $(M_p)$ lorsque la méthode de Rissanen est employée (la matrice $Q_p$ contient alors au moins une ligne de zéros) et si par voie de conséquence la propriété 7.8 donne de bons résultats.

Nous rappelons que la propriété 7.8 dit que, pour r fixé, une condition nécessaire et suffisante pour que $f \equiv F \equiv \sum_{j=o}^{\ell_r} S_j(x)\, e^{m_{j,r}x}$ est que, $\forall p \geq r$, le système $(M_p)$ soit de rang r compatible.

Deuxièmement, il a étudié le comportement de l'approximant de type exponentiel de la fonction périodique $e^{(\sin x)^n}$ pour diverses valeurs de n et p.
L'ensemble de ce traitement numérique représente l'amorce d'un travail de recherches en analyse numérique qui comportera entre autres l'élaboration d'un logiciel permettant le calcul des polynômes orthogonaux en suivant un chemin quelconque dans la table P. Avant d'aborder ces recherches de manière approfondie, il importait en essayant des méthodes classiques (Rissanen-Bairstow-Newton-Gauss) de pouvoir juger la fiabilité des résultats numériques, afin de changer ultérieurement de méthode, si le besoin s'en faisait sentir.

Cette annexe ne sera donc qu'une simple information de ces résultats.

Toujours pour ne pas empiéter sur le travail à venir, nous ne ferons bien souvent qu'énumérer les valeurs obtenues et les problèmes d'instabilité rencontrés sans chercher ni à les expliquer, ni à proposer d'autres méthodes.

# 1. DETECTION DE LA SINGULARITE DE $(M_p)$ ET VERIFICATION DE LA PROPRIETE 7.8.

Les premiers essais portent sur des séries formelles de

$$f(x) = \sum_{j=o}^{\ell_r} S_j(x)\, e^{m_{j,r}x}.$$

<u>1er exemple</u>.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{7} e^{jx} \text{ et } p = 10.$$

Après application de la méthode de Rissanen la $8^{ème}$ ligne de la matrice $\bar{Q}_p$ est égale à :

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -6.46,\ -1.02,\ -12.96$$

On trouve ainsi que $(M_8)$ est lié incompatible, et que $(M_9)$ et $(M_{10})$ sont réguliers, alors qu'ils devraient être tous trois liés compatibles.
Le coefficient général $c_i$ est égal à $\sum_{j=1}^{7} (j)^i$ et par conséquent les ordres relatifs des éléments de $(M_p)$ sont tels que les erreurs dues à l'arithmétique de l'ordinateur donnent des valeurs non nulles pour les derniers éléments de $\bar{Q}_p$.

## $2^e$ exemple.

$$f(x) = e^x + e^{3x} \text{ et } p = 4.$$

On trouve numériquement $(M_3)$ et $(M_4)$ liés compatibles.
D'autre part :

$$m_1 = 3.00000000000000$$
$$m_2 = 0.999999999999999$$
$$k_1 = 1.00000000000000$$
$$k_2 = 0.999999999999999$$

## $3^e$ exemple.

$$f(x) = (1+x+x^2)e^x \text{ et } p = 10.$$

On trouve numériquement que $(M_i)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $4 \leq i \leq 10$, sont liés compatibles.
Les racines du polynôme orthogonal $P_3(x)$ obtenues par les méthodes de Bairstow et Newton sont :

$$m_1 = 1.00039971380155$$

$$m_2 \text{ et } m_3 = 0.999800143549241 \pm 0.242495967631365\ 10^{-3}\ i$$

Lorsqu'on ignore la forme de f(x) le problème se pose alors de savoir s'il s'agit de trois racines distinctes ou de trois racines confondues ou de deux racines confondues et une distincte.

Si on considère qu'il s'agit de trois racines distinctes les coefficients $k_i$ obtenus ont une partie réelle de l'ordre de $10^6$. Les coefficients $k_2$ et $k_3$ correspondants à $m_2$ et $m_3$ ont en plus une partie imaginaire de l'ordre de $10^6$.

Ces résultats fournissent une indication sur la façon de répondre au problème de l'identité des racines.
Dans l'exemple suivant on présente les résultats obtenus en considérant successivement les racines distinctes puis confondues.

## 4^e^ exemple.

$$f(x) = e^{3x} + e^{2x} + (1+x+x^2)e^x \text{ et } p = 10.$$

On trouve numériquement que $(M_i)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $6 \le i \le 10$ sont liés compatibles.

Les racines de $P_5(x)$ sont :

$$m_1 = 3.00000000000056$$
$$m_2 = 2.00000000003620$$
$$m_3 = 0.999770056152935$$
$$m_4 = 1.00028005600708$$
$$m_5 = 0.999707856069535$$

Si on considère que les trois racines $m_3$, $m_4$ et $m_5$ sont distinctes, on obtient alors :

$k_1 = 0.999939488469865$

$k_2 = 1.000967902647773$

$k_3 = -0.630251570210462\ 10^8$

$k_4 = 0.685279604324019\ 10^7$

$k_5 = 0.561723619768986\ 10^8$

Par contre si on considère que ces trois racines sont confondues avec leur valeur moyenne 0.999919322743184, les coefficients $k_i$ valent :

$k_1 = 0.999939501813804$

$k_2 = 1.00096789273462$

$k_3 = 0.999092605451579$

$k_4 = 0.999233707651695$

$k_5 = 0.999717662150728$

## 5$^e$ exemple.

$$f(x) = e^x \sum_{j=o}^{5} x^j \text{ et } p = 10.$$

On trouve numériquement que $(M_i)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $7 \leq i \leq 10$ sont liés compatibles. Les racines sont encore voisines à $10^{-3}$ près. Si on prend la moyenne des six racines : 1.00440286051931 on trouve pour les coefficients $k_i$ :

$k_1 = 1.00000000000000$

$k_2 = 0.995597139480690$

$k_3 = 0.995606832071067$

$k_4 = 0.995606817846026$

$k_5 = 0.995606817861683$

$k_6 = 0.995606817861671$

## 2. COMPORTEMENT DE L'APPROXIMANT DE $E^{(\sin x)^N}$

De nombreux essais numériques ont été réalisés pour cette fonction pour p = 6, 10 et 15, des valeurs entières de n comprises entre 1 et 10 et pour x dans l'intervalle [0, 6.4] avec un pas de 0.1.

Nous ne donnerons pas l'ensemble de ces résultats pour des raisons de place et nous nous contenterons seulement d'en exposer les grandes lignes.

Pour certaines valeurs de n et p (par exemple n = 3 et p = 10) il n'y avait pas convergence de la méthode de Newton pour obtenir les racines après 2000 ou 3000 itérations. Les ordres de grandeurs des coefficients $\lambda_{i,10}$ du polynôme $P_{10}$ étaient :

$$\begin{array}{ll}
\lambda_{0,10} = 1 & \lambda_{6,10} \simeq -10^6 \\
\lambda_{1,10} \simeq 10^2 & \lambda_{7,10} \simeq 10^7 \\
\lambda_{2,10} \simeq 10^3 & \lambda_{8,10} \simeq -10^7 \\
\lambda_{3,10} \simeq 10^4 & \lambda_{9,10} \simeq 10^8 \\
\lambda_{4,10} \simeq 10^4 & \lambda_{10,10} \simeq -10^8. \\
\lambda_{5,10} \simeq 10^6 &
\end{array}$$

Dans la plupart des cas pour lesquels le calcul des racines était possible, celles-ci étaient souvent multiples avec un ordre de multiplicité élevé. Par exemple pour n=1 et p=15 on a une racine d'ordre 3 (les 15 chiffres significatifs sont semblables) et une racine d'ordre 12 (les 15 chiffres significatifs de 10 d'entre elles sont semblables et les 13 premiers chiffres des 12 sont identiques).

Les approximants obtenus ont soit au moins un terme exponentiel d'exposant réel positif soit un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 en facteur d'un terme exponentiel. Par conséquent sauf au voisinage de l'origine on a rapidement des écarts importants entre f et F.

Nous donnons ci-après les résultats numériques pour n = 1 et pour p = 6 et 15.

En conclusion, on peut dire d'une manière générale qu'il y a de gros problèmes d'instabilité que ce soit dans la recherche de la singularité de $(M_p)$, dans celle des racines de $P_p$ ou dans celle du calcul des coefficients $k_i$.

- • -

# RESULTATS NUMERIQUES

-

Les valeurs données avant le commentaire "APPEL A GAUSS" sont celles des racines, d'abord la partie réelle puis la partie imaginaire, ensuite l'ordre de multiplicité de la valeur moyenne lorsque les racines sont voisines.

Ensuite l'approximant est donné sous la forme suivante :

valeur de $m_{j,r}$

valeur des coefficients du polynôme $S_j$.

Enfin, on donne la valeur calculée de l'approximant (partie réelle-partie imaginaire) puis celle de la fonction f, enfin celle de l'écart.

-

$f(x) = e^{\sin x}$ et p = 6.

```
(*) 0      .24559571270070 6D+01  .38369276931606 5D+01    1
    1      .24559571270070 6D+01 -.38369276931606 5D+01    1
    2      .89726990786127 0D+00  .00000000000000 0D+00    2
    3     -.10720726334093 3D+01  .00000000000000 0D+00    2
APPEL A GAUSS
IMP=1
LE POLYNO S( 0)FACT DE EXPO  .245595712700706D+01  .383692769316065D+01X
                       .338849338533387D-02 -.319323407372052D-02   X** 0

LE POLYNO S( 1)FACT DE EXPO  .245595712700706D+01 -.383692769316065D+01X
                       .338849338533387D-02  .319323407372052D-02   X** 0

LE POLYNO S( 2)FACT DE EXPO  .897269907861270D+00  .000000000000000D+00X
                       .107813935195658D+01  .139792610931236D-15   X** 0
                      -.115166659326242D-01 -.272537498721271D-15   X** 1

LE POLYNO S( 3)FACT DE EXPO -.107207263340933D+01  .000000000000000D+00X
                      -.849163387272465D-01 -.138112097563885D-15   X** 0
                      -.880502193933215D-01 -.426671514487405D-16   X** 1
```

CALCUL AVEC EXPG(SI[illegible]S([illegible])** 1) ET LE PAS= .1000000000000000D+00

********************** N= 6

| | VALEUR APPROCHEE | | VALEUR EXACTE | ECART |
|---|---|---|---|---|
| N= 0 | .1000000000000000D+01 | .0000000000000000D+00 | .1000[illegible]0000D+01 | .0000[illegible]D+00 |
| N= 1 | .1104986902146440D+01 | -.7240446027672870D-17 | .110490[illegible]5033169[illegible]D+01 | .71[illegible]D-07 |
| N= 2 | .1219783593222460D+01 | -.1933164681693450D-16 | .1219778556000620D+01 | .503722184358213D-05 |
| N= 3 | .1343887867422360D+01 | -.3605250152321500D-16 | .1343825243731650D+01 | .625[illegible]D-04 |
| N= 4 | .1476503058436160D+01 | -.5959937214007090D-16 | .1[illegible]7612[illegible]457[illegible]D+01 | .581[illegible]D-03 |
| N= 5 | .1616712489063760D+01 | -.8950145787751510D-16 | .1615140290442080D+01 | .156[illegible]7790D-02 |
| N= 6 | .1763821612381030D+01 | -.1258313973192350D-15 | .1758818845766990D+01 | .5002766140366650D-02 |
| N= 7 | .1917887460673320D+01 | -.1679177026866820D-15 | .1904496534306730D+01 | .1339942046659060D-01 |
| N= 8 | .2080413967940430D+01 | -.2221659100538770D-15 | .2049006650164270D+01 | .314[illegible]D-01 |
| N= 9 | .2255137120631380D+01 | -.2673299190389570D-15 | .2188741912604610D+01 | .663952[illegible]D-01 |
| N=10 | .2448751578792540D+01 | -.3658059705630620D-15 | .2319776824715850D+01 | .1289747540767670D+00 |
| N=11 | .2671352113495850D+01 | -.4619181949726900D-15 | .2438071505156320D+01 | .2332806083395240D+00 |
| N=12 | .2936294893466250D+01 | -.5741348463282460D-15 | .2539662532580760D+01 | .3966123610874740D+00 |
| N=13 | .3259149696396770D+01 | -.7228488723939230D-15 | .2621005926286700D+01 | .6381437701100760D+00 |
| N=14 | .3655445289673600D+01 | -.9070375319392990D-15 | .2679016447572710D+01 | .9764288421008840D+00 |
| N=15 | .4137639608793900D+01 | -.1115568920516520D-14 | .2711481017682160D+01 | .1425558591111740D+01 |
| N=16 | .4707202179159550D+01 | -.1351522290198550D-14 | .2717123008431280D+01 | .1990079170728260D+01 |
| N=17 | .5354891291031360D+01 | -.1646103823305470D-14 | .2695718599203820D+01 | .2659172691827540D+01 |
| N=18 | .6049227009108620D+01 | -.1961544290143590D-14 | .2648113847390760D+01 | .3401113161717840D+01 |
| N=19 | .6735744924405890D+01 | -.2274412600547980D-14 | .2576160436847020D+01 | .4159584487558870D+01 |
| N=20 | .7336552247592210D+01 | -.2617301144865860D-14 | .2482577728015000D+01 | .4853974519577210D+01 |
| N=21 | .7756826142077160D+01 | -.2967861181125250D-14 | .2370757126170310D+01 | .5386069015906840D+01 |
| N=22 | .7899971747400680D+01 | -.3332133579863440D-14 | .2244530580577550D+01 | .5655441166823130D+01 |
| N=23 | .7692946857732730D+01 | -.3633597549348830D-14 | .2107927447045540D+01 | .5585019410687190D+01 |
| N=24 | .7121538789487690D+01 | -.4226727574916190D-14 | .1964942888556780D+01 | .5156595900931110D+01 |
| N=25 | .6272622253675170D+01 | -.4231746267536250D-14 | .1819336991081060D+01 | .4453285262594110D+01 |
| N=26 | .5376704532557160D+01 | -.4990290428374830D-14 | .1674477827371160D+01 | .3702226705186000D+01 |
| N=27 | .4839743905656220D+01 | -.5402581777233390D-14 | .1533234996777320D+01 | .3306508908878900D+01 |
| N=28 | .5249067891823630D+01 | -.6368438137714760D-14 | .1397923819945000D+01 | .3851144071878840D+01 |
| N=29 | .7335417173147010D+01 | -.7900825555940230D-14 | .1270295218811560D+01 | .6065121954335450D+01 |
| N=30 | .1187329852168260D+02 | -.1001418297055600D-13 | .1151562836514540D+01 | .1072173568516800D+02 |
| N=31 | .1950678044281170D+02 | -.1294662885076110D-13 | .1042457245598260D+01 | .1846432319721340D+02 |
| N=32 | .3049934462031820D+02 | -.1649400687133490D-13 | .9432969530504120D+00 | .2955604766726780D+02 |
| N=33 | .4442553199301670D+02 | -.2089826312787470D-13 | .8540669485810230D+00 | .4357146504443570D+02 |
| N=34 | .5984870645100360D+02 | -.2507130944097570D-13 | .7744973024973950D+00 | .5907420914850620D+02 |
| N=35 | .7406102996883960D+02 | -.2837162394285060D-13 | .7041363745817910D+00 | .7335689359425720D+02 |
| N=36 | .8299362168721720D+02 | -.3193678854867070D-13 | .6424152077503670D+00 | .8235120647946680D+02 |
| N=37 | .8142653150282420D+02 | -.3113427107607440D-13 | .5887014258563380D+00 | .8083983007696790D+02 |
| N=38 | .6364815050111050D+02 | -.2710807527045680D-13 | .5423423195937070D+00 | .6310580818151680D+02 |
| N=39 | .2462848106869200D+02 | -.2344843753559050D-13 | .5026977625373650D+00 | .2412578330615470D+02 |
| N=40 | -.3819306196474990D+02 | -.1309159998452270D-13 | .4691641858740010D+00 | -.3866222615062590D+02 |
| N=41 | -.1226765242616690D+03 | .3916173401806020D-14 | .4411911233628300D+00 | -.1231177153850520D+03 |
| N=42 | -.2195550267992320D+03 | .9759960440172830D-14 | .4182918968212490D+00 | -.2199733186960530D+03 |
| N=43 | -.3103494365478160D+03 | .1859362443901810D-13 | .4000499211647740D+00 | -.3107494864689810D+03 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N=44 | -.3663863787267650D+03 | .1969578952345910D-13 | .3861219318065180D+00 | -.3667725006585920D+03 |
| N=45 | -.3498780061663880D+03 | -.4767260852143640D-14 | .3762392188062670D+00 | -.3502542454051940D+03 |
| N=46 | -.2160867506473100D+03 | -.6908418350587920D-13 | .3702077280831360D+00 | -.2184569583753930D+03 |
| N=47 | .6856532508902880D+02 | -.7741798393979660D-13 | .3679076742191980D+00 | .6819741741480960D+02 |
| N=48 | .5340767559746570D+03 | -.2572379902095100D-12 | .3692931119869140D+00 | .5337074628626700D+03 |
| N=49 | .1170674025151250D+04 | -.3812765575865320D-12 | .3743917339960850D+00 | .1170299633417260D+04 |
| N=50 | .1920718312045870D+04 | -.5633380381024850D-12 | .3633049951722710D+00 | .1920335007050690D+04 |
| N=51 | .2660272059550980D+04 | -.6330223946769750D-12 | .3962085034901520D+00 | .2659875851047490D+04 |
| N=52 | .3189706829098660D+04 | -.7041607594822870D-12 | .4133524518189610D+00 | .3189293476646840D+04 |
| N=53 | .3238292487429990D+04 | -.6063826365481440D-12 | .4350616898401360D+00 | .3237657425740150D+04 |
| N=54 | .2490426862022010D+04 | -.3967085188414220D-12 | .4617348420799360D+00 | .2489965127179930D+04 |
| N=55 | .6403227507402810D+03 | .9519584299841250D-13 | .4938416668738560D+00 | .6398289090734070D+03 |
| N=56 | -.2521202874877410D+04 | .6985831423099000D-12 | .5319176271184790D+00 | -.2521734792504530D+04 |
| N=57 | -.6990336648603310D+04 | .1563743543219270D-11 | .5765544222519590D+00 | -.6990913203025560D+04 |
| N=58 | -.1241615538702030D+05 | .2466193365615590D-11 | .6283850399767320D+00 | -.1241678377206020D+05 |
| N=59 | -.1797287726959170D+05 | .3345638824018430D-11 | .6880617668110100D+00 | -.1797356533136050D+05 |
| N=60 | -.2227616366841190D+05 | .4221755945259470D-11 | .7562256275428540D+00 | -.2227691989403950D+05 |
| N=61 | -.2339345742113220D+05 | .5275188866192590D-11 | .8334658876428180D+00 | -.2339429088701990D+05 |
| N=62 | -.1900527794521880D+05 | .1415639501077540D-11 | .9202688689124870D+00 | -.1900619821408770D+05 |
| N=63 | -.6770733552990310D+04 | -.2268629986781320D-11 | .1016956049685730D+01 | -.6771750509039990D+04 |
| N=64 | .1506949907128310D+05 | -.6866812814337000D-11 | .1123612796306680D+01 | .1506837545908680D+05 |

$f(x) = e^{\sin x}$ et p = 15.

```
 NEWTON DONNE :
  0 -.108274452593963D+01   .000000000000000D+00
  1  .834285975755370D+00  -.160690335304796D-23
  2  .834285975755370D+00   .160690335304796D-23
  3  .834285975755370D+00  -.160710530143970D-23
  4  .834285975755370D+00   .160710530143970D-23
  5  .834285975755370D+00  -.160649945626449D-23
  6  .834285975755370D+00   .160649945626449D-23
  7  .834285975755370D+00  -.160104684968760D-23
  8  .834285975755370D+00   .160104684968760D-23
  9  .834285975755370D+00  -.112222721288017D-23
 10  .834285975755370D+00   .112222721288017D-23
 11  .834285975755363D+00   .000000000000000D+00
 12 -.108274452593963D+01   .000000000000000D+00
 13  .834285975755370D+00   .000000000000000D+00
 14 -.108274452593963D+01   .000000000000000D+00
 APPEL A MATRIC
*  0    -.108274452593963D+01   .000000000000000D+00    3
   1     .834285975755371D+00   .000000000000000D+00   12
 APPEL A GAUSS
 IMP=1
 LE POLYNO S( 0)FACT DE EXPO -.108274452593963D+01   .000000000000000D+00X
                        -.503689695555251D+04   .000000000000000D+00   X** 0
                        -.149980754532030D+04   .000000000000000D+00   X** 1
                        -.120879578064574D+03   .000000000000000D+00   X** 2

 LE POLYNO S( 1)FACT DE EXPO  .834285975755371D+00   .000000000000000D+00X
                         .503789695555251D+04   .000000000000000D+00   X** 0
                        -.815591567240529D+04   .000000000000000D+00   X** 1
                         .650103329915395D+04   .000000000000000D+00   X** 2
                        -.339023646127786D+04   .000000000000000D+00   X** 3
                         .129548570635388D+04   .000000000000000D+00   X** 4
                        -.384676357804930D+03   .000000000000000D+00   X** 5
                         .916653629932972D+02   .000000000000000D+00   X** 6
                        -.177786672271781D+02   .000000000000000D+00   X** 7
                         .280354973823640D+01   .000000000000000D+00   X** 8
                        -.351655867005671D+00   .000000000000000D+00   X** 9
                         .319923151655392D-01   .000000000000000D+00   X**10
                        -.146533136811142D-02   .000000000000000D+00   X**11
```

CALCUL AVEC EXP(SINUS(X)** 1) ET LE PAS= .1000000000000000D+00

********************** N= 15

| | VALEUR APPROCHEE | | VALEUR EXACTE | ECART |
|---|---|---|---|---|
| N= 0 | .1000000000000000D+01 | .0000000000000000D+00 | .1000000000000000D+01 | .0000000000000000D+00 |
| N= 1 | .1104986830336740D+01 | .0000000000000000D+00 | .1104986830331690D+01 | -.9441336601412330D-12 |
| N= 2 | .1219778556000160D+01 | .0000000000000000D+00 | .1219778556000620D+01 | -.4538591724667640D-12 |
| N= 3 | .1343825243731150D+01 | .0000000000000000D+00 | .1343825243731650D+01 | -.5071498776487720D-12 |
| N= 4 | .1476121946452110D+01 | .0000000000000000D+00 | .1476121946445730D+01 | .6382672166570020D-11 |
| N= 5 | .1615146296626280D+01 | .0000000000000000D+00 | .1615146296442060D+01 | .1841946815695100D-09 |
| N= 6 | .1758818848746500D+01 | .0000000000000000D+00 | .1758818845766990D+01 | .2979507973677190D-08 |
| N= 7 | .1964496565896520D+01 | .0000000000000000D+00 | .1964496534386730D+01 | .3150979255295280D-07 |
| N= 8 | .2049008694075600D+01 | .0000000000000000D+00 | .2049008650164270D+01 | .2439113244712130D-06 |
| N= 9 | .2188743399379400D+01 | .0000000000000000D+00 | .2188741912604610D+01 | .1486774791725760D-05 |
| N=10 | .2319784325397220D+01 | .0000000000000000D+00 | .2319776824715850D+01 | .7500681369565500D-05 |
| N=11 | .2438103955733940D+01 | .0000000000000000D+00 | .2438071505156320D+01 | .3245057761169790D-04 |
| N=12 | .2539806126802770D+01 | .0000000000000000D+00 | .2539682532380760D+01 | .1235944219439440D-03 |
| N=13 | .2621428675776880D+01 | .0000000000000000D+00 | .2621005926286700D+01 | .4227494901677350D-03 |
| N=14 | .2680335338282480D+01 | .0000000000000000D+00 | .2679016447572710D+01 | .1318890709762990D-02 |
| N=15 | .2715280494497160D+01 | .0000000000000000D+00 | .2711481017662160D+01 | .3799476815006700D-02 |
| N=16 | .2727331243772310D+01 | .0000000000000000D+00 | .2717123600431260D+01 | .1020723553410280D-01 |
| N=17 | .2721507790441540D+01 | .0000000000000000D+00 | .2695718599203820D+01 | .2578919123771460D-01 |
| N=18 | .2709792881584050D+01 | .0000000000000000D+00 | .2648113847390780D+01 | .6167903415326340D-01 |
| N=19 | .2716615386169740D+01 | .0000000000000000D+00 | .2576160436847020D+01 | .1400549493227170D+00 |
| N=20 | .2788600248995290D+01 | .0000000000000000D+00 | .2482577728015000D+01 | .3060225209802960D+00 |
| N=21 | .3011385908999560D+01 | .0000000000000000D+00 | .2370757126170310D+01 | .6406287828292440D+00 |
| N=22 | .3537758767228930D+01 | .0000000000000000D+00 | .2244530580577550D+01 | .1293224186651380D+01 |
| N=23 | .4633345948735440D+01 | .0000000000000000D+00 | .2107927487045540D+01 | .2525418501669900D+01 |
| N=24 | .6749000373314630D+01 | .0000000000000000D+00 | .1964942686556780D+01 | .4784057484757850D+01 |
| N=25 | .1063254303575850D+02 | .0000000000000000D+00 | .1819336991081060D+01 | .8813206004467740D+01 |
| N=26 | .1749779661910690D+02 | .0000000000000000D+00 | .1674477827371160D+01 | .1582331879173570D+02 |
| N=27 | .2927515054040110D+02 | .0000000000000000D+00 | .1533234996777320D+01 | .2774191554362380D+02 |
| N=28 | .4897643384919170D+02 | .0000000000000000D+00 | .1397923819945000D+01 | .4757651002924670D+02 |
| N=29 | .8121755759149290D+02 | .0000000000000000D+00 | .1270295218811560D+01 | .7994726237268130D+02 |
| N=30 | .1329558387836260D+03 | .0000000000000000D+00 | .1151562836514540D+01 | .1318042759271120D+03 |
| N=31 | .2145155540678890D+03 | .0000000000000000D+00 | .1042457245598260D+01 | .2134730968222910D+03 |
| N=32 | .3409955576018620D+03 | .0000000000000000D+00 | .9432969550504120D+00 | .3400522606468110D+03 |
| N=33 | .5341771550962810D+03 | .0000000000000000D+00 | .8540669485810230D+00 | .5333230681417000D+03 |
| N=34 | .8250791874657790D+03 | .0000000000000000D+00 | .7748973024973950D+00 | .8243046901632820D+03 |
| N=35 | .1257340593580250D+04 | .0000000000000000D+00 | .7041363745817910D+00 | .1256636457205670D+04 |
| N=36 | .1691648462764210D+04 | .0000000000000000D+00 | .6424152077503670D+00 | .1691006047556460D+04 |
| N=37 | .2811471176646750D+04 | .0000000000000000D+00 | .5887014256563360D+00 | .2810882474622900D+04 |
| N=38 | .4130400436256130D+04 | .0000000000000000D+00 | .5423423195937070D+00 | .4129858093936540D+04 |
| N=39 | .6001450626892640D+04 | .0000000000000000D+00 | .5026977625373650D+00 | .6000947929130100D+04 |
| N=40 | .8628705523447660D+04 | .0000000000000000D+00 | .4691641858740010D+00 | .8628236359261810D+04 |
| N=41 | .1228173559922620D+05 | .0000000000000000D+00 | .4411911233628300D+00 | .1228129440610280D+05 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N=42 | .1731322625060220D+05 | .0000000000000000D+00 | .4182916968212490D+00 | .1731280795670540D+05 |
| N=43 | .2418024714596460D+05 | .0000000000000000D+00 | .4000499211647740D+00 | .2417984709604350D+05 |
| N=44 | .3346954013856200D+05 | .0000000000000000D+00 | .3861219318065180D+00 | .3346915401663020D+05 |
| N=45 | .4592708659043680D+05 | .0000000000000000D+00 | .3762392188062670D+00 | .4592671035122000D+05 |
| N=46 | .6249200585267830D+05 | .0000000000000000D+00 | .3702077280631360D+00 | .6249163564495030D+05 |
| N=47 | .8433449665306770D+05 | .0000000000000000D+00 | .3679076742191960D+00 | .8433412674539350D+05 |
| N=48 | .1128970113782680D+06 | .0000000000000000D+00 | .3692931119869140D+00 | .1128966420851560D+06 |
| N=49 | .1499370828550350D+06 | .0000000000000000D+00 | .3743917359960850D+00 | .1499367084439010D+06 |
| N=50 | .1975691168030410D+06 | .0000000000000000D+00 | .3833049951722710D+00 | .1975687334980460D+06 |
| N=51 | .2583009084617960D+06 | .0000000000000000D+00 | .3962085034901520D+00 | .2583005122532930D+06 |
| N=52 | .3350584909930060D+06 | .0000000000000000D+00 | .4133524518189610D+00 | .3350580776411540D+06 |
| N=53 | .4311099935444320D+06 | .0000000000000000D+00 | .4350616898401360D+00 | .4311095584827420D+06 |
| N=54 | .5504352353737450D+06 | .0000000000000000D+00 | .4617518420799360D+00 | .5504347730309030D+06 |
| N=55 | .6968425111257970D+06 | .0000000000000000D+00 | .4938416668738560D+00 | .6968420172841300D+06 |
| N=56 | .8740670467149360D+06 | .0000000000000000D+00 | .5319176271184790D+00 | .8740665147973090D+06 |
| N=57 | .1087796445124470D+07 | .0000000000000000D+00 | .5765544222519590D+00 | .1087795866570050D+07 |
| N=58 | .1339916492606780D+07 | .0000000000000000D+00 | .6283850399767320D+00 | .1339915864221740D+07 |
| N=59 | .1633255202994490D+07 | .0000000000000000D+00 | .6880617688110100D+00 | .1633254514932630D+07 |
| N=60 | .1967922999284900D+07 | .0000000000000000D+00 | .7562256275428540D+00 | .1967922243659270D+07 |
| N=61 | .2340481296372450D+07 | .0000000000000000D+00 | .8334658876426180D+00 | .2340480462906960D+07 |
| N=62 | .2742019005041690D+07 | .0000000000000000D+00 | .9202668609124870D+00 | .2742018084772820D+07 |
| N=63 | .3155494829818370D+07 | .0000000000000000D+00 | .1016956049685730D+01 | .3155493812862320D+07 |
| N=64 | .3552110467564320D+07 | .0000000000000000D+00 | .1123612796306680D+01 | .3552109343951530D+07 |

## BIBLIOGRAPHIE


[1] AKHIEZER N.I.
*"The classical moment problem".*
Oliver and Boyd. Londres. 1965.

[2] BAKER G.A., RUSHBROOKE G.S. and GILBERT H.E.
*"High-temperature series expansions for the spin-$\frac{1}{2}$ Heisenberg model by the method of irreducible representations of the symmetric group".*
Phys. Rev. 135 (1964). A 1272-1277.

[3] BARRUCAND P.
*"Nouvelles récurrences pour des polynômes orthogonaux".*
C.R. Acad. Sc. Paris. 265 A (1965). 607-609.

[4] BARRUCAND P.
*"Intégration numérique, abscisse de Kronrod - Patterson et polynômes de Szegö".*
C.R. Acad. Sc. Paris. 270 A (1970). 336-338.

[5] BREZINSKI C.
*"Rational approximation to formal power series".*
J. Approx. Theory. 25 (1979). 295-317.

[6] BREZINSKI C.
*"Padé-Type approximation and general orthogonal polynomials".*
Birkhaüser Verlag. 1980. ISNM 50.

[6a] BREZINSKI C.
Communication privée.

[7] BULTHEEL A.
*"Recursive algorithms for non normal tables".*
Report TW 40, KU Leuven. Belgique. Juillet 1978.

[8] BULTHEEL A.
*"Division algorithms for continued fractions and the Padé table".*
Report TW 41, KU Leuven. Belgique. Août 1978.

[9] BULTHEEL A.
*"Fast algorithms for the factorization of Hankel and Toeplitz matrices and the Padé approximation problem".*
Report TW 42, KU Leuven. Belgique. Octobre 1978.

[10] CHIHARA T.
*"An introduction to orthogonal polynomials".*
Gordon and Breach. New-York, 1978.

[11] CLAESSENS G. et WUYTACK L.
*"On the computation of non normal Padé approximants".*
J. of Comp. Appl. Math. 5 (1979). 283-289.

[12] CORDELLIER F.
*"Algorithme de calcul récursif des éléments d'une table de Padé non normale".*
Colloque sur les approximants de Padé. Lille 28-30 Mars 1978.

[13] DAVIS P.J. and RABINOWITZ P.
*"Numerical integration".*
Blaisdell Publishing Company. 1967.

[14] DRAUX A.
*"Approximants de type exponentiel - Polynômes orthogonaux".*
Publication A.N.O. n° 27, 1980. Laboratoire d'Informatique. U.E.R. d'I.E.E.A.. Lille I.

[14a] DRAUX A.
*"Approximants of exponential type - General orthogonal polynomials".*
Proceedings. Amsterdam 1980. Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag. Heidelberg.

[15] DUPUY J.S.
*"The general properties of pseudo orthogonal polynomials"*.
The University of Alabama. PH.D 1978.

[16] DURAND E.
*"Solutions numériques des équations algébriques"*. Tome I.
Masson. Paris. 1960.

[17] FAVARD J.
*"Sur les polynômes de Tchebicheff"*.
C.R. Acad. Sc. Paris. 200 (1935). 2052-2053.

[18] GANTMACHER FR.
*"The theory of matrices"*.
Vol. I et II. New-York 1959.

[19] GANTMACHER FR.
*"La théorie des matrices"*.
DUNOD. Paris 1966.

[20] GERONIMUS Ya. L.
*"Polynomials orthogonal on a circle and interval"*.
International series of monographs on pure and applied mathematics. Pergamon Press. London. 1960.

[21] GHIZZETTI A. and OSSICINI A.
*"Quadrature formulae"*.
Birkhäuser Verlag Basel. 1970.

[22] GILEWICZ J.
*"Approximants de Padé"*.
Lecture Notes in Mathematics 667. Springer Verlag. Heidelberg 1978.

[22a] GOLUB G.H.
*"Some modified matrix eigenvalue problems"*.
Siam Rev. 15 (1973). 318-334.

[22b] GOLUB G.H. and WELSCH J.H.
*"Calculation of Gauss quadrature rules".*
Math. of Comput. 23 (1969). 221-230.

[23] GRAGG W.B.
*"The Padé table and its relation to certain algorithms of numerical analysis".*
Siam Rev. 14 (1972). 1-62.

[23a] GRAGG W.B.
*"Matrix interpretations and applications of the continued fraction algorithm".*
Rocky Mountains J. Math. 4 (1974). 213-225.

[24] GUELFOND A.O.
*"Calcul des différences finies".*
DUNOD. Paris. 1963.

[25] HENRICI P.
*"Applied and computational complex analysis I".*
Wiley. New-York. 1974.

[26] HORNECKER G.
*"Approximations rationnelles voisines de la meilleure approximation au sens de Tchebycheff".*
C.R. Acad. Sc. Paris 249 (1959). 939-941.

[27] HORNECKER G.
*"Détermination des meilleures approximations rationnelles (au sens de Tchebycheff) des fonctions réelles d'une variable sur un segment fini et des bornes d'erreur correspondantes".*
C.R. Acad. Sc. Paris 249 (1959). 2265-2267.

[28] JONES W.B.
*"Multiple-point Padé tables".*
Dans "Padé and rational approximation - Theory and application" edited by SAFF E.B. and VARGA R.S. Acad. Press. 1977. 163-171.

[29] JONES W.B. and MAGNUS A.
*"Computation of poles of two-point Padé approximants and their limits".*
J. Comp. Appl. Math. 6 (1980). 105-119.

[30] JONES W.B. and THRON W.J.
*"Two-point Padé tables and T-fractions".*
Bull. of the Amer. Math. Soc. 83 (1977). 388-390.

[31] JONES W.B. and THRON W.J.
*"Orthogonal Laurent polynomials and Gaussian quadrature".*
6 pages.

[32] KARLIN S. and SHAPLEY L.S.
*"Geometry of moment spaces".*
Memoirs of the American Mathematical Society. Number 12. 1953.

[32a] KAUTSKY J.
*"Matrices related to interpolatory quadratures".*
Numer. Math. 36 (1981). 309-318.

[33] KORGANOFF A. et PAVEL-PARVU M.
*"Méthodes de calcul numérique".* Tome 2.
Eléments de théorie des matrices carrées et rectangles en analyse numérique".
DUNOD. Paris. 1967.

[34] KRONROD A.S.
*"Nodes and weights of quadrature formulas".*
Consultants Bureau. New-York. 1965.

[35] KRYLOV V.I.
*"Approximate calculation of integrals".*
The Macmillan Company. New-York. 1962.

[36] KUNTZMAN J.
*"Méthodes numériques - Interpolation, dérivées".*
DUNOD, Paris 1959.

[37] MAGNUS A.
*"Rate of convergence of sequences of Padé-type approximants and pole detection in the complex plane".*
Proceedings of Amsterdam (1980). (A paraître dans Lecture Notes. Springer).

[38] MAGNUS A.
*"Fractions continues généralisées : théorie et applications".*
Thèse. Université de Louvain. 1976.

[39] MARDEN M.
*"The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable".*
American Mathematical Society. Mathematical surveys. III. 1949.

[40] Mc CABE J.H. and MURPHY J.A.
*"Continued fractions which correspond to power series expansions at two points".*
J. Inst. Maths. Applics. 17 (1976). 233-247.

[41] Mc. CABE J.H.
*"A formal extension of the Padé table to include two-point Padé quotients".*
J. Inst. Maths. Applics. 15 (1975). 363-372.

[42] MONEGATO G.
*"A note on extended Gaussian quadrature rules".*
Math. of Comp. 30 (1976). 812-817.

[43] MONEGATO G.
*"On polynomials orthogonal with respect to particular variable - signed weight functions".*
Z. angew. Math. Phys. 31 (1980). 549-555.

[44] PASZKOWSKI S.
*"O pewnych uogólnieniach aproksymacj wymiernej Padēgo".*
Raport Nr N-34. Institute of Computer Science.
Wroclaw University. Grudzień 1977.

[45] POSSE C.
*"Sur quelques applications des fractions continues algébriques".*
S$^t$ Petersbourg. 1886.

[46] RISSANEN J.
*"Solution of linear equations with Hankel and Toeplitz matrices".*
Numer. Math. 22 (1974). 361-366.

[47] RONVEAUX A.
*"Polynômes orthogonaux dont les polynômes dérivés sont quasi-orthogonaux".*
C.R. Acad. Sc. Paris. 289 A (1979). 433-436.

[48] ROSSUM H. VAN
*"A theory of orthogonal polynomials based on the Padé table".*
Thesis. University of Utrecht. Van Gorcum. Assen. 1953.

[49] ROSSUM H. VAN
*"Lacunary orthogonal polynomials".*
Koninkl. Nederl. Akad von Wetenschappen. Amsterdam 69 (1966). 55-63.

[50] SHENG P. and DOW J.D.
*"Intermediate coupling theory : Padé approximants for polarons".*
Phys. Rev. 4B (1971). 1343-1359.

[50a] SHOHAT J.A.
*"On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients".*
Trans. Amer. Math. Soc. 42 (1937). 461-496.

[51] SIDI A.
*"Some aspects of two-point Padé approximants".*
J. Comp. Appl. Math. 6 (1980). 9-17.

[52] SLUIS A. Van der
*"General orthogonal polynomials".*
Thesis. University of Amsterdam. 1956.

[53] STANCU D.D. and STROUD A.H.
*"Quadrature formulas with simple Gaussian nodes and multiple fixed nodes".*
Math. Comp. 17 (1963). 384-394.

[54] STOER J. and BULIRSCH R.
*"Introduction to numerical analysis".*
Springer Verlag. New-York. Heidelberg. Berlin. 1980.

[55] STROUD A.H. and STANCU D.D.
*"Quadrature formulas with multiple Gaussian nodes".*
J. Siam Numer. Anal. 2 (1965). 129-143.

[56] STRUBLE George W
*"Orthogonal polynomials : variable - signed weight functions".*
Numer. Math. 5 (1963). 88-94.

[57] SZEGÖ G.
*"Ueber gewisse orthogonale Polynome, die zu einer oszillierenden Belegungsfunktion gehören".*
Mathematische Annalen 110 (1935). 501-513.

[58] SZEGÖ G.
*"Orthogonal polynomials".*
American Mathematical Society. Colloquium Publication. Vol. XXIII. Providence 1939.

[59] THRON W.J.
*"Two-point Padé tables, T-fractions and sequences of Schur".*
Dans "Padé and Rational Approximation". Opus cit. 215-226.

[60] WALL H.S.
*"The analytic theory of continued fractions".*
Van Nostrand. New-York. 1948.

[61] WEISS L. and Mc DONOUGH R.N.
*"Prony's method, Z-transform, and Padé approximation".*
Siam Rev. 5 (1963). 145-149.

[62] WILSON R.
*"The abnormal case and the difference equations of the Padé Table".*
Mess. Math. 58 (1929). 58-66.

[63] WUYTACK L. (Edited by)
*"Padé approximation and its applications".*
Proceedings, Antwerp 1979. Lecture Notes in Mathematics. 765.
Springer Verlag. Heidelberg. 1979.

[64] YOUNG D. and GREGORY R.
*"A survey of numerical mathematics".* Vol. I.
Addison. Wesley publishing Company. 1972.

INDEX

-



-

-

-