N° d'ordre : 930

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

(Mathématiques Appliquées)

par

Christine KOWALEWSKI

POSSIBILITES D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE LOGARITHMIQUE

Thèse soutenue le 26 novembre 1981 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury	P. POUZET	Président
	G. GERMAIN BONNE	Rapporteur
	C. BREZINSKI	Examinateur

PROFESSEURS 1ère CLASSE

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BONNOT Ernest	Biologie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DELATTRE Charles	Sciences de la Terre
M.	DURCHON Maurice	Biologie
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	HEUBEL Joseph	Chimie
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LANSRAUX Guy	Physique
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEBRUN André	C.U.E.E.P.
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie

M.	MAILLET Pierre	S.E.S.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M.	SALMER Georges	I.E.E.A.
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M.	SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M.	STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS 2ème CLASSE

M.	AL FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	ANTOINE Philippe	Mathématiques
M.	BART André	Biologie
Mme	BATTIAU Yvonne	Géographie
M.	BEGUIN Paul	Mathématiques
M.	BELLET Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOBE Bernard	S.E.S.
M.	BODART Marcel	Biologie
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOSQ Denis	Mathématiques
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	BRUYELLE Pierre (Chargé d'enseignement)	Géographie
M.	CAPURON Alfred	Biologie
M.	CARREZ Christian	I.E.E.A.
M.	CHAMLEY Hervé	E.U.D.I.L.

M.	CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M.	COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme	CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COUTURIER Daniel	Chimie
Mle	DACHARRY Monique	Géographie
M.	DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M.	DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M.	DELORME Pierre	Biologie
M.	DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie
M.	DHAINAUT André	Biologie
M.	DORMARD Serge	S.E.S.
M.	DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUBRULLE Alain	Physique
M.	DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M.	DYMENT Arthur	Mathématiques
M.	FLAMME Jean-Marie	E.U.D.I.L.
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	GERVAIS Michel	S.E.S.
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOSSELIN Gabriel	S.E.S.
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie
M.	GREVET Patrice	S.E.S.
M.	GUILBAULT Pierre	Biologie
M.	HANGAN Théodore	Mathématiques
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	JACOB Gérard	I.E.E.A.
M.	JACOB Pierre	Mathématiques
M.	JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M.	KREMBEL Jean	Biologie
M.	LAURENT François	I.E.E.A.
Mle	LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle	LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme	LEHMANN Josiane	Mathématiques

M.	LEMAIRE Jean	Physique
M.	LENTACKER Firmin	G.A.S.
M.	LEVASSEUR Michel	I.P.A.
M.	LHENAFF René	G.A.S.
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOSFELD Joseph	I.E.E.A.
M.	LOUAGE Francis	E.U.D.I.L.
M.	MACKE Bruno	Physique
M.	MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert	Mathématiques
M.	MONTEL Marc	Physique
Mme	NGUYEN VAN CHI Régine	G.A.S.
M.	PARSY Fernand	Mathématiques
Mle	PAUPARDIN Colette	Biologie
M.	PERROT Pierre	Chimie
M.	PERTUZON Emile	Biologie
M.	PONSOLLE Louis	Chimie
M.	PORCHET Maurice	Biologie
M.	POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M.	RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M.	RICHARD Alain	Biologie
M.	RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M.	ROGALSKI Marc	M.P.A.
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	ROY Jean-Claude	Biologie
M.	SALAMA Pierre	S.E.S.
Mme	SCHWARZBACH Yvette (CCP)	M.P.A.
M.	SCHAMPS Joël	Physique
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	SLIWA Henri	Chimie
M.	SOMME Jean	G.A.S.
Mle	SPIK Geneviève	Biologie
M.	STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M.	TAILLIEZ Roger	Institut Agricole

M.	TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M.	VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme	ZINN JUSTIN Nicole	M.P.A.

CHARGES DE COURS

M.	TOP Gérard	S.E.S.
M.	ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	DUVEAU Jacques	S.E.S.
M.	HOFLACK Jacques	I.P..A
M.	LATOUCHE Serge	S.E.S.
M.	MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M.	OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre de la subvention de recherche OTAN 027-81.

Je remercie Monsieur le Professeur POUZET qui s'est intéressé à mes études et qui me fait aujourd'hui l'honneur de présider le jury.

Monsieur le Professeur BREZINSKI m'a fait découvrir l'accélération de la convergence ; il m'a permis de préparer cette thèse et de prendre part aux séminaires d'analyse numérique ; qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je suis très reconnaissante à Monsieur GERMAIN-BONNE d'avoir accepté de diriger mes travaux ; j'ai été très sensible à l'intérêt qu'il y a porté ; sa grande disponibilité, son enthousiasme et sa gentillesse m'ont été des plus précieux.

Mes remerciements vont également à Monsieur SABLONNIERE dont j'ai apprécié les encouragements et les suggestions, ainsi qu'à tous les membres du laboratoire de calcul de l'université qui m'ont accueillie parmi eux et m'ont donné les moyens de réaliser ce travail.

La langue anglaise n'a pas de secret pour Marie-Catherine BUIRON et elle m'a permis d'utiliser ses compétences ; qu'elle en soit remerciée.

Je n'oublierai pas Madame CARON qui a dactylographié ces pages avec soin et diligence, ni Monsieur et Madame DEBOCK qui en tirent les épreuves.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Dans le cadre de l'accélération de la convergence, les problèmes posés par la convergence logarithmique n'ont, jusqu'à présent, été étudiés que d'une manière partielle ou d'un point de vue purement numérique. On sait, par expérimentation, que certains algorithmes accélèrent certaines formes de convergence logarithmique mais aucune étude globale n'a été faite sur ce sujet. Pourtant, c'est dans le cas de la convergence logarithmique (c'est à dire celui des suites à convergence très lente) que les méthodes d'accélération s'avèrent le plus nécessaires.

La première étude exhaustive de cette question se trouve dans un article de Smith et Ford (1979) ; dès la seconde phrase de l'introduction, l'état d'esprit est annoncé : "notre approche sera principalement expérimentale". Cet article est intéressant car il pose un certain nombre de questions et, parmi celles-ci : "Existe-t-il un algorithme du type Δ^2 d'Aitken accélérant toute suite à convergence logarithmique ?"

En 1980 J.P. Delahaye et B. Germain-Bonne donnent la réponse à cette question et cette réponse est négative. Dès lors se pose le problème : "Quel type de convergence logarithmique est-il accélérable ?", ou, plus exactement, "Comment définir un ensemble de suites à convergence logarithmique de façon qu'il soit accélérable ?" L'étude qui suit est une tentative de réponse à cette question.

Dans le premier chapitre j'étudierai un certain nombre de problèmes spécifiques posés par la convergence logarithmique et je définirai plusieurs sous-ensembles de l'ensemble des suites à convergence logarithmique.

Dans le deuxième chapitre, je montrerai que l'un de ces sous-ensembles n'est pas accélérable.

Dans le troisième chapitre, j'étudierai un certain nombre de procédés qui accélèrent des sous-ensembles définis au chapitre 1.

Enfin, dans le quatrième chapitre, je construirai un procédé de transformation de suites valable pour un sous-ensemble particulier.

NOTATIONS

J'appellerai $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels. $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^*$ sont les mêmes ensembles privés de l'élément 0.

Je désignerai toujours par (S_n) une suite de réels supposée convergente, de limite S^*. S_n désigne le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite (S_n). Sauf précisions contraires, l'indice n varie dans $\mathbb{N}$, de 0 à $+\infty$.

Je noterai e_n l'erreur commise en prenant l'itéré S_n comme approximation de S^* : $e_n = S_n - S^*$; (e_n) désigne la suite-erreur.

Je supposerai toujours que les suites considérées n'atteignent jamais leur limite ; c'est à dire que e_n est toujours non nulle.

ΔS_n désignera la différence entre deux termes consécutifs de la suite (S_n) : $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$.

Il est évident que $\Delta S_n = \Delta e_n$ pour tout n et que la suite (ΔS_n) converge vers 0.

De manière analogue, $\Delta^2 S_n = \Delta(\Delta S_n) = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n$.

Procédés d'Accélération :

Considérons une suite (S_n) de limite S^* et considérons un procédé qui transforme (S_n) en une suite (T_n)

Le procédé sera dit :

1) exact pour la suite (S_n)

s'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N\ T_n = S^*$

2) régulier pour la suite (S_n)

si $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = S^*$

3) Accélérant la convergence de (S_n)

si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 0$

Il est évident que cette dernière propriété entraîne la régularité. Il est évident que si un procédé est exact pour (S_n), il est également régulier pour (S_n) et accélère sa convergence.

Pour des raisons pratiques évidentes, un procédé d'accélération de convergence ne saurait être valable que si le calcul d'un itéré T_n ne nécessite la connaissance que d'un nombre fini d'éléments de (S_n).

Ensembles Accélérables :

Considérons $\mathcal{S}$ un ensemble de suites. $\mathcal{S}$ sera dit accélérable s'il existe un procédé capable d'accélérer la convergence de toute suite de $\mathcal{S}$. Dans le cas contraire, $\mathcal{S}$ sera dit non accélérable. Supposons $\mathcal{S}$ non accélérable. Cela ne veut pas dire que, si on se donne une suite quelconque de $\mathcal{S}$, il est impossible de l'accélérer ; mais cela veut dire qu'il n'existe pas de transformation "universelle" pour $\mathcal{S}$ (accélérant toutes les suites de $\mathcal{S}$).

Chapitre 1

ETUDE DETAILLEE DE LA CONVERGENCE LOGARITHMIQUE

J.P. Delahaye et B. Germain-Bonne ont prouvé [Réf 7] que l'ensemble des suites à convergence logarithmique n'était pas accélérable. Il est donc nécessaire d'en définir des sous-ensembles dans le but de les accélérer.

Après avoir fait un parallèle avec le cas de la convergence linéaire (paragraphe 1), je décrirai, dans le paragraphe 2, la convergence logarithmique de trois manières distinctes. L'une de ces manières, fondée sur la notion de suite "dérivée première" est examinée de manière systématique dans le troisième paragraphe : divers sous-ensembles de suites à convergence logarithmique sont décrits chacun étant lié à une propriété de la suite "dérivée première" ; les diverses inclusions découlent naturellement de propriétés plus ou moins fortes exigées de la suite "dérivée première". Le paragraphe 4 est consacré au problème de la comparaison des vitesses de convergence de deux suites à convergence logarithmique. Finalement, les problèmes posés par la convergence logarithmique sont exposés dans le paragraphe 5 : parmi les sous-ensembles décrits dans le paragraphe 3, lesquels sont accélérables ?

Note : On trouvera, en fin de volume, un tableau récapitulatif des divers ensembles décrits dans ce chapitre.

I - Un parallèle avec le cas de la convergence linéaire

Définition 1 : Une suite (Sn) est dite à convergence linéaire si $\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = K$ *où* K *est un réel vérifiant* $|K| < 1$.

Une telle suite vérifie automatiquement $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = K$.

De ces deux égalités, il est possible de tirer immédiatement un procédé d'accélération de convergence en procédant de la manière suivante :

Considérons les suites à convergence linéaire qui vérifient, à partir d'un certain rang $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = K$. Pour de telles suites, la limite S^* est solution d'une équation polynomiale de degré 1 :

$$\Delta S_n (S_{n+1} - S^*) = \Delta S_{n+1} (S_n - S^*)$$

dont les coefficients peuvent être calculés à partir d'un nombre fini (3, dans le cas présent) de termes de (S_n). C'est à dire que la limite S^* est calculable directement et exactement à partir d'un nombre fini de termes de la suite :

$$S^* = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$$

Maintenant, pour une suite à convergence linéaire quelconque, on peut définir le procédé qui transforme (S_n) en (T_n) où (T_n) est donnée par

$$T_n = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$$

Ce procédé est bien connu : c'est le procédé Δ^2 d'Aitken. Et il a été prouvé [Réf 2] (théorème 32 page 38) qu'il accélère la convergence de toutes les suites à convergence linéaire.

La situation est-elle identique dans le cas de la convergence logarithmique ?

Définition 2 : Une suite (Sn) est dite à convergence logarithmique si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1.$$

Remarque : la limite K de $\frac{e_{n+1}}{e_n}$, si elle existe, doit obligatoirement vérifier $|K| \leq 1$; en effet, dans le cas contraire, on aurait, à partir d'un certain rang $|e_{n+1}| > |e_n|$, ce qui est incompatible avec la convergence de (e_n) vers 0. La convergence logarithmique apparaît donc comme un cas extrême de la convergence linéaire (K = 1).

Il est évident que la définition 2 est équivalente à la

Définition 2' : Une suite (S_n) est à convergence logarithmique si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta S_n}{e_n} = 0$$

puisque $\frac{\Delta S_n}{e_n} = -\frac{\Delta e_n}{e_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} - 1$

C'est à dire que, dans le cas d'une suite à convergence logarithmique, la distance parcourue en une itération, ΔS_n, devient un infiniment petit devant la distance restant encore à parcourir pour atteindre la limite, e_n.

Dans tout ce qui suit, j'appellerai Log l'ensemble de toutes les suites à convergence logarithmique.

Si on compare la situation avec ce qui se passe dans le cas de la convergence linéaire, on trouve trois différences fondamentales.

1) Une différence concernant le rapport des deltas

Comme je l'ai remarqué au début du chapitre, une suite à convergence linéaire ($\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = K$, $|K| < 1$) vérifie également $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = K$.

Dans le cas logarithmique, au contraire, $\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$ n'implique pas forcément $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1$.

<u>Contre-exemple</u> :

La suite (S_n) définie par $S_n = \begin{cases} \frac{1}{n-2} & \text{si } n \equiv 0 \quad (\text{modulo } 3) \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$

vérifie $\frac{\Delta S_n}{e_n} = \begin{cases} -\frac{3}{n+1} & \text{si } n \equiv 0 \ (\text{modulo } 3) \\ \frac{1}{n-1} & \text{si } n \equiv 1 \ (\text{modulo } 3) \\ -\frac{1}{n+1} & \text{si } n \equiv 2 \ (\text{modulo } 3) \end{cases}$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta S_n}{e_n} = 0$; c'est à dire $(S_n) \in$ Log.
Mais, pour $n \equiv 0 \pmod 3$ par exemple, $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n-2}{n+2}$; ceci tend vers $\frac{1}{3}$ lorsque $n \to +\infty$; donc $\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)$ ne peut tendre vers 1. Il existe cependant un important sous-ensemble de Log pour lequel $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1$. Cet ensemble a été défini par Smith et Ford [Réf 17]. Je l'appelerai LOGSF

$$\text{LOGSF} = \{(S_n) \ / \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1\}$$

LOGSF, ainsi défini, est bien inclus dans Log ; en effet, une suite de LOGSF vérifie $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n}$. D'après le théorème 15 page 13 de [Réf 2], ceci implique $\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$.

2) <u>Une différence concernant le sous-ensemble qui permet de définir le procédé Δ^2 d'Aitken</u>

Le procédé Δ^2 d'Aitken a été défini en considérant les suites à convergence linéaire qui vérifient, à partir d'un certain rang, $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = K$. De telles suites appartiennent à l'ensemble des suites à convergence linéaire. Au contraire, dans le cas de la convergence logarithmique, et même si on se place dans LOGSF, l'égalité $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = 1$ ne correspond à aucun sous-ensemble de LOGSF (car $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$ donnerait une suite erreur constante et non nulle à partir d'un certain rang, ce qui n'a aucun sens).

3) Une différence concernant le rapport d'accélération du procédé Δ^2 d'Aitken

Appelons (T_n) la suite transformée de (S_n) par le Δ^2 d'Aitken ; le rapport d'accélération $\frac{T_n - S^*}{S_n - S^*}$ est égal à $1 - \dfrac{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}$

Ce rapport tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ dans le cas de la convergence linéaire puisque le numérateur et le dénominateur de la fraction tendent vers la même limite non nulle. Mais, pour une suite de LOGSF, numérateur et dénominateur tendent tous deux vers 0 et on a une forme indéterminée. Les informations que l'on possède sur (S_n) sont donc insuffisantes ; et LOGSF ne peut être accéléré par le Δ^2 d'Aitken.

Le problème de la convergence logarithmique apparait donc comme plus complexe que celui de la convergence linéaire. La définition 2' montre d'ailleurs que, se donner un nombre fini de termes de la suite (S_n), c'est, en fait, se donner peu d'informations sur le comportement général de (S_n).

L'information "(Sn) $\in$ Log" n'étant pas suffisante pour permettre de trouver un algorithme d'accélération, je serai amenée à définir des sous ensembles de Log. Auparavant, je vais donner quelques exemples de suites à convergence logarithmique.

II - EXEMPLES DE SUITES À CONVERGENCE LOGARITHMIQUE

1) Premiers exemples

Il est facile de montrer que les suites

$$S_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{pour } n \geq 1 \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}^{*+}$$

$$S_n = \frac{1}{\text{Log } n} \quad \text{pour } n > 1$$

sont des suites de Log.

Démonstration

1) $S_n = e_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ $\qquad \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha$ ceci tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$

2) $S_n = e_n = \dfrac{1}{\text{Log } n}$

$$1 - \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\text{Log}(n+1) - \text{Log } n}{\text{Log}(n+1)} = \frac{\text{Log}(1 + \frac{1}{n})}{\text{Log}(n+1)}$$

qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$

Smith et Ford [Réf 17] ont utilisé un certain nombre de séries convergentes, en particulier :

. la série $S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i^2}$ qui converge logarithmiquement vers $\dfrac{\pi^2}{6}$

. la série $S_n = \sum_{i=2}^{n} \left(\dfrac{1}{i} + \text{Log } \dfrac{i-1}{i}\right)$ qui converge logarithmiquement vers la constante d'Euler.

Remarque : Toutes les séries $S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ convergent logarithmiquement.
Elles convergent d'autant plus vite que α est grand ; on pourrait, à l'aide de ces séries, former une échelle de comparaison des suites à convergence Logarithmique.

2) Définition de la suite dérivée première

De la définition 2, on peut tirer immédiatement la

Propriété 1 : La suite (S_n) *appartient à Log si et seulement si il existe une suite réelle* (λ_n) *de limite nulle vérifiant pour tout indice* n :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n$$

Cette suite (λ_n) sera appelée "suite dérivée première" de (S_n).

A partir de maintenant, cette propriété 1 tiendra lieu de définition pour l'ensemble Log. Ainsi, le fait d'admettre une dérivée première caractérise une suite à convergence logarithmique : $(S_n) \in$ Log si et seulement si elle possède une suite dérivée première. (Cette duite dérivée première est un élément de Co, ensemble des suites réelles de limite nulle).

La connaissance de la suite (λ_n) et du premier terme e_o de la suite erreur équivaut à la connaissance de la suite (e_n) tout entière. Log est défini par la propriété : $(\lambda_n) \in$ Co ; les sous-ensembles de Log seront définis grâce à des propriétés supplémentaires de (λ_n).

Intéressons-nous d'ailleurs tout de suite à la propriété de monotonie. Les suites utilisées par Smith et Ford étaient toutes strictement monotones.

En revanche, la suite étudiée dans le contre-exemple du I n'était pas monotone.

Appelons LOG 1 l'ensemble de toutes les suites de Log qui sont strictement monotones à partir d'un certain rang.

A quelles conditions une suite appartient-elle à LOG 1 ?

Propriété 2 : $LOG\ 1 = \{(S_n) \in Log \ / \ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq N,\ \lambda_n > 0\}$

Démonstration

a) Supposons que $(S_n) \in Log$ et que $\forall\ n \geq N\ \lambda_n > 0$

Puisque (λ_n) tend vers 0, il existe un rang N' tel que $\forall\ n \geq N',\ 0 < \lambda_n < 1$

donc $0 < 1 - \lambda_n < 1$

On a alors :

. puisque $1 - \lambda_n < 1$

$$|e_{n+1}| = |e_n|\ (1 - \lambda_n) < |e_n|$$

la suite $(|e_n|)$ est strictement décroissante à partir du rang N'.

. puisque $0 < 1 - \lambda_n$

$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n)$ est du même signe que e_n

la suite (e_n) est de signe constant à partir du rang N'.

Donc, la suite (e_n) est strictement monotone à partir d'un certain rang, il en est évidemment de même pour la suite (S_n)

b) Supposons que $(S_n) \in Log$ et que (S_n) soit strictement monotone à partir du rang N ; $(|e_n|)$ est strictement décroissante à partir du rang N. S'il existait une infinité d'indices i pour lesquels $\lambda_i \leq 0$, c'est à dire pour lesquesl $1-\lambda_i \geq 1$, on aurait aussi, une infinité de fois $|e_{i+1}|=|e_i|.(1-\lambda_i)\geq|e_i|$.Ceci est contradictoire avec la stricte décroissance de $(|e_n|)$.

J'ai défini précédemment l'ensemble LOGSF ; existe-t-il une relation entre LOGSF et LOG 1 ?

Propriété 3 : $LOGSF \subset LOG\ 1 \subset Log$

Démonstration

L'inclusion LOG 1 $\subset$ Log est évidente.

§ Soit une suite $(S_n) \in$ LOGSF. Elle vérifie $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1$

Or $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$

Donc, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\frac{e_{n+1}}{e_n}}$ tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$

Ceci implique que tous les λ_i sont de même signe à partir d'un certain rang.

Or, ce signe ne peut pas être $-$, car on aurait alors $1 - \lambda_i > 1$ donc

$|e_{i+1}| = |e_i|\ (1 - \lambda_i) > |e_i|$

La suite $(|e_n|)$ serait croissante à partir d'un certain rang et cela est contradictoire avec sa convergence vers 0.

Donc LOGSF $\subset$ LOG 1.

Revenons à présent, à une nouvelle manière de définir les suites à convergence logarithmique.

D'après la propriété 1, si $(S_n) \in$ Log, $e_{n+1} = e_o \prod_{i=o}^{n} (1 - \lambda_i)$

Naturellement, si $(S_n) \in$ LOG 1, on a la même égalité avec, en plus, la propriété : $\lambda_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Réciproquement, considérons la suite (e_n) définie par :

- e_o réel quelconque non nul
- $e_{n+1} = e_o \prod_{i=o}^{n} (1 - \lambda_i)$

où (λ_n) est une suite réelle, de limite nulle et strictement positive à partir d'un certain rang.

A quelles conditions la suite (e_n) est-elle la suite erreur correspondant à une suite de LOG 1 ?

La suite (λ_n) tendant vers 0, il est certain qu'à partir d'un certain rang, λ_n ne peut plus prendre la valeur 1. Toutefois, si à une certaine étape, λ_n valait 1, tous les termes de la suite (e_n) à partir du rang suivant seraient nuls ; je ne considérerai pas ce cas qui a d'ailleurs été éliminé dans l'introduction.

Sous ces hypothèses, il est évident que $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Une condition nécessaire et suffisante pour que (e_n) soit la suite erreur d'une suite de LOG 1 est donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=o}^{n} (1 - \lambda_i) = 0$. Or il s'agit ici d'un produit infini à termes positifs dont aucun des facteurs n'est nul et qui, en conséquence ne peut converger vers 0. Dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=o}^{n} (1 - \lambda_i) = 0$, c'est donc dire que le produit infini diverge vers 0. Et on sait que le produit infini diverge si et seulement si la série associée $\sum\limits_{i=o}^{+\infty} \lambda_i$ diverge.

En fin de compte, si (e_n) tend vers 0, cela veut dire que le produit infini $\prod\limits_{i=o}^{+\infty} (1 - \lambda_i)$ diverge, donc que la série $\sum\limits_{i=o}^{+\infty} \lambda_i$ diverge également.

Inversement, si la série $\sum\limits_{i=o}^{+\infty} \lambda_i$ diverge, le produit $\prod\limits_{i=o}^{+\infty} (1 - \lambda_i)$ diverge également. Mais la suite des produits partiels $P_n = \prod\limits_{i=o}^{n} (1 - \lambda_i)$ est en valeur absolue positive et strictement décroissante à partir d'un certain rang, donc convergente. La limite ne peut être que 0 car si elle était non nulle, le produit infini serait convergent. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$. La donnée de e_o et de (λ_n) va donc définir entièrement (e_n). A une suite (e_n) fixée correspond une infinité de suites (S_n) se déduisant l'une de l'autre à l'aide d'une simple translation. Ces résultats se résument dans la

<u>Propriété 4</u> : Toute suite de LOG 1 est entièrement déterminée par la donnée de :

. *sa limite* S^*, *réel quelconque*

. *son premier terme-erreur* e_o, *réel non nul*

. *sa suite dérivée première* (λ_n), *suite réelle, de limite nulle, strictement positive à partir d'un certain rang et dont la série associée* $\sum_{i=o}^{+\infty} \lambda_i$ *diverge.*

Pour construire une suite de LOG 1, il suffit donc de se donner un couple (e_o, S^*) et une suite (λ_n) ayant les propriétés précédentes.

3) Suites de point fixe

Expérimentalement, de nombreuses suites sont obtenues comme suites de point fixe : $S_{n+1} = f(S_n)$. A quelles conditions une telle suite est-elle à convergence logarithmique ?

Désignons par $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point S^*

Propriété 5 : *Soit* f *une application définie de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathbb{R}$, *de classe C1 et vérifiant :*

. $\forall\, x \in \mathcal{O},\ f(x) = x \iff x = S^*$ (S^* *est le seul point fixe de* f *dans* $\mathcal{O}$)

. $f'(S^*) = 1$

. f' *n'a pas de minimum local en* S^*

Alors, il existe un intervalle I *de la forme* $]S^* - \varepsilon, S^*[$ *ou* $]S^*, S^* + \varepsilon[$, *inclus dans* $\mathcal{O}$ $(\varepsilon > 0)$ *tel que la suite définie par*

$$\begin{cases} * \; S_o \in I \\ * \; S_{n+1} = f(S_n) \end{cases}$$

converge logarithmiquement vers S^*.

Démonstration :

a) Convergence de (S_n) vers S^*

f' n'a pas de minimum local en S^* et f' ne peut pas non plus être constante au voisinage de S^* car f aurait alors plusieurs points fixes. Donc, il existe un intervalle I de la forme $]S^* - \varepsilon, S^*[$ ou de la forme $]S^*, S^* + \varepsilon[$ où f' est strictement inférieure à 1.

Considérons la suite $(|S_n - S^*|)$ avec $S_n \in I$.

$|S_{n+1} - S^*| = |f(S_n) - f(S^*)| = |S_n - S^*| \times |f'(\xi_n)|$

avec $\xi_n \in I$ car ξ_n est compris entre S_n et S^*.

Ceci parce que f est de classe C1.

Donc $0 \leq |S_{n+1} - S^*| < |S_n - S^*|$

La suite $(|S_n - S^*|)$ positive, décroissante est donc convergente. Comme tous les $S_n - S^*$ sont de même signe, la suite $(S_n - S^*)$ est également convergente ainsi que la suite (S_n).

La limite ℓ doit vérifier l'égalité aux limites de $f(S_n) = S_{n+1}$, c'est à dire $f(\ell) = \ell$. D'après le premier point de la propriété 5, ℓ ne peut valoir que S^*.

Donc (S_n) converge vers S^*.

b) $(S_n) \in$ Log :

En utilisant à nouveau le fait que f est de classe C1, on obtient

$S_{n+1} = f(S_n) = f(S^* + (S_n - S^*)) = f(S^*) + (S_n - S^*)\ f'\ (\xi_n)$

avec ξ_n compris entre S_n et S^*

donc $\dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = f'(\xi_n)$

Lorsque $n \to +\infty$, $S_n \to S^*$ donc $\xi_n \to S^*$

Puisque f est C1, $f'(\xi_n) \to f'(S^*) = 1$.

<u>Remarque</u> : De telles suites de point fixe appartiennent à LOG 1. En effet $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = f'(\xi_n)$ avec $\xi_n \in I$ et on a remarqué que, sur I, f' était strictement inférieure à 1. Donc $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n$ avec $\lambda_n > 0$.

Cependant, toute suite de LOG 1 n'est pas forcément une suite de point fixe.

III - DÉFINITION DE SOUS-ENSEMBLES DE LOG

J'ai été amenée naturellement à définir LOG 1 et LOGSF comme sous-ensembles de Log. Je vais à présent définir plus systématiquement des sous-ensembles à l'aide de propriétés de la suite dérivée première (λ_n).

1) Propriétés de la suite dérivée première

Log a été défini comme suit :

$$\text{Log} = \{(S_n) \;/\; \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n \;;\; \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0\}$$

Il s'est avéré, au cours de la démonstration de la proposition 3 que (λ_n) ne pouvait prendre constamment le signe - La suite (λ_n) peut donc être soit de signe variable, soit strictement positive à partir d'un certain rang. Il est donc naturel de définir :

$$\text{LOG 1} = \{(S_n) \;/\; \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n \;;\; \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0 \;;\; \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N,\ \lambda_n > 0\}$$

Une autre propriété intéressante de la suite dérivée première est la

Propriété 6 : Si (λ_n) est la suite dérivée première d'une suite de LOG 1.

. *ou bien* $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ *n'a pas de limite*

. *ou bien* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$

C'est à dire que le type de convergence de (λ_h) ne peut être que logarithmique.

Démonstration

Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \ell$

Puisque $(S_n) \in$ LOG 1, λ_n est strictement positive à partir d'un rang N.

Donc $\ell \geq 0$.

D'autre part, puisque $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$, ℓ ne peut être strictement supérieur à 1 ;

sinon, on aurait, à partir d'un certain rang, $\lambda_{n+1} > \lambda_n$, ce qui est contradictoire.

Donc $\ell \in [0, 1]$.

Supposons que ℓ appartienne à $[0, 1[$

Alors, il existe un nombre $B \in \mathbb{R}$ et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} . \ 0 \leq \ell < B < 1 \\ . \ 0 < \lambda_N < 1 \\ . \ \forall\, n \geq N, \ \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \in \,]0, B[\end{cases}$$

Alors : $0 < \lambda_{N+1} < B\, \lambda_N$

$0 < \lambda_{N+2} < B\, \lambda_{N+1} < B^2\, \lambda_N$

et, pour tout $i > N$, $0 < \lambda_i < B^{i-N}\, \lambda_N$

ce qui entraîne que $1 - B^{i-N}\, \lambda_N < 1 - \lambda_i < 1$

Faisons le produit de toutes ces inégalités pour i variant de N à n et multiplions par $|e_N|$

$$0 < |e_N| \prod_{i=N}^{n} (1 - B^{i-N}\, \lambda_N) < |e_N| \prod_{i=N}^{n} (1 - \lambda_i)$$

Passons à présent à la limite lorsque $n \to +\infty$

$$0 \leq |e_N| \prod_{i=N}^{+\infty} (1 - B^{i-N}\, \lambda_N) \leq \lim_{n\to+\infty} |e_{n+1}|$$

Le produit infini $\prod_{i=N}^{+\infty} (1 - B^{i-N}\, \lambda_N)$ est de même nature que la série $\sum_{j=0}^{+\infty} B^j$, il converge donc. Il ne peut converger vers 0 car aucun de ses facteurs n'est nul ; il converge donc vers une constante strictement positive.

Donc, $\lim_{n\to+\infty} |e_{n+1}| > 0$, ce qui est impossible.

La seule possibilité pour ℓ est donc de valoir 1.

Une conséquence naturelle de la propriété 6 est de nous amener à définir le sous-ensemble de LOG 1 constitué des suites pour lesquelles $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$.
Or, cet ensemble est déjà connu, c'est LOGSF.

Propriété 7 :

$$\text{LOGSF} = \{(S_n) \;/\; \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\}$$

$$= \{(S_n) \in \text{Log} \;/\; \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\}$$

Démonstration

a) La première partie de la démonstration, LOGSF $\subset \{(S_n) \in \text{Log} \;/\; \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\}$ a été faite dans la démonstration de la propriété 3.

b) Supposons que $(S_n) \in$ Log et que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Alors, $$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$$

donc $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Remarque : Dans cette seconde définition de LOGSF, il est inutile de préciser que λ_n est positive à partir d'un certain rang car ceci est entraîné par le fait que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

2) Définition des ensembles LOG N

Prenons le cas d'une suite de LOGSF ; la suite dérivée première (λ_n) est elle-même à convergence logarithmique et a, par là-même, une propre dérivée première, que je noterai (μ_n) et appellerai suite-dérivée seconde de (S_n).

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 - \mu_n \quad \text{avec} \lim_{n\to+\infty} \mu_n = 0$$

(μ_n) est une suite analogue à (λ_n) et possède les mêmes propriétés : elle ne peut être que de signe variable ou bien toujours positive à partir d'un certain rang.

Ceci nous conduit à la définition de LOG 2.

LOG 2 = $\{(S_n) \in \text{Log} \ / \ (\lambda_n) \in \text{LOG } 1\}$

Il est évident que LOG 2 $\subset$ LOGSF.

La suite (μ_n) ne peut vérifier que $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$ n'a pas de limite ou bien $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Ceci nous amènerait à un autre ensemble, analogue à LOGSF et inclus dans LOG 2.

<u>*Définition 3 (définition de la dérivée $N^{ième}$)*</u>

La dérivée $N^{ième}$ d'une suite à convergence logarithmique est, si elle existe la suite-dérivée première de sa dérivée $(N-1)^{ième}$

et LOG N = $\{(S_n) \in \text{Log} \ / \ (\lambda_n) \in \text{LOG } (N-1)\}$

ceci pour N = 2, 3, 4, ...

<u>*Propriété 8*</u> : LOG (N+1) $\subset$ LOG N

<u>Démonstration</u>

. Il est évident que LOG 2 $\subset$ LOG 1 puisque LOG 2 $\subset$ LOGSF.

. Par récurrence, supposons que LOG N $\subset$ LOG (N-1)

$$\text{LOG } (N+1) = \{(S_n) \in \text{Log} \ / \ (\lambda_n) \in \text{LOG } N\}$$
$$\subset \{(S_n) \in \text{Log} \ / \ (\lambda_n) \in \text{LOG } (N-1)\}$$

donc LOG (N+1) $\subset$ LOG N.

On dispose à présent d'une infinité d'ensembles LOG N et il est naturel de définir

$$LOG = \bigcap_{N=1}^{+\infty} LOG\, N$$

La relation d'inclusion suivante est évidente

$$LOG \subset \ldots \subset LOG\,(N+1) \subset LOG\, N \subset \ldots \subset LOG\, 1 \subset Log$$

Il est important de remarquer qu'aucun des ensembles précédemment définis n'est vide. En effet, la suite $S_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ appartient à LOG.

Démonstration

Pour cette suite, $e_n = \frac{1}{n}$

$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $(S_n) \in Log$

calcul de (λ_n) : $\lambda_n = 1 - \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1}{n+1}$

λ_n est toujours positive donc $(S_n) \in LOG\ 1$

Montrons, par récurrence, que la suite dérivée $p^{\text{ième}}$ est $(\frac{1}{n+p})$

. On vient de montrer que la suite dérivée première est $(\frac{1}{n+1})$

. Supposons que la suite dérivée $p^{\text{ième}}$ soit $(\frac{1}{n+p})$

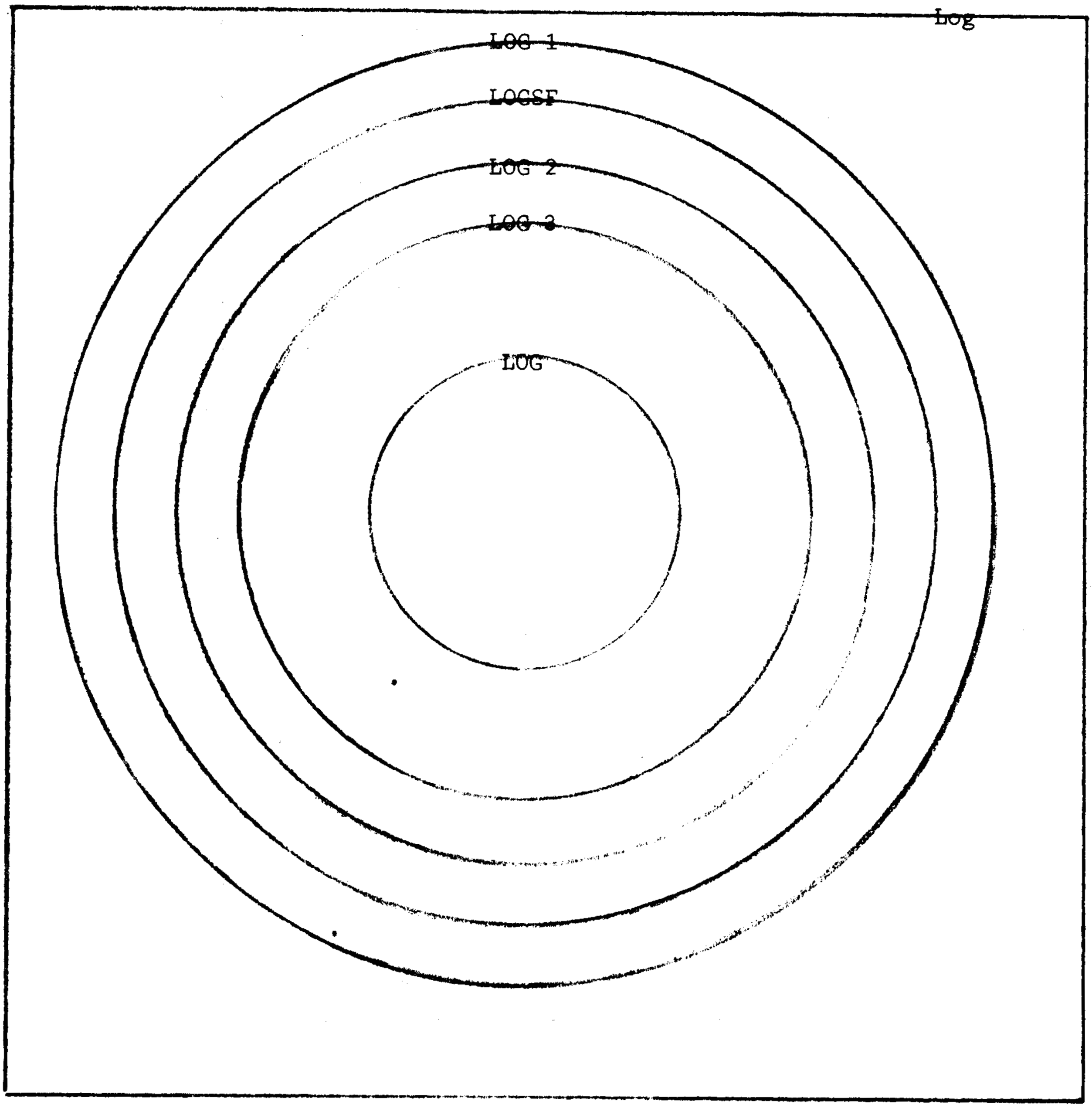
elle tend logarithmiquement vers 0 en restant strictement positive et

$$\frac{\frac{1}{n+p+1}}{\frac{1}{n+p}} = \frac{n+p}{n+p+1} = 1 - \frac{1}{n+p+1}$$

donc sa suite dérivée première est $\frac{1}{n+p+1}$; c'est la suite dérivée $(p+1)^{\text{ième}}$ de (S_n)

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite dérivée $p^{\text{ième}}$ de (S_n) existe et est strictement positive.

Les différentes relations d'inclusion aboutissent au schéma d'inclusion.



Tous ces sous-ensembles de Log ont été définis grâce à des propriétés de la suite dérivée première (λ_n) que l'on peut résumer dans le tableau suivant.

Sous-ensemble de suites à convergence logarithmique	Propriétés de la suite dérivée première
Log	$(\lambda_n) \in C_o$
LOG 1	$(\lambda_n) \in C_o$ $\exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq N,\ \lambda_n > 0$
LOGSF	$(\lambda_n) \in C_o$ $(\lambda_n) \in$ Log
LOG 2	$(\lambda_n) \in C_o$ $(\lambda_n) \in$ LOG 1
⋮	⋮
LOG N	$(\lambda_n) \in C_o$ $(\lambda_n) \in$ LOG (N-1)

3) Définition de $\widehat{\text{LOG N}}$

Les propriétés de la suite (S_n) et des ses dérivées successives, étudiées jusqu'à présent étaient des propriétés de monotonie. Je vais à présent définir des ensembles de suites à l'aide d'une propriété comparant les vitesses de convergence de (λ_n) et d'autres suites, et tout d'abord de la suite initiale.

$$\widehat{\text{LOG}}\ 1 = \{(S_n) \in \text{LOG } 1 \ / \ \lim_{n \to +\infty} \frac{\Delta\lambda_n}{\Delta e_n} = K\}$$

K étant une constante réelle non nulle.

Propriété 9 : *Si* $(S_n) \in \widehat{LOG}\ 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{e_n} = K$ et $\widehat{LOG}\ 1 \subset LOG\ 2$

Démonstration :

. Si $(S_n) \in \widehat{LOG}\ 1$, elle appartient aussi à LOG 1, donc elle est strictement monotone à partir d'un certain rang. Il en est de même pour (e_n). Le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{e_n} = K$ est alors une conséquence directe du théorème 15 page 13 de [Réf 2].

. Pour montrer que $\widehat{LOG}\ 1 \subset LOG\ 2$, montrons que (λ_n) appartient à LOG 1.

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{\lambda_{n+1}}{e_{n+1}} \cdot \frac{e_n}{\lambda_n} \cdot \left(\frac{e_{n+1}}{e_n}\right)^2$$

Utilisons le premier point de la propriété 9 en remarquant que $K \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = K \cdot \frac{1}{K} \cdot 1 = 1$$

Donc $(S_n) \in$ LOGSF, c'est à dire que $(\lambda_n) \in$ Log.

D'autre part, $\frac{\Delta e_n}{\Delta \lambda_n}$, tendant vers une constante non nulle, est de signe constant à partir d'un certain rang. Comme Δe_n est également de signe constant, vue la monotonie de (S_n), $\Delta\lambda_n$ est de signe constant. C'est à dire que (λ_n) est strictement monotone à partir d'un certain rang. Donc, $(\lambda_n) \in$ LOG 1.

$\widehat{LOG}\ 1$ est donc l'ensemble des suites de LOG 1 pour lesquelles la suite dérivée première converge aussi vite que la suite initiale, au sens de l'erreur ($\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{e_n} = K$) et au sens des deltas ($\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\lambda_n}{\Delta e_n} = K$). Au lieu de comparer la vitesse de convergence de (λ_n) à celle de la suite initiale, on peut maintenant la comparer à celle de la dérivée seconde

$$\widehat{LOG}\ 2 = \{(S_n) \in LOG\ 2 \;/\; \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta\mu_n}{\Delta\lambda_n} = K\}$$

K étant toujours un réel non nul.

Propriété 10 : *Si* $(S_n) \in \widehat{LOG}\ 2$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mu_n}{\lambda_n} = K$

La démonstration est analogue à celle du premier point de la propriété 9.

Naturellement, on peut donner une définition équivalente de $\widehat{LOG}\ 2$.

$$\widehat{LOG}\ 2 = \{(S_n) \in LOG\ 1\ /\ (\lambda_n) \in \widehat{LOG}\ 1\}$$

ce qui conduit à définir, par récurrence, les ensembles $\widehat{LOG}\ N$

$$\widehat{LOG}\,N = \{(S_n) \in LOG\ 1\ /\ (\lambda_n) \quad \widehat{LOG}\ (N-1)\}$$

$$\{(S_n) \in LOG\ N\ /\ \text{la dérivée } (N-1)^{\text{ième}} \text{ de } (S_n) \text{ appartient à } \widehat{LOG}\ 1\}$$

pour $N = 2, 3, 4, \ldots$

Et, par analogie avec ce qui a été fait pour LOG,

$$\widehat{LOG} = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \widehat{LOG}\ N$$

Encore une fois, il ne s'agit pas d'un ensemble vide, car la suite $(\frac{1}{n})$ lui appartient.

Démonstration

$e_n = \frac{1}{n}$, la suite dérivée $p^{\text{ième}}$ de (S_n) est $(\frac{1}{n+p})$. Montrons que, pour tout p, $(\frac{1}{n+p})$ appartient à $\widehat{LOG}\ 1$.

Posons $u_n = \dfrac{1}{n+p}$; elle appartient à LOG 1 ; sa dérivée première est $V_n = \dfrac{1}{n+p+1}$

$\Delta u_n = \dfrac{-1}{(n+p)(n+p+1)} \qquad \Delta v_n = \dfrac{-1}{(n+p+1)(n+p+2)}$

donc $\dfrac{\Delta v_n}{\Delta u_n} = \dfrac{n+p}{n+p+2}$ Ceci tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$

On peut relier ces ensembles $\widehat{LOG}$ N aux précédents par la

Propriété 11 : $\widehat{LOG}\ N \subset LOG\ (N+1)$ et $\widehat{LOG} \subset LOG$

Démonstration

. D'après la propriété 9, $\widehat{LOG}\ 1 \subset LOG\ 2$

. Par récurrence, supposons que $\widehat{LOG}\ (N-1) \subset LOG\ N$

Soit $(S_n) \subset \widehat{LOG}\ N$, sa dérivée première (λ_n) appartient à $\widehat{LOG}\ (N-1)$, donc à LOG N. Donc (S_n) appartient à LOG (N+1).

4) Définition des L_ρ

$\widehat{LOG}$ 1 a été défini par :

"la dérivée première converge aussi vite que la suite initiale"

(au sens suivant : $\exists\ K \neq 0$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Delta\lambda_n}{\Delta e_n} = K$).

Or, ni le numérateur ni le dénominateur de la fraction $\dfrac{\Delta\lambda_n}{\Delta e_n}$ ne sont calculables. puisque S^* est, en principe, inconnu. Pour $\widehat{LOG}$ N, la situation est analogue, $\widehat{LOG}$ N est défini par :

"la dérivée $N^{\text{ième}}$ converge aussi vite que la donnée $(N-1)^{\text{ième}}$"

Maintenant, je vais définir un ensemble de suites par :

"La dérivée première converge aussi vite (ou plus vite) qu'une suite dont on peut calculer le terme général".

Cette idée est naturelle lorsqu'on se réfère au procédé Δ^2 d'Aitken :

$$T_n = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$$

La condition pour que (T_n) accélère la convergence de (S_n) s'écrit en effet

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} = 1$$

C'est à dire, dans le cas où (S_n) est à convergence logarithmique,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} = 1$$

Je vais donc lier la vitesse de convergence de (λ_n) à celle de la suite $(1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n})$ dont un terme est calculable à l'aide de 3 termes consécutifs de la suite initiale.

ρ étant un réel quelconque, définissons :

$$L_\rho = \{(S_n) \in \text{Log} \ / \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} = \rho\}$$

$$L = \bigsqcup_{\rho\in\mathbb{R}} L_\rho$$

et $$\not{L} = \bigsqcup_{\rho\in\mathbb{R}^*} L_\rho$$

$\not{L}$ est l'ensemble des suites à convergence logarithmique dont la dérivée première converge aussi vite que $(1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n})$

ρ peut-il prendre n'importe quelle valeur réelle ?

La réponse à cette question est "non", en effet

<u>*Propriété 12*</u> *: Si* $\rho \notin [0, 1]$, $L_\rho = \emptyset$

Avant de faire la démonstration de la proposition 12, étant donné que je manipulerai le rapport $R_n = \frac{\lambda_n}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}$, je vais donner plusieurs formes équivalentes de ce rapport.

a) $$R_n = \frac{\lambda_n}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} = \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}$$

b) $$R_n = \frac{-\lambda_n}{\frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1} - 1} = \frac{-\lambda_n}{(1 - \lambda_n) \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1} = \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}}$$

c) Dans le cas où la dérivée seconde (μ_n) existe, c'est à dire où (S_n) appartient à LOGSF,

$$R_n = \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_{n+1} - (1 - \mu_n)} = \frac{1}{\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \dfrac{\mu_n}{\lambda_n}}$$

Démonstration de la propriété 12 :

a) ρ ne peut être supérieur à 1.

Supposons en effet que $R_n = \dfrac{\lambda_n}{1 + \lambda_{n+1} - \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \rho > 1$

Puisque $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le dénominateur doit tendre également vers 0

donc $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$(S_n) \in$ LOGSF et on a le droit d'écrire que $\dfrac{1}{\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \dfrac{\mu_n}{\lambda_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \rho > 1$

donc $\dfrac{\mu_n}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\rho} - 1$ qui est une constante strictement négative.

Ceci, ajouté au fait que (λ_n) est toujours positive à partir d'un certain rang, entraîne que (μ_n) est toujours négative à partir d'un certain rang. Ceci est impossible pour la suite dérivée d'une suite à convergence logarithmique, comme on l'a vu dans la démonstration de la propriété 2(b).

b) ρ ne peut être inférieur à 0

Par un raisonnement analogue au précédent, on aboutit à

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mu_n}{\lambda_n} = \dfrac{1}{\rho} - 1 < -1$. La conclusion est analogue.

Les seules valeurs possibles pour ρ sont donc dans $[0, 1]$.

Donc, $L = \bigcup\limits_{\rho\in[0,1]} L_\rho$

$$\not{L} = \bigcup_{\rho\in]0,1]} L_\rho$$

Définissons également

$$\xcancel{L} = \bigcup_{\rho \in]0,1[} L_\rho$$

Je montrerai un peu plus loin qu'aucun des ensembles L_ρ, pour ρ décrivant $[0, 1]$, n'est vide. Pour l'instant, donnons quelques relations d'inclusion :

Propriété 13 :

$$\not{L} \subset \mathrm{LOGSF}$$

$$\xcancel{L} \subset \mathrm{LOG}\ 2$$

Démonstration

a) Soit $(S_n) \in \not{L}$ $R_n = \dfrac{\lambda_n}{1 + \lambda_{n+1} - \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}}$ tend vers $\rho > 0$ quand $n \to +\infty$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$, il faut que le dénominateur tende vers 0, donc que $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ tende vers 1. Donc $(S_n) \in \mathrm{LOGSF}$

b) Soit $(S_n) \in \xcancel{L}$. Ce qui précède est encore vrai car $\xcancel{L} \subset \not{L}$

Donc $R_n = \dfrac{1}{\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \dfrac{\mu_n}{\lambda_n}}$ tend vers $\rho \in]0, 1[$ lorsque $n \to +\infty$

donc $\dfrac{\mu_n}{\lambda_n}$ tend vers $\dfrac{1}{\rho} - 1 > 0$ lorsque $n \to +\infty$

μ_n est donc strictement positif à partir d'un certain rang.

Donc, $(S_n) \in \mathrm{LOG}\ 2$.

Propriété 14 :

$$\widehat{\mathrm{LOG}}\ 1 \subset L_{\frac{1}{2}}$$

$$\widehat{\mathrm{LOG}}\ 2 \subset \xcancel{L}$$

Démonstration :

a) Soit $(S_n) \in \widehat{LOG}\ 1$

$(S_n) \in$ LOG 1 et $\dfrac{\Delta\lambda_n}{\Delta e_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} K \neq 0$

Il est aisé de vérifier que $\dfrac{\Delta\lambda_n}{\Delta e_n} = \dfrac{\dfrac{\Delta e_n}{e_n} - \dfrac{\Delta e_{n+1}}{e_{n+1}}}{\Delta e_n}$

Donc $\dfrac{\dfrac{\Delta e_{n+1}}{e_{n+1}} - \dfrac{\Delta e_n}{e_n}}{\Delta e_n} = \dfrac{\lambda_n}{e_n} \times \dfrac{e_n}{e_{n+1}} \times \left(1 - \dfrac{1}{R_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -K$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_n}{e_n} = K$, il faut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{R_n}\right)$ vaille -1, c'est à dire

que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \frac{1}{2}$. Donc $(S_n) \in L_{\frac{1}{2}}$

b) Soit $(S_n) \in \widehat{LOG}\ 2$

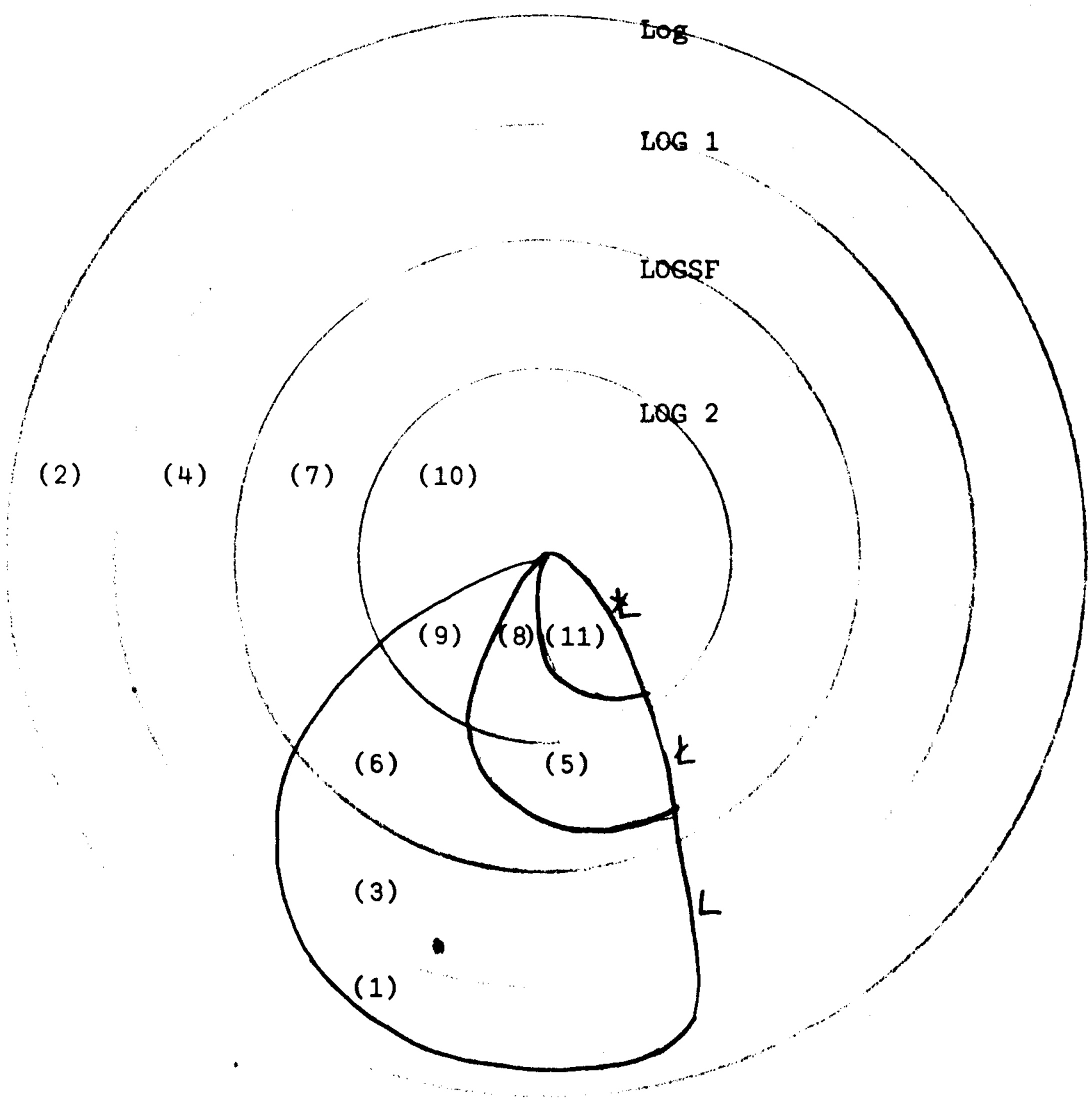
$(S_n) \in$ LOG 2 et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Delta\mu_n}{\Delta\lambda_n} = K \neq 0$ ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mu_n}{\lambda_n} = K$

Obligatoirement, $K > 0$ car μ_n et λ_n le sont à partir d'un certain rang.

$$R_n = \frac{1}{\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \dfrac{\mu_n}{\lambda_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1+K}$$

Puisque $K > 0$, $\dfrac{1}{1+K} \in]0, 1[$. Donc, $(S_n) \in \mathcal{L}$

Schéma général d'inclusion de ces divers ensembles



Pour simplifier les notations, donnons un numéro à chacune des parties disjointes de ce schéma : (1), (2), ..., (11)

L'ensemble (1) contient la suite $(S_n)_{n\geq 1}$

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n-2} & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3 \\ \dfrac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration

J'ai déjà étudié, en partie cette suite dans le contre-exemple suivant la définition 2'. Elle appartient à Log sans appartenir à LOGSF. Elle n'appartient pas non plus à LOG 1 car elle n'est pas monotone.

$$\lambda_n = 1 - \frac{e_{n+1}}{e_n} = - \frac{\Delta S_n}{e_n} = \begin{cases} \frac{3}{n+1} \text{ si } n \equiv 0 \pmod 3 \\ - \frac{1}{n-1} \text{ si } n+1 \equiv 0 \pmod 3 \\ \frac{1}{n+1} \text{ si } n+2 \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

Calculons $R_n = \dfrac{\lambda_n}{1 + \lambda_{n+1} - \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}}$

Cas 1 ; $n \equiv 0 \pmod 3$

$$R_n = \frac{\frac{3}{n+1}}{1 + \frac{1}{n+2} - \frac{n+1}{3(n+2)}} = \frac{9(n+2)}{(n+1)(2n+8)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Cas 2 ; $n+1 \equiv 0 \pmod 3$

$$R_n = \frac{- \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{3}{n+2} + \frac{3(n-1)}{(n+2)}} = \frac{- (n+2)}{(n-1)(4n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Cas 3 ; $n+2 \equiv 0 \pmod 3$

$$R_n = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n}} = \frac{n}{2n(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc, $(S_n) \in L_o$

L'ensemble (2) contient la suite $(S_n)_{n\geq1}$

$$S_n = \begin{cases} \frac{1}{n-2} \text{ si } n \equiv 0 \pmod 5 \\ \frac{1}{n} \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration

Comme la précédente, cette suite appartient à Log sans appartenir à LOG 1. Mais elle n'appartient pas à L_o. Calculons en effet R_n lorsque ni n, ni n+1, ni n+2 ne sont congrus à 0 modulo 5.

$$\Delta S_n = -\frac{1}{n(n+1)} \qquad \Delta S_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lambda_n = -\frac{\Delta S_n}{e_n} = \frac{1}{n+1} \qquad \lambda_{n+1} = -\frac{\Delta S_{n+1}}{e_{n+1}} = \frac{1}{n+2}$$

$$R_n = \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_{n+1} - \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{1 + \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{n+1}{n+2}} = \frac{n+2}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

L'ensemble (3) contient : $(S_n)_{n\geq 4}$ définie par

$$\lambda_{2i} = \frac{1}{i}$$

$$\lambda_{2i+1} = \frac{1}{i^2}$$

$$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n) \text{ pour } n \geq 4$$

$$e_4 \in \mathbb{R}^*,\ S^* \in \mathbb{R}$$

Démonstration

La suite (λ_n) tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ en restant positive. La série associée $\sum_{n=4}^{+\infty} \lambda_n$ diverge car sa somme partielle $\lambda_4 + \lambda_5 + \ldots + \lambda_{2i}$ est minorée par $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i}$, somme partielle d'une série divergente.

D'après la propriété 4, (S_n) est donc bien une suite de LOG 1.

Elle n'appartient pas à LOGSF car $\dfrac{\lambda_{2i+1}}{\lambda_{2i}} = \dfrac{1}{i} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$

Elle appartient à L_o, en effet, calculons R_{2i} et R_{2i+1}

$$R_{2i} = \frac{\dfrac{1}{i}}{1 + \dfrac{1}{i^2} - \dfrac{i}{i^2}} = \frac{i^2}{i(i^2 - i+1)} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$$

$$R_{2i+1} = \frac{\frac{1}{i^2}}{1 + \frac{1}{i+1} - \frac{i^2}{i+1}} = \frac{i+1}{i^2(-i^2 + i + 2)} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$$

L'ensemble (4) contient $(S_n)_{n\geq 6}$ *définie par*

$\lambda_{3i} = \frac{1}{i}$

$\lambda_{3i+1} = \frac{1}{i+1}$

$\lambda_{3i+2} = \frac{1}{i^2}$

$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n)$ pour $n \geq 6$

$e_6 \in \mathbb{R}^*$, $S^* \in \mathbb{R}$

Démonstration

La suite (λ_n) tend vers 0 en restant positive. Sa série associée diverge car la somme partielle $\lambda_6 + \lambda_7 + \ldots + \lambda_{3i}$ est minorée par $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i}$, somme partielle d'une série divergente. D'après la propriété 4, (S_n) est bien une suite de LOG 1.

Elle n'appartient pas à LOGSF car $\frac{\lambda_{3i+2}}{\lambda_{3i+1}} = \frac{i+1}{i^2} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$

Elle n'appartient pas non plus à L_o car

$$R_{3i} = \frac{\lambda_{3i}}{1 + \lambda_{3i+1} - \frac{\lambda_{3i+1}}{\lambda_{3i}}} = \frac{\frac{1}{i}}{1 + \frac{1}{i+1} - \frac{i}{i+1}} = \frac{i+1}{2i} \xrightarrow[i\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

L'ensemble (5) contient la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ *définie par*

$0 < \lambda_o < 1$

$\beta > 1$

$\lambda_{2i+1} = \lambda_{2i}$

$\lambda_{2i+2} = \lambda_{2i+1}\,(1 - \lambda_{2i+1}{}^{\beta})$

$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n)$ pour $n \geq 0$

$S^* \in \mathbb{R}$

Démonstration

a) Montrons, par récurrence, que (λ_n) est positive, décroissante, de limite nulle

$0 < \lambda_o < 1$

Si $0 < \lambda_{2i+1} < 1$, alors, $0 < \lambda_{2i+1}{}^{\beta} < \lambda_{2i+1} < 1$

donc $0 < 1 - \lambda_{2i+1} < 1 - \lambda_{2i+1}{}^{\beta} < 1$

en multipliant par λ_{2i+1}, $0 < \lambda_{2i+1}(1 - \lambda_{2i+1}{}^{\beta}) < \lambda_{2i+1}$

donc $0 < \lambda_{2i+2} < \lambda_{2i+1} < 1$.

La suite (λ_n), positive, décroissante, converge donc vers une limite λ qui doit vérifier $\lambda = \lambda(1 - \lambda^{\beta})$, donc $(\lambda_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

b) Montrons que la série associée à (λ_n) diverge

$$\lambda_{2i+2} = \lambda_{2i}(1 - \lambda_{2i}{}^{\beta}) = \lambda_{2i-2}(1 - \lambda_{2i-2}{}^{\beta})\,(1 - \lambda_{2i}{}^{\beta})$$
$$= \lambda_o\,(1 - \lambda_o{}^{\beta}) \ldots (1 - \lambda_{2i}{}^{\beta})$$

$$\lambda_{2n+2} = \lambda_o \prod_{i=o}^{n} (1 - \lambda_{2i}{}^{\beta})$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_{2n+2} = 0$. Or, le produit infini ne peut converger vers 0 car aucun des facteurs n'est nul. Il diverge donc vers 0. Donc la série $\sum\limits_{i=o}^{\infty} \lambda_{2i}{}^{\beta}$ diverge ; il en est de même pour $\sum\limits_{i=o}^{+\infty} \lambda_{2i}$. Comme la somme partielle de $\sum\limits_{n=o}^{\infty} \lambda_n$ est minorée par celle de $\sum\limits_{i=o}^{+\infty} \lambda_{2i}$, la série associée de (λ_n) diverge aussi. D'après la propriété 4, (S_n) est donc une suite de LOG 1.

c) Elle appartient à LOGSF car $\dfrac{\lambda_{2i+1}}{\lambda_{2i}} = 1$ et $\dfrac{\lambda_{2i+2}}{\lambda_{2i+1}} = 1 - \lambda_{2i+1}{}^{\beta}$ qui tend vers 1. Par contre elle n'appartient pas à LOG 2 car μ_n est nul une fois sur deux.

d) Elle appartient à L_1 car

$$R_{2i} = \frac{1}{\frac{\lambda_{2i+1}}{\lambda_{2i}} + \frac{\mu_{2i}}{\lambda_{2i}}} = 1$$

$$R_{2i+1} = \frac{1}{\frac{\lambda_{2i+2}}{\lambda_{2i+1}} + \frac{\mu_{2i+1}}{\lambda_{2i+1}}} = \frac{1}{1 - \lambda_{2i+1}{}^{\beta} + \lambda_{2i+1}{}^{\beta-1}} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1$$

L'ensemble (6) contient la suite $(S_n)_{n\geq 4}$ définie par

$$\lambda_{2i} = \frac{1}{i}$$

$$\lambda_{2i+1} = \frac{1}{i+\sqrt{i}}$$

$$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n) \text{ pour } n \geq 4$$

$$e_4 \in \mathbb{R}^*, \ S^* \in \mathbb{R}$$

Démonstration

a) La suite (λ_n) est strictement positive, de limite nulle, la somme partielle de sa série associée $\frac{1}{2} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+\sqrt{i}}$ est minorée par $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i}$. Donc la série $\sum_{n=4}^{+\infty} \lambda_n$ diverge. D'après la propriété 4, la suite (S_n) appartient donc à LOG 1.

b) Elle appartient à LOGSF car $\frac{\lambda_{2i+1}}{\lambda_{2_i}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{i}}} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1$

et $\frac{\lambda_{2i+2}}{\lambda_{2i+1}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{i}}}{1 + \frac{1}{i}} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1$

Par contre, elle n'appartient pas à LOG 2 car cette dernière quantité est plus grande que 1, donc $\mu_n < 0$ un rang sur deux.

c) Elle appartient à L_o car

$$R_{2i} = \frac{\lambda_{2i}}{1 + \lambda_{2i+1} - \frac{\lambda_{2i+1}}{\lambda_{2i}}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{i}}}{1 + \sqrt{i}} \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$$

$$R_{2i+1} = \frac{\lambda_{2i+1}}{1 + \lambda_{2i+2} - \frac{\lambda_{2i+2}}{\lambda_{2i+1}}} = \frac{1 + \frac{1}{i}}{(1 + \frac{1}{\sqrt{i}})(2 - \sqrt{i})} \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$$

L'ensemble (7) contient la suite $(S_n)_{n\geq 4}$ *définie par*

$\lambda_{2i} = \lambda_{2i+1} = \frac{1}{i}$

$e_{n+1} = e_n\,(1 - \lambda_n)$ pour $n \geq 4$

$e_4 \in \mathbb{R}^*$, $S^* \in \mathbb{R}$

Démonstration :

a) La suite (λ_n) tend vers 0 en restant strictement positive ; sa série associée diverge car la somme partielle $\lambda_4 + \lambda_5 + \ldots + \lambda_{2i} =$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i} + \frac{1}{i}$ est minorée par $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i}$. Donc $(S_n) \in$ LOG 1.

b) Elle appartient à LOGSF car $\frac{\lambda_{2i+1}}{\lambda_{2i}} = 1$ et $\frac{\lambda_{2i+2}}{\lambda_{2i+1}} = \frac{i}{i+1} \xrightarrow[i \to +\infty]{} 1$ mais pas à LOG 2 car μ_n est nul une fois sur deux.

c) Elle n'appartient pas à L car

$$R_{2i} = \frac{\lambda_{2i}}{1 + \lambda_{2i+1} - \frac{\lambda_{2i+1}}{\lambda_{2i}}} = 1 \quad \text{et} \quad R_{2i+1} = \frac{\lambda_{2i+1}}{1 + \lambda_{2i+2} - \frac{\lambda_{2i+2}}{\lambda_{2i+1}}} = \frac{i+1}{2i} \xrightarrow[i \to +\infty]{} \frac{1}{2}$$

L'ensemble (8) contient la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ *définie par*

$0 < \lambda_o < 1$

$\beta > 1$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \lambda_n^{\beta}) \quad \forall\, n \geq 0$$

$$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n) \quad \forall\, n \geq 0$$

$$e_o \in \mathbb{R}^*, \; S^* \in \mathbb{R}$$

Démonstration

a) Montrons que (λ_n) est positive décroissante, de limite nulle

$0 < \lambda_o < 1$

Par récurrence, si $0 < \lambda_n < 1$, alors, $0 < \lambda_n^{\beta} < \lambda_n < 1$, donc

$0 < 1 - \lambda_n < 1 - \lambda_n^{\beta} < 1$

En multipliant par λ_n, on obtient $0 < \lambda_{n+1} < \lambda_n < 1$

Donc (λ_n) converge vers une limite λ racine de l'équation $\lambda = \lambda(1 - \lambda^{\beta})$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda_n) = 0$

b) Montrons que la série associée à (λ_n) diverge

$$\lambda_{n+1} = \lambda_o \prod_{i=o}^{n} (1 - \lambda_i^{\beta}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

le produit infini ne peut converger vers 0 car tous les facteurs sont non nuls ; il diverge donc vers 0. Donc $\sum\limits_{i=o}^{+\infty} \lambda_i^{\beta}$ diverge et il en est de même pour $\sum\limits_{i=o}^{+\infty} \lambda_i$

La suite (S_n) appartient donc à LOG 1

c) Elle appartient à LOG 2 puisque $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 - \lambda_n^{\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

avec $\mu_n = \lambda_n^{\beta}$, donc toujours strictement positif.

d) Elle appartient à L_1 car $R_n = \dfrac{1}{\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \dfrac{\mu_n}{\lambda_n}} = \dfrac{1}{1 - \lambda_n^{\beta} + \lambda_n^{\beta-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

L'ensemble (9) contient la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$S_n = \frac{1}{\text{Log } n}$$

Démonstration

a) (S_n) appartient à LOG 1. En effet $1 - \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lambda_n = \frac{\text{Log}(1 + \frac{1}{n})}{\text{Log}(n + 1)}$

Ceci tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ en étant strictement positif.

b) (s_n) appartient à LOG 2. Montrons le en montrant que (λ_n) appartient à LOG 1

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{\text{Log}(1 + \frac{1}{n+1})}{\text{Log}(1 + \frac{1}{n})} \times \frac{\text{Log}(n+1)}{\text{Log}(n+2)}$$

Le premier terme de ce produit est équivalent à $\frac{n}{n+1}$, donc tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Le second terme est $\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}$ donc tend également vers 1.

Donc $(S_n) \in$ LOGSF.

Je vais maintenant montrer que (λ_n) est strictement décroissante. Pour cela étudions $f(x) = \frac{\text{Log}(1 + \frac{1}{x})}{\text{Log}(x+1)}$ sur $[2, +\infty[$

Elle y est définie, continue, dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{[\text{Log}(x+1)]^2} \left[- \frac{\text{Log}(x+1)}{x(x+1)} - \frac{\text{Log}(1 + \frac{1}{x})}{x+1} \right]$$

Dans $[2, +\infty[$, $f'(x)$ est strictement négative, donc **f est strictement décroissante.** Il en est de même pour (λ_n).

c) (S_n) appartient à L_o. Pour montrer ceci, montrons que $R_n = \frac{1}{\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n}}$ tend vers 0, c'est à dire que $\frac{\mu_n}{\lambda_n}$ tend vers $+\infty$

Je montrerai en fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_{n+1}} = +\infty$

$$\mu_n = 1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{\mathrm{Log}(n+2)\ \mathrm{Log}(1+\frac{1}{n}) - \mathrm{Log}(n+1)\ \mathrm{Log}\ (1+\frac{1}{n+1})}{\mathrm{Log}(n+2)\ \mathrm{Log}\ (1+\frac{1}{n})}$$

donc, $\dfrac{\mu_n}{\lambda_{n+1}} = \dfrac{\mathrm{Log}(n+2)}{\mathrm{Log}(1+\frac{1}{n+1})} - \dfrac{\mathrm{Log}(n+1)}{\mathrm{Log}(1+\frac{1}{n})}$

Posons $g(x) = \dfrac{\mathrm{Log}(x+1)}{\mathrm{Log}(1+\frac{1}{x})}$, alors, $\dfrac{\mu_n}{\lambda_{n+1}} = g(n+1) - g(n)$

g étant définie sur $[2, +\infty[$

Sur cet intervalle, g satisfait aux hypothèses du théorème des accroissements finis, donc $g(n+1) - g(n) = g'(c_n)$ avec $c_n \in]n, n+1[$.

Il est clair que, lorsque $n \to +\infty$, $c_n \to +\infty$. Je montrerai donc que

$\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$

$$g'(x) = \frac{1}{(x+1)\ \mathrm{Log}(1+\frac{1}{x})} \left[1 + \frac{\mathrm{Log}(x+1)}{x\ \mathrm{Log}(1+\frac{1}{x})}\right]$$

Lorsque $x \to +\infty$, $\mathrm{Log}\ (1+\frac{1}{x})$ est équivalent à $\frac{1}{x}$, donc l'expression entre crochets est équivalente à $1 + \mathrm{Log}\ (x+1)$. Elle tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

D'autre part $\dfrac{1}{(x+1)\ \mathrm{Log}\ (1+\frac{1}{x})}$ est équivalente à $\dfrac{x}{x+1}$, donc tend vers 1.

Donc $g'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

L'ensemble (10) contient la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ définie par

$0 < \lambda_o < 1$

$\lambda_{2i+1} = \lambda_{2i}(1 - \lambda_{2i})$

$\lambda_{2i+2} = \lambda_{2i+1}(1 - \lambda_{2i+1}^2)$

$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n)\ \forall\ n \geq 0$

$e_o \in \mathbb{R}^*$, $S^* \in \mathbb{R}$

Démonstration

a) Montrons que $(S_n) \in$ LOG 1. Pour cela, montrons d'abord que (λ_n) est positive décroissante, de limite nulle.

$0 < \lambda_o < 1$

Par récurrence, si tous les λ_k vérifient $0 < \lambda_k < 1$ jusqu'au rang $2i$, alors $0 < \lambda_{2i} < 1$ implique que $0 < 1 - \lambda_{2i} < 1$, donc que $0 < \lambda_{2i+1} < \lambda_{2i} < 1$.
On en déduit que $0 < \lambda_{2i+1}^2 < \lambda_{2i} < 1$ d'où $0 < 1 - \lambda_{2i+1}^2 < 1$, donc, en multipliant par λ_{2i+1}, $0 < \lambda_{2i+2} < \lambda_{2i+1} < \lambda_{2i} < 1$.

(λ_n) converge donc vers λ qui vérifie $\begin{cases} \lambda = \lambda(1-\lambda) \text{ ; donc } \lambda = 0 \\ \lambda = \lambda(1-\lambda^2) \end{cases}$

La série associée à (λ_n) diverge ; en effet,

$$\lambda_{2i+2} = \lambda_o(1-\lambda_o)(1-\lambda_1^2)\ \dots\ (1-\lambda_{2i})(1-\lambda_{2i+1}^2)$$
$$= \lambda_o \prod_{k=o}^{i} (1-\lambda_{2k})(1-\lambda_{2k+1}^2)$$

$\lambda_{2i+2} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$, mais le produit infini ne peut converger vers 0 car aucun de ses facteurs n'est nul. Il diverge donc vers 0 et la série associée $\lambda_o + \lambda_1^2 + \lambda_2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_{2i} + \lambda_{2i+1}^2$ diverge également. Mais cette somme partielle est majorée par $\lambda_o + \lambda_1 + \dots + \lambda_{2i+1}$. La série $\sum_{n=o}^{+\infty} \lambda_n$ diverge donc également.

D'après la propriété 4, (S_n) appartient donc à LOG 1.

b) Elle appartient à LOG 2 car $\dfrac{\lambda_{2i+1}}{\lambda_{2i}} = 1 - \lambda_{2i}$ donc $\mu_{2i} = \lambda_{2i}$

$$\frac{\lambda_{2i+2}}{\lambda_{2i+1}} = 1 - \lambda_{2i+1}^2 \text{ donc } \mu_{2i+1} = \lambda_{2i+1}^2$$

La suite (μ_n) tend vers 0 et est positive strictement.

c) Elle n'appartient pas à L car

$$R_{2i} = \frac{1}{\dfrac{\lambda_{2i+1}}{\lambda_{2i}} + \dfrac{\mu_{2i}}{\lambda_{2i}}} = \frac{1}{2 - \lambda_{2i}} \xrightarrow[i\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

$$R_{2i+1} = \frac{1}{\frac{\lambda_{2i+2}}{\lambda_{2i+1}} + \frac{\mu_{2i+1}}{\lambda_{2i+1}}} = \frac{1}{1 - \lambda_{2i+1}^2 + \lambda_{2i+1}} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1$$

L'ensemble (11) contient la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ *définie par* .

$S_n = \frac{1}{n}$

Démonstration

On a déjà vu que $e_n = \frac{1}{n}, \lambda_n = \frac{1}{n+1}, \mu_n = \frac{1}{n+2}$

donc (S_n) LOG 2 et $R_n = \frac{1}{\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

Avant de passer au paragraphe suivant, je vais donner la forme générale des suites de $\mathcal{L}$. Ceci montrera, en même temps, qu'aucun des ensembles L_ρ n'est vide, pour $\rho \in]0, 1[$.

5) Forme générale des suites de $\mathcal{L}$

Propriété 15

La suite (S_n) *appartient à* $\mathcal{L}$ *si et seulement si il existe :*

. *une suite réelle* $(\alpha_n)_{n\geq 0}$*, tendent vers une limite* $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$

. *un rang* $N \in \mathbb{N}$

tels que

(i) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)$

$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n)$

(ii) $\forall n \geq N \quad \alpha_n > 0$

(iii) $0 < \lambda_N < \frac{1}{2} \inf \left(1, \frac{1}{\sup\limits_{i\in\mathbb{N}}(\alpha_i)}\right)$

Remarques . $\underset{i \in \mathbb{N}}{\text{Sup}}\,(\alpha_i)$ existe puisque (α_n) est une suite réelle convergente

. la constante $\frac{1}{2}$ peut être remplacé par n'importe quel réel de $]0, 1[$

. le rang N n'est pas forcément unique. Dans la pratique, on aura souvent $N = 0$.

Démonstration de la condition nécessaire :

Si $(S_n) \in \mathcal{L}$, alors, $(S_n) \in$ LOG 2 et $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = \rho \in]0, 1[$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n}} = \rho$, ce qui veut dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mu_n}{\lambda_n} = \alpha$

avec $\dfrac{1}{1+\alpha} = \rho$, donc, $\alpha \in]0, +\infty[$

On peut écrire ceci : $\dfrac{\mu_n}{\lambda_n} = \alpha_n$ où (α_n) est une suite de limite α.

Il existe un rang N_1 tel que $\forall\, n \geq N_1$, $\alpha_n > 0$ car $\alpha > 0$

D'autre part, $\frac{1}{2}$ inf $(1, \dfrac{1}{\underset{i \in \mathbb{N}}{\text{Sup}}(\alpha_i)})$ est un réel strictement positif.

Prenons un réel $B \in]0, \frac{1}{2}$ inf $(1, \dfrac{1}{\underset{i \in \mathbb{N}}{\text{Sup}}(\alpha_i)})[$. A partir d'un certain rang N_2, tous les λ_i sont dans $]0, B[$

Choisissons $N = \text{Sup}\,(N_1, N_2)$

. $\forall\, n \geq N$, $\alpha_n > 0$ (ii)

et . $0 < \lambda_N < B < \frac{1}{2}$ inf $(1, \dfrac{1}{\underset{i \in \mathbb{N}}{\text{Sup}}(\alpha_i)})$ (iii)

avec naturellement, $\forall\, n \geq N$ $\lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \mu_n) = \lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)$

$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n)$ (i)

Démonstration de la condition suffisante

Considérons une suite (α_n), une suite (λ_n) et une suite (e_n) vérifiant les 3 points du théorème, avec $e_o \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda_o \in \mathbb{R}$ pour démarrer les récurrences.

a) La suite (S_n) appartient à LOG 1

Montrons d'abord que (λ_n) est positive de limite nulle.

Posons $A = \frac{1}{2} \inf (1, \frac{1}{\sup\limits_{i \in \mathbb{N}} (\alpha_i)})$

$0 < \lambda_N < 1$

Par récurrence, si $0 < \lambda_n < A$, alors $1 - \alpha_n A < 1 - \alpha_n \lambda_n < 1$

en multipliant par λ_n : $\lambda_n(1 - \alpha_n A) < \lambda_{n+1} < \lambda_n < A$

Par définition de A, $A \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha_n} < \frac{1}{\alpha_n}$ donc $0 < \lambda_{n+1} < \lambda_n < A$

La suite (λ_n), positive, décroissante, converge vers λ solution de

$\lambda = \lambda(1 - \alpha\lambda)$.

Puisque $\alpha > 0$, $\lambda = 0$

D'autre part la série associée à (λ_n) diverge car

$\lambda_{n+1} = \lambda_N \prod\limits_{i=N}^{n} (1 - \alpha_i \lambda_i)$ pour tout $n > N$

Le produit infini ne peut converger vers 0 car il n'a aucun facteur nul,

il diverge donc vers 0. La série $\sum\limits_{i=N}^{+\infty} \alpha_i \lambda_i$ diverge donc.

Son terme général $\alpha_i \lambda_i$ vérifie : $\alpha_i \lambda_i \leq \sup\limits_{i \in \mathbb{N}}(\alpha_i).\lambda_i$

Donc la série $\sum\limits_{i=N}^{+\infty} \lambda_i$ diverge.

Grâce à la propriété 4, on obtient le résultat que $(S_n) \in$ LOG 1

b) (S_n) appartient également à LOG 2 car, pour $n \geq N$,

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 - \alpha_n \lambda_n$$

$$\mu_n = \alpha_n \lambda_n \qquad \lim_{n \to +\infty} \mu_n = 0 \quad \text{et,} \ \forall n \geq N, \ \mu_n > 0$$

c) (S_n) appartient également à $\mathcal{L}$ car $\frac{\mu_n}{\lambda_n} = \alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = \frac{1}{1+\alpha} \in]0, 1[$

Ceci montre, de plus, que chaque L_ρ est non vide. En effet, il suffit, pour

construire une suite de L_ρ, de choisir

. $\alpha = \frac{1}{\rho} - 1$

. $\alpha_n = \alpha \ \forall n \in \mathbb{N}$

. $N = 0$ et $0 < \lambda_o < \frac{1}{2} \inf (1, \frac{1}{\alpha})$

La suite ainsi construite remplit toutes les conditions du théorème.

De plus, il est facile de vérifier que, pour cette suite, $\Delta\mu_n = \alpha\Delta\lambda_n$; cette suite appartient donc à $\widehat{LOG2}$; on peut donc énoncer la

Propriété 16 : *Pour tout* $\rho \in]0, 1[$, $L_\rho \cap \widehat{LOG2} \neq \emptyset$

6) Suites de point fixe

D'après la propriété 5, on peut générer une suite de Log, grâce à une application f ayant un point fixe. En supposant des propriétés supplémentaires sur f, il est possible de générer une suite de L_ρ dans le cas où ρ est une fraction de la forme $\frac{1}{P}$.

Propriété 17 :

Considérons un ouvert V *de* $\mathbb{R}$ *contenant le point* S^* *et une application* $f : V \to \mathbb{R}$ *vérifiant*

(*i*) f *est de classe* C^{2P} *dans* V

(*ii*) $f(S^*) = S^*$

(*iii*) $f'(S^*) = 1$

(*iv*) $f''(S^*) = f'''(S^*) = \ldots = f^{(p-1)}(S^*) = 0$

(*v*) $f^{(P)}(S^*) = C \neq 0$

où p *est un entier,* $p \geq 2$, *et* C *un réel.*

Supposons, de plus, que les deux conditions $\begin{cases} p \text{ impair} \\ C > 0 \end{cases}$ *ne sont pas réalisées simultanément.*

Alors, il existe un sous-ensemble ouvert $V' \subset V$, *tel que* $S^* \in F_r(V')$ *et tel* *que la suite définie par*

$$\begin{cases} . \ S_o \in V' \\ . \ S_{n+1} = f(S_n) \end{cases} \qquad \textit{appartient à } L_{\frac{1}{p}}$$

<u>Démonstration</u> :

Je vais démontrer uniquement la convergence de la suite de point fixe vers S^* ; la démonstration de l'appartenance à $L_{\frac{1}{p}}$ a été faite dans [Réf 12]. Selon la parité de p et le signe de C, il existe quatre cas différents ; trois de ces cas conduisent à une suite convergente, la quatrième, que j'ai éliminé, conduit à une suite divergente quel que soit le point S_o ($\neq S^*$) de départ.

Les hypothèses de la propriété impliquent que S^* est un point fixe isolé, je peux donc supposer, quitte à restreindre V, que S^* est le seul point fixe de V.

a) cas où $f^{(p)}(S^*) = C$ est strictement négatif.

Il est simple de vérifier que

* si $p = 2$ $f'(x)$ est $\begin{cases} . \text{ strictement supérieure à 1 si } x < S^* \\ . \text{ égale à 1 en } S^* \\ . \text{ strictement inférieure à 1 si } x > S^* \end{cases}$

* si p est plus grand que 2, pour tout i = 1, 2, ..., p-2

$f^{(p-i)}(x)$ est $\begin{cases} . \text{ strictement positive si } x < S^* \\ . \text{ nulle en } S^* \\ . \text{ strictement négative si } x > S^* \end{cases}$ pour i impair

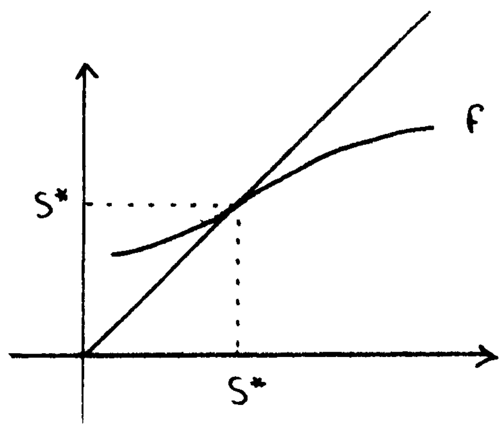
et $\begin{cases} . \text{ nulle en } S^* \\ . \text{ strictement négative si } x \neq S^* \end{cases}$ pour i pair

En appliquant ceci à i = p-2, on peut déduire que .

$f'(x)$ est $\begin{cases} \text{. égale à 1 en } S^* \\ \text{. strictement inférieur à 1 si } x \neq S^* \end{cases}$ si p est impair

et $\begin{cases} \text{. strictement supérieure à 1 si } x < S^* \\ \text{. égale à 1 en } S^* \\ \text{. strictement inférieure à 1 si } x > S^* \end{cases}$ si p est pair

On a donc les 2 cas de figure suivants :



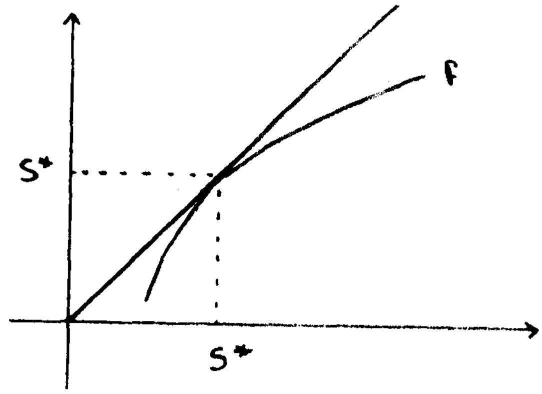
Si $\begin{cases} C < 0 \\ p \text{ impair} \end{cases}$

Dans ce cas, V' est un intervalle ouvert, de centre S^* (dont on exclut S^* afin de ne pas obtenir une suite constante).

Démonstration de convergence : prenons $S_o > S^*$; f est croissante et inférieure à l'identité à droite de S^* ; donc $S^* < S_o \Rightarrow f(S^*) = S^* < f(S_o) = S_1 < S_o$ donc $S^* < S_1 < S_o$. Par récurrence, si $S^* < S_{n+1} < S_n$, alors, $f(S^*) = S^* < f(S_{n+1}) = S_{n+2} < f(S_n) = S_{n+1}$ donc $S^* < S_{n+2} < S_{n+1}$. La suite (S_n), décroissante minorée a une limite qui ne peut être que le point fixe unique de f.

La démonstration est analogue à gauche de S^*.

ou bien (second cas de figure)



Si $\begin{cases} C < 0 \\ p \text{ pair} \end{cases}$

Dans ce cas, V' est un intervalle de la forme $]S^*, S^* + \varepsilon[$; la démonstration de convergence est analogue à la précédente.

b) Cas ou $f^{(p)}(S^*) = C$ est strictement positif

Pour tout $i = 1, 2, \ldots, p - 2$

$f^{(p-i)}(x)$ est $\begin{cases} \text{. strictement négative si } x < S^* \\ \text{. nulle en } S^* \\ \text{. strictement positive si } x > S^* \end{cases}$ si i est impair

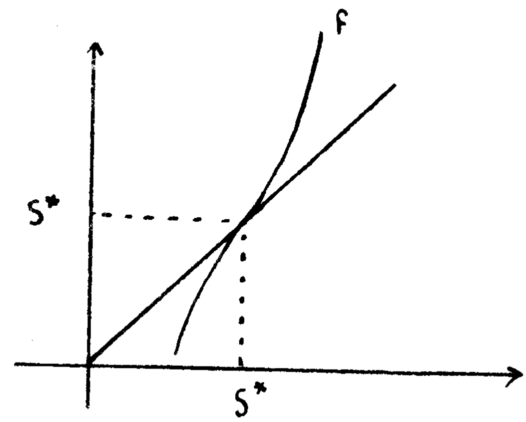
et $\begin{cases} \text{. nulle en } S^* \\ \text{. strictement positive si } x \neq S^* \end{cases}$ si i est pair

D'où, par application à $i = p-2$,

$f'(x)$ est $\begin{cases} \text{. égale à 1 en } S^* \\ \text{. strictement supérieure à 1 si } x \neq S^* \end{cases}$ si p est impair

et $\begin{cases} \text{. strictement inférieure à 1 si } x < S^* \\ \text{. égale à 1 en } S^* \\ \text{. strictement supérieure à 1 si } x > S^* \end{cases}$ si p est pair

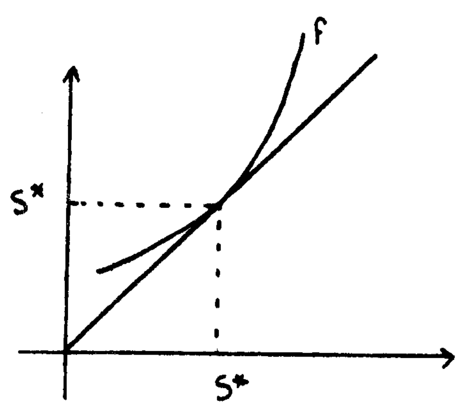
D'où les 2 cas de figure suivants :



Si $\begin{cases} C > 0 \\ p \text{ impair} \end{cases}$

C'est le cas que j'ai éliminé dans l'énoncé de la propriété 17 car le domaine de convergence se réduit au seul point S^*

ou bien



Si $\begin{cases} C > 0 \\ p \text{ pair} \end{cases}$

Le domaine de convergence V' est un intervalle de la forme $]S^* - \varepsilon, S^*[$, la démonstration de convergence est identique aux précédentes.

IV - COMPARAISON DES VITESSES DE CONVERGENCE

La convergence logarithmique est une convergence lente. Cependant, parmi les suites de Log, on peut distinguer des suites qui convergent plus ou moins lentement. Cela est évident si l'on considère, par exemple, les suites $(\frac{1}{n})$ et $(\frac{1}{n^2})$, toutes deux éléments de Log

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 0, \text{ donc, } (\frac{1}{n^2}) \text{ converge plus vite que } (\frac{1}{n}).$$

Dans ce paragraphe, j'essaierai de voir si on peut définir des sous-ensembles de Log tels que toute suite d'un certain sous-ensemble converge plus vite que n'importe quelle suite d'un autre sous-ensemble.

1) Comparaison à l'aide des suites dérivées premières

Propriété 18 : Soient (S_n) *et* (T_n)*, deux suites de LOG 1, dont les suites erreurs sont notées* (e_n) *et* (ε_n) *et vérifient*

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n \quad \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = 1 - \lambda'_n .$$

L'hypothèse (H) : $\exists\ K \in [0, 1[$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda'_n} = K$

entraîne que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{e_n} = 0$$

Démonstration

L'hypothèse (H) entraîne qu'il existe un rang N tel que

$\forall\ n \geq N,\ 0 < \lambda_n < \lambda'_n < 1$, donc $0 < \frac{1 - \lambda'_n}{1 - \lambda_n} < 1$

Considérons la suite $(\frac{\varepsilon_n}{e_n})$

$$\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{e_{n+1}}\right| = \left|\frac{\varepsilon_n}{e_n}\right| \times \frac{1 - \lambda'_n}{1 - \lambda_n} < \left|\frac{\varepsilon_n}{e_n}\right|$$

donc $0 < \left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{e_{n+1}}\right| < \left|\frac{\varepsilon_n}{e_n}\right|$

Ceci implique que la suite $\left(\left|\frac{\varepsilon_n}{e_n}\right|\right)$, positive, décroissante est convergente.

Il en est de même pour $\left(\frac{\varepsilon_n}{e_n}\right)$ car, les suites (S_n) et (T_n) appartenant à LOG $\mathfrak{L}$, (e_n) et (ε_n) sont de signe constant à partir d'un certain rang.

Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{e_n}$

D'autre part, $\frac{\Delta\varepsilon_n}{\Delta e_n} = \frac{\varepsilon_n}{e_n} \cdot \frac{\lambda'_n}{\lambda_n}$

1er cas $K \neq 0$

D'après ce qui précède et l'hypothèse (H), $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\varepsilon_n}{\Delta e_n} = \frac{\ell}{K}$

Or (e_n) et (ε_n) remplissent les conditions du théorème 15 page 13 de [Réf 2]

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\varepsilon_n}{\Delta e_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{e_n}$, c'est à dire $\ell = \frac{\ell}{K}$

Donc $\ell(K-1) = 0$ qui implique, étant donné que $K < 1$, $\ell = 0$

2ème cas $K = 0$

Il est impossible d'avoir $\ell \neq 0$ car on aurait alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\varepsilon_n}{\Delta e_n} = \infty$, ce qui est contradictoire avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{e_n} = \ell$.

Il faut donc que $\ell = 0$.

Dans les deux cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{e_n} = 0$

2) Comparaison pour les suites $\mathfrak{L}$

D'après la propriété 15, toute suite de $\mathfrak{L}$ peut être construite grâce aux itérations $\lambda_{n+1} = \lambda_n (1 - \alpha_n \lambda_n)$ où (α_n) est une suite tendant vers un $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, à condition que les termes initiaux vérifient certaines propriétés assurant la convergence.

Je vais considérer deux suites de ce type, l'une appartenant à $L_{\frac{1}{1+\alpha}}$, l'autre à $L_{\frac{1}{1+\beta}}$ avec $\beta < \alpha$ et comparer leurs vitesses de convergence respectives. Pour ce faire, j'aurai besoin d'un lemme.

__Lemme__ : *Soient deux réels* $a > 0$, $b > 0$ *et soit un réel* M *tel que*

$0 < M < \inf (\frac{1}{2a}, \frac{1}{2b})$

Considérons les itérations de point fixe définies par

$$\begin{cases} x_o \in]0, M[\\ x_{n+1} = x_n(1 - ax_n) \end{cases} \quad \textit{et par} \quad \begin{cases} y_o \in]0, M[\\ y_{n+1} = y_n(1 - by_n) \end{cases}$$

Alors, (x_n) *et* (y_n) *sont deux suites de* $L_{\frac{1}{2}}$ *dont tous les termes appartiennent à* $]0, M[$*; elles convergent en décroissant vers 0 et vérifient*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{b}{a}$$

__Démonstration du lemme__ :

1) (x_n) et (y_n) appartiennent à $]0, M[$ et convergent, en décroissant, vers 0

Je fais la démonstration pour (x_n)

. $0 < x_o < M$

. Supposons que $0 < x_n < M$ alors, $0 < x_n < \frac{1}{a}$ donc $0 < x_n(1 - ax_n) < x_n$ ce qui entraîne que $0 < x_{n+1} < x_n < M$

Ceci montre, par récurrence, que $x_n \in]0, M[$; de plus, cela entraîne que la suite (x_n) décroît.

(x_n), positive, décroissante, est donc convergente : sa limite x^* doit vérifier $x^* = x^*(1 - ax^*)$, c'est à dire, puisque $a > 0$, $x^* = 0$

2) (x_n) et (y_n) appartiennent à $L_{\frac{1}{2}}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - ax_n$$

Appelons $\lambda_n = ax_n \quad \forall\, n,\ \lambda_n > 0 \quad$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$

(λ_n) est la dérivée première de (x_n)

Sa dérivée seconde (μ_n) sera définie par

$\mu_n = 1 - \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 - \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = ax_n$

donc $\mu_n = \lambda_n = ax_n$, donc, $\dfrac{\mu_n}{\lambda_n} = 1.$

Le rapport R_n calculé précédemment (propriété 12) a donc pour limite $\frac{1}{2}$

3) $(\dfrac{x_n}{y_n})$ converge.

$(\dfrac{x_n}{y_n})$ est toujours positive ; il suffit donc de montrer qu'elle décroît.

Considérons ax_o et by_o ; il y a deux cas possibles

. soit $by_o \leq ax_o$

. soit $ax_o \leq by_o$

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de la démonstration, je supposerai que $by_o \leq ax_o$; si le cas contraire se produit, il suffira d'intervertir les rôles de (x_n) et (y_n)

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_n}{y_n}\ \frac{1 - ax_n}{1 - by_n}$$

De par le choix de M, $1 - ax_n$ et $1 - by_n$ sont positifs ; pour montrer que $(\dfrac{x_n}{y_n})$ décroît, il suffit donc de montrer que $by_n \leq ax_n$

. $0 < by_o \leq ax_o$ par hypothèse

. supposons que $0 < by_n \leq ax_n$

Etudions la fonction $F(z) = z(1-z)$ dont la dérivée est $F'(z) = 1 - 2z$; elle est positive croissante sur $]0, \frac{1}{2}[$

Puisque, pour tout n, $x_n \in\,]0, M[$, $x_n < \frac{1}{2a}$ donc $ax_n \in\,]0, \frac{1}{2}[$ l'hypothèse de récurrence entraîne donc que

$0 < F(by_n) \leq F(ax_n)$ c'est à dire $0 < by_{n+1} \leq ax_{n+1}$

Donc, $\forall$ n, $by_n \leq ax_n$

Ceci prouve donc que $(\frac{x_n}{y_n})$ converge.

4) Limite de $(\frac{x_n}{y_n})$

Appelons L la limite de $(\frac{x_n}{y_n})$

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta y_n} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a}{b} L^2$$

D'après le théorème 15 page 13 de [Réf 2], $L = \frac{a}{b} L^2$, ce qui n'est possible que dans deux cas . $L = 0$

. ou $L = \frac{b}{a}$

Pour montrer que $L = \frac{b}{a}$, considérons la suite $(\frac{y_n}{x_n})$

5) $(\frac{y_n}{x_n})$ converge

by_o étant fixé, il existe un rang N tel que $ax_N \leq by_o$

Appelons $(\bar{x}_n)$ la suite définie par $\overline{x_n} = x_{n+N}$

par construction $a\overline{x_o} < by_o$ et $\overline{x_{n+1}} = \overline{x_n}\ (1 - a\overline{x_n})$

Il suffit de faire un raisonnement exactement analogue à celui qui précède pour montrer que $(\frac{y_n}{\overline{x_n}})$ converge vers une limite L' telle que

. $L' = 0$

. ou $L' = \frac{a}{b}$

$$\text{Or, } \frac{y_n}{\overline{x_n}} = \frac{y_n}{x_{n+N}} = \frac{y_n}{x_n} \times \frac{x_n}{x_{n+1}} \times \dots \times \frac{x_{n+N-1}}{x_{n+N}}$$

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\frac{y_n}{\overline{x_n}}}{\frac{x_n}{x_{n+1}} \times \dots \times \frac{x_{n+N-1}}{x_{n+1}}}$$

le numérateur de cette fraction tend vers L' ; le dénominateur est constitué d'un nombre fini de termes tendant tous vers 1. Donc $\frac{y_n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L'$

Ce résultat n'est compatible avec celui du 4) que si $L = \frac{b}{a} = \frac{1}{L'}$

Considérons à présent deux réels α et β vérifiant $0 < \beta < \alpha$ et deux suites (S_n) et (T_n), dont les suites-erreurs associées seront notées (e_n) et (ε_n).

Supposons que $(S_n) \in L_{\frac{1}{1+\alpha}}$ et $(T_n) \in L_{\frac{1}{1+\beta}}$

Je vais montrer que (T_n) converge plus vite que (S_n), ce qu'il est possible d'énoncer :

<u>*Propriété 19*</u> *: Considérons deux suites :* $(S_n) \in L_{\rho 1}$

$(T_n) \in L_{\rho 2}$

avec $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$

Alors, (T_n) *converge plus vite que* (S_n).

<u>Démonstration</u>

Appelons (λ_n) la suite dérivée première de (S_n) et (Λ_n) celle de (T_n).

Elles vérifient, d'après la propriété 15,

$\lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)$

$\Lambda_{n+1} = \Lambda_n(1 - \beta_n \lambda_n)$

où (α_n) et (β_n) sont deux suites : $(\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$

$(\beta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta$

Choisissons un réel B tel que $B > \text{Sup}\,(1, \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\alpha_n), \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\beta_n))$

Ce sup existe car (α_n) et (β_n) sont des suites convergentes.

Choisissons M tel que $0 < M < \frac{1}{2B}$

Il existe un rang n_o tel que

. $\forall\, n \geq n_o$, $\alpha_n > 0$ et $\beta_n > 0$

. $\lambda_{n_o} \in]0, M[$ et $\Lambda_{n_o} \in]0, M[$

On ne restreint en rien la généralité du problème en supposant que $n_o = 0$

C'est à dire que les suites dérivées premières de (S_n) et (T_n) vérifient

$$\begin{cases} \lambda_o \in]0, M[\\ \lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Lambda_o \in]0, M[\\ \Lambda_{n+1} = \Lambda_n (1 - \beta_n \Lambda_n) \end{cases}$$

avec $\forall$ n, $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \beta$

Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{e_n} = 0$, je vais utiliser la propriété 18, c'est à dire montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{\Lambda_n} = K \in [0, 1[$

Dans ce cas particulier, K sera égale à $\frac{\beta}{\alpha}$.

On sait déjà que (λ_n) et (Λ_n) tendent vers 0 car ce sont des suites dérivées premières de suites de $\mathcal{L}$.

1) (λ_n) et (Λ_n) ont tous leurs termes dans $]0, M[$ et sont décroissantes à partir du rang 0.

. $\lambda_o \in]0, M[$

. supposons $\lambda_n \in]0, M[$

$\lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)$

Pour tout n, $B > \alpha_n$ donc $M < \frac{1}{B} < \frac{1}{\alpha_n}$ donc $0 < \lambda_n < \frac{1}{\alpha_n}$, ce qui entraîne que $0 < \lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n) < \lambda_n$ donc $0 < \lambda_{n+1} < \lambda_n < M$

Ceci montre, par récurrence, que λ_n appartient à $]0, M[$. De plus, (λ_n) est décroissante.

La démonstration est analogue pour (Λ_n).

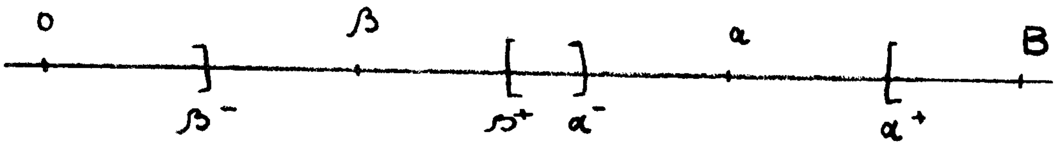
2) Encadrement des suites (λ_n) et (Λ_n)

La différence entre la suite (λ_n) et la suite (x_n) du lemme est que α_n varie à chaque itération. Je vais encadrer, à partir d'un certain rang, la suite (λ_n) par deux suites (λ_n^-) et (λ_n^+) analogues à la suite (x_n) du lemme.

Choisissons un réel η qui vérifie :

$0 < \eta < \inf (\beta, \frac{\alpha-\beta}{2}, B - \alpha)$

et appelons $\begin{cases}\beta^+ = \beta + \eta \\ \beta^- = \beta - \eta\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}\alpha^+ = \alpha + \eta \\ \alpha^- = \alpha - \eta\end{cases}$



Le choix de η implique : $0 < \beta^- < \beta < \beta^+ < \alpha^- < \alpha < \alpha^+ < B$

Il existe un rang $N(\eta)$ tel que, $\forall\ n \geq N(\eta)$, $\begin{cases}\alpha_n \in \,]\alpha^-, \alpha^+[\\ \beta_n \in \,]\beta^-, \beta^+[\end{cases}$

Les suites (λ_n) et (Λ_n) vérifient donc

$$\begin{cases}\lambda_N \in \,]0, M[\\ \lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)\end{cases} \qquad \begin{cases}\Lambda_N \in \,]0, M[\\ \Lambda_{n+1} = \Lambda_n(1 - \beta_n \Lambda_n)\end{cases}$$

Définissons quatre suites (λ_n^+), (λ_n^-), (Λ_n^+), (Λ_n^-) pour $n \geq N(\eta)$

par $\begin{cases}\lambda_N^+ = \lambda_N \\ \lambda_{n+1}^+ = \lambda_n^+(1 - \alpha^+ \lambda_n^+)\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}\Lambda_N^+ = \Lambda_N \\ \Lambda_{n+1}^+ = \Lambda_n^+ (1 - \beta^+ \Lambda_n^+)\end{cases}$

$$\begin{cases}\lambda_N^- = \lambda_N \\ \lambda_{n+1}^- = \lambda_n^-(1 - \alpha^- \lambda_n^-)\end{cases} \qquad \begin{cases}\Lambda_N^- = \Lambda_N \\ \Lambda_{n+1}^- = \Lambda_n^- (1 - \beta^- \Lambda_n^-)\end{cases}$$

Montrons, par récurrence, que, $\forall\ n \geq N(\eta)$, $0 < \lambda_n^+ \leq \lambda_n \leq \lambda_n^- < M$.

. $\lambda_N^+ = \lambda_N^- = \lambda_N \in \,]0, M[$

. Supposons que $0 < \lambda_n^+ \leq \lambda_n \leq \lambda_n^- < M$

Considérons les 3 fonctions $f_n(z) = z(1 - \alpha_n z)$

$$f_+(z) = z(1 - \alpha^+ z)$$

$$f_-(z) = z(1 - \alpha^- z)$$

Ces fonctions sont à valeurs positives dans $]0, M[$ car,

$\forall z \in]0, M[, \quad z < \frac{1}{2B}$ avec $\begin{cases} B > \alpha_n \\ B > \alpha^+ \\ B > \alpha^- \end{cases}$ donc $\begin{cases} M < \frac{1}{2\alpha_n} < \frac{1}{\alpha_n} \\ M < \frac{1}{2\alpha^+} < \frac{1}{\alpha^+} \\ M < \frac{1}{2\alpha^-} < \frac{1}{\alpha^-} \end{cases}$

Leurs valeurs sont également plus petites que M, car

$f_n(z) < z$, $f_+(z) < z$, $f_-(z) < z$ pour tout $z \in]0, M[$

Elles sont croissantes sur $]0, M[$ car

$f'_n(z) = 1 - 2\alpha_n z$ et $z < \frac{1}{2\alpha_n}$

$f'_+(z) = 1 - 2\alpha^+ z$ et $z < \frac{1}{2\alpha^+}$

$f'_-(z) = 1 - 2\alpha^- z$ et $z < \frac{1}{2\alpha^-}$

D'autre part, $\forall z \in]0, M[$, $0 < f_+(z) \le f_n(z) < f_-(z) < M$

En effet, $0 < f_+(z)$ et $f_-(z) < M$ car f_+ et f_- sont à valeurs dans $]0, M[$.

Et $\alpha^- < \alpha_n < \alpha^+$ entraîne que, pour tout $z \in]0, M[$,

$z(1 - \alpha^+ z) < z(1 - \alpha_n z) < z(1 - \alpha^- z)$

L'hypothèse de récurrence $0 < \lambda_n^+ \le \lambda_n \le \lambda_n^- < M$ implique donc

$0 < f_+(\lambda_n^+) \le f_+(\lambda_n) \le f_n(\lambda_n) \le f_n(\lambda_n^-) \le f_-(\lambda_n^-) < M$

donc $0 < \lambda_{n+1}^+ \le \lambda_{n+1} \le \lambda_{n+1}^- < M$

C'est à dire que l'on a bien, pour tout $n \ge N$, $0 < \lambda_n^+ \le \lambda_n \le \lambda_n^- < M$

De manière analogue, $0 < \Lambda_n^+ \le \Lambda_n \le \Lambda_n^- < M$

3) Encadrement de $\left(\frac{\lambda_n}{\Lambda_n}\right)$

De ce qui précède, on déduit immédiatement que

$\forall n \ge N \quad 0 < \frac{\lambda_n^+}{\Lambda_n^-} \le \frac{\lambda_n}{\Lambda_n} \le \frac{\lambda_n^-}{\Lambda_n^+}$

Rappelons que $\left(\frac{\lambda_n^+}{\Lambda_n^-}\right)$ et $\left(\frac{\lambda_n^-}{\Lambda_n^+}\right)$ sont définies à l'aide de α^+, α^-, β^+ et β^-,

c'est à dire, à l'aide du paramètre η.

Or, ce qui précède peut être fait pour tout η qui vérifie

$0 < \eta < \inf\,(\beta, \frac{\alpha-\beta}{2}, B - \alpha)$

Donc, posons $A = \inf\,(\beta, \frac{\alpha-\beta}{2}, B - \alpha)$ et écrivons :

$$\forall\, \eta \in]0, A[,\ \exists\, N(\eta) \in \mathbb{N},\quad \forall\, n \geq N(\eta) \quad 0 < \frac{\lambda_n^+(\eta)}{\Lambda_n^-(\eta)} \leq \frac{\lambda_n}{\Lambda_n} \leq \frac{\lambda_n^-(\eta)}{\Lambda_n^+(\eta)}$$

Considérons la suite $(\frac{\lambda_n^+(\eta)}{\Lambda_n^-(\eta)})$ lorsque $n \to +\infty$

$(\lambda_n^+(\eta))$ et $(\Lambda_n^-(\eta))$ sont définies par

$$\begin{cases} \lambda_N^+ = \lambda_N \in]0, M[\\ \lambda_{n+1}^+ = \lambda_n^+ (1 - \alpha^+ \lambda_n^+) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Lambda_N^- = \Lambda_N \in]0, M[\\ \Lambda_{n+1}^- = \Lambda_n^- (1 - \beta^- \Lambda_n^-) \end{cases}$$

α^+ et β^- sont strictement positifs.

D'autre part $0 < M < \frac{1}{2B}$ avec $\begin{cases} B > \alpha^+ \\ B > \beta^- \end{cases}$ donc $\begin{cases} \frac{1}{2B} < \frac{1}{2\alpha^+} \\ \frac{1}{2B} < \frac{1}{2\alpha^-} \end{cases}$

Je peux donc appliquer le lemme pour affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n^+(\eta)}{\Lambda_n^-(\eta)} = \frac{\beta^-(\eta)}{\alpha^+(\eta)} = \frac{\beta-\eta}{\alpha+\eta}$$

De manière analogue, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n^-(\eta)}{\Lambda_n^+(\eta)} = \frac{\beta^+(\eta)}{\alpha^-(\eta)} = \frac{\beta+\eta}{\alpha-\eta}$

Il est facile de montrer que :

$\frac{\beta-\eta}{\alpha+\eta} = \frac{\beta}{\alpha} - \rho(\eta)$ avec $\rho(\eta) = \frac{(\alpha+\beta)\eta}{\alpha(\alpha+\eta)}$

ρ est une fonction positive de η qui tend vers 0 lorsque η tend vers 0

$\frac{\beta+\eta}{\alpha-\eta} = \frac{\beta}{\alpha} + \sigma(\eta)$ avec $\sigma(\eta) = \frac{(\alpha+\beta)\eta}{\alpha(\alpha-\eta)}$

σ a les mêmes propriétés que ρ

Donc :

$\forall\, \eta \in \,]0, A[, \quad \exists\, N(\eta) \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \geq N(\eta), \quad 0 < \dfrac{\lambda_n^+(\eta)}{\Lambda_n^-(\eta)} \leq \dfrac{\lambda_n}{\Lambda_n} \leq \dfrac{\lambda_n^-(\eta)}{\Lambda_n^+(\eta)}$

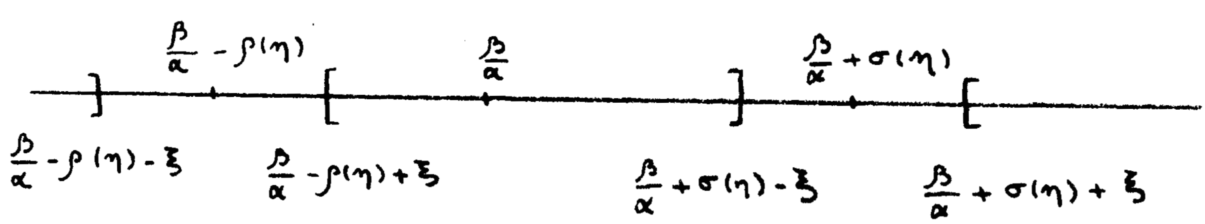
$$\text{avec} \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_n^+(\eta)}{\lambda_n^-(\eta)} = \dfrac{\beta}{\alpha} - \rho(\eta) \\[2ex] \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_n^-(\eta)}{\Lambda_n^+(\eta)} = \dfrac{\beta}{\alpha} + \sigma(\eta) \end{cases}$$

4) $\left(\dfrac{\lambda_n}{\Lambda_n}\right)$ converge vers $\dfrac{\beta}{\alpha}$

η étant choisi comme précédemment, fixons nous un réel $\xi > 0$.

Il existe un rang $M(\xi, \eta)$, que l'on peut supposer au moins égal à $N(\eta)$ tel que

$$\forall\, n \geq M(\xi, \eta) \begin{cases} \dfrac{\lambda_n^+(\eta)}{\Lambda_n^-(\eta)} \in \left]\dfrac{\beta}{\alpha} - \rho(\eta) - \xi, \dfrac{\beta}{\alpha} - \rho(\eta) + \xi\right[\\[2ex] \dfrac{\lambda_n^-(\eta)}{\Lambda_n^+(\eta)} \in \left]\dfrac{\beta}{\alpha} + \sigma(\eta) - \xi, \dfrac{\beta}{\alpha} + \sigma(\eta) + \xi\right[\end{cases}$$



pour $n \geq M(\xi,\eta)$ $\dfrac{\lambda_n^+(\eta)}{\Lambda_n^-(\eta)}$ appartient à cet intervalle

pour $n \geq M(\xi,\eta)$ $\dfrac{\lambda_n^-(\eta)}{\lambda_n^+(\eta)}$ appartient à cet intervalle

et, $M(\xi, \eta)$ étant supposé plus grand que $N(\eta)$, $\forall\, n \geq M(\xi, \eta)$,

$\dfrac{\lambda_n}{\Lambda_n} \in \left[\dfrac{\lambda_n^+(\eta)}{\Lambda_n^-(\eta)}, \dfrac{\lambda_n^-(\eta)}{\Lambda_n^+(\eta)}\right]$

Ceci va impliquer que :

$\forall\ \eta \in\ ]0, A[,\quad \forall\ \xi > 0,\quad \exists\ M(\xi, \eta)$

tel que $\forall\ n \geq M(\xi, \eta)\quad \frac{\beta}{\alpha} - \rho(\eta) - \xi < \frac{\lambda_n}{\Lambda_n} < \frac{\beta}{\alpha} + \sigma(\eta) + \xi$

Pour terminer, donnons nous un réel γ quelconque, $\gamma > 0$

Puisque $\lim\limits_{\eta\to+\infty} \rho(\eta) = \lim\limits_{\eta\to+\infty} \sigma(\eta) = 0$, il existe un $\eta \in\ ]0, A[$ tel que

$$\begin{cases} 0 < \rho(\eta) < \frac{\gamma}{2} \\ 0 < \sigma(\eta) < \frac{\gamma}{2} \end{cases}$$

Evidemment, il existe aussi un $\xi \in\ ]0, \frac{\gamma}{2}[$

Prenons $\bar{N}(\gamma) = M(\eta, \xi)$

Alors, $\forall\ n \geq \bar{N}(\gamma),\ \frac{\beta}{\alpha} - \gamma < \frac{\beta}{\alpha} - \rho(\eta) - \xi \leq \frac{\lambda_n}{\Lambda_n} \leq \frac{\beta}{\alpha} + \sigma(\eta) + \xi < \frac{\beta}{\alpha} + \gamma$

Donc,

$\forall\ \gamma > 0,\ \exists\ \bar{N}(\gamma)$ tel que $\forall\ n \geq \bar{N}(\gamma),\ \frac{\beta}{\alpha} - \gamma < \frac{\lambda_n}{\Lambda_n} < \frac{\beta}{\alpha} + \gamma$

Ce qui veut exactement dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{\Lambda_n} = \frac{\beta}{\alpha}$

3) <u>Comparaison pour les suites de point fixe</u>

La propriété 17 va permettre d'énoncer un corollaire.

<u>Propriété 20</u> : Considérons les deux suites de point fixe, supposées convergentes, définies par :

$$\begin{cases} S_o \in V \\ S_{n+1} = f(S_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} T_o \in W \\ T_{n+1} = g(T_n) \end{cases}$$

où . V *est un voisinage de* S^*, *point fixe de* f

. W *est un voisinage de* T^*, *point fixe de* g

. f *et* g *vérifient :*

$$\begin{cases} *f(S^*) = S^* \\ *f'(S^*) = 1 \\ *f''(S^*) = \ldots = f^{(p-1)}(S^*) = 0 \\ *f^{(p)}(S^*) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} *g(T^*) = T^* \\ *g'(T^*) = 1 \\ *g''(T^*) = \ldots = g^{(q-1)}(T^*) = 0 \\ *g^{(q)}(T^*) \neq 0 \end{cases}$$

avec $2 \leq q < p$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T_n - T^*}{S_n - S^*} = 0$

Démonstration :

§ Elle est immédiate, car, d'après la propriété 17, $(S_n) \in L_{\frac{1}{p}}$ et $(T_n) \in L_{\frac{1}{q}}$ avec $0 < \frac{1}{p} < \frac{1}{q} < 1$.

V - Problèmes posés par la convergence logarithmique

Je viens de définir un certain nombre de sous-ensembles de Log. Certains de ces sous-ensembles sont-ils accélérables ? Corollairement, peut-on affirmer de certains sous-ensembles qu'il n'existe aucun algorithme capable d'accélérer la convergence de toutes leurs suites.

Supposons que l'on définisse un sous-ensemble de Log par une certaine information sur le comportement des suites qui le constituent. Existe-t-il un certain "type d'information" qui permette d'assurer que le sous-ensemble est accélérable ?

CHAPITRE 2

UN ENSEMBLE NON ACCELERABLE

Dans [Réf 7] J.P. Delahaye et B. Germain-Bonne ont montré que LOGSF n'était pas accélérable. Dans ce chapitre, je vais compléter ce résultat en montrant que LOG 2 n'est pas non plus accélérable, ou, plus exactement, que, pour n'importe quel réel t appartenant à]0.1], l'ensemble

$$\text{LOG 2} \cap \bigcup_{\rho\in[0,t]} L_\rho \text{ n'est pas accélérable.}$$

Je démontrerai ce résultat à l'aide de deux lemmes et en utilisant la technique de la rémanence généralisée [Réf 6]. Rappelons en la définition :

Soit S un ensemble de suites réelles convergentes.

On dira que S possède la propriété de rémanence généralisée si

a) il existe une suite convergente $(\hat{x}_n)$, de limite $\hat{x}$ vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\hat{x}_n \neq \hat{x}$ et telle que

1) il existe $(x_n^o) \in S$ telle que $(x_n^o) \to \hat{x}_o$

2) pour tout $m_o \geq 0$, il existe $p_o \geq m_o$ et $(x_n^1) \in S$ tels que $(x_n^1) \to \hat{x}_1$ et $\forall\, m \leq p_o$, $x_m^1 = x_m^o$

3) pour tout $m_1 > p_o$, il existe $p_1 \geq m_1$ et $(x_n^2) \in S$ tels que $(x_n^2) \to \hat{x}_2$ et $\forall\, m \leq p$ $x_m^2 = x_m^1$

$\vdots$

b) $(x_o^o, x_1^o, \ldots, x_{p_o}^o, x_{p_o+1}^1, x_{p_o+2}^1, \ldots, x_{p_1}^1, x_{p_1+1}^2, \ldots, x_{p_2}^2, x_{p_2+1}^3, \ldots)$ appartient à S.

Si un ensemble de suites est rémanent, il n'est pas accélérable.

Etant donnée une suite (S_n) de Log, j'appellerai R_n le rapport

$$\frac{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\dfrac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1}$$

I - LEMME 1 :

Soient $\alpha > 0$, $e_o \neq 0$, S^* *quelconque*

Soit λ_o *vérifiant* $0 < \lambda_o < \inf(1, \frac{1}{\alpha})$

alors, la suite définie par $\begin{cases} \lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \alpha\lambda_n) \\ e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n) \\ S_n = e_n + S^* \end{cases}$

appartient à $L_{\frac{1}{1+\alpha}}$ *et a les propriétés suivantes :*

a - $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < \lambda_{n+1} < \lambda_n < \inf(1, \frac{1}{\alpha})$

b - $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < \mu_{n+1} < \mu_n < \inf(1, \alpha)$

c - $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1+\alpha} < R_{n+1} < R_n < \inf(1, \frac{1}{\alpha})$

1) (λ_n) est strictement positive, strictement décroissante et de limite nulle

Je vais montrer, par récurrence, que $0 < \lambda_{n+1} < \lambda_n < \inf(1, \frac{1}{\alpha})$

. $0 < \lambda_o < \inf(1, \frac{1}{\alpha}) \Rightarrow 0 < \lambda_o < \frac{1}{\alpha}$

$$0 < \alpha\lambda_o < 1$$

$$0 < 1 - \alpha\lambda_o < 1$$

$$0 < \lambda_o\,(1 - \alpha\lambda_o) < \lambda_o$$

$$\Rightarrow 0 < \lambda_1 < \lambda_o < \inf(1, \frac{1}{\alpha})$$

. Si $0 < \lambda_n < \lambda_{n-1} < \inf(1, \frac{1}{\alpha}) \Rightarrow 0 < \lambda_n < \frac{1}{\alpha}$

$$0 < \alpha\lambda_n < 1$$

$$0 < 1 - \alpha\lambda_n < 1$$

$$0 < \lambda_n(1 - \alpha\lambda_n) < \lambda_n$$

$$\Rightarrow 0 < \lambda_{n+1} < \lambda_n < \inf(1, \frac{1}{\alpha})$$

Ceci montre a.

De plus, la suite (λ_n), strictement positive et strictement décroissante, est convergente. Sa limite λ doit vérifier l'égalité aux limites

$$\lambda = \lambda(1 - \alpha\lambda) \Rightarrow \alpha\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

2) <u>Le produit infini $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 - \lambda_n)$ diverge vers 0</u>

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \alpha\lambda_n)$$
$$= \dots$$
$$= \lambda_o \,(1 - \alpha\lambda_o) \dots (1 - \alpha\lambda_n)$$
$$\lambda_{n+1} = \lambda_o \prod_{i=o}^{n} (1 - \alpha\lambda_i)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_{n+1} = 0 = \lambda_o \times \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=o}^{n} (1 - \alpha\lambda_i)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=o}^{n} (1 - \alpha\lambda_i) = 0$

Or, il s'agit d'un produit infini à termes positifs, dont aucun facteur n'est nul ; en effet $1 - \alpha\lambda_i = 0$ entraînerait que $\lambda_i = \frac{1}{\alpha}$ qui est impossible.

Il ne peut donc converger vers 0 : il diverge donc vers 0.

La série associée $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha\lambda_i$ diverge donc, ainsi que $\sum\limits_{i=o}^{+\infty} \lambda_i$

Donc $\prod\limits_{i=o}^{\infty} (1 - \lambda_i)$ diverge.

Appelons $P_n = \prod\limits_{i=o}^{n} (1 - \lambda_i)$

$P_n > 0$ car $\forall$ i, $\lambda_i < 1$

De plus $P_{n+1} = P_n(1 - \lambda_{n+1}) < P_n$ car $\lambda_{n+1} > 0$

La suite des produits partiels vérifie $0 < P_{n+1} < P_n$; elle converge donc.

Etant donnée la divergence du produit infini, sa limite ne peut être que 0.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=o}^{n} (1 - \lambda_i) = 0$

3) <u>La suite (S_n) appartient à LOG 2 et converge vers S^*</u>

$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n)$ donc $e_{n+1} = e_o \prod\limits_{i=o}^{n} (1 - \lambda_i)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$

Donc $(S_n) \to S^*$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n$$

D'après le 1), $(S_n) \in$ LOG 1.

On a également $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 - \alpha\lambda_n$

$\mu_n = \alpha\lambda_n$

$(\mu_n) \to 0$ et $\mu_n > 0$ à cause de 1) et du fait que $\alpha > 0$

Donc $(S_n) \in$ LOG 2.

De $0 < \lambda_{n+1} < \lambda_n < \inf(1, \frac{1}{\alpha})$, on déduit

$0 < \mu_{n+1} < \mu_n < \inf(\alpha, 1)$

c'est à dire que b est montré.

4) $\underline{(S_n)}$ appartient à $L_{\frac{1}{1+\alpha}}$ et vérifie c.

$$R_n = \frac{-\lambda_n}{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1} = \frac{-\lambda_n}{(1-\lambda_n)(1-\mu_n) - 1} = \frac{-\lambda_n}{-\lambda_n - \mu_n + \mu_n\lambda_n}$$

$$R_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n - \mu_n\lambda_n} = \frac{1}{1 + \dfrac{\mu_n}{\lambda_n} - \mu_n} = \frac{1}{1 + \alpha - \mu_n}$$

Donc $R_n \to \frac{1}{1+\alpha} \Rightarrow (S_n) \in L_{\frac{1}{1+\alpha}}$

De plus, d'après b, on a

$$0 < \mu_{n+1} < \mu_n < \inf(1, \alpha)$$

$$0 > -\mu_{n+1} > -\mu_n > -\inf(1, \alpha)$$

$$1 > 1 - \mu_{n+1} > 1 - \mu_n > 1 - \inf(1, \alpha)$$

$\Rightarrow \quad 0 < 1 + \alpha - \inf(1, \alpha) < 1 + \alpha - \mu_n < 1 + \alpha - \mu_{n+1} < 1 + \alpha$

Donc $\dfrac{1}{1 + \alpha - \inf(\alpha, 1)} > \dfrac{1}{1 + \alpha - \mu_n} > \dfrac{1}{1 + \alpha - \mu_{n+1}} > \dfrac{1}{1 + \alpha}$

C'est à dire que $\forall$ n, $\dfrac{1}{1+\alpha} < R_{n+1} < R_n < \dfrac{1}{1 + \alpha - \inf(1, \alpha)}$

Cette dernière fraction est égale à $\inf(1, \frac{1}{\alpha})$

Ceci montre c.

II - LEMME 2

Soient $a < b < c < d$, $0 < r < 1$, $p \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ *vérifiant* :

(i) $r < \frac{b-c}{c-d}$

(ii) $\frac{d-c}{d-a} < 1 - r$

(iii) $\frac{d-c}{d-a} > \frac{c-b}{c-a}$

(iv) $\frac{d-a}{d-c} [1 - \frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-c)}] > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

Alors, il existe une suite (x_n) *telle que*

1) $(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, (x_n) *est décroissante à partir du rang* p

2) $x_p = d$, $x_{p+1} = c$, $x_{p+2} = b$

3) $\forall\, n \geq p$, $r < \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} < 1$

4) $\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

5) $\forall\, n \geq p$, $r < \frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} < 1$

6) $\frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

7) $\exists\, \rho \in [0, \varepsilon]$ tel que $\dfrac{\frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} - 1}{\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} - 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \rho$ en décroissant à partir du rang p.

Il suffit de faire la démonstration pour le rang p = 0

1) Recherche de α. Construction de la suite

Je vais construire à partir du lemme 1.

Posons $x_o = d$

$x_1 = c$

$x_2 = b$

$S^* = a$ (limite de la suite cherchée)

On aura donc $e_o = d - a > 0$

$e_1 = c - a$

$e_2 = b - a$

$$\frac{e_1}{e_o} = 1 - \lambda_o = \frac{c-a}{d-a} = \frac{c-d}{d-a} + \frac{d-a}{d-a} = 1 - \frac{d-c}{d-a} \text{ , } \lambda_o = \frac{d-c}{d-a}$$

$$\frac{e_2}{e_1} = 1 - \lambda_1 = \frac{b-a}{c-a} = \frac{b-c}{c-a} + \frac{c-a}{c-a} = 1 - \frac{c-b}{c-a} \text{ , } \lambda_1 = \frac{c-b}{c-a}$$

On vérifie déjà $\begin{cases} 0 < \lambda_o < 1 \\ e_o > 0, \ S^* = a \end{cases}$

Il reste à trouver $\alpha > 0$ tel que $\lambda_o < \frac{1}{\alpha}$

On veut que $\frac{\lambda_1}{\lambda_o} = 1 - \alpha\lambda_o \Rightarrow \alpha\lambda_o = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_o} = \frac{\lambda_o - \lambda_1}{\lambda_o}$

Donc $\alpha = \dfrac{\lambda_o - \lambda_1}{\lambda_o^2}$

$$\alpha = \frac{\frac{d-c}{d-a} - \frac{c-b}{c-a}}{\left(\frac{d-c}{d-a}\right)^2} = \left(\frac{d-a}{d-c}\right)^2 \frac{(d-c)(c-a) - (c-b)(d-a)}{(d-a)(c-a)}$$

$$\alpha = \left(\frac{d-a}{d-c}\right) \times \frac{(d-c)(c-a)(d-a) - (c-b)(d-a)^2}{(d-a)(c-a)(d-c)}$$

$$\alpha = \underbrace{\frac{d-a}{d-c}}_{> 0} \left[1 - \underbrace{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-c)}}_{> 0} \right]$$

D'après l'hypothèse (iii), $1 > \dfrac{(c-b).(d-a)}{(c-a).(d-c)}$. Donc $\alpha > 0$

De plus, $\alpha < \dfrac{d-a}{d-c}$ car le crochet est plus petit que 1.

Donc $\frac{1}{\alpha} > \frac{d-c}{d-a}$, c'est à dire $\frac{1}{\alpha} > \lambda_o$

Toutes les hypothèses du lemme 1 sont donc réalisées ; on construit la suite du lemme 1 : (x_n)

2) <u>La suite (x_n) vérifie les propriétés 1) à 7)</u>

1) Par construction, $(x_n) \to a$

Montrons par récurrence que (e_n) est positive, strictement décroissante.

On sait, d'après a du lemme 1, que $\forall\, n, 0 < 1 - \lambda_n < 1$

. On a $e_o > 0 \Rightarrow 0 < e_o(1 - \lambda_o) < e_o$

$$0 < e_1 < e_o$$

. Supposons que $0 < e_n < e_{n-1} \Rightarrow e_n > 0$

puisque $0 < 1 - \lambda_n < 1$

$$\Rightarrow 0 < e_n(1 - \lambda_n) < e_n$$

$$\Rightarrow 0 < e_{n+1} < e_n$$

Donc $\forall\, n,\ 0 < e_{n+1} < e_n \Rightarrow a < x_{n+1} < x_n$

2) Par construction, $x_o = d,\ x_1 = c,\ x_2 = b$

3) $\dfrac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} = \dfrac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$

$$= (1 - \lambda_n)(1 - \mu_n)$$

D'après a et b du lemme 1, $0 < (1 - \lambda_n) < 1$

$$0 < (1 - \mu_n) < 1$$

donc $0 < \dfrac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} < 1$

De plus, $0 < 1 - \lambda_n < 1 - \lambda_{n+1} < 1$

$$0 < 1 - \mu_n < 1 - \mu_{n+1} < 1$$

donc, $(1 - \lambda_n)(1 - \mu_n) < (1 - \lambda_{n+1})(1 - \mu_{n+1}),\ \forall\, n$

Donc $\forall\, n,\ \dfrac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} < \dfrac{\Delta x_{n+2}}{\Delta x_{n+1}}$

Donc, $\dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_o} \leq \dfrac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n}$ ceci $\forall\, n \geq 0$

$\dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_o} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_1 - x_o} = \dfrac{b - c}{c - d} > r$ d'après l'hypothèse (i)

Donc, $\forall$ n $\geq$ 0, $r < \frac{b-c}{c-a} \leq \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n}$

En définitive, $\forall$ n $\geq$ 0 $\quad r < \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} < 1$

4) $(x_n) \in LOG\,2 \subset LOGSF$, donc $\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \to 1$

5) $\frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} = \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n$ avec $0 < \lambda_n < 1$ d'après a du lemme 1,

donc $0 < \frac{e_{n+1}}{e_n} < 1, \forall$ n

De plus, toujours d'après a du lemme 1, $1 - \lambda_n < 1 - \lambda_{n+1}$

donc $\frac{e_{n+1}}{e_n} < \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}$

Donc, $\forall$ n $\geq$ 0, $\frac{e_1}{e_o} \leq \frac{e_{n+1}}{e_n}$

$$\frac{e_1}{e_o} = \frac{c-a}{d-a} = \frac{c-d}{d-a} + 1 = 1 - \frac{d-c}{d-a}$$

D'après l'hypothèse ii $\quad - \frac{d-c}{d-a} > r-1$

$$1 - \frac{d-c}{d-a} > r$$

Donc, $\forall$ n $\geq$ 0, $r < 1 - \frac{d-c}{d-a} \leq \frac{e_{n+1}}{e_n}$

En définitive, $\forall$ n $\geq$ 0 $\quad r < \frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} < 1$

6) Par construction, puisque $(x_n) \in Log$, $\frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} \to 1$

7) D'après c du lemme 1, on a

$$\frac{1}{1+\alpha} < R_{n+1} < R_n < \inf\left(1, \frac{1}{\alpha}\right)$$

Donc (R_n) décroît à partir du rang 0.

De plus, sa limite est $\frac{1}{1+\alpha} > 0$. Il reste à montrer que $\frac{1}{1+\alpha} \leq \varepsilon$

$$\alpha = \frac{d-a}{d-c}\left[1 - \frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-c)}\right]$$

Donc, d'après l'hypothèse (iv), $\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow \alpha + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

Donc $\frac{1}{\alpha+1} < \varepsilon$

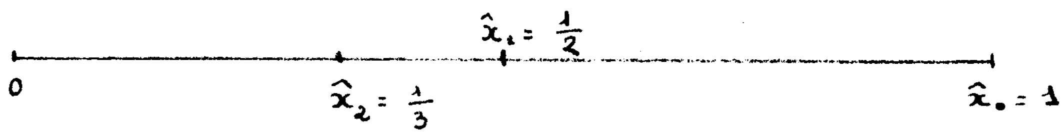
III - THÉORÈME

Pour tout réel $t \in]0, 1[$, *l'ensemble* $\mathrm{LOG}\ 2 \cap \bigcup_{\rho \in [0,t]} L_\rho$ *est rémanent.*

1) Construction de $(\hat{x}_n)$

Choisissons $\hat{x}_n = \frac{1}{n+1}$

$(\hat{x}_n)$ tend en décroissant vers 0 et $\hat{x}_n \neq 0$ pour tout n.



Choisissons également une suite (V_i) strictement positive et tendant en croissant vers 1.

2) Construction de (x_n^o)

Je vais construire (x_n^o) comme suite de L_t, strictement décroissante et de limite $\hat{x}_o$; pour cela, j'appliquerai le lemme 1.

Prenons . $\alpha = \frac{1}{t} - 1 > 0$

. $x_o^o > \hat{x}_o$, ce qui donne $S^* = \hat{x}_o$ et $e_o > 0$

. λ_o vérifiant $0 < \lambda_o < \inf(1, \frac{1}{\alpha})$

La suite (x_n^o) possède donc toutes les propriétés du lemme 1 ; de plus, comme on l'a vu dans le 2) 1) de la démonstration du lemme 2,

$0 < e_{n+1} < e_n$ donc $\hat{x}_o < x_{n+1}^o < x_n^o$ ceci $\forall\, n \geq 0$

$(x_n^o) \in L_t$; posons $\rho_o = t$.

2) Construction de (x_n^1) à partir de (x_n^o)

Soit m_o arbitraire. Alors, il existe un rang $p_o > m_o$ tel que :

$$(A_o) \quad \frac{x^o_{p_o+1} - x^o_{p_o+2}}{x^o_{p_o+1} - \hat{x}_1} \leq \frac{x^o_{p_o} - x^o_{p_o+1}}{x^o_{p_o} - \hat{x}_1} < 1 - v_o$$

(B_o) $\quad |x^o_{p_o} - \hat{x}_o| \leq \dfrac{1}{2^o}$

$$(C_o) \quad \frac{\dfrac{x^o_{p_o+1} - \hat{x}_o}{x^o_{p_o} - \hat{x}_o} - 1}{\dfrac{\Delta x^o_{p_o+1}}{\Delta x^o_{p_o}} - 1} - \rho_o \leq 1 - v_o$$

$$(D_o) \quad \frac{x^o_{p_o+1} - x^o_{p_o+2}}{x^o_{p_o} - x^o_{p_o+1}} > v_o$$

$$(E_o) \quad \frac{x^o_{p_o} - \hat{x}_1}{x^o_{p_o} - x^o_{p_o+1}} \left[1 - \frac{(x^o_{p_o+1} - x^o_{p_o+2})(x^o_{p_o} - \hat{x}_1)}{(x^o_{p_o+1} - \hat{x}_1)(x^o_{p_o} - x^o_{p_o+1})} \right] > \frac{1}{t^1} - 1$$

<u>Démonstration</u> :

$A_o)$ $\dfrac{x^o_n - x^o_{n+1}}{x^o_n - \hat{x}_1} \to \dfrac{0}{\hat{x}_o - \hat{x}_1} = 0$ $\qquad$ et $1 - v_o > 0$

donc pour $n \geq N_1$, $\dfrac{x^o_n - x^o_{n+1}}{x^o_n - \hat{x}_1} \leq 1 - v_o$

D'autre part, on va montrer qu'on a, à partir d'un certain rang,

$$\frac{x^o_{n+1} - x^o_{n+2}}{x^o_{n+1} - \hat{x}_1} \leq \frac{x^o_n - x^o_{n+1}}{x^o_n - \hat{x}_1}$$

Les quatre quantités sont positives.

Cela revient donc à montrer que :

$$(x^o_{n+1} - x^o_{n+2})\ (x^o_n - \hat{x}_1) \leq (x^o_n - x^o_{n+1})(x^o_{n+1} - \hat{x}_1)$$

C'est à dire

$$-x^o_{n+2}\, x^o_n - \hat{x}_1\, x^o_{n+1} + x^o_{n+2}\, \hat{x}_1 \leq -x^{o\ 2}_{n+1} - \hat{x}_1\, x^o_n + \hat{x}_1\, x^o_{n+1}$$

ou encore

$$x^{o\ 2}_{n+1} - x^o_n\, x^o_{n+2} \leq \hat{x}_1\, (x^o_{n+1} - x^o_{n+2} - x^o_n + x^o_{n+1})$$

$$x^o_{n+2}\, x^o_n - x^{o\ 2}_{n+1} \geq \hat{x}_1\, (x^o_{n+2} - 2x^o_{n+1} + x^o_n)$$

$$x^o_{n+2}\, x^o_n - x^{o\ 2}_{n+1} \geq \hat{x}_1\, \Delta^2\, x^o_n$$

Montrons que $\Delta^2\, x^o_n > 0$

$\Delta^2\, x^o_n = \Delta x^o_{n+1} - \Delta x^o_n$

On sait que $\Delta\, x^o_{n+1} < 0$ et $\Delta\, x^o_n < 0$

Et on a montré dans 2) 3) de la démonstration du lemme 2 qu'une suite construite à partir du lemme 1 vérifiait $\forall$ n, $\dfrac{\Delta x^o_{n+1}}{\Delta x^o_n} < 1$

Donc, en multipliant par $\Delta\, x^o_n$, $\Delta\, x^o_{n+1} > \Delta\, x^o_n$

$$\Delta\, x^o_{n+1} - \Delta\, x^o_n > 0$$

$$\Delta^2\, x^o_n > 0$$

L'inégalité à prouver est donc équivalente à

$$\underbrace{\frac{x^o_{n+2}\, x^o_n - x^{o\ 2}_{n+1}}{\Delta^2\, x^o_n}} \geq \hat{x}_1$$

Ceci est la transformée Δ^2 d'Aitken de (x^o_n) obtenu à partir de $(x^o_n, x^o_{n+1}, x^o_{n+2})$. On sait que $(x^o_n) \in L_t$ avec $t \in\ ]0, 1[$; elle est donc transformée, par Δ^2 d'Aitken, en une suite qui converge aussi vite vers la même limite $\hat{x}_o$.

Donc, $\dfrac{x^o_{n+2}\, x^o_n - x^{o\ 2}_{n+1}}{\Delta^2 x^o_n} \to \hat{x}_o$

Comme $\hat{x}_1 < \hat{x}_o$, à partir d'un rang N2, on a

$$\frac{x^o_{n+2}\, x^o_n - x^{o\ 2}_{n+1}}{\Delta^2 x^o_n} \to \hat{x}_1$$

C_o) D'après c du lemme 1,

$$\frac{\dfrac{x^o_{n+1} - \hat{x}_o}{x^o_n - \hat{x}_o} - 1}{\dfrac{\Delta x^o_{n+1}}{\Delta x^o_n} - 1} \quad \text{tend en décroissant vers } \rho_o$$

Comme $1 - v_o > 0$, on a, pour $n \geq N_3$

$$\frac{\dfrac{x^o_{n+1} - \hat{x}_o}{x^o_n - \hat{x}_o} - 1}{\dfrac{\Delta x^o_{n+1}}{\Delta x^o_n} - 1} - \rho_o \leq 1 - v_o$$

B_o) Puisque $(x^o_n) \to \hat{x}_o$, pour $n \geq N_4$, on a $|x^o_n - \hat{x}_o| \leq \frac{1}{2^o}$

D_o) $\dfrac{x^o_{n+1} - x^o_{n+2}}{x^o_n - x^o_{n+1}} = \dfrac{\Delta x^o_{n+1}}{\Delta x^o_n} \to 1$ et $v_o < 1$

donc pour $n \geq N5$, $\dfrac{x^o_{n+1} - x^o_{n+2}}{x^o_n - x^o_{n+1}} \geq v_o$

$$E_o) \quad \frac{x^o_n - \hat{x}_1}{x^o_n - x^o_{n+1}} \left[1 - \frac{(x^o_{n+1} - x^o_{n+2})(x^o_n - \hat{x}_1)}{(x^o_{n+1} - \hat{x}_1)(x^o_n - x^o_{n+1})}\right]$$

$$= \frac{x^o_n - \hat{x}_1}{x^o_n - x^o_{n+1}} \left[1 - \frac{\Delta x^o_{n+1}}{\Delta x^o_n} \cdot \frac{x^o_n - \hat{x}_1}{x^o_{n+1} - \hat{x}_1}\right]$$

$$= \frac{x^o_n - \hat{x}_1}{x^o_n - x^o_{n+1}} \left[1 - \frac{e^o_{n+1}}{e^o_n} \cdot \frac{\lambda^o_{n+1}}{\lambda^o_n} \cdot \frac{x^o_n - \hat{x}_1}{x^o_{n+1} - \hat{x}_1}\right]$$

$$= \frac{x^o_n - \hat{x}_1}{x^o_n - x^o_{n+1}} \left[1 - (1 - \lambda^o_n)(1 - \mu^o_n) \left(\frac{x^o_n - x^o_{n+1}}{x^o_{n+1} - \hat{x}_1} + 1\right)\right]$$

$$= \frac{x_n^o - \hat{x}_1}{x_n^o - x_{n+1}^o} [\lambda_n^o + \mu_n^o - \lambda_n^o \mu_n^o - \frac{x_n^o - x_{n+1}^o}{x_{n+1}^o - \hat{x}_1} (1 - \lambda_n^o - \mu_n^o + \lambda_n^o \mu_n^o)]$$

$$= \frac{x_n^o - \hat{x}_1}{x_n^o - x_{n+1}^o} (\lambda_n^o + \mu_n^o - \lambda_n^o \mu_n^o) - \frac{x_n^o - \hat{x}_1}{x_{n+1}^o - \hat{x}_1} (1 - \lambda_n^o - \mu_n^o + \lambda_n^o \mu_n^o)$$

$$= \frac{x_n^o - \hat{x}_1}{x_n^o - x_{n+1}^o} (\lambda_n^o + \mu_n^o - \lambda_n^o \mu_n^o) + \frac{x_n^o - \hat{x}_1}{x_{n+1}^o - \hat{x}_1} (-1 + \lambda_n^o + \mu_n^o - \lambda_n^o \mu_n^o)$$

$$= (x_n^o - \hat{x}_1) (\lambda_n^o + \mu_n^o - \lambda_n^o \mu_n^o) [\frac{1}{x_n^o - x_{n+1}^o} + \frac{1}{x_{n+1}^o - \hat{x}_1}] - \frac{x_n^o - \hat{x}_1}{x_{n+1}^o - \hat{x}_1}$$

$$= (x_n^o - \hat{x}_1)(\lambda_n^o + \mu_n^o - \lambda_n^o \mu_n^o) \frac{x_{n+1}^o - \hat{x}_1 + x_n^o - x_{n+1}^o}{(x_n^o - x_{n+1}^o)(x_{n+1}^o - \hat{x}_1)} - \frac{x_n^o - \hat{x}_1}{x_{n+1}^o - \hat{x}_1}$$

$$= \frac{(x_n^o - \hat{x}_1)^2 (\lambda_n^o + \mu_n^o - \lambda_n^o \mu_n^o)}{(x_n^o - x_{n+1}^o)(x_{n+1}^o - \hat{x}_1)} - \frac{x_n^o - \hat{x}_1}{x_{n+1}^o - \hat{x}_1}$$

Or $x_n^o - x_{n+1}^o = - \Delta x_n^o = - \Delta e_n^o$

$$\frac{e_{n+1}^o}{e_n^o} = 1 - \lambda_n^o \qquad e_{n+1}^o = e_n^o - e_n^o \lambda_n^o$$

$$\Delta e_n^o = - e_n^o \lambda_n^o$$

Donc $x_n^o - x_{n+1}^o = e_n^o \lambda_n^o$

Le rapport précédent est donc égal à

$$\frac{(x_n^o - \hat{x}_1)^2 (\lambda_n^o + \mu_n^o - \lambda_n^o \mu_n^o)}{\lambda_n^o (x_n^o - \hat{x}_o)(x_{n+1}^o - \hat{x}_1)} - \frac{x_n^o - \hat{x}_1}{x_{n+1}^o - \hat{x}_1}$$

$$= \underbrace{\frac{(x_n^o - \hat{x}_1)^2}{x_{n+1}^o - \hat{x}_1}}_{\substack{\text{ceci tend} \\ \text{vers} \\ \hat{x}_o - \hat{x}_1 > 0}} \times \underbrace{(1 + \frac{\mu_n^o}{\lambda_n^o} - \mu_n^o)}_{\substack{\text{ceci tend vers} \\ 1 + \alpha \text{ avec} \\ \alpha = \frac{1}{t} - 1 > 0}} \times \underbrace{\frac{1}{x_n^o - \hat{x}_o}}_{\substack{\text{ceci tend} \\ \text{vers} \\ \frac{1}{0^+} = +\infty}} - \underbrace{\frac{x_n^o - \hat{x}_1}{x_{n+1}^o - \hat{x}_1}}_{\substack{\text{ceci tend} \\ \text{vers } 1}}$$

Donc,

$$\frac{x_n^o - \hat{x}_1}{x_n^o - x_{n+1}^o}\left[1 - \frac{(x_{n+1}^o - x_{n+2}^o)(x_n^o - \hat{x}_1)}{(x_{n+1}^o - \hat{x}_1)(x_n^o - x_{n+1}^o)}\right] \to +\infty$$

A partir d'un rang N6, on aura donc cette expression plus grande que $\frac{1}{t^1} - 1$.

Il suffit donc de prendre $p_o = \mathrm{Sup}\,(m_o, N1, N2, N3, N4, N5, N6)$.

Les hypothèses (A_o) à (E_o) étant vérifiées, on va appliquer le lemme 2

en prenant $a = \hat{x}_1$

$b = x_{p_o+2}^o$

$c = x_{p_o+1}^o$

$d = x_{p_o}^o$

$r = v_o \quad p = p_o \quad \varepsilon = t^1$

$(D_o) \Rightarrow$ (i)

$(A_o) \Rightarrow$ (ii) et (iii)

$(E_o) \Rightarrow$ (iv)

On appelle (y_n^1) la suite du lemme 2 et on pose $x_n^1 = \begin{cases} x_n^o & \text{si } n \in \{0,\dots,p_o+2\} \\ y_n^1 & \text{si } n \geq \{p_o, \dots\} \end{cases}$

La suite (x_n^1) vérifie

1) $(x_n^1) \to \hat{x}_1$

et (x_n^1) décroît à partir du rang p_o ; comme (x_n^1) était décroissante jusque P_o, on a (x_n^1) strictement décroissante.

2) $x_{p_o}^1 = x_{p_o}^o \qquad x_{p_o+1}^1 = x_{p_o+1}^o \qquad x_{p_o+2}^1 = x_{p_o+2}^o$

3) $\forall\, n \geq p_o\,, \quad v_o < \frac{\Delta x_{n+1}^1}{\Delta x_n^1} < 1$

4) $\frac{\Delta x_{n+1}^1}{\Delta x_n^1} \to 1$

5) $\forall\, n \geq p_o, \quad v_o < \frac{x_{n+1}^1 - \hat{x}_1}{x_n^1 - \hat{x}_1} < 1$

6) $\dfrac{x^1_{n+1} - \hat{x}_1}{x^1_n - \hat{x}_1} \to 1$

7) $\exists\ \rho_1 \in [0, t^1]$ tel que $\dfrac{\dfrac{x^1_{n+1} - \hat{x}_1}{x^1_n - \hat{x}_1} - 1}{\dfrac{\Delta x^1_{n+1}}{\Delta x^1_n} - 1} \to \rho_1$ en décroissant à partir du rang p_o

La suite (x^1_n) appartient donc à LOGSF $\cap$ L_{ρ_1}

3) Construction de (x^{i+1}_n) à partir de (x^i_n)

On dispose de la suite (x^i_n) qui vérifie

1) $(x^i_n) \to \hat{x}_i$ strictement décroissante

2) $\begin{cases} x^i_{p_{i-1}} = x^{i-1}_{p_{i-1}} \\ x^i_{p_{i-1}+1} = x^{i-1}_{p_{i-1}+1} \\ x^i_{p_{i-1}+2} = x^{i-1}_{p_{i-1}+2} \end{cases}$

3) $\forall\ n \geq p_{i-1} \quad v_{i-1} < \dfrac{\Delta x^i_{n+1}}{\Delta x^i_n} \quad 1$

4) $\dfrac{\Delta x^i_{n+1}}{\Delta x^i_n} \to 1$

5) $\forall\ n \geq p_{i-1} \quad v_{i-1} < \dfrac{x^i_{n+1} - \hat{x}_i}{x^i_n - \hat{x}_i} < 1$

6) $\dfrac{x^i_{n+1} - \hat{x}_i}{x^i_n - \hat{x}_i} \to 1$

7) $\exists\ \rho_i \in [0, t^i]$ tel que $\dfrac{\dfrac{x^i_{n+1} - \hat{x}_i}{x^i_n - \hat{x}_i} - 1}{\dfrac{\Delta x^i_{n+1}}{\Delta x^i_n} - 1} \to \rho_i$ **en décroissant à partir du rang p_{i-1}**

Soit m_i arbitraire, il existe $p_i > m_i$ tel que

$$(A_i)\quad \frac{x^i_{p_i+1} - x^i_{p_i+2}}{x^i_{p_i+1} - \hat{x}_{i+1}} \leq \frac{x^i_{p_i} - x^i_{p_i+1}}{x^i_{p_i} - \hat{x}_{i+1}} < 1 - v_i$$

$$(B_i)\quad |x^i_{p_i} - \hat{x}_i| \leq \frac{1}{2^i}$$

$$(C_i)\quad \frac{\dfrac{x^i_{p_i+1} - \hat{x}_i}{x^i_{p_i} - \hat{x}_i} - 1}{\dfrac{\Delta x^i_{p_i+1}}{\Delta x^i_{p_i}} - 1} - \rho_i \leq 1 - v_i$$

$$(D_i)\quad \frac{x^i_{p_i+1} - x^i_{p_i+2}}{x^i_{p_i} - x^i_{p_i+1}} > v_i$$

$$(E_i)\quad \frac{x^i_{p_i} - \hat{x}_{i+1}}{x^i_{p_i} - x^i_{p_i+1}} \left[1 - \frac{(x^i_{p_i+1} - x^i_{p_i+2})(x^i_{p_i} - \hat{x}_{i+1})}{(x^i_{p_i+1} - \hat{x}_{i+1})(x^i_{p_i} - x^i_{p_i+1})}\right] > \frac{1}{t^{i+1}} - 1$$

La démonstration est analogue à la précédente.

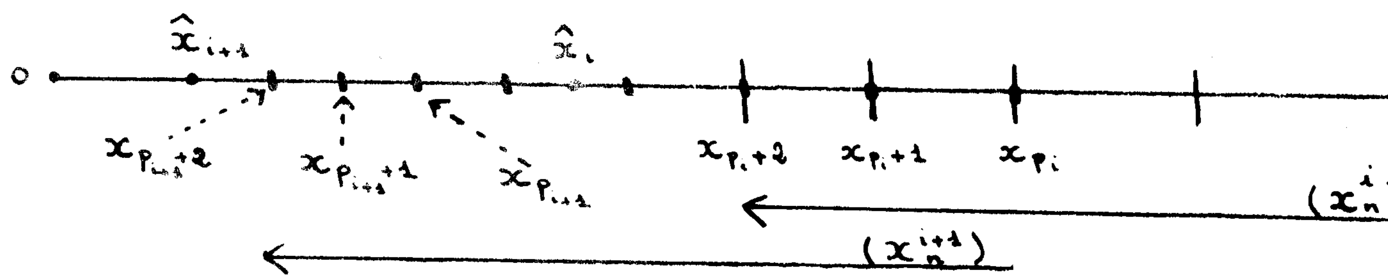
On construit une suite à partir du lemme 2 en prenant

$a = \hat{x}_{i+1}$ $\quad b = x_{p_i+2}$ $\quad c = x_{p_i+1}$ $\quad d = x_{p_i}$

$r = v_i$ $\quad p = p_i$ $\quad \varepsilon = t^{i+1}$

On appelle (y^{i+1}_n) cette suite et on pose

$$x^{i+1}_n = \begin{cases} x^i_n \text{ pour } n \in \{0, \ldots, p_i, p_i+1, p_i+2\} \\ \\ y^{i+1} \text{ pour } n \in \{p_i, p_i+1, \ldots\} \end{cases}$$



La suite (x_n^i) appartient à LOGSF $\cap$ L_{ρ_i}

4) Construction de la suite finale

$$(x_n) = (x_0^0, \ \dots \ x_{p_0}^0, \quad x_{p_0+1}^1, \ \dots, \ x_{p_1}^1, \quad x_{p_1+1}^2, \ \dots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_n = x_n^{i+1} \\ \text{si } n \in \{p_i, p_i+1, \dots, p_{i+1}+2\} \end{array}}$$

5) $(x_n) \to 0$

(x_n) est évidemment strictement décroissante et strictement positive.

Soit $\alpha > 0$.

Choisissons i tel que $\begin{cases} \frac{1}{2^i} < \frac{\alpha}{2} \\ \hat{x}_i < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$ (possible puisque $\frac{1}{2^i}$ et $\hat{x}_i$ tendent vers 0)

on prend $N(\alpha) = p_i$

soit $n \geq N(\alpha)$

$$x_n \leq |x_n - \hat{x}_i| + \underbrace{|\hat{x}_i - 0|}_{< \frac{\alpha}{2}}$$

on a également

$$0 \;\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{< \frac{\alpha}{2}}\; \hat{x}_i \;\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\le \frac{1}{2^i} \text{ d'après } (B_i)}\; x_{p_i}$$

x_n appartient à la zone $[0, x_{p_i}]$

donc $|x_n - \hat{x}_i| < \frac{\alpha}{2}$

donc $x_n < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow x_n < \alpha$.

Donc $\forall\ \alpha > 0,\ \exists\ N(\alpha) = p_i$ tel que $\forall\ n \geq N(\alpha),\ 0 < x_n < \alpha$

6) $\underline{\dfrac{x_{n+1} - 0}{x_n - 0} \to 1}$

(x_n) décroît, donc $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$

D'autre part, pour n'importe quel x positif inférieur à x_{n+1}, on a

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x}$$

(Si $x = 0$ c'est évident, si $x > 0$, c'est équivalent à $x_{n+1}(x_n - x) \geq x_n(x_{n+1} - x)$

donc à $-x.x_{n+1} \geq -x.x_n$ c'est à dire à $x_{n+1} \leq x_n$ qui est vrai).

Soit $\alpha > 0$

$(v_i) \uparrow$. Choisissons i_o suffisamment grand pour que $1 - \alpha < v_{i_o} < 1$

Choisissons $N(\alpha) = P_{i_o}$

$\forall\ n \geq N(\alpha)$, il existe $i \geq i_o$ tel que $n \in \{p_i, p_i+1, \ldots, p_{i+1} - 1\}$

et $x_n = x_n^{i+1}$

on a aussi $0 < \hat{x}_{i+1} < x_{n+1}$ donc, d'après la remarque précédente,

$$\frac{x_{n+1} - \hat{x}_{i+1}}{x_n - \hat{x}_{i+1}} \leq \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Puisque $\begin{cases} x_n = x_n^{i+1} \\ x_{n+1} = x_{n+1}^{i+1} \end{cases}$, d'après 5) du lemme 2,

$$v_i < \frac{x_{n+1}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}}{x_n^{i+1} - \hat{x}_{i+1}} < 1$$

On a donc, puisque $i \geq i_o$

$$1 - \alpha < v_{i_o} \leq v_i < \frac{x_{n+1} - \hat{x}_{i+1}}{x_n - \hat{x}_{i+1}} \leq \frac{x_{n+1} - 0}{x_n - 0} < 1$$

Ceci pouvant être réalisé pour tout $\alpha > 0$, on a $\frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (en croissant)

Donc $(x_n) \in$ Log.

7) $\underline{\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

3 termes consécutifs x_n, x_{n+1}, x_{n+2} appartiennent toujours à la même sous-suite (x_n^i). Donc $\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} = \frac{\Delta x_{n+1}^i}{\Delta x_n^i}$

Soit $\alpha > 0$

Choisissons i_o assez grand pour que $1 - \alpha < v_{i_o} < 1$

Et choisissons $N(\alpha) = P_{i_o}$

$\forall\, n \geq N(\alpha)$, il existe un $i \geq i_o$ tel que $n \in \{p_i, p_i+1, \ldots, p_{i+1} - 1\}$

$$x_n = x_n^{i+1}$$
$$x_{n+1} = x_{n+1}^{i+1}$$
$$x_{n+2} = x_{n+2}^{i+1}$$

D'après le 3 du lemme 2 ; $v_i < \frac{\Delta x_{n+1}^{i+1}}{\Delta x_n^{i+1}} < 1$

Et, puisque $i \geq i_o$, on a

$$1 - \alpha < v_{i_o} \leq v_i < \frac{\Delta x_{n+1}^{i+1}}{\Delta x_n^{i+1}} < 1$$

Ceci pouvant être réalisé pour tout $\alpha > 0$, on a $\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \to 1$

Donc, $(x_n) \in$ LOGSF.

$$8)\ \frac{\frac{x_{n+1} - 0}{x_n - 0} - 1}{\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} - 1} \to 0$$

Par construction, $\rho_i \in [0, t^i]$; donc $0 \leq \rho_i \leq t^i$

Soit $\alpha > 0$; choisissons i_o suffisamment grand pour que $t^{i_o} < \frac{\alpha}{2}$

(possible puisque $t \in]0, 1[\Rightarrow t^i \to 0$)

Donc $\forall\ i \geq i_o$, $\ 0 \leq \rho_i < \frac{\alpha}{2}$

D'autre part $(v_i)\uparrow 1$, donc, il existe un rang i_1 tel que

$$\forall\ i \geq i_1,\quad 1 - v_i < \frac{\alpha}{2}$$

Choisissons $I \geq \text{Sup}\ (i_o, i_1)$

On a $\begin{cases} 0 \leq \rho_I < \frac{\alpha}{2} \\ 0 < 1 - v_I < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$ et $\forall\ i \geq I$ $\begin{cases} 0 \leq \rho_i < \frac{\alpha}{2} \\ 0 < 1 - v_i < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$

prenons $N(\alpha) = P_I$

$\forall\ n \geq N(\alpha)$, $\exists\ i \geq I$ tel que $n \in \{p_i, p_i+1, \ldots, p_{i+1} - 1\}$

$$\text{alors} \begin{cases} x_n = x_n^{i+1} \\ x_{n+1} = x_{n+1}^{i+1} \\ x_{n+2} = x_{n+2}^{i+1} \end{cases}$$

$$\text{On a } \frac{\frac{x_{n+1} - 0}{x_n - 0} - 1}{\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} - 1} = \frac{\frac{x_{n+1}^{i+1} - 0}{x_n^{i+1} - 0} - 1}{\frac{\Delta x_{n+1}^{i+1}}{\Delta x_n^{i+1}} - 1}$$

Démontrons que :

$$\frac{\dfrac{x_{n+1}^{i+1} - 0}{x_n^{i+1} - 0} - 1}{\dfrac{\Delta x_{n+1}^{i+1}}{\Delta x_n^{i+1}} - 1} \leq \frac{\dfrac{x_{n+1}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}}{x_n^{i+1} - \hat{x}_{i+1}} - 1}{\dfrac{\Delta x_{n+1}^{i+1}}{\Delta x_n^{i+1}} - 1}$$

Le dénominateur est le même pour les 2 expressions et est négatif d'après 3) du lemme 2 ; il suffit donc de montrer que

$$\frac{x_{n+1}^{i+1} - 0}{x_n^{i+1} - 0} - 1 \geq \frac{x_{n+1}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}}{x_n^{i+1} - \hat{x}_{i+1}} - 1$$

C'est à dire que $\dfrac{x_{n+1}^{i+1}}{x_n^{i+1}} \geq \dfrac{x_{n+1}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}}{x_n^{i+1} - \hat{x}_{i+1}}$; donc, puisque les 4 termes sont positifs, il suffit de montrer que

$$x_{n+1}^{i+1}\,(x_n^{i+1} - \hat{x}_{i+1}) \geq x_n^{i+1}\,(x_{n+1}^{i+1} - \hat{x}_{i+1})$$

ou encore que $- \hat{x}_{i+1}\, x_{n+1}^{i+1} \geq - \hat{x}_{i+1} x_n^{i+1}$

$$x_{n+1}^{i+1} \leq x_n^{i+1}$$

et ceci est toujours vrai.

D'autre part, le numérateur et le dénominateur de la fraction $\dfrac{\dfrac{x_{n+1}^{i+1}}{x_n^{i+1}} - 1}{\dfrac{\Delta x_{n+1}^{i+1}}{\Delta x_n^{i+1}} - 1}$ sont tous deux négatifs (parce que (x_n^{i+1}) est strictement décroissante et d'après 3) du lemme 2). Donc

$$0 < \frac{\dfrac{x_{n+1}^{i+1} - 0}{x_n^{i+1} - 0} - 1}{\dfrac{\Delta x_{n+1}^{i+1}}{\Delta x_n^{i+1}} - 1} \leq \underbrace{\frac{\dfrac{x_{n+1}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}}{x_n^{i+1} - \hat{x}_{i+1}} - 1}{\dfrac{\Delta x_{n+1}^{i+1}}{\Delta x_n^{i+1}} - 1}}$$

$n \in \{p_i, \ldots, p_{i+1} - 1\}$ et on sait que cette suite décroît d'après le lemme 2, 7) à partir du rang p_i.

Donc

$$0 < \frac{\dfrac{x_{n+1}^{i+1} - 0}{x_n^{i+1} - 0} - 1}{\dfrac{\Delta x_{n+1}^{i+1}}{\Delta x_n^{i+1}} - 1} \leq \frac{\dfrac{x_{n+1}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}}{x_n^{i+1} - \hat{x}_i} - 1}{\dfrac{\Delta x_{n+1}^{i+1}}{\Delta x_n^{i+1}} - 1} \leq \frac{\dfrac{x_{p_i+1}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}}{x_{p_i}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}} - 1}{\dfrac{\Delta x_{p_i+1}^{i+1}}{\Delta x_{p_i}^{i+1}} - 1}$$

Démontrons que l'on a aussi

$$\frac{\dfrac{x_{p_i+1}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}}{x_{p_i}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}} - 1}{\dfrac{\Delta x_{p_i+1}^{i+1}}{\Delta x_{p_i}^{i+1}} - 1} \leq \frac{\dfrac{x_{p_i+1}^{i+1} - \hat{x}_i}{x_{p_i}^{i+1} - \hat{x}_i} - 1}{\dfrac{\Delta x_{p_i+1}^{i+1}}{\Delta x_{p_i}^{i+1}} - 1}$$

Le dénominateur est le même et est négatif, comme on l'a déjà remarqué.

Il suffit de démontrer que

$$\frac{x_{p_i+1}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}}{x_{p_i}^{i+1} - \hat{x}_{i+1}} \geq \frac{x_{p_i+1}^{i+1} - \hat{x}_i}{x_{p_i}^{i+1} - \hat{x}_i}$$

D'après le schéma du 3), on voit que les 2 dénominateurs sont positifs,

il suffit donc de montrer que :

$$(x_{p_i+1}^{i+1} - \hat{x}_{i+1})(x_{p_i}^{i+1} - \hat{x}_i) \geq (x_{p_i}^{i+1} - \hat{x}_{i+1})(x_{p_i+1}^{i+1} - \hat{x}_i)$$

C'est à dire que

$$- \hat{x}_{i+1}\, x_{p_i}^{i+1} - \hat{x}_i\, x_{p_i+1}^{i+1} \geq - \hat{x}_{i+1}\, x_{p_i+1}^{i+1} - \hat{x}_i\, x_{p_i}^{i+1}$$

ou que

$$\hat{x}_{i+1}\, \underbrace{(x_{p_i+1}^{i+1} - x_{p_i}^{i+1})}_{\text{ceci est négatif}} \geq \hat{x}_i\, (x_{p_i+1}^{i+1} - x_{p_i}^{i+1})$$

donc, il suffit de montrer que $\hat{x}_{i+1} \leq \hat{x}_i$ et ceci est vrai.

D'autre part, on a, par construction : $\begin{cases} x^{i+1}_{p_i} = x^i_{p_i} \\ x^{i+1}_{p_i+1} = x^i_{p_i+1} \\ x^{i+1}_{p_i+2} = x^i_{p_i+2} \end{cases}$

On peut donc écrire.

$$0 < \frac{\dfrac{x^{i+1}_{n+1} - 0}{x^{i+1}_{n} - 0} - 1}{\dfrac{\Delta x^{i+1}_{n+1}}{\Delta x^{i+1}_{n}} - 1} \leq \frac{\dfrac{x^{i+1}_{p_i+1} - \hat{x}_i}{x^{i+1}_{p_i} - \hat{x}_i} - 1}{\dfrac{\Delta x^{i+1}_{p_i+1}}{\Delta x^{i+1}_{p_i}} - 1} = \frac{\dfrac{x^{i}_{p_i+1} - \hat{x}}{x^{i}_{p_i} - \hat{x}_i} - 1}{\dfrac{\Delta x^{i}_{p_i+1}}{\Delta x^{i}_{p_i}} - 1}$$

On a alors

$$0 < \frac{\dfrac{x^{i+1}_{n+1} - 0}{x^{i+1}_{n} - 0} - 1}{\dfrac{\Delta x^{i+1}_{n+1}}{\Delta x^{i+1}_{n}} - 1} < \underbrace{\frac{\dfrac{x^{i}_{p_i+1} - \hat{x}_i}{x^{i}_{p_i} - \hat{x}_i} - 1}{\dfrac{\Delta x^{i}_{p_i+1}}{\Delta x^{i}_{p_i}} - 1} - \rho_i}_{\text{ceci est } \leq 1 - v_i \text{ d'après } (C_i) \text{ et on a choisi } i \text{ de telle sorte que } 1-v_i < \frac{\alpha}{2}} + \underbrace{\rho_i}_{\text{ceci est } < \frac{\alpha}{2} \text{ d'après le choix de } i}$$

$$\text{Donc } 0 < \frac{\dfrac{x^{i+1}_{n+1} - 0}{x^{i+1}_{n} - 0} - 1}{\dfrac{\Delta x^{i+1}_{n+1}}{\Delta x^{i+1}_{n}} - 1} < \alpha \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{\dfrac{x_{n+1} - 0}{x_{n} - 0} - 1}{\dfrac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_{n}} - 1} < \alpha$$

Ceci étant possible pour tout $\alpha > 0$, $(x_n) \in L_o$

9) $\underline{(x_n) \in \text{LOG } 2}$

Toutes les suites (x^i_n) appartiennent à LOG 2 car elles vérifient les propriétés du lemme 1 à partir du rang p_i.

D'après ce qui précède, pour la suite finale (x_n), qui appartient à LOGSF,

le rapport $R_n = \dfrac{\dfrac{x_{n+1}}{x_n} - 1}{\dfrac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} - 1}$ tend vers 0 en restant toujours strictement positif.

Appelons (λ_n) la suite dérivée première de (x_n) et (μ_n) sa suite dérivée seconde.

$$R_n = \frac{1}{\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \dfrac{\mu_n}{\lambda_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$$

donc $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \dfrac{\mu_n}{\lambda_n} \to +\infty$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mu n}{\lambda_n} = +\infty$

A partir d'un certain rang, $\dfrac{\mu_n}{\lambda_n}$ est strictement positif. Comme λ_n est également strictement positif à partir d'un certain rang, il faut que μ_n soit positif à partir d'un certain rang. Donc, $(x_n) \in$ LOG 2.

CHAPITRE 3

PROCEDES D'ACCELERATION

Dans les quatre premiers paragraphes de ce chapitre, je vais décrire des procédés d'accélération valables pour certains sous-ensembles de Log. Tous ces procédés seront des variantes d'un même procédé que j'appellerai "procédé standard". Dans le cinquième paragraphe, j'étudierai les possibilités d'accélération de suites à convergence logarithmique par le procédé d'extrapolation de Richardson. Le sixième paragraphe sera consacré à un exemple : l'accélération de la convergence des suites de Mann.

Procédé Standard

Soit L un ensemble de suites strictement monotones pour lequel il existe une transformation auxiliaire de suites, transformant $(S_n) \in L$ *en* (t_n) *de telle sorte que :*

. $\forall (S_n) \in L, \lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$

(la transformation auxiliaire est régulière pour toute sutie de L)

. $\forall (S_n) \in L, \exists C \neq 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = C$

Alors, la transformation

$$T_n = S_n - \frac{S_n - t_n}{1 - \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n}}$$

accélère la convergence de toute suite de L.

Remarque : une expression équivalente de T_n est

$$T_n = S_n - \frac{\Delta S_n}{\frac{S_{n+1} - t_{n+1}}{S_n - t_n} - 1}$$

Démonstration :

(S_n) étant monotone, les hypothèses du théorème entraînent que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta(t_n - S^*)}{\Delta(S_n - S^*)} = C$; d'où, en utilisant le théorème 15 page 13 de [Réf 2],

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t_n - S^*}{S_n - S^*} = C$$

$$\frac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \frac{S_n - t_n}{S_n - S^*} \times \frac{1}{1 - \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n}}$$

$$\frac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \left(1 - \frac{t_n - S^*}{S_n - S^*}\right) \frac{1}{1 - \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n}}$$

C étant distinct de 1, $\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 0$

Comme il apparaît dans cette démonstration, la monotonie de (S_n) permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = C$ implique $\lim_{n\to+\infty} \frac{t_n - S^*}{S_n - S^*} = C$. Il est alors possible de définir un procédé exact sur le sous-ensemble de L pour lequel $\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = \frac{t_n - S^*}{S_n - S^*}$
La limite S^* d'une suite de ce sous-ensemble est solution d'une équation du premier degré dont la résolution conduit au procédé standard.

Remarque : Ce critère est intéressant également du point de vue pratique car il est possible de constater expérimentalement que, pour une suite donnée et un procédé quelconque, $(\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n})$ tend vers une constante distincte de 1.

Il est possible d'obtenir des variantes du procédé standard, variantes liées à une définition légèrement différente de l'ensemble L.

Variante du procédé standard

Soit L un ensemble de suites pour lequel il existe une transformation auxiliaire de suites, transformant $(S_n) \in L$ en (t_n) de telle sorte que :

. $\forall (S_n) \in L, \lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$

(la transformation auxiliaire est régulière par toute suite de L)

. $\exists\, C \neq 1,\ \forall\, (S_n) \in L,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_n - S^*}{S_n - S^*} = C$

Alors, la transformation :

$$U_n = S_n - \frac{S_n - t_n}{1 - C}$$

accélère la convergence de toute suite de L.

Démonstration

$$\frac{U_n - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \frac{S_n - t_n}{S_n - S^*} \times \frac{1}{1-C} = 1 - \left(1 - \frac{t_n - S^*}{S_n - S^*}\right) \cdot \frac{1}{1-C}$$

Puisque $C \neq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n - S^*}{S_n - S^*} = 0$

Dans cette variante, par rapport au procédé standard, il y a une perte d'information : on ne peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = C$, même si (S_n) est monotone. Mais cette perte d'information est compensée par la connaissance de C qui est défini et unique pour tout L.

Dans le chapitre précédent, ont été décrits plusieurs sous-ensembles de Log. Je m'efforcerai, dans ce chapitre, d'en donner une nouvelle description mettant en évidence la transformation auxiliaire.

I - APPLICATION AU CAS DES SUITES RAABE-CONVERGENTES

1) Le critère de Raabe-Duhamel

Le critère de Raabe-Duhamel est un critère de convergence pour les séries à termes positifs. Si $\sum_{n=o}^{+\infty} u_n$ est une série à termes positifs et si $\lim_{n\to+\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) = \lambda$ avec $\lambda > 1$, alors, la série converge [Réf 1]. Il est facile d'utiliser ce critère pour une suite (S_n) quelconque en la considérant comme somme partielle d'une série, en posant $u_{n+1} = \Delta S_n$. Je considérerai uniquement des suites de LOG 1 afin d'avoir la monotonie, donc un signe constant pour (u_n). Le critère de Raabe-Duhamel devient alors :

Critère de Raabe-Duhamel pour une suite monotone

Soit (S_n) *une suite monotone.*
Supposons que $\lim_{n\to+\infty} (n+1) (\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}} - 1) = \lambda > 1$
Alors, la suite (S_n) *converge.*

J'appelle suite Raabe-convergente une suite monotone réalisant le critère de Raabe-Duhamel. Il s'agit toujours de monotonie à partir d'un certain rang et supposée stricte afin de pouvoir définir le quotient.

Propriété 1 : *Toute suite Raabe-convergente appartient à* LOGSF.

Démonstration :

Soit (S_n) Raabe- convergente ; elle vérifie

$$(n+1) (\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}} - 1) = \lambda + \varepsilon_n$$

(ε_n) étant une suite quelconque de limite nulle.

donc $\dfrac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}} = 1 + \dfrac{\lambda+\varepsilon_n}{n+1}$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1$

Ceci implique, naturellement, d'après la monotonie et le théorème 15 page 13 de [Réf 2] que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = 1$. Donc, $(S_n) \in$ LOGSF.

Exemple de suite Raabe-convergente :

La suite $(\frac{1}{n})$ est Raabe-convergente ; en effet, pour cette suite,

$\Delta S_n = \dfrac{-1}{n(n+1)}$ donc, $(n+1)\left(\dfrac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}} - 1\right) = \dfrac{2(n+1)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

Le critère de Raabe-Duhamel peut également s'exprimer de la manière suivante :

Une suite Raabe-convergente est une suite strictement monotone à partir d'un certain rang et qui vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\dfrac{1}{n+1}} = \lambda > 1$$

2) Expression générale des suites Raabe-convergentes

Toute suite Raabe-convergente peut s'écrire sous forme de série.

Propriété 2 : *Toute suite Raabe-convergente est de la forme*

$$S_{n+1} = a + b \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{i}{i + \lambda + \varepsilon_i} \right), \ n \geq 1$$

avec . $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$

. $\lambda > 1$

. (ε_i) suite réelle de limite nulle.

λ est évidemment la constante définie par le critère de Raabe-Duhamel

a est le terme S_1 et $b = S_1 - S_o$.

Démonstration :

Soit (S_n) Raabe-convergente

a) Calcul de ΔS_n

écrivons $(n+1)\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}} - 1\right) = \lambda + \varepsilon_{n+1}$, comme on l'a déjà fait

(je prends ε_{n+1} au lieu de ε_n pour une commodité d'écriture).

Ceci conduit à $\Delta S_{n+1} = \dfrac{n + 1}{n + 1 + \lambda + \varepsilon_{n+1}} \Delta S_n$

Ecrivons à présent ceci pour les rangs n, n-1, n-2, ... 1.

$$\Delta S_n = \frac{n}{n + \lambda + \varepsilon_n} \Delta S_{n-1}$$

$$= \frac{n}{n + \lambda + \varepsilon_n} \cdot \frac{n - 1}{n - 1 + \lambda + \varepsilon_{n-1}} \Delta S_{n-2}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{n}{n + \lambda + \varepsilon_n} \cdot \frac{n - 1}{n - 1 + \lambda + \varepsilon_{n-1}} \quad \dots \quad \cdot \frac{1}{1 + \lambda + \varepsilon_1} \Delta S_o$$

C'est à dire $\Delta S_n = \dfrac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} (i + \lambda + \varepsilon_i)} \Delta S_o$

b) Calcul de S_n :

$$S_{n+1} = S_n + \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} (i + \lambda + \varepsilon_i)} \Delta S_o$$

$$= S_{n-1} + \frac{(n - 1)!}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} (i + \lambda + \varepsilon_i)} \Delta S_o + \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} (i + \lambda + \varepsilon_i)} \Delta S_o$$

$$= \dots$$

$$= S_1 + \frac{1!}{\prod_{i=1}^{1} (i + \lambda + \varepsilon_i)} \Delta S_o + \ldots + \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} (i + \lambda + \varepsilon_i)} \Delta S_o$$

Posons $a = S_1$, $b = \Delta S_o \neq 0$ car (S_n) est strictement monotone.

alors $S_{n+1} = a + b \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{\prod_{i=1}^{k} (i + \lambda + \varepsilon_i)}$

3) Limite de certaines suites Raabe-convergentes

Il existe un cas où la limite d'une suite Raabe-convergente est connue, c'est le cas où λ est entier et où la suite (ε_n) est constante égale à 0.

Propriété 3 : Soit (S_n) une suite Raabe-convergente, définie, d'après la propriété 2, grâce à λ entier et (ε_n) suite constante égale à 0. Alors

$S^* = \lim_{n \to +\infty} S_n = a + \frac{b}{\lambda - 1}$

Démonstration :

a) Soit $\lambda \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Considérons la suite définie par

$T_o = 0 \quad T_1 = \frac{0!}{\lambda!} \quad \ldots \quad T_{n+1} = \frac{0!}{\lambda!} + \frac{1!}{(\lambda+1)!} + \ldots + \frac{n!}{(\lambda+n)!}$

Cette suite a été recensée dans [Réf 9, suite 285], sa limite est

$T^* = \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-1)!}$

b) $S_{n+1} = a + b \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{i}{i+\lambda} \right) = (a - b) + b \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{i}{i+\lambda} \right)\right]$

et $T_{n+1} = \sum_{k=o}^{n} \frac{k!}{(\lambda+k)!}$

Montrons, par récurrence, que $S_n = (a - b) + \lambda!\, b\, T_n$

* Cette propriété est vraie au rang 0 car $S_o = a - b$ et $T_o = 0$

* supposons-la vraie jusqu'au rang n.

$S_n = (a - b) + \lambda!\, b\, T_n$

Alors, $S_{n+1} = (a - b) + b \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{i}{i+\lambda}\right) + \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+\lambda} \right]$

$$= S_n + b \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+\lambda}$$

$$= (a - b) + \lambda!\, b\, T_n + b \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+\lambda}$$

$$= (a - b) + \lambda!\, b\, T_n + b \frac{n!\ \lambda!}{(\lambda+n)!}$$

$$= (a - b) + b\, \lambda!\, (T_n + \frac{n!}{(\lambda+n)!})$$

$$= (a - b) + b\, \lambda!\, T_{n+1}$$

c) application au calcul de la limite

Lorsqu'on passe à la limite dans l'égalité démontrée précédemment, on obtient $S^* = (a - b) + b\, \lambda! \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} = a + \frac{b}{\lambda-1}$

Dans les cas autres que ceux étudiés dans la propriété 3, la limite ne peut être qu'approchée.

4) Accélération de la convergence pour les suites Raabe-convergentes

Je vais appliquer le procédé standard aux suites Raabe-convergentes. Pour ce faire, il faut trouver une transformation t_n vérifiant les propriétés requises. t_n sera ici $S_n - n\Delta S_n$.

<u>*Propriété 4*</u> : *Soit* (S_n) *une suite Raabe-convergente de* LOG 2.

Posons $t_n = S_n - n\Delta S_n$. alors,

. $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = S^*$

. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = \lambda > 1$

Démonstration

a) Pour toute suite de LOG 2, $\lim_{n\to+\infty} n\Delta S_n = 0$.

Ceci est une conséquence de [Réf 10] théorème 80 page 124, qui dit que, pour toute série à termes positifs $\sum_{n=o}^{+\infty} a_n$, convergente, dont le terme général a_n tend en décroissant vers 0, on a $\lim_{n\to+\infty} n\, a_n = 0$. Il suffit de poser $S_n = \sum_{i=o}^{n=1}$, $n \geq 1$, alors $\Delta S_n = a_n$.

ΔS_n tend vers 0 et est de signe constant car (S_n) est monotone. Il suffit donc de montrer que (ΔS_n) est monotone, c'est à dire que $\frac{\Delta S_{n+2} - \Delta S_{n+1}}{\Delta S_{n+1} - \Delta S_n} > 0$ à partir d'un certain rang.

Or,

$$\frac{\Delta S_{n+2} - \Delta S_{n+1}}{\Delta S_{n+1} - \Delta S_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}$$

$$= (1 - \lambda_n)(1 - \mu_n) \cdot \frac{\lambda_{n+1}\, \mu_{n+1} - \lambda_{n+1} - \mu_{n+1}}{\lambda_n\, \mu_n - \lambda_n - \mu_n}$$

$(1 - \lambda_n)(1 - \mu_n)$ tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$ et est donc positif à partir d'un certain rang. Reste à démontrer que $\lambda_n\, \mu_n - \lambda_n - \mu_n$ est de signe constant.

Or $\lambda_n\, \mu_n - \lambda_n - \mu_n = \lambda_n(\mu_n - 1) - \mu_n$

λ_n et μ_n sont positifs à partir d'un certain rang et $(\mu_n - 1)$ devient négatif. Donc, $\lambda_n\, \mu_n - \lambda_n - \mu_n$ est négatif à partir d'un certain rang. Ceci assure la régularité du procédé (t_n).

b) $\Delta t_n = \Delta S_n - (n+1)\, \Delta S_{n+1} + n\, \Delta S_n = -(n+1)\, \Delta^2 S_n$

Puisque (S_n) est Raabe-convergente, $\lim_{n\to+\infty} (n+1)\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}} - 1\right) = \lambda > 1$

c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} -(n+1)\frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_{n+1}} = \lambda$

d'où l'on déduit, puisque $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ que

$$\lim_{n\to+\infty} -(n+1)\frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} = \lambda$$

C'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = \lambda > 1$

A présent, il suffit d'appliquer le procédé standard pour montrer la

Propriété 5 : *Soit* (S_n) *une suite Raabe convergente de* LOG 2

La tansformation

$$T_n = S_n - \frac{\Delta S_n}{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}$$

accélère la convergence de (S_n).

Ce procédé a été étudié par Levin [Réf 15]. Il a un inconvénient du point de vue pratique : il nécessite la connaissance du rang des termes de (S_n) utilisés. Cet inconvénient disparait dans la propriété suivante.

Propriété 6 (*variante de la propriété 5*)

Soit (S_n) *une suite Raabe-convergente de* LOG 2.

Soit p *un entier quelconque de* $\mathbb{N}$

La transformation

$$T_n = S_n - \frac{\Delta S_n}{\frac{n+p+1}{n+p}\,\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}$$

accélère la convergence de (S_n).

Démonstration :

Prenons $t_n = S_n - (n+p)\,\Delta S_n$

a) Pour toute suite de LOG 2, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Delta S_n = 0$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+p)\,\Delta S_n$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+p}{n} \times \lim\limits_{n\to+\infty} n\Delta S_n = 0$

b) $\Delta t_n = \Delta S_n - (n+p+1)\, \Delta S_{n+1} + (n+p)\, \Delta S_n = -\, (n+p+1)\, \Delta^2 S_n$

(S_n) étant Raabe-convergente, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+p+1)\, \left(\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}} - 1\right) =$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+p+1}{n+1} \times \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\, \left(\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n+1}} - 1\right) = \lambda > 1.$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\, (n+p+1)\, \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_{n+1}} = \lambda$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\, (n+p+1)\, \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} = \lambda$

Etude expérimentale :

Pour ces expériences numériques, j'ai utilisé, chaque fois que cela a été possible les SUBROUTINES décrites dans [Réf 3].

J'ai testé cet algorithme sur plusieurs exemples de suites Raabe-convergentes

a) $S_n = \frac{1}{n}$, $S^* = 0$

N	$S_n - S^*$	$t_n - S^*$	$\frac{t_n - S^*}{S_n - S^*}$	$T_n - S^*$	$\frac{T_n - S^*}{S_n - S^*}$	$\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n}$
5	.200000D+00	.366667D+00	.183333D+01	-.333333D-01	-. 166667D+00	.171429D+01
10	.100000D+00	.190909D+00	.190909D+01	-.909091D-02	-. 909091D-01	.183333D+01
20	.500000D-01	.976190D-01	.195238D+01	-.238095D-02	-. 476190D-01	.190909D+01
60	.166667D-01	.330601D-01	.198361D+01	-.273224D-03	-. 163934D-01	.196774D+01
150	.666667D-02	.132892D-01	.199338D+01	-.441501D-04	-. 662252D-02	.198684D+01

b) $S_n = -\,3 + \frac{1}{n^2}$, $S^* = -3$

N	$S_n - S^*$	$t_n - S^*$	$\frac{t_n - S^*}{S_n - S^*}$	$T_n - S^*$	$\frac{T_n - S^*}{S_n - S^*}$	$\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n}$
5	.400000D-01	.101111D+00	.252778D+01	-.421327D-02	-. 105332D+00	.238219D+01
10	.100000D-01	.273554D-01	.273554D+01	-.6240170-03	-. 624017D-01	.263360D+01
20	.250000D-02	.714853D-02	.285941D+01	-.853518D-04	-. 341407D-01	.279802D+01
50	.277778D-03	.819747D-03	.295109D+01	-.336381D-05	-. 121097D-01	.292774D+01
150	.444444D-04	.132452D-03	.298018D+01	-.219408D-06	-. 493667D-02	.297045D+01

c) $S_{n+1} = S_1 + \Delta S_o \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{j}{\lambda+j}\right)$ $\lambda = 3$ $S^* = -5$

N	$S_n - S^*$	$t_n - S^*$	$\frac{t_n - S^*}{S_n - S^*}$	$T_n - S^*$	$\frac{T_n - S^*}{S_n - S^*}$	$\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n}$
5	.700000D+00	.170000D+01	.242857D+01	-.100000D+00	-.142857D+00	.225000D+01
10	.190909D+00	.509091D+00	.266667D+01	-.159091D-01	-.833333D-01	.253846D+01
20	.552632D-01	.155263D+00	.280952D+01	-.263158D-02	-.476190D-01	.272727D+01
60	.573770D-02	.168429D-01	.293548D+01	-.925436D-04	-.161290D-01	.290476D+01
150	.927152D-03	.275706D-02	.297368D+01	-.609968D-05	-.657894D-02	.296078D+01

II - APPLICATION AU CAS DE $\widehat{\text{LOG}}\ 2$

$$\widehat{\text{LOG}}\ 2 = \{(S_n) \in \text{LOG2} \ / \ \exists\ K \neq 0 \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta\mu_n}{\Delta\lambda_n} = K\}$$

La transformation considérée ici (changeant (S_n) en (t_n)) sera le procédé Δ^2 d'Aitken.

Je vais montrer que le Δ^2 d'Aitken réalise les conditions du procédé standard lorsque (S_n) appartient à $\widehat{\text{LOG}}\ 2$. Tout d'abord la régularité.

<u>*Propriété 7*</u> : *Le procédé Δ^2 d'Aitken est régulier pour* L.

<u>Démonstration</u>

$$t_n = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n} = S_n - \frac{(\Delta e_n)^2}{\Delta^2 e_n}$$

Montrons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\Delta e_n)^2}{\Delta^2 e_n} = 0$

$$\frac{(\Delta e_n)^2}{\Delta^2 e_n} = \frac{e_{n+1} - e_n}{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1} = e_n \times \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1} = e_n \times R_n$$

Lorsque $n \to +\infty$, $R_n \to \rho \in [0, 1]$ et $e_n \to 0$, donc le procédé est régulier .

<u>Remarque</u> : Le procédé Δ^2 d'Aitken est régulier sur un ensemble plus étendu que L : l'ensemble des suites pour lesquelles R_n reste borné.

En particulier, le Δ^2 d'Aitken est régulier sur $\widehat{\text{LOG}}\ 2$.

<u>*Propriété 8*</u> : $\widehat{\text{LOG}}\ 2$ *est l'ensemble des suites de* $\mathcal{L}$ *vérifiant*

$\exists\ C,\ C \neq 0,\ C \neq 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = C$$

Remarques :

. On sait, d'après la propriété 14 du chapitre 1 que $\widehat{\mathrm{LOG}\ 2} \subset \mathcal{L}$

. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = C$ entrainera que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t_n - S^*}{S_n - S^*} = C$

Démonstration

a) Soit (S_n) une suite de $\mathcal{L}$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = C$

Evidemment, $(S_n) \in \mathrm{LOG}\ 2$

Puisque $(S_n) \in \mathcal{L}$, d'après la propriété 15 (chapitre 1), elle vérifie

$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 - \alpha_n \lambda_n$, donc $\frac{\mu_n}{\lambda_n} = \alpha_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}^{*+}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = \alpha \in \mathbb{R}^{*+}$

Calculons maintenant $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\mu_n}{\Delta\lambda_n}$

$$\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = 1 - \frac{1}{\Delta S_n}\left[\frac{(\Delta S_{n+1})^2}{\Delta^2 S_{n+1}} - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}\right]$$

$$= 1 - \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1} + \frac{1}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}$$

$$= \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\left[\frac{1}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} - \frac{1}{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1}\right]$$

Or, $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = (1 - \lambda_n)(1 - \mu_n)$

$$\text{donc, } \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = (1 - \lambda_n)(1 - \mu_n)\left[\frac{1}{\mu_n\lambda_n - \mu_n - \lambda_n} - \frac{1}{\mu_{n+1}\lambda_{n+1} - \mu_{n+1} - \lambda_{n+1}}\right]$$

$$= (1 - \lambda_n)(1 - \mu_n)\,\frac{\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - \frac{\Delta\mu_n}{\mu_n\lambda_n}}{\left(\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} + \frac{\lambda_{n+1}}{\mu_n} - \frac{\lambda_{n+1}\mu_{n+1}}{\mu_n}\right)\left(1 + \frac{\mu_n}{\lambda_n} - \mu_n\right)}$$

Ceci tend vers C lorsque $n \to +\infty$

Or, $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \frac{\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \cdot \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_n}{\mu_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = \alpha \neq 0$

Le dénominateur de la fraction tend donc vers $(1 + \frac{1}{\alpha})(1 + \alpha)$

En écrivant l'égalité à la limite, on obtient

$$\frac{1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\mu_n}{\mu_n \lambda_n}}{(1 + \frac{1}{\alpha})(1 + \alpha)} = C$$

C'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\mu_n}{\mu_n \lambda_n} = 1 - C(1 + \alpha)\ (1 + \frac{1}{\alpha})$

Or, $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = -\mu_n\ \lambda_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\mu_n}{\Delta\lambda_n} = C(1 + \alpha)(1 + \frac{1}{\alpha}) - 1$

Il reste à montrer que cette constante est non nulle. Pour cela, il suffit de remarquer que α et C sont liées.

En effet, $\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} C$ implique que $\frac{t_n - S^*}{S_n - S^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{} C$

Or, $\frac{t_n - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \frac{1}{\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n}}$ d'où l'on déduit que $C = 1 - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\mu_n}{\Delta\lambda_n} = \alpha$ ($= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n}$) avec $\alpha \in \mathbb{R}^{**}$

C'est à dire que $(S_n) \in \widehat{LOG}\ 2$

b) Soit (S_n) une suite de $\widehat{LOG}\ 2$

Elle appartient à $\mathfrak{L}$, comme je l'ai remarqué précédemment.

D'après le calcul effectué au a,

$$\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = (1 - \lambda_n)(1 - \mu_n)\ \frac{\frac{\mu_{n+1}\ \lambda_{n+1}}{\mu_n\ \lambda_n} - \frac{\Delta\mu_n}{\mu_n\ \lambda_n}}{(\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} + \frac{\lambda_{n+1}}{\mu_n} - \frac{\lambda_{n+1}\ \mu_{n+1}}{\mu_n})(1 + \frac{\mu_n}{\lambda_n} - \mu_n)}$$

$$= (1-\lambda_n)(1-\mu_n)\,\frac{\dfrac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\cdot\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}+\dfrac{\Delta\mu_n}{\Delta\lambda_n}}{\left(\dfrac{\mu_{n+1}}{\mu_n}+\dfrac{\lambda_{n+1}}{\mu_n}-\dfrac{\lambda_{n+1}\,\mu_{n+1}}{\mu_n}\right)\left(1+\dfrac{\mu_n}{\lambda_n}-\mu_n\right)}$$

Puisque $(S_n) \in \widehat{LOG}\,2$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta\mu_n}{\Delta\lambda_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = K \neq 0$ (propriété 10 du chapitre 1)

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1$ (propriété 11 idem)

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = \frac{1+K}{(1+\frac{1}{K})(1+K)} = \frac{K}{K+1}$

K ne peut valoir - 1 car il est positif puisque (μ_n) et (λ_n) le sont à partir d'un certain rang.

$C = \frac{K}{K+1}$ est distinct de 0 et de 1.

Propriété 9 : Le θ_2-algorithme accélère la convergence de toute suite de $\widehat{LOG}$ **2**.

Démonstration :

Ceci est une conséquence directe des propriétés 7, 8 et du procédé standard. En prenant pour t_n la transformée par Δ^2 d'Aitken dans le procédé standard, on obtient en effet

$$T_n = S_n - \frac{S_n - t_n}{1 - \dfrac{\Delta t_n}{\Delta S_n}} = S_n - \frac{\Delta S_n}{\dfrac{S_{n+1} - t_{n+1}}{S_n - t_n} - 1}$$

qui est la deuxième colonne du θ-algorithme [Réf 4], [Réf 8].

Etude expérimentale

J'ai testé le θ_2-algorithme sur plusieurs suites de limite nulle : $S^* = 0$

(S_n) désigne la suite initiale ; (θ_n) la suite transformée par le θ_2.

a) La suite $(\frac{1}{n})$

cette suite appartient à $\widehat{LOG}$ 2.

N	$S_n - S^*$	$\theta_n - S^*$	$\frac{\theta_n - S^*}{S_n - S^*}$
5	.200000 D+00	.122125 D-14	.610625 D-14
10	.100000 D+00		
20	.500000 D-01		
50	.200000 D-01		

b) La suite définie par $\begin{cases} e_{n+1} = e_n(1 - 5e_n) \\ e_o = 0.1 \end{cases}$

Pour cette suite $\mu_n = \lambda_n = 5e_n$; elle appartient donc à $\widehat{LOG}$ 2.

N	$S_n - S^*$	$\theta_n - S^*$	$\frac{\theta_n - S^*}{S_n - S^*}$
5	.258270 D-01	-.933014 D-02	.361255 D+00
10	.150179 D-01	-.112041 D-02	.746051 D-01
20	.836077 D-02	-.243988 D-03	.291825 D-01
50	.365218 D-02	-.381599 D-04	.104485 D-01

III - ACCÉLÉRATION DE $\widehat{\text{LOG}}$ 1

$$\widehat{\text{LOG}}\ 1 = \{(S_n) \in \text{LOG}\,1 \,/\, \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta\lambda_n}{\Delta e_n} = K \neq 0\} \subset \text{LOG}\ 2$$

Considérons une suite de $\widehat{\text{LOG}}\,1$: (S_n) de limite S^*. Posons $t_n = \lambda_n + S_n$;

alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = S^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{\Delta\lambda_n}{\Delta S_n} + 1) = K + 1 \neq 1.$

La définition de $\widehat{\text{LOG}}$ 1 semble donc identique à celle de l'ensemble L du procédé standard. Il y a néanmoins une importante différence : pour calculer (t_n), il faudrait connaître (λ_n), c'est à dire connaître S^*.

Il est donc impossible d'appliquer directement le procédé standard pour accélérer LOG 1.Utilisons une autre méthode.

1) Technique du sous-ensemble

D'après la propriété 9 du chapitre 1, toute suite de $\widehat{\text{LOG}}$ 1 vérifie

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{e_n} = K$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \cdot \frac{e_n}{e_{n+1}} = 1$

Considérons le sous-ensemble de $\widehat{\text{LOG}}\,1$ constitué des suites pour lesquelles on a, à partir d'un certain rang, $\forall$ n, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \cdot \frac{e_n}{e_{n+1}} = 1.$

Si (S_n) est une suite du sous-ensemble, sa limite S^* est, à partir d'un certain rang, solution de l'équation

$$\frac{1 - \dfrac{S_{n+2} - S^*}{S_{n+1} - S^*}}{1 - \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*}} \times \frac{S_n - S^*}{S_{n+1} - S^*} = 1$$

c'est à dire $(\frac{e_{n+1}}{e_n})^2 = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$

$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ et $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ sont positifs à partir d'un certain rang car (S_n) est monotone

donc $$\frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = \sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}$$

Ceci est une équation du premier degré en S^* dont la solution est

$$S^* = S_n - \frac{\Delta S_n}{\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} - 1}$$

2) La transformation T_n

Considérons à présent une suite quelconque de $\widehat{LOG}\,1$ qui n'appartient plus forcément au sous-ensemble. A partir de 3 termes consécutifs de (S_n), il est possible de calculer

$$T_n = S_n - \frac{\Delta S_n}{\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} - 1}$$

Il est évident, par construction même, que cette transformation est exacte sur le sous-ensemble du 1). Est-ce un procédé d'accélération de convergence pour $\widehat{LOG}\,1$? La réponse à cette question est "oui" ; en fait, le résultat est un peu plus fort (cf. propriété 14 du chapitre 1).

Propriété 10 : *La transformation*

$$T_n = S_n - \frac{\Delta S_n}{\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} - 1}$$

accélère la convergence de toute suite de $L_{\frac{1}{2}}$

Démonstration :

Le rapport d'accélération est $\dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \dfrac{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\sqrt{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} - 1}$

ou, en multipliant par la quantité conjuguée

$$1 - \frac{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} \left(\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} + 1 \right) = 1 - R_n \times \left(\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} + 1 \right)$$

Lorsque (S_n) appartient à $L_{\frac{1}{2}}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 0$.

3) Retour au procédé standard

La transformation de la propriété 10 a été obtenu sans recours au procédé standard ; cependant, il s'agit bien d'un procédé du même type. Considérons en effet la transformation $t_n = S_n + \sqrt{|\Delta S_n|}$

. Cette transformation est régulière

. Le procédé de la propriété 10 s'écrit $T_n = S_n - \dfrac{\Delta S_n}{\dfrac{S_{n+1} - t_{n+1}}{S_n - t_n} - 1}$

. Si $(S_n) \in \widehat{LOG}\, 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = C \neq 1$

Démonstration :

Les deux premiers points sont évidents ; montrons le troisième

$$\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = 1 + \frac{\sqrt{|\Delta S_{n+1}|} - \sqrt{|\Delta S_n|}}{\Delta S_n}$$

$$= 1 \pm \frac{1}{\sqrt{|\Delta S_n|}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} - 1 \right)$$

(selon que (S_n) est strictement croissante ou strictement décroissante à partir d'un certain rang)

$$\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{|e_{n+1} - e_n|}} \cdot \frac{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}{\sqrt{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} + 1}$$

$$= 1 \pm \frac{1}{\sqrt{|e_n|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1\right|}} \cdot \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}{\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} + 1}$$

$$= 1 \pm \frac{1}{\sqrt{|e_n| \cdot \lambda_n}} \cdot \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}{\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} + 1}$$

$$\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n} = 1 \pm \sqrt{\frac{\lambda_n}{|e_n|}} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}{\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} + 1}$$

$$= 1 \pm \sqrt{\frac{\lambda_n}{|e_n|}} \cdot \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} + 1}$$

Si (S_n) appartient à $\widehat{LOG}$ 1, $(\frac{\lambda_n}{e_n})$ tend vers une constante non nulle (propriété 9 chapitre 1), il en est donc de même pour $\sqrt{\frac{\lambda_n}{|e_n|}}$. D'autre part, (S_n) appartient également à $L_{\frac{1}{2}}$, le rapport $\frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}{\lambda_n}$ tend vers -2. Il est évident, par ailleurs, que $\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} + 1$ tend vers 2. En définitive $(\frac{\Delta t_n}{\Delta S_n})$ tend vers $1 \pm K$, K étant une constante non nulle.

IV - ACCÉLÉRATION DE L_ρ

Je vais utiliser ici la variante du procédé standard.

1) Accélération par le procédé Δ^2 d'Aitken

J'ai dit, dans l'introduction du chapitre 1, que le procédé Δ^2 d'Aitken échouait fréquemment dans l'accélération de la convergence logarithmique. Il existe cependant un sous-ensemble de Log accéléré par le Δ^2 d'Aitken.

Considérons en effet $T_n = S_n - \dfrac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$

Le rapport d'accélération $\dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \dfrac{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\dfrac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1} = 1 - R_n$

Une condition nécessaire et suffisante pour que (S_n) soit accélérée par le procédé Δ^2 d'Aitken est que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 1$, c'est à dire que (S_n) appartienne à L_1.

Propriété 11 : *L'ensemble des suites à convergence logarithmique accélérées par le procédé Δ^2 d'Aitken est L_1.*

2) Application de la variante du procédé standard

Le résultat de la propriété 11 peut être généralisé.

Prenons $\rho \in]0, 1]$.

Propriété 12 : *Considérons l'ensemble L_ρ avec $\rho \in]0, 1]$; appelons (δ_n) la suite transformée par le Δ^2 d'Aitken d'une suite (S_n) de L_ρ. Alors.*

. $\forall (S_n) \in L_\rho$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

. $\forall (S_n) \in L_\rho$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\delta_n - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \rho \neq 1.$

Démonstration

$$\frac{\delta_n - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - \rho$$

Ceci implique, de plus, la régularité du procédé Δ^2 d'Aitken

La transformation Δ^2 d'Aitken remplit donc, pour L_ρ, les hypothèses de la variante du procédé standard ; on en déduit la

Propriété 13 : *La transformation* $T_n = S_n - \dfrac{(\Delta S_n)^2}{\rho\, \Delta^2 S_n}$ *accélère la convergence de toute suite de* L_ρ *(*ρ *étant supposé appartenir à* $]0, 1]$*).*

Si $\rho = 1$, on retrouve le résultat de la propriété 11.

3) Un autre procédé d'accélération de L_ρ

La propriété 10 nous a donné un procédé d'accélération valable pour toute suite de $L_{\frac{1}{2}}$; appelons (T_n^1) la suite transformée de (S_n) par ce procédé

$$T_n^1 = S_n - \frac{\Delta S_n}{\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} - 1}$$

D'autre part, faisons $\rho = \frac{1}{2}$ dans la propriété 13 ; on obtient un autre procédé valable pour $L_{\frac{1}{2}}$; appelons (T_n^2) la suite transformée de (S_n) par ce procédé.

$$T_n^2 = S_n - \frac{\Delta S_n}{\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1\right)}$$

T_n^2 peut se déduire de T_n^1 en faisant une approximation de la racine carrée.

En effet

$$\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} = [1 + (\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1)]^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \lim_{n\to+\infty} (\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1) = 0$$

$\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}$ est donc équivalent, lorsque $n \to +\infty$, à $1 + \frac{1}{2} (\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1)$

En remplaçant $\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}$ par cet équivalent dans T_n^1, on retrouve T_n^2.

Considérons à présent la transformation de la propriété 13.

$$T_n^2 = S_n - \frac{\Delta S_n}{\rho(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1)}$$

Ceci peut être considéré comme une approximation de

$$T_n^1 = S_n - \frac{\Delta S_n}{(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n})^{\rho} - 1}$$

<u>*Propriété 14*</u> *: La transformation*

$$T_n = S_n - \frac{\Delta S_n}{(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n})^{\rho} - 1}$$

accélère la convergence de toute suite de L_ρ *(avec* $\rho \in]0, 1]$*)*

<u>Démonstration</u>

$$\frac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n})^{\rho} - 1}$$

Or, ceci est équivalent à $1 - \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\rho(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1)} = 1 - \frac{R_n}{\rho}$

Puisque $(S_n) \in L$, $\lim_{n\to+\infty} R_n = \rho$; donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 0$

Remarques :

* Dans le cas où $\rho = 1$, les deux transformations (propriétés 13 et 14) se ramènent au Δ^2 d'Aitken. On peut donc les considérer comme des généralisations du procédé Δ^2 d'Aitken.

Une transformation analogue à celle de la propriété 13 a été étudiée dans [Réf 5].

* Dans la pratique, ces transformations sont peu intéressantes car elles nécessitent la connaissance de ρ qui est, généralement inconnu. Elles sont toutefois applicables pour les suites de point fixe lorsque l'on connaît certaines propriétés des dérivées successives au point fixe (propriété 17 du chapitre 1).

4) Etude expérimentale

J'ai comparé ces deux transformations dans le cas où $\rho = \frac{1}{2}$

(S_n) est la suite initiale de limite S^*

$$T_n^1 = S_n - \frac{\Delta S_n}{\sqrt{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} - 1} \qquad T_n^2 = S_n - \frac{2(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$$

1) La suite $(\frac{1}{n})$ de limite 0

Par cette suite $\lambda_n = \frac{1}{n+1}$, $\mu_n = \frac{1}{n+2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = 1$

Elle appartient donc à $L_{\frac{1}{2}}$

N	$S_n - S^*$	$T_n^1 - S^*$	$\dfrac{T_n^1 - S^*}{S_n - S^*}$	$T_n^2 - S^*$	$\dfrac{T_n^2 - S^*}{S_n - S^*}$
5	.200000 D+00	-.363743 D-01	-.181872 D+00	-.833333 D-01	-.416666 D+00
10	.100000 D+00	-.655744 D-02	-.655744 D-01	-.138889 D-01	-.138889 D+00
20	.500000 D-01	-.142349 D-02	-.284698 D-01	-.292398 D-02	-.584796 D-01
50	.200000 D-01	-.210416 D-03	-.105208 D-01	-.425170 D-03	-.212585 D-01

2) La suite définie par

$$\begin{cases} e_{n+1} = \dfrac{e_n}{1+e_n} \\ e_o = 1 \end{cases}$$

Pour cette suite, $\lambda_n = \dfrac{e_n}{1+e_n}$, $\mu_n = \dfrac{e_n}{1+2e_n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mu_n}{\lambda_n} = 1$

Elle appartient également à $L_{\frac{1}{2}}$

N	$S_n - S^*$	$T_n^1 - S^*$	$\dfrac{T_n^1 - S^*}{S_n - S^*}$	$T_n^2 - S^*$	$\dfrac{T_n^2 - S^*}{S_n - S^*}$
5	.166667 D+00	-.224745 D-01	-.134847 D+00	-.500000 D-01	-.299999 D+00
10	.909091 D-01	-.527708 D-02	-.580479 D-01	-.111111 D-01	-.122222 D+00
20	.476190 D-01	-.128287 D-02	-.269403 D-01	-.263158 D-02	-.552632 D-01
50	.196078 D-01	-.202041 D-03	-.103041 D-01	-.408163 D-03	-.208164 D-01

3) La suite définie par

$$\begin{cases} e_{n+1} = e_n(1 - e_n) \\ e_o = 0.5 \end{cases}$$

Pour cette suite, $\lambda_n = \mu_n = e_n$. Elle appartient à $L_{\frac{1}{2}}$; elle appartient également au sous-ensemble où la transformation (T_n^1) est exacte.

N	$S_n - S^*$	$T_n^1 - S^*$	$\dfrac{T_n^1 - S^*}{S_n - S^*}$	$T_n^2 - S^*$	$\dfrac{T_n^2 - S^*}{S_n - S^*}$
5	.112459 D+00	.0	0	-.125611 D-01	-.111695 D+00
10	.694509 D-01			-.348626 D-02	-.501975 D-01
20	.400563 D-01			-.976844 D-03	-.243878 D-01
50	.179275 D-01			-.174738 D-03	-.974693 D-02

4) La suite définie par

$$\begin{cases} e_{n+1} = e_n \dfrac{1-e_n}{1+e_n} \\ e_o = 0.5 \end{cases}$$

Pour cette suite, $\lambda_n = \dfrac{2e_n}{1+e_n}, \mu_n = \dfrac{2e_n}{1+2e_n - e_n^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mu_n}{\lambda_n} = 1$

Elle appartient encore à $L_{\frac{1}{2}}$

N	$S_n - S^*$	$T_n^1 - S^*$	$\dfrac{T_n^1 - S^*}{S_n - S^*}$	$T_n^2 - S^*$	$\dfrac{T_n^2 - S^*}{S_n - S^*}$
5	.535380 D-01	-.203203 D-02	-.379550 D-01	-.684477 D-02	-.127849 D+00
10	.343124 D-01	-.725420 D-03	-.211416 D-01	-.232635 D-02	-.677991 D-01
20	.201238 D-01	-.227649 D-03	-.113124 D-01	-.708359 D-03	-.352001 D-01
50	.904953 D-02	-.430902 D-04	-.476160 D-02	-.131310 D-03	-.145101 D-01

En général, (T_n^1) donne de meilleurs résultats que (T_n^2), ce qui est normal puisque (T_n^2) est en fait une valeur approchée de (T_n^1). Ce résultat est particulièrement évident dans le troisième exemple (suite du sous-ensemble).

V - ACCÉLÉRATION PAR LE PROCÉDÉ D'INTERPOLATION DE RICHARDSON

1) Description du procédé

Soit (S_n) de limite S^* la suite dont on cherche à accélérer la convergence ; et soit une suite auxiliaire (x_n) de limite 0.

Le procédé de Richardson (colonne p) consiste à supposer que S_n est fonction polynômiale de degré p de x, c'est à dire que $S_n = a_p x_n^p + a_{p-1} x_n^{p-1} + \ldots + a_1 x_n + a_o$ [Réf 2] p 26. Cette égalité donne à la limite $S^* = a_o$. En écrivant l'égalité pour (p+1) indices consécutifs : n, n+1, ..., n+p, on calcule a_o que l'on prend comme approximation $T_n^{(p)}$ de S^*.

La première colonne du procédé de Richardson (interpolation par un polynôme de degré 1) donne la transformation :

$$T_n = S_n - x_n \frac{\Delta S_n}{\Delta x_n}$$

La condition d'accélération de convergence : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 0$ s'écrit ici

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1} = 1$$

En particulier, une condition nécessaire pour que le procédé de Richardon accélère la convergence de (S_n), suite à convergence logarithmique est que la suite auxiliaire (x_n) soit également à convergence logarithmique.

2) Choix de la suite auxiliaire

Supposons que (S_n) appartienne à L_1

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1} = 1$$

Il suffit de prendre (ΔS_n) pour suite auxiliaire.

La première colonne du procédé de Richardson est alors analogue au procédé Δ^2 d'Aitken et on retrouve le résultat de la propriété 11.

Supposons maintenant que (S_n) appartienne à L_ρ avec $\rho \in]0, 1[$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1} = \rho$$

Générons la suite auxiliaire par $\begin{cases} x_o > 0 \\ x_{n+1} = x_n \left[1 - \rho\left(1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)\right] \end{cases}$

(x_n) converge logarithmiquement vers 0.

Démonstration :

(S_n) appartient à LOG 2, appelons (λ_n) et (μ_n) ses suites dérivées première et seconde.

$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = (1 - \lambda_n)(1 - \mu_n)$. A partir d'un certain rang, ceci est compris entre 0 et 1.

Il en est de même de $\left[1 - \rho\left(1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)\right]$

La suite (x_n) est donc positive et décroissante, c'est à dire convergente.

Notons x^* sa limite

$$x^* = x_o \prod_{n=o}^{+\infty} \left[1 - \rho\left(1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)\right]$$

Ce produit infini diverge si et seulement si la série $\sum_{n=o}^{+\infty} \left(1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)$ diverge.

Or, puisque $(S_n) \in L_\rho$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} = \rho \in]0, 1[$

La série $\sum_{n=o}^{+\infty} \left(1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)$ est donc de même nature que $\sum_{n=o}^{+\infty} \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1\right)$, c'est à dire de même nature que $\sum_{n=o}^{+\infty} \lambda_n$, c'est à dire divergente (propriété 4 chapitre 1)

Le produit infini diverge donc et, en conséquenc, x^* ne peut valoir que 0.

D'autre part $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \rho(1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Le choix de cette suite auxiliaire dans le procédé de Richardson permet, naturellement, de remplir la condition d'accélération de convergence.
Le procédé obtenu est analogue au procédé décrit dans la propriété 13.
Il y a deux généralisations possibles de ce procédé.

1) On conserve la même suite auxiliaire et on calcule les colonnes suivantes du procédé de Richardson (interpolation de degré 2, 3, ...)

2) On calcule, de la même manière, une autre suite auxiliaire à partir de la suite transformée et on réitère le procédé. On obtient ainsi une généralisation du Δ^2 itéré.

Remarque : Ce procédé est à rapprocher de celui défini par Wimp dans [Réf 18] page 172.

3) Expériences numériques

J'ai comparé ces deux procédés pour la suite $(\frac{1}{n})$ qui appartient à $\widehat{LOG}\,1$, donc à $L_{\frac{1}{2}}$. Appelons (S_n) la suite initiale, de limite $S^* = 0$; appelons (R_n^i) la suite transformée par la $i^{ème}$ colonne du procédé de Richardson et (Δ_n^i) la suite transformée par la $i^{ème}$ colonne de la généralisation du Δ^2 itéré.

N	$S_n - S^*$	$R_n^1 - S^*$	$\frac{R_n^1 - S^*}{S_n - S^*}$	$R_n^2 - S^*$	$\frac{R_n^2 - S^*}{S_n - S^*}$	$R_n^3 - S^*$	$\frac{R_n^3 - S^*}{S_n - S^*}$	$R_n^4 - S^*$	$\frac{R_n^4 - S^*}{S_n - S^*}$
5	.200000D+00	-.100000D+00	-.500000D+00	.666667D-01	.333333D+00	-.666667D-01	-.333333D+00	.379545D+00	.189773D+01
10	.100000D+00	-.222222D-01	-.222222D+00	.555556D-02	.555556D-01	-.158730D-02	-.158730D-01	.529101D-03	.529101D-02
20	.500000D-01	-.526316D-02	-.105263D+00	.584795D-03	.116959D-01	-.687799D-04	-.137599D-02	.859993D-05	.171999D-03
40	.250000D-01	-.128205D-02	-.512821D-01	.674764D-04	.269906D-02	-.364737D-05	-.145895D-03	.202618D-06	.810470D-05

N	$S_n - S^*$	$\Delta_n^1 - S^*$	$\frac{\Delta_n^1 - S^*}{S_n - S^*}$	$\Delta_n^2 - S^*$	$\frac{\Delta_n^2 - S^*}{S_n - S^*}$	$\Delta_n^3 - S^*$	$\frac{\Delta_n^3 - S^*}{S_n - S^*}$	$\Delta_n^4 - S^*$	$\frac{\Delta_n^4 - S^*}{S_n - S^*}$
5	.200000D+00	-.100000D+00	-.500000D+00	.144444D+00	.722222D+00	-.356522D+00	-.178261D+01	-.565447D+01	-.282724D+00
10	.100000D+00	-.222222D-01	-.222222D+00	.166667D-01	.166667D+00	-.157596D-01	-.157596D+00	.191289D-01	.191289D+00
20	.500000D-01	-.526316D-02	-.105263D+00	.272904D-02	.545808D-01	-.157756D-02	-.315512D-01	.104434D-02	.208868D-01
40	.250000D-01	-.128205D-02	-.512821D-01	.539811D-03	.215924D-01	-.237373D-03	-.949492D-02	.109422D-03	.437688D-02

Sur cet exemple, la première méthode donne de meilleurs résultats.

Pour diverses valeurs de ρ, j'ai ensuite comparé les valeurs du rapport d'accélération $\dfrac{R_n^1 - S^*}{S_n - S^*}$ après 50 itérations.

La suite initiale est, pour chacun des ρ considérés, construite de la même manière : $\begin{cases} \lambda_{n+1} = \lambda_n (1 - \alpha\lambda_n) \\ e_{n+1} = e_n (1 - \lambda_n) \end{cases}$

avec $\alpha \frac{1}{\rho} - 1$; λ_o et e_o sont choisis afin d'assurer la convergence des deux suites (λ_n) et (e_n) vers 0.

Le tableau suivant montre qu'il n'y a pas de différence importante selon les valeurs de ρ.

α	ρ	rapport d'accélération
100	.990099 D-02	.171653 D-01
10	.909091 D-01	.204722 D-01
5	.166667 D+00	.221530 D-01
2	.333333 D+00	.246050 D-01
0.5	.666667 D+00	.325509 D-01
0.2	.833333 D+00	.197534 D-01
0.1	.909091 D+00	.267343 D-01
0.01	.990099 D+00	.336712 D-01

VI - ACCÉLÉRATION DU PROCÉDÉ DE MANN

1) Définition des suites de Mann

J'utilise les résultats de [Réf 8] page 83.

Considérons

* une application $f : [0, 1] \to [0, 1]$

lipschitzienne et n'ayant qu'un nombre fini de points fixes

* une suite (α_n) telle que . $\forall\, n,\ 0 < \alpha_n < 1$

. $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$

. la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ diverge

Définissons la suite (v_n) par :

. $v_1 \in [0, 1]$

. $v_{n+1} = v_n + \alpha_n (f(v_n) - v_n)$

Alors, la suite (v_n) converge logarithmiquement vers un point fixe v^* de f. De plus, elle est strictement monotone à partir d'un certain rang.

Remarques :

1) Une telle application f a forcément au moins un point fixe d'après le théorème de Leray-Schauder.

2) L'application f étant donnée, l'intervalle [0, 1] se subdivise en une ou plusieurs zones d'attraction correspondant aux divers points fixes. Certains de ces points fixes peuvent ne jamais être atteints par une suite de Mann. Par exemple, dans le cas où f est de classe C1, les points fixes où la dérivée est strictement supérieure à 1 sont répulsifs. Les propriétés démontrées dans [Réf 8] peuvent se résumer dans :

Propriété 15 : Toute suite de Mann appartient à LOG 1.

Je vais maintenant m'intéresser à deux questions qui sont d'ailleurs liées l'une à l'autre. Peut-on affirmer, sous certaines conditions, qu'une suite de Mann appartient à tel ou tel sous-ensemble de LOG 1 précédemment défini ? Peut-on accélérer, sous certaines conditions, la convergence des suites de Mann ? Pour accélérer une suite de Mann, je serai amenée à ajouter des hypothèses sur la fonction f, hypothèses qui permettraient d'ailleurs d'utiliser d'autres méthodes, plus efficaces que la méthode de Mann pour obtenir une suite convergeant vers le point fixe.

2) Propriétés des suites de Mann

Propriété 16 : *La suite* (α_n) *vérifie*

. *ou bien* $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ *n'a pas de limite*

. *ou bien* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$

Démonstration

Si $(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n})$ a une limite, cette limite est forcément positive puisque (α_n) est toujours positive. Elle ne peut pas être plus grande que 1 car on aurait alors, à partir d'un certain rang $\alpha_{n+1} > \alpha_n$, ce qui est contradictoire avec le fait que (α_n) tende vers 0 en restant positive. Donc, cette limite appartient à $[0, 1]$.

Si on avait $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \in [0, 1[$, la série $\sum\limits_{n=o}^{+\infty} \alpha_n$ convergerait d'après le critère de d'Alembert, ce qui impossible, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$

Supposons à présent que f est de classe C1 au voisinage du point fixe v^* considéré. Cette hypothèse permet de donner une écriture différente de plusieurs expressions grâce à des développements de Taylor.

$f(v_n) = f(v^*) + (v_n - v^*)\, f'(\hat{v}_n)$ avec $\hat{v}_n \in]v^*, v_n[$

$$\frac{f(v_n) - v_n}{v_n - v^*} = -1 + f'(\hat{v}_n) \qquad \text{(i)}$$

D'autre part $f(v_{n+1}) - v_{n+1} = f[v_n + \alpha_n(f(v_n) - v_n)] - v_n - \alpha_n(f(v_n) - v_n)$

A partir d'un certain rang, v_n est donc dans le voisinage de v^* où f est de classe C1, donc :

$f(v_{n+1}) - v_{n+1} = f(v_n) + \alpha_n(f(v_n) - v_n)\, f'(\tilde{v}_n) - v_n - \alpha_n(f(v_n) - v_n)$
avec $\tilde{v}_n \in]v_{n+1}, v_n[$

$$\frac{f(v_{n+1}) - v_{n+1}}{f(v_n) - v_n} = 1 + \alpha_n(f'(\tilde{v}_n) - 1) \qquad \text{(ii)}$$

Cette expression montre, étant donné que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(v_{n+1}) - v_{n+1}}{f(v_n) - v_n} = 1$ car, f est C1 et $\tilde{v}_n$ tend vers v^* lorsque $n \to +\infty$, donc $(f'(\tilde{v}_n) - 1)$ est borné lorsque $n \to +\infty$.

$f(v_{n+1}) = f(v_n) + \alpha_n(f(v_n) - v_n)\, f'(\tilde{v}_n)$
entraîne également $\dfrac{f(v_{n+1}) - f(v_n)}{v_{n+1} - v_n} = \dfrac{\alpha_n(f(v_n) - v_n)\, f'(\tilde{v}_n)}{v_{n+1} - v_n} = f'(\tilde{v}_n)$

$$\frac{f(v_{n+1}) - f(v_n)}{v_{n+1} - v_n} = f'(\tilde{v}_n) \qquad \text{(iii)}$$

<u>*Propriété 17*</u> *: Si f est de classe C1 au voisinage du point fixe v^* considéré, une condition nécessaire et suffisante pour que (v_n) appartienne à LOGSF est que (α_n) appartienne à Log.*

<u>Démonstration</u> :

$\dfrac{v_{n+1} - v^*}{v_n - v^*} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ d'après la propriété 1.

$$\frac{\Delta v_{n+1}}{\Delta v_n} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \cdot \frac{f(v_{n+1}) - v_{n+1}}{f(v_n) - v_n}$$

La démonstration est évidente d'après la remarque suivant (ii)

3) Accélération de la convergence pour les suites de Mann

Considérons les suites de Mann construites à partir d'une fonction f de classe C1 au voisinage de v^*. Les points où la dérivée est supérieure strictement à 1 sont répulsifs ; bornons nous aux cas où $f'(v^*) \leq 1$ [Réf 8].

Propriété 18 : *Soit* (v_n) *une suite de Mann convergente construite à partir d'une application* f *de classe C1 au voisinage de* v^* *et telle que* $f'(v^*) < 1$ *Alors la transformation*

$$T_n = v_n + \frac{f(v_n) - v_n}{1 - \dfrac{f(v_{n+1}) - f(v_n)}{v_{n+1} - v_n}}$$

accélère la convergence de (v_n)

Démonstration

(1) Régularité

D'après (iii), $T_n = v_n + \dfrac{f(v_n) - v_n}{1 - f'(\tilde{v}_n)}$

f étant C1, $1 - f'(\tilde{v}_n)$ tend vers $1 - f'(v^*)$ qui est strictement positif.

D'autre part, v^* étant point fixe, $f(v_n)$ tend vers 0.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = v^*$

2) accélération de la convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n - v^*}{v_n - v^*} = \lim_{n\to+\infty} [1 + \frac{\dfrac{f(v_n) - v_n}{v_n - v^*}}{1 - \dfrac{f(v_{n+1}) - f(v_n)}{v_{n+1} - v_n}}] = \lim_{n\to+\infty} [1 + \frac{-1 + f'(\hat{v}_n)}{1 - f'(\tilde{v}_n)}]$$

§ en utilisant (i) et (iii)

Lorsque $n \to +\infty$, $f'(\hat{v}_n)$ et $f'(\tilde{v}_n)$ tendent vers $f'(v^*) < 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n - v^*}{v_n - v^*} = 0$$

Il est possible de donner une autre expression de T_n ne faisant plus intervenir f mais seulement la suite (α_n).

En effet, $V_{n+1}=V_n+\alpha_n(f(V_n)-V_n)$ implique que $f(v_n) = v_n + \dfrac{\Delta v_n}{\alpha_n}$

$$\text{donc } T_n = v_n + \frac{\dfrac{\Delta v_n}{\alpha_n}}{1 - \dfrac{\Delta v_n + \dfrac{\Delta v_{n+1}}{\alpha_{n+1}} - \dfrac{\Delta v_n}{\alpha_n}}{\Delta v_n}} = v_n - \frac{(\Delta v_n)^2}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{\dfrac{\Delta v_{n+1}}{\alpha_{n+1}} - \dfrac{\Delta v_n}{\alpha_n}}$$

$$T_n = v_n - \frac{\Delta v_n}{\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \cdot \dfrac{\Delta v_{n+1}}{\Delta v_n} - 1}$$

Cette transformation est analogue à celle étudiée par Ney [Réf 16].

4) Accélération des suites de Mann par le procédé Δ^2 d'Aitken

Cherchons d'abord une condition pour qu'une suite de Mann appartienne à un ensemble L_ρ. Appelons $e_n = v_n - v^*$ et (λ_n) la suite dérivée première de (v_n)

$$R_n = \frac{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\dfrac{\Delta v_{n+1}}{\Delta v_n} - 1} = \frac{\lambda_n}{1 - \dfrac{\Delta v_{n+1}}{\Delta v_n}}$$

$$\frac{v_{n+1} - v^*}{v_n - v^*} = 1 + \alpha_n \frac{f(v_n) - v_n}{v_n - v^*} \quad \text{donc } \lambda_n = -\alpha_n \frac{f(v_n) - v_n}{v_n - v^*}$$

$$= \alpha_n(1 - f'(\hat{v}_n)) \text{ d'après (i)}$$

$$R_n = \frac{\alpha_n(1 - f'(\hat{v}_n))}{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \cdot \frac{f(v_{n+1}) - v_{n+1}}{f(v_n) - v_n}} = \frac{\alpha_n(1 - f'(\hat{v}_n))}{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}[1 + \alpha_n(f'(\tilde{v}_n) - 1)]} \quad \text{d'après (ii)}$$

(α_n) étant supposée à convergence logarithmique, appelons (α'_n) sa suite dérivée première : $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 - \alpha'_n$; supposons que $\alpha'_n > 0$ à partir d'un certain rang, donc que $(\alpha_n) \in \mathrm{LOG}\ 1$

$$R_n = \frac{\alpha_n(1 - f'(\hat{v}_n))}{\alpha'_n - \alpha_{n+1}(f'(\tilde{v}_n) - 1)} = \frac{1 - f'(\hat{v}_n)}{\frac{\alpha'_n}{\alpha_n} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(1 - f'(\tilde{v}_n))}$$

Hypothèse : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha'_n}{\alpha_n} = K \in \mathbb{R}^+$

Il y a deux cas :

1er cas : $f'(v^*) = 1$

le numérateur de R_n tend vers 0 ; son dénominateur tend vers K.

. si $K = 0$, on ne peut rien dire

. si $K \neq 0$, (v_n) appartient à L_o.

2ème cas : $f'(v^*) < 1$. Notons $\ell = 1 - f'(\hat{v}_n) > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = \frac{\ell}{\ell + K}$$

. si $K = 0$, (v_n) appartient à L_1 et est donc accélérée par le procédé Δ^2 d'Aitken

. si $K \neq 0$, (v_n) appartient à $L_{\frac{\ell}{\ell+K}}$. On pourrait accélérer la convergence de (v_n) par les transformations des propriétés 13 et 14 à condition de connaître ℓ c'est à dire la dérivée au point fixe.

On peut résumer ceci dans la

Propriété 19 : Soit (v_n) *une suite de Mann convergente définie à l'aide :*

. d'une application f, *de classe C1 au voisinage de* v^* *et vérifiant* $f'(v^*) < 1$

. d'une suite (α_n) *de* LOG 1 *vérifiant* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha'_n}{\alpha_n} = 0$

Alors le procédé Δ^2 *d'Aitken accélère la convergence de* (v_n).

Remarque : une suite (α_n) ayant les propriétés requises sera, par exemple, la suite

$$\begin{cases} \alpha_o \in]0, 1[\\ \alpha_{n+1} = \alpha_n(1 - \alpha_n^p) \text{ avec } p > 1 \text{ (entier ou non)} \end{cases}$$

Démonstration :

. $0 < \alpha_o < 1$

Supposons que $0 < \alpha_n < 1$ alors $0 < 1 - \alpha_n^p < 1$ donc $0 < \alpha_n\ (1-\alpha_n^p) < \alpha_n < 1$ c'est à dire que $0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n < 1$

La suite (α_n) positive, décroissante, tend vers une limite α^* qui vérifie $\alpha^* = \alpha^*(1 - \alpha^{*p})$ donc $\alpha^* = 0$.

La suite (α_n) tend vers 0 et vérifie $0 < \alpha_n < 1$ pour tout n

. $\alpha_{n+1} = \alpha_o \prod\limits_{i=o}^{n} (1 - \alpha_i^p)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=o}^{n} (1 - \alpha_i^p) = 0$

Le produit infini $\prod\limits_{i=o}^{+\infty} (1 - \alpha_i^p)$ diverge vers 0 car aucun de ses facteurs n'est nul, la série $\sum\limits_{i=o}^{+\infty} \alpha_i^p$ diverge donc également ; et, puisque $p > 1$, $0 < \alpha_i^p < \alpha_i < 1$; la série $\sum\limits_{i=o}^{+\infty} \alpha_i$ diverge aussi.

La suite (α_n) remplit donc les 3 conditions requises par le procédé de Mann.

. D'autre part $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 - \alpha_n^p$; donc $\alpha'_n = \alpha_n^p$

et $\frac{\alpha'_n}{\alpha_n} = \alpha_n^{p-1}$ ceci tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$

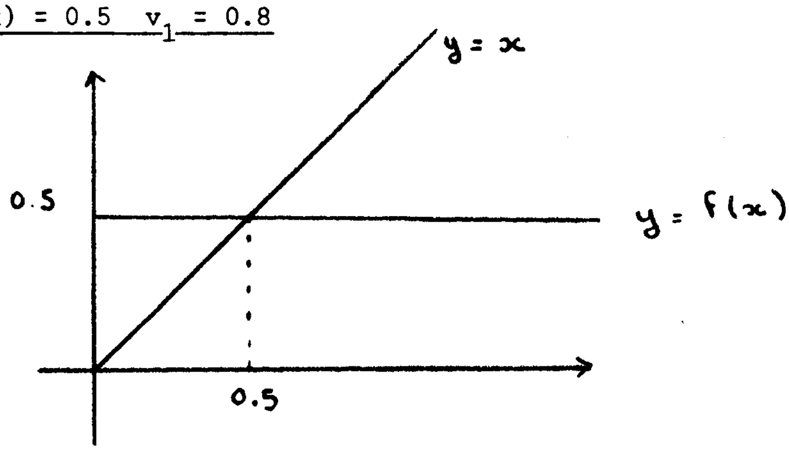
5) Expériences numériques

A) J'ai comparé le procédé de la propriété 18 (procédé de Ney) avec le Δ^2 d'Aitken sur différentes suites de Mann. J'appelle (δ_n) la transformée de (S_n) par Δ^2 d'Aitken et (T_n) sa transformée par le procédé de Ney.

Dans tous les cas (α_n) est définie par $\begin{cases} \alpha_1 = 0.7 \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n(1 - \alpha_n^2) \end{cases}$

cette suite vérifie les hypothèses de la propriété 19.

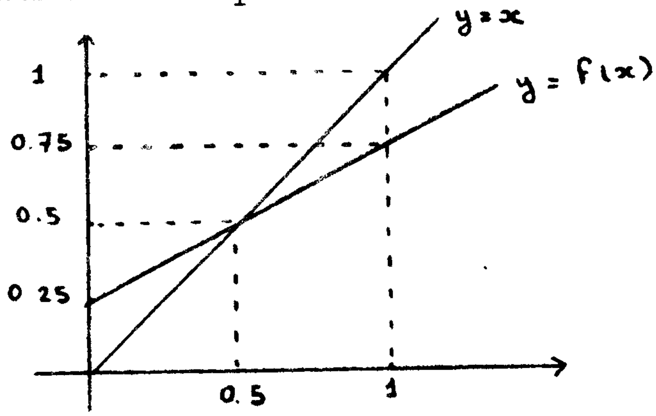
1) $f(x) = 0.5 \quad v_1 = 0.8$



la suite de Mann (v_n) converge vers 0.5, $f'(0.5) = 0$, $f''(0.5) = 0$

N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\frac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\frac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
5	.286365 D-01	.461117 D-02	.161024 D+00	.416334 D-16	.145386 D-14
10	.774301 D-02	.105759 D-02	.136587 D+00		
20	.119358 D-02	.132565 D-03	.111065 D+00		
60	.108121 D-04	.805666 D-06	.745156 D-01		

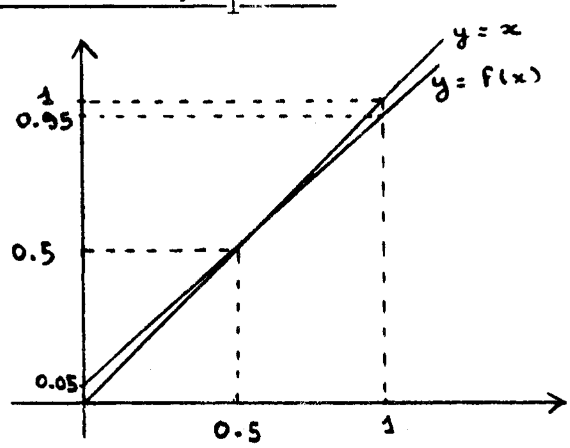
2) $\underline{f(x) = 0.5x + 0.25,\ v_1 = 0.8}$



la suite de Mann (v_n) converge vers $v^* = 0.5$, $f'(0.5) = 0.5$, $f''(0.5) = 0$

N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\dfrac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\dfrac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
5	.116222 D+00	.361215 D-01	.310797 D+00	.735523 D-15	.632859 D-14
10	.630907 D-01	.165362 D-01	.262101 D+00		
20	.258861 D-01	.552425 D-02	.213406 D+00		
60	.264451 D-02	.381982 D-03	.144444 D+00		

3) $\underline{f(x) = 0.9x + 0.05,\ v_1 = 0.8}$



La suite de Mann (v_n) converge vers $v^* = 0.5$, $f'(0.5) = 0.9$, $f''(0.5) = 0$

N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\dfrac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\dfrac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
5	.253327 D+00	.181423 D+00	.716161 D+00	-.839606 D-14	.331431 D-13
10	.225510 D+00	.148577 D+00	.658848 D+00		
20	.189896 D+00	.112140 D+00	.590535 D+00		
60	.121602 D+00	.567598 D-01	.466766 D+00		

Pour ces trois exemples, la valeur de la dérivée du point fixe n'intervient pas pour l'accélération par le procédé de Ney ; par contre l'accélération par le Δ^2 d'Aitken est d'autant plus mauvaise que la dérivée est proche de 1.

B) Etudions à présent l'influence de la suite (α_n)

Considérons $\begin{cases} \alpha_o = 0.7 \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n (1 - \alpha_n^p) \end{cases}$ avec p = 2, 5, 10 et 100

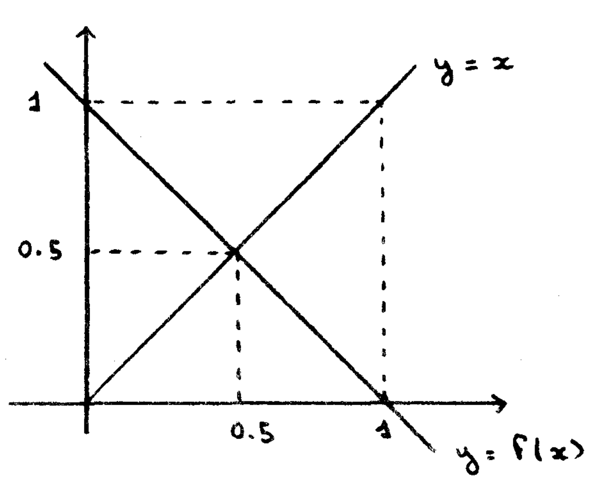
Plus grand est p, plus vite converge le rapport $\dfrac{\alpha'_n}{\alpha_n}$ vers 0.

1) $\underline{f(x) = - x+1, \quad v_1 = 0.8}$

(v_n) converge vers $v^* = 0.5$

$f'(0.5) = -1$

$f''(0.5) = 0$



P=2

N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\dfrac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\dfrac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
5	-.565999D-02	-.332532D-03	.587514D-01	.832667D-16	-.147115D-13
10	-.257008D-03	-.144770D-04	.563292D-01		
20	-.393998D-05	-.193895D-06	.492123D-01		
60	-.169088D-09	-.593171D-11	.350806D-01		

P=5

N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\dfrac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\dfrac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
5	.603666D-04	.602266D-08	.997681D-04	.138778D-16	.229892D-12
10	.316866D-11				
20	.277856D-16				
60					

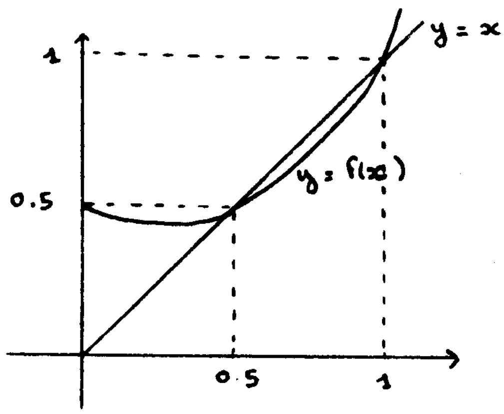
P=10

N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\dfrac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\dfrac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
5	.442922D-02	-.124379D-04	-.280813D-02	.832667D-16	.187994D-13
10	-.534742D-05	.742083D-08	-.138774D-02		
20	-.342198D-12	.291434D-15	-.851651D-03		
60	.138778D-16				

P=100

N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\dfrac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\dfrac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
5	.768000D-02	.138778D-16	.180700D-14	.277556D-16	.361401D-14
10	-.786432D-04				
20	-.824634D-08				
60	.138778D-16				

2) $\underline{f(x) = x^2 - 0.5x + 0.5,\ v_1 = 0.8}$



(v_n) converge vers $v^* = 0.5$

$f'(0.5) = 0.5$

$f''(0.5) = 2$

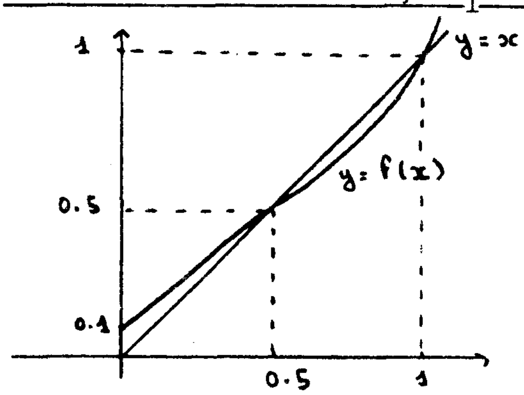
	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\frac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\frac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
	5	.199045D+00	.365151D-01	.183452D+00	-.311091D+00	-.156292D+01
P=2	10	.134544D+00	.197325D-01	.146662D+00	-.698208D-01	-.518944D+00
	20	.665431D-01	.993695D-02	.149331D+00	-.111740D-01	-.167921D+00
	60	.778409D-02	.105402D-02	.135408D+00	-.119558D-03	-.153593D-01

	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\frac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\frac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
	5	.157749D+00	-.447602D-01	-.283742D+00	-.976316D-01	-.618903D+00
P=5	10	.573337D-01	-.196924D-02	-.343471D-01	-.666834D-02	-.116307D-00
	20	.642828D-02	.170788D-03	.265683D-01	-.683397D-04	-.106311D-01
	60	.322718D-05	.536429D-07	.166222D-01	-.175327D-10	-.543282D-05

	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\frac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\frac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
	5	.137518D+00	-.449227D-01	-.197544D+00	-.263232D-01	-.249824D+00
P=10	10	.300911D-01	-.825107D-03	-.274203D-01	-.143725D-02	-.477632D-01
	20	.953386D-03	.855927D-05	.897775D-02	-.129689D-05	-.136030D-02
	60	.267731D-08	.116998D-10	.436997D-02	.971445D-16	.362843D-07

	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\dfrac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\dfrac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
	5	.132008D+00	-.479174D-01	-.362990D+00	-.479174D-01	-.362990D+00
P=100	10	.227064D-01	-.742840D-03	-.327151D-01	-.742840D-03	-.327151D-01
	20	.327957D-03	-.140023D-06	-.426956D-03	-.140023D-06	-.426956D-03
	60	.107842D-10	.277556D-16	.257371D-05	.277556D-16	.257371D-05

3) $f(x) = 0.2x^2 + 0.7x + 0.1, \quad v_1 = 0.8$



(v_n) converge vers $v^*=0.5$

$f'(0.5) = 0.9$

$f''(0.5) = 0.4$

	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\dfrac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\dfrac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
	5	.280001D+00	.230408D+00	.822883D+00	.136431D+01	.487251D+01
P=2	10	.265770D+00	.200726D+00	.755263D+00	.240592D+01	.905262D+01
	20	.244496D+00	.160574D+00	.656755D+00	-.462170D+01	-.189030D+02
	60	.190236D+00	.852325D-01	.448035D+00	-.298519D+00	-.156920D+01

	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\dfrac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\dfrac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
	5	.271470D+00	.440962D-01	.162435D+00	.195932D+01	.721746D+01
P=5	10	.242030D+00	-.530745D-01	-.219289D+00	-.266792D+01	-.110231D+02
	20	.191138D+00	-.585117D-01	-.306122D+00	-.291477D+00	-.152495D+01
	60	.663039D-01	-.244709D-02	-.369073D-01	-.115800D-01	-.174651D+00

	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\frac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\frac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
	5	.267061D+00	-.611544D+00	-.228990D+01	.265081D+01	.992588D+01
P=10	10	.227719D+00	-.320912D+00	-.140925D+01	-.960859D+00	-.421950D+01
	20	.157297D+00	-.797853D-01	-.507228D+00	-.123980D+00	-.788190D+00
	60	.234875D-01	-.408967D-03	-.174121D-01	-.115395D-02	-.491302D-01

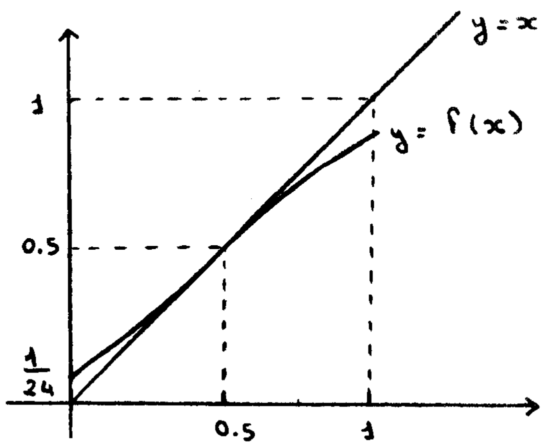
	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\frac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\frac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
	5	.265830D+00	.297890D+01	.112060D+02	.297890D+01	.112060D+02
P=100	10	.222188D+00	-.738311D+00	-.332291D+01	-.738311D+00	-.332291D+01
	20	.141444D+00	-.847498D-01	-.599177D+00	-.847498D-01	-.599177D+00
	60	.108365D-01	-.228334D-03	-.210708D-01	-.228334D-03	-.210708D-01

Lorsque la dérivée s'approche de 1, les résultats deviennent de plus en plus mauvais. La transformation de Ney donne de meilleurs résultats que le Δ^2 d'Aitken lorsque $f'(v^*)$ est assez éloigné de 1 ; dans le cas où $f'(v^*)$ est proche de 1, c'est le contraire. Toutefois, la différence s'estompe lorsque P devient grand.

C) Pour terminer, j'ai comparé les deux algorithmes dans un cas où $f'(v^*) = 1$. On ne peut pas savoir d'après la théorie, s'il y a, dans ce cas, accélération de convergence.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{24}, v_1 = 0.8$$

$$f(0.5) = 0.5,\ f'(0.5) = 1,\ f''(0.5) = 0$$



il n'y a pas d'autre point fixe que $v^* = 0.5$

	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\frac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\frac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
	5	.285892D+00	.262623D+00	.918608D+00	.189919D+00	.664303D+00
P=2	10	.277261D+00	.250998D+00	.905278D+00	.184372D+00	.664978D+00
	20	.265825D+00	.236740D+00	.890585D+00	.176911D+00	.665515D+00
	60	.241704D+00	.209505D+00	.866784D+00	.160997D+00	.666093D+00

	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\frac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\frac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
	5	.280451D+00	.226757D+00	.808544D+00	.185735D+00	.662273D+00
P=5	10	.264287D+00	.206273D+00	.780485D+00	.175279D+00	.663214D+00
	20	.241677D+00	.183223D+00	.758130D+00	.106504D+00	.664125D+00
	60	.194489D+00	.142970D+00	.735110D+00	.129400D+00	.665333D+00

	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\dfrac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\dfrac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
P=10	5	.277730D+00	.201951D+00	.727149D+00	.183601D+00	.661077D+00
	10	.257206D+00	.183568D+00	.713699D+00	.170301D+00	.662119D+00
	20	.228454D+00	.160811D+00	.703910D+00	.151530D+00	.663287D+00
	60	.171732D+00	.119413D+00	.695344D+00	.114192D+00	.664944D+00

	N	$v_n - v^*$	$\delta_n - v^*$	$\dfrac{\delta_n - v^*}{v_n - v^*}$	$T_n - v^*$	$\dfrac{T_n - v^*}{v_n - v^*}$
P=100	5	.276982D+00	.182982D+00	.660628D+00	.182982D+00	.660628D+00
	10	.254594D+00	.168433D+00	.661574D+00	.168433D+00	.661574D+00
	20	.222554D+00	.147505D+00	.662784D+00	.147505D+00	.662784D+00
	60	.159945D+00	.106311D+00	.664669D+00	.106311D+00	.664669D+00

CHAPITRE 4

UN PROCEDE D'ACCELERATION DE CONVERGENCE POUR CERTAINES SUITES DE $\mathcal{L}$

La conclusion du chapitre 2 est que $\mathcal{L} \cap LOG\,2$ est rémanent ; cela veut dire qu'il est impossible de trouver un algorithme unique accélérant la convergence de toutes les suites de $\mathcal{L} \cap LOG\,2$. Pour espérer accélérer la convergence d'une telle suite, il faut donc posséder des informations supplémentaires sur son comportement.

Dans le chapitre 3, j'ai décrit des procédés simples déjà connus permettant d'accélérer des sous-ensembles de $\mathcal{L} \cap LOG\,2$ (par exemple, des procédés accélérant $\mathcal{L}_\rho$, ou bien le θ_2-algorithme accélérant $\widehat{LOG}\,2$).
La démarche de ce chapitre sera différente : je définirai un sous-ensemble $\tilde{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$ (lui-même inclus dans $\mathcal{L} \cap LOG\,2$) pour lequel il existe un procédé d'accélération exact ; c'est à dire que je montrerai qu'il est possible de calculer la limite de toute suite de $\tilde{\mathcal{L}}$ à partir d'un nombre fini de termes successifs. PLus exactement, la construction à l'étape n sera la suivante :

4 termes successifs d'une suite (S_n) de $\tilde{\mathcal{L}}$	$\xrightarrow{\hspace{2em}}$ problème d'interpolation	polynôme de degré 3	$\xrightarrow{\hspace{2em}}$ résolution d'une équation	calcul de la limite de (S_n), racine réelle unique du polynôme

Ce procédé peut être considéré comme un procédé d'accélération de convergence et on se heurte ici à une difficulté fréquemment rencontrée dans les problèmes d'accélération : la détermination exacte du domaine de régularité et du domaine d'accélération. Dans ce cas particulier, ces difficultés sont liées à l'approche adoptée (détermination d'un polynôme par interpolation directe) et au manque de relations simples liant racines et coefficients d'un polynôme.

Dans le premier paragraphe je définirai le procédé grâce à la technique du sous-ensemble déjà utilisé dans le chapitre précédent et je donnerai un exemple de suite dont la convergence est effectivement accélérée par ce procédé. Dans le deuxième paragraphe, j'étudierai plus en détail le procédé sur le sous-ensemble où il est exact. Dans le paragraphe 3, je donnerai des conditions suffisantes de régularité. Le paragraphe 4 sera consacré au problème d'unicité de la racine du polynôme P_n lié à la définition du procédé. Enfin, je donnerai dans le paragraphe 5, les résultats d'une étude numérique.

I - DÉFINITION DU PROCÉDÉ - PREMIERS RÉSULTATS

1) Définition de $\tilde{\mathcal{L}}$

J'ai défini, dans le chapitre 1, $\mathcal{L} = \bigcup_{\rho \in]0,\, 1[} L_\rho$

D'après la propriété 13 du même chapitre, $\mathcal{L} \subset LOG\ 2$

$$(S_n) \in L \iff \begin{cases} (S_n) \in LOG\ 2 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mu_n}{\lambda_n} = \alpha \in]0,\, +\infty[\end{cases}$$

J'ai déjà considéré, au chapitre 3 (propriété 19) le sous-ensemble des suites pour lesquelles $(\frac{\mu_n}{\lambda_n})$ est constante égale à sa limite à partir d'un certain rang ; appelons $\tilde{\mathcal{L}}$ cet ensemble.

$$\tilde{\mathcal{L}} = \{(S_n) \in LOG\ 2 /\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq N,\ \frac{\mu_n}{\lambda_n} = \alpha \in]0,\, +\infty[\}$$

2) Propriété vérifiée par les suites de $\tilde{\mathcal{L}}$

Soit $(S_n) \in \tilde{\mathcal{L}}$; alors $\forall\ n \geq N$, $\frac{\mu_n}{\lambda_n} = \alpha$ donc $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \cdot \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = 1$

Ecrivons cette égalité en fonction de e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, e_{n+3} :

$$\frac{e_{n+1}}{e_{n+2}} \cdot \frac{\Delta e_n}{\Delta e_{n+1}} (e_{n+2}\ \Delta e_{n+1} - e_{n+1}\ \Delta e_{n+2}) - \frac{e_n}{e_{n+1}} \cdot \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} (e_{n+1}\ \Delta e_n - e_n\ \Delta e_{n+1}) = 0$$

En appelant S^* la limite de (S_n) et en se rappelant que $\Delta e_n = \Delta S_n$, on obtient :

$$(S_{n+1} - S^*)^2\ (\Delta S_n)^2\ [(S_{n+2} - S^*)\Delta S_{n+1} - (S_{n+1} - S^*)\ \Delta S_{n+2}] -$$

$$(S_n - S^*)\ (S_{n+2} - S^*)\ (\Delta S_{n+1})^2\ [(S_{n+1} - S^*)\ \Delta S_n - (S_n - S^*)\ \Delta S_{n+1}] = 0$$

C'est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 en S^* ; ordonnons-le suivant les puissances décroissantes de S^* :

<u>*Propriété 1*</u> *: Soit* (S_n) *une suite de* $\tilde{\mathcal{L}}$ *; alors la limite* S^* *de* (S_n) *est racine du polynôme* $P_n(x) = a_n\ x^3 + b_n\ x^3 + c_n\ x + d_n$

avec $a_n = (\Delta S_n)^2 \, \Delta^2 S_{n+1} - (\Delta S_{n+1})^2 \, \Delta^2 \, S_n$

$$b_n = (\Delta S_n)^2 \, [S_{n+2} \, \Delta S_{n+1} - S_{n+1} \, \Delta S_{n+2} - 2 \, S_{n+1} \, \Delta^2 S_{n+1}]$$
$$- (\Delta S_{n+1})^2 \, [S_{n+1} \, \Delta S_n - S_n \, \Delta S_{n+1} - (S_n + S_{n+2}) \, \Delta^2 S_n]$$

$$c_n = (\Delta S_n)^2 \, [S^2_{n+1} \, \Delta^2 S_{n+1} - 2S_{n+1}(S_{n+2} \, \Delta S_{n+1} - S_{n+1} \, \Delta S_{n+2})]$$
$$- (\Delta S_{n+1})^2 \, [S_n \, S_{n+2} \, \Delta^2 \, S_n - (S_n + S_{n+2})(S_{n+1} \, \Delta S_n - S_n \, \Delta S_{n+1})]$$

$$d_n = (\Delta S_n)^2 \, S^2_{n+1} \, [S_{n+2} \, \Delta S_{n+1} - S_{n+1} \, \Delta S_{n+2}]$$
$$- (\Delta S_{n+1})^2 \, S_n \, S_{n+2} \, [S_{n+1} \, \Delta S_n - S_n \, \Delta S_{n+1}]$$

ceci pour tout $n \geq N$.

3) Transformation de suites

Considérons maintenant une suite quelconque (S_n) de $\mathcal{L}$. A partir de quatre termes consécutifs de (S_n), il est possible de construire le polynôme $P_n(x)$ défini précédemment. Dorénavant, je me placerai sur le sous-ensemble de $\mathcal{L}$ pour lequel, à partir d'un certain rang, le polynôme P_n est de degré 3 et a une racine réelle unique. Prenons pour T_n cette racine réelle unique. Ceci fournit un procédé de transformation de suites qui consiste à interpoler en quatre points (S_n, S_{n+1}, S_{n+2} et S_{n+3}) la suite (S_n) par une suite $(\tilde{S}_n)$ de $\tilde{\mathcal{L}}$; c'est la limite de $(\tilde{S}_n)$ qui définit T_n.

4 termes consécutifs d'une suite (S_n) de $\mathcal{L}$	$\longrightarrow$ problème d'interpolation	Polynôme P_n de degré 3	$\longrightarrow$ résolution d'une équation	Calcul de T_n, racine réelle unique de P_n

4) Premier résultat d'accélération

Montrons qu'il existe des suites de $\mathcal{L}$ qui vérifient toutes les conditions précédentes. Pour cela étudions l'exemple de la suite $(\frac{1}{n})$ qui appartient à $\mathcal{L}$ sans appartenir à $\tilde{\mathcal{L}}$; montrons que le procédé est défini et accélère la convergence de $(\frac{1}{n})$.

- a - Calcul des coefficients

$S_n = e_n = \frac{1}{n}$, $S^* = 0$

$\Delta S_n = \frac{-1}{n(n+1)}$, $\Delta^2 S_n = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

$a_n = \frac{2(n+4)}{n^2(n+1)^3(n+2)^3(n+3)}$ $\quad$ $a_n \neq 0$ donc P_n est de degré 3 exactement

$$b_n = \frac{-2(2n+3)(n+4)}{n^2(n+1)^4(n+2)^4(n+3)}$$

$$c_n = \frac{2(n^2+6n+6)}{n^2(n+1)^5(n+2)^4(n+3)}$$

$$d_n = \frac{-1}{n^2(n+1)^5(n+2)^4(n+3)}$$

- b - Calcul des coefficients normalisés

Les racines de $a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n = 0$ sont aussi celles de $x^3 + \frac{b_n}{a_n} x^2 + \frac{c_n}{a_n} x + \frac{d_n}{a_n} = 0$

Notons $c2(n) = \frac{b_n}{a_n}$, $c1(n) = \frac{c_n}{a_n}$, $c0(n) = \frac{d_n}{a_n}$

$$c2(n) = \frac{-(2n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

$$c1(n) = \frac{n^2+6n+6}{(n+1)^2(n+2)(n+4)}$$

$$c0(n) = \frac{-1}{2(n+1)^2(n+2)(n+4)}$$

Comme il n'y a pas d'ambiguité, je négligerai dorénavant d'écrire les indices n

$P(x) = x^3 + c2x^2 + c1x + co$

- c - Existence d'une racine réelle unique

En utilisant la méthode de Cardan, on transforme $x^3+c2x^2 + c1x + c0 = 0$ en $y^3 + py + q = 0$ grâce au changement de variable $x = y - \frac{c2}{3}$ [Réf 11] page 23

$$p = -\frac{c2^2}{3} + c1$$

$$q = 2\left(\frac{c2}{3}\right)^3 - \frac{c1c2}{3} + c0$$

Il faut ensuite calculer $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$

Si $Q > 0$, l'équation a une racine réelle et deux racines complexes.

Calculons p, q et Q.

$$p = -\frac{1}{3}c2^2 + c1 = \frac{-n(n+3)}{3(n+1)(n+2)^2(n+4)}$$

$$q = \frac{2}{27}c2^3 - \frac{1}{3}c1c2 + c0 = \frac{4n^4 + 43n^3 + 153n^2 + 216n + 108}{54(n+1)^3(n+2)^3(n+4)}$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{8n^8+131n^7+926n^6+3691n^5+9076n^4+14104n^3+13536n^2+7344n+1728}{16 \times 27 \times (n+1)^6\,(n+2)^6\,(n+4)^3}$$

Evidemment $Q > 0$

La racine réelle est $x = A + B - \frac{c2}{3}$

avec $A = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}}$ et $B = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}}$

Appelons N4 le numérateur de q, qui est de degré 4 et N8 celui de Q, qui est de degré 8.

$$x = \left[\frac{-N4}{108(n+1)^3(n+2)^3(n+4)} + \frac{\sqrt{N8}}{4\times 3\sqrt{3}(n+1)^3(n+2)^3(n+4)\sqrt{n+4}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$+ \left[\frac{-N4}{108(n+1)^3(n+2)^3(n+4)} - \frac{\sqrt{N8}}{4\times 3\sqrt{3}(n+1)^3(n+2)^3(n+4)\sqrt{n+4}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$+ \frac{2n+3}{3(n+1)(n+2)}$$

$$x = \frac{(-N4\sqrt{3}\sqrt{n+4}+9\sqrt{N8})^{\frac{1}{3}}+(-N4\sqrt{3}\sqrt{n+4}-9\sqrt{N8})^{\frac{1}{3}}+(4\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}(2n+3)\sqrt{n+4}}{3(4\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}(n+1)(n+2)(n+4)^{\frac{1}{2}}}$$

- d - accélération de convergence

Cette racine x dépend uniquement de n ; notons-la x(n) ; elle sera la transformée T_n de (S_n). Je vais montrer maintenant que (T_n) accélère la convergence de (S_n) en montrant que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x(n)}{\frac{1}{n+2}} = \lim_{n\to+\infty} (n+2) \times x(n) = 0$

Pour montrer cela, utilisons des développements limités.

N4 est un polynôme de degré 4 exactement ; écrivons donc

$N4 = n^4(4 + \varepsilon_n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

de manière analogue, $N8 = n^8(8 + \eta_n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \eta_n = 0$

Alors, $- N4 \sqrt{3}\ \sqrt{n+4} + 9\sqrt{N8} = n^4[-(4+\varepsilon_n)\ \sqrt{3}\ \sqrt{n+4} + 9\sqrt{8+\eta_n}]$

Utilisons le développement limité $(x+y)^k = y^k(1 + k\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\, r(\frac{x}{y}))$

dans le cas où $|\frac{x}{y}| < 1$, avec $\lim_{t\to 0} r(t) = 0$

Lorsque $n \to +\infty$, le terme $(4 + \varepsilon_n)\ \sqrt{3}\ \sqrt{n+4}$ devient grand devant $9\sqrt{8+\eta_n}$

$$[-N4\ \sqrt{3}\ \sqrt{n+4} + 9\sqrt{N8}]^{\frac{1}{3}} =$$

$$n^{\frac{4}{3}}\ [-(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+3}]^{\frac{1}{3}}[1 + \frac{1}{3}\ \frac{9\sqrt{8+\eta_n}}{-(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}} + \frac{9\sqrt{8+\eta_n}}{-(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}}\ r(\frac{9\sqrt{8+\eta_n}}{-(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}})]$$

$$= -\ n^{\frac{4}{3}}((4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4})^{\frac{1}{3}}[1 - \frac{\sqrt{3}\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{n+4}} - \frac{9\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}}\ r\ (-\ \frac{9\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}}\ )]$$

Un développement du même type donne :

$$[-\ N4\ \sqrt{3}\ \sqrt{n+4} - 9\sqrt{N8}]^{\frac{1}{3}} =$$

$$-\ n^{\frac{4}{3}}((4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4})^{\frac{1}{3}}[1 + \frac{\sqrt{3}\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{n+4}} + \frac{9\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}}\quad s\ (\frac{9\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}})]$$

Ce qui donne :

$$x(n) = \frac{-n^{\frac{4}{3}}((4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4})^{\frac{1}{3}}[2 + \frac{9\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}}\ t(\frac{9\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}})]}{3(4\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}(n+1)(n+2)(n+4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{(4\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}(2n+3)\sqrt{n+4}}{3(4\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}(n+1)(n+2)(n+4)^{\frac{1}{2}}}$$

avec $t(z) = -r(-z) + s(z)$ donc $\lim_{z\to 0} t(z) = 0$

Considérons maintenant $\lim_{n\to+\infty} (n+2) \times x(n)$

$(n+2) \times x(n) =$

$$\frac{- n^{\frac{4}{3}}((4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4})^{\frac{1}{3}}[2+ \frac{9\sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}} \quad t(\frac{9\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}})] + (4\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\ (2n+3)\sqrt{n+4}}{3(4\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\ (n+1)\ (n+4)^{\frac{1}{2}}}$$

Considérons d'abord :

$$- \frac{n^{\frac{4}{3}}(4+\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}(n+4)^{\frac{1}{6}}}{3(4\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\ (n+1)(n+4)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{9\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}} \times t\ (\frac{9\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\ 3\sqrt{n+4}}\ )$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{9\ \sqrt{8+\varepsilon_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}} \to 0$, car son numérateur tend vers $9\sqrt{8}$ et son dénominateur vers $+\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ t(\frac{9\ \sqrt{8+\eta_n}}{(4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4}}) = 0$

D'autre part

$$\frac{-n^{\frac{4}{3}}\ (4+\varepsilon_n)(\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}(n+4)^{\frac{1}{6}}}{3(4+\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}(n+1)(n+4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\ (4+\varepsilon_n)}{3(4)^{\frac{1}{3}}\ \times\ \frac{n+1}{n}\ \times\ (\frac{n+4}{n})^{\frac{1}{3}}}$$

sa limite est donc une constante lorsque $n \to +\infty$

La limite de ce produit est donc 0 lorsque $n \to +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ (n+2) \times x(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2n^{\frac{4}{3}}((4+\varepsilon_n)\sqrt{3}\sqrt{n+4})^{\frac{1}{3}}+(4\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}(2n+3)\sqrt{n+4}}{3(4\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\ (n+1)(n+4)^{\frac{1}{2}}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4^{\frac{1}{3}}(2n+3)(n+4)^{\frac{1}{3}}\ -\ 2n^{\frac{4}{3}}(4+\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}}{3.4^{\frac{1}{3}}(n+1)(n+4)^{\frac{1}{3}}}$$

développons $(n+4)^{\frac{1}{3}} = n^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{4}{n})^{\frac{1}{3}} = n^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{4}{3n} + \frac{4}{n}\ u\ (\frac{4}{n}))$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\ u(\frac{4}{n}) = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} (n+2) \times x(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^{\frac{1}{3}}(2n+3)n^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{4}{3n} + \frac{4}{n} u(\frac{4}{n})) - 2n^{\frac{4}{3}} (4+\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}}{3.4^{\frac{1}{3}}(n+1)n^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{4}{3n} + \frac{4}{n} u(\frac{4}{n}))}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n[2.4^{\frac{1}{3}} - 2(4+\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}] + 4^{\frac{1}{3}}(\frac{8}{3} + 8u(\frac{4}{n})+3) + \frac{1}{n} 4^{\frac{1}{3}}(4+12u(\frac{4}{n}))}{n[3.4^{\frac{1}{3}}] + 3.4^{\frac{1}{3}}(\frac{4}{3} + 4u(\frac{4}{n})) + \frac{1}{n} 3.4^{\frac{1}{3}} (\frac{4}{3} + 4u(\frac{4}{n}))}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{[2.4^{\frac{1}{3}} - 2(4+\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}]+ \frac{1}{n} 4^{\frac{1}{3}}(\frac{8}{3} + 8u(\frac{4}{n}) + 3) + \frac{1}{n^2} 4^{\frac{1}{3}}(4+12u(\frac{4}{n}))}{[3.4^{\frac{1}{3}}] + \frac{1}{n} .3.4^{\frac{1}{3}}(\frac{4}{3} + 4u(\frac{4}{n})) + \frac{1}{n^2} .3.4^{\frac{1}{3}}(\frac{4}{3} + 4u(\frac{4}{n}))}$$

La limite du dénominateur est $3.4^{\frac{1}{3}}$

la limite du numérateur est égale à $\lim_{n\to+\infty} [2.4^{\frac{1}{3}} - 2(4+\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}] = 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} (n+2) \times x(n) = 0$, ce qui prouve bien que cette transformation accélère la convergence de $(\frac{1}{n})$.

<u>Propriété 2</u> : Le procédé accélère la convergence de la suite $(\frac{1}{n})$.

Etudions à présent le procédé d'une manière plus générale.

II - ETUDE DU PROCÉDÉ SUR $\tilde{\mathfrak{L}}$

Je montrerai, dans ce paragraphe, que le procédé est bien défini sur $\tilde{\mathfrak{L}}$, c'est à dire qu'à partir de 4 termes successifs d'une suite de $\tilde{\mathfrak{L}}$, il est possible de construire un polynôme P_n de degré 3 dont S^* est la racine réelle unique (la propriété 1 assure déjà que S^* est une racine réelle de P_n). Dans la suite, je me placerai toujours implicitement au delà du rang N à partir duquel $\frac{\mu_n}{\lambda_n} = \alpha$.

1) Cas des suites de limite nulle

Soit (S_n) une suite de $\tilde{\mathfrak{L}}$ de limite nulle

D'après la propriété 1, 0 est racine de P_n, donc $d_n = 0$, donc

$P_n(x) = x(a_n\, x^2 + b_n\, x + c_n)$

Je vais montrer que a_n est non nul et que P_n n'a pas d'autre racine réelle, c'est à dire que le discriminant $\Delta = b_n^2 - 4\, a_n\, c_n$ est strictement négatif.

<u>*Propriété 3*</u> *: Soit (S_n) une suite de $\tilde{\mathfrak{L}}$ de limite 0.*
Alors, pour n suffisamment grand, P_n est un polynôme de degré exactement égal à 3 et dont la seule racine réelle est 0.

<u>Démonstration</u>

Posons $e_n = e$, $\lambda_n = \lambda$

Toutes les quantités intervenant dans a_n, b_n et c_n s'expriment en fonction de e, λ et α. En effet

$S_n = e_n = e$

$S_{n+1} = e_{n+1} = e(1 - \lambda)$

$S_{n+2} = e_{n+2} = e(1 - \lambda)(1 - \lambda + \alpha\lambda^2)$

$S_{n+3} = e_{n+3} = e(1 - \lambda)(1 - \lambda + \alpha\lambda^2)\,[1 - \lambda(1 - \alpha\lambda)(1 - \alpha\lambda + \alpha^2\,\lambda^2)]$

$\Delta S_n = - e\lambda$

$\Delta S_{n+1} = - e\lambda(1 - \lambda)(1 - \alpha\lambda)$

$\Delta S_{n+2} = - e\lambda(1 - \lambda)(1 - \alpha\lambda)(1 - \lambda + \alpha\lambda^2)(1 - \alpha\lambda + \alpha^2 \lambda^2)$

$\Delta^2 S_n = e \lambda^2(1 + \alpha - \alpha\lambda)$

$\Delta^2 S_{n+1} = e\lambda^2(1 - \lambda)(1 - \alpha\lambda)^2 [(1 + \alpha) - \alpha\lambda + \alpha^2 \lambda^2]$

Il est facile d'en déduire que

$a_n = e^3\lambda^5 (1 - \lambda)(1 - \alpha\lambda)^2 [(1 + \alpha) + \alpha(\alpha - 1) \lambda]$

$b_n = e^4\lambda^5 (1 - \lambda)^2(1 - \alpha\lambda)^2 [-2(1 + \alpha) + (1 + 4\alpha - 2\alpha^2)\lambda - 2\alpha(1+\alpha)\lambda^2+\alpha^2\lambda^3]$

$c_n = e^5\lambda^5 (1 - \lambda)^3(1 - \alpha\lambda)^2 [(1 + \alpha) + \alpha(\alpha - 3) \lambda + 2 \alpha^2\lambda^2]$

$\alpha \in]0, +\infty[$; lorsque $n \to +\infty$, λ_n tend vers 0 en restant strictement positif ;

e_n est non nul puisque l'on a choisi de ne considérer que des suites n'atteignant jamais leur limite. Il est donc évident qu'au moins à partir d'un certain rang a_n ne s'annule pas.

P_n est donc de degré 3 exactement.

$\Delta = 4e^8 \lambda^{10} (1 - \lambda)^4 (1 - \alpha\lambda)^4 \times \delta$

avec $\delta = [-2(1+\alpha) + (1+4\alpha-2\alpha^2)\lambda-2\alpha(1+\alpha)\lambda^2+\alpha^2\lambda^3]^2$

$\qquad - 4[(1+\alpha) + \alpha(\alpha-1)\lambda] \times [(1+\alpha) + \alpha(\alpha-3) \lambda + 2\alpha^2\lambda^2]$

Δ a même signe que δ

Pour une suite donnée, lorsque $n \to +\infty$, α reste constant et $\lambda \to 0$ en restant positif, donc, le signe δ sera donné par le signe du coefficient de plus bas degré en λ. Le terme constant est nul, δ est donc du signe de

$-4(1+\alpha) (1+4\alpha-2\alpha^2) - 4(1+\alpha) \alpha(\alpha-3) - 4 (1+\alpha) \alpha(\alpha-1) = -4(1+\alpha)$

Donc, δ est strictement négatif.

2) Cas général

On a une propriété analogue lorsque la limite est quelconque.

Propriété 4 : Soit (S_n) *une suite de* $\tilde{\mathfrak{L}}$ *de limite* S^*.
Alors, pour n *suffisamment grand,* P_n *est un polynôme de degré exactement égal à 3 et dont la seule racine réelle est* S^*.

Démonstration :

a) Les quatre termes consécutifs S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3} sont entièrement définis par les quatre paramètres $e = e_n$, $\lambda = \lambda_n$, α et S^*
e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, e_{n+3}, ΔS_n, ΔS_{n+1}, ΔS_{n+2}, $\Delta^2 S_n$, $\Delta^2 S_{n+1}$ ont des expressions analogues aux précédentes ; seules varient les expressions de $S_n = e_n + S^*$, $S_{n+1} = e_{n+1} + S^*$, $S_{n+2} = e_{n+2} + S^*$ et $S_{n+3} = e_{n+3} + S^*$.
A la suite (S_n) définie par $(e, \lambda, \alpha, S^*)$ associons la suite translatée (S'_n) définie par $(e, \lambda, \alpha, 0)$. Appelons P_n le polynôme associé à (S_n) et Q_n le polynôme associé à (S'_n).
Pour n assez grand, d'après la propriété 3, Q_n est de degré 3 et a 0 pour unique racine réelle. Si on montre que $\forall$ x, $P_n(x + S^*) = Q_n(x)$, alors pour n assez grand :

- P_n sera de degré 3
- les équivalences suivantes seront réalisées

$$P_n(X) = 0 \iff Q_n(X - S^*) = 0 \iff X - S^* = 0 \iff X = S^*$$

b) Montrons donc que $P_n(x+S^*) = Q_n(x)$
Posons $Q_n(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $d = 0$ car $Q_n(0) = 0$

$$P_n(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

$$P_n(x + S^*) = \alpha(x + S^*)^3 + \beta(x + S^*)^2 + \gamma(x + S^*) + \delta$$

$$= \alpha x^3 + (3\alpha S^* + \beta)\, x^2 + (3\alpha S^{*2} + 2\beta S^* + \gamma)x + (\alpha S^{*3} + \beta S^{*2} + \gamma S^* + \delta)$$

* termes de degré 3 :

$\alpha = a = (\Delta S_n)^2\, \Delta^2 S_{n+1} - (\Delta S_{n+1})^2\, \Delta^2 S_n$, qui ne fait pas intervenir la limite

* termes de degré 2 :

$$3\alpha S^* + \beta = 3S^*[(\Delta S_n)^2\ \Delta^2 S_{n+1} - (\Delta S_{n+1})^2\ \Delta^2 S_n]$$
$$+ (\Delta S_n)^2[(e_{n+2}+S^*)\ \Delta S_{n+1} - (e_{n+1} + S^*)\ \Delta S_{n+2} - 2(e_{n+1} + S^*)\ \Delta^2 S_{n+1}]$$
$$- (\Delta S_{n+1})^2[(e_{n+1}+S^*)\ \Delta S_n - (e_n+S^*)\ \Delta S_{n+1} - (e_n+e_{n+2}+2S^*)\ \Delta^2 S_n]$$

Cette expression contient un terme de degré 0 en S^* et un terme de degré 1 en S^*. Le terme de degré 0 en S^* est égal à b ; le terme de degré 1 est nul.

Donc $3\alpha S^* + \beta = b$.

* termes de degré 1

$$3\alpha S^{*2} + 2\beta S^* + \gamma = 3S^{*2}\ [(\Delta S_n)^2\ \Delta^2 S_{n+1} - (\Delta S_{n+1})^2\ \Delta^2 S_n]$$
$$+ 2S^*(\Delta S_n)^2[(e_{n+2}+S^*)\Delta S_{n+1}-(e_{n+1}+S^*)\Delta S_{n+2}-2(e_{n+1}+S^*)\Delta^2 S_{n+1}]$$
$$- 2S^*(\Delta S_{n+1})^2[(e_{n+1}+S^*)\Delta S_n-(e_n+S^*)\Delta S_{n+1}-(e_n+e_{n+2}+2S^*)\Delta^2 S_n]$$
$$+ (\Delta S_n)^2[(e_{n+1}+S^*)^2\Delta^2 S_{n+1}-2(e_{n+1}+S^*)(e_{n+2}+S^*)((e_{n+2}+S^*)\Delta S_{n+1} - (e_{n+1}+S^*)\Delta S_{n+2})]$$
$$- (\Delta S_{n+1})^2[(e_n+S^*)(e_{n+2}+S^*)\Delta^2 S_n-(e_n+e_{n+2}+2S^*)((e_{n+1}+S^*)\Delta S_n - (e_n+S^*)\Delta S_{n+1})]$$

Cette expression contient un terme de degré 2 en S^* qui est nul, un terme de degré 1 en S^*, qui est nul également et un terme de degré 0 en S^* qui est égal à c.

Donc $3\alpha S^{*2} + 2\beta S^* + \gamma = c$

* termes constants

le terme constant est égal à $\alpha S^{*3} + \beta S^{*2} + \gamma S^* + \delta = P_n(S^*) = 0$ d'après la propriété 1 car S^* est la limite de (S_n) et P_n est le polynôme associé à (S_n).

Donc, $P_n(x+S^*) = ax^3 + bx^2 + cx = Q_n(x)$.

III - RÉGULARITÉ DU PROCÉDÉ

Considérons maintenant une suite (S_n) de $\mathcal{L}$ et, à partir de quatre termes consécutifs de (S_n), construisons le polynôme P_n. Je vais montrer dans ce paragraphe, que toute racine de P_n converge vers S^* en montrant que P_n tend, lorsque $n \to +\infty$, vers une forme limite. Je suppose, dans ce paragraphe, que le polynôme P_n est de degré 3 exactement, c'est à dire que $a_n = (\Delta S_n)^2\ \Delta^2 S_{n+1} - (\Delta S_{n+1})^2\ \Delta^2 S_n$ est distinct de 0. Les hypothèses que j'introduirai (dans la propriété 5) pour démontrer la régularité impliqueront d'ailleurs que $a_n \neq 0$.

1) Cas d'une suite de limite nulle

Considérons (S_n), suite de $\mathcal{L}$, de limite nulle.

Notons $e_n = e$, $\lambda_n = \lambda$, $\alpha_n = \alpha$ et $\alpha_{n+1} = \beta$

Les quatre termes consécutifs S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3}, et, en conséquence, les coefficients de P_n, peuvent être calculés en fonction de e, λ, α et β

$e_n = S_n = e$

$e_{n+1} = S_{n+1} = e(1 - \lambda)$

$e_{n+2} = S_{n+2} = e(1 - \lambda)(1 - \lambda + \alpha\lambda^2)$

$e_{n+3} = S_{n+3} = e(1 - \lambda)(1 - \lambda + \alpha\lambda^2)[1 - \lambda(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda + \alpha\beta\lambda^2)]$

$\Delta S_n = - e\lambda$

$\Delta S_{n+1} = - e\lambda(1 - \lambda)(1 - \alpha\lambda)$

$\Delta S_{n+2} = - e\lambda(1 - \lambda)(1 - \alpha\lambda)(1 - \lambda + \alpha\lambda^2)(1 - \beta\lambda + \alpha\beta\lambda^2)$

$\Delta^2 S_n = e\lambda^2(1 + \alpha - \alpha\lambda)$

$\Delta^2 S_{n+1} = e\lambda^2(1 - \lambda)(1 - \alpha\lambda)^2(1 + \beta - \beta\lambda + \alpha\beta\lambda^2)$

D'où $a_n = e^3\ \lambda^4(1 - \lambda)(1 - \alpha\lambda)^2[(\beta - \alpha) + (1 + 2\alpha - \beta)\ \lambda + \alpha(\beta - 1)\ \lambda^2]$

$$b_n = e^4\ \lambda^4(1 - \lambda)^2(1 - \alpha\lambda)^2\ [(3a - 3\beta) + (-2 - 5\alpha + 3\beta)\lambda + (1 + 4\alpha + \alpha^2 - 3\alpha\beta)\lambda^2 - 2\alpha(\alpha + 1)\ \lambda^3 + \alpha^2\ \lambda^4]$$

$$c_n = e^5\,\lambda^4(1-\lambda)^3(1-\alpha\lambda)^2\,[(3\beta-3\alpha)+(1+4\alpha-3\beta)\lambda+(3\alpha\beta-3\alpha-2\alpha^2)\lambda^2+2\alpha^2\lambda^3]$$

$$d_n = e^6\,\lambda^4(1-\lambda)^4\,(1-\alpha\lambda)^2(1-\lambda+\alpha\lambda^2)\,(\alpha-\beta)$$

Cherchons à présent la forme limite de ce polynôme lorsque $n \to +\infty$.

En fait, je chercherai plutôt la forme limite du polynôme normalisé

$\bar{P}_n(x) = x^3 + \frac{b_n}{a_n}x^2 + \frac{c_n}{a_n}x + \frac{d_n}{a_n}$.

Les coefficients de $\bar{P}_n$ sont égaux à :

$$\frac{b_n}{a_n} = e(1-\lambda)\,[-3 + \frac{(1+\alpha)+(1+\alpha+\alpha^2)\lambda+(-2\alpha^2-2\alpha)\lambda^2+\alpha^2\lambda^3}{\frac{\beta-\alpha}{\lambda}+(1+2\alpha-\beta)+\alpha(\beta-1)\lambda}]$$

$$\frac{c_n}{a_n} = e^2(1-\lambda)^2\,[3 + \frac{(-2-2\alpha)-2\alpha^2\lambda+2\alpha^2\lambda^2}{\frac{\beta-\alpha}{\lambda}+(1+2\alpha-\beta)+\alpha(\beta-1)\lambda}]$$

$$\frac{d_n}{a_n} = e^3(1-\lambda)^3\,\frac{\beta-\alpha}{\lambda}\,\frac{-1+\lambda-\alpha\lambda^2}{\frac{\beta-\alpha}{\lambda}+(1+2\alpha-\beta)+\alpha(\beta-1)\lambda}$$

<u>*Propriété 5*</u> : *Soit* (S_n) *une suite de* $\mathfrak{X}$, *de limite nulle.*

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} = 0$, *alors, la forme limite, lorsque* $n \to +\infty$ *de* $\bar{P}_n$ *est le polynôme* $\bar{P}(x) = x^3$.

<u>Remarque</u> :

Cette hypothèse entraîne que α_n est toujours non nul (donc que le polynôme est toujours de degré 3).

<u>Démonstration</u>

$a_n = e^3\,\lambda^4(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)^2[(\beta-\alpha)+(1+2\alpha-\beta)\lambda+\alpha(\beta-1)\lambda^2]$

Les termes $e^3\lambda^4(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)^2$ sont non nuls à partir d'un certain rang pour les mêmes raisons que celles invoquées dans le cas de $\tilde{\mathfrak{X}}$

Posons $\varepsilon_n = (\beta-\alpha)+(1+2\alpha-\beta)\lambda+\alpha(\beta-1)\lambda^2$

$= \Delta\alpha_n + (1+\alpha_n-\Delta\alpha_n)\lambda_n + \alpha_n(\alpha_{n+1}-1)\,\lambda_n^2$

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

$$\frac{\varepsilon_n}{\lambda_n} = \frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} + (1 + \alpha_n - \Delta\alpha_n) + \alpha_n\,(\alpha_{n+1} - 1)\,\lambda_n$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{\lambda_n} = 1 + \alpha^*$ d'après l'hypothèse de la propriété 5 ($\alpha^* = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$)

Donc à partir d'un certain rang, $\frac{\varepsilon_n}{\lambda_n}$ est strictement positif. Comme λ_n est également strictement positif à partir d'un certain rang,

$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N,\ \varepsilon_n > 0.$

<u>Démonstration de la propriété 5</u>

Lorsque $n \to +\infty$, avec les notations utilisées,

$e = e_n \to 0$

$\lambda = \lambda_n \to 0$

$$\frac{\beta-\alpha}{\lambda} = \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\lambda_n} = \frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} \to 0 \text{ par hypothèse}$$

$\alpha = \alpha_n$ et $\beta = \alpha_{n+1}$ tendent vers la limite de (α_n) que je noterai α^* et qui appartient à $]0, +\infty[$

Il est donc clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{d_n}{a_n} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

La forme limite de $\bar{P}_n$ est donc $\bar{P}(x) = x^3$

Ceci prouve la régularité du procédé dans ce cas particulier. En effet, lorsque n tend vers l'infini, P_n se rapproche de plus en plus de x^3, donc ses racines se rapprochent de 0. Notons, au passage, que, même dans le cas où P_n a plusieurs racines réelles, elles tendent toutes vers 0.

J'étudierai tout à l'heure la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} = 0$. Voyons à présent s'il est possible d'obtenir un résultat analogue dans le cas où (S_n) est de limite quelconque.

2) Cas général

Considérons une suite (S_n) de $\mathbb{K}$, de limite S^*.

Appelons toujours $e = e_n$, $\lambda = \lambda_n$, $\alpha = \alpha_n$, $\beta = \alpha_{n+1}$

e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, e_{n+3}, ΔS_n, ΔS_{n+1}, ΔS_{n+2}, $\Delta^2 S_n$, $\Delta^2 S_{n+1}$ se calculent comme précédemment. Et $S_n = e_n + S^*$, $S_{n+1} = e_{n+1} + S^*$, $S_{n+2} = e_{n+2} + S^*$, $S_{n+3} = e_{n+3} + S^*$.

a_n est identique à celui calculé précédemment.

$$a_n = e^3\ \lambda^4(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)^2[(\beta-\alpha) + (1+2\alpha-\beta)\lambda + \alpha(\beta-1)\lambda^2]$$

$$\begin{aligned}b_n = e^2\ \lambda^2[&-(e(1-\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)+S^*)e\lambda(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)+(e(1-\lambda)+S^*)e\lambda(1-\lambda)\\ &(1-\alpha\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)(1-\beta\lambda+\alpha\beta\lambda^2)-2(e(1-\lambda)+S^*)e\lambda^2(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)^2(1+\beta-\beta\lambda+\alpha\beta\lambda^2)]\\ &- e^2\lambda^2(1-\lambda)^2(1-\alpha\lambda)^2[-(e(1-\lambda)+S^*)e\lambda+(e+S^*)e\lambda(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)\\ &- (e+e(1-\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)+2S^*)e\lambda^2(1+\alpha-\alpha\lambda)]\end{aligned}$$

posons $b_n = b_n^o + b_n^1\ S^*$

b_n^o a été calculé précédemment et j'ai vérifié que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n^o}{a_n} = 0$ sous l'hypothèse de la propriété 5.

$$b_n^1 = 3e^3\lambda^4(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)^2[(\alpha-\beta)+(-1-2\alpha+\beta)\lambda+(\alpha-\alpha\beta)\lambda^2]$$

$$\begin{aligned}c_n = e^2\lambda^2[&(e^2(1-\lambda)^2+2e(1-\lambda)S^*+S^{*2})e\lambda^2(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)^2(1+\beta-\beta\lambda+\alpha\beta\lambda^2)\\ &-2(e(1-\lambda)+S^*)(-(e(1-\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)+S^*)e\lambda(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)+(e(1-\lambda)+S^*)e\lambda\\ &\qquad(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)(1-\beta\lambda+\alpha\beta\lambda^2)]\\ &-e^2\lambda^2(1-\lambda)^2(1-\alpha\lambda)^2[(e+S^*)(e(1-\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)+S^*)e\lambda^2(1+\alpha+\alpha\lambda)\\ &-(e+e(1-\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)+2S^*)(-(e(1-\lambda)+S^*)e\lambda+(e+S^*)e\lambda(1-\lambda)(1-\alpha\lambda))]\end{aligned}$$

$$c_n = c_n^o + c_n^1\ S^* + c_n^2\ S^{*2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n^o}{a_n} = 0$$

$$c_n^1 = e^4\lambda^4(1-\lambda)^2(1-\alpha\lambda)^2[(6\beta-6\alpha)+(4+10\alpha-6\beta)\lambda+(6\alpha\beta-8\alpha-2\alpha^2-2)\lambda^2+(4\alpha+4\alpha^2)\lambda^3-2\alpha^2\lambda^4]$$

$$c_n^2 = e^3\lambda^4(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)^2[(3\beta-3\alpha)+(3+6\alpha-3\beta)\lambda+(3\alpha\beta-3\alpha)\lambda^2]$$

$$\begin{aligned} d_n = {} & e^2\lambda^2(e^2(1-\lambda)^2+2S^*e(1-\lambda)+S^{*2})[-(e(1-\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)+S^*)e\lambda(1-\lambda)(1-\alpha\lambda) \\ & +(e(1-\lambda)+S^*)e\lambda(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)(1-\beta\lambda+\alpha\beta\lambda^2)] \\ & -e^2\lambda^2(1-\lambda)^2(1-\alpha\lambda)^2(e+S^*)(e(1-\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)+S^*) \\ & [-(e(1-\lambda)+S^*)e\lambda+(e+S^*)e\lambda(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)] \end{aligned}$$

$$d_n = d_n^o + d_n^1\, S^* + d_n^2\, S^{*2} + d_n^3\, S^{*3}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_n^o}{a_n} = 0$ d'après ce qui précède

$$d_n^1 = e^5\lambda^4(1-\lambda)^3(1-\alpha\lambda)^2[(3\alpha-3\beta)+(3\beta-4\alpha-1)\lambda+(3\alpha+2\alpha^2-3\alpha\beta)\lambda^2-2\alpha^2\lambda^3]$$

$$d_n^2 = e^4\lambda^4(1-\lambda)^2(1-\alpha\lambda)^2[(3\alpha-3\beta)+(3\beta-5\alpha-2)\lambda+(-3\alpha\beta+\alpha^2+4\alpha+1)\lambda^2+(-2\alpha-2\alpha^2)\lambda^3+\alpha^2\lambda^4]$$

$$d_n^3 = e^3\lambda^4(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)^2[(\alpha-\beta)+(-1-2\alpha+\beta)\lambda+(\alpha-\alpha\beta)\lambda^2]$$

Propriété 6 : *Soit* (S_n) *une suite de* $\mathbb{R}$, *de limite* S^*.

Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} = 0$, *alors, la forme limite, lorsque* $n \to +\infty$, *du polynôme* $\bar{P}_n$ *est* $\bar{P}(x) = (x-S^*)^3$.

Démonstration :

a) $\dfrac{b_n^1}{a_n} = -3$

Donc, $\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{b_n^o}{a_n} - 3S^* \xrightarrow[n\to+\infty]{} -3S^*$

b) $\dfrac{c_n^1}{a_n} = e(1-\lambda)\ \left[6 + \dfrac{(-2-2\alpha)+(-2\alpha-2\alpha^2-2)\lambda + (4\alpha+4\alpha^2)\lambda^2-2\alpha^2\lambda^3}{\frac{\beta-\alpha}{\lambda} + (1+2\alpha-\beta)+(\alpha\beta-\alpha)\lambda}\right]$

D'après l'hypothèse de la propriété 6, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c_n^1}{a_n} = 0$

$\dfrac{c_n^2}{a_n} = +3$

Donc, $\frac{c_n}{a_n} = \frac{c_n^o}{a_n} + \frac{c_n^1}{a_n} S^* + 3S^{*2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3S^{*2}$

c) $\frac{d_n^1}{a_n} = e^2(1-\lambda)^2[-3 + \frac{(2\alpha+2) + 2\alpha^2\lambda^2 - 2\alpha^2\lambda^2}{\frac{\beta-\alpha}{\lambda} + (1+2\alpha-\beta)+(\alpha\beta-\alpha)\lambda}]$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{d_n^1}{a_n} = 0$

$\frac{d_n^2}{a_n} = e(1-\lambda)[-3 + \frac{(1+\alpha)+(1+\alpha+\alpha^2)\lambda+(-2\alpha^2-2\alpha)\lambda^2+\alpha^2\lambda^3}{\frac{\beta-\alpha}{\lambda} + (1+2\alpha-\beta) + (\alpha\beta-\alpha)\lambda}]$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{d_n^2}{a_n} = 0$

$\frac{d_n^3}{a_n} = -1$

c'est à dire que $\frac{d_n}{a_n} = \frac{d_n^o}{a_n} + \frac{d_n^1}{a_n} S^* + \frac{d_n^2}{a_n} S^{*2} - S^{*3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} - S^{*3}$

d) En conclusion, la forme limite du polynôme lorsque $n \to +\infty$ est

$$x^3 - 3S^* x^2 + 3S^{*2} x - S^{*3} = (x - S^*)^3$$

Ceci assure comme précédemment, la régularité du procédé sous l'hypothèse
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} = 0$

3) Etude de la suite $(\frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n})$

Afin de pouvoir utiliser les propriétés 5 et 6, il faut maintenant trouver des conditions pour que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} = 0$. Or les suites (α_n) et (λ_n) ne sont pas indépendantes. D'après le propriété 15 du chapitre 1, en effet, se donner une suite (S_n) de $\mathcal{L}$, c'est se donner

. une suite réelle (α_n) de limite $\alpha \in]0, +\infty[$

. un rang N vérifiant

$$\text{(i) } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)$$

$$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n)$$

$$\text{(ii) } \forall\, n \geq N,\ \alpha_n > 0$$

$$\text{(iii) } 0 < \lambda_N < \frac{1}{2} \inf\left(1, \frac{1}{\sup\limits_{i \in \mathbb{N}} (\alpha_i)}\right)$$

Si (α_n) est constante à partir d'un certain rang, on est dans le cas où (S_n) appartient à $\bar{\mathcal{L}}$, $\frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} = 0$ à partir d'un certain rang.

Si (α_n) est à convergence linéaire ou super-linéaire, il en est de même pour $(\Delta\alpha_n)$; elle converge donc plus vite que (λ_n) qui est à convergence logarithmique, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} = 0$

Etudions le cas où (α_n) est elle-même à convergence logarithmique. Supposons que (α_n) est dans LOG 1 (elle est donc strictement monotone à partir d'un certain rang).

<u>*Lemme 1*</u> : *Si* $\left(\frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n}\right)$ *a une limite, cette limite ne peut être que 0.*

<u>Démonstration du lemme</u> :

Supposons que $\frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \neq 0$

Les séries de terme général $\Delta\alpha_n$ et λ_n sont de même nature, donc divergentes car la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ diverge d'après la convergence de (S_n).

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \Delta\alpha_i = \lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_0) = \infty$

Il faut donc que la limite de (α_n) soit infinie, ce qui est faux par hypothèse. Donc, il faut que ℓ soit nulle.

Montrons à présent que, sous certaines hypothèses, la suite $\left(\frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n}\right)$ converge.

<u>*Hypothèses (H1)*</u> : *A partir d'un certain rang* N

a - $\Delta\alpha_n > 0$

b - $0 < \dfrac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n} < 1$

c - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\Delta\alpha_n)^2}{\Delta^2\alpha_n} = 0$

Ces hypothèses étant faites, on peut supposer, quitte à modifier le rang N, que $\forall\ n \geq N,\ \alpha_n > 0$ et $0 < \lambda_n < \dfrac{1}{2\alpha^*}$

α^* étant la limite de (α_n).

Posons $\beta_n = \dfrac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n}$

<u>*Propriété 7*</u> : *Sous les hypothèses (H1),* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} = 0$

Il suffit de montrer que $(\dfrac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n})$ converge.

<u>Démonstration</u>

1) Formule de récurrence sur les β_n

$$\frac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n} \times \frac{\beta_n}{1 - \dfrac{\alpha_n\Delta\alpha_n}{\beta_n}} = \frac{\Delta\alpha_{n+1}}{\lambda_{n+1}} = \beta_{n+1}$$

donc $\beta_{n+1} = \dfrac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n} \cdot \dfrac{\beta_n{}^2}{\beta_n - \alpha_n\Delta\alpha_n}$

2) Montrons, par récurrence, que $\forall\ n \geq N,\ \beta_n > 2\alpha_n\ \Delta\alpha_n$

* D'après la remarque faite au sujet de (H1), $2\alpha^*\lambda_N < 1$

et $0 < \alpha_N\lambda_N < 2\alpha_N\lambda_N$

d'après a de (H1), (α_n) tend en croissant, vers α^*, donc $0 < \alpha_N < \alpha^*$

c'est à dire que $0 < \alpha_N \lambda_N < 2\alpha_N\lambda_N < 2\alpha^*\lambda_N < 1$

qui entraîne $0 < 1 - \alpha_N\lambda_n < 1$, donc $0 < \lambda_{N+1} < \lambda_N < \frac{1}{2\alpha^*}$

* Supposons à présent que $\lambda_n < \frac{1}{2\alpha^*}$

$0 < \alpha_n\lambda_n < 2\alpha_n\lambda_n$

d'après a de (H1), $0 < \alpha_n < \alpha^*$

donc $0 < \alpha_n\lambda_n < 2\alpha_n\lambda_n < 2\alpha^*\lambda_n < 1$

C'est à dire $0 < 1 - \alpha_n\lambda_n < 1$ et $0 < \lambda_{n+1} < \lambda_n < \frac{1}{2\alpha^*}$

* ceci montre que $0 < \ldots < \lambda_{n+1} < \lambda_n < \ldots < \lambda_N < \frac{1}{2\alpha^*}$

Comme on a aussi $\forall\, n \geq N$, $0 < \alpha_n < \alpha^*$, il vient $\frac{1}{2\alpha_n} > \frac{1}{2\alpha^*}$

Donc, $\forall\, n \geq N \quad 0 < \lambda_n < \frac{1}{2\alpha_n}$

En multipliant cette inégalité par $\Delta\alpha_n$ qui est positif d'après a,

$\frac{\Delta\alpha_n}{\lambda_n} > 2\alpha_n\, \Delta\alpha_n$, c'est à dire $\beta_n > 2\alpha_n\, \Delta\alpha_n$

Ceci entraîne, en particulier que β_n est toujours positif.

3) Etude de la suite (β_n)

$$\beta_{n+1} = \frac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n} \cdot \frac{\beta_n^2}{\beta_n - \alpha_n\Delta\alpha_n} = f_n(\beta_n)$$

Posons $A_n = \frac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta_{\alpha n}}$ et $B_n = \alpha_n\Delta\alpha_n$; $f_n(x) = \frac{A_n x^2}{x-B_n}$

D'après b, $\forall\, n \geq N$, $0 < A_n < 1$

d'après a et les remarques, $\forall\, n \geq N$, $B_n > 0$.

Etudions $f_n(x)$ sur l'intervalle $[2B_n, +\infty[$ (d'après le résultat du 2)

f_n est continue, dérivable, $f_n'(x) = A_n x \frac{x-2B_n}{(x-B_n)^2} > 0 \quad \forall\, x \in [2B_n, +\infty[$

le tableau de variation de f_n est le suivant

x	$2B_n$	$+\infty$
$f'_n(x)$	$+$	
$f_n(x)$	$4A_nB_n \nearrow$	$+\infty$

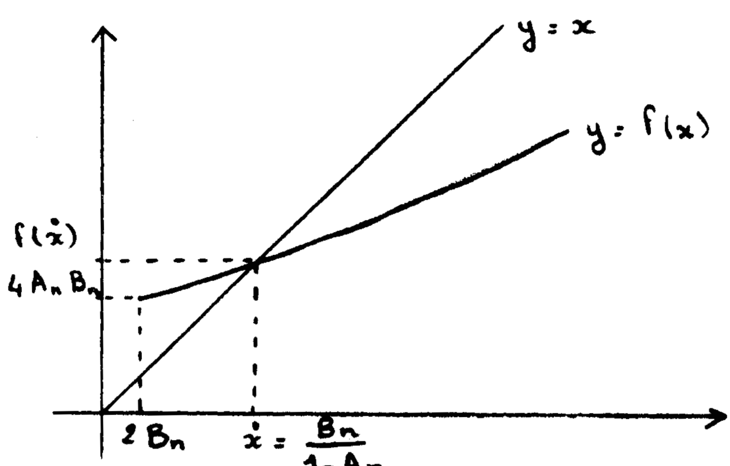
f a-t-elle des points fixes dans ce domaine ?

Si x° est point fixe, $f_n(x^\circ) = x^\circ \iff x^\circ = \dfrac{B_n}{1-A_n} > 0$

Le seul point fixe possible, dans $[2B_n, +\infty[$ est $x^\circ = \dfrac{B_n}{1-A_n}$

Il y a 3 cas possibles suivant les positions respectives de $\dfrac{B_n}{1-A_n}$ et $2B_n$

<u>1er cas</u> : $\dfrac{B_n}{1-A_n} > 2B_n \iff A_n > \dfrac{1}{2} \iff 4A_nB_n > 2B_n$

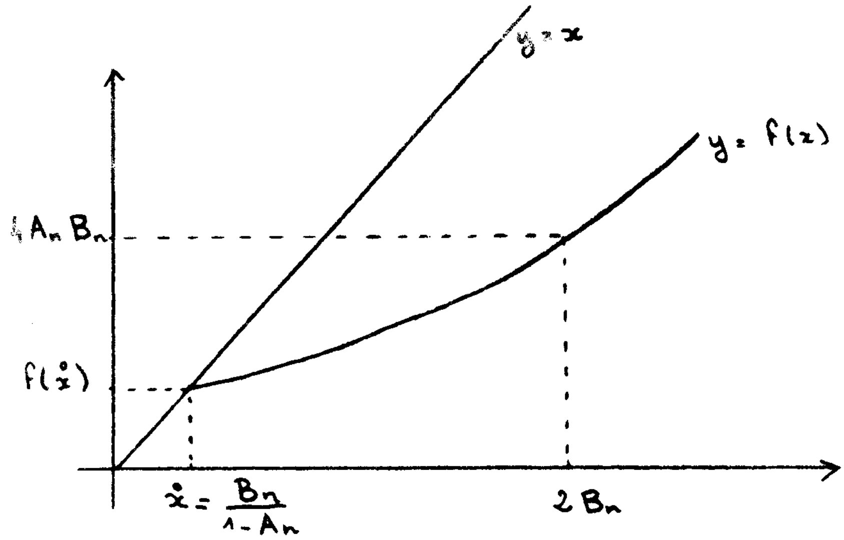


dans ce cas, x° étant le seul point fixe, on a obligatoirement

. si $x > \dfrac{B_n}{1-A_n}$, alors $f(x) < x$

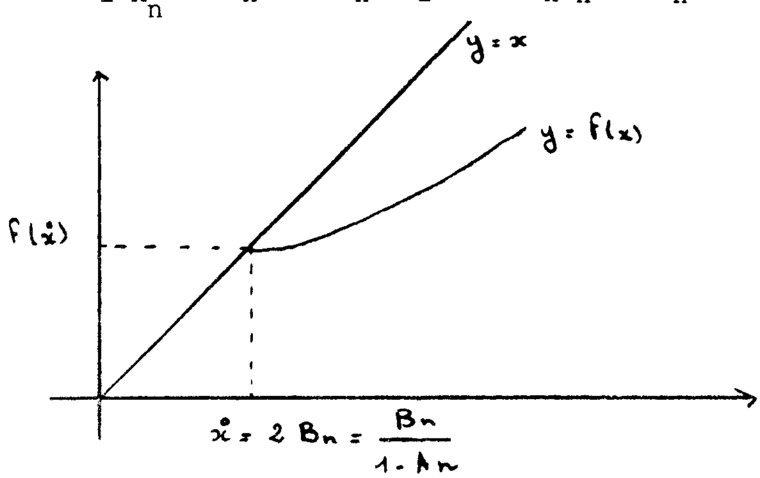
. si $x \leq \dfrac{B_n}{1-A_n}$, alors $f(x) \leq \dfrac{B_n}{1-A_n}$

<u>2ème cas</u> : $\dfrac{B_n}{1-A_n} < 2B_n \iff A_n < \dfrac{1}{2} \iff 4A_nB_n < 2B_n$



dans ce cas, $\forall\ x \geq 2B_n$, $f(x) < x$

3ème cas : $\dfrac{B_n}{1-A_n} = 2B_n \iff A_n = \dfrac{1}{2} \iff 4A_nB_n = 2B_n$



dans ce cas, $\forall\ x \geq 2B_n$, $f(x) < x$

Encore une fois, $\forall\, x > 2B_n$, $f(x) < x$

Résumons ceci :

$$\begin{cases} \text{si } x > \dfrac{B_n}{1-A_n} & \text{alors } f(x) < x \\ \text{si } x \leq \dfrac{B_n}{1-A_n} & \text{alors } f(x) \leq \dfrac{B_n}{1-A_n} \end{cases}$$

Revenons à l'étude de (β_n) ; $\dfrac{B_n}{1-A_n} = \dfrac{\alpha_n(\Delta\alpha_n)^2}{\Delta\alpha_n - \Delta\alpha_{n+1}} = t_n$

D'après b, $\forall\, n \geq N$, $t_n > 0$ et d'après c, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$

La suite (β_n) vérifie

$$\begin{cases} \text{si } \beta_n > t_n \quad \text{alors, } \beta_{n+1} < \beta_n & \text{(A)} \\ \text{si } \beta_n \leq t_n \quad \text{alors, } \beta_{n+1} \leq t_n & \text{(B)} \end{cases}$$

avec (t_n) suite positive de limite nulle.

4) Montrons finalement que (β_n) est décroissante ; cela entrainera sa convergence d'après le résultat 2)

<u>1er cas</u> : l'éventualité (B) ne se produit qu'un nombre fini de fois. Cela veut dire qu'au delà d'un certain rang, on a toujours $\beta_{n+1} < \beta_n$

(β_n) est strictement décroissante. Elle converge vers 0 d'après le lemme.

<u>2ème cas</u> : l'éventualité (B) se produit une infinité de fois aux rangs $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$ Plaçons-nous au rang N_k.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (t_n) = 0$, il n'existe qu'un nombre fini de termes de (t_n) vérifiant $\begin{cases} t_n \geq t_{N_k} \\ n \geq N_k \end{cases}$

Soit $t_{\tilde{n}_k}$ le plus grand de ces termes. Montrons, par récurrence, que

$\forall\ n \geq N_k$, $\beta_n \geq t_{\tilde{n}_k}$

* $B_{N_k} \leq t_{N_k} \leq t_{\tilde{n}_k}$ par hypothèse.

* Supposons que $\beta_n \leq t_{\tilde{n}_k}$ pour un indice donné $n \geq N_k$

On a alors 2 cas :

. soit $t_n < \beta_n$

alors d'après (A), $\beta_{n+1} < \beta_n \leq t_{\tilde{n}_k}$

. soit $t_n \geq \beta_n$

alors, d'après (B), $\beta_{n+1} \leq t_n \leq t_{\tilde{n}_k}$.

Ceci montre donc que $\forall\ n \geq N_k$, $\beta_n \leq t_{\tilde{n}_k}$

Prenons maintenant un n quelconque ; la suite $(N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots)$ tend en croissant vers l'infini, il existe donc un k unique tel que

$N_k \leq n < N_{k+1}$

donc $0 < \beta_n \leq t_{\tilde{n}_k}$ avec $\tilde{n}_k \geq N_k$

Lorsque $n \to +\infty$, $k \to +\infty$, $\tilde{n}_k \to +\infty$ et $t_{\tilde{n}_k} \to 0$ car $(t_{\tilde{n}_k})$ est une sous-suite de (t_n) qui tend vers 0. Donc $(\beta_n) \to 0$.

Les résultats précédents peuvent se résumer dans la

<u>*Propriété 8*</u> : *Toute suite* (α_n) *de limite* $\alpha^* \in\ ]0, +\infty[$ *qui est soit constante, soit à convergence linéaire ou super-linéaire, soit à convergence logarithmique vérifiant (H1) conduit à une suite* (S_n) *de* $\mathcal{X}$ *pour laquelle la forme limite du polynôme* $\bar{P}_n$ *est* $\bar{P}(x) = (x - S^*)^3$.

Un exemple d'une telle suite (α_n) est donné par la

<u>*Propriété 9*</u> : *Soit* (α_n) *une suite de limite* $\alpha^* > 0$*, strictement croissante à partir d'un certain rang et appartenant à* $\mathfrak{L}$ *; alors,* (α_n) *vérifie les hypothèses (H1).*

<u>Démonstration</u>

a) (α_n) étant strictement croissante vérifie a de (H1)

b) (α_n) appartient à $\mathfrak{L}$ donc à LOG 2 d'après la propriété 13 du chapitre 1.

Appelons (ℓ_n) et (m_n) les suites dérivées première et seconde de (α_n)

$$\frac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n} = (1 - \ell_n)(1 - m_n)$$

(ℓ_n) et (m_n) tendent vers 0 et sont positives à partir d'un certain rang

donc $0 < \dfrac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n} < 1$ à partir d'un certain rang

C'est à dire que b de (H1) est réalisé.

c) (α_n) appartenant à $\mathfrak{L}$, il existe $r \in]0, 1[$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{\alpha_{n+1}-\alpha^*}{\alpha_n - \alpha^*} - 1}{\dfrac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n} - 1} = r$$

Or ce rapport est égal à $\dfrac{\dfrac{\Delta\alpha_n}{\alpha_n - \alpha^*}}{\dfrac{\Delta^2\alpha_n}{\Delta\alpha_n}} = \dfrac{(\Delta\alpha_n)^2}{\Delta^2\alpha_n(\alpha_n - \alpha^*)}$

donc $\dfrac{1}{\alpha_n - \alpha^*} \times \dfrac{(\Delta\alpha_n)^2}{\Delta^2\alpha_n} = r + \varepsilon_n$, (ε_n) étant une suite de limite nulle.

donc $\dfrac{(\Delta\alpha_n)^2}{\Delta^2\alpha_n} = (\alpha_n - \alpha^*)\ (r + \varepsilon_n)$; la limite de ceci est 0 lorsque $n \to +\infty$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\Delta\alpha_n)^2}{\Delta^2\alpha_n} = 0$, ce qui est c de (H1).

L'hypothèse a de (H1) impose que (α_n) soit strictement croissante à partir d'un certain rang. On aura un résultat analogue en imposant à (α_n) d'être strictement décroissante.

Hypothèses (H2) : *A partir d'un certain rang* N :

a - $\Delta\alpha_n < 0$

b - $0 < \dfrac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n} < 1$

c - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\Delta\alpha_n)^2}{\Delta^2\alpha_n} = 0$

Par une démonstration tout à fait analogue à celle qui vient d'être faite, on obtient une proposition qui complète la propriété 8 :

Propriété 10 : *Toute suite* (α_n) *de limite* $\alpha^* \in]0,+\infty[$, *à convergence logarithmique, vérifiant* (H2) *conduit à une suite* (S_n) *de* $\mathfrak{L}$ *pour laquelle la forme limite du polynôme* $\bar{P}_n$ *est* $\bar{P}(x) = (x - S^*)^3$.

Ainsi qu'une propriété analogue à la propriété 9.

Propriété 11 : *Soit* (α_n) *une suite de limite* $\alpha^* > 0$, *strictement décroissante à partir d'un certain rang et appartenant à* $\mathfrak{L}$; *alors* (α_n) *vérifie les hypothèses* (H2).

IV - UNICITÉ DE LA RACINE DE P_n

Les résultats de la partie II montrent que, si $(S_n) \in \tilde{\mathfrak{L}}$, le polynôme P_n, à partir d'un certain rang, est de degré 3 et a une racine réelle unique qui est S^*. Le but est d'étendre ce résultat à certaines suites de $\mathfrak{L}$. Pour cela, je vais considérer quatre termes successifs d'une suite (S_n) de $\mathfrak{L}$ et montrer qu'il existe (sous certaines conditions) une suite (s_n) de $\tilde{\mathfrak{L}}$ qui coïncide avec (S_n) en ces quatre termes. Le polynôme P_n, construit à partir de (S_n) sera alors rigoureusement égal à celui construit à partir de (s_n) ; toutefois, la propriété 4 ne permet pas d'affirmer l'unicité de la racine car on ne connait rien sur le rang des termes de la suite (s_n). C'est pourquoi je vais d'abord chercher une nouvelle condition pour que le polynôme P_n, construit à partir de quatre termes successifs d'une suite de $\tilde{\mathfrak{L}}$ soit de degré 3 et ait une racine réelle unique, condition portant, non plus sur le rang, mais sur les valeurs des paramètres intrinsèques $(e, \lambda, \alpha, S^*)$ de la suite. Dans un deuxième temps, je chercherai des conditions pour que quatre termes successifs d'une suite de $\mathfrak{L}$ coïncident avec quatre termes successifs d'une suite de $\tilde{\mathfrak{L}}$ qui vérifie la condition d'unicité de la racine.
Ce problème d'unicité de la racine a également été rencontré par Wimp [Réf 18] pour un procédé comparable

1) Cas des suites de $\tilde{\mathfrak{L}}$

Etant données les remarques faites au cours de la démonstration de la propriété 4, je me bornerai à étudier le cas où $S^* = 0$. Considérons donc une suite (S_n) de $\tilde{\mathfrak{L}}$; quatre termes successifs de (S_n) sont donc définis par les paramètres $e = e_n$, $\lambda = \lambda_n$ et α. $P_n(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n)$.
Si $a_n \neq 0$, la limite $S^* = 0$ sera racine unique à condition que $\Delta = b_n^2 - 4 a_n c_n$ soit strictement négatif.

Je vais chercher une condition pour que Δ soit négatif et je montrerai que cette condition implique également que $a_n \neq 0$

a) Calcul de Δ :

$a_n = e^3 \lambda^5 (1-\lambda)(1-\alpha\lambda)^2[(1+\alpha)+\alpha(\alpha-1)\lambda]$

$b_n = e^4 \lambda^5(1-\lambda)^2(1-\alpha\lambda)^2[-2(1+\alpha)+(1+4\alpha-2\alpha^2)\lambda-2\alpha(1+\alpha)\lambda^2+\alpha^2\lambda^2]$

$c_n = e^5 \lambda^5(1-\lambda)^3(1-\alpha\lambda)^2[(1+\alpha)+\alpha(\alpha-3)\lambda+2\alpha^2\lambda^2]$

En utilisant les notations déjà définies, Δ a même signe que

$$\delta = [-2(1+\alpha)+(1+4\alpha-2\alpha^2)\lambda-2\alpha(1+\alpha)\lambda^2+\alpha^2\lambda^3]^2$$

$$-4[(1+\alpha)+\alpha(\alpha-1)\lambda]\times[(1+\alpha)+\alpha(\alpha-3)\lambda+2\alpha^2\lambda^2]$$

Ecrivons δ comme un polynôme de degré 6 en λ

- le terme constant est nul
- le terme de degré 1 est $-4(1+\alpha)$
- le terme de degré 2 est $1 + 16\alpha + 8\alpha^2$
- le terme de degré 3 est $-4\alpha -24\alpha^2 -4\alpha^3$
- le terme de degré 4 est $6\alpha^2 + 16\alpha^3$
- le terme de degré 5 est $- 4\alpha^3 - 4\alpha^4$
- le terme de degré 6 est α^4

Donc $\delta = \lambda[-4(1+\alpha)+(1+16\alpha+8\alpha^2)\lambda-4\alpha(1+6\alpha+\alpha^2)\lambda^2+2\alpha^2(3 +8\alpha)\lambda^3-4\alpha^3(1+\alpha)\lambda^4+\alpha^4\lambda^5]$

b) Cherchons des conditions pour que δ reste négatif pour tout $\lambda \in]0, 1[$, (il faudra alors imposer, naturellement, comme condition, $\lambda \in]0, 1[$.)

Posons

$f(\lambda) = -4(1+\alpha)+(1+16\alpha+8\alpha^2)\lambda-4\alpha(1+6\alpha+\alpha^2)\lambda^2+2\alpha^2(3+8\alpha)\lambda^3-4\alpha^3(1+\alpha)\lambda^4+\alpha^4\lambda^5$

$f(0) = -4(1+\alpha) < 0$

Pour que f reste négatif entre 0 et 1, il suffit que f ne s'annule pas entre 0 et 1. Appliquons le théorème de Budan [Réf 11] page 18.

Soit N(0) le nombre de changements de signe de la séquence $(f(0), f'(0), \dots f^{(5)}(0))$ et N(1) celui des changements de signe de $(f(1), f'(1), \dots f^{(5)}(1))$.

Le nombre de racine de l'équation $f(\lambda) = 0$ situées entre 0 et 1 est égal à $N(0) - N(1)$. Calculons N(0) et N(1)

$f'(\lambda) = (1+16\alpha+8\alpha^2)-8\alpha(1+6\alpha+\alpha^2)\lambda+6\alpha^2(3+8\alpha)\lambda^2-16\alpha^3(1+\alpha)\lambda^3+5\alpha^4\lambda^4$

$f''(\lambda) = -8\alpha(1+6\alpha+\alpha^2)+12\alpha^2(3+8\alpha)\lambda-48\alpha^3(1+\alpha)\lambda^2+20\alpha^4\lambda^3$

$f^{(3)}(\lambda) = 12\alpha^2(3+8\alpha)-96\alpha^3(1+\alpha)\lambda+60\alpha^4\lambda^2$

$f^{(4)}(\lambda) = -96\alpha^3(1+\alpha)+120\alpha^4\lambda$

$f^{(5)}(\lambda) = 120\alpha^4$

$f(0) = -4(1+\alpha) < 0 \quad \forall\ \alpha \in]0, +\infty[$

$f'(0) = 1+16\alpha+8\alpha^2 > 0 \quad \forall\ \alpha \in]0, +\infty[$

$f''(0) = -8\alpha(1+6\alpha+\alpha^2) < 0 \quad \forall\ \alpha \in]0, +\infty[$

$f^{(3)}(0) = 12\alpha^2(3+8\alpha) > 0 \quad \forall\ \alpha \in]0, +\infty[$

$f^{(4)}(0) = -96\alpha^3(1+\alpha) < 0 \quad \forall\ \alpha \in]0, +\infty[$

$f^{(5)}(0) = 120\alpha^4 > 0 \quad \forall\ \alpha \in]0, +\infty[$

Donc $N(0) = 5$

$$f(1) = (\alpha-1)^2(-3\alpha^2+2\alpha-3) \qquad \begin{cases} f(1) < 0 & \text{si } \alpha \neq 1 \\ f(1) = 0 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$f'(1) = (\alpha-1)(-11\alpha^3+13\alpha^2-9\alpha-1)$

Ce dernier polynôme de degré 3 a pour tableau de variation

$$\begin{array}{c|lr} \alpha & 0 & +\infty \\ \hline -11\alpha^3+13\alpha^2-9\alpha-1 & -1 \searrow & -\infty \end{array}$$

Il reste donc toujours négatif.

donc $\begin{cases} f'(1) > 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ f'(1) = 0 & \text{si } \alpha = 1 \\ f'(1) < 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$

$f''(1) = -4\alpha(2+3\alpha-10\alpha^2+7\alpha^3)$

Ce dernier polynôme de degré 3 a pour tableau de variation :

α	0		$\frac{10-\sqrt{37}}{21}$		$\frac{10+\sqrt{37}}{21}$		$+\infty$
$(2+3\alpha-10\alpha^2+7\alpha^3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2+3\alpha-10\alpha^2+7\alpha^3$	2	↗		↘	$g(\frac{10+\sqrt{37}}{21}) \simeq 1.58$	↗	$+\infty$

il reste donc positif ; donc

$f''(1) < 0$

$f^{(3)}(1) = 36\alpha^2(1+\alpha)(1-\alpha)$

donc $\begin{cases} f^{(3)}(1) > 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ f^{(3)}(1) = 0 & \text{si } \alpha = 1 \\ f^{(3)}(1) < 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$

$f^{(4)}(1) = 24\alpha^3(\alpha-4) \quad \begin{cases} f^{(4)}(1) < 0 & \text{si } \alpha < 4 \\ f^{(4)}(1) = 0 & \text{si } \alpha = 4 \\ f^{(4)}(1) > 0 & \text{si } \alpha > 4 \end{cases}$

$f^{(5)}(1) = 120\alpha^4$, $f^{(5)}(1) > 0$

Faisons un tableau suivant les valeurs de α.

	f(1)	f'(1)	f"(1)	$f^{(3)}(1)$	$f^{(4)}(1)$	$f^{(5)}(1)$	N(1)
$0 < \alpha < 1$	-	+	-	+	-	+	5
$\alpha = 1$	0	0	-	0	-	+	1
$1 < \alpha < 4$	-	-	-	-	-	+	1
$\alpha = 4$	-	-	-	-	0	+	1
$\alpha > 4$	-	-	-	-	+	+	1

Dans le cas où $0 < \alpha < 1$, $N(1) = 5$, donc $N(0) - N(1) = 0$. C'est à dire que le discriminant Δ associé à P_n est toujours négatif.

Il suffira donc de prendre α et β dans $]0, 1[$ pour assurer l'unicité de la racine. Vérifions, à postériori, que cette condition implique également

$a_n \neq 0$

$a_n = e^3 \lambda^5 (1-\lambda) (1-\alpha\lambda)^2 [(1+\alpha) + \alpha(\alpha-1)\lambda]$

e est non nul puisque l'on ne considère que des suites n'atteignant jamais leur limite, la condition $\begin{cases} \alpha \in]0, 1[\\ \lambda \in]0, 1[\end{cases}$ assure que λ, $(1-\lambda)$ et $(1-\alpha\lambda)$ sont non nuls.

Il reste à montrer que $(1+\alpha)+\alpha(\alpha-1)\lambda$ est non nul. Cette expression ne pourrait s'annuler que si λ était égal à $\frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$

λ restant compris entre 0 et 1, il suffit de montrer que, lorsque α varie dans $]0, 1[$, la fonction $g(\alpha) = \frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$ reste toujours supérieure à 1.

$g'(\alpha) = \frac{\alpha^2+2\alpha-1}{\alpha^2(1-\alpha)^2}$ et le tableau de variation de g a la forme suivante

α	0		$-1+\sqrt{2}$		1
$g'(\alpha)$		-	0	+	
$g(\alpha)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(3\sqrt{2}+4)$	$\nearrow$	$+\infty$

On vérifie donc bien, à postériori, que P_n est de degré 3. Résumons ceci dans la

Propriété 12 : Une condition suffisante pour que le polynôme P_n*, construit à partir de quatre termes successifs d'une suite* (S_n) *de* $\tilde{\mathfrak{L}}$ *définis par* $(e, \lambda, \alpha, S^*)$ *soit de degré exactement égal à 3 et ait* S^* *pour unique racine réelle est que :*

$$\begin{cases} \lambda \in]0, 1[\\ \alpha \in]0, 1[\end{cases}$$

Remarque : $\alpha \in]0, 1[$ correspond à une suite de L_ρ avec $\rho \in]\frac{1}{2}, 1[$

2) Cas général

Je vais me servir de la propriété 12 pour montrer que pour une certaine catégorie de suites de $\mathfrak{L}$, P_n a toujours une racine unique à partir d'un certain rang. Supposons en effet que la suite (S_n) de $\mathfrak{L}$ coïncide avec une certaine suite (s_n) de $\bar{\mathfrak{L}}$ sur quatre points, c'est à dire que

$$\begin{cases} S_n = s_n \\ S_{n+1} = s_{n+1} \\ S_{n+2} = s_{n+2} \\ S_{n+3} = s_{n+3} \end{cases}$$

et supposons que (s_n) vérifie $\begin{cases} \lambda_n \in]0, 1[\\ \alpha \in]0, 1[\end{cases}$

Alors, d'après la propriété 12, le polynôme P_n construit à partir de S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3} est de degré 3 et a une seule récine réelle, qui est la limite de (s_n).

Considérons une suite (S_n) de $\mathfrak{L}$ et cherchons à quelles conditions il existe une suite (s_n) de $\bar{\mathfrak{L}}$ coïncident avec (S_n) en quatre points et vérifient $\lambda_n \in]0, 1[$ et $\alpha \in]0, 1[$

a) Conditions d'existence de (s_n)

Soit $(S_n) \in \mathfrak{L}$. On cherche (s_n) vérifiant
$$\begin{cases} (s_n) \in \text{LOG } 2 \\ s_{n+i} = S_{n+i}, \forall\, i \in \{0, 1, 2, 3\} \\ \dfrac{\mu_{n+i}}{\lambda_{n+i}} = \alpha \in]0, 1[, \forall\, i \in \{0, 1, 2, 3\} \\ \lambda_n \in]0, 1[\end{cases}$$

Ceci peut s'écrire

$$\begin{cases} \dfrac{S_{n+1} - s^*}{S_n - s^*} = 1 - \lambda_n \qquad 0 < \lambda_n < 1 & \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 - \mu_n \\ \dfrac{S_{n+2} - s^*}{S_{n+1} - s^*} = 1 - \lambda_{n+1} & \dfrac{\lambda_{n+2}}{\lambda_{n+1}} = 1 - \mu_{n+1} \\ \dfrac{S_{n+3} - s^*}{S_{n+2} - s^*} = 1 - \lambda_{n+2} & \mu_n = \alpha\lambda_n,\ \mu_{n+1} = \alpha\lambda_{n+1},\ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

En écrivant $(e, \lambda, \alpha, s^*)$ les paramètres de (s_n).

$$\begin{cases} \dfrac{S_{n+1} - s^*}{S_n - s^*} = 1 - \lambda \\ \dfrac{S_{n+2} - s^*}{S_{n+1} - s^*} = 1 - \lambda + \alpha\lambda^2 \\ \dfrac{S_{n+3} - s^*}{S_{n+2} - s^*} = 1-\lambda(1-\alpha\lambda)(1-\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2) \\ 0 < \lambda < 1, \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

ou encore $\begin{cases} e = S_n - s^* \\ S_{n+1} - s^* = e(1 - \lambda) \\ S_{n+2} - s^* = e(1-\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2) \\ S_{n+3} - s^* = e(1-\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)[1-\lambda(1-\alpha\lambda)(1-\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)] \\ 0 < \lambda < 1 \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

e, λ, α, s^* sont les inconnues ; les termes de (S_n) sont connus.

En remplaçant chaque ligne par sa différence avec la précédente, j'obtiens

$$\begin{cases} S_n - s^* = e \\ \Delta S_n = - e\lambda \\ \Delta S_{n+1} - - e\lambda(1-\lambda)(1-\alpha\lambda) \\ \Delta S_{n+2} = -e\lambda(1-\lambda)(1-\alpha\lambda)(1-\lambda+\alpha\lambda^2)(1-\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2) \\ 0 < \lambda < 1, \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Ensuite, je divise la 3ième et la 4ième ligne par la précédente, ce qui est possible à condition que $e \neq 0$ et $\lambda \neq \frac{1}{\alpha}$. Cette condition est toujours vérifiée puisque λ et α sont toutes deux dans $]0, 1[$. Donc

$$\begin{cases} S_n - s^* = e & \\ \Delta S_n = - e\lambda & e \neq 0 \\ \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = (1-\lambda)(1-\alpha\lambda) & 0 < \lambda < 1 \\ \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_{n+2}} = (1-\lambda+\alpha\lambda^2)(1-\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2) & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

De la 3ème ligne, je tire α en fonction de λ

$$\begin{cases} S_n - s^* = e \\ \Delta S_n = - e\lambda \\ \alpha = \dfrac{1}{\lambda}\left[1 - \dfrac{1}{1-\lambda} \cdot \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right] \\ \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} = (1-\lambda+\alpha\lambda^2)(1-\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2) \\ e \neq 0, \quad 0 < \lambda < 1, \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

λ étant positif, on aura $\alpha > 0$ si $\lambda < 1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$

D'autre part, on aura $\alpha < 1$ si $0 < 1 - \lambda < \sqrt{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}$

le système s'écrit donc

$$\begin{cases} S_n - s^* = e \\ \Delta S_n = - e\lambda \\ \alpha = \dfrac{1}{\lambda}\left[1 - \dfrac{1}{1-\lambda} \cdot \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right] \\ \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} = (1-\lambda+\alpha\lambda^2)(1-\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2) \\ e \neq 0, \quad 0 < \lambda < 1, \quad 1 - \sqrt{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} < \lambda < 1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \end{cases}$$

Cette dernière inégalité n'est pas incompatible, car $(S_n) \in LOG\,2$, donc $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = (1-\lambda_n)(1-\mu_n) < 1$ à partir d'un certain rang.

Je reporte la ligne 3 dans la ligne 4 afin d'obtenir une équation en λ, et pour simplifier l'écriture, je pose $A = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$, $B = \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}$. Le système à résoudre s'écrit

$$\begin{cases} s^* = S_n + e \\ e = - \dfrac{\Delta S_n}{\lambda} \\ \alpha = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - \dfrac{A}{1-\lambda}\right) \\ (1+A-B)\lambda^3+(3B-3-A+A^2)\lambda^2+(3-3B-A+A^3)\lambda+(B-1+A-A^2) = 0 \\ \lambda \in]1 - \sqrt{A}, 1-A[\end{cases}$$

avec $A = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$, $B = \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}$; et je me place à un rang suffisamment élevé pour que $1 - \sqrt{A}$ soit positif.

Posons $R(\lambda) = (1+A-B)\lambda^3+(3B-3+A^2-A)\lambda^2+(3-3B+A^3-A)\lambda+(B-1+A-A^2)$

Si on trouve λ solution de $\begin{cases} R(\lambda) = 0 \\ \lambda \in]1 - \sqrt{A}, 1 - A[\end{cases}$

Les autres inconnues seront déterminées de manière unique. **Le problème est** donc de résoudre le système

$$(S)\begin{cases} R(\lambda) = 0 \\ \\ \lambda \in \,]1-\sqrt{A},\ 1-A[\end{cases}$$

b) Existence d'une racine unique pour le système (S)

J'utilise à nouveau le théorème de Budan.

$R(\lambda) = (1+A-B)\lambda^3+(3B-3+A^2-A)\lambda^2+(3-3B+A^3-A)\lambda+(B-1+A-A^2)$

$R'(\lambda) = 3(1+A-B)\lambda^2+2(3B-3+A^2-A)\lambda+(3-3B+A^3-A)$

$R''(\lambda) = 6(1+A-B)\lambda+2(3B-3+A^2-A)$

$R'''(\lambda) = 6(A+1-B)$

$R(1-A) = A^3(B-A)$

$R'(1-A) = A^2(A+2A-3B)$

$R''(1-A) = -2A(1+2A-3B)$

$R'''(1-A) = 6(1+A-B)$

$R(1-A)$ est du signe de $(B-A)$

$R'(1-A)$ est du signe de $(1+2A-3B)$

$R''(1-A)$ est du signe de $(3B-2A-1)$

$R'''(1-A)$ est du signe de $(1+A-B)$

Avant d'étudier ces signes faisons une remarque :

Propriété 13 : *Si* $(S_n) \in \mathcal{L}$, $(\Delta S_n) \in$ LOGSF

(Ce sera vrai, à plus forte raison, si $(S_n) \in \mathfrak{L}$)

<u>Démonstration</u> :

$\not{L} \subset$ LOGSF (propriété 13 du chapitre 1)

donc, si $(S_n) \in \not{L}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1$

Posons $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 - \Lambda_n$, (Λ_n) étant la suite dérivée première de (ΔS_n)

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = (1 - \lambda_n)(1 - \mu_n) \text{ donc } \Lambda_n = \lambda_n + \mu_n - \mu_n\, \lambda_n$$

(λ_n) et (μ_n) étant naturellement les suites dérivées première et seconde de (S_n)

$$\frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} = \frac{\lambda_{n+1} + \mu_{n+1} - \lambda_{n+1}\, \mu_{n+1}}{\lambda_n + \mu_n - \lambda_n\, \mu_n} = \frac{\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + \dfrac{\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \cdot \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\, \mu_{n+1}}{1 + \dfrac{\mu_n}{\lambda_n} - \mu_n}$$

$\left(\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)$ tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$ et $\dfrac{\mu_n}{\lambda_n}$ tend vers une constante appartenant à $[0, +\infty[$, donc $\dfrac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, donc $(\Delta S_n) \in$ LOGSF.

Je vais faire l'hypothèse supplémentaire $(\Delta S_n) \in$ LOG 2

(Λ_n) sera alors strictement décroissante à partir d'un certain rang.

* $R(1-A)$ est du signe de $B - A = \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \Lambda_n - \Lambda_{n+1} > 0$

* $R'(1-A)$ est du signe de $1 + 3A - 3B = 1 + 2\,\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 3\,\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} = \Lambda_n\left(3\,\dfrac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} - 2\right)$

à partir d'un certain rang, $\Lambda_n > 0$ et la quantité entre parenthèses tend vers 1, donc est positive également.

Donc $R'(1-A) > 0$

* $R''(1 - A) < 0$ évidemment

* $R'''(1-A)$ est du signe de $1+A-B = 1 + \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}$ qui tend vers 1 et est donc positive à partir d'un certain rang.

Donc $R'''(1-A) > 0$.

Le nombre de changements de signe de la séquence $(R(1-A), R'(1-A), R''(1-A), R'''(1-A))$ est donc $N(1-A) = 2$.

Cherchons à présent $N(1-\sqrt{A})$, ou plutôt cherchons des conditions pour que $N(1-\sqrt{A}) = 3$ puisque, dans ce cas, R aura une racine entre $1-\sqrt{A}$ et $1-A$, c'est à dire que le système (S) aura une solution unique.

$\star R'''(1-\sqrt{A}) > 0$ naturellement

$\star R''(1-\sqrt{A})$ doit être négatif

$$R''(1-\sqrt{A}) = 6(1+A-B)(1-\sqrt{A}) + 2(3B-3+A^2-A)$$

la condition s'écrit $B < 1 - \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} + A - \frac{1}{3} A^{\frac{3}{2}}$

$\star R'(1-\sqrt{A})$ doit être positif

$$R'(1-\sqrt{A}) = 3(1+A-B)(1-\sqrt{A})^2 + 2(3B-3+A^2-A)(1-\sqrt{A}) + (3-3B+A^3-A)$$

la condition s'écrit $B < 1 - \frac{4}{3} A^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{3} A - \frac{2}{3} A^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} A^2$

$\star R(1-\sqrt{A})$ doit être négatif

$$R(1-\sqrt{A}) = (1+A-B)(1-\sqrt{A})^3 + (3B-3+A^2-A)(1-\sqrt{A})^2 + (3-3B+A^3-A)(1-\sqrt{A}) + (B-1+A-A^2)$$

la condition s'écrit $B < 1 - 2A^{\frac{1}{2}} + 3A - 2A^{\frac{3}{2}} + A^2$

Le système (S) aura donc une solution unique à condition que

$$\begin{cases} B < 1 - \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} + A - \frac{1}{3} A^{\frac{3}{2}} \\ B < 1 - \frac{4}{3} A^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{3} A - \frac{2}{3} A^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} A^2 \\ B < 1 - 2 A^{\frac{1}{2}} + 3 A - 2 A^{\frac{3}{2}} + A^2 \end{cases}$$

Ces conditions se ramènent à une seule ; il suffit de trouver la plus petite de ces 3 quantités.

Posons $h_1(A) = (1 - \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} + A - \frac{1}{3} A^{\frac{3}{2}}) - (1 - \frac{4}{3} A^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{3} A - \frac{2}{3} A^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} A^2)$

$$= \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} A + \frac{1}{3} A^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} A^2.$$

$$h'_1(A) = \frac{2 - 4\sqrt{A} + 3A - 4A\sqrt{A}}{6\sqrt{A}}$$

Ceci a même signe que $2 - 4\sqrt{A} + 3A - 4A\sqrt{A}$ qui tend vers -3 quand $A \to 1$.

D'autre part, $h_1(1) = 0$. Le tableau de variation de h_1 donne donc

A	0	A_o	1
h'_1		$-$	
h_1		$\searrow$	0

En effet, la dérivée h'_1 devient forcément négative pour A assez proche de 1, c'est à dire à un rang assez élevé.

Cela veut dire que pour n assez grand, $h_1(A) > 0$; il suffira donc de réaliser la seconde condition pour réaliser la première .

Agissons de manière identique avec les 2ème et 3ème conditions

$$h_2(A) = \left(1 - \frac{4}{3} A^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{3} A - \frac{2}{3} A^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} A^2\right) - \left(1 - 2 A^{\frac{1}{2}} + 3 A - 2 A^{\frac{3}{2}} + A^2\right)$$

$$= \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} A + \frac{4}{3} A^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} A^2$$

$h_2(1) = 0$

$h'_2(A) = \dfrac{1 - 4\sqrt{A} + 6A - 4A\sqrt{A}}{3\sqrt{A}}$ a même signe que son numérateur qui tend vers -1 lorsque $A \to 1$.

Il existe donc $A1 \in]0, 1[$ tel que le tableau de variation de h_2 donne

A	0	A_1	1
h'_2		$-$	
h_2		$\searrow$	0

Comme précédemment, il suffit de réaliser la 3ème condition.

Tout ceci peut se résumer dans la

<u>*Propriété 14*</u> : *Soit* (S_n) *une suite de* $\mathfrak{L}$ *vérifiant à partir d'un certain rang,*

. $(\Delta S_n) \in LOG\ 2$

. $\dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} < 1 - 2\sqrt{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} + 3\,\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 2\,\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\sqrt{\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} + \left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)^2$

Alors, il existe un rang au delà duquel le polynôme P *a une racine réelle unique.*

L'étude expérimentale qui suit va montrer qu'il existe un sous-ensemble de $\mathfrak{L}$ pour lequel le polynôme P_n est de degré 3, a une racine réelle unique qui tend vers la limite S^* de la suite considérée.

V - ETUDE EXPÉRIMENTALE

J'ai comparé cet algorithme avec le θ2-algorithme pour certaines suites de $\mathcal{L}$. Appelons (T_n) la suite transformée de (S_n) par l'algorithme étudié et (θ_n) sa transformée pour le θ2-algorithme. Ces deux transformations nécessitant la connaissance de quatre termes consécutifs de (S_n), je comparerai à chaque fois $(T_n - S^*)$ et $(\theta_n - S^*)$ avec $(S_{n+3} - S^*)$

Les rapports d'accélération seront respectivement $\dfrac{T_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$ et $\dfrac{\theta_n - S^*}{S_{n+3} - S^*}$

1er exemple

La suite $S_n = \frac{1}{n}$, de limite 0, appartient à $L_{\frac{1}{2}}$. La forme limite du polynôme est $\bar{P}(x) = x^3$

n	$S_{n+3} - S^*$	$T_n - S^*$	$\dfrac{T_n-S^*}{S_{n+3}-S^*}$	$\theta_n - S^*$	$\dfrac{\theta_n-S^*}{S_{n+3}-S^*}$
5	0.125000D+00	0.912714D-02	0.730171D-01	0.122125D-014	0.976996D-14
10	0.769231D-01	0.323061D-02	0.419980D-01		
20	0.434783D-01	0.990568D-03	0.227831D-01		
50	0.188679D-01	0.181504D-03	0.916973D-02		

Les coefficients du polynôme normalisé ont, pour n = 50, les valeurs

$\dfrac{b_n}{a_n} = -0.388386$ D-01, $\dfrac{c_n}{a_n} = 0.384194$ D-01, $\dfrac{d_n}{a_n} = -0.684593$ D-07

2ème exemple

Considérons les suites de $\mathcal{L}$ générées par

e_o quelconque

λ_o quelconque

S^* quelconque

$\lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \alpha\lambda_n)$

$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n)$

α est une constante de $]0, +\infty[$

Comparons les propriétés d'accélélation lorsque les divers paramètres varient. Ces suites sont des suites du sous-ensemble où la transformation est exacte ; théoriquement, on doit obtenir un résultat exact pour (T_n) à partir d'un certain rang. Lorsque les paramètres e_o, λ_o et S^* varient, les résultats restent pratiquement les mêmes ; dès les premières itérations, on obtient un $T_n - S^*$ de l'ordre de 10^{-12} à 10^{-15}.

Par contre lorsque α varie, il se produit des différences. Comparons les valeurs obtenues à l'itération 5 :

α	$S_{n+3} - S^*$	$T_n - S^*$	$\dfrac{T_n - S^*}{S_{n+3} - S^*}$
10^{-5}	-.781332 D-02	.275557 D-11	-.352676 D-09
0.5	-.820144 D-01	.370592 D-12	-.451863 D-11
1	-.179699 D+00	-.309086 D-12	.172002 D-11
5	-.744608 D+00	-.109979 D-11	.147700 D-11
20	-.926783 D+00	.452284 D-10	-.489094 D-10
5000	-.999714 D+00	-.131266 D-05	.131304 D-05

Il semble donc que lorsque α devient grand, la suite converge de plus en plus lentement et le procédé d'accélération donne des résultats de moins en moins bons. Ceci est en accord avec les résultats de la propriété 19 (chapitre 1).

Dans chacun des cas de cet exemple, le procédé associant (T_n) à (S_n) donne naturellement des résultats meilleurs que le θ_2-algorithme. Comparons ces résultats dans le cas où

$$\lambda_o = 0.5, \quad e_o = 3, \quad S^* = 0, \quad \alpha = 1$$

La forme limite du polynôme est $\bar{P}(x) = x^3$

N	$S_{n+3}-S^*$	$T_n - S^*$	$\frac{T_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$	$\theta_n - S^*$	$\frac{\theta_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$
5	.539098 D+00	.444600 D-13	.824711 D-13	-.587251 D-01	-.108932 D+00
10	.362705 D+00			-.184094 D-01	-.507560 D-01
20	.221839 D+00			-.548183 D-02	-.247108 D-01
50	.103777 D+00			-.101934 D-02	-.982249 D-02

A l'itération 50, les coefficients de $\bar{P}_n$ sont

$\frac{b_n}{a_n}$ = .107278 D-11, $\frac{c_n}{a_n}$ = .574298 D-13, $\frac{d_n}{a_n}$ = .621622 D-25

3ème exemple

Considérons à présent des suites générées par

e_o quelconque

λ_o quelconque

S^* quelconque

$\lambda_{n+1} = \lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)$

$e_{n+1} = e_n(1 - \lambda_n)$

où (α_n) tend vers une constante $\alpha \in]0, +\infty[$

a) $\alpha_n = 2 + \frac{1}{n}$

$e_o = 1$, $\lambda_o = 0.3$, $S^* = 2$

forme limite du polynôme $\bar{P}(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Remarque : $\Delta\alpha_n = -\frac{1}{n(n+1)}$, $\frac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n} = \frac{n}{n+2}$, $\frac{(\Delta\alpha_n)^2}{\Delta^2\alpha_n} = \frac{n+2}{2n(n+1)}$. Donc l'hypothèse (H2) est réalisé

N	$S_{n+3}-S^*$	$T_n - S^*$	$\frac{T_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$	$\theta_n - S^*$	$\frac{\theta_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$
5	.599344 D+00	-.447627 D+00	-.746861 D+00	-.822194 D+00	-.137182 D+01
10	.543889 D+00	-.100651 D+00	-.185059 D+00	-.165959 D+00	-.305134 D+00
20	.468766 D+00	-.291714 D-01	-.622302 D-01	-.540643 D-01	-.115333 D+00
50	.353751 D+00	-.642645 D-02	-.181666 D-01	-.144820 D-01	-.409384 D-01

Les coefficients de $\bar{P}_n$ sont, à l'itéré 50

$\frac{b_n}{a_n} = -.670705$ D+01 , $\frac{c_n}{a_n} = .149512$ D+02 , $\frac{d_n}{a_n} = -.110733$ D+02

b) $\alpha_n = 2 + \frac{1}{2^n}$

$e_o = 1$, $\lambda_o = 0.3$, $S^* = 2$

La forme limite de $\bar{P}_n$ est $\bar{P}(x) = x^3 - 6x^2 + 12\,x - 8$

remarque : α_n est ici à convergence linéaire.

N	$S_{n+3}-S^*$	$T_n - S^*$	$\frac{T_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$	$\theta_n - S^*$	$\frac{\theta_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$
5	.502299 D+00	-.639458 D-01	-.127308 D+00	-.224144 D+00	-.446237 D+00
10	.427368 D+00	-.232549 D-02	-.544142 D-02	-.506621 D-01	-.118544 D+00
20	.341348 D+00	-.297662 D-05	-.864423 D-05	-.204692 D-01	-.594434 D-01
50	.241577 D+00	-.207674 D-09	-.859662 D-09	-.606438 D-02	-.251033 D-01

Les coefficients de $\bar{P}_n$ à l'itéré 50 sont :

$\frac{b_n}{a_n} = -.648800$ D+01 , $\frac{c_n}{a_n} = .140117$ D+02 , $\frac{d_n}{a_n} = -.100714$ D+02

c) $\alpha_n = 2 - \frac{1}{\mathrm{Log}(n+1)}$

$e_o = 1$, $\lambda_o = 0.3$, $S^* = 2$

Forme limite de $\bar{P}_n$: $\bar{P}(x) = x^3 - 6x^2 + 12\ x - 8$

N	$S_{n+3}-S^*$	$T_n - S^*$	$\frac{T_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$	$\theta_n - S^*$	$\frac{\theta_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$
5	.272951 D+00	.453831 D-01	.166268 D+00	.771132 D-02	.284714 D-01
10	.202205 D+00	.201069 D-01	.994380 D-01	.278242 D-02	.137604 D-01
20	.143681 D+00	.919186 D-02	.639743 D-01	.238707 D-02	.166138 D-01
50	.883148 D-01	.347446 D-02	.393418 D-01	.166105 D-02	.188083 D-01

Au rang N = 50, les coefficients de $\bar{P}_n$ sont :

$\frac{b_n}{a_n} = -.618245$ D+01, $\frac{c_n}{a_n} = .127385$ D+02, $\frac{d_n}{a_n} = -.874714$ D+01

d) Prenons pour (α_n) une suite alternée

$\alpha_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$

$e_o = 1$, $\lambda_o = 0.3$, $S^* = 2$

Forme limite du polynôme $\bar{P}(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

N	$S_{n+2}-S^*$	$T_n - S^*$	$\frac{T_n - S^*}{S_{n+2}-S^*}$	$\theta_n - S^*$	$\frac{\theta_n - S^*}{S_{n+2}-S^*}$
5	.379597 D+00	.283071 D+00	.745715 D+00	.283071 D+00	.745714 D+00
10	.310637 D+00	.107557 D+01	.346247 D+01	.632709 D+00	.203681 D+01
20	.242569 D+00	.837292 D+00	.345176 D+01	.587686 D+00	.242276 D+01
50	.165714 D+00	.594583 D+00	.358802 D+01	.491837 D+00	.296799 D+01

Les coefficients de $\bar{P}_n$ au rang 50 sont

$\frac{b_n}{a_n}$ = -.692889 D+01, $\frac{c_n}{a_n}$ = .159423 D+02, $\frac{d_n}{a_n}$ = -.121858 D+02

Le procédé échoue dans l'accélération de cette suite ; le θ_2-algorithme échoue également. Les coefficients du polynôme sont d'ailleurs fort éloignés de ceux de $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

e) $\alpha_{2n+1} = \alpha_{2n+2} = 2 + \frac{1}{2n+1}$

Cette suite (α_n) ne vérifie ni (H1) ni (H2) car $\Delta\alpha_n$ est nul un rang sur deux et, en conséquence, $\frac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n}$ devient infini un rang sur deux

$e_o = 1$, $\lambda_o = 0.3$, $S^* = 2$

Forme limite du polynôme : $\bar{P}(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Du point de vue de l'accélération de convergence, on peut distinguer ici deux sous-suites (celle des rangs pairs et celle des rangs impairs) qui ont un comportement différent.

N	$S_{n+3}-S^*$	$T_n - S^*$	$\frac{T_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$	$\theta_n - S^*$	$\frac{\theta_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$
4	.613813 D+00	.203400 D+01	.331372 D+01	.133064 D+01	.216783 D+01
10	.545716 D+00	-.289599 D+00	-.530678 D+00	-.434632 D+00	-.796444 D+00
20	.471121 D+00	-.667777 D-01	-.141742 D+00	-.982743 D-01	-.208597 D+00
50	.356259 D+00	-.135328 D-01	-.379858 D-01	-.221519 D-01	-.621793 D-01

N	$S_{n+3}-S^*$	$T_n - S^*$	$\dfrac{T_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$	$\theta_n - S^*$	$\dfrac{\theta_n - S^*}{S_{n+3}-S^*}$
5	.600539 D+00	.698042 D-11	.116236 D-10	-.609983 D-01	-.101573 D+00
9	.555408 D+00	.155582 D-10	.280122 D-10	-.397543 D-01	-.715768 D-01
19	.477191 D+00	.146192 D-10	.306359 D-10	-.211287 D-01	-.442771 D-01
49	.358809 D+00	-.304819 D-09	-.849529 D-09	-.775907 D-02	-.216245 D-01

La sous-suite de rang impair donne très vite une bonne approximation de la limite ; ensuite il s'introduit des erreurs ; la sous-suite de rang pair n'accélère que faiblement la convergence. Pour le $\theta 2$-algorithme, les deux sous-suites ont un comportement pratiquement analogue.

CONCLUSION

A l'issue de ce travail, il reste de nombreux problèmes non résolus.

1) Pour un certain nombre d'ensembles définis au cours du chapitre 1, je ne peux, ni exhiber un algorithme d'accélération, ni montrer qu'ils ne sont pas accélérables. Deux questions, notamment, sont intéressantes :

* On sait que LOG 1 et LOG 2 sont non accélérables. Peut-on affirmer que LOG est non accélérable ?

* On sait que $\widehat{\text{LOG}}$ 1 et $\widehat{\text{LOG}}$ 2 sont accélérables. Peut-on affirmer que tout $\widehat{\text{LOG}}$ N est accélérable ?

2) En ce qui concerne les diverses vitesses de convergence de suites de Log, le résultat de la propriété 19 du chapitre 1 montre que si $(S_n) \in L_{\rho 1}$ et $(T_n) \in L_{\rho 2}$ avec $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$, alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{T_n - T^*}{S_n - S^*} = 0$

Est-il possible d'étendre ce résultat à L_o et L_1 en montrant que toute suite de L_o converge plus lentement que n'importe quelle suite de Ł et que toute suite de L_1 converge plus vite que n'importe quelle suite de $\bigcup\limits_{\rho \in [0,1[} L_\rho$?

3) A aucun moment je n'ai parlé de transformations diagonales. Il existe, à ma connaissance, peu de résultats théoriques sur ce genre de transformations [Réf 14], [Réf 13]. Cependant, l'étude expérimentale montre que les transformations diagonales (en particulier la diagonale du θ-algorithme [Réf 3]) donnent de bons résultats d'accélération dans de nombreux cas de convergence logarithmique. Il faudrait donc étudier théoriquement ces transformations diagonales et leur application dans le cas de la convergence logarithmique.

TABLEAU RÉCAPITULATIF DES ENSEMBLES DÉCRITS

Log : $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n$ $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$

LOG 1 : $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n$ $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$

$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N,\ \lambda_n > 0$

LOG 2 : $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n$ $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$

$(\lambda_n) \in$ LOG 1

LOG N : $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \lambda_n$ $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$

$(\lambda_n) \in$ LOG(N-1)

LOGSF :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1$$

$$\text{LOG} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}^*} \text{LOG N}$$

$\widehat{\text{LOG}}$ 1 : $(S_n) \in$ LOG 1 $\exists\, K \neq 0,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta\lambda_n}{\Delta e_n} = K$

$\widehat{\text{LOG}}$ 2 : $(S_n) \in$ LOG 1 $(\lambda_n) \in \widehat{\text{LOG}}$ 1

$\widehat{\text{LOG}}$ N : $(S_n) \in$ LOG 1 $(\lambda_n) \in \widehat{\text{LOG}}$(N-1)

$$\widehat{\text{LOG}} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \widehat{\text{LOG}}\ \text{N}$$

L_ρ : $(S_n) \in$ Log $\exists\, \rho \in [0, 1], \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} - 1} = \rho$

$$L = \bigsqcup_{\rho\in[0,1]} L_\rho$$

$$\mathbb{L} = \bigsqcup_{\rho \in]0,1]} L_\rho$$

$$\mathfrak{L} = \bigsqcup_{\rho \in]0,1[} L_\rho$$

$$\tilde{\mathfrak{L}} : (S_n) \in \mathfrak{L} \quad \exists\, \alpha \in]0, +\infty[,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq N,\ \frac{\mu_n}{\lambda_n} = \alpha$$

RÉFÉRENCES

[Réf 1] : A. BOUVIER
"Théorie Elémentaire des Séries"
Hermann - 1971

[Réf 2] : C. BREZINSKI
"Accélération de la Convergence en Analyse Numérique"
Lectures Notes in Mathematics - Springer Verlag - 1977

[Réf 3] : C. BREZINSKI
"Algorithmes d'accélération de la Convergence - Etude Numérique"
Technip 1978.

[Réf 4] : C. BREZINSKI
"Accélération de Suites à Convergence Logarithmique"
C.R. Acad. Sciences - Paris ; t 273 ; pp 727-730 - 1971

[Réf 5] : F. CORDELLIER
"Sur la Régularité des Procédés d'Aitken et W. de Lubkin"
A.N.O. 10 - Université Lille I, UER IEEA - 1979.

[Réf 6] : J.P. DELAHAYE - B. GERMAIN-BONNE
"Résultats Négatifs en Accélération de la Convergence"
Numerische Mathematik vol 35, pp 443 - 457 - 1980

[Réf 7] : J.P. DELAHAYE - B. GERMAIN-BONNE
"The Set of Logarithmically Convergent Sequences cannot be accelerated"
Siam J. of Numer. Anal. (to appear)

[Réf 8] : B. GERMAIN-BONNE
"Estimation de la Limite de Suites et Formalisation de Procédés d'Accélération de Convergence"
Thèse - Université de Lille I - 1978

[Réf 9] : L.B.W. JOLLEY
"Summation of Series"
Dover-Publications - 1961

[Réf 10] : KNOPP
"Theory and Application of Infinite Series"
Blackie

[Réf 11] : KORN and KORN
"Mathematical Handbook for Scientists and Engineers.
Mc-Graw-Hill 1961

[Réf 12] : C. KOWALEWSKI
"Accélération de la Convergence pour Certaines Suites à Convergence Logarithmique.
Proceedings of Pade and Rational Approximation
Conférence Amsterdam oct 80. Lectures Notes in Mathematics (to appear).

[Réf 13] : F.M. LARKIN
"On a Generalization of Aitken's Δ^2-Process"
Techn. Report n° 79-74. Dept of Computing and Informations Science.
Queen's University, Kingston, Ontario - 1979

[Réf 14] : P.J. LAURENT
"Etude de Procédés d'Extrapolation en Analyse Numérique"
Thése, Grenoble, 1964.

[Réf 15] : D. LEVIN
"Development of non-linear Transformations for improving Convergence of Sequences"
Intern. J. Computer. Math. ; B vol 3 ; pp 371-388 - 1973

[Réf 16] : A. NEY
"Observations concernant la Formule d'Extrapolation d'Aitken"
Mathematica-Analyse Numérique et Théorie de l'Approximation t5 n° 1 ; pp 59-62 - 1976.

[Réf 17] : D.A. SMITH et W.F. FORD
"Accélération of linear and logarithmic Convergence"
Siam J. of Numerical Analysis vol 16 n° 2 1979

[Réf 18] : J. WIMP
"Sequence Transformations and Their Applications"
Academic Press 1981