

50376
1981
19

N° d'Ordre : 258

50376
1981
19

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Geneviève DAUPHIN - TANGUY

Ingénieur I D N

SUR UNE NOUVELLE METHODE D'APPROCHE
DE LA STABILITE DES PROCESSUS CONTINUS NON LINEAIRES
ET DES SYSTEMES A PERTURBATIONS SINGULIERES



Soutenue le 30 Janvier 1981 devant le Jury d'examen

MM. F. LAURENT

P. BORNE

Lj. T. GRUJIC'

J.C. GENTINA

M. BENREJEB

M. MORIAMEZ

G. CARNAILLE

Président

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Invité

Invité

AVANT PROPOS

Les travaux que nous présentons dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire de Systématique de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur LAURENT pour l'accueil qu'il nous a réservé au sein de son équipe de recherche et pour l'intérêt qu'il a montré pour notre travail. Nous sommes très honorée qu'il ait accepté de présider notre jury et nous voulons lui témoigner notre gratitude.

C'est avec empressement que nous exprimons à Monsieur le Professeur BORNE toute notre reconnaissance pour l'aide efficace et constante qu'il nous a apportée durant la réalisation de ce mémoire. L'atmosphère dynamique et détendue qu'il a su créer dans son équipe nous a beaucoup encouragée dans le déroulement de nos recherches, et nous le remercions très sincèrement pour la confiance qu'il nous a toujours témoignée.

Nous prions Monsieur le Professeur GRUJIC^Ć d'accepter nos plus vifs remerciements pour la marque d'intérêt qu'il a montrée pour notre travail en acceptant de participer à notre jury et pour le soutien que nous apportent sa présence et sa renommée internationale.

Monsieur le Professeur GENTINA a bien voulu juger notre travail et participer au jury de thèse, nous lui transmettons nos très sincères remerciements.

Nous exprimons notre reconnaissance à Monsieur le Professeur M. BENREJEB pour les conseils qu'il nous a prodigués et l'aide qu'il nous a apportée durant la réalisation de ce travail. Nous tenons aussi à le remercier pour sa participation à notre jury.

Que Monsieur le Professeur MORIAMEZ, Directeur de l'Institut Industriel du Nord, reçoive ici le témoignage de notre respectueuse et profonde reconnaissance pour le soutien qu'il nous a apporté en participant à notre jury.

Nous sommes très honorée que Monsieur CARNAILLE, membre du Directoire de l'APC, ait accepté, malgré ses lourdes tâches de nous consacrer une partie de son temps en assistant à la soutenance de cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude.

Nous tenons aussi à remercier tous les membres du Laboratoire de Systématique pour l'excellente ambiance qui règne dans toute l'équipe et qui nous a permis de travailler dans un climat amical.

Que Madame COPIN, Madame FERRAR et Monsieur SOYEZ, sans qui la réalisation matérielle de ce mémoire n'aurait pu être faite, soient aussi remerciés pour leur gentillesse et leur accueil toujours souriant.

INTRODUCTION GENERALE

L'étude des systèmes réels, qu'il s'agisse de processus physiques, économiques ou biologiques conduit souvent à une description par un modèle complexe et/ ou de grande dimension. Le rôle de ce modèle est, d'une part de permettre une analyse du comportement du système dans une situation donnée et d'autre part, de simuler l'évolution de celui-ci en présence d'entrées déterminées.

Dans le cadre des processus continus envisagés dans ce mémoire, une attention toute particulière est accordée aux processus de type Lur'e Postnikov. Pour ces systèmes, il est possible de distinguer une partie linéaire, le plus souvent caractérisée par une fonction de transfert, précédée d'une non-linéarité en général représentable par son gain instantané équivalent.

Le premier chapitre présente une approche nouvelle, utilisant les résultats de la programmation linéaire, de la stabilité des processus monovariés du type Lur'e Postnikov. Une méthode d'étude de la stabilité en résulte, particulièrement adaptée à l'optimisation du domaine suffisant de stabilité, et du comportement dynamique du processus lorsque les caractéristiques non-linéaires de celui-ci sont fixées à priori par des considérations technologiques.

L'étude est généralisée dans le second chapitre et étendue aux processus de type Lur'e Postnikov interconnectés, les interconnexions étant linéaires ou non. Une application à la synthèse est proposée, en particulier dans le cas des processus compensés par réseaux correcteurs.

Une méthode de simplification du modèle permettant l'application des résultats précédents à une classe plus large de processus est présentée au troisième chapitre. Elle concerne essentiellement des processus hiérarchisés et/ou interconnectés dans lesquels il est possible de distinguer des sous-systèmes de vitesses d'évolution distinctes. L'approche s'appuie sur la méthode des perturbations singulières, qui consiste à considérer la réponse de la partie rapide comme instantanée en regard de la vitesse d'évolution de la partie dite lente, permettant ainsi une réduction de dimensionnalité.

Deux démarches sont proposées. La première procède par simplifications successives utilisant une méthode itérative de mise en oeuvre particulièrement aisée, compte tenu de la représentation d'état adoptée pour le processus. L'arrêt de l'itération est alors défini par la précision souhaitée dans la modélisation.

La deuxième démarche suppose une distinction à priori entre partie lente et partie rapide et conduit également à un algorithme d'élimination d'expression simple.

Ces deux approches sont développées dans le cas de représentations d'état particulières, choisies en vue de permettre une étude simplifiée de la stabilité du système réduit (dit dégénéré) et conduisant à des conditions les plus voisines possible de celles qui auraient été déterminées à partir de la représentation initiale.

Dans les deux cas, le modèle obtenu après simplification permet l'application des résultats présentés dans les deux premiers chapitres.

CHAPITRE I

REPRESENTATION DES SYSTEMES CONTINUS DYNAMIQUES.

STABILITE.

INTRODUCTION

Ce chapitre concerne la présentation et la formulation de deux démarches qui permettent l'étude de la stabilité d'une classe importante de processus continus non linéaires.

La méthode proposée [1], [2] consiste à choisir une description permettant de conclure à la validité de la conjecture du linéaire, et pour laquelle l'application directe du lemme de Kotelyanski fournit une condition suffisante assurant la stabilité globale du système.

La première approche concerne l'étude d'un système dans le cas où les seules informations relatives aux caractéristiques non linéaires du processus sont les limites des domaines de variation. Cette étape est un rappel des travaux publiés antérieurement par divers auteurs [3] et [4].

Le cas où ces domaines ne sont pas déterminés à priori est alors envisagé. L'intérêt de cette méthode est de permettre, dans un esprit de synthèse, l'optimisation, au sens de l'utilisateur, des caractéristiques dynamiques du système.

I - STRUCTURE DES SYSTEMES CONTINUS DYNAMIQUES

I-1 GENERALITES

Un système physique est caractérisé par deux ensembles de variables :

- d'une part les variables de sortie accessibles à la mesure.

- d'autre part les variables d'entrée permettant d'agir sur le comportement du processus.

A chaque système peut être associé par identification un modèle mathématique qui reproduit l'évolution du processus sur l'intervalle de temps $[t_0, +\infty[$, $t_0 \in \mathcal{R}$ définissant l'instant initial.

Une représentation schématique des processus étudiés est donnée figure I-1.

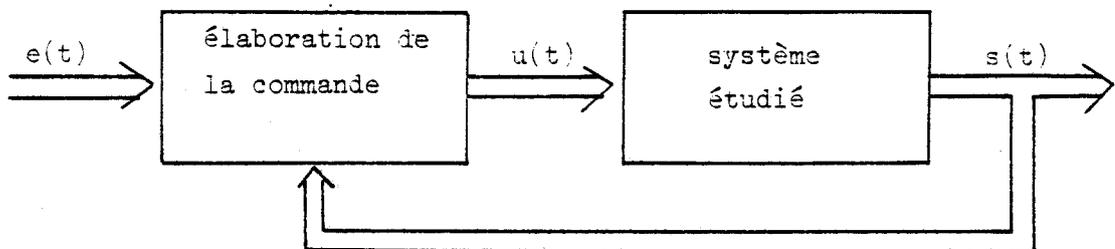


Figure I-1

L'ensemble des variables de commande constitue un vecteur $u(t)$ de dimension m

$$u^T(t) = \{u_1(t), \dots, u_m(t)\} \quad \forall t \in \mathcal{T} = [t_0, +\infty[$$

$$u : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$$

Le vecteur $u(t)$ est élaboré à partir des variables de consigne $e(t)$ et des sorties s éventuellement retardées.

De même l'ensemble des variables de sortie constitue un vecteur $s(t)$ de dimension r

$$s^T(t) = \{s_1(t), \dots, s_r(t)\} \quad \forall t \in \mathcal{T}$$
$$s : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{I} \subset \mathbb{R}^r$$

Les vecteurs $u(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions du temps continues ou continues par morceaux.

Aux notions de commande et de sortie, il faut également ajouter celle d'état qui regroupe toutes les informations permettant, pour une loi d'entrée donnée, de prédire le comportement du système sur l'intervalle de temps considéré. La dimension du vecteur état détermine l'ordre du processus.

Une équation vectorielle d'état régit l'évolution du système dynamique

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x) x + B(t, x, u) \quad (I-1)$$

où $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ est la valeur à l'instant t du vecteur état de dimension n . $A(t, x)$ et $B(t, x, u)$ sont des matrices dont les termes sont généralement non constants. La sortie du système est donnée par l'équation :

$$s(t) = g(t, x, u) \quad \forall (t, x, u) : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{I} \subset \mathbb{R}^r$$

I-2 DESCRIPTION DE LA NOTION DE STABILITE RECHERCHEE

Le vecteur état x met en évidence la dépendance existant entre l'état du système à l'instant t , celui à l'instant initial t_0 noté x_0 et les commandes.

$$x(t) = x(x_0 ; u [t_0, t] ; t_0 ; t)$$

avec

$$x_0 = x(x_0 ; u [t_0, t_0] ; t_0 ; t_0)$$

Les systèmes étudiés ayant une structure bouclée, nous noterons de façon simplifiée

$$x(t) = x(t, x_0, t_0)$$

Les définitions de la stabilité sont nombreuses. Nous rappelons ici celles qui seront utilisées par la suite.

Définition 1 [5]

La solution $x(t) = 0$ d'un système décrit par l'équation (I-1), pour $e \equiv 0$ est stable au sens de Lyapunov si $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall t_0 \in \mathcal{J}$, il existe $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tel que si $\|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$, on ait $\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.

Définition 2 [5]

La solution $x(t) = 0$ d'un système décrit par l'équation (I-1), pour $e \equiv 0$, est asymptotiquement stable si elle est stable au sens de Lyapunov et s'il existe $\delta_0(t_0) > 0 \quad \forall t_0 \in \mathcal{J}$ tel que si $\|x_0\| < \delta_0(t_0)$ on ait $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, t_0) = 0$.

Définition 3 [5]

La solution $x(t) = 0$ du système (I-1) est asymptotiquement et globalement stable si elle est stable et si toutes les solutions de (I-1) tendent vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

Plusieurs approches sont envisagées :

- le concept des normes vectorielles utilisé par BORNE et GENTINA [1], [2] qui permet d'appliquer aux systèmes non linéaires la conjecture du linéaire et le lemme de Kotelyanski [9].

- la méthode des perturbations singulières [6], [7], [8].

I-3 DESCRIPTION DES SYSTEMES ETUDIES

Les systèmes de grande dimension dont l'étude va être développée dans ce mémoire sont stationnaires et du type LUR'E POSTNIKOV.

Ils sont décrits par l'équation vectorielle de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A x(t) + B f(\varepsilon) \\ \varepsilon = e - C^T x(t) \end{cases} \quad (I-2)$$

telle que

$$\begin{cases} x \in \mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n, \quad \forall t \in \mathcal{T} \\ A[n \times n], B[n \times 1], C[n \times 1] \\ \varepsilon \in \mathcal{E} \subset \mathcal{R} \end{cases}$$

et $f(\varepsilon)$ étant une fonction appartenant à la classe Φ .

$$\Phi = \begin{cases} f(t, x, \varepsilon) : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R} \\ f(t, x, \varepsilon) = f^*(t, x, \varepsilon) \varepsilon, \quad f^*(t, x, \varepsilon) \in [\underline{L}, \bar{L}] \subset \mathcal{R} \\ \forall t \in \mathcal{T}, \forall x \in \mathcal{X}, \forall \varepsilon \in \mathcal{E} \end{cases}$$

Comme l'indique la figure I-2, ils sont formés d'une partie linéaire, dont le régime libre est caractérisé par la matrice A à coefficients constants, et d'une partie non linéaire séparable.

L'entrée e et la sortie s sont des grandeurs scalaires.

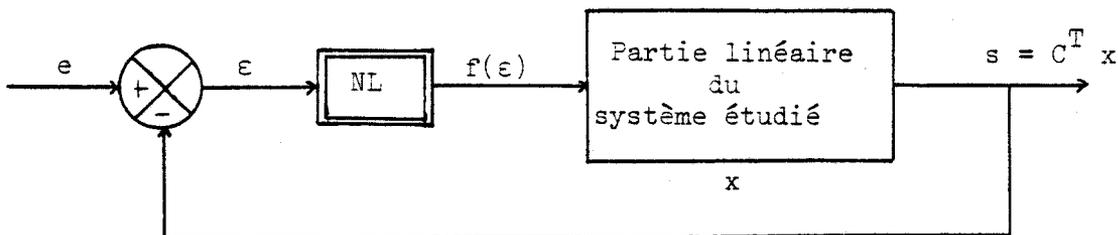


Figure I-2

Les relations (I-2) conduisent à une nouvelle description du processus

$$\frac{dx}{dt} = A x(t) + B f^*(\varepsilon) \left[e^{-C^T x(t)} \right]$$

dont l'évolution en régime autonome ($\varepsilon = 0$) est caractérisée par la relation :

$$\frac{dx}{dt} = \left[A - B f^*(\varepsilon) C^T \right] x(t) \quad (I-3)$$

II - SYSTEMES MONOVARIABLES CONTINUS DE TYPE LUR'E POSTNIKOV

II-1 POSITION DU PROBLEME

L'étude des propriétés de stabilité des processus non linéaires a fait l'objet de nombreux travaux.

La méthode fondée sur les normes vectorielles, conduisant aux critères pratiques de BORNE et GENTINA [1] et [2] généralisé aux processus non linéaires le lemme de Kotelyanski [9] et permet d'appliquer à de grandes classes de processus la conjecture linéaire.

M. BENREJEB [3] a défini une nouvelle forme canonique dite "en flèche" qui conduit à une mise en oeuvre directe de ces critères pratiques d'étude de la stabilité.

Cependant deux démarches sont possibles :

- si le domaine de variation \mathcal{D}_f de la non linéarité est fixé, il suffit alors de montrer que la condition de stabilité asymptotique globale est vérifiée $\forall f \in \mathcal{D}_f$.

- si le domaine de variation \mathcal{D}_f n'est pas connu, le problème est de définir un domaine dans lequel, en tout point, la condition sera vérifiée.

L'étape suivante est d'optimiser cette recherche et de déterminer le plus grand domaine possible respectant les contraintes imposées et les performances souhaitées pour le système.

Ces deux approches demandent le même conditionnement de la matrice caractéristique.

I-2 REPRESENTATION MATRICIELLE SOUS FORME CANONIQUE EN "FLECHE MINCE"

Le modèle mathématique choisi permettant l'identification de la partie linéaire du système étudié est sa fonction de transfert

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ telle que } d^{\circ}(N) \leq d^{\circ}(D) - 1$$

$$N(p) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i p^i$$

$$D(p) = \sum_{i=0}^n S_i p^i \quad S_n \neq 0$$

L'équation vectorielle d'état régissant l'évolution du système est :

$$\frac{dx}{dt} = (A - B C^T f^*) x \quad (I-3)$$

Si le vecteur état $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est tel que $x_i = s^{(i-1)}$ $i = 1, \dots, n$, les matrices A, B, C ont la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{-S_0}{S_n} & \frac{-S_1}{S_n} & \dots & \frac{-S_{n-2}}{S_n} & \frac{-S_{n-1}}{S_n} \end{bmatrix} \quad A \text{ [nxn]}$$

Cette matrice est de la forme "compagnon" [16]

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{S_n} \end{bmatrix} \quad B \text{ [nx1]}$$

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} \quad C \begin{bmatrix} nx1 \end{bmatrix}$$

$M = A - BC^T f^*$, telle que $\dot{x} = Mx$ s'écrit donc :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \dots & 1 \\ \hline \frac{-S_0 - \sigma_0 f^*}{S_n} & \frac{-S_1 - \sigma_1 f^*}{S_n} & \dots & \frac{-S_{n-1} - \sigma_{n-1} f^*}{S_n} \end{bmatrix}$$

Le changement de base de matrice P_1 donne à la matrice M une forme en "flèche mince" [4]

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ (-a_1) & (-a_2) & \dots & (-a_{n-1}) & 0 \\ (-a_1)^2 & (-a_2)^2 & \dots & (-a_{n-1})^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ (-a_1)^{n-1} & (-a_2)^{n-1} & \dots & (-a_{n-1})^{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_i \neq a_j \quad \forall i \neq j = 1 \dots n-1$$

M s'exprime dans la nouvelle base $M^* = P_1^{-1} M P_1$

$$M^* = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -a_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -a_{n-1} \\ -P^*(-a_1) & -P^*(-a_2) & \dots & -P^*(-a_i) & \dots & -P^*(-a_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \prod_{j=2}^{n-1} (a_j - a_1)^{-1} \\ \vdots \\ \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (a_j - a_i)^{-1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{-S_{n-1} - \sigma_{n-1}}{S_n} f^* \end{bmatrix}$$

$P^*(p) = D(p) + f^* N(p)$ représente le "polynôme caractéristique instantané" associé à l'équation différentielle régissant l'évolution du système considéré. [4], [10].

Si les paramètres a_i sont choisis égaux aux racines de $N(p)$ $\left. \begin{matrix} (-a_i) \\ \end{matrix} \right\} \text{NON}$
 $P^*(p)$ est alors indépendant de f^* .

II-3 CRITERE PRATIQUE DE STABILITE

Soit M la matrice, d'éléments m_{ij} caractéristique du système. Le critère pratique de stabilité [2] s'énonce :

- (i) Si les termes hors diagonaux de la matrice sont non négatifs.
- (ii) Si les termes non constants sont isolés dans une seule ligne ou une seule colonne.

alors la vérification des conditions de stabilité des systèmes linéaires, exprimées à partir du lemme de Kotelyanski [2],[9], implique la stabilité du système non linéaire.

La stabilité asymptotique est assurée si :

$$(-1)^r \det_r M \geq \epsilon > 0 \text{ pour } r = 1, \dots, n \quad \forall x \in \mathcal{L} \subset \mathcal{R}^n, \{0\} \in \mathcal{L},$$

($\det_r M$ représente le mineur principal d'ordre r de M).

$$\mathcal{L} \neq \{0\}$$

BENREJEB [3], [4] a utilisé ce critère en vue de l'étude des matrices en flèche en ajoutant deux conditions :

- iii) Si la matrice caractéristique est en flèche d'ordre n.
- iv) Si les termes diagonaux m_{ii} , $i = 1, \dots, n-1$, sont constants et négatifs.

La stabilité asymptotique du système est assurée lorsqu'est vérifiée la condition

$$(-1)^n \det M \geq \epsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

si de plus $x \in \mathcal{X} = \mathcal{R}^n$, la stabilité est globale.

Remarque :

La contrainte (i) peut être allégée. Il suffit en effet d'imposer que les termes m_{ik} et m_{ki} (k fixé et $i = 1, \dots, n-1, i \neq k$) soient de même signe pour toutes les valeurs de $k, k = 1, \dots, n-1$.

Il est possible alors, par un changement de base approprié, de les rendre non négatifs.

Soit :

$$M^* = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \prod_{j=2}^{n-1} (a_j - a_1)^{-1} \\ 0 & -a_2 & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -a_i & 0 & \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (a_j - a_i)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-1} & \vdots \\ -P^*(-a_1) & -P^*(-a_2) & \dots & \dots & -P^*(-a_{n-1}) & \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{-S_{n-1} - \sigma_{n-1} P^*}{S_n} \end{bmatrix}$$

Les conditions d'application du lemme de Kotelyanski à la matrice M^* sont vérifiées par le choix approprié des coefficients a_i qui sont les éléments de la matrice de chargement de base P_1 .

La relation $(-1)^n \det M^* \geq \epsilon > 0$ s'explique sous la forme :

$$P^*(0) \geq \epsilon > 0$$

Remarque :

Cette contrainte est indépendante du changement de base choisi. Elle dépend uniquement de $P^*(p)$, "polynôme caractéristique instantané" du système étudié.

III - MISE EN OEUVRE DU CRITERE QUAND LE DOMAINE DE VARIATION \mathcal{D}_f EST FIXE.

III-1 CONDITIONNEMENT DE LA MATRICE M^*

L'expression $P^*(p) = D(p) + f^* N(p)$ définit un faisceau de polynômes quand f^* varie dans le domaine $\mathcal{D}_f = [\underline{L}, \bar{L}]$.

Le critère pratique, pour son application impose des contraintes sur les signes des termes hors diagonaux, en particulier sur les $P^*(-a_i)$.

Le choix des coefficients a_i est donc déterminé par la localisation des racines des polynômes $P^*(p)$.

III-1-1 Localisation des racines du faisceau de polynômes $P^*(p)$

La fonction de transfert, modèle mathématique de la partie linéaire du système s'écrit :

$$W(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (p - z_i)}{\sum_{i=1}^n (p - p_i)} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad z_i, p_i \in \mathcal{R} \text{ ou } \mathcal{C}$$

Les racines z_i du numérateur $N(p)$ sont les points communs à tous les polynômes du faisceau défini par $P^*(p)$.

M. BENREJEB [3] a montré qu'une condition suffisante de stabilité est que les pôles p_i et les zéros z_i soient alternés, avec $P^*(0) > 0$.

Le cas général est ici envisagé [10].

Après une localisation numérique utilisant une méthode itérative (Annexe I) des zéros du polynôme notés λ_i , le signe de $P^*(p)$ est déterminé dans chacun des intervalles $]\bar{\lambda}_i, \lambda_{i-1}[$. (Les zéros sont négatifs et tels que $i > j$, $|z_i| > |z_j|$).

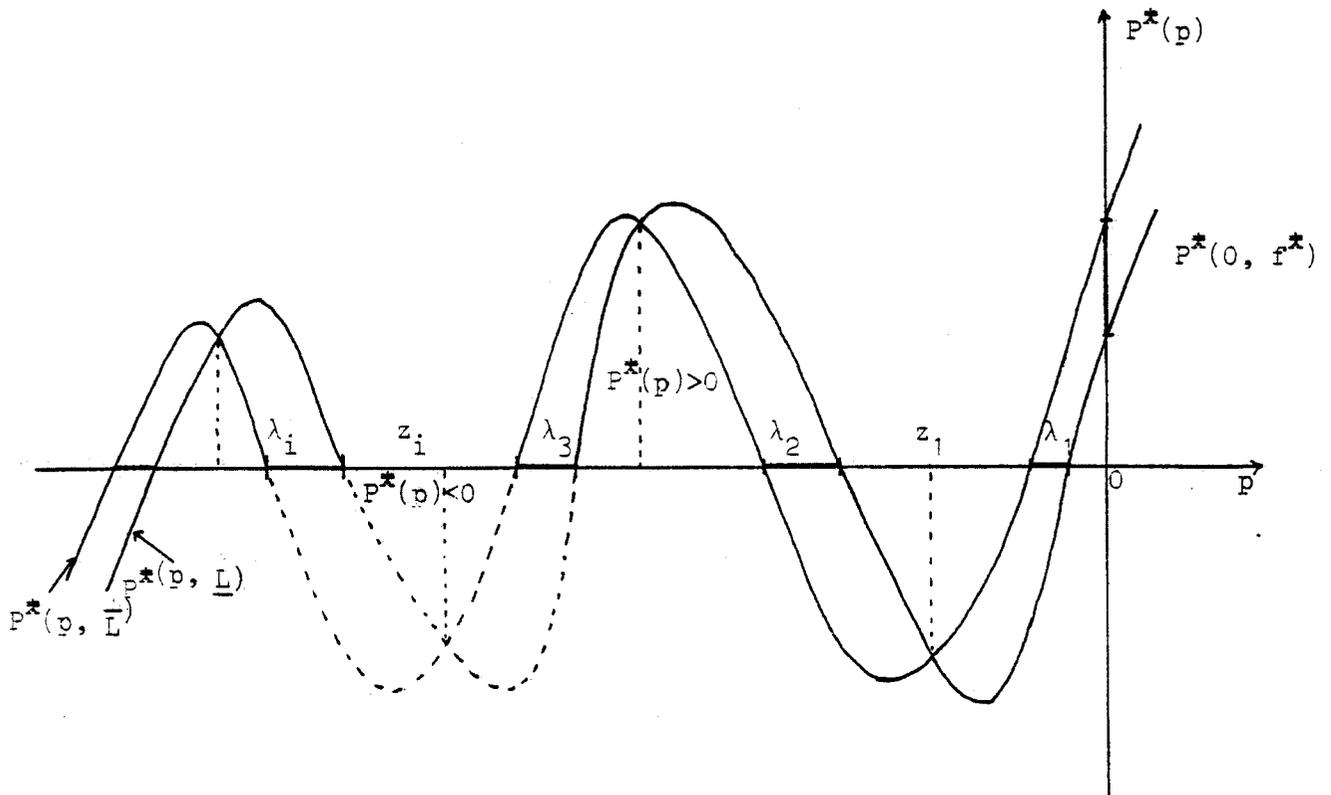


Figure I-3

Ainsi dans l'exemple donné figure I-3, $P^*(p) > 0$ pour $p \in]\bar{\lambda}_3 ; \lambda_2[$

III-1-2 Détermination des paramètres a_i

Si les paramètres a_i sont tels que

- $a_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1$
- $a_i < a_j$ pour $i < j$, $i \neq j$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n-1$

alors le signe de $\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (a_j - a_i)^{-1}$ est celui de $(-1)^{i-1}$

III-2 APPLICATION DU CRITERE DE STABILITE

Les conditions d'application du lemme de Kotelyanski sont bien réalisées :

- . la matrice M^* est une matrice en flèche
- . les termes m_{ii} sont négatifs, car les coefficients a_i vérifiant $m_{ii} = -a_i$, pour $i = 1, 2, \dots, n-1$ sont positifs
- . les termes hors diagonaux sont tous de même signe et non négatifs
- . les éléments non constants sont groupés sur la dernière ligne

Une condition suffisante de stabilité asymptotique globale peut alors s'énoncer

$$P^*(0) \geq \varepsilon > 0$$

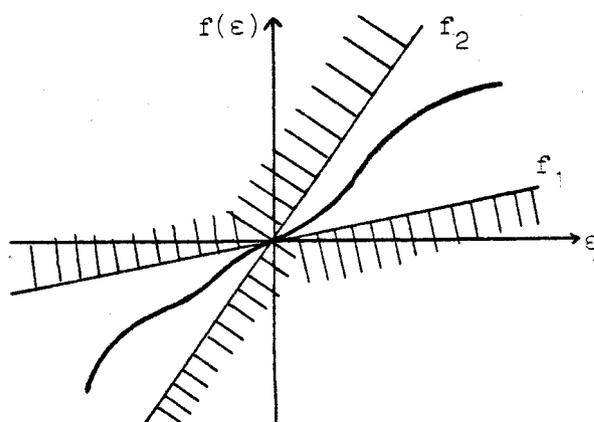
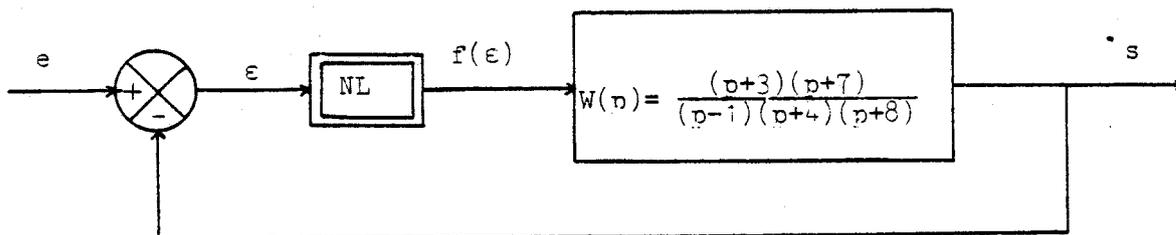
ou encore si on écrit $P^*(0) = D(0) + r^* N(0)$

$$P^*(0) = S_0 + r^* \sigma_0$$

$$S_0 + r^* \sigma_0 \geq \varepsilon > 0, \quad \forall r^* \in \mathcal{D}_f \quad (I-4)$$

III-3 EXEMPLE

Soit le système non linéaire suivant :



$$r^* \in [1,6 ; 5]$$

Figure I-4

Le lemme de Popov [20] ne permet pas de conclure directement à la stabilité d'un tel processus, quelle que soit l'évolution de la non linéarité, puisque l'un des pôles de la fonction de transfert est positif.

$$N(p) = p^2 + \sigma_1 p + \sigma_0 = p^2 + 10 p + 21$$

$$D(p) = p^3 + S_2 p^2 + S_1 p + S_0 = p^3 + 11 p^2 + 20 p - 32$$

d'où

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 32-21f^* & -20-10f^* & -11-f^* \end{bmatrix}$$

s'exprime dans la nouvelle base

$$M^* = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & (a_2 - a_1)^{-1} \\ 0 & -a_2 & (a_1 - a_2)^{-1} \\ -P^*(-a_1) & -P^*(-a_2) & a_1 + a_2 - 11 - f^* \end{bmatrix}$$

avec

$$P^*(p) = D(p) + f^* N(p)$$

$$P^*(p) = p^3 + (11 + f^*) p^2 + (20 + 10 f^*) p + (21 f^* - 32)$$

Les points communs des courbes représentatives des divers polynômes $P^*(p)$ correspondent ici à $z_1 = -3$ et $z_2 = -7$, avec $P^*(-3) = -20$ et $P^*(-7) = 24$. Les racines de $P^*(p)$, quand f^* varie dans l'intervalle $\mathcal{D}_f = [1.6, 5]$ sont localisées comme l'indique la figure I-5.

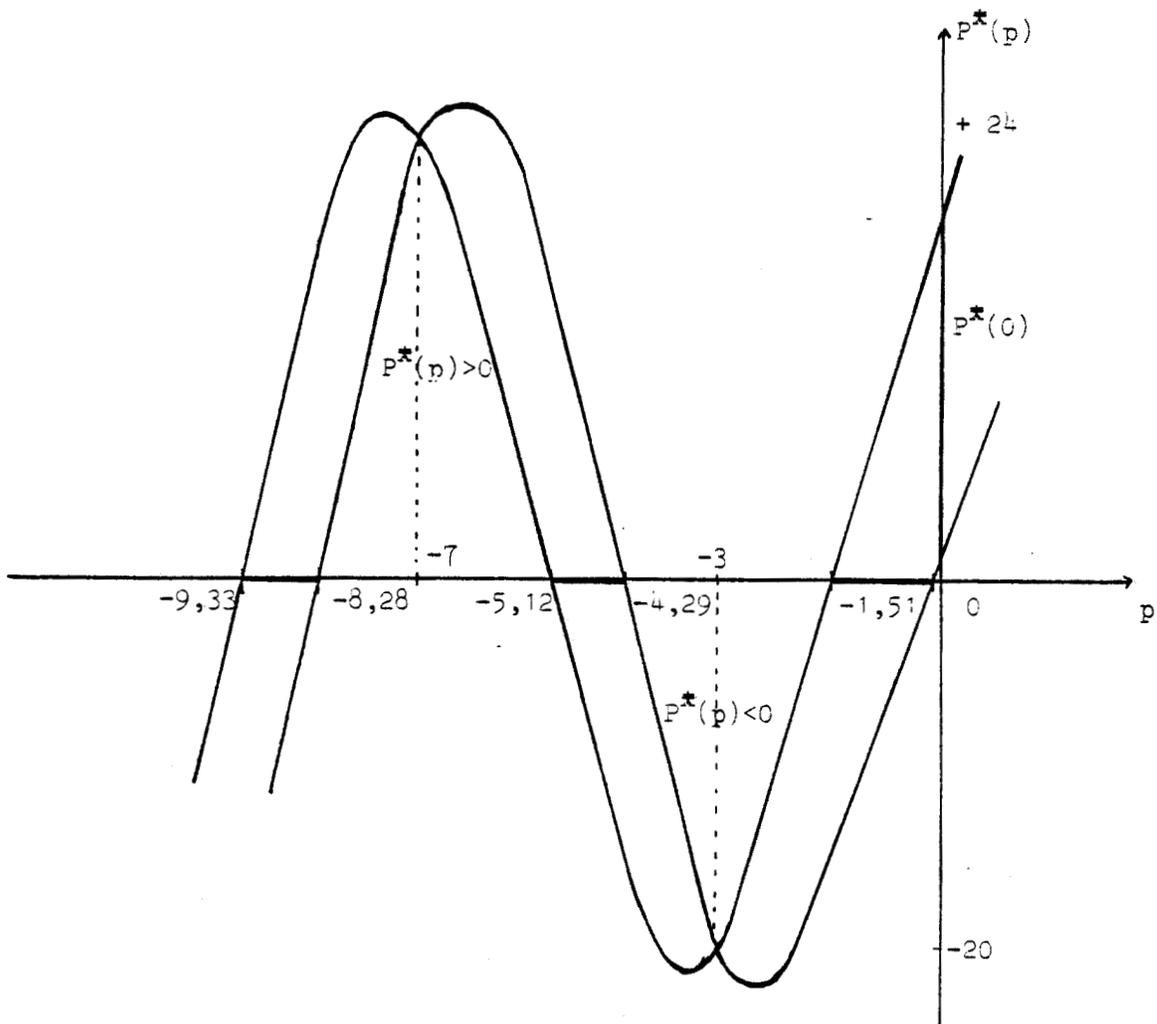


Figure I-5

Les intervalles de choix possibles pour les paramètres a_i sont les suivants, sachant que l'on a pris comme hypothèse $a_1 < a_2$

$$a_1 \in] 1,51 ; 4,29 [$$

$$a_2 \in] 5,12 ; 8,28 [$$

Le choix de $a_1 = 3 = -z_1$ et $a_2 = 7 = -z_2$ permet d'éliminer les termes non constants de $P^*(-a_1)$ et $P^*(-a_2)$.

Il vient :

$$M^* = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1/4 \\ 0 & -7 & -1/4 \\ -D(-3) & -D(-7) & -1 - f^* \end{bmatrix}$$

20

avec $m_{31} = +20$ et $m_{13} = 1/4$

et $m_{32} = -24$ et $m_{23} = -1/4$

éléments symétriques

de même signe

Le système étudié est asymptotiquement et globalement stable s'il vérifie :

$$(-1)^3 \det M^* \geq \varepsilon > 0$$

ou encore

$$P^*(0) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall f^* \in [1,6 ; 5]$$

ce qui équivaut à

$$D(0) + f^* N(0) \geq \varepsilon > 0$$

c'est-à-dire $f^* \geq \frac{32}{21} + \varepsilon'$

$$\varepsilon' > 0$$

ce qui est vérifié $\forall f^* \in \mathcal{D}_f$

IV - ETUDE DU CAS OU \mathcal{D}_f N'EST PAS DETERMINE. OPTIMISATION

IV-1 PRESENTATION DE LA METHODE

Cette étude concerne les systèmes dont la partie non linéaire ne varie pas dans un intervalle fixé à priori.

Ainsi la détermination du domaine de variation de l'inductance non linéaire d'un circuit ferrorésonnant série, assurant la non démultiplication de fréquence, permet un choix des paramètres du circuit fondé sur d'autres critères de qualité.

Le critère pratique d'étude de la stabilité présenté précédemment donne pour le système des contraintes linéaires par rapport à la variable r^* .

Pour une large classe de processus les conditions de stabilité s'expriment par des contraintes inégalités dans lesquelles les variables interviennent linéairement.

Une notation générale permet de présenter sous forme matricielle ces contraintes.

Soient : A une matrice $\begin{bmatrix} l & \times & n \end{bmatrix}$
a une colonne $\begin{bmatrix} l & \times & 1 \end{bmatrix}$
 $x \in \mathcal{R}^n$, vecteur formé de toutes les variables.

Le problème à résoudre est donc de déterminer le domaine tel que $Ax \geq a$ soit vérifié en tout point. Ce domaine \mathcal{P} est appelé polyèdre. C'est un ensemble convexe délimité par les demi espaces \mathcal{D}_i , qui correspondent à $\{ x \in \mathcal{R}^n / A_i x \geq a_i, i \in [l] \text{ indice} \}$
(Voir les définitions générales en Annexe I).

Théorème $\begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$

La contrainte linéaire atteint son maximum sur le polyèdre \mathcal{P} en un point extrême de \mathcal{P} .

Corollaire

Toute propriété vraie sur les sommets du polyèdre convexe est vraie en tout point situé à l'intérieur de ce polyèdre \mathcal{P} . Le polyèdre \mathcal{P} est donc l'ensemble des solutions réalisables des inégalités $Ax \geq a$, et le problème posé n'admet pas de solutions si cet ensemble est vide.

Dans notre étude, le but est de déterminer un domaine \mathcal{D}_f de variation pour les non-linéarités. Ce domaine est inclus dans le polyèdre \mathcal{P} , et si m est le nombre de variables non linéaires, le nombre de tests à effectuer sur le système est au plus de 2^m .

De plus, si des problèmes d'optimisation se posent, une solution optimale sera trouvée parmi les points extrêmes du polyèdre. Il suffira donc de maximiser la fonction caractéristique choisie sur l'ensemble discret des points extrêmes.

IV-2 ETUDE DU DOMAINE DE VARIATION \mathcal{D}_f

IV-2-1 Recherche de solutions réalisables

Les conditions d'application de la conjecture linéaire, donc du critère pratique d'étude de la stabilité, sont supposées réalisées.

La contrainte à réaliser est indépendante des coefficients a_i de la matrice de changement de base.

$$D(0) + f^* N(0) \geq \varepsilon > 0$$

cette expression est du type $A f^* \geq a$ où f^* est l'inconnue.

Par définition,

$$\{ f^* \in \mathcal{R}^n / A f^* \geq a \} \text{ est un demi-espace } \mathcal{D}.$$

Le système étudié comporte une seule non-linéarité

$$f^* \in \mathcal{R}$$

Le domaine de variation \mathcal{D}_f cherché correspond donc au demi-espace

$$\mathcal{D} = \left\{ f^* \in \mathcal{R} / f^* > (-1) \frac{D(0)}{N(0)} \right\}$$

Exemple

Reprenons l'exemple présenté précédemment :

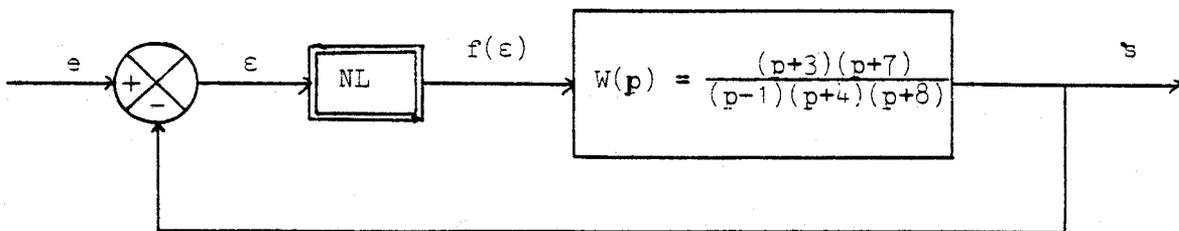


Figure I-6

La contrainte à réaliser est :

$$-32 + 21 f^* \geq \varepsilon > 0$$

Le domaine de variation cherché \mathcal{D}_f est donc la demi-droite

$$\mathcal{D} = \left[\frac{32}{21} + \varepsilon', + \infty \right]$$

$$\varepsilon' > 0$$

IV-2-2 Choix d'un critère d'optimisation

Plusieurs critères d'amélioration des performances existent, comme des critères énergétiques ou de dynamique (réponse à une sollicitation extérieure).

Nous avons donc choisi d'optimiser le "coefficient d'amortissement" du système étudié qui caractérise le comportement du système et la convergence de sa trajectoire en régime transitoire ou perturbé [16].

L'amortissement d'un mouvement x se fait dans le cas d'un processus linéaire suivant une loi exponentielle décroissante.

Si $\psi(x(t))$ est une norme scalaire du vecteur état d'un processus exponentiellement stable, la relation suivante est vérifiée le long des trajectoires du système :

$$\psi(x(t)) \leq \alpha e^{-\eta(t - t_0)} \psi(x(t_0))$$

où $\alpha \geq 1$ et $\eta > 0$ donné ou imposé.

Soit M^* la matrice en flèche caractérisant le système étudié. S'il existe un coefficient η' , $\eta' > 0$ tel que le système $\frac{dx}{dt} = (M^* + \eta' I_n)x$ soit asymptotiquement stable, alors le coefficient d'amortissement du système est minoré par η' .

I_n représente la matrice identité de rang n

Soit $\eta' > 0$ la valeur minimale souhaitée comme performance du système

$$M_{\eta}^* = M^* + \eta I_n$$

$$M_{\eta}^* = \begin{bmatrix} -a_1 + \eta & 0 & \dots & 0 & \prod_{j=2}^{n-1} (a_j - a_1)^{-1} \\ 0 & -a_2 + \eta & \dots & 0 & \prod_{j=1, j \neq 2}^{n-1} (a_j - a_2)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} + \eta & \vdots \\ -P^*(-a_1) & -P^*(-a_2) & \dots & \dots & \sum_{i=1}^{n-1} a_i - \frac{S_{n-1} + \sigma_{n-1} f^*}{S_n} + \eta \end{bmatrix}$$

Les conditions d'application du critère pratique de stabilité n'ont pas été modifiées.

Seules conditions supplémentaires, il faut que

$$0 < \eta < a_i, \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

BENREJEB [4] a montré que la condition suffisante de stabilité globale dans ce cas s'exprime par :

$$P^*(-\eta) \geq \varepsilon > 0$$

avec $P^*(p)$ polynôme caractéristique instantané du système

$$P^*(p) = D(p) + f^* N(p).$$

Donc le problème linéaire qui se pose est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser la valeur de } f^*, \text{ limite inférieure du domaine } \mathcal{D}_f \\ \text{avec les contraintes } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^n S_i (-\eta)^i + f^* \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i (-\eta)^i \geq \varepsilon > 0 \\ 0 < \eta' \leq \eta < a_i \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

En faisant varier η dans le domaine $[\eta', \min(a_i)]$, $i = 1, \dots, n-1$ nous obtenons pour f^* la valeur \underline{L} correspondant au demi-espace

$$\mathcal{D} = [\underline{L}, +\infty[.$$

L'organigramme général d'un tel calcul est présenté figure I-7.

Il est décrit dans le cas où on a une seule variable non linéaire, mais il est valable quand plusieurs variables sont impliquées, seul le nombre de calculs de limites change.

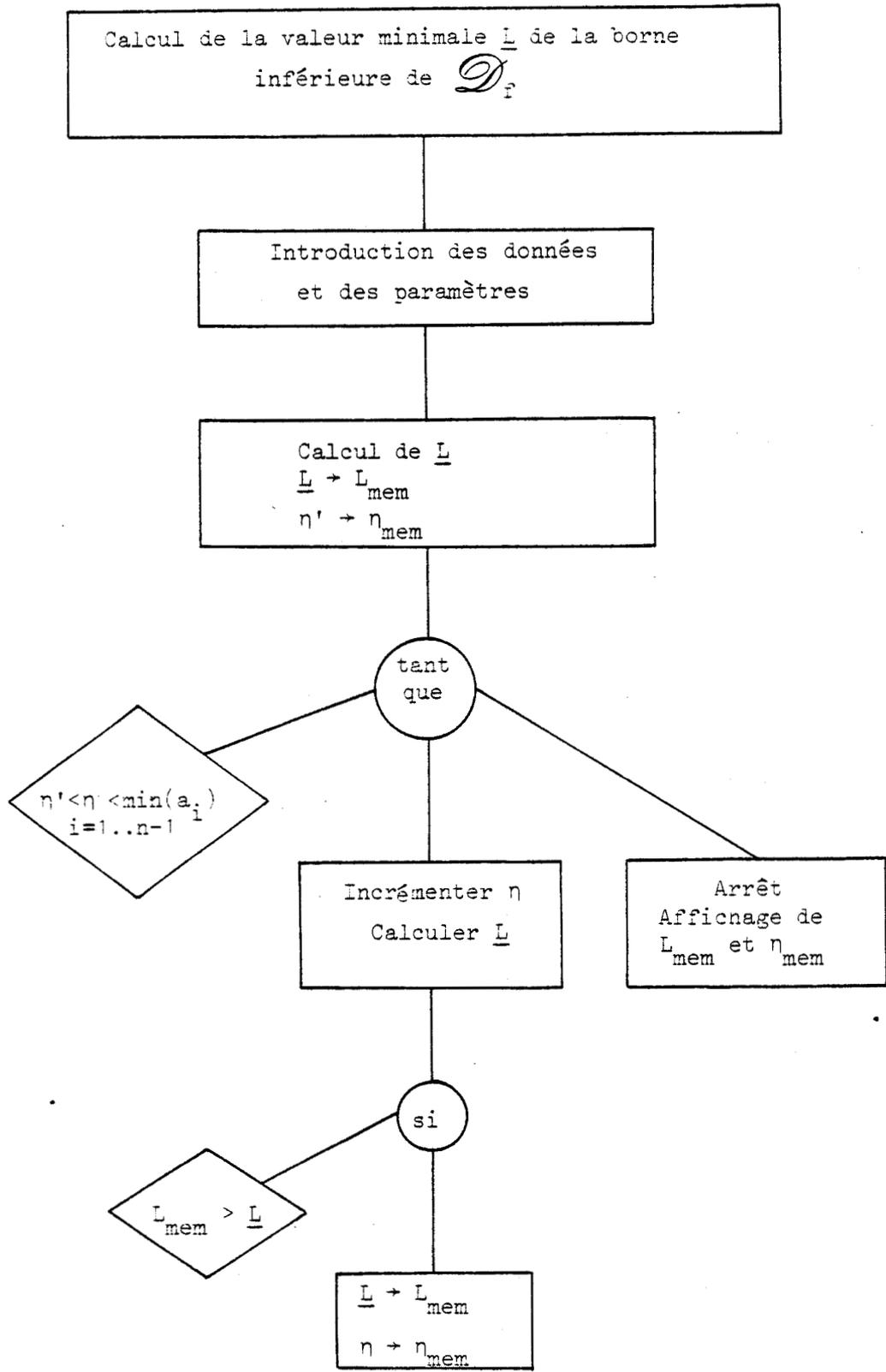


Figure I-7

Exemple

Reprenons l'exemple précédemment traité.

Le domaine de variation \mathcal{D}_f déterminé est le demi-espace

$$\mathcal{D} = \left\{ f^* \in \mathcal{R} / f^* \in \left[\frac{32}{21} + \varepsilon', +\infty \right[\right\}, \text{ dans le cas}$$

où le coefficient d'asservissement η est nul.

Soit η' la valeur minimale souhaitée pour le coefficient d'amortissement.

Le problème [P] devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } \mathcal{D}_f \quad (1) \\ p^* (-\eta) \geq \varepsilon > 0 \quad (2) \\ 0 < \eta' < \eta < a_i \quad i = 1, 2 \end{array} \right.$$

La relation (2) s'écrit encore :

$$(-\eta^3 + 11\eta^2 - 20\eta - 32) + f^* (\eta^2 - 10\eta + 21) \geq \varepsilon > 0$$

ou

$$f^* > \frac{+\eta^3 - 11\eta^2 + 20\eta + 32}{\eta^2 - 10\eta + 21}$$

Donc à chaque valeur η de l'amortissement correspond une valeur de la limite inférieure \underline{L} du domaine \mathcal{D}_f .

Si η est petit, une valeur approchée de l'expression ci-dessus est la suivante :

$$f^* > \frac{20\eta + 32}{21 - 10\eta}$$

Quand η croît, la valeur \underline{L} de f^* croît, donc le domaine de variation \mathcal{D}_f de f^* diminue, ce qui s'interprète aisément comme un durcissement des conditions d'évolution des paramètres, conséquence de l'amélioration des performances du système.

CONCLUSION

Les deux démarches présentées s'appliquent à une large classe de processus non linéaires. Leur mise en oeuvre concerne aussi bien des systèmes simples que des processus plus complexes, de type hiérarchisé ou interconnecté [18], [19].

Les techniques d'agrégation [1], [2] permettent en effet, quand les conditions d'application de la conjecture du linéaire ne sont pas directement vérifiées, de déterminer pour la matrice caractéristique du système une matrice majorante qui a alors les propriétés désirées.

La programmation linéaire simplifie nettement la vérification des contraintes de stabilité, en particulier lorsque les relations mises en oeuvre sont complexes et que se posent des problèmes d'optimisation.

A N N E X E I

Rappels sur la programmation linéaire [11], [12], [13], [14], [15]

I - QUELQUES DEFINITIONS

Soient L et J deux ensembles finis d'indices, $A \begin{bmatrix} L & x & J \end{bmatrix}$ et $a \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}$ deux matrices, A_0 une ligne particulière de A et a_0 l'élément de a de même indice.

- Le plan \mathcal{H}_0 est $\left\{ x \in \mathbb{R}^n / A_0 x = a_0 \right\}$ avec $A_0 \neq 0$
(par exemple une droite dans \mathbb{R}^2 , un point dans \mathbb{R}^0).

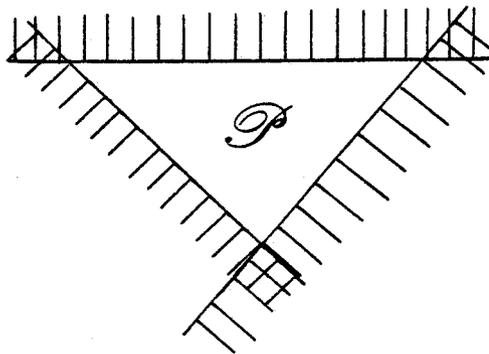
- \mathcal{D}_0 est un demi-espace fermé, $\mathcal{D}_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / A_0 x \geq a_0 \right\}$
si $A_0 \neq 0$. Le plan \mathcal{H}_0 est la frontière de \mathcal{D}_0 .
 \mathcal{D}_0 est fermé, convexe, non borné.

- L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces forme un polyèdre \mathcal{P} .

$$\mathcal{P} = \bigcap_{1 \in L} \mathcal{D}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / Ax \geq a \right\}$$

est fermé et convexe.

ex :



- Les plans générateurs ou d'appui de \mathcal{P} sont les frontières des demi-espaces générateurs de \mathcal{P} , c'est-à-dire les plans

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / A_1 x = a_1 \right\}, \quad \forall 1 \in L$$

- La frontière de \mathcal{P} , notée $F_r(\mathcal{P})$ est

$$F_r(\mathcal{P}) = \left\{ x \in \mathcal{P} \mid \exists l \in \mathcal{L} : A_l x = a_l \right\}$$

$$= \mathcal{P} \cap \left\{ \bigcup_1 \mathcal{H}_1 \right\}$$

- $x \in \mathcal{P}$ est un point extrême de $\mathcal{P} \iff \nexists y \in \mathcal{P}, \nexists z \in \mathcal{P}$
tels que $x \in]y, z[$

- Un point frontière peut être caractérisé par les plans générateurs \mathcal{H}_1 passant par ce point. La frontière se décompose donc en un nombre fini de sous-ensembles ou facettes, correspondant au treillis d'inclusion des sous-ensembles de \mathcal{L} .

A tout $S \subset \mathcal{L}$ on associe la facette

$$F(S) = \left\{ x \in \mathcal{P} / A_S x = a_S \right\}$$

Par extension on pose $F(\emptyset) = \mathcal{P}$

Si $F(S)$ est réduite à un point, c'est un point extrême de \mathcal{P} .

Une facette minimale est une facette $F(S)$ telle que

$$F(S) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / A_S x = a_S \right\}$$

(Les facettes minimales sont par exemple les points extrêmes et les arêtes).

- Un cône polyédrique est un ensemble qui est à la fois un cône et un polyèdre.

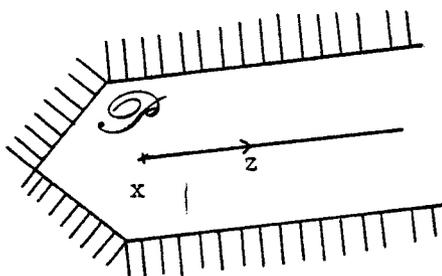
$$\text{ex } \mathcal{C} = \left\{ z \in \mathbb{R}^n / Az \geq 0 \right\}$$

Le cône asymptotique \mathcal{C} d'un polyèdre \mathcal{P} est l'ensemble des directions d'infinitude de \mathcal{P} , c'est-à-dire des directions des demi-droites contenues dans \mathcal{P} .

$$\mathcal{P} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / A_x \geq a \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ z \in \mathbb{R}^n / x + \theta z \in \mathcal{P}, \quad \forall x \in \mathcal{P}, \quad \forall \theta \geq 0 \right\}$$

ex :



L'ensemble des polyèdres vérifie les propriétés suivantes :

- l'intersection de polyèdres est un polyèdre

- soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux polyèdres de \mathcal{R}^n , λ et $\mu \in \mathcal{R}$ deux scalaires donnés.

L'ensemble défini par

$\lambda \mathcal{P} + \mu \mathcal{Q} = \left\{ z \in \mathcal{R}^n / z = \lambda x + \mu y, x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{Q} \right\}$
est un polyèdre.

Les divers systèmes suivants représentent des polyèdres

$$Ax = a$$

$$\begin{cases} Ax = a \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax \geq a \\ Bx \geq b \end{cases}$$

II - THEOREMES FONDAMENTAUX

Un programme linéaire est la maximisation d'une fonction linéaire sur un polyèdre.

Un tel problème peut donc s'énoncer sous la forme

[P] : "maximiser $g \cdot x$ sous les conditions $Ax \geq a$ "

La fonction linéaire à maximiser $g \cdot x$ est le critère, les inégalités $Ax \geq a$ sont les contraintes.

L'inconnue est x et on appelle solution réalisable toute valeur de x vérifiant les contraintes. Une solution optimale est une solution du problème posé [P].

Deux théorèmes sont fondamentaux :

Théorème 1

Soit $g : x \in \mathcal{R}^n \rightarrow g \cdot x \in \mathcal{R}$ une fonction linéaire. Cette fonction atteint son maximum sur un polyèdre borné \mathcal{P} en un point extrême de \mathcal{P} .

Théorème 2

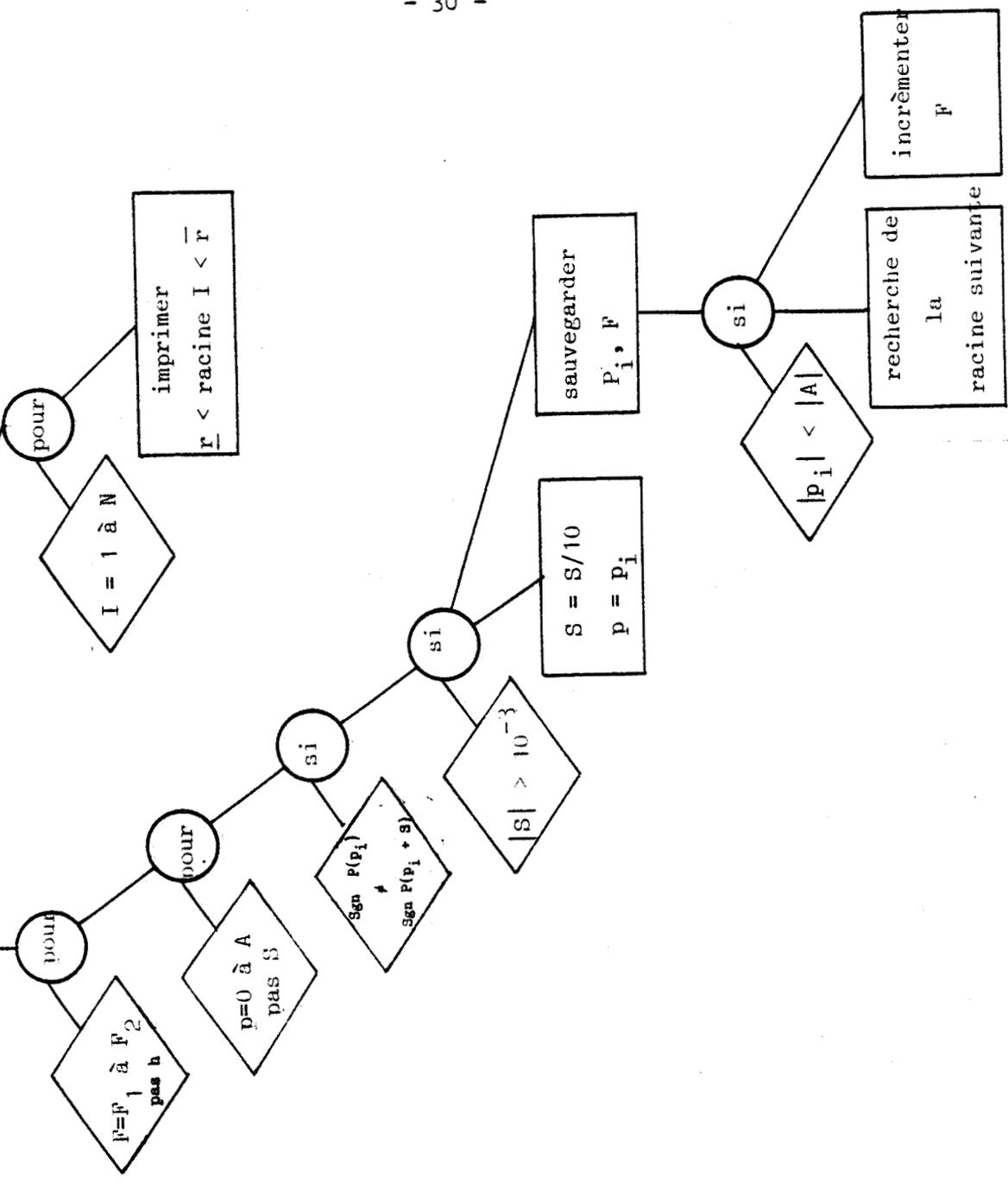
Soit $g : x \in \mathcal{R}^n \rightarrow g \cdot x \in \mathcal{R}$ une fonction linéaire bornée supérieurement par une valeur $\Phi_0 < +\infty$ en tout point d'un polyèdre \mathcal{P} (pouvant être non borné). Alors g atteint son maximum sur \mathcal{P} en un point à distance finie.

BHS
LILLE

Calcul des racines négatives d'un polynôme $P(p)$ à coefficients non constants

Entrée des données et paramètres

- . N ordre du polynôme
- . Coefficients de $P(p)$
- . limites F_1 et F_2 , A
- . pas S et h



BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE I

- 1 BORNE P.
"Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés".
Thèse de Doctorat es-Sciences Physiques, Lille, 1976.

- 2 GENTINA J.C.
"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension".
Thèse de Doctorat es-Sciences Physiques, Lille, 1976.

- 3 BENREJEB M.
"Synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé".
Thèse de Docteur Ingénieur, Lille, 1976.

- 4 BENREJEB M.
"Sur l'analyse et la synthèse des processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés".
Thèse de Doctorat es-Sciences Physiques, Lille, 1980.

- 5 YOSHIZAWA T.
"Stability theory by Lyapounov's second method".
The Mathematical Society of Japan, 1966.

- 6 ÖZGÜNER U.
"Near Optimal Control of composite systems : the multi-time-scale approach".
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC - 24, N° 4, Août 1979.

- 7 KOKOTOVIC P.V. , O' MALLEY R.E., SANNUTI P.
"Singular Perturbations and order reduction in Control Theory. An overview".
Automatica, Vol. 12, pp. 123-132, Pergamon Press, 1976.

- 8 GRUJIĆ L.T.
"Vector Lyapounov functions and Singularly perturbed large scale systems".
JACC, Lafayette Indiana, Juillet 1976.

- 9 GANTMACHER F.R.
"Théorie des matrices".
Tomes 1 et 2, Dunod, 1966.

- 10 BENREJEB M., BORNE P., DAUPHIN G., LAURENT F.
"Global asymptotic stability of non-linear time-varying perturbed system"
Third IMA Conference on Control Theory, Sheffield, Sept. 1980.

- 11 HUARD DE LA MARRE P.
"Optimisation en contraintes linéaires".
Résumé de cours, Université de Lille, Décembre 1972.

- 12 GUIGNARD M.
"Programmation linéaire et applications".
Université de Lille, 1971.

- 13 GREENWALD D.U.
"Programmation linéaire et algorithme du simplex".
Dunod, 1960.

- 14 SAKAROVITCH M.
"Notes on linear programming".
Van Nostrand Reinhold Company.

- 15 FICKEN F.A.
"The simplex method of linear programming".
Holt, Rinehart and Winston, New York.

- 16 BOUDAREL R., DELMAS J., GUICHET P.
"Commande optimale des processus".
Tomes 1 et 2, Dunod, 1968.

17 BORNE P. , BENREJEB M.

"On the stability of a class of interconnected systems. Application to the forced working conditions".

Congrès IFAC, 1977, Fredericton (Canada).

18 GROUMPOS P.P.

"Filtering techniques for a class of hierarchical systems".

Modelling and Simulation, Vol. 9, Part 3, Control and Identification Proc. of 9th Annual Pittsburgh Conference, April, 27-28, 1978.

19 GROUMPOS P.P.

"Structural Analysis for a class of hierarchical systems".

Congrès MECO, 1978, Athènes, Vol. 2, pp. 645-647.

20 POPOV V.M.

"L'hyperstabilité des systèmes automatiques"

Techniques de l'automatisme - Dunod

CHAPITRE II

ETUDE DE LA STABILITE DE DIVERS TYPES DE SYSTEMES INTERCONNECTES. APPLICATION A LA SYNTHESE.

INTRODUCTION

Après avoir présenté dans le précédent chapitre les deux méthodes d'étude de la stabilité que nous utiliserons dans toute cette étude, nous allons insister ici, avec des exemples différents de systèmes interconnectés, sur la grande facilité d'emploi que présente la deuxième approche du problème que nous avons mise au point. En effet, envisager les conditions d'évolution du système garantissant la stabilité asymptotique pour définir le plus grand domaine de variation des termes non constants est surtout utile quand le nombre de non-linéarités est important.

Une application à la synthèse des systèmes est présentée et son emploi dans un but de commande "optimale" est proposé.

I - SYSTEMES HIERARCHISES - SYSTEMES INTERCONNECTES

Dans la classe des systèmes de grande dimension, l'importance des systèmes de type hiérarchisé (hiérarchisés (1) ou interconnectés (2)) n'est plus à montrer. [1], [2].

Cette structure, qu'elle existe intrinséquement ou qu'elle apparaisse au niveau du modèle après analyse, amène pour l'étude du système complexe concerné, une simplification et une organisation des problèmes à résoudre. [8]

Nous utilisons, pour différencier les deux types de systèmes (1) et (2) et permettre des variations de structure, la notion de matrice d'interconnexion $E = \{e_{ij}\}$ telle que $e_{ij} : \mathcal{T} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, r$ avec $i = 1, 2, \dots, r$ représentant les indices des systèmes composant le système global. Ces notions ont été introduites par ŠILJAK [3], développées par GRUJIĆ and al [4] et utilisées par BENREJEB [5].

II - INTERCONNEXION DE 2 SYSTEMES NON LINEAIRES PARTICULIERS

II-1 LES COUPLAGES SONT LINEAIRES

II-1-1 Mise en équation d'état

Soient les deux systèmes S_1 et S_2 non linéaires continus de type LUR'E POSTNIKOV représentés figure II-1.

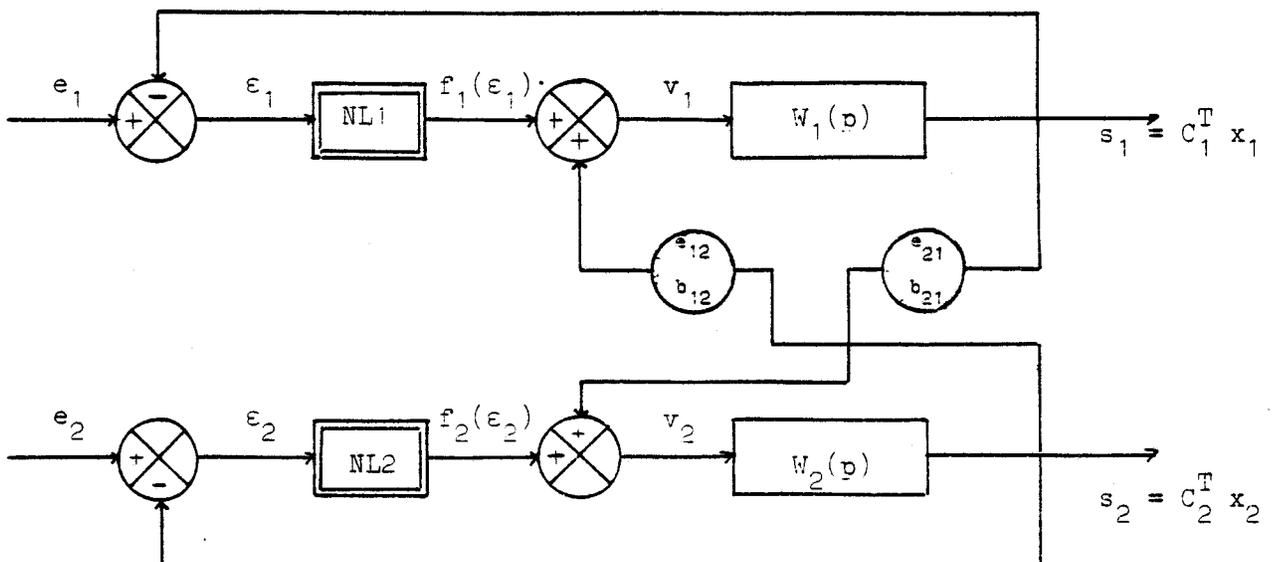


Figure II-1

Le processus global S est représenté par l'interconnexion des sous-systèmes S_1 et S_2 définis par les équations suivantes :

$$S_i : \begin{cases} \overset{\circ}{x}_i = A_i x_i + B_i v_i \\ \epsilon_i = e_i - s_i \\ s_i = C_i^T x_i \\ v_i = f_i(\epsilon_i) + e_{ij} b_{ij} s_j \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{pour } i, j = 1, 2 \\ i \neq j \end{matrix} \quad (\text{II-1})$$

avec $x_i \in \mathcal{I}_i \subset \mathcal{R}^{n_i}$

$$s_i, e_i, \epsilon_i \in \mathcal{R}$$

$$A_i \in \mathcal{R}^{n_i \times n_i}$$

$$B_i \in \mathcal{R}^{n_i}, C_i \in \mathcal{R}^{n_i}, b_{ij} \in \mathcal{R}, e_{ij} \in \{0, 1\}$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont de classe Φ (chapitre I) ; il en résulte que $f_1(\epsilon_1)$ et $f_2(\epsilon_2)$ peuvent s'exprimer sous la forme

$$f_i(\epsilon_i) = f_i^*(\epsilon_i) \cdot \epsilon_i \quad \text{pour } i = 1, 2$$

En régime autonome, l'équation vectorielle d'état s'écrit donc :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 f_1^*(\epsilon_1) (-C_1^T x_1) + e_{12} b_{12} B_1 C_2^T x_2 \\ \overset{\circ}{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 f_2^*(\epsilon_2) (-C_2^T x_2) + e_{21} b_{21} B_2 C_1^T x_1 \end{cases} \quad (\text{II-2})$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ x_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(\cdot) & M_{12} \\ M_{21} & M_{22}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \begin{cases} M_{ii}(\cdot) = (A_i - B_i C_i^T f_i^*) & i = 1, 2 \\ M_{ij} = e_{ij} b_{ij} B_i C_j^T & i = j = 1, 2 \\ & i \neq j \end{cases} \quad (\text{II-3})$$

La partie linéaire de chacun des sous-systèmes est représentée par une fonction de transfert :

$$W_i(p) = \frac{N_i(p)}{D_i(p)} \quad \text{avec } i = 1, 2$$

avec

$$\left. \begin{aligned} N_i(p) &= \sum_{j=0}^{n_i-1} \sigma_j^i p^j \\ D_i(p) &= \sum_{j=0}^{n_i} S_j^i p^j \\ \text{avec } S_{n_i}^i &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \forall i = 1, 2$$

La matrice M représentant le système global $\overset{o}{x} = M x$ est mise sous forme flèche épaisse [5] par changement de base $\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$, la forme des matrices de passage P_i ayant été définie au chapitre I.

Soit \hat{M} cette matrice transformée

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11}(\cdot) & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{21} & \hat{M}_{22}(\cdot) \end{bmatrix}$$

avec $\hat{M}_{ii}(\cdot) = P_i^{-1} M_{ii}(\cdot) P_i$ pour $i, j = 1, 2$
 $i \neq j$

$$\hat{M}_{ij} = P_i^{-1} M_{ij} P_j$$

$$\hat{M}_{ii}(\cdot) = \begin{bmatrix} -a_1^i & 0 & \dots & 0 & \prod_{l=2}^{n_i-1} (a_l^i - a_1^i)^{-1} \\ 0 & -a_2^i & \dots & 0 & \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k_i}}^{n_i-1} (a_l^i - a_{k_i}^i)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{n_i-1}^i & 0 \\ -P_i^* (-a_1^i) & \dots & -P_i^* (-a_{k_i}^i) & \dots & \sum_{k_i=1}^{n_i-1} a_{k_i}^i - S_{n_i-1}^i - \sigma_{n_i-1}^i P_i^* \end{bmatrix}$$

avec :

$$C_{ik_i}^* = \left| m_{n_i k_i}^* \right| + \left| m_{n_j k_i} \right|$$

$$\text{avec } i, j = 1, 2 \quad k_1 = 1, 2, \dots, n_1 - 1$$

$$i \neq j \quad k_2 = 1, 2, \dots, n_2 - 1$$

$$C_{n_1+n_2-1}^* = \max \left\{ m_{n_1 n_1}^* + \left| m_{(n_1+n_2) n_1} \right|, \right. \\ \left. m_{n_2 n_2}^* + \left| m_{n_1 (n_1+n_2)} \right| \right\}$$

II-1-3 Etude de la stabilité du système global

II-1-3-1 Cas où les domaines de variation des coefficients non constants sont fixés.

Le processus décrit par la matrice C est asymptotiquement stable si

- $a_{k_i}^i > 0$ pour $i = 1, 2$

- $(-1)^{n_1+n_2-1} \det C \geq \varepsilon > 0$

$$\forall f_1^* \in \mathcal{D}_{f_1} \\ \forall f_2^* \in \mathcal{D}_{f_2}$$

det C peut s'exprimer par

$$(-1)^{n_1+n_2-2} \prod_{k_1=1}^{n_1-1} a_{k_1}^1 \prod_{k_2=1}^{n_2-1} a_{k_2}^2 \left(C_{n_1+n_2-1}^* + \sum_{k_1=1}^{n_1-1} \frac{|\beta_{k_1}^1|}{a_{k_1}^1} C_{1k_1}^* \right. \\ \left. + \sum_{k_2=1}^{n_2-1} \frac{|\beta_{k_2}^2|}{a_{k_2}^2} C_{2k_2}^* \right) \quad (\text{II-7})$$

Les coefficients $a_{k_i}^i$ sont positifs.

La condition de stabilité s'écrit donc :

$$C_{n_1+n_2-1}^* + \sum_{k_1=1}^{n_1-1} \frac{|\beta_{k_1}^1|}{a_{k_1}^1} C_{1k_1}^* + \sum_{k_2=1}^{n_2-1} \frac{|\beta_{k_2}^2|}{a_{k_2}^2} C_{2k_2}^* \leq -\varepsilon < 0 \quad (\text{II-8})$$

$$\forall f_1^* \in \mathcal{D}_{f_1} \\ \forall f_2^* \in \mathcal{D}_{f_2}$$

Les éléments $C_{ik_i}^*$, $i = 1, 2$ et $C_{n_1+n_2-1}^*$ s'expriment de façon complexe par rapport aux termes non constants r_1^* et r_2^* .

Si les matrices caractéristiques M_{ii} des systèmes S_i , $i = 1, 2$ ont été conditionnées pour satisfaire aux conditions d'application du lemme de Kotelyanski (cf Chapitre I) les termes $-P_i^*(-a_{k_1}^i)$ contenus dans les éléments $C_{ik_i}^*$ de la matrice C sont alors positifs et les valeurs absolues ne sont plus utiles.

La relation (II-8) obtenue est linéaire en fonction de r_1^* et r_2^* . Il suffit donc de vérifier qu'elle est réalisée sur les points extrêmes du polyèdre (qui est ici un rectangle) déterminé par les domaines \mathcal{D}_{f_1} et \mathcal{D}_{f_2} , ce qui demande alors 2^n tests, si n est le nombre de non-linéarités. Ici $n = 2$.

II-1-3-2 Détermination des domaines \mathcal{D}_{f_1} et \mathcal{D}_{f_2} assurant la stabilité du système global.

Les conditions d'application du critère pratique d'étude de la stabilité impliquent que les sous-systèmes S_i définis par leurs matrices caractéristiques M_{ii} , $i = 1, 2$ soient stables.

Ces matrices vérifient les contraintes imposées pour l'emploi de la conjecture du linéaire (cf Chapitre I).

Pour chacun des systèmes S_i , $i = 1, 2$, il faut donc

$$P_i^*(0) \geq \epsilon > 0$$

Ces relations sont des fonctions linéaires de la variable r_i^*

$$D_1(0) + r_1^* N_1(0) \geq \epsilon_1 > 0 \quad (I)$$

$$D_2(0) + r_2^* N_2(0) \geq \epsilon_2 > 0 \quad (II)$$

Elles déterminent deux domaines, qui sont les demi-espaces

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ r_1^* / A_1 r_1^* > a_1 \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = \left\{ r_2^* / A_2 r_2^* > a_2 \right\}$$

de frontières respectives $\mathcal{H}_1 = \left\{ r_1^* / A_1 r_1^* = a_1 \right\}$ et $\mathcal{H}_2 = \left\{ r_2^* / A_2 r_2^* = a_2 \right\}$

La stabilité du système global dépend de ces deux conditions (I) et (II), mais aussi de la condition (II-8) déterminée précédemment, sur la matrice du système de comparaison C.

$$C_{n_1+n_2-1}^* = \text{Max} \left\{ \sum_{k_1=1}^{n_1-1} a_{k_1}^1 - S_{n_1-1}^1 - \sigma_{n_1-1}^1 f_1^* + \left| e_{21} b_{21} \sigma_{n_1-1}^1 \right|, \right. \\ \left. \sum_{k_2=1}^{n_2-1} a_{k_2}^2 - S_{n_2-1}^2 - \sigma_{n_2-1}^2 f_2^* + \left| e_{12} b_{12} \sigma_{n_2-1}^2 \right| \right\}$$

Le problème est de définir les domaines \mathcal{D}_{f_1} et \mathcal{D}_{f_2} d'évolution des non-linéarités pour lesquels soit vérifiée l'expression (II-8)

$$C_{n_1+n_2-1}^* + \sum_{k_1=1}^{n_1-1} \frac{|\beta_{k_1}^1|}{a_{k_1}^1} C_{1k_1}^* + \sum_{k_2=1}^{n_2-1} \frac{|\beta_{k_2}^2|}{a_{k_2}^2} C_{2k_2}^* \leq -\varepsilon < 0$$

ou encore :

$$C_{n_1+n_2-1}^* + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 \sum_{k_i=1}^{n_i-1} \frac{|\beta_{k_i}^i|}{a_{k_i}^i} \left(\left| -P_i^* (-a_{k_i}^i) \right| + \left| e_{ji} b_{ji} N_i (-a_{k_i}^i) \right| \right) \leq -\varepsilon < 0$$

(II-9)

Or $-P_i^* (-a_{k_i}^i) \geq 0$, puisque chaque sous-système S_i déconnecté vérifie la conjecture linéaire. Les termes comportant des éléments non linéaires apparaissent donc sans valeur absolue et l'expression obtenue définit une relation linéaire entre les deux non-linéarités f_1^* et f_2^* . En regroupant les termes il est alors possible de déduire de l'équation ci-dessus la contrainte à réaliser

$$\alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^* + \gamma \leq 0$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ sont des constantes dépendant des coefficients de la matrice C.

Cette condition définit encore un demi-espace \mathcal{D}_3 de frontière \mathcal{H}_3 .
Le résultat recherché qui est le domaine de variation de f_1^* et f_2^* assurant la stabilité du système est représenté figure (II-2).

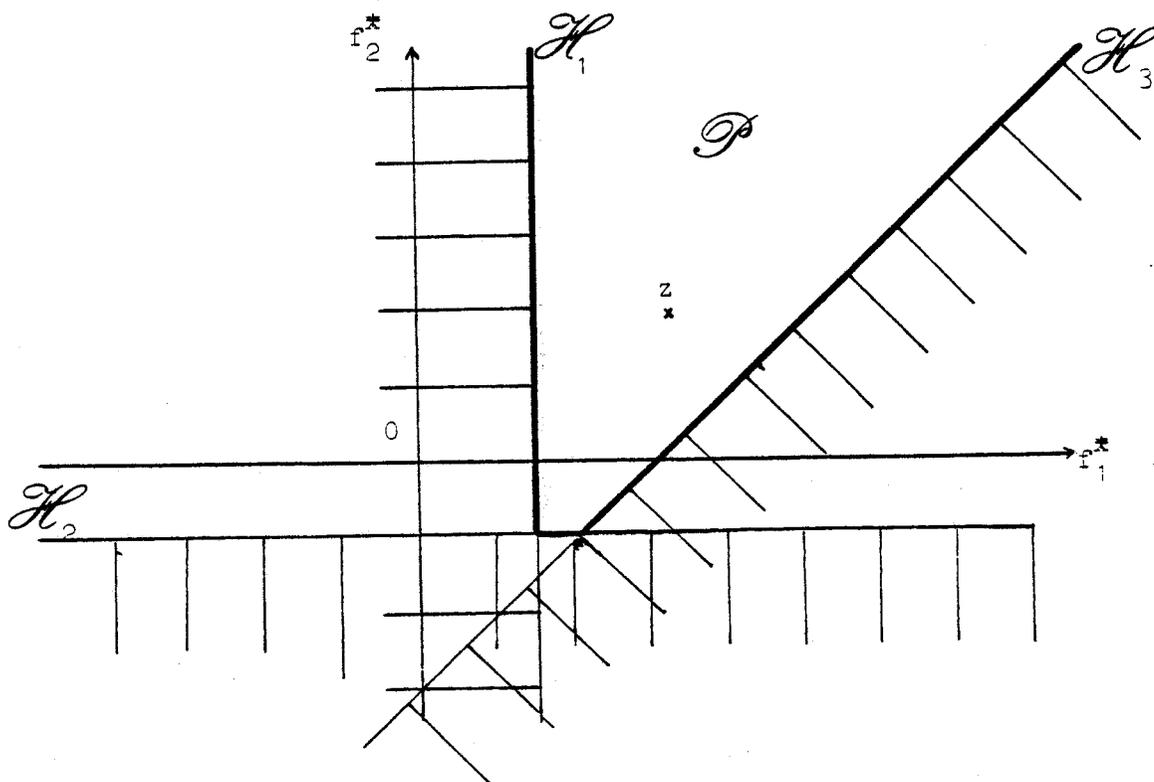


Figure II-2

Ces trois demi-espaces $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ définissent un polyèdre \mathcal{P} tel que $\forall z \in \mathcal{P}$ définissant un couple (f_1^*, f_2^*) le système complet S , formé de l'interconnexion de S_1 et S_2 est stable.

II-2 MISE EN OEUVRE SUR UN EXEMPLE

Soit le système interconnecté S formé des sous-systèmes S_1 et S_2 définis par leur fonction de transfert

$$S_1 : W_1(p) = \frac{(p+3)(p+7)}{(p-1)(p+4)(p+8)} \quad , \quad W_1(p) = \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

$$S_2 : W_2(p) = \frac{(p+1)(p+5)}{(p-1)(p+2)(p+6)} \quad , \quad W_2(p) = \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

Le critère de Popov [12] ne permet pas de conclure directement à la stabilité de ces sous-systèmes S_i puisqu'ils possèdent tous deux un pôle positif $p = 1$.

Ces systèmes sont interconnectés selon le schéma de la figure II-1 et les coefficients d'interconnexion e_{ij} sont non nuls, pour $i, j = 1, 2, i \neq j$. Les coefficients de couplage b_{12} et b_{21} sont pris égaux à 1. Les matrices M_{ii} , $i = 1, 2$ représentant chacun des systèmes, mises sous forme flèche mince sont les suivantes :

$$M_{11} = \begin{bmatrix} -a_1^1 & 0 & (a_2^1 - a_1^1)^{-1} \\ 0 & -a_2^1 & (a_1^1 - a_2^1)^{-1} \\ -P_1^*(-a_1^1) & -P_1^*(-a_2^1) & a_1^1 + a_2^1 - S_2^1 - \sigma_2^1 f_1^* \end{bmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} -a_1^2 & 0 & (a_2^2 - a_1^2)^{-1} \\ 0 & -a_2^2 & (a_1^2 - a_2^2)^{-1} \\ -P_2^*(-a_1^2) & -P_2^*(-a_2^2) & a_1^2 + a_2^2 - S_2^2 - \sigma_2^2 f_2^* \end{bmatrix}$$

Les matrices de couplage M_{ij} , $i, j = 1, 2, i \neq j$ sont :

$$M_{12} = e_{12} b_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_2(-a_1^2) & N_2(-a_2^2) & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = e_{21} b_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_1(-a_1^1) & N_1(-a_2^1) & \sigma_2^1 \end{bmatrix}$$

La matrice M représentant le système global s'écrit alors, après permutation des lignes et des colonnes de rang 3 et 5

$$\begin{bmatrix}
 -a_1^1 & 0 & 0 & 0 & (a_2^1 - a_1^1)^{-1} & 0 \\
 0 & -a_2^1 & 0 & 0 & (a_1^1 - a_2^1)^{-1} & 0 \\
 0 & 0 & -a_1^2 & 0 & 0 & (a_2^2 - a_1^2)^{-1} \\
 0 & 0 & 0 & -a_2^2 & 0 & (a_1^2 - a_2^2)^{-1} \\
 -P_1^x(-a_1^1) & -P_1^x(-a_2^1) & N_2(-a_1^2) & N_2(-a_2^2) & a_1^1 + a_2^1 - S_2^1 - \sigma_2^1 f_1^x & \sigma_2^2 \\
 N_1(-a_1^1) & N_1(-a_2^1) & -P_2^x(-a_1^2) & -P_2^x(-a_2^2) & \sigma_2^1 & a_1^1 + a_2^1 - S_2^2 - \sigma_2^2 f_2^x
 \end{bmatrix}$$

Le système de comparaison déduit de la norme vectorielle

p , $p(x) = [|x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4|, |x_5| + |x_6|]^T$ permettant l'application de la conjecture linéaire a comme matrice caractéristique.

$$C = \begin{bmatrix}
 -a_1^1 & 0 & 0 & 0 & \left| (a_2^1 - a_1^1) \right|^{-1} \\
 0 & -a_2^1 & 0 & 0 & \left| (a_1^1 - a_2^1) \right|^{-1} \\
 0 & 0 & -a_1^2 & 0 & \left| (a_2^2 - a_1^2) \right|^{-1} \\
 0 & 0 & 0 & -a_2^2 & \left| (a_1^2 - a_2^2) \right|^{-1} \\
 \left| -P_1^x(-a_1^1) \right| & \left| -P_1^x(-a_2^1) \right| & \left| -P_2^x(-a_1^2) \right| & \left| -P_2^x(-a_2^2) \right| & \left| a_1^1 + a_2^1 - S_2^1 - \sigma_2^1 f_1^x + \sigma_2^2 \right| \\
 + \left| N_1(-a_1^1) \right| & + \left| N_1(-a_2^1) \right| & + \left| N_2(-a_1^2) \right| & + \left| N_2(-a_2^2) \right| & \left| a_1^1 + a_2^1 - S_2^2 - \sigma_2^2 f_2^x + \sigma_2^1 \right|
 \end{bmatrix}$$

1^{er} cas : \mathcal{D}_{f_1} et \mathcal{D}_{f_2} sont fixés

$$\mathcal{D}_{f_1} = [7 ; 9] \quad \mathcal{D}_{f_2} = [6,5 ; 10]$$

Le système global $S = S_1 \cup S_2$, qui remplit les conditions d'application du linéaire est stable si

$$C_{55}^* + \sum_{i=1}^4 \frac{C_{i5}}{(-C_{ii})} C_{5i}^* \leq -\epsilon < 0$$

Cette expression dépend des éléments a_i^1 et a_i^2 , $i = 1, 2$ définissant les matrices de changement de base P_1, P_2 .

Les termes non diagonaux apparaissent sous forme de valeurs absolues. Les a_i^1 et a_i^2 , qui doivent être positifs et distincts, peuvent donc être choisis plus librement. Nous leur avons donné des valeurs qui permettent d'appliquer le lemme de Kotelyanski aux sous-matrices M_{ii} , $i = 1, 2$ et qui correspondent, pour trois de ces quatre valeurs, à l'opposé des zéros des fonctions de transfert $W_i(p)$, $i = 1, 2$.

Les non-linéarités f_1^* et f_2^* disparaissent donc des termes $-P_1^*(-a_1^1)$ et $-P_2^*(-a_1^2)$, pour $i = 1, 2$ et les éléments $N_1(-a_1^1)$ et $N_2(-a_1^2)$, $i = 1, 2$, s'annulent.

Si $a_1^1 = 3$, $a_2^1 = 6$

$a_1^2 = 1$, $a_2^2 = 5$

le terme C_{55}^* s'obtient alors par

$$C_{55}^* = \max \left\{ -1 - f_1^* ; -f_2^* \right\}$$

(C_{55}^* est négatif, puisque f_1^* et f_2^* sont positifs dans leur intervalle de variation), ce qui correspond bien aux conditions d'application du lemme de Kotelyanski.

Pour que l'on puisse enlever les valeurs absolues aux termes comportant des non-linéarités, il faut que ces termes soient positifs.

$$\text{Ainsi ici } P_1^*(-6) > 0 \Leftrightarrow 28 - 3 f_1^* > 0 \Leftrightarrow f_1^* < \frac{28}{3} \quad (1)$$

$$C_{55}^* + \frac{|6-3|^{-1}}{3} |D_1(-3)| + \frac{|3-6|^{-1}}{6} \left(P^*(-6) + |N_1(-6)| \right) + |5-1|^{-1} |D_2(-1)| \\ + \frac{|1-5|^{-1}}{5} |D_2(-5)| < -\epsilon < 0$$

ou encore, en distinguant selon le terme définissant C_{55}^*

$$\text{Si } C_{55}^* = -1 - f_1^* \quad , \quad f_1^* > 5.438 \quad (2)$$

$$\text{Si } C_{55}^* = -f_2^* \quad , \quad -0,167 f_1^* - f_2^* + 7.344 < 0 \quad (3)$$

Ces trois conditions doivent être remplies simultanément.

Elles sont linéaires en fonction de f_1^* et f_2^* . Il suffit donc de vérifier qu'elles sont réalisées aux bornes du rectangle formé par les valeurs extrêmes de f_1^* et f_2^* pour être assuré de la stabilité asymptotique du système global pour toutes valeurs de $f_i^* \in \mathcal{D}_{f_i}$, $i = 1, 2$.

Dans le cas où les domaines d'évolution des non-linéarités ne sont pas définis a priori, il faut déterminer par un balayage systématique un domaine définissant \mathcal{D}_{f_1} et \mathcal{D}_{f_2} dans lequel ces contraintes soient satisfaites.

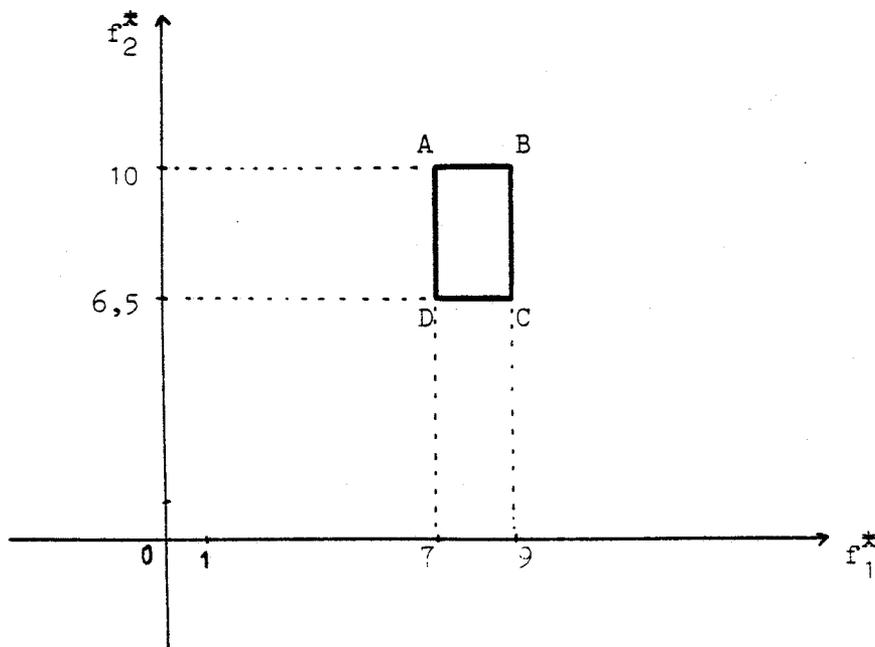


Figure II-3

Le nombre de tests est donc de 2^n , si n est le nombre de termes non linéaires contenus dans le système global. Dans l'exemple traité pour $\mathcal{D}_{f_1} = [7 ; 9]$ et $\mathcal{D}_{f_2} = [6,5 ; 10]$ les contraintes (1), (2), (3) sont vérifiées aux quatre sommets A, B, C, D du rectangle.

2^{ème} cas : \mathcal{D}_{f_1} et \mathcal{D}_{f_2} ne sont pas fixés a priori.

Le but est de déterminer les plus grands domaines \mathcal{D}_{f_1} et \mathcal{D}_{f_2} vérifiant les conditions de stabilité du système global.

La condition de stabilité des sous systèmes n'est pas nécessaire a priori.

Il suffit de vérifier que la matrice du système global vérifie bien les conditions d'application de la conjecture linéaire.

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1/4 \\ 20 & |28-3f_1^*|+3 & 10 & 18 & \max \left\{ -1 - f_1^*, -f_2^* \right\} \end{bmatrix}$$

Les seules contraintes portent donc sur les termes :

$$\begin{cases} -1 - f_1^* < 0 \iff f_1^* > -1 & (1) \\ -f_2^* < 0 \iff f_2^* > 0 & (2) \end{cases}$$

La condition (II-9) s'écrit alors :

$$C_{55}^* + \frac{1}{9} \times 20 + \frac{1}{18} \left(|28 - 3f_1^*| + 3 \right) + \frac{1}{4} \times 10 + \frac{18}{20} \leq -\epsilon < 0$$

soit suivant le signe de $28 - 3f_1^*$

$$\left. \begin{array}{l} f_1^* > 5.438 \\ f_1^* > 3.881 \end{array} \right\} \text{ si } C_{55}^* = -1 - f_1^*$$

$$\left. \begin{array}{l} -0,167 f_1^* - f_2^* + 7,344 < 0 \\ 0,167 f_1^* - f_2^* + 4,233 < 0 \end{array} \right\} \text{si } C_{55}^* = -f_2^*$$

avec les contraintes $f_1^* > -1$ et $f_2^* > 0$.

Ces expressions déterminent des demi-espaces \mathcal{D}_i délimités par les hyperplans \mathcal{H}_i .

Ces domaines sont représentés figure II-4.

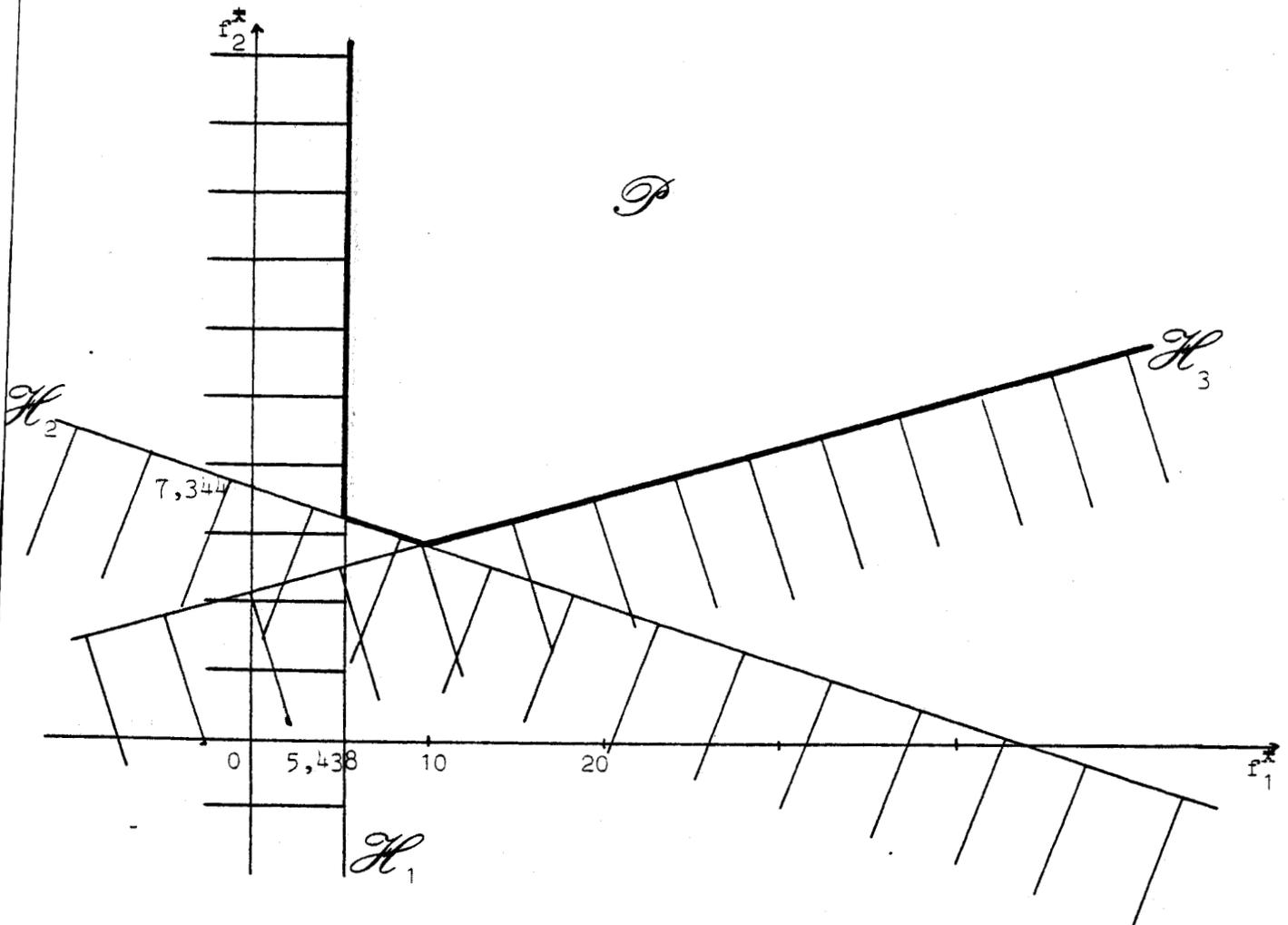


Figure II-4

Le domaine \mathcal{P} obtenu ici est en fait un cône polyédrique ; il représente le plus grand domaine de variation possible pour le couple (f_1^*, f_2^*) assurant la stabilité du système interconnecté.

Remarque importante :

Les deux méthodes d'étude des systèmes interconnectés présentent des avantages sur les modes d'étude classiques d'autant plus grands que l'ordre des systèmes et le nombre de non-linéarités sont élevés.

II-3 UN DES COEFFICIENTS DE COUPLAGE EST NON LINEAIRE

Si b_{12}^* est non linéaire, le conditionnement de la matrice est le même et le système de comparaison pour le système global est toujours du même ordre.

La condition de stabilité asymptotique est donnée par l'expression (II-10) avec un terme non linéaire supplémentaire

$$C_{n_1+n_2-1}^* + \sum_{k_1=1}^{n_1-1} \frac{|\beta_{k_1}^1|}{a_{k_1}^1} \left(\left| -P_1^* (-a_{k_1}^1) \right| + \left| e_{21} b_{21} N_1 (-a_{k_1}^1) \right| \right) + \sum_{k_2=1}^{n_2-1} \frac{|\beta_{k_2}^2|}{a_{k_2}^2} \left(\left| -P_2^* (-a_{k_2}^2) \right| + \left| e_{12} b_{12}^* N_2 (-a_{k_2}^2) \right| \right) < -\varepsilon < 0 \quad (\text{II-10})$$

1^{er} cas : $f_1^* \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_2^* \in \mathcal{D}_{f_2}$, $b_{12}^* \in \mathcal{D}_b$

La vérification de cette contrainte, qui s'exprime linéairement en fonction des trois non-linéarités si la matrice C a été conditionnée comme défini précédemment, demande 2^3 tests.

2^{ème} cas : \mathcal{D}_{f_1} , \mathcal{D}_{f_2} , \mathcal{D}_b inconnus

D'après le paragraphe précédent, nous avons les données suivantes :

- 1) $\mathcal{D}_1 = \left\{ f_1^* / A_1 f_1^* > a_1 \right\}$ délimité par le plan \mathcal{H}_1
- 2) $\mathcal{D}_2 = \left\{ f_2^* / A_2 f_2^* > a_2 \right\}$ délimité par le plan \mathcal{H}_2

La contrainte générale est une relation linéaire entre 3 inconnues qui peut s'écrire :

$$\alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^* + \alpha_3 b_{12}^* + \gamma \leq -\varepsilon < 0$$

Cette expression définit un demi-espace délimité par un plan \mathcal{H}_3

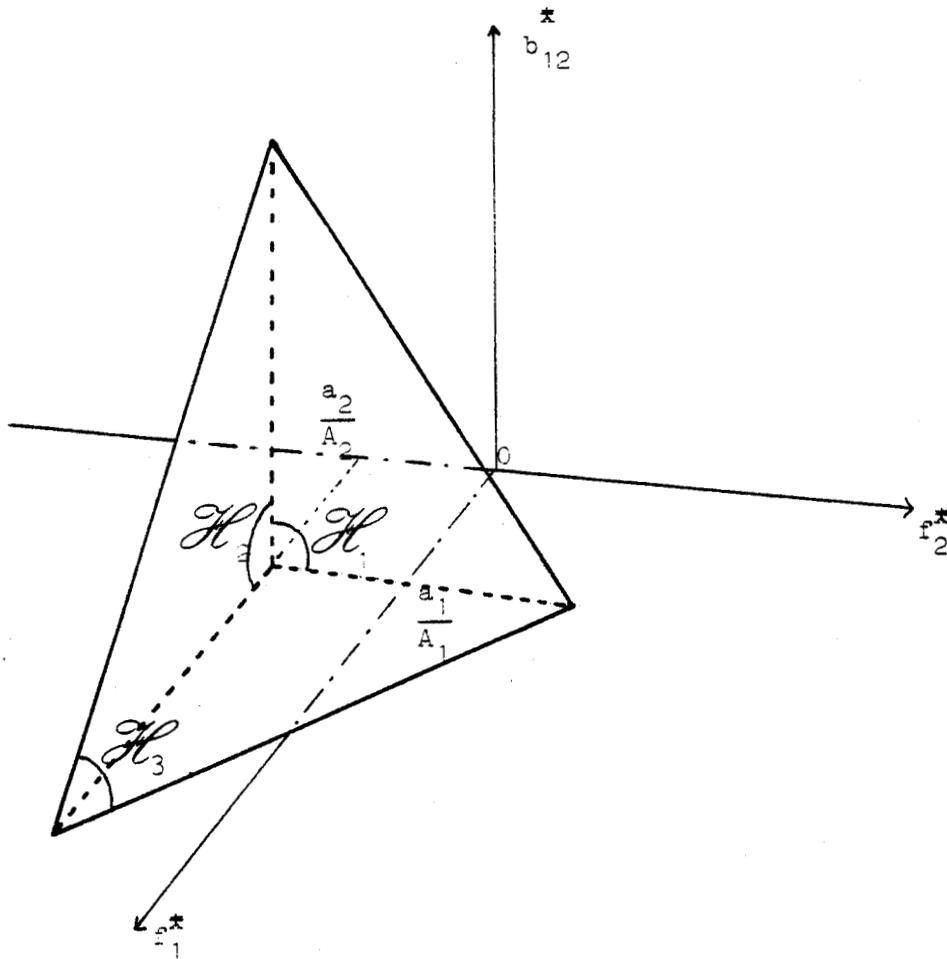


Figure II-5

Donc le domaine de variation du triplet $(f_1^*, f_2^*, |b_{12}^*|)$ est l'intersection des trois demi-espaces, et il est délimité par des points extrêmes correspondant à des bornes pour chacun des termes non constants.

III - GENERALISATION A r SOUS-SYSTEMES NON LINEAIRES INTERCONNECTES

Les liaisons entre les différents sous-systèmes sont représentées par le graphe suivant :

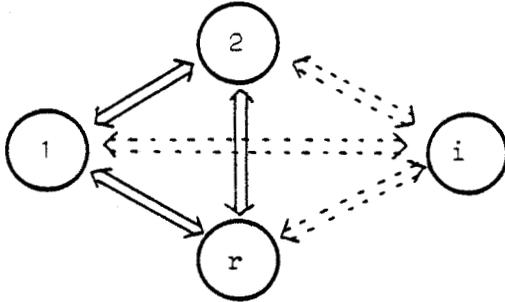


Figure II-6

L'existence de ces liaisons dépend de la valeur des coefficients d'interconnexion $e_{ij} \in \{0,1\}$, et il est possible de particulariser $i,j = 1, \dots, r$ $i \neq j$

un des sous-systèmes en lui faisant jouer un rôle de coordonnateur [1],[5]. Le système global $S = \bigcup_{i=1}^r S_i$ formé de sous-systèmes dont la structure a été définie précédemment est caractérisé par une matrice en flèche épaisse \hat{M} , telle que les termes non constants sont groupés sur les r dernières lignes.

Un système de comparaison d'ordre $\sum_{i=1}^r n_i - r + 1$ regroupant en une seule ces r dernières lignes remplit alors les conditions d'application de la conjecture du linéaire et du lemme de Kotelyanski.

Il est donc possible de généraliser à ce système les conditions assurant la stabilité qui avaient été définies dans le cas de deux sous-systèmes interconnectés.

- $a_{k_i}^i > 0$, $\forall k_i \in \{1, \dots, n_i - 1\}$ pour $i = 1 \dots r$
- $C_r^* \sum_{i=1}^r n_i^{-r+1} + \sum_{i=1}^r \sum_{k_i=1}^{n_i-1} \frac{|\beta_{k_i}^i|}{a_{k_i}^i} \left(\left| P_i^*(-a_{k_i}^i) \right| + \left| e_{ji} b_{ji} N_i(-a_{k_i}^i) \right| \right) \leq -\epsilon < 0$

(II-11)

La vérification de cette contrainte, quand les domaines de variation \mathcal{D}_f des non linéarités f_i^* sont fixés, demande 2^r tests, où r représente le nombre des f_i^* .

Si cette contrainte n'est pas vérifiée pour toutes les valeurs extrêmes de f_i^* , supposées connues, il est utile de déterminer l'espace à r dimensions satisfaisant cette contrainte, cet espace est formé de demi-espaces \mathcal{D}_i , délimités par les hyperplans \mathcal{H}_i
 $i = 1, \dots, r$ $i = 1, \dots, r$

Comme il a été vu précédemment, il apparaît des contraintes linéaires sur les f_i^* (II-11) qui se simplifient notablement lorsque chaque sous-système envisagé isolément vérifie les conditions de validité de la conjecture linéaire.

Nous pouvons représenter sous forme matricielle ces contraintes :

Soit $F = \begin{bmatrix} f_1^* \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ f_r^* \end{bmatrix}$ le vecteur constitué des variables f_i^*

Si

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{rr} \\ \alpha_{(r+1)1} & \alpha_{(r+1)2} & \dots & \alpha_{(r+1)r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(r+k),1} & \alpha_{(r+k),2} & \dots & \alpha_{(r+k),r} \end{bmatrix}$$

est une matrice $\begin{bmatrix} (r+k) \times r \end{bmatrix}$, avec $\alpha_{ij} \in \mathcal{R}$
 $i = 1..r+k$
 $j = 1..r$

et

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_{r+k} \end{bmatrix}$$

une matrice $[(r+k) \times 1]$

l'ensemble de ces conditions peut s'écrire :

$$A F > a$$

et $a_{ii} F = a_i$ est l'équation de l'hyperplan \mathcal{H}_i délimitant le demi-espace \mathcal{D}_i .

Le lieu des points $z = \{ f_i^*, i = 1, \dots, r / AF > a \}$ est donc le polyèdre \mathcal{P} , formé par l'intersection des demi-espaces \mathcal{D}_i
 $i=1, \dots, r+k$

IV - CAS PARTICULIER : UN DES SYSTEMES EST LINEAIRE - APPLICATION A LA

SYNTHESE

La conception d'un système de commande adapté à un processus industriel, qu'il s'agisse d'un satellite, d'un réacteur ou d'un générateur de vapeur pose un certain nombre de problèmes, en particulier au niveau du choix de la représentation. [9],[10],[11].

Le problème de la mise en équations de l'ensemble processus à commander + synthèse de commande a été résolu précédemment pour une classe importante de systèmes et il a été montré que les contraintes imposées aux termes non linéaires en vue d'assurer la stabilité mettent en oeuvre des expressions linéaires des non-linéarités, simplifiant ainsi l'étude en général complexe.

Après le choix d'un modèle convenable reste à concevoir un système de commande permettant de satisfaire les performances imposées par l'utilisateur.

Le but assigné peut se décrire sous la forme d'un critère à maximiser, tout en assurant la stabilité du système pour $t \geq t_0$.

Dans le précédent chapitre, nous avons défini le coefficient d'amortissement η et nous avons choisi d'optimiser ce paramètre qui caractérise le comportement dynamique du processus.

IV-1 ETUDE DE LA STABILITE

Reprenons le cas de deux sous-systèmes interconnectés et considérons que le système S_1 , linéaire, joue le rôle de réseau correcteur.

La figure II-7 représente cette interconnexion, qui se fait cette fois en amont de la non-linéarité.

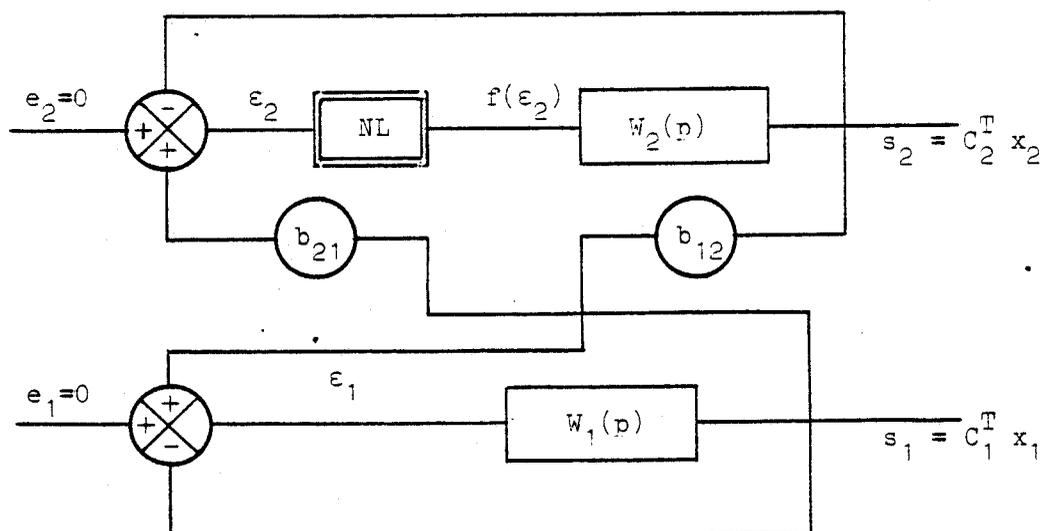


Figure II-7

Ce schéma ne représente pas de façon habituelle un système S_2 bouclé par un réseau correcteur S_1 , mais il est possible de se ramener à la forme classique représentée figure II-8, en introduisant dans la boucle de retour toutes les boucles annexes.

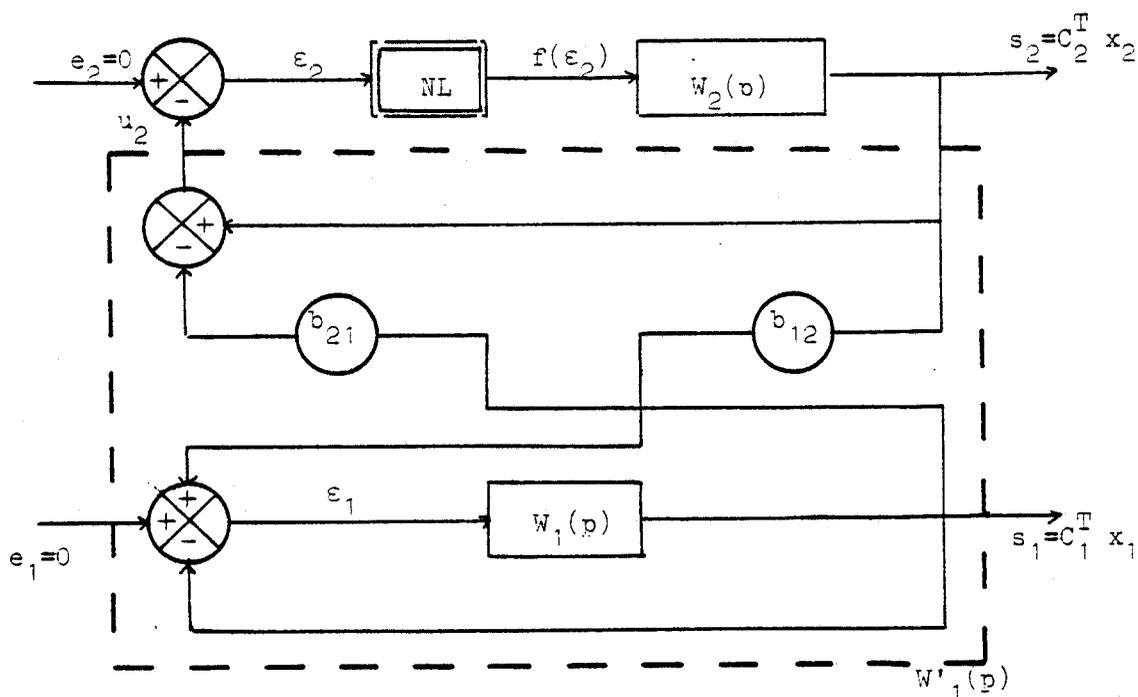


Figure II-8

Le système suivant permet de déterminer la nouvelle fonction de transfert $W'_1 = \frac{u_2}{s_2}$

$$(1) \quad u_2 = s_2 - b_{21} s_1$$

$$(2) \quad \frac{s_1}{\epsilon_1} = W_1$$

$$(3) \quad \epsilon_1 = b_{12} s_2 - s_1$$

$$(1) \Rightarrow \frac{u_2}{s_2} = 1 - b_{21} \frac{s_1}{s_2}$$

$$(2),(3) \Rightarrow \frac{\epsilon_1}{s_1} = b_{12} \frac{s_2}{s_1} - 1 \Rightarrow \frac{s_1}{s_2} = b_{12} \frac{W_1}{1+W_1}$$

$$W'_1 = 1 - b_{21} b_{12} \frac{W_1}{1+W_1}$$

$$W'_1 = \frac{W_1 (1 - b_{12} b_{21}) + 1}{1 + W_1}$$

Cette nouvelle fonction de transfert, dans le cas où $b_{12} b_{21} \neq 1$, a un numérateur de même degré que le dénominateur. Lorsque $W_1(p)$ est du second ordre, $W'_1(p)$ peut représenter un réseau correcteur du type avance-retard de phase qui est une approche des réseaux PID les

plus employés. La mise en équation d'état n'est pas aussi simple car apparaissent des dérivées de l'entrée du même ordre que celles de la sortie. Cependant cette représentation est équivalente dans l'espace d'état à celle présentée précédemment.

La mise en équation matricielle du système global peut donc être reprise sous une forme correspondant à l'expression (II-3)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 C_1^T & b_{12} B_1 C_2^T \\ b_{21} f^* B_2 C_1^T & A_2 - f^* B_2 C_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = M(.) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La matrice M(.) est en flèche mince et les éléments non constants sont dans une même ligne.

La matrice M(.) s'écrit :

$$M(.) = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & -\lambda_i & \\ \vdots & \vdots & \\ \dots -P_1(-\lambda_i) \dots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_1-1} (\lambda_k - \lambda_i)^{-1} \\ \vdots \\ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_2-1} (a_k - a_j)^{-1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n_2-1} a_j^{-s} n_{2-1}^{-\sigma} n_{2-1}^{-1} f^{*s} \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} \dots b_{12} N_2 (-a_j) \dots b_{12}^1 n_{2-1} \\ \vdots \\ \dots -P_2^*(-a_j) \dots \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Les conditions de signe portant sur les termes non diagonaux sont réalisées, puisque la matrice M_{22} (cf Chap. I) caractérisant S_2 est conditionnée par le choix des a_j ; la matrice M_{11} correspondant au réseau correcteur ne comporte pas d'éléments non constants.

Le système S est asymptotiquement stable si

- . les termes diagonaux sont négatifs
- . les termes symétriques par rapport à la diagonale sont de même signe
- . les éléments non constants sont sur une seule rangée
- . $P_1(0) \geq \varepsilon > 0$ (cond. 1)
- . $(-1)^{n_1+n_2} \det M(.) \geq \varepsilon > 0$ (cond. 2)

La condition (1) n'apporte de contraintes que sur le réseau correcteur.

Si la matrice $M(.)$ vérifie les conditions d'application du lemme de Kotelyanski, [5], [13], [14], la condition (2) s'écrit alors :

$$P_1(0) P_2^*(0) - b_{12} b_{21} f^* N_1(0) N_2(0) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall f^* \in \mathcal{D}_f$$

(II-14)

Remarque :

Le but premier du système correcteur est d'assurer une stabilité satisfaisante du processus, et les conditions énoncées ne requièrent pas à priori la stabilité du système étudié.

IV - 2 OPTIMISATION DU COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT

Soit η le coefficient d'amortissement qui est minoré par η' .
Le système est alors le suivant

$$\frac{dz}{dt} = (M^* + \eta I_n) z \quad \text{où } I_n \text{ est la matrice unité de rang } n = n_1 + n_2$$

Le système global S, qui satisfaisait aux conditions d'application du linéaire, doit encore vérifier le lemme de Kotelyanski qui s'écrit alors :

$$\cdot \eta < \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n_1 - 1 \quad (1)$$

$$\cdot \eta < a_j, \quad j = 1, \dots, n_2 - 1 \quad (2)$$

(II-15)

· les termes symétriques par rapport à la diagonale principale de même signe

$$\cdot P_1(-\eta) P_2^*(-\eta) - b_{12} b_{21} f^* N_1(-\eta) N_2(-\eta) \geq \varepsilon_2 > 0 \quad (3)$$

avec la condition supplémentaire portant sur S_1

$$P_1(-\eta) \geq \varepsilon_1 > 0$$

et la performance du système souhaitée s'exprime par la contrainte $\eta > \eta' > 0$.

L'optimisation du comportement du système peut être envisagée sous deux aspects différents :

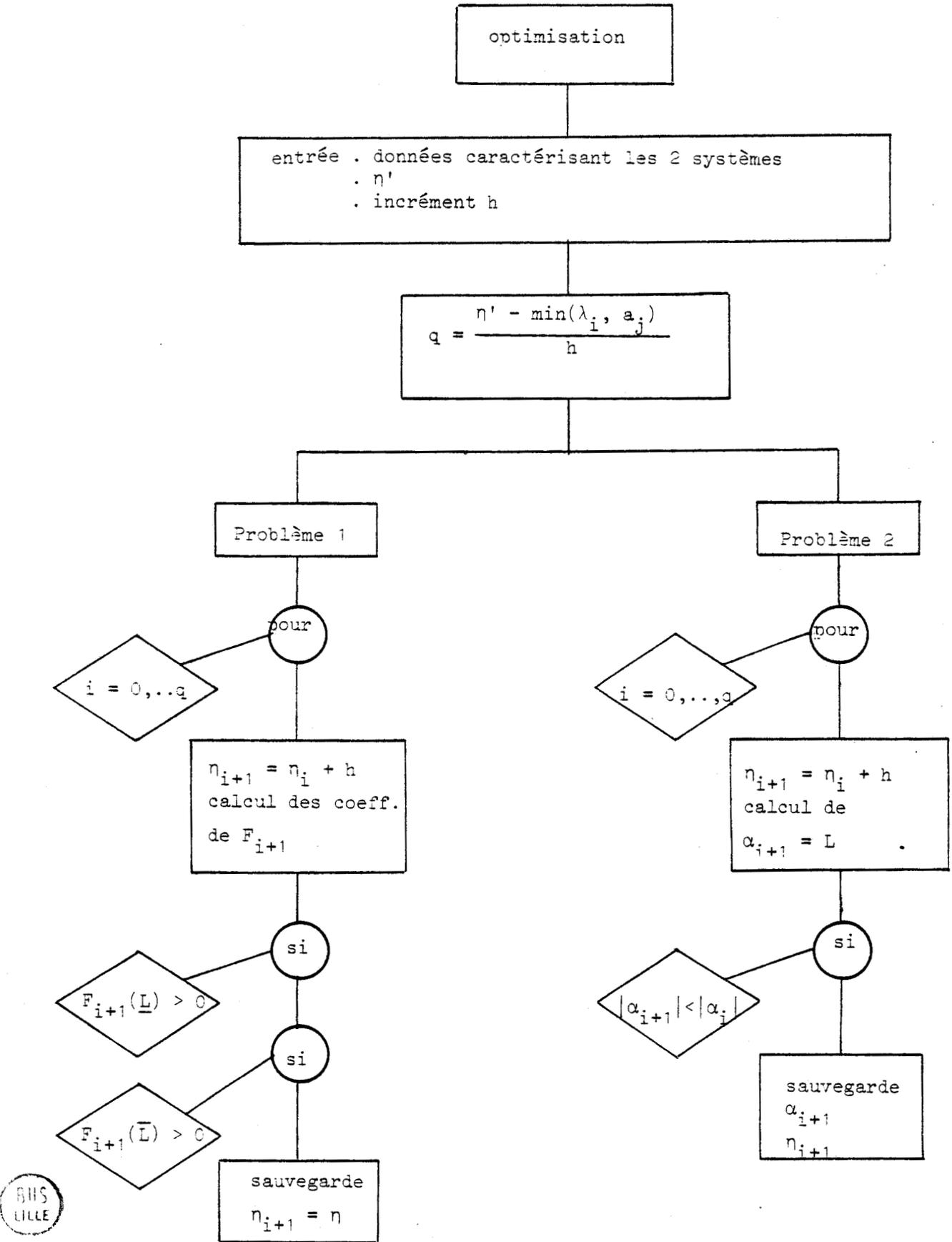
1) Déterminer le plus grand coefficient d'amortissement η tel que $0 < \eta' < \eta < \min (\lambda_i, a_j)$ qui assure la stabilité du système global modifié pour une non-linéarité f^* variant dans le domaine fixé \mathcal{D}_f .

2) Déterminer le plus grand domaine de variation \mathcal{D}_f de la non-linéarité f^* correspondant à une valeur du coefficient d'amortissement η fixée telle que

$$0 < \eta' < \eta < \min (\lambda_i, a_j)$$

qui vérifie la condition de stabilité asymptotique (3) du système modifié.

Les schémas de programme concernant ces deux approches sont représentés figure II-9.



Présentation des deux démarches optimisant le comportement du processus étudié.

Figure II-9

Le problème 1) est une prolongation de l'étude de la stabilité dans le cas où \mathcal{D}_f est fixé.

En effet en incrémentant η d'un pas h choisi, il est possible de vérifier la condition (3) pour $f^* \in \mathcal{D}_f$ correspondant à une valeur fixe de η . La relation obtenue $F_\eta(f^*)$ est alors une relation linéaire en f^* .

Un théorème important de la programmation linéaire [15], [18] montre que si une relation linéaire est vérifiée aux bornes de l'intervalle de variation de la variable f^* , elle est vérifiée pour toute valeur de f^* comprise à l'intérieur de cet intervalle.

Exemple

Le système S_2 , dont la partie linéaire est représentée par $W_2(p) = \frac{(p+3)(p+7)}{(p-1)(p+4)(p+8)}$ est interconnecté par le système linéaire S_1 défini par $W_1(p)$, comme l'indique la figure II-7.

La fonction de transfert $W'(p)$, pour mettre l'ensemble S sous la forme présentée figure II-8 est alors

$$W'_1(p) = 1 - b_{12} b_{21} \frac{W_1}{1+W_1}$$

1) Si $W'_1(p) = K$ où K est une constante, ce qui correspond à

$W_1(p) = \frac{1 - K}{(K + b_{12} b_{21} - 1)}$, le système bouclé S_2 a une forme équivalente à celle présentée chapitre I et peut alors se représenter par la matrice suivante :

$M = A_2 - K B_2 C_2^T f^*$, qui s'exprime sous la forme en flèche suivante :

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & (a_2 - a_1)^{-1} \\ 0 & -a_2 & (a_1 - a_2)^{-1} \\ -P_2^*(-a_1) & -P_2^*(-a_2) & a_1 + a_2 - S_1 - K\sigma_1 f^* \end{bmatrix}$$

avec $P_2^*(p) = D_2(p) + K f^* N_2(p)$

Cette matrice, si $a_1 = 3$ et $a_2 = 7$, vérifie à un changement de base diagonal près, les conditions d'application du lemme de Kotelyanski, si la condition suivante est satisfaite :

$$a_1 + a_2 - S_1 - K\sigma_1 f^* < 0$$

ou encore

$$10 - 11 - K f^* < 0 \implies K f^* > -1 \quad (\text{cond. 1})$$

Le système bouclé S sera stable si $P_2^*(0) \geq \epsilon > 0$ ou encore

$$-32 + 21 K f^* \geq \epsilon > 0$$

donc si $K f^* > \frac{32}{21}$

Remarque :

- . Si $K = 0$ la condition de stabilité n'est pas vérifiée, le système est évidemment instable en boucle ouverte.
- . Si $K = 1$ le système correspond à celui étudié dans le premier chapitre avec un retour unitaire.

Le domaine de variation de f^* est alors

$$\mathcal{D}_f = \left] \frac{32}{21} ; +\infty \right[$$

. Si $K > 1$, la borne inférieure du domaine \mathcal{D}_f diminue et \mathcal{D}_f augmente, ce qui améliore les conditions de stabilité du système et le domaine de variation \mathcal{D}_f .

Pour optimiser le coefficient d'amortissement de S_2 , il faut déterminer η tel que $\eta' < \eta < \min(a_i)$, vérifie $P_2^*(-\eta) \geq \epsilon > 0$.

minimum

1^{er} cas :

Le domaine de variation \mathcal{D}_f est fixé et le but est de déterminer la plus grande valeur du coefficient d'amortissement assurant la stabilité du système global.

Si $K = 1$, les performances de S_2 correspondent à celle du système bouclé par retour unitaire, envisagées dans le chapitre I.

Il faut vérifier $(-\eta^3 + 11\eta^2 - 20\eta - 32) + K f^*(\eta^2 - 10\eta + 21) \geq \epsilon > 0$
 pour $f^* = \underline{L}$ et pour $f^* = \bar{L}$ de \mathcal{D}_f .

Si $\mathcal{D}_f = [2 ; 5]$, la variation de η_{\max} avec K est la suivante :

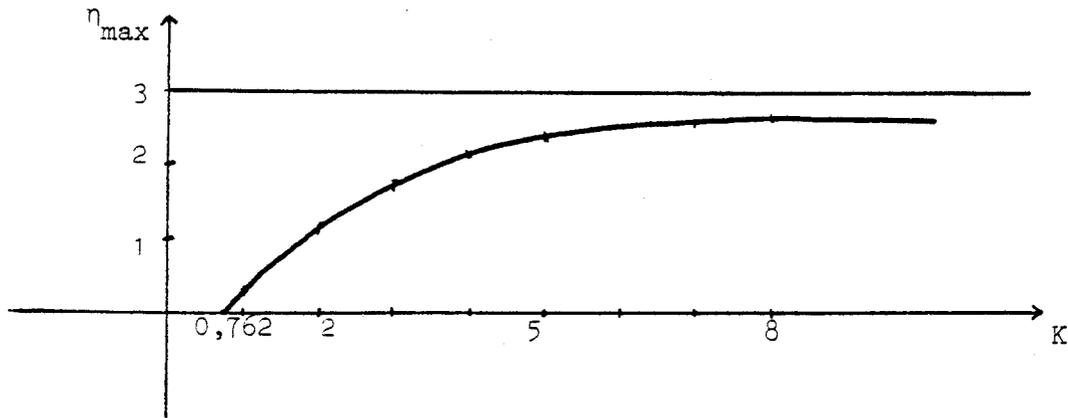


Figure II-10

2^{ème} cas :

La valeur minimale de η , η'_{\min} étant fixée, nous devons déterminer le plus grand domaine de variation $\mathcal{D}_{f_{\max}}$ pour $\eta'_{\min} < \eta < 3$.

Les résultats se présentent sous forme d'un faisceau de courbes, chacune d'elles correspondant à une valeur particulière du gain de boucle K .

Soit α la limite inférieure de $\mathcal{D}_f =]\alpha, +\infty[$
 α est déterminé par l'expression :

$$\alpha = \frac{\eta^3 - 11\eta^2 + 20\eta + 32}{K(\eta^2 - 10\eta + 21)}$$

Remarque :

Quand K augmente, les courbes $\alpha(\eta)$ présentent un écrasement vers les faibles valeurs de α , ce qui correspond à une variation plus faible de α en fonction de η .

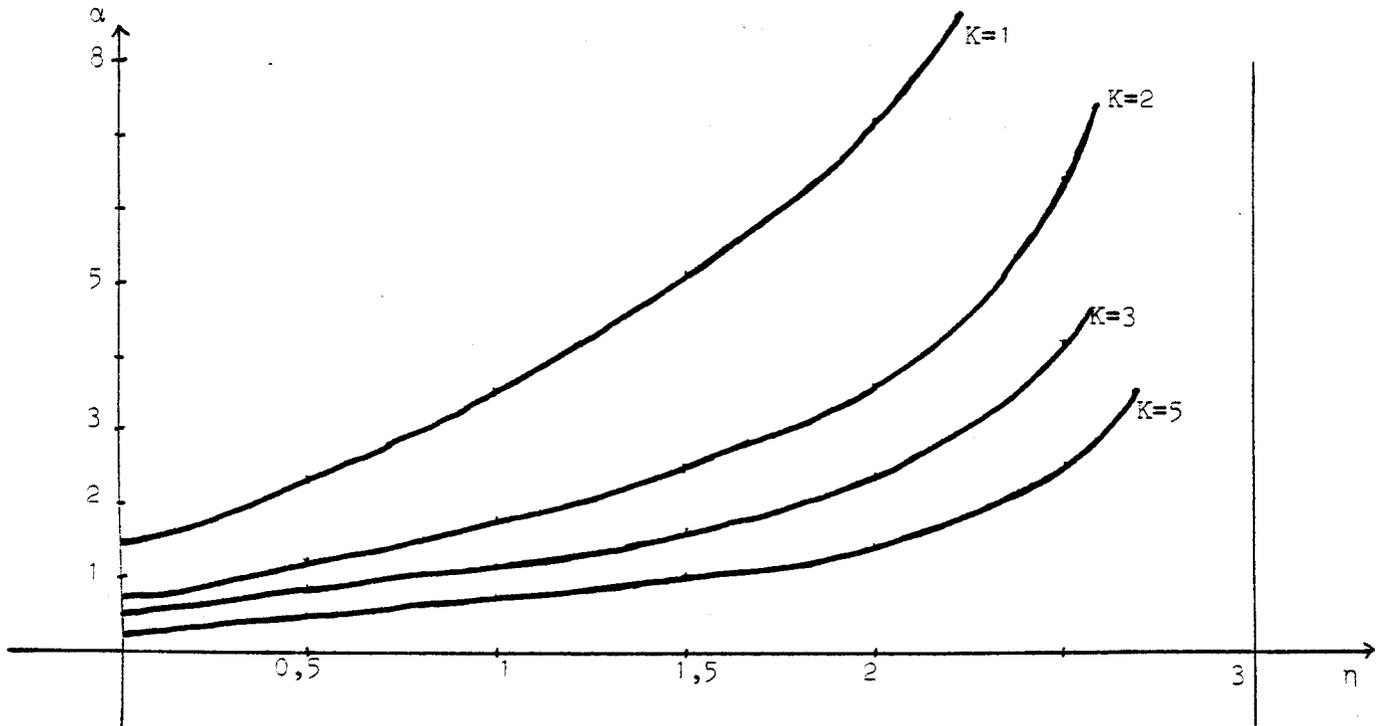


Figure II-11

Ces courbes dépendent du réseau correcteur utilisé mais elles indiquent, pour un cas précis, le mode de variation de la borne inférieure du domaine \mathcal{D}_f avec le coefficient d'amortissement. Le résultat obtenu montre bien le durcissement des conditions de variation des termes non constants quand les performances dynamiques du système s'améliorent. Elle permet à l'utilisateur de faire un compromis entre deux optimisations possibles, suivant le type de non linéarité utilisé et le domaine de variation souhaité, peut-être en vue de satisfaire à un autre critère, comme par exemple un critère minimisant l'énergie.

2) Après avoir étudié le bouclage du système S_2 par un gain K , il est possible de considérer le bouclage par un réseau correcteur du type avance-retard de phase, dont les propriétés ne sont plus à démontrer.

$$W'_1(p) = \frac{(p + z_1)(p + z_2)}{(p + p_1)(p + p_2)}$$

ce qui correspond à un système $W_1(p)$ du second ordre

$$W_1(p) = \frac{(p_1 + p_2 - z_1 - z_2)p + p_1 p_2 - z_1 z_2}{(p+z_1)(p+z_2) + (b_{12}b_{21}-1)(p+p_1)(p+p_2)}$$

L'étude précédente peut alors être reprise de la même manière.

V - ETUDE DU CAS OU LE RC AMENE LA SIMPLIFICATION D'UN POLE PAR UN ZERO

La représentation d'un système interconnecté formé d'un système de commande S_1 et d'un processus à commander S_2 peut aussi être faite de la façon suivante :

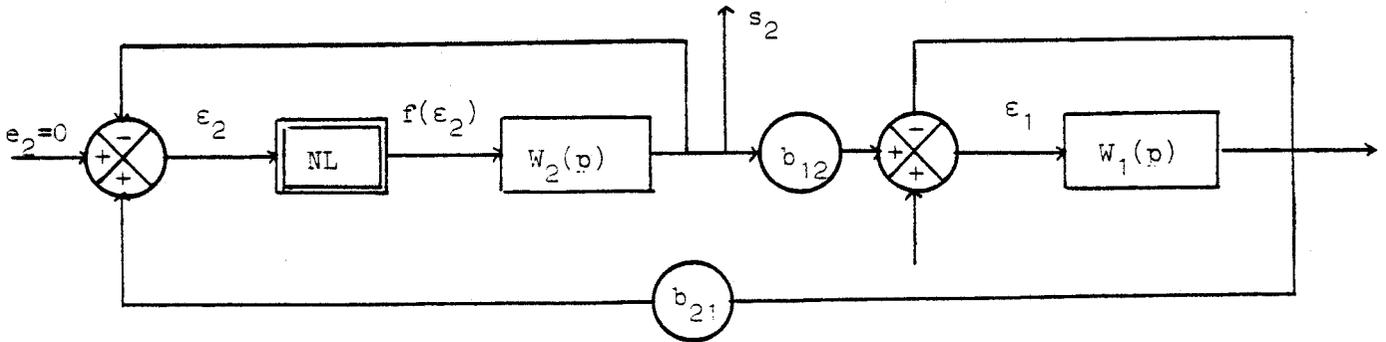


Figure II-13

La fonction de transfert du système global S_1 ou S_2 est alors :

$$W(p) = W_1(p) \times W_2(p)$$

Si le système étudié S_2 se compose d'une partie stable, en général il s'agit de la partie "rapide", il est alors possible de choisir un RC qui entraîne pour le système global la simplification d'un (ou plusieurs) pôle par un (ou plusieurs) zéro. La réduction de dimensionnalité ainsi obtenue simplifie l'étude du système global.

Exemple

Reprenons le système du 3^{ème} ordre précédemment étudié

$$W_2(p) = \frac{(p+3)(p+7)}{(p-1)(p+4)(p+8)} = \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

et choisissons comme réseau correcteur le système représenté par

$$W_1(p) = \frac{(p+4)(p+8)}{(p+3)(p+7)}$$

Le système global, représenté par la figure II-13, avec $b_{12} b_{21} = 1$ peut s'écrire sous forme globale par

$$W(p) = W_2(p) \times W_1(p)$$

avec

$$W(p) = \frac{(p+3)(p+7)(p+4)(p+8)}{(p-1)(p+4)(p+8)(p+3)(p+7)} = \frac{\prod_{i=1}^4 (p-z_i)}{\prod_{i=1}^5 (p-p_i)}$$

Le système global est du 5^{ème} ordre et sa matrice caractéristique s'écrit (cf Chapitre I) :

$$M(.) = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)^{-1} \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 & (a_1-a_2)(a_3-a_2)(a_4-a_2)^{-1} \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 & (a_1-a_3)(a_2-a_3)(a_4-a_3)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 & (a_1-a_4)(a_2-a_4)(a_3-a_4)^{-1} \\ -P^*(-a_1) & -P^*(-a_2) & -P^*(-a_3) & -P^*(-a_4) & a_1+a_2+a_3+a_4-S_4-\sigma_4 I^* \end{bmatrix}$$

avec

$$P^*(p) = D(p) + f^* N(p) = D_2(p) N_2(p) + f^* N_2(p) D_2(p) / (p-1)$$

Si l'on choisit pour les a_i les valeurs correspondant aux opposés des zéros z_i du numérateur, la matrice devient :

$$M(.) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 1/20 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -1/12 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1/20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22-21-f^* \end{bmatrix}$$

$M(.)$ se présente sous forme d'une matrice triangulaire, dont les termes situés sur la dernière colonne, sauf le terme diagonal, peuvent être rendus positifs par changement de base (voir chapitre I)

Si cette matrice vérifie la contrainte

$$1 - f^* < 0 \iff f^* > 1$$

les conditions d'application de la conjecture linéaire sont réalisées et il est alors possible de conclure à la stabilité du système si $(-1)^5 \det M(.) \geq \epsilon > 0$ pour $f^* \in \mathcal{D}_f$, fixé ou à déterminer. $\det M(.)$ est obtenu ici par le produit des termes diagonaux

$$\text{d'où : } (-1)^5 (-3) (-4) (-7) (-8) (1 - f^*) \geq \epsilon > 0$$

ce qui correspond bien à $f^* > 1$

Le résultat obtenu pour $W(p)$ de degré 5 est le même que celui qui aurait été obtenu pour $W(p) = \frac{1}{p-1}$, après simplification des pôles stables par les zéros.

CONCLUSION

Les deux démarches présentées peuvent être utilisées pour tout type de système de grande dimension à non-linéarité séparable, de type interconnecté ou hiérarchisé. Leur mise en oeuvre ne pose pas de problème particulier, et apporte des renseignements précieux sur le comportement du processus étudié.

Une autre méthode d'étude de cette classe de systèmes est la méthode des perturbations singulières [16], [17], qui, en séparant un système en deux parties, une partie "lente" et une partie "rapide" et en négligeant l'évolution de la partie rapide ou en simplifiant son rôle dans le modèle, permet de réduire, de façon très importante parfois, la dimension du système global.

Cette étude, qui concerne également les systèmes interconnectés fera l'objet de notre prochain chapitre.

BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE II

- 1 GROUMPOS P.P.
"Structural analysis for a class of hierarchical systems".
Congrès MECO 1978, Athènes, Vol. 2, p. 645-647.

- 2 BORNE P., BENREJEB M.
"On the stability of a class of interconnected systems - Application to the forced working conditions".
Congrès IFAC 1977, Fredericton (Canada)

- 3 ŠILJAK D.D.
"Stability of large scale systems under structural perturbations".
IEEE Trans, Vol. SMC 2, N° 5, pp. 657-663.

- 4 GRUJIĆ Lj.T., GENTINA J.C., BORNE P., BURGAT C. et BERNUSSOU J.
"Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Fonctions de Lyapounov vectorielles".
RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control, Vol. 12, N° 4
pp. 319-348, 1978.

- 5 BENREJEB M.
"Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés".
Thèse de Doctorat es-Sciences Physiques, Lille, 1980.

- 6 GENTINA J.C.
"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension".
Thèse de Doctorat es-Sciences Physiques, Lille, 1976.

- 7 BORNE P.
"Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés".
Thèse de Doctorat es-Sciences Physiques, Lille, 1976.

- 8 BENREJEB M., DAUPHIN G., BORNE P.
"Sur une nouvelle approche de la modélisation et de la simulation des processus non linéaires".
Simulation 80, Interlaken, Suisse, Juin 1980.
- 9 FOSSARD A.
"Commande des systèmes multidimensionnels"
Technique de l'automatisme, Dunod.
- 10 BOUDAREL R., DELMAS J., GUICHET P.
"Commande optimale des processus".
Tomes 1,2,3 - Techniques de l'automatisme, Dunod 1968.
- 11 TITLI A.
"Commande hiérarchisée et optimisation des processus complexes".
Dunod, Automatique.
- 12 POPOV V.M.
"L'hyperstabilité des systèmes automatiques".
Bibliothèque de l'automaticien, Dunod.
- 13 BENREJEB M., BORNE P.E., DAUPHIN G., LAURENT F.
"Global asymptotic stability of non-linear time-varying perturbed systems"
Third IMA Conference on Control Theory, Sheffield, Septembre 1980.
- 14 GANTMACKER F.R.
"Théorie des matrices".
Tomes 1 et 2, Dunod, 1966.
- 15 HUARD DE LA MARRE P.
"Optimisation en contraintes linéaires".
Résumé de cours, Université de Lille, Décembre 1972.
- 16 KOKOTOVIC P.V., O'MALLEY R.E., SANNUTI P.
"Singular perturbations and order reduction in control theory. An overview".
Automatica, Vol. 12, pp. 123-132, Pergamon Press, 1976.

17 ÖZGÜNER U.

"Near optimal Control of composite systems : the multitime-scale approach".

IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC 24, N° 4, Août 1979.

18 GRUJIĆ Lj.T., GENTINA J.C., BORNE P.

"General aggregation of large scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms".

International Journal of Control, 1976, Vol. 4, pp. 529-550.

CHAPITRE III

ETUDE DE SYSTEMES INTERCONNECTES COMPORTANT PLUSIEURS ECHELLES DE TEMPS

INTRODUCTION

Dans ce chapitre sont présentées diverses méthodes permettant la simplification du modèle pour les processus à perturbations singulières ou plus simplement susceptibles de faire apparaître plusieurs vitesses d'évolution.

Pour de tels processus une première approximation permet de distinguer une partie dite "rapide" et une partie dite "lente".

Lorsque la partie à évolution rapide est stable dans un fonctionnement isolé, il est fréquemment admis de considérer que son temps de réponse, comparé à celui de la partie lente est négligeable. Dans ce sens, une simplification possible consiste à substituer aux équations différentielles régissant l'évolution de cette partie du processus un ensemble d'équations algébriques permettant une réduction de dimensionnalité par élimination des variables d'état concernées, l'analyse et la synthèse s'effectuant alors sur le modèle simplifié ainsi obtenu. [1] à [8]

L'étude présentée ici envisage deux démarches permettant la simplification lorsque diverses échelles de temps sont mises en oeuvre lors de l'évolution du processus. Dans les deux cas, une méthode systématique d'élimination dans l'espace d'état est proposée, qui permet de conserver pour le système réduit (dit dégénéré) la forme adoptée pour le processus initial.

Le choix d'une représentation en flèche simplifie considérablement les techniques d'analyse et permet de se ramener, soit directement, soit par un système de comparaison simplement déduit du système initial, au cas de validité de la conjecture linéaire.

En particulier, pour certains processus de type Lur'e Postnikov interconnectés, il apparaît possible de définir un ensemble de conditions suffisantes assurant la stabilité du système rapide éliminé et du système dégénéré qui correspond rigoureusement aux conditions assurant la stabilité asymptotique du système global envisagé sans simplification.

I - PRESENTATION GENERALE DES SYSTEMES SINGULIEREMENT PERTURBES

Soit le système global S comportant un sous-système "lent" S_1 et un sous-système "rapide" S_2 .

S est représenté dans l'espace d'état par les équations suivantes, établies en régime autonome

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \\ \mu_2 \dot{x}_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

avec $\mu_2 \in]0, 1]$

Ecrire $\mu_2 = 0$ revient à considérer la vitesse d'évolution de S_2 infiniment plus grande que celle de S_1 .

A $S = S_1 \cup S_2$ correspond alors le système dégénéré S_1^1 d'équation

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) x_1 \quad (\text{III-2})$$

Dans cette expression apparaissent deux termes :

- * A_{11} est la matrice caractéristique du système initial S_1
- * $A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$ caractérise l'influence de S_2 , supposée instantanée, et due aux termes de couplage A_{12} , A_{21} .

Cette formulation se retrouve dans le cas général où le système global est formé de q_L systèmes lents et de q_R systèmes rapides.

Nous présentons, dans le cas de 3 systèmes interconnectés, deux démarches possibles qui sont ensuite généralisées.

II - ETUDE DE 3 SYSTEMES INTERCONNECTES - GENERALISATION

La représentation matricielle de ces 3 systèmes ayant des échelles des temps différentes peut se faire en régime autonome comme suit :

$$\begin{bmatrix} \circ & x_1 \\ \mu_2 & x_2 \\ \mu'_3 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-3})$$

les blocs A_{ij} de dimensions respectives $[n_i \times n_j]$ pouvant être non constants.

Nous supposons qu'il est possible de décomposer le coefficient μ'_3 du système S_3 et d'écrire $\mu'_3 = \mu_3 \times \mu_2$.

Dans ce cas deux démarches sont possibles :

1) Si S_3 est très rapide par rapport à S_1 et S_2 , c'est-à-dire $\mu_3 \ll \mu_2$, écrire $\mu_3 = 0$ permet de "négliger" l'évolution de ce système au profit du système dégénéré ainsi obtenu $S_1^1 \cup S_2^1$.

La dimension de l'ensemble a été réduite de l'ordre de S_3 . Il est alors possible, soit d'étudier le comportement de $S_1^1 \cup S_2^1$, soit de réduire encore, en supposant que le système S_2^1 est encore très rapide par rapport à S_1^1 .

Le système S_1^1 est alors doublement dégénéré. Cette étude peut être représentée par le graphe suivant :

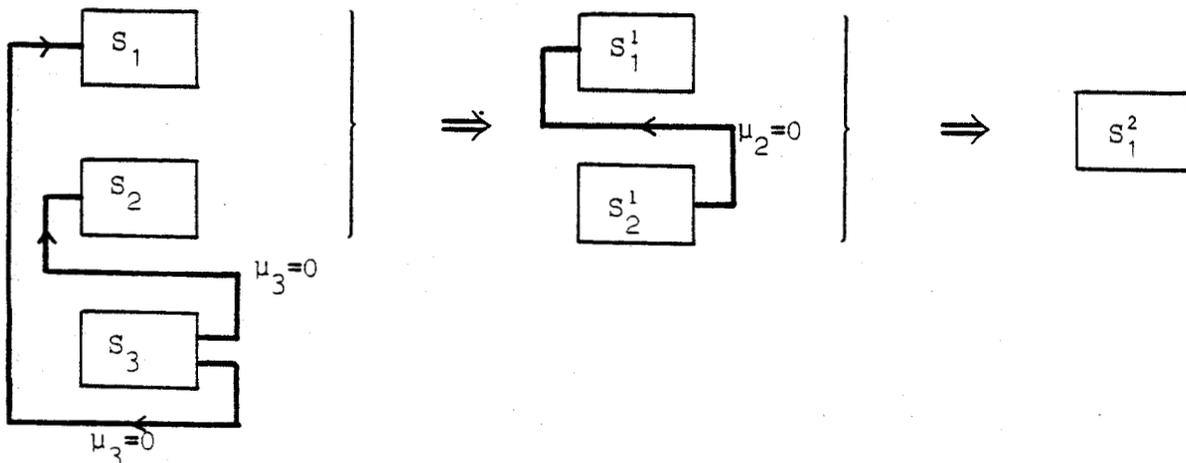


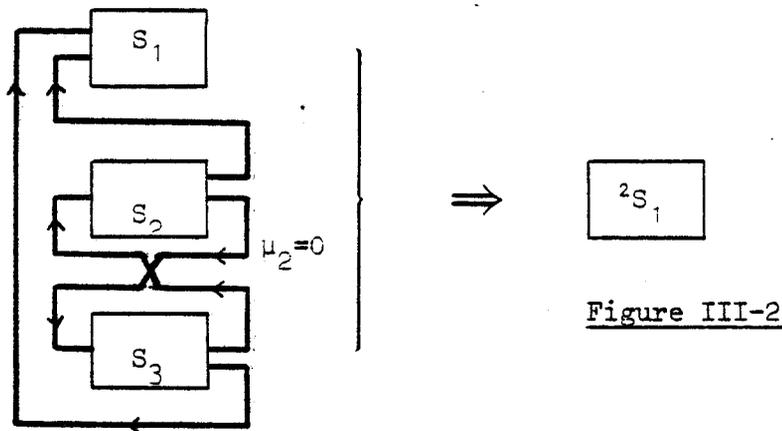
Figure III-1

Cette structure peut donc s'interpréter comme une structure hiérarchisée à trois niveaux, le plus bas étant constitué du système le plus rapide et le plus haut formé du plus lent.

2) Si les modes d'évolution de S_2 et S_3 sont comparables du point de vue échelle de temps, et surtout très rapides par rapport à S_1 , l'artifice $\mu_2 = 0$ appliqué directement permet de regrouper S_2 et S_3 en une partie rapide et d'isoler en une seule étape le système 2S_1 qui forme alors le système dégénéré.

Le système S_2 "impose sa vitesse" à l'ensemble formé des systèmes rapides $S_2 \cup S_3$.

Le graphe suivant représente cette structure qui apparaît ici sous forme interconnectée.



II-1 DEGENERESCENCE PROGRESSIVE

Le système global S de rang $q_1 + q_2 + q_3$ s'écrit

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{x}_1 &= A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 \\ \mu_2 \overset{\circ}{x}_2 &= A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + A_{23} x_3 \\ \mu_3 \mu_2 \overset{\circ}{x}_3 &= A_{31} x_1 + A_{32} x_2 + A_{33} x_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-4})$$

Dans un premier temps, S_3 est très rapide par rapport à S_1 et S_2 , ce qui se traduit par $\mu_3 = 0$ d'où :

$$x_3 = -A_{33}^{-1} (A_{31} x_1 + A_{32} x_2)$$

La condition A_{33} inversible doit toujours être vérifiée puisque la méthode des perturbations singulières ne peut s'appliquer qu'aux systèmes stables.

Le système global dégénéré $S^1 = S_1^1 \cup S_2^1$ est de dimension $q_1 + q_2$.

Il est représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} - A_{13} A_{33}^{-1} A_{31}) x_1 + (A_{12} - A_{13} A_{33}^{-1} A_{32}) x_2 & S_1^1 \\ \mu_2 \dot{x}_2 = (A_{21} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{31}) x_1 + (A_{22} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{32}) x_2 & S_2^1 \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

Si le système S_2^1 est encore plus rapide que S_1^1 et s'il est stable ($\det (A_{22} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{32}) \neq 0$), le système doublement dégénéré $S^2 = S_1^2$ s'écrit :

$$\dot{x}_1 = \left[\underset{1}{(A_{11} - A_{13} A_{33}^{-1} A_{31})} - \underset{2}{(A_{12} - A_{13} A_{33}^{-1} A_{32})} \underset{3}{(A_{22} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{32})}^{-1} \underset{4}{(A_{21} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{31})} \right] x_1 \quad (\text{III-6})$$

Les différents termes de cette expression peuvent s'interpréter de la façon suivante, en reprenant la définition (III-2) de la dégénérescence :

1 et 2 représentent les formes dégénérées des matrices caractéristiques de S_1 et S_2 par rapport au système rapide S_3 .

3 et 4 sont les formes dégénérées par rapport à S_3 des termes de couplage intervenant entre les systèmes S_1 et S_2 .

Dans cette expression apparaissent donc des termes exprimés par rapport au système S_3 qui a ainsi, par sa vitesse supérieure, une influence sur tous les termes composant le système S^2 .

II-2 SEPARATION DES PARTIES LENTE ET RAPIDE

Une approche différente est possible si S_2 et S_3 sont tous deux très rapides par rapport à S_1 , sans que se pose le problème de comparaison entre leurs échelles de temps respectives.

Dans ce cas écrire $\mu_2 = 0$ permet d'éliminer directement les vecteurs état x_2 et x_3 et d'obtenir l'équation du système ${}^2S = {}^2S_1$

$$\begin{cases} \overset{0}{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 & (1) \\ 0 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + A_{23} x_3 & (2) \\ 0 = A_{31} x_1 + A_{32} x_2 + A_{33} x_3 & (3) \end{cases} \quad (\text{III-7})$$

$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{21} \\ -A_{31} \end{bmatrix} x_1 \quad (\text{III-8})$$

Pour que ce système admette une solution, il faut que la

matrice bloc $M = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ soit inversible

Trois cas sont à envisager :

. A_{22} est inversible, ce qui correspond à S_2 stable, $\det A_{22} \neq 0$ et $\det M$ s'écrit :

$$\det M = (\det A_{22}) \det (A_{33} - A_{32} A_{22}^{-1} A_{23}) \quad [9]$$

La condition d'inversibilité de M s'écrit alors :

$$\det (A_{33} - A_{32} A_{22}^{-1} A_{23}) \neq 0$$

. A_{22} n'est pas inversible, mais A_{33} l'est, une autre forme de det M peut être obtenue par :

$$\det M = (\det A_{33}) \det (A_{22} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{32}) \quad (\text{voir en annexe II})$$

et la condition devient :

$$\det (A_{22} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{32}) \neq 0$$

. A_{22} et A_{33} ne sont pas inversibles, $\det A_{22} = 0$ et $\det A_{33} = 0$, ce qui correspond à deux sous-systèmes S_2 et S_3 instables.

Cependant le couplage $S_2 \cup S_3$ peut être stable, et l'on peut avoir alors

$$\det M \neq 0$$

Mais le développement du déterminant n'est plus possible par bloc comme précédemment.

Remarque :

Cette configuration s'avère peu fréquente. Mais elle montre un cas particulier pour lequel la méthode des perturbations singulières peut s'appliquer en suivant la deuxième démarche, alors que la première optique qui procède par dégénérescences successives ne le permet pas.

Si nous supposons que les matrices A_{22} et M sont inversibles, il vient le résultat suivant :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{21} \\ -A_{31} \end{bmatrix} x_1 \quad (\text{III-9})$$

Le système dégénéré 2S a alors comme équation :

$$x_1 = \left[\underset{1'}{(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})} - \underset{2'}{(A_{13} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{23})} \underset{3'}{(A_{33} - A_{32} A_{22}^{-1} A_{23})}^{-1} \underset{4'}{(A_{31} - A_{32} A_{22}^{-1} A_{21})} \right] x_1 \quad (\text{III-10})$$

1' et 3' représentent cette fois les matrices caractéristiques de S_1 et S_3 dégénérées par rapport à S_2 .

2' et 4' sont les formes dégénérées des coefficients de couplage $S_1 = S_3$ exprimés par rapport à S_2 qui joue alors un rôle privilégié.

Remarque :

Si les matrices A_{22} et A_{33} sont inversibles, cette forme est alors semblable à la précédente.

II-3 GENERALISATION A q SYSTEMES

Le système global $S = \bigcup_{i=1}^q S_i$ est d'ordre $\sum_{i=1}^q q_i$ et il est représenté dans l'espace d'état, en régime autonome, par l'équation vectorielle (II)

$$\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \circ \\ \mu_i \mu_{i-1} \dots \mu_3 \mu_2 \\ \vdots \\ \circ \\ \prod_{i=2}^q \mu_i \\ \circ \\ x_1 \\ \circ \\ \mu_2 x_2 \\ \vdots \\ \circ \\ x_i \\ \vdots \\ \circ \\ x_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & \dots & A_{qj} & \dots & A_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix}$$

(III-11)

III-3-1 Première approche

La méthode progressive qui consiste à annuler μ_q , puis μ_{q-1} , ... fait apparaître une récurrence qui permet de calculer, en partant du système le plus rapide pour aller vers le plus lent, tous les termes de la matrice d'état du système dégénéré (schéma III-3).

Les conditions d'inversibilité des matrices sont supposées remplies à chaque pas de dégénérescence.

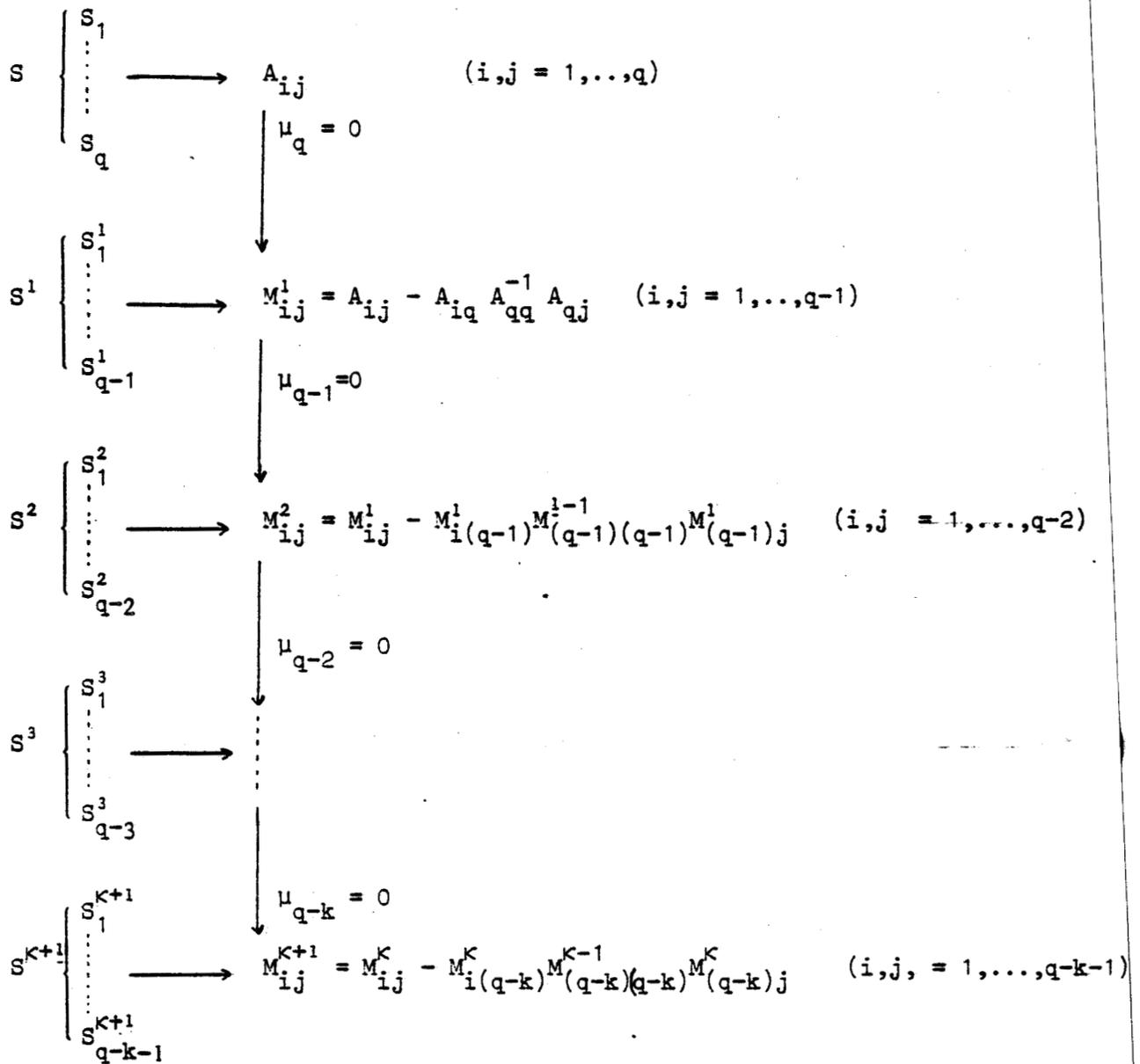


Schéma (III-3)

S^{k+1} représente le système global S qui a été dégénéré (k+1) fois.

L'ordre d'arrêt k est variable. Il peut être choisi suivant divers critères :

- . non inversibilité des matrices obtenues.
- . réduction de l'ordre du système global estimée suffisante pour permettre une étude de la stabilité.
- . le sous-système S_k est de stabilité incertaine.

Donc à partir de la matrice caractéristique du système global S d'éléments A_{ij} , $i, j=1 \dots q$, il est possible de calculer, par programme récurrent les termes d'un système dégénéré en fixant à priori la réduction de dimensionnalité souhaitée, d'après les différentes échelles des temps.

II-3-2 Deuxième approche

Dans ce cas, le sous-système S_k impose sa vitesse, qui détermine la limite entre la partie lente et la partie rapide du système global.

Le système dégénéré kS obtenu, si $\mu_k = 0$, est alors formé des sous-systèmes ${}^kS_1, {}^kS_2, \dots, {}^kS_{k-1}$. (L'indice k placé à gauche indique le système ayant marqué la séparation partie lente-partie rapide).

Le calcul des éléments de la matrice kM caractéristique de kS se fait aussi par récurrence, en définissant de proche en proche l'expression de $x_k = x_k(x_i ; i = 1 \dots q ; i \neq k)$. Cette représentation permet un calcul itératif, automatisé, ce qui ne serait pas le cas si le système rapide négligé était présenté sous forme de système matriciel d'ordre $q-k + 1$.

Le déroulement de ce calcul est schématisé par la figure suivante (III-4)

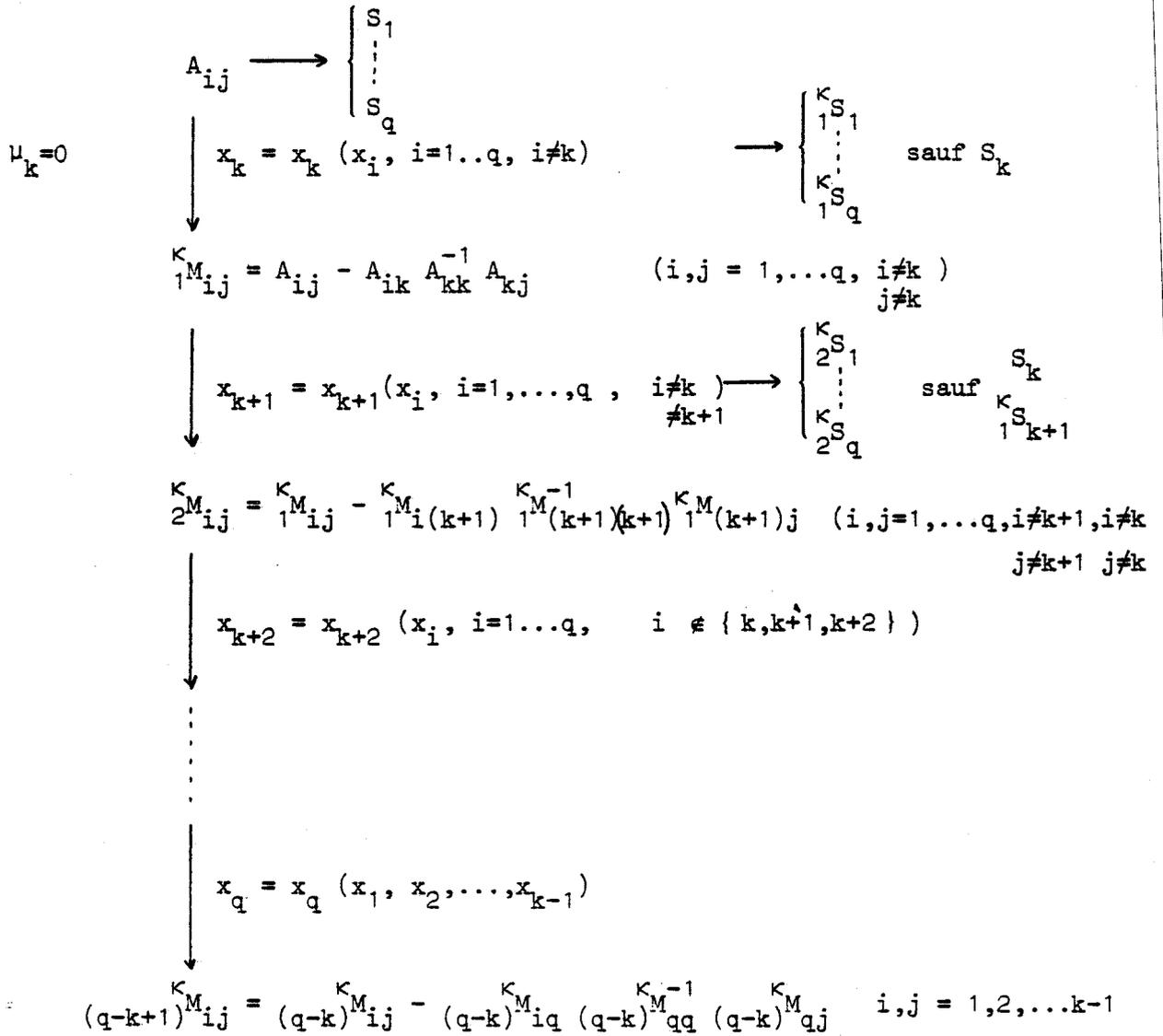


Figure (III-4)

En fin de calcul, il vient ${}^{(q-k+1)} M = M$

A chaque étape l de ce calcul, il faut vérifier que la matrice ${}^{(l-1)} M_{(k+1-1)(k+1-1)}$ est inversible.

Si cette condition n'est pas vérifiée, il est alors possible de modifier le déroulement des étapes du calcul pour éviter cette difficulté.

Exemple :

Soit le système global S formé de 5 sous-systèmes S_i , $i = 1, \dots, 5$

Il est représenté par la matrice A d'éléments A_{ij} , $i, j = 1 \dots 5$, et s'écrit

$$\begin{bmatrix}
 & & & & 0 \\
 & & & & x_1 \\
 & & & \mu_2 & x_2 \\
 & & \mu_3 & \mu_2 & x_3 \\
 & \mu_4 & \mu_3 & \mu_2 & x_4 \\
 \mu_5 & \mu_4 & \mu_3 & \mu_2 & x_5
 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mu_i \in]0 ; 1] \\ i = 2, \dots, 5 \end{matrix} \quad (\text{III-12})$$

S_1 et S_2 forment la partie lente du système global et S_3, S_4, S_5 forment la partie rapide par rapport à laquelle il est possible de simplifier compte tenu de la précision recherchée, et la vitesse de S_3 , qui est la plus lente parmi les systèmes rapides, va imposer le mode d'évolution de l'ensemble.

$\mu_3 = 0$ donne une contrainte d'inversibilité sur la matrice A $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ suivante (la notation utilisée s'inspire de celle de Binet-Cauchy : A $\begin{bmatrix} \text{indices ligne conservés} \\ \text{indices colonne conservés} \end{bmatrix}$)

$$\begin{bmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{31} & -A_{32} \\ -A_{41} & -A_{42} \\ -A_{51} & -A_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{III-13})$$

Pour calculer $A^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, il est possible d'utiliser la

méthode par blocs présentée par Rosenbrock [9].

La récurrence proposée plus haut permet de traiter ce système matriciel sur un mode itératif. (Les indices des éléments des matrices M ne correspondent pas aux numéros de ligne, mais aux composantes du vecteur état).

Ainsi $A_{ij} \longrightarrow S \begin{cases} S_1 \\ \vdots \\ S_5 \end{cases}$

$\mu_3 = 0$

étape 1

$x_3(x_1, x_2, x_4, x_5) \longrightarrow {}^3_1S \begin{cases} {}^3_1S_1 \\ {}^3_1S_2 \\ {}^3_1S_4 \\ {}^3_1S_5 \end{cases}$

${}^3_1M = \begin{bmatrix} {}^3_1M_{11} & {}^3_1M_{12} & {}^3_1M_{14} & {}^3_1M_{15} \\ {}^3_1M_{21} & & & \vdots \\ {}^3_1M_{41} & & & \\ {}^3_1M_{51} & \dots & \dots & {}^3_1M_{55} \end{bmatrix}$

avec ${}^3_1M_{ij} = A_{ij} - A_{i3} A_{33}^{-1} A_{3j} \quad i, j = 1, 2, 4, 5$

étape 2

$x_4(x_1, x_2, x_5) \longrightarrow {}^3_2S \begin{cases} {}^3_2S_1 \\ {}^3_2S_2 \\ {}^3_2S_5 \end{cases}$

${}^3_2M = \begin{bmatrix} {}^3_2M_{11} & {}^3_2M_{12} & {}^3_2M_{15} \\ {}^3_2M_{21} & & \vdots \\ {}^3_2M_{51} & \dots & {}^3_2M_{55} \end{bmatrix}$

avec ${}^3_2M_{ij} = {}^3_1M_{ij} - {}^3_1M_{i4} {}^3_1M_{44}^{-1} {}^3_1M_{4j} \quad i, j = 1, 2, 5$

étape 3

$x_5(x_1, x_2) \longrightarrow {}^3S \begin{cases} {}^3S_1 \\ {}^3S_2 \end{cases}$

${}^3M = \begin{bmatrix} {}^3M_{11} & {}^3M_{12} \\ {}^3M_{21} & {}^3M_{22} \end{bmatrix}$

avec ${}^3M_{ij} = {}^3_2M_{ij} - {}^3_2M_{i5} {}^3_2M_{55}^{-1} {}^3_2M_{5j} \quad i, j = 1, 2$

Figure (III-5)

Ces étapes successives dans le déroulement de la récurrence imposent les conditions suivantes :

étape 1 A_{33} inversible (condition I)

étape 2 ${}^3_1M_{44} = A_{44} - A_{43} A_{33}^{-1} A_{34}$ inversible (condition II)

étape 3 ${}^3_2M_{55} = {}^3_1M_{55} - {}^3_1M_{54} {}^3_1M_{44}^{-1} {}^3_1M_{45}$

$${}^3_2M_{55} = (A_{55} - A_{53} A_{33}^{-1} A_{35}) - (A_{54} - A_{53} A_{33}^{-1} A_{34}) (A_{44} - A_{43} A_{33}^{-1} A_{34})^{-1} (A_{45} - A_{43} A_{33}^{-1} A_{35})$$

inversible (condition III)

Supposons que la condition (II) ne soit pas vérifiée.

Il est alors possible d'inverser les étapes 2 et 3, ce qui revient à permuter les sous-systèmes d'indices 4 et 5 dans la description initiale du système.

Il vient dans ce cas les nouvelles conditions d'inversibilité

étape 2' ${}^3_1M_{55} = A_{55} - A_{53} A_{33}^{-1} A_{35}$ inversible (condition II')

étape 3' ${}^3_2M_{44} = {}^3_1M_{44} - {}^3_1M_{45} {}^3_1M_{55}^{-1} {}^3_1M_{54}$

$${}^3_2M_{44} = (A_{44} - A_{43} A_{33}^{-1} A_{34}) - (A_{45} - A_{43} A_{33}^{-1} A_{35}) (A_{55} - A_{53} A_{33}^{-1} A_{35})^{-1} (A_{54} - A_{53} A_{33}^{-1} A_{34})$$

inversible (condition III')

Le déroulement de ces étapes peut être déterminé préalablement par le calcul de $\det A \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (III-13), et dépend de la présentation en blocs de cette matrice.

Ainsi

$$A \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{33} & & & A_{34} & & A_{35} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ A_{43} & & & A_{44} & & A_{45} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline A_{53} & & & A_{54} & & A_{55} \end{array} \right]$$

D'après Rosenbrock [9] (voir en annexe II), si $\det A_{33} \neq 0$,

$\det A \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ s'écrit :

$$\det A \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \det A_{33} \times \det \left(\begin{bmatrix} -A_{43} \\ -A_{53} \end{bmatrix} A_{33}^{-1} \begin{bmatrix} A_{34} & A_{35} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \right)$$

ou encore

$$\det A \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = (\det A_{33}) \times \det \underbrace{\begin{bmatrix} A_{44} - A_{43} A_{33}^{-1} A_{34} & A_{45} - A_{43} A_{33}^{-1} A_{35} \\ A_{54} - A_{53} A_{33}^{-1} A_{34} & A_{55} - A_{53} A_{33}^{-1} A_{35} \end{bmatrix}}_C$$

La matrice C est encore formée de blocs et le calcul du déterminant de C permet de définir, suivant qu'il est nul ou non, la succession des étapes de la récurrence.

Si C_{11} est inversible, alors $\det C$ peut être calculé suivant Rosenbrock, et les conditions obtenues représentent les conditions (II) et (III) correspondant aux étapes 2 et 3 de la récurrence présentée.

Si C_{11} n'est pas inversible, mais C_{22} l'est (condition (II') vérifiée) une forme équivalente de $\det C$ est obtenue (voir annexe 2) et le résultat du calcul de $\det C$ est la condition (III') correspondant à l'étape (3').

Dans les deux cas, les blocs définissant C sont ceux utilisés dans le calcul de la récurrence.

III - SYSTEMES CARACTERISES PAR DES MATRICES COMPAGNON

III-1 DEGENERESCENCE PROGRESSIVE

Soient trois systèmes, d'ordres q_i , $i = 1, 2, 3$, interconnectés tels que les termes d'interconnexion notés e_{ij} appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$.

$i, j = 1, 2, 3$
 $i \neq j$

Nous les supposons par la suite égaux à 1.

La matrice du système global $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ est formée des éléments A_{ij} tels que
 . les blocs diagonaux A_{ii} sont des matrices compagnon, définissant les évolutions des sous-systèmes S_i ($i = 1, 2, 3$) pris isolément

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_{0i}(\cdot) & -a_{1i}(\cdot) & \dots & \dots & -a_{(q_i-1)i}(\cdot) \end{bmatrix}$$

$A_{ij} = B_i C_j^T$ sont des matrices de couplage
 $i, j = 1, 2, 3$

avec $B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ de dimension $[q_i \times 1]$ et $C_j = \begin{bmatrix} b_{0j} \\ b_{1j} \\ \vdots \\ b_{q_j-1j} \end{bmatrix}$

A cette description il est possible d'associer des fractions rationnelles $W_i(\lambda)$ qui correspondent, dans le cas de systèmes linéaires aux fonctions de transfert obtenues en remplaçant λ par p .

$$W_i(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^{q_i-1} b_{ki} \lambda^k}{\lambda^{q_i} + \sum_{k=0}^{q_i-1} a_{ki}(\cdot) \lambda^k} \quad i = 1, 2, 3$$

Les trois systèmes sont supposés de vitesses d'évolution différentes et le système global s'écrit en régime autonome

$$\begin{bmatrix} \circ & & \\ & \circ & \\ & \mu_2 & \circ \\ \mu_3 & \mu_2 & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1^{ère} étape

Si S_3 est le système le plus rapide, le système global dégénéré S^1 est alors formé de S_1^1 et S_2^1 .

La condition à vérifier porte dans ce cas sur l'inversibilité de la matrice caractéristique de S_3 , soit A_{33} , et s'écrit

$$\underline{a_{03}(\cdot) \neq 0}$$

Le système S^1 est alors représenté par la matrice M^1 d'éléments

$$M_{ij}^1 = A_{ij} - A_{i3} A_{33}^{-1} A_{3j} \quad \text{pour } i, j = 1, 2$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ -a_{03}(\cdot) & -a_{13}(\cdot) & \dots & -a_{k3}(\cdot) & \dots & -a_{(q_3-1)3}(\cdot) \end{bmatrix}$$

d'où

$$A_{33}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-a_{13}(\cdot)}{a_{03}(\cdot)} & \frac{-a_{23}(\cdot)}{a_{03}(\cdot)} & \dots & \frac{-a_{(q_3-1)3}(\cdot)}{a_{03}(\cdot)} & -\frac{1}{a_{03}(\cdot)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ b_{03} & \dots & b_{k3} & \dots & b_{(q_3-1)3} \end{bmatrix}$$

peut être représentée

schématiquement sous forme de bloc

$$A_{13} A_{33}^{-1} A_{3j} = \begin{matrix} & \overbrace{\quad}^{q_3} & \overbrace{\quad}^{q_3} & \overbrace{\quad}^{q_j} & \\ & \boxed{C_3^T} & \boxed{\diagdown} & \boxed{C_j^T} & \\ q_1 & & & & \left. \vphantom{\begin{matrix} \boxed{C_3^T} \\ \boxed{\diagdown} \\ \boxed{C_j^T} \end{matrix}} \right\} q_3 \end{matrix}$$

$$A_{13} A_{33}^{-1} A_{3j} = -\frac{b_{03}}{a_{03}(\cdot)} C_j^T$$



$K_3 = \frac{b_{03}}{a_{03}(\cdot)}$ représente le gain statique instantané du système S_3

Les éléments de la matrice M^1 s'expriment alors par

$$M_{ij}^1 = q_i \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{q_j} \\ \boxed{A_{ij}} \end{array} \right. + K_3 \boxed{B_i} \quad \boxed{C_j^T}$$

pour $i, j = 1, 2$

ou encore

$$M_{ij}^1 = A_{ij} + K_3 B_i C_j^T \quad i, j = 1, 2$$

pour $i \neq j$, il vient

$$A_{ij} = B_i C_j^T$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_{ij}^1 = (1 + K_3) A_{ij} & i \neq j = 1, 2 \\ M_{ii}^1 = A_{ii} + K_3 B_i C_i^T & i = 1, 2 \end{array} \right.$$

La forme compagnon des matrices caractérisant S_1^1 et S_2^1 est conservée. Les fractions rationnelles $W(\lambda)$ permettant une modélisation mathématique des systèmes considérés S_1^1 et S_2^1 s'obtiennent alors directement à partir des expressions matricielles ci-dessus.

$$W_i^1(\lambda) = \frac{(1 + K_3) \sum_{k=0}^{q_i-1} b_{ki} \lambda^k}{\lambda^{q_i} + \sum_{k=0}^{q_i-1} (a_{ki}(\cdot) - K_3 b_{ki}) \lambda^k}$$

$i = 1, 2$

avec $K_3 = \frac{b_{03}}{a_{03}(\cdot)}$ gain statique instantané du sous-système S_3 .

2^{ème} étape $\mu_2 = 0$

Cette étape peut être nécessaire dans le cas où la réduction de dimensionnalité n'est pas suffisante après la première étape.

Le système doublement dégénéré est représenté alors par l'équation d'état

$$\overset{o}{x}_1 = M^2 x_1$$

avec

$$M^2 = M_{11}^1 - M_{12}^1 M_{22}^{1-1} M_{21}^1$$

La condition d'inversibilité de M_{22}^1 s'écrit alors,

Si $M_{22}^1 = A_{22} + K_3 B_2 C_2^T$ sous la forme

$$- a_{02}(\cdot) + K_3 b_{02} \neq 0 \text{ ou encore}$$

$$\underline{K_2 K_3 \neq 1} \text{ si } K_2 = \frac{b_{02}}{a_{02}(\cdot)} \text{ représente le gain statique}$$

instantané du sous-système S_2 ($a_{02}(\cdot) \neq 0$ se déduit des conditions de stabilité locale de S_2).

Le même déroulement du calcul que celui présenté pour la première étape conduit aux résultats suivants :

$$M^2 = M_{11}^1 + \frac{(1+K_3)K_2}{1-K_2 K_3} B_1 C_1^T \text{ avec } C_1^T = (1 + K_3) C_1^T$$

$$M^2 = (A_{11} + K_3 B_1 C_1^T) + \frac{(1+K_3) K_2}{1-K_2 K_3} (1+K_3) B_1 C_1^T \quad (\text{III-16})$$

ou encore

$$\text{avec } \begin{cases} M^2 = A_{11} + B B_1 C_1^T \\ B = \frac{K_3 (1+K_2) + K_2 (1+K_3)}{1 - K_2 K_3} \end{cases} \quad (\text{III-17})$$

La forme compagnon est conservée pour S^2 et la fraction rationnelle $W^2(\lambda)$ décrivant S^2 peut alors s'en déduire

$$\text{avec } \begin{cases} W^2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{q_1} + \sum_{k=0}^{q_1-1} (a_{k1}(\cdot) - B b_{k1}) \lambda^k} \\ B = \frac{(1+K_2) K_3 + (1+K_3) K_2}{1 - K_2 K_3} \end{cases} \quad (\text{III-18})$$

Le numérateur ici est égal à 1 puisque tous les termes de couplage ont été éliminés.

L'étude de la stabilité des systèmes dégénérés peut alors être faite directement sur les coefficients du dénominateur par le critère de Routh, si les systèmes sont linéaires, ou dans le cas contraire, par majoration en utilisant les techniques d'agrégation après passage à une représentation particulière.

III-2 SEPARATION EN UNE ETAPE PARTIE LENTE-PARTIE RAPIDE

Le système formé des 3 sous-systèmes interconnectés s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \circ & & \\ & x_1 & \\ & \mu_2 & x_2 \\ \mu_3 & \mu_2 & \circ \\ & & x_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

où A se présente sous la forme indiquée précédemment, avec

- A_{ii} matrices compagnon
i=1,2,3
- $A_{ij=1,2,3}$ matrices de couplage comportant une seule ligne
i≠j
d'éléments non nuls.

Considérons le système S_1 comme partie lente de S et S_2 et S_3 comme partie rapide. La vitesse de la partie rapide est imposée par S_2 qui en est l'élément le plus lent, d'où $\mu_2 = 0$ permet d'imposer à S une dégénérescence forcée par S_2 , pour obtenir ${}^2S = {}^2S_1$

$${}^2S : \begin{bmatrix} \circ \\ x_1 \end{bmatrix} = {}^2M \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -A_{21} \\ -A_{31} \end{bmatrix} x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}}_{A \begin{bmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1) Si A_{22} est inversible $\Leftrightarrow a_{02}(\cdot) \neq 0$

La matrice $A \begin{bmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{bmatrix}$ sera inversible si $-a_{03}(\cdot) + \frac{b_{02}}{a_{02}(\cdot)} b_{03} \neq 0$
(Rosenbrock [9]).

a) Si $a_{03}(\cdot) \neq 0$, ce qui correspond à A_{33} inversible
la condition d'inversibilité pour $A \begin{bmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{bmatrix}$ correspond bien à celle déterminée précédemment en III-1 2ème étape.

b) Si $a_{03}(\cdot) = 0$, la condition $\det A \begin{bmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{bmatrix} \neq 0$ sera obtenue si $b_{03} \neq 0$, le sous-système S_3 étant instable, mais le couple $S_2 \cup S_3$ étant localement stable.

Cette configuration est rare, et présente de gros inconvénients. En effet si le système S_3 qui est le plus rapide est instable, il peut, sous l'effet de certaines perturbations extérieures, amener dans l'hypothèse non linéaire la divergence du système global.

2) Si A_{22} n'est pas inversible $\Leftrightarrow a_{02} = 0$, le système S_2 est instable.

Pour que l'ensemble $S_2 \cup S_3$ soit stable et la matrice $A \begin{bmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{bmatrix}$ inversible, il faut $\det A \begin{bmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{bmatrix} \neq 0$.

a) Si A_{33} inversible ($\Leftrightarrow a_{03}(\cdot) \neq 0$), le cas est équivalent à celui présenté en 1)b), en permutant les indices 2 et 3.

b) Si A_{33} n'est pas inversible $\Leftrightarrow a_{03}(\cdot) = 0$, la décomposition et le calcul par blocs du déterminant de $A \begin{bmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{bmatrix}$ ne sont plus possibles. Il faut alors développer ce calcul ligne par ligne

$$\det A \begin{bmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{bmatrix} = a_{02}(\cdot) a_{03}(\cdot) - b_{02} b_{03} = - b_{02} b_{03}$$

La matrice $A \begin{bmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{bmatrix}$ est donc inversible si $b_{02} b_{03} \neq 0$

Les résultats obtenus pour le cas 1)a) correspond à ceux calculés pour la première méthode par dégénérescence progressive jusqu'à l'étape 2.

$${}^2S : W^2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{q_1} + \sum_{k=0}^{q_1-1} (a_{k1}(\cdot) - B b_{k1}) \lambda^k} \quad (\text{III-18})$$

avec
$$B = \frac{(1+K_2) K_3 + (1+K_3) K_2}{1 - K_2 K_3}$$

Pour le cas 1)b), le sous-système S_3 n'est pas stable, $a_{03}(\cdot) = 0$. Cependant b_{03} est non nul.

La forme obtenue pour le système 2S_1 est du même type que pour la 1^{ère} méthode, mais le coefficient B est différent. Ce terme qui s'écrivait, quand $a_{02}(\cdot)$ et $a_{03}(\cdot)$ étaient non nuls

$$B = \frac{(1+K_2) K_3 + (1+K_3) K_2}{1 - K_2 K_3}$$

devient ici, quand $a_{03}(\cdot) = 0$

$$B = \frac{b_{03}(a_{02}(\cdot) + b_{02}) + b_{02} b_{03}}{-b_{02} b_{03}}$$

ou encore

$$B = - \left(\frac{1 + 2K_2}{K_2} \right) \quad \text{avec} \quad K_2 = \frac{b_{02}}{a_{02}(\cdot)}$$

d'où

$${}^2S : W^2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{q_1} + \sum_{k=0}^{q_1-1} (a_{k1}(\cdot) - B b_{k1}) \lambda^k} \quad (\text{III-19})$$

avec $B = - \left(\frac{1 + 2K_2}{K_2} \right)$

Ce qui devient pour le cas 2)a, en permutant les indices

2 et 3

$${}^2S : W^2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{q_1} + \sum_{k=0}^{q_1-1} (a_{k1}(\cdot) - B b_{k1}) \lambda^k} \quad (\text{III-20})$$

avec $B = - \left(\frac{1 + 2K_3}{K_3} \right)$

Pour le cas 2)b, correspondant à l'instabilité de chacun des sous-systèmes rapides S_2 et S_3 , mais tel que le couplage $S_2 \cup S_3$ soit stable, ce qui implique $b_{02} \cdot b_{03} \neq 0$, le terme B devient

$$B = - 2$$

Dans ce cas, le système S est représenté par

$$W^2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{q_1} + \sum_{k=0}^{q_1-1} (a_{k1}(\cdot) + 2 b_{k1}) \lambda^k} \quad (\text{III-21})$$

Remarque :

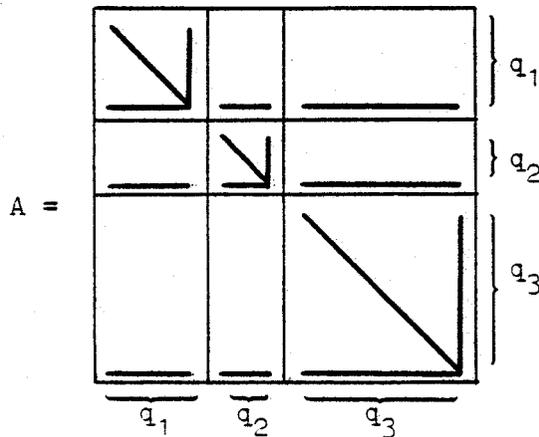
Ces résultats obtenus se généralisent aisément au cas de n sous-systèmes interconnectés.

IV - LES SYSTEMES NON LINEAIRES INTERCONNECTES SONT CARACTERISES

PAR DES MATRICES EN FLECHE

Le système $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ est constitué des sous-systèmes interconnectés S_i d'ordre q_i ($i = 1, 2, 3$) du type de Lur'e Postnikov.

La matrice A se présente schématiquement sous la forme suivante :



chacune des matrices A_{ii} est en flèche et s'écrit, en reprenant la mise en équation présentée dans le chapitre II :

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} -a_1^i & 0 & \dots & 0 & \prod_{j=2}^{q_i-1} (a_j^i - a_1^i)^{-1} \\ 0 & & & & \vdots \\ & & -a_k^i & 0 & \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{q_i-1} (a_j^i - a_k^i)^{-1} \\ & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$-P_i^*(-a_1^i) \quad \dots \quad -P_i^*(-a_k^i) \quad \dots \quad \sum_{k=1}^{q_i-1} a_k^i - S_{q_i-1}^i - \sigma_{q_i-1}^i f_i^*$$

Les matrices A_{ij} sont obtenues par la relation

$$\left. \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3$$

$$i \neq j$$

$$A_{ij} = B_i C_j^T$$

le vecteur C_j^T admettant maintenant l'expression

$$C_j^T = \left[N_j(-a_1^j), N_j(-a_2^j), \dots, N_j(-a_{q_j-1}^j), \sigma_{q_j-1}^j \right]$$

il vient

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ N_j(-a_1^j) & \dots & N_j(-a_k^j) & \dots & N_j(-a_{q_j-1}^j) & \sigma_{q_j-1}^j \end{bmatrix}$$

de dimension $[q_i \times q_j]$

Les systèmes S_i sont représentés, pour la partie linéaire $i=1,2,3$ par leur fonction de transfert

$$S_i : W_i(p) = \frac{\sum_{k=0}^{q_i-1} \sigma_k^i p^k}{p^{q_i} + \sum_{k=0}^{q_i-1} S_k^i p^k} = \frac{N_i(p)}{D_i(p)}$$

1^{ère} étape : $\mu_3 = 0$

S^1 est alors représenté par M^1 d'éléments

$$M^1_{ij} = A_{ij} - A_{i3} A_{33}^{-1} A_{3j} \quad i, j = 1, 2$$

Le système S_3 devant être stable, la matrice A_{33} est inversible et telle que $(-1)^{q_3} \det A_{33} > \epsilon > 0$.

avec

$$\det A_{33} = (-1)^{q_3} P_3^*(0)$$

$P_3^*(p) = D_3(p) + f_3^* N_3(p)$ est le "polynôme caractéristique instantané" du sous-système S_3 [10].

$$P_3^*(0) \geq \epsilon > 0 \iff S_0^3 + f_3^* \sigma_0^3 \geq \epsilon > 0.$$

Dans ce cas q_1

$$M_{11}^1 = \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}^{q_1} - \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}^{q_3} \begin{array}{c} C_3^T \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} A_{33}^{-1} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}^{-1} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} C_1^T \begin{array}{c} A_{31} \end{array}$$

Pour le calcul de M_{11}^1 , seule importe la dernière colonne de la matrice A_{33}^{-1} , que l'on peut noter V .

Soient C_3^T la dernière ligne de A_{13} et C_1^T la dernière ligne de A_{31}

M_{11}^1 s'écrit encore :

$$M_{11}^1 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} C_3^T \\ \hline \end{array} \underbrace{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}_{\text{colonnes proportionnelles à } V}$$

colonnes proportionnelles à V
 $C_{11} V, C_{12} V, \dots, C_{1q_1} V$

où les C_{1i} sont les éléments de la dernière ligne de A_{31}

$$M_{11}^1 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

La forme en flèche est conservée

$$M_{11}^1 = A_{11} - C_3^T V B_1 C_1^T$$

ou en général

$$M_{ii}^1 = A_{ii} - C_3^T V B_i C_i^T$$

$i=1,2$

où C_3^T est la dernière ligne de la matrice A_{i3} et V la dernière colonne de A_{33}^{-1}

$$M_{12}^1 = A_{12} - A_{13} A_{33}^{-1} A_{32}$$

$$M_{12}^1 = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{q}_2 \\ \boxed{C_2^T} \\ \text{A}_{12} \end{matrix} - \begin{matrix} \text{q}_3 \\ \boxed{C_3^T} \\ \text{A}_{13} \end{matrix} \begin{matrix} \text{q}_3 \\ \boxed{A_{33}^{-1}} \\ \text{A}_{32} \end{matrix} \begin{matrix} \text{q}_2 \\ \boxed{C_2^T} \\ \text{A}_{32} \end{matrix} \end{matrix}$$

q_1 q_3 q_3 q_2

$$M_{12}^1 = \boxed{C_2^T} - \boxed{C_3^T} \begin{matrix} \text{|||} \\ \text{C}_{2i}^T V \end{matrix}$$

$$M_{12}^1 = \boxed{C_2^T} - \boxed{C_3^T V C_2^T}$$



La forme de la matrice M_{12} est donc conservée.

$$M_{12}^1 = A_{12} - C_3^T V B_1 C_2^T$$

$$M_{12}^1 = (1 - C_3^T V) B_1 C_2^T$$

d'où

$$M_{ij}^1 = (1 - C_3^T V) B_i C_j^T$$

$i \neq j$
 $i, j=1,2$

Dans les expressions de M_{ij} apparaît le terme $C_3^T V$
 $i, j = 1, 2$

V est la dernière colonne de A_{33}^{-1}

Si $A_{33} = \left\{ \alpha_{ij}^3 \right\}_{i,j=1 \dots q_3}$ les éléments de V dernière colonne de A_{33}^{-1} sont
 obtenus par $\alpha'_{iq_3}^3$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'_{iq_3}^3 = - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q_3-1} (\alpha_{jj}^3) \frac{\alpha_{iq_3}^3}{\det A_{33}} \\ \alpha'_{q_3 q_3}^3 = \frac{1}{\det A_{33}} \prod_{j=1}^{q_3-1} \alpha_{jj}^3 \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{jj}^3 = -a_j^3 \\ j=1 \dots q_3-1 \\ \alpha_{iq_3}^3 = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q_3-1} (a_j^3 - a_i^3)^{-1} \\ i=1 \dots q_3-1 \end{array} \right.$$

La ligne C_3^T se présentant sous la forme

$$C_3^T = \left[N_3(-a_1^3) \ N_3(-a_2^3) \ \dots \ N_3(-a_{q_3-1}^3) \ \sigma_{q_3-1}^3 \right]$$

et $\det A_{33} = (-1)^{q_3} P_3^*(0) = (-1)^{q_3} (S_0^3 + r_3^* \sigma_0^3)$

Le terme $C_3^T V$ est donc égal à

$$C_3^T V = \frac{(-1)^{q_3}}{S_0^3 + r_3^* \sigma_0^3} \left[\sum_{l=1}^{q_3-1} \left(-N_3(-a_l^3) \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{q_3-1} (-a_j^3)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{q_3-1} (a_j^3 - a_l^3)} \right) + \sigma_{q_3-1}^3 \prod_{j=1}^{q_3-1} (-a_j^3) \right]$$

ce qui donne en développant et en regroupant les termes

$$C_3^T V = \frac{-\sigma_0^3}{S_0^3 + f_3^* \sigma_0^3}$$

en posant $g_i^* = \frac{\sigma_0^i}{S_0^i + f_i^* \sigma_0^i}$

Les termes de la matrice M^1 se présentent donc sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{ii}^1 = A_{ii} + g_3^* B_i C_i^T \\ i=1,2 \\ \\ M_{ij}^1 = (1 + g_3^*) B_i C_j^T \\ i,j=1,2 \\ i \neq j \end{array} \right.$$

Les éléments situés sur la dernière ligne de la matrice M_{ii}^1 permettent d'obtenir une nouvelle expression du "polynôme caractéristique instantané" $P_i^{1*}(\lambda)$ du sous système S_i^1

$$P_i^{1*}(\lambda) = D_i(\lambda) + N_i(\lambda)(f_i^* - g_3^*)$$

$$M_{ii}^1 = \begin{bmatrix} -a_1^i & & & & \prod_{j=2}^{q_i-1} (a_j^i - a_1^i)^{-1} \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -a_k^i & \prod_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^{q_i-1} (a_j^i - a_k^i)^{-1} \\ & & & & \\ -P_i^{1*}(-a_1^i) & \dots & -P_i^{1*}(-a_k^i) & \dots & \sum_{k=1}^{q_i-1} a_k^i - S_{q_i-1}^i - \sigma_{q_i-1}^i (f_i^* - g_3^*) \end{bmatrix}$$

(III-22)

2^{ème} étape : $\mu_2 = 0$

Le système doublement dégénéré S^2 est alors représenté par la matrice M^2 avec :

$$M^2 = M_{11}^1 - M_{12}^1 M_{22}^{1-1} M_{21}^1$$

La matrice M_{22}^1 doit être inversible $\Leftrightarrow \det M_{22}^1 \neq 0$, ce qui peut s'exprimer, puisque M_{22}^1 est encore en flèche par

$$\det M_{22}^1 \neq 0 \Leftrightarrow (-1)^{q_2} P_2^{1*}(0) \neq 0$$

ou encore

$$D_2(0) + N_2(0) (r_2^* - g_3^*) \neq 0$$

$$S_0^2 + \sigma_0^2 (r_2^* - g_3^*) \neq 0 \text{ ce qui donne en développant}$$

$$\frac{(S_0^2 + r_2^* \sigma_0^2) (s_0^3 + \sigma_0^3 r_3^*) - \sigma_0^2 \sigma_0^3}{s_0^3 + r_3^* \sigma_0^3} \neq 0$$

M_{22}^1 est donc inversible si

$$\begin{cases} P_2^*(0) \cdot P_3^*(0) - N_2(0) N_3(0) \neq 0 & (1) \\ P_3^*(0) \neq 0 & (2) \end{cases}$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^2 \frac{(1-g_2^* g_3^*)}{g_2^*} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} g_2^* g_3^* \neq 1 \\ \sigma_0^2 \neq 0 \end{cases} \\ \text{avec } \begin{cases} g_2^* \neq 0 \Leftrightarrow \sigma_0^2 \neq 0 \\ g_3^* \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Remarque :

La condition (1) exprime que le déterminant de la matrice caractérisant l'interconnexion, avec des coefficients de couplage

$k_{ij} = 1$ des systèmes "rapides" S_2 et S_3 doit être non nul (voir chapitre II) [10]
 $i, j = 2, 3$
 $i \neq j$

Pour la détermination de M^2 , la même étude que précédemment peut être reprise, en remplaçant A par M^1 , l'élimination se faisant au niveau de l'indice 2.

La forme totalement dégénérée du système est alors caractérisée par la matrice M^2 telle que :

$$M^2 = A_{11} + \frac{(1 + g_2^*) g_3^* + g_2^* (g_3^* + 1)}{1 - g_2^* g_3^*} B_1 C_1^T$$

Remarques importantes :

- Les résultats obtenus pour les matrices M^1 et M^2 sont similaires à ceux déterminés précédemment pour les matrices compagnon.

Il apparaît encore ici des expressions invariantes $g_3^* = \frac{\sigma_0^3}{S_0^3 + \sigma_0^3 f_3^*}$ et $g_2^* = \frac{\sigma_0^2}{S_0^2 + \sigma_0^2 f_2^*}$ qui représentent des "pseudo-gains statiques", puisque seuls les termes de degré zéro et les non-linéarités des systèmes S_2 et S_3 apparaissent, de la même façon que l'on avait précédemment mis en évidence les termes K_2 et K_3 .

- Les valeurs de $K_2 = \frac{b_{02}}{a_{02}(\cdot)}$ et $K_3 = \frac{b_{03}}{a_{03}(\cdot)}$ auraient été semblables à celles obtenues pour g_2^* et g_3^* si l'on avait considéré des systèmes S_i de type Lur'e Postnikov en boucle fermée comme dans le cas de la présentation des systèmes en flèche et explicité les coefficients a_{ki} .

Il apparaît en effet dans ce cas (en considérant le $i^{\text{ème}}$ sous-système bouclé sur lui-même par l'intermédiaire du retour)

$$C_i^T = [b_{0i}, b_{1i}, \dots, b_{q_i-1, i}]$$

l'expression $a_{ki}(\cdot) = a_{ki} + f_i^* b_{ki} \quad \forall k = 0, \dots, q_i-1$
et $\forall i = 1, 2, 3$

Ce qui donne pour le gain statique instantané du système S_i

$$K_i^* = \frac{b_{0i}}{a_{0i} + f_i^* b_{0i}} = g_i^*$$

- Les expressions déterminant les termes des matrices dégénérées sont semblables, malgré la forme compagnon (1) et flèche (2) des matrices initiales A_{ii}

* après la première étape sous forme

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} M_{ij}^1 = A_{ij} + K_3 A_{ij} \\ M_{ii}^1 = A_{ii} + K_3 B_i C_i^T \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} i, j = 1, 2 \\ i \neq j \end{array}$$

ou

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} M_{ij}^1 = A_{ij} + g_3^* A_{ij} \\ M_{ii}^1 = A_{ii} + g_3^* B_i C_i^T \end{array} \right.$$

* après la deuxième étape

$$\left\{ \begin{array}{l} M^2 = A_{11} + \frac{(1+K_2)K_3 + (1+K_3)K_2}{1 - K_2 K_3} B_1 C_1^T \\ M^2 = A_{11} + \frac{(1+g_2^*)g_3^* + (1+g_3^*)g_2^*}{1 - g_2^* g_3^*} B_1 C_1^T \end{array} \right.$$

- Les formes initiales des matrices sont conservées.

- Il est donc possible de conclure que cette transformation des matrices A_{ii} et A_{ij} formant le système initial $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, ainsi que la mise en évidence d'expressions invariantes se retrouveront toujours, dans le cas où le passage d'une forme de matrice à une autre aura été exécuté par changement de base.

Ceci généralise à toute forme de matrice les résultats obtenus pour ces deux cas particuliers, matrice compagnon et matrice flèche. Seul restera à déterminer l'invariant correspondant.

- Toutes les études précédentes effectuées sur la forme compagnon pour le deuxième type de démarche consistant à négliger en une fois toute la partie rapide, constituée ici de S_2 et S_3 peuvent être reprises, en modifiant les invariants.

- Si les coefficients de couplage k_{ij} ont une valeur $i, j=1, 2, 3, i \neq j$ différente de 1, qui était celle considérée jusqu'ici, ils apparaissent dans les expressions des matrices de couplage A_{ij} , qui sont alors obtenues par $k_{ij} B_i C_j^T$.

Dans ce cas, les matrices M_{ij}^1 s'expriment par

$$\left. \begin{aligned} M_{ii}^1 &= A_{ii} - A_{i3} A_{33}^{-1} A_{3i} = A_{ii} + k_{i3} k_{3i} g_3^* B_i C_i^T \\ M_{ij}^1 &= A_{ij} - A_{i3} A_{33}^{-1} A_{3j} = (1 + k_{i3} k_{3j} g_3^*) B_i C_j^T \end{aligned} \right\} i, j=1, 2$$

V - ETUDE DE LA STABILITE DU SYSTEME GLOBAL

La forme particulière obtenue pour la représentation matricielle des processus à perturbations singulières va nous permettre, en utilisant les résultats des deux précédents chapitres de mettre en évidence une propriété remarquable.

Considérons le système S constitué de deux sous-systèmes interconnectés S_1, S_2 du type Lur'e Postnikov et décrits par des matrices en flèche

$$A_{ii} = \begin{matrix} i=1, 2 \\ \left[\begin{array}{ccc} \dots & 0 & \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{q_i-1} (a_j^i - a_k^i)^{-1} \\ \dots & -a_k^i & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ \dots & -p_i^* (-a_k^i) & \dots \\ \dots & \dots & \sum_{k=1}^{q_i-1} a_k^i - s_{q_i-1}^i - \sigma_{q_i-1}^i p_i^* \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$A_{ij} = B_i C_j^T$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & N_j(-a_k^j) & \dots & N_j(-a_{q_j-1}^j) & \sigma_{q_j-1}^j \end{bmatrix}$$

Le système S est représenté par l'équation matricielle

$$\begin{bmatrix} \circ & x_1 \\ \mu_2 & \circ & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Théorème

Si

- (i) pour chaque fonction de transfert, numérateur et dénominateur forment une paire positive.
- (ii) $\sigma_{q_2-1}^2 \cdot \sigma_{q_1-1}^1 > 0$ (produit des termes de couplage > 0)
- (iii) les zéros de la partie linéaire du système sont réels, négatifs et distincts ($i = 1, 2$)
- (iv) $P_i^*(0) \geq \epsilon > 0$

alors la vérification de la validité de la conjecture linéaire permettant de conclure à la stabilité asymptotique du système dégénéré S^1 implique la même propriété pour le système initial S.

Démonstration

Choisissons pour $-a_k^i$ les zéros des numérateurs des fonctions de transfert $w_i(p)$.

Compte tenu des propriétés (i) et (ii), un simple changement de base permet de donner aux matrices A_{11} , A_{22} , A_{11}^1 et A la forme correspondant à l'opposée d'une Z-matrice symétrique.

La matrice A satisfait alors les conditions de validité de la conjecture linéaire qui s'exprime d'une part par les conditions (iii) et d'autre part par les inégalités

$$(-1)^{q_2} \det A_{22} = P_2^*(0) \geq \varepsilon > 0$$

et
$$(-1)^{q_1+q_2} \det A = (-1)^{q_2} \det A_{22} \cdot (-1)^{q_1} \det (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) \geq \varepsilon > 0$$

or cette dernière relation se décompose sous la forme

$$P_2^*(0) \geq \varepsilon > 0$$

et
$$(-1)^{q_1} \det (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) = P_1^*(0) \geq \varepsilon > 0$$

ce qui correspond bien à la condition suffisante de stabilité du système dégénéré S^1 .

Ce résultat peut être généralisé à plus de 2 systèmes, toujours dans le cas où la conjecture linéaire s'applique.

Dans le cas contraire, la méthode classique d'étude de la stabilité du système S consiste à étudier la stabilité

- des systèmes rapides
- du système dégénéré S_d obtenu

Ainsi considérons le cas des 3 systèmes d'ordre 3.

V-1 PREMIERE DEMARCHE

1^{ère} étape

S_3 est le système le plus rapide $\Rightarrow \mu_3 = 0$

Une première condition de stabilité s'impose pour S_3 . Ce système est représenté par une matrice en flèche A_{33} . Si A_{33} vérifie les conditions d'application du lemme de Kotelyanski, c'est-à-dire

$$* a_i^3 > 0 \quad \forall i = 1, 2$$

* éléments symétriques par rapport à la diagonale de même signe.

* éléments non constants situés sur une seule rangée
alors S_3 est stable si

$$P_3^*(0) \geq \epsilon > 0 \quad (\text{cf chapitre I})$$

ce qui correspond à $S_0^3 + r_3^* \sigma_0^3 \geq \epsilon > 0$

ou
$$r_3^* > -\frac{S_0^3}{\sigma_0^3}$$

Le système dégénéré est représenté par une matrice en flèche et se présente sous forme de deux systèmes non linéaires interconnectés S_1^1 et S_2^1 . Ce cas a été étudié dans le chapitre II.

$$M^1(.) = \begin{bmatrix} M_{11}^1(.) & M_{12}^1 \\ M_{21}^1 & M_{22}^1(.) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{avec } M_{ij}^1 = (1 + g_3^*) B_i C_j^T \quad i, j=1,2 \\ \text{et } M_{ii}^1 = A_{ii} + g_3^* B_i C_i \quad i=1,2 \\ i \neq j \end{array}$$

ou encore

$$M^1(.) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -a_1^1 & 0 & (a_2^1 - a_1^1)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2^1 & (a_1^1 - a_2^1)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -P_1^1(-a_1^1) & -P_1^1(-a_2^1) & a_1^1 + a_2^1 - S_2^1 & N_2^1(-a_1^2) & N_2^1(-a_2^2) & (1 + g_3^*) \sigma_2^2 \\ & & -\sigma_2^1 (r_1^* - g_3^*) & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & -a_1^2 & 0 & (a_2^2 - a_1^2)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2^2 & (a_1^2 - a_2^2)^{-1} \\ \hline N_1^1(-a_1^1) & N_1^1(-a_2^1) & (1 + g_3^*) \sigma_2^1 & -P_2^1(-a_1^2) & -P_2^1(-a_2^2) & a_1^2 + a_2^2 - S_2^2 \\ & & & & & -\sigma_2^2 (r_2^* - g_3^*) \end{array} \right]$$

$$\text{avec } \left. \begin{aligned} P_i^{1*}(p) &= D_i(p) + (f_i^* - g_3^*) N_i(p) \\ N_i^1(p) &= (1 + g_3^*) N_i(p) \end{aligned} \right\} i = 1, 2$$

Cette matrice $M^1(.)$ ne remplit pas les conditions permettant l'application du lemme de Kotelyanski, puisque les éléments non constants sont situés sur deux rangées. Il faut donc après permutation de la 3^{ème} et 5^{ème} ligne, définir une norme vectorielle p telle que le système majorant qui s'en déduit soit caractérisé par une matrice remplissant ces conditions.

$$\text{Soit } p(x) = \left[|x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4|, |x_5| + |x_6| \right]^T$$

Ce calcul a été développé dans le chapitre II.

Du système S^1 d'ordre 6 se déduit alors un système de comparaison d'ordre 5, représenté par la matrice $C^1(.)$

$$C^1(.) = \begin{bmatrix} -a_1^1 & 0 & 0 & 0 & \left| (a_2^1 - a_1^1) \right|^{-1} \\ 0 & -a_2^1 & 0 & 0 & \left| (a_1^1 - a_2^1) \right|^{-1} \\ 0 & 0 & -a_1^2 & 0 & \left| (a_2^2 - a_1^2) \right|^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -a_2^2 & \left| (a_1^2 - a_2^2) \right|^{-1} \\ \left| -P_1^{1*}(-a_1^1) \right| & \left| -P_1^{1*}(-a_2^1) \right| & \left| -P_2^{1*}(-a_1^2) \right| & \left| -P_2^{1*}(-a_2^2) \right| & \max \begin{cases} a_1^1 + a_2^1 - S_2^1 \\ -\sigma_2^1 (f_1^* - g_3^*) \\ + \left| \sigma_2^1 (1 + g_3^*) \right| \\ a_1^2 + a_2^2 - S_2^2 \\ -\sigma_2^2 (f_2^* - g_3^*) \\ + \left| \sigma_2^2 (1 + g_3^*) \right| \end{cases} \\ \left| N_1^1(-a_1^1) \right| & \left| N_1^1(-a_2^1) \right| & \left| N_2^1(-a_1^2) \right| & \left| N_2^1(-a_2^2) \right| & \end{bmatrix}$$

Le lemme de Kotelyanski s'applique à $C(.)$ si le terme C_{55} est négatif, c'est-à-dire

$$\left. \begin{aligned} a_1^1 + a_2^1 - S_2^1 - \sigma_2^1 (f_1^* - g_3^*) + \left| \sigma_2^1 (1 + g_3^*) \right| < 0 \\ a_1^2 + a_2^2 - S_2^2 - \sigma_2^2 (f_2^* - g_3^*) + \left| \sigma_2^2 (1 + g_3^*) \right| < 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \forall g_3^* \\ \forall f_1^* \in \mathcal{D}_{f_1} \\ \forall f_2^* \in \mathcal{D}_{f_2} \end{aligned}$$

Le système dégénéré S^1 est stable si

$$C_{55}^1 + \sum_{i=1}^4 \frac{C_{i5}^1}{(-C_{ii}^1)} C_{5i}^1 \leq -\varepsilon < 0 \quad \text{relation(II-9)}$$

ou encore

$$C_{55}^1 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\left| P_i^{1*}(-a_j^i) \right| + \left| N_i^{1*}(-a_j^i) \right|}{a_j^i \left| a_1^i - a_2^i \right|} \leq -\varepsilon < 0$$

Cependant il peut être plus aisé de définir le système S^2 doublement dégénéré, puisque alors le système est représenté par une matrice en flèche mince, ce qui simplifie l'étude de la stabilité.

Donc si la réduction de dimensionnalité après une étape n'est pas suffisante, il est possible de passer à un niveau de dégénérescence supplémentaire ce qui n'est possible que si le système "négligé" est stable, soit ici S_2^1 .

2^{ème} étape $\mu_2 = 0$: le sous-système S_2^1 est "négligé"

Le système dégénéré S^2 est représenté par

$$M^2(.) = A_{11} + B^* B_1 C_1^T$$

avec
$$B^* = \frac{(1 + g_2^*) g_3^* + (1 + g_3^*) g_2^*}{1 - g_2^* g_3^*}$$

avec la condition de stabilité portant sur S_2^1 , qui s'exprime par les contraintes suivantes :

- . $a_j^2 > 0$ pour $j = 1, 2$
- . termes symétriques par rapport à la diagonale de même signe
- . $P_2^{1*}(0) \geq \varepsilon > 0$

ou encore

$$S_0^2 + \sigma_0^2 (f_2^* - g_3^*) \geq \varepsilon > 0$$

Ce qui peut s'écrire

$$(S_0^2 + \sigma_0^2 f_2^*) (1 - g_2^* g_3^*) \geq \varepsilon > 0 \text{ avec } g_2^* = \frac{\sigma_0^2}{S_0^2 + f_2^* \sigma_0^2}$$

ce qui est équivalent à

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} S_0^2 + \sigma_0^2 f_2^* \geq \varepsilon > 0 \iff P_2^*(0) \geq \varepsilon > 0 \text{ (} S_2 \text{ stable)} \\ 1 - g_2^* g_3^* \geq \varepsilon > 0 \iff g_2^* g_3^* < C < 1 \end{array} \right.$$

Dans ce cas, si $M^2(\cdot)$ vérifie les conditions d'application du lemme de Kotelyanski, et notamment appartient à l'ensemble des - M matrices,

S^2 est stable si

. les termes symétriques par rapport à la diagonale sont de même signe

. $P_1^{2*}(0) \geq \varepsilon > 0$

$$S_0^1 + \sigma_0^1 (f_1^* - B^*) \geq \varepsilon > 0$$

$$(S_0^1 + \sigma_0^1 f_1^*) (1 - B^* g_1^*) \geq \varepsilon > 0$$

ce qui se décompose en deux conditions

$$S_0^1 + \sigma_0^1 f_1^* \geq \varepsilon > 0 \iff P_1^*(0) \geq \varepsilon > 0 \quad (S_1 \text{ stable})$$

$$1 - B^* g_1^* \geq \varepsilon > 0 \iff B^* g_1^* < C < 1$$

Il est possible donc de rassembler les conditions de stabilité de S, en supposant que toutes les conditions portant sur les éléments hors diagonaux sont remplies

$$1) S_3 \text{ stable} \implies S_0^3 + \sigma_0^3 f_3^* \geq \varepsilon > 0$$

$$2) S_2^1 \text{ stable : } \begin{cases} S_2 \text{ stable} \Rightarrow S_0^2 + \sigma_0^2 f_2^* \geq \epsilon > 0 \\ g_2^* g_3^* \leq C < 1 \end{cases}$$

$$3) S_1^2 = S^2 \text{ stable : } \begin{cases} S_1 \text{ stable} \Rightarrow S_0^1 + \sigma_0^1 f_1^* \geq \epsilon > 0 \\ B^* g_1^* \leq C < 1 \\ \text{avec } B^* = \frac{(1+g_2^*) g_3^* + g_2^* (1+g_3^*)}{1 - g_2^* g_3^*} \end{cases}$$

avec
$$g_i^* = \frac{\sigma_0^i}{S_0^i + f_i^* \sigma_0^i} \quad i = 1, 2, 3$$

V-2 DEUXIEME DEMARCHE

Si l'un des sous-systèmes S_2 ou S_3 (ou les deux) est instable, mais si le couplage $S_2 \cup S_3$ est stable, il est possible, grâce à la deuxième démarche présentée de définir 2S dégénéré et d'en déduire la stabilité.

Il apparaît ici encore la supériorité de cette méthode sur la précédente, les contraintes de stabilité portant sur les systèmes composant la partie "rapide" sont allégées, et réduites à des contraintes concernant leur couplage.

L'étude de l'inversibilité de la matrice $A \begin{bmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{bmatrix}$ est menée comme dans le cas des systèmes représentés par des matrices compagnon et la condition obtenue s'écrit alors :

$$\sigma_0^2 \cdot \sigma_0^3 \neq 0$$

CONCLUSION

La méthode des perturbations singulières permet une approche simplifiée des systèmes de grande dimension, linéaires ou non.

Deux démarches ont été présentées, la seconde permettant d'envisager l'étude dans le cas où l'un des sous-systèmes rapides ne vérifie pas a priori l'hypothèse de stabilité.

La mise en équation matricielle des systèmes dégénérés a été également systématisée et le formalisme mis en évidence montre l'indépendance entre le choix initial de la représentation dans l'espace d'état et la présentation du résultat obtenu, tout en faisant apparaître des expressions invariantes, indépendantes du comportement fréquentiel du processus.

Un résultat remarquable a été mis en évidence permettant pour une classe importante de processus de conclure rigoureusement à la stabilité asymptotique du système complet à partir des seules contraintes de stabilité définies pour le système rapide et le système dégénéré.

Dans le cas général, la mise en équation obtenue pour le système dégénéré permet une étude aisée de la stabilité, compte tenu de la précision recherchée.

ANNEXE II

Calcul du déterminant d'une matrice blocs

Soit la matrice carrée P

$$P = \left[\begin{array}{c|c} T & U \\ \hline -V & W \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{où } T \text{ [} r \times r \text{]} \\ W \text{ [} l \times l \text{]} \\ U \text{ [} r \times l \text{]} \\ V \text{ [} l \times r \text{]} \end{array}$$

1) Si $\det T \neq 0$, alors

$$\det P = (\det T) \star \det (V T^{-1} U + W)$$

La démonstration de ce théorème est la suivante

La matrice P peut s'écrire

$$P = \left[\begin{array}{cc} T & 0 \\ 0 & I_l \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I_r & 0 \\ -V & I_l \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I_r & T^{-1} U \\ 0 & V T^{-1} U + W \end{array} \right]$$

où I_r et I_l sont les matrices unité de rang respectivement r et l.

La détermination de P est alors le produit des déterminants de chacune des matrices d'où le résultat. 9

2) Si $\det T = 0$, cette décomposition suivant Rosenbrock n'est plus possible. Nous allons montrer qu'il existe une forme équivalente qui permet de calculer le déterminant de P.

Ainsi, si au lieu d'isoler T, on isole U, la matrice P s'écrit alors, si $\det W \neq 0$

$$P = \left[\begin{array}{cc} I_r & 0 \\ 0 & W \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I_r & U \\ 0 & I_l \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} U W^{-1} V + T & 0 \\ -W^{-1} V & I_l \end{array} \right]$$

Le déterminant de P s'écrit alors :

$$\det P = (\det W) \star \det (T + U W^{-1} V)$$

BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE III

- 1 ÖZGÜNER Ü.
"Near optimal control of composite systems : the multi time-scale approach".
IEEE Transactions on automatic control. Vol AC - 24 N° 4-Aout 1979.
- 2 PORTER B. et SHENTON A.T.
"Singular perturbation analysis of the transfer function matrices of a class of multivariable linear systems".
INT J. Control, 1975, Vol. 21 N° 4, pp. 655-660.
- 3 PORTER B.
"Closed-loop eigenstructure assignment by state feedback in multivariable linear systems with slow and fast modes".
INT J. Control, 1978, Vol. 28, N° 1, pp. 93-100.
- 4 GRUJIĆ LT
"Vector Ljapounov functions and singularly perturbed large-scale systems".
JACC, Lafayette Indiana, Juillet 1976.
- 5 ZIEN L.
"An upper bound for the singular parameter in a stable, singularly perturbed systems".
Journal of the Franklin Institute, Vol. 295, N° 5, mai 1973, pp.373-381.
- 6 HOPPENSTEADT F.
"Asymptotic stability in singular perturbation problems. Problems having matched asymptotic expansion solutions".
Journal of differential equations N° 15, 1974, pp. 510-521.
- 7 KOKOTOVIC P.V., O'MALLEY R.E., SANNUTI P.
"Singular perturbations and order reduction in control theory - An overview".
Automatica, Vol. 12, pp. 123-132, Pergamon Press, 1976.

8 ÖZGÜNER Ü.

"Decentralized observers for a large-scale composite system with two time-scales".

JACC - Juin 1977.

9 ROSENBROCK H.H.

"State-space and multivariable theory".

Nelson.

10 BENREJEB M.

"Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés".

Thèse de Doctorat es-Sciences Physiques, Lille, 1980.

CONCLUSION GENERALE

Les résultats présentés dans les deux premiers chapitres de ce mémoire constituent une suite et une extension des travaux relatifs à la représentation des systèmes à l'aide de matrices caractéristiques en flèche (chapitre I, [4]).

L'utilisation des méthodes de la programmation linéaire a permis de mettre en évidence une simplification de l'étude de la stabilité des systèmes de grande dimension, et de se ramener, directement ou non, au cas de validité de la conjecture linéaire, ce qui a rendu possible une recherche systématique et optimale des domaines de variation admissibles des paramètres non constants des systèmes étudiés.

Dans le cas où le processus envisagé est composé d'une partie à évolution rapide et d'une autre plus lente, la méthode des perturbations singulières, en réduisant l'ordre du modèle en simplifie notablement l'étude. Les résultats que nous avons présentés permettent de généraliser son application à des systèmes qui ne vérifient pas obligatoirement l'hypothèse généralement admise de stabilité des sous-systèmes. La mise en évidence d'expressions invariantes et la présentation d'un formalisme général simplifié de mise en équation des systèmes dégénérés laissent envisager la possibilité d'étendre cette méthode au cas des processus fortement non linéaires.

C'est dans cette voie que nous pensons poursuivre ce travail.

TABLE DES MATIERES

Avant Propos

Introduction Générale	1
<u>CHAPITRE I : REPRESENTATION DES SYSTEMES CONTINUS DYNAMIQUES -</u>	
<u>STABILITE</u>	3
Introduction	3
I - <u>Structure des systèmes continus dynamiques</u>	4
I-1 Généralités	4
I-2 Description de la notion de stabilité recherchée .	5
I-3 Description des systèmes étudiés	7
II - <u>Systèmes monovariabiles continus de type Lur'e Postnikov</u>	8
II-1 Position du problème	8
II-2 Représentation matricielle sous forme canonique en "flèche mince"	9
II-3 Critère pratique de stabilité	11
III - <u>Mise en oeuvre du critère quand le domaine de variation</u> <u>\mathcal{D}_f est fixé</u>	13
III-1 Conditionnement de la matrice M^*	13
III-1-1 Localisation des racines du faisceau de polynômes $P^*(p)$	13
III-1-2 Détermination des paramètres a_i	14
III-2 Application du critère de stabilité	16
III-3 Exemple	16
IV - <u>Etude du cas où \mathcal{D}_f n'est pas déterminé. Optimisation.</u>	19
IV-1 Présentation de la méthode	19
IV-2 Etude du domaine de variation \mathcal{D}_f	21
IV-2-1 Recherche de solutions réalisables	21
IV-2-2 Choix d'un critère d'optimisation	22
Conclusion	26
Annexe I	27
Bibliographie du Chapitre I	31

<u>CHAPITRE II : ETUDE DE LA STABILITE DE DIVERS TYPES DE SYSTEMES</u>	
<u>INTERCONNECTES. APPLICATION A LA SYNTHESE</u>	34
Introduction	34
I - <u>Systemes hierarchises. Systemes interconnectes</u>	35
II - <u>Interconnexion de deux systemes non lineaires</u>	35
II-1 Les couplages sont lineaires	35
II-1-1 Mise en equation d'etat	35
II-1-2 Conditionnement de la matrice pour l'appli- cation de la conjecture du lineaire sur une majorante d'expression simple	38
II-1-3 Etude de la stabilite du systeme global ...	41
II-1-3-1 Cas ou les domaines de variation des coefficients non constants sont fixes	41
II-1-3-2 Determination des domaines \mathcal{D}_{δ_1} et \mathcal{D}_{δ_2} associant la stabilite du systeme global	42
II-2 Mise en oeuvre sur un exemple	44
II-3 Un des coefficients de couplage est non lineaire .	51
III - <u>Generalisation a n sous-systemes non lineaires</u> <u>interconnectes</u>	53
IV - <u>Cas particulier : un des systemes est lineaire.</u> <u>Application a la synthese</u>	55
IV-1 Etude de la stabilite	56
IV-2 Optimisation du coefficient d'amortissement	59
V - <u>Etude du cas ou le RC amene une simplification d'un</u> <u>pole par un zero</u>	66
Conclusion	69
Bibliographie du Chapitre II	70

CHAPITRE III : ETUDE DE SYSTEMES INTERCONNECTES COMPORTANT

<u>PLUSIEURS ECHELLES DE TEMPS</u>	73
Introduction	73
I - <u>Présentation générale des systèmes singulièrement perturbés</u>	74
II - <u>Etude de 3 systèmes interconnectés. Généralisation</u>	75
II-1 Dégénérescence progressive	76
II-2 Séparation des parties lente et rapide	78
II-3 Généralisation à q systèmes	80
II-3-1 Première approche	80
II-3-2 Deuxième approche	82
III - <u>Systèmes caractérisés par des matrices "compagnon"</u> ...	88
III-1 Dégénérescence progressive	88
III-2 Séparation partie lente - partie rapide	93
IV - <u>Les systèmes non linéaires interconnectés sont caractérisés par des matrices en flèche</u>	96
V - <u>Etude de la stabilité du système global</u>	105
V-1 Première démarche	107
V-2 Deuxième démarche	112
Conclusion	113
Annexe II	114
Bibliographie du Chapitre III	115
Conclusion générale	117

