

50376  
1981  
203

No d'ordre : 283

50376  
1981  
203

THESE

Présentée à  
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE  
en vue de l'obtention du diplôme de  
DOCTEUR INGENIEUR

par

Philippe PINGUET  
Ingénieur I.D.N.  
Master of Philosophy (Cambridge)

SUR UNE CLASSE DE METHODES  
DE REDUCTION DE L'ORDRE DES SYSTEMES  
DANS L'ESPACE D'ETAT



Soutenu le 1er décembre 1981, devant le Jury d'Examen :

MM	F. LAURENT,	Professeur	Président
	P. BORNE,	Professeur	Rapporteur
	J.C. GENTINA,	Professeur	Rapporteur
	M. DAUCHET,	Professeur	Examineur
	D. DEBERGHES,	Directeur Régional de l'ADI	Invité
	J.A. VIDEAU,	Directeur de l'IRA	Invité

## TABLE DES MATIERES

Introduction Générale .....	1
Chapitre I : Définition et propriétés générales de la classe de méthodes de réduction de l'ordre des systèmes continus .....	5
1.1 Introduction .....	6
1.2 Définition et propriétés générales de la classe de méthodes .....	6
1.2.1 Définition .....	6
1.2.2 Propriétés générales de la classe de méthodes $S_q$ .....	9
1.2.2.1 Relation d'équivalence dans $S_q$ ....	9
1.2.2.2 Utilisation du système réciproque .	10
1.2.2.3 Modes propres du modèle d'ordre réduit .....	12
1.2.2.4 Obtention d'un modèle d'ordre réduit .....	13
1.2.2.5 Domaine d'atteignabilité dans l'espace des paramètres du modèle .	15
1.2.2.6 Commande optimale via réduction de l'ordre .....	20
1.2.2.7 Retour d'état et réduction d'ordre.	23
1.3 Le processus d'erreur .....	25
1.3.1 Introduction .....	25
1.3.2 Quelques propriétés des matrices Q et R ...	26
1.3.2.1 Propriété 1 .....	26
1.3.2.2 Propriété 2 .....	26
1.3.2.3 Propriété 3 .....	27
1.3.2.4 Propriété 4 .....	27
1.3.3 Construction du vecteur état du processus d'erreur .....	29

1.3.4 Propriétés et utilisation du processus d'erreur .....	31
1.3.4.1 Utilisation de la pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose .....	31
1.3.4.2 Equations d'état du vecteur $\hat{x}$ et de $\hat{\epsilon}$ .....	32
1.3.4.3 Erreur à un échelon en régime permanent .....	33
1.4 Modification de la transformation originale définissant $S_q$ .....	34
1.5 Conclusion .....	37
ANNEXE 1 : Remarque sur les modes propres du modèle d'ordre réduit .....	38
ANNEXE 2 : Remarque sur les paramètres de Markov d'un système échantillonné .....	40
REFERENCES .....	41

Chapitre II : Application à la réduction de l'ordre des systèmes linéaires continus monovariabiles .	42
2.1 Introduction .....	43
2.2 La forme canonique de Jordan, ou méthodes des modes .....	45
2.2.1 Introduction .....	45
2.2.2 Equations d'état et schéma-bloc associé ...	45
2.2.3 Méthode de réduction de l'ordre associée ..	47
2.3 La forme canonique de Schwarz .....	49
2.3.1 Introduction .....	49
2.3.2 Equations d'état et schéma-bloc associé ...	49
2.3.2.1 Le développement en $(\alpha - \beta)$ de $F(p)$ .....	49
2.3.2.2 Equations d'état et schéma-bloc associé au développement en $(\alpha - \beta)$ de $F(p)$ .....	52
2.3.2.3 La forme canonique de Schwarz .....	52
2.3.2.4 Relation entre le développement en $(\alpha - \beta)$ et la forme de Schwarz ....	54
2.3.3 La méthode de Routh pour la réduction de l'ordre des systèmes .....	55
2.3.3.1 Introduction .....	55
2.3.3.2 Le convergent de Routh .....	56
2.3.3.3 Formulation du processus d'erreur..	57
2.3.4 Conclusion .....	58

2.4 Les formes de Cauer .....	59
2.4.1 Introduction .....	59
2.4.2 La deuxième forme de Cauer .....	59
2.4.2.1 Introduction .....	59
2.4.2.2 Equation d'état et schéma-bloc associé .....	60
2.4.2.3 Méthode de réduction de l'ordre associée .....	62
2.4.3 La première forme de Cauer .....	63
2.4.3.1 Equations d'état et schéma-bloc associé .....	63
2.4.3.2 Méthode de réduction de l'ordre associée .....	66
2.4.4 La troisième forme de Cauer .....	67
2.4.4.1 Equations d'état et schéma-bloc associé .....	67
2.4.4.2 Méthode de réduction de l'ordre associée .....	70
2.4.5 Conclusion sur les formes de Cauer .....	71
2.5 Conclusion .....	72
ANNEXE 1 : Une remarque sur le tableau de Routh .....	73
ANNEXE 2 : Quelques théorèmes sur le développement en fraction continue .....	75
ANNEXE 3 : Une paire positive .....	77
REFERENCES .....	78

Chapitre III : La forme canonique de Meizel et la méthode de réduction de l'ordre associée .....	80
3.1 Introduction .....	81
3.2 Forme canonique et schéma-bloc associé .....	82
3.3 La méthode de réduction de l'ordre associée .....	85
3.3.1 Principe de base de la méthode .....	85
3.3.2 La réduction à un ordre inférieur à $n-1$ ...	88
3.3.3 Algorithme général de la réduction d'ordre.	90
3.3.4 Interprétation algébrique de l'algorithme de réduction .....	92
3.3.5 Propriété fondamentale de la méthode de réduction .....	97
3.3.6 Exemple d'application .....	102

3.4 Application de la méthode de réduction à certains systèmes multivariables .....	106
3.4.1 Introduction .....	106
3.4.2 Application de la méthode de réduction de l'ordre aux systèmes mono-entrée-multi-sorties .....	106
3.4.3 Application de la méthode de réduction de l'ordre aux systèmes multi-entrées-mono-sortie .....	111
3.4.4 Exemple d'application .....	114
3.5 Conclusion .....	116
ANNEXE 1: Choix des paramètres $p_2^i, \dots, p_n^i$ .....	118
ANNEXE 2: Moments et paramètres de Markov d'une fonction de transfert .....	119
ANNEXE 3: Structure de la matrice de changement de base $T_p$ .....	121
REFERENCES .....	127
Conclusion générale .....	128

## INTRODUCTION GENERALE

La modélisation d'un système est le plus souvent la première et la plus délicate des tâches confiées à un ingénieur automaticien . Les outils pour construire un modèle sont multiples : connaissance a priori d'équations provenant de la physique, historique du système, etc... Une fois cette modélisation faite, les résultats obtenus sont le plus souvent difficiles à exploiter directement : le nombre des paramètres est trop élevé, les équations sont trop compliquées par suite de non-linéarités ou de l'évolution des structures du système au cours du temps, sans compter la présence éventuelle de phénomènes aléatoires .

Il s'agit alors pour l'automaticien de simplifier au maximum son modèle pour le rendre exploitable sans pour autant qu'il ne s'écarte trop de la réalité du système qu'il représente . Cette dernière phrase, très simple en apparence, contient toute la difficulté du problème de la réduction de l'ordre des systèmes, c'est à dire la simplification des équations différentielles, rendues linéaires et stationnaires, régissant le comportement d'un système, de façon à diminuer le nombre de variables d'état . La difficulté provient de ce que personne ne peut dire ce qu'est un "bon" modèle d'un système . Il n'est pas possible en pratique de prouver qu'un modèle décrit rigoureusement un processus, seule la mise en évidence de contradictions peut en général s'avérer possible en montrant ainsi les limites .

Un des critères le plus souvent retenu pour la validation d'un modèle en automatique est que les réponses du système et de son modèle, notées respectivement  $e(t)$  et  $\hat{e}(t)$ , doivent être "proches" numériquement l'une de l'autre pour des entrées typiques identiques . Ces entrées sont généralement un échelon, une impulsion de Dirac ou encore des sinusoides . Il est vrai que le signal physiquement réalisable qui fournit le plus de renseignements sur la dynamique d'un système quand on l'applique à l'entrée de celui-ci est l'échelon . Il est clair que si les réponses indicelles du système et de son modèle sont rigoureusement identiques alors le modèle sera parfait . La difficulté vient si ces deux réponses,  $e(t)$  et  $\hat{e}(t)$ , ne sont que proches l'une de l'autre, par exemple, critère couramment retenu, si  $\int_0^{\infty} (e(t) - \hat{e}(t))^2 dt$  est faible devant  $\int_0^{\infty} (e(t))^2 dt$  . Il n'est pas évident de dire que l'on pourra assimiler dans ce cas le système à son modèle dans un but de détermination de conditions de stabilité ou de synthèse d'asservissements .

Il ne s'agit pas ici d'envelopper le problème de la réduction de l'ordre des systèmes dans son ensemble ni même de faire une présentation complète de toutes les méthodes existantes à ce jour . Les méthodes fondées sur la minimisation d'un critère, la méthode des perturbations singulières par exemple ne sont pas envisagées dans ce travail .

Nous présentons dans le premier chapitre la définition et les propriétés d'une classe de méthodes de réduction de l'ordre des systèmes linéaires stationnaires continus . Une méthode de réduction de l'ordre appartiendra à cette classe si elle se résume en la troncature des équations d'état du système original .

A chaque mise en équations d'état du processus de départ

correspondra une méthode de réduction différente . Une telle classe de méthodes ne regroupe pas, en général, tous les modèles possibles d'un système . L'erreur due à la réduction de l'ordre peut dans ce cas être considérée comme un système dynamique au même titre que le système de départ ou son modèle . Le problème de la réduction d'ordre revient alors à un choix de la représentation dans l'espace d'état du système original .

Dans un deuxième chapitre nous présentons trois formes canoniques pour les équations d'état d'un système monovariable linéaire continu et stationnaire qui sont déjà connues :

- La forme de Jordan .
- La forme de Schwarz .
- La forme attachée au développement de la fonction de transfert en fraction continue suivant la deuxième forme de Cauer .

Nous rappelons les définitions de la méthode de réduction modale associée à la forme de Jordan, et la méthode fondée sur la deuxième forme de Cauer . Nous montrons que la forme canonique de Schwarz est une formulation dans l'espace d'état de la méthode de réduction dite de Routh dont nous faisons un bref rappel . Les développements de la fonction de transfert en fraction continue suivant les premières et troisièmes formes de Cauer amènent à l'établissement de deux formes canoniques originales pour les équations d'état . Il est également fait un rappel des méthodes de réduction de l'ordre associées à ces développements .

Le dernier chapitre consiste en la présentation d'une méthode originale pour la réduction de l'ordre des systèmes monovariables . Elle appartient à la classe de méthodes étudiée au cours du premier chapitre et est associée à une forme canonique

récente pour les équations d'état des processus dont on fait un rappel de la définition . Cette méthode de réduction conserve les premiers moments du système original, elle peut également en conserver certains pôles . Un exemple numérique en illustre la mise en oeuvre . Certains systèmes multivariables particuliers font l'objet d'une extension de la nouvelle méthode de réduction, qui est complétée par un exemple numérique .

CHAPITRE I

## CHAPITRE I

Définition et propriétés générales de la classe  
de méthodes de réduction de l'ordre des systèmes continus .

### 1.1 Introduction :

Le but de ce chapitre est de définir et de présenter les propriétés générales d'une classe de méthodes de réduction de l'ordre d'un même système original, noté  $\Sigma$ , supposé continu et linéaire . On exposera également une méthode de comparaison dans l'espace d'état entre le système original et un modèle arbitraire de ce système obtenu par une méthode appartenant à la classe considérée .

### 1.2 Définition et propriétés générales de la classe de méthodes

#### 1.2.1 Définition

Soit un système linéaire, invariant, continu ayant  $m$  entrées et  $p$  sorties, d'ordre  $n$ , on suppose que l'on connaît ses équations d'état sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x \end{aligned} \tag{1}$$

- Où :
- $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  appelée matrice du régime libre du système original .
  - $B$  est une matrice de dimension  $n \times m$  appelée matrice d'entrée .
  - $C$  est une matrice de dimension  $p \times n$  appelée matrice de sortie .

- u est un vecteur de dimension m appelé vecteur d'entrée .
- y est un vecteur de dimension p appelé vecteur de sortie .
- x est un vecteur de dimension n appelé vecteur-état .

Par extension on désignera le système original,  $\Sigma$ , par le triplet (A,B,C) .

On définit alors la classe de méthodes  $S_q$  de réduction de l'ordre du système (A,B,C) à l'ordre q par l'ensemble des modèles S d'ordre q tels que (voir référence (1) ) :

$$S \in S_q \iff \exists Q^+ \in \mathbb{R}^{q \times n} \text{ et } Q \in \mathbb{R}^{n \times q} \quad (2)$$

telles que :  $Q^+Q = I_{qq}$

(où  $I_{qq}$  est la matrice-identité d'ordre q)

et  $S = (Q^+AQ ; Q^+B ; CQ)$

C'est à dire que S est un système d'ordre q dont les équations d'état s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= Q^+AQ \hat{x}_1 + Q^+B u \\ \hat{y} &= CQ \hat{x}_1 \end{aligned} \quad (1)a$$

Où  $\hat{x}_1$  désigne le vecteur état du modèle d'ordre réduit q inférieur à n, et  $\hat{y}$  le vecteur de sortie ainsi approximé, de même dimension que y .

REMARQUES : - L'équation (2) implique :  $\text{rang}(Q) = \text{rang}(Q^+) = q$   
-  $Q^+$  est une pseudo-inverse à gauche quelconque de Q, le cas particulier où  $Q^+$  est pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose de Q est traité plus loin .

Il apparait à la suite de cette définition que le modèle d'ordre réduit  $S$  du système original  $(A,B,C)$  est obtenu par un opérateur de projection, ou encore un "changement de base tronqué" défini par les matrices  $Q$  et  $Q^+$ . Cependant, ce changement de base peut être rattaché à un changement de base classique par la proposition suivante :

PROPOSITION : Les matrices  $Q$  et  $Q^+$  définies précédemment peuvent s'écrire :

$$Q^+ = Q_0^t \cdot T^{-1} \quad ; \quad Q = T \cdot Q_0 \quad (3)$$

Où  $T$  est une matrice carrée inversible d'ordre  $n$  et  $Q_0$  est une matrice rectangulaire définie par :

$$Q_0^t = (I_{qq} \ 0)$$

Où  $0$  désigne la matrice nulle de dimensions  $q \times (n-q)$ .

Démonstration :

On suppose que  $Q$  et  $Q^+$ , solutions quelconques de l'équation (2), s'écrivent :

$$Q^+ = (Q_1 \ Q_2) \quad ; \quad Q = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

Où : Dimensions  $(Q_1) = \text{Dimensions } (R_1) = q \times q$

Dimensions  $(Q_2^t) = \text{Dimensions } (R_2) = (n-q) \times q$

On peut supposer, sans perte de généralité, que  $R_1$  est inversible .

On a la relation :  $Q_1 R_1 + Q_2 R_2 = I_{qq}$

On définit alors les matrices  $T$  et  $T^{-1}$  comme suit :

$$T = \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 Q_2 \\ R_2 & I_{n-q} - R_2 Q_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -R_2 R_1^{-1} & I_{n-q} \end{bmatrix}$$

Il est clair que la matrice  $T^{-1}$  ainsi définie est bien l'inverse de  $T$  et que ces deux matrices satisfont bien l'équation (3) .

Il est à remarquer que les matrices  $T$  et  $T^{-1}$  ainsi définies ne sont pas les seules à satisfaire l'équation (3) .

REMARQUES : - Les matrices  $Q$  et  $Q^+$  ne seront pas uniques à définir un modèle d'ordre réduit à partir d'un même système original, elles dépendront en effet de la formulation de ce système dans l'espace d'état, c'est à dire des matrices  $A, B, C$  initialement choisies .

- Un modèle d'ordre réduit du système original obtenu par l'une quelconque des méthodes de la classe considérée s'écrivant :

$$S = (Q^+AQ, Q^+B, CQ)$$

peut aussi s'écrire, compte tenu de l'équation (3) :

$$S = (Q_0^t T^{-1} A T Q_0, Q_0^t T^{-1} B, C T Q_0)$$

C'est à dire que cet opérateur de projection est en fait un changement de base classique défini par les matrices  $T$  et  $T^{-1}$ , mais que ce changement de base est "tronqué" . Un modèle  $S$  de la classe  $S_q$  du système original est donc obtenu en ne conservant que les  $q$  premières composantes d'état du vecteur  $T^{-1}x$  .

### 1.2.2 Propriétés générales de la classe de méthodes $S_q$ :

#### 1.2.2.1 Relation d'équivalence dans $S_q$ :

Soient deux modèles  $S_1$  et  $S_2$  de  $\Sigma$  appartenant à la classe  $S_q$  et qui s'écrivent :

$$S_1 = (Q_1^+ A Q_1, Q_1^+ B, C Q_1)$$

$$S_2 = (Q_2^+ A Q_2, Q_2^+ B, C Q_2)$$

Alors il existe une matrice carrée inversible

d'ordre  $n$ , notée  $P_{12}$ , telle que :

$$Q_1 = P_{12} Q_2 \quad ; \quad Q_1^+ = Q_2^+ P_{12}^{-1} \quad (4)$$

La preuve découle directement des équations (3) du paragraphe 1.2.1 ; si  $S_1$  est associé au changement de base  $T_1$  et  $S_2$  à  $T_2$ , on a :

$$P_{12} = T_1 T_2^{-1}$$

Les équations (4) définissent une relation d'équivalence triviale sur  $S_q$ , c'est à dire qu'il n'y a qu'une seule classe d'équivalence . Cette relation n'est plus triviale si la matrice  $P_{12}$  est supposée orthogonale, c'est à dire que les modèles  $S$  associés à une transformation orthogonale du triplet original  $(A,B,C)$  forment un sous-ensemble  $S_q^\perp$  de  $S_q$  qui est invariant par la transformation définie par les équations (4) .

Dans le cas général il apparait que la transformation définie par les équations (4) laisse peu d'invariants : le rang de  $Q^+ A Q$ , celui du produit  $(C Q) \cdot (Q^+ B)$ , les valeurs propres de  $Q^+ A Q$  ne seront pas le plus souvent conservés par cette transformation . Il n'est donc pas possible de dire a priori qu'un modèle  $S$  sera stable, même si le système original l'est .

Le cas où  $P_{12}$  est orthogonal est particulier : si un modèle  $S$  est tel que la matrice  $Q^+$  associée est la pseudo-inverse à gauche au sens de Moore-Penrose de  $Q$ , alors ce caractère sera conservé par la transformation définie par les équations (4) . Cela ne veut pas dire pour autant qu'un tel modèle appartient à la sous-classe  $S_q^\perp$  pour laquelle les modèles sont tels que la matrice  $Q^+$  est la transposée de la matrice  $Q$  .

( voir la référence 1 )

### 1.2.2.2 Utilisation du système réciproque

Certaines méthodes de réduction de l'ordre des systèmes utilisent le biais du système réciproque, c'est à dire que la réduction s'opère non pas directement sur le système lui-même mais sur son réciproque suivant le schéma de la

figure 1.2.1 qui représente la réduction par la méthode directe associée aux matrices de projection  $Q$  et  $Q^+$  ainsi que la réduction via le système réciproque associée aux matrices de projection  $L$  et  $L^+$ . Le système réciproque du système original  $\Sigma$  est noté  $\tilde{\Sigma}$ .

On rappelle que si  $F(p)$  est la fonction de transfert associée au système  $\Sigma$ , alors on peut définir  $\tilde{F}(p)$ , fonction de transfert associée au système réciproque  $\tilde{\Sigma}$ , si  $F(p)$  ne présente pas de pôles en zéro, par la relation :

$$\tilde{F}(p) = (1/p) F(1/p)$$

Il s'agit ici de déterminer une relation entre les deux méthodes de réduction, ou encore de prouver que si la réduction dite directe appartient à la classe  $S_q$ , alors il en est de même pour la réduction dite réciproque.

PROPOSITION : Soient  $S$  un modèle de la classe  $S_q$  et  $S_r$  un modèle obtenu par le biais du système réciproque, suivant la figure 1.2.1, alors  $S_r$  appartient aussi à la classe  $S_q$ .

Démonstration :

Si le triplet  $(A,B,C)$  est une formulation dans l'espace d'état de la fonction de transfert originale  $F(p)$ , alors une formulation dans l'espace d'état de la fonction de transfert réciproque  $\tilde{F}(p)$  peut s'écrire :

$$(A^{-1}; -A^{-1}B; C)$$

en effet, on a :

$$F(p) = C(pI-A)^{-1}B$$

$$\tilde{F}(p) = (1/p) F(1/p) = (1/p) \cdot C((1/p)I-A)^{-1}B$$

$$\text{d'où} : \tilde{F}(p) = -C(pI-A^{-1})^{-1}A^{-1}B$$

Alors le système  $\tilde{S}_r$  peut s'écrire :

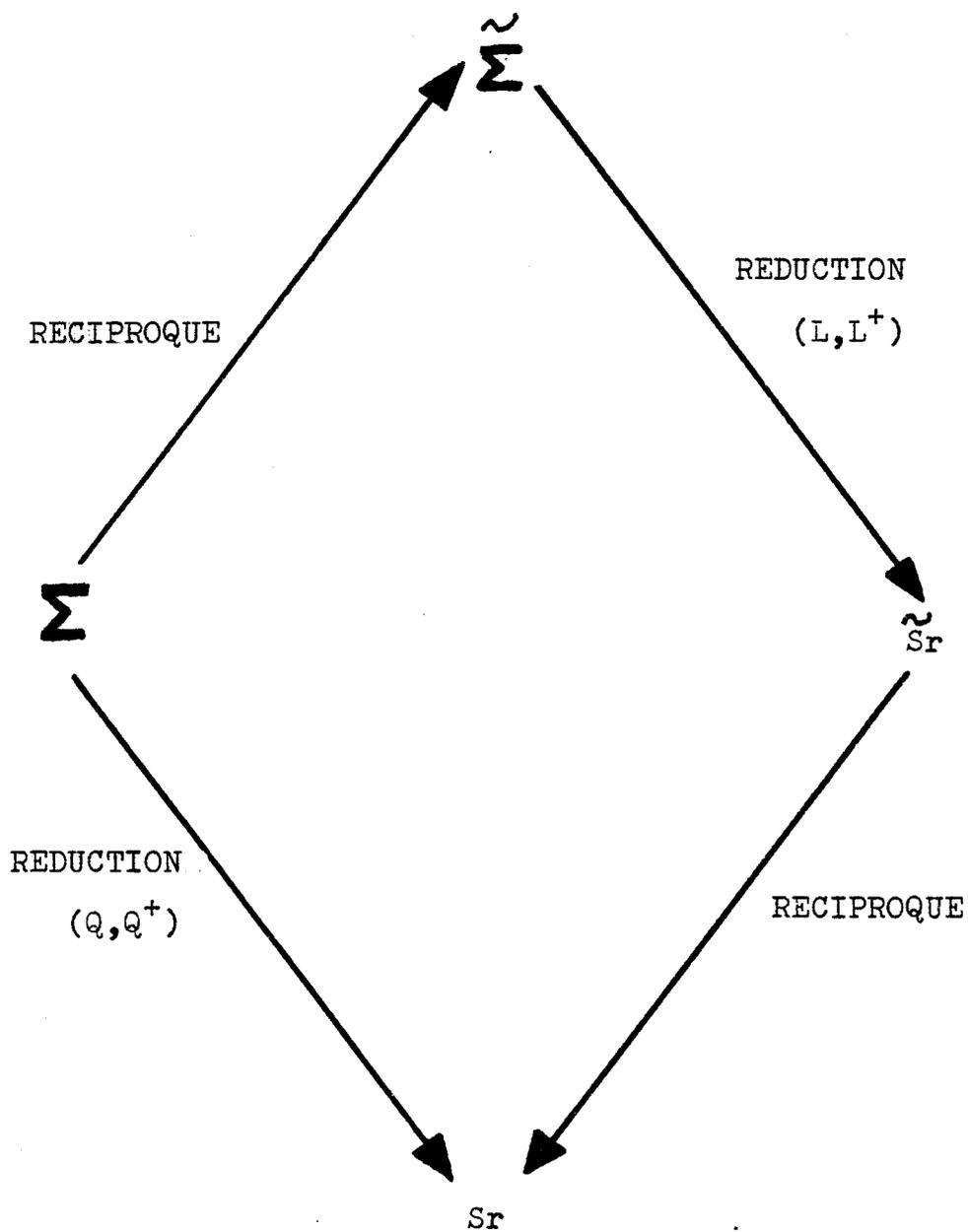


FIGURE 1.2.1

Utilisation du système réciproque .



$$\tilde{S}r = (L^+A^{-1}L; -L^+A^{-1}B; CL)$$

Et son réciproque  $Sr$  :

$$Sr = \left[ (L^+A^{-1}L)^{-1}; (L^+A^{-1}L)^{-1} \cdot L^+A^{-1}B; CL \right]$$

Il faut donc trouver deux matrices  $Q$  et  $Q^+$  telles que :

$$Q^+Q = I_{qq}$$

$$Sr = (Q^+AQ; Q^+B; CQ)$$

C'est à dire :

$$Q^+AQ = (L^+A^{-1}L)^{-1}$$

$$Q^+B = (L^+A^{-1}L)^{-1} \cdot L^+A^{-1}B$$

$$CQ = CL$$

Il est clair qu'une solution est :

$$Q = L \quad ; \quad Q^+ = (L^+A^{-1}L)^{-1} \cdot L^+A^{-1}$$

### 1.2.2.3 Modes propres du modèle d'ordre réduit

On a déjà vu que les valeurs propres de la matrice  $Q^+AQ$  ne sont pas invariantes par la transformation définie par les équations (4) et que donc les modes propres du modèle d'ordre réduit ne sont pas, dans le cas général, simplement reliés aux modes du système original. On peut cependant localiser ces modes dans une région du plan complexe lorsque le modèle  $S$  appartient à la sous-classe  $S_q^\perp$  associée à une transformation orthogonale du triplet original  $(A, B, C)$ .

On suppose donc, dans un premier temps, que les matrices  $Q$  et  $Q^+$  associées au modèle  $S$  sont telles que :

$$Q^+ = Q^t$$

C'est à dire que la matrice  $T$  de changement de base est orthogonale. On note  $x'$  le vecteur état du modèle d'ordre réduit et on définit  $x$  comme suit :

$$x = Q x'$$

Alors on a :

$$x'^t x' = x^t x$$

$$x'^t Q^t A Q x' = x^t A x$$

Où  $\bar{x}$  (respectivement  $x^t$ ) désigne le conjugué (respectivement le transposé) de  $x$ . On a, d'après l'Annexe 1 :

$$p_m \leq \operatorname{Re} \left[ \frac{x'^t Q^+ A Q \bar{x}'}{x'^t \bar{x}'} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{x^t A \bar{x}}{x^t \bar{x}} \right] = (1/2) \left[ \frac{x^t (A + \bar{A}^t) \bar{x}}{x^t \bar{x}} \right] \leq p_M$$

(inégalité notée (5) )

Où  $p_m$  et  $p_M$  sont les valeurs propres minimum et maximum de la matrice  $(A + \bar{A}^t)/2$

Si l'on suppose maintenant que  $x'$  est un vecteur propre quelconque de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $p$ , qui peut être complexe, on a :

$$p_m \leq \operatorname{Re}(p) \leq p_M$$

Si, dans un second temps, le modèle  $S$  n'appartient plus à la sous-classe  $S_q^{\perp}$ , la relation (5) est toujours vraie à condition que  $p_m$  et  $p_M$  soient maintenant la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice  $(A' + \bar{A}'^t)/2$  respectivement, où la matrice  $A'$  est le produit  $T^{-1}AT$ .

Il est clair que les valeurs propres de la matrice  $(A + \bar{A}^t)/2$  sont invariantes par un changement de base orthogonal opéré sur  $A$ . On peut alors localiser les modes propres d'un modèle quelconque  $S$  de la sous-classe  $S_q^{\perp}$  dans la région du plan complexe délimité par les droites :

$$\operatorname{Re}(p) = p_m \quad ; \quad \operatorname{Re}(p) = p_M$$

Si  $p_M$  est strictement négatif, alors tous les modèles  $S$  de la sous-classe  $S_q^{\perp}$  seront stables. Il faut toutefois remarquer que les valeurs propres de la matrice  $(A + \bar{A}^t)/2$  ne sont pas, dans le cas général, reliées de façon simple à celles de  $A$ .

#### 1.2.2.4 Obtention d'un modèle d'ordre réduit

Les équations d'état du système original  $\Sigma$

peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x\end{aligned}\tag{6}$$

Et celles du modèle d'ordre réduit  $S$  défini par les matrices  $Q$  et  $Q^+$  :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= Q^+ A Q \hat{x}_1 + Q^+ B u \\ \hat{y} &= C Q \hat{x}_1\end{aligned}\tag{7}$$

On pose, dans un premier temps :

$$x = Q \hat{x}_1\tag{8}$$

Les équations (6) deviennent alors :

$$\begin{aligned}Q \dot{\hat{x}}_1 &= A Q \hat{x}_1 + B u \\ y &= C Q \hat{x}_1\end{aligned}$$

Si l'on multiplie alors la première de ces équations par la matrice  $Q^+$  on obtient les équations (7) .

En fait, il n'est pas en général possible, pour un vecteur  $x(t)$  donné, de trouver une matrice  $Q$  et un vecteur  $\hat{x}_1(t)$  tels que l'équation (8) soit vérifiée . On peut déterminer une solution approchée de l'équation (8) par la méthode des moindres carrés en utilisant la pseudo-inverse à gauche au sens de Moore-Penrose de  $Q$ , notée  $\hat{Q}^+$  :

$$\hat{x}_1 = \hat{Q}^+ x = \hat{Q}^+ Q \hat{x}_1\tag{9}$$

Il faut remarquer que les équations (8) et (9) ne sont pas équivalentes . L'équation (9) donne la solution approchée de l'équation (8) qui minimise le carré de la norme du vecteur  $(x - Q \hat{x}_1)$  . Il ne faut pas confondre l'erreur due à la réduction de l'ordre elle-même, qui fait l'objet du paragraphe 1.3, et celle due à l'approximation donnée par l'équation (9) de la solution de l'équation (8) .

1.2.2.5 Domaine d'atteignabilité dans l'espace des paramètres du modèle

Le but de ce paragraphe est de tenter de répondre à la question "la classe de méthodes  $S_q$  comprend-elle tous les modèles possibles d'ordre  $q$  du système original  $\Sigma$  ?"

Soient donc les triplets  $(A,B,C)$  définissant le système  $\Sigma$  et  $(A',B',C')$  définissant un modèle quelconque d'ordre  $q$ . La question est de savoir s'il existe des matrices  $Q$  et  $Q^+$  telles que :

$$\begin{aligned} \text{que :} \quad Q^+Q &= I_{qq} & ; & \quad Q^+AQ = A' \\ Q^+B &= B' & ; & \quad CQ = C' \end{aligned}$$

PROPOSITION : Les modes propres d'un modèle de la classe  $S_q$  peuvent être choisis arbitrairement . C'est à dire que la transformation définissant un modèle quelconque  $S$  à partir du triplet original peut atteindre n'importe quel ensemble de modes .

Démonstration :

Pour montrer l'existence de ce choix, on peut supposer que l'ordre réduit  $q$  est  $(n-1)$  et que les matrices  $A$  et  $A'$  sont sous la première forme compagne . On a alors :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ -a_1 & & & & -a_n \end{bmatrix} ; \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ -a'_1 & & & & -a'_{n-1} \end{bmatrix}$$

Si l'on choisit  $Q$  et  $Q^+$  telles que :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ -a'_1 & & & & -a'_{n-1} \end{bmatrix} ; \quad Q^+ = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est clair que l'on a :

$$Q^+AQ = A' \quad ; \quad Q^+Q = I_{qq}$$

Ce qui démontre la proposition .

Le problème est maintenant de savoir si l'on peut atteindre par cette méthode un ensemble quelconque de zéros . Il faut pour cela déterminer le degré de liberté existant dans le choix de  $Q$  et  $Q^+$  .

On considère pour cela maintenant que les matrices  $A$  et  $A'$  sont sous la forme canonique d'observabilité :

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} ; \quad A' = \begin{bmatrix} -a'_1 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a'_{n-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

On définit alors le système  $\tilde{\Sigma}'$  par le triplet suivant :

$$\tilde{A}' = \left[ \begin{array}{c|c} & \beta_1 \\ & \vdots \\ & \beta_{n-1} \\ \hline \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{array} \right] ; \quad \tilde{B}' = \begin{bmatrix} B' \\ \beta_n \end{bmatrix} ; \quad \tilde{C}' = \left[ \begin{array}{c|c} C' & c \end{array} \right]$$

Les coefficients  $c, \alpha_i, \beta_i$  sont arbitraires, il y a donc  $2n+1$  degrés de liberté dans le choix de ce système  $\tilde{\Sigma}'$  .

Le problème se formule alors de la façon suivante :

"Existe-t-il une matrice  $T$  de changement de base transformant le triplet original  $(A, B, C)$  en  $(\tilde{A}', \tilde{B}', \tilde{C}')$ , ce qui peut s'écrire :

$$\exists T / \quad T^{-1}AT = \tilde{A}' ; \quad B = T\tilde{B}' ; \quad \tilde{C}' = CT \quad (10)$$

Si l'on désigne par  $t_1^t$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $T$ , les équations (10) s'écrivent :

$$\begin{aligned} -a_1 t_1^t + t_2^t &= t_1^t \tilde{A}' & ; & & b_1 &= t_1^t \tilde{B}' \\ & \vdots & & & \vdots & \\ -a_{n-1} t_1^t + t_n^t &= t_{n-1}^t \tilde{A}' & & & \vdots & \\ -a_n t_1^t &= t_n^t \tilde{A}' & ; & & b_n &= t_n^t \tilde{B}' \end{aligned}$$

$$\tilde{C}' = CT = (1 \ 0 \ \dots \ 0 \ c) = (1 \ 0 \ \dots \ 0) T = t_1^t$$

D'où :  $t_1^t = (1 \ 0 \ \dots \ 0 \ c)$

Il y a donc  $n^2+2n+1$  inconnues ( $c$ , les  $\alpha_i$  et les  $\beta_i$ , les coefficients  $t_{i,j}$ ) et  $n^2+2n$  équations non-linéaires. Il n'y a cependant aucun degré de liberté dans ce problème : si en effet ayant trouvé la matrice  $T$  on opère un second changement de base défini par la matrice  $T'$  :

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \cdot & & & \vdots \\ & & \cdot & & \vdots \\ & & & \cdot & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \tilde{a} \end{bmatrix}$$

Alors il n'y aura aucun changement dans le modèle d'ordre réduit. Il existera donc ou bien une infinité de solutions pour la matrice  $T$ , ou bien pas de solution du tout.

EXEMPLE : On donne ici un exemple montrant que la classe  $S_q$  ne comprend pas tous les modèles possibles d'ordre  $q$  d'un même système original. (voir référence 2)

Soit donc un système  $\Sigma$ , d'ordre 2 dont la fonction de transfert est  $F(p)$  :

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}$$

On suppose que le triplet original  $(A,B,C)$  est sous la forme canonique d'observabilité :

$$B = (0 \ 1) \ ; \ C = (1 \ 0) \ ; \ A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire la fonction de transfert d'un modèle d'ordre 1 quelconque  $\hat{F}(p)$  de  $F(p)$  sous la forme :

$$\hat{F}(p) = \frac{b}{p - a}$$

Un tel modèle est entièrement défini par les paramètres  $a$  et  $b$ . Il pourra donc être représenté par un point dans le plan  $(b,a)$ , par exemple.

Les points relatifs aux modèles d'ordre réduit 1 obtenus à partir de  $F(p)$  par l'une quelconque des méthodes de la classe

$S_q$  seront déduits de la condition d'existence de la matrice  $T$  de changement de base telle que :

$$(1 \ 0) \cdot T^{-1} A T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a ; \quad (1 \ 0) \cdot T^{-1} B = b ; \quad C T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

On écrit cette matrice  $T$  inconnue sous la forme :

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse sera donc :

$$T^{-1} = \frac{1}{\text{Dét}(T)} \begin{pmatrix} t_4 & -t_2 \\ -t_3 & t_1 \end{pmatrix}$$

Avec :  $\text{Dét}(T) = t_1 t_4 - t_2 t_3 \neq 0$

Les équations (10) s'écriront dans ce cas :

$$-4t_1 t_4 + t_3 t_4 + 3t_1 t_2 = a \text{ Dét}(T)$$

$$-t_2 = b \text{ Dét}(T) \quad ; \quad t_1 = 1$$

On peut considérer dans ces équations que  $t_3$  est fixé et que les autres inconnues  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_4$  s'écrivent en fonction de ce paramètre :

$$t_2(3 + at_3) + t_4(t_3 - a - 4) = 0$$

$$t_2(bt_3 - 1) + t_4(-b) = 0$$

Pour que la matrice  $T$  existe il est nécessaire que ce système d'équations ait une solution non-nulle, c'est à dire que ces deux équations ne doivent pas être indépendantes. Il faut donc que l'on ait :

$$\text{Déterminant} \begin{bmatrix} at_3 + 3 & t_3 - a - 4 \\ bt_3 - 1 & -b \end{bmatrix} = 0$$

D'où :

$$bt_3^2 + t_3(-1-4b) + 3b + a + 4 = 0$$

Cette dernière équation en  $t_3$  a une solution réelle si et

seulement si son discriminant est positif ou nul :

$$(1+4b)^2 \geq 4b(a + 4 + 3b)$$

Cette inégalité définit une hyperbole H . La classe de méthodes  $S_q$  sera donc représentée par la région du plan (b,a) comprise entre les deux branches de cette hyperbole .

La figure 1.2.2 représente graphiquement le plan (b,a) et l'hyperbole H . Le lieu des modèles conservant l'un ou l'autre des pôles est constitué par les droites :  $a = -1$ ; et  $a = -3$  . La conservation du gain statique se traduit par la droite d'équation :  $a = -3b$  .

On peut également déterminer les points images des modèles obtenus à partir d'une transformation orthogonale du triplet original en écrivant la matrice orthogonale T de la façon suivante :

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Ceci définit les coefficients  $t_i$  en fonction de l'angle  $\theta$  . Les équations (10) s'écriront alors :

$$a = -4 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$b = -\sin \theta \cdot \cos \theta$$

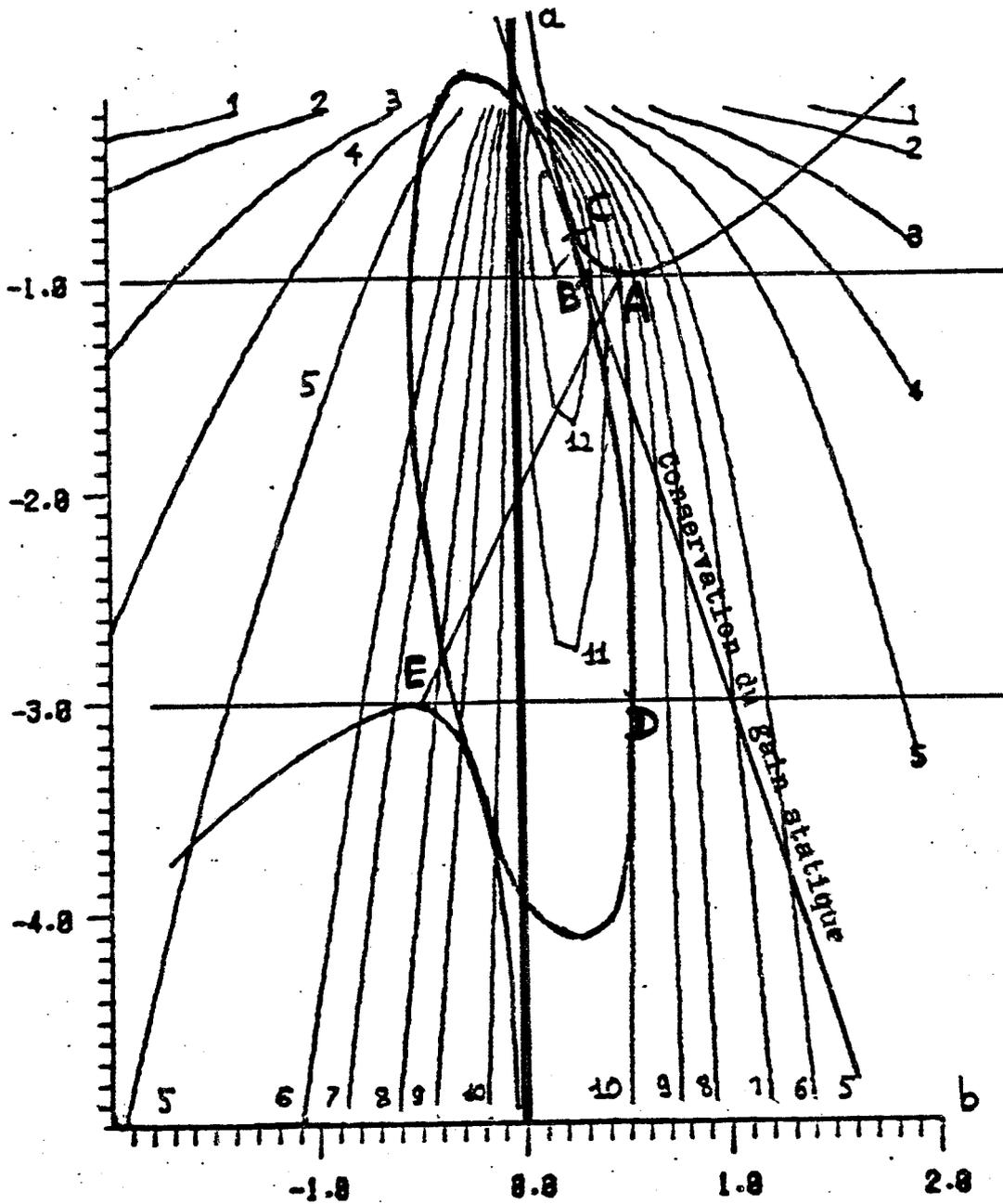
Cette courbe est dans ce cas une ellipse dont l'équation est :

$$4 b^2 + (a + 2 + 2b)^2 / 4 = 1$$

Cette figure représente également :

- le segment EA correspondant à une transformation orthogonale de la forme de Jordan du système original .
- le point A(1/2;-1) correspondant à la première méthode de réduction modale .
- le point B(1/3;-1) correspondant à la seconde méthode de réduction modale (voir référence 3), ce

FIGURE 1.2.2 Le plan (b,a) .



COURBE

VALEUR DE K

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13

- 10,000
- 5,000
- 2,000
- 1,000
- 0,500
- 0,200
- 0,150
- 0,100
- 0,075
- 0,050
- 0,030
- 0,020
- 0,010



- point représente également la nouvelle méthode .
- le point  $C(1/4; -3/4)$  correspondant à la deuxième forme de Cauer .
- les courbes sur lesquelles l'intégrale du carré de l'erreur à une entrée impulsionnelle est  $K$  .

- REMARQUES :
- L'ellipse est tangente à l'hyperbole  $H$  .
  - Le point  $C$  est à l'intersection entre l'hyperbole et la droite correspondant à l'égalité des gains statiques . C'est ce point qui est au minimum de l'intégrale du carré de l'erreur impulsionnelle .
  - Les points  $D$  et  $A$  se trouvent sur la même courbe n°10 correspondant à une erreur de  $0.05$  . Il n'est donc pas évident de dire qu'il vaut mieux conserver le pôle  $-1$  plutôt que  $-3$  dans une méthode modale .

Il semble cependant que la formulation de ce problème d'atteignabilité dans l'espace des paramètres du modèle soit beaucoup plus délicate dès que l'ordre  $n$  est plus élevé que  $2$  . La condition d'existence de  $T$  est alors très difficile à exploiter .

#### 1.2.2.6 Commande optimale via réduction de l'ordre

Le but de ce paragraphe est d'établir une relation entre une commande optimale à critère quadratique classique et la réduction de l'ordre des systèmes .

On suppose donc que l'on désire établir une commande du système dont les équations d'état s'écrivent :

$$\dot{x} = A x + B u$$

En minimisant le critère  $J$  :

$$J = \int_0^{+\infty} (x^t L x + u^t S u) dt$$

Où  $S$  est une matrice définie positive et  $L$  une matrice

semi-définie positive .

On suppose parallèlement que l'on a déterminé un modèle d'ordre réduit  $q$  par une des méthodes de la classe  $S_q$  . Les équations d'état de ce modèle s'écrivent :

$$\dot{\hat{x}}_1 = Q^+ A Q \hat{x}_1 + Q^+ B u$$

On désire commander ce modèle en minimisant le critère quadratique  $J'$  :

$$J' = \int_0^{+\infty} (\hat{x}_1^t Q^+ L Q \hat{x}_1 + u^t S u) dt$$

On sait que le problème de la commande optimale en régime permanent du système original ainsi défini conduit à la résolution de l'équation de Riccati matricielle suivante, où l'inconnue est la matrice  $P$  :

$$L + P A + A^t P + P B S^{-1} B^t P = 0 \quad (11)$$

Le problème de la commande optimale du modèle, par analogie, amène à déterminer la matrice  $\tilde{P}$ , solution de l'équation de Riccati suivante :

$$Q^+ L Q + \tilde{P} (Q^+ A Q) + (Q^+ A Q)^t \tilde{P} + \tilde{P} Q^+ B S^{-1} B^t (Q^+)^t \tilde{P} = 0 \quad (12)$$

PROPOSITION : Si  $P$  est la solution de l'équation de Riccati associée au système  $(A, B, C)$ , alors  $Q^+ P Q$  est la solution de l'équation de Riccati associée au modèle d'ordre réduit pour lequel les matrices  $Q$  et  $Q^+$  sont définies par la matrice de changement de base  $T$  qui diagonalise la matrice  $P$  .

Démonstration :

Soit donc  $P$  la solution de l'équation (11) . Cette matrice est réelle et symétrique, elle est donc diagonalisable par un changement de base orthogonal défini par une matrice  $T$  .

On considère alors le modèle d'ordre réduit  $q$  défini par les matrices  $Q$  et  $Q^+$  associées à cette matrice  $T$ . Cela signifie, d'après les équations (3) du paragraphe 1.2.1 que  $Q$  est formée des  $q$  premières colonnes de  $T$ , et  $Q^+$  des  $q$  premières lignes de  $T^{-1}$ , c'est à dire ici de  $T^t$ , puisque  $T$  est orthogonale. On appelle  $R$  (respectivement  $R^+$ ) la matrice formée des  $n-q$  dernières colonnes (respectivement lignes) de la matrice  $T$  (respectivement  $T^{-1}$ ). Pour plus de détails sur la définition et les propriétés des matrices  $R$  et  $R^+$ , se reporter au paragraphe 1.3 sur le processus d'erreur.

La matrice  $T^{-1}PT$  étant diagonale par définition de  $T$ , on a :

$$Q^+PR = 0 \quad ; \quad R^+PQ = 0 \quad (13)$$

D'autre part, la matrice  $T$  étant orthogonale, on a :

$$Q^+ = Q^t \quad ; \quad R^+ = R^t$$

Si l'on multiplie l'équation (11) à gauche par  $Q^+$  et à droite par  $Q$ , on obtient :

$$Q^+(L + PA + A^tP + PBS^{-1}B^tP).Q = 0$$

L'équation (12) peut encore s'écrire :

$$Q^+LQ + Q^+(Q\tilde{P}Q^+)AQ + Q^+A^t(Q\tilde{P}Q^+)Q + Q^+(Q\tilde{P}Q^+)BS^{-1}B^t(Q\tilde{P}Q^+)Q = 0$$

Soit encore :

$$Q^+(L + (Q\tilde{P}Q^+)A + A^t(Q\tilde{P}Q^+) + (Q\tilde{P}Q^+)BS^{-1}B^t(Q\tilde{P}Q^+))Q = 0$$

Il est clair qu'on ne peut pas poser :

$$P = Q\tilde{P}Q^+$$

Car  $P$  est de rang  $n$ , tandis que  $\tilde{P}$  est de rang  $q$ .

On choisit alors :

$$\tilde{P} = Q^+PQ$$

Les équations (11) et (12) deviennent alors respectivement :

$$Q^+LQ + (Q^+P)AQ + Q^+A^t(PQ) + (Q^+P)BS^{-1}B^t(PQ) = 0$$

$$Q^+LQ + (\tilde{P}Q^+)AQ + Q^+A^t(Q\tilde{P}) + (\tilde{P}Q^+)BS^{-1}B^t(Q\tilde{P}) = 0$$

Il faut donc, pour que la proposition soit vraie, que l'on

ait les relations :

$$Q^+P = \tilde{P}.Q^+ \quad ; \quad P.Q = Q.\tilde{P} \quad ; \quad \tilde{P} = Q^+PQ$$

On a :

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= Q^+PQ & \tilde{P}Q^+ &= Q^+PQQ^+ = Q^+P(I-RR^+) = Q^+P \\ Q\tilde{P} &= QQ^+PQ = (I-RR^+)PQ = PQ \end{aligned}$$

La proposition est ainsi démontrée

Conclusion : Si P est la solution en régime permanent du problème de la commande optimale du système original avec le critère J, alors  $\tilde{P}$  est la solution en régime permanent du problème de la commande optimale du modèle d'ordre réduit défini par la matrice qui diagonalise P avec le critère J'. Les lois de commande respectives s'écriront :

$$\begin{aligned} u &= -S^{-1}B^tP x \\ \hat{u} &= -S^{-1}B^tQ\tilde{P} \hat{x}_1 \end{aligned}$$

#### 1.2.2.7 Retour d'état et réduction d'ordre

Le but de ce paragraphe est de montrer l'influence de la réduction d'ordre sur le calcul des asservissements par retour d'état .

Soit le système dont les équations d'état s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x \end{aligned} \tag{1}$$

Le problème est ici de calculer un retour d'état pour ce système en n'utilisant qu'un de ses modèles d'ordre réduit dont les équations d'état s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= Q^+AQ \hat{x}_1 + Q^+B u \\ \hat{y} &= CQ \hat{x}_1 \end{aligned} \tag{1)a}$$

S'imposer la dynamique de la boucle fermée du modèle d'ordre réduit conduit, par la Théorie de la Commande, à déterminer

une matrice de retour d'état  $K$  de façon à ce que la matrice du régime libre de la boucle fermée  $\hat{A}$  ait les propriétés désirées, où :

$$\begin{aligned}\hat{A} &= Q^+ A Q + Q^+ B K = Q^+ A Q + Q^+ B K Q^+ Q \\ \hat{A} &= Q^+ (A + B K Q^+) Q\end{aligned}$$

Si l'on pose alors :

$$\hat{x} = Q \hat{x}_1 \quad ; \quad \hat{x}_1 = Q^+ \hat{x}$$

Les équations d'état de la boucle fermée relatives au vecteur  $\hat{x}$  s'écriront :

$$u = K \hat{x}_1 = K Q^+ \hat{x} \quad \overset{\circ}{\dot{x}} = Q Q^+ A \hat{x} + Q Q^+ B K Q^+ \hat{x}$$

En supposant que la matrice  $R^+ A Q$  est nulle (voir 1.3), cette équation devient :

$$\overset{\circ}{\dot{x}} = A \hat{x} + B K Q^+ \hat{x} - R R^+ B K Q^+ \hat{x}$$

Il reste maintenant à imposer au système réel le retour d'état calculé à partir du modèle d'ordre réduit, c'est à dire à poser dans l'équation (1) :

$$u = K Q^+ x$$

Les équations d'état du système réel seront donc, en boucle fermée :

$$\overset{\circ}{\dot{x}} = (A + B K Q^+) x$$

L'écart entre la dynamique obtenue,  $x$ , et celle calculée,  $\hat{x}$ , sera :

$$(\overset{\circ}{\dot{x}} - \overset{\circ}{\dot{\hat{x}}}) = (A + B K Q^+) \cdot (x - \hat{x}) + R R^+ B K Q^+ \hat{x}$$

On constate donc que  $x$  ne tendra vers  $\hat{x}$  que si celui-ci tend vers zéro . Ceci impose la stabilité de l'état d'équilibre pour le système bouclé .

### 1.3 Le processus d'erreur

#### 1.3.1 Introduction

Le but de ce paragraphe est d'évaluer l'écart fait entre le vecteur état  $x$ , du système original, et celui  $\hat{x}_1$  du modèle d'ordre réduit obtenu par l'une quelconque des méthodes de la classe  $S_q$ . On établit donc ici une méthode de comparaison entre deux vecteurs état d'ordre différent. Cette méthode consiste à augmenter artificiellement l'ordre du modèle  $S$  de la classe  $S_q$  en lui adjoignant des variables d'état appropriées.

On a déjà vu qu'un modèle quelconque  $S$  de la classe  $S_q$  est défini par un couple de matrices  $Q$  et  $Q^+$ , formées à partir d'une matrice de changement de base  $T$  suivant les relations (3) du paragraphe 1.2.1 :

$$Q^+ = Q_0^t \cdot T^{-1} \quad ; \quad Q = T \cdot Q_0$$

Cela signifie que la matrice  $Q$  (respectivement  $Q^+$ ) est formée des  $q$  premières colonnes (respectivement lignes) de  $T$  (respectivement de  $T^{-1}$ ).

On définit maintenant le couple de matrices  $R$  et  $R^+$  (voir le paragraphe 1.2.2.6), à partir de la même matrice  $T$  mais suivant les relations suivantes :

$$R^+ = R_0^t \cdot T^{-1} \quad ; \quad R = T \cdot R_0 \quad (14)$$

Où  $R_0$  est une matrice rectangulaire définie par :

$$R_0^t = (0 \quad I_{rr}) \quad ; \quad r = n-q$$

Où  $0$  désigne la matrice nulle de dimensions  $rxq$ .

Cela signifie que la matrice  $R$  (respectivement  $R^+$ ) est formée des  $r$  dernières colonnes (respectivement lignes) de  $T$  (respectivement  $T^{-1}$ ). Les matrices  $T$  et  $T^{-1}$  peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$T = (Q \ R) \quad ; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} Q^+ \\ R^+ \end{pmatrix}$$

On obtient alors la relation :

$$T \cdot T^{-1} = I_{nn} = QQ^+ + RR^+ \quad (15)$$

Un vecteur quelconque  $x$  peut donc s'écrire d'une façon unique :

$$x = Q x_1 + R x_2 \quad (16)$$

Il découle également de la relation (15) les relations :

$$\begin{aligned} R^+ \cdot Q &= O_{r,q} & ; & & Q^+ \cdot R &= O_{q,r} \\ x_1 &= Q^+ \cdot x & ; & & x_2 &= R^+ \cdot x \end{aligned} \quad (17)$$

### 1.3.2 Quelques propriétés des matrices $Q$ et $R$

On présente ici quelques propriétés essentielles des matrices  $Q, R, Q^+, R^+$  qui découlent pour la plupart de leur définition .

1.3.2.1 Toute matrice carrée d'ordre  $n$   $A$  est équivalente à  $A'$ , où :

$$A' = \begin{pmatrix} Q^+ A Q & Q^+ A R \\ R^+ A Q & R^+ A R \end{pmatrix}$$

Preuve :  $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$

1.3.2.2 Si la matrice  $A$  est inversible et si la matrice  $R^+ A Q$  est nulle, alors  $A^{-1}$  est équivalente à  $\tilde{A}^{-1}$ , où :

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} Q^+ A^{-1} Q & Q^+ A^{-1} R \\ 0 & R^+ A^{-1} R \end{pmatrix}$$

Preuve :  $A$  est équivalente à  $A'$ , d'après la propriété précédente, où :

$$A' = \begin{pmatrix} Q^+ A Q & Q^+ A R \\ 0 & R^+ A R \end{pmatrix}$$

De même,  $A^{-1}$  est équivalente à  $\tilde{A}^{-1}$  où :

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} Q^+ A^{-1} Q & Q^+ A^{-1} R \\ R^+ A^{-1} Q & R^+ A^{-1} R \end{pmatrix} = T^{-1} A^{-1} T$$

On peut alors écrire le produit :

$$A' \cdot \tilde{A}^{-1} = I_{nn} = T^{-1} \cdot A \cdot T : T^{-1} \cdot A^{-1} \cdot T$$

Le premier bloc-colonne composé des  $q$  premières colonnes de ce produit s'écrit :

$$\begin{pmatrix} Q^+ A A^{-1} Q \\ R^+ A R R^+ A^{-1} Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{qq} \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où :  $(R^+ A R) \cdot (R^+ A^{-1} Q) = 0$

Or A est inversible et  $R^+ A Q$  est nulle, donc  $R^+ A R$  est inversible et l'on a :  $R^+ A^{-1} Q = 0$

D'où le résultat . Il en découle de même :

$$(R^+ A R)^{-1} = R^+ A^{-1} R ; \quad (Q^+ A Q)^{-1} = Q^+ A^{-1} Q$$

1.3.2.3 Dans les mêmes hypothèses que la propriété précédente on a la relation :

$$R \cdot (R^+ A R)^{-1} R^+ = R R^+ A^{-1}$$

Preuve : D'après le résultat précédent, on a :

$$\begin{aligned} R(R^+ A R)^{-1} R^+ &= R(R^+ A^{-1} R) R^+ = R R^+ A^{-1} (I - Q Q^+) \\ &= R R^+ A^{-1} - R(R^+ A^{-1} Q) Q^+ \end{aligned}$$

Mais  $R^+ A^{-1} Q$  est nulle, d'où le résultat .

1.3.2.4 Erreur à une entrée implusionnelle et à une entrée en échelon :

On suppose toujours :  $R^+ A Q = 0$

Il s'agit ici de donner l'expression de l'erreur en fonction du temps entre les réponses impulsionnelle et indicielle du triplet original et du modèle d'ordre réduit .

Il est à noter que si A est équivalente à A' de la propriété 1.3.2.2, cela signifie que  $A^m$ , pour m entier, sera équivalente, par le même changement de base T à une matrice triangulaire-bloc supérieure, c'est à dire que l'on aura :

$$R^+ A Q = 0 \implies R^+ A^m Q = 0 \quad \forall m$$

$A^m$  sera donc équivalente à  $\tilde{A}^m$  où :

$$\tilde{A}^m = \begin{pmatrix} Q^+ A^m Q & Q^+ A^m R \\ 0 & R^+ A^m R \end{pmatrix}$$

On peut appliquer ce résultat à l'évaluation de l'écart entre la réponse impulsionnelle du système original et celle du modèle d'ordre réduit . La réponse impulsionnelle du triplet original peut en effet s'écrire :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( C(pI-A)^{-1} B \right) = C \cdot e^{At} \cdot B \\ = CB + t CAB + (t^2/2) CA^2B + \dots$$

On voit apparaître les paramètres de Markov du triplet (A,B,C) :  $C \cdot A^i \cdot B$  ;  $i = 0, 1, \dots$

Il en est de même pour la réponse impulsionnelle du modèle d'ordre réduit :

$$\hat{h}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( CQ(pI-Q^+AQ)^{-1} Q^+B \right)$$

Il reste donc à évaluer la différence entre les paramètres de Markov du système original et de son modèle :

$$D_m = CA^m B - CQ(Q^+AQ)^m Q^+B$$

$$\text{On a : } R^+AQ = 0 \quad (Q^+AQ)^m = Q^+A^m Q$$

$$R^+A^m Q = 0$$

D'où :

$$D_m = CA^m B - CQ Q^+ A^m Q Q^+ B$$

$$= CA^m B - C(I-RR^+) A^m Q Q^+ B$$

$$= CA^m B - CA^m Q Q^+ B = CA^m B - CA^m (I-RR^+) B$$

$$D_m = CA^m RR^+ B$$

L'erreur  $h(t) - \hat{h}(t)$  s'écrit donc :

$$D(h(t)) = h(t) - \hat{h}(t) = D_0 + tD_1 + (t^2/2)D_2 + \dots$$

$$D(h(t)) = C \cdot e^{At} \cdot RR^+ B$$

$$D(h(t)) = \mathcal{L}^{-1} \left( C(pI-A)^{-1} RR^+ B \right)$$

Si l'on définit le processus d'erreur comme étant celui qui a  $D(h(t))$  comme réponse impulsionnelle,

une formulation dans l'espace d'état de ce processus sera :

$$\dot{E}_x = A E_x + RR^+ B u$$

$$\tilde{E} = C E_x$$

Où  $u$  est l'entrée,  $\tilde{E}$  la sortie, égale à la différence entre les sorties du système et de son modèle, et  $E_x$  le vecteur état d'ordre  $n$ , dont on verra plus loin la signification en terme de différence entre deux vecteurs d'état, l'un de dimension  $n$ , l'autre de dimension  $q$ .

La réponse indicielle se traite de la même manière à partir des paramètres de Markov du système et de son modèle. La réponse indicielle du système s'écrit en effet dans l'espace d'état :

$$H(t) = L^{-1} \left( C(pI-A)^{-1} B/p \right) = \int_0^{\infty} h(t') dt'$$

C'est à dire :

$$H(t) = CA^{-1} e^{At} B - CA^{-1} B = CB t + CAB (t^2/2) + \dots$$

Il est à remarquer que ces paramètres de Markov ont une signification bien plus importante pour les systèmes échantillonnés, voir pour cela l'Annexe 2.

### 1.3.3 Construction du vecteur état du processus d'erreur

On considère les équations d'état du système original.  $\Sigma$  données sous la forme des équations (1) du paragraphe 1.2.1 :

$$\dot{x} = A x + B u \quad ; \quad y = C x \quad (1)$$

On a vu que, pour des matrices  $Q$  et  $Q^+$  données, il existe de façon unique  $x_1$  et  $x_2$  satisfaisant l'équation (16) du paragraphe 1.3.1 :

$$x = Q x_1 + R x_2$$

Compte-tenu des équations (17) définissant  $x_1$  et  $x_2$  à partir de  $x$ , les équations d'état (1) peuvent se décomposer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{x}_1 &= Q^+ A Q x_1 + Q^+ A R x_2 + Q^+ B u \\ \overset{\circ}{x}_2 &= R^+ A Q x_1 + R^+ A R x_2 + R^+ B u \\ y &= C Q x_1 + C R x_2 \end{aligned} \quad (18)$$

On considère maintenant les équations d'état du modèle d'ordre réduit  $q$  telles qu'elles sont données par les équations (1)a du paragraphe 1.2.1 :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{x}_1 &= Q^+ A Q \overset{\circ}{x}_1 + Q^+ B u \\ \overset{\circ}{y} &= C Q \overset{\circ}{x}_1 \end{aligned} \quad (1)a$$

La comparaison entre les équations (18) et (1)a montre l'erreur due à la réduction de l'ordre de  $n$  à  $q$  en terme de différence entre deux vecteurs état . Ces vecteurs ne sont cependant pas de même dimension, on ne peut donc pas effectuer directement la différence membre à membre entre les équations (18) et (1)a . C'est pourquoi on va ramener l'ordre  $q$  du modèle à  $n$  en posant, par analogie avec l'équation (16) :

$$\overset{\circ}{x} = Q \overset{\circ}{x}_1 \quad (19)$$

Où  $\overset{\circ}{x}$  est maintenant un vecteur de dimension  $n$  . On peut alors définir le vecteur état  $E$  de la façon suivante :

$$E = x - \overset{\circ}{x} \quad (20)$$

Il faut remarquer que dans le cas général le vecteur  $E$  ainsi défini n'est pas représentatif du processus d'erreur . Ce dernier est en général d'ordre  $(n+q)$  alors que la dimension de  $E$  est  $n$  . On peut en effet écrire le vecteur  $E$  sous la forme :

$$E = Q E_1 + R E_2 \quad (21)$$

Avec :

$$E_1 = x_1 - \overset{\circ}{x}_1$$

$$E_2 = x_2$$

Les équations différentielles régissant le comportement de  $E_1$  et  $E_2$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{E}_1 &= \overset{\circ}{x}_1 - \overset{\circ}{\dot{x}}_1 = Q^+ A Q E_1 + Q^+ A R E_2 \\ \overset{\circ}{E}_2 &= \overset{\circ}{x}_2 = R^+ A Q x_1 + R^+ A R E_2 + R^+ B u \end{aligned} \quad (22)$$

Le vecteur  $x_1$  apparaît dans ces équations, c'est pourquoi il faut y associer les équations (18) pour obtenir les équations d'état globales du processus d'erreur, d'ordre  $(n+q)$ .

Il apparaît que le cas particulier :  $R^+ A Q = 0$  ; simplifie les équations (22), le vecteur  $x_1$  n'apparaissant plus. Ce cas correspond à la rétention de  $q$  modes propres du système dans le modèle d'ordre réduit. Le processus d'erreur est dans ce cas d'ordre  $n$ .

#### 1.3.4 Propriétés et utilisation du processus d'erreur

##### 1.3.4.1 Utilisation de la pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose

On considère le vecteur  $\hat{x}$  tel qu'il a été défini par l'équation (19) :  $\hat{x} = Q \hat{x}_1$

On va chercher ici à minimiser  $(\overset{\circ}{\hat{x}} - A \hat{x} - Bu)$  au sens des moindres carrés. On définit pour cela la quantité  $d^2$  telle que :

$$d^2 = \left\| \overset{\circ}{\hat{x}} - A \hat{x} - Bu \right\|^2$$

On a ainsi :

$$d^2 = \left\| Q \overset{\circ}{\hat{x}}_1 - A Q \hat{x}_1 - Bu \right\|^2 = (Q \overset{\circ}{\hat{x}}_1 - A Q \hat{x}_1 - Bu)^t \cdot (Q \overset{\circ}{\hat{x}}_1 - A Q \hat{x}_1 - Bu)$$

Minimiser  $d^2$ , en considérant  $\hat{x}_1$  comme "inconnue" revient donc à choisir :

$$\overset{\circ}{\hat{x}}_1 = \hat{Q}^+ A Q \hat{x}_1 + Q^+ B u$$

Où  $\hat{Q}^+$  est la pseudo-inverse à gauche de  $Q$  au sens de Moore-Penrose.

On peut justifier le choix de cette minimisation ainsi :

$$\text{Soit : } \hat{\xi} = Bu + A\hat{x} - \overset{\circ}{x}$$

$$\text{On a par ailleurs : } 0 = Bu + Ax - \overset{\circ}{x}$$

$$\text{Donc : } \hat{\xi} = A(\hat{x}-x) + (\overset{\circ}{x}-\hat{x})$$

$$\text{Si l'on pose alors : } \xi = x - \hat{x}$$

$$\text{On aura : } \overset{\circ}{\xi} = A \xi + \hat{\xi} \quad (23)$$

Ainsi, minimiser  $\hat{\xi}$  suivant un critère quelconque (ici les moindres carrés) revient à chercher à ce que l'équation (23) corresponde à un régime libre, d'ordre  $n$ . C'est à dire que l'on cherche à faire en sorte que l'erreur  $\xi$  entre  $x$  et  $\hat{x}$  tende vers zéro. Il est bien entendu que l'on ne peut pas relier directement la qualité de la minimisation par les moindres carrés à la rapidité ni même à l'existence de la convergence de  $\hat{x}$  vers  $x$ , c'est à dire à la qualité de l'approximation faite par le processus de réduction d'ordre. On est sûr cependant que cette approximation ne peut être parfaite et que le vecteur état du modèle ne peut pas converger vers le vecteur état du système original pour une commande  $u$  quelconque.

#### 1.3.4.2 Equations d'état du vecteur $\hat{x}$ et de $\xi$

On peut évaluer la quantité  $\xi$  définie au paragraphe précédent comme suit :

Compte tenu de la définition du vecteur  $\hat{x}$  à partir du vecteur  $\hat{x}_1$  et d'après les équations (1)a, on peut écrire les équations d'état du vecteur  $\hat{x}$  comme suit :

$$\overset{\circ}{\hat{x}} = QQ^+ A \hat{x} + QQ^+ B u$$

$$\hat{y} = C \hat{x}$$

Soit, d'après l'équation (15) :

$$\overset{\circ}{\hat{x}} = A \hat{x} + B u - (RR^+ A \hat{x} + RR^+ B u)$$

Soit enfin :

$$\overset{\circ}{\hat{x}} = A \hat{x} + B u - (RR^+ A Q \hat{x}_1 + RR^+ B u)$$

La quantité  $\xi$  définie au paragraphe précédent a donc pour équations d'état :

$$\dot{\xi} = A \xi + (RR^+AQ \hat{x}_1 + RR^+B u)$$

Si l'on suppose :  $R^+AQ = 0$

On a :

$$\dot{\xi} = A \xi + RR^+B u$$

C'est à dire que l'on retrouve l'équation d'état du vecteur  $E_x$  définie au paragraphe 1.3.2.4 .

Il est à remarquer que l'on peut écrire les équations (22) sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= Q^+AQ E_1 + Q^+AR E_2 \\ \dot{E}_2 &= R^+AQ E_1 + R^+AR E_2 + R^+B u + R^+AQ \hat{x}_1 \end{aligned}$$

Avec :  $E_1 = x_1 - \hat{x}_1$  ;  $E_2 = x_2$

Si l'on pose maintenant :

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Et si l'on suppose :  $R^+AQ = 0$

Alors les équations d'état relatives au vecteur E seront::

$$\dot{E} = \begin{pmatrix} Q^+AQ & Q^+AR \\ 0 & R^+AR \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} 0 \\ R^+B \end{pmatrix} u \quad (22)a$$

### 1.3.4.3 Erreur à un échelon en régime permanent

Le but de ce paragraphe est de déterminer l'écart entre les gains statiques du système original et du modèle d'ordre réduit lorsque l'on suppose toujours :

$$R^+AQ = 0$$

et que le système original est stable .

Si l'entrée u est un échelon, l'erreur en régime permanent

s'écrit, compte tenu de l'équation (22)a et du résultat du paragraphe 1.3.2.2 :

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}_\infty = - \begin{pmatrix} Q^+ A^{-1} Q & Q^+ A^{-1} R \\ 0 & R^+ A^{-1} R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ R^+ B \end{pmatrix} u = - \begin{pmatrix} Q^+ A^{-1} R R^+ B \\ R^+ A^{-1} R R^+ B \end{pmatrix} u$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}_\infty = - \begin{pmatrix} Q^+ A^{-1} R R^+ B \\ R^+ A^{-1} B \end{pmatrix} u \quad (24)$$

On peut alors écrire l'erreur sur la sortie :

$$y - \hat{y} = C(x - \hat{x}) = CQ E_1 + CR E_2$$

D'où l'erreur en sortie en régime permanent sera :

$$\begin{aligned} (y - \hat{y})_\infty &= -C(QQ^+ A^{-1} R R^+ B + R R^+ A^{-1} B) u \\ &= -C(QQ^+ A^{-1} R R^+ B + R R^+ A^{-1} (Q Q^+ + R R^+) B) u \end{aligned}$$

Soit donc :

$$(y - \hat{y})_\infty = -CA^{-1} R R^+ B u$$

On remarque donc que le gain statique ne sera pas conservé dans le cas général .

#### 1.4 Modification de la transformation originale définissant $S_q$

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'approximation que font certains auteurs (voir références 1 et 3) de négliger la dérivée par rapport au temps de certaines variables d'état fait partie de la classe de méthodes  $S_q$  .

On considère les équations (18) dans lesquelles on suppose :

$$R^+ A Q = 0$$

Certains auteurs font alors la supposition :

$$\overset{\circ}{x}_2 = 0$$

Ce qui revient à écrire, en supposant que le système original est stable :

$$\hat{x}_2 = -(R^+AR)^{-1}R^+B u$$

On reporte alors ce résultat dans les équations (18) pour obtenir les équations d'état du modèle d'ordre réduit :

$$\dot{\hat{x}}_1 = Q^+AQ \hat{x}_1 + (Q^+ - Q^+AR(R^+AR)^{-1}R^+)B u \quad (25)$$

Pour montrer qu'une telle méthode de réduction de l'ordre des systèmes appartient à la classe  $S_q$ , il suffit de trouver deux matrices,  $\tilde{Q}$  et  $\tilde{Q}^+$  telles que les équations (25) s'écrivent

$$\dot{\hat{x}}_1 = \tilde{Q}^+A\tilde{Q} \hat{x}_1 + \tilde{Q}^+B u$$

Et : 
$$\tilde{Q}^+\tilde{Q} = I_{qq}$$

Compte tenu du résultat du paragraphe 1.3.2.3, il est clair qu'une solution est :

$$\tilde{Q}^+ = Q^+ - Q^+ARR^+A^{-1}$$

$$\tilde{Q} = Q$$

L'intérêt d'une telle méthode est qu'elle assure, dans des hypothèses précisées plus loin, l'égalité des gains statiques entre le système et son modèle d'ordre réduit . Il faut pour cela considérer que la sortie du modèle  $\hat{y}$  s'écrit :

$$\hat{y} = CQ \hat{x}_1 + CR \hat{x}_2$$

C'est à dire :

$$\hat{y} = CQ \hat{x}_1 - CR(R^+AR)^{-1}R^+B u \quad (26)$$

On remarque donc que le modèle ainsi obtenu sera impropre, c'est à dire qu'il y aura une liaison directe entre l'entrée  $u$  et la sortie  $\hat{y}$  .

La composante  $E_1$  du vecteur erreur  $E$  défini par les équations

tions (22) suivra l'équation d'état :

$$\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{x}_1 - \hat{x}_1 = Q^+AQ E_1 + Q^+AR E_2 + Q^+AR(R^+AR)^{-1}R^+B u$$

Alors l'équation (22) s'écrira, compte-tenu du résultat du paragraphe 1.3.2.3 :

$$\overset{\circ}{E} = \begin{pmatrix} Q^+AQ & Q^+AR \\ 0 & R^+AR \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} Q^+ARR^+A^{-1}B \\ R^+B \end{pmatrix} u$$

Si l'on suppose que l'entrée  $u$  est un échelon, l'erreur en régime permanent sera :

$$E_{\infty} = - \begin{pmatrix} Q^+A^{-1}Q & Q^+A^{-1}R \\ 0 & R^+A^{-1}R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q^+ARR^+A^{-1}B \\ R^+B \end{pmatrix} u$$

Soit donc, d'après l'équation (15) et en supposant toujours  $R^+AQ$  nulle :

$$E_{\infty} = - \begin{pmatrix} 0 \\ R^+A^{-1}B \end{pmatrix} u$$

Cela signifie :  $E_1 = 0$  ; pour une entrée en échelon .

L'erreur sur la sortie s'écrira, compte tenu de (26) :

$$y - \hat{y} = CQ E_1 + CR E_2 + CRR^+A^{-1}B u$$

C'est à dire que les gains statiques du système et de son modèle seront toujours égaux .

Cette modification trouve une application directe dans la "seconde méthode des modes" (voir référence 3) pour laquelle on transforme les équations d'état originales pour les mettre sous la forme de Jordan :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{x}_1 &= J_1 x_1 + J_3 x_2 + B_1 u \\ \overset{\circ}{x}_2 &= J_2 x_2 + B_2 u \end{aligned}$$

Les équations d'état du modèle s'écrivent alors :

$$\overset{\circ}{\hat{x}}_1 = J_1 \hat{x}_1 + (B_1 - J_3 J_2^{-1} B_2) u$$

(voir référence 3)

La matrice de changement de base  $T$  qui définit les matrices  $Q$  et  $Q^+$  est donc celle qui fait passer le triplet original à sa forme de Jordan .

### 1.5 Conclusion

On a défini dans ce chapitre une classe de méthodes de réduction de l'ordre des systèmes linéaires continus .

Il apparait qu'une méthode quelconque de cette classe est définie comme la rétention des  $q$  premières composantes du vecteur état du système original . A chaque mise en équations d'état différente correspondra une méthode de réduction de l'ordre .

On a vu sur un exemple qu'une telle classe de méthodes ne comprenait pas, en général, tous les modèles possibles d'un même système ; Les méthodes fondées sur la minimisation d'un critère d'erreur par exemple (voir référence 3) ne sont pas abordées ici car elles ne peuvent pas être formulées de façon simple dans l'espace d'état .

Les équations d'état relatives à l'erreur décollant de la réduction d'ordre ont été établies . L'erreur peut ainsi être considérée comme un système dynamique au même titre que le système original ou son modèle .

Il y a lieu de montrer maintenant que cette classe de méthodes correspond à des méthodes de réduction réelles, c'est l'objet du chapitre qui suit .

ANNEXE 1

Remarque sur les modes propres du modèle  
d'ordre réduit .

- D'après Gantmacher (voir référence 4), il est clair que pour toute matrice symétrique réelle d'ordre  $n$   $A$  on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n*} \quad s_1 \leq \frac{x^t Ax}{x^t x} \leq s_n \quad (1)$$

Où les  $s_i$  sont les valeurs propres de  $A$  et telles que :

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$$

(dans ce cas les  $s_i$  sont toutes réelles) .

- Dans le cas où la matrice  $A$  n'est pas symétrique, le résultat doit être modifié comme suit :

On pose :  $A = A' + A''$

$$\text{où : } A' = (1/2).(A+A^t) \quad ; \quad A'' = (1/2).(A-A^t)$$

$$\text{Alors : } \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x^t Ax = x^t A' x$$

Et l'inégalité (1) devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n*} \quad s'_1 \leq \frac{x^t Ax}{x^t x} \leq s'_n$$

Où les  $s'_i$  sont les valeurs propres de la matrice  $A'$

et telles que :  $s'_1 \leq s'_2 \leq \dots \leq s'_n$

(les  $s'_i$  sont toutes réelles) .

- Enfin si la matrice  $A$  n'est ni symétrique ni réelle, on pose :

$$A = A' + A''$$

$$\text{Où : } A' = (1/2).(A+\bar{A}^t)$$

$$A'' = (1/2).(A-\bar{A}^t)$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}x^t A' \bar{x} &= (1/2) \cdot (x^t A \bar{x} + x \bar{A}^t \bar{x}) \\ &= (1/2) \cdot (x^t A \bar{x} + \bar{x}^t \bar{A} x) \\ &= (1/2) \cdot (x^t A \bar{x} + \overline{x^t A \bar{x}})\end{aligned}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \operatorname{Re}(x^t A \bar{x}) = x^t A' \bar{x}$$

L'inégalité (1) devient alors :

$$\forall x \in \mathbb{C}^{n*} \quad s_1'' \leq \frac{\operatorname{Re}(x^t A \bar{x})}{x^t \bar{x}} \leq s_n''$$

Où les  $s_i''$  sont les valeurs propres de la matrice  $A'$

et telles que :  $s_1'' \leq s_2'' \leq \dots \leq s_n''$

(les  $s_i''$  sont toutes réelles) .

ANNEXE 2

Remarque sur les paramètres de Markov  
d'un système échantillonné .

Soit un système échantillonné dont les équations  
d'état s'écrivent :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= A x_n + B u_n \\y_n &= C x_n\end{aligned}$$

Alors la matrice de transfert correspondante s'écrit :

$$F(z) = C.(zI-A)^{-1}.B$$

Et la réponse impulsionnelle du système est alors :

$$\begin{aligned}h(t) &= Z^{-1} F(z) \\h(t) &= Z^{-1} \left[ z^{-1} . C(I-Az^{-1})^{-1} B \right] \\h(t) &= Z^{-1} \left[ z^{-1} (CB + CABz^{-1} + \dots) \right] \\h(t) &= (0; CB; CAB; CA^2B; \dots)\end{aligned}$$

C'est à dire que le  $i^{\text{ème}}$  paramètre de Markov,  $CA^{i-1}B$ ,  
est en fait la valeur de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  au  
 $i^{\text{ème}}$  instant d'échantillonnage .

CHAPITRE I

REFERENCES

1. PINGUET P. : "State space formulation of a class of model reduction methods".  
M.Phil. Thesis .University of Cambridge (GB) (1978).
2. PINGUET P., BORNE P. et GENTINA J.C. : "Sobre la modelisacion y la reduccion de dimensionalidad".  
IFAC Séville (1980) .
3. DECOSTER M. et van CAUWENBERGHE A. : "A comparative study of different reduction methods".  
Journal A, 17 No 2, pp.68-74 (Part 1) (1976) .  
Journal A, 17 No 3, pp. 125-134 (Part 2) (1976) .
4. GANTMACHER F. : "The theory of matrices" . Vol.1, p138 .  
New York : Chelsea Publ. Co; (1959) .

CHAPITRE II

## CHAPITRE II

Application à la réduction de l'ordre  
des systèmes linéaires continus monovariables .

### 2.1 Introduction :

Il a été montré dans le chapitre I que le problème de la réduction de l'ordre d'un système pouvait se ramener, dans beaucoup de cas, au choix de la représentation du système original dans l'espace d'état .

La réduction d'ordre consiste alors à partitionner le vecteur état en deux composantes et à ne conserver que la première . Ces équations d'état "tronquées" donnent l'évolution de l'état du modèle d'ordre réduit .

Le but du présent chapitre est de présenter diverses représentations canoniques dans l'espace d'état d'un système linéaire continu monovariable sous la forme d'équations d'état et d'un schéma-bloc associé et d'en déduire les méthodes de réduction de l'ordre correspondantes .

Il sera montré que la classe de méthodes ainsi construites sera telle qu'un modèle aura ses  $2q$  paramètres (si  $q$  est l'ordre réduit) égaux à  $2q$  paramètres parmi les  $2n$  (si  $n$  est l'ordre original) du système de départ . Ces paramètres seront, suivant les cas étudiés :

- les  $n$  pôles, les  $(n-1)$  zéros et le gain statique;
- les  $2n$  premiers moments;
- les  $2n$  premiers paramètres de Markov;

- les n coefficients indépendants de la première colonne du tableau de Routh de la fonction de transfert originale;
- les n pôles et les n résidus associés;
- ou enfin une combinaison quelconque entre ces paramètres .

NOTATION : Dans tout ce chapitre et sauf indication contraire on supposera que la fonction de transfert  $F(p)$  du système de départ s'écrit :

$$F(p) = \frac{b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \quad (1)$$

Les méthodes de réduction de l'ordre présentées seront :

- la première méthode de réduction modale  
(voir référence 1)
- la méthode dite de Routh  
(voir référence 2)
- les méthodes utilisant le développement de  $F(p)$  sous les deuxième, première et troisième formes de Cauey (voir référence 3)

La plupart des méthodes de réduction de l'ordre présentées ici étaient jusqu'à maintenant des méthodes fréquentielles, c'est à dire qu'elles n'opéraient que sur la fonction de transfert  $F(p)$  . On montre ici leur formulation dans l'espace d'état .

## 2.2 La Forme canonique de Jordan, ou méthode des modes

### 2.2.1 Introduction

Le terme "forme canonique de Jordan" regroupe toute formulation des équations d'état pour laquelle la matrice de régime libre A est sous la forme de Jordan . On peut alors choisir les vecteurs B d'entrée et C de sortie tels que les résidus apparaissent dans le vecteur C alors que B ne comporte que des zéros et des uns, soit le contraire .

La méthode de réduction de l'ordre associée porte le nom de réduction modale . Elle a été introduite par Davison et Chidambara (voir référence 1) et est historiquement la première méthode de réduction de l'ordre présentée . C'est aussi la plus utilisée .

Le modèle d'ordre réduit q conserve les q pôles dominants de la fonction de transfert F(p), c'est à dire les plus proches de l'axe réel, et leurs résidus associés . Elle suppose donc la connaissance des valeurs propres et des vecteurs propres du système .

### 2.2.2 Equations d'état et schéma-bloc associé

Cette forme canonique correspond à une mise en équations d'état par la méthode des modes, c'est à dire que la fonction de transfert F(p), fraction rationnelle en p, est tout d'abord décomposée en éléments simples suivant l'expression :

$$F(p) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} \frac{r_{k,n_k-i+1}}{(p-p_k)^i} \quad (1)a$$

Avec :

$$\sum_{k=1}^m n_k = n$$

On suppose donc que  $F(p)$  a  $m$  pôles distincts  $p_1, \dots, p_k, \dots, p_m$  d'ordre respectif  $n_1, \dots, n_k, \dots, n_m$ .

Il est clair qu'une réalisation dans l'espace d'état du développement défini par l'équation (1) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} u \\ y &= (R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_m) x \end{aligned} \quad (2)$$

Où  $J_k$  désigne le bloc de Jordan associé au pôle  $p_k$ , c'est donc la matrice carrée d'ordre  $n_k$  qui s'écrit :

$$J_k = \begin{bmatrix} p_k & 1 & & \\ & p_k & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & p_k \end{bmatrix} \quad \dim(J_k) = n_k, n_k$$

Chaque  $B_k$  est un vecteur de dimension  $n_k$  et s'écrit :

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dim(B_k) = n_k, 1$$

Chaque  $R_k$ , enfin, est un vecteur ligne de dimension  $n_k$  et s'écrit :

$$R_k = (r_{k,1} \quad r_{k,2} \quad \dots \quad r_{k,n_k})$$

La figure 2.2.1 donne le schéma-bloc associé avec (2).

Schéma-bloc associé à la forme de Jordan .

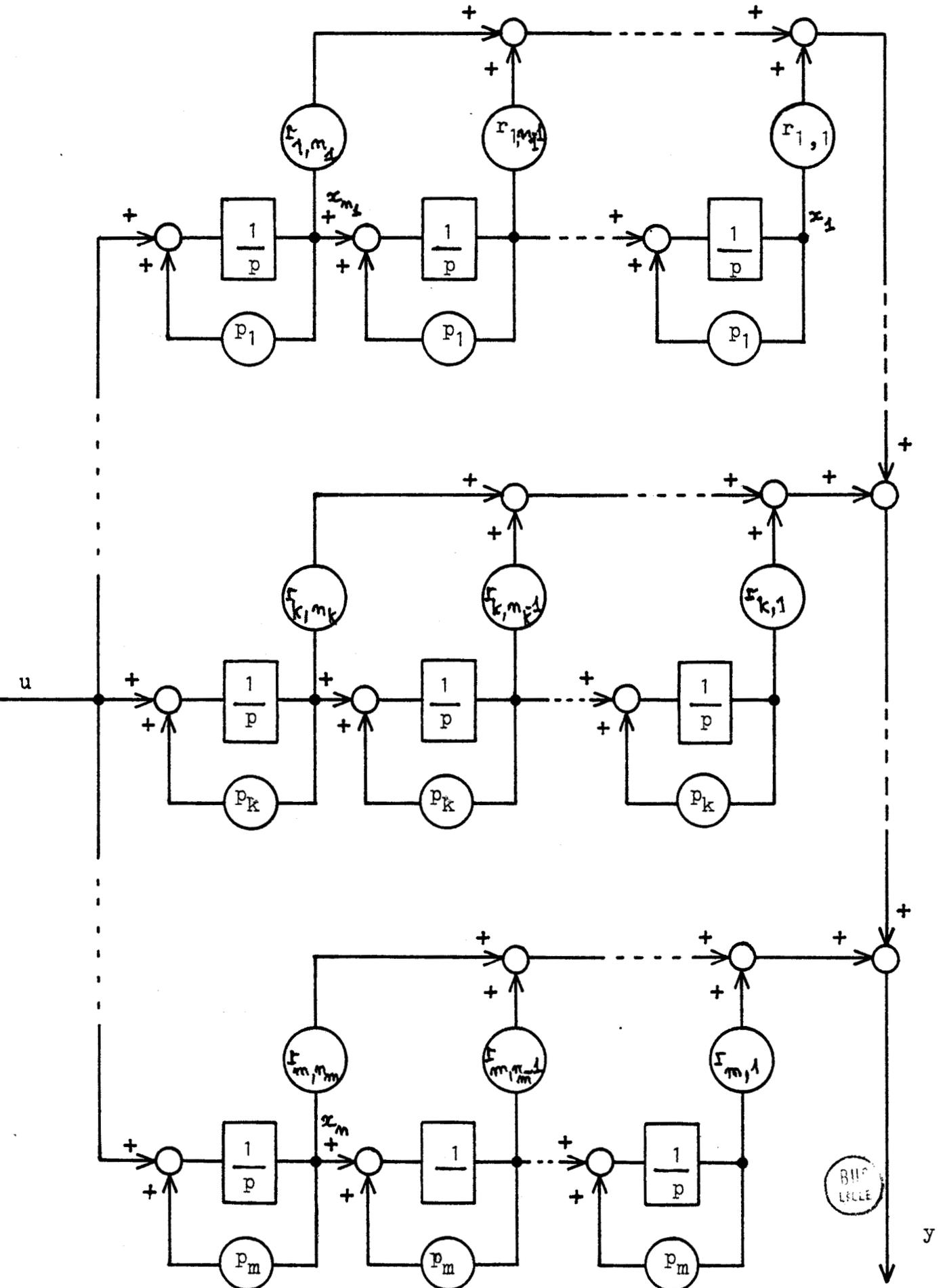


Figure 2.2.1

2.2.3 Méthode de réduction de l'ordre associée

Un modèle d'ordre  $q$  de  $F(p)$  est obtenu en ne retenant que les  $q$  pôles dominants et leurs résidus associés . Si un pôle retenu est multiple, alors il devra être conservé avec son ordre original, ce qui impose donc une contrainte sur l'ordre du modèle  $q$  :

$$] 1 / \sum_{k=1}^l n_k = q$$

Le développement de la fonction de transfert réduite  $\hat{F}(p)$  sera donc obtenu en posant dans l'équation (1)a :

$$r_{i,j} = 0 \quad ; \quad i = (l+1), \dots, m$$

Il est clair qu'une réalisation dans l'espace d'état de  $\hat{F}(p)$  sera obtenue en ne conservant que les  $q$  premières variables d'état dans les équations (2), en supposant bien-sûr que celles-ci correspondent aux pôles retenus .

Les matrices  $Q$  et  $Q^+$  seront donc définies à partir de la matrice de changement de base  $T$ , en conservant les notations du chapitre I, qui fait passer le triplet original  $(A,B,C)$  à  $(A',B',C')$  correspondant aux équations (2) .

Les équations d'état du processus d'erreur pourront s'écrire conformément aux équations (22) du chapitre I avec les simplifications suivantes :

$$R^+AQ = 0 \quad ; \quad Q^+AR = 0$$

La matrice  $A'$ , sous la forme de Jordan définie par les équations (2), est en effet diagonale-bloc . Les équations (24) s'écriront donc :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \infty = - \begin{bmatrix} 0 \\ R^+A^{-1}RR^+B \end{bmatrix}$$

L'erreur sur le gain statique sera donc :

$$\Delta G = QE_1 + RE_2 = -RR^+A^{-1}RR^+B$$

Ce qui, compte tenu du résultat du paragraphe 1.3.2.3 du chapitre I, peut s'écrire :

$$\Delta G = -RR^+A^{-1}B$$

Cette méthode est très certainement la plus employée . Il est à remarquer cependant que la matrice du régime libre du processus d'erreur est la même que celle du processus original . Ce qui signifie que ce processus d'erreur aura les mêmes modes propres que le système original .

Elle comporte l'avantage d'être généralement assez facile à utiliser, en particulier lorsque la fonction de transfert de départ est connue sous la forme d'un produit de fonctions de transfert de structure simple, ce qui est souvent le cas dans les processus complexes formés de plusieurs éléments en cascade (organes de commande, capteurs, etc...) . Dans le cas où le système original est connu par ses équations d'état sous une forme quelconque autre que celle de Jordan, la mise en oeuvre de cette méthode est beaucoup plus délicate : le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice étant assez difficile en général .

Le gain statique n'est pas conservé par cette méthode, c'est pourquoi Davison et Chidambara l'ont modifiée pour obtenir la seconde méthode de réduction modale (voir 1.4) .

## 2.3 La forme canonique de Schwarz

### 2.3.1 Introduction

Cette forme canonique pour les équations d'état a été introduite en Automatique par Parks (cf. référence 4) à l'occasion de la démonstration du critère de Routh-Hurwitz utilisant la seconde méthode de Lyapunov .

La méthode de réduction de l'ordre associée est due à Friedland et Hutton (voir référence 2), quoique cette méthode ait été présentée dans le domaine fréquentiel . Elle porte le nom de méthode de Routh car le modèle d'ordre réduit ainsi obtenu conserve les premiers termes de la première colonne du tableau de Routh du système original . Cette méthode ne suppose pas la connaissance a priori des modes du système original mais demande le calcul des coefficients du tableau de Routh afin de former le développement dit en  $(\alpha - \beta)$  de la fonction de transfert  $F(p)$  .

La caractéristique essentielle de cette méthode est que le modèle ainsi obtenu sera stable si le système de départ l'est et que la réponse impulsionnelle approximée tend, en un sens défini plus loin, vers la réponse impulsionnelle originale .

### 2.3.2 Equations d'état et schéma-bloc associé

On donnera tout d'abord les équations d'état correspondant au développement dit en  $(\alpha - \beta)$  de  $F(p)$  et le schéma-bloc associé, puis la forme de Schwarz proprement dite avec son schéma-bloc, et enfin la correspondance entre les deux .

#### 2.3.2.1 Le développement en $(\alpha - \beta)$ de $F(p)$

On suppose que la fonction de transfert  $F(p)$  s'écrit conformément à l'équation (1) . Si le système correspondant est stable,  $F(p)$  peut être développée comme suit :

$$F(p) = \sum_{l=1}^n \beta_l \prod_{j=1}^l F_j(p) \quad (3)$$

Où les  $\beta_1$  sont des constantes définies plus loin et les  $F_j(p)$  sont des fractions continues qui s'écrivent :

$$F_j(p) = \frac{1}{\alpha_j p + \frac{1}{\alpha_{j+1} p + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\alpha_n p}}}} \quad ; \forall j \neq 1$$

Pour  $F_1(p)$  cette définition est légèrement modifiée : le premier terme du développement en fraction continue est

$$1 + \alpha_1 p \quad \text{au lieu de : } \alpha_1 p \quad .$$

Les coefficients  $\alpha_j$  sont calculés à partir de la première colonne du tableau de Routh relatif à  $F(p)$  . Les deux premières lignes de ce tableau sont composées des coefficients  $a_i$  du dénominateur de  $F(p)$  . Ce tableau s'écrit donc :

$$\begin{array}{lll} a_0^0 = a_0 & a_2^0 = a_2 & a_4^0 = a_4 \quad \dots \\ a_0^1 = a_1 & a_2^1 = a_3 & a_4^1 = a_5 \\ a_0^2 & a_2^2 & a_4^2 \quad \dots \\ a_0^3 & a_2^3 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \end{array}$$

Où :  $a_j^0 = a_{j-1}^0 = 0 \quad j > n$

Et :  $a_0^{i+1} = a_2^{i-1} - \alpha_1 a_2^i$

$a_2^{i+1} = a_4^{i-1} - \alpha_i a_4^i$

$i = 1, \dots, (n-1)$

$a_{n-i+2}^{i+1} = a_{n-i}^{i-1} - \alpha_i a_{n-i}^i$

(4)

Pour  $(n-i)$  impair, les équations (4) sont modifiées  
comme suit :

$$a_{n-i-1}^{i+1} = a_{n-i+1}^{i-1}$$

Les coefficients  $\alpha_i$  sont données par :

$$\alpha_i = \frac{a_0^{i-1}}{a_0^i} \quad ; i = 1, \dots, n$$

Pour calculer les coefficients  $\beta_i$  on utilise le tableau :

$b_0^1 = b_1$	$b_2^1 = b_3$	$b_4^1 = b_5$	...
$b_0^2 = b_2$	$b_2^2 = b_4$	$b_4^2 = b_6$	...
$b_0^3$	$b_2^3$	$b_4^3$	...
$b_0^4$	$b_2^4$	.....	
.	.		
.			

Où :  $b_{j-2}^{i+2} = b_j^i - \beta_i a_j^i$

Pour :  $j = 2, 4, \dots, (n-i)$  ; si  $(n-i)$  pair  
 $j = 2, 4, \dots, (n-i-1)$  ; si  $(n-i)$  impair  
 $i = 1, 2, \dots, (n-2)$

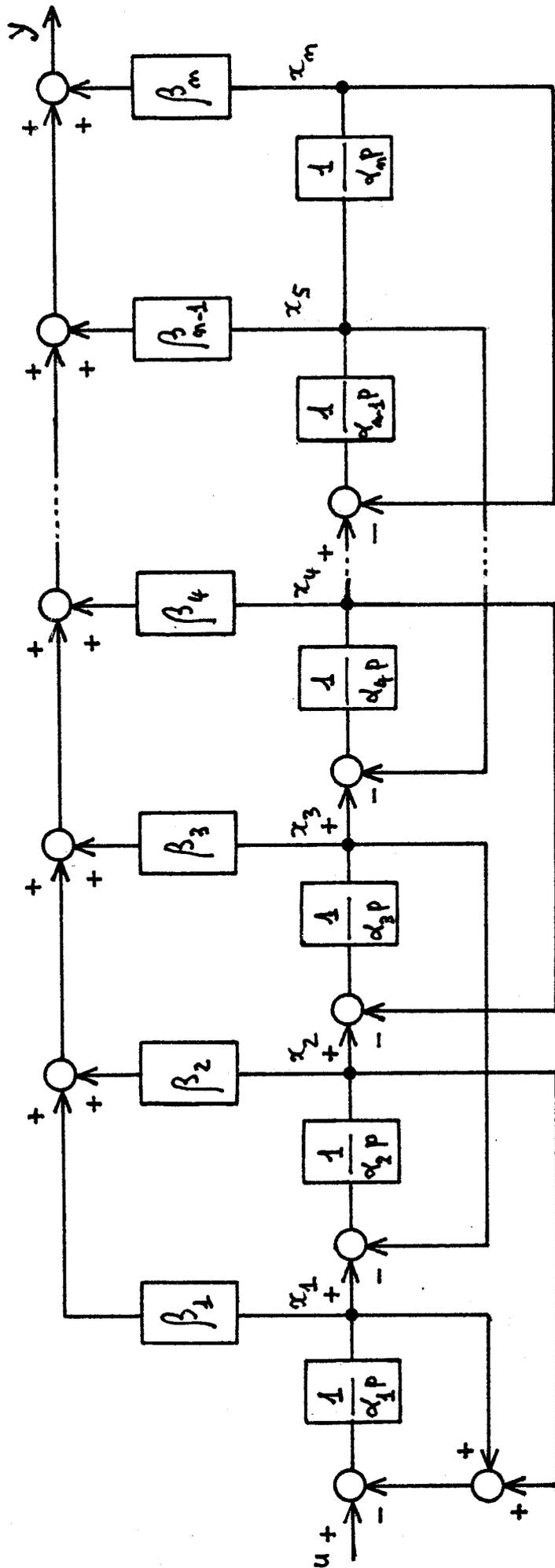
Et les coefficients  $\beta_i$  sont donnés par :

$$\beta_i = \frac{b_0^i}{a_0^i} \quad ; i = 1, 2, \dots, n$$

Si le système de départ est stable, les  $a_0^i$ , qui sont les coefficients de la première colonne du tableau de Routh, sont



FIGURE 2.3.1 Développement en  $(\alpha - \beta)$ .



mière colonne du tableau de Routh associé au dénominateur de  $F(p)$ . Le premier terme de cette première colonne sera donc 1, le deuxième sera noté  $b_1'$ , le troisième  $b_2'$ , le quatrième sera le produit  $b_1'b_3'$ , le cinquième  $b_2'b_4'$ , etc.... Cette première colonne s'écrira donc :

$$( 1 ; b_1' ; b_2' ; b_1'b_3' ; b_2'b_4' ; b_1'b_3'b_5' ; \dots\dots )^t$$

On remarque donc que cette colonne comporte  $(n+1)$  termes et se termine avec  $b_n'$ . Le système sera stable si tous les coefficients  $b_i'$  sont de même signe.

La forme canonique de Schwarz, telle qu'elle a été présentée par Parks ou par Kalman et Bertram (voir référence 5) ne considérerait pas l'équation de sortie, étant utilisée pour une étude de stabilité. On donne ici l'expression de cette équation de sortie qui sera justifiée ultérieurement.

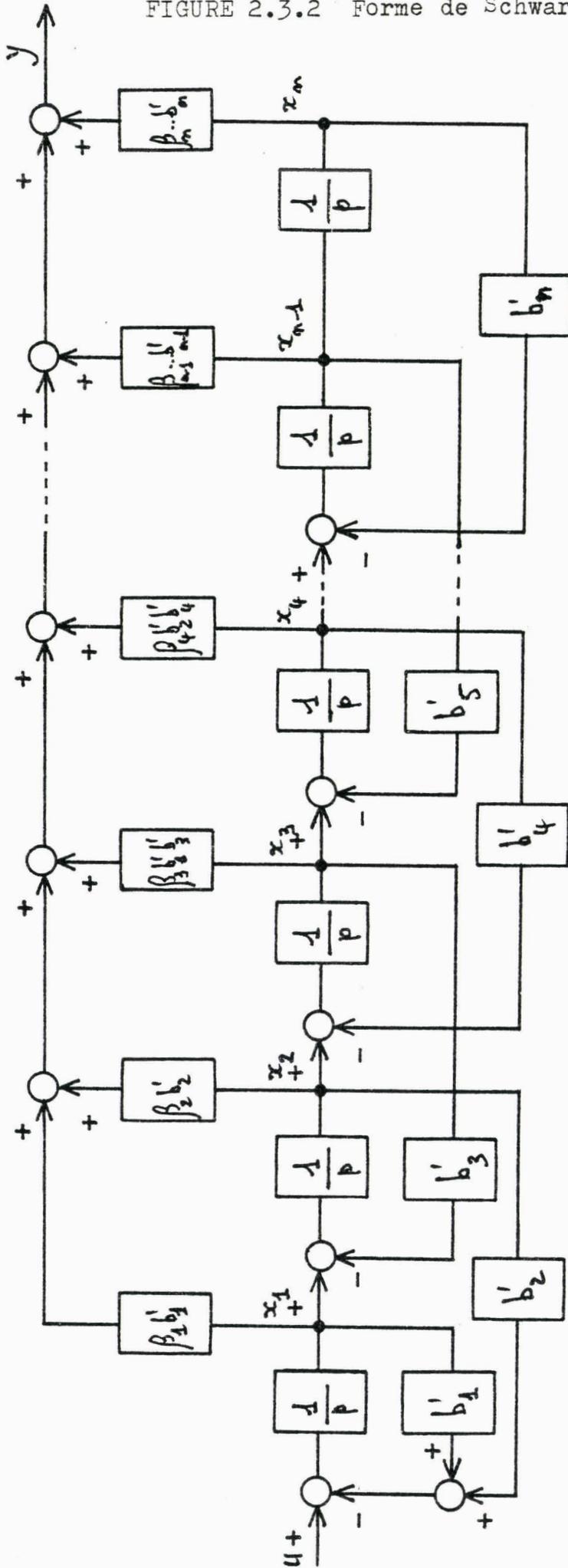
Les équations d'état complètes sous la forme canonique de Schwarz s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -b_1' & -b_2' & & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & 0 & \dots & \dots & -b_n' \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= (\beta_1 b_1' \quad \beta_2 b_2' \quad \beta_3 b_1' b_3' \quad \beta_4 b_2' b_4' \quad \dots\dots) x \quad (7) \end{aligned}$$

Le dernier terme du vecteur de sortie se termine en  $b_n'$ .

Le schéma-bloc correspondant est représenté à la figure 2.3.2. La  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur état correspond à la sortie du  $i^{\text{ème}}$  terme intégrateur  $(1/p)$ .

FIGURE 2.3.2 Forme de Schwarz .





Le triplet (A',B',C') ainsi obtenu apparait bien comme étant celui des équations d'état (7) en remarquant la relation liant les coefficients  $\alpha_i$  et  $b_i$  :

$$b_i = \frac{1}{\alpha_i \alpha_{i-1}} \quad (10)$$

En effet, les coefficients  $\alpha_i$  sont définis comme étant le rapport entre deux coefficients successifs de la première colonne du tableau de Routh .

On remarque que l'établissement de ce changement de base entre les équations (6) et (7) constitue une justification de la forme du vecteur de sortie des équations canoniques sous la forme de Schwarz .

### 2.3.3 La méthode de Routh pour la réduction de l'ordre des systèmes

#### 2.3.3.1 Introduction

Cette méthode de réduction, telle qu'elle a été présentée par Friedland et Hutton, s'applique non pas directement au système mais à son réciproque si l'on veut obtenir une bonne approximation du comportement du système aux basses fréquences, ce qui est généralement le cas .

On a vu au paragraphe 1.2.2.2 la relation qui existe entre une méthode de réduction dite directe et celle utilisant le biais du système réciproque . C'est pourquoi, dans les paragraphes qui vont suivre, on ne s'attachera qu'à l'approximation du comportement du système aux hautes fréquences, c'est à dire à la méthode qui s'applique directement au système, pour une présentation plus simple .

2.3.3.2 Le convergent de Routh

On définit le  $q^{\text{ème}}$  convergent de Routh comme la troncature du développement en  $(\alpha - \beta)$  de la fonction de transfert  $F(p)$  donné par l'équation (3). Cette troncature élimine les termes qui contiennent  $\alpha_{q+1}, \dots, \alpha_n$  et  $\beta_{q+1}, \dots, \beta_n$ .

On définit alors la fraction continue suivante :

$$G_{iq}(p) = \frac{1}{\alpha_i p + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\alpha_q p}}} \quad (11)$$

Pour  $G_{1q}(p)$  le premier terme est :

$$1 + \alpha_1 p \quad ; \quad \text{au lieu de :} \quad \alpha_1 p$$

Le  $q^{\text{ème}}$  convergent de Routh, défini par Friedland et Hutton, s'écrit sous la forme :

$$R_q(p) = \sum_{j=1}^q \beta_j \prod_{i=1}^j G_{iq}(p) \quad (12)$$

Si l'on écrit  $R_q(p)$  sous la forme d'une fraction rationnelle en  $p$  :

$$R_q(p) = B_q(p) / A_q(p)$$

alors on a la relation de récurrence suivante pour  $A_q(p)$  et  $B_q(p)$  :

$$\begin{aligned} A_q(p) &= \alpha_q p A_{q-1}(p) + A_{q-2}(p) \\ B_q(p) &= \alpha_q p B_{q-1}(p) + B_{q-2}(p) + \beta_q \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{Avec :} \quad A_{-1}(p) = A_0(p) = 1 \quad ; \quad B_{-1}(p) = B_0(p) = 0$$

Hutton et Friedland ont montré que  $R_q(p)$  constitue une approximation de  $F(p)$  aux hautes fréquences . L'approximation aux basses fréquences s'obtient en considérant  $\hat{R}_q(p)$  le réciproque de  $\tilde{R}_q(p)$  appelé l'approximant de Routh .  $\tilde{R}_q(p)$  est le  $q^{\text{ème}}$  convergent de Routh relatif à  $\tilde{F}(p)$ , réciproque de  $F(p)$  .

Cette démarche est illustrée à la figure 2.3.3, et l'on a les relations :

$$\begin{aligned}\tilde{F}(p) &= (1/p) F(1/p) \\ \hat{R}_q(p) &= (1/p) \tilde{R}_q(1/p)\end{aligned}$$

Il est à remarquer que le  $q^{\text{ème}}$  convergent de Routh ne dépend que des coefficients  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  et  $\beta_1, \dots, \beta_q$  . D'après l'Annexe 1 il apparaît que le modèle d'ordre réduit  $q$  de  $F(p)$  dépend de tous les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  si et seulement si :

$$q \geq 2p+1 \quad ; \quad \text{si } n=2p+1 \quad \text{ou } n=2p$$

Il apparaît donc qu'une formulation dans l'espace d'état de  $R_q(p)$  s'obtient en ne conservant que les  $q$  premières composantes du vecteur état défini par les équations (6), c'est à dire en posant :

$$\beta_i = 0 \quad i = (q+1), \dots, n$$

La méthode de Routh est donc bien une des méthodes de la classe  $S_q$  .

### 2.3.3.3 Formulation du processus d'erreur

D'après le paragraphe précédent il apparaît que le  $q^{\text{ème}}$  convergent de Routh est obtenu par troncature des équations d'état sous la forme canonique de Schwarz . Si l'on conserve les notations du chapitre 1 et si les équations d'état originales s'écrivent :

$$\overset{o}{\dot{x}} = A x + B u \quad ; \quad y = C x$$

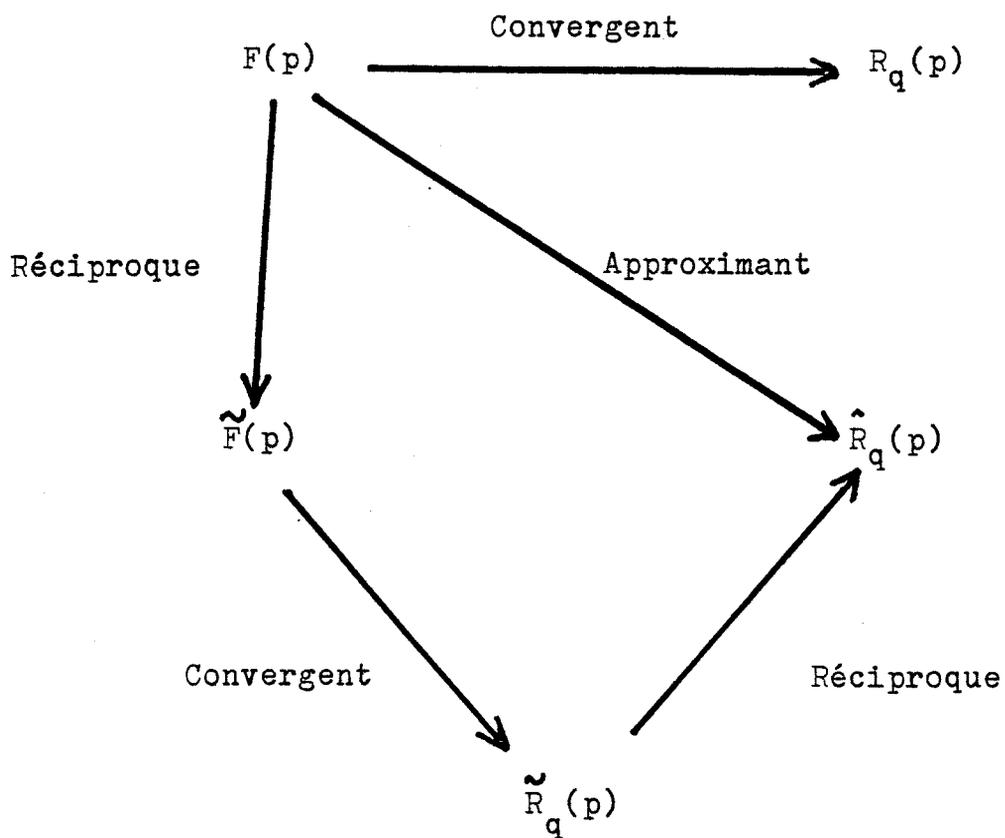


FIGURE 2.3.3

Convergent et Approximant de Routh



alors on définit la matrice de changement de base T comme étant celle qui fait passer le triplet original (A,B,C) à la forme canonique de Schwarz telle qu'elle est définie par les équations (7) . Il en découle la définition des matrices Q et Q<sup>+</sup> associées ainsi que R et R<sup>+</sup> .

Le q<sup>ème</sup> convergent de Routh s'écrit alors dans l'espace d'état :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= Q^+ A Q \hat{x}_1 + Q^+ B u \\ \hat{y} &= C Q \hat{x}_1\end{aligned}$$

L'erreur faite par cette méthode est donc :

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= Q^+ A Q E_1 + Q^+ A R E_2 \\ \dot{E}_2 &= R^+ A Q E_1 + R^+ A R E_2 + R^+ A Q \hat{x}_1 + R^+ B u\end{aligned}$$

Avec :  $R^+ B = 0$

$$Q^+ A R = (0 \dots 0 -b'_{q+1})^t \cdot (1 \ 0 \dots 0)$$

$$R^+ A Q = (1 \ 0 \dots 0)^t \cdot (0 \dots 0 \ 1)$$

#### 2.3.4 Conclusion

Il a été montré que la méthode de réduction de l'ordre des systèmes connue sous le nom de méthode de Routh dans le domaine fréquentiel peut être formulée dans l'espace d'état . Cette méthode appartient donc à la classe S<sub>q</sub> de méthodes étudiées ici et la mise en équations d'état correspondante est la forme canonique de Schwarz, si l'on considère l'approximation aux hautes fréquences R<sub>q</sub>(p) ou la forme de Schwarz du réciproque  $\tilde{F}(p)$  si l'on considère l'approximation aux basses fréquences R<sub>q</sub>(p) .

Afin de ne pas alourdir l'écriture, l'erreur correspondant à l'approximation aux basses fréquences n'a pas été explicitée .

## 2.4 Les Formes de Cauer

### 2.4.1 Introduction

Ce terme désigne toute formulation des équations d'état qui dérive du développement de la fonction de transfert  $F(p)$  en fraction continue . Il existe trois formes de Cauer pour le développement en fraction continue de  $F(p)$  utilisées en Automatique . On présentera tout d'abord le développement dit suivant la deuxième forme de Cauer . La méthode de réduction de l'ordre associée est due à Chen (voir référence 3) . On présentera ensuite la première forme de Cauer, directement reliée à la seconde, puis la troisième qui peut être considérée comme une association des première et deuxième formes . Les méthodes de réduction de l'ordre associées sont dues à Shieh et Gaudiano (voir référence 6) .

Toutes ces méthodes présentent l'inconvénient majeur d'une instabilité possible du modèle d'ordre réduit, même si le système de départ est stable . Les fonctions de transfert d'ordre réduit sont des approximations de Padé de  $F(p)$  au voisinage soit de  $p$  nul (deuxième forme de Cauer) soit de  $p$  infini (première forme de Cauer) soit enfin au voisinage de ces deux points (troisième forme de Cauer) .

Il apparait qu'il n'est pas toujours possible de développer  $F(p)$  en fraction continue suivant l'une ou l'autre de ces formes ( voir Wall, référence 7) .

### 2.4.2 La deuxième forme de Cauer

#### 2.4.2.1 Introduction

Chen a été le premier à utiliser les formes de Cauer du développement de  $F(p)$  en fraction continue pour la réduction de l'ordre des systèmes continus linéaires dans le domaine fréquentiel . La fonction de transfert d'ordre réduit obtenue par cette méthode est une approximation de Padé de  $F(p)$  au voisina-

ge de  $p$  nul, c'est à dire que le modèle d'ordre réduit approxi-  
mera le comportement du système original aux basses fréquences .

Il apparait cependant que le développement de  $F(p)$   
n'est pas toujours possible et que le modèle d'ordre réduit  
peut être instable même si le système original est stable .

#### 2.4.2.2 Equation d'état et schéma-bloc associé

On suppose que la fonction de transfert  $F(p)$  du  
système original s'écrit sous la forme donnée par l'équation (1),  
et que :

$$b_n \neq 0$$

Le système original ne peut donc pas avoir de zéro en  $p$   
égal à zéro .

On définit alors les coefficients  $h_i$  à partir de l'algorith-  
me suivant :

$$a_{j,1} = a_{j-2,1+1} - h_{j-2} \cdot a_{j-1,1+1}$$

$$h_i = (a_{i,1}) / (a_{i+1,1})$$

Pour :  $i = 1, 2, \dots, 2n$

$j = 3, 4, \dots, (2n+1)$

$l = 1, 2, \dots, n$

Et les valeurs des coefficients  $a_{1,1}$  et  $a_{2,1}$  sont :

$$a_{1,1} = a_{n-1+1}$$

$$a_{2,1} = b_{n-1+1}$$

Et :  $a_{1,n+1} = a_0$

Où les constantes  $a_1$  et  $b_1$  sont les coefficients du dénominateur et du numérateur respectivement de  $F(p)$  conformément à l'équation (1) .

Ayant défini les coefficients  $h_i$ , on peut écrire  $F(p)$  sous la forme d'une fraction continue  $F_2(p)$  dite deuxième forme de Caer (voir Wall, référence 7, et Weinberg, référence 8) de la façon suivante :

$$F(p) = F_2(p) = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{\frac{h_2}{p} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{h_{2n-1} + \frac{1}{\frac{h_{2n}}{p}}}}} \quad (14)$$

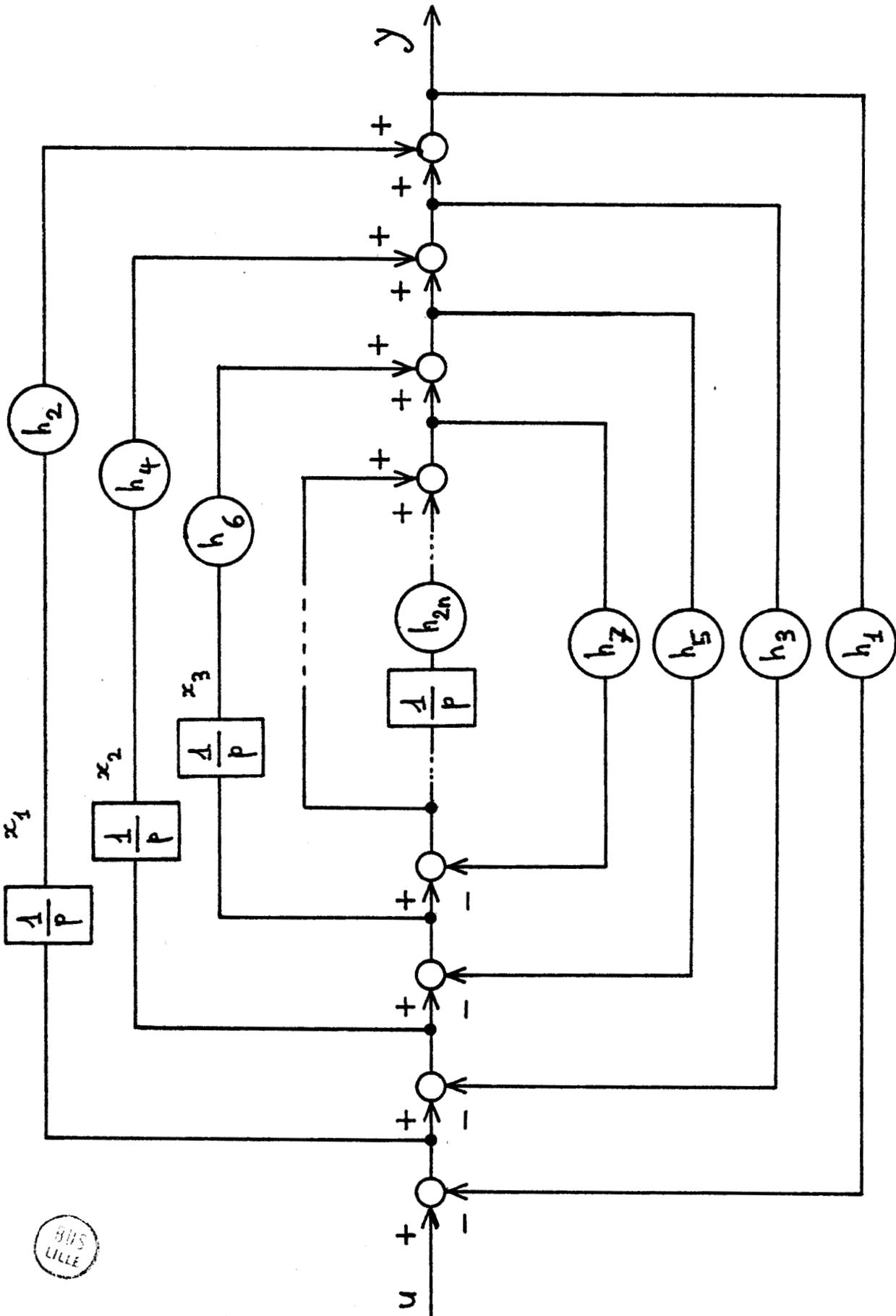
L'interprétation des coefficients  $h_i$  en terme de tableau de Routh est donné dans l'Annexe 2 .

La figure 2.4.1 donne une représentation du schéma-bloc associé à l'équation (14) . Si l'on choisit la  $i^{\text{ème}}$  composante  $x_i$  du vecteur état comme étant la sortie du  $i^{\text{ème}}$  terme en  $(1/p)$ , on aboutit aux équations d'état suivantes (voir Chen) :

$$\dot{x} = - \begin{bmatrix} h_1 h_2 & h_1 h_4 & h_1 h_6 & \dots & h_1 h_{2n} \\ \vdots & (h_1 + h_3) h_4 & (h_1 + h_3) h_6 & \dots & (h_1 + h_3) h_{2n} \\ \vdots & \vdots & (h_1 + h_3 + h_5) h_6 & \dots & (h_1 + h_3 + h_5) h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & (h_1 + \dots + h_{2n-1}) h_{2n} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (15)$$

$$y = (h_2 \ h_4 \ \dots \ h_{2n}) x$$

Figure 2.4.1 Deuxième Forme de Cauer



BUS  
LILLE

### 2.4.2.3 Méthode de réduction de l'ordre associée

Un modèle d'ordre réduit  $q$  de  $F(p)$  est obtenu à partir du développement donné par l'équation (14) en posant :

$$h_i = 0 \quad ; \quad i = (2q+1), \dots, 2n$$

Ce modèle est un approximant de Padé de  $F(p)$  autour de  $p=0$ , l'approximation est donc aux basses fréquences .

De par la manière dont les coefficients  $h_i$  sont calculés, à partir d'un tableau de Routh, le modèle d'ordre  $q$  ainsi obtenu ne dépendra de tous les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  de la fonction de transfert originale que si l'on a :

$$q \geq (n+1)/2$$

ceci d'après le résultat de l'annexe 1, un tel modèle ne dépend en effet que des coefficients  $h_1, h_2, \dots, h_{2q}$  . Si l'ordre réduit  $q$  est inférieur à  $(n+1)/2$ , alors le modèle obtenu sera indépendant des termes en puissance de  $p$  allant de  $2q$  à  $n$  du numérateur et du dénominateur de  $F(p)$  .

Il est clair qu'une mise en équation d'état du modèle d'ordre réduit  $q$  sera obtenue en posant dans les équations (15) :

$$h_i = 0 \quad ; \quad i = (2q+1), \dots, 2n$$

ce qui revient à ne conserver que les  $q$  premières composantes du vecteur état .

Cette méthode de réduction de l'ordre fait donc partie de la classe  $S_q$  et la matrice de changement de base  $T$  définissant les matrices  $Q$  et  $Q^+$  est celle faisant passer le triplet original  $(A, B, C)$  à celui figurant aux équations (15) .

Les équations d'état du processus d'erreur sont assez compliquées, la matrice du régime libre des équations (15) n'ayant aucun élément nul a priori, aucune simplification n'intervient ici .

2.4.3 La première forme de Cauer

Le développement de  $F(p)$  en fraction continue sous la première forme de Cauer est directement relié au développement vu au paragraphe précédent de la façon suivante :

Soit une fraction rationnelle en  $p$  notée  $F(p)$ , on définit  $F_1(p)$  son développement suivant la première forme de Cauer et  $F_2(p)$  celui selon la deuxième forme de Cauer telle qu'elle apparait dans l'équation (14) . Si l'on désigne par  $\tilde{F}(p)$  le réciproque de  $F(p)$ , alors  $F_1(p)$  n'est autre que le réciproque du développement de  $\tilde{F}(p)$  suivant la deuxième forme de Cauer . Si l'on note  $\tilde{F}_2(p)$  le développement de  $\tilde{F}(p)$  suivant la deuxième forme de Cauer on a les relations :

$$\begin{aligned}\tilde{F}(p) &= (1/p) F(1/p) \\ F_1(p) &= (1/p) \tilde{F}_2(1/p)\end{aligned}$$

De même, si l'on désigne par  $\tilde{F}_1(p)$  le développement suivant la première forme de Cauer de  $\tilde{F}(p)$ , on a la relation :

$$F_2(p) = (1/p) \tilde{F}_1(1/p)$$

2.4.3.1 Equations d'état et schéma-bloc associé

Pour obtenir le développement de  $F(p)$  en fraction continue suivant la première forme de Cauer, on définit tout d'abord les coefficients  $k_1$  à partir de l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned}b_{j,1} &= b_{j-2,1+1} - k_{j-2} \cdot b_{j-1,1+1} \\ k_i &= (b_{i,1}) / (b_{i+1,1})\end{aligned}$$

Pour :  $i = 1, 2, \dots, 2n$   
 $j = 3, 4, \dots, (2n+1)$   
 $l = 1, 2, \dots, n$

Et les valeurs des coefficients  $b_{1,1}$  et  $b_{2,1}$  sont :

$$b_{1,1} = a_{1-1}$$

$$b_{2,1} = b_1$$

Et :  $b_{1,n+1} = a_n$

Où les constantes  $a_1$  et  $b_1$  sont les coefficients du dénominateur et du numérateur respectivement de  $F(p)$  conformément à l'équation (1). On observe l'analogie entre la définition des coefficients  $k_i$  et celle des coefficients  $h_i$  utilisés pour le développement suivant la deuxième forme de Caer vue au paragraphe précédent .

Il faut :  $b_1 \neq 0$

Ayant défini les coefficients  $k_i$ , on peut écrire  $F(p)$  sous la forme d'une fraction continue  $F_1(p)$  dite première forme de Caer (voir Wall et Weinberg) de la façon suivante :

$$F(p) = F_1(p) = \frac{1}{k_1 p + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{k_{2n-1} p + \frac{1}{k_{2n}}}}} \quad (16)$$

L'interprétation des coefficients  $k_i$  en terme de tableau de Routh est donnée dans l'annexe 2 .

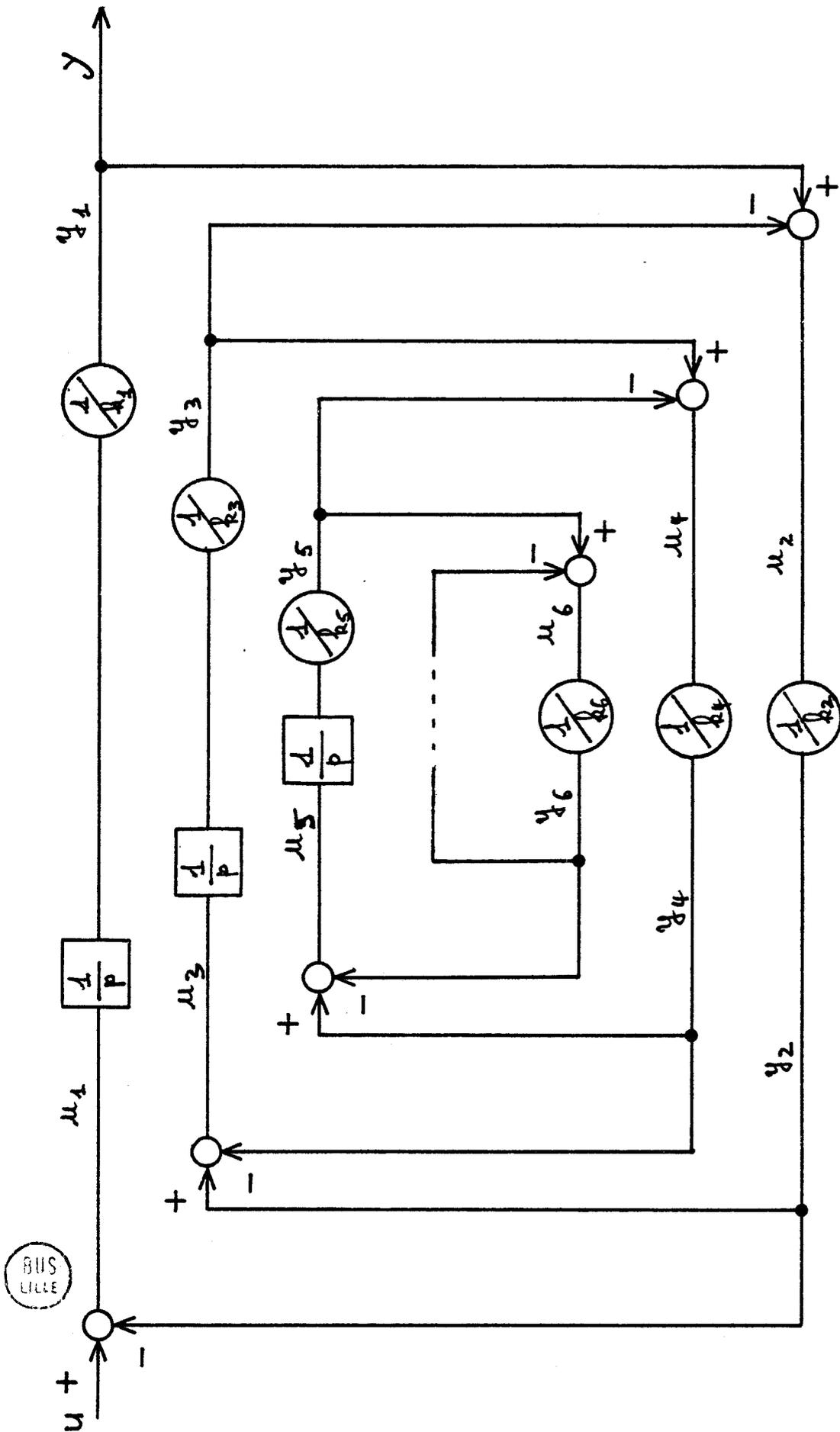
La figure 2.4.2 donne une représentation du schéma-bloc associé à l'équation (16) . Cette figure se justifie de la façon suivante : si l'on pose :

$$y_i/u_i = 1/D_i(p)$$

avec :  $D_{2m}(p) = k_{2m}$  ;  $D_{2m+1}(p) = k_{2m+1} p$

alors  $F_1(p)$  peut s'écrire sous la forme :

FIGURE 2.4.2 Première Forme de Cauet



$$F_1(p) = \frac{1}{\frac{u_1}{y_1} + \frac{1}{\frac{u_2}{y_2} + \frac{1}{\dots}}}$$

Soit encore sous la forme de la boucle fermée suivante :

$$F_1(p) = \frac{\frac{y_1}{u_1}}{1 + \frac{y_1}{u_1} \left[ \begin{array}{c} \frac{y_2}{u_2} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right]} \quad (16)a$$

Si l'on choisit la 1<sup>ème</sup> composante  $x_1$  du vecteur état comme étant la sortie du gain  $(1/k_{2l-1})$  ce qui revient à poser :

$$x_l = y_{2l-1} \quad ; \quad l = 1, \dots, n$$

on aboutit aux équations d'état suivantes :

$$\dot{x}_1 = (1/k_1) \cdot \left( -(1/k_2)x_1 + (1/k_2)x_2 + u \right)$$

$$\dot{x}_l = (1/k_{2l-1}) \cdot \left[ (1/k_{2l-2})x_{l-1} - \left( (1/k_{2l-2}) + (1/k_{2l}) \right) x_l + (1/k_{2l})x_{l+1} \right]$$

$$\dot{x}_n = (1/k_{2n-1}) \cdot \left[ (1/k_{2n-2})x_{n-1} - \left( (1/k_{2n-2}) + (1/k_{2n}) \right) x_n \right]$$

Ce qui devient, sous la forme matricielle :

$$\dot{\overset{\circ}{x}} = \begin{bmatrix} -(1/k_1 k_2) & (1/k_1 k_2) & & & 0 & \circ \\ (1/k_3 k_2) & -(1/k_3) \cdot \left( (1/k_2) + (1/k_4) \right) & (1/k_3 k_4) & 0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \circ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} (1/k_1) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} u$$

$$y = (1 \ 0 \ \dots \ 0) x \quad (17)$$

On remarque que la matrice du régime libre est d'une forme beaucoup plus simple que celle des équations d'état (15) associées à la deuxième forme de Caueur puisqu'elle est tridiagonale .

#### 2.4.3.2 Méthode de réduction de l'ordre associée

Un modèle d'ordre  $q$  de  $F(p)$  est obtenu par troncature du développement donné par l'équation (16), c'est à dire en posant :

$$k_i = \infty \quad ; \quad i = (2q+1), \dots, 2n \quad (18)$$

Le modèle ainsi obtenu est un approximant de Padé autour du point  $p$  infini, c'est à dire que l'approximation du comportement de  $F(p)$  sera valide vers les hautes fréquences .

De par la manière dont sont calculés les coefficients  $k_i$  en terme de tableau de Routh et d'après l'annexe 1, le modèle d'ordre réduit  $q$  ne dépendra de tous les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  du dénominateur et du numérateur de  $F(p)$  respectivement que si l'on a :

$$q \geq (n+1)/2$$

Un tel modèle ne dépend en effet que des coefficients  $k_1$  à  $k_{2q}$  . Si  $q$  est inférieur à  $(n+1)/2$ , alors le modèle sera indépendant des termes en puissance de  $p$  inférieure à  $n-2q$  du numérateur et du dénominateur de  $F(p)$  .

On remarque que  $F_1(p)$  est lié à  $F_2(p)$  par une relation de réciprocité et que donc la méthode de réduction présentée dans ce paragraphe est liée à celle présentée dans le paragraphe précédent par une relation du type de celle de la figure 1.2.1 . On peut donc appliquer les résultats du paragraphe 1.2.2.2 .

Il est clair qu'une formulation dans l'espace d'état du modèle d'ordre réduit  $q$  sera obtenue en posant dans les équations (17) :

$$k_i = \infty \quad ; \quad i = (2q+1), \dots, 2n$$

Ce qui revient à ne conserver que les  $q$  premières composantes d'état  $x_1$  .

Cette méthode fait donc partie de la classe  $S_q$  de méthodes de réduction de l'ordre des systèmes et les matrices  $Q$  et  $Q^+$  sont définies par la matrice de changement de base  $T$  faisant passer le triplet original  $(A,B,C)$  à celui figurant aux équations (17) .

Il faut remarquer qu'ici les équations d'état du processus d'erreur sont plus simples que celles du paragraphe précédent . On a en effet, en conservant les notations du chapitre I :

$$\begin{aligned} R^+B &= 0 \\ R^+AQ &= \left( (1/k_{2q+1}k_{2q}) \ 0 \ \dots \ 0 \right)^t \cdot (0 \ \dots \ 0 \ 1) \\ Q^+AR &= \left( 0 \ \dots \ 0 \ (1/k_{2q-1}k_{2q}) \right)^t \cdot (1 \ 0 \ \dots \ 0) \end{aligned} \quad (19)$$

#### 2.4.4 La troisième forme de Cauer

Le développement de  $F(p)$  sous la forme d'une fraction continue  $F_3(p)$  dite troisième forme de Cauer est intermédiaire entre les première et deuxième formes ( voir référence 10) .

##### 2.4.4.1 Equations d'état et schéma-bloc associé

Pour obtenir le développement de  $F(p)$  en fraction continue sous la première forme de Cauer on définit tout d'abord les coefficients  $h_j^!$  et  $k_j^!$  à partir de l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} a_{j,1} &= a_{j-2,1+1} - h_{j-2}^! \cdot a_{j-1,1+1} - k_{j-2}^! \cdot a_{j-1,1} \\ h_1^! &= (a_{1,1}) / (a_{1+1,1}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$k_1^j = (a_{1,n+2-1}) \cdot (a_{1+1,n+1-1})^{-1}$$

Pour :  $j = 3, 4, \dots, (n+1)$

$l = 1, 2, \dots, n$

Et les valeurs des constantes  $a_{1,1}$  et  $a_{2,1}$  sont les mêmes qu'au paragraphe 2.4.2.2 concernant la deuxième forme de Cauer, c'est à dire :

$$a_{1,1} = a_{n-1+1} \quad ; \quad a_{2,1} = b_{n-1+1}$$

Et :  $a_{1,n+1} = a_0$

Où les constantes  $a_1$  et  $b_1$  sont les coefficients du dénominateur et du numérateur respectivement de  $F(p)$  .

Il faut :  $b_1 \neq 0$  ; et :  $b_n \neq 0$

Ayant défini les coefficients  $h_1^j$  et  $k_1^j$ , on peut écrire  $F(p)$  sous la forme d'une fraction continue dite "troisième forme de Cauer"(voir Shieh et Goldman)  $F_3(p)$  de la façon suivante :

$$F(p) = F_3(p) = \frac{1}{h_1^j + k_2^j p + \frac{1}{\frac{h_2^j + k_2^j}{p} + \frac{1}{\dots}}}} \quad (21)$$

Le dernier terme dépendant de la parité de l'ordre de  $F(p), n$  .

La figure 2.4.3 donne une représentation du schéma-bloc associé à l'équation (21) . Cette figure est justifiée d'une manière analogue à celle du paragraphe précédent concernant la première forme de Cauer . Il suffit de poser :

$$y_i/u_i = 1/D_i(p) \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

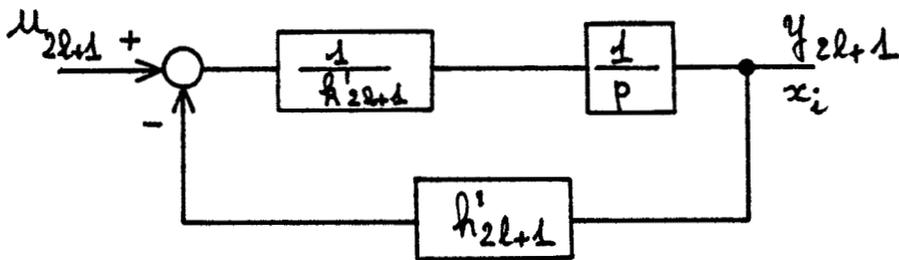
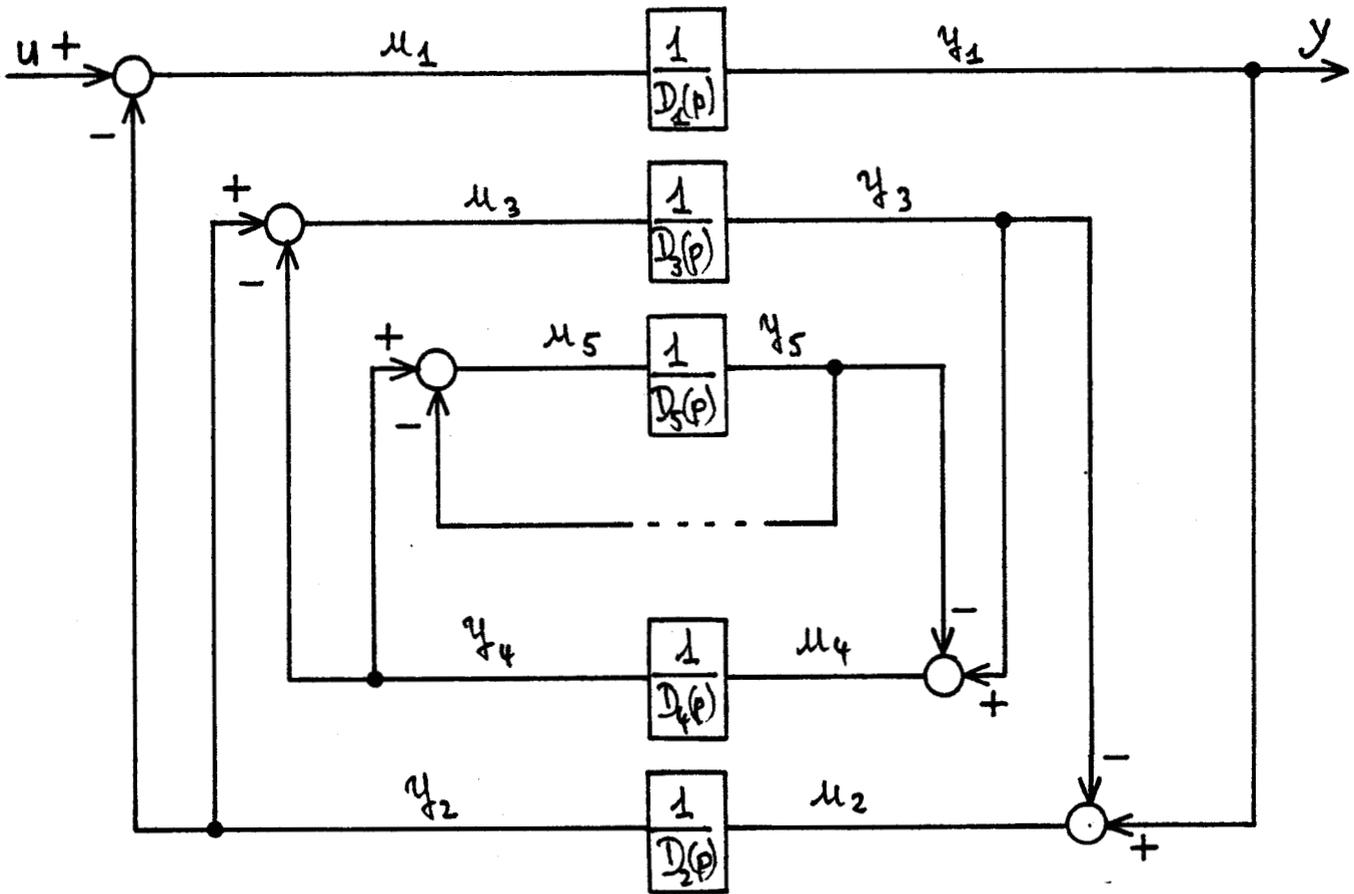
avec :  $D_{2l+1}(p) = h_{2l+1}^j + k_{2l+1}^j p$

$$D_{2l}(p) = (h_{2l}^j/p) + k_{2l}^j$$

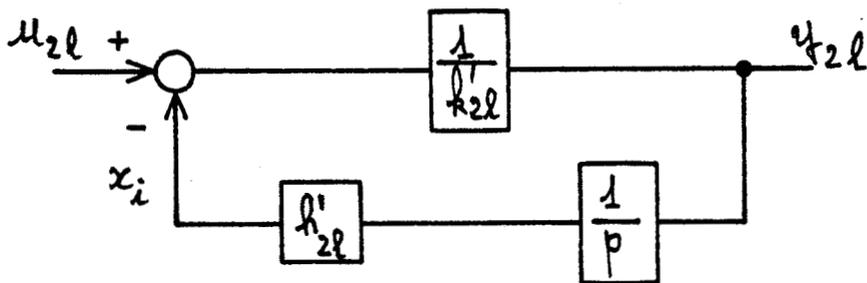
$F_3(p)$  s'écrit alors conformément à l'équation (16)a .

FIGURE 2.4.3

Troisième Forme de Cauer



i impair  
i = 2l+1



i pair  
i = 2l

FIGURE 2.4.4  $1/D_i(p)$



Les fonctions de transfert  $1/D_i(p)$  ont une structure de boucle fermée représentée à la figure 2.4.4 pour  $i$  impair et  $i$  pair .

Dans le cas où  $i$  est pair,  $1/D_i(p)$  n'est pas une fonction de transfert propre, c'est à dire que son numérateur est du même degré que son dénominateur. On va donc choisir comme  $i^{\text{ème}}$  composante d'état  $x_i$  soit  $y_i$ , pour  $i$  impair, soit  $(h_i^1/p)y_i$  pour  $i$  pair, conformément à la figure 2.4.4 .

Pour établir les équations d'état il faut remarquer :

$$u_i = y_{i-1} - y_{i+1} \quad ; \quad i = 1, \dots, n ; y_0 = u$$

$$y_i = (1/k_i^1) \cdot (u_i - x_i) ; i = 2, 4, \dots$$

Les équations d'état s'écriront donc :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= (h_i^1/k_i^1) \cdot (x_{i-1} - x_i - x_{i+1}) \quad ; \quad \text{Pour } i \text{ pair} \\ \dot{x}_i &= (1/k_i^1) \cdot \left[ (1/k_{i-1}^1)x_{i-2} - (1/k_{i-1}^1)x_{i-1} \right. \\ &\quad \left. - \left[ (1/k_{i-1}^1) + h_i^1 + (1/k_{i+1}^1) \right] x_i + (1/k_{i+1}^1)x_{i+1} + (1/k_{i+1}^1)x_{i+2} \right] \\ &\quad \text{Pour } i \text{ impair} \end{aligned} \quad (22)$$

La première équation d'état , pour  $i=1$ , sera :

$$\dot{x}_1 = (1/k_1^1) \cdot \left[ - \left( (1/k_2^1) + h_1^1 \right) x_1 + (1/k_2^1)x_2 + (1/k_2^1)x_3 \right] + (1/k_1^1) u$$

Si l'on note ces équations d'état sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x \end{aligned}$$

On aura :

$$\begin{aligned} B &= \left[ (1/k_1^1) \ 0 \ \dots \ 0 \right] \\ C &= ( 1 \ 0 \ \dots \ 0 ) \end{aligned} \quad (23)$$

Vu sa structure assez complexe, la matrice du régime libre A fait l'objet de la figure 2.4.5 . Il est à remarquer que cette matrice est quadri-diagonale .

2.4.4.2 Méthode de réduction de l'ordre associée

Un modèle d'ordre réduit q de F(p) s'obtient en ne conservant que les q premiers coefficients  $h_i^!$  et  $k_i^!$  dans le développement donné par l'équation (21), soit 2q coefficients au total . Cela revient à poser :

$$h_i^! = 0 \quad ; \quad k_i^! = \infty \quad ; \quad i = (q+1), \dots, n$$

De par la manière dont sont calculés les constantes  $h_i^!$  et  $k_i^!$ , le modèle d'ordre réduit q ne dépendra de tous les coefficients du numérateur et du dénominateur de F(p) que si l'on a la relation :

$$q \geq (n+1)/4$$

Si q est inférieur à (n+1)/4; alors le modèle sera indépendant des termes en puissance de p comprise entre 2q et n-2q du numérateur et du dénominateur de F(p) .

On remarque que  $F_3(p)$  constitue une sorte de compromis entre  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  . Le modèle ainsi obtenu est un approximant de Padé de F(p) au voisinage des points  $p=0$  et  $p=\infty$  .

Il est clair que si l'ordre réduit q est pair, alors une formulation dans l'espace d'état est obtenue en ne conservant que les q premières composantes  $x_i$  dans l'équation (22) . La méthode de réduction appartient donc dans ce cas à la classe  $S_q$  . Les matrices Q et  $Q^+$  associées sont définies par la matrice T de changement de base qui fait passer le triplet original à celui défini par les équations (23) . Les équations d'état



du processus d'erreur se simplifient . On a, en conservant les notations du chapitre I :

$$\begin{aligned} R^+B &= 0 \\ R^+AQ &= (1 \ 0 \ \dots \ 0)^t \cdot \left[ 0 \ \dots \ 0 \ (1/k'_{2q} k'_{2q+1}) \ -(1/k'_{2q} k'_{2q+1}) \right] \\ Q^+AR &= \left( 0 \ \dots \ 0 \ (1/k'_{2q-1} k'_{2q}) \ -(h'_{2q}/k'_{2q}) \right)^t \cdot (1 \ 0 \ \dots \ 0) \end{aligned}$$

Si l'ordre réduit  $q$  est impair alors cette propriété n'est plus vraie et la méthode n'appartient plus à la classe  $S_q$  .

Ceci est du au terme  $k'_{i+1}$  dans l'équation (22) . Pour obtenir les équations d'état du modèle d'ordre réduit impair il ne suffit pas de poser :

$$x_i = 0 \ ; \ i = (q+1), \dots, n$$

mais encore :

$$k'_{i+1} = \infty$$

#### 2.4.5 Conclusion sur les formes de Cauer

Il a été montré que les méthodes de réduction de l'ordre des systèmes utilisant le développement de la fonction de transfert  $F(p)$  du système original sous les différentes formes de Cauer de fraction continue appartiennent à la classe  $S_q$  étudiée au chapitre I, sauf dans le cas particulier de la troisième forme avec un ordre réduit impair .

Toutes ces méthodes avaient été présentées à l'origine comme opérant dans le domaine fréquentiel . Il a été montré ici comment, en établissant les équations d'état correspondantes à chaque forme de Cauer, on peut donner une interprétation de chacune d'entre-elles dans l'espace d'état .

## 2.5 Conclusion

Il a été montré dans ce chapitre comment différentes formes d'équations d'état des systèmes linéaires continus monovariabiles pouvaient être associées à des méthodes de réduction de l'ordre . Chacune de ces méthodes appartient donc à la classe  $S_q$  étudiée au chapitre I .

On a ainsi rappelé la forme canonique de Jordan associée à la méthode de réduction modale, la forme en  $(\alpha - \beta)$  associée à la méthode de Routh, et la forme canonique associée au développement de la fonction de transfert originale en fraction continue sous la deuxième forme de Cauer .

On a également montré que la méthode de Routh pouvait être interprétée dans l'espace d'état à partir de la forme canonique de Schwarz . On a enfin établi les formes canoniques des équations d'état correspondant au développement de la fonction de transfert originale en fraction continue sous les première et troisième formes de Cauer .

La liste des formes canoniques pour les équations d'état et des méthodes de réduction n'est pas limitative et l'on peut déterminer une forme d'équations d'état associée à une combinaison entre ces méthodes . On présente dans le chapitre suivant une méthode de réduction originale qui peut être considérée comme une combinaison entre la méthode des moments (non présentée ici) et la méthode modale (associée à la forme canonique de Jordan), (voir référence 11) .



Il est clair, à partir de cet exemple que l'un quelconque des coefficients  $c_{1,p}$  de la première colonne du tableau de Routh ne dépendra de tous les coefficients des deux premières lignes que si l'on a la relation :

$$p \geq m+2$$

(si  $n$  est pair et égal à  $2m$ )

$$p \geq m+2$$

(si  $n$  est impair et égal à  $2m+1$ )

ANNEXE 2

Quelques Théorèmes sur le Développement en Fraction Continue .

(Voir Wall, référence 7, et Gantmacher, référence 9) .

**THEOREME** : Si h et g sont deux polynômes formant une paire positive (voir Annexe 3) et si le degré de h est n et celui de g est (n-1), alors la fraction rationnelle g(u)/h(u) est développable sous la forme de la fraction continue :

$$\frac{g(u)}{h(u)} = \frac{1}{d_0 u + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{d_1 u + \dots}}} \quad (1)$$

Où les coefficients  $c_i$  et  $d_i$  sont tous strictement positifs .

La réciproque est vraie : si l'équation (1) est vraie avec tous les  $c_i$  et  $d_i$  strictement positifs, alors h,g forment une paire positive .

Il est clair que si h(u) et g(u) forment une paire positive, alors il en sera de même pour h(v) et g(v), où :  $v = 1/u$

On aura alors :

$$\frac{g(u)}{h(u)} = C(u) \implies \frac{g(v)}{h(v)} = C(v) \implies \frac{v g(v)}{h(v)} = v C(v)$$

$C(u)$  est la première forme de Caer,  $vC(v)$  est la deuxième . Il apparait alors que si la première forme de Caer (respectivement la deuxième) est telle que les q premiers coefficients sont tous positifs strictement ( $c_i$  et  $d_i > 0 ; i=0, \dots, q-1$ ) alors une troncature quelconque de (1) d'ordre inférieur ou égal à q donnera une fraction rationnelle  $H_q$  telle que, si  $N_q$  (respectivement  $D_q$ ) est son numérateur (respectivement son dénominateur), alors  $D_q, N_q$  formeront un paire positive . Ceci signifie que les modèles d'ordre réduit inférieur ou égal à q de H seront stables .

**THEOREME** : Le rapport de deux polynômes g(u)/h(u), où :

$$g(u) = a_{1,1} u^{n-1} + \dots + a_{1,n-1} u + a_{1,n}$$

et :  $h(u) = a_{0,0}u^n + \dots + a_{0,n-1}u + a_{0,n}$

ce rapport a un développement du type donné par l'équation (1), c'est à dire la première forme de Cauver, si et seulement si :

$$R_p \neq 0 \quad ; \quad p = 0, \dots, 2n$$

Où  $R_p$  est le mineur principal d'ordre  $p$  du tableau :

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots \\ a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots \\ 0 & a_{0,0} & a_{0,1} & \dots \\ 0 & 0 & a_{1,1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array}$$

C'est à dire le tableau d'Hurwitz du polynôme  $P(u)$ , où :

$$P(u) = h(u^2) + g(u^2).u$$

Les coefficients  $c_i$  et  $d_i$  peuvent ainsi être interprétés comme les coefficients de la première colonne du tableau de Routh relatif à  $P(u)$ .

On remarque que ce dernier théorème dit seulement que le développement (1) existe si et seulement si les coefficients  $c_i$  et  $d_i$  peuvent être calculés. Ce calcul ne sera donc pas possible si le polynôme  $P(u)$  a une paire de racines du type  $\hat{u}$  et  $-\hat{u}$  par exemple, il y aurait alors un coefficient nul dans la première colonne du tableau de Routh de  $P$ .

ANNEXE 3

Une Paire Positive .

(Voir Gantmacher, référence 9)

Deux polynômes  $h(u)$  et  $g(u)$  de degré  $n$  (ou  $h$  est de degré  $n$  et  $g$  de degré  $n-1$ ) forment une paire positive si les racines  $u_1, \dots, u_n$  et  $u'_1, \dots, u'_n$  (ou  $u'_1, \dots, u'_{n-1}$  si  $g$  est de degré  $n-1$ ) sont toutes distinctes, réelles et négatives et sont telles que l'on ait :

$$u'_1 < u_1 < u'_2 < \dots < u'_n < u_n < 0$$

$$(\text{ou : } u_1 < u'_1 < u_2 < \dots < u'_{n-1} < u_n < 0)$$

et les coefficients de plus haut degré en  $u$  de  $g$  et  $h$  sont de même signe .

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $h(u)$  et  $g(u)$  forment une paire positive, où  $h$  est de degré  $n$  et  $g$  de degré  $n-1$  est que l'on ait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} du = n = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)} du$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $h$  et  $g$  forment une paire positive est que le polynôme  $h(u^2) + u.g(u^2)$  ait toutes ses racines dans le demi-plan complexe gauche .

CHAPITRE II

REFERENCES

1. CHIDAMBARA M. et DAVISON E. : "On a method for simplifying linear dynamic systems".  
IEEE Trans. AC-12(2), pp. 119-121 (1967).  
"Further remarks on simplifying linear dynamic systems".  
IEEE Trans. AC-12(4), pp. 213-214 (1967).  
"Further comments on a method for simplifying linear dynamic systems".  
IEEE Trans. AC-12(12), pp. 799-800 (1967) .
2. HUTTON M. et FRIEDLAND B. : "Routh approximations for reducing order of linear, time-invariant systems".  
IEEE Trans. AC-20(3), pp.329-337 (1975) .
3. CHEN C. : "Model reduction of multivariable control systems by means of matrix continued fractions".  
Int. J. Control, 20(2), pp.225-238 (1974) .
4. PARKS P. : "A new proof of the Routh-Hurwitz stability criterion using the second method of Liapunov".  
Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.58(4), pp.694-702 (1962) .
5. KALMAN R. et BERTRAM J. : "Control system analysis and design via the second method of Liapunov".  
J. E. Trans. A.S.M.E. Ser.D, 82 pp.371-392 (1960) .
6. SHIEH L. et GAUDIANO F. : "Matrix continued fraction expansion and inversion by the generalised matrix Routh algorithm".  
Int. J. Control, 20(5), pp.727-737 (1974) .
7. WALL H. : "Analytic theory of continued fractions".  
Van Nostrand editor, chap.9, pp.165-171 (1948) .
8. WEINBERG L. : "Network analysis and syntheses".  
New York : McGraw-Hill, p.193 (1962) .
9. GANTMACHER F. : "The theory of matrices". Vol.2, pp.216-232  
New-York : Chelsea Publ. Co. (1959) .

10.SHIEH L. et GOLDMAN M. : IEEE Trans. Circuit Syst., CAS-21,  
p.341 (1974) .

11.DECOSTER M. et van CAUWENBERGHE A. : "A comparative study of different  
reduction methods".

Journal A, 17 No 2, pp.68-74 (Part 1) (1976) .

Journal A, 17 No 3, pp.125-134 (Part 2) (1976) .

CHAPITRE III

### CHAPITRE III

La forme canonique de Meizel  
et la méthode de réduction de l'ordre associée .

#### 3.1 Introduction :

Le but de ce chapitre est de présenter une méthode originale pour la réduction de l'ordre des systèmes monovariabiles stationnaires continus . Cette méthode appartient à la classe  $S_q$  définie au chapitre I et est associée à la forme canonique pour les équations d'état introduite par Meizel (voir référence 1) .

Cette méthode de réduction suppose que le système original est connu soit par sa fonction de transfert, soit par ses équations d'état sous la forme canonique d'observabilité .

Contrairement à la méthode de Routh ou à celles de Cauer, la masse de calculs requise par cette méthode augmente quand l'ordre du modèle diminue . Ces calculs sont cependant très simples .

Ce chapitre commence par un bref rappel sur le changement de base introduit par Meizel et la forme canonique pour les équations d'état associée . On présente ensuite la méthode de réduction de l'ordre associée . Cette méthode requiert la connaissance des pôles du système original . On montre alors la propriété principale de cette méthode qui est la conservation des paramètres de Markov du système original . Un exemple numérique illustre la présentation de la méthode .

On présentera enfin une extension possible de cette forme canonique et de la méthode de réduction associée à certains systèmes multivariabiles particuliers .

### 3.2 Forme canonique et schéma-bloc associé

On rappelle ici brièvement la définition du changement de base introduit par Meizel .

On suppose que le système original est connu par sa fonction de transfert  $F(p)$  et que celle-ci s'écrit conformément à l'équation (1) du chapitre précédent avec :

$$a_0 = 1$$

On note  $N(p)$  (respectivement  $D(p)$  ) le numérateur (respectivement le dénominateur) de  $F(p)$  :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

A partir de  $F(p)$  il est possible d'écrire les équations d'état du système sous la forme canonique d'observabilité :

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= A x' + B u \\ y &= C x' \end{aligned} \quad (1)$$

Avec :  $A = a \cdot v^t + H$

$$a^t = -(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

$$H = (h_{i,j})_{i,j} \quad ; \quad i,j = 1, \dots, n$$

$$h_{i,j} = \delta_{i+1,j}$$

$$B^t = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$$

$$C = v^t = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

Soit  $P$  le vecteur dont les composantes sont les pôles  $p_i$  de  $F(p)$  :

$$P = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n) \quad (2)$$

On définit alors les coefficients  $z_{i,j}$  comme étant le polynôme symétrique d'ordre  $i$  de  $(p_1 \ p_2 \ \dots \ p_j)$ , c'est à dire, par exemple, le coefficient  $z_{2,j}$  s'écrira :

$$z_{2,j} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^j \sum_{m=1}^j p_k p_m$$

Les coefficients  $a_i$  du dénominateur de  $F(p)$  peuvent alors s'écrire, à partir de la définition des  $z_{i,j}$  :

$$a_i = (-1)^i z_{i,n} \quad (3)$$

On définit alors la matrice  $T_p$  carrée inversible suivante :

$$T_p = (t_{i,j})_{i,j} \quad (4)$$

Où :  $t_{i,i} = 1$  ;  $t_{i,j} = 0$   $i < j$

$$t_{i,j} = (-1)^{i-j} z_{i-j, n-j} ; i > j$$

Il a été montré par Meizel que le changement de base défini par la matrice  $T_p$  :  $x' = T_p x$  ; transforme le triplet original  $(A,B,C)$  tel qu'il est défini par les équations (1) en  $(A_p, B_p, C_p)$ , où :

$$C_p = C$$

$$B_p = T_p^{-1} \cdot B = (b_1'(P) \quad b_2'(P) \quad \dots \quad b_n'(P))^t$$

$$A_p = T_p^{-1} A T_p = \begin{bmatrix} p_n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{n-1} & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

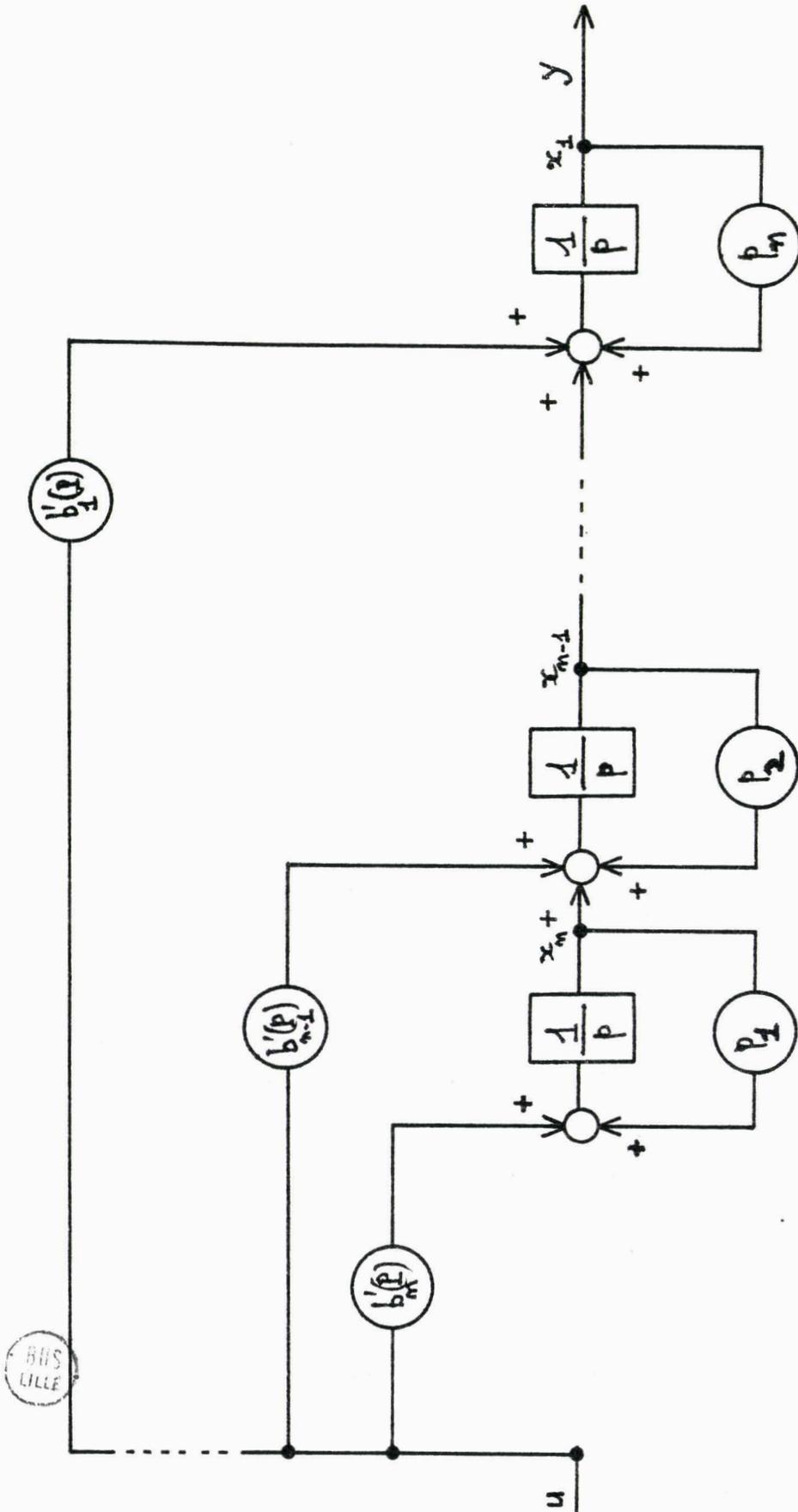
Les équations d'état en  $x$  s'écrivent donc :

$$\dot{x} = A_p x + B_p u$$

$$y = C_p x \quad (6)$$

La figure 3.1 donne une représentation du schéma-bloc associé aux équations (5) .

FIGURE 3.1 La Forme canonique de Meizel associée à  $T_p$ .



Il est à remarquer que les matrices  $T_p$  et  $A_p$  gardent la même structure, que les pôles  $p_i$  soient distincts ou non.

On définit maintenant la matrice  $T_{p'}$ , associée au vecteur  $P'$  dont les composantes sont notées  $p'_i$ , avec :

$$P' = (p'_1 \quad p'_2 \quad \dots \quad p'_n) \quad (7)$$

Où les coefficients  $p'_i$  sont des nombres complexes arbitraires. On définit alors les coefficients  $z'_{i,j}$  et la matrice  $T_{p'}$  d'une façon similaire aux  $z_{i,j}$  et à  $T_p$  mais à partir de  $P'$ . On définit également le vecteur  $a'$  dont les composantes sont :

$$\begin{aligned} a' &= (a'_1 \quad a'_2 \quad \dots \quad a'_n) \\ a'_i &= (-1)^i z'_{i,n} \end{aligned} \quad (8)$$

Soit le vecteur  $e$  :

$$e = a - a' \quad (9)$$

Ainsi la matrice  $A$  définie par les équations (1) peut s'écrire

$$A = a' \cdot v^t + H + e \cdot v^t \quad (10)$$

Alors le changement de base défini par la relation :

$$x' = T_{p'} x''$$

transforme le triplet original  $(A, B, C)$  tel qu'il est défini par les équations (1) en  $(A_{p'}, B_{p'}, C_{p'})$ , où :

$$C_{p'} = C$$

$$B_{p'} = (b'_1(P') \quad b'_2(P') \quad \dots \quad b'_n(P'))^t$$

$$A_{p'} = \begin{bmatrix} -e'_1(P') + p'_n & 1 & & & 0 \\ -e'_2(P') & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & p'_{n-1} & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ -e'_n(P') & & & & p'_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Où :

$$T_{p'}^{-1} \cdot e = \begin{bmatrix} -e_1^i(P') \\ -e_2^i(P') \\ \vdots \\ -e_n^i(P') \end{bmatrix} \quad (12)$$

Les équations d'état associées au vecteur  $x''$  seront donc :

$$\begin{aligned} \dot{x}'' &= A_{p'} x'' + B_{p'} u \\ y &= C_{p'} x'' \end{aligned} \quad (13)$$

La figure 3.2 donne une représentation du schéma-bloc associé aux équations (13) .

Il a été montré (voir par exemple la référence 2) que les coefficients  $b_n^i(P')$  et  $e_n^i(P')$  prenaient les valeurs particulières suivantes :

$$\begin{aligned} b_n^i(P') &= N(p_1^i) \\ e_n^i(P') &= D(p_1^i) \end{aligned} \quad (14)$$

C'est cette relation qui est à la base de la méthode de réduction de l'ordre associée à cette forme canonique pour les équations d'état qui fait l'objet du paragraphe suivant .

### 3.3 La méthode de réduction de l'ordre associée

#### 3.3.1 Principe de base de la méthode

La dernière ligne des équations d'état en  $x''$  (13)

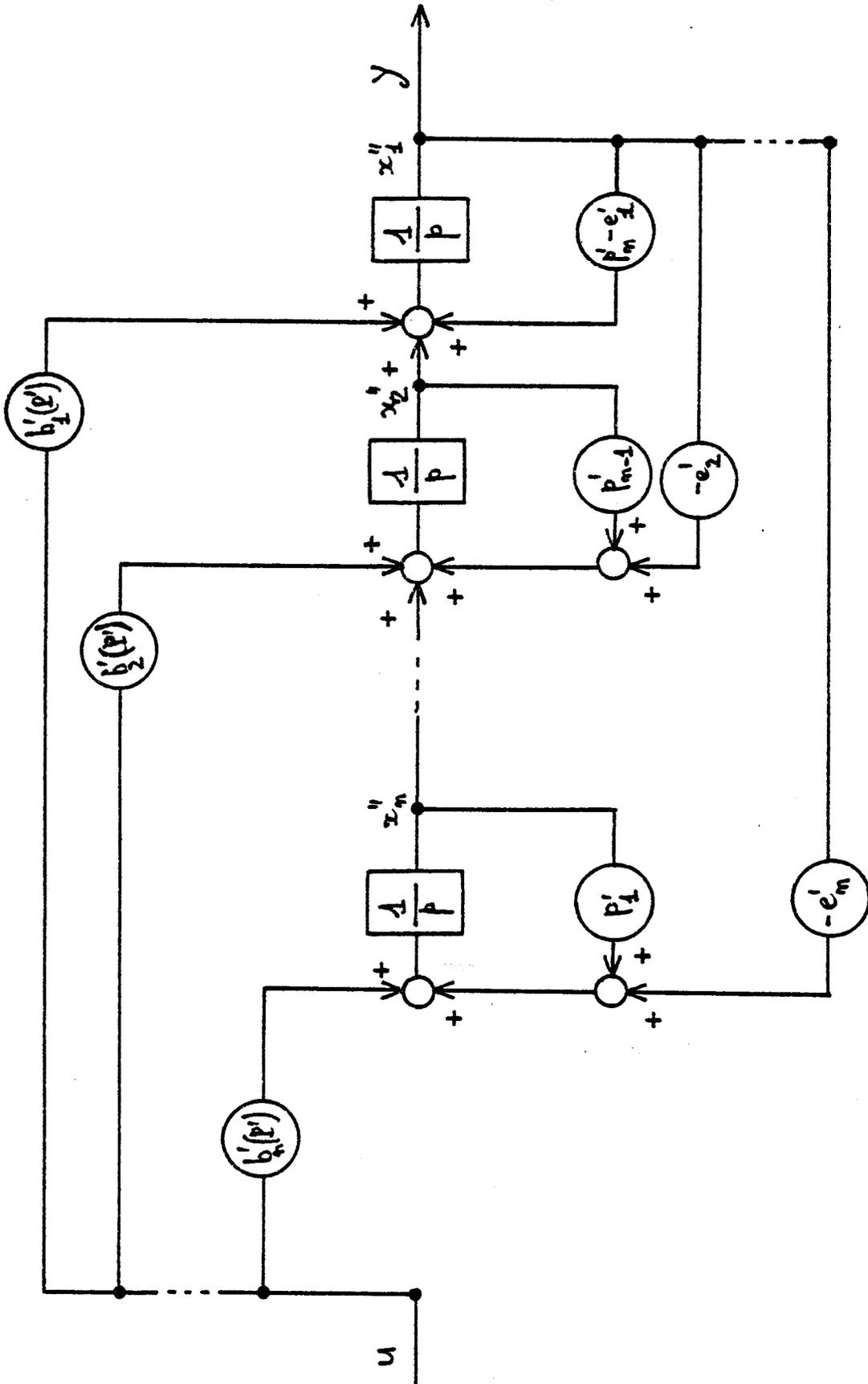
s'écrit :

$$\dot{x}_n'' = -D(p_1^i) x_1'' + p_1^i x_n'' + N(p_1^i) u \quad (15)$$

Ceci, compte tenu des équations (11), (12) et (14) .

Le principe de cette méthode est de réduire tout d'abord l'ordre de  $n$  à  $n-1$  en choisissant le nombre arbitraire  $p_1^i$  de manière à rendre l'équation (15) la plus proche possible d'un com-

FIGURE 3.2 La Forme canonique de Meizel associée à  $T_{p'}$ .



BUS  
FILE

portement en régime libre, c'est à dire de minimiser les termes qui ne dépendent pas de  $x_n''$ .

Trois possibilités s'offrent donc :

a)  $p_1'$  est choisi parmi les zéros de  $F(p)$  :

l'équation (15) s'écrit alors :

$$\overset{\circ}{x}_n'' = -D(p_1') x_1'' + p_1' x_n'' \quad (16)$$

Soit donc :

$$\overset{\circ}{x}_n'' - p_1' x_n'' = -D(p_1') x_1'' \quad (17)$$

On choisira donc  $p_1'$  tel que :

$$\begin{aligned} N(p_1') &= 0 \\ \left| D(p_1') \right| &\text{ minimum} \end{aligned}$$

b)  $p_1'$  est choisi parmi les pôles de  $F(p)$  :

l'équation (15) s'écrit alors :

$$\overset{\circ}{x}_n'' = p_1' x_n'' + N(p_1') u$$

Soit encore :

$$\overset{\circ}{x}_n'' - p_1' x_n'' = N(p_1') u$$

On choisira donc  $p_1'$  tel que :

$$\begin{aligned} D(p_1') &= 0 \\ \left| N(p_1') \right| &\text{ minimum} \end{aligned}$$

c) ni  $N(p_1')$  ni  $D(p_1')$  ne sont jugés négligeables devant  $p_1'$ , alors on écrit l'équation (15) sous la forme :

$$\overset{\circ}{x}_n'' - p_1' x_n'' = -D(p_1') x_1'' + N(p_1') u$$

On choisira alors  $p_1'$  tel que :

$$\left| N(p_1') \right| + \left| D(p_1') \right| \quad \text{Minimum}$$

On remarque que l'équation (15) ne correspond réellement à un régime libre que si l'on a simultanément :

$$N(p_i^!) = 0 \quad \text{et} \quad D(p_i^!) = 0$$

C'est à dire uniquement si  $p_i^!$  n'est ni commandable ni observable .

Si le système de départ n'est pas stationnaire et que l'on peut écrire sa fonction de transfert sous la forme  $F(p,t)$  :

$$F(p,t) = \frac{N(p,t)}{D(p,t)}$$

Alors la procédure est analogue au cas c), bien que généralement difficile à mettre en oeuvre : l'équation (15) s'écrira :

$$\ddot{x}_n^o = -D(p_i^!, t) x_i^! + \bar{p}_i^! x_n^! + N(p_i^!, t) u \quad (20)$$

On choisira donc  $p_i^!$  tel que :

$$\text{Max}_{t \in (t_0, t_1)} \left( |D(p_i^!, t)| + |N(p_i^!, t)| \right) \quad \text{Minimum en } p_i^!$$

Où  $(t_0, t_1)$  est l'intervalle d'étude du système,  $t_1$  peut donc être infini .

Le modèle d'ordre réduit  $n-1$  sera donné par ses équations d'état suivant la procédure développée au chapitre I . Si les équations d'état du système original sont sous la forme canonique d'observabilité, alors les matrices  $Q$  et  $Q^+$ , en conservant les notations du chapitre I, seront définies à partir de la matrice de changement de base  $T_{p_i^!}$  .

Il est montré dans l'annexe 1 que le choix des  $p_i^!$  restant n'a aucune influence sur le modèle d'ordre  $(n-1)$  . On peut donc choisir ces  $p_i^!$  soit égaux à zéro, alors les équations d'état du modèle d'ordre réduit seront sous la forme canonique d'observabilité, soit aux pôles du modèle d'ordre réduit, alors les

équations d'état de ce modèle seront sous la forme canonique définie par Meizel .

3.3.2 La réduction à un ordre inférieur à n-1

Le paragraphe précédent présentait la méthode de réduction depuis l'ordre n vers l'ordre n-1 . L'objet de ce paragraphe est de généraliser cette méthode à un ordre réduit quelconque .

Pour continuer le processus de réduction de l'ordre au delà de n-1, il faut tout d'abord choisir les  $p_i'$  restant à définir dans la matrice  $T_{p'}$  du paragraphe précédent égaux à zéro . On note  $T_{p',n-1}$  la matrice ainsi obtenue, c'est à dire  $T_{p'}$  dans laquelle on a posé :

$$p_i' = 0 \quad i=2,\dots,n$$

Cette matrice s'écrit donc :

$$T_{p',n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -p_1' & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \bigcirc & & & & -p_1' & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Le choix de  $p_1'$  étant fixé, le modèle d'ordre n-1 est entièrement défini .

Pour obtenir un modèle d'ordre n-2, il convient de définir de façon analogue la matrice  $T_{p',n-2}$  comme étant la matrice  $T_{p'}$  dans laquelle on a fixé  $p_1'$  et on a posé :

$$p_i' = 0 \quad i=3,\dots,n$$

Le seul paramètre de  $T_{p',n-2}$  sera donc  $p_2'$  dont le choix dépendra du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert du modèle d'ordre n-1, par analogie avec le choix de  $p_1'$  .



Et :

$$z_{p_i^!}^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -p_i^! & \dots & \circ & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ \circ & & & & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & -p_i^! \end{bmatrix} \quad (25)$$

On pourra choisir les coefficients  $p_i^!$  soit parmi les zéros des différents modèles successifs suivant la procédure a), soit parmi leurs pôles suivant la procédure b), soit encore suivant la procédure c), soit enfin l'une puis l'autre de ces procédures . Ceci se traduit par les simplifications suivantes possibles pour les équations d'état du processus d'erreur, en conservant les notations du chapitre I :

- $R^+ A Q = 0$  : si l'on a choisi les  $p_i^!$  successifs ( $i=1, \dots, r$ ) parmi les pôles de  $F(p)$  .
- $R^+ B = 0$  : si l'on a choisi les  $p_i^!$  parmi les zéros de  $F(p)$  .

La première de ces simplifications signifie que les pôles du modèle d'ordre réduit  $q$  ainsi obtenu seront des pôles de  $F(p)$  . Cela implique donc que dans ce cas le modèle d'ordre réduit sera stable si le système original l'est .

La seconde de ces simplifications signifie que dans le cas considéré l'entrée n'aura aucune influence sur l'erreur .

### 3.3.3 Algorithme général de la réduction d'ordre

Le but de cette section est de définir les coefficients de la fonction de transfert du modèle d'ordre réduit  $q$  à partir de ceux de la fonction de transfert originale  $F(p)$  . On a montré au paragraphe précédent comment les modèles d'ordre successivement décroissant étaient obtenus les uns à partir des autres par un couple de matrices du type  $\tilde{T}_{p_i^!}^-$  et  $\tilde{T}_{p_i^!}^+$  .

Avec :

$$\tilde{T}_{p_i}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & 0 \\ p_i^1 & \cdot & & & & & & \\ (p_i^1)^2 & \cdot & \cdot & & & & & \\ (p_i^1)^3 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ (p_i^1)^{n-i-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\dim \tilde{T}_{p_i}^+ = (n-i) \times (n-i+1)$$

On peut alors en déduire l'algorithme général de la réduction d'ordre :

- Si l'on note  $a_i^0$  et  $b_i^0$  les coefficients de la fonction de transfert  $F(p)$  de départ, avec :

$$a_i^0 = a_i \quad ; \quad b_i^0 = b_i \quad (27)$$

alors les coefficients de la fonction de transfert du modèle d'ordre  $n-1$ , notés  $a_i^1$  et  $b_i^1$  seront donnés par :

$$\begin{aligned} a_{i+1}^1 &= p_i^1 a_i^1 + a_{i+1}^0 \\ b_{i+1}^1 &= p_i^1 b_i^1 + b_{i+1}^0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{avec :} \quad a_0^1 &= 1 \quad ; \quad b_0^1 = 0 \\ i &= 0, 1, \dots, (n-2) \end{aligned}$$

- Si l'on répète cette opération avec  $p_2^1, p_3^1, \dots, p_r^1$ , où  $r$  est  $n-q$  et  $q$  est l'ordre réduit désiré, et si l'on note  $a_i^j$  et  $b_i^j$  les coefficients de la fonction de transfert du modèle d'ordre  $n-j$ , alors on a les relations suivantes définissant l'algorithme général de la réduction d'ordre :

$$\begin{aligned} a_{i+1}^j &= p_j^1 a_i^j + a_{i+1}^{j-1} \quad ; \quad a_0^j = 1 \\ b_{i+1}^j &= p_j^1 b_i^j + b_{i+1}^{j-1} \quad ; \quad b_0^j = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$i = 0, \dots, (n-j-1) \quad ; \quad j = 1, \dots, r$$

Si l'on choisit deux  $p_j^i$  successifs égaux alors l'algorithme de réduction de l'ordre  $n-j$  à l'ordre  $n-j-1$  sera :

$$\begin{aligned}
 p_{j+1}^i = p_j^i & \implies a_i^{j+1} = \frac{d}{dp_j^i}(a_{i+1}^j) \\
 & b_i^{j+1} = \frac{d}{dp_j^i}(b_{i+1}^j) \qquad (30) \\
 & i = 0, \dots, (n-j-1)
 \end{aligned}$$

Cet algorithme a une interprétation algébrique simple qui fait l'objet du paragraphe suivant .

### 3.3.4 Interprétation algébrique de l'algorithme de réduction

Le but de cette section est de montrer que les numérateur et dénominateur de la fonction de transfert du modèle d'ordre réduit s'obtiennent à partir de ceux de  $F(p)$  originale par une simple division .

Si l'on considère l'algorithme de réduction de l'ordre  $n$  à l'ordre  $n-1$ , on peut poser, par extension et compte tenu des équations (14) :

$$\begin{aligned}
 b_n^1 &= N(p_1^i) \\
 a_n^1 &= D(p_1^i) \qquad (31)
 \end{aligned}$$

On peut expliciter les équations (28) à l'aide du tableau suivant, définissant  $N^1(p)$ , numérateur de la fonction de transfert du modèle d'ordre  $n-1$  :

Puissance de $p$	coefficient
n-2	$b_1^1 = b_1^0 + p_1^i b_0^1$
n-3	$b_2^1 = b_2^0 + p_1^i b_1^1$
:	:
0	$b_{n-1}^1 = b_{n-1}^0 + p_1^i b_{n-2}^1$

On a donc, en formant le polynôme  $N^1(p)$  :

$$N^1(p) = (1/p) \cdot (N(p) - b_n^0) + (p_1^1/p) \cdot (N^1(p) - b_{n-1}^1)$$

Soit encore :

$$p N^1(p) - p_1^1 N^1(p) = N(p) - b_n^0 - p_1^1 b_{n-1}^1$$

Or l'algorithme (28) peut s'étendre à :

$$b_n^1 = p_1^1 b_{n-1}^1 + b_n^0 = N(p_1^1)$$

Donc  $N(p)$  peut s'écrire :

$$N(p) = (p - p_1^1) \cdot N^1(p) + N(p_1^1) \quad (32)$$

On a donc montré ainsi que  $N^1(p)$  est le quotient de la division euclidienne de  $N(p)$  par le monôme  $(p - p_1^1)$ .

Un raisonnement analogue sur les coefficients  $a_1^1$  conduit à

$$D(p) = (p - p_1^1) \cdot D^1(p) + D(p_1^1) \quad (33)$$

Et  $D^1(p)$ , dénominateur de la fonction de transfert d'ordre réduit  $n-1$ , est le quotient de la division euclidienne de  $D(p)$  par le monôme  $(p - p_1^1)$ .

On peut également retrouver ce résultat directement à partir des équations (11) définissant la matrice  $A_{p_1^1}$ . si l'on développe le déterminant de  $(pI - A_{p_1^1})$  par rapport à sa dernière ligne, on aura :

$$\det(pI - A_{p_1^1}) = D(p) = (p - p_1^1) \cdot D^1(p) + (-1)^{n+1} D(p_1^1) \cdot (-1)^{n-1} \quad (34)$$

D'où le résultat de l'équation (33).

La fonction de transfert  $F^1(p)$  du modèle d'ordre réduit  $n-1$  s'écrit donc :

$$F^1(p) = \frac{N^1(p)}{D^1(p)} = \frac{N(p) - N(p_1^*)}{D(p) - D(p_1^*)} \quad (35)$$

Si l'on continue le processus de réduction de l'ordre d'après l'algorithme défini par les relations (29), il est clair que le raisonnement ci-dessus peut s'appliquer . Si l'on désigne par  $N^j(p)$  et  $D^j(p)$  les numérateur et dénominateur de la fonction de transfert  $F^j(p)$  du modèle d'ordre réduit  $n-j$ , alors  $N^j(p)$  (respectivement  $D^j(p)$  ) sera le quotient de la division euclidienne de  $N(p)$  (respectivement  $D(p)$  ) par le polynôme :

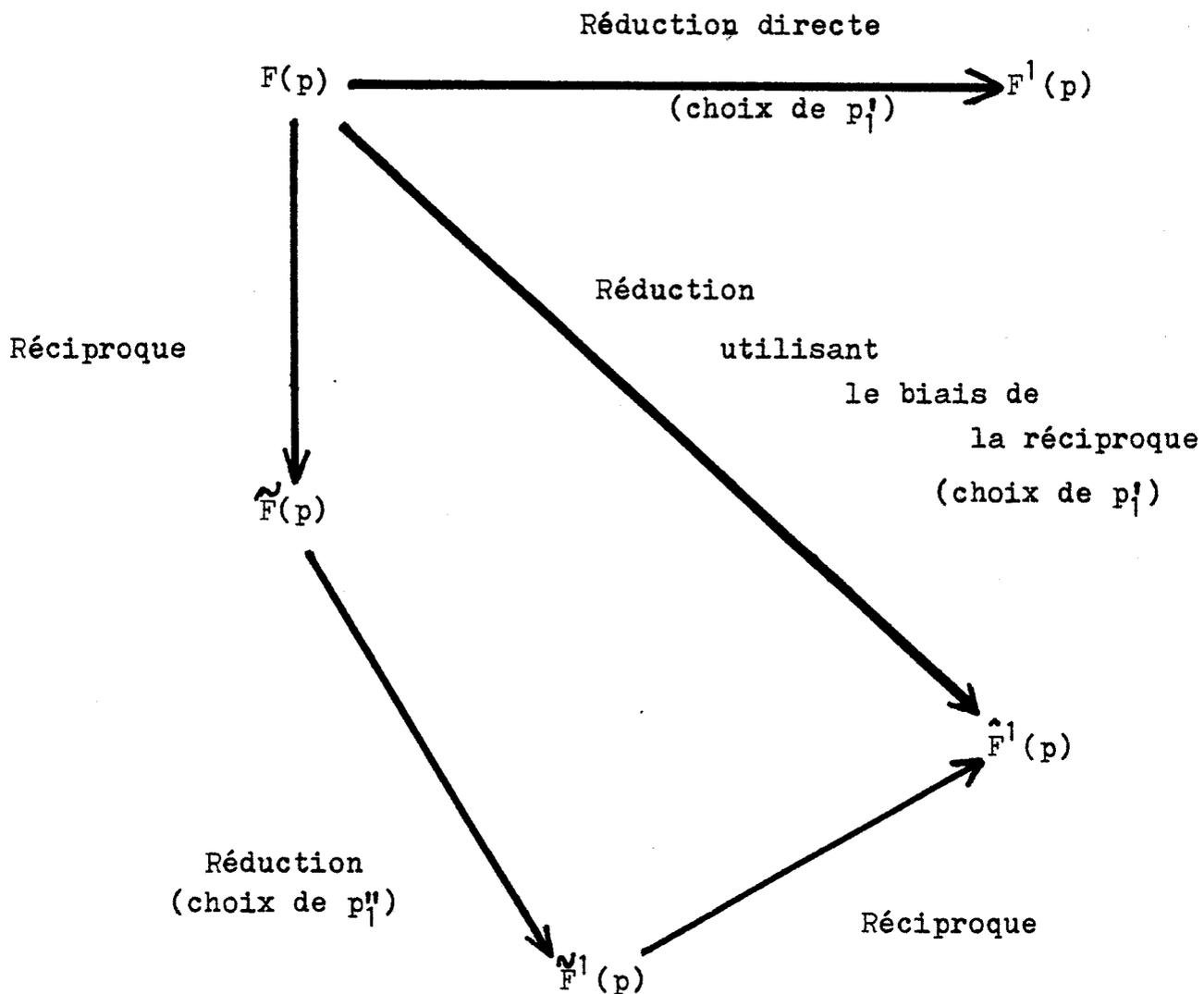
$$(p-p_1^*)(p-p_2^*) \dots (p-p_j^*)$$

Le coefficient de la plus haute puissance de  $p$  dans  $D^j(p)$  sera alors 1 .

Cette méthode apparait donc comme très facile à utiliser . Il est montré dans le paragraphe suivant qu'un modèle d'ordre réduit ainsi obtenu constitue une approximation du système original aux hautes fréquences . Si l'on désire obtenir une approximation aux basses fréquences du comportement dynamique de  $F(p)$ , il faut passer par le biais du système réciproque de fonction de transfert  $\tilde{F}(p)$ , conformément au paragraphe 1.2.2.2 . Il convient alors de déterminer l'équivalent des équations (32) et (33) dans ce cas . On va montrer ici que les numérateur et dénominateur du modèle d'ordre réduit sont obtenus à partir de ceux du système original par une simple division, aux puissances croissantes cette fois . La figure 3.3 donne une représentation du processus de réduction en notant :

- $F(p)$  le système original et  $\tilde{F}(p)$  son réciproque .
- $\tilde{F}^1(p)$  le modèle d'ordre  $n-1$  de  $\tilde{F}(p)$  et  $\hat{F}^1(p)$  son réciproque et qui constitue donc le modèle définitif .

FIGURE 3.3 Utilisation du biais de la réciproque dans la réduction de l'ordre à partir de la forme canonique de Meizel .



On peut donc écrire les relations de réciprocity :

$$\tilde{F}(p) = (1/p) F(1/p) = \frac{\tilde{N}(p)}{\tilde{D}(p)}$$

Soit :  $\tilde{N}(p) = p^{n-1} N(1/p)$

$$\tilde{D}(p) = p^n D(1/p) \quad (36)$$

On rappelle en effet que  $D(p)$  est de degré  $n$  et que  $N(p)$  est a priori de degré  $n-1$ .

$\tilde{F}^1(p)$  est construit à partir de  $F(p)$  par la méthode de réduction directe, on peut donc écrire  $\tilde{N}^1(p)$  et  $\tilde{D}^1(p)$  d'après les équations (32) et (33) :

$$\tilde{F}^1(p) = \frac{\tilde{N}^1(p)}{\tilde{D}^1(p)} \quad (37)$$

$$\tilde{N}(p) = (p-p_1'') \tilde{N}^1(p) + \tilde{N}(p_1'')$$

$$\tilde{D}(p) = (p-p_1'') \tilde{D}^1(p) + \tilde{D}(p_1'') \quad (38)$$

La réduction d'ordre correspond ici au choix de  $p_1''$ . Si l'on choisit  $p_1''$  parmi les pôles de  $\tilde{F}(p)$  alors  $p_1'$  sera un pôle de  $F(p)$  avec :

$$p_1' = (1/p_1'') \quad (39)$$

Le modèle définitif d'ordre réduit  $n-1$  de  $F(p)$  sera donc  $\hat{F}^1(p)$ , le réciproque de  $\tilde{F}^1(p)$ , ces deux dernières fonction de transfert seront d'ordre  $n-1$ , on pourra donc écrire les relations de réciprocity suivantes :

$$\hat{F}^1(p) = (1/p) \tilde{F}^1(1/p) = \frac{\hat{N}^1(p)}{\hat{D}^1(p)} \quad (40)$$

$$\hat{N}^1(p) = p^{n-2} \tilde{N}^1(1/p)$$

$$\hat{D}^1(p) = p^{n-1} \tilde{D}^1(1/p)$$

Soit, compte tenu des équations (38) :

$$\begin{aligned}\tilde{N}^1(1/p) &= \frac{\tilde{N}(1/p) - \tilde{N}(p_1'')}{(1/p) - p_1''} \\ \tilde{D}^1(1/p) &= \frac{\tilde{D}(1/p) - \tilde{D}(p_1'')}{(1/p) - p_1''}\end{aligned}\tag{41}$$

On peut alors écrire  $\hat{F}^1(p)$  sous la forme :

$$\hat{F}^1(p) = \frac{p^{n-2}\tilde{N}(1/p) - p^{n-2}\tilde{N}(p_1'')}{p^{n-1}\tilde{D}(1/p) - p^{n-1}\tilde{D}(p_1'')}$$

Soit, en multipliant haut et bas par  $p$  et en remarquant que l'on peut faire apparaître  $N(p_1')$  et  $D(p_1')$  :

$$p^{n-1}\tilde{N}(p_1'') = (p/p_1')^{n-1} (p_1'')^{n-1} \tilde{N}(1/p_1') = (p/p_1')^{n-1} N(p_1')$$

$$p^n \tilde{D}(p_1'') = (p/p_1')^n (p_1'')^n \tilde{D}(1/p_1') = (p/p_1')^n D(p_1')$$

L'équivalent de l'équation (35) s'écrit donc :

$$\hat{F}^1(p) = \frac{N(p) - (p/p_1')^{n-1} N(p_1')}{D(p) - (p/p_1')^n D(p_1')}\tag{42}$$

On remarque que  $p_1'$  est à la fois un pôle et un zéro de  $\hat{F}^1(p)$ ; on pourra donc définir :

$$\frac{(p_1'-p)\hat{N}^1(p)}{(p_1'-p)\hat{D}^1(p)} = \frac{N(p) - (p/p_1')^{n-1} N(p_1')}{D(p) - (p/p_1')^n D(p_1')} = \hat{F}^1(p)\tag{43}$$

Soit donc :

$$\begin{aligned}N(p) &= (p_1'-p) \hat{N}^1(p) + (p/p_1')^{n-1} N(p_1') \\ D(p) &= (p_1'-p) \hat{D}^1(p) + (p/p_1')^n D(p_1')\end{aligned}\tag{44}$$

Ces équations sont à rapprocher des équations (32) et (33) concernant la méthode de réduction directe .

Il apparait donc que  $\hat{N}^1(p)$  (respectivement  $\hat{D}^1(p)$ ) peut être considéré comme le quotient de la division de  $N(p)$  (respectivement de  $D(p)$ ) par le monôme  $(p_1^! - p)$  aux puissances croissantes à l'ordre  $n-2$  (respectivement à l'ordre  $n-1$ ).

REMARQUE : Si on a choisi  $p_1^!$  parmi les pôles de  $F(p)$ , alors les équations (35) et (42) pourront être simplifiées :

-  $F^1(p)$ , modèle obtenu par la méthode directe, sera :

$$F^1(p) = F(p) - \frac{N(p_1^!)}{D(p)} \quad (45)$$

-  $\hat{F}^1(p)$ , modèle obtenu en utilisant le biais du système réciproque, sera :

$$\hat{F}^1(p) = F(p) - (p/p_1^!)^{n-1} \frac{N(p_1^!)}{D(p)} \quad (46)$$

Le parallèle entre la méthode utilisant directement le système original et celle utilisant le biais du système réciproque est donc à rapprocher de celui existant entre la division euclidienne et la division suivant les puissances croissantes de deux polynômes.

Les équations (44) peuvent bien-sûr se généraliser à un ordre réduit  $q$  quelconque.

### 3.3.5 Propriété fondamentale de la méthode de réduction

Le but de ce paragraphe est de montrer que la méthode de réduction directe définie plus haut conserve les paramètres de Markov du système original, et ceci quelque soit le choix du paramètre  $p_1^!$ .

On remarque qu'il est équivalent de dire que la méthode de réduction utilisant le biais du système réciproque conserve les premiers moments du système original.

La démonstration qui va suivre ne concerne que le processus de réduction de l'ordre  $n$  à l'ordre  $n-1$ . De par la définition même de la méthode générale, cette démonstration est suffisante pour dire que, quelque soit le choix de  $p_1^1, p_2^1, \dots, p_r^1$ , le modèle d'ordre réduit  $q$  conservera les  $q$  premiers paramètres de Markov du système original.

On rappelle dans l'annexe 2 ce que sont les paramètres de Markov et les moments d'une fonction de transfert  $F(p)$  (voir références 3 et 4).

On note  $M_i$  le  $i^{\text{ème}}$  paramètre de Markov de  $F(p)$ , fonction de transfert originale, et  $M_i^1$  celui de  $F^1(p)$ , modèle d'ordre réduit  $n-1$  obtenu par la méthode directe. La démonstration sera faite par récurrence sur  $i$ .

La première étape de cette démonstration sera l'égalité des deux premiers paramètres de Markov :

D'après les équations (2) de l'annexe 2, on a, en conservant les notations définies par les relations (27) et (28) de ce chapitre :

$$\begin{aligned} 1 \times M_1 &= b_1^0 \\ 1 \times M_1^1 &= b_1^1 = b_1^0 \quad (\text{voir l'équation (28)}) \end{aligned}$$

D'où :

$$M_1 = M_1^1 = b_1 \quad (47)$$

De même pour  $M_2$  et  $M_2^1$  :

$$\begin{aligned} a_1^0 M_1 + M_2 &= b_2^0 = a_1^0 b_1^0 + M_2 \\ a_1^1 M_1^1 + M_2^1 &= b_2^1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } (p_1^1 + a_1^0) M_1^1 + M_2^1 = p_1^1 b_1^1 + b_2^0$$

$$a_1^1 b_1 + M_2^1 = b_2 \quad (48)$$

$$\text{Et : } M_2^1 = M_2$$

La deuxième étape consiste à supposer maintenant :

$$M'_k = M_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, (i-1)$$

On va montrer alors :  $M'_i = M_i$  ; avec :  $i \leq n-1$

D'après les équations (2) de l'annexe 2,  $M'_i$  sera donné par l'équation :

$$M'_i + \sum_{k=1}^{i-1} a^1_{i-k} M'_k = b^1_i$$

Mais d'après les équations (28) de ce chapitre, on a :

$$a^1_{i-k} = p^1_i a^1_{i-k-1} + a^0_{i-k} \quad ; \quad a^1_0 = 1$$

D'où :

$$M'_i + p^1_i \sum_{k=1}^{i-1} a^1_{i-k-1} M'_k + \sum_{k=1}^{i-1} a^0_{i-k} M'_k = b^1_i \quad (49)$$

Or les  $(i-1)$  premiers  $M_k$  et  $M'_k$  sont égaux, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{i-1} a^0_{i-k} M'_k = \sum_{k=1}^{i-1} a^0_{i-k} M_k = b^0_i - M_i$$

De même :

$$\sum_{k=1}^{i-1} a^1_{i-k-1} M'_k = a^1_0 M'_{i-1} + \dots + a^1_{i-2} M'_1 = b^1_{i-1}$$

L'équation (49) peut alors s'écrire :

$$M'_i + p^1_i b^1_{i-1} + b^0_i - M_i = b^1_i$$

Ce qui signifie, compte tenu de la définition de  $b^1_i$  à partir des équations (28) :

$$M'_i = M_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, (n-1) \quad (50)$$

On a donc montré l'égalité entre les  $n-1$  premiers paramètres de Markov du système original et ceux du modèle d'ordre réduit  $n-1$  .

Il reste maintenant à déterminer ce qu'il advient des autres paramètres de Markov . On établira tout d'abord l'écart entre



$M_n^0$  et  $M_n^1$ , puis entre  $M_m^0$  et  $M_m^1$  avec  $m$  supérieur à  $n+1$ .

- Détermination de  $M_n^0 - M_n^1$  :

Les équations donnant  $M_n^0$  et  $M_n^1$  sont, d'après les équations (2) de l'annexe 2 :

$$a_{n-1}^0 M_1^0 + \dots + a_1^0 M_{n-1}^0 + M_n^0 = b_n^0$$

$$a_{n-1}^1 M_1^1 + \dots + a_1^1 M_{n-1}^1 + M_n^1 = 0$$

C'est à dire :

$$p_1^1 ( a_{n-2}^1 M_1^1 + \dots + a_0^1 M_{n-1}^1 ) + a_{n-1}^0 M_1^1 + \dots + M_n^1 = 0$$

Soit enfin :

$$p_1^1 b_{n-1}^1 + b_n^0 - M_n^0 + M_n^1 = 0$$

Ceci peut s'écrire, compte tenu des équations (31) :

$$M_n^0 - M_n^1 = N(p_1^1) \quad (51)$$

On a ainsi montré que la différence entre les  $n^{\text{ème}}$  paramètres de Markov du système et de son modèle est égale à la valeur du numérateur de  $F(p)$  au point  $p_1^1$ .

- Détermination de  $M_m^0 - M_m^1$ ,  $m \geq n+1$

Les équations donnant  $M_m^0$  et  $M_m^1$  sont :

$$a_n^0 M_{m-n}^0 + a_{n-1}^0 M_{m-n+1}^0 + \dots + a_1^0 M_{m-1}^0 + M_m^0 = 0 \quad (52)$$

$$0 \cdot M_{m-n}^1 + a_{n-1}^1 M_{m-n+1}^1 + \dots + a_1^1 M_{m-1}^1 + M_m^1 = 0$$

Cette dernière équation donnant  $M_m^1$  peut s'écrire :

$$p_1^1 ( a_{n-2}^1 M_{m-n+1}^1 + \dots + a_0^1 M_{m-1}^1 ) + a_{n-1}^0 M_{m-n+1}^1 + \dots + M_m^1 = 0 \quad (53)$$

Le terme en facteur de  $p_1^1$  est en fait :  $-a_{n-1}^1 M_{m-n}^1$

Et :  $M_{m-n}^1 = M_{m-n}^0$  ;  $m = (n+1), \dots, 2n$

Si l'on note :  $D_k = M_m^0 - M_m^1$  ;  $k = 1, \dots, n$  ;  $k = (m - n)$

On aura :  $D_k = 0$  ;  $k < 0$

Et, en faisant la différence entre les équations (53) et (52) :

$$D_k + a_1^0 D_{k-1} + \dots + a_{m-n}^0 D_0 + a_n^0 M_{m-n} - p_1^1 (-a_{n-1}^1 M_{m-n}) = 0$$

Or :  $a_n^0 + p_1^1 a_{n-1}^1 = a_n^1 = D(p_1^1)$

Donc :

$$D_k = -M_k D(p_1^1) - a_1^0 D_{k-1} - \dots - a_k^0 D_0 \quad (54)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

On a déjà déterminé  $D_0$  par l'équation (51) :

$$D_0 = N(p_1^1)$$

Si l'on note  $D_k$  sous la forme :

$$D_k = n_k N(p_1^1) + d_k D(p_1^1) \quad (55)$$

Alors on aura les équations de récurrence suivantes, pour les coefficients  $n_k$  et  $d_k$  :

$$n_k = -a_1^0 n_{k-1} - \dots - a_{k-1}^0 n_1 - a_k^0 n_0$$

$$d_k = -M_k - a_1^0 d_{k-1} - \dots - a_{k-1}^0 d_1 - a_k^0 d_0 \quad (56)$$

Pour :  $k = 1, 2, \dots, n$

Et :  $n_0 = 1$  ;  $d_0 = 0$

Conclusion :

Tout ceci est valable quelque soit le choix de  $p_1^1$ . Il est donc intéressant de minimiser  $D_k$  par rapport à ce paramètre  $p_1^1$ . Si on prend pour  $p_1^1$  un des pôles de  $F(p)$ , le modèle d'ordre réduit  $n-1$  aura pour pôles les  $n-1$  pôles restants de  $F(p)$ , il sera donc stable si le système original l'est. D'autre part  $D_k$  sera alors proportionnel à  $N(p_1^1)$ , donc choisir pour  $p_1^1$  l'un des pôles qui minimise  $N(p_1^1)$  revient à limiter  $D_k$ .

Les paramètres de Markov sont les coefficients du dévelop-

pement en série de  $F(p)$  autour du point  $p$  infini, ils représentent donc le comportement du système aux hautes fréquences .  
 Quelque soit le choix de  $p_i'$  la méthode de réduction présentée ici constitue donc une approximation aux hautes fréquences de la fonction de transfert originale  $F(p)$  .

Pour obtenir une approximation de  $F(p)$  aux basses fréquences, ce qui est le cas souhaité en général, il suffit de suivre la procédure décrite par la figure 3.3 à partir de  $\tilde{F}(p)$ , réciproque de  $F(p)$  . Le modèle d'ordre  $n-1$  définitif  $\hat{F}^1(p)$ , conservera donc les  $n-1$  premiers paramètres de Markov de  $\tilde{F}(p)$ , c'est à dire les  $n-1$  premiers moments de  $F(p)$  . Si l'on choisit alors  $p_i'$  parmi les pôles de  $F(p)$ ,  $(1/p_i')$  sera un pôle de  $\tilde{F}(p)$  et les  $n-1$  pôles de  $\hat{F}^1(p)$  seront les  $n-1$  pôles restants de  $F(p)$  .

REMARQUE :

Si  $q$ , l'ordre du modèle , est choisi égal à 1, il vaut mieux choisir le dernier paramètre,  $p_r$ , parmi les zéros du modèle précédent d'ordre  $q+1$  à cause de la relation (51) qui s'écrira dans ce cas :

$$M_2 - M_2^1 = N^{n-2}(p_r') \quad (57)$$

$$r = n-1$$

3.3.6 Exemple d'application

Le but de cette section est de montrer la mise en oeuvre de la méthode de réduction présentée plus haut sur un système d'ordre 3 dont on désire déterminer un modèle d'ordre 2 .

La fonction de transfert originale  $F(p)$  s'écrit :

$$F(p) = \frac{p^2 + 6p + 8}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} \quad (58)$$

Les pôles de  $F(p)$  sont :  $-1$  ;  $-3$  ;  $-5$

Ses zéros sont :  $-2$  ;  $-4$

On désire approximer le comportement de  $F(p)$  aux basses fréquences et conserver deux de ses pôles . On suivra donc la méthode utilisant le biais de  $\tilde{F}(p)$ , réciproque de  $F(p)$  et l'on choisira  $p_1''$  parmi les pôles de  $\tilde{F}(p)$ , c'est à dire  $p_1'$  parmi les pôles de  $F(p)$  avec :

$$p_1' = 1/p_1'' \quad (39)$$

La fonction de transfert  $\tilde{F}(p)$ , réciproque de  $F(p)$  s'écrit :

$$\tilde{F}(p) = (1/p) F(1/p)$$

$$\tilde{F}(p) = \frac{(1/15) + (6/15)p + (8/15) p^2}{(1/15) + (9/15)p + (23/15)p^2 + p^3} = \frac{\tilde{N}(p)}{\tilde{D}(p)} \quad (59)$$

Les pôles de  $\tilde{F}(p)$  seront :  $-1$  ;  $(-1/3)$  ;  $(-1/5)$

Il faut donc calculer la valeur de  $\tilde{N}(p)$  en ces trois points pour déterminer  $p_1''$  :

$$\tilde{N}(-1) = 0.5 \quad ; \quad \tilde{N}(-1/3) = 7.4 \cdot 10^{-3} \quad ; \quad \tilde{N}(-1/5) = 2.4 \cdot 10^{-2}$$

La valeur minimale de  $\tilde{N}(p_1'')$  sera donc obtenue pour :

$$p_1'' = -1/3$$

$$\text{Soit : } p_1' = -3$$

Le modèle d'ordre 2 de  $\tilde{F}(p)$ , noté  $\tilde{F}^1(p)$  sera :

$$\tilde{F}^1(p) = \frac{(8/15)p + (10/45)}{p^2 + (18/15)p + (3/15)} \quad (60)$$

Le modèle définitif sera donc  $\hat{F}^1(p)$ , réciproque de  $\tilde{F}^1(p)$  :

$$\hat{F}^1(p) = \frac{(24/9) + (10/9)p}{5 + 6p + p^2} \quad (61)$$

Les pôles de ce modèle seront donc :  $-5$  ;  $-1$

Et son zéro :  $-2.4$

Il faut remarquer que le pôle écarté est  $-3$  alors que la méthode modale exposée au chapitre II aurait écarté  $-5$ . Si on choisit  $p_1$  égal à  $-5$  la fonction de transfert du modèle obtenu,  $\hat{F}^2(p)$ , sera, en utilisant toujours le biais de  $F(p)$  :

$$\hat{F}^2(p) = \frac{(22/25)p + (40/25)}{p^2 + 4p + 3} \quad (62)$$

Les pôles de  $\hat{F}^2(p)$  seront  $-1$  et  $-3$ , son zéro sera  $-1.82$ .

On peut comparer ces modèles en fonction de l'énergie impulsionnelle  $I$  telle qu'elle est définie par l'équation (5) du paragraphe 2.3.2.1 du chapitre II concernant la méthode de réduction de Routh. On note respectivement  $h(t)$ ,  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$  les réponses impulsionnelles de  $F(p)$ ,  $\hat{F}^1(p)$  et  $\hat{F}^2(p)$ . On peut alors calculer les quantités  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  à partir des coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  de  $F(p)$ ,  $F(p) - \hat{F}^1(p)$ ,  $F(p) - \hat{F}^2(p)$ , où :

$$\begin{aligned} h(t) &= (1/8) \cdot (3 e^{-t} + 2 e^{-3t} + 3 e^{-5t}) \\ h_1(t) &= (1/18) \cdot (7 e^{-t} + 13 e^{-5t}) \\ h_2(t) &= (1/25) \cdot (13 e^{-3t} + 9 e^{-t}) \end{aligned} \quad (63)$$

Alors :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} (h(t))^2 dt = 0.21 \quad (64) \\ I_1 &= \int_0^{\infty} (h(t) - h_1(t))^2 dt = 6.92 \cdot 10^{-4} = 3.3 \cdot 10^{-3} \cdot I \\ I_2 &= \int_0^{\infty} (h(t) - h_2(t))^2 dt = 8.08 \cdot 10^{-4} = 3.8 \cdot 10^{-3} \cdot I \end{aligned}$$

On constate ici que  $\hat{F}^1(p)$  est un meilleur modèle que  $\hat{F}^2(p)$  au sens de l'énergie impulsionnelle.

Les réponses indicielles de ces deux modèles ne sont pas discernables de celle du système original.

Si l'on décide maintenant de choisir  $p_1'$  parmi les zéros de  $F(p)$ , il faudra donc calculer  $\tilde{D}(p_1')$  pour  $p_1'$  égal à  $(-1/2)$  et  $(-1/4)$  :

$$\tilde{D}(-1/2) = 2,5 \cdot 10^{-2} \quad ; \quad \tilde{D}(-1/4) = -3,1 \cdot 10^{-3}$$

Il faut donc choisir :

$$p_1'' = -1/4 \quad ; \quad p_1' = -4$$

Le modèle d'ordre 2 définitif correspondant sera, toujours en utilisant le biais de  $\tilde{F}(p)$  :

$$\hat{F}^3(p) = \frac{0,96p + 1,92}{p^2 + 4,60p + 3,58} \quad (65)$$

Les pôles de  $\hat{F}^3(p)$  seront :  $-0,99$  ;  $-3,60$

Son zéro sera :  $-2$

Si l'on note  $h_3(t)$  sa réponse impulsionnelle, on aura :

$$I_3 = \int_0^{\infty} (h(t) - h_3(t))^2 dt = 7,66 \cdot 10^{-5} = 3,65 \cdot 10^{-4} \cdot I \quad (66)$$

On constate alors que  $\hat{F}^3(p)$  est le meilleur modèle de  $F(p)$  obtenu par cette méthode au sens de l'énergie impulsionnelle .

On peut vérifier que cette méthode conserve bien les moments de  $F(p)$  en formant les quantités :

$$F(p) - \hat{F}^1(p) = \frac{(-1/9)p^2}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15} \quad (67)$$

$$F(p) - \hat{F}^2(p) = \frac{3 p^2}{25(p^3 + 9p^2 + 23p + 15)} \quad (68)$$

$$F(p) - \hat{F}^3(p) = \frac{(4,48p^4 + 8,96p^3) \cdot 10^{-2}}{(p^2 + 4,60p + 3,58) \cdot (p^3 + 9p^2 + 23p + 15)} \quad (69)$$

Les numérateurs des expressions (67) et (68) sont de degré 2, ce qui signifie que les moments de ces différences sont nuls

jusqu'à l'ordre 2 compris .

L'expression (69) commence par une puissance 3 de  $p$ , ce qui signifie que ses trois premiers moments sont nuls . Ce résultat était bien-sûr attendu et provient de l'équation (51) .

### 3.4 Application de la méthode de réduction à certains systèmes multivariables

#### 3.4.1 Introduction

Le but de ce paragraphe est d'appliquer la méthode de réduction de l'ordre des systèmes présentée plus haut dans ce chapitre aux systèmes multi-entrées-mono-sortie d'une part, et, moyennant une légère modification de la présentation générale, aux systèmes mono-entrée-multi-sortie d'autre part . Un exemple numérique illustre cette application .

#### 3.4.2 Application de la méthode de réduction de l'ordre aux systèmes mono-entrée-multi-sorties

Pour réduire l'ordre de tels systèmes par une méthode dérivée de celle présentée pour les systèmes monovariables, il faut au préalable modifier légèrement cette méthode :

Le changement de base défini par la matrice  $T_p$ , transforme le triplet original, mis sous la forme canonique d'observabilité, en la forme canonique de Meizel (voir 3.2) . Or il existe un changement de base, défini par une matrice que l'on notera ici  $P_p$  qui transforme le triplet original, mis cette fois sous la forme canonique de commandabilité, en le même type de forme d'équations d'état que (5), les "1" étant sur la sous-diagonale .

Il est clair que l'on peut alors définir la méthode de réduction de l'ordre à partir de ce changement de base  $P_p$ , puisque les équations d'état finales sont les mêmes que précédemment . C'est cette méthode qui sera employée ici .

Soit un système comportant une seule entrée  $u$  et  $m$  sorties  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , décrit par sa matrice de transfert  $M(p)$ . Cette matrice de transfert, de dimension  $m \times 1$  pourra s'écrire :

$$M(p) = \begin{bmatrix} H_1(p) \\ H_2(p) \\ \vdots \\ H_m(p) \end{bmatrix} \quad (70)$$

Où :

$$H_i(p) = \frac{y_i(p)}{u(p)} = \frac{\text{Num}_i(p)}{\text{Den}_i(p)} \quad (71)$$

Soit  $D(p)$  le plus petit commun multiple des  $\text{Den}_i(p)$  :

$$D(p) = \text{PPCM}(\text{Den}_i(p)) \quad (72)$$

Alors  $D(p)$  est le polynôme des pôles de  $M(p)$  (voir référence 5). L'ordre du système sera le degré de  $D(p)$ , noté  $n$ .

On définit alors les polynômes  $N_i(p)$  :

$$N_i(p) = \text{Num}_i(p) \cdot \left( \frac{D(p)}{\text{Den}_i(p)} \right) ; i=1, \dots, m \quad (73)$$

$H_i(p)$  s'écrira sous la forme :

$$H_i(p) = \frac{N_i(p)}{D(p)} \quad (74)$$

Et la matrice de transfert  $M(p)$  :

$$M(p) = \frac{1}{D(p)} \begin{bmatrix} N_1(p) \\ N_2(p) \\ \vdots \\ N_m(p) \end{bmatrix} \quad (75)$$

Par analogie avec l'équation (1) du chapitre II définissant les coefficients de la fonction de transfert  $F(p)$ , on note :

$$D(p) = a_n^0 + a_{n-1}^0 p + \dots + a_1^0 p^{n-1} + p^n \quad (76)$$

De même :

$$N_i(p) = b_{i,n}^0 + b_{i,n-1}^0 p + \dots + b_{i,1}^0 p^{n-1} \quad (77)$$

$$i = 1, \dots, m$$

Alors on pourra mettre le système en équations d'état sous une forme canonique de commandabilité :

$$\overset{\circ}{x}' = \begin{bmatrix} -a_1^0 & -a_2^0 & \dots & -a_n^0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \circ & \circ & \dots & \circ \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1}^0 & \dots & b_{1,n}^0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m,1}^0 & \dots & b_{m,n}^0 \end{bmatrix} x' \quad (78)$$

La réduction de l'ordre n à l'ordre n-1 se fera à partir du changement de base défini par :

$$x' = P_{p',n-1} x \quad (79)$$

Où les matrices  $P_{p',n-1}$  et  $P_{p',n-1}^{-1}$  sont :

$$P_{p',n-1} = \begin{bmatrix} 1 & p_1' & \dots & (p_1')^{n-1} \\ \circ & \circ & \dots & \circ \end{bmatrix}; \quad P_{p',n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & -p_1' & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ \end{bmatrix} \quad (80)$$

Les matrices  $P_{p',n-1}$  et  $P_{p',n-1}^{-1}$  sont à rapprocher des matrices  $T_{p',n-1}^{-1}$  et  $T_{p',n-1}$  respectivement :

$$P_{p',n-1}^{-1} = T_{p',n-1}^t \quad (81)$$

Les équations d'état relatives au vecteur x pourront alors

s'écrire :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1^1 & -a_2^1 & \dots & -a_n^1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_1^1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (82)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1}^1 & \dots & b_{1,n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1}^1 & \dots & b_{m,n}^1 \end{bmatrix} x$$

Le modèle d'ordre réduit n-1 sera obtenu en ne conservant que les n-1 premières variables d'état dans les équations (82) .

La matrice de transfert du modèle  $M^1(p)$  s'écrira :

$$M^1(p) = \frac{1}{D^1(p)} \begin{bmatrix} N_1^1(p) \\ \vdots \\ N_m^1(p) \end{bmatrix} \quad (83)$$

Avec :

$$D^1(p) = p^{n-1} + a_1^1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}^1$$

$$N_i^1(p) = b_{i,1}^1 p^{n-2} + \dots + b_{i,n-1}^1 \quad (84)$$

$$i = 1, \dots, m$$

L'algorithme de cette réduction sera, par analogie avec les équations (28) :

$$a_j^1 = p_1^1 a_{j-1}^1 + a_j^0$$

$$b_{i,j}^1 = p_1^1 b_{i,j-1}^1 + b_{i,j}^0$$

$$a_0^1 = 1 \quad ; \quad b_{i,0}^1 = 0$$

$$i = 1, \dots, m \quad ; \quad j = 1, \dots, (n-1) \quad (85)$$

Cet algorithme de réduction à l'ordre  $n-1$  peut bien-sûr être étendu à un ordre réduit  $q$  quelconque . Si on note  $M^k(p)$  le modèle d'ordre réduit  $n-k$ , avec :

$$M^k(p) = \frac{1}{D^k(p)} \begin{bmatrix} N_1^k(p) \\ \vdots \\ N_m^k(p) \end{bmatrix} \quad (86)$$

Et :

$$\begin{aligned} D^k(p) &= p^{n-k} + a_1^k p^{n-k-1} + \dots + a_{n-k}^k \\ N_i^k(p) &= b_{i,1}^k p^{n-k-1} + \dots + b_{i,n-k}^k \end{aligned} \quad (87)$$

Alors l'algorithme général de la réduction à l'ordre  $q$  sera, par analogie avec les équations (29) :

$$\begin{aligned} a_{j+1}^k &= p_k' a_j^k + a_{j+1}^{k-1} \quad ; \quad a_0^k = 1 \\ b_{i,j+1}^k &= p_k' b_{i,j}^k + b_{i,j+1}^{k-1} \quad ; \quad b_{i,0}^k = 0 \\ i &= 1, \dots, m \quad ; \quad j = 0, \dots, (n-k-1) \\ k &= 1, \dots, r \quad ; \quad n = q+r \end{aligned} \quad (88)$$

Dans ces conditions, il apparaît qu'un modèle d'ordre  $q$  conservera les  $q$  paramètres de Markov de  $M(p)$ , qui seront alors des vecteurs colonnes . Si l'on passe par le biais du système réciproque le modèle obtenu conservera les  $q$  premiers moments qui seront eux-aussi des vecteurs colonnes .

Le choix de  $p_1', p_2', \dots, p_r'$  est plus délicat à faire . Si l'on choisit  $p_k'$  parmi les pôles de  $M^{k-1}(p)$ , certains numérateurs  $N_i^{k-1}(p)$  pourront s'annuler, c'est à dire que la réduction ne s'opérera vraiment que sur la fonction de transfert élémentaire  $H_i^{k-1}(p)$ , correspondant à  $N_i^{k-1}(p)$ , qui aura  $p_k'$  comme pôle . Il est à noter qu'il peut y avoir plusieurs  $H_i^{k-1}(p)$  dans ce cas . Il convient donc de décider a priori quelle fonction de trans-

fert il faut réduire en priorité . Il reste alors à choisir  $p'_k$  parmi les pôles de cette fonction, par exemple .

3.4.3 Application de la méthode de réduction de l'ordre aux systèmes multi-entrées-mono-sortie

Cette application est très proche de celle du paragraphe précédent, seules les notations vont changer .

Soit un système ayant  $m$  entrées  $u_1, u_2, \dots, u_m$  et une sortie  $y$  . On note  $H(p)$  sa matrice de transfert, qui est donc simplement un vecteur ligne :

$$\begin{aligned}
 H(p) &= ( H_1(p) \dots\dots\dots H_m(p) ) & (89) \\
 y(p) &= H(p) U(p) \\
 U(p) &= \begin{bmatrix} u_1(p) \\ \vdots \\ u_m(p) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Les fonctions de transfert élémentaires  $H_i(p)$  s'écrivent :

$$H_i(p) = \frac{\text{Num}_i(p)}{\text{Den}_i(p)} \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad (90)$$

On définit alors  $D(p)$  comme le plus petit commun multiple des  $\text{Den}_i(p)$  . C'est le polynôme des pôles de  $H(p)$  (voir référence 5) .

$$D(p) = \text{PPCM}(\text{Den}_i(p) ) \quad (91)$$

On pose ensuite :

$$N_i(p) = \text{Num}_i(p) \left[ \frac{D(p)}{\text{Den}_i(p)} \right] \quad (92)$$

Alors  $H_i(p)$  peut s'écrire :

$$H_i(p) = \frac{N_i(p)}{D(p)} \quad (93)$$

Et  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{1}{D(p)} ( N_1(p) \dots\dots\dots N_m(p) ) \quad (94)$$

On note :

$$D(p) = p^n + a_1^0 p^{n-1} + \dots + a_n^0$$

$$N_i(p) = b_{1,i}^0 p^{n-1} + \dots + b_{n,i}^0 \tag{95}$$

Ce système peut alors être mis en équations d'état sous une forme dérivée de la forme canonique d'observabilité pour les systèmes monovariabiles en notant :

$$D(p) y(p) = \sum_{i=1}^m N_i(p) u_i(p) \tag{96}$$

D'où :

$$y(p) = \sum_{i=1}^m N_i(p) \frac{u_i(p)}{p^n} - \left( \frac{a_1^0}{p} + \dots + \frac{a_n^0}{p^n} \right) y(p)$$

Et :

$$y(p) = \frac{1}{p} \left( -a_1^0 y(p) + \sum_{i=1}^m b_{1,i}^0 u_i + \frac{1}{p} (\dots) \dots \right) \tag{97}$$

L'équation (97) généralisant l'algorithme de Hörner . Ceci conduit aux équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{x}' &= \begin{bmatrix} -a_1^0 & 1 & & & \circ \\ \vdots & & & & \\ -a_n^0 & 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} b_{1,1}^0 & \dots & b_{1,m}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1}^0 & \dots & b_{n,m}^0 \end{bmatrix} u \\ y &= (1 \ 0 \ \dots \ 0) x' \end{aligned} \tag{98}$$

Ces équations d'état sont toujours observables . La méthode de réduction sera définie par le changement de base :

$$x' = T_{p',n-1} x$$

C'est le même que dans le cas monovariabiles . Les équations d'état en x seront alors :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{x} &= \begin{bmatrix} -a_1^1 & 1 & & & \circ \\ \vdots & & & & \\ -a_n^1 & 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{1,1}^1 & \dots & b_{1,m}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1}^1 & \dots & b_{n,m}^1 \end{bmatrix} u \\ y &= (1 \ 0 \ \dots \ 0) x \end{aligned} \tag{99}$$

Le modèle d'ordre réduit n-1 sera obtenu en ne conservant que les n-1 premières composantes du vecteur état x dans les équations (99) .

L'algorithme général de la réduction à un ordre q quelconque, compte-tenu des notations employées dans ce paragraphe, s'écrit de la même façon que celui du paragraphe précédent, donné par les équations (88) . Cependant les indices n'ayant pas les mêmes significations ni les mêmes valeurs extrêmes, on donne ici les équations adéquates :

On note  $H^k(p)$  le modèle d'ordre n-k avec :

$$H^k(p) = ( H_1^k(p) \dots H_m^k(p) ) \quad (100)$$

$$H_j^k(p) = \frac{N_j^k(p)}{D_j^k(p)} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} N_j^k(p) &= b_{1,j}^k p^{n-k-1} + b_{2,j}^k p^{n-k-2} + \dots + b_{n-k,j}^k \\ D_j^k(p) &= p^{n-k} + a_1^k p^{n-k-1} + \dots + a_{n-k}^k \end{aligned} \quad (102)$$

L'algorithme sera alors :

$$\begin{aligned} a_{i+1}^k &= p_k^i a_i^k + a_{i+1}^{k-1} \\ b_{i+1,j}^k &= p_k^i b_{i,j}^k + b_{i+1,j}^{k-1} \\ a_0^k &= 1 \quad ; \quad b_{0,j}^k = 0 \\ j &= 1, \dots, m \quad ; \quad i = 0, \dots, (n-k-1) \\ k &= 1, \dots, r \quad ; \quad n = q+r \end{aligned} \quad (103)$$

Les propriétés de cette méthode sont les mêmes que précédemment . Il convient de décider a priori quelle fonction de transfert élémentaire il faut réduire en priorité . Le paragraphe suivant donne un exemple numérique d'application .

3.4.4 Exemple d'application

L'exemple présenté ici est tiré de la référence 6 .  
 Le système considéré correspond à une installation de surchauffe d'une centrale thermique . Ce processus comporte une entrée  $C_{Qd}$  qui est le débit d'eau de résurchauffe, et deux sorties  $\theta_{VI}$ , température à la sortie du premier surchauffeur, et  $\theta_{VS}$ , température à la sortie du surchauffeur final . La transmittance s'écrit sous la forme du vecteur colonne de transfert  $H(p)$  :

$$H(p) = \begin{bmatrix} \frac{0,58}{(1+65p)(1+218p)} \\ \frac{0,56}{(1+233p)(1+242p+1,88 \cdot 10^{-4}p^2)} \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$H(p) u(p) = \begin{bmatrix} \theta_{VI}(p) \\ \theta_{VS}(p) \end{bmatrix}$$

L'ordre initial est donc 5 . On désire obtenir un modèle d'ordre 4 approximant  $H(p)$  aux basses fréquences . Il faudra utiliser le biais de  $\tilde{H}(p)$ , réciproque de  $H(p)$ , avec :

$$\tilde{H}(p) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1(p) \\ \tilde{H}_2(p) \end{bmatrix} = \frac{1}{\tilde{D}(p)} \begin{bmatrix} \tilde{N}_1(p) \\ \tilde{N}_2(p) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}(p) = p^5 + 758p^4 + 2,24 \cdot 10^5 p^3 + 3,24 \cdot 10^7 p^2 + 2,31 \cdot 10^9 p + 6,21 \cdot 10^{10}$$

$$\tilde{N}_1(p) = 0,58p^4 + 2,76 \cdot 10^2 p^3 + 4,36 \cdot 10^4 p^2 + 2,54 \cdot 10^6 p$$

$$\tilde{N}_2(p) = 0,56p^4 + 1,58 \cdot 10^2 p^3 + 7,94 \cdot 10^3 p^2 \quad (105)$$

Le polynôme des pôles  $\tilde{D}(p)$  a trois racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées .

Ce processus rentre dans le cas étudié au paragraphe 3.4.2 concernant les systèmes mono-entrée-multi-sorties . Pour appli-

quer la réduction d'ordre on peut soit opérer sur une formulation d'état de  $\check{H}(p)$ , soit choisir a priori laquelle de  $\check{H}_1(p)$  ou de  $\check{H}_2(p)$  on veut réduire . Les équations d'état de  $\check{H}(p)$  peuvent s'écrire sous une forme canonique de commandabilité :

$$A = \begin{bmatrix} -7,58 \cdot 10^2 & -2,24 \cdot 10^5 & -3,24 \cdot 10^7 & -2,31 \cdot 10^9 & -6,2 \cdot 10^{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^t = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,58 & 2,76 \cdot 10^2 & 4,36 \cdot 10^4 & 2,54 \cdot 10^6 & 0 \\ 0,56 & 1,58 \cdot 10^2 & 7,94 \cdot 10^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B C_{Qd} \\ \begin{bmatrix} \theta_{VI} \\ \theta_{VS} \end{bmatrix} &= C x \end{aligned}$$

On choisit :  $p_f = -233$

On utilise alors l'algorithme donné par les équations (85), pour obtenir les équations d'état du modèle d'ordre 4 de  $F(p)$  :

$$\dot{\hat{x}}_1 = \begin{bmatrix} -5,25 \cdot 10^2 & -1,02 \cdot 10^5 & -8,71 \cdot 10^6 & -3,31 \cdot 10^8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} C_{Qd}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_{VI} \\ \hat{\theta}_{VS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,58 & 1,40 \cdot 10^2 & 1,08 \cdot 10^4 & 2,83 \cdot 10^4 \\ 0,56 & 28 & 1,41 \cdot 10^3 & -3,30 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \hat{x}_1 \quad (107)$$

Le modèle définitif d'ordre 4 sera donc le réciproque de celui dont les équations d'état sont les équations (107) . Ce modèle aura pour pôles les quatre pôles de  $H(p)$  autres que la valeur  $(-1/233)$ , ses moments seront eux égaux aux moments de  $H(p)$  jusqu'au quatrième inclus .

Ses équations d'état seront, sous la forme canonique de commandabilité :

$$\dot{\hat{x}}_1 = \begin{bmatrix} -2,63 \cdot 10^{-2} & -3,08 \cdot 10^{-4} & -1,59 \cdot 10^{-8} & -3,02 \cdot 10^{-9} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} C_{Qd}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_{VI} \\ \hat{\theta}_{VS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,55 \cdot 10^{-5} & 3,26 \cdot 10^{-5} & 4,23 \cdot 10^{-7} & 1,75 \cdot 10^{-9} \\ -9,97 \cdot 10^{-4} & 4,26 \cdot 10^{-6} & 8,46 \cdot 10^{-8} & 1,69 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix} \hat{x}_1 \quad (108)$$

On vérifie l'égalité des gains statiques relatifs à :

$$\theta_{VI} : 1,75 \cdot 10^{-9} / 3,02 \cdot 10^{-9} = 0,58$$

$$\theta_{VS} : 1,69 \cdot 10^{-9} / 3,02 \cdot 10^{-9} = 0,56$$

Ceci correspond à l'égalité entre les premiers moments du système original  $H(p)$  et de son modèle .

Le choix de la valeur -233 pour  $p_1'$  est tout à fait arbitraire . Il n'est justifié que si l'on veut réduire a priori  $H_2(p)$  en en conservant les pôles complexes . Il faudrait dans le cas général calculer  $N_1(p_1')$  et  $N_2(p_1')$  pour  $p_1'$  choisi parmi les racines de  $D(p)$ , certaines de ces quantités étant bien-sûr nulles .

### 3.5 Conclusion

Il a été présenté dans ce chapitre une méthode originale pour la réduction des systèmes linéaires continus monovariables . Cette méthode est construite de façon à appartenir à la classe  $S_q$  étudiée dans le chapitre I . La forme canonique pour les équations d'état associée à cette méthode de réduction est celle présentée par Meizel . Le modèle d'ordre réduit  $q$  conserve les  $q$  premiers moments du système original et peut être choisi de

façon à conserver également  $q$  pôles de la fonction de transfert de départ . Cette méthode constitue donc une association entre la méthode modale et la méthode des moments .

On a présenté également une extension de cette méthode en vue de réduire l'ordre des systèmes mono-entrée-multi-sorties et des systèmes multi-entrées-mono-sortie, un exemple a illustré cette présentation .

Il semble possible d'étendre cette méthode de réduction à un système multivariable quelconque ayant  $m$  entrées et  $p$  sorties . Des travaux sont actuellement en cours dans cette direction .

ANNEXE 1

Choix des paramètres  $p_2^1, \dots, p_n^1$  .

Le but de cet annexe est de montrer que le choix de  $p_2^1, \dots, p_n^1$  n'a aucune influence sur la fonction de transfert du modèle d'ordre réduit  $n-1$  .

Soit le système original dont les équations d'état sont :

$$\dot{x}' = A x' + B u \quad ; \quad y = C x'$$

Où le triplet (A,B,C) est donné par les équations (1) du paragraphe 3.2 . Le modèle d'ordre réduit  $n-1$  aura alors pour équations d'état :

$$\dot{\hat{x}}_1 = Q^+ A Q \hat{x}_1 + Q^+ B u \quad ; \quad \hat{y} = C Q \hat{x}_1$$

Où les matrices Q et  $Q^+$  sont définies à partir de la matrice de changement de base  $T_{p^1}$  . Si l'on définit les matrices R et  $R^+$  conformément aux notations du chapitre I, R sera la dernière colonne de  $T_{p^1}$ , et  $R^+$  sera la dernière ligne de  $T_{p^1}^{-1}$ , c'est à dire :

$$R = (0 \dots 0 \ 1)^t \quad ; \quad \dim(R) = nx1$$

La matrice  $R^+$  ne dépendra que de  $p_1^1$  (voir référence 1 ou l'annexe 3) :

$$R^+ = ( (p_1^1)^{n-1} \dots p_1^1 \ 1 ) \quad ; \quad \dim(R^+) = 1xn$$

Le produit  $RR^+$  ne dépendra donc que de  $p_1^1$  . Il en sera de même pour le produit  $QQ^+$  puisque l'on a la relation (voir le chapitre I, équation 15) :

$$QQ^+ + RR^+ = I_{nn} \implies QQ^+ = f(p_1^1)$$

Or une fonction de transfert est entièrement définie par ses paramètres de Markov (voir annexe 2), ceux du modèle d'ordre  $n-1$  s'écriront :

$$\begin{aligned} \hat{M}_k &= CQ(Q^+AQ)^{k-1}Q^+B = CQ(Q^+AQ)\dots(Q^+AQ)Q^+B \\ &= C(QQ^+)A(QQ^+)\dots(QQ^+)A(QQ^+)B \\ &= Cf(p_1^1)Af(p_1^1)\dots f(p_1^1)Af(p_1^1)B \end{aligned}$$

$\hat{M}_k$  est donc indépendant de  $p_i^1$  pour  $i \neq 1$  quelque soit k .

ANNEXE 2

Moments et paramètres de Markov d'une fonction  
de transfert .

Soit un système dont les équations d'état s'écrivent :

$$\dot{x} = A x + B u \quad ; \quad y = C x$$

La matrice de transfert associée est alors  $F(p)$  :

$$F(p) = C.(pI - A)^{-1}.B$$

$F(p)$  peut être développée en série autour du point  $p=0$ , les coefficients  $V_i$  de cette série sont appelés les moments du système .  $F(p)$  peut également être développée en série autour du point  $p=\infty$ , les coefficients  $M_i$  de cette série sont alors appelés les paramètres de Markov . Les moments ont une signification temporelle : si l'on note  $F(t)$  la transformée de Laplace inverse de  $F(p)$ , on a :

$$V_i = \int_0^{\infty} t^i F(t) dt$$

Les  $V_i$  et les  $M_i$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} F(p) &= V_1 + V_2 p + V_3 p^2 + \dots \\ &= -(CA^{-1}B + CA^{-2}Bp + \dots \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } V_i = -CA^{-i}B \quad ; \quad i = 1, \dots$$

De même :

$$\begin{aligned} F(p) &= M_1 \left(\frac{1}{p}\right) + M_2 \left(\frac{1}{p}\right)^2 + \dots \\ &= CB \left(\frac{1}{p}\right) + CAB \left(\frac{1}{p}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } M_i = CA^{i-1}B \quad ; \quad i = 1, \dots$$

Si l'on suppose maintenant que  $F(p)$  est une fonction de transfert qui s'écrit conformément à l'équation (1) du chapitre II alors les  $V_i$  seront solutions des équations (voir référence 3) :

$$A V = B \tag{1}$$



ANNEXE 3

Structure de la matrice de changement de base  $T_p$ .

Le but de cet annexe est de montrer que la matrice de changement de base  $T_p$  définie par les équations (4) peut s'écrire sous la forme du produit suivant :

$$T_p = T_{p_1} \cdot T_{p_2} \cdot \dots \cdot T_{p_{n-1}}$$

Où la matrice  $T_{p_i}$  s'écrit :

$$T_{p_i} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ -p_i & 1 & & & & \\ & & \circ & & & \\ & & & & & \circ \\ \hline & & & -p_i & 1 & \\ & & \circ & & & \\ & & & & & I_{i-1} \end{array} \right] \quad (1)$$

a) La démonstration découle de la remarque suivante :

REMARQUE FONDAMENTALE :

D'après la définition même de la matrice  $T_p$ , sa  $j^{\text{ème}}$  colonne est formée des coefficients du polynôme dont les racines sont  $p_1, \dots, p_{n-j}$ , le coefficient de la plus haute puissance de  $p$  étant 1 et placé sur la diagonale, les autres termes étant nuls. Si l'on note  $(T_p)_j$  cette  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $T_p$ , on aura :

$$(T_p)_j = (0 \dots 0 \ 1 \ \check{p}_1 \ \check{p}_2 \ \dots \ \check{p}_{n-j})^t \quad (2)$$

Où  $p_1, p_2, \dots, p_{n-j}$  sont les racines du polynôme :

$$p^{n-j} + \check{p}_1 p^{n-j-1} + \dots + \check{p}_{n-j}$$

Conséquence immédiate :

Le bloc inférieur droit d'ordre  $m$  de  $T_p$ , non seulement ne dépend que de  $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ , mais encore constitue le changement de base analogue, d'ordre  $m$ , relatif à  $p_1, \dots, p_m$ .

Ceci peut encore s'énoncer ainsi : une telle matrice de changement de base d'ordre  $m$  et relative à  $p_1, p_2, \dots, p_m$  est

obtenue à partir de la matrice de changement de base d'ordre  $m-1$  et relative à  $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$  en considérant cette dernière comme bloc inférieur droit et en plaçant comme première colonne les coefficients du polynôme dont les racines sont  $p_1, p_2, p_{m-1}$ , le coefficient de la plus haute puissance de  $p$ , c'est à dire de  $p^{m-1}$ , étant égal à 1 et placé sur la diagonale. La première ligne est complétée par des zéros. On appelle  $B_m$  le bloc diagonal inférieur droit de la matrice  $T_p$ , d'ordre  $m$ . On obtiendra donc  $B_m$  à partir de  $B_{m-1}$  suivant le schéma suivant :

$$B_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hat{p}_1 & \hline \hat{p}_2 & B_{m-1} \\ \vdots & \\ \hat{p}_{m-1} & \end{bmatrix} \quad (3)$$

Où  $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$  sont les racines du polynôme :

$$p^{m-1} + \hat{p}_1 p^{m-2} + \dots + \hat{p}_{m-1}$$

b) le point suivant de la démonstration consiste à vérifier cette remarque pour  $m$  égal à 3 :

On a, par définition :

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p_1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(p_1+p_2) & 1 & 0 \\ p_1 p_2 & -p_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $p_1$  et  $p_2$  sont bien les racines de :

$$p^2 - (p_1+p_2)p + p_1 p_2$$

Examinons alors  $T_{p_1}$  et  $T_{p_2}$  et formons le produit :

$$T_{p_1} \cdot T_{p_2}$$

On a, par définition de  $T_{p_1}$  et  $T_{p_2}$  :

$$\text{Dim}(T_{p_1}) = \text{Dim}(T_{p_2}) = nxn$$

Et :

$$T_{p_1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ -p_1 & & & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & & 0 & -p_1 \quad 1 \end{array} \right]; \quad T_{p_2} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ -p_2 & & & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & & 0 & -p_2 \quad 1 \quad 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \end{array} \right]$$

Le bloc diagonal inférieur droit d'ordre 2 de  $T_{p_1}$  est le même que celui de  $T_p$ , c'est à dire  $B_2$  . Par un calcul direct du produit  $T_{p_1} \cdot T_{p_2}$ , on peut en déterminer le bloc diagonal inférieur droit d'ordre trois : on retrouve  $B_3$  .

Il apparait également par un calcul direct du produit que ses autres colonnes se déduisent de la première colonne de  $B_3$  par des décalages successifs sur la diagonale suivant le schéma :

$$T_{p_1} \cdot T_{p_2} = \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & -(p_1+p_2) \\ & & & p_1 p_2 \\ \hline & & 0 & -(p_1+p_2) \\ & & & p_1 p_2 \\ & & & B_2 \end{array} \right]$$

c) la troisième et dernière étape de la démonstration consiste à montrer que le produit  $T_{p_1} \cdot T_{p_2} \dots T_{p_m}$  a  $B_{m+1}$  pour bloc diagonal inférieur droit d'ordre  $m+1$  .

On note :  $P_m = T_{p_1} \cdot T_{p_2} \dots T_{p_m}$

On suppose donc, compte-tenu des points a) et b), que  $P_{m-1}$  a  $B_m$  pour bloc diagonal inférieur droit d'ordre  $m$  , et que ses autres colonnes sont déduites de la première colonne de  $B_m$ , notée  $B_m^1$  par un décalage sur la diagonale suivant le schéma :

$$P_{m-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & B_m^1 \\ & & & 0 \\ & & & B_m^1 \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & & B_m \end{array} \right]$$

Cette première colonne  $B_m^1$  apparait déjà dans l'équation (3) .



Cette  $(n-m)$ <sup>ème</sup> colonne de  $P_{m-1}$  aura été déduite de la première colonne de  $B_m$  par un décalage diagonal . Si l'on désigne par  $e_{i,n-m+1}$  les éléments de cette première colonne de  $B_m$ , donc de la  $(n-m+1)$ <sup>ème</sup> colonne de  $P_{m-1}$ , on aura la relation suivante définissant ce décalage diagonal :

$$\begin{aligned} e_{i-1,n-m} &= e_{i,n-m+1} & ; & \quad i = 2, \dots, n \\ e_{n,n-m} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Si l'on désigne enfin par  $e_{i,n-m}^!$  le  $i$ <sup>ème</sup> élément de la  $(n-m)$ <sup>ème</sup> colonne de  $P_m$ , c'est à dire de la colonne "ajoutée", on aura, en effectuant le produit :

$$P_m = P_{m-1} \cdot T_{P_m}$$

$$e_{i,n-m}^! = e_{i,n-m} - P_m e_{i,n-m+1}$$

Soit, compte tenu de l'équation (5) :

$$e_{i,n-m}^! = e_{i,n-m} - P_m e_{i-1,n-m}$$

Ce qui s'écrit, en développant le second membre d'après l'équation (4) :

$$e_{i,n-m}^! = (-1)^{i+m-n} z_{i+m-n,m-1} - P_m (-1)^{i-1+m-n} z_{i-1+m-n,m-1}$$

D'où :

$$e_{i,n-m}^! = (-1)^{i+m-n} (z_{i+m-n,m-1} + P_m z_{i+m-n-1,m-1}) \quad (6)$$

Or il existe la relation de récurrence suivante sur les coefficients  $z_{i,j}$  (voir référence 1) :

$$z_{i,j} = z_{i,j-1} + P_j z_{i-1,j-1}$$

l'équation (6) peut alors s'écrire :

$$e_{i,n-m}^! = (-1)^{i+m-n} z_{i+m-n,m}$$

Ceci démontre que la  $(n-m)^{\text{ème}}$  colonne de  $P_m$  est formée des coefficients du polynôme dont les racines sont  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , le coefficient de  $p^m$  étant égal à 1 et placé sur la diagonale .

Les  $(n-m-1)$  premières colonnes de  $T_{P_m}$  sont déduites de la  $(n-m)^{\text{ème}}$  par un décalage diagonal, alors il en sera de même pour la matrice  $P_m$  .

Si l'on poursuit ce produit jusqu'à  $T_{P_{n-1}}$ , alors la première colonne de  $P_{n-1}$  sera formée des coefficients du polynôme dont les racines sont  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ , on aura ainsi formé la matrice de changement de base  $T_p$ , d'où le résultat :

$$T_p = P_{n-1} = T_{p_1} \cdot T_{p_2} \cdot \dots \cdot T_{p_{n-1}} \quad (7)$$

Le calcul de  $T_{p_i}^{-1}$ , inverse de  $T_{p_i}$  est immédiat :

$$T_{p_i}^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ p_i & & & & & \\ (p_i)^2 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ (p_i)^{n-i} & \dots & & & & \\ \hline & & & & & I_{i-1} \end{array} \right]$$

(Diagram description: A block matrix with a vertical line separating the left part from the right part. The left part is a lower triangular matrix with diagonal elements 1, p\_i, (p\_i)^2, ..., (p\_i)^{n-i}. The right part is the identity matrix I\_{i-1}. There are circles in the upper right and lower left quadrants of the matrix.)

Alors  $T_p^{-1}$ , inverse de  $T_p$  s'écrira sous la forme du produit :

$$T_p^{-1} = T_{p_{n-1}}^{-1} \cdot T_{p_{n-2}}^{-1} \cdot \dots \cdot T_{p_1}^{-1} \quad (8)$$

Il apparait alors que la matrice  $T_p$  est inversible, que les paramètres  $p_i$  soient distincts ou non .

CHAPITRE III

REFERENCES

1. MEIZEL D. : "Sur l'étude et la synthèse de systèmes électromécaniques à charge variable".  
Thèse de Doctorat-Ingénieur, Université de Lille (1979) .
2. PINGUET P. : "State space formulation of a class of model reduction methods".  
M.Phil. Thesis, University of Cambridge (GB) (1978) .
3. LAL M. et MITRA R. : "Simplification of large system dynamics using a moment evaluation algorithm".  
IEEE Trans. AC-19(5), pp.602-603 (1974) .
4. DECOSTER M. et van CAUWENBERGHE A. : "A comparative study of different reduction methods".  
Journal A, 17 No 2, pp.68-74 (Part 1) (1976) .  
Journal A, 17 No 3, pp.125-134 (Part 2) (1976) .
5. MacFARLANE A. et POSTLETHWAITE I. : "A complex variable approach to the analysis of multivariable feedback systems".  
Springer Verlag lecture notes in control and information sciences, Vol 12 (1979) .
6. GENTINA J.C. : "Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension".  
Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Lille (1976) .

## CONCLUSION GENERALE

Il a été montré dans cette thèse comment certaines méthodes de réduction de l'ordre des systèmes linéaires continus *monovariab*les stationnaires pouvaient être formulées dans l'espace d'état . Chacune de ces méthodes revient à ne conserver qu'une partie des variables d'état de la mise en équations correspondante du système de départ . Le problème de la réduction de l'ordre des systèmes est ainsi ramené à un problème de choix de la représentation dans l'espace d'état du système étudié . A chaque forme pour les équations d'état correspondra une méthode de réduction . Ces méthodes constituent une classe dont les propriétés principales ont été dégagées .

Une nouvelle méthode de réduction de l'ordre a été présentée qui est liée à la forme canonique introduite par Meizel et al. récemment . Sa mise en oeuvre est très simple, elle constitue une association entre la méthode modale et la méthode des moments . Cette méthode peut être appliquée à certains systèmes multivariables particuliers . Des travaux sont actuellement en cours afin de définir une représentation dans l'espace d'état des systèmes multivariables quelconques, permettant une extension de cette nouvelle méthode de réduction .

Les équations d'état de l'erreur due à la réduction de l'ordre ont montré qu'il est très délicat d'assimiler un système à son modèle d'ordre réduit . Il ne faut pas cependant rejeter en bloc pour cela toute idée de simplification d'un modèle dans un but d'analyse ou de synthèse . L'expérience prouve en effet tous les jours, et heureusement, que des asservissements de systèmes complexes fonctionnent très bien et ce bien que, le plus souvent, les calculs en ont été faits à partir de modèles simplifiés à l'extrême . L'effet stabilisateur du feedback atténue de manière très sensible les erreurs de représentation . Ici encore, comme partout en physique, la réalité de l'expérience prime sur l'absence de résultats théoriques .

